



Koninklijke Akademie van Wetenschappen
te Amsterdam.

V E R S L A G


VAN DE

G E W O N E V E R G A D E R I N G E N

DER

WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van 28 Mei 1904 tot 22 April 1905.



DEEL XIII



AMSTERDAM
JOHANNES MÜLLER.
Juni 1905.



REGISTER.

- AARDE (De samenstelling van het verweeringssilikaat in de bouwbare). 351.
- Aardkunde.** Mededeeling van den Heer EUG. DUBOIS: „Richting en uitgangspunt der diluviale ijsbeweging over ons land”. 44.
- Mededeeling van den Heer EUG. DUBOIS: „Over een equivalent van het Cromer Forest-Bed in Nederland”. 243.
- Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. LORIÉ: „Beschrijving van eenige nieuwe grondboringen”. VI. 456. Verslag hierover. 457.
- Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1904. 529.
- Mededeeling van den Heer H. G. JONKER: „Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland. 1. De Hondsrug in de provincie Groningen. 2. Bovensilurische zwerfsteenen. Eerste mededeeling. Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zone *G*”. 548. Tweede mededeeling. Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zonen *H* en *I*. 753.
- Bericht van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid dat op de betaling van het subsidie voor de Geologische Commissie over 1905 orde gesteld is. 616.
- ABSORPTIELIJNEN (Dubbele breking in een magnetisch veld in de nabijheid van magnetisch gesplitste). 516.
- ABSORPTIESPECTRA (Over dispersiebanden in). 26.
- ACETON en Aethylaether (Px-lijnen van mengsels van) en van tetrachloorkoolstof en aceton bij 0°C. 156.
- AETHYLAETHER (Px-lijnen van mengsels van aceton en) en van tetrachloorkoolstof en aceton bij 0°C. 156.
- AGREGAATTOESTAND (Over mengbaarheid in den vasten) en isomorfie bij koolstofverbindingen. 651.
- AKADEMIËN (Verslag over de vergadering der Internationale Associatie der). 69.
- (Mededeeling van de Commissie voor Seismologie ingesteld door de Internationale Associatie der). 388.
- (Bericht over de benoeming van een Voorzitter en Onder-Voorzitter van de Internationale Associatie der). 525.
- (Verzoek van de Internationale Associatie der) om voorstellen bij de Regeering te doen over oprichting van instellingen voor onderzoek der hersenen. 616.
- ALGEBRAÏSCH OPPERVLAK (Eenige kenmerkende getallen van een). 753.

- ALGEBRAÏSCHE KROMME (Over de krommen van een bundel, die een vlakke) met hoogere singulariteiten aanraken. 133.
- ALGEBRAÏSCHE VLAKKE KROMME (Over een uitdrukking voor de klasse eener) met hoogere singulariteiten. 57.
- (Over een uitdrukking voor het geslacht eener) met hoogere singulariteiten. 127.
 - (Over netten van). 703.
 - (Over lineaire stelsels van). 743.
- Anatomie.** Mededeeling van den Heer A. J. P. VAN DEN BROEK over „de geslachtsstrengen van *Phalangista vulpina*”. 32.
- Mededeeling van den Heer J. W. LANGELAAN: „Over den vorm van het rompmootoom”. 1ste mededeeling. 50.
 - Mededeeling van den Heer L. BOLK: „Over de ontwikkeling van het cerebellum bij den mensch”. 1ste mededeeling. 635.
- ATAVISMUS (Een interessant geval van). 152.
- ATEN (A. H. W.). Over het stelsel pyridine en methyljodide. 462.
- ATMOSFEER (Verzoek van het U. S. Department of Agriculture, Weather Bureau te Washington om mededeeling van eventueele waarnemingen over vermindering van de doorschijnendheid der) in 1902. 2.
- ATOMGEWICHTEN (6ster Bericht der Commission für die Festsetzung der). 539.
- ATOOMVERSCHUIVING (Over intramoleculaire) bij benzpinakonen. 233.
- AUTO-KATALYSE (Een paar opmerkingen over) en de omzetting van γ -oxyzuren, met en zonder toevoeging van andere zuren, opgevat als ionenreactie. 770.
- AZIMUTBEPALINGEN (Over de breedte- en) bepaald in 1896--99, door de ingenieurs A. PANNEKOEK en R. POSTHUMUS MEYJES enz. 520.
- BAKHUIS ROOZEBOOM (H. W.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. SMITS: „Over de verschijnselen die optreden, wanneer bij een binair stelsel de plooiptuuskromme de oplosbaarheidslijni ontmoet”. (3de mededeeling). 90.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over mengwarmten bij associeerende oplosmiddelen”. 121.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. TIJMSTRA Bz.: „Over de door W. MARCKWALD uitgevoerde asymmetrische synthese van het optisch actieve valeriaanzuur”. 459.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. H. W. ATEN: „Over het stelsel pyridine en methyljodide”. 462.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. BLANKSMA: „Over het trinitroveratrol”. 464.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over mengbaarheid in den vasten aggregaattoestand en isomorfie bij koolstofverbindingen”. 651.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over de verschillende vormen en overgangen der grenslijnen bij gedeeltelijke mengbaarheid van twee vloeistoffen”. 660.
 - en E. H. BÜCHNER. Kritische eindpunten in driefaselijnen met vaste fasen bij binaire mengsels die twee vloeistoffen vertoonen. 531.

- BAKHUYZEN (H. G. VAN DE SANDE). Zie SANDE BAKHUYZEN (H. G. VAN DE).
- BAROMETERSTAND (Eene 26 daagsche periode in daggemiddelden van den). 5.
- BAROSCOOP (Toepassing van den) op de bepaling van de dichtheden van gassen en dampen. 822.
- BEHRENS (TH. H.). Bericht van overlijden. 526.
- BEMMELLEN (J. M. VAN). Aanbieding eener mededeeling van den Heer EUG. DUBOIS:
 „Richting en uitgangspunt der diluviale ijsbeweging over ons land”. 44.
 — De samenstelling van het verweerings-silikaat in de bouwbare aarde. 351.
 — Verslag over eene verhandeling van den Heer J. LORIÉ. 457.
 — Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1904. 529.
- BENADERINGSFORMULES (Nauwkeurige) voor de verhoudingen der driehoeken in de berekening van eene elliptische baan uit 3 waarnemingen. 811.
- BENZOL (Over de intramoleculaire oxydatie van een aan) gebonden SH-groep door een orthostandige NO₂-groep. 36.
- BENZOL-REEKS (Over het behoud der kristalysymmetrie bij substitutie van isomorfe, plaatsings-isomere derivaten der). 112.
- BENZOLEN (Over de nitratie van digesubstitueerde). 240.
- BENZPINAKONEN (Over intramoleculaire atoomverschuiving bij). 253.
- BENZYLPHTAALIMIDE en Benzylphtaal-iso-imide (Over). 61.
- BEREIDING van zuiver o-toluidien (Over de) en over eene methode ter bepaling zijner zuiverheid. 398.
- BERLIJN (Aanbieding eener zilveren plakette geslagen ter herinnering aan het 200-jarig bestaan der Kön. preuss. Akademie der Wissenschaften te). 237.
- BES (K.). De vergelijking van den negenden graad, voorstellende de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken. 730.
- BESSELSCHER FUNCTIËN (Over de waarden van eenige bepaalde integralen die met) samenhangen. 416.
 — (Over eene reeks met). 477.
- BEIJERINCK (M. W.). Een obligaat anaerobe gistings-sarcine. 608.
- BINNENLANDSCHE ZAKEN (Minister van). Mededeeling van de bekrachtiging door H. M. de Koningin van de Heeren H. MOISSAN, W. OSTWALD, en J. J. THOMSON tot buitenlandsche leden en van de Heeren S. FIGEE, G. GRIJNS, J. DE HAAN en J. H. F. KOHLBRUGGE tot correspondenten. 2.
 — Verzoek om bericht of er geleerden zijn, bereid te worden afgevaardigd naar het 6e Internationale Congres voor Zoölogie te Bern te houden. 68.
 — Verzoek om bericht of er geleerden zijn, bereid te worden afgevaardigd naar het 2e Internationaal Botanisch Congres te Weenen te houden. 236. 326. 456.
 — Mededeeling dat de Heer J. W. VAN WIJHE benoemd is tot afgevaardigde naar het 6e Internationale Congres voor Zoölogie. 236.
 — Mededeeling dat aan den Heer J. W. C. GOETHART een rijkssubsidie verleend is voor de reis naar het Buitenzorg-station. 236.
 — Bericht dat de Heeren J. P. LOTSY en J. W. C. GOEDHART benoemd zijn tot gedelegeerden van de Ned. Regeering bij het 2e Internationaal Botanisch Congres te Weenen. 525.

- ALGEBRAÏSCHE KROMME (Over de krommen van een bundel, die een vlakke) met hoogere singulariteiten aanraken. 133.
- ALGEBRAÏSCHE VLAkke KROMME (Over een uitdrukking voor de klasse eener) met hoogere singulariteiten. 57.
- (Over een uitdrukking voor het geslacht eener) met hoogere singulariteiten. 127.
 - (Over netten van). 703.
 - (Over lineaire stelsels van). 743.
- Anatomie.** Mededeeling van den Heer A. J. P. VAN DEN BROEK over „de geslachtsstrengen van *Phalangista vulpina*”. 32.
- Mededeeling van den Heer J. W. LANGELAAN: „Over den vorm van het rompmootoom”. 1ste mededeeling. 50.
 - Mededeeling van den Heer L. BOLK: „Over de ontwikkeling van het cerebellum bij den mensch”. 1ste mededeeling. 635.
- ATAVISMUS (Een interessant geval van). 152.
- ATEN (A. H. W.). Over het stelsel pyridine en methyljodide. 462.
- ATMOSFEER (Verzoek van het U. S. Department of Agriculture, Weather Bureau te Washington om mededeeling van eventueele waarnemingen over vermindering van de doorschijnendheid der) in 1902. 2.
- ATOMGEWICHTEN (6ster Bericht der Commission für die Festsetzung der). 539.
- ATOOMVERSCHUIVING (Over intramoleculaire) bij benzpinakonen. 233.
- AUTO-KATALYSE (Een paar opmerkingen over) en de omzetting van γ -oxyzuren, met en zonder toevoeging van andere zuren, opgevat als ionenreactie. 770.
- AZIMUTBEPALINGEN (Over de breedte- en) bepaald in 1896--99, door de ingenieurs A. PANNEKOEK en R. POSTHUMUS MEYJES enz. 520.
- BAKHUIS ROOZEBOOM (H. W.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. SMITS: „Over de verschijnselen die optreden, wanneer bij een binair stelsel de plooiptuuskromme de oplosbaarheidslijn ontmoet”. (3de mededeeling). 90.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over mengwarmten bij associeerende oplosmiddelen”. 121.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. TIJMSTRA Bz.: „Over de door W. MARCKWALD uitgevoerde asymmetrische synthese van het optisch actieve valeriaanzuur”. 459.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. H. W. ATEN: „Over het stelsel pyridine en methyljodide”. 462.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. BLANKSMA: „Over het trinitroveratrol”. 464.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over mengbaarheid in den vasten aggregaattoestand en isomorfie bij koolstofverbindingen”. 651.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over de verschillende vormen en overgangen der grenslijnen bij gedeeltelijke mengbaarheid van twee vloeistoffen”. 660.
 - en E. H. BÜCHNER. Kritische eindpunten in driefaselijnen met vaste fasen bij binaire mengsels die twee vloeistoffen vertoonen. 531.

- BAKHUYZEN (H. G. VAN DE SANDE). Zie SANDE BAKHUYZEN (H. G. VAN DE).
- BAROMETERSTAND (Eene 26 daagsche periode in daggemiddelden van den). 5.
- BAROSCOOP (Toepassing van den) op de bepaling van de dichtheden van gassen en dampen. 822.
- BEHRENS (TH. H.). Bericht van overlijden. 526.
- BEMMELEN (J. M. VAN). Aanbieding eener mededeeling van den Heer EUG. DUBOIS:
 „Richting en uitgangspunt der diluviale ijsbeweging over ons land”. 44.
 — De samenstelling van het verweerings-silikaat in de bouwbare aarde. 351.
 — Verslag over eene verhandeling van den Heer J. LORIÉ. 457.
 — Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1904. 529.
- BENADERINGSFORMULES (Nauwkeurige) voor de verhoudingen der driehoeken in de berekening van eene elliptische baan uit 3 waarnemingen. 811.
- BENZOL (Over de intramoleculaire oxydatie van een aan) gebonden SH-groep door een orthostandige NO₂-groep. 36.
- BENZOL-REEKS (Over het behoud der kristalsymmetrie bij substitutie van isomorfe, plaatsings-isomere derivaten der). 112.
- BENZOLEN (Over de nitratie van digesubstieerde). 240.
- BENZPINAKONEN (Over intramoleculaire atoomverschuiving bij). 253.
- BENZYLPHTAALIMIDE en Benzylphtaal-iso-imide (Over). 61.
- BEREDING van zuiver o-toluidien (Over de) en over eene methode ter bepaling zijner zuiverheid. 398.
- BERLIJN (Aanbieding eener zilveren plakette geslagen ter herinnering aan het 200-jarig bestaan der Kön. preuss. Akademie der Wissenschaften te). 237.
- BES (K.). De vergelijking van den negenden graad, voorstellende de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken. 730.
- BESSELSCHER FUNCTIËN (Over de waarden van eenige bepaalde integralen die met) samenhangen. 416.
 — (Over eene reeks met). 477.
- BEIJERINCK (M. W.). Een obliqat anaerobe gistings-sarcine. 608.
- BINNENLANDSCHE ZAKEN (Minister van). Mededeeling van de bekrachtiging door H. M. de Koningin van de Heeren H. MOISSAN, W. OSTWALD, en J. J. THOMSON tot buitenlandsche leden en van de Heeren S. FIGEE, G. GRIJNS, J. DE HAAN en J. H. F. KOHLBRUGGE tot correspondenten. 2.
 — Verzoek om bericht of er geleerden zijn, bereid te worden afgevaardigd naar het 6e Internationale Congres voor Zoölogie te Bern te houden. 68.
 — Verzoek om bericht of er geleerden zijn, bereid te worden afgevaardigd naar het 2e Internationaal Botanisch Congres te Weenen te houden. 236. 326. 456.
 — Mededeeling dat de Heer J. W. VAN WIJHE benoemd is tot afgevaardigde naar het 6e Internationale Congres voor Zoölogie. 236.
 — Mededeeling dat aan den Heer J. W. C. GOETHART een rijkssubsidie verleend is voor de reis naar het Buitenzorg-station. 236.
 — Bericht dat de Heeren J. P. LOTSY en J. W. C. GOEDHART benoemd zijn tot gedelegeerden van de Ned. Regeering bij het 2e Internationaal Botanisch Congres te Weenen. 525.

- BINNENLANDSCHE ZAKEN** (Minister van). Mededeeling van de bekrachtiging der benoeming van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en D. J. KORTEWEG tot Voorzitter en Onder-Voorzitter. 722.
- BISSELIÏCK** (J. W. VAN). Over de innervatie van het rompmuotoom. 727.
- BLANKSMA** (J. J.). Over de intramoleculaire oxydatie van een aan benzol gebonden SH-groep door een ortho-standige NO₂-groep. 36.
— Over het trinitroveratrol. 464.
- BLOED** (Over den osmotischen druk in) en urine van visschen. 418.
- BLOEMSTELLEN** (Eenige waarnemingen over den lengtegroei van stengels en). 696.
- BLOK** (s.). De aansluiting van een driehoeksnet der eerste orde van Zuid-Sumatra aan dat van Sumatra's Westkust. 471.
- BOEKGESCHENKEN** (Aanbieding van). 66. 233. 323. 385. 452. 523. 588. 614. 720. 886.
- BÖESEKEN** (J.). De reactie van FRIEDEL en CRAFTS. 468.
- BOLK** (L.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. J. P. VAN DEN BROEK: „Over de geslachtsstrengen van *Phalangista vulpina*”. 32.
— Over de ontwikkeling van het cerebellum bij den mensch. 1ste mededeeling. 635.
- BOLRUIMTEN** (Over niet-lineaire stelsels van elkaar rakende). 529.
- BOUMAN** (L.) — Verslag over de verhandeling van den Heer — „Onderzoekingen over vrije woordassociatie”. 69.
- BREEDTE- en azimutbepalingen** (Over de), bepaald door de Ingenieurs A. PANNEKOEK en R. POSTHUMUS MEYJES enz. 520.
- BREKING** (Dubbele) in een magnetisch veld in de nabijheid van magnetisch gesplitste absorptielijnen. 516.
- BROEK** (A. J. P. VAN DEN). Over de geslachtsstrengen van *Phalangista vulpina*. 32.
- BRUYN** (C. A. LOBRY DE). Zie LOBRY DE BRUYN (C. A.).
- BÜCHNER** (E. H.) en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM. Kritische eindpunten in drie-fasenlijnen met vaste fasen bij binaire mengsels die twee vloeistofflagen vertoonen. 531.
- BUITENZORG-FONDS**. Mededeeling van den Minister van Binnenlandsche Zaken, dat aan den Heer J. W. C. GOETHART een rijkssubsidie verleend is voor een bezoek aan het Botanisch station te Buitenzorg. 236.
- BUNDEL** (Over de congruentie der kegelsneden, welke op de kubische oppervlakken van een) liggen. 281.
— kwadratische oppervlakken (Over de meetkundige plaats der hoofdassen van een). 411.
— (Over de vergelijkingen, waardoor de meetkundige plaats der hoofdassen van een) bepaald wordt. 537.
— (De vergelijking van den negenden graad, voorstellende de meetkundige plaats der hoofdassen van een). 730.
- CARDINAAL** (J.). Verslag over de verhandeling van den Heer A. TOXOPEUS. 326.
— Over de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken. 411.
— Over de vergelijkingen, waardoor de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken bepaald wordt. 537.

- CARDINAAL (J.). Aanbieding van een mededeeling van den Heer K. BES: „De vergelijking van den negenden graad, voorstellende de meetkundige plaats der hoofdasen van een bundel kwadratische oppervlakken”. 730.
- CARVACROL (De omzetting van carvon en encarvon in) en hare snelheid. 39.
- CARVON (De omzetting van) en eucarvon in carvacrol en hare snelheid. 39.
- CAULERPA PROLIFERA (Onderzoekingen over polariteit en orgaanvorming bij). 364.
- CEL (De regelmatige stervormige 600-). 354.
- CEREBELLUM bij den mensch (Over de ontwikkeling van het). 635.
- CHAMPIGNONS des Pays-Bas (Catalogue raisonné des). 66.
- CHLOORMETHYL en Koolzuur (Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van). 207. Vervolg. 323. 380.
- CLEMENT (E.). Verzoek om het oordeel te vernemen over eene mededeeling: „Note concernant l'action de l'acide formique sur le système musculaire”. 237.
- COËXISTENTIE-VOORWAARDEN (Het bepalen der) van damp- en vloeistofphasen van mengsels van gassen bij lage temperaturen. 199.
- COMPLEX (Over een bijzonderen tetraedraalen). 600.
- COMPLEXKEGELS (Over een groep van stralencomplexen met rationale). 605.
- CONGRUËNTIE (Over de) der kegelsneden, welke op de kubische oppervlakken van een bundel liggen. 281.
- (Over een door kegelsneden gevormde) van de tweede orde en tweede klasse. 355.
- CORRIGENDA. 453. 588.
- CRAFTS (De reactie van FRIEDEL en). 468.
- CROMER FOREST-BED (Over een equivalent van het) in Nederland. 243.
- DAGGEMIDDELDEN (Eene 26 daagsche periode in) van den barometerstand. 5.
- DALFSEN (B. M. VAN). Over de functie $\frac{a}{b}$ bij meervoudige mengsels. 167.
- DAMP (Een formule voor den osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen, wier de gaswetten volgt. 781.
- en vloeistofphasen (Het bepalen der coëxistentie-voorwaarden van) van mengsels van gassen bij lage temperaturen. 199.
- DAMPEN (Toepassing van den baroscoop op de bepaling van de dichtheden van gassen en). 822.
- DEGENERATIES (Over) in het centrale zenuwstelsel na wegneming van den flocculus cerebelli. 267.
- DEKHUYZEN (M. C.). Over den osmotischen druk in bloed en urine van visschen. 418.
- DEVENTER (CH. M. VAN). Over het smelten van drijvend ijs. 490.
- DICHOORNITROBENZOLEN (Over plaatsings-isomere). 643.
- DICHTHEDEN van gassen en dampen (Toepassing van den baroscoop op de bepaling van de). 822.
- Dierkunde.** Verzoek van den Minister van Binnenlandsche Zaken om bericht of er geleerden zijn, en zoo ja welke, bereid buiten bezwaar van 's Rijks schatkist te worden afgevaardigd naar het 6de Internationale Congres voor Zoölogie te Bern te houden 68. Bericht dat de Heer J. W. VAN WYHE als gedelegeerde is benoemd. 236.

- Dierkunde.** Mededeeling van den Heer P. P. C. HOEK: „Een interessant geval van Atavismus.” 152.
- Mededeeling van den Heer TH. ZIEHEN: „Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des Gehirns von *Tarsius spectrum*”. 259.
- Mededeeling van de Heeren G. C. J. VOSMAER en H. P. WIJSMAN: „Over den bouw van sommige kiezelspicula bij sponzen. I. De styli van *Tethya lyncurium*”. 733.
- DIESEN (G. VAN). Verslag over eene verhandeling van den Heer J. LORÉ. 457.
- Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1904. 529.
- DILUVIALE ijsbeweging (Richting en uitgangspunt der) over ons land. 44.
- DISPERSIE (De zonnebeelden, met den spectroheliograaf verkregen, en de anomale). 138.
- DISPERSIEBANDEN (Over) in absorptiespectra. 26.
- in de spectra van δ Orionis en Nova Persei. 359.
- DITTO (J. W.). De viscositeit van het systeem hydrazine + water. 110.
- DORMAAR (J. M. M.). De omzetting van carvon en eucarvon in carvacrol en hare snelheid. 39.
- DRAADBEGEWING (Massa en spanning van den kwartsdraad en weerstand der). 824.
- DRIEHOEKEN (Nauwkeurige benaderings-formules voor de verhoudingen der) in de berekening van eene elliptische baan uit 3 waarnemingen. 811.
- DRIEHOEKSNET (De aansluiting van het) der eerste orde van Zuid-Sumatra aan dat van Sumatra's Westkust. 471.
- DRIEPHASENLIJNEN (Kritische eindpunten in) met vaste fasen bij binaire mengsels die twee vloeistoffen vertoonen. 531.
- DUBOIS (EUG.). Richting en uitgangspunt der diluviale ijsbeweging over ons land. 44.
- Over een equivalent van het Cromer Forest-Bed in Nederland. 243.
- EASTON (C.). Over de schijnbare verdeeling der nevelvlekken. 181.
- De nevelvlekken, in hun betrekking tot het melkwegstelsel beschouwd. 189.
- Schommelingen der zonswerkzaamheid en van het klimaat. 402.
- EINDPUNTEN (Kritische) in driephasenlijnen met vaste fasen bij binaire mengsels die twee vloeistoffen vertoonen. 531.
- EINTHOVEN (W.). Een nieuwe methode om oscillerende galvanometeruitslagen te dempen. 284.
- Analyse der snaargalvanometrische krommen. Massa en spanning van den kwartsdraad en weerstand der draadbeweging. 824.
- ELECTRON (Vereenvoudigde afleiding van het veld van, en de krachten werkende op een) bij willekeurige beweging. 431.
- ELECTRONEN (De beweging der) in de metalen. I. 493. II. 565. III. 710.
- ELLIPTISCHE BAAN (Nauwkeurige benaderingsformules voor de verhoudingen der driehoeken in de berekening van eene) uit 3 waarnemingen. 811.
- ERRATA. 323. 386. 452. 886.
- EUCARVON (De omzetting van carvon en) in carvacrol en hare snelheid. 39.
- FIBRINEGLOBULINE in fibrinogeenoplossingen (Over de aanwezigheid van). 673.
- FIGEE (S.). Bekrachtiging zijner benoeming tot Correspondent. 2.

- FIGEE (s.). Dankzegging voor zijne benoeming. 236.
- FLOCCULUS CEREBELLI (Over degeneraties in het centrale zenuwstelsel na wegneming van den). 267.
- FORMULE (De afleiding der), welke de betrekking aangeeft tusschen de samenstelling van coëxisterende fasen bij binaire mengsels. 145.
- (Een) voor den osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen, wier damp de gaswetten volgt. 781.
- FRANCHIMONT (A. P. N.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over Benzylphtaalimide en Benzylphtaal-iso-imide”. 61.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over het behoud der kristalsymmetrie bij substitutie van isomorfe, plaatsings-isomere derivaten der benzol-reeks.” 112.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer P. J. MONTAGNE: „Over intramoleculaire atoomverschuiving bij benzpinakonen”. 253.
- Aanbieding der dissertatie van den Heer J. MOLL VAN CHARANTE: „Het sulfo-nisoboterzuur en eenige zijner derivaten”. 257.
- en H. FRIEDMANN. Het $\alpha\alpha'$ tetramethylpiperidine. 251.
- FRIEDEL en CRAFTS (De reactie van). 468.
- FRIEDMANN (H.) en A. P. N. FRANCHIMONT. Het $\alpha\alpha'$ tetramethylpiperidine. 251.
- FRITILLARIA IMPERIALIS L. (De kerndeeling bij). 343.
- FUNCTIE $\frac{a}{b}$ (Over de) bij meervoudige mengsels. 167.
- GALVANOMETERUITSLAGEN (Een nieuwe methode om oscillerende) te dempen. 284.
- GANGLIËNCELLEN (Over de uitloopers van) bij rust en vermoeienis. 649.
- GANGLION VOMERONASALE (Over het). 723.
- GASSEN (Het bepalen der coëxistentie-voorwaarden van damp- en vloeistofphasen van mengsels van) bij lage temperaturen. 199.
- en dampen (Toepassing van den baroscoop op de bepaling van de dichtheden van). 822.
- GASWETTEN (Een formule voor den osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen, wier damp de) volgt. 781.
- GEEST (J.) en P. ZEEMAN. Dubbele breking in een magnetisch veld in de nabijheid van magnetisch gesplitste absorptielijnen. 516.
- GEHIRNS (Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des) von Tarsius spectrum. 259.
- GENEESKUNDE (Circulaire van het 15^e Internationale Congres voor) te Lissabon. 2. 237. 456. 589.
- GEOLOGISCHE COMMISSIE (Jaarverslag der) over het jaar 1904. 529.
- (Bericht van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid dat op de betaling van het subsidie voor de) over 1905 orde is gesteld. 616.
- GERRITS (G. C.). Px-lijnen van mengsels van aceton en aethylaether en van tetrachloorkoolstof en aceton bij 0°C. 156.
- GESLACHTSSTRENGEN (De) van Phalangista vulpina. 32.
- GETALLEN (Eenige kenmerkende) van een algebraïsch oppervlak. 753.

GISTINGS-SARCINE (Een obligaat anaerobe). 608.

GOETHART (J. W. C.). — Mededeeling van den Minister van Binnenlandsche Zaken dat aan den Heer — een rijkssubsidie verleend is voor het bezoek aan het Botanisch Station te Buitenzorg. 236.

— Mededeeling van den Minister van Binnenlandsche Zaken dat de heer — benoemd is tot gedelegeerde bij het 2^{de} internationaal Botanisch Congres. 525.

GORTER (A.). Aanbieding eener verhandeling: „Eene physische theorie der herin-
nering”. 719.

GOUDDRADEN (Vergelijking van den weerstand van) en van platinadraden. 221.

GRAAD (De vergelijking van den negenden), voorstellende de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken. 730.

Gradmeting. Mededeeling van den Heer S. BLOK: „De aansluiting van het driehoeksnet der eerste orde van Zuid-Sumatra aan dat van Sumatra's Westkust”. 471.

— Mededeeling van den Heer J. A. C. OUDEMANS: „Over de breedte en azimutbepalingen, bepaald in 1896—99, door de Ingenieurs A. PANNEKOEK en R. POSTHUMUS MEYJES enz”. 520.

GRAY (ARTHUR H.). Toepassing van den baroscoop op de bepaling van de dichtheden van gassen en dampen. 822.

GRENSLIJNEN (Over de verschillende vormen en overgangen der) bij gedeeltelijke mengbaarheid van twee vloeistoffen. 660.

GRONDBORINGEN (Beschrijving van eenige nieuwe). VI. 456. Verslag hierover. 457.

GRIJNS (G.). Bekrchtiging zijner benoeming tot Correspondent. 2.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 2.

GULDIN (Over de regels van) in de meerdimensionale ruimte. 484.

HAAAN (J. DE). Bekrchtiging zijner benoeming tot Correspondent. 2.

— Dankzegging voor zijne benoeming. 236.

HAMBURGER (H. J.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. W. VISSER: „Een paar opmerkingen over auto-katalyse en de omzetting van γ -oxyzuren, met en zonder toevoeging van anderen zuren, opgevat als ionenreactie”. 770.

HERINNERING (Eene physische theorie der). 719.

HERSENEN (Verzoek van de Internationale Associatie der Akademiën om voorstellen bij de Regeering te doen over oprichting van instellingen voor onderzoek der). 616.

HOEK (P. P. C.). Een interessant geval van Atavismus. 152.

HOEKEN (Over de vergelijking, die de) van twee meerdimensionale ruimten bepaalt. 409.

HOFF (VAN 'T) 's Wet (Kinetische afleiding van) voor den osmotischen druk in een verdunde oplossing. 788.

HOLLEMAN (A. F.). Over de bereiding van silicium en van zijn chloride. 125.

— Over de nitratie van digesubstiteerde benzolen. 249.

— Over de bereiding van zuiver o-toluidien en over eene methode ter bepaling zijner zuiverheid. 398.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. BÖESEKEN: „De reactie van FRIEDEL en CRAFTS”. 468.

- HOLLEMAN (A. F.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER : „Over ortho-nitro-benzyltoluidine”. 641.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer F. M. JAEGER : „Over plaatsings-isomere Dichloornitrobenzolen”. 643.
- HONDRUG (DE) in de provincie Groningen. 548. 758.
- HOOFDASSEN (Over de meetkundige plaats der) van een bundel kwadratische oppervlakken. 411.
- (Over de vergelijkingen, waardoor de meetkundige plaats der) van een bundel kwadratische oppervlakken bepaald wordt. 537.
- (De vergelijking van den negenden graad, voorstellende de meetkundige plaats der) van een bundel kwadratische oppervlakken. 730.
- HOOFDPLOOI (De transformatie van een zijplooï in een) en omgekeerd. 625.
- HUBRECHT (A. A. W.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer TH. ZIEHEN : „Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des Gehirns von Tarsius spectrum”. 259.
- HUISKAMP (W.). Over de aanwezigheid van fibrineglobuline in fibrinogeenoplossingen. 673.
- HYDRAZINE + Water (De viscositeit van het systeem). 110.
- HYMENOPSIS TYPHAE (Fuck.) Sacc., eene tot hiertoe onvolkomen beschreven Tuberculariacee, eigen aan de verdorde bladscheeden van *Typha latifolia* (*Leptostroma austriacum* Oud. eene nog onbekende, op de naalden van *Pinus austriaca* levende *Leptostromacee*, en over). 294.
- HYPERRUIMTEN (Het aantal kwadratische) in de ruimte van vijf afmetingen. 323. Verslag hierover. 326.
- INNERVATIE (Over de) van het rompmyofoom. 727.
- INTEGRALEN (Berekening van twee bepaalde). 276.
- (Over de waarden van eenige bepaalde) die met Besselsche functiën samenhangen. 416.
- INTERPOLATIE (Eene nieuwe methode van) met vereffening toegepast ter afleiding van stand en gang van het standaarduurwerk der Leidsche Sterrewacht, Pendule Hohwü 17, uit de tijdsbepalingen over 1903. 302.
- IONENREACTIE (Een paar opmerkingen over auto-katalyse en de omzetting van γ -oxyzuren, met en zonder toevoeging van andere zuren, opgevat als). 770.
- ISOMORFIE bij koolstofverbindingen (Over mengbaarheid in den vasten aggregaattoestand en). 651.
- JAEGER (F. M.). Over Benzylphtaalimide en Benzylphtaal-iso-imide. 61.
- Over het behoud der kristalsymmetrie bij substitutie van isomorfe, plaatsings-isomere derivaten der benzol-reeks. 112.
- Over Ortho-Nitro-Benzyltoluidine. 641.
- Over plaatsings-isomere Dichloornitrobenzolen. 643.
- Over mengbaarheid in den vasten aggregaattoestand en isomorfie bij koolstofverbindingen. 651.
- JANSE (J. M.). Onderzoekingen over polariteit en orgaanvorming bij *Caulerpa prolifera*. 364.

JOLIS (A. F. LÉ). Bericht van overlijden. 237.

JONKER (H. G.). Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland. 1. De Hondsrug in de provincie Groningen. 2. Bovensilurische zwerfsteenen. 1ste mededeeling: Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zone *G*. 548. 2de mededeeling: Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zonen *H* en *I*. 758.

JULIUS (W. H.). Over dispersie-banden in absorptie-spectra. 26.

— De zonnebeelden, met den spectroheliograaf verkregen, en de anomale dispersie. 138.

— Benoemd tot lid der Commissie voor Solar research. 236.

— Dispersiebanden in de spectra van δ Orionis en Nova Persei. 359.

KAMERLINGH ONNES (H.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer B. MEILINK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. VII. Vergelijking van den platinathermometer met den waterstofthermometer”. 212. — VIII. Vergelijking van den weerstand van gouddraden en van platinadraden. 221.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. E. VERSCHAFFELT: „Over den invloed van verontreinigingen op de kritische verschijnselen van enkelvoudige stoffen en de verklaring van de proeven van TEICHNER”. 508.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer MAX REINGANUM: „Ueber electro-optische Konstanten der Metalle”. 820.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer ARTHUR W. GRAY: „Toepassing van den baroscoop op de bepaling van de dichtheden van gassen en dampen”. 822.

— en C. ZAKRZEWSKI. Het bepalen der coëxistentie-voorwaarden van damp- en vloeistofphasen van mengsels van gassen bij lage temperaturen. 199.

— Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van chloormethyl en koolzuur. 207. Vervolg. 323. 380.

KAPTEYN (J. C.). Benoemd tot lid der Commissie voor Solar research. 236.

KAPTEYN (W.). Over de waarden van eenige bepaalde integralen die met Besselsche functiën samenhangen. 416.

— Over eene reeks met Besselsche functies. 477.

KEGELSNEDE (Over de congruentie der), welke op de kubische oppervlakken van een bundel liggen. 281.

— (Over een door) gevormde congruentie van de tweede orde en tweede klasse. 355.

KERNDIENING (De) bij *Fritillaria imperialis* L. 343.

KIEL (Uitnoodiging van den Naturwissenschaftlichen Verein für Schleswig-Holstein te) tot bijwoning van het feest ter herdenking van het 50-jarig bestaan. 722.

KIEZELSPICULA (Over den bouw van sommige) bij sponzen. I. De styli van *Tethya lyncurium*. 733.

KLIMAAT (Schommelingen der zonswerkzaamheid en van het). 402.

KLUYVER (J. C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer EDM. LANDAU: „Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn KLUYVER: „Reeksen, afgeleid uit

de reeks $\sum \frac{\mu(m)}{m}$ ”. 66. 71.

— Berekening van twee bepaalde integralen. 276.

- KOHLBRUGGE (J. H. F.). Bekrchtiging zijner benoeming tot Correspondent. 2.
 — Dankzegging voor zijne benoeming. 236.
- KOHNSTAMM (PH.). Een formule voor den osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen, wier damp de gaswetten volgt. 731.
 — Kinetische afleiding van VAN 'T HOFF's wet voor den osmotischen druk in een verdunde oplossing. 788.
 — Osmotische druk of thermodynamische potentiaal. 800.
- KOLK (J. L. C. SCHROEDER VAN DER). Zie SCHROEDER VAN DER KOLK (J. L. C.).
- KONSTANTEN (Ueber electro-optische) der Metalle. 820.
- KOOLZUUR (Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van chloormethyl en). 207. Vervolg. 323, 380.
- KOOLSTOFVERBINDINGEN (Over mengbaarheid in den vasten aggregaattoestand en isomorfie bij). 651.
- KORTEWEG (D. J.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer FRED. SCHUH: „Over een uitdrukking voor de klasse eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten”. 57.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer FRED. SCHUH: „Over een uitdrukking voor het geslacht eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten”. 127.
 — Aanbieding eener mededeeling van den Heer FRED. SCHUH: „Over de krommen van een bundel, die een vlakke algebraïsche kromme met hoogere singulariteiten aanraken”. 133.
 — Bekrchtiging zijner benoeming tot Onder-Voorzitter. 722.
 — en D. DE LANGE. Over twee- en meervoudige ombilikaalpunten als bijzonderheden van de eerste orde van uitzondering op puntalgemeene oppervlakken. 388.
- KORTHAIS-FONDS (P. W.) — (Bericht van H.H. Administrateurs van het) dat dit jaar weder f 600 beschikbaar zal worden gesteld tot bevordering der kruidkunde. 68.
 — Toekenning der f 600 voor de uitgave der Monocotylen van de Flora van Buitenzorg, te bewerken door den Heer J. P. LOTSY. 326.
- KOSTER (W.) gaat over tot de rustende leden. 326.
- Kristallographie.** Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over Benzylphtaalimide en Benzylphtaal-iso-imide”. 61.
 — Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over het behoud der kristalsymmetrie bij substitutie van isomorfe, plaatsings-isomere derivaten der benzol-reeks”. 112.
- KRISTALSYMMETRIE (Over het behoud der) bij substitutie van isomorfe, plaatsings-isomere derivaten der benzol-reeks. 112.
- KROMME (Over een uitdrukking voor de klasse eener algebraïsche vlakke) met hoogere singulariteiten. 57.
 — (Over een uitdrukking voor het geslacht eener algebraïsche vlakke) met hoogere singulariteiten. 127.
 — (Over de betrekking tusschen den kromtestraal eener ruimtekromme in een punt P der) en den kromtestraal in P van de doorsnede van haar ontwikkelbaar regelvlak met haar osculatievlak in punt P . 271.

- KROMMEN (Over de) van een bundel, die een vlakke algebraïsche kromme met hoogere singulariteiten aanraken. 133.
- (Over netten van algebraïsche vlakke). 703.
- (Over lineaire stelsels van algebraïsche vlakke). 748.
- (Analyse der snaargalvanometrische). 824.
- KROMTESTRAAL (Over de betrekking tusschen den) eener ruimtekromme in een punt P der kromme en den kromtestraal in P van de doorsnede van haar ontwikkelbaar regelvlak met haar osculatievlak in punt P . 271.
- KUFFNER'sche Sternwarte (Circulaire van de von). Ueber neue Refraktionstafeln. 326.
- KUYPER (H. P.). De peritheciumontwikkeling van *Monascus purpureus* Went en *Monascus Barkeri* Dang. 46.
- KWARTSDRAAD (Massa en spanning van den) en weerstand der draadbeweging. 824.
- LAAR (J. J. VAN). Over mengwarmten bij associeerende oplosmiddelen. 121.
- Over eenige verschijnselen, welke kunnen optreden bij de beperkte mengbaarheid van twee vloeistoffen, waarvan de eene anomaal, speciaal water is. 573.
- Over de verschillende vormen en overgangen der grenslijnen bij gedeeltelijke mengbaarheid van twee vloeistoffen. 660.
- Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale lijnen en van hunne plooi punten voor alle temperaturen, in het geval van mengsels van normale stoffen. 685.
- LANDAU (EDM.). Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn KLUYVER: „Reeksen, afgeleid uit de reeks $\sum \frac{\mu(m)}{m}$ ”. 66. 71.
- LANGÉ (D. DE) en D. J. KORTEWEG. Over twee- en meervoudige ombilikaalpunten als bijzonderheden van de eerste orde van uitzondering op puntalgemeene oppervlakken. 388.
- LANGÉ (S. J. DE). Over de uitloopers van gangliëncellen bij rust en vermoeienis. 649.
- LANGELAAN (J. W.). Over den vorm van het rompmiyotoom (1ste mededeeling). 50.
- LENGTE van St. Denis (Ile de la Réunion) (Kort bericht omtrent de bepaling der), uitgevoerd in 1874. 616.
- LENGTEGROEI (Eenige waarnemingen over den) van stengels en bloemstelen. 696.
- LEPTOSTROMA AUSTRIACUM OUD., eene nog onbekende, op de naalden van *Pinus austriaca* levende *Leptostromaceae*, en over *Hymenopsis Typhae* (Fuck.) Sacc., eene tot hertoe onvolkomen beschreven *Tuberculariaceae*, eigen aan de verdorpe bladscheeden van *Typha latifolia*. 294.
- LISSABON (Circulaire van het 15e Congrès international de Médecine te). 2. 237 456. 589.
- LOBRY DE BRUYN (C. A.). Over intramoleculaire verschuivingen. N^o. 9. S. TIJMSMA: „Over het mechanisme der salicylzuursynthese”. 21. N^o. 10. J. J. DORMAAR: De omzetting van carvon en eucarvon in carvacrol en hare snelheid”. 39. N^o. 11. J. OLIE jr.: „De omzetting van het phenylkaliumsulfaat in *p*-phenolsulfonzure kalium”. 102. N^o. 12. J. F. SUYVER: „De intramoleculaire omzetting bij de stereoisomere α en β -trithioacet- en α - en β -trithiobenzaldehyden”. 104.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. BLANKSMA: „Over de intra-

moleculaire oxydatie van een aan benzol gebonden SH-groep door een ortho-standige NO_2 -groep". 36.

LOBRY DE BRUYN (C. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. W. DRTO: „De viscositeit van het systeem hydrazine + water". 110.

— Bericht van overlijden. 238.

LONDEN (Circulaire van het 4de internationale ornithologische Congres te). 722.

LORENTZ (H. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer A. SOMMERFELD: „Vereenvoudigde afleiding van het veld van, en de krachten werkende op een electron bij willekeurige beweging". 431.

— De beweging der electronen in de metalen. I. 493. II. 565. III, 710.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over eenige verschijnselen, welke kunnen optreden bij de beperkte mengbaarheid van twee vloeistoffen, waarvan de eene anomaal, speciaal water is". 573.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale lijnen en van hunne plooi punten voor alle temperaturen, in het geval van mengsels van normale stoffen". 685.

LORRÉ (J.). Aanbieding eener verhandeling: „Beschrijving van eenige nieuwe grond-boringen". VI. 456. Verslag hierover. 457.

LOTSY (J. P.) — (Aanwijzing om de f 600.— van het P. W. Korthals-fonds te bestemmen voor de uitgave der Monocotylen van de Flora van Buitenzorg te bewerken door den Heer —). 326.

— Bericht van den Minister van Binnenlandsche Zaken dat de Heer — benoemd is tot gedelegeerde bij het 2de internationaal botanisch Congres. 525.

LUIK (Circulaire omtrent de Wereldtentoonstelling te). 456.

LIJNEN (Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale) en van hunne plooi punten voor alle temperaturen, in het geval van mengsels van normale stoffen. 685.

— (Px-) van mengsels van aceton en aethylaether en van tetrachloorkoolstof en aceton bij 0°C . 156.

MAASTRICHT (Uitnoodiging van het gemeentebestuur van) tot bijwoning van de onthulling van het standbeeld van MINCKELERS. 236.

MAGNETISCH VELD (Dubbele breking in een) in de nabijheid van magnetisch gesplitste absorptielijnen. 516.

MARCKWALD (W.) — Over de door — uitgevoerde asymmetrische synthese van het optisch actieve valeriaanzuur. 459.

MARTIN (K.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer EUG. DUBOIS: „Over een equivalent van het Cromer Forest-Bed in Nederland". 243.

— Jaarverslag der Geologische Commissie over het jaar 1904. 529.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. G. JONKER: „Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland. I. De Hondsrug in de provincie Groningen. 2. Bovensilurische zwerfsteenen. 1ste mededeeling: Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische Zone G". 548. 2de mededeeling. „Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zonen II en I". 758.

- MECHANISME der salicylzuursynthese (Over het). 21.
- MEERTEN (H. VAN). Schrijven over de wenschelijkheid om het verband na te gaan tusschen de verschillende physische eigenschappen van het water. 722.
- MEETKUNDIGE PLAATS (Over de) der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken. 411.
- (Over de vergelijkingen, waardoor de) der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken bepaald wordt. 537.
- MEHMKE (R.). Ueber Trägheitsmomente und Momente beliebiger Ordnung in Räumen beliebig hoher Stufe. 630.
- MEILINK (B.). Over het meten van zeer lage temperaturen. VII. Vergelijking van den platinathermometer met den waterstofthermometer. 212. VIII. Vergelijking van den weerstand van gouddraden en van platinadraden. 221.
- MELKWEGSTELSEL (De nevelvlekken, in hun betrekking tot het) beschouwd. 189.
- MENGBAARHEID (Over) in den vasten aggregaattoestand en isomorfie bij koolstofverbindingen. 651.
- van twee vloeistoffen, (Over eenige verschijnselen, welke kunnen optreden bij de beperkte), waarvan de eene anomaal, speciaal water is. 573.
- van twee vloeistoffen (Over de verschillende vormen en overgangen der grenslijnen bij gedeeltelijke). 660.
- MENGSELS (De afleiding der formule, welke de betrekking aangeeft tusschen de samenstelling van coëxisterende fasen bij binaire). 145.
- (Kritische eindpunten in driefasenlijnen met vaste fasen bij binaire) die twee vloeistoffen vertoonen. 531.
- (Over de functie $\frac{a}{b}$ bij meervoudige). 167.
- (*P_x*-lijnen van) van aceton en aethylaether en van tetrachloorkoolstof en aceton bij 0° C. 156.
- van chloormethyl en koolzuur (Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij). 207. Vervolg. 323. 380.
- van gassen (Het bepalen der coëxistentie-voorwaarden van damp- en vloeistoffasen van) bij lage temperaturen. 199.
- van normale stoffen (Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale lijnen en van hunne plooi-punten voor alle temperaturen, in het geval van). 685.
- MENGWARMTEN (Over) bij associeerende oplosmiddelen. 121.
- MENSCH (Over de ontwikkeling van het cerebellum bij den). 635.
- METALEN (De beweging der electronen in de). I. 493. II. 565. III. 710.
- METALLE (Ueber electro-optische Konstanten der). 820.
- METEN van zeer lage temperaturen (Over het). VII. Vergelijking van den platinathermometer met den waterstofthermometer. 212. VIII. Vergelijking van den weerstand van gouddraden en van platinadraden. 221.
- Meteorologie. Verzoek van het U. S. Department of Agriculture, Weather Bureau te Washington, om mededeeling van eventueele waarnemingen over vermindering van de doorschijnendheid der atmosfeer in 1902. 2.

- Meteorologie.** Mededeeling van den Heer J. P. VAN DER STOK: „Eene 26 daagsche periode in daggemiddelden van den barometerstand”. 5.
- Mededeeling van den Heer C. EASTON: „Schommelingen der zonswerkzaamheid en van het klimaat”. 402.
- Circulaire over een nieuwe uitgave van de „Atlas international des nuages”. 456.
- METHODE** (Een nieuwe) om oscilleerende galvanometer-uitslagen te dempen. 284.
- van interpolatie (Een nieuwe) met vereffening toegepast ter afleiding van stand en gang van het standaarduurwerk der Leidsche Sterrewacht, Pendule Hohwü 17, uit de tijdsbepalingen over 1903. 302.
- METHYLJODIDE** (Over het stelsel pyridine en). 462.
- MICHAËLIS** (N. TH.). Bericht van overlijden. 3.
- MICHALSKI** (A.). Bericht van overlijden. 456.
- Mikrobiologie.** Mededeeling van den Heer M. W. BEIJERINCK: „Een obligaat anaerobe gistings-sarcine”. 608.
- MINCKELERS** (Uitnoodiging van het gemeentebestuur van Maastricht tot bijwoning van de onthulling van het standbeeld van). 236.
- MINISTER** van Binnenlandsche Zaken. Zie **BINNENLANDSCHE ZAKEN** (Minister van).
- van Waterstaat, Handel en Nijverheid. Zie **WATERSTAAT, Handel en Nijverheid** (Minister van).
- MOISSAN** (H.). Bekrachtiging zijner benoeming tot Buitenlandsch Lid. 2.
- Dankzegging voor zijne benoeming. 2.
- MOLL** (J. W.). Aanbieding eener mededeeling van Mej. TINE TAMMES: „Over den invloed van de voeding op de fluctueerende variabiliteit bij eenige planten”. 328.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer B. SYPKENS: „De kerndeeling bij *Fritillaria imperialis* L”. 343.
- MOLL VAN CHARANTE** (J.). Het sulfonisoboterzuur en eenige zijner derivaten. 257.
- MOMENTE** beliebiger Ordnung (Ueber Trägheitsmomente und) in Räumen beliebig hoher Stufe. 630.
- MONASCUS purpureus** Went en *Monascus Barkeri* Dang. (De peritheciumontwikkeling van). 46.
- MONOCOTYLEN** van de Flora van Buitenzorg (Aanwijzing om de f 600.— van het P. W. Korthals-fonds te bestemmen voor de uitgave der), te bewerken door den Heer J. P. LOTSY. 326.
- MONTAGNE** (P. J.). Over intramoleculaire atoomverschuiving bij benzpinakonen. 253.
- MUSKENS** (L. J. J.). Over degeneraties in het centrale zenuwstelsel na wegneming van den flocculus cerebelli. 267.
- Natuurkunde.** Mededeeling van den Heer W. H. JULIUS: „Over dispersie-banden in absorptie-spectra”. 26.
- Mededeeling van den Heer W. H. JULIUS: „De zonnebeelden, met den spectroheliograaf verkregen, en de anomale dispersie”. 138.
- Mededeeling van den Heer J. D. VAN DER WAALS: „De afleiding der formule, welke de betrekking aangeeft tusschen de samenstelling van coëxisterende fasen bij binaire mengsels”. 145.

- Natuurkunde.** Mededeeling van den Heer G. C. GERRITS: „Px-lijnen van mengsels van aceton en aethylaether en van tetrachloorkoolstof en aceton bij 0°C”. 156.
- Mededeeling van den Heer B. M. VAN DALFSEN: „Over de functie $\frac{a}{b}$ bij eenvoudige mengsels”. 167.
- Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en C. ZAKRZEWSKI: „Het bepalen der coëxistentie-voorwaarden van damp- en vloeistofphases van mengsels van gassen bij lage temperaturen”. 199.
- Mededeeling van de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en C. ZAKRZEWSKI: „Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van chloormethyl en koolzuur”. 207. Vervolg. 323. 380.
- Mededeeling van den Heer B. MEILINK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. VII. Vergelijking van den platinathermometer met den waterstofthermometer”. 212. VIII. Vergelijking van den weerstand van gouddraden en van platinadraden”. 221.
- Mededeeling van den Heer W. H. JULIUS: „Dispersiebanden in de spectra van σ Orionis en Nova Persei”. 359.
- Mededeeling van den Heer A. SOMMERFELD: „Vereenvoudigde afleiding van het veld van, en de krachten werkende op een electron bij willekeurige beweging”. 431.
- Mededeeling van den Heer CH. M. VAN DEVENTER: „Over het smelten van drijvend ijs”. 490.
- Mededeeling van den Heer H. A. LORENTZ: „De beweging der electronen in de metalen”. I. 493. II. 565. III. 710.
- Mededeeling van den Heer J. E. VERSCHAFFELT: „Over den invloed van verontreinigingen op de kritische verschijnselen van enkelvoudige stoffen en de verklaring van de proeven van TEICHNER”. 508.
- Mededeeling van de Heeren P. ZEEMAN en J. GEEST: „Dubbele breking in een magnetisch veld in de nabijheid van magnetisch gesplitste absorptielijnen”. 516.
- Mededeeling van den Heer J. D. VAN DER WAALS: „De transformatie van een zijploop in een hoofdploop en omgekeerd”. 625.
- Mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Een formule voor den osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen, wier damp de gaswetten volgt”. 781.
- Mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Kinetische afleiding van VAN 'T HOFF's wet voor den osmotischen druk in een verdunde oplossing”. 788.
- Mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Osmotische druk of thermodynamische potentiaal”. 800.
- Mededeeling van den Heer MAX REINGANUM: „Ueber electrooptische Konstanten der Metalle”. 820.
- Mededeeling van den Heer ARTHUR W. GRAY: „Toepassing van den baroscoop op de bepaling van de dichtheden van gassen en dampen”. 822.
- NETTEN** (Over) van algebraïsche vlakke krommen. 703.

- NEVELVLEKKEN (Over de schijnbare verdeeling der). 181.
- (De) in hun betrekking tot het melkwegstelsel beschouwd. 189.
- NITRATIE (Over de) van digesubstitueerde benzolen. 240.
- NOVA PERSEI (Dispersiebanden in de spectra van δ Orionis en). 359.
- OLIE JR. (J.). De omzetting van het phenylkaliumsulfaat in *p*-phenolsulfonzure kalium. 102.
- OMBILIKAALPUNTEN (Over twee- en meervoudige) als bijzonderheden van de eerste orde van uitzondering op puntalgemeene oppervlakken. 388.
- OMZETTING (De) van carvon en eucarvon in carvacrol en hare snelheid. 39.
- van het phenylkaliumsulfaat in *p*-phenolsulfonzure kalium. 102.
- (De intramoleculaire) bij de stereoisomere α - en β -trithioacet- en α - en β -trithio-benzaldehyden. 104.
- ONNES (H. KAMERLINGH). Zie KAMERLINGH ONNES (H.).
- OOR (De betrekkelijke gevoeligheid van het menschelijk) voor tonen van verschillende toonhoogte, met orgelpijpen nagegaan. 542.
- OPLOSBAARHEIDSLIJN (Over de verschijnselen die optreden, wanneer bij een binair stelsel de plooiptskromme de) ontmoet. 90.
- OPLOSMIDDELEN (Over mengwarmten bij associeerende). 121.
- OPLOSSING (Kinetische afleiding van VAN 'T HOFF's wet voor den osmotischen druk in een verdunde). 788.
- OPPERVLAK (Eenige kenmerkende getallen van een algebraïsch). 753.
- OPPERVLAKKEN (Over twee- en meervoudige ombilikaalpunten als bijzonderheden van de eerste orde van uitzondering op puntalgemeene). 388.
- ORDE van uitzondering (Over twee- en meervoudige ombilikaalpunten als bijzonderheden van de eerste) op puntalgemeene oppervlakken. 388.
- ORGAANVORMING bij *Caulerpa prolifera* (Onderzoekingen over polariteit en). 364.
- ORGELPIJPEN (De betrekkelijke gevoeligheid van het menschelijk oor voor tonen van verschillende toonhoogte, met) nagegaan. 542.
- ORIONIS en Nova Persei (Dispersiebanden in de spectra van δ). 359.
- ORNITHOLOGISCH Congres te Londen (Circulaire van het 4de internationale). 722.
- ORTHO-NITRO-BENZYLTOLOÏDINE (Over). 641.
- OSULATIEVLAK in punt *P* (Over de betrekking tusschen den kromtestraal eener ruimtekromme in een punt *P* der kromme en den kromtestraal in *P* van de doorsnede van haar ontwikkelbaar regelvlak met haar). 271.
- OSMOTISCHE DRUK of thermodynamische potentiaal. 800.
- OSMOTISCHEN DRUK (Over den) in bloed en urine van visschen. 418.
- (Een formule voor den) in geconcentreerde oplossingen, wier damp de gaswetten volgt. 781.
- (Kinetische afleiding van VAN 'T HOFF's wet voor den) in een verdunde oplossing. 788.
- OSS (S. L. VAN). De regelmatige stervormige 600-cel. 354. Teruggevraagd. 388.
- OSTWALD (W.). Bekrchtiging zijner benoeming tot Buitenlandsch Lid. 2.
- Dankzegging voor zijne benoeming. 2.

- OUDEMANS (C. A. J. A.). Aanbieding eener verhandeling: „Catalogue raisonné des Champignons des Pays-Bas”. 66.
- Over *Leptostroma austriacum* Oud., eene nog onbekende, op de naalden van *Pinus austriaca* levende Leptostromacee, en over *Hymenopsis Typhae* (Fuck.) Sacc., eene tot hertoe onvolkomen beschreven Tubercularicee, eigen aan de verdorde bladscheeden van *Typha latifolia*. 294.
 - Over *Sclerotiopsis pityophila* (Corda) Oud., eene Sphaeropsidee, voortgebracht door de naalden van *Pinus silvestris*. 298.
- OUDEMANS (J. A. C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. BLOK: „De aansluiting van het driehoeksnets der eerste orde van Zuid-Sumatra aan dat van Sumatra's Westkust”. 471.
- Over de breedte- en azimutbepalingen, bepaald in 1896—99, door de Ingenieurs A. PANNEKOEK en R. POSTHUMUS MEYJES enz. 520.
 - Kort bericht omtrent de bepaling der Lengte van St. Denis (Ile de la Réunion) uitgevoerd in 1874. 616.
- OXYDATIE (Over de intramoleculaire) van een aan benzol gebonden SH-groep door een orthostandige NO₂-groep. 36.
- OXYZUREN (Een paar opmerkingen over auto-katalyse en de omzetting van γ -) met en zonder toevoeging van andere zuren, opgevat als ionenreactie. 770.
- PARIJS (Circulaire van het 1e Congrès international d'assainissement et de salubrité de l'habitation te). 68.
- PEKELHARING (C. A.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer M. C. DEK-HUIJZEN: „Over den osmotischen druk in bloed en urine van visschen”. 418.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. HUIJKAMP: „Over de aanwezigheid van fibrineglobuline in fibrinogeenoplossingen”. 673.
- PERITHECIUMONTWIKKELING (De) van *Monascus purpureus* Went en *Monascus Barkeri* Dang. 46.
- PERIODE (Eene 26 daagsche) in daggemiddelden van den barometerstand. 5.
- PHALANGISTA VULPINA (De geslachtsstrengen van). 32.
- PHASEN (De afleiding der formule, welke de betrekking aangeeft tusschen de samenstelling van coëxisterende) bij binaire mengsels. 145.
- (Kritische eindpunten in driefaseliijnen met vaste) bij binaire mengsels die twee vloeistoffen vertoonen. 531.
- PHENOLSULFONZURE KALIUM (De omzetting van het phenylkaliumsulfaat in p-). 102.
- PHENYLKALIUMSULFAAT (De omzetting van) in p-phenolsulfonzure kalium. 102.
- Physiologie.** Verslag over eene verhandeling van den Heer L. BOUMAN, getiteld: „Onderzoekingen over vrije woordassociatie”. 69.
- Mededeeling van den Heer H. ZWAARDEMAKER: „Kunstmatige en natuurlijke zenuwprickeling en de hoeveelheid energie daarbij gebezigd”. 83.
 - Mededeeling van den Heer L. J. J. MUSKENS: „Over degeneraties in het centrale zenuwstelsel na wegneming van den flocculus cerebelli”. 267.
 - Mededeeling van den Heer W. EINTHOVEN: „Een nieuwe methode om oscillerende galvanometeruitslagen te dempen”. 284.

- Physiologie.** Mededeeling van den Heer M. C. DEKUIJZEN: „Over den osmotischen druk in bloed en urine van visschen”. 418.
- Mededeeling van den Heer H. ZWAARDEMAKER: „De betrekkelijke gevoeligheid van het menschelijk oor voor tonen van verschillende toonhoogte, met orgelpijpen nagegaan”. 542.
- Mededeeling van den Heer S. J. DE LANGE: „Over de uitloopers van gangliëncellen bij rust en vermoeienis”. 649.
- Mededeeling van den Heer W. HUISKAMP: „Over de aanwezigheid van fibrine-globuline in fibrinogeenoplossingen”. 673.
- Aanbieding eener verhandeling van den Heer A. GORTER: „Een physische theorie der herinnering”. 719.
- Mededeeling van den Heer ERNST DE VRIES: „Over het Ganglion Vomeronasale”. 723.
- Mededeeling van den Heer J. W. VAN BISSELIK: „Over de innervatie van het rompmootoom”. 727.
- Mededeeling van den Heer W. EINTHOVEN: „Analyse der snaargalvanometrische krommen. Massa en spanning van den kwartsdraad en weerstand der draadbeweging”. 824.
- P L A C E (T.)** Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. W. LANGELAAN: „Over den vorm van het rompmootoom (1ste mededeeling). 50.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer ERNST DE VRIES: „Over het Ganglion Vomeronasale”. 723.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. W. VAN BISSELIK: „Over de innervatie van het rompmootoom”. 727.
- PLANTEN** (Over den invloed van de voeding op de fluctueerende variabiliteit bij eenige). 328.
- Plantkunde.** Mededeeling van den Heer H. P. KUYPER: „De peritheciumontwikkeling van *Monascus purpureus* Went en *Monascus Barkeri* Dang”. 46.
- Aanbieding eener verhandeling van den Heer C. A. J. A. OUDEMANS: „Catalogue raisonné des Champignons des Pays-Bas”. 66.
- Verzoek om bericht van den Minister van Binnenlandsche Zaken of er geleerden zijn bereid te worden afgevaardigd naar het 2de Internationaal Botanisch Congres te Weenen te houden. 236. 326. 456.
- Mededeeling van den Heer C. A. J. A. OUDEMANS: „Over *Leptostroma austriacum* Oud., eene nog onbekende, op de naalden van *Pinus austriaca* levende Leptostromacee, en over *Hymenopsis Typhae* (Fuck.) Sacc., eene tot hiertoe onvolkomen beschreven Tuberculariacee, eigen aan de verdorde bladscheeden van *Typha latifolia*”. 294.
- Mededeeling van den Heer C. A. J. A. OUDEMANS: „Over *Sclerotiopsis pityophila* (Corda) Oud., eene Sphaeropsidee, voortgebracht door de naalden van *Pinus silvestris*”. 298.
- Mededeeling van Mej. TINE TAMMES: „Over den invloed van de voeding op de fluctueerende variabiliteit bij eenige planten” 328.

- Plantkunde.** Mededeeling van den Heer B. SYPKENS: „De kerndeeling bij *Fritillaria imperialis* L”. 343.
- Mededeeling van den Heer J. M. JANSE: „Onderzoekingen over polariteit en orgaanvorming bij *Caulerpa prolifera*”. 364.
- Circulaire van het internationaal botanisch Congres in 1905 te Weenen te houden. 388. 456. 616. 722.
- Bericht van den Minister van Binnenlandsche Zaken dat de Heeren J. P. LOTSY en J. W. C. GOEDHART benoemd zijn tot gedelegeerden der Nederl. Regeering bij het 2e Internationaal Botanisch Congres. 525.
- Mededeeling van den Heer E. VERSCHAFFELT: „Eenige waarnemingen over den lengtegroei van stengels en bloemstelen”. 696.
- PLATINADRADEN (Vergelijking van den weerstand van gouddraden en van) 221.
- PLATINATHERMOMETER (Vergelijking van den) met den waterstofthermometer. 212.
- PLOOPUNTEN (Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale lijnen en van hunne) voor alle temperaturen, in het geval van mengsels van normale stoffen. 685.
- PLOOPUNTSKROMME (Over de verschijnselen die optreden, wanneer bij een binair stelsel de) de oplosbaarheidslijn ontmoet. 90.
- POLARITEIT (Onderzoekingen over) en orgaanvorming bij *Caulerpa prolifera*. 364.
- POTENTIAAL (Osmotische druk of thermodynamische). 800.
- PYRIDINE en Methyljodide (Over het stelsel). 462.
- REACTIE (De) van FRIEDEL en CRAFTS. 468.
- REEKS met Besselsche functies (Over een). 477.
- REEKSEN, afgeleid uit de reeks $\sum \frac{\mu(m)}{m}$ (Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn KLUIJVER). 66. 71.
- REFRAKTIONSTAFELN (Circulaire van de von KUFFNER'sche Sternwarte te Weenen: Ueber neue). 326.
- REGELS van GULDIN (Over de) in de meerdimensionale ruimte. 484.
- REGELVLAK (Over de betrekking tusschen den kromtestraal eener ruimtekromme in een punt *P* der kromme en den kromtestraal in *P* van de doorsnede van haar ontwikkelbaar) met haar osculatievlak in punt *P*. 271.
- REINGANUM (MAX). Ueber electrooptische Konstanten der Metalle. 820.
- ROMPMYOTOOM (Over den vorm van het) (1ste mededeeling). 59.
- (Over de innervatie van het). 727.
- ROOZEBOOM (H. W. BAKHUIS). Zie BAKHUIS ROOZEBOOM (H. W.).
- RUIMTE (Over de regels van GULDIN in de meerdimensionale). 484.
- van vijf afmetingen (Het aantal kwadratische hyperruimten in de). 323. Verslag hierover. 326.
- RUIMTEKROMME (Over de betrekking tusschen den kromtestraal eener) in een punt *P* van de doorsnede van haar ontwikkelbaar regelvlak met haar osculatievlak in punt *P*. 271.
- RUIMTEN (Over de vergelijking, die de hoeken van twee meerdimensionale) bepaalt. 409.

SALICYLZUURSYNTHESE (Over het mechanisme der). 21.

SANCHEZ (P. GOMEZ). Aanbieding van een werk: „L'énergie obtenue par l'énergie”. 616.

SANDE BAKHUYZEN (H. G. VAN DE). Verslag over de vergadering der Internationale Associatie der Akademiën. 69.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. EASTON: „Over de schijnbare verdeling der nevelvlekken”. 181.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. EASTON: „De nevelvlekken, in hun betrekking tot het melkwegstelsel beschouwd”. 189.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. WEEDER: „Een nieuwe methode van interpolatie met vereffening toegepast ter afleiding van stand en gang van het standaarduurwerk der Leidsche sterrewacht, Pendule Hohwü 17, uit de tijdsbepalingen over 1903”. 302.

— Bekrachtiging zijner benoeming tot Voorzitter. 722.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. WEEDER: „Nauwkeurige benaderingsformules voor de verhoudingen der driehoeken in de berekening van eene elliptische baan uit 3 waarnemingen”. 811.

Scheikunde. Mededeeling van den Heer C. A. LOBRY DE BRUYN: „Over intramoleculaire verschuivingen”. No. 9. S. TYMSTRA: „Over het mechanisme der salicylzuursynthese”. 21. No. 10. J. M. M. DORMAAR: „De omzetting van carvon en eucarvon in carvacrol en hare snelheid”. 39. 11. J. OLIE jr.: De omzetting van het phenylkaliumsulfaat in *p*-phenolsulfonzure kalium”. 102. 12. J. F. SUYVER: „De intramoleculaire omzetting bij de stereoisomere α - en β -trithioacet- en α - en β -trithiobenzaldehyden”. 104.

— Mededeeling van den Heer J. J. BLANKSMA: „Over de intramoleculaire oxydatie van een aan benzol gebonden SH-groep door een orthostandige NO₂-groep”. 36.

— Mededeeling van den Heer A. SMITS: „Over de verschijnselen die optreden, wanneer bij een binair stelsel de plooiptuuskromme de oplosbaarheidslijn ontmoet”. (3de mededeeling). 90.

— Mededeeling van den Heer J. W. DITO: „De viscositeit van het systeem hydrazine + water”. 110.

— Mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over mengwarmten bij associeerende oplosmiddelen”. 121.

— Mededeeling van den Heer A. F. HOLLEMAN: „Over de bereiding van silicium en van zijn chloride”. 125.

— Mededeeling van den Heer A. F. HOLLEMAN: „Over de nitratie van digesubstitueerde benzolen”. 240.

— Mededeeling van de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en H. FRIEDMANN: Over het α α' tetramethylpiperidine”. 251.

— Mededeeling van den Heer P. J. MONTAGNE: „Over intramoleculaire atoomverschuiving bij benzpinakonen”. 253.

— Mededeeling van den Heer J. MOLL VAN CHARANTE: „Het sulfonisoboterzuur en eenige zijner derivaten”. 257.

- Scheikunde.** Mededeeling van den Heer J. M. VAN BEMMELEN: „De samenstelling van het verweeringssilikaat in de bouwbare aarde”. 351.
- Mededeeling van den Heer A. F. HOLLEMAN: „Over de bereiding van zuiver o-toluidien en over eene methode ter bepaling zijner zuiverheid”. 398.
 - Mededeeling van den Heer S. TIJMSTRA BZ.: „Over de door W. MARCKWALD uitgevoerde asymmetrische synthese van het optisch actieve valerianzuur”. 459.
 - Mededeeling van den Heer A. H. W. ATEN: „Over het stelsel pyridine en methyljodide”. 462.
 - Mededeeling van den Heer J. J. BLANKSMA: „Over het trinitroveratrol”. 464.
 - Mededeeling van den Heer J. BÖESEKEN: „De reactie van FRIEDEL en CRAFTS”. 468.
 - Mededeeling van de Heeren H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM en E. H. BÜCHNER: „Kritische eindpunten in driephasenlijnen met vaste fasen bij binaire mengsels die twee vloeistoflijnen vertoonen”. 531.
 - Mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over eenige merkwaardige verschijnselen, welke kunnen optreden bij de beperkte mengbaarheid van twee vloeistoffen, waarvan de eene anomaal, speciaal water is”. 573.
 - 6ter Bericht der Commission für die Festsetzung der Atomgewichte. 589.
 - Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over Ortho-Nitro-Benzyltoluidine”. 641.
 - Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over plaatsings-isomere Dichloor-nitrobenzolen”. 643.
 - Mededeeling van den Heer F. M. JAEGER: „Over mengbaarheid in den vasten aggregaattoestand en isomorfie bij koolstofverbindingen”. (1ste mededeeling). 651.
 - Mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over de verschillende vormen en overgangen der grenslijnen bij gedeeltelijke mengbaarheid van twee vloeistoffen”. 660.
 - Mededeeling van den Heer J. J. VAN LAAR: „Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale lijnen en van hunne plooi punten voor alle temperaturen, in het geval van mengsels van normale stoffen”. 685.
 - Mededeeling van den Heer A. W. VISSER: „Een paar opmerkingen over auto-katalyse en de omzetting van γ -oxyzuren, met en zonder toevoeging van andere zuren, opgevat als ionenreactie”. 770.
- SCHOMMELINGEN der zonswerkzaamheid en van het klimaat. 402.
- SCHOUTE (P. H.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer W. A. VERSLUYS: „Over de betrekking tusschen den kromtestraal eener ruimtekromme in een punt P der kromme en den kromtestraal in P van de doorsnede van haar ontwikkelbaar regelvlak met haar osculatievlak in punt P ”. 271.
- Aanbieding eener verhandeling van den Heer A. TOXOPEUS: „Het aantal kwadratische hyperruimten in de ruimte van vijf afmetingen”. 323. Verslag hierover. 326.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. L. VAN OSS: „De regelmatige stervormige 600-cel”. 354.

- SCHOUTE (P. H.). Over de vergelijking, die de hoeken van twee meerdimensionale ruimten bepaalt. 409.
- Over de regels van GULDIN in de meerdimensionale ruimte. 484.
 - Over niet-lineaire stelsels van elkaar rakende bolruimten. 589.
 - Aanbieding eener mededeeling van den Heer R. MEHMKE: „Ueber Trägheitsmomente und Momente beliebiger Ordnung in Räumen beliebig hoher Stufe”. 630.
- SCHROEDER VAN DER KOLK (J. L. C.). Jaarverslag der geologische commissie over het jaar 1904. 529.
- SCHUH (FRED.). Over een uitdrukking voor de klasse eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten. 57.
- Over een uitdrukking voor het geslacht eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten. 127.
 - Over de krommen van een bundel, die een vlakke algebraïsche kromme met hoogere singulariteiten aanraken. 133.
- SCLEROTIOPSIS PITYOPHILA (CORDA) OUD. (Over), eene Sphaeropsidee, voortgebracht door de naalden van *Pinus silvestris*. 298.
- Seismologie** (Mededeeling van de Commissie voor) ingesteld door de Internationale Associatie der Akademiën, met verzoek om bij hare Regeeringen aan te dringen op toetreding tot de Internationale Seismische Associatie. 388.
- SILICIUM (Over de bereiding van) en van zijn chloride. 125.
- SMELTEN (Over het) van drijvend ijs. 490.
- SMITS (A.). Over de verschijnselen die optreden, wanneer bij een binair stelsel de plooiptuuskromme de oplosbaarheidslijn ontmoet. (3de mededeeling). 90.
- SNAARGALVANOMETER (Verdere mededeelingen over den). 824.
- SOLAR RESEARCH (Uitnoodiging van de National Academy of Sciences tot deelneming aan een commissie voor). 236.
- (Mededeeling van de International Corporation in) over de op 23 September 1904 te St. Louis gehouden vergadering. 388.
- SOMMERFELD (A.). Vereenvoudigde afleiding van het veld van, en de krachten werkende op een electron bij willekeurige beweging. 431.
- SPECTRA van δ Orionis en Nova Persei (Dispersiebanden in de). 359.
- SPECTROHELIOGRAAF (De zonnebeelden, met den) verkregen, en de anomale dispersie. 138.
- SPHAEROPSIDEE (Over *Sclerotiopsis pityophila* (Corda) Oud., eene), voortgebracht door de naalden van *Pinus silvestris*. 298.
- SPONZEN (Over den bouw van sommige kiezelspicula bij). I. De styli van *Tethya lynceurium*. 733.
- STANDAARDUURWERK (Eene nieuwe methode van interpolatie met vereffening toegepast ter afleiding van stand en gang van het) der Leidsche Sterrewacht, Pendule Hohwü 17, uit de tijdsbepalingen over 1903. 302.
- ST. DENIS (Ile de la Réunion) (Kort bericht omtrent de bepaling der Lengte van), uitgevoerd in 1874. 616.
- STELSEL (Over de verschijnselen die optreden, wanneer bij een binair) de plooiptuuskromme de oplosbaarheidslijn ontmoet. 90.

- STELSEL** pyridine en methyljodide (Over het). 462.
- STELSLS** (Over niet-lineaire) van elkaar rakende bolruimten. 589.
- (Over lineaire) van algebraïsche vlakke krommen. 748.
- STENGELS** en bloemstelen (Eenige waarnemingen over den lengtegroei van). 696.
- Sterrekunde.** Mededeeling van den Heer C. EASTON: „Over de schijnbare verdeling der nevelvlekken”. 181.
- Mededeeling van den Heer C. EASTON: „De nevelvlekken, in hun betrekking tot het melkwegstelsel beschouwd”. 189.
- Uitnoodiging van de National Academy of Sciences te Washington tot deelneming aan een Commissie voor Solar research. 236.
- Mededeeling van den Heer J. WEEDER: „Eene nieuwe methode van interpolatie met vereffening toegepast ter afleiding van stand en gang van het standaarduurwerk der Leidsche Sterrewacht, Pendule Hohwü 17, uit de tijdsbepalingen over 1903”. 302.
- Circulaire van de v. Kuffner'sche Sternwarte te Weenen „Ueber neue Refractionstafeln”. 326.
- Mededeeling van de International Corporation in Solar research over de op 23 September 1904 te St. Louis gehouden vergadering. 388.
- Mededeeling van den Heer J. A. C. OUDEMANS: „Kort bericht omtrent de bepaling der Lengte van St. Denis (Ile de la Réunion) uitgevoerd in 1874”. 616.
- Circulaire van het U. S. Naval Observatory te Washington over telegrafische tijdsignalen te verzenden op 3 Mei 1905. 722.
- Mededeeling van den Heer J. WEEDER: „Nauwkeurige benaderingsformules voor de verhoudingen der driehoeken in de berekening van eene elliptische baan uit 3 waarnemingen”. 811.
- STOFFEN** (Over den invloed van verontreinigingen op de kritische verschijnselen van enkelvoudige) en de verklaring van de proeven van TEICHER. 508.
- STOK** (J. P. VAN DER). Eene 26 daagsche periode in daggemiddelden van den barometerstand. 5.
- STRALENCOMPLEXEN** (Over een groep van) met rationale complexkegels. 605.
- (Een groep van algebraïsche). 703.
- SULFONISOBOTERZUUR** (Het) en eenige zijner derivaten. 257.
- SUMATRA** (De aansluiting van het driehoeksnet der eerste orde van Zuid-) aan dat van Sumatra's Westkust. 471.
- SUYVER** (J. F.). De intramoleculaire omzetting bij de stereoisomere α - en β -trithioacet- en α - en β -trithiobenzaldehyden. 104.
- SYNTHESE** (Over de door W. MARCKWALD uitgevoerde asymmetrische) van het optisch actieve valerianaanzuur. 459.
- SYPKENS** (B.). De kerndeeling bij *Fritillaria imperialis* L. 343.
- SYSTEEM** hydrazine + water (De viscositeit van het). 110.
- TAMMES** (TINE). Over den invloed van de voeding op de fluctueerende variabiliteit bij eenige planten. 328.
- TARSIVS SPECTRUM** (Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des Gehirns von). 259.

- TEICHNER (Over den invloed van verontreinigingen op de kritische verschijnselen van enkelvoudige stoffen en de verklaring van de proeven van). 508.
- TEMPERATUREN (Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale lijnen en van hunne plooi punten voor alle), in het geval van mengsels van normale stoffen. 685.
- (Het bepalen der coëxistentie-voorwaarden van damp- en vloeistofphasen van mengsels van gassen bij lage). 199.
- (Over het meten van zeer lage). VII. Vergelijking van den platina-thermometer met den waterstofthermometer. 212. VIII. Vergelijking van den weerstand van gouddraden en van platinadraden. 221.
- TETHYA LYNCURIUM (De styli van). 733.
- TETRACHLOORKOOLSTOF (Px-lijnen van mengsels van aceton en aethylaether en van) en aceton bij 0° C. 156.
- TETRAMETHYLPIPERIDINE (Het *αα*). 251.
- THEORIE der herinnering (Eene physische). 719.
- THOMSON (J. J.). Bekrchtiging zijner benoeming tot Buitenlandsch Lid. 2.
- Dankzegging voor zijne benoeming. 68.
- TOLUIDIEN (Over de bereiding van zuiver o-) en over eene methode ter bepaling zijner zuiverheid. 398.
- TONEN van verschillende toonhoogte (De betrekkelijke gevoeligheid van het menschelijk oor voor), met orgelpijpen nagegaan. 542.
- TOXOPEUS (A.). Aanbieding eener verhandeling: „Het aantal kwadratische hyper-ruimten in de ruimte van vijf afmetingen”. 323. Verslag hierover. 326.
- TRÄGHEITSMOMENTE (Ueber) und Momente beliebiger Ordnung in Räumen beliebig hoher Stufe. 630.
- TRANSFORMATIE (De) van een zijplooï in een hoofdplooï en omgekeerd. 625.
- TRINITROVERATROL (Over het). 464.
- TRITHIOBENZALDEHYDEN (De intramoleculaire omzetting bij de stereoisomere α - en β -trithioacet- en α - en β -). 104.
- TUBERCULARIACEE, eigen aan de verdorde bladscheeden van *Typha latifolia* (*Leptostroma austriacum* Oud., eene nog onbekende, op de naalden van *Pinus austriaca* levende *Leptostromacee*, en over *Hymenopsis Typhae* (Fuck.) Sacc. eene tot hertoe onvolkomen beschreven). 294.
- TIJDSIGNALEN (Circulaire van het U. S. Naval Observatory te Washington over telegrafische) te verzenden op 3 Mei 1905. 722.
- TIJMSTRA (s.). Over het mechanisme der salicylzuursynthese. 21.
- Over de door W. MARCKWALD uitgevoerde asymmetrische synthese van het optisch actieve valeriaanzuur. 459.
- UITLOOPERS (Over de) van gangliëncellen bij rust en vernoeienis. 649.
- URINE van visschen (Over den osmotischen druk in bloed en). 418.
- VALERIAANZUUR (Over de door W. MARCKWALD uitgevoerde asymmetrische synthese van het optisch actieve). 459.
- VARIABILITEIT bij eenige planten (Over den invloed van de voeding op de fluctuerende). 328.

- VELD (Vereenvoudigde afleiding van het) van, en de krachten werkende op een electron bij willekeurige beweging. 431.
- VERGADERING (Vaststelling der December-). 452.
— (Vaststelling der April-). 720.
- VERGELIJKING (Over de), die de hoeken van twee meerdimensionale ruimten bepaalt. 409.
— (De) van den negenden graad, voorstellende de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken. 730.
- VERGELIJKINGEN (Over de), waardoor de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken bepaald wordt. 537.
- VERONTREINIGINGEN (Over den invloed van) op de kritische verschijnselen van enkelvoudige stoffen en de verklaring van de proeven van TEICHNER. 508.
- VERSCHAFFELT (E.). Eenige waarnemingen over den lengtegroei van stengels en bloemstelen. 696.
- VERSCHAFFELT (J. E.). Over den invloed van verontreinigingen op de kritische verschijnselen van enkelvoudige stoffen en de verklaring van de proeven van TEICHNER. 508.
- VERSCHUIVINGEN (Over intramoleculaire). N^o. 9. Over het mechanisme der salicylzuursynthese. 21 — N^o. 10. De omzetting van carvon en eucarvon in carvacrol en hare snelheid. 39. — N^o. 11. De omzetting van het phenylkaliumsulfaat in p-phenolsulfonzure kalium. 102. — N^o. 12. De intramoleculaire omzetting bij de stereoisomere α - en β -trithioacet- en α - en β -trithiobenzaldehyden. 104.
- VERSLUYS (W. A.). Over de betrekking tusschen den kromtestraal eener ruimtekromme in een punt *P* der kromme en den kromtestraal in *P* van de doorsnede van haar ontwikkelbaar regelvlak met haar osculatievlak in punt *P*. 271.
- VERWERINGSSILIKAAT (De samenstelling van het) in de bouwbare aarde. 351.
- VISCOSITEIT (De) van het systeem hydrazine + water. 110.
- VISSCHEN (Over den osmotischen druk in bloed en urine van). 418.
- VISSER (A. W.). Een paar opmerkingen over auto-katalyse en de omzetting van γ -oxyzuren, met en zonder toevoeging van andere zuren, opgevat als ionenreactie. 770.
- VLOEISTOFFEN (Over de verschillende vormen en overgangen der grenslijnen bij gedeeltelijke mengbaarheid van twee). 660.
— (Over eenige verschijnselen, welke kunnen optreden bij de beperkte mengbaarheid van twee), waarvan de eene anomaal, speciaal water is. 573.
- VLOEISTOFLAGEN (Kritische eindpunten in driephasenlijnen met vaste fasen bij binare mengsels die twee) vertoonen. 531.
- VLOEISTOFFPHASEN (Het bepalen der coëxistentie-voorwaarden van damp- en) van mengsels van gassen bij lage temperaturen. 199.
- VOEDING (Over den invloed van de) op de fluctueerende variabiliteit bij eenige planten. 328.
- VOSMAER (G. C. J.) en H. P. WIJSMAN. Over den bouw van sommige kiezelpicula bij sponzen. I. De styli van *Tethya lynceurium*. 733.
- VRIES (ERNST DE). Over het Ganglion vomeronasale. 723.
- VRIES (HUGO DE) gelukkigwenscht met zijn behouden terugkomst uit Amerika. 326

- VRIES (HUGO DE). Aanbieding eener mededeeling van den Heer J. M. JANSE: „Onderzoekingen over polariteit en orgaanvorming bij *Caulerpa prolifera*”. 364.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer E. VERSCHAFFELT: „Eenige waarnemingen over den lengtegroei van stengels en bloemstelen”. 696.
- VRIES (JAN DE). Over de congruentie der kegelsneden, welke op de kubische oppervlakken van een bundel liggen. 281.
- Over een door kegelsneden gevormde congruentie van de tweede orde en tweede klasse. 355.
- Over een bijzonderen tetraedralen complex. 600.
- Over een groep van stralencomplexen met rationale complexkegels. 605.
- Een groep van algebraïsche stralencomplexen. 703.
- Over netten van algebraïsche vlakke krommen. 708.
- Over lineaire stelsels van algebraïsche vlakke krommen. 748.
- Eenige kenmerkende getallen van een algebraïsch oppervlak. 753.
- WAALS (J. D. VAN DER). De afleiding der formule, welke de betrekking aangeeft tusschen de samenstelling van coëxisterende fasen bij binaire mengsels. 145.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer G. C. GERRITS: „Px-lijnen van mengsels van aceton en aethylaether en van tetrachloorkoolstof en aceton bij 0°C.” 156.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer B. M. VAN DALFSEN: „Over de functie $\frac{a}{b}$ bij meervoudige mengsels”. 167.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer CH. M. VAN DEVENTER: „Over het smelten van drijvend ijs”. 490.
- De transformatie van een zijplooï in een hoofdplooï en omgekeerd. 625.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Een formule voor den osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen, wier damp de gaswetten volgt”. 781.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Kinetische afleiding van VAN 'T HOFF's wet voor den osmotischen druk in een verdunde oplossing”. 788.
- Aanbieding eener mededeeling van den Heer PH. KOHNSTAMM: „Osmotische druk of thermodynamische potentiaal”. 800.
- WASHINGTON (U. S. Department of Agriculture, Weather Bureau te). Verzoek om mededeeling van eventueele waarnemingen over vermindering van de doorschijnendheid der atmosfeer in 1902. 2.
- (National Academy of Sciences te). Uitnoodiging tot deelneming aan een Commissie voor Solar Research. 236.
- (U. S. Naval Observatory te). Circulaire over telegrafische tijdsignalen te verzenden op 3 Mei 1905. 722.
- WATER (De viscositeit van het systeem hydrazine +). 110.
- WATERSTAAT, Handel en Nijverheid (Minister van). Bericht dat op de betaling van het subsidie voor de Geologische Commissie over 1905 orde gesteld is. 616.

WATERSTOFHERMOMETER (Vergelijking van den platinathermometer met den). 212.

WEEDER (J.). Een nieuwe methode van interpolatie met vereffening toegepast ter afleiding van stand en gang van het standaarduurwerk der Leidsche Sterrewacht, Pendule Hohwü 17, uit de tijdsbepalingen over 1903. 302.

— Nauwkeurige benaderingsformules voor de verhoudingen der driehoeken in de berekening van eene elliptische baan uit 3 waarnemingen. 811.

WEENEN (Circulaire van het Internationaal botanisch Congres in 1905 te) te houden. 388. 456. 616. 722.

WEERSTAND (Vergelijking van den) van gouddraden en van platinadraden. 221.

WENT (F. A. F. C.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer H. P. KUYPER: „De peritheciumontwikkeling van *Monascus purpureus* Went en *Monascus Barkeri* Dang”. 46.

WET (Kinetische afleiding van VAN 'T HOFF's) voor den osmotischen druk in een verdunde oplossing. 788.

— der overeenstemmende toestanden (Over de geldigheid van de) bij mengsels van ethloormethyl en koolzuur. 207. Vervolg. 323. 380.

WIND (C. H.). Aanbieding eener mededeeling van den Heer C. EASTON: „Schommelingen der zonswerkzaamheid en van het klimaat”. 402.

WINKLER (C.). Verslag over eene verhandeling van den Heer L. BOUMAN. 69.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer L. J. J. MUSKENS: „Over degeneraties in het centrale zenuwstelsel na wegneming van den flocculus cerebelli”. 267.

— Aanbieding eener mededeeling van den Heer S. J. DE LANGE: „Over de uitloopers van gangliëncellen bij rust en vermoeienis”. 649.

— Aanbieding eener verhandeling van den Heer A. GORTER: „Eene physische theorie der herinnering”. 719.

Wiskunde. Mededeeling van den Heer FRED. SCHUH: „Over een uitdrukking voor de klasse eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten”. 57.

— Mededeeling van den Heer EDM. LANDAU: „Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn KLUYVER: „Reeksen, afgeleid uit de reeks $\sum \frac{\mu(m)}{m}$ ”. 66. 71.

— Mededeeling van den Heer FRED. SCHUH: „Over een uitdrukking voor het geslacht eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten”. 127.

— Mededeeling van den Heer FRED. SCHUH: „Over de krommen van een bundel, die een vlakke algebraïsche kromme met hoogere singulariteiten aanraken”. 133.

— Mededeeling van den Heer W. A. VERSLUYS: „Over de betrekking tusschen den kromtestraal eener ruimtekromme in een punt P der kromme en den kromtestraal in P van de doorsnede van haar ontwikkelbaar regelvlak met haar osculatievlak in punt P ”. 271.

— Mededeeling van den Heer J. C. KLUYVER: „Berekening van twee bepaalde integralen”. 276.

— Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Over de congruentie der kegelsneden, welke op de kubische oppervlakken van een bundel liggen”. 281.

- Wiskunde.** Aanbieding eener verhandeling van den Heer A. TOXOPEUS: „Het aantal kwadratische hyperruimten in de ruimte van vijf afmetingen”. 323. Verslag hierover. 326.
- Mededeeling van den Heer S. L. VAN OSS: „De regelmatige stervormige 600-cel”. 354. Terugggevraagd. 388.
- Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Over een door kegelsneden gevormde congruentie van de tweede orde en tweede klasse”. 355.
- Mededeeling van de Heeren D. J. KORTEWEG en D. DE LANGE: „Over twee en meervoudige ombilikaalpunten als bijzonderheden van de eerste orde van uitzondering op puntalgemeene oppervlakken”. 388.
- Mededeeling van den Heer P. H. SCHOUTE: „Over de vergelijking, die de hoeken van twee meerdimensionale ruimten bepaalt”. 409.
- Mededeeling van den Heer J. CARDINAAL: „Over de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken”. 411.
- Mededeeling van den Heer W. KAPTEYN: „Over de waarden van eenige bepaalde integralen die met Besselsche functiën samenhangen”. 416.
- Mededeeling van den Heer W. KAPTEYN: „Over eene reeks met Besselsche functies”. 477.
- Mededeeling van den Heer P. H. SCHOUTE: „Over de regels van GULDIN in de meerdimensionale ruimte”. 484.
- Mededeeling van den Heer J. CARDINAAL: „Over de vergelijkingen, waardoor de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken bepaald wordt”. 537.
- Mededeeling van den Heer P. H. SCHOUTE: „Over niet-lineaire stelsels van elkaar rakende bolruimten”. 589.
- Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Over een bijzonderen tetraedraalen complex”. 600.
- Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Over een groep van stralencomplexen met rationale complexkegels”. 605.
- Mededeeling van den Heer R. MEHMKE: „Ueber Trägheitsmomente und Momente beliebiger Ordnung in Räumen beliebig hoher Stufe”. 630.
- Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Een groep van algebraïsche stralencomplexen”. 703.
- Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Over netten van algebraïsche vlakke krommen”. 708.
- Mededeeling van den Heer K. BES: „De vergelijking van den negenden graad, voorstellende de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken”. 730.
- Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Over lineaire stelsels van algebraïsche vlakke krommen”. 748.
- Mededeeling van den Heer JAN DE VRIES: „Eenige kenmerkende getallen van een algebraïsch oppervlak”. 753.
- WOLKEN** (Circulaire over eene nieuwe uitgave van de Atlas International des Nuages). 456.

- WOORDASSOCIATIE (Onderzoekingen over vrije). Verslag over de verhandeling van den Heer L. BOUMAN. 69.
- WIJHE (J. W. VAN) — Mededeeling van den Minister van Binnenlandsche Zaken dat de Heer — benoemd is als gedelegeerde naar het 6de Internationaal Zoölogisch Congres. 236.
- WIJSMAN (H. P.) en G. C. J. VOSMAER. Over den bouw van sommige kiezelspicula bij sponzen. I. De styli van *Tethya lyncurium*. 733.
- IJS (Over het smelten van drijvend). 490.
- IJSBEWEGING (Richting en uitgangspunt der diluviale) over ons land. 44.
- ZAKRZEWSKI (C.) en H. KAMERLINGH ONNES. Het bepalen der coëxistentie-voorwaarden van damp- en vloeistofphasen van mengsels van gassen bij lage temperaturen. 199.
- Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van chloormethyl en koolzuur. 207. Vervolg. 323. 380.
- ZEEMAN (P.) en J. GEEST. Dubbele breking in een magnetisch veld in de nabijheid van magnetisch gesplitste absorptielijnen. 516.
- ZENUWPRIKKELING (Kunstmatige en natuurlijke) en de hoeveelheid energie daarbij gebezigd. 83.
- ZENUWSTELSEL (Over degeneraties in het centrale) na wegneming van den flocculus cerebelli. 267.
- ZIEHEN (TH.). Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des Gehirns von *Tarsius spectrum*. 259.
- ZONNEBEELDEN (De) met den spectroheliograaf verkregen, en de anomale dispersie. 138.
- ZONSWERKZAAMHEID (Schommelingen der) en van het klimaat. 402.
- ZWAARDEMAKER (H.). Verslag over eene verhandeling van den Heer L. BOUMAN. 69.
- Kunstmatige en natuurlijke zenuwprikkeling en de hoeveelheid energie daarbij gebezigd. 83.
- De betrekkelijke gevoeligheid van het menschelijk oor voor tonen van verschillende toonhoogte, met orgelpijpen nagegaan. 542.
- ZWERFSTEENEN in Nederland (Bijdragen tot de kennis der sedimentaire). I. De Hondsrug in de provincie Groningen. 2. Bovensilurische zwerfsteenen. 1ste Mededeeling: Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zone *G*. 548. 2de Mededeeling: Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zonen *H* en *I*. 758.
- ZIJPLOOI (De transformatie van een) in een hoofdplooi en omgekeerd. 625.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 28 Mei 1904.

Voorzitter: de Heer D. J. KORTEWEG.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

- Ingekomen stukken, p. 2.
In Memoriam N. TH. MICHAËLIS, p. 3.
J. P. VAN DER STOK: „Eene 26-daagsche periode in daggemiddelden van den barometerstand”, p. 5.
C. A. LOBRY DE BRUYN en S. TYMSTRA Bz.: „Het mechanisme der salicylzuursynthese”, p. 21.
W. H. JULIUS: „Dispersiebanden in absorptie-spectra”, p. 26. (Met één plaat).
A. J. P. VAN DEN BROEK: „De geslachtsstrengen van *Phalangista vulpina*.” (Aangeboden door de Heeren L. BOLK en T. PLACE), p. 32.
J. J. BLANKSMA: „Over de intramoleculaire oxydatie van een aan benzol gebonden SH-groep door een orthostandige NO₂-groep.” (Aangeboden door de Heeren C. A. LOBRY DE BRUYN en A. F. HOLLEMAN), p. 36.
J. M. M. DORMAAR: „De omzetting van carvon en eucarvon in carvacrol en hare snelheid.” (Aangeboden door de Heeren C. A. LOBRY DE BRUYN en A. F. HOLLEMAN), p. 39.
EUG. DUBOIS: „Richting en uitgangspunt der diluviale ijsbeweging over ons land.” (Aangebode door de Heeren J. M. VAN BEMMELEN en K. MARTIN), p. 44.
H. P. KUYPER: „De peritheciumontwikkeling van *Monascus purpureus* WENT en *Monascus Barkeri* Dang.” (Aangeboden door de Heeren F. A. F. C. WENT en J. W. MOLL), p. 46.
J. W. LANGELAAN: „Over den vorm van het rompmyotoom” (1ste mededeeling). (Aangeboden door de Heeren T. PLACE en L. BOLK), p. 50. (Met één plaat).
FRED. SCHUH: „Over een uitdrukking voor de klasse eener algebraïsche vlakke kromme met hogere singulariteiten.” (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 57.
F. M. JAEGER: „Over Benzylphtaalimide en Benzylphtaal-iso-imide.” (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 61.
EDMUND LANDAU: „Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn KLUYVER: „Reeksen afgeleid uit de reeks $\sum \frac{\mu(m)}{m}$.” (Aangeboden door de Heeren J. C. KLUYVER en W. KAPTEYN), p. 66.
Aanbieding eener verhandeling van den Heer C. A. J. A. OUDEMANS: „Catalogue raisonné des Champignons des Pays-Bas”, p. 66.
Aanbieding van Boekgeschenken, p. 66.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is :

1°. Bericht van den Heer HOOGWERFF, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 16 Mei l.l. kennisgevende, dat H.M. de Koningin de benoemingen van de Heeren H. MOISSAN te Parijs, W. OSTWALD te Leipzig, J. J. THOMSON te Cambridge tot Buitenlandsche Leden en van de Heeren S. FIGEE, G. GRIJNS, J. DE HAAN en J. H. F. KOHLBRUGGE tot Correspondenten der Natuurkundige Afdeeling bekrachtigd heeft.

3°. Bericht van de Heeren G. GRIJNS, H. MOISSAN en W. OSTWALD dat zij hunne benoemingen, respectievelijk tot Correspondent en buitenlandsch Lid, onder dankzegging aannemen.

De Voorzitter heet den Heer GRIJNS welkom in de vergadering en spreekt den wensch uit, dat de Heer GRIJNS gedurende zijn verblijf in Nederland dikwijls de vergaderingen der Akademie zal bijwonen.

4°. Circulaire van het U. S. Department of Agriculture, Weather Bureau te Washington, met verzoek om mededeeling van eventueele waarnemingen over vermindering van de doorschijnendheid der atmosfeer in 1902.

De Secretaris zal zich gaarne belasten met het doorzenden van desbetreffende waarnemingen der leden.

5°. Circulaire van het XV^e Congrès international de Médecine, van 19—26 April 1906 te Lissabon te houden.

Voor kennisgeving aangenomen.

Verder is ingekomen het bericht van het overlijden van het lid der Akademie

NICOLAAS THEODOOR MICHAËLIS.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord. Naar aanleiding van dit schrijven zegt de Voorzitter het volgende :

Mijne Heeren!

Alvorens onze werkzaamheden voort te zetten is het voor ons allen, maar vooral voor de ouderen onder ons, eene behoefte eenige oogenblikken te wijden aan de nagedachtenis van ons rustend lid NICOLAAS THEODOOR MICHAËLIS.

Geboren 3 September 1824 verwierf zich MICHAËLIS, na volbrenging zijner studiën aan de Koninklijke Akademie te Delft, in 1846 eene plaatsing bij den Waterstaat hier te lande; aanvankelijk als aspirant ingenieur surnummerair.

Opgeklommen in 1852 tot ingenieur 2e klasse, hielp hij als zoodanig de laatste hand leggen aan de droogmaking van den Haarlemmermeer, om later belast te worden met het ontwerpen en uitvoeren van een stoomgemaal te Gouda.

Het was echter vooral de aanleg van het net der Staatspoorwegen, met de daaraan verbonden belangrijke werken, die hem de gelegenheid bood zijne veelzijdige begaafdheden tot volle ontplooiing en toepassing te brengen.

Reeds in 1858 was door hem medegewerkt aan een onderzoek van spoorwegontwerpen, onder leiding van den inspecteur van den waterstaat L. J. A. VAN DER KUN. Een belangrijk deel van dit onderzoek was gewijd aan den bouw van spoorwegbruggen over onze groote rivieren. Het gegoten ijzer, niet lang te voren nog onmisbaar geacht, had plaats moeten maken voor getrokken ijzer dat gelegenheid gaf groote wijdden te overspannen zonder in zware gewichten te vervallen. Aan de bestudeering der daarbij vereischte samenstellingen nam MICHAËLIS met zijn helder wiskundig inzicht een zeer voornaam aandeel.

Toen dan ook, na aanneming der wet van 1860 tot Aanleg van Spoorwegen door den Staat, tot de uitvoering dier wet werd overgegaan was MICHAËLIS als aangewezen om eene belangrijke en eervolle plaats in te nemen onder de ingenieurs, met die uitvoering belast. Tot de voornaamste werken van het aan hem, onder den titel van Eerstaanwezend Ingenieur, toevertrouwde deel behoorden de bruggen te Dordrecht over de Oude Maas, de brug over de Nieuwe Maas te Rotterdam en de viaduct door Rotterdam. Bijzondere moeilijkheden legde de bodemgesteldheid aan de uitvoering der brug te Rotterdam in den weg, welke door toepassing der pneumatische wijze van fundeering werden overwonnen.

Ook bij den bouw der brug over het Hollandsch Diep was MICHAËLIS, als lid eener commissie van advies, betrokken.

Na de voltooiing der voornaamste spoorwegwerken, nam hij, in 1876, uit handen van den adviseur der Spoorwegen Jhr. G. J. G. DE KLERCK diens bemoeiingen over onder den titel van Directeur voor de Spoorwegen en bleef in deze betrekking werkzaam tot het einde van 1891.

Als scherpzinnig wiskundige, als kenner en beoefenaar der theoretische grondslagen der ingenieurswetenschap, in het bijzonder van den bruggenbouw, was het natuurlijk dat onze Akademie er prijs op stelde MICHAËLIS als lid aan zich te verbinden.

Dit geschiedde in Mei 1879. De bijdragen tot onze werken, die hij in Juni 1880, September 1881 en Januari 1886 als zoodanig ten beste gaf, sluiten zich bij zijne ingenieurs-werkzaamheden aan. Zij behelzen kritische beschouwingen betreffende de instorting der Taybrug en wiskundige onderzoekingen omtrent brugconstructies, welke met praktische vraagstukken in onmiddellijk verband staan.

Tot in 1899, toen zijne gezondheid begon te wankelen, was hij een getrouw bezoeker onzer zittingen.

In MICHAËLIS verliest ons vaderland een dier mannen, die den goeden naam van den Nederlandschen Waterstaat hebben weten te vestigen en hoog te houden, en onze Akademie een om zijn wetenschappelijken zin en zijne persoonlijke eigenschappen zeer gewaardeerd medelid.

Meteorologie. — De Heer VAN DER STOK doet eene mededeeling over: „*Eene 26 daagsche periode in daggemiddelden van den barometerstand.*”

1. Eenige jaren geleden¹⁾ heeft Prof. A. SCHUSTER het probleem behandeld, op welke wijze in eene reeks van gegevens de aanwezigheid eener periodieke schommeling kan worden opgespoord, wanneer de amplitude daarvan klein is in verhouding tot groote schommelingen, die, ten opzichte der gezochte, zuiver periodieke beweging, als toevallig kunnen worden beschouwd.

Naar aanleiding der analogie, die men kan zien tusschen dit vraagstuk en dat van storingen in den aether door lichttrillingen — een probleem dat in 1880²⁾ door Lord RAYLEIGH was behandeld — is door SCHUSTER eene poging gedaan om de theorie der waarschijnlijkheidsrekening toe te passen op de bepaling der beide eerste coëfficiënten eener reeks van FOURIER, en eene methode van onderzoek aangeprezen en toegepast op eene 25 jarige reeks van daggemiddelden der magnetische declinatie, berekend voor Greenwich.

De keuze van dit, naar SCHUSTER's meening, niet zeer geschikt materiaal wordt gerechtvaardigd door de opmerking, dat er geen andere keus was, omdat, tot aan dat tijdstip (1899), geene onderzoekingen waren gepubliceerd omtrent het bestaan eener periode, ongeveer overeenstemmende met die der zonsrotatie, die betrekking hadden op andere dan aardmagnetische elementen. Terecht wijst de schrijver er op, dat het verkrijgen van eenig resultaat alleen niet als hoofdzakelijk mag worden beschouwd, maar dat het volstrekt noodzakelijk is daarbij een maatstaf aan te geven, waarnaar kan worden beoordeeld, welke waarde men aan de gevonden uitkomst mag toeschrijven.

Zijne mathematische beschouwingen echter leiden in zooverre niet tot het gewenschte resultaat, dat eene methode om de middelbare of waarschijnlijke fout, of beter onzekerheid, te bepalen uit de reeks zelve, waaruit de gevonden uitkomst is ontstaan, niet wordt aangewezen en, in de plaats daarvan, wordt aanbevolen om de oorspronkelijke gegevens herhaalde malen opnieuw te rangschikken volgens perioden weinig verschillend van de onderzochte, en aldus, langs zuiver empirischen weg („by trial”), te komen tot eene kennis van de amplitude, die alleen op grond der toevallige afwijkingen kan worden verwacht.

Hetzelfde probleem nu, dat der opsporing eener ongeveer 26

¹⁾ Trans. Cambr. Phil. Soc. Vol. XVIII. 1899.

²⁾ Phil. Mag. Vol. X. II, 1880.

daagsche periode, is reeds geruimen tijd geleden ¹⁾ door mij behandeld volgens eene andere methode, toegepast niet alleen op magnetische, maar ook op verschillende meteorologische gegevens en Prof. SCHUSTER's onderzoek geeft dus eene gereede aanleiding tot hernieuwing en herziening der vroeger gedane poging.

Het ligt dan in de eerste plaats voor de hand om voor dit doel het vroeger aangevangen onderzoek omtrent de aanwezigheid dezer periode in barometer-daggemiddelden, berekend voor Batavia, uit te breiden over de geheele thans beschikbare reeks van ruim 36 jaren (1866—1901).

Een in 1873 ²⁾ aangevangen en kortelings hernieuwd ³⁾ onderzoek naar synchronisme in het verloop der kromme van zonnevlekken-frequentie en van luchttemperatuur geeft grond aan de verwachting dat, voor dergelijke onderzoekingen, waarnemingen, verricht in tropische streken, in de eerste plaats het aangewezen materiaal zijn.

In de tweede plaats is het wenschelijk na te gaan of er niet een kortere weg kan worden aangewezen om tot een maatstaf te geraken van beoordeeling der waarde van het verkregen resultaat dan de omslachtige berekening van SCHUSTER's periodograaf, waarbij in de reeks zelve der gegevens, en niet daarbuiten, het vergelijkingsmateriaal wordt gevonden.

2. Eene rangschikking van grootheden volgens eene bepaalde periode T kan men zich uitgevoerd denken door eene uitmeting der opvolgende gegeven waarden van uit eenig punt O , langs lijnen die, op onderling gelijke hoekafstanden $\frac{2\pi}{T}$, door dit punt zijn getrokken.

Denkt men aan het uiteinde dier voerstralen de eenheid van massa gehecht, dan is het duidelijk, dat men zich een oordeel kan vormen over de al of niet symmetrieke verdeling dier massa's ten opzichte van het punt O door eenvoudig de gemiddelde waarde van alle deze, nu gerichte, grootheden te berekenen, of, m.a.w. door de ligging te bepalen van het zwaartepunt van het massa-systeem, gedacht onder den invloed van evenwijdige krachten.

Ligt er in de T gegevens eene bepaalde, goed uitgesproken periode, dan kan men door het punt O eene lijn trekken zoodanig, dat aan

1) Observ. Magn. Meteor. Observ. Batavia. X, 1888, Append. II en Natuurk. Tijdschr. XLVIII. 1889. Verh. Kon. Akad. v. Wet. Amsterdam. XXVIII, 1890.

2) KÖPPEN. Zeitschr. Oesterr. Gesellsch. f. Meteor. VIII, 1873.

3) C. NORDMANN. Essai sur le rôle des ondes Hertiennes, en : Astron. Phys. et sur diverses questions qui s'y rattachent, Thèse, Paris, 1903.

de eene zijde daarvan de voerstralen allen langer zijn dan de overeenkomstige voerstralen aan den anderen kant. Bij rangschikking, als in het onderhavige geval, van grootheden waarin misschien eene kleine neiging tot asymmetrie bestaat, bij stellige aanwezigheid van groote, toevallige afwijkingen, zal dus, indien men vele perioden bezigt, het radiaal moment steeds grooter worden, daar de massa in 't zwaartepunt geconcentreerd gelijk is aan de totaalsom van 't aantal waarnemingen, terwijl de verdeeling der toevallige storingen tot eene symmetrische zal naderen.

Neemt men twee willekeurige, onderling rechthoekige assen aan, gaande door het punt O , dan wordt de ligging van het zwaartepunt, als N het aantal waarnemingen en ϱ de numerieke waarden der gegevens voorstelt, bepaald door de coördinaten.

$$x_1 = \frac{1}{N} \sum \varrho \cos \theta \quad y_1 = \frac{1}{N} \sum \varrho \sin \theta \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Deze berekening komt dus feitelijk op hetzelfde neer als de bepaling der beide eerste FOURIER'sche coëfficiënten, daar

$$a_1 = \frac{2}{N} \sum \varrho \cos \theta \quad b_1 = \frac{2}{N} \sum \varrho \sin \theta \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

indien de gezochte periodieke beweging wordt voorgesteld door de uitdrukking :

$$A \cos (nt - C)$$

$$A^2 = a_1^2 + b_1^2 \quad \text{tang } C = \frac{b_1}{a_1} \quad n = \frac{2\pi}{T} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

De hier gegeven voorstelling der rangschikking schijnt mij echter te verkiezen : vooreerst omdat de ontwikkeling eener functie in eene reeks, als voorstelling dier functie, hare waarde ontleent aan de samenstelling van een groot aantal termen, zoodat men, bij bepaling van één term, bezwaarlijk kan spreken van Fourieriseeren der functie, en, in de tweede en voornaamste plaats, omdat zij terstond aan het licht brengt de volkomen gelijksoortigheid van dit probleem met dat van de bepaling der ligging van een punt in het platte vlak door middel van een groot aantal foutieve waarnemingen.

Dit vraagstuk, door verscheidene wiskundigen behandeld, is zeker wel op de meest volkomen wijze uitgewerkt door SCHOLS ¹⁾, wiens oorspronkelijke opvatting van 't probleem leidt tot verschillende wetten, die onafhankelijk zijn van het aannemen eener bepaalde

¹⁾ Over de theorie der fouten in de ruimte en in het platte vlak, Amsterdam, Verh. K. Akad. v. Wet 1^o Sect. XV, 1875, en: Théorie des erreurs dans le plan e dans l'espace, Delft, Ann. II, 1886.

foutenwet, en voorts tot merkwaardige analogieën van deze quaestie met die der traagheidsmomenten in de werktuigkunde.

Door in de bovengegeven voorstelling der polaire rangschikking het totaal aantal waarnemingen gelijk aan de eenheid te stellen kan men de betrekkelijke frequentie der voerstralen van bepaalde lengte voorstellen door de dichtheid hunner eindpunten binnen de eenheid van oppervlak.

SCHOLS noemt deze waarschijnlijkheidsfunctie de modulus, de specifieke waarschijnlijkheid en de „facilité de l'erreur”.

Men verkrijgt aldus het mechanisch beeld van een waarschijnlijkheidslichaam of vlak, waarvan de dichtheid in 't algemeen eene functie zal zijn van grootte en richting der voerstralen; de bepaling van 't constante gedeelte der fout — waarvan de waarschijnlijkheid gelijk is aan de eenheid — komt dan overeen met de berekening der ligging van het zwaartepunt, de afleiding der middelbare fout:

$$M = \sqrt{\frac{\sum q^2}{N}}$$

met de berekening van het moment van inertie welke, zooals bekend is, voert tot de bepaling van (in het platte vlak) twee hoofd-traagheidsassen, die hier waarschijnlijkheidsassen worden.

Uitgaande van de onderstelling, dat zulke fouten in het vlak haar ontstaan te danken hebben aan de samenwerking van een groot aantal gelijksoortige, elementaire fouten, toonde SCHOLS aan, dat de projecties der fouten op eene willekeurige as de bekende exponentieele wet volgen der fouten in de lijn, en dat men de wet der totale fout kan vinden door haar te beschouwen als ontstaan uit het samentreffen van onderling onafhankelijk gedachte foutprojecties op de hoofdasen van waarschijnlijkheid.

De toepassing dezer theorie op ons geval kan tot een zeer eenvoudige bewerking worden teruggebracht.

Fouten, ontstaan onder den invloed van individueele en instrumenteele bijzonderheden zijn altijd min of meer systematisch verbreid; maar er is geen reden om aan te nemen, dat de schommelingen, b.v. van barometerstanden binnen een willekeurig tijdsbestek, ontdaan van haar constant gedeelte, zich, bij rangschikking rondom een punt, op andere dan zuiver willekeurige wijze zullen groepeeren.

SCHOLS' specifieke waarschijnlijkheid in het platte vlak heeft den vorm:

$$F = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{M_x^2} + \frac{y^2}{M_y^2}\right)}}{2\pi M_x M_y} \dots \dots \dots (4)$$

waarin x en y de coördinaten zijn der fout, gekenmerkt door de polaire coördinaten ϱ en θ , terwijl M_x en M_y de hoofd-waarschijnlijkheidsassen voorstellen, zoodat:

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 = M_a^2 + M_b^2.$$

De middelbare fout kan dus worden bepaald, ook zonder kennis van de ligging der hoofdasen, als de middelbare fouten der componenten volgens willekeurige, rechthoekige assen bekend zijn.

Is F onafhankelijk van θ , dan wordt

$$M_x = M_y = \frac{M}{\sqrt{2}}$$

en, als men stelt:

$$\frac{1}{M^2} = h^2$$

$$F = \frac{h^2}{\pi} e^{-h^2 \varrho^2} (5)$$

De spec. waarschijnlijkheid eener fout ϱ , onafhankelijk van de richting, wordt dan:

$$\frac{h^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \varrho e^{-h^2 \varrho^2} d\varphi = 2 h^2 \varrho e^{-h^2 \varrho^2} (6)$$

Hieruit blijkt, dat de waarschijnlijkheid eener fout nul niet, als bij lineaire fouten, een maximum, maar een minimum is, dat de grootste dichtheid der foutenpunten wordt gevonden op den cirkel waarvan de straal is:

$$\varrho_m = \frac{1}{h} = M (7)$$

en tevens, dat de berekening der waarschijnlijke fout tot een geheel anderen coëfficiënt van M zal leiden dan bij de fouten in de rechte lijn.

Men heeft dan de vraag te stellen voor welke waarde van $\varrho = rM$

$$2 h^2 \int_0^r \varrho e^{-h^2 \varrho^2} d\varrho = \frac{1}{2}$$

waaruit, voor de waarschijnlijke fout:

$$0.83256 M (8)$$

Deze waarde van den coëfficiënt, aanmerkelijk grooter dan die geldend voor lineaire grootheden, 0.6745, toont duidelijk aan dat, en in welke mate, men aan een bepalingen van grootheden als de hier onderzochte, veel zwaardere eischen moet stellen dan aan de waardebepaling van grootheden, waaraan het begrip van richting niet

is verbonden, of althans niet bij de bewerking van zelf moet verbonden worden.

Zij stelt tevens in het licht, dat aan het begrip „waarschijnlijke fout” een meerdere beteekenis moet worden gehecht dan men gewoonlijk in de laatste jaren heeft gedaan. Eene reductie van vergelijkingsgroottheden toch in altijd dezelfde verhouding heeft weinig zin; maar zij krijgt beteekenis als die verhoudingen verschillen.

Is de verdeeling der fouten afhankelijk van de richting, dan wordt de coëfficiënt bepaald door de grootheid:

$$N = \frac{M_x^2 - M_y^2}{M_x^2 + M_y^2}$$

De coëfficiënt der waarschijnlijke fout, waarvoor SCHOLS de benaderingsformule geeft:

$$r = 0.8326 - 0.1581 N^2 (9)$$

is dus het grootst voor fouten onafhankelijk van de richting en het kleinst voor lineaire fouten, waarvoor $N = 1$ is.

Door aan te nemen, dat in problemen als het hier behandelde alle richtingen even waarschijnlijk zijn, stelt men zich derhalve het meest ongunstige geval voor, hetgeen ook wenschelijk is.

Hetzij men de bewerking, die op de gegevens moet worden toegepast, opvat als eene bepaling der eerste constanten (de allereerste b_0 blijft buiten beschouwing) eener FOURIER'sche reeks, hetzij men die beschouwt als eene bepaling van de gemiddelde, of waarschijnlijkste ligging der eindpunten van de voerstralen, óf als eene bepaling van de ligging van het zwaartepunt, in ieder geval geeft elke rij tot resultaat eene grootheid bepaald door twee coördinaten en de bewerking moet daarin bestaan dat:

- 1°. het constant gedeelte wordt afgezonderd.
- 2°. zoo noodig de ligging der waarschijnlijkheids-assen wordt bepaald.
- 3°. de middelbare en waarschijnlijke fout wordt berekend.

Dezelfde methode kan natuurlijk ook toegepast worden op groepen van perioden, 't geene eene aanmerkelijke besparing geeft van arbeid, maar ook eenige mindere duidelijkheid van het resultaat.

3. Het onderzoek der 36jarige reeks van barometer-daggemiddelden voor Batavia is voortgezet op dezelfde wijze als het vroeger is opgezet. De rangschikking is geschied volgens 25.8 dagen en groepen van 30 rijen zijn gevormd, zoodat uit de 510 perioden 17 groepen konden worden verkregen.

Het resultaat der bewerking is neergelegd in Tabel I.

T A B E L I.

Groep nummer.	Amplitude, Argument.		Componenten.		Verschillen.	
	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>a</i> ₁	<i>b</i> ₁	Δ_a	Δ_b
	mM.		mM.	mM.	mM	mM.
1	0.69	2.2°	-0.32	-0.61	-0.86	0.96
2	7.63	287°	2.17	-7.32	1.63	-5.75
3	3.45	285°	0.87	-3.34	0.33	-1.77
4	3.44	68°	1.16	2.91	0.62	4.48
5	1.52	215°	-1.24	-0.88	-1.78	0.69
6	2.08	204°	-1.90	-0.84	-2.44	0.73
7	4.52	345°	4.38	-1.14	3.84	0.43
8	1.21	104°	-0.30	1.17	-0.84	2.74
9	1.78	270°	0.01	-1.78	-0.53	-0.21
10	6.31	318°	4.71	-4.20	4.17	-2.63
11	5.00	191°	-4.86	-1.17	-5.40	0.40
12	3.25	266°	-0.20	-3.24	-0.74	-1.67
13	6.00	255°	-1.54	-5.80	-2.08	-4.23
14	2.18	317°	1.59	-1.49	1.05	0.08
15	3.34	195°	-3.23	-0.84	-3.77	0.73
16	2.60	83°	0.34	2.57	-0.20	4.44
17	7.62	354°	7.58	-0.76	7.04	0.81
Gemidd.	1.66	289°	0.54	-1.57		

Indien er dus eene periode van 25.8 dagen bestaat, dan bedraagt de amplitude daarvan niet meer dan

$$\frac{1.66}{30} = 0.055 \text{ mM.}$$

Door aftrekking van dit, als constant gedeelte der grootheden te beschouwen, restant vindt men de verschillen der twee laatste kolommen, die dus als de componenten van even zoovele toevallige storingen zijn op te vatten.

4. De waarde van het verkregen resultaat kan op verschillende wijzen worden beoordeeld.

De eerste, voor de hand liggende, manier is dat men de reeks splitst in twee of meer groepen. Uit de gegevens der Tabel I vindt men terstond :

	A	C	Aantal perioden.
Groep 1— 6	1.68 mM.	274°	180
„ 7—11	1.62	299°	150
„ 12—17	1.76	296°	180
„ 1— 9	1.42	292°	270
„ 10—17	1.95	286°	240
„ 1—17	1.66	289°	510

Hieruit blijkt, dat er zeker eene aanwijzing is voor het werkelijk bestaan eener periodieke beweging, en tevens, dat de rangschikking is geschied volgens eene periode, die voor de amplitude eene maximum waarde geeft.

De waarschijnlijkheid, dat men uit zuiver toevallige grootheden, voor welke alle richtingen even waarschijnlijk zijn, drie malen eene phase ϵ treft, die binnen 30° is besloten, is $\left(\frac{1}{12}\right)^2$, waarbij nog niet in aanmerking is genomen, dat ook de amplituden onderling goed overeenstemmen.

5. Eene tweede methode, eveneens voor de hand liggend, is de directe beschouwing van het resultaat der rangschikking, gesplitst in twee of meer groepen.

Fig. 1 geeft eene graphische voorstelling van de verschillen gegevens in de drie laatste kolommen der Tabel II. (p. 13).

Men ziet hoe, in 't algemeen, het verloop der beide reeksen vrij wel overeenstemt en tevens, dat de neiging tot dubbele periode met een maximum op den 8—9^{den} dag, die in de eerste groep van Tabel II nog vrij scherp optreedt, bij voortgezette rangschikking wederom verdwijnt.

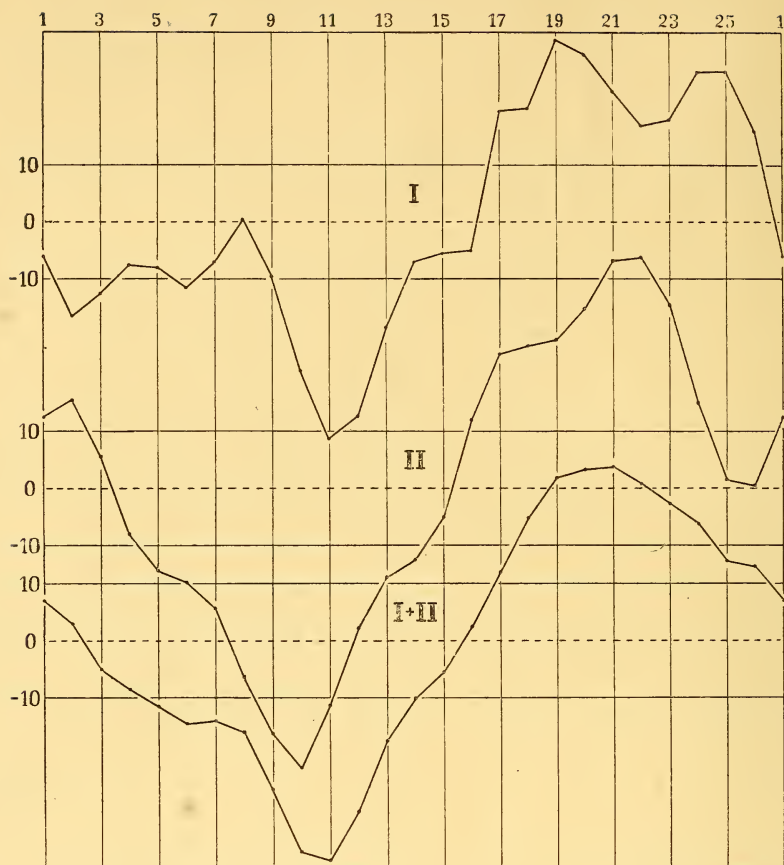
Acht men deze resultaten overtuigend genoeg om eene nadere bepaling van den duur der periode te wettigen, dan kan dit gemakkelijker geschieden door de argumenten C der Tabel I te varieeren, achtereenvolgens met $\frac{1}{2}x$, $\frac{3}{2}x$, $\frac{5}{2}x$ enz., zoodat x beduidt de verandering in argument der groep, die leidt tot de meest constante waarde van C ; op deze wijze verkrijgt men, ter bepaling van C , en tevens van de meest gunstige periode in de onmiddellijke nabijheid van 25.8 dagen, 17 vergelijkingen, die, indien men aan elke

T A B E L II.

Resultaat der rangschikking. Gemiddelde waarden na aftrekking der
totaalgemiddelden.

Aantal groepen.	I	II	I+II	Drie aan drie genomen.		
				I	II	I+II
	270	240	510	270	240	510
	<i>mM.</i>	<i>mM.</i>	<i>mM.</i>	<i>mM.</i>	<i>mM.</i>	<i>mM.</i>
1	-0.016	0.034	0.036	-0.012	0.025	0.04
2	-0.055	0.047	-0.008	-0.033	0.031	0.006
3	-0.026	0.012	-0.009	-0.025	0.011	-0.010
4	0.006	-0.028	-0.011	-0.015	-0.016	-0.017
5	-0.026	-0.033	-0.030	-0.016	-0.029	-0.023
6	-0.028	-0.025	-0.028	-0.023	-0.033	-0.029
7	-0.014	-0.042	-0.028	-0.014	-0.042	-0.028
8	0.010	-0.060	-0.029	0.001	-0.066	-0.032
9	0.015	-0.096	-0.038	-0.019	-0.086	-0.052
10	-0.072	-0.103	-0.088	-0.052	-0.098	-0.074
11	-0.098	-0.094	-0.097	-0.076	-0.076	-0.077
12	-0.059	-0.032	-0.047	-0.068	-0.049	-0.060
13	-0.047	-0.021	-0.036	-0.037	-0.031	-0.035
14	-0.004	-0.041	-0.022	-0.014	-0.025	-0.020
15	0.009	-0.013	-0.003	-0.011	-0.010	-0.011
16	-0.037	0.024	-0.009	-0.010	0.024	0.005
17	-0.001	0.061	0.027	0.039	0.047	0.024
18	0.054	0.058	0.055	0.040	0.050	0.043
19	0.067	0.031	0.049	0.064	0.052	0.057
20	0.071	0.069	0.069	0.059	0.063	0.060
21	0.039	0.091	0.062	0.046	0.080	0.061
22	0.029	0.079	0.051	0.034	0.081	0.055
23	0.035	0.074	0.052	0.036	0.064	0.048
24	0.046	0.038	0.041	0.053	0.030	0.041
25	0.077	-0.024	0.028	0.053	0.003	0.028
26	0.036	-0.006	0.015	0.032	0.001	0.026
Gemidd.	0.097	0.103	0.097			

Fig. 1.



vergelijking het gewicht toekent der bijbehorende amplitude, den vorm aannemen :

$$0.69 (-118^\circ + \frac{1}{2} x) = 0.69 C$$

$$7.63 (-73^\circ + \frac{3}{2} x) = 7.63 C \text{ enz.}$$

waaruit zonder veel moeite de waarschijnlijkste waarden van C en x kunnen worden afgeleid.

Zooals te verwachten was, verschilt het resultaat dezer berekening weinig met dat der rangschikking zelve. Men vindt :

$$x = -1^\circ.09 \quad C = 291^\circ \quad T = 25.803^d.$$

Daar n.l. één dag overeenkomt met $\frac{360^\circ}{25.8}$, en x de verandering beduidt per 30 rijen, beteekent eene verandering van 't argument van $1^\circ.09$:

$$\frac{1.09}{30} \cdot \frac{258}{3600} = 0.003^d.$$

6. Past men op de verschillen Δ_a en Δ_b der Tabel I de onder § 2 aangegeven methode toe, dan vindt men :

$$\Sigma M_x^2 = 145.05 \quad \Sigma M_y^2 = 212.02 \quad \Sigma M_{xy}^2 = -12.44.$$

Uit de bekende formule voor de richting der hoofd-traagheidsassen :

$$\text{tang } 2 \psi = \frac{2M_{xy}^2}{M_x^2 - M_y^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (10)$$

die voortvloeit uit de voorwaarde, dat, wanneer de coördinatenassen samenvallen met de hoofdassen het deviatie- of centrifugaalmoment M_{xy}^2 nul wordt, vindt men :

$$\psi = -18^\circ 35'$$

voorts, voor de traagheidsassen en N :

$$M_x^2 = 6.45 \quad M_y^2 = 8.72 \quad N = 0.0035.$$

Uit de form. (9) volgt dan :

$$r = 0.829.$$

Hieruit blijkt, dat inderdaad alle richtingen der toevallige grootheden in dit geval even waarschijnlijk zijn, zoodat men met recht kan aannemen :

$$r = 0.833.$$

De middelbare en waarschijnlijke fout voor elke groep worden dan :

$$M = 3.89 \quad W = 3.24.$$

De einduitkomst per groep van 30 rijen :

$$1.76 \text{ mM.} \cdot \cdot \cdot \text{ waarsch. fout } 0.810$$

of voor elke rij

$$0.055 \text{ mM.} \cdot \cdot \cdot \text{ waarsch. fout } 0.027$$

zoodat de waarschijnlijke onzekerheid der einduitkomst juist de helft bedraagt van de amplitude zelve.

7. Men kan zich ook de vraag stellen, wat er moet geschieden, indien de argumenten der Tabel I met bepaalde grootheden worden gevarieerd, zoodanig, dat de variatie overeenkomt met rangschikking naar andere, zeer weinig van 25.8 verschillende perioden.

De grens dier variatie is bepaald door de grootte der groepen, welke men alleen in haar geheel kan verschuiven, en de variatie heeft alleen eenigen zin, zoolang kan worden aangenomen, dat elke groep op zich zelve geene noemenswaardige wringing ondergaat.

Indien men getallen, waarin eene periode T is gelegen, rangschikt volgens eene periode T' in m kolommen, dan zal, indien de waarde bij den aanvang der tijdtelling wordt voorgesteld door :

$$A \cos C$$

en

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad n' = \frac{2\pi}{T'}$$

de inschrijving in the t^{de} kolom van de p^{de} rij (t en p geteld van af nul) den vorm aannemen :

$$A \cos \left(\frac{2\pi}{m} \cdot \frac{n}{n'} - C + 2\pi p \frac{n}{n'} \right).$$

De som van R rijen is dan :

$$n' - n = \delta \quad a = \frac{T\delta}{2}$$

$$A \frac{\sin Ra}{\sin a} \cos \left[\frac{2\pi}{m} T + \frac{\delta T'}{m} T - C + (R - 1) a \right].$$

Als δ klein is kan men in den tweeden term onder 't cosinus-teeken stellen :

$$T' = T \quad T = \frac{m}{2}$$

waardoor de formule wordt :

$$A \frac{\sin Ra}{\sin a} \cos \left(\frac{2\pi}{m} T - C + Ra \right) (11)$$

De som eener tweede groep van R perioden wordt :

$$A \frac{\sin Ra}{\sin a} \cos \left(\frac{2\pi}{m} T - C + 3 Ra \right) \text{ enz.}$$

Is de beweging zuiver periodiek en zijn alle amplituden even groot, dan zal derhalve de amplitude der som een hoofdmaximum RA hebben voor $a = 0$, en voorts secundaire maxima voor alle waarden van a , die voldoen aan de voorwaarde :

$$R \text{ tang } a = \text{tang } Ra$$

d. i., als $R = 510$, voor waarden van a , die overeenkomen met perioden van :

$$\left. \begin{array}{l} 25.872^d \\ 25.728 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 25.925^d \\ 25.675 \end{array} \right\}$$

maar die maxima zullen eene amplitude vertoonen resp. 5 en 8 malen kleiner dan het hoofdmaximum.

Voorts zal de amplitude 0 worden zoo dikwijls

$$Ra = \pi, 2\pi, 3\pi \text{ enz.}$$

d. i. voor perioden van :

$$\left. \begin{array}{l} 25.850^d \\ 25.750 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} 25.900^d \\ 25.790 \end{array} \right\}$$

De bovenste kromme der fig. 2 geeft een beeld van het verloop dezer theoretische amplituden.

Stelt men :

$$T = 25.8 \quad T' = 25.8 \pm x$$

dan vindt men voor de verandering per groep, overeenkomende met 0.01 dag (x in den noemer verwaarloozend) :

$$30 \alpha = \frac{30 \cdot \pi \cdot x}{25.8 \pm x} = 2^{\circ}.094.$$

De variatie is voortgezet tot $x = \pm 0.15$ als uiterste grens, 't geen voor elke groep eene phase-verandering beduidt van ongeveer 31° . De amplitude der groep-som wordt hierdoor bijna niet geïnfleueerd, deze wordt :

$$\frac{\sin Ra}{\sin \alpha} = 28.58$$

in de plaats van 30.

Bij vermeerdering van R zullen de secundaire maxima steeds kleiner worden ten opzichte van en steeds dichter komen te liggen bij het hoofdmaximum.

T A B E L III.

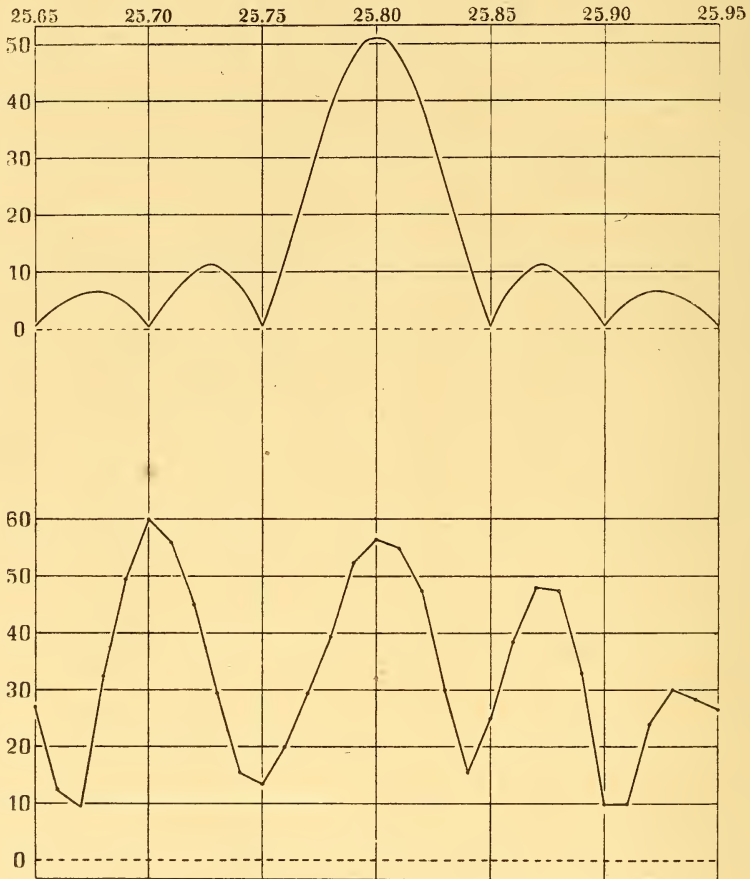
Resultaat der rangschikking naar verschillende perioden door verschuiving.

Periode	A	C	Periode	A	C
	mM.			mM.	
d.			d.		
25.65	13.4	351°	25.81	27.4	247°
25.66	6.4	298°	82	23.7	217°
25.67	4.8*	148°	83	15.0	169°
25.68	16.4	76°	84	7.6*	84°
25.69	24.8	34°	85	12.6	344°
25.70	<u>30.0</u>	345°	86	19.2	286°
25.71	27.9	315°	87	<u>24.0</u>	244°
25.72	22.5	265°	88	23.8	207°
25.73	14.6	231°	89	16.5	174°
25.74	7.8	171°	90	5.1*	132°
25.75	6.7*	88°	91	4.9	301°
25.76	10.1	33°	92	11.9	262°
25.77	14.7	9°	93	<u>15.0</u>	232°
25.78	19.8	346°	94	13.6	212°
25.79	26.4	322°	95	13.3	300°
25.80	<u>28.3</u>	289°			

In Tabel III is het resultaat dezer verschuiving samengesteld in den vorm van totaalsommen der 17 groepen en in fig. 2 zijn, ter onderlinge vergelijking, de theoretische en werkelijk gevonden amplituden in teekening voorgesteld, de laatstgenoemden door de onderste kromme lijn.

Ten einde die vergelijking gemakkelijker te maken is voor de amplitude der theoretische periode aangenomen 0.1 en zijn de sommen der gevonden waarden met twee vermenigvuldigd.

Fig. 2.



Uit de tabel en de teekening blijkt dat er inderdaad minima en secundaire maxima worden gevormd en, althans wat de eerste minima betreft, ook op de goede plaats, maar dat de secundaire maxima, in stede van klein te zijn ten opzichte van 't hoofdmaximum, zooals te verwachten was, even groot zijn en, aan de linkerzijde vooral, niet met den theoretischen periodenduur overeenstemmen.

Dit resultaat kan op drieërlei wijze worden geïnterpreteerd.

a. Men kan aannemen, dat alle drie perioden 25.80, 25.70 en 25.87 een gevolg zijn van eene zuiver toevallige verdeling der groottheden.

b. Men kan aannemen, dat voor de periode van 25.8 dagen althans eene indicatie bestaat, terwijl de beide overige als gevolg der ongelijkmatige verdeling der groep-amplituden moet worden opgevat, en dus bij toeneming van 't aantal perioden zullen verdwijnen.

c. Men kan aannemen dat alle drie perioden een gelijk recht van bestaan hebben, dat, bij voortgezette rangschikking, voor alle zal worden bevestigd.

Uit den aard van 't probleem kan alleen eene werkelijk voortgezette rangschikking over nog een twintigtal jaren een beslist antwoord op deze vragen mogelijk maken. Het eenige, wat op dit oogenblik te doen valt, is het vormen van een vrij ruw waarschijnlijkheidsoordeel door de vorming van twee of drie groepen, zooals dit hierboven voor de rangschikking naar 25.8 dagen is geschied.

Periode	25.70 ^d		25.87 ^d	
	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>A</i>	<i>C</i>
Groep 1—6	1.60 mM.	6°	1.40 mM.	252°
„ 7—11	3.35 „	292°	0.73 „	165°
„ 12—17	2.48 „	27°	2.52 „	253°
„ 1—9	1.11 „	335°	1.22 „	216°
„ 10—17	2.53 „	349°	1.88 „	263°

Hieruit blijkt dat, voorzooverre uit dit criterium eene conclusie mag worden getrokken, de waarschijnlijkheid van het werkelijk bestaan, of liever van de bestendigheid dezer periodieke bewegingen aanmerkelijk geringer is dan van die der periode van 25.80 dagen.

Bij deze loopen de argumenten der drie groepen niet meer dan 25°, hier resp. 88° en 95° uiteen; de kansen voor toeval zijn derhalve, aannemende 30° en 90° :

$$\frac{1}{144} \text{ en } \frac{1}{16}$$

d. i. ruim 8 malen grooter, waarbij nog niet in rekening is gebracht, dat ook de amplituden bij de nieuwe perioden in veel grootere mate uiteenloopen dan bij de eerste, zoodat men de waarschijnlijkheid voor toeval op 10 maal grooter kan stellen.

De berekening der waarschijnlijke fout (onzekerheid) van het groep-resultaat geeft deze grootere waarschijnlijkheid wel aan, maar geenszins in dezelfde mate.

	Amplitude.	Waarsch. fout.
25.80	1.76 mM.	0.810
24.70	1.76 „	0.916
25.87	1.41 ..	0.830

7. Past men, voor zooverre dit mogelijk is, de verschillende criteria toe op de door SCHUSTER gepubliceerde gegevens omtrent rangschikking volgens 26 en 27 dagen van daggemiddelden der magnetische declinatie voor Greenwich, dan vindt men voor de groep-sommen, die hier resp. elk 14 en 13.5 perioden omvatten:

		26 ^{d.}		27 ^{d.}	
		A_1	C	A_1	C
Groep	1—5	6'.19	267°	3'.53	351°
	6—10	4.08	243°	2.19	88°
	11—15	3.09	351°	4.75	354°
	16—20	1.45	152°	7.05	203°
	21—25	2.88	229°	7.56	298°

waaruit volgt voor de waarschijnlijkheid van toeval:

$$26 \text{ dagen} \dots \dots \dots \left(\frac{283}{360} \right)^4 = 0.38$$

$$27 \text{ dagen} \dots \dots \dots \left(\frac{246}{360} \right)^4 = 0.20.$$

De einduitkomst is:

26 dagen	0'.480	waarsch. fout	0'.343
27 „	0'.405	„ „	0'.415

Indien men de argumenten, gegeven in Tabel VIII van SCHUSTER's verhandeling voor rangschikking naar 26 dagen, zoodanig varieert, dat de uitkomst equivalent is met eene rangschikking naar 25.80 dagen dan vindt men:

		A_1	C
Groep	1—5	10'.83	54°
	6—10	5.72	104°
	11—15	4.88	77°
	16—20	4.61	44°
	21—25	4.03	89°

Daar de argumenten C niet meer dan 60° uiteenloopen, bedraagt de waarschijnlijkheid voor toeval hier niet meer dan:

$$\frac{1}{64}$$

De einduitkomst, berekend voor eene groep van 14 perioden, is:

1'.118 waarsch. fout. 0'.292

Eene nadere berekening, volgens de sub 5 aangegeven methode, geeft dan voor den juisten duur der periode:

25.804 dagen $C = 55.^\circ 6$.

Uit deze berekeningen blijkt dat, bij rangschikking naar 26 en 27 dagen, eene uitkomst wordt verkregen, waarvan de waarschijnlijke onzekerheid bijna even groot is als de gevonden waarde zelve, terwijl, bij rangschikking naar 25.8 dagen, de waarschijnlijke fout bijna vier malen kleiner is dan de gevonden amplitude zelve. Voorts kan uit dit onderzoek, in verband met dat van SCHUSTER, de conclusie worden getrokken, dat de elementen van het aardmagnetisme voor stations op hooge breedten tot een meer beslist oordeel omtrent het werkelijk bestaan der periode in quaestie leiden, dan meteorologische waarnemingen verricht in tropische stations.

Indien men, op grond der gegeven resultaten, het bestaan eener periode van 25.8 dagen in barometerstanden voor Batavia waarschijnlijk acht, dan moet men eene aanmerkelijk grootere waarschijnlijkheid toekennen aan de werkelijkheid dier periode in de reeks van declinatie waarnemingen voor Greenwich.

Scheikunde. — De Heer LOBRY DE BRUYN spreekt, mede namens Dr. S. TIJMSTRA „over het mechanisme der salicylzuursynthese (Mededeeling no. 9 over intramoleculaire verschuivingen).

1. De wetenschappelijk zoowel als technisch zoo belangrijke salicylzuursynthese uit koolzuur en phenolnatrium, in 1859 door H. KOLBE ontdekt, is herhaalde malen het onderwerp van onderzoek geweest. De opheldering van dit proces heeft vele moeilijkheden geboden. KOLBE zelf heeft eenige malen zijne opvatting er over gewijzigd, zonder tot eene bevredigende voorstelling te komen. Deze scheen te zijn verkregen, toen E. BAUMANN de veronderstelling uitsprak, dat de synthese van het salicylzuur geheel analoog verloopt aan de door hem gevondene omzetting van phenylzwavelzuurnatrium in phenol-sulfonzuurnatrium bij verhitting in drogen toestand (aldus: $C_6H_5OSO_3Na \rightarrow p. C_6H_4OH.SO_3Na$) ¹⁾ en dat zich dus intermediair phenylkoolzure natrium zou vormen ²⁾. B. trachtte echter te vergeefs

¹⁾ Ber. 17. 1910.

²⁾ Men zie hierover eene mededeeling van den Heer J. OLIE in een volgend verslag.

dit nog onbekende carbonaat te bereiden om daardoor zijn vermoeden te controleeren. Eerst aan B. SCHMITT ³⁾ is het gelukt dit lichaam in zuiveren toestand te verkrijgen, zijne eigenschappen nader te bestudeeren en zoo, naar men meende definitief, het proces der salicylzuurvorming te verklaren. SCHMITT verkreeg uit koolzuur en phenolnatrium het phenylkoolzure natrium en toonde aan dat, indien men dit lichaam op 120° à 130° in een gesloten apparaat verhit, het zich quantitatief in (naar hij meende) salicylzure natrium omzet. De salicylzuursynthese verliep dus volgens S. als volgt:



De COONa-groep zou dan uit de zijketen treden en met een o waterstofatoom van de kern van plaats wisselen.

Deze opvatting is sinds 1885 wel algemeen als de juiste aangenomen.

SCHMITT stelde nu nog vast, dat phenylkoolzure natrium in een open vat bij 120° verhit, snel zijn koolzuur geheel yerliest en dat slechts phenolnatrium achterblijft. Verhit men echter snel hooger (180° à 200°), dan vormt zich naast koolzuur en phenolaat salicylzuurnatrium en wel des te meer hoe sneller de hoogere temperatuur wordt bereikt. Het maakt dus den indruk dat het phenylkoolzure natrium bij 120° een tamelijk merkbare dissociatiespanning bezitten moet, dat bij die temperatuur de vormingsnelheid van 't salicylzuur nog niet zeer groot is maar dat deze laatste met de temperatuur zeer snel stijgt terwijl de dissociatiespanning blijft onder 1 atm. of wel de ontleding zeer langzaam verloopt.

Bij de uitvoering der oorspronkelijke methode van KOLBE werkt men nu niet, zooals SCHMITT, in een gesloten apparaat, maar in een open; een koolzuurstroom wordt dan voortdurend in het phenolnatrium bevattend apparaat geleid, eerst bij lagere temp. (110°—120°) daarna langzaam stijgend bij 180° à 190°. De voorstelling is nu deze, dat eerst bij de lagere temperatuur (110°) het phenylkoolzuurnatrium ontstaat, waaruit dan bij hoogere temperatuur het salicylaat door verschuiving geboren wordt. Men zou dan moeten aannemen dat het werken in een koolzuur atmosfeer ten gevolge heeft, dat de dissociatie van het carbonaat op een bepaald constant met de temperatuur zich wijzigend bedrag, kleiner dan een atmosfeer, gehouden wordt.

Bekend is, dat bij de uitvoering volgens KOLBE, tengevolge der vrij hooge temperatuur (180 à 190°), twee mol. salicylzure natrium of één mol. van dit zout met één mol. phenolaat, zoodanig op elkaar

³⁾ J. pr.-Ch. 2). 31. 397 (1885).

heeten in te werken, dat dinatrium-salicylaat zich vormt, naast koolzuur en phenol. De helft van het phenol wordt dus slechts omgezet, terwijl volgens SCHMITT's methode welke een lagere temperatuur toepast al het phenol in salicylzuur overgaat.

2. Het scheen nu van belang de voorwaarden waaronder en de snelheid waarmee het phenylkoolzuurnatrium door intramoleculaire verschuiving werd geacht zich in salicylzuurnatrium om te zetten, nader te bestudeeren. Reacties toch, waarin een vast lichaam zich omzet in een isomeer, dat eveneens vast is, zijn zeer weinig of niet uitvoerig bestudeerd.

In het onderhavige geval moest nu echter vooraf nagegaan worden in welke mate het temperatuurgebied der dissociatie van het phenylkoolzuurnatrium samenhang met dat der omzetting dezer laatste stof in zijn isomeer. Van die dissociatie toch was quantitatief niets bekend.

Het phenylkoolzuurnatrium nu werd in zuiveren toestand bereid door droog poeder van natriumphenolaat gedurende eenige weken in aanraking te brengen met door P_2O_5 gedroogd koolzuurgas, dat onder een druk van $\pm 1\frac{1}{3}$ atm. stond. Door weging werd vastgesteld of 1 mol- CO_2 was geabsorbeerd; de analyse van het product bewees daarenboven zijne zuiverheid (Berek. 14.4 pCt. Na : gev. 14.2 en 14.7 pCt.).

Voor de bepaling van de dissociatiespanning bij verschillende temperaturen werd nu het carbonaat in een apparaat gebracht voorzien van een manometerbuis met kwik gevuld, en met een kwikluchtpomp verbonden. Reeds de eerste proef gaf een onverwacht en belangrijk resultaat; nl. dat de dissociatiespanning van het carbonaat welke bij gewone temp. reeds merkbaar is, bij eene temp. van $\pm 85^\circ$ een atmosfeer heeft bereikt of deze iets overtreft. Bij eene temp. van $\pm 100^\circ$ komt de dissociatiespanning eerst boven die van een atm. om langzamerhand ten gevolge van absorptie van CO_2 onder vorming van salicylzuur, te dalen.

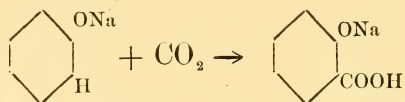
De conclusie, die uit deze proef, welke door meerdere, welke eenigszins andere cijfers gaven werd bevestigd ¹⁾, direct kon worden getrokken is voor de nog heerschende opvatting van het mechanisme der salicylzuursynthese beslissend. Het phenylnatriumcarbonaat kan bij de KOLBE'sche salicylzuursynthese onmogelijk het tusschenproduct zijn om de eenvoudige reden, dat het bij de temperaturen, waarbij wordt

1) Het evenwicht stelt zich buitengewoon langzaam in. Ook gaven verschillende proeven, zooals gezegd, voor de dissociatiespanning van het phenylnatriumcarbonaat geen overeenstemmende resultaten. Wellicht houdt het zeer fijne, amorphe poeder, niettegenstaande het apparaat eenige malen na vulling met CO_2 werd leeggepompt, sporen lucht hardnekkig vast.

gewerkt (110 à 130° en hooger) niet kan ontstaan. Dat het bij toepassing der gewijzigde methode van SCHMITT, dus bij hoogen koolzuurdruk en lagere temp. (120 à 130°) een rol speelt, is daarom nog niet uitgesloten, daar het carbonaat ten minste in de toestellen aanwezig zijn kan; die onderstelling is echter, zooals nader uit het volgende blijkt, niet waarschijnlijk, hoewel mogelijk.

Men kan nu ook gemakkelijk bewijzen, dat indien men volgens KOLBE salicylzuur bereidt, het geen zin heeft om, zooals in sommige handleidingen is voorgeschreven ¹⁾, eerst bij een temperatuur van 110° à 130° het koolzuurgas over het natriumphenolaat te leiden en eerst daarna langzamerhand tot 180° à 200° te verhitten. De proef leert nl. gemakkelijk dat, ook indien men gedurende meerdere uren bij 110° à 130° CO₂ leidt over phenolaat er bijna geen merkbare gewichtsvermeerdering optreedt ²⁾; men kan direct op hoogere temperatuur verhitten.

3. Na dit resultaat bleef nu echter de vraag bestaan, welke is dan de ware aard der salicylzuursynthese, in 't algemeen dus; welk is het mechanisme der carboxyleering van phenolaten? De voorstelling, die zich in de eerste plaats aanbood, is ons gebleken de juiste te zijn; het phenolaat addeert zich aan koolzuur onder vorming van phenolnatrium-*o*-carboonzuur,



een produkt dus, dat isomeer is met het eigenlijke natriumsalicylaat C₆H₄OH.COONa.

Men kan dit nieuwe lichaam het zuiverst bereiden door phenylnatriumcarbonaat in toegesmolten buizen op 100° gedurende vier etmalen te verhitten; bij het openen der buizen is druk niet aanwezig en het carbonaat is geheel verdwenen; werkt men bij hoogere temp. dan heeft de vorming sneller plaats, het produkt is echter donkerden gekleurd; ook bij 85° is zijn ontstaan merkbaar. Uit de oplossing in droge acetone door petroleum-aether gepraecipiteerd, verkrijgt men het als fijn, kristallijn, nagenoeg wit poeder, niet hygroscopisch ³⁾.

De isomerie met het gewone natriumsalicylaat werd nu bewezen door het verschil in gedrag tegenover CH₃I; nadat deze stof gedurende eenige etmalen op ± 145° met het laatste zout verhit was, had volstrekt geen

¹⁾ GATTERMANN, Praxis d. organ. Chem. 297. etc

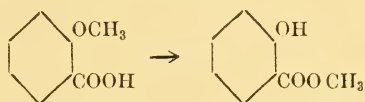
²⁾ De zeer geringe gewichtstoename komt op rekening van zich reeds vormend salicylzuur.

³⁾ Onderzocht wordt nog of het droge of het opgeloste C₆H₄ONa.CO₂H ook overgaat in C₆H₄OH.COONa.

omzetting plaats gevonden, terwijl uit het phenolnatrium-*o*-carbonzuur, naast NaI, eene rijkelijke hoeveelheid eener vloeistof ontstaan was.

Tegen onze verwachting in echter bleek deze stof na zuivering niet het methylaether-salicylzuur (of anisol-*o*-carbonzuur) $o\text{-C}_6\text{H}_4\text{OCH}_3\text{.COOH}$ (eene vaste bij 98° smeltende stof) te zijn, maar zijn isomeer het methylsalicylaat $\text{C}_6\text{H}_4\text{OH.COOCH}_3$.

De tegenspraak, waarop wij hier waren gestuit, werd nu door de volgende proeven volkomen bevredigend opgelost. Indien men het anisol-*o*-carbonzuur op zich zelf verhit aan een opstijgenden koeler (op 260° à 270°) dan heeft, naast eene geringe ontleding in koolzuur en anisol, eene isomerisatie plaats, waarbij de ester gevormd wordt. Men heeft dus de verschuiving :



Bij $\pm 150^\circ$ was na verhitting gedurende zeven etmalen slechts $\frac{1}{8}$ deel van den methylaether in den ester omgezet ¹⁾. Echter bleek, dat de aanwezigheid van een spoor phenolnatrium-*o*-carbonzuur (hoogstens 1%) de verschuiving zeer bevordert; na 24 u. toch was zij bij 150° bijna volledig verlopen. Voor CH_3I geldt hetzelfde hoewel in mindere mate.

De conclusie uit het geheel der zoo juist beschreven proeven is dus deze, dat het salicylzuur als phenolnatrium-*o*-carbonzuur direct ontstaat door additie van phenolnatrium aan koolzuur in dien zin, dat het laatste zich schuift tusschen een orthokoolstof van de benzolkern en het daaraan gebonden waterstofatoom. De snelheid dezer additie neemt voor een bepaald traject ($\pm 80^\circ$ tot $\pm 110^\circ$) ²⁾ sterk toe. Het phenylnatriumcarbonaat speelt bij dit proces geen rol.

Met deze nieuwe opvatting in overeenstemming is ook de waarneming dat phenolnatrium-*o*-carbonzuur, met phenolnatrium verhit, bij $\pm 160^\circ$ rijkelijk phenol en dinatriumsalicylaat geeft, terwijl het natriumsalicylaat zulks niet doet of in zeer geringe mate.

Opmerkelijk is dus het verschil in gedrag van het phenolaat tegenover koolzuur al naar de hoogte der temperatuur. Terwijl het bij gewone temperatuur zich op de zelfde wijze als natriumhydroxyde addeert, blijft bij hoogere temperatuur de ONa-groep intact, dus aan de kern gebonden, en schuift het CO_2 als 't ware zich in tusschen de H en C van een orthostandige CH-groep.

¹⁾ Met behulp van lakmoes kunnen de twee isomeren naast elkaar getitreerd worden.

²⁾ Bij 80° was na ± 3 weken uit ± 5 gr. van het zout een paar honderd milligram salicylzuur gevormd.

4. Het is bekend dat de salicylzuursynthese het belangrijkste voorbeeld is van eene reeks van analoge syntheses. Het carboxyleeren van phenolaten is eene op ongeveer alle phenolen toe te passen methode. Dat het mechanisme in alle of althans in de meeste gevallen hetzelfde is als dat, hetwelk voor de salicylzuursynthese thans als geldend moet worden aangenomen, is hoogstwaarschijnlijk. Zonder dat hier ter plaatse bij alle bijzonderheden, die bij de talrijke onderzoeken zijn gebleken, zal worden stil gestaan, moge er op gewezen worden, dat het carboxyleeren van sommige meerwaardige phenolen, bijv. van resorcine, volgens SENHOFER en BRUNNER ¹⁾, reeds plaats vindt in waterige oplossingen door ammoniumcarbonaat bij gewone temperatuur onder den invloed van het zonnelicht, of daarop, dat die van phloroglucine volgens WILL ²⁾ snel verloopt door zachte verwarming met eene waterige oplossing van kaliumbicarbonaat. Dat bij deze reactie's een estercarbonaat intermediair zou ontstaan wordt hoogst onwaarschijnlijk, indien men bedenkt, dat deze stoffen door water buitengewoon gemakkelijk onder ontwikkeling van koolzuurgas worden ontleed.

Aan den anderen kant is er eene waarneming, welke er op wijst, dat een carbonaat wel degelijk als noodzakelijk tusschenproduct kan optreden. SCHMITT en ENGELMANN ³⁾ deelen mede, dat uit o. oxychinoline-natrium, met CO₂ volgens KOLBE (dus in een open vat) tot op 200° verhit, geen carbonzuur ontstaat, terwijl volgens SCHMITT's methode (dus onder druk) bij 140°—150° na 7 uur zulks quantitatief plaats vindt. Waar dus nu niet, zooals bij natriumphenolaat, directe additie aan CH optreedt, ligt het voor de hand, de vorming van het carbonaat als tusschenproduct aan te nemen; bij 200° en lager kan het onder gewonen druk niet ontstaan, wel in een gesloten apparaat onder sterken druk.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet een mededeeling: „*Over dispersie-banden in absorptie-spectra.*”

Verschillende omstandigheden hebben invloed op het uiterlijk van absorptielijnen. Bepalen wij ons tot het geval van absorptie in gassen of dampen, dan kunnen wij tot de ruimschoots bestudeerde omstandigheden rekenen de temperatuur, de dichtheid, de drukking in die stoffen, haar snelheid van beweging in de gezichtslijn, de sterkte en de richting van het magnetische veld, waarin zij zich eventueel bevinden. In de hier volgende mededeeling zal blijken, dat ook de

¹⁾ Wien. Akad. 1879. 504.

²⁾ Ber. 18. 1323.

³⁾ Ber. 20. 1217.

anomale dispersie in het absorbeerende gas een zeer aanmerkelijken invloed op het karakter der donkere lijnen kan hebben.

Wanneer het licht een stofmassa doordringt, waarvan de dichtheid niet overal volmaakt dezelfde is, zijn in het algemeen de stralen gekromd. Het sterkst gebogen worden de stralensoorten, waarvoor de brekingsindex van het medium het meest van de eenheid verschilt, dat zijn die, welke in het spectrum ter weerszijden nabij de absorptielijnen thuis behooren. Dit licht verspreidt zich dus in den regel in méér verschillende richtingen door de ruimte, en in den spectroscop zal een kleiner gedeelte ervan worden opgevangen dan van licht, waarvoor de brekingsindex nader bij de eenheid gelegen is.

In een absorptiespectrum moet derhalve steeds op bepaalde plaatsen licht ontbreken tengevolge van dispersie in den absorbeerenden damp, daar deze wel nimmer volmaakt homogeen zal zijn. De bedoelde donkerder plaatsen in het spectrum zullen wij aanduiden door den naam *dispersie-banden*. Zij vallen uit den aard der zaak gedeeltelijk samen met het werkelijke absorptiegebied en kunnen dus lichtelijk aangezien worden voor verbrede absorptielijnen, hetgeen dan ook ongetwijfeld in vele gevallen geschied is.

Wij zullen de eigenschappen onderzoeken, waardoor de dispersiebanden zich onderscheiden van absorptiebanden.

De kromming die een lichtraal van bepaalde golflengte in eenig punt van een niet homogeen middenstof ondergaat, hangt niet slechts af van het verval der optische dichtheid daar ter plaatse, maar ook van den hoek tusschen den straal en de niveaувlakken der dichtheid; zij is het grootst wanneer deze hellingshoek nul is.

Sterke afwijkingen van lichtstralen door anomale dispersie in dampen kan men dus teweeg brengen, vooreerst door te werken met dampmassa's waarbij in klein bestek groote dichtheidsverschillen voorkomen, zooals in de elektrische lichtboog¹⁾, maar ook door, bij matige dichtheidsverschillen in den absorbeerenden damp, het licht lange banen in dezen te doen afleggen zooveel mogelijk onder zeer kleine hoeken met de dichtheidsniveaux.

Deze laatste methode heb ik verkozen, vooral ook met het oog op de uitgebreide toepassing die men van de verschijnselen, welke zich daarbij voordoen, maken kan ter verklaring van talrijke bijzonderheden in de spectra van hemellichamen²⁾.

¹⁾ H. EBERT, BOLTZMANN Festschrift, S. 448.

²⁾ Het abnormale zonnenspectrum van HALE; de eigenaardige lichtverdeling, die ook in gewone omstandigheden vele verbrede Fraunhofersche lijnen vertoont; de veranderingen in het gemiddelde vlekenspectrum, die de elfjarige periode volgen, al deze verschijnselen konden volgens het hier bedoelde beginsel gemakkelijk

De selectief absorbeerende middenstof werd gevormd door een Bunsen'sche vlam van bijzondere gedaante, waaraan een natriumzout in gemakkelijk te regelen hoeveelheid kon worden toegevoerd.

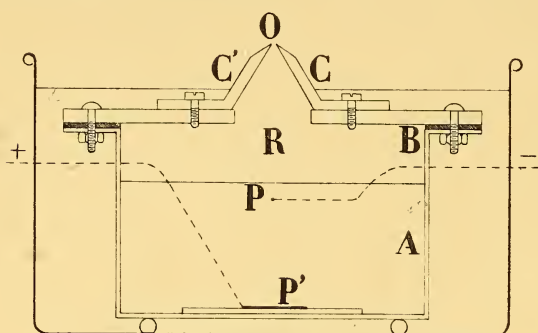


Fig. 1.

Fig. 1 stelt een doorsnede van den brander voor. *A* is een zwaar vlakke koperen bak met flens, lengte 80 cM., breedte 8 cM., diepte 5 cM. De vlakgeschaafde geelkoperen dekplaat *B* is met een groot aantal schroefbouten op de flens bevestigd, terwijl een lederen verpakking de sluiting gasdicht maakt. Op deze dekplaat, die een rechthoekige opening heeft van 75 bij 2 cM., zijn twee zorgvuldig geschaafde geelkoperen linialen *C* en *C'* van 75 cM. lengte verstelbaar vastgeschroefd. Hun stand is zoo geregeld, dat bij *O* een branderopening ontstaat, die over de geheele lengte nauwkeurig dezelfde wijdte van ongeveer 0,1 cM. heeft. Twee vlakke driehoekige koperplaatjes sluiten de prismatische ruimte tusschen *C* en *C'* aan de einden af. De bak wordt gedeeltelijk gevuld met een verzadigde oplossing van natriumcarbonaat; aan de overblijvende ruimte *R* wordt van de uiteinden af een mengsel van lichtgas en lucht toegevoerd door twee (in de figuur niet zichtbare) buizen. Het mengsel komt uit een flesch, waarin door afzonderlijke regelingskranen lucht en lichtgas gedreven worden.

Wanneer men nu zonder verdere voorzorgen de lamp laat branden, sluit zich al spoedig de spleetvormige opening *O* in het midden zoo goed als geheel, tengevolge van de sterke eenzijdige verwarming der linialen. Het was dus noodig den geheelen toestel in een bak met stroomend water te plaatsen, dat tot dicht bij de branderopening reikte. Op die wijze werd een vlam van standvastigen vorm verkregen.

Een paar millimeters onder het niveau van de zoutoplossing is over de geheele lengte van de lamp een platinadraad *P* gespannen, waarvan de einden aan goed geïsoleerde koperdraden gesoldeerd zijn, die door den wand van den bak naar buiten treden, en beide verbonden zijn aan de negatieve pool eener accumulatorenbatterij van

worden verklaard (Verlagen Natuurk. Afd. Dl. XI, p. 650—663, 767—771, Dl. XII, p. 300—334). Van de proefnemingen met een lange natriumvlam, die toen tot staving van de gegeven verklaringen reeds in het kort werden medegedeeld is het thans beschreven onderzoek de voortzetting.

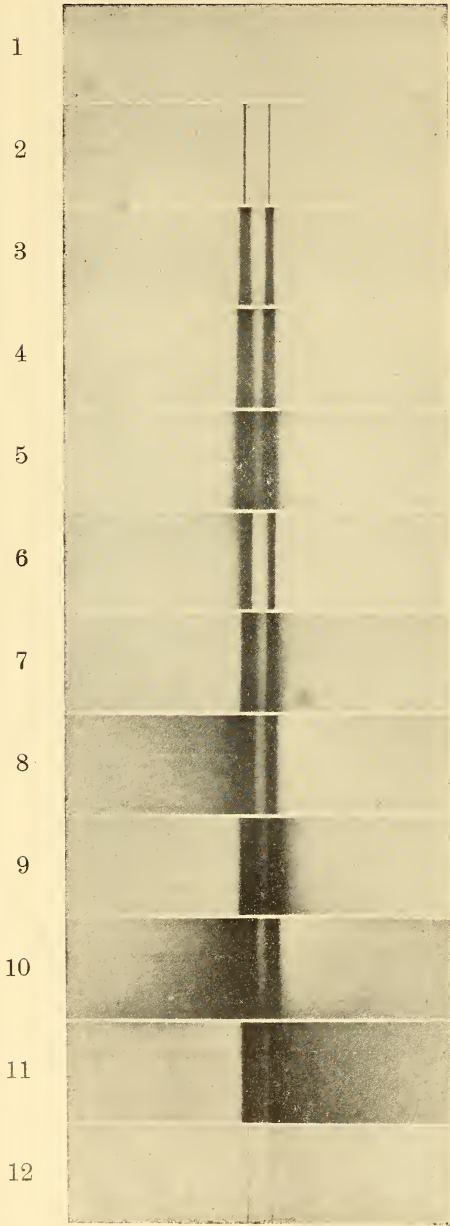


Fig. 3.

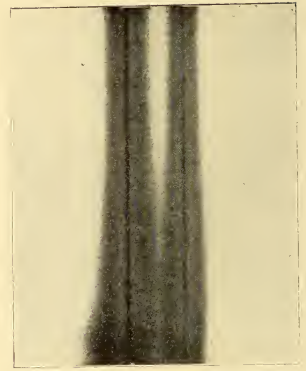


Fig. 4.

20 volt. Van de positieve pool voeren geïsoleerde draden naar de twee uiteinden van een lange platinareep P' , die op een glazen plaat op den bodem van den bak ligt. Sluit men den stroom, dan spatten een ontelbare menigte microscopische vloeistofdruppeltjes in de ruimte R omhoog en de vlam geeft een prachtig gelijkmatig natriumlicht, waarvan men de sterkte op elke gewenschte waarde gemakkelijk brengen en houden kan met behulp van een regelingsweerstand en een ampèremeter.

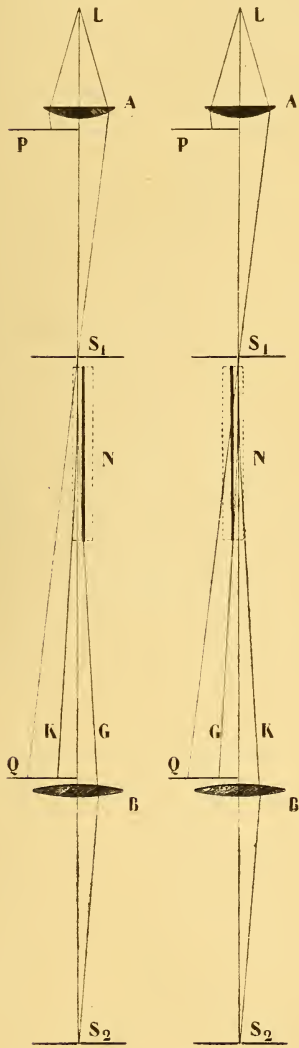


Fig. 2 a. Fig. 2 b.

In Fig. 2, a en b is de loop der lichtstralen door deze lange natriumvlam N voor twee gevallen aangeduid. L is de krater van een booglamp van 20 ampère. De lens A ontwerpt een beeld van den krater op de 1 à 2 mM. breede spleet S_1 , die op haar beurt afgebeeld wordt door de lens B op de spleet S_2 van een rooster-spectrocoop. Door het scherm P wordt bijna de helft van den kegelvormigen lichtbundel, die A verlaat, onderschept, en het gedeelte dat door S_1 , wordt doorgelaten komt bijna geheel op het scherm Q terecht, dat zóó dicht naar de optische as van de beide lenzen geschoven wordt, dat slechts een smalle lichtstrook door het midden van B de spleet S_2 bereikt. De groote gasbrander staat op een slede en een draaitafel en kan met behulp van schroeven nauwkeurig in iederen gewenschten stand worden gebracht.

Bevindt zich de as der vlam (die wij aannemen daar waar de natriumdamp het helderst lichtgevend is, d. i. een weinig boven de blauwgroene kern) juist in de optische as van het lenzenstelsel, dan ziet men in den spectrocoop de beide D -lijnen symmetrisch verbreed. Mocht dit niet volkomen het geval zijn, dan kan men het toch bereiken door kleine verplaatsingen

aan de schermen P en Q te geven.

De opname 1, Fig. 3, (zie de Plaat) heeft betrekking op het geval, dat de vlam N niet brandt; de smalle absorptielijnen komen van sporen natrium in de omgeving van de koolspitsen. Is de vlam aangestoken, dan

doet een zeer zwakke stroom door de sodaoplossing het verschijnsel 2 ontstaan. De opnamen 3, 4 en 5 werden verkregen met stroomsterkten van ongeveer 1, 3 en 6 ampère.

Beschouwen wij thans het geval, voorgesteld in Fig. 2, *a*. Hier is de middellijn der vlam 3 mM. naar rechts verschoven. De smalle lichtbundel, die S_2 bereikt, doordringt slechts het gedeelte van de vlam, waar de dichtheid van den natriumdamp van links naar rechts *toeneemt*. Stralen, voor welke de brekingsindex van den damp groot is, krommen zich in een structuur van dezen aard naar rechts, zooals S_1G . Zij worden niet opgevangen door Q en hebben dus toegang tot de spleet S_2 . Daar kunnen dergelijke golven zelfs in grootere hoeveelheid binnendringen dan zonder de aanwezigheid van den natriumdamp mogelijk zou zijn; want stralen van deze soort, die afkomstig zijn van de onbedekte helft van A en bij rechtlijnige voortplanting onderschept zouden worden door Q , kunnen, nu zij gekromd worden, de lens B doordringen.

Geheel anders is het gesteld met de lichtsoorten, voor welke de natriumdamp een brekingsindex kleiner dan één heeft. Zulke stralen buigen naar links, zooals S_1K , worden door Q opgevangen, en ontbreken derhalve in 't spectrum.

De fotografieën 6, 8 en 10 werden onder deze omstandigheden vervaardigd. Links vindt men de kleinere, rechts de grootere golf-lengten (immers in de eerste vijf opnamen ziet men duidelijk dat de sterkere lijn D_2 links staat); het blijkt dus dat werkelijk de lichtsoorten aan den naar rood gekeerden kant der D -lijnen, voor welke de damp een grooten brekingsindex heeft, door anomale dispersie *versterkt* zijn, en dat daarentegen de golven aan den violetten kant aanmerkelijk *verzwakt* zijn.

Afwisselend met 6, 8 en 10 werden de fotografieën 7, 9 en 11 gemaakt. Daarbij was de opstelling, zooals aangegeven in Fig. 2, *b*, d. w. z. de vlam was met haar as 3 mM. naar links verschoven, zoodat de middelste stralenbundel het gedeelte van de vlam doordringen moest waar de dichtheid van den natriumdamp van links naar rechts *afneemt*. In dit geval zijn het nu juist de stralen voor welke de brekingsindex van den damp *klein* is, die naar rechts afwijken en in grooter aantal de spleet S_2 bereiken, zooals S_1K ; terwijl daarentegen het licht met grooten index, bijv. de straal S_1G , door Q onderschept wordt.

De opnamen 6 tot 11 hebben betrekking op telkens grootere dichtheid van den natriumdamp; 12 toont weer de scherpe natriumlijnen, na het blusschen van de vlam N aan het einde van een proevenreeks; zij zijn een weinig sterker dan bij den aanvang der reeks, daar

tijdens de waarnemingen veel natriumdamp zich in het vertrek verbreidde.

Bij nauwkeurige beschouwing van de oorspronkelijke negatieven kan men in de meeste opnamen (het best in die welke vervaardigd waren bij symmetrische plaatsing der vlam) de vrij scherpe centrale absorptielijnen te midden van de dispersiebanden duidelijk onderscheiden. Van deze omstandigheid werd gebruik gemaakt bij het onder elkander stellen van de twaalf gereproduceerde fotografieën op zoodanige wijze, dat gelijke golflengten zoo nauwkeurig mogelijk op corresponderende plaatsen kwamen. Daarbij blijken dan de „zwaartepunten” der beide donkere banden, zoowel als de lichte tusschenruimte, beurtelings naar links en naar rechts verschoven te zijn — een verschijnsel, waarvan men de oorzaak zonder nadere toelichting gemakkelijk zal kunnen inzien.

In het vlak der spleet S_2 is de verlichting natuurlijk zeer ongelijkmatig, vooral wat betreft de stralen die anomale dispersie ondergingen in de vlam. Sommige lichtsoorten, die op de eene plaats van dat vlak ontbreken, moeten op de andere plaats in overmaat worden aange troffen. Men zou de lichtverdeling in dit ongelijkmatige stralingsveld kunnen onderzoeken door S_2 , met den spectroscop, daarin te verschuiven. Gemakkelijker wordt hetzelfde doel bereikt met behulp van een dik stuk spiegelglas, tusschen B en S_2 vertikaal opgesteld op een draaibaar tafeltje. Daarmee kan de uit B tredende stralenbundel evenwijdig aan zichzelf worden verplaatst. De dispersiebanden wisselen dan sterk van uiterlijk. In sommige standen krijgt men zelfs schijnbare emissielijnen van natriumdamp te zien, die onmiddellijk verdwijnen als men het booglicht bij S_1 onderschept ¹⁾.

Ten slotte zij nog gewezen op een bijzonderheid, die in de dispersiebanden herhaaldelijk werd opgemerkt. Naarmate men de centrale absorptielijnen nadert, neemt namelijk de duisterheid in een dispersieband *niet* voortdurend toe, maar zij schijnt maximale waarden te bereiken op zekere (niet steeds gelijke) afstanden van het midden, terwijl daartusschen de lichtsterkte weer wat grooter is, juist alsof een breede absorptieband door een iets smalleren emissieband gedeeltelijk overdekt werd, waarop dan in het midden weer de fijne absorptielijn volgt. Aan uitstralingslicht van de absorbeerende natriumvlam kan dit verschijnsel niet worden toegeschreven; want de sterkte van het emissielicht kwam bij onze opstelling niet in vergelijking tegenover die van het booglicht voor dezelfde stralensoorten. Ten overvloede

¹⁾ De wijze, waarop deze heldere lijnen ontstaan, is te vergelijken met die waarop het chromosfeerlicht tot stand komt. De chromosfeerlijnen zijn geen emissielijnen, maar „lichte dispersiebanden.”

werd beproefd, het emissiespectrum der vlam in denzelfden expositie-tijd en onder gelijke omstandigheden als het absorptiespectrum te fotografeeren, doch daarbij werd geen spoor van een indruk op de fotografische plaat verkregen.

Het licht ter weerszijden van de centrale lijn is dus afkomstig van de koolspitsen, en de verklaring, is dat die stralensoorten, welke in de vlam het allersterkst gekromd worden, onder zekere omstandigheden zich twee of meermalen kunnen buigen door het stelsel van dichtheids-niveaux (op de wijze zooals ik dat bij een vroegere gelegenheid beschreven heb¹⁾), en daardoor meer kans hebben om de spleet S_2 te bereiken dan de matig sterk gebogene. Naarmate het licht een langeren weg langs een dergelijke plaat- of buisvormige structuur heeft afgelegd, zullen in het spectrum de stralensoorten, behoorende tot de middelstedeelen der dispersiebanden, *betrekkelijk* sterker vertegenwoordigd zijn. Is de eigenlijke absorptielijn buitengewoon smal, dan kan derhalve in zulk een geval de dispersieband den indruk maken van eenverdubbelden absorptieband, die niet symmetrisch behoeft te zijn.²⁾

De dispersiebanden spelen vermoedelijk een groote rol bij tal van spectraalverschijnselen, als verbredingen, verschuivingen, omkeeringen, verdubbelingen van lijnen. In een volgende mededeeling zal ik verschillende bijzonderheden, die men in de spectra der veranderlijke sterren en van andere hemellichamen heeft waargenomen, uit dit oogpunt beschouwen.

Anatomie. — De Heer BOLK biedt eene mededeeling aan van den Heer A. J. P. v. D. BROEK over: „*De Geslachtsstrengen van Phalangista vulpina.*”

(Mede aangeboden door den Heer PLACE).

In den loop mijner onderzoekingen omtrent den bouw en de ontwikkeling der vrouwelijke geslachtsorganen van de buideldieren, welker resultaten elders uitvoerig zullen worden gepubliceerd, was ik in de gelegenheid een, in dwarscoupen gelegd, vrouwelijk buideljong van *Phalangista vulpina*, ter grootte van 16.7 mM., te bestudeeren.

Het onderzoek der geslachtsstrengen en der daarin verloopende WOLFF'sche en MÜLLER'sche gangen bracht eene verhouding aan 't licht, die afweek van die bij de geslachtsstrengen en de genoemde

¹⁾ Verslagen Natuurk. Afd. Dl. XI, p 658.

²⁾ Op de Plaat ziet men (Fig. 4) nog een vergrooting van een der fotografiën die bij ongeveer symmetrischen stand van de vlam vervaardigd werden. De reproductie is niet goed geslaagd; het oorspronkelijke vertoont niet die gevlektheid, en de overgang van de dispersiebanden naar den lichten grond van het spectrum is daar veel meer geleidelijk.

gangen zoowel bij Monotremen als bij monodelphe zoogdieren en die met de zoo eigenaardige anatomische verschijnselen van het geslachtsapparaat der buideldieren in verband schijnt te staan.

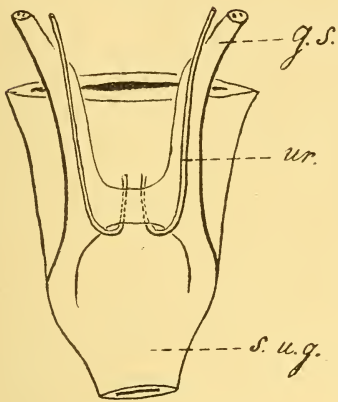


Fig. 1. Geslachtsstrengen en ureteren van een buideljong van *Phalangista vulpina*, van de dorsale zijde gezien.

g. s. Geslachtsstreng. *ur.* Ureter.
s. u. g. Sinus Uro-genitalis.

Vervolgt men de geslachtsstrengen, nadat ze zich uit het weefsel der oernier hebben vrijgemaakt, in kaudale richting, dan blijkt, dat de beiderzijdse strengen elkaar naderen, over een korten afstand tot een enkelvoudige geslachtsstreng versmelten, daarna zich weer van elkander scheiden en in kaudo-laterale richting verlopen tot den wand der sinus uro-genitalis. Op deze wijze ontstaat eene korte verbindingsbrug tusschen de beide geslachtsstrengen. Reconstrueert men de opvolgende dwarsdoorsneden, dan verkrijgt men een beeld zooals in Fig. 1 schematisch aangeduid is, waarbij het geslachtsapparaat van de dorsale zijde gezien gedacht is.

Zeer bijzonder is het verloop der ureteren, die, nadat zij de achtervlakte der juist beschreven verbindingsbrug tusschen de twee geslachtsstrengen gepasseerd zijn, om den kaudalen rand hiervan ombuigen en, weder in kraniale richting hun verloop vervolgend, schuin kaudo-kraniaalwaarts de achterwand der blaas doorboren en in dit orgaan uitmonden op twee naast elkaar gelegen papillen met naar den blaasfundus toegekeerde ostiën. Zeer opmerkelijk is, dat het ureterenverloop in dit stadium reeds geheel overeenkomt met dat in den volwassen toestand. De vraag naar de oorzaak der haakvormige kromming in het verloop der ureteren bij de Marsupialia, zooals die reeds lang bekend is, welke oorzaak mijns inziens juist in de genoemde verbindingsbrug der beide geslachtsstrengen is gelegen, zal ik straks nog kort bespreken.

Met betrekking tot de onderlinge verhouding van WOLFF'schen en MÜLLER'schen gang zij het volgende opgemerkt. In het niveau van de kaudale pool der oernier ligt de MÜLLER'sche gang ventraal en een weinig lateraal van den WOLFF'schen gang. Kaudaalwaarts verandert deze toestand in dien zin dat de MÜLLER'sche gang langzamerhand naar de ventro-mediale zijde van den WOLFF'schen gang verschuift. Deze topographische verhouding blijft bestaan tot dicht bij de intredingsplaats in de sinus uro-genitalis. In hun verloop buigen ze

daarbij, het verloop der geslachtsstrengen volgend, naar mediaal, vervolgens kaudo-lateraal, om in het laatste gedeelte van hun verloop zeer bijzondere eigenaardigheden te vertoonen.

De MÜLLER'sche gang buigt plotseling naar ventraal en mediaal, beschrijft een kaudaalwaarts licht convexe boog en mondt daarna in de sinus uro-genitalis uit.

De WOLFF'sche gang, aanvankelijk dorso-lateraal van den MÜLLER'schen gelegen, beschrijft even als deze in zijn eindstuk een kaudaal convexen boog en komt daarbij kaudaal van den MÜLLER'schen gang. Vervolgens buigt hij zich mediaalwaarts en legt zich tegen de mediale wand van den MÜLLER'schen gang, mondt daarna in de sinus uro-genitalis uit direkt kraniaal van dezen.

Hieruit blijkt dat de WOLFF'sche gang in het laatste gedeelte van zijn verloop bijna een geheelen spiraaltoer om den MÜLLER'schen gang beschrijft, waarbij hij achtereenvolgens dorso-lateraal, kaudaal (dorsaal), mediaal en kraniaal van laatstgenoemden verloopt. Dit verloop heb ik in figuur 2 schematisch weergegeven, van voren en

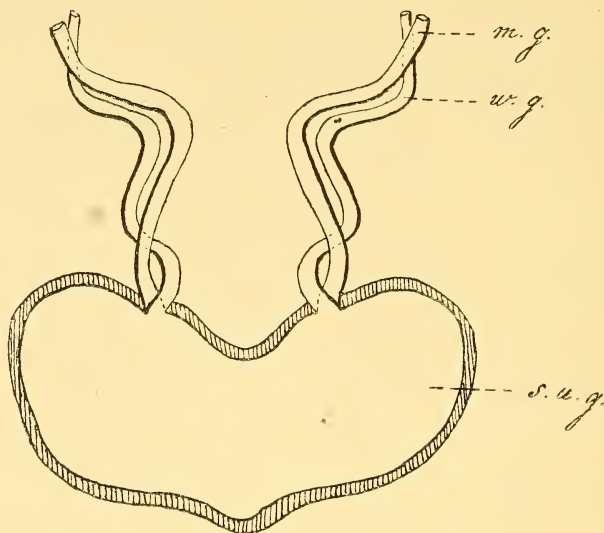


Fig. 2. Verloop van WOLFF'schen en MÜLLER'schen gang bij een buideljong van *Phalangista vulpina*.

w. g. WOLFF'sche gang. *m. g.* MÜLLER'sche gang. *s. u. g.* Sinus uro-genitalis.

ietwat van boven gezien. De blaas is in de figuur afgesneden gedacht, juist in het niveau waar de WOLFF'sche gang uitmondt.

Door F. KEIBEL ¹⁾ is de meening uitgesproken, dat bij de Marsupialia de ureteren hunne uitmondningen in de blaas reeds bekomen

¹⁾ F. KEIBEL. Zur Entwicklungsgeschichte des menschlichen Uro-genitalapparates. Archiv für Anatomie und Entwicklungsgeschichte. 1896. pg. 55.

in het stadium waarin ze zich voordoen als uitspruitsels van den dorso-medialen wand van den WOLFF'schen gang, in een stadium dus dat, als voorbijgaande toestand ook bij de monodelphe zoogdieren, voor zoover althans deze werden onderzocht, voorkomt, terwijl ze bij de laatstgenoemde, voordat het eindstuk van den WOLFF'schen gang in den blaaswand is opgenomen, zich naar den dorso-lateralen wand van dien gang bewegen, waardoor ze in den volwassen toestand lateraal van WOLFF'schen (en MÜLLER'schen) gang zich bevinden. Hoewel ik niet in staat ben geweest op grond van eigen waarnemingen deze theoretische beschouwing te overwegen, wil het mij toeschijnen, dat, naast de door KEIBEL gepostuleerde oorzaak¹⁾ voor het verloop der ureteren aan de mediale zijden der MÜLLER'sche gangen bij Marsupialia, zeer zeker eenen, en misschien niet geringen invloed op het tot stand komen van dit verloop zal uitoefenen het spiraalvormig verloop van den WOLFF'schen gang en de noodzakelijk hiermede gepaard gaande torsie van dit kanaal.

Een hiermede in verband staand opmerkenswaardig feit is, dat bij de mannelijke buideldieren een uterus masculinus ontbreekt, dat men geene resten heeft gevonden van de kaudale eindstukken der MÜLLER'sche gangen, zooals WEBER¹⁾ en DISSELHORST²⁾ uitdrukkelijk vermelden. Alleen Hypsiprymnus, zou volgens OWEN hierop een uitzondering maken.

In het door mij waargenomen stadium bevinden zich de einden der MÜLLER'sche gangen lateraal (en kaudaal) van de WOLFF'sche gangen. Nu is het duidelijk dat, indien mijne waarneming voor de buideldieren algemeen geldend is, bij de mannelijke dieren geen uterus masculinus optreden kan, omdat tusschen beide MÜLLER'sche gangen de WOLFF'sche zich bevinden. Eventueele resten der MÜLLER'sche gangen heeft men dan in 't mannelijk geslacht te zoeken aan de laterale zijde van de uitmonding der vasa deferentia. Eigen waarnemingen te dien opzichte heb ik nog niet kunnen doen.

Zooals ik reeds beschreef, bevinden zich in het door mij waargenomen stadium de ureteren aan de mediale zijde der geslachtsstrengen. Slechts die gedeelten in het vrouwelijk geslachtsapparaat der buideldieren, die aan de laterale zijde der ureteren liggen, kunnen, wat ik te anderer plaatse op bredere basis zal trachten te bewijzen, in het vrouwelijk genitaalsysteem der monodelphe zoogdieren hunne homologa bezitten. De, langs phyletischen weg in de groep der

1) M. WEBER. Die Säugetiere. Jena. G. FISCHER 1904.

2) R. DISSELHORST. Ausführapparat und Anhangsdrüsen der männlichen Geschlechtsorganen in: Lehrbuch der vergleichend mikroskopischen Anatomie der Wirbeltiere, herausgegeben von A. OPPEL. 4er Teil.

Marsupialia zich ontwikkelende vaginaalblindzak bezit in 't vrouwelijk geslachtsapparaat der Monodelphia geen homologon.

Ten slotte ligt, naar ik meen, in mijne waarneming eene verklaring opgesloten voor het eigenaardige haakvormige verloop der uretereneinden bij de Marsupialia.

Hetzij tengevolge van het spiraalsgewijze verloop der WOLFF'sche gangen, hetzij door eenige andere oorzaak verlopen de ureteren in een zeker stadium der ontwikkeling mediaal van de WOLFF'sche gangen (en van de geslachtsstrengen) in dorso-kraniale richting naar den aanleg der nier.

De buideldieren nu bezitten eene (intestinale) melkvoeding op een zoo vroeg ontwikkelingsstadium als dit van geen enkel der overige zoogdieren bekend is. Deze melkvoeding zal grooten invloed uitoefenen op de ontwikkeling der blaas, die ik bij het beschreven buideljong zoowel als bij andere door mij onderzochte buideljongen (*Didelphys*) als een zeer volumineus orgaan aantrof. Bij den sterken groei der blaas worden de uitmondingsplaatsen der ureteren mede kraniaalwaarts verplaatst. Door de genoemde dwarsverbinding tusschen de beide geslachtsstrengen wordt aan verplaatsing der ureteren in kraniale richting een hinderpaal in den weg gelegd, wat als natuurlijk gevolg met zich brengt, dat de ureteren, terwijl hunne uitmondingsplaatsen zich verder kraniaalwaarts verplaatsen, steeds om het kaudale einde dezer dwarsverbinding moeten heengaan, waardoor het uitgesproken haakvormige verloop te voorschijn komt.

Scheikunde. — De Heer LOBRY DE BRUYN biedt namens Dr. J. J. BLANKSMA eene mededeeling aan: „*Over de intramoleculaire oxydatie van een aan benzol gebonden SH-groep door een ortho-standige NO₂-groep.*”

(Mede aangeboden door den Heer HOLLEMAN).

Er zijn een aantal gevallen bekend, waar een nitrogroep in de benzolkern haar zuurstof kan afstaan aan een ortho-standige oxydabele groep.

Zoo heeft bijv. WILLGERODT¹⁾ aangetoond, dat chloornitrohydrozobenzol 5. 2. 1 overgaat in chloornitrosoazobenzol. GREIFF²⁾ verkreeg door broomeeren van o. nitrotoluol het dibroomanthranilzuur, BINZ³⁾

¹⁾ Journ. f. prakt. Chem. (2) 37. 356 E. FISCHER. Ann. der Chem. 253. 1-

²⁾ Ber. 13. 288.

³⁾ Zeitschrift Angew. Chem. 1900. 385. D.R.P. 114839. 138188. LÖB: Zeitschrift f. Electr. 8. 775.

toonde aan, dat o. nitrotoluol onder invloed van NaOH ten deele overgaat in anthranilzuur, CIAMICIAN en SILBER¹⁾ hebben het o. nitrobenzaldehyd door belichting met zonlicht omgezet in o. nitrosobenzoëzuur, KNIPSCHER²⁾ verkreeg uit azoxybenzol door 't zonlicht het o. oxyazobenzol, terwijl WOHL³⁾ uit nitrobenzol het o. nitrophenol verkreeg. In al deze gevallen zien wij, dat de zuurstof, die aan de stikstof gebonden is, neiging vertoont zich van de stikstof los te maken en de daarnaast staande ortho-standige oxydabele groep te oxydeeren, eene reactie die door 't licht wordt bevorderd⁴⁾.

MAYER⁵⁾ vermeldt, dat bij inwerking van alcoholische zwavelammonium op trinitropseudocumol een reactie plaats vindt, geheel afwijkend van het reductieproces dat gewoonlijk optreedt bij behandeling met NH₄SH. Hij neemt aan, dat in het trinitropseudocumol een der NO₂-groepen tot NH₂ wordt gereduceerd, dat daarna de NH₂-groep door SH wordt vervangen en dat deze SH-groep door de ortho-standige NO₂-groep wordt geoxydeerd tot SO₃H terwijl de NO₂-groep zelf tot NH₂ wordt gereduceerd.

Daar in het trinitropseudocumol een nitrogroep voorkomt, die beweeglijk is onder den invloed van een ortho- en een parastandige NO₂-groep, scheen het mij niet onwaarschijnlijk dat deze NO₂-groep direct door middel van NH₄SH door SH kon worden vervangen, daar toch ook in het o. dinitrobenzol de NO₂-groep door SH, S of S₂ kan worden verplaatst⁶⁾.

Bij herhaling van de proeven van MAYER werd nu vastgesteld, dat dadelijk bij de reactie ammoniumnitriet gevormd wordt, waaruit blijkt, dat de NO₂-groep direct door SH wordt vervangen, zonder voorafgaande reductie tot NH₂. Hieruit werd afgeleid, dat ook door inwerking van NaSH of Na₂S hetzelfde resultaat moest worden verkregen. Inderdaad werd het nitropseudocumidinesulfonzuur verkregen door zwavelwaterstof in een kokende alcoholische oplossing van trinitropseudocumol te leiden en daarin een molecule NaOH te laten vloeien; ook door een alcoholische oplossing van trinitropseudocumol met een mol. Na₂S te koken verkrijgt men hetzelfde resultaat. Door de nitrietreactie

1) Centr. Bl. 1901. 1. 1190. SACHS en KEMPF. Ber. 33. 1224. 2704. SACHS en SICHEL. Ber. 37. 1861.

2) Rec. 22. 1.

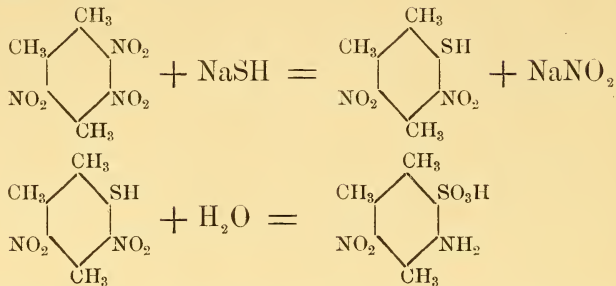
3) Ber. 32. 3486. 34. 2442. Centr. Blatt. 1901. 1. 149.

4) Ook de omzettingssnelheid van phenylnitromethaan van HOLLEMAN in phenylisonitromethaan en van de nitrolichamen in isonitrolichamen door HANTSZCH bestudeerd, zal waarschijnlijk door het zonlicht in sterke mate veranderd worden. Rec. 13. 403. Ber. 29. 699. 2260. 32. 607. 3137.

5) FITTIG en LAUBINGER. Ann. 151. 257. MAYER. Ber. 19. 2312. 20. 966.

6) LOBRY DE BRUYN en BLANKSMA. Rec. 20. 117. 124.

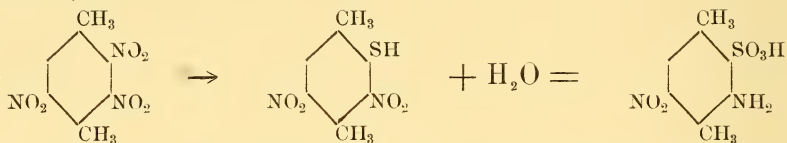
kon ook hier weer worden aangetoond dat de NO_2 -groep door SH was vervangen. Men heeft dus:



De opbrengst is bij behandeling met NaSH veel geringer dan door inwerking van zwavelammonium; er ontstaan harsachtige produkten welke met NH_4SH zich niet vormen.

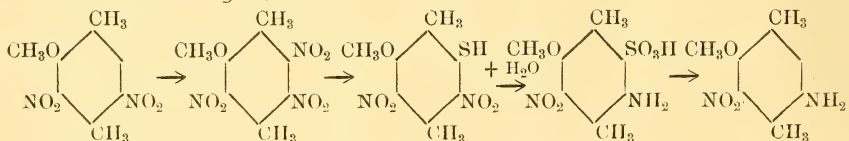
Behandelt men het trinitropseudocumol met alcoholische ammoniak gedurende 3 uren bij 120° à 130° dan wordt de NO_2 -groep, die zich onder den invloed van de ortho- en para-standige nitro-groepen bevindt, door NH_2 vervangen en ontstaat dinitropseudocumidine. Door behandeling met alcoholische NH_4SH kon hieruit geen nitropseudocumidinesulfonzuur verkregen worden.

Onderwerpt men trinitro-p.xylol in alcoholische oplossing aan de inwerking van NH_4SH , NaSH of Na_2S dan ontstaat het nitro p.xylidinesulfonzuur, aldus:



Het nitro-p.xylidinesulfonzuur vertoont dezelfde eigenschappen als het nitropseudo-cumidinesulfonzuur; door verhitting met water op 180° in een buis wordt de SO_3H groep afgesplitst en ontstaat het nitro-p.xylidine, s.p. 98° en zwavelzuur. Reductie met tin en zoutzuur geeft p.xylylendiamine; wij zien dus weer dat de groep SO_3H tusschen NH_2 en CH_3 gemakkelijk wordt geëlimineerd ¹⁾.

Behandelt men trinitro-p.xylol met NaOCH_3 in methylalcoholische oplossing dan verkrijgt men het oxymethyldinitro-p.xylol; dit lichaam geeft door nitratie oxymethyltrinitro-p.xylol, waaruit door behandeling met alcoholische zwavelammonium oxymethylnitro-p.xylidinesulfonzuur wordt verkregen, aldus:



1) Zie Verslagen Kon. Akad. 30 Mrt. 1904. 871. Rec. 23. 212.

Eenige pogingen om ook in het o. nitrothiophenol en o. p. dinitrothiophenol (verkregen uit o. chloornitrobenzol en chloordinitrobenzol 1.2.4 met NaSH) de SH-groep door de ortho-standige NO₂-groep over te voeren in SO₃H leverden tot nog toe geen resultaat op.

Resumeerende zien we dus het volgende:

Het is mogelijk in de benzolkern een SH-groep door een ortho-standige NO₂-groep, onder medewerking van 1 mol. H₂O, te oxydeeren tot een SO₃H-groep; de NO₂-groep zelf wordt daarbij tot NH₂ gereduceerd. Deze reactie schijnt door de aanwezigheid van CH₃-groepen in de benzolkern, en tevens door het zonlicht, bevorderd te worden.

Amsterdam, Mei 1904.

Scheikunde. — De Heer LOBRY DE BRUYN biedt aan: Mededeeling n^o 10 over intramoleculaire verschuivingen: J. M. M. DORMAAR: „*De omzetting van carvon en eucarvon in carvacrol en hare snelheid*”.

(Mede aangeboden door den Heer HOLLEMAN).

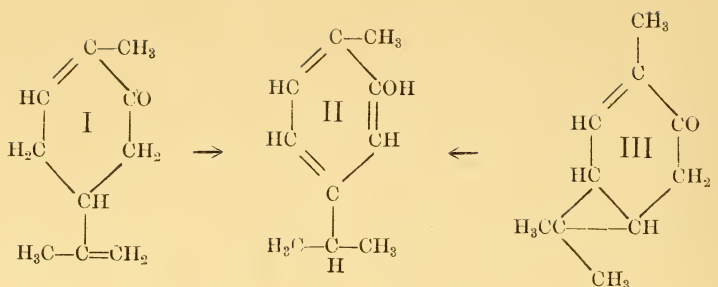
De overgang der twee isomere ketonen carvon en eucarvon in het phenolachtige carvacrol is eene intramoleculaire atoomverschuiving, welke vooreerst bestaat in de verspringing van een H-atoom aan koolstof gebonden naar de carboxylzuurstof van het keton (waardoor C=O overgaat in COH) en verder nog gepaard gaat met verschuivingen van koolstofbindingen en H-atomen, welke voeren tot het ontstaan der isopropylgroep. Uit de onderstaande formules ziet men, dat hierbij de tetrahydrobenzolkern overgaat in den benzolring.

Voor het carvon is de constitutieformule met zekerheid vastgesteld ¹⁾, voor het eucarvon geldt zulks niet; de formule door BAEYER—VILLIGER gegeven wordt voorloopig vrij algemeen aangenomen ²⁾. Wanneer men in deze eene kleine verandering aanbrengt ³⁾ dan is er tusschen de voorstelling van den overgang der twee isomere ketonen in carvacrol minder verschil dan bij behoud der B.—V.'sche structuurformule.

¹⁾ Men zie o.a. de monographie van HARRIES in MEYER en JACOBSON'S Lehrbuch, 2e deel, I. p. 940.

²⁾ Ibid. p. 973.

³⁾ WALLACH, Ann. 305. 244, acht het bestaan der groep CH₂-CO in eucarvon waarschijnlijk.



Carvon

k.pt. $\pm 228^{\circ}$
 $D_4^{20} = 0,9608$

Carvacrol

k.pt. $\pm 236^{\circ}$
 $D_4^{20} = 0,9760$

Eucarvon

k.pt. $\pm 215^{\circ}$
 $D_4^{20} = 0,9482^1)$

Van deze drie stoffen is het carvon optisch-actief ²⁾.

Het carvon nu gaat onder den invloed van verschillende agentia, gemakkelijk en soms in korten tijd onder sterke warmteontwikkeling en heftig reactieverloop, in carvacrol over. Vastgesteld is, dat zulks geschiedt onder den invloed van phosphorzuur, van zoutzuur, van phosphoroxychloride, van $ZnCl_2$ in azijnzuur, en van kali; het HCl additieproduct kan volgens REYCHLER ³⁾ door zwavelzuur, mierenzuur en chloriden van metalen en metalloïden worden omgezet ⁴⁾.

Voor het eucarvon vindt men alleen opgegeven, dat het bij verhitting op zich zelf bij kooktemperatuur in carvacrol overgaat; ik heb vastgesteld, dat ook het carvon, nog gemakkelijker dan het eucarvon, bij hooge temperatuur bij afwezigheid van eenig agens, zich tot carvacrol isomeriseert.

Voor het dynamisch onderzoek van den overgang carvon \rightarrow carvacrol lag het voor de hand gebruik te maken van de omstandigheid, dat de eerste stof wel, de tweede niet optisch-actief is, te meer waar het draaiend vermogen van het gewone carvon vrij belangrijk is ($[\alpha]_D = +62^{\circ}$). Toch is door meting van de afname van 't draaiend vermogen geen resultaat verkregen. Ik heb een aantal proeven uitgevoerd met mierenzuur als oplosmiddel en met ijsazijn waarin zwavelzuur, zinkchloride en phosphorpentoxyde waren opgelost. Hoewel nu

¹⁾ Deze getallen vindt men in de literatuur; ik heb zelf de spec. gew. ook bepaald (zie later).

²⁾ Het eucarvon bevat, bij 't aannemen der B — V.'sche formule of van formule III, in de twee CH-groepen van de trimethyleenring twee asymetrische C-atomen. Men constateert gemakkelijk aan een uit tetraeders opgebouwd model dat twee paar antipoden mogelijk zijn, zij het ook dat bij een der paren sterke z.g. spanningen heerschen in de trimethyleenring.

³⁾ Bull. 7. 31. (1892).

⁴⁾ De mol. verbrandingswarmte van carvon is 1375, van carvacrol 1355.

bij een temperatuur van 110° à 120° eene omzetting met meetbare snelheid optrad, verhinderde de vorming in geringe hoeveelheid van een donker gekleurd bijproduct spoedig het aflezen van den polarimeter. Het beste resultaat werd nog verkregen met de oplossing van P_2O_5 in ijsazijn. Toch bleken de aflezingen in den polarimeter spoedig onzeker te worden, zij voerden dan ook niet tot een reactiecoëfficiënt, die bevredigend constant kan worden geacht.

Een beter resultaat werd verkregen door de snelheid der verandering van een andere physische constante, n.m. van het spec. gew. te meten. Voor het carvon gelukte zulks in ijsazijn met P_2O_5 als katalysator bij een temp. van 117° , voor carvon en eucarvon door verhitting op zich zelf bij 205° .

Bij de eerste proeven werd door uitvriezen gezuiverde ijsazijn gebruikt, die per 5 c.m. 80 m. gr. P_2O_5 bevatte; deze werd op 117° verwarmd en met eveneens op die temp. gebracht carvon (in de verhouding van 1.791 azijnz. : 1 carvon) gemengd. Na bepaalde tijden werd hiervan een gedeelte genomen ter bepaling van het spec. gew. van het mengsel en snel afgekoeld. Om de nauwkeurigheid der metingen te verhoogen werd een pyknometer van grooten inhoud (70.806 c.c.m.) genomen. Vooraf waren mengsels van ijsazijn met carvon en met carvacrol, genomen in de verhouding van 1.791 : 1, in den pyknometer uitgewogen.

Gew. pyknom. met ijsazijn + carvacrol bij 20° : 72.9042 gr.

„ „ „ „ carvon „ ¹⁾ : 72.4293 „

gew. vermeerdd. bij totalen overgang 0.4749 „

hiervan komt op rekening van den overgang

$$\text{carvon} \rightarrow \text{carvacrol} : \frac{0,4749}{2,79} = 170,1 \text{ mgr.}$$

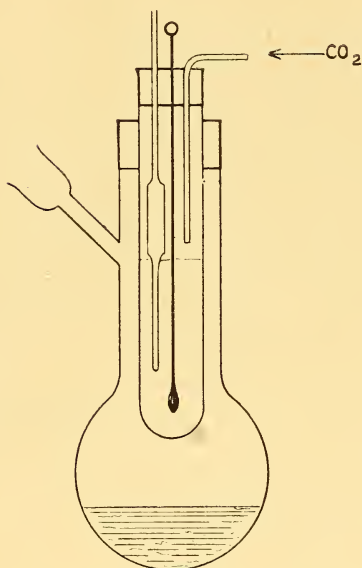
De pyknometerwegingen werden voor elke portie twee- soms driemaal herhaald.

Uit de ommestaande tabel ziet men, dat door toepassing der formule voor reactie's van de 1^e orde men tot goede reactieconstanten komt.

Voorloopige proeven, waarbij zuiver carvon op zich zelf aan hoogere temp. werd blootgesteld, hadden doen zien, dat ook dan de omzetting tot carvacrol plaats vindt. Door uitschudden met natron kon deze stof gemakkelijk aan het mengsel worden onttrokken. Bij een temp. van $\pm 120^{\circ}$ gaat de omzetting echter zoo langzaam dat ze zich niet voor eene meting leent; na ongeveer 4 u. was het spec. gew. slechts zeer weinig toegenomen; de betrekkelijk geringe hoeveelheid P_2O_5 in

¹⁾ Genomen op het tijdstip waarop de eigenlijke hieronder vermelde proef werd geacht aan te vangen, en dus reeds eene zeer geringe hoeveelheid was omgezet.

Tijd in uren.	Toename in gewicht van den pyknometer berekend van af tijd nul.	Toename in gewicht van het carvon van af tijd nul ber.	Omgezette fractie x	$h = \frac{1}{t} l \frac{A}{A-x}$
1 ^u 20'	34.7 m. gr.	12.4 m. gr.	0.073	0.024
2 ^u 38'	59.7 »	21.4 »	0.126	0.021
4 ^u 48'	90.4 »	32.4 »	0.191	0.019
7 ^u 1'	126.7 »	45.4 »	0.267	0.019
9 ^u 10'	166.0 »	59.5 »	0.350	0.020
				gemidd. 0.21



azijnzure oplossing heeft dus katalytisch de verschuiving in hooge mate versneld. Het bleek nu, dat eene temp. van 205° voor de meeting der omzettingssnelheden der twee isomeren zeer geschikt was. Hierbij nu werd van een apparaat, waarvan de inrichting uit de nevenstaande figuur blijkt, gebruik gemaakt. Als verhittingsmiddel diende de damp van kokende benzylalcohol. Door het apparaat met asbestpapier te omwikkelen en met een Argandbrander te verhitten kan de temp. binnen een paar tienden van

graden constant op 205° worden gehouden; om oxydatie te voorkomen werd in de bovenste buis een langzame stroom droog koolzuur geleid.

De beide stoffen kleurden zich echter toch langzamerhand donker; op de resultaten der proeven heeft dit echter geen invloed uitgeoefend¹⁾.

Op bepaalde tijden werd nu uit de binnenste buis een deel der vloeistof gepipeteerd, dit snel afgekoeld en het spec. gew. er van met den pyknometer bij 20° tweemaal bepaald.

Overgang van carvon in carvacrol bij 205° .

¹⁾ Carvon werd uit de gekleurde ten deele omgezette vloeistof weer zuiver afgescheiden; na verhitting trad de kleuring toch weer op, een bewijs dus, dat eene geringe onzuiverheid waarschijnlijk niet de oorzaak der verkleuring is. Misschien oefent het licht in geringe mate eene spoedig tot stilstand komende ontleding uit.

Inhoud pyknometer = 10.506 cc.

S.G.₂₀²⁰ van carvon = 0.961.

„ „ carvacrol = 0.9777.

Gewicht pyknometer gevuld met carvacrol 10.2534 gr.

„ „ „ „ carvon¹⁾ 10.0782 „

Gewichtstoename bij totalen overgang 0.1752 „

Tijd in uren.	Gewichtstoename van af tijd nul.	Omgezette hoef. x	$k = \frac{1}{t} l \frac{A}{A-x}$
0 ⁿ 45'	0.0120 m. gr.	0.069	0.042
1 ⁿ 32'	0.0208 „	0.119	36
2 ⁿ 32'	0.0331 „	0.189	36
3 ⁿ 47'	0.0497 „	0.284	38
5 ⁿ 0'	0.0641 „	0.366	39
6 ⁿ 40'	0.0762 „	0.435	37
			gemidd. 0.038

Overgang van eucarvon in carvacrol bij 205°.

S.G.₂₀²⁰ van eucarvon = 0.9502. Inhoud pyknometer 10.506 c.c.

Gewicht pyknometer gevuld met carvacrol 10.2534 gr.

„ „ „ „ eucarvon¹⁾ 9.9640 „

Gewichtstoename bij totalen overgang 0.2894 „

Tijd in uren.	Gewichtstoename van af tijd nul.	Omgezette hoef. x	$k = \frac{1}{t} l \frac{A}{A-x}$
0 ⁿ 25'	0.0056 m. gr.	0.020	0.0215
1 ⁿ 40'	0.0136 „	0.047	185
1 ⁿ 59'	0.0242 „	0.084	19
2 ⁿ 59'	0.0338 „	0.117	18
4 ⁿ 40'	0.0460 „	0.159	18
5 ⁿ 33'	0.0610 „	0.211	185
			gemidd. 0.019

1) Genomen op het tijdstip waarop de eigenlijke proef werd aangevangen, dus op het tijdstip = 0; de vloeistoffen hadden dan de temperatuur van 205° bereikt en een klein deel was dus reeds omgezet.

Beide reacties zijn dus monomoleculair en de omzettingen der twee stoffen in carvacrol werkelijke intramoleculaire atoomverschuivingen; die van carvon verloopt bij 205° tweemaal sneller dan die van 't eucarvon en eveneens (toevallig) tweemaal sneller dan die van 't carvon onder den invloed van in ijsazijn opgelost P_2O_5 bij 117°.

Uit deze proeven volgt eveneens, dat carvon noch eucarvon bij den overgang van eucarvon resp. carvon in carvacrol als intermediaire produkten kunnen optreden.

Amsterdam, April 1904.

Organ. chem. labor. d. Univ. ¹⁾

Aardkunde. — De Heer VAN BEMMELN biedt eene mededeeling aan van den Heer EUG. DUBOIS: „*Richting en uitgangspunt der diluviale ijsbeweging over ons land*”.

(Mede aangeboden door den Heer K. MARTIN.)

Naar aanleiding van de onlangs in de Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen (2^{de} Sectie, Deel X, N^o. 5) verschenen *Beschrijving van eenige nieuwe grondboringen, V*, door Dr. J. LORIE, waaraan de schrijver, op pag. 20 en 21, toevoegt eene critiek van enkele gevolgtrekkingen der in de Verslagen van de gewone vergaderingen der Wis- en Natuurkundige Afdeling dezer Akademie van 31 Mei en 28 Juni 1902 (Deel XI, p. 43 en 150 en Proceedings, Vol. V, p. 93 sqq.) verschenen mededeeling van mijne hand: *De geologische samenstelling en de wijze van ontstaan van den Hondsrug in Drenthe* [*The geological structure of the Hondsrug in Drenthe and the origin of that ridge*], zij het mij vergund de volgende opmerkingen te maken.

Deze door den verdienstelijken navorscher op het gebied der geologie van Nederland uitgeoefende critiek, berust op een zoo incorrect en onvolledig wedergeven van mijne gevolgtrekkingen en van de feiten waarop zij rusten, dat aan die gevolgtrekkingen wel een karakter van lichtvaardigheid moet worden toegeschreven, dat zij werkelijk niet bezitten.

Na toch met een enkel woord gezegd te hebben, dat hij zich met mijne opvatting van de samenstelling van den Hondsrug wel vereenigen kan, gaat Dr. LORIE aldus voort:

„Anders staat het met eene bijzonderheid, op bladz. 4 en 5 vermeld.” (Bedoeld zijn 12 regels op pag. 96 en 97 van den Engelschen tekst). „In put XLI werd een blok kwartsiet aangetroffen met een middellijn van 0.35 M., in tweeën gespleten, zoodat het bovenste stuk, ten opzichte van het onderste, 1½ c.M. in zuidoostelijke richting

¹⁾ Het laatste deel van dit onderzoek is in het scheikundig laboratorium der Utrechtsche Universiteit uitgevoerd.

is verschoven. Dit is dus een feit! Schrijver grondt daarop evenwel de hypothese, dat de ijsbeweging *in haar geheel* niet van N.O. naar Z.W. heeft plaats gehad, zooals nog altijd algemeen wordt aangenomen, doch van N.W. naar Z.O., zoodat het punt van uitgang niet in Scandinavië, maar in Schotland moet gezocht worden. Het komt mij nu voor, dat hier eene sterke wanverhouding is tusschen het belang van het waargenomen feit en dat van de hypothese."

Verder zegt hij aan het slot :

„Om de verklaring te vinden van het verschuiven van het kwartsietblok te Eksloo, over eenen afstand van *anderhalve centimeter* behoeven wij dus niet Schotland als uitgangspunt der ijsbeweging aan te nemen, maar kunnen bij de oude meening blijven."

Tot zoover Dr. LORÉ.

Ik wensch nu er aan te herinneren, dat het geenszins dat ééne door hem genoemde feit is, waarop ik „de hypothese" grond, dat de ijsbeweging van N.W. naar Z.O. „heeft plaats gehad", en dat ik ook volstrekt niet beweerd heb, dat het uitgangspunt der ijsbeweging niet in Scandinavië, maar in Schotland moet gezocht worden. In den Engelschen tekst mijner mededeeling, waarnaar Dr. LORÉ verwijst, wordt niet gesproken van een hypothese, doch van een *supposition* en deze gaat uit van de geheele beschouwing van de structuur en wijze van ontstaan van den Hondsrug. Meer bijzonder hebben op die *supposition* betrekking 2 $\frac{1}{2}$ bladzijden van den 10 bladzijden grooten tekst der beide stukken mijner mededeeling, namelijk vanaf pag. 99 (midden) tot pag. 101 (onderaan). De eenige volzin, en wel voorkomende in het midden van die uiteenzetting van 2 $\frac{1}{2}$ bladzijden, door welken de onderlinge verschuiving der stukken van het bedoelde kwartsietblok in betrekking wordt gebracht tot de richting der ijsbeweging, (pag. 100, eind der tweede alinea) luidt: „Now with this supposition perfectly agrees the at first sight paradoxical direction of motion as derived from the shifted boulder of quartzite."

En wat betreft het uitgangspunt der ijsbeweging, op pag. 101 van den bedoelden Engelschen tekst wordt zeer beslist Scandinavië als uitgangspunt der ijsbeweging aangenomen, terwijl van de *mogelijkheid* ("it might be possible, at least") eener deviatie van den Scandinavischen ijsstroom in zuidoostelijke richting, veroorzaakt door den Schotschen ijsstroom, gesproken wordt.

Dat de afstand, waarover de beide stukken van het kwartsietblok *in den grond* van elkander zijn geperst in geen verhouding behoeft te staan tot de bewegingsgrootte van het ijs *daarboven* behoeft wel geen betoog.

Haarlem, 26 Mei 1904.

Plantkunde. — De Heer WENT biedt eene mededeeling aan van den Heer H. P. KUYPER: „*De peritheciumontwikkeling van Monascus purpureus Went en Monascus Barkeri Dang.*”

(Mede aangeboden door den Heer MOLL).

Naar aanleiding der tegenstrijdige resultaten, welke door WENT, ¹⁾ UYEDA ²⁾, BARKER ³⁾, IKENO ⁴⁾ en DANGEARD ⁵⁾ verkregen waren bij hunne onderzoekingen over de peritheciumontwikkeling in het geslacht *Monascus*, leek het gewenscht de door hen onderzochte vormen nogmaals te bewerken.

De resultaten van een onderzoek van *M. purpureus* en *Monascus BARKERI* worden hier kort medegedeeld, terwijl op eene andere plaats spoedig een uitvoeriger artikel over hetzelfde onderwerp zal verschijnen.

Monascus purpureus werd verkregen door uitwendig gesteriliseerde ang-quac-korrels in dozen met eenen sterielen voedingsbodem uit te leggen, waarna zich haar mycelium binnen enkele dagen ontwikkelde.

De Heer BARKER had de groote welwillendheid me op mijn verzoek eene cultuur van de door hem onderzochte *Samsu*-fungus te zenden.

Beide schimmels werden op gesteriliseerd brood of op dunne platen mout-gelatine gekweekt. In 't laatste geval werd de gelatine in water van $\pm 30^{\circ}$ C. opgelost en het overblijvende mycelium, evenals het brood, in KEISER'S sublimaat-azijnzuur gefixeerd.

Microtoom-doorsneden, van 2—5 μ dik, van het in paraffine ingesmolten materiaal, werden gekleurd met HEIDENHAIN'S ijzer-haematoxiline ⁶⁾ en voor een gedeelte nagekleurd, 1 à 2 minuten, met een verzadigde waterige oplossing van Oranje-G. In dit geval werden de praeparaten direct in absoluten alcohol afgespoeld en hierna, evenals in 't eerste geval, in canadabalsem ingesloten.

Monascus purpureus.

De beide hyphen, welker optreden de ontwikkeling van een perithecium voorafgaat ⁷⁾, het pollinodium (le premier filament couvrant) ⁸⁾ en ascogonium, treden, naar het mij voorkomt, niet met elkander in

1) Ann. des sc. nat. Bot. Ser. 8 T. I. 1895, pag. 1.

2) The Bot. Magaz. vol. XV, 1902.

3) Ann. of Bot. vol. XVII, 1903, pag. 167.

4) Ber. d. deutschen bot. Ges. Band XXI, 1903, S. 259.

5) Comptes rendus, Acad. Sc. T. CXXXVI, 1903, pag. 1281.

6) 48—60 uur.

7) WENT l. c.

8) WENT l. c. pag. 3.

open gemeenschap. Het ascogonium verdeelt zich in twee cellen, waarvan de voorste in verdere ontwikkelingsstadia al spoedig niet meer is te herkennen. Deze verdeeling van het ascogonium heeft in enkele gevallen plaats op een oogenblik, waarop het geheel vrij van het pollinodium ligt, terwijl in andere gevallen de verdeeling eerst plaats heeft, als de eenigszins toegespitste en omgebogen top van het ascogonium langs het pollinodium valt.

De achterste cel van het verdeelde ascogonium, het definitieve ascogonium, neemt in omvang toe, terwijl ze omgeven wordt door een aantal hyphen, welke hunnen oorsprong onder het ascogonium hebben. Het aantal kernen van het ascogonium neemt in dit stadium toe; ze liggen in het schuimachtige protoplasma verspreid.

Om een aantal paren van kernen hoopt zich protoplasma op, zoodat er vrije cellen ontstaan, elk met twee kernen. Het overblijvende protoplasma met de kernen, welke geen cellen hebben gevormd, vertoont zich hoofdzakelijk als eene wandstandige laag. De kernen der vrije cellen zijn grooter dan die in het overblijvende protoplasma. De vrije cellen zijn in optische doorsnede dikwijls ellipsvormig, soms ook eenigszins in 't midden der lange as geknikt. De kernen der vrije cellen bestaan uit eene korrel, welke zich zeer sterk kleurt, en zijn in enkele gevallen door eene zone omgeven, welke lichter getint is dan het dichte protoplasma der cel.

Enkele malen vindt men in eene cel meer dan twee kernen, het meest drie, maar twee zijn dan grooter dan de derde.

Uit het onderzoek van een aantal praeparaten van verschillende stadia, leid ik af, dat de twee kernen der vrije cellen met elkaar versmelten, waardoor eene kern ontstaat, welke grooter is dan hare componenten.

De ontwikkeling gaat nu vrij snel verder, waarvan het gevolg is, dat men het één-kernige stadium der vrije cellen in vergelijking met het twee-kernige vrij zelden vindt. De ontwikkeling van alle cellen in een ascogonium gaat volstrekt niet gelijktijdig.

In een volgend stadium is de cel grooter geworden en haar protoplasma minder dicht. Ze bevat nu een groot aantal zeer kleine kernen. Vervolgens differentieeren zich in de cel eenige gedeelten, welke, naar het schijnt, geene kern bevatten en uit eene homogene zelfstandigheid bestaan. Deze plekken nemen het grootste gedeelte van de celruimte in, en de kleine kernen — chromatine-korrels zou ik ze willen noemen — worden teruggedrongen in de protoplasma-laagjes tusschen de kernlooze gedeelten.

Hierna ziet men in het midden der homogene, ellipsvormige plekken ééne kern, en zelf zijn ze verdeeld in een centraal gedeelte met

de kern en eenen lichter getinten rand. Dit stadium vertegenwoordigt het eerste optreden van sporen in de vrije cellen, meestal ten getale van 6—8. Tusschen de sporen vindt men wat IKENO de „Wabenwände”¹⁾ noemt, volgepropt met chromatine-korrels, welke duidelijk elk voor zich te onderscheiden zijn.

Deze chromatine-korrels verdwijnen nu snel, terwijl de kern der spore zich gaat deelen en we vinden sporen met 2, 4 en 8 kernen terwijl ten slotte, waarschijnlijk door nog verder gaande deeling, de spore geheel met een gekorrelde, zich sterk kleurende massa is opgevuld.

De sporewand is in den tusschentijd meer op den voorgrond getreden. Het aantal sporen is, zooals boven reeds gezegd werd, niet constant en soms vindt men zelfs slechts ééne spore in eene cel; in enkele gevallen telt men er echter ± 16 , welke dan kleiner zijn dan de normale. Zijn de sporen rijp, dan valt de vrije cel, als eenheid, uit elkaar en de sporen komen vrij in het ascogonium, waarvan de inhoud verder gevormd wordt door het epiplasma der vrije cellen en de resten van het protoplasma, dat in 't begin der ontwikkeling niet aan de vrije celvorming deelnam.

De sporen vullen het ascogonium niet geheel op, maar vormen tezamen eene periphere laag. Tusschen de sporen vindt men eene tusschenzelfstandigheid, welke zich sterk kleurt met oranje-G. IKENO's meening, dat de schijnbare veelhoekigheid der sporen een optisch bedrog zou zijn²⁾, is dus juist.

Monascus Barkeri.

De eerste stadia der peritheciumontwikkeling van dezen vorm stemmen overeen met die bij de eerst behandelde soort. Ook hier heb ik geene open gemeenschap van pollinodium en ascogonium kunnen constateren. Het laatste, dat hier meer evenwijdig aan het pollinodium ligt, wordt door eenen celwand ook in twee cellen verdeeld, waarvan de achterste het definitieve ascogonium wordt. Eerst nadat het, in het begin vrij los, door hyphen omgeven is, neemt het sterk in volumen toe. Zoolang het nog klein is, geven doorsneden van het geheele perithecium — ascogonium met omhullende hyphen — beelden, welke veel overeenkomst vertoonen met de figuren 17, 18 en 25 van BARKER³⁾. Terwijl het volumen van het ascogonium toeneemt, neemt ook het aantal kernen toe. Het ascogonium is nu

1) IKENO l. c. pag. 265.

2) IKENO l. c. pag. 267.

3) BARKER l. c.

rijk aan protoplasma met vele vacuolen. Eene eerste aanduiding van eene verdeling van het protoplasma in stukken — vooral wat het centrale gedeelte betreft — neemt men waar, doordat er hier en daar langgerekte vacuolen optreden. De kernen ziet men hier en daar twee aan twee liggen en men vindt ook enkele grootere kernen, waarvan ik me voorstel, dat ze ontstaan zijn door vereeniging van twee der kleinere.

In een volgend stadium vindt men vrije cellen gevormd, elk met één vrij groote kern, zoodat een stadium is ingetreden, dat zeer sterk herinnert aan het overeenkomstige bij *M. purpureus*. Het protoplasma der vrije cellen is in de meeste gevallen veel dichter dan in vroegere stadia; slechts in enkele gevallen is het ook nu nog schuimachtig. Zeer dikwijls komt het voor, dat de vrije cellen zich aan ééne zijde van het ascogonium bijeengevoegd hebben. Verder vindt men dan in het ascogonium eene vrij sterk ontwikkelde wandstandige laag protoplasma en één of enkele zeer groote vacuolen. Deze toestand herinnert aan de fig. 22 en 29 van BARKER. Het protoplasma, dat niet aan de vrije celvorming heeft deelgenomen, bevat zeer weinig of geen kernen, zoodat het waarschijnlijk is, dat verscheidene kernen reeds spoedig degenereren.

De ééne kern van eene vrije cel ondergaat nu achtereenvolgens drie tweedeelingen, zoodat er ten slotte acht kernen aanwezig zijn. De twee kernen na de eerste deeling, en de vier kernen na de tweede, deelen zich onderling niet altijd gelijktijdig, zoodat men ook cellen met 3, 5, 6 en 7 kernen vindt, maar b.v. in het eerste geval is een der drie kernen grooter dan de beide andere.

Als twee deelingskernen — welke ook hier weer bestaan uit een zich sterk kleurende korrel — zich reeds eenigszins van elkaar verwijderd hebben, vindt men tusschen hen dikwijls eenen min of meer volledigen band, iets lichter gekleurd dan de kernen zelf, maar donkerder dan het protoplasma der vrije cel. Deze deelingsfiguren komen vrijwel overeen met hetgeen IKENO heeft afgebeeld voor *Taphrina Cerasi* ¹⁾.

Nadat de acht kernen zich gevormd hebben, treden de sporen op met de kernen als middelpunten. Deze sporen komen in het ascogonium vrij en gedragen zich verder als bij *Monascus purpureus*.

De wijze, waarop in de beide beschreven vormen de kernen voor de sporen zich ontwikkelen, verschilt op belangrijke punten, maar komt op merkwaardige wijze overeen met hetgeen respectievelijk

¹⁾ Flora Band 92 S. 1 (fig. 24 en 27).

voor *Taphrina Kusanoi* en *T. Cerasi* door IKENO beschreven is ¹⁾.

Beide vormen stemmen hierin overeen, dat zich in het ascogonium vrije cellen vormen met oorspronkelijk twee kernen, welke tot één versmelten, uit welke ééne kern de kernen der sporen ontstaan. Dit heeft me aanleiding gegeven in de vrije cellen in het ascogonium van het geslacht *Monascus* het homologon te zien van eenen ascus, op grond voornamelijk van de onderzoekingen van DANGEARD ²⁾ over de sexualiteit der Ascomyceten.

Bij de overige Ascomyceten b.v. *Pyronema confluens* ³⁾ en *Ascolobus* ⁴⁾ zou volgens deze voorstelling de kernversmelting, in vergelijking met *Monascus*, slechts in tijd en plaats verschoven zijn en plaats hebben in hyphen, welke van het ascogonium uitgroeien en waarin een gedeelte van den inhoud van het ascogonium overgaat.

In verband met deze voorstelling zou ik *Monascus* willen plaatsen in eene nieuwe orde, die der Endascineae.

Anatomie. — De Heer PLACE biedt eene mededeeling aan van den Heer J. W. LANGELAAN: „*Over den vorm van het rompmytoom*”. 1^{ste} mededeeling.

(Mede aangeboden door den Heer BOLK).

De gesegmenteerde bouw van het lichaam der gewervelde dieren, welke het duidelijkst op den voorgrond treedt in het spierstelsel, heeft geleid tot de voorstelling van het myotoom.

Twee methoden zijn hoofdzakelijk gebruikt om den vorm van het myotoom vast te stellen. De eerste methode steunt op de hypothese van den primairen samenhang tusschen spier en zenuw, de tweede methode berust op de onmiddellijke dissectie van het intersegmentale weefsel. Uit de onderzoekingen van BARDEEN ⁵⁾ kan worden afgeleid, dat beide methoden ongeveer even beperkt zijn in hunne toepassing; bovendien is er reden te vermoeden, dat beide methoden niet steeds tot overeenkomstige resultaten zullen leiden.

De tweede dezer methoden is in dit onderzoek gevolgd.

1) Flora Band 92 S. 1 (fig. 24 en 27).

2) Le Botaniste 4 Serie, pag. 21—58, 1894—1895.

3) HARPER, Ann. of Bot. vol. XIV, 1900.

4) HARPER, Jahrb. f. wiss. Bot. Band XXIX, 1896.

5) Anat. Anz. Bd. XXIII No. 10/11.

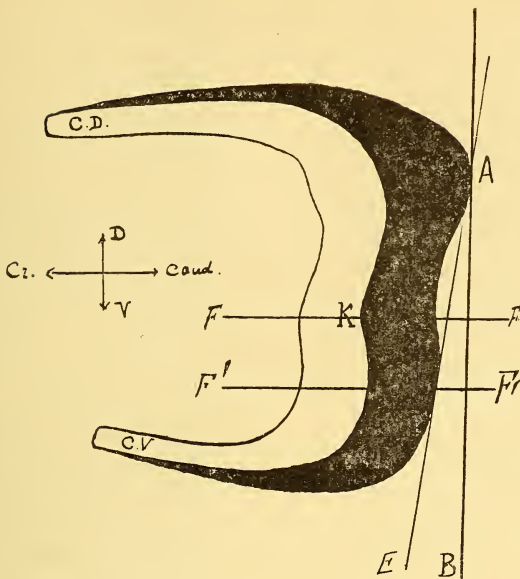
I. *Rompmyotoom van Petromyzon fluviatilis* (fig. I).

Fig. II.

sagittale middenvlak van het lichaam uitstrekken, zijn zij in lichte mate ten opzichte van elkaar getordeerd.

Het lichaam van het myotoom vertoont een knie (*K* fig. II), welke steeds dichterbij de ventrale dan bij de dorsale middenlijn is gelegen. Op een dwarsdoorsnede, volgens de lijn *FF'* fig. II, is het

Fig. III.



Dwarsdoorsnede door *Petromyzon fluviatilis*. Midden van den romp. Zwart het intersegmentale weefsel.

lichaam van het myotoom ruitvormig, terwijl deze ruit naar de hoornen toe meer en meer afgeplat wordt. Daardoor worden de hoornen op eene dwarsdoorsnede als lamellen zichtbaar (*L.L.* fig. III), welke in lichte mate gekromd zijn. Een zijde dezer ruit is gekeerd naar het buitenoppervlak van het lichaam (zwartgekleurd in fig. II). Dit lichaamsoppervlak is in het midden van den romp cilindrisch, terwijl de dwarsdoorsnede van dezen cylinder nauwkeurig elliptisch is. Het zwart gekleurde oppervlak moet dus gedacht worden gesneden te zijn uit dit cilindrisch oppervlak.

De tegengestelde zijde der ruit is gekeerd naar het askelet en naar de lichaamsholte. In 't algemeen heeft deze zijde van het myotoom denzelfden vorm als het buitenoppervlak, alleen in geringe mate uitgehold door de lichaamsholte. In dit gedeelte van den romp is de lichaamsholte

cylindrisch, met een dwarsdoorsnede welke nauwkeurig cirkelvormig is.

De beide andere zijden van de ruit zijn gelijk van vorm en grenzen resp. aan een meer cranial en een meer caudaal myotoom.

De stelling van het myotoom, met betrekking tot het sagittale vlak dat door de beide middenlijnen gaat, is zoodanig, dat het myotoom een caudale neiging vertoont. Deze inclinatie van het myotoom is van dien aard, dat gezien op een dwarscoupe (volgens de lijn *FF* fig. II) de langste as van de ruit een scherpen hoek maakt met de sagittale as van het lichaam, terwijl de top van dezen hoek gericht is naar den kop. Deze caudale neiging van het myotoom neemt af naar de hoornen toe, zoodat deze nagenoeg normaal geplaatst zijn ten opzichte van het lichaamsoppervlak.

Ten gevolge dezer caudale inclinatie bedekken de myotomen elkaar ten deele. Dit overgrijpen wisselt tusschen $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{3}$ in de nabijheid van de knie en neemt af naar de hoornen toe, tengevolge der afnemende caudale inclinatie van dat deel van het myotoom. De hoornen vormen daarom naast elkaar gerangschikte lamellen (fig. III *L.L.*).

De stelling van het myotoom met betrekking tot de dorso-ventrale as, welke loodrecht de sagittale as snijdt, is wisselend, afhankelijk van de plaats op den romp, waar zich het myotoom bevindt. Indien in figuur II *AB* een dorsoventrale as voorstelt en *AE* een lijn, welke raakt aan den rug van het myotoom, dan is de hoek *EAB* een maat van de helling ten opzichte dezer dorsoventrale lijn. De eerste myotomen onmiddellijk achter den kieuwkorf vertoonen een lichte voorwaartsche helling, welke bij de distaal opvolgende myotomen snel afneemt, zoodat het vierde of vijfde myotoom achter den kieuwkorf volkomen verticaal staat. De opvolgende myotomen (zooals in fig. II) vertoonen een toenemende retroversie, welke als maximum voor den hoek *EAB*, tien graden bedraagt. Deze achterwaartsche helling neemt af naar het caudale éinde van het lichaam, zoodat de myotomen gelegen achter de anaalopening opnieuw eene anteversie vertoonen.

De beschrijving, welke van het myotoom gegeven is, is alleen van toepassing op het rompmyoatom in het middengedeelte van den romp. Het kieuwapparaat, evenals het optreden der dorsale vinnen veroorzaken aanzienlijke veranderingen in den vorm der myotomen, welke in deze gebieden gelegen zijn.

II. *Rompmyoatom van Acanthias vulgaris* (fig. IV, V).

Het te beschrijven myotoom is afkomstig uit dat gedeelte van den romp, hetwelk gelegen is tusschen de borstvin en de eerste rugvin.

Fig. I.



Rompmootoom van *Petromyzon fluviatilis*. Vergrooing 2 maal.

Fig. IV.



Rompmootoom van *Acanthias*; dorsale en laterale gedeelte in natuurlijke grootte.

Fig. V.



Rompmootoom van *Acanthias*; Ventrale gedeelte in natuurlijke grootte.

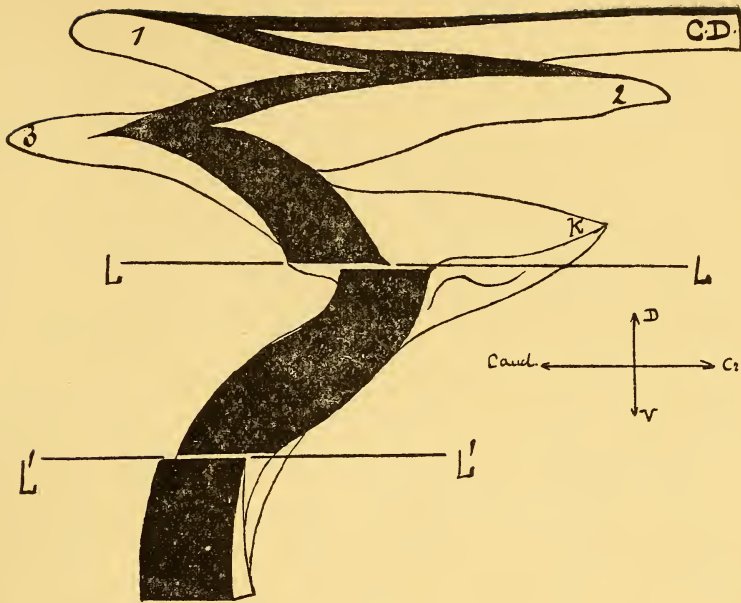


Fig. VI.

In zijne meest algemeene kenmerken vertoont het myotoom van *Acanthias* eene groote mate van overeenstemming met dat van *Petromyzon*, ofschoon op het eerste gezicht een aanzienlijk verschil schijnt te bestaan.

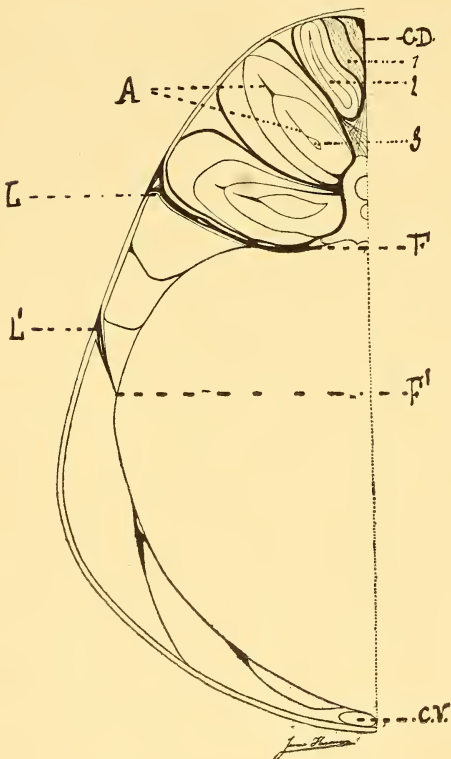
Wanneer men het myotoom van die zijde beschouwt, welke deel uitmaakt van het lichaamsoppervlak, dan schijnt het op twee plaatsen onderbroken te zijn. De lijnen van onderbreking zijn in dit gedeelte van den romp nagenoeg evenwijdig aan de sagittale as van het lichaam. De eerste dezer lijnen ($L L$ fig. VI) stemt overeen met de linea lateralis, de tweede ($L' L'$ fig. VI) ligt dicht bij de ventrale middenlijn van het lichaam. Op de plaatsen van onderbreking begeben zich septa van bindweefsel in de diepte. Door deze septa schijnt het myotoom in drieën verdeeld. Een gedeelte, hetwelk gelegen is tusschen de dorsale middenlijn en de lijn $L L$ is het dorsale gedeelte van het myotoom; tusschen de lijnen $L L$ en $L' L'$ ligt het laterale deel, en tusschen de laatste lijn en de ventrale middenlijn is het ventrale gedeelte van het myotoom gelegen.

Beschouwt men het oppervlak van het myotoom bij de lijn van onderbreking $L L$ dan is het laterale deel craniaalwaarts verschoven met betrekking tot het dorsale gedeelte. Deze verschuiving bedraagt de halve breedte van het myotoom. Hetzelfde wordt waargenomen langs de tweede onderbrekingslijn $L' L'$; ook hier is het laterale gedeelte craniaalwaarts verplaatst ten opzichte van het ventrale. Deze

verschuiving is steeds geringer dan $\frac{1}{3}$ van de breedte van het myotoom. Wanneer men het bindweefselseptum volgt, dat zich in de diepte begeeft bij de lijn van onderbreking LL , dan is het gemakkelijk waar te nemen, dat het myotoom ingerold is naar de lichaamsas toe, terugkeert en weer aan het lichaamsoppervlak komt. Meestal is in het diepst van de plooi het spierweefsel onderbroken, maar het intersegmentale weefsel, dat het myotoom omgeeft, is steeds continu. Indien men nu tracht het myotoom zooveel mogelijk te ontrollen, dan blijkt, dat het dorsale gedeelte een hoek maakt met het laterale gedeelte, zoodat in werkelijkheid een knie gevormd wordt. De top van de knie is gericht naar den kop evenals bij *Petromyzon*.

De plooilijn van het myotoom is evenwijdig aan de sagittale as van het lichaam en schijnt te loopen over de knie, zoodat de top van de knie komt te liggen in het punt K van figuur VI. Dezelfde verhoudingen treden, op wanneer men het bindweefselseptum volgt dat bij de lijn $L'L'$ in de diepte gaat. Hier is het myotoom eveneens ingeplooid, terwijl de plooilijn ook evenwijdig loopt aan de sagittale as van het lichaam.

Fig. VII.



Dwarsdoorsnede door den romp van *Acanthias*. Het intersegmentale weefsel door zwarte lijnen aangegeven; natuurlijke grootte.

Wanneer een model van het myotoom van *Petromyzon* wordt geknipt uit papier en deze papierstrook ingevouwen wordt langs de lijnen FF en $F'F'$ van fig. II, dan krijgt men een juist beeld van de verhoudingen zooals deze zich bij *Acanthias* voordoen. De richting waarin de oppervlakken ten opzichte van elkaar verschoven zijn, is een onmiddellijk gevolg van den vorm en van de kromming van het myotoom ter plaatse van de invouwing. Het verschil in de grootte van de verschuiving van de oppervlakken ten opzichte van elkaar, langs de lijnen LL en $L'L'$ is een gevolg hiervan, dat de invouwing langs de lijn FF verder doorloopt in de richting van buiten naar binnen, dan de vouw langs $F'F'$. Dit is een gevolg van de afmetingen van het myotoom, zooals blijkt

uit eene dwarsdoorsnede door den romp van *Acanthias* (fig. VII) in de regio van het beschreven myotoom. In deze dwarsdoorsnede is *LF* het bindweefselseptum dat het dorsale deel van het laterale scheidt, terwijl *L'F'* het septum is dat het laatst genoemde deel scheidt van het ventrale.

De verdere differentiatie van het dorsale gedeelte van het myotoom heeft plaats volgens hetzelfde principe. De plooilijnen echter, in plaats van evenwijdig aan de sagittale as van het lichaam te verlopen, vormen in het algemeen een rechten hoek met die as. Er zijn drie zulke plooilijnen overeenkomstig het aantal uitsteeksels, dat het dorsale deel van het myotoom vertoont.

Deze lijnen, in de richting van buiten naar het asskelet toe beschouwd, zijn aanvankelijk normaal ten opzichte van het lichaamsoppervlak, vervolgens gekromd met de convexe zijde gekeerd ventraal en naar buiten. De kromming is het duidelijkst zichtbaar aan de derde plooilijn gerekend van de dorsale middenlijn (*A* fig. VII), terwijl de eerste plooilijn nagenoeg eene rechte is normaal ten opzichte van het lichaamsoppervlak en van de sagittale as van den romp. Deze plooilijnen worden op eene dwarsdoorsnede duidelijk zichtbaar, doordien septa van intersegmentaal weefsel in de plooi indringt. De gekromde lijnen zijn de dwarsdoorsneden dezer septa.

Het laterale gedeelte van het myotoom vertoont geen verdere differentiaties.

Het ventrale deel van het myotoom heeft slechts een plooilijn, waarlangs de vouwing van het myotoom duidelijk is uitgesproken. Tengevolge hiervan vertoont dit deel slechts een duidelijk uitsteeksel gekeerd naar het caudale deel van het lichaam.

Het myotoom, als een geheel beschouwd, vertoont evenals bij *Petromyzon* een caudale inclinatie, welke het aanzienlijkst is in het gebied van de knie. Beschouwt men alleen het dorsale gedeelte, dan ziet men deze inclinatie afnemen in grootte naar de dorsale middellijn toe, zoodat het meest dorsale deel van het myotoom, dat verlengd is in een dorsalen hoorn (*CD* fig. VI), ongeveer normaal is geplaatst ten opzichte van het lichaamsoppervlak. Op eene dwarsdoorsnede vindt men derhalve deze dorsale hoornen als naast elkaar geplaatste lamellen terug (*CD* fig. VII).

Waar nu bij een plooilijn de richting, waarin het myotoom langs den romp loopt, omgekeerd wordt, keert ook de richting van de inclinatie om, zoodat deze gedeelten van het myotoom een craniale inclinatie vertoonen. De vouwing van het myotoom langs een plooilijn, in samenhang met de inclinatie van het myotoom, veroorzaken den gestrekten en puntigen vorm bij deze plooilijnen en maken tevens,

dat zij elkaar ten deele bedekken als holle in elkaar geschoven en toegespitste buizen. In figuur VII geeft 1 aan de dwarsdoorsnede der eerste caudaal gerichte punten, 2 de eerste craniaal gerichte en 3 de tweede weder caudaal gerichte uitsteeksels (fig. VI resp. 1, 2, 3).

Tengevolge der inclinatie van het myotoom zijn de plooilijnen niet volkomen rechthoekig ten opzichte van de sagittale lichaamsas, maar eveneens in lichte mate hellend. Dit is de oorzaak, waarom men slechts gedeelten dezer plooilijnen vindt in eene dwarsdoorsnede, welke normaal is ten opzichte van deze sagittale as. Uit deze dwarsdoorsnede kan men zich tevens eene voorstelling vormen van den afstand, waarop de myotomen op elkaar overgrijpen. Overeenkomstig de toenemende inclinatie van de dorsale middenlijn naar de eerste laterale lijn ziet men deze overgrijping toenemen tot ongeveer $\frac{3}{4}$. Bij de knie neemt deze inclinatie snel af. In het gebied van het laterale deel van het myotoom is de neiging gering en de overgrijping minder dan $\frac{1}{2}$. In het ventrale deel neemt de inclinatie aanvankelijk toe en daarna weder af tegen de ventrale middenlijn. Nergens overschrijdt de overgrijping $\frac{1}{2}$. Het ventrale deel van het myotoom eindigt tegen de ventrale middenlijn met een ventralen hoorn (fig. V en fig. VII *CV*), welke craniaalwaarts gericht is en korter is dan de dorsale hoorn.

Ten einde eene voorstelling te verkrijgen van de afmetingen van het myotoom, heb ik de lengte der verschillende gedeelten gemeten. Deze metingen zijn verricht over het oppervlak van het myotoom, terwijl dit oppervlak ook daar gevolgd werd, waar het ingevouwen is.

Voor het beschreven myotoom werd gevonden :

Lengte van het dorsale gedeelte 350 mM.; van het laterale gedeelte 90 mM.; van het ventrale gedeelte 190 mM. De lengte van het geheele myotoom bedroeg dus 630 mM. en hiervan behoorde $\frac{55}{100}$ tot de dorsale regio van het lichaam.

Dezelfde metingen heb ik verricht aan het myotoom van *Petromyzon*. Indien toegegeven wordt, dat daar, waar beide myotomen een knie vertoonen, overeenkomstige punten gegeven zijn, dan stemmen de punten aangeduid door *K* in figuur II en VI overeen. De lengte van het dorsale deel van het myotoom, gerekend tot de knie, bedroeg 33 mM., de lengte van het lateroventrale deel, gerekend van de knie tot de punt van den ventralen hoorn 26 mM. De geheele lengte van het myotoom langs het oppervlak gemeten bedroeg derhalve 59 mM. en daarvan behoorde eveneens $\frac{55}{100}$ tot dat deel van den romp, hetwelk vergelijkbaar is met de dorsale regio van *Acanthias*. Wanneer wij beide regionen vergelijken, dan is het duidelijk, dat de dorsale regio in *Acanthias* in hooge mate gereduceerd is. Niettegenstaande deze reductie behoort in beide ge-

vallen hetzelfde gedeelte van het geheele myotoom (nl. $\frac{56}{100}$) tot de regio van den rug. Mocht dit verschijnsel in het algemeen juist zijn, dan schijnt mij in de reductie van de dorsale regio het hoofdmoment gegeven, voor de inplooiing van het dorsale deel van het myotoom.

In figuur IV en V is door eene dwarsgestreepte lijn de positie van de rib gegeven ten opzichte van het myotoom. De rib is gelegen in het intersegmentale weefsel op de grens van het dorsale en laterale deel van het myotoom. De verbinding van de rib met het asskelet ligt iets caudaal ten opzichte van den top van de knie van het myotoom. De rib is caudaalwaarts gericht in overeenstemming met de caudale inclinatie van het myotoom daar ter plaatse, terwijl op een dwarsdoorsnede steeds drie opvolgende ribben getroffen worden.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer FRED. SCHUH „*Over een uitdrukking voor de klasse eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten.*”

(Mede aangeboden door den Heer SCHOUTE).

Is eene *algebraïsche vlakke kromme* door een vergelijking op Cartesiaansche *puntcoördinaten* gegeven, dan is haar *graad* n onmiddellijk uit de vergelijking af te lezen. De *klasse* k der kromme wordt het natuurlijkst als de graad der vergelijking op *lijncoördinaten* gedefinieerd. Ik wensch mij echter in het volgende uitsluitend tot *puntcoördinaten* te bepalen, en dan kan de klasse gedefinieerd worden als het aantal *beweeglijke* snijpunten van de kromme met de eerste poolkromme, of als het aantal *eigenlijke* raaklijnen uit een *willekeurig gelegen punt* P aan de kromme te trekken. Om uitsluitend *verschillende, niet in meervoudige punten der kromme gelegen, raakpunten* te krijgen, moet onder een *willekeurig gelegen punt* verstaan worden een punt, dat

1^{ste} niet op de kromme ligt,

2^{de} niet ligt op een der raaklijnen in een *meervoudig punt* der kromme,

3^{de} niet ligt op een raaklijn in een enkelvoudig punt, die een aanraking van hoogere dan de eerste orde aan de kromme vertoont.

Een *meervoudig punt* der kromme is een punt der kromme, dat geen enkelvoudig snijpunt met een rechte zijn kan. De verbindingslijnen van P met de meervoudige punten moeten niet als eigenlijke raaklijnen worden medegeteld.

Uit de bovengegeven definitie der klasse kan een andere worden

afgeleid, waarbij aan de plaats van het gebruikte punt P geen enkele beperking wordt opgelegd, en die dus doorgaat voor *ieder* punt P .

Aanvankelijk leggen we P nog de beperking op *niet op de kromme te liggen*. Onderstel nu, dat P ligt op de raaklijn in een punt S der kromme, waarin S een meervoudig punt of een enkelvoudig punt met een meer dan 2-puntig snijdende raaklijn zijn kan. Snijdt de rechte PS de kromme in w samenvallende punten S , terwijl een willekeurige rechte door S de kromme in t samenvallende punten S snijdt, dan telt S voor $w-t$ der k *eigenlijke* raakpunten van raaklijnen uit P aan de kromme, m. a. w. er naderen $w-t$ raakpunten tot S als P tot de raaklijn in S nadert. Het is hierbij onverschillig of de kromme één dan wel meer takken door S heeft, die aan SP raken, alsook of de kromme al of niet nog takken door S heeft, die niet aan SP raken.

Het bovenstaande volgt onmiddellijk uit het volgende:

THEOREMA. *Zij R een punt eener algebraïsche kromme, wier takken door R alle dezelfde raaklijn l hebben, die de kromme in $t+v$ samenvallende punten R snijdt, terwijl iedere andere rechte door R de kromme in t punten R snijdt, dan absorbeert R v eigenlijke raakpunten van raaklijnen uit P , als P op l buiten R ligt, en $t+v$ eigenlijke raakpunten, als P in R valt ¹⁾.*

¹⁾ Voor een tak, die door één enkele PUISEUX'sche reeksontwikkeling kan worden voorgesteld, kan dit theorema o. a. bewezen worden uit het verband, dat er tusschen de ontwikkelingen op punt- en op lijncoördinaten bestaat. Door optelling volgt dan onmiddellijk hetzelfde theorema voor meerdere takken, die dezelfde raaklijn hebben. In een opstel getiteld: „Een realiteitsvergelijking voor bestaansbare en onbestaansbare vlakke krommen met hoogere singulariteiten.” (*Deze verslagen van 19 Maart 1904* p. 845) heb ik van hetzelfde theorema gebruik gemaakt (p. 846), en voor de afleiding verwezen naar STOLZ, ZEUTHEN en STEPHEN SMITH. Ik heb toen echter verzuimd ook aan te halen: G. HALPHEN, *Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Mémoires prés. par divers savants à l'Académie des Sciences* (2) t. 26 (1879) n^o. 2 (112 p.). Dit omvangrijke stuk is reeds in April 1874 aan de Parijsche Academie aangeboden (zie: *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris* t. 78 p. 1105—1108, waar door den schrijver eenige resultaten zijn medegedeeld), zoodat daaraan de prioriteit toekomt. HALPHEN geeft aan het theorema een eenigszins andere, n.l. de volgende formulering (l. c. Théorème III p. 42 of Théorème II p. 50):

THÉORÈME. *La somme des ordres des contacts des branches d'une courbe avec une de ses tangentes est égale à la multiplicité du point correspondant à cette tangente dans la courbe corrélatrice.*

Het verband tusschen de reeksontwikkelingen van een tak op punt- en op lijncoördinaten is het eerst opgezocht door A. GAYLEY (*On the Higher Singularities of a Plane Curve. Quart Journ. of Math. Vol. 7* (1866) p. 212, *Collected Math. Pap. Vol. 5* p. 520 of *Note sur les singularités supérieures des courbes planes Crelle's Journal. Bd. 64* (1865) p. 369, *Coll. Math. Pap. Vol. 5* p. 424). Is

Is nu S een dergelijk punt, waar alle takken dezelfde raaklijn SP hebben, dan is $w = t + v$, terwijl volgens bovenstaand theorema S voor $v = w - t$ raakpunten van raaklijnen uit P telt. Gaan er door S behalve de aan SP rakende takken nog andere takken, dan geven deze laatste takken tot geen nieuwe in S vallende raakpunten aanleiding; ze doen echter de getallen t en w evenveel toenemen, zoodat ze $w - t$ onveranderd laten. Ook dan stelt dus nog $w - t$ het aantal raakpunten voor, die tengevolge van de bijzondere ligging van P in S vallen.

Ligt P niet op een der raaklijnen in S , dan is $w = t$, zoodat dan $w - t$ nog steeds het aantal (n. l. nul) der in S vallende raakpunten voorstelt.

Is S een raakpunt van een raaklijn uit P , waarbij zich niets bijzonders voordoet, dan is daarvoor $t = 1$ en $w = 2$, zoodat $w - t = 1$ is, terwijl S nu ook voor één raakpunt telt.

Sommeert men dus $w - t$ over alle punten S der kromme, waarvoor $w > t$ is, dan krijgt men steeds als som k voor ieder niet op de kromme gelegen punt P , dus

$$k = \sum (w_1 - t_1). \quad \dots \quad (1)$$

We formuleeren dit aldus:

THEOREMA I. *Zij P een niet op een algebraische kromme gelegen punt en S een willekeurig punt dier kromme. Onderstel dat de kromme de rechte PS in w , een willekeurige rechte door S daarentegen in t samenvallende punten S snijdt, dan is de klasse der kromme gelijk aan $w - t$ gesommeerd over alle punten S der kromme, waarvoor $w > t$ is, en over zooveel andere punten der kromme als men wil.*

Vervolgens onderstellen we, dat P op de kromme ligt, en wel in een punt van den graad t' , d. w. z. dat t' het kleinste aantal in P vallende snijpunten der kromme met een rechte door P is. Voor een niet in P vallend punt S der kromme wordt nu nog steeds het aantal in S vallende raakpunten door $w - t$ aangegeven. Boven-

$y = Ax^p + Bx^q + \dots$ ($p > 1$) de ontwikkeling op puntcoördinaten, dan geeft CAYLEY voor de ontwikkeling op lijncoördinaten op $Z = A'X^{\frac{p}{p-1}} + B'X^{\frac{q}{p-1}} + \dots$, waarin de algemeene vorm der exponenten $\frac{\lambda p + \mu q + \dots}{p-1}$ is; hierin zijn λ, μ, \dots geheele positieve getallen. Impliciet ligt hierin het HALPHEN'sche theorema opgesloten. CAYLEY gaat echter niet verder op het verband der reeksontwikkelingen in en spreekt het theorema niet uit.

Ten slotte zij nog vermeld, dat het theorema ook is uitgesproken door M. NÖTHER, Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve. *Math. Annalen* Bd. 9 (1876) p. 166 (spec. p. 182).

dien vallen er echter eenige raakpunten in P , en wel volgens het HALPHEN'sche theorema ten getale van $t' + \sum v'_1$, waarin $\sum v'_1$ een sommeering over de verschillende raaklijnen der kromme in P voorstelt, die de kromme in $t' + v'_1, t' + v'_2, \dots$ samenvallende punten P snijden. Men krijgt dus :

$$k = t' + \sum v'_1 + \sum (w_1 - t_1), \dots \dots \dots (2)$$

waarin $\sum (w_1 - t_1)$ een sommeering over alle buiten P gelegen punten S der kromme voorstelt.

Men kan echter ook het punt P onder de punten S opnemen. De verbindingslijn PS wordt dan onbepaald. Neemt men voor PS een lijn, die geen raaklijn in P is, dan is $w = t'$. Kiest men echter voor PS een in $t' + v'_1$ samenvallende punten P snijdende raaklijn, dan is $w = t' + v'_1$, dus $w - t' = v'_1$. Voor (2) kan dus ook geschreven worden

$$k = t' + \sum (w_1 - t_1), \dots \dots \dots (3)$$

mits men de sommeering ook over een in P zelf gelegen punt S uitstrekke, waarbij men dan voor PS alleen die rechten door P te nemen heeft, die een bijdrage leveren (dus de raaklijnen in P), en zooveel andere rechten door P als men wil.

Van de vergelijking (3) is (1) een bijzonder geval. Ligt n.l. P niet op de kromme, dan heeft iedere rechte door P nul snijpunten P met de kromme, m. a. w. P is een *punt van den nulden graad* der kromme, dus $t' = 0$. Het resultaat van al onze beschouwingen ligt dus in de vergelijking (3) opgesloten.

We formuleeren dit aldus :

THEOREMA. II. *Zij P een punt van den graad t' eener algebraïsche kromme (waarbij t' ook nul zijn kan), en S een willekeurig punt van den graad t dier kromme. Onderstel dat de rechte PS de kromme in w samenvallende punten S snijdt, dan is de klasse der kromme gelijk aan t' vermeerderd met $w - t$ over alle punten S der kromme gesommeerd. Ligt S in P , dan heeft men alle rechten door P als de verbindingslijn PS te beschouwen.*

Wanneer we spreken van *alle punten S* of, als S in P ligt, van *alle rechten door P* , is de bedoeling dat we die punten of rechten nemen, die een bijdrage tot $\sum (w_1 - t_1)$ opleveren, en zooveel andere punten of rechten als men wil.

Van dit theorema II is het theorema I een bijzonder geval ($t' = 0$). Het theorema gaat steeds door, welke singulariteiten de kromme ook moge bezitten.

Kristallographie. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: „*Over Benzylphtaalimide en Benzylphtaal-iso-imide.*”

(Mede aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM.)

Voor eenigen tijd werd mij door Prof. Dr. GABRIËL in Berlijn, een praeparaat ter hand gesteld van een door hem gesyntheseerd *Benzylphtaalimide*¹⁾: $C_6H_4 \cdot (CO)_2 \cdot N(CH_2 \cdot C_6H_5)$, met smeltpunt van $115^\circ,5$ C. Kortens tijd daarna verkreeg ik door de welwillendheid van Prof. HOOGWERFF, te Delft, eenige kristallen van *Benzylphtaal-iso-imide*²⁾: $C_6H_4 \cdot (CO) \cdot O \cdot C : N(CH_2 \cdot C_6H_5)$ met smeltpunt van $82^\circ,5$ C. Daar beide isomere verbindingen in uiterst nauw structuurverband tot elkaar staan, scheen het mij van belang hunne kristallografische symmetrie te onderzoeken.

a). *Benzylphtaalimide.* (Smpt: $115\frac{1}{2}^\circ$ C.)

Uit een mengsel van aether + alcohol verkreeg ik deze verbinding in groote, zeer doorzichtige en glanzende kristallen met eenigzins rhomboëdrischen habitus. Veelal ook zijn zij meer afgeplat. In genoemd oplosmiddel is het kristallisatie-vermogen der verbinding buitengewoon groot.

De symmetrie is *triklien-pinaköidaal*; de assen-elementen zijn:

$$a : b : c = 0,8443 : 1 : 1,3600$$

$$A = 101^\circ 51'. \quad a = 108^\circ 24'.$$

$$B = 116^\circ 51\frac{1}{2}'. \quad \beta = 120^\circ 7'.$$

$$C = 80^\circ 45\frac{1}{2}'. \quad \gamma = 73^\circ 8'.$$

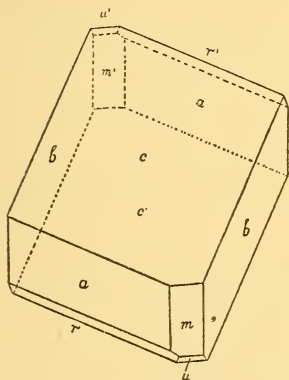


Fig. 1.

Waargenomen vormen zijn: $c = \{001\}$, praedomineerend; $a = \{100\}$ en $b = \{010\}$, ongeveer even sterk ontwikkeld; $m = \{110\}$, smal; $r' = \{\bar{1}01\}$, klein en smal, — soms iets breeder; $u = \{\bar{1}11\}$, klein en zeer op den achtergrond tredend.

De kristallen zijn in Fig. 1 afgebeeld; de gemeten en berekende hoeken volgen hier-

nevens:

1) Berl. Ber. 20. 2227.

2) Recueil d. Trav. Chim. d. Pays-Bas, T. XIII. 99.

	Gemeten :	Berekend
$*a : b = (100) : (010) = 99^\circ 14\frac{1}{2}'$		—
$*a : c = (100) : (001) = 63 \quad 8\frac{1}{2}'$		—
$*b : c = (010) : (001) = 78 \quad 9$		—
$*m : b = (110) : (010) = 58 \quad 19\frac{1}{2}'$		—
$*c : r' = (001) : (\bar{1}01) = 78 \quad 59$		—
$a : m = (100) : (110) = 40 \quad 55$		$40^\circ 55'$
$c : m = (001) : (110) = 58 \quad 22\frac{1}{2}'$		$58 \quad 17$
$a : r' = (100) : (10\bar{1}) = 37 \quad 55$		$37 \quad 55$
$b : r' = (010) : (\bar{1}01) = 71 \quad 35$		$71 \quad 28$
$m : r' = (110) : (10\bar{1}) = 61 \quad 53$		$62 \quad 1$

De kristallen splijten volkomen, parallel $\{100\}$ en $\{010\}$.

Uit aether omgekristalliseerd, verkrijgt men zeer sterk lichtbrekende, zeshoekig begrensde plaatjes. Bij onderzoek blijkt, dat deze kristallen *tweelingen* zijn: $\{001\}$ is tweelingsvlak, met daarop normaal staande tweelings-as.

Behalve $c = \{001\}$, $b = \{010\}$, $r' = \{\bar{1}01\}$ en $u' = \{1\bar{1}\bar{1}\}$, nam ik nog een vorm $q = \{01\bar{1}\}$ waar; c is sterk ontwikkeld, b en q zijn smal, r' en u' zijn even breed, en goed gevormd aanwezig. De splijtbaarheid is dezelfde als boven.

Gemeten werden bovendien nog :

$$q : b = (01\bar{1})_{(2)} : (010)_{(1)} = 23^\circ 58' ; \text{ berekend} : 23^\circ 42'.$$

$$b : b = (010)_{(1)} : (010)_{(2)} = — 19^\circ 23' ; \text{ berekend} : — 19^\circ 28'.$$

$$r : r = (10\bar{1})_{(1)} : (10\bar{1})_{(2)} = 21^\circ 45' ; \text{ berekend} : 22^\circ 2'.$$

$$c : q = (00\bar{1}) : (01\bar{1}) = 58^\circ 21' ; \text{ berekend} : 58^\circ 9'.$$

De aard der tweelingsvorming is hiermede derhalve genoegzaam duidelijk gemaakt.

Op $\{001\}$ is de richting der optische elasticiteits-as bijna loodrecht georiënteerd op de ribbe $(001) : (010)$; een assenbeeld was niet waar te nemen.

Het specifiek gewicht der kristallen werd door middel van eene THOULET'sche oplossing bepaald op : $d = 1,343$, bij 16°C ; derhalve zijn de topische assen, berekend volgens de formule :

$$\chi = \left(\frac{a^2 V}{c \sin \beta \sin \gamma \sin A} \right)^{1/3} ; \Psi = \left(\frac{V}{ac \sin \beta \sin \gamma \sin A} \right)^{1/3} ;$$

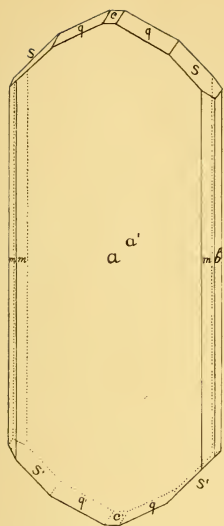


Fig. 2.

$$\omega = \left(\frac{c^2 V}{a \sin \beta \sin \gamma \sin A} \right)^{1/3},$$

waarin $V = \frac{M}{d}$, als M het molekulairegewicht voorstelt, — gelijk aan:

$$\chi : \psi : \omega = 4,8513 : 5,7458 : 7,8145.$$

b.) Gedurende een kouden winternacht, verkreeg ik uit eene oplossing der verbinding in *benzol* eenmaal eene tweede, *minder stabiele* modifikatie.

Er ontstonden doorzichtige, zeshoekig begrensde plaatjes; de kristallen waren enkelvoudig en geen tweelingen zooals in 't vorige geval. Het smeltpunt lag bij 115° ; de kristalletjes echter werden zeer spoedig dof, zoodat eene molekulare omlegging, ook tijdens de verwarming, zeer waarschijnlijk is. Ik heb deze modifikatie slechts ééne enkele maal kunnen verkrijgen.

Ze is *monoklien-prismatisch*; de kristalparameters werden berekend op:

$$a : b : c = 0,8476 : 1 : 0,5092$$

$$\beta = 70^\circ 42'.$$

Waargenomen vormen: $a = \{100\}$, sterk praedomineerend; $m = \{110\}$ en $b = \{010\}$, zeer smal; $c = \{001\}$, zeer klein en op den achtergrond tredend; $q = \{011\}$ en $s = \{021\}$ even breed ontwikkeld.

$$*a : m = (100) : (110) = 38^\circ 39\frac{1}{2}'$$

$$*a : q = (100) : (011) = 72 \quad 40 \quad \text{—}$$

$$*c : q = (001) : (011) = 25 \quad 40 \quad \text{—}$$

$$s : q = (021) : (011) = 18 \quad 18 \quad 18^\circ 12'$$

$$b : m = (010) : (110) = 51 \quad 20 \quad 51 \quad 20\frac{1}{2}'.$$

Eene duidelijke slijtbaarheid werd niet gevonden.

Derhalve is het *benzylphtaalimide dimorf*. Over den merkwaardigen samenhang dezer β -modifikatie met den kristalvorm van het *iso-imide*, en met dien der α -modifikatie, zie men het slot dezer mededeeling.

c). *Benzylphtaal-iso-imide*. (Smpt: $82\frac{1}{2}^\circ$ C.),

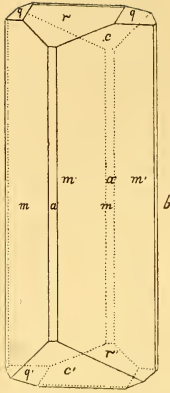


Fig. 3.

De in Fig. 3 afgebeelde kristallen zijn uit volkomen *watervrijen* aether verkregen; zij zijn langprismatisch, en hier en daar porceleinwit. Bij langer bewaren, zelfs in 't donker, worden ze geheel ondoorzichtig, en zien er uit, alsof ze verweerd waren. Echter bevatten de kristallen geen meegekristalliseerd oplosmiddel; waarschijnlijk heeft hier eene nog onbekende molekulare omzetting plaats.

De symmetrie is *monoklien-prismatisch*; de assen-elementen worden bij onderstaande keuze der grondvormen berekend op:

$$a : b : c = 1,2303 : 1 : 0,5932$$

$$\beta = 71^{\circ}46'.$$

Waargenomen vormen: $m = \{110\}$, sterk praedomineerend; $c = \{\bar{2}01\}$, eveneens goed ontwikkeld; $r = \{001\}$, vrij sterk; $q = \{011\}$, zeer duidelijk; $a = \{100\}$, smaller; $b = \{010\}$, zeer smal; tusschen r en c ligt nog een orthodoma $\{h0k\}$, dat slechts even aangeduid en niet meetbaar was. Ik heb bovenstaande letters behouden voor de notatie der vormen, omdat de habitus van 't kristal op 't eerste gezicht eene opstelling met $c = \{001\}$, $r = \{\bar{2}01\}$ en $q = \{\bar{2}11\}$, in vele opzichten meer voor de hand liggend maakt.

	<i>Gemeten:</i>	<i>Berekend:</i>
* $a : m = (100) : (110) = 49^{\circ} 26\frac{2}{3}'$		—
* $c : m = (\bar{2}01) : (110) = 68 25\frac{1}{2}$		—
* $q : q = (011) : (0\bar{1}1) = 58 47\frac{1}{2}$		—
$c : r = (\bar{2}01) : (001) = 52 32\frac{1}{2}$		$52^{\circ} 40\frac{1}{2}'$
$c : a = (\bar{2}01) : (100) = 55 42\frac{1}{2}$		$55 33\frac{1}{2}$
$r : a = (001) : (100) = 71 44$		$71 46$
$c : q = (\bar{2}01) : (011) = 58 9\frac{1}{2}$		$58 7$
$q : r = (011) : (001) = 29 24$		$29 24$
$m : b = (110) : (010) = 40 49$		$40 33$
$m : m = (110) : (\bar{1}10) = 81 7$		$81 7$
$q : m = (011) : (\bar{1}10) = 53 34$		$53 28$

Eene duidelijke slijtbaarheid werd niet gevonden; misschien is q een slijtvlak. De symmetrische uitdooving op de vlakken van $\{110\}$ bedraagt circa 3° ten opzichte der vertikaal-as; eene verdere optische onderzoeking was uitgesloten.

De dichtheid der kristallen is *bij benadering* ¹⁾ = 1,145; voor de topische assenverhouding vindt men, door in bovenstaande formules γ en $A = 90^\circ$ te stellen:

$$\chi : \psi : \omega = 8.2234 : 6.6840 : 3.9650.$$

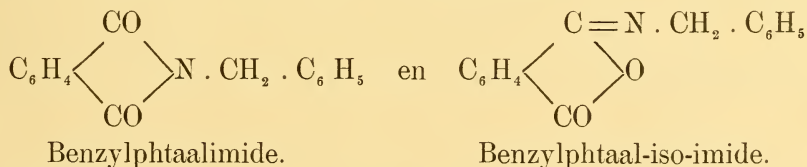
Vergelijken wij de kristalparameters der twee heteromorfe modifikatie's van 't *benzylphtaalimide* met de parameters van 't *benzylphtaal-iso-imide*, dan valt een merkwaardig verband tusschen de kristalvormen dezer lichamen terstond in het oog:

Verbinding:	Symmetrie:	Kristalparameters:
<i>a</i> -Benzylphtaalimide.	Triklien-pinakoïdaal.	$a : b : c = 0,8443 : 1 : 1,3600.$ (α, β, γ ; z.b.)
β -Benzylphtaalimide.	Monoklien-prismatisch.	$a : b : c = 0,8476 : 1 : 0,5092.$ $\beta = 70^\circ 42'$
<i>Benzylphtaal-iso-imide</i> .	Monoklien-prismatisch.	$a : b : c = 1,2303^2) : 1 : 0,5932.$ $\beta = 71^\circ 46'$

Vooreerst n.l. is de verhouding $a : b$ bij α - en β -modifikatie gelijk; een bewijs, dat deze kristallografische vormen wat betreft hun inwendigen bouw in nauw verband tot elkaar staan. Ik heb deze gelijkheid van twee parameters bij verschillende modifikatie's eener zelfde verbinding reeds meer dan eens aangetroffen; een frappant voorbeeld er van vond ik nog onlangs bij de roode α -, en de minder stabiele gele β -modifikatie van het 1-3-4-*Dinitrodiaethylaniline*, óók daar ondanks het verschil in symmetrie-graad. Kristallografisch *moeten* trouwens zulke modifikaties altijd afhankelijk van elkaar zijn, al is die afhankelijkheid niet immer terstond te herkennen.

Dan echter is de zeer nauwe verwantschap van de minder stabiele β -modifikatie met den kristalvorm van het *iso-imide*, zooals die uit de analoge waarden voor de hellingshoek β en de verhouding $b : c$ duidelijk blijkt, in hooge mate verrassend.

Volgens de HH. HOOGWERFF en VAN DORP ³⁾ berust n.l. de isomerie van *imiden* en *iso-imiden* in een verschil van bindingswijze van het *N*-atoom eenerzijds en 't *O*-atoom anderzijds:



¹⁾ *Bij benadering*, — omdat de ondoorzichtige kristallen geen voldoende waarborg leverden voor *homogeniteit*, en omdat de stof door contact met de THOULET'sche oplossing aan de oppervlakte chemisch aangetast wordt.

²⁾ Opgemerkt zij, dat de verhouding $a : b$, voor $m = \{230\}$, = 0,8202 : 1 zou worden.

³⁾ loco cit.

De heteromorfe β -modifikatie van 't eerste lichaam nu, blijkt uiterst nauw verwant te zijn aan den kristalvorm van 't lichaam, dat uit het eerste kan ontstaan gedacht worden door desmotrope verandering. Beide verschijnselen, *dimorfie* eenerzijds, *desmotropie* anderzijds, hebben hier dus als gevolg eene *analoge* verandering in de kristal-symmetrie van het α -benzylphtaalimide.

Het vermoeden, dat ik voor eenigen tijd uitsprak, als zoude *kristallografische polymorfie* bij vele organische verbindingen, hare oorzaak kunnen vinden in eene *chemische isomerie*¹⁾, waarbij dan minder-stabiele atoom-konfiguraties tijdelijk bestaanbaar zouden kunnen zijn — wordt, naar ik meen, door 't vinden van bovengenoemden samenhang, weder een weinig meer gerechtvaardigd.

Wiskunde. — De Heer KLUYVER biedt eene mededeeling aan van den Heer EDMUND LANDAU te Berlijn: Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn KLUYVER auf S. 432—439 des Bandes

$$\text{XII, „Reeksen, afgeleid uit de reeks } \sum \frac{\mu(m)''}{m} .$$

(Mede aangeboden door den Heer W. KAPTEYN).

(Deze mededeeling zal verschijnen in het Verslag der Juni-Vergadering).

Plantenkunde. — Voor de werken der Akademie wordt aangeboden eene verhandeling van den Heer C. A. J. A. OUDEMANS: „*Catalogue raisonné des Champignons des Pays-Bas.*”

Voor de Boekerij worden aangeboden, door den Heer HAMBURGER: „*Osmotischer Druck und Ionenlehre in den medicinischen Wissenschaften zugleich Lehrbuch physikalisch-chemischer Methoden*” Band II, en door den Heer J. C. KAPTEIJN: „*Publications of the Astronomical Laboratory at Groningen*”. N^o. 12 en 13.

De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 25 Juni 1904.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 68.

Verslag van den Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN over de vergadering van de Internationale Associatie der Akademiën, van 25—27 Mei 1904 te Londen gehouden, p. 69.

Verslag over eene verhandeling van den Heer L. BOUMAN: „Onderzoekingen over vrije woord-associatie”, p. 69.

EDMUND LANDAU: „Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn KLUYVER: „Reeksen afgeleid uit de reeks $\sum \frac{u(m)}{m}$.” (Aangeboden door de Heeren J. C. KLUYVER en W. KAPTEYN), p. 71.

H. ZWAARDEMAKER: „Kunstmatige en natuurlijke zenuwprickeling en de hoeveelheid energie daarbij gebezigd”, p. 83.

A. SMITS: „De verschijnselen die optreden, wanneer bij een binair stelsel de plooiingskromme de oplosbaarheidslijn ontmoet”, (3de mededeeling). (Aangeboden door den Heer H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 90. (Met 2 platen).

J. OLIE JR.: „De omzetting van het phenylkaliumsulphaat in *p*-phenolsulfonzure kalium.” (Aangeboden door de Heeren C. A. LOBRY DE BRUYN en A. P. N. FRANCHIMONT), p. 102.

J. F. SUYVER: „De intramoleculaire omzetting bij de stereoisomere α - en β -trithioacet- en β -trithiobenzaldehyden”. (Aangeboden door de Heeren C. A. LOBRY DE BRUYN en A. P. N. FRANCHIMONT), p. 104.

J. W. DITO: „De viscositeit van het systeem hydrazine + water.” (Aangeboden door de Heeren C. A. LOBRY DE BRUYN en A. P. N. FRANCHIMONT), p. 110.

F. M. JAEGER: „Over het behoud der kristalsymmetrie bij substitutie van isomorfe plaatsings-isomere derivaten der benzol-reeks.” (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 112.

J. J. VAN LAAR: „Over mengwarmten bij associeerende oplosmiddelen.” (Aangeboden door de Heeren H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM en C. A. LOBRY DE BRUYN), p. 121.

A. F. HOLLEMAN: „Over de bereiding van silicium en zijn chloride”, p. 125.

FRED SCHUCH: „Over een uitdrukking voor het geslacht eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten.” (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 127.

FRED SCHUCH: „Over de krommen van een bundel, die een vlakke algebraïsche kromme met hoogere singulariteiten aanraken.” (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 133.

W. H. JULIUS: „De zonnebeelden, met den spectroheliograaf verkregen, en de anomale dispersie”, p. 138.

J. D. VAN DER WAALS: „De afleiding der formule, welke de betrekking aangeeft tusschen de samenstelling van coëxisterende fasen bij binaire mengsels”, p. 145.

P. P. C. HOEK: „Een interessant geval van Atavismus”, p. 152. (Met één plaat).

C. E. GEERTS: „*P_x*-lijnen van mengsels van aceton en aethylaether en van tetrachloorkoolstof en aceton bij 0° C.” (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 156. (Met één plaat).

B. M. VAN DALFSEN: „Over de functie $\frac{a}{b}$ bij meervoudige mengsels.” (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en D. J. KORTEWEG), p. 167.

C. EASTON: „Over de schijnbare verdeling der nevelvlekken.” (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 181.

C. EASTON: „De nevelvlekken in hun betrekking tot het melkwegstelsel beschouwd.” (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 189.

H. KAMERLINGH ONNES en C. ZAKRZEWSKY; „Het bepalen der coëxistentievoorwaarden van damp- en vloeistofphasen van mengsels van gassen bij lage temperaturen”, p. 199. (Met een plaat).

H. KAMERLINGH ONNES en C. ZAKRZEWSKY: „De geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van chloormethyl en koolzuur”, p. 207.

B. MELINK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. VII. Vergelijking van den platinathermometer met den waterstofthermometer, p. 212. VIII. Vergelijking van den weerstand van gouddraden en van platinadraden, p. 221. (Met één plaat). (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. D. VAN DER WAALS).

Aanbieding van Boekgeschenken, p. 233.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren CARDINAAL, KAMERLINGH ONNES, LORENTZ, MOLL, E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, J. P. VAN DER STOK en P. ZEEMAN dat zij verhinderd zijn de Vergadering bij te wonen;

2°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken, dd. 20 Juni 1904, met verzoek van bericht of er geleerden zijn, en zoo ja welke, bereid buiten bezwaar van 's Rijks schatkist te worden afgevaardigd naar het 6^e Internationale Congres voor Zoölogie van 14—19 Augustus a.s. te Bern te houden.

De Vergadering besluit aan Z.Exc. mede te deelen, dat de Heer J. W. VAN WIJHE bereid is, als afgevaardigde der Regeering te worden benoemd.

3°. Bericht van den Heer J. J. THOMSON te Cambridge, dat hij onder dankzegging voor zijne benoeming het buitenlandsch lidmaatschap der Akademie aanvaardt.

4°. Schrijven van den Heer P. DROSTE te Haarlem, namens administrateurs van het P. W. KORTHALS-fonds bericht gevende dat dit jaar weder f 600.— beschikbaar zal worden gesteld tot bevordering der kruidkunde.

De Voorzitter verzoekt de botanische leden der Afdeeling hiertrent van advies te willen dienen.

5°. Circulaire van het 1^{ste} Congrès international d'assainissement et de salubrité de l'habitation van 15—20 October a.s. te Parijs te houden.

Ter kennisneming van de leden beschikbaar gesteld.

De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN brengt Verslag uit over de vergadering van de Internationale Associatie der Akademiën van 25—27 Mei te Londen gehouden.

Dit Verslag, opgemaakt in overleg met den afgevaardigde der Letterkundige Afdeeling (Prof. M. J. DE GOEJE) zal als Bijlage in het Jaarboek voor 1904 worden opgenomen.

Physiologie. — De Heer WINKLER brengt ook namens den Heer ZWAARDEMAKER het volgende verslag uit over een verhandeling van Dr. L. BOUMAN getiteld: „*Onderzoekingen over vrije woordassociatie*”.

Door Dr. L. BOUMAN is een tamelijk lijvige verhandeling voor de Handelingen der Academie aangeboden.

Zij bevat een uitgebreid onderzoek naar het psychisch proces, dat ondersteld wordt zich af te spelen, wanneer door een persoon de door het toeroepen van een woord gewekte of eerst invallende gedachte geuit wordt. De aldus verkregen uitingen — vrije of onbepaalde woordassociaties heeft men ze genoemd — hangen dan tot op zekere hoogte af van het prikkelwoord en Dr. BOUMAN heeft bij

24 aspirant-verpleegsters	2400.
(8 + 3) = 11 gediplomeerde verpleegsters	2700.
27 schoolkinderen	8000.
45 krankzinnigen	± 20.000.
	dus te zamen 33.000

z.g. vrije woordassociaties verzameld.

Verschillende mogelijkheden stonden hem bij de verwerking van dit ruime materiaal ten dienste. Want meerdere onderzoekers hebben soortgelijk materiaal bestudeerd.

De inleiding en het eerste deel van Dr. BOUMAN's arbeid bevat een summarisch overzicht van de nogal omvangrijke litteratuur over dit onderwerp. De grondslagen waarop de indeeling der vrije associaties berust, zooals zij door WUNDT, KRAEPELIN, ASCHAFFENBURG, MÜNSTERBERG, ZIEHEN e. a. zijn gegeven, worden besproken en gecritiseerd.

Deels om tot vergelijking te kunnen komen met andere soortgelijke onderzoekingen in Nederland verricht, ook deels op grond van bepaalde psychologische overwegingen, neemt hij tot grondslag voor zijn indeeling der gevonden associaties het schema over, dat door Dr. VAN DER PLAATS, (die 10.000 vrije associaties bij studenten verwerkte) met behulp van de daaruit verkregen ervaringen werd opgesteld.

Dr. BOUMAN gebruikt dan ook de methode van Dr. VAN DER PLAATS, wiens 300 één-lettergrepige zelfstandige naamwoorden hij als prikkelwoorden overneemt.

Hij onderscheidt dus evenals deze de vrije associaties in

1. Coördinaties: als het antwoord tot het prikkelwoord staat als deel tot geheel, als geheel tot deel, als deel tot deel, of er in een causale verhouding toe staat, bijv. *huis-venster* enz.

2. Praedicatieve: als het antwoord een eigenschap van het prikkelwoord geeft, dus adjectiva, verba, of substantive adjectieven, *ijs-hard*.

3. Woordenaanvullingen: als het antwoord eenvoudig een verlengd prikkelwoord wordt, *vuur-vurig*.

4. Klankassociatie en spraakherinneringen: *rein-klein*.

5. Identiteiten: *zoen-kus*.

6. Zinlooze associaties: (zeer zeldzaam).

Maar hij voegt er, gedwongen door zijn materiaal, een aantal andere groepen bij.

7. Doelaangevende associaties bijv. *vuur — om te warmen*.

8. Herhalingen.

9. Zinnen en woordrijen (bij krankzinnigen).

10. Niet beantwoorde prikkelwoorden.

Voorts tracht Dr. BOUMAN te weten te komen, hoe het met de ontwikkeling zijner proefpersonen gesteld is.

Om die reden laat hij de aspirant-verpleegsters een proefvragenlijst invullen, waaruit hun schoolkennis zal blijken en geeft hij van hen een psychologische, overigens subjectieve, analyse. Voor de verpleegsters (verplegers) geldt het reeds verworven diploma als index. Van de schoolkinderen heeft hij de mededeelingen der onderwijzers voor dit doel gebruikt. De krankzinnigen beoordeelt hij uit de ziekte-geschiedenissen.

Al deze groepen worden nu onderling en met die van Dr. VAN DER PLAATS vergeleken.

Ook Dr. BOUMAN vindt evenals zijn voorganger personen die op *typische* wijze vrij associeeren. Die typen catalogiseert hij.

Het type *A* bijv. gebruikt in meer dan 50% alleen coördinaties, type *B* in meer dan 50% praedicatieve associaties, type *C* in meer dan 50% woordaanvullingen enz.

Maar uit zijn onderzoekingen blijkt tevens, dat bij zijn materiaal niet geheel hetzelfde wordt gevonden als bij de studenten van Dr. VAN DER PLAATS. Studenten associeeren meerendeels in coördinaties, maar Dr. BOUMAN ziet zich gedwongen om typen aan te nemen, welke bij de onderzoekingen van eerstgenoemden niet zijn voorgekomen en op zich zelf schijnen te staan.

De door gediplomeerde verplegers geleverde associaties staan het naast aan die van studenten.

Meer wijken al de schoolkinderen af, die in hoofdzaak in praedicativen associeeren. Nog meer de aspirant-verpleegsters.

Het schijnt wel, alsof zij wier schoolkennis het beste is, aan vrij associeeren in co-ordinaties de voorkeur geven, zooals het ook bij de studenten gevonden werd. Bij alle 3 hier genoemde groepen worden echter ook veel eenvoudiger bijv. doelgevende en herhalende associaties aangetroffen, die bij studenten niet meer voorkomen. Daarnaast voegen zich bij krankzinnigen zeer bijzondere en zonderlinge associaties, n.l. geheele zinnen of woordrijen.

Dr. BOUMAN is van meening dat het dientengevolge in een gegeven geval zelfs mogelijk kan zijn, om de wijze waarop geassocieerd wordt te benutten voor het stellen der diagnose der ziekten van het associatie-orgaan. Twee lijders met vervolgingsdenkbeelden, van wie de een volgens type *A* in co-ordinaties associeert en de andere in zinnen en zinlooze rijen, zijn naar zijn meening lijders aan twee verschillende, praktisch door geheel anderen loop onderscheiden ziekten.

Het met groot geduld bewerkt en vrij groot materiaal (33.000 associaties), dat in deze verhandeling is neergelegd, laat haar met recht aanspraak maken op een plaats in de „Handelingen”.

Ondergeteekenden stellen u dan ook voor, haar deze plaats toe te staan, maar geven tevens in overweging, om alsnog met Dr. BOUMAN in overleg te treden, omtrent bekortingen van tabellen, ziektegeschiedenissen enz., die hier en daar, noodeloos uitgebreid, het lezen van deze verhandeling bezwaarlijk zullen maken.

C. WINKLER.

H. ZWAARDEMAKER.

Wiskunde. — De Heer KLUYVER biedt eene mededeeling aan van den Heer EDMUND LANDAU te Berlijn: Bemerkungen zu der Abhandlung von Herrn KLUYVER auf S. 432—439 des Bandes XII, „*Reeksen, afgeleid uit de reeks* $\sum \frac{\mu(m)}{m}$ ”.

(Mede aangeboden door den Heer W. КАРТЕУН).

(Aangeboden in de Vergadering van 28 Mei 1904.)

In einer kürzlich erschienenen Arbeit ¹⁾ beschäftigt sich Herr KLUYVER mit der unendlichen Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mb+h)}{mb+h} = \frac{\mu(h)}{h} + \frac{\mu(b+h)}{b+h} + \frac{\mu(2b+h)}{2b+h} + \dots, \dots \quad (1)$$

¹⁾ Koninklijke Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Verslagen, Bd. 12, 1903, S. 432—439.

wo b und h zwei positive ganze Zahlen sind und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $h \leq b$ angenommen werden kann. Seine Untersuchung ist jedoch nur in heuristischem Sinne zu verstehen; sie liefert nicht den Beweis, dass die Reihe (1) convergiert, d. h. dass für jedes Wertepaar b, h

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^z \frac{\mu(mb+h)}{mb+h} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (2)$$

existiert. ¹⁾

Die Methoden, welche ich in der Abhandlung ²⁾ „über die Primzahlen einer arithmetischen Progression“ angewendet habe, gestatten jedoch, diesen Beweis zu führen. Das soll in den §§ 2—7 des Folgenden geschehen, nachdem in § 1 einige bekannte Sätze in Erinnerung gebracht sind; zugleich ergibt sich eine Darstellung des Grenzwertes (2), d. h. der Summe der unendlichen Reihe (1) in geschlossener Form. In den §§ 8—9 wird eine Folgerung über die Verteilung der Zahlen einer arithmetischen Progression, für welche $\mu(n) = +1$ bzw. -1 ist, gezogen; dieselbe rechtfertigt eine von Herrn KLUYVER am Schlusse seiner Arbeit ausgesprochene Vermutung.

§ 1. Es seien $\chi_1(n), \chi_2(n), \dots, \chi_{\varphi(b)}(n)$ die $\varphi(b)$ Charaktere der Gruppe der zu b teilerfremden Restklassen modulo b ; davon bezeichne $\chi_1(n)$ den Hauptcharakter. Wenn n mit b einen gemeinsamen Teiler hat, möge unter $\chi_1(n), \chi_2(n), \dots, \chi_{\varphi(b)}(n)$ Null verstanden werden. Es bedeute ferner $L_\nu(s)$ für $\nu = 1, 2, \dots, \varphi(b)$ die durch die DIRICHLET'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\nu(n)}{n^s}$$

definierte analytische Function. Diese Reihe convergiert bekanntlich, falls $\nu = 1$, für $\Re(s) > 1$, und falls $\nu = 2, \dots, \varphi(b)$, für $\Re(s) > 0$.

Aus der für $\Re(s) > 1$ und jedes $\nu (= 1, \dots, \varphi(b))$ giltigen Gleichung

$$L_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\nu(n)}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{\chi_\nu(p)}{p^s}}, \dots \dots \dots (3)$$

¹⁾ Nur im Falle $b=1, h=1$ war dies schon bekannt, und daraus lässt sich, wie Herr KLUYVER am Anfang seiner Arbeit ausführt, unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung für beliebiges b und $h=b$ einsehen, nicht aber im allgemeinen Fall.

²⁾ Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2^a, 1903, S. 493—535.

wo p alle Primzahlen durchläuft, folgt, dass kein $L_\nu(s)$ eine Nullstelle mit reellem Teil > 1 besitzt. (3) giebt für $\nu = 1$

$$L_1(s) = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \prod_{p|b} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) = \zeta(s) \prod_{p|b} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \quad (4)$$

wo p alle Primfactoren von b durchläuft. Aus (4) folgt, dass $L_1(s)$ über die Gerade $\Re(s) = 1$ fortsetzbar ist und in $s = 1$ einen Pol besitzt, so dass

$$\lim_{s=1} \frac{1}{L_1(s)} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

ist.

DIRICHLET ¹⁾ hat ferner die Grössen

$$L_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_2(n)}{n}, \dots, L_{\varphi(b)}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\varphi(b)}(n)}{n}$$

in endlicher Form durch Logarithmen und trigonometrische Functionen dargestellt und — was daraus noch keineswegs folgte — ausserdem bewiesen, dass jene $\varphi(b) - 1$ Grössen sämtlich von Null verschieden sind. Also sind die Grenzwerte

$$\lim_{s=1} \frac{1}{L_2(s)} = \frac{1}{L_2(1)}, \dots, \lim_{s=1} \frac{1}{L_{\varphi(b)}(s)} = \frac{1}{L_{\varphi(b)}(1)} \dots \dots (6)$$

vorhanden.

Die Herren HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN haben bewiesen, dass kein $L_\nu(s)$ auf der Geraden $\Re(s) = 1$ eine Nullstelle besitzt, so dass $\frac{1}{L_\nu(s)}$ für jedes ν auf der Geraden $\Re(s) = 1$ regulär ist. Ich habe a. a. O. ²⁾ den weitergehenden Satz bewiesen: Es giebt eine positive Zahl α , so dass, $s = \sigma + ti$ gesetzt, in dem Gebiet

$$t \geq 3, \quad 1 - \frac{1}{\log^\alpha t} < \sigma \leq 2$$

jede der $\varphi(b)$ Functionen $L_\nu(s)$ von Null verschieden ist und die Ungleichung

1) „Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz ganze Zahlen ohne gemeinschaftlichen Factor sind, unendlich viele Primzahlen enthält“, Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1837, S. 45–71; Werke, Bd. 1, 1889, S. 313–342.

2) l. c. S. 521. Ich setze hier die grössere der beiden a. a. O. mit c_{24} und c_{31} bezeichneten Zahlen = α .

$$\left| \frac{1}{L_\nu(s)} \right| < \log^z t$$

erfüllt.

§ 2. Ich bezeichne nunmehr mit $M_{b,h}(s)$ diejenige analytische Function, welche durch die mindestens für $\sigma = \Re(s) > 1$ convergente DIRICHLET'sche Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mb+h)}{(mb+h)^s}$$

definiert ist, und zeige zunächst, dass $M_{b,h}(s)$ in einen sehr einfachen Zusammenhang mit den Functionen $L_\nu(s)$ gebracht werden kann.

Der grösste gemeinsame Teiler (b, h) von b und h werde $= d$ gesetzt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann d als quadratfrei angenommen werden; denn anderenfalls ist stets $\mu(mb+h) = 0$, also jedes Glied der unendlichen Reihe (1) gleich Null.

I. Es sei zunächst $d = 1$, also h zu b teilerfremd. Dann giebt es eine (modulo b bestimmte) ganze Zahl h_1 , für welche

$$h_1 h \equiv 1 \pmod{b}$$

ist. Nun folgt aus (3) für $\sigma = \Re(s) > 1$

$$\frac{1}{L_\nu(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{\chi_\nu(p)}{p^s} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\nu(n) \mu(n)}{n^s} \dots \dots (7)$$

Multipliziert man (7) mit $\chi_\nu(h_1)$ und summiert über alle Werte von ν , so ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{\varphi(b)} \frac{\chi_\nu(h_1)}{L_\nu(s)} = \sum_{\nu=1}^{\varphi(b)} \chi_\nu(h_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_\nu(n) \mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{\nu=1}^{\varphi(b)} \chi_\nu(h_1 n). \quad (8)$$

Nun ist nach der Fundamenteleigenschaft der Charaktere die Summe $\sum_{\nu=1}^{\varphi(b)} \chi_\nu(l)$ dann und nur dann von Null verschieden, und zwar $= \varphi(b)$, wenn $l \equiv 1 \pmod{b}$ ist; daher

$$\sum_{\nu=1}^{\varphi(b)} \chi_\nu(h_1 n) \left\{ \begin{array}{l} = \varphi(b), \text{ falls } h_1 n \equiv 1, \text{ d. h. } n \equiv h \pmod{b} \\ = 0, \text{ falls } h_1 n \not\equiv 1, \text{ d. h. } n \not\equiv h \pmod{b} \end{array} \right.$$

ist; (8) verwandelt sich also in

$$\sum_{\nu=1}^{\varphi(b)} \frac{\chi_\nu(h_1)}{L_\nu(s)} = \varphi(b) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mb+h)}{(mb+h)^s} = \varphi(b) M_{b,h}(s);$$

wenn noch mit Hilfe von

$$\chi(h_1) \chi(h) = \chi(h_1 h) = \chi(1) = 1$$

h_1 eliminiert wird, so ergibt sich

$$M_{b,h}(s) = \frac{1}{\varphi(b)} \sum_{\nu=1}^{\varphi(b)} \frac{1}{\chi_\nu(h) L_\nu(s)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (9)$$

II. Es sei nun $d > 1$, und es werde

$$b = dB, \quad h = dH$$

gesetzt, so dass B und H teilerfremd sind. Offenbar ist

$$\mu(mb + h) = \mu \left(d(mB + H) \right) \left\{ \begin{array}{l} = \mu(d) \mu(mB + H) \\ \text{oder} = 0, \end{array} \right.$$

je nachdem $mB + H$ zu d teilerfremd ist oder nicht. Daher ist

$$M_{b,h}(s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mb + h)}{(mb + h)^s} = \frac{\mu(d)}{d^s} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mB + H)}{(mB + H)^s}, \quad \cdot \cdot \cdot \quad (10)$$

wo das Zeichen Σ' andeutet, dass m nur diejenigen Werte zu durchlaufen hat, für welche $mB + H$ zu d teilerfremd ist. Ist $m_1 \equiv m_2 \pmod{d}$, so sind offenbar $m_1 B + H$ und $m_2 B + H$ gleichzeitig zu d teilerfremd oder nicht teilerfremd. Also verteilen sich jene m auf gewisse arithmetische Progressionen modulo d ; d. h. unter den d Progressionen $m \equiv 0, 1, \dots, d-1 \pmod{d}$ hat m in gewissen, deren Anzahl ϱ sei, alle Zahlen ≥ 0 zu durchlaufen. ϱ ist die Anzahl derjenigen unter den d Zahlen $mB + H$ ($m = 0, 1, \dots, d-1$), welche zu d teilerfremd sind; diese Anzahl ist bekanntlich $= \frac{(B,d)\varphi(d)}{\varphi(B,d)}$. Wenn

die entsprechenden m mit $m_1, \dots, m_i, \dots, m_z$ bezeichnet werden und

$$m_i B + H = h_i \quad (\lambda = 1, \dots, \varrho)$$

gesetzt wird, so ist jedes h_i zu d und (wegen $(B, H) = 1$) zu B , also zu $b = dB$ teilerfremd und zwischen 0 (excl.) und b (excl.) gelegen (da

$$0 < H \leq h_i = m_i B + H \leq (d-1) B + H = b - B + H \leq b$$

ist und b selbst nicht zu b teilerfremd ist). Die entsprechenden $mB + H$ sind

$$(m_i + ld) B + H = lb + h_i,$$

wo l alle ganzzahligen Werte ≥ 0 annimmt. Mit anderen Worten, auf der rechten Seite von (10) durchläuft, wenn sie kurz

$$\frac{\mu(d)}{d^s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s}$$

geschrieben wird, k alle positiven Zahlen, welche gewissen ϱ Progressionen der Form $lb + h_i$ ($\lambda = 1, 2, \dots, \varrho$) angehören, wo $0 < h_i < b$ und $(b, h_i) = 1$ ist; d. h. es ist

$$M_{b,h}(s) = \frac{\mu(d)}{d^s} \sum_{\lambda=1}^{\varrho} M_{b,h_\lambda}(s), \quad \dots \quad (11)$$

und aus dem Ergebnis (9) des Falles I folgt unter Anwendung auf die einzelnen Glieder der rechten Seite von (11)

$$M_{b,h}(s) = \frac{1}{\varphi(b)} \frac{\mu(d)}{d^s} \sum_{\lambda=1}^{\varrho} \sum_{\nu=1}^{\varphi(b)} \frac{1}{\chi_\nu(h_i) L_\nu(s)} \dots \quad (12)$$

In (12) ist (9) als Spezialfall enthalten, da für $d = 1$

$$B = b, \quad H = h, \quad \varrho = 1, \quad h_1 = h$$

ist. Im Folgenden darf also stets die Gleichung (12) zu Grunde gelegt werden.

§ 3. Die für $\sigma > 1$ soeben bewiesene Gleichung (12) liefert in Verbindung mit den in § 1 citierten Eigenschaften der Functionen $L_\nu(s)$ zunächst die analytische Fortsetzung von $M_{b,h}(s)$ über die Gerade $\sigma = 1$. Sie lehrt, dass alle Punkte dieser Geraden, auch $s = 1$, reguläre Stellen sind. Aus dem am Ende von § 1 citierten Satz folgt präziser, dass für $t \geq 3$, $1 - \frac{1}{\log^\alpha t} \leq \sigma \leq 2$ die Function $M_{b,h}(s)$ regulär ist und dort der Ungleichung genügt:

$$|M_{b,h}(s)| \leq \frac{1}{\varphi(b)} \frac{1}{d^s} \sum_{\lambda=1}^{\varrho} \sum_{\nu=1}^{\varphi(b)} \left| \frac{1}{L_\nu(s)} \right| < \frac{1}{\varphi(b)} \cdot 1 \cdot \varrho \cdot \varphi(b) \log^\alpha t = \varrho \log^\alpha t.$$

Es werde nun eine Zahl $\alpha > \alpha$ so gewählt, dass erstens für alle $t \geq 3$

$$\varrho \log^\alpha t < \log^\alpha t$$

ist und zweitens $\frac{1}{\log^\alpha 3}$ kleiner als der Abstand der Geraden $\sigma = 1$ von allen etwa vorhandenen singulären Stellen von $M_{b,h}(s)$, deren imaginärer Teil zwischen $-3i$ und $3i$ liegt. Wenn noch die Gleichung

$$|M_{b,h}(\sigma + ti)| = |M_{b,h}(\sigma - ti)|$$

berücksichtigt wird, so ergibt sich aus dem Vorangegangenen:

Die Function $M_{b,h}(s)$ ist regulär in dem Teil der Ebene, welcher rechts von der stetigen Curve

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = 1 - \frac{1}{\log^a t} \quad \text{für } t \geq 3, \\ \sigma = 1 - \frac{1}{\log^a 3} \quad \text{für } -3 \leq t \leq 3, \\ \sigma = 1 - \frac{1}{\log^a(-t)} \quad \text{für } t \leq -3 \end{array} \right.$$

liegt (incl. der Curve selbst), und es ist für $t \geq 3$, $1 - \frac{1}{\log^a t} \leq \sigma \leq 2$

$$|M_{b,h}(\sigma + ti)| = |M_{b,h}(\sigma - ti)| < \log^a t. \quad \dots \quad (13)$$

§ 4. In § 2 meiner Arbeit ¹⁾ „über die zahlentheoretische Funktion $\mu(k)$ “ ist die Relation

$$\sum_{k=1}^x \mu(k) \log \frac{x}{k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2i}^{2+x^2i} \frac{x^s}{s^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} ds + O(1)$$

entwickelt, in welcher das Integral auf geradlinigem Wege zu erstrecken ist. Ganz ebenso ergibt sich hier, wenn das Zeichen Σ' bedeutet, dass k nur alle diejenigen Zahlen des Summationsintervalls zu durchlaufen hat, welche $\equiv h \pmod{b}$ sind,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^x \mu(k) \log \frac{x}{k} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2i}^{2+x^2i} \frac{x^s}{s^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} ds + O(1) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2i}^{2+x^2i} \frac{x^s}{s^2} M_{b,h}(s) ds + O(1). \quad \dots \quad (14) \end{aligned}$$

§ 5. Es werde nun der CATCHY'sche Satz auf den Integranden $\frac{x^s}{s^2} M_{b,h}(s)$ und den geschlossenen Integrationsweg $ABCDEF A$ ange-

wendet, wo $A = 2 - x^2i$, $B = 2 + x^2i$, $C = 1 - \frac{1}{\log^a(x^2)} + x^2i$,

$D = 1 - \frac{1}{\log^a 3} + 3i$, $E = 1 - \frac{1}{\log^a 3} - 3i$, $F = 1 - \frac{1}{\log^a(x^2)} - x^2i$ ist, die Strecken AB , BC , DE , FA geradlinig sind, CD das Curvenstück

$$s = 1 - \frac{1}{\log^a t} + ti \quad (x^2 \geq t \geq 3)$$

und EF das Curvenstück

¹⁾ Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Bd. 112, Abt. 2a, 1903, S. 537—570.

$$s = 1 - \frac{1}{\log^a(-t)} + ti \quad (-3 \leqq t \leqq -e^2)$$

bezeichnet.

Da nach § 3 in diesem geschlossenen Gebiete und auf dem Rande der Integrand regulär ist, ergibt der CAUCHY'sche Satz für das in (14) auftretende Integral

$$\int_{2-x^2i}^{2+x^2i} \frac{a^s}{s^2} M_{b,h}(s) ds = \int_{AB} + \int_{AF} + \int_{FE} + \int_{ED} + \int_{DC} + \int_{CB} \dots \quad (15)$$

Nun habe ich in § 10 meiner Arbeit über die arithmetische Progression für eine gewisse Function $K(s)$ gezeigt, dass bei Integration von $\frac{a^s}{s^2} K(s)$ über genau die vorliegende Bahn

$$\int_{AF} + \int_{FE} + \int_{ED} + \int_{DE} + \int_{CB} = O\left(xe^{-\sqrt[3]{\log x}}\right)$$

ist, wo c eine positive Constante bezeichnet ¹⁾. Von jener Function $K(s)$ habe ich a. a. O. zu diesem Nachweise nur die vordem festgestellte Thatsache benutzt, dass sie auf dem Integrationswege regulär ist und für $t \geqq 3, 1 - \frac{1}{\log^a t} \leqq \sigma \leqq 2$ der Ungleichung

$$|K(\sigma + ti)| = |K(\sigma - ti)| < \log^a t$$

genügt. Da nun nach (13) die Function $M_{b,h}(s)$ eben diese Eigenschaften hat, ist im vorliegenden Fall der Ausdruck (15)

$$= O\left(xe^{-\sqrt[3]{\log x}}\right).$$

Dies ergibt, in (14) eingesetzt,

$$\sum_{k=1}^x \mu(k) \log \frac{x}{k} = O\left(xe^{-\sqrt[3]{\log x}}\right) \dots \dots \dots (16)$$

§ 6. Wörtlich ebenso, wie in § 4 meiner Arbeit über die Function $\mu(k)$ aus

$$\sum_{k=1}^x \mu(k) \log \frac{x}{k} = O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right)$$

geschlossen wurde, dass

¹⁾ Es kann z. B. $c = 3a$ genommen werden

$$\sum_{k=1}^x \mu(k) = O\left(xe^{-\sqrt{\log x}}\right)$$

ist, ergibt sich hier aus (16), dass

$$\sum_{k=1}^x \mu'(k) = O\left(xe^{-\sqrt{\log x}}\right)$$

ist, wo γ eine gewisse positive Constante ²⁾ bezeichnet.

Es ist also für jedes n

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^n x}{x} \sum_{k=1}^x \mu'(k) = 0 \dots \dots \dots (17)$$

§ 7. A. a. O. ergab sich in § 5 aus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^n x}{x} \sum_{k=1}^x \mu(k) = 0,$$

dass die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k) \log^n k}{k^{1+t}}$$

für jedes reelle Wertepaar n, t convergirt; genau ebenso folgt nunmehr aus (17): die unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu'(k) \frac{\log^n k}{k^{1+t}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mb+h) \log^n (mb+h)}{(mb+h)^{1+t}}$$

convergirt für jedes reelle Wertepaar n, t . Hierin liegt insbesondere für $n=0, t=0$ die von Herrn KLUYVER vermutete Convergenz der unendlichen Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mb+h)}{mb+h}$$

bewiesen, also die Existenz der von ihm mit $T_{b,h}$ bezeichneten Grösse.

Da nunmehr ihre Existenz festgestellt ist, ist es leicht, ihren Wert in geschlossener Form darzustellen. Bekanntlich folgt aus der Con-

vergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$, dass bei Annäherung von rechts $\lim_{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n^s}$

¹⁾ Es kann z. B. $\gamma = c + 1$ genommen werden.

existiert und $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$ ist. Unter Benutzung von (12), (5) und (6) ergibt sich also

$$\begin{aligned}
T_{b,h} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mb+h)}{mb+h} = \lim_{s=1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(mb+h)}{(mb+h)^s} = \lim_{s=1} M_{b,h}(s) \\
&= \frac{1}{\varphi(b)} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\lambda=1}^{\infty} \sum_{\nu=2}^{\varphi(b)} \frac{1}{\chi_{\nu}(h_{\lambda}) L_{\nu}(1)}.
\end{aligned}$$

§ 8. Es soll in diesem Paragraphen der Hilfssatz bewiesen werden :

Wenn $Q_{b,h}(x)$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leq x$ bezeichnet, welche der Linearform $mb+h$ angehören (wo $(b,h)=d$ als quadratfrei vorausgesetzt wird ¹⁾), so existiert

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q_{b,h}(x)}{x}$$

und hat einen von Null verschiedenen Wert.

I. Es werde zunächst $(b,h)=d=1$ vorausgesetzt. Es bezeichne $A_{b,h,n}(x)$ die Anzahl derjenigen Zahlen m , welche die Congruenz

$$mb+h \equiv 0 \pmod{n}$$

und die Ungleichungen

$$0 \leq m \leq \frac{x-h}{b}$$

(d. h. $1 \leq mb+h \leq x$) erfüllen. Dann ist offenbar, wenn n mit b einen gemeinsamen Teiler besitzt, wegen $(b,h)=1$ die Congruenz unlösbar, also

$$A_{b,h,n}(x) = 0 \dots \dots \dots (18)$$

Wenn dagegen $(n,b)=1$ ist, hat die Congruenz modulo n genau eine Wurzel; also ist die Anzahl der Wurzeln zwischen 0 und $\frac{x-h}{b}$ gleich $\left[\frac{x-h+b}{bn} \right]$ oder $\left[\frac{x-h+b}{bn} \right] + 1$, d. h.

$$A_{b,h,n}(x) = \frac{x}{bn} + \vartheta \quad (-1 < \vartheta < 2) \dots \dots \dots (19)$$

Nun ist offenbar, wenn k alle Zahlen durchläuft, deren Quadrat k^2 in l aufgeht,

$$\sum \mu(k) = 1 \text{ oder } 0,$$

¹⁾ Anderenfalls ist $Q_{b,h}(x) = 0$.

je nach dem l quadratfrei ist oder nicht; denn jene k sind die Divisoren der grössten Zahl g , deren Quadrat in l aufgeht, so dass

$$\sum \mu(k) = \sum_{k|g} \mu(k) = 1 \text{ oder } = 0$$

ist, je nachdem $g = 1$, d. h. l quadratfrei ist oder nicht. Daher ist

$$Q_{b,h}(x) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{x-h}{b}\right]} \sum \mu(k),$$

wo k alle Zahlen durchläuft, deren Quadrat in $mb + h$ aufgeht. Kehrt man die Summationsfolge um, so läuft k von 1 bis $[\sqrt{x}]$, und jedes $\mu(k)$ tritt so oft auf, als es Multipla von k^2 in der Progression $mb + h$ zwischen 1 und x giebt, d. h. $A_{b,h,k^2}(x)$ mal. Also ist nach (18) und (19)

$$Q_{b,h}(x) = \sum_{k=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(k) A_{b,h,k^2}(x) = \sum_{k=1}^{[\sqrt{x}]} \mu(k) \left(\frac{x}{bk^2} + \mathfrak{O} \right),$$

wo das Zeichen \sum' andeutet, dass k nur die zu b teilerfremden Zahlen $\leq \sqrt{x}$ zu durchlaufen hat. Daher ist

$$\begin{aligned} Q_{b,h}(x) &= \frac{x}{b} \sum_{k=1}^{[\sqrt{x}]} \frac{\mu(k)}{k^2} + O(\sqrt{x}) = \frac{x}{b} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right) + O(\sqrt{x}) \\ &= \frac{x}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^2} + O(\sqrt{x}) = \frac{x}{b} \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) + O(\sqrt{x}), \end{aligned}$$

wo p alle nicht in b aufgehenden Primzahlen durchläuft; wegen

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$$

ist daher

$$Q_{b,h}(x) = x \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{b \prod_{p|b} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)} + O(\sqrt{x}), \dots \quad (20)$$

wo p die Primfactoren von b durchläuft, also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q_{b,h}(x)}{x} = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{b \prod_{p|b} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right)} > 0. \dots \quad (21)$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass dieser Grenzwert von h unabhängig ist.

II. Wenn $d > 1$ ist, so sind, $b = dB$ und $h = dH$ gesetzt, die quadratfreien Zahlen $mb + h \leq x$ identisch mit den Zahlen $d(mB + H) \leq x$, wo $mB + H$ quadratfrei und zu d teilerfremd ist. Nun zerfallen die zu d teilerfremden Zahlen $mB + H$ (vergl. § 2) in $\varphi = \frac{(B,d)\varphi(d)}{\varphi(B,d)}$ arithmetische Progressionen mit der Differenz b und zu b teilerfremdem Anfangsglied h_i ($i = 1, 2, \dots, \varphi$); die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leq \frac{x}{d}$ in jeder dieser Progressionen beträgt nach (20)

$$Q_{b,h_i}\left(\frac{x}{d}\right) = \frac{x}{d} \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{\prod_{p|b} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)} + O(\sqrt{x});$$

daher ist

$$Q_{b,h}(x) = \sum_{i=1}^{\varphi} Q_{b,h_i}\left(\frac{x}{d}\right) = x \cdot \frac{6}{\pi^2} \frac{(B,d)\varphi(d)}{db \prod_{p|b} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \varphi(B,d)} + O(\sqrt{x}),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Q_{b,h}(x)}{x} = \frac{6}{\pi^2} \frac{(B,d)\varphi(d)}{db \prod_{p|b} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \varphi(B,d)} > 0. \dots (22)$$

§ 9. Es sei nun $R_{b,h}(x)$ bzw. $S_{b,h}(x)$ die Anzahl der aus einer geraden bzw. ungeraden Anzahl von Primfactoren zusammengesetzten quadratfreien Zahlen $mb + h \leq x$, und es sei

$$P_{b,h}(x) = \sum_{k=1}^x \mu(k),$$

wo das Zeichen \sum' andeuten soll, dass k alle Zahlen $mb + h \leq x$ durchläuft. Dann ist offenbar

$$R_{b,h}(x) - S_{b,h}(x) = \sum_{k=1}^x \mu(k) = P_{b,h}(x)$$

und

$$R_{b,h}(x) + S_{b,h}(x) = \sum_{k=1}^x \mu^2(k) = Q_{b,h}(x),$$

also

$$\frac{R_{b,h}(x)}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_{b,h}(x)}{x} + \frac{P_{b,h}(x)}{x} \right) \dots \dots \dots (23)$$

und

$$\frac{S_{b,h}(x)}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_{b,h}(x)}{x} - \frac{P_{b,h}(x)}{x} \right) (24)$$

Da nun nach (17) (wenn dort $n = 0$ eingesetzt wird),

$$\lim_{x=\infty} \frac{P_{b,h}(x)}{x} = 0$$

ist und andererseits nach (21) und (22), wenn der Grenzwert $= L_{b,h}$ gesetzt wird,

$$\lim_{x=\infty} \frac{Q_{b,h}(x)}{x} = L_{b,h} > 0,$$

so ergibt sich aus (23) und (24)

$$\lim_{x=\infty} \frac{R_{b,h}(x)}{x} = \frac{1}{2} L_{b,h},$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{S_{b,h}(x)}{x} = \frac{1}{2} L_{b,h},$$

also

$$\lim_{x=\infty} \frac{R_{b,h}(x)}{S_{b,h}(x)} = 1.$$

Dies bestätigt die Vermutung, welche Herr KLUYVER am Ende seiner Arbeit ausgesprochen hat :

Teilt man die quadratfreien Zahlen $mb + h$ in zwei Klassen, je nachdem sie aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Prim-factoren bestehen, so convergiert das Verhältnis der Anzahl der unterhalb x gelegenen Zahlen beider Klassen für $x = \infty$ gegen den Grenzwert 1.

Berlin, den 23ten Mai 1904.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER doet eene mededeeling over: „*Kunstmatige en natuurlijke zenuwprickeling en de hoeveelheid energie daarbij gebezigd.*”

Een blootgelegde levende zenuw kan op allerlei wijze kunstmatig geprikkeld worden, maar er zijn slechts twee rubrieken van prikkels, wier uitwerking oogenblikkelijk is en wier sterkte nauwkeurig kan worden geregeld, n.l. die der mechanische en die der electriche prikkels. De mechanische prikkeling is belangrijk verbeterd geworden door een kunstgreep van SCHÄFER ¹⁾, die, in plaats van electricch gedreven hamertjes, vallende kwikdrupjes heeft aangewend. Zoo men

1) Proc. Physiol. Soc. 26 Jan. 1901.

druppeltjes neemt, die ongeveer de afmeting van de breedte der zenuw hebben, verkrijgt men zelfs bij zeer geringe valhoogte duidelijke uitwerking, zich verradend door de samentrekking van de met de zenuw in samenhang gebleven spier. SCHÄFER zelf bereikte dit resultaat met een druppelgewicht van 100 mgr. en een valhoogte van 10 mm. In ons laboratorium had zijn methode nog gunstiger uitslag en werd reeds eene uitwerking gezien bij een druppelgewicht van 50 mgr. en een valhoogte van 5 mm. Zulk een vallende druppel vertegenwoordigt bij het neerkomen een arbeidsvermogen van 24,5 ergs. Niet het arbeidsvermogen als zoodanig is echter de maat van den prikkel. Kennelijk moet men zich de energie ook in dit opzicht ontbonden denken in een intensiteitsfactor en een capaciteitsfactor ¹⁾ en wel *na de overdracht aan de zenuw*. Dat hier niet de intensiteitsfactor van vóór de overdracht als physiologische „auslösende” kracht in aanmerking komt, blijkt uit merkwaardige uitkomsten, die men bij variatie der valhoogte verkrijgt. Een valhoogte van 5 mm. geeft bij een belasting der spier met 50 gram een uitstekende hefhoogte, die bij een valhoogte van 15 mm. tot $\frac{2}{3}$, bij een valhoogte van 30 mm. tot de helft daalt. In stede van een grooter uitwerking wordt alzoo bij vermeerdering der snelheid, waarmee de druppel neerkomt, een kleiner uitwerking aangetroffen. Dit zou niet het geval kunnen zijn, indien de intensiteitsfactor van de levendige kracht der vallende druppels het beslissende ware geweest. Bij later vermindering van valhoogte keert de oorspronkelijke hefhoogte terug. ²⁾

De tweede soort kunstmatige prikkels kan op hoogst eenvoudige wijze afgemeten worden, indien men zich op het voorbeeld van CYBULSKY, MAREŠ, HOORWEG, en anderen, van condensatoren bedient. Het bleek bij een voorbereidend onderzoek in het laboratorium, dat een condensator van een capaciteit van 0.004 mikrofaraad de gunstigste uitkomst verschaft. Men behoeft deze slechts tot een potentiaal van 0.012 volt te laden om reeds een contractie aan het zenuwspierpraeparaat zichtbaar te maken. De ten dienste staande energie bedraagt dan 0.00029 Erg, een veel kleiner bedrag dan dat hetwelk voor mechanische prikkeling werd gevonden. ¹⁾

Maar het is duidelijk, dat toch zoowel het een als het ander hoogst

¹⁾ W. OSTWALD. Ber. d. k. Sächs. Ges. d. Wissenschaften 1892, math. physik. Cl. S. 215.

G. HELM. Die Energetik in ihrer geschichtl. Entwicklung 1898 S. 277.

²⁾ Een analoog verschijnsel is door WEDENSKY voor farad. prikkels (van een frequentie van 100 per sec.) waargenomen.

³⁾ J. CLUZET. Journal de Physiologie et de Pathologie générale 1904 p. 210, geeft als kleinste cijfers 8, 5 en 7, 2 milli-ergs.

ondoelmatige wijzen van prikkeling zijn. De mechanische prikkel verkrijgt slechts toegang tot een deel der ascynders, die den zenuwbundel samenstellen en het is de vraag of de weekheid der massa niet het plotseling optreden van druk grootendeels te niet doet. De electriche ontlading moge al meer oogenblikkelijk zijn, zij verbreidt zich behalve over de ascynders in niet geringe mate ook over de scheeden en de septa, welke zich tusschen de afzonderlijke vezels bevinden. Een middel om den weerstand te verminderen en daardoor den ontladingstijd korter te maken ontbreekt tot dusverre. Het is steeds de volle overdwarsche zenuwweerstand, dien men verplicht is in te schakelen.

Deze bezwaren zullen bij kunstmatige prikkels nooit geheel overwonnen kunnen worden; om het werkelijk minimum te vinden, zal men zich dus tot natuurlijke prikkels hebben te wenden. Alleen aan sensible zenuwen laten zich deze voorloopig beheerschen.

Er zijn twee zintuigen, waarin de zenuwcellen zelf (of haar onmiddellijke uitgroeisels) den prikkel opnemen. Ik bedoel het gezichts- en het reukzintuig. In het eerste geval zijn het de staafjes en kegels, in het tweede de fijne ruikharen, die beide een deel van het eindneuron uitmaken. Wij willen de prikkeling dezer zintuigen iets nader beschouwen.

A. Gezichts-zintuig.

Gesteld men ziet door een kunstmatige pupil van 2 mm. naar een Hefnerlampje, dat zich op 6 meter afstand bevindt, dan zal een scherp bepaald deel van de energie, die de lamp uitstraalt, in het oog dringen. Deze energie vereenigt zich op een klein omschreven veldje van het netvlies, waar kegels en staafjes gereed liggen om den lichtprikkel te ontvangen. Maakt men het vertrek donker en verzwakt men het licht door een stelsel van min of meer gekruiste Nichols dan zullen ten slotte de veel ongevoeliger kegels niet meer in aanmerking komen en zal het flauwe schijnsel dat over blijft, uitsluitend met behulp van de staafjes worden waargenomen. Men zal de gezichtsas daartoe iets moeten laten afwijken, daar zich in de fovea centralis zelf geen staafjes bevinden, waardoor het puntvormige zwakke sterretje zich, voor mijn oog althans, schijnbaar iets naar boven verplaatst.

Het is duidelijk dat bij zulk een proefinrichting alleen die stralen beteekenis hebben, die door het staafjesrood worden geabsorbeerd. Dit zijn volgens A. KÖNIG¹⁾ de stralen, wier golflengte van 600 tot

¹⁾ A. KÖNIG. Stzber. d. Berliner Akademie 1894 p. 585.

420 mikron loopt. K. ÅNGSTRÖM's¹⁾ recente bepalingen doen ons de energie van dit stuk spectrum voor de Hefner-lamp kennen. Zij bedraagt op 1 meter afstand 2.61×10^{-8} gram-calorie per sec. en per \square cm. Op 6 meter afstand wordt dit alzoo 0.03 Erg per sec. en per \square cm.

Wij dachten ons echter zoo even de Hefnerlamp bezichtigd door een stelsel van min of meer gekruiste Nichols, zoodanig dat slechts een zwak schijnsel overig blijft. Bovendien willen we een moment-sluiters inschakelen, waarvan de expositietijd zoo geregeld is, dat men de voor zwakke lichtindrukken voordeeligste voorwaarden verkrijgt. Uit een proefreeks van de Heeren GRIJNS en NOYONS, waarvan de uitkomsten later door deze Heeren zelven meegedeeld zullen worden, was mij bekend, dat een expositietijd van de orde van een milliseconde het doelmatigst is. Een vroeger door Dr. LAAN gebruikt en in diens proefschrift²⁾ beschreven toestel met tegen elkaar inloopende spleten, gaf mij exposities van ongeveer 0.6 milliseconde, die zich om de 0.6 sec. herhaalden.

Door deze twee hulpmiddelen gevoegd bij de groote engte der kunstmatige pupil, in het geheel dus door drie omstandigheden

- 1°. kruising der Nichols
- 2°. korter expositietijd
- 3°. nauwe kunstmatige pupil

werd de prikkel, die zonder dit per sec. en per \square cm. gerekend 0.03 Erg zou hebben bedragen, nog aanmerkelijk verzwakt.

De Nichols waren volslagen gekruist bij $28^{\circ} 12'$ onzer schaal. Volle lichtsterkte werd dus verkregen bij $118^{\circ} 12'$. Bij dezen voor de lichtpassage gunstigsten stand gaat op en in de Nichols wel iets verloren, evenzoo op en in de media van het oog, doch wij willen dit bedrag verwaarloozen, daar het klein is in vergelijking van de onzekerheid in den absorptiecoëfficiënt van het netvliesrood, dien wij aanstonds in rekening zullen brengen en van den storenden invloed der adaptatie, dien wij niet geheel kunnen uitsluiten.

Terwijl de moment-sluiters in beweging is en elke 0.6 sec. een expositie plaats heeft, wordt een der Nichols langzaam en geleidelijk gedraaid. Het scherpe vlambeeld verdwijnt, maakt plaats voor een stipvormig schijnsel, dat zich ten slotte iets naar boven schijnt te verplaatsen. Een minimum schijnsel vond ik dan *zonder voorafgaande adaptatie aan het duister*

1) K. ÅNGSTRÖM, the Physical Review, Vol. XVIII. p. 302, 1903.

2) H. A. LAAN. Onderz. Physiol. Lab. Utrechtsche Hoogeschool. (5) III p. 182.

van rechts komend bij $36^{\circ}.6'$ der schaal
 van links komend „ 20° . „ „

hetgeen een draaiing der Nichols beteekent van resp. $82^{\circ}.6'$ en $81^{\circ}.48'$ of gemiddeld $81^{\circ}.57'$, afgerekend van den voor de lichtpassage meest gunstigsten stand.

Op grond van de Nicholkruising mogen wij aannemen, dat de lichtsterkte op het oogenblik van minimum perceptibile zich verhoudt tot de oorspronkelijke lichtsterkte als $\cos^2 81^{\circ}.57'$ tot $\cos^2 0^{\circ}$ of als 0.0196 tot 1.

Verder bedroeg de expositietijd telkens slechts 0.6 milliseconden.

Eindelijk had de kunstmatige pupil een oppervlak van niet meer dan $0.0314 \square \text{ cm}$.

Door al deze omstandigheden is de oorspronkelijke energiehoeveelheid, over de door de staaftjes absorbeerbare stralen gerekend, van 0.03 Erg teruggebracht tot

$$0.0196 \times 0.0006 \times 0.0314 \times 0.03 \text{ Erg} = 1.1 \cdot 10^{-8} \text{ Erg.}$$

Uit de absorptiemetingen van A. KÖNIG volgt, dat $\frac{1}{50}$ van het licht dezer stralen in het netvliesrood wordt teruggehouden en aanzien slechts het werkelijk geabsorbeerde licht voor de prikkeling in aanmerking komt, wordt ons quantum nog teruggebracht tot

$$0.02 \times 1.1 \cdot 10^{-8} \text{ Erg} = \underline{2.2 \times 10^{-10} \text{ Erg.}}$$

In een tweede proefreeks, met een expositietijd van 0.00062 sec., die zich om de 0.64 sec. herhaalden, en een Nicholdraaiing van $84^{\circ}.42'$ uit den gunstigsten stand, vond ik

$$0.00854 \times 0.00062 \times 0.314 \times 0.03 \text{ Erg} = 4.9 \times 10^{-9} \text{ Erg.}$$

En hiervan weer het $\frac{1}{50}$ geeft

$$0.02 \times 4.9 \times 10^{-9} = \underline{1 \times 10^{-10} \text{ Erg.}}$$

De Energie in staat om bij excentrisch zien de gewaarwording van een uiterst zwak schijnsel te verwekken is dus van orde van $1 \cdot 10^{-10}$ Erg. De hoeveelheid zou nog 100 maal kleiner zijn gebleken, indien ik mij volledig voor duisternis had geadapteerd. Volgens eene verwante methode verrichtten de Heeren GRIJNS en NOYONS zulke, later te publiceeren, proeven.

De verandering van het netvliesrood in netvliesgeel onder den invloed van licht is een omkeerbaar proces. Het moet dus berusten op een verschuiving van het evenwicht, dat tegen het einde der adaptatie volkomen is, tegen de richting van de chemische krachten, die het tot standbrengen, in. De kleine wijziging in thermodynamische

potentiaal, die een hoeveelheid lichtenergie van de orde zoeven vermeld in het aanhangsel der netvlieszenuwcel te voorschijn roept is voldoende om in deze zenuwcel een toestand van prikkeling te weeg te brengen. De natuurlijke zenuwprikkel kan alzoo ontzachelijk veel kleiner worden genomen dan de kunstmatige, ook in zijn gunstigsten vorm.

B. Reukzintuig.

Wanneer men voor het geval van het reukzintuig eene poging wil doen de energiewaarde van den natuurlijken prikkel te berekenen, zoo kan dit op de volgende wijze plaats hebben.

Men verdunne in de zoogen. reukkast ¹⁾ (een afgesloten ruimte van 64 Liter met alom glazen wanden) een reukstof tot de uiterste verdunning, waarin zij nog ruikbaar is. Dit geschiede door verdamping van enkele druppels der stof in substantie of in waterige oplossing tot volkomen vervluchtiging toe. Dan snuffele men een weinig lucht uit deze ruimte op. De hoeveelheid lucht, dié bij zulk een enkele snuffelbeweging wordt geaspireerd, schat VALENTIN op 50 cub. cm. en ik geloof, dat dit juist is, want snuffelend aan mijn reukmeter (hetgeen eenzijdig geschiedt) wordt gemiddeld 30 cub. cm. opgenomen. Verondersteld nu, dat een deel hiervan rechtstreeks naar de reukspleet wordt gebracht, dan zal in het gunstigste geval de daar aanwezige lucht door nieuwe, op de aangegeven wijze met reukstof bezwan-gerde, vervangen worden. In dit geval is ± 0.2 cub. cm. van deze lucht in de nauwe spleet ter weerszijden met het reukslimvlies in aanraking.

Wij willen nu voor enkele stoffen de hoeveelheid reukstof aangeven, dié zich in 0.2 cub. cm. moet bevinden om nog juist te worden waargenomen. Dit quantum bedraagt, voor

methyl-alcohol	0.000.06 mgr.
mierenzuur	0.000.12 mgr.
aceton	0.000.008 mgr.
campher	0.000.000.009.6 mgr.
ionon	0.000.000.000.019 mgr.

Beperken wij ons voorloopig tot deze stoffen. Volledig geoxydeerd gaan zij in H^2O en CO^2 over. Haar verbrandingsproducten kunnen alzoo, indien zij geleidelijk en in kleine hoeveelheid worden voortgebracht, als volmaakt indifferente toevoegingen tot de celsubstantie gelden. Reuk opgevat als intramoleculaire eigenschap, hetgeen voor

¹⁾ Physiologie des Geruchs. Leipzig 1895 p. 34.

deze stoffen waarschijnlijk is (daargelaten of reuk voor stoffen waarin moleculen als *S*, *As*, enz. voorkomen wellicht ook op intra-atomistische verhoudingen kan berusten) zal dus nooit meer dan de, als verbrandingswarmte gegeven, energiehoeveelheid voor de verschaffing van een reukprikkel in aanmerking komen.

De verbrandingswarmte voor de vier eerste stoffen zijn bekend en respectievelijk per milligram 5.7, 1.5, 7.5 en 9.3 gram-calorie; die van ionon is niet bekend, maar wordt schattenderwijs op 9.6 gram-calorie gesteld. Dan bedragen de hier in aanmerking komende hoeveelheden energie (voor de in 0.2 cub. cm. vervatte reukstofhoeveelheid) voor:

methyl-alkohol	14443 Erg.
mierenzuur	7460 Erg.
aceton	2520 Erg.
campher	3.9 Erg.
ionon	0.008 Erg.

Pogingen om na te gaan hoeveel van deze reukstoffen in het reukslijmvlies worden geabsorbeerd mislukten tot dusverre. Noch in olie, noch in zenuwzelfstandigheid, vermochten we b.v. een ruikbare hoeveelheid ionon terug te vinden, wanneer zij eenigen tijd met een ionon-atmosfeer in aanraking waren gelaten. Vermoedelijk is het dus slechts uiterst weinig wat wordt opgenomen. Bovendien volgt uit de opmerkelijk verschillende mate, waarin onderling verwante stoffen geurkracht ten toon spreiden¹⁾, dat slechts een uiterst klein deel der intra-moleculaire energie olfacto-chemische werking ontvouwt. Men mag dus wel aannemen, dat later ook hier de minimale prikkel in de zenuweindiging van de orde van den lichtprikkel of nog minder zal blijken.

Quantitatief berekend is dus onder de rechtstreeksche natuurlijke zenuwprikkels op dit oogenblik alleen de lichtprikkel. Indien men overweegt, dat hetgeen wij in het bovenstaand als van de orde van 10^{-10} Erg hebben leeren kennen, is een minimale prikkel op een klein veldje van het netvlies, ter nauwernood 0.002 □ mm. groot, terwijl het geheele netvliesrood bevattende oppervlak door KÖNIG op 700 □ mm. wordt gesteld; indien men dan verder bedenkt, dat het zonlicht te Marseille door FABRY²⁾ op 100.000 kaarsen wordt geschat en dit toestroomt in het oog niet onder een hoek van 23', waaronder het Hefner-lampje werd gezien, maar van alle zijden uit het

1) Onderzoekingen Physiol. Lab. d. Utrechtsche Hoogeschool (5) IV. p. 232. Chloroform, bromoform, jodoform hebben een specifieke geurkracht, die zich onderling verhoudt als 1 : 69 : 153 24.

2) Compt. Rend. 7 Dec. 1903.

gezichtsveld, zoo is het duidelijk, dat de lichtprikkels van het dagelijksch leven geenszins onmeetbaar klein mogen heeten. Zij stroomen ook niet gedurende een enkele milliseconde maar den geheelen dag toe. Niet een fractie van een Erg maar een menigte Erg zal de energie bedragen, die op die wijze het zenuwstelsel binnentreedt. Een raming dienaangaande te maken is bezwaarlijk, daar bij het licht niet de staafjes maar de kegels als eindapparaat dienen en in deze teleneuronen slechts op grond van analogie een photochemisch proces wordt aangenomen, dat wij verder niet kennen. Wij moeten ons dus van zulk een schatting onthouden, doch ontwijfelbaar schijnt het ons te zijn, dat het zenuwstelsel relatief groote hoeveelheden energie tot zich neemt langs anderen weg dan die van de stofwisseling.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM doet eene mededeeling namens den Heer Dr. A. SMITS: „*Over de verschijnselen die optreden, wanneer bij een binair stelsel de plooi-puntskromme de oplosbaarheidslijn ontmoet*”¹⁾. (Derde mededeeling).

Het voorafgaande kwalitatief onderzoek van het binair stelsel aether-anthrachinon had getoond, dat alleen dan het geheel der verschijnselen goed zou kunnen worden overzien, wanneer het onderzoek in kwantitatieve richting werd voortgezet met behulp van de pomp van CAILLETET.

Hierbij lieten zich eenige moeilijkheden voorzien; het onderzoek zou zich n.l. moeten uitbreiden over het temperatuurtraject van $\pm 170^\circ$ tot $\pm 300^\circ$, waarbij de druk, zooals verwacht kon worden, een vrij aanzienlijk bedrag zou bereiken en daar het juist de combinatie van hooge temperatuur en hoogen druk is waartegen glas slechts zelden bestand is, scheen het kwantitatieve onderzoek niet vrij van experimenteele bezwaren. De proef leerde echter, dat de drukkingen niet bijzonder hoog waren; het bleek dat ik mij met een maximum druk van 100 atmosferen tevreden kon stellen en aan dezen druk werd door Jena-glas tot ruim 300° weerstand geboden²⁾.

¹⁾ Deze mededeeling is een vervolg op de twee voorgaande, het stelsel aether-anthrachinon betreffende. De eerst gekozen titel kwam mij minder gewenscht voor en is derhalve gewijzigd.

²⁾ Met genoegen grijp ik deze gelegenheid aan, Prof. KAMERLINGH ONNES hartelijk dank te zeggen voor de groote welwillendheid mij betoond, zoowel in het geven van de noodige inlichtingen, als in het in bruikleen afstaan van instrumenten.

Doel van het onderzoek was bij verschillende temperaturen de p - x -doorsneden van de p - x - t -ruimtevoorstelling te bepalen en zoo dit mogelijk was ook de v - x -doorsneden van de v - x - t -ruimtefiguur. Daarbij zou ik dan tevens geraken tot de kennis van eenige projecties in de vorige verhandelingen reeds besproken, n.l. de projecties van de p - x - t -ruimtevoorstelling op het p - t en op het t - x -vlak. Zeer in 't kort zal hier het resultaat worden medegedeeld.

Om dezelfde volgorde te nemen als in de vorige mededeelingen is gekozen, zal hier allereerst de p - t -projectie worden besproken.

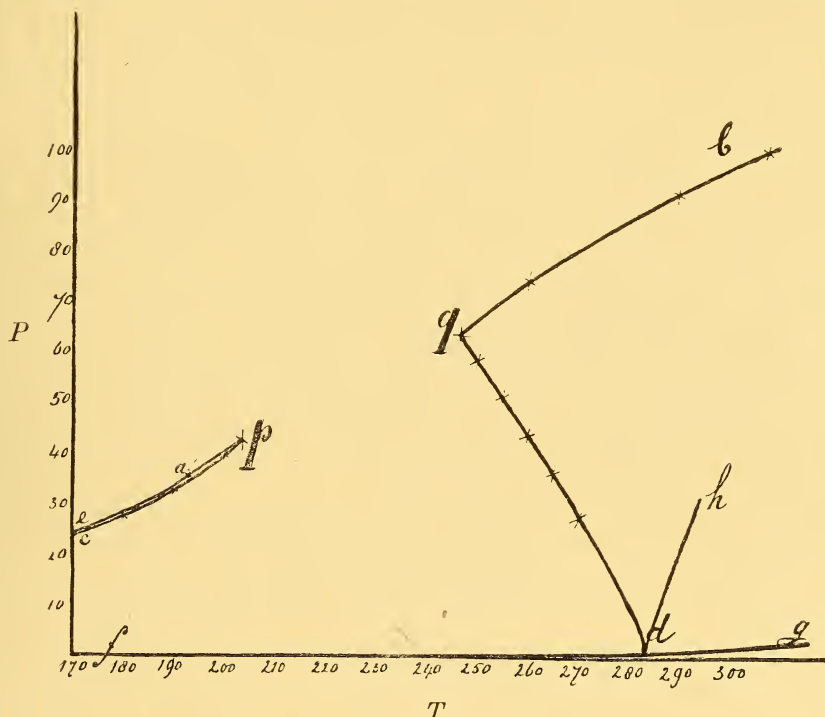


Fig. 1.

In fig. 1 stelt ea voor de dampspanningslijn van zuiveren aether met het kritisch punt in a (193° en 36 atmosferen). cp en qd stellen voor de te realiseeren stukken van de drie phasenlijn. Tot 193° valt de drie phasenlijn practisch samen met de dampspanningslijn ea van zuiver aether, tengevolge van de zeer geringe oplosbaarheid van anthrachinon in aether. Op de lijn ap liggen de plooi punten van de onverzadigde oplossingen van anthrachinon in aether en p geeft aan het eerste plooi punt van een verzadigde oplossing (203° en 43 atmosferen).

Het tweede plooi punt van een verzadigde oplossing van andere concentratie ligt in q (247° en 64 atmosferen) en op de lijn qb

liggen de plooi punten van de tweede reeks onverzadigde oplossingen. Waarschijnlijk bezit deze kromme, die tot het kritisch punt van anthrachinon doorloopt, een maximum.

De lijn fd , die gedeeltelijk met de T -as samenvalt, is de dampspanningslijn van vast anthrachinon en dg die van vloeibaar anthrachinon. dh is de smeltlijn, die zooals VAN DER WAALS¹⁾ bewees, dicht bij het smeltpunt d de richting van de drie fasenlijn aangeeft. Deze laatste drie lijnen zijn hier schematisch aangegeven.

Het hoofdresultaat door deze p - t -figuur weergegeven is dit, dat door de ontmoeting van de plooi puntskromme en de driefasenlijn een gedeelte van deze laatste weggevallen of beter imaginair geworden is en wel in het onderzochte stelsel dat gedeelte, dat het maximum bevat.

Terwijl de plooi puntskromme tusschen p en q metastabiel en dus nog wel is te realiseeren, is dit bij de driefasenlijn niet het geval. Evenwel bleek mij dat bij temperaturen tusschen p en q , bij concentraties grooter dan die van het punt q , drie fasen naast elkaar tijdelijk konden optreden, wanneer deze bij een temperatuur boven 247° waren ontstaan en het evenwichtssysteem daarna snel tot beneden 247° werd afgekoeld. De drie fasen waren nu echter niet met elkaar in evenwicht, want bij konstante temperatuur bleek een kleine volumeverandering een groote druksverandering ten gevolge te hebben. De vloeistof was dus, hoewel in contact met vast anthrachinon, oververzadigd; zij was zeer visqueus en ging uiterst langzaam, soms eerst na een uur, onder afzetting van vast anthrachinon, in den stabielen toestand vast + fluïde over.

Fig. 2 geeft aan een aantal p - x -doorsneden voor verschillende temperaturen, de druk is aangegeven in atmosferen en de concentratie in 1 mol. van het mengsel. Er zij hier direct op gewezen, dat alle lijnen, welke in deze teekening punten van gelijke beteekenis verbinden, zooals plooi punten (k), met damp en vast anthrachinon coëxisterende vloeistoffen (c), met vloeistof en vast anthrachinon coëxisterende dampen (e), alle projecties zijn van de in de p - x - t -figuur voorkomende lijnen op het p - x -vlak.²⁾

De continu in elkaar overgaande takken $c_0 p$ en $e_0 p$ geven aan de reeksen van vloeistoffen en dampen, die van lagere temperatuur komende met vast anthrachinon coëxisteren. In het punt p , de plaats van samenvloeiing der twee takken, hebben wij *het eerste* punt, waar een *verzadigde* oplossing zijn kritischen toestand bereikt.

1) Versl. Koninkl. Akad. 31 Oct. (1903) blz. 439.

2) Heeft de plooi puntskromme een maximum, dan zal zij dus ook in fig. 2 een maximum moeten bezitten. In de t - x -projectie daarentegen komt geen maximum voor.

Dit heeft plaats bij een concentratie 0,015, temperatuur 203° en druk 43 atmosferen. Gaan we nu naar hogere temperaturen dan is over het temperatuurtraject 203° — 247° geen stabiele oplossing mogelijk en daarvoor in de plaats krijgen we fluïde fasen, welke met vast anthrachinon coëxisteeën. Boven 247° kunnen weer vloeistoffen bestaan en de uit twee takken bestaande continue kromme $d c_7 c_6 c_5 c_4 c_3 q e_3 e_4 e_5 e_6 e_7$ geeft dan aan de reeks van vloeistoffen en dampen, die boven 247° met vast anthrachinon coëxisteeën. Het punt van samenvloeiing is hier het punt q , waar dus voor de tweede maal een verzadigde oplossing haar kritischen toestand bereikt. Dit treedt op bij een concentratie 0,13, temperatuur 247° en druk 64 atmosseren.

De vloeïstoftak $c_o p$ van de eerste lus en de vloeïstoftak $q c_5 d$ van de tweede lus zijn, wat we gewoon zijn te noemen, twee stukken van de oplosbaarheidslijn. Daar echter beide vloeïstoftakken continu in hun damp takken overgaan, kunnen we hier zonder eenig bezwaar beide continue lussen oplosbaarheidslijnen noemen.

De tak $c_o p$ van de eerste oplosbaarheidslijn en de tak $d c_5 q$ van de tweede oplosbaarheidslijn vertoonen hier iets bijzonders. De omstandigheid, dat deze takken vloeïend overgaan in de takken $e_o p$ en $d c_5 q$ en dat de punten van samenvloeiing overeenkomen met den hoogsten druk, brengt het verschijnsel der *retrograde oplosbaarheid* mede.

$c_o p$ duidt op retrograde oplosbaarheid in den vloeïstoftak (zie ook Fig. 4) en $d e_5 q$ op retrograde oplosbaarheid in den damp tak. De omvang dezer verschijnselen overtrof echter alle verwachting. Dat de vloeïstof en damp tak van de kromme $d c_4 q e_4 d$ van q naar hogere temperatuur zich eerst van elkaar moesten verwijderen om later weer tot elkaar te komen, was bekend, doch dat genoemde verwijdering zóó sterk zou zijn, dat de damp tak zich zou uitstrekken tot de concentratie 0,01, kon niet worden vermoed. Deze bijzondere ligging brengt nu het zeer interessante verschijnsel mede, dat, nadat men met een concentratie 0,015 in het punt p is aangekomen of m. a. w. de verzadigde oplossing haar kritischen toestand heeft bereikt, bij hogere temperatuur weer drie fasen kunnen optreden. De damp tak $q e_4 d$ nl. strekt zich uit, zooals reeds werd gezegd, tot de concentratie 0,01 en de concentratie van het punt p is 0,015; we komen dus van het punt p bij hogere temperatuur in het gebied rechts van den damp tak $d e_4 q$, waar drie fasen kunnen optreden. Dit verschijnsel werd waargenomen bij een temperatuur, die bijna 60° boven de plooi punt temperatuur van de concentratie 0,015 (p) lag n.l. bij 260° . Waren de drie fasen ontstaan, dan kon door druksverhooging

eerst de vaste stof en daarna de vloeistof worden weggeperst, zoodat ten slotte weer alleen de fluïde phase overbleef.

Fig. 2 laat ons verder nog zien de p - x -doorsneden bij temperaturen boven die van het punt q , aanvangende bij 250° . De p - x -doorsnede, met deze temperatuur corresponderende, is in neven-

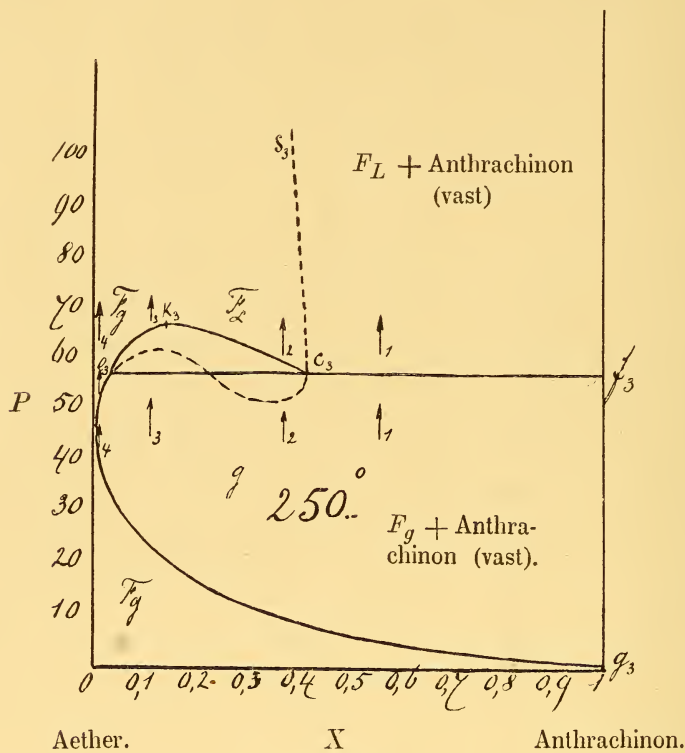


Fig. 2a.

staande teekening (fig. 2a) afzonderlijk weergegeven. De continue kromme c_3, k_3, e_3 , die de coëxisterende onverzadigde vloeistoffen en dampen aangeeft, heeft een eigenaardigen vorm en toont aan, dat retrograde condensatie ontbreekt.

De kromme g_3, e_3 duidt daarentegen op een vrij sterke retrograde stolling. De lijn c_3, s_3 geeft aan, dat hier de oplosbaarheid van anthrachinon in aether bij druksverhooging afneemt. De lijnen g_3, e_3 en c_3, s_3 zijn twee stukken eener continue kromme, waarvan het gedeeltelijk niet te realiseeren tusschenstuk door een stippellijn schematisch is aangegeven. Deze continue kromme stel ik voor in het vervolg *oplosbaarheidsisotherm* te noemen.

Gaan we nu naar hogere temperatuur, dan zien we, dat de p - x -doorsnede voor 255° nog van hetzelfde type is als die voor 250° .

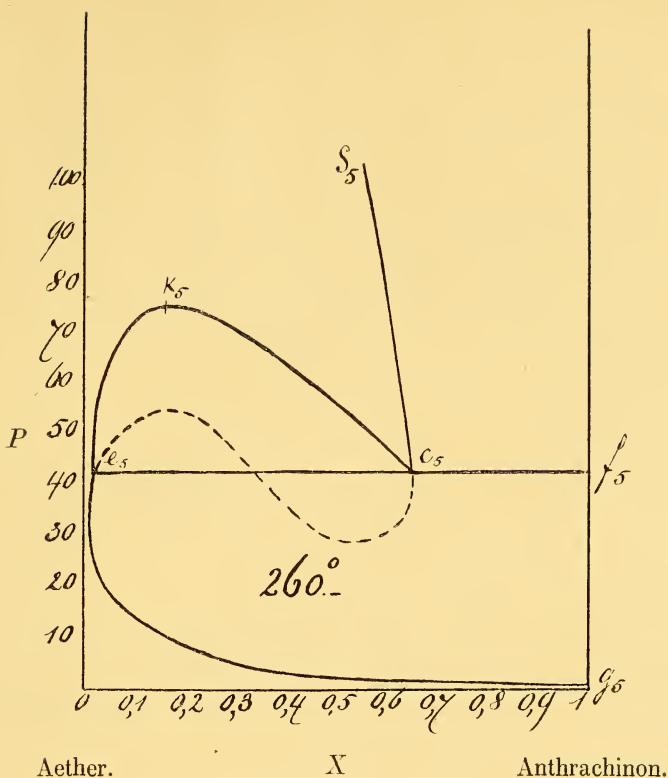


Fig. 2b.

Bij 260° (fig. 2b) is de ligging echter reeds aanmerkelijk veranderd; niet alleen is de p - x -lus $c_5 k_5 e_5$ veel grooter geworden doordat de punten e_5 en c_5 verder uit elkaar zijn gegaan en k_5 naar hooger en druk is verschoven, doch ook is duidelijk te zien, dat de retrograde condensatie welke hier nog juist ontbreekt, bij een iets hoogere temperatuur zal zijn ingetreden.

De oplosbaarheidsisotherm vertoont in het stuk $g_5 e_5$, hoewel in mindere mate dan bij 250° , nog duidelijk het verschijnsel der retrograde stolling.

Bij nog hoogere temperatuur wordt het gebied der retrograde condensatie steeds grooter, zoodat wij voor 270° een p - x -doorsnede krijgen als in fig. 2c is geteekend. De retrograde condensatie is hier zeer sterk en verloopt ongetwijfeld over meer dan 40 atmosferen. Een zoo sterke retrograde condensatie kon echter door te klein volume van de buis niet worden waargenomen; de sterkste door mij waargenomen retrograde condensatie verliep in een druk-traject van 55 tot 39 dus van 16 atmosferen. Of bij 270° nog retrograde stolling bestond, kon door te klein volume van de proefbuis niet

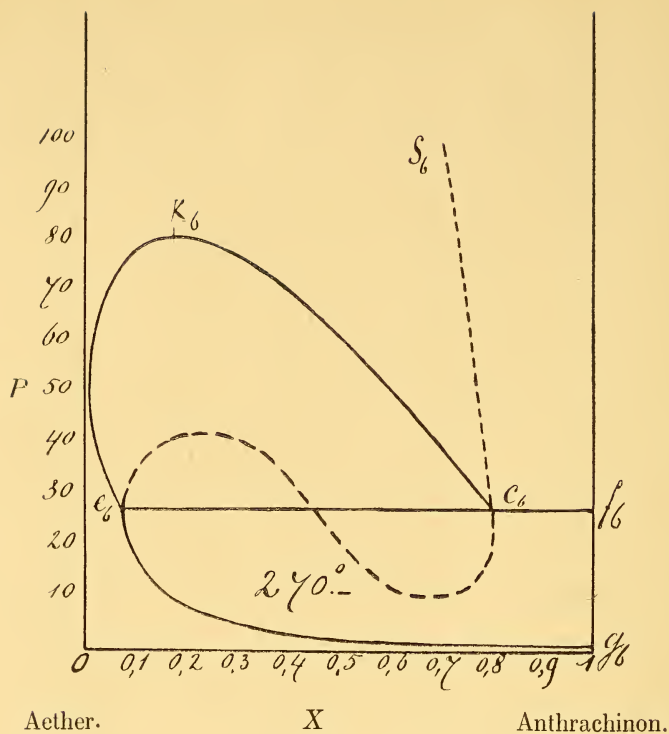


Fig. 2c.

worden waargenomen. Daar het echter niet zeer waarschijnlijk is, dat we hier nog retrograde stolling hebben, is zij in de teekening niet aangegeven.

Boven het smeltpunt van anthrachinon (283°) is de retrograde condensatie enorm groot, zoodat ik haar bij 290° over een druk-traject van 83 tot 40 atmosferen kon waarnemen.

Verder wil ik er op wijzen, dat de meeste der p - x -doorsneden op verschillende manieren zijn doorkruist. In fig. 2a zijn de achtereenvolgens doorloopen gebieden door pijltjes aangegeven.

1 geeft aan den overgang van het gebied voor $F_g +$ vast anthrachinon in het gebied voor $F_L +$ vast anthrachinon onder intermediair optreden der drie phasen. F_g beteekent hier fluïde phase, die onder gewone omstandigheden, d.w.z. beneden de kritische temperatuur van aether gas-phase zou genoemd worden en F_L beteekent fluïde phase, welke onder gewone omstandigheden vloeistof-phase zou betiteld worden. Het is duidelijk dat tusschen F_g en F_L alleen verschil bestaat in de voorgeschiedenis.

2 geeft aan den overgang van het gebied $F_g +$ anthrachinon in het gebied F_L onder intermediair optreden der drie phasen.

3 geeft feitelijk precies hetzelfde aan als 2 en toch is het verschijnsel

boven het kritisch raakpunt van de met vloeistof coëxisterende damp-lijn ligt en daardoor de retrograde condensatie in het metastabiele gebied valt, inplaats van retrograde condensatie, retrograde stolling moet optreden en wel een retrograde stolling, die sterker is dan de retrograde condensatie zou geweest zijn. Loopt de driephasendruklijn juist door het kritisch raakpunt, dan is retrograde stolling niet meer noodzakelijk.

Het vorige samenvattende, komen wij dus tot het besluit, dat gegeven het geval, dat de plooiptuonskromme de oplosbaarheidskromme ontmoet, men op zeer eenvoudige wijze de noodzakelijkheid van het optreden der retrograde stolling bij p en q kan bewijzen.

Hierbij dient echter direct opgemerkt te worden, dat, zooals straks besproken zal worden, ook tusschen p en q retrograde stolling optreedt. Ook dit wordt door de theorie geëischt, doch kan alleen langs mathematischen weg worden bewezen ¹⁾.

Keeren we nu weer terug tot Fig. 2, dan moet nog opgemerkt worden, dat de lijn $q b$, die de plooiptuons der verschillende p - x -lussen vereenigt, zeer steil loopt en voor zoover zij is waargenomen, evenwijdig is aan het eerste deel der plooiptuonskromme $a p$. Dit verloop zal echter naar hoogere temperatuur wel veranderen, want bezit de plooiptuonskromme, hetgeen waarschijnlijk is, een maximum, dan moet ook de projectie van de plooiptuonskromme op het p - x -vlak een maximum vertoonen.

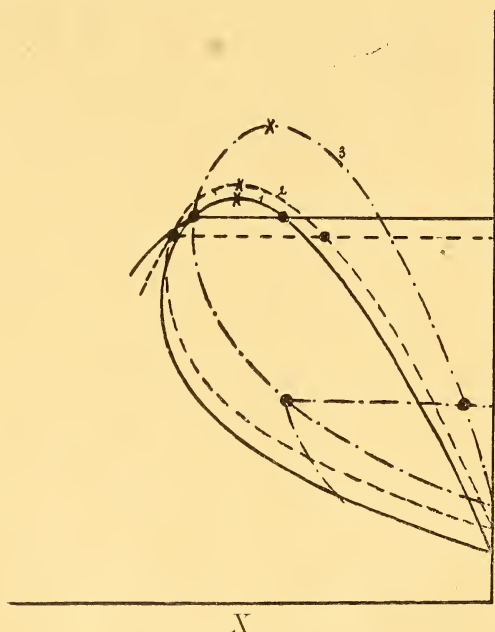


Fig. 4a.

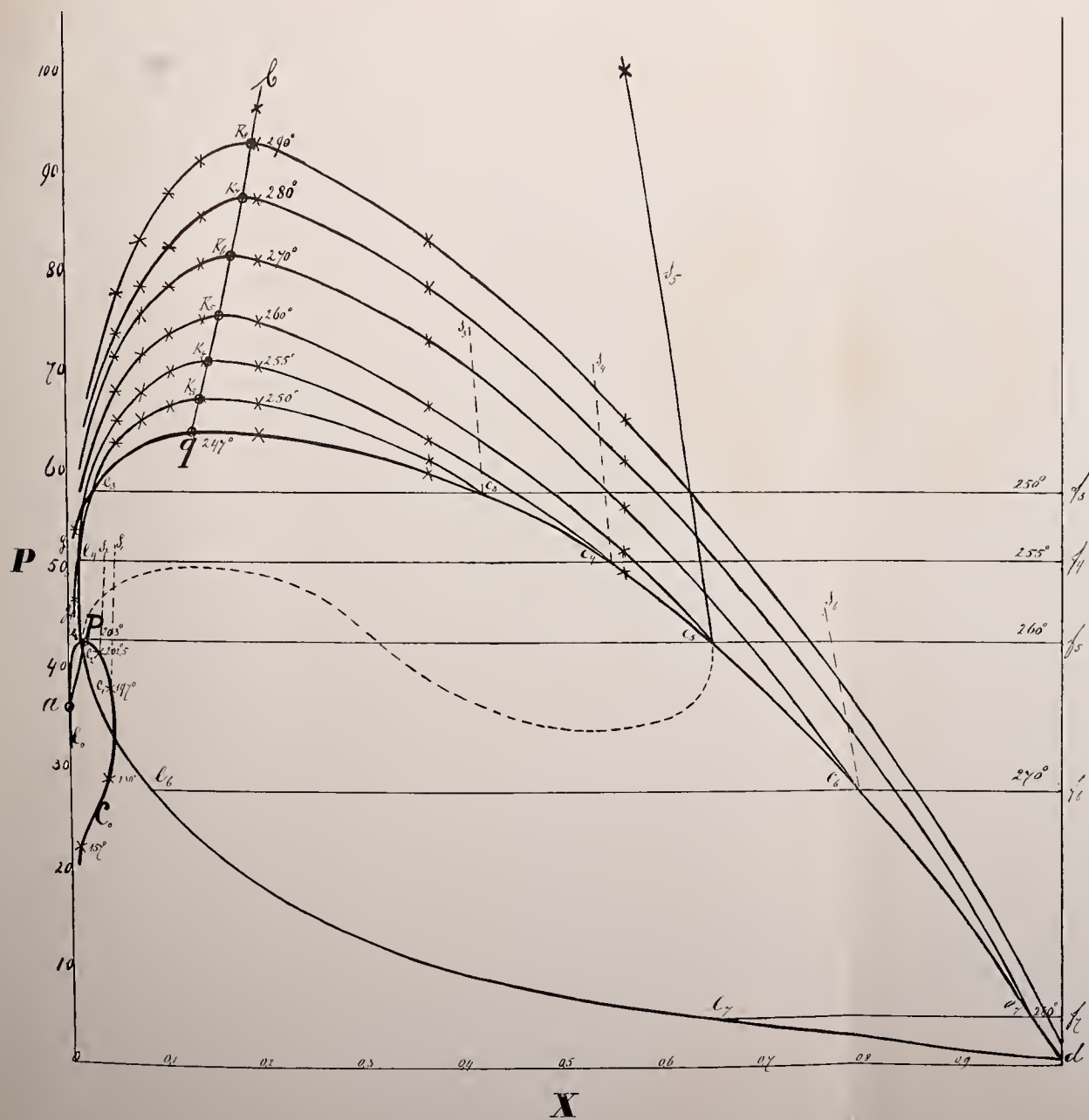
De p - x -doorsneden beneden de temperatuur 203° zijn in fig. 2 niet aangeven, daar de schaal te klein is om het bijzondere goed te doen uitkomen. Daarom is dit gedeelte van Fig. 2 nog eens afzonderlijk op grotere schaal weergegeven in Fig. 4.

In overeenstemming met het zoeven besprokene zien we, dat, terwijl bij 200° geen retrograde condensatie voorkomt, inplaats daarvan retrograde stolling is opgetreden. Spoedig verandert hier echter de ligging, want bij 196° kon

reeds retrograde condensatie worden geconstateerd.

¹⁾ VAN DER WAALS, l. c.

Fig. 2.



Dr. A. SMITS. „Over de verschijnselen die optre-
puntskromme de oplosbaarheidslijn ontmoet.”

Fig. 4.

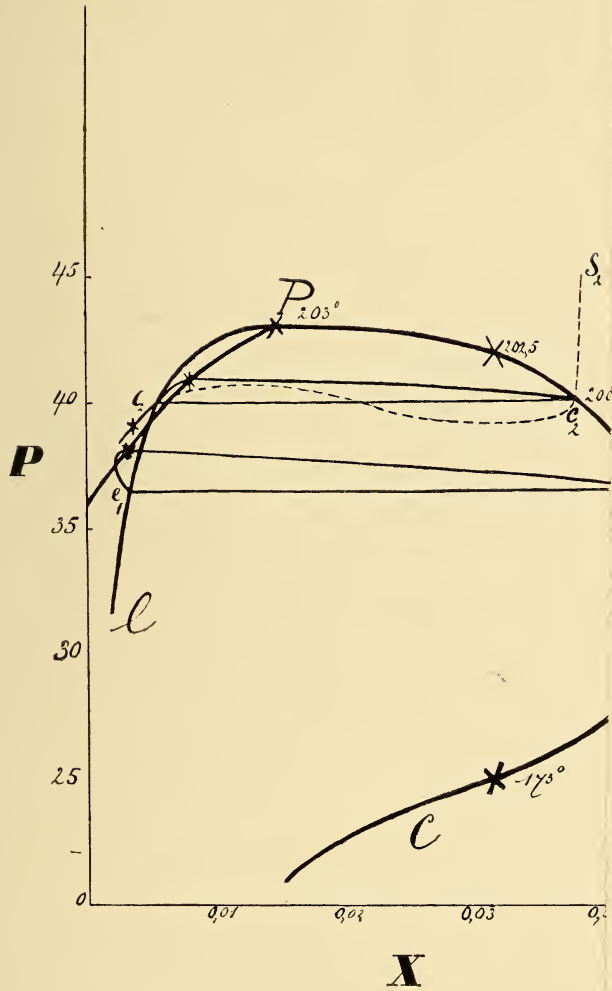


Fig. 4.

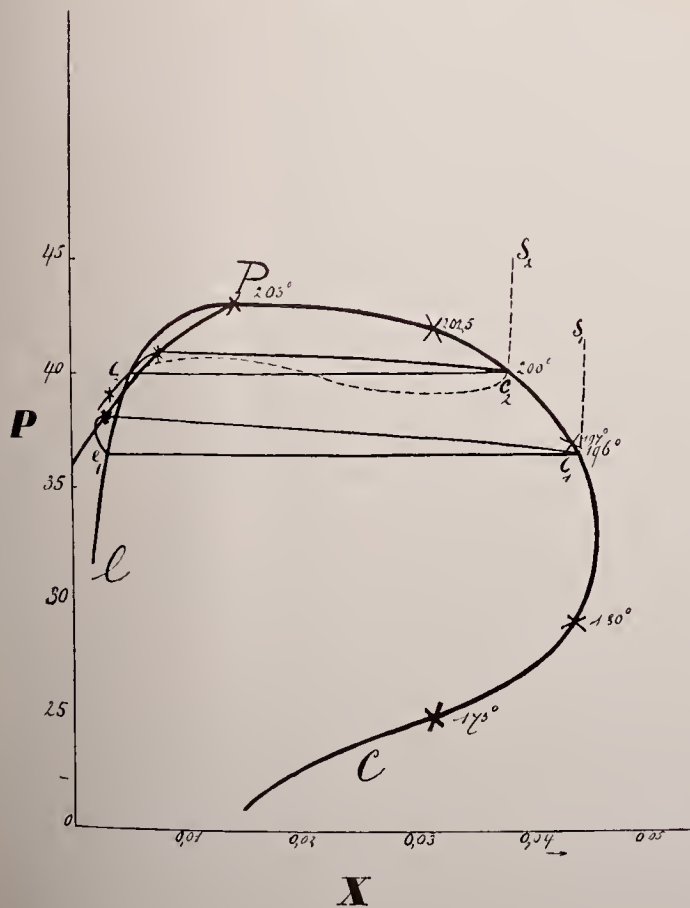
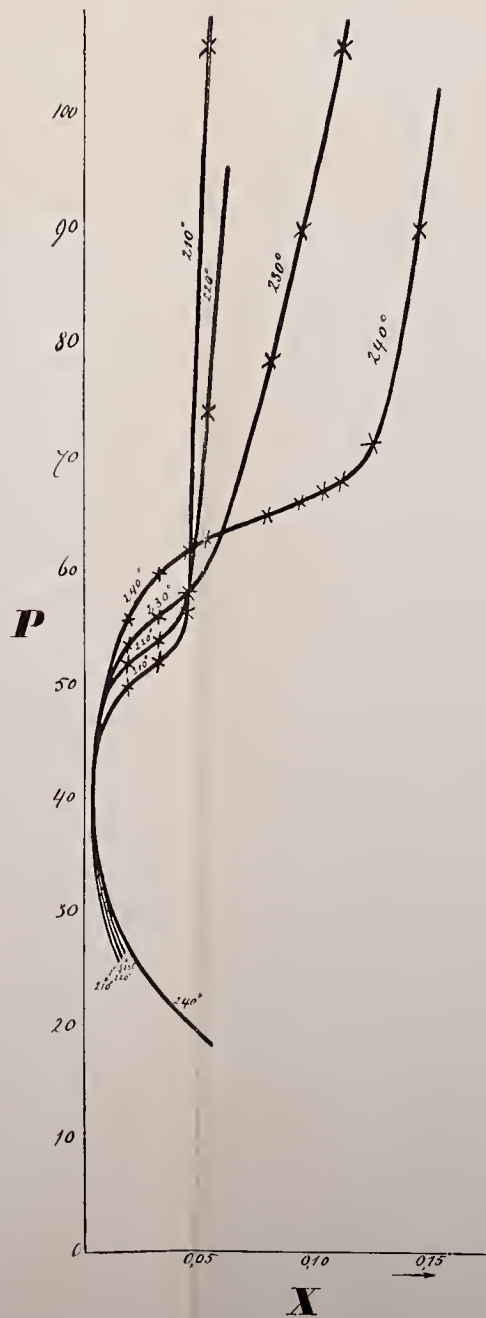


Fig. 6.



Wat van het punt q komende naar hogere temperatuur werd waargenomen, vinden wij dus ook bij het punt ρ , doch hier naar lagere temperatuur. De fig. 4_a en 4_b maken dit duidelijk; fig. 4_a geldt voor een temperatuur boven het punt q en fig. 4_b is geldig voor temperaturen beneden het punt ρ . In beide figuren zijn drie ρ - v -doorsneden schematisch voorgesteld; de doorsneden 1 en 2 verschillen zeer weinig in temperatuur, terwijl 3 geldt voor een temperatuur, die aanmerkelijk van die, waarmede 2 correspondeert, afwijkt.

In figuur 4_a geldt doorsnede 1 voor de laagste en 3 voor de hoogste der beschouwde temperaturen; in fig. 4_b is het juist omgekeerd en toch zien we, dat in de opeenvolging der doorsnede 1, 2 en 3 in beide

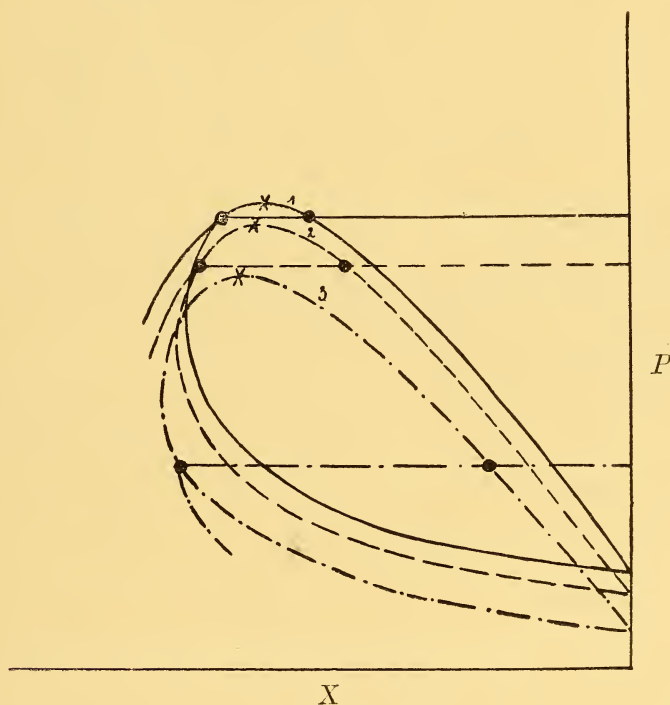


Fig. 4_b .

figuren hetzelfde valt op te merken. De driephasendruklijn ligt in 1 het hoogst en in 3 het laagst. In 1 en 2 hebben wij geen retrograde condensatie, doch retrograde stolling en in 3 hebben wij alleen retrograde condensatie. In figuur 4_a neemt echter de plooiingsdruk in de volgorde 1, 2, 3 toe en in fig. 4_b af, doch dit is hieraan toe te schrijven, dat de volgorde 1, 2, 3 in het eerste geval beteekent naar hogere en in het tweede geval naar lagere temperatuur.

Wat nu het beloop der oplosbaarheidsisothermen boven de driephasendruklijn aangaat, heeft VAN DER WAALS de waarschijnlijkheid

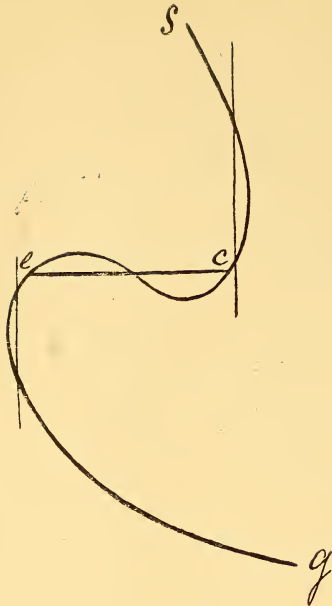


Fig. 5.

aangetoond van een beloop zooals in fig. 5 is aangegeven, waaruit dus volgt, dat ook de tak cs retrograde stolling vertoont. Dit geval, waarbij de geheele oplosbaarheidsisotherm op een dubbele retrograde stolling wijst, is tot heden nog niet geconstateerd. Wel is gevonden, dat beneden 240° het bovenste stuk van de oplosbaarheidsisotherm naar rechts loopt, hetgeen wijst op een toename der oplosbaarheid van anthrachinon in de fluïde phase bij verhooging van druk ¹⁾, terwijl boven 250° het tegenovergestelde verloop gevonden werd. Tusschen 240° en 250° schijnt dus de richtingsverandering plaats te hebben en de mogelijkheid te bestaan het door VAN DER WAALS voorspelde beloop te constateeren.

Daar echter het kleine temperatuurtraject 240° — 250° correspondeert met een groot concentratieverschil, is het punt van omkeering niet zoo gemakkelijk uit te vinden.

De resultaten, verkregen bij temperaturen tusschen 203° en 247° zijn in fig. 6 weergegeven. Hier zijn geteekend de oplosbaarheidsisothermen voor de fluïde phasen bij 210° , 220° , 230° en 240° . Al deze isothermen vertoonen, zooals VAN DER WAALS ²⁾ reeds voorspelde, het verschijnsel der retrograde stolling en hoe dichter we komen bij het punt q , d. w. z. hoe dichter bij 247° des te grooter is het gebied, waarover deze retrograde stolling verloopt.

De isotherm van 210° loopt het sfeilst; bij temperatuursverhoging wordt het beloop aanvankelijk minder steil, doch bij 240° schijnt weer een steiler beloop op te treden, hetgeen waarschijnlijk in verband staat met de richtingsverandering, die boven 240° intreedt.

De projectie van de oplosbaarheidslijn en van de plooi puntskromme op het t - v -vlak is in fig. 7 aangegeven, waar de gestippelde lijnen de damp takken beduiden. De projecties van de twee stukken der plooi puntskromme ap en qb zijn bijna rechte lijnen. Gaat men uit het beloop van de lijn qb na, bij welke temperatuur deze lijn op de lijn voor zuiver anthrachinon zou uitkomen, dan vindt men $\pm 800^\circ$.

¹⁾ Deze drukinvloed werd nagegaan tot ruim 100 atmosferen.

²⁾ loc. cit.

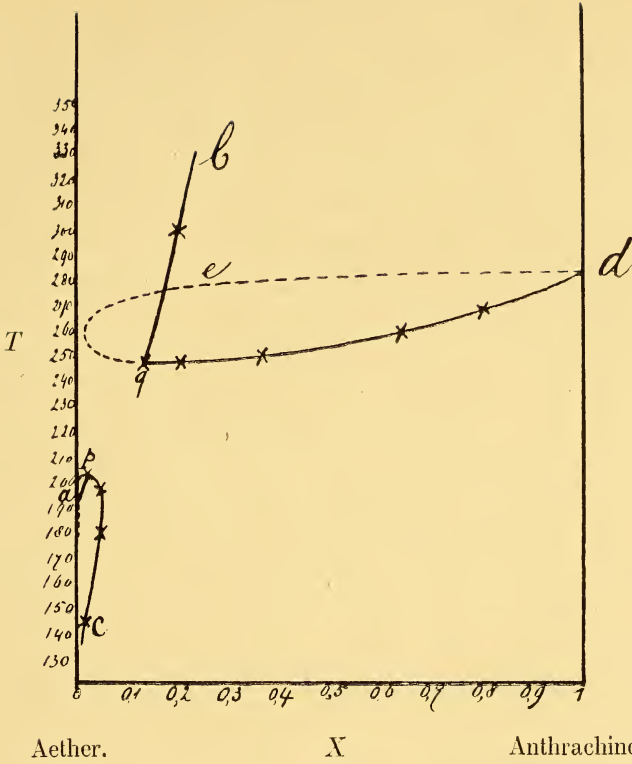


Fig. 7.

Ten slotte hebben we nog in fig. 8 het beloop der moleculaire

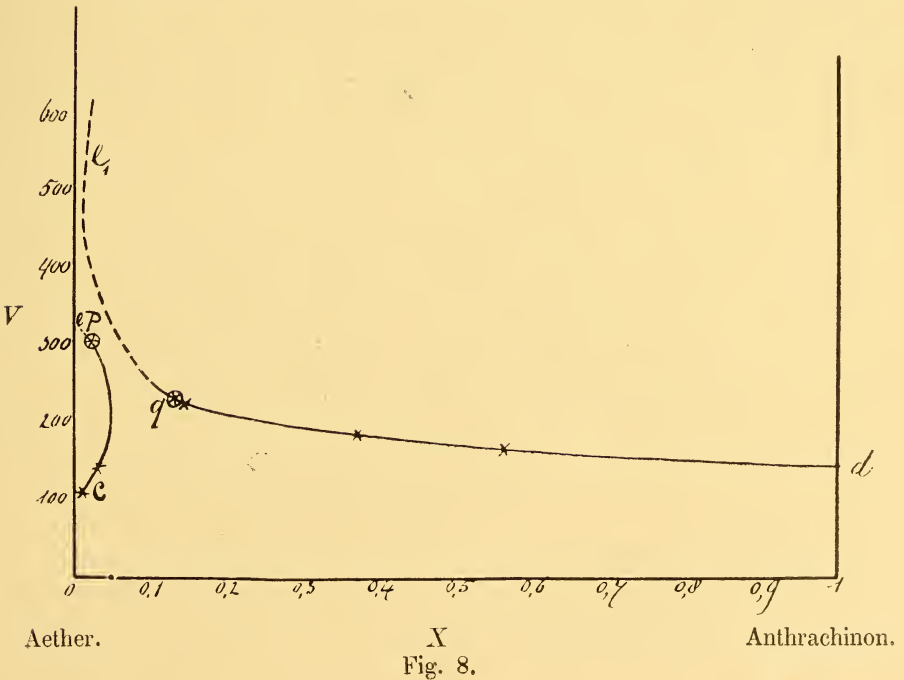


Fig. 8.

volumina der verzadigde oplossingen. Ook hier hebben we weer twee continue takken, elk bestaande uit een vloeistof en damp. dq en cp zijn de vloeistoftakken en qe_1 en pe zijn de damp. p en q geven aan de moleculaire volumina der twee kritische verzadigde oplossingen. De gestippelde damplijn qe loopt door tot aan de concentratie 0.015, zoodat ook uit deze figuur direct volgt, dat men met de concentratie, waarmede het punt p kan worden gerealiseerd, bij hoogere temperaturen en grootere volumina weer drie phasen verkrijgen kan. De lijnen cp en qe geven ook hier duidelijk het verschijnsel der retrograde oplosbaarheid aan.

Het hier beschreven onderzoek heeft dus een volkomen bevestiging geleverd van de algemeene gezichtspunten, die bij het kwalitatief onderzoek op den voorgrond geplaatst zijn en wier scherpere formulering door de theorie van VAN DER WAALS kon worden gegeven.

De bijzonderheid van het onderzochte stelsel, die hierin gelegen is, dat de dampspanning van de eene stof (aether) zoo véél grooter is dan die van de andere (anthrachinon), was eenerzijds oorzaak van enkele geheel onvoorziene verschijnselen en stelde anderzijds in staat, retrograde condensatie en retrograde stolling te verwezenlijken op een schaal, véél grooter dan tot heden mogelijk geacht werd.

Laboratorium voor Anorg. Scheikunde der Universiteit.

Amsterdam, Juni 1904.

Scheikunde. — De Heer LOBRY DE BRUYN biedt aan als mededeeling n^o. 11 over intramoleculaire verschuivingen: J. OLIE Jr.: „*De omzetting van het phenylkaliumsulfaat in p-phenolsulfonzure kalium*”.

(Mede aangeboden door den Heer A. P. N. FRANCHIMONT.)

Toen bij zijne physiologisch-chemische onderzoekingen EUGEN BAUMANN de aanwezigheid van zgn. gepaarde zwavelzuren in de urine, en hunne vorming in 't dierlijk organisme aantoonde en spoedig daarna het phenyl- en kresylzwavelzuur in den vorm van zouten zuiver afscheidde¹⁾, lag het voor de hand te trachten ook de synthese dezer toenmaals nog onbekende lichamen te verwezenlijken. Uit phenolkalium en kaliumpyrosulfaat gelukte het hem werkelijk het phenylkaliumsulfaat te bereiden. Bij de nadere studie van eigenschappen van deze stof bleek het hem nu, dat, terwijl met verdunde zuren het phenylzwavelzuur zeer gemakkelijk in phenol en zwavelzuur wordt gesplitst, het droge zout bij verhitting gedurende eenige uren op 150°—160° grootendeels

¹⁾ Ber. 9.54.1715, 11.1907 (1878).

(des te meer hoe droger het is) eene intramoleculaire verschuiving ondergaat en in *p*-phenolsulfonzuur overgaat; een ander isomeer ontstond niet. Men heeft dus $C_6H_5OSO_3K \rightarrow p.C_6H_4.OH.SO_3K$. Het natriumzout geeft reeds bij lagere temp. ($\pm 130^\circ$) dezelfde omzetting.

Met het doel om van deze verschuiving eenige nadere bijzonderheden vast te stellen, vooral om te trachten de snelheid der transformatie van het eene vaste zout in het isomeer te bepalen, werden de proeven van BAUMANN onder groote voorzorg en in 't luchtledige herhaald. Het gebruikte zout was zeer zuiver. Het bleek nu evenwel, dat, indien men het zout trapsgewijze verhitte in een luchtledige buis, waaraan een met zwavelzuur gevulde bol voorzien van een kraan was aangebracht, eene temperatuur van 260° kon worden bereikt zonder dat de isomerisatie plaats vond. Het uiterlijk en de eigenschappen van het zout waren niet veranderd en in zijne waterige oplossing kon door middel van basisch loodacetaat de afwezigheid van *o*- of *p*-phenolsulfonzuur gemakkelijk worden bewezen. Deze proef werd met een ander praeparaat met hetzelfde resultaat een paar maal herhaald.

Het bleek verder, dat, indien het zout niet volkomen droog was, er ontleding in phenol en zuur kaliumsulfaat plaats had, terwijl nu tevens phenolsulfonzuur zout ontstond. Werd verder het volkomen droge zout in eene buis ingesmolten (en dus niet in het luchtledige en bij aanwezigheid van zwavelzuur) verhit op $\pm 170^\circ$ dan had het isomere zout zich wel gevormd.

Uit deze proeven volgt, dat de vorming van *p*-phenolsulfonzure kalium blijkbaar afhangt van de aanwezigheid van hoogst geringe hoeveelheden eener vreemde stof, welke bij de eerste proeven niet ontstaat of wel direct in 't zwavelzuur overgaat. Het lag voor de hand hierbij te denken aan SO_3 , aan phenol of aan water. Werd het phenylkaliumsulfaat vooraf met een weinig $HKSO_4$, $K_2S_2O_7$ of C_6H_5OH gemengd, goed gedroogd en in het luchtledig verhit, dan bleek werkelijk een deel van het zout te zijn omgezet en tevens ontleed; een groote hoeveelheid was echter onveranderd gebleven. Ook bij een praeparaat, hetwelk door staan aan de lucht iets was ontleed, naar phenol rook en daarna boven zwavelzuur in vacuo was gedroogd, trad bij verwarming op 160 — 170 de omzetting op. Werd het echter eerst herhaalde malen uit water omgekristalliseerd en zorgvuldig in vacuo gedroogd dan kon het weer op hoogere temperatuur, zonder eenige verandering te ondergaan, worden verhit.

BAUMANN's waarneming dat het droge zout aan de lucht schijnbaar plotseling en zeer snel zich ontleedt onder vorming van phenol en sulfaat heb ik bevestigd gevonden. Ik meen dit verschijnsel te moeten

toeschrijven aan de aanwezigheid van een spoor zuur in de atmosfeer. Afzonderlijke proeven bewezen dat in droog HCl-gas het zout onveranderd bleef, terwijl vochtige zure dampen het spoedig ontleden. In zuiver water is het zout ook bij hogere temperatuur vrij bestendig, het kan daaruit worden omgekristalliseerd en bij verwarming gedurende langeren tijd worden slechts sporen sulfaat gevormd.

Het phenylkaliumsulfaat is dus voor H-jonen blijkbaar buitengewoon gevoelig.

Organ. Chem. Labor. d. Universteit. Amsterdam, Juni 1904.

Scheikunde. — De Heer LOBRY DE BRUYN biedt aan: Mededeeling N^o. 12 over intramoleculaire verschuivingen: J. F. SUYVER: „*De intramoleculaire omzetting bij de stereoisomere α - en β -trithioacet- en α - en β -trithiobenzaldehyden*”.

(Mede aangeboden door den Heer A. P. N. FRANCHIMONT.)

1. Het is bekend dat de uit drie moleculen gevormde polymerisatieproducten der aldehyden en der thioaldehyden in twee verschillende vormen kunnen voorkomen, een metastabiele en een stabiele vorm, waarvan de laatste in 't algemeen hooger smeltpunt en geringere oplosbaarheid vertoont. Zoo heeft men van 't gewone aldehyde het vloeibare paraldehyde en het vaste metaldehyde; de trithioaldehyden worden als α - en β -vorm, de laatste als de „stabiele”, aangeduid.

Vooraf na de onderzoekingen van E. BAUMANN en zijne leerlingen ¹⁾ wordt de isomerie dezer paren van lichamen (welke hetzelfde mol. gew. bezitten en waarvan een vijftiental bekend zijn) als een geval van stereoisomerie opgevat. Men heeft zich algemeen aangesloten bij BAUMANN's voorstelling dat de drie koolstof- en zuurstofatomen, van de aldehydgroep afkomstig, zich tot een zesring hebben samengevoegd en dat het geplaatst zijn, hetzij van alle drie alkyl- of arylgroepen, hetzij van twee van hen aan ééne zijde van het vlak van den zesring het bestaan der twee isomeren veroorzaakt. Het overgaan van den α - in den β -vorm is dus eene verschuiving, welke neerkomt op de wisseling van plaats, aan éézelfde koolstofaatom, van een waterstofaatom en een alkyl- of arylgroep.

2. Over het verschijnsel der verschuiving vindt men in de literatuur alleen opgegeven, vooreerst dat zij eenzijdig plaats vindt, en wel $\alpha \rightarrow \beta$; vervolgens dat voor hare verwezenlijking een katalysator noodig is. Als een algemeen bruikbare katalysator wordt het jodium

¹⁾ Berichte 22 en volgende, WÖRNER, Ber. 29.139.

aangegeven; bij smelting van de α -isomeer of bij koken van hare oplossing onder toevoeging van een weinig jodium vindt de overgang plaats. Voor enkele gevallen is verder nog vastgesteld dat ook zwavelzuur, acetylchloride, zoutzuurgas (in de gesmolten α -isomeer geleid) en aethyljodide α in β omzetten.

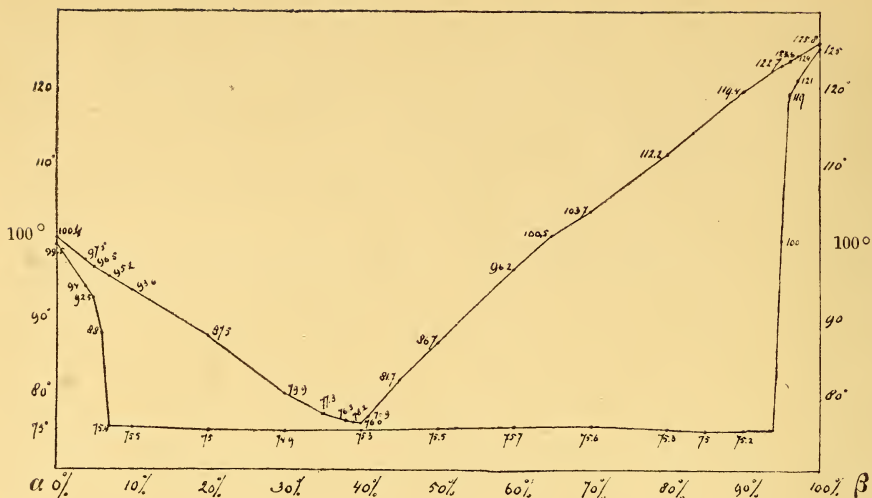
Aan een systematisch onderzoek is het interessante verschijnsel der verschuiving niet onderworpen.

Het doel van mijn arbeid nu was met een dergelijk systematisch onderzoek een aanvang te maken. Ik heb daartoe een aantal nieuwe stoffen op hare katalytische werkzaamheid onderzocht, voorn. ten opzichte van de twee trithioacet- en -benzaldehyden. Hierbij is gebleken, dat behalve de reeds genoemde stoffen ook eene oplossing van SO_3 of SO_3HCl in chloroform of in tetrachloorkoolstof, het zgn. BECKMANN'sche mengsel, azijnzuur azijnzuuranhydride, het vaste ZnCl_2 , het AlCl_3 , het POCl_3 , en de alcoholische oplossing van HCl de omzetting kunnen veroorzaken. Ook werd vastgesteld dat het α -trithiobenzaldehyd zonder katalysator door koken zijner oplossing (bijv. in toluol) in β overging, het α -trithioacetaldehyde echter niet. Verder is bewezen dat de trithioacetaldehyden wederkeerig in elkaar kunnen omgezet worden; bij de trithiobenzaldehyden is echter vastgesteld dat het β -isomeer niet in α overgaat. De laatste omzetting maakt dus den indruk eenzijdig te zijn of, algemeener uitgedrukt, de grens ligt hier zoo dicht bij den β -vorm dat de overgang $\beta \rightarrow \alpha$ aan de waarneming ontsnapt.

3. *α - en β -trithioacetaldehyd.* Daar bij het onderzoek eene methode ter bepaling van de samenstelling van een mengsel der twee isomeren noodig was, werd in een groot aantal oplosmiddelen hunne oplosbaarheid bepaald. Het verschil in oplosbaarheid bleek echter voor eene quantitative scheiding te gering. Daarom werd, nadat was vastgesteld dat zonder katalysator, bij smelting gedurende vrij langen tijd (24 u.) de isomeren niet in elkaar overgaan, de smeltlijn bepaald. De nevenstaande figuur geeft aan, dat het eutectisch punt ligt bij 76.0 voor een mengsel van $60\% \alpha + 40\% \beta$. Verder ziet men, dat, indien mengkristallen zich vormen, deze slechts voor mengsels met een hoog gehalte aan α resp. β bestaan.

De beginstolpunten en het smelttraject konden met behulp van het toestel van VAN EYK scherp worden bepaald. Daar alle beneden 100° waargenomen stolpunten bij twee verschillende mengsels konden behooren, werd door toevoeging van een weinig van een der isomeren en herhaling der stolpuntsbepaling de juiste samenstelling vastgesteld.

Bij de uitvoering der proeven werd ongeveer 1 à 1.5 gr. der stof met het katalytisch werkend agens in aanraking gebracht. Bij het



verder opwerken van het product werd zorg gedragen dat geen verlies aan stof plaats vond. Daartoe werd, na het verwijderen van den katalysator en eventueel van het oplosmiddel, het gevormde mengsel der twee isomeren volkomen in chloroform, waarin beide zeer sterk oplosbaar zijn, opgenomen; de chloroformoplossing werd dan door een droog filter gefiltreerd en het oplosmiddel verdampt. Van het droge residu werd dan het beginstolpunt bepaald.

Zooals reeds in den aanvang werd opgemerkt, bleek uit mijn onderzoek, dat de tot nu toe als eenzijdig verloopend beschouwde omzetting in werkelijkheid omkeerbaar is, dus $\alpha \rightleftharpoons \beta$. Zulks volgt uit proeven met verschillende katalysatoren. Ook werd getracht door behandeling met alcoholisch zoutzuur de zuivere α uit β te bereiden. Hiertoe werd 20 gr. β met alcohol. HCl gedurende 3×24 uur op 40° verwarmd. Bij het omkristalliseeren uit aceton werd uit het product eerst zuivere β (14 gr.) verkregen; de zesde fractie bestond uit gelijke deelen α en β met beginstolpunt van $88^\circ.8$. Tevens bleek nog een ander merkwaardig resultaat, dat echter, daar het met de theorie der katalytische reactie's in tegenspraak is, onder eenige reserve moge worden medegedeeld. De grens van het systeem $\alpha \rightleftharpoons \beta$ zou n.m. verschillend zijn al naar den aard der gebruikte katalysatoren. Uit de onderstaande waarden voor de gevonden grenzen, afgeleid uit de beginstolpunten, verkregen zoowel door van α als van β uit te gaan, blijkt zulks.

Het zwavelzuur van 70 à 80% zet ook α in β om; na 18 u. bij 40° had een zuur van 75% , 97% α getransformeerd in β . Eigenaardig is, dat het β -isomeer na 6 dagen met zuur van 75% (bij $\pm 15^\circ$) zijn constant smeltpunt van $125^\circ.5$ had behouden, dus niet in α was overgegaan.

Agens.	uitgaande v. α	Beginstolpunt.	Grens.
Abs. alcohol. HCl. (35°)	α	118°.6 na 2 dagen	89 0/0 » ¹⁾
	β	119°	
Acetylchloride ($\pm 15^\circ$) ²⁾	α	121°.7 na 2 »	93 0/0 »
	β	121°.5	
SO ₃ HCl in chlorof. ($\pm 15^\circ$)	α	119°.1 na 1 »	90 0/0 » ³⁾
	β	119°.4	
Jodium	α (bij $\pm 106^\circ$)	123°.6	96 0/0 » ⁴⁾
	β (» $\pm 126^\circ$)	123°	
SO ₃ in chlorof. ($\pm 15^\circ$)	α	121°	92 0/0 » ⁵⁾
	β	121°	
ZnCl ₂	α (bij $\pm 106^\circ$)	124°.6	98 0/0 » ⁶⁾
	β (» $\pm 126^\circ$)	124°.7	

De reden hiervan ligt waarschijnlijk in de onoplosbaarheid van β in het zwavelzuur; α is in hoogst geringe mate in het verdund zuur oplosbaar⁷⁾.

Met betrekking tot bovenstaande tabel moge nog opgemerkt worden, dat de omstandigheid, dat men uitgaande zoowel van de α als van de β telkens komt tot vrijwel dezelfde beginstolpunten (voor jodium is het verschil van 0°,6 wel wat groot), er voor pleit, dat de verschillende katalysatoren voeren tot verschillende grenzen. Vooral voor de vier laatste katalysatoren, waarvan slechts enkele m.gr. of c.gr. werden gebruikt, schijnt deze conclusie gerechtvaardigd. Toch ligt een bron van mogelijke fouten in de gevolgde onderzoekingsmethode. Geringe hoeveelheden toch van een transformatieprodukt kunnen op het stolpunt een invloed uitoefenen. In het met alcoholisch zoutzuur verkregen product nu werd speciaal gezocht naar gebonden chloor, echter met negatief resultaat. Ook werd bij het opwerken van het met behulp van alcohol. HCl uit 20 gr. β verkregen mengsel der twee

1) Ook gasvormig zoutzuur, in de gesmolten isomeren (bij $\pm 105^\circ$, resp. $\pm 126^\circ$) geleid, voert tot dezelfde grens.

2) De beide isomeren zijn in alcohol en in acetylchloride goed oplosbaar.

3) 3 droppels SO₃HCl op 5 c.c. CHCl₃.

4) Met 3 0/0 jodium na 1 u. bereikt.

5) Zoowel met 5.2 als met 10.5 m.gr. SO₃ p.gr. trithioaldehyde werd dezelfde grens bereikt.

6) Met 0.3 0/0 ZnCl₂ na 3 u. bereikt.

7) De mogelijkheid is niet uitgesloten, dat met H₂SO₄ de omzetting (schijnbaar) eenzijdig verloopt.

isomeren (beginstolpunt 119°) niets gevonden, dat wees op de aanwezigheid van eene merkbare hoeveelheid eener onzuiverheid. Toch zal wegens het belang der kwestie dit punt uitgebreider worden onderzocht.

De volgende bijzonderheden bieden nog eenig belang aan.

De omzetting door jodium in oplossing geschiedt slechts zeer langzaam, ook bij verhooging van temperatuur, terwijl er een zeer merkbare invloed bestaat van het oplosmiddel. Zoó was van het α -isomeer bij 35° na 7 dagen omgezet, in chloroform 3 %, in zwavelkoolstof 3 %, in azijnaether 8 % en in benzol 15 % (de hoeveelheid jodium bedroeg 5 % van het trithioaldehyd ¹⁾).

Ook in vasten toestand bewerkt jodium de omzetting. 30 Mgr. jodium werden in 3 gr. gesmolten α -trithioacetaldehyd opgelost en de vloeistof daarna snel afgekoeld; er bleek toen reeds ± 10 % te zijn omgezet. ± 1 Gr. van 't mengsel bij gewone temperatuur bewaard, was na vier maanden in 't donker omgezet tot 85 %, in 't licht tot 93 %.

Een geringe spoor $ZnCl_2$ had na 4 uur reeds 17 % van het gesmolten α -isomeer getransformeerd, terwijl zooals opgemerkt werd, bij verhitting in een zuiver buisje de stof onveranderd bleef, zelfs na 24 uur.

Azijnzuuranhydride had bij 40° na 66 uren 3 % van de α omgezet (97.9 beginstolpunt); ijsazijn werkt nog veel langzamer. Hieruit blijkt dus dat in het zgn. BECKMANN'sche mengsel, hetwelk uit de twee genoemde vloeistoffen bestaat waarin zoutzuurgas is opgelost, en dat veel sneller omzet dan de twee vloeistoffen, als sterk werkende katalysator in de eerste plaats het HCl (ook misschien sporen gevormd CH_3COCl) optreedt.

4. α - en β -trithiobenzaldehyd. De handige methode om door bepaling van het begin-stolpunt de mengsels van α - en β -trithioaldehyd quantitatief te analyseeren, is bij de derivaten van het benzaldehyd niet toe te passen, daar deze geen verhitting boven het smeltpunt (166° voor α en 225° voor β) verdragen zonder reeds gedeeltelijke ontleding te ondergaan. Bovendien heeft bij het α -trithiobenzaldehyd bij verhitting op zijn smeltpunt reeds zonder katalysator eene merkbare omzetting in de β -verbinding plaats ²⁾. Voor de quantitative bepaling kon hier gebruik gemaakt worden van de verschillende oplosbaarheid der isomeren. De β -verbinding is in de meeste oplosmiddelen nagenoeg onoplosbaar; het minst nog in benzol (0.01 %).

¹⁾ De genoemde, goed gezuiverde oplosmiddelen, afzonderlijk onderzocht, bleken met jodium na 24 uur bij 40° niet te hebben ingewerkt.

²⁾ Zoowel bij verhitting in glas als in een platinakroes.

De α -verbinding daarentegen is veel gemakkelijker oplosbaar, vooral in benzol (ongeveer 6 %). Bij de omzetting van α - in β -trithiobenzaldehyd maakte ik daarom steeds gebruik van benzol om het α -isomeer uit het reactieproduct op te lossen. Ik nam daarbij de voorzorg, het benzol eerst te verzadigen met de β -verbinding om bij het wegen van het in benzol opgeloste voor de medegewogen β -verbinding eene correctie te kunnen aanbrengen.

De volgende resultaten, werden verkregen bij gewone temperatuur :

Met zwavelzuur verloopt de omzetting zeer langzaam. Bij verschillende concentratie van het zuur (van 70—85 %) bedroeg zij nog slechts 4 tot 6 % na 24 uur. Sterk zwavelzuur werkt evenals bij het trithioacetaldehyd, ontledend. SO_3 in chloroform bleek ook hier een zeer goede katalysator te zijn; eene volledige omzetting van α in β werd na 20 uur verkregen.

Ook acetylchloride werkt zeer krachtig. Eene volledige omzetting had reeds plaats na 24 uur in een mengsel van gelijke deelen acetylchloride en benzol. Bij oplossing enkel in acetylchloride was reeds na 5 minuten 95.5 % van het α -trithiobenzaldehyd in het zich kristallyn afzettend β -isomeer omgezet. Evenzoo, maar niet zoo snel, werkt het BECKMANN'sche mengsel.

Alcoholisch zoutzuur bewerkt bij 35° eene omzetting die na 24 uur tot 95 % en na 3 dagen bij 40° tot 100% gevorderd was. Waterig zoutzuur van 1.19 s. gew. bracht het in 24 u. bij 35° tot 17.2 %.

Jodium werkt hier veel gemakkelijker dan bij de derivaten van acetaldehyd. Bij gewone temperatuur toch reageert het zelfs in oplossing al zeer sterk katalytisch. Bijvoorbeeld werd door 6% jodium in benzoloplossing na 24 uur bij gewone temperatuur eene omzetting teweeggebracht van 76 %, bij 35° van 94 %. Ook hier valt een duidelijke invloed te constateeren van het oplosmiddel waarin de reactie plaats vindt. Bij gebruik van 10 mgr. jodium en 0.5 gr. trithiobenzaldehyd was de omzetting na 90 uur bij 35° gevorderd: in chloroform tot 100 %, in zwavelkoolstof tot 77.6 % in toluol tot 59.5 %, in benzol tot 34.4 %.

Ook zonder katalysator gaat het α -trithiobenzaldehyd zooals boven opgemerkt werd reeds vrij gemakkelijk over in de β -verbinding. Bijv. bij koken in toluol (111°) was na 6 uur reeds 17.4% omgezet.

De omgekeerde reactie, overvoering van β - in α -trithiobenzaldehyd heeft niet plaats. Het bewijs hiervoor werd geleverd door de volgende proef: \pm 10 gr. β -trithiobenzaldehyd werd met acetylchloride overgoten en gedurende 24 uur bij gewone temperatuur aan zich zelf overgelaten. Na behandeling met water werd van de afgescheiden

kristallen de oplosbaarheid in aceton bepaald. Deze bleek dezelfde te zijn als die van zuiver β -trithiobenzaldehyd (nl. 1.19 per 100 aceton; zuiver β 1.12. In verband met de snelle en totale omzetting van α in β door acetylcchloride en SO_3 mogen we hieruit tot bovenstaande conclusie besluiten.

De overgang van α - in β -trithiobenzaldehyd is eene monomoleculaire reactie. Bij eene snelheidsbepaling (omzetting zonder katalysator door koken in toluol) werd eene constante $= 0.029$ gevonden (tijd in uren).

Organ. Chem. Labor. d. Univ.

Amsterdam, Juni 1904.

Scheikunde. De Heer LOBRY DE BRUYN biedt, mede namens den Heer J. W. DITTO, eene mededeeling aan over: „*De viscositeit van het systeem hydrazine + water.*”

(Mede aangeboden door den Heer A. P. N. FRANCHIMONT.)

In twee vroegere mededeelingen werden de resultaten gepubliceerd van de bepalingen der dichtheid (bij 15°) en van de kookpuntskromme van het systeem hydrazine + water¹⁾. Wij hebben thans ook de viscositeit van hetzelfde systeem bepaald, zoowel bij 0° als bij 25° .

Reeds de oppervlakkige vergelijking van het mengsel van ongeveer moleculaire hoeveelheden hydrazine en water (het z.g.n. hydraat) met eenerzijds het hydrazine anderzijds het water, doet zien dat de menging der twee lichamen de viscositeit doet toenemen. Zulks geldt voor nog andere paren van vloeistoffen; nog onlangs heeft DUNSTAN²⁾ zulks voor alcohol + water aangetoond en tevens vastgesteld, dat bij menging van niet associeerende vloeistoffen de viscositeit additief is.

Dat de N_2H_4 mol. in den vloeistoftoestand geassocieerd zijn is om verschillende redenen wel zoo goed als zeker.

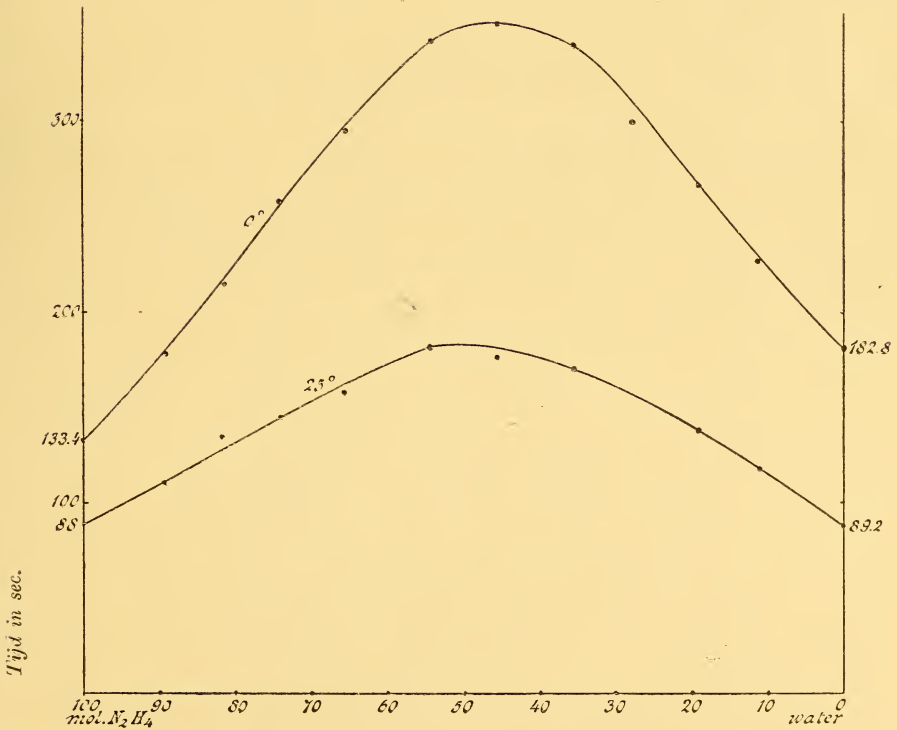
De proeven werden uitgevoerd met het capillair-apparaat in OSTWALD—LUTHER'S Anleitung (p. 260) beschreven. Er werd van het zuivere hydrazine uitgegaan en dit met toenemende hoeveelheden water verdund; nadat bij 0° en bij 25° de doorvloeiingstijden waren gemeten (telkens werden vier waarnemingen gedaan) werd door titratie van twee portie's het gehalte vastgesteld.

De verkregen getallen zijn in de volgende tabel en in de daarmee geconstrueerde krommen samengevoegd.

1) Verslagen v. 19 April en van 28 Juni 1902.

2) Proc. Chem. Soc. 19. 215 (1903).

per 100 molec.		tijd in seconden.	
$N_2 H_4$	$H_2 O$	bij 0°	bij 25°
100	0	133.4	88
89.6	10.4	178.6	111.2
81.8	18.2	216.1	134.6
74.2	25.8	259.2	144.1
65.1	34.9	296.5	158.5
54.5	45.5	343.2	<u>182.5</u>
45.5	54.5	<u>352.9</u>	177.7?
35.25	64.75	341.6	171.6
19.0	81.0	268.9	138.6
11.4	88.6	229.5	118.5
0	100	182.8	89.2



Om uit de gegeven cijfers den wrijvingscoëfficiënt (ten opzichte van water) te kunnen afleiden zou men de spec. gew. der mengels bij 0° en 25° moeten kennen. Deze nu zijn onbekend; opgemerkt moge

echter worden dat het spec. gew. van het systeem hydrazine + water (bij 15°) slechts weinig van de eenheid verschilt (voor $N_2 H_4 + H_2 O$ ongeveer 5% hooger). De vorm der krommen, welke men met behulp der waarden voor den relatieven wrijvingscoëfficiënt zou kunnen construeeren, zou dus slechts weinig verschillen van den boven gegeven.

Opgemerkt moge nog worden, dat, hoewel de viscositeit voor de samenstelling van ongeveer 1 mol. $N_2 H_4 + 1$ mol. $H_2 O$ het grootst is ¹⁾, het maximum bij 0° blijkbaar bij een andere samenstelling behoort als bij 25°. Ook is het opvallend dat voor zuivere hydrazine het verschil in viscositeit bij 0° en bij 25° belangrijk kleiner is dan voor water; bij 25° is de viscositeit voor de twee zuivere vloeistoffen ongeveer even groot.

Kristallografie. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: „*Over het behoud der kristal-symmetrie bij substitutie van isomorfe, plaatsings-isomere derivaten der benzol-reeks.*”

(Mede aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM).

Indertijd werd door mij bij onderzoek naar den samenhang tusschen molekulare en kristallografische symmetrie van plaatsings-isomere benzolderivaten ²⁾, aangetoond, dat van de zes mogelijke, isomere *tribroomtoluolen*, het 1-2-4-6-, en het 1-2-3-5-derivaat, eene aan identiteit grenzende isomorfie vertoonen. Ik heb toen getracht den gelijksoortigen molekularen bouw dezer twee lichamen te verklaren, door te wijzen op de analogie van (CH_3) -groep en *Br*-aatom op de plaatsen 1 en 2, voornamelijk in *ruimtelijk* opzicht. De geringe verschillen in kristalvorm, smeltpunt, etc. zijn dan het gevolg van het toch in elk geval bestaande onderscheid tusschen CH_3 en *Br*.

Men kan zich nu afvragen, hoe het in beide molekulen zal staan met b.v. de substitueerbaarheid der beide overblijvende *H*-atomen der kern. Merkwaardigervijze blijkt nu, dat, wat betreft de substitutie door (NO_2) , beide *H*-atomen in *elk* der beide isomeren volkomen *gelijkwaardig* zijn, en wat nog opvallender is, — dat die substitutie de molekulare symmetrie van beide molekulen niet merkbaar

¹⁾ Dit geldt ook voor de dichtheid, l. c.

²⁾ JAEGER, Kristallografische en Molekulare Symmetrie van plaatsings-isomere Benzolderivaten. Proefschrift. Leiden 1903. pag. 157—164; 173—174; 190—198; 208—209.

verandert, zoodat *de kristallografische verwantschap der uitgangskristallen, bij de substitutie-derivaten blijft bestaan.*

Nitreert men het 1-2-4-6-tribroomtoluol met salpeterzuur van 1,52 spec. gew., dan wordt er een *dinitro*-produkt verkregen, zooals NEVILLE en WINTHER ¹⁾ reeds hebben aangetoond.

WROBLEWSKY ²⁾ had vroeger een *mono-nitro*-derivaat verkregen, dat in smeltpunt slechts een weinig verschilt van het *dinitro*-produkt.

Mij is het echter, ondanks herhaalde pogingen, bij aanwending van rookend salpeterzuur nimmer gelukt eene *mono-nitro*-verbinding, zelfs niet als bijprodukt, te verkrijgen.

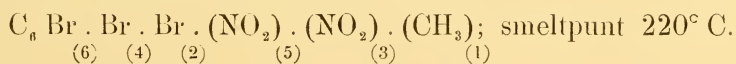
De formule van het 1-2-3-5-tribroomtoluol geeft zonder meer *niet* terstond aanleiding tot het vermoeden, dat ook hier een *dinitro*-produkt zal ontstaan. Wanneer echter de analogie van (CH_3) op de plaats 1 en *Br* op de plaats 2 werkelijk zóó groot is, dat het onderscheid bijna nul wordt, dan kan men vermoeden, dat het 1-2-3-5-tribroomtoluol zich bij nitratie ook bijna geheel analoog aan het andere isomeer zal gedragen. Het onderzoek leert, dat dan ook in dit geval geen spoor van eenig *mono-nitro*-derivaat verkregen wordt; men verkrijgt uitsluitend een *dinitro*-derivaat, dat in alle opzichten geheel analoog is met het bovengenoemde *dinitro*-produkt.

Na nitreren door rood rookend salpeterzuur (spec. gew. 1,516 bij 16° C.) onder afkoeling, afscheiden door overmaat water, uitschudden met benzol en aether, en omkristallisatie uit *benzol*, waarin beide isomeren zeer oplosbaar zijn, verkrijgt men de twee lichamen terstond zuiver in groote, kleurlooze, of zwak wijn-geel gekleurde kristallen wier broomgehalte met dat van het *dinitro*-derivaat overeenkomt.

Het 1-2-4-6-tribroom-3-5-dinitro-toluol smelt bij 220° C.; het 1-2-3-5-tribroom-4-6-dinitro-toluol bij 210° C.

Evenals de beide *tribroomtoluolen* zelve, zijn deze lichamen weer volkomen *isomorf*, en gelijken, door eene eigenaardige tweelingsvormig zóó zeer op elkaar, dat men op 't eerste gezicht de beide soorten van kristallen niet kan onderscheiden.

a. *Het 1-2-4-6-tribroom-3-5-dinitro-toluol.*



Uit benzol kristalliseert dit lichaam in groote, schijnbaar quadratische, kleurlooze kristallen, welke bijna alle *tweelingen* zijn, zooals

1) NEVILLE en WINTHER, Journ. Chem. Soc. Vol. 37. 438; Berl. Ber. 13. 974.

2) WROBLEWSKY, Ann. d. Chemie 168. 147.

een zeer fijne diagonaal op twee der breedste vlakken, terstond doet erkennen. Ook verkrijgt men wel naaldvormige of zeer gerekte, dikke zuilvormige kristallen. De vlakken zijn veelal geknikt, en leveren méérvoudige reflexen. Ook zijn de kristallen vaak door kromme vlakken begrensd, en door vicinaal-vormen in de prisma-zone. Door deze omstandigheden wordt een nauwkeurig onderzoek zeer bemoeilijkt; echter verkreeg ik enkele malen ook beter gevormde kristallen, welke zeer scherpe reflexen leverden, en waaraan de onderstaande, nauwkeurige metingen zijn verricht.

Zij zijn *monoklien-prismatisch*, met de assenverhouding:

$$a : b : c = 0,5217 : 1 : 0,7803$$

$$\beta = 85^{\circ}12'.$$

Waargenomen vormen zijn: $m = \{110\}$ en $p = \{120\}$, breed en glanzend; $a = \{100\}$ en $n = \{130\}$, zeer smal; a is veelal dof;

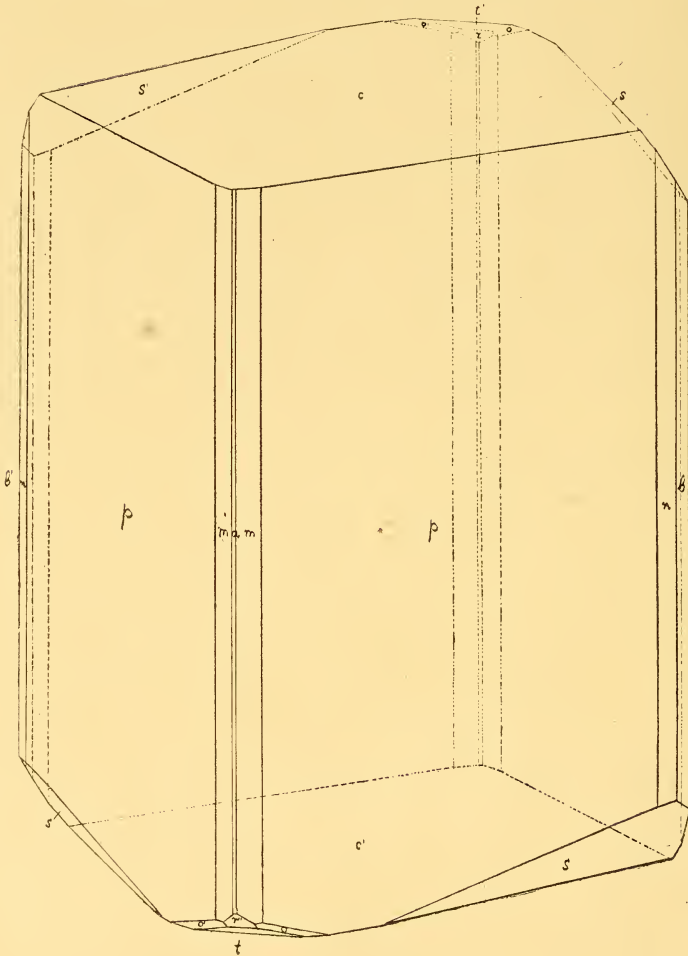


Fig. 1.

$b = \{010\}$, wat breeder, maar ontbreekt meestal; $c = \{001\}$, groot en zeer sterk glanzend; $r = \{\bar{1}01\}$, goed ontwikkeld en glanzend; $t = \{\bar{1}04\}$, smaller, ontbreekt vaak; $o = \{\bar{1}12\}$, meestal smal en mat, soms ook wat breeder en beter spiegelen; $s = \{\bar{1}32\}$, groot en glanzend, echter bijna altijd met slechts twee parallelle vlakken aanwezig.

Zelden komen combinatie's van *alle* vormen voor. Meestal zulke met m, p, c, r ; m, p, b, c, r, t, s en o ; m, p, a, b en c , enz. De meest typische kristallen zijn afgebeeld in de figuren 1—3.

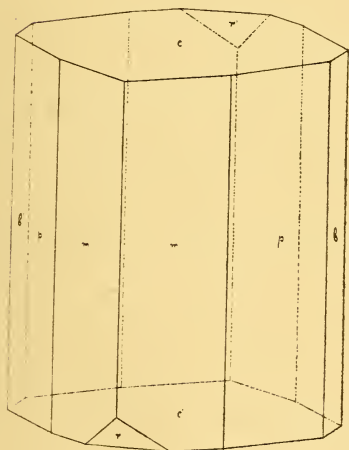


Fig. 2.

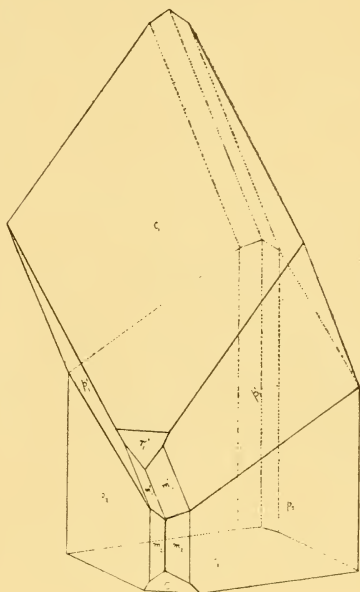


Fig. 3.

Aan de beter gevormde kristallen zijn de hoekwaarden zeer konstant; de reflexen zoo scherp mogelijk. De stof heeft eene uitgesproken neiging tot tweelingsvorming: daarbij is eene vorm $\{102\}$ tweelingsvlak, met daarop normale tweelings-as. Op de vlakken van p is vaak eene fijne streeping waar te nemen parallel $p:c$; de geometrische anomalieën zijn het belangrijkste in deze vertikaalzone. Hieronder volgen de berekende en waargenomen hoekwaarden.

<i>Gemeten:</i>	<i>Berekend:</i>
$* m : m = (110) : (\bar{1}\bar{1}0) = 54^\circ 56\frac{1}{2}'$	—
$m : a = (110) : (100) = 27^\circ 28\frac{1}{4}'$	$27^\circ 28\frac{1}{4}'$
$m : r = (110) : (\bar{1}01) = 43^\circ 20'$	$43^\circ 13'$
$* c : r = (001) : (\bar{1}01) = 59^\circ 39'$	—

	<i>Gemeten:</i>	<i>Berekend:</i>
$r : a = (\bar{1}01) : (\bar{1}00) =$	35 20	35 33
$c : a = (001) : (100) =$	85 15	85 12
$*c : m = (001) : (110) =$	85 44 $\frac{1}{2}$	—
$c : p = (001) : (120) =$	86 40	86 36
$c : n = (001) : (130) =$	87 30	87 25
$c : b = (001) : (010) =$	89 58	90 0
$p : n = (120) : (130) =$	11 12	11 13
$m : p = (110) : (120) =$	18 35	18 39
$p : r = (\bar{1}20) : (\bar{1}01) =$	55 25	55 29
$c : t = (001) : (\bar{1}04) =$	21 12	21 2
$c : o = (001) : (\bar{1}12) =$	41 52 $\frac{1}{2}$	41 52
$c : s = (001) : (\bar{1}32) =$	55 49	55 54
$m : s = (\bar{1}\bar{1}0) : (\bar{1}32) =$	47 36 $\frac{1}{2}$	47 35 $\frac{1}{2}$

Eene duidelijke splijtbaarheid werd niet gevonden.

Op c , r en a is de ligging der optische elasticiteits-as loodrecht op de richting der orthodiagonaal georiënteerd; de symmetrische uitdoovingshoek op m bedraagt 23° ten opzichte der vertikaal-as. Een assenbeeld was niet waar te nemen.

Het specifiek gewicht der kristallen bedraagt: 2,456 bij 15° C.; het equivalent-volume is dus 170,6.

De topische assen zijn:

$$\chi : \psi : \omega = 3,9087 : 7,4921 : 5,8461.$$

Het 1-2-3-5-tribroom-4-6-dinitro-toluol.

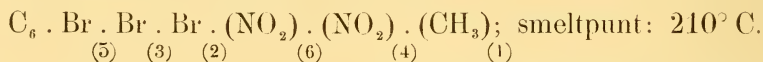


Fig. 4.

Uit benzol kristalliseert deze verbinding in zeer groote, kleurlooze, isometrisch-ontwikkelde kristallen, welke altijd tweelingen zijn, van volmaakt denzelfden vorm als die der vorige verbinding, waarmee deze stof *isomorf* is.

De geometrische anomalieën, veroorzaakt door kromming of knikking der vlakken, zijn bij dit derivaat aanzienlijker dan bij 't vorige; de ontwikkeling der kristallen is minder volmaakt, en ook vertoonen zij een kleiner aantal van combinatie-vormen. Uit aether en aceton verkrijgt men nevens tweelingkristallen, ook enkelvoudige naaldjes, die beter meetbaar zijn.

De symmetrie is *monoklien-prismatisch*; de assenverhouding:

$$a : b : c = 0,5392 : 1 : 0,7574.$$

$$\beta = 86^{\circ}28'.$$

Waargenomen vormen zijn: $m = \{110\}$ en $\rho = \{120\}$, breed en glauzend; $c = \{001\}$, zeer glanzend en goed ontwikkeld; $r = \{\bar{1}01\}$, kleiner, maar goed meetbaar; $b = \{010\}$, smal, ontbreekt vaak. Hoekwaarden:

	<i>Gemeten:</i>	<i>Berekend:</i>
$*\rho : \rho = (120) : (1\bar{2}0) = 94^{\circ}13'$		—
$*\rho : c = (120) : (001) = 87^{\circ}35\frac{1}{2}'$		—
$*\rho : r = (\bar{1}20) : (\bar{1}01) = 56^{\circ}53\frac{1}{2}'$		—
$\rho : m = (120) : (110) = 18^{\circ}50'$		$18^{\circ}49'$
$m : m = (110) : (1\bar{1}0) = 56^{\circ}54'$		$56^{\circ}36'$
$m : r = (\bar{1}10) : (\bar{1}01) = 44^{\circ}57'$		$45^{\circ}2'$
$c : r = (001) : (\bar{1}01) = 57^{\circ}6'$		$56^{\circ}55'$
$m : c = (110) : (001) = 86^{\circ}59'$		$86^{\circ}52\frac{1}{2}'$

Eene duidelijke spijtbaarheid werd niet gevonden.

Ook deze stof heeft eene uitgesproken neiging tot tweelingsvorming naar $\{102\}$ als tweelingsvlak; enkelvoudige kristallen zijn zeldzaam. Door deze eigenaardigheid wordt de uiterlijke overeenkomst van dit isomeer met het vorige nog in hooge mate bevorderd. Opgemerkt zij, dat deze tweelingen, en ook die der vorige stof, vaak nog $\{010\}$ vertoonen, en eene, ten opzichte der tweelingsdoorsnede, symmetrische, vertikale streeping van het prisma ρ .

Aan een volkomen homogeen kristalsplintertje werd het specifiek gewicht bepaald op 2,465 bij 15° C.; het aequivalent-volume is derhalve 169,98, en de topische assen worden:

$$\chi : \psi : \omega = 4,0286 : 7,4713 : 5,6580.$$

Ik heb natuurlijk getracht, ook bij deze twee isomorfe derivaten eenig inzicht in den loop der binaire smeltlijn te verkrijgen, hoewel het gemis aan voldoende hoeveelheid stof daarbij zeer hinderend was.

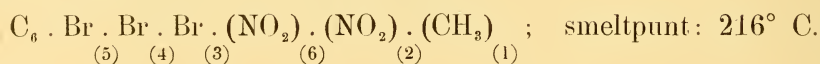
Dit onderzoek heb ik echter weldra moeten staken, doordat de mengsels van beide stoffen bij hun smeltpunt onder sterke bruinkleuring en hevige gas-ontwikkeling ontleed worden; de temperaturen liggen tusschen 210° en 220° . Hoe meer der hoogstsmeltende verbinding het mengsel bevat, des te makkelijker geschiedt die ontleding; en zoo kon ik scherp slechts het smeltpunt bepalen van mengsels tusschen 0% en $44\frac{1}{2}\%$ van het hoogstsmeltende derivaat; dit laatste mengsel smolt bij 214° C., de anderen lagen tusschen 210° en 214° C.

Ik vermoed hier eene continue smelt-kromme te hebben; of hier echter, evenals bij de twee niet-genitreerde uitgangsubstanties, een absoluut maximum in de smeltlijn optreedt, kon niet vastgesteld worden.

Het wederzijdsch gedrag dezer twee nieuwe isomorfe derivaten komt waarschijnlijk echter geheel overeen met dat der twee tribroom-toluolen.

Uit gemengde oplossingen der twee dinitro-derivaten in benzol verkrijgt men groote, kromvlakkige, en slecht gevormde mengkristallen, welke denzelfden typischen tweelings-vorm vertoonen als de beide componenten, maar die gewoonlijk slechts {110}, {120} en {001} bezitten. Voor meting zijn zij onbruikbaar.

Het 1-3-4-5-tribroom-2-6-dinitro-toluol.



Uit benzol omgekristalliseerd, waarin deze verbinding, die op dezelfde wijze bereid werd als de voorafgaande, bij gewone temperatuur minder oplosbaar is dan de twee vorige isomeren, vertoont de stof dikke, quadratisch-begrensde kristalplaatjes, die op 't eerste gezicht tetragonaal schijnen, zooals bij de bekende, zwak-morfotropische kracht der (NO_2) -groep, en de vroeger gevondene *tetragonale* symmetrie van het overeenkomstige tribroomtoluol, allicht te verwachten is.

Het onderzoek deed echter weldra erkennen, dat de symmetrie *niet* tetragonaal is, en wel meende ik eerst, hier eene *monokliene* verbinding voor mij te hebben, — weliswaar met niet onaanzienlijke geometrische anomalieën, — maar toch redelijk wel aan alle eischen der monokliene symmetrie voldoende. Ook dit ware in overeenstemming geweest met alles, wat omtrent vormverwantschap van tetragonale en monokliene kristallen destijds door mij werd meegedeeld ¹⁾.

Ik heb lang getwijfeld, vóór ik van dit laatste denkbeeld afstand kon doen, vooral omdat de meting van een zeer groot aantal kristallen mij leerde, dat ook hier, evenals bij de twee vorige verbindingen, de bijzondere weekheid der stof tot geometrische storingen der kristallen tijdens de kristallisatie aanleiding geeft, en omdat de assen-elementen dezer verbinding bij aannahme der monokliene symmetrie, eene aan isomorfie grenzende analogie met die der twee onderzochte isomeren vertoonden.

De afwijkingen der hoeken van de voor monokliene symmetrie vereischte waarden, bleken echter zóó systematisch te zijn, dat aan

¹⁾ Kristallografische en Molekulare Symmetrie, etc. pag. 155—157.

de *trikliene* symmetrie dezer zonderlinge kristallen niet meer getwijfeld kon worden, — al bleken zij dan ook een *monoklienen grensvorm* voor te stellen. Later heb ik toen ook uiterst kleine afwijkingen in de optische oriëntering der uitdoovingsrichtingen kunnen konstateeren, welke mij opnieuw in mijne meening versterkten, dat hier trikliene kristallen van pseudo-monoklienen vorm aanwezig zijn.

Daarmee is tevens echter de overtuiging gewonnen, dat, moge ook al de morfotropische kracht der *enkele* (NO₂)-groep in 't algemeen *zwak* zijn, *twee* zulke groepen een betrekkelijk *sterke* deformeering van het kristal-molekuul kunnen veroorzaken; en dat er achter den ruimtelijken bouw der benzolderivaten toch zeker nog heel wat meer steekt, dan de gewone formuleering dezer lichamen doet vermoeden. Want uit de gewone schematische schrijfwijze is zonder meer *niet* in te zien, waarom aan eene verbinding van het type I eene andere symmetrie zoude toekomen, dan aan eene van het type II, al is de nauwe verwantschap van beide soorten van symmetrie, door het optreden van den pseudo-monoklienen *grensvorm*, dan ook in elk geval zeer duidelijk erkenbaar:

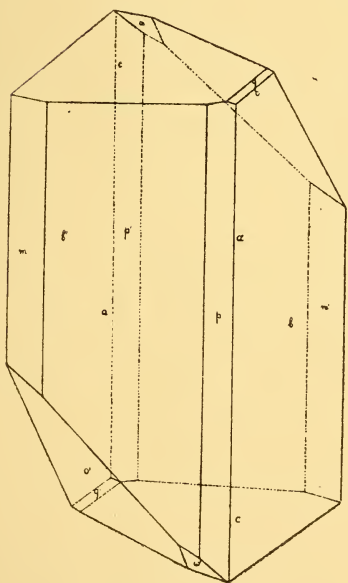
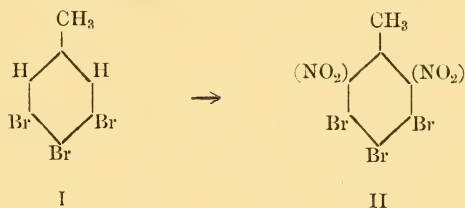


Fig. 5.

De kristallen van het 1-3-4-5-*tribroom*-2-6-*dinitro-toluol* zijn in Fig. 5 afgebeeld, en wel de vorm, waarin zij uit een mengsel van zwavelkoolstof + benzol kristalliseeren. De quadratisch-uitziende plaatvormige kristallen uit benzol alleen, vertoonen bijna dezelfde vormen; bij hen is echter de vorm *a* sterk praedomineerend; dan volgt *c*, terwijl de overige vormen smal en klein ontwikkeld zijn; bovendien ontbreekt de vorm *q* daarbij steeds, en *o* vaak. Ook verkreeg ik uit benzol wel dik-prismatische kristallen, met *a*, *b* en *c*, of nog *o* daarbij.

Triklieen-pinakoëdaal. De assenverhouding is:

$$\begin{aligned}
 a : b : c &= 0,5322 : 1 : 0,9581 \\
 a &= 88^\circ 21'. & A &= 88^\circ 26'. \\
 \beta &= 95^\circ 4'. & B &= 95^\circ 2'. \\
 \gamma &= 90^\circ 58'. & C &= 90^\circ 50'.
 \end{aligned}$$

Waargenomen vormen zijn: $a = \{100\}$, en $b = \{010\}$, even sterk ontwikkeld, a gewoonlijk meer glanzend dan b ; $c = \{001\}$, sterk glanzend; $o = \{\bar{1}22\}$, goed ontwikkeld en glanzend; $\omega = \{\bar{1}12\}$, kleiner dan o , doch sterk glanzend; $q = \{012\}$, klein en op den achtergrond tredend; $m = \{1\bar{1}0\}$, smal, doch breeder dan $p = \{110\}$, welke vorm vaak met slechts één enkel vlak aanwezig; $s' = \{\bar{3}44\}$, zeer smal, en niet goed meetbaar¹⁾.

	<i>Gemeten:</i>	<i>Berekend:</i>
* $a : b = (100) : (010) =$	$89^\circ 10'$	—
* $a : c = (100) : (001) =$	$84 \ 58$	—
* $b : c = (010) : (001) =$	$91 \ 34$	—
* $\rho : a = (\bar{1}22) : (\bar{1}00) =$	$59 \ 35$	—
* $o : c = (\bar{1}22) : (001) =$	$55 \ 25\frac{1}{2}$	—
$a : p = (100) : (110) =$	$27 \ 32$	$27^\circ 45\frac{1}{2}'$
$a : m = (100) : (1\bar{1}0) =$	$28 \ 7$	$28 \ 7$
$b : o = (010) : (\bar{1}22) =$	$54 \ 33$	$54 \ 34$
$b : m = (0\bar{1}0) : (1\bar{1}0) =$	$62 \ 40$	$62 \ 51$
$b : p = (010) : (110) =$	$61 \ 33$	$61 \ 24\frac{1}{2}$
$c : q = (001) : (012) =$	$26 \ 5$	$25 \ 50$
$b : q = (010) : (012) =$	$65 \ 39$	$65 \ 49$
$o : m = (\bar{1}22) : (\bar{1}10) =$	$43 \ 21$	$43 \ 39$
$o : s' = (\bar{1}22) : (\bar{3}44) =$	$11 \ 52$ (circa)	$12 \ 8$
$\omega : b = (\bar{1}12) : (0\bar{1}0) =$	$108 \ 49\frac{1}{2}$	$108 \ 47$
$\omega : o = (\bar{1}12) : (\bar{1}22) =$	$16 \ 51$	$16 \ 39$
$\omega : c = (\bar{1}12) : (001) =$	$48 \ 1\frac{1}{2}$	$48 \ 0\frac{1}{2}$
$\omega : m = (\bar{1}12) : (\bar{1}10) =$	$47 \ 30$	$47 \ 13\frac{1}{2}$
$a : \omega = (\bar{1}00) : (\bar{1}12) =$	$53 \ 35$	$53 \ 35\frac{1}{2}$
$a : q = (100) : (012) =$	$85 \ 37$	$85 \ 55$
$\omega : q = (\bar{1}12) : (012) =$	$40 \ 35$	$40 \ 30\frac{1}{2}$
$q : o = (012) : (\bar{1}22) =$	$38 \ 56$	$38 \ 54$
$m : c = (1\bar{1}0) : (001) =$	$84 \ 47$	$84 \ 45\frac{3}{4}$
$p : c = (110) : (001) =$	$86 \ 22$	$86 \ 19$

1) Kiest men, met het oog op 't symbool van s' , liever $o = \{\bar{2}43\}$, $\omega = \{\bar{2}23\}$, $s' = \{\bar{3}43\}$, onder behoud der overige symbolen, dan wordt $a : b : c = 0,5322 : 1 : 0,7186$, — beter in overeenstemming met de twee andere isomeren.

Op *a* werd de ligging van de optische elasticiteits-as, aan eene zeer dunne lamel met behulp van BERTRAND's kwarts-okulair bepaald op 4° vormend met de ribbe (100):(001); op *b* bedroeg de hoek meer dan 45° ten opzichte der ribbe (110):(010). Een assenbeeld was niet waar te nemen.

Het specifiek gewicht der kristallen werd door middel eener THOULET'sche oplossing bepaald op: 2,459 bij 17° C.; het aequivalent-volume is derhalve: 170,39, en de topische assenverhouding wordt:

$$\chi : \psi : \omega = 3,6982 : 6,9496 : 6,6584.$$

De nauwe verwantschap van dit trikliene derivaat met de twee monokliene isomeren is derhalve in 't oog vallend. Dat met dat al een essentieel verschil in den aard der molekulaire oriëntering bestaat, welke in deze drie gevallen den kristalbouw bepaalt, volgt ook bovendien nog hieruit, dat de twee eerstgenoemde derivaten eene uitgesproken neiging tot eene zelfde, en typische *tweelingsvorming* bezitten, welke het laatste isomeer geheel en al mist. —

Over de andere nitro-produkten der isomere tribroomtoluolen deel ik later een en ander mede, aangezien ze tot dusverre niet in meetbare kristallen te verkrijgen waren.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*Over mengwarmten bij associeerende oplosmiddelen.*”

(Mede aangeboden door den Heer LOBBY DE BRUYN).

1. Wanneer een willekeurige stof in een *associeerende* vloeistof, zooals *water*, wordt opgelost, en men een uitdrukking tracht te vinden voor de mengwarmte der beide stoffen, dan zal men naast de verandering der potentiële energie wel in de eerste plaats in rekening brengen de *Ionisatiewarmte* der opgeloste stof, zoo deze een electrolyt is. Bijna altijd wordt daarbij echter over het hoofd gezien, dat door het oplossen ook de *associatietoestand* van het oplosmiddel verandert. Men is zoo geneigd te redeneeren: bij zeer verdunde oplossingen zal de invloed van de toevoeging van eenige weinige moleculen der opgeloste stof slechts uiterst gering zijn, wat den associatiegraad van het oplosmiddel betreft; maar men vergeet daarbij dat het *aantal* moleculen van het oplosmiddel, die elk een zeer kleine verandering van hun associatietoestand ondergaan, *zeer groot* is. Bij oneindig verdunde oplossingen krijgt men alzoo een waarde, die tot $0 \times \infty$ nadert, en ik zal in het volgende aantonen, dat de

geabsorbeerde *warmte* ten gevolge van den veranderden associatiestoestand tot een zeer bepaalde *eindige*, en zelfs betrekkelijk tamelijk groote waarde nadert.

2. Bij *verdunde* oplossingen — en wij hebben in het volgende alleen *deze* op het oog, zal voor de evenwichtsvoorwaarde der associeerende moleculen van het oplosmiddel kunnen worden geschreven :

$$\frac{\left(\frac{(1-x)\beta}{N}\right)^2}{\frac{1/2(1-x)(1-\beta)}{N}} = K,$$

d. w. z.

$$\frac{\beta^2}{1-\beta} \frac{1-x}{N} = 1/2 K \quad (1)$$

Immers, wanneer aanwezig zijn $1-x$ mol. H_2O . alle normaal gerekend, x mol. zout (zooals wij voor het gemak de opgeloste stof zullen noemen), dan zijn er dus voorhanden $1/2(1-x)$ mol. H_2O , alle dubbel gerekend. Is derhalve β de dissociatiegraad dezer dubbelmoleculen, dan zijn aanwezig:

$1/2(1-x)(1-\beta)$ dubbelmol. ; $1/2(1-x)2\beta = (1-x)\beta$ enkele mol.

N is het totale aantal deeltjes. Is de dissociatiegraad der opgeloste zoutmoleculen α , zoo zijn er dus (bij *binair* elektrolyten):

$x(1-\alpha)$ neutrale mol. ; $2x\alpha$ Ionen.

Wij hebben derhalve:

$$N = 1/2(1-x)(1+\beta) + x(1+\alpha),$$

of met $1/2(1+\beta) = \gamma$, $1+\alpha = i$, waar dus i de gewone beteekenis heeft, en γ het omgekeerde van den zoogenaamden associatie-coëfficiënt is:

$$N = \gamma(1-x) + ix = \gamma(1-x) \left[1 + \frac{i}{\gamma} \frac{x}{1-x} \right].$$

Onze vergelijking (1) wordt dus:

$$\frac{\beta^2}{1-\beta} \frac{1}{\gamma \left[1 + \frac{i}{\gamma} \frac{x}{1-x} \right]} = 1/2 K,$$

of daar $\gamma = 1/2(1+\beta)$:

$$\frac{\beta^2}{1-\beta^2} = 1/4 K \left(1 + \frac{i}{\gamma} \frac{x}{1-x} \right) (2)$$

Hieruit volgt dus, wanneer wij $\frac{i}{\gamma} \frac{x}{1-x} = \sigma$ stellen:

$$\beta = \sqrt{\frac{{}^{1/4}K(1+\sigma)}{1+{}^{1/4}K(1+\sigma)}} = \sqrt{\frac{{}^{1/4}K}{1+{}^{1/4}K}} \sqrt{\frac{1+\sigma}{1+\frac{{}^{1/4}K}{1+{}^{1/4}K}\sigma}}$$

Nu is blijkbaar:

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{{}^{1/4}K}{1+{}^{1/4}K}},$$

d. w. z. de waarde van β , als x of $\sigma = 0$ is, en men derhalve het *zuivere* oplosmiddel heeft, waarvoor de vergelijking $\frac{\beta_0^2}{1-\beta_0^2} = {}^{1/4}K$ geldt. Wij verkrijgen dus:

$$\beta = \beta_0 \sqrt{\frac{1+\sigma}{1+\beta_0^2\sigma}} = \beta_0 \left(1 + \frac{1-\beta_0^2}{2}\sigma\right),$$

wanneer men zich, daar σ zeer klein is en tot 0 nadert, met een eerste benadering vergenoegt.

Zetten wij nu weer voor σ hare waarde in de plaats, dan krijgen wij, in achtnemende dat $\gamma = \frac{1}{2}(1+\beta)$ is:

$$\beta = \beta_0 \left(1 + \frac{1-\beta_0^2}{2} \frac{i}{\frac{1}{2}(1+\beta)} \frac{x}{1-x}\right),$$

of met $1 + \beta = 1 + \beta_0$:

$$\beta = \beta_0 \left(1 + (1-\beta_0) i \frac{x}{1-x}\right). \quad \dots \quad (3)$$

Dit is dus de gezochte uitdrukking voor de verandering van β_0 tengevolge van het toevoegen van x gr.mol. zout.

3. Nu zijn op 1 zoutmol. aanwezig $\frac{1-x}{x}$ gr.mol. H_2O (normaal gerekend), waarbij dus blijkbaar $\frac{1-x}{x} 2\beta = \frac{1-x}{x} \beta$ enkele mol. aanwezig zijn. Tengevolge van den veranderden dissociatietoestand der watermoleculen door de opgeloste stof zal dit aantal volgens (3) bedragen:

$$\frac{1-x}{x} \beta = \frac{1-x}{x} \beta_0 + \frac{1-x}{x} \times \beta_0 (1-\beta_0) i \frac{x}{1-x},$$

een *vermeerdering* derhalve van

$$\frac{1-x}{x} \times \beta_0 (1-\beta_0) i \frac{x}{1-x}.$$

En nu ziet men duidelijk, dat zooals boven reeds werd opgemerkt, de eene factor van dit product, nl. $\frac{1-x}{x}$, tot ∞ nadert, de andere

factor, nl. $\beta_0 (1-\beta_0) i \frac{v}{1-a}$, tot 0. Maar het product is blijkbaar *eindig*, en wel :

$$\Delta = \beta_0 (1-\beta_0) i \dots \dots \dots (4)$$

Is nu Q de warmte, welke geabsorbeerd wordt, wanneer 1 gr. mol. (18 Gr.) H_2O van den toestand van dubbelmoleculen in dien van enkele moleculen overgaat, dan is derhalve de geabsorbeerde warmte, tengevolge van den veranderden associatietoestand door 1 mol. der opgeloste stof :

$$W = \beta_0 (1-\beta_0) i Q \dots \dots \dots (5)$$

En het is *deze* warmte, waarop bij *associeerende* oplosmiddelen zal moeten worden gelet.

Bij H_2O is bij 18° $\beta = 0,21$ ¹⁾, zoodat de factor $\beta_0 (1-\beta_0) = 0,17$ wordt. Verder is Q , zooals ik indertijd berekende ²⁾, = ± 1920 gramkalorieën, mitsdien zal bij water (bij 18°):

$$W = 326 i \dots \dots \dots (5a)$$

zijn.

Is de opgeloste stof *geen electrolyt*, dan is $i = 1$, en worden er dus bij zeer verdunde oplossingen bij *elke* concentratie circa 325 gr. kal. geabsorbeerd, wanneer 1 gr.mol. in het water wordt opgelost, alleen tengevolge van den gewijzigden associatiegraad van het water; bij zouten, zuren en basen, waar i nagenoeg = 2 is, wordt dit aantal 650 gr. kal.

Zoo zal bv. bij KCl, waar de ionisatiewarmte van 1 gr.mol. = -720 gr. kal. is ³⁾, de totale mengwarmte bij oplossing in veel H_2O , buiten de verandering der potentieele energie, dus niet -720 gr. kal. bedragen, maar slechts $-720 + 650 = -70$ gr. kal.

Men ziet dus, dat de orde van grootheid der te verwachten warmte geheel kan gewijzigd worden, en dat men in het algemeen een groote fout zou begaan, bij de berekening der mengwarmte niet op de bovenberekende 326 i gr. kal. te letten.

Bij *verdunde* oplossingen van *niet-electrolyten* in *associeerende* oplosmiddelen moet men dus van de door de proef bepaalde geabsorbeerde warmte per gr. mol. der opgeloste stof altijd 325 gr. kal. aftrekken, om de *zuivere* (geabsorbeerde) mengwarmte te berekenen, d.w.z. die, welke alleen uit de verandering der potentieele energie voortspruit.

¹⁾ Zeitschr. für Phys. Ch., **31**, p. 4 (1899); Lehrbuch der math. Chemie, p. 36 (1901).

²⁾ Z. f. Ph. Ch., **31**, p. 5 (1899); Lehrb. der math. Chem., p. 37 (1901).

³⁾ Z. f. Ph. Ch., **24**, p. 611 (1897); Lehrb. der math. Chem., p. 53 (1901).

Scheikunde. — De Heer A. F. HOLLEMAN, biedt eene mededeeling aan: „*Over de bereiding van silicium en van zijn chloride.*”

De talrijke voorstellen, die ter bereiding van het element silicium zoowel in amorphen als in gekrystalliseerden vorm zijn gedaan, bewijzen dat eene eenvoudige methode daarvoor nog niet is gevonden. W. HEMPEL en VON HAASY ¹⁾ hebben in 1899 nog een nieuwe aan de bekende toegevoegd, bestaande in de omzetting van fluoorsilicium met natrium. Dit metaal wordt door hen in een ijzeren apparaat bij kleine hoeveelheden tegelijk gesmolten en hierop fluoorsilicium geleid, waardoor eene glatte omzetting wordt bereikt. Zij laten de verkregen bruine, poreuze massa, die op zwak roodgloeihitte is gebracht, gedurende twee à drie uren in een stroom van Si Fl_4 afkoelen. Eene poging, om haar daarna, zonder verdere reiniging in een chloorstroom op Si Cl_4 te verwerken had geen resultaat. Door uitkoken met water konden zij het Na Fl en $\text{Na}_2 \text{Si Fl}_6$ niet verwijderen, zoodat zij, ter verkrijging van zuiver silicium, hunne toevlucht namen tot het smelten der massa met natrium en aluminium. In dit laatste lost silicium op en blijft, na behandeling van den regulus met verdund zoutzuur, terug.

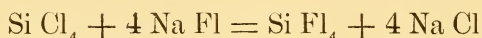
De heer H. J. SLIJPER, die in mijn laboratorium deze proeven herhaalde toonde aan 1^o dat bij eene kleine wijziging in de bereiding het ruwe produkt door uitkoken met water zoover kan gezuiverd worden, dat het nu ter bereiding van chloorsilicium kan dienen; 2^o waaraan moet worden toegeschreven, dat het ruwe produkt als zoodanig met chloor behandeld, geen chloorsilicium geeft.

1. Het is bekend, dat fluoornatrium gemakkelijk Si Fl_4 absorbeert en in $\text{Na}_2 \text{Si Fl}_6$ overgaat. Door hun toestel, onder doorvoering van dit gas, gedurende 2 à 3 uur te laten bekoelen, voerden HEMPEL en VON HAASY het fluoornatrium, dat volgens de vergelijking: $4 \text{Na} + \text{Si Fl}_4 = 4 \text{Na Fl} + \text{Si}$, gevormd was, grootendeels in kiezelfluoornatrium over, hetgeen in water zeer moeielijk oplost. Indien men de inwerking van Si Fl_4 staakt, zoodra al het natrium in het apparaat is gebracht, gelukt het gemakkelijk om de vorming van $\text{Na}_2 \text{Si Fl}_6$ nagenoeg geheel te vermijden. Zoo werd door den Heer SLIJPER uit 100 gr. natrium aan ruwe stof (d.i. $4 \text{Na Fl} + \text{Si}$) 219 gr. verkregen, terwijl 213.6 berekend is; uit 55 gr. Na 119 gr. berekend 117.2; en ook bij eenige verdere bereidingen werd de theoretische hoeveelheid slechts weinig overschreden. Door wasschen en uitkoken met water en met verdund zoutzuur lieten zich de 119 gr. tot 20 gr. terugbrengen,

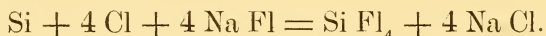
¹⁾ Zeitschr. f. anorg. Ch. 23, 32.

terwijl het produkt 16.7 gr. aan silicium kan bevatten. Het zoo verkregen produkt is echter geen zuiver amorph silicium, want in een chloorstroom vervluchtigt zich slechts ongeveer 40%, dat als chloorsilicium kan gecondenseerd worden en blijft er een rest achter, die slechts voor een gering gedeelte in water oplost en uit siliciumdioxide bestaat. Dit moet tijdens het uitwassen zijn ontstaan, want als het ruwe produkt in een chloorstroom wordt verwarmd, blijft er naast keukenzout slechts een zeer geringe onoplosbare rest terug. Daar bij het inbrengen van het ruwe produkt in water gasontwikkeling met den reuk van Si H_4 bemerkbaar is, ligt het vermoeden voor de hand, dat het Si O_2 door ontleding van Si H_4 is ontstaan; terwijl deze siliciumwaterstof door inwerking van water op eenig natriumsiliciuur kan zijn gevormd. Ook toonde onlangs MOISSAN aan, dat door inwerking van kokend water op silicium het dioxide van dit element ontstaat.

2. In overeenstemming met HEMPEL en VON HAASY vond de heer SLIJPER, dat bij verhitting van het ruwe omzettingsprodukt in een chloorstroom, zich geen spoor chloorsilicium laat verkrijgen. Daar genoemd produkt in hoofdzaak uit $(4 \text{ Na Fl} + \text{Si})$ bestaat, rees het vermoeden, dat dit daaraan moet worden toegeschreven, dat het primair gevormde chloorsilicium zich met fluornatrium volgens de vergelijking



omzet. Inderdaad bleek, dat bij verhitting van fluornatrium of van kiezelfluornatrium in den damp van chloorsilicium genoemde omzetting plaats heeft. Indien dus chloor over een mengsel van Si en Na Fl wordt geleid, zooals in het ruwe produkt aanwezig is, moet de reactie aldus verlopen :



Dat dit feitelijk het geval is, bleek daaruit, dat het ontwijkende gas uit Si Fl_4 , en dat de stof, die in het schuitje achterbleef, uit nagevoeg zuiver Na Cl bestond.

Eene betere methode ter bereiding van amorph silicium scheen de ontleding van chloorsilicium door natrium te zijn. In benzolische oplossing met natrium of kalium gekookt, was er geene inwerking. Bij verhitting van natrium in den damp van chloorsilicium trad wel inwerking op, maar deze werd zeer hevig; het verkregen bruine poeder liet zich wel is waar gemakkelijk door water van keukenzout bevrijden, maar bij verhitting in een chloorstroom bleef er veel, ca 30 % Si O_2 achter, zoodat ook deze weg niet tot zuiver *amorph* silicium voert.

Veel eenvoudiger is de bereiding van *gekristalliseerd* silicium vol-

gens de onlangs door R. A. KÜNHE (Chem. Centr. Bl. 1904, I. 64), gepubliceerde methode, als men haar eenigszins wijzigt, waardoor zij aldus wordt: Een mengsel van 200 gr. aluminiumkrullen of poeder, 250 gr. zwavel en 180 gr. fijn zand wordt in een Hessische kroes gebracht, staande in een emmer met zand. Op het mengsel wordt een laagje magnesiumpoeder gestrooid en dit met een patroon zooals die bij de reducties van GOLDSCHMIDT gebruikt wordt, aangestoken. De massa brandt met fraai vuurverschijnsel, waarbij de inhoud van de kroes witgloeïend wordt. Na bekoeling wordt zij in verdund zoutzuur gebracht, dat zwavelaluminium oplost en silicium in fraai gekristaliseerden vorm achterlaat. De opbrengst bedraagt ca. 30 gr. Bij verhitting in een chloorstroom ontstaat zeer gemakkelijk SiCl_4 , terwijl slechts 3% als niet vluchtige bestanddeelen terugblijft. Het is een bij uitstek geschikt materiaal om SiCl_4 uit te bereiden; het gelukte den heer SLIJPER daarentegen niet, het door verhitting met zwavel in zwavelsilicium over te voeren.

Groningen, Lab. d. Univ. Maart. 1904.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt een mededeeling aan van den Heer FRED. SCHUH: „*Over een uitdrukking voor het geslacht eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten.*”

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOOTE).

In deze Verslagen ¹⁾ heb ik onlangs het volgende theorema opgesteld:

Zij P een punt van den graad t' eener algebraïsche vlakke kromme (waarbij t' ook nul zijn kan, n.l. als P niet op de kromme ligt), en S een willekeurig punt van den graad t dier kromme. Onderstel dat de rechte PS de kromme in w samenvallende punten S snijdt, dan is $t' + \Sigma (w_1 - t_1)$ (over alle punten S gesommeerd, waarvoor $w > t$ is) onafhankelijk van de ligging van het punt P, en wel gelijk aan de klasse der kromme. Ligt S in P, dan heeft men alle rechten door P als de verbindingslijn PS te beschouwen, of, zoo men wil, alleen die, welke een bijdrage tot $\Sigma (w_1 - t_1)$ opleveren, d.w.z. de raaklijnen in P.

Hieruit kan een overeenkomstig en m. i. belangrijker theorema voor het *geslacht* eener algebraïsche kromme worden afgeleid, waarbij verder nog de *rechte verbindingslijn PS* door een *algebraïsche kromme* vervangen kan worden. Later hoop ik dit in verband te brengen met aanrakingsproblemen (aantallen algebraïsche krommen door aant-

¹⁾ Over een uitdrukking voor de klasse eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten. *Verslag van 28 Mei 1904*, p. 57.

rakingsvoorwaarden bepaald), in het bijzonder met de vraag naar het aantal normalen op een kromme met hoogere singulariteiten (ook in verband met de cirkelpunten en de lijn in het oneindige) van uit een punt (dat ook een bijzondere ligging ten opzichte der kromme hebben kan) neer te laten, en de daarmee samenhangende vraag naar de singulariteiten der ontwondene. Het komt mij voor, dat op geen enkele andere mij bekende wijze deze en dergelijke vragen zoo eenvoudig beantwoord kunnen worden.

Het geslacht is in de functietheorie ingevoerd door RIEMANN en gedefinieerd uit den samenhang van het n' -bladige RIEMANN'sche oppervlak, waarop een n' -waardige algebraïsche functie éénwaardig is. Is s het aantal vertakkingspunten der functie, g haar geslacht, dan bestaat de volgende door RIEMANN ¹⁾ (l. c. p. 129) opgestelde betrekking :

$$s - 2 n' = 2 (g - 1),$$

waarbij een vertakkingspunt, waar t bladen van het RIEMANN'sche oppervlak samenhangen, als $t-1$ vertakkingspunten in rekening te brengen is.

Voor de theorie der algebraïsche krommen is het begrip en ook de naam geslacht ingevoerd door CLEBSCH ²⁾, terwijl HALPHEN ³⁾ voor het geslacht eener kromme van den graad n en de klasse k met hoogere singulariteiten de vergelijking

$$2 (g - 1) = k - 2 n + \sum (t_i - 1)$$

opgesteld heeft, waarin $\sum (t_i - 1)$ een sommeering voorstelt over de oorsprongen der afzonderlijke takken der kromme (die door één PUISEUX'sche reeksontwikkeling kunnen worden voorgesteld), wier graad t van 1 verschillend is, en over zooveel andere oorsprongen van takken als men wil. Wordt een tak der kromme door de reeksontwikkeling

$$y - \eta = a_0 (x - \xi) + a_1 (x - \xi)^{\frac{t+v}{t}} + \dots$$

naar geheele opklimmende machten van $(x - \xi)^{\frac{1}{t}}$ voorgesteld, dan noem ik het punt (ξ, η) den *oorsprong*, de lijn $y - \eta = a_0 (x - \xi)$

¹⁾ B. RIEMANN. Theorie der ABEL'schen Functionen. *Crelle's Journal* Bd. 54 (1857), p. 115—155.

²⁾ A. CLEBSCH. Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. *Crelle's Journal* Bd. 64 (1865), p. 98—100.

³⁾ G. H. HALPHEN. Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes. *Bulletin de la Soc. Math. de France* t. 4 (1875), p. 29—41.

de *raaklijn* en de getallen t en v den *graad* en de *klasse* van den tak, waarbij dus elk willekeurig punt eener kromme als oorsprong van minstens één tak kan worden opgevat, voor welke dan echter, indien het punt een gewoon punt der kromme is, t gelijk 1 zal zijn. Is eenzelfde punt der kromme oorsprong van meerdere takken, dan beschouwen we dit punt achtereenvolgens als tot de verschillende takken behoorend.

De HALPHEN'sche betrekking is een onmiddellijk gevolg van de RIEMANN'sche, als men slechts de vertakkingspunten splitst in die welke niet en in die welke wel van de keus van het coördinatenstelsel afhangen.

Zijn t'_1, t'_2, \dots de graden, v'_1, v'_2, \dots de klassen der afzonderlijke takken, die hun oorsprong in P hebben (zoodat $\sum t'_1 = t'$ is), dan is

$$2(g-1) = k - 2n + \sum (t'_1 - 1) + \sum (t_1 - 1),$$

terwijl volgens het geciteerde theorema

$$k = \sum (t'_1 + v'_1) + \sum (w_1 - t_1) \quad (\text{verg. (2) l. c. p. 60})$$

is. In de beide laatste vergelijkingen heeft het eerste Σ -teeken op de in P vallende oorsprongen, het tweede Σ -teeken op de buiten P vallende oorsprongen betrekking.

Uit deze vergelijkingen volgt

$$2(g-1) = -2(n-t') + \sum (v'_1 - 1) + \sum (w_1 - 1). \dots (1)$$

Hierin stelt $n-t' = n'$ het aantal *beweeglijke* snijpunten van de kromme met door P gaande rechten voor. Trekt men door P een willekeurige rechte l_i , die geen raaklijn in P is, dan leveren de snijpunten dier rechte met de kromme een bijdrage tot $\sum (w_1 - 1)$, die gelijk is aan $n' - N_i$, waarin N_i het aantal oorsprongen van takken voorstelt¹⁾, die buiten P op de rechte l_i liggen, dus het aantal takken, waarover de n' beweeglijke snijpunten met de rechte l_i zich verdeelen. Trekt men vervolgens door P een rechte l_j , die aan N'_j takken door P raakt, en zij N_j het aantal takken, waarover de n' beweeglijke snijpunten met de rechte l_j zich verdeelen, dan hebben $N_j - N'_j$ van deze N_j takken hun oorsprong buiten P . De buiten P gelegen snijpunten met deze rechte leveren een bijdrage tot $\sum (w_1 - 1)$, die gelijk is aan

$$(n' - \sum v'_j) - (N_j - N'_j) = (n' - N_j) - \sum (v'_j - 1),$$

waarin $\sum v'_j$ en $\sum (v'_j - 1)$ alleen genomen zijn over de aan de rechte l_j in P rakende takken. Hieruit volgt:

$$\sum (w_1 - 1) = \sum (n' - N_i) + \sum (n' - N_j) - \sum (v'_1 - 1),$$

of

¹⁾ Hierbij dus ook de gewone snijpunten ieder als oorsprong van een tak medetellende.

$$\Sigma (w_1 - 1) = \Sigma (n' - N_1) - \Sigma (v'_1 - 1),$$

waarin nu $\Sigma (v'_1 - 1)$ een sommeering beteekent over *alle* takken met P als oorsprong, $\Sigma (n' - N_1)$ een sommeering over *alle* rechten door P , waarvoor $n' > N_1$ is, en over zooveel andere rechten als men wil.

Substitueert men de gevonden waarde voor $\Sigma (w_1 - 1)$ in vergelijking (1) en vervangt men $n - t'$ door n' , dan vindt men

$$g = 1 - n' + \frac{1}{2} \Sigma (n' - N_1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

We kunnen het gevondene tot het volgende theorema samenvatten :

THEOREMA I. *Wordt een algebraïsche vlakke kromme door de rechten van een bundel met P als drager in n' beweeglijke punten gesneden, die zich voor de verschillende rechten van den bundel over N_1, N_2, \dots takken der kromme verdeelen, dan heeft $1 - n' + \frac{1}{2} \Sigma (n' - N_1)$ (waarin $\Sigma (n' - N_1)$ genomen is over alle rechten door P) voor ieder punt P dezelfde waarde, die gelijk is aan het geslacht der kromme.*

Dit theorema kan echter nog aanmerkelijk worden uitgebreid door gebruik te maken van de eigenschap, dat het geslacht der kromme niet verandert bij een eenduidige transformatie. Past men n.l. op de geheele figuur een CREMONA'sche transformatie toe, dan blijft g dezelfde, maar ook n' . De rechten van den bundel gaan door de transformatie over in *unicursaalkrommen*, die in de fundamentealpunten der transformatie meervoudige punten hebben. Door ieder buiten die fundamentealpunten gelegen punt gaat slechts *één* der unicursaalkrommen, zoodat we met een *bundel unicursaalkrommen* te doen hebben; hierbij zijn de meervoudige punten, die de krommen tot unicursaalkrommen maken, niet in *beweeglijke* maar in *vaste* punten aanwezig, hetgeen tot *lineaire* betrekkingen tusschen de coëfficiënten der krommen aanleiding geeft. De beweeglijke snijpunten met een rechte worden nu tot beweeglijke snijpunten met een unicursaalkromme getransformeerd, en blijven wegens de eenduidigheid der transformatie gelijk in aantal.

Bij een CREMONA'sche transformatie wordt verder steeds een tak der kromme tot *één enkelen tak* getransformeerd (waarbij steeds onder een *tak* te verstaan is het geheel van de punten der kromme, wier coördinaten aan eenzelfde PUISEUX'sche reeksontwikkeling voldoen). Verdeelen zich dus de n' beweeglijke snijpunten met een rechte over N takken, dan verdeelen zich in de getransformeerde figuur de n' beweeglijke snijpunten met de door transformatie der rechte ontstane unicursaalkromme eveneens over N takken.

Hieruit blijkt dus, dat alle in vergelijking (2) voorkomende grootheden *invariant* zijn tegenover rationale transformaties, *zoodat de ver-*

gelijking (2) onveranderd blijft doorgaan, als men den bundel rechten door een bundel unicursaalkrommen vervangt.

Dit geeft dus tot het volgende theorema aanleiding :

THEOREMA II. *Wordt een algebraïsche kromme door een bundel unicursaalkrommen in n' beweeglijke punten gesneden, die zich voor de verschillende krommen van den bundel over N_1, N_2, \dots takken der vaste kromme verdeelen, dan heeft $1 - n' + \frac{1}{2} \Sigma (n' - N_1)$ (waarin $\Sigma (n' - N_1)$ genomen is over alle krommen van den bundel) voor iederen bundel unicursaalkrommen dezelfde waarde, die gelijk is aan het geslacht der vaste kromme.*

Dit theorema kan verder nog van een bundel unicursaalkrommen worden uitgebreid tot een *willekeurigen* algebraïschen krommenbundel door middel van de volgende overleggingen, die echter minder streng zijn dan de voorafgaande beschouwingen.

Gaat men na welke unicursaalkrommen uit het theorema II een bijdrage tot $\Sigma (n' - N_1)$ opleveren, dan zijn dit 1^{ste} die unicursaal-krommen, die door een buiten de basispunten van den bundel gelegen oorsprong van een *superlineairen tak* (benaming van CAYLEY voor een tak, waarvan de graad grooter dan één is) der vaste kromme gaan, 2^{de} die unicursaalkrommen, die de vaste kromme buiten de basispunten aanraken, 3^{de} die unicursaalkrommen, waarbij twee of meer der beweeglijke snijpunten langs denzelfden tak der vaste kromme tot een der basispunten genaderd zijn. In hoofdzaak komt dus het theorema II neer op de bepaling van het aantal unicursaalkrommen van een bundel, die een gegeven kromme aanraken, en de verandering, die dit aantal ten gevolge van hoogere singulariteiten der gegeven kromme en de bijzondere ligging der basispunten ten opzichte dier kromme ondergaat. Hierbij kan het echter moeilijk verschil opleveren of we met een bundel unicursaalkrommen dan wel met een willekeurigen krommenbundel te doen hebben ; in beide gevallen voldoen toch de coëfficiënten van de vergelijking der beweeglijke kromme aan eenige lineaire voorwaarden ten getale van één minder dan voor de bepaling der beweeglijke kromme noodig is ¹⁾.

Lichten we het voorgaande nog door een voorbeeld toe. Onderstel, dat gevraagd wordt het aantal kubische krommen door 8 gegeven punten te bepalen, die een gegeven kromme aanraken. Onderstel verder, dat de gegeven kromme een singulier punt S met een singu-

¹⁾ Een andere zaak zou het natuurlijk zijn, als aan de beweeglijke kromme de voorwaarde was opgelegd unicursaal te zijn, zonder dat de bijzondere punten, die het geslacht tot nul neerdrücken gegeven waren ; als er dus b.v. sprake was van kubische krommen door 7 gegeven punten en voorzien van een (niet gegeven) dubbelpunt.

liere raaklijn l heeft, en dat de door S gaande C_3 van den bundel tevens aan l raakt. Het punt S zal dan een zeker aantal eigenlijke raakpunten met krommen van den bundel absorbeeren, en dit aantal zal afhangen van den aard van het singuliere punt S en van de orde van aanraking, die de C_3 aan de gegeven kromme vertoont, maar geenszins van het feit of er van de basispunten ergens buiten S drie zijn samengevallen, hetzij zoodanig dat in een der basispunten raaklijn en kromming gegeven is, of zoo dat de samenvallende basispunten een driehoek met eindige hoeken vormen, in welk geval de voorwaarde van het gaan door de drie basispunten in zich sluit dat de kromme in een gegeven punt een dubbelpunt heeft en derhalve unicursaal is.

Door bovenstaande overwegingen geleid meen ik het volgende theorema te kunnen opstellen :

THEOREMA III. *Wordt een algebraïsche kromme door een krommenbundel in n' beweeglijke punten gesneden, die zich voor de verschillende krommen van den bundel over N_1, N_2, \dots takken der vaste kromme verdeelen, dan heeft $1 - n' + \frac{1}{2} \sum (n' - N_1)$ ($\sum (n' - N_1)$ genomen over alle krommen van den bundel) voor iederen krommenbundel dezelfde waarde, die gelijk is aan het geslacht der vaste kromme.*

Daarbij is het eigenaardige van de gevonden uitdrukking voor het geslacht daarin gelegen, dat het geslacht, dat invariant is tegenover rationale transformaties, nu ook werkelijk is uitgedrukt uitsluitend in grootheden, die ieder op zichzelf tegenover rationale transformaties invariant zijn.

Tot het opstellen van het bovenstaande theorema meen ik te meer gerechtigd te zijn, daar ik in verschillende eenvoudiger gevallen het theorema bevestigd gevonden heb, t. w. voor het geval dat de gegeven kromme slechts dubbelpunten en keerpunten vertoont, terwijl de basispunten iedere bijzondere ligging ten opzichte der gegeven kromme kunnen aannemen, alsook voor het geval, dat de gegeven kromme van hoogere singulariteiten voorzien is, waarbij dan echter slechts de eenvoudigste bijzondere gevallen omtrent de ligging der basispunten beschouwd zijn, b.v. het geval dat een of twee basispunten in een hooger singulier punt vallen. Dit neemt echter niet weg, dat een *streng* en *eenvoudig* bewijs, dat een subtiële onderscheiding van het groote aantal bijzondere gevallen, die zich voor kunnen doen, overbodig maakt, zeer gewenscht ware.

Sneek, Juni 1904.

Wiskunde. — De heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer FRED. SCHUH: „*Over de krommen van een bundel, die een vlakke algebraïsche kromme met hoogere singulariteiten aanraken.*”

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

In het voorafgaande opstel heb ik het volgende theorema opgesteld:

Wordt een algebraïsche vlakke kromme door een krommenbundel in n' beweeglijke punten gesneden, die zich voor de verschillende krommen van den bundel over N_1, N_2, \dots takken der vaste kromme verdeelen, dan heeft $1 - n' + \frac{1}{2} \Sigma (n' - N_1)$ ($\Sigma (n' - N_1)$ genomen over alle krommen van den bundel) voor iederen krommenbundel dezelfde waarde, die gelijk is aan het geslacht g der vaste kromme.

In formule uitgedrukt luidt dit:

$$2(g + n' - 1) = \Sigma (n' - N_1) (1)$$

Met behulp van dit theorema kan het volgende aanrakingsprobleem worden opgelost:

Het aantal krommen van een bundel te bepalen, die een vlakke kromme C_n van den graad n , de klusse k en het geslacht g aanraken.

Daartoe vervangen we in vergelijking (1) eerst $\Sigma (n' - N_1)$ door een sommeering over de punten van C_n , of liever (daar we een punt van C_n , waar meerdere takken doorheen gaan, steeds als meerdere punten in rekening brengen) over de oorsprongen van takken van C_n . Zij S een oorsprong van een tak van C_n , terwijl de door S gaande kromme van den bundel den beschouwd tak in w punten S snijdt, dan is $\Sigma (n' - N_1) = \Sigma (w_1 - 1)$, zoodat de vergelijking (1) wordt

$$2(g + n' - 1) = \Sigma (w_1 - 1) (2)$$

Hierin stelt $\Sigma (w_1 - 1)$ een sommeering over *alle* oorsprongen S van takken van C_n voor, dus eigenlijk alleen over die oorsprongen, waarvoor $w > 1$ is. Liggen er een of meer basispunten van den bundel op C_n , dan moet de sommeering ook worden uitgestrekt over die oorsprongen, die in een basispunt B vallen. Als beweeglijke kromme door dien oorsprong moet dan beschouwd worden de limietstand der beweeglijke kromme door P als men P langs den bijbehorenden tak van C_n tot B laat naderen, m. a. w. die kromme van den bundel, die den tak minstens in één punt B meer snijdt dan een willekeurige kromme van den bundel. Voor zulk een in B vallenden oorsprong stelt dan w het aantal *beweeglijke* snijpunten voor, die langs den beschouwd tak tot B naderen als P langs dienzelfden tak tot B nadert,

Nu bestaat tusschen graad, klasse en geslacht van C_n de volgende bekende betrekking:

$$2(y + n - 1) = \Sigma(t_1 - 1) + k. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Hierin is $\Sigma(t_1 - 1)$ een sommeering over *alle* oorsprongen van takken van C_n , terwijl t den *graad* van den tak voorstelt, d. i. het aantal in zijn oorsprong vallende snijpunten met een willekeurige rechte door dien oorsprong.

Uit (2) en (3) volgt dan:

$$\Sigma(w_1 - t_1) = k + 2(n' - n). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

THEOREMA I. *Snijdt een krommenbundel een vlakke algebraïsche kromme C_n van den graad n en de klasse k in n' beweeglijke punten, waarvan er w in den oorsprong S van een tak van den graad t van C_n vallen, dan bestaat de betrekking $\Sigma(w_1 - t_1) = k + 2(n' - n)$, waarin $\Sigma(w_1 - t_1)$ genomen moet worden over alle oorsprongen van takken van C_n , ook over die welke in basispunten van den bundel vallen.*

Met de vergelijking (4) is, zooals blijken zal, het gestelde aanrakingsprobleem voor *iedere* C_n en *iedere* bijzondere ligging der basispunten ten opzichte van C_n als opgelost te beschouwen.

Het komt er slechts nog op aan de gevonden vergelijking te bediscussieeren.

Is m de graad der krommen van den bundel, dan is bij *willekeurige ligging* der basispunten ten opzichte der gegeven kromme C_n $n' = mn$, dus:

$$\Sigma(w_1 - t_1) = k + 2n(m - 1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Hierbij is onder een *willekeurige ligging ten opzichte van C_n* in de eerste plaats te verstaan, dat de basispunten niet op C_n liggen. Onderstellen we verder, dat de basispunten zoo liggen, dat geen enkele kromme C_m van den bundel, gaande door een bijzonder punt S van C_n , een der takken door S aanraakt, en dat geen enkele C_m de vaste kromme meer dan 2-puntig aanraakt, dan leveren alleen de krommen C_m , die een gewone aanraking aan C_n vertoonen ($w = 2$, $t = 1$), een bijdrage tot $\Sigma(w_1 - t_1)$, die gelijk is aan het aantal dier rakende krommen C_m . Hierbij dient echter nog een restrictie gemaakt. Het kan n.l. voorkomen, dat een C_m van den bundel een dubbel- of meervoudig punt heeft, dat op C_n ligt, hetgeen dan een bijdrage tot $\Sigma(w_1 - t_1)$ oplevert. Dit geval kan men ontgaan door bij een willekeurige ligging der basispunten ten opzichte van C_n te verlangen, dat geen bijzonder punt van C_m op C_n ligt. Dit is echter niet meer mogelijk als er door het samenvallen van basispunten *onderling* onder de krommen van den bundel zijn, die een *oneindig* aantal dubbel-

of meervoudige punten vertoonen, m. a. w. als de bundel krommen bevat, die uit twee of meer samenvallende gedeelten bestaan. Hoewel op deze gevallen de vergelijking (3) nog steeds van toepassing is, zullen we ze echter bij onze discussie eenvoudigheidshalve uitsluiten. Met deze onderstellingen is dus $\Sigma(w_1 - t_1)$ gelijk aan het aantal krommen van den bundel, die C_n aanraken. We vinden dus het volgende theorema:

THEOREMA II. *Van een bundel krommen van den m^{den} graad, die geen van alle uit twee of meer samenvallende gedeelten bestaan, is het aantal krommen, die een vlakke algebraïsche kromme C_n van de klasse k , ten opzichte waaraan de basispunten van den bundel geen bijzondere ligging hebben, aanraken, gelijk aan $k + 2n(m - 1)$.*

Is de C_n punt-algemeen, dan is $k = n(n - 1)$ en het gezochte aantal dus $n(n + 2m - 3)$. Vergelijkt men dit met het in bovenstaand theorema genoemde aantal, dan vindt men:

THEOREMA III. *Ieder singulier punt S van C_n vermindert het aantal krommen van den in theorema II genoemden bundel, die C_n eigenlijk aanraken, met hetzelfde getal als waarmede S de klasse van C_n vermindert.*

Vervolgens gaan we na welke bijzonderheden zich voor kunnen doen ten gevolge van een bijzondere ligging der basispunten ten opzichte van C_n . Daartoe beschouwen we in de eerste plaats een niet in een der basispunten gelegen oorsprong S van een tak T van den graad t van C_n , en onderstellen, dat de door S gaande kromme van den bundel den tak T aanraakt en in $w = t + \gamma$ samenvallende punten S snijdt (dus in γ punten meer, dan wanneer de door S gaande kromme van den bundel dien tak niet aanraakte), dan telt dit punt S (voor zoo ver den tak T aangaat) blijkens (5) voor $w - t = \gamma$ *eigenlijke* raakpunten. Herstellen we door een kleine verplaatsing der basispunten hunne willekeurige ligging ten opzichte van C_n , dan snijdt de door S gaande kromme van den bundel den tak T in t punten S en in γ dicht bij S gelegen punten. Het voorgaande blijft onveranderd doorgaan als de bundel wel uit twee of meer samenvallende gedeelten bestaande krommen bevat, mits die slechts niet door het beschouwde punt S gaan.

Dit geeft tot het volgende theorema aanleiding:

THEOREMA IV. *Zij S de oorsprong van een tak T eener algebraïsche vlakke kromme C_n . Naderen de basispunten van een krommenbundel van uit een willekeurigen stand tot een bijzonderen stand, zoodanig dat er geen basispunt tot S nadert, terwijl er γ snijpunten van C_n met de door S gaande kromme van den bundel langs den tak T tot S naderen, dan naderen er even zoo vele (dus γ) raakpunten van*

C_n met krommen van den bundel langs denzelfden tak T tot S . Hierbij is ondersteld, dat zoo de bundel krommen bevat, die uit twee of meer samenvallende deelen bestaan, deze samenvallende deelen niet door S gaan.

Hebben de basispunten den in dit theorema beschreven bijzonderen stand, dan telt S dus voor γ eigenlijke raakpunten. We kunnen het theorema dus ook aldus formuleeren :

Is S een buiten de basispunten van den bundel gelegen punt van C_n , terwijl de door S gaande kromme van den bundel een tak van den graad t van C_n met S als oorsprong in $t + \gamma$ punten S snijdt, dan absorbeert S , voor zoover dien tak aangaat, γ eigenlijke raakpunten.

Het theorema IV is een uitbreiding van een theorema van HALPHEN en STEPHEN SMITH, dat ik in een vorig in deze Verslagen opgenomen opstel besproken heb¹⁾. Het bedoelde theorema kan n.l. als volgt worden uitgesproken :

Zij S de oorsprong van een tak T eener kromme, l de raaklijn van dien tak in S . Nadert een punt P tot l maar niet tot S , dan naderen er langs den tak T tot het punt S evenveel snijpunten met PS als raakpunten van raaklijnen door P .

Dit is niets anders dan ons theorema IV, waarin de krommenbundel door een bundel rechten vervangen is.

Vervolgens beschouwen we het geval van een singulier punt S van C_n , waarin één of meer der basispunten van den bundel vallen. Daar het ons er alleen om te doen is het aantal in S vallende eigenlijke raakpunten te bepalen, kunnen we eenvoudigheidshalve aannemen, dat er geen basispunten in andere punten van C_n vallen. Verder sluiten we weer het geval uit, dat de bundel krommen bevat, die uit samenvallende gedeelten bestaan.

Zijn t'_1, t'_2, \dots de graden der verschillende takken T'_1, T'_2, \dots van C_n , die S tot oorsprong hebben, terwijl een willekeurige kromme van den bundel die takken achtereenvolgens in z'_1, z'_2, \dots punten S snijdt. Men heeft dan

$$n' = mn - \sum z'_i.$$

Verder kan $\sum (w_1 - t_1)$ gesplitst worden in de bijdrage $\sum (w'_1 - t'_1)$ van het punt S en de bijdragen der overige punten van C_n . Hierin is de beteekenis van w'_1 dat de kromme van den bundel, die den tak T'_1 in meer dan z'_1 punten S snijdt, dit in $z'_1 + w'_1$ punten doet. Voor vergelijking (4) kan dan geschreven worden :

¹⁾ Over een uitdrukking voor de klasse eener algebraïsche vlakke kromme met hoogere singulariteiten. Verslag van 28 Mei 1904 p. 57.

$$\Sigma (w_1 - t_1) = k + 2n(m - 1) - \Sigma (w'_1 + 2z'_1 - t'_1), \quad (6)$$

waarin $\Sigma (w_1 - t_1)$ nu alleen over de *buiten* S gelegen punten der kromme genomen moet worden. Stelt men het aantal $w'_1 + z'_1$ der punten S , waarin de tak T'_1 door de osculeerende kromme van den bundel gesneden wordt, door u'_1 voor, dan wordt de vergelijking (6):

$$\Sigma (w_1 - t_1) = k + 2n(u - 1) - \Sigma (u'_1 + z'_1 - t'_1).$$

Uit deze vergelijking blijkt, dat het punt S , wat den tak T'_1 aangaat, $u'_1 + z'_1 - t'_1$ eigenlijke raakpunten absorbeert. Dit kan tot het volgende theorema geformuleerd worden:

THEOREMA V. *Valt een enkel- of meervoudig basispunt van een krommenbundel in den oorsprong S van een tak van den graad t eener algebraïsche kromme C_n , terwijl die tak een willekeurige kromme van den bundel in z , de osculeerende kromme van den bundel daarentegen in u punten S snijdt, dan absorbeert het punt S $u + z - t$ raakpunten van krommen van den bundel met C_n , m. a. w. bij een willekeurige standsverandering der in S vallende basispunten geeft het punt S $u + z - t$ raakpunten af, die zich dan op den beschouwden tak bevinden.*

Door echter de basispunten niet een willekeurige maar een bijzondere standsverandering te doen ondergaan, kan hieruit in verband met theorema IV nog een ander theorema worden afgeleid. Men kan n.l. de basispunten langs de osculeerende kromme van den bundel een weinig zoo verplaatsen, dat er geen basispunt meer met S samenvalt. In dat geval blijft ook na de verplaatsing der basispunten het punt S een zeker aantal eigenlijke raakpunten absorbeeren, en wel volgens theorema IV ten getale van $u - t$; immers na die verplaatsing snijdt de door S gaande kromme van den bundel den tak in u punten S , zoodat voor het punt S nu $w = u$ is. Vergelijkt men het aantal $u - t$ der geabsorbeerde raakpunten met het in theorema V opgegeven aantal, dan vindt men:

THEOREMA VI. *Snijden de krommen van een bundel den tak T eener vlakke algebraïsche kromme in z vaste in zijn oorsprong S vallende punten, dan geeft het punt S z raakpunten met krommen van den bundel aan den tak T af, als de in S vallende basispunten van den bundel zich langs de osculeerende kromme van den bundel van S verwijderen.*

Het is duidelijk, dat de theorema's V en VI onveranderd blijven doorgaan als de bundel in samenvallende deelen gedegenereerde krommen bevat, mits die slechts niet door het punt S gaan.

Het theorema VI is evenals het theorema IV een uitbreiding van het bovengenoemde theorema van HALPHEN en SMITH. Vervangt men

n.l. de krommenbundel door een bundel rechten met S als drager, dan gaat het theorema VI over in:

Zij S de oorsprong van een tak T eener kromme, terwijl die tak door een willekeurige rechte door S in t punten S gesneden wordt. Verwijdert zich nu een punt P langs de raaklijn van S , dan geeft het punt S aan dien tak t raakpunten met raaklijnen door P af.

Het is niet moeilijk in te zien, dat dit reciprook is aan de op p. 136 gegeven formulering van het SMITH-HALPHEN'sche theorema. De theorema's IV en VI zijn echter, als de krommenbundel geen rechtenbundel is, *niet* reciprook, en dus als geheel verschillende theorema's te beschouwen.

Sneek, Juni 1904.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet eene mededeeling over:
„De zonnebeelden, met den spectroheliograaf verkregen, en de anomale dispersie”.

Het is niet te verwonderen dat de schoone resultaten, door HALE en ELLERMAN verkregen met den spectroheliograaf¹⁾, in hooge mate de aandacht trekken. De schitterende methode van deze onderzoekers geeft het middel om met een oogopslag te overzien en tevens in fijne bijzonderheden te bestudeeren hoe op een zeker tijdstip over de geheele zonneshijf de lichtverdeling was voor iedere willekeurig uit te kiezen stralensoort. Met recht geeft W. S. LOCKYER aan zijn referaat over de genoemde verhandeling den titel „A new epoch in solar physics” (zie *Nature*, n^o. 1800); immers de spectroheliograaf blijkt een rijkdom van nieuwe gegevens te kunnen verschaffen, waaromtrent vroegere methoden ons volmaakt onkundig moesten laten en die hun waarde zullen behouden, wat ook de voorstellingen aangaande den physischen toestand der zon mogen zijn, die men daaruit afleidt.

Maar ten slotte zijn het toch de theoretische voorstellingen die ons weten tot bruikbare wetenschap maken. HALE en ELLERMAN zijn dan ook reeds dadelijk bij de beschrijving van hunne waarnemingen uitgegaan van zeer bepaalde denkbeelden aangaande een stofverdeling op de zon, die de waargenomen lichtverdeling zou moeten veroorzaken. In de aangehaalde publicatie van het Yerkes Observatory stellen zij de „working hypothesis” (p. 15) dat de eigenaardig gevormde

¹⁾ G. E. HALE and F. ELLERMAN, „The Rumford Spectroheliograph of the Yerkes Observatory”, Publications of the Yerkes Observatory, Vol. III, Part. I (1903).

lichte plekken welke zij in het zonnebeeld aantreffen wanneer dit in zoogenaamde calciumstraling werd gefotografeerd en die zij met den naau „flocculi” bestempelden, kolommen van sterk stralenden calciumdamp zouden zijn, zich verheffende boven de kolommen van gecondenseerde dampen, wier toppen zich aan ons voordoen als de granulaties der fotosfeer. Deze opvatting, aanvankelijk als hypothese uitgesproken, wordt door HALE en ELLERMAN in een iets later verschenen verhandeling over „Calcium and Hydrogen Flocculi” in *Astroph. Journ.* XIX, p. 41—52, met veel minder voorbehoud aan de verklaring der fotografieën ten grondslag gelegd.

De groote autoriteit van HALE en van mannen als W. S. LOCKYER, J. EVERSHED en anderen, die in referaten de uitleggingen van HALE en ELLERMAN wat de hoofdpunten betreft geheel onderschrijven, zou oorzaak kunnen zijn dat aan deze beschouwingen meer gewicht werd toegekend dan zij verdienen en dan de auteurs zelve aanvankelijk daaraan hebben gehecht.

Daarom is het niet overbodig te doen zien hoe men van al de nieuwe verschijnselen, door den spectroheliograaf tot nu toe geopenbaard, óók rekenschap kan geven op grond van de geheel andere voorstellingen aangaande den physischen toestand der zon, waartoe wij geleid werden door te letten op de kromming van lichtstralen in niet homogene middenstoffen en op de anomale dispersie van het licht in absorbeerende gassen.

HALE en ELLERMAN houden met deze beide omstandigheden absoluut geen rekening. Al hunne gevolgtrekkingen berusten op de onjuiste onderstelling dat het monochromatische licht waarin zij telkens de zon fotograferen, zich van de bron af rechtlijnig heeft voortgeplant, en dat zij dus het recht hebben de aanwezigheid van lichtuitstralende massa's calciumdamp aan te nemen in de richtingen, waaruit calciumstraling schijnt te komen. Door deze onderstelling te maken begaan zij een dergelijke vergissing als iemand, die de lichtbrekende facetten van een geslepen glazen ballon, waarbinnen een vlam brandt, als zelfstandige lichtbronnen zou willen beschouwen.

Ons uitgangspunt bij de verklaring van hetgeen de spectroheliograaf te zien geeft zal zijn de hypothese, dat de zon een onbegrensde gasmassa is, waarin zich onder den invloed van uitstraling en aswenteling voortdurend stroomingen, discontinuïteitsoppervlakken en wervels vormen, zoodat de verschillende bestanddeelen er even innig gemengd zijn als stikstof en zuurstof in de atmosfeer der aarde¹⁾. Ook deze

¹⁾ Een overzicht van een zonnetheorie, op deze hypothese gebouwd, vindt men in de *Revue générale des Sciences*, 15, p. 480—495, 30 Mai 1904.

hypothese zal natuurlijk later wijziging of aanvulling behoeven; maar vóór het oogenblik schijnt zij, althans wat de buitenste deelen der zonnemassa betreft, met geen enkel van de bekende verschijnselen, noch met physische wetten in strijd te zijn.

De ongeordende beweging der electronen in de diepere lagen der zon, waar de dichtheid zeer groot is, levert de straling met doorlopend spectrum. Met deze straling alléén zullen wij in onze beschouwingen rekening houden. Misschien voegt de eigen-straling van de ijlere deelen der gasmassa een merkbare hoeveelheid licht daaraan toe, waarvan het spectrum uit heldere lijnen bestaat, maar dit licht behoeft voorloopig geen rol te spelen in ons verklaringssysteem. Wij aanschouwen dus de schitterend lichtende zonnekern door een uitgestrekte omhulling van doorschijnende, selectief absorbeerende gassen heen, waarin de kern geleidelijk overgaat. Natuurlijk neemt de gemiddelde dichtheid dezer omhulling langzaam af in de richting van de zon naar de aarde; doch loodrecht op die richting is de dichtheid van het gasmengsel op sommige plaatsen veel sterker veranderlijk. Immers zij is een minimum in wervelassen, en de gemiddelde richting van de wervelassen die zich tusschen de aarde en de zonnekern in de discontinuïteitsoppervlakken bevinden, wijkt van de gezichtslijn niet sterk af. De zonnestrallen bereiken ons derhalve na lange wegen te hebben afgelegd onder kleine hoeken met de dichtheidsniveaux van een plaatvormige, hier en daar buisvormige structuur¹⁾.

Onder die omstandigheden moeten zich de stralen in de zonnegassen zelve betrekkelijk sterk krommen, in het bijzonder die welke aldaar anomale dispersie ondergaan. De divergentie der bundels van zulke lichtsoorten zal daardoor in den regel vergroot worden, zoodat zij over het algemeen genomen met minder intensiteit de aarde bereiken dan het normaal gebroken licht en aanleiding geven tot donkere *dispersiebanden* ²⁾ in het zonnenspectrum. En niet alleen zal de graad van divergentie verschillend zijn voor lichtsoorten, die op verschillende afstanden van de absorptielijnen thuis behooren, maar het is duidelijk dat tevens voor iedere *bepaalde* lichtsoort de divergentie waarmee verschillende bundels op aarde aankomen zeer ongelijk moet uitvallen, al naar gelang van de dioptrische eigenschappen welke het stelsel van discontinuïteitsoppervlakken bezit langs de wegen die deze bundels volgden.

In deze opmerkingen ligt onze verklaring van de resultaten, met

1) Aangaande de overwegingen die er toe geleid hebben, een dergelijke structuur in het zonnelichaam voor waarschijnlijk te houden, verwijs ik naar vroegere publicaties: Versl. Natuurk. Afd. XI, p. 126—135, 650—663, XII, p. 300—334.

2) „Dispersiebanden in absorptiespectra”, Versl. Natuurk. Afd. XIII, p. 26—32

den spectroheliograaf verkregen, eigenlijk reeds geheel opgesloten. Wij zullen dit aan enkele hoofdpunten toelichten.

De breede donkere banden, door HALE en ELLERMAN met H_1 en K_1 aangeduid, zijn geen absorptiebanden maar dispersiebanden. Het absorptiegebied van den calciumdamp is beperkt tot de centrale donkere lijnen H_3 en K_3 . De lichte banden H_2 en K_2 die in het spectrum der „flocculi” op den voorgrond treden en door HALE en ELLERMAN aan sterk stralenden calciumdamp worden toegeschreven, zijn naar onze opvatting het gevolg van verminderde divergentie of zelfs van convergentie der bundels van lichtsoorten, in golfenlengte slechts zeer weinig van het calciumlicht afwijkende. Dergelijke stralen toch krommen zich sterker dan de in golfenlengte meer afwijkende, en zoodra zij meer dan éénmaal buigen in de „buisvormige” structuur, bestaat de mogelijkheid dat zij met grootere intensiteit de aarde bereiken. De kans daarvoor neemt toe naarmate de brekingsindex meer van de eenheid verschilt, hetzij in positieven, hetzij in negatieven zin¹⁾. Daaruit moet voortvloeien dat de lichtsterkte der flocculi gemiddeld grooter is naarmate het monochromatische licht, waarin de zon gefotografeerd wordt, korter bij het eigenlijke absorptiegebied gelegen is.

Een der voornaamste bijzonderheden welke bij het beschouwen van een stel bij elkander behoorende fotografieën terstond de aandacht van HALE en ELLERMAN hebben getrokken, is nu juist die toenemende lichtsterkte der calcium-flocculi als de gekozen lichtsoort de centrale lijn nadert. De genoemde onderzoekers moesten, om dit feit te verklaren, aannemen dat in hogere niveaux de calciumdamp sterker straalt dan in lagere niveaux. Bevredigend kan deze hypothese niet genoemd worden; vooral niet waar zij gepaard ging met de onderstelling dat de gloeiende damp uit diepere deelen der zon zou opstijgen en zich daarbij aanmerkelijk uitzetten, een proces waarbij volgens onze physische begrippen de temperatuur dalen moet. Dit is een principieele moeilijkheid; HALE en ELLERMAN trachten haar te verkleinen door de vrij vage suppositie te maken, dat wellicht eenig electrisch of chemisch effect aansprakelijk gesteld moet worden voor de sterke straling dezer calciumlaag, die zich tusschen twee absorbeerende lagen zou bevinden.

Dergelijke hulp-hypothesen zijn in onze theorie niet noodig.

¹⁾ Bij het boven aangehaalde experimenteele onderzoek over dispersiebanden werd deze verheldering in het midden der donkere banden duidelijk waargenomen. Men vergelijkte ook; Versl. Natuurk. Afd. XI, p. 658.

Een andere, zeer kenmerkende eigenaardigheid van elke reeks afbeeldingen, die kort na elkaar verkregen werden met verschillende lichtsoorten uit de omgeving der calciumlijnen, is deze: In licht, op grootere afstanden van de centrale lijn thuisbehoorende, schijnt de structuur van het zonnebeeld fijner en scherper geteekend te zijn, vertoont zij meer détails; nadert men de centrale lijn, dan verdwijnen sommige lichtplekjes, maar andere nemen sterk in omvang toe, vooral die, welke gelegen zijn in de nabijheid van zonnevlekken; daarbij worden hunne omtrekken minder scherp, zoodat ten slotte het geheele beeld den indruk geeft van een grovere en meer wazige structuur ¹⁾.

HALE en ELLERMAN meenen dat hetgeen men in die opeenvolgende fotografieën waarneemt, betrekking heeft op telkens hoogere niveaus en besluiten daaruit tot een boom-achtige gedaante van de calcium-massa's. Een schematische teekening daarvan geeft W. S. LOCKYER in Nature n^o. 1800.

Tegenover deze verklaring stellen wij de volgende:

De grootte der divergentieverandering, die een stralenbundel tengevolge van de aanwezigheid van calciumdamp in onze structuur van discontinuïteitsoppervlakken en wervels ondergaat, hangt — behalve natuurlijk van de hoeveelheid calcium in het gasmengsel — nog af van twee omstandigheden: 1^o. van de ligging der beschouwde lichtsoort in het spectrum met betrekking tot de absorptielijnen, en 2^o. van de steilheid der dichtheidsgradiënten in het mengsel op den weg dien de bundel doorloopt.

Kiezen wij nu een lichtsoort, juist even binnen den donkeren band H_1 of K_1 gelegen, dan verschilt voor deze de brekingsindex slechts weinig van de eenheid. Er zijn dus zeer groote ongelijkheden in de dichtheid noodig om de bundels merkbare divergentieveranderingen te doen ondergaan. Dergelijke groote ongelijkheden kunnen wel is waar op vele plaatsen voorkomen, maar in den regel natuurlijk slechts over kleine uitgestrektheden. Vandaar de fijne en vrij scherp geteekende structuur die het zonnebeeld in deze straling vertoont.

Ligt de gekozen stralensoort een weinig nader bij de absorptielijn, dan moet in ieder geval de lichtverdeeling in het beeld *anders* uitvallen; immers wanneer op een bepaalde plaats van de schijf een smalle bundel van de eene lichtsoort een zekere mate van divergentie bezit, moet een bundel van een naburige lichtsoort noodzakelijk een grootere of kleinere divergentie vertoonen. Zoo laat het zich verklaren dat lichte of donkere punten, op de eene fotografie voorkomende, in de andere ontbreken kunnen.

¹⁾ Zulke serieën van opnamen vindt men in Publications of the Yerkes Observatory, Vol. III, Part. I, Pl. V, VI, X, XI, XII, XIII.

Maar ook zal het algemeen karakter van het beeld veranderen naarmate men de absorptielijn nadert. Want als de brekingsindices meer van de eenheid gaan afwijken, zijn geringere dichtheidsverschillen reeds voldoende om merkbare divergentieverschillen te weeg te brengen. En minder steile dichtheidsgradiënten zullen natuurlijk in een gebied van werveling over grootere ruimten worden aangetroffen dan de allersteilste gradiënten. Daarbij komt dat de tweede spleet van den spectroheliograaf, bij gegeven wijdte, een complex van stralen met een grootere verscheidenheid van brekingsindices doorlaat wanneer zij op kleinen, dan wanneer zij op grooten afstand van de centrale absorptielijn is ingesteld. Deze omstandigheid maakt, dat de lichtverdeeling in het eerste geval natuurlijk minder gedifferentieerd is. Uit een en ander volgt, dat, over het algemeen genomen, de structuur van licht-en-donker zich grover en waziger moet voordoen naarmate de spectroheliograaf is ingesteld voor stralensoorten die sterkere anomale dispersie ondergaan.

Uit dit oogpunt beschouwd heeft ook de groote uitbreiding der flocculi in de omgeving der zonnevlekken op fotografieën in H_2 - of K_2 -licht niets verwonderlijks, daar in een dergelijk gebied de „buisvormige” structuur der gasmassa, waarin de sterkst gekromde stralen worden bijeen gehouden, het meest uitgesproken is.

HALE en ELLERMAN spreken verder nog van „donkere calcium flocculi”, (l. c. p. 19). Zij beschrijven die als afzonderlijke objecten, zichtbaar in fotografieën van zoogenaamd „hoog niveau” en wel te onderscheiden van den algemeenen duisteren achtergrond welke door den absorbeerenden calciumdamp van diepere lagen zou veroorzaakt worden. Donkere flocculi omringen vaak de groote, heldere flocculi van een vlekkengebied, zooals bijv. Fig 4, Pl. V van hun publicatie te zien geeft. Als verklaring wordt aangevoerd dat men hier met zeer hoog liggende absorbeerende dampmassa's te doen zou hebben, misschien wel behorende tot het K_3 -niveau.

Van ons standpunt zien wij in de aanwezigheid dezer donkere partijen slechts een onmiddellijk gevolg van het feit, dat de geheele lichtverdeeling niet door plaatselijke absorptie en emissie, maar door onregelmatige straalkromming wordt teweeggebracht. Er is slechts *verplaatsing* van licht; dus met een overmaat in de heldere flocculi moet een tekort in hun omgeving noodzakelijk gepaard gaan, en dat wel voor elke lichtsoort in het bijzonder.

H en K zijn verreweg de breedste banden van het zichtbare zonnenspectrum; zelfs bij matige dispersie kon de tweede spleet van

den spectroheliograaf op verschillende plaatsen dezer banden worden ingesteld. Werd met behulp van een buigingsrooster de dispersie van het instrument vergroot, dan bleek het mogelijk te zijn ook fotografieën van de zon te verkrijgen met licht dat geheel binnen de sterkst verbreede lijnen van waterstof of van ijzer gelegen was.

De beelden in H_{β} - of H_{γ} -licht bijv. vertoonden nu eveneens een vlokkige structuur, die echter in menig opzicht verschilde van de structuur der zonnebeelden in H- of K-licht. HALE en ELLERMAN vonden daarin aanleiding tot het onderscheiden van „waterstof-floculi”. Deze komen dan, wat ligging en vorm betreft, in groote trekken, doch niet in de details, overeen met de calcium-floculi van het zoogenaamde H_2 - of K_2 -niveau; zij hebben evenals de laatste een meer wazig karakter, in tegenstelling met de scherpere teekening in H_1 - of K_1 -licht; maar de meest in het oog vallende bijzonderheid is *dat zij donker zijn juist op de plaatsen waar de calcium-floculi de grootste helderheid bezitten*, en omgekeerd. Slechts hier en daar, in de onmiddellijke omgeving van zonnevlekken, komen kleine lichte waterstof-floculi voor die met lichte calcium-floculi samenvallen.

HALE en ELLERMAN doen nauwelijks een poging om al deze feiten met elkander in verband te brengen, zoo raadselachtig schijnt, uit hun oogpunt beschouwd, de samenhang.

Veel begrijpelijker wordt de zaak zoodra wij slechts vooropstellen dat ook bij de waterstof-lijnen de verbredingen niet aan absorptie, maar aan dispersie moeten worden toegeschreven.

Voor de lichtsoorten binnen het gebied dezer smallere dispersiebanden is namelijk de straalkromming in de zonnegassen over het geheel genomen zwakker dan voor die uit de omgeving der H- en K-lijnen. Zelfs in de krachtige wervelingen nabij zonnevlekken komen dus slechts bij uitzondering gedeelten voor, waarvan de buisvormige structuur voldoende uitgesproken is om het licht uit de naaste omgeving der waterstoflijnen bijéén te houden op de wijze, zooals dit in al de groote zoogenaamde calcium-floculi met het H_2 - en K_2 -licht geschiedt. Er kunnen derhalve maar weinig plekken in de heldere calcium-floculi worden aangetroffen, waar óók de fotografieën in H_{β} - of H_{γ} -licht heldere punten doen zien. De overige deelen der lichte calcium-floculi corresponderen met die gedeelten der gasmassa waar de dichtheidsverschillen — hoewel iets minder groot — toch nog zeer aanmerkelijk zijn; maar terwijl in die structuur de H_2 -stralen herhaaldelijk buigen en dus in zekere mate bijeengehouden worden, ondergaan de (minder sterk gekromde) H_{β} -stralen daar juist een krachtige uiteenspreiding, waardoor donkere partijen in het zonnebeeld moeten ontstaan. Buiten de heldere calcium-floc

culi eindelijk, waar het beeld in H_{β} - of K_{α} -licht duister is tengevolge van de uitspreiding dezer stralensoorten, wordt op het H_{β} - of H_{γ} -licht door de structuur der gasmassa geen sterk krommende invloed meer uitgeoefend; het zonnebeeld, in de laatstgenoemde lichtsoorten gefotografeerd, moet dus op die plaatsen minder duister zijn.

Het eenigszins wazig karakter van de waterstof-flocculi en de afwezigheid van sterke lichtcontrasten schrijven wij hoofdzakelijk toe aan de omstandigheid dat de dispersiebanden van de waterstoflijnen betrekkelijk smal zijn, zoodat licht van zeer verschillende brekingsindices de tweede spleet van den spectroheliograaf binnendringt. Ook deze fotografieën zouden fijnere structuur vertoonen (zooals die in K_{α} -licht) wanneer in het instrument de dispersie nog grooter en de tweede spleet nog nauwer genomen kon worden.

Men kan dus alle bijzonderheden welke in de spectroheliografieën werden opgemerkt gemakkelijk verklaren uit dezelfde grond-hypothese omtrent de structuur der gasvormige zonnemassa, die óók geschikt bleek te zijn om de reeds vroeger bekende zonneverschijnselen onder een gemeenschappelijk gezichtspunt te brengen. Nieuwe onderstellingen behoeften niet te worden gemaakt.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan getiteld: „*De afleiding der formule, welke de betrekking aangeeft tusschen de samenstelling van coëxisterende fasen bij binaire mengsels.*”

Reeds in mijn molekulairtheorie heb ik (Cont. II, pag. 10) een formule afgeleid voor de concentratie in coëxisterende fasen van binaire mengsels. Deze formule heeft de volgende gedaante:

$$\left\{ MRT l \frac{x}{1-x} + MRT \frac{\frac{db}{dx}}{v-b} - \frac{da}{v} \right\}_1 = \left\{ MRT l \frac{x}{1-x} + MRT \frac{\frac{db}{dx}}{v-b} - \frac{da}{v} \right\}_2$$

Voor het geval dat de tweede fase een verdunde gasfase is, vereenvoudigt zich het tweede lid tot $MRT l \frac{x}{1-x}$, en vindt men:

$$MRT l \frac{x_1}{1-x_1} \frac{1-x_2}{x_2} = \left\{ \frac{da}{v} - MRT \frac{\frac{db}{dx}}{v-b} \right\}_1 \cdot \cdot \cdot \quad (1)$$

En als gevolg heb ik daaruit afgeleid, dat de omstandigheid dat twee coëxisterende fasen gelijke samenstelling hebben, slechts kan

voorkomen bij mengsels, waarbij een minimumwaarde van de grootheid $\frac{a_x}{b_x}$ voorkomt, en dus een minimumwaarde voor de kritische temperatuur. Voor het limietgeval, bij uiterst lage waarde van T , zou het mengsel waarvoor $\frac{a_x}{b_x}$ een minimumwaarde heeft, ook juist het mengsel zijn, waarvoor de waarde van x in de beide fasen gelijk is; maar bij stijgende waarde van T verschuift zich deze samenstelling naar den kant van de stof met de kleinste waarde van de molekuulgrootte (Cont. II, pag. 19 en pag. 120).

Later heb ik in „Ternaire stelsels” voor vergelijking (1) de volgende afgeleid :

$$l \frac{x_1}{1-x_1} \frac{1-x_2}{x_2} = - \frac{f}{T} \frac{dT_k}{dx} + \frac{1}{p_k} \frac{dp_k}{dx}, \quad \dots \quad (2)$$

evenzeer alleen approximatief geldende, voor het geval dat de tweede phase een verdunde gasphase is. Bij de afleiding van (2) heb ik niet rechtstreeks gebruik gemaakt van de toestandsvergelijking, maar heb ik de bekende formule voor den dampdruk $-l \frac{p}{p_k} = f \frac{T_k - T}{T}$ als genoegzaam juist aangenomen voor vloeistofvolumes, welke niet veel kleiner zijn dan die van den coïncidentiedruk (druk van den verzadigden damp voor het ongesplitste mengsel).

Vergelijking (2) kan echter ook rechtstreeks uit de toestandsvergelijking gevonden worden. Dat dit mogelijk is, was te verwachten, omdat de genoemde dampdrukformule, zooals ik in „De vloeistof-toestand en de toestandsvergelijking” aangetoond heb, uit deze vergelijking kan afgeleid worden. Wil men ook voor den factor f de ware waarde vinden van circa 7, dan was het noodig b als volume-functie te beschouwen. Daardoor wordt niet alleen de afleiding zeer gecompliceerd, maar komt men voor de nog niet beantwoorde vraag te staan, in hoever de afname van b met het volume aan reële of quasi-verkleining moet toegeschreven worden.

Daarom heb ik mij voor het oogenblik er toe beperkt om te zoeken, wat voor de gedaante van (2) uit de toestandsvergelijking volgt, als men b onafhankelijk van het volume stelt.

Wij hebben dan te herleiden :

$$\frac{MRT \frac{db}{dx}}{v-b} - \frac{da}{v}$$

Wij schrijven daarvoor achtereenvolgens :

$$\begin{aligned} \frac{MRT \frac{db}{dx} - \frac{da}{v}}{v-b} &= \left(p + \frac{a}{v^2} \right) \frac{db}{dx} - \frac{1}{v} \frac{da}{dx} = \\ &= p \frac{db}{dx} - \frac{d \frac{a}{b}}{dx} + \left(\frac{a}{v^2} - \frac{a}{b^2} \right) \frac{db}{dx} - \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{b} \right) \frac{da}{dx}. \end{aligned}$$

Nu kan voor $a \frac{db}{dx} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{b^2} \right) - \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{b} \right) \frac{da}{dx}$ geschreven worden :

$$\frac{a(v-b)}{bv} \left\{ \frac{1}{a} \frac{da}{dx} - \frac{v+b}{v} \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \right\} = \frac{a(v-b)}{bv} \left\{ \frac{1}{a} \frac{da}{dx} - \frac{2}{b} \frac{db}{dx} - \left(1 - \frac{b}{v} \right) \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \right\}$$

en daar $\frac{a(v-b)}{bv}$ volgens de toestandsvergelijking gelijk is aan :

$$\frac{a(v-b)}{bv} = MRT + (MRT - vp) \frac{v-b}{b}$$

vindt men na eenige herleidingen :

$$\begin{aligned} \frac{MRT \frac{db}{dx} - \frac{da}{v}}{v-b} - \frac{da}{v} &= p \frac{db}{dx} - \frac{d \frac{a}{b}}{dx} + MRT \frac{d l \frac{a}{b^2}}{dx} + \frac{v-b}{b} (MRT - vp) \frac{d l \frac{a}{b^2}}{dx} + \\ &+ \frac{v-b}{b} \frac{1}{b} \frac{db}{dx} [MRT - p(v-b)] \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

Wij kunnen het tweede lid van (3) ook aldus schrijven :

$$\begin{aligned} p \left\{ \frac{db}{dx} - \frac{v}{b} (v-b) \frac{d l \frac{a}{b^2}}{dx} - \frac{(v-b)^2}{b^2} \frac{db}{dx} \right\} - \\ - \frac{d \frac{a}{b}}{dx} + MRT \frac{d l \frac{a}{b^2}}{dx} + MRT \frac{v-b}{v} \frac{d \log \frac{a}{b}}{dx} \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

Om de algemeene waarde van de te herleiden grootheid na te gaan, hebben wij twee gevallen te onderscheiden. Het eerste geval, dat $v - b$ klein is, en $p(v - b)$ te verwaarloozen tegenover MRT . In dat geval vereenvoudigt zich (4) tot :

$$p \frac{db}{dx} - \frac{d \frac{a}{b}}{dx} + MRT \frac{d l \frac{a}{b^2}}{dx}.$$

Het tweede zou voor hooge drukkingen gelden; dan nadert de waarde van $p(v - b)$ tot MRT , als v tot b nadert. In dat geval vereenvoudigt zich (4) tot :

$$p \frac{db}{ax} - \frac{d \frac{a}{b}}{dx}.$$

Daar wij coëxistentie met een verdunde gasphase onderstellen, geldt voor ons alleen het eerste geval. In het tweede zou er zelfs van coëxistentie met een tweede phase geen sprake zijn. Wij vinden nu voor de formule, welke de betrekking aangeeft voor de samenstellingen der beide phasen :

$$l \frac{x_1}{1-x_1} \frac{1-x_2}{x_2} = \left(\frac{1}{MRT} \frac{d \frac{a}{b}}{dx} - \frac{dl \frac{a}{b^2}}{dx} \right)_1 \dots \dots \dots (5)$$

waarin $p \frac{db}{dx}$ verwaarloosd is, of wil men liever, weggelaten is tegen een bijna gelijke waarde, welke in het tweede lid van de, aan het begin dezer mededeeling gegeven, vergelijking zou voortkomen.

Stellen wij nu :

$$MRT_k = \frac{8}{27} \frac{a}{b}$$

en

$$p_k = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2},$$

dan komt (5) onder den vorm van :

$$l \frac{x_1}{1-x_1} \frac{1-x_2}{x_2} = \left(\frac{27}{8} \frac{1}{T} \frac{dT_k}{dx} - \frac{dp_k}{p_k dx} \right)_1$$

De factor $\frac{27}{8}$ is geheel in overeenstemming met den factor, welke in de formule van den dampdruk voorkomt, als wij de grootheid b onafhankelijk van het volume stellen. Dat deze ongeveer verdubbeld moet worden, als wij voor b verkleining aannemen heb ik vroeger aangetoond — of liever de factor $\frac{27}{8}$ wordt niet vergroot, maar de aanname van de kleinere waarde van b komt, als men voor $\frac{a}{b}$ de waarde van T_k in de plaats zet, op een verdubbeling van den factor neder. Zonder nu de gecompliceerde berekeningen uit te voeren, welke in ons geval het gevolg zouden kunnen zijn van de aanname van de variabiliteit van b , meen ik wel als voldoende approximatieve waarde, tot de verdubbeling van dien factor te mogen besluiten. Dan vindt men geheel dezelfde waarde terug die ik in „Ternaire stelsels” gevonden had, n.l. :

$$l \frac{x_1}{1-x_1} \frac{1-x_2}{x_2} = \left(\frac{f}{T} \frac{dT_k}{dx} - \frac{1}{p_k} \frac{dp_k}{dx} \right)_1, \dots \dots \dots (6)$$

in welke formule f circa 7 kan gesteld worden.

Daar $\frac{T_k}{8 \times 273 p_k} = b$ is, kan voor $\frac{dp_k}{dx}$ geschreven worden

$$\frac{d \log T_k}{dx} = \frac{d \log b}{dx}.$$

Daardoor wordt (6)

$$l \frac{x_1}{1-x_1} \frac{1-x_2}{x_2} = \left(\frac{f}{T} - \frac{1}{T_k} \right) \frac{dT_k}{dx} + \frac{1}{b} \frac{db}{dx}, \quad \dots \quad (7)$$

Uit den vorm (7) leiden wij af, dat alleen als $\frac{db}{dx}$ gelijk 0 is, en dus als de molekulen der gemengde stoffen even groot zijn, de samenstelling der coëxisterende phasen gelijk is voor het mengsel met minimum kritische temperatuur. Bij ongelijkheid der molekuulgrootte is $x_1 = x_2$ voor het mengsel, waarvoor

$$\left(\frac{f}{T} - \frac{1}{T_k} \right) \frac{dT_k}{dx} = - \frac{1}{b} \frac{db}{dx} \quad \dots \quad (8)$$

Is $\frac{db}{dx}$ positief, zooals het geval is voor mengsels van aceton en ether (ether de tweede component), dan is $x_1 = x_2$ voor een mengsel waarvoor $\frac{dT_k}{dx}$ negatief is. Dan is de gelijkheid van x_1 en x_2 , en dus ook de maximumdruk in de p, x lijn, verschoven naar den kant van den component met het kleinste molekuul. Vermenigvuldigt men beide leden van (8) met T , dan blijkt die verschuiving met stijgende waarde van T toe te nemen; en zoo komen wij tot een besluit, waartoe ik reeds vroeger gekomen was, dat nl. de maximumwaarde van p in de p, x lijn, alleen bij de allerlaagste waarde van T , genoegzaam plaats grijpt bij het mengsel met minimum kritische temperatuur. Alleen blijkt nu dat bij gewone temperaturen de verschuiving, waarvan hierboven sprake was, al vrij aanzienlijk zijn kan. Een gevolg hiervan is, dat de verschuiving tusschen de gewone temperaturen en $T = T_k$, ten slotte gering zijn kan. Deze verschuiving is echter des te grooter, naarmate het verschil in molekuulgrootte aanzienlijker is, en naarmate de daling in kritische temperatuur langzamer plaats heeft.

Nu wij een approximatieve waarde voor μ'_x hebben gevonden, kunnen wij onmiddellijk daaruit afleiden een approximatieve waarde voor μ''_x , een grootheid welke gekend zal moeten worden als men in de vergelijking:

$$v_{21} dp = (x_2 - x_1) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right)_{pT} dv_1 + \frac{w_{21}}{T} dT$$

den factor van dx_1 als bekend zal mogen aanzien. Wij hebben n.l.

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} \right)_{pT} = MRT \left\{ \frac{1}{x_1(1-x_1)} + \mu''_x \right\}$$

Wij vinden dan:

$$\mu''_x = - \frac{1}{MRT} \frac{d^2 \frac{a}{b}}{dx^2} + \frac{d^2 l \frac{a}{b^2}}{dx^2},$$

of

$$\mu''_x = - \frac{f}{T} \frac{d^2 T_k}{dx^2} + \frac{d^2 lp_k}{dx^2}.$$

Bij geringen dampdruk geldt dus approximatief de vergelijking:

$$\frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dx_1} \right)_T = (x_2 - x_1) \left\{ \frac{1}{x_1(1-x_1)} - \frac{f}{T} \frac{d^2 T_k}{dx_1^2} + \frac{d^2 lp_k}{dx^2} \right\}.$$

In het algemeen zal wel de grootheid $\frac{d^2 T_k}{dx_1^2}$ positief zijn, en zeker is dit het geval als er een minimumwaarde voor T_k bestaat; de waarde van den anderen term kan dit natuurlijk wijzigen, maar in den regel zal men bij normale stoffen μ''_{x_1} negatief vinden.

In de waarde van de grootheid $\frac{T}{p} \left(\frac{dp}{dT} \right)_{x_1}$ komt slechts een van de twee gedeelten van μ'_{x_1} voor n.l. $\frac{f}{T} \frac{dT_k}{dx_1}$ en niet het tweede gedeelte

$\frac{d lp_k}{dx_1}$. Het gedeelte dat van T afhangt blijft dus slechts behouden.

Op verschillende wijzen kan de waarde dezer grootheid gevonden worden. Zij wordt gemakkelijk gevonden uit de vergelijking, voorkomende Cont. II, pag. 146, eenigzins herleid, n.l.:

$$\frac{p}{MRT} = \{ (1-x_1) + x_1 e^{\mu'_{x_1}} \} e^{\mu_{x_1} - x_1 \mu'_{x_1} - 1}$$

Uit dezen vorm leidt men af, x_1 standvastig houdende:

$$\frac{dp}{pdT} - \frac{1}{T} = \frac{x_1 e^{\mu'_{x_1}} \frac{d\mu_{x_1}}{dT}}{1-x_1 + x_1 e^{\mu'_{x_1}}} + \frac{d(\mu_{x_1} - x_1 \mu'_{x_1} - 1)}{dT},$$

waarvoor men schrijven kan:

$$\frac{dp}{pdT} - \frac{1}{T} = x_2 \frac{d\mu'_{x_1}}{dT} + \frac{d(\mu_{x_1} - x_1 \mu'_{x_1})}{dT}$$

of

$$\frac{dp}{pdT} - \frac{1}{T} = (x_2 - x_1) \frac{d\mu'_{x_1}}{dT} + \frac{d\mu_{x_1}}{dT}.$$

Voor $\frac{d\mu'_{x_1}}{dT}$ vindt men $\frac{f}{T^2} \frac{dT_k}{dx}$, en voor $\frac{d\mu_{x_1}}{dT}$ geldt als waarde $\frac{f}{T^2} T_k - \frac{1}{T}$.

Bijgevolg is :

$$\left(\frac{Tdp}{p dT} \right)_{x_1} = \frac{f}{T} \left\{ T_{k_1} + (x_2 - x_1) \frac{dT_{k_1}}{dx_1} \right\}$$

Het tweede lid met MRT vermenigvuldigende, vindt men $w_{2,1}$. Voor $w_{2,1}$ vindt men dan 2 termen, waarvan de eerste $MRfT_k$ de verdampingswarmte zou voorstellen, als het mengsel x_1 als onsplitsbare stof verdampte, en dus de dampphase dezelfde samenstelling als de vloeistofphase zou bezitten. Het tweede gedeelte $\frac{f}{T}(x_2 - x_1) \frac{dT_k}{dx_1}$, geeft de in sommige gevallen, nl. als $x_2 - x_1$ zeer groot is, groote wijziging aan, die het gevolg is van de omstandigheid, dat de dampphase een andere samenstelling heeft dan de vloeistofphase. Mocht T_k lineair van x afhangen, dan is $T_{k_1} + (x_2 - x_1) \frac{dT_{k_1}}{dx_1} = T_{k_2}$ en voor T_{k_2} kunnen wij dan schrijven, als wij de componenten van het mengsel door a en b voorstellen: $T_{k_2} = T_{k_a}(1 - x_2) + T_{k_b}x_2$. (Cont. II, pag. 155) of $\frac{T}{p} \left(\frac{dp}{dT} \right)_{x_1} = (1 - x_2) \frac{T}{p_a} \frac{dp_a}{dT} + x_2 \frac{T}{p_b} \frac{dp_b}{dT}$. Dan is $w_{2,1} = M_a r_a (1 - x_2) + M_b r_b x_2$, en zal de menging in den vloeistof-toestand zonder verdunningswarmte plaats grijpen.

Is de grafische voorstelling van T_k , als functie van x , een kromme lijn (Cont. II, pag. 45), overal boven de raaklijn liggende, wat het geval is, als $\frac{a_1}{b_1^2} + \frac{a_2}{b_2^2} - \frac{2a_{12}}{b_1 b_2}$ positief is, dan is $T_{k_1} + (x_2 - x_1) \frac{dT_{k_1}}{dx_1}$ kleiner dan T_{k_2} .

Trekken wij aan de kromme een raaklijn in het punt x_1 , dan snijdt deze raaklijn de ordinaat van x_2 in een punt, dat beneden de kromme ligt, en de afstand van dat snijpunt tot de kromme is dan een maat voor de hoeveelheid warmte, welke noodig is voor de menging van den gecondenseerden damp met de beschouwde vloeistofphase. Daar μ''_x uit twee termen bestaat, waarvan alleen de eerste term negatief is, als de menging in den vloeistof-toestand met warmte-absorptie gepaard gaat, heeft men geen recht te verwachten dat deze mengingswarmte alleen het teeken van μ''_x bepaalt.

Dierkunde. — De Secretaris biedt eene mededeeling aan van den Heer P. P. C. HOEK: „*Een interessant geval van atavismus.*”

Pollicipes en *Scalpellum* zijn twee aan elkander na verwante geslachten van gesteelde Cirripediën. Hun voornaamste verschil bestaat daarin, dat het eene geslacht (*Scalpellum*) een capitulum heeft, dat uit een beperkt aantal schelpstukken is samengesteld, terwijl het andere (*Pollicipes*) een veel grooter aantal van zulke schelpstukken te zien geeft.

Reeds in 1851 stelde DARWIN¹⁾ de groote overeenkomst, die tusschen deze twee geslachten bestaat, in het licht. Die overeenkomst is het meest opvallend in die soorten van *Scalpellum*, in welke de carina niet gebogen of onder een hoek gekromd, maar recht of nagenoeg recht is. DARWIN gaf als een merkwaardig voorbeeld van zulk eene soort eene beschrijving van *Sc. villosum* (Fig. 2). Hij was zoo getroffen door de gelijkenis, die deze soort in 't algemeen gesproken met *Pollicipes* te zien geeft, dat hij schreef (l.c. p. 278): “*Sc. villosum* most closely resembles or rather is identical with *Pollicipes*. Had it not been for the fewness of the valves forming the capitulum, and from the presence of complementary males, I should have placed this species alongside of *Pollicipes spinosus* and *sertus*.” En wanneer hij *Pollicipes* behandelt, zegt hij op nieuw (l.c. p. 294): “We have seen under *Scalpellum villosum* that the addition of a few small valves to the lower whorl, would convert it into a *Pollicipes*” enz. In fig. 3 geef ik een afbeelding van *Pollicipes sertus*.

Onder de dieren van de diepe zee is *Scalpellum* vertegenwoordigd door zeer talrijke soorten. Daarentegen komen die van *Pollicipes* alleen in ondiep water voor. De Engelsche expeditie met den „Challenger” verzamelde tijdens een kruistocht van vier jaar, die zich over al de oceanen van de wereld uitstreckte, exemplaren van 42 verschillende soorten van het geslacht *Scalpellum* en van deze waren er 41 nieuw voor de wetenschap. Slechts twee daarvan waren in diepten van minder dan 200 M. aangetroffen, al de andere waren echte diepzee-dieren. H.M. Siboga verzamelde in den Maleischen Archipel, tijdens een kruistocht, die één jaar duurde, exemplaren van 38 verschillende soorten van *Scalpellum*. Van deze moeten er 32 als voor de wetenschap nieuw beschouwd worden; 34 van die 38 soorten zijn dieren van de diepe zee, 4 zijn soorten uit ondiep water.

¹⁾ DARWIN, C., A Monograph on the Subclass Cirripedia. I. The Lepadidae or pedunculated Cirripedes. 1851.

Onder de Cirripediën van den „Challenger” is het geslacht *Pollicipes* niet vertegenwoordigd en onder die van de „Siboga” door slechts eene soort: *Pollicipes mitella*, een gewonen kustvorm van tropische zeeën. Terwijl in 1851 het aantal toen bekende levende soorten van *Scalpellum* 6 was en nu 125 op zijn minst is (voor zooverre ze mij bekend zijn ¹⁾), is er voor het geslacht *Pollicipes*, dat in DARWIN's boek eveneens door 6 soorten vertegenwoordigd is, sinds het verschijnen van die monographie slechts een zevende soort bijgekomen. Toen DARWIN dat boek schreef, waren hem natuurlijk de geheimen der groote diepten van den Oceaan nog niet ontsluit, maar omtrent de bestaande vormen van Cirripediën van het ondiepe water was zijn kennis nagenoeg volledig.

Tot de inderdaad merkwaardige soort *Sc. villosum*, voor welke DARWIN reeds in het licht stelde, dat zij met *Pollicipes* naverwant was, terugkeerende, mag ik er in de eerste plaats aan herinneren, dat ik in mijn rapport over de Cirripediën van de Challenger-expeditie in staat was, een tot het geslacht *Scalpellum* behoorende soort (*Sc. trispinosum*) te beschrijven, die in dezelfde afdeeling van dat geslacht gerangschikt moest worden. Deze soort was in den Philippijnschen Archipel op een diepte van 150 M. (misschien 180 M.) aangetroffen. Dan zij het mij vergund te vermelden, dat de Siboga er in slaagde er nog twee te ontdekken, en dat deze de namen zullen dragen van *Sc. pollicipedoides* en *Sc. aries*. Ofschoon het capitulum van deze beide soorten meer op dat van de gewone soorten van *Scalpellum* gelijk (zie b.v. fig. 1), dan met *Sc. trispinosum* en *Sc. villosum* het geval is, laat de vorm van de carina geen twijfel over, of beide zijn naverwant aan de laatstgenoemde soorten.

Ook deze soorten werden weer aangetroffen in betrekkelijk ondiep water: op diepten, die tusschen 57 en 94 M. afwisselden. De diepte, op welke *Sc. villosum* voorkomt, is niet juist bekend, maar zij kan niet zeer aanzienlijk zijn. DARWIN deelt mede, dat de exemplaren gevonden werden vastzittende aan schelpen en rotsen: zij werden ongetwijfeld buit gemaakt bij gelegenheid van kust-onderzoek.

We kunnen dus zeggen, dat die soorten van *Scalpellum*, die het

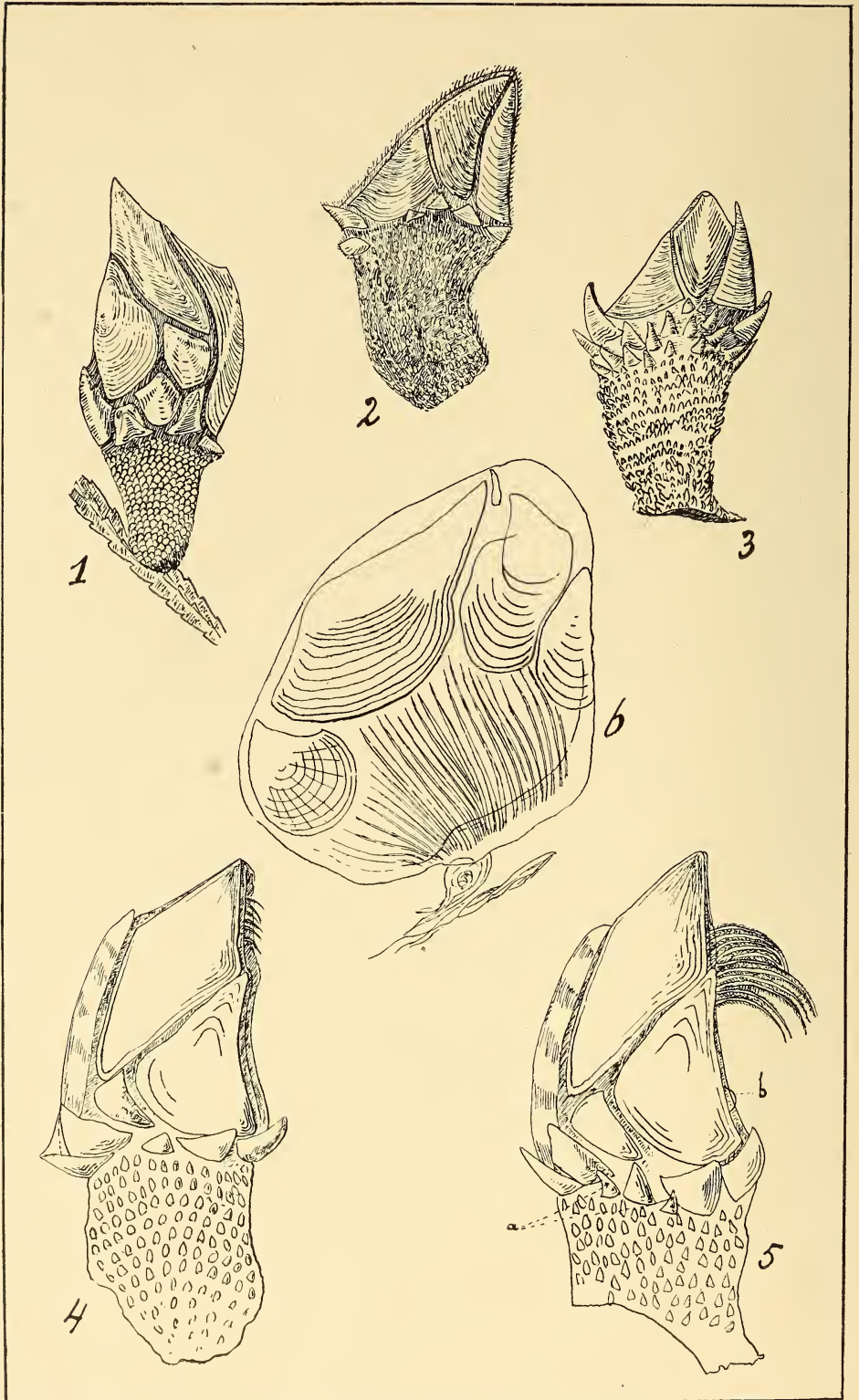
¹⁾ Met inbegrip van de soorten, die de Siboga verzamelde. A. GRUVEL, die de soorten van *Scalpellum* beschreef, verzameld door de Fransche expedities met den Travailleur en den Talisman, en C. AURIVILLIUS, die de Cirripediën van Zweedsche musea bestudeerde, en voorloopige beschrijvingen van de Cirripediën, die de vorst van Monaco op zijn talrijke kruistochten bijeenbracht, in het licht zond, hebben er met den schrijver dezer regelen het meest toe bijgedragen, om onze kennis van de soorten van dit geslacht te vergrooten.

meest op *Pollicipes* gelijken, evenals al de bekende soorten van het laatstgenoemde geslacht zelf, bewoners zijn van ondiep water.

Tot *Pollicipes* behooren, als welbekend is, de oudste Cirripediën, die gevonden zijn en het geslacht *Scalpellum* is het op een na oudste. De bouw van *Sc. villosum* maakt het zeer waarschijnlijk, dat het geslacht *Scalpellum* van *Pollicipes* afgestamd is. Die veronderstelling nu vindt eene treffende bevestiging in eene opmerkelijke afwijking, die een van de exemplaren van *Sc. pollicipedoides* te zien geeft. Die afwijking wil ik hier zeer in 't kort beschrijven.

De bedoelde soort is in de Siboga-verzameling door 6 exemplaren vertegenwoordigd. Zij werden gevonden op het Station 274 nabij de Jedan-eilanden, ten zuiden van Nieuw Guinee, op een diepte van 57 M. Het capitulum heeft 15 schelpstukken: twee scuta van driehoekige en twee terga van ruitvormige gedaante, een nagenoeg rechte (ongebogene) carina, twee betrekkelijk kleine bovenste zijstukken en acht schelpstukken in den onderste gordel. Van deze laatste hebben rostrum en sub-carina een umbo (groeitop), die dwars naar buiten uitsteekt; van de drie paar zijstukken, die met rostrum en sub-carina den onderste gordel of krans van schelpstukken uitmaken, zijn diegene van het middelste paar verreweg de kleinste. Al deze schelpstukken hebben eene driehoekige gedaante met den umbo aan den top. Terwijl scutum en tergum betrekkelijk kort bij elkander staan, zijn de andere schelpstukken verder van elkander verwijderd, en bestaan de tusschenruimten uit een chitineuze membraan.

Ofschoon, zooals ik boven reeds mededeelde, de vorm van het capitulum in 't algemeen genomen meer met dien van een gewonen *Scalpellum* overeenkomt, komt *Sc. pollicipedoides*, door het bezit van een paar zijstukken meer, korter bij *Pollicipes* dan zelfs *Sc. villosum* of *trispinosum*. Maar toen ik de zes exemplaren van deze nieuwe soort aandachtig bezag, trof het mij, dat een van de exemplaren, ofschoon in andere opzichten met de vijf overige overeenkomende, van deze verschilde door in den onderste gordel van schelpstukken twee schelpstukjes meer te hebben dan de drie, die bij alle exemplaren voorkomen. In figuur 4 is de linker zijde van een normaal, in figuur 5 dezelfde zijde van het abnormale exemplaar afgebeeld. (Aan de rechter zijde van dit exemplaar is slechts een van de bijkomende schelpstukken ontwikkeld). Feitelijk komen dus bij een van de exemplaren van deze nieuwe soort de enkele kleine schelpstukken voor, die volgens DARWIN bij *Sc. villosum* in den onderste gordel van schelpstukken ontbraken, om die soort in een *Pollicipes* te veranderen. Door hier van een geval van atavismus te spreken, meen ik reeds in het licht te stellen, welke groote betekenis ik aan



deze abnormaliteit, van een ontwikkelingsgeschiedkundig standpunt bezien, toeken. Wij behoeven niet zoo ver te gaan van juist deze soort te beschouwen als "the missing link" tusschen de geslachten *Pollicipes* en *Scalpellum*; naar mijne meening toont deze vondst echter duidelijk aan, dat een vorm met talrijker schelpstukken (zooals *Pollicipes*) de oudere, de vorm met geringer schelpstukken (zooals *Scalpellum*) de jongere is. Bovendien, dat de soorten van *Scalpellum*, die rechte carinas hebben en ondiep water bewonen, beschouwd moeten worden als de oudste, den oorspronkelijken vorm van *Scalpellum* het meest nabijkomende soorten.

(Niet geheel overbodig is het misschien hierbij nog mede te deelen, dat mij, die van de 125 soorten van *Scalpellum* er 80 nauwkeurig bestudeerde en beschreef, zulk eene vermeerdering van schelpstukken in den onderste gordel (of in het capitulum in 't algemeen) nooit onder de oogen is gekomen en dat ik mij niet herinner, dat er in de literatuur gevallen van beschreven zijn. Dat het aantal, de vorm en de wijze van groeien van de schelpstukken terecht door DARWIN gebruikt zijn voor de rangschikking der geslachten van Cirripediën ten opzichte van elkander, blijkt wel uit het feit, dat geen der latere auteurs de waarde dier kenmerken in twijfel getrokken heeft).

Eene volledige beschrijving zoowel van deze als van de andere nieuwe soorten van *Scalpellum* zal in het zijne voltooiing naderende rapport over de Cirripediën van de Siboga-expeditie gegeven worden. Ik wil echter hier nog vermelden, dat *Sc. pollicipedoides* door het voorkomen van z.g. complementaire mannetjes (Fig. 6) bewijst een echte *Scalpellum* te zijn; verder, dat deze soort caudale aanhangsels bezit, die in *Pollicipes* ook voorkomen, maar die, merkwaardig genoeg, volgens DARWIN bij *Sc. villosum* ontbreken.

VERKLARING VAN DE FIGUREN.

- Fig. 1. *Scalpellum rostratum*, Darwin van de rechter zijde gezien.
 „ 2. *Scalpellum villosum*, Leach van de rechter zijde gezien.
 „ 3. *Pollicipes sertus*, Darwin van de rechter zijde gezien.
 (Fig. 1—3 naar Darwin, Monograph on the Cirripedia. Lepadidae. 1851).
 Fig. 4. *Scalpellum pollicipedoides*, n. sp. van de linker zijde gezien, 11 maal vergroot.
 „ 5. Abnormaal exemplaar van dezelfde soort als fig. 4. *a* de bijkomende schelpstukken; *b* het complementaire mannetje.
 „ 6. Het complementaire mannetje van *Sc. pollicipedoides*, 180 maal vergroot.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van den Heer G. C. GERRITS over: „*P_v-lijnen van mengsels van aceton en aethy-laether en van tetrachloorkoolstof en aceton bij 0° C.*”

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

Naar aanleiding van de onvoldoende overeenstemming, door CUNAEUS¹⁾ gevonden tusschen de door VAN DER WAALS²⁾ in zijn theorie afgeleide betrekking tusschen de dampspanning boven een mengsel van twee vloeistoffen, de moleculaire samenstelling van den damp en die van de vloeistof, werd het onderzoek daarnaar nog eens ter hand genomen volgens dezelfde methode, die door CUNAEUS gebruikt was en met dezelfde stoffen, aceton en aethy-laether. Later werden nog, ook op dezelfde wijze, mengsels van tetrachloorkoolstof en aceton onderzocht.

Het was nl. gebleken, dat aan de methode van onderzoek verbeteringen waren aan te brengen.

Door middel van de bepaling van het brekend vermögen van den damp, zoowel van de zuivere stoffen als van de mengsels, werd de moleculaire samenstelling van den damp met behulp van den regel van BIOT en ARAGO bepaald.

Die bepaling van het brekend vermogen geschiedde volgens de door CUNAEUS³⁾ gevolgde methode van Lord RAYLEIGH⁴⁾.

RAYLEIGH vergelijkt het gas, waarvan hij het brekend vermogen bepalen wil, steeds met droge, koolzuurvrije lucht. Hij zorgt ervoor, dat het gas en de lucht beide in zoodanige omstandigheden verkeerden, dat hun brekingsexponenten in die omstandigheden gelijk zijn, wat met behulp van een Fraunhofersch diffractieverschijnsel beoordeeld kon worden. Deze gelijkheid van brekingsexponenten wordt verkregen door den druk der beide gassen te regelen. Met behulp van een kathetometer en den barometer wordt de druk bepaald, en uit beide drukken het brekend vermogen van het gas.

Dit wordt nu toegepast op mengsels van dampen, die met vloeistofmengsels coëxisteeeren. De druk der lucht, waarvan het brekend vermogen met dat van den damp vergeleken wordt, wordt zoo geregeld, dat de damp en de lucht in omstandigheden verkeerden, waarin hun brekingsexponenten gelijk zijn.

¹⁾ CUNAEUS, Proefschrift, Amsterdam, 1900, blz. 47—51.

²⁾ VAN DER WAALS, Arch. Néerl. 24, blz. 44; Continuität des gasf. und flüss. Zustandes II, blz. 137.

³⁾ CUNAEUS, Proefschrift, blz. 4—6. Versl. K. A. v. W. 30 Sept. 1899, blz. 192.

⁴⁾ RAYLEIGH, Proc. Roy. Institution, Vol. XV, Part. 1, pag. 1; Proc. Roy. Soc. Vol. 59, blz. 201.

Uit de verhouding der drukken is dan het moleculair brekend vermogen van den damp (of van het dampmengsel) te bepalen; de regel van BIOT en ARAGO geeft dan de samenstelling van het dampmengsel, x_2 .

De dampdruk is natuurlijk ook bekend. De samenstelling der vloeistoffen werd verkregen door de oorspronkelijke hoeveelheid in den toestel gebrachte vloeistof te wegen, en deze te verminderen met het gewicht van de hoeveelheid der beide stoffen in den damp.

De opstelling kwam in hoofdzaak overeen met die van CUNÆUS. Ze was eene modificatie van eene, door FRAUNHOFER aangegevene, berustende op de interferentie van licht, dat door twee verticale, parallele lichtspalten wordt doorgelaten, nadat het door twee even lange, door spiegelglazen platen afgesloten buizen gegaan is. Door het objectief van een verrekijker wordt het geconvergeerd en het zoo ontstane diffractieverschijnsel met een oculair, bestaande uit twee cylinderlensjes, waargenomen. In de eene der genoemde buizen bevindt zich de damp, in de andere lucht of droog koolzuur, waarvan het brekend vermogen bekend is, en waarvan nu de druk zoo geregeld wordt, dat het diffractieverschijnsel de plaats inneemt, die het ook ingenomen zou hebben, indien beide buizen met hetzelfde gas onder dezelfde omstandigheden gevuld waren geweest.

Beide buizen waren verbonden met open manometers en een inrichting om den druk der lucht te verhoogen of te verlagen.

De verbeteringen, die aangebracht werden, waren in hoofdzaak de volgende:

1°. De beide stoffen, die bij de bepaling dienst deden, werden in twee aparte buisjes ingesmolten, zoodat bij ieder ervoor gezorgd kon worden, door de vloeistof onder verlaagden druk te doen koken, dat zooveel mogelijk de lucht uit de vloeistof verwijderd werd.

Door KOHNSTAMM ¹⁾ is aangetoond, dat de wijze van vullen der buisjes fouten kan doen ontstaan in de bepaling van de dampspanning, ook wanneer die buisjes niet als bij CUNÆUS met een mengsel, maar zelfs met één enkele stof gevuld zijn. ²⁾

2°. Door een glazen spiraal aan te brengen tusschen den bol, waarin de fleschjes gebracht werden, en de waarnemingsbuis kon de bol vrij hevig geschud worden, waardoor onvoldoende menging der vloeistofflagen voorkomen werd.

3°. Het verschil in voorkomen tusschen eenige opvolgende strepen

¹⁾ KOHNSTAMM, Proefschrift, Amsterdam, 1901, blz. 170—180.

²⁾ Hoe moeilijk het is de stof zuiver en lucht vrij te krijgen, is nog onlangs weer door TEICHNER, Ann. der Phys. 13, blz. 603 opgemerkt.

was bij CUNAEUS zeer gering, waardoor de instelling van het bewegelijke interferentieverschijnsel tegenover een vast vrij onzeker was. Door de verhouding van den afstand tusschen twee overeenkomstige randen der spleten tot de breedte van elk dier spleten gunstiger te kiezen, waren aan de kanten der banden duidelijk spectra te onderscheiden, die alle hun violetten rand naar het midden keeren. Hierin had men dan een middel ter bepaling van den middelsten band.

Bovendien werd nog onderzocht of mogelijke adsorptie van damp op de platen van spiegelglas invloed zou hebben op het beloop der ρx -lijnen. Dit bleek evenwel niet het geval te zijn, zoodat hiervan bij het onderzoek van het tweede mengsel afgezien werd.

De temperatuur, waarbij de stoffen onderzocht werden, was 0°C.

Ze waren afkomstig van KAHLBAUM te Berlijn, en werden vóór het gebruik nog eerst met een dephlegmator volgens YOUNG en THOMAS ¹⁾ met 12 etages gezuiverd door ze eenige keeren te distilleeren.

Het mengsel aceton-aethylaether.

De resultaten van het onderzoek zijn vermeld in Tabel I. Bij het brekend vermogen is dat van droge, koolzuurvrije lucht als eenheid genomen; de druk is opgegeven in mM. kwik bij 0°C. Aethylaether moet als bijmengsel beschouwd worden.

T A B E L I.

Druk.	Brek.verm	x_2	x_1
69.08	3.7658	0.	0.
80.27	4.0410	0.173	0.024
98.03	4.3097	0.342	0.083
107.03	4.4353	0.421	0.124
127.01	4.6458	0.553	0.232
134.40	4.7036	0.590	0.295
164.72	4.9548	0.748	0.561
180.15	5.1112	0.846	0.796
185.60	5.3562	1.	1.

Het zoo verkregen $\rho x_1 x_2$ diagram is in fig. 1 in teekening gebracht.

Uit het beloop der krommen blijkt: Er is een maximumdruk, juist aan den aetherkant.

¹⁾ SYDNEY YOUNG and THOMAS, A dephlegmator for fractional distillation. Chem. News, 71, blz. 177.

Het reeds door CUNAEUS gevonden buigpunt wordt ook hier gevonden, en wel bij $x_2 = 0,66$ ongeveer.

De lijn $p = f'(x_2)$ is bol van $x = 0$ tot $x = 0,66$.

De lijn $p = f'(x_1)$ heeft een zeer eenvoudig beloop: ze keert overal de holle zijde naar de x -as.

Uit het beloop der krommen volgt ten slotte nog, dat de damp steeds rijker aan het bijmengsel is dan de vloeistof, terwijl het grootste verschil tusschen x_1 en x_2 ongeveer 0,33 bedraagt.

Deze lijnen werden nu vergeleken met de differentiaal-vergelijkingen, door VAN DER WAALS afgeleid:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dx_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_2(1 - x_2)},$$

waaraan de lijn $p = f'(x_2)$, indien het vloeistofvolume tegenover het dampvolume verwaarloosd en de dampphase als verdund beschouwd mag worden, over haar geheele beloop moet voldoen, en:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dx_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_1(1 - x_1)}$$

die onder dezelfde condities in hoofdzaak voor de randen der kromme $p = f'(x_1)$ moet gelden.

Uit de figuur zijn voor de in Tabel II aangegeven waarden van x_2 de p en $\frac{dp}{dx_2}$ gevonden, uit de vergelijking dan $x_2 - x_1$ en daaruit weer x_1 bepaald en deze waarden dan vergeleken met de waargenomen waarden:

T A B E L II.

x_2	p	$\frac{dp}{dx_2}$	$x_2 - x_1$		x_1	
			berek.	waargen.	berek.	waargen.
0.1	74	71	0.086	0.084	0.014	0.016
0.2	82.5	88.5	0.172	0.170	0.028	0.030
0.3	93	109	0.246	0.238	0.054	0.062
0.4	104	133	0.307	0.292	0.093	0.108
0.5	119	158	0.332	0.315	0.168	0.185
0.6	136	188	0.332	0.314	0.268	0.286
0.7	154	190	0.258	0.250	0.442	0.450
0.8	174	140	0.129	0.122	0.671	0.678
0.9	183	73	0.004	0.004	0.896	0.896

De afwijkingen tusschen de waargenomen en de berekende waarden van x_1 zijn blijkbaar gering, zoodat de waarnemingen beschouwd kunnen worden als zich aan te sluiten aan de bedoelde vergelijking.

De toetsing der waarnemingen aan de tweede vergelijking gaf tot resultaat :

T A B E L III.

x_1	p	$\frac{d\rho}{dx_1}$	$x_2 - x_1$		x_2	
			berek.	waargen.	berek.	waargen.
0 05	90	385	0.203	0.224	0.253	0.274
0.1	102	252	0.222	0.280	0.322	0.380
0.2	122	198	0.260	0.322	0.460	0.522
0.3	138	156	0.239	0.314	0.539	0.614
0.4	149 5	119	0.191	0.276	0.591	0.676
0.5	159	102	0.160	0.224	0.660	0.724
0.6	168	83	0.119	0.168	0.719	0.768
0.7	176	79	0.094	0.120	0.794	0.820
0.8	180.5	46	0.041	0.052	0.841	0.852
0.9	183 5	12	0.004	0.006	0.904	0.906

De beste overeenstemming tusschen de waargenomen en berekende waarden van x_2 blijkt te zijn aan de randen der krommen.

Door VAN DER WAALS is uit de gelijkheid van $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_{v,T}$ voor beide fasen afgeleid :

$$\frac{x_1}{1-x_1} e^{\mu' x_1} = \frac{x_2}{1-x_2}$$

waarin

$$\mu'_{x_1} = \left(\frac{d\mu_{x_1}}{dx_1}\right)_p \text{ en } \mu_{x_1} = \frac{1}{MRT} \left\{ pv - MRT \log(v - b_{x_1}) - \frac{a_{x_1}}{v} \right\}.$$

Uit deze vergelijking is dan, met behulp van de waargenomen x_1 en x_2 , μ'_{x_1} als functie van x_1 te bepalen. De zoo gevonden waarden zijn in Tabel IV opgegeven. Voor x_1 kleiner dan 1 en grooter dan 0.9 zijn de waarden van μ'_{x_1} te onnauwkeurig, zoodat ze voor de randen der krommen niet opgegeven zijn :

T A B E L IV.

x_1	x_2	$e^{\mu' x_1}$	$\mu' x_1$
0.1	0.380	5.516	1.71
0.2	0.522	4.368	1.47
0.3	0.614	3.712	1.31
0.4	0.676	3.130	1.14
0.5	0.724	2.623	0.96
0.6	0.768	2.207	0.79
0.7	0.820	1.952	0.67
0.8	0.852	1.439	0.36
0.9	0.906	1.071	0.07

De functie μ'_{x_1} als functie van x_1 is in fig. 2 in teekening gebracht. De punten geven blijkbaar een goed aaneensluitende kromme.

Uit de tabel blijkt, dat μ'_{x_1} bij grootere waarden van x tot 0 nadert. Dit is in overeenstemming met het feit, dat de p_w -lijn aan den aetherkant, dus voor $x_1 = 1$ een maximum vertoont.

DOOR VAN DER WAALS toch is voor p als functie van x_1 een expliciete uitdrukking gegeven, waaruit voor $\frac{dp}{dx_1}$ wordt afgeleid:¹⁾

$$\frac{dp}{dx_1} = p \frac{(e^{\mu' x_1} - 1) \{1 + x_1 (1 - x_1) \mu'_{x_1}\}}{1 - x_1 + x_1 e^{\mu' x_1}}$$

Voor $x_1 = 1$ is dus :

$$\frac{dp}{dx_1} = p \cdot \frac{e^{\mu' x_1} - 1}{e^{\mu' x_1}}$$

Is p een maximum voor $x_1 = 1$, dan is dus $\mu'_{x_1} = 0$.

Ook is door VAN DER WAALS voor μ'_{x_1} een benaderde waarde meegedeeld in „Ternaire Stelsels”²⁾ :

$$\mu'_{x_1} = -\frac{f}{T} \frac{dT_{cr}}{dx_1} + \frac{d \log p_{cr}}{dx_1}$$

waarin T_{cr} en p_{cr} de kritische temperatuur en druk van het ongesplitste mengsel voorstellen en f de bekende constante, ongeveer 7,

¹⁾ VAN DER WAALS, Versl. K. A. v. W. Amsterdam, Januari 1891, bl. 409; Continuität II, blz. 146.

²⁾ VAN DER WAALS, Versl. K. A. v. W. Amsterdam, Mei 1902, blz. 96.

die ook o. a. voorkomt in de formule, door VAN DER WAALS veel vroeger gegeven voor een zuivere stof: $Nep. \log \frac{p}{p_k} = -f \frac{T_k - T}{T}$.

Deze formule voor μ'_{x_1} is bovendien door VAN DER WAALS direct uit de toestandsvergelijking afgeleid ¹⁾.

Bevatte ze alleen den eersten term, dan zou met een maximum druk een minimum kritische temperatuur gepaard gaan; dat dus bij den zuiveren aether zou liggen. Nu ligt dit minimum daar evenwel niet, blijkens het aanwezig zijn van den 2^{en} term.

Nemen we nu eens aan, dat T'_{cr} lineair afhangt van x en dat dit ook voor p_{cr} het geval is, dan is $\frac{dT'_{cr}}{dx_1}$ ongeveer — 43 en $\frac{dp_{cr}}{dx_1}$ ongeveer — 15, waardoor dan voor μ'_{x_1} gevonden wordt ongeveer 0.8, een waarde, die werkelijk tusschen de gevonden waarden in ligt.

Ook μ''_{x_1} het differentiaalquotient van μ'_{x_1} naar x_1 kan bepaald worden. De juiste betrekking door VAN DER WAALS afgeleid voor de afhankelijkheid van de dampspanning van de moleculaire samenstelling van het vloeistofmengsel, waarbij alleen aangenomen is, dat het vloeistofvolume tegenover dat van den damp verwaarloosd en de dampphase als verdund beschouwd mag worden, is:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dx_1} = (x_2 - x_1) \left\{ \frac{1}{x_1(1-x_1)} + \mu''_{x_1} \right\}.$$

Hieruit kan dan μ''_{x_1} worden gevonden. Deze waarden, berekend, zijn in Tabel V opgegeven:

T A B E L V.

x_1	p	$\frac{dp}{dx_1}$	$x_2 - x_1$	$\frac{1}{x_1(1-x_1)} + \mu''_{x_1}$	μ''_{x_1}
0.1	102	252	0.280	8.8	— 2.3
0.2	122	198	0.322	5.0	— 1.2
0.3	138	156	0.314	3.6	— 1.2
0.4	149.5	119	0.276	2.9	— 1.2
0.5	159	102	0.224	2.9	— 1.1
0.6	168	83	0.168	2.9	— 1.2
0.7	176	79	0.120	3.7	— 1.1
0.8	180.5	46	0.052	4.9	— 1.4
0.9	183.5	12	0.006	10.9	— 0.2

1) VAN DER WAALS, Dit verslag, blz. 145.

Omtrent de waarden, opgegeven bij $x_1 = 0,7, 0,8$ en $0,9$ dient opgemerkt, dat deze weinig vertrouwen verdienen, wegens de geringe waarde, die hierbij $x_2 - x_1$ heeft, waardoor het eerste lid der vergelijking gedeeld moet worden. Om dezelfde reden is voor x_1 kleiner dan $0,1$ μ''_{x_1} niet op te geven.

Blijkbaar zijn alle waarden van μ''_{x_1} negatief en wat absolute waarde betreft, kleiner dan 4. Dit is in overeenstemming met het feit, dat voor stabiele fasen $\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2}\right)_p$ grooter moet zijn dan nul.

Uit het beloop der kromme $\mu'_{x_1} = f'(x_1)$ blijkt, dat het differentiaalquotient van ongeveer $x = 0,2$ tot $x = 0,6$ een constante waarde moet hebben. Werkelijk wordt dit ook voor μ''_{x_1} gevonden.

Omtrent de μ''_{x_1} valt nog op te merken, dat de getalwaarde daarvan ook voor de x_2 van het buigpunt en de daarbij behorende x_1 kan gevonden worden. Door VAN DER WAAALS wordt nl. afgeleid: ¹⁾

$$\frac{d^2 p}{dx_2^2} = \frac{dp}{dx_2} \cdot \frac{dx_1}{dx_2} \left[\frac{2(e^{\mu'_{x_1}} - 1)}{1 - x_1 + x_1 e^{\mu'_{x_1}}} + \mu''_{x_1} \left\{ \frac{2x_1 e^{\mu'_{x_1}}}{1 - x_1 + x_1 e^{\mu'_{x_1}}} - x_1 + \frac{1}{e^{\mu'_{x_1}} - 1} \right\} \right].$$

Daar $\frac{d^2 p}{dx_2^2} = 0$ is voor het buigpunt, moet de factor van $\frac{dp}{dx_2} \cdot \frac{dx_1}{dx_2}$ nul zijn.

Met behulp van de betrekking $e^{\mu'_{x_1}} = \frac{x_2}{1 - x_2} \cdot \frac{1 - x_1}{x_1}$ wordt hieruit gevonden:

$$\mu''_{x_1} = - \frac{2 \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_1 (1 - x_1)}}{2(x_2 - x_1)^2 + x_1 (1 - x_1)}$$

Nu is voor het buigpunt ongeveer $x_2 = 0,66$ en $x_1 = 0,40$. Voor μ''_{x_1} wordt dan gevonden $-1,5$ ongeveer. In aanmerking genomen, dat de plaats van het buigpunt niet nauwkeurig te bepalen is, en dat met de verandering van de x_2 van dit punt ook tevens de x_1 verandert, is de overeenstemming bevredigend te noemen.

Het mengsel tetrachloorkoolstof-aceton.

Deze beide stoffen, chloorkoolstof en aceton werden gekozen met het oog op den kritischen druk, die bij beide ongeveer gelijk is.

Nu wordt door VAN DER WAAALS ²⁾ afgeleid, dat voor $\mu'_{x_1} = \text{constant}$

¹⁾ VAN DER WAAALS, Versl. K. A. v. W. Juni 1900, blz. 175, Cont II blz. 158.

²⁾ VAN DER WAAALS, Versl. K. A. v. W. Juni 1900, blz. 171; Cont. II blz. 153.

de betrekking tusschen p en x_1 wordt weergegeven door een rechte lijn, die tusschen p en x_2 door een hyperbool.

In de onderstellingen nu, dat voor μ'_{x_1} bij lage temperatuur ge-

schreven mag worden: $-\frac{1}{MRT} \frac{d \frac{u_{x_1}}{b_{x_1}}}{dx_1}$; voor b_{12} : $\frac{1}{2} (b_1 + b_2)$ en dat ook de betrekking van GALITZINE—BERTHELOT $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ juist is, houdt de conditie $\mu'_{x_1} = \text{constant}$ in, dat de kritische drukken der componenten gelijk zijn.

Nu is door VAN DER WAALS zelf de boven reeds genoemde verbeterde benadering voor μ'_{x_1} gegeven in plaats van de hier genoemde; bovendien is de betrekking $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ al door KOHNSTAMM¹⁾ besproken en verworpen. Het is dus niet te verwonderen, dat een sterke afwijking van de rechte lijn en de hyperbool bij dit mengsel gevonden werd²⁾.

Het p, x_1, x_2 diagram wordt in Tabel VI gegeven. Aceton moet als bijmengsel beschouwd worden:

T A B E L VI.

Druk.	Brek.verm.	x_2	x_1
34.20	6.1407	0.	0.
41.46	5.7352	0.172	0.044
46.43	5.4772	0.281	0.122
52.27	5.1253	0.430	0.234
55.47	4.9261	0.515	0.333
60.43	4.6135	0.647	0.477
64.49	4.3219	0.771	0.696
69.32	3.7813	1.	1.

In fig. 3 is het in teekening gebracht.

Beide krommen hebben een zeer eenvoudig beloop. Ze keeren den hollen kant naar de x -as. De damp is steeds rijker aan het bijmengsel dan de vloeistof. Het grootste verschil tusschen x_1 en x_2 is ongeveer 0.190.

Beide krommen werden nu vergeleken met de differentiaalvergelijkingen:

¹⁾ KOHNSTAMM, Proefschrift, blz. 99.

²⁾ Uit het overzicht der onderzochte mengsels, door KOHNSTAMM, Zeitschr. f. Phys. Chem. XXXVI, 1, gegeven, blijkt ook, dat gelijkheid van kritischen druk der componenten geenszins behoeft samen te gaan met een rechte lijn voor de lijn $p = f(x_1)$.

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dx_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_2(1 - x_2)}$$

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dx_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_1(1 - x_1)}$$

De uitkomsten zijn in Tabel VII en VIII neergelegd :

TABEL VII.

x_2	p	$\frac{dp}{dx_2}$	$x_2 - x_1$		x_1	
			berek.	waargen.	berek.	waargen.
0.1	39	39	0.090	0.090	0.010	0.010
0.2	43	37.5	0.139	0.141	0.061	0.059
0.3	47	37	0.165	0.178	0.135	0.122
0.4	51	36	0.169	0.190	0.231	0.210
0.5	55	35.5	0.161	0.184	0.339	0.316
0.6	59	35	0.142	0.165	0.458	0.435
0.7	62.5	29	0.097	0.122	0.603	0.578
0.8	65	24.5	0.060	0.080	0.740	0.720
0.9	67.5	23	0.031	0.035	0.869	0.865

TABEL VIII.

x_1	p	$\frac{dp}{dx_1}$	$x_2 - x_1$		x_2	
			berek.	waargen.	berek.	waargen.
0.05	41.5	102	0.117	0.120	0.167	0.170
0.1	45.5	72	0.143	0.160	0.243	0.260
0.2	50.5	48	0.152	0.180	0.352	0.380
0.3	54.5	39	0.150	0.182	0.450	0.482
0.4	58	33	0.137	0.172	0.537	0.572
0.5	61	24	0.098	0.154	0.598	0.654
0.6	63	20	0.076	0.120	0.676	0.720
0.7	64.5	15.5	0.050	0.078	0.750	0.778
0.8	66	15	0.036	0.040	0.836	0.840
0.9	68	14.5	0.019	0.020	0.919	0.920

Blijkbaar voldoen de krommen aan de eerste differentiaalbetrekking veel beter dan aan de tweede. Bij de tweede wordt ook hier de beste overeenstemming aan de randen der krommen verkregen.

Ook voor dit mengsel werd μ'_{x_1} als functie van x_1 bepaald met behulp van de betrekking:

$$\frac{x_1}{1-x_1} e^{\mu'_{x_1}} = \frac{x_2}{1-x_2}.$$

De waarden, zoo gevonden, zijn in Tabel IX opgegeven:

T A B E L IX.

x_1	x_2	$e^{\mu'_{x_1}}$	μ'_{x_1}
0.1	0.260	3 162	1.15
0.2	0.380	2.452	0.90
0.3	0.482	2.171	0.78
0.4	0.572	2.005	0.70
0.5	0.654	1.890	0.64
0.6	0.720	1.714	0.54
0.7	0.778	1.502	0.41
0.8	0.840	1.313	0.27
0.9	0.920	1.278	0.25

Ook hier zijn de waarden van μ'_{x_1} aan de randen der kromme niet nauwkeurig. In fig. 4 zijn de uitkomsten in teekening gebracht. Ook hier geven de punten een goed aaneensluitende kromme.

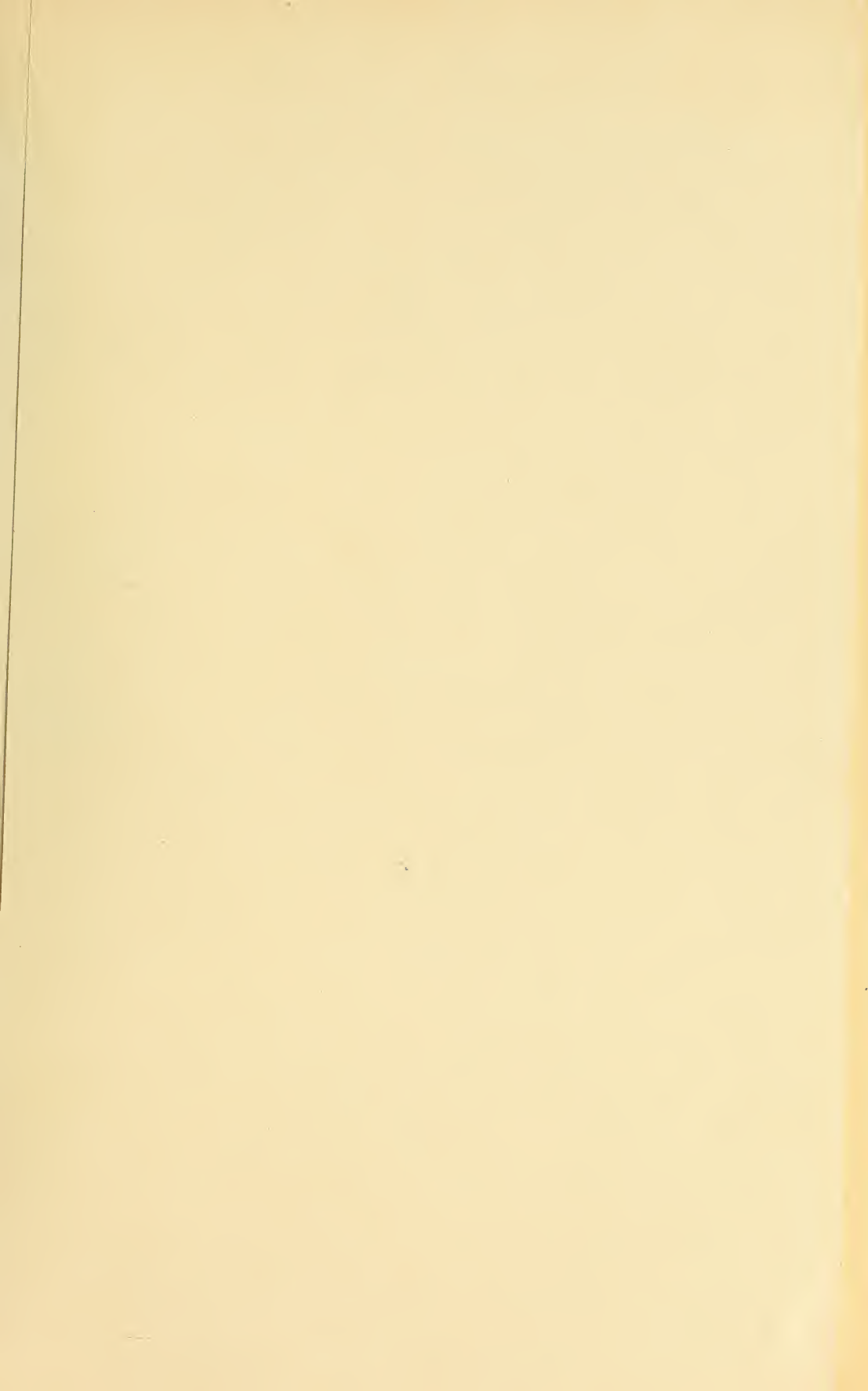
Daar de kritische drukken der componenten bij dit mengsel gelijk zijn, zal in de vergelijking:

$$\mu'_{x_1} = -\frac{f}{T} \frac{dT_{cr}}{dx_1} + \frac{d \log p_{cr}}{dx_1}$$

de 2^e term klein zijn ten opzichte van den eersten. Nemen we dan voor μ'_{x_1} alleen $-\frac{f}{T} \frac{dT_{cr}}{dx_1}$, en nemen we eens aan lineaire afhankelijkheid van T_{cr} met x_1 , dan is hier $\frac{dT_{cr}}{dx_1}$ ongeveer -40 , dus μ'_{x_1} ongeveer 1. In de nabijheid daarvan liggen ook waarden van μ'_{x_1} .

Uit de vergelijking:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dx_1} = (x_2 - x_1) \left\{ \frac{1}{x_1(1-x_1)} + \mu''_{x_1} \right\}$$



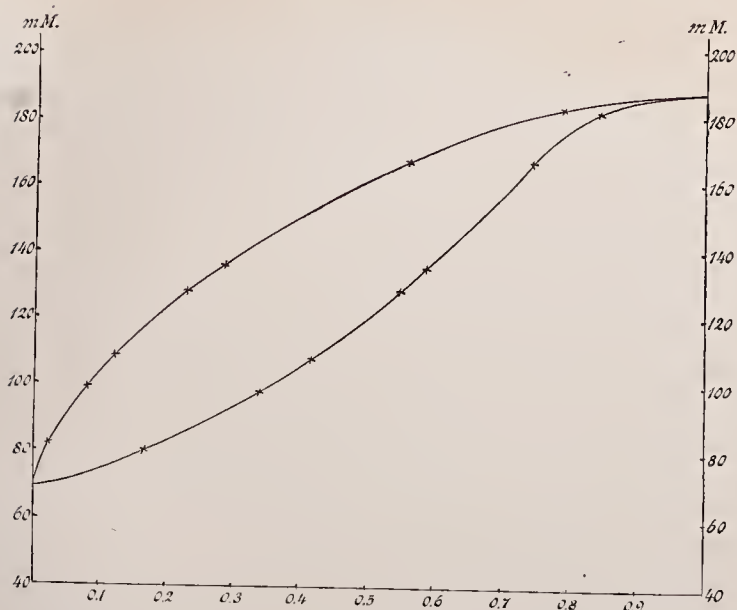


Fig. 1.

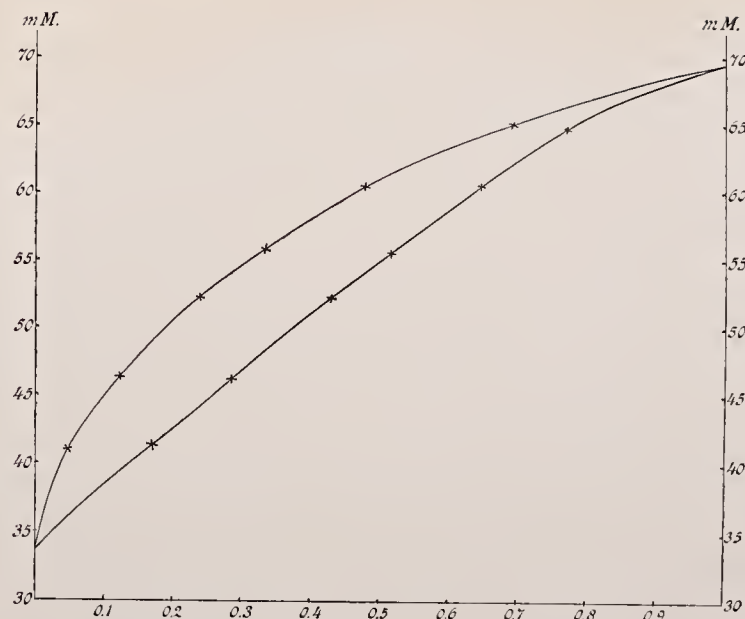


Fig. 3.

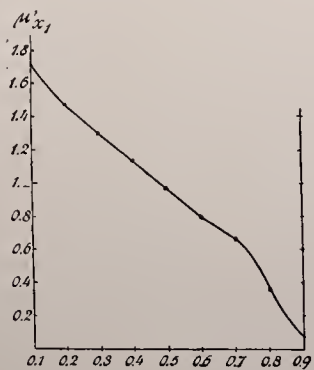


Fig. 2.

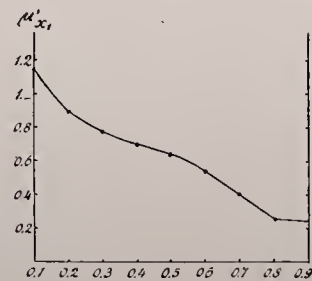


Fig. 4.

is ook weer μ''_{x_1} bepaald. De hieruit gevonden waarden worden in Tabel X aangegeven:

T A B E L X.

x_1	p	$\frac{dp}{dx_1}$	$x_2 - x_1$	$\frac{1}{x_1(1-x_1)} + \mu''_{x_1}$	μ''_{x_1}
0.1	45.5	72	0.160	9.9	-1.2
0.2	50.5	48	0.180	5.3	-1.0
0.3	54.5	39	0.182	3.9	-0.9
0.4	58	33	0.172	3.3	-0.9
0.5	61	24	0.154	2.6	-1.4
0.6	63	20	0.120	2.6	-1.5
0.7	64.5	15.5	0.078	3.1	-1.7
0.8	66	15	0.040	5.7	-0.6
0.9	68	14.5	0.020	10.7	-0.4

Ook hier is aan de waarde van μ''_{x_1} voor $x_1 = 0,7$, $0,8$ en $0,9$ wegens de geringe grootte van $x_2 - x_1$ niet zeer veel vertrouwen te schenken.

De grootte μ''_{x_1} blijkt weer negatief en in absolute waarde kleiner dan 4 te zijn.

Uit het beloop der kromme $\mu'_{x_1} = f(x_1)$ blijkt, dat ze twee buigpunten schijnt te hebben, het eene bij ongeveer $x_1 = 0,3$ en het andere bij ongeveer $x_1 = 0,7$. Merkwaardig is, hoe dit ook uit de verandering der μ''_{x_1} volgt; werkelijk krijgt μ''_{x_1} bij $x_1 = 0,3$ ongeveer, een maximum, bij $x_1 = 0,7$ een minimum.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van den Heer B. M. VAN DALFSEN: „*Over de functie $\frac{a}{b}$ bij meervoudige mengsels.*”

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

De grootheden a en b , die in dit quotiënt optreden zijn de constanten uit de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS, toegepast op een meervoudig mengsel. De grootte $\frac{a}{b}$ stelt dan een uitdrukking voor, die evenredig is met de kritische temperatuur van het ongesplitste mengsel. Wij denken ons het mengsel bepaald door de

moleculairfracties x_1, x_2, \dots, x_n , waarbij $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ en alle x 's positieve grootheden zijn. Verder nemen wij voor a en b homogene quadratische functies van de x 's aan, zoodat

$$\sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} a_{pq} x_p x_q$$

en

$$\sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} b_{pq} x_p x_q.^1)$$

Voor de grootheid a is het duidelijk, dat wij tot een quadratische functie moeten komen, aangezien wij te doen hebben met attracties der moleculen twee aan twee, voor b kunnen wij, zoolang gelijktijdige botsingen van meerdere moleculen worden verwaarloosd, ook met een quadratische functie volstaan ²⁾.

Het is nu voornamelijk te doen om de vraag of er mengsels te vinden zijn, waarvoor $\frac{a}{b}$ stationair wordt.

De samenstellingen dier mengsels vindt men uit

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\partial a}{\partial x_1}}{\frac{\partial b}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial a}{\partial x_2}}{\frac{\partial b}{\partial x_2}} = \dots = \frac{\frac{\partial a}{\partial x_n}}{\frac{\partial b}{\partial x_n}} = \lambda;$$

dus uit het stelsel lineaire vergelijkingen :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial b}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial b}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial a}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial b}{\partial x_n} = 0 \end{array} \right. \text{ benevens } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

of expliciet:

$$(V) \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda b_{11}) x_1 + (a_{12} - \lambda b_{12}) x_2 + \dots + (a_{1n} - \lambda b_{1n}) x_n = 0 \\ (a_{21} - \lambda b_{21}) x_1 + (a_{22} - \lambda b_{22}) x_2 + \dots + (a_{2n} - \lambda b_{2n}) x_n = 0 \\ \vdots \\ (a_{n1} - \lambda b_{n1}) x_1 + (a_{n2} - \lambda b_{n2}) x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda b_{nn}) x_n = 0 \end{array} \right.$$

en

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1.$$

¹⁾ Hierin is $a_{pq} = a_{qp}$ en $b_{pq} = b_{qp}$. Voor a_{pp} en b_{pp} schrijven wij in het vervolg gewoonlijk a_p en b_p .

²⁾ Vgl. H. A. LORENTZ, Wied. Ann. 12, p. 134.

In deze vergelijkingen is $b_{pq} = b_{qp}$ en $a_{pq} = a_{qp}$; het zijn dezelfde grootheden, die in de theorie der binaire mengsels optreden. Alle a 's en b 's zijn essentieel positief.

Uit het stelsel (V) leidt men af, dat voor de gezochte mengsels $\frac{a}{b}$ of λ gevonden wordt uit een vergelijking van den n^{den} graad:

$$\Delta_n \equiv \begin{vmatrix} a_1 - \lambda b_1 & a_{12} - \lambda b_{12} & \dots & a_{1n} - \lambda b_{1n} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_2 - \lambda b_2 & & a_{2n} - \lambda b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} - \lambda b_{n1} & a_{n2} - \lambda b_{n2} & \dots & a_n - \lambda b_n \end{vmatrix} = 0$$

Algebraïsch zijn er dus n oplossingen — de bij de gevonden waarden van λ behoorende waarden van x vindt men uit

$$x_1 = \frac{M_{11}}{\sum_{s=1}^{s=n} M_{1s}} \quad x_2 = \frac{M_{12}}{\sum_{s=1}^{s=n} M_{1s}} \quad \dots \quad x_n = \frac{M_{1n}}{\sum_{s=1}^{s=n} M_{1s}}$$

Hierin stelt M_{pq} de coëfficiënt van $a_{pq} - \lambda b_{pq}$ voor bij de ontwikkeling van Δ_n volgens de elementen uit de p^{e} rij, terwijl men in deze uitdrukkingen achtereenvolgens voor λ de wortels van $\Delta_n = 0$ moet substitueeren.

Wil zoo'n mengsel te verwezenlijken zijn, dan moet men voor de moleculairfracties positieve waarden vinden, zoodat voldaan moet zijn aan een der beide volgende stelsels van ongelijkheden.

$$(A) \quad M_{11} > 0 \quad M_{12} > 0 \quad \dots \quad M_{1n} > 0$$

$$(B) \quad M_{11} < 0 \quad M_{12} < 0 \quad \dots \quad M_{1n} < 0.$$

Zooeven is ter berekening van de x 's gebruik gemaakt van de laatste $(n-1)$ vergelijkingen van het stelsel (V). Daar wij ook $(n-1)$ andere vergelijkingen hadden kunnen kiezen, is het duidelijk, dat voor een te verwezenlijken stationair punt òf steeds $M_{pq} > 0$ òf steeds $M_{pq} < 0$ moet zijn. Het stel ongelijkheden, dat boven is neergeschreven is echter voldoende om de bestaanbaarheid van het mengsel te beoordeelen.

Slechts hoogstens een dezer n mengsels is te verwezenlijken.

Stel toch, dat er twee verschillende bestaanbare mengsels

$$[(x_1)_1, (x_2)_1, \dots, (x_n)_1] \quad \text{en} \quad [(x_1)_2, (x_2)_2, \dots, (x_n)_2]$$

te vinden waren, waarvoor $\frac{a}{b}$ stationair werd. Daar nu krachtens het stel vergelijkingen (V) gelijke wortels λ voeren tot gelijke samenstellingen, behooren bij verschillende mengsels verschillende waarden van λ . Noemen wij de wortels λ behoorende bij de beide boven-

genoemde mengsels λ_1 en λ_2 , dan heeft men het volgende stelsel vergelijkingen:

$$V_1 \begin{cases} \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}\right)_1 - \lambda_1 \left(\frac{\partial b}{\partial x_1}\right)_1 = 0 \\ \left(\frac{\partial a}{\partial x_2}\right)_1 - \lambda_1 \left(\frac{\partial b}{\partial x_2}\right)_1 = 0 \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial a}{\partial x_n}\right)_1 - \lambda_1 \left(\frac{\partial b}{\partial x_n}\right)_1 = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad V_2 \begin{cases} \left(\frac{\partial a}{\partial x_1}\right)_2 - \lambda_2 \left(\frac{\partial b}{\partial x_1}\right)_2 = 0 \\ \left(\frac{\partial a}{\partial x_2}\right)_2 - \lambda_2 \left(\frac{\partial b}{\partial x_2}\right)_2 = 0 \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial a}{\partial x_n}\right)_2 - \lambda_2 \left(\frac{\partial b}{\partial x_n}\right)_2 = 0 \end{cases}.$$

De vergelijkingen V_1 resp. vermenigvuldigende met $(x_1)_2, (x_2)_2, \dots, (x_n)_2$ en die van het stelsel V_2 resp. met $(-x_1)_1, (-x_2)_1, \dots, (-x_n)_1$ en sommeerende vinden wij in verband met de voor homogene quadratische functies geldige identiteit:

$$\sum_{p=1}^{p=n} (x_p)_1 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_p}\right)_2 \equiv \sum_{p=1}^{p=n} (x_p)_2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_p}\right)_1$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1) \left[(x_1)_2 \left(\frac{\partial b}{\partial x_1}\right)_1 + (x_2)_2 \left(\frac{\partial b}{\partial x_2}\right)_1 + \dots + (x_n)_2 \left(\frac{\partial b}{\partial x_n}\right)_1 \right] = 0$$

of daar verondersteld is $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\sum_{s=1}^{s=n} (x_s)_2 [b_{s1} (x_1)_1 + b_{s2} (x_2)_1 + \dots + b_{sn} (x_n)_1] = 0$$

Daar nu echter alle b_{pq} 's positief zijn en voor bestaanbare mengsels alle x 's ook, kan aan bovenstaande vergelijking niet voldaan worden.

Er is dus hoogstens één bestaanbaar mengsel, waarvoor $\frac{a}{b}$ stationair wordt, de λ van dat mengsel voldoet òf aan de ongelijkheden (A) òf aan (B).

Voor dat wij overgaan tot het onderzoek naar den aard van het stationaire punt bewijzen wij eerst de stelling:

$$\frac{\partial \Delta_n}{\partial \lambda} = \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} (-b_{pq} M_{pq})$$

Deze stelling kan gemakkelijk geverifieerd worden voor $n = 2$; ze geldt dan ook nog als $b_{pq} \neq b_{qp}$, m.a.w. voor asymmetrische determinanten.

Het algemeen bewijs verkrijgt men door aan te toonen, dat, indien de stelling juist is voor determinanten van $(n-1)$ rijen en

kolommen (ook asymmetrische), ze ook geldig is voor determinanten van n rijen en kolommen.

Nu is

$$\Delta_n = (a_1 - \lambda b_1) M_{11} + (a_{12} - \lambda b_{12}) M_{12} + \dots + (a_{1n} - \lambda b_{1n}) M_{1n}.$$

Voeren wij nu de volgende notatie in:

Δ_{pq} is de determinant verkregen uit Δ_n door de p^e rij en de q^e kolom te schrappen.

Δ_{rs} is de determinant verkregen uit Δ_n door de rijen met rangnummer p en r en de kolommen met rangnummer q en s te schrappen.

Nu is:

$$\frac{\partial \Delta_n}{\partial \lambda} = -b_1 M_{11} - b_{12} M_{12} \dots - b_{1n} M_{1n} + \sum_{s=1}^{s=n} (a_{1s} - \lambda b_{1s}) \frac{\partial M_{1s}}{\partial \lambda}.$$

Verder is

$$M_{1s} = (-1)^{s-1} \Delta_{1s}.$$

Δ_{1s} is een (asymmetrische) determinant met $(n-1)$ rijen en kolommen, waarop wij dus het theorema geldig verklaard hebben, zoodat nu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \lambda} &= \sum_{r=1}^{r=n} -b_{1r} M_{1r} \pm \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s-1} (a_{1s} - \lambda b_{1s}) \times \\ &\quad \times \sum_{\mu=2}^{\mu=n} \sum_{q=1, 2, \dots, (s) \dots n} (-b_{\mu q}) (-1)^{\mu-2} (-1)^{q-2} \Delta_{1s, \mu, q}^{(1)} \end{aligned}$$

waarin het positieve teeken moet gebruikt worden voor $q > s$ en het negatieve als $q < s$.

Eerst de sommatie naar s volvoerende vindt men

$$\frac{\partial \Delta_n}{\partial \lambda} = \sum_{r=1}^{r=n} -b_{1r} M_{1r} + \sum_{\mu=2}^{\mu=n} \sum_{q=1}^{q=n} (-b_{\mu q}) \Delta_{\mu q} (-1)^{\mu-1} (-1)^{q-1}$$

of

$$\frac{\partial \Delta_n}{\partial \lambda} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n} \sum_{q=1}^{q=n} (-b_{\mu q}) M_{\mu q}.$$

Voor een te verwezenlijken mengsel, waarvoor $\frac{a}{b}$ stationair wordt hebben alle grootheden $M_{\mu q}$ hetzelfde teeken, zooals bewezen is.

1) Door s tusschen haakjes te plaatsen wordt aangegeven, dat bij de sommatie aan q alle waarden van 1 tot n behalve s moeten worden toegekend.

Het blijkt nu, dat voor zulke punten, wat dat teeken van M_{pq} ook moge zijn $\frac{\partial \Delta_n}{\partial \lambda} M_{11}$ steeds negatief is. Met behulp dezer stelling kunnen wij de condities ter onderscheiding van een absoluut maximum of minimum nagaan.

Schrijven wij thans $F \equiv a - \lambda b$.

Deze uitdrukking F , beschouwd als functie van $x_1, x_2 \dots x_n$, en λ , is nul voor ieder gegeven stel waarden $x_1, x_2, \dots x_n$, indien men aan λ de bij die samenstelling behoorende waarde van $\frac{a}{b}$ toekent.

Gaat men omgekeerd uit van een gegeven λ ($\equiv \lambda_0$) dan leveren de oplossingen der vergelijking $F \equiv a - \lambda_0 b = 0$, beschouwd als een vergelijking in $x_1, x_2, \dots x_n$ alle mengsels voor welke $\frac{a}{b}$ de gegeven waarde λ_0 bezit. Is die waarde λ_0 daarbij een absoluut maximum of minimum, dan mag slechts een enkel stel bestaanbare waarden $x_1, x_2, \dots x_n$ aan die vergelijking voldoen.

Daar F een homogene quadratische uitdrukking in de n x 's is kunnen wij haar neerschrijven als de som van n quadraten.

Noemen wij weer Δ_n den determinant, die het 1^{ste} lid vormt van de n^e graadsvergelijking in λ ; Δ_{n-1} den determinant daaruit verkregen door het schrappen van de n^e rij en de n^e kolom; Δ_{n-2} dien, verkregen door de laatste 2 rijen en kolommen te schrappen, zoodat tenslotte $\Delta_1 \equiv a_1 - \lambda b_1$.

Het splitsen in quadraten wordt nu zoo tot stand gebracht, dat wij zorgen, dat in het eerste kwadraat alle termen met x_1 worden ondergebracht, in het 2^e kwadraat alle nu nog overschietende termen met x_2 een plaats vinden, enz., tot tenslotte x_n^2 ons laatste kwadraat is. Om nu niet met wortelvormen te doen te hebben moeten wij telkens onze functie met bepaalde coëfficiënten vermenigvuldigen. Het blijkt nu, door op de ontwikkeling in te gaan, dat, als wij de opvolgende lineaire homogene uitdrukkingen, die in het kwadraat moeten worden gebracht door $I_1, L_2 \dots L_n$ voorstellen:

$$\begin{aligned} & \Delta_1^2 \Delta_2^2 \dots \Delta_{n-2}^2 \Delta_{n-1} \Delta_n F \equiv \Delta_1 \Delta_2^2 \Delta_3^2 \dots \Delta_{n-2}^2 \Delta_{n-1} \Delta_n L_1^2 + \\ & + \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3^2 \dots \Delta_{n-2}^2 \Delta_{n-1} \Delta_n L_2^2 + \Delta_1^2 \Delta_2 \Delta_3 \Delta_4^2 \dots \Delta_{n-2}^2 \Delta_{n-1} \Delta_n L_3^2 + \\ & + \dots + \Delta_1^2 \Delta_2^2 \dots \Delta_{p-2}^2 \Delta_{p-1} \Delta_p \Delta_{p+1}^2 \dots \Delta_{n-2}^2 \Delta_{n-1} \Delta_n L_p^2 + \dots \\ & \dots \Delta_1^2 \Delta_2^2 \dots \Delta_{n-2}^2 L_n^2 \quad 1). \end{aligned}$$

1) Bij de afleiding is doorlopend gebruik gemaakt van de stelling:

$$\begin{array}{c} \Delta \Delta \equiv \Delta \Delta - \Delta \Delta \\ p q \quad p q r s \quad p s q r \\ r s \end{array}$$

Hierin is

$$L_1 = \sum_{p=1}^{p=n} (a_{1p} - \lambda b_{1p}) x_p^{-1}$$

$$L_2 = \sum_{p=2}^{p=n} \begin{vmatrix} a_1 - \lambda b_1 & a_{1p} - \lambda b_{1p} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_{2p} - \lambda b_{2p} \end{vmatrix} x_p$$

$$L_s = \sum_{p=s}^{p=n} \begin{vmatrix} a_1 - \lambda b_1 & a_{12} - \lambda b_{12} & \dots & a_{1,s-1} & -\lambda b_{1,s-1} & a_{1p} & -\lambda b_{1p} \\ a_{21} - \lambda b_{21} & a_2 - \lambda b_2 & \dots & a_{2,s-1} & -\lambda b_{2,s-1} & a_{2p} & -\lambda b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s-1,1} - \lambda b_{s-1,1} & \dots & \dots & a_{s-1,s-1} & -\lambda b_{s-1,s-1} & a_{s-1,p} - \lambda b_{s-1,p} \\ a_{s,1} & -\lambda b_{s,1} & \dots & a_{s,s-1} & -\lambda b_{s,s-1} & a_{sp} & -\lambda b_{sp} \end{vmatrix} x_p.$$

$$L_n = \Delta_n x_n.$$

Men vindt dus:

$$F \equiv \frac{L_1^2}{\Delta_1} + \frac{L_2^2}{\Delta_1 \Delta_2} + \dots + \frac{L_p^2}{\Delta_{p-1} \Delta_p} + \dots + \frac{L_n^2}{\Delta_{n-1} \Delta_n} {}^2),$$

Voor een stationair punt wordt $\Delta_n = 0$; en verdwijnt dus de laatste term aangezien deze $\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2$ is ³⁾.

Veronderstel nu, dat het stationaire punt een absoluut maximum of minimum is. Laat λ_0 de bijbehorende waarde van $\frac{a}{b}$ zijn. Dan mag er voor $\lambda = \lambda_0$ slechts één samenstelling, dus slechts één stel waarden voor x_1, x_2, \dots, x_n te vinden zijn. Dit nu is alleen mogelijk als alle coëfficiënten van L_1, L_2, \dots, L_{n-1} een zelfde teeken hebben

¹⁾ In verband met het volgende kan men ook hieruit gemakkelijk het stelsel (V) terugvinden. Vgl. voor een ternair stelsel: VAN DER WAALS, Versl. Kon. Akad. Sept. 1902, p. 289.

²⁾ Zonder nader op de splitsing in quadraten in te gaan, zooals die boven is uitgevoerd toont ROUTH in zijn Rigid Dynamics, Advanced Part, 5th ed. p. 426, met behulp van invarianten aan, dat de coëfficiënt van L_p het teeken van $\frac{\Delta_p}{\Delta_{p-1}}$ heeft, hetgeen met het bovenstaande in overeenstemming is.

³⁾ Een bezwaar doet zich voor als voor $\lambda = \lambda_0$ ook $\Delta_{n-1} = 0$ wordt, als dus een stationair punt in het mengsel (1, 2, ..., n-1) tevens stationair punt is voor het totale mengsel. Bij de splitsing in quadraten zullen wij dan de volgorde veranderen, zoodat niet x_n^2 als laatste term optreedt. Zijn alle eerste minoren behoorende bij elementen uit de hoofd diagonaal van $\Delta_n = 0$, dan zullen, willen er stationaire punten zijn alle minoren 0 moeten zijn. De vergelijkingen (V) hebben dan een hooger grad van afhankelijkheid en er bestaan oneindig veel mengsels waarvoor $\frac{a}{b}$ stationair wordt.

voor $\lambda = \lambda_0$. Ware dit toch niet het geval, dan zou het mogelijk zijn voor $\lambda = \lambda_0$, waarvoor reeds de laatste coëfficiënt verdwenen is, aan de vergelijking $f = 0$ te voldoen zonder dat de afzonderlijke L_1, L_2, \dots, L_{n-1} nul behoeven te zijn en dan zouden er meerdere naburige stellen waarden x_1, x_2, \dots, x_n te vinden zijn, waarvoor $\frac{a}{b}$ die absoluut maximaal of minimaal onderstelde waarde had; hetgeen ongerijmd is.

Wil een stationair punt dus een absoluut minimum of maximum zijn, dan wordt vereischt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_1 \Delta_2 > 0 \\ \vdots \\ \Delta_{p-1} \Delta_p > 0 \\ \Delta_{n-2} \Delta_{n-1} > 0 \end{array} \right. (T_1) \text{ dus } \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 > 0 \\ \vdots \\ \Delta_p > 0 \\ \Delta_{n-1} > 0 \end{array} \right. \text{ of } \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_1 \Delta_2 < 0 \\ \vdots \\ \Delta_{p-1} \Delta_p < 0 \\ \Delta_{n-2} \Delta_{n-1} < 0 \end{array} \right. \text{ dus } (T_2) \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 < 0 \\ (-1) \Delta_2 < 0 \\ \vdots \\ (-1)^{p-1} \Delta_p < 0 \\ \vdots \\ (-1)^{n-2} \Delta_{n-1} < 0 \end{array} \right.$$

Zij λ_0 nu een wortel van $\Delta_n = 0$, die op een bereikbaar absoluut maximum of minimum duidt, dan wordt dus voor $\lambda = \lambda_0$ de coëfficiënt van het laatste kwadraat (x_n^2) in de ontwikkeling van f nul. Voor $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ beslist het teeken van $\Delta_{n-1} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \lambda}$ over het teeken van dien coëfficiënt, terwijl voor $\lambda = \lambda_0 - \varepsilon$ het teeken bepaald wordt door $-\Delta_{n-1} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \lambda}$.

Nu is echter zooals wij straks aantoonde voor een te verwezenlijken stationair punt

$$\Delta_{n-1} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \lambda} = M_{11} \frac{\partial \Delta_n}{\partial \lambda} < 0.$$

Het blijkt dus, dat voor $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ de laatste term steeds negatief, voor $\lambda = \lambda_0 - \varepsilon$ deze positief wordt.

Hieruit volgt, dat ingeval van een absoluut minimum voldaan moet zijn aan de ongelijkheden (T_1), terwijl voor een absoluut maximum de ongelijkheden (T_2) moeten vervuld zijn. In het eerste geval voegen zich daarbij nog de bestaanbaarheidscondities (A), in het tweede geval de condities (B).

Het is duidelijk, dat door een andere nummering der componenten andere ongelijkheden zouden verkregen zijn — blijkbaar volstaat echter het stelsel (T_1) of (T_2) om een absoluut minimum of maximum aan te geven.

Stel, dat in het mengsel van eenige componenten bv. 1, 2, \dots , p een bereikbaar minimum kan optreden.

Binnen de grenzen van bestaanbaarheid voor dat mengsel kan dan niet een 2^e stel waarden van de x 's te vinden zijn waarvoor $\Delta_p = 0$.

Daar verder $\frac{\partial \Delta_p}{\partial \lambda}$ voor dat minimum negatief is, kunnen wij uit het stelsel ongelijkheden (T'_1) de volgende conclusies trekken:

Een bereikbaar absoluut minimum ligt lager dan de $\frac{a}{b}$ voor de componenten en lager dan eventueel optredende minima in eenig uit de gegeven componenten samen te stellen mengsel.

Heeft het oorspronkelijk mengsel een maximum en treedt er ook een maximum op in het p -voudig mengsel (1, 2, . . . p), dan is voor het maximum in het p -voudig mengsel $\Delta_p = 0$ en $\frac{\partial \Delta_p}{\partial \lambda} \Delta_{p-1}$ negatief,

dus $\frac{\partial \Delta_p}{\partial \lambda}$ heeft daar het teeken van $-\Delta_{p-1}$. Nu is $(-1)^{p-2} \Delta_{p-1} < 0$,

dus Δ_{p-1} heeft het teeken van $(-1)^{p-1}$. $\frac{\partial \Delta_p}{\partial \lambda}$ heeft dus het teeken

van $(-1)^p$. Laat λ_p dat maximum voorstellen, dan is, daar Δ_p voor bestaansbare mengsels slechts eens 0 wordt, voor elke waarde van $\lambda > \lambda_p$, Δ_p voorzien van het teeken $(-1)^p$ voor elke waarde $< \lambda_p$ daarentegen van het teeken $(-1)^{p-1}$. Voor het maximum in het n -voudig mengsel is $(-1)^{p-1} \Delta_p < 0$, en heeft dus Δ_p het teeken aangewezen door $(-1)^p$. Hieruit volgt, dat het stelsel ongelijkheden (T'_2) zich als volgt in woorden laat brengen:

Een bereikbaar absoluut maximum ligt hooger dan de $\frac{a}{b}$ voor de componenten en ook hooger dan eventuele maxima in uit de gegeven componenten te vormen mengsels.

De vraag rijst nu, of een maximum of minimum in het n -voudig mengsel ook iets impliceert over maxima of minima in de uit het n -voudig mengsel te vormen binaire mengsels.

Stel, dat het n -voudig mengsel een minimum vertoont voor $\lambda = \lambda_m$ en laat de samenstelling van dat mengsel aangegeven worden door $[(x_1)_m, (x_2)_m \dots (x_n)_m]$, dan is

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda_m b_1)(x_1)_m + (a_{12} - \lambda_m b_{12})(x_2)_m + \dots + (a_{1n} - \lambda_m b_{1n})(x_n)_m = 0 \\ (a_{21} - \lambda_m b_{21})(x_1)_m + (a_2 - \lambda_m b_2)(x_2)_m + \dots + (a_{2n} - \lambda_m b_{2n})(x_n)_m = 0 \\ \vdots \\ (a_{n1} - \lambda_m b_{n1})(x_1)_m + (a_{n2} - \lambda_m b_{n2})(x_2)_m + \dots + (a_n - \lambda_m b_n)(x_n)_m = 0. \end{cases}$$

Nu weten wij, dat voor een bestaanbaar absoluut minimum $a_s - \lambda_m b_s > 0$, terwijl natuurlijk ook $(x_s)_m > 0$.

Wil aan bovenstaande vergelijkingen voldaan worden dan is noodig,

dat in elke vergelijking minstens één der coëfficiënten negatief worden.

Dit wordt op zijn voordeeligst bereikt voor $n = 2t$ als

$$a_{12} - \lambda_m b_{12} < 0, \quad a_{34} - \lambda_m b_{34} < 0, \quad \text{en} \quad a_{2t-1, 2t} - \lambda_m b_{2t-1, 2t} < 0.$$

Men heeft dan b.v.

$$a_s - \lambda_m b_s > 0 \quad a_{s, s+1} - \lambda_m b_{s, s+1} < 0 \quad a_{s+1} - \lambda_m b_{s+1} > 0$$

dus

$$\frac{a_{s, s+1}}{b_{s, s+1}} < \lambda_m \quad \text{en} \quad \lambda_m < \frac{a_s}{b_s} \quad \text{en} \quad \lambda_m < \frac{a_{s+1}}{b_{s+1}}$$

zoodat a fortiori

$$\frac{a_{s, s+1}}{b_{s, s+1}} < \frac{a_s}{b_s} \quad \text{en} \quad \frac{a_{s, s+1}}{b_{s, s+1}} < \frac{a_{s+1}}{b_{s+1}}.$$

Het mengsel $[s, s+1]$ bezit dan een minimum.

Op zijn minst zijn dus bij een mengsel van $2n$ componenten in n binaire mengsels minima noodig, wil het totale mengsel een minimum vertoonen.

Is $n = 2t + 1$ dan zijn er minstens $t + 1$ of $\frac{1}{2}(n + 1)$ minima in de binaire mengsels noodig, wil het totale mengsel een minimum vertoonen. Men neme b.v.

$$a_{12} - \lambda_m b_{12} < 0 \quad a_{34} - \lambda_m b_{34} < 0 \quad \dots \quad a_{n-2, n-1} - \lambda_m b_{n-2, n-1} < 0$$

en

$$a_{n1} - \lambda_m b_{n1} < 0.$$

Voor n even is dan het geval genomen, dat elke component slechts met één andere een minimum vertoont, terwijl voor n oneven één der componenten met 2 andere een minimum geeft.

Vormt een component met meerdere andere minima dan zijn meerdere condities volstrekt noodzakelijk — neemt men b.v. aan, dat $n - 1$ der componenten onderling geen minima geven, dan moet zeker de laatste component met elk der $n - 1$ overige een minimum geven, wil het totale mengsel een absoluut minimum vertoonen.

Bovenstaande stellingen mogen natuurlijk niet omgekeerd worden; zoo zijn minstens $\frac{1}{2}n$ (resp. $\frac{1}{2}(n + 1)$) minima noodig, maar deze geven nog volstrekt geen waarborg voor het optreden van een absoluut minimum in het n -voudig mengsel.

In geval van een bereikbaar absoluut maximum is $a_s - \lambda_M b_s < 0$ en wordt dus vereischt, dat in ons stel vergelijkingen zeker in elk lid één positieve term voorkomt. Uit

$$a_s - \lambda_M b_s < 0 \quad a_{rs} - \lambda_M b_{rs} > 0 \quad \text{en} \quad a_r - \lambda_M b_r < 0$$

volgt

$$\frac{a_{rs}}{b_{rs}} > \lambda_M \quad \text{terwijl} \quad \lambda_M > \frac{a_s}{b_s} \quad \text{en} \quad \lambda_M > \frac{a_r}{b_r}.$$

dus a fortiori

$$\frac{a_{rs}}{b_{rs}} > \frac{a_s}{b_s} \quad \text{en} \quad \frac{a_{rs}}{b_{rs}} > \frac{a_r}{b_r},$$

zoodat het binair mengsel (r, s) dan een maximum vertoont.

Evenals bij een minimum beredeneeren wij hier, dat voor het optreden van een absoluut maximum in een mengsel van $2t$ (resp. $2t + 1$) componenten minstens vereischt wordt het optreden van maxima in t (resp. $t + 1$) binaire mengsels.

Voor een verder onderzoek dienen wij nader in te gaan op de grootheden b_{pq} en a_{pq} .

Voor b_{pq} gebruiken wij de door LORENTZ gegeven formule $b_{pq} = 2^{4/3} \pi (r_p + r_q)^3$, waarin r_p de straal van de molecule van de p^e component voorstelt.

Deze formule blijft ook geldig voor $p = q$.

De coëfficiënt van λ^n in de vergelijking $\Delta_n = 0$ is

$$(-1)^n \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^n \Delta_n.$$

Nu is

$$\Delta_{b=2} = - \frac{8^4}{9} \pi^2 (r_1 - r_2)^2 [r_1^4 + r_2^4 + 30 r_1^2 r_2^2 + 8 r_1^3 r_2 + 8 r_2^3 r_1]$$

$$\Delta_{b=3} = - \left(\frac{8}{3}\right)^3 \pi^3 6 (r_1 - r_2)^2 (r_2 - r_3)^2 (r_3 - r_1)^2 [r_1 (r_2 + r_3)^2 + r_2 (r_3 + r_1)^2 + r_3 (r_1 + r_2)^2]$$

$$\Delta_{b=4} = \left(\frac{8}{3}\right)^4 \pi^4 9 (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_1 - r_4)^2 (r_2 - r_3)^2 (r_2 - r_4)^2 (r_3 - r_4)^2.$$

Bij 5 componenten wordt de determinant op de b 's identiek 0; men vindt n.l.

$$\begin{aligned} \Delta_{(5)} \Delta_{(5)} &= \Delta_{(5)} \Delta_{(5)} - \Delta_{(5)}^2 = \\ &= \left(\frac{8}{3}\pi\right)^4 9 (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_1 - r_5)^2 (r_2 - r_3)^2 (r_2 - r_5)^2 (r_3 - r_5)^2 \times \\ &\times \left(\frac{8}{3}\pi\right)^4 9 (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_1 - r_4)^2 (r_2 - r_3)^2 (r_2 - r_4)^2 (r_3 - r_4)^2 + \\ &- \left(\frac{8}{3}\pi\right)^8 \{9 (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_2 - r_3)^2 (r_1 - r_4) (r_1 - r_5) (r_2 - r_4) \\ &(r_2 - r_5) (r_3 - r_4) (r_3 - r_5)\}^2 = 0. \end{aligned}$$

Dus $\Delta_{(5)} \equiv 0$ daar $\Delta_{(5)}$ niet identiek 0 is.

$\frac{44}{55}$

Bij den determinant van den 6^{den} graad worden niet alleen alle

1) Wied. Ann. 12 p. 134. Feitelijk komt hier nog een constante factor N voor.

2) Deze uitkomsten zijn verkregen door op te merken, dat Δ_b steeds deelbaar is door $(r_p - r_q)^2$; de coëfficiënten van den overschietenden factor zijn met behulp van onbepaalde coëfficiënten gevonden.

minoren behoorende bij elementen uit de hoofddiagonaal 0 maar ook alle andere minoren van den 5^{den} graad ¹⁾.

Dan is het echter duidelijk, dat bij mengsels met 6 en meer componenten de determinanten op de b 's identiek verdwijnen.

Omtrent de grootheid a_{pq} is door BERTHELOT en reeds vroeger door GALITZINE de eenvoudige veronderstelling $a^2_{pq} = a_p a_q$ gemaakt. Hoewel deze formule wel niet streng waar zal zijn, zooals proeven over binaire mengsels reeds duidelijk hebben aangetoond, loont het toch de moeite om na te gaan tot welke conclusies bovenstaande regel ons bij meervoudige mengsels voert.

Voor $a_{pq} = \sqrt{a_p a_q}$ worden alle minoren van den 2^{den} en hooger grad van den determinant op a 's 0 waaruit volgt, dat de vergelijking $\Delta_n = 0$ zich reduceert tot

$$\lambda^{n-1} \sum_{p=1}^{p=n} \sum_{q=1}^{q=n} B_{pq} a_{pq} - \lambda_n \Delta_b = 0$$

alwaar B_{pq} de coëfficiënt van b_{pq} is bij ontwikkeling van den determinant Δ_b . Er is dus een $(n-1)$ voudige wortel $\lambda = 0$, die natuurlijk geen bereikbaar maximum of minimum, zelfs geen ander stationair punt kan aangeven.

Gaan we nu de verschillende mengsels na onder vooropstelling van den regel van GALITZINE-BERTHELOT.

$$n = 2.$$

Naast den wortel $\lambda = 0$ treedt een 2^e wortel op, die zeker niet op een maximum kan duiden, want uit $\frac{a_{12}}{b_{12}} > \frac{a_1}{b_1}$ en $\frac{a_{12}}{b_{12}} > \frac{a_2}{b_2}$, zou volgen $\frac{a^2_{12}}{b^2_{12}} > \frac{a_1 a_2}{b_2 b_2}$ en in verband met $b^2_{12} > b_1 b_2$ dus zeker

¹⁾ Zoo vinden wij voor den asymmetrischen determinant

$$D \equiv \begin{vmatrix} b_1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_2 & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_3 & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_4 & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_5 \end{vmatrix}$$

$$DD = \binom{8}{3\pi} 4^9 (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_2 - r_3)^2 (r_1 - r_4)^2 (r_2 - r_4)^2 (r_3 - r_4)^2 \times$$

⁴⁴
⁵⁵

$$\begin{aligned} & \times \binom{8}{3\pi} 4^9 (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_2 - r_3)^2 (r_1 - r_5) (r_1 - r_6) (r_2 - r_5) (r_2 - r_6) (r_3 - r_5) (r_3 - r_6) + \\ & - \binom{8}{3\pi} 4^9 (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_2 - r_3)^2 (r_1 - r_4) (r_1 - r_5) (r_2 - r_4) (r_2 - r_5) (r_3 - r_4) (r_3 - r_5) \times \\ & \times \binom{8}{3\pi} 4^3 (r_1 - r_2)^2 (r_1 - r_3)^2 (r_2 - r_3)^2 (r_1 - r_4) (r_1 - r_6) (r_2 - r_4) (r_2 - r_6) (r_3 - r_4) (r_3 - r_6) = \\ & = 0. \end{aligned}$$

$$a^2_{12} > a_1 a_2.$$

Het optreden van een minimum is echter a priori niet uitgesloten; de algemeene condities gaan thans over in:

$$b_{12} > \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}} b_1 \quad \text{en} \quad b_{12} > \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2}} b_2.$$

Het is dus niet in te zien waarom het optreden van een minimum samengaan moet met $a^2_{12} < a_1 a_2$ ¹⁾.

Zelfs voor $a^2_{12} > a_1 a_2$ kan zeer goed een minimum optreden.

Er zijn trouwens bezwaren om aan te nemen, dat $a^2_{12} < a_1 a_2$, want deze veronderstelling voert bij verlaging van temperatuur tot partieele mengbaarheid ²⁾ en dit verschijnsel komt waarschijnlijk bij normale stoffen niet voor ³⁾.

Wel geldt voor een bestaanbaar minimum:

$$a_1 > b_1 \frac{a_{12}}{b_{12}} \quad \text{en} \quad a_2 > b_2 \frac{a_{12}}{b_{12}}, \quad \text{dus}$$

$$a_1 + a_2 - 2a_{12} > (b_1 + b_2 - 2b_{12}) \frac{a_{12}}{b_{12}}, \quad \text{dus}$$

$$a_1 + a_2 - 2a_{12} > 0.$$

Voor alle temperaturen partieele mengbaarheid uitsluitende, vindt men dus bij een optredend minimum:

$$\sqrt{a_1 a_2} < a_{12} < \frac{1}{2} (a_1 + a_2).$$

$n = 3$.

De vergelijking $\Delta_3 = 0$ heeft een dubbelwortel $\lambda = 0$, men krijgt dus de volgende teekenreeks:

I	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <thead> <tr> <th style="border: none; padding: 5px;">λ</th> <th style="border: none; padding: 5px;">Δ_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">$+\infty$</td> <td style="border: none; padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">+</td> <td style="border: none; padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">+</td> <td style="border: none; padding: 5px;">-</td> </tr> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">0</td> <td style="border: none; padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="border: none; padding: 5px;">-</td> </tr> </tbody> </table>	λ	Δ_3	$+\infty$	+	+	0	+	-	0	0	$-\infty$	-	of	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <thead> <tr> <th style="border: none; padding: 5px;">λ</th> <th style="border: none; padding: 5px;">Δ_3</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">$+\infty$</td> <td style="border: none; padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">0</td> <td style="border: none; padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">-</td> <td style="border: none; padding: 5px;">+</td> </tr> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">-</td> <td style="border: none; padding: 5px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: none; padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="border: none; padding: 5px;">-</td> </tr> </tbody> </table>	λ	Δ_3	$+\infty$	+	0	0	-	+	-	0	$-\infty$	-	II
λ	Δ_3																											
$+\infty$	+																											
+	0																											
+	-																											
0	0																											
$-\infty$	-																											
λ	Δ_3																											
$+\infty$	+																											
0	0																											
-	+																											
-	0																											
$-\infty$	-																											

¹⁾ VAN DER WAALS. Versl. Kon. Ak. Sept. 1902, p. 294.

²⁾ VAN DER WAALS. Continuïtat II, p. 43. Bij de afleiding aldaar is echter verondersteld, dat $b_{pq} = \frac{1}{2} (b_p + b_q)$.

³⁾ VAN DER WAALS. Statique des Fluides, p. 32.

Geval I.

Er is een pos. wortel λ , die $\Delta_3 = 0$ maakt, deze kan echter nooit op een bestaanbaar absoluut maximum of minimum wijzen, want $\frac{d\Delta_3}{d\lambda}$ is daar positief, duidende op een negatieve waarde van de minoren van den 2^{den} graad en deze moeten (zie ongelijkheden (T_1) en (T_2)) zoowel voor een maximum als voor een minimum positief zijn.

Geval II.

De eene wortel, die $\Delta_3 = 0$ maakt is negatief, de andere 0, dus geen van beide kunnen op een bestaanbaar mengsel duiden.

Bij een ternair mengsel is de regel van GALITZINE-BERTHELOT dus niet vereenigbaar met het optreden van een maximum of een minimum. Een stationair punt, dat noch maximum, noch minimum is, is echter in geval I niet uitgesloten.

Voor $n = 4$ heeft $\Delta_4 = 0$ een 3-voudigen wortel $\lambda = 0$.

De teekenreeks wordt dan :

I	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">λ</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Δ_4</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$+\infty$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$+$</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">—</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">—</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">—</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$-\infty$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$+$</td> </tr> </table>	λ	Δ_4	$+\infty$	$+$	0	0	—	—	—	0	$-\infty$	$+$	of	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">λ</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">Δ_4</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$+\infty$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$+$</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$+$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$+$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">—</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$-\infty$</td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;">$+$</td> </tr> </table>	λ	Δ_4	$+\infty$	$+$	$+$	0	$+$	—	0	0	$-\infty$	$+$	II
λ	Δ_4																											
$+\infty$	$+$																											
0	0																											
—	—																											
—	0																											
$-\infty$	$+$																											
λ	Δ_4																											
$+\infty$	$+$																											
$+$	0																											
$+$	—																											
0	0																											
$-\infty$	$+$																											

In geval I behoort de enkelvoudige wortel λ bij een negatieve waarde van $\frac{a}{b}$ en kan dus geen bestaanbaar mengsel voorstellen.

In tabel II is voor den enkelvoudigen wortel $\frac{\partial \Delta_4}{\partial \lambda}$ positief; de minoren van den 3^{en} graad moeten dan, wil het mengsel te realiseeren zijn, negatief zijn. Het blijkt dus, dat zoodra $a_{pq}^2 = a_p a_q$ gesteld wordt quaternaire mengsels geen minimum in $\frac{a}{b}$ kunnen vertoonen. Een maximum is uitgesloten, daar dit voeren zou tot maxima in minstens 2 uit de componenten te vormen binaire mengsels en deze zijn, als $a_{pq}^2 = a_p a_q$ gesteld wordt, niet mogelijk.

Voor mengsels waarbij $n > 4$, is een mengsel waarvoor $\frac{a}{b}$ stationair wordt zeker uitgesloten, zoodra men $a_{pq}^2 = a_p a_q$ stelt, want er is dan een $(n-1)$ -voudige wortel $\lambda = 0$ en een wortel $\lambda = \infty$.

Resumeerende :

Neemt men den regel van GALITZINE-BERTHELOT aan, dan vindt men :

$n = 2$. Geen maximum ; een minimum is mogelijk.

$n = 3$. Geen maximum of minimum — een stationair punt, mits geen maximum of minimum is mogelijk.

$n = 4$. Geen maximum of minimum ; andere stationaire punten zijn mogelijk.

$n = 5$ en hooger. Alle stationaire punten zijn uitgesloten.

Nemen wij voor b een lineaire functie van x aan, dus $b_{pq} = \frac{1}{2}(b_p + b_q)$ dan wordt reeds voor $n = 3$ de determinant op de b 's identiek 0, zoodat dan voor ternaire en hoogere mengsels geen stationaire punten meer mogelijk zijn zoodra men $a_{pq}^2 = a_p a_q$ stelt.

Sterrenkunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer C. EASTON : „*Over de schijnbare verdeling der nevelvlekken.*”

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

Geeft men toe, dat de uitkomsten der visueele waarneming afgescheiden moeten blijven van de fotografisch verkregen resultaten, dan mag ook het door MAX WOLF langs fotografischen weg aangevangen stelselmatig onderzoek van de verspreiding der nevelvlekken, niet weerhouden om het vroeger verkregen, zeer omvangrijke, op rechtstreeksche waarneming berustende catalogus-materiaal, de nevelvlekken betreffende, aan een beschouwing te onderwerpen ; te minder omdat, juist wegens de andere methode die thans te Heidelberg gevolgd wordt, het tot stand komen eener (overigens zeer gewenschte) visueele „Durchmusterung” van dezen aard ook in de toekomst wel zeer onwaarschijnlijk geworden is.

Het is geenszins ondenkbaar, dat de verspreiding der fotografisch opgenomen nevelvlekken aanmerkelijk zal blijken te verschillen van die der visueel waargenomene ; zeer zeker echter vertoont de verspreiding van deze laatste merkwaardige trekken, die een verklaring eischen. Reeds WILLIAM HERSCHEL heeft opgemerkt, dat de nevelvlekken over 't geheel talrijk zijn waar de sterren schaarsch voor-

komen. In zekeren zin doet zich hier het omgekeerde verschijnsel voor als bij de sterren; NEWCOMB (The Stars, p. 187), drukt het zóó uit: „The latter (the stars) are vastly more numerous in the regions near the Milky Way and fewer in number near the poles of that belt. But the reverse is the case with the nebulae proper. They are least numerous in the Milky Way and increase in number as we go from it in either direction.”

CLEVELAND ABBE die, na het verschijnen van JOHN HERSCHEL'S catalogus in 1864, deze merkwaardigheid statistisch onderzocht (Mon. Not. R. A. S. XXVII, p. 257) stelde, terecht, dadelijk de vraag, of de schaarschte der nevelvlekken in den Melkweg niet slechts berustte op een gezichtsbedrog, tengevolge van den lichtenden achtergrond van den Melkweg. Hij meende echter die vraag ontkennend te mogen beantwoorden, daar 1°. de strooken ter weerszijden van het eigenlijke melkweggebied geen aanzienlijke vermeerdering van het aantal nevelvlekken opleverden, en 2°. dat evenmin geschiedde naarmate het optische vermogen versterkt werd.

STRATONOFF (Publ. Tachkent N°. 2) kwam op grond van een veel omvangrijker materiaal — 9264 voorwerpen — in hoofdzaak tot dezelfde slotsom. Met eenig voorbehoud echter. Inderdaad, ook als men STRATONOFF'S gegevens op eenigszins andere wijze bewerkt, vindt men dat de zwakke nevelvlekken, van het Melkwegvlak af, toenemen in sterkere mate dan de heldere, hetgeen, ook omdat het in tegenstelling is met een voorloopig resultaat van MAX WOLF: dat de (fotografisch opgenomen) kleine nevelvlekken over 't algemeen gelijkmatiger over den hemel verdeeld zijn, het vermoeden opwekt van een zekere mate van „uitdooving” der kleinste en zwakste in het melkweggebied, bij visueele waarneming (Tabel I).

T A B E L I.

Toeneming dichtheid Heldere en Zwakke Nevelvl. van den Melkweg af.

Gemidd. gal. breedte	Held. Nev. (N. brillantes)	Zwakke N. (N. faibles)
+ 35°	7.5	10.2
+ 25°	3.8	7.0
+ 15°	2.3	3.4
+ 5°	1.9	1.5
— 5°	2.3	1.8
— 15°	3.7	5.1
— 25°	6.2	11.0
— 35°	6.5	12.5

Om deze kwestie nader te onderzoeken heb ik de dichtheid aan nevelvlekken in de verschillende deelen van den N. Melkweg vergeleken met de intensiteit van het melkweglicht in diezelfde deelen. Indien toch de lichtende achtergrond van den Melkweg hierbij aanmerkelijk storend optrad, zou zich tusschen de verdeeling van het melkweglicht over dien gordel (welke verdeeling zéér ongelijkmatig is), en de verspreiding der nevelvlekken in hetzelfde gebied een zeker parallelisme moeten openbaren in dezen zin, dat de nevelvlekken, en vooral de zwakke, het zeldzaamst gevonden werden op die plekken waar het melkwegschijsel 't helderst is. Tabel II geeft de eigenlijke melkwegstrook tusschen -10° en $+10^{\circ}$ gal. breedte (N. Halfrond), afgedeeld in vakken die telkens 30° in gal. lengte verschillen; de twee bovenste rijen bevatten voor elk vak de gemiddelde dichtheid aan nevelvlekken, berekend uit STRATONOFF's gegevens; de onderste rij geeft de gemiddelde intensiteit van het melkweglicht, berekend uit de tabel pg. 18 van mijne „Distribution de la lumière galactique” (Verhand. Kon. Akad. v. Wet. VIII, 3).

T A B E L II.

*Vergelijkende dichtheid Nevelvlekken en Melkweglicht
in den galactischen gordel.*

	180°		90°		0°	
Held. Nev.	1.2	0.7	1.3	0.9	1.0	0.9
Zw. Nev.	0.8	0.7	1.8	0.7	1.0	1.0
Melkwegl.	1.03	0.72	0.78	1.09	1.31	1.08

Van eenig parallelisme is niets te bespeuren.

Andere oorzaken, die in dezelfde richting kunnen werken als „uitdooving” door den lichtenden achtergrond van den Melkweg, moeten hier buiten beschouwing blijven. Tot dusver heeft het onderzoek niets opgeleverd in strijd met de opvatting, dat de eigenaardige verspreiding der nevelvlekken aan den hemel althans in hoofdzaak berust op hun bijzondere *werkelijke* verspreiding in de ruimte.

CLEVELAND ABBE trachtte de schaarschte der nevelvlekken in het melkweggebied en de (onderstelde) toeneming van hun aantal naar de beide polen van den Melkweg aldus te verklaren, dat het zichtbare heelal bestaan zou uit stelsels, waarvan onze Melkweg, de beide Nubeculae en de nevelvlekken de individuen zijn, zelf weer saamgesteld uit sterren en (of) nevelvlekken; dat voorts het melk-

wegvlak nagenoeg loodrecht zou staan op de groote as van een zeer gestrekte ellipsoïd („a prolate ellipsoid”) binnen welker oppervlak alle zichtbare nevelvlekken gelijkmatig verdeeld zijn.

Deze theorie berust op de onderstelde symmetrische verdeling der nevelvlekken ten opzichte van den Melkweg. Ook BAUSCHINGER (V. J. S. 24, p. 43) en STRATONOFF namen zulk een symmetrie aan. STRATONOFF onderstelt in de eerste plaats, dat de hemel van de noordpool tot $\delta - 20^\circ$ gelijkmatig op nevelvlekken doorzocht is (t. a. pl. p. 43); ten tweede — evenals zijn voorgangers deden —: dat de feitelijk waargenomen *vermindering* van het aantal nevelvlekken tusschen ongeveer -50° en de zuidpool van den Melkweg toegeschreven moet worden aan de onvolledigheid der waarnemingen, in het zuidelijk halfmond verricht.

In hetgeen hier volgt zal betoogd worden, dat STRATONOFF's eerste onderstelling zeker onjuist, de tweede bij den tegenwoordigen stand onzer kennis ongerechtvaardigd en overigens niet waarschijnlijk is.

Dat het nevelvlekken-materiaal van de noordpool tot $\delta - 20^\circ$ met gelijkmatige volledigheid bijeengebracht zou zijn, gelijk uit STRATONOFF's eerste onderstelling zou volgen, kan, afgezien van het ontbreken eener stelselmatige Durchmusterung, reeds niet 't geval zijn wegens de groote belemmering die de atmosferische absorptie in de ver van het zenith gelegen streken moet teweegbrengen bij het opsporen van zoo zwakke voorwerpen als nevelvlekken. In Lord ROSSE's teleskoop is bijv. de groote Omega-nevel, M. 17, nooit goed waargenomen kunnen worden, hoewel deze slechts op -16° ligt. (DREYER, Trans. Dublin Soc., N. S. II p. 151).

Vervolgens is ook de onvolkomen duisternis der zomernachten op de betrekkelijk hooge breedten in het noordelijk halfmond, waarin de nevelvlekken-waarnemingen grootendeels gedaan zijn, een omstandigheid die het aantal gecatalogiseerde vlekken in de dan boven onzen gezichtseinder komende zuidelijke hemelstreek, veel te gering moet maken in verhouding tot de tegenoverliggende aequatoriale hemelstreek.

Ik heb dienaangaande de tabellen van BAUSCHINGER onderzocht. Vergeleken werden twee even groote vakken, op overeenkomstige wijze gelegen ten opzichte van den hemels-aequator en van den Melkweg, *A*: $a 5^h$ tot 9^h , $\delta + 15^\circ - 30^\circ$. *B*: $a 17^h$ tot 21^h , $\delta + 15^\circ - 30^\circ$.

Het aantal heldere en zwakke nevelvlekken in die vakken *A* en *B* geeft tabel III:

TABEL III.

*Aantallen Heldere en Zwakke Nevelvlekken in
tegenovergestelde aequatoriale hemelstreken.*

	<i>A</i>	<i>B</i>
H. Nev.	26	20
Zw. Nev.	157	101

Er blijkt inderdaad een verschil te bestaan ten nadeele van vak *B*, en dit verschil is, gelijk te verwachten was, veel sterker voor de zwakke dan voor de heldere nevelvlekken.

Ter vergelijking diene, dat zulk een verschil niet gevonden wordt — eer het tegendeel — in vakken welke, in de noordelijke melkwegstrook, aan de bovengenoemde grenzen, en waar dus de bedoelde invloed zich veel minder kan doen gevoelen. Het blijft natuurlijk mogelijk, dat het aantal nevelvlekken in de richting van *B* inderdaad geringer is dan in de richting van *A*; maar men mag een zoo groot verschil niet als vaststaand aannemen, waar de storende invloed ongetwijfeld werkzaam is.

Beschouwt men alleen het noordelijk galactisch halfmond, dan schijnen de nevelvlekken daar inderdaad vrij geleidelijk, hoezeer niet regelmatig, toe te nemen naar de galactische pool. Voor het zuidelijk gal. halfmond vertoont zich zulk een toeneming ook tot ongeveer $-60^\circ \beta$ gal. in het staatje van STRATONOFF. Dit staatje is echter verkregen met uitsluiting van de beide Nubeculae. Nu schijnt mij, voor zulk een statistiek, deze uitsluiting niet gerechtvaardigd toe. De Wolken van MAGELLAN zijn volstrekt niet als „afgescheurde lapjes melkweg” te beschouwen, wat reeds hieruit volgt, dat de eigenlijke nevelvlekken¹⁾, die in den melkweg zeldzaam zijn, in de Wolken viermaal talrijker voorkomen dan de sterhoopen (JOHN HERSCHEL, Results Obs. Cape; vgl. GUILLEMIN, Les Nébuleuses p. 181). Naar hun samenstelling houden de Nubeculae het midden tusschen den Melkweg en de ophooping van nevelvlekken (waarmede somtijds ook sterhoopen en veel sterren gemengd zijn) in Coma, Pisces, enz. — en al zijn deze laatste ook veel lossere en minder rijke ophooping dan de Wolken, het gaat m.i. niet aan, zulke ophooping wèl in

¹⁾ Waar in dit opstel gesproken wordt van (eigenlijke) nevelvlekken, zonder nadere aanduiding, worden bedoeld de betrekkelijk regelmatige en goed begrensde nevelvlekken („white nebulae”), terwijl met vage nevels worden aangeduid de uitgestrekte, vormlooze, naar hun spectrum gasvormige nevelmassa’s („green nebulae”).

tabellen als deze op te nemen, maar de Wolken uit te sluiten. In 't bijzonder ook nog omdat, gelijk duidelijk op STRATONOFF's eigen kaarten te zien is (Publ. Tschkent, N^o. 2, Atlas, pl. 16 et 18; vgl. SIDNEY WATERS, M. N. XXXIII, p. 558) de Nubeculae samenhangen met nevelvlekken-stroomingen, en niet met den Melkweg.

Neemt men echter de Nubeculae in de statistiek op, dan wordt STRATONOFF's staatje *A* voor het zuidelijk gal. halfrond, volgens zijn eigen opgaaft, gewijzigd tot *B* (Tabel IV):

T A B E L IV.

Talrijkheid Nevelvlekken in het Z. gal. HR; volgens STRATONOFF.
(*A* zonder, *B* met de Nubeculae).

	<i>A</i>	<i>B</i>
β gal. — 85°	19	19
— 75	24	24
— 65	29	29
— 55	36	36
— 45	25	26
— 35	22	31
— 25	19	19
— 15	10	10
— 5	4	4

Wanneer men nu in acht neemt wat hierboven gezegd is over de onvolledigheid der waarnemingen ook in het gebied tusschen 0° en — 20° β gal., dan blijft er van den stelselmatigen aanwas, die volgens STRATONOFF's staatje *A* tot ongeveer — 60° schijnt te bestaan, weinig over.

Nog deze opmerking. Het ligt voor de hand, dat een zoo scherpzinnig waarnemer als JOHN HERSCHEL, juist omdat hij met zijn “sweeps” uitteraard de zuidelijke hemelpool verreed, rekening gehouden zal hebben met de uit die omstandigheid voortvloeiende onvolledigheid, en toch zegt hij (Outlines, Ed. 1851, pg. 596) nadrukkelijk: “In the southern hemisphere a much greater uniformity of distribution prevails, and with exception of two very remarkable centers of accumulation, called the Magellanic clouds, there is no very decided tendency to their assemblage in any particular region.”

Wij bezitten echter een middel om zijdelings na te gaan, of de werkelijke verdeeling der nevelvlekken ten opzichte van het melkwegvlak over 't geheel genomen symmetrisch is, waarbij dan de

sterkere onvolledigheid der waarnemingen in het zuidelijk halfrond oorzaak zou zijn, dat naar de galactische zuidpool toe geen dergelijke progressie gevonden wordt in de tabellen, als naar de galactische noordpool merkbaar is.

De galactische aequator en de hemelsaequator maken met elkaar een aanzienlijken hoek : 60° . Een belangrijk segment van het noordelijke galactische gebied valt ten zuiden van den hemelsaequator — dus binnen het minder goed doorvorschte deel van den hemel — ; daarentegen ligt een evengroot segment van het zuidelijk galactisch halfrond binnen het goed doorzochte gebied ten noorden van den evenaar. De sterke invloed van de onvolledigheid der waarnemingen zou zich (de werkelijke verspreiding der nevelvlekken in de beide galactische halfronden ongeveer dezelfde zijnde), in die beide segmenten aldus moeten openbaren, dat het Z. gal. segment, *B* (op het N. Halfrond gelegen) rijker aan nevelvlekken gevonden werd dan het N. gal. segment, *A* (op het Z.H.R. liggende), en het verschil zou het duidelijkst moeten uitkomen bij de kleine en zwakke nevels.

T A B E L V.

Nev. in de segmenten tusschen hemelaeq. en gal. aequator.

	A, Segm. Noord. gal. H.R. (zuidelijk halfrond)	B, Segm. Zuid. gal. H.R. (noordelijk halfrond)
Held. Nev.	152	71
Zwakke Nev.	754	1043

In tabel V is het bedoelde verschil inderdaad zeer sterk voor de zwakke nevels ; merkwaardigerwijze echter is er voor de heldere een aanzienlijk verschil in tegengestelde richting. Dit wekt reeds het vermoeden dat de hierboven aangeduide mogelijke invloed niet overwegend in 't spel is.

Vergelijkt men nu de samenstelling van segment *A* bij die van het overige gedeelte van het N. gal. H.R., dan blijkt de dichtheid aan nevelvlekken bij 't segment slechts 0.6 te zijn — wat niet te verwonderen is, aangezien het grenst aan het melkwegvlak — maar zeer opmerkelijk is, dat de verhouding $\frac{\text{Zwakke}}{\text{Heldere}}$ in het segment, 4.96, juist dezelfde is in het overige deel van het N. gal. H.R., namelijk $\frac{2670}{539} = 4.95$. De verhouding is daarentegen in het segment *B*,

het zuidelijke galactische segment, geheel anders : $\frac{\text{Zwakke}}{\text{Heldere}} = 14.7$.

Dit duidt zeer sterk op een overmaat van zwakke nevels in het zuidelijke galactische segment dat op het N. HR. ligt, en met het oog op de Nubeculae en hun verband met de neveloophooping in het Z. gal. HR. maakt dit de waarschijnlijkheid groot, dat de samenstelling van den zuid. galactischen hemel ten aanzien der nevelvlekken geheel verschilt van die van den noord. gal. hemel.

In het hoogst onwaarschijnlijke geval, dat bij nauwkeuriger doorvorsching het N. gal. segment nog zóó sterk met zwakke nevels verrijkt werd, dat eene eenigszins overeenkomstige samenstelling met segment *B* zou blijken, d. w. z. in de verhouding 1 : 15, zou men daar 2500 nevelvlekken tellen tegen 3200 in het overige $\frac{2}{3}$ van het N. gal. HR., en de toeneming naar de pool zou dan, althans voor de zwakke nevelvlekken, in het noord. gal. HR. nagenoeg vervallen.

Van een symmetrische toeneming van het aantal nevelvlekken naar de beide galactische polen kan echter in geen van beide gevallen sprake zijn, en dus vervalt de reden van bestaan van CLEVELAND ABBE's gestrekte ellipsoïd, welke toch reeds geen aannemelijke voorstelling kon verschaffen.

Tegen de opvatting, dat de nevelvlekken als verafstaande melkwegstelsels beschouwd moeten worden, pleiten verschillende overwegingen, waarvan de gewichtigste reeds een halve eeuw geleden uitgesproken is: het gezamenlijk voorkomen, veelal zelfs in rijen en stroomingen, van nevelvlekken en sterren; evenzoo het voorkomen van sterren en nevelvlekken in de Nubeculae. Het ligt voor de hand, dat men in zulke gevallen te doen heeft met voorwerpen van dezelfde orde van grootte. Voorts het goed geconstateerde feit, dat een ster in een nevelvlek kan overgaan. (Vgl. VALENTINER, Handwörterbuch d. Astron. III, 2, p. 524; ook MOULTON, Astrophys. Journal XI, 2, SCHAEBERLE, Nature, Vol 69, No 1785, SEELIGER, Abh. bay. Akad. XIX, p. 572). Daar staat tegenover dat indien een „verafgelegene melkwegstelsel” voor ons zichtbaar is, het zich slechts als een nevelvlek kan vertoonen. Maar reeds de schaarschte der nevelvlekken in het melkweggebied wijst, indien dat verschijnsel reëel is, op een onmiskenbaar organisch verband tusschen de groote massa der nevelvlekken en ons sterrenstelsel.

Zoo wij dan mogen aannemen dat de reden van bestaan van CL. ABBE's ellipsoïd vervalt, en men zich de nevelvlekken niet behoeft voor te stellen als gelegen op gemiddeld ontzaglijk groote afstanden ter weerszijden van het melkwegvlek, maar integendeel, op afstanden vergelijkbaar met die van de sterren, dan wordt de onderstelling

zeer aannemelijk dat ze voor 't meerendeel besloten zijn binnen een dergelijke figuur als de afgeplatte rotatie-ellipsoid binnen welke SEELIGER ons geheele sterrenstelsel plaatst, m. a. w. wij mogen beginnen met aan te nemen dat het gros der nevelvlekken tot ons sterrenstelsel behoort, en dat zij ter weerszijden van het hoofdvlak van dat systeem asymmetrisch verspreid liggen.

Overigens zou in de onderstelling dat het gros der nevelvlekken systemen waren, buiten het onze gelegen, het vraagstuk thans niet voor verdere ontwikkeling vatbaar zijn: zulk een onderstelling mag dus niet vooropgezet worden.

Sterrenkunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer C. EASTON: „*De Nevelvlekken, in hun betrekking tot het Melkwegstelsel beschouwd*”. (Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

Beschouwen wij de nevelvlekken als leden van ons galactisch stelsel (vgl. een vorige mededeeling „*Over de schijnbare verdeling der Nevelvlekken*”)¹⁾ dan moet hun verspreiding in verband gebracht worden met die der overige soorten van voorwerpen in dat stelsel. En dan vinden wij, in 't algemeen genomen, niet alleen tegenstelling tusschen de schijnbare verspreiding van sterren (en ster-hoopen) en nevelvlekken, maar evenzoo tusschen de verdeling der vage nevels (die, althans voor zooveel bekend, nagenoeg uitsluitend in het melkweggebied voorkomen) en die der eigenlijke nevelvlekken; anderzijds is het waarschijnlijk, dat de melkweg-ophoopingingen grootendeels bestaan uit sterren van den 1^{sten} spectralen typus.

Gaan wij nu uit van de overweging, dat de nevel-achtige en de ster-achtige toestand phasen zijn in den ontwikkelingsgang der materie, geen onveranderlijke eindtoestanden, dan ligt het ook voor de hand dat, waar de verdeling der ster-achtige materie in zekere deelen van het stelsel anders is dan in de overige — hetgeen gepaard gaat met een verschillende samenstelling van de meerderheid der centra zelf, gelijk uit de spectrale verschillen blijkt — evenzoo de materie die in den nevel-achtigen toestand verkeert, niet overal in het stelsel op dezelfde wijze verspreid en saamgesteld zal blijken te zijn.

In de galactische streek van het stelsel vinden wij zeer talrijke, waarschijnlijk voor 't grootste deel op (betrekkelijk) niet zeer groote onderlinge afstanden geplaatste ster-achtige voorwerpen, meerendeels van den 1^{sten} spectralen typus. In de „extra-galactische” deelen van het

¹⁾ Dit Verslag p. 181.

stelsel zien wij een geringer aantal zonnen, op ontzaglijke onderlinge afstanden, en voor een groot deel tot den II^{den} spectralen typus behorende.

Dienovereenkomstig vinden wij binnen en buiten het eigenlijke galactische gebied twee vormen van nevels. Er binnen de „groene” nevels met lijnen-spectrum, soms rond en vrij scherp begrensd (planetaire nevelvlekken), maar meest over ontzaglijke gebieden verspreid en deze vaag oversluisend (vage nevels). In de extragalactische streken de „witte” nevelvlekken, met een doorlopend, of — waarschijnlijker — gemengd spectrum; zelfstandige, meest ver-niteengelegen voorwerpen, vermoedelijk in den regel spiraalvormig, zeker sterker gecondenseerd dan de andere soort.

Evenmin als ster-achtige en nevel-achtige voorwerpen volstrekt te scheiden zijn, wordt met de bovenstaande onderscheiding een stipte indeeling bedoeld. Maar aldus opgevat, in verband met de galactophylie der groene nevelvlekken, vertoont zich de galactophobie der eigenlijke nevelvlekken met als iets exceptioneels; deze voornaamste eigenaardigheid van de verspreiding der verschillende soorten van nevelvlekken kan dan beschouwd worden als een natuurlijk uitvloeisel van dezelfde oorzaak, die ons in de melkwegformaties een naar samenstelling en verspreiding ander sterrentype vertoont, dan buiten den melkweg.

Bij het onderzoek van het vraagstuk, in den titel van dit opstel aangeduid, moeten in aanmerking genomen worden:

- a. De plaats van de zon in het sterrenstelsel;
- b. De geringe zichtbaarheid van een nevelvlek, vergeleken bij een, op denzelfden afstand van ons gelegen ster, waarin men zich dezelfde hoeveelheid materie saamgeperst denkt.

Voorts neem ik als vaststaande aan:

1. Er bestaan, behalve een geleidelijke toeneming van het aantal sterren naar het melkwegvlak, werkelijke ophooping in de melkwegstreek;

2. De zon ligt in een betrekkelijk ijle plek van het melkweggebied; dus, ten aanzien van de „verspreidingstype”, in een als extragalactisch te beschouwen gebied, of misschien in een overgangslaag. (Vgl. KAPTEYN, *Versl. K. A. v. W.* 1892/93, *Publ. Groningen* n^o 11, p. 32; EASTON, *Astr. Nachr.* 3270, SEELIGER, *Betracht.* p. 627; NEWCOMB, *The Stars*, Chap. XX).

Als waarschijnlijk:

3. Het sterrenstelsel is besloten binnen een spheroid met het melkwegvlak als hoofdvlak (SEELIGER). — Terwijl uit onderzoekingen van

den schrijver zou volgen (*Versl. K. A. v. W.* 1897/98; *Astrophys. Journal* XII, 2; *Verhandelingen K. A. v. W.* VIII, 3):

4. Dat in de Cygnus-Aquilastreek van den melkweg de voorafgaande tak veel dichtër bij ons ligt dan de volgende tak;

5. Dat het helderste melkweggebied in Cygnus een ongeveer centrale ligging heeft in het sterrenstelsel.

Waar wij thans de verspreiding der naar visueele waarneming gecatalogiseerde nevelvlekken beschouwen, willen wij, gegeven de geringe betrekkelijke zichtbaarheid der nevelvlekken in het algemeen, een verklaring beproeven op deze onderstelling, dat de zeer verafgelegen nevelvlekken aan de visueele waarneming ontsnappen (hoewel ze wellicht grootendeels photographisch worden geregistreerd); en dat dus volgens het bovenstaande, in 't bijzonder sub 4, het verafgelegen gedeelte van het stelsel, waar de Aquilatak van den melkweg zich bevindt, buiten beschouwing gelaten moet worden.

Ligt de zon ongeveer in het middenvlak van het stelsel, in een ijlere plek tusschen galactische ophoopingën in, en is die ijlere plek te vergelijken bij de „extra-galactische” gebieden ter weerszijden van het melkwegvlak, dan krijgt het aldus samenhangende extra-galactische

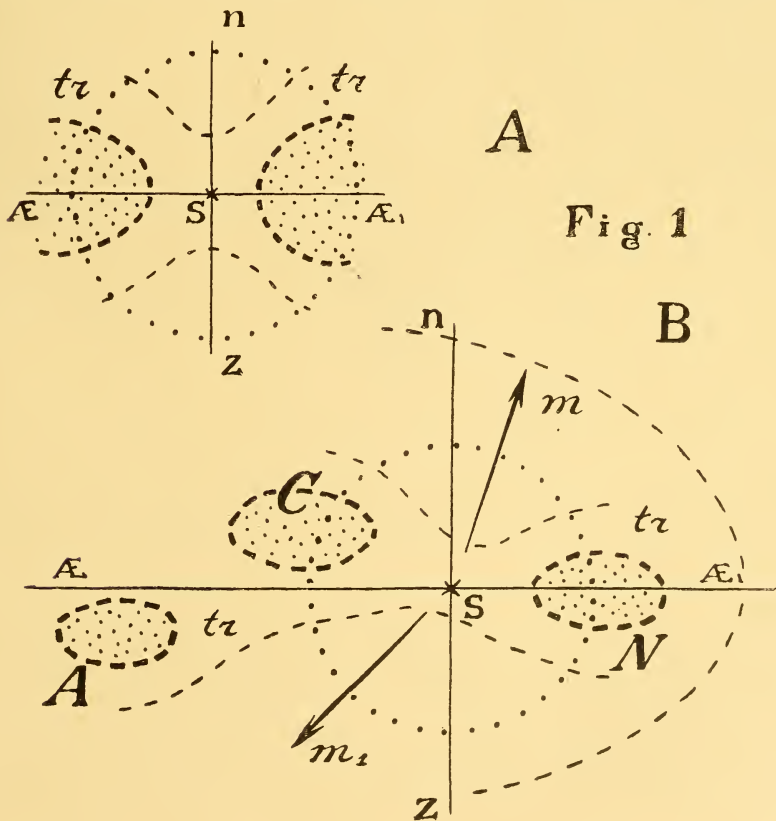


Fig. 1

gebied eenigszins de gedaante van een halter (zie Fig. 1, A) midden in welks steel $n-z$ de zon ligt; — zijn de *eigenlijke* nevelvlekken in hoofdzaak tot dat extra-galactische gebied beperkt, dan zou daarmede reeds verklaard zijn de „galactophobie” dezer nevelvlekken en tevens ophooping naar de beide polen.

Blijft echter de Aquilatak van den melkweg buiten beschouwing ¹⁾ dan moet in aanmerking genomen worden dat, in het dan overblijvende dichterbijgelegene melkweggebied, de galactische ophooping aan de Cygnus-zijde *een noordelijke galactische declinatie* hebben. D. w. z. dat de zon komt te liggen ten zuiden van het vlak, gaande door die Cygnus-ophooping C en de tegenoverliggende in Argo N; dus niet meer in het midden van, maar onderaan den steel van den halter, hetgeen de schijnbare ophooping der nevelvlekken naar de noordelijke melkwegpool zal versterken, maar die naar de zuidelijke pool zal doen afnemen of verdwijnen. Bovendien volgt uit de omstandigheid, dat het dichtstbijgelegen melkweggebied in de richting van XIX h (naar C) een N. gal. declinatie heeft, dat het nevelvlekken-maximum op het N. gal. halfrond verplaatst wordt voorbij de pool, tot op méér dan 90° van het galactische middenvlak, van Cygnus af gerekend (naar m) terwijl daarentegen in het Z. gal. HR het nevelvlekken-maximum verschoven wordt, naar den Cygnus-kant toe, van de pool af (naar m_1).

Deze theoretische overweging is op de volgende wijze aan de waarneming getoetst. Op de kaarten voor de verdeling der nevelvlekken bij STRATONOFF (*Publ. Tschkent* 2, pl. 18 et 19) zijn in een ongeveer 15° breede strook, over den galactischen meridiaan van 45° , die de Cygnus-streek snijdt, de dichtheden geschat in vakken van 10 tot 10 graden gal. breedte. De uitkomst is saamgevat in Tabel VI. (De vorige vijf tabellen vindt men in het opstel „*Over de schijnbare verdeling der nevelvlekken*”).

De veel geringere dichtheden op het Z. gal. *H.R.* waren, wegens de sterkere onvolledigheid, te verwachten; overigens zijn de afwijkingen van de maxima in deze tabel in den zin zooals ze volgens de theorie moesten zijn. In hoever de gemaakte onderstellingen aldus gesteund worden, valt wegens de onvolledigheid der gegevens

¹⁾ Zie Fig. 1, B. — De doorsnede van den Aquilatak is A, die van de Cygnus-ophooping C, die van den melkweg in Argo N. De cirkel om de zon heen is het gebied waarbinnen alle nevelvlekken, lichtender dan een zeker minimum, zichtbaar gedacht worden. De streek *tr* wordt beschouwd als een overgangsgebied tusschen de (gestippelde) ster-ophooping in het melkwegvlak *Æ* en het extra-galactische gebied, binnen de spheroid besloten. De „steel van den halter” is zeer verbreed gedacht.

TABEL VI.

Dichtheid der nevelvlekken over den gal. merid. v. 45°.

Noordelijk Gal. Halfrond.				Zuidelijk Gal. Halfrond.			
α	gal.	β	Δ Neb.	α	gal.	β	Δ Neb.
45	+	5 . . .	2.5 . . .	225	-	5 . . .	0.4
		15	3.5			15	0.2
		25	8.0			25	3.7
		35	13.8			35	5.7
		45	12.5			45	9.3
		55	11.8			55	9.2
		65	18.2			65	4.2
		75	21.0			75	9.5
45 . . .		85 . . .	41.0	225		85 . . .	8.1
225 . . .		85 . . .	43.0	45		85	10.3
		75	40.3			75	12.0
		65	22.2			65	11.3
		55	17.8			55	16.5
		45	13.0			45	15.0
		35	11.4			35	11.3
		25	12.0			25	5.8
		15	6.0			15	3.3
225	+	5 . . .	0.8	45	-	5	1.9

niet te beslissen, maar de uitkomsten der waarneming zijn er althans niet mede in strijd.

Indien er overigens bij de tegenwoordig beschikbare gegevens reeds bijzonderheden aan het licht kunnen komen over de ware verspreiding der nevelvlekken in het stelsel, zal men de sporen daarvan moeten zoeken in die hemelstreken waar het galactische en het extra-galactische gebied samenvloeien. Op gemiddelde galactische breedte zal men de sterke onregelmatigheden in de schijnbare verdeling der nevelvlekken moeten opsporen, en de ligging daarvan

vergelijken met de onregelmatigheden in de sterverdeeling, zooals ze zich vooral in de schakeeringen en de afwisselende breedte van het melkwegschijnsel vertoonen.

Daartoe zijn de volgende tabellen opgemaakt (VII, VIII, IX).

Op STRATONOFF'S kaarten van de verdeeling der heldere (n. brillantes) en zwakke (n. faibles) nevelvlekken, werd een galactisch coördinatennet gelegd. Voor elk vak van 15° in gal. lengte en 10° in gal. breedte werd vervolgens de dichtheid in *H.* en *Zw.N.* zoo zorgvuldig mogelijk geschat. Deze waarden werden gecombineerd, met inachtneming van de ongelijke oppervlakken der vakken, om de gemiddelde dichtheden te verkrijgen voor strooken van 15° gal. lengte en 0° tot 50° gal. breedte, ter weerszijden van den galactischen aequator (Tabel VII). Voor de eigenlijke galactische strook, tusschen $+10^\circ$ en -10° gal. β , werden in een afzonderlijke tabel, de gebieden ten *N.* en ten *Z.* van de gal. aeq. bijeengevoegd: hier zou afscheiding tot niets gediend hebben (Tabel VIII). Bij de samenstelling van de beide tabellen leverde het m.i. geen bezwaar op, dat de vereffenings-methode, door STRATONOFF SCHIAPARELLI nagevolgd, de détails der distributie uitwischt, en de afwisselingen minder scherp maakt; voor een onderzoek naar de algemeene trekken is dat eerder een voordeel; de omstandigheid is alleen hinderlijk bij de Nubecula. De verdeeling in het zuidelijk halfrond is in deze twee tabellen bijgevoegd, maar alleen volledigheidshalve, want in 't bijzonder voor de zwakke nevels hebben de gegevens hier weinig waarde, en vooral aan de krommen van Tabel VIII, *Z.H.R.* ziet men ook wel dadelijk, dat dit materiaal niet vergeleken kan worden bij dat voor het *N.* halfrond.

Tabel IX geeft, voor vakken van 15° gal. lengte bij 14° gal. breedte, ter weerszijden van den gal. evenaar, de helderheid van het melkwegschijnsel, uitgedrukt in het gemiddelde voor het *N.* halfrond, berekend uit de tabel op pag. 18—19 van des schrijvers *La distribution de la lumière galactique*, (1903); hierbij moest alleen aangenomen worden dat het melkwegschijnsel in de middenvakken (-2° tot $+2^\circ$ gal. β) gelijkelijk verspreid is.

Een uitvoerige discussie van deze tabellen, en van de krommen die ermede geconstrueerd zijn (Fig. 2), zou hier te ver voeren. Slechts op het volgende moge gewezen worden:

De eenvormigheid en geringe verheffing der kromme van Tabel VIII B, *Z. H.*, mag zeker *niet* tot de gevolgtrekking leiden dat de nevelvlekken in het zuidelijke engere melkweggebied inderdaad zooveel schaarscher zijn en eenvormiger verspreid. Opmerkelijk is, dat omstreeks 110° gal. α , zelfs binnen het engere melkweggebied de dicht-

TABEL VII.

Dichtheid aan nevelvlekken der zones 0° tot 50° gal. β.

A. Heldere Nevelvlekken.

(Bovenste rij ten N., onderste rij ten Z. gal.evenaar).

360	330	300	270	240	210	180	150	120	90	60	30	0°											
2.2	4.2	2.3	2.8	3.5	12.1	9.2	7.2	8.6	6.3	4.1	3.1	3.7	6.0	4.7	4.5	8.9	11.8	4.7	5.1	4.4	1.9	1.7	2.3
2.7	2.9	6.1	6.8	3.8	2.8	5.0	28.4	9.9	2.5	5.2	3.8	9.0	2.7	2.4	2.5	7.5	8.8	4.1	4.7	4.2	3.1	4.5	3.7

B. Zwakke Nevelvlekken.

(Bovenste rij ten N., onderste rij ten Z. gal.evenaar).

4.5	4.0	2.8	3.0	2.9	6.0	4.9	4.5	8.2	6.6	6.5	7.2	6.8	7.2	4.9	4.5	4.5	5.2	4.0	8.6	8.7	6.4	6.9	7.1
3.7	2.5	3.0	2.5	2.4	1.6	1.8	10.0	4.1	1.9	2.4	4.6	9.4	7.6	4.5	5.8	15.5	11.7	9.0	9.5	8.2	5.8	7.0	5.2

TABEL VIII.

Dichth. a. Nev. d. galactisch-aequatoriale vakken — 10 + 10° gal. β.

A. Heldere Nevelvlekken.

1.9	4.1	2.0	1.7	1.9	4.4	3.1	4.1	4.4	2.7	3.4	1.6	4.3	2.0	2.4	1.1	3.1	3.4	2.1	2.5	2.2	2.8	2.4	2.2
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

B. Zwakke Nevelvlekken.

360	330	300	270	240	210	180	150	120	90	60	30	0°											
1.1	3.0	2.8	1.2	0.9	0.9	1.3	1.4	0.4	1.0	1.5	1.8	3.2	2.6	1.9	2.4	8.5	2.4	1.2	2.9	3.0	2.8	3.7	2.2

TABEL IX.

Intensiteit Melkweglicht in gal. aeq, vakken, — 14° + 14° gal. β.

(Bovenste rij ten N., onderste rij ten Z. gal. evenaar).

1.14	1.29	1.19	0.63	0.57	0.64	0.80	1.14	1.34	1.74	0.97	1.10	
0.82	1.00	0.37	0.67	0.81	1.14	1.20	1.39	1.36	1.07	1.37	1.19	
180	165	150	135	120	105	90	75	60	45	30	15	0°

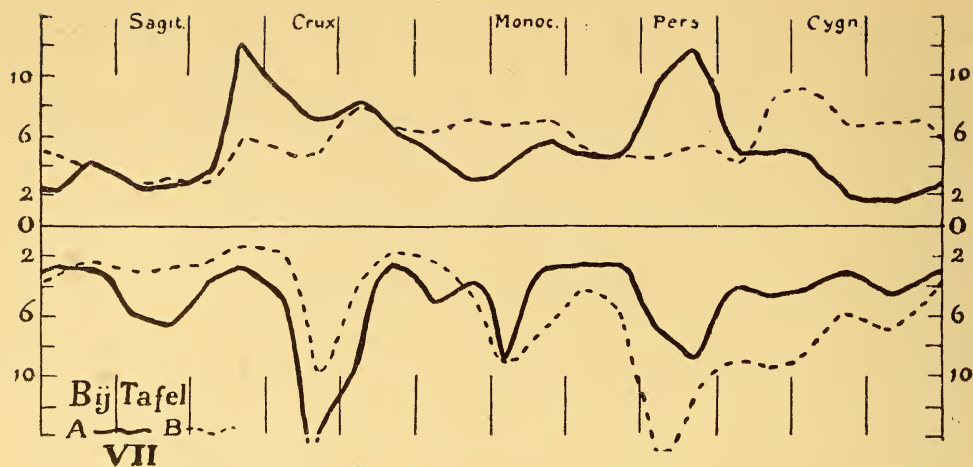
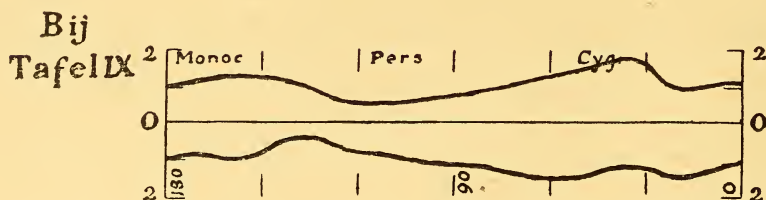


Fig. 2



heid aan zwakke nevelvlekken die van het geheele N.HR. nabijkomt (8.5 tegen 10.0).

Neemt men de krommen voor de nevelvlekken-dichtheid samen, dan blijkt wel in 't algemeen eenige tegenstelling met de krommen van Tabel IX voor het melkweglicht — tegenover het minimum in IX schijnt dan het maximum van VII eenigszins naar 90° verschoven — maar in bijzonderheden is geen complementaire loop te bespeuren.

Het merkwaardigste in de nevelvlekken-krommen is een sterke verheffing omstreeks 100° tot 110°, N. en Z., die haar tegenhanger schijnt te vinden, althans in het N. gal. HR., op 180° afstands, bij 280° ongeveer.

Strekte de met nevelvlekken gevulde ruimte zich in den omtrek

der melkwegzone even ver uit in alle richtingen, van de zon af, (hetgeen, bij de hier aangenomen onderstellingen, zou beteekenen, dat de naastbijgelegen sterophooping in dat vlak op geen zeer verschillende afstanden liggen), en was binnen die ruimte de verspreiding der nevelvlekken nagenoeg gelijkmatig, dan zou er geen reden zijn, waarom de krommen van VII en VIII aanzienlijke verheffingen en dalingen vertoonden.

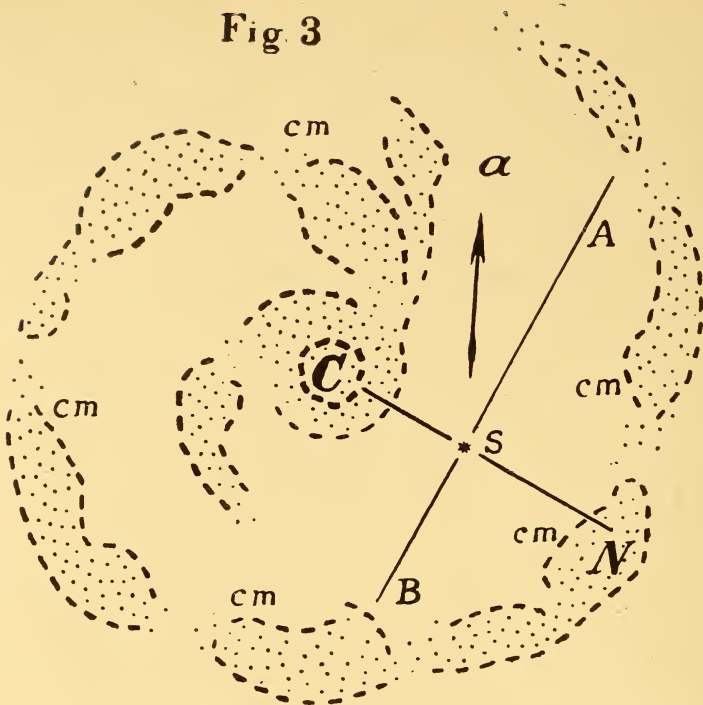
Wij weten echter dat de nevelvlekken een zeer sterke neiging tot stroom- en „nesten”-vorming vertoonden, de detailverspreiding moet dus zeer ongelijkmatig zijn. Bijgevolg zou de eigenaardige ligging der voornaamste verheffingen van de krommen verklaard kunnen worden door een of meer „streamingen”, waarin de nevelvlekken verdicht zijn, gericht van 100° naar 280° gal. lengte, eenigszins hellend op het melkwegvlak. Deze onderstelling is overigens uiteraard willekeurig.

Een andere aannemelijke verklaring is, dat de „nevelvlekken-ruimte”, dus het „extra-galactische gebied” zich, in en bij het melkwegvlak, verder uitstrekt in de richting 100° naar 280° , dan in andere richtingen; d.w.z. dat in de genoemde richting de galactische sterophooping verder-af liggen.

Opmerking verdient nu, dat de lijn, die, in de ruimte, de aanzienlijkste verheffingen der nevelvlekken-kromme (Tabel VII) verbindt (afgezien van de verheffing bij 250° , Z, veroorzaakt door de Nubecula), ongeveer loodrecht staat op de richting waarin (zie Tabel IX, 30 tot 45° N.) de groote sterverdichting in Cygnus ligt. Indien — gelijk betoogd is in *A.J.* XII, 2; vgl. *Versl. K. A. v. W.* 1897/98 — de sterverdichting in de richting van Cygnus het middelpunt vormt van het in hoofdzaak spiraalvormig geordende melkwegstelsel, welks onregelmatig verdichte ster-windingen de zon omsluiten, moest (bij de overigens hier gemaakte onderstellingen) deze uitkomst verwacht worden.

Want dan zal immers (Vgl. Fig. 3), de tusschen de voornaamste ster-windingen in het melkwegvlak gelegen ijlere ruimte, welke hier ten aanzien van het verdichtings-type der materie gelijkgesteld is met de „extra-galactische”, aan eigenlijke nevelvlekken rijke, gebieden ter weerszijden van de melkweg-zone — zich het verst uitstrekken in de richting *AB*, loodrecht op een lijn, door de Zon en de centrale verdichting van het stelsel getrokken; in 't bijzonder zal dat 't geval zijn op 90° van de centrale verdichting, of liever iets dichterbij, richting α : daar waar de groote opening zou liggen tusschen de windingen (Perseus-streek). En inderdaad vindt men, in Tabel VII (Fig. 2) de best gekenmerkte verheffingen der nevel-

Fig 3



vlekken-krommen op omstreeks 105° gal. lengte, op minder dan 90° van de Cygnus-streek, en een minder sterk geprononceerde op 280° , *N*.

Het beschikbare materiaal is overigens zeker niet toereikend om met eenige waarschijnlijkheid uit te maken of de secundaire verheffingen (bij 165° , enz.) in de krommen der tabellen VII en VIII, inderdaad voortvloeien uit de rangschikking der galactische ophooping, dan wel het gevolg zijn van enkel plaatselijke samenballing der nevelvlekken. Tot zulke „plaatselijke afwijkingen” van de gelijkmatige verspreiding zouden dan ook de Nubeculae gerekend moeten worden, die klaarblijkelijk een zoo sterken invloed uitoefenen op de verspreidingswijze der nevelvlekken in het Z. gal. HR. Er mag hier nog wel nadruk op gelegd worden dat de Nubeculae *niet* door nevelvlekken-stroomingen, en waarschijnlijk ook niet door ster-stroomingen, in verbinding staan met den zuidelijken melkweg. Men bemerkt den invloed van het ontzaglijke nevelnest der Nebecula maior ook niet in Tabel VIII.

Ten slotte nog de opmerking, dat, indien de nevelvlekken in de zeer ver afgelegene deelen van het stelsel over 't geheel onzichtbaar blijven, en dus buiten de hier behandelde statistische gegevens vallen, terwijl ze gemakkelijker opgenomen worden door de photographische plaat, daarmede dan, in verband met het vorenstaande, een ver-

klaring gegeven zou worden van het verschijnsel, door MAX WOLF opgemerkt (*Sitzungsber. München XXXI, II, p. 126*) waaruit volgt, dat de massa der door hem photographisch opgenomen, zéér kleine nevelvlekken gelijkmatiger over den hemel verspreid zijn dan de visueel waargenomene.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N^o. 92 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. C. ZAKRZEWSKI. „*Het bepalen der coëxistentie-voorwaarden van damp- en vloeistofphasen van mengsels van gassen bij lage temperaturen*”.

§ 1. *Inleiding.* De twee methoden om het moleculair coëxistentiegehalte x_l en x_v van vloeibare en dampvormige fasen van in normale omstandigheden gasvormige stoffen te bepalen komen zooals bekend is op het volgende neer. De eerste volgende, zondert men bij eene reeks van coëxistentiedrukkingen p kleine hoeveelheden van de beide fasen af en bepaalt telkens de samenstelling dier beide hoeveelheden langs chemischen of physischen weg.

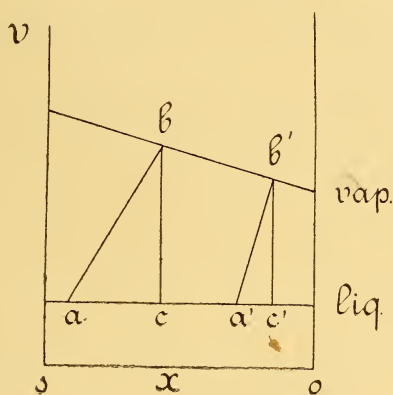


Fig. 1.

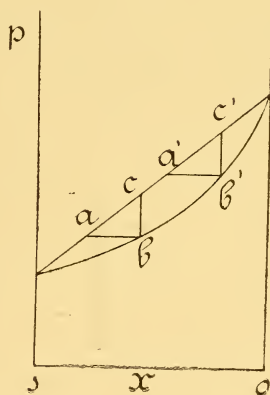


Fig. 2.

In de v - x -projectie van de binodale der dwarsplooi op het ψ - x -vlak van VAN DER WAAALS voor een bepaalde temperatuur T , fig. 1, en evenzoo in het p - x diagram dier binodale fig. 2, worden twee dergelijke fasen bijv. aangewezen door a en b . Bepaling van verschillende bij elkaar behoorende waarden a b , a' b' enz. geeft dan het geheele verloop van p en x en v over de dwarsplooi voor T .

Volgens de tweede te werk gaande, neemt men bij een reeks van

mengsels met bekend gehalte x , van ieder de begin- en eind-condensatie-phase waar en bepaalt voor deze p en v , dus p_{xTl} en p_{xTv} en v_{xTl} , v_{xTv} . Dit onderzoek omvat telkens de fasen in fig. 1 en 2 voorgesteld door b en c . Door bijeenvoeging der uitkomsten bc , $b'c'$, enz. kan men dan weer de binodale en daaruit de waarden voor x_{lpT} , x_{opT} , v_{lpT} en v_{opT} afleiden. Met de toepassing dezer laatste handelwijze op lage temperatuur in 't bijzonder bij matige drukkingen houden wij ons in deze Mededeeling bezig.

Wel kan men bij lage temperaturen ook de eerste methode op dezelfde wijze aanwenden als zij door HARTMAN in Med. n°. 43 (Juni '98) bij gewone temperatuur is toegepast. Doch in het algemeen is de analyse van een gasmengsel veel lastiger dan het bereiden van een mengsel van een bepaald gehalte (o.a. met behulp van den mengtoestel van Med. n°. 84 (Dec. '02), en het is moeilijk zekerheid te verkrijgen, dat de afgetapte hoeveelheden damp en vloeistof dezelfde samenstelling hebben als de fasen, die men door roeren in evenwicht heeft gebracht.

Het is dus van belang de moeilijkheid op te lossen, die de tweede methode bij temperaturen lager dan -43° (smeltpunt van kwik) medebrengt. Bij eene eerste proeve in deze richting mocht van het bereiken van groote nauwkeurigheid worden afgezien. Voor het beantwoorden van verschillende vragen is de door ons bereikte nauwkeurigheid voldoende en voor correctierekeningen bij meer nauwkeurigere bepalingen meer dan dat.

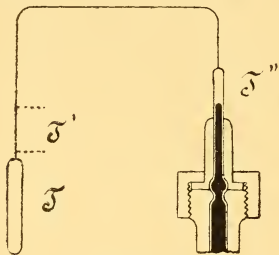


Fig. 3.

Wij hebben bij onze metingen gebruik gemaakt van den toestel schematisch afgebeeld in fig. 3, in beginsel een dubbel omgebogen buis van CAILLETET, aan de eene zijde gedompeld in den cryostaat van de temperatuur T en gevuld met een bekende hoeveelheid van een mengsel van bekende samenstelling x , hetwelk door opdrijven van kwik bij de gewone (of hogere) temperatuur T'' tot condensatie bij T wordt gebracht.

Het mengsel, waarvan de hoeveelheid en het gehalte x bekend is, bevindt zich daarbij slechts gedeeltelijk in het vat T op de temperatuur van onderzoek. Een ander gedeelte bevindt zich noodzakelijk in de met het eerstgenoemde vat door eene capillair verbonden buis op de gewone of hogere temperatuur T'' . Dit brengt complicaties mede. Niet wat het bepalen van den begindruk p_{rx} van condensatie bij het gehalte x betreft. Immers tot aan de condensatie van de eerste sporen vloeistof, ten opzichte van welke de damp alsdan eene

evenwichtsphase is, blijft de samenstelling van de dampphase in de ruimte op lage temperatuur de oorspronkelijke, het gehalte der damp-evenwichtsphase is dus volkomen bekend. Maar wel wat het bepalen van den eindruck van condensatie p_{xl} van het mengsel met het gehalte x aangaat. De geheele hoeveelheid toch van het mengsel kan niet tot condensatie bij de lage temperatuur worden gebracht. Het gehalte van de vloeistofphase bij T , boven welke zich eene dampphase van in 't algemeen andere samenstelling dan deze of de oorspronkelijke bevindt, wordt dus niet meer door de laatste aangegeven en is dus niet bekend.

Men kan dit gehalte echter vinden door eene correctie aan het oorspronkelijke gehalte x aan te brengen, die, zooals wij in § 5 zullen aantonen, zoolang de dampphase slechts een klein volume inneemt en onder matigen druk staat slechts een gering bedrag heeft.

§ 2. *Algemeene inrichting der metingen.*

Deze wordt schematisch voorgesteld op Pl. I, fig. 1. De letters zijn dezelfde als gebruikt op de Platen waarheen verwezen wordt.

In den volumemeter E (met manometer M) verg. Med. 84, Pl. II, fig. 1 en 2 bevindt zich het gasmengsel, dat daarin met behulp van de bij r_6 en r_8 aangesloten toestellen (zie Med. 84) is bereid. Door de kraan r_9 , de stalen capillair g_1'' en de stalen driewegkraan k (zie Med. n°. 84, Pl. I. fig. 2), wordt het gebracht naar de persbuis b met gecalibreerde steel (zie Med. n°. 69 (Mrt. '01) Pl. II), geplaatst in de persbus \mathfrak{A}_1' (Med. n°. 84, Pl. I) om met behulp van kwik uit het persreservoir C_1' (verg. Med. n°. 84) te worden samengedrukt. Van daar kan het langs de driewegkraan k en de stalen capillair g_1 onder druk worden gebracht in een van de beide toestellen \mathfrak{D} of \mathfrak{P} . Voorloopig hebben wij, al naar gelang wij den begin- of den eindruck van de condensatie, p_{exT} of p_{lxT} , wilden bepalen de capillair van \mathfrak{D} , \mathfrak{D}_{g_1} of die van \mathfrak{P} \mathfrak{P}_b , met lak aan de capillair g_1'' bevestigd.

In afwijking van Med. n°. 84, Pl. I. fig. 1 staat het kwik van de persbuis langs n (onze Plaat fig. 1) ook nog in verband met dat van een manometer ter bepaling van den druk in \mathfrak{D} of \mathfrak{P} .

Langs de driewegkraan k kan de toestel \mathfrak{D} of \mathfrak{P} ook direct met den volumemeter verbonden worden, en wordt de druk dan met behulp van M gemeten.

De toestellen \mathfrak{D} en \mathfrak{P} zijn in fig. 2 en fig. 3 van Pl. I uitvoeriger afgebeeld en in §§ 4 en 5 beschreven. Bij beide is de glazen buis waarheen het te onderzoeken mengsel door de capillair g_1'' gevoerd wordt, p in \mathfrak{P} en a in \mathfrak{D} , in een cryostaat gedompeld, waarin men de gewenschte temperatuur onderhoudt op dergelijke wijze als in Med. n°. 83 beschreven is.

De regeling geschiedt door de zuigbuis T_{12} bij Ψ en de buizen f_4 en m_2 bij \mathcal{D} . Bij onze metingen brachten wij vloeibaar chloormethyl in den cryostaat en werd de temperatuur geregeld naar de aanwijzingen van een alcoholthermometer.

De volumemeter E staat door de kraan r_8 behalve met de gasreservoirs ook in verband met de kwikluchtpomp, zoodat ook de persbuis en de proefbuis in \mathcal{D} en Ψ kunnen worden luchtledig gepompt. Over de bewerkingen om de toestellen met een bepaalde hoeveelheid van het gewenschte mengsel te vullen en willekeurige hoeveelheden gas, die men daaruit laat ontwijken, te meten, behoeven wij hier niet uit te weiden. Overigens verwijzen wij wat betreft den volumemeter en mengtoestel op Med. n°. 84, wat betreft de persbuis met toebehooren op Med. n°. 69 en n°. 84, en wat de cryostaten betreft op § 4 en § 5 benevens Med. n°. 83.

§ 3. *Bepaling van het moleculair volume der coëxisterende phasen.* Daar eene zeer nauwkeurige bepaling door ons niet werd beoogd kunnen wij met een paar opmerkingen volstaan. Wat de vloeistofphase betreft zoo kan onder de beperkingen en voorwaarden, die in § 5 worden besproken, door condensatie een deel van het gasmengsel in den toestel Ψ , dien wij korthedshalve den piëzometer zullen noemen, eene vloeistofphase verkrijgen van een gehalte dat, als in § 1 gezegd uit x van het oorspronkelijke gasmengsel door eene correctie wordt gevonden. Metingen met den volumemeter leveren het volume, dat de vloeistofphase in gasvorm zou innemen. En op de verdeelingen bij p_3 , p_6 Pl. I fig. 3 leest men het volume der vloeistofphase zelf af. Wat de gasphase betreft, zoo is haar moleculair volume het beste af te leiden uit den coëxistentiedruk en uit isothermen, die bij niet te kleine drukkingen volgens de methode van Med. n°. 78 Mrt. '02 des noods met den dauwpuntstoestel \mathcal{D} zelf kunnen worden bepaald. (Bij niet te groote drukkingen zal veelal de correctie voor de afwijking van de wet van BOYLE-GAY-LUSSAC-AVOGADRO ook reeds met behulp van de empirische gereduceerde toestandsvergelijking (Med. n°. 71) volgens de wet der overeenstemmende toestanden kunnen worden aangebracht).

§ 4. *Beginpunt der condensatie.* Om dit te bepalen hebben wij het denkbeeld van REGNAULT's hygrometer toegepast ¹⁾. Men neemt daarbij den eersten neerslag waar, welk zich vormt op eene plaats van iets lager temperatuur dan die van het omringende gasmengel, wanneer het gasmengsel op den begincondensatiedruk word gebracht. Ten

¹⁾ Bij zuivere stoffen is het neerslaan van vloeistof op een in den damp geplaatsten, niet afgekoelden, spiegel door BATELLI, Ann. de Chim. et de Phys. 6 S. XXV p. 59. 1892 een geschikt middel gevonden om het condensatiepunt te bepalen.

einde reeds een zeer geringen neerslag waar te kunnen nemen is de plaats van laagste temperatuur een blinkende spiegel, naast welken zich een andere, niet afgekoelde, bevindt.

De toestel is uit één stuk op de wijze van een ijscalorimeter van BUNSEN geblazen. De buitenste ruimte a , heeft een inhoud van circa 20 cm³. en is voorzien met een capillair, aan welke de staal capillair g''_1 , door welke het gasmengsel wordt toegevoerd, kan worden vastgelakt. Een der spiegels d is aan den bodem vastgesmolten. De binnenbuis c_2 draagt bij c_1 het tweede spiegelende oppervlak en dient tevens als cryostaat om dit oppervlak blijvend iets beneden de temperatuur van het gasmengsel te houden.

Tot dit doel zijn evenals bij den buitensten cryostaat de deksel m_1 , die luchtdicht op de buis c_6 sluit, de kleine roerder h_1 , welks stang h_2 door een caoutchoucuisje als in Med. n^o. 83 naarbuiten treedt, en de thermometer i_1 die aan m_1 is vastgelakt, aangebracht en wordt de damp van het vloeibare gas in c_2 door m_6 weggezogen.

Op de buis c is bij c_4 de glazen kap f'_1 vastgelakt, die bij f'_2 de aan c verbonden capillair door een caoutchoucstopje doorlaat, en de deksel van den grooteren cryostaat vormt. De toestel is daardoor zeer stevig en zeer gemakkelijk te behandelen geworden. De capillair b_1 wordt tegen den roerder beschermd door een metalen raampje n .

Door den deksel gaan bij f'_3 de draden aan welke de roerder hangt. Bij f'_4 wordt de damp van het bad van vloeibaar gas weggezogen.

Het oppervlak van d en c_1 is spiegelend gemaakt door platineeren bij roodgloeihitte met platinachloruur in camilleolie. Wel is het platina oppervlak niet zoo blinkend als dat van een zilverspiegel, doch de voordeelen van platina voor dit doel vallen in 't oog.

Het regelen van de temperatuur in de beide cryostaten van den toestel geschiedt met behulp van dezelfde zuigpomp, die met behulp van een drukregelaar (volgens het beginsel van med. n^o. 87 § 3 (Juni '03) een standvastigen druk onderhoudt in eene hoofdbuis, die zich vertakt in twee zuigleidingen, ieder door eene kraan afgesloten.

Door het stellen van deze kranen kan men bewerken, dat de temperatuur in de binnen cryostaat iets lager is dan in de buiten cryostaat. Welk temperatuursverschil men in beide standvastig onderhouden kan, hangt af van de temperatuur zelf en van het vloeibare gas.

Bij metingen, die wij in het vervolg van deze mededeeling bespreken, was de temperatuur van den grooten cryostaat — 25°,0, die van den kleinen — 25°.1. De benodigde drukverlaging in de hoofdzuigbuis kon (kookp. chloormethyl — 23°) gemakkelijk met een waterstraalpompe worden onderhouden.

De drukregelaar was ongeveer op den bij -25° behoorenden druk ingesteld. Een helper bewerkte met de regelkranen volgens de waarschuwingen, die een andere helper naar aanleiding van de thermometeraflezingen gaf, dat beide temperaturen, en dus ook hun verschil, constant bleven. Dit was tot op 0.05 te verkrijgen.

De nauwkeurigheid, welke men in het bepalen van het dauwpunt met onzen toestel bereiken kan, hangt in de eerste plaats af van het temperatuurverschil in de beide cryostaten. Zij is natuurlijk des te kleiner naarmate de temperatuur coëfficiënt van den begindruk grooter is. Bij gegeven temperatuurverschil wordt zij des te grooter naarmate van het verschil der drukkingen bij welke de neerslag verschijnt of verdwijnt. Hoe groot dit verschil is wordt mede bepaald door de verlichting, en deze lijdt zeer door de twee wanden van den cryostaat. Bij onze proeven bleek waarneming met het bloote oog bij zijdelingsche verlichting van den spiegel nog het best. Het verschil bewoog zich tusschen grenzen, die tot 2% van den druk uitmaakten. Het optische deel van de methode kan zeker nog belangrijk verbeterd worden. De bereikte nauwkeurigheid zal echter in vele gevallen reeds voldoende zijn.

Natuurlijk moet men adiabatiscbe drukverandering voorkomen. Doch al dergelijke bezwaren doen zich ook voor bij bepalingen bij de gewone temperatuur. Met het oog op de groote afmetingen van de damp ruimte a hebben wij geen roerder er in aangebracht en hebben wij door langzaam te werk te gaan getracht de bezwaren zooveel mogelijk te overwinnen.

§ 5. *Bepaling van den einddruk.* Hiertoe wordt het mengsel na het bepalen van den begindruk weder naar den volumemeter teruggebracht, de dauwpuntstoestel van de staalcapillair losgemaakt en in plaats daarvan de piëzometer p in Pl. I fig. 1 en 3 aan de staalcapillair g''_1 bevestigd. De piëzometer bestaat uit een wijdere glazen buis p_0 pl. I fig. 3 bevestigd aan een capillair, beide voorzien met verdeelingen en gecalibreerd. De afmetingen worden gekozen in verband met de hoeveelheden gas met welke men ongeveer de metingen wil verrichten. Zijn deze vastgesteld zoo moet de juiste hoeveelheid gas met welke de piëzometer bij een geschikten stand van het kwik, in de persbuis b , tot dicht bij de monding van de capillair met vloeistof wordt gevuld, voor elke bepaling door een voorloopige proef worden bepaald.

Het evenwicht der phasen in p_0 wordt verkregen met behulp van een magnetischen roerder q bewogen door de klos S . De onmiddellijke werking van deze klos is niet voldoende om den roerder krachtig door den vloeistofspiegel heen en weer te trekken. Tegelijk met

de klos wordt dus een weekijzeren buis ε_1 met sleuf ε_2 om aflezingen op p_6 mogelijk te maken, op en neer bewogen.

Deze beweging dient eigenlijk onafhankelijk van die van den roerder in den cryostaat te zijn. Doch daar wij geen hooge nauwkeurigheid bij onze proeven beoogden, is eenvoudigheidshalve de ijzeren buis z aangebracht als verbinding tusschen het boven en benedenstuk $\chi_{0.2}$ en $\chi_{0.4}$ van den ringvormigen kleproerder (Verg. Med. n^o, 83), en wordt deze beurtelings mechanisch en met de hand op en neer bewogen om de eene maal het vloeistofbad, de andere maal onder gelijktijdige beweging van de magnetiseerende klos S vloeistof en damp in de proefbuis dooreen te roeren.

Het wezenlijk verschil tusschen het bepalen van de eindcondensatiedruk in onzen toestel en in eene buis van CAILLETET bestaat niet zoozeer hierin, dat men de geheele hoeveelheid gas niet tot vloeistof condenseert, als wel daarin, dat, gelijk wij reeds in § 1 opmerkten, de temperatuur in de verschillende deelen van het gasmengsel verschillend is. Het deel (zie fig. 3 § 1) op de temperatuur van onderzoek T is van dat op de gewone (of hoogere) temperatuur T'' gescheiden door eene reeks van lagen (in de capillair) in welke de temperatuur al de waarden tusschen de hoogste, T'' , en de laagste, T , doorloopt. Een van deze temperaturen zullen wij T' noemen.

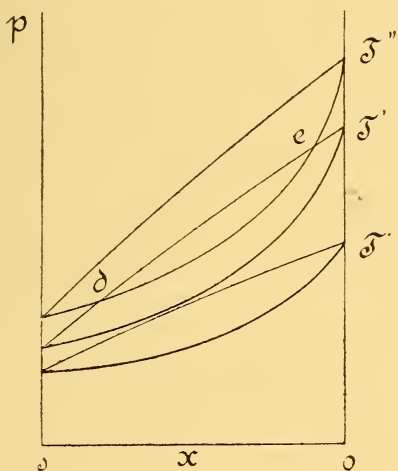


Fig. 4.

Deze toestand brengt verschillende beperkingen en voorwaarden voor de toepassing der methode mede. Om metingen voor alle gehalten x mogelijk te maken moet de temperatuur T'' zoo hoog genomen of gebracht worden boven T , dat in het p x -diagram (fig. 4) de damptak der binodale van T'' de vloeistofbinodale T niet snijdt. Men heeft dan niet te vreezen voor een begin van condensatie bij T'' wanneer de condensatie door overvoeren van het mengsel uit de

compressiebuis (eventueel den volumenometer) naar den piëzometer plaats heeft. Bij T'' blijft dan steeds een gasmengsel van de oorspronkelijke samenstelling. Wanneer de genoemde lijnen elkaar, zooals in fig. 4 van T is aangegeven, snijden, dan kunnen slechts metingen voor de gehalten buiten d - e fig. 4 ongeveer verricht worden.

Kan het gasmengsel inderdaad al zonder dat condensatie in den

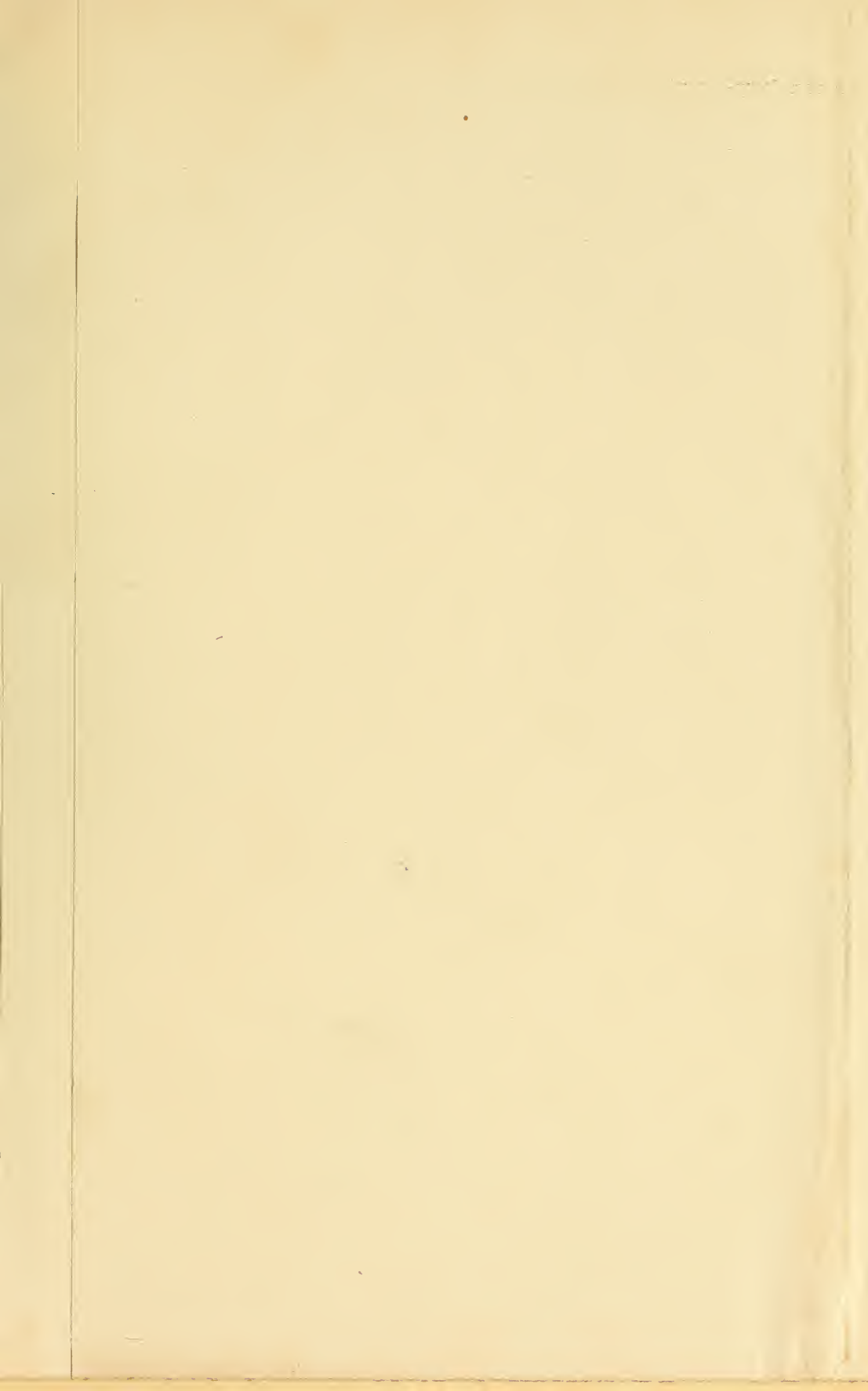
compressietoestel (ev. den volumenometer) plaats vindt naar den piëzometer worden overgebracht, zoo geeft het deel van de capillair, waar de temperatuur van T'' tot T' overgaat toch steeds een tweede moeilijkheid van denzelfden aard. Hier worden noodzakelijk temperaturen T'' gevonden bij welke de dampdruk der binodale van T'' de vloeistofdruk van T' snijdt. Vormen zich bij T'' druppels zoo kan het gehalte x_{vpT} van de vloeistof die bij den waargenomen coëxistentiedruk behoort, niet meer worden aangegeven. Door neervloeien en distillatie (de werking van de capillariteit overtreft die der zwaartekracht) gaan de druppels langzamerhand in de vloeibare phase bij T' over wanneer men er voor zorgt (met behulp van de kraan k (zie Pl. I fig. 1) en door instellen van den druk in b (zie Pl. I fig. 1) dat steeds gas alleen in en niet uit den piëzometer stroomt, tot eindelijk bij roeren bij geopende kraan k het evenwicht bereikt blijkt, en de capillair alleen nog damp bevat.

Ter bevordering van de distillatie en van het verdwijnen van neerslag is het wenschelijk, dat de capillair waar de temperatuur tusschen T' en T'' ligt niet te eng is. Verder is de capillair met een luchtmantel p_4 omgeven, gevormd door een glazen buis met caoutchoucringen p_6 en vischlijm goed afgesloten. Om diffusie te vermijden moet de verdere capillair g''_1 nauw zijn.

Heeft men door voorafgaande bepalingen met den dauwpunttoestel, x_{vpT} bepaald (in eerste benadering zal men soms ook gebruik kunnen maken van een voorloopig ψ -vlak als in Supplement n^o. 8 (Dec. '03) geconstrueerd) zoo is de correctie om uit x_1 , het oorspronkelijke gehalte, het gehalte der onderzochte vloeistofphase bij T' af te leiden, gemakkelijk aan te brengen. Op de piëzometerverdeelingen leest men het volume van den damp af. Zij dit, gereduceerd op normale omstandigheden en gecorrigeerd voor den eersten viriaalcoëfficient B (zie bijv. het vervolg dezer Mededeeling), V_v . Zij verder het geheele volume van damp- en vloeistof, evenzoo gemeten en gecorrigeerd, V , dan is $V_l = V - V_v$ het volume gas, evenzoo gemeten en gecorrigeerd, dat de vloeistofphase zou vormen. Daaruit volgt

$$x_{vpT} = \frac{X_1 V - X_{vpT} V_v}{V - V_v} = X_1 + \frac{V_v}{V} (X_1 - X_{vpT}) + \dots$$

Wanneer men bij matige drukkingen werkt, zal de correctie altijd slechts gering zijn en kan zij, ook wanneer x_{vpT} niet zeer nauwkeurig bekend is, voldoende worden aangebracht.



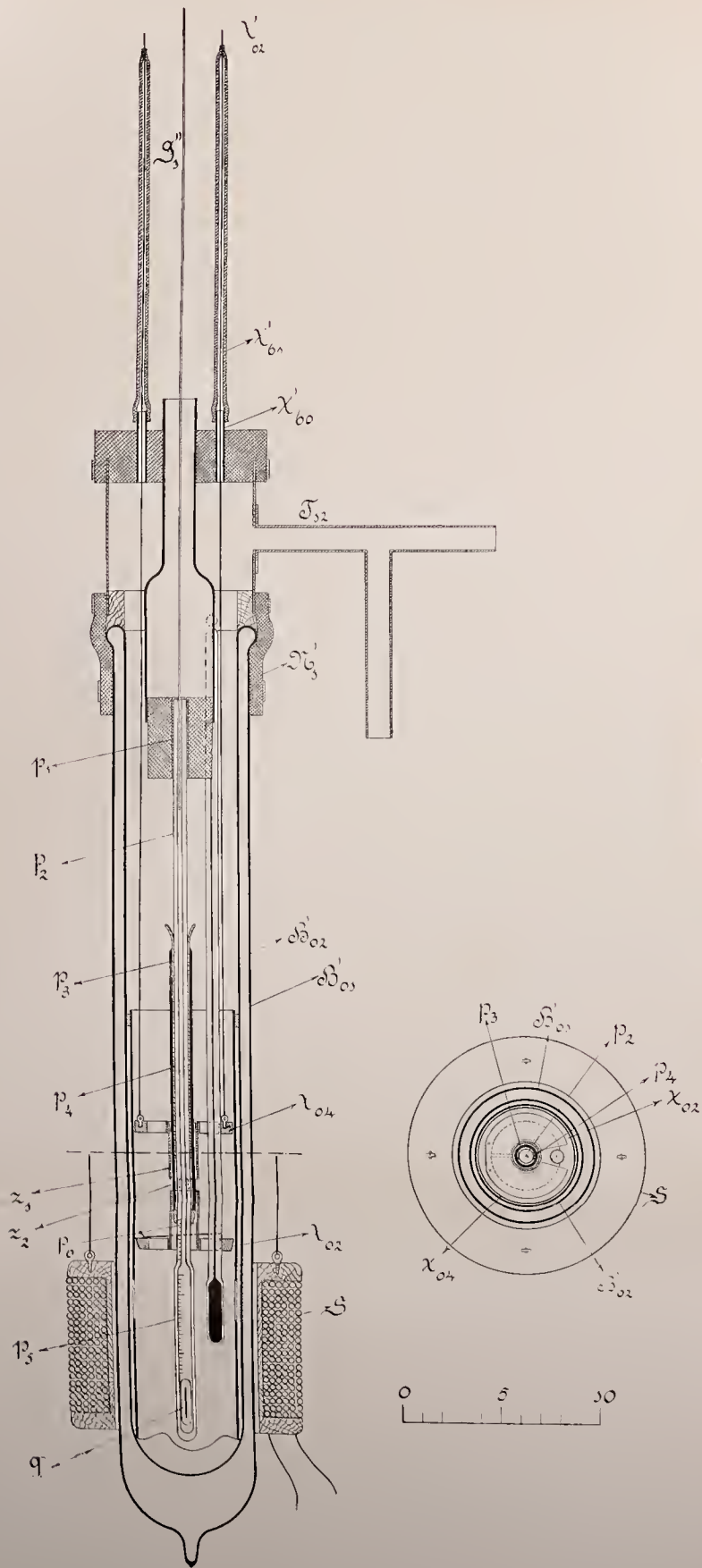


Fig. 3.

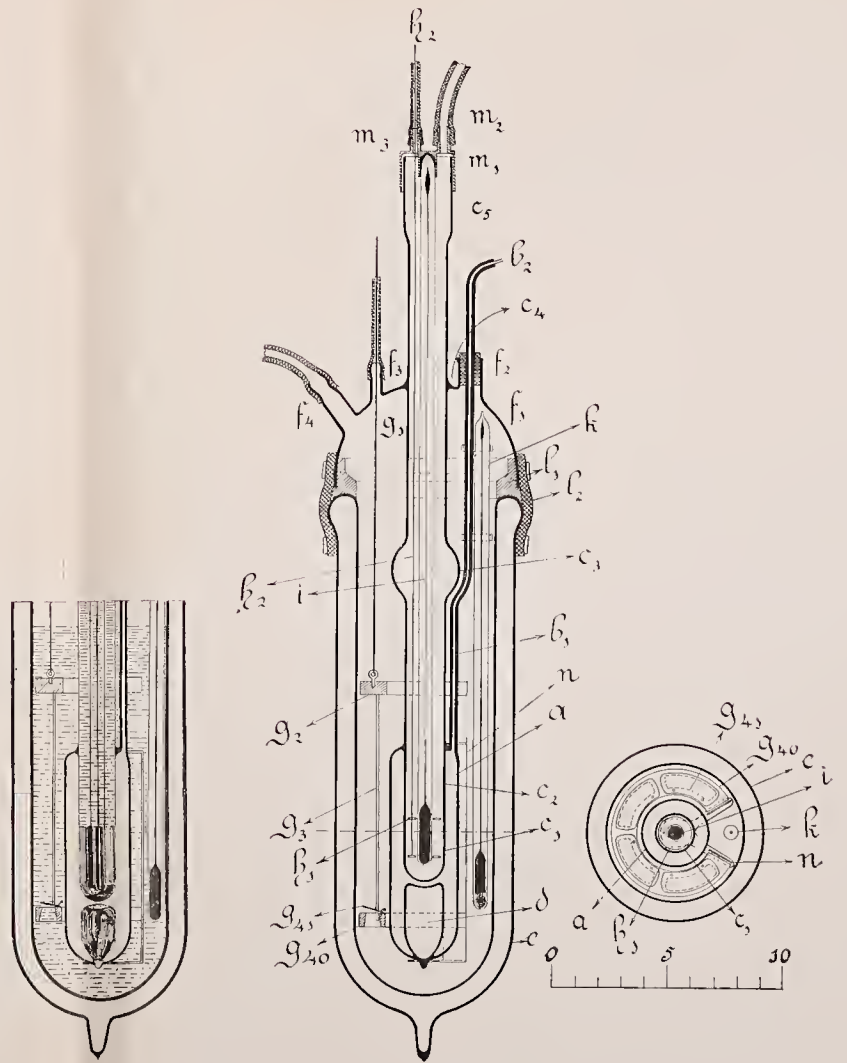


Fig. 2.

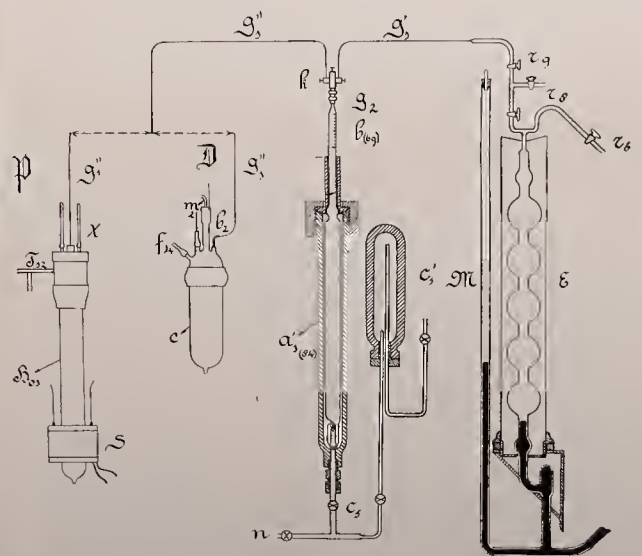


Fig. 1.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. n^o. 92 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden (Vervolg):
 Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. C. ZAKRZEWSKI: „*Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van chloormethyl en koolzuur.*”

§ 1. *Inleiding.*

In n^o. IX der bijdragen tot de kennis van het ψ -vlak van VAN DER WAALS hebben wij de hoop uitgesproken, eene experimenteele bijdrage te leveren tot het onderzoek der coëxisterende mengsels van chloormethyl en koolzuur bij lage temperaturen in verband met de toetsing van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels, welke sedert jaren te Leiden ter hand is genomen. Van het ruime gebied van gereduceerde toestanden hetwelk mengsels van koolzuur en chloormethyl ter weerszijden van den kritischen toestand voor metingen beschikbaar stellen, (reden waarom zij circa '90 voor de eerste onderzoekingen van het ψ -vlak werden gekozen), is een zeer belangrijk deel om den kritischen toestand heen reeds aanstonds door KUENEN, Med. n^o. 4 April '92, onderzocht. HARTMAN, Med. n^o. 43 Juni '98 heeft daaraan toegevoegd het gebied der coëxisterende fasen bij 9^o,5. Wij hebben het onderzochte gebied, zij het dan ook slechts door een paar verkennende bepalingen, in twee richtingen uitgebreid.

De uitkomsten van eenige dergelijke metingen, al zijn een paar er van ook slechts voorloopige, die hoofdzakelijk tot vaststelling van eene methode van onderzoek gediend hebben, schijnen wel van belang, nu er nog zoo weinig bekend is omtrent de verschillende mate van benadering, waarmede in verschillende velden van gereduceerden toestand $\left(v = \frac{v}{v_k}, t = \frac{T}{T_k} \right)$ de wet van de overeenstemmende toestanden voor mengsels geldt.

Onze metingen hebben betrekking in de eerste plaats op gasmengsels in nagenoeg normalen toestand, in de tweede plaats op coëxisterende fasen bij lage temperatuur.

Bij de normale gasphase vonden wij de wet van de overeenstemmende toestanden met groote benadering bevestigd. De viriaalcoëfficiënt B , die de afwijking van mengsels van chloormethyl en koolzuur van de wet van BOYLE bij geringe dichtheden bepaalt, kan met behulp van de wet der overeenstemmende toestanden voldoende berekend worden, al schijnt de afwijking bij een der mengsels iets grooter dan bij de enkele stoffen.

Grootere afwijkingen hebben wij gevonden bij het onderzoek der coëxisterende fasen bij lage temperatuur. Hier hebben wij met den dauwpuntstoestel, beschreven in de vorige Meded. (Maart 1904), den condensatiedruk bepaald van het mengsel $x = 1/2$ bij -25° , de temperatuur voor welke wij in Suppl. n^o 8 Maart '04 het ψ -vlak hadden geconstrueerd. De gevonden afwijkingen zijn vrij aanzienlijk, zij wijzen er op, dat de afwijkingen van de wet der overeenstemmende toestanden bij de mengsels bij lagere temperaturen in den vloeistof toestand toenemen. Het bepalen van den condensatiedruk voor hetzelfde mengsel $x = 1/2$ met den piëzometer van de vorige Meded. zou bij -25° complicaties medebrengen (zie vorige Meded. § 5). Ten einde een denkbeeld over de afwijkingen van den vloeistoftak der binodale bij $x = 1/2$ van dien volgens de wet der overeenstemmende toestanden te verkrijgen, hebben wij den condensatiedruk voor $x = 1/2$ dus bij lagere temperatuur en wel bij $-38^\circ.5$ onderzocht. Het resultaat van het onderzoek van de dampphase bij -25° werd daardoor bevestigd.

I. De samendrukbaarheid in de nabijheid van den normalen toestand.

§ 2. *Bepaling van den tweeden viriaalcoëfficiënt.* De mengsels werden bereid en de samendrukbaarheid bepaald in den mengtoestel en volumemeter beschreven in Med. no. 84 Mrt. '03. De methode van waarneming en berekening is uitvoerig door KEESOM behandeld Med. no. 88 in Sept., Oct., Nov. '03.

De gassen werden bereid door distillatie eerst in ijs, vervolgens in vast koolzuur. Dat op deze wijze zuiver koolzuur verkregen wordt is uit vroegere Mededeelingen gebleken. Wat chloormethyl betreft zullen wij in het vervolg dezer Meded. het bewijs leveren.

De bij de temperatuur t gevonden waarden van druk p_1 volumen V_1 en moleculair gehalte aan chloormethyl x zijn neergelegd in Tabel I (p. 209).

De waarden voor $x=0$ kunnen aan Med. no. 88 worden ontleend.

Bij de berekening dezer waarnemingen zullen wij gebruik maken van de empirische gereduceerde toestandsvergelijking van Med. no. 71 Juni '01, die in 't bijzonder geschikt is voor het onderzoek naar de mate van geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden, en wel in den in § 4 opgegeven vorm, weinig afwijkende van dien in Suppl. no. 8 Mrt. '04.

In de eerste plaats moeten de waargenomen drukken op dezelfde temperatuur worden gereduceerd. Daartoe hebben wij de spanningscoëfficiënten van CO_2 (0,003460) en CH_3Cl (0,003586) met de genoemde toestandsvergelijking en den beneden gegeven spanningscoëfficiënt

TABEL I. Samendrukbaarheid van mengsels van koolzuur en chloormethyl.			
$x = 1$ (CH ₃ Cl)			
N ^o .	p in m.m.	V in cM ³	t
I.	1137.33	537.67	20.05
II.	593.69	1043.51	20.07
III.	479.23	1296.33	20.07
$x = 0.6945$			
I.	1200.32	537.49	20.09
II.	624.45	1043.50	20.10
III.	503.49	1297.91	20.08
$x = 0.5030$			
I.	1173.08	537.73	19.97
II.	608.87	1043.66	19.87
III.	490.88	1296.30	19.87

voor ideale gassen berekend, en voor de mengsels lineair geïnterpo-
leerde waarden genomen.

Wegens de kleine temperatuurverschillen blijven de fouten, die
hierdoor gemaakt worden, beneden die der waarneming.

Is v het volume, uitgedrukt in het theoretisch normaalvolume
(ingevoerd in Med. no. 47 Febr. '99) dan is bij benadering

$$pv = A + \frac{B}{v}, \text{ waar } A = 1 + \alpha_{\infty} t$$

en α_{∞} de spanningscoëfficiënt van een ideaal gas. Een der voordeelen
van de empirische gereduceerde toestandsvergelijking is, dat zij den
graad van benadering doet kennen, met welke de hoogere termen in
 $\frac{1}{v}$ mogen worden weggelaten. In ons geval leert zij, dat wij vol-
staan kunnen met de twee aangevoerde termen.

Wij hebben dan ter berekening van den tweeden viriaalcoëfficiënt

$$\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} - 1 = \frac{B}{A^2} (p_1 - p_2)$$

en vinden uit Tabel I met $a_\infty = 0,00366195$ (in plaats van 0,0036625 van Med. no. 71)

TABEL II. Tweede viriaalcoëfficiënt voor mengsels van koolzuur ($x = 0$) en chloormethyl ($x = 1$).

gehalte	$\frac{B}{A^2}$ uit I en II	$\frac{B}{A^2}$ uit I en III	$\frac{B}{A^2}$ gemiddeld	B
$x = 1$	— 0.017953	— 0.018128	— 0.0 7990	—0.020721
0.6945	— 0.013033	— 0.013170	— 0.013101	—0.015090
0.5030	— 0.010300	— 0.010077	— 0.010188	—0.014735
0	KEESOM, Med. N ^o . 88.			—0.006537

§ 3. De viriaalcoëfficiënt B als kwadratische functie van het moleculair gehalte x .

Volgens de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS is $B = RTb_{VDW} - a_{VDW}$, wanneer a_{VDW} en b_{VDW} de grootheden van VAN DER WAALS ten opzichte van het theoretisch normaalvolume voorstellen. In eerste benadering moet dus voor het mengsel met gehalte x

$${}_x B = B^{(ClMe, CO_2)} x^2 + 2 B^{(ClMe, CO_2)} x (1-x) + B^{(CO_2)} (1-x)^2$$

zijn. Met behulp van kleinste kwadraten werd gevonden

$$B_{20^0}^{(ClMe)} = -0.020772$$

$$B_{20^0}^{(ClMe, CO_2)} = -0.010067$$

$$B_{20^0}^{(CO_2)} = -0.006515.$$

De overeenstemming blijkt uit de volgende tabel

x	B waargen.	B berekend	$W-R$
1	— 0.020721	— 0.020772	+ 0.000051
0.6945	— 0.015090	— 0.014899	— 0.000191
0.5030	— 0.011735	— 0.011898	+ 0.000163
0	— 0.006537	— 0.006517	— 0.000022

De afwijkingen zijn kleiner dan 2% , dus ook kleiner dan de afwijkingen van de enkele waarden van $\frac{B}{A^2}$ van haar gemiddelde. De

overeenstemming met den kwadratischen vorm werd hierdoor voldoende aangetoond om voorloopig metingen van niet grootere nauwkeurigheid bij andere mengsels te laten rusten.

§ 4. *Geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij den viriaalcoëfficiënt B.* Volgens de wet der overeenstemmende toestanden worden de viriaalcoëfficiënten gevonden uit de coëfficiënten der gereduceerde toestandsvergelijking door vermenigvuldiging met functies van T_k en p_k (verg. Med. no. 71 en verder Suppl. no. 8 Mrt. '04 de 4 eerste § §).

Daar de kritische data van mengsels van koolzuur en chloormethyl in Med. 59^b uit de proeven van KUENEN zijn afgeleid, kan men B voor een bepaalde temperatuur bepalen, bijv. B_{20} door

$$B_{20} = \frac{T_k}{p_k} \mathfrak{B}_t$$

waar \mathfrak{B}_t de waarde van de functie \mathfrak{B} van de gereduceerde temperatuur is behoorende bij $t = \frac{293.04}{T_k}$.

Voor \mathfrak{B} hebben wij een functie gebruikt van een iets anderen vorm dan den in Suppl. no. 8 genoemden vorm VI. 1, die behalve bij waterstof, zuurstof en stikstof bij aether was aangesloten, nl. een vorm VI. 2, die in plaats van bij ether op dezelfde wijze als VI. 1 gemiddeld bij ether en isopentaaan is aangesloten, en die luidt

$$\mathfrak{B} = + 179,883 t - 374,487 - 181,324 \frac{1}{t} - 110,267 \frac{1}{t^3}$$

De mate van overeenkomst blijkt uit de volgende tabel, waar in de eerste kolom de berekende waarden volgens de laatste formule en in de tweede kolom, die van de kwadratische formule van § 3 staan.

	volgens overeenst. toestanden	volgens kwadratische formule	verschil
1	— 0.021920	— 0.020772	+ 0.001148
$\frac{3}{4}$	— 0.016502	— 0.015866	— 0.000636
$\frac{1}{2}$	— 0.012179	— 0.011855	— 0.000324
0	— 0.006485	— 0.006515	+ 0.000030

De afwijkingen aan de zijde van het chloormethyl zijn grooter als die der fouten van waarneming en als die der kwadratische formule. Chloormethyl stemt dus slechter met aether en isopentaaan overeen dan koolzuur. Tot ditzelfde resultaat komt men ook op andere wijze. Tevens echter blijkt het dat de mengsels niet veel meer afwijken dan het chloormethyl zelf.

(*Vervolg in het Verslag der volgende Vergadering.*)

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N^o. 92 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. B. MEILINK. „*Over het meten van zeer lage temperaturen. VII. Vergelijking van den platinathermometer met den waterstofthermometer.*” (Vervolg van Med. N^o. 77. Febr. '02).

(Mede aangeboden door den Heer J. D. VAN DER WAALS).

§ 5. *De metingen bij lage temperaturen.* De thermometers werden opgesteld op de door KAMERLINGH ONNES in Med. N^o. 83 Dec. '02 § 5 aangegeven wijze. Bij de eerste voorloopige metingen, waren de waterstofthermometer en de weerstandsthermometer (zie Med. N^o. 77 § 2) gebracht in den cryostaat beschreven in Med. N^o. 51 Sept. '99, waaraan de in § 2 Med. N^o. 83 Dec. '02 aangegeven verbeteringen waren aangebracht, en waar een vacuum glas in de toestellen binnen B_1 (Pl. I Med. N^o. 51) gebracht was, hetwelk met kurk klemde tegen de wanden van B_1 (zie Med. N^o. 83 einde § 2 benevens Pl. I en Pl. II). De binnenwand nam de plaats in van ξ_0 in Pl. II Med. N^o. 83 (dezelfde deelen zijn in Med. N^o. 83 en N^o. 77 met dezelfde letters aangegeven).

Deze voorloopige proeven hadden geleerd, dat voor den weerstand bij 0° na herhaalde metingen bij de laagste temperaturen weder de oorspronkelijke waarde gevonden werd, dat de platinadraad, niet-tegenstaande het verschil in uitzetting met het glas dus niet uitgerekt was, terwijl hij ook behoorlijk in de groeven bleef. Verder was het wel gebleken, hoe, alleen wanneer met de uiterste zorg de temperatuur van het bad constant gehouden werd, waarbij de moeilijkheden in § 2 Med. N^o. 83 behandeld, ondervonden werden, nauwkeurige vergelijking der beide thermometers mogelijk was. Bereikt werd dit door de in Med. N^o. 83 § 5 beschreven inrichting van den cryostaat. Opgemerkt zij ten overvloede nog, dat het vloeibare gas daarbij steeds hooger dan ξ_2 Med. N^o. 83 Pl. II werd gehouden, daar anders bij het bewegen van den roerder het niveau binnen en buiten den beschermingscylinder ξ_0 wel op en neer zou gaan, doch circulatie niet tot stand zou komen.

De gang van eene meting was de volgende. Zoodra ongeveer de omstandigheden verwezenlijkt waren waaronder wij eene meting wenschten te verrichten, werden de weerstanden van de toeleidingsdraden bepaald, daarna de weerstand van den platinadraad ingesteld en vervolgens door het geven van seinen aan den helper, die met de drukregeling belast was, gezorgd, dat deze weerstand en dus dezelfde temperatuur behouden bleef. Had dit ongeveer 10 minuten geduurd, dan werden, terwijl de galvanometer voortdurend afgelezen werd, de metingen met den waterstofthermometer aangevangen en voort-

gezet tot de vloeistof verdampt was of tot wij meenden voldoende gegevens verzameld te hebben. Ten slotte werd nog eens de weerstand der toeleidingsdraden nagegaan.

De waarnemer bij den galvanometer had dus alleen te zorgen voor het voortdurend sluiten en verbreken van den stroom en het noteeren van de bij elkander behoorende waarden van de galvanometeraanwijzingen en den tijd. Later werden hieruit de uitslagen afgeleid, deze graphisch voorgesteld (zie pl. III Med. N^o. 83) en de gemiddelde uitslag gedurende het tijdvak der waarneming met een planimeter opgemaakt.

§ 6. *Nulpunt na de metingen.* Door het te snelle afschenken van vloeibare zuurstof waren er helaas in den cylinder van den weerstand talrijke barsten gekomen. Hiermee de boven beschreven bewerkingen voor de nulpuntsbepaling te herhalen, scheen nogal gevaarlijk, vooral daar het weer bevestigen in den cryostaat tot vele lastige werkzaamheden aanleiding gegeven zou hebben.

Ten einde den weerstandsthermometer op eene standvastige temperatuur dicht bij 0° te brengen, werd derhalve de kookkast *U* (Pl. I Med. N^o. 83), terwijl al het overige van den cryostaat aan den deksel bevestigd bleef, van den deksel *N*₂ (Pl. I. Med. N^o. 51) afgeschroefd en vervangen door een gemakkelijker te behandelen zinken cylindervormigen bak met een op *N*₁ passenden rand, die in een tweeden, grooteren, zinken bak geplaatst werd, zoodat een mantel van ruim 5 cM. overbleef, die overal met ijs aangevuld werd. Dan werd isopentaaan in *B*₀₂ (Pl. II. Med. N^o. 83) gedistilleerd en liet men den toestel een nacht aan zich zelf over. Den volgenden dag was de temperatuur (dicht bij 0°) standvastig geworden en werd deze (onder roeren) met een thermoëlement (Θ Pl. II. Med. N^o. 83) bepaald.

§ 7. *Correcties.* Een overzicht van de opstelling van de WHEATSTONE-

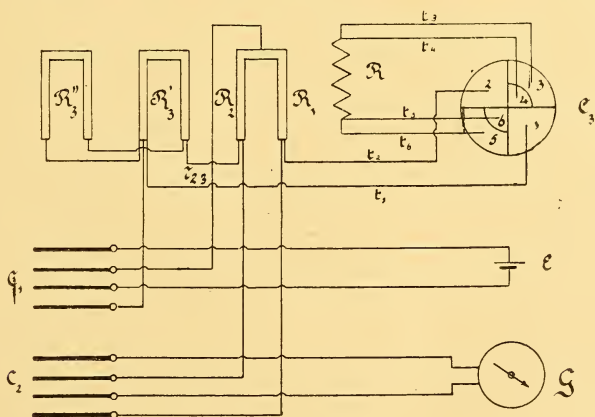


Fig. 5.

brug (verg. § 4 Med. N^o. 77) wordt gegeven in fig. 5. R geeft den te meten weerstand aan, R_1 en R_2 de twee klossen van manganindraad, R_3' en R_3'' de weerstandsbanken van HARTMANN en BRAUN en SIEMENS en HALSKE samen leverende den weerstand $R_3 = R_3' - \frac{R_3'^2}{R_3' + R_3''}$, welke op r_{23} na den vierden arm van de brug vormt; C_1 en C_2 de commutatoren met samenvloeiend kwik (Med. N^o. 27 Mei en Juni '96) C_3 de roodkoperen commutator behandeld in § 3 Med. N^o. 77 en daar afgebeeld in fig. 2.

De factor voor de ongelijkarmigheid van de brug $\frac{R_1}{R_2} = 1 - \alpha$ stellende, werd $\alpha = 0,00216$ (als gemiddelde uit een twintigtal waarden tusschen 0,00219 en 0,00214) gevonden. Daar de weerstand van den platinadraad R volgens § 3 Med. N^o. 77 gevonden wordt als verschil van twee metingen, de eene maal van $R + t$, de toeleidingsdraden, de andere maal van t , wordt, nu de verhouding van de armen der brug zoo nabij 1 ligt, r_{23} van zelf geëlimineerd, en kan men dus daarvan afzien.

Aan de weerstanden, op de bank R_3' afgelezen, moeten de door calibratie gevonden correcties worden aangebracht. Men overtuigt zich gemakkelijk er van, dat het schakelen van bank R_3'' naast bank R_3' op de waarde der correcties bij R_3' geen merkbaren invloed heeft. De correcties van de fouten in de nominale bankwaarden waren bij alle klossen beneden 1 Ohm te verwaarloozen.

Bij de metingen bij lage temperatuur moest nog eene correctie worden aangebracht, omdat gedurende het regelen der temperatuur de gemiddelde uitslag niet nul was.

Om dien uitslag in weerstand uit te drukken, werd, wanneer de metingen afgelopen waren, de platinathermometer in de brug vervangen door een even grooten bankweerstand en bij eene bekende wijziging daarvan de uitslag waargenomen. De regeling van de temperatuur gelukte meestal zoo goed, dat de correctie nauwelijks in aanmerking kwam.

De weerstand, nabij 0° gemeten, werd tot 0° herleid met de benaderde formule $W = 110,041 (1 + 0,0038644 t - 0,000001031 t^2)$, gevonden uit voorloopige waarnemingen. (zie tabel I p. 215).

§ 8. *Overzicht van eene bepaling.* De gang der meting is beschreven in § 5.

De grootheden, die direct aan de waarneming ontleend zijn, vindt men in tabel I. Onder het hoofd „Verbinding” is aangegeven tusschen welke blokken van den commutator C_3 geleidend verband bestond.

Commutator C_2 werd derhalve niet gebruikt gedurende de meting.

TABEL I. Calibratie platinathermometer in zuurstof
kokende onder verminderden druk (22 Mei '02).

Weerstandsmeting.

Tijd.	Verbinding.	R'_3	R''_3	Stand commutator C_1	Evenwichts- stand galvanometer.	Afwijking galvanometer.
	1-5 2-6 Toeleidingen.	0.4	1.5	Links.	58.5	74.5
				Rechts.		41.7
			1.6	Links.		43.4
	1-3 2-4	0.4	1.6	Links.	58.2	
					58.0	43.8
3 ^u .49'	1-5 2-4 platinadraad.	20 + 2 + 0.3	3200	Links.	45.2	44.0
						45.0
						46.0
						46.7
						47.0
50'						45.0
						44.2
tot 4 ^u .25'				Rechts.	45.1	
						enz. verder voor alle minuten tot 4 ^u 25'
4 ^u .27'	Toeleidingen.					
	1-3 2-4	0.4	1.5	Links.	46.0	55.7
	1-5 2-6	0.4	1.5	Links.		53.8
					46.0	

Dit was mogelijk geworden, doordat de platinadraad inductievrij gewonden was, zoodat men bij sluiten van den hoofdstroom geen inductiestoot waarnam.

Uit deze gegevens wordt nu afgeleid voor elke verbinding de waarde van R_3 , d.i. de weerstand van den tak van de brug, waarin de weerstandsbanken staan afgezien van $r_{2,3}$.

Vermindert men de waarde van R_3 , die men vindt bij het meten van den platinadraad met toeleidingen, met de waarde van R_3 die men bij de toeleidingen alleen vindt, dan verkrijgt men den weerstand van den platinadraad, in de onderstelling, dat 1°. de armen der brug gelijk zijn; 2°. gedurende de meting de gemiddelde uitslag nul was en 3°. de weerstandsbank geen correctie behoeft. Voor elk van deze onderstellingen moet men de in § 7 besproken correctie aanbrengen om den juisten weerstand te vinden. De gemiddelde uitslag gedurende de meting is opgemaakt volgens Med. n°. 83 § 5 met behulp van een planimeter.

(Vergelijk voor de grafische voorstelling pl. III, Med. n°. 83. Deze heeft echter niet op ons voorbeeld betrekking).

In de volgende Tabel zijn de correcties vereinigd.

TABEL II. Calibratie platinathermometer in zuurstof kokende onder verminderden druk (22 Mei '02).		
Weerstandsmeting, Correcties.		
Verhouding armen		+ 0,00216
Correctie aan R voor bankwaarden	20 en 2	+ 0,0005
Gemiddelde uitslag.		+ 0.1 cm.

De verdere berekening zal na wat boven over de wijze van berekening gezegd is, wel voldoende uit de volgende tabel te overzien zijn. (zie tabel III, p. 217).

Bepalingen bij andere temperaturen leveren niets bijzonders. Slechts bij de nulpuntsbepaling verandert er iets aan de correcties. Die voor herleiding tot den gemiddelden uitslag 0 vervalt. Maar er komt eene nieuwe bij, doordat de bepaling niet precies bij 0° verricht is, maar bij eene iets hogere temperatuur. Na wat daarvan in § 7 gezegd is, schijnt het overbodig deze kleine verandering door een voorbeeld toe te lichten.

§ 9. *Bepalingen over den weerstand bij 0°.* Zij vormen drie seriën. Bij de eerste werden nog toeleidingsdraden van 0,5 m.M. gebruikt (Med.

TABEL III. Calibratie platinathermometer in zuurstof
kokende onder verminderden druk.

Weerstand bij $-197^{\circ},08$.

Tijd	Verbinding	R'_3	R''_3	R'''_3 gemiddeld	R_3	Weerstand pt draad	
3° .49— 4° .25	1—5 2—6	0.4	1.54	} 1.55	0.3182		
	1—3 2—4	0.4	1.57				
	1—2 2—4	20 + 2	3200	} 1.53	22.1457		
		+0.3					
	1—3 2—4	0.4	1.53				
	1—5 2—6	0.4	1.53		0.3171	21.8281	
		Correctie armen van de brug				+0.0485	
		Correctie weerstandsbank				+0.0005	
		Correctie tot gemiddelden uitslag 0				+0.0002	
		Weerstand					21.8773

no. 77 § 2 en fig. 3), de isoleerende vloeistof was petroleumaether of amylen; bij de tweede waren de toeleidingsdraden 5 m.M. dik (i.c. fig. 4) de isoleerende vloeistof was isopentaaan; de derde eindelijk (isolatievloeistof isopentaaan) was die, behandeld in § 6.

TABEL IV. Calibratie Platinathermometer.

Nulpunt.

	Aantal bepal.	grootste kleinste weerstand.		middelwaarde.
Serie 1. Juni '01	5	110.031	110.048	110.040
2. Nov.Dec.'01	7	033	57	43
3. Nov. '03.	3	043	49	48
Weerstand bij 0° gemiddeld.				110.043

§ 10. *Bepalingen bij lage temperaturen.* Er werd gemeten bij vrij regelmatig dalende temperaturen; bij de laagste temperaturen zijn de intervallen kleiner.

De metingen met den waterstofthermometer (zie Med. n^o. 77 § 2) werden verricht door Dr. W. HEUSE, wien ik hierbij mijn oprechten dank betuig voor de vele moeite, die hij zich hiervoor getroost heeft.

De bepalingen vervallen in 2 series.

De eerste serie werd verricht tusschen 13 Mei en 10 Juli.

De tweede serie tusschen 10 Dec. '02 en 22 Dec. '02.

Het schijnt wenschelijk beide series afzonderlijk te bespreken.

De eerste serie heeft uitkomsten geleverd, die uit de volgende tabel zijn op te maken.

Datum.	Temperatuur door den waterstofthermometer bepaald.	Gemeten weerstanden.	Bad waarin gemeten werd.
	0°	110.045	zie § 9.
24 Mei '02	— 51°.43	87.760	methylechloride kokende onder verminderden druk.
13 Mei '02	— 104°.66	64.256	aethyleen.
„	— 104°.38	64.371	id.
„	— 127°.71	53.910	aethyleen kokende onder verminderden druk.
„	— 128°.88	53.372	
16 Mei '02	— 161°.45	38.676	methaan.
„	— 161°.45	38.672	id.
„	— 161°.47	38.515	id.
22 Mei '02	— 182°.63	28.692	zuurstof.
10 Juli '02	(— 195°.75) ¹⁾	(22.600)	stikstof.
22 Mei '02	— 197°.08	21.877	zuurstof kokende onder verminderden druk.
„	— 197°.58	21.673	
10 Juli '02	— 209°.93	16.025	stikstof kokende onder verminderden druk.

Om de onderlinge aansluiting der hier gegeven waarden te beoordeelen, heb ik eerst uitgerekend de formule van den vorm

$$w = w_0 (1 + at + bt^2),$$

¹⁾ Deze waarneming verdient minder vertrouwen, doordat eene onzekere correctie bij den waterstofthermometer hier een zeer hoog bedrag bereikte.

die met de waarnemingen aansluit bij 0° , bij $-104^\circ,66$ en bij $-182^\circ,63$, de temperaturen die het meest overeenkomen met die, welke gewoonlijk ook door andere waarnemers gebruikt worden.

De formule wordt

$$w = 110,045 (1 + 0,0038788 t - 0,000\ 000\ 9257 t^2).$$

De afwijkingen der waargenomen weerstanden van de formule zijn opgenomen in kolom $W-R_I$ van Tabel VI. Zij zijn zeer merkbaar. Bij chloormethyl bedraagt de afwijking 65 op 87760, in temperatuur een verschil van $0^\circ,15$. In methaan zijn deze afwijkingen 63 op 38674 of in temperatuur een verschil van eveneens $0^\circ,15$. In zuurstof onder verminderden druk kokende, bedraagt de afwijking 90 op ruim 21637 of ongeveer $0^\circ,2$.

Om te onderzoeken of deze afwijkingen wellicht aan onregelmatige fouten bij de meting te wijten kunnen zijn, verdient het aanbeveling na te gaan of door toevoeging van nog een term de verschillen tusschen deze waarnemingen en de berekening tot binnen de grenzen van de waarnemingsfouten terug te brengen zijn. Dit gelukt inderdaad vrij bevredigend, zooals uit kolom $W-R_{II}$ van tabel VI (p. 220) blijken moge. De berekende waarden zijn opgemaakt met behulp van de formule

$$w = 110,045 (1 + 0,0039167 t - 0,000\ 000\ 3432 t^2 + 0,000\ 000\ 002069 t^3).$$

De afwijkingen zijn bij formule II met uitzondering van de laatste, zoo ze al niet geheel binnen de verwachte grenzen der waarnemingsfouten vallen, dan toch zeer weinig grooter.

Bij methaan, waar de afwijking 19 op 38674 bedraagt, is eene fout in de temperatuur van $0^\circ,04$ voldoende om dit bedrag te verklaren.

Bij stikstof, kokende onder verminderden druk, is echter de afwijking reeds zeer groot geworden. Deze is zóó groot, dat zij niet door waarnemingsfouten te verklaren is. Zij moet dus haar oorzaak hierin vinden, dat de formule niet geschikt is zoo dicht bij het absolute nulpunt den weerstand voor te stellen. Toch is het opvallend, dat deze verandering zoo plotseling schijnt te komen. Bij -197° voldoet de formule nog; bij -210° is er eene afwijking van 229 op 16025 d. i. in temperatuur eene afwijking van $0^\circ,49$. Maar neemt men in aanmerking, dat volgens de formule bij -243° de weerstand nul moet worden, men dus nog slechts dertig graden van dit punt verwijderd is, dan behoeft men zich over deze uitkomst niet te verwonderen.

Om meer zekerheid te verkrijgen, of werkelijk hier eene vrij snel aangroeiende verandering plaats vond in den loop der kromme lijn,

TABEL VI. Beproeven van een parabolische en van een derdegraads formule.

1e serie.

Temperaturen door den waterstofthermometer bepaald	Gemeten weerstanden	$W-R_I$	$W-R_{II}$
0°	110.045	0	0
— 51°.43	87.760	— 0.65	+ 0.012
— 104°.38	64.371	— 0.44	— 0.017
— 104°.66	64.256	— 0.	— 0.005
— 127°.74	53.910	+ 0.039	0.—
— 128°.88	53.372	+ 0.030	— 0.014
— 161°.45	38.674	+ 0.063	+ 0.019
— 161°.47	38.515	+ 0.051	+ 0.008
— 182°.63	28.692	0	+ 0.008
(— 195°.75)	(22.600)	(+ 0.014)	(+ 0.078)
— 197°.08	21.877	— 0.083	— 0.014
— 197°.58	21.637	— 0.090	— 0.017
— 209°.93	16.025	+ 0.077	+ 0.229

die den weerstand als functie der temperatuur weergeeft, werd besloten in het bijzonder deze metingen bij zeer lage temperatuur, in stikstof, te herhalen. Deze vormen wat ik in den beginne de 2^e serie waarnemingen genoemd heb. Het resultaat was helaas onbevredigend.

Wel wijzen de waarnemingen in denzelfden zin, doch er schijnt daarbij een of andere fout te zijn ingeslopen, die niet meer kon worden opgespoord toen de berekeningen er op wezen. Wij laten ze hier achterwege.

De uitkomsten blijven dus wat het bedrag der afwijking betreft eenigszins onzeker; maar toch is het zeer waarschijnlijk, dat men reeds in stikstof, kokende onder verminderden druk, een begin zal waarnemen van de verandering in den vorm der temperatuursfunctie (door een buigpunt), welke, zooals uit de proeven van DEWAR blijkt, bij de temperatuur van vloeibare waterstof zoo sterk optreedt.

De slotsom, tot welke de metingen leiden, kon als volgt worden samengevat.

De voorstelling van den weerstand door een quadratische functie naar de temperatuur, ook indien men niet lager gaat dan -180° , is slechts geoorloofd, indien men geen grootere nauwkeurigheid beoogt dan $0^{\circ},2$. Wanneer men zich eene grootere nauwkeurigheid ten doel stelt, zijn voor de calibratie van een platinathermometer een grooter aantal vergelijkingspunten noodig. Voor eene vergelijking tot op $\frac{1^{\circ}}{20}$ is een aantal van minstens 6 vergelijkingstemperaturen zeer wenschelijk te achten.

Beneden 197° worden de afwijkingen van den platinathermometer zóó groot, dat men aan het gebruik in dit gebied vooraf dient te laten gaan een onderzoek naar het beloop van den weerstand als temperatuursfunctie.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N^o. 92 (Vervolg) uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, B. MEHLINK: „*Over het meten van zeer lage temperaturen. VIII. Vergelijking van den weerstand van gouddraden en van platinadraden.*”

(Mede aangeboden door den Heer J. D. VAN DER WAALS).

§ 1. Het onderzoek, in deze mededeeling behandeld, vormt een deel van het sub. 2 in § 1 van Med. N^o. 77 Febr. '02 besprokene, en had voornamelijk het inrichten der methode van waarneming ten doel.

De gouddraad was uit materiaal vervaardigd, welwillend door den heer Dr. C. HOITSEMA, inspecteur-essaieurgeneraal van 's Rijks Munt voor dit doel afgestaan, die omtrent de zuiverheid mededeelde, dat met chemische middelen geen verontreinigingen te meten waren, wat, de nauwkeurigheid van de goudanalyse in aanmerking genomen, eene onzuiverheid van meer dan $\frac{1}{200}^{\circ}/_{0}$ uitsluit. Het stuk was getrokken tot draad van $\frac{1}{10}$ mM. middellijn. De groote lengte van den gebruikten draad had echter eene soldeerplaats in het midden noodzakelijk gemaakt.

§ 2. *Inrichting van de draden.* Dezelfde voordeelen, die ons (Zie Med. no. 77) een naakten platinadraad deden verkiezen boven een, die in een glazen buis opgesloten was, gelden ook wanneer de draad van ander metaal is vervaardigd, al zijn de bezwaren, vooral wat het aantasten van het metaal betreft, grooter.

De moeilijkheden bij het samenstellen namen echter bij metalen van zoo groot geleidingsvermogen als goud aanzienlijk toe, doordat de draad nu zooveel langer moest zijn, om een voldoende weerstand te geven. Bij de eerste vormen, die geprobeerd werden,

lag de metaaldraad in een schroefdraad, die op een glazen cylinder geëetst was. Maar hier werd door de grootere lengte de speling bij de uitzetting zóó aanzienlijk, dat de metaaldraad te gemakkelijk uit de schroefgleuf schoot, waardoor kortsluiting ontstaan kon. Om grootere diepte van den schroefdraad te verkrijgen, werd de glascylinder bedekt met een dikke brij van olie en carborundum en in eene langzame schroefbeweging gebracht met spoed van $\frac{1}{2}$ of $\frac{3}{4}$ mM. De cylinder schuurt langs een ijzeren of koperen schijfje, dat in snelle ronddraaiende beweging gehouden wordt, waardoor dit met het carborundum eene gleuf in het glas slijpt. Deze gleuf bleek veel dieper te zijn dan die, met etsen verkregen ¹⁾; de draden van 0.1 mM. middellijn lagen er geheel in opgesloten. Op eenen cylinder van 37 mM. diameter en 55 mM. hoogte, vond dan ruim 12 M. draad eene plaaats.

De onderzochte draad bedekte twee van deze cylinders c_1 en c_2 (zie fig. 1 Pl. I), van welke de eene binnen den anderen paste, een mantel van ongeveer 2 mM. vrij latende voor de circulatie der vloeistoffen. Een derde cylinder c_3 , om deze twee heen, diende ter bescherming van den draad.

De cylinders steunen op een rood koperen ster met drie tanden d , waarin zich concentrische uitdiepingen bevinden om de glascylinders op te nemen. Aan den anderen kant wordt elk van de cylinders door een koperen ribbe e_1 , e_2 en e_3 , die op den glasrand rust, tegen den stervorm aangedrukt met behulp van een trekstang f en moeren g_1 , g_2 en g_3 , zoodat één vast aan elkaar verbonden geheel gevormd wordt. Daar de ribben e_1 en e_2 , even als de onderste stervorm d , tevens dienst deden als aanhechtingsplaatsen voor den draad, werden ze van de trekstang en de moertjes geïsoleerd door glazen cylinders h_1 en h_2 en plaatjes mica i_1 , i_2 en i_3 .

Bij het winden en in elkaar zetten werd als volgt te werk gegaan. Men begon den binnensten cylinder c_1 vast te zetten tusschen de ster en de ribbe e_1 , de draad werd vast gesoldeerd aan de ribbe e_1 en in de gleuf van den schroefdraad op den cylinder naar beneden geleid. Onder werd ze aan de ster vast gesoldeerd. Dan werd de tweede cylinder er omheen gezet, de draad hierlangs weer naar boven gebracht en aan e_2 vastgehecht. Zijn beide schroeven in het glas in denzelfden zin gewonden, dan is de draad nagenoeg inductievrij. (Vergelijk den platinathermometer van de vorige Meded. waarbij dit op andere wijze verkregen was).

Even als bij den platinadraad, op welke de vorige Med. betrekking

¹⁾ Later is het weer met etsen gelukt nog weer diepere gleuven te verkrijgen.

had, waren er 4 toeleidingsdraden. Bij de methode met den differentiaalgalvanometer (zie § 4) komt het er niet op aan, dat zij een kleinen weerstand hebben, dus werden draden van 1 m.M. genomen, over de laatste 5 c.M. uitgewalst. Het geheel hing aan een koperen buis *k*, die op de trekstang *f'* geschroefd werd, en, om te groote warmtegeleiding erlangs te voorkomen, door een eindje eboniet onderbroken was, (niet meer in de teekening te zien).

§ 3. *Bepalen van het nulpunt.* De bepaling van het nulpunt geschiedde op dezelfde wijze, als in Med. n^o. 77; gebruikt werden de dunne toeleidingsdraden bij den platinadraad beschreven. Behalve met den gouddraad zijn ook bepalingen verricht met een koper- en een zilverdraad. Eene enkele bepaling leverde nooit moeilijkheden op. Bij koper echter kwamen de waarden, op verschillende tijden bepaald, niet overeen. Ze vertoonden eene regelmatige aangroeiing van den weerstand bij 0°. Waarschijnlijk moet dit worden toegeschreven aan eene chemische verandering. Koper is zoo licht oxydeerbaar, dat men de uiterste voorzorgen in acht moet nemen ter vermindering van vocht gedurende het bewaren. Distilleerde men de isoleerende vloeistof in het nulpuntsvat, nadat de damp over phosphorpentoxyd gevoerd was en zorgde men ervoor, dat gedurende den tijd, dat de draad bewaard werd, de lucht slechts over phosphortentoxyd kon toetreden, dan gelukte het dit verloop tot staan te brengen. Maar in elk geval maakte deze ervaring het noodzakelijk om dergelijke metingen als hier voor den gouddraad behandeld worden, bij een koperdraad bij lage temperaturen snel te doen geschieden. Bij goud en zilver trad dat verschijnsel niet op.

§ 4. *Vergelijking der weerstanden.* Om de weerstandsverandering van den draad, opgewonden als in § 3 aangegeven, na te gaan, moest de verhouding van dezen weerstand tot dien van platina in verschillende baden bepaald worden. Vorige onderzoekers hebben daarvoor steeds om beurten den weerstand van de twee draden bepaald en daaruit de gemiddelde verhouding opgemaakt. De eerste proeven, die door mij genomen werden, waren ook op die wijze ingericht.

Om grootere nauwkeurigheid te bereiken heb ik op raad van prof. KAMERLINGH ONNES de metingen zoo ingericht, dat op een bepaald oogenblik de verhouding zelf is af te lezen.

Met de brug van WHEATSTONE schijnt dit zoo te bereiken, dat men de te vergelijken draden, inplaats van parallel met den platinaweerstand, parallel met de bank van HARTMANN en BRAUN (R'_3) plaatst.

Eene onoverkomelijke moeilijkheid voor deze gelijktijdige bepaling ligt echter hierin, dat er in elk geval eene verbinding tusschen de twee draden noodig is, die gevormd kan worden door twee van de toe-

leidingsdraden uit het bad, waarin gemeten werd, naar een der hoekpunten van de brug. Eliminatie van alle overgangsweerstanden op dien van de bij de meting gebruikte stoppen na, zooals deze in de vorige Meded. verkregen werd is niet mogelijk. Er kunnen dan fouten komen, waarvan met het bedrag slechts schatten kan. Overgangsweerstanden kunnen tot een vrij aanzienlijk bedrag voorkomen en door kleinigheden worden veroorzaakt. Wanneer men niet eene voortdurende contrôle kan uitoefenen, hoe groot deze geweest kunnen zijn, blijven de uitkomsten onzeker.

Bovendien zijn de bij de brug van WHEATSTONE niet te vermijden overgangsweerstanden te groot om de aanvankelijk beoogde nauwkeurigheid te bereiken bij draden van zoo geringen specifieke weerstand als goud, waarbij, zelfs indien het gelukt een draad van ruim 20 M. in het noodzakelijk klein bestek van het bad te winden, niet meer weerstand dan ongeveer 35 Ohm bij 0° verkregen werd, een bedrag dat in vloeibare zuurstof of stikstof tot onder ongeveer 6 Ohm daalde.

Al deze redenen deden ons voor de onderlinge vergelijking van metalen de methode met den differentiaalgalvanometer volgen. Hiermee bepaalt men ook ineens de verhouding van twee weerstanden, terwijl overgangsweerstanden geen noemenswaardigen invloed hebben. Wel gaat eene meting niet zoo snel als bij de brug van WHEATSTONE, maar dit bezwaar wordt voldoende vergoed door de genoemde voordeelen.

§ 5. *Opstelling met den differentiaalgalvanometer.* De opstelling zooals die ten slotte gebruikt werd is voorgesteld in Pl. I fig. 3. De commutator C_1 dient voor het element. De commutator C_2 stelt den waarnemer in staat òf den platinadraad te vergelijken met den weerstand R_3 , (getrokken verbindingen), òf om den gouddraad met den platinadraad te vergelijken (gestippelde verbindingen). Het is gemakkelijk door eene enkele commutatie deze twee opstellingen te kunnen verwisselen, omdat men toch altijd (zie § 8) bij het vergelijken van goud en platinadraden, de benaderde waarde van den platinaweerstand zal wenschen te kennen voor de temperatuursbepaling. C_3 eindelijk is een commutator om de twee geleidingen van den differentiaalgalvanometer te verwisselen. Dit is noodig om de verhouding van de stroomen in de twee niet volkomen gelijkwaardige geleidingen bij den nuluitslag te bepalen en het scheen mij bovendien noodig voortdurend te controleeren, of deze verhouding onveranderd bleef.

De galvanometer was eerst een dundraads THOMSON met twee paar klossen elk met enkelvoudigen draad. Ter verkrijging van de noodige

symmetrie werden de vier klossen vervangen door nieuwe in elk waarvan twee draden samen opgewonden waren. Dit werd in de werkplaatsen van het laboratorium uitgevoerd. De gevoeligheid was 1 mM. schaaluitslag bij een stroomsterkteverschil van 10^{-10} Ampère, slingertijd 20". De galvanometer was dan aperiodisch. Even als de galvanometer bij de brug van WHEATSTONE in de vorige Med., was ook deze tegen storingen van het aardmagnetisme beschermd door een ring van weekijzer.

De weerstandsbanken R'_3 , R_5 en R_6 , waren alle van manganindraad, met dus nagenoeg te verwaarloozen temperatuurs-coëfficiënt, R'_3 was de zorgvuldig onderzochte weerstandsbank van HARTMANN & BRAUN, ook gebruikt bij de metingen met de WHEATSTONE'sche brug; R_5 was de eigen gewonden bank, die in de brug van WHEATSTONE (zie vorige Mededeeling) twee takken leverde en van welke ik ook de absolute waarden bepaalde. R_6 was eene weerstandsbank van SIEMENS en HALSKE, aan de Reichsanstalt geijkt. De verhouding tusschen de eenheden R'_3 en R_6 werd door mij eenige malen bepaald en gevonden 1,00255 (11 bepalingen grootste, . . . 268 kleinste, . . . 242).

§ 6. *De metingen bij lage temperaturen.* Nadat het nulpunt van den te vergelijken draad eenige malen bepaald was en uitkomsten, die voldoende overeenstemden, verkregen waren, werd hij in den cryostaat gebracht binnen den platinathermometer, op de plaats gedurende de ijking van dezen door den waterstofthermometer ingenomen (Verg. Med. n°. 77 § 4 en Med. n°. 83 Pl. II).

Was er genoeg vloeibaar gemaakt gas afgeschonken, dan werd onder roeren de verhouding van de weerstanden van de twee draden bepaald. Vooraf en achterna werd de verhouding van den platina-weerstand tot één der weerstanden in R_5 gemeten. Meest werd die weerstand in R_5 genomen, waarvan de waarde het dichtst met die van den platinadraad overeenkwam. Hieruit kon dan de temperatuur worden afgeleid. Bij latere metingen werd ook wel een thermoëlement gebracht binnen den cylinder C_1 van den draad en nadat ééns de temperatuur door het meten van de verhouding tot R_5 bepaald was, door een helper aan het thermoëlement gezorgd, dat de temperatuur constant bleef op de wijze beschreven in Meded. 83. Dit maakte, dat de metingen nog sneller konden geschieden.

§ 7. *Berekening en Correcties.* Schematisch wordt de opstelling voorgesteld in Pl. I fig. 2, waarin zijn r_{pt} en r_x de te vergelijken weerstanden, W_1 en W_2 de weerstanden van de galvanometerleidingen voorzien met de weerstandsbanken R''_3 en R_6 . Stel dat men bij zekere waarden in de banken evenwicht heeft, en dat wij de verhouding van de stroomen in de twee galvanometerleidingen

dan kunnen voorstellen door $1 + \beta$, waar β als een klein getal mag beschouwd worden.

Dan bestaat de betrekking

$$\frac{1 + \beta r_x}{1 r_{pt}} = \frac{W_1}{W_2} + \frac{\beta r_x}{1 + \beta W_2}$$

W_1 en W_2 zijn echter voor zoover het de galvanometerwindingen betreft, koperweerstand, en stelt men zich een eenigszins groote nauwkeurigheid tot eisch, dan moet men W_1 en W_2 telkens bepalen voor dat deze vergelijking de verhouding van r_x tot r_{pt} kan leveren. Kon men den galvanometer in eene ruimte van constante temperatuur plaatsen, dan zou de grootste moeielijkheid hiervan vervallen en zou ééne instelling de verhouding doen kennen.

W_1 en W_2 onbekend zijnde, kan men echter als volgt te werk gaan. Men voegt bij W_1 en W_2 , α_1 en α_2 weerstandseenheden toe, zoodat opnieuw evenwicht verkregen wordt, dan heeft men ook

$$\frac{1 + \beta r_x}{1 r_{pt}} = \frac{W_1 + \alpha_1}{W_2 + \alpha_2} + \frac{\beta r_x}{1 + \beta W_1 + \alpha_2}$$

Hieruit volgt

$$\frac{1 r_x}{1 + \beta r_{pt}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

of

$$\frac{r_x}{r_{pt}} = (1 + \beta) \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$$

Hoe groot men α kiezen zal hangt van omstandigheden af. De veranderingen in W_1 en W_2 voor zoover het de toeleidingsdraden betreft, waren gedurende het verloop van één proef, zooals bij de metingen met de WHEATSTONE'sche brug in de vorige Med. gebleken was, zeker nooit grooter dan 0.01 Ohm. Wordt de galvanometer zorgvuldig met watten ingepakt, dan bleek gedurende den tijd voor ééne meting noodig, de temperatuur standvastig genoeg om de totale verandering in W_1 en W_2 niet meer dan 0.1 Ohm te doen bedragen. Neemt men de kleinste van de α_1 en α_2 dan 1000 Ohm, dan behoeft de onnauwkeurigheid tengevolge van deze onzekerheid dus niet grooter te zijn dan $\frac{1}{10,000}$. Men zal bovendien meestal de eerste instelling na de meting, waarbij aan W_1 en W_2 , α_1 en α_2 toegevoegd waren, nog wel ééns herhalen, en dan eenig oordeel verkrijgen over die veranderingen in W_1 en W_2 door tempertuurwisseling.

In de betrekking $\frac{r_x}{r_{pt}} = (1 + \beta) \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ is nog de β te bepalen. Hiertoe verwisselt men met commutator C_1 Pl. I fig. 3 de geleidingen om den

galvanometer, zoodat de windingen, die eerst bij r_x afgetakt werden, nu naast r_{pt} worden geschakeld en omgekeerd.

Eene nieuwe bepaling levert dan $\frac{r_x}{r_{pt}} = (1 - \beta) \frac{\alpha'_1}{\alpha'_2}$ (β klein gedacht).

Is β onbekend, dan vindt men $\frac{r_x}{r_{pt}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha'_1}{\alpha'_2} \right)$.

Men kan bovendien de β bepalen, waarvoor men vindt

$$\beta = \frac{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \frac{\alpha'_1}{\alpha'_2}}{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha'_1}{\alpha'_2}}$$

Is het wenschelijk de verhouding snel te meten, zooals bij de metingen bij lage temperaturen natuurlijk steeds het geval was, dan is het beter de β vooraf te bepalen. Men moet zich dan door voorloopige proeven ervan overtuigd hebben dat de β voldoende constant blijft. Dit was het geval voor waarnemingen met niet te lange tusschenpoozen gedaan. Zoo leverden 11 bepalingen, van 14 Juni tot 12 Juli als kleinste waarde 0.000764, als gemiddelde 0.000780 en als grootste 0.00083 (?).

De waarde van β dus bekend onderstellende, kan men uit eene bepaling van α_1 en α_2 de verhouding $\frac{r_x}{r_{pt}}$ afleiden; α_1 en α_2 werden afgelezen op de weerstandsbanken R_3 en R_6 .

§ 8. *Bepalen van de temperatuur.* Het bepalen van de temperatuur behoeft, nu men niet de weerstanden afzonderlijk meet, maar ineens de verhouding bepaalt, niet meer zoo nauwkeurig te geschieden als bij het ijken van den platinathermometer. Zij werd verkregen door eene weerstandsmeting van den platinadraad, verricht na elke volledige bepaling van de verhouding. Als men in de opstelling Pl. 1 fig. 3 den commutator C_2 verplaatst, kan men in eens, in plaats van de gouden platinaweerstanden, de laatste met den weerstand in bank R_5 vergelijken.

Bij het bepalen van de verhouding tusschen de weerstanden van den platinadraad en de waarden in bank R_5 werd echter niet de geheele meting herhaald, als boven beschreven is voor de bepaling van de verhouding van platina- en goudweerstand, maar volstond ééne meting.

Men vindt n.l. met R_5 in plaats van r_x als in § 7

$$\frac{1}{1 + \beta} \frac{R_5}{r_{pt}} = \frac{W_1}{W_2} + \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{R_5}{W_2}$$

waarin W_1 en W_2 de weerstanden zijn van de ketens, waarin de galvanometer-windingen en de weerstandsbanken voorkomen.

Kent men den weerstand van de windingen, dan is $\frac{R_s}{r_{pt}}$ op te maken uit ééne bepaling van een weerstand in de banken.

De weerstanden van de windingen nu zijn op te maken uit de twee bepalingen van de verhouding der platina- en goudweerstanden.

Noemt men den weerstand der windingen om den galvanometer A en B , r_1 en r_2 de weerstanden in de banken, dan geven deze met

$$W_1 = A + r_1, \quad W_2 = B + r_2,$$

$$\frac{1}{1 + \beta r_{pt}} \frac{r_x}{r_x} = \frac{A + r_1}{B + r_2} + \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{r_x}{B + r_2}$$

$$\frac{1}{1 - \beta r_{pt}} \frac{r_x}{r_x} = \frac{B + r'_1}{A + r'_2} - \frac{\beta}{1 - \beta} \frac{r_x}{A + r'_2}.$$

Hieruit zijn A en B te berekenen en dus W_1 en W_2 te vinden. Er worden onnauwkeurigheden begaan, n.l. de weerstand van de verbindingsdraden tusschen de commutatorbakjes wordt verwaarloosd; maar bij eene waarde van A en B van ongeveer 940 Ohm was eene onnauwkeurigheid van 1 Ohm nog toe te staan, en dit bedrag bereikte die weerstand zeker niet.

Voor de berekening is het van belang op te merken, dat $\frac{1}{1 + \beta} \frac{r_x}{r_{pt}}$ gelijk is aan $\frac{a_1}{a_2}$, en $\frac{1}{1 - \beta} \frac{r_x}{r_{pt}}$ gelijk is aan $\frac{a'_1}{a'_2}$, terwijl $\frac{a_1}{a_2}$ en $\frac{a'_1}{a'_2}$ direct aan de waarneming te ontnemen zijn. Bovendien is $\frac{\beta}{1 + \beta}$ klein, zoodat in den laatsten term der vergelijkingen eene benaderde waarde voor A en B voldoende is.

§ 9. *Overzicht van eene waarneming.* De wijze, waarop de waarnemingen verricht werden, is het beste na te gaan aan een voorbeeld, hetwelk dan tevens als voorbeeld voor de berekening doorgevoerd worden zal. Het heeft betrekking op eene meting met den gouddraad in zuurstof, kokende onder verminderden druk.

Direct afgelezen werden de waarden in de volgende tabel: (p. 229)

Bij deze meting werd met het thermoëlement de temperatuur constant gehouden, zoodat de temperatuursbepaling niet herhaald behoefde te worden.

Voor de afleiding van de uitkomsten uit de waarnemingen heeft men nu de volgende tabel, die wel zonder verdere toelichting duidelijk zal zijn.

TABEL I. Vergelijking van goud- en platinaweerstanden in zuurstof kokende onder verminderden druk.

Waarnemingen.						
Stand Commutator C ₃ .	Weerstand in		Commutator C ₁ .	Evenwichtsstand Galvanometer.	Afwijking Galvanometer.	Tijd.
	SIEMENS & HALSKE.	HARTMANN & BRAUN.				
Temperatuursbepaling.						2 u. 30
=	500	140 136		27.00	33 00 23.00	
Bepaling verhouding.						
=	0	1000+400+ 300+20+10	 =	27.50	31.50 23.90 31.50	2 u. 45'
		+ 2	 =		28.05 27.00 28.30	
	1000	3+1.1000 4+3.100	 =	26.50 27.70 26.60		
		+ 3	 =	25.40 29.20 25.55		
	×	1000	3+1.1000 4+2.100	 =	30.30 28.30 30.30	
			+ 4+3	 =	29.12 29.62	
0		1000+ 4+3.100 2+1.10	= =	21.00 38.20		
		2.10 4+3	 =	31.90 27.75 31.85		
=	0	1000 4+3.100 2+1.10	= =	26.70 31.65 26.80		
		1000	3+1.1000 4+2.100	= =	29.40 27.50 29.25	
	+ 2		= =	30.10 26.80 20.05		
					3 u. 8'	

TABEL II. Vergelijking van goud- en platina-weerstanden in zuurstof kokende onder verminderden druk.

Berekening verhouding.												
Communtator C_3	Weerstand SIEMENS & HALLSK.	Weerstand HARTM. & BRAUN.	Afwijking galvan.	Waarde waarbij er evenwicht zijn zou. HARTM. & BRAUN.	Verschillen in beide takken.	Correcties		Verschillen gecorrigeerd a. STEIN & H. b. HARTM. & BR.	Ver- houding $\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{r}{r_{pl}}$		
						bank S. & H.	herleid- ding S. & H. tot H. & Br.				bank H. & Br.	
=	0	1000 + 400 + 300 + 20 + 10	- 7.6	1731.73	1000	3866.92	- 0.05	+ 2.55	+ 0.48	a. 1002.50 b. 3867.40	0.34962	0.34934
		+ 2	+ 1.2	4598.65								
1000	1000	3000 + 1000 + 400 + 200	+ 1.15	4597.60	1000	3871.66	- 0.05	+ 2.55	+ 0.48	a. 1002.50 b. 3872.14	0.34904	0.34932
		+ 3	+ 3.73									
X	0	1000 + 400 + 300 + 20 + 10	+ 0.50	1726.06	1000	3866.80	- 0.05	+ 2.55	+ 0.48	a. 1002.50 b. 3867.28	0.34963	0.34935
		+ 3	+ 3.73									
=	0	1000 + 400 + 3000 + 20 + 10	- 4.80	1731.40	1000	3866.80	- 0.05	+ 2.55	+ 0.48	a. 1002.50 b. 3867.28	0.34963	0.34935
		+ 2	+ 3.30	4597.90								

Weerstand voor temperatuur berekening $R_2 = 28.62 \text{ Ohm}$, $r_{pl} = 21.39$.

§ 10. *Uitkomsten.* De nulpuntsbepalingen leverden de volgende uitkomsten.

Datum.	Weerstand Au.	Methode weerstandsmeting.
23 April '02	31,5506	Brug van WHEATSTONE.
23 Mei „	31,556	„ „ „
„ „ „	31,565	Differentiaalgalvanometer.
26 Mei „	31,555	Brug van WHEATSTONE.

De bepaling met den differentiaalgalvanometer had voornamelijk ten doel om vast te stellen, dat beide methoden dezelfde uitkomsten opleverden, en de laatste dus ook voor temperatuursbepaling gebruikt kon worden. Onder deze meting werd niet geroerd, waardoor het mogelijk is, dat de temperatuur iets gestegen is. De overeenkomst is in verband met de volgende uitkomsten voldoende.

Na de metingen, bij lage temperaturen, die vallen tusschen 17 Juni en 12 Juli werd in October het nulpunt opnieuw bepaald en toen eene afwijkende waarde gevonden, n.l. 31,043. Ik heb vergeefs gezocht wat de reden van deze afwijking geweest kan zijn. In de weerstandsmeting heeft het waarschijnlijk niet gelegen. Een bekende weerstand, die op dezelfde wijze bepaald werd, gaf de goede waarde. Bij het verder zoeken naar mogelijke oorzaken is de gouddraad gebroken, zoodat ik hierover geen zekerheid heb kunnen verkrijgen. Het is denkbaar, dat in het tijdsverloop tusschen de 2 bepalingen er eene revensluiting tusschen de 2 uiteinden van den gouddraad ontstaan is, waardoor de schijnbare weerstand zoo verminderd is. Verandering in den gouddraad zelf zou wel altijd eene vergrooting van weerstand gegeven hebben.

De waarden bij de verdere bepalingen van de verhouding der weerstanden tusschen den platinaweerstand en den goud-weerstand zijn voldoende te overzien uit de volgende tabel. (p. 232).

De bepalingen doen zien, dat de methode om op deze wijze de verhouding van de weerstanden te bepalen zeker goed is, en de voorkeur verdient boven die om den weerstand van elk der draden afzonderlijk te meten. Men zal er echter, tenminste voor lage temperaturen, nog veel zorg aan moeten besteden de temperatuur constant te houden gedurende een tijd, lang genoeg om de meting te kunnen verrichten. Bij deze metingen was de bepaling van de temperatuur minder nauwkeurig, dan met het oog op de schijnbare nauwkeurigheid van het verhoudingsgetal gedurende de metingen op één dag, gewenscht scheen.

Opvallend bij de uitkomsten is nog de groote afwijking, die er bestaat tusschen het goud en het platina. Al kan met de gevonden

TABEL III. Vergelijking van goud- en platinaweerstand.

Weerstand platina-draad.	Weerstand gouddraad.	Verhouding goud-weerstand platina weerstand.	Verhouding weerstanden van een gouddraad en een platinadraad, die bij 0° eenzelfde weerstand bezitten.	Datum.
110.045 bij (0°)	31.550 ⁶ 31.556 31.565 31.555	0.28672 0.28695 0.28684 0.28674	1	23 April. 23 Mei id. 26 Mei.
64.78 64.85		0.295677 0.295736 0.295569 9.295564 0.295531 0.295562	$\frac{0.29554}{0.28674} =$ $= 1.0307$	17 Juni '02 in C ₂ H ₄ .
52.34 52.68		0.301954 0.301952 0.301949 0.301946	$\frac{0.301950}{0.28674} =$ $= 1.0530$	17 Juli '02 in C ₂ H ₄ kokende onder vermind- erden druk.
28.71 28.71		0.330287 0.330314 0.330285 0.330304 0.330256 0.330289	$\frac{0.330595}{0.28674} =$ $= 1.1519$	23 Juni in zuurstof.
22.79 22.81 22.74 22.79		0.34490 0.34497 0.34490 0.34498 0.34464? 0.34495	$\frac{0.34497}{0.28674} =$ $= 1.2029$	12 Juli in stikstof.
21.39 21.47		0.34934 0.34932 0.34935	$\frac{0.34933}{0.28674} =$ $= 1.2173$	23 Juni in zuurstof kokende onder vermind- erden druk.

B. MEILINK. Over het meten van zeer lage temperaturen. VIII. Verge-
lijking van den weerstand van platinadraden en gouddraden.

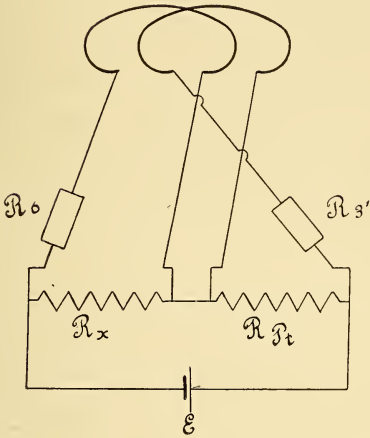


Fig. 2.

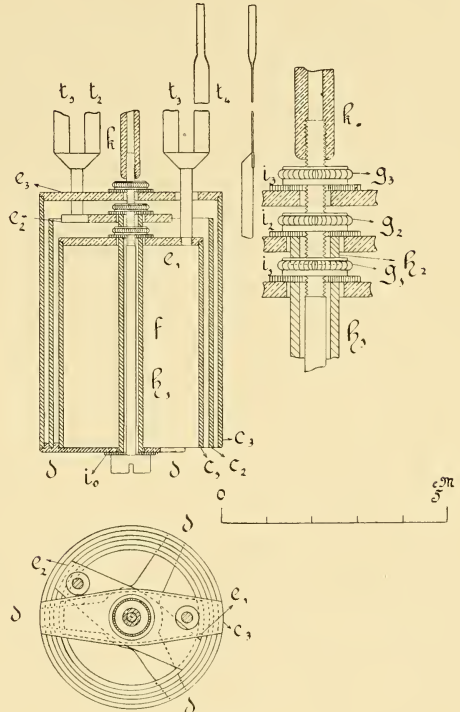


Fig. 1.

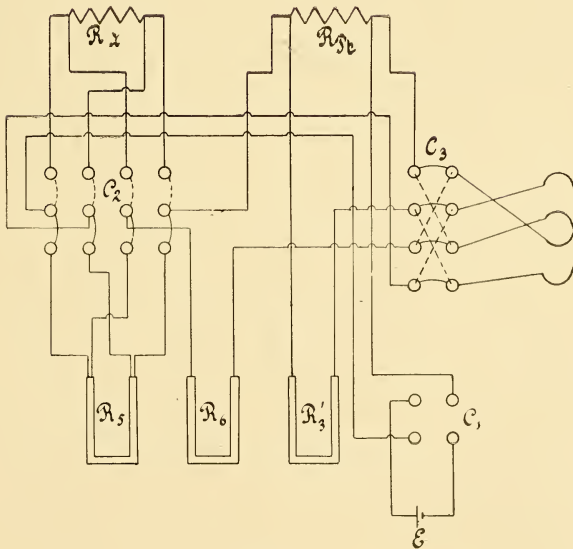


Fig. 3.

getalwaarden, bij gebrek aan zekerheid omtrent het nulpunt waarbij zij behooren, de temperatuursfunctie voor goud niet worden vastgesteld, toch blijkt eruit, dat de kromming van de lijn, die bij goud die temperatuursfunctie weergeeft, veel geringer is dan bij platina, en de lijn meer naar het absolute nulpunt is gericht. Een gouddraad zou derhalve beter dan een platinadraad geschikt zijn voor extrapolatie, aangezien hier de noodzakelijk te verwachten afwijkingen veel geringer zijn.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer JULIUS: „Les théories solaires et la dispersion anormale” (Extrait de la Revue générale des Sciences du 30 Mai 1904.)

De Vergadering wordt gesloten.



KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 24 September 1904.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

- Ingekomen stukken, p. 236.
In Memoriam C. A. LOBRY DE BRUYN, p. 238.
A. F. HOLLEMAN: „De nitratie van digesubstitueerde benzolen”, p. 240.
EUG. DUBOIS: „Over een equivalent van het Cromer Forest-Bed in Nederland”. (Aangeboden door de Heeren MARTIN en VAN BEMMELEN), p. 243.
A. P. N. FRANCHIMONT en H. FRIEDMAN: „Het α' -tetramethylpiperidine”, p. 251.
P. J. MONTAGNE: „Over intramoleculaire atoomverschuiving bij benzpinakonen”. (Aangeboden door de Heeren FRANCHIMONT en BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 253.
A. P. N. FRANCHIMONT: Aanbieding der dissertatie van den Heer J. MOLL VAN CHARANTE: „Het sulfonisoboterzuur en eenige zijner derivaten”, p. 257.
Th. ZIEHEN: „Beiträge zur Entwicklungsgeschichte des Gehirns von *Tarsius spectrum*” (Aangeboden door de Heeren HUBRECHT en BOLK), p. 259.
L. J. J. MUSKENS: „Over degeneraties in het centrale zenuwstelsel na wegneming van den flocculus cerebelli”. (Aangeboden door de Heeren WINKLER en PLACE), p. 267.
W. A. VERSLUYS: „Over de betrekking tusschen den kromtestraal eener ruimtekromme in een punt P der kromme en den kromtestraal in P van de doorsnede van haar ontwikkelbaar regelvlak met haar osculatievlak in punt P ”. (Aangeboden door de Heeren SCHOUTE en KORTEWEG), p. 271.
J. C. KLUYVER: „Berekening van twee bepaalde integralen”, p. 276.
JAN DE VRIES: „Over de congruentie der kegelsneden, welke op de kubische oppervlakken van een bundel liggen”, p. 281.
W. EINTHOVEN: „Een nieuwe methode om oscillerende galvanometeruitslagen te dempen”, p. 284. (Met één plaat).
C. A. J. A. OUDEMANS: „Over *Leptostroma Austriacum* Oud., eene nog onbekende op de naalden van *Pinus austriaca* levende *Leptostromaceae* en over *Hymenopsis Typhae* (Fuck.) Sacc. eene tot hiertoe onvolkomen beschreven *Tuberculariaceae*, eigen aan de verdorpe bladscheeden van *Typha latifolia*,” p. 294. (Met één plaat).
C. A. J. A. OUDEMANS: „Over *Sclerotiopsis pityophila* (Corda) Oud., eene *Sphaeropsidae* voortgebracht door de naalden van *Pinus silvestris*,” p. 298. (Met één plaat).
J. WEEDER: „Eene nieuwe methode van interpolatie met vereffening toegepast ter afleiding van stand en gang van het standaarduurwerk der Leidsche Sterrewacht, *Pendule Hohwü 17*, uit de tijdsbepalingen over 1903.” (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 302.
H. KAMERLINGH ONNES en C. ZAKRZEWSKY: „Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van chloormethyl en koolzuur”. (Vervolg), p. 323.
Aanbieding door den Heer SCHOUTE van eene verhandeling van den Heer A. TOXOPEUS: „Het aantal kwadratische hyperruimten in de ruimte van vijf afmetingen,” p. 323.
Aanbieding van Boekgeschenken, p. 323.
Errata, p. 323.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is :

1°. Bericht van den Heer SCHROEDER VAN DER KOLK, dat hij verhinderd is de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken waarin mededeeling verzocht wordt of er Nederlandsche geleerden zijn, bereid zich door de Regeering te laten afvaardigen naar het 2^e Internationaal Botanisch Congres, te Weenen te houden van 12—18 Juni 1905.

De Voorzitter verzoekt de botanische leden daaromtrent van advies te willen dienen.

3°. Mededeeling van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 19 Juli ll., dat de Heer J. H. VAN WIJHE door de Regeering benoemd is als gedelegeerde op het van 14—19 Augustus ll. te Bern gehouden VI^{de} Internationaal Zoölogisch Congres.

4°. Mededeeling van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken, dat voor de reis van Dr. J. W. C. GOETHART naar Buitenzorg ook een rijkssubsidie is verleend, met verzoek van bericht, wanneer Dr. GOETHART naar Indië zal vertrekken. Zal beantwoord worden wanneer van den Heer GOETHART nadere inlichtingen zijn ontvangen.

5°. Bericht van de Heeren S. FIGEE, J. DE HAAN en J. H. F. KOLHBRUGGE, dat zij onder dankbetuiging hunne benoeming tot correspondent der Afdeling aanvaardden.

6°. Uitnoodiging van het gemeentebestuur van Maastricht dd. 7 Juli 1904 tot bijwoning van de onthulling van het standbeeld van MINCKELERS. Wegens te late ontvangst kon hieraan geen gevolg gegeven worden.

7°. Uitnoodiging van de National Academy of Sciences te M^t WILSON, California waarin de Akademie verzocht wordt deel te nemen aan een commissie voor Solar Research. Hierop is geantwoord, dat de Akademie daartoe benoemde de Heeren J. C. KAPTEYN en W. H. JULIUS, en dat de Heer KAPTEYN de vergadering te St. Louis zal bijwonen.

8°. Missive van den Heer E. CLEMENT te Lyon met verzoek een oordeel uit te spreken over een door hem aangeboden mededeeling :

„Note concernant l'action de l'acide formique sur le système musculaire”.

De Voorzitter verzoekt de Heeren PEKELHARING en WINKLER het Bestuur voor de beantwoording van advies te willen dienen.

9°. Missive van den Kön. Preuss. Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten ter begeleiding van een exemplaar eener zilveren plakette, geslagen ter herinnering aan het 200-jarig bestaan der Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften te Berlijn.

10°. Circulaire betreffende het 15^{de} Internationale Congres voor geneeskunde, van 19—27 April 1906 te Lissabon te houden.

Ter inzage voor de leden beschikbaar gesteld.

11°. Bericht van het overlijden van den Heer A. F. LE JOLIS, stichter en directeur van de Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. Zal met een brief van rouwbeklag worden beantwoord.

Verder is ingekomen het bericht van het overlijden van het Lid der Akademie

C. A. LOBRY DE BRUYN.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord. Naar aanleiding van dit schrijven zegt de voorzitter het volgende :

Mijne Heeren !

Door den dood van ons diep betreurd medelid, die in de kracht van zijn leven werd weggerukt, heeft de wetenschap en onze afdeeling een diep gevoeld verlies geleden.

Geboren te Leeuwarden den 17^{en} Januari 1857, mocht hij slechts den leeftijd van 47 jaren bereiken, maar in die jaren heeft hij veel en goed werk verricht.

Hij studeerde te Leiden en ook te Parijs, behaalde 13 Oct. 1883 te Leiden den doctorstitel, nadat hij in 1882 tot assistent bij het organisch chemisch laboratorium was benoemd. In 1885 werd hij tot scheikundige bij de directie der Marine te Amsterdam aangesteld en in 1896 aanvaarde hij den 2^{en} November het hoogleeraarsambt aan de Amsterdamsche universiteit ; sedert 1897 telde de Akademie hem onder hare leden.

Gelukkig beoefenaar der organische chemie, toonde hij zijne veelzijdigheid door hetgeen hij ook op het gebied der anorganische en physische chemie verrichtte.

Zijne bereidingen van het watervrije hydroxylamine en hydrazine getuigden van zijn chemisch vernuft en deden de aandacht op hem vestigen. Over velerlei onderwerpen volbracht hij onderzoekingen, die belangrijke nieuwe uitkomsten gaven ; zóó betreffende de bereiding van de aminen der suikers, de inwerking van alkaliën op suikers, de vergelijking van de eigenschappen van methyl- en aethylalkohol, zoowel als chemische verbinding als als oplosmiddel.

Vele chemische problemen van den laatsten tijd trokken hem aan en lokten hem uit tot onderzoekingen, die hij met zijne leerlingen volbracht, b.v. over intramoleculaire atoomverspringing, over reactiesnelheden bij de substitutie van verschillende groepen aan de benzolkern, over de samenstelling der kolloïdale oplossingen en ten laatste nog over de veranderingen in concentratie, die oplossingen onder den invloed der centrifugaalkracht kunnen ondergaan.

LOBRY DE BRUYN was een voortreffelijk docent, niet alleen op zijne colleges, maar ook als leider van de wetenschappelijke onderzoekingen zijner leerlingen in het chemisch laboratorium.

Dat bewijzen de vele belangrijke dissertaties, die onder hem zijn bewerkt, en nog meer de zelfstandige onderzoekingen welke verscheidene zijner leerlingen na hunne promotie gepubliceerd hebben.

IJverig lid onzer Akademie, heeft hij daar bij herhaling de vruchten zijner bespiegelingen en onderzoekingen medegedeeld. Zijne vruchtbaarheid en het gewicht van zijnen wetenschappelijken arbeid was steeds toenemend, zoodat hij nog zooveel beloofde.

Maar helaas, eene ernstige en korte ziekte heeft hem in het midden van zijn leven en streven uit onzen kring weggenomen. Wij betreuren in hem een onzer werkzaamste leden, een gelukkig beoefenaar der wetenschap, wiens plaats niet gemakkelijk zal vervuld worden, en die in de herinnering van zijne vele vrienden zal blijven voortleven.

Scheikunde. — De Heer A. F. HOLLEMAN, doet eene mededeeling :
„Over de nitratie van digesubstitueerde benzolen.”

Indien men in een benzolderivaat C_6H_5X een tweede atoom of groep invoert, plaatst zich dit òf hoofdzakelijk meta, òf para-ortho ten opzichte van X, hetgeen hoofdzakelijk van den aard van X afhangt. Wat hiervan de nadere oorzaak is, ligt voorshands nog in het duister. De pogingen ter verklaring van dit verschijnsel zijn ten eenenmale onvoldoende, vooreerst omdat zij te vaag zijn, ten tweede omdat zij met de relatieve hoeveelheden, die van de isomeren ontstaan, geen rekenschap houden en ook niet kunnen houden, daar deze ten tijde dat die „verklaringen” werden opgesteld, nog onbekend waren. Een beter inzicht in dit vraagstuk kan eerst mogelijk worden door de quantitative studie van het substitutieproces, die reeds in een aantal gevallen van nitratie der lichamen C_6H_5X is uitgevoerd.

Voorloopig moet men zich tevreden stellen met de uitkomsten dier quantitative studiën als feiten te aanvaarden. Dit doende kan men de volgende vraag stellen: Gegeven een benzolderivaat C_6H_4XY , waarin een derde groep Z wordt ingevoerd. Indien men nu de relatieve hoeveelheden der isomeren, zoowel van C_6H_4XZ als van C_6H_4YZ kent, die bij invoering van Z in C_6H_5X en in C_6H_5Y ontstaan; kan men dan daaruit de structuur en relatieve hoeveelheden der isomeren C_6H_3XYZ afleiden, die bij invoering van Z in C_6H_4XY ontstaan?

Gesteld (om het bovenstaande door een voorbeeld toe te lichten) dat men voor chloorbenzol bepaald heeft, hoeveel para- en ortho-verbinding er bij nitratie uit ontstaat, en voor benzoëzuur, hoeveel meta- en orthonitrobenzoëzuur daaruit verkregen wordt; kan men dan te voren bepalen welke en hoeveel der mogelijke nitrochloorbenzoëzuren zullen ontstaan bij de nitratie van chloorbenzoëzuur?

Qualitatief is dit vraagstuk vrij uitvoerig, hoewel meestal weinig systematisch bestudeerd. In een groot aantal gevallen heeft men bepaald, welke der mogelijke isomeren C_6H_3XYZ bij invoering van Z in C_6H_4XY ontstaan, en getracht, daaruit besluiten te trekken, die de voorspelling van hetgeen er in onbekende gevallen te verwachten is, mogelijk maken. BEILSTEIN heeft deze aldus samengevat: „Bij de invoering van eene groep Z in een lichaam C_6H_4XY oefent zoowel X als Y een invloed uit, maar die van een dezer groepen is overheerschend en richt Z.”

Zonder twijfel is deze regel in zeer vele gevallen juist; in een aantal anderen echter niet. Zoo is zij niet van toepassing op de door mij bestudeerde nitratie van m-nitroanisol. In ieder geval wijst zij

er op, dat de groepen X en Y niet onafhankelijk van elkander hun richtenden invloed uitoefenen, maar dat deze door elkanders aanwezigheid gewijzigd wordt. Het quantitative onderzoek, voor een aantal nitraties van verbindingen C_6H_4XY nitgevoerd, heeft dit ten volle bevestigd.

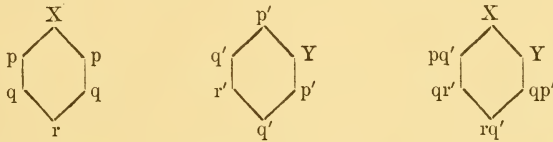
Wanneer de groepen X en Y onafhankelijk van elkander hun richtenden invloed op een derden substituent uitoefenden, zou men het volgende moeten hebben. Noemt men de verhouding, waarin de 3 isomeren ontstaan, als Z in C_6H_5X wordt ingevoerd

$$p_{ortho} : q_{meta} : r_{para}$$

en die der drie isomeren als Z in C_6H_5Y wordt ingevoerd

$$p'_{ortho} : q'_{meta} : r'_{para}$$

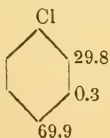
dan zoude de hoeveelheid der isomeren, bij invoering van Z in C_6H_4XY worden uitgedrukt door produkten als pq' enz., zooals uit onderstaand schema blijkt :



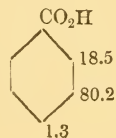
Hierbij is ondersteld, dat bij invoering van eene tweede groep in een monogesubstueerd benzolderivaat alle drie mogelijke isomeren ontstaan, hetgeen feitelijk wel steeds het geval zal zijn, al is dan ook de hoeveelheid van een dezer zoo gering, dat zij meestal over het hoofd is gezien. Inderdaad is in een aantal gevallen, waarin men aanvankelijk slechts twee substituenten gevonden had, bij nauwkeurig onderzoek ook het derde aangetoond, zoo o.a. bij de nitratie van nitrobenzol.

Het quantitatief onderzoek naar de relatieve hoeveelheden der isomeren, die bij nitratie van lichamen C_6H_4XY ontstaan, leerde nu, dat die hoeveelheden meestal zeer aanmerkelijk van de produkten pq' enz. afwijken, zoodat een sterke storing van elkanders richtenden invloed op den derden substituent moet worden aangenomen. Deze storing bleek niet alleen van den aard der aanwezige substituenten, maar ook nog van hunne plaats in het molecule af te hangen, zooals het volgende voorbeeld bewijst.

Bij de nitratie van chloorbenzol bij 0° ontstaan para-, ortho- en metanitrochloorbenzol in de volgende hoeveelheden :



Bij die van benzoëzuur de nitrobenzoëzuren in de volgende verhouding:



Wijzigden CO_2H en Cl elkanders richtenden invloed niet, dan zouden bij de nitratie van ortho- en metachloorbenzoëzuur de nitroderivaten in de in onderstaande schemas aangegeven hoeveelheden moeten ontstaan



van de andere mogelijke isomeren zeer ondergeschikte hoeveelheden. Inderdaad waren deze zoo gering dat zij niet gevonden werden. Van de in beide gevallen te verwachten twee isomeren zoude dus de relatieve hoeveelheid even groot moeten zijn als die, welke bij de nitratie van chloorbenzol zelf ontstaan. In plaats daarvan werd gevonden :



In onderstaande tabel zijn een aantal van zulke waarnemingen vereenigd, waarbij onder „storing” het quotient van de werkelijk gevonden hoeveelheid van het bijproduct en van de berekende hoeveelheid is verstaan.

Nitratie van	Hoeveelh. nevenprod. op 100 dln. hoofdprod.		Storing van den richtenden invloed van het halogeen van carboxyl.			
	bij -30°	bij 0°	bij -30°	bij 0°	bij -30°	bij 0°
$\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$	36.4	42.0				
$\text{C}_6\text{H}_5\text{Br}$	52.7	60.5				
$\text{C}_6\text{H}_5\text{CO}_2\text{H}$	16.9	23.1				
$o\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl.CO}_2\text{H}$	16.3	19.1	0.448	0.455	—	—
$o\text{-C}_6\text{H}_4\text{Br.CO}_2\text{H}$	20.6	24.4	0.391	0.403	—	—
$m\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl.CO}_2\text{H}$	9.1	9.5	0.250	0.226	0.539	0.411
$m\text{-C}_6\text{H}_4\text{Br.CO}_2\text{H}$	13.4(?)	12.9	0.254(?)	0.213	—	0.601
$o\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$	5.5	7.8	0.151	0.186	—	—
$m\text{-C}_6\text{H}_4\text{Cl}_2$	2.7	4.1	0.074	0.098	—	—

Bij de nitratie van o-halogeobenzoëzuur en van o-dichloorbenzol plaatst zich de NO_2 -groep in het bijprodukt *naast* het halogeen; bij die der m-halogeobenzoëzuren en van m-dichloorbenzol *tusschen* carboxyl en halogeen. Bij vergelijking der storingscijfers voor den richtenden invloed van halogeen in deze zuren en dihalogeenvbindingen zijn die voor de metaverbindingen ca. de helft van die der orthoverbindingen. Dit is een der vele gevallen waaruit blijkt, dat het intreden van een substituent tusschen twee andere op bijzonder grooten weerstand stuit.

Groningen, Lab. d. Univ. Aug. 1904.

Geologie. — De Heer MARTIN biedt eene mededeeling aan van den Heer EUG. DUBOIS: „*Over een equivalent van het Cromer Forest-Bed, in Nederland.*”

(Mede aangeboden door den Heer VAN BEMMELN).

Aan de grens van ons land, over het middelste derde der langgestrekte provincie Limburg, ligt de steile westelijke rand van een grootendeels tusschen de dalen van de Maas, de Niers en de Roer besloten en zich tot het gemiddeld een dertigtal meters boven het naburige laagland verheffend grind-plateau. Binnen onze grens ligt die rand tegenover Venlo, Tegelen en Belfeld, verder ten oosten van Swalmen en van Herkenbosch. Dat plateau is een stuk eener vroeger samenhangende, uitgestrekte, tot Nijmegen en Kleef te vervolgen hoogvlakte, waarvan volgens LORIÉ ook de Veluwe deel uitmaakte. Deze schrijver is geneigd om aan te nemen, dat het bedoelde massief nog ongeschonden was ten tijde van de hoofduitbreiding van het Scandinavische Landijs, en dat eerst na het terugtrekken daarvan, door afsmelting, de groote erodeerende werkzaamheid begon, welke het in een aantal stukken gescheiden heeft en ook ieder van deze, zooals het ons bezighoudende door de Swalm en de Nette met hare zijtakken, heeft aangetast. LORIÉ toonde aan, dat de bodem der noordelijke en oostelijke stukken van de hoogvlakte niet uitsluitend uit „Rijndiluvium” bestaat, zooals STARING voor het geheel, tot Nijmegen, aannam, doch dat deze noordelijke en oostelijke stukken sporen vertoonen van door het Scandinavische Landijs der groote IJperiode bereikt te zijn geweest, tengevolge waarvan zij, althans aan de oppervlakte, uit „Gemengd Diluvium” bestaan. Met het meest westelijke stuk van het grind-plateau, hetwelk wij thans meer in het bijzonder beschouwen, is dat niet het geval. Daarin worden uitsluitend gesteenten aangetroffen welke door den Rijn en zijn grooten zijtak, de Maas, zijn

aangevoerd, en de horizontale laagsgewijze bouw is niet door zich over de hoogvlakte bewogen hebbend landijs verstoord geworden. Evenwel ontbreken ook hier in den bodem kenteekenen van de medewerking van ijs bij het vervoer van het zand en het grind, waaruit het massief bestaat, niet, maar deze bevinden zich daarin reeds op groote diepte, tot 30 meter en meer onder de oppervlakte, en de horizontale structuur is, gelijk gezegd, niet van boven af verstoord geworden. Die laagsgewijze structuur, met fluviaatiele *current-bedding*, kan op tal van plaatsen, waar grind gegraven wordt, worden waargenomen. Tevens komen daarbij herhaaldelijk, midden tusschen zand en fijner grind gelegen, groote kantige steenblokken voor. Zoo zag ik in eene grind-groeven in de Jammerdaalsche Heide, tegenover Tegelen, de volgende steenblokken, die op een oppervlak van ongeveer een hectare en 2 à 3 M. boven den onderkant der zand- en grindformatie waren aangetroffen: Een groot blok *Thonschiefer*, van $1.35 \times 0.75 \times 0.35$ M. en drie kleinere van ongeveer 0.5 M. grootste afmeting, een parallelepipedum-vormig blok lydiert van $0.80 \times 0.75 \times 0.50$ M., een grijze kwartsiet van $0.67 \times 0.36 \times 0.20$ M., een vuursteenknol van $0.60 \times 0.35 \times 0.15$ M. Andere groote steenen waren stuk geslagen. Men heeft dus wel te denken aan vervoer op groote schaal door drijfijz, en men kan zich dat voorstellen in den bovenloop van den Rijn uit grondijs ontstaan te zijn.

Dat alles noopt ons, dit „Rijndiluvium” te beschouwen als eene glaciofluviale vorming uit den eersten diluvialen ijstijd, chronologisch gelijkwaardig met den fluvioglacialen *Deckenschotter* van het Middellrijnsche Diluvium.

Deze opvatting wordt nu bevestigd door den aard van het onderliggende in het ons bezig houdende grind-plateau. Behalve grind en zand wordt er namelijk op zeer vele plaatsen, vooral aan den rand en langs de doorbraakdalen, zooals dat van de Swalm, klei gegraven, welke het materiaal levert voor talrijke pannenbakkerijen en steenfabrieken, in de Nederlandsche provincie Limburg en in de naburige streken der Rijnprovincie van Pruissen. Die klei ligt concordant en met niet geërodeerd, vrij wel horizontaal scheidingsvlak onder het „Rijndiluvium”, het equivalent van den *Deckenschotter*. Ook haar eigen laagvoegen zijn in het algemeen horizontaal. In de groeven van de welbekende steenfabriek der firma CAHOY-HERFKENS, nabij den westelijken rand der Jammerdaalsche Heide, ligt haar bovenkant bij ongeveer 25 M. + A.P. In die streek is deze, over ten minste 2 K.M., van het noorden naar het zuiden, in de verschillende kleigroeven op ongeveer gelijke hoogte, te vervolgen. Ten oosten van Belfeld, bij Maalbeek, meen ik dien bovenkant ongeveer 6 M.

hooger te kunnen schatten, ten oosten van Swalmen, nabij het Grenskantoor, 15 K.M. ten zuiden van de genoemde groeve in de Jammerdaalsche Heide, ongeveer 10 M. hooger dan in de laatst bedoelde groeve tegenover Tegelen. Dezelfde klei wordt ook gegraven bij Brüggén, aan de Swalm, in de Rijnprovincie, 5 tot 8 K.M. ten oosten van de groeve bij het Grenskantoor. Het is waarschijnlijk ook geen andere klei, die ten oosten van het Zwartwater, noordelijk van Venlo, gelijk ten westen van het heuvelplateau in de gemeenten Tegelen, Belfeld, Reuver aan de oppervlakte gelegen is.

Klaarblijkelijk vormt deze klei eene doorgaande laag onder het „Rijndiluvium”, welke slechts onbeduidend naar het zuiden en waarschijnlijk ook naar het oosten oploopt, en waarvan ten westen van het plateau, waar het „Rijndiluvium” verdwenen is, hier en daar resten in de lagere streken bloot liggen.

Over hare dikte valt weinig met zekerheid te zeggen, daar men in geen enkele groeve den onderkant der laag bereikt heeft. In de Jammerdaalsche Heide graaft men ze tot 6 M. diep uit en heeft men bovendien door boringen vastgesteld, dat nog 2 M. dieper, dus bij omstreeks 17 M. + A.P., de klei plaats maakt voor zand. Het is evenwel waarschijnlijk, dat onder dat zand weder klei voorkomt. Inderdaad leerden boringen op verschillende punten in en om Venlo verricht, waarvan sommige de bedoelde groeve tot 2½ K.M. naderden, soortgelijke klei kennen, in eene laag ter dikte van 8 M., bij 4 M. — A.P. rustend op glimmerrijk grof wit zand met kiezel en bij 4 M. + A.P. bedekt door 3 M. zand en een 12-tal M. grind¹⁾. Langs den rechter oever der Maas, ten zuiden van Venlo, ziet men dit, door hoog ijzergehalte zeer vast geworden grind tot omstreeks 16 M. + A.P., onder leem, aan den dag liggen. Ook bij zeer lagen rivierstand (van weinig boven 8 M. + A.P.) kan men daar in het algemeen het onderliggende van het grind niet waarnemen. Op een paar punten echter, ongeveer 1 K.M. ten zuiden van de Maasbrug en 2 K.M. ten noordwesten van de genoemde groeve gelegen, kan men dan oogenschijnlijk soortgelijke klei als die van Tegelen, in de oorspronkelijke ligging en tot 7 M. in horizontalen samenhang, onder het grind zien te voorschijn komen. Zij reikt daar naar boven tot 9 M. + A.P. Klaarblijkelijk behoort deze klei aan den Maasoever tot dezelfde laag als die onder Venlo

¹⁾ Volgens mededeeling van den heer DE WAAL MALEFIJT lag de bovenkant van de klei in eene door hem verrichtte boring aan den Maaskant van Venlo 5 M. lager.

Vermoedelijk is de klei welke men ten oosten van de Maas in de omstreken van Roermond, 24 K.M. zuidelijker, heeft aangeboord op omstreeks 5 M. + A.P., onder een even dikke grindlaag, geologisch gelijkwaardig met die onder Venlo.

werd aangeboord, welke door lang voor de vorming van het tegenwoordige rivierbed plaats gehad hebbende erosie van boven ongelijk werd weggenomen, waardoor zulk een verschil van 5 M. en meer in hoogteligging van den bovenkant kon ontstaan. In die klei aan den rechter Maasoever vond ik eene tibia van *Rhinoceros*, welke slechts op dat been bij *R. etruscus* en *R. Mercki* gelijkt, nog even in de klei bevestigd, grootendeels echter omgeven door het vaste grind. Deze klei is daardoor als interglaciaal of praeglaciaal (praepleistocéen) gekenmerkt. Behoort zij bij die van Tegelen, dan is voor de geheele dikte van deze, met inbegrip van zandlagen, 29 M. te berekenen. Daarbij is aangenomen, dat de onderkant, van Venlo tot Tegelen, horizontaal ligt, hetgeen over zulk een geringen afstand, in vergelijking met de groote uitbreiding welke de Klei van Tegelen bezit, en bij hare horizontale structuur, wel geoorloofd schijnt. Zij is dan, zooals nog nader blijken zal, als praepleistocéen te beschouwen. Voor veel onwaarschijnlijker houd ik het, dat de klei onder Venlo en aan den Maasoever bij die stad eerst *na* den eersten pleistocenen IJstijd, dien van het „Rijndiluvium”, werd afgezet. In dat geval zouden wij twee tijdperken van erosie moeten aannemen. In het eerste zou het „Rijndiluvium” met de onderliggende Klei van Tegelen in het Maasdal zijn weggeschuurd, vervolgens zou in dat dal op nieuw (interglaciale) klei moeten zijn afgezet, welke in een tweede tijdperk van erosie werd uitgeschuurd, waarop dan in den tweeden of grooten pleistocenen IJstijd grind werd neergelegd.

Voor de chronologie van onze diluviale vormen is het nu van groote beteekenis den geologischen horizon van de Klei van Tegelen, die bezonken is in den tijd welke aan de vorming van het „Rijndiluvium” onmiddellijk voorafging, door ingesloten fossielen met zekerheid nader te leeren kennen.

Aan den heer L. STIJNS, destijds nog medisch student, thans als arts gevestigd te Roermond, heb ik het te danken reeds in 1897 bekend geworden te zijn met fossiele overblijfselen van Zoogdieren (voornamelijk *Trogotherium* en Herten), van Mollusken en ook van planten, door hem in de klei der groeve van de heeren CANOY, HERFKENS en SMULDERS gevonden, van welke hij mij vele ook voor onderzoek heeft afgestaan. Door de welwillendheid der laatstgenoemde heeren mocht ik dan later nog eenige karakteristieke fossielen van Zoogdieren (voornamelijk *Rhinoceros*, *Equus*, *Hippopotamus* en *Trogotherium*) verzamelen (thans in Teylers Museum te Haarlem), met behulp waarvan de bedoelde nadere bepaling van den geologischen horizon is mogelijk geworden. De meeste schelpen en plantenoverblijfselen (vooral hout en zaden) en ook beenderen worden gevonden

op ongeveer 5 M. onder den bovenkant der klei, waar deze tamelijk zandig is; een tweede beenderenrijk niveau ligt bij 3 M. onder den bovenkant, in eene vette laag ¹⁾. Tegenover Belfeld worden de meeste beenderen aangetroffen op 4 M. diepte in de klei; op 1.25 M. onder haren bovenkant bevat zij daar eene 0.30 dikke laag zand. De beenderen zijn steeds volstrekt gaaf van oppervlak, hun voorkomen is in het geheel niet „gerold”.

Het volgende, later verder uit te werken en uit te breiden lijstje van aangetroffen fossiele vormen moge ter bepaling van den geologischen horizon thans volstaan.

Wat nu in de eerste plaats betreft de Mollusken, deze behooren meest allen tot vormen eigen aan zoet en wel stilstaand of weinig



Fig. 1. — *Cervus tegulensis*, sp. n. Linker hoorn, buitenzijde. ($\frac{1}{8}$).

Het afgebeelde exemplaar behoort tot de collectie STRJNS. Verschillende andere exemplaren missen den sterken knik van de stang ter hoogte van den middeltak, zoodanig dat zij in haar geheel meer recht is.

¹⁾ Tot gemiddeld 2.70 M. onder den bovenkant, tot op eene zeer vette laag, is in deze groeve de klei geel van kleur, daardoor dat de atmosferiën zoover hebben ingewerkt, daaronder is zij blauwachtig grijs en geheel onderaan bijna zwart. De gele klei is, behalve nabij het bovenvlak, over het geheel sterk zandhoudend; op enkele punten is de groeve echter vetter. Dan reikt de blauwe klei verder naar boven en de grenslijn is op die enkele punten in het geheel niet recht en horizontaal; integendeel vormt de gele daar als het ware inzakkingen in de bijna tot het bovenvlak zich voortzettende blauwe klei. Agaatvormig kronkelende bruine parallele lijnen in die gele inzakkingen bootsen dan door ijsbeweging ontstane „contorsies” na, terwijl men inderdaad slechts te doen heeft met het wordingsproces van gele uit blauwe klei. Elders, zooals tegenover Belfeld, waar nog eene dikkere laag grind de klei bedekt, is deze tot bovenaan blauwgrijs van kleur.

bewogen water, terwijl enkele landslakken van soorten afkomstig zijn welke op de planten aan den oever kunnen geleefd hebben. Tot nu toe zijn mij bekend geworden:

Paludina, 2 sp., *Planorbis* sp., *Helix hispida* L., *Helix arbustorum* L., *Helix* sp., *Limnaeus* sp., *Pisidium*, 2 sp., *Unio* sp.

Van de Zoogdieren kunnen met zekerheid bepaald worden:

Trogotherium Cuvieri Owen, *Cervus tegulensis*, sp. n., *Cervus (Axis) rhenanus*, sp. n., *Cervus (Axis)* sp., *Hippopotamus amphibius* L., *Equus Stenonis* Cocchi, *Rhinoceros etruscus* Falc.

Verder zijn nog overblijfselen gevonden van:

Cistudo lutraria Marsili, van een Kikvorsch en van Visschen.

Van veel belang zijn de plantenoverblijfselen, van welke vooral zaden door den heer STIJNS met zorg verzameld zijn geworden. Zij laten toch een besluit toe aangaande het klimaat en daardoor nopens den tijd waarin de planten geleefd hebben. En dat is des te meer gewenscht, nu overblijfselen van Olifanten onder de zoogdierresten nog niet gevonden zijn, al is ook het opgesomde gezelschap karakteristiek genoeg voor het Opper-Plioceen. De reeds bepaalde plantensoorten zijn:

Viburnum sp., *Prunus* sp., *Trapa natans* L., *Cornus mas* L., *Vitis vinifera* L., *Staphylea pinnata* L., *Juglans tephrodes* Ung., *Nuphar luteum* L., *Stratiotes Websteri* Pot., *Abies pectinata* DC., *Chara* sp.

Fig. 2. — *Cervus (Axis) rhenanus*, sp. n. Rechter hoorn, buitenzijde. (1/8).

Dat is een dieren- en plantengezelschap, hetwelk slechts praeglaciaal, in den zin van praepleistocéen, kan zijn. De Zoogdierengroep onderscheidt zich van die der zanden van Moosbach, welke men thans wel algemeen tot het Interglaciaal vóór den grooten of tweeden diluvialen IJstijd rekent, door het bezit van *Rhinoceros etruscus*, van *Equus Stenonis*¹⁾, van twee hertensoorten van het *Axis*-type en van eene derde soort, behoorend tot een type, dat onder de levende Herten niet meer voorkomt. Deze Herten geven aan het geheel een tertiair karakter en maken op zich zelf de gelijkwaardig-

¹⁾ Het is van deze soort de door M. BOULE onderscheiden vorm met groote afmetingen, in welken men wel den onmiddellijken voorvader van *E. caballus* te zien heeft.

heid van de Klei van Tegelen met het *Cromer Forest-Bed* waarschijnlijk. Uit het laatstgenoemde kent men één *Axis*-achtige hertensoort en uit de iets oudere *Norwich Crag* een tweede soort, uit het Pliocéen van Centraal-Frankrijk wel een zestal soorten. *Cervus tegulensis* schijnt zich nog het meest aan te sluiten bij *C. tetraceros* Boyd Dawkins uit de jongste, door *Elephas meridionalis* gekarakteriseerde lagen van dat Pliocéen, maar de hoorn van het groote Hert van Tegelen kreeg niet meer dan drie takken. De overige Zoogdieren van de Klei van Tegelen zijn alle uit het *Cromer-Bed* bekend. De aanwezigheid van *Equus Stenonis* en *Rhinoceros etruscus* naast *Trogontherium Cuvieri* en *Hippopotamus amphibius major* laat aan de bedoelde gelijkwaardigheid geen twijfel meer over.

Wat van de plantensoorten in de Klei van Tegelen bekend is wijst zelfs op een iets warmer klimaat dan dat van de flora van het *Cromer Bed*, en dus schijnbaar op een iets vroegeren tijd. De *Prunus*-soort is zeker onderscheiden van de tot de laatstgenoemde fossiele flora behorende *P. spinosa* L., die thans ook in Noord-Europa inheemsch is. Het steenzaad is slechts met dat van soorten te vergelijken, die thans in Turkije, ten zuiden van den Kaukasus, in Armenië en het noorden van Perzië spontaan schijnen te zijn. Ook ontbreekt onder de flora van het *Cromer Bed* *Vitis vinifera*, die thans spontaan groeit in gematigd West-Azië, vooral ten zuiden van de Zwarte Zee, in Armenië en ten zuiden van den Kaukasus en de Kaspische Zee; dan ook in Zuid-Europa, Algiers en Marokko. Overblijfselen werden ook gevonden in pleistocene tuffen van Toskane en het zuiden van Frankrijk, waar de soort, met *Ficus carica* L., als rest van de tertiaire flora beschouwd wordt, bovendien in Italiaansche paalwoningen. Onder de talrijke plantensoorten van het *Cromer Bed* ontbreekt, verder, *Staphylea pinnata*. Deze soort groeit in wilden staat thans niet noordelijker dan Zuid-Duitschland; zij is vooral inheemsch in de Pontische landen en ook in Klein-Azië. Evenmin is er een vertegenwoordiger van het geslacht *Juglans* in die zoetwatervorming aan de kust van Norfolk aangetroffen. *Juglans tephrodes*, welker noot, gelijk die van eenige verwante fossiele vormen, van de tegenwoordige Amerikaansche *Juglans cinerea* L. nauwelijks is te onderscheiden, is een jongtertiaire soort van Italië en Midden-Duitschland. Het zaad van de *Stratiotes* is zeer verschillend van dat van *S. aloides*, gelijk daarentegen treffend op dat van *S. Websteri* uit het Opper-Miocéen der Wetterau. In het *Cromer-Bed* werd ook geen *Viburnum* aangetroffen. Het zaad van de soort uit de Klei van Tegelen sluit zich bij dat van *V. Opulus* L. aan; alleen is het grooter en iets minder plat. De omstandigheid, dat het geslacht *Viburnum* onder de tertiaire flora

een groote rol speelde, schijnt mij, in samenhang beschouwd met het bovenstaande, niet zonder beteekenis te zijn. Iets dergelijks geldt voor het geslacht *Cornus*, waarvan eene andere levende soort, *C. sanguinea* L., ook fossiel aan de kust van Norfolk gevonden wordt. *C. mas* schijnt, behalve in Azië, spontaan slechts in Zuid- en Midden-Europa te groeien, daarentegen is *C. sanguinea* ook in Noord-Europa inheemsch.

Dat de flora uit de kalktuffen van Taubach, welke tuffen men wel te recht als even oud als de zanden van Moosbach beschouwt, een veel jongere is dan die van de Klei van Tegelen behoeft geen betoog. Gene bevat arktische en alpen-vormen, welke hier ontbreken; daarentegen mist de flora van Taubach de genoemde tertiaire en die op een warmer klimaat wijzende vormen. Uit het feit, dat de fossiele flora van Tegelen onder een iets warmer klimaat schijnt geleefd te hebben dan die van Cromer, behoeft men evenwel niet te besluiten, dat de eerste ouder is dan de laatste. Immers heeft men in aanmerking te nemen, dat Tegelen bijna 2° zuidelijker gelegen is dan Cromer, maar vooral dat, gelijk PRESTWICH en CLEMENT REID hebben aangetoond, locale omstandigheden het klimaat van Cromer betrekkelijk koel moeten gemaakt hebben. Van de Zoogdiervormen door welke de oudere pliocene lagen van Norfolk zich van het *Cromer Bed* onderscheiden is verder nog geen enkele in de Klei van Tegelen aangetroffen.

Alles wel overwogen schijnt mij nauwelijks plaats voor twijfel over te blijven aan de gelijkwaardigheid van deze laatste met het *Cromer Forest-Bed*. Gelijk deze beroemde rivier- en estuarium-bezinking en gelijk de onderste grindlagen van Saint-Prest bij Chartres, de door *Elephas meridionalis* gekarakteriseerde alluvia in Centraal-Frankrijk, de lignietlagen van Lefte bij Gaudino, niet ver van Bergamo, moeten zij aan den top van het Pliocéen geplaatst worden.

Op goede gronden wordt algemeèn aangenomen, dat aan het eind van de pliocene periode de voortdurende daling gedurende dat tijdperk, waarvan men zoowel in Nederland en België als in Engeland de onmiskenbare bewijzen heeft gevonden, onderbroken werd door oprijzing, d. w. z. door een vlakker worden van die groote concave zone, den geosynclinaal, waarin de marine pliocene sedimenten bezonken zijn. Daardoor werd de zuidelijke helft der Noordzee droog gelegd en Engeland met het vasteland vereenigd. De groote rivier van dat sedimentatie-bekken, de Rijn, heeft toen, zooals door CLEMENT REID en door HARMER is aangetoond, zijne wateren over het oosten van Engeland in de Noordzee gestort en in Norfolk is het *Cromer Forest-Bed* eene bezinking dier rivier. Ook wees HARMER reeds in 1896 er te recht op, dat die rivier, voordat zij Engeland bereikte,

over een of ander gedeelte van Nederland moet geloopt hebben, zoodat men misschien eenmaal is ons land het equivalent der beenderenvoerende lagen van Cromer zou vinden. In de Klei van Tegelen heeft men nu inderdaad met zulk eene laag te doen, die klaarblijkelijk in een door dien Rijn doorstroomd ondiep zoetwatermeer bezonken is.

Op goede gronden neemt men ook aan, dat met het begin der pleistocene periode een nieuw tijdperk van steiler worden van den geosynclinaal aanbrak, ten gevolge waarvan over het grootste gedeelte van het tegenwoordige Nederland zand, grind en klei kon bezinken, ter dikte van meer dan 150 M. Maar tevens had er aan den rand van het steiler wordende bekken, door steeds sterker verval van de stroomende wateren aldaar, eerst bezinking van grof materiaal, het „Rijndiluvium”, dan belangrijke erosie plaats. Daardoor kon onder anderen de Maas een breed dal uitschuren, door het „Rijndiluvium” heen, tot diep in de laatpliocene klei, in welk dal zij vervolgens, waarschijnlijk reeds in den tweeden of grooten pleistocenen IJstijd, bij betrekkelijk minder verval, eene machtige laag van grind nederlegde.

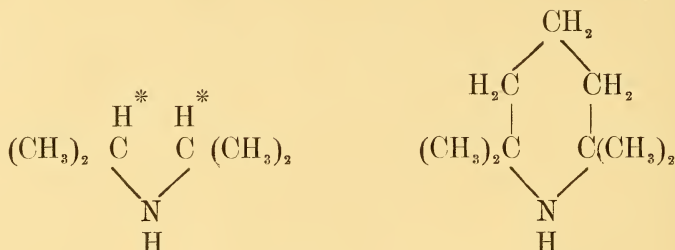
Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt een mededeeling aan van hemzelve en den Heer H. FRIEDMANN over: „*Het $\alpha\alpha'$ tetramethylpiperidine.*”

Deze stof, die, ofschoon in onzuiveren toestand, reeds in 1885 door CANZONERI en SPICA verkregen is, werd door ons op andere wijze bereid, nl. door reductie van γ broomtetramethylpiperidine met verkoperd zink (Gladstone-Tribe's methode) in absoluut alcoholische oplossing.

Het is eene vloeistof, kokende bij $155,^{\circ}5$ — $156^{\circ}5$ onder 760 m.m. drukking met een spec. gew. van 0.8367. Het geeft met water eene gekristalliseerde verbinding, die bij 28° smelt, en dit water in eene droge atmosfeer geheel of gedeeltelijk verliest. De verbindingen met chloorwaterstof, broomwaterstof en zwavelzuur kristalliseeren zeer fraai; die met de beide eerstgenoemde zuren sublimeeren bij verhitting zonder te smelten, die met het zwavelzuur smelten: de zure bij 174° , de neutrale bij 270° .

Opmerkenswaardig is de traagheid waarmede dit amine reageert, vergeleken met het piperidine, b.v. op zuurechloriden zooals benzoylchloride, chloormierenzure esters, pikrylchloride enz. In waterige vloeistoffen gaat de werking zoo goed als niet, in etherische oplossing uiterst langzaam. Toch werden verkregen: 't methylurethaan als vloeistof met sterken muntachtigen reuk, kokend bij 227° onder

760 m.m.; spec. gew. 0.9848 en 't benzoylderivaat als kristallen smeltend bij 41° — 42° ; 't pikrylderivaat smelt bij 225° . Een ureum te maken uit de chloorwaterstofverbinding met kaliumisocyaanaat mislukte tot nog toe. Dit herinnert aan waarnemingen van Dr. K. H. VAN DER ZANDE in 1889 omtrent het di-isopropylamine, ook hier kon 't ureum slechts moeilijk en in geringe opbrengst verkregen worden, terwijl dinormaalpropylamine geen moeilijkheid baarde. ¹⁾ Vergelijkt men de formule van di-isopropylamine en $\alpha\alpha'$ tetramethylpiperidine



dan ziet men dat zij alleen daarin verschillen dat de beide, met een sterretje geteekende, waterstofatomen van de eerste in de tweede door de bivalente groep CH_2 — CH_2 — CH_2 vervangen zijn; terwijl piperidine en tetramethylpiperidine verschillen, doordat in 't eerste waterstofatomen staan waar 't tweede methylgroepen heeft, nl. aan de α C atomen ten opzichte van de stikstof.

Daar piperidine met de bovengenoemde stoffen heftig reageert en tetramethylpiperidine dit niet doet en een analoog verschil bestaat tusschen dinormaalpropylamine en di-isopropylamine ligt het voor de hand de oorzaak er van te zoeken in de methylgroepen en daar hun aard dit verschil niet opheldert moet men wel denken aan hun omvang en aan hun ligging in de ruimte ten opzichte van de stikstof en is dit een geval van zoogenaamde sterische hindernis, tot op zekere hoogte vergelijkbaar met tal van andere gevallen die men (hoofdzakelijk bij aromatische lichamen) heeft opgemerkt; een geval dat wellicht van invloed kan zijn op beschouwingen omtrent het stikstofatoom.

Ten slotte zij nog opgemerkt dat het tetramethylpiperidine, evenals het di-isopropylamine eene gekristaliseerde verbinding geeft met salpeterigzuur, die vrij bestendig is, en eerst bij hoogere temperatuur water vormt en in de nitrosoverbinding overgaat.

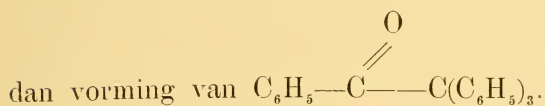
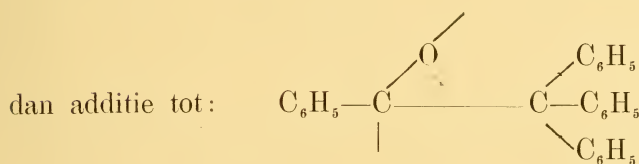
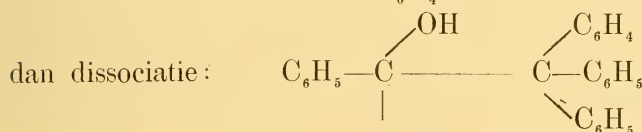
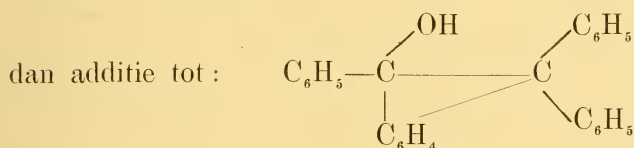
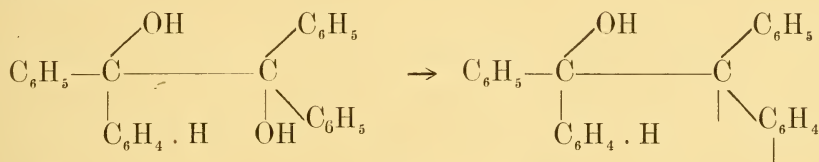
¹⁾ Reeds eenige jaren vroeger had ik een analoog verschijnsel waargenomen bij de behandeling van propyl- en isopropylmalonzuur met salpeterzuur; 't eerste werd veel gemakkelijker aangegrepen dan het tweede.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van den Heer P. J. MONTAGNE: „*Over intramoleculaire atoomverschuiving bij benzpinakonen.*”

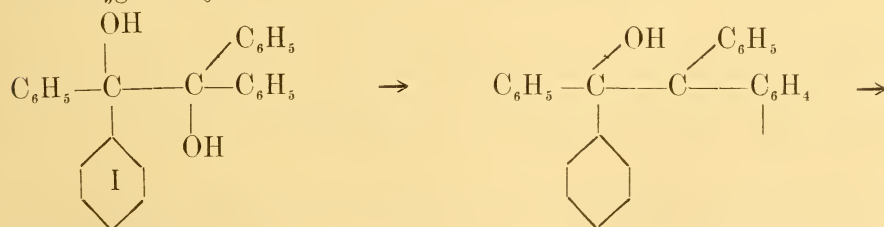
(Mede aangeboden door den Heer H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM).

Aanleiding tot het volgende onderzoek was een poging van NEF¹⁾ de intramoleculaire atoomverschuiving bij den overgang van benzpinakon in benzpinakoline door aanname van een tusschenproduct te verklaren. De voorstelling, die hij er van geeft, is, overgebracht in formules, de volgende:

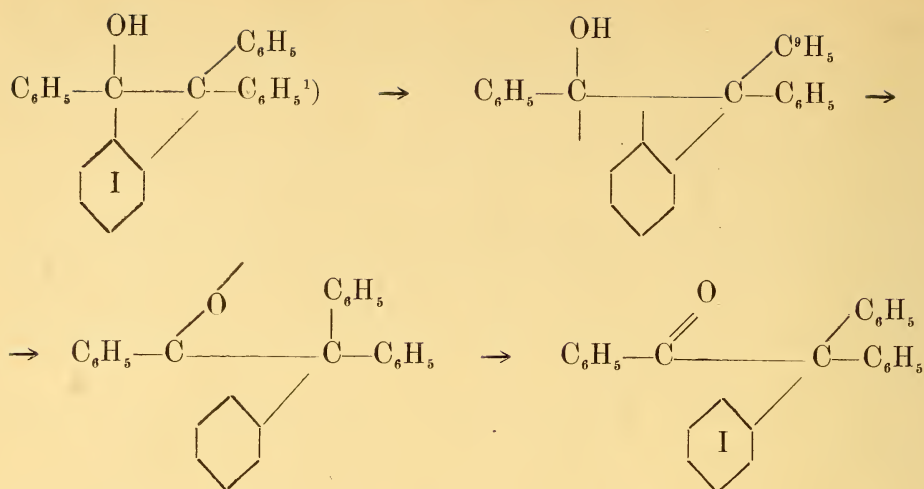
Het benzpinakon dissocieert zich in water en onverzadigde koolwaterstof:



Brengen wij evenwel deze voorstelling in structuurformules over, dan krijgen wij:

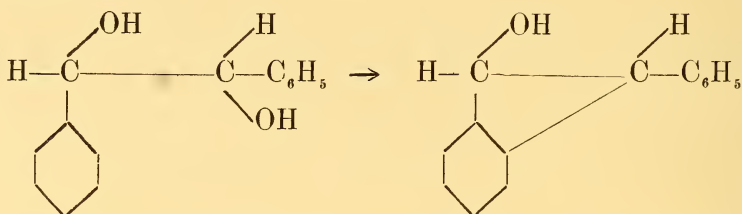


1) Ann. 318 p. 38.



Hieruit volgt nu ten duidelijkst, dat kern I vóór en na de verhuizing met verschillende C-atomen gebonden is. Passen wij deze voorstelling dus toe op derivaten van het benzpinakon, dan neemt de groep of het atoom in kern I bij het benzpinakon een andere stand in dan in het daaruit gevormde benzpinakoline.

Nu heb ik indertijd ²⁾ voor den overgang van het hydrobenzoïne in diphenylacetaldehyde op de mogelijkheid van een dergelijk tusschenproduct gewezen,



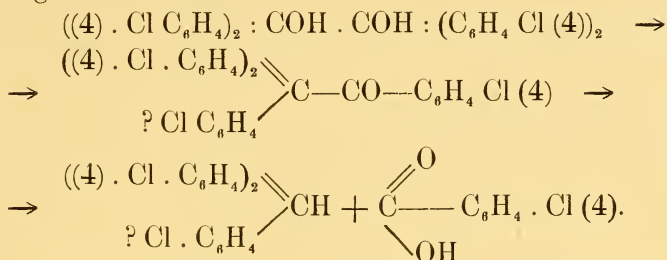
maar tevens experimenteel de onjuistheid van die onderstelling aangetoond. In een noot, tijdens de correctie aan mijn stukje toegevoegd, heb ik toen reeds opgemerkt, dat met het oog op de door mij verkregen resultaten de voorstelling van NEF niet aannemelijk was. Het scheen mij evenwel van belang mijn onderzoekingen ook tot een derivaat van het benzpinakon uit te breiden, en daaraan met beslistheid de juistheid of onjuistheid van NEF's theoretische verklaring te toetsen.

Voor de uitvoering van dit onderzoek werd genomen het 44'4 tetrachloorbenzpinakon, verkregen door reductie van het 44' dichloorbenzophenon. Door verhitting met acetylchloride gaat het over in

1) Welk H-atoom van kern I naar de groep C_6H_4 gaat, is door NEF niet aangegeven; willekeurig werd het ortho-standige H-atoom genomen.

2) Rec. 21. p. 30.

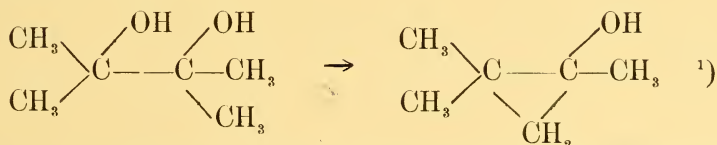
tetrachloorbenzpinakoline. Wordt dit met alcoholische kali gekookt, dan splitst het zich in trichloortriphenylmethaan en p. chloorbenzoëzuur, volgens dit schema :



Dit trichloortriphenylmethaan bleek nu identisch te zijn met het 44'4'' trichloortriphenylmethaan, verkregen uit het 44'4'' triamino-triphenylmethaan (p. leukaniline). Daaruit volgt dus de para stand van alle chlooratomen in het eerstgenoemde trichloortriphenylmethaan. Daaruit volgt nu weer, dat vóór en na de verhuizing van de phenyl-groep deze met hetzelfde C atoom gebonden is, en dus het tussenproduct, zooals NEF dit aangegeven heeft, niet mogelijk is. De voorstelling, die NEF voor deze intramoleculaire atoomverschuiving geeft, is dus onjuist.

De voorstellingen, die men zich gemaakt heeft van den overgang van α -glycolen in aldehyden, zijn tweeërlei :

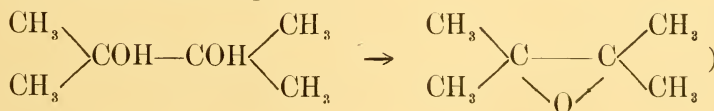
1. Afsplitsing van H_2O , zóó, dat de groep OH uittreedt met de H van een C atoom, bijv. :



Ook de voorstelling van NEF bij het benzpinakon komt ten slotte hierop neer.

Het doel van deze voorstelling is de aanname van een intramoleculaire atoomverschuiving te doen vervallen, en daarvoor z.g. normaal verlopende reacties in de plaats te stellen.

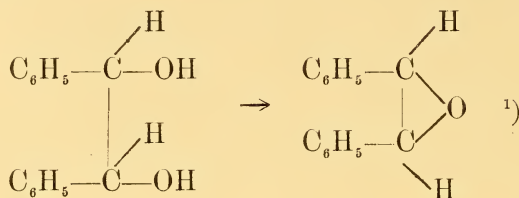
2. Afsplitsing van H_2O , zóó, dat de groep OH uittreedt met een H van de tweede OH groep, bv. :



1) COUTURIER. Ann. chim. phys. [6] 26 p. 434. ERLNMEYER, Ber. 14 p. 322. Note. ZELINSKY en ZELIKOW. Ber. 34 p. 3251.

2) ERLNMEYER. Ann. 316 p. 84.

NEF ¹⁾: Es ist jetzt vollkommen klar, dass diese Reaction (Umwandlungen der 1.2 Glycolen in Ketonen) bei welcher eine scheinbare Verschiebung der Hydroxyle eintritt, auf eine intermediaire Bildung von Alkylenoxyd zurückzuführen ist.



Bij deze voorstelling blijft men een intramoleculaire atoomverschuiving aannemen; evenwel niet bij de 1.2 glycolen, maar bij de oxyden.

Bij den overgang van hydrobenzoïne in diphenylacetaldehyde, heb ik vroeger en nu eveneens bij dien van benzpinakon in benzpinakoline aangetoond, dat eerstgenoemde voorstelling onhoudbaar is. Met het oog hierop acht ik de aanname van een trimethyleenring bij den overgang van pinakon in pinakoline ook minder waarschijnlijk. Een rechtstreeksch bewijs, zooals bij de aromatische α -glycolen, is natuurlijk niet te leveren; voorloopig schijnt mij evenwel deze theorie allen grond te missen. NEF zelf schijnt mij trouwens ook terug te komen van deze voorstelling; terwijl hij vroeger ²⁾ de trimethyleenring zeer waarschijnlijk achtte, neemt hij nu, getuige het bovengegeven citaat, als vaststaande de oxyde-ring aan ³⁾.

Als resultaat, uit mijn onderzoekingen te trekken, zou ik den volgende regel willen opstellen:

Bij den overgang der 1.2 glycolen in aldehyden heeft een echte intramoleculaire atoomverschuiving plaats, die niet te verklaren is door aanname van normaal verloopende tusschenreacties; hierbij is evenwel nog niet uitgemaakt, of deze atoomverschuiving plaats heeft bij de 1.2 glycolen zelf, dan wel of daaruit eerst de oxyden ontstaan, die dan een intramoleculaire atoomverschuiving ondergaan.

Ter beantwoording van die vraag zijn door mij samen met Dr. MEERBURG proeven begonnen.

¹⁾ Ann. 335 p. 243.

²⁾ Ann. 318 p. 38,

³⁾ Wanneer ten minste het citaat voor *alle* 1.2 glycolen geldt.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt voor de Boekerij der Akademie aan de dissertatie van den Heer J. MOLL VAN CHARANTE, getiteld: „*Het sulfonisoboterzuur en eenige zijner derivaten*”, en doet die aanbieding van de volgende toelichting vergezeld gaan.

De Heer MOLL VAN CHARANTE is op mijn voorstel begonnen het sulfonisoboterzuur nader te onderzoeken. Hij bereidde het langs den weg, dien ik vele jaren geleden had aangegeven ter bereiding van die aliphatische sulfoncarboonzuren, waarin de sulfonzuurgroep zich aan hetzelfde koolstofatoom als de carboxylgroep bevindt (nl. uit de zuuranhydriden met zwavelzuur). Deze zuren hebben niet alleen als tweebasische zuren, waarvan onze kennis in 't algemeen nog veel te wenschen overlaat, belang, maar ook omdat de twee zuurfuncties reeds zelf en niet door hunne plaats verschillend van sterkte zijn, tevens dichter bij elkaar staan dan bij de aromatische het geval kan zijn en dus grooter invloed op elkaar kunnen uitoefenen. De bezwaren, die men bij het onderzoek van sulfonazijnzuur, sulfonpropionzuur enz. ontmoet had, veroorzaakt door de bewegelijkheid der waterstofatomen, die aan hetzelfde koolstofatoom staan, konden zich hier niet voordoen, omdat het atoom waaraan de beide zuurfuncties gebonden zijn geen waterstof draagt.

De genoemde bereidingsmethode, die nooit geheel opgehelderd was, waarbij twee moleculen zuuranhydride met één molecuul zwavelzuur reageeren om één molecuul sulfonzuur te geven, wordt door den Heer MOLL VAN CHARANTE aldus opgevat: er zou een diacylzwavelzuur ontstaan, dat door verwarming in monacylsulfonzuur overgaat, hetgeen met water sulfonzuur en carboonzuur geeft.

$C_n H_{2n+1} CO.O.SO_2.O.CO.C_n H_{2n+1}$ overgaande in $C_n H_{2n+1} CO.O.SO_2.C_n H_{2n} CO.OH$ en dan door H_2O in $C_n H_{2n+1} CO.OH$ en $HO.SO_2.C_n H_{2n} CO.OH$.

Opzettelijk verrichte proefnemingen brachten hem tot deze opvatting en leerden hem tevens, dat men, inplaats van het zuuranhydride 't zuurchloride nemende, eveneens twee moleculen daarvan noodig heeft op één molecuul zwavelzuur. De werking van chloorsulfonzuur op carboonzuren, die ook als bereidingsmethode voor sulfonzuren wordt opgegeven, wordt door hem opgevat als gevende eerst 't zuurchloride nevens zwavelzuur, die dan op elkaar werken om 't sulfonzuur te vormen.

't Sulfonisoboterzuur zelf is eene met twee moleculen water kristalliseerende zeer hygroscopische stof. Het bariumzout bevat drie moleculen water, het natriumzout een half molecuul, het neutrale zilverzout is watervrij evenals het zure, dat alleen bij grooten overmaat van het vrije zuur verkregen kan worden.

Bij de werking van phosphorpentachloride op het natriumzout kreeg de Heer MOLL VAN CHARANTE, al naar gelang der omstandigheden, het dichloride of wel een chloridanhydride, dat chloride van de carbonzuur-anhydride van de sulfonzuurfunctie is. Het dichloride is een kleurlooze vloeistof, die onder een drukking van $1\frac{1}{2}$ m.m. kwik bij 55° ongeveer distilleert, met een spec. gew. $d\frac{20}{4} = 1.4696$ en refractievermogen $n_D = 1.4887$; 't vastwordingspunt was -10° . Het sulfonanhydride-carboonchloride is vast, kristalliseert uit petroleum-aether en smelt bij 61° .

Met weinig water geeft het dichloride 't sulfonchloridisoboterzuur, dat kristalliseert en bij 134° smelt. Met meer water ontstaat sulfonisoboterzuur. Met methylalcohol wordt de ester der carbonzuurfunctie geboren, terwijl de sulfonchloridefunctie blijft. Deze sulfonchloride-ester is eene vloeistof, die onder een druk van $1\frac{1}{2}$ m.m. bij $\pm 60^\circ$ overkwam, bij $21^\circ.5$ vast werd; 't spec. gew. was $d\frac{20}{4} = 1.3436$, 't refractievermogen $n_D = 1.46658$. Met natriummethylaat in methylalcohol ontstond niet de dimethylester, maar het natriumzout van het estersulfonzuur.

De dimethylester, uit 't neutrale zilverzout met joodmethyl bereid, was eene vloeistof, die onder een druk van $1\frac{1}{2}$ m.m. tusschen 82° — 78° overkwam, door afkoeling vast werd en dan bij 4° smolt; 't spec. gew. was $d\frac{20}{4} = 1.2584$, de refractie index $n_D = 1.44481$. De neutrale ester wordt door methylalcohol verzeept en geeft dan zuren zooals alle sulfonzure esters. Met ammoniak levert hij een ammoniumzout van de sulfonzuurfunctie, tevens ester van 't carbonzuur.

De zure ester, nl. de sulfonzure carboonester, werd ook verkregen uit het natriumzout van het sulfonisoboterzuur door chloorwaterstof en methylalcohol en is zeer hygroscopisch. Zijn isomeer, de carbonzure sulfonester, die uit het zure zilverzout met joodmethyl bereid werd, is niet hygroscopisch, kristalliseert uit benzol en smelt bij 90° . De ervaringen van den Heer MOLL VAN CHARANTE omtrent de esters van het sulfonisoboterzuur komen vrij wel overeen met die van WEGSCHEIDER bij 't metasulfonbenzoëzuur.

De smeltpunten der verkregen verbindingen gedragen zich zooals men mocht verwachten, die van de sulfonzuurchloriden liggen hooger dan die der sulfonzure esters, die der carbonzuurchloriden lager dan die der carbonzure esters. De smeltpunten van de esters zoowel als van de chloriden der carbonzuren liggen lager dan die der carbonzuren zelf.

Dierkunde. — De Heer HUBRECHT biedt eene mededeeling aan van Prof. TH. ZIEHEN te Berlijn: „*Beitrag zur Entwickelungsgeschichte des Gehirns von *Tarsius spectrum*.*”

(Mede aangeboden door den Heer L. BOLK).

Dank der Freundlichkeit von Prof. HUBRECHT standen mir 7 Serien von Embryonen van *Tarsius spectrum* zur Verfügung, darunter eine Sagittalserie. Bezüglich des Centralnervensystems des erwachsenen Tieres verweise ich auf zwei kurze von mir veröffentlichte Arbeiten, Anat. Anz. Bd. 22, N^o. 24, S. 505 ff. u. Mon. Schr. f. Psychiatrie u. Neurol. Bd. 14, S. 54 ff.

Die ersten Entwicklungsstadien sind mir nur aus der HUBRECHT'schen Arbeit bekannt. Bei dem jüngsten Embryo hat die Abschnürung der Hemisphären eben erst begonnen. Der zweitjüngste Embryo zeigt die Hemisphären bereits entwickelt und zwar an der unteren hinteren Peripherie des Vorderhirns. Sie sind gegen letzteres durch einen Sulcus hemisphaericus abgesetzt, welcher vorn ziemlich tief und scharf einschneidet, occipitalwärts jedoch in eine flache Mulde ausläuft. Die Segmentation des Hinterhirns (5 Segmente) zeigt namentlich der jüngste Embryo sehr deutlich.

Die folgenden Stadien zeigen ein Bild, welches dem anderer Säugetierordnungen sehr ähnelt. Auf Frontalschnitten durch das Hinterhirn fällt die ungewöhnliche Tiefe des Sulcus limitans in den distalen Abschnitten auf. Frontalwärts verflacht er sich rasch. Ein Sulcus intermedius (Groenberg) ist angedeutet. Die äussere und innere Lippenfurche sind vorhanden. Das Kleinhirn besteht aus zwei symmetrischen Lamellen, je einer Lamelle rechts und links, welche durch ein dünnes und schmales Mittelstück verbunden sind. Die äussere Oberfläche jeder Lamelle lässt eine breite mediale Längsmulde unmittelbar neben dem Mittelstück und eine schmalere, aber relativ tiefere laterale Mulde erkennen. Diesen beiden Mulden entsprechen auf der Ventrikeloberfläche jeder Lamelle 2 Längswülste und 3 Furchen (ein unpaariger Sulcus medianus dorsalis, je ein Sulcus medialis dorsalis und je ein Sulcus lateralis dorsalis). Die Decke des Mittelhirns ist ziemlich spitz, kielähnlich zugespitzt. Der Rachenteil der Hypophyse zeigt ein fast kompaktes nach unten hinten sich erstreckendes Anhängsel. Bemerkenswert sind auch zwei nach hinten unten gerichtete seitliche Fortsätze des Mittelhirnventrikels. Die Fissura chorioidea ist schon entwickelt und zeigt bereits einige Ausbuchtungen. Der Sulcus hemisphaericus hat sich auch occipitalwärts sehr verschärft. Die Sichelfalte schneidet scharf, aber

wenig tief ein, sie wird gabelig von dem Ventrikel des Vorderhirns umfasst. Der Sulcus hemisphaericus liegt rechts und links hart neben ihr. Die Ammonsfurche fehlt noch ganz. Auf einem im Uebrigen nur wenig weiter vorgerückten Stadium hat sich die Form des Vorderhirns bereits wesentlich weiter entwickelt. Die Sichelfalte schneidet tief ein. In ihrer Wand ist die Ammonsfurche zu erkennen, welcher auf der Ventrikelfläche ein deutlicher Ammonswulst entspricht. Occipitoparietalwärts reicht die Sichelfalte bis zur vorderen Zwischenhirngrenze, basalwärts läuft sie schliesslich in der Lamina terminalis flach aus. Der Sulcus Monroi ist sehr scharf ausgeprägt. Er läuft einerseits flach in der Nähe der Stiefurche der Augenblase und andererseits in der Nähe der Bodenfurche des primären Foramen Monroi (nicht etwa in diesem selbst) aus.

Die oben erwähnten Fortsätze des Mittelhirnlumens sind bereits rudimentaer geworden. Die charakteristische Umklammerung des Hirnteils der Hypophyse durch den Rachenteil findet sich ähnlich wie bei andern Säugetierordnungen wieder. Die Kleinhirnlamelle ist dicker geworden. Von den Längsmulden ist nur noch der Sulcus medianus dorsalis und der Sulcus dorsalis medialis auf der Innenfläche gut ausgeprägt. Auf der äusseren Oberfläche sind die Erhebungen und Mulden fast ganz verstrichen. Das hintere Längsbündel, die spinale Trigeminiwurzel, die untere Olive heben sich schon deutlich ab. Der Plexus chorioideus des 4^{ten} Ventrikels hat sich schon weit eingestülpt.

Die Niveaudifferenzen des Rautenbodens haben sich schon etwas mehr ausgeglichen. Der Sulcus intermedius fehlt, der Sulcus limitans ist deutlich. Die Lippenfurchen sind schon mehr verstrichen.

Die nächstfolgenden Vorgänge lassen sich kurz folgendermassen zusammenfassen:

a. Die Hemisphären zeigen eine tiefe dem Zwischenhirn zugekehrte Mulde, Vallis diencephalica. Die mediale Wand jeder Hemisphäre lässt auf einem etwa horizontalen Schnitt 3 gegen das Ventrikelumen einspringende Wülste erkennen, welche als *R*, *S* und *T* (in der Reihenfolge von vorn nach hinten) bezeichnet werden mögen. Zwischen *S* und *T* erfolgt, wenn man die Serie basalwärts verfolgt, eine starke Verdünnung der Ventrikelwand (Abschnitt *d*). In dieser verdünnten Partie und zwar viel näher bei *S* als bei *T* erfolgt die Bildung der Fissura chorioidea und die Einstülpung des Plexus chorioideus ventriculi lateralis. *S* und *R* verschmelzen mehr und mehr. Mittlerweile erhebt sich vom hinteren unteren Wandabschnitt des Hemisphärenventrikels der breite Wulst des Nucleus caudatus. Die laterale Ventrikelwand zeigt nur eine sehr leichte Verdickung, bezw.

Erhebung N in ihrem hinteren Abschnitt, welche in höheren (d.h. parietaleren) Ebenen mit dem Nucleus caudatus einen schmalen Spalt ν begrenzt, in tiefern Ebenen mit ihm verschmilzt. Zwischen dem Nucleus caudatus und dem Wulst T befindet sich eine Bodenfurche, welche als τ bezeichnet werden soll. Eine sehr seichte Erhebung P zeigt die laterale Wand auch in ihrem allervordersten Abschnitt. Je weiter man die Serie basalwärts verfolgt, um so mehr grenzt sich auf der medialen Hemisphärenfläche von der Vallis diencephalica ein kurzes vorderes Stück ab, welches nicht an das Zwischenhirn grenzt, sondern von dem homologen Stück der anderen Hemisphäre nur durch die primitive Sichel getrennt ist. Im Bereich dieses Stückes findet man jetzt gleichfalls eine leichte in den Ventrikel vorspringende Wulstung, welche zur Abkürzung hier mit Q bezeichnet werden soll. Allen den eben beschriebenen Wülsten der Wandinnenfläche entsprechen nur sehr leichte oder gar keine Furchen der Wandaussenfläche. Nur dem Wulst S entspricht weiterhin ziemlich genau eine seichte Mulde S' , welche als Fissura hippocampi aufzufassen ist. Sie gehört dem Teil von S an, welcher der Fissura chorioidea am nächsten liegt und biegt schliesslich fast hakenförmig hinter der benachbarten Lippe der Fissura chorioidea ein. Je stärker sich auf den folgenden Schnitten S wölbt, um so mehr vertieft sich auch die Fissura hippocampi, während zugleich alle übrigen Wülste sich ausgleichen. Nur der Nucleus caudatus bleibt völlig unverändert. An seiner Oberfläche zeigt sich zeitweise eine sehr seichte Mulde. Die Furchen ν und τ obliterieren allmählich grösstenteils, so dass der Schweifkern mit P und T verschmilzt. Der verdünnte Teil d der Medialwand verschmilzt nicht mit dem Schweifkern. Der Grund der Furche τ entspricht also schliesslich genau der Grenze von d und T . Geht man noch weiter basalwärts, so zeigt sich der erste Zusammenhang zwischen dem Zwischenhirn und dem Hemisphärenhirn unmittelbar unterhalb des Grunds der Furche τ also im ehemaligen Gebiet T und nimmt zuerst in occipitobasaler Richtung rasch zu. Damit scheint nun die Lamelle d in der Bucht zwischen Nucleus caudatus und Thalamus opticus zu entspringen.

In den folgenden Schnitten findet man auch d mehr und mehr in Zusammenhang mit der Seitenwand des Zwischenhirns d.h. eben mit dem Sehhügel.

Die Insertion der Lamelle d scheint sich mehr und mehr gegen die Zwischenhirndecke zu verschieben und die Lamelle selbst sich zu verkürzen. Es ist eine der schwierigsten Fragen der Entwicklungsgeschichte des Gehirns, ob diese Verschiebung und Verkürzung der Lamelle d und ebenso auch die Verschmelzung des Schweifkerns

mit T und der lateralen Wand des Zwischenhirns als eine sekundaere Verwachsung anfänglich getrennter Teile aufzufassen ist. Nach meinen histologischen Untersuchungen bei *Tarsius* möchte ich das nicht bestimmt entscheiden. Noch weiter basalwärts gelegene Schnitte zeigen das Verschwinden der *Fissura chorioidea*. Da d inzwischen auch bereits verschwunden ist, geht S unmittelbar in das epitheliale Dach des Zwischenhirns bzw. des primären Vorderhirns über. Die muldenförmige längsverlaufende Vertiefung auf der Oberfläche des *Corpus striatum* wird etwas deutlicher. Die *Fissura hippocampi* spitzt sich zu, sodass das bekannte an eine Lanzenspitze erinnernde Querschnittsbild entsteht. Auch der Grund der medianen Mantelspalte, welchen anfangs das gefälte Dach des Zwischenhirns bildete, schärft sich jetzt spitz zu. Die *Fissura hippocampi* oder vielmehr ihre untere Lippe bezeichnet, auch nach der Loslösung der Hemisphären von einander, ziemlich scharf den Punkt, bis zu welchem die *Palliumformation* reicht. Sehr bemerkenswert ist auch, dass schliesslich S und S' sich nicht mehr genau topographisch entsprechen, vielmehr kommt S' etwas ventralwärts von S zu liegen. Unterhalb S zeigt die mediale Wand des Vorderhirns eine zweite seichte Erhebung U . U und der Schweifkern laufen sich verflachend in die mediale bzw. laterale Wand des *Ventriculus lobi olfactorii* aus. Nach dem Verschwinden der *Fissura hippocampi* bleibt die mediale Wand auf zahlreichen Schnitten erst ganz ungefurcht, dann aber stellt sich fast genau an der entsprechenden Stelle der mediale Endabschnitt der *Fissura rhinalis lateralis* als seichte Kerbe ein.

β . die Höhlung des Zwischenhirns lässt in den hinteren Abschnitten 2 Furchen erkennen, eine obere α , welche sich in die Lateralfurche des Mittelhirnventrikels (*Aquädukt*) fortsetzt und frontalwärts sehr bald ausgleicht, und eine untere λ , welche bis in die Gegend des *Foramen Monroi* zu verfolgen ist. Die letztere wird während der vordersten Strecke ihrer Verlaufs von einer Parallelfurche μ begleitet, welche noch etwas weiter basal verläuft. Weitere Wandeinbuchtungen kommen vorübergehend im Bereich der Augenstiele und im Bereich der *Corpora mamillaria* zu Stande. Leider bin ich nicht im Stande zu entscheiden, ob λ oder μ als *Sulcus Monroi* aufzufassen ist; wahrscheinlicher ist mir, dass μ diese Bezeichnung verdient.

Wesentlich vervollständigt wird das Bild durch die Betrachtung einer *Sagittalserie*, welche etwa demselben Entwicklungsstadium angehört (*Sch. St. L. 11 mm.*).

Auf einem Schnitt, welcher etwas lateralwärts von der *Medianebene* geführt ist, findet man folgendes:

Die *Fossa mesodiencephalica* ist scharf markiert. *Vor*, zum ge-

ringern Teil auch *in* ihr liegt der langhingezogene Querschnitt der Commissura posterior. Eine sehr seichte Kerbe, welche ich mit *E* bezeichne, entspricht ungefähr der Frontalebene der Epiphysis. Es steht nichts im Wege, den Dachabschnitt zwischen der Fossa mesodiencephalica und *E* mit v. KUPFFER als Synencephalon (vgl. v. KUPFFER in HERTWIGS Vergl. Entw. geschichte S. 95) zu bezeichnen. Die Fossa praediencephalica ist nicht scharf markiert. Sie dürfte an der Stelle zu suchen sein, woselbst die Einstülpung des Plexus chorioideus ventriculi tertii stattfindet. Ob diese Stelle dem Velum transversum niederer Wirbeltiere entspricht, bleibt, wie ausdrücklich betont werden soll, zweifelhaft. Das Gebiet oberhalb der Plexuseinstülpung ist das hintere Dachgebiet des primären Vorderhirns. Unterhalb der Plexuseinstülpung liegt die vordere Schlussplatte (Lamina reuniens), deren unterster Abschnitt der Lamina terminalis des erwachsenen Tieres entspricht. Vor dem Recessus praeopticus läuft auf der Basalinnenfläche ein seichter Querwulst, der sich lateralwärts in die Hauptmasse der Corpus striatum fortsetzt.

Dieser Querwulst, welcher selbst in der Medianebene noch andeutungsweise zu erkennen ist, entspricht dem Crus metarhnicum corporis striati¹⁾ des menschlichen Embryo's, wie es HIS näher beschrieben hat. Er geht also medialwärts direkt in die Lamina terminalis über. Erst in etwas weiter lateralwärts gelegenen Sagittalebene taucht vor dem Crus metarhnicum ein zweiter Querwulst auf, welcher sich in den Lobus olfactorius herabsenkt. Ich bezeichne ihn als Crus rhnicum corporis striati. Er entspricht dem Crus mesorhnicum des menschlichen Embryos. Ein Crus epirhnicum ist kaum angedeutet. Meines Erachtens wird es nur durch die Falte der Fissura rhinalis lateralis vorgetäuscht. Am äusseren Kontour verläuft entsprechend der Grenze des Crus metarhnicum und rhnicum eine seichte Mulde, welche ungefähr dem hintern Rand der Cappa olfactoria und ungefähr auch dem vordern Rand des Tuberculum olfactorium entspricht. Keinesfalls entspricht sie etwa, wie HIS dies anzunehmen scheint, ausschliesslich, während ihres ganzen Verlaufs dem Crus rhnicum s. mesorhnicum. Ich glaube, dass ihre Bildung von der Oberflächengestaltung des Corpus striatum im Wesentlichen unabhängig ist und vielmehr auf die Wandverdickung einerseits des Lobus olfactorius durch Auflagerung des Ganglion olfactorium (Cappa olfactoria) und andererseits des Tuberculum olfactorium²⁾ zurückzuführen ist. Dazu kommt eine Abknickung des Hirnrohres in basaler Richtung bei

¹⁾ HIS, Die Entwicklung des menschlichen Gehirns während der ersten Monate. Leipzig, S. HIRZEL 1904. S. 61, (vgl. auch Fig. 34, S. 56).

²⁾ Beide Grenzen treffen nur zufällig und nicht genau zusammen.

dem Uebergang von der Hemisphäre zum Riechlappen. Ferner ist zu beachten, dass sich das Ventrikellumen bei dem Uebergang von der Hemisphäre zum Riechlappen erst sehr rasch, dann aber wieder sehr langsam verjüngt¹⁾. Namentlich an der Basis ist dieses Verhalten ungemein deutlich. Offenbar muss auch hierdurch, ganz unabhängig von einer etwa durch das Corpus striatum bedingten Wandverdickung, eine basale Quermulde entstehen. Die Bezeichnung „Fissura mesorhinica“, welche His der letzteren gegeben hat, scheint mir bei dieser Sachlage nicht zweckmässig. Ich schlage vor von einer *Vallis mesorhinica* zu sprechen. Eine zweite Quermulde findet sich caudal von der *Vallis mesorhinica* hinter der Anlage des *Tuberculum olfactorium* und vor der Region des *Recessus praeopticus* (= *opticus*). Ich schlage vor sie als *Vallis praeoptica* zu bezeichnen, während His sie als eine Fortsetzung seiner Stief furche (meines *Sulcus hemisphaericus*) aufzufassen scheint²⁾. Sie kommt gleichfalls unabhängig vom *Corpus striatum* durch die Vorwölbung einerseits des *Tuberculum olfactorium*, andererseits des Chiasmagebietes zu Stande. Die dem *Tuberculum olfactorium* entsprechende Nische im Ventrikel bezeichnet His (wenigstens bei dem Menschen) als hinteres Riechhirn im Gegensatz zu dem *Lobus olfactorius s. str.*, den er als vorderes Riechhirn bezeichnet. Zum hintern Riechhirn rechnet er namentlich auch die *Substantia perforata lateralis*. Ich habe gegen die Bezeichnung „hinteres Riechhirn“ nur das Bedenken, dass sie eine Verwechselung mit dem *Lobus piriformis*, d.h. dem hinteren Abschnitt des Rhinencephalons begünstigt³⁾.

1) Die Entwicklung des menschl. Gehirns etc. Leipzig 1904, S. 54 u. S. 60.

2) Vgl. hierzu auch His, die Formentwicklung der menschl. Vorderhirns etc. Abh. d. math. phys. Cl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 15, Fig. 32, S. 725.

3) Bezüglich der Nomenclatur in diesem Gebiet bemerke ich noch Folgendes. Alle Hirnteile, welche basal von der *Fissura rhinalis* (= *ectorhinalis* = *rhinalis lateralis* vieler Autoren) liegen, bezeichne ich als Rhinencephalon. Als *Lobus olfactorius* (= *Lobus olfactorius anterior* vieler Autoren) bezeichne ich in rein topographischem Sinn den vordersten Teil des Rhinencephalons, soweit er von der unteren Fläche des *Palliums* ganz losgelöst ist. Für den hinteren Abschnitt des Rhinencephalons könnte man ev. die Bezeichnung „*Lobus piriformis*“ reservieren, noch empfehlenswerter ist es, diese ganz zu streichen. Ein Teil des *Lobus olfactorius* ist mit einer mikroskopisch scharf charakterisierten Formation, der sog. *Formatio bulbaris* bekleidet. Diesen Ueberzug bezeichne ich als *Cappa olfactoria*. Sie entspricht entwicklungsgeschichtlich dem *Ganglion olfactorium* von His. Die Abgrenzung des *Lobus olfactorius* vom *Pallium* besorgt ausschlies-

Schliesslich sei noch als selbstverständlich hervorgehoben, dass alle die eben besprochenen Abgrenzungen, Mulden und Erhebungen auf *genau* medianen Schnitten fast ganz vermisst werden.

Weiter lehren Sagittalschnitte bezüglich des Mittelhirns, dass es in diesem Stadium verhältnismässig wenig den Isthmus überlagert (weniger als z. B. bei einem 2—3 monatlichen menschlichen Embryo). Das Kleinhirn zeigt im Sagittalschnitte noch immer eine hornförmige Gestalt. Von der für den Menschen so charakteristischen occipitalwärts gerichteten Wulstung ist noch nichts zu finden.

Der älteste der mir zur Verfügung stehenden Embryonen war in eine etwas schräge Frontalserie zerlegt worden. Auch hier ist von einem Crus epirhincum corporis striati nichts zu finden. Bemerkenswert ist die starke Wandverdickung im basalen Abschnitt der medialen Ventrikelwand. Sie wird erst deutlich, nachdem¹⁾ der Seitenventrikel und der Riechlappenventrikel bereits einige Zeit verschmolzen sind. Der verdickte untere und der unverdickte obere Wandabschnitt sind auf der Ventrikelinnenfläche durch eine sehr deutliche Furche getrennt, die sich fast bis zur Frontalebene der Lamina terminalis verfolgen lässt. Mit der Abgrenzung des Riechlappens hat sie nichts zu tun, da sie wesentlich später auftritt und auch wohl etwas höher

lich die Fissura rhinalis (lateralis). Es ist also auch die auf der Medialfläche sichtbare Trennungsfurche von Lobus olfactorius und Stirnlappen zur Fissurarhinalis zu rechnen, d. h. ich nehme an, dass letztere vorn bis auf die Medialfläche durchschneidet. Die Cappa olfactoria ist durch eine Grenzfurche, den Margo cappae olfactoriae gegen die freie d. h. von der Formatio bulbaris nicht bekleidete Oberfläche des Lobus olfactorius abgesetzt. Lateral ist sie viel besser ausgeprägt als medial. Bei manchen Tieren (Igel, Echidna) bekleidet die Cappa olfactoria fast den ganzen Lobus olfactorius. Das Tuberculum olfactorium hebt sich gegen die Umgebung gleichfalls durch eine seichte Furche, den Margo tuberculi olfactorii ab. Diese Furche ist gleichfalls meistens am medialen Rand nicht so deutlich erkennbar, dagegen am lateralen und vordern Rand sehr gut ausgeprägt und daher hier oft als Fiss. rhinalis medialis s. entorhinalis bezeichnet worden. Am hinteren Rand, gegen die Subst. perforata anteriorhin, ist sie meist ziemlich seicht. Wenn die Cappa olf. weit nach hinten reicht, fällt der vordere Margo Tub. olf. mit dem Margo cappae olf. ganz oder teilweise zusammen.

1) Im Folgenden wird eine Durchmusterung der Serie von vorn nach hinten vorausgesetzt.

liegt als die *Fissura rhinalis lateralis*. Ebenso ist sie von der Ammons-furche ganz unabhängig, da sie wesentlich tiefer liegt als diese letztere. Mikroskopisch grenzt sie ziemlich scharf die *Palliumformation* basalwärts ab. Ich bezeichne sie daher als *Margo pallii medialis internus* (siehe auch unten). Auf dem Schnitt, wo der 3. Ventrikel zuerst sichtbar wird, präsentiert er sich als ein paariges Gebilde; zwischen den beiden Endspitzen des Ventrikels schneidet eine mediane Furche in das Ventrikeldach ein (vgl. oben).

Besondere Beachtung verdient der Boden des 3. Ventrikels. Seine Medianfurche schneidet sehr scharf ein. Die Seitenteile des Bodens erheben sich gewissermassen in 3 Etagen. Die lateralste Erhebung, welche zugleich die breiteste ist, geht aus dem *Crus rhinicum* des Streifenhügels hervor und bildet weiterhin die Hauptmasse dieses Ganglions. Die mittlere Erhebung entspricht dem *Crus metarhinicum* des *Corpus striatum*. Sie verschwindet mit der Trennung der Hemisphären. In der *Lamina terminalis* stösst sie mit der homologen gegenseitigen Erhebung zusammen. Von der *Commissura anterior* wird sie durchbrochen. Die medialste kleinste Erhebung wird erst vor der *Lamina terminalis* sichtbar und ist zunächst sehr flach. Dann steigt sie frontalwärts ziemlich steil an, bleibt aber schmal. Von der homologen Erhebung der Gegenseite bleibt sie durch die seichte mediane Bodenfurche getrennt. Verfolgt man die Serie weiter frontalwärts, so spalten sich schliesslich die beiden Hemisphären im Bereich der medianen Bogenfurche, und die medialste Erhebung verschmilzt vor dem *Foramen Monroi* mit dem oberen Abschnitt der medialen Wand und zwar ziemlich genau dem *Margo pallii medialis internus* entsprechend.

Aus dieser Darstellung geht wohl hervor, dass auch diese medialste Erhebung keinesfalls als *Crus epirhinicum* im Sinne von His gedeutet werden kann.

Der *Thalamus opticus* erhebt sich weiterhin zwischen der mittleren und der lateralen Erhebung. Schärfer als in den früheren Stadien ist jetzt eine Längsfurche an der Aussenfläche des Zwischenhirns (*Sulcus fastigialis thalami*) ausgeprägt, welche den zugespitzten Kamm des Sehhügels von der breiten basalen Masse dieses Ganglions trennt. Sie liegt etwas höher als die oben erwähnte Furche α , welche übrigens jetzt viel weniger deutlich ist. λ und μ sind nicht mehr deutlich geschieden. Statt ihrer findet sich eine breitere Furche, welche zweifelsohne als *Sulcus Monroi* zu bezeichnen ist.

Das Hinterhirn bietet keine Besonderheiten.

Ueberblickt man die Gesamtheit der im vorausgehenden zusammengestellten Eigentümlichkeiten der Entwicklung des Tarsiusgehirns,

so ist eine weitgehende Uebereinstimmung mit der Entwicklung des Primatengehirns unverkennbar. Die wesentlichen Unterschiede erklären sich in ausreichender Weise durch den ziemlich ausgesprochenen makrosmatistischen Charakter des Tarsiusgehirns. Sehr viel schwieriger ist es in absteigender Reihe die Verwandtschaftsverhältnisse bezüglich der Hirnentwicklung für Tarsius festzustellen. Carnivoren und Ungulaten kommen keinesfalls in Frage. Die Entwicklung des Chiropteregehirns ist leider noch zu wenig bekannt, einzelne Uebereinstimmungen sind zweifellos. Sehr erheblich sind auch die Uebereinstimmungen mit der Entwicklung des Nagetiergehirns; man muss nur nicht, wie dies oft geschieht, das Kaninchengehirn als den typischen Repraesentanten des Nagetiergehirns betrachten. Da das Nagetiergehirn in seiner Entwicklung seinerseits wieder dem Insectivoregehirn nicht fernsteht, so wird es begreiflich, dass das Tarsiusgehirn auch zu diesem letzteren entwicklungsgeschichtlich unverkennbare Beziehungen zeigt.

Physiologie. — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. L. J. J. MUSKENS. „*Over degeneraties in het centrale zenuwstelsel na wegneming van den flocculus cerebelli*”.

(Mede aangeboden door den Heer PLACE).

In 6 konijnen werd de flocculus aan den rechterkant geëxstirpeerd, welk orgaan, gelijk men weet, bij deze dieren in een afzonderlijke beenige holte ligt opgesloten, waardoor dus in dit geval de mogelijkheid gegeven is, een kleinhersendeel te verwijderen, zonder ook maar in het geringst nabij gelegen nerveuse organen in hunne voedings- of drukkings-conditiën te storen. Deze dieren werden na 8 dagen tot 5 weken gedood, en zooveel mogelijk volledige [seriën, naar Marchi gekleurd, werden vervaardigd.

De door de bedoelde laesie veroorzaakte vezeldegeneratie was in $\frac{4}{6}$ van de 6 gevallen uitsluitend gericht naar boven, dat is naar het crus-cerebelli ad corpora quadrigemina en naar de pons.

In één geval was een fijne spikkeling merkbaar over het geheele corpus restiforme; het kon echter in dit geval niet met zekerheid worden uitgemaakt, of men met werkelijke afdalende degeneratie te doen had, daar eerstens door het geheele merg heen een min of meer fijne spikkeling aanwezig was, terwijl anderzijds de zwart gekleurde vetdropjes van zoo ongewoon kleinen omvang waren, dat ook op grond daarvan twijfel moest opkomen omtrent de echtheid

van zulk eene fijne degeneratie. Bij dit dier echter was de kleuring slecht geslaagd, onregelmatig en niet op ontaarde zenuwvezelen beperkt, om een onbekende reden, weshalve wij aan 'dit eene geval, waarin een bundel naar beneden ontaard was, niet al te veel gewicht meenden te moeten toeschrijven.

In een ander goed gekleurd geval werden in het corpus restiforme, diffuus verspreid, tal van ontaarde vezelen aangetroffen aan de geopereerde zijde, alsook in den fasciculus longitudinalis posterior en in het doorsnedeveld van den tecto-spinalen bundel, eveneens aan de geopereerde zijde. In het bovenste halsmerg wordt bovendien een driehoekig met de basis tegen den mergrand, met de achterzijde tegen het corpus restiforme gelegen veldje vol ontaarde vezelen gevonden. Verder dan de bovenste halssegmenten reiken deze naar beneden ontaarde vezelen niet. In dit geval is behalve de flocculus en den flocculussteel echter ook de vestibularis kern en zenuw gelaedeerd, zoodat aan dit experiment niet de waarde van een zuivere proef kan worden toegekend.

Hoewel op grond van deze waarnemingen alsnog niet mag geeneraliseerd worden voor andere kleinhersendeelen, zoo springt het belang van het ontbreken van afdalende degeneratie na een scherp gelocaliseerde laesie der kleine hersenen in het oog. De strijd toch in de literatuur van MARCHI, FERRIER en TURNER, THOMAS, BIEDL, RISEN RUSSELL betref n.l. de vraag, hoeveel der gevonden degeneraties aan nevenlaesies moest worden toegeschreven, daar gelijk THOMAS terecht opmerkt, juist voor deze streek hersenruggemergas kenmerkend is, dat ook zonder dat bepaalde gangliëncellen of kernen door het laedeerende instrument zijn aangeraakt, toch door bloeditstorting of drukwijziging, uitgebreide degeneraties kunnen veroorzaakt worden. Waar nu in deze experimenten met zekerheid niet zulk eene nevenlaesie kan hebben plaats gegrepen, en in de volkomen geslaagde gevallen het ruggemerg vrij van degeneratie gevonden werd, mag voor den cortex van den flocculus van het konijn met stelligheid geconcludeerd worden, dat in deze deelen uit gangliëncellen ontspringende ascylinders met centrifugaal verloop naar de medulla niet worden aangetroffen, zoodat voor deze deelen althans de oorspronkelijke onderzoekingen van MARCHI niet bevestigd worden. Evenals van de uitvoerige onderzoekingen van PROBST kan dus ook het resultaat van deze waarnemingen in overeenstemming geacht worden met de Engelsche onderzoekers, volgens welke alleen na laesie van de kern van DEITERS afdalende degeneratie van de voor- en zijstreng wordt aangetroffen. Bij de beoordeeling van dit resultaat mag echter wel in het bijzonder de aandacht er op gevestigd worden, dat nog

in een ander opzicht dan door zijn eigen beenige holte voor de flocculus, wat dit orgaan betreft het konijn een afwijkende vorm is.

De konijnen-flocculus bevat namelijk behalve haar aandeel in de cerebellaire corticale grijze stof en hare af- en efferente banen, ook een kern, en wel van groote multipolaire gangliëncellen, zooals die van de nucleus dentatus. De studie van de ontwikkeling van verwante dieren (eekhoorn) laten niet den minsten twijfel, dat inderdaad een stuk van de nucleus dentatus in den flocculus zijne plaats vindt, terwijl, naar het schijnt, niet steeds deze kern met den hoofdkern samenhangt.

Wel verre van nu een onwelkome complicatie te zijn voor het onderzoek naar de vraag, of er afdalende cerebellaire banen bestaan, mag deze omstandigheid voor ons doel van nut geacht worden, in zooverre als zij ons in staat stelt tevens uit te sluiten, dat zulke in het ruggemerg efferente vezelen (van dat deel althans) van den nucleus dentatus uitgaan.

Wat betreft de opstijgende ontaarding, zoo heerscht, in de verschillende geopereerde dieren de meest volkomen overeenstemming; er zijn met name 2 bundels, die in alle goed goedgeslaagde gevallen zeer duidelijk en op zeer constante plaats in den hersenstam gedege- nereerd gevonden werden en beide in dezelfde streek van den hersenstam hun einde vinden, n.l. in de regio subthalamica. In de eerste plaats het crus superior ad corpora quadrigemina, als zijnde de meest volumineuse bundel, tevens samengesteld uit vezelen van het zwaarste kaliber. De in dit hersendeel verloopende vezelen zijn kennelijk van zeer grove structuur, vergeleken met de meestal fijne degeneraties elders in het konijn waar te nemen. De ontaarding betreft met name het middelste 3e gedeelte van den bindarm, terwijl de mediale en laterale nagenoeg geheel vrij van gedegeneerde vezelen zijn. Met het vaststellen van dit flocculus-deel van den bovensten klein-hersensteel wordt dus de weg geopend tot een verdere differentiatie van de dit hersendeel samenstellende zenuw- bundels. Gearriveerd ter hoogte van het achterste corpus qua- drigeminum buigen de bewuste vezelen met een vrij rechten hoek boogvormig naar beneden en naar binnen om, de bekende bindarm- kruising vormend, zooals die door de auteurs wordt afgebeeld. Slechts weinige doorsneden scheiden het begin en de voleindiging van deze overkruising in de preparaten-serie. In de substantia reticularis is de richting weer zuiver overlans gericht aan de lengteas van den hersenstam, terwijl bij het optreden van de roode kern in het oog valt, dat met name het onderste deel van de roode kern met de gekruiste klein-hersensteel in verband staat. Dit gekruiste verband is, wat de flocculus betreft, volledig, waarbij er aan mag herinnerd worden, dat PROBST bewees, dat na exstirpatie van meer

dorsaal gelegen kleinhersendeelen van de kat ook vezelen ongekruiſt naar de regio subthalamica verloopen.

Behalve deze belangrijkste der naar boven gedegenereerde bundels is een tweede tot nu slechts door PROBST als zoodanig beschreven bundel te onderscheiden, welke in het algemeen uit fijnere vezels samengesteld dan de genoemde bundel, in de substantia reticularis van de gekruiste zijde zijn verloop heeft, en in de roode kern zich met den eerstgenoemden bundel vereenigt. Beiden te zamen begeven zich dan frontaalwaarts, om te eindigen aan de ventrale zijde van den nucleus ventralis thalami. Met zekerheid kan worden bewezen uit de doorsneden, dat, van de in den flocculus ontspringende vezelen althans, geene aan dezelfde zijde blijven, doch wel degelijk alle een gekruist verloop hebben. Ook THOMAS heeft deze degeneratie afgebeeld, doch meent, dat wij hier te doen hebben met afdalende collateralen van den frontalen kleinherſenſteel, welke zich van de hoofdstreng afsplitsen na de kruising. PROBST daarentegen meent, dat deze vezelen direct van den nucleus dentatus door de streek der vestibulariskernen zich naar de gekruiste substantia reticularis begeven en, daarin opstijgende naar frontaalwaarts in hetzelfde doorsnedevelde te vinden zijn tot hunne vereeniging met den gekruisten frontalen kleinherſenſteel.

De eigen preparaten nu doen het stellig vermoeden rijzen, dat deze centrifugaal (van het cerebellum, of liever van den nucleus dentatus vooral) gerichte vezelen, hun verloop nemen door de oppervlakkige lagen van den middelste kleinherſenſteel en dan tusschen de pyramidenbundels heen, vervolgd kunnen worden naar de substantia reticularis.

In verschillende seriën valt in het oog, dat, waar van onder naar boven voortschrijdende de eerste ontaarde vezelen in de brugarm gevonden worden, ook voor het eerst deze bundel van PROBST wordt aangetroffen. Terwijl voor de opvatting van THOMAS door dien werker geen deugdelijke gronden worden bijeengebracht, pleit tegen de opvatting van PROBST, dat stellig in de streek der vestibulariskernen geen ontaarde vezels gevonden worden.

Ten slotte leeren de seriën, dat de ventrale thalamusbundel vooral uit het ventrale deel van het cerebellum zijnen oorsprong neemt, voornamelijk uit den flocculus. In preparaten van katten viel het in het oog, na laesies van meer dorsale kleinherſendeelen, dat er een sterke tegenstelling bestond tusschen de zeer uitgesproken ondergang van het crus cerebelli ad corpora quadrigemina en de zeer geringe degeneratie van den ventralen thalamusbundel; terwijl zoowel bij kat als konijn na uitsluitenden flocculus-laesie beide bundels ongeveer gelijk zijn aangedaan.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt eene mededeeling aan van den Heer W. A. VERSLUYS: „*Over de betrekking tusschen den kromtestraal eener ruimtekromme in een punt P der kromme en den kromtestraal in P van de doorsnede van haar ontwikkelbaar regelvlak met haar osculatievlak in punt P .*”

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

§ 1. **STELLING.** *Voor iedere ruimte kubiek C^3 is de verhouding constant van de kromtestraal, in een willekeurig punt P , tot den kromtestraal van de vlakke doorsnede van het osculatievlak in dat punt P met het bij C^3 behoorende ontwikkelbaar regelvlak O_4 .*

BEWIJS. Als men het punt P neemt tot coördinatenoorsprong en tot coördinaatassen de raaklijn, hoofdnormaal en binormaal der kromme C^3 in het punt P , dan is C^3 de keerkromme van het oppervlak O_4 dat omhuld wordt door het vlak

$$A t^3 - 3 B t^2 + 3 C t - D = 0,$$

waarin

$$\begin{aligned} D &= z, \\ C &= c_2 y, \\ B &= b_1 x + b_2 y + b_3 z, \\ A &= a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4. \end{aligned}$$

De coördinaten van de punten der kromme C^3 voldoen dus aan de voorwaarden:

$$t C = z, \quad t^2 B = z, \quad t^3 A = z,$$

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} z &= \frac{a_4 b_1 c_2 t^3}{b_1 c_2 - a_1 c_1 t + (a_1 b_2 - a_2 b_1) t_2 - a_3 b_1 c_2 t_3} = \frac{a_4 b_1 c_2 t^3}{N}, \\ y &= \frac{a_4 b_1 t^2}{N}, \quad x = \frac{a_4 t (c_2 - b_2 t - b_3 c_2 t^2)}{N}. \end{aligned}$$

Nu is de kromtestraal R_0 van de ruimtekromme C^3 in het punt P , dezelfde als de kromtestraal van haar orthogonale projectie op haar osculatievlak in P , daar de kromme met haar projectie in P drie opeenvolgende punten gemeen heeft. De parameter uitdrukkingen voor de coördinaten dezer projectie zijn:

$$y = \frac{a_4 b_1 t^2}{N} \quad \text{en} \quad x = \frac{a_4 t (c_2 - b_2 t - b_3 c_2 t^2)}{N}$$

Uit de waarde van y blijkt, dat $\frac{dy}{dt} = 0$ voor $t = 0$; de algemeene formule voor den kromtestraal eener vlakke kromme:

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx d^2y - dy d^2x}$$

kan dus hier vervangen worden door de meer eenvoudige uitdrukking:

$$R_0 = \frac{dx^2}{d^2y_{t=0}} = \frac{\left\{ \frac{b_1 c_2 \times a_4 c_2}{(b_1 c_2)^2} \right\}^2}{\frac{2 a_4 b_1}{b_1 c_2}} = \frac{a_4 c_2}{2 b_1^2}.$$

De vergelijking van het door het vlak

$$A t^3 - 3 B t^2 + 3 C t - D = 0$$

omhulde oppervlak O_4 is:

$$A^3 D^2 - 6 A B C D + 4 A C^3 + 4 B^3 D - 3 B^2 C^2 = 0.$$

De snijkromme met het osculatievlak $D = z = 0$ is:

$$C^2 (4 A C - 3 B^2) = 0.$$

De vergelijking van de in het osculatievlak gelegen kegelsnede d_2 is dus:

$$4 (a_1 x + a_2 y + a_4) c_2 y - 3 (b_1 x + b_2 y)^2 = 0.$$

De parabool, die deze kegelsnede d_2 in den oorsprong osculeert, heeft tot vergelijking:

$$4 a_4 c_2 y - 3 b_1^2 x^2 = 0.$$

Deze parabool heeft in den oorsprong denzelfden kromtestraal r_0 als de kegelsnede d_2 . De kromtestraal in den top der parabool is de parameter. De kromtestraal r_0 van de kegelsnede d_2 in den oorsprong is dus $\frac{2 a_4 c_2}{3 b_1^2}$.

Uit de waarden

$$R_0 = \frac{a_4 c_2}{2 b_1^2} \quad \text{en} \quad r_0 = \frac{2 a_4 c_2}{3 b_1^2}$$

volgt nu:

$$R_0 : r_0 = 3 : 4. \quad Q. E. D.$$

§ 2. De stelling laat zich gemakkelijk uitbreiden tot een algemeene ruimtekromme C .

Zij P een gewoon punt van C , terwijl in P ook de raaklijn en het osculatievlak geen bijzonderheden vertoonen. Door het punt P en vijf op P volgende punten van C kan men nu steeds een ruimtekubiek C^3 brengen. De kromtestraal R_0 in het punt P is dezelfde voor de krommen C en C^3 , daar deze zes opeenvolgende punten gemeen hebben. De osculatievlakken der krommen C en C^3 in

het punt P , zullen eveneens samenvallen. Dit gemeenschappelijk osculatievlak O snijdt de bij de krommen C en C^3 behorende ontwikkelbare regelvlakken volgens de tweemaal tellende raaklijn in P en nog volgens twee vlakkekrommen d en d_2 . Als de krommen C en C^3 in P slechts een driepuntig contact hadden, zouden de krommen d en d_2 in het gemeenschappelijk punt P een gemeenschappelijke raaklijn hebben, zoodat de krommen d en d_2 in P minstens twee opeenvolgende punten gemeen zouden hebben. Hadden de krommen C en C^3 in P een vijfpuntig contact, dan zou eene, niet in het gemeenschappelijk osculatievlak O gelegene, gemeenschappelijke beschrijvende van de beide ontwikkelbare oppervlakken, het osculatievlak O ontmoeten in een derde gemeenschappelijk punt der krommen d en d_2 . Nu de beide krommen C en C^3 in P een zespuntig contact hebben, zullen de krommen d en d_2 dus minstens vier opeenvolgende punten gemeen hebben. Deze beide doorsneden d en d_2 hebben dus in P denzelfden kromtestraal r_0 . Bij gevolg zal in het gewone punt P der ruimtekromme C ook de betrekking bestaan :

$$R_0 : r_0 = 3 : 4.$$

§ 3. Als twee willekeurige ruimtekrommen in een punt P een driepuntig contact hebben, hebben zij in dat punt ook denzelfden kromtestraal R . Als het gemeenschappelijk osculatievlak O in P der beide krommen nu de beide bijbehorende ontwikkelbare regelvlakken snijdt volgens de krommen d en d' , dan zijn de kromtstralen in P van deze doorsneden d en d' beide $\frac{4}{3} R$ en dus onderling gelijk. De krommen d en d' hebben dus in P ook een driepuntig contact. Dit geeft de stelling :

Als twee ruimtekrommen in P drie opeenvolgende punten gemeen hebben is dit ook het geval met de beide vlakkekrommen, die deel uitmaken van de doorsnijdingen van het gemeenschappelijk osculatievlak met de bij de ruimtekrommen behorende ontwikkelbare regelvlakken.

Daar de kromtestraal van de doorsnede d in het punt P het drievierde is van den kromtestraal der keerkromme C in dit zelfde punt, zoo hebben de krommen d en C in P slechts twee punten gemeen. Uit de hier bewezen stelling volgt dus ook weer de door mij vroeger meegedeelde stelling over de ligging der drie punten, die een ruimtekromme met haar osculatievlak gemeen heeft (zie: Versl. K. A. v. W. te Amsterdam, 27 Februari 1904).

§ 4. Door ontwikkeling der coördinaten eener willekeurige alge-

braïsche of transcendente ruimtekromme in de nabijheid van P in convergente machtreeksen van een parameter t , kan de stelling van § 2 ook direct voor zulk eene ruimtekromme voor ieder gewoon punt bewezen worden zonder gebruik te maken van de ruimte kubiek.

Zij P zulk een punt der kromme C ; als de raaklijn, de hoofdnormaal en de binormaal in P respectievelijk genomen worden tot X -as, Y -as en Z -as, dan worden de coördinaten van de ruimtekromme C ,

$$\begin{aligned}x &= a_1 t + a_2 t^2 + \dots , \\y &= b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots , \\z &= c_3 t^3 + c_4 t^4 + \dots .\end{aligned}$$

Het punt P komt nu overeen met de waarde nul van den parameter t . Als P een gewoon punt is dan kunnen de coëfficiënten a_1 , b_2 en c_3 niet nul zijn. Zij R_0 de kromtestraal van C in het punt P , dus de waarde, die de kromtestraal R verkrijgt voor $t = 0$. De kromtestraal in P van de projectie van C op het osculatievlak $z = 0$ is ook R_0 , daar deze projectie in P met C drie opeenvolgende punten gemeen heeft.

De coördinaten der punten dezer projectie zijn:

$$\begin{aligned}x &= a_1 t + a_2 t^2 + \dots , \\y &= b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots .\end{aligned}$$

Daar $\frac{dy}{dt} = 0$ voor $t = 0$, zoo gaat de algemeene formule voor den kromtestraal

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{dx d^2y - dy d^2x} ,$$

over in de meer eenvoudige

$$R_0 = \frac{dx^2}{d^2y_{t=0}} .$$

Men vindt gemakkelijk:

$$R_0 = \frac{a_1^2}{2b_1} .$$

De coördinaten ξ , η en ζ van een willekeurig punt Q op het bij C behoorende ontwikkelbare regelvlak kunnen uitgedrukt worden in de parameters t en r , waar r voorstelt de afstand van het punt Q (ξ , η , ζ) tot het punt (x, y, z) der keerkromme C , gemeten langs de door Q gaande raaklijn van C . De coördinaten van Q zijn nl.:

$$\xi = x + r \frac{dt}{ds} \frac{dx}{dt} ,$$

$$\eta = y + r \frac{dt}{ds} \frac{dy}{dt},$$

$$\xi = z + r \frac{dt}{ds} \frac{dz}{dt}.$$

Voor de punten Q , gelegen in het osculatievlak $\xi = 0$ moet er tusschen de parameters r en t bestaan de betrekking

$$0 = z + r \frac{dt}{ds} \frac{dz}{dt}.$$

Door eliminatie van r uit deze betrekking en de vergelijkingen voor ξ en η , vindt men uitgedrukt in de parameter t de coördinaten van de punten Q , die gelegen zijn in het vlak $\xi = 0$. Deze coördinaten der punten van de snijkromme d zijn:

$$\xi = x - z \frac{dx}{dt} : \frac{dz}{dt},$$

$$\eta = y - z \frac{dy}{dt} : \frac{dz}{dt},$$

of

$$\xi = a_1 t + a_2 t^2 + \dots - \frac{(c_3 t^3 + c_4 t^4 + \dots)(a_1 + 2a_2 t + \dots)}{3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + \dots} = \frac{2}{3} a_1 t + \dots,$$

$$\eta = b_2 t^2 + b_3 t^3 + \dots - \frac{(c_3 t^3 + c_4 t^4 + \dots)(2b_2 t + 3b_3 t^2 + \dots)}{3c_3 t^2 + 4c_4 t^3 + \dots} = \frac{1}{3} b_2 t^2 + \dots.$$

Daar ook hier $\frac{d\eta}{dt} = 0$ voor $t = 0$, zoo vindt men, als boven, dat de kromtestraal r_0 in het punt P der snijkromme d gevonden wordt uit

$$r_0 = \frac{d\xi^2}{d^2\eta}.$$

Deze formule geeft voor r_0 de waarde:

$$r_0 = \frac{\frac{4}{9} a_1^2}{\frac{2}{3} b_2} = \frac{2 a_1^2}{3 b_2}.$$

Uit de gevonden waarden $R_0 = \frac{a_1^2}{2 b_2}$ en $r_0 = \frac{2 a_1^2}{3 b_2}$ volgt

$$R_0 : r_0 = 3 : 4.$$

Delft, 21 Sept. 1904.

Wiskunde. — De Heer KLUYVER biedt eene mededeeling aan over :
 „Berekening van twee bepaalde integralen.”

Als men x bestaanbaar onderstelt, hebben de integralen

$$f(x, m) = \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{(1+t^2)^m} dt \quad \text{en} \quad \varphi(x, m) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{(1+t^2)^m} dt$$

eene bepaalde beteekenis, mits slechts het bestaanbare deel van den parameter m positief is. In het volgende zullen wij aantoonen, hoe deze integralen in snel convergeerende machtreeksen ontwikkeld kunnen worden.

De eerste van hen, de integraal $f(x, m)$ is eene bijzondere oplossing van de lineaire vergelijking

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} - 2(m-1) \frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

wier algemeene oplossing, twee willekeurige constanten A en B bevattende, geschreven kan worden in de gedaante

$$y = A L(x, m) + Bx^{2m-1} M(x, m),$$

waarbij

$$L(x, m) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2h}}{h! \Gamma(-m + \frac{3}{2} + h)},$$

$$M(x, m) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2h}}{h! \Gamma(m + \frac{1}{2} + h)},$$

en de constanten A en B moeten nu zoo worden bepaald, dat y de functie $f(x, m)$ voorstelt. Om A te vinden, onderstellen wij $m > \frac{1}{2}$ en stellen x gelijk nul. In dit geval hebben wij

$$f(0, m) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(m - \frac{1}{2})}{2 \Gamma(m)} = A L(0, m) = \frac{A}{\Gamma(-m + \frac{3}{2})}$$

en dus

$$A = - \frac{\pi}{2 \cos \pi m} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m)}.$$

Voor de afleiding van de constante B is het gewenscht om de functie $f(x, m)$ eerst in eene andere gedaante te beschouwen. Laat nog altijd het bestaanbare deel van m positief zijn, dan is

$$\frac{\Gamma(m)}{(1+t^2)^m} = \int_0^\infty e^{-u(1+t^2)} u^{m-1} du$$

en derhalve

$$\Gamma(m) f(x, m) = \int_0^\infty e^{-u} u^{m-1} du \int_0^\infty e^{-ut^2} \cos xt dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-u - \frac{x^2}{4u}} u^{m-\frac{3}{2}} du.$$

Uit de laatste integraal is eene eenvoudige functionale betrekking af te leiden. Als men de veranderlijke u verandert in $\frac{x^2}{4v}$, kan er geschreven worden

$$\begin{aligned} \Gamma(m) f(x, m) &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} \int_0^\infty e^{-v - \frac{x^2}{4v}} v^{-m-\frac{1}{2}} dv = \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} \Gamma(1-m) f(x, 1-m) \end{aligned}$$

en hieruit volgt, dat de functie

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(m) f(x, m)}{\left(\frac{x}{2}\right)^m} &= -\frac{\pi}{2 \cos \pi m} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)^{-m} L(x, m) + \\ &+ 2^{2m-1} B \Gamma(m) \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} M(x, m) \end{aligned}$$

onveranderd blijft, als m vervangen wordt door $1-m$.

Nu zijn blijkbaar de reeksen L en M verbonden door de betrekking

$$L(x, 1-m) = M(x, m),$$

en daarom heeft men

$$\begin{aligned} 2^{2m-1} B \Gamma(m) &= + \frac{\pi}{2 \cos \pi m} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ B &= \frac{\pi}{2 \cos \pi m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m)} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1} \end{aligned}$$

en dientengevolge

$$f(x, m) = \int_0^\infty \frac{\cos xt}{(1+t^2)^m} dt = \frac{\pi}{2 \cos \pi m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m)} \left\{ -L(x, m) + \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} M(x, m) \right\}.$$

Men zal nu opmerken, dat de reeksen $L(x, m)$ en $M(x, m)$ convergeeren voor alle waarden van x en van m , en zoo moet men dus besluiten, dat de functie $f(x, m)$ bestaat in het geheele x -vlak, dat

hare eenige singulariteiten zijn $x = 0$ en $x = \infty$, en dat daarom de integraal, met welke wij aanvingen, de functie op zeer onvolledige wijze voorstelt.

Numerieke berekening van de integraal voor niet te groote waarden van x levert geen moeilijkheden, daar de reeksen $L(x, m)$ en $M(x, m)$ snel convergeeren. Van wege de vergelijking

$$\Gamma(m) f(x, m) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u - \frac{x^2}{4u}} u^{m - \frac{3}{2}} du$$

zal de uitkomst altijd zijn een positief getal, en de integraal kan niet nul worden voor eenige bestaansbare waarde van x .

Eenige verdere opmerkingen kunnen worden gemaakt. Ten eerste kunnen wij opmerken, dat $f'(x, m)$ nauw verwant is met de functie van BESSEL $J_n(x)$. Inderdaad kan door middel van de gebruikelijke ontwikkeling van $J_n(x)$ worden aangetoond de betrekking

$$f(x, m) = -\frac{\pi}{2 \cos \pi m} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m - \frac{1}{2}} \left\{ e^{-\frac{\pi i}{2}(m - \frac{1}{2})} J_{-m + \frac{1}{2}} \left(x e^{-\frac{\pi i}{2}}\right) - e^{+\frac{\pi i}{2}(m - \frac{1}{2})} J_{m - \frac{1}{2}} \left(x e^{-\frac{\pi i}{2}}\right) \right\}.$$

Hieruit valt op te maken, dat voor positieve geheele waarden van m de oorsprong $x = 0$ niet langer een singulier punt is, en dat voor $f(x, m)$ eene eindige uitdrukking bestaat. Door de eindige uitdrukking

voor $J_{-m + \frac{1}{2}} \left(x e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)$ en $J_{m - \frac{1}{2}} \left(x e^{-\frac{\pi i}{2}}\right)$ werkelijk te substitueeren, zal men vinden

$$f(x, m) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-x}}{(m-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m-1} \sum_{h=0}^{h=m-1} \frac{(m-1+h)!}{h!(m-1-h)!} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^h.$$

Deze uitkomst kan echter als volgt op eenvoudiger wijze worden afgeleid.

Er kan aangetoond worden, dat $f(x, m)$ voldoet aan de betrekking

$$D_{z=1}^h \left\{ a^{-m + \frac{1}{2}} f(x \sqrt{a}, m) \right\} = \frac{(-1)^h \Gamma(m+h)}{\Gamma(m)} f(x, m+h),$$

en daar men nu heeft

$$f(x \sqrt{a}, 1) = \int \frac{\cos at \sqrt{a}}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-x \sqrt{a}},$$

verkrijgt men voor alle positieve geheele waarden van m

$$f'(x, m) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} D_{z=1}^{m-1} \left\{ \frac{e^{-x} \sqrt{z}}{\sqrt{\alpha}} \right\},$$

een uitkomst waarvan de gelijkwaardigheid met de vorige bewezen kan worden.

De singulariteit in den oorsprong $x = 0$ wordt logarithmisch, als $2m$ een oneven geheel $2k + 1$ is. De uitdrukking voor $f'(a, m)$ is in dit geval eenigszins ingewikkeld. Door herhaalde differentiaties wordt zij gevonden uit $f'\left(x, \frac{1}{2}\right)$, want men heeft

$$D_{z=1}^k f'\left(x \sqrt{\alpha}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^k \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} f'\left(x, k + \frac{1}{2}\right).$$

Om $f'\left(x, \frac{1}{2}\right)$ te vinden, stellen wij $m = \frac{1}{2} + \sigma$ in de algemeene uitdrukking voor $f'(x, m)$, en laten σ tot 0 naderen. Op deze wijze verkrijgt men

$$f'\left(x, \frac{1}{2}\right) = \lim_{\sigma=0} \frac{\pi}{2 \sin \pi \sigma} \left\{ \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2h}}{h! \Gamma(h+1-\sigma)} - \left(\frac{x}{2}\right)^{2\sigma} \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2h}}{h! \Gamma(h+1+\sigma)} \right\},$$

$$f'\left(x, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{\sqrt{1+t^2}} dt = \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2h}}{(h!)^2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{h} - C - \log \frac{x}{2} \right).$$

Wij gaan nu over tot de tweede integraal

$$\varphi(x, m) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{(1+t^2)^m} dt$$

en het zal blijken, dat het karakter dezer integraal volkomen gelijk is op dat van de eerste.

Weder vervormen wij de integraal met behulp der identiteit

$$\frac{\Gamma(m)}{(1+t^2)^m} = \int_0^{\infty} e^{-u(1+t^2)} u^{m-1} du$$

en verkrijgen

$$\Gamma(m) \varphi(x, m) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{m-1} du \int_0^{\infty} e^{-ut^2} \sin xt dt.$$

De voortgezette vervorming geeft

$$\int_0^{\infty} e^{-ut^2} \sin xt \, dt = \frac{x}{2u} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{4u}(1-t^2)} \, dt = \frac{x}{4u} \int_0^1 e^{-\frac{x^2 w}{4u}} (1-w)^{-\frac{1}{2}} \, dw.$$

en derhalve

$$\Gamma(m) \varphi(x, m) = \frac{x}{4} \int_0^1 (1-w)^{-\frac{1}{2}} \, dw \int_0^{\infty} e^{-u-\frac{x^2 w}{4u}} u^{m-2} \, du.$$

Deze vergelijking in verband brengende met de eerder gevonden gelijkheid

$$\Gamma(m) f(x, m) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-u-\frac{x^2}{4u}} u^{m-\frac{3}{2}} \, du,$$

volgt er, dat men kan schrijven

$$\Gamma(m) \varphi(x, m) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-w)^{-\frac{1}{2}} \, dw \Gamma(m - \frac{1}{2}) f\left(x\sqrt{w}, m - \frac{1}{2}\right)^1).$$

Wij ontwikkelen nu $\Gamma(m - \frac{1}{2}) f\left(x\sqrt{w}, m - \frac{1}{2}\right)$ en substitueeren

$$\Gamma(m - \frac{1}{2}) f\left(x\sqrt{w}, m - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin \pi m} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}) \left\{ -L\left(x\sqrt{w}, m - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-2} M\left(x\sqrt{w}, m - \frac{1}{2}\right) \right\}.$$

Als men daarna integreert ten opzichte van w , wordt de gevraagde ontwikkeling van $\varphi(x, m)$ verkregen in den vorm

$$\varphi(x, m) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{(1+t^2)^m} \, dt = \frac{\pi}{2\sin \pi m} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m)} \left\{ -N(x, m) + \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-1} M(x, m) \right\}$$

waar $N(x, m)$ voorstelt de nieuwe reeks

$$N(x, m) = \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2h+1}}{\Gamma(h + \frac{3}{2}) \Gamma(-m + 2 + h)}.$$

¹⁾ Het is mogelijk deze betrekking om te keeren. Men kan bewijzen, dat ook geldt

$$\begin{aligned} \Gamma(m) f(x, m) - \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Gamma(m - \frac{1}{2}) &= \\ &= -\frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-w)^{-\frac{1}{2}} \, dw \Gamma(m - \frac{1}{2}) \varphi\left(x\sqrt{w}, m - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Dezelfde opmerkingen als die, welke aangaande de eerste integraal werden gemaakt, kunnen hier weder gemaakt worden. De integraal $\varphi(x, m)$ heeft alleen beteekenis voor bestaansbare waarden van x en voor positieve waarden van m , maar uit de ontwikkeling blijkt, dat die integraal op onvolledige wijze voorstelt eene functie van x , die in het geheele x -vlak bestaat, geheel onafhankelijk van de waarden, die aan den parameter m worden toegekend. Wederom zijn $x = 0$ en $x = \infty$ de eenige singulariteiten van de functie. Die singulariteiten zijn logaritmisch, als m geheel is, en de oorsprong wordt een gewoon punt, als $2m$ gelijk is aan een oneven geheel $2k + 1$, maar in geen geval is eene eindige uitdrukking met behulp van elementaire functies te verkrijgen.

Evengoed als $f(x, m)$ voldoet $\varphi(x, m)$ aan de betrekking

$$D_{z=1}^h \left\{ \alpha^{-m+\frac{1}{2}} \varphi(x \sqrt{\alpha}, m) \right\} = \frac{(-1)^h \Gamma(m+h)}{\Gamma(m)} \varphi(x, m+h),$$

en met behulp van dezen regel worden ontwikkelingen voor $\varphi(x, k)$ en $\varphi\left(x, k + \frac{1}{2}\right)$ afgeleid uit de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \varphi(x, 1) &= \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{1+t^2} dt = \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2h+1} - C - \log x \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ e^{-x} \operatorname{Li}(e^+x) - e^+x \operatorname{Li}(e^{-x}) \right\}, \end{aligned}$$

en

$$\varphi\left(x, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{\sin xt}{\sqrt{1+t^2}} dt = \frac{\pi}{2} \sum_{h=0}^{h=\infty} \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^h}{\Gamma\left(\frac{h}{2} + 1\right)^2}.$$

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan „Over de congruentie der kegelsneden, welke op de kubische oppervlakken van een bundel liggen.”

1. Op elk kubisch oppervlak O^3 van een bundel liggen 27 stelsels van kegelsneden; de exemplaren van elk stelsel hebben een der 27 rechten tot gemeenschappelijke koorde. Door een willekeurig punt P der ruimte gaat één O^3 van den bundel; dus draagt P 27 kegelsneden C^2 van de congruentie, welke door de C^2 van alle O^3 wordt gevormd.

De lijnenparen der congruentie vormen blijkbaar het regelvlak

der trisecanten van de basiskromme R^9 ; immers de snijpunten van een rechte van een der O^3 met een tweede O^3 behooren tot alle O^3 van den bundel. Onafhankelijk van deze beschouwing kunnen we den graad van het bedoelde regelvlak op de volgende wijs vinden.

Zij u_k een homogene functie van den k^{en} graad in x, y, z . Neemt men den oorsprong van het coördinatenstelsel in een punt van R^9 , dan heeft de bundel tot vergelijking

$$u_3 + u_2 + u_1 = 0,$$

waar dan de coëfficiënten een parameter λ in den eersten graad bevatten.

Zal een door O getrokken rechte op een O^3 liggen, dan moet voor alle waarden van m voldaan worden aan de vergelijking

$$m^3 u_3 + m^2 u_2 + m u_1 = 0,$$

dus gelijktijdig aan

$$u_3 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_1 = 0.$$

Door eliminatie van x, y, z uit deze drie vergelijkingen vindt men een betrekking, welke de coëfficiënten, dus ook λ , in den graad $3 \times 2 + 3 \times 1 + 2 \times 1 = 11$ bevat.¹⁾ De basiskromme R^9 is dus *elfvoudige kromme* op het regelvlak der rechten, die op de oppervlakken O^3 van den bundel liggen.

Daar elk O^3 27 rechten draagt, is zijn doorsnede met het bedoelde regelvlak van den graad $27 + 9 \times 11 = 126$; *het regelvlak is dus van den graad 42.*²⁾

2. Elke willekeurige rechte l is koorde van 42 kegelsneden; hun vlakken worden bepaald door de 42 rechten van het regelvlak \mathcal{Q}^{42} , die op l rusten.

Beschouwen wij nu het oppervlak (P) gevormd door de C^2 , waarvan de vlakken door het punt P gaan. Een willekeurige straal door P wordt, buiten P , in 84 punten gesneden. Daar P 27 C^2 draagt, is de graad van (P) dus $84 + 27 = 111$.

Volgens de notatie van SCHUBERT hebben we dus

$$\mu^2 = 42 \quad \text{en} \quad \mu\nu = 111.$$

Uit de bekende betrekkingen³⁾

$$3\nu = 2\eta + \delta + 4\mu \quad \text{en} \quad 3\mathcal{Q} = \eta + 2\delta + 2\mu,$$

waar in ons geval $\eta = 0$ is te stellen, leiden we door symbolische

¹⁾ Zie b.v. CLEBSCH, *Leçons sur la géométrie*, II, 13.

²⁾ Zie b.v. KLUYVER, *Kenmerkende getallen der algebraïsche ruimtekromme*, Versl. K. A. v. W., 3e reeks, deel VII, bl. 152, 1889.

³⁾ SCHUBERT, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, S. 92.

vermenigvuldiging het volgende stelsel van betrekkingen af:

$$\begin{aligned} 3 \mu v &= \delta \mu + 4 \mu^2, & 3 \mu \varrho &= 2 \delta \mu + 2 \mu^2, \\ 3 v^2 &= \delta v + 4 \mu v, & 3 v \varrho &= 2 \delta v + 2 \mu v, \\ 3 v \varrho &= \delta \varrho + 4 \mu \varrho, & 3 \varrho^2 &= 2 \varrho \delta + 2 \mu \varrho. \end{aligned}$$

Wij hebben hier zes vergelijkingen voor negen kenmerkende getallen, waarvan we er trouwens twee reeds bepaald hebben.

Maar het getal δv kunnen we rechtstreeks vinden. Immers op de willekeurige rechte l rusten 42 rechten van ϱ^{42} ; elke dezer rechten wordt gesneden door 10 rechten van het oppervlak O^3 waartoe ze behoort, levert dus 10 lijnenparen, welke op l rusten. Bijgevolg is

$$\delta v = 420.$$

Nu vinden wij achtereenvolgens

$$\begin{aligned} v^2 &= 288, & \delta \mu &= 165, & v \varrho &= 354, \\ \mu \varrho &= 138, & \delta \varrho &= 510, & \varrho^2 &= 432. \end{aligned}$$

3. Uit $v^2 = 288$ volgt, dat *het oppervlak A gevormd door de kegelsneden, welke de rechte l snijden, van den graad 288 is.*

Blijkbaar is l een 27-voudige rechte van A , en koorde van 42 op A gelegen kegelsneden. Op A liggen blijkbaar 462 rechten, welke drie aan drie in 210 vlakken gelegen zijn.

Is l een trisecante van R^9 , dus rechte van een oppervlak O_1^3 , dan valt A^{288} uiteen in het dubbel getelde oppervlak O_1^3 en in de meetkundige plaatsen der kegelsneden, welke door elk der drie steunpunten der trisecante gaan.

De kegelsneden, welke een punt der basiskromme R^9 gemeen hebben, vormen dus een oppervlak van den graad 94.

De oppervlakken T^{94} welke bij de steunpunten T_1 en T_2 der trisecante behooren, hebben blijkbaar de 10 kegelsneden gemeen, die bepaald zijn door de 10 trisecanten uit het derde steunpunt T_3 .

Is l een koorde van R^9 , dan ontaardt A in twee oppervlakken T^{94} en een oppervlak van den graad 100.

Is l een snijlijn van R^9 , dan bestaat A uit twee deelen, die achtereenvolgens van den graad 94 en 194 zullen zijn.

4. De aantallen $\delta \varrho = 510$ en $\delta \mu = 165$ leveren bekende uitkomsten. ¹⁾ Het eerste zegt ons, dat het regelvlak ϱ^{42} der trisecanten van R^9 een dubbelkromme van den graad 255 bezit; immers elk vlak door het dubbelpunt van een lijnenpaar is tweemaal als raakvlak te beschouwen. Het tweede getal levert de eigenschap, dat de drievoudige raakvlakken der oppervlakken O^3 van een bundel een oppervlak van de klasse 55 omhullen.

¹⁾ KLUYVER, t. a. p. bl. 152.

Het oppervlak (P) bevat dus 165 rechten, die drie aan drie in 55 vlakken liggen.

De aantallen $\nu \rho$ en $\mu \rho$ leveren, met betrekking tot het vlak in het oneindige, de volgende eigenschappen.

De parabolen der congruentie vormen een oppervlak van den graad 354, hun vlakken omhullen een oppervlak van de klasse 138.

Elk O^3 bevat 108 parabolen¹⁾. Daar een bepaald O^3 de parabolen op de andere O^3 slechts in punten der basiskromme R^9 kan snijden, gaat de meetkundige plaats der parabolen $(3 \times 354 - 2 \times 108) : 9 = 94$ maal door R^9 .

Door elk punt van R^9 gaan derhalve 94 parabolen.

Physiologie. — De Heer W. EINTHOVEN biedt een mededeeling aan over: „*Een nieuwe methode om oscillerende galvanometer-uitslagen te dempen.*”

Bij een aantal onderzoekingen, die het gebruik van een galvanometer of een electrometer noodzakelijk maken, is het gewenscht om de oscillerende uitslagen, die de meeste dezer instrumenten onder vele omstandigheden vertoonen, te dempen. Men past òf een mechanische, òf een electromagnetische demping toe, òf wel men combineert beide, om het effect des te krachtiger te doen worden.

Bij sommige werktuigen, bijv. bij den galvanometer van DEPREZ-D'ARSONVAL met beweegbaren klos in een stilstaand magnetisch veld, kan de electromagnetische demping, zonder opzettelijk te zijn aangebracht, reeds zóó groot zijn, dat de uitslagen hun oscillerend karakter hebben verloren en geheel aperiodisch zijn geworden. De bewegingen zijn daarbij vertraagd. De vertraging kan zeer groot zijn en daardoor hinderlijk worden, zelfs in die mate, dat het werktuig er practisch onbruikbaar door wordt. Men past dan middelen toe, om de demping te verminderen, bijv. door den weerstand in den galvanometer te vergrooten.

Om in een naaldgalvanometer een electromagnetische demping aan te brengen, omhult men het draaibare magnetische stelsel in meerdere of mindere mate met een massa van goed geleidend koper, waarin gedurende de beweging der naalden dempende wervelströmen worden verwekt.

Mechanische demping wordt aangebracht in den vorm van vloeistof-

¹⁾ J. DE VRIES, *La configuration formée par les vingt-sept droites d'une surface cubique*, Arch. Neerl., sér. 2, t. VI, p. 148.

of van luchtdemping, waarbij dikwijls van dunne aluminium of mica-platen, ook wel van insectenvlengels gebruik wordt gemaakt.

De in dit opstel nader te beschrijven dempingsmethode wijkt geheel van de bovengenoemde methoden af. Zij bestaat in het aanbrengen

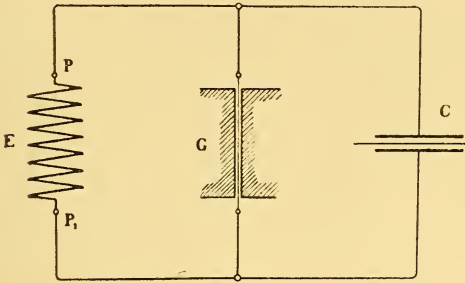


Fig. 1.

de galvanometer en C de condensator.

Men stelt zich de werking van den condensator 't eenvoudigst voor, wanneer men aanneemt, dat de massa van het bewegende deel in den galvanometer $= 0$ is, en dat de eventueele oorzaken voor de demping der beweging tot 0 naderen. Is in deze omstandigheden de capaciteit van den condensator $= 0$, dan zal bij het plotseling aanbrengen van een potentiaalverschil tusschen P en P_1 de galvanometer ook plotseling den daarmede overeenkomstigen evenwichtsstand innemen. Is daarentegen een zekere capaciteit aanwezig, dan zal voor het tot stand komen van den uitslag een bepaalde tijd worden vereischt.

De wijze, waarop het spiegelbeeld — of in den snaargalvanometer de kwartsdraad — zich beweegt, wordt daarbij geheel bepaald door de wijze, waarop een condensator zich laadt of ontladtd. Noemt men a den uitslag van den galvanometer op den tijd t na het aanbrengen van het potentiaalverschil, en A den blijvenden uitslag, dan is

$$a = A \left(1 - e^{-\frac{t}{w'c}} \right)$$

waarin e het grondgetal der natuurlijke logaritmen, c de capaciteit van den condensator en w' een weerstand beteekent, die gemakkelijk nader kan worden gedefinieerd.

In de gesloten keten, die de stroombron en den galvanometer bevat, zij de uitwendige weerstand $= W_u$, de weerstand van den galvanometer zij W_i , en neem aan, dat de weerstand der draden, die den condensator met den galvanometer verbinden, mag worden verwaarloosd, dan is

$$w' = \frac{W_i W_u}{W_i + W_u} \dots \dots \dots (1)$$

De waarde $w'c$ is de tijdconstante van den uitslag

$$w'c = T.$$

Drukt men w' in Ohms en c in Farads uit, dan wordt T in seconden weergegeven.

Wordt de galvanometeruitslag geregistreerd op een vlakke, die zich met eenparige snelheid voortbeweegt, dan zal een kromme worden verkregen, die de uitdrukking is van een exponentieele functie en geheel overeenkomt met de bekende normaal — of ijkingskrommen van den capillair-electrometer¹⁾).

De constanten der kromme worden daarbij behalve door de bewegingssnelheid der schrijfvakke en de grootte van den uitslag nog slechts alleen bepaald door de waarde van T . Door w' en c te wijzigen is men in staat het bedrag van T willekeurig te regelen, hetgeen daarop neerkomt, dat men in staat is om den galvanometeruitslag in iedere willekeurige mate te vertragen of te dempen.

Bovenstaande beschouwingen worden door de directe waarnemingen bevestigd. Als voorbeeld reproduceeren wij hier drie krommen, die met den snaargalvanometer²⁾ zijn geschreven. De draadverbindingen

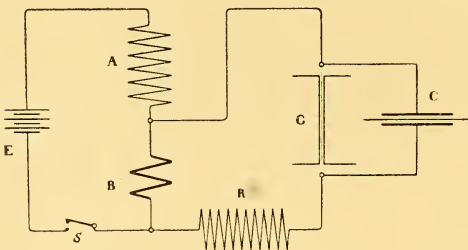


Fig. 2.

zijn schematisch voorgesteld in fig. 2. Hierin beteekent E een batterij van elementen, S een sleutel, G den snaargalvanometer en C den condensator, terwijl A , B en R weerstanden voorstellen. De gevoeligheid van den galvanometer is in de drie gevallen ongeveer gelijk gehouden

en wel zóó, dat 1 mM. uitslag met een stroomsterkte van 2×10^{-7} Amp. correspondeert, terwijl de electromotorische kracht der batterij E en de weerstanden A , B en R zoodanig zijn gekozen, dat bij stroomdoorvoering een blijvende afwijking van 20 mM. wordt verkregen. De bewegingssnelheid der schrijfvakke bedraagt 500 mM. per seconde. In het net van kwadraatmillimeters op de platen³⁾ is dus 1 mM. abscis = 0.002 sec. en 1 mM. Ordin. = 2×10^{-7} Amp. De sluiting en opening van de keten in S geschiedde automatisch

¹⁾ Zie o. a. W. 'EINTHOVEN. PFLÜGER's Arch. f. d. gesammte Physiol. Bd. 56, S. 528. 1894. En „Onderzoekingen” Physiol. laborat. Leiden, 2e Reeks I.

²⁾ Zie W. EINTHOVEN, Ann. der Phys. 12. p. 1059. 1903 en 14. p. 182. 1904. Ook in Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, Zittingsverslag van 27 Juni 1903 en 30 Maart 1904.

³⁾ Over de wijze van registreeren en over het net van kwadraatmillimeters zie Annalen d. Phys. t. a. p.

door een inrichting, die aan de bewegende schrijfvlaakte was verbonden.

Voor R werd een koolrheostaat genomen met grooten weerstand en B was ten opzichte van R zeer klein. Zonder merkbare fout mocht $W_u = R$ worden gesteld. In fig. 1 en 2 der plaat was $W_u = 1.11$ Megohm, terwijl in fig. 3 $W_u = 117000$ Ohm bedroeg. De galvanometerweerstand was $W_i = 8600$ Ohm.

In fig. 1 der plaat is de capaciteit van den condensator $= 0$. Men ziet, dat de snaar oscilleerende bevoegingen maakt van een periode van ongeveer $1,3 \text{ m.M.} = 2.6 \sigma^1$.

Deze bewegingen worden gedempt door een zekere capaciteit in den condensator te schakelen. In fig. 2 der plaat is die capaciteit 0.94 Mikrofar, in fig. 3 der plaat 0.2 Mikrofar.

Berekent men de waarde van w' uit W_i en W_u naar formule (1) en verder de tijdconstante $T = w'c$, dan vindt men voor de tijdconstante van fig. 2 8.0σ , voor die van fig. 3 1.6σ en het is duidelijk, dat de mate van vertraging of van demping der beweging door het bedrag der tijdconstante wordt bepaald.

In de bovenstaande beschouwingen zijn wij duidelijkheidshalve van het eenvoudigste geval uitgegaan en hebben wij aangenomen, dat de maass m der snaar en de krachten, die ook zonder toepassing van den condensator werkzaam zijn om haar beweging te dempen en die wij gezamenlijk met den naam r zullen aanduiden, mogen worden verwaarloosd. Dit veronderstelde geval zal des te meer tot de werkelijkheid naderen, hoe grooter, in overigens gelijke omstandheden, T genomen wordt. Fig. 2 der plaat voldoet in dit opzicht dus beter aan de gestelde eischen dan fig. 3, maar de groote praktische beteekenis der methode is juist gelegen in de mogelijkheid, om de oscillaties te dempen bij een minimum van vertraging van den uitslag. Men zal bij het verrichten van verschillende metingen steeds trachten T zóó te kiezen, dat juist de grens tusschen de oscilleerende en de aperiodische beweging wordt verkregen. In die omstandigheden is T relatief klein en mogen m en r niet meer worden verwaarloosd.

De vraag doet zich nu voor, hoe bij bekende waarden van m en r het bedrag van T moet worden berekend, om het bedoelde grensgeval te verkrijgen.

Terloops mag er hier aan worden herinnerd, dat bij den capillair-electrometer de demping der beweging van den kwikmeniscus ook is samengesteld uit mechanische wrijving en vertraging door capaciteit ²⁾.

¹⁾ $1 \sigma = 0.001 \text{ sec.}$

²⁾ Sommige onderzoekers hebben wel gemeend, dat de beweging in den capillair-electrometer alleen door de lading van den kwikmeniscus werd beheerscht.

En de samenwerking dezer beide invloeden heeft een beweging ten gevolge, die òf geheel nauwkeurig òf met slechts geringe afwijkingen nitgedrukt wordt door een eenvoudige exponentieele functie. De weerstand der lucht- of vloeistofdemping zoowel als die der electromagnetische demping oefenen op de beweging van een voorwerp met een zekere massa juist denzelfden invloed uit als de geleidingsweerstand op de electriciteitsbeweging bij de lading of ontlading van een condensator.

Evenwel kan een eenvoudige beschouwing leeren, dat de toevoeging van een condensator aan den galvanometer niet steeds een gevolg heeft op de bewegingen der snaar, overeenkomstig aan het gevolg van een vergrooting der dempende invloeden, die wij r hebben genoemd.

Immers werkt de toevoeging van den condensator als een tijdelijke verandering der aangewende kracht. En de wijze, waarop de kracht van oogenblik tot oogenblik wordt vermeerderd of verminderd, wordt daarbij niet — evenals de mechanische en electromagnetische demping — door de beweging der snaar, maar door het product van geleidingsweerstand en capaciteit, $w'c = T$, bepaald.

Bij de toepassing der condensatormethode kan de aard der snaarbeweging dicht bij het grensgeval der aperiodiciteit slechts door een min of meer samenstelde formule worden weergegeven. Ik heb het daarom nagelaten om voor dit grensgeval de waarde van T te berekenen en aan directe experimenteetele bepalingen de voorkeur gegeven.

Als voorbeeld mogen hier eenige krommen worden gereproduceerd, die de snaarbeweging in het bedoelde grensgeval nader demonstreeren ¹⁾. De Figuren 4, 5 en 6 der plaat zijn genomen met dezelfde snaar als de vorige figuren. Voor de draadverbindingen herinneren wij aan de tekstfig. 2. De uitslag is thans 30 mM. Weder is absc. 1 mM. = 0,002 sec. en Ordin. 1 mM. = 2×10^{-7} Amp.

$$R = 1300 \text{ Ohm.}$$

$$B = 27 \text{ ,,}$$

$$W_i = 8600 \text{ ,, , waaruit berekend wordt, dat}$$

$$W_u = 1327 \text{ en } w' = 1148 \text{ Ohm.}$$

In werkelijkheid speelt hier echter de demping door mechanische wrijving een veel grooter rol. Zie PFLÜGER's Arch. f. d. ges. Physiol. Bd. 79, S. 1. 1900; en „Onderzoekingen” Physiol. Laborat. Leiden, 2e Reeks, 4.

¹⁾ De gereproduceerde photogrammen der hier achter gevoegde plaat kunnen de krommen niet in fijne bijzonderheden nauwkeurig weergeven. Ik stel daarom gaarne directe photographische afdrukken der oorspronkelijke negatieven voor belangstellenden op aanvraag beschikbaar.

W. 1

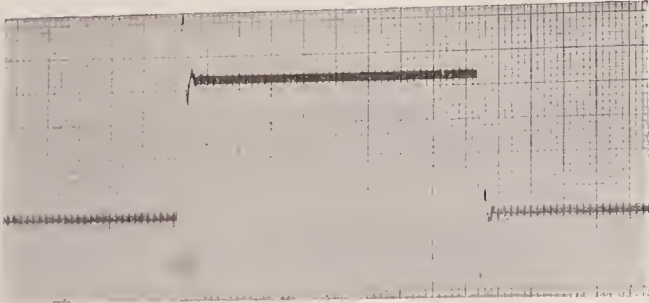


W. EINTHOVEN: „Een nieuwe methode om oscillerende galvanometeruitslagen te dempen”.

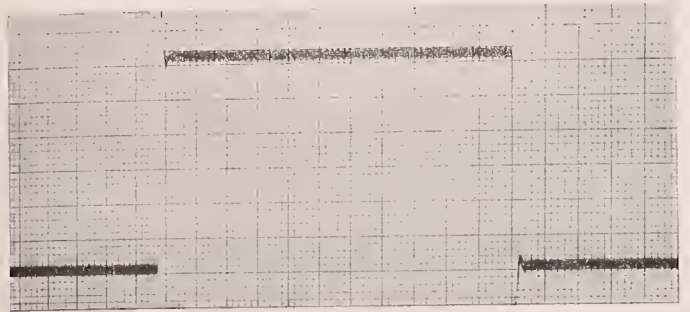
Absc. 1 m.M. = 2σ , Ordin. 1 m.M. = 2×10^{-7} Amp.

Absc. 1 m.M. = 2σ , Ordin. 1 m.M. = 2×10^{-7} Amp.

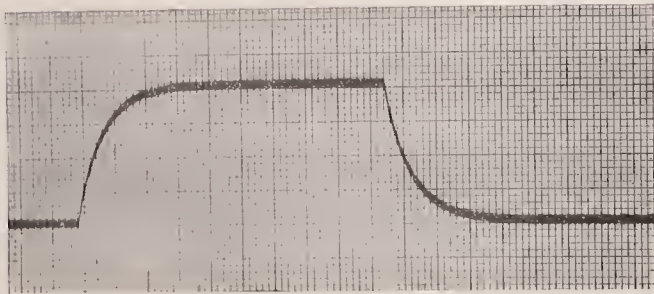
1
T=0.



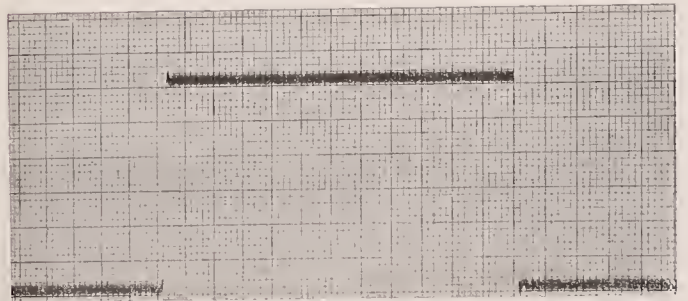
4
T=0



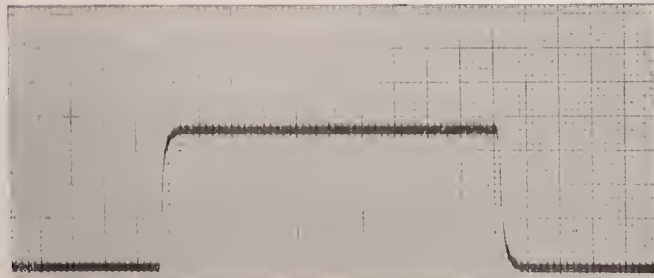
2
T = 8.0σ



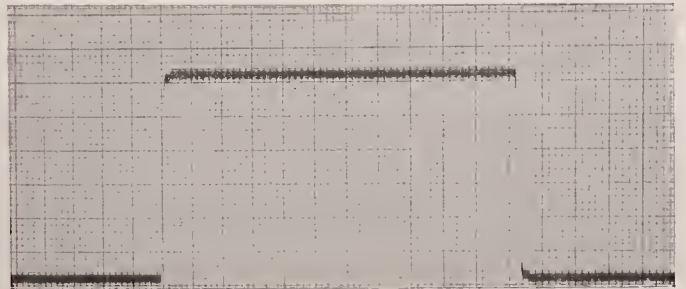
5
T = 0.69σ



3
T = 1.6σ



6
T = 0.80σ

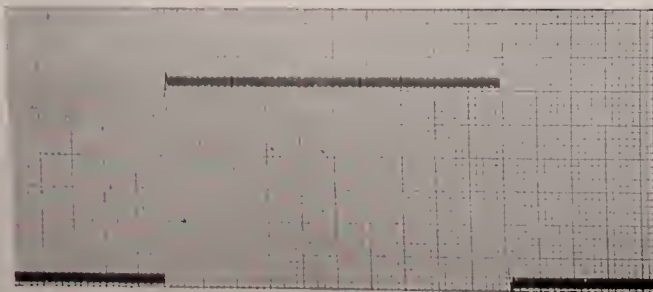


7

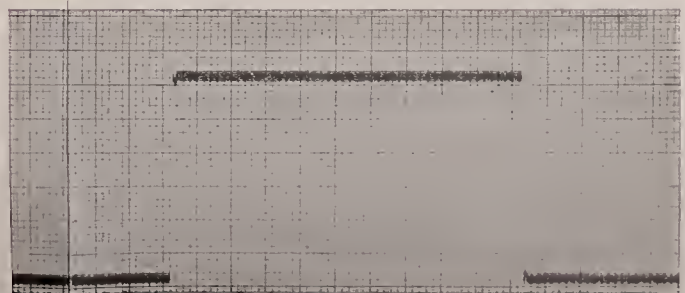
Absc. 1 m.M. = 2σ , Ordin. 1 m.M. = 3×10^{-7} Amp.

8

T=0



T = 0.47σ



In fig. 4 is de capaciteit van den condensator $= 0$, dus $T = 0$.
 „ „ 5 „ „ „ „ „ „ „ $= 0,6 \mu f.$, „ $T = 0,69 \sigma$.
 „ „ 6 „ „ „ „ „ „ „ $= 0,7 \mu f.$, „ $T = 0,80 \sigma$.

Men ziet, dat de oscilleerende beweging, welker periode ongeveer $2,7 \sigma$ bedraagt, door toepassing van de condensator-methode gedempt wordt, en dat de tijdconstanten T van $0,69$ en $0,80 \sigma$, verkregen met behulp van capaciteiten van $0,6$ en $0,7$ mikrofarad, noodig zijn, om tot de gezochte grenswaarde der aperiodiciteit te naderen.

In fig. 5 is bij gebruik van de capaciteit $0,6 \mu f.$ de grenswaarde nog niet geheel bereikt, in fig. 6 is bij toepassing van de capaciteit $0,7 \mu f.$ de grenswaarde reeds overschreden.

De beide laatstgenoemde platen toonen aan, dat de snaarbeweging bij deze grenswaarde niet zeer eenvoudig is. Bij de kleine slingering, die in fig. 5 is overgebleven, overschrijdt de snaar, na een uitslag van 30 mM. te hebben gemaakt, den nieuwen evenwichtsstand met $0,5$ mM. om daarna terug te slaan tot een punt, dat nog $0,3$ mM. onder den genoemden evenwichtsstand is gelegen. De verhouding der grootte dezer uitslagen komt niet overeen met de wetten, waardoor in 't algemeen gedempte bewegingen worden beheerscht. Bovendien wordt het eerste omkeerpunt na 2σ , het tweede na 1σ bereikt, terwijl bij de gedempte slingeringen, zooals die gewoonlijk voorkomen, de genoemde tijden gelijk zijn.

In fig. 6 komt de snaar na ongeveer $0,002$ sec., op een afstand van $0,3$ mM. van den nieuwen evenwichtsstand tot stilstand, om, na eerst een kleine beweging in tegenovergestelde richting gemaakt te hebben, dezen evenwichtsstand te bereiken. Stelt men zich bij de meting van een stroomsterkte tevreden met een nauwkeurigheid tot op 2% , dan is het resultaat in ongeveer $1,5 \sigma$ bekend.

Een ander voorbeeld vindt men in fig. 7 en 8 der plaat. Deze photogrammen zijn op overeenkomstige wijze vervaardigd als de onmiddellijk voorafgaande, doch de snaar is hier lichter, heeft grooter geleidingsweerstand, en is iets strakker gespannen.

Absc. 1 mM. $= 0,002$ sec., Ordin. 1 mM. $= 3 \times 10^{-7}$ Amp.
 $W_i = 17800$, $W_u = 20000$, dus $w' = 9420$ Ohm.

In fig. 7 is de capaciteit $= 0$, in fig. 8 is de capac. $= 0,05 \mu f.$, dus $T = 0,47 \sigma$. In de laatstgenoemde plaat vertoont de snaar na ongeveer $1,1 \sigma$ juist op den nieuwen evenwichtsstand een omkeerpunt. Zij slaat nog $0,9$ mM. terug, om daarna opnieuw en nu blijvend den genoemden evenwichtsstand in te nemen.

Stelt men zich bij de meting van een stroomsterkte met een nauwkeurigheid tot op 3% tevreden, dan is het resultaat in $0,8 \sigma$

bekend. Verlangt men een nauwkeurigheid tot $0,3\%$, dan wordt het resultaat eerst na $2,2\sigma$ verkregen.

Deze voorbeelden mogen voldoende zijn, om te doen zien, wat er van de methode kan worden verwacht. Het spreekt van zelf, dat wij bij het zoeken naar het juiste bedrag van T ter bereiking van de grenswaarde — al konden wij ook niet over een strenge formule beschikken — ons hebben laten leiden door theoretische overwegingen. Ééne dier overwegingen kwam o. a. daarop neer, dat bij een gegeven snaar en onveranderlijke weerstanden, de voor de grenswaarde vereischte capaciteit des te geringer moet zijn, al naar mate de snaar strakker gespannen is. Immers wordt bij grotere spanning der snaar de periode t harer oscillaties kleiner, en men mag verwachten, dat het te zoeken bedrag der tijdconstante T in gelijken zin als de periode t veranderen zal.

Deze overweging leidt tot eenige paradoxaal klinkende voorspellingen. Zoo moet men bijv. verwachten, dat de beweging van een strak gespannen snaar, die aperiodisch gemaakt is door toepassing der condensatormethode, weder oscilleerend wordt, zoodra de spanning wordt verminderd en daardoor de beweging wordt vertraagd. Een dergelijke verwachting schijnt in strijd te zijn met de ervaring, die wij steeds bij andere galvanometers, ja men mag zeggen, die wij zonder uitzondering bij alle werktuigen opdoen, waarbij slingerende bewegingen worden waargenomen.

De uitkomst van het onderzoek werd met nieuwsgierigheid afgewacht. Zij bevestigde de voorspelling volkomen. Een kwartsdraad, die zoodanig gespannen werd, dat 1 mM. blijvende uitslag met een stroomsterkte van 2×10^{-7} Amp. correspondeerde, vertoonde bij het plotseling doorvoeren of afbreken van een stroom (zie de tekstfiguur 2) een aantal slingeringen. Door het inlasschen van een capaciteit $c = 0.135 \mu f.$ werd de beweging gedempt en wel in die mate, dat de grens der aperiodiciteit werd bereikt. Daarop werd de snaarspanning precies 4 maal verzwakt, zoodat 1 mM. uitslag door 5×10^{-8} Amp. werd teweeggebracht. De oscillaties kwamen toen opnieuw te voorschijn. En eerst nadat de ingelaschte capaciteit tot 0.40 $\mu f.$ vergroot was, konden de oscillaties weder tot verdwijnen worden gebracht. Bij $4 \times$ geringer spanning, d. i. bij $4 \times$ grooter gevoeligheid, moest de capaciteit en daarmee het bedrag van T 2.96-maal worden vergroot, om de grenswaarde der aperiodiciteit te bereiken.

De waarnemingen met andere kwartsdraden, welker spanningen in verschillende mate werden gevarieerd, leverden steeds overeen-

komstige resultaten op: bij strakke spanning wordt een gering bedrag, bij een slappere snaar een grooter bedrag van $w'c$ vereischt, om eventueele oscillaties te doen verdwijnen.

Houdt men w' onveranderd, dan heeft men in een condensator uit den handel, waarin men met behulp van stoppen verschillende capaciteiten schakelt — op de wijze van de weerstanden in een weerstandsbank — een gemakkelijk middel om den graad der gewenschte demping nauwkeurig te regelen. En het mag merkwaardig heeten, dat men met des te minder van het dempende middel kan volstaan, al naar mate de oscillaties verder over het nulpunt heenslaan en langer aanhouden, en dus de behoefte om te dempen grooter is. Het verschijnsel, dat men — zonder eenige wijziging in de overige omstandigheden te brengen — alleen door een vermindering van spanning, d. i. — wanneer de uitslag onveranderd blijft — door een verkleining van de bewegende kracht een aperiodische beweging in een oscilleerende overvoert, staat geheel op zich zelf, en is, voor zoo ver mij bekend is, electricisch zoowel als mechanisch zonder analogon, evenmin in wetenschappelijke instrumenten als in de industrie of techniek.

Wij wenschen thans nog eenige metingsresultaten mede te deelen, die, hoewel zij het gemis van een eenvoudige formule niet kunnen vergoeden, toch kunnen bijdragen om de methode in haar gebruik beter te leeren kennen.

1. Vermeedert men de reeds aanwezige dempende invloeden, bijv. versterkt men de electromagnetische demping door den weerstand in de galvanometerketen te verminderen, dan kan men bij denzelfden kwartsdraad en bij onveranderde spanning met een geringer bedrag van T volstaan, om de grenswaarde van aperiodiciteit te verkrijgen,

2. Brengt men de verandering in de electromagnetische demping in rekening, die veroorzaakt wordt door wijziging in het bedrag van W_u , dan is het verder onverschillig, hoe men de afzonderlijke factoren w' en c kiest. Als hun product $w'c = T$ slechts een onveranderd bedrag behoudt, zal ook de dempende invloed ongewijzigd blijven. Deze wordt dus alléén door het product T bepaald.

3. Is de beweging van den kwartsdraad oscilleerend en past men de condensatormethode toe, beginnende bij kleine bedragen van T en geleidelijk opklimmend totdat de grenswaarde der aperiodiciteit wordt verkregen, dan zal men waarnemen, dat de vergrooting van T niet steeds een regelmatige vermeerdering der demping tengevolge heeft. Vooral bij zwakke kwartsdraadspanning, waarbij toch reeds niet meer dan een paar kleine slingeringen voorkomen, ziet men een

onregelmatigheid te voorschijn komen. De toevoëging van een zeer geringe capaciteit kan dan zelfs de aanwezige slingeringen een weinig vergrooten.

Is eenmaal een zoodanig bedrag van T genomen, dat de grens der aperiodiciteit is bereikt, dan behoeft men T slechts weinig te vergrooten, om een regelmatig gevormde kromme te verkrijgen. Bij verdere vergrooting van T wordt de beweging steeds meer vertraagd, waarbij de regelmatige vorm der kromme behouden blijft.

4. Om eenigermate te kunnen oordeelen over het bedrag van de tijdconstante T , die in verschillende omstandigheden noodig is om de grenswaarde der aperiodiciteit te bereiken, geven wij in de onderstaande tabel de resultaten van ettelijke, boven reeds gedeeltelijk vermelde metingen weer.

W_i in Ohms.	W_u in Ohms.	w' in Ohms.	c in mikro- farads.	$T = w'c$ in duizend- sten eener sec.	t in duizend- sten eener sec.	k Dempings- verhouding
8600	117000	8000	0.40	3.2	7.7	7.6
8600	117000	8000	0.135	1.08	2.7	3.1
8600	1.11×10^6	8520	0.12	1.02	2.64	3.1
8600	1327	1148	0.65	0.75	2.7	4.5
17800	20000	9420	0.05	0.47	1.41	3.16

De eerste 5 kolommen van bovenstaande tabel behoeven geen nadere verklaring: zij geven de geleidingsweerstand, de capaciteiten en de waarden der tijdconstanten T aan. Bij de genoemde waarden van T werd juist de grens der aperiodiciteit bereikt.

In de beide laatste kolommen is aangegeven, op welke wijze de snaar trilt, wanneer de capaciteit van den condensator en daarmee dus ook $T = 0$ is. In de voorlaatste kolom vindt men de periode t uitgedrukt in duizendsten eener seconde, terwijl in de laatste kolom de dempingsverhouding k is vermeld. De waarnemingsreeksen zijn gerangschikt naar de waarden van T .

Ten slotte mogen hier eenige opmerkingen volgen over de omstandigheden, waaronder de condensatormethode practisch met voordeel kan worden toegepast. Voorloopig zal deze toepassing wel tot zoodanige meetwerktuigen beperkt blijven, die een grooten inwendigen weerstand bezitten en een korte schommelperiode vertoonen. Een galvanometer voor thermostroomen met kleinen inwendigen weerstand

en groote schommelperiode zou voor de demping volgens de condensatormethode een condensator van enorme capaciteit vereischen. De gemakkelijk reguleerbare mica of papieren condensatoren zouden hiervoor niet in aanmerking komen, daar zelfs de grootste modellen uit den handel nog honderdduizend maal te klein zouden blijken te zijn. Men zou dus zijn toevlucht moeten nemen tot een andere soort van condensatoren, bijv. electrolytische, en men zou nog afzonderlijk moeten onderzoeken, in hoeverre deze inderdaad voor het beoogde doel practisch bruikbaar kunnen worden gemaakt.

Aan den eisch van een korte schommelperiode bij relatief hoogen inwendigen weerstand voldoet behalve de snaargalvanometer nog, voor zoo ver mij bekend is, slechts één ander instrument: de oscillograaf. Hierin geschiedt de demping door middel van olie, die verwarmd wordt. ¹⁾

De temperatuur der olie bepaalt haar viscositeit en de regeling van den graad der demping wordt in den oscillograaf dan ook verkregen door de regeling van de temperatuur der olie. Het behoeft geen betoog, dat het werktuig aan practische bruikbaarheid aanzienlijk zal winnen, indien de olie met de verwarmingsinrichting achterwege blijft, en een condensator daarvoor in de plaats wordt gesteld.

In den snaargalvanometer zal de condensator-methode dáár met succes worden toegepast, waar men stroomvariaties van korten duur, b.v. van 1 en zelfs van 0.1σ wenscht te meten. Neemt men een zeer korten, strak gespannen kwartsdraad tot snaar, dan zal men inderdaad uitslagen van den laatstgenoemden duur kunnen verkrijgen. Deze zouden zonder condensator wegens de voorkomende oscillaties voor vele doeleinden onbruikbaar zijn, terwijl zij thans door een doelmatige demping voor een aantal physische en electrotechnische onderzoekingen van nut kunnen worden. En daarbij zal de snaargalvanometer bij gelijke snelheid van uitslag een veel gevoeliger instrument blijken te zijn dan de oscillograaf.

Ook bij een aantal electro-physiologische onderzoekingen zal men van de condensator-methode partij kunnen trekken, terwijl zij in 't bijzonder de studie der geluiden zal vergemakkelijken. Hierover hoop ik in een later opstel een nadere mededeeling te doen.

¹⁾ Men maakt ook wel van een mengsel van twee vloeistoffen gebruik, waarvan de eene een groote, de andere een geringe viscositeit bezit. Men kiest het mengsel zóó, dat juist de gewenschte viscositeit verkregen wordt.

Plantenkunde. — De Heer C. A. J. A. OUDEMANS biedt eene mededeeling aan over: „*Leptostroma austriacum* OUD., eene nog onbekende, op de naalden van *Pinus austriaca* levende *Leptostromacee*, en over *Hymenopsis Typhae* (Fuck.) SACC., eene tot hiertoe onvolkomen beschreven *Tuberculariacee*, eigen aan de verdorde bladscheeden van *Typha latifolia*.”

1. LEPTOSTROMA AUSTRIACUM, OUD.

(Plaat I.)

Op den 13^{en} Juni 1904 ontving ik van den Heer Dr. J. RITZEMA Bos, Hoogleraar te Amsterdam, een zeker aantal, van Schoorl afkomstige, verspeende exemplaren van *Pinus austriaca*, allen gestorven, en waarvan in den begeleidenden brief vermeld werd, dat de wortels hier en daar kussenvormige verhevenheden vertoonden, welke oppervlakte met spoelvormige, in kamertjes verdeelde conidiën bedekt was, die, wat hare mikroskopische eigenschappen betreft, het meest met de conidiën van het geslacht *Fusarium* overeenkwamen.

Bovendien echter vond ik — doch zonder dat daarop mijne aandacht gevestigd was geworden — dat de meeste naalden der gestorven plantjes beiderzijds met kleine zwarte stippen en streepjes bezet waren, wier uitwendig voorkomen met de aan *Leptostroma* of *Lepthyrium* eigene perithecia de meeste overeenkomst aanboden.

De mij toegezonden plantjes, voorzien van een hier en daar vertakten penwortel van ongeveer 1 decim. lengte en 1—3 mill. dikte, bleken, bij nadere beschouwing, veel geleden te hebben, daar de schors op onderscheidene plaatsen los om de houtkern heenzat, zoo zij al niet geheel ontbrak. Een en ander wettigde het vermoeden, dat de jonge Pijnboompjes onder den aanval der *Fusarium*-plantjes te gronde waren gegaan, en dat de *Leptostroma*- of *Lepthyrium*-individuen de ziekelijke, treurende of stervende naalden tot zetel hunner doodende werking hadden uitverkoren.

De overgebleven *Fusarium*-kussentjes waren weinig talrijk, 1—3 mill. in middellijn en licht rozerood getint. Door gebrek aan geschikte voorwerpen ter fine van onderzoek, was ik, desgevraagd, genoodzaakt mij te bepalen tot de mededeeling, dat hier hoogst waarschijnlijk *Fusarium roseum* in het spel was, en liet ik de nadere toelichting van de door dien fungus veroorzaakte en niet gering te schatten verwoestingen aan de zorg over van Prof. RITZEMA Bos.

Een nader onderzoek van de zeer talrijke stippen en streepjes, aan de naalden van *Pinus austriaca* te vinden, gaf mij aanleiding,

op grond van haar doorgaans uitgerekten, nu eens minder, dan eens meer hysteriorium-achtigen vorm; haar geringe neiging om aan den omtrek los te laten en af te vallen; den nergens te onderscheiden parenchymateuzen bouw van den peritheciumwand, en de niet tot ontwikkeling gekomen basidiën — veeleer aan het geslacht *Leptostroma* dan aan *Leptothyrium* te denken, en verder, om den fungus als nog onbeschreven aan te merken en, ter onderscheiding van anderen, met den naam van *Leptostroma austriacum* te bestempelen.

Een der kenmerken van *Leptostroma austriacum* bestaat hierin, dat de perithecia nooit tot doorlopende reeksen vereenigd zijn, doch veeleer grootere of kleinere groepen vormen, en wel van strepen of schildjes, die heel wat van elkander in uitgebreidheid verschillen en zich minder door een glanzig, dan wel door een dof uiterlijk onderscheiden. Hunne lengte wisselt af tusschen $\frac{1}{5}$ en 1 mill. en hunne breedte tusschen $\frac{1}{8}$ en $\frac{1}{5}$ mill. Hun peritheciumwand, die, zooals men zulks noemt „gehalveerd” is, reikt niet verder dan de opperhuid van het blad, en is dus koepelvormig. Een grondstuk of basis heeft die wand niet. Hij is daarenboven zwart, verkoold en structuurloos, zoodat er geen twijfel bestaat of wij hebben hier met eene cuticula te doen (Fig. 2 en 3), waaruit volgt, dat de door sporen ingenomen ruimte op de opperhuid rust, zooals zulks door de Fig. 2 en 3 duidelijk wordt aangegeven. Door redeneering meer nog dan door waarneming, komt men tot het besluit, dat de sporen door een zeer dun laagje liggende, over de opperhuid heenloopende draden worden voortgebracht.

Boven dit laagje vormen de sporen twee lagen of verdiepingen. Een derde laag bestaat niet, daar de ruimte, daarvoor noodig, door de losgeraakte en ordeloos door elkaar gewoelde sporen wordt ingenomen.

De sporen hebben een uitgerekten (rolronden?) vorm, en zijn kleurloos en onverdeeld. Haar voet is afgerond en omsluit (Fig. 4 en 5) eene cirkelronde of ovale, glanzige vacuole; haar top is spits en ledig. Aan eene lengte van 7—8 μ paren zij eene breedte van $1\frac{1}{2}$ μ .

Het verschil tusschen *Leptostroma austriacum* aan den eenen, en *L. Pinorum*, *L. Pinastri* en andere aan Pinusnaalden eigene *Leptostromata* bestaat hierin, dat de perithecia bij laatstgenoemden veelal smalle, evenwijdige reeksen vormen; dat de sporen niet breeder zijn dan 0.5 μ ; eindelijk, dat er geene vacuolen in de sporen te vinden zijn.

De Latijnsche diagnose onzer nieuwe soort luidt als volgt:

„Peritheciis cuticulam inter et epidermidem occultatis, amphigenis,

irregulariter distributis, majoribus et minoribus, item longioribus et brevioribus intermixtis, dimidiatis, nigris, opacis, diu clausis, tandem irregulariter ruptis, persistentibus neque decedentibus nec circumcirca a substrato solutis. Sporulis sessilibus, cylindraceutis, hyalinis, continuis, vulgo $7.5 \times 1 \mu$, basi rotundatis guttulaque sphaerica vel ovali, micante, praeditis, apice acutiusculis, vacuis."

VERKLARING DER FIGUREN VAN PLAAT I.

- Fig. 1. Stukje eener naald van *Pinus austriaca*, met hoopjes van perithecia (*p.*) bezet. ($\frac{5}{1}$).
- „ 2. Vertikale doorsnede van een nog niet volkomen rijp perithecium.
a. Cuticula;
b. Opperhuid;
c. De twee verdiepingen van staafvormige kleurlooze sporen ($\frac{500}{1}$).
- „ 3. Vertikale doorsnede van een rijp en opengebersten perithecium.
a. Cuticula;
b. Opperhuid;
c. Sporen, ten deele nog in ongeschonden, ten deele ook in verschoven toestand ($\frac{500}{1}$).
- „ 4. Sporen, met een afgeronden voet en een spitseren top. Aan den voet eene vacuole ($\frac{1000}{1}$).
- „ 5. Dezelfde ($\frac{2000}{1}$).

2. HYMENOPSIS TYPHAE (Fuck.) SACC.

(Plaat II).

Deze fungus, op de verdorde bladscheeden van *Typha latifolia* voor het eerst te Nunspeet aangetroffen in Juli 1904, werd mij onder vele andere toegezonden door den Heer C. A. G. BEINS.

Hij doet zich voor: niet, zooals de *Sphaerella's* en *Leptothyria's*, in den vorm van kleine stipjes, maar als verheven zwarte vlekjes (Fig. 1, 2 en 3), die in de sleuven tusschen de bladnerven verspreid staan en aan eene lengte van 1—4, eene breedte paren van $\frac{1}{2}$ mill.

FUCKEL beschreef den fungus het eerst onder den naam van *Myrothecium Typhae* (Symb. 364), en dat wel onder deze bewoordingen: „Peridiis hemisphaericis, oblongis, $\frac{1}{2}$ lineam longis, aterimis; conidiis oblongo-ovatis, utrimque obtusis, simplicibus, biguttulatis, $18 \times 6 \mu$, pallide fuscis,” en gaf eene niet geheel geslaagde afbeelding van een conidium in fig. 21 van plaat 1.

Hem volgde SACCARDO (Syll. IV, 745), die wel is waar met zijn voorganger instemde, dat de fungus tot de Tuberculaceën behoort,

maar dezen desniettenstaande naar het geslacht *Hymenopsis* deed verhuizen, op grond dat het sporenbed (sporodochium) bij *Myrothecium* door een krans van wimpers is ingesloten, wat bij *Hymenopsis* geenszins het geval is.

Op eene goedgeslaagde vertikale doorsnede van *Hymenopsis Typhae*, zooals de Heer C. J. KONING die voor mij teekende (Plaat 2), wordt de bouw van onzen fungus bijzonder goed, ja zelfs veel duidelijker toegelicht dan zulks elders — ook bij andere soorten van hetzelfde geslacht — het geval is.

Daár, waar de zwarte schijfjes of vlekjes zich boven de oppervlakte der bladscheeden verheffen (Fig. 1, 2, 3), vindt men niet, zooals FÜCKEL schrijft, een „perithecium” (d.i. een meer of minder volkomen afgesloten vruchtje), maar wel eene door de cuticula overwelfde, bolvormige verzameling van vermenigvuldigings-cellen of conidiën (Fig. 4 *s.s.*), die door eene laag van bijzonder gevormde draagcellen (Fig. 4 *x.*) — te zamen stroma of vruchtbed geheeten — worden voortgebracht. — Onder dat vruchtbed strekt zich de opperhuid uit (Fig. 4 *o.*): eene aan de wijdde harer cellen gemakkelijk herkenbare laag. Het dient vermeld, dat de zwarte kleur der verhevene schijfjes (Fig. 1, 2 en 3) niet aan de kleurlooze cuticula (*c*), noch aan de kleurlooze opperhuid (*o*), doch enkel en alleen aan de conidiën (Fig. 5 *ij*) moet toegeschreven worden, die echter, om overlading te voorkomen, in Fig. 5 ongekleurd zijn gebleven.

Een der belangrijkste figuren van Plaat 2 is Fig. 5. Bij *x* zijn daarin weêrgegeven de bevoorrechte knotsvormige draden of basidiën, met het voortbrengen der conidiën belast, terwijl deze zelve (*ij*), door hare voetstukken losgelaten, in de nabijheid daarvan in vrijen staat zijn waar te nemen. De conidiën hebben een langwerpigen rolronden vorm, zijn min of meer ongelijkzijdig of gekromd, aan beide uiteinden afgerond, doch aan den voet iets helderder, en muisvaal (Sacc. Chromotaxia, pl. I, fig. 3) van kleur. Zij bevatten elk 2—4 op elkander volgende vacuolen, en paren eene lengte van ongeveer 10, aan eene breedte van ongeveer 4 μ .

Bij eene vergelijking tusschen de figuren van de Platen I en II, zoude men den indruk kunnen verkrijgen, dat er in de figuren 2 en 3 van Plaat I evenmin een perithecium bestaat als in die van Plaat II, hoewel deze term toch bij de beschrijving der Leptostromaceën gebruikelijk is. Daarom diene ter opheldering, dat laatstgenoemde familie der Sphaeropsideeën een overgang vormt van de perithecium-dragende tot de peritheciumlooze vormen, en dat men bij de beoordeeling van deze beide gevallen aan de zwarte kleur van de bovenhelft der schildjes, die nu eens uit de enkele cuticula, en

dan weder uit eene vereeniging van de cuticula met de opperhuid bestaan, nog al eenig gewicht heeft gehecht. Er komt bij dat de Leptostromaceën geene goed ontwikkelde basidiën voortbrengen en dat hare sporen bijzonder klein zijn.

De Latijnsche diagnose van *Hymenopsis Typhae* luidt:

„Sporodochiis amphigenis, hemisphaericis, inaequaliter in vaginarum sulcis distributis, majoribus et minoribus, item longioribus et orbicularibus intermixtis, primo cuticulam inter et epidermidem caelatis, 1—18 μ in diam., aterrimis; denique expositis, calvis, thalamo basidiphoro basilari praeditis; basidiis dense fasciculatis, elongato-clavatis, hyalinis, continuis; conidiis oblongis, rectis vel paullo curvatis et ut plurimum inaequilateralibus, utrimque obtusis, basi vulgo clarioribus, $10 \times 4 \mu$, murinis (SACC. Chromotaxia Tab. I, f. 3), 2—4-guttulatis, guttulis hyalinis, nunc binis sibi oppositis, tunc iterum ternis (aut quaternis) in seriem dispositis.

VERKLARING DER FIGUREN VAN PLAAT II.

- Fig. 1. Stukje eener bladscheede van *Typha latifolia*, in de sleuven tusschen de nerven met sporodochiën (spora = spore; docheion = bewaarplaats) bezet (natuurl. grootte); *p.p.* perithecia.
- „ 2. Stukje eener bladscheede met twee sporodochiën, waarvan het eene geopend, het andere gesloten ($\frac{40}{1}$) is.
- „ 3. Stukje eener bladscheede met twee sporodochiën, waarvan er een met eene sleuf op de rugzijde voorzien is ($\frac{40}{1}$).
- „ 4. Vertikale doorsnede van een rijp sporodochium. — *c.c.* cuticula; *o.o.* opperhuid; *s.s.* conidiën; *vb. vb.* vaatbundels; *x.* knotsvormige basidiën.
- „ 5. Een bundel knotsvormige basidiën (*x.x.*) met eenige conidiën (*ÿ. ÿ.*), waarin 2 of 3 vacuolen. Het op de basidiën rustende of daarheen gekeerde uiteinde der conidiën is steeds iets helderder dan het andere.

Plantenkunde. — De Heer C. A. J. A. OUDEMANS biedt eene mededeeling aan: „*Over Sclerotiopsis pityophila* (CORDA) OUD., eene *Sphaeropsidee*, voortgebracht door de naalden van *Pinus silvestris*.”

In het Nederlandsch Kruidkundig Archief, 3^e Serie, deel II, pag. 247, werd door mij melding gemaakt van een door den Heer C. A. G. BEINS te Nunspeet in 1901 aangetroffen fungus op de naalden van *Pinus silvestris*, die, in 1840 op hetzelfde substraat bij Praag ontdekt door den botanicus A. J. C. CORDA, in deel IV van

Fig. 1.

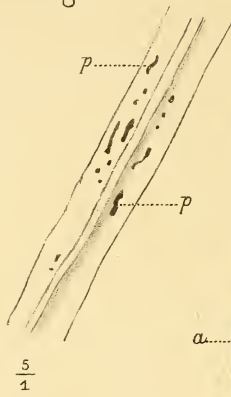


Fig. 2.

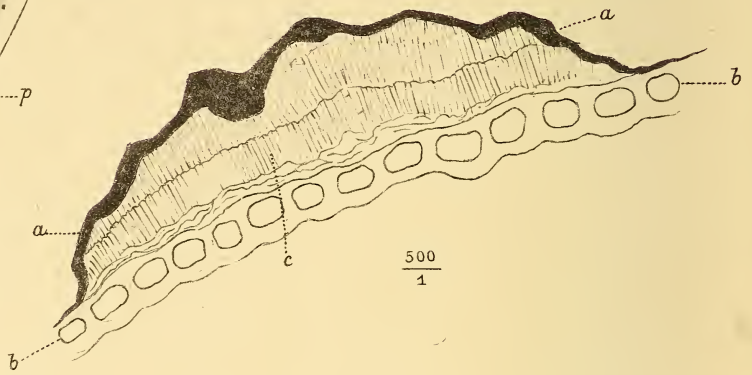


Fig. 3.

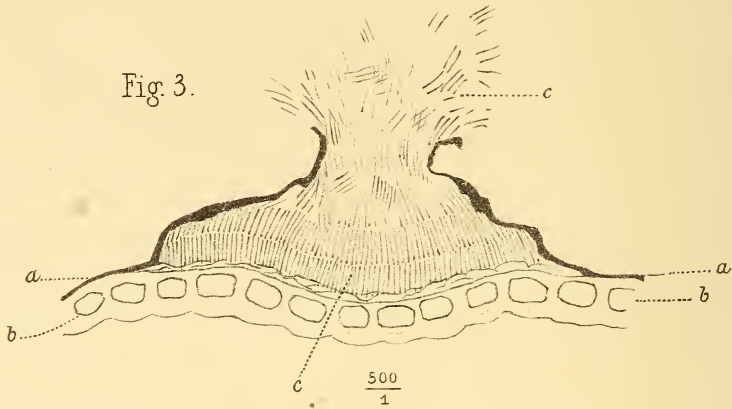


Fig. 4.

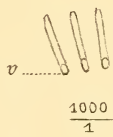
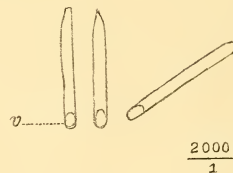


Fig. 5.



C. J. Koning, del.

Fig. 1.

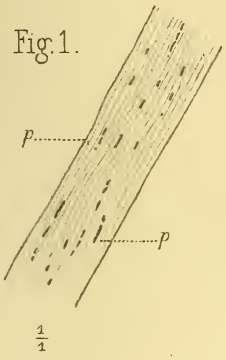


Fig. 2.

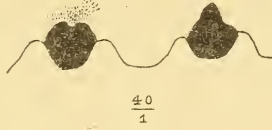


Fig. 3.



Fig. 4.

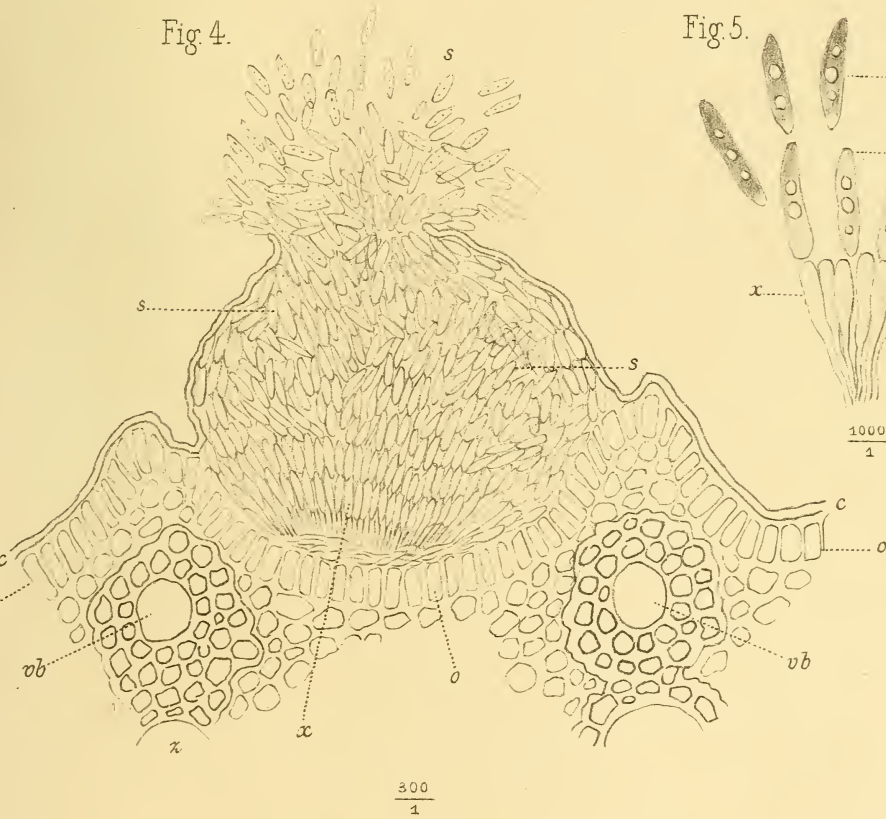
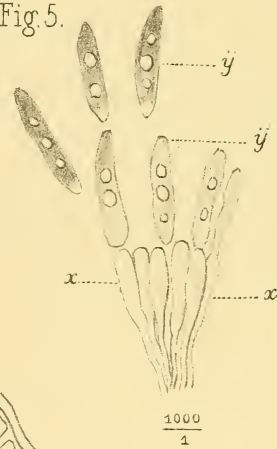
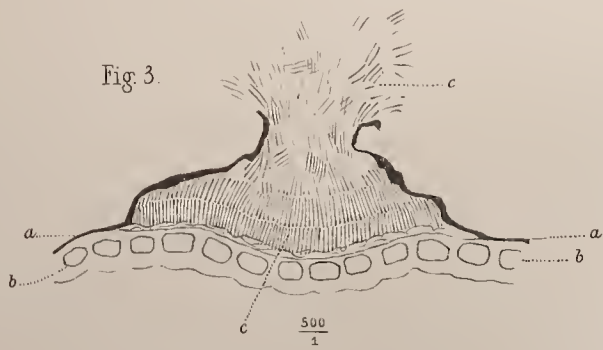
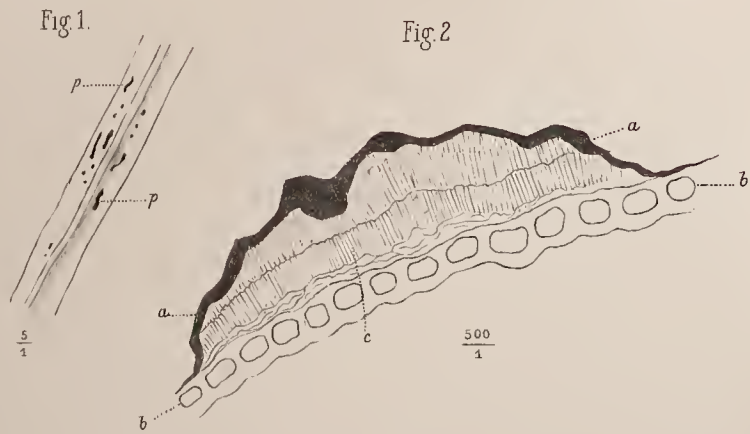
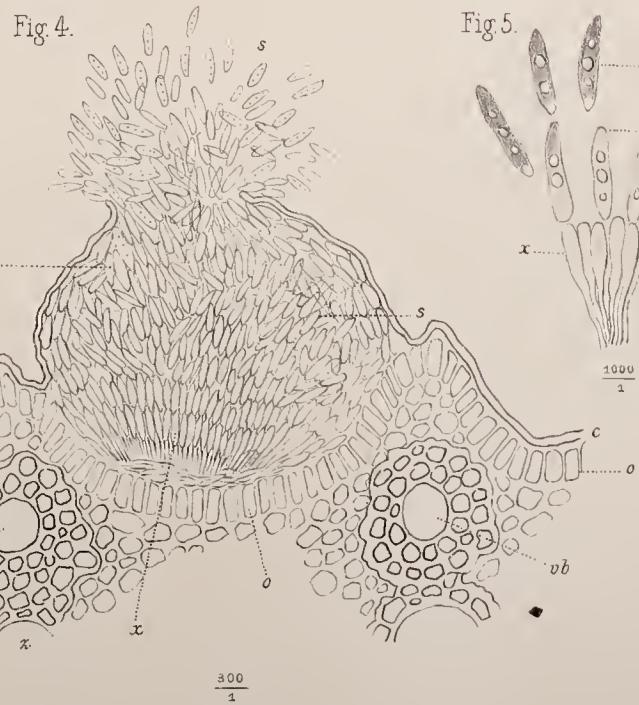
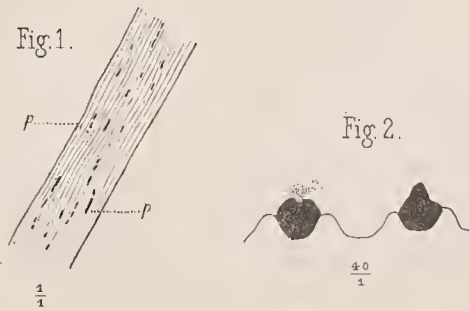


Fig. 5.





C. J. Koning, del.



C. J. Koning, del.

diens „Icones Fungorum” op pag. 40 onder den naam van *Sphaeronema pythiophilum*¹⁾ beschreven werd.

Aan denzelfden fungus werd eene plaats ingeruimd in SACCARDO's „Sylloge Fungorum”, deel III (A^o 1884), p. 101, doch thans onder den naam van *Phoma pityophila*, terwijl ikzelf, op de hierboven door mij aangehaalde plaats, op grond van een nieuw onderzoek van versche exemplaren, mij verplicht gevoelde, den titel *Phoma* opnieuw te veranderen, en daarvoor dien van *Sclerotiopsis* in de plaats te stellen.

Behalve door SACCARDO, werd ook door ALLESCHER, in het 6^e deel van WINTER's Kryptogamen-Flora (1901) op pag. 199, de naam *Phoma pityophila* voor onzen fungus gebezigd, maar deze uitdrukking in deel VII (p. 847) van hetzelfde werk, bij wijze van verbetering, in *Sclerotiopsis* veranderd.

In Januari 1904 door den Heer BEINS opnieuw in de gelegenheid gesteld versche exemplaren van *Sclerotiopsis pityophila* aan een onderzoek te onderwerpen, liet ik deze gelegenheid niet voorbijgaan, zonder mijne vroegere ondervinding nog eenmaal aan de werkelijkheid te toetsen, en had ik daarbij het voorrecht te kunnen beschikken over de aan dit opstel toegevoegde teekeningen, door den Heer C. J. KONING, apotheker te Bussum, voor mij vervaardigd. Terwijl ik dezen hier mijn vriendelijken dank breng voor zijne mij bij herhaling gebleken, en ook thans weder bewezen hulpvaardigheid, mogen nog enkele bijzonderheden, ter aanvulling van vroegere mededeelingen, hier eene plaats vinden.

De reden, die SACCARDO in 1884 deed besluiten den naam *Sphaeronema* in dien van *Phoma* te veranderen, was hierin gelegen, dat een paar aan het eerste geslacht toebehoorende, zeer kenmerkende, eigenschappen door CORDA met stilzwijgen waren voorbijgegaan; m. a. w. dat in zijn opstel noch van een snavel- of borstelvormig verlengstuk van den peritheciumwand, noch van sporen melding werd gemaakt, die tot een bal of kogel saamgekleefd, aan de oppervlakte der peritheciën zouden zijn te vinden geweest.

De door CORDA gekozen geslachtsnaam konde dus niet behouden blijven, en zoo scheen den Italiaanschen mycoloog geen andere beter geschikt dezen te vervangen dan die van *Phoma*: een oordeel, welks juistheid door geen later auteur in twijfel werd getrokken.

Ondertusschen viel èn uit de zeer beknopte beschrijving van *Phoma pityophila* in SACCARDO's Sylloge, èn uit het stilzwijgen over de mikroskopische eigenschappen van den fungus wel af te leiden,

¹⁾ Daar „Pijnboom in het Grieksch *πίτυς* heet, zal ik de verkeerde schrijfwijze van CORDA verder door de juistere vervangen.

dat genoemde auteur geen onderzoek van versch verzamelde voorwerpen had kunnen instellen, en dat er derhalve voor na hem komende en onder gunstiger omstandigheden verkeerende mycologen, wellicht nog wel iets te verbeteren zou vallen.

Zelf in het laatst vermelde geval verkeerd hebbend, meen ik geen overbodig werk te doen door nog eens op mijne *Sclerotiopsis pityophila* terug te komen, en iets langer bij het verschil tusschen *Sclerotiopsis* en *Phoma* stil te staan.

Allereerst dan valt te vermelden, dat de perithecia van *Phoma* wel is waar — als zij door bladeren zijn voortgebracht — onder de opperhuid verscholen liggen, maar toch geenszins, zooals bij *Sclerotiopsis* het geval is (zie Fig. 3—5), diep in het weefsel als ingegraven zijn en, waarschijnlijk dien ten gevolge, met veel onregelmatiger vormen toegerust, en soms met elkander ineengegroeid, naar buiten komen met een forscher en minder afgerond uiterlijk.

In de tweede plaats moet het ieder, die vele *Phoma*'s onderzocht heeft, opgevallen zijn, dat bij *Sclerotiopsis* vastere en dichtere, ja zelfs aan de oppervlakte als verkoolde perithecia gevonden worden, terwijl die van *Phoma* tot de weinig weêrstand biedende, teedere, lichtgekleurde vormen behooren; eindelijk, dat de perithecia van *Sclerotiopsis* geen zoogenoemden mond hebben, maar verweeren of bersten, terwijl bij *Phoma*, bijna als regel, eene kleine ronde opening wordt aangetroffen, die doortocht aan de sporen verleent.

Aan een en ander worde toegevoegd, dat de sporen van *Sclerotiopsis* niet los aan elkander liggen, zooals bij *Phoma*, maar door eene kleverige tusschenstof lang met elkander verbonden blijven (Fig. 3 en 4), waarvan het gevolg is, dat enkele druppels water voldoende zijn om de *Phoma*-sporen in alle richtingen uit elkander te doen wijken, terwijl bij *Sclerotiopsis* eene zachte drukking of wrijving gevorderd wordt om ze voor nauwkeuriger onderzoek geschikt te maken.

Juist deze laatste bijzonderheid was oorzaak, dat CORDA in de meening verkeerde een *Sphaeronema* gevonden te hebben, terwijl hij over het hoofd zag, dat het snavel- of borstelvormig verlengstuk van den perithecium-mond ontbrak, en er dus ook geen sporenbal aan den top van zulk een verlengstuk gevormd kon worden.

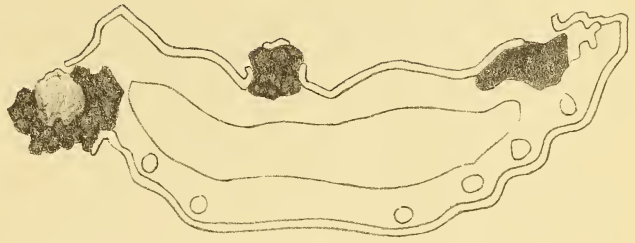
De vraag of de sporen van *Sclerotiopsis* aan den top van sporophoren worden voortgebracht, is, hoewel de analogie er voor pleit, niet gemakkelijk te beantwoorden, daar eene duidelijke afscheiding tusschen peritheciumwand en gleba (sporeprop) niet bestaat. Beiden gaan ongemerkt in elkander over. Toch schijnt er (Fig. 6), niet ver van de oppervlakte der perithecia, een afsnoeringsproces plaats te

Fig. 1.



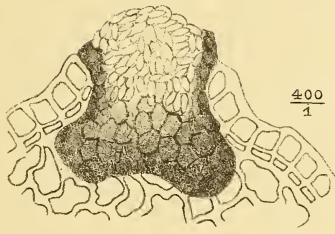
$\frac{1}{1}$

Fig. 2.



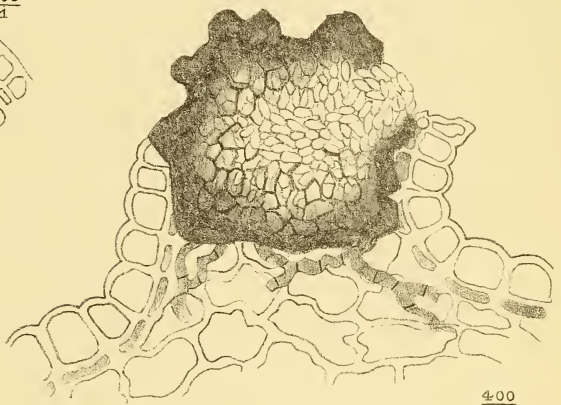
$\frac{100}{1}$

Fig. 3.



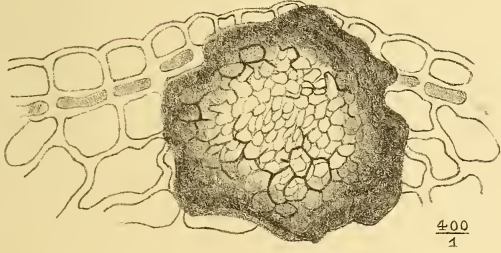
$\frac{400}{1}$

Fig. 5.



$\frac{400}{1}$

Fig. 4.



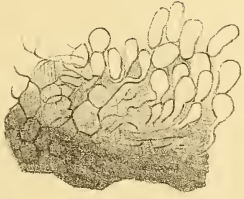
$\frac{400}{1}$

Fig. 7.



$\frac{1000}{1}$

Fig. 6.



$\frac{1000}{1}$

C. J. Koning, del.

hebben, en de gevormde sporen langzaam naar het centrum te worden voortgestuwd.

Sclerotiopsis pityophila (Corda) OUD., eene saprophyt, doet zich (Fig. 1) als zwarte, vleezige, $\frac{1}{2}$ —2 mill. breede korrels voor, die uit het naaldweefsel naar buiten worden geschoven. Zij bestaan uit veelhoekige parenchymcellen, die aan den omtrek grooter, vaster en donkerder zijn, doch naar binnen kleiner, weeker en kleurloos worden, en aan eene kleine holte schijnen te grenzen, die spoedig met sporen gevuld wordt. Deze laatsten zijn ovaal of eivormig, recht of een weinig gebogen (Fig. 7), ééncellig en onverdeeld, en hebben afgeronde toppen. Zij wisselen af tusschen $7 - 8 \times 3 - 4 \mu$, hebben geene polaire druppels, en zijn van aanhangsels verstoken. Kiemende sporen werden niet aangetroffen.

De eerste *Sclerotiopsis* werd door SPAGAZZINI in de Argentijnsche Republiek op rottende bladeren van *Eucalyptus Globulus* aangetroffen en *S. australasiaca* geheeten. Eene tweede en derde soort (*Scl. Cheiri* OUD. en *Scl. Potentillae* OUD.) werden door mijzelven en den Heer BEINS gevonden, gene op de stengels van *Cheiranthus Cheiri* in den Hortus van Amsterdam, deze op de bladeren van *Potentilla procumbens* te Nunspeet. Eindelijk maakte CORDA het eerst gewag van *Scl. pityophila* (Corda) OUD., die in 1840 op Demmenaalden te Praag, en 60 jaar later te Nunspeet werd ingezameld.

VERKLARING DER FIGUREN.

- Fig. 1. Een paar naalden van *Pinus silvestris*, bezet met perithecia van *Sclerotiopsis pityophila* (Corda) OUD. — Natuurl. grootte.
- „ 2. Eene met enkele perithecia bezwaarde naald van *Scl. pityophila*, dwarsdoorgesneden en 100-maal vergroot.
- „ 3, 4 en 5. Vertikale doorsneden van *Scl. pityophila*, 400-maal vergroot. De verkoolde peritheciumwand is hier overal duidelijk. Bij 3 en 5 zijn de perithecia door de opperhuid heengebroken, bij 4 nog niet; bij de eerste twee ontwaart men ook de aaneengekleefde sporen.
- „ 6. Stukje van een peripherisch gedeelte van den peritheciumwand, met enkele gesteelde sporen. 1000-maal vergroot.
- „ 7. Enkele sporen, 1000-maal vergroot.

Sterrenkunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. WEEDER: „*Eene nieuwe methode van interpolatie met vereffening toegepast ter afleiding van stand en gang van het standaarduurwerk der Leidsche sterrewacht, Pendule HOHWÜ 17, uit de tijdsbepalingen over 1903.*”

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

§ 4. In deze verslagen, November 1902, komt onder den titel: „Over interpolatie gegrond op eene minimumvoorwaarde” een opstel voor, waarvan dit als de voortzetting kan worden beschouwd; om die reden laat ik de §§ doorloopen. Ik bepaalde daar, om te interpoleeren tusschen de ordinaten S , bij de abscissen $t = a, b \dots y, z$ behoorende, de interpoleerende lijn, voor welke de totale gekromd-

heid $I_S = \int_a^z \left(\frac{d^2 S}{dt^2} \right)^2 dt$ de kleinste waarde heeft. Omtrent die kromme

lijn leidde ik af, dat zij tusschen 2 elkaar opvolgende, door waarneming vastgelegde punten voldoet aan eene vergelijking van den 3^{den} graad $S_t = S_q + g_q T + c_q T^2 + e_n T^3$, waarin $T = t - q$ en $q < t < r$, en daarbij de eigenschappen bezit, dat behalve S ook $\frac{dS}{dt}$ en $\frac{d^2 S}{dt^2}$ doorlopend zijn, terwijl in de eindpunten dier lijn $\frac{d^2 S}{dt^2}$ nul is; deze gegevens bleken voldoende om zulk eene interpoleerende lijn ondubbelzinnig te bepalen.

Daar heb ik ook reeds in § 3 het vraagstuk der vereffening aangeroerd, voor het geval, dat de waarnemingsuitkomsten S door fouten zijn aangedaan.

Nu zal ik uiteenzetten op welke wijze ik dat vraagstuk heb opgelost, en eene toepassing maken van die vereffeningsmethode voor de standen en gangen der pendule HOHWÜ 17 uit het tijdvak 1903 Jan. 14—1904 Jan. 14.

Ten behoeve der vereffening heb ik de onderstelling, op welke mijne interpolatie gegrond is, vervangen door eene, die meer omvat, door aan te nemen dat de waarschijnlijkheid eener combinatie van standen S evenredig is met $e^{-\lambda I_S}$, waarin de factor λ niet afhangt van de tijdsintervallen tusschen de waarnemingen; de oorspronkelijke minimumvoorwaarde is van deze hypothese een uitvloeisel, indien men als geïnterpoleerd voor den tijd t die waarde aanmerkt, welke (op dienzelfden tijd als waarnemingsuitkomst tusschengeschakeld) de uitdrukking $e^{-\lambda I_S}$ zoo groot mogelijk maakt.

Evenals vroeger duid ik de in S_q aanwezige waarnemingsfout door

f_q aan en den werkelijken stand door L_q , zoodat $L_q = S_q - f_q$; intusschen veroorloof ik mij, dezelfde letters f_q en L_q te bezigen in de beteekenis van meestwaarschijnlijke waarden voor fout en gemeten grootheid, alhoewel er tusschen de laatste grootheden en de werkelijke waarden natuurlijk verschil bestaat.

Zoodra er waarnemingsfouten zijn, behoort in de uitdrukking voor de waarschijnlijkheid eener combinatie I_S door I_L te worden vervangen.

De waarschijnlijkheid, dat in de waarnemingen respectievelijk de fouten $f_a, \dots, f_p, f_q, f_r, \dots, f_z$ gemaakt zijn, moet in de gevallen, waarin de continuïteit der waarnemingsgrootheid zich met de zoodanig gemaakte hypothese verdraagt, evenredig zijn met het product

van $e^{-\lambda I_{S-f}}$ en $e^{-1/2 \sum \frac{f_q^2}{\mu_q^2}}$; in de laatste uitdrukking stelt μ_q de middelbare waarde der fout in S_q voor. Het foutenstel van grootste waarschijnlijkheid voldoet dan aan de voorwaarde:

$$\lambda I_{S-f} + 1/2 \sum \frac{f_q^2}{\mu_q^2} = \text{minimum}$$

uit welke voor elk dier meest waarschijnlijkste fouten eene betrekking

$$\lambda \frac{\partial I_{S-f}}{\partial f_q} + \frac{f_q}{\mu_q^2} = 0 \text{ volgt.}$$

$\frac{\partial I_{S-f}}{\partial f_q}$ bevat theoretisch alle onbekenden f , doch praktisch behalve f_q slechts 3 of 4 voorafgaande en volgende, daar de overige termen wegens kleinheid der coëfficiënten verwaarloosd mogen worden. De meestwaarschijnlijke fouten treden er lineair in op, en het volledige stel foutenvergelijkingen is dus voldoende om ze alle te bepalen.

§ 5. Aan deze berekening onderworpen werden 61 tijdsbepalingen, verricht van 14 Jan. 1903 tot 14 Jan. 1904 door de observatoren E. BAKHUYZEN en PANNEKOEK. Hare behandeling werd iets ingewikkelder daardoor, dat de waargenomen gangen afhankelijk zijn van den druk en de temperatuur der lucht, waarin de slinger zich beweegt.

Een toename van 1 Mm. kwik in den luchtdruk geeft aan den kloggang eene vertraging van 0^s.015 per dag, en eene temperatuursverhooging van 1° C. doet dien gang met ongeveer 0^s.030 per dag versnellen.

Het is mij gebleken, dat ook de temperatuursverschillen, die in de pendulekast voorkomen, aanmerkelijken invloed op den gang hebben ¹⁾.

¹⁾ Dit temperatuur-verval vormt een nieuw element in de herleiding der kloggangen, in zoover als men, in de Leidsche Sterrewacht, eerst in 1903 is begonnen

Een temperatuurverval in verticale richting van 1° C. per M. heeft naar globale berekening eene gangverandering van $0^{\text{s}}.25$ ten gevolge.

het in rekening te brengen. Zijn invloed liet zich uit de vroegere tijdwaarnemingen, ofschoon sinds 1866 in de kast der pendule Hohwü 17 twee thermometers op verschillende hoogte werden afgelezen, niet duidelijk aantoonen, tengevolge van de onnauwkeurigheid dier aflezingen.

Wel vond Dr. E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN in de verschillen dier thermometers eene jaarlijksche periodiciteit, die verklaring kon geven van het verschijnsel der jaarlijksche periodiciteit in de klokgangen (Versl. K. A. v. W. Mei en Juni 1902), maar hij betwijfelde toen nog hare realiteit; de thermometers toch waren verdeeld in Réaumurgraden en de nauwgezetheid des aflezers bij het schatten der tiendedeelen was onvoldoende om eene ongelijkheid van $0^{\circ}.1$ R. in de maandgemiddelden van het temperatuursverschil te waarborgen.

Ten einde dit vraagpunt tot zekerheid te brengen, werden in Jan. 1903 in de pendulekast twee thermometers aangebracht, verdeeld in tiendedeelen van 1° C., en tevoren door den directeur der Sterrewacht onderling vergeleken; zij zijn sedert afgelezen met nauwgezette schatting der honderdste deelen van 1° Celsius. De verticale afstand van deze thermometers bedraagt 63 Cm.

Het bleek weldra, dat in de pendulekast een veranderlijk temperatuur-verval heerscht, hetwelk aanzienlijke gangverandering moet ten gevolge hebben.

In Juli 1903 werd uit de tijdsbepalingen afgeleid, dat het verschil der thermometers (boven-onder) per 1° C. gepaard ging met eene vertraging van $0^{\text{s}}.31$ per dag.

Dit temperatuursverschil vertoont, afgezien van schommelingen in verband met weersgesteldheid, duidelijk eene jaarlijksche periodiciteit; het is des winters klein en stijgt des zomers op sommige dagen boven $0^{\circ}.50$ C. Het kan nauwelijks betwijfeld worden, dat, althans sedert 1898 December, de in de klokgangen gevonden periodiciteit met het jaargetijde aan het temperatuur-verval is toe te schrijven; sinds dien tijd toch hangt pendule Hohwü 17 in de vestibule in een pijlnis van den 10-duims refractor, en onderwijl is aan den oostpijler in de meridiaanzaal, waar zij hing gedurende de andere door Dr. BAKHUYZEN behandelde tijdperken, 1862—74 en 1877—98, omstreeks Maart 1899 de pendule Hohwü 46 met Rieffler-slinger bevestigd.

Ten einde ook voor deze standplaats nauwkeurige gegevens omtrent het temperatuur-verval te verkrijgen, werden 27 Februari 1903 twee onderling vergeleken thermometers met verdeling in tienden Celsius in de kast van Hohwü 46 aangebracht op 65 Cm. vertikaalen afstand. Hier bleken de temperatuursverschillen over het algemeen grooter dan in de pijlnis, terwijl als hun invloed op den gang van deze pendule in Juli 1903 uit de tijdsbepalingen becijferd werd, dat een temperatuursverschil der thermometers van 1° C. aan eene gangverandering van $0^{\text{s}}.40$ beantwoordde.

Eene jaarlijksche periodiciteit in het temperatuur-verval trad voor beide pendules even duidelijk op, gelijk blijkt uit de volgende maandgemiddelden.

	Hohwü 17.	Hohwü 46.
1903 Maart	+ $0^{\circ}.14$	+ $0^{\circ}.25$
„ April	+ 0.09	+ 0.16
„ Mei	+ 0.31	+ 0.42
„ Juni	+ 0.28	+ 0.37
„ Juli	+ 0.29	+ 0.32

Een 4^{de} ongelijkheid in de gangen ontsproot uit het persoonlijk verschil der waarnemers. Uit rechtstreeksche bepalingen waren de volgende verschillen in de klokstanden verkregen:

	B—P
1 April 1901	— 0 ^s .201
18 Maart 1903	— 0.275
15 Maart 1904	— 0.224

Voorloopig heb ik gedurende de periode 14 Jan. 1903—14 Jan. 1904 voor dit verschil — 0^s.250 aangenomen en de door *P* bepaalde klokstanden herleid tot het systeem van *B*. Vervolgens voerde ik benevens de coëfficiënten voor luchtdruk, temperatuur en temperatuursverschil eene correctie op het aangenomen persoonlijk verschil in, welke 4 onbekenden ik uit de tijdsbepalingen zelve afleidde. Laten zij door *x*, *y*, *z* en *u* worden aangeduid. Door de keuze der volgende eenheden maakte ik dat allen in getalwaarde ongeveer even groot zouden uitkomen: voor luchtdruk (*B*) eenheid = $\frac{1}{4}$ Mm. kwik van 0° C., voor temperatuur (*Θ*) eenheid = $\frac{1}{10}$ graad Celsius, voor temperatuursverschil (*V*) eenheid = $\frac{1}{100}$ graad Celsius, voor klokgangen per dag eenheid = $\frac{1}{1000}$ tijdseconde; *x*, *y* en *z* stellen den invloed van elk der eerste 3 eenheden op den dagelijken klokgang voor, uitgedrukt in duizendste deelen der tijdseconde, terwijl met *u* het 10^{de} deel der correctie op het aangenomen persoonlijk verschil in de klokstanden in diezelfde tijdseenheid wordt bedoeld, en wel $B - P = -250 - 10 u$.

	Hohwü 17.	Hohwü 46.
1903 Augustus	+ 0.18	+ 0.22
„ September	+ 0.16	+ 0.26
„ October	+ 0.06	+ 0.12
„ November	+ 0.02	+ 0.10
„ December	+ 0.01	+ 0.03
1904 Januari	— 0.02	+ 0.08
„ Februari	+ 0.05	+ 0.12

Bij de pendule in de meridiaanzaal bleek ook eene dagelijksche ongelijkheid in het temperatuur-verval voor te komen, die bijna niet aanwezig was in de nis.

Bij Hohwü 46 is de middelwaarde van 0ⁿ—12ⁿ M. T. regelmatig grooter dan die van 12ⁿ—24ⁿ M. T. Uit de verschillen dier middelwaarden in verband met de verschillen in relatieven gang der beide klokken voor de overeenkomstige halve dagen kon ik den invloed eener verandering van het temperatuur-verval binnen korteren tijd op den gang van Hohwü 46 afleiden.

Dit onderzoek is nog niet ten einde, doch ik acht het, in verband met de theoretische ontwikkeling van B. WANACH te Potsdam over den invloed van temperatuur-verval op slingeruurwerken (A. N. Nr. 3967—68) vermeldenswaard, dat op deze wijze per 1° C. temperatuursverschil der thermometers ongeveer 0^s.80 gangverandering werd gevonden, een bedrag dubbel zoo groot als uit de tijdsbepalingen was verkregen.

§ 6. De waargenomen klokstanden werden vóóraf herleid tot middernacht van den datum der waarneming. Dit geschiedde met klokgangen naar eene voorloopige formule berekend met inachtname van luchtdruk, temperatuur en temperatuursverschil in het tijdvak van de tijdsbepaling tot middernacht. Deze formule, afgeleid uit de tijdsbepalingen van de 1^e helft van 1903, werd door den heer HAMERSMA geregeld aan elke nieuwe tijdsbepaling getoetst, en bleek zeer voldoende voor het doel, waarvoor zij hier is gebruikt.

$$\text{Constans} = \text{Dag. gang} - \overset{s}{0.0157} (\text{bar.} - 760) + \overset{s}{0.032} (\text{temp.} - 10^\circ) \\ - \overset{s}{0.31} (\text{temp. verschil}).$$

Uit de opteekeningen betreffende luchtdruk, temperatuur en temperatuursverschil zijn daggemiddelden opgemaakt, van middernacht tot middernacht. De klokstanden te middernacht noem ik S , en de gemiddelde dag-gangen over de intervallen der opeenvolgende tijdsbepalingen Q , in overeenstemming met de letters vroeger door mij gebezigd. Voor dezelfde tijdsintervallen werden uit de bovengenoemde dagmiddentallen de gemiddelde waarden van den luchtdruk, de temperatuur en het temperatuursverschil opgemaakt. Deze grootheden komen in de interpolatie met Q overeen, weshalve ik ze Q^B , Q^z , Q^V noemen zal. Barometerhoogten zijn afwijkingen van 76 Cm. en temperaturen ϑ gelden voor den bovensten thermometer.

In de uiteenzetting zal ik mij bedienen van de letters S^B , S^z , S^V , om grootheden aan te duiden, die voor elke waarneming zouden te becijferen zijn door de dagmiddentallen van B , ϑ en V van zeker aanvangspunt, bijv. 14 Jan. 1903 af tot den middernacht der tijdsbepaling samen te tellen. Onder S^P versta ik een getal dat $+10$ is voor elke tijdsbepaling van PANNEKOEK, en nul voor elke tijdsbepaling van BAKHUYZEN, terwijl de rij Q^P samenhangt met rij S^P zooals elke rij Q met rij S naar de formule $Q_n = \frac{S_r - S_q}{n}$. S_r en S_q stellen hier 2 opeenvolgende grootheden der rij, n het interval tusschen beide in dagen voor.

Als herleide en vereffende klokstand is dan te beschouwen:

$$L = S - x S^B - y S^z - z S^V - u S^P - f.$$

De letters L , S , f omvatten elk eene rij van discrete waarden, voor elke tijdsbepaling één, maar met behulp van interpolatie langs de minst gekromde lijn laten zij zich ook als doorlopende veranderlijke grootheden opvatten, vier 1^e en 2^e afgeleiden van begin tot eind ook doorlopend, doch wier 3^e afgeleiden sprongsgewijs veranderen. Ter bepaling van zulk een veranderlijke, S^B bijv., voor het tijdstip $t = q + T$ tusschen 2 opeenvolgende epoches, q en r , van

tijdsbepalingen in, geldt naar § 4 de formule:

$$S_{q+T}^B = S_q^B + g_q^B T + c_q^B T^2 + e_n^B T^3.$$

De coëfficiënten g^B c^B e^B laten zich uit de getallenrij Q^B becijferen naar de formules C van § 2 der vorige mededeeling over deze interpolatie-methode.

Beteekenen L , S , f zulke veranderlijken, dan kan men de totale gekromdheid der herleide en vereeffende standen aldus ontwikkelen:

$$I_L = \int_a^z \left(\frac{d^2 L}{dt^2} \right)^2 dt = \int_a^z \left[\frac{d^2(S-f)}{dt^2} - x \frac{d^2 SB}{dt^2} - y \frac{d^2 S^z}{dt^2} - z \frac{d^2 SV}{dt^2} - u \frac{d^2 SP}{dt^2} \right]^2 dt.$$

Om aan de rij L de grootste waarschijnlijkheid te verzekeren, worden x , y , z , en u zóó gekozen, dat de partiëele afgeleiden van I_L naar elk dezer nul is; dus voldoen zij aan de volgende betrekking:

$$\int_a^z \left[\frac{d^2(S-f)}{dt^2} - x \frac{d^2 SB}{dt^2} - y \frac{d^2 S^z}{dt^2} - z \frac{d^2 SV}{dt^2} - u \frac{d^2 SP}{dt^2} \right] \frac{d^2 SB}{dt^2} = 0,$$

en aan 3 andere, die men verkrijgt door den laatsten factor $\frac{d^2 SB}{dt^2}$ achtereenvolgens door $\frac{d^2 S^z}{dt^2}$, $\frac{d^2 SV}{dt^2}$ en $\frac{d^2 SP}{dt^2}$ te vervangen.

Bepaalde integralen zooals $\int_a^z \frac{d^2 SB}{dt^2} \cdot \frac{d^2 S^z}{dt^2} dt$, die hier als coëfficiënten voorkomen, kunnen op de volgende wijze becijferd worden.

$$\begin{aligned} \int_a^z \frac{d^2 SB}{dt^2} d \cdot \frac{dS^z}{dt} &= \left[\frac{d^2 SB}{dt^2} \cdot \frac{dS^z}{dt} \right]_a^z - \int_a^z \frac{dS^z}{dt} \frac{d^3 SB}{dt^3} dt = \\ &= 2 [c^B g^z]_a^z - 6 \sum e_n^B (S_r - S_q)^z = 2 [c^B g^z]_a^z - 6 \sum n e_n^B Q_n^z. \end{aligned}$$

Vervangt men in den laatsten term nog

$$3 n e_n^B \text{ door } (c_r - c_q)^B, \text{ zoo verkrijgt men:}$$

$$\frac{1}{2} \int_a^z \frac{d^2 SB}{dt^2} \frac{d^2 S^z}{dt^2} dt = [c^B g^z] + \sum Q_n^z (c_q - c_r)^B$$

en na verwisseling der indices B en \mathfrak{B} voor het 2e lid ook:

$$[c^z g^B] + \sum Q_n^z (c_q - c_r)^B.$$

Naar beide formules werden zulke coëfficiënten becijferd, en zóó eene scherpe contrôle op de becijferingen verkregen.

In de eindpunten van interpolatie zijn de grootheden c altijd nul, zoodat producten gelijk $c^B g^S$ nul zouden zijn zoowel in z als in a . Ik liet evenwel de interpolatierekening voor den luchtdruk, de temperatuur, enz. niet eindigen bij 14 Jan. 1904 met het oog op de voortzetting dezer behandeling voor het loopende jaar. Dientengevolge zijn op 14 Jan. 1904 c^B , c^S , c^V , c^P van nul verschillend en moest ik den term voor het eindpunt in de formule behouden.

In integralen zooals $\int_a^z \frac{d^2 SB}{dt^2} \frac{d^2 (S-f)}{dt^2} dt$ stelde ik aanvankelijk alle fouten gelijk nul en berekende naar formules overeenkomstig:

$$\frac{1}{2} \int_a^z \frac{d^2 SB}{dt^2} \frac{d^2 S}{dt^2} dt = [c^B g] + \sum (c_q - c_r)^B Q$$

de bekende termen der 4 vergelijkingen. Nadat door hare oplossing voorloopige waarden voor x , y , z en u verkregen, en ook de meestwaarschijnlijke fouten f voorloopig berekend waren, heb ik uit herleide gangen, met die voorloopige waarden berekend naar de formule:

$$Q_L(\text{voorl.}) = Q - x Q^B - y Q^S - z Q^V - u Q^P - \frac{f_r - f_q}{n}$$

verbeteringen op de voor x , y , z en u aanvankelijk gevonden waarden afgeleid. De wederkeerige invloed dier verbeteringen op de meestwaarschijnlijke fouten was van weinig beteekenis.

Integralen, zooals $\int_a^z \left(\frac{d^2 S}{dt^2} \right)^2 dt$ zijn ook dubbel becijferd, ten eerste naar dezelfde formule als de vorige, bij gelijkheid der indices:

$$\frac{1}{2} \int_a^z \left(\frac{d^2 S}{dt^2} \right)^2 dt = [c g] + \sum Q_n (c_q - c_r)$$

ten tweede naar de formule, in § 2 voor de totale gekromdheid verkregen.

$$\int_a^z \left(\frac{d^2 S}{dt^2} \right)^2 dt = \frac{4}{3} \sum n (c_q^2 + c_q c_r + c_r^2)$$

Ziehier de 4 vergelijkingen in getallen:

$$\begin{aligned}
& 5460 x - 252 y - 14 z + 59 u = + 21664 - 145 \\
& - 252 x + 952 y + 512 z - 8 u = - 1757 - 88 \\
& - 14 x + 512 y + 571 z - 22 u = + 383 + 87 \\
& + 59 x - 8 y - 22 z + 101 u = - 101 - 21
\end{aligned}$$

De 2^{de} leden zijn in 2 stukken geschreven. Het eerste stuk werd opgeleverd door de waargenomen gangen Q , het tweede stuk door de voorloopig reeds herleide en vereffende gangen Q_L . De oplossing van beide stellen leverde op:

$$\begin{aligned}
x &= + 3.90 - 0.04 = + 3.86 \\
y &= - 2.30 - 0.34 = - 2.64 \\
z &= + 2.72 + 0.46 = + 3.18 \\
u &= - 2.86 - 0.09 = - 2.95
\end{aligned}$$

Volgens deze uitkomsten is de invloed op den dag-gang van:

den luchtdruk per 1 Mm. kwik van 0° C. + 0^s0154

de temperatuur per 1 Centigraad (Bovenste Therm.) - 0.0264

het temperatuursverschil per 1° C. Boven—Onder + 0,318

terwijl in de klokstanden het persoonlijk verschil BAKHUYZEN — PANNEKOEK = - 0^s.220 gevonden werd.

Een staat (I) met de voor bovenbedoelde becijferingen benoodigde getallen, voor elk tijdsinterval tusschen twee opeenvolgende tijdsbepalingen: het aantal dagen n , den waargenomen klokgang Q , de waarden Q^B , Q^S , Q^V en Q^P , benevens de getallen $(c_q - c_r)^B$, $(c_q - r_r)^S$, $(c_q - c_r)^V$, $(c_q - c_r)^P$ bevindt zich hierbij. Nog behooren hieraan te worden toegevoegd voor het eindpunt, 14 Jan. 1904, de getalwaarden van

$$\begin{array}{cccc}
g^B = - 14.0 & g^S = + 57.7 & g^V = - 3.1 & g^P = + 2.4 \\
c^B = + 1.09 & c^S = + 2.01 & c^V = + 0.76 & c^P = + 0.54
\end{array}$$

$g = - 146$, aangenomen bij de waargenomen klokgangen Q .
 $G(\text{voorl.}) = - 194$, „ „ „ rij der voorloopige Q_L .
opdat de becijferingen kunnen worden verricht.

§ 7. De herleiding der betrekkingen tusschen de meestwaarschijnlijke fouten en hare oplossing uit deze zal nu volgen.

Er werd in § 5 voor elke fout f_q eene betrekking verkregen:

$$\lambda \frac{\partial I_L}{\partial f_q} + \frac{f_q}{\mu_q^2} = 0 \quad \text{of} \quad \frac{\partial I_L}{\partial f_q} + \frac{1}{\lambda \mu_q^2} f_q = 0$$

Aangaande de middelbare waarden μ der fouten in de tijdsbepalingen heb ik gemeend ze alle gelijk te mogen aannemen, ofschoon

S T A A T I.

Tijdsintervallen in dagen.	Waarge- nomen klok- gangen.	Luchtdruk (B).		Temperatuur (\varnothing).		Temperatuurs- verschil (V).		Personeel verschil (P).	
		Q	Q^B	$(c_q - c_r)^B$	Q^{\varnothing}	$(c_q - c_r)^{\varnothing}$	Q^V	$(c_q - c_r)^V$	Q^P
3	+0.230 ^s	+52.9	+ 2.45	49.3	+1.88	+16.0	+3.62	-3.3	-1.78
3	+ .126	+40.5	+ 0.13	42.0	-2.12	+ 1.3	-3.46	+3.3	+2.33
8	+ .036	+23.3	- 4.15	49.6	-2.69	+ 1.1	-1.89	0.0	-0.14
3	+ .050	+25.5	+ 3.98	71.3	+3.23	+12.3	+2.83	-3.3	-1.57
6	- .034	+14.2	- 3.21	74.7	-1.44	+ 7.7	-1.22	+1.7	+1.91
10	+ .024	+31.2	- 3.17	80.9	+2.76	+ 7.9	-0.20	-1.0	-1.63
3	+ .164	+60.8	+11.39	72.0	-2.95	+10.7	+0.72	+3.3	+1.77
7	- .067	+ 4.9	- 2.99	80.4	+0.84	+ 8.9	-0.65	-1.4	-1.06
8	- .235	-31.0	-14.05	88.3	+0.54	+10.6	+0.18	0.0	-0.51
3	.000	+23.2	+14.22	87.7	+1.48	+12.3	-0.45	+3.3	+2.81
3	- .063	+10.7	- 0.90	81.7	-1.73	+13.0	+1.95	-3.3	-3.44
4	- .117	- 2.9	- 9.97	81.8	-0.34	+ 7.5	-1.91	0.0	+1.70
6	- .042	+17.4	+14.57	89.5	-1.36	+11.8	-1.00	0.0	-0.95
5	- .201	-23.1	-12.98	105.0	+1.62	+22.8	+1.99	+2.0	+1.16
7	- .139	- 2.7	+ 6.05	108.3	+1.19	+19.1	+0.38	-1.4	-0.98
7	- .150	+ 0.6	- 3.54	98.9	-0.21	+10.2	-1.17	0.0	+0.50
10	- .106	+ 4.2	+ 7.51	85.3	+0.38	+ 7.8	+1.32	0.0	-0.39
7	- .291	-46.1	- 6.63	77.0	-3.77	+ 2.9	-3.58	+1.4	+0.63
10	- .245	-37.9	- 0.51	107.8	+1.81	+27.2	+3.15	-1.0	-0.82
12	- .192	- 2.7	+ 0.67	126.6	+1.63	+25.3	-0.24	+0.8	+1.22
3	- .104	+22.1	- 5.19	125.7	-3.82	+21.7	-2.84	-3.3	-2.91
3	- .052	+40.1	+14.67	138.3	+1.92	+32.3	+1.41	+3.3	+3.22
5	- .190	+ 3.4	- 9.29	153.8	-2.61	+44.2	-1.20	0.0	-1.38
5	- .225	+ 5.0	- 4.61	174.0	+7.85	+53.2	+6.93	0.0	+0.29
4	- .139	+30.8	+12.40	157.3	-5.25	+30.2	-5.55	0.0	+0.30
10	- .311	-14.8	-10.09	156.7	+2.97	+27.0	+2.44	-1.0	-0.90
4	- .278	- 1.7	- 1.00	144.2	-2.21	+16.2	-2.17	+2.5	+1.25
4	- .153	+24.4	+ 4.82	147.8	-2.51	+20.8	-1.94	0.0	-0.81
4	- .158	+26.1	+ 0.10	167.0	+0.57	+36.2	+1.84	0.0	+0.09
4	- .209	+20.3	+ 0.39	180.8	+4.27	+40.5	+2.88	0.0	+0.42

Tijdsintervallen in dagen.	Waarge- nomen klok- gangen.	Luchtdruk (B).		Temperatuur (\bar{S}).		Temperatuurs- verschil (V).		Personeel verschil (P).	
	Q	Q^B	$(c_q - c_r)^B$	$Q^{\bar{S}}$	$(c_q - c_r)^{\bar{S}}$	Q^V	$(c_q - c_r)^V$	Q^P	$(c_q - c_r)^P$
6	-0.243 ^s	+ 9.1	+ 0.49	171.0	-1.93	+27.7	-2.55	-1.7	-0.65
7	- .324	- 4.9	- 2.28	168.6	-0.63	+27.4	+0.05	0.0	+0.36
8	- .344	- 5.1	+ 2.15	175.0	+0.61	+29.6	+1.07	0.0	-0.09
11	- .379	-12.0	- 3.95	175.9	+0.29	+21.7	-0.88	0.0	+0.02
8	- .338	+ 1.8	+ 7.33	173.3	-0.56	+20.8	+0.12	0.0	+0.02
6	- .436	-30.0	- 8.03	173.5	+1.16	+19.8	+0.80	0.0	-0.13
12	- .365	- 2.1	+ 3.51	167.1	-1.73	+14.6	-1.81	+0.8	+0.23
3	- .288	+10.5	- 2.83	174.0	-0.84	+22.7	+0.02	0.0	-0.11
4	- .271	+13.9	+ 8.68	180.5	+3.45	+27.0	+2.10	0.0	-0.16
8	- .363	-12.2	-13.53	163.4	+0.22	+17.1	-0.13	0.0	+0.61
4	- .196	+28.2	+ 9.11	143.8	-2.04	+ 6.8	-1.10	-2.5	-1.05
5	- .209	+26.9	- 1.18	146.2	-0.55	+ 7.6	-0.56	0.0	+0.81
4	- .237	+16.4	+ 2.75	152.8	-0.70	+13.0	-0.04	0.0	-0.49
7	- .373	-13.5	- 1.14	160.7	+2.46	+17.4	+1.53	+1.4	+0.42
8	- .429	-35.0	- 5.03	149.5	-0.06	+10.0	-0.34	0.0	+0.09
11	- .333	-16.4	+ 6.18	131.4	-0.72	+ 2.2	-0.45	-0.9	-0.91
3	- .447	-37.3	- 2.68	124.7	-1.02	+ 0.3	+0.24	+3.3	+1.87
2	- .395	-35.4	-11.48	126.0	+1.47	0.0	-0.90	0.0	-1.31
6	- .193	+19.6	+12.15	121.2	-0.37	+ 2.2	+1.25	0.0	-0.01
12	- .147	+22.9	- 0.56	111.9	+0.15	+ 0.8	-1.68	0.0	+0.53
3	- .135	+ 8.1	+ 1.55	104.0	-0.34	+ 7.7	+2.82	-3.3	-0.70
10	- .243	-18.0	- 0.58	95.2	+1.54	+ 0.2	-3.65	0.0	-0.05
3	- .274	-40.5	- 1.52	77.0	+0.02	+ 9.0	+3.96	+3.3	+0.96
7	- .265	-43.7	- 0.09	66.7	-3.31	- 1.4	-2.59	0.0	-0.85
3	- .309	-41.5	- 3.32	73.7	+0.29	- 2.7	+0.81	0.0	+0.29
4	- .235	-20.1	- 1.54	80.5	+1.48	- 2.5	-0.86	0.0	-0.07
5	- .067	+12.2	+ 5.15	78.2	+1.12	+ 0.8	+0.58	0.0	+0.03
7	- .008	+18.1	- 0.81	61.3	+0.89	+ 2.6	-0.26	0.0	-0.09
5	+ .060	+15.9	+ 3.28	39.6	-2.13	+ 3.2	+1.31	0.0	+0.34
12	- .101	-11.3	- 3.94	42.2	-2.16	- 5.0	-1.79	- 0.8	-0.81

één dier tijdsbepalingen op slechts 2 sterren, 13 tijdsbepalingen op 4 sterren, alle overige op 3 sterren berusten. Het verschil in nauwkeurigheid toch, uit het verschillend aantal sterren voortvloeiende, is tegenover andere moeielijk in rekening te brengen oorzaken betrekkelijk gering. Overigens wordt de berekening niet belangrijk verzwaard door verschillende gewichten aan de bepalingen toe te kennen.

Ik maak nu gebruik van de volgende, door mij voor interpolatie naar minimale gekromdheid bewezen, stelling: de partiële afgeleide van de totale gekromdheid I_S eener rij standen naar een der standen S_q is gelijk aan het tweevoud van den sprong, die bestaat in de 3^{de} afgeleide der interpolatiekromme bij abscis q en ordinaat S_q . Derhalve volgens § 4:

$$\frac{\partial I_S}{\partial S_q} = 12 (e_n - e_m).$$

Deze betrekking pas ik toe voor de interpoleerende lijn na vereffening, bepaald door de standen L , en verkrijg dan

$$\frac{\partial I_L}{\partial L_q} = 12 (E_n - E_m) = 12 \Sigma_q,$$

indien elk stuk dier lijn wordt voorgesteld door eene vergelijking

$$L_t = L_q + G_q t + C_q t^2 + E_q t^3.$$

Ik heb in overeenstemming met de vorige mededeeling hoofdletters gekozen voor de interpolatie-coëfficiënten behoorende bij de van fouten bevrijde standen. Ook komt de beteekenis van Σ voor deze interpolatie geheel overeen met die van σ voor de interpolatie zonder vereffening gebruikt.

Voor $\frac{\partial I_L}{\partial L_q}$ kan $-\frac{\partial I_L}{\partial f_q}$ gezet worden, omdat $L_q + f_q$ onveranderlijk, dus ∂L_q gelijk $-\partial f_q$ is.

Na substitutie van $\frac{\partial I_L}{\partial f_q} = -12 \Sigma_q$ verkrijgt elke betrekking den vorm: $\Sigma_q = \frac{1}{12\lambda u^2} f_q$.

Het 1^e lid dezer betrekking is afhankelijk van x, y, z, u en de fouten f , en al deze onbekenden treden lineair daarin op:

$$\Sigma_q = \sigma_q - x\sigma_q^B - y\sigma_q^S - z\sigma_q^V - u\sigma_q^P - \sigma_q^f.$$

Met behulp van de benaderde waarden, verkregen voor x, y, z en u in de onderstelling $f=0$, kan de uitdrukking:

$$\psi_q = \sigma_q - x\sigma_q^B - y\sigma_q^S - z\sigma_q^V - u\sigma_q^P$$

becijferd worden. Ik voerde deze becijfering uit door voor de herleide klokgangen $Q - xQ^B - yQ^z - zQ^V - uQ^P$ de verschillen der opeenvolgende coëfficiënten van t^3 te bepalen naar de nieuwe interpolatiemethode.

Voor σ_q^f laat zich de volgende ontwikkeling uitwerken:

$$\sigma_q^f = \dots + K_q^o f_o + K_q^p f_p + K_q f_q + K_q^r f_r + K_q^s f_s + \dots$$

Ook is $\sigma_q^f = \frac{1}{12} \frac{\partial I_f}{\partial f_q}$ waar $I_f = \int_a^z \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right)^2 dt$.

Er volgt uit, dat

$$K_q^o = \frac{\partial \sigma_q^f}{\partial f_o} = \frac{1}{12} \frac{\partial^2 I_f}{\partial f_q \partial f_o} = \frac{\partial}{\partial f_q} \left(\frac{1}{12} \frac{\partial I_f}{\partial f_o} \right) = \frac{\partial \sigma_o^f}{\partial f_q} = K_o^q$$

dus, de coëfficiënt van f_o in de uitdrukking voor σ_q^f is gelijk aan den coëfficiënt van f_q in de uitdrukking voor σ_o^f .

Laten wij eens het geval beschouwen: $f_q = 1$ en alle andere $f = 0$; dan is $\sigma_q = K_q$, $\sigma_p = K_p^q$ of $= K_q^p$, $\sigma_r = K_r^q$ of $= K_q^r$, enz. De rij der grootheden σ voor dat geval levert dus ineens alle coëfficiënten op, die noodig zijn voor de ontwikkeling van σ_q^f . Naar dit denkbeeld liet ik interpoleren tusschen de getallen $\dots, 0, 0, 100, 0, 0 \dots$ evenveel malen als er tijdsbepalingen waren, het getal 100 telkens voortschuivende over één interval tusschen opeenvolgende tijdsbepalingen. Wordt deze becijfering met overleg ingericht, dan loopt zij zeer vlug af en de uitkomsten geven zelve contrôle op hare juistheid, want de coëfficiënten met twee indices worden 2 maal onafhankelijk van elkaar gevonden.

Hier is in bijzonderheden aangegeven, hoe ik voor eene tijdsbepaling de becijfering dier coëfficiënten heb ingericht.

Volgens § 2 mijner mededeeling „Over interpolatie enz.” van 10 Dec. 1902, heeft men de betrekkingen:

$$\sigma_q = e_n - e_m \quad e_n = \frac{g_q + g_r - 2 Q_n}{n^2} \quad e_m = \frac{g_p + g_q - 2 Q_m}{m^2}$$

die veroorloven de rij der σ te becijferen uit de rijen der g en der Q , als eenmaal de rij der g is gevonden.

Laatstgenoemde rij is bepaald door de vergelijkingen (C) van § 2 nl.

$$g_q = \frac{n Q_m + m Q_n}{m + n} + \frac{n (Q_m - g_p)}{2 (m + n)} + \frac{m (Q_n - g_r)}{2 (m + n)},$$

welke voor de grens-tijden a en z overgaan in:

$$g_a = Q_\mu + \frac{Q_\mu - g_b}{2} \quad g_z = Q_\nu + \frac{Q_\nu - g_y}{2}$$

waar μ en ν betrekking hebben op de grens-intervallen.

In het voorbeeld, dat ik hier geef, komt ook eene dier grensbetrekkingen te pas; het geldt voor de tijdsbepaling van 20 Januari 1903. De opeenvolgende tijdsintervallen met bijbehorende waarden van Q zijn hier:

$$\begin{array}{cccc|cccc} \infty & 3 & 3 & & 8 & 3 & 6 & 10 \dots (l, m, n, o) \\ & & 0 & + \frac{100}{3} & - \frac{100}{8} & 0 & 0 & 0 \dots (Q) \end{array}$$

De streep scheidt wat aan deze tijdsbepaling voorafging van, hetgeen op haar volgde.

Als 1^e benadering voor de grootheden g is aangenomen $\frac{n Q_m + m Q_n}{m + n}$; slechts drie dezer waarden verschillen van nul.

$$g_p = \frac{l}{m + l} Q_m \quad ; \quad g_q = Q_m - Q_n \quad ; \quad g_r = \frac{o}{n + o} Q_n$$

In ons voorbeeld zijn: $Q_m = + 33$; $Q_n = - 12$; $l = 3$, $m = 3$, $n = 8$, $o = 3$; derhalve $g_p = + 17$; $g_q = + 21$; $g_r = - 3$. Met deze drie getallen begint het onderstaande schema waarin de opeenvolgende correcties der g worden becijferd. (zie p. 315).

Er is hierbij een staat (II) (p. 316 e. v.) met de coëfficiënten 100 K uit de behandelde toepassing; achter elke rij zijn nog gevoegd de som van de vierkanten der coëfficiënten uit die rij en de bij de tijdsbepaling behorende waarde van 100 ψ in eerste en tweede benadering.

Elke foutenvergelijking is nu gebracht tot den vorm:

$$\dots K_q^o f_o + K_q^p f_p + (K_q + \mathfrak{R}) f_q + K_q^r f_r + K_q^s f_s + \dots = \psi_q$$

waar $\mathfrak{R} = \frac{1}{12 \lambda \mu^2}$ standvastig is voor alle vergelijkingen, en nader dient vastgesteld om tot oplossing te geraken.

In de betrekking:

$$\Sigma_q + \dots + K_q^o f_o + K_q^p f_p + K_q f_q + K_q^r f_r + K_q^s f_s + \dots = \psi_q$$

die onafhankelijk is van de hypothese omtrent de waarschijnlijkheid eener standencombinatie, beteekenen de grootheden f werkelijke waarnemingsfouten, wier middelbare waarde μ is. De fout van interpolatie φ_q bij het interpolateeren naar de kleinste gekromdheid, d. i. het verschil tusschen den waren stand L_q en den geïnterpoleerden stand voor hetzelfde tijdstip, is $\frac{\Sigma_q}{K_q}$. Uit de waarschijnlijkheidsuitdruk-

0	+17	+21	-3	0	(g. 1e benadering).
0	+33	-12	0	(Q).
+17	-12	+9	0	0	(afrekken schuin naar links).
3	3	-16	+33	-3	(intervallen).
0	0	+27	0	0	(afrekken schuin naar rechts).
-36	0	-128	+99	-18	intervallen \times getallen rechts boven.
0	0	-101	+99	-18	intervallen \times getallen links beneden.
-36	12	22	22	18	optellen.
8	+3	+5	-4	+1	som der intervallen, dubbel.
∞	.	3	3	8	3	6	10.	door deeling en teekenverandering.
.	.	-8	+3	+5	-4	+1	...	intervallen.
.	.	.	-12	+8	0	0	...	bovenste rij 2 plaatsen opgeschoven.
.	.	-24	+24	+15	-24	+10	...	herhaling dezer operaties zoolang
.	.	9	+12	+23	-24	+10	...	totdat de laatste correcties klein ge-
.	12	22	22	18	32	noeg zijn.
tweede correcties	.	-2	-1	-1	+1	0	...	
eerste correcties	.	-8	+5	-4	+1	0	...	
g in eerste benadering	.	0	+21	-3	0	0	...	
juiste getallen g	.	-10	+25	-8	+2	0	...	

deelen door 2
en teekenverand.

S T A A T II.

	Coëfficiënten voor de vereffening.										Som der vierkantē van de voorgaande getallen der rij.	100 ψ 1e Benad.	100 ψ 2e Benad.
			100 K_q^o	100 K_q^p	100 K_q	100 K_q^r	100 K_q^s						
1903	+	-	+	-	+	-	+	-	+				
Jan. 14					1.0	2.1	1.2	0.2	0.1	6.8	- 30	- 20	
» 17				2.1	5.1	3.5	0.9	0.4	0.0	43.1	+ 27	+ 4	
» 20			1.2	3.5	2.9	1.3	0.8	0.1	0.0	24.2	+ 30	+ 43	
» 28		0.1	0.9	1.3	2.5	2.4	0.6	0.2	0.1	14.6	- 80	- 79	
» 31	0.1	0.4	0.8	2.4	2.8	1.0	0.4	0.2	0.0	15.7	+ 59	+ 57	
Febr. 6	0.0	0.1	0.6	1.0	0.7	0.6	0.4	0.0	0.0	2.4	- 1	- 3	
» 16	0.0	0.2	0.4	0.6	1.9	1.9	0.5	0.2	0.1	8.0	- 9	+ 2	
» 19	0.1	0.2	0.4	1.9	2.3	0.9	0.4	0.3	0.1	10.3	- 15	- 25	
» 26	0.0	0.0	0.5	0.9	0.7	0.8	0.6	0.1	0.0	2.6	+ 61	+ 57	
Mrt. 6	0.0	0.2	0.4	0.8	2.8	3.8	1.8	0.3	0.1	26.9	- 301	- 320	
» 9	0.1	0.3	0.6	3.8	7.2	5.1	1.5	0.3	0.1	95.7	+ 543	+ 580	
» 12	0.1	0.2	1.8	5.1	5.6	2.7	0.8	0.2	0.0	68.3	- 380	- 405	
» 16	0.0	0.3	1.5	2.7	2.3	1.2	0.5	0.1	0.0	16.8	+ 121	+ 122	
» 22	0.0	0.2	0.8	1.2	1.5	1.0	0.3	0.1	0.0	5.5	- 48	- 40	
» 27	0.1	0.2	0.5	1.0	1.2	0.6	0.2	0.0	0.0	3.2	+ 21	+ 14	
Apr. 3	0.0	0.1	0.3	0.6	0.7	0.4	0.1	0.0	0.0	1.2	+ 14	+ 14	
» 10	0.0	0.1	0.2	0.4	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.5	- 14	- 12	
» 20	0.0	0.0	0.1	0.3	0.4	0.3	0.1	0.0	0.0	0.4	+ 9	+ 8	
» 27	0.0	0.0	0.1	0.4	0.4	0.2	0.2	0.1	0.0	0.4	- 21	- 17	
Mei 7	0.0	0.0	0.1	0.2	0.2	0.3	0.3	0.1	0.0	0.3	+ 20	+ 14	
» 19	0.0	0.0	0.1	0.3	2.1	3.2	1.6	0.2	0.1	17.4	- 3	+ 4	
» 22	0.0	0.1	0.3	3.2	6.6	4.5	1.2	0.3	0.1	76.2	+ 8	- 6	
» 25	0.0	0.1	1.6	4.5	4.4	2.1	0.8	0.2	0.0	47.6	- 42	- 27	
» 30	0.0	0.2	1.2	2.1	2.1	1.6	0.6	0.1	0.0	13.2	+ 70	+ 69	
Juni 4	0.1	0.3	0.8	1.6	2.3	1.5	0.4	0.2	0.1	11.2	- 45	- 60	
» 8	0.1	0.2	0.6	1.5	1.3	0.6	0.4	0.1	0.0	4.8	- 5	+ 7	
» 18	0.0	0.1	0.4	0.6	1.3	1.7	0.9	0.2	0.0	6.3	+ 51	+ 46	
» 22	0.0	0.2	0.4	1.7	3.3	2.7	1.1	0.3	0.0	22.4	- 82	- 80	
» 26	0.1	0.1	0.9	2.7	3.7	2.7	1.0	0.2	0.0	30.0	+ 41	+ 47	
» 30	0.0	0.2	1.1	2.7	3.5	2.2	0.6	0.1	0.0	26.0	+ 55	+ 48	
Juli 4	0.0	0.3	1.0	2.2	2.1	1.0	0.3	0.1	0.0	11.4	- 101	- 102	

		Coëfficiënten voor de vereffening.								Som der vierkanten van de voorgaande getallen der rij.	100 ψ 1e Benad.	100 ψ 2e Benad.	
		100 K_q^o	100 K_q^p	100 K_q	100 K_q^r	100 K_q^s							
1903-04		+	-	+	-	+	-	+	-	+			
Juli	10	0.0	0.2	0.6	1.0	0.9	0.5	0.2	0.0	0.0	2.5	+ 63	+ 67
»	17	0.0	0.1	0.3	0.5	0.6	0.3	0.4	0.0	0.0	0.8	- 4	- 5
»	25	0.0	0.1	0.2	0.3	0.3	0.2	0.4	0.0	0.0	0.3	- 28	- 30
Aug.	5	0.0	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.2	0.0	0.0	0.3	+ 50	+ 51
»	13	0.0	0.0	0.1	0.3	0.6	0.5	0.2	0.2	0.0	0.8	- 91	- 89
»	19	0.0	0.0	0.2	0.5	0.5	0.4	0.4	0.0	0.0	0.8	+ 83	+ 80
»	31	0.0	0.0	0.2	0.4	1.9	2.6	1.0	0.2	0.1	11.6	- 64	- 58
Sept.	3	0.0	0.2	0.3	2.6	4.2	2.2	0.6	0.3	0.1	29.6	+ 35	+ 26
»	7	0.0	0.0	1.0	2.2	1.7	0.9	0.5	0.1	0.0	9.8	- 6	0
»	15	0.0	0.2	0.6	0.9	1.6	1.6	0.7	0.2	0.0	7.0	+ 27	+ 25
»	19	0.1	0.3	0.5	1.6	2.5	1.8	0.7	0.1	0.0	13.0	- 2	- 2
»	24	0.1	0.1	0.7	1.8	2.5	1.7	0.4	0.1	0.0	13.1	- 58	- 56
»	28	0.0	0.2	0.7	1.7	1.7	0.7	0.2	0.1	0.1	6.9	+ 63	+ 61
Oct.	5	0.0	0.1	0.4	0.7	0.6	0.3	0.2	0.2	0.0	1.2	- 25	- 24
»	13	0.0	0.1	0.2	0.4	0.4	0.5	0.4	0.1	0.0	0.7	- 16	- 17
»	24	0.0	0.1	0.2	0.5	2.5	4.5	2.5	0.1	0.0	32.8	+ 249	+ 254
»	27	0.1	0.2	0.4	4.5	11.6	8.3	1.0	0.2	0.2	225.7	- 619	- 629
»	29	0.0	0.1	2.5	8.3	7.1	1.4	0.4	0.2	0.0	128.8	+ 448	+ 455
Nov.	4	0.0	0.1	1.1	1.4	0.6	0.5	0.3	0.0	0.0	3.8	- 60	- 64
»	16	0.0	0.2	0.4	0.5	1.5	1.5	0.5	0.3	0.0	5.2	- 8	+ 10
»	19	0.1	0.2	0.3	1.5	1.7	0.9	0.6	0.1	0.0	6.2	+ 6	- 17
»	29	0.0	0.0	0.5	0.9	2.0	2.0	0.8	0.4	0.1	9.9	+ 70	+ 97
Dec.	2	0.0	0.3	0.6	2.0	2.5	1.6	0.9	0.2	0.0	14.4	- 123	- 142
»	9	0.0	0.1	0.8	1.6	3.1	3.4	1.2	0.2	0.0	25.7	+ 146	+ 150
»	12	0.0	0.4	1.0	3.4	4.9	2.8	0.8	0.2	0.0	44.9	- 54	- 65
»	16	0.1	0.2	1.2	2.8	2.7	1.4	0.4	0.1	0.0	19.0	- 95	- 90
»	21	0.0	0.2	0.8	1.4	1.3	0.8	0.3	0.0		4.9	+ 101	+ 101
»	28	0.0	0.2	0.4	0.8	1.0	0.6	0.1			2.3	- 96	- 84
Jan.	2	0.0	0.1	0.3	0.6	0.5	0.1				0.8	+ 64	+ 55
»	14	0.0	0.0	0.1	0.1	0.0					0.0	- 9	- 12

king $e^{-\lambda I_L}$ laat zich de middelbare waarde van φ_q afleiden. Denken wij, dat alle ware standen onveranderd blijven behalve die ten tijde q . I_L zal dan minimaal zijn voor $I_q - \varphi_q$; voor eenigen anderen stand ten tijde q , die ε van deze geïnterpoleerde waarde verschilt, is I_L gelijk aan hare minimale waarde vermeerderd met $6 K_q \varepsilon^2$.

De waarschijnlijkheid der standencombinatie bevat derhalve den factor $e^{-6\lambda K_q \varepsilon^2}$, waaruit volgt, dat de middelbare waarde van ε of

ook die van φ_q , gelijk $\frac{1}{\sqrt{12\lambda K_q}}$ is. Dan is van $\varphi_q \sqrt{K_q}$ de middel-

bare waarde constant $= \frac{1}{\sqrt{12\lambda}}$; deze constante noem ik ν .

Van het eerste lid der bovenstaande betrekking is dus de 2^{de} macht der middelbare waarde:

$$K_q \nu^2 + \mu^2 [\dots K_q^{o^2} + K_q^{\mu^2} + K_q^2 + K_q^{r^2} + K_q^{s^2} + \dots].$$

Het 2^{de} lid ψ_q becijferd met benaderde x , y , z en u , is bekend. Ter bepaling van μ^2 bezat ik geene rechtstreeksche gegevens. Zij bestaat uit een deel dat onafhankelijk is van het aantal sterren der tijdsbepaling en een ander, dat met dit aantal omgekeerd evenredig is. Het laatste deel bedraagt voor waarnemer BAKHUYZEN en voor ééne ster omstreeks 900 en voor waarnemer PANNEKOEK is het nog iets kleiner. Ik heb eene te groote waarde voor μ^2 willen vermijden, om niet de regelmatigheid van het uurwerk ten koste van de nauwkeurigheid der waarnemingen te overdrijven, en stelde daarom voor elk dier aandeelen van μ^2 300, tezamen $\mu^2 = 600$.

Krachtens het voorafgaande is $\nu^2 : \mu^2 = \mathfrak{R}$ en zal de onderstaande uitdrukking tot middelbare waarde hebben μ .

$$\psi_q : \sqrt{K_q \mathfrak{R} + \dots K_q^{o^2} + K_q^{\mu^2} + K_q^2 + K_q^{r^2} + K_q^{s^2} + \dots}$$

Bij verschillende onderstellingen voor \mathfrak{R} liet zich hieruit de bijbehorende waarde μ^2 berekenen. Ik verkreeg, dat bij $\mathfrak{R} = 1/50$, behoorde $\mu^2 = 592$ en heb daarom deze verhouding in de verdere becijfering behouden.

Aan tweëerlei toets onderwierp ik de hypothetische uitdrukking der waarschijnlijkheid.

Ten eerste onderzocht ik of ν^2 inderdaad gelijk mocht worden geacht voor de verschillende intervallen van het behandelde tijdsbestek. Ik heb daartoe de tijdsbepalingen naar hare coëfficiënten K_q gerangschikt en uit de helft met kleinste K_q afzonderlijk afgeleid, welke waarde μ^2 bij $\mathfrak{R} = 1/50$ behoort. De uitkomst was $\mu^2 = 591$.

Ten tweede onderzocht ik of zelfs voor intervallen van langeren duur de standvastigheid van ν^2 behouden blijft. In dat geval liet

v^2 zich afleiden uit de totale gekromdheid I_L der ware klokstanden.

Stellen wij ons voor, dat uit de rij dier standen er eene wegvalt en deze φ_q van de geïnterpoleerde waarde afwijkt, dan vermindert I_L met $6 K_q \varphi_q^2$. Men kan nu uit de 61 tijdsbepalingen na elkaar 59 maal er eene laten uitvallen en daarmede telkens de totale gekromdheid der overblijvende verminderen met eene uitdrukking $6 K \varphi^2$. Ten slotte is I_L nul, en I_L kan dus beschouwd worden oorspronkelijk te zijn opgebouwd uit 59 stukken, ter gemiddelde waarde elk van $6 v^2$. De gemiddelde waarde van I_L is dus $354 v^2$.

Uit de herleide gangen $Q-x Q^B-y Q^z-z Q^V-u Q^P$ berekende ik de totale gekromdheid der standen $L+f$ en verkreeg $I_{L+f}=8756$.

In het vorig opstel over deze interpolatie is aangetoond, dat $I_{L+f}=I_L+I_f$, als er tusschen de fouten f en de I -standen geen afhankelijkheid bestaat. Voor de daar afgeleide formule

$$I_f = \sum 6 \epsilon_n (f'_q - f'_r) \text{ zet ik nu } I_f = \sum 6 f'_q (\epsilon_n - \epsilon_m) = \sum 6 f'_q \sigma_{qf}$$

en vervang σ_q^f door hare uitdrukking in de fouten f .

Zoo ontstaat:

$$I_f = \sum 6 f_q [\dots K_q^o f_o + K_q^p f_p + K_q f_q + K_q^r f_r + K_r^s f_s \dots]$$

In het 2^{de} lid komen onder het somteeken vele producten van ware fouten voor. De middelwaarde van zulke termen is nul. Ik laat ze weg, vervang het vierkant van elke fout door μ^2 , en vind als gemiddelde waarde voor I_f $6 \mu^2 \sum K_q$.

De becijfering van $\sum K_q$ leverde 1.39 op.

Langs dezen weg is tusschen v en μ de onderstaande betrekking gevonden:

$$8756 = 354 v^2 + 8,34 \mu^2$$

uit welke bij $\mu^2 = 600$ volgt: $v^2 = 11$, een uitkomst met de eerst gevonden waarde voor \mathfrak{K} in goede overeenstemming.

De oplossing van het systeem der vergelijkingen, door hetwelk de meestwaarschijnlijke fouten met elkaar samenhangen, laat zich vrij spoedig uitvoeren, door als eerste benadering te gebruiken

$$f'_q = 0.45 \frac{\Psi_q}{K_q + \mathfrak{K}}. \text{ Nadat dan door substitutie dezer waarden werd}$$

gevonden, dat het 2^e lid nog eene correctie $\Delta_1 \psi$ vereischte, gebruikte

$$\text{ik } 0.80 \frac{\Delta_1 \Psi_q}{K_q + \mathfrak{K}} \text{ als correctie op de eerste benadering.}$$

Naar de empirische formule

$$f'_q = \frac{0.45 \Psi_q + 0.80 \Delta_1 \Psi_q}{K_q + \mathfrak{K}}$$

berekend, bleken de fouten bij substitutie reeds goed te voldoen.

De laatste afwijkingen nam ik, waar noodig, weg, door nog $\frac{\Delta_2 \psi_q}{K_q + \mathfrak{K}}$ toe te voegen aan de fouten.

Ten slotte nog een staat (III), die de uitkomsten der vereffening bevat welke noodig zijn ter berekening van den klokstand op een willekeurig tusschen de tijdsbepalingen gelegen tijdstip. Dit tijdstip zij $q + T$, het laatstvóórgaande tijdstip eener tijdwaarneming q ; laat verder zijn over het tijdsinterval van q tot $q + T$:

de gemiddelde luchtdruk, in Mm. kwik van 0° C. uitgedrukt $760 + B_T$

de gemiddelde temperatuur in Celsiusgraden $10^\circ + \mathfrak{D}_T$

het gemiddelde temperatuursverschil in Celsiusgraden V_T

zoo geschiedt de becijfering van den klokstand S_{q+T} naar onderstaande formule:

$$S_{q+T} = S_q - f_q + \frac{T}{1000} (G_q + 15,4B_T - 26,4\mathfrak{D}_T + 318V_T + C_qT + E_nT^2).$$

De waarden van S , f , G , C , E , die optreden in deze formule, zijn te ontleenen aan den bovenvermelden staat.

De 5^{de} kolom van dien staat bevat de gemiddelde klokgangen voor elk tijdsinterval tusschen 2 opeenvolgende tijdsbepalingen na de herleiding en vereffening. Aan deze laat zich de standvastigheid van gang van het uurwerk beoordeelen. Ik moet hierbij opmerken, dat de kleine ongelijkheid van jaarlijksche periode, in die getallen aanwezig, hoogstwaarschijnlijk te wijten is aan eene kleine onjuistheid in den langs den beschreven weg verkregen temperatuurscoëfficiënt.

In de laatste kolom van staat (III) bevinden zich de grootheden Σ , verschillen der opeenvolgende E . Zij geven eene eenvoudige contrôle op de vereffeningssrekening, omdat zij gelijk moeten zijn aan de fouten f vermenigvuldigd met 20, of ook $f_q = \Sigma_q : 20$. De aangenomen rij van fouten voldoet aan deze betrekking redelijk wel, als men hierbij afwijkingen toelaat, die in duizendsten der tijdsekunde, m noch n overschrijden, dus in de gemiddelde dagelijksche gangen nog niet 0^s,001 verandering geven.

S T A A T III.

Datum	Waarn.	Klokstanden tot B herleid S	Fouten volgens de Vereffe- ning. f	Veref- fende Dag- gangen. Q _L	G	C	E	Σ
1903					—			
Jan. 14	P	— 3 ^m 28.222	— 0 ^s .008	— 0 ^s .173	171	0.0		— 0.14
„ 17	B	27.561	+ .004	— .180	176	— 1.3	— 0.14	+ 0.12
„ 20	P	27.153	+ .010	— .188	184	— 1.5	— 0.02	+ 0.14
„ 28	P	26.864	— .014	— .180	184	+ 1.5	+ 0.12	— 0.21
„ 31	B	26.744	+ .006	— .175	177	+ 0.7	— 0.09	+ 0.04
Febr. 6	P	26.921	+ .004	— .174	175	— 0.2	+ 0.02	+ 0.07
„ 16	B	26.710	— .004	— .170	171	+ 0.5	— 0.06	— 0.08
„ 19	P	26.189	— .001	— .171	170	0.0	— 0.04	+ 0.02
„ 26	B	26.690	+ .005	— .176	174	— 0.8	+ 0.08	+ 0.12
Mrt. 6	B	28.568	— .029	— .174	173	+ 1.0	— 0.42	— 0.50
„ 9	P	28.539	+ .038	— .184	179	— 2.8	+ 0.38	+ 0.80
„ 12	B	28.757	— .021	— .183	186	+ 0.6	+ 0.02	— 0.36
„ 16	B	29.225	.000	— .174	180	+ 0.9	0.00	— 0.02
„ 22	B	29.475	— .0.4	— .166	168	+ 0.9	— 0.09	— 0.09
„ 27	P	30.449	+ .002	— .172	166	— 0.5	— 0.04	+ 0.05
Apr. 3	B	31.453	+ .007	— .186	180	— 1.4	+ 0.08	+ 0.12
„ 10	B	32.506	— .004	— .186	189	+ 0.2	+ 0.01	— 0.07
„ 20	B	33.565	+ .001	— .178	183	+ 0.4	+ 0.03	+ 0.02
„ 27	P	35.575	— .007	— .169	172	+ 1.1	— 0.09	— 0.12
Mei 7	B	38.051	+ .007	— .189	175	— 1.6	+ 0.04	+ 0.13
„ 19	P	40.326	+ .002	— .198	197	— 0.3	+ 0.03	— 0.01
„ 22	B	40.667	— .004	— .199	198	0.0	— 0.07	— 0.10
„ 25	P	40.794	— .002	— .205	200	— 0.6	— 0.05	+ 0.02
„ 30	P	41.746	+ .014	— .213	211	— 1.4	+ 0.18	+ 0.24
Juni 4	P	42.872	— .010	— .205	210	+ 1.4	— 0.02	— 0.21
„ 8	P	43.427	— .002	— .194	200	+ 1.2	— 0.06	— 0.04
„ 18	B	46.570	+ .008	— .194	194	— 0.5	+ 0.11	+ 0.17
„ 22	P	47.654	— .012	— .192	193	+ 0.8	— 0.14	— 0.25
„ 26	P	48.265	+ .009	— .196	194	— 0.9	+ 0.06	+ 0.20
„ 30	P	48.896	+ .006	— .196	198	— 0.2	+ 0.15	+ 0.09

Datum	Waarn.	Klokstanden tot B herleid <i>S</i>	Fouten volgens de Vereffe- ning <i>f</i>	Veref- fende Dag- gangen. Q_L	G	C	E	Σ
1903-04					—			
Juli 4	P	— 3 ^m 49.732	— 0 ^s .020	— 0 ^s .190	192	+ 1.6	— 0.2 ^y	— 0.37
„ 10	B	51.220	+ .016	— .209	196	— 2.3	+ 0.07	+ 0.29
„ 17	B	53.488	+ .002	— .219	219	— 0.9	+ 0.12	+ 0.05
„ 25	B	56.236	— .014	— .204	212	+ 1.9	— 0.11	— 0.23
Aug. 5	B	— 4 ^m 0.408	+ .015	— .212	210	— 1.8	+ 0.19	+ 0.30
„ 13	B	3.115	— .026	— .198	202	+ 2.7	— 0.32	— 0.51
„ 19	B	5.734	+ .024	— .221	206	— 3.1	+ 0.15	+ 0.47
„ 31	P	10.082	— .012	— .209	215	+ 2.3	— 0.10	— 0.25
Sept. 3	P	10.946	— .001	— .200	204	+ 1.4	— 0.12	— 0.02
„ 7	P	12.029	+ .005	— .203	198	— 0.1	— 0.07	+ 0.05
„ 15	P	14.936	+ .008	— .216	212	— 1.7	+ 0.18	+ 0.25
„ 19	B	15.752	— .003	— .214	217	+ 0.4	+ 0.05	— 0.13
„ 24	B	16.795	— .010	— .208	210	+ 1.1	— 0.16	— 0.21
„ 28	B	17.744	+ .013	— .209	209	— 0.8	+ 0.11	+ 0.27
Oct. 5	P	20.328	— .009	— .196	204	+ 1.5	— 0.06	— 0.17
„ 13	P	23.762	+ .001	— .198	192	+ 0.1	— 0.06	0.00
„ 24	B	27.460	+ .020	— .214	212	— 1.9	+ 0.34	+ 0.40
„ 27	P	28.771	— .024	— .212	213	+ 1.2	— 0.35	— 0.69
„ 29	P	29.561	+ .021	— .215	212	— 0.9	+ 0.07	+ 0.42
Nov. 4	P	30.720	— .004	— .207	215	+ 0.4	+ 0.02	— 0.05
„ 16	P	32.482	— .004	— .192	195	+ 1.3	— 0.11	— 0.13
„ 19	B	32.918	+ .002	— .188	190	+ 0.3	— 0.02	+ 0.09
„ 29	B	35.348	+ .011	— .187	187	— 0.2	+ 0.14	+ 0.16
Dec. 2	P	36.141	— .020	— .186	185	+ 1.1	— 0.16	— 0.30
„ 9	P	37.998	+ .026	— .199	195	— 2.3	+ 0.27	+ 0.43
„ 12	P	38.926	— .005	— .197	201	+ 0.1	+ 0.22	— 0.05
„ 16	P	39.866	— .021	— .182	190	+ 2.8	— 0.27	— 0.49
„ 21	P	40.201	+ .019	— .183	181	— 1.2	+ 0.12	+ 0.39
„ 28	P	40.254	— .017	— .178	179	+ 1.3	— 0.20	— 0.32
Jan. 2	P	39.953	+ .015	— .195	182	— 1.7	+ 0.05	+ 0.25
„ 14	B	41.200	— .005		201	0.0		— 0.05

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N^o. 92 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. C. ZAKRZEWSKI, „*Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van chloormethyl en koolzuur.*” (Vervolg).

(Deze Mededeeling zal in het volgende Zittingsverslag worden opgenomen).

Wiskunde. De Heer SCHOUTE biedt voor de Werken der Akademie eene verhandeling aan van den Heer A. TOXOPEUS „*Het aantal kwadratische hyperruimten in de ruimte van vijf afmetingen.*”

De Voorzitter verzoekt de Heeren SCHOUTE en CARDINAAL daarover in de volgende vergadering verslag uit te brengen.

Voor de Boekerij der Akademie worden aangeboden :

a. door den Heer MARTIN de dissertatie van den Heer H. G. JONKER: „*Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland.*”

b. door den Heer HOLLEMAN de dissertatie van den Heer J. REIDING: „*Over de nitratie van M en O-Dichloorbenzol.*”

c. door den Heer SCHOUTE de dissertatie van den Heer G. A. SCHÖNFELD: „*De gewrongen kromme van den vierden graad in de ruimte met vier afmetingen.*”

d. door den Heer HAMBURGER: „*Osmotischer Druck und Ionenlehre in den medicinischen Wissenschaften zugleich Lehrbuch physikalisch-chemischer Methoden.*” Band III.

e. door den Heer VAN BEMMELEN namens den Heer BAKHUIS ROOZBOOM: „*Die heterogenen Gleichgewichte vom Standpunkte der Phasenlehre.*” Heft 2. Systeme aus zwei Komponenten. Teil I.

De vergadering wordt gesloten.

E R R A T A .

blz. 73 laatste formule

$$\text{staat } t \geq 3, 1 - \frac{1}{\log^2 t} < \sigma \leq 2$$

$$\text{lees } t \geq 3, 1 - \frac{1}{\log^2 t} \leq \sigma \leq 2.$$

„ 209 reg. 11 v. b. lees 1297.01 in plaats van 1297.91.

„ 210 eerste regel vóór de formule te lezen: „in eerste benadering en wanneer ook B^2 verwaarloosd wordt, (zie voor de correctie en verdere benadering § 5)”

„ 211 reg. 13 v. b. lees T_k^2 in plaats van T_k .

(6 October 1904).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 29 October 1904.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN,
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

Ingekomen stukken, p. 326.

Verslag van de Heeren SCHOUTE en CARDINAAL over eene verhandeling van den Heer A. TOXOPEUS: „De aantallen kwadratische hyperruimten in de ruimte van vijf afmetingen,” p. 326.

Mej. T. TAMMES: „Over den invloed van de voeding op de fluctueerende variabiliteit bij eenige planten”. (Aangeboden door de Heeren MOLL en WENT), p. 328. (Met één plaat).

J. W. MOLL: Aanbieding der dissertatie van den Heer B. SIJPKENS: „Over de kerndeeling bij *Fritillaria imperialis* L.”, p. 343.

J. M. VAN BEMMELEN: „Over de samenstelling van het verweeringssilikaat in de bouwbare aarde”, p. 351.

S. L. VAN OSS: „De regelmatige stervormige 600 cel”. (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en W. KAPTEYN), p. 354.

JAN DE VRIES: „Over een door kegelsneden gevormde congruentie van de tweede orde en tweede klasse”, p. 355.

W. H. JULIUS: „Dispersiebanden in de spectra van δ Orionis en Novae Persei”, p. 359.

J. M. JANSE: „Onderzoekingen over polariteit en orgaanvorming bij *Caulerpa prolifera*”. (Aangeboden door de Heeren HUGO DE VRIES en WENT), p. 364.

H. KAMERLINGH ONNES en C. ZAKRZEWSKY: „Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van chloormethyl en koolzuur”. (Vervolg), p. 380.

Aanbieding van Boekgeschenken, p. 385.

Errata, p. 386.

Het Proces-Verbaal der vorige Vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van den Heer KOSTER, dat hij door ongesteldheid verhinderd is de vergadering bij te wonen, en tevens dat hij wegens het bereiken van den 70-jarigen leeftijd tot de rustende leden overgaat.

2°. Schrijven van den Heer P. DROSTE namens administrateurs van het P. W. KORTHALS-fonds, mededeelende, dat het voorstel door de Akademie gedaan om de dit jaar beschikbare f' 600.— uit het P. W. KORTHALS-fonds aan te wenden ten behoeve van den Heer Dr. M. TREUB, Directeur van 's Lands Plantentuin te Buitenzorg, voor de door Dr. J. P. LOTSJY te Leiden bewerkte uitgave der *Monocotylen van de Flora van Buitenzorg*, is goedgekeurd.

3°. Schrijven van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 14 October 1904 waarin bericht wordt, dat er geen bezwaar bestaat, dat de Heer GOEDHART in het laatst van het jaar 1905 naar Buitenzorg vertrekt.

4°. Circulaire van de v. KUFFNER'sche Sternwarte te Weenen „Ueber neue Refraktionstabellen”. Ter inzage gelegd van de leden.

Voorts komt aan de orde een missive van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken omtrent een botanisch congres te Weenen. In de vorige vergadering is besloten daarover het advies der botanische leden in te winnen. In overeenstemming met dat advies wordt besloten Z. Exc. mede te deelen, dat wegens den geruimen tijd, die nog tot dit congres zal verlopen, op het oogenblik moeilijk een definitief antwoord kan gegeven worden, maar dat de Akademie over eenigen tijd gaarne daaromtrent verdere mededeeling zal doen.

De Voorzitter wenscht den Heer HUGO DE VRIES, die na zijne reis naar Amerika voor het eerst de vergadering van de Afdeeling bijwoont, geluk met zijn behouden terugkomst en dankt hem voor de wijze, waarop hij de eer der Nederlandsche wetenschap en van onze Afdeeling heeft hoog gehouden en voor de nadere banden door hem tusschen de beoefenaars der botanie in Amerika en Nederland ten bate van de wetenschap aangekoopt.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE brengt ook namens den Heer CARDINAAL het volgende verslag uit over de verhandeling van Dr. A. TOXOPEUS, getiteld: „*De aantallen kwadratische hyper-ruimten in de ruimte van vijf afmetingen.*”

In het jaar 1900 had de eerste ondergeteekende de eer aan de Akademie een verhandeling aan te bieden, waarin de aantallen der kwadratische gebogen ruimten, die in de vierdimensionale ruimte

aan veertien enkelvoudige voorwaarden voldoen, rechtstreeks worden bepaald.

Naar aanleiding van dit onderzoek koos de Heer TOXOPEUS, toen nog doctorandus in wis- en natuurkunde, de rechtstreeksche bepaling van de aantallen der kwadratische gebogen ruimten van vier afmetingen, die in de vijfdimensionale ruimte aan twintig enkelvoudige voorwaarden voldoen, tot onderwerp zijner dissertatie; op dit onderwerp promoveerde hij cum laude in December 1900.

Zooals te verwachten was, bleek bij de samenstelling van dit proefschrift ten duidelijkste, dat het onderzoek voor de ruimte van vijf afmetingen veel moeilijker is dan dat voor de vierdimensionale ruimte. Om slechts een paar voorbeelden te noemen halen we hier aan, dat het aantal 22 der bij de lineaire elementen der ruimte van vier afmetingen in te voeren symbolen voor de vijfdimensionale ruimte tot 58 toeneemt, terwijl het aantal der te bepalen getallen van ruim 8000 tot ruim een half millioen klimt. Bovendien zijn de aantallen in de vierdimensionale ruimte kleiner dan 40.000, terwijl ze in de ruimte van vijf afmetingen dertig millioen overtreffen kunnen. En met het toenemen van den omvang namen ook de theoretische moeilijkheden toe. Geen wonder derhalve, dat het den Heer TOXOPEUS toegestaan werd zijn dissertatie tot een op zichzelf staanden voorarbeid van zijn onderzoek te beperken, onder den titel „Inleiding tot, enz.”

Nu de geheele arbeid na veel cijferens is voltooid en de verlangde aantallen zijn verkregen, is het wenschelijk, dat de volledige uitkomsten zoo beknopt mogelijk worden gepubliceerd. Zij werden daartoe door den schrijver in verkorten vorm opgesteld en bevatten, wat de afleiding aangaat, slechts het allernoodzakelijkste. Toch zal de toelichting, die de groote lijst der uitkomsten voorafgaat, iedereen, die het SCHUBERT'sche beginsel van het behoud van het aantal weet te hanteeren, in staat stellen desverlangd den weg, die tot de uitkomsten leidde, geheel na te sporen. En dit is, wijl het hoofdzakelijk om de uitkomsten te doen is, voor het voorgestelde doel voldoende.

De ondergeteekenden meenen, dat het werk van den Heer TOXOPEUS blijk geeft van veel talent en buitengewoon veel volharding, weshalve het de eer in de werken der Akademie opgenomen te worden ten volle verdient.

Groningen, 22 October 1904.

P. H. SCHOOTE.

Delft, 28 October 1904.

J. CARDINAAL.

Plantenkunde. — De Heer MOLL biedt eene mededeeling aan namens Mejuffrouw TINE TAMMES: „*Over den invloed van de voeding op de fluctueerende variabiliteit bij eenige planten.*”

(Mede aangeboden namens den Heer WENT).

't Is algemeen en lang bekend, dat de voeding van invloed is op de mate van ontwikkeling der plant. Ook weet men, dat sommige deelen daarvoor veel gevoeliger zijn dan andere, dat b.v. de grootte van stengel en blad door goede of slechte voeding veel meer gewijzigd wordt dan het aantal meeldraden. Toch valt het niet te loochenen, dat onze kennis op dat punt, in 't bijzonder wat het quantitative der verschillen betreft, nog zeer oppervlakkig is. Sinds echter de statistische methode van onderzoek ook in de botanie is ingevoerd is de vroeger vage en weinig omschreven vraag naar den invloed van de voeding scherper geformuleerd, en zijn de verkregen resultaten gemakkelijk en nauwkeurig weer te geven.

Ofschoon het aantal statistische onderzoekingen over kenmerken van planten, in de laatste jaren gedaan, vrij groot is, is de invloed van de voeding op de waarde der kenmerken niet dikwijls onderzocht.

DE VRIES¹⁾ deed een uitvoerig onderzoek in die richting bij *Othonna crassifolia*. Hij vergeleek planten, die in een kas in potten met zeer drogen grond gekweekt waren, met tuinculturen, en vond, dat bij de kasplanten de mediane van de lengte der bladeren slechts ongeveer de helft van die bij de vollegrondsplanten bedroeg, terwijl het gemiddelde aantal lintbloemen per hoofdje bij de eerste 12, bij de laatste 13 was. Verder beschrijft DE VRIES in zijn werk „die Mutationstheorie”²⁾ proeven en waarnemingen, die, hoewel hoofdzakelijk gedaan met het doel om den invloed van voeding en dien van selectie met elkaar te vergelijken, toch ook onze kennis omtrent den invloed van de voedingsomstandigheden op zich zelf vermeerderen. Hij onderzocht den invloed van deze beide factoren op de vruchtlengte van *Oenothera Lamarckiana* en *Oenothera rubrinervis*, op het aantal schermstralen van *Anethum graveolens* en *Coriandrum sativum*, en op het aantal lintbloemen van *Chrysanthemum segetum*, *Coreopsis tinctoria*, *Bidens grandiflora* en *Madia elegans*. Uit zijn waarnemingen besluit DE VRIES, dat voeding en selectie in denzelfden zin werken, en door sterkere voeding en positieve selectie beide de mediane waarde van een kenmerk verhoogd wordt. Ook neemt hij in 't algemeen waar, dat de variabiliteit der kenmerken grooter wordt, wan-

1) HUGO DE VRIES, *Othonna crassifolia*, Bot. Jaarb. Dodonaea, 1900, p. 20.

2) HUGO DE VRIES, *Die Mutationstheorie*. Bd. I, p. 368.

neer voeding en selectie in tegengestelde richting werken, dus wanneer, zooals bij zijn proeven, krachtige voeding en negatieve selectie samengaan.

Ook uit het onderzoek van REINÖHL¹⁾ over de variabiliteit van het aantal meeldraden van *Stellaria media* blijkt, dat bij goede voeding de mediane van dit kenmerk een hooger waarde bezit dan bij slechte. Bovendien vindt REINÖHL, dat de variabiliteitsindex, die een maat is voor de variabiliteit, onder ongunstige voedingsomstandigheden kleiner wordt.

WEISSE²⁾ onderzocht den invloed van de voeding op verschillende kenmerken van *Helianthus annuus* en vond, dat het arithmetisch gemiddelde voor alle onderzochte kenmerken bij planten op zandgrond gekweekt, kleiner is dan bij goed gevoede planten. Zijn getallen, voor iedere cultuur ongeveer veertig, zijn evenwel te klein om hieruit de constanten voor mediane en variabiliteit te kunnen berekenen ten einde daaruit conclusies te trekken.

MAC LEOD³⁾ nam proeven om den invloed van de voeding op het aantal randbloemen en het aantal schijfbloemen van de *Centaurea Cyanus* te leeren kennen en vond, dat dit aantal kleiner is naarmate de voedingsomstandigheden ongunstiger zijn. Verder onderzocht hij den invloed van goede en slechte voeding op het aantal stempelstralen van *Papaver Rhoeas coccineum aureum*. Hij kwam hierbij tot het resultaat, dat bij de slecht gevoede planten de mediane aanmerkelijk kleiner was, maar dat door de slechte voeding de variabiliteit van het kenmerk verhoogd werd.

Uit dit korte overzicht blijkt, dat nog slechts voor zeer weinige gevallen de quantitative verandering, die de mediane door verschillende voeding ondergaat, bepaald is. Het is echter zeer wenschelijk het aantal van deze waarnemingen uit te breiden, en vooral is het van belang den invloed van de voeding op de variabiliteit voor meerdere kenmerken en planten te leeren kennen. Er doen zich hierbij twee vragen voor, in de eerste plaats of die invloed op de verschillende deelen van dezelfde plant verschillend is, in aan-

1) FRIEDRICH REINÖHL, Die Variation im Andröceum der *Stellaria media* Cyr. Bot. Zeit. 1903. S. 159.

2) ARTHUR WEISSE, Die Zahl der Randblüthen an Compositenköpfchen in ihrer Beziehung zur Blattstellung und Ernährung. Jahrb. f. wiss. Bot. Bd. 30, 1897, p. 453.

3) J. MAC LEOD, Over de veranderlijkheid van het aantal randbloemen en het aantal schijfbloemen bij de Korenbloem (*Centaurea Cyanus*). Hand. v. h. 3de Vlaamsch Nat. en Geneesk. Congres, Sept. 1899, p. 61 en Over de veranderlijkheid van het aantal stempelstralen bij *Papaver*. Hand. v. h. 4de Vlaamsch Nat. en Geneesk. Congres, Sept. 1900, p. 11.

sluiting aan het resultaat van VERSCHAFFELT¹⁾, dat de variabiliteit zelve van de verschillende deelen eener plant aanmerkelijk verschilt, en ten tweede of slechte voeding voor alle kenmerken een vermeerdering, voor alle een vermindering, of voor sommige kenmerken een vermeerdering voor andere een vermindering van de variabiliteit ten gevolge heeft.

Voor het beantwoorden van deze vragen heb ik in den zomer van 1903 in den Hortus Botanicus te Groningen eenige cultuurproeven genomen waarvan ik de beschrijving en resultaten hier laat volgen.

Voor de culturen werden in April vier bedden van 2 M. breedte en 6 M. lengte in orde gebracht. Twee daarvan werden met hoornmeel bemest, ongeveer $\frac{1}{2}$ K.G. per M². De twee andere bedden werden $\frac{1}{2}$ M. uitgegraven en aangevuld met zeer schralen, leemachtigen zandgrond afkomstig van Harendermolen, een zandstreek in de nabijheid van Groningen. Midden April werden op één bed, dat bemest was, en op één met zandgrond gelijke hoeveelheden zaad gezaaid van *Iberis amara* Linn., afkomstig van HAAGE en SCHMIDT te Erfurt, *Ranunculus arvensis* Linn., afkomstig van verschillende botanische tuinen en gemengd, en *Malva vulgaris* Fr. (*Malva rotundifolia* Linn.), afkomstig van den Hortus Botanicus te Leiden. De zaden van drie andere soorten, die tegelijkertijd op de twee overige bedden gezaaid werden, kwamen in onvoldoende hoeveelheid op, zoodat midden Juni besloten werd hier alles uit te wieden en opnieuw te zaaien. Hiervoor werd nu genomen *Anethum graveolens* Linn., uit den handel, *Scandix Pecten-Veneris* Linn. en *Cardamine hirsuta* Linn., beide afkomstig van verschillende botanische tuinen; drie soorten waarvan te verwachten was, dat ze, zoo laat in den zomer gezaaid, nog wel tot volle ontwikkeling zouden komen. Dit zaad werd in kiemschotels gezaaid, van elke soort een deel in schrale en een deel in vruchtbare aarde, afkomstig van de bedden in den tuin. In den loop van de volgende dagen werd een deel van de kiemplanten in potjes met schrale en met bemeste aarde geplaatst, terwijl er nauwkeurig op gelet werd, dat uit de kiemplanten geen keuze werd gedaan. Midden Juli werden de jonge planten op de bedden geplaatst, op zoo grooten afstand van elkaar, dat iedere plant zich vrij kon ontwikkelen.

Reeds in het begin viel bij de drie soorten, die in den tuin waren uitgezaaid, een aanmerkelijk verschil tusschen de beide culturen waar

¹⁾ ED. VERSCHAFFELT, Ueber graduelle Variabilität von pflanzlichen Eigenschaften. Ber. d. d. bot. Gesellsch. Bd. XII, 1894, S. 350.

te nemen. Het zaad op het bed, met hoornmeel bemest, kwam spoediger op en de plantjes ontwikkelden zich krachtiger. Bij *Malva vulgaris* was aanvankelijk het verschil tusschen de planten van de beide bedden zeer groot. Die op den vruchtbaren grond vertoonden reeds overvloedig bladeren en bloemen, toen de planten op den zandgrond nog slechts weinige en kleine bladeren hadden gevormd. Dit verschil bleef tot ongeveer begin Juli bestaan, toen begonnen ook de planten op den schralen grond zich plotseling krachtig te ontwikkelen, zoodat in den herfst bijna geen verschil meer viel waar te nemen. De reden van deze late, zeer snelle ontwikkeling kwam bij het uitgraven van de planten aan het licht. Het bleek namelijk, dat enkele der krachtigste wortels door de zandlaag heen de daaronder liggende aardlaag bereikt hadden. Zoolang dus de planten alleen het voedsel uit den zandgrond kregen, bleven ze klein en achterlijk, maar toen de wortels tot den vruchtbaren grond waren doorgedrongen, ontwikkelden ze zich nog krachtig en met groote snelheid. Ook bij *Iberis amara* bleken de wortels de onderliggende laag bereikt te hebben, maar in veel geringere mate. Slechts met moeite kon men hier de dunne uiteinden van de hoofdwortels tot in den ondergrond vervolgen, terwijl bij *Malva vulgaris* de wortels, daar, waar ze uit den zandgrond in de onderlaag overgingen, krachtig waren en in deze laatste minstens eenige decimeters waren doorgedrongen. Van *Ranunculus arvensis* hadden slechts zeer weinige wortels met hun top den ondergrond bereikt, hetzelfde was het geval bij *Scandix Pecten-Veneris* en *Anethum graveolens*, terwijl, voor zoover ik kon nagaan, de wortels van *Cardamine hirsuta* tot den zandgrond beperkt bleven.

Hoewel dus bij de meeste der onderzochte soorten de voedingsstoffen der planten niet uitsluitend uit den zandgrond afkomstig waren, verkeerden toch alle in vergelijking met de planten op den bemesten grond in ongunstiger voedingsomstandigheden, en zullen de proeven ons dus de gevolgen van het verschil van deze voeding leeren.

Voor het onderzoek koos ik eenige kenmerken uit, die gemakkelijk in maat of getal zijn uit te drukken, en zorgde er voor, dat de bepaling daarvan bij beide culturen in denzelfden tijd geschiedde, terwijl steeds van beide overeenkomstige plantendeelen werden genomen.

Op deze wijze bepaalde ik van *Iberis amara* in de eerste plaats de bladlengte. Hiertoe werd in Juli de lengte van de vijf oudste, toen reeds volwassen bladeren der plant gemeten. Verder werd in den herfst, nadat de planten uitgegraven waren, de lengte van de plant bepaald, van de basis tot aan den top van de bloeiwijze van den hoofdstengel; terwijl tevens werden geteld het aantal takken

van de 2^{de} orde, het aantal takken van de 3^{de} orde en het aantal vruchtjes aan de bloeiwijze van den hoofdstengel.

Van *Malva vulgaris* werd het aantal vruchtjes van de veelvoudige dopvrucht, de lengte van de bladschijf en de lengte van den bladsteel bepaald. Deze tellingen en metingen geschieden in 't begin van Juli, toen er nog een zeer duidelijk verschil in ontwikkeling tusschen de beide culturen zichtbaar was, dus waarschijnlijk voor dat de wortels der planten op den schralen grond door de zandlaag gedrongen waren, en in elk geval voordat de betere voeding zich in aanmerkelijke mate had doen gelden.

Van *Anethum graveolens* en *Scandix Pecten-Veneris* werd van de in de kiemschotels overgebleven plantjes het aantal slippen van het eerste blad geteld. Verder bepaalde ik bij de volwassen planten van *Scandix Pecten-Veneris* het aantal schermstralen en bij *Anethum graveolens* eveneens het aantal schermstralen en tevens het aantal bloemen van het schermpje. Voor de bepaling van dit laatste kenmerk werden alleen de schermpjes van het oudste scherm van iedere plant genomen. Van *Ranunculus arvensis* werd het aantal vruchtjes per bloem bepaald en van *Cardamine hirsuta* de lengte van de hauw, waarvoor van iedere plant de hauwen van den hoofdstengel gemeten werden.

Voor elk der bovengenoemde kenmerken deed ik voor de cultuur op vruchtbaren grond en voor die op zandgrond ieder afzonderlijk 300 metingen of tellingen, een aantal, dat volgens de berekeningen van Prof. KAPTEYN, bij dergelijke onderzoekingen voldoende waarborg voor nauwkeurigheid geeft. Bij het onderzoek van enkele kenmerken moest ik mij met een geringer aantal tevreden stellen, daar het materiaal in die gevallen niet omvangrijker was. Voor die kenmerken, waarbij de variabiliteit op het aantal betrekking heeft, werd het aantal, opklimmend met één genoteerd voor de kenmerken, die in lengtemaat variëren, werd de lengte in deelen van mM., in mM. of in cM. bepaald al naar gelang van de absolute grootte der plantendeelen. Om een overzicht van de waarnemingen te verkrijgen en die van de cultuur van den vruchtbaren grond met de waarnemingen van de planten van den zandgrond gemakkelijk te kunnen vergelijken, werden met behulp van de verkregen getallen curven geconstrueerd. Hiertoe werden in de meeste gevallen de waarnemingen tot groepen samengevoegd, zoodanig dat er van 7 tot 17 intervallen ontstonden. Hierdoor verkrijgt men overzichtelijke curven waarin de kleinere onregelmatigheden verdwenen zijn. Alleen voor het aantal takken van de 3^{de} orde van *Iberis amara*, fig. V, moesten de waarnemingen van de planten op den vruchtbaren grond tot 28 groepen

worden gecombineerd, daar slechts dan een vergelijking met de planten van den zandgrond mogelijk was.

Op bijgaande plaat zijn de aldus voor de verschillende kenmerken verkregen curven weergegeven. Daar voor alle gevallen de frequenties berekend zijn, hebben alle curven hetzelfde oppervlak en zijn dus met elkaar te vergelijken. Voor ieder kenmerk is de curve voor de goed gevoede planten met doorlopende lijn geteekend en die van de slecht gevoede planten gestippeld, terwijl beide op dezelfde abscis staan. Voor beide zijn de waarnemingen tot groepen met hetzelfde interval samengevoegd. In alle figuren neemt de grootte of het aantal van het onderzochte plantendeel van links naar rechts toe.

Deze curven leeren nu op welke wijze de onderzochte kenmerken varieeren, en tusschen welke grenzen de variatie plaats vindt.

Een blik op de verschillende figuren doet zien, dat de onderzochte kenmerken, afgezien van kleinere onregelmatigheden, in 't algemeen tamelijk symmetrische curven geven. Slechts in enkele gevallen, zooals bij *Anethum graveolens*, voor het aantal schermstralen van de planten op den zandgrond, fig. VI, en voor het aantal bladslippen van de goed gevoede planten derzelfde soort, fig. VIII, en verder voor het aantal bladslippen van *Scandix Pecten-Veneris* van den vruchtbaren grond, fig. IX, is de curve duidelijk scheef. Alleen voor het aantal takken van de 3^{de} orde van *Iberis amara*, afkomstig van den zandgrond, fig. V, is een halve curve verkregen.

Beschouwt men in de verschillende figuren de plaatsing van de beide curven ten opzichte van elkaar, dan blijkt het, dat ze elkaar gedeeltelijk bedekken. Dit beteekent, dat er in de twee overeenkomstige culturen planten aanwezig zijn, waarbij het onderzochte orgaan bij de goed gevoede en bij de slecht gevoede planten even groot is of in even groot aantal voorkomt. Maar tevens blijkt hieruit, dat er in de eene cultuur individuen voorkomen, die zoo sterke of zoo geringe ontwikkeling van een bepaald deel vertoonen, als er in de andere niet te vinden zijn. Verder leeren de figuren, dat in alle gevallen, behalve bij het aantal vruchtjes van *Malva vulgaris*, fig. XIII, de curve voor de planten van den zandgrond ten opzichte van die der goed gevoede planten meer naar links is geplaatst.

Met behulp van deze waarnemingen is het nu mogelijk te bepalen, hoe groot de invloed van de voedingsomstandigheden in de verschillende gevallen is, en of dat verschil in ontwikkeling tusschen de beide culturen voor de verschillende deelen van dezelfde species hetzelfde is.

Beschouwt men de figuren van I tot V, die betrekking hebben op

kenmerken van *Iberis amara*, de figuren van VI tot VIII van *Anethum graveolens* en XI tot XIII van *Malva vulgaris* dan blijkt het, dat, terwijl bij de twee eerstgenoemde planten de verschuiving der curve in de verschillende gevallen zeer verschillend is, deze bij *Malva vulgaris* voor de drie kenmerken ongeveer evenveel bedraagt en wel voor alle drie betrekkelijk weinig. We kunnen ons dus met behulp van de curven eenigszins een denkbeeld vormen van de mate van den invloed van verschillende voedingsomstandigheden, maar toch verkrijgt men eerst een juist inzicht daarin, wanneer men de curven definieert door bepaalde constanten en deze met elkaar vergelijkt. Hierdoor is het mogelijk te bepalen welken invloed de voeding niet alleen op de mediane waarde van het kenmerk heeft, maar ook op de variabiliteit daarvan. Om deze grootheden te leeren kennen zijn uit de waarnemingen de mediane waarde M en het kwartiel Q bepaald. Hieruit is volgens de methode, door VERSCHAFFELT¹⁾

ingevoerd, de variabiliteitscoëfficiënt $\frac{Q}{M}$ berekend, die een maatstaf

is voor de variabiliteit en in staat stelt deze van verschillende kenmerken met elkaar te vergelijken. Ook voor de eenigszins scheeve curven zijn deze waarden bepaald, daar deze curven niet belangrijk van de symmetrische afwijken en bovendien in alle gevallen het gemiddelde van de beide kwartielen is genomen. Alleen van de halve curve voor de takken der 3^{de} orde van *Iberis amara*, fig. V, zijn geen constanten berekend. Over deze curve zal ik later spreken.

Ik deel hier de bij de onderzochte planten voor de verschillende kenmerken gevonden waarden mede in dezelfde volgorde als die van de curven op de plaat. In de tabel duidt G de constanten van de goed gevoede, S die van de slecht gevoede planten aan. Voor ieder kenmerk is aangegeven: de mediane waarde, het kwartiel, de variabiliteitscoëfficiënt en de minimum- en maximumwaarde. Verder is zoowel voor de mediane als voor den variabiliteitscoëfficiënt het verschil tussehen de waarden dezer grootheden bij de goed gevoede en de slecht gevoede planten berekend. Dit verschil, gedeeld door de waarde van de goed gevoede planten en dus uitgedrukt in deelen van deze waarde, zal ik *gevoelighedscoëfficient* der mediane en der variabiliteit noemen. Deze gevoelighedscoëfficiënten zijn in de tabel onder de beide waarden aangegeven. Een $+$ teeken voor den gevoelighedscoëfficiënt duidt aan, dat de waarde bij de goed gevoede planten het grootst, een $-$ teeken, dat de waarde bij deze het kleinst is.

Uit deze tabel blijkt, evenals uit de curven, dat in 't algemeen de

¹⁾ ED. VERSCHAFFELT, l. c.

		<i>M</i>	<i>Q</i>	$\frac{Q}{M}$	Minimum.	Maximum.
<i>Iberis amara.</i>						
I. Lengte van de plant	$\left\{ \begin{array}{l} G \\ S \end{array} \right.$	41.1 cM.	4.65 cM.	0.114	26 cM.	56 cM.
		31.3 »	3.25 »	0.103	12 »	51.8 »
	gevoeligheidscoëfficiënt. . . .	+ 0.24		+ 0.09		
<i>Anethum graveolens.</i>						
II. Lengte van het blad	$\left\{ \begin{array}{l} G \\ S \end{array} \right.$	7.9 cM.	1.085 cM.	0.137	4.5 cM.	14.2 cM.
		5.48 »	0.825 »	0.160	2.3 »	8.5 »
	gevoeligheidscoëfficiënt. . . .	+ 0.28		- 0.17		
III. Aantal hauwtjes..	$\left\{ \begin{array}{l} G \\ S \end{array} \right.$	55.4	7.5	0.13	29	91
		47	6.8	0.14	11	118
	gevoeligheidscoëfficiënt. . . .	+ 0.15		- 0.08		
IV. Aantal takken 2de orde	$\left\{ \begin{array}{l} G \\ S \end{array} \right.$	22.4	3.35	0.15	5	35
		10.3	3.75	0.36	0	22
	gevoeligheidscoëfficiënt. . . .	+ 0.54		- 1.40		
VI. Aantal schermstralen	$\left\{ \begin{array}{l} G \\ S \end{array} \right.$	32.8	6.40	0.19	15	59
		18.4	6.45	0.35	7	41
	gevoeligheidscoëfficiënt. . . .	+ 0.44		- 0.74		
VII. Aantal bloemen in het scherpje	$\left\{ \begin{array}{l} G \\ S \end{array} \right.$	33.3	6.55	0.19	1	67
		26.5	5.7	0.21	4	45
	gevoeligheidscoëfficiënt. . . .	+ 0.20		- 0.105		
VIII. Aantal slippen v. h. eerste blad.	$\left\{ \begin{array}{l} G \\ S \end{array} \right.$	18	3.25	0.18	9	40
		16.5	2.1	0.127	7	28
	gevoeligheidscoëfficiënt. . . .	+ 0.08		+ 0.29		

		<i>M</i>	<i>Q</i>	$\frac{Q}{M}$	Minimum.	Maximum.
<i>Sc. Pecten-Veneris.</i>						
IX. Aantal slippen van het eerste blad...	} <i>G</i>	27.2	3.85	0.14	16	56
		} <i>S</i>	25.1	2.6	0.104	11
	gevoeligheidscoëfficiënt...		+ 0.08		+ 0.26	
<i>Malva vulgaris.</i>						
XI. Lengte van de bladschijf.....	} <i>G</i>	6.05	0.7	0.101	3	10
		} <i>S</i>	5.03	0.55	0.100	4
	gevoeligheidscoëfficiënt....		+ 0.17		+ 0.01	
<i>Malva vulgaris.</i>						
XI. Lengte van de bladschijf.....	} <i>G</i>	53.8 mM.	3.85 mM.	0.071	40 mM.	65 mM.
		} <i>S</i>	51.9 »	3.95 »	0.075	30 »
	gevoeligheidscoëfficiënt....		+ 0.03		- 0.055	
<i>Malva vulgaris.</i>						
XII. Lengte van den bladsteel.....	} <i>G</i>	172.4 mM.	15.4 mM.	0.089	128 mM.	289 mM.
		} <i>S</i>	167 »	13.65 »	0.081	115 »
	gevoeligheidscoëfficiënt....		+ 0.03		+ 0.09	
<i>Malva vulgaris.</i>						
XIII. Aantal vruchtjes	} <i>G</i>	13.38	0.7	0.05	9	17.
		} <i>S</i>	13.6	0.6	0.044	11
	gevoeligheidscoëfficiënt....		- 0.013		+ 0.12	
<i>Ranunculus arvensis.</i>						
XIV. Aantal vruchtjes	} <i>G</i>	8.5	0.75	0.09	5	12
		} <i>S</i>	6.9	0.775	0.11	4
	gevoeligheidscoëfficiënt....		+ 0.19		- 0.22	
<i>Cardamine hirsuta.</i>						
XV. Lengte van de hauw.....	} <i>G</i>	17.5 mM.	2.75 mM.	0.15	4 mM.	24.1 mM.
		} <i>S</i>	14.7 »	2.75 »	0.19	3.2 »
	gevoeligheidscoëfficiënt....		+ 0.16		- 0.27	

mediane waarde der kenmerken van de slecht gevoede planten kleiner is dan die van de goed gevoede. Alleen bij *Malva vulgaris* is de mediane waarde van het aantal vruchtjes van de planten van den zandgrond iets grooter, dit verschil is echter zeer gering: de gevoeligheidscoëfficiënt bedraagt slechts $-0,015$. Bij de overige kenmerken is de gevoeligheidscoëfficiënt van de mediane positief en zeer uiteenlopend. Over 't geheel varieert hij tusschen $-0,015$ en $+0,54$.

Verder willen wij met behulp der tabel nagaan of de invloed der voeding op de mediane waarde der verschillende kenmerken van eenzelfde species dezelfde is. Daarbij zullen wij *Malva vulgaris* buiten beschouwing laten, omdat wij boven zagen hoe de wortels dezer plant op het bed met onvruchtbare aarde tot in den vruchtbaren ondergrond waren doorgedrongen en de verschillen misschien wel diensengevolge voor alle onderzochte kenmerken zeer onbeduidend waren.

Vergelijken we dan de gevoeligheidscoëfficiënten der mediane voor de verschillende kenmerken van dezelfde species dan zien we, dat deze zeer uiteenloopen.

Terwijl de gevoeligheidscoëfficiënt der mediane van het aantal zijtakken van de 2^{de} orde van *Iberis amara* $+0,54$ bedraagt, is deze voor het aantal hauwtjes van den hoofdtak $+0,15$; de gevoeligheidscoëfficiënten van *M* voor de lengte der plant en de lengte van het blad liggen hiertusschen en zijn $+0,24$ en $+0,28$. Bij *Anethum graveolens* is de gevoeligheidscoëfficiënt der mediane van het aantal schermstralen $+0,44$, die van het aantal bladslippen van het eerste blad slechts $+0,08$. Het laat zich eenigszins verklaren, dat de invloed van de voeding op het eerste blad nog niet zoo groot is als op de later optredende kenmerken, daar het reservevoedsel van het zaad voor beide culturen hetzelfde is en misschien bij den aanleg van het eerste blad nog niet geheel is verbruikt. In overeenstemming daarmede bedraagt ook de gevoeligheidscoëfficiënt der mediane van het aantal slippen van 't eerste blad van *Scandix Pecten-Veneris* $+0,08$, terwijl deze bij dezelfde plant voor het aantal schermstralen $+0,17$ bedraagt.

Uit het voorgaande blijkt, dat de invloed van de voeding op de mediane waarde van de verschillende kenmerken van eenzelfde plant zeer verschillend is; terwijl sommige organen zeer gevoelig voor verschil in voeding zijn, vertoonen andere in hun ontwikkeling slechts weinig de gevolgen daarvan.

Wat de waarde van het kwartiel betreft leert de tabel, dat we hierbij niet, zooals bij de mediane waarde, in alle onderzochte gevallen door slechte voeding een afwijking in denzelfden zin krijgen.

In sommige gevallen is de Q van de planten op den vruchtbaren grond grooter, in andere kleiner, even groot of ongeveer even groot als die der planten op den schralen grond. Om evenwel de variabiliteit van de kenmerken bij beide culturen met elkaar te kunnen vergelijken, ten einde hieruit conclusies omtrent den invloed van de voeding op de mate van variabiliteit te trekken, moeten we niet het quartiel nemen, maar den variabiliteitscoëfficiënt $\frac{Q}{M}$.

Beschouwen we in de eerste plaats de waarde van dezen variabiliteitscoëfficiënt in de verschillende gevallen. Het blijkt dan uit de tabel, dat deze coëfficiënt tusschen wijde grenzen, n.l. 0,044 en 0,36 varieert. Dergelijke uiteenloopende waarden van $\frac{Q}{M}$ vond ook VERSCHAFFELT¹⁾ bij de door hem onderzochte kenmerken van verschillende planten. De geringste variabiliteit vindt men bij de verschillende kenmerken van *Malva vulgaris*, zoowel voor de goed gevoede als voor de slecht gevoede planten. Deze plant blijkt dus in 't onderzochte geval weinig variabel te zijn. Vergelijkt men nu de variabiliteit van de verschillende kenmerken van dezelfde species met elkaar, dan ziet men, dat deze bij de goed gevoede planten zoowel bij *Iberis amara*, als bij *Anethum graveolens* en *Malva vulgaris* betrekkelijk weinig uiteenloopen. Voor de verschillende kenmerken van *Iberis amara* bedraagt $\frac{Q}{M}$ 0,114, 0,137, 0,13 en 0,15; voor *Anethum graveolens* 0,19, 0,19 en 0,18 en voor *Malva vulgaris* 0,071, 0,089 en 0,05. Zooals men ziet zijn deze waarden bij dezelfde species ongeveer even groot, terwijl ze daarentegen bij de drie soorten onderling aanmerkelijk verschillen. Doet men hetzelfde bij de slecht gevoede planten, dan vindt men een veel grooter verschil tusschen de variabiliteitscoëfficiënten van de verschillende kenmerken derzelfde plant. Voor deze cultuur varieert $\frac{Q}{M}$ bij de kenmerken van *Iberis amara* tusschen 0,10 en 0,36, bij die van *Anethum graveolens* tusschen 0,127 en 0,35. Hieruit volgt dus, dat de invloed van de voeding op de variabiliteit van verschillende eigenschappen van de plant niet dezelfde is; hoeveel deze invloed op de variabiliteit bij de verschillende kenmerken verschilt zal uit 't volgende blijken.

Wanneer we voor ieder kenmerk afzonderlijk de variabiliteit van de goed gevoede planten met die van de slecht gevoede vergelijken,

1) VERSCHAFFELT, l. c. p. 353.

dan vinden we, dat het verschil tusschen de variabiliteitscoëfficiënten voor de beide culturen in de verschillende onderzochte gevallen zeer uiteenloopt; voor sommige kenmerken is het verschil tusschen de beide waarden zeer aanzienlijk, voor andere daarentegen slechts gering. Om deze verschillen met elkaar te kunnen vergelijken zijn ze, zooals gezegd, door de waarde van $\frac{Q}{M}$ der goed gevoede planten gedeeld. Het verkregen getal is de gevoeligheidscoëfficiënt der variabiliteit. Het blijkt nu, dat deze gevoeligheidscoëfficiënt van $\frac{Q}{M}$ in de onderzochte gevallen tusschen $-0,140$ en $+0,29$ varieert. Natuurlijk legt bij de vergelijking van verschillende kenmerken van dezelfde species het feit, dat de wortels der slechte cultuur min of meer in den ondergrond waren doorgedrongen, geen gewicht in de schaal, zoodat hier ook de voor *Malva vulgaris* verkregen resultaten van waarde zijn.

De gevoeligheidscoëfficiënten van $\frac{Q}{M}$ van *Iberis amara* bedragen voor de vier kenmerken $-1,40$, $-0,17$, $-0,08$ en $+0,09$, voor de kenmerken van *Anethum graveolens* $-0,74$, $-0,105$ en $+0,29$ en voor die van *Malva vulgaris* $-0,055$, $-0,09$ en $+0,12$. Vooral bij de twee eerste planten loopen deze gevoeligheidscoëfficiënten aanzienlijk uiteen en dit bewijst dus in hoe hooge mate verschillend de invloed van de voeding op de variabiliteit van de verschillende kenmerken van dezelfde species is. Door hetzelfde verschil in voeding wordt de variabiliteit van het ééne kenmerk eener plant bijna niet gewijzigd en die van een andere eigenschap derzelfde plant zeer aanzienlijk vermeerderd of verminderd.

Van veel belang is het nu na te gaan in welken zin de voeding op de variabiliteit werkt, of bij ongunstige voedingsomstandigheden de variabiliteit meestijds grooter, of meestijds kleiner wordt, of dat beide gevallen ongeveer evenveel voorkomen. Hieromtrent leert ons de tabel, dat bij 6 van de 14 onderzochte kenmerken de gevoeligheidscoëfficiënt van $\frac{Q}{M}$ positief is, dus de variabiliteitscoëfficiënt van de goed gevoede planten grooter dan van de slecht gevoede, terwijl bij de overige kenmerken de gevoeligheidscoëfficiënt van $\frac{Q}{M}$ negatief is en dus de variabiliteitscoëfficiënt van de slecht gevoede planten het grootst. Zelfs bij dezelfde species vertoont het ééne kenmerk een grootere, het andere daarentegen een geringere variabiliteit bij vergelijking van de culturen onder gunstige en onder ongunstige voedingsomstandig-

heden gekweekt. Bij *Iberis amara* is de lengte der planten van de vruchtbare aarde meer variabel dan die van de planten van den zandgrond, andere onderzochte kenmerken daarentegen vertoonen in de slecht gevoede cultuur grooter variabiliteit. Evenzoo is bij *Anethum graveolens* de veranderlijkheid van het aantal bladslippen der goed gevoede planten, en van het aantal bloemen en 't aantal schermstralen van de slecht gevoede planten het grootst, terwijl bij *Malva vulgaris* de lengte van den bladsteel en van het aantal vruchtjes bij de goed gevoede planten, daarentegen de lengte van de bladschijf der planten van den zandgrond de grootste variabiliteit vertoonen.

Wanneer we de verkregen resultaten in 't kort samenvatten dan zien we, dat de voeding van invloed is op de mediane waarde en op de variabiliteit der kenmerken. Het blijkt nu echter bovendien, dat de gevoeligheidscoëfficiënt der mediane zeer verschillend is:

1°. voor verschillende species onderling vergeleken.

2°. voor verschillende kenmerken van dezelfde species.

En omtrent de variabiliteit is het volgende gebleken:

1°. bij goede voeding is de variabiliteitscoëfficiënt $\frac{Q}{M}$ vrij constant

voor verschillende kenmerken van dezelfde species, maar zeer uiteenlopend bij de verschillende species.

2°. bij slechte voeding vertoonen twee der onderzochte species groote verschillen tusschen de variabiliteitscoëfficiënten der verschillende kenmerken van dezelfde species; terwijl bij één species de variabiliteitscoëfficiënten van de verschillende kenmerken betrekkelijk weinig uiteenloopen.

3°. de gevoeligheidscoëfficiënt van $\frac{Q}{M}$ is bij de verschillende species en kenmerken zeer uiteenlopend en varieert tusschen — 1,40 en + 0,29.

4°. Voor sommige kenmerken is de gevoeligheidscoëfficiënt van $\frac{Q}{M}$ positief, dus heeft goede voeding een vermeerdering van de variabiliteit tengevolge; voor andere kenmerken, zelfs van dezelfde species, is deze coëfficiënt negatief.

In het voorgaande is alleen sprake geweest van die kenmerken, welke symmetrische curven vertoonen of curven, die als zoodanig beschouwd kunnen worden, en die, door ze in constanten uit te drukken, de genoemde resultaten hebben gegeven. Van deze wijkt de curve van het aantal zijtakken der 3^{de} orde van *Iberis amara*, op den zandgrond gekweekt, als een halve curve, geheel af. Voor de cultuur op de vruchtbare aarde daarentegen geeft hetzelfde kenmerk een symmetrische curve. In fig. V is deze zeer plat en lang-

gerekt, daar de waarnemingen over een groot aantal intervallen zijn verdeeld om de beide curven met elkaar te kunnen vergelijken. Worden de waarnemingen echter tot een even groot aantal groepen als in de andere figuren samengevoegd, dan onderscheidt de aldus verkregen curve zich niet van die der overige onderzochte kenmerken. Voor deze cultuur is de mediane 53, het kwartiel 17.25 en de variabiliteits-coëfficiënt $\frac{Q}{M}$ 0.32, terwijl het minimum aantal zijtakken 1, het maximum aantal 162 bedraagt.

Bij dit kenmerk, vindt men nu niet, zooals in de overige gevallen, door de slechte voeding eenvoudig een verplaatsing der curve naar links, gepaard gaande met een meerdere of mindere verandering in de waarde van M , Q en $\frac{Q}{M}$, maar hier gaat de symmetrische curve over in een halve curve, waarvan het toppunt op nul ligt.

We kunnen het optreden van deze halve curve op de volgende wijze verklaren. De benedenste grens voor het aantal zijtakken van de 3^{de} orde van *Iberis amara* is 0. Daar de plant ook aan hoofdtak en takken van de 2^{de} orde bloeit, is zij dus zonder takken van de 3^{de} orde bestaanbaar. Onder gunstige voedingsomstandigheden evenwel is de ontwikkeling van de planten zóó krachtig, dat er bij alle individuen takken van de 3^{de} orde gevormd worden, maar in buitengewoon uiteenlopend aantal, zooals de curve van fig. V voor deze cultuur leert. Bij ongunstige voeding daarentegen treden ook individuen op, waarbij geen takken van de 3^{de} orde worden aangelegd, en naarmate de voeding slechter is zal het aantal van deze individuen groter worden. Zoo zien we dan ook, dat bij de zeer slechte voeding van den zandgrond een groot aantal planten geen takken van de 3^{de} orde bezit, dus de benedenste grens bereikt heeft, terwijl de overige exemplaren een geringer of grooter aantal van deze zijtakken dragen, zooals fig. V voor deze cultuur dat aantoonst. We komen dus tot de overtuiging, dat de halve curve bij dit kenmerk een noodzakelijk gevolg is van het feit, dat door de ongunstige voedingsomstandigheden de variatiecurve zoodanig wordt verschoven, dat ze tegen de benedenste grens van het geheele variatiegebied van dat kenmerk stoot, terwijl een groot aantal van de individuen deze uiterste minimumwaarde vertoont.

Ook bij *Anethum graveolens* treedt een groot verschil op in den vorm der curven van het aantal schermstralen bij beide culturen, fig. VI. De curve van de goed gevoede planten is nagenoeg symmetrisch, terwijl die van de planten, van den zandgrond afkomstig, asymmetrisch is en wel zoodanig, dat het toppunt van de curve

dichter bij het minimum ligt. Of we in dit geval met hetzelfde verschijnsel te doen hebben als bij de takken van *Iberis amara*, dus of hier de asymmetrie van de curve er op duidt, dat de curve tot in de nabijheid van de benedenste grens is verschoven, is niet met zekerheid te zeggen. Maar het feit, dat het nu bereikte uiterste minimum, n.l. 7, in verhouding tot het maximum 41 reeds zeer gering is, en dat de benedenste grens niet nul kan zijn, maakt deze opvatting wel waarschijnlijk. Toch dient in dergelijke gevallen vooral in 't oog gehouden te worden, dat het optreden van een asymmetrische curve in 't algemeen nog geen bewijs behoeft te zijn, dat die curve in de nabijheid van een der beide grenzen van het variatiegebied is geplaatst, maar dat de asymmetrie van de curve ook het gevolg van geheel andere oorzaken kan zijn.

Groningen, 30 Juli, 1904.

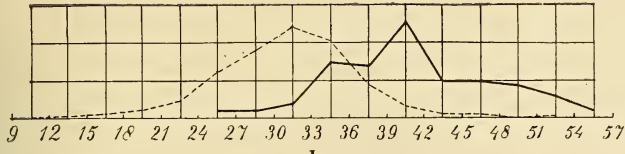
Botanisch Laboratorium.

VERKLARING DER FIGUREN.

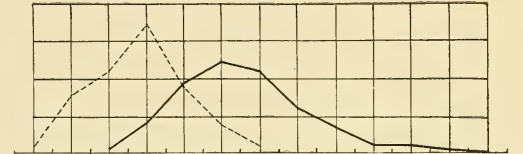
De figuren zijn alle op ongeveer halve grootte gereproduceerd. Oorspronkelijk zijn de afstanden van de intervallen, die langs de abscis zijn geplaatst, 1 cM., en heeft iedere mM. van de ordinaten een waarde van 1%. Hierdoor kan men uit de lengte van de ordinaten het aantal, in percenten uitgedrukt, voor ieder interval vinden. In de meeste figuren zijn de ordinaten op de abscis opgericht tusschen de twee getallen die het interval aanduiden, alleen in de fig, X, XIII en XIV, waar de waarnemingen niet in groepen gerangschikt zijn, staat de ordinaat boven het getal. De curven van de goed gevoede planten zijn met doorlopende lijn, die van de slecht gevoede met stippellijn geteekend.

- Fig. I. *Iberis amara*. Lengte van de plant van de basis van den hoofdstengel tot aan den top van de inflorescentie daarvan, in cM.
- „ II. *Iberis amara*. Lengte van het blad, in cM.
- „ III. *Iberis amara*. Aantal hauwtjes van de inflorescentie van den hoofdstengel.
- „ IV. *Iberis amara*. Aantal takken van de 2^{de} orde.
- „ V. *Iberis amara*. Aantal takken van de 3^{de} orde.
- „ VI. *Anethum graveolens*. Aantal schermstralen.
- „ VII. *Anethum graveolens*. Aantal bloemen in het schermpje.
- „ VIII. *Anethum graveolens*. Aantal slippen van het eerste blad.
- „ IX. *Scandix Pecten-Veneris*. Aantal slippen van het eerste blad.
- „ X. *Scandix Pecten-Veneris*. Aantal schermstralen.
- „ XI. *Malva vulgaris*. Lengte van de bladschijf, in mM.
- „ XII. *Malva vulgaris*. Lengte van den bladsteel, in mM.
- „ XIII. *Malva vulgaris*. Aantal vruchtjes van de veelvoudige dopvrucht.
- „ XIV. *Ranunculus arvensis*. Aantal vruchtjes per bloem.
- „ XV. *Cardamine hirsuta*. Lengte van de hauw, in mM.

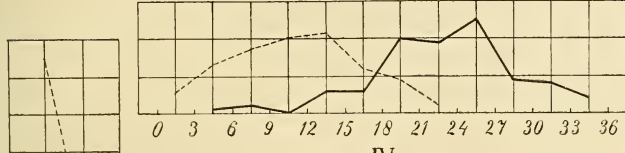
T. TAMMES. „Over den invloed van de voeding op de fluctueerende variabiliteit bij eenige planten.”



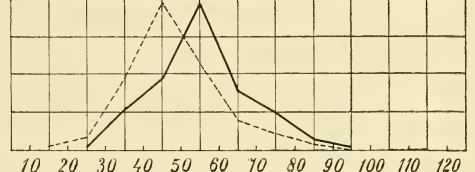
I



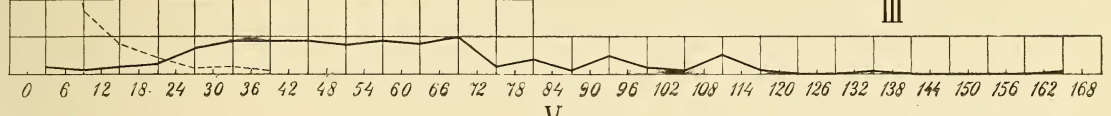
II



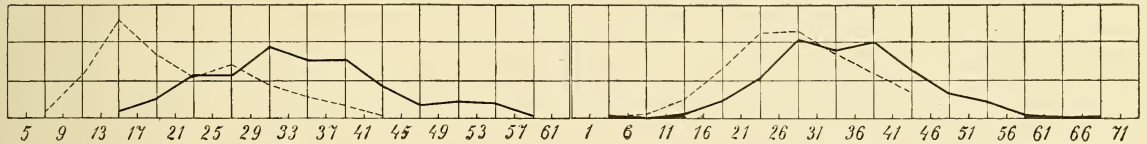
III



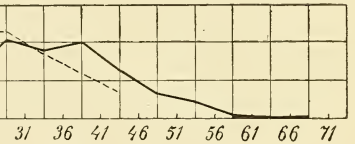
IV



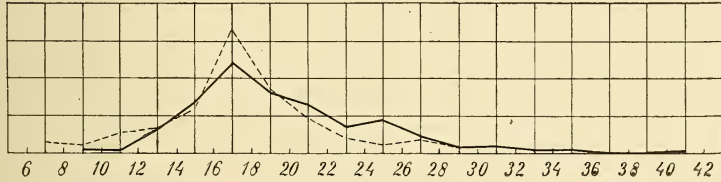
V



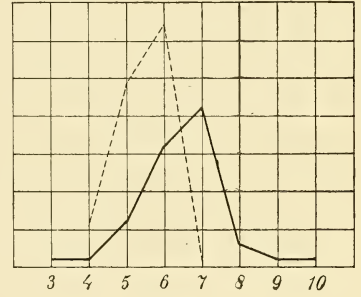
VI



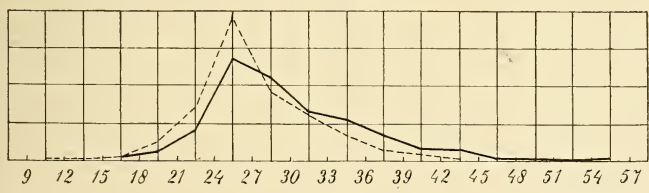
VII



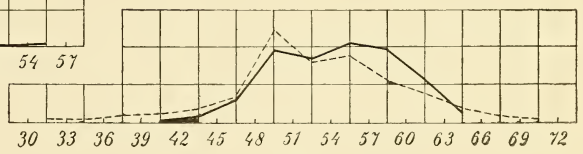
VIII



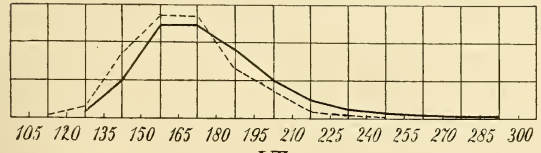
IX



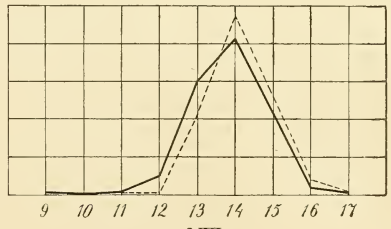
X



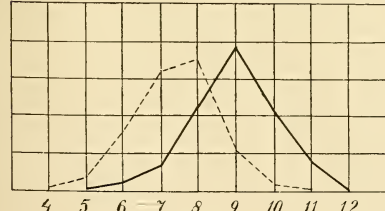
XI



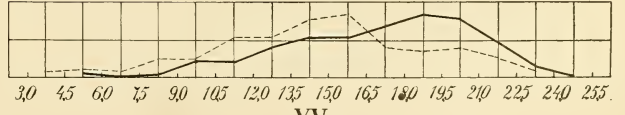
XII



XIII



XIV



XV

Plantenkunde. — De Heer MOLL biedt namens Dr. B. SYPKENS diens dissertatie aan, getiteld: „*De kerndeeling bij Fritillaria imperialis L.*”, en deelt daaromtrent het volgende mede:

Het onderzoek liep vooral over de kerndeelingen in den embryozak van *Fritillaria*, vroeger een geliefkoosd materiaal voor kerndeelingsonderzoekingen.

De Heer SYPKENS onderzocht zoowel de vrije kerndeelingen in het wandstandig protoplasma als de dadelijk door tangentiale celdeeling gevolgde kerndeelingen in de eerste laag van endospermcellen. Verder werden eenige waarnemingen gedaan omtrent de kernen in de zaadknoppen van *Tulipa* en in den vegetatiekegel van den wortel van *Vicia Faba*.

Wat de methode van onderzoek betreft, al het materiaal was gefixeerd met het sterke chroom-osmium-azijnzuurmengsel van FLEMMING. Het werd grootendeels op verschillende wijzen in paraffine ingesmolten, en onderzocht aan seriën van doorsneden van 2 tot 4 μ dikte, gekleurd met gentiana-violet. Eenige waarnemingen werden ook gedaan met behulp der door VAN WISSELINGH ingevoerde methode van oplossing der kernen in chroomzuur van \pm 50 pCt. Deze beide methoden vullen elkander aan; de chroomzuurmethode verdient de voorkeur voor waarnemingen omtrent het kernskelet, doorsneden kunnen meer leeren omtrent de kernspoel. Maar van beide werd ook bij dit onderzoek de voortreffelijkheid weder bewezen tegenover waarneming van de kernen in haar geheel, waarbij het in vele gevallen onmogelijk is zich een juist beeld te vormen van haar inwendige structuur.

Ik wil thans in het kort de belangrijkste resultaten nagaan welke de Heer SYPKENS voor de verschillende stadiën der kerndeeling verkreeg.

De rustende kern werd aan doorsneden en met chroomzuur onderzocht, en de daarbij verkregen resultaten bevestigden in hoofdzaak die, welke door VAN WISSELINGH en door GRÉGOIRE met zijne medewerkers WYGAERTS en BERGHS werden openbaar gemaakt. Het skelet van de rustende kern bestaat uit talrijke grootere en kleinere chromatineklompen, door fijne draden met elkaar verbonden, zoodat een anastomoseerend netwerk gevormd wordt. Er is geen grond om in dit netwerk het bestaan van twee bestanddeelen, chromatine en linine aan te nemen; de chroomzuurmethode leert het tegendeel evenzeer als gekleurde kerndoorsneden, indien men slechts, zooals de Heer SYPKENS ook deed, gedeeltelijke ontkleuring van het netwerk weet te voorkomen. Op hen, die de bewering omtrent het bestaan van linineverbindingen wenschen vol te houden, rust de last om nieuwe en deugdelijke bewijzen daarvoor aan te

voeren. Ook voor de kernen van integumenten en nucellus van *Fritillaria* en voor die der zaadknoppen van *Tulipa* werden dezelfde uitkomsten verkregen.

Wat de zelfstandigheid der chromosomen aangaat, heeft VAN WISSELINGH aangetoond, dat deze gedurende het kluwenstadium bestaat, daar er dan nooit één enkele doorlopende draad aanwezig is. Maar zijne verdere waarnemingen, evenals die van GRÉGOIRE en WYGAERTS wijzen er op dat waarschijnlijk, ook zelfs in het rustend stadium, deze zelfstandigheid niet geheel wordt opgeheven. Ook de Heer SYPKENS kreeg bij zijne waarnemingen omtrent de vorming van het kluwenstadium en omtrent die der dochterkernen uit de dochterkluwens dezelfde overtuiging. Hij spreekt van „een centralisatie en decentralisatie van een aantal chromatinemassa's, die in bepaalde stadiën evenzoo vele chromosomen vormen”.

Omtrent het gedrag der chromosomen bij het deelingsproces werd bij dit onderzoek, om de bovenvermelde reden, weinig nieuws gevonden. Het aantal chromosomen kon op ongeveer 60 worden vastgesteld, maar in sommige kernen is het bepaald veel kleiner. Ook de vorm der chromosomen is niet constant; in dezelfde kern kunnen zoowel *U*- als *V*- en *J*-vormige worden aangetroffen.

Het onderzoek der kernspoel daarentegen leverde belangrijke uitkomsten op, en wel niet zoozeer omtrent de vorming der spoel als omtrent haar verder lot en haar rol bij de celdeeling.

De vorming der spoel kon in bijzonderbeden worden nagegaan. Rondom de vrije kernen in het wandstandig protoplasma van den embryozak bevindt zich korrelig protoplasma met vele, zeer kleine adventiefvacuolen; rondom de kernen der eerste endospermcellen evenzoo protoplasma met meerdere kleine vacuolen. Als nu de kernen zich beginnen te deelen en de kernmembranen worden opgelost dan dringt protoplasma uit de omgeving, in het eerst zonder veel vacuolen, in de kernruimte door, en vormt daarbinnen de spoeldraden, die aanvankelijk uit aaneengeschakelde korrels bestaan, later meer glad worden. Zij richten zich langzamerhand evenwijdig en worden tot een bundel vereenigd zonder naar de polen daarvan sterk te convergeeren. De kernen verkeeren dan in het kluwenstadium. Later, in het asterstadium, ontstaan nevens de reeds vermelde draden geheel op dezelfde wijze nog andere, die dikker worden en slechts van de polen tot den aequator loopen, waar zij aan de intusschen gevormde chromosomen zijn vastgehecht. Zij bevinden zich niet alleen aan den omtrek der spoel, maar worden ook in het binnenste gedeelte van alle overlansche doorsneden van een kern aangetroffen. STRASBURGER heeft de eerste soort van draden,

van pool tot pool loopende, „Stützfasern” genoemd, de kortere en dikkere „Zugfasern”.

Nu volgt de metakinese en in het diasterstadium heeft een scheiding der twee soorten van spoeldraden plaats gevonden. De korte en dikke zijn sterk ingekrompen, en vormen aan beide polen tegen de dochterkernen aan twee kapjes, die spoedig in het protoplasma verdwijnen. De lange draden daarentegen blijven tusschen de dochterkernen zitten, van de ééne naar de andere zich uitstrekende, vandaar dikwijls verbindingsdraden genoemd. Zij zijn ten getale van 200 tot 300 aanwezig, en dwarse doorsneden leeren, dat zij een massieven bundel vormen, die vrij in het omringende protoplasma ligt, dat er óók vrijelijk tusschen kan dringen.

De Heer SYPKENS komt dus tot de gevolgtrekking, dat de kernspoel binnen de kernruimte geheel en al uit het cytoplasma gevormd wordt, en is daarmee in overeenstemming met hetgeen de meeste andere onderzoekers gevonden hebben, in hoofdzaak ook met de resultaten, door STRASBURGER en HEUSER voor de *Fritillaria*-kernen verkregen.

Wat nu de rol van de kernspoel bij de celdeeling betreft, daarentrent heerschen bij plant- en dierkundigen verschillende opvattingen. Wat de dierlijke cellen betreft is men algemeen van oordeel, dat de kernspoel na afloop der kerndeeling in het cytoplasma wordt opgelost, en aan de celdeeling geen werkzaam aandeel neemt; de cel deelt zich vervolgens door insnoering. De botanici daarentegen kennen aan de spoel eene groote beteekenis bij de celdeeling en vooral bij de wandvorming toe. Zij stellen zich algemeen voor dat de bovengenoemde verbindingsdraden der spoel zich in het aequatoriale vlak verdikken en zoogenaamde dermosomen vormen. Door versmelting der dermosomen ontstaat dan de zoogenaamde celplaat, die vervolgens op de eene of andere wijze aan de vorming van den nieuwen celwand tusschen de kernen deel neemt. STRASBURGER is een der voornameste vertegenwoordigers dezer algemeene verspreide opvatting.

Zij is het gevolg daarvan, dat de studie van dit verschijnsel grootendeels aan kernen die van buiten gezien werden, heeft plaats gehad. De Heer SYPKENS was door middel zijner doorsneden in staat te bewijzen, dat voor de door hem onderzochte objecten de thans in de botanie geldende meening onjuist is, en dat, althans wat het gedrag van de kernspoel betreft, de verschijnselen groote gelijkheid met die in dierlijke cellen vertoonen.

Bij de beschrijving van de latere fasen der kernspoel is het nu wenschelijk eenige verschillende gevallen van kerndeeling niteen te houden, drie in getal. In de eerste plaats heeft men de vrije kerndeelingen in het wandstandig protoplasma van den embryozak van

Eritillaria, die nog door andere kerndeelingen gevolgd zullen worden voordat er van celdeelingen sprake is. Hier vertoont zich aanvankelijk een systeem van verbindingsdraden tusschen de dochterkernen evenals in alle andere gevallen, maar dit wordt spoedig aan den aequator ingesnoerd, daardoor zandloopervormig, en wordt vervolgens in het protoplasma opgenomen en onzichtbaar. Dit geval kan dus verder buiten beschouwing blijven.

Het tweede geval betreft het wandstandig protoplasma van den embryozak, dat reeds voor een gedeelte in cellen verdeeld is. Als daarin nu ook nog vrije kerndeelingen plaats hebben, dan gedraagt zich bij deze de uit verbindingsdraden gevormde kernspoel aanvankelijk juist zoo als in weefselcellen waarin de celdeeling onmiddellijk volgt: het systeem van verbindingsdraden zwelt zijdelings en vormt een zoogenaamde kernton. Daarna gaat echter ook hier de spoel in het protoplasma verloren en eerst later ziet men tusschen deze kernen successievelijk scheidingen optreden, regelmatig voortschrijdende van uit het reeds in cellen verdeelde gedeelte van het wandstandig protoplasma, zoodat er ten slotte een volledig plaveisel van endospermcellen uit het wandstandig protoplasma ontstaat. Reeds volgens deze beschrijving is het bestaan van een samenhang tusschen kernspoel en celdeeling niet zeer waarschijnlijk.

Van het meeste belang is eindelijk het derde geval, namelijk dat waarbij de zooeven genoemde endosperm laag zich door tangenciaal gerichte wanden in twee cellenlagen gaat verdeelen. Hier worden de kerndeelingen onmiddellijk door celdeelingen gevolgd evenals dit bij de vorming van allerlei weefsels geschiedt.

Dit geval is dan ook, zooals vergelijkende waarnemingen bewezen hebben, geheel gelijk te stellen met hetgeen er in de cellen van den vegetatiekegel des wortels van *Vicia Faba* geschiedt.

Uit de doorsneden van den Heer ^{*}SYPKENS blijkt nu, dat in de beide laatste gevallen de verbindingsdraden al spoedig hun naam niet langer verdienen, daar zij met hun uiteinden niet aan de dochterkernen gehecht zijn, maar vrij in het protoplasma uitloopen. Bij *Vicia Faba* worden zelfs bovendien de aequatoriale gedeelten al spoedig opgelost, zoodat het systeem van verbindingsdraden in twee helften vervalt.

Intusschen dringt bij de kernen van het wandstandig protoplasma, het om die kernen liggend protoplasma met zijn kleine adventiefvacuolen in de ruimte tusschen de dochterkernen, waar zich het massieve complex van verbindingsdraden bevindt. Deze draden worden dientengevolge naar den omtrek uiteingedrongen, en daarbij tot spoelvormige bundels vereenigd die vrij in het protoplasma liggen; zij vormen dan wat men gewoonlijk de „kernton” noemt. Het

resultaat is, dat de beide dochterkernen ten slotte van elkaar gescheiden zijn door hetzelfde korrelig protoplasma, dat hen ook omringt en waarin ook de overblijfselen der verbindingsdraden liggen. De uit deze gevormde spoelvormige complexen zijn vereenigd tot een tonvormigen, aan den aequator gezwollen cylindermantel, die, als men de kernen alleen van buiten beschouwt, ze nog altijd met elkaar schijnt te verbinden, hoewel zulks in werkelijkheid in geen deele het geval meer is. Integendeel, de beschreven resten der verbindingsdraden verdwijnen langzamerhand, alsof zij in het protoplasma worden opgelost, en dit proces is lang afgeloopen als de celgrenzen successievelijk ook tussehen deze celkernen optreden.

Ook bij de deelingen der endospermcellen van *Fritillaria* en in den worteltop van *Vicia Faba* heeft in hoofdzaak geheel hetzelfde plaats, hoewel er eenige punten van verschil zijn waarop ik straks nog terug kom, en hoewel hier de vorming van den celwand spoediger volgt.

Hoe deze wandvorming plaats heeft is voor het oogenblik niet nader door den Heer SYPKENS onderzocht, maar dat zij in geen verband staat tot de kernspoel of een daardoor gevormde celplaat is na het medegedeelde wel duidelijk. Een celplaat in den zin der botanische auteurs komt zelfs niet voor.

Trouwens de in de botanie zoozeer verspreide meening, dat in vele gevallen de vorming van celwanden aan kernspoelen gebonden is, moge een zekere waarschijnlijkheid hebben als men alleen aan de dwarsdeelingen der cellen van vegetatiekegels en dergelijke denkt, in 't algemeen gesproken mist zij elken grond. Ieder weet toch, dat de vorming van celwanden in vele gevallen niets met een kernspoel kan te maken hebben. Om te zwijgen van alle mogelijke gevallen van celwandverdikking die niet met de vorming van een middenlamel samenvallen, noem ik slechts zwermsporen, die, na tot rust gekomen te zijn, zich een wand vormen, geplasmolyseerde protoplasten van *Spirogyra* en andere wieren, die zich met een nieuwen celwand bekleeden, *Caulerpa's* en andere coeloblasten, wier protoplasma na verwonding een nieuw wandstuk doet ontstaan.

Maar ook in andere gevallen, die meer op celdeelingen in vegetatiekegels gelijken, is het niet zelden gemakkelijk aan te toonen hoe nieuw gevormde celwanden onmogelijk in de kernspoel gevormd kunnen zijn. Men denke aan de antipodencellen, zooals die menigmaal ontstaan als naar binnen in den embryozak uitpuilende cellen, slechts voor een klein deel van haar oppervlak met den celwand van den embryozak verbonden; in geen geval kan hier meer dan een gering gedeelte van het vrije wandoppervlak in een kernspoel

gevormd zijn. Aan dit geval sluit zich aan dat van de *U*-vormige wanden in de opperhuidscellen der varenbladen, waardoor de moedercellen van de stomata worden afgescheiden. Nog duidelijker ziet men hetzelfde bij de vorming der stomata van *Aneimia fraxinifolia*: de stomata liggen midden in een opperhuidscel van het blad en de kern dezer cel ligt nog tegen het stoma aangedrukt. Er heeft hier een kerndeeling plaats gehad vóór de stoma-moedercel in de opperhuidscel werd gevormd, en tusschen de twee aldus gevormde kernen was zeer zeker aanvankelijk een spoel. Maar bij de daaropvolgende celdeeling werd op zekeren afstand rondom één der kernen een cilindervormige wand gevormd, die dus slechts voor een klein gedeelte in de spoel ontstaan zou kunnen zijn. Eindelijk de vorming van het eerste plaveisel van endospermcellen uit het wandstandig protoplasma van den embryozak, zoowel bij *Fritillaria* als bij vele andere planten. Als het aantal kernen van deze protoplasmalaag zich zeer sterk vermeerderd heeft, vormen zich afscheidingen tusschen de kernen, zoodat er een laag van platte, vijf- tot zeshoekige cellen ontstaat, die ten slotte door celwanden van elkaar gescheiden zijn. Deze celwanden ontstaan op een tijdstip, waarop van de kernspoelen, die oorspronkelijk voorhanden waren, geen spoor meer aanwezig is.

In verband met deze feiten kan het resultaat van den Heer SYPKENS omtrent de negatieve rol van de kernspoel bij de celdeeling ons niet bevreemden, ja zelfs wint het door deze feiten aan innerlijke waarschijnlijkheid. Ook wordt door dit resultaat de weg gewezen tot een grondiger studie van de verschijnselen der celdeeling en celwandvorming in het plantenrijk. De celdeelingen in vegetatiepunten, in de bovengenoemde opperhuidscellen van varens, ook in het wandstandig protoplasma van den embryozak moeten thans nader worden onderzocht, liefst volgens de door den Heer SYPKENS gebruikte methode, en belangrijke resultaten zijn van dit onderzoek te verwachten. Ook het onderzoek van levende zich deelende cellen, in den geest zooals het indertijd door TREUB¹⁾ gedaan is, verdient in dit opzicht hernieuwde aandacht.

Het is in geen deele onmogelijk, dat door zulke studiën de opvatting der celdeeling bij planten nog nader zal komen bij die van hetzelfde verschijnsel bij dieren dan thans het geval is.

Uit al het bovenstaande blijkt, dat de kernspoel geheel uit het cytoplasma ontstaat en daartoe wederkeert. Alle onderzoekers zijn het er verder over eens, dat bij de kerndeeling de kernmembraan

M. TREUB. Quelques recherches sur le rôle du noyau dans la division des cellules végétales. Publié par l'Académie Roy. Néerl. des Sciences. 1878.

en de nucleoli worden opgelost, en later bij de dochterkernen op nieuw worden gevormd. Een voortdurend zelfstandige positie ten opzichte van het cytoplasma wordt dus onder alle deelen der kern uitsluitend door de chromosomen ingenomen, slechts hier is sprake van een erfelijke organisatie.

De meening van sommige schrijvers, dat de kern gedurende het geheele deelingsproces een afgesloten geheel zou vormen tegenover het cytoplasma, en dat er aanvankelijk een soort van blaas zou zijn, die de dochterkernen verbindt en de spoel van het cytoplasma scheidt, moet dus worden opgegeven.

In verband met dit laatste zij het mij ten slotte vergund nog even te wijzen op de volkomen overeenstemming tusschen de resultaten van den Heer SYPKENS en de theorie van DE VRIES en WENT, die de vacuolen als erfelijke organen van den protoplast beschouwt. Ware de kern gedurende de deeling een afgesloten geheel, dan zou de vraag naar den oorsprong der binnen de spoel aanwezige vacuolen eenige moeielijkheid kunnen baren. Wij zagen evenwel hoe de waarnemingen van den Heer SYPKENS aantoonen, dat men hier met gewone, reeds in het korrelig protoplasma aanwezige vacuolen te doen heeft, die met het protoplasma van buiten af tusschen de spoeldraden worden ingeschoven.

Toch zal het wenschelijk zijn omtrent dit proces iets naders mede te deelen, daar zich hierbij twee eenigszins uiteenlopende gevallen voordoen, en men hier weder onderscheiden moet tusschen de kerndeelingen in het wandstandig protoplasma van den embryozak en die in de eerste endospermlaag of in het meristeem des wortels van *Vicia*.

In de laatstgenoemde gevallen, waarin dus gewone deeling van weefselcellen plaats heeft, nam de Heer SYPKENS het volgende waar. In deze cellen bevinden zich een aantal vacuolen, die ongeveer gelijkwaardig zijn en rondom de kern in het korrelig protoplasma liggen. Na de kerndeeling dringt dit protoplasma met zijn relatief groote vacuolen tusschen de verbindingsdraden in de spoel binnen, zooals wij boven zagen. Dit binnendringen geschiedt hier zoowel in den aequator als meer in de nabijheid der dochterkernen. De gewone vacuolen der moedercel zijn het dus, die met het protoplasma waarin zij liggen zich tusschen de dochterkernen inschuiven. Zijn later de verbindingsdraden opgelost, en heeft de celdeeling plaats, dan worden deze vacuolen, evengoed als die welke niet in de spoel drongen, gelijkmatig over de twee dochtercellen verdeeld. De zaak is dus hier zoo eenvoudig mogelijk, en volkomen in overeenstemming met hetgeen VAN WISSELINGH bij

Spirogyra heeft gevonden. Slechts heeft de moedercel in het laatste geval niet meerdere gelijkwaardige vacuolen, maar één groote, die zijdelings in de kernspoel doordringt.

Eenigszins anders staat het met de deelingen in het wandstandig protoplasma van den embryozak. Deze cel bevat niet alleen vele kernen, maar is ook ten opzichte harer vacuolen eenigszins anders van bouw. Zij heeft namelijk één enkele groote vacuole, die het middengedeelte der cel vult, maar bovendien in het wandstandig protoplasma een groot aantal zeer kleine adventiefvacuolen, die in de niet ontkleurde preparaten van den Heer SYPKENS bijzonder gemakkelijk in het oog vielen. Na de kerndeeling dringt nu het korrelig protoplasma met zijn kleine adventiefvacuolen zich tussehen de dochterkernen en de vrije uiteinden der verbindingsdraden. Van daar uit dringt het dan verder tussehen de verbindingsdraden naar den aequator. Ten slotte zijn dus de dochterkernen van elkaar gescheiden door korrelig protoplasma met adventiefvacuolen van den embryozak. Wanneer nu later het wandstandig protoplasma zich in cellen verdeelt, dan neemt de groote embryozakvacuole daaraan geen deel, maar wordt elke nieuw gevormde endospermeel voorzien van een zeker aantal adventiefvacuolen.

Er is dus hier een zekere tegenstelling met hetgeen bij gewone celdeelingen in jonge cellen geschiedt, maar met de vacuolentheorie van DE VRIES en WENT is ook dit proces in volkomen overeenstemming, want WENT heeft aangetoond, dat kleine adventiefvacuolen in allerlei gewone cellen in groot aantal voorkomen kunnen, en geheel met de groote vacuole te vergelijken zijn, waaruit zij ook door deeling ontstaan kunnen. Het zou mij niet verbazen als voortgezet onderzoek aantoonde, dat hun voorkomen nog veel algemeener is dan men thans onderstelt.

Het geval, dat zich in den embryozak van *Fritillaria* en vele andere planten voordoet, staat overigens geenszins op zich zelf, en komt met name bij de deeling van andere veelkernige cellen voor. Door WENT zijn in zijn onderzoek omtrent de vacuolen der Algen eenige zulke gevallen genoemd (*Chaetomorpha aerea*, *Acetabularia mediterranea*, *Codium tomentosum*).

Ik zelf was in de gelegenheid een dergelijk geval van deeling waar te nemen bij de vorming van ongeslachtelijke zoösporen in de cellen van *Hydrodictyon utriculatum*. Terwijl de zwermsporen, die door deeling van het wandstandig protoplasma gevormd waren, zich gedeeltelijk in beweging bevonden en zich gedeeltelijk reeds netvormig geordend hadden, alles binnen den wand der groote moedercel, zag ik het middengedeelte dezer cel ingenomen door een drietal groote

tonoplastblazen, afkomstig van de groote centrale vacuole der cel, bij verwarming onder het microscoop eerst samenkringende, daarna barstende. Ook hier dus nam, evenals bij den embryozak van *Fritillaria*, de groote centrale vacuole geen deel aan de vorming van nieuwe cellen. Dat de zwersporen voorzien waren van zeer kleine, in het korrelig protoplasma voorhanden vacuolen, staat volgens de boven genoemde onderzoekingen van WENT wel vast. Ook nam ik ze in de cellen der jonge netten zeer kort na hunne vorming ten duidelijkste waar.

Ten slotte zij vermeld, dat de dissertatie van den Heer SYPKENS in Duitsehe vertaling weldra verschijnen zal in de 2^e Aflevering van Deel I van het Recueil des travaux botaniques Néerlandais.

Scheikunde. De Heer VAN BEMMELEN biedt eene mededeeling aan over: „*De samenstelling van het verweeringssilikaat in de bouwbare aarde*”.

Het puin der gesteenten, waaruit de bouwbare aarde bestaat, bevat naast de onverweerde mineraalbrokjes een verweeringssilikaat. De samenstelling daarvan is zeer weinig bekend, trots tallooze grondanalysen, zoozeer zelfs, dat men de belangrijkste verschillen heeft voorbijgezien. De reden daarvan is, dat wel Al_2O_3 bepaald is nevens CaO , MgO , K_2O , maar nimmer het SiO_2 , dat uit dat verweeringssilikaat loskwam door de oplosmiddelen. Reeds vóór 15 jaren heb ik gevonden, 1^o. dat dit SiO_2 slechts in oplossing komt, bijaldien met zeer verdund zuur wordt uitgetrokken, maar anders zich grootendeels afscheidt; 2^o. dat het daarna kan opgelost worden door behandeling gedurende enkele minuten met zeer slappe warme kaliloog; 3^o. dat er bodems zijn, wier verweeringssilikaat voor een deel reeds in slappe loog oplost, dus zoowel het Al_2O_3 als het daarmee verbonden SiO_2 . Door achtereenvolgende uittrekking der aarde eerst met slappe loog, vervolgens met slap en toenemend sterker zoutzuur, daarna met sterk zwavelzuur, en door eene korte behandeling met slappe kali na elke der opvolgende behandelingen met die zuren, gelukte het van de samenstelling van het verweeringssilikaat iets te weten te komen. Dit gold de verhouding van het SiO_2 tot het Al_2O_3 en de vraag of het verweeringssilikaat eene enkele stof dan wel een mengsel van stoffen was en of het in verschillende gronden verschillende samenstelling had.

Deze methode is niet nagevolgd geworden, tenzij éénmaal een jaar geleden door Dr. SJOLLEMA te Groningen. Zij is dan ook zeer

bewerkelijk en tijdroovend. Een onderzoek volgens die methode 1° van zware en lichte versche klei uit Y, Zuiderzee, uit de Tropen (Java, Sumatra), Löss uit Limburg en Gelderland, 2° van gronden van vulkanischen oorsprong uit Deli (Sumatra), Malang (Java) en, 3° nu onlangs uit Suriname, zoowel zware klei als verschillende monsters van zoogenaamde Lateriet, 4° monsters van de grondsoort uit Java die Padas genoemd wordt, heeft mij het volgende geleerd:

Allerlei verhoudingen tusschen het SiO_2 en de Al_2O_3 komen in het verweeringssilikaat voor:

In het in zoutzuur oplosbare deel komen verhoudingen voor tusschen 6 en 2.5 Mol. SiO_2 op 1 Mol. Al_2O_3 bij de klei van ons gematigd klimaat. Voor zoover ik vond, bezit elke kleisoort in hoofdzaak slechts eene enkele verhouding tusschen SiO_2 en Al_2O_3 in het verweeringssilikaat.

In het in zwavelzuur oplosbare deel (hetgeen men het kaolinische deel zou kunnen noemen) is de verhouding ± 2 op 1; dit geldt ook voor de gewone klei uit Java en uit Suriname.

Maar in de Tropen, bij de vulkanische gronden (zooals die in Deli, Malang, en de Padas), is het verweeringssilikaat veel rijker aan Al_2O_3 , doch evenzeer in verschillende verhoudingen en wel in eene en dezelfde grondsoort, zoodat het verweeringssilikaat een mengsel is van silikaten in verschillende toestanden van verweering. Gevonden werden op 1 Mol. Al_2O_3

$$0,9, \pm 2, 2-3$$

in de Padas:

$$0,7, 1,3, 1,8.$$

Het kaolinische deel is gering.

De onverweerde mineraalfragmenten in die aarden (behalve veldspathen) zijn basischere silikaten, plagioklasen, distheen, sillimanniet enz. Zij zijn mikroskopisch bepaald door den mijnbouwkandidaat W. J. VAN GELDER, naar de methode SCHROEDER VAN DER KOLK.

Van de Lateriet is de samenstelling tot voor korten tijd in het geheel niet begrepen. Toen ik met het onderzoek reeds een tijd bezig was, bemerkte ik, dat de geoloog BAUER mij voor was geweest en een Lateriet onder handen had gehad, waarin hij vrije Al_2O_3 in mikrokristallijnen toestand had gevonden. Ik vond de verhoudingen op 1 Mol. Al_2O_3 :

In eene	plastische	Lateriet	(met	$3^{80}/_0$	Fe_2O_3)	..	0.3, 1.2, 1.6
„	„	niet	„	„	(„ 12 $^0/0$ „)	..	0.3—0.4, 1.5—1.8
„	„	„	„	„	(„ 18 $^0/0$ „)	..	1.4—1.7
„	„	„	„	„	(„ 43 $^0/0$ „)	..	0.7—1.0
„	„	„	„	„	(„ 35 $^0/0$ „)	..	0.2—0.3, 0.6—1.0

De hoeveelheid Al_2O_3 was in alle groot. In de laatste zeer groot, en daarbij ook mikrokristallijne geheel SiO_2 vrije Al_2O_3 . Dus hetgeen Hydrargilliet genoemd wordt.

Voor de Lateriet is alzoo niet alleen het vele ijzeroxyde kenmerkend, zooals tot nog toe gemeend is, maar ook een kiezelzuur-arme aluinaarde, die zelfs soms geheel kiezelzuurvrij en kristallijn kan zijn. Dit is inzonderheid het geval bij de Lateriet der Seychellen-eilanden door BRAUER ontdekt en door BAUER onderzocht.

Ik bevestigde de sommaire analyse van BAUER, en vond de verhoudingen:

In de Dioriet-Lateriet (met 27% Fe_2O_3) 0.03—0.07

„ „ Graniet-Lateriet („ 38% „ „) 0.05—0.08 en 1.0 (weinig) en zooveel sterk gebonden water, dat de formule $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$ pastte. Zij bevat dus maar eene geringe hoeveelheid SiO_2 -arme Al_2O_3 . Dat dit Hydrargilliet gemakkelijker oplosbaar is door slappe kali en slap zoutzuur dan het mineraal, dat in zichtbare kristalletjes voorkomt, behoeft niet te verwonderen.

Het verweeringssilikaat, zoolang het geene zuivere kristallijne Hydrargilliet bevat, mag als eene amorphe stof beschouwd worden met kolloïdale eigenschappen, van geene bepaalde chemische samenstelling; eene onbepaalde verbinding, van het karakter min of meer der absorptieverbindingen. Kleine hoeveelheden alkalische basis (K_2O , MgO , CaO) zijn daarin aanwezig. Zij hebben een absorbeerend vermogen, als de kolloïden, voor waterdamp, gassen, enz.

De vraag rijst: Zijn de gevonden verschillen van samenstelling van het verweeringssilikaat toe te schrijven aan deszelfs oorsprong (zoo genaamde zure silikaten, of wel basische silikaten) dan wel aan den gang van de verweering in derzelver afhankelijkheid van de verweerende agentia en het klimaat?

De hypothese, die het eerst bij de hand ligt is de eerste; dus: de basische silikaten verweeren tot een silikaat met het verhoudingscijfer ± 2 tot 0; de zure tot ± 5 tot ± 2 .

Andere hypothesen zijn gemaakt, (A. LIEBREICH, G. C. DUBOIS) zooals: de aluinaarde zoude opgelost en weggevoerd zijn, en later weder kiezelzuurvrij afgezet; pyriet zou geoxydeerd zijn, waaruit zwavelzuur ontstaat, dat snel doet verweeren; de daardoor ontstane basische zwavelzure aluinaarde zoude dan door een alkalisch grondwater ontleed moeten zijn, zoodat een produkt als de Lateriet en de Beauviet konde ontstaan. Verder zoude de temperatuur der Tropen gunstig zijn voor dezen verweeringsgang. Daarom zouden deze SiO_2 arme verweeringssilikaten juist in de tropische luchtstreek voorkomen. Daar echter de Beauviet ook in gematigde luchtstreken voorkomt, zoo werd

de hypothese gemaakt, dat zij in de tertiair periode gevormd zoude zijn, toen aldaar tropische temperatuur heerschte. En aangezien de Lateriet zoowel uit Graniet- als uit Diorietgesteente kan ontstaan, zoo zoude de tropische temperatuur voor deze verweeringswijze noodig zijn.

Deze gansche hypothese lijdt aan het bezwaar, dat zij niet eene enkele is, die zich onmiddellijk aan de waarneming aansluit, maar op een stel van hypotbesen berust, welke aan dien eisch niet voldoen. Zij komt mij daarom voor weinig waarde te bezitten.

Ook in tropische klimaten komt eene verweering voor, die eene klei als de onze voortbrengt, zooals ik thans gevonden heb. Het SiO_2 , arme Al_2O_3 en het zuivere Al_2O_3 is ook op primaire ligplaats gevonden, zonder vervoerd te zijn. De trapsgewijze overgang van de Graniet en van de Dioriet in Lateriet is ter plaatse zelve waargenomen. De Lateriet komt bovendien hoogstwaarschijnlijk ook voor in gematigde klimaten, waar zij nu nog gevormd wordt.

De eerstvermelde hypothese zou dan ook de meest waarschijnlijke zijn, als de waarneming niet gedaan ware, dat op de Seychellen-eilanden Graniet tot Lateriet verweerd is, die ook rijk is aan SiO_2 -vrije kristallijne Hydrargilliet. De vorming van dit verweeringsprodukt blijft nog onverklaard.

Wij behoeven ons daarover niet te verwonderen. Wij weten van de verweering der silikaten nog zoo weinig. Talrijke vragen zijn onbeantwoord. Gaat de verweering van het verweeringssilikaat nog steeds door? Of is het kaolinische deel, en het in zoutzuur oplosbare deel als het ware een tijdelijk rustpunt in de verweering? enz., enz.

Een nauwkeurig plaatselijk onderzoek der verweerende gesteenten, en wel op primaire ligplaats, is noodig. Want op sekundaire ligplaats kunnen produkten van verschillenden oorsprong samengekomen zijn. Vooral moet gestaafd worden, of Graniet in Lateriet kan overgaan.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt eene mededeeling aan van den Heer S. L. VAN OSS, getiteld: „*De regelmatige stervormige 600-cel.*”

(Mede aangeboden door den Heer W. KAPTEYN).

(Deze mededeeling zal verschijnen in het Verslag der volgende vergadering).

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan:
 „Over een door kegelsneden gevormde congruentie van de
 tweede orde en tweede klasse”.

1. Bij een tweevoudig oneindig stelsel van kegelsneden (congruentie) noemt men *orde* het aantal kegelsneden door een willekeurig gekozen punt, *klasse* het aantal kegelsneden, welke een willekeurige rechte tot koorde hebben.

De congruenties van de eerste orde en eerste klasse ontstaan door projectieve toevoeging van een vlakken-net aan een net van quadratische oppervlakken ¹⁾. Verder werden onderzocht de congruenties van de eerste orde, welke van de tweede klasse zijn, en die waarvan de kegelsneden een vaste kegelsnede tweemaal snijden ²⁾.

In deze mededeeling worden de kenmerkende getallen bepaald van de congruentie, welke de raakvlakken van een quadratisch oppervlak Q^2 insnijden op de oppervlakken van een net $[O^2]$ van quadratische oppervlakken, aan welke zij projectief zijn toegevoegd.

2. Om zulk een toevoeging te verkrijgen, projecteeren we de punten P van Q^2 uit een vast punt P_0 van Q^2 op een vlak Φ . Een projectiviteit tusschen de punten P' van Φ en de oppervlakken van $[O^2]$ levert dan onmiddellijk een projectiviteit tusschen $[O^2]$ en het stelsel $[\pi]_2$ der raakvlakken π van Q^2 .

Met een bundel (O^2) in $[O^2]$ komt overeen een puntenreeks (P') in Φ , dus een kegelsnede op Q^2 , dus het stelsel der raakvlakken π gaande door een vast punt T . Door T en een punt X der basis-kromme van (O^2) gaan twee vlakken π ; derhalve draagt X twee kegelsneden der congruentie, en is deze van de *tweede orde* ($P=2$).

3. Met de raakvlakken π door een *willekeurig* punt T komen overeen de punten P van een kegelsnede, die niet door P_0 gaat, dus tot beeld heeft een kegelsnede in Φ . Aan dit stelsel $(\pi)_2$, van index twee, is dus toegevoegd een stelsel $(O^2)_2$, dat evenzeer den index twee bezit; immers het heeft met elken bundel (O^2) twee oppervlakken gemeen. Uit de beschouwing der puntenreeksen, welke de projectieve stelsels $(\pi)_2$ en $(O^2)_2$ op een willekeurige rechte insnijden, blijkt, dat zij een oppervlak van den zesden graad T^6 voortbrengen, dat de m. pl. is van de kegelsneden der congruentie,

¹⁾ D. MONTESANO, Su di un sistema lineare di coniche nello spazio, Atti di Torino, 1891—1892, t. XXVII, p. 660.

²⁾ M. PIERI, Sopra alcune congruenze di coniche, Atti di Torino, 1892—1893, t. XXVIII, p. 135.

waarvan de vlakken door een vast punt T gaan. Men heeft dus $\mu \nu = 6$.

4. Door twee willekeurige punten gaan twee raakvlakken π , derhalve de vlakken van twee kegelsneden; een willekeurige rechte is dus koorde van twee kegelsneden, en de congruentie is van de *tweede klasse* ($\mu^2 = 2$).

De getallen $P = 2$, $\mu \nu = 6$ en $\mu^2 = 2$ voldoen aan de bekende formule $P = \mu \nu - 2 \mu^2$.

Door een rechte van Q^2 gaan oneindig vele vlakken π ; de kegelsneden, welke zij dragen, vormen een kubisch oppervlak.

Daar elke straal door T twee kegelsneden ontmoet, heeft T^6 in T een dubbelpunt. Is A^2 een der kegelsneden waarop T ligt, dan wordt T^6 in T aangeraakt door elke koorde van A^2 uit T . Dus is T een *biplanair punt*.

Is T een der acht basispunten van het net $[O^2]$, dan heeft T^6 in T een viervoudig punt; immers op elken straal door T liggen slechts twee punten buiten T .

5. Nemen we voor Q^2 de paraboloid $xy = z$, dan levert de substitutie $x = \alpha \varrho$, $y = \beta \varrho$, $z = \gamma \varrho$ eerst $\varrho = \gamma : \alpha \beta$ en dan

$$x = \gamma : \beta \quad , \quad y = \gamma : \alpha \quad , \quad z = \gamma^2 : \alpha \beta.$$

De raakvlakken π worden dus voorgesteld door

$$\beta \gamma x + \alpha \gamma y - \alpha \beta z - \gamma^2 = 0.$$

De boven bedoelde projectieve toevoeging wordt nu verkregen door te stellen

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0,$$

waar dan A , B , C quadratische functies van x, y, z zijn. We stellen hun coëfficiënten door a_{kl} , b_{kl} , c_{kl} voor en schrijven ter bekorting

$$d_{kl} = \alpha a_{ik} + \beta b_{ik} + \gamma c_{ik}.$$

Zal een O^2 door het toegevoegde vlak π aangeraakt worden, dan is te voldoen aan

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \beta\gamma \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & \alpha\gamma \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{34} & -\alpha\beta \\ d_{14} & d_{24} & d_{34} & d_{44} & -\gamma^2 \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & -\alpha\beta & -\gamma^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Men vindt hier een betrekking

$$D_7(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

die homogeen en van den 7^{den} graad in α, β, γ is. Beschouwt men deze parameters als homogene coördinaten, dan stelt deze betrekking een kromme van den 7^{den} graad voor, die in de punten A ($\beta = 0, \gamma = 0$) en B ($\alpha = 0, \gamma = 0$) dubbelpunten bezit.

6. Voor de kegelsneden, welke door het punt $T(x_1, y_1, z_1)$ gaan, heeft men de betrekking

$$M_2(\alpha, \beta, \gamma) \equiv x_1 \beta \gamma + y_1 \alpha \gamma - z_1 \alpha \beta - \gamma^2 = 0.$$

Zij wordt vertegenwoordigd door een kegelsnede, die door A en B gaat.

Buiten A en B om hebben de hulpkrommen D^7 en M^2 tien punten gemeen. Door T gaan derhalve de vlakken van tien kegelsneden, die elk in twee rechten ontaard zijn ($\sigma\mu = 10$).

Dat de punten A en B hier buiten beschouwing moeten blijven, ziet men aldus in. Voor $\alpha = 0, \gamma = 0$ vindt men $B = 0$ en $y = 0 : 0$, dus den vlakkenbundel om OX ; van deze raakvlakken is natuurlijk slechts één aan $B = 0$ toegevoegd, en de door hen bepaalde kegelsnede vormt in het algemeen geen lijnenpaar.

Uit de betrekking ¹⁾

$$3\mu\nu = 2\gamma\mu + \sigma\mu + 4\mu^2$$

volgt nu, daar $\mu\nu = 6$, $\sigma\mu = 10$ en $\mu^2 = 2$ is,

$$\gamma\mu = 0.$$

Dit was te voorzien; immers de kegelvlakken van $[O^2]$ vormen een stelsel ∞^1 ; het aantal dier kegelvlakken, welke door het homologe vlak τ worden aangeraakt, is dus eindig, en alle tweevoudige symbolen waarin γ voorkomt hebben derhalve de waarde nul.

7. De rechte $x = 0, y = 0$ wordt gesneden door de kegelsneden, waarvoor men heeft

$$\alpha\beta z + \gamma^2 = 0 \quad \text{en} \quad d_{33} z^2 + 2d_{34} z + d_{44} = 0,$$

dus

$$N_5(\alpha, \beta, \gamma) \equiv d_{33} \gamma^4 - 2d_{34} \alpha\beta\gamma^2 + d_{44} \alpha^2 \beta^2 = 0.$$

De kromme N^5 , welke deze betrekking vertegenwoordigt, heeft blijkbaar dubbelpunten in A en B .

Door combinatie van N^5 met M^2 en D^7 vindt men nu opnieuw $\mu\nu = 6$ en verder

$$\sigma\nu = 27.$$

¹⁾ Men vergelijkte mijn mededeeling in het Zittingsverslag van 24 September 1904, dl. XIII, bl. 283.

De lijnenparen der congruentie vormen dus een regelvlak van den 27^{sten} graad.

8. Om de kenmerkende getallen te vinden, welke het symbool ϱ bevatten, beschouwen we de puntenparen, welke de kegelsneden der congruentie gemeen hebben met het vlak $z = 1$. Zij zijn aangewezen door

$$\beta\gamma x + \alpha\gamma y = \alpha\beta + \gamma^2,$$

$$d_{11}x^2 + 2d_{12}xy + d_{22}y^2 + 2(d_{13} + d_{14})x + 2(d_{23} + d_{24})y + (d_{33} + 2d_{34} + d_{44}) = 0.$$

Voor de kegelsneden, welke $z = 1$ aanraken, is dus

$$\begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} + d_{14} & \beta\gamma \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} + d_{24} & \alpha\gamma \\ d_{13} + d_{14} & d_{23} + d_{24} & d_{33} + 2d_{34} + d_{44} & -\alpha\beta - \gamma^2 \\ \beta\gamma & \alpha\gamma & -\alpha\beta - \gamma^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dit is eene betrekking

$$R_6(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

welke door een kromme R^6 wordt vertegenwoordigd, die A en B tot dubbelpunten heeft.

Door combinatie van R^6 met D^7 , M^2 en N^5 vindt men achterenvolgens

$$\delta\varrho = 34, \quad \mu\varrho = 8, \quad \nu\varrho = 22.$$

Hieruit volgt o.a., dat het regelvlak der lijnenparen een dubbelkromme van den 17^{den} graad heeft, en dat de kegelsneden, welke een gegeven vlak raken (in het bijzonder dus de parabolen der congruentie) een oppervlak van den 22^{sten} graad vormen.

Uit de betrekkingen

$$3\nu^2 = \delta\nu + 4\mu\nu \quad \text{en} \quad 3\varrho^2 = 2\delta\varrho + 2\mu\varrho$$

vindt men ten slotte nog voor de ontbrekende kenmerkende getallen

$$\nu^2 = 17 \quad \text{en} \quad \varrho^2 = 28.$$

De kegelsneden, welke een vaste rechte snijden, vormen dus een oppervlak van den 17^{den} graad.

Natuurkunde. — De Heer JULIUS biedt eene mededeeling aan, getiteld :
 „*Dispersiebanden in de spectra van σ Orionis en Nova Persei*”.

Wanneer licht met een continu spectrum eene selectief absorbeerende, niet homogene gasmassa doorstraalt, worden in het spectrum van het uitredende licht plaatsen aangetroffen die zich naar omstandigheden donkerder of helderder voordoen dan hun omgeving en van geheel anderen oorsprong zijn dan emissie- en absorptielijnen¹⁾. Die plaatsen hebben wij met den naam *dispersiebanden* aangeduid²⁾.

Zij vertoonen zich in de omgeving der absorptielijnen, overdekken deze soms symmetrisch, soms asymmetrisch, kunnen zeer verschillend van breedte en van sterkte en onregelmatig van lichtverdeling zijn, en daardoor den indruk te weeg brengen alsof men te doen heeft met verschuivingen, verdubbelingen, of met ingewikkelde omkeeringsverschijnselen van verbreedde absorptielijnen. Al deze gevallen kan men naar willekeur voortbrengen in het absorptiespectrum van natriumdamp.

In het spectrum van verschillende deelen der zon spelen de dispersiebanden een belangrijke rol³⁾. Dat zij ook in sterrenspectra voorkomen, kan nauwelijks betwijfeld worden; immers het licht der sterren moet, evenals dat der zon, in meer of minder uitgestrekte gasmassa's stralkromming en anomale dispersie hebben ondergaan.

Indien wij uitgaan van de hypothese dat de meeste sterren roteerende gasmassa's zijn, met of zonder vaste kern, en waarin stelsels van discontinuïteits-oppervlakken en wervels voorkomen, vergelijkbaar met die waaruit zich de zomverschijnselen lieten verklaren⁴⁾, dan moeten wij besluiten, dat ook de sterren ongelijkmatige stralingsvelden veroorzaken, die met hen rondwentelen. Onze gezichtslijn zal dus telkens door andere deelen van de lichtbrekende massa gaan, kan nu eens aan den eenen, dan aan den anderen kant van discontinuïteitsoppervlakken gelegen zijn, en het licht, dat ons bereikt, moet dientengevolge wisselen van sterkte en van samenstelling.

Dit is hoogstwaarschijnlijk de oorzaak der veranderlijkheid van vele sterren; en dat daarbij de spectraallijnen allerlei wijzigingen van plaats en van uiterlijk ondergaan, vloeit uit hetzelfde beginsel noodzakelijk voort.

In vele gevallen waarin de toepassing van het beginsel van DOPPLER tot zeer onbevredigende gevolgtrekkingen voert, kunnen de dispersie-

1) Verslagen Natuurk. Afd. Dl. VIII p. 515. 1900.

2) Verslagen Natuurk. Afd. Dl. XIII p. 26—32. 1904.

3) Verslagen Natuurk. Afd. Dl. XIII p. 138—145. 1904.

4) Verslagen Natuurk. Afd. Dl. XI, p. 126—135 en 650—663, Dl. XII, p. 300—334.

banden opheldering brengen. Als voorbeeld kiezen wij het spectrum van δ Orionis.

Bij deze ster had DESLANDRES in 1900 snelle veranderingen in de plaats der spectraallijnen opgemerkt, en daaruit afgeleid, dat men te doen had met een dubbelster waarvoor de omloopstijd 1,92 dagen zou zijn. Waarnemingen van J. HARTMANN¹⁾ waren niet in overeenstemming te brengen met deze periode. Daarom onderwierp HARTMANN de ster tusschen Januari 1901 en Maart 1903 aan een uitvoerig spectrografisch onderzoek en vond op een verzameling van 42 platen het volgende.

Het spectrum bevat hoofdzakelijk lijnen van waterstof en helium; ook enkele van silicium, magnesium en calcium.

De calciumlijn λ 3934 (overeenkomende met K van het zonne-spectrum) is zeer zwak, maar scherp; al de overige lijnen (een twintigtal) zijn breed uitvloeiend en schijnen soms asymmetrisch of zelfs verdubbeld. Bij de metingen werd altijd zoo onbevooroordeeld mogelijk op de donkerste deelen der onscherpe lijnen ingesteld en gevonden, dat deze zich werkelijk periodiek verplaatsten; maar wegens het onsymmetrische uiterlijk van vele lijnen werd geen zekerheid verkregen dat de verplaatsing voor alle lijnen op eenzelfde plaat evengroot was. Uit de gemiddelde verplaatsingen berekende HARTMANN de wisselende snelheid in de gezichtslijn, en daaruit de elementen van de baan der dubbelster.

Een hoogst raadselachtig feit, bij de metingen aan den dag gekomen, was echter dat één lijn, namelijk de fijne, scherpe calciumlijn λ 3934, niet deelnam aan de periodieke verschuivingen, doch wees op een constante snelheid in de gezichtslijn van + 16 K.M. per sec. (gereduceerd op de zon).

HARTMANN verwerpt de gedachte dat deze lijn aan absorptie in de aardatmosfeer te danken zou zijn; ook dat zij zou toekomen aan de tweede component van het stelsel. Als eenig middel om tot een verklaring te komen neemt hij aan: de aanwezigheid van een wolk van calciumdamp juist op de lijn, die ons met δ Orionis verbindt. De wolk zou zich dan van de zon verwijderen met een snelheid van 16 K.M. per sec. Bij naburige sterren werd de invloed van die wolk niet gevonden. Daarentegen vertoonde het spectrum van Nova Persei in 1901 precies hetzelfde verschijnsel: de lijnen van waterstof en van andere elementen waren ontzettend verbreed en verschoven en veranderden voortdurend van uiterlijk, maar al dien tijd bleven

¹⁾ J. HARTMANN. Untersuchungen über das Spectrum und die Bahn von δ Orionis. Sitzungsber der Kön. Preuss. Akad. d. Wissenschaften, XIV, S. 527—542, März 1904.

de calciumlijnen 23934 en 23969 en ook de *D*-lijnen volmaakt scherp en op hun plaats, slechts wijzende op een constante snelheid van +7 K.M. Ook op de gezichtslijn naar Nova Persei moet zich dus volgens HARTMANN een wolk van calciumdamp, hier vermengd met natriumdamp, bevonden hebben, die zich van de zon verwijderde.

Een bevredigenden indruk maken deze hypothetische wolken niet. Veel eenvoudiger laat zich de zaak ophelderen uit het oogpunt van het ongelijkmatige stralingsveld, door de sterren veroorzaakt.

Wij behoeven slechts te onderstellen, dat in de buitenste deelen van δ Orionis en van Nova Persei, als in zoo vele andere sterren, veel waterstof, helium, enz., daarentegen weinig calcium en natrium aanwezig is. De stroomingen en wervelingen in de gasmassa, die evenals bij de zon de ongelijkmatigheden in de stralingsvelden teweeg brengen, veroorzaken in de omgeving der waterstofflijnen, enz. zeer breede dispersiebanden. De donkerste deelen van deze moeten zich periodiek verplaatsen, wanneer bij de aswenteling van de ster gasmassa's van wisselende dichtheidsverdeeling langs onze gezichtslijn voorbijtrekken. De dispersiebanden van calcium en natrium daarentegen zijn zoo smal, dat hun plaats van die der bijbehorende absorptielijnen niet te onderscheiden is. Hun constant blijvende verschuiving bewijst, dat δ Orionis zich ongeveer 16 K.M., Nova Persei 7 K.M. per sec. van de zon verwijderd.

Naar onze opvatting is dus δ Orionis *geen* spectroscopische dubbelster.

In de spectra van een groot aantal sterren heeft men periodieke verplaatsingen en verdubbelingen slechts waargenomen bij *onscherpe* lijnen. Men is gewoon, die verplaatsingen niettemin uit te drukken in kilometers per seconde, daar men ze alle toeschrijft aan bewegingen in de gezichtslijn. Uit de bovenstaande beschouwingen volgt echter dat er in zulke gevallen geen voldoende grond is om de objecten voor dubbelsterren te houden en dat men zich dus de moeite om banen te berekenen besparen kan.

Tevens verdwijnen dan een aantal moeilijkheden, voor welke men zich door de gevolgtrekkingen uit het principe van DOPPLER geplaagd zag. Hoe moest men zich bijv. de bewegingstoestanden voorstellen in stelsels van spectroscopische dubbelsterren als ι Orionis, 57 Cygni, θ Orionis en eenige andere, die volgens FROST en ADAMS zich alle bevinden in nevelmassa's, en wier snelheden in de gezichtslijn niettemin periodieke variaties zouden ondergaan van 70, 90, 140 kilometers per sec., ten spijt van onze physische begrippen aangaande weerstandbiedende middenstoffen? Beschouwen wij echter de waargenomen lijnverplaatsingen en evenzoo de schommelingen der totale helderheid als veroorzaakt door de ongelijkmatigheden in de stralings-

velden, dan is er niets verwonderlijks in, dat zulke veranderingen juist bij sterren, in nevelmassa's gehuld, vaak voorkomen.

Ter verklaring van bijzonderheden in de spectra der Novae is het beginsel der anomale dispersie reeds toegepast door H. EBERT ¹⁾. De kenmerkende eigenaardigheid dezer spectra, namelijk dat daarin lijnen voorkomen, die uit een lichte en een donkere componente bestaan, de lichte naar rood, de donkere naar violet verschoven, werd daarbij op gelukkige wijze in verband gebracht met de theorie van SEELIGER, volgens welke het verschijnen der Novae zou zijn toe te schrijven aan de omstandigheid, dat een weinig lichtgevend hemellichaam met groote snelheid een kosmische nevelmassa binnendringt. Daarbij zou dan de ster aan den voorkant zeer sterk lichtgevend worden en een dichte gasomhulling krijgen, waarin nu, zooals EBERT aantoonde, de kromming der lichtstralen juist zóó moet zijn, dat de dispersiebanden helder zijn aan den naar rood gekeerden, donker aan den naar violet gewenden kant der absorptielijnen.

EBERT wil verschuivingen en verdubbelingen van lijnen in de spectra van vele veranderlijke sterren van korte periode op dergelijke wijze verklaren, door namelijk aan te nemen dat de lichtemissie dezer hemellichamen op verschillende plaatsen hunner oppervlakte zeer verschillend is en dat zij door dichte dampatmosferen omhuld zijn. Bij de aswenteling van zulke sterren zou dan, als het ware, het verschijnsel der Novae zich periodiek aan ons vertoonen.

Deze uitlegging kan ongetwijfeld in een aantal gevallen rekenschap geven van hetgeen men ziet in de spectra der veranderlijken; maar tegen een ruime toepassing ervan bestaan toch enkele bezwaren. Den physischen toestand van een ster, wier wit-gloeiende oppervlakte op verschillende plaatsen een sterk afwisselend uitstralend vermogen zou bezitten, kunnen wij óns moeilijk voorstellen. De zon met hare vlekken kan zeer zeker niet als voorbeeld worden aangevoerd. Bovendien komt het bij veranderlijke sterren herhaaldelijk voor, dat aan den *violetten* kant van absorptielijnen zich een lichte, aan den *rooden* kant een donkere band vertoont, dus andersom als bij de Novae, en ook dat bij eenzelfde ster lichte en donkere banden in den loop der tijden van plaats verwisselen ten opzichte van den gemiddelden stand der absorptielijnen. Dit blijkt bijv. het geval te zijn bij Mira Ceti, wanneer men met elkander vergelijkt de waarnemingen van VOGEL en WILSING in 1896 (Sitzungsber. der Berl.

¹⁾ H. EBERT, Ueber die Spektren der neuen Sterne. Astron. Nachr. Nr. 3917. (Bd. 164, p. 65. Dez. 1903).

Akad. XVII), die van CAMPBELL in 1898 (*Astroph. Journ.* IX, p. 31) en van STEBBINS in 1903 (*Astroph. Journ.* XVIII, p. 341); ook bij θ Orionis in de jaren 1894 en 1897 (HUGGINS, *An Atlas of representative stellar spectra*, p. 140). In deze gevallen geeft de beschouwing van EBERT niet onmiddellijk opheldering.

De hypothese, dat de constitutie van de meeste sterren gelijk is op die van de zon, (waarbij natuurlijk aangenomen wordt, dat groote verschillen kunnen voorkomen in de uitgebreidheid hunner respectieve gasmassa's, in de steilheid der daarin aanwezige dichtheidsgradiënten, en ook in hunne scheikundige samenstelling) schijnt ons daarom algemeener en eenvoudiger toe. Volgens deze onderstelling toch zijn verschuivingen van dispersiebanden naar den kant der groote en der kleine golflengten ongeveer even waarschijnlijk — als wij namelijk afzien van asymmetrie in den vorm der dispersiekrommen en wanneer voorloopig aangenomen wordt, dat de asrichtingen der sterren zonder regelmaat door de ruimte verbreid zijn.

Onze gezichtslijn naar een ster mag men beschouwen als een vaste lijn in de ruimte. Blijft de stofverdeeling in dat hemellichaam gedurende langen tijd nagenoeg dezelfde, dan zal dus na iedere aswenteling de gezichtslijn weer door dezelfde plaatsen van het „optische stelsel” gaan, en wij verkrijgen op die wijze een zuiver periodieken gang in de helderheid van de ster en in het uiterlijk harer spectraallijnen. In de meeste gevallen echter zullen de stroomingen en wervelingen merkbare veranderingen teweeg brengen in de stofverdeeling. Daarmee is de mogelijkheid gegeven voor elke mate van afwijking ten opzichte van een zuiver periodieken gang. De zeer onregelmatige en snelle veranderingen in de helderheid van sterren als SS Cygni zijn uit dit oogpunt veel begrijpelijker, dan wanneer men de verklaring zoekt in hevige uitbarstingen of in verduisteringen door donkere begeleiders. En de grens tusschen de zoogenaamde onregelmatig veranderlijken en de Novae is zoo moeilijk te trekken, dat de gedachte niet uitgesloten schijnt om zelfs het verschijnen van een nieuwe ster te vergelijken met het plotseling zichtbaar worden van het roteerende licht van een vuurtoren, op het oogenblik waarop het optische stelsel, dat aan een deel van het licht divergentievermindering geeft, onze gezichtslijn passeert.

Plantenkunde. — De Heer HUGO DE VRIES biedt eene mededeeling aan van den Heer J. M. JANSE: „*Onderzoekingen over polariteit en orgaanvorming bij *Caulerpa prolifera*.*”

(Mede aangeboden door den Heer WENT).

Polariteit is eene eigenschap, welke aan zeer vele der laagste organismen toekomt, evenals aan een groot deel der cellen in het lichaam der hoogere planten en dieren.

De regelmatige uitwendige vorm en inwendige bouw van organen zijn ten deele terug te voeren tot de werking van polaire invloeden gedurende hun ontwikkeling, terwijl de bepaalde levensverschijnselen der organen onder meer eveneens op polaire werkingen der samenstellende cellen moeten teruggevoerd worden.

Waarop deze polariteit, d.w.z. de eigenschap om in eene bepaalde richting anders te werken of te reageeren dan in de tegenovergestelde, berust, is onbekend, en de groote moeilijkheid om geschikt onderzoekingsmateriaal te vinden mag daarvan wel de hoofdoorzaak zijn.

Vroegere onderzoekingen aan *Caulerpa prolifera* verricht ¹⁾ hadden mij tot de overtuiging gebracht, dat deze ééncellige, naar verhouding reusachtige en morphologisch hoog gedifferentieerde alge voor dat doel te gebruiken moest zijn.

In de gelegenheid geweest zijnde in de afgelopen zomermaanden in het Zoölogisch Station te Napels deze plant aan een hernieuwd onderzoek te onderwerpen, wensch ik hier een overzicht te geven over de voornaamste resultaten, die verkregen werden.

Voor de beschrijving van den bouw van *Caulerpa prolifera*, zoowel als van het protoplasma-lichaam en de daarin plaats vindende zeer intensieve stroomingen, moet ik verwijzen naar mijne aangehaalde verhandeling.

Voor de nieuwe proeven werden uitsluitend de „bladeren” gebruikt: tot 22 cM. lange, 20 mM. of iets meer breede uitgroeiingen van het „rhizoom.” Hunne geringe dikte veroorlooft ze in levenden toestand ook mikroskopisch te onderzoeken, terwijl de aanzienlijke lengte en breedte ze bijzonder geschikt maakt voor experimenteel onderzoek.

Bovendien zijn afgesneden bladeren of bladstukken in staat nieuwe rhizomen en worteltjes te vormen, en zich alzoo door nieuwvormingen tot volkomen planten te regenereren.

Reeds vroeger werden door mij de bladeren gebruikt voor onder-

¹⁾ Die Bewegungen des Protoplasma von *Caulerpa prolifera*, Pringsheim's ahrb. f. wiss. Bot. 1889, Bd. XXI, pag. 163—284, met 3 Platen.

zoek naar het verloop der protoplasmastroom, waarbij dan niet zelden groote insnijdingen gemaakt moesten worden.

Wel verdragen die planten vaak zware verwondingen, en genezen deze alsdan in een dag, maar zij gaan steeds gepaard met verlies van veel protoplasma, waardoor de cel dus zeer verzwakt.

Het gelukte mij ditmaal een nieuwe methode te vinden om tot hetzelfde doel te geraken, berustende op de waarneming, dat elke verscheuring van een deel der talloze, als een uiterst fijn netwerk de geheele plant doorkruisende protoplasmastrengen, onmiddellijk wordt gevolgd door de plaatselijke afscheiding van een witte, taaie, draderige stof, die zeer spoedig stijver wordt, een helder gele kleur aanneemt, en dan een volledige afsluiting vormt. Was tevens de celwand beschadigd, dan wordt op die wijze de uitwendige wond gesloten. Doch dezelfde verscheuring van de plasmastrengen kan teweeggebracht worden door drukkingen en zonder dat uitwendige belediging plaats heeft; de afsluiting bepaalt zich dan uitsluitend tot de plek waar met voldoende kracht gedrukt werd. Op die wijze heeft men het in zijn macht op elk willekeurig punt in het blad als het ware een dwarswand te doen ontstaan, aan welke men elke gewenschte richting en lengte kan geven. Bij voorzichtig opereeren is die afsluiting niet breeder dan $\frac{1}{4}$ mM.

Op deze wijze kan men ook een blad physiologisch, namelijk zonder uitwendige verwonding, in twee of meer deelen verdeelen.

Deze behandeling, die in alle opzichten geheel dezelfde gevolgen te voorschijn roept als men bij een wond waarneemt, gaat niet gepaard met verzwakking der cel, omdat geen protoplasmaverlies plaats vindt, en bovendien is de plant reeds na één minuut geschikt voor verder ingrijpen of voor onderzoek.

Caulerpa prolifera ontleent haar soortnaam aan de omstandigheid, dat de „bladeren”, die uit het „rhizoom” ontspringen, zeer vaak nieuwe bladeren, proliferaties, voortbrengen. Vooral door deze omstandigheid is het mij vroeger gelukt aan te toonen dat er, overeenkomstig met de opvattingen van DE VRIES, ook bij deze plant een direct verband bestaat tusschen de intensiteit der protoplasmabeweging op verschillende plaatsten in het blad en die der voeding aldaar. De bundel van zeer vaak met het bloote oog zichtbare, door chlorophylkorrels donkergroene, strengen protoplasma, welke van den steel der proliferatie overgaan in het blad waaruit ze ontsproot en zich naar diens bladsteel begeven, was daarbij een gewichtig hulpmiddel.

Omtrent deze bundels ziet men, dat zij, bij zeer jonge proliferaties nog ontbrekende, zich eerst gaandeweg in het blad ontwikkelen, en wel steeds uitgaande van den steel der proliferatie om zich dan te

verlengen naar de basis van het blad toe. Nooit ziet men die stroombundels, omgekeerd, zich bij den bladsteel ontwikkelen en naar den steel der proliferatie verlengen, en evenmin van af de proliferatie naar den bladtop gaan. Zij ontstaan dus van bovenaf en richten zich naar beneden.

Wordt een bestaande proliferatie afgesneden, zoo ziet men den bundel gaandeweg verdwijnen; ook dit verdwijnen begint van boven af en gaat naar beneden toe voort.

Beide verschijnselen wijzen op het bestaan, bij de regeling der protoplasmastroomen, van een polariteit waarvan de impuls uitgaat van den organischen top en naar de basis gericht is.

Onderbreekt men dien stroombundel door een groote dwarswond, zoo wordt toch de communicatie hersteld en wel om het einde van de wond heen. Daarbij gedragen zich de stroomen onder en boven de wond intusschen geheel verschillend: de strengen, die van den steel der proliferatie uitgaan, blijven in hoofdzaak onveranderd totdat zij bij de wond zijn gekomen; dan gaan zij deels dwars af, om zich bij het einde der wond om te buigen en in rechte lijn naar den bladsteel te gaan. Een ander deel keert vaak met een bocht terug, nl. vooral dan als de stroomen krachtig zijn. Er treedt dus boven de wond als het ware een stuwing en vaak een terugkaatsing op, die onder de wond geheel gemist wordt.

Ook dit verschil in stroomverloop onder en boven de wond wijst op een polariteit bij de stroomregeling in het protoplasma, terwijl hier de impuls blijkbaar eveneens van den top uitgaat en naar de organische basis gericht is.

Er moet hieraan toegevoegd worden: eerstens, dat de stroomen welke in een niet prolifererend blad loopen, waaivormig van top en bladrand samenkomend en alle in den bladsteel overgaand, bij onderbreking volkomen hetzelfde vertoonen als de stroombundel, die van een proliferatie naar beneden gaat; alleen is deze laatste meest krachtiger en daarom beter voor de proef geschikt.

In de tweede plaats moet er aan herinnerd worden, dat overal in het blad een zeer samengesteld netwerk van stroomen bestaat, uitgespannen tusschen de talrijke (± 800 per 1 mM^2 .) dwarsbalken, die beide zijden van het blad met elkander verbinden; zoo bestaat er dus een bijna rechte, maar weinig intensieve verbinding tusschen elk willekeurig paar punten op het blad; waar dus hier gemakshalve gesproken wordt van het ontstaan van stroomen wordt hiermede bedoeld het zóódanig versterken, verdikken, der stroomen, dat zij met het bloote oog of met de loupe zichtbaar worden.

Ten derde beweegt zich het protoplasma in alle stroomen steeds

of afwisselend in beide richtingen, en hetzelfde geldt voor diegene, welke zich van boven af ontwikkelen of die van boven af verdwijnen.

Tot zoover hadden mijne vroegere onderzoekingen mij gebracht.

Het hernieuwd onderzoek werd weder met deze proeven aangevangen; zij gaven geheel overeenkomstige resultaten.

Was door de proeven met door dwarswonden voorziene bladeren aangetoond, dat men de groote voedingsstroomen van hun weg kan doen afwijken en ze een dwarsche richting doen aannemen, de vraag was nu, of men nog verder kon gaan, en den stroom ook in een tegengestelde richting kon leiden.

Reeds vroeger had ik een zoodanige proef gedaan, die een gunstig resultaat had opgeleverd, maar er was aanleiding ze op meer uitgebreide schaal te herhalen.

De inrichting der proef was zoodanig, dat twee inwendige afsluitingen werden tot stand gebracht, die twee over elkander grijpende haken vormden van welke de korte armen tot aan den bladrand doorliepen (fig. 1).

De verbinding van top en basis liep dus door het geheele middenstuk, dat tusschen de beide overlangsche afsluitingen gelegen was, en daarin zou de ontwikkeling der stroomen alzoo plaats moeten hebben in tegengestelde richting als in het normale blad.

De proeven hebben nu geleerd, dat inderdaad zoodanige ontwikkeling, dus als het ware de omkeering,

in dat middenstuk mogelijk is, waarbij het typische verloop der stroomen is als in de figuur wordt voorgesteld door de getrokken lijnen. Bovendien leerden de proeven echter:

1°. dat het lang duurt, voordat langs dien weg een krachtige verbinding tusschen top en basis tot stand komt; enkele weken zijn daarvoor noodig;

2°. dat het alléén gelukt, als de afstand tusschen de dwarswonden niet te groot is; 25—30 mM. was ongeveer de uiterste grens;

3°. dat het voor het gelukken wenschelijk is, dat de van boven komende impuls krachtig zij, hetgeen b.v. het geval is als zich boven de hoogste dwarswond een of meer krachtige proliferaties bevinden;

4°. dat steeds het blad zich zeer sterk tegen de omkeering verzet.

Wat het laatste punt betreft moet ik daaraan nog het volgende toevoegen:

Wanneer een blad van *Caulerpa* wordt afgesneden hetzij aan den bladsteel of hooger op, zoo vormen zich aan het afgesneden stuk worteltjes, en wel bijna altijd juist aan de sneevlakke, dus aan de

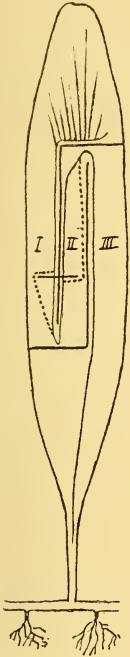


Fig. 1.

organische onderzijde; een middenstuk uit het blad doet juist hetzelfde.

Het blad doet dan alzoo een poging om door nieuwvorming een onafhankelijk leyen te beginnen. (In de natuur is dit het krachtigste, zoo niet het eenige middel van voortplanting van *Caulerpa*, daar zij geen geslachtsorganen schijnt te bezitten).

Hetzelfde ziet men nu geschieden bij de dubbele haakwonden: over de geheele breedte boven de onderste dwarswond ontstaan vaak worteltjes, als bewijs dat de communicatie zóódanig is verzwaaard, dat het eerste bladstuk (I, dat met den top in verbinding staat) en het middenstuk, II, blijkbaar sneller en wellicht beter voorzien in hunne behoefte aan verbinding met worteltjes door nieuwvorming, dan door de bestaande doch verzwakte communicatie met de oude te versterken.¹⁾

Het derde deel van het blad (III, dat dus met de basis in directe verbinding is) vertoont nooit eenige neiging tot de vorming van worteltjes, blijkbaar omdat hier de communicatie onveranderd gebleven is.

Wanneer men moet aannemen, dat de stroombundel in het ongeschonden blad geregeld wordt door een basaalwaarts gerichten impuls, zoo moet, als de „omkeering” gelukt is, de in het middenstuk nieuwgevormde stroom zich richten naar een tegengestelden impuls, of, beter gezegd, naar denzelfden impuls, nadat deze door de dwarswond als het ware was teruggekaatst.

Dat die stroom zich inderdaad op deze wijze gedraagt volgt reeds dadelijk hieruit, dat de zich nieuwvormende stroom eerst *onder* in het middenstuk zichtbaar wordt, om zich gaandeweg naar *boven* toe te verlengen.

Men kan hetzelfde nog meer overtuigend aantoonen door verder experimenteel ingrijpen: onderbreekt men n.l. die nieuwe stroomen in I en II door een dwarswondje (als in fig. 1) dan ziet men in I de stuwung optreden *boven*, in II *onder* de wond, dus loopen de nieuwe stroomen zooals de stippellijn in de figuur aangeeft; een bewijs dus, dat deze beide aangrenzende stukken zich tegengesteld gedragen.

Al getukt het alzoo ten slotte vaak de „omkeering” in het middenstuk te doen tot stand komen, zoo is die omkeering toch zéér onvolledig, hetgeen ik uit de volgende waarneming afleid. Bij een der bladeren met dubbele haakwond had zich bovenaan in het middenstuk een proliferatie gevormd, terwijl de volledige omkeering tot stand kwam; het nieuwe blaadje lag iets terzijde van den stroom. Van uit dat blaadje had zich een bundeltje van drie stroomen ont-

¹⁾ Boven de bovenste dwarswond vormen zich ook somtijds worteltjes, hoewel slechts dan als het topstuk groot, dus krachtig genoeg is, of als er proliferaties op voorkomen.

wikkeld. Eén daarvan ging onderlangs de bovendwarswond in het derde gedeelte van het blad over, na zich met den van beneden komenden hoofdstroom vereenigd te hebben. De twee andere namen echter hun weg recht naar beneden, dus alsof de verbinding met de bladbasis nog geheel was als vóór de verwonding. Eén der strengen gehoorzaamde dus bij het uittreden uit het blaadje aan de werking van den teruggekaatste impuls, terwijl de beide andere daarvan geen invloed ondervonden. Op die plaats in het middenstuk moet dus nog de oude basipetale impuls behouden zijn gebleven.

Een soortgelijk geval, dat zich bij een andere proef voordeed, zal later besproken worden.

Ook een der bladeren waarop zooeven werd gedoeld, waarbij later nog een klein dwarswondje in het middenstuk en tegelijk in het eerste stuk was gemaakt (dus als in fig. 1), vertoonde een verschijnsel, dat ik mij slechts op die wijze kan verklaren. Er werd reeds op gewezen, dat boven wonden zich regelmatig nieuwe worteltjes vormen; hierna zal worden beschreven welke verschijnselen aan die vorming der worteltjes voorafgaan, verschijnselen, die steeds in basipetale richting zich doen gelden. Die voorafgaande verschijnselen vertoonden zich nu bij dat blad in het eerste gedeelte (I) *boven* het kleine wondje, dus als gewoon, en in het middelstuk geschiedde dit eveneens *boven* dat wondje. Ware de polariteit van het geheele middelstuk omgekeerd geweest, zoo zou dáár die verandering daarentegen *onder* dat wondje moeten zijn opgetreden. Dit wijst er nu m.i. op, dat de invloed van den teruggekaatste impuls gelocaliseerd was en geen invloed had op het gedeelte van het middenstuk terzijde, nadat dit door het dwarswondje als het ware aan diens directen invloed was onttrokken, en, den ouden impuls nog behouden hebbende, reageerde dáár dit middelste bladstuk als normaal.

Nu het alzo gelukt was een stroom „om te keeren”, was het waarschijnlijk, dat het ook gelukken zou een geheele plant zich omgekeerd te doen ontwikkelen.

Geschiedde die proef echter in dier voege, dat een geheele plant, dus met rhizoom en worteltjes, werd omgekeerd en de bladtoppen in slik begraven, zoo gaf zij geen resultaat: gedurende zeven weken bleef zulk een plant volkomen onveranderd; slechts de bladtop werd wit door het wegtrekken der chlorophylkorrels tengevolge van het verblijf in het donker, terwijl het rhizoom een weinig groeide en enkele nieuwe worteltjes maakte.

Afgesneden bladeren, omgekeerd vrij opgehangen of met den top in modder geplant, leverden echter geheel andere uitkomsten.

Nagenoeg alle bladeren en vooral en het snelst de jongeren,

vormden eerst worteltjes, welke ook in dien stand van het blad steeds aan het uiteinde van den steel ontstonden; zeer vele kwamen reeds na 2 dagen te voorschijn.

Nadien vormden zich veelal meerdere proliferatie's, welke op verschillende plaatsen ontstonden. Nadat deze gevormd waren, werd een eerste gevolg van de omkeering waarneembaar, en wel aan het verloop der stroombundels, die uit de proliferaties kwamen en verder hun weg namen door het oude blad.

Bij een afgesneden, maar rechtop geplaat blad gaan deze steeds alle naar de bladbasis; hier nu ging bij bijna alle proliferaties wel is waar ook het grootste deel dezer stroomen naar de basis, maar enkele namen hun richting naar den bladtop, zonder dat zij dien echter bereikten. De tegengestelde richting waarin de zwaartekracht werkte tijdens hun ontstaan en ontwikkeling, had ze blijkbaar van hun weg afgeleid.

Nog duidelijker bleek het bestaan van het antagonisme tusschen zwaartekracht en den basipetalen impuls bij eenige der bladeren, doordat zich in deze stroomlussen vormden. Dan zag men n.l. van de jonge proliferaties enkele stroomen naar den bladtop gaan, om echter later plotseling met zeer scherpe bocht om te keeren en dan rechtdoor naar den bladsteel te loopen. De zwaartekracht had deze dus eerst van hun weg doen afwijken, maar de voortdurende tegenwerking van den basipetalen impuls, die de stroom blijkbaar op elk punt van het blad ondervond, had ten slotte die werking opgeheven en zelfs de overhand behouden. Die lussen hadden bij groote bladeren een lengte van 5 tot 10 mM.

Al deze veranderingen vonden plaats, voordat zich aan de apicale zijde worteltjes ontwikkelden, hetgeen ten slotte bij zeer vele bladeren geschiedde; het vroegst verschenen deze eerst na 9 dagen, de meesten later, tot na bijna 4 weken, en toen waren ze nog niet bij alle opgetreden. Dat de meesten reeds veel vroeger worteltjes aan het uiteinde van den bladsteel gevormd hadden, bewijst, dat het hun niet ontbrak aan het vermogen om ze te vormen. Dat de aanwezigheid der worteltjes aan den bladsteel niet een belemmering vormde voor het ontstaan van nieuwe worteltjes elders, bleek tevens, omdat er met betrekking tot dit laatste geen verschil was waar te nemen tusschen bladeren met of zonder worteltjes aan den steel.

Werden nu die bladeren met de apicale worteltjes (die echter bijna nooit juist aan den top, maar op meer of minder grooten afstand daarvan stonden) in slik geplaatst, dan groeiden de proliferaties verder, of, als zij er niet vooraf reeds waren, dan ontstonden ze altijd nadien. De van deze uitgaande stroombundel stelde zich

dan veelal in verbinding met de worteltjes, en dan was dus een plant verkregen waarin, onder den impuls, die uitgaat van de proliferatie, zich de voedingsstroom ontwikkeld had in een richting, tegengesteld aan den impuls, die in het blad bestond.

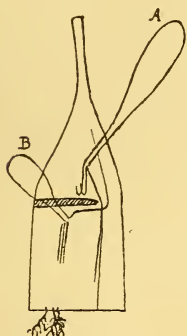


Fig. 2.

Ook nu weder kon, op dezelfde wijze als vroeger (blz. 368), door een dwarswond worden aangetoond (als in Fig. 2, waarbij de basale helft van een blad omgekeerd geplaut was) dat die bundel in het blad inderdaad gehoorzaamde aan den impuls der proliferatie *A*, omdat aan de zijde van deze de stuwning optrad.

Toch bleek ook hier de omkeering slechts plaatselijk te zijn. Een kleine proliferatie *B*, had zich n.l. later, na het maken der dwarswond, onder deze (dus naar de zijde der apicale worteltjes) ontwikkeld. Dit nieuwe blaadje vormde nu weer een stroombundeltje, waarvan eenige dunnere stroomen zich in de richting dier worteltjes begaven; één dikkere stroom liep echter dwars langs de wond, boog aan het einde met een scherpe bocht om, en begaf zich naar de oude bladbasis. Daarbij kruiste ¹⁾ deze stroom den bundel, die van de andere proliferatie naar de apicale worteltjes ging, maar zelfs dat deed hem niet van richting veranderen.

Ook hier dus was, nu intusschen door de werking der zwaartekracht, een omkeering verkregen, doch deze bleek eveneens slechts zeer plaatselijk te zijn tot stand gekomen.

De omgekeerd opgehangen bladeren leverden mij ten slotte nog materiaal voor een andere proef.

Deze bladeren hadden, zooals gezegd, ten slotte voor het meerendeel proliferaties en worteltjes naar de apicale zijde gevormd. Bij enkelen nu bevonden zich een proliferatie en een worteltje op ongeveer gelijke hoogte, maar de eerste aan de ééne zijde der middellijn van het blad, het worteltje aan de andere zijde.

Wat zou er nu geschieden, wanneer men dit bladstuk, door een dwarswond isoleerende van de andere basale worteltjes en proliferaties, afzonderlijke plantje? Doordat er een veelvuldige directe, maar zwakke, verbinding tusschen beide organen bestaat door middel van de fijne protoplasmastroomen, was het mogelijk, dat de directe verbinding zou versterkt worden en er dus een dwarsstroom zou ontstaan,

¹⁾ De stroom scheen den bundel te snijden, maar daar de stroomen loopen van balk tot balk, en er zeer vaak twee stroomen op verschillende hoogte aan één balk zijn aangehecht, hebben die stroomen elkander dus gekruist. Hetzelfde geschiedt dikwijls bij stroomlussen.

evenals boven een groote dwarswond. Het kon echter ook zijn dat de basipetale impuls van de proliferatie en van het bladstuk een zoodanige verbinding, niet, of niet in die richting toeliet.

De drie proeven waarvoor geschikt materiaal verkregen werd, waren nog niet geheel afgelopen bij mijn vertrek. Toch bleek toen reeds volkomen duidelijk, dat nergens een versterking van de dwarsche verbinding was ingetreden. Integendeel, overal liepen de stroomen van uit de proliferatie rechtstreeks naar de basale wond; stroomen welke met het worteltje in verbinding stonden, vertoonden geheel hetzelfde. Zelfs een indirecte verbinding tusschen beiden, via de basale wond, kwam niet tot stand.

Bij één der bladeren vormde zich een jong rhizoom op $1\frac{1}{2}$ mM. afstands naast de proliferatie; een verbinding tusschen die beiden kwam wel tot stand, maar langs een grooten omweg, nl. via de op $6\frac{1}{2}$ mM. afstand gelegen basale wond.

Bij een tweede ontstond dicht bij het worteltje een rhizoom, en een ander rhizoom een weinig boven de proliferatie. In beide gevallen werd wederom de verbinding tot stand gebracht tusschen elk der beide groepen via de basale wond, maar geen tusschen proliferatie en worteltje. De volkomen physiologische scheiding tusschen proliferatie en worteltje bleek ten slotte daaruit, dat op een kleine plek aan de wond, juist op de plaats waar de stroomen uit de proliferatie deze bereikten, zich een aantal kleine worteltjes hadden gevormd.

De basipetale impuls was dus zóó krachtig, dat deze een dwarsche verbinding geheel verhinderde, tengevolge waarvan elk bladstuk twee morphologisch wel, maar physiologisch toch nauwlijks samenhangende individuen ging vormen.

Boven werd gesproken van stroomen, die door de wond werden teruggekaatst; deze uitdrukking werd gekozen, omdat de richting der wond blijkbaar invloed uitoefent op de richtingsverandering van den stroom, en wel een gelijksoortige als een vaste wand dit bij een aankomend golffront doet.

Die invloed vertoont zich het duidelijkst, wanneer men van drie krachtige bladeren het topgedeelte, dat men zoo groot mogelijk neme, afsnijdt, bij het eerste blad volgens een dwarsche lijn, bij het tweede V-vormig, dus met de punt naar beneden, en bij het laatste blad evenzoo, maar met de punt naar boven gericht. Na eenige dagen ziet men dan dat de stroomen bij de wond ombuigen en wel zoodanig, dat de lijnen, welke die stroombogen middendoordeelen, in het eerste geval evenwijdig loopen met de lengteas van het blad, dat zij in het tweede blad convergeeren en in het laatste divergeeren. Die

stroomen zijn vaak zóó krachtig, dat men ze over groote afstanden met het bloote oog kan vervolgen.

Men moet hierbij intusschen slechts die gedeelten der stroomen in het oog houden, welke bij de wond zijn gelegen, eerstens omdat de terugkaatsing niet plotseling, maar gaandeweg geschiedt, zoodat de stroomen een meer of minder scherpe bocht aannemen, met een straal van $\frac{1}{4}$ tot 2 mM. ongeveer, ten tweede omdat de bladeren vrij smal zijn en de stroomen dus op eenigen afstand der wond niet meer vrijelijk hun nieuwe richting kunnen vervolgen.

Dat bij de vorming van wondkurk bij hoogere planten de nieuwe dwarswanden in het phellogeen steeds evenwijdig loopen met de richting der wond op de naastbij liggende plaats, doet aan een overeenkomstige invloed van de wond bij die planten denken.

De basipetale impuls, waarop de aangehaalde waarnemingen wijzen, uit zich op niet minder duidelijke wijze bij de vorming van nieuwe organen aan afgesneden bladeren ¹⁾).

Reeds WAKKER ²⁾ wees er op, dat dáár de jonge rhizomen en worteltjes steeds dicht boven de basale wond ontstaan.

Het onderzoek heeft mij nu geleerd, dat reeds dadelijk na de verwonding de vorming dier organen wordt voorbereid, en wel door het optreden van een splitsing in het protoplasma. Ik kon deze echter slechts waarnemen bij bladeren welke in zeer gunstige levensomstandigheden verkeerden, maar dan waren de veranderingen ook met het bloote oog of anders met de loupe goed zichtbaar.

Men ziet dan namelijk, dat boven de basale wond gaandeweg een helder witte vlek optreedt, vaak verscheidene millimeters groot. Slechts op die plaats vormen zich dan later de worteltjes, terwijl in de onmiddellijke nabijheid daarvan ook de rhizomen ontstaan.

Waar hierboven (blz. 369) gezegd werd, dat de verwonde bladeren blijk gaven worteltjes te willen vormen, werd bedoeld op het optreden van een zoodanige vlek.

De eerste vraag was nu: hoe ontstaat deze witte vlek?

In afgesneden, krachtige bladeren ziet men reeds één dag nà het afsnijden witachtige strepen optreden, van welke in een onge-

¹⁾ Aan ongeschonden, op het rhizoom zittende bladeren, zag ik nooit worteltjes of rhizomen ontstaan; afgesneden worteltjes sterven dadelijk af, terwijl losse rhizomen, als zij krachtig genoeg zijn, wel nieuwe organen vormen, maar steeds op geheel normale wijze.

²⁾ Die Neubildungen an abgeschnittenen Blättern von *Caulerpa prolifera*; Versl. en Meded. der Kon. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam, 1886, 3e Reeks, Deel 2, blz. 252.

schonden plant geen spoor is te ontdekken. Voorzover beschouwing met een sterke loupe ze zichtbaar maakt, beginnen zij op eenigen afstand van den top, en evenzoo van de bladranden, begeven zich met een flauwe bocht (hol naar den rand toe) ongeveer naar het midden om dáár, dichter bijeen, gezamenlijk naar den bladsteel te gaan; hier en daar staan zij onderling met elkander in verbinding. Zij gedragen zich dus in hun verloop geheel als de groene stroomen.

Doch ook in andere opzichten verhouden zij zich als deze: draagt het afgesneden blad een proliferatie, dan gaat uit den steel van deze een bundel dier stroomen in het blad over en richt zich naar de bladbasis; ontmoeten de stroomen een dwarswond, zoo gaan zij tot aan deze door, wijken dwars uit, en vervolgen, aan den wondhoek gekomen, rechthuis hun weg naar den bladsteel.

Deze stroomen, welke somtijds lichtgroen schijnen, doordat zij heenschemeren door de wandstandige chlorophyllaag, bestaan uit zeer fijnkorrelig, en daardoor melkachtig wit protoplasma, geheel anders als het veel meer heldere der groene stroomen, waarin de chlorophylkorrels worden meegevoerd. Hun oorsprong vinden de witte stroomen deels uit de groene: men ziet deze namelijk bij het optreden der eerstgenoemden zwakker worden, terwijl, wanneer de witte stroomen verdwijnen, de groene allengs weer duidelijker worden.

Van alle punten van het verwonde blad stroomt alzoo fijnkorrelig protoplasma te samen; het vereenigt zich onmiddellijk boven de wond, verdringt de chlorophyllhoudende wandlaag en stroomen, en doet alzoo het blad plaatselijk een witte kleur aannemen.

Onderzoekt men de witte stroomen mikroskopisch, zoo neemt men ook in deze een duidelijke strooming waar, veelal in beide tegengestelde richtingen gelijktijdig of anders afwisselend, terwijl tal van ongekleurde korrels medegesleept worden. Chlorophylkorrels ontbreken er echter ten eenen male. Toch neemt na de verwonding de hoeveelheid plasma, zoowel „wit” als „groen” boven de wond toe, terwijl zij in het topgedeelte vermindert, zóó zelfs, dat de top een enkele maal leegloopt en afsterft. Hieruit volgt, dat de plasmamassa, door de stroomen naar beneden gevoerd, grooter is dan de naar boven teruggebrachte, zoodat de resultante der beide bewegingen gelijkstaat met een stroom, die naar de organische basis gaat, en dus in het blad afdaald.

De witte stroomen gedragen zich dus geheel als de groene; toch is er een verschil tusschen beide, hoewel slechts van quantitatieven aard: terwijl de beide groepen van stroomen dus aan eenzelfde basipetalen impuls gehoorzamen, blijkt deze op de witte stroomen een iets grooteren invloed uit te oefenen dan op de groene, want steeds

neemt men waar, dat het groene plasma door het witte wordt op zijde gedrongen.

Toen nu gebleken was, dat de witte stroomen zich naar de basale wond begeven, rees bij mij de vraag of zij slechts deze wond wenschten te bereiken, dan wel of zij, daarmede niet tevreden, ook de allerlaagste (meest basale) plaats aan die wond zouden trachten in te nemen.

De proeven toonden nu aan, dat dit laatste inderdaad het geval is.

Maakt men een wond, die schuin staat op de middellijn van het blad, dan vloeit het witte plasma langs de wond naar beneden, en verzamelt zich in de scherpe punt; was de wond V-vormig, zoo loopt alles in het midden samen, terwijl bij een Δ -vormige belemmering de witte stroomen afstroomen naar de beide punten aan de bladranden. Bij deze verwondingen gedragen de groene stroomen zich geheel als de witte, maar wederom blijft hun eindpunt enkele millimeters ten achteren bij dat der ongekleurde stroomen. Hieruit blijkt dus nog duidelijker, dat deze laatste op den basipetalen impuls sterker reageeren.

Voor al aan den stroom van ongekleurd plasma, welke langs de wond afvloeit, ziet men dat deze een golvend verloop heeft, daar deze bestaat uit korte stukjes stroom, welke overlans naar beneden gaan, vervolgens door de wond worden teruggekaatst, die zich dan weer naar beneden ombuigen, enz. Niet zelden loopen zóó twee stroomen dicht bijeen, terwijl zij elkander dan herhaaldelijk kruisen. De hoogte dier golven is gering, niet meer dan $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{2}$ mM.

Het basale stuk der zóó verwonde bladeren ondergaat geen verandering wanneer het met het rhizoom in verbinding bleef. Was het echter kort te voren daarvan gescheiden, dan gedraagt het onderstuk zich als een afgesneden geheel blad. Witte stroomen treden hier eveneens te voorschijn; zij beginnen intusschen eerst op eenigen afstand onder de verwonding als fijne lijnen, en gaan, dikker wordende, alle in een bladsteel over. Aan diens ondereinde ontstaat dan de ophooping van wit protoplasma.

De zeer scherpe tegenstelling welke aldus optreedt tusschen de verschijnselen onder en boven de wond, levert wederom een sprekend bewijs voor het bestaan van den basipetalen impuls en van diens invloed op het witte plasma.

Met betrekking tot de herkomst van dit plasma moet er aan herinnerd worden, dat alle organen gedurende den groei aan hun top steeds een groote hoeveelheid van dergelijk plasma bevatten. Daaronder, dus waar de groei ten einde is, is het helder en bevat in bladeren en rhizomen een zeer groot aantal chlorophylkorrels. Houdt een orgaan op met groeien, dan verdwijnt de witte top na korten tijd.

Om deze reden, en om het uiterlijk ervan heb ik dit fijnkorrelige, troebele protoplasma reeds vroeger ¹⁾ vergeleken met datgene, dat bij de hoogere planten de meristeemcellen vult.

Caulerpa bezit dus, niettegenstaande haar ééncelligheid, een „meristeemplasma” dat echter slechts gedurende den groei te vinden is, en wel in de groeiende toppen. Na den groei verdwijnt het, welk verdwijnen moet opgevat worden als een zich vermengen met het overige protoplasma. ²⁾

De proeven leerden nu, dat na zware verwonding dit meristeemplasma zich wederom gaat afscheiden (hetgeen blijkbaar op alle punten van het blad plaats vindt) waarna het zich tot steeds dikker wordende stroomen vereenigt en aan de organische basis samenvloeit.

Op de daardoor gevormde witte vlekken ontstaan dan de worteltjes, terwijl de rhizomen hun oorsprong nemen in de onmiddellijke nabijheid daarvan, meestal op den overgang van de witte vlek naar het donkergroene gedeelte, maar toch in het bereik der witte stroomen. Beide ontstaan alzoo als gevolg van het optreden van den resulterenden afdalenden stroom na de verwonding.

De worteltjes en rhizomen ontleenen hun meristeemplasma alzoo aan hetzelfde, te samen gevloeide troebele protoplasma en dit laatste mag daarom wel op zich zelf als meristeemplasma beschouwd worden.

Is alzoo de bron van het meristeemplasma van worteltjes en rhizomen dezelfde, toch bestaat er een soort antagonisme tusschen beide:

Zoo ziet men b. v. niet zelden, dat, wanneer zich ergens op een blad een worteltje gevormd heeft, onmiddellijk daarachter een rhizoom ontstaat, of omgekeerd.

Het meest frappante geval daaromtrent nam ik bij een blad waar dat zijdelings uit den bladsteel (hetgeen zelden voorkomt) twee rhizomen gevormd had, onmiddellijk boven elkander; aan de andere zijde van den bladsteel, juist achter elk der rhizomen, bevond zich nu een flink worteltje.

Eigenlijk ziet men dit antagonisme ook reeds als een worteltje op de gewone wijze aan een rhizoom ontstaat; dit vormt zich nl. niet op eenigen afstand van den top, maar onmiddellijk daarachter, zoodat het somtijds den indruk maakt alsof de rhizoomtop zich dichotoom, dus in twee gelijkwaardige takken, wil verdeelen, waarbij dan later het eene puntje als rhizoom, het andere als worteltje zich ontwikkelt.

¹⁾ l. c. p. 203.

²⁾ Zoodanig afscheiden van meristeemplasma uit het protoplasma der cel en het wederoplossen daarin heeft NOLL onlangs bij een nauw verwante plant (*Bryopsis*) beschreven; vergel.: Beobachtungen und Betrachtungen über embryonale Substanz; Biologisches Centralblatt, 1903, No 8.

Tot op zeer weinig na zijn de beide meristeemplasma's alzoo aan elkander gelijk, tot er op een oogenblik een splitsing tot stand komt. De hoofdoorzaak dier splitsing meen ik te moeten zoeken in het licht.

De worteltjes kunnen zich wel zeer goed in het licht vormen en ontwikkelen, maar zoo mogelijk zoeken zij toch den schaduwkant op, of richten zich van het licht af. Rhizomen ontstaan daarentegen meestal, evenals de proliferaties, aan de lichtzijde.

Wanneer men nu hierbij in aanmerking neemt, dat NOEL¹⁾ heeft aangetoond, dat een rhizoom van *Caulerpa* aan de bovenzijde worteltjes vormt wanneer men dit van boven beschaduwde en slechts van onderen verlicht, dan meen ik, dat er alle aanleiding bestaat om het verschil in lichtintensiteit aan de beide zijden van het rhizoom aan te zien als de hoofdoorzaak van de scheiding, welke in het eerst gelijksoortige, meristeemplasma optreedt, en dus ook van het antagonisme tusschen rhizoom en worteltje.

Dat ook inwendige invloeden daarbij een rol spelen, volgt wel reeds uit de omstandigheid, dat de worteltjes, zoowel als de bladeren trouwens, aan het rhizoom vaak op voor elk dezer vrij regelmatige afstanden gevormd worden.

Een enkele maal ziet men zelfs, dat een rhizoomtop zich geheel en al in worteltjes oplost, wel een bewijs, dat in oorsprong hun verschil niet zoo groot kan zijn.

Men komt nu van zelf tot de vraag: Hoe ontstaan de bladeren?

Hieromtrent moet ik mij tot enkele mededeelingen bepalen, daar mijn onderzoek te dien opzichte niet is afgelopen.

Aan de ongeschonden plant ontstaan zij òf op het rhizoom, òf als proliferaties op de bladeren. Op het rhizoom ontstaan zij op den bovenkant, maar in tegenstelling met de worteltjes steeds op grooten afstand (enkele cM.) van den top, en dus geheel buiten het bereik van het meristeemplasma aldaar. Ik vermoed, dat hun ontstaan op de bovenzijde mede door het licht bepaalt wordt, al is dit nog niet aangetoond.

Aan onverwonde bladeren, dus in het normale leven der plant, ontstaan zij aan uitgegroeide bladeren en dan meestal dicht bij den bladtop, aan afgesneden bladeren geschiedt dit laatste echter zeer zelden; daar ontstaan zij gewoonlijk op het onderste $\frac{2}{3}$ deel van het blad, liefst zelfs op het laagste $\frac{1}{3}$ deel, doch bijna nooit dadelijk boven de wond. Ook hier ontspringen zij dus buiten het bereik van het meristeemplasma.

De bladvorming vangt aan met het optreden van een klein wit

¹⁾ Einfluss der Lage, u. s. w.; Arbeiten aus dem botanischen Institut in Würzburg, Bd. III, 1888, S. 470.

puntje op het donker groene orgaan; dit groeit snel uit tot een cilindervormig, zich spoedig verbreedend, uitwas, dat vaak geheel wit blijft tot het een lengte van 1 cM. bereikt heeft, om dan bij verderen groei van onderen op groen te worden. De top blijft wit, zoolang het blad in lengte toeneemt, maar wordt groen als de groei stilstaat, hetzij dat dit geschiedt als het blad volwassen is, dan wel als ongunstige uitwendige invloeden dit tot gevolg hebben.

In geen enkel geval werd de vorming van een blad voorafgegaan door het optreden van een groote witte vlek met daarheen loopende stroomen van meristeemplasma. Dit leidt tot de gevolgtrekking, dat het jonge blad zijn meristeemplasma blijkbaar ontleent aan het protoplasma overal uit de naaste omgeving, zonder dat daarbij een bevoorrechte richting van beweging als gevolg van een basipetalen of acropetalen impuls optreedt. Tengevolge daarvan was dan elk der stroomen zóó zwak, dat zij met de loupe niet zichtbaar waren. De bladvorming blijkt dus onafhankelijk te zijn van den afdalenden stroom van meristeemplasma.

Slechts in één geval heb ik witte stroomen gezien in verbinding met een jong blad: in een afgesneden blad had zich een krachtige witte bundel gedifferentieerd, welke liep dicht langs de inplanting van een, na de afsnijding ontstaan, jong blaadje (prolificatie). Dit was ruim 1 cM. lang en nog geheel ivoorwit. Van uit den steel ervan gingen zes witte stroomen in het blad over; zij liepen alle basaalwaarts om reeds zeer spoedig met den witten hoofdbundel te versmelten. Ook deze gehoorzaamden alzoo aan den basipetalen impuls; zij hadden zich allengs gevormd gedurende de ontwikkeling van het blaadje, en waren dus niet vooraf opgetreden om de vorming ervan voor te bereiden, zooals dit met de worteltjes geschiedt. Ook de groote witte vlek ontbrak hier.

Daar de witte hoofdstroomen in dit afgesneden blad ook hier aan de basis samenvloeiden om aldaar het ontstaan van rhizoom en worteltjes voor te bereiden, mag men hieruit afleiden, dat er in hoofdzaak ook geen verschil bestaat tusschen het meristeemplasma van bladeren aan de eene, en dat van rhizomen en worteltjes aan de andere zijde.

Er moeten dus oorzaken werkzaam zijn, die in het afgesneden blad of in het rhizoom een splitsing in het plasma teweegbrengen ter vorming van nieuwe proliferaties en bladeren, en, daar men in culturen regelmatig waarneemt, dat nieuwe proliferaties aan de lichtzijde van het blad ontstaan, zal ook hierbij het licht voorzeker een rol spelen. Ongetwijfeld zijn er echter nog andere, inwendige, thans onbekende factoren, die medewerken om het ontstaan en de plaats van oorsprong der proliferaties te bepalen.

Uit de hier in het kort beschreven waarnemingen mag afgeleid worden, dat er in de bladeren van *Caulerpa* een basipetale impuls werkzaam is, welke van elk punt van het blad uitgaat, en op twee wijzen tot uiting komt :

1°. in bladeren, die in verbinding staan met rhizomen en worteltjes, in het verloop der „groene” protoplasmastroomen in het onverwonde blad, zoomede als in sterk verwonde bladeren,

2°. in afgesneden krachtige bladeren in het optreden en het verloop der „witte” stroomen van meristeemplasma, hetwelk zich ten deele aan de meest basaal gelegen plaats verzamelt. Het is deze afdalende stroom welke de voorbereiding vormt voor het optreden daar ter plaatse van nieuwe rhizomen en worteltjes.

Geen der waarnemingen gaf daarentegen aanleiding bovendien het bestaan te onderstellen van een tegengestelden, acropetalen, impuls, ook niet dus bij de vorming van bladeren of proliferaties.

Het gelukte door bepaalde verwondingen en door het omgekeerd plaatsen stroomen te doen ontstaan welke zich tegengesteld toonden aan de stroomen in het normale blad voorhanden. Het bleek, dat men daarbij echter niet te doen had met de omkeering van den impuls zelve, maar dat de zwaartekracht of de terugkaatsing door de wond de oorzaak was van de veranderde stroomrichting, terwijl de basipetale impuls geen, of nauwelijks eenige (en dan in allen gevalle slechts zeer plaatselijke) verandering onderging.

De hoofdverschijnselen bij *Caulerpa* waargenomen doen denken aan waarnemingen welke reeds van ouds bij hoogere planten bekend zijn. De gevolgen van ringwonden of van groote dwarswonden in het bastweefsel van boomen, het ontstaan van sterk plasmahoudend weefsel (callus) boven de wond, het vaak afsterven van het weefsel onder die wond, het vormen of uitloopen van adventief-wortels uitsluitend boven de wond en op de allerlaagste plaats van het levende bastweefsel, zijn, mutatis mutandis, blijkbaar analoog. Hetzelfde geldt voor het optreden van adventiefwortels uitsluitend aan de basis van afgesneden bladeren van zeer vele planten, voor de regeneratieverschijnselen bij de vruchtstelen van *Marchantia* enz.

De eerstgenoemde verschijnselen werden door de oudere physiologen met behulp van den hypothetischen „afdalenden sapstroom”, door de nieuwere physiologen meestal niet verklaard. Nu bij *Caulerpa*, die zooveel analoge verschijnselen deed zien, het bestaan van een resulterenden afdalenden stroom kon worden aangetoond, komt het mij waarschijnlijk voor, dat deze bij nader onderzoek ook bij hoogere planten zal worden teruggevonden, zij het ook in geheel anderen vorm als oorspronkelijk werd gemeend.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Meded. N^o. 92 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: Dr. H. KAMERLINGH ONNES en Dr. C. ZAKRZEWSKI, „*Over de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden bij mengsels van chloormethyl en koolzuur*”. (Vervolg).

§ 5. *Verdere benaderingen.* In tweede benadering komt door ook op B^2 te letten:

$$\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} - 1 = \frac{B}{A^2} (p_1 - p_2) - \frac{B^2}{A^4} (p_1 - p_2) (p_1 + 2p_2). \quad (2)$$

Let men op B^2 dan is het echter rationeeler ook C mede te nemen en komt:

$$\frac{p_1 v_1}{p_2 v_2} - 1 = \frac{B}{A^2} (p_1 - p_2) - \frac{B^2}{A^4} (p_1 - p_2) \left\{ p_2 + \left(1 - \frac{CA}{B^2} \right) (p_1 + p_2) \right\}. \quad (3)$$

Volgens de gereduceerde toestandvergelijking is $\frac{CA}{B^2}$ voor chloormethyl bij 20° ongeveer $\frac{1}{5}$.

De herhaling van de berekeningen van § 2 geeft nu ¹⁾

TABEL III. Tweede viriaalcoëfficiënten van mengsels van koolzuur ($x = 0$) en chloormethyl ($x = 1$) in 2^e en 3^e benadering.

benadering	gehalte x	$\frac{B}{A^2}$ uit I en II	$\frac{B}{A^2}$ uit I en III	$\frac{B}{A^2}$ gemiddeld	B_{20}°
2e	1	— 0.01698	— 0.01710	— 0.01704	
3e		— 0.01711	— 0.01723	— 0.01717	— 0.01978
2e	0.6945	— 0.01246	— 0.01269	— 0.01258	
3e		— 0.01260	— 0.01282	— 0.01271	— 0.01464
2e	0.5030	— 0.01001	— 0.00976	— 0.00988	
3e		— 0.01009	— 0.00983	— 0.00996	— 0.01147
2e	0 ²⁾	— 0.00572	— 0.00545	— 0.00558	
3e		— 0.00575	— 0.00547	— 0.00561	— 0.00646

De herhaling der berekeningen van § 3 en § 4 met deze verbeterde waarden geeft:

¹⁾ Bij hernieuwde berekening ondergingen ook de uitkomsten in eerste benadering eene onbetekenende wijziging.

²⁾ Hier zijn twee bepalingen van KEESOM overeenkomende met I en II en I en III volgens (2) en (3) berekend (gegevens zie Med. N^o. 88).

$${}^{(Cl Me)} B_{20^\circ} = -0.01983$$

$${}^{(Cl Me, CO_2)}_{(12)} B_{20^\circ} = -0.01005$$

$${}^{(CO_2)} B_{20^\circ} = -0.00644$$

De vergelijking van de gevonden waarden met de kwadratische formule en met de wet der overeenstemmende toestanden (bij gebruikmaking van BRINKMAN's ¹⁾ kritische gegevens) geeft :

TABEL IV. Afwijkingen der tweede viriaalcoëfficiënten van mengels van koolzuur ($x = 0$) en chloormethyl ($x = 1$) van de kwadratische formule en van de correspondentie.

x	B uit wet overeenst. toest.	B kwadr. form. — B overeenst.	B waarnem. — B kwadrat.	B waarn. — B overeenst.
1	— 0.02156	+ 0.00173	+ 0.00005	+ 0.00178
0.6945	— 0.01470	+ 0.00027	— 0.00021	— 0.00006
0.5030	— 0.01135	— 0.00029	+ 0.00016	— 0.00013
0	— 0.00650	+ 0.00006	— 0.00002	+ 0.00004

In de gevolgtrekkingen van § 3 en § 4 wordt door deze verdere benaderingen geen wijziging gebracht. Het is echter opvallend, dat de afwijking thans enkel op het chloormethyl komt.

§ 6. *Vergelijking van de uitkomsten met die van LEDUC en CHAPPUIS.* De samendrukbaarheid van chloormethyl bij kleine dichtheden is onderzocht door LEDUC ²⁾ in vereeniging met SACERDOTE. Door hem worden niet opgegeven de waarnemingsuitkomsten, maar voor 16° de daaruit berekende grootheid

$$\pi \mathcal{A}_\pi = -\pi \frac{1}{pv} \frac{\partial(pv)}{\partial p} \text{ bij } \pi = 73 \text{ cm.}$$

Volgens de empirische toestandsvergelijking van KAMERLINGH ONNES is

$$-\left(\frac{1}{pv} \frac{\partial(pv)}{\partial p} \right)_p = -\frac{B}{A^2} + \frac{3B^2}{A^4} \left\{ 1 - \frac{2CA}{3B^2} \right\} p.$$

Om nu van onze ${}^{(Cl Me.)} B_{20^\circ}$ over te gaan op ${}^{(Cl Me.)} B_{16^\circ}$ hebben wij

${}^{(Cl Me.)} \frac{\partial B}{\partial t}$ volgens de in § 4 gegeven formule voor de gereduceerde

¹⁾ BRINKMAN, Diss. Amsterdam 1904.

²⁾ Recherches sur les gaz, p. 82.

waarde van B , \mathfrak{B} , berekend en gevonden $\frac{\partial B}{\partial t} = 0,0001194$, zoodat

$(ClMe)$
 $B_{16^\circ} = -0,02026$ terwijl $A_{16^\circ} = 1 + 16 \alpha_\infty$. Hiermede wordt gevonden

$$\pi \mathcal{A}_\pi = 0,01814 \text{ (K. O. en Z.)}$$

terwijl $\pi \mathcal{A}_\pi = 0,0195$ (L.)

door LEDUC (l.c.) gevonden werd. Het is opmerkelijk dat in tegenstelling met onze uitkomst de waarde van B afgeleid uit LEDUC's waarnemingen $(ClMe)$
 $B_{20^\circ} = -0,0215$ geheel beantwoordt aan die volgens de wet der overeenstemmende toestanden: $-0,0216$. Tot het verschil draagt waarschijnlijk de onzekerheid van $\frac{\partial B}{\partial t}$ slechts weinig bij.

Metingen over de samendrukbaarheid van CO_2 zijn door CHAPPUIS ¹⁾ verricht bij 20° . Hij vond (gemiddelde uit eenige bepalingen bij telkens vrijwel denzelfden druk)

I	$p = 1260.670$ mm.	$pv = 1312485$
II	1117.228 „	1313826
III	992.911 „	1314981

In derde benadering geven

$$\left. \begin{array}{l} \text{I en II :} \\ \text{II en III} \\ \text{I en III} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{B_{20^\circ}}{A_{20^\circ}^2} = -0,005309 \\ \text{,,} \quad -0,005282 \\ \text{,,} \quad -0,005297 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I en II :} \\ \text{II en III} \\ \text{I en III} \end{array}} \right\} \text{aangen. middel} -0,005296,$$

waaruit volgt (CO_2)
 $B_{20^\circ} = -0,006100$ terwijl volgens KEESOM

$$(CO_2) \quad B_{20^\circ} = -0,00646.$$

Uit de waarnemingen van LEDUC over koolzuur werd door KEESOM afgeleid (CO_2)
 $B_{20^\circ} = -0,0059$.

II. Coëxistentie-voorwaarden bij lage temperatuur.

§ 7. Bepaling van den begindruk van condensatie bij -25° . De in de inleiding genoemde bepaling van den begindruk van condensatie bij -25° tot toetsing van de met het ψ -vlak verkregen uitkomsten

¹⁾ Trav. et Mém. du Bureau Intern. des Poids et Mesures, t. 13, 1903.

geschiedde met een mengsel met het gehalte $x = 0.5042$ aan chloormethyl.

Een neerslag werd op den spiegel van den dauwpuntstoestel (zie § 1 en Med. n°. 92 pg. 199) zichtbaar bij 157.4 cm. kwikdruk en verdween bij 154.6 cm. Als midden kunnen wij 156.0 cm. nemen, terwijl de nauwkeurigheid op 1 % gesteld kan worden.

§ 8. *Bepaling van den einddruk van condensatie.* Met den kleinen piëzometer (§ 5 Med. n°. 92) werd in de eerste plaats de condensatiedruk (dampspanning) van zuiver chloormethyl bepaald. Bij -25° werd gevonden 72.9 cm. wanneer de piëzometer tot aan de capillair gevuld, 72.8 cm. wanneer de vloeistof tot op weinig na verdampt was. In beide gevallen werd in den piëzometer geroerd. De overeenstemming dezer waarden pleit voor de zuiverheid van het chloormethyl. Bij $-37^\circ.4$ werd voor de dampspanning gevonden 42.7 cm.

Om den einddruk van condensatie van het mengsel met $x = 0.5042$ aan chloormethyl te kunnen bepalen moest de temperatuur van den piëzometer tot op $-38^\circ.5$ verlaagd worden; bij hogere temperaturen had condensatie op andere plaatsen in den toestel plaats. (Verg. § 5 van de Meded. N°. 92 „Over het bepalen der coëxistentievoorwaarden enz”. Verder zij opgemerkt, dat er geen inrichting was aangebracht om de compressiebuis en de capillair boven de gewone temperatuur te kunnen verwarmen). Voor de bepaling van de coëxistentievoorwaarden zijn (volgens zooeven genoemde § 5) noodig: in de eerste plaats de waargenomen einddruk p_{lxT} , waarvoor gevonden werd 6.13 atm. Dan het volumen V_v van den damp met de samenstelling x_{vTp} . De damp nam in 0.488 cm^3 onder 6.13 atm. bij $-38^\circ.5$. Eindelijk het volume V dat damp en vloeistofphase samen in normale omstandigheden zouden innemen; bij afblazen in den volumemeter werd gevonden 347.7 cm^3 bij 20° en 760 mm. (gereduceerd volgens de wet van BOYLE, GAY-LUSSAC). De samenstelling x_{vTp} werd bepaald met de hyperbolische formule van VAN DER WAALS, welke $x = 0.0375$ geeft. Uit deze gegevens volgt (zie l.c. § 5)

$$x_{lpT} = 0.5084, \quad p_{lxT} = 6.13, \quad t = -38^\circ.5.$$

De omstandigheden waren niet gunstig voor eene juiste bepaling van de correctie. Toch blijkt zij zoo gering, dat men het gehalte x_{lpT} veilig tot op 1 % nauwkeurig stellen kan.

§ 9. *Vergelijking der coëxistentievoorwaarden met de theorie.* Hiervoor is in de eerste plaats noodig de kennis van de dampspanning van chloormethyl en koolzuur bij -25° en $-38^\circ.5$. Met de waarde

van HARTMAN (3.48 atm. bij $9^{\circ}.5$)¹⁾ en de beide door ons gevonden waarden (§ 8) hebben wij de coëfficiënten voor chloormethyl in de formule van DUPRÉ en RANKINE $\ln. p = A - \frac{B}{T} - C \ln T$ berekend.

Extrapolatie tot $-38^{\circ}.5$ geeft 0.53 atm. Voor koolzuur volgt uit KUENEN'S waarnemingen²⁾ bij -25° , $p_{max} = 16.5$ atm., bij $-38^{\circ}.5$, $p_{max} = 10.4$ atm.

Uit ons model voor -25° (Med. Suppl. n^o. 8) volgt voor chloormethyl bij -25° $p_{max} = 0.59$ atm. en voor koolzuur $p_{max} = 16$ atm. (in plaats van 0.96 en 16.5). De begin-condensatiedruk van het mengsel $x = 0.5084$ is volgens het model 1.30 atm. in plaats van zooals door ons gevonden werd 2.05 atm.

De onvoldoende overeenstemming aan de zijde van chloormethyl stelt nog eens in 't licht, dat bij chloormethyl en aether de voor de geldigheid van de wet der overeenstemmende toestanden noodige gelijkvormigheid veel te wenschen overlaat.

Om nu te oordeelen over de mate van afwijking der mengsels van die wet, moeten wij ons eerst zooveel mogelijk vrij maken van de afwijkingen der enkele componenten. Wij hebben getracht dit te doen door de geheele figuur der grenslijnen in het px diagram 0.4 atm. op te schuiven. Dan komt voor p_{max} bij chloormethyl 0.99 atm., voor koolzuur 16.4 atm. en voor het onderzochte mengsel $p_{vx} = 1.7$ atm. Een deel van het thans overblijvende verschil met de waargenomen $p_{vx} = 2.05$ atm. is zeker toe te schrijven daaraan, dat het oppervlak nog niet met voldoende zorg geconstrueerd was om bij het rollen van de glasplaat over de kam en over het bolle deel met voldoende zekerheid de ligging der raakpunten vast te stellen. Er zouden meer punten berekend moeten zijn om het model zuiver genoeg te maken voor eene scherpe bepaling.

Deze onzekerheid bij het rollen maakt het ook twijfelachtig of met een zuiver uitgevoerd theoretisch model op grond van de overeenstemmende toestanden wel een rechte lijn voor den vloeistoftak van de grenslijn in het px -diagram gevonden zou worden, zooals uit ons model werd afgeleid. Wij kregen den indruk, dat een kromme lijn van het karakter van die door HARTMAN in zijne proeven en uit zijn model afgeleid, ook door ons gevonden had moeten worden, doch wij hadden op ons model (Med. Suppl. n^o. 8) geen voldoende ge-

1) Med. n^o. 64.

2) Phil. Mag. Jan. 1902.

vens om de afwijking van de rechte lijn vast te stellen en moesten de rechte lijn dus als eenvoudigste benadering aanvaarden.

Dat de proefondervindelijke vloeistoftak der grenslijn in het p_x -diagram bij -25° niet recht is, konden wij met ons mengsel en onzen toestel, zooals gezegd werd, niet aantoonèn. De metingen bij $-38^\circ.5$ stellen echter wel buiten twijfel, dat de bedoelde lijn bij $-38^\circ.5$ niet recht, maar voor het grootste deel naar de van de x -as afgekeerde zijde gebogen is. Volgens de rechte lijn zou p_{lx} voor $x = 0,5084$ moeten zijn 5.38 atm. in plaats van de gevonden waarde 6.13 atm. Dit verschil is veel te groot om door fouten in de waarneming of in de keuze van het gehalte verklaard te kunnen worden. Het lijdt dus ook wel geen twijfel, dat bij -25° de vloeistoftak op dezelfde wijze gebogen is. In overeenstemming met deze afwijking is ook, dat de begindruk bij diezelfde temperatuur niet overeenstemt met de hyperbolische functie voor het gehalte (VAN DER WAALS, Continuität II, 154). Immers volgens deze formule zou de begindruk moeten zijn 1.78 atm. in plaats van 2.05 atm. gelijk gevonden werd (§ 6).

Uit dit alles blijkt, dat uit de coëxistentie-voorwaarden afwijkingen van de wet der overeenstemmende toestanden bij de isothermen van mengsels van chloormethyl en koolzuur volgen, die bij vloeistofdichtheden en lage temperaturen zeer duidelijk worden.

Het vergelijken van de coëxistentie-voorwaarden, die uit de wet der overeenstemmende toestanden met het ψ -vlak worden afgeleid, met de werkelijk waargenomene is eene *indirecte methode* om over de afwijkingen van de wet der overeenstemmende toestanden bij de isothermen van mengsels te oordeelen. Het was ons doel om van de toepassing van deze methode bij lage temperaturen een voorbeeld te geven.

Om het juiste bedrag der afwijkingen vast te stellen zullen nieuwe metingen bij lage temperaturen noodig zijn en zal voor de temperatuur van waarneming een ψ -oppervlak met meer zorg dan het ter voorloopige toelichting en ten behoeve van correcties in Med. Suppl. n^o. 8 ontworpen, moeten worden geconstrueerd.

Voor de Boekerij wordt aangeboden 1^o. door den Heer VAN DER STOK, namens de Directie van het Kon. Nederl. Meteor. Instituut: „Observations océanographiques et météorologiques dans la région du courant de Guinée (1855—1900)” met atlas; 2^o. door den Heer WENT de dissertatie van den Heer H. P. KUYPER: „De perithecium-ontwikkeling van *Monascus purpureus* Went en *Monascus Barkeri*

Dangeard in verband met de phylogenie der Ascomyceten"; 3°. door den Heer HUGO DE VRIES: „Handelingen van het 6^{de} Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig Congres gehouden 27—28 September 1902”.

De Vergadering wordt gesloten.

E R R A T A.

- Blz. 204, r. 10 v. b. lees „kleiner” in plaats van „grooter.”
„ 207, r. 2 v. o. „al schijnt enz.” vervalt.
„ 209, r. 3 v. o. „In ons geval . . . termen” vervalt.
„ 210, Tabel II: In het hoofd leze men achter ($x = 1$): „in eerste benadering”; in de tabel in plaats van „0.018128”: „0.018028”.
„ 210, r. 1 v. o. lees „onderling” in plaats van: „van haar gemiddelde”.
„ 211, r. 17 v. o. lees: $10^8 \text{ } \mathfrak{B}$.
„ 211, r. 3 v. o. „veel” vervalt.
-

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 26 November 1904.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

Ingekomen stukken, p. 388.

D. J. KORTEWEG en D. DE LANGE: „Over twee- en meervoudige ombilikaalpunten als bijzonderheden van de eerste orde van uitzondering op puntalgemeene oppervlakken”, p. 388.

A. F. HOLLEMAN: „De bereiding van zuiver o-toluidien en over eene methode ter bepaling zijner zuiverheid”, p. 398.

C. EASTON: „Schommelingen der zonswerkzaamheid en van het klimaat”. (Aangeboden door de Heeren C. H. WIND en W. H. JULIUS), p. 402. (Met één plaat).

P. H. SCHOUTE: „Over de vergelijking, die de hoeken van twee meerdimensionale ruimten bepaalt”, p. 409.

J. CARDINAAL: Over de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken”, p. 411.

W. KAPTEYN: „Over de waarden van eenige bepaalde integralen die met BESSEL'sche functiën samenhangen”, p. 416.

M. C. DEKUIJZEN: „Over den osmotischen druk in bloed en urine van visschen”. (Aangeboden door de Heeren C. A. PEKELHARING en MAX WEBER), p. 418.

A. SOMMERFELD: „Vereenvoudigde afleiding van het veld van, en de krachten werkende op een electron bij willekeurige beweging”. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. KAMERLINGH ONNES), p. 431.

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 452.

Vaststelling der December-Vergadering op 24 December a. s., p. 452.

Erratum, p. 452.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren SCHOUTE, LORENTZ en MOLL, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Circulaire van het Internationaal Botanisch Congres, met verzoek vóór 1 Januari a.s. een gedelegeerde aan te wijzen, die op het Congres, in 1905 te Weenen te houden namens de Akademie stemmen kan over de daar te nemen besluiten.

De vergadering machtigt het Bestuur een gedelegeerde aan te wijzen, die ook onder Nederlandsche geleerden, niet-leden der Akademie, kan gekozen worden.

De Voorzitter verzoekt de botanische leden het Bestuur daaromtrent van advies te willen dienen.

3°. Mededeeling van de International Corporation in solar research over de op 23 September 1904 te St. Louis gehouden vergadering.

4°. Mededeeling van de Commissie voor Seismologie, ingesteld door de Internationale Associatie der Akademiën, met verzoek aan de tot de Associatie behoorende Akademiën om bij hare Regeeringen aan te dringen op toetreding tot de Internationale Seismische Aassociatie.

De Voorzitter stelt hieromtrent voor, dat de Akademie zal wachten totdat de Regeering daarover haar advies zal vragen en dat zij voorloopig de mededeeling voor kennisgeving zal aannemen. Aldus wordt besloten.

5°. Schrijven van den Heer P. DROSTE, namens administrateurs van het P. W. KORTHALS-fonds, waarin hij bericht geeft van de afzending van f 600.— aan de Akademie. Dat bedrag is ontvangen en volgens besluit der Vergadering aan den Heer Dr. J. P. LOTSY ter hand gesteld.

6°. Schrijven van den Heer Dr. S. L. VAN OSS, waarin hij zijne mededeeling: „De regelmatige stervormige 600-cel” in de vorige vergadering ter plaatsing in het Verslag aangeboden, terug verzoekt ten einde deze later uitgebreider voor de Werken der Akademie weder aan te bieden.

Wiskunde. — De Heer D. J. KORTEWEG doet eene mededeeling ook namens den Heer D. DE LANGE: „*Over twee- en meervoudige ombilikaalpunten als bijzonderheden van de eerste orde van uitzondering op puntalgemeene oppervlakken.*”

1. Denkt men zich een puntalgemeen oppervlak in de coëfficiënten van welks Cartesiaansche vergelijking parameters voorkomen dan zal bij vloeiende verandering dier parameters ook het oppervlak in het algemeen vloeiend van gedaante veranderen. ¹⁾ Vestigt men daarbij

¹⁾ Zie voor meer algemeene beschouwingen van soortgelijken aard als welke hier volgen: D. J. KORTEWEG, „Ueber Singularitäten verschiedener Ausnahme-Ordnung und ihre Zerlegung”, *Math. Ann.* 41, p. 286—307 (1893).

zijne aandacht op een of ander soort bijzondere punten, plooi punten, ombilikaalpunten, enz. die op een puntalgemeen algebraïsch oppervlak in eindig getal optreden, dan zal het bij de vervorming voor kunnen komen, dat twee of meer dier bijzondere punten tot samen vallen geraken. Een zoodanig punt waar dit plaats heeft mag dan een twee- of meervoudig bijzonder punt van die soort worden genoemd. Nu kan zulk samenvallen, zooals de uitkomst leert, meestal op meer dan ééne wijze tot stand komen. Sommige van deze wijzen van samenvallen vereischen slechts de vervulling van ééne enkele betrekking tusschen de coëfficiënten der Cartesiaansche vergelijking; anderen die van meerdere zulke betrekkingen. De eersten behooren tot de bijzonderheden der eerste orde van uitzondering, de anderen tot die van hoogere orde. Alleen met de eersten houden wij ons in dit opstel bezig. ¹⁾

Voor plooi punten werden de bijzonderheden der eerste orde die als veelvoudige plooi punten moeten worden opgevat door den eerstgenoemden onderzocht. ²⁾ Daarbij werden gevonden twee geheel verschillende soorten van dubbelplooi punten (de homogene en de heterogene); verder bleken de osculatiepunten, drievoudige, de dubbelpunten van het oppervlak, vier- en twintigvoudige plooi punten te zijn.

Het scheen wenschelijk een dergelijk onderzoek ook voor andere bijzondere punten in te stellen. Dit is nu door ons verricht voor de ombilikaalpunten. De daarbij verkregen resultaten worden hier thans medegedeeld. Voor bewijzen en meer uitvoerige beschouwingen wordt verwezen naar de eerstdaags verschijnende dissertatie van den tweeden genoemden, den heer D. DE LANGE.

a. *Het dubbel ombilikaalpunt in het eindige.*

2. Plaatst men den oorsprong van een rechtthoekig coördinatenstelsel in een ombilikaalpunt en gebruikt men het raakvlak daar ter plaatse als xy -vlak, dan kan de vergelijking van het oppervlak geschreven worden in den vorm :

$$z = c_1(x^2 + y^2) + d_1x^3 + d_2x^2y + d_3xy^2 + d_4y^3 + e_1x^4 + \dots \quad (1)$$

Door eene kleine vervorming verkrijgt men dan voor het nieuwe oppervlak de vergelijking :

$$z = \alpha + \beta_1x + \beta_2y + c_1x^2 + \gamma_2xy + (c_1 + \gamma_3)y^2 + d_1x^3 + d_1x^2y \quad (2)$$

alwaar de Grieksche letters kleine grootheden voorstellen, die alle

¹⁾ Zie voor de reden waarom deze in de eerste plaats de aandacht verdienen het zoeven aangehaald opstel op p. 287.

²⁾ D. J. KORTEWEG, „Ueber Faltenpunkte“, Wien. Ber. 98, p. 1154—1191, (1889) ook Arch. Néerl. 24, p. 57—98, (1890).

als van dezelfde orde mogen worden beschouwd, namelijk, van die van de kleine verandering die men een denkbeeldigen in de coëfficiënten optredenden parameter heeft laten ondergaan. Ook de niet-Grieksche letters moeten geacht worden een weinig veranderd te zijn, welke verandering echter niet ter zake afdoet.

Berekenen wij nu de ligging van het verplaatste ombilikaalpunt op het vervormde oppervlak met behulp der bekende condities:

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \dots \quad (3)$$

dan vinden wij, na verwaarloozing van alle termen die klein zijn ten opzichte van degene die behouden worden, de beide eerste-graadsvergelijkingen:

$$\gamma_2 + 2d_2x + 2d_3y = 0; \quad \gamma_3 + (d_3 - 3d_1)x + (3d_4 - d_2)y = 0; \quad (4)$$

welke in het algemeen zonder bezwaar de gezochte verschuiving doen kennen.

Anders wordt dit echter wanneer de determinant

$$K_1 \equiv \begin{vmatrix} d_3 - 3d_1 & 3d_4 - d_2 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix} \equiv d_2^2 + d_3^2 - 3(d_1d_3 + d_2d_4) \quad (5)$$

verdwijnt. In dat geval voldoen geene eindige waarden aan de lineaire vergelijkingen (4). Dit bewijst echter alleen dat de verschuiving van het ombilikaalpunt van lagere orde dan de door Grieksche letters aangeduide grootheden is geworden en dat daarom ook de termen van de tweede orde in x en y in de vergelijkingen (4) moeten worden opgenomen. Doet men dit dan verkrijgt men door de beide nieuwe vergelijkingen met elkander te verrekennen, na verdrijving der eerste graads termen, de nieuwe vergelijking:

$$\begin{aligned} & (d_3 - 3d_1)\gamma_2 - 2d_2\gamma_3 + [12d_2e_1 + 3(d_3 - 3d_1)e_2 - 2d_2e_3 - 8c_1^3d_2]x^2 + \\ & + [6d_2e_2 + 4(d_3 - 3d_1)e_3 - 6d_2e_4 - 2c_1^3(d_3 - 3d_1)]xy + [2d_2e_3 + 3(d_3 - 3d_1)e_4 - \\ & - 12d_2e_5 + 8c_1^3d_2]y^2 = 0 \dots \dots \dots \quad (6) \end{aligned}$$

welke met een der vergelijkingen (4) moet worden gecombineerd.

Deze verg. (6) is van den tweeden graad in x en y waaruit derhalve volgt 1^e dat de verschuiving wordt van de orde $\frac{1}{2}$ ten opzichte van die der Grieksche letters in (2) gebezigd, 2^e dat het ombilikaalpunt dat aanvankelijk in den oorsprong van het coördinatenstelsel op het oppervlak (1) gelegen was, zich bij de vervorming van dit oppervlak in tweeën heeft gesplitst, welke beide ombilikaalpunten in het algemeen bij eene wijziging van den parameter

in de eene richting, bestaanbaar, in de andere richting, onbestaanbaar uitéengaan. Wij hebben derhalve met een dubbel-ombilikaalpunt te doen en wel met een zoodanig bij welks effectief ¹⁾ optreden overgang van het bestaanbare naar het onbestaanbare geschied.

3. Alvorens nu de verdere bijzonderheden van dit dubbel-ombilikaalpunt na te gaan, willen wij opmerken dat de voorwaarde $K_1 = 0$ reeds als een gewichtig kenteeken bekend was. Zij karakteriseert namelijk het overgangsgeval tusschen twee der drie algemeene soorten van ombilikaalpunten, welke het eerst door DARBOUX onderscheiden zijn ²⁾ naar de wijze waarop de kromtelijnen zich in hunne nabijheid gedragen.

Bij de *eerste* soort, afgebeeld in Fig. 1, verlaten het ombilikaalpunt in drie verschillende richtingen kromtelijnen, die wij door rechten

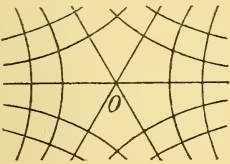


Fig. 1.

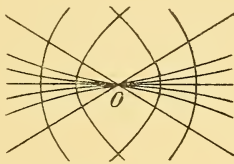


Fig. 2.

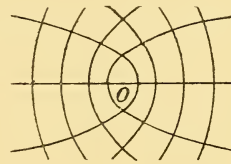


Fig. 3.

hebben voorgesteld omdat hunne kromming van de termen van hogere orde der verg. (1), te beginnen met die der vierde, afhangt, en wel in elke richting ééne enkele. Die drie richtingen hebben de eigenschap niet in één kwadraat te kunnen worden afgebeeld, d.w.z. ieder van hen ligt binnen den stompen hoek door de beide overigen gevormd. Voor deze soort is $K_1 > 0$ ³⁾.

Bij de *tweede* soort, zie Fig. 2, vertrekken er evenzeer uit het ombilikaalpunt kromtelijnen in drie verschillende richtingen, deze richtingen zijn echter zoodanig dat ééne er van binnen den scherpen hoek valt gevormd door de beide anderen, zoodat alle drie thans in één kwadrant kunnen worden bevat. Bovendien vertrekken er thans in de eerstvermelde richting, die men de middelste zoude kunnen noemen, oneindig vele kromtelijnen waarvan er vijf, de rechte medegeteld, in Fig. 2 zijn aangegeven. Voor deze soort is $K_1 < 0$.

¹⁾ Zie omtrent de beteekenis van dezen term p. 289 het in noot (l) aangehaalde opstel.

²⁾ G. DARBOUX. Leçons sur la théorie générale des surfaces. Quatrième partie. Gauthier—Villars, 1896, p. 448—465.

³⁾ Dit kenmerk $K_1 > 0$ beteekent bovendien, zooals in de dissertatie op eenvoudige wijze bewezen wordt, dat de kromtelijnen in de nabijheid van O overal hunne bolle zijde naar het ombilikaalpunt keeren. Voor $K_1 < 0$ daarentegen de holle zijde.

Bij de *derde* soort, zie Fig. 3, vertrekt er uit het ombilikaalpunt slechts ééne enkele kromtelijn, de rechte van Fig. 3. De beide andere richtingen van vertrek zijn onbestaanbaar geworden. Ook voor deze soort is $K_1 < 0$. Om ze analytisch van de vorige te onderscheiden kan gelet worden op het teeken van den discriminant van de derde-machtsverg. :

$$d_3 n^3 + (2d_2 - 3d_4) n^2 + (3d_1 - 2d_3) n - d_2 = 0 . . . \quad (7)$$

welke blijkt te dienen ter bepaling der drie richtingen van vertrek. Noemt men dien discriminant K_2 , zoodanig gekozen dat voor $K_2 > 0$ de drie wortels reëel zijn, dan heeft men dus voor de *eerste* soort $K_1 > 0, K_2 > 0$, voor de *tweede* $K_1 < 0, K_2 > 0$, voor de *derde* $K_1 < 0, K_2 < 0$. Een vierde soort $K_1 > 0, K_2 < 0$ bestaat niet, omdat, zooals ook langs algebraïschen weg wordt aangetoond, $K_1 > 0$ van zelf $K_2 > 0$ met zich medebrengt.

4. Zooals uit deze uiteenzetting blijkt, vormt het dubbel ombilikaalpunt het overgangsgeval tusschen de eerste en tweede soort, voor welk overgangsgeval noodzakelijk $K_1 = 0, K_1 > 0$. De loop der kromtelijnen wordt daarbij zeer eenvoudig zoolang men zich tot dezelfde benadering bepaalt die gevoerd heeft tot de figuren 1, 2 en 3. Uit de differentiaalvergelijking :

$$[d_2 x + d_3 y] \left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] + [(d_3 - 3d_1) x + (3d_4 - d_2) y] \frac{dy}{dx} = 0 . \quad (8)$$

welke ter bepaling der kromtelijnen dient, splitst zich namelijk de factor $d_2 x + d_3 y$ af, welke gelijk nul gesteld eene rechte voorstelt, terwijl het overblijvende twee onderling loodrechte bundels van evenwijdige lijnen oplevert. Op deze wijze zouden echter van elk punt der eerstgenoemde rechte drie kromtelijnen vertrekken zoodat een geheele lijn van ombilikaalpunten aanwezig zoude zijn. Dit is natuurlijk niet het geval in het algemeen, zoodat deze voorstelling der kromtelijnen eene aanzienlijke wijziging zal moeten ondergaan zoodra de termen van hoogere orde in aanmerking genomen worden. Wij komen daarop spoedig nog even terug.

5. Vooraf deelen wij de uitkomsten mede eener nauwkeuriger beschouwing der vervorming van het dubbel ombilikaalpunt. Daaruit is ons namelijk gebleken 1°. dat bij een parameterverandering in den zin waarbij de beide enkelvoudige ombilikaalpunten bestaanbaar uiteengaan, dit uiteengaan steeds geschieden zal in de richting der zoeven beschouwde rechte $d_2 x + d_3 y = 0$, welke daarna voor ieder der beide uiteengedreven ombilikaalpunten eene zijner richtingen van vertrek bij eerste benadering voorstelt, 2°. dat deze uiteengedreven ombilikaalpunten steeds van verschillend soort zijn, namelijk het

ééne van de eerste, het andere van de tweede soort. Daarbij geeft dan, voor dat van de tweede soort, $d_2x + d_3y = 0$ de middelste richting van vertrek aan, terwijl ook de overige richtingen van vertrek der uiteengegane ombilikaalpunten telkens nagenoeg overeenstemmen met de richtingen van vertrek van het oorspronkelijke dubbel ombilikaalpunt welke in § 4 besproken zijn.

Dit alles vastgesteld zijnde schijnt het niet moeilijk te gissen hoedanig de loop der kromtelijnen in hoofdzaak moet worden kort na de uiteendrijving van het dubbelombilikaalpunt.

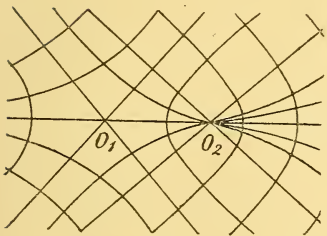


Fig. 4.

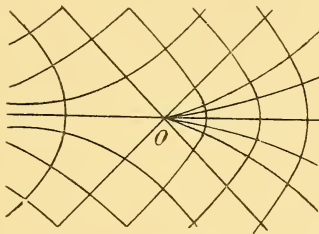


Fig. 5.

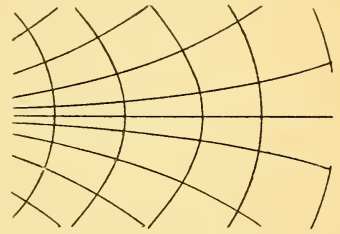


Fig. 6.

Die loop wordt voorgesteld in Fig. 4; alwaar O_1 het ombilikaalpunt der eerste, O_2 der tweede soort aanwijst. Bij O_1 is de hoek der beide andere uit het ombilikaalpunt vertrekkende kromtelijnen tusschen welke $O_1 O_2$ valt iets grooter dan een rechte, bij O_2 daarentegen iets kleiner.

Laat men daarna de beide ombilikaalpunten weder inéénvloeien dan ontmoeten zij elkander ongeveer op den halven afstand en de nu ontstaande figuur bij welke de kromtelijnen op eenigen afstand links en rechts van de punten O_1 en O_2 gelegen in hoofdzaak hetzelfde beloop moeten behouden hebben kan moeilijk eene andere zijn dan de in Fig. 5 aangegevene ¹⁾ afgezien van de symmetrie die in het

¹⁾ Toch ware een nader onderzoek langs anderen weg op dit punt niet ongewenscht. Het zou moeten bestaan in eene stelselmatige studie, liefst over hun geheele beloop, der lijnen voldoende aan de differentiaalvergelijking:

$$\left[1 - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] [2d_3y + 3e_2x^2 + 4(e_3 - 2c_1^3)xy + 3e_4y^2] + \frac{dy}{dx} [6d_4y + 2(e_3 - 6e_1 + 4c_1^3)x^2 + 6(e_4 - e_2)xy + 2(6e_5 - e_3 - 4c_1^3)y^2] = 0.$$

Dit toch is de vorm welke de differentiaalvergelijking der kromtelijnen in de nabijheid van een dubbel-ombilikaalpunt bij tweede benadering aanneemt, wanneer men de X -as plaatst in de richting waarin de beide enkelvoudige ombilikaalpunten door eene geringe vervorming van het oppervlak uiteengaan. Men heeft dan namelijk $d_2 = 0$ en $d_3 = 3d_1$; dit laatste wegens (5).

algemeen natuurlijk niet bestaat, evenmin als in een der andere figuren.

Zet men vervolgens de vervorming voort in denzelfden zin, zoodat thans de beide ombilikaalpunten onbestaanbaar uiteengaan, dan schijnt daaruit eene figuur te moeten ontstaan zooals wordt voorgesteld door fig. 6.

Van een eigenlijken overgang van de eerste soort tot de tweede op een zich vloeiend vervormend puntalgemeen oppervlak is in elk geval geen sprake. Wat gebeurt wanneer de betrekking $K_1 = 0$ hare vervulling te gemoet gaat, bestaat daarin dat twee ombilikaalpunten van verschillend soort elkander naderen, om na de samenvalling van het oppervlak te verdwijnen.

b. *Het dubbelpunt van een puntalgemeen oppervlak als twaalfvoudig ombilikaalpunt.*

6. Bij aanwezigheid van een dubbelpunt kan de vergelijking van het oppervlak in de nabijheid daarvan niet in de gedaante gebracht worden door verg. (1) aangegeven. Na geschikte keuze der assen kan men echter uitgaan van:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + II_3 + II_4 + \dots = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

of na de geringe vervorming, van:

$$\alpha + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + ax^2 + by^2 + cz^2 + \dots = 0 \quad . \quad . \quad (9)$$

Het blijkt dan spoedig, dat ter bepaling in eerste benadering van de ombilikaalpunten welke ontstaan in de nabijheid der plaats waar zich vroeger het dubbelpunt bevond, de termen van den tweeden graad volstaan. Het oppervlak mag dus daar ter plaatse als een tweedegraads-oppervlak behandeld worden waardoor onmiddellijk het gedrag der ombilikaalpunten duidelijk wordt. Heeft men namelijk met een *geïsoleerd* punt te doen, ontstaan door de samentrekking van een blad dat daarna verdwijnt, dan verdwijnen daarmede tevens vier op dat blad gelegen bestaanbare ombilikaalpunten¹⁾ terwijl acht anderen onbestaanbaar waren en worden. Is het dubbelpunt een *kegelpunt* dan treden bij het losmaken der beide bladen van elkander vier bestaanbare ombilikaalpunten²⁾ op, die bij het aanknoopen onbestaanbaar worden, terwijl wederom acht andere evenzeer een oogenblik in het kegelpunt samenkomen, maar vooraf en daarna onbestaanbaar zijn. Bij een onbestaanbaar dubbelpunt blijven natuurlijk

¹⁾ Deze zijn aanvankelijk van de derde soort. Zij kunnen echter bij verdere vervorming geleidelijk in dezulke van de tweede soort overgaan zonder tot het optreden van een dubbelombilikaalpunt aanleiding te geven.

²⁾ Ook van deze geldt het in de vorige noot opgemerkte.

alle twaalf ombilikaalpunten, die er een oogenblik samenkomen, onbestaanbaar.

. De ombilikaalpunten in het oneindige. Algemeene beschouwing.

7. Van de plooi punten en vele andere bijzondere punten onderscheiden zich de ombilikaalpunten door de omstandigheid, dat zij niet tegen projectieve vervorming bestand zijn. De oorzaak daarvan is, dat zij tot het vlak in het oneindige en in het bijzonder tot de bolpunten in dat vlak in eene bijzondere relatie staan. Dit noodzaakt tot eene afzonderlijke beschouwing van de gevallen van de eerste orde van uitzondering waarin ombilikaalpunten het oneindige bereiken. Het was a priori niet onwaarschijnlijk dat dit gepaard zoude gaan, in alle of in sommige van die gevallen, met het optreden van meervoudigheid, zooals ook inderdaad voor sommige het geval bleek te zijn.

De methode van onderzoek welke daarbij werd gevolgd was deze: dat eerst de ombilikaalpunten werden vervangen door een meer algemeen soort bijzondere punten welke wèl voor projectieve vervorming vatbaar zijn. Daartoe volstaat het op te merken, dat een ombilikaalpunt kan worden gedefinieerd als een zoodanig punt van een gegeven oppervlak, dat, indien men het beschouwt als dubbelpunt zijner raakvlakdoorsnede, de eigenschap heeft, dat de beide dubbelpuntsraaklijnen door de cirkelpunten van het raakvlak gaan.

Na toepassing der algemeene projectieve vervorming wordt dan het vraagstuk der ombilikaalpunten van het oorspronkelijke oppervlak teruggebracht tot het volgende: *Gegeven een oppervlak ω , een plat vlak α en in dat platte vlak een kegelsnede s ; vrage op het oppervlak ω de punten Ω te bepalen, die de eigenschap hebben dat, na aanbrenjing van hun raakvlak ϱ , de beide raaklijnen in Ω aan de raakvlakdoorsnede respectievelijk de punten A_1 en A_2 bevatten waarin s door ϱ gesneden wordt.*

Bij dit meer algemeene vraagstuk is het vlak α in plaats van het vlak in het oneindige getreden en komt het er slechts op aan de punten Ω te bestudeeren die, als bijzonderheden der eerste orde, in de doorsnede d van Ω met α kunnen optreden, hetwelk nu wederom geschieden kan door een geschikt assenstelsel te kiezen met zulk een punt tot oorsprong, voor dit assenstelsel de benaderde vergelijking van het oppervlak op te maken en vervolgens eene kleine deformatie aan te wenden. De zoo verkregen resultaten kunnen onmiddellijk op ombilikaalpunten worden toegepast.

Op deze wijze bleek dat ombilikaalpunten op vier verschillende

wijzen in het oneindige als punten van de eerste orde van uitzondering kunnen optreden, welke wij achtereenvolgens in het kort beschrijven zullen.

c. *Het raakpunt van een puntalgemeen oppervlak met het vlak in het oneindige als viervoudig ombilikaalpunt.*

8. Het is duidelijk dat zoo vaak het oppervlak ω het vlak α raakt zulk een raakpunt als een Ω -punt moet worden opgevat, immers zijne raaklijnen in de raakvlakdoorsnede zullen de kegelsnede s in het vlak α stellig ontmoeten. Door het oppervlak als een tweedegraadsoppervlak op te vatten kan men alsdan, door tot het vraagstuk der ombilikaalpunten terug te keeren, ook zonder rekening uitmaken, dat het beschouwde punt een viervoudig Ω -punt is. Tevens volgt dan uit het bekende gedrag der tweedegraadsoppervlakken, dat bij bestaansaanraking met het vlak in het oneindige het raakpunt, indien het in de raakvlakdoorsnede als geïsoleerd punt optreedt, zich bij vervorming in twee bestaansaanbare en twee onbestaansaanbare ombilikaalpunten splitst, in welke richting de vervorming ook geschiede. In het tegengestelde geval heeft men met vier onbestaansaanbare ombilikaalpunten te doen. Overgang van bestaansaanbaarheid naar onbestaansaanbaarheid heeft hier derhalve nimmer plaats.

d. *Het raakpunt van een puntalgemeen oppervlak met de lijn der bolpunten in het oneindige als dubbel-ombilikaalpunt.*

9. Dat bij raking van ω met s , het raakpunt een Ω -punt is, spreekt van zelve, immers de punten A_1 en A_2 vallen dan met dit raakpunt samen en zijn dus gelegen op de raaklijnen van de raakvlakdoorsnede in ditzelfde punt.

Bij ontleding blijkt het een dubbel Ω -punt te zijn. Daar de bolpunten in het oneindige alle onbestaansaanbaar zijn, zijn de overeenkomstige dubbel-ombilikaalpunten, en de enkelvoudige waarin zij zich splitsen, steeds onbestaansaanbaar.

e. *De punten in het oneindige der spinodale lijn als enkelvoudige ombilikaalpunten, wanneer de raaklijn der spinode in het vlak in het oneindige valt.*

10. Beschouwt men een punt waarin de spinodale lijn van ω het vlak α snijdt dan ziet men gemakkelijk dat dit punt als een Ω -punt zal moeten worden beschouwd zoo vaak de keerpuntsraaklijn der raak-

vlakdoorsnede in het vlak α valt, 't welk een enkelvoudige voorwaarde is. Het blijkt echter, dat dit punt zich door deformatie niet uiteen laat drijven en dus als een enkelvoudig Ω -punt en het daarmee overeenkomstige ombilikaalpunt evenzeer als een enkelvoudig ombilikaalpunt moet worden opgevat. Dit ombilikaalpunt kan bestaanbaar of onbestaanbaar zijn. De hier aangegeven wijze is de éénige waarop bestaansbare ombilikaalpunten het oneindige kunnen bereiken zonder in een veelvoudig ombilikaalpunt over te gaan, d. w. z. zonder aldaar andere ombilikaalpunten te ontmoeten.

f. *De snijpunten van het oppervlak met de lijn der bolpunten in het oneindige als enkelvoudige ombilikaalpunten, wanneer één der dubbelpuntsraaklijnen in de raakvlakdoorsnede in het vlak in het oneindige valt.*

11. Dat namelijk het overeenkomstige punt op ω een Ω -punt is, is onmiddellijk duidelijk, en bij onderzoek blijkt het enkelvoudig te zijn. Als ombilikaalpunt is het natuurlijk steeds onbestaanbaar.

Toepassing op de oppervlakken van den tweeden graad.

12. De vergelijking van een tweedegraadsoppervlak kan, wanneer de oorsprong in een zijner ombilikaalpunten wordt geplaatst, bij geschikte assenkeuze, gebracht worden in den eindigen vorm :

$$z = c_1(x^2 + y^2) + k_1xz + k_2yz + k_3z^2 \dots \dots \dots (10)$$

De waarde van z in het tweede lid overbrengend levert dit de reeksontwikkeling :

$$z = c_1(x^2 + y^2) + k_1c_1x^3 + k_2c_1x^2y + k_1c_1xy^2 + k_2c_1y^3 + \dots \dots \dots (11)$$

Deze vergelijkende met (1) blijkt onmiddellijk, dat voor de ombilikaalpunten op een tweedegraadsoppervlak steeds : $d_1 = d_3$, $d_2 = d_4$, derhalve $K_1 < 0$. Voorts gaat de derdemachtsvergelijking (7) over in $(d_1n - d_2)(n^2 + 1) = 0$; derhalve $K_2 < 0$. Hieruit blijkt, zooals trouwens bekend is, dat op een tweedegraadsoppervlak nimmer andere ombilikaalpunten dan die van de derde soort kunnen optreden.

Hieruit volgt dan weder onmiddellijk dat op een tweedegraadsoppervlak geene gewone dubbelombilikaalpunten kunnen optreden. Inderdaad zijn naast de dubbelpunten de eenige mogelijke veelvoudige ombilikaalpunten in het eindige op een tweedegraadsoppervlak de toppen van een omwentelingsoppervlak; maar dit zijn *viervoudige* ombilikaalpunten, wier optreden bij oppervlakken van hooger grad meer dan ééne betrekking tusschen de coëfficiënten der verge-

lijking zoude vereischen. Te verwonderen is het dus niet dat bij zulke toppen de kromtelijnen zich op een geheel afwijkende wijze gedragen.

13. Thans overgaande tot de ombilikaalpunten der tweedegraadsoppervlakken in het oneindige merken wij op, dat het onder *c* geschetste geval zich voordoet bij de paraboloïden. Beschouwt men daarbij echter nader de doorsnede met het vlak in het oneindige dan blijkt deze gedegeneerd te zijn in twee rechten. Ieder dier rechten ontmoet de lijn der bolpunten in twee punten. Brengt men in die punten raakvlakken aan dan degenereert ook daar de raakdoorsnede en wel in ééne der zooeven beschouwde rechten en in eene andere. Deze beide moeten tevens als de raaklijnen der raakvlakdoorsnede worden opgevat. Één van deze raaklijnen valt dus in het vlak in het oneindige en wij zijn dus in het geval *f*.

Aan het viervoudige ombilikaalpunt in het oneindige voegen zich dus bij de paraboloïde nog vier enkelvoudige ombilikaalpunten toe. Voor het eindige blijven dus nog vier zulke punten over, wat hier de proef op de som levert.

Daarentegen eischt het geval *d*, zooals gemakkelijk is in te zien, althans voor tweedegraadsoppervlakken met bestaانبare vergelijking, dat deze in omwentelingsoppervlakken overgaan. Er is dan echter dubbele aanraking van het oppervlak met de lijn der bolpunten. Inderdaad gaan dan vier ombilikaalpunten naar het oneindige; de acht overige vereenigen zich vier aan vier in de beide toppen.

Het nog overblijvende geval *e* kan zich natuurlijk bij tweedegraadsoppervlakken niet voordoen. Het geval *f* is reeds zooeven besproken. Het kan, zooals gemakkelijk is in te zien, bij tweedegraadsoppervlakken slechts op de daar aangegeven wijze tot verwezenlijking komen.

Scheikunde. — De Heer A. F. HOLLEMAN doet eene mededeeling :

„Over de bereiding van zuiver o-toluidien en over eene methode ter bepaling zijner zuiverheid.”

Terwijl p-toluidien als vast, goed gekrystalliseerd lichaam, door omkrystalliseeren en distilleeren zeer gemakkelijk in volkomen zuiveren toestand uit het handelsprodukt is te verkrijgen, is dit bij het vloeibare orthotoluidien geenszins het geval. De kans, dat dit laatste zijn para-isomeer bevat is vrij groot, daar het uit o-nitrotoluol wordt bereid en dit vrij moeielijk van het daarnaast bij nitreering van

toluol ontstaande p-nitrotoluol volkomen is te scheiden, ook weder doordien de orthronitroverbinding vloeibaar is. Men vindt verder opgegeven, dat o-toluidien soms anilien bevat.

Van de verschillende wijzen, die in de literatuur ter zuivering van o-toluidien aangegeven zijn, leek mij de overvoering in oxalaat de geschikste toe; de oplosbaarheid van orthotoluidien-oxalaat bedraagt, volgens BEILSTEINS Handbuch, 2.38 gew. dln. in 100 gew. dln. water bij 21°; die van het zure oxalaat van p-toluidien (het neutrale bestaat niet) 0.87 gew. dln. in 100 gew. dln. water bij 10°. Bevat dus het o-toluidien eenige procenten para, dan moet het oxalaat hiervan in de waterige moederloog bij het omkrystalliseeren blijven en is de aanwending van aether, dat als „nauwkeurig” scheidingsmiddel der oxalaten wordt aangegeven, overbodig. Ook eventueel anilien moet aldus te verwijderen zijn.

Om te kunnen beoordeelen, of langs dezen weg inderdaad eene volkomen zuivering te bereiken zoude zijn, was het noodig eerst een kenmerk te bezitten, waarmede dit kon worden vastgesteld; want de in de literatuur aangegeven methoden ter onderzoek der zuiverheid van o-toluidien, van HÄUSSERMANN (Fr. 26,750), REINHART (Fr. 33,90) en LUNGE (Fr. 24,459) schenen voor het bepalen van zeer geringe hoeveelheden verontreinigingen minder doeltreffend.

Hiervoor bleek de bepaling van het stolpunt der acetylverbinding te kunnen gebruikt worden. Door bepaling van een deel der stolpuntskromme van o- en p-aceettoluidien kon dan tevens quantitatief de hoeveelheid der verontreiniging bepaald worden.

Gevonden werden de volgende stolpuntscijfers.

gehalte aan para in %	stolpunt
0	109.°15
1.12	108. 45
2.42	107. 75
9.58	103.°2
13.6	100.°8

Dat 109.°15 het stolpunt voor zuiver aceet-o-toluidien is, werd daardoor vastgesteld, dat uit een „chemisch zuiver” o-toluidien het oxalaat bereid werd, hieruit na omkrystalliseeren het toluidien werd terugwonnen en deze bewerkingen nog eenmaal werden herhaald.

Na iedere krystallisatie van het oxalaat werd een kleine hoeveelheid o-toluidien in aceetverbinding omgezet; de waargenomen stolpunten waren beide het aangegeven cijfer, dat ook door omkrystalliseeren der aceetverbinding geene verdere vermindering onderging.

Ten einde te kunnen beoordeelen in hoeverre kleine hoeveelheden para-toluidien en anilien door middel van de stolpuntcijfers kunnen gevonden worden, werd bovengenoemd gezuiverd o-toluidien met 2% anilien en een andere hoeveelheid met 2% p-toluidien vermengd en nu als volgt te werk gegaan:

25.2 gr. oxaalzuur ($\frac{1}{5}$ mol.) wordt in 1 L. kokend water opgelost en hierin 42.8 gr. toluidien ($\frac{2}{5}$ mol.) langzaam gegoten. Bij afkoeling krystalliseert het oxalaat uit; na plaatsing van de kolf in ijs wordt van de krystallen scherp afgezogen, met weinig water eenmaal nage-wasschen en zoowel uit hen, als uit de moederloog het toluidien gewonnen door alkalisch maken en overblazen met stoom. Om verliezen te vermijden is het noodig het mede overgedistilleerde water tweemaal met aether uit te schudden. Het zoo gewonnen toluidien wordt in aceetverbinding omgezet door er per gram een mengsel van 2 cM³ ijsazijn en 1 cM³ azijnzuuranhydried aan toe te voegen. Men dampst nu op een waterbad tot droog in en distilleert de rest ter zuivering eenmaal in vacuo, waarbij alles op een zeer kleine zwarte rest na overgaat. Daarna wordt het stolpunt van beide hoeveelheden bepaald. Gevonden werd:

	toegevoegd	
	2% p-toluidien	2% anilien
Stolpunt v. h. uit de krystallen verkregen aceettoluid:	109.°15;	109.°15
" " " " " moederloogen " "	103.°2 ;	103.°0

Hieruit blijkt dus, dat reeds bij het uitkrystalliseeren van het oxalaat de toegevoegde verontreinigingen geheel in de moederloog zijn gebleven, en dat de uit deze verkregen aceetverbinding de aanzienlijke depressie van ca. 6° vertoont. Wanneer men nu in aanmerking neemt, dat de bepaling van het stolpunt scherp is en het gemakkelijk op 0.°2, of bij meerdere oefening op 0.°1 na kan worden gevonden, dan kan men langs dezen weg $\frac{1}{60}$ der thans aanwezige verontreiniging, d. i. is dus $\frac{2}{60} = 0.03\%$ nog aantoonen.

Volgens deze methode heb ik twee monsters o-toluidien, beide gemerkt „chemisch rein”, van verschillende fabrieken afkomstig op hunne zuiverheid onderzocht met het volgende resultaat.

I. Op geheel dezelfde wijze als boven in oxalaat omgezet. Kolf afgekoeld in ijswater.

Uit de krystallen verkregen 31 gr., uit de moederloog 10.2 gr., samen 41.2 gr., terwijl 42.8 gr. toluidien in bewerking was genomen.

Stolpunt der aceetverbinding uit de krystallen 109.°15. Was dus zuiver.
 " " " " " moederloog 107. 15, overeenkomende met 3.6% p. toluidien of 0.37 gr. Het monster bevatte dus $\frac{0.37 \times 100}{41.2} = 0.9\%$ verontreiniging.

II. Als boven 42.8 gr. toluidien in oxalaat omgezet. Uit de krystallen wordt 30.5 gr., uit de moederloog 11.2 gr. genomen, samen 41.7 gr.

Smeltpunt der aceetverbinding uit de krystallen: $108.^{\circ}45$; bevatte dus nog 1.1 % of 0.34 gr. bijproduct. Na nogmaals in oxalaat te zijn omgezet, stelde de wederom bereide aceetverbinding nu bij $109.^{\circ}15$. Smeltpunt van de aceetverbinding uit de moederloog $101.^{\circ}9$, overeenkomende met 12.1 % of 1.36 gr. Totaal aanwezige verontreiniging dus $1.36 + 0.34 = 1.70$ gr., overeenkomende met 4.1 %.

Onderstellende, dat de verontreiniging anilien of p-toluidien is, werd aldus te werk gegaan om uit te maken welken dezer twee aanwezig is. Van een mengsel van aceettoluïed (6 gr.) en aceet-ortho-toluïed (4 gr.) werd het eutektische punt bepaald. Hiervoor werd gevonden $64.^{\circ}6$ en $65.^{\circ}1$, gemiddeld dus $64.^{\circ}8_3$. Bij toevoeging van 0.1 gr. p-aceettoluïed aan dit mengsel werd voor het genoemde punt $63.^{\circ}1$ en $63.^{\circ}6$, gemiddeld dus $63.^{\circ}3_5$, gevonden; dit laatste bleek dus vrij gevoelig voor toevoeging van kleine hoeveelheden para te zijn.

Nu werden gemengd 5.64 gr. aceettoluïed met 4.36 gr. der aceetverbinding uit de moederloog van I bereid, die dus bevatten 4.20 gr. aceet-orthotoluïed en 0.16 gr. van eene verontreiniging, die p-aceettoluïed zoude kunnen zijn. Van dit mengsel werd het beginstolpunt gevonden op $72.^{\circ}0$ en $71.^{\circ}9$, het eindstolpunt op $62.^{\circ}6$ en $62.^{\circ}8$. Een mengsel bereid uit 5.64 gr. aceetanilied, 4.20 gr. aceet-orthotoluïed en 0.16 gr. p-aceettoluïed vertoonde deze zelfde punten bij $72.^{\circ}1$ en $62.^{\circ}8$, zoodat de verontreiniging inderdaad p-aceettoluïed schijnt te zijn; aceetanilied is daarvoor uitgesloten, daar dan het eindstolpunt met het eutektische punt van het zuivere mengsel van aceettoluïed en aceet-o-toluïed nagenoeg had moeten samenvallen.

Bovenstaande methode zal zonder twijfel in tal van andere gevallen kunnen worden aangewend daar haar grondslag zeer algemeen is; door haar is het mogelijk met veel grooter nauwkeurigheid de zuiverheid van organische praeparaten quantitatief te beoordeelen dan tot nu toe, met name bij vloeibare lichamen, het geval was.

De heer F. H. VAN DER LAAN heeft mij bij het experimenteel gedeelte van dit onderzoek bekwaam ter zijde gestaan.

Groningen, Chem. Lab. d. Univ. November 1904.

Meteorologie. — De Heer WIND biedt een mededeeling aan van den Heer C. EASTON: „*Schommelingen der zonswerkzaamheid en van het klimaat.*”

(Mede aangeboden door den Heer W. H. JULIUS.)

Terwijl de overeenkomst tusschen de schommelingen in de „zons-activiteit” en de variatie der elementen van het aardmagnetisme vaststaat, en een dergelijk parallelisme vermoed wordt voor eenige andere aardse verschijnselen, scheenen de meteorologische elementen te zeer aan storingen van verschillenden aard onderhevig te zijn om den overeenkomstigen gang — hoezeer ook hier naar alle waarschijnlijkheid voorhanden is — tot uiting te laten komen. BRÜCKNER heeft in zijn uitvoerige studie over Klimaatschommelingen¹⁾ deze vraag ook nagegaan, maar slechts een negatief resultaat verkregen. Wel is waar hebben KÖPPEN en NORDMANN²⁾ een parallelisme ten aanzien van de 11-jarige zonnevlekken-periode vastgesteld voor een tijdvak van 1840—1900, zich beperkende tot de tropische gewesten; maar ofschoon KÖPPEN’s kromme voor de zuidelijke gematigde luchtstreek dit parallelisme ook vrij goed aanduidt, en LANGLEY’s bolometrische onderzoeken³⁾, over de noordelijke gematigde zone, van zijn methode veel doen verwachten voor de toekomst, zou men zeggen dat voor het ektropische gebied in zijn geheel (en bijgevolg ook voor de Aarde als geheel) de aardse invloeden zoo storend werken, dat de schommelingen, door de kosmische oorzaak teweeggebracht, worden uitgewischt.

De reden daarvan is echter niet ver te zoeken: de *algemeene* temperatuur-kromme zou dien rechtstreekschen invloed der zonnestraling slechts kunnen weerspiegelen voor die gebieden, waar de afwisseling der jaargetijden noch zeer sterk noch zeer onregelmatig is. Dat moet reeds een reden zijn waarom BRÜCKNER’s zoogenaamde „temperatuur-kromme voor de geheele Aarde” — welke onder den overwegenden invloed staat van de waarnemingen in de noordelijke gematigde zone — zoo sterk afwijkt van de kromme, die RUDOLF WOLF’s „Relativzahlen” voor de zonnevlekken voorstelt. Het scheen mij daarom toe, dat dit vraagstuk uit een ander oogpunt beschouwd moest worden.

Nu heeft dr. W. J. S. LOCKYER in het vorige jaar een onderzoek

1) E. BRÜCKNER. Klimaschwankungen seit 1700., Geogr. Abh. IV, 2 (1890).

2) W. KÖPPEN. Zeits. oesterr. Ges. f. Met. VIII, XV, XVI. — CH. NORDMANN. Comptes rendus T. 136, p. 1047 (1903).

3) S. P. LANGLEY. Astroph. Journal XIX, p. 305 (1904).

openbaargemaakt ¹⁾ waarbij hij tot de slotsom kwam, dat BRÜCKNER's klimaatperiode van ongeveer 35 jaar teruggevonden werd in de onregelmatigheden van de 11-jarige schommeling der zonswerkzaamheid, indien men eenerzijds tot maatstaf nam de veranderlijke grootheid $M-m$, voorstellende den tijd die verloopt tusschen een minimum van zonnevlekken en het volgende maximum; anderzijds BRÜCKNER's kromme voor den neerslag. Laatstgenoemd meteorologisch element scheen mij, wegens de buitengewoon sterke plaatselijke veranderlijkheid, ter vergelijking al zeer ongeschikt toe; het kwam mij voor dat het nut kon hebben, BRÜCKNER's kromme voor de strenge winters er aan te toetsen. Voorts bewezen m. i. de paar schommelingen, door LOCKYER weergegeven, zoo goed als niets, tenzij de voorafgaande, hoezeer onnauwkeuriger opgeteekende zonsschommelingen althans eenigermate met het resultaat klopten.

Een onderzoek instellende in die richting kwam ik tot een negatief resultaat ten aanzien van de door LOCKYER vermoede bevestiging van BRÜCKNER's klimaatperiode, maar iets geheel anders trad op verrassende wijze aan het licht: een (zij 't onvolkomen) parallelisme tusschen de boven vermelde $M-m$ kromme van de zonswerkzaamheid met de kromme, die de talrijkheid van de strenge winters aanduidt.

Ik laat deze krommen hier niet volgen, omdat ze verder van geen rechtstreeksch nut zijn. In dit parallelisme lag echter een belangrijke aanwijzing in twee richtingen: 1°. dat de $M-m$ kromme — of liever de afwijkingen der plaatsen van het zonsminimum en maximum ten opzichte van de door NEWCOMB gevonden normaal ²⁾ — groote waarde kon hebben naast de kromme voor de talrijkheid der zonnevlekken (die der Relativzahlen); terwijl nu tevens bleek dat die afwijkingen althans in hoofdzaak reëel zijn; 2°. dat in de opteekeningen betreffende strenge winters een wel ruw maar belangrijk materiaal lag ter beoordeeling van den algemeenen gang der weersgesteldheid in vroegeren tijd.

Het gevonden parallelisme is in dezen zin, dat met een grooter aantal zonnevlekken (sterker zonswerkzaamheid, om dit woord nu te houden) strengere kou overeenkomt. Wel is waar is dat in strijd met Sir NORMAN LOCKYER's opvatting, maar het is in overeenstemming met de tegenwoordig vrijwel gangbare meening, dat de zonnevlekken geen over-verhitte gebieden vormen, ook met de uitkomst eener proef van SAVÉLIËF ³⁾, terwijl het opmerking verdient, dat prof.

1) W. J. S. LOCKYER. Proc. Roy. Society, LXVIII (1901).

2) S. NEWCOMB. Astrophys. Journal, XIII, 2 (1901).

3) SAVÉLIËF. Comptes rendus T. 118, (1894).

JULIUS, bij het ontwikkelen zijner zonnetheorie, tot dezelfde uitkomst geraakt ¹⁾.

Dat de onregelmatigheden in de elfjarige zonskromme niet in hoofdzaak aan waarnemingsfouten toegeschreven mogen worden, volgde ook reeds zijdelings uit de onderzoekingen van FRITZ en LOOMIS over het noorderlicht ²⁾, en van HALM over correcties in de waarden van de helling der ecliptica, de breedte-variatie, enz. ³⁾, welke overeenkomstige onregelmatigheden vertoonen.

De opteekeningen over strenge winters vormen, gelijk van zelf spreekt, een zeer ruw materiaal, hoewel reeds vroeger de opmerking gemaakt is, dat ze wegens de voor een ieder waarneembare exceptioneele vorming van ijs veel minder willekeurig zijn dan bijv. opteekeningen over zeer warme zomers. De gegevens moeten echter zorgvuldig geschift en vergeleken worden. Dit is reeds gedaan door prof. W. KÖPPEN bij zijn bekende onderzoekingen naar de periodiciteit van strenge winters. Het lag daarom voor de hand, niet verder van BRÜCKNER'S (enkel aan PILGRAM ontleende) gegevens over strenge winters gebruik te maken, maar van het door KÖPPEN bewerkte materiaal.

Bij een vergelijking nu van de kromme van BRÜCKNER met de lijst van KÖPPEN werd ik getroffen door een aanduiding van periodiciteit in zeer lange tijdvakken; echter niet in den zin waarnaar KÖPPEN zocht — terugkeer van strenge winters in bepaalde, aequidistante jaren — ook geen gelijkvormige schommelingen gelijk BRÜCKNER ze in 't klimaat meent gevonden te hebben; maar als terugkeer van het *algemeene karakter der weersgesteldheid* in tijdvakken van omstreeks 180 jaar, binnen elk van welke tijdvakken de winters op een bepaalde wijze verdeeld schenen: zeer veel in de eerste 60 of 70 jaren na het begin van zulk een tijdvak (bijv. na omstreeks 1220, 1400, 1580), zeer weinig in de volgende 20 jaar, veel in de daaropvolgende 20, weinig maar onregelmatig verspreid in het overige deel van het tijdvak.

Daar dit verschijnsel, als reëel beschouwd, blijkens het vroeger gevondene vermoedelijk veroorzaakt moest worden door een seculaire schommeling in de zonswerkzaamheid, zich uitende in stelselmatige wijzigingen der elfjarige schommelingen, besloot ik, een onderstelde periode van 16×11.13 jaar (11.13 is de normale constante periode volgens NEWCOMB) = ongeveer 178 jaar, als uitgangspunt te nemen voor een nader onderzoek; het bruikbaar geachte materiaal strekt

¹⁾ W. H. JULIUS. Archives néerlandaises, Série II, Ts. VII, VIII, IX.

²⁾ H. FRITZ. Das Polarlicht. Leipzig 1881; — E. LOOMIS, bij HALM, A. N. 3649.

³⁾ J. HALM. Astron. Nachrichten 3619, 3649; Nature Vol. 62, 1610.

zich dan uit van het midden der negende eeuw tot in onze dagen — met behulp van de door KÖPPEN zelf verstrekte aanvullende gegevens — dus over ruim duizend jaren. Dat deze periodiciteit een wezenlijken grondslag had, werd toen zeer waarschijnlijk uit een statistisch onderzoek, waarbij het jaar 848 als begin eener 178-jarige periode werd aangenomen. Noemt men *koude-factor* den invloed van één „gewoon-strengen” winter op de weersgesteldheid, en geeft men dan aan elken exceptioneel strengen winter (KÖPPEN’s „winters eerste klasse”) drie koudefactoren, aan de tusschenbeide liggende twee, dan blijkt dat — alle sedert verloopen periodes tezaamen genomen — de vier onderafdeelingen van ongeveer 67, 22, 22, 67 jaar respectievelijk aanwijzen 114, 15, 39, 62 koude-factoren, d. i. per jaar resp. 1.70, 0.68, 1.77 en 0.93 koudefactoren. Deze schommelingen zijn zoo sterk, dat er tijdens deze ongeveer 67-jarige koude-tijdperken (bijv. tusschen 1561 en 1628, enz.) bijna tweemaal zooveel strenge, waaronder zevenmaal zooveel buitengewone strenge winters opgeteekend zijn, naar verhouding, als in de daarop volgende tijdperken van 22 warme jaren (welke tot dusver gezamenlijk 12 strenge, waaronder slechts één buitengewoon strengen winter hebben bevat).

Het kwam er nu op aan, het karakter dezer schommeling vast te stellen. Eenerzijds schenen periodes, uit twee achtereenvolgende 178-jarige bestaande (dus van 356 jaren) in sommige opzichten nog meer onderlinge overeenstemming aan te wijzen (maar zelfs ons zeer omvangrijke materiaal strekt zich blijkbaar over een te korten tijd uit, om in deze richting iets betrouwbaars te vinden), anderzijds was de verheffing en daling in het midden der 178-jarige periode het meest karakteristieke verschijnsel, wat op de mogelijkheid eener splitsing wees. Inderdaad kan de periode ontbonden worden in twee helften van 89 jaar, die een eigenaardige, beiderzijds eenigszins verschillende kromme vertoonen, (zie de grafische tabel, fig. II). Wellicht kan ook deze 89-jarige weer gesplitst worden in twee periodes van 44.5 jaar; de inzinking in het midden der 89-jarige periode is voor alle strenge winters gezamenlijk slechts aangeduid, maar schijnt duidelijker wanneer men alleen de buitengewoon strenge winters in aanmerking neemt. In de volgende lijst (Tabel I) zijn de twaalf sedert het jaar 848 beschikbare 89-jarige periodes onder elkaar geplaatst, ingedeeld in elfjarige vakken naar de berekende normale zons-maxima (volgens NEWCOMB); elke laatste (8^e) afdeeling telt 12 jaar, de overige 11, hetgeen intusschen alleen bij het totaal der 8^e afdeeling een klein verschil maakt. — De totalen alleen van de *buitengewoon* strenge winters zijn: 7, 11, 6, 2, 10, 6, 3, 0. — Om de indeeling volgens geheele aantallen jaren te kunnen behouden, heb

ik in een flauw gedeelte der periode één jaar: het jaar 1560, laten wegvallen. Het laatste vakje der laatste periode is natuurlijk nog onbekend; ik heb daarvoor het gemiddelde uit de laatste rij = 1 genomen, maar zelfs een veel hogere koudefactor zou de algemeene verhouding niet aanmerkelijk wijzigen.

T A B E L I.

Verdeeling der winterkou over 89-jarige tijdvakken (848—1916)
(in elfjarige periodes afgedeeld).

I	848	—	4	4	1	1	1	—	1
II	937	—	—	—	3	1	1	—	1
III	1026	—	4	—	1	5	—	—	—
IV	1115	4	4	1	1	—	3	—	—
V	1204	1	4	6	—	1	1	2	1
VI	1293	—	3	7	—	—	—	3	—
VII	1382	2	—	4	4	7	4	1	1
VIII	1471	—	4 ⁵	1	2	1	1	2	1
IX	1561	8	3	2	6	4	5	1	1
X	1650	5	9	2	3	4	3	4	1
XI	1739	4	4	7	2	9	5	6	1
XII	1828	7	2	4	3	6	3	—	1?
		31	41 ⁵	38	26	39	27	19	9?

Verder dan tot een periode van 4×11.13 jaar laat zich de splitsing zeker niet voortzetten. Een regelmatige, althans voor verre weg de meeste gevallen opgaande afwisseling van 22 jarige periodes, koud en warm, is in dit materiaal niet te vinden, en nog minder regelmaat is te bespeuren in de opvolging der 11-jarige periodes.

Nemen wij een $44\frac{1}{2}$ -jarige periode tot grondslag, dan kunnen wij het gevondene aldus uitdrukken:

Er bestaan klimaatschommelingen om de $44\frac{1}{2}$ jaar, en veelvouden daarvan; hoofdzakelijk aldus, dat één gemiddeld 11.13-jarige periode minder winterkou bevat dan de drie voorafgaande en de drie volgende; dat om de 89 jaar een periode met zéér weinig winterkou komt; dat bij twee naburige 178-jarige schommelingen de laatste 5 of 6 periodes van de een warmer zijn dan het overeenkomstige tijdvak in de andere. Deze klimaatwisseling komt overeen met een schommeling in de „zonsactiviteit,” van hooger orde dan de bekende elfjarige.

Het vroeger aangeduide, zeer twijfelachtige verschil tusschen twee opvolgende 178-jarige periodes, zou in dezen zin zijn, dat de heftigheid der schommelingen in de eene periode vóóraan in de periode het sterkst is, en in de volgende verschoven wordt naar het midden der eerste 89-jarige onderperiode. Met zekerheid kan daarover echter niets gezegd worden, nog minder over het bestaan van een nóg uitgestrekter periodiciteit.

Het was de moeite waard, te onderzoeken of ook de elfjarige zonsschommeling zelf in dit materiaal aan het licht komt. Daartoe is de verdeling der „winterkou-factoren” nagegaan over vijf fasen van de elfjarige zonsschommeling ($m = 2$ jaar om het waargenomen minimum heen, $M = 2$ jaar om het maximum, $ap =$ klimmende phase, dp_1 en $dp_2 =$ helften der dalende phase). De maxima en minima zijn volgens NEWCOMB's opgaaf (de afwijkingen met RUDOLF WOLF's laatste lijst ¹⁾ hebben geen belang). De ongelijke duur der fasen is natuurlijk in rekening gebracht. De periodes zijn gerangschikt in vier groepen *A*, *B*, *C* en *D*, naar afnemende koude. Wij vinden dan de volgende waarden voor de frequentie per jaar (tusschen haakjes zijn geplaatst de waarden, uitsluitend gevonden uit die periodes, waarbij NEWCOMB (ibid. pg. 7) aan de plaatsbepaling van m en M ten minste het gezamenlijke gewicht 8 toekende).

T A B E L II.

Verdeeling der winterkou over de fasen der 11-jarige zonsschommeling
(Groepen van koud tot warm).

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
<i>m</i>	1.50 (1.67)	0.75 (0.75)	0.12 ^b ((0.12 ^b))	0.17 (0.17)
<i>ap</i>	1.13 (1.44)	1.13 (1.13)	0.60 (0.50)	0.32 (0.32)
<i>M</i>	1.08 (1.50)	1.25 (1.25)	0.33 (0.25)	0.25 (0.25)
<i>dp₁</i>	0.98 (1.09)	0.21 (0.21)	0.76 (0.65)	0.57 (0.57)
<i>dp₂</i>	1.06 (1.03)	0.48 (0.48)	0.36 (0.22)	0.24 (0.24)

Voor alle groepen gezamenlijk, en ook voor de beide koude groepen bijeengenomen, vinden wij dus een kromme welke met die van de 11-jarige zonsperiode overeenkomt; bij de warme schijnt zich het koude-maximum naar de dalende phase te verplaatsen. Dit verschijnsel behoeft echter niet te berusten op een werkelijk andere verdeling der kou binnen de elfjarige schommeling, evenmin als de hooge waarde omstreeks het minimum in de koudste groep: de oorzaak ligt vermoedelijk hierin, gelijk wij zien zullen, dat de tem-

¹⁾ R. WOLF. Astron. Mittheilungen LXXXII (1893).

peratuur-schommelingen aan de zonsschommelingen voorafgaan of daarop volgen.

Dit blijkt wanneer men de temperatuur-schommelingen vergelijkt met de kromme voor de Relativzahlen der zonnevlekken. In de bijgevoegde grafische tabel is A de kromme van de Relativzahlen volgens R. WOLF, B het laatste gedeelte der temperatuur-kromme naar een 356-jarige periode, C die naar de 178-jarige periode, D de allerlaatste 178-jarige schommeling alleen ¹⁾). Ik geef deze krommen niet om te betoogen dat ze met elkaar overeenstemmen tot in bijzonderheden — gelijk wèl het geval is met de krommen der variaties van de magnetische elementen en de zonnevlekken-kromme — een dergelijk parallelisme was hier, het materiaal in aanmerking genomen, a priori niet te verwachten; maar om aan te toonen dat het algemeene karakter der zons- en temperatuur-krommen hetzelfde is, waarbij opmerking verdient, dat de gemiddelde kromme B dichter tot A nadert dan D. De afwijkingen in *plaats* van de temperatuur-schommelingen ten aanzien van de zonsschommelingen schijnen althans ten deele stelselmatig te zijn. Bij de vergelijking van den gang der temperatuur-krommen en zonskrommen in de afzonderlijke elfjarige periodes moet echter nog een ander verschijnsel der zons-activiteit in aanmerking genomen worden dan de min of meerdere vlekkenrijkdom (ofschoon het daarmee zeker verband houdt), te weten de afwijkingen van minimum en maximum van de normaal.

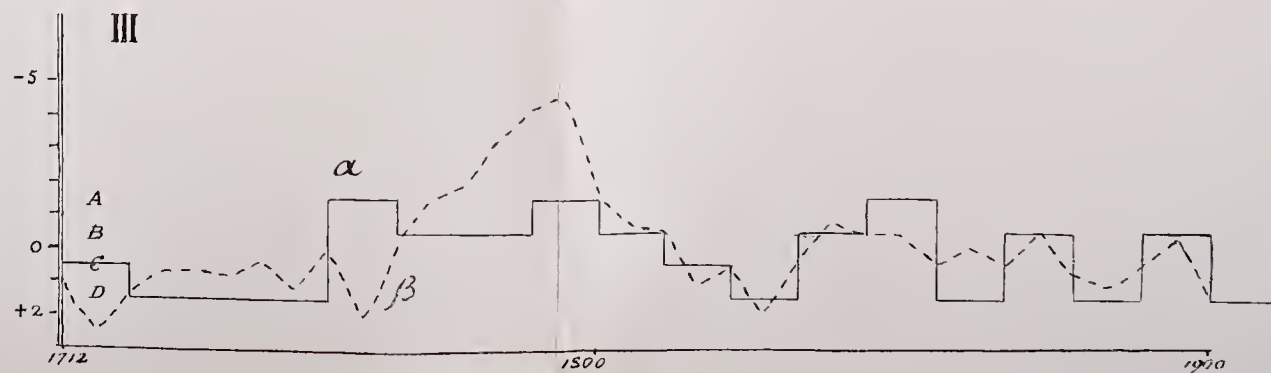
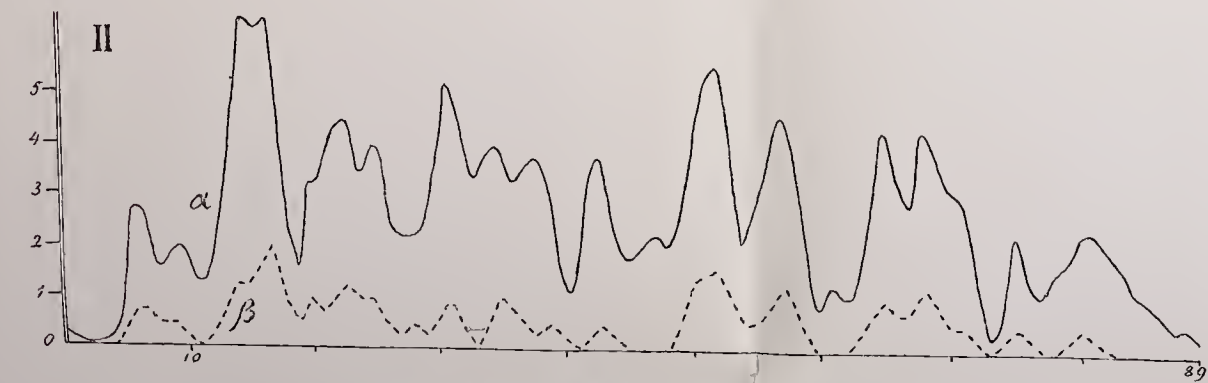
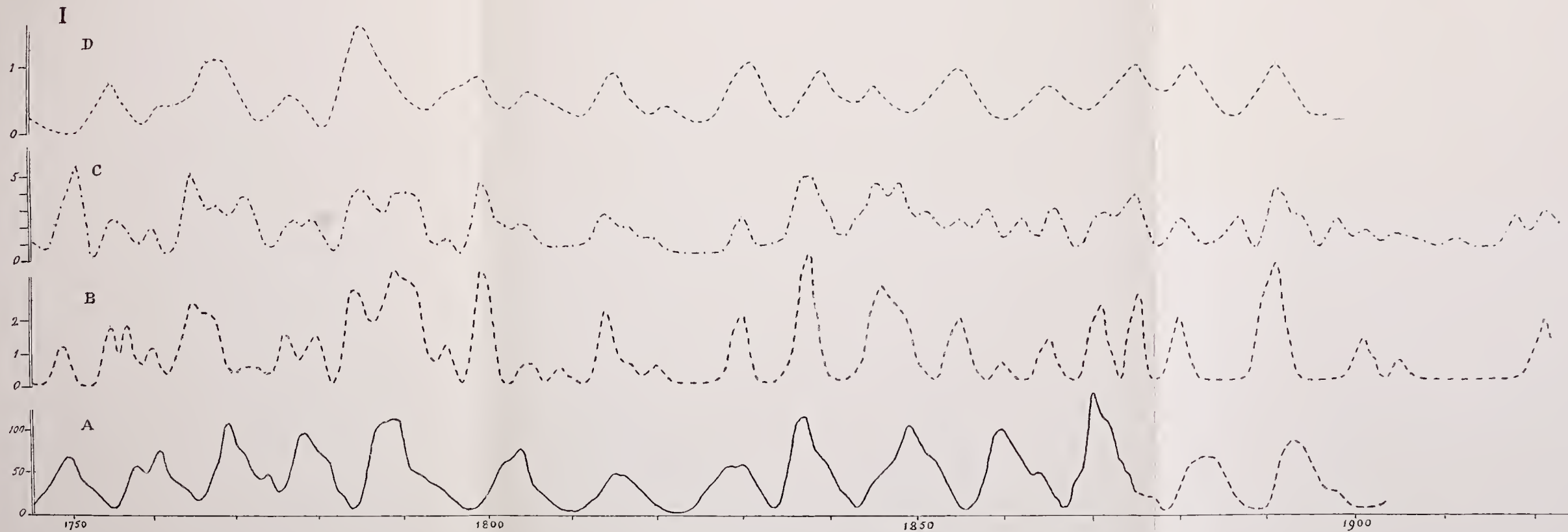
In het vage verband tusschen de grootte der waarde $M-m$ en de mindere of meerdere koude — in den aanvang van dit opstel aangeduid, — komt dat verschijnsel reeds tot uiting, maar het spreekt duidelijker in het diagram III rechts onderaan op de grafische tabel, waar (voor de laatste 17 elfjarige periodes) de gestippelde lijn voorstelt, in jaren, de vertraging (+) of versnelling (—) van het waargenomen zons-minimum en -maximum ten opzichte van het berekende gemiddelde 11.13, terwijl de overeenkomstige groep koude-factoren is aangeduid met de doorgetrokken lijn door A (zeer koud) tot D (zeer warm). In het algemeen vinden wij dat versnelling der zonsschommeling met meer koude, vertraging met meer warmte overeenkomt.

Ook voor de periodes afzonderlijk geldt over het geheel deze regel, mits de afwijkingen aanzienlijk zijn. Brengen wij het hier gevondene in verband met de zoeven vermelde verdeeling der koude-factoren

¹⁾ Bij de krommen B, C en D is geen andere vereffening aangewend dan die volgens de formule $b_x = \frac{a+2b+c}{4}$. De koudefactoren zijn van jaar op jaar geteld, alleen bij D per twee jaren saamgevat wegens het geringe aantal.

De schaal is: 1 koudefactor = 40 Relativzahlen.





I. Zonnevlekken en Winterkou.

- A. Relativzahlen d. zonnevlekken naar R. WOLF, sedert 1745.
- B Gemiddelde uit ns. II, IV en VI der zes 178-jarige klimaatperiodes. (winterkoude) sedert 854.
- C. Gemiddelde uit alle zes 178-jarige klimaatperiodes.
- D. De laatste 178-jarige klimaatperiode alléén.

II. 89-jarige klimaatperiode.

- α. Gemiddelde uit alle 12 periodes sedert 854, alle strenge winters.
- β. Id. alléén de allerstrengste winters.

III. Winterkou en onregelmatigheden der zonswerkzaamheid.

- α. Winterkou: gemidd. uit 178-jarige periodes sedert 1712, in vier groepen.
- β. Afwijkingen v. d. phasen der 11-jarige zonnevlekken-schommeling van de normaal.

over de fasen van eenzelfde elfjarige periode, en met de vroeger gevonden grootere schommelingen, dan schijnt uit een nader onderzoek deze regel voort te vloeien (die hier voorloopig als hypothese gesteld wordt):

Ten opzichte van de elfjarige wisseling der „zons-activiteit” is in het algemeen de aardse temperatuurswisseling versneld in het koude, vertraagd in het warme gedeelte der grootere golving. In koude elfjarige tijdvakken ligt het zwaartepunt der koude omstreeks het minimum (vaak gaan zeer koude jaren nog daaraan vooraf); in warme ligt het omstreeks het maximum of volgt daarna; in periodes van intermediair karakter ligt het zwaartepunt der koude tusschen minimum en maximum in.

Voor de afzonderlijke gevallen geldt dan, dat bij aanzienlijke vervroeging van het zons-minimum of -maximum het zwaartepunt der koude neiging heeft om buitengewoon vervroegd te worden, en omgekeerd. Bij vervroeging van het minimum met vertraging van het maximum derzelfde periode breidt ook de kou-periode zich ver uit.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt een mededeeling aan: „*Over de vergelijking, die de hoeken van twee meerdimensionale ruimten bepaalt.*”

Het vraagstuk, waarvan wij de oplossing zoeken, is het volgende: „In een ruimte R_n met n afmetingen is een rechthoekig coördinatenstelsel $O (X_1 X_2 \dots X_n)$ aangenomen en met betrekking tot dit stelsel een door O gaande ruimte R_p door de vergelijkingen

$$x_{p+i} = a_{1,i} x_1 + a_{2,i} x_2 + \dots + a_{p,i} x_p \\ (i = 1, 2, \dots, n - p)$$

gegeven; in de onderstelling, dat deze ruimte R_p met de coördinaatruimte $O (X_1 X_2 \dots X_p)$ slechts het punt O gemeen heeft, vraagt men de p hoeken $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ tusschen deze beide p -dimensionale ruimten te bepalen”.

Meetkundig zou men hiertoe als volgt te werk gaan. Neem in de gegeven ruimte R_p een bolruimte aan, die O tot middelpunt en de eenheid tot straal heeft en dus in R_p de meetkundige plaats vormt der op de eenheid van afstand van O verwijderde punten; indien deze bolruimte zich op de coördinaatruimte $O (X_1 X_2 \dots X_p)$ projecteert als een kwadratische gebogen ruimte met de halve assen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, dan heeft men

$$a_1 = \cos \alpha_1, a_2 = \cos \alpha_2, \dots, a_p = \cos \alpha_p.$$

Op een bijna even zoo eenvoudige wijs worden de tangenten der gevraagde hoeken stekkundig met de middelpuntsvoerstralen van een andere kwadratische gebogen ruimte in verbinding gebracht. Is P een willekeurig punt van R_p en Q zijn projectie op de coördinaatruimte $O (X_1 X_2 \dots X_p)$, dan is de hoek $P O Q = \alpha$ ook bepaald door de betrekking.

$$tg^2 \alpha = \frac{OP^2 - OQ^2}{OQ^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-p} (a_{1,i} x_1 + a_{2,i} x_2 \dots + a_{p,i} x_p)^2}{\sum_{i=1}^p x_i^2}.$$

Beschouwt men nu in R_p de punten P , wier coördinaten gebonden zijn aan de voorwaarde

$$\sum_{i=1}^{n-p} (a_{1,i} x_1 + a_{2,i} x_2 + \dots + a_{p,i} x_p)^2 = 1 \dots \dots \dots (1),$$

die alleen $x_1, x_2, \dots x_p$ bevat en dus uitdrukt, dat de projectie Q van P op $O(X_1 X_2 \dots X_p)$ in deze laatste ruimte blijft op de door (1) voorgestelde kwadratische ruimte, dan geldt de betrekking

$$tg \alpha = \frac{1}{OR}.$$

Zijn $b_1, b_2, \dots b_p$ de halve assen deze nieuwe kwadratische ruimte, dan vindt men dus

$$tg \alpha_1 = \frac{1}{b_1}, tg \alpha_2 = \frac{1}{b_2}, \dots, tg \alpha_p = \frac{1}{b_p}.$$

Nu gaat 1) door de substituties

$$\sum_{i=1}^{n-p} a^2_{k,i} = A_{k,k} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n-p} a_{k,i} a_{l,i} = A_{k,l}$$

in den symbolischen vorm

$$(A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_p x_p)^{(2)} = 1$$

over; dus levert de bekende seculaire vergelijking

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{21} & \dots & \dots & A_{p,1} \\ A_{12} & A_{22} - \lambda & \dots & \dots & A_{p,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1,p} & A_{2,p} & \dots & \dots & A_{p,p} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

door haar wortels $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_p$ de coëfficiënten van de op de assen herleide vergelijking dier kwadratische ruimte. Uit de betrekkingen

$$\lambda_1 = \frac{1}{b_1^2}, \lambda_2 = \frac{1}{b_2^2}, \dots \lambda_p = \frac{1}{b_p^2}$$

volgt dan onmiddellijk, dat de verlangde vergelijking verkregen wordt door in bovenstaanden determinant λ door $tg^2 \alpha$ te vervangen.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan:
*„Over de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel
 kwadratische oppervlakken.”*

1. De meetkundige plaats omhuld door de assen van een kegelsnedenbundel werd o.a. onderzocht door M. TREBITSCHER¹⁾. Hij vond, dat de assen van genoemde kegelsneden een kromme van de derde klasse omhulden, die de rechte in het oneindige van het vlak aanraakt in twee punten, toegevoegd aan de richtingen van de assen der beide parabolen van den bundel ten opzichte der isotrope punten I en J . De kromme is dus van den vierden graad d. i. unicursaal.

Dit resultaat wordt vermeld in de „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften” III p. 101. Raadpleegt men evenwel in het zelfde werk de leer der kwadratische oppervlakken, dan blijkt niet, dat men ook getracht heeft de meetkundige plaats te bepalen van de hoofdassen der oppervlakken van een bundel. De nu volgende mededeeling stelt zich ten doel eenige onderzoekingen over deze meetkundige plaats bekend te maken.

2. We stellen een eenvoudiger bijzonder geval van den bundel voorop en denken ons een bundel kwadratische concentrische kegelvlakken; de meetkundige plaats der hoofdassen daarvan is een kegelvlak, waarvan men den graad bepalen kan. Denken we ons daartoe de doorsnijding van een der kegelvlakken met het vlak in het oneindige; de aldus ontstaande kegelsnede bepaalt met den isotropen cirkel een gemeenschappelijken pooldriehoek en de hoekpunten van dien driehoek bepalen de richtingen van de hoofdassen van het kegelvlak. Hieruit volgt:

De hoofdassen van alle kegelvlakken van den bundel snijden het vlak in het oneindige in de hoekpunten van de gemeenschappelijke pooldriehoeken van de kegelsneden in dit vlak gelegen en den isotropen cirkel. Deze hoekpunten vormen de Jacobische kromme van het kegelsnedenet, bepaald door twee der kegelsneden en den isotropen cirkel. De assenkegel is dus een kegel van den derden graad, die het vlak in het oneindige in de genoemde Jacobische kromme snijdt.

Men kan zich van de ligging der hoofdassen op dezen kegel een denkbeeld vormen door een beschrijvende rechte a_1 te kiezen. Legt men door den top een vlak loodrecht op a_1 , dan snijdt dit den kegel volgens drie stralen a_2, a_3, b_1 . a_2 en a_3 staan loodrecht op elkander, b_1 behoort bij een ander assentriëder, dat men verkrijgt

¹⁾ Ueber Beziehungen zwischen Kegelschnittbüscheln und rationalen Curven dritter Classe, Sitzungsber. der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Bnd. LXXXI p. 1080.

door door den top een vlak te leggen loodrecht op b_1 ; dit vlak gaat door a_1 en snijdt den kegel nog in de beide loodrecht op elkaar staande hoofdassen b_2 en b_3 .

In het algemeen zal deze kegel geen dubbelstraal hebben en dus niet unicursaal zijn.

3. Zij nu een bundel kwadratische oppervlakken gegeven. Uit een punt O in de ruimte als top construeere men de parallelkegels ten opzichte der asymptotenkegels van de verschillende oppervlakken; op deze wijze ontstaat er een kegelbundel, waarbij men, overeenkomstig het voorgaande, den assenkegel kan construeeren. De assentriëders van dezen kegel zijn evenwijdig aan de assentriëders van de oppervlakken van den bundel.

Men construeere verder de cubische ruimtekromme φ_3 , welke de meetkundige plaats is der middelpunten van de oppervlakken van den bundel; construeert men vervolgens uit elk middelpunt een triëder evenwijdig aan het overeenkomstige assentriëder van den kegel, dan ontstaat het oppervlak, dat de meetkundige plaats der hoofdassen vormt. Hieruit volgt:

De meetkundige plaats der hoofdassen van de kwadratische oppervlakken behorende tot een bundel is een regeloppervlak, waarvan een der richtkrommen een cubische ruimtekromme φ_3 is, en dat een cubischen richtkegel bezit; elk punt der cubische kromme is homolog met een stralentiëder van den kegel.

4. De graad van het oppervlak kan bepaald worden door na te gaan, door hoeveel hoofdassen een willekeurige rechte l gesneden wordt, of wel, 't geen op hetzelfde neerkomt, hoeveel vlakken er door l kunnen gelegd worden, die een hoofdas bevatten.

Zij A een punt van φ_3 , daarmede komen op de Jacobische kromme C_3 in het vlak in het oneindige V_∞ overeen drie punten A'_1, A'_2, A'_3 . Zij verder P een vlak door l gelegd, zoo snijdt dit φ_3 in drie punten A, B, C , waarmede weder in V_∞ de punten $A'_1, A'_2 \dots C'_3$ overeenkomen; alzoo komen met het vlak P door l negen vlakken $P'_1, P'_2 \dots P'_9$ overeen.

Neemt men omgekeerd een punt A' op C_3 aan, dan komt hiermede slechts één punt A op φ_3 overeen. Legt men nu een vlak P' door l , dan snijdt dit C_3 in drie punten A', B', C' , waarmede drie punten A, B, C overeenkomen; alzoo komen met een vlak P' drie vlakken P overeen. Hieruit volgt:

De beide coaxiale vlakkenbundels P en P' staan tot elkander in een correspondentie (3,9). Het aantal coïncidentie-elementen bedraagt dus 12.

Op grond van deze redeneering mag evenwel niet het besluit

worden getrokken, dat de graad van het regeloppervlak 12 zoude zijn; deze graad moet verminderd worden met het aantal der gemeenschappelijke punten van φ_3 en C_3 . De drie snijpunten van φ_3 met V_∞ liggen namelijk op C_3 , noemt men een dezer snijpunten S , dan valt S_1 met S samen en dat wel onafhankelijk van den stand der aangenomen rechte l . Van de 12 coïncidentievlakken gaan er dus 3 door de snijpunten van φ_3 en C_3 en voor den graad van het regeloppervlak blijft dus 9 over.

5. Een volledig onderzoek van dit oppervlak O_9 is zeer veelomvattend, we kunnen evenwel enkele eigenschappen nagaan en bijzonderheden opsporen. Uit den opzet van het vraagstuk volgt, dat uit elk punt van φ_3 drie beschrijvende rechten gaan, welke V_∞ in de drie overeenkomstige punten treffen, φ_3 is dus een drievoudige kromme van O_9 .

De doorsnede van V_∞ met O_9 bezit eenige bijzonderheden, die we zullen nagaan. Allereerst liggen op haar de drie middelpunten S_1, S_2, S_3 der paraboloiden van den bundel, die we voorloopig bestaanbaar zullen onderstellen. Uit elk dier punten gaan twee hoofdassen, die dus twaalf onderlinge snijpunten hebben. Buitendien snijdt elk dier assen C_3 nog in twee punten, die dus als dubbelpunten kunnen beschouwd worden; een dezer punten behoort echter tot een puntentripel, overeenkomende met een snijpunt van φ_3 met C_3 en kan als een raakpunt van het vlak van doorsnede V_∞ met O_9 worden opgevat. Vat men deze resultaten samen, dan komt men tot de volgende stelling:

De doorsnede van O_9 met V_∞ is een ontaarde kromme van den negenden graad, die in een kubische kromme en zes rechte lijnen is overgegaan. Op deze doorsnede liggen twaalf dubbelpunten, snijpunten der hoofdassen twee aan twee; verder liggen daarop nog zes dubbelpunten gedurig gevormd door een der snijpunten van een hoofdas met C_3 en zes raakpunten, zijnde deze laatste de overschietende snijpunten. Alzoo is V_∞ een zesvoudig raakvlak van O_9 .

Men komt dus tot het besluit, dat O_9 , behalve de drievoudige kromme φ_3 , nog een dubbelkromme bezit, waarvan voorloopig niet uitgemaakt is hoe zij is samengesteld, maar waarvan de totale graad 18 is.

Het aantal snijpunten dezer kromme met een der beschrijvende rechten van O_9 is te bepalen. Zij a een dezer rechten, die dus een punt A van φ_3 met een der overeenkomstige punten A_1 op C_3 verbindt. Een willekeurig vlak Q door a snijdt φ_3 nog in twee punten B en C waarmede op C_3 twee puntentripels B_1, B_2, B_3 en C_1, C_2, C_3 overeenkomen. Op dezelfde wijze snijdt een vlak Q'

door a de kromme C_3 nog in twee punten, waarmede op φ_3 twee punten overeenkomen, alzoo bestaat er tusschen de vlakkenbundels Q en Q' een correspondentie (6, 2) en het aantal coïncidentievlakken bedraagt 8. In het geheel wordt a dus door 8 hoofdassen gesneden.

Even als bij het algemeene geval, moet van dit aantal 3 afgetrokken worden, daar ook nu de drie snijpunten van φ_3 en C_3 in rekening moeten worden gebracht; a wordt dus door vijf hoofdassen gesneden. Elke beschrijvende rechte van O_9 heeft dus vijf punten met de dubbelkromme gemeen.

Uit het voorgaande blijkt, dat de algemeene doorsnede van het oppervlak 18 dubbelpunten en 3 tripelpunten bezit; bedenkt men, dat deze laatste aequivalent zijn met 9 dubbelpunten, zoo blijkt, dat de algemeene doorsnede niet unicursaal is, daar een kromme van den negenden graad 28 dubbelpunten kan hebben en de nu aanwezige met 27 dubbelpunten aequivalent zijn.

6. We zullen een enkel geval nagaan, waarin het oppervlak O_9 zich vereenvoudigt. Reeds werd opgemerkt, dat de assenkegel van den derden graad is zonder dubbelstraal; een dubbelstraal zou voorkomen, wanneer het kegelsnedennet in V_∞ een punt bezat, gemeenschappelijk aan alle kegelsneden. Daar evenwel tot dit net ook de isotrope cirkel behoort, zoo wordt dit geval uitgesloten; wel kan het daarentegen voorkomen, dat de assenkegel ontaardt in een kwadratischen kegel en een vlak, of wel in drie vlakken.

7. We kiezen een voorbeeld van het eerste geval. Wanneer de assenkegel ontaardt in een kwadratischen kegel en een vlak, zoo moet de JACOBI'sche kromme in V_∞ ontaarden in een rechte C_1 en een kegelsnede C_2 . Dit gebeurt:

- a. Als de kegelsneden van het net door twee vaste punten gaan.
- b. Als het net een dubbelrechte bezit.

We bepalen ons in deze mededeeling tot het eerste dezer gevallen; de basiskromme van den oppervlakkenbundel is alsdan circulair.

Het is in de eerste plaats noodig, nu de kegel in twee deelen ontaard is, de verdeeling der assen op kegel en vlak na te gaan. Is de basiskromme van den oppervlakkenbundel circulair, dan is er een stelsel evenwijdige vlakken, zoodanig dat elk vlak volgens een cirkelbundel gesneden wordt. Van elk oppervlak van den bundel loopt één hoofdas evenwijdig aan deze vlakken. Hieruit volgt:

Wanneer, ten gevolge van het aanwezig zijn eener circulaire basiskromme, de assenkegel ontaardt in een kwadratischen kegel en een plat vlak, dan liggen van de drie punten A'_1, A'_2, A'_3 , die met een punt A op φ_3 homolog zijn, een op de rechte C_1 in V_∞ en twee op de kegelsnede C_2 . Het regeloppervlak O_9 ontaardt alzoo in twee

andere regeloppervlakken, die elkander in hun gemeenschappelijke richtkromme \mathfrak{g}_3 doorsnijden. \mathfrak{g}_3 is bij het eene regeloppervlak dubbelkromme, bij het andere enkelvoudig. Hieruit laat zich reeds vermoeden, dat het eerste der beide regeloppervlakken van den zesden, het tweede van den derden graad zal zijn. Dit kan nog nader op de volgende wijze beredeneerd worden.

Zij l weder een rechte; een vlak P door l heeft drie punten A, B, C met \mathfrak{g}_3 gemeen, met welke zes punten $A'_1, A'_2 \dots C'_1, C'_2$ op C_2 overeenkomen; alzoo komen met P zes vlakken P' overeen; legt men omgekeerd door l een vlak P' , dan snijdt dit C_2 in twee punten, waarmede op \mathfrak{g}_3 twee punten overeenkomen, zoodat tusschen de vlakken P en P' een correspondentie (2, 6) bestaat. Nu heeft evenwel \mathfrak{g}_3 een punt gemeen met C_1 , daar C_1 het raakpunt van eene hyperbolische paraboloid van den bundel met V_∞ bevat, alzoo blijven er voor \mathfrak{g}_3 twee snijpunten met C_2 over, en de graad 8, die door de correspondentie (2, 6) zoude ontstaan, moet met 2 verminderd worden; er ontstaat dus een regeloppervlak O_6 van den zesden graad. Het tweede regeloppervlak O_3 is van den derden graad.

Bij het algemeene geval bestond de doorsnede van V_∞ met O_6 , behalve uit C_3 , uit drie paren rechte lijnen, die we a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 zullen noemen. Wanneer O_3 op de boven omschreven wijze ont-aardt, zullen deze rechten zich ook tusschen O_6 en O_3 verdeelen. Zij A' het punt waar \mathfrak{g}_3 de rechte C_1 snijdt, alzoo het raakpunt eener hyperbolische paraboloid van de bundel; door A' gaan dan de twee hoofklassen a_1a_2 en deze behooren tot O_6 , terwijl de niet in V_∞ liggende hoofdas door A' tot O_3 behoort. Tot O_3 behooren dus één hoofdas van elk der paren b_1b_2 en c_1c_2 , alzoo is V_∞ een dubbelraakvlak van O_3 en bestaat de doorsnede van O_6 met V_∞ uit de kegelsnede C_2 , het assenpaar a_1a_2 en de hoofklassen b_1 en c_1 . Van a_1 en a_2 is het snijpunt a_1a_2 dubbelpunt in de snijkromme van V_∞ met O_6 , een van elk der snijpunten van a_1 en a_2 met C_2 is raakpunt, alzoo ligt zoowel op a_1 als op a_2 nog een dubbelpunt. Van elk der snijpunten van b_1 en c_1 met C_2 is er één raakpunt, het andere is tevens snijpunt van \mathfrak{g}_3 en C_2 . Alzoo blijven nog als dubbelpunten de snijpunten van b_1, c_1, a_1, a_2 onderling; deze zijn, buiten het reeds getelde snijpunt a_1a_2 , dat tot \mathfrak{g}_3 behoort, vijf in getal. Alzoo bedraagt het geheel aantal der niet op \mathfrak{g}_3 gelegen dubbelpunten der doorsnede van O_6 met V_∞ 7. Hieruit volgt dat O_6 , behalve \mathfrak{g}_3 , nog een dubbelkromme van den zevenden graad bezit. Legt men een vlak door een beschrijvende rechte O_1 en onderzoekt men hoeveel rechten daarin gelegen zijn, dan vindt men, in overeenstemming met vroegere resultaten, het aantal 3.

De dubbelkromme van den zevenden graad wordt dus door de rechten van O_6 driemaal gesneden.

8. Het nader onderzoek van het oppervlak O_9 , benevens dat van O_6 en de andere mogelijke vormen, die bij bijzondere aannamen van den bundel oppervlakken ontstaan, geeft aanleiding tot zeer uitgebreide beschouwingen, die in deze mededeeling niet zullen worden opgenomen, daar zij zich voorloopig slechts ten doel stelde de algemeene eigenschappen van de besproken meetkundige plaats in het licht te stellen.

Wiskunde. De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan :
„Over de waarden van eenige bepaalde integralen die met Besselsche functiën samenhangen”.

De bedoelde integralen zijn de volgende :

$$P = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x \sin \theta) - \cos(x \sin \varphi)}{\cos \theta + \cos \varphi} d\theta$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(x \sin \theta) \sin \theta - \sin(x \sin \varphi) \sin \varphi}{\cos \theta + \cos \varphi} d\theta$$

$$R = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(x \cos \theta) - \cos(x \cos \varphi)}{\cos \theta + \cos \varphi} d\theta$$

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(x \cos \theta) \cos \theta - \sin(x \cos \varphi) \cos \varphi}{\cos \theta + \cos \varphi} d\theta$$

Wanneer men in deze integralen invoert de bekende vergelijkingen

$$\cos(x \sin \theta) = I_0 + 2 I_2 \cos 2 \theta + 2 I_4 \cos 4 \theta + \dots$$

$$\sin(x \sin \theta) \sin \theta = I_1 (1 - \cos 2 \theta) + I_3 (\cos 2 \theta - \cos 4 \theta) + \dots$$

$$\cos(x \cos \theta) = I_0 - 2 I_2 \cos 2 \theta + 2 I_4 \cos 4 \theta - \dots$$

$$\sin(x \cos \theta) \cos \theta = I_1 (1 + \cos 2 \theta) - I_3 (\cos 2 \theta + \cos 4 \theta) + \dots$$

waarin I_p staat voor de Besselsche functie $I_p(x)$ van orde p , en wanneer men schrijft

$$A_{2n} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2 n \theta - \cos 2 n \varphi}{\cos \theta + \cos \varphi} d\varphi$$

dan vindt men gemakkelijk

$$P = I_0 A_0 + 2 I_2 A_2 + 2 I_4 A_4 + \dots$$

$$Q = I_1 A_0 + (I_3 - I_1) A_2 + (I_5 - I_3) A_4 + \dots$$

$$R = -2 I_2 A_2 + 2 I_4 A_4 - 2 I_6 A_6 + \dots$$

$$S = I_1 A_2 - I_3 (A_2 + A_4) + I_5 (A_4 + A_6) - \dots$$

Ten einde nu A_{2n} te bepalen, merk ik op dat

$$(a) \quad \sin \varphi \frac{\cos 2n\theta - \cos 2n\varphi}{\cos \theta + \cos \varphi} = -\sin 2n\varphi + 2 \sin (2n-1) \varphi \cos \theta - \\ - 2 \sin (2n-2) \varphi \cos 2\theta + \dots \\ + 2 \sin \varphi \cos (2n-1) \theta$$

Deze formule laat zich zoo bewijzen.

Vermenigvuldigt men het 2^{de} lid dezer vergelijking met $\cos \theta + \cos \varphi$ dan vindt men

$$2 \text{elid} \times \cos \theta = \sin(2n-1)\varphi + \sum_{p=1}^{2n-1} (-1)^p [\sin(2n-p+1)\varphi + \sin(2n-p-1)\varphi] \cos p\theta + \\ + \sin \varphi \cos 2n\theta$$

$$2 \text{elid} \times \cos \varphi = -\sin 2n\varphi \cos \varphi + \sum_{p=1}^{2n-1} (-1)^{p-1} [\sin(2n-p+1)\varphi + \sin(2n-p-1)\varphi] \cos p\theta$$

zoodat de som wordt

$$\sin (2n-1) \varphi - \sin 2n \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos 2n \theta = \sin \varphi (\cos 2n \theta - \cos 2n \varphi).$$

Uit de formule (a) volgt nu terstond

$$A_{2n} = -2\pi \frac{\sin 2n \varphi}{\sin \varphi}.$$

Substitueert men deze waarde in de gevonden uitdrukkingen, dan komt

$$P = -\frac{4\pi}{\sin \varphi} [I_2 \sin 2\varphi + I_4 \sin 4\varphi + I_6 \sin 6\varphi + \dots]$$

$$Q = -\frac{2\pi}{\sin \varphi} [(I_3 - I_1) \sin 2\varphi + (I_5 - I_3) \sin 4\varphi + \dots]$$

$$= 4\pi [I_1 \cos \varphi + I_3 \cos 3\varphi + I_5 \cos 5\varphi \dots]$$

$$R = \frac{4\pi}{\sin \varphi} [I_2 \sin 2\varphi - I_4 \sin 4\varphi + I_6 \sin 6\varphi - \dots]$$

$$S = -\frac{2\pi}{\sin \varphi} [I_1 \sin 2\varphi - I_3 (\sin 2\varphi + \sin 4\varphi) + I_5 (\sin 4\varphi + \sin 6\varphi) \dots]$$

$$= -\frac{4\pi \cos \varphi}{\sin \varphi} [I_1 \sin \varphi - I_3 \sin 3\varphi + I_5 \sin 5\varphi - \dots]$$

Uit de formule (a) kunnen we bovendien nog dit afleiden.

Wanneer men ontwikkelt

$$\frac{\cos 2n\theta - \cos 2n\varphi}{\cos \theta + \cos \varphi} = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots$$

dan weet men dat

$$a_p = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos 2n\theta - \cos 2n\varphi}{\cos \theta + \cos \varphi} \cos p\theta d\theta$$

Vergelijkt men dit met de vergelijking (a) dan blijkt dat

$$a_p = (-1)^{p-1} 2 \frac{\sin (2n - p) \varphi}{\sin \varphi}$$

voor $p = 0, 1, 2, \dots (2n - 1)$ terwijl voor grooter waarden van p geldt $a_p = 0$.

Physiologie. — De Heer PEKELHARING biedt, namens Dr. M. C. DEKHUYZEN te Utrecht, een mededeeling aan: „*Over den osmotischen druk in bloed en urine van vissen.*”

(Mede aangeboden door den Heer M. WEBER).

De trekvissen (paling, zalm, elft) begeven zich in betrekkelijk korten tijd zonder schade te ondervinden uit het zéewater, waarin een osmotische druk heerscht van omstreeks 24 atm., in het zoete water, waarin die druk $\frac{1}{4}$ atm. en minder bedraagt. En diezelfde overgang geschiedt ook in omgekeerde richting. Het is volkomen raadselachtig hoe een dergelijke emancipatie van de wetten van den osmotischen druk mogelijk is. Men weet in grove trekken dat de beenvissen, zoowel in het zoete als in het zoute water, een osmotische drukking in hun bloed weten te onderhouden, welke betrekkelijk onafhankelijk is van die van het omgevende medium. Maar men weet niet binnen welke grenzen het organisme het zoutgehalte (want daarop komt het voornamelijk aan) van zijn lichaamsvochten beheerscht en evenmin door welke middelen het dit op peil weet te houden. Zooveel is zeker, dat de beenvissen in het algemeen *stenohalien* zijn, d.w.z. elke soort is gebonden aan een osmotischen druk in het water, waarin zij leeft, die niet te veel en vooral niet te snel mag variëeren. Een gedrag als dat van de trekvissen is een uitzondering. De Oostzee, die ongeveer alle schakeeringen tusschen zoet en zoutwater vertoont en waarvan de fauna veelvuldig bestudeerd is, levert het bewijs van hetgeen hier gezegd is. Ik heb van iedere soort van visch, die in de Oostzee voorkomt, de verbreiding uit de literatuur nagegaan, en de lijsten, welke het bestek mij niet veroorlooft hier openbaar te maken, toonen aan dat de meeste zoetwatervissen een eindweegs in het brakke gaan, de meeste zeevissen een zekere vermindering van het zoutgehalte verdragen, maar dat bepaalde grenzen niet overschreden worden.

Wil men in het mechanisme van deze physiologische verschijnselen doordringen, dan is het vóór alles noodig, den osmotischen druk in het bloed van de verschillende vischsoorten te leeren kennen. Er zijn enkele bepalingen verricht door BOTTAZZI en RODIER. Voor ongeveer vijf jaren ben ik, onder zeer ongunstige omstandigheden, begonnen aan die metingen deel te nemen en wel aan zeevisschen, die uit Katwijk naar Leiden waren vervoerd. Deze dieren waren veelal nog levend, in ieder geval nog volkomen versch. De uitkomsten zijn niet openbaar gemaakt, totdat mij in den zomer van 1904 bleek, dat zij geheel in het kader vielen van resultaten, onder gunstiger omstandigheden verkregen en er somtijds volkomen mede overeenstemden.

De uitnemende gelegenheid om levende zeevisschen in groote verscheidenheid te verkrijgen, die de vischmarkt te Bergen (Noorwegen) aanbiedt, gaf mij dezen zomer aanleiding het onderzoek weder op te vatten en uit te breiden. Daarna werden bepalingen verricht aan zoetwatervisschen uit de omstreken van Utrecht en eindelijk werd ik door Dr. KERBERT, directeur van dierentuin en aquarium te Amsterdam, in de gelegenheid gesteld zee- en zoetwatervisschen, waaronder moeilijk te verkrijgene, te bestudeeren. Het zij mij vergund hier ter plaatse Dr. KERBERT mijn hartelijken dank te brengen.

Te Bergen worden de dieren levend te koop aangeboden in een groot aantal open houten bakken, door welke een krachtige stroom zeewater wordt gevoerd, dat, naar men mij verzekerde, ver van de stad uit de fjord wordt opgepompt. De visschen zijn echter *niet* geheel normaal: de vangst, het gebrek aan voedsel, het vervoer, de manipulaties van verkoopers en koopers *schaden* den dieren. Voor zij in de marktbasins komen, zwemmen ze namelijk in karen dicht opeengehoopt in het somtijds door de regens vrij wat verdunde water van de oppervlakte der haven. Er bestaan gronden om aan te nemen, dat die invloeden zich afspiegelen in den osmotischen druk van het bloed. Een onderzoeker, die langen tijd te Bergen vertoeft, zorgvuldig zijn materiaal kiest, het eenigen tijd in aquariën verpleegt, bij ieder exemplaar aanteekening houdt van alles wat invloed zou kunnen uitoefenen, zou zonder twijfel constantere uitkomsten verkrijgen, dan hier openbaar kunnen gemaakt worden. Nog wenschelijker ware, met de visschers mede te gaan en bloed en urine te verzamelen, onmiddellijk na de vangst. De hier medegedeelde cijfers mogen als een der eerste proeven op dit nagenoeg braakliggende gebied beoordeeld worden. Eerst door en tijdens mijn onderzoek ben ik opmerkzaam geworden op de noodzakelijkheid van ten zeerste rekening te houden met den gezondheidstoestand der dieren.

De aangekochte exemplaren werden in emmers met zeewater, of ook zonder dat, naar het biologisch station gebracht: 20 minuten gaans, aldaar opnieuw in aquaria geplaatst, waarin een zeewater van omstreeks 32‰ zoutgehalte, d.i. van een vriespunt van -1.731° tot -1.742° circuleerde. De visschen, die teekenen van zwakte vertoonden, werden het eerst onderzocht, de andere bleven enkele uren, of zelfs twee en drie dagen zonder bepaalde voeding in een ruim aquarium. Menig exemplaar bleek nog een gevulde maag te hebben en weinig parasieten te herbergen, andere waren in minder goeden toestand, maar er werd niet van elke bijzonderheid aantekening gehouden. De hoeveelheid bloed, die elke visch levert, is betrekkelijk gering en loopt uiteen zoowel naar de soort als naar het individu. In den regel heeft men voor een vriespuntsbepaling het bloed van verscheidene exemplaren noodig, daar er tien tot veertien cm^3 in de bevriesbuis moeten gebracht worden. De visschen werden in leidingwater afgespoeld, goed gedroogd en de staart met een beenschaar afgeknipt. Ook bleek het wel eens noodig, het hart aan te snijden: dan werden de kieuwen nog eens extra met een drogen handdoek van zeewater gereinigd.

Ware het niet beter, met het serum te werken? Dat komt mij niet bepaald noodzakelijk voor, omdat men aan een zelfde proefje bloed bij herhaalde meting hetzelfde vriespunt pleegt te vinden en er zich later een gewoonlijk niet rood-gekleurd serum afscheidt: zelfs bij *Raja clavata* en *Trygon pastinaca*, die dan toch tot op $-2^{\circ}.7$ onderkoeld zijn. HEDIN en HAMBURGER ¹⁾ hebben eveneens gevonden dat het niet noodig is, het serum af te scheiden.

Ten einde de hoeveelheid bloed, noodig voor een bepaling, te verminderen, hetgeen vooral bij kleinere, zeldzame soorten zeer gewenscht is, heb ik nagegaan of het geoorloofd ware, enkele weeke organen bij het bloed te voegen: milt of lever. Bij het bloed van drie exemplaren van een Surinaamschen zoetwatervisch: *Erythrinus unitaeniatus*, Spix, werd twee malen bij niet geheel ondergedompelden thermometerbol hetzelfde vriespunt: $-0^{\circ}.577$ gevonden; daarna werden de levers van twee exemplaren er bij gevoegd en $-0^{\circ}.600$ gevonden. In die richting moet dus de verbetering niet gezocht worden ²⁾. Bij het konijn werden nog belangrijker verschillen verkregen, ver-

¹⁾ HAMBURGER, Osmotischer Druck und Ionenlehre in den medicinischen Wissenschaften. Wiesbaden 1902. I. p. 453.

²⁾ Door vermindering van de afmetingen van het bevriesbuisje en gebruik van een kleineren BECKMANN-thermometer van oud model is de benodigde hoeveelheid tot 5 à 6 cm. terug te brengen. Aan zoutoplossingen zal gecontroleerd worden in hoeverre de uitkomsten correctie behoeven.

moedelijk tengevolge van den overgang van glycogeen in glycese.

De bepalingen zijn verricht met een in vele opzichten gewijzigd toestel van BECKMANN, waarvan de beschrijving eerlang zal volgen. Het moge voldoende zijn, hier mede te deelen dat, wanneer bij de bepaling zoowel van het nulpunt als van het vriespunt een onderkoeling van $0^{\circ}.5$ wordt aangewend, de cijfers bij zuivere zoutoplossingen zéér nauwkeurig zijn. Voor 1 % Na Cl (1 gr. Na Cl in 100 gr. water opgelost, de gewichten op het vacuum herleid) geeft het apparaat — $0^{\circ}.589$: de uitkomst der „Präzisionskryoskopie” (Hamburger l. c. pag. 96). Steeds werd de correctie van BECKMANN voor de concentratieverhooging bij onderkoeling aangebracht, voor $0^{\circ}.5$ bedragende $\frac{1}{160}$ of $\frac{1}{80}$ (zijnde 80 caloriën de latente smeltings-

warmte van ijs). De temperatuur van het koelbad was — $2^{\circ}.5$, wanneer noodig, werd zij door sterk roeren op — $2^{\circ}.9$ gebracht.

Wij zullen eerst de uitkomsten bij *zoetwaterdieren* bespreken. Δ zij het vriespunt in graden Celsius, met weglating van het — teeken.

Zoetwaterbeenvisschen.

	Δ	
Baars, <i>Perca fluviatilis</i> L.	0.507 0.509	} 2 en 5 exemplaren uit Utrecht.

OPMERKING. De baars komt in de geheele Oostzee tot aan de Sont voor d.i. in water tot 12⁰/₁₀₀ zoutgehalte of van een $\Delta = 0.64$.

	0.527	1 ex. uit Bergen.
Karper, <i>Cyprinus carpio</i> L.	0.540	} 1 „ „ het Aquarium te A/dam, leeftde in water van $\Delta = 0.039$.

OPMERKING. De karper dringt zelden in de Oostzee, vaker in die van Azow en in de Kaspische zee.

	0.466	} 1 resp. 3 ex. uit Utrecht, gezond in Oct. gevangen en eenigen tijd in de karen gehouden.
Zeelt, <i>Tinca vulgaris</i> Cuv.	0.514	

OPMERKING. De zeelt gaat uit de Haffen en bochten tot bij Gotland, waar $\Delta = 0.42$ ongeveer.

	0.519	} Resp. 4, 5 en 3 versch gevangen ex. uit Utrecht, Sept. en Oct., sommige half dood onderzocht.
Snoek, <i>Esox lucius</i> L.	0.526	
	0.530	

OPMERKING. De snoek gaat in 't Z.O. deel der Oostzee vrij ver uit de kust en wordt zelfs nu en dan bij Bohuslän gevangen, waar Δ minstens 0.69 is. Gaat zelfs een eindweegs in de Noordelijke IJszee 1).

Rietvoorn, <i>Leuciscus erythrophthalmus</i> L.	0.495	} 18 fraaie ex. uit het Aquarium Amsterdam, Nov. Komt in alle brakke bochten v.d. Oostzee voor.
Blik, <i>Abramis blicca</i> , Bloch.	0.497	

OPMERKING. In de Oostzee komt de blik in de brakke bochten voor.

1) PALACKY, Die Verbreitung d. Fische. Prag. 2e Aufl. 1895. p. 54.

Forel, *Salmo fario* L.

0.567 1 fraai ex. Aq. A/dam. Nov.

OPMERKING. De forel is een zoetwatervis, die zeer zelden in de brakke haffen voorkomt, maar behoort tot de Salmonidae, een familie van trekvischen, vischen der zee kust en van 't zoete water. NÜSSLIN beschouwt hen als oorspronkelijke zeevischen.

Waranga, *Erythrinus unitaeniatus* Spix 0.577 3 fraaie ex. Aq. A/dam. Nov.

OPMERKING. Surinaamsche zoetwatervis, die in water van 20° C. leven. Door verdamping bij het opvangen van het bloed is het cijfer vermoedelijk iets te hoog. Ook was de hoeveelheid bloed (8 ccm.) wel wat gering. Zij behooren tot de Characinidae, aloude, echte zoetwaterbewoners (Ostariophysi).

Gemiddelde van 13 waarnemingen aan zoetwater-beenvis, 0°.521. Sluit men de forel en de waranga uit, (de eerste als Salmonide, de ander, omdat de waarneming minder betrouwbaar is dan de overige, en omdat we met een visch te doen hebben, wiens lichaams-temperatuur hooger is dan die van de andere), dan krijgt men een gemiddelde waarde van 0°.512, om welke de 11 waarnemingen vrij regelmatig zijn gegroepeerd.

Ik kan hieraan nog 6 metingen bij andere koudbloedige zoetwatervertebraten toevoegen:

Prik, <i>Petromyzon fluviatilis</i> L.	0.473	} Waarnemingen te Leiden, aan zes resp. vijf exemplaren van vrij goede conditie, in 1899 gedaan.
	0.500	
Kikvorsch, <i>Rana esculenta</i> L.	0.464	} dito. 8 fraaie ex. in het najaar gev.
	0.465	
Salamandra maculosa. Laur.	0.479	} 37 ex., Sept. 1904, dieren uit Berlijn aangevoerd, een dag in een terrarium met een kom water gehouden.
Zoetw.schildpad, <i>Emys europaea</i> . Gray.	0.474	} Waarneming van BOTTAZZI 1897, geciteerd naar R. QUINTON ¹⁾ .

Gemiddelde van deze: 0°.476 en van bovengenoemde 11 met deze 6: 0°.499.

Het vriespunt van zoetwater is omstreeks 0°.02. BOTTAZZI's *Emys* leefde in water van dat vriespunt. In de bassins van het Aquarium te Amsterdam circuleert een ietwat brak water (oorspronkelijk Vechtwater) van $\Delta = 0.039$. Het zoutgehalte van het meer van Genève wordt in CARL VOGT's *Lehrbuch der Geologie* I. p. 53 op 0.1574‰⁰ aangegeven, wat op een vriespunt van slechts ongeveer 0°.01 zou wijzen. Volgens de door DUBOIS verzamelde cijfers (deze *Verslagen* 1900 p. 12 en 90) is Δ in het Wener- en Wettermeer nog kleiner.

De osmotische druk bij 0° in atmosferen, dien we voortaan met P_0 zullen weergeven, wordt verkregen door vermenigvuldiging van

¹⁾ R. QUINTON. L'eau de la Mer, milieu organique. Paris 1904, p. 441.

Δ met den factor 12.08 ¹⁾ volgens STENIUS, of 12.03 volgens JORISSEN ²⁾, is dus in zoetwater van de orde van $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{8}$ atmosfeer. In zulk een medium weten de koudbloedige gewervelde dieren, grootendeels door kieuwen ademende, *een osmotischen druk van zes atmosferen in hun bloed te onderhouden*. Bij vogels en zoogdieren (zie de tabel bij HAMBURGER l. c. I. p. 456) heeft men eveneens een vrij constant vriespunt van het bloed gevonden. Ik heb voorgesteld het vermogen om P_0 op een bepaald peil te houden, zij het dan ook binnen zekere grenzen, „*ideotonie*” te noemen ³⁾: een eigenschap, die met de homiothermie te vergelijken is. Dat ook de zoetwater-beenvisschen die ideotonie bezitten, valt uit de medegedeelde uitkomsten wel niet te betwijfelen. De grenzen, waartusschen zich de cijfers bij eenzelfde soort bewegen, zijn eng, alleen bij de zeelt zijn de verschillen vrij belangrijk. De ideotonie valt het meest in het oog, wanneer men bedenkt welk een overeenstemming de koudbloedige zoetwatervertebraten onderling vertoonen en hoe groot het verschil is met P_0 in het omgevende medium. Men komt op het vermoeden, dat voor deze toch inderdaad niet zeer nauw verwante dieren: Cyclostomen, Teleostiers, Amphibiën en een Reptiel de P_0 van ongeveer 6 atmosferen een *optimum* is. Voor warmbloedige dieren schijnt het streven te bestaan P_0 op $6\frac{3}{4}$ à $7\frac{1}{4}$ atm. te houden: Δ 's van 0.570 bij den mensch en van 0.6 à 0.625 bij zoogdieren en vogels worden namelijk zeer constant gehandhaafd.

De nieren zijn de regulatoren. Immers wisselt (HAMBURGER l. c. II p. 317) de Δ van de urine bij den mensch tusschen 0.12 en 3, wanneer men de afzonderlijke geloosde porties onderzoekt, terwijl Δ voor de geheele hoeveelheid van een etmaal doorengemengd bij gewone voeding tusschen ongeveer 1.3 en 2.4 variëert. Bij den mensch vond SCHOUTE ⁴⁾ dat Δ van het bloed, mits de spijsvertering geëlimineerd werd, door het des morgens vóór het ontbijt op te vangen, slechts tusschen 0.56 en 0.58 wisselt.

Wij kunnen ons slechts in beperkte mate een voorstelling vormen, *waarom* het zoutgehalte (want daarop komt het voornamelijk aan) van bloed en lymfhe slechts binnen enge grenzen mag variëren.

¹⁾ STENIUS. Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar 46. No 6. 1903—4.

²⁾ W. P. JORISSEN. Fysisch-chemisch onderzoek van zeewater. Chem. Weekbl. 1e jaarg. No 49, p. 731. Sept. 1904.

³⁾ M. C. DEKHUYZEN. Ergebnisse von osmotischen Studien, namentlich bei Knochenfischen, an der Biol. Stat. d. Berg. Museums. Bergens Museums Aarbog. 1904. No 8.

⁴⁾ D. SCHOUTE. Het fysisch-chemisch onderzoek van menselijk bloed in de kliniek. Diss. Groningen. 1903.

De globulinen hebben een zekere concentratie van „middenzouten” noodig om opgelost te blijven. Verdunt men paardenserum met $1\frac{1}{2}$ vol. gedestilleerd water, dan treedt reeds een *neerslag* op, d. i. bij een zoutgehalte, dat met $\Delta = 0.24$ overeenstemt. Waarom een verhoogd zoutgehalte schadelijk is, is minder duidelijk. Gevaar voor precipitatie van eiwitten zou eerst bij veel hogere concentraties optreden, althans bij paardenserum. Toch wijst het feit, door RODIER¹⁾ gevonden, dat het bloed en de lichaamsvochten (pericardiaal en peritoneaal) van haaien en roggen ongeveer isotonisch met zeewater zijn, maar *minder zouten* bevatten, welke deficit gecompenseerd wordt door retentie van 2 à 2.7% ureum, op een sterke behoefte van het organisme der Vertebraten om het zoutgehalte beneden een zekere waarde te houden. GRIJNS²⁾ heeft gevonden, dat bloedcellen voor ureum permeabel zijn, zoodat deze stof tegenover het zeewater helpt den osmotischen druk te dragen, maar de cellen ontlast van een derde van 23 of 24 atmosferen. Ik heb l. c. voorgesteld dit vermogen om tegenover het zeewater isotonisch te zijn, maar van de eigen cellen een deel van den osmotischen druk af te wentelen, „*metisotonie*” te noemen.

De Teleostiërs hebben in hun bloed een vriespunt, hetwelk belangrijk verschilt van dat van het zeewater, waarin zij leven. Zij bezitten ideotonie, maar de individueele verschillen zijn grooter dan bij de overige gewervelde dieren zijn opgemerkt, zoodat het schijnt dat zij de kunst, om hun P_0 onafhankelijk te maken van het omgevend medium, slechts onvolkomen verstaan. Voor dat de cijfers worden opgegeven, moge een overzicht van Δ en P_0 van verschillende zee-wateren ingelascht worden. De getallen zijn ontleend aan M. KNUDSEN's Hydrographische Tabellen, aan PETERSSON's Review of Swedisch hydrographical research in the Baltic and the North seas en aan MOEBIUS und HEINCKE, Die Fische der Ostsee³⁾.

1) RODIER. Sur la pression osmotique du sang et des liquides internes des poissons sélaciens. Comptes rendus. Dec. 1900. p. 1008.

2) G. GRIJNS. Ueb. d. Einfluss gelöster Stoffe auf die rothen Blutzellen. Pflüger's Archiv. 63. 1896. p. 86.

3) M. KNUDSEN. Hydrogr. Tab. Kopenhagen 1901, PETERSSON in Scottish geographical Magazine 1894. X.; MOEBIUS u. HEINCKE. Fische d. Ostsee. Berlin 1883.

Zoutgehalte ‰ (Grammen zeezouten in 1000 Gr. zeewater)	Absoluut Soort. Gew. bij 0° (vergeleken met aq. dest. van 4°).	Δ	P_0 in atmos- feren.	
6	1.00478	0.318	3.8	Bothnische Golf in den zomer.
7	1.00559	0.371	4.45	} Oppervl. water (tot 60 M.) v/d. eigenlijke Oostzee tusschen Rügen en Gotland in den zomer. Bij 7.5‰ zoutgehalte nemen M. en H. de grens aan tusschen brak en zout water.
8	1.00640	0.424	5.09	
9	1.00721	0.478	5.74	
10	1.00802	0.531	6.37	} Water van het ondiepe deel der Oostzee ten zuiden van de Deensche eilanden in den zomer.
12	1.00963	0.639	7.67	
20	1.01607	1.074	12.89	Hetzelfde in den winter (MOEBIUS en HEINCKE).
32	1.02571	1.739	20.9	Zeewater in de fjord voor Bergen, 8 M. onder de opp., des zomers.
35	1.02813	1.908	22.9	Noordelijke Atlantische Oceaan.
38	1.03055	2.078	24.9	Δ zeewater golf van Napels in Nov. 1903: 2.105. Δ zeewater zooals het in de bassins van het Amsterdamsch Aquarium circuleert: 2.085.

Zeebewonende Beenvischen.

	Δ		
<i>Gadus morhua</i> L. Kabeljauw,	0.644	2	oogenschijnlijk normale ex. Aq. A'dam, Nov. 1904.
" "	"	0.673	1 ex., des Maandags te Bergen gekocht, overschot en uitschot der aan het eind van de vorige week aangevoerde visch.
" "	"	0.708	8 ex. uit Katw. onmiddell. naar Leiden verv.
" "	"	0.721	8 " " " " " " " "
" "	"	0.724	" " " " " " " "
" "	"	0.729	13 " " " " " " " " (4 April 1900, een ruime hoeveelh. bloed was aan 13 fraaie ex. ontleend.
" "	"	0.729	Bergen 1904, zomer 3 groote ex.
" "	"	0.742	Leiden, als boven.
" "	"	0.744	Bergen, " " 2 ex.
" "	"	0.753	" " " " 3 "
" "	"	0.808	Leiden " " 6 "
" "	"	0.811	" " " " 8 "

OPMERKING. De kabeljauw dringt zéér ver in de Oostzee door. Hiermede is niet bedoeld, uit te spreken, dat de individuen, welke men in de Bothnische Golf vangt en die niet grooter dan 45—50 cM. zijn, uit den Atlantischen Oceaan naar binnen zijn gezwommen. Zij kunnen zeer goed tot locale rassen behooren, die in het brakke water voorttellen en niet grooter worden. Bij Stockholm wordt de kabeljauw slechts 60 cM. lang, in de Sont komen hoogstens exemplaren van 80 à 90 cM., aan de kust van Bohuslän van 90 cM., maar bij de Lofoten zelfs van 140 à 150 cM. voor. Ook de gewone mossel is in de brakke wateren van de oostelijke deelen der Oostzee veel kleiner dan in de zoutrijke zee.

In de Bothnische Golf is des zomers het zoutgehalte benoorden de Quarken 3—4⁰/₀₀, Δ 0.159 à 0.212, \bar{P} 1.9 à 2.54 atm., benoorden Stockholm resp. 5⁰/₀₀, 0^o.265, 3.18 atm., bij Stockholm 6⁰/₀₀, 0^o.318, 4 atm., aan de Noordkust van Gotland 7⁰/₀₀, 0^o.37, 4.45 atm. en tot Rügen—Schonen 7 à 8⁰/₀₀, 0^o.424, 5 atm. Bij Bohuslän is des zomers de saliniteit aan de oppervlakte 13⁰/₀₀, Δ = 0^o.69, maar in de diepte komt Noordzeewater van 32 à 33⁰/₀₀ en 1^o.8 voor.

△

Gadus aeglefinus L. Schelvisch. 0.767 Leiden, zomer, ex.waren dood, maar versch.

OPMERKING. De schelvisch dringt slechts tot aan de Mecklenburgsche kust door.

△

Gadus virens L. Koolvisch, 0.760 Bergen.

"	"	0.761	"	3 ex.
"	"	0.837	"	3 "
"	"	0.838	"	

OPMERKING. De koolvisch dringt niet verder dan tot de Kielsche bocht door en is daar zeldzaam. Op de vischmarkt te Bergen wordt zij steeds in groote hoeveelheden aangevoerd, maar verkeert veeltijds in slechte conditie: vertoont wonden, heeft gebloed, vele exemplaren liggen op den rug aan de oppervlakte en ademen weinig. Bij den aankoop werden goede exemplaren uitgezocht, maar het komt mij hoogst waarschijnlijk voor, dat de dieren, wier bloed — 0^o.837 en — 0^o.838 tot vriespunt had, abnormaal waren.

△

Gadus merlangus, L., Wijting. 0.760 Bergen. 14 ex.

OPMERKING. De Wijting gaat met veel moeite in de Oostzee: tot Bornholm ongeveer. Slechts eenmaal is zij bij Gotland gevangen.

△

Molva vulgaris, Flemm. Leng, 0.716 Bergen. 3 fraaie ex.

OPMERKING. De Leng dringt even weinig in de Oostzee als de koolvisch.

△

Molva byrkelange (Walb.), 0.730 Bergen, 4 fraaie ex. waren dood, maar versch.

OPMERKING. Diepzeevisch, niet levend te krijgen. Waren op 400 M. diepte gevangen. Komt niet verder dan het Kattegat.

△

Motella tricirrata (Bloch), 0.605 Bergen.

OPMERKING. *Motella tricirr.* is slechts eenmaal bij Göteborg gevangen.

Hippoglossus vulgaris, Flemm., Heilbot, 0,671 ^Δ Bergen. Het ex. leed aan huid-
ziekte, had lang in het Aq. geleefd
en dreigde te zullen sterven.

OPMERKING. De heilbot verdwaalt niet verder dan tot Mecklenburg in de Oostzee.

Pleuronectes platessa L., Schol 0.672 ^Δ Bergen.
" " 0 675 Leiden.

OPMERKING. De schol gaat tot Stockholm. De Pleuronectiden vertoonen overal
de neiging om in het brakke of zelfs in het zoete water te dringen: de bot is in
de Moezel bij Metz gevonden, WICHMANN vond botsoorten in bergmeertjes van
Nieuw-Guinea.

Pleuronectes microcephalus Donovan, Tongschar, 0.681 ^Δ Bergen.

OPMERKING. De tongschar komt hoogstzelden tot bij Eckernförde.

Labrus bergylta Ascan., Lipvisch, 0.694 ^Δ Bergen. 3 ex.
" " 0.704 " 6 " waarvan 1 zeer ziek, lever
en darm vol nematoden.
" " 0.708 "

OPMERKING. Lipvisch wordt slechts zelden in het westelijk deel der Oostzee
aangetroffen, alwaar het vriespunt des zomers ongeveer $-0^{\circ}.6$, des winters -1° is.

Labrus mixtus L. Blauwe Lipvisch, 0.681 ^Δ Bergen. 4 ex. }
" " 0.714 " 5 " } alle ♀

OPMERKING. De *L. mixtus* (♂ rood, ♀ blauw) komt zelden tot bij de Sont.

Conger vulgaris Cuv. Zeepaling. 0.696 ^Δ 3 ex. Aquar. Amsterdam.
" " 0.786 1 " Bergen.

OPMERKING. Slechts zelden in de Oostzee, herhaalde malen in den benedenloop
van de Wezer gevangen.

Salmo trutta L. Zalmforel, „Schotje”, 0.785 ^Δ 6 ex., Bergen, met den hengel in
de fjord gevangen, in slechte conditie
en gedeeltelijk dood.

OPMERKING. De zalmforel is een anadrome trekvisch.

Labrax lupus Cuv. Zeebaars, 0.720 ^Δ 1 ex.. Aquar. Amsterdam.

OPMERKING. In het westelijk deel der Oostzee zeldzaam.

Trigla hirundo Bloch. Groote Poon, Knorhaan, 0.669 ^Δ 2 ex. Aquar. Amsterdam.

OPMERKING. In het westelijk deel der Oostzee niet vaak voorkomend.

		Δ		
<i>Anarrichas lupus</i> L.,	Zeewolf,	0.665	2 ex.	Bergen. De visschers plegen bij deze
"	"	0.681	1 ex.	" niet ongevaarlijke dieren de
"	"	0.769	3 ex.	" tanden uit te slaan; in ieder
				geval komen de zeewolven
				levend, maar niet normaal
				markt. Zij reageeren
				traag en sterven wanneer
				men er te veel mede man-
				ipuleert.

OPMERKING. De zeewolf dringt hoogstens tot aan de Pommersche kust door.

Het gemiddelde van deze 38 waarnemingen is $\Delta = 0.7245$ of $P_0 = 8.7$ atmosferen. De cijfers liggen vrij regelmatig er om heen gegroepeerd: 13 tusschen 0.600 en 0.700, 13 tusschen 0.700 en 0.750, 12 tusschen 0.750 en 0.850. Het gemiddelde ligt vrij wel op gelijken afstand van de beide uiterste waarden. Door weglating van de extreme cijfers: 0.605 voor Motella, 0.808, 0.811, 0.837 en 0.838 voor kabeljauw en koolvisch, welke laatste vier vrij zeker op pathologische afwijkingen berusten, wordt het gemiddelde maar weinig verschoven: naar $0^{\circ}.716$.

De verschillen tusschen de uiterste waarden en het gemiddelde zijn betrekkelijk groot: 0.120 en 0.113, ongeveer $\frac{1}{6}$ van de waarschijnlijke normale waarde. Werpt men de 5 extreme cijfers uit, dan zijn de afwijkingen van het nieuwe gemiddelde 0.716 slechts 0.072 en 0.070. Iets dergelijks hebben wij trouwens bij de zoetwatervissen gevonden, eerst na afwijzing van de waarden voor waranga en forel, kregen wij een gemiddelde 0.499, dat slechts 0.041 en 0.035 van de uiterste verwijderd lag.

Bedenkt men dat die zeevissen leven in een medium, waarin de osmotische druk 21 à 23 atmosferen en zelfs iets meer bedraagt, dan zal men wel geen bezwaar kunnen maken aan deze dieren *ideotonie* toe te kennen. Maar de belangrijke schommelingen in P_0 , die wij b.v. bij den kabeljauw opmerken, geven den indruk, dat het vermogen, om P_0 op een bepaald peil te houden, beperkt is. En men wordt onwillekeurig herinnerd aan de schommelingen der lichaamstemperatuur, die homoiotherme organismen vertoonen, bij velerlei storingen van het algemeen welzijn.

Er bestaan in de literatuur nog enkele opgaven omtrent het vriespunt van het bloed bij zeebewonende beenvissen. BOTTAZZI ¹⁾ vond bij *Charax puntazzo* Gm. — $1^{\circ}.04$ en — $1^{\circ}.035$, bij *Serranus gigas* L.

¹⁾ F. BOTTAZZI. La pression osmotique du sang des animaux marins. Arch. ital. de biologie 28, p. 67, 1897.

— 1°.035 en — 1°.034, maar die cijfers verdienen niet al te veel vertrouwen, daar hij een koelbad van — 12° placht te gebruiken ¹⁾. Ook kon hij de, later gepubliceerde, correctie van BECKMANN niet aanbrengen. Bij *Chelone imbricata* L. (*zeeschildpad*) vond hij — 0°.61 en 0°.62.

RODIER ²⁾ vond bij een Ganoïde (*steur?*) voor Δ 0°.76, bij *Lophius piscatorius* L. 0°.68 en 0°.80, bij *Orthogoriscus mola* L. 0°.80, bij de zeeschildpad *Thalassochelys corticata* Rondelet 0°.602 en bij een zeebewonend zoogdier, den bruinvisch, *Phocaena communis* Less. 0°.74.

De cijfers, voor het bloed van de paling, *Anguilla vulgaris* Flemm., verkregen, zijn zeer opmerkelijk. Bij krachtige exemplaren vond ik indertijd te Leiden — 0°.773, te Bergen — 0°.653, te Utrecht — 0°.587. Nu behoort de paling tot een familie van tropische zeevissen; de meeste soorten komen in den Nederl. Ind. Archipel voor, ze gaan vaak in brakwater, andere zijn diepzeedieren. Onze gewone paling verdraagt snelle wisselingen van het zoutgehalte uitnemend. In zee geboren, komt zij als jong dier de riviermondingen binnen en blijft in het zoete water tot de tijd van voortplanting nadert. De paling die in de zoete of ietwat brakke wateren van Friesland wordt gevangen, wordt in Workum in karen ingescheept, waartoe het zee-water vrijen toegang heeft, gaat naar Londen, en wordt in de Theems uit die karen verkocht. De slijm laag waarmede hun huid bedekt is, speelt een rol bij het vergemakkelijken van dien overgang. PAUL BERT ³⁾ merkte op dat alle palingen, die hij zelf uit het zoete water in zee-water overbracht, de plotselinge verandering verdroegen, terwijl die, welke zijn helper behandelde, alle stierven. Hij bediende zich van een netje, terwijl de bediende ze met de hand greep, in een groven doek vasthield en op die wijze de slijm laag verwijderde.

De paling vertoont in haar osmotischen druk nu eens de type van een zeevisch, dan weer nadert zij tot die van een zoetwatervisch. De hooge P_0 bij de forel, als oorspronkelijke trekvisch, wordt nu ook eenigszins verklaarbaar.

Hier ligt een terrein van studie, dat aan de *Commissie voor het internationaal onderzoek van de zee* dringend moge worden aanbevolen.

Hoe behouden de marine beenvissen in hun bloed een zooveel lageren osmotischen druk als in het zee-water heerscht? Enkele

¹⁾ G. FANO et F. BOTTAZZI, Sur la pression osmotique du serum en différentes conditions de l'organisme. Arch. ital. de biol. 26, p. 46, 1896. Zie vooral p. 47.

²⁾ HAMBURGER l. c. I. p. 466. Het oorspronkelijke stuk van RODIER in Travaux des laboratoires d. l. soc. sc. et station zoolog. d'Arcachon. 1899. p. 103 heb ik niet ter beschikking.

³⁾ P. REGNARD, La vie dans les eaux. p. 438. Paris. 1891.

waarnemingen, aan de urine van kabeljauw, zeewolf en koolvisch ontleend, kunnen hierop misschien eenig licht werpen. Δ van de urine was steeds lager, de osmotische druk minder, dan van het bloed. Bij een groot exemplaar van den zeewolf, wiens bloed $\Delta = 0.681$ had, gaf de urine $\Delta = 0.631$. Bij andere individuen vond ik 0.555. Bij de urine, die aan een kleine twintig koolvisschen ontleend was, werd $\Delta = 0.630$ gevonden. Bij de kabeljauw is 0.652 en 0.619 geconstateerd.

Het opvangen geschiedt zeer eenvoudig. Men grijpt b.v. een zeewolf achter de kieuwen en tilt hem plotseling uit het zeewater, droogt de huid van den buik even af, terwijl een helper gereed staat om de urine, die vaak in krachtigen straal te voorschijn spuit, op te vangen. Met wat drukken op den buik komt er nog iets meer, maar vaak is de „blaas” (het uitgezette eind van de ureteren) ledig. De meeste dieren gaven weinig of niets en werden weder aan den verkooper teruggegeven, zoodat een vergelijking van Δ van bloed en urine slechts bij uitzondering mogelijk was. Te Bergen had ik bij de drie onderzochte soorten geen enkel cijfer voor Δ gevonden, dat lager was voor het bloed dan voor de urine. Te Amsterdam is intusschen gebleken, dat er ook exemplaren voorkomen, wier bloed een nog iets geringere osmotische drukking vertoont als een der urines (kabeljauw).

De merkwaardig lage P_o van het uitscheidingsproduct der nieren bij marine Teleostiers wijst toch zeker hierop: dat die dieren hun osmotischen druk in het bloed niet $23 - 8.6 = 14.4$ atmosfeeren lager houden, doordat de nieren de overtollig opgenomen zouten zoo snel elimineeren. Eer wijst de relatieve rijkdom aan water in de urine er op, dat de visschen uit het zeewater tegen den osmotischen druk in, dus onder verbruik van chemisch arbeidsvermogen, water of, als men liever wil, een verdunde zoutoplossing, *resorbeeren*. Maar REGNARD (l.c. p. 391) heeft opgegeven dat sommige zoetwatervisschen uit de kieuwen oplosbare carbonaten uitscheiden! Over het mechanisme der ideotonie verkeeren wij nog in het duister.

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer A. SOMMERFELD te Aken: „*Vereenvoudigde afleiding van het veld van, en de krachten werkende op een electron bij willekeurige beweging.*”

(Mede aangeboden door den Heer H. KAMERLINGH ONNES).

§ 1. *Overzicht.*

In de „Göttinger Nachrichten” ¹⁾ heb ik algemeene formules voor het veld van een zich op willekeurige wijze bewegend electron medegedeeld, die eenvoudiger schijnen te zijn dan de na de verhandelingen van H. A. LORENTZ ingevoerde potentiaalformules. Het verschil bestaat in het volgende: Mijne formules stellen de potentialen voor door een *enkelvoudige over den verlopen tijd uitgestrekte integraal*, in welke alleen de veranderlijke afstanden van een vast punt tot het middelpunt van het, bolvormig onderstelde, electron voorkomen. Daarentegen zijn de vroegere formules voor de zoogenaamde vertraagde potentialen *tweevoudige of drievoudige* integralen, die zich uitstrekken over de door de lading ingenomen *ruimte*, en waarin tevens de afstand van het vaste punt tot de *plaats der lading*, op een vroeger tijdstip, voorkomt. Het verdient opmerking, dat P. HERTZ ²⁾, echter alleen in bijzondere gevallen, een methode toepast, die mijn algemeene onderzoek van het veld gedeeltelijk kan vervangen. Hij gebruikt daarbij voor de beschrijving der wet naar welke de potentialen gevormd worden, het gelukkig gekozen beeld van een zich met lichtsnelheid samentrekkenden bol.

Terwijl ik in de „Göttinger Nachrichten” uitga van eene misschien eenigszins minder natuurlijke voorstelling door integralen van FOURIER, zal ik hier een weg inslaan, die uitsluitend berust op het theorema van GREEN, en daarbij aan eenvoudigheid niets meer te wenschen overlaat. Zoodoende wordt de gezochte potentiaal eerst voorgesteld door een viervoudige integraal (§ 2), één integraal uitgestrekt over den tijd, de overige drie over de lading d.w.z. de ruimte. Zoo ver gekomen, kunnen wij nu twee wegen inslaan:

a. Wij voeren de integratie naar den tijd uit; dit leidt tot de door LORENTZ aangegeven formules; de integratie over de lading

¹⁾ Nachrichten d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften 1904 Heft 2; in het vervolg als „eerste verhandeling” geciteerd.

²⁾ Untersuchungen über unstetige Bewegungen eines Elektrons. Dissertation Göttingen 1904, § 3.

verschijnt dan in een tamelijk gecompliceerden vorm, daar zij niet meer moet worden uitgestrekt over de door alle ladingselementen tegelijkertijd ingenomen plaats. Men kan dit ook uitdrukken door te zeggen dat de integratie niet meer moet worden uitgestrekt over den waren, maar over een veranderden vorm van het electron.

b. *Wij voeren de integratie over de lading uit*; deze weg leidt tot mijne formules. Bij algemeene onderstellingen over het verloop der beweging behoeft men dan de integratie naar den tijd niet meer uit te voeren (vgl. § 3).

In § 4 geef ik toepassingen van mijne formules op over het algemeen bekende problemen. Ik spreek daar ten eerste over *het veld op genoegzamen afstand van het electron*, daarbij tevens de formules mijner eerste verhandeling uitbreidend tot snelheden grooter dan de lichtsnelheid; daarna behandel ik het veld bij stationaire beweging, vooral voor snelheden grooter dan de lichtsnelheid („ultra-lightsnelheid”), en geef juiste formules ook voor de punten die op de grens van de „bewegingsschaduw” liggen.

In § 5 bereken ik uit de voor het veld aangegeven formules de *kracht* die op het electron werkt tengevolge van zijn eigen veld. Deze kracht wordt streng berekend volgens de principes van H. A. LORENTZ voor een willekeurige beweging (zonder wenteling). De algemeene formules die ik hier gebruik, zijn weliswaar, oppervlakkig beschouwd, gecompliceerder dan de verder uitgewerkte, die ik in de „Göttinger Nachrichten”¹⁾ mededeelde; voor de toepassing op de stationaire beweging blijken zij echter zeer eenvoudig. Uit deze formules kan men nl. direct het bekende resultaat afleiden, dat de stationaire beweging met snelheden kleiner dan de lichtsnelheid („infra-lightsnelheid”) steeds een mogelijke beweging is, die zonder uitwendige krachten kan plaats hebben. Ook berekent men zeer gemakkelijk de kracht noodig om bij *homogene volumelading*, en ultra-lightsnelheid de stationaire beweging te doen voortduren. Eindelijk verkrijgt men ook uit deze formules het verrassende resultaat, dat ik in mijn tweede verhandeling niet alleen voor stationaire, maar voor iedere willekeurige beweging afleidde, dat nl. *de beweging eener oppervlaktelading met ultra-lightsnelheid, natuurkundig gesproken, onmogelijk is*, daar tot haar instandhouding een oneindige kracht noodig zou zijn. Duidelijker wordt dit, wanneer men bedenkt, dat het gevaar voor een oneindig worden der kracht des te grooter wordt, naar gelang de concentratie der lading grooter is, dat nl. bij uiterste concentratie, bijv. bij een

¹⁾ Nachrichten d. K. Gesellschaft d. Wissenschaften 1904, Heft 5, in het vervolg als „tweede verhandeling” geciteerd.

geladen punt de kracht reeds bij snelheden kleiner dan de lichtsnelheid in het algemeen oneindig wordt.

Misschien kan het volgende minder bevredigend schijnen, omdat wij aannemen dat de electronen bolvormig zijn. Slechts enkele van onze resultaten zijn onafhankelijk van deze onderstelling, n.l. die, waarin de straal van het electron niet meer voorkomt, zooals de bij benadering geldende formules voor het veld eener met constante snelheid, kleiner dan de lichtsnelheid, bewogen lading, of de resultaten voor de gebieden I en III (vgl. § 4) bij snelheden grooter dan de lichtsnelheid. Daarentegen zijn de formules voor de grens van de „bewegingsschaduw”, voor het gebied II afhankelijk van onze onderstelling. Om onze handelwijze te rechtvaardigen kunnen wij alleen opmerken, dat er weinig kans bestaat, de resultaten zóó ver uit te werken, wanneer wij meer algemeene onderstellingen over den vorm der electronen maken.

Zooals bekend is, heeft H. A. LORENTZ ¹⁾ voor korten tijd, om gewichtige redenen, de hypothese opgesteld, dat de vorm der electronen veranderlijk is, dat n.l. een electron bij iedere snelheid den vorm eener zoogenaamde „ellipsoïde van HEAVISIDE” aanneemt. Voor snelheden grooter dan de lichtsnelheid wordt echter deze hypothese onbruikbaar; men kan toch bezwaarlijk van een „hyperboloïde van HEAVISIDE” spreken, als vorm voor een electron. Ik heb daarom dan ook van deze onderstelling geen gebruik kunnen maken.

§ 2. *Theorema van GREEN.*

Geheel de wiskundige natuurkunde legt getuigenis af van de groote beteekenis van bovengenoemd theorema. Wij gebruiken het hier op dezelfde wijze als KIRCHHOFF ¹⁾ bij de formulering van het principe van HUYGENS.

Is φ de scalaire potentiaal der electronentheorie, dan geldt de vergelijking

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \varrho, \quad (1)$$

waarin c de lichtsnelheid en ϱ de dichtheid der volume-lading in het electron is. (Vergelijk, wat de keus der eenheden betreft, H. A. LORENTZ, „Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften Bd. V, Art. 13, N^o. 7). Verder zij v een hulpfunctie, van den vorm

$$v = \frac{1}{r} F(r - c(t - t')), \quad (2)$$

¹⁾ K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam Mei 1904. Proceedings p. 809.

²⁾ Vorlesungen über Mathematische Optik, 2te Vorlesung, § 1. Leipzig 1891.

r de afstand van een vast punt A tot een willekeurig punt P der ruimte, t het tijdstip waarvoor φ in A gezocht wordt, t' een veranderlijke tijd; dan voldoet v aan de vergelijking:

$$\Delta v = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t'^2} \dots \dots \dots (3)$$

In navolging van KIRCHHOFF zullen wij aannemen dat de functie $F(x)$ verdwijnt voor alle waarden van x , die niet dicht bij 0 liggen, dat zij echter in de nabijheid van $x = 0$ plotseling zoo sterk stijgt, dat toch nog

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 1. \dots \dots \dots (4)$$

Gewoonlijk schrijft men het theorema van GREEN voor twee functies, bijv. φ en v , op de volgende wijze

$$\int (\varphi \Delta v - v \Delta \varphi) dS = \int \left(\varphi \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma \dots \dots (5)$$

De oppervlakte-integraal, rechts, moet worden uitgestrekt over de begrenzing der ruimte S en over een oneindig klein om het vaste punt A beschreven oppervlak, tenzij A buiten S valt. In ons geval ligt A steeds binnen S , daar wij de begrenzing van S later naar het oneindige verschuiven. De integraal over het om A beschreven oppervlak is, zooals bekend is,

$$4 \pi \varphi_A F(-c(t-t')).$$

Substitueeren wij in het eerste lid van (5) de uit (1) en (3) volgende waarden van $\Delta \varphi$ en Δv , nadat wij als veranderlijken tijd t' ingevoerd hebben, zoodat ook $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t'^2}$ geworden is, dan krijgen wij:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \int \left(\varphi \frac{\partial v}{\partial t'} - v \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \right) dS + \int \varphi v dS = \int \left(\varphi \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\sigma + 4 \pi \varphi_A F(-c(t-t')) \dots \dots (6)$$

De tweede integraal in het eerste lid moet genomen worden over de lading van het electron, de eerste in het tweede lid over de oppervlakte van S .

Wij vermenigvuldigen nu (6) met cdt' en integreeren naar t' van $-\infty$ tot $+\infty$. Daardoor verdwijnt de eerste term van het eerste lid. Na uitvoering der integratie naar t' , hebben wij dan n.l. alleen nog te beschouwen de waarden daarvan voor $t' = \pm \infty$, die echter, volgens de definitie van F , beide 0 zijn. Verder nemen wij aan dat ook de eerste integraal rechts 0 wordt, en wel tengevolge der

eigenschappen van den potentiaal φ . Voeren wij n.l. de integratie naar t' uit, dan krijgen wij, wegens de eigenschappen van F

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{\partial \varphi}{\partial n} c dt' = \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \int_{-\infty}^{+\infty} v c dt' = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial n} \varphi c dt' = \varphi_0 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t'},$$

waarbij φ_0 beteekent de waarde, die φ aanneemt op het oogenblik, dat het argument van F nul wordt d. w. z., wanneer $t' = t - \frac{r}{c}$.

Was het electron nu oorspronkelijk in rust, bijv. tot het tijdstip t_0 , dan kunnen wij zeker het oppervlak, waarover geïntegreerd moet worden, zoover verschuiven, dat $t' < t_0$ wordt. Dan is echter φ_0 de electrostatische potentiaal van het electron, zoodat $\frac{\partial \varphi_0}{\partial t'} = 0$.

De oppervlakte-integraal wordt dus:

$$\int \left(\varphi_0 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right) d\sigma,$$

wat echter voor een ver genoeg verwijderd oppervlak 0 is, zooals uit de potentiaaltheorie bekend is.

Vergelijking (6) wordt nu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c dt' \int \rho v dS = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_A F(-c(t-t')) c dt'.$$

Voert men nu weer in het tweede lid de integratie uit, dan verkrijgt men ten slotte, wanneer men onder φ de waarde in het punt A voor het tijdstip t verstaat:

$$4\pi \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} c dt' \int \frac{\rho}{r} F(r-c(t-t')) dS. \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Men kan dus den scalairen potentiaal in het algemeen voorstellen door een viervoudige integraal, n.l. een tijd- en een ruimte-integraal.

§ 3. Overgang tot de potentiaalformules van LORENTZ en tot de door mij opgestelde.

Men is geneigd in vergelijking (7) eerst de integratie naar t' uit te voeren. Noemt men dan $\{g\}$ de op het oogenblik $t' = t - \frac{r}{c}$ in

het ruimteelement dS bestaande dichtheid, dan verkrijgt men n.l. direct

$$4 \pi \varphi = \int \frac{\{\rho\}}{r} dS, \dots \dots \dots (8)$$

daar F alleen voor dit tijdstip niet 0 is. Om (8) te bewijzen, merkt H. A. LORENTZ ¹⁾ op dat deze uitdrukking voldoet aan de differentiaalvergelijking (1).

WIECHERT ²⁾ en anderen gaan niet van het theorema van GREEN, doch van een theorema van BELTRAMI uit, dat natuurlijk slechts een andere vorm, en, naar het mij voorkomt, een minder fraaie vorm, van het theorema van GREEN is.

In plaats van in (7) de integratie naar t' uit te voeren, is het beter, eerst de ruimteintegraal te bepalen; daaraan moet echter een bepaalde onderstelling over den vorm van het electron voorafgaan. Wij nemen ten eerste aan dat het electron bestaat uit een lading ϵ , homogeen verdeeld tusschen twee oneindig dicht bij elkaar gelegen boloppervlakken, met een straal a . Wij substitueeren daarom

$$\frac{\epsilon}{4 \pi a^2} d\sigma \text{ in plaats van } \rho dS$$

zoodat (7) wordt:

$$4 \pi \varphi = \frac{\epsilon}{4 \pi a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} c dt' \int \frac{1}{r} F(r - c(t - t')) d\sigma.$$

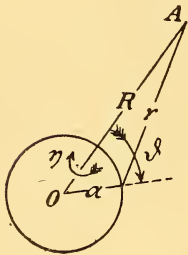


Fig. 1.

Zij (Fig. 1) O het middelpunt van het electron, en laat, met betrekking tot $O A$ als as, η en ϑ coördinaten op het oppervlak van het electron zijn, die dezelfde beteekenis hebben als de geographische lengte en poolsafstand bij de plaatsbepaling op de aarde. Zij verder R de afstand van het vaste punt A tot het middelpunt O , dan is

$$r^2 = R^2 + a^2 - 2 Ra \cos \vartheta, \quad r dr = Ra \sin \vartheta d\vartheta,$$

$$\int \dots d\sigma = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \dots d\eta \sin \vartheta d\vartheta = 2 \pi a^2 \int_0^{\pi} \dots \sin \vartheta d\vartheta =$$

$$2 \pi a \int_{|R-a|}^{R+a} \dots \frac{r dr}{R},$$

zoodat:

¹⁾ La théorie électromagnétique de MAXWELL etc. Leiden, 1892, bldz. 119.

²⁾ Elektrodynamische Elementargesetze. LORENTZ—JUBELBAND, bldz. 560, Den Haag, 1900.

$$4 \pi \varphi = \frac{\varepsilon}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c dt'}{R} \int_{|R-a|}^{R+a} F(r-c(t-t')) dr \dots \dots \dots (9).$$

wordt.

Hierbij heeft $|R - a|$ de waarde $R - a$ wanneer $R > a$ en de waarde $a - R$ wanneer $R < a$ is. Uit de definitie van F volgt nu dat de naar r genomen integraal 1 of 0 is naar gelang $r - c(t - t')$ al of niet 0 wordt voor waarden van r gelegen tusschen $|R - a|$ en $R + a$. Schrijven wij korter

$$\tau = t - t'$$

dan wordt dus deze integraal = 1, wanneer

$$R + a > c \tau \text{ en } |R - a| < c \tau$$

d. w. z. wanneer wij met de afstanden R, a en $c \tau$ een driehoek kunnen construeeren. Is dit niet het geval, dan is de integraal 0. Verstaan wij nu onder λ een van de getallen 1 of 0, naarmate een driehoek $(R, a, c \tau)$ mogelijk is of niet, dan wordt (9)

$$4 \pi \varphi = - \frac{\varepsilon c}{2a} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\lambda d\tau}{R}.$$

Wij verwisselen hierin de grenzen en bedenken tevens dat voor negatieve waarden van τ , $|R - a|$ zeker niet $< c \tau$ zijn kan, zoodat men voor dit gebied $\lambda = 0$ moet nemen. Ten slotte wordt

$$4 \pi \varphi = \frac{\varepsilon c}{2a} \int_0^{\infty} \frac{\lambda d\tau}{R} \dots \dots \dots (10)$$

Dit is dezelfde vergelijking als formule (17) mijner eerste verhandeling. Zij voert niet zooals (8) tot de voorstelling van electronen met veranderd oppervlak. Onze formule geldt zoowel binnen als buiten het electron. Het verschil bestaat daarin, dat de grenzen τ_1 en τ_2 waartusschen $\lambda = 1$ is, voor een buiten het electron gelegen vast punt, bepaald worden door de vergelijkingen:

$$R_1 - a = c \tau_1 \qquad R_2 + a = c \tau_2 \dots \dots (11)$$

en voor een binnen het electron gelegen vast punt door

$$a - R_1 = c \tau_1 \qquad a + R_2 = c \tau_2, \dots \dots (11')$$

wanneer wij onder R_1 en R_2 verstaan de afstanden van het vaste punt tot het middelpunt van het electron op de tijdstippen $t - \tau_1$ en $t - \tau_2$. Het is natuurlijk zeer goed mogelijk dat het vaste punt bij afwisseling binnen en buiten het electron valt, evenzoo kunnen meerdere te samen behoorende waarden van τ_1 en τ_2 bestaan.

Het is nu gemakkelijk, uit den gevonden potentiaal dien voor

een homogeen geladen bol af te leiden. Is de geheele lading daarvan ϵ , dan bedraagt de lading van het gedeelte ingesloten tusschen twee boloppervlakken met de stralen r' en $r' + dr' : 3 \epsilon r'^2 \frac{dr'}{a^3}$. Door nu

in (10) r' in plaats van a , $\frac{3 \epsilon}{a^3} r'^2 dr'$ in plaats van ϵ te stellen en naar r' van 0 tot a te integreeren, verkrijgen wij ter bepaling van den potentiaal de formule:

$$4 \pi \varphi = \frac{3 \epsilon c}{2 a^3} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{R} \int_0^a \lambda r' dr' (12)$$

Wij beschouwen vooreerst een vast punt buiten het electron ($R > a$) bij een bepaalde waarde van τ . Vervangen wij in de vergelijkingen (11) a door r' , dan is $\lambda = 1$, wanneer $c\tau$ ligt tusschen $R - r'$ en $R + r'$, of anders geschreven, wanneer $r' > |R - c\tau|$. Nu zijn er twee gevallen mogelijk, n.l. $|R - c\tau| < a$ en $|R - c\tau| > a$. In het eerste geval is een driehoek met de zijden R , $c\tau$ en a mogelijk, in het tweede geval niet. In het eerste geval is dus

$$\int_0^a \lambda r' dr' = \int_{|R-c\tau|}^a r' dr' = \frac{1}{2} (a^2 - (R - c\tau)^2),$$

in het tweede geval:

$$\int_0^a \lambda r' dr' = 0 .$$

Wanneer wij nu een grootheid κ definiëeren door een der twee formules

$$\kappa = \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{R - c\tau}{a} \right)^2 \right) \text{ of } \kappa = 0 , (13)$$

naar gelang de driehoek (a , R , $c\tau$) mogelijk is of niet, dan kunnen wij voor (12) in het algemeen schrijven:

$$4 \pi \varphi = \frac{\epsilon c}{2 a} \int_0^{\infty} \frac{\kappa d\tau}{R} (14).$$

Ten tweede beschouwen wij een vast punt binnen het electron: $R < a$. Nu volgt uit de vergelijkingen (11') dat $\lambda = 1$ is, wanneer $r' + R > c\tau > r' - R$, d.w.z. wanneer $r' > c\tau - R$ en $r' < c\tau + R$ is. Hier zijn nu 3 gevallen te onderscheiden.

a). $c\tau - R < a$, $c\tau + R > a$, driehoek (a , R , $c\tau$) mogelijk.

b). $c\tau + R < a$, dus ook $c\tau - R < a$, driehoek $(a, R, c\tau)$ onmogelijk, a de grootste der 3 afstanden $a, R, c\tau$.

c). $c\tau - R > a$, dus ook $c\tau + R > a$, driehoek $(a, R, c\tau)$ onmogelijk, a niet de grootste der 3 afstanden $a, R, c\tau$.

Wij kunnen dus voor deze 3 gevallen schrijven

$$\int_0^a \lambda r' dr' = \int_{c\tau-R}^a r' dr' = \frac{1}{2}(a^2 - (c\tau - R)^2), \dots \dots \dots (a)$$

$$\int_0^a \lambda r' dr' = \int_{c\tau-R}^{c\tau+R} r' dr' = 2 c\tau R, \dots \dots \dots (b)$$

$$\int_0^a \lambda r' dr' = 0 \dots \dots \dots (c)$$

Als wij nu de grootheid \varkappa definiëeren, door (13) in de gevallen a) en c), daarentegen door

$$\varkappa = 6 \frac{c\tau R}{a^2} \dots \dots \dots (13')$$

in het geval b), dan is ook voor een binnen het electron gelegen punt de potentiaal door (14) bepaald. Deze formule is dezelfde als vergelijking (20) mijner eerste verhandeling.

Ofschoon onze grootheden λ en \varkappa eenvoudig genoeg zijn, is het voor later van nut, een voor alle waarden van τ geldende uitdrukking ervoor aan te geven.

Men weet dat

$$\int_0^\infty \sin sx \frac{ds}{s} = + \frac{\pi}{2} \text{ of } - \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (15)$$

naar gelang x positief of negatief is. Verder is

$$\sin sa \sin sR \sin sc\tau = \frac{1}{4} \left\{ \sin s(a + R - c\tau) + \sin s(a - R + c\tau) - \sin s(a + R + c\tau) - \sin s(a - R - c\tau) \right\} \dots \dots \dots (15')$$

Is nu de driehoek $(a, R, c\tau)$ mogelijk, dan zijn van de 4 grootheden :

$$a + R - c\tau, a - R + c\tau, -a - R - c\tau, -a + R + c\tau$$

drie positief en ééne negatief, is hij onmogelijk, dan zijn er twee positief en twee negatief. Door nu (15') te vermenigvuldigen met $\frac{ds}{s}$ en te integreeren van $s = 0$ tot $s = \infty$, verkrijgt men in het eerste geval

tot resultaat $\frac{\pi}{4}$, in het tweede 0, d.w.z. in beide gevallen geldt:

$$\int_0^{\infty} \sin sa \sin sR \sin s\tau \frac{ds}{s} = \frac{\pi}{4} \lambda \dots \dots \dots, \quad (16)$$

Substitueert men deze waarde voor λ in (10), dan vindt men voor oppervlaktelading

$$\varphi = \frac{\varepsilon c}{2\pi^2 a} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{R} \int_0^{\infty} \sin sa \sin sR \sin s\tau \frac{ds}{s} \dots \dots \dots (17)$$

Als men verder in (16) a door r' vervangt, wordt de in (12) voorkomende integraal:

$$\begin{aligned} \int_0^a \lambda r' dr' &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} \int_0^a \sin sr' r' dr' \sin sR \sin s\tau = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin sa - sa \cos sa}{s^2} \sin sR \sin s\tau \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

en wordt de potentiaal bij volumelading uitgedrukt door

$$\varphi = \frac{3\varepsilon c}{2\pi^2 a} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{R} \int_0^{\infty} \frac{\sin sa - sa \cos sa}{(sa)^2} \sin sR \sin s\tau \frac{ds}{s} \dots \dots (18)$$

In mijn eerste verhandeling waren de vergelijkingen (17) en (18) het primaire, (10) en (14) werden er uit afgeleid, door uitvoering der integraties naar s .

Ik wil nog opmerken, dat het natuurlijk nog op zeer veel verschillende wijzen mogelijk is λ , dus ook \varkappa , ieder door een altijd geldende uitdrukking voor te stellen.

Bijna dezelfde formules als voor den scalairen potentiaal gelden ook voor den vectorpotentiaal, tenminste wanneer het electron geen aswenteling heeft. Uit de afleiding onzer resultaten volgt dadelijk dat wij slechts in (10) en (14) onder het integraalteeken den factor $\frac{v_{t-\tau}}{c}$ behoeven toe te voegen, waarin de vector $v_{t-\tau}$ de snelheid van het electron op den tijd $t-\tau$ voorstelt. Zoodra echter aswentelingen plaats hebben, bestaat de vectorpotentiaal behalve uit het zoo even genoemde „translatieve” gedeelte nog uit een „rotatief” gedeelte, waarin dan in plaats van λ en \varkappa , iets meer gecompliceerde uitdrukkingen λ' en \varkappa' optreden, die ik in mijn eerste verhandeling heb aangegeven. Zij kunnen ook zeer gemakkelijk op den hier gevolgden weg gevonden worden. Daar wij ze hier echter niet noodig hebben, zie ik er van af ze op deze plaats te berekenen.

§ 4. *Het veld bij stationaire beweging, vooral bij snelheden groter dan de lichtsnelheid.*

In mijne eerste verhandeling gebruikte ik de in het voorgaande ontwikkelde formules voor de afleiding van de bekende benaderingen van LIÉNARD en WIECHERT voor het veld op grooten afstand van een zich op willekeurige wijze bewegend electron. Het kan bij deze formules vreemd schijnen, dat zij voor snelheden groter en kleiner dan de lichtsnelheid op het eerste gezicht slechts door een teeken verschillen terwijl toch in werkelijkheid een groot verschil tusschen beide bewegingen bestaat. Bij infra-lichtsnelheid toch wordt de geheele omgeving van het electron door de potentiaalwerking bereikt, terwijl dit bij ultra-lichtsnelheid om zoo te zeggen alleen het geval is met punten, die in de „bewegingsschaduw” van het electron liggen. Deze schijnbare tegenspraak wordt echter geheel opgeheven, wanneer men de wortels der vergelijking (11), die het interval der waarden τ , voor welke nog een driehoek ($a, R, c\tau$) mogelijk is, begrenzen, iets nader beschouwt.

Daar ik in mijn eerste verhandeling hierop niet genoeg gewezen heb, lasch ik hier een kleine discussie over deze wortels in. In het algemeen (de bijzonderheden hangen van den aard der beweging af) hebben de vergel. (11) bij infra-lichtsnelheid ieder een positieven wortel; bij ultra-lichtsnelheid zijn ook imaginaire en negatieve wortels mogelijk. Met deze laatste heeft men, in het kort gezegd, te doen voor die punten die vóór het electron liggen; positieve wortels bestaan alleen voor die punten, die in de bewegingsschaduw liggen, en wel heeft hier elk der vergelijkingen (11) een paar positieve wortels. Slechts voor een smalle ruimte in de nabijheid der schaduwgrens, waarvan de dikte klein is van dezelfde orde als de middellijn van het electron, hebben wij maar één paar positieve wortels. Uit het voorgaande volgt dus: de benaderde uitdrukkingen, die ik vroeger afleidde, voor het geval, dat slechts twee positieve wortels τ_1 en τ_2 bestaan, gelden zeker bij infra-lichtsnelheid. Bij ultra-lichtsnelheid verkrijgen zij de waarde 0 voor punten vóór het electron gelegen; voor het grootste gedeelte van de bewegingsschaduw moet nog één

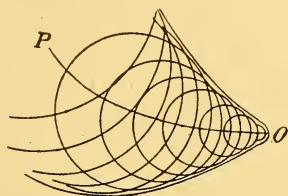


Fig. 2.

analoog gebouwde tweede term toegevoegd worden. Ter verduidelijking van wat wij onder bewegingsschaduw verstaan diene fig. 2. Daarin is PO de baan van het electron. Is O de plaats, die het op het beschouwde oogenblik inneemt, en construeeren wij om ieder punt der baan een bol met een straal gelijk aan

$c\tau$, waarin τ de tijd beteekent, dien het electron noodig heeft, om van het beschouwde punt in O te komen, dan is de omhullende van deze bollen de grens van de bewegingsschaduw. Deze is natuurlijk des te smaller, naarmate de snelheid van het electron de lichtsnelheid meer overtreft. Ook het gebied der schaduwgrens, waarvan boven sprake was, is als een smalle strook aangegeven.

Door het onderzoek der *stationaire beweging* worden bovenstaande algemeene gevolgtrekkingen bevestigd. Bij infra-lichtsnelheid kan men het veld berekenen volgens een eigenaardige afbeeldingsmethode¹⁾, voor ultra-lichtsnelheid werd het veld berekend door DES COUDRES²⁾ en HEAVISIDE. Het volgende bevat, in vergelijking met de ontwikkelingen van DES COUDRES, niet veel nieuws.

Men kan ten hoogste opmerken dat de formule van HEAVISIDE-DES COUDRES, die aan de grens der bewegingsschaduw een oneindig groote waarde geeft, juist hier niet meer geldig is, zooals onze strenge afleiding bewijzen zal. Dit oneindig worden is mede een gevolg daarvan, dat DES COUDRES een electron van oneindig kleine afmetingen, een geladen punt, beschouwt. Wij zullen, in aansluiting hieraan, dezelfde vereenvoudiging gebruiken, met dien verstande echter, dat wij laten zien, dat wij deze onderstelling niet meer kunnen maken voor de grens der bewegingsschaduw. Wij nemen tevens volumelading aan, daar wij later zullen zien, dat bij oppervlaktelading snelheden grooter dan de lichtsnelheid niet kunnen voorkomen.

De stationaire beweging hebbe plaats in de richting der positieve X -as, terwijl de coördinaten-oorsprong O ligt op de plaats van het middelpunt van het electron op het oogenblik t . De coördinaten van het vaste punt A zijn x, y, z , zijn afstand tot O wordt dus $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, zoodat r nu een andere beteekenis heeft dan in § 2 en § 3. Is v de snelheid der stationaire beweging, dan bevond zich het middelpunt van het electron op het oogenblik $t - \tau$ op de plaats $x = -v\tau$. De afstand van A tot dit punt is.

$$R = \sqrt{(x + v\tau)^2 + y^2 + z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

De grenzen voor de mogelijkheid der constructie van den driehoek $(R, a, c\tau)$ worden, wanneer A buiten het electron ligt ($R > a$), gegeven door:

$$R_1 - a = c\tau_1 \quad , \quad R_2 + a = c\tau_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

1) Vergelijk de samenvatting van H. A. LORENTZ in „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften”. Bd. V. Art. 14. Nr. 11.

2) Zur Theorie des Kraftfeldes electrischer Ladungen. LORENTZ-Jubelband, bldz. 652. Den Haag. 1900.

waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$(x + v\tau)^2 + y^2 + z^2 = (c\tau \pm a)^2$$

of wel

$$(c^2 - v^2)\tau^2 - 2(vx \mp ac)\tau + a^2 - r^2 = 0 \quad . \quad . \quad (20)$$

Het teeken — geldt voor de wortels τ_1 , het teeken + voor de wortels τ_2 . Het product van 2 wortels τ_1 of τ_2 is:

$$\frac{a^2 - r^2}{c^2 - v^2}.$$

Daar nu $r > a$ is, is dit product negatief voor $c > v$ en positief voor $c < v$. Hieruit volgt:

Bij *infra-lichtsnelheid* zijn de beide wortels onzer vergelijking reëel en hebben tegengesteld teeken. Elk der beide vergelijkingen heeft dus slechts *één bruikbaren positieven wortel*.

Bij *ultra-lichtsnelheid* kunnen de beide wortels geconjugeerd complex zijn; zijn zij reëel, dan hebben beide hetzelfde teeken en zijn dus of beide positief, óf beide negatief. Elk der beide vergelijkingen heeft dus *twee of geen bruikbare positieve wortels*.

Uit de beschouwing van de discriminante onzer vergelijking (20) blijkt dat de wortels complex zijn, wanneer

$$(vx \mp ac)^2 < (r^2 - a^2)(v^2 - c^2),$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$(cx \mp av)^2 < (y^2 + z^2)(v^2 - c^2) \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Wij voeren ter bekorting in:

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \xi = vx \mp a\beta, \quad \varrho^2 = y^2 + z^2$$

zoodat ϱ de afstand van A tot de baan van het electron en ξ de in de richting der beweging gemeten afstand is tot de in fig. 3 aangegeven punten P_1 en P_2 , die op een afstand $a\beta$ van het middelpunt liggen.

Stellen wij in (21) het teeken = in plaats van <, dan wordt

$$\xi^2 = \varrho^2 (\beta^2 - 1) \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Deze vergelijking bepaalt een omwentelingskegel om de bewegingsrichting, wiens top in P_1 of P_2 ligt, naarmate men in ξ het — of het + teeken gebruikt, en wiens beschrijvende lijn met de as een hoek = $\arcty(\beta^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ maakt. Voor punten binnen dezen kegel zijn de wortels reëel, voor punten er buiten zijn zij complex.

Zijn nu de wortels reëel, dan zijn zij beide positief, wanneer

$$\frac{vx \mp ac}{c^2 - v^2} > 0, \quad \text{d.w.z.} \quad x < \pm \frac{a}{\beta};$$

zij zijn beide negatief, wanneer

$$\frac{v x \mp a c}{c^2 - v^2} < 0, \quad \text{d.w.z.} \quad x > \pm \frac{a}{\beta}.$$

Men ziet gemakkelijk dat $x = \pm \frac{a}{\beta}$ de poolvlakken zijn voor de polen P_1 en P_2 met betrekking tot het oppervlak van het electron. Aan deze platte vlakken kunnen wij in den zin der bewegingsrichting een voorste en een achterste zijde onderscheiden.

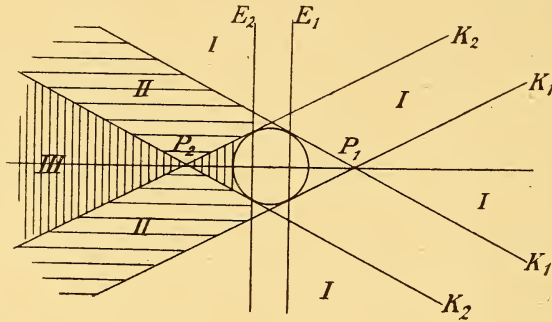


Fig. 3.

In fig. 3 zijn geteekend P_1 en P_2 met hunne poolvlakken E_1 en E_2 . De door P_1 en P_2 gaande kegels K_1 en K_2 raken het oppervlak van het electron in de doorsneden van E_1 en E_2 met dit oppervlak (in onze figuur ziet men deze doorsneden als rechte lijnen). De in de figuur aangegeven gebieden I, II en III onderscheiden zich nu daardoor, dat in I de wortels complex of negatief zijn, in II is één wortelpaar (τ_1) positief, in III zijn beide paren positief.

Het geval dat A binnen het electron valt, behoeven wij niet te behandelen.

Thans kunnen wij overgaan tot de berekening van den scalairen potentiaal.

Bij *infra-lichtsnelheid* krijgen wij, volgens (13) en (14), nadat wij het bestaan van twee positieve wortels τ_1 en τ_2 bewezen hebben,

$$4\pi\varphi = \frac{3\epsilon c}{4a} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(1 - \left(\frac{R - c\tau}{a} \right)^2 \right) \frac{d\tau}{R} \dots \dots \dots (23)$$

Wij voeren als nieuwe veranderlijke in

$$u = \frac{c\tau - R}{a} \dots \dots \dots (24)$$

Volgens (11) is dan voor

$$\tau = \tau_1 \dots u = -1 \quad \text{en voor} \quad \tau = \tau_2 \dots u = +1;$$

verder is volgens (19) en (24)

$$adu = \left(c - \frac{\partial R}{\partial \tau} \right) d\tau = \left(c - v \frac{x + v\tau}{R} \right) d\tau,$$

$$\frac{cd\tau}{aR} = \frac{du}{R - \beta(x + v\tau)},$$

wat volgens (24) overgaat in

$$\frac{cd\tau}{aR} = \frac{du}{c\tau(1 - \beta^2) - au - \beta x} \dots \dots \dots (25)$$

Er blijft ons nu nog over in het tweede lid van (25) τ in u uit te drukken. Volgens (24) bestaat tusschen τ en u de vergelijking:

$$(au - c\tau)^2 = R^2 = (x + v\tau)^2 + y^2 + z^2.$$

Lossen wij deze op, ten opzichte van $c\tau$, dan verkrijgen wij

$$(1 - \beta^2)(c\tau)^2 - 2(au + \beta x)c\tau = r^2 - a^2u^2$$

$$c\tau = \frac{au + \beta x \pm \sqrt{(au + \beta x)^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - a^2u^2)}}{1 - \beta^2}. \quad (26)$$

Van deze waarden heeft de eene het positieve en de andere het negatieve teeken. Daar nu in (23) alleen van positieve waarden van τ sprake is, nemen wij in (26) den tweedemachtswortel met het positieve teeken.

Laten wij dus het — teeken buiten beschouwing, dan krijgen wij:

$$c\tau(1 - \beta^2) - au - \beta x = + \sqrt{(au + \beta x)^2 + (1 - \beta^2)(r^2 - a^2u^2)} =$$

$$+ \sqrt{(x + au\beta)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} \quad (27)$$

Dit is echter juist de in het tweede lid van (25) voorkomende noemer, zoodat (25) wordt

$$\frac{cd\tau}{aR} = \frac{du}{\sqrt{(x + au\beta)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}} \dots \dots (28)$$

en daarna (23) overgaat in:

$$4\pi\varphi = \frac{3\varepsilon}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - u^2) du}{\sqrt{(x + au\beta)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}, \quad (29)$$

waardoor wij een strenge uitdrukking voor den potentiaal verkregen hebben. De integratie voert tot elementaire functies, maar wordt minder fraai. Wij stellen ons daarom tevreden met een benadering en stellen daartoe $a = 0$, zoodat wij verkrijgen:

$$4\pi\varphi = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}} \frac{3}{4} \int_{-1}^{+1} (1 - u^2) du = \frac{\varepsilon}{\sqrt{x^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}} \quad (30)$$

De niveaувlakken van φ zijn dus gelijkvormige afgeplatte omwentelingsellipsoïdes om de bewegingsrichting.

Bij *snelheden groter dan de lichtsnelheid* moeten wij onderscheid maken tusschen de gebieden I, II en III.

III). In dit gebied bestaan twee positieve wortels τ_1 en twee τ_2 , wij noemen deze τ_1' , τ_1'' , τ_2' , τ_2'' . Rangschikken wij ze volgens hun grootte, dan ontstaat de reeks

$$\tau_1', \tau_2', \tau_2'', \tau_1''.$$

Uit de coëfficiënten van vergelijking (20) volgt n.l. dat de producten $\tau_1' \tau_1''$ en $\tau_2' \tau_2''$ gelijk zijn, zoodat wanneer τ_1' de kleinste wortel is, τ_1'' de grootste moet zijn. Dat nu werkelijk de uiterste der vier wortels bij de eerste der vergelijkingen (11) behooren, toont men gemakkelijk aan; evenzoo dat men alleen over het interval van τ_1' tot τ_2' en over het interval van τ_2'' tot τ_1'' heeft te integreeren.

Uit (13) en (14) volgt nu:

$$4\pi\varphi = \frac{3\epsilon c}{4a} \int_{\tau_1'}^{\tau_2'} \left(1 - \left(\frac{R - c\tau}{a}\right)^2\right) \frac{d\tau}{R} + \frac{3\epsilon c}{4a} \int_{\tau_2''}^{\tau_1''} \left(1 - \left(\frac{R - c\tau}{a}\right)^2\right) \frac{d\tau}{R}. \quad (31)$$

Wij voeren nu weer door (24) de veranderlijke u in.

In (26) is verder de noemer $1 - \beta^2$ en βx negatief, zoodat wij voor het interval der grootste positieve τ den tweedemachtswortel met negatief teeken, voor dat der kleinste positieve τ den wortelvorm met positief teeken moeten gebruiken. In de integraal tusschen τ_2'' en τ_1'' geldt dus

$$\frac{c d\tau}{a R} = - \frac{du}{\sqrt{(x + au\beta)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}.$$

Voor de berekening der integraal tusschen τ_1' en τ_2' kunnen wij (28) gebruiken; wij verkrijgen dan

$$4\pi\varphi = \frac{3\epsilon}{4} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - u^2) du}{\sqrt{(x + au\beta)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}} - \frac{3\epsilon}{4} \int_{+1}^{-1} \frac{(1 - u^2) du}{\sqrt{(x + au\beta)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}}, \dots \dots \dots (32)$$

of wel:

$$4\pi\varphi = \frac{3\epsilon}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - u^2) du}{\sqrt{(x + au\beta)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)}} \dots \dots (33)$$

Ook hier is de integratie door elementaire functies mogelijk. Wij

zullen echter de integraal slechts benaderen en stellen daartoe $a = 0$. De vergelijking (33) wordt dan:

$$4\pi\varphi = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{x^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}} \dots \dots \dots (34)$$

Daar $\beta > 1$ is, worden de niveaувlakken nu tweebledige omwentelings-hyperboloïdes om de bewegingsrichting. Voor ons heeft alleen het in het gebied III liggend blad een beteekenis.

Het gebied III wordt begrensd door den kegel K_2 , waarop volgens (22) geldt:

$$(x + a\beta)^2 = (\beta^2 - 1)(y^2 + z^2).$$

Substitueeren wij uit deze vergelijking in (34) en verwaarloozen daarbij tweede machten van a , dan vinden wij, wanneer wij nog, daar x in III negatief is, $x = -|x|$ stellen,

$$4\pi\varphi = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2a\beta|x|}} \dots \dots \dots (35)$$

Deze waarde is groot van hooger orde dan de binnen het gebied III geldende waarden, maar wordt toch niet oneindig. Weliswaar kan men nog twijfelen aan de juistheid van (35), daar wij reeds in (34) gedeelten, die klein waren van dezelfde orde als a , verwaarloosden, maar deze twijfel verdwijnt bij uitvoering der integratie, die voor het kegeloppervlak overigens met minder moeite gepaard gaat.

Ontwikkelen wij nl. de juiste uitkomst volgens machten van $\frac{a\beta}{x}$, dan verkrijgen wij als eerste benadering:

$$4\pi\varphi = \frac{8}{5} \frac{\varepsilon}{\sqrt{a\beta|x|}},$$

zoodat alleen de factor $\sqrt{2} = 1,4\dots$ van (35) veranderd is in $\frac{8}{5} = 1,6$.

I. In gebied I zijn geen positieve wortels τ mogelijk, zoodat hier $\varphi = 0$ is.

II. In gebied II eindelijk bestaan twee positieve wortels τ_1' en τ_1'' ; uit (13) en (14) volgt nu:

$$4\pi\varphi = \frac{3\varepsilon c}{4a} \int_{\tau_1'}^{\tau_1''} \left(1 - \left(\frac{R-c\tau}{a} \right)^2 \right) \frac{d\tau}{R} \dots \dots \dots (37)$$

Terwijl τ verandert van τ_1' tot τ_1'' gaat de weer ingevoerde veranderlijke u van -1 tot een grootste positieve waarde $u_0 < 1$ en weder terug tot -1 .

In het omkeerpunt u_0 , waarin $\frac{du}{d\tau} = 0$ is, wordt tevens volgens (25) en (27) de tweedemachtswortel uit (27) 0 en verandert tegelijkertijd van teeken.

De over het eerste gedeelte van het interval van -1 tot u_0 genomen integraal wordt dus gelijk aan de over het tweede gedeelte van u_0 tot -1 genomene, zoodat (37) wordt :

$$4\pi\varphi = \frac{3\varepsilon}{2} \int_{-1}^{u_0} \frac{(1-u^2)du}{\sqrt{(x+au\beta)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}} \dots \quad (38)$$

Stelden wij ook hier $a = 0$, dan zou de uitkomst zeer onnauwkeurig worden. Wij stellen ons tevreden met er op te wijzen, dat u_0 tusschen -1 en $+1$ een doorlopende functie is, zoodat ook de potentiaal φ zijn continuïteit behoudt, wanneer hij van 0, op den kegel K_1 , stijgt tot de in (35) aangegeven groote waarde, die hij bereikt op den kegel K_2 . De juiste berekening heeft wel geen betekenis voor de kennis van het veld, daar het geheele gebied II slechts een breedte beslaat, die klein is van dezelfde orde als de middellijn van het electron.

§ 5. *De door het veld op het electron uitgeoefende krachten, in het bijzonder bij stationaire beweging met ultra-lichtsnelheid.*

Terwijl in het algemeen alleen de kennis van het veld op grooten afstand van het electron van belang is, op een afstand nl., die groot is in vergelijking met den straal van het electron, dient men, om de op het electron werkende kracht te kunnen berekenen, juist het veld binnen in of op de oppervlakte van het electron te kennen. In dit geval kunnen wij dus van de benaderingen geen gebruik maken en moeten wij uitgaan van de aangegeven strenge formules. In mijn tweede verhandeling berekende ik de werkende krachten, uitgaande van de hier onder (17) en (18) aangegeven formules, voor iedere willekeurige beweging, zonder aswentelingen, van het electron; ook daar werden de integraties over de lading van het electron gewoonlijk uitgevoerd met behulp van het theorema van GREEN.

Hier zal ik de eindformules in een iets minder ver uitgewerkten vorm geven; terwijl vroeger nl. alleen nog een integratie naar τ uit te voeren bleef, zal ik hier ook de integratie naar s onuitgevoerd laten. Op deze wijze worden dan, ten minste bij de stationaire beweging, de berekeningen zeer vereenvoudigd.

Is δ de gezochte kracht op het tijdstip t , \mathfrak{E} de weg dien het middelpunt van het electron aflegt van $t - \tau$ tot t , en T de lengte

van dien weg, dan geldt voor oppervlaktelading volgens vergel. (48) en (50) mijner tweede verhandeling:

$$\begin{aligned}
 -\frac{2\pi^2 a^2 c}{\epsilon^2} \delta &= \text{Lim}_{r=a} \int_0^\infty \{c^2 - (v_t v_{t-\tau})\} \frac{\mathfrak{Z}}{T} d\tau \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial T} \frac{\sin s T}{T} \sin sr \sin as \sin cs \tau \frac{ds}{s^2} + \\
 &+ \text{Lim}_{r=a} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty v_{t-\tau} d\tau \int_0^\infty \frac{\sin s T}{T} \sin sr \sin as \sin cs \tau \frac{ds}{s^2}. \quad \dots \quad (39)
 \end{aligned}$$

en voor volumelading volgens (48) en (50) dierzelfde verhandeling:

$$\begin{aligned}
 -\frac{2\pi^2 a^2 c}{9\epsilon^2} \delta &= \int_0^\infty \{c^2 - (v_t v_{t-\tau})\} \frac{\mathfrak{Z}}{T} d\tau \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial T} \frac{\sin s T}{T} \left(\frac{\sin as - as \cos as}{a^2 s^2} \right)^2 \sin cs \tau \frac{ds}{s^2} + \\
 + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty v_{t-\tau} d\tau \int_0^\infty \frac{\sin s T}{T} \left(\frac{\sin as - as \cos as}{a^2 s^2} \right)^2 \sin cs \tau \frac{ds}{s^2} \quad \dots \quad (40)
 \end{aligned}$$

Den grensovergang mag men in (39) pas doen plaats hebben na uitvoering der integraties, en wel omdat de veldintensiteit discontinu wordt, als men door de op de oppervlakte geconcentreerde lading heengaat. Al schijnt het ook volgens (39) en (40), als of F afhankelijk was van den aard der *geheele* voorafgaande beweging, daar de integratie gaat van $r=0$ tot $\tau=\infty$, toch komt het in werkelijkheid slechts aan op een kort voor t gelegen tijdsinterval, zooals duidelijk blijkt uit de verder uitgewerkte formules (54) en (54') mijner tweede verhandeling.

Voor *rechtlijnige* bewegingen vallen de richtingen van \mathfrak{Z} en v samen. Bekommeren wij ons nu niet om de richting der beweging, dan kunnen wij stellen: $\frac{\mathfrak{Z}}{T} = 1$ en $v_t = v$. Is verder de beweging *stationair*, dan wordt

$$v_t = v_{t-\tau} = v \quad , \quad T = v\tau \quad ,$$

zoodat weg en snelheid niet meer van t afhangen, en in (39) en (40) $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ wordt.

Wij brengen nu de constante factoren voor het integraalteeken en drukken de differentiatie naar T uit door eene differentiatie naar τ . Zoo kunnen wij eenvoudiger dan boven schrijven:

$$-\frac{2\pi^2 a^2 c}{\epsilon^2} \delta = \frac{c^2 - v^2}{v^2} \text{Lim}_{r=a} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \sin sr \sin as \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\sin v s \tau}{\tau} \sin cs \tau d\tau, \quad (41)$$

$$-\frac{2\pi^2 a^2 c}{9\epsilon^2} \delta = \frac{c^2 - v^2}{v^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left(\frac{\sin as - as \cos as}{a^2 s^2} \right)^2 \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\sin v s \tau}{\tau} \sin cs \tau d\tau. \quad (42)$$

Integreeren wij verder bij gedeelten, dan vinden wij :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\sin v s \tau}{\tau} \sin cs \tau d\tau &= -cs \int_0^\infty \sin vs \tau \cos cs \tau \frac{d\tau}{\tau} = \\ &= -\frac{cs}{2} \left\{ \int_0^\infty \sin(v+c)s\tau \frac{d\tau}{\tau} + \int_0^\infty \sin(v-c)s\tau \frac{d\tau}{\tau} \right\}. \end{aligned}$$

De eerste integraal is steeds $+\frac{\pi}{2}$, de tweede $+\frac{\pi}{2}$ of $-\frac{\pi}{2}$, naar gelang $v > c$ of $v < c$ is. Men verkrijgt dus :

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\sin v s \tau}{\tau} \sin cs \tau d\tau = \begin{cases} 0 \dots \dots v < c \\ -\frac{cs\pi}{2} \dots v > c \end{cases} \dots \dots (43)$$

Uit (41), (42) en (43) volgt nu vooreerst het bekende resultaat : *Bij stationaire beweging met infra-lichtsnelheid is $\delta = 0$, voor deze beweging wordt geen uitwendige kracht vereischt.*

Uit (42) en (43) volgt verder bij ultra-lichtsnelheid en volumelading :

$$-\frac{4\pi a^2}{9\epsilon^2} \delta = \frac{v^2 - c^2}{v^2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin as - as \cos as}{a^2 s^2} \right)^2 \frac{ds}{s}.$$

De hier voorkomende integraal is $=\frac{1}{4}$, zooals blijkt wanneer men $as = p$ stelt en op de volgende manier rekent, waarbij men bedenken moet, dat alle tusschen [] staande termen voor $p = 0$ en $p = \infty$ zelf 0 worden :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (\sin p - p \cos p)^2 \frac{dp}{p^5} &= -\left[\frac{(\sin p - p \cos p)^2}{4 p^4} \right]_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty \sin p (\sin p - p \cos p) \frac{dp}{p^3} = \\ &= -\left[\frac{\sin p (\sin p - p \cos p)}{4 p^2} \right]_0^\infty + \frac{1}{4} \int_0^\infty (\cos p (\sin p - p \cos p) + p \sin^2 p) \frac{dp}{p^2} = \\ \frac{1}{4} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \frac{\sin 2p}{p^2} - \frac{p \cos 2p}{p^2} \right) dp &= -\frac{1}{8} \int_0^\infty \frac{d}{dp} \frac{\sin 2p}{p} dp = \frac{1}{8} \left(\frac{\sin 2p}{p} \right)_{p=0} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

De door zijn eigen veld tweegebrachte, op het electron werkende kracht wordt dus bij ultra-lichtsnelheid en volumelading gegeven door:

$$4 \pi \bar{\mathfrak{F}} = - \frac{9}{4} \left(1 - \frac{c^2}{v^2} \right) \frac{\epsilon^2}{a^2} \dots \dots \dots (44)$$

Deze kracht is tegengesteld aan de beweging gericht. Om dus bij ultralichtsnelheid het electron in stationaire beweging te houden en het verlies aan energie door uitstraling te dekken, moeten wij in de richting der beweging een kracht $+ \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{9}{4} \left(1 - \frac{c^2}{v^2} \right) \frac{\epsilon^2}{a^2}$ op het electron laten werken. Deze kracht is steeds, zelfs voor $v = \infty$ nog, eindig, voor $v = c$ wordt $\bar{\mathfrak{F}} = 0$, voor $v = \infty$ wordt

$$\bar{\mathfrak{F}} = - \frac{1}{4\pi} \frac{9}{4} \frac{\epsilon^2}{a^2},$$

d.w.z. gelijk aan de electrostatische aantrekking die twee met de hoeveelheid electriciteit $\frac{3\epsilon}{2}$ geladen punten op een afstand a op elkaar uitoefenen.

De stationaire beweging bij ultra-lichtsnelheid kan weliswaar niet zonder uitwendige kracht plaats hebben, maar zij moet toch als een mogelijke beweging beschouwd worden, daar zij zelfs bij oneindige snelheid slechts een eindige kracht en voor een eindigen weg ook slechts een eindige hoeveelheid energie vereischt.

Ten slotte beschouwen wij de beweging eener oppervlaktelading bij ultra-lichtsnelheid. Uit verg. (41) en (43) volgt:

$$- \frac{4 \pi a^2}{\epsilon^2} \bar{\mathfrak{F}} = \frac{v^2 - c^2}{v^2} \text{Lim}_{r=a} \int_0^\infty \sin rs \sin as \frac{ds}{s} \dots \dots (45)$$

Om de waarde hiervan te berekenen, splitsen wij de integraal in een integraal van 0 tot ϵ en een tweede van ϵ tot ∞ , waarna wij in deze laatste het product der sinussen door een verschil van cosinussen uitdrukken:

$$\int_0^\infty \sin rs \sin as \frac{ds}{s} = \int_0^\epsilon \sin rs \sin as \frac{ds}{s} + \frac{1}{2} \int_\epsilon^\infty \cos(r-a)s \frac{ds}{s} - \frac{1}{2} \int_\epsilon^\infty \cos(r+a)s \frac{ds}{s}.$$

In de tweede en derde integraal voeren wij de nieuwe veranderlijke p in, door de substitutie $(r-a)s = p$, resp. $(r+a)s = p$. Het verschil dezer twee integralen wordt dan:

$$\frac{1}{2} \int_{\varepsilon(r-a)}^{\infty} \cos p \frac{dp}{p} - \frac{1}{2} \int_{\varepsilon(r+a)}^{\infty} \cos p \frac{dp}{p} = \frac{1}{2} \int_{\varepsilon(r-a)}^{\varepsilon(r+a)} \cos p \frac{dp}{p} = \frac{1}{2} \int_{\varepsilon(r-a)}^{\varepsilon(r+a)} \frac{dp}{p} +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\varepsilon(r-a)}^{\varepsilon(r+a)} \frac{\cos p - 1}{p} dp = \frac{1}{2} \log \frac{r+a}{r-a} - \int_{\varepsilon(r-a)}^{\varepsilon(r+a)} \sin^2 \frac{p}{2} \frac{dp}{p},$$

zoodat de geheele uitdrukking overgaat in

$$\int_0^{\infty} \sin rs \sin as \frac{ds}{s} = \int_0^{\varepsilon} \sin rs \sin as \frac{ds}{s} + \frac{1}{2} \log \frac{r+a}{r-a} - \int_{\varepsilon(r-a)}^{\varepsilon(r+a)} \sin^2 \frac{p}{2} \frac{dp}{p}.$$

Nadert nu ε tot 0, dan nadert ook de eerste en de laatste integraal tot 0, daar de te integreeren functie eindig is, terwijl het integratie-interval willekeurig klein wordt. Wij verkrijgen dus voor willekeurige waarden van r en a ($r > a$)

$$\int_0^{\infty} \sin rs \sin as \frac{ds}{s} = \frac{1}{2} \log \frac{r+a}{r-a}, \quad \dots \dots \dots (46)$$

zoodat onze integraal bij den grensovergang van r tot a positief logarithmisch ∞ wordt. Hieruit volgt dat ook de kracht die wij in de richting der beweging op het electron moeten laten werken om een eenparige beweging in stand te houden, oneindig groot moet zijn.

De stationaire beweging van een slechts op zijne oppervlakte geladen electron is bij ultra-lichtsnelheid onmogelijk, daar zij tot haar instandhouding een oneindige kracht en energie zou vereischen.

De Heer EINTHOVEN biedt voor de Boekery aan: „Onderzoekingen gedaan in het Physiologisch Laboratorium der Universiteit te Leiden,” 2^e Reeks, Deel V.

Op voorstel van den Voorzitter wordt besloten de December-vergadering te houden op 24 December a.s.

De Vergadering wordt gesloten.

E R R A T U M.

p. 364 r. 4 v.b. staat: Mede aangeboden door den Heer WENT.
lees: „ „ „ „ „ MOLL.

Corrigenda en addenda bij de mededeeling: „*Over een equivalent van het Cromer Forest-Bed in Nederland.*” pag. 243—251 van dit deel der Verslagen.

- Pag. 244, regel 17 van boven, *in plaats van* „lydiet” lees „gaderde kwartsiet”.
- „ 244, „ 22 van boven, *toe te voegen* „Het onderste gedeelte der vorming, ter dikte van 2 M. ten oosten van Tegelen, van 5 M. ten oosten van Belfeld, is echter geheel vrij van keien en bestaat uit tamelijk fijn zand”.
- „ 244, „ 4 van onderen, *in plaats van* „ongeveer 25” lees „27”.
- „ 245, „ 2 van boven, *in plaats van* „15” lees „13.5”.
- „ 245, „ 3 „ „ „ „ „ „10” „ „20”.
- „ 245, „ 11 en 12 van boven, *te schrappen* „en waarschijnlijk ook naar het oosten”.
- „ 245, „ 19 van boven, *in plaats van* „omstreeks 17” lees „19”.
- „ 245, „ 15 van onderen, „ „ „ „16” lees „14”.
- „ 245, „ 7 „ „ „ „ „ „9” „ „11”.
- „ 245, „ 2 „ „ „ „ „ „5” „ „3”.
- „ 247, „ 16 van onderen, „ „ „ „tegulensis” lees „tegu-
liensis”.
- „ 247, „ 14 van onderen, *achter* „sterken” *in te lasschen* „, zonder twijfel kunstmatigen”.
- „ 247, „ 13 van onderen, *in plaats van* „meer” lees „nagenoeg”.
- „ 248, „ 7 van boven, *achter* „Owen,” *in te lasschen* „Cervus Sedgwickii Falc. (= Cervus dicranius Nesti)”.
- „ 248, „ 7 van boven, *in plaats van* „tegulensis” lees „tegu-
liensis”.
- „ 248, „ 11 van boven, *in plaats van* „lutararia” lees „lutaria”.
- „ 248, „ 6 van onderen, *in plaats van* „eene derde soort, behoorend tot een type, dat . . . voorkomt” lees „twee andere soorten, behoorend tot typen, die . . . voorkomen”.
- „ 249, „ 2 van boven, *achter* „hertensoort” *in te lasschen* „(Cervus etueriarum, met welke die nieuwe soort van Tegelen waarschijnlijk zeer nabij verwant is)”.

- Pag. 249, regel 5 van boven, *in plaats van* „nog het meest” lees „zeer nauw”.
- „ 249, „ 7 van boven, *achter* „Pliocéen” *in te lasschen* „en van het Cromer-Bed”.
- „ 249, „ 9 van boven, *achter* „van” *in te lasschen* „*Cervus Sedgwickii*”.
-

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 24 December 1904.

Voorzitter: de Heer D. J. KORTEWEG.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

- Ingekomen stukken, p. 456.
- Aanbieding eener verhandeling van Dr. J. LORIÉ: „Beschrijving van eenige nieuwe grond-
boringen” VI, p. 456.
- Verslag van de Heeren VAN BEMMELEN en VAN DIESEN over eene verhandeling van Dr. J.
LORIÉ, p. 457.
- S. TYMSTRA Bz.: „Over de door W. MARCKWALD uitgevoerde asymmetrische synthese van
het optisch actieve valerianaanzuur”. (Aangeboden door de Heeren H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM
en J. M. VAN BEMMELEN), p. 459.
- A. H. W. ATEN: „Over het stelsel pyridine en methyljodide”. (Aangeboden door de Heeren
H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM en J. M. VAN BEMMELEN), p. 462.
- J. J. BLANKSMA: „Over het trinitroveratrol”. (Aangeboden door de Heeren H. W. BAKHUIS
ROOZEBOOM en J. M. VAN BEMMELEN), p. 464.
- J. BOËSEKEN: „De reactie van FRIEDEL en CRAFTS”. (Aangeboden door de Heeren A. F.
HOLLEMAN en J. M. VAN BEMMELEN), p. 468.
- S. BLOK: „De aansluiting van het driehoeksnet der eerste orde van Zuid-Sumatra aan dat
van Sumatra's Westkust”. (Aangeboden door de Heeren J. A. C. OUDEMANS en J. P. VAN DER
STOK), p. 471. (Met een kaart).
- W. KAPTEYN: „Over eene reeks met Besselsche functies”, p. 477.
- P. H. SCHOUTE: „Over de regels van GULDIN in de meerdimensionale ruimte”, p. 484.
- CH. M. VAN DEVENTER: „Over het smelten van drijvend ijs”. (Aangeboden door de Heeren
J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 490.
- H. A. LORENTZ: „De beweging der electronen in de metalen” I, p. 493.
- J. E. VERSCHAFFELT: „Over den invloed van verontreinigingen op de kritische verschijnselen
van enkelvoudige stoffen en de verklaring van de proeven van TEICHNER”. (Aangeboden door
de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en J. D. VAN DER WAALS), p. 508. (Met één plaat).
- P. ZEEMAN en J. GEEST: „Dubbele breking in een magnetisch veld in de nabijheid van
magnetisch gesplitste absorptielijnen”, p. 516. (Met één plaat).
- J. A. C. OUDEMANS: Mededeeling bij de aanbieding van het werk getiteld: „Détermination
de la latitude et d'un azimut aux stations Oirschot, Utrecht, Sambeek, Wolberg, Harikerberg,
Sleen, Schoorl, Zierikzee, Terschelling (phare Brandaris), Ameland, Leeuwarden, Urk et Gronique,”
p. 520.
- Aanbieding van boekgeschenken, p. 523.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en
goedgekeurd.

Ingekomen is :

1°. Bericht van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, RAUWENHOFF, SCHOUTE, KAMERLINGH ONNES, BAKHUIS ROOZEBOOM, E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en HOLLEMAN, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 3 December 1904 met het verzoek zoo mogelijk het antwoord te bespoedigen op zijne missive betreffende het botanisch congres te Weenen.

Aan den Minister is medegedeeld, dat geen der leden in de gelegenheid is het congres bij te wonen, maar dat der Akademie bekend is, dat de Heeren Dr. J. P. LOTSY en Dr. J. W. C. GOEDHART te Leiden en waarschijnlijk ook Dr. J. TH. VALETON het congres zullen bezoeken. Op het schrijven van het Bestuur van het Internationaal botanisch Congres, in de vorige vergadering medegedeeld, is op advies van de botanische leden geantwoord, dat de Akademie tot haar leedwezen niet zal kunnen gebruik maken van het recht, haar toegestaan, om een stem uit te brengen bij de besluiten op het genoemde Congres te nemen, daar geen van de leden der Akademie in de gelegenheid is het Congres bij te wonen.

3°. Circulaire omtrent de Wereldtentoonstelling in 1905 te Luik te houden. Voor kennisgeving aangenomen.

4°. Circulaire over eene nieuwe uitgave van de „Atlas international des nuages.” Ter kennisneming van de leden neergelegd.

5°. Circulaire van het XV^e Congres international de Médecine van 19—26 April 1906 te Lissabon te houden. Ter kennisneming van de leden neergelegd.

6°. Circulaire van het Comité géologique de Russie mededeelende het overlijden van den Heer A. MICHALSKI. Is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

Voorts is er ingekomen een verhandeling van den Heer Dr. J. LORIÉ: „Beschrijving van eenige nieuwe grondboringen” VI. De Voorzitter heeft als Commissie voor de beoordeeling benoemd de Heeren J. M. VAN BEMMELLEN en G. VAN DIESEN. Daar deze Commissie reeds gereed is brengt zij het volgende Verslag uit.

Geologie. — De Heer VAN BEMMELEN brengt ook namens den Heer VAN DIESEN het volgende Verslag uit over de Verhandeling van Dr. LORIÉ „*Beschrijving van eenige nieuwe grondboringen*”.

Dr. LORIÉ geeft in deze verhandeling op nieuw⁽¹⁾ de uitkomsten van zijn onderzoek van een zestiental boringen in de duinstreek bij den watervang van de Amsterdamsche Waterleiding, waarvan negen tot eene diepte van 100—165 M., en zes tot eene diepte van ± 40 M.; en ten slotte nog van eene boring van 175 M., tusschen Hilversum en Laren (nabij het pompstation Westerveld).

In het eerste gedeelte der verhandeling worden de verschillende grondlagen, die hij onderscheiden heeft, op de vroeger door hem gevolgde wijze beschreven, en de daarin gevonden fossielen en erratische gesteenten vermeld. Uit dat onderzoek wordt afgeleid dat onder het alluvium Eemlagen (het Eemstelsel zooals het door Prof. HARTING genoemd is) voorkomen, aanvangende op eene diepte van gemiddeld 23—25 M., en eindigende op een gemiddelde diepte van 50 M. Daaronder is in drie der diepe boringen de aanwezigheid van keileem goed gestaafd, en verder grinddiluvium gevonden.

In het tweede gedeelte geeft Dr. LORIÉ, op grond van zijne uitkomsten bij dit onderzoek en bij de talrijke vroeger door hem onderzochte boringen in Nederland verkregen (ontleend aan 14 van zijne hier aangehaalde verhandelingen), eene kritische beschouwing van de vraagpunten, waarover meer of minder een meeningsverschil bestaat tusschen hem en andere onderzoekers, zooals Prof. DUBOIS en ook den Kapitein Ingenieur VAN DEN BROEK.

Die verschillen behoeven geene verwondering te baren. Want zij betreffen de vragen: Uit welken tijd is eene laag afkomstig, uit den ouderen of den jongereu ijstijd of den interglacialen tijd? Heeft er vóór of na dien tijd eene daling plaats gehad? Is eene laag daardoor aan de werking van het zeewater al of niet onttrokken? Behoort eene laag tot eene diepe geul die aangevuld is geworden? Beantwoordt eene laag soms aan eene strandvorming in het diluvium? Als schelpen en keitjes nevens elkander gevonden worden, moeten dan de schelpen of moeten dan de keitjes den doorslag geven bij de determinatie der laag als strandvorming of als diluvium? Bestaat eene laag al of niet uit bestanddeelen eener oudere laag, die door eene alluviale zee of door zoet water zijn omgewerkt? Welke kracht kan het water uitgeoefend hebben ter verplaatsing van erratische keien? enz. enz. Over het antwoord op al deze vragen kunnen de meeningen verschillen.

Dr. LORIÉ maakt nog op eene andere onzekerheid opmerkzaam,

(1) Zie No. 32, 29, 25, 22, 16 der Mededeelingen van de Geol. Comm.

die het onderzoek van boormonsters bemoeielijkt. Indien slechts een enkel schelpstukje of keitje in een boormonster wordt gevonden, dan blijft de mogelijkheid bestaan, dat dit verdwaald is uit hoogere lagen door de boring zelve.

De vraagpunten, die door Dr. LORÉ kritisch beschouwd worden zijn deze: Komt de keileem op eene zekere diepte veelvuldig voor in Noord-Holland? Welke beteekenis moet gehecht worden aan het voorkomen van schelpjes en keitjes nevens elkander? Welke boven- en benedengrenzen hebben de lagen van het Eemstelsel? Hoe moeten wij de driedeeling van het Grinddiluvium (de keileem, de grove en de fijne afdeeling) aannemen?

Omtrent het eerste punt bestaat weinig of geen verschil, sinds Dr. LORÉ thans ook bij deze boringen keileem in N.-Holland heeft aangetroffen. Het gaf hem aanleiding om de monsters leem uit vroegere boringen in N.-H. (Diemerbrug, Alkmaar, Aalsmeer, IJmuiden, Sloten, Vogelenzang) nog eens nauwkeurig na te gaan, maar slechts één dier monsters kon als keileem beschouwd worden. Wat het tweede vraagpunt betreft, blijft hij bij zijne meening, dat, als genoegzame schelpjes aanwezig zijn, uit het daarnevens voorkomen van keitjes niet tot diluvium mag besloten worden, maar wel tot eene strandvorming, die zoowel in oudere als in jongere formatiën voorkomt. Wat aangaat het derde punt, terwijl Prof. DUBOIS de grenzen van het Eemstelsel zeer onbestemd acht, meent Dr. LORÉ de bovenvermelde grenzen te mogen aannemen en geeft de meest kenschetsende schelpen daarin aan. Het vierde vraagpunt levert de meeste meningsverschillen op, doch deze laten zich moeielijk samenvatten. Wij vermelden slechts, dat volgens Dr. LORÉ de gevonden lagen leeren dat er geen sprake is in deze streken van klei- of leemlagen die zich onafgebroken voortzetten. Het kan daarom niet in twijfel getrokken worden, dat de regenval in onmiddellijk verband staat met het water in den bodem, en wel tot eene diepte van meer dan 100 M. Deze beschouwing is van zeer veel belang voor het vraagstuk der watervoorziening uit de duinen.

Aan het slot komt eene Tabel voor, die een overzicht geeft van de grenzen en dus van de dikte der onderscheidene lagen, benevens eene terreinteekening en eene kaart der boorprofielen.

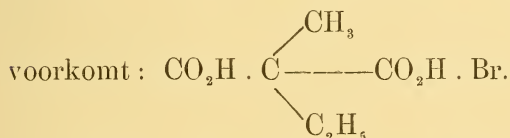
Aangezien deze verhandeling weder eene nieuwe bijdrage levert tot de kennis van de diepere lagen van onzen bodem, en daarin vele belangrijke vraagpunten besproken worden, zoo stellen wij aan de Afdeeling voor om de Verhandeling in hare Werken op te nemen, als No. 33 van de Mededeelingen verzameld door de Geologische Commissie.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt eene mededeeling aan van den Heer S. TIJMSTRA Bz.: „*Over de door W. MARCKWALD uitgeoefde asymmetrische synthese van het optisch actieve valerianaanzuur.*”

(Mede aangeboden door den Heer J. M. VAN BEMMELEN.)

Zooals bekend is, heeft MARCKWALD ¹⁾ onlangs actief valerianaanzuur gemaakt op eene wijze, die hem, naar hij meende, het recht gaf, deze synthese als de eerste zuiver asymmetrische te beschouwen. Tegen deze opinie verscheen reeds kort daarop een stuk van de hand der Heeren COHEN en PATTERSON ²⁾, waarin op grond der ionentheorie ontkend wordt, dat de synthese asymmetrisch zou zijn. Later heeft MARCKWALD ³⁾ zijn standpunt verdedigd op zoodanige wijze, dat eene verdere tegenspraak niet gevolgd is.

Waar nu de theoretische zijde der kwestie als opgelost beschouwd mocht worden, daar kwam het mij voor, dat, uit een experimenteel oogpunt beschouwd, de synthese wel voor eenige verbetering vatbaar zou zijn. MARCKWALD toch gaat uit van het methylaethylmalonzuur; hiervan wordt het zure brucinezout gemaakt, waarin nu een asymmetrisch koolstofatoom in de rest van het methylaethylmalonzuur



De beide mogelijke vormen zullen, door den invloed van het actieve brucine, niet in gelijke hoeveelheden ontstaan, en bij indampen der oplossing zal, daar hier eene omzetting tusschen de beide vormen door de ionisatie mogelijk is, zich slechts één zout afscheiden, omdat gedurende het uitkristalliseeren het evenwicht tusschen de beide vormen voortdurend hersteld wordt.

Het aldus verkregen actieve brucinezout wordt nu op 170° verhit, waardoor koolzuur afgesplitst en het brucinezout van methylaethylazijnzuur gevormd wordt. Daar deze afsplitsing van koolzuur uitsluitend of nagenoeg uitsluitend zich af zal spelen aan de vrije carboxylgroep, resulteert dus een brucinezout van actief methylaethylazijnzuur, d. i. van valerianaanzuur. Door aanzuren met verdund zwavelzuur, overdistilleeren met stoom en rectificeeren verkreeg

1) Ber. 37, 349.

2) Ber. 37, 1012.

3) Ber. 37, 1368.

MARCKWALD aldus een praeparaat, dat in de decimeterbuis eene draaiing vertoonde van $[\alpha]_D = -1^\circ.7$, hetwelk correspondeert met nog geen 10% l-valeriaanzuur. MARCKWALD schrijft deze slechte opbrengst aan actief materiaal toe aan de bij de afsplitsing van koolzuur gebruikte hooge temperatuur (170°), waarbij verspringingen niet uitgesloten zijn.

Het vraagstuk kwam mij voor, van te groot belang te zijn, om niet te trachten, door eene wijziging in de methode van werken aan te brengen, eene betere opbrengst aan actief valeriaanzuur te verkrijgen. Ik ging hierbij uit van het idee, dat het mogelijk zou moeten zijn, de temperatuur, waarbij het koolzuur wordt afgesplitst, aanzienlijk te verlagen, waardoor dan eene oorzaak voor atoomverspringingen uit den weg was geruimd.

Voor de voorloopige proeven over deze vraag gebruikte ik het methylaethylmalonzuur zelf, hetwelk bij 118° smelt, en waarvan in de literatuur wordt opgegeven, dat het bij 180° snel zijn koolzuur verliest. In het algemeen toch verliezen zuren, welke twee carboxylgroepen aan één koolstofatoom gebonden bezitten, bij verhitting boven hun smeltpunt koolzuur; men vindt evenwel zelden in de literatuur gevallen, waarbij deze temperatuur nader wordt aangegeven, en zeer dikwijls wordt, althans voor de laag smeltende stoffen, daarvoor de uniforme temperatuur van 170° à 180° genomen.

Het methylaethylmalonzuur nu werd in een buis, verbonden met een kwikbarometer en verder in verbinding staande met een kwikluchtpomp, in vacuo verhit op 130° , waarbij reeds vrij snelle ontleding optrad; de druk steeg hierbij boven 1 atmosfeer. Reeds bij 100° heeft de ontleding plaats, wanneer men maar zorg draagt, voortdurend te evacueeren; de massa wordt hierbij eerst gedeeltelijk vloeibaar door het ontstane valeriaanzuur, en men kan nu duidelijk het koolzuur zich zien ontwikkelen aan de in de vloeistof nog gesuspendeerde vaste deeltjes van het methylaethylmalonzuur. Men kan dus niet spreken van een bepaald ontledingspunt van zuren met twee carboxylgroepen aan één koolstofatoom. De opgave, dat deze stoffen door verhitting boven hun smeltpunt koolzuur verliezen, is dus niet alleen zeer vaag, maar ook ten deele onjuist, daar het methylaethylmalonzuur ook in vasten toestand reeds CO_2 verliest.

Terwijl het echter dagen duurt, voordat het methylaethylmalonzuur bij gewonen druk en 100° ontleed is, is dit proces in eenige uren afgelopen, wanneer voortdurend geëvacueerd wordt. Het eenvoudigst zou dit te verklaren zijn, wanneer men aannam dat deze ontleding een dissociatieverschijnsel is. Bij elke temperatuur zou dan eene bepaalde dissociatiespanning heerschen, en wanneer nu door

voortdurend evacueeren gezorgd wordt, dat een der ontledingsproducten telkens wordt weggevoerd, dan is het duidelijk, dat ten slotte alles ontleed moet worden. Het eenige verschil tusschen het hier beschreven verschijnsel en het klassieke voorbeeld van Ca CO_3 is dit, dat het nog niet gelukt is, om uit een zuur met een carboxylgroep door verhitten met koolzuur een zuur met twee carboxylgroepen te verkrijgen. Dit kan verklaard worden òf door de aanname van valsche evenwichten òf door de onderstelling, dat de snelheid van de wedervereeniging der ontledingsproducten uiterst gering is. Ik stel mij voor, over dit punt nadere onderzoekingen in te stellen.

Waar dus nu bewezen was, dat de ontledingstemperatuur van zuren met twee carboxylgroepen aan één koolstofatoom belangrijk verlaagd kan worden door drukvermindering, daar was het duidelijk, dat ook de synthese van het l-valeriaanzuur verbeterd zou kunnen worden door de koolzuurafsplitsing in vacuo te laten geschieden, althans wanneer de opvatting van MARCKWALD, dat n.l. de slechte opbrengst aan actief materiaal aan atoomverspringingen te wijten is, juist was ¹⁾.

Ik heb nu het zure brucinezout van methylaethylmalonzuur onder voortdurend evacueeren verhit op 120° , dat is ver beneden zijn smeltpunt, 155° , en nadat de geheele massa taaivloeibaar geworden was en zich geen koolzuur meer ontwikkelde, het product in kokend water opgelost, de oplossing aangezuurd met verdund zwavelzuur, en het valeriaanzuur met waterdamp overgedestilleerd. Het distillaat werd met aether uitgeschud, de aetherische oplossing gedroogd, daarna de aether verdampt, en het achterblijvende valeriaanzuur gerectificeerd, waarbij het kookpunt 174° — 176° werd gevonden. De draaiing hiervan werd bepaald op $[\alpha]_D = -4.3$, wat correspondeert met 25,8% l-valeriaanzuur. Het maakte geen verschil, wanneer ik van het distillaat de eerst of de laatst overgegene fractie nam.

Hiermee is dus de synthese van het l-valeriaanzuur aanzienlijk verbeterd, en het is mogelijk, de opbrengst aan actief zuur nog te verhoogen, door bij nog lagere temperatuur te werken, daar ik geconstateerd heb, dat reeds bij 100° het zure brucinezout van methylaethylmalonzuur een tamelijk groote ontledingsspanning bezit.

Amsterdam, Org. Chem. Lab.

¹⁾ Dat eene verlaging van temperatuur, waarbij het koolzuur wordt uitgedreven, alléén niet in staat is, de synthese te verbeteren, is gemakkelijk in te zien. De snelheid van de atoomverspringingen zou dan wel is waar sterk verminderd zijn, doch ook de snelheid der koolzuurafsplitsing, en het zou daardoor veel langer duren, voordat de stof geheel ontleed was. Het evacueeren dient dus hier alleen als versnelling van het ontledingsproces.

Scheikunde. De heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt namens den heer Dr. A. H. W. ATEN eene mededeeling aan: „*Over het stelsel pyridine en methyljodide.*”

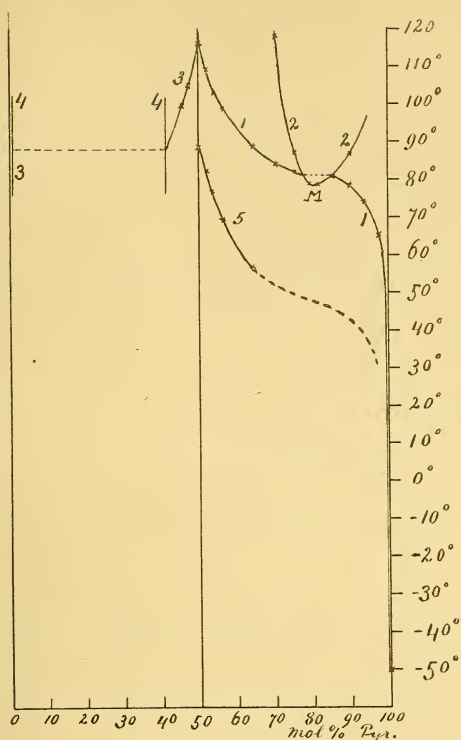
(Mede aangeboden door den Heer J. M. VAN BEMMELEN).

Onder de binaire stelsels die tot dusver in gasvormigen vloeibaren en vasten toestand bestudeerd zijn, komen ook vele voor, waarin chemische verbindingen optreden, uit de beide componenten gevormd. In de meeste dier gevallen waren die verbindingen van geringe stabiliteit, zoodat de condities van vorming en ontleding binnen een gemakkelijk bereikbaar gebied van temperaturen gelegen waren.

Bij de meer stabiele chemische verbindingen zijn echter die condities van gradueele vorming en ontleding minder gemakkelijk te bereiken. Toch belooft hunne studie een dieper inzicht in de veranderingen welke een stelsel ondergaat, wanneer daarin chemische verbinding tot stand komt. Bij de stelsels die zeer stabiele verbindingen vormen kan zoodanige vergelijking bij lagere temperatuur des te eerder geschieden, omdat dan gewoonlijk de reactiesnelheden zoodanig verkleind zijn dat het stelsel naar willekeur bij aanwezigheid en bij afwezigheid der verbinding kan bestudeerd en deze beide gevallen derhalve kunnen vergeleken worden.

Een eerste voorbeeld, waarin dit althans ten deele bereikt kon worden, levert het stelsel pyridine en methyljodide. Deze beide stoffen kunnen zich verbinden tot eene quaternaire ammoniumverbinding $C_5H_5N \cdot CH_3I$ welke vrij groote stabiliteit bezit. Bij 60° en hoogere temperatuur wordt deze verbinding in de mengsels der beide vloeistoffen snel gevormd, bij gewone temperatuur geschiedt die vorming vrij langzaam, bij afkoeling uiterst langzaam. Men zou dus ongetwijfeld uit de vloeibare mengsels bij snelle afkoeling naast elkaar vast pyridine (smpt. 50°) en vast methyljodide verkrijgen (smpt. beneden 80°). Al die vloeistofmengsels waarin nog geene verbinding zich gevormd heeft zijn bovendien homogeen.

Bewaart men echter de vloeibare mengsels eenigen tijd, dan wordt onder aanzienlijke warmteontwikkeling de verbinding gevormd en deze scheidt zich tot een van de temperatuur en de mengingsverhouding afhankelijk bedrag bij gewone temperatuur in vasten toestand af. Bij hoogere temperaturen kan zij echter aanleiding geven tot twee vloeistofflagen. Het merkwaardige gedrag dat zich daarbij vertoont wordt door nevensgaande figuur verduidelijkt, waarin de samenstelling der mengsels uitgedrukt is in molekuulprocenten pyridine.



Beschouwen wij eerst de rechter helft der figuur. Daarin is 1 de smelt- of oplosbaarheidslijn der verbinding, beginnende bij het smeltpunt der verbinding (117°) en voortlopende tot een eutectisch punt zeer nabij 't smeltpunt van pyridine, daar bij lagere temperaturen de verbinding zeer weinig in pyridine oplosbaar is.

De lijn 1 is echter bij 81° van 77.5 — 85.5 mol. % pyridine onderbroken, naardien tusschen beide concentraties geene homogene vloeistof bestaanbaar is. Lijn 2 sluit namelijk met zijne beide takken, die in M samenkomen een ontmengingsgebied in, dat naar hogere temperatuur zich wijder uitstrekt. De gesmolten verbinding is dus ook slechts beperkt mengbaar met pyridine.

Eerst beneden M, 78° , heerscht totale mengbaarheid. Dit punt is echter weder alleen te bereiken wanneer de vaste verbinding zich niet afscheidt, hetgeen tijdelijk gemakkelijk te verwezenlijken is.

In de linkerhelft der figuur treffen wij nagenoeg dezelfde reeks van verschijnselen aan; 3 is hier de oplosbaarheidslijn, 4 de beide takken der ontmengingslijn. Het ontmengingsgebied is hier zeer groot, bij 88 van ± 0.5 tot 41 mol. % pyridine, terwijl geene verandering bij hogere temperatuur kon geconstateerd worden, en derhalve ook geen kritisch mengpunt bekend is.

De lijn 5 is de oplosbaarheidslijn van een metastabielen vorm der vaste verbinding. Deze kon echter alleen bij overmaat van pyridine gedeeltelijk worden bepaald. Bij grooter overmaat trad de stabiele vorm te gemakkelijk op. Ware de lijn voort te zetten geweest dan zou zij in onderscheiding van 1 continu moeten zijn, omdat zij geheel beneden het mengpunt M gelegen is.

Aan de zijde der mengsels rijker aan CH_3I kon zij niet bepaald worden daar deze zeer langzaam kristalliseeren en dan treedt steeds de stabiele vorm op.

Het merkwaardigst resultaat van het onderzoek is echter wel dat twee vloeistoffen, die in alle verhoudingen mengbaar zijn, door de vorming

eener chemische verbinding twee stel coëxisterende vloeistoffen geven kunnen. Bij de vorming van minder stabiele verbindingen is iets dergelijks nog nooit waargenomen, en de meer bekende stabiele verbindingen zijn uit dit oogpunt tot nog toe niet bestudeerd, gedeeltelijk ook daarom, omdat zoo dikwijls de vergelijking van verbonden en onverbonden vloeistoffen zoo moeielijk wordt door de groote verschillen tusschen de smeltpunten der componenten.

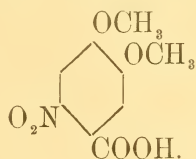
Het scherpe ontmoetingspunt der smeltlijnen 1 en 3 bij 117° en de sterke rijzing van het kookpunt na de verbinding (pyridine 116°, CH₃I 42°, verbonden vloeistof 270°) wijzen er op, dat ook in vloeibaren staat de verbinding zeker grootendeels ongedissocieerd is.

Wellicht hangt de partieele mengbaarheid dezer verbonden vloeistof met hare componenten ook wel samen met het feit dat de chemische natuur der verbinding zoo sterk van die der componenten afwijkt. Ook op dat punt is onze kennis echter thans uiterst gering.

Scheikunde. — De heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt eene mededeeling aan namens Dr. J. J. BLANKSMA: „*Over het trinitroveratrol*”.

(Mede aangeboden door den Heer J. M. VAN BEMMELEN.)

Vroeger ¹⁾ is reeds medegedeeld, dat door nitratie van den dimethylether van het 3.5 dinitropyrocatechine de dimethylether van het trinitropyrocatechine ontstaat. Daar de hier ingevoerde nitrogroep zoowel op de plaats 4 als op 6 kon zijn ingevoerd, was het noodig, de constitutie van dit lichaam nog te bepalen. De stof, die bij 146°—147° smelt, is identiek met het trinitroveratrol, dat reeds door TIEMANN en MATSMOTO ²⁾ is beschreven, en verkregen door nitratie van veratrol (dimethylether van pyrocatechine) of van veratrumzuur. TIEMANN en MATSMOTO hebben aangetoond, dat het veratrumzuur bij nitratie geeft nitroveratrol en nitroveratrumzuur. Later hebben ZINCKE en FRANCKE ³⁾ bewezen, dat het nitroveratrumzuur, ontstaan door nitratie van veratrumzuur, de volgende constitutie heeft:



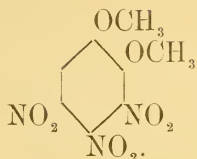
Nu geeft dit nitroveratrumzuur bij verdere nitratie met rookend

¹⁾ Recueil 23, 114.

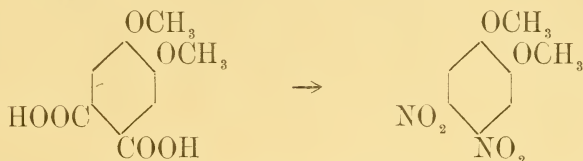
²⁾ Ber. 9, 937.

³⁾ Ann. der. Chem. 293, 175.

salpeterzuur trinitroveratrol, zoodat de constitutie van het trinitroveratrol is



Ook het dinitroveratrol, dat bereid is door nitratie van veratrol ¹⁾ en van het metahemipinezuur ²⁾ en dat derhalve aldus is gevormd



geeft bij verdere nitratie hetzelfde trinitroveratrol, waaruit ook weer volgt voor de constitutie van dat lichaam $C_6H(OCH_3)_2(NO_2)_3$ 1, 2, 3, 4, 5.

Nu is het trinitroveratrol, verkregen uit veratrol, identiek met dat uit den dimethylether van 3.5 dinitropyrocatechine; de smeltpunten zijn van beide stoffen gelijk; een mengsel van de beide stoffen vertoont geen smeltpuntsverlaging, terwijl door inwerking van alcoholische ammoniak of van methylalcoholische $NaOCH_3$ uit beide stoffen dezelfde reactieproducten worden verkregen. We zien dus, dat bij nitratie van 3.5 dinitroveratrol de nitrogroep tusschen de beide aanwezige nitrogroepen wordt ingevoerd.



TIEMANN en MATSMOTO ³⁾ hebben reeds aangetoond, dat het trinitroveratrol gemakkelijk met alcoholische ammoniak inwerkt. Zij hebben echter, daar zij vermoedden, dat de beide OCH_3 groepen door NH_2 werden vervangen, het produkt dat bij deze reactie ontstaat, niet kunnen identificeren.

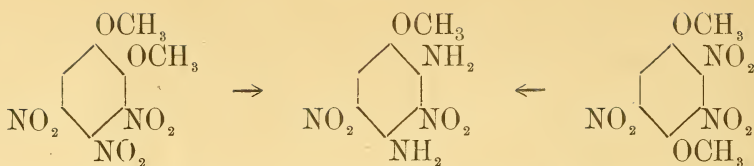
Bij herhaling van de proef bleek mij, dat ammoniumnitriet optreedt, zoodat ook een der NO_2 groepen door NH_2 is vervangen. Het gevormde lichaam smelt bij 247° en is identiek met de later door NIETZKI en KURTENBACHER ⁴⁾ verkregen verbinding welke ontstaat bij inwerking van alcoholische ammoniak op trinitrohydrochinondimethylether.

¹⁾ BRÜGGEMANN, Journ. f. prakt. Chem. (2). 53, 252.

²⁾ ROSSIN, Monatsh. f. Chem. 12, 491. HEINISCH, ibid. 15, 229.

³⁾ Ber. 9, 937; 11, 131.

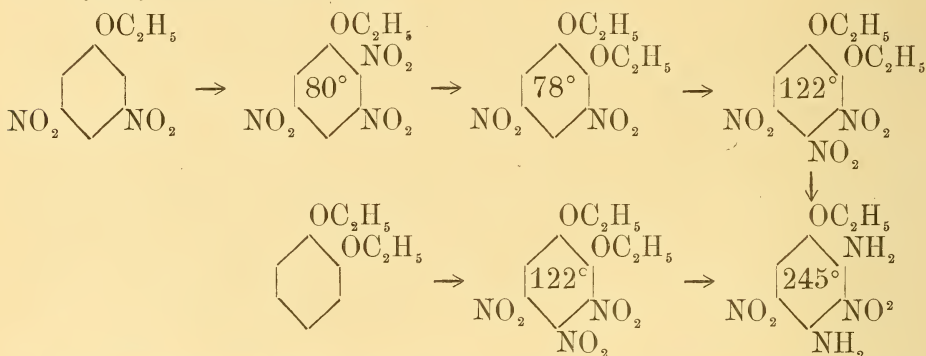
⁴⁾ Ber. 25, 282.



Ook hieruit blijkt, dat in het trinitroveratrol de NO_2 groepen op de plaatsen 3, 4 en 5 staan.

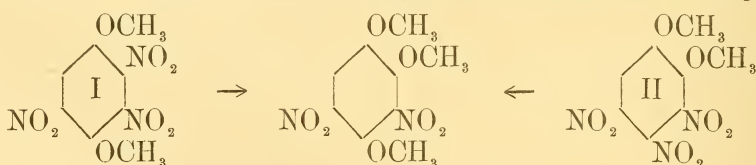
Behandelt men dit diamidoanisol met KOH dan verkrijgt men den monomethylether van het dinitrotrioxybenzol, een lichaam dat reeds door NIETZKI en KURTENBACHER is verkregen uit het zooeven genoemde inwerkingsproduct van trinitrohydrochinondimethylether en ammoniak.

Op geheel analoge wijze werd hetzelfde resultaat verkregen voor de oxyethylverbinding, aldus :



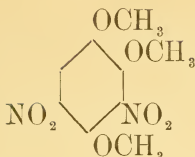
Dit laatste lichaam is reeds door NIETZKI¹⁾ verkregen door behandeling van trinitrohydrochinondiethylether met alcoholische ammoniak.

Hoewel hiermede de constitutie van het trinitroveratrol en van de trinitropyrocatechinediethylether wel voldoende scheen te zijn vastgesteld, heb ik toch nog getracht een bewijs bij te brengen door behandeling van deze stoffen met natriummethylaat of ethylaat. Men mocht toch verwachten, dat de volgende overgangen zouden optreden.



Behandelt men nu de trinitrohydrochinondimethylether (I) met NaOCH_3 in absolute methylalcohol dan ontstaat bij toevoeging van iedere druppel NaOCH_3 -oplossing een bruine kleur, die bijna onmiddellijk weer verdwijnt. Na gedeeltelijke verdamping van den methylalcohol ontstaan kristallen, die bij 92° smelten; dit is volgens de analyse de trimethylether van het dinitrooxyhydrochinon

¹⁾ Ann. der Chem. 215, 153.



Door alcoholische ammoniak worden in dit lichaam gemakkelijk twee OCH_3 's door NH_2 vervangen en ontstaat hetzelfde dinitrodiamidoanisol als dat door alcoholische ammoniak uit trinitrohydrochinondimethylether wordt verkregen.

Het trinitroveratrol (II) gedraagt zich echter tegenover Na OCH_3 geheel anders. Voegt men aan de methylalcoholische oplossing natriummethylaat toe, dan ontstaat een paarsroode kleur, die eerst na eenige minuten op het waterbad verdwijnt, waarna de vloeistof geel wordt. Bij bekoeling zetten zich mooie gele kristallen af: sp. 152° . Deze kristallen worden door alcoholische ammoniak en door kali niet aangetast.

In de moederloog bevindt zich behalve Na NO_2 een weinig van een lichaam, dat misschien identiek is met dat uit de trinitrohydrochinondimethylether.

Ook door inwerking van cyaankalium op trinitroveratrol in methyl- of ethylalcoholische oplossing ontstaan fraaie kristallijne verbindingen, waarbij zoowel in methyl- als in ethylalcohol telkens twee verschillende stoffen optreden.

Het is waarschijnlijk, dat het trinitroveratrol (evenals andere nitrolichamen) eerst Na OCH_3 of KCN addeert,¹⁾ en dat daarna het additieprodukt door verdere omzetting aanleiding geeft tot de vorming der vermelde producten.

Dat de reactie hier een eenigszins ander verloop heeft dan gewoonlijk, moet vermoedelijk worden toegeschreven aan de aanwezigheid van drie nitrogroepen naast elkaar in de benzolkern. Ik hoop, dat een nadere studie hieromtrent iets meer zal leeren.

AMSTERDAM, Dec. 1904.

1) LORING JACKSON. Amer. Chem. Journ. **29**, 89, (1903).

LOBRY DE BRUYN. Rec. **23**. 47.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. BÖESEKEN over: „*De reactie van FRIEDEL en CRAFTS*”.

Mede aangeboden door den Heer J. M. VAN BEMMELEN.

Zooals bekend is, heeft de reactie van FRIEDEL en CRAFTS niet altijd hetzelfde verloop. Nu eens blijken sporen van den katalysator voldoende te zijn om groote hoeveelheden van het gewenschte produkt te bereiden, dan weder zijn hoeveelheden van $\frac{1}{30}$ à $\frac{1}{10}$ molekuul op equimoleculaire hoeveelheden der te condenseeren produkten noodig. Bij zeer vele condensaties is het gebleken, dat minstens één mol. AlCl_3 vereischt wordt om een zoo hoog mogelijk rendement te verkrijgen.

Ook is deze reactie afhankelijk van tal van omstandigheden, die òf samenhangen met een secundaire werking van het aluminiumchloride (Recueil XXII p. 302) op een der bij de inwerking aanwezige stoffen, òf in verband staan met den aard dezer stoffen zelf.

Het komt mij voor, dat het aantal verschillende syntheses sedert de ontdekking der katalytische werking van 't aluminiumchloride groot genoeg is, om, door een eenigszins systematische beschouwing daarvan tot een verklaring van de oorzaak van dit afwijkend gedrag te kunnen komen.

Hierbij dient vooropgesteld te worden dat het aluminiumchloride alleen dan zijn werking kan uitoefenen, wanneer het in staat is het chloride (of anhydride) te activeeren; d. w. z. het moet òf vrij òf los gebonden in de reactie-massa aanwezig zijn.

Deze reactie-massa bevat behalve den katalysator (en eventueel een of ander verdunningsmiddel, zooals CS_2): A het chloride (of anhydride), B het benzolderivaat, C het gevormde produkt. Wanneer wij nu de bovengenoemde secundaire ontledingsverschijnselen buiten beschouwing laten dan kunnen zich de volgende, gevallen voordoen:

I. Het aluminiumchloride verbindt zich met *geen* dezer stoffen of de verbindingen zijn bij de reactie-temperatuur geheel gedissocieerd.

Wij hebben dan te doen met de katalytische werking in den zuiversten vorm. Een spoor aluminiumchloride zal voldoende zijn om onbepaalde hoeveelheden A en B zich tot C te doen omzetten.

Dit is bijvoorbeeld het geval bij de chloreering (bromeering) van benzol bij gewone temperatuur. Wanneer men zorg draagt voor zorgvuldige droging der reageerende stoffen kan met 0,5 gram aluminiumchloride meer dan een kilogram chloor(broom)benzol bereid worden, zonder dat de hoeveelheid van den katalysator zichtbaar verminderd is.

Ook bij de bereiding van diphenylmethaan uit benzylchloride en benzol kan men met uiterst geringe hoeveelheden van den katalysator

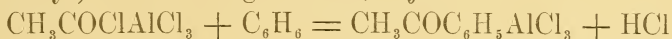
werken, wanneer men het sterkverdunde benzylchloride in een groote overmaat benzol laat vloeien en de reactie-massa van tijd tot tijd door versch benzol vervangt; toch kan men de ontleding van 't benzylchloride door den katalysator niet geheel voorkomen (Recueil XXIII p. 98).

II. Het aluminiumchloride verbindt zich met het chloride (A) tot een min of meer stevig additie-produkt.

Wanneer deze verbindingen zeer stabiel zijn, kan de reactie geheel uitblijven: het fosforoxychloride verbindt zich onder sterke warmte-ontwikkeling met een molekuul aluminiumchloride (CASSELMANN, Ann. 98 p: 220), dit produkt wordt *niet* door benzol of toluol aangegrepen. In de overige gevallen gaat de reactie wel door, en heeft dan een zeer gunstig verloop. Daar het aluminiumchloride zich eveneens met het gevormde produkt (C) vereenigt, is één molekuul van den katalysator op equimolekulaire hoeveelheden der componenten noodig en voldoende.

Hierbij zijn nu nog de volgende catagoriën te onderscheiden:

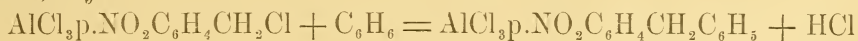
a. de katalysator is gebonden dicht bij de plaats waar de condensatie plaats heeft, d. i. bij alle syntheses van ketonen, sulfonen enz. uit de desbetreffende zuurchloriden, waar hij aan de carbonyl-groep (sulfonyl) wordt vastgehouden, bijv.



(Recueil XIX p. 20).

Vermoedelijk moeten hier ook ondergebracht worden de syntheses van GATTERMANN B. 1897 p. 1622 waarbij uit CO en HCl de aromatische aldehyden worden opgebouwd en uit carbaminechloride (ClCONH₂) B. 1899 p. 1117 de amidén der aromatische carbonzuren worden gewonnen;

b. het aluminiumchloride is gebonden wel aan 't chloride, maar niet in de nabijheid van de plaats waar de condensatie plaats vindt, bijv.



(Recueil XXIII p. 103),

de katalysator is hier gebonden aan de nitro-groep.

III. Het aluminiumchloride vereenigt zich met het benzolderivaat (B) en niet of moeielijk met het chloride (A).

Hierbij kan de groep in het benzol, waarmede de katalysator zich verbonden heeft, de activiteit van de overige H-atomen vermeerderen (*a*) of verminderen (*b*).

a. In het eerste geval kan de reactie wel plaats hebben, zal echter sterk vertraagd zijn.

Zoo werkt anisol, dat een goed gekristalliseerd additie-produkt

vormt met aluminiumchloride, bij gewone temperatuur zoo goed als niet op tetrachloorkoolstof in; de chlooratomen van dit chloride komen blijkbaar niet onder den invloed van den gebonden katalysator.

Het benzylchloride, dat zeer heftig op benzol inwerkt, tast het anisol zoo langzaam aan, dat de snelheid der reactie bij gewone temperatuur kon gemeten worden (H. GOLDSCHMIDT, Central-Blatt 1903 II p. 820).

b. In het tweede geval heeft de reactie niet plaats. Nitrobenzol, aceto- en benzophenon, sulfobenzide enz. laten zich niet door AlCl_3 met koolstoftetrachloride, chloroform, methyleenchloride, chloorzwavel enz. condenseeren.

IV. Het aluminiumchloride vereenigt zich èn met het chloride (A) èn met het benzolderivaat (B).

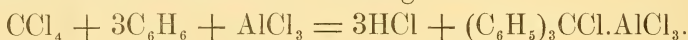
Dan zal het voornamelijk van den invloed der in het benzol aanwezige groepen afhangen of de condensatie al dan niet plaats vindt.

Terwijl nitrobenzol niet kan geacetyleerd of gebenzoyleerd worden, kunnen de nitroanisolen wel overgevoerd worden in de overeenkomstige acetylverbindingen.

Het gelukt niet om een tweede acetylgroep in acetophenon te brengen, daarentegen blijken het m. xylool, mesytleen, sym. triaethylbenzol en sym. durol *gediacetyleerd* te worden, waarbij dan, zooals uit de experimenten blijkt (V. MEYER, B. 1895 p. 3212; B. 1896 p. 846; B. 1896 p. 2564; H. WEIL, B. 1897 p. 1285) minstens twee molekulen van den katalysator worden verbruikt.

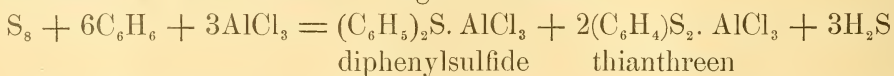
V. De katalysator vereenigt zich weinig of niet met het chloride (A) of 't benzolderivaat (B), wel met het gevormde produkt. Wanneer dit, zooals in de tot nog toe bekende gevallen een moleculaire verbinding is, zal er ook minstens één molekuul noodig zijn op één molekuul van 't chloride.

Het is mij gebleken dat één molekuul koolstoftetrachloride voor de vorming van 't triphenylmethaanchloride juist de moleculaire hoeveelheden aluminiumchloride noodig heeft:



Eveneens verbruiken S_2Cl_2 en SCl_2 bij hunne condensatie met benzol een mol. van den katalysator.

Merkwaardig is in dit opzicht het gedrag van de zwavel zelf ten opzichte van benzol; door een onderzoek waarvan de details elders zullen gepubliceerd worden, blijkt deze condensatie voorgesteld te moeten worden door het volgende schema:



Op één molekuul zwavel worden drie molekulen van den katalysator

lysator opgenomen; het element zelf vereenigt zich niet met aluminiumchloride.

Zooals boven gezegd is, hebben wij hier alleen de gevallen besproken, waarbij zich geen secundaire werkingen voordoen of waar deze grootendeels kunnen voorkomen worden. Bij tal van syntheses is dit zeer moeielijk te verwezenlijken, vooral waar van chloriden wordt uitgegaan wier koolstofatoom, dat het chlooratoom draagt, ook nog waterstofatomen gebonden heeft (Recueil XXII p. 306), of waar waterstof en chloor aan naast elkander liggende koolstofatomen voorkomen (MOUNEYRAT, Bull. Soc. chim [3] 17 p. 797; [3] 19 p. 179, p. 407 en p. 554).

Hiertoe behooren alle syntheses van de homologen van 't benzol, waarbij dan nog de omstandigheid komt, dat, hoe meer alkylgroepen er in 't benzol treden, het des te gemakkelijker door 't aluminiumchloride wordt ontleed; daardoor worden de hoeveelheden van 't aluminiumchloride die noodig zijn grooter en voor elk gegeven geval verschillend. Om een beter inzicht te krijgen in de *eigenlijke katalytische* werking van 't aluminiumchloride zullen naar 't mij voorkomt deze laatste reacties een minder geschikt materiaal leveren dan de eerste vijf door mij genoemde categorieën. Deze zullen aan een systematisch, zoo mogelijk ook quantitatief onderzoek moeten worden onderworpen. Met experimenten in deze richting ben ik sedert eenigen tijd bezig; zij zullen gaandeweg worden gepubliceerd.

Assen, December 1904.

Labor. H. B. S. 5-jarige cursus.

Graadmeting. — De Heer J. A. C. OUDEMANS biedt eene mededeeling aan van den Heer S. BLOK: „*De aansluiting van het driehoeksnet der eerste orde van Zuid-Sumatra aan dat van Sumatra's Westkust*”.

(Mede aangeboden door den Heer J. P. VAN DER STOK).

1. *Korte beschrijving der driehoeksmetingen van Zuid-Sumatra en Sumatra's Westkust*¹⁾.

Einde 1896 werd op het station Langeiland P 68, een aanvang gemaakt met de hoekmetingen ter bepaling van het driehoeksnet der

¹⁾ Voor uitvoerige beschrijvingen wordt verwezen naar de verslagen van Dr. J. J. A. MULDER voorkomende in de verhandelingen der vergaderingen voor de internationale graadmeting (Vergaderingen van 1892, 1896 en 1903).

eerste orde, dat den grondslag moet leveren voor de topographische opneming van Zuid-Sumatra. Geleidelijk werden deze metingen van Java's Westkust uit over Straat Soenda heen voortgezet en onlangs op het station B^t Gadang P 39, gelegen in het Gouvernement van Sumatra's Westkust, voltooid.

Het net bestaat uit één doorlopende ketting van driehoeken, die uitgaande van de driehoekszijde Langeiland P 68 — G^g Radja Basa P 67 aansluit op de zijde G^g Talang P 38 — B^t Gadang P 39 van het net van Sumatra's Westkust.

Wel is deze aansluitingszijde slechts 17120 M. lang, daar de aansluiting op de langere driehoekszijde B^t Poenggoeng Parang P 45 — G^g Talang P 38 moest vervallen, toen gebleken was, dat de pilaar te B^t Poenggoeng Parang, gebouwd tijdens de triangulatie van Sumatra's Westkust, zoodanig was beschadigd, dat zij voor dit doel niet meer was te bezigen.

Daar de ondervinding opgedaan bij de meting der basis te Padang ten behoeve van de triangulatie van Sumatra's Westkust, eene meting uitgevoerd met een stalen meetveer van 20 M. lengte, niet uitlokte om ook voor Zuid-Sumatra den grondslag voor de lengteafmetingen insgelijks met dit betrekkelijk primitieve meettoestel uit te voeren, en een instrument, dat nauwkeurige meting toeliet, niet ter beschikking stond, werd geene afzonderlijke basis gemeten, doch werd de lengte der eerste driehoekszijde door driehoeksmeting bepaald uitgaande van de beide driehoekszijden Batoe Hidenng P 15 — G^g Karang P 35 en G^g Karang P 35 — G^g Gede P 36 van het Javanet. Voor het Javanet waren toch 3 bases gemeten met het toestel van REPSOLD, dat in 1882 naar Europa was teruggezonden.

Voor de oriëntering van het Zuid-Sumatranet werden in 1897 op het station G^g Dempoe P 71, in de Lampongsche Districten gelegen, breedte- en azimuthbepalingen uitgevoerd. De geographische lengten werden geteld ten opzichte van den meridiaan van 3° 15' West van Batavia. Deze meridiaan, gaande ongeveer over het midden van Zuid-Sumatra, is zelf bepaald door de geographische lengte van het Java-station G^g Karang P 35, zooals deze is vermeld in de V Afdeling der Triangulation von Java bladz. 207.

Ter verkrijging van een grondslag voor de hoogtebepaling werden in 1897 en 1898 gedurende een jaar te Telok Betong peilschaalwaarnemingen gedaan en daarnit de gemiddelde stand van den zeespiegel in de Lampongbaai, het Lampongsch-peil, berekend. Dit peil werd door waterpassing naar de pilaar T 1559 te Telok Betong overgebracht en van daar door wederkeerige, doch niet-gelijktijdige trigono-

metrische hoogtemeting naar het punt der 1^e orde G^s Betoeng *P* 70 ¹⁾.

Wat de driehoeksmeting van Sumatra's Westkust betreft, de betrekkelijke primitiviteit van het basismeeetinstrument, waarmede de basis van Padang lang ongeveer 4860 M., in 1883 driemaal is gemeten, werd boven reeds vermeld. De juiste lengte van de 20 M. lange stalen meetveer, die daarbij was gebezigd, was vóór en na de meting bepaald door er onder de noodige voorzorgen een 200 M. lange lijn, welker lengte door meting met het instrument van REPSOLD nauwkeurig bekend was, mede na te meten.

Breedte- en azimuthbepalingen dienende ter oriëntering van het net werden in 1883 uitgevoerd op het Westelijk uiteinde der basis. ²⁾

De geographische lengten werden gerekend ten opzichte van den meridiaan van Padang, gaande over het Westelijk uiteinde der basis en voorloopig aangenomen op 6° 26' 42'' West van Batavia, een lengteverschil vroeger bepaald door overbrenging van tijdmeters.

Als grondslag voor de hoogten was aangenomen het Padangsch peil, de gemiddelde stand van den zeespiegel te Padang, afgeleid uit waarnemingen gedurende eenige maanden van 1874 gedaan. ³⁾

Voor de uitvoering der sterrekundige bepalingen, der hoek- en hoogtemetingen werd bij beide driehoeksmetingen gebruik gemaakt van 10-duims Universaal instrumenten uit de werkplaatsen van PISTOR en MARTINS en van WEGENER.

De kijker dezer instrumenten is excentrisch geplaatst; de aflezingen hebben voor elken cirkelrand plaats met twee micrometrische microscopen.

Behalve in het Padangsche basisnet, waar de methode der rondmetingen werd toegepast, werden de hoekmetingen uitgevoerd volgens de SCHREIBER'sche methode door zooveelmalige meting van alle hoekencombinatiën, dat het gewicht der op het station vereffende richting ongeveer 24 werd, het gewicht der éénmaal ingestelde richting als gewichtseenheid aangenomen.

Voor de trigonometrische hoogtemetingen werden wederkeerige, doch niet-gelijktijdige waarnemingen uitgevoerd: op elk station werden voor elk richtpunt zoo doenlijk 6 zenitshoeken onder zoo gunstig

¹⁾ In 1902 en 1903 werden ook te Benkoelen peilschaalwaarnemingen gedaan en het Benkoelensch peil bepaald, waarop later bij de vordering der secundaire meting zal worden aangesloten.

²⁾ In 1896 werden ook op het station Tor Batoe na Goelang, *P* 62, breedte- en azimuthbepalingen gedaan.

³⁾ In 1889 werd door peilschaalwaarnemingen te Siboga de gemiddelde stand der zee op ongeveer 350 K.M. afstand van Padang bepaald: bij aansluiting aan dat peil werd een verschil van 0,85 M. verkregen.

mogelijke omstandigheden gemeten. Met uitzondering van de eerste metingen op Sumatra's Westkust, waarbij van signalen gebruik werd gemaakt, werden bij alle metingen heliotropen als richtpunt gebezigd.

Aangaande de vereffeningen en berekeningen zij vermeld, dat in het net van Zuid-Sumatra, met uitzondering van den aansluitings-vijfhoek met Java, die volgens de methode der kleinste vierkanten werd vereffend, de vereffening plaats had door de sluitingsfout van elken driehoek gelijkelijk over de 3 hoeken te verdeelen, terwijl de berekening werd uitgevoerd in het platte vlak met overbrenging door middel van de Mercator-projectie volgens de methode van SCHOLS.

De vereffeningen in het net van Sumatra's Westkust vonden bij gedeelten plaats, alleen in het basisnet en in het Noordelijk gedeelte werd de methode der kleinste vierkanten toegepast, grootendeels werd een benaderingsmethode gebezigd. De berekeningen werden uitgevoerd op de ellipsoïde.

(1). De rechte afstand tusschen de basis van Simplak, waarop het net van Zuid-Sumatra berust, en die van Padang bedraagt ongeveer 850 K.M.; het geringst aantal driehoeken, waarmede de overbrenging van de lengte der zijde Poetri-Dago van het Simplaksche basisnet door een ketting naar de eerste driehoekszijde G^g Gadoet *P* 1 — Poelan Satoe *P* 2 van het net van Sumatra's Westkust is te verkrijgen, bedraagt 49.

(2). De rechte afstand der oriënteringsstations G^g Dempoe en Westelijk basisuiteinde te Padang bedraagt ten naaste bij 700 K.M.; het geringst aantal driehoeken waarmede het azimut der zijde G^g Dempoe — G^g Tenggamoes op de eerste driehoekszijde van het net van Sumatra's Westkust door een ketting kan worden overgebracht, bedraagt 40.

(3). De rechte afstand tusschen Telok Betong en Padang, waar de peilschaalwaarnemingen zijn uitgevoerd bedraagt ruim 700 K.M.; het geringst aantal lijnen, waarlangs de overbrenging van de hoogte der pilaar te Telok Betong naar het zeestrand te Padang kan plaats hebben, bedraagt 24.

De gevonden verschillen zijn betrekkelijk zoo gering, dat hun ontstaan gereedelijk kan worden verklaard uit de ophooping van het groot aantal waarnemingsfouten en wat de hoogte boven het zeeoppervlak betreft bovendien uit de onregelmatigheden der refractie. Het verschil in de geographische breedten wijst niet op het bestaan van eene schietloodafwijking te G^g Dempoe ten opzichte van Padang.

Slechts wat het verschil in de lengte der aansluitingszijde betreft, wordt opgemerkt, dat een beter resultaat zoude te verwachten zijn

II. Middelbare fouten.

Aard der fouten.	Zuid-Sumatra	Sumatra's Westkust.	Aanteekeningen.
in de bepaling geographische breedte	(1) 0".21	0".35	(1) ten behoeve van de oriëntering der netten.
» » » azimut nachtsignaal			
» het azimut der 1 ^e driehoekszijde voor zoover voortspruitend uit de fouten van het basisnet	—	0".85	(2) bepaling uit 37 sluitingsfouten (zie de bijlage).
» den op het station vereffenhoek (gewicht 12).			(3) bepaling uit 73 sluitingsfouten.
a uit de resultaten der stationsvereffeningen.	0".34	0".52	(4) neemt men alleen in beschouwing de 10 driehoeken*), welke de eerste driehoekszijde langs den kortsten weg met de aansluitingszijde verbinden, dan wordt gevonden:
b uit de sluitingsfouten der driehoeken volgens de formule		(4)	
$m = \sqrt{\frac{[x.x]}{3n}}$	0".64	0".96	a 0".59.
	(2)	(3) (4)	b 0".86.

III. Verschillen bij de aansluiting bevonden.

Aard der bepaling.	Zuid-Sumatra	Sumatra's Westkust	Verschil.	Aanteekeningen.
logarithmus der aansluitingslengte	(1) 4,2335135.7	4,2334948.0	187.7	eenheden van de 7 ^e decimaal overeenkomende met ongeveer $\frac{1}{23000}$ van de lengte der zijde of met 13,2 m.M. pro K.M.
» » » »				
azimut	(2) 247°26'18".07	247°26'13".13	4".94	gemiddeld
geographische breedte				
» Gg. Talang	2°9'43".465 Z	2°9'42".555 Z.	0".610	0".612
» Bt. Gadang				
hoogte boven zee Gg. Talang	(3) 1375.5 M	1376.7 M.	1.2 M.	gemiddeld
» » » Bt. Gadang				

geweest, wanneer voor de basismetung te Padang over een geschikter toestel had kunnen worden beschikt.

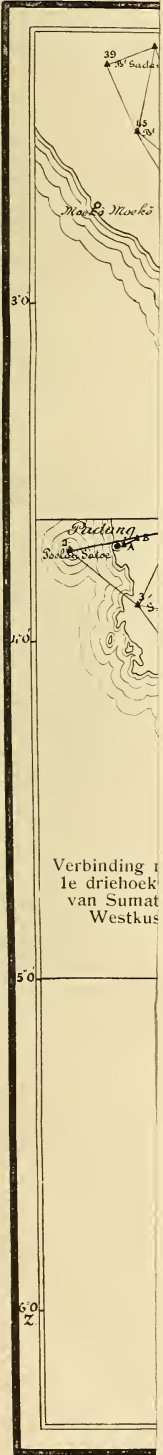
De verschillen zijn overigens van dien aard, dat zij voor het doel met de driehoeksmeting beoogd, het leveren van den grondslag voor eene topographische kaart, buiten beschouwing kunnen blijven.

*) Deze driehoeken komen onder de Nos. 1, 2, 16, 17, 35, 36, 43, 50, 51 en 52 voor op de bladzijden 603 en 604, Comptes Rendus des séances de la dixième conférence générale de l'association Géodésique internationale.

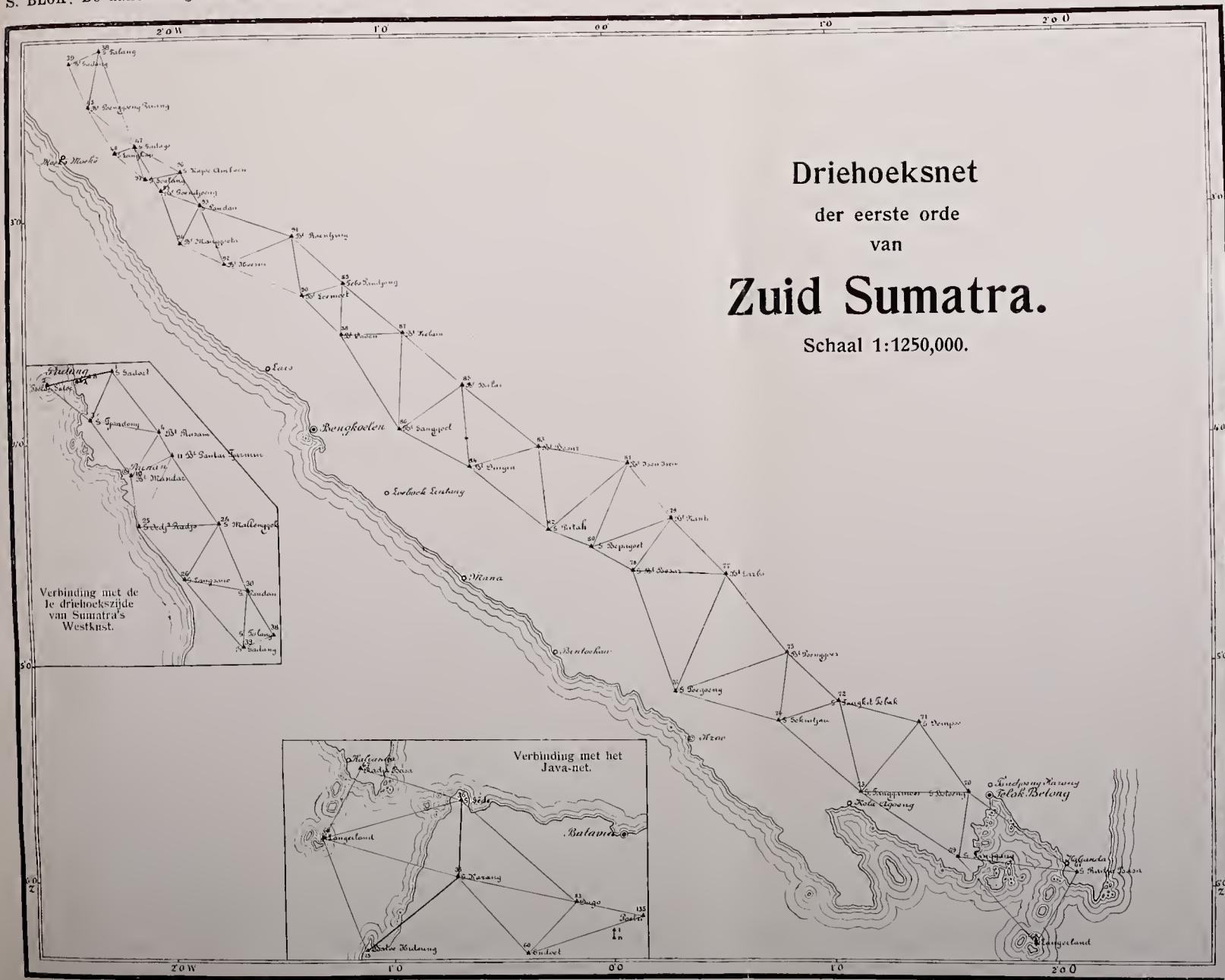
Bijlage.

Sluitingsfouten der driehoeken van het net van Zuid-Sumatra
met inbegrip van den aansluitingsvijfhoek.

No. van den driehoek	Vervaardigers der gebezigde instrumenten en middellijn van den horizontaalcirkel.	Allezing in secunden van het micro- coop.	Aantal microscopen.	Aantal waarne- mingen uitge- voerd voor elke richting.	Sluitings- fouten voor elken driehoek.			Δ^2
					+	Δ	-	
1	Pistor en Martins, 27 cm.	1"	2	24	0.44	—	0.1936	
2	»	1"	2	24.25	1.82	—	3.3124	
3	»	1"	2	24.25	0.44	—	0.1936	
4	»	1'	2	24.25	—	0.63	0.3969	
5	»	1"	2	24.25	0.31	—	0.0961	
6	Wegener, Pistor en Martins, 27 cm.	2".1"	2	24.25	—	0.65	0.'225	
7	»	2".1"	2	24.25	0.58	—	0.3364	
8	»	2".1"	2	24.25	—	0.93	0.8649	
9	»	2".1"	2	24.25	0.21	—	0.0441	
10	»	2".1"	2	24	—	1.74	3.0276	
11	»	2".1"	2	24	—	0.29	0.0841	
12	»	2".1"	2	24	0.04	—	0.0016	
13	»	2".1"	2	24	1.20	—	1.4400	
14	Pistor en Martins, 27 cm.	1"	2	24	—	0.73	0.5329	
15	Pistor en Martins, Wegener, 27 cm.	1".2"	2	24	—	1.33	1.7689	
16	»	1".2"	2	24	1.93	—	3.7249	
17	»	1".2"	2	24	—	1.11	1.2321	
18	»	1".2"	2	24	—	1.76	3.0976	
19	Pistor en Martins, 27 c.m.	1"	2	24	2.36	—	5.5696	
20	»	1"	2	24	—	1.70	2.8900	
21	» Wegener, 27 c.m.	1".2"	2	24	—	1.06	1.1236	
22	»	1".2"	2	24	0.38	—	0.1444	
23	Wegener, 27 cm.	2"	2	24	—	0.03	0.0009	
24	»	2"	2	24	—	1.41	1.9881	
25	»	2"	2	24	—	1.36	1.8496	
26	»	2"	2	24	—	0.66	0.4356	
27	»	2"	2	24	—	0.55	0.3025	
28	»	2"	2	24.25	1.83	—	3.3489	
29	»	2"	2	24.25	—	1.05	1.1025	
30	»	2"	2	24.25	—	0.12	0.0144	
31	»	2"	2	24.25	0.75	—	0.5625	
32	»	2"	2	24	—	0.56	0.3136	
33	»	2"	2	24	1.12	—	1.2544	
34	»	2"	2	24	0.81	—	0.6561	
35	»	2"	2	24	1.56	—	2.4336	
36	»	2"	2	24	0.40	—	0.1600	
37	»	2"	2	24	0.43	—	0.1849	



S. BLOK: De aansluiting van het driehoeksnet der eerste orde van Zuid-Sumatra aan dat van Sumatra's Westkust.



Uit het net van Zuid-Sumatra wordt gevonden :

geographische lengte van G^g Talang 5° 32' 48'',525 } West van
 „ „ „ B^t Gadang 5° 41' 20'',236 } Batavia

en uit dat van Sumatra's Westkust :

geographische lengte van G^g Talang 0° 53' 37'',833 } Oost van
 „ „ „ B^t Gadang 0° 45' 6'',151 } Padang

waaruit volgt voor de lengte van het westelijk uiteinde der basis van Padang respectievelijk : 6° 26' 26'',358 en 6° 26' 26'',387, of gemiddeld 6° 26' 26'',373 West van Batavia, overeenkomende met 100° 22' 10'',68 Oost van Greenwich.

Het langs geodetischen weg gevonden lengteverschil van 6° 26' 26'',373 met Batavia is dus 16'' of ruim 1^s kleiner dan dat bepaald door overbrenging van tijdmeters.

Het verschil zal slechts voor een zeer klein deel zijn toe te schrijven aan den invloed van de ophooping van waarnemingsfouten bij de driehoeksmetingen, en nagenoeg uitsluitend aan de wijze van bepaling middels tijdmeters.

Batavia, 18 October 1904.

S. BLOK.

Wiskunde. — De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan :

„Over eene reeks met Besselsche functies.”

In het volgende zullen wij de som der reeks

$$I_1(a) I_1(x) + 3 I_3(a) I_3(x) + 5 I_5(a) I_5(x) + \dots = \sum_{1,3}^{\infty} n I_n(a) I_n(x)$$

trachten te bepalen. Wij beginnen daartoe met de som te bepalen van de eenvoudigere reeks

$$S = \sum_{1,3}^{\infty} I_n(x) \cos n\varphi.$$

Wanneer men invoert, n een oneven getal zijnde, voor de Besselsche functie den vorm

$$I_n(x) = - \mathcal{E}_0 e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} t^{n-1}$$

dan is

$$S = - \mathcal{E}_0 e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} \frac{1}{t} (t \cos \varphi + t^3 \cos 3\varphi + \dots)$$

of daar

$$t \cos \varphi + t^3 \cos 3\varphi + \dots = \frac{t(1-t^2) \cos \varphi}{1-2t^2 \cos 2\varphi + t^4} \quad (\text{mod } t < 1)$$

$$S = - \mathcal{E}_0 e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} \frac{(1-t^2) \cos \varphi}{1-2t^2 \cos 2\varphi + t^4}.$$

Stelt men

$$R = \frac{\cos \varphi}{1-2t^2 \cos 2\varphi + t^4}$$

dan is dus

$$S = - \mathcal{E}_0 e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} (1-t^2) R$$

of

$$\sum_{1,3}^{\infty} I_n \cos n\varphi = - \mathcal{E}_0 e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} (1-t^2) R.$$

Differentieert men nu deze vergelijking, dan komt

$$\sum_{1,3}^{\infty} n I_n(x) \sin n\varphi = \mathcal{E}_0 e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} (1-t^2) \frac{dR}{d\varphi}.$$

Vermenigvuldigt men verder deze vergelijking met $\frac{1}{\pi} \sin(a \sin \varphi) d\varphi$ en integreert tusschen de grenzen 0 en π , dan wordt

$$\begin{aligned} \sum_{1,3}^{\infty} n I_n(x) I_n(a) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{E}_0 e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} (1-t^2) \int_0^{\pi} \frac{dR}{d\varphi} \sin(a \sin \varphi) d\varphi \\ &= - \frac{a}{\pi} \mathcal{E}_0 e^{\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} (1-t^2) \int_0^{\pi} R \cos(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Voor de verdere herleiding stellende

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\pi} R \cos(a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi \cos(a \sin \varphi)}{1-2t^2 \cos 2\varphi + t^4} d\varphi \end{aligned}$$

zoo is

$$\frac{du}{da} = - \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi \sin(a \sin \varphi)}{1-2t^2 \cos 2\varphi + t^4} \sin \varphi d\varphi$$

$$\frac{d^2 u}{da^2} = - \int_0^{\pi} \frac{\cos^3 \varphi \cos (a \sin \varphi)}{1 - 2 t^2 \cos 2\varphi + t^4} \sin^2 \varphi d\varphi.$$

Merkt men nu op dat

$$\sin^2 \varphi = \frac{1 - 2 t^2 \cos 2\varphi + t^4}{4 t^2} = \frac{(1-t^2)^2}{4 t^2}$$

dan vindt men

$$\frac{d^2 u}{da^2} = m^2 u - \frac{1}{4 t^2} \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \cos (a \sin \varphi) d\varphi$$

waarin $m = \frac{1-t^2}{2t}$.

Vervangt men $\cos^2 \varphi$ door $\frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$, dan herleidt men deze differentiaalvergelijking gemakkelijk tot

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{da^2} - m^2 u &= - \frac{\pi}{8 t^2} (I_0(a) + I_2(a)) \\ &= - \frac{\pi}{4 t^2} \frac{I_1(a)}{a}. \end{aligned}$$

Bepalen we nu de integraal dezer vergelijking, die voldoet aan de voorwaarden dat voor $a = 0$

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{1 - 2 t^2 \cos^2 \varphi + t^4} = \frac{\pi}{2(1-t^2)}, \\ \frac{du}{da} &= 0. \end{aligned}$$

Men vindt dan

$$u = \frac{\pi}{4(1-t^2)} \left[e^{mz} + e^{-mz} \right] - \frac{\pi}{8 t^2 m} \int_0^z \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta \left[e^{m(z-\beta)} - e^{-m(z-\beta)} \right]$$

en hiermede

$$\begin{aligned} \sum_{1,3}^{\infty} n I_n(a) I_n(x) &= - \frac{\alpha}{4} \mathcal{E}_0 \left[e^{\frac{x-z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} + e^{\frac{x+z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} \right] + \\ &+ \frac{\alpha}{4} \int_0^{\pi} \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta \mathcal{E}_{0t} \left[e^{\frac{x-z+\beta}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} - e^{\frac{x+z-\beta}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)} \right]. \end{aligned}$$

Merkt men nu op dat

$$e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = I_0(z) + t I_1(z) + t^2 I_2(z) + \dots \\ - \frac{1}{t} I_1(z) + \frac{1}{t^2} I_2(z) - \dots$$

dan ziet men dat de residus zich gemakkelijk laten bepalen. Men vindt dan

$$\sum_{1.3}^{\infty} n I_n(a) I_n(x) = \frac{a}{4} [I_1(x-a) + I_1(x+a)] + \\ + \frac{a}{4} \int_0^a \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta [I_0(x-a+\beta) - I_0(x+a-\beta)]. \quad (1)$$

Uit dit resultaat kan nog een belangrijke betrekking afgeleid worden. Om dit te laten zien, gaan we

$$I_1(x-a) + I_1(x+a)$$

weer in eene reeks ontwikkelen.

Uit

$$I_1(x-a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi \sin(x \sin \varphi - a \sin \varphi) d\varphi$$

en

$$I_1(x+a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi \sin(x \sin \varphi + a \sin \varphi) d\varphi$$

volgt

$$I_1(x-a) + I_1(x+a) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi \sin(x \sin \varphi) \cos(a \sin \varphi) d\varphi.$$

Schrijft men hierin

$$\sin(x \sin \varphi) = 2 I_1 \sin \varphi + 2 I_3 \sin 3\varphi + \dots$$

dan komt

$$I_1(x-a) + I_1(x+a) = \frac{4}{\pi} I_1(x) \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi \cos(a \sin \varphi) d\varphi \\ + \frac{4}{\pi} I_3(x) \int_0^{\pi} \sin \varphi \sin 3\varphi \cos(a \sin \varphi) d\varphi \\ + \frac{4}{\pi} I_5(x) \int_0^{\pi} \sin \varphi \sin 5\varphi \cos(a \sin \varphi) d\varphi \\ + \dots$$

of daar

$$\begin{aligned}
2 \int_0^{\pi} \sin \varphi \sin (2n+1) \varphi \cos (\alpha \sin \varphi) d\varphi &= \\
&= \int_0^{\pi} [\cos 2n\varphi - \cos (2n+2) \varphi] \cos (\alpha \sin \varphi) d\varphi \\
&= \pi [I_{2n}(\alpha) - I_{2n+2}(\alpha)] \\
&= 2\pi \frac{d I_{2n+1}(\alpha)}{d\alpha}
\end{aligned}$$

$$I_1(x-\alpha) + I_1(x+\alpha) = 4 \left[I_1(x) \frac{dI_1}{d\alpha} + I_3(x) \frac{dI_3}{d\alpha} + I_5(x) \frac{dI_5}{d\alpha} \dots \right].$$

Substitueert men hierin

$$\alpha \frac{dI_n}{d\alpha} = n I_n(\alpha) - \alpha I_{n+1}(\alpha)$$

dan komt eindelijk

$$I_1(x-\alpha) + I_1(x+\alpha) = \frac{4}{\pi} \sum_{1,3}^{\infty} n I_n(\alpha) I_n(x) - 4 \sum_{1,3}^{\infty} I_{n+1}(\alpha) I_n(x).$$

Met deze vergelijking herleidt zich het gevonden resultaat (1) tot

$$\sum_{1,3}^{\infty} I_{n+1}(\alpha) I_n(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta [I_0(x-\alpha+\beta) - I_0(x+\alpha-\beta)] \quad (2)$$

Ontwikkelt men hierin

$$I_0(x-\alpha+\beta) = I_0(x) I_0(\alpha-\beta) + 2I_1(x) I_1(\alpha-\beta) + 2I_2(x) I_2(\alpha-\beta) + \dots$$

$$I_0(x+\alpha-\beta) = I_0(x) I_0(\alpha-\beta) - 2I_1(x) I_1(\alpha-\beta) + 2I_2(x) I_2(\alpha-\beta) - \dots$$

dan vindt men

$$\sum_{1,3}^{\infty} I_{n+1}(\alpha) I_n(x) = \sum_{1,3}^{\infty} I_n(x) \int_0^x I_n(\alpha-\beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta$$

en bijgevolg, door de coëfficiënten van $I_n(x)$ te vergelijken

$$I_{n+1}(\alpha) = \int_0^x I_n(\alpha-\beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta. \dots \dots \dots (3)$$

Met behulp dezer formule kunnen we aan de vergelijking (1) nog eene andere gedaante geven.

Immers volgens (3) is

$$\begin{aligned}
 I_1(x - \alpha) &= \int_0^{x-\alpha} I_0(x - \alpha - \beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta \\
 &= - \int_0^{x-\alpha} I_0(x - \alpha + \beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta \\
 I_1(x + \alpha) &= \int_0^{x+\alpha} I_0(x + \alpha - \beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta
 \end{aligned}$$

zoodat het tweede lid van (1) overgaat in

$$\begin{aligned}
 &\frac{\alpha}{4} \left[- \int_0^{\alpha-x} I_0(x - \alpha + \beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta + \int_0^{x+\alpha} I_0(x + \alpha - \beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta \right] \\
 &+ \frac{\alpha}{4} \left[\int_0^{\alpha} I_0(x - \alpha + \beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta - \int_0^{\alpha} I_0(x + \alpha - \beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta \right]
 \end{aligned}$$

of in

$$\frac{\alpha}{4} \left[\int_{\alpha-x}^{\alpha} I_0(x - \alpha + \beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta + \int_{\alpha}^{\alpha+x} I_0(x + \alpha - \beta) \frac{I_1(\beta)}{\beta} d\beta \right].$$

Stelt men nu in de 1^{ste} integraal $\beta = \alpha - \gamma$ en in de 2^{de} integraal $\beta = \alpha + \gamma$, dan wordt dit

$$\frac{\alpha}{4} \left[\int_0^x I_0(x - \gamma) \frac{I_1(\alpha - \gamma)}{\alpha - \gamma} d\gamma + \int_0^x I_0(x - \gamma) \frac{I_1(\alpha + \gamma)}{\alpha + \gamma} d\gamma \right]$$

waarmede de vergelijking (1) den vorm aanneemt

$$\sum_{1,3}^{\infty} n I_n(\alpha) I_n(x) = \frac{\alpha}{4} \int_0^x I_0(x - \gamma) \left[\frac{I_1(\alpha - \gamma)}{\alpha - \gamma} + \frac{I_1(\alpha + \gamma)}{\alpha + \gamma} \right] d\gamma. \quad \dots (4)$$

Een nader onderzoek der formule (3) leert, dat zij ook geldt voor even waarden van n , alsook dat er vele dergelijke betrekkingen bestaan. Zoo vinden wij o.a. k een geheel getal zijnde

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\alpha} \frac{I_n(\alpha - \beta)}{\alpha - \beta} I_1(\beta) d\beta &= \frac{I_{n+1}(\alpha)}{n} \\
 \int_0^{\alpha} I_n(\alpha - \beta) \frac{I_k(\beta)}{\beta} d\beta &= \frac{I_{n+k}(\alpha)}{k}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^a \frac{I_n(a-\beta)}{a-\beta} I_k(\beta) d\beta = \frac{I_{n+k}(a)}{n} \bullet$$

$$\int_0^a \frac{I_n(a-\beta)}{(a-\beta)^2} I_1(\beta) d\beta = \frac{1}{2n} \left[\frac{I_n(a)}{n-1} + \frac{I_{n+2}(a)}{n+1} \right]$$

$$\int_0^a I_0(a-\beta) I_0(\beta) d\beta = \sin a.$$

Wij zullen hierbij echter thans niet stilstaan; alleen merken we nog op dat, wanneer men in (1) aan x eene zeer groote positieve waarde toekent, zoodat

$$I_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{4} \pi\right)$$

men vindt

$$I_1(x-a) + I_1(x+a) = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) \cos a$$

$$I_0(x-a+\beta) - I_0(x+a-\beta) = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin(a-\beta).$$

Hiermede wordt (1)

$$\sum_{1,3}^{\infty} n I_n(a) \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{a}{2} \cos a + \frac{a}{2} \int_0^a \frac{I_1(\beta)}{\beta} \sin(a-\beta) d\beta$$

of, opmerkende dat

$$\sum_{1,3}^{\infty} n I_n(a) \sin \frac{n\pi}{2} = \frac{a}{2} I_0(a)$$

$$I_0(a) = \cos a + \int_0^a \frac{I_1(\beta)}{\beta} \sin(a-\beta) d\beta$$

Differentieert men deze vergelijking dan komt nog

$$I_1(a) = \sin a - \int_0^a \frac{I_1(\beta)}{\beta} \cos(a-\beta) d\beta$$

waaruit volgen de betrekkingen

$$\int_0^a \frac{I_1(\beta)}{\beta} \sin \beta d\beta = 1 - \cos a I_0(a) - \sin a I_1(a)$$

$$\int_0^a \frac{I_1(\beta)}{\beta} \cos \beta d\beta = \sin a I_0(a) - \cos a I_1(a).$$

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt een mededeeling aan: „Over de regels van GULDIN in de meerdimensionale ruimte”.

We denken ons in de ruimte R_n met n afmetingen een asruimte $R_p^{(a)}$ en in een ruimte R_{p+1} door deze $R_p^{(a)}$ een begrensde gedeelte van $p + 1$ afmetingen, dat om $R_p^{(a)}$ wentelt. Daarbij beschrijft een willekeurig punt P van dit begrensde gedeelte, dat onafhankelijk van den vorm zijner begrenzing een polytoop heeten en door het symbool $(Po)_{p+1}$ voorgesteld worden mag, een bolruimte van $n - p$ afmetingen gelegen in de ruimte R_{n-p} door P loodrecht op $R_p^{(a)}$, die de projectie Q van P op $R_p^{(a)}$ tot middelpunt, PQ tot straal heeft en dus door het symbool $B_{n-p}(Q, PQ)$ aangewezen worden kan. De vraag die ons bezig houden zal, is nu deze:

„Hoe bepaalt men inhoud en oppervlak van de door wenteling van $(Po)_{p+1}$ om $R_p^{(a)}$ voortgebrachte omwentelingsfiguur, als aangenomen wordt, dat $(Po)_{p+1}$ en $R_p^{(a)}$, hoewel in dezelfde ruimte R_{p+1} gelegen, geen punt gemeen hebben?”

Dit vraagstuk wordt opgelost met behulp van een eenvoudige uitbreiding der bekende regels van GULDIN, die in onze ruimte bij de bepaling van inhoud en oppervlak eens omwentelingslichaams dienst doen. Tot het bewijs van deze uitgebreide regels behoeft men slechts te weten, dat het oppervlak der boven vermelde bolruimte $B_{n-p}(Q, PQ)$ gevonden wordt door PQ^{n-p-1} met een slechts van $n - p$ afhangenden coëfficiënt o_{n-p} te vermenigvuldigen; bij de toepassing ervan echter is het wenschelijk niet alleen dezen oppervlakcoëfficiënt o_{n-p} , maar ook den inhoudcoëfficiënt i_{n-p} te kennen, waarmee PQ^{n-p} vermenigvuldigd moet worden ter verkrijging van den inhoud der zelfde bolruimte. Daartoe vermelden we vooraf, dat — zooals rechtstreeksche integratie leert — tusschen deze coëfficiënten de recurrente betrekkingen

$$i_n = \frac{2\pi}{n} i_{n-2} \quad , \quad o_n = \frac{2\pi}{n-2} o_{n-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

bestaan, terwijl de bekende betrekking tusschen inhoud en oppervlak nog eenvoudiger tot de vergelijking

$$i_n = \frac{1}{n} o_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

voert. Zoo vindt men tot en met $n = 12$ uit de bekende waarden van i_2, i_3 en o_2, o_3

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
i_n	π	$\frac{4}{3} \pi$	$\frac{1}{2} \pi^2$	$\frac{8}{15} \pi^2$	$\frac{1}{6} \pi^3$	$\frac{16}{105} \pi^3$	$\frac{1}{24} \pi^4$	$\frac{32}{945} \pi^4$	$\frac{1}{120} \pi^5$	$\frac{64}{10395} \pi^5$	$\frac{1}{720} \pi^6$
o_n	2π	4π	$2\pi^2$	$\frac{8}{3} \pi^2$	π^3	$\frac{16}{15} \pi^3$	$\frac{4}{3} \pi^4$	$\frac{32}{105} \pi^4$	$\frac{1}{12} \pi^5$	$\frac{64}{945} \pi^5$	$\frac{1}{60} \pi^6$

1. Inhoudsbepaling. Duidt x de lengte van den straal PQ en de differentiaal dr het $p + 1$ -dimensionale onmiddellijk om P gelegen volume-element van het wentelende polytoop $(Po)_{p+1}$ aan, dan is de gevraagde inhoud

$$I = o_{n-p} \int x^{n-p-1} dr,$$

als de integraal over alle volume-elementen van $(Po)_{p+1}$ uitgestrekt wordt. Is nu I_{p+1} de inhoud van $(Po)_{p+1}$, zoo kan men zich een grootheid \bar{x} denken, die aan de vergelijking

$$\int x^{n-p-1} dv = \bar{x}^{n-p-1} \int dv = \bar{x}^{n-p-1} I_{p+1}$$

voldoet, en deze grootheid in bovenstaande formule invoegen. Hierdoor gaat deze over in

$$I = I_{p+1} \cdot o_{n-p} \bar{x}^{n-p-1}.$$

Noemt men \bar{x} den „traagheidsstraal van den $n-p-1$ sten rang” van den inhoud I_{p+1} der wentelende figuur $(Po)_{p+1}$ met betrekking tot de in haar ruimte R_{p+1} liggende asruimte $R_p^{(a)}$, dan geldt dus de stelling:

„Men vindt den inhoud der omwentelingsfiguur, ontstaan door wenteling van het polytoop $(Po)_{p+1}$ om een dit niet snijdende asruimte $R_p^{(a)}$ zijner ruimte R_{p+1} , als men den inhoud I_{p+1} van $(Po)_{p+1}$ vermenigvuldigt met het oppervlak eener bolruimte B_{n-p} , die den traagheidsstraal van den $n-p-1$ sten rang van I_{p+1} met betrekking tot $R_p^{(a)}$ tot straal heeft.”

2. Oppervlakkbepaling. Vervangt men in bovenstaande het $p + 1$ -dimensionaal volume-element door het p -dimensionaal oppervlak-element en daarmee in overeenstemming den inhoud I_{p+1} en zijn traagheidsstraal door het oppervlak O_{p+1} en zijn traagheidsstraal, dan verkrijgt men geheel op overeenkomstige wijs de stelling:

„Men vindt het oppervlak der omwentelingsfiguur, ontstaan als boven, als men het oppervlak O_{p+1} van $(Po)_{p+1}$ vermenigvuldigt met het oppervlak eener bolruimte B_{n-p} , die den traagheidsstraal van den $n-p-1^{\text{sten}}$ rang van O_{p+1} met betrekking tot $R_p^{(a)}$ tot straal heeft.”

3. Het omwentelingssegment. Omtrent het nut der boven bewezene n -dimensionale uitbreiding der GULDIN'sche regels kunnen de meeningen zeer uiteenloopen. Zij, die alleen letten op haar algemeenheid en haar kort énoncé, zullen haar allicht te hoog schatten, al kunnen ze redelijkerwijs ook niet zoo ver gaan te gelooven, dat deze regels den inhoud en het oppervlak eener omwentelingsfiguur doen vinden als de gewone beginselen der integraalrekening ons in den steek laten, omdat de kwadraturen wel aangeduid doch niet in eindigen vorm uitgevoerd kunnen worden. Anderen, die er meer het oog op richten, dat deze regels de moeielijkheden der kwadraturen slechts schijnbaar verplaatsen — hier van inhouds- en oppervlaktbepaling naar de bepaling van traagheidsstralen — zullen daarentegen allicht in een ander uiterste vervallen en aan de regels in kwestie elk praktisch nut ontzeggen. Natuurlijk ligt ook hier de waarheid in het midden. Ook al blijft het waar, dat de regels van GULDIN ons slechts in schijn uit de moeielijkheid redden, waar de rechtstreeksche integratie te kort schiet, toch wordt door het gebruik dier regels menige integratie vermeden, omdat de in de stellingen optredende traagheidsstralen van inhoud en oppervlakte der wentelende figuur uit anderen hoofde bekend zijn. Welke laatste omstandigheid zich in de eerste plaats voordoet als $p = n - 2$ is, elk punt P der wentelende figuur dus een cirkelomtrek doorloopt en de traagheidsstralen derhalve op het zwaartepunt van inhoud en oppervlak dier figuur betrekking hebben, terwijl voor $p = n - 3$ de kennis van den gewonen traagheidsstraal der mechanica vereenvoudiging brengt.

Als eenvoudigste voorbeeld van het geval $p = n - 2$ stellen we ons voor, dat een segment $S_{n-1}(r, \varrho)$ van een bolruimte B_{n-1} met r en ϱ tot stralen van bolruimte- en basisbegrenzing een „omwentelingssegment” $S(r, \varrho, a)_n$ voortbrengt door wenteling om een in zijn ruimte B_{n-1} gelegen diametraalruimte $R_{n-2}^{(a)}$, die geen punt er mee gemeen heeft en met de ruimte R_{n-2} der basisbegrenzing een hoek a vormt. Hierbij gelden de volgende stellingen:

„Men vindt den inhoud van het omwentelingsseg-

ment $S(r, \varrho, \alpha)_n$ door den inhoud eener bolruimte B^n met ϱ tot straal te vermenigvuldigen met $\cos \alpha$."

„Men vindt het oppervlak van het omwentelingssegment $S(r, \varrho, \alpha)_n$, dat bij de wenteling van $S_{n-1}(r, \varrho)$ door de bolruimtebegrenzing wordt doorlopen, door den omtrek eens cirkels met r tot straal te vermenigvuldigen met den inhoud der projectie van de basisbegrenzing van $S_{n-1}(r, \varrho)$ op de asruimte $R_{n-2}^{(a)}$."

Deze stellingen zijn eenvoudige meerdimensionale uitbreidingen van bekende stellingen der stereometrie. Zij kunnen door rechtstreeksche integratie gevonden worden, waarbij het geval $\alpha = 0$ bijzonder veel eenvoudiger is dan dat van een willekeurigen hoek α . En nu leeren de regels van GULDIN juist de integratie in het algemeene geval te vermijden, wijl ze onmiddellijk doen zien, dat de stellingen waar zijn voor het geval van een willekeurigen hoek α , zoodra ze voor $\alpha = 0$ bewezen zijn. Zijn namelijk x_i en x_o de afstanden der zwaartepunten van inhoud I_{n-1} en oppervlak O_{n-1} van $S_{n-1}(r, \varrho)$ tot $R_{n-2}^{(a)}$, waarbij onder O_{n-1} nu weer uitsluitend de bolruimtebegrenzing bedoeld wordt, dan geven de regels van GULDIN ons

$$\left. \begin{aligned} I_x &= 2\pi x_i \cos \alpha \cdot I_{n-1} \\ I_o &= 2\pi x_i \cdot I_{n-1} \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} O_x &= 2\pi x_o \cos \alpha \cdot O_{n-1} \\ O_o &= 2\pi x_o \cdot O_{n-1} \end{aligned} \right\}$$

en hieruit volgt onmiddellijk

$$I_x = I_o \cos \alpha \quad , \quad O_x = O_o \cos \alpha$$

en dus het boven beweerde, zoodat alleen voor $\alpha = 0$ de bewijzen nog te leveren zijn.

We beginnen met den inhoud. Is x de afstand van $R_{n-2}^{(a)}$ tot een evenwijdige ruimte $R_{n-2}^{(x)}$, die $S_{n-1}(r, \varrho)$ volgens een bolruimte $B_{n-2}^{(x)}$ met $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ tot straal snijdt, dan is de gevraagde inhoud

$$I = 2\pi i_{n-2} \int_{x=\sqrt{r^2-\varrho^2}}^{x=r} y^{n-2} x dx$$

en dit gaat, wijl $x^2 + y^2 = r^2$ en $x dx + y dy = 0$ is, over in

$$I = 2\pi i_{n-2} \int_0^{\varrho} y^{n-1} dy = \frac{2\pi}{n} i_{n-2} \varrho^n = i_n \varrho^n,$$

waarmee het bijzondere geval der inhoudsstelling bewezen is.

In het bijzondere geval der oppervlaksstelling beschouwen we het oppervlakelement ontstaan door wenteling van het tusschen de even-

wijdige ruimten $R_{n-2}^{(x)}$ en $R_{n-2}^{(x+dx)}$ gelegen oppervlak van $S_{n-1}(r, \varrho)$. Is ds het apothema van deze afgeknotte kegelruimte, dan is het gevraagde oppervlak

$$O = 2\pi o_{n-2} \int_{x=\sqrt{r^2-\varrho^2}}^{x=r} y^{n-3} x ds.$$

Met behulp van de betrekkingen $y ds = r dx$ en $x dx + y dy = 0$ gaat dit over in

$$O = 2\pi r o_{n-2} \int_0^{\varrho} y^{n-3} dy = \frac{2\pi}{n-2} r o_{n-2} \varrho^{n-2} = 2\pi r \cdot i_{n-2} \varrho^{n-2},$$

d. i. in de verlangde uitkomst.

We kunnen ons natuurlijk het meer algemeene omwentelingssegment $S(r, \varrho, \alpha)_{n,k}$ van den k^{den} rang voorstellen, dat door wenteling van een bolruimtesegment $S_{n-k}(r, \varrho)$ om een diametraalruimte $R_{n-k-1}^{(a)}$ zijner ruimte R_{n-k} ontstaat; van de verschillende mogelijke gevallen

$$k = 1, 2, \dots, n-2$$

is het eerste dan het boven uitvoerig behandelde. Wijl ieder punt bij de wenteling het oppervlak van een bolruimte B_{k+1} beschrijft, vindt men — als langs den aangewezen weg door middel der regels van GULDIN het algemeene geval van een willekeurigen hoek α tot het bijzondere geval $\alpha = 0$ teruggebracht wordt — voor den inhoud $I_{n,k}$ en het oppervlak $O_{n,k}$ van $S(r, \varrho, \alpha)_{n,k}$ de formules

$$\left. \begin{aligned} I_{n,k} &= i_{n-k-1} o_{k+1} \cos^k \alpha \int_{x=\sqrt{r^2-\varrho^2}}^{x=r} y^{n-k-1} x^k dx \\ O_{n,k} &= r o_{n-k-1} o_{k+1} \cos^k \alpha \int_{x=\sqrt{r^2-\varrho^2}}^{x=r} y^{n-k-3} x^k dx \end{aligned} \right\}$$

en hieruit volgt dan de algemeene betrekking

$$O_{n,k} = 2\pi r \cos^2 \alpha I_{n-2,k},$$

waardoor alle gevallen van oppervlaktbepaling behalve $O_{n,n-2}$ en $O_{n,n-3}$ tot eenvoudiger gevallen van inhoudsbepaling worden herleid.

Bij de inhoudsbepaling geeft de integraal een rationale, irrationale of transcendente uitkomst, naarmate k oneven, n oneven en k even, of n even en k even is. En dit is klaarblijkelijk bij de oppervlaktbepaling eveneens het geval.

4. De ringgroep. Door wenteling van een bolruimte $B_{n-k}(r)$ om een ruimte $R_{n-k-1}^{(a)}$ harer ruimte R_{n-k} op een afstand $a > r$ van het middelpunt verwijderd ontstaat in R_n de ring of „torus” $T(r,a)_{n,k}$. Voor inhoud $I(r,a)_{n,k}$ en oppervlak $O(r,a)_{n,k}$ dezer omwentelingsfiguur van den rang k vindt men

$$\left. \begin{aligned} I(r,a)_{n,k} &= o_{k+1} i_{n-k-1} \int_{-a}^a \sqrt{r^2-x^2}^{n-k-1} (a+x)^k dx \\ O(r,a)_{n,k} &= r o_{k+1} o_{n-k-1} \int_{-a}^a \sqrt{r^2-x^2}^{n-k-3} (a+x)^k dx \end{aligned} \right\} \dots (1),$$

waaruit weer de herleidingsformule

$$O_{n,k} = 2 \pi r I_{n-2,k} \dots \dots \dots (2)$$

volgt.

Voor de gevallen $k = 1$ en $k = 2$ worden de uitkomsten gemakkelijker uitgewerkt met behulp van de regels van GULDIN, als men gebruik maakt van zwaartepunt en slingerpunt der wentelende bolruimte.

Geval $k = 1$. Wijl het zwaartepunt van inhoud en oppervlak der bolruimte $B_{n-1}(r)$ in het middelpunt ligt, vindt men

$$I = 2 \pi a \cdot i_{n-1} r^{n-1} \quad , \quad O = 2 \pi a \cdot o_{n-1} r^{n-2}.$$

Geval $k = 2$. De traagheidsstralen van inhoud en oppervlak eener bolruimte $B_{n-2}(r)$ met betrekking tot het middelpunt zijn

$r \sqrt{\frac{n-2}{n}}$ en r , die met betrekking tot een diametraalruimte R_{n-3}

dus $r \sqrt{\frac{1}{n}}$ en $r \sqrt{\frac{1}{n-2}}$. Derhalve vindt men

$$I = 4\pi \left(a^2 + \frac{1}{n} r^2 \right) i_{n-2} r^{n-2} \quad , \quad O = 4\pi \left(a^2 + \frac{1}{n-2} r^2 \right) \cdot o_{n-2} r^{n-3}.$$

Laat men in plaats van de geheele bolruimte $B_{n-k}(r)$ slechts een halve bolruimte $B_{n-k}(r)$ wentelen om een ruimte $R_{n-k-1}^{(a)}$ in haar ruimte R_{n-k} evenwijdig aan haar basis op een afstand a , dan veranderen de grenzen $(-r, r)$ der beide integralen (1) in $(0, r)$ of $(-r, 0)$, naarmate de halve bolruimte $K_{n-k}(r)$ haar basis- of haar bolruimtebegrenzing naar de asruimte $R_{n-k-1}^{(a)}$ toekeert. We houden ons nog een oogenblik met het eerste dezer gevallen bezig en wel voor $k = 1$ en $k = 2$.

Geval $(0, r)$, $k = 1$. Men vindt onmiddellijk

$$I = \pi \left(a + \frac{2}{n} \frac{i_{n-2}}{i_{n-1}} r \right) \cdot i_{n-1} r^{n-1} \quad , \quad O = \pi \left(a + \frac{2}{n-2} \frac{o_{n-2}}{o_{n-1}} r \right) \cdot o_{n-1} r^{n-2} .$$

Geval (0, r), $k = 2$. We bepalen de traagheidsmomenten van inhoud en oppervlak eerst met betrekking tot de basisruimte $R_{n-3}^{(b)}$ en daarna achtereenvolgens met betrekking tot de ruimte $R_{n-3}^{(z)}$ evenwijdig door het zwaartepunt gebracht en met betrekking tot de asruimte $R_{n-3}^{(a)}$. Zoo vinden we ten slotte de formules

$$I = 2\pi \left\{ \frac{r^2}{n} - \left(\frac{2}{n} \frac{i_{n-2}}{i_{n-1}} r \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \frac{i_{n-2}}{i_{n-1}} r + a \right)^2 \right\} \cdot i_{n-2} r^{n-2},$$

$$O = 2\pi \left\{ \frac{r^2}{n-2} - \left(\frac{2}{n-2} \frac{o_{n-2}}{o_{n-1}} r \right)^2 + \left(\frac{2}{n-2} \frac{o_{n-2}}{o_{n-1}} r + a \right)^2 \right\} \cdot o_{n-2} r^{n-3},$$

of

$$I = 2\pi \left(a^2 + \frac{4}{n} \frac{i_{n-2}}{i_{n-1}} ar + \frac{r^2}{n} \right) \cdot i_{n-2} r^{n-2},$$

$$O = 2\pi \left(a^2 + \frac{4}{n-2} \frac{o_{n-2}}{o_{n-1}} ar + \frac{r^2}{n-2} \right) \cdot o_{n-2} r^{n-3},$$

die voor $a = 0$ naar behooren in inhoud en oppervlak van de bolruimte $B_n(r)$ overgaan.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt eene mededeeling aan van den Heer Ch. M. VAN DEVENTER: „*Over het smelten van drijvend ijs*”.

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

In het volgende wordt een en ander bericht over een natuurkundig feit, dat, hoewel behoorende tot de zeer eenvoudige en belangrijke verschijnsels, tot dusver aan de natuurkundigen ontgaan schijnt te zijn. Schrijver dezes vroeg er naar aan zeker een twintigtal mannen van natuurkundige opleiding, en geen hunner had er van gehoord: velen van hen, en juist de in het vak het meest ervarenen, waren er niet weinig door verrast. Het is dus wel van belang over bedoeld feit te berichten, al kan de verklaring worden gevolgd door eerste beginners in de natuurkunde.

§ 1. Om het verrassende van bedoeld feit te doen uitkomen, stelle men het volgende

Vraagstuk.

Gegeven een bak van bepaalde afmeting, waarin water staat tot een

bepaalde hoogte en een stuk ijs drijft van bepaald gewicht, alles bij 0° . Vraag: welke verandering zal de stand van den waterspiegel ondergaan, als het ijs smelt?

Antwoord: de stand van den vloeistofspiegel verandert *niet*.

§ 2. Men kan dit antwoord als een eenvoudige toepassing van Archimedes' wet afleiden. ¹⁾

Zoo het stuk ijs A kilo weegt, is de opwaartsche druk ook A kilo, en dus het gewicht van het verplaatste water eveneens A kilo. Daar nu het gesmolten ijs ook weder A kilo weegt, zal de smelt-massa juist de plaats innemen van het ondergedompelde stuk en dus den stand van het naastgelegen water ongedeerd laten.

Kort gezegd: het ijs trekt zich bij smelting samen in het ondergedompelde volume.

§ 3. Een wat omslachtiger, doch wellicht meer aanschouwelijk betoog is het volgende.

Het stuk ijs hebbe een volume van A liter. Dan is het volume van het vrije deel $83 A$ cm. en van het ondergedompelde $917 A$ cm. Het ondergedompelde stuk geeft na smelting $841 A$ cm. water, het vrije stuk $76 A$ cm. water. Het water van het vrije stuk vult dus aan wat het ondergedompelde stuk bij smelting aan volume verloren had, en er is geen reden voor verandering in den spiegelstand van het omringende water.

Hierbij wordt het s. g. van ijs op $0,917$ gesteld.

§ 4. Duidelijk is, dat men op andere stoffen dezelfde redeneering toepassen kan, zoodat de volgende algemeene regel mag worden gesteld: door de smelting van een stof, die in haar eigen smeltvloeistof drijft, zal de spiegelstand der laatste niet veranderen.

§ 5. Een toepassing van alledaagsch belang is deze: een glas, tot den rand gevuld met water, waarin ijs drijft, zal door smelting van het ijs *niet overloopen*.

Men hoede zich echter, zoo men de proef met een vol glas nemen wil, tegen verwarring met water dat tegen den kouden buitenwand gecondenseerd is en omlaag loopt. Beter bewijs levert een glas, dat niet geheel vol is met water, en waarop men den eersten stand van het niveau aanteekeent: na de smelting moet men hetzelfde niveau vinden.

§ 6. Er moge nog op worden gewezen, dat niet alleen *na*, doch ook *gedurende* de smelting de spiegelstand dezelfde is als daarvóór.

¹⁾ Het gewicht van de lucht wordt in deze verhandeling verwaarloosd.

Indien toch één gram ijs (of een zeker deel daarvan) smelt en daarbij één cm. (of een even groot deel daarvan) water geeft, zullen het gewicht van het drijvende brok en dus ook de opwaartsche druk met één gram (of een evengroot deel daarvan) verminderen en derhalve het volume van het ondergedompelde stuk met één cm. (of een evengroot deel daarvan) afnemen. Voor het meerdere water is dus door de mindering in verplaatsing ruimte gemaakt.

§ 7. De stelling van den blijvenden spiegelstand gaat door, ook zoo het drijvende ijs *ledige holten* heeft.

Dit is terstond duidelijk voor holten, die in het boven den spiegel uitstekende stuk zijn, daar deze holten op den opwaartschen druk geen invloed hebben.

Heeft het ondergedompelde stuk een holte van A cm., dan is de opwaartsche druk even groot als bij een even zwaar holtevrij brok ijs, doch nu zijn er A gram ijs méér boven water. Bij smelting vormen deze A gram ijs A gram water, juist genoeg om de holte op te vullen.

De stelling over den blijvenden spiegelstand gaat óók door, zoo het ijs *luchtblazen* bevat, althans met den zelfden graad van benadering, waarmee men het gewicht der lucht verwaarloozen mag.

§ 8. Indien *zoetwaterijs in zoutwater* drijft en smelt, rijst de spiegel *wel* eenigzins, daar nu het ondergedompelde deel kleiner is dan te voren, en dus het smeltwater zich niet meer geheel in de indompelingsruimte samentrekken kan.

Hier en in het volgende wordt de volumeverandering, veroorzaakt door de *menging* van *zoutwater* en *zoetwater*, verwaarloosd, wat bij een gering zoutgehalte zeker geschieden mag.

Voor A liter ijs, die $917 A$ gram wegen en drijven in zout water van soortelijk gewicht $1,03$, is het indompelingsvolume $890 A$ cm.; de vrijgekomen ruimte kan dus van het smeltwater $890 A$ cm. bergen, maar de overblijvende $27 A$ cm verhoogden den spiegelstand.

Dit overblijvende deel is ongeveer één vierde van het boven den spiegel uitstekende stuk ($110 A$ cm.).

§ 9. Drijft in *zout water* een brok van één liter ijs, dat onder water een holte heeft van B cm., dan zijn er $(1000-B)$ cm. massief ijs van een gewicht $0,917(1000-B)$ gram.

De opwaartsche druk is derhalve $0,917 (1000-B)$ gram, en bij een soortelijk gewicht van het zoute water van $1,03$, is het indompelingsvolume $0,89(1000-B)$ cm. Bij smelting krijgt men $0,917(1000-B)$ cm. water, en dus is er een overschot van $0,027(1000-B)$ cm. water bo-

ven de vrijgekomen indompelingsruimte, dat den waterspiegel verhoogt.

Het boven den spiegel uitstekende stuk ijs was $1000-0,89(1000-B)$ cm. of $(110 + 0,89B)$ cm., en de verhouding van het genoemde overschot tot dit volume is als die van één tot $\left(4,1 + \frac{B}{27-0,027 B}\right)$.

Hoe kleiner B is, hoe meer deze verhouding nadert tot ongeveer een vierde.

§ 10. *Historie.* Aanleiding tot deze verhandeling was een opmerking den schrijver twee jaar geleden door een leerling der derde klasse van het Gymnasium „Willem Drie” te Batavia gemaakt. Deze leerling, VAN ERPECUM genaamd, zeide hem wel eens te hebben waargenomen, dat een glas, tot den rand gevuld met water en drijvend ijs, bij het smelten van het ijs niet overloopt.

Wijl men van dit feit gemakkelijk tot den regel over den blijvenden spiegelstand komt, en deze regel — naar schrijver dezes wel gelooven moet — tot dusver aan de aandacht der natuurkundigen ontgaan is, schijnt het vak aan dezen leerling de ontdekking van een merkwaardig feit te danken en de invoering van een paragraaf.

Amsterdam, Dec. 1904.

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan: „*De beweging der electronen in de metalen.*” I.

Wanneer men zich voorstelt dat in een metaal een groot aantal vrije electronen aanwezig zijn, die aan de warmtebeweging deelnemen, d. w. z. die met een van de temperatuur afhankelijke snelheid in de tusschenruimten tusschen de metaalatomen heen en weervliegen, kan men, zooals vooral door RIECKE¹⁾, DRUDE²⁾ en J. J. THOMSON³⁾ is aangetoond, een verklaring geven van het geleidingsvermogen voor electriciteit en warmte, de thermoelectrische stroomen, het THOMSON-effect, het HALL-effect en verschillende andere verschijnselen. De vraagstukken, waartoe men bij de daarvoor noodige beschouwingen komt, zullen in het volgende behandeld worden op een wijze, die van de

¹⁾ E. RIECKE, Zur Theorie des Galvanismus und der Wärme, Ann. Phys. Chem. 66 (1898), p. 353, 545, 1199; Ueber das Verhältnis der Leitfähigkeiten der Metalle für Wärme und für Elektrizität, Ann. Phys. 2 (1900), p. 835.

²⁾ P. DRUDE, Zur Elektronentheorie der Metalle, Ann. Phys. 1 (1900), p. 566; 3 (1900), p. 369.

³⁾ J. J. THOMSON, Indications relatives à la constitution de la matière fournies par les recherches récentes sur le passage de l'électricité à travers les gaz, Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris, 3, p. 138

door de genoemde natuurkundigen gevolgde methode eenigszins afwijkt en naar het mij voorkomt, in sommige opzichten de voorkeur verdient.

§ 1. Wij zullen vooreerst aannemen dat het metaal slechts ééne soort van vrije electronen bevat, die alle dezelfde lading e en dezelfde massa m hebben; het aantal dezer deeltjes per volume-eenheid noemen wij N en wij onderstellen dat zij een zoo snelle warmtebeweging hebben, dat bij een bepaalde temperatuur de gemiddelde kinetische energie van een electron even groot is als die van een gasmolekuul. Is T de absolute temperatuur, dan schrijven wij voor die gemiddelde kinetische energie αT , waarbij α een constante is.

Wij beschouwen nu een cilindrische staaf, die op verschillende plaatsen op ongelijke temperaturen wordt gehouden, zoodat, wanneer men de x -as in de richting der lengte kiest, T een functie van x is; hetzelfde kan dan ook met N het geval zijn. Bovendien nemen wij aan dat in de richting der x -as op elk electron een kracht mX werkt, waarvan de grootte van x afhangt; deze kracht kan uit een electrisch veld voortvloeien, of ook, in een niet homogeen metaal, uit een moleculaire aantrekking, die de metaalatomen op de electronen uitoefenen. Wij stellen ons ten doel, het aantal deeltjes ν te berekenen, die per tijdseenheid en per vlakte-eenheid door een vlaktelement loodrecht op de x -as meer naar de positieve dan naar de negatieve zijde gaan, alsmede de hoeveelheid arbeidsvermogen W die, eveneens per tijdseenheid en vlakte-eenheid, meer naar de positieve dan naar de negatieve zijde gevoerd wordt.

Dit vraagstuk heeft veel overeenkomst met die, welke in de kinetische gastheorie voorkomen en kan, evenals deze, alleen volgens de bekende statistische methode van MAXWELL en BOLZMANN streng worden behandeld.

Bij de opstelling der grondvergelijking waarvan wij moeten uitgaan, beperken wij ons niet tot de cilindrische staaf, maar vatten wij een algemeener geval in het oog. Daarbij voeren wij een vereenvoudiging in, die het mogelijk maakt, in deze theorie der beweging van een zwerm electronen verder te gaan dan bij de behandeling van een stelsel gasmolekulen. Ook nu wordt nl. de aard der verschijnselen bepaald door de omstandigheid dat een deeltje slechts over een kleinen afstand in rechte lijn kan voortgaan, en komt in vele vergelijkingen de gemiddelde lengte van den vrijen weg voor. Terwijl nu echter in een gas het voortvliegen der molekulen beperkt wordt door de *onderlinge* botsingen, zullen wij aannemen dat in het metaal de botsing der electronen *tegen de metaalatomen* de voornaamste rol speelt; wij zullen onderstellen dat de electronen veel meer tegen metaalatomen

dan tegen andere electronen botsen en dat dit zelfs in die mate het geval is, dat van hunne onderlinge botsingen geheel mag worden afgezien. Bovendien zullen wij de metaalatomen bij de berekening van het aantal botsingen als stilstaande volkomen veerkrachtige bollen beschouwen. Door deze vereenvoudigingen, die een strenge oplossing van verschillende vraagstukken mogelijk maken, wijken wij wel van de werkelijkheid af, maar het komt mij voor dat de algemeene aard der verschijnselen er niet door wordt veranderd.

§ 2. Zij dS een volume-element aan het punt (x, y, z) . Op den tijd t bevat dit een zeker aantal (en wel een zeer groot aantal) electronen, die zich op verschillende wijzen bewegen.

Wij kunnen ons nu voorstellen dat in een volle volume-eenheid, wat de opeenhooping der elektronen en de verdeling der snelheden over deze deeltjes betreft, dezelfde toestand bestaat als in het element dS . Om de snelheidsverdeling over de N electronen, waarmede wij dan te doen hebben, aan te geven, trekken wij in een hulpfiguur, die wij het snelheidsdiagram zullen noemen, van uit een vast punt O , N vectoren, die de snelheden in richting en grootte voorstellen. De uiteinden dezer vectoren noemen wij de snelheidspunten der electronen; wanneer wij in het snelheidsdiagram coördinaatassen invoeren, met O tot oorsprong en evenwijdig aan de coördinaatassen die wij in het metaal zelf bezigen, zullen de coördinaten van het snelheidspunt gelijk zijn aan de snelheidscomponenten ξ , η , ζ van het overeenkomstige electron. Schrijven wij nu

$$f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda$$

voor het aantal snelheidspunten in het element $d\lambda$, liggende aan het punt (ξ, η, ζ) , dan komt alles neer op de bepaling der functie $f(\xi, \eta, \zeta)$. Wij kunnen zeggen dat

$$f(\xi, \eta, \zeta) dS d\lambda \dots \dots \dots (1)$$

het aantal electronen is, die in het beschouwde element dS liggen en hunne snelheidspunten in het element $d\lambda$ hebben; ook, dat

$$f(\xi, \eta, \zeta) dS d\xi d\eta d\zeta \dots \dots \dots (2)$$

het aantal electronen is, waarvan de drie snelheidscomponenten resp. liggen tusschen ξ en $\xi + d\xi$, η en $\eta + d\eta$, ζ en $\zeta + d\zeta$. Deze laatste uitdrukking ontstaat uit (1) door geschikte keus van het element $d\lambda$.

Verder is het duidelijk, hoe men uit (1) het geheele aantal electronen, alsmede de in § 1 genoemde grootheden v en W kan afleiden, ten minste, wanneer men zich bij de laatste tot de kinetische energie der electronen bepaalt. Men heeft nl., als men telkens over de volle uitgestrektheid van het snelheidsdiagram integreert, en de grootte der snelheid van een electron door v voorstelt,

$$N = \int f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda, \dots \dots \dots (3)$$

$$v = \int \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda, \dots \dots \dots (4)$$

$$W = \frac{1}{2} m \int \xi^2 f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda \dots \dots \dots (5)$$

Zoodra de toestand in het metaal van plaats en tijd afhangt, zullen in de functie $f(\xi, \eta, \zeta)$ ook x, y, z en t voorkomen, welke grootheden intusschen bij de bovenstaande integraties als constant beschouwd moeten worden. Wij kunnen dan, in plaats van $f(\xi, \eta, \zeta)$, schrijven $f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)$. Soms bezigen wij ook ter bekorting alleen het teeken f .

§ 3. Op de volgende wijze kunnen wij tot een vergelijking geraken, die kan dienen om de functie f te bepalen. Wij beschouwen de groep electronen, die op den tijd t in het element dS aan het punt (x, y, z) liggen en hunne snelheidspunten in het bovengenoemde element $d\lambda$ hebben. Het aantal dezer deeltjes is

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t) dS d\lambda \dots \dots \dots (6)$$

Deze groep electronen zullen wij gedurende een tijd dt op hun weg volgen. Voor zoover zij geene botsingen ondergaan, zullen zij aan het einde van dien tijd in een element dS' liggen, dat men verkrijgt door dS in de richting der assen over de afstanden $\xi dt, \eta dt, \zeta dt$ te verschuiven. Tevens zijn, wanneer er uitwendige krachten werken, de snelheden veranderd. Werkt op elk electron dezelfde kracht (mX, mY, mZ) , dan zijn de snelheidscomponenten alle toegenomen met Xdt, Ydt, Zdt ; de snelheidspunten komen dus in een nieuw element $d\lambda'$, dat uit $d\lambda$ door verschuiving over deze afstanden ontstaat.

Ondertusschen hebben een zeker aantal deeltjes, waarvoor wij zullen schrijven

$$a d S d \lambda d t$$

een botsing ondergaan, en dien ten gevolge, daar hierbij hunne snelheden veranderd zijn, de groep verlaten, terwijl omgekeerd een aantal electronen, die eerst niet tot de groep behoorden, tengevolge van botsingen zoodanige snelheden hebben gekregen, dat zij er deel van uitmaken. Schrijven wij voor dit laatste aantal

$$b d S d \lambda d t,$$

dan kunnen wij zeggen:

Vermeerdert men (6) met $(b - a) d S d \lambda d t$, dan krijgt men het aantal electronen, die op den tijd $t + dt$ liggen in het element dS' aan het punt $(x + \xi dt, y + \eta dt, z + \zeta dt)$ en hunne snelheidspunten

hebben in het element $d\lambda'$ aan het punt $(\xi + X dt, \eta + Y dt, \zeta + Z dt)$. Derhalve, daar $dS' = dS$ en $d\lambda' = d\lambda$ is,

$$f(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t) + (b - a) dt = \\ = f(\xi + X dt, \eta + Y dt, \zeta + Z dt, x + \xi dt, y + \eta dt, z + \zeta dt, t + dt),$$

waarvoor men ook kan schrijven

$$b - a = \frac{\partial f}{\partial \xi} X + \frac{\partial f}{\partial \eta} Y + \frac{\partial f}{\partial \zeta} Z + \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta + \frac{\partial f}{\partial t}, \quad (7)$$

wat de gezochte vergelijking is ¹⁾.

Men kan gemakkelijk aantoonen dat men, bij de berekening van de aantallen botsingen a en b niet behoeft te letten op de veranderingen, die de toestand in het metaal van punt tot punt ondergaat. M. a. w., wanneer men zich een metaal massa voorstelt, waarin de toestand overal dezelfde is als in het element dS , dan zal $a d\lambda dt$ het aantal electronen zijn, die in de volume-eenheid van die massa in den tijd dt de door $d\lambda$ gekarakteriseerde groep verlaten en evenzoo $b d\lambda dt$ het aantal elektronen, die door een botsing in die groep gebracht worden.

§ 4. Voor de grootheden a en b kunnen tamelijk eenvoudige uitdrukkingen worden gevonden, wanneer men de reeds in § 1 genoemde vereenvoudiging invoert. Wij behandelen niet alleen een metaalatom maar ook een electron als een volkomen harden veerkrachtigen bol en stellen de som hunner stralen door R en het aantal metaalatomen per volume-eenheid door n voor.

Onder al de botsingen beschouwen wij nu vooreerst alleen die, bij welke op het oogenblik der ontmoeting de verbindingslijn der middelpunten binnen een kegel met de oneindig kleine opening $d\omega$ valt; een of andere lijn binnen dien kegel noemen wij de as daarvan en wij verstaan onder ϑ den *scherpen* hoek tusschen die as en de bewegingsrichting der beschouwde electronengroep.

Men vindt nu gemakkelijk voor het aantal electronen dier groep, die per tijdseenheid op de door den kegel beperkte wijze een botsing ondergaan,

$$n R^2 f(\xi, \eta, \zeta) r \cos \vartheta d\lambda d\omega \dots \dots \dots (8)$$

en dus

$$a = n \pi R^2 f(\xi, \eta, \zeta) r \dots \dots \dots (9)$$

Kennen wij verder aan de metaalatomen zoo groote massa's toe, dat zij, ondanks den stoot van een electron, in rust blijven, dan kunnen wij zeer gemakkelijk de snelheid van het electron na de botsing aangeven. Daar wij bij deze vraag mogen rekenen dat de

¹⁾ Verg. LORENTZ, Les équations du mouvement des gaz et la propagation du son suivant la théorie cinétique des gaz, Arch. néerl. 16, p. 9.

verbindingslijn der middelpunten bij de botsing juist de richting der as van den kegel $d\omega$ heeft, behoeven wij slechts de snelheid van het electron vóór de botsing te ontbinden in een component langs die as en een tweede loodrecht daarop; terwijl de laatste component onveranderd blijft, wordt de richting van de eerste omgekeerd. Wij kunnen dit ook zoo uitdrukken: Wanneer men in het snelheidsdiagram door den oorsprong een vlak V brengt, loodrecht op de as van den kegel $d\omega$, dan springt bij de botsing het snelheidspunt van een electron naar zijn spiegelbeeld met betrekking tot dat vlak V over. Daaruit volgt aanstonds dat van alle electronen die vóór de botsing hunne snelheidspunten in het element $d\lambda$ hebben, na de botsing de snelheidspunten in een element $d\lambda_r$ zullen liggen, dat het spiegelbeeld van $d\lambda$ met betrekking tot het vlak V is. Omgekeerd kunnen van electronen, welker snelheidspunten eerst binnen $d\lambda_r$ vallen, de snelheidspunten door botsingen van den beschouwden aard in $d\lambda$ komen; het aantal gevallen waarin dit plaats heeft, vindt men door in (8) ξ, η, ζ te vervangen door de coördinaten van het spiegelbeeld van het punt (ξ, η, ζ) , welke coördinaten wij ξ', η', ζ' zullen noemen. Ik doe hierbij opmerken dat wij aan $r \cos \vartheta d\lambda$ niets behoeven te veranderen, daar de lijnen, in het snelheidsdiagram uit den oorsprong naar de punten (ξ, η, ζ) en (ξ', η', ζ') getrokken, even lang zijn en gelijke hoeken met de as van den kegel maken, terwijl bovendien $d\lambda_r = d\lambda$ is. Wij hebben dus voor de aanwinst die de beschouwde groep per tijdseenheid ondergaat, tengevolge van botsingen, bij welke de verbindingslijn der middelpunten binnen den kegel $d\omega$ valt,

$$n R^2 f(\xi', \eta', \zeta') r \cos \vartheta d\lambda d\omega$$

en hieruit vindt men b , wanneer men $d\lambda$ weglaat en over al de kegelopeningen $d\omega$, die in aanmerking kunnen komen, integreert.

Voor het volgende is het 't gemakkelijkst, met gebruikmaking van (8) aanstonds een uitdrukking voor $b-a$ op te stellen; daardoor gaat de vergelijking (7) over in

$$\begin{aligned} n R^2 r \int \{f(\xi', \eta', \zeta') - f(\xi, \eta, \zeta)\} \cos \vartheta d\omega = \\ = \frac{\partial f}{\partial \xi} X + \frac{\partial f}{\partial \eta} Y + \frac{\partial f}{\partial \zeta} Z + \frac{\partial f}{\partial x} \xi + \frac{\partial f}{\partial y} \eta + \frac{\partial f}{\partial z} \zeta + \frac{\partial f}{\partial t} \dots \quad (10) \end{aligned}$$

De waarden van ξ', η', ζ' zijn gemakkelijk aan te geven. Verstaat men onder f, g, h de hoeken tusschen de coördinaatassen en de as van den kegel $d\omega$, de laatste lijn in zoodanige richting getrokken, dat hij met de snelheid (ξ, η, ζ) den scherpen hoek ϑ maakt, dan is

$$\xi' = \xi - 2r \cos \vartheta \cos f, \quad \eta' = \eta - 2r \cos \vartheta \cos g, \quad \zeta' = \zeta - 2r \cos \vartheta \cos h, \quad (11)$$

door welke formules bevestigd wordt, dat de grootte der snelheid

(ξ', η', ζ') , die wij r' kunnen noemen, gelijk is aan de grootte r van de snelheid (ξ, η, ζ) .

Wat de integratie in het eerste lid van (10) betreft, deze kan zoo worden opgevat, dat zij zich over een halven bol uitstrekt. Is nl. op een bol, in het snelheidsdiagram met den straal 1 om den oorsprong O als middelpunt beschreven, P het punt dat aan de richting (ξ, η, ζ) en Q het punt dat aan de richting (f, g, h) beantwoordt, dan moet men aan Q alle standen geven, bij welke zijn spherische afstand tot $P < \frac{1}{2} \pi$ is, terwijl voor $d\omega$ een element van het boloppervlak bij het punt Q kan worden genomen.

§ 5. Op het beschouwde oogenblik t zal in het punt (x, y, z) van het metaal een bepaalde temperatuur T bestaan en het getal N , dat wij de concentratie der beschouwde electronen-groep kunnen noemen, een bepaalde waarde hebben.

Het ligt nu voor de hand aan te nemen dat, wanneer T en N overal en voortdurend diezelfde waarden hadden, de verdeling der verschillende snelheden over de electronen aan de bekende wet van MAXWELL zou beantwoorden, d. w. z. dat

$$f(\xi, \eta, \zeta) = Ae^{-hr^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

zou zijn. De constante A hangt met N samen volgens de formule

$$A = N \sqrt{\frac{h^3}{\pi^3}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

terwijl het gemiddelde snelheidsquadraat bepaald wordt door

$$\overline{r^2} = \frac{3}{2h}.$$

Daar nu $\frac{1}{2} m \overline{r^2} = aT$ is, heeft men

$$h = \frac{3m}{4aT} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

De afhankelijkheid der verschijnselen van de temperatuur zal dus bekend zijn, zoodra men weet hoe zij van h afhangen.

§ 6. Wanneer, zooals wij moeten onderstellen, de toestand in het metaal van punt tot punt verandert, zijn A en h functiën van x, y, z . Wij mogen dan de vergelijking (12) niet meer aannemen, maar kunnen toch altijd stellen

$$f(\xi, \eta, \zeta) = Ae^{-hr^2} + \varphi(\xi, \eta, \zeta), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

waarin φ een voorloopig onbekende functie is, die nu uit de vergelijking (10) moet worden afgeleid. Wij zullen aannemen, wat door de uitkomst zal worden bevestigd, dat de waarde van $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ zeer klein is in vergelijking met Ae^{-hr^2} . Dientengevolge mogen wij in het tweede lid van (10), welk lid reeds een van 0 verschillende waarde heeft, als men voor f de uitdrukking Ae^{-hr^2} substitueert, van $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$

afzien. Het tweede lid wordt dus, wanneer wij den toestand stationair onderstellen, en ons nu verder tot het geval der in § 2 genoemde staaf bepalen,

$$\left(-2 h A X + \frac{dA}{dx} - r^2 A \frac{dh}{dx} \right) \xi e^{-hr^2} \dots \dots \dots (16)$$

In het eerste lid der vergelijking (10) mogen wij de functie φ niet verwaarloozen, daar dit lid 0 wordt, wanneer f de waarde (12) heeft, en dus alleen wegens de afwijking van de wet van MAXWELL de in (16) aangegeven grootte kan aannemen. Wegens het voorkomen van den factor ξ in (16) ligt het nu voor de hand te beproeven aan de vergelijking te voldoen door

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \xi \chi(r) \dots \dots \dots (17)$$

te stellen; het blijkt dat dit inderdaad mogelijk is. Is nl.

$$f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-hr^2} + \xi \chi(r)$$

en eveneens

$$f(\xi', \eta', \zeta') = A e^{-hr'^2} + \xi' \chi(r'),$$

dan heeft men, daar $r' = r$ is, wegens (11),

$$f(\xi', \eta', \zeta') - f(\xi, \eta, \zeta) = -2 r \cos \vartheta \cos f \chi(r),$$

zoodat het eerste lid van (10) overgaat in

$$-2 n R^2 r^2 \chi(r) \int \cos^2 \vartheta \cos f d \omega \dots \dots \dots (18)$$

Zij nu μ de hoek, dien de snelheid (ξ, η, ζ) , dus de bovengenoemde lijn OP met de x -as maakt, en ψ de hoek tusschen de vlakken QOP en XOP , dan gaat (18) over in

$$\begin{aligned} -2 n R^2 r^2 \chi(r) \int_0^{\frac{1}{2} \pi} \int_0^{2 \pi} \cos^2 \vartheta (\cos \vartheta \cos \mu + \sin \vartheta \sin \mu \cos \psi) \sin \vartheta d \vartheta d \psi = \\ = -\pi n R^2 r^2 \chi(r) \cos \mu = -\pi n R^2 \xi r \chi(r). \end{aligned}$$

Dit aan (16) gelijkstellende, ziet men ξ wegvallen, zoodat werkelijk $\chi(r)$ als een functie van r alleen bepaald wordt. Uit de vergelijkingen (15) en (17) volgt dan, als wij ter afkorting

$$\frac{1}{\pi n R^2} = l \dots \dots \dots (19)$$

stellen,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = A e^{-hr^2} + l \left(2h A X - \frac{dA}{dx} + r^2 A \frac{dh}{dx} \right) \frac{\xi}{r} e^{-hr^2} \dots (20)$$

Ik doe hierbij opmerken dat men, zooals men uit (9) kan afleiden, de door (19) bepaalde grootte l de gemiddelde vrije weglengte der electronen kan noemen, en dat de termen met $\frac{dA}{dx}$ en $\frac{dh}{dx}$ in (20) zeer klein zullen zijn in vergelijking met den term $A e^{-hr^2}$, zoolang

de toestand van het metaal in twee punten, die op een afstand l van elkaar liggen, zeer weinig verschillend is. Deelt men nl. de bedoelde termen door $A e^{-hr^2}$, dan zijn de uitkomsten van de orde van grootte

$$\frac{l \frac{dA}{dx}}{A} \text{ en } l \bar{r}^2 \frac{dh}{dx},$$

bij welke laatste uitdrukking in aanmerking moet worden genomen dat \bar{r}^2 van dezelfde orde is als $\frac{1}{h}$.

Deelt men ook den term met X in de vergelijking (20) door $A e^{-hr^2}$, dan komt er

$$2 h l X.$$

Daar nu $2 l X$ de tweede macht der snelheid is, die een electron zou verkrijgen, wanneer het zonder beginsnelheid over een afstand l aan de uitwendige kracht $m X$ was onderworpen, zal ook die term met X zeer klein zijn in vergelijking met $A e^{-hr^2}$, wanneer de bedoelde snelheid veel kleiner is dan de molekulare snelheid der electronen.

Uit deze beschouwingen blijkt dat men zeker in zeer vele gevallen, zooals wij boven gedaan hebben, in het tweede lid der vergelijking (7) van de functie φ (§, η , ξ) mag afzien.

Alleen zou dat niet geoorloofd zijn, wanneer twee metalen door een oppervlak scherp van elkaar waren gescheiden. Wij zullen daarom, wanneer in het vervolg sprake is van twee elkaar aanrakende metalen, onderstellen dat deze door een laag van zekere dikte, in welke de eigenschappen geleidelijk veranderen, van elkaar gescheiden zijn; wanneer wij dan aannemen dat de dikte dier laag zeer groot is in vergelijking met l , zullen in (20) de termen met $\frac{dA}{dx}$ en $\frac{dh}{dx}$ weer zeer klein zijn ten opzichte van den eersten term.

Hetzelfde zal het geval zijn, wat den term met X betreft, want wij mogen ons wel voorstellen dat de in de overgangslaag werkende krachten eerst dan een noemenswaardige snelheid aan een electron (zonder beginsnelheid) kunnen geven, wanneer zij daarop over een afstand, gelijk aan een merkbaar deel der dikte van de laag werken.

Dat nu sommige grootheden (potentiaalverschil en PELTIER-effect) die wij voor de grens van twee metalen zullen berekenen, ook bij een scherpe afscheiding de waarden zouden hebben, die wij er voor vinden, kunnen wij door deze kinetische beschouwingen niet bewijzen; wij mogen het echter op thermodynamische gronden verwachten.

§ 7. Nu wij in (20) de wet der snelheidsverdeling gevonden hebben, kunnen wij de gezochte grootheden v en W (§ 1) bere-

kenen. Substitueert men de waarde (20) in (4) en (5),¹⁾ dan leidt de term $A e^{-hr^2}$ tot een uitdrukking die onder het integraalteeken den factor ξ bevat, en dus bij integratie over het geheele snelheidsdiagram verdwijnt. De overige termen van (20) geven integralen, die den factor ξ^2 bevatten en die men gemakkelijk vindt, wanneer men dien factor door $\frac{1}{3} r^2$, het element $d\lambda$ door $4 \pi r^2 dr$ vervangt, en dan van $r=0$ tot $r=\infty$ integreert. Voert men $r^2 = s$ als nieuwe veranderlijke in, dan komt men tot de drie integralen

$$\int_0^{\infty} s e^{-hs} ds, \quad \int_0^{\infty} s^2 e^{-hs} ds \quad \text{en} \quad \int_0^{\infty} s^3 e^{-hs} ds,$$

waarvan de waarden zijn :

$$\frac{1}{h^2}, \quad \frac{2}{h^3}, \quad \text{en} \quad \frac{6}{h^4}.$$

Ten slotte vindt men voor den „electronenstroom” en den warmtestroom

$$v = \frac{2}{3} \pi l \left[\frac{1}{h^2} \left(2 h A X - \frac{dA}{dx} \right) + 2 \frac{A}{h^3} \frac{dh}{dx} \right]. \quad \dots \quad (21)$$

$$W = \frac{2}{3} \pi m l \left[\frac{1}{h^3} \left(2 h A X - \frac{dA}{dx} \right) + 3 \frac{A}{h^4} \frac{dh}{dx} \right]. \quad \dots \quad (22)$$

Met deze uitdrukkingen zullen wij nu verder werken; daarbij zal ik nog aannemen, dat zij, als men maar een geschikte waarde aan l toekent, ook doorgaan bij andere onderstellingen omtrent de metaal-atomen en de werking die deze op de electronen uitoefenen. Deze opvatting brengt mede dat wij, zoo wij met verschillende soorten van electronen te doen hebben, de mogelijkheid open laten, dat de gemiddelde vrije weglengte voor deze niet dezelfde is. Ook kunnen wij onderstellen dat, voor elke soort electronen, l van de temperatuur afhangt.

Voorloopig bepalen wij ons tot het geval dat er maar één soort vrije electronen is; het meer algemeene geval hoop ik in een latere mededeeling te behandelen.

§ 8. Uit (21) kunnen wij nu vooreerst een uitdrukking voor het *electrisch geleidingsvermogen* σ van het metaal afleiden.

Daartoe onderstellen wij dat in een homogene metaalstaaf, die overal op dezelfde temperatuur wordt gehouden, een electrische kracht E in de richting der lengte werkt. Daar elk electron dan aan een kracht eE is onderworpen, heeft men

¹⁾ Het verdient opmerking dat de waarde (20), zooals het geval moet zijn, voor het aantal electronen per volume-eenheid N en voor het gemiddelde snelheids-kwadraat $\frac{3}{2h}$ oplevert.

$$X = \frac{e E}{m};$$

verder is $\frac{dA}{dx} = 0$ en $\frac{dh}{dx} = 0$, zoodat (21) overgaat in

$$v = \frac{4\pi l A e}{3hm} E.$$

Men vindt hieruit den electricchen stroom per eenheid van doorsnede, wanneer men met e vermenigvuldigt, en vervolgens het geleidingsvermogen, als men door E deelt. Dus wordt

$$\sigma = \frac{4\pi l A e^2}{3hm}, \dots \dots \dots (23)$$

of, wanneer men de betrekkingen (13) en (14) in aanmerking neemt, en onder u een snelheid verstaat, waarvan de tweede macht het gemiddelde snelheidsquadraat $\frac{3}{2h}$ der warmtebeweging is,

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot \frac{l N e^2 u}{\alpha T} \dots \dots \dots (24)$$

De waarde die DRUDE in zijne aangehaalde verhandeling vindt, is

$$\sigma = \frac{1}{4} \frac{l N e^2 u}{\alpha T}.$$

§ 9. In de tweede plaats beschouwen wij het geleidingsvermogen voor warmte, dat wij in arbeidseenheden uitgedrukt, door k voorstellen. Daartoe stellen wij ons voor dat de staaf op verschillende plaatsen op ongelijke temperatuur wordt gehouden. Wanneer nu aanvankelijk $X = 0$ is, zal blijkens (21), een electricche stroom ontstaan. Daardoor ontstaan tusschen de doorsneden der staaf, die wij geïsoleerd onderstellen, potentiaalverschillen, en deze groeien zoolang aan tot de electricche ladingen niet meer veranderen, d. w. z. totdat $v = 0$ is geworden.

In den eindtoestand is derhalve

$$2h A X - \frac{dA}{dx} = -2 \frac{A}{h} \frac{dh}{dx} \dots \dots \dots (25)$$

en substitueert men dit in (22), dan vindt men, als men weer van (14) gebruik maakt,

$$W = - \frac{8\pi l A \alpha}{9h^2} \frac{dT}{dx}.$$

Hieruit volgt

$$k = \frac{8\pi l A \alpha}{9h^2}, \dots \dots \dots (26)$$

of

$$k = \frac{8}{9} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} l N \alpha u, \dots \dots \dots (27)$$

terwijl DRUDE vindt

$$k = \frac{1}{3} l N a u .$$

De verhouding der beide geleidingsvermogens wordt nu

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{8}{9} \left(\frac{\alpha}{e} \right)^2 T (28)$$

in plaats van

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3} \left(\frac{\alpha}{e} \right)^2 T,$$

zooals uit de formules van DRUDE volgt.

De gevolgtrekkingen waartoe deze natuurkundige geraakt, dat $\frac{k}{\sigma}$ onafhankelijk van den aard van het metaal en evenredig met de absolute temperatuur zou zijn, zooals voor vele metalen door de metingen bij benadering bevestigd wordt, blijven dus bestaan¹⁾. Alleen wat de absolute waarden betreft, leiden onze formules tot eenigszins andere uitkomsten.

Uit (28) volgt

$$\frac{\alpha T}{e} = \sqrt{\frac{9 k}{8 \sigma} T} (29)$$

en, wanneer men onderstelt dat de lading e van een electron even groot is als die van een waterstofion in een electrolyt, heeft men ook

$$\frac{\alpha T}{e} = 3p,$$

als p den druk voorstelt, dien een waterstofmassa bij de temperatuur T uitoefent, wanneer in de volume-eenheid een electrochemisch equivalent aanwezig is. Dan is nl. het aantal atomen $\frac{1}{e}$, dus het aantal molekulen $\frac{1}{2e}$. Daar nu de gemiddelde kinetische energie van een gasmolekuul αT is, bedraagt de gezamenlijke kinetische energie in de volume-eenheid $\frac{\alpha T}{2e}$ en de getalwaarde van den druk per vlakteeenheid is hiervan, zooals men weet, twee derde.

Bezigt men de gebruikelijke electromagnetische eenheden en overi-

$$3p = 38.$$

¹⁾ Deze uitkomsten kunnen alleen verkregen worden, wanneer wij aannemen, dat de botsingen tegen metaalatomen de hoofdrol spelen. De botsingen tusschen de electronen onderling hebben nl. wel invloed op de warmtegeleiding, maar niet op de electriciteitsgeleiding (daar hierbij *alle* electronen zich naar dezelfde zijde bewegen). Zij zouden dus de standvastigheid der verhouding van de geleidingsvermogens verstoren. Verg. THOMSON, l. c., p. 146.

gens het C. G. S. stelsel, dan is het electrochemisch æquivalent van waterstof 0,000104; daaruit volgt, als men $T = 273^{\circ} + 18^{\circ}$ stelt,

Aan den anderen kant is volgens de metingen van JAEGER en DIESELHORST voor zilver bij de genoemde temperatuur

$$\frac{k}{\sigma} = 6,85 \times 10^{10},$$

wat, in (29) gesubstitueerd, geeft

$$\frac{\alpha T}{e} = 47.$$

De overeenstemming tusschen de twee gevonden getallen, voor welke zeer van elkaar verschillende verschijnselen de gegevens hebben opgeleverd, is voldoende om ons te doen vertrouwen dat men met een theorie zooals de door DRUDE en nu hier in anderen vorm ontwikkelde, op den goeden weg is.¹⁾

§ 10. Stellen wij den potentiaal door φ voor, dan moeten wij in (25) stellen

$$X = - \frac{e}{m} \frac{d\varphi}{dx},$$

zoodat de vergelijking ons in staat stelt, zoodra wij N als functie van T , of A als functie van h kennen, het potentiaalverval in elk punt der staaf en dus ook het potentiaalverschil tusschen de uiteinden te berekenen.

Wij zullen de bepaling van zulk een potentiaalverschil voor een algemeener geval uitvoeren. Vooraf merken wij op dat de vergelijkingen (21) en (22) ook op een dunne gebogen draad of staaf kunnen worden toegepast, waarbij wij nog kunnen aannemen dat de loodrechte doorsnede Σ geleidelijk van punt tot punt verandert. De lijn die door de zwaartepunten der loodrechte doorsneden loopt, noemen wij de *as* van den geleider; onder x kunnen wij nu den van een vast punt langs die as gemeten afstand verstaan. Wij zullen aannemen dat de eigenschappen van het metaal en de temperatuur in elke loodrechte doorsnede overal hetzelfde zijn, maar dat zij van de eene doorsnede tot de andere veranderen, zoodat zij van x afhangen. Door nu verschillende onderstellingen hieromtrent te maken, krijgen wij verschillende *ketens*, uit een enkel metaal of verschillende metalen samengesteld, en met willekeurige temperatuurverdeling.

¹⁾ Bezigt men in plaats van (28) de formule van DRUDE, dan wordt deze overeenstemming nog beter. Zie, wat de absolute waarde van $\frac{k}{\sigma}$ betreft, ook REINGANUM,

Theoretische Bestimmung des Verhältnisses von Wärme- und Elektrizitätsleitung der Metalle aus der DRUDE'schen Elektronentheorie, Ann. Phys., 2 (1900), p. 398.

Ter wille van de algemeenheid zullen wij nu ook nog onderstellen, dat overal waar het metaal niet homogeen is, de electronen door „moleculaire” krachten van dezen of genen aard, die zij van de metaalatomen ondervinden, naar de eene of de andere zijde worden voortgedreven, zooals HELMHOLTZ lang geleden ter verklaring van de verschijnselen der contact-electriciteit heeft aangenomen. Wij brengen deze krachten het eenvoudigst in rekening door het daaraan beantwoordende arbeidsvermogen van plaats V in te voeren, dat een electron ten opzichte van de metaalatomen heeft; die grootheid is overal waar het metaal niet homogeen is, met x veranderlijk, maar in elk homogeen metaal een constante. Wij zullen ons voorstellen dat dit laatste ook nog geldt, wanneer de temperatuur in het metaal niet overal dezelfde is. Duiden wij den potentiaal weer met φ aan, dan kunnen wij nu X in twee deelen splitsen,

$$\left. \begin{aligned} X &= X_m + X_e \\ X_m &= -\frac{1}{m} \frac{dV}{dx}, \quad X_e = -\frac{e}{m} \frac{d\varphi}{dx} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

Wij beschouwen nu een *open* keten; de uiteinden daarvan noemen wij P en Q en wij rekenen x van af het eerste naar het tweede einde. Door $v=0$ te stellen, en (30) in aanmerking te nemen, vindt men uit (21) voor den stationairen toestand

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{e} \frac{dV}{dx} - \frac{m}{e} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) - \frac{m}{2eh} \frac{d \log A}{dx} \dots \dots (31)$$

en dus door integratie

$$\begin{aligned} \varphi_Q - \varphi_P &= \frac{1}{e} \left(V_P - V_Q \right) + \frac{m}{e} \left(\frac{1}{h_P} - \frac{1}{h_Q} \right) - \\ &\quad - \frac{m}{2e} \int_P^Q \frac{1}{h} \frac{d \log A}{dx} dx \dots \dots (32) \end{aligned}$$

Hieruit kan men het potentiaalverschil in verschillende gevallen afleiden.

a. Wanneer de temperatuur; en dus h , overal hetzelfde is, wordt

$$\varphi_Q - \varphi_P = \frac{1}{e} \left(V_P - V_Q \right) + \frac{m}{2eh} \left(\log A_P - \log A_Q \right) \dots (33)$$

Het potentiaalverschil is dan van 0 verschillend, wanneer de uiteinden van de keten uit verschillend metaal bestaan. Men ziet dat men het in zulk een geval bestaand potentiaalverschil zoowel door een ongelijkheid van V_P en V_Q , dus uit „moleculaire” krachten (HELMHOLTZ) als uit een ongelijkheid van A_P en A_Q , d. w. z. van de concentraties der electronen in de twee metalen (DRUDE) kan verklaren.

Dat (33) 0 is wanneer de uiteinden van de keten uit hetzelfde metaal bestaan en dat de wet der spanningsreeks in de vergelijking ligt opgesloten, behoeft niet nader aangewezen te worden.

b. Als de keten overal uit hetzelfde metaal bestaat en dus A een functie van h is, geeft (32) altijd de waarde 0, zoodra de eindpunten van de keten op dezelfde temperatuur worden gehouden, onverschillig hoe verder de temperatuur verdeeld is.

c. Het potentiaalverschil tusschen de uiteinden van een geopende thermo-electrische keten, dat wij als maat voor de electromotorische kracht F van die keten mogen beschouwen, kunnen wij op de volgende wijze berekenen. Wij stellen ons voor, van P naar Q langs de keten gaande, 1° van P tot een doorsnede R' het metaal I met een temperatuur, die van T_P tot T' verandert; 2° van R' tot S' een geleidelijke overgang van het metaal I tot het metaal II (§ 6) in een laag waar de temperatuur overal T' is; 3° van S' tot S'' het metaal II met een temperatuur die van T' tot T'' verandert; 4° van S'' tot R'' weer, bij overal gelijke temperatuur T'' , een geleidelijke overgang van het metaal II tot het metaal I en eindelijk 5° van R'' tot Q het metaal I met een temperatuur die van T'' overgaat in $T_Q = T_P$. Zooals men ziet, bestaan de uiteinden van de keten uit hetzelfde metaal en hebben zij dezelfde temperatuur. In de vergelijking (32) hebben wij nu alleen met den laatsten term te doen, en wij vinden door partieele integratie

$$F = \frac{m}{2e} \int_P^Q \log A \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

De hierin voorkomende integraal kunnen wij in vijf deelen, behorende bij de bovengenoemde deelen van de keten, splitsen.

Onderscheiden wij de verschillende te pas komende waarden van h en A door geschikte indices, en bedenken wij dat in het tweede deel h overal dezelfde waarde heeft, en eveneens in het vierde, dan hebben wij

$$\int_{R'}^{S'} \log A \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) dx = 0, \quad \int_{S''}^{R''} \log A \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) dx = 0,$$

$$\int_P^{R'} \log A \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) dx + \int_{R''}^Q \log A \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) dx = \int_{h'}^{h''} \log A_I \frac{d}{dh} \left(\frac{1}{h} \right) dh.$$

waarin h' en h'' de waarden zijn, die aan de temperaturen T' en T'' in R' en R'' beantwoorden, en evenzoo

proeven, naar aanleiding van dit meeningsverschil te Leiden verricht, werd door mij deelgenomen. Zij vestigden bij ons de overtuiging, dat systematische correcties aan DE HEEN'S waarnemingen moesten worden aangebracht, en dat de laatste daardoor in overeenstemming met de opvattingen van ANDREWS en VAN DER WAALS zouden komen¹⁾.

Volgens de Med. n^o. 68 op p. 13 (Zitt. Versl. Mrt '01, p. 660) door KAMERLINGH ONNES volgehouden meening, zouden inderdaad de gevonden afwijkingen voor een groot deel aan verontreinigingen moeten worden toegeschreven, en met behulp van de leer der mengsels²⁾ van VAN DER WAALS l. c. p. 6 (Zitt. Versl. p. 654) moeten worden verklaard: verder zou het karakter der op grond van verontreiniging te verwachten afwijkingen, wanneer men lette op de verandering van den moleculairen druk, juist dat der door DE HEEN waargenomene zijn, terwijl de verandering van den moleculairen druk door bijmengsels, al moge deze bij een kleine hoeveelheid bijmengsel ook slechts gering zijn, toch, wegens de groote samendrukbaarheid van de stof bij den kritischen toestand, tot belangrijke dichtheidsverschillen zou kunnen leiden l. c. p. 13 (Zitt. Versl. p. 661).

Intusschen was het toen niet mogelijk een juist oordeel over den invloed van bijmengselen en de daarvoor aan te brengen correcties te vormen. Terwijl andere correcties, die waarschijnlijk moesten worden aangebracht, en die een zelfden invloed konden hebben, uitvoeriger werden gediscussieerd, kon, wat de correctie voor verontreinigingen betreft, slechts vermeld worden l. c. p. 6 (Zitt. Versl. p. 654) dat metingen in het laboratorium verricht werden, welke over den invloed van kleine bijmengselen het gewenschte licht zouden verspreiden.

Van deze metingen zijn die over mengsels van CO₂ en H₂ van mij zelven (Med. n^o. 45 (Dec. '98) en 47 (Febr. '99)) en die over CO₂ en O₂ van KEESOM (Med. n^o. 88 (Sept., Oct., Nov. '03) sedert gepubliceerd. Verder zijn in de reeks van bijdragen tot de kennis van het η -vlak van VAN DER WAALS verschillende berekeningen van KEESOM (Med. n^o. 75 (Nov. '01) en 79 (Mrt. '02)) en mij zelven (Med. n^o. 81 (Oct. '02 en Suppl. n^o. 6 (Febr. en Mei '03) opgenomen, welke door toepassing van de wet der overeenstemmende toestanden volgens KAMERLINGH ONNES bij verontreinigde stoffen, alle afwijkingen van de eigenschappen der zuivere stoffen terugbrengen tot de kennis van de twee grootheden $\alpha = \frac{1}{T_k} \left(\frac{dT_{xk}}{dx} \right)_{x=0}$ en $\beta = \frac{1}{p_k} \left(\frac{dp_{xk}}{dx} \right)_{x=0}$ en van de empirische toestandsvergelijking.

1) Een zorgvuldiger herhaling dier voorloopige proeven is te Leiden spoedig na de polemiek met DE HEEN ter hand genomen.

2) Zie ook HARTMAN, Communic. from the Labor. of Phys. at Leiden Suppl. n^o. 3 p. 47.

Ik heb van de verkregen uitkomsten thans gebruik gemaakt om na te gaan welke dichtheidsverschillen men in een CAGNIARD DE LA TOUR'sche buis zal waarnemen, in welke CO_2 met een gering breukdeel moleculen O_2 vermengd, is gebracht, wanneer men daarin, op de door TEICHNER¹⁾ aangegeven wijze, drijvertjes ter bepaling van de dichtheid brengt. Ik heb daarbij bevestigd gevonden, dat het karakter der afwijkingen, die men tengevolge van kleine bijmengselen bij de proeven van TEICHNER (zoo druk- en temperatuurevenwicht bestaat) zou vinden, geheel met dat der waargenomene overeenkomt.

Belangrijk schijnt mij de uitkomst, dat op grond van de kennis van het gedrag der mengsels van CO_2 en O_2 berekend kan worden, dat reeds zeer kleine hoeveelheden O_2 in CO_2 (enkele 0,001 mol.) voldoende zijn om dichtheidsverschillen als die door DE HEEN met CO_2 werden waargenomen te weeg te brengen. Soortgelijke kleine bijmengselen, als met behulp van welke men DE HEEN's proeven kan verklaren, zal men ook, zoolang het tegendeel niet bewezen is, mogen aannemen in CCl_4 , met hetwelk TEICHNER zijne proeven heeft verricht. Ik meen dan ook, dat de proeven van TEICHNER, welke uit een experimenteel oogpunt minder te wenschen overlaten dan die van DE HEEN, op deze wijze moeten worden verklaard. Zij worden thans met zooveel mogelijk gezuiverd CO_2 in het laboratorium te Leiden herhaald, terwijl om alle twijfel aan temperatuurevenwicht weg te nemen²⁾ thermoelementen in het buisje zijn ingesmolten.

§ 2. *Verskil in dichtheid van twee fasen met weinig verschillend gehalte aan bijmengsel, wanneer druk en temperatuurevenwicht bestaat.* Wij stellen ons nu voor dat zich in een buis, bij een temperatuur T , die slechts weinig verschilt van de kritische T_k der zuivere stof, twee lagen bevinden, waarvan de eene per gram-molecuul x_1 mol. van het bijmengsel bevat, de ander x_2 mol.; de druk wordt dezelfde ondersteld³⁾, nl. gelijk aan p , eveneens weinig verschillende van den kritischen druk p_k der zuivere stof. Om van een mengsel met een (oneindig kleine) mengverhouding x de dichtheid te bepalen, kan men als volgt te werk gaan. De grootheden α , β en $\gamma = \alpha - \beta$ bepalen de kritische elementen T_{rk} , p_{rk} , v_{rk} van het punt, dat voor het

1) DRUDE'S Ann., 13, 595, 1904. De verklaring van de proeven van TEICHNER sluit in zich die der proeven van GALITZINE, waarbij de dichtheid op verschillende hoogte in buisjes langs optischen weg werd bepaald. Gouy (C. R. 116 p. 1289, Juni '93) heeft in met koolzuur gevulde buisjes even beneden de kritische temperatuur eene langzame verplaatting van den meniscus waargenomen, en dit verschijnsel m. i. terecht aan verontreinigingen toegeschreven.

2) Verg. VILLARD, Compt. rend., 118 en Med. n°, 68 (Mrt. '01).

3) Wij verwaarloozen hier dus den invloed der zwaartekracht, die veel kleiner is dan die der verontreinigingen, en bovendien de dichtheidsverschillen nog grooter maakt.

mengsel met het kritisch punt der zuivere stof overeenkomt, in eerste benadering (Med. n^o. 81 verg. (14)) door de vergelijkingen:

$$T_{xk} = T_k(1 + \alpha x), \quad p_{xk} = p_k(1 + \beta x), \quad v_{xk} = v_k(1 + \gamma x).$$

Met de waarnemingstemperatuur T d. i. de temperatuur van het mengsel, komt dus overeen een temperatuur T'' der zuivere stof, zoodanig dat $\frac{T''}{T} = \frac{T_k}{T_{xk}}$; in eerste benadering kunnen we dus schrijven $T'' = T(1 - \alpha x)$. Evenzoo komt met den waargenomen druk p (druk van het mengsel), de druk $p' = p(1 - \beta x)$ voor de zuivere stof overeen. Stel nu dat bij de temperatuur T'' en den druk p' de zuivere stof het moleculairvolume v' inneemt, een volumen dat men uit de empirische toestandsvergelijking kan berekenen of op een isothernuendiagram aflezen, dan is het moleculairvolumen van het beschouwde mengsel, in de waargenomen omstandigheden (T, p), $v = v'(1 + \gamma x)$.

Als men de waarde van v bepaalt, hetzij door berekening, hetzij met behulp van een diagram, dan vindt men dat, wanneer de verhouding $\frac{\beta}{\alpha}$ veel verschilt van $\frac{T_k}{p_k} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{v_k} = \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_k = 7,3^1)$ zie Suppl. n^o. 6, p. 14, (Zitt. Versl. Mei '03, p. 75), tengevolge van het eigenaardige verloop der isothermen in de nabijheid van het kritisch punt, het verschil $v' - v_k$ veel grooter is (van lagere orde is, $\frac{1}{3}$ namelijk) dan de correctieterm $v' \gamma x$. Om die reden, en ook wegens de onzekerheid der bij een bepaalden druk behorende volumina, alweer tengevolge van dat verloop der isothermen, is het wel geoorloofd geen onderscheid te maken tusschen v en v' , d. w. z. den correctieterm $v' \gamma x$ te verwaarloozen²⁾. Het is evenwel onze bedoeling de dichtheid van het mengsel te bepalen, zoodat we moeten bedenken dat v het volumen is ingenomen door $M_1(1-x) + M_2 x$ gr., M_1 en M_2 zijnde de moleculairgewichten van zuivere stof en bijmengsel. Daaruit volgt de dichtheid $\frac{M_1(1-x) + M_2 x}{v}$, waarvoor we, om dezelfde reden als zoeven, mogen stellen $\frac{M}{v'}$, d. i. de dichtheid der zuivere stof zelve, bij de temperatuur T'' en onder den druk p' .

¹⁾ We zullen aanstonds zien dat, in de tot nog toe bekende gevallen, aan die voorwaarde goed wordt voldaan.

²⁾ De omstandigheid, dat we het verschil tusschen de v 's voor twee mengsels moeten bepalen, verandert niets aan deze gevolgtrekking. Men vindt nl. dat ook het verschil tusschen v_1' en v_2' van lagere orde $\left(\frac{1}{3} \right)$ is dan de eerste.

Uit deze beschouwing mogen we besluiten, dat de dichtheden van de twee mengsels x_1 en x_2 bij eene temperatuur, die nagenoeg de kritische temperatuur van de zuivere stof T_k is, bij benadering kunnen worden afgelezen op een p, ϱ diagram van de isothermen der zuivere stof; men zoekt op de isothermen, waarvan de temperaturen zijn $T_1' = T_k(1 - \alpha x_1)$ en $T_2' = T_k(1 - \alpha x_2)$, twee punten waarvoor de drukkingen respectievelijk $p_1' = p_k(1 - \beta x_1)$ en $p_2' = p_k(1 - \beta x_2)$ zijn.

Behalve deze twee tot nog toe beschouwde lagen bevat de buis in werkelijkheid echter meerdere lagen van verschillende samenstelling, daar de samenstelling geleidelijk verandert ¹⁾. Bepalen we nu voor verschillende mengverhoudingen de dichtheden bij dezelfde temperatuur en druk, dan krijgen we punten, die alle op eene zelfde kromme lijn liggen; deze lijn stelt dus voor hoe de dichtheid in zoo'n buis verandert; uit het verloop van die lijn, dat sterk gelijkert op dat van eene isotherme in de nabijheid van het kritisch punt, volgt dadelijk dat de stof in de buis aanzienlijke dichtheidsverschillen moet vertoonen.

Ik zal nu aannemen dat tusschen de twee uiteinden van de buis een zeker verschil in samenstelling bestaat; dan hangt het grootste dichtheidsverschil, behalve van de α en β voor de beschouwde stoffen, en van het verschil in samenstelling, nog af van de temperatuur, van de gemiddelde dichtheid en van de gemiddelde mengverhouding, Ziehier, ten eerste, voor die mengsels, waarvan de α en β reeds bekend zijn, het dichtheidsverschil, dat overeenkomt met $x_2 - x_1 = 0,001$ wanneer de temperatuur ongeveer de kritische is van de zuivere stof en de gemiddelde dichtheid ook de kritische is:

CO ₂	met 0,001 mol.	CH ₃ Cl	, $\alpha =$	0,378	, $\beta =$	0,088	, $\Delta =$	34%	der kr. d.
CH ₃ Cl	„ „ „	CO ₂	, $\alpha =$	-0,221	, $\beta =$	0,281	, $\Delta =$	31%	
CO ₂	„ „ „	H ₂	, $\alpha =$	-1,17	, $\beta =$	-1,62	, $\Delta =$	42%	
CO ₂	„ „ „	O ₂	, $\alpha =$	-0,66	, $\beta =$	-1,09	, $\Delta =$	36%	

Ziehier welke dichtheidsverschillen men verder zou waarnemen in koolzuur met kleine hoeveelheden zuurstof, bij eenige verschillende concentratieverschillen en temperaturen, de gemiddelde dichtheid nog steeds de kritische zijnde:

¹⁾ Wat hier gezegd wordt van een toevallige verontreiniging is ook toepasselijk op de proeven van CAILLETET en COLARDEAU (Compt. rend., 108, 1280, 1889), waarbij jodium, dat in vloeibaar koolzuur was opgelost, zich bij de temperatuur, waarbij de meniscus verdween, niet gelijkmatig over de buis verspreidde, en op de soortgelijke proeven van HAGENBACH (*Drude's Ann.*, 5, 276, 1901), die zouten in vloeibaar zwaveligzuur oploste. Deze proeven, waarbij opzettelijk een bijmengsel werd toegevoegd, zijn dus ten onrechte als argument aangevoerd tegen de voorstelling van ANDREWS en VAN DER WAALS; HAGENBACH heeft trouwens zelf de oorzaak der door hem gevonden afwijking ingezien.

t	$x_2 - x_1 = 0.001$	$x_2 - x_1 = 0.0005$	$x_2 - x_1 = 0.0001$
$31^\circ, 0$	$\Delta = 36\%$	$\Delta = 30\%$	$\Delta = 17\%$
$31^\circ, 5$	24	17	6
32°	17	10	2.5
33°	12	5	$\pm 1/2$
34°	6	3	$\pm 1/2$

Hoe het dichtheidsverschil afhangt van de gemiddelde dichtheid der stof merkt men aan het volgende tabelletje, dat betrekking heeft op koolzuur met zuurstof, bij eene temperatuur van ongeveer 31° en voor $x_2 - x_1 = 0.001$

Gem. dichth.	Δ
1.3 _{gk}	$\Delta = 3\%$
1.2	8
1.1	24
1.0	36
0.9	24
0.8	6
0.7 _{gk}	1.5%

Ziehier ten slotte hoe, voor koolzuur met zuurstof, bij eene temperatuur van 31° ongeveer, de gemiddelde dichtheid de kritische zijde en $x_2 - x_1 = 0.001$, het dichtheidsverschil afhangt van de gemiddelde samenstelling.

$\frac{1}{2}(x_2 + x_1)$	Δ
0.0005	$\Delta = 36\%$
0.005	17
0.01	12
0.015	6

Alle deze getallen hebben betrekking op koolzuur met zuurstof als verontreiniging; het is nu waarschijnlijk dat deze uitkomsten ook ten naasten bij op koolzuur met stikstof, dus ook met lucht, toepasselijk zullen zijn, en waar KEESOM in met veel moeite gezuiverd koolzuur nog circa 0.00025 mol. lucht vond, is de mogelijkheid van een verklaring der met koolzuur waargenomen anomalieën door luchtverontreiniging volstrekt niet uitgesloten.

De verandering van het dichtheidsverschil met de gemiddelde dichtheid herinnert aan een vroeger door mij vervaardigd diagram omtrent de proeven van DE HEEN (zie Med. n^o. 68 Naschrift p. 26. Zitt. Versl. April 1901, p. 751); in Med. n^o. 68, Naschrift p. 22, (Zitt. Versl. April 1901 p. 747) werd door KAMERLINGH ONNES een zelfde diagram afgeleid voor het verloop, dat uit temperatuurverschillen zou volgen, zoodat een deel der door DE HEEN waargenomen afwijkingen ook nog aan temperatuurverschillen te wijten kan zijn.

§ 3. *Overzicht van de proeven van TEICHNER.* De invloed van verontreinigingen geeft van de waarnemingen van TEICHNER eene volledige kwalitatieve verklaring. De uitkomsten van zijn tweede reeks waarnemingen, waarvan ik alleen die boven de kritische temperatuur heb genomen, heb ik in fig. 1 aanschouwelijk gemaakt. De ligging der drijvertjes heb ik op verticale lijnen aangegeven en de plaatsen, door een zelfde bolletje bij verschillende temperaturen ingenomen, door lijnen verbonden. Ik heb op die manier gekregen lijnen van gelijke dichtheid; bij iedere lijn heb ik de overeenkomstige dichtheid aangegeven. In deze reeks proeven heeft TEICHNER eerst waarnemingen gedaan bij temperaturen, die hoe langer hoe hooger genomen werden daarna bij dalende temperaturen; na iedere temperatuursverandering werd gewacht tot de temperatuur overal dezelfde was geworden. Als abcissen heb ik nu niet genomen de temperaturen zelf, maar ik heb de verschillende waarnemingen op gelijke afstanden geplaatst, d. w. z. ik heb den tijd als abscis genomen, daarbij dus aannemende dat tusschen twee waarnemingen steeds dezelfde tijd verliep, wat wel niet zoo ver van de waarheid af zal zijn. De temperatuur $282^{\circ},0$ (ongecorrigeerd) is die bij welke de meniscus bij verhitting het laatst werd waargenomen en door afkoeling weer verscheen; het is dus op zeer weinig na de kritische. Men ziet dat de meeste lijnen van gelijke dichtheid bij verhitting de plek verlaten waar de meniscus het laatst werd gezien, en zich hoe langer hoe sneller van die plek verwijderen, om ongeveer bij de hoogst waargenomen temperatuur om te buigen en terug te keeren tot datzelfde punt, dat evenwel slechts door enkele weer is bereikt wanneer de temperatuur tot de kritische is gedaald.

Uit deze laatste omstandigheid mag men besluiten dat het verloop der lijnen van gelijke dichtheid niet alleen wordt beheerscht door de verandering der temperatuur, maar ook door eene diffusie. Door verhooging van temperatuur, zoowel als door diffusie, wordt de verspreiding der stof gelijkmatiger, en verheffen zich dus de lijnen van gelijke dichtheid, die ten slotte uit de teekening zouden verdwijnen, indien niet de temperatuursverlaging in de tweede helft der proef de verdwenen lijnen, ten deele tenminste, terug liet komen. Maar juist het feit, dat de lijnen van gelijke dichtheid in die tweede helft hooger liggen dan bij gelijke temperaturen in de eerste, bewijst dat hier de voortgaande diffusie den invloed der temperatuur tegenwerkt; ziehier ongeveer welke het verloop is, door de reeks proeven heen, van het grootste dichtheidsverschil in de buis:

$$t = 282^{\circ} \quad 283^{\circ} \quad 284^{\circ} \quad 285^{\circ} \quad 286^{\circ} \quad 288^{\circ} \quad 286^{\circ} \quad 284^{\circ} \quad 283^{\circ} \quad 282^{\circ}$$

$$\Delta = 50\% \quad 40\% \quad 30\% \quad 25\% \quad 20\% \quad 15\% \quad 15\% \quad 20\% \quad 25\% \quad 30\%$$

Men ziet dat het dichtheidsverschil eerst afneemt, om daarna weer toe te nemen, maar de waarden bij gelijke temperaturen zijn in de tweede helft lager dan in de eerste, en de afwijking wordt hoe langer hoe grooter; daaruit blijkt de invloed der diffusie.

De waarde van Δ is niet eens het kleinst bij de hoogste temperatuur; die kleinste waarde wordt eerst bereikt wanneer de temperatuur reeds aan het dalen is, en daarmee komt overeen de omstandigheid dat de bolletjes 0,555 en 0,578 niet bij 281°,1, maar bij 286°,0, in de dalende periode dus, hun hoogste ligging hebben bereikt. Dit bewijst dat, bij het begin der temperatuursverlaging althans, de diffusie een overwegenden invloed heeft. Dat deze bijzonderheid zich niet heeft voorgedaan bij de zwaarste bolletjes, moet zeker hieraan toegeschreven worden, dat in de onderste helft der buis, waar de stof veel dichter is, de diffusie ook langzamer gaat; in die lagere dichtheidslijnen is echter toch duidelijk een buigpunt te herkennen, dat eveneens, al is dat minder treffend, op de voortgaande diffusie wijst.

Dat deze omstandigheden werkelijk in de diffusie van verontreinigingen haar verklaring kunnen vinden, heb ik getracht duidelijk te maken door te berekenen, en op dezelfde wijze als in fig. 1 graphisch voor te stellen, welke de verdeeling is van de dichtheid der stof in een buis, die met koolzuur is gevuld, verontreinigd door een kleine hoeveelheid zuurstof, wanneer dat bijmengsel van beneden naar boven toe in concentratie toeneemt. Ik onderstel ook dat de temperatuur eerst stijgt, nl. van de kritische temperatuur 31° tot 33°, en daarna weer daalt op 31°. Ik neem verder aan dat de concentratie der zuurstof, die aanvankelijk gelijkmatig van boven naar beneden afnam, zóó dat het grootste concentratieverschil 0,001 mol. was, ten slotte, wegens snellere diffusie in de bovenste ruimte, in deze ruimte minder snel met de hoogte verandert dan in de onderste.¹⁾ De aldus verkregen fig. 2 kan werkelijk als een schematische reproductie van fig. 1 worden beschouwd; in de dalende periode vertoonen de dichtheidslijnen, evenals in fig. 1, een buigpunt; in de bovenste helft wordt nog geen maximum bereikt door de lijn 0,450, maar door een snellere diffusie in die ruimte aan te nemen had ik ook deze omstandigheid wel te voorschijn kunnen brengen.

§ 4. *Slotson.* Op grond van het voorgaande, mag dus beslist

¹⁾ Uitgaande van een bepaalden toestand had ik natuurlijk dit vraagstuk volmaakt overeenkomstig met de werkelijkheid kunnen uitwerken; het kwam mij echter voor dat dit een vruchteloze moeite geweest zou zijn en dat het schema, dat ik er van gegeven heb de verschijnselen toch kwalitatief weergeeft.

worden ontkend, dat TEICHNER's waarnemingen, althans wat den aard der verschijnselen betreft, onvereinigbaar zijn met de voorstelling van ANDREWS en VAN DER WAALS. Tot in bijzonderheden kunnen die verschijnselen worden verklaard door de aanwezigheid van verontreinigingen, die langzaam door de stof diffunderen, en berekeningen, die op de reeds bestaande gegevens berusten, hebben aangetoond dat, om een quantitative overeenstemming te krijgen, een mate van verontreiniging ondersteld moet worden van de zelfde orde als die, welke bij andere proeven met zogenaamde zuivere stoffen zeker bestond. Of nu in het door TEICHNER gebruikte CCl_4 de daarvoor noodige hoeveelheid van een of ander bijmengsel, waarvan we noch de natuur, noch de α en β met zekerheid kennen, heeft bestaan, ziedaar een vraag, die we niet kunnen beantwoorden. Onmogelijk komt ons dit evenwel niet voor, omdat CCl_4 een stof is, die door hare bereidingswijze veel vreemde bestanddeelen bevatten kan, en het constant blijven van het kookpunt (tot op 0.1° ?) achten we geen waarborg voor voldoende chemische zuiverheid. Wij zijn zelfs geneigd het bestaan van de afwijkingen als een bewijs van het tegendeel te beschouwen, en het niet bestaan der afwijkingen (andere oorzaken in aanmerking genomen) als het eenig zekere *physische* criterium van zuiverheid te beschouwen.

Zoolang het bewijs dus niet is geleverd dat nog aanwezige verontreinigingen *niet* in staat zijn de verschijnselen *quantitatief* te verklaren, is naar mijne meening geen reden te vinden om de stelling te verlaten, dat iedere stof een bepaald kritisch punt vertoont, waarbij de twee coëxisterende fasen identiek worden, zoodat bij de kritische temperatuur en den kritischen druk één enkele kritische dichtheid behoort.

Natuurkunde. — De Heer P. ZEEMAN spreekt over: „*Dubbele breking in een magnetisch veld in de nabijheid van magnetisch gesplitste absorptielijnen*” naar aanleiding van proeven van den Heer J. GEEST.

Uit proeven die ik bij vorige gelegenheden de eer had aan de Akademie mede te deelen is reeds gebleken dat door de magneto-optische theorie van VOIGT¹⁾, waarin verband wordt gebracht tusschen de magnetische splitsing der spectraallijnen en de dispersie, van al de verschijnselen in de omgeving der absorptielijnen uitstekend reken-schap wordt gegeven.

¹⁾ VOIGT, WIEDEMANN'S Annalen. Bd 67, p. 359, 1899.

Dr. J. E VERSCHAFFELT. Over den invloed van verontreinigingen op de kritische verschijnselen van enkelvoudige stoffen en de verklaring van de proeven van Teichner.

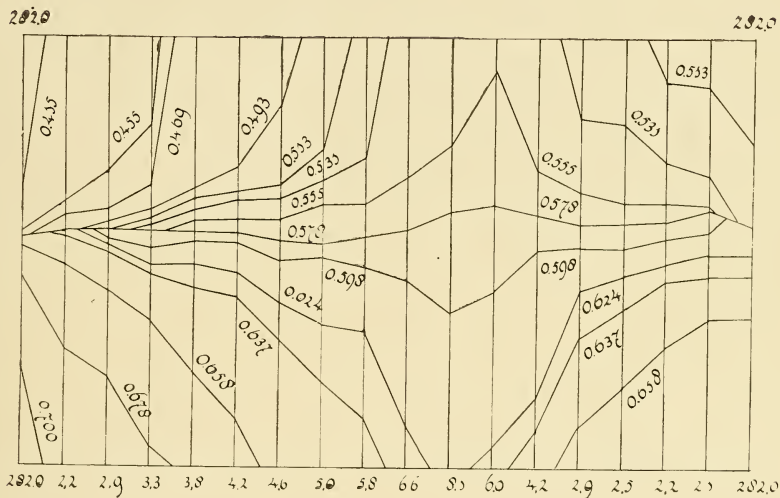


Fig. 1

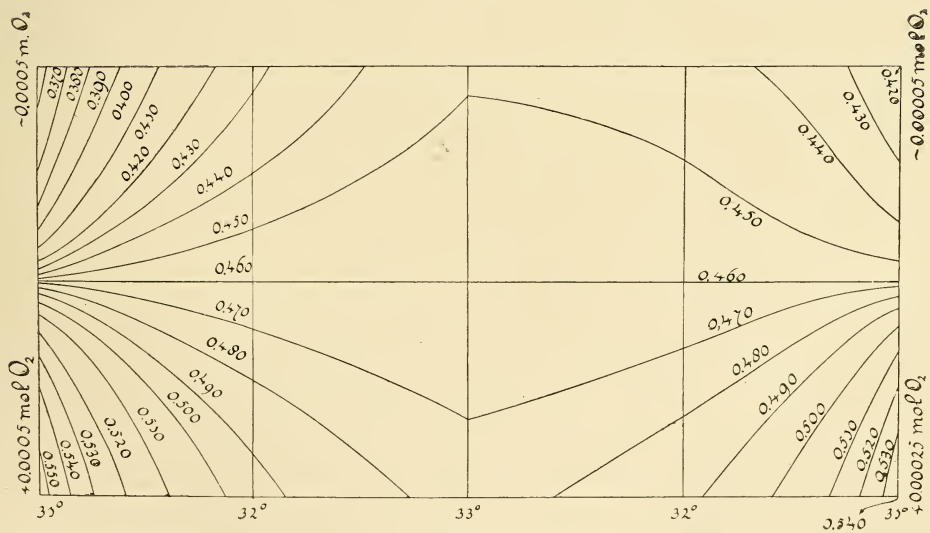


Fig. 2.

Wanneer het licht zeer verdunnen natriumdamp in de richting der krachtlijnen doorliep, bleek de daarbij optredende draaiing van het polarisatievlak positief te zijn buiten de componenten van het doublet, dat uit de oorspronkelijke spectraallijn ontstaat, maar negatief en zeer groot tusschen de componenten van het doublet ¹⁾.

Indien men licht loodrecht op de krachtlijnen door natriumdamp zendt, neemt men de door VOIGT uit zijne theorie voorspelde dubbele breking waar, welke in isotrope stoffen moet ontstaan, zoodra ze in een magnetisch veld worden geplaatst en welke meetbaar wordt, wanneer men dicht genoeg bij de absorptielijnen waarneemt. VOIGT en WIECHERT onderzochten, met behulp van een klein tralie, de omgeving van de absorptielijnen eener betrekkelijk veel natriumdamp bevattende vlam. Ik heb dit onderzoek uitgebreid en natriumdamp onderzocht welke zoo verdund was dat in een sterk magnetisch veld de 4 absorptielijnen konden worden waargenomen, die aan het quadruplet beantwoorden waarin de lijn D_1 in het magnetisch veld uiteenvalt ²⁾. De theorie van VOIGT kon met eenig voorbehoud voorspellen hoe ook in dit de lijn D_1 betreffende geval, het verloop der dubbele breking moest zijn. De waarnemingen leverden het door de theorie verwachte verloop. Aan de toenmalige waarnemingen werd deelgenomen door den Heer J. GEEST. Deze heeft het onderzoek voortgezet en zal elders daarover uitvoeriger berichten ³⁾. Ik wil mij veroorloven hier een kort verslag over deze proeven te geven.

De inrichting der proeven sloot zich geheel bij onze vroegere aan. Lineair gepolariseerd licht, met een azimuth van 45° t. o. v. de verticale, viel op een compensator van BABINET, met de ribben horizontaal. Vervolgens doorliep het licht de vlam en daarna een tweeden Nicol waarvan de polarisatierichting op dien van den eersten loodrecht stond. Een beeld van de interferentiebanden in den compensator werd op de spleet van het spectraalapparaat ontworpen. Het uittredende licht werd ontleed met een groot tralie van ROWLAND, dat stigmatisch was opgesteld. De meeste proeven zijn verricht met een compensator waarvan de brekende hoek $50'$ bedroeg, voor de studie van enkele bijzonderheden werd deze vervangen door een compensator van $10'$ resp. 3° .

In het spectraal-apparaat neemt men enkele horizontaal verloopende interferentiebanden waar, zoolang tenminste het veld niet is aangezet, terwijl dan tevens de fijne absorptielijnen van den damp samenvallen

¹⁾ ZEEMAN, Verslagen Afd. Natuurkunde, p. 6, Mei 1902, zie verder HALLO, Dissertatie, Amsterdam, 1902.

²⁾ ZEEMAN en GEEST, Verslagen Afd. Natuurkunde, p. 23, Mei 1903.

³⁾ GEEST, Dissertatie, Amsterdam, 1904.

met de omgekeerde Na -lijnen van het booglicht. Wordt het magnetische veld aangezet dan vervormen zich de interferentiebanden. De verticale verplaatsingen daarvan zijn bij de gebezigde methode van waarneming evenredig met het in de vlam verkregen phaseverschil en dus met het verschil der brekingsindices voor trillingen evenwijdig aan en loodrecht op de krachtlijnen.

VOIGT heeft voor het eenvoudigste geval van splitsing, dat van een triplet, de formules gegeven, die het phaseverschil als functie van de golflengte geven ¹⁾. Daar echter de natriumlijnen D_1 en D_2 in het magnetische veld een quadruplet en een sextuplet geven, was het voor de vergelijking der waarnemingen met de theorie noodig deze nader uit te werken. De Heer GEEST heeft dit gedaan volgens een weg, dien VOIGT daarvoor reeds bij een andere gelegenheid had aangegeven ²⁾. Het resultaat van deze berekening is dat men het phaseverschil tusschen de trillingen loodrecht op en evenwijdig aan het veld, als het licht eene laag der absorbeerende stof van de dikte l doorloopt, kan voorstellen door de formule

$$\Delta = \frac{\omega_0 \varepsilon l}{V^2} \left\{ \frac{4\sigma^2 - d'^2 \mathcal{D} \sigma^2}{(4\sigma^2 - d'^2 \mathcal{D} \sigma^2)^2 - 4c^2 R^2 \sigma^2} - \frac{1}{4\sigma^2 - d'^2 \mathcal{D} \sigma^2} \right\}.$$

Hierin stelt V de lichtsnelheid in den aether voor, R de veldsterkte, terwijl ε , d , d' en c voor het medium karakteristieke constanten zijn. Verder is $2\pi \mathcal{D} \sigma = \tau_0$ de periode der beschouwde trilling en is $d = d'$. De hier meegedeelde formule geldt voor het meest gecompliceerde geval (het sextuplet); voor het quadruplet is $d' = \sigma$ en voor het triplet bovendien $d = \sigma$. Stelt men voor elk dezer drie gevallen Δ als functie van σ voor, dan verkrijgt men de kromme lijnen die in fig. 1—3 zijn weergegeven.

Het resultaat der waarnemingen is in de figuren 4—8 voorgesteld. Deze figuren zijn met behulp van genomen negatieven geteekend. Het bleek nog niet mogelijk alle gewenschte details gelijktijdig op een negatief op te nemen en oculairwaarnemingen moesten dus aanvullen waar de fotografie te kort schoot.

De figuren 1, 4, 5 hebben betrekking op het triplet (type lijn D_2 in zwakke velden); figuren 2, 6, 7 op het quadruplet (type lijn D_1); figuren 3, 8 op het sextuplet (type lijn D_2).

Bij het vergelijken van de uitkomsten der waarneming met de theorie moet worden bedacht, dat de theoretische kromme aangeeft de deformatie die één enkele interferentieband zou ondergaan. Bij

¹⁾ VOIGT l. c.

²⁾ VOIGT Wied. Ann. 68 p. 352. 1899.

de gebruikte methode van waarnemen ziet men het resultaat van de veranderingen van boven elkaar gelegen interferentiebanden. Men moet zich dus de theoretische figuur gecompleteerd denken met stukken van theoretische krommen die boven en beneden de geteekende liggen.

Bepalen wij ons eerst tot het geval van het quadruplet en duiden we de banden met a , b , c aan, waarbij a voor de bovenste gelden moge, en met 1, 2, 3, 4 de plaats die de componenten in het spectrum zouden innemen. De slangvormige lijn tusschen 2 en 3 vertoont in beide figuren geheel hetzelfde karakter. De slangvormige lijn (figuren 6 en 7) gaat aan de einden over in verdikte stukken, (waar de dubbele breking een maximum of een minimum vertoont) die hun concave zijde naar den band b keeren. De verdikkingen beantwoorden aan de lussen der theoretische kromme. Daarbij moet dan worden opgemerkt, dat de lus tusschen 1 en 2 behoort bij band c en die tusschen 3 en 4 bij band a . Dat de twee takken die asymptotisch tot de componenten naderen, niet gescheiden zijn maar met de lussen zijn samengevloeid behoeft niet te verwonderen wegens hunnen geringen afstand. In de figuur is bovendien nog geteekend de lijn die met de omgekeerde natriumlijn overeenstemt. Bij vergroting van de dampdichtheid verwijderen de lussen zich van den bijbehorenden interferentieband. Op dit geval heeft fig. 7 betrekking. Ook dit gedrag is in overeenstemming met de theorie. Bij nog grootere dampdichtheid worden er minder details zichtbaar, ik zal hierop echter niet verder ingaan.

De waarnemingen over het sextuplet leveren wegens den buitengewoon korten afstand der componenten groote moeilijkheden op. Op zichzelf is het reeds moeilijk het inverse sextuplet waartenemen, dus des te meer verschijnselen die zich tusschen de componenten daarvan afspelen. Het is alleen onder bijzonder gunstige omstandigheden gelukt het verschijnsel waartenemen in den vorm zooals door fig. 8 wordt weergegeven. De overige bij D_2 optredende verschijnselen kunnen het gemakkelijkst geïnterpreteerd worden wanneer ze niet als van een sextuplet, maar als van een triplet afkomstig beschouwd worden. De figuren 8, 4, 5 behoeven wel geen nadere toelichting, bij fig. 5 is de dampdichtheid weder grooter dan bij fig. 4. Al de beschreven verschijnselen zijn kwalitatief geheel in overeenstemming met de theorie van VOIGT.

De voor D_1 en D_2 beschreven verschijnselen toonen weder aan, dat er zeer karakteristieke verschillen tusschen de verschillende spectraallijnen bestaan, verschillen die hier niet minder in het oog vallend optreden dan bij de verwante verschijnselen van de magne-

tische splitsing der spectraallijnen en der draaiing van het polarisatievlak in ¹⁾) en buiten den absorptieband.

Het is zeer zeker interessant dat de theorie het zoo geheel verschillend gedrag van D_1 en D_2 , in het nu besproken geval terug kan brengen tot verschillen in de voortplantingsnelheden van trillingen evenwijdig aan en loodrecht op de krachtlijnen, daarbij dan natuurlijk het feit der magnetische splitsing aannemende.

Graadmeting. — De heer J. A. C. OUDEMANS biedt, uit naam der Rijks-Commissie voor Graadmeting en Waterpassing, voor de Bibliotheek een in de fransche taal geschreven verslag aan: „*Over de breedte- en azimutbepalingen, bepaald in 1896—99, door de Ingenieurs A. PANNEKOEK en R. POSTHUMUS MEYJES, te Oirschot, Utrecht, Sambeek, Wolberg, Harikerberg, Sleen, Schoorl, Zierikzee, Terschelling (de ruurtoren Brandaris), Ameland, Leeuwarden, Urk en Groningen.*”

Het door de Commissie opgemaakte programma bevatte nog de stations Leiden en Ubagsberg; de waarnemingen aldaar geschieden onder toezicht van den heer H. G. van de SANDE BAKHUYZEN, die zich voorbehouden heeft, er zelf een verslag van te bewerken.

De waarnemingen der heeren PANNEKOEK en POSTHUMUS MEYJES op de dertien genoemde stations hebben plaats gehad onder toezicht van spreker, die er in eene Inleiding een verslag en eene kritiek over geleverd heeft. Het volgende zij hier voldoende:

De gemiddelde breedte van de vier noordelijkste stations, Terschelling, Ameland, Leeuwarden en Groningen is $53^{\circ}18'39''$, die van Schoorl, Urk en Sleen $52^{\circ}42'45''$, die van Leiden, Utrecht, Wolberg en Harikerberg $52^{\circ}10'40''$, die van Zierikzee, Oirschot en Sambeek $51^{\circ}35'51'$, terwijl de breedte van het zuidelijkste station Ubagsberg $50^{\circ}50'53''$ bedraagt.

De geheele meridiaanboog, waarvan de lengte berekend zal kunnen worden, zoodra het driehoekennet geheel berekend zal zijn, bedraagt dus $2^{\circ}27'46''$, en kan beschouwd worden uit vier stukken te bestaan, die eene uitgebreidheid hebben van $35'54''$; $32'5''$; $34'49''$ en $44'58''$. Er zal dus later kunnen blijken of de kromming van het terrein naar den aangenomenen vorm van den meridiaan verandert, ja dan neen.

¹⁾ ZEEMAN, Versl. Afd. Natuurkunde. pag. 9. Mei, 1902, zie ook nog een ander verschijnsel in Voigt, Göttinger Nachrichten. Heft. 5. 1902.

P. ZEEM.

Triplet.

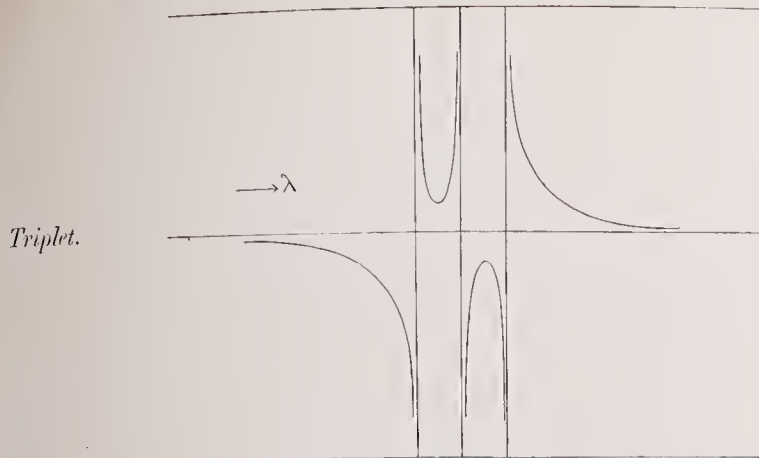


Fig. 1.
(theoretische kromme)

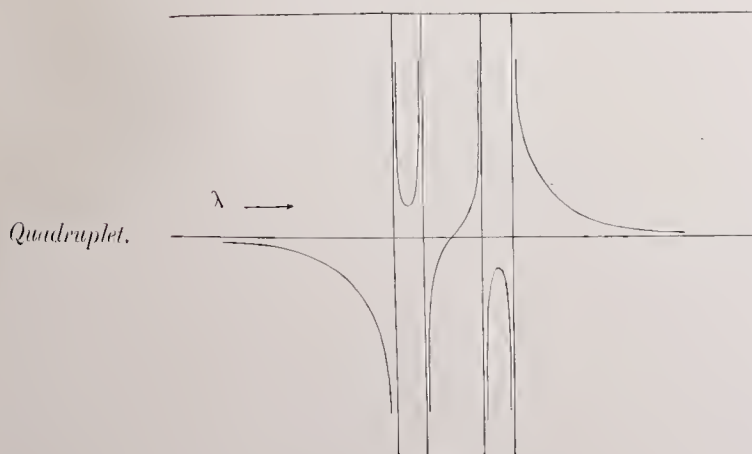


Fig. 2.
(theoretische kromme)

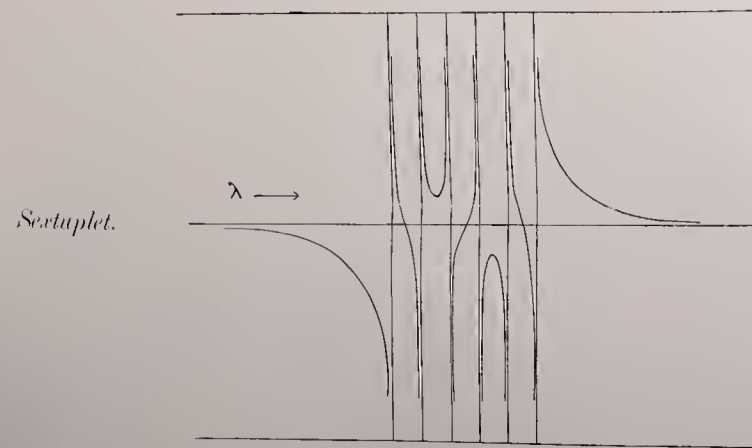


Fig. 3.
(theoretische kromme)



Fig. 4.
(waargenomen)

Fig. 5.
(waargenomen)



Fig. 6.
(waargenomen)

Fig. 7.
(waargenomen)



Fig. 8
(waargenomen)

De universaal-instrumenten, die voor de waarnemingen gediend hebben, waren van REPSOLD, en voorzien van een horizontalen cirkel met eene verdeeling van 315 mm, en een vertikalen cirkel met eene verdeeling van 245 mm. middellijn, en behoorden tot de inventarissen der sterrewachten te Leiden en te Utrecht. De verdeelingen waren van 4 tot 4 minuten, terwijl de mikroskopen van het Utrechtsche instrument eene aflezing gedoogden van 2 tot 2", die van het Leidsche daarentegen de enkele sekonde aangaf.

De mikrometerschroeven, de niveaus en het verschil in dikte der tappen werden nauwkeurig onderzocht, en alle onregelmatigheden werden in rekening gebracht. De verlichting geschiedde overal door electrische lampjes, waarvoor de stroom door medegebrachte accumulatoren geleverd werd.

De breedten werden bepaald door zenithsafstanden van noordelijke en zuidelijke sterren. Voor de noordelijke werden enkel aangewend de beide Poolsterren, α en δ van den kleinen Beer; voor de zuidelijke sterren werden zulke gekozen, die eene noordelijke declinatie van 6 tot 14° hadden, en dus op een zenithsafstand culmineerden, nagenoeg gelijk aan dien van de noordpool des hemels, d. i. aan het complement van breedte.

Van de poolsterren werden in den regel voor elke bepaling 16 zenithsafstanden gemeten, zonder er op te letten, in welk punt van hare parallel zij zich bevonden; van de zuidelijke sterren, vier in aantal, telkens 8, vier vóór en vier na den meridiaansdoorgang; zoodat elke volledige breedtebepaling berustte op 32 zenithsafstanden ten noorden en 32 ten zuiden van het zenith.

Op elk station werden vier dergelijke bepalingen verricht en wel in vier cirkelstanden, die 45° van elkander verschilden. Neemt men in aanmerking dat de aflezing steeds geschiedde door twee tegenovergestelde mikroskopen, dan werd de zenithsafstand van elke ster langs acht verschillende bogen van den cirkel bepaald, waardoor de periodieke fouten der verdeeling geacht konden worden zoo goed als geheel opgeheven te zijn.

De declinaties der gebruikte sterren werden ontleend aan het *Berliner Jahrbuch*, terwijl rekenschap werd gehouden van de laatste, daarvoor door AUWERS in de nummers 3927—29 der *Astronomische Nachrichten* bekend gemaakte verbeteringen. Ten slotte werden de gevondene breedten gecorrigeerd voor de beweging der pool, naar de laatste door ALBRECHT verstrekte gegevens.

Voor de azimuthbepalingen werd enkel de poolster gebruikt in elk willekeurig punt harer parallel. In 12 cirkelstanden, die 15° van elkander verschilden, werd vier malen de horizontale afstand gemeten

van de poolster en het voorwerp, en wel naar het volgende schema: Voorwerp, Poolster, Poolster, Voorwerp; (instrument 180° ondraaien:) Voorwerp, Poolster, Poolster, Voorwerp, terwijl bij elke instelling op de poolster het niveau in twee standen afgelezen werd.

In den regel bestond dus elke azimutbepaling uit 12 reeksen van 8 waarnemingen d.i. 2 volledige bepalingen; dus uit 24 volledige bepalingen.

Voor voorwerp diende steeds hetzij eene lamp, hetzij een heliotroop, meestal een heliotroop. De betrekkelijke ligging hiervan en het aangenomen centrum van het station werd door de ingenieurs van de afdeling Driehoeksmeting bepaald.

Wat de bereikte nauwkeurigheid betreft, kan daaromtrent het volgende medegedeeld worden:

Voor de middelbare fout van één resultaat uit twee zenithsafstanden, werd gemiddeld gevonden $\pm 0''455$ (¹⁾; langs verschillende wegen werd voorts de middelbare fout van elk eindresultaat, berustende op 128 dubbele waarnemingen, berekend op $\pm 0''065$.

Voor de azimutbepalingen werd de middelbare fout berekend:
 van elke enkele bepaling $\pm 1''22$,
 dus van een midden uit 12 bepalingen $\pm 0,355$.

Het bedrag van al deze middelbare fouten kan de vergelijking met de bepalingen van andere waarnemers zeer goed doorstaan.

Aan deze kritiek der voor de Graadmeting uitgevoerde bepalingen zijn nog twee aanhangsels toegevoegd, namelijk:

I. „Vergelijking van de breedte, gevonden op het station Utrecht (Domtoren) door den heer POSTHUMUS MEYJES, met de tot nog toe op de sterrewacht bepaalde.”

Het eindresultaat van dit onderzoek was: Breedte van den pilaar voor het universaal-instrument, in de Sterrewacht:

door de waarneming van circunmeridiaans-
 zenithsafstanden $52^{\circ} 5' 9''48$,

door de waarneming van doorgangen door
 den eersten vertikaal $52 5 10,29$,

resultaat van den heer POSTHUMUS MEYJES,
 herleid van den Dom tot de Sterrewacht . $52 5 9,84$,

eene overeenkomst die alleszins voldoende is, vooral als in aanmerking genomen wordt, dat de waarnemingen der circunmeridiaans-zenithsafstanden, die aan de Sterrewacht voor oefening gedaan werden, slechts in één stand van den vertikalen cirkel plaats hadden, hetgeen

¹⁾ Voor den heer PANNEKOEK $\pm 0''49$, voor den heer P. MEYJES $\pm 0''42$, twee getallen, die nagenoeg omgekeerd evenredig zijn aan de vergrootingen van de kijkers der beide instrumenten, (60 en 68 maal).

ook een beweegreden was om de verplaatsing der pool buiten rekening te laten.

II. Vergelijking van het azimut van Amersfoort, bepaald (door den Spreker) in 1879 en 80, met hetzelfde azimut, bepaald (door den heer POSTHUMUS MEYJES) in 1896.

Het eindresultaat van deze vergelijking was, na op alle reducties behoorlijk gelet te hebben: Azimut Utrecht (Centrum)—Amersfoort (Centrum):

Bepaling van 1879,80: $68^{\circ} 22' 44'' 71 \pm 0'' 31$,

„ „ 1896: $45,59 \pm 0,29$.

Tusschen deze twee bepalingen is een verschil van $0'' 88 \pm 0'' 42$ (middelh. fout): dat gedeeltelijk verklaard kan worden door de toevallige fouten van de waarneming en de verdeling, en gedeeltelijk door eenige onzekerheid in de verschillende bij deze vergelijking voorkomende herleidingen. Ook mag er wel bij in aanmerking genomen worden, dat bij den heer POSTHUMUS MEYJES vijf van de twaalf verschillen met het arithmetisch midden deze grootheid ($0'' 88$) overtreffen.

Voor de Boekerij worden aangeboden, 1^o. door den Heer C. A. PEKELHARING „Voordrachten over Weefselleer” 1^e stuk; 2^o. door den Heer J. M. VAN BEMMELEN: „Beiträge zur Kenntnis der Verwitterungsprodukte der Silikate in Ton-, Vulkanischem und Laterit-Boden” en namens den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM de dissertatiën van *a* P. C. E. MEERUM TERWOGT: „Onderzoekingen over het stelsel Bromium en Jodium”; *b* A. H. J. BELZER: „Omzetting van Tri- en tetrabroomphenolbromide in tetra- en pentabroomphenol”; *c* H. W. R. RAKEN: „Snelheidsbepalingen van de verspringing der nitrosogroep bij aromatische nitrosamine”; *d* J. F. STYVER: „Onderzoekingen over omzetting tusschen stereoisomere trithioaldehyden”; 3^o. door den Heer P. ZEEMAN de dissertatie van den Heer J. GEEST: „De magnetische dubbelsbreking van natriumdamp”; 4^o. door den Heer W. H. JULIUS namens den Heer ERNST COHEN: „Cornelis Adriaan Lobry de Bruyn”; 5^o. door den Heer S. HOOGWERFF: „Bulletin No, 31 van het Koloniaal Museum te Haarlem, bevattende E. L. SELLEGER: „Studiën over Nederlandsch-Indische Vezelstoffen”.

De Vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 28 Januari 1905.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

Ingekomen stukken, p. 525.

In Memoriam TH. H. BEHRENS, p. 526.

Jaarverslag der Geologische Commissie over 1904, p. 529.

H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM en E. H. BÜCHNER: „Kritische eindpunten in driefasenlijnen met vaste fasen bij binaire mengsels die twee vloeistofflagen vertoonen”, p. 531.

J. CARDINAAL: „De vergelijkingen, waardoor de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken bepaald wordt”, p. 537.

H. ZWAARDEMAKER Cz.: „De betrekkelijke gevoeligheid van het menschelijk oor voor tonen van verschillende toonhoogte, met orgelpijpen nagegaan”, p. 542.

H. G. JONKER: „Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland. I. De Hondsrug in de provincie Groningen. II. Bovensilurische zwerfsteenen. Eerste mededeeling: Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zone G”. (Aangeboden door de Heeren K. MARTIN en J. M. VAN BEMMELEN), p. 548.

H. A. LORENTZ: „De beweging der electronen in de metalen” II., p. 565.

J. J. VAN LAAR: „Over eenige merkwaardige verschijnselen, welke kunnen optreden bij de beperkte mengbaarheid van twee vloeistoffen, waarvan de eene anomaal, speciaal water is”. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM). p. 573. (Met één plaat).

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 588.

Corrigenda, p. 588.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is :

1°. Bericht van de Heeren SCHOUTE en WIND dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 10 Januari 1905, waarin bericht wordt dat de Heeren Dr. J. P. LOTSJ en Dr. J. W. C. GOEDHART benoemd zijn tot gedelegeerden van de Nederlandsche Regeering bij het 2^e Internationaal Botanisch Congres in 1905 te Weenen te houden. Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Circulaire van de Internationale Association der Akademiën, waarin bericht wordt gegeven van de benoeming van een Voorzitter en Onder-Voorzitter voor het eerstvolgende driejarige tijdvak. Voor kennisgeving aangenomen.

Verder is ingekomen het bericht van het overlijden van het lid der Akademie

Th. H. BEHRENS.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord. Naar aanleiding van dit schrijven zegt de Voorzitter het volgende:

Mijne Heeren!

Heeft voor korten tijd de chemische wetenschap in ons vaderland een gevoelig verlies geleden door den dood van LOBRY DE BRUYN, niet minder zwaar werd zij getroffen nu BEHRENS ons is ontvallen.

Hoewel ik, evenals velen uwer, hoog waardeerde zijn groote, veelomvattende kennis, zijn juist oordeel, zijn scherp blik bij het proefondervindelijk onderzoek, ben ik natuurlijk niet in staat de verdiensten van BEHRENS naar waarde te schetsen; toch wil ik trachten eenige hoofdpunten uit zijn wetenschappelijk streven in uwe herinnering terug te brengen.

Toen VOGELSANG te vroeg door den dood was weggerukt, en te Delft aan de polytechnische school de leerstoel in mineralogie, mijnontginning en aardkunde moest worden bezet, werd door onze regeering, op aanraden van Prof. ZIRKEL, aangewezen diens vroegere leerling BEHRENS, die aan de Universiteit te Kiel grondige studiën had gemaakt van vele deelen der natuurwetenschappen, vooral van de scheikunde, de mineralogie en in later tijd ook van de physiologie.

BEHRENS gaf gevolg aan die uitnoodiging, en met groote energie vatte hij de moeilijke taak op om geheel alleen aan de mijningenieurs onderwijs te geven in hunne hoofdvakken, en verschillende bekwame mineralogen werden door hem gevormd.

Hoeveel tijd hem dit onderricht ook kostte, toch vond hij gelegenheid tot wetenschappelijk onderzoek, en, nadat hij in 1878 tot lid der Akademie was benoemd, deelde hij ook in onze

verhandelingen de vruchten zijner geologische, voornamelijk petrographische studiën mede.

Hoe verdienstelijk deze onderzoekingen ook mogen zijn, BEHRENS was niet in de eerste plaats geoloog, maar veeleer chemicus en experimentator, en als zoodanig heeft hij zich dan ook ontegenzeggelijk de grootste verdienste verworven en ver buiten ons vaderland een grooten naam verkregen.

Van de groote waarde die hij aan het experiment hechtte getuigt o. a. zijne verhandeling over de vorming der maaren in de Eifel, waarin hij het ontstaan van die kratervormige meeren trachtte te verklaren door vergelijking met de uitkomsten door proeven verkregen; het krachtigst openbaart zich echter de groote beteekenis die voor hem het experiment bezat, en zijne groote voorliefde vooral voor het scheikundig onderzoek in zijn mikrochemische studiën.

Al in de eerste jaren van zijn verblijf in Delft hield hij zich daarmee bezig, en in eene verhandeling, in 1881 uitgegeven, ontvouwde hij de beginselen van de mikrochemische analyse en deelde hij de reacties mede van de meeste der in de mineralen voorkomende bestanddeelen. Na dien tijd heeft BEHRENS zijne krachten hoofdzakelijk aan dit vak gewijd, waarin HARTING hem op zeer bescheiden schaal was voorgegaan, maar waarin BEHRENS met volle recht als baanbreker mag worden genoemd,

In 1894 verscheen zijn standaardwerk „die Mikrochemische Analyse”, waarvan in 1898 een tweede druk werd uitgegeven, nadat reeds in 1893 eene Fransche en in 1894 eene Engelsche bewerking het licht hadden gezien.

Nog altijd bleef BEHRENS echter belast met het onderwijs aan de aanstaande mijningenieurs, tot eindelijk in 1898 daaraan een eind werd gemaakt; BEHRENS werd van dit onderwijs ontheven en hem werd een nieuwe leerstoel toevertrouwd, namelijk in de Mikrochemie, de eerste niet alleen in ons vaderland maar in Europa.

In een laboratorium, op beperkte schaal ingericht, kon hij zich nu geheel wijden aan het vak zijner keuze, tot welks opbouw hij zooveel had toegebracht, en hoezeer zijn verdiensten op dit gebied werden erkend, bleek wel het duidelijkst uit

het feit, dat èn uit Nederland èn uit den vreemde verschillende chemici en mineralogen naar Delft kwamen, om onder de leiding van den meester in het mikrochemisch onderzoek te worden ingewijd.

Vaak liet de gezondheid van BEHRENS te wenschen over, maar zijn ijver verflauwde niet, en ook in onze vergaderingen ontvingen wij in de laatste jaren meermalen mededeelingen omtrent de uitkomsten zijner mikroskopische onderzoekingen, waarbij hij niet alleen langs chemischen weg de samenstelling der stoffen trachtte te bepalen, maar ook de inwendige structuur der lichamen, vooral der metalen en metaal-legeeringen, trachtte op te sporen. De resultaten van deze laatste studiën heeft BEHRENS voornamelijk neergelegd in zijn in 1898 verschenen werk "Das mikroskopische Gefüge der Metalle und Legierungen."

Zoo heeft BEHRENS gewoekerd met de talenten die hem waren geschonken en ten nutte van velen, vooral van zijne leerlingen en vrienden aan de polytechnische school, gewerkt zoolang het dag was, geen eer of roem daarbij najagend, maar alleen trachtend te zijn een oprecht, eerlijk werker, en voor zijn vrienden een trouw vriend.

We danken hem voor wat hij op wetenschappelijk gebied heeft gedaan, en we zullen zijne nagedachtenis in eere houden.

Geologie. Verslag van de Geologische Commissie over het jaar 1904 :

In den loop van het jaar 1904 mochten wij tweemaal van de zijde van 's Rijks Waterstaat mededeeling ontvangen van plaats gehad hebbende grondboringen. De Heer WORTMAN, Ingenieur van den Waterstaat te Amsterdam, deed ons de profielen toekomen van eene boring te IJmuiden in Maart l.l. en van vroegere boringen te IJmuiden en Schellingwoude. Dr. LORIÉ heeft deze profielen benuttigd bij zijne bewerking van nabij gelegen boringen. De Heer CASTENDYK, Hoofdingenieur Directeur te Leeuwarden, zond ons profielen van grondboringen te Statenzijl, welke wij Dr. LORIÉ deden toekomen, die dezelve evenwel afstond aan Prof. VAN CALKER te Groningen, aangezien deze voornemens is omtrent de uitkomsten van eenige in de provincie Groningen uitgevoerde grondboringen in verband met andere boringen eene mededeeling te doen. Aan de Heeren WORTMAN en CASTENDYK betuigen wij onzen welgemeenden dank voor hunne toezendingen.

Onze ijverige en verdienstelijke medewerker Dr. LORIÉ had reeds op het einde des vorigen jaars eene verhandeling aan de Akademie ingediend, welke in April l.l. verschenen is als nr. 33 onzer Mededeelingen. Zij bevat weder eene beschrijving van nieuwe grondboringen, namelijk : van de sluisput te Sas van Gent in het groote scheepvaartkanaal, eene 20 M. diepe boring te Brielle van gemeentewege, eene van 30 M. te Heusden evenzoo van gemeentewege, en eene van 53 M. te Groningen van wege de uitgeversfirma WOLTERS. Daarvan zijn de grondmonsters bereidwillig afgestaan aan Dr. LORIÉ, desbetreffende door de goede zorgen van de Heeren P. VAN DER WALLE te Brielle, K. J. VAN EGGELEN Secretaris der Gezondheidscommissie te Heusden, TER HORST te Groningen, aan welke Heeren daarvoor dank is verschuldigd. De uitkomsten dezer boringen heeft Dr. LORIÉ in verband beschouwd met die, welke hij bij vroegere boringen in de nabijheid van Brielle en Heusden had verkregen. De sluisput te Sas van Gend heeft hij zelf bezocht en opgenomen.

In de laatst gehouden December-vergadering hebben wij op nieuw eene verhandeling van Dr. LORIÉ mogen indienen, bevattende de beschrijving van een zestiental diepe grondboringen in de duinstreek bij den watervang van de Amsterdamsche Waterleiding. Het verslag daarover hebben wij reeds aan de Akademie voorgedragen, zoodat de verhandeling weldra in het licht zal verschijnen als no. 34 onzer mededeelingen.

Ons medelid SCHROEDER VAN DER KOLK heeft de kaartteering van een deel des Nederlandschen bodems in de maanden Augustus en September voortgezet, van welke kaartteering wij in onze vorige

verslagen herhaaldelijk melding hebben gemaakt. Door een aantal zijner mijnbouwkundige leerlingen werden geкартеerd de bladen der Stafkaart 388 (Eemnes), 389 (Bunschoten), 399 (Enschede) en 400 (Lossers)¹⁾. Er blijven nu nog ter kaartering over de bladen 383—387, welke de Heer S. v. D. KOLK in den zomer van 1905 met zijne leerlingen hoopt te bewerken. Alsdan zal de gansche Oost-Westelijke strook van ons land welke de bladen der stafkaart 382—400 omvat, benevens de aangrenzende bladen 401, 402, 415, 377, 416 geheel geкартеerd zijn, terwijl van de Noord-Zuidelijke strook de bladen 758, 762, 766, 770 gereed zijn.

Zooals wij vroeger reeds vermeld hebben, zal daardoor de bewerking van eene nieuwe geologische kaart van Nederland geheel voorbereid zijn, dewijl wij mogen aannemen dat deze strooken zoo goed als al de vormingen bevatten, die den Nederlandschen bodem samenstellen.

Door de Afdeeling is in Febr. l.l. aan Z. Exc. den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid verzocht aan de Geologische Commissie te vergunnen om zich met den ingenieur, die met de opsporing van delfstoffen in Limburg belast is, in aanraking te stellen. Deze vergunning is blijkens het Ministerieële schrijven van 11 April l.l. verleend geworden, en de heer Dr. F. BELJERINCK, ingenieur-direkteur bij de werken, is gemachtigd om zich met de Commissie in aanraking te stellen. Eene voorloopige bespreking onzerzijds met den ingenieur-direkteur heeft ons het vertrouwen gegeven, dat het zijnerzijds niet zal ontbreken aan welwillende medewerking tot het treffen van het door ons beoogde doel.

Wij eindigen ons verslag door U voor te stellen:

1°. Aan Dr. J. LORÉ op nieuw den dank der Afdeeling te betuigen voor zijne ijverige en belangelooze medewerking,

2°. Aan Z.E. den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid eene toelage over het jaar 1906 aan te vragen van duizend gulden.

De Geologische Commissie:

VAN DIESEN.

K. MARTIN.

SCHROEDER v. D. KOLK.

J. M. VAN BEMMELN, *Secretaris*.

¹⁾ Daaraan hebben deelgenomen:

Voor blad 388 de h.h. E. A. DOUGLAS als ploeghoofd, A. H. J. THIE.

Voor blad 389 de h.h. J. VERSLUYS als ploeghoofd, H. F. GRONDYS, C. A. DE JONGH, O. J. VAN DER ELST.

Voor blad 399 de h.h. E. H. M. BEEKMAN MZN. als ploeghoofd, A. C. DE JONGH, L. LEGER, H. FRYLING, benevens de h.h. J. K. VAN GELDER als ploeghoofd, PH W. TIMMERMAN, F. W. KROMHOUT.

Voor blad 400 de h.h. H. H. P. HUFFNAGEL BZN. als ploeghoofd, A. F. M. KUNERT, H. VERHAGEN JR.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM doet, mede namens den Heer E. H. BÜCHNER, Chem. doct., eene mededeeling over: „*Kritische eindpunten in driefaselijnen met vaste fasen bij binaire mengsels die twee vloeistofflagen vertoonen.*”

Bij stelsels van ééne komponent is tot nu toe slechts één kritisch eindpunt gevonden, namelijk bij het evenwicht vloeistof-damp. Stelt men dit voor door eene p, t -lijn, dan houdt deze plotseling op in het punt waar vloeistof en damp identisch zijn geworden. Er bestaan voorshands geene gegronde motieven om kritische eindpunten ook bij evenwichten vast-vloeibaar en vast-damp aan te nemen. Wij zullen die hier ook verder buiten beschouwing laten.

Bij stelsels van twee componenten krijgt men in plaats van een kritisch punt vloeibaar-damp, eene kritische lijn K_1K_2 (fig. 1) die de kritische punten der componenten verbindt. In een p, t, x -diagram loopt deze lijn in de ruimte, hier is slechts hare p, t -projectie aangegeven. (AK_1 en BK_2 zijn dan de evenwichtslijnen

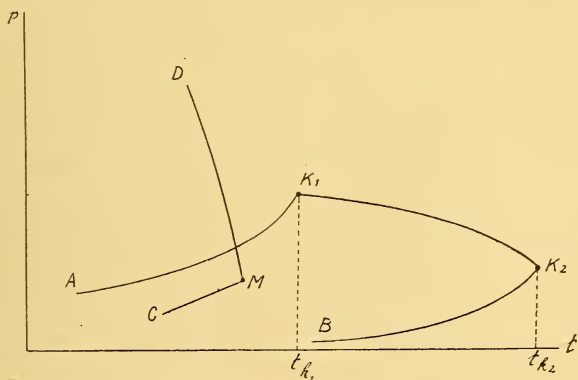


Fig. 1.

vloeistof-damp voor de componenten A en B). Is er homogene menging bij alle concentraties in de vloeistofphase, dan is dit de *eenige* kritische lijn.

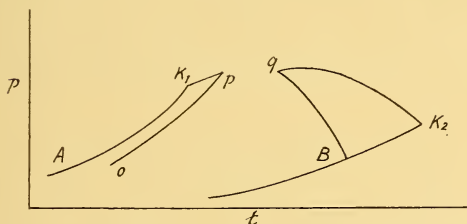


Fig. 2.

Door de onderzoekingen van SMITS¹⁾ is onlangs aangetoond (fig. 2) hoe in sommige binaire mengsels de evenwichtslijn voor vast B met vloeistof en damp deze kritische lijn ontmoeten kan (waartoe noodig is dat het smeltpunt van B hooger ligt

dan K_1). Er zijn dan twee zoodanige ontmoetingspunten p en q met de twee stukken op en qB der driefaselijne. Deze lijn verkrijgt dus twee kritische eindpunten door de ontmoeting met de kritische lijn vloeistof-damp. Tusschen p en q houden beide lijnen op te bestaan.

¹⁾ Zie laatstelijk, deze Verslagen XIII. 90 (1904).

Andere gevallen van dergelijke kritische eindpunten bij binaire mengsels door de ontmoeting van driefasenlijnen met eene kritische lijn waren denkbaar, wanneer er geene homogene menging bij alle concentraties in de vloeistofphase mogelijk is, en dus twee vloeistoflagen bestaanbaar zijn. Het was van groot belang voor de kennis van de bestaansvoorwaarden van vaste fasen bij hooge temperaturen ook de kritische eindpunten in dergelijke gevallen op te sporen. Duiden we de beide vloeistoflagen aan door L_1 en L_2 , den damp door G en de eene of andere component in vasten toestand door S , dan zijn er vooreerst behalve de driefasenlijn SLG thans nog twee andere driefasenlijnen mogelijk, SL_1L_2 en L_1L_2G . Ten einde kritische eindpunten dezer lijnen op te sporen, beschouwen wij eerst de

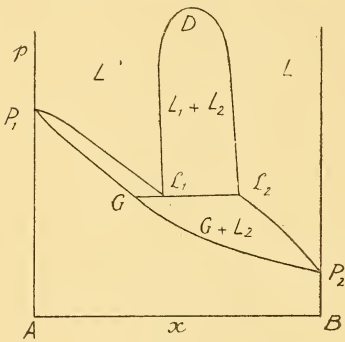


Fig. 3.

lijn L_1L_2G . Daarbij beschouwen wij uitsluitend de gevallen waarin het p, x -diagram de gedaante heeft van Fig. 3, waarin G, L_1 en L_2 druk en concentratie aangeven van koëxisterenden damp met 2 vloeistoflagen. De driefasendruk voor dit stelsel ligt derhalve tusschen ¹⁾ den dampdruk van vloeibaar A en B (P_1 en P_2).

De p, t -lijn CM voor het fasen-evenwicht L_1L_2G ligt dienovereenkomstig in Fig. 1 tusschen AK_1 en BK_2 .

Bij verhooging van temperatuur kunnen L_1 en L_2 elkaar naderen of omgekeerd. Geschiedt het eerste en vallen zij nog beneden de lijn K_1K_2 samen dan worden bijv. in M de twee vloeistoflagen identiek, een geval waarvoor vele voorbeelden gevonden zijn door ALEXEJEV en ROTHMUND. Geheel terecht is dit punt een kritisch punt genoemd. Dit kritisch eindpunt van de lijn voor L_1L_2G moet dan noodwendig een snijpunt zijn met een kritische lijn. Bedoelde kritische lijn is de lijn DM in Fig. 1.

Zijn namelijk de vloeistoffen L_1 en L_2 door drukverhooging tot meerdere menging te brengen dan zal er in Fig. 3 bij voldoende hoogen druk een mengpunt D bestaan. Naderen L_1L_2 elkaar nu bij hoogere t dan komt D bij lager druk te liggen, tevens zal de concentratie in het mengpunt verschillen. Zoo ontstaat de kritische lijn DM voor de fasen L_1L_2 . Haar eene eindpunt ligt in het ontmoetingspunt M waar nevens L_1L_2 ook G optreedt en dus de laagst mogelijke druk bereikt wordt. In de richting naar boven zou

¹⁾ Het andere geval waarbij de driefasendruk hooger is dan die beide leidt niet tot principieel andere uitkomsten.

een eindpunt slechts denkbaar zijn door het optreden eener vaste phase. Bevorderde drukverhooging de ontmenging der twee lagen, dan liep DM van het punt M uit naar rechts in plaats van naar links.

Voor het geval dus de twee vloeistoflagen een bovenmengpunt M bezitten, dat beneden K_1K_2 ligt, zijn de twee kritische lijnen K_1K_2 voor GL en DM voor L_1L_2 volkomen onafhankelijk van elkander.

Is echter het bovenmengpunt nog niet bereikt beneden K_1K_2 dan zal CM voortgaan tot een ontmoetingspunt met K_1K_2 . Daar nu de volgorde der phasen is GL_1L_2 zal dan G met L_1 identiek worden in O , Fig 4.

De kritische lijn K_1O wordt te gelijker tijd hier afgebroken. Uit eene beschouwing van eene reeks p, x -diagrammen voor opvolgende temperaturen laat zich nu, gelijk de heer BÜCHNER afleidde, graphisch zeer gemakkelijk aantonen, dat het andere eind der kritische lijn GL die in K_2 begint, zich nu versmelt met het bovenstuk der kritische lijn L_1L_2 , welks onderste gedeelte door het ontbreken van M niet realiseerbaar is. Zoo ontstaat de kritische lijn K_2PD , wier bovenstuk eventueel ook rechts kan loopen.

Een ontmoeting van de driephasenlijn, GL_1L_2 met de kritische lijn GL in O zal in de tweede plaats altijd optreden, wanneer L_1 en L_2 bij temperatuur-verhooging uiteen loopen. Dit zal zich veelvuldig kunnen voordoen bij 2 vloeistoflagen die een benedenmengpunt M^1 hebben. De driephasenlijn GL_1L_2 eindigt dan in O door snijding met de kritische lijn GL en in M^1 door snijding met de kritische lijn voor $L_1=L_2$; M^1P . Men kan uit de p, x -diagrammen nu weer afleiden dat thans het bovenstuk dezer lijn niet realiseerbaar is omdat thans het onderste samenvloeit met het tweede gedeelte der kritische lijn GL dat van K_2 komt. Zoo ontstaat de kritische lijn M^1PK_2 .

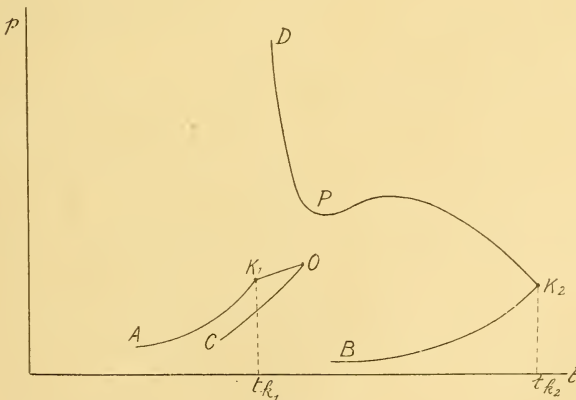


Fig. 4.

In den laatsten tijd zijn door KUENEN voorbeelden gevonden van de gevallen vertegenwoordigd door Fig. 4 en 5.

De figuren 1, 4 en 5 geven de drie hoofdtypen te zien van de wijze waarop de driephasenlijn GL_1L_2 , hetzij de kritische lijn GL , hetzij de kritische

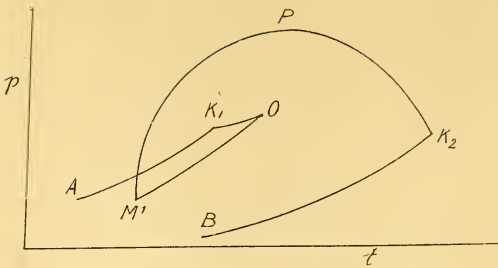


Fig. 5.

op die driefaselijnen waarbij eene der fasen vast is. Wij kunnen ons dan bepalen tot het geval dat B als vaste fase optreedt, daar naast vast A geene kritische verschijnselen zich kunnen voordoen.

In vele gevallen zal dan bij het vervolgen der lijn GL_1L_2 naar lagere temperaturen in een punt Q de vaste fase optreden. Naar vroegere onderzoekingen van mijzelf komen dan in het quadrupelpunt Q 4 driefaselijnen samen. Nemen we het geval van Fig. 1, dan bekomen we in Fig. 6 QM voor GL_1L_2 , QB voor GL_2S , EQ voor GL_1S terwijl QN het evenwicht aanduidt van de vaste fase met de twee vloeistofflagen L_1L_2S . Soortgelijke lijnen zijn door mij

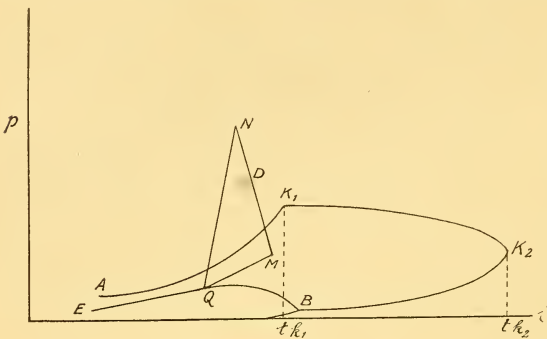


Fig. 6.

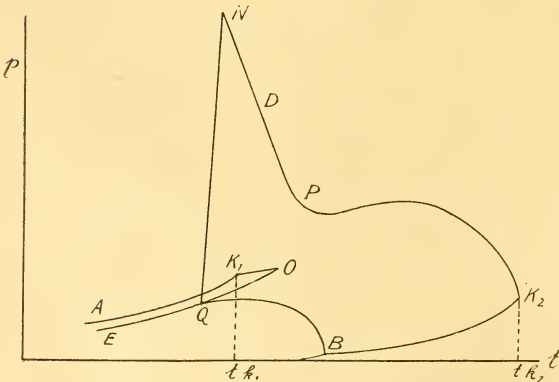


Fig. 7.

lijn L_1L_2 , ontmoet en bij die ontmoeting 1 of 2 eindpunten vindt en van het samensmelten van stukken der eene kritische lijn met die der tweede.

In de tweede plaats beschouwen wij nu het optreden van kritische eindpunten

vroeger bestudeerd waar hydraten van SO_2 , HBr , HCl als vaste fasen optraden. Voor de component B als vaste fase zal hun beloop analoog zijn en evenals van alle gewone smeltlijnen de richting zeer weinig van de vertikaal afwijken, hetzij rechts of links al naar gelang van de volumverschillen der fasen.

Loopt de lijn rechts en de kritische lijn MD links, dan zou de mogelijkheid kunnen bestaan van een kritisch eindpunt N bij hunne ontmoeting, omdat hier de beide vloeistofflagen naast vast B identiek zouden worden. De kans dat dit

bij bereikbaren druk zal geschieden bestaat alleen wanneer Q en N niet te veel in temperatuur verschillen.

Fig. 7 stelt een zelfde ontmoetingspunt N voor voor het geval dat met Fig. 4 overeenstemt. Veel grootere kansen op het bereiken van een kritisch eindpunt van de lijn L_1L_2S biedt het geval van Fig 5 dat tot Fig. 8 voeren zou. De lijn OQ wordt hier verondersteld niet door te loopen tot het benedenmengpunt M' omdat te voren bij Q de vaste phase optreedt. Daardoor ontbreekt nu het onderste deel der kritische lijn $L_1 = L_2$.

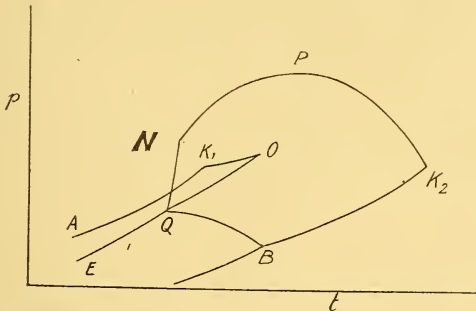


Fig. 8.

opgelost in vloeibaar CO_2 , daarmee twee lagen geven.

Indien echter het mengpunt M' zeer weinig beneden Q zou liggen (metastabiel) zou het snijpunt N bij betrekkelijk lagen druk kunnen gevonden worden. Dergelijke nabijheid van M' en Q heeft de heer BÜCHNER veelvuldig aangetroffen bij systemen van allerlei organische stoffen die,

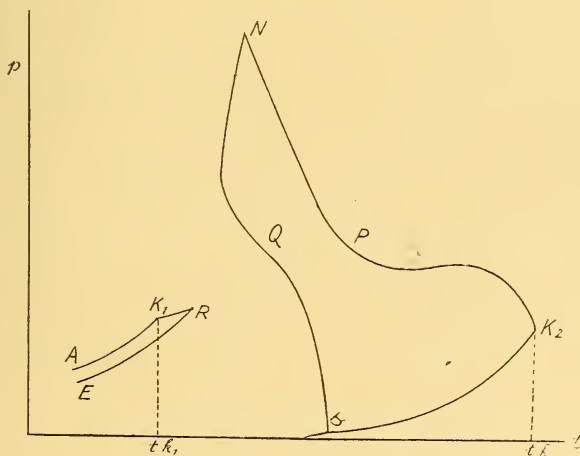


Fig. 9.

Behalve de drie gevallen fig. 6, 7, 8 waarin een kritisch eindpunt der lijn QN bestaat is nu nog een vierde type mogelijk. Dit treedt te voorschijn wanneer de vloeistof op de lijn EQ reeds kritisch wordt met den damp, voordat Q bereikt is, d. i. voordat naast de vaste phase ook de tweede vloeistof optreedt. ER (Fig. 9) snijdt dan de kritische

lijn vloeistof-damp in een kritisch punt R dat geheel overeenkomt met het punt p van SMITS (fig. 2). De lijn QO ontbreekt nu, d. i. beneden R bemerkt men niets van een tweede vloeistof. De heer BÜCHNER heeft nu weder graphisch afgeleid dat in dit geval de lijn QB voor de tweede reeks vloeistoffen naast vast B en damp versmelt met QN tot ééne lijn BQN waarbij de eene fluïde phase op

het benedenste deel het karakter van damp, op het bovendee van vloeistof heeft, terwijl die echter vloeiend in elkaar overgaan.

In dit geval versmelt evenals in fig. 4 het benedenstuk der kritische lijn GL met het bovenstuk der kritische lijn L_1L_2, K_2PN en ontstaat weer de mogelijkheid dat ook de lijn BQN een kritisch eindpunt N bezit. Dit punt vertoont eenige overeenkomst met het tweede kritisch eindpunt door SMITS gevonden in q fig. 2. Dat we in fig. 9 te doen hebben met een gebied van twee vloeistofflagen zou alleen duidelijk zichtbaar te maken zijn indien beneden R door uitblijven van de vaste phase twee vloeistoffen naast damp (metastabel) optraden. Anders toont alleen het eigenaardig beloop van BQN dat we dit type hebben.

Het is den heer BÜCHNER gelukt, een geval te vinden waarin zich dat beloop liet aantoonen (hoewel N onbereikbaar bleef). Fig. 10

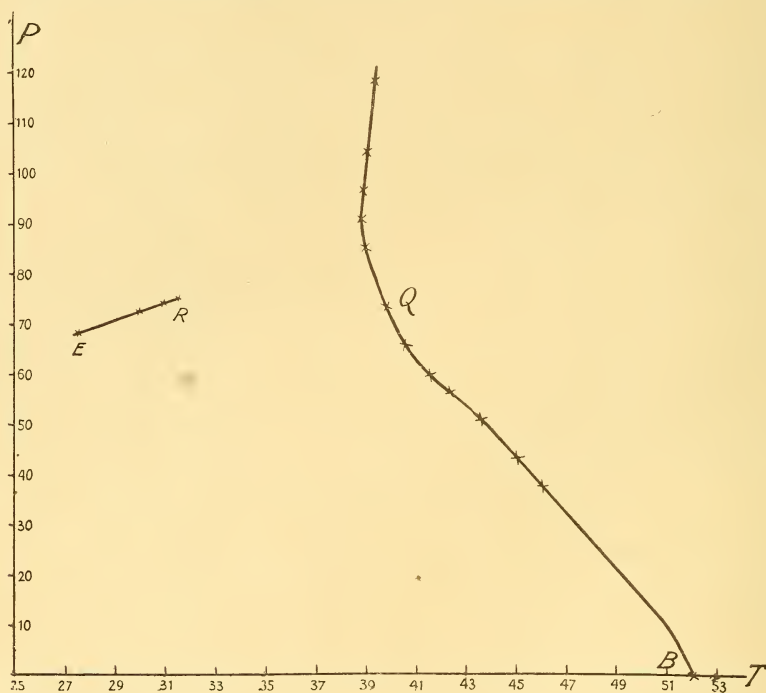


Fig. 10.

geeft een juiste voorstelling van de p, t -lijnen ER en BQ voor vast diphenylamin naast oplossing in vloeibaar CO_2 en damp, die zeer rijk aan CO_2 is op ER en naast een veel meer diphenylamin-houdende tweede fluide phase op BQ . Het punt R ligt slechts $0^{\circ}.6$ boven het kritisch punt van zuiver CO_2 , derhalve is diphenylamin bij die temperatuur uiterst weinig in CO_2 oplosbaar.

Tusschen $31^{\circ}6$ en $38^{\circ}8$ zijn twee fluide phasen onbestaanbaar naast vast diphenylamin, daarboven treft men weer de tweede drie-

phasenlijn met twee fluïde fasen, nu veel rijker aan diphenylamin. Deze lijn werd bepaald tot 120 atm. druk. De beteekenis van al de gebieden waarin driephasenlijnen ontbreken is alleen door eene reeks p, x -diagrammen uit te drukken.

De gegeven beschouwingen doen de mogelijkheid voorzien om in algemeene trekken de voorwaarden voor het bestaan eener vaste phase naast een of twee fluïde bij het doorschrijden van het gebied der kritische verschijnselen dier laatsten ook voor die binaire mengsels volkomen te overzien, welke in vloeibaren staat niet in alle verhoudingen mengbaar zijn.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt eene mededeeling aan: „*Over de vergelijkingen, waardoor de meetkundige plaats der hoofdklassen van een bundel kwadratische oppervlakken bepaald wordt.*”

1. De nu volgende mededeeling kan worden beschouwd als een voortzetting van de voorgaande, opgenomen in het Zittingsverslag van 26 November 1904. Zij bevat de stelkundige behandeling van het vraagstuk, waarvan aldaar een meetkundige behandeling is gegeven. Zij zoude de vergelijking van een oppervlak van den negenden graad moeten doen vinden, dit is evenwel niet geheel doorgevoerd wegens den grooten omvang, dien de berekeningen zouden verkrijgen; evenwel is de vorm van de eindvergelijking gevonden.

2. In de eerste plaats moet de vergelijking worden gevonden van den assenkegel van den concentrischen kegelbundel van den tweeden graad, tevens richtkegel van het assen-oppervlak van den oppervlakkenbundel. Men beschouwe daartoe de snijding van de twee kegelvlakken, die den kegelbundel bepalen, met het vlak in het oneindige, V_∞ , benevens den in dit vlak gelegen isotropen cirkel; men heeft dan de drie vergelijkingen, in cartesische rechthoekige coördinaten:

$$A \equiv a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz = 0,$$

$$B \equiv b_{11} x^2 + b_{22} y^2 + b_{33} z^2 + 2b_{12} xy + 2b_{13} xz + 2b_{23} yz = 0,$$

$$C \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Uit deze vergelijkingen vindt men die van den assenkegel op dezelfde wijze als men de Jacobische kromme van een kegelsneden-net bepaalt:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} + \lambda b_{11})p + (a_{12} + \lambda b_{12})q + (a_{13} + \lambda b_{13})r + a_{14} + \lambda b_{14} &= 0, \\ (a_{12} + \lambda b_{12})p + (a_{22} + \lambda b_{22})q + (a_{23} + \lambda b_{23})r + a_{24} + \lambda b_{24} &= 0, \\ (a_{13} + \lambda b_{13})p + (a_{23} + \lambda b_{23})q + (a_{33} + \lambda b_{33})r + a_{34} + \lambda b_{34} &= 0. \end{aligned} \right\} \cdot (2)$$

Door deze substitutie nemen de vergelijkingen den navolgenden vorm aan :

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}) + \lambda(b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z + b_{14}) + k(x-p) &= 0, \\ (a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) + \lambda(b_{12}x + b_{22}y + b_{23}z + b_{24}) + k(y-q) &= 0, \\ (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}) + \lambda(b_{13}x + b_{23}y + b_{33}z + b_{34}) + k(z-r) &= 0, \end{aligned} \right\} (3)$$

of wel, korter geschreven :

$$\left. \begin{aligned} A_1 + B_1 \lambda + k(x-p) &= 0, \\ A_2 + B_2 \lambda + k(y-q) &= 0, \\ A_3 + B_3 \lambda + k(z-r) &= 0. \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (4)$$

Uit de vergelijkingen (2) en (4) wordt het oppervlak O , verkregen door eliminatie van p, q, r, k, λ .

4. Deze eliminatie voert tot langdurige berekeningen, daar de veranderlijken ook als produkten twee aan twee voorkomen. We zullen hierbij den algemeenen gang aangeven, waardoor tevens de toepassing op bijzondere gevallen mogelijk wordt gemaakt.

De vergelijkingen (4) kunnen als volgt geschreven worden :

$$\begin{aligned} kp &= A_1 + B_1 \lambda + kx, \\ kq &= A_2 + B_2 \lambda + ky, \\ kr &= A_3 + B_3 \lambda + kz. \end{aligned}$$

Men vermenigvuldige nu elk der vergelijkingen (2) met k en substitueere de waarden kp, kq, kr ; men verkrijgt alsdan :

$$\begin{aligned} (a_{11} + \lambda b_{11})(A_1 + B_1 \lambda + kx) + (a_{12} + \lambda b_{12})(A_2 + B_2 \lambda + ky) + \\ (a_{13} + \lambda b_{13})(A_3 + B_3 \lambda + kz) + ka_{14} + kb_{14} \lambda = 0, \end{aligned}$$

of wel :

$$\begin{aligned} (A_1 + B_1 \lambda)k + (a_{11} + b_{11} \lambda)(A_1 + B_1 \lambda) + (a_{12} + b_{12} \lambda)(A_2 + B_2 \lambda) + \\ (a_{13} + b_{13} \lambda)(A_3 + B_3 \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Zoo ook vindt men :

$$\begin{aligned} (A_2 + B_2 \lambda)k + (a_{12} + b_{12} \lambda)(A_1 + B_1 \lambda) + (a_{22} + b_{22} \lambda)(A_2 + B_2 \lambda) + \\ (a_{23} + b_{23} \lambda)(A_3 + B_3 \lambda) = 0, \end{aligned}$$

en eindelijk :

$$\begin{aligned} (A_3 + B_3 \lambda)k + (a_{13} + b_{13} \lambda)(A_1 + \lambda B_1) + (a_{23} + b_{23} \lambda)(A_2 + B_2 \lambda) + \\ (a_{33} + b_{33} \lambda)(A_3 + B_3 \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Werkt men deze vergelijkingen uit en beschouwt men k en λ als veranderlijken, dan verkrijgt men als uitkomst drie vergelijkingen van den tweeden graad, waartusschen dus k en λ geëlimineerd kunnen worden. Daar evenwel k slechts in de eerste macht daarin voorkomt, zoo kan de eliminatie van k nog zonder bezwaar geschieden. Door gelijkstelling der waarden van k uit de eerste en tweede, en van die uit de tweede en derde der vergelijkingen (5) verkrijgt men:

$$\left. \begin{aligned} &(a_{11} + b_{11} \lambda) (A_1 + B_1 \lambda) (A_2 + B_2 \lambda) + (a_{12} + b_{12} \lambda) (A_2 + B_2 \lambda)^2 + \\ &(a_{13} + b_{13} \lambda) (A_3 + B_3 \lambda) (A_2 + B_2 \lambda) = (a_{12} + b_{12} \lambda) (A_1 + B_1 \lambda)^2 + \\ &(a_{22} + b_{22} \lambda) (A_2 + B_2 \lambda) (A_1 + B_1 \lambda) + (a_{23} + b_{23} \lambda) (A_3 + B_3 \lambda) (A_1 + B_1 \lambda) \end{aligned} \right\} (6)$$

en

$$\left. \begin{aligned} &(a_{12} + b_{12} \lambda) (A_1 + B_1 \lambda) (A_3 + B_3 \lambda) + (a_{22} + b_{22} \lambda) (A_2 + B_2 \lambda) (A_3 + B_3 \lambda) + \\ &(a_{23} + b_{23} \lambda) (A_3 + B_3 \lambda)^2 = (a_{13} + b_{13} \lambda) (A_1 + B_1 \lambda) (A_2 + B_2 \lambda) + \\ &(a_{23} + b_{23} \lambda) (A_2 + B_2 \lambda)^2 + (a_{33} + b_{33} \lambda) (A_3 + B_3 \lambda) (A_2 + B_2 \lambda). \end{aligned} \right\}$$

Bij uitwerking worden deze vergelijkingen van den derden graad in λ , men kan ze verkort schrijven als volgt:

$$\left. \begin{aligned} M\lambda^3 + N\lambda^2 + P\lambda + Q &= 0, \\ M'\lambda^3 + N'\lambda^2 + P'\lambda + Q' &= 0, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

welke, volgens de methode van BEZOUT, de volgende resultante geven:

$$\begin{vmatrix} (MN') & (MP') & (MQ') \\ (MP') & (MQ') + (NP') & (NQ') \\ (MQ') & (NQ') & (PQ') \end{vmatrix} = 0. \dots \dots (8)$$

5. Hieruit blijkt dat de vorm van de eindvergelijking gevonden is, maar zij is zeer ingewikkeld, zooals blijkt uit de waarden der coëfficiënten, welke hierbij gegeven worden:

$$M = b_{11} B_1 B_2 + b_{12} B_2^2 + b_{13} B_2 B_3 - b_{12} B_1^2 - b_{22} B_1 B_2 - b_{23} B_1 B_3;$$

$$\begin{aligned} N = &a_{11} B_1 B_2 + b_{11} A_1 B_2 + b_{11} A_2 B_1 + 2b_{12} A_2 B_2 + a_{12} B_2^2 + \\ &a_{13} B_2 B_3 + b_{13} A_3 B_2 + b_{13} A_2 B_3 - a_{12} B_1^2 - 2b_{12} A_1 B_1 - \\ &a_{22} B_1 B_2 - b_{22} A_2 B_1 - b_{22} A_1 B_2 - a_{23} B_1 B_3 - b_{23} A_3 B_1 - \\ &b_{23} A_1 B_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P = &b_{11} A_1 A_2 + a_{11} B_1 A_2 + a_{11} A_1 B_2 + 2a_{12} A_2 B_2 + b_{12} A_2^2 + \\ &b_{13} A_2 A_3 + a_{13} A_2 B_3 + a_{13} A_3 B_2 - b_{12} A_1^2 - 2a_{12} A_1 B_1 - \\ &b_{22} A_1 A_2 - a_{22} A_1 B_2 - a_{22} A_2 B_1 - b_{23} A_1 A_3 - a_{23} A_1 B_3 - \\ &a_{23} A_3 B_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q &= a_{11} A_1 A_2 + a_{12} A_2^2 + a_{13} A_2 A_3 - a_{12} A_1^2 - a_{22} A_1 A_2 - a_{23} A_1 A_3, \\
M' &= b_{12} B_1 B_3 + b_{22} B_2 B_3 + b_{23} B_3^2 - b_{13} B_1 B_2 - b_{23} B_2^2 - b_{33} B_2 B_3; \\
N' &= a_{12} B_1 B_3 + b_{12} A_1 B_3 + b_{12} A_3 B_1 + a_{22} B_2 B_3 + b_{22} A_2 B_3 + \\
&\quad b_{22} A_3 B_2 + a_{23} B_3^2 + 2b_{23} A_3 B_3 - a_{13} B_1 B_2 - b_{13} A_1 B_2 - \\
&\quad b_{13} A_2 B_1 - a_{23} B_2^2 - 2b_{23} A_2 B_2 - a_{33} B_2 B_3 - b_{33} A_3 B_2 - \\
&\quad b_{33} A_2 B_3; \\
P' &= b_{12} A_1 A_3 + a_{12} A_3 B_1 + a_{32} A_1 B_3 + b_{22} A_2 A_3 + a_{22} A_3 B_2 + \\
&\quad a_{22} A_2 B_3 + 2a_{23} A_3 B_3 + b_{23} A_3^2 - b_{13} A_1 A_2 - a_{13} A_1 B_2 - \\
&\quad a_{13} B_1 A_2 - 2a_{23} A_2 B_2 - b_{23} A_2^2 - b_{33} A_2 A_3 - a_{33} A_2 B_3 - \\
&\quad a_{33} A_3 B_2; \\
Q' &= a_{12} A_1 A_3 + a_{22} A_2 A_3 + a_{23} A_3^2 - a_{13} A_1 A_2 - a_{23} A_2^2 - a_{33} A_2 A_3.
\end{aligned}$$

6. Met behulp dezer uitdrukkingen kan de vergelijking van het assen-oppervlak voor elk voorkomend geval bepaald worden. Daardoor is het doel dezer mededeeling bereikt; we zullen haar besluiten met eenige opmerkingen.

a. Zelfs in het algemeene geval is bekorting bij de uitvoering mogelijk. Neemt men aan dat de coördinaatassen langs de assen van een der oppervlakken, b.v. van $B = 0$, vallen, dan wordt $b_{12} = 0$, $b_{13} = 0$, $b_{23} = 0$, $b_{14} = 0$, $b_{24} = 0$, $b_{34} = 0$, terwijl ook B_1 , B_2 , B_3 eenvoudige gedaanten aannemen, en alle coëfficiënten, behalve Q en Q' , vereenvoudigd worden.

Tevens blijkt bij deze substitutie, dat uit de vergelijking (8) een factor kan worden verwijderd; voert men namelijk de bovengenoemde waarden voor b_{ik} in, dan vindt men:

$$M = (b_{11} - b_{22}) B_1 B_2 \quad M' = (b_{22} - b_{33}) B_2 B_3;$$

hieruit volgt dat de eerste kolom van den determinant (8) door B_2 deelbaar is. Deze deelbaarheid hangt samen met het feit, dat de vergelijking van het assenoppervlak van den negenden graad moet worden, terwijl bij ontwikkeling de determinant (8) van den twaalfden graad wordt. Bij volledige uitwerking moeten dus factoren uit (8) wegvallen.

b. Uit de vroegere meetkundige behandeling blijkt, dat het oppervlak O , in sommige gevallen ontaardt. Als een der daarbij optredende bijzondere gevallen werd het geval eener circulaire basiskromme van den bundel behandeld, waarbij O , zich in een cubisch oppervlak en in een oppervlak van den zesden graad splitste. De vergelijkingen bij de stekkundige behandeling van dit geval worden, wanneer men het vlak $X O Y$ kiest als vlak, dat volgens een cirkelbundel gesneden wordt:

$$\begin{aligned}
A &\equiv a_{11} x^2 + a_{11} y^2 + 2a_{13} xz + 2a_{23} yz + 2a_{34} z + a_{44} = 0, \\
B &\equiv b_{33} z^2 + 2b_{13} xz + 2b_{23} yz + 2b_{14} x + 2b_{34} z = 0.
\end{aligned}$$

Uit deze vergelijkingen kunnen de vereenvoudigde waarden voor M , N . . . afgeleid worden.

Physiologie. — De Heer ZWAARDEMAKER biedt eene mededeeling aan over: „*De betrekkelijke gevoeligheid van het menschelijk oor voor tonen van verschillende toonhoogte, met orgelpijpen nagegaan.*”

Nagenoeg gelijktijdig, doch langs verschillenden weg, werd de betrekkelijke gevoeligheid van het oor, naar gelang van de toonhoogte, door MAX WIEN ¹⁾ en door F. H. QUIX en mij ²⁾ nagegaan. De uitkomst dezer beide onderzoekingsreeksen bood op sommige punten overeenkomst, op andere verschil. De overeenkomst is:

- 1°. dat er slechts één maximum van gevoeligheid bestaat ;
- 2°. dat dit maximum zich bevindt bij g^4 ;
- 3°. dat de zone van redelijke gevoeligheid zich van c^1 tot g^5 uitstrekt ;
- 4°. dat daarbuiten, naar de grenzen der toonladder toe, de gevoeligheid zeer sterk afneemt ;

Het verschil is :

- 1°. dat, binnen het bereik der redelijk gevoelige zone, bij MAX WIEN de gevoeligheid nog sterk uiteenloopt, bij ons daarentegen van dezelfde orde is ;
- 2°. dat het minimum perceptibile bij MAX WIEN, voor het gevoeligste punt, 100000000 maal kleiner is dan bij ons.

Bij dezen stand van zaken scheen het gewenscht nog eens, langs een geheel andere methode, de minima perceptibilia door de geheele toonladder te bepalen. Zoowel telephoon als stemvorken zouden daarbij moeten worden vermeden. Wij namen dus onze toevlucht tot wijde gedekte orgelpijpen, waarvan een reeks in hout van uniform maaksel van C tot g^4 ter beschikking stond, ten deele samenvallend met de bekende fluiten van EDELMANN en waarbij dan het Galtonfluitje kon aansluiten.

Er zijn eenige reeksen van zulke proeven genomen, deels op de heide te Milligen, deels in de boekengaanderij der Universiteitsbibliotheek te Utrecht, deels in de geluidvrije kamer van het Physiologisch-Laboratorium. Daar de uitkomsten, in het algemeen, vrijwel overeenstemmen en later volledig gepubliceerd zullen worden, wensch ik voor het oogenblik slechts twee reeksen, die onder de eenvoudigste voorwaarden zijn genomen, te bespreken. Het zijn *a.* de eindreeks op de heide, *b.* de eindreeks in de boekengaanderij. De opstelling, die in beide dezelfde was, worde vooraf gemeenschappelijk beschreven.

De orgelpijp, die als geluidsbron dienst doet, is dicht bij den bo-

¹⁾ MAX WIEN. Physik. Ztschr. IV p. 69. Pflüger's Archiv Bd. 97. p. 1. 1903.

²⁾ ZWAARDEMAKER en QUIX. Ned. Tijdschr. v. Geneesk. 1901 II p. 1374; 1902 II p. 417. en Engelmann's Archiv. 1902 suppl. p. 367.

dem, met zoo min mogelijk aanrakingsvlak, aan een statief verticaal opgesteld en is in verbinding gebracht met een spirometer van HUTCHINSON. Vlak onder de luchtkamer van de orgelpijp en met deze door een wijde opening verbonden, bevindt zich een ligroine-manometer. Daar de manometer stomphoekig gebogen is, kan tot $\frac{1}{4}$ m.m. waterdruk afgelezen worden. De spirometer wordt nu, door middel van een bakje met zand, zoodanig bezwaard, dat hij met zeer regelmatigen gang de lucht uitdrijft en de orgelpijp zacht, zonder hoorbaar blaasgeruisch en zonder boventonen, doet aanspreken. De daarbij verbruikte lucht wordt op de schaal van den spirometer afgelezen en, doordat tegelijker tijd een aftikhorloge in beweging is gezet, per secunde berekend. Het product van luchtvolume, druk en versnelling der zwaartekracht (alles in cm.) geeft dan de per secunde toegevoerde energie in ergs aan.

Welk gedeelte dezer energie in geluid wordt veranderd, is onbekend. WEBSTER¹⁾ schat de "efficiency" op 0,0013, à 0,0038; RAYLEIGH²⁾ daarentegen veronderstelde in 1877, bij wijze van voorloopige raming, dat alles in geluid werd omgezet („supposing the whole energy of the escaping air converted into sound and no dissipation on the way.”) De waarheid zal wel in het midden liggen, daar wij steeds op een volkomen zuiver en gemakkelijk aanspreken acht hebben gegeven. Voor zulk een geval merkte MAX WIEN in 1888 op: „Ein Energieverlust findet [aber] sicher erstens dadurch, dass ein Theil des Luftstroms im allgemeinen gar nicht in Schallwellen umgewandelt wird, sondern durch Wirbelbildung theils innerhalb, theils ausserhalb der Pfeife verloren geht. Wir werden weiter unten sehen, dass dieser Theil nur für eine bestimmte Stellung der Lippe der Pfeife und für einen bestimmten Druckbereich gering is. Ein zweiter Energieverlust findet durch Reibung an den Wänden der Pfeife und Erschütterung derselben statt; ein dritter auf dem Wege zwischen Tonquelle und Beobachter durch Reibung am Boden, Bewegung der Luft (Wind) und innere Reibung der Luft. Dieser letzte Theil ist speciell bei RAYLEIGH verhältnissmässig gross, da
.
durch innere Reibung ein Energieverlust von ca. 22% stattfand.”³⁾

Wanneer 22% verlies hier betrekkelijk veel geacht wordt, mag men aannemen, dat MAX WIEN toen ten tijde voor het verlies langs anderen weg een dergelijk of kleiner bedrag veronderstelde. Doch hoe het zij, welke ook de „efficiency” der toegevoerde energie moge

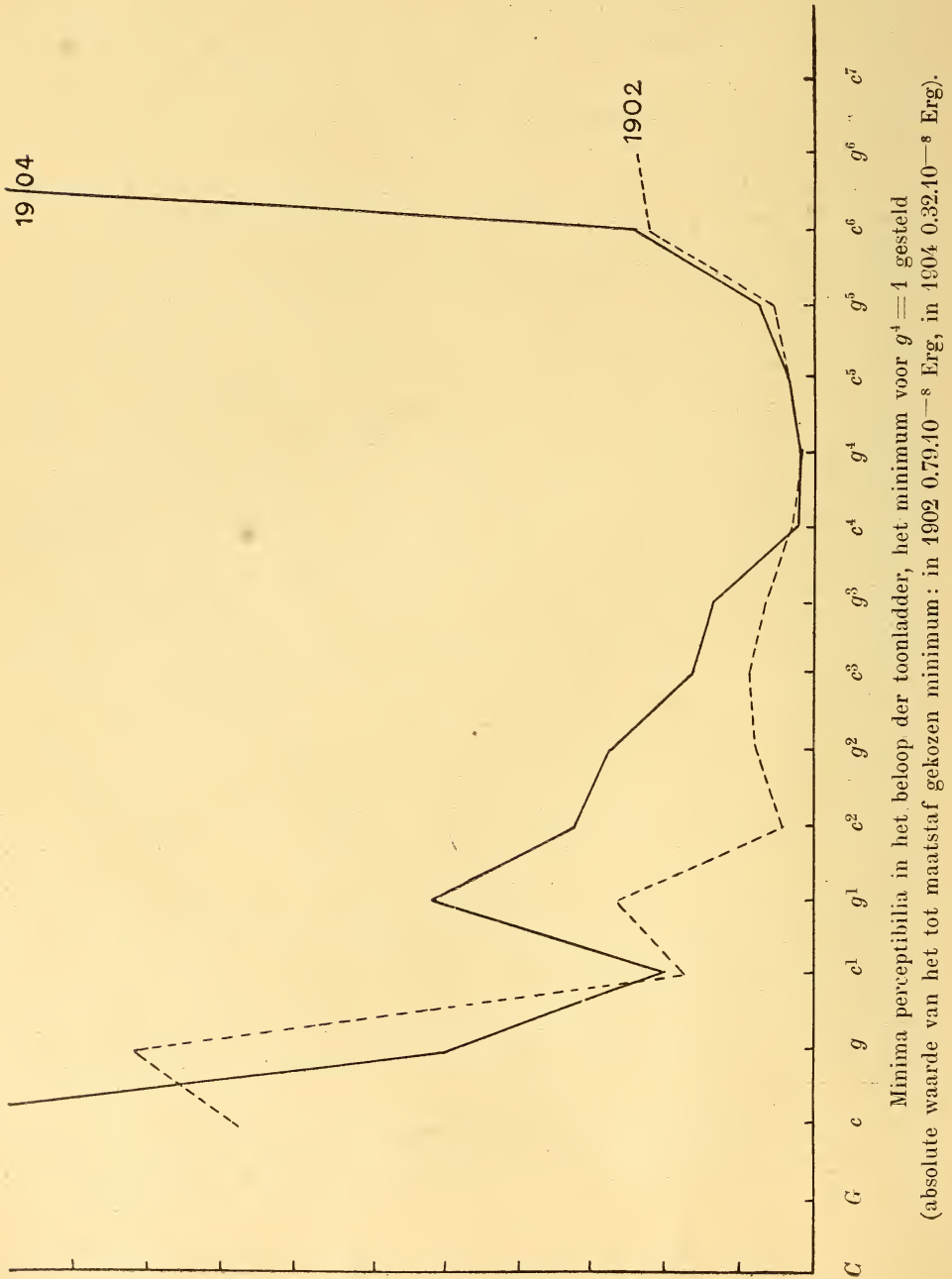
1) A. G. WEBSTER Boltzmann's Festschrift 1904 p. 870

2) RAYLEIGH Proc. Roy. Soc. vol 26 p. 248 1877.

3) M. WIEN, Die Messung der Tonstärke, Inauguraldissertation, Berlin 1888 p. 45.

geweest zijn, er is geen grond om aan te nemen, dat zij voor de verschillende pijpen noemenswaard verschillend zal zijn geweest. De houten pijpen althans behoorden tot eenzelfde en gelijkmatig gebouwde reeks. Voor vergelijkende bepaling is de methode dus toereikend.

Terwijl de eene waarnemer de schalen van den spirometer en manometer aflas, begaf de andere zich op den grootsten afstand, waarop de toon nog juist werd gehoord en herkend („Erkennungsschwelle“). Deze afstand werd dan later in rekening gebracht als de straal van een halven bol, over welken de geluidsenergie zich verbreidde.



Geluidsbron.	Toons- hoogte	Trillings- getal.	Luchtver- bruik per sec. in cm ³ .	Waterdruk onder de pijp in cm.	Toegevoerde energie per sec. vol. \times druk \times 981 (in Ergs)	Afstand v. d. luis- teraar in M.	Oppervlak van een halven bol in cm ² , met afstand als straal.	Geluidsenergie op de grens v. het hooren p. sec. en p.cm ² . in Ergs.	Geluidsenergie op h. trommel- vlies p. bevoor- digd getal perioden. Ergs.	Aantal noodige perioden.	Aanmerkingen.
Gedekte houten orgelpijpen	C	64	238	0.68	15.9 10 ⁴	80	4.0 10 ⁸	39 10 ⁻⁵	441.5 10 ⁻⁸	2	
	G	96	208	1.60	32.7	100	6.3	52.0	361.0	2	
	c	128	69.4	0.40	2.7	60	2.3	12.0	62.7	2	
	g	192	75	0.46	3.4	150	14.1	2.4	8.3	2	
	c ¹	256	44.6	0.40	1.8	150	14.1	1.2	3.2	2	
	g ¹	384	43.4	0.74	3.1	100	6.3	5.0	8.7	2	
	c ²	512	28.9	0.91	2.6	100	6.3	4.1	5.4	2	
Groote fluit van Edelmann	g ²	768	58.1	1.25	7.1	145	13.2	5.4	4.7	2	
	c ³	1024	69.4	1.65	11.2	205	26.4	4.3	2.8	2	
	g ³	1536	113.6	2.51	28.0	280	49.2	5.7	2.5	2	
	c ⁴	2048	64.4	2.74	17.2	565	160.2	1.1	0.4	2	
Kleine fluit van Edelmann	g ⁴	3072	63.3	2.79	17.3	430	116.1	1.5	0.3	2	
	c ⁵	4096	46.4	3.02	13.7	275	47.5	2.9	0.6	2.5	
Galton- fluit	g ⁵	6144	43	3.02	12.7	250	30.3	3.2	1.0	5.5	
	c ⁶	8192	46.7	3.14	14.4	220	28.1	5.1	4.2	20	
	g ⁶	12288	43.8	3.25	14.0	70	3.1	45.5	24.8	20	
	c ⁷	16384	45.8	3.25	14.6	20	0.3	581.3	24.8	20	

A. *Proeven op de heide bij Milligen.*

Volkomen vlak terrein, met boomen eerst op 600 meter afstand. Windstille, schoone avond, 19 October 1904. Acustische waarnemer F. H. QUIX, optische waarnemer H. F. MINKEMA. (Zie Tabel I).

B. *Proeven in de boekenganderij der Universiteits-bibliotheek.*

Middaguur, 3 Januari 1905. Acustische waarnemer H. ZWAARDEMAKER, optische waarnemer H. F. MINKEMA. (Zie Tabel II).

Wanneer wij voorloopig alleen met de toegevoerde energie rekening houden en dus afzien van het noodzakelijk energieverlies in de orgelpijp en in de lucht; wanneer wij verder de geldigheid der theoretische afstandswet (uitbreiding over een halven bol) vooropstellen, wordt men tot de volgende slotsom gebracht:

- 1°. dat de gevoeligheid van ons oor slechts één maximum heeft, liggende in het vier-gestreept octaaf;
- 2°. dat er een zone is van redelijke gevoeligheid, gaande van g^1 tot g^5 ;
- 3°. dat daarbuiten de gevoeligheid zeer snel afneemt;
- 4°. dat in de redelijk gevoelige zone, de minima perceptibilia zijn van dezelfde orde;
- 5°. dat, voor het gevoeligst punt der toonladder, het minimum perceptibile bij QUIX $0,32 \times 13^{-8}$ Erg, bij mij $1,9 \times 10^{-8}$ Erg bedraagt.

Het ware minimum perceptibile, voor het gevoeligste punt der toonladder, zal natuurlijk lager liggen, Hoeveel lager, laat zich voor het oogenblik niet bepalen, doch in elk geval blijft het, met orgelpijpen gevondene, minimum stellig millioenmaal grooter dan dat, wat door MAX WIEN uit zijne telephoonproeven berekend werd. Het op de heide en in de bibliotheek bepaalde minimum stemt daarentegen bevredigend overeen met dat, hetwelk door ons vroeger onder inachtneming van de gegevens van TÖPLER en BOLTZMANN¹⁾ voor stemvorken berekend werd.

Wanneer men de door WEBSTER gevonden „efficiency” van een orgelpijp in rekening brengt (0,0013 en 0,0038), wordt het minimum perceptibile voor het meest gevoelige punt der toonladder wel is waar kleiner, n.l. 0,45 à 1,3. 10^{-11} Erg; doch het bereikt nog op

1) TÖPLER u. BOLTZMANN. Ann. d. Physik u. Chemie Bd. 141 p. 321.

II. Proeven in de Universiteits-bibliotheek 3 Januari 1905; acustisch waarnemer H. ZWAARDEMAKER, optisch waarnemer H. F. MINCKEMA.

Geluidsbron.	Toons-hoogte	Trillingsgetal.	Luchtverbruik per sec. in cm^3 .	Waterdruk onder de pijp in cm.	Toegevoerde energie per sec. vol. \times druk \times 981 (in Ergs)	Afstand v. d. luis-teraar in M.	Oppervlak van een halven bol in cm^2 , met afstand als straal.	Geleidsenergie op de grens v. het hooren p sec. en p. cm^2 in Ergs.	Geluidsenergie op h. trommelvlies p. benooidigd getal perioden. Ergs.	Aantal noodige perioden	Anmerkingen.
Gedekte houten orgelpijpen.	C	64	166.6	0.57	$9.3 \cdot 10^4$	48	$0.2 \cdot 10^8$	$457.8 \cdot 10^{-5}$	$4768 \cdot 10^{-8}$	2	
»	G	96	138.8	1.08	14.7 »	19	0.2 »	648.7 »	4515 »	2	
»	c	128	96.1	0.91	8.6 »	27	0.5 »	187.4 »	976 »	2	
»	g	192	83.3	0.57	4.7 »	42	1.1 »	42.0 »	146 »	2	
»	c^1	256	45.4	0.51	2.3 »	42	1.1 »	20.5 »	53.4 »	2	
»	g^1	384	31.3	0.4	1.2 »	45	1.3 »	96.6 »	16.8 »	2	
»	c^2	512	25	0.63	1.5 »	58	2.1 »	7.3 »	9.5 »	2	
»	g^2	768	27.2	0.91	2.4 »	62	2.4 »	10.1 »	8.7 »	2	
»	c^3	1024	22.7	0.97	2.2 »	65	2.7 »	8.1 »	5.3 »	2	
»	g^3	1536	20	1.08	2.1 »	65	2.7 »	8.0 »	3.5 1	2	
»	c^4	2048	18.5	1.37	2.5 »	66	2.7 »	9.1 »	3.0 »	2	
»	g^4	3072	14.5	1.94	2.8 »	70	3.1 »	9.0 »	1.9 »	2	eindpunt der gaanderij.
Galton-fluit.	c^5	4096	28.6	1.25	3.5 »	71	3.2 »	11.1 »	2.3 »	2.5	
»	g^5	6144	29.4	1.94	5.6 »	69	3.0 »	18.7 »	5.6 »	5.5	
»	c^6	8192	27.7	1.54	4.2 »	42	1.1 »	37.8 »	30.7 »	20	
»	g^6	12288	37	1.54	5.6 »	25	0.4 »	142.4 »	77.2 »	20	
»	c^7	16384	35.7	2.28	8.0 »	20	0.3 »	317.9 »			

verre na niet de verbazend kleine waarde van MAX WIEN's telefoonproeven. Ook al neemt men aan, dat men 's nachts in een laboratorium, in diepe stilte, beter hoort dan op de heide, om van het middaguur in de bibliotheek te zwijgen, dan wordt het verschil daarvoor nog geenzins toegelicht. Ik zie echter geen reden om aan de uitkomst van proeven, genomen op een volkomen vlak terrein, ver van bosschen of gebouwen, waarop volgens MAX WIEN's vroegere verdienstelijke onderzoekingen de theoretische afstandswet der geluidsverbreiding volmaakt van toepassing is, geringere waarde toe te kennen, dan aan telefoonproeven, die zeer ingewikkelde berekeningen noodig maken.

Geologie. — De Heer MARTIN biedt eene mededeeling aan van den Heer H. G. JONKER: „*Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland. I. De Hondsrug in de provincie Groningen. 2. Bovensilurische zwerfsteenen. — Eerste mededeeling: Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zone G.*”

(Mede aangeboden door den Heer J. M. VAN BEMMELEN).

Deze mededeeling vormt het begin der beschrijving van de bovensilurische zwerfsteenen van Groningen en omstreken als vervolg op mijn in 1904 verschenen bijdrage, waarin de cambrische en onder-silurische erratica zijn behandeld (36). Van groot nut voor de studie dezer jongere gesteenten was voor mij de omstandigheid, dat ik in den zomer van het afgelopen jaar de gelegenheid heb gehad een deel der Scandinavisch-baltische lagen door eigen onderzoek te leeren kennen. Door een verblijf op Gotland van bijna een maand ben ik er in geslaagd een groot aantal gesteentesoorten met daarvoor karakteristieke petrefacten te verzamelen ter vergelijking met hier voorkomende erratische gesteenten. Dankbaar maak ik hierbij melding van de hulp van Drs. O. W. WENNERSTEN, die mij op enkele excursies heeft vergezeld en mij meermalen bewondering heeft afgedwongen voor zijn in elk opzicht zoo enorme kennis van zijn geboorteland, den klassieken bodem voor de studie van het bovensiluur. Schonen en Oesel daarentegen heb ik nog niet kunnen bezoeken; het vergelijkingsmateriaal uit die streken, aanwezig in het Mineral.-Geol. Instituut alhier, voor het grootste deel bijeengebracht door den Heer J. H. BONNEMA,

zal evenwel veel daarvan kunnen vergoeden, al zullen niet alle vragen kunnen worden beantwoord.

Een verblijf van enkele dagen in Upsala stelde me in staat onder de vriendelijke leiding van Dr. C. WIMAN het in het Geologisch Instituut aldaar aanwezige materiaal uit de verschillende ondersilurische streken van Zweden te onderzoeken. Deze natuurlijk eenigszins vluchtige studie noopt mij tot het aanbrengen van eenige, zij het ook niet zeer belangrijke veranderingen in mijne vroegere beschrijving. Intusschen is dat materiaal door nieuwe vondsten iets uitgebreid en waar nieuwere publicaties ook steeds enkele wijzigingen of aanvullingen met zich meebrengen, heb ik besloten thans hierop niet in te gaan, doch al deze corrigenda en addenda samen te vatten tot een aanhangsel aan het slot van de behandeling der Groninger erratica.

Aan de eigenlijke beschrijving der bovensilurische zwerfsteen-soorten, waarvan in deze mededeeling twee zijn behandeld, gaan enkele bladzijden vooraf, die uit een historisch oogpunt niet zonder belang zijn. Na het verschijnen mijner eerste bijdrage had dr. L. HOLMSTRÖM in Åkarp de vriendelijkheid mij te wijzen op enkele gedeelten zijner kort geleden uitgekomen biographie van OTTO TORELL. Daaruit bleek me, dat deze in 1866 een door de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem uitgeschreven prijsvraag over de herkomst der steenen en versteeningen van den Groninger Hondsrug had beantwoord. Het bekroonde geschrift is echter nooit uitgegeven en eerst na den dood van den schrijver weer aan de Hollandsche Maatschappij afgestaan. Door de welwillendheid van haren secretaris, Prof. dr. J. BOSSCHA, heb ik TORELL's antwoord kunnen bestudeeren, waardoor de me tevoren raadselachtige verhouding van den vader der landijstheorie tot de Groninger zwerfsteenen me duidelijk is geworden. Zijne denkbeelden over ons onderwerp vormen eene noodzakelijke aanvulling van het historisch overzicht.

Ten slotte is het me een aangename plicht mee te deelen, dat ik ook dit jaar weder den steun heb mogen genieten van het Groninger Universiteitsfonds, terwijl de kosten mijner studiereis naar Zweden grootendeels zijn bestreden uit een subsidie, mij met goedvinden van het Bestuur van het Natuurkundig Genootschap te Groningen verleend door het Centraal Bureau voor de kennis der provincie Groningen en omgelegen streken. De daaruit blijkende voortdurende belangstelling voor het onderwerp mijner studie heeft me zeer verhengd.

Aanvulling van het Historisch Overzicht.

O. Torell.

De in 1865 door de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen te Haarlem uitgeschreven prijsvraag luidde als volgt :

„On sait, surtout par le travail de M. ROEMER à Breslau, que plusieurs des fossiles, que l'on trouve près de Groningue appartiennent aux mêmes espèces que ceux que l'on trouve dans les terrains siluriens de l'île de Gothland. Ce fait a conduit M. ROEMER à la conclusion, que le diluvium de Groningue a été transporté de cette île de Gothland ; mais cette origine paraît peu conciliable avec la direction dans laquelle ce diluvium est déposé, direction qui indiquerait plutôt un transport de la partie méridionale de la Norvège. La Société désire voir décidée cette question par une comparaison exacte des fossiles de Groningue avec les minéraux et les fossiles des terrains siluriens et autres de cette partie de la Norvège, en ayant égard aussi aux modifications que le transport d'un pays éloigné et ses suites ont fait subir à ces minéraux et à ces fossiles.”

TORELL's antwoord hierop bestaat uit twee deelen. Het eerste deel behandelt de eigenlijke vraag en heeft tot titel : „Essai sur la question proposée de la Société Hollandaise des Sciences à Harlem.” Daarin worden de hem bekende versteeningen van Groningen opsomd met vermelding van literatuur en geologisch voorkomen. Nieuwe soorten komen daaronder bijna niet voor, zoodat deze beschrijving weinig meer is dan een uitwerking van ROEMER's bewerking der Groninger fossielen. Dit is trouwens niet te verwonderen, omdat zijn materiaal ook grootendeels afkomstig was van COHEN, dien hij in 1865 heeft bezocht. Wel bevonden zich onder de hem uit het museum van Natuurlijke Historie te Groningen verstrekte collectie, waarover ik in mijn eerste stuk reeds heb gesproken (36, p. XXXIII), verschillende fossielen, die aan ROEMER niet bekend waren, doch TORELL schijnt zich toentertijd met de bepaling van nieuwe versteeningen niet in 't bijzonder te hebben beziggehouden. Uit zijne opsomming trekt hij alleen het resultaat, dat de sedimentaire zwerfsteen wel van Noorwegen zouden *kunnen* afkomstig zijn, doch dat daarvoor geen enkel bewijs en veeleer de herkomst van Oesel-Gotland waarschijnlijk is.

In de tweede helft van dit eerste stuk evenwel behandelt hij de gesteenten zelf. Door vergelijking met kalksteen van Noorwegen en Gotland komt hij er toe het eerste terrein geheel uit te sluiten en deze uitkomst wordt verder nog gesteund door hetgeen de kristallijne zwerfsteen, die nu ook worden beschreven, leeren. Nadat ook

de verspreiding der verschillende erratische gesteentesoorten is onderzocht, luidt zijne conclusie op de hem gestelde vraag aldus :

„Le résultat de ces recherches tend ainsi à confirmer l'opinion déjà émise par M. FERD. ROEMER, que les blocs siluriens de Groningue proviennent de l'Esthonie et de l'île de Gothland, mais nullement de la Norvège”.

Deze eerste verhandeling werd door hem in 1866 ingezonden; het volgende jaar een tweede stuk onder den titel :

„Recherches sur les phénomènes glaciaires de l'Europe du Nord”, dat om meer dan één reden een merkwaardig geschrift is. Daar zijn inhoud evenwel niet direct slaat op de ons hier bezighoudende vraag, zij hier alleen vermeld, dat genoemde verhandeling, kort gezegd, *een uitvoerig pleidooi is voor de landijstheorie*, die daarin *voor het eerst* consequent wordt aangenomen en verdedigd. Onder een aan L. VON BUCH ontleend motto (Ueber die Ursachen der Verbreitung grosser Alpengeschiebe, 1811, Abhandl. d. Berlin. Akad., p. 185, 186), te interessant om hier niet even te herhalen :

„Wer sich etwas mit den Blöcken beschäftigt hat, welche in so zahlloser Menge die Ebenen des nördlichen Europa bedecken, wird nicht einen Augenblick zweifeln, dasz nicht auch in dieser Zerstreuung dasselbe Phänomen wiederholt ist, was in der Schweiz so auffallend wird. Wäre die Granitzone des Wallisausbruchs nicht von den Jurabergen zurückgehalten worden, so würde sie an den Ufern des Doux und der Saone eben so zerstreut über die Flächen gelagert sein, eben so dicht wie in soviel Gegenden der Mark Brandenburg, von Pommern, Meklenburg, Holstein Das nordische Phänomen ist daher wohl bei weitem grösser als das schweizerische, *allein von derselben Natur; und wahrscheinlich liegt ihm deswegen auch eine ähnliche Ursache zum Grunde,*” geeft TORELL hierin een overzicht van zijne op grond van talrijke reizen verkregen inzichten omtrent den oorsprong van diluviale afzettingen en de gronden, die volgens zijne meening pleiten voor eene bedekking door landijs. De oudere theorieën worden uitvoerig gecritiseerd en nadat hij de ijsvorming van Groenland, waar het landijs eene oppervlakte beslaat van $\frac{5}{8}$ deel van het Noordeuropeesche erratische terrein, heeft beschreven, zegt hij :

„Serait-il donc absurde de supposer, qu'une couverture glaciaire semblable, mais plus grande des $\frac{3}{8}$, a existé aussi dans l'Europe du Nord pendant une époque, où la faune marine du Spitzberg vivait entre les 50° et 60° de Lat., où le *Betula nana* croissait dans le Devonshire et où le renne avait son domicile dans la France méridionale !”

Dit citaat illustreert voldoende de beteekenis dezer verhandeling. Ze is helaas nooit gedrukt. Wel heeft TORELL zijn werk van de Hollandsche Maatschappij teruggevraagd om het voor den druk te revidereen en zijn dan ook verschillende verbeteringen en kantteekeningen aangebracht, doch verder is het niet gekomen. Dit is daarom te betreuren, wijl het nu tot 1875 heeft geduurd, voordat zijne inzichten aanhangers vonden onder de Duitsche geologen, het jaar, waarin TORELL op den gedenkwaardigen 3 November door zijne voordracht voor de Duitsche geologische vereeniging in verband met de weer door hem ontdekte gletscherkrassen op de schelpkalk van Rüdersdorf verschillende vakgenooten van de juistheid zijner theorie overtuigde. Want indien de hier genoemde verhandeling nog in 1867 was gedrukt, zou ze zeker in hooge mate hebben bijgedragen om de nieuwe denkbeelden spoediger te verbreiden.

Het lijvige, in het Fransch geschreven en van Fransche, Zweedsche en Nederlandsche (van de hand van STARING, die met BOSQUET en VAN BREDa de commissie van beoordeeling vormde) aanteekeningen voorzien manuscript is thans weer in het bezit der Hollandsche Maatschappij van Wetenschappen. De in den tekst vermelde bij het werk behorende kaarten (2) en plaat bevinden zich niet daarbij. Meer bijzonderheden over den inhoud kan men in TORELL's biographie door HOLMSTRÖM vinden (35, p. 18—25).

BOVENSILURISCHE ZWERFSTEENEN.

Bij de beschrijving der bovensilurische zwerfsteenen doen zich verschillende moeilijkheden voor, die alle daartoe terug te brengen zijn, dat de juiste opeenvolging der lagen in het Scandinavisch-baltisch gebied niet met zekerheid bekend is. Speciaal voor het oostbalticum is de bouw reeds lang geleden door SCHMIDT vastgesteld en voorzoover ik weet, nooit door iemand weersproken. Zijne verdeeling der lagen op Gotland daarentegen, zich aansluitende aan de opvatting van MURCHISON, heeft weinig aanhangers gevonden en is in 't bijzonder bestreden door LINDSTRÖM, die eene geheel andere meening is toegeedaan. Deze nu reeds jaren lang gevoerde strijd over den bouw van Gotland heeft nog steeds geene oplossing gevonden. Er dient gezegd, dat vrijwel alle andere onderzoekers, die zich over deze kwestie hebben uitgelaten, de partij van LINDSTRÖM hebben gekozen; zoo DAMES, die eene verdeeling heeft gegeven, welke weinig van die van LINDSTRÖM verschilt; verder STOLLEY, WIMAN, BATHER, KAYSER e. a. Ik zelf ben niet zoo gelukkig op grond van mijn kort verblijf op

Gotland eene bepaalde meening te durven uitspreken. Wel schijnt het me toe, dat over 't algemeen SCHMIDT's argumenten sterker zijn dan die van LINDSTRÖM, zoodat het me nauwelijks mogelijk voorkomt, dat nieuwere onderzoekingen diens opvatting op alle punten zullen bevestigen. Bij het verzamelen op Gotland heb ik meer dan eens aan de juistheid dier LINDSTRÖM'sche verdeeling getwijfeld en in enkele gevallen bepaalde tegenstrijdigheden opgemerkt. Hoe dit echter ook zij, voorloopig is het niet mogelijk eene parallel te trekken tusschen de bovensilurische lagen van Gotland en van Oesel, eene zaak, die toch voor eene behandeling van zwerfsteenen van dien ouderdom eigenlijk niet gemist kan worden. Het is te hopen, dat de onderzoekingen van HOLM, die zich met deze kwestie heeft beziggehouden, niet lang meer op zich zullen laten wachten; hopen we verder, dat de oplossing dan een definitieve zal zijn!

(De voornaamste literatuur over dezen strijd is hier opgegeven: 4; 15; 21; 22; 27; 28, p. 16; etc.).

Bij de opsomming der zwerfsteensoorten dienen we intusschen toch een leidraad voor de ouderdomsbepaling aan te nemen. Ik kies hiervoor SCHMIDT's verdeeling van het oostbaltische bovensiluur (8, p. 41—54), in overeenstemming met de tot hiertoe in het museum gevolgde methode:

- G. 1. Jördensche laag.
- 2. Borealisbank.
- 3. Raiküllsche laag.
- H. Estonus-zone.
- I. Onderste Oeselsche laag.
- K. Bovenste Oeselsche laag.
 - 1. Noordelijke gele zone.
 - 2. Zuidelijke grijze zone.

DAMES (22), STOLLEY (30), SIEGERT (32) e. a. hebben de ouderdomsbepalingen hunner *erratica* gebaseerd op de indeeling van Gotland door LINDSTRÖM; waar ik evenwel een veel grooter toenadering onzer zwerfsteenen tot oostbaltische gesteenten meen te bespeuren, heb ik dit voorbeeld niet gevolgd, te meer wijl, zooals ik reeds gezegd heb, genoemde opvatting, welke hierachter met de door DAMES aangebrachte wijziging is weergegeven, me niet in alle opzichten juist voorkomt.

- a. Oudste roode *Arachnophyllum*-lei.
- b. *Stricklandinia*-lei.
- c. Mergellei en zandsteen.
- d. Kalksteen- en öolietbanken met mergels.
- e. *Pterygotus*-laag.

f. *Crinoiden-* en *Koralen-*kalken met tusschengelegen *Stromatoporen-*riffen, *Gastropoden-* en *Ascoceras-*kalken, benevens *Megalomus-*banken.

g. Bovenste *Cephalopoden-*kalken.

Het materiaal laat zich nu het best splitsen in 4 groepen: I Zwerfsteenen van den ouderdom $G_1—G_3$; II... *H*; III... *I*; IV... *K*. De laatste afdeeling zal blijken verreweg de belangrijkste te zijn. Bovendien zijn er dan nog enkele karakteristieke zwerfsteenen, die in het oostbaltische schema geen plaats vinden; deze zullen met andere, wier ouderdom binnen te groote grenzen schommelt om ze bepaald tot een dezer groepen te brengen, aan het slot worden beschreven.

Na deze inleidende beschouwingen kunnen we overgaan tot de beschrijving van de zwerfsteenen der eerstgenoemde groep.

$G_1—G_3$.

De tot de oudste zone G_1 , die der Jördensche laag in Estland behorende zwerfsteenen met *Leptocoelia Duboisii* DE VERN., die uit Duitschland een enkele maal worden vermeld, zijn bij Groningen niet gevonden. De beide jongere zonen G_2 en G_3 zijn echter wel vertegenwoordigd.

29. Borealiskalk.

Deze zeer bekende en karakteristieke zwerfsteensoort bestaat uit kalksteen of dolomiet en bevat gewoonlijk in groote hoeveelheden resten van

Pentamerus borealis EICHW.,

terwijl andere versteeningen volstrekt ontbreken. Naar het gesteente laat mijn materiaal van Groningen zich splitsen in twee variëteiten:

a. Kalksteen, meestal duidelijk kristallijn, doch eenigszins mergelachtig, hetgeen op de verweerde oppervlakte goed waar te nemen is. De ietwat bonte kleur der grondmassa wisselt van grijs tot bruin-geel op de versche breuk; verweerd daarentegen heeft deze veelal een vuil-geelachtig-grijze tint. In deze grondmassa komen steeds zeer talrijk de kleppen der genoemde Pentamerensoort voor; ze zijn altijd in kristallijne kalkspaat veranderd en deze is vaak helder wit, waardoor de steeds zeer dikke schalen zich duidelijk op de soms afgeslepen oppervlakte der zwerfsteenen afteekenen. Bovendien verweert de grondmassa gemakkelijker dan deze kalkspaat, waardoor de fossielen en relief te voorschijn [komen. Het aantal dezer ver-

steeningen heeft invloed op het uitwendig voorkomen van den zwerfsteen. Hoewel ze steeds talrijk aanwezig zijn, kan toch in sommige stukken de grondmassa ook nog in voldoende hoeveelheden voorkomen om het gesteente een vast karakter te geven. Deze in onverweerden toestand tamelijk harde kalksteen vormen de meerderheid der vondsten. De afmetingen gaan tot ongeveer 17 c.M. In andere stukken treedt de grondmassa zeer op den achtergrond en bestaat het gesteente bijna uitsluitend uit fragmenten der kleppen dezer brachiopodensoort en vormt daardoor een echte schelpenbreccie. De grondmassa is dan gewoonlijk verweerd tot een min of meer aardachtige gele massa, die ook de oppervlakte der schalen overdekt, waardoor het geheel een gele kleur verkrijgt. In andere gevallen daarentegen is de verweerde grondmassa bijna wit, een enkele maal ook bruin-okergeel. Bij dit uiteenlopend uitwendig voorkomen hebben alle stukken gemeen, dat deze *Pentamerus* vrijwel altijd slechts in enkele kleppen voorkomt, die zelfs meestal nog in meerdere stukken gebroken zijn. 'n Volledig exemplaar heb ik nergens kunnen uitprepareren, hoewel sommige stukken wel doen zien, dat deelen van beide kleppen in natuurlijke ligging voorkomen. Dit bevestigt dus in hoofdzaak de uitkomsten van ROEMER's onderzoek (13, p. 74), hoewel het me twijfelachtig voorkomt, dat zijne meening, volgens welke deze zwerfsteen uitsluitend ventrale kleppen dezer soort zouden bevatten, juist is. Deze opvatting werd gesteund door de mededeeling van EICHWALD, dat ook op de oorspronkelijke vindplaatsen nooit beide kleppen in verbinding waren gevonden. Toch kende EICHWALD de kleinere, dorsale klep en beschrijft haar als slechts half zoo lang als de grootere, veel breeder en veel minder gewelfd. Dit kan moeilijk juist zijn, want later heeft SCHMIDT wel volledige exemplaren gevonden bij Weissenfeld in de buurt van Hapsal in Estland. Onder mijn vergelijkingsmateriaal bevinden zich drie zulke exemplaren van de genoemde vindplaats, door BONNEMA verzameld. Deze vertoonen echter een dorsale klep, die slechts weinig kleiner is dan de ventrale, ze is evenwel veel vlakker en dus in verhouding breeder. Daardoor verdwijnt het groote verschil der beide schalen en is er dus geen reden meer voor het onverklaarbare feit, dat in de zwerfsteen alleen de ventrale klep zou voorkomen. Intusschen moet ter bevestiging hiervan nog de inwendige bouw dier kleine schaal worden onderzocht. Ik heb me daarmee niet beziggehouden.

b. Dolomiet, zeer fijnkorrelig-kristallijn tot bijna dicht, van een lichtgrijze of lichtbruinachtig-gele kleur. Deze dolomietische grondmassa bevat weder zeer talrijk steenkernen van *Pentamerus borealis*

Borealisbank, die zich in O.-W.-richting door geheel Estland uitstrekt als een naar het Westen toe smaller wordende zone, die ook nog op Dagö voor den dag komt. Het gesteente is kalkig of dolomietisch, juist als de zwerfsteen en langen tijd heeft men ook slechts enkele kleppen van *Pentamerus borealis* EICHW. daarin aangetroffen. Later heeft SCHMIDT echter ook geheele exemplaren dezer soort gevonden in een mergelige variëteit van het gesteente uit de buurt van Hapsal, zooals hierboven reeds is medegedeeld (27, p. 130).

Van dit oostbaltisch voorkomen heb ik kalksteen ter vergelijking van Risti, de westelijkste vindplaats dezer zone op het vasteland en dolomiet van Pantifer, in Oost-Estland gelegen. Met die kalksteen komen onze zwerfsteen in hoofdzaak goed overeen, al zijn ze daarmee niet te verwisselen. Volkomener nog is de overeenstemming onzer dolomieten met het stuk van Pantifer. Hieruit blijkt voldoende, dat we de herkomst onzer zwerfsteen in het oostbalticum hebben te zoeken. Daarover zijn trouwens alle schrijvers het volkomen eens. Natuurlijk wil dit niet zeggen, dat deze Groninger stukken van de thans bekende zone moeten afkomstig zijn. Waar de Borealisbank ook nog op Dagö voorkomt, ligt het vermoeden, dat ze zich onder zee nog verder naar het westen uitstrekt of heeft uitgestrekt, voor de hand en het zeer constante petrografische karakter van het gesteente door heel Estland geeft alle reden om aan te nemen, dat ook deze onderzeesche voortzetting als oorsprongsgebied onzer zwerfsteen in aanmerking komt. Een bepaald punt dezer zone is natuurlijk niet aan te geven.

30. Eleganskalk.

Onder dezen naam, slaande op een der belangrijkste leidfossielen dezer zwerfsteensoort, duid ik aan een kristallijnen kalksteen, meestal fijnkorrelig, een enkele maal ook bijna dicht, doch vaker nog tamelijk grofkorrelig. Waterheldere calciet komt dikwijls vrij regelmatig verspreid door het gesteente voor, doch niet in groote hoeveelheden. De kalksteen is niet merkbaar dolomietisch noch mergelachtig, wijl bij de oplossing in salpeterzuur slechts onbeduidende resten achterblijven en deze oplossing niet of slechts even op magnesium reageert. Kleur heldergrijs, soms meer geelachtig-grijs, zelden ook blauwgrijs; verweerd daarentegen wordt het gesteente wit tot geelachtig-wit. De oppervlakte is vaak van goede gletscherkrassen voorzien. Gelaagdheid is slechts zelden en niet zeer duidelijk waar te nemen. Versteeningen komen zeer talrijk voor, doch behooren tot een relatief gering aantal soorten, die hierachter zijn opgegeven:

Phacops elegans Sars en Boeck sp.

Leperditia Hisingeri Schmidt.

Strophomena pecten L.

Vincularia nodulosa Eichw.

Vincularia megastoma Eichw.

Enerinurus punctatus Wahlb.

Calymene sp.

Orthoceras sp.

Proetus sp.

Ptilodictya sp.

Beyrichia sp.

Murchisonia sp.

De 5 eerstgenoemde soorten komen in bijna ieder stuk voor. Kop-schilden der genoemde *Phacops*-soort zijn zeer algemeen, pygidia komen ook voor, terwijl ook een, door Schmidt niet afgebeelde bijna volledige thorax is gevonden. Naar deze karakteristieke species heb ik deze zwerfsteen-soort genoemd. Even belangrijk is verder het voorkomen der *Leperditia*-soort, wier kleppen, zoowel rechter als linker, soms in groot aantal in een enkel stuk voorhanden zijn; in het onverweerde gesteente zijn ze helderbruin, verweerd bijna wit. Ook de opgegeven *Strophomena*-soort is zeer menigvuldig, terwijl vooral de beide volgende bryozoënspecies het gesteente soms een eigenaardig karakter verleen. Bijna in ieder der hiertoe behoorende zwerfsteenen voorkomend, zijn ze in het onverweerde gesteente zeer moeilijk waar te nemen; op de breukvlakken liggen ze vaak in groote hoeveelheden bijeen, gespleten volgens de bladerige middellaag, als sierlijke witte veertjes. Beter echter is de structuur dezer versteening waar te nemen op de verweerde oppervlakte der zwerfsteenen. De verder genoemde fossielen komen slechts een enkele maal voor en dragen niet in belangrijke mate bij tot de diagnose van het gesteente.

Behalve deze versteeningen komen echter in vele stukken nog zeer talrijk brachiopodenresten voor, die wél karakteristiek zijn, hoewel ik ze niet voldoende heb kunnen bepalen. Enkele *Rhynchonella*- en *Orthis*-soorten zijn daaronder zeker vertegenwoordigd. Eén stuk bevat ook kleine, witte, ronde en hoekige crinoidenstelen. Interessant is verder het aanwezig zijn van *graptolieten*-resten; deze zijn echter te onduidelijk bewaard om ze specifiek te bepalen.

Van deze aldus petrografisch en palaeontologisch gekarakteriseerde zwerfsteen-soort bevinden zich onder mijn materiaal 33 stukken van de volgende vindplaatsen:

Noorderbegraafplaats,	Groningen	2
Boteringesingel,	„	9

Noorderbinnensingel,	Groningen	1
Nieuwe Boteringestraat,	„	1
Tusschen Parklaan en Heerebrug,	„	1
Nieuwe Veelading,	„	3
Achter 't Sterrebosch,	„	1
Schietbaan,	„	1
Café „de Passage”,	Helpman	2
Hilghestedede,	„	4
	„	1
Tusschen Helpman en	Haren	2
Villa „Edzes” bij	„	1
	„	1
	Groningen	1
„Oude Verzameling”		2

Om den ouderdom dezer bij Groningen dus niet zeldzame zwerfsteen-soort te bepalen, is hierachter zoo volledig mogelijk meegedeeld, hetgeen over het voorkomen der kenmerkende soorten bekend is.

Phacops elegans Sars en Boeck sp.

SCHMIDT, 8, p. 72, T. I, f. 1; T. X, f. 10—12; T. XI, f. 17,

wordt door SCHMIDT opgegeven uit de Raiküllsche laag en de Estonus-zone in Estland. In de oudste dezer beide lagen, *G*₃, is hij het eerst gevonden bij Wauhoküll in het midden van Oost-Estland, samen met *Strophomena pecten* L. en *Diplograpsus estonus* SCHMIDT; de vindplaats der H-zone ligt vrijwel vlak ten Z. daarvan bij Törwe in de buurt van Talkhof, aan de grens van Livland. Volledige exemplaren zijn echter niet gevonden en de hier aanwezige thorax is vandaar niet bekend.

Vrij zeker identisch met deze soort is *P. quadrilineata* ANG. LINDSTRÖM, 12, p. 43; 17, p. 2; die door dezen beschreven is uit de oudste lagen van het bovensiluur, *a* en *b* bij Wisby. SCHMIDT spreekt trouwens ook nog van Farö en Lau aldaar, plaatsen, die tot zijn middelste en jongste zone op Gotland zouden behooren (8, p. 74); deze aan LINDSTRÖM ontleende opgave eischt bevestiging, naar het me voorkomt. In Zweden is dit fossiel verder nog aangetroffen in Dalarne (17, p. 27) en wanneer *P. elliptifrons* ESMARCK ook hiertoe moet gerekend worden, (wat ik niet met zekerheid zou durven zeggen), eveneens in Jemtland (29, p. 269). Het niveau aldaar stemt wel tot eene conclusie in bevestigenden zin. Uit Schonen is deze versteening niet bekend. Wel is ze daarentegen samen met *Leper-*

ditia Hisingeri SCHMIDT gevonden op Malmö in de baai van Christiania, naar het schijnt in een overeenkomstig niveau (8, p. 74).

In de Deutsche zwerfsteenliteratuur is deze soort niet bekend. Wel maakt WIGAND melding van *Phacops Stokesi* MILNE EDWARDS, het Engelsche fossiel, dat het meest met onze soort overeenkomt (16, p. 40). De afbeeldingen dezer bij Rostock in Phacitenzandsteen gevonden versteening bewijzen echter, dat die soort zeker niet met de onze overeenstemt. Verder komt in aanmerking *Phacops prussica* POMPECKJ, die echter ook niet goed met onze exemplaren overeenstemt; het gesteente, waarin deze soort in Oostpruisen voorkomt, „krystalliner, gelblich-grauer obersilurischer Kalk” zou niet daartegen pleiten (23, p. 19). ROEMER noemt onze soort niet.

Leperditia Hisingeri SCHMIDT.

SCHMIDT, 10, p. 14—16, T. I, f. 5—7.

identisch met *Leperditia Schmidtii* KOLMODIN, is lang bekend uit de buurt van Wisby, waar ze in de ten N. daarvan gelegen *Stricklandinia*-mergel veel voorkomt; vooral bij Snäckgärdet heb ik mooie losse exemplaren gevonden. Toch komt ze ook ten Z. van Wisby voor in LINDSTRÖM's étage c_1 ; volgens KOLMODIN ook nog in de mergel van Westergarn (c_2) en Capellshamn (7, p. 133). In Estland behoort deze versteening tot de zonen G_1 en G_3 en is daar op talrijke plaatsen, ook op Dagö, gevonden. Onze exemplaren zijn gemiddeld veel kleiner dan die van Gotland, doch stemmen overigens in de verhouding der afmetingen goed met de beschrijving van den echten vorm overeen. Dat deze soort ook bij Christiania is aange troffen, is zoeven reeds vermeld. LINDSTRÖM noemt haar verder ook nog uit Schonen (17, p. 25), ik heb niet kunnen vinden, waarop deze opgave berust en heb redenen de juistheid daarvan te betwijfelen.

Uit Deutsche zwerfsteenen wordt ze genoemd door KIESOW van Spengawskén in Westpruisen en wel uit een gesteente (niet met het onze overeenkomende), dat merkwaardigerwijze ook *Leperditia baltica* His. bevat (11, p. 274). CHMIELEWSKI daarentegen heeft de echte soort in Oostpruisen en Kowno niet aangetroffen (34). Verder vermeldt KRAUSE haar uit Neubrandenburg (24, p. 7) en STOLLEY uit een heldergelen, crypto-öolietischen kalksteen van Sleeswijk-Holstein (30, p. 109).

Strophomena pecten L.

is een in de Jördensche en Raiküllsche laag in Estland algemeen voorkomend fossiel; op Gotland komt het dikwijls bij Wisby voor en

onze exemplaren stemmen nog het best met dat voorkomen overeen. LINDSTRÖM noemt het echter uit c-h (17, p. 15); in verband daarmee zou het me niet verwonderen, indien van deze soort meerdere variëteiten zouden zijn te onderscheiden. WIMAN noemt haar ook nog van Jemtland uit de kwartsiet met *Phacops elliptifrons* ESM. (29, p. 270).

Uit zwerfsteenen heeft GAGEL ze beschreven uit Beyrichienkalk (20, p. 47) van Oost- en Westpruisen; verschillende schrijvers noemen haar nog uit gesteenten van uiteenloopenden ouderdom, hetgeen me in de opvatting versterkt om op deze species geene belangrijke conclusies te bouwen.

Vincularia nodulosa EICHW. en *V. megastoma* EICHW.

EICHWALD, 5, T. XXIV, f. 8 en 9,

zijn zeer karakteristiek voor de Raiküllsche laag in Estland en worden daar overal gevonden, hoewel ze ook nog in de Estonus-zone voorkomen (8, p. 43).

Encrinurus punctatus WAHLB.

komt slechts in een enkel stuk voor en is een in alle bovensilurische gebieden door alle zonen heen voorkomend fossiel, zoodat deze soort voor de ouderdomsbepaling geene waarde heeft.

Vatten we deze uitkomsten samen:

	Estland.	Gotland.
<i>Phacops elegans</i> Sars en Boeck.	$G_3 - H$	$a - b$.
<i>Leperditia Hisingeri</i> Schmidt.	G_1, G_3	$b - c$.
<i>Strophomena pecten</i> L.	G_1, G_3	$c - h$.
<i>Vincularia nodulosa</i> Eichw.	$G_3 - H$	
<i>Vincularia megastoma</i> Eichw.	$G_3 - H$	

dan blijkt hieruit duidelijk, dat deze zwerfsteenen resten zijn van een aequivalent der Raiküllsche zone G_3 in Estland. Voor Gotland is, als men wil, de parallel met LINDSTRÖM's zone b het waarschijnlijkst.

Dit resultaat is ook daarom interessant, wijl zwerfsteenen van dezen ouderdom, voor zoover ik weet, in de literatuur niet bekend zijn. In de Groninger verzameling daarentegen waren reeds langere tijd sommige stukken tot deze zone gebracht. Slechts eenmaal wordt door NOETLING melding gemaakt van een hiertoe behoorende vondst,

die echter geene determineerbare fossielen bevatte en slechts op grond van de groote overeenkomst met een stuk kalksteen van Raiküll, onder voorbehoud, tot deze zone wordt gerekend (9, p. 291). ROEMER twijfelt daaraan (13, p. 77).

Wat nu de herkomst dezer zwerfsteensoort aangaat, valt allereerst op te merken, dat van de plaatsen, waar slechts een of enkele der hiervoor karakteristieke fossielen voorkomen, d. z. Noorwegen, (Schonen), Dalarna en Jemtland, er natuurlijk geen in aanmerking kan komen. Ook de petrografische geaardheid dier afzettingen sluit deze onderstelling volkomen uit. Op Gotland daarentegen zijn deze fossielen, op de beide bryozoënspecies na, wel thuis. Intusschen vertoont het daar voorkomend gesteente (steeds mergel of mergellei) petrografisch niet de minste overeenkomst met onzen kalksteen. Van Gotland zijn deze zwerfsteen en dan ook beslist niet af te leiden.

Blijft alleen over Estland. De Raiküllsche zone, G_3 , (8, p. 43) strekt zich daar uit van Laisholm in Livland en Wauhoküll in O.-Estland naar het westen tot op Dagö; in het oosten is de zone breeder en neemt naar het westen af. Ze bestaat bijna altijd uit twee stelsels, die nu eens kalkig, dan weer dolomietisch zijn. Op de even aangehaalde plaats wordt het gesteente petrografisch niet nader door SCHMIDT beschreven; wel spreekt hij later nog eens (33, p. 308) van een „dichten, festen, etwas kieselhaltigen hellgelben Kalkstein, der demjenigen unsrer Raiküllschen Schicht am meisten gleicht”. Bij gebrek aan vergelijkingsmateriaal durf ik uit deze opgaven niet tot eene groote overeenkomst met onzen kalksteen besluiten. Opvallend is verder, dat SCHMIDT de Raiküllsche laag betrekkelijk arm aan petrefacten noemt, op koralen na. Nu is onze zwerfsteensoort juist tamelijk rijk aan versteeningen, waaronder koralen geheel ontbreken. In tegenovergestelden zin evenwel pleit het in beide voorkomen van graptolieten, die wel kort beschreven zijn als *Diplograptus estonus* SCHM. (2, p. 226), doch nog niet afgebeeld. Misschien komt in onze stukken dezelfde soort voor.

Op grond van de zoeven aangehaalde verschillen acht ik het evenwel weinig waarschijnlijk, dat de Raiküllsche laag in Estland zelf als oorsprongsgebied in aanmerking komt. Niet onmogelijk is het, dat de onderzeesche voortzetting dezer zone uit een meer met onze zwerfsteen overeenkomend gesteente bestaat. Voorshands is deze vraag niet verder op te lossen, hoewel vergelijkingsmateriaal, vooral van G_3 op Dagö, goede diensten kan bewijzen.

L I T E R A T U R.

1. ROEMER, F. — »*Ueber holländische Diluvialgeschiebe*». Neues Jahrbuch für Mineralogie, etc., 1857, p. 385—592.
2. SCHMIDT, F. — »*Untersuchungen über die Silur-Formation von Ehstland, Nord-Livland und Oesel*». Sep.-Abdruck a. d. Archiv f. d. Naturkunde Liv-, Ehst- und Kurlands, 1e Ser., Bd. II, Lief. 1, p. 1—248. Dorpat, 1858.
3. ROEMER, F. — »*Versteinerungen der silurischen Diluvialgeschiebe von Groningen in Holland*». Neues Jahrbuch, etc., 1858, p. 257—272.
4. SCHMIDT, F. — »*Beitrag zur Geologie der Insel Gotland, nebst einigen Bemerkungen ueber die untersilurische Formation des Festlandes von Schweden und die Heimath der norddeutschen silurischen Geschiebe*». Archiv f. d. Naturk. Liv-, Ehst- und Kurlands, 1e Ser., Bd. II, Lief. 2, no. 6, p. 403—464; 1859.
5. EICHWALD, E. D' — »*Lethaea rossica ou Palaeontologie de la Russie*'' Atlas. Ancienne Période. Stuttgart, 1859.
6. MARTIN, K. — »*Niederländische und nordwestdeutsche Sedimenttärageschiebe, ihre Uebereinstimmung, gemeinschaftliche Herkunft und Petrefacten*». Leiden, 1878.
7. KOLOMODIN, L. — »*Ostracoda Silurica Gotlandiae*». Öfers. af Kongl. Svensk. Vet.-Akad. Förhandl., 1879, no. 9, p. 133—139 Stockholm, 1880.
8. SCHMIDT, F. — »*Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten, nebst geognostischer Uebersicht des ostbaltischen Silurgebiets*'' Abtheilung I. Mém. de l'Acad. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, 7e Sér., T. XXX, no. 1; 1881.
9. NOETLING, F. — »*Die Cambrischen und Silurischen Geschiebe der Provinzen Ost- und Westpreussen*'' Jahrbuch d. k. pr. geol. Landesanstalt etc. für 1882, p. 261—324; Berlin, 1883
10. SCHMIDT, F. — »*Miscellanea Silurica III*''
 1. *Nachtrag zur Monographie der russischen silurischen Leperditien.*
 2. *Die Crustaceenfauna der Eurypterenschichten von Rootziküll auf Oesel*''.
 Mém. de l'Ac. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, 7e Sér., T. XXXI, no. 5; 1883
11. KIESOW, J. — »*Ueber silurische und devonische Geschiebe Westpreussens*'' Schriften d. naturf. Ges. in Danzig, N. F., VI, 1, p. 205—300; 1884.
12. LINDSTRÖM, G. — »*Förteckning på Gotlands Siluriska Crustacéer*'' Öfers. af Kongl. Vet.-Akad. Förhandl., 1885, no. 6. p. 37—100.
13. ROEMER, F. — »*Lethaea erratica oder Aufzählung und Beschreibung der in der norddeutschen Ebene vorkommenden Diluvialgeschiebe nordischer Sedimentärgesteine*'' Palaeont. Abhandl., herausg. v. W. Dames und E. Kayser, II, 5, 1885.

14. WAHNSCHAFFE, F. — »*Bemerkungen zu dem Funde eines Geschiebes mit Pentamerus borealis bei Havelberg*».
Jahrbuch d. k. pr. geol. Landesanstalt etc. f. 1887, p. 140—149; Berlin, 1888.
15. LINDSTRÖM, G. — »*Ueber die Schichtenfolge des Silur auf der Insel Gotland*».
Neues Jahrbuch, 1888, I, p. 147—164.
16. WIGAND, G. — »*Ueber die Trilobiten der silurischen Geschiebe in Mecklenburg*». I.
Inaug.-Dissert., Rostock; Berlin, 1888.
17. LINDSTRÖM, G. — »*List of the fossil faunas of Sweden. II. Upper Silurian*».
Stockholm, 1888.
18. ZEISE, O. — »*Beitrag zur Kenntniss der Ausbreitung, sowie besonders der Bewegungsrichtungen des nordeuropäischen Inlandeises in diluvialer Zeit*».
Inaug.-Dissert., Königsberg, 1889.
19. VAN CALKER, F. J. P. — »*Die zerquetschten Geschiebe und die nähere Bestimmung der Groninger Moränen-Ablagerung*».
Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges., XLI, p. 343—358, 1889.
20. GAGEL, C. — »*Die Brachiopoden der cambrischen und silurischen Geschiebe im Diluvium der Provinzen Ost- und Westpreussen*».
Beitr. z. Naturk. Preussens, herausg. v. d. phys.-oekon. Ges. zu Königsberg, 6; Königsberg, 1890.
21. SCHMIDT, F. — »*Bemerkungen über die Schichtenfolge des Silur auf Gotland*».
Neues Jahrbuch, 1890, II, p. 249—266.
22. DAMES, W. — »*Ueber die Schichtenfolge der Silurbildungen Gotlands und ihre Beziehungen zu obersilurischen Geschieben Norddeutschlands*».
Sitz.-Ber. d. k. pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 30 Oct. 1890, Bd. XLII, p. 1111—1129.
23. POMPECKJ, J. F. — »*Die Trilobitenfauna der ost- und westpreussischen Diluvialgeschiebe*».
Beitr. zur Naturk. Preussens, herausg. v. d. phys.-oekon. Ges. zu Königsberg, 7; Königsberg, 1890.
24. KRAUSE, A. — »*Die Ostrakoden der silurischen Diluvialgeschiebe*».
Wiss. Beilage z. Programm der Luisenstädtischen Oberrealschule zu Berlin; Ostern, 1891.
25. VAN CALKER, F. J. P. — »*De studie der erratica*».
Hand. v. h. 3e Natuur- en Geneesk. Congres te Utrecht, p. 360—370; 1891.
26. STEUSLOFF, A. — »*Sedimentär-geschiebe von Neubrandenburg*», p. 166?
Archiv d. Ver. d. Fr. d. Naturgesch. in Mecklenburg, Bd. XLV, p. 161—179; 1891.
27. SCHMIDT, F. — »*Einige Bemerkungen über das baltische Obersilur in Veranlassung der Arbeit des Prof. W. Dames über die Schichtenfolge der Silurbildungen Gotlands*».
Bull. de l'Ac. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, N. S. II (XXXIV), 1892, p. 381—400; ook: Mém. géol. et paléont., tirés du Bull. etc., T. I, p. 119—138.

28. BATHER, F. A. — »*The Crinoidea of Gotland*». I.
Kongl. Svenska Vet.-Ak. Handl., XXV, no. 2, 1893.
29. WIMAN, C. — »*Ueber die Silurformation in Jemtland*».
Bull. of the geol. Inst. of the Univ. of Upsala f. 1893, I, p. 256—276;
Upsala, 1894.
30. STOLLEY, E. — »*Die cambrischen und silurischen Geschiebe Schleswig-Holsteins und ihre Brachiopodenfauna*». I. Geologischer Theil.
Archiv f. Anthrop. u. Geol. Schleswig-Holsteins u. d. benachb. Gebiete, I, 1, p. 35—136; 1895.
31. COHEN, E. en DEECKE, W. — »*Ueber Geschiebe aus Neu-Vorpommern und Rügen*». Erste Fortsetzung.
Sep.-Abdr. a. d. Mitth. d. naturw. Ver. f. Neuvorpommern und Rügen, Jg. XXVIII, 1896.
32. SIEGERT, L. — »*Die versteinierungsführenden Sedimentgeschiebe im Glacialdiluvium des nordwestlichen Sachsens*».
Zeitschr. f. Naturwiss., Bd. 71, p. 37—138; 1893.
33. SCHMIDT, F. — »*Ueber eine neue grosse Leperditia aus lithauischen Geschieben*».
Verhandl. d. k. russ. Min. Ges. zu St. Petersburg, 2e Ser., Bd. XXXVIII, Lief. 1, VI, p. 307—311; 1900.
34. CHMIELEWSKI, C. — »*Die Leperditien der obersilurischen Geschiebe des Gouvernement Kowno und der Provinzen Ost- und Westpreussen*».
Schrift. d. phys.-oekon. Ges. zu Königsberg, Jg. 41, 1900, p. 1—38.
35. HOLMSTRÖM, L. — »*Otto Torell*». Minnesteckning.
Geol. Fören. i Stockholm Förhandl., XXIII, H. 5; 1901. (Separat-Abdruck).
36. JONKER, H. G. — »*Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland*».
I. *De Hondsrug in de provincie Groningen*.
1. *Inleiding. Cambrische en ondersilurische zwerfsteenen*».
Acad. Proefschrift, Groningen, 1904.
GRONINGEN, Min.-Geol. Instituut, 31 December 1904.

Natuurkunde. — De Heer H. A. LORENTZ biedt eene mededeeling aan over: „*De beweging der electronen in de metalen*». II.

§ 11. In aansluiting aan het in de laatste § besprokene kan gemakkelijk een uitdrukking voor de intensiteit i van den stroom in een *gesloten* thermo-electrische keten worden opgesteld. Om daartoe te geraken, stellen wij ons voor dat de uiteinden P en Q , die, zooals wij onderstelden, uit hetzelfde metaal bestaan en dezelfde temperatuur hebben, met elkaar in aanraking worden gebracht; verder bedenken wij dat dan de potentialen φ_P en φ_Q gelijk worden en de electronenstroom v niet 0 is. Integendeel heeft men, wanneer

Σ de normale doorsnede is, die zooals reeds werd opgemerkt, langzaam van punt tot punt kan veranderen,

$$i = e v \Sigma \dots \dots \dots (36)$$

Dit inachtnemende vindt men uit (21) en (30), als men ook van (23) gebruik maakt,

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{1}{e} \frac{dV}{dx} - \frac{m}{e} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) - \frac{m}{2eh} \frac{d \log A}{dx} - \frac{1}{\sigma \Sigma} i.$$

Integreert men dit langs de geheele keten, van P tot Q , dan verkrijgt men, daar i overal dezelfde waarde heeft, terwijl

$$\varphi_P = \varphi_Q, \quad V_P = V_Q \quad \text{en} \quad h_P = h_Q$$

is,

$$-\frac{m}{2e} \int_P^Q \frac{1}{h} \frac{d \log A}{dx} dx - i \int \frac{dx}{\sigma \Sigma} = 0,$$

of, wanneer men den eersten term partieel integreert, de formule (34) in aanmerking neemt, en

$$\int \frac{dx}{\sigma \Sigma} = R$$

stelt,

$$F = i R, \quad i = \frac{F}{R},$$

een uitkomst die te verwachten was, daar klaarblijkelijk R den weerstand van de keten voorstelt, aangezien σ het geleidingsvermogen is.

§ 12. Wij zullen nu de warmteontwikkelingen in een keten, waarin een elektrische stroom i bestaat, berekenen. Wij stellen ons voor dat elk element der keten door een warmtereservoir op constante temperatuur wordt gehouden; de "ontwikkelde" warmte is dan de hoeveelheid warmte die aan dat reservoir wordt afgestaan. Om deze voor het deel van de keten tusschen de doorsneden, wier plaats door x en $x + dx$ wordt aangegeven, te bepalen, verstaan wij onder $w dt$ den arbeid gedurende den tijd dt verricht door de krachten die op de electronen in dat element werken. Verder bedenken wij dat per tijdseenheid een hoeveelheid warmte $W \Sigma$ door een doorsnede gaat en dat dus het beschouwde element door de doorsnede ($x + dx$)

$$\frac{d}{dx} (W \Sigma) dx$$

meer warmte verliest, dan er door de doorsnede (x) naar binnen gevoerd wordt. Daaruit volgt voor de gezochte warmte-ontwikkeling

$$q = w - \frac{d}{dx} (W \Sigma) dx \dots \dots \dots (37)$$

Om nu vooreerst w te bepalen, merken wij op dat in den tijd dt de arbeid der op één electron werkende kracht bedraagt

$$m X \xi dt.$$

Beschouwen wij verder de groep electronen, waarvan de snelheidspunten in het element $d\lambda$ van het snelheidsdiagram liggen, en waarvan het aantal binnen het element Σdx volgens (1)

$$f(\xi, \eta, \zeta) \Sigma dx d\lambda$$

bedraagt, dan vinden wij voor den gezamenlijken arbeid van alle krachten die op de deeltjes dezer groep werken,

$$m X \Sigma dx dt \cdot \xi f(\xi, \eta, \zeta) d\lambda.$$

Hieruit volgt voor den totalen arbeid van de op alle electronen in het element werkende krachten, wanneer men de vergelijking (4) gebruikt

$$m X v \Sigma dx dt,$$

zoodat, met het oog op (36),

$$w = \frac{miX}{e} dx$$

wordt.

Wij substitueeren hierin de waarde van X die uit (21) volgt, wanneer men daarin

$$v = \frac{i}{e\Sigma}$$

stelt, en tevens van (23) gebruik maakt. Die waarde is

$$X = \frac{1}{2h} \frac{d \log A}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) + \frac{ei}{m\sigma\Sigma} \dots \dots \dots (38)$$

en men kan nu schrijven

$$w = w_1 + w_2,$$

waarin

$$w_1 = \frac{mi}{e} \left[\frac{1}{2h} \frac{d \log A}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) \right] dx \dots \dots \dots (39)$$

en

$$w_2 = \frac{i^2}{\sigma\Sigma} dx$$

is.

Ook in de uitdrukking (22) zullen wij de waarde (38), of, wat eenvoudiger is, de waarde van

$$2hAX - \frac{dA}{dx},$$

die uit (21) volgt, invoeren. Wij vinden dan

$$W = W_1 + W_2,$$

naar II, dan vinden wij door integratie van (42) voor de warmte-ontwikkeling aan de „contactplaats”, wanneer een stroom van de eenheid van sterkte van I naar II gaat,

$$\frac{m}{2eh} \log \left(\frac{A_{II}}{A_I} \right) = \frac{2\alpha T}{3e} \log \left(\frac{A_{II}}{A_I} \right).$$

Hieruit volgt, wanneer wij het PELTIER-effect karakteriseeren door de *warmte-absorptie* $\Pi_{I, II}$ die in dit geval plaats heeft,

$$\Pi_{I, II} = \frac{2\alpha T}{3e} \log \left(\frac{A_I}{A_{II}} \right) = \frac{2\alpha T}{3e} \log \left(\frac{N_I}{N_{II}} \right) \dots (43)$$

b. In de tweede plaats passen wij (42) toe op een homogeen metaal. Daarin is $\log A$ een functie van de temperatuur T , en wij kunnen, op (14) lettende, ook schrijven

$$q'_{i=1} = \frac{2\alpha T}{3e} \frac{d \log A}{dT} dT,$$

als dT de verandering der temperatuur voorstelt, die aan de toename dx beantwoordt.

Daar deze uitdrukking aangeeft hoeveel warmte er ontwikkeld wordt tusschen twee doorsneden die op de temperaturen T en $T + dT$ worden gehouden, wanneer een stroom van de eenheid van sterkte loopt van de doorsnede met de eerste naar die met de laatste temperatuur, stelt

$$\mu = - \frac{2\alpha T}{3e} \frac{d \log A}{dT} \dots (44)$$

voor wat KELVIN de „soortelijke warmte” der electriciteit genoemd heeft (THOMSON-effect).

§ 14. Het verdient vooral de aandacht dat de hier gevonden uitkomsten in overeenstemming zijn met de welbekende thermodynamische theorie der thermo-electrische stroomen. Die theorie leidt nl. tot de betrekkingen

$$\mu_{II} - \mu_I = T \frac{d}{dT} \left(\frac{\Pi_{I, II}}{T} \right) \dots (45)$$

en

$$F = - \int_{T'}^{T''} \frac{\Pi_{I, II}}{T} dT, \dots (46)$$

in welke μ_I en μ_{II} op de zooeven aangegeven wijze het THOMSON-effect bij de temperatuur T in de metalen I en II voorstellen, terwijl F de electromotorische kracht in een uit die metalen samengestelde keten is, waarvan de contactplaatsen op de temperaturen

T'' en T''' worden gehouden, onder dien verstande dat die kracht positief wordt genoemd, wanneer zij een stroom tracht te doen ontstaan, die in de eerste contactplaats van I naar II loopt. F is dus juist wat wij in § 10 berekend hebben.

Men ziet gemakkelijk dat de waarden (44), (43) en (35) werkelijk aan (45) en (46) voldoen.

Trouwens, men kan rechtstreeks uit (42) afleiden dat onze uitkomsten met die der thermodynamische theorie overeenstemmen. In deze leidt nl. de *eerste* hoofdwet tot de betrekking

$$\sum q'_{i=1} = -F$$

en de *tweede* tot

$$\sum \frac{q'_{i=1}}{T} = 0,$$

in welke formules de sommen betrekking hebben op alle elementen der in § 11 beschouwde gesloten keten. Deze vergelijkingen gaan nu wegens (42) over in

$$F = -\frac{m}{2e} \int_P^Q \frac{1}{h} \frac{d \log A}{dx} dx$$

en

$$\int_P^Q \frac{1}{hT} \frac{d \log A}{dx} dx = 0.$$

De eerste vergelijking stemt overeen met (34) en dat de tweede uitkomt blijkt hieruit dat hT overal dezelfde waarde heeft.

Het verdient nog te worden opgemerkt dat in de formule (35) het bestaan eener *thermo-electrische reeks* en de bekende daarop betrekking hebbende wet ligt opgesloten. Dit volgt onmiddellijk hieruit, dat men (35) als het verschil van twee integralen kan voorstellen, waarvan, als de temperaturen der contactplaatsen gekozen zijn, de eene door den aard van het eerste en de andere door dien van het tweede metaal bepaald is. Duiden wij nu een derde metaal door III aan, en schrijven wij $F_{I, II}$, $F_{II, III}$, $F_{III, I}$ voor de electromotorische krachten, werkende in ketens, uit de door de indices aangegeven metalen samengesteld, en in welke de contactplaatsen telkens de temperaturen T'' en T''' hebben, waarbij wij als positieve richting die kiezen, welke door de contactplaats met de temperatuur T'' van het in de eerste plaats aangewezen metaal naar het andere leidt, dan vinden wij gemakkelijk dat

$$F_{I, II} + F_{II, III} + F_{III, I} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

is.

Strikt genomen behoefde dit niet meer bewezen te worden, daar het uit de thermodynamische theorie volgt en onze uitkomsten met deze overeenstemmen.

§ 15. Bij al het voorgaande werd ondersteld dat de metalen slechts één soort van vrije electronen bevatten. Inderdaad brengt het uit vele waarnemingen op ander gebied getrokken besluit dat de negatieve electronen veel bewegelijker zijn dan de positieve, er ons toe te beproeven hoe ver men met een theorie die alleen *negatieve* vrije electronen aanneemt, kan komen.

Wat dit punt betreft, verdient vooreerst de absolute grootte der electromotorische kracht F onze aandacht. Wanneer wij onderstellen dat T' en T'' één graad verschillen en van de veranderlijkheid van N_I en N_{II} in zulk een klein temperatuurinterval afzien, mag men voor (35) schrijven

$$F_{1^\circ} = \frac{2 a}{3 e} \log \frac{N_{II}}{N_I},$$

$$\log \frac{N_{II}}{N_I} = \frac{3 e}{2 a} \cdot F_{1^\circ}.$$

De waarde van den eersten factor in het tweede lid kunnen wij aan het in § 9 uit het electrochemisch aequivalent van waterstof afgeleide ontleenen ¹⁾. Daar voor $T = 291$,

$$\frac{\alpha T}{e} = 38 \times 10^5$$

is, heeft men

$$\log \frac{N_{II}}{N_I} = 0,00011 F_{1^\circ}.$$

Nu is voor twee metalen die thermo-electrisch zoo ver van elkaar af staan als bismuth en antimonium, F_{1° ongeveer 12000, waaruit men vindt

$$\log \frac{N_{II}}{N_I} = 1,32 \quad ; \quad \frac{N_{II}}{N_I} = 3,7$$

¹⁾ Tot mijn leedwezen is in de opgaven van die § een fout ingeslopen, die echter op de daar besproken overeenstemming geen invloed heeft. De waarde van $3p$ en de uit de metingen van JAEGER en DIESSELHORST afgeleide waarde van $\frac{\alpha T}{e}$ moeten n.l. zijn

$$3p = 38 \times 10^5$$

en

$$\frac{\alpha T}{e} = 47 \times 10^5.$$

De lezer zal ook hebben opgemerkt dat de eerste dezer vergelijkingen na den tweeden regel van p. 505 moet staan.

terwijl voor dichter bij elkaar staande metalen N_{II} minder van N_I moet verschillen. Het komt mij voor dat dergelijke waarden voor de verhouding tusschen de aantallen vrije electronen in verschillende metalen zeer goed kunnen worden aangenomen.¹⁾

Men kan nu, als men maar geschikte onderstellingen omtrent het aantal vrije electronen in de metalen maakt, al de waarnemingen over de electromotorische krachten der thermostroomen verklaren; zelfs kan men daarbij voor één „standaardmetaal” het getal N nog als een willekeurige temperatuurfunctie aannemen. Immers, men kan dan voor *elk ander* metaal N zoo als functie der temperatuur kiezen, dat de door (35) bepaalde electromotorische kracht F voor een combinatie van dit metaal met het standaardmetaal voor alle waarden van T' en T'' met de waargenomen electromotorische kracht overeenstemt, en wel hoe deze laatste ook van de temperaturen moge afhangen. Door de bedoelde onderstellingen omtrent het aantal vrije electronen zou men dan tevens van de electromotorische krachten van willekeurige combinaties rekenschap kunnen geven, daar deze krachtens de in (47) uitgedrukte wet uit de electromotorische krachten van combinaties waarin het standaardmetaal voorkomt, kunnen worden afgeleid.

Eindelijk zou men ook de waarnemingen over het PELTIER- en het THOMSON-effect kunnen verklaren. Dit blijkt hieruit dat het bedrag dezer verschijnselen ook volgens de hier ontwikkelde theorie op de door de thermodynamische theorie vereischte en door de waarnemingen bevestigde wijze met de grootte der electromotorische krachten samenhangt.

De waarneming van het THOMSON-effect in het standaardmetaal zou dan kunnen dienen om voor dit metaal N nader als functie der temperatuur te bepalen.

De eenige moeilijkheid waarop men bij dit alles kon stuiten, zou deze zijn dat de onderstellingen die men omtrent N bij verschil-

1) Schrijft men n voor de gemiddelde waarde van het onbenoemde getal $\log \frac{N_{II}}{N_I}$ tusschen de temperaturen T' en T'' , dan kan men de formule (35) brengen in den vorm

$$Fe = \frac{2}{3} n \alpha (T'' - T').$$

Dit kan als volgt in woorden worden uitgedrukt: De arbeid dien de electromotorische kracht verricht wanneer één electron de geheele keten rondloopt, is gelijk aan de toename der gemiddelde kinetische energie van een gasmolekuul bij temperatuurverhooging van T' tot T'' , vermenigvuldigd met $\frac{2}{3} n$.

lende temperaturen moest maken, in strijd konden komen met deze of gene voorstelling omtrent de oorzaken die het aantal vrije electronen bepalen.

Wat het geleidingsvermogen voor electriciteit en warmte betreft, men zou, zooals uit de formules (24) en (27) blijkt, van de daarvoor gevonden uitkomsten altijd rekenschap kunnen geven door geschikte onderstellingen over de lengte l van den vrijen weg tusschen twee botsingen ¹⁾).

Intusschen moet er op worden gewezen dat de ontwikkelde theorie in ieder geval vereischt dat de verhouding $\frac{k}{\sigma}$ onafhankelijk van den aard van het metaal is, dat dus de wet van WIEDEMANN en FRANZ door gaat, Van deze wet bestaan echter niet onbelangrijke afwijkingen en daarom is DRUDE er toe gekomen, meer dan één soort vrije electronen aan te nemen. De wijzigingen die deze onderstelling in de theorie brengt, hoop ik in een volgende mededeeling te bespreken. Voor het oogenblik merk ik nog op dat een voorname reden om ook vrije positieve electronen aan te nemen gelegen is in het feit dat het HALL-effect niet in alle metalen dezelfde richting heeft.

Scheikunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*Over eenige verschijnselen, welke kunnen optreden bij de beperkte mengbaarheid van twee vloeistoffen, waarvan de eene anomaal, speciaal water is.*”

(Mede aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM).

1. In het tweede deel van zijn *Continuïteit* (1900)²⁾ heeft VAN DER WAALS voor het eerst de theorie van de z.g. *lengteplooi* op het ψ -vlak gegeven, en wijdt in het laatste hoofdstuk (§ 12, blz. 175 e. v.) aan die plooi nog een afzonderlijke, uitvoerige bespreking, vooral met het oog op z.g. *anomale* componenten. Daarin wordt o.a. aangetoond, dat voor het optreden van zekere complicaties, die zich bij die plooi kunnen voordoen, een der beide componenten anomaal zou moeten wezen ³⁾).

¹⁾ Wanneer, zooals ten naastebij bij sommige metalen het geval is, het elektrische geleidingsvermogen omgekeerd evenredig met de absolute temperatuur is, zou blijkens (24), als men van de verandering van N mocht afzien, l omgekeerd evenredig met \sqrt{T} moeten zijn. Een grond voor zulk een verandering van l kan nog niet worden aangegeven.

²⁾ Bl. 41—45.

³⁾ Zie ook Deze Verslagen van 5 Nov. 1902.

In het volgende zal getracht worden het optreden der verschillende bijzondere vormen, welke zich kunnen voordoen, wanneer een der componenten associeerend is, te verklaren, speciaal wanneer die anomale component *water* is.

2. Beginnen wij daartoe kortelijk de theorie van het verschijnsel der beperkte mengbaarheid bij *binair* mengsels van *normale* stoffen in herinnering te brengen.

Wij weten, dat de totale thermodynamische potentiaal wordt voorgesteld door

$$Z = - \Sigma(n_1 k_1) T (\log T - 1) + \Sigma(n_1 (e_1)_0) - T \Sigma(n_1 (\eta_1)_0) - \int p dv + pv + RT \Sigma(n_1 \log n_1),$$

of

$$Z = \Sigma(n_1 C_1) - \left[\int p dv - RT \Sigma n_1 \cdot \log \Sigma n_1 - pv \right] + RT \Sigma(n_1 \log \frac{n_1}{\Sigma n_1}).$$

Differentieeren wij nu achtereenvolgens bij konstante T en p t.o.v. n_1 en n_2 , dan komt er:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\partial Z}{\partial n_1} = C_1 - \frac{\partial \omega}{\partial n_1} + RT \log \frac{n_1}{\Sigma n_1} \\ \mu_2 &= \frac{\partial Z}{\partial n_2} = C_2 - \frac{\partial \omega}{\partial n_2} + RT \log \frac{n_2}{\Sigma n_1} \end{aligned} \right\},$$

waarin dus C_1 en C_2 zuivere temperatuurfunctiën zijn, en worden voorgesteld door

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -k_1 T (\log T - 1) + (e_1)_0 - T(\eta_1)_0 \\ C_2 &= -k_2 T (\log T - 1) + (e_2)_0 - T(\eta_2)_0 \end{aligned} \right\},$$

terwijl de grootheid ω gegeven is door

$$\omega = \int p dv - RT \Sigma n_i \cdot \log \Sigma n_i - pv \dots \dots \dots (1)$$

De beteekenis der verschillende grootheden n_1 , $(e_1)_0$, $(\eta_1)_0$, etc. etc. wordt bekend ondersteld.

Vervangen wij nu de veranderlijken n_1 en n_2 door x , zoodat $n_1 = 1 - x$, $n_2 = x$ en $\Sigma n_i = 1$ wordt. Daar ω evenals Z een *homogene* functie van den *eersten* graad is t. o. v. n_1 en n_2 , zoo kan geschreven worden:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= C_1 - \left(\omega - x \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + RT \log (1 - x) \\ \mu_2 &= C_2 - \left(\omega + (1 - x) \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + RT \log x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

Wanneer er zich nu een plooi in het Z -oppervlak bevindt, dan zal de spinodale lijn, d.w.z. hare projectie op het T, x vlak, gegeven zijn door de voorwaarde $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0$; of ook, wijl $\mu_1 = Z - x \frac{\partial Z}{\partial x}$, $\mu_2 = Z + (1 - x) \frac{\partial Z}{\partial x}$, door $\frac{\partial \mu_1}{\partial x} = 0$ of $\frac{\partial \mu_2}{\partial x} = 0$.

Wij vinden derhalve voor de vergelijking van die kromme in het T, x vlak:

$$x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{RT}{1-x} = 0,$$

of wel

$$RT = x(1-x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Maken wij nu gebruik van de VAN DER WAALS'sche toestandsvergelijking

$$p = \frac{\Sigma n_1 \cdot RT}{v-b} - \frac{a}{v^2},$$

dan wordt

$$\omega = \Sigma n_1 \cdot RT \log(v-b) + \frac{a}{v} - RT \Sigma n_1 \cdot \log \Sigma n_1 - pv^4).$$

Is nu bij *vloeistoffen* de uitwendige druk p (of de dampdruk) te verwaarloozen t. o. van den moleculairdruk $\frac{a}{v^2}$, dan kan voor de toestandsvergelijking worden geschreven:

$$\frac{a}{v^2} = \frac{\Sigma n_1 \cdot RT}{v-b},$$

en de uitdrukking voor ω gaat, wanneer eveneens pv tegen $\frac{a}{v}$ wordt weggelaten, over in

$$\omega = \Sigma n_1 \cdot RT \log \frac{\Sigma n_1 \cdot RT}{a/v^2} + \frac{a}{v} - RT \Sigma n_1 \cdot \log \Sigma n_1,$$

of

$$\omega = \Sigma n_1 \cdot RT \log \frac{RT}{a/v^2} + \frac{a}{v},$$

d. w. z. in

1) Is $b = f(v)$, dan geeft $\int pdv$ nog een term $RT \int \frac{db}{v-b}$. Maar deze kan als onafhankelijk van x worden beschouwd, en bij de temperatuurfunctie C_1 worden gevoegd.

$$\omega = RT \log \frac{RT}{a/v^2} + \frac{a}{v},$$

wanneer $\Sigma n_1 = 1$ is. Voor $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ vinden wij dus:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{v} \right) - RT \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{a}{v^2},$$

waardoor de vergelijking (3) van de projectie der meetkundige plaats der buigpunten op het T, x -vlak overgaat in

$$RT = x(1-x) \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{v} \right) - RT \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{a}{v^2} \right]$$

of wel in

$$RT = \frac{x(1-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{v} \right)}{1 + x(1-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{a}{v^2}} \dots \dots \dots (4)$$

De term met $\log \frac{a}{v^2}$ is voor eenigen tijd door VAN DER WAALS¹⁾ ingevoerd; in de oudere theorie ontbrak zij, en vereenvoudigde zich (4) tot $RT = x(1-x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{v} \right)$.

Tengevolge der betrekkingen $\frac{a}{v} = fRT_c$, $\frac{a}{v^2} = \gamma p_c$, waarin uit hoofde der veranderlijkheid van het vloeistofvolume v de coëfficiënten f en γ nog zwakke temperatuurfunctiën zullen wezen (f is de bekende dampdrukfactor, welke ongeveer 7 mag gesteld worden), kan men voor (4) ook schrijven:

$$T = \frac{fx(1-x) \frac{\partial^2 T_c}{\partial x^2}}{1 + x(1-x) \frac{\partial^2 \log p_c}{\partial x^2}} \dots \dots \dots (4a)$$

Men ziet, dat alleen voor het geval, dat de *kritische drukken* der beide componenten *weinig verschillen*, de term met $\log p_c$ kan worden weggelaten. Ook wanneer x in de nabijheid van 1 of 0 is, zal zulks het geval wezen. Maar in alle andere gevallen zou het onnauwkeurig zijn à priori den bedoelden term weg te laten.

Schrijven wij nu verder:

¹⁾ Deze Verslagen, in Ternaire Stelsels, speciaal IV, p. 96—100. (12 Juni 1902); zie ook 13 Juli 1904, p. 145 e. v.

$$\left. \begin{aligned} a &= (1-x)^2 a_1 + 2x(1-x) a_{12} + x^2 a_2 \\ v &= (1-x) v_1 + xv_2 \end{aligned} \right\},$$

daar v voor vloeistoffen bij lage temperatuur geheel op dezelfde wijze van x kan afhankelijk gesteld worden als $b = (1-x)b_1 + xb_2$. De molecuulairvolumina v_1 en v_2 moet men zich dus evenals b_1 en b_2 konstant (of als zwakke temperatuurfunctiën) denken ¹⁾. Wij vinden dan na eenige herleidingen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{v} \right) = \frac{2}{v^3} (a_1 v_2^2 + a_2 v_1^2 - 2a_{12} v_1 v_2),$$

of — wanneer wij bij *normale* componenten de betrekking van BERTHELOT, nl. $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ als bij benadering juist onderstellen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{v} \right) = \frac{2}{v^3} (v_2 \sqrt{a_1} - v_1 \sqrt{a_2})^2. \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

¹⁾ Vervangt men v bij vloeistoffen door b , en schrijft dan $b = (1-x)b_1 + xb_2$, dan ontstaat de moeilijkheid, dat men daardoor grootheden van de orde $v-b$ tegen die van de orde v verwaarloost, en de vraag zou zich kunnen voordoen, of dit niet alleen onder zeer bepaalde voorwaarden *niet* in strijd is met het weglaten van p tegenover $\frac{a}{v^2}$. (Deze opmerking werd mij welwillend door Prof. LORENTZ gemaakt).

Ik heb deze moeilijkheid meenen te ontgaan, door v niet te vervangen door b , maar eenvoudig bij vloeistoffen bij lage temperaturen het volume v *lineair* veranderlijk met x te onderstellen, dus voor v in analogie met de uitdrukking voor b te schrijven $v = (1-x)v_1 + xv_2$. Zooals ik opmerkte, blijven dan v_1 en v_2 nog zwakke temperatuurfunctiën, terwijl b_1 en b_2 natuurlijk volkomen standvastig zouden zijn. Thans evenwel kan men met meer recht $\frac{a}{v}$ dan $\frac{a}{b}$ door fRT_c (en later

$\frac{a_1}{v_1}$ door fRT_1 en $\frac{a_2}{v_2}$ door fRT_2) vervangen, waarin f geheel op dezelfde wijze

als v een zwakke temperatuurfunctie zal blijven. Men kan nl. gemakkelijk aantonen, dat de uitdrukking voor den dampdruk, bij lage temperaturen, voor een enkel-

voudige stof is $\log \frac{a/v^2}{p} = \frac{a/v}{RT} - \int \frac{db}{v-b}$ (v is in de beide eerste termen het

vloeistofvolume), waaruit kan afgeleid worden, in verband met de empirische betrekking $\log \frac{p_c}{p} = f \left(\frac{T_c}{T} - 1 \right)$, waarin f ongeveer 7 is, dat o. a. $\frac{a}{v} = fRT_c$ zal zijn.

De fout die men maakt, door v lineair veranderlijk te stellen met x , zal zeker veel geringer zijn dan $v = b$ te stellen. Daardoor zou men fouten van minstens 16% maken, aangezien $\frac{b}{v}$ bij vloeistoffen in de nabijheid van het smeltpunt ongeveer $\frac{5}{6}$ is.

Men heeft nu ook tevens het voordeel, voor v_1 en v_2 onmiddellijk de bij vloeistoffen experimenteel bepaalde waarden in de plaats te kunnen stellen.

Daar het tweede lid altijd *positief* zal wezen, ook al mocht $a_{12} < \sqrt{a_1 a_2}$ wezen ¹⁾, zoo zal de kromme $T = f(x)$ altijd hare *convexe* zijde naar de x -as keeren.

Bepalen wij nu $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{a}{v^2}$. Met $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ ²⁾ wordt de uitdrukking voor a :

$$a = [(1-x)\sqrt{a_1} + x\sqrt{a_2}]^2,$$

zoodat

$$\log \frac{a}{v^2} = 2 \log \frac{(1-x)\sqrt{a_1} + x\sqrt{a_2}}{(1-x)v_1 + xv_2}$$

wordt. Derhalve is

$$\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{a}{v^2} = 2 \left[\frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{\sqrt{a}} - \frac{v_2 - v_1}{v} \right],$$

mitsdien

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{a}{v^2} = 2 \left[\frac{(v_2 - v_1)^2}{v^2} - \frac{(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})^2}{a} \right] \dots \dots \dots (6)$$

Men kan deze laatste uitdrukking door factorenontbinding nog in een anderen vorm brengen, en vindt dan:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{a}{v^2} = \frac{2}{av^2} (v_2 \sqrt{a_1} - v_1 \sqrt{a_2}) [(v_2 \sqrt{a_1} - v_1 \sqrt{a_2}) + 2v(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})],$$

waaruit blijkt, dat ook hier evenals bij de uitdrukking voor $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{v} \right)$ de factor $v_2 \sqrt{a_1} - v_1 \sqrt{a_2}$ optreedt.

Is nu $v_2 \sqrt{a_1} = v_1 \sqrt{a_2}$ of $\frac{a_1}{v_1^2} = \frac{a_2}{v_2^2}$, zijn m.a.w. de *kritische drukken* der beide componenten *aan elkaar gelijk*, dan wordt $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{a}{v^2} = 0$.

Maar dan zal *gelijktijdig* $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{v} \right) = 0$ zijn, en de geheele lengteplooi verdwijnt. (de kromme $T_c = f(x)$ zal dan tegelijk in een rechte lijn overgaan).

Wij zien dus, dat opdat het verschijnsel van beperkte mengbaarheid zal optreden bij bereikbare, dus niet te lage temperaturen, de *kritische drukken* der beide componenten *zooveel mogelijk moeten verschillen*.

¹⁾ Zie VAN DER WAALS, Deze Verslagen van 8 Oct. 1902, p. 294.

²⁾ Hoewel voor deze betrekking nog geen voldoende theoretische grond bestaat, heb ik haar *bij benadering* als vervuld beschouwd, ook wijl alleen dan voor $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{a}{v^2}$ een eenvoudige uitkomst kon worden verkregen.

Nu is dit bij de meeste *normale* stoffen *niet* het geval, en dit is wel de verklaring van het bekende feit, dat bij mengsels van normale stoffen zoo uiterst zelden het verschijnsel van beperkte mengbaarheid bij de gewone temperaturen wordt gevonden.

Substitueeren wij nu eindelijk (5) en (6) in de vergelijking (4), dan vinden wij ten slotte:

$$\left. \begin{aligned} RT &= 2x(1-x) \frac{(v_2 \sqrt{a_1 - v_1} \sqrt{a_2})^2}{v^3} : (1 + \Delta), \\ \Delta &= 2x(1-x) \left[\frac{(v_2 - v_1)^2}{v^2} - \frac{(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})^2}{a} \right] \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

Dit zou een zuivere parabool wezen, wanneer v en $1 + \Delta$ onafhankelijk waren van x .

3. Zoeken wij nu de waarden van x en T voor het „*kritisch mengpunt*”. Hiertoe moet klaarblijkelijk worden voldaan aan de voorwaarden $\frac{\partial \mu_1}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial^2 \mu_1}{\partial x^2} = 0$ gecombineerd, of — wat op het zelfde neerkomt — aan

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{dT}{dx} = 0,$$

zooals men onmiddellijk zal inzien. Nu volgt uit (7), wanneer men $1 + \Delta$ onafhankelijk van x onderstelt, hetgeen wegens de geringe waarden van Δ bij normale stoffen zeker geoorloofd is:

$$R \frac{dT}{dx} = \frac{2(v_2 \sqrt{a_1 - v_1} \sqrt{a_2})^2}{1 + \Delta} \left\{ \frac{1 - 2x}{v^3} - \frac{3x(1-x)}{v^4} (v_2 - v_1) \right\},$$

daar $v = v_1 + x(v_2 - v_1)$ is. Deze uitdrukking nu wordt $= 0$, wanneer

$$(1 - 2x)(1 + rx) - 3rx(1 - x) = 0,$$

waarin $r = \frac{v_2 - v_1}{v_1}$. Dit voert tot

$$rx^2 - 2(r + 1)x + 1 = 0,$$

waaruit

$$x_c = \frac{1}{r} \left\{ (r + 1) - \sqrt{r^2 + r + 1} \right\}.$$

Is $r = 0$, d. w. z. $v_1 = v_2$, dan wordt dus $x_c = 0,5$. Dit zal alzoo, mocht Δ nog eenigermate van x afhankelijk wezen, in elk geval bij benadering het geval zijn.

Wij zullen thans de vergelijking (7) eenigzins omwerken. Met $a_1 = fRT_1v_1$ en $a_2 = fRT_2v_2$ waarin T_1 en T_2 de kritische temperaturen der beide componenten zijn, worden deze, na substitutie van x_c voor x :

$$RT_c = 2 x_c (1 - x_c) \frac{[v_2 \sqrt{fRT_1 v_1} - v_1 \sqrt{fRT_2 v_2}]^2}{v_1^3 \left(1 + x \frac{v_2 - v_1}{v_1}\right)^3} : (1 + \Delta_c)$$

$$\Delta_c = 2 x_c (1 - x_c) \left\{ \frac{(v_2 - v_1)^2}{v_1^2 \left(1 + x \frac{v_2 - v_1}{v_1}\right)^2} - \frac{(\sqrt{T_2 v_2} - \sqrt{T_1 v_1})^2}{[\sqrt{T_1 v_1} + x \{\sqrt{T_2 v_2} - \sqrt{T_1 v_1}\}]^2} \right\}$$

of met $T_2 = \theta T_1$ en $v_2 = \varphi v_1$:

$$T_c = 2 f x_c (1 - x_c) \frac{\varphi (\sqrt{\varphi} - \sqrt{\theta})^2}{(1 + (\varphi - 1) x_c)^3} T_1 : (1 + \Delta_c)$$

$$\Delta_c = 2 x_c (1 - x_c) \left\{ \frac{(\varphi - 1)^2}{(1 + (\varphi - 1) x_c)^2} - \frac{(\sqrt{\theta \varphi} - 1)^2}{(1 + (\sqrt{\theta \varphi} - 1) x_c)^2} \right\} \quad (8)$$

daar $(\varphi - \sqrt{\theta \varphi})^2 = \varphi (\sqrt{\varphi} - \sqrt{\theta})^2$ is.

In dezen vorm zullen wij de vergelijkingen thans op een enkel voorbeeld toepassen. Teneinde het kritische mengpunt zoo hoog mogelijk te doen uitvallen, zullen wij twee normale stoffen kiezen, waarvan de kritische drukken zooveel mogelijk verschillen. Wij nemen daarvoor *aether* en *zwavelkoolstof*. De kritische gegevens zijn de volgende:

$$\begin{array}{l|l} CS_2 & T_1 = 548^\circ \quad ; \quad p_1 = 76 \text{ atm.} \\ \text{aether} & T_2 = 467^\circ \quad ; \quad p_2 = 35 \text{ atm.} \end{array}$$

Teneinde $\varphi = \frac{v_2}{v_1}$ te bepalen, merken wij op, dat men heeft $v_1 = \frac{fR}{\gamma} \frac{T_1}{p_1}$, $v_2 = \frac{fR}{\gamma} \frac{T_2}{p_2}$, aangezien b.v. $\frac{a_1}{v_1} = fRT_1$ en $\frac{a_1}{v_1^2} = \gamma p_1$ is. Wij hebben derhalve:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{p_2} : \frac{T_1}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} \times \frac{p_1}{p_2},$$

d.w.z. $\underline{\varphi = \theta \pi}$, wanneer de verhouding $\frac{p_1}{p_2}$ door π wordt voorgesteld.

Nu is bij de genoemde stoffen $\theta = 0,852$, $\pi = 2,17$, zoodat men vindt $\varphi = 1,85$. Daar $r = \varphi - 1$ is, zoo gaat de vergelijking voor x_c over in

$$x_c = \frac{1}{\varphi - 1} (\varphi - \sqrt{\varphi^2 - r + 1}), \dots \dots \dots (9)$$

en vinden wij hieruit voor x_c de waarde 0,29. Verder is $\sqrt{\theta} = 0,923$, $\sqrt{\varphi} = 1,36$, $f = 7$, en dus wordt (8):

$$T_c = \frac{14 \times 0,206 \times 1,85 \times 0,191}{(1,247)^3} 548 : (1 + \Delta_c),$$

of

$$T_c = \frac{1,019}{1,94} 548 : (1 + \Delta_c) = 288 : (1 + \Delta_c).$$

Nu is

$$\Delta_c = 0,412 \left\{ \frac{0,723}{1,555} - \frac{0,0650}{1,153} \right\} = 0,412 \times 0,409 = 0,169,$$

zoodat wij voor $1 + \Delta_c$ vinden 1,17.

Daardoor wordt $T_c = 288 : 1,17 = 246 = - 27^\circ C.$

Het kritische mengpunt der gekozen stoffen ligt dus nog altijd een *dertigtal* graden *beneden* het gewone nulpunt van Celsius. En voor de overgrootste meerderheid der andere normale stoffen zullen wij voor T_c nog veel lagere waarden vinden -- omdat daar de kritische drukken meerendeels minder verschillen dan bij aether en zwavelkoolstof.

4. Al het voorgaande nu ondergaat belangrijke wijzigingen, wanneer een der beide componenten *anomaal* is, speciaal *water*. Want in de eerste plaats is de *kritische druk* van het water *zeer hoog*, niet minder dan 198 atm., zoodat deze veel zal verschillen van de kritische drukken der meeste andere stoffen. En in de tweede plaats is hier de waarde van v_1 zoo *buitengewoon veranderlijk* met de temperatuur. Het water staat in deze opzichten eenig daar in de Natuur; het is een exceptioneele stof, en die dan ook tot verschillende zeer bijzondere verschijnselen aanleiding geeft, die men bij andere stoffen niet, of niet in die mate vindt. Alkool b.v. is ook een anomale stof, maar nòch is daar de verandering van het moleculairvolume bijzonder groot, nòch de kritische druk bijzonder hoog.

Wij weten, dat de verandering van het moleculairvolume zijn oorzaak heeft in de ontleding der *dubbelmoleculen* met de temperatuur. Daar v_1 gaandeweg kleiner wordt, zal de grootteid $(v_2 \sqrt{a_1} - v_1 \sqrt{a_2})^2$, welke hoofdzakelijk de grootte van T_c bepaalt, grooter en grooter worden, naarmate de temperatuur toeneemt. En de aanvangswaarde van die grootteid is bij water als de eene component reeds grooter dan bij mengsels van normale stoffen. Dit staat in verband met den hoogen kritischen druk van het water, n.l. 198 atm., waaruit berekend kan worden, dat de kritische druk, wanneer het water uit louter dubbelmoleculen bleef bestaan, toch nog ongeveer 66 atm. zou bedragen, d. w. z. grooter dan die van de meeste normale stoffen. (Natuurlijk zal de bedoelde uitdrukking alleen dan met afnemende v

toenemen, wanneer $\frac{\sqrt{a_1}}{v_1} > \frac{\sqrt{a_2}}{v_2}$ is, d. w. z. wanneer de kritische druk van den eersten component grooter dan die van den tweeden is. Aan deze voorwaarde zal bijna altijd voldaan worden, wanneer wij het water als *eerste* component aannemen).

Zooals gezegd, is die vermindering van v_1 bij water zeer aanzienlijk. Ik herinner er aan, dat door mij vroeger is gevonden¹⁾, dat $v_1 = \underline{19,78}$ ccM. is voor 18 Gr. water, wanneer alle moleculen *dubbel* zijn; en slechts $= \underline{11,34}$ ccM. voor 18 Gr., wanneer alle moleculen *enkelvoudig* zijn. Wanneer dus de temperatuur toeneemt van ongeveer -90°C. , waarbij alle moleculen dubbel zijn (ondersteld, dat het water dan niet lang bevroren was), tot ongeveer 230°C. , waarbij alle moleculen enkelvoudig zijn geworden, dan zal v_1 tot ongeveer $\frac{1}{7}$ van zijn oorspronkelijke waarde zijn afgenomen.

[Ik toonde in dezelfde Verhandeling aan, dat hierin ook — kwalitatief en kwantitatief — de verklaring is te vinden van het bekende verschijnsel der maximumdichtheid bij 4°C.]

Het gevolg nu van die veranderlijkheid van v_1 zal wezen, dat het tweede lid der vergelijking (7) — laten wij dit (gedeeld door R) voortaan door K voorstellen — niet langer standvastig zal zijn voor een bepaalde waarde van x , maar een functie van de temperatuur.

Trekken wij dus (zie fig. 1) de lijn OM , welke den coördinaat-hoek middendoor deelt (OT' is de temperatuur-as, OA' die der waarden van K), dan zal bij mengsels van *normale* stoffen het snijpunt van de *rechte* lijn $K = \text{const.}$, die dus evenwijdig aan de T -as loopt, met de lijn OM de temperatuur voorstellen, welke op de spinodale lijn met de gekozen waarde van x overeenstemt. Was dat x_c , dan vindt men zodoende T_c . Deze temperatuur is — zooals wij in de voorgaande bladzijden hebben aangetoond — uiterst laag.

Daarentegen zal bij *anomale* mengsels, d.w.z. hier: waar één der beide componenten een associeerende stof is, de rechte AA' zich transformeeren in *twee rechte* lijnen, verbonden door een *kromme* lijn (zie fig. 2). De eerste rechte heeft dan betrekking op de temperaturen, waar alle moleculen dubbel zijn, dat is dus bij water beneden -90°C. ; de tweede rechte zal betrekking hebben op de temperaturen, waar alle moleculen enkelvoudig zijn geworden — bij water dus boven 230°C. De verbindingscurve zal gelden voor alle temperaturen tusschen -90°C. en 230°C. , waar het dissociatieproces der dubbelmoleculen zich afspeelt.

¹⁾ Z. f. Ph. Chemie **31** (Jubelband VAN 'T HOFF), bl. 1—16, speciaal bl. 13.

Hierbij kunnen zich nu meerdere gevallen voordoen, welke wij straks kortelijk zullen nagaan.

5. Wij zouden thans een formule moeten afleiden voor RT en Δ , analoog aan (7), maar nu voor het geval dat één der stoffen anomaal is. De daartoe vereischte beschouwingen en berekeningen zullen wij hier echter niet weergeven, omdat dit zal geschieden in de uitvoeriger Verhandeling, die spoedig in de *Archives Teyler* het licht zal zien. Wij beperken ons dus tot de mededeeling van het eindresultaat, nl.

$$RT = 2x(1-x) \left(1 + \frac{1-\beta}{1+\beta} x \right) \frac{(v_2 \sqrt{a_1} - v_{01} \sqrt{a_2})^2}{v^3} : (1 + \Delta)$$

$$\Delta = 2x(1-x) \left(1 + \frac{1-\beta}{1+\beta} x \right) \left[\sum n_1 \left\{ \frac{(v_2 - v_{01})^2}{v^2} - \frac{(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})^2}{a} \right\} - (1-\beta) \left\{ \frac{v_2 - v_{01}}{v} - \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{a} \right\} \right] \quad (10)$$

Deze uitdrukkingen komen dus in de plaats van de vroegere (7). Ze zijn natuurlijk iets gecompliceerder, maar in den grond hebben zij denzelfden vorm, zooals in de bedoelde Verhandeling uitvoerig wordt nagegaan. Alleen zij vermeld, dat $\sum n_1 = \frac{1+\beta}{2} + \frac{1-\beta}{2} x$ is, waarin β de dissociatiegraad der dubbelmoleculen voorstelt; dat $v_{01} = \frac{1}{2}(1-\beta)v_0 + \beta v_1$ is, waarin v_0 het moleculairvolume der dubbelmoleculen, en v_1 dat der enkelvoudige moleculen voorstelt; en dat wederom gebruik is gemaakt van de betrekking $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$, waardoor wederom de berekening van Δ practisch mogelijk werd.

De uitdrukking voor a herleidde zich wegens $a_0 = 4a_1$, $a_{01} = 2a_1$, $a_{02} = 2a_{12}$ tot

$$a = (1-x)^2 a_1 + x^2 a_2 + 2x(1-x) a_{12}.$$

Die van b of v tot $v = (1-x)v_{01} + xv_2$, waarin v_{01} de boven gegeven beteekenis heeft. (De index 0 heeft betrekking op de dubbelmoleculen, de index 1 op de enkelvoudige moleculen der associeerende stof; de index 2 op de tweede, normale stof.)

Zooals reeds boven (in § 4) kortelijk werd aangeduid, is het hoofdzakelijk de factor $(v_2 \sqrt{a_1} - v_{01} \sqrt{a_2})^2$, welke het door ons bestudeerde verschijnsel beheerscht. *De groote veranderlijkheid van de grootheid v_{01} met de temperatuur is de eenige oorzaak* van al die bijzondere verschijnselen van gedeeltelijke mengbaarheid, die zich bij mengsels voordoen, wanneer een der componenten anomaal is, speciaal water.

Die factor zal met het toenemen der temperatuur hoe langer hoe grooter worden, wegens de afname van v_{01} tengevolge van de vor-

ming van steeds meer nieuwe enkelvoudige moleculen uit de zich disassocieerende dubbelmoleculen, omdat een enkelvoudig molecuul veel kleiner is dan een half dubbelmolecuul (zie § 4).

Men ziet in, dat de noemer v^3 , eveneens wegens v_{01} , kleiner en kleiner zal worden met toenemende temperatuur, waardoor de waarde van het tweede lid van (10) nog sterker zal toenemen. De veranderingen der andere termen hebben daarbij slechts geringen invloed.

6. Welke zullen nu de verschillende vormen van de plooi zijn — in de T, v voorstelling nl. — wanneer de loop van de kromme $K = f(T)$ (zie § 4) zich gedurig wijzigt met de verschillende aan het water toegevoegde componenten? (Wij herinneren er aan, dat K voorstelt het tweede lid van (10), gedeeld door R , en dat de volgende figuren dus de *grafische* oplossing aangeven der vergelijking $T = K$ t. o. v. T).

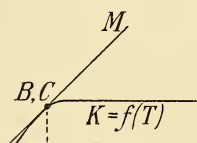
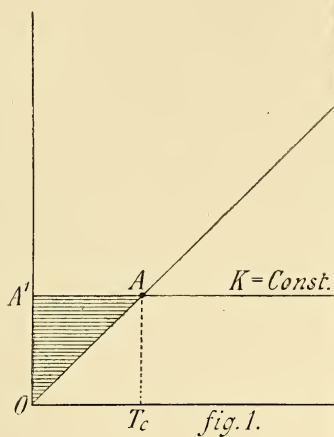
a. Het geval van normale stoffen hebben wij reeds beschouwd. Het wordt voorgesteld door fig. 1. De spinodale lijn zal dezelfde gedaante hebben als die in fig. 2.

b. In fig. 2 snijdt het rechte stuk van de kromme $K = f(T)$, waar K de aanvangswaarde K_1 heeft (alle moleculen zijn nog dubbel), de rechte OM in A ; terwijl het kromlijnige gedeelte, en het tweede rechtlijnige gedeelte, waar K de eindwaarde K_2 (alle moleculen zijn enkelvoudig geworden) heeft aangenomen, geheel en al *rechts* van OM zijn gelegen. De plooi is dus geheel identiek aan die van het voorgaande geval, met dit verschil echter dat het punt A beneden — 90° C. is gelegen, bij welk punt de dissociatie der dubbelmoleculen begint, zoodat dit punt geheel *buiten* het gebied der bereikbare temperaturen valt.

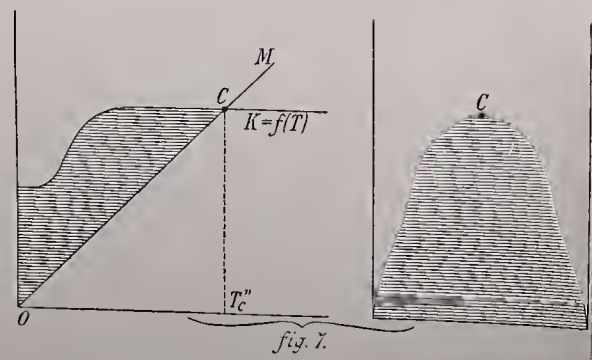
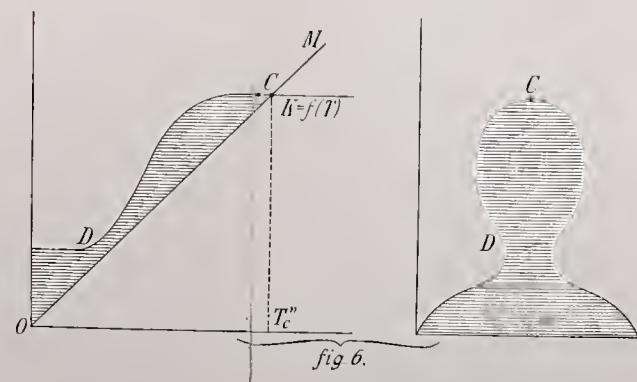
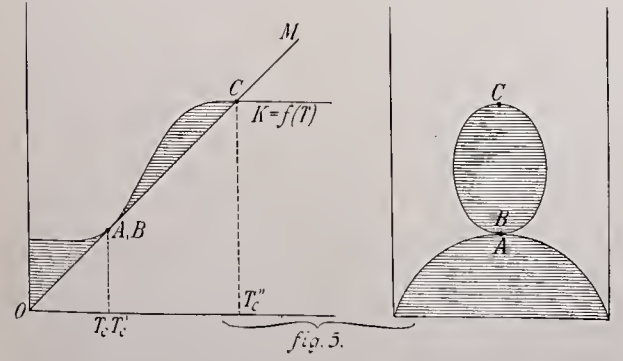
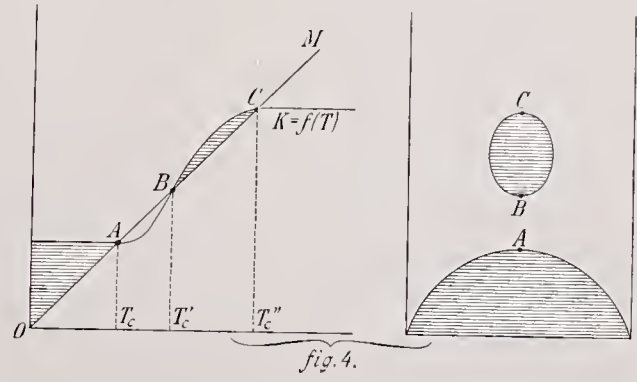
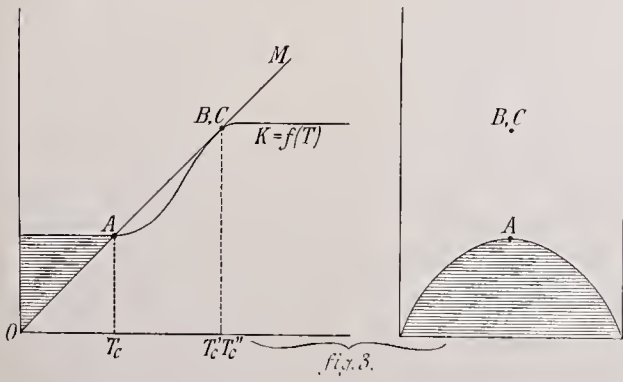
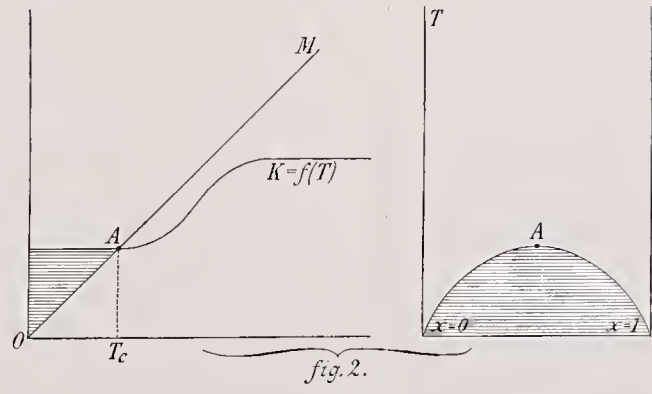
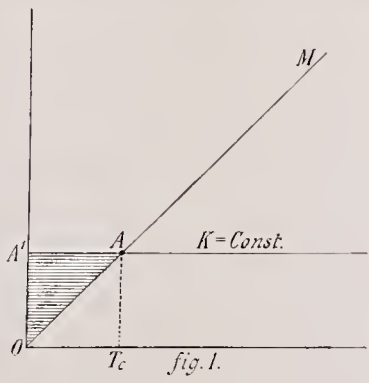
c. Zoodra echter de waarde van K_1 een weinig vermeerdert, zullen wij het overgangsgeval van fig. 3 kunnen krijgen. De kromme $K = f(T)$ raakt nu de rechte OM in B, C , en vanaf dit oogenblik zal de *geïsoleerde* plooi zich beginnen te vormen, welke zich boven de zoeven beschouwde normale plooi, die in ontoegankelijke diepte ligt, zal uitstrekken. Hier zijn het nog slechts twee samenvallende kritische punten in het eene punt B, C .

d. Wanneer de waarde van K_1 nog een weinig grooter is, zal het geval van fig. 4 zich kunnen voordoen, waar de rechte OM behalve in A nog in twee andere punten B en C wordt gesneden. De geïsoleerde plooi boven de normale heeft zich thans gevormd, met twee kritische punten, een *benedenste* in B en een *bovenste* in C . Tusschen B en C is overal $K > T$, evenals beneden A , zoodat wij ons van wege

J. J. VAN LAAR. „Over eenige verschij
twee vloeistoffen waarvan de eene a



J. J. VAN LAAR. „Over eenige verschijnselen, welke kunnen optreden bij de beperkte mengbaarheid van twee vloeistoffen waarvan de eene anomaal, speciaal water is.”



$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} < 0$ in het labiele gebied zullen bevinden, d.w.z. binnen de spinodale lijn der plooi.

Men vindt dit geval — of wel het geval van fig. 6 — bij een groot aantal stoffen verwezenlijkt, ook in het geval van *twee* anomale stoffen ¹⁾.

a. Nu eens vindt men alleen het *bovenste* kritisch mengpunt, zooals bij water en $\text{CO}_{\text{C}_2\text{H}_5}^{\text{CH}_3}$ (ROTHMUND) en bij H_2O en *isobutylalcohol* (ALEXEJEV); waarschijnlijk ook bij water en *aether* (KLOBBIE en ALEXEJEV), bij water en $\text{CO}(\text{C}_2\text{H}_5)_2$ (ROTHMUND), bij water en *aethyl-acetaat* (ALEXEJEV) en bij water en *amylalcohol* (ALEXEJEV), in welke laatste gevallen het punt *C* evenwel niet werd bereikt. Wat bv. water en *aether* betreft, hier vond KLOBBIE reeds, dat de waarden van *x* der beide coëxisterende vloeibare fasen elkaar bij verlaging van de temperatuur weer beginnen te naderen. Dit is een aanwijzing voor het bestaan òf van een lager gelegen benedenste mengpunt, òf van een samensnoering of vernauwing als in fig. 6.

β. Dan eens is het alleen het *benedenste* mengpunt, hetwelk is waargenomen, zooals bij water en *triaethylamin* (ROTHMUND), water en *diaethylamin* (GUTHRIE) en bij water en *β-collidine* (ROTHMUND). Het eerste mengsel zou zijn kritisch mengpunt (het punt *B*) bij ongeveer 18° C. bezitten, het derde bij 6° C. ²⁾.

Bij water en *nicotine* heeft HUDSON (Z. f. Ph. Ch. 47, p. 113) de volledige geïsoleerde plooi waargenomen. Maar hier vormt zich een hydraat, hetwelk zich gaandeweg bij hogere temperatuur ontleedt. De theorie van het verschijnsel blijft echter formeel hetzelfde: overal waar een vrij belangrijke verandering in de waarde van *v* optreedt — welke daarvan ook de oorzaak zij — kan men het bestaan van een dergelijke geïsoleerde plooi verwachten — zoodra de daartoe noodige voorwaarden slechts vervuld zijn.

Men vindt nog een ander voorbeeld in de mengsels van *koolzuur* en *nitrobenzol* (BÜCHNER), hetgeen het vermoeden opwekt, dat CO_2 in *vloeibaren* toestand een *associeerende* vloeistof is. Inderdaad bestaan er gewichtige redenen in het thermisch gedrag van die zelfstandigheid, welke dit vermoeden zouden bevestigen.

¹⁾ Vele anomale stoffen kunnen nl. als normaal worden beschouwd, omdat de verandering van *v* zoo gering is; alleen bij *water* is die verandering exceptioneel groot.

²⁾ KUENEN (Phil. Mag. [6] 6, p. 637—653 (1903)) heeft intusschen het bestaan van een benedenste mengpunt bij *diaethylamin* (bij 120° C.) niet kunnen bevestigen. In een vroegere verhandeling vond KUENEN ook een *benedenste* mengpunt bij mengsels van *aethaan* met *aethyl*, *propyl*, *isopropyl*- en *butylalcohol*.

Bij CH_3Cl en *pyridine* (ATEN) is waargenomen, dat deze stoffen in elke verhouding mengbaar zijn, maar dat de *verbinding*, die zich spoedig vormt, nagenoeg niet mengbaar is met de beide componenten. Ook hier wordt wederom een *benedenste* mengpunt gevonden, en wel bij *beide* plooiën — nl. bij die, gevormd door CH_3Cl en de verbinding, en bij die, gevormd door pyridine en de verbinding.

Het spreekt natuurlijk van zelf, dat het bestaan van een *benedenste* mengpunt noodzakelijk dat van een *bovenste* medebrengt. Want bij temperatuursverhooging zal het *vloeibare* mengsel meer en meer tot een *gasvormig* mengsel naderen, waar natuurlijk mengbaarheid in elke verhouding plaats vindt. (Hoe hierbij de plooi zich transformeeren kan, en overgaan in de dwarsplooi, valt geheel buiten het bestek van deze studie).

Omgekeerd zal men *niet* altijd uit het bestaan van een *bovenste* mengpunt tot dat van een *benedenste* kunnen besluiten, omdat — zelfs wanneer de connodale lijn zich naar beneden begint te sluiten — het geval van fig. 6 zal kunnen optreden.

Maar dit is zeker, dat wanneer een *bovenste* mengpunt wordt gevonden bij *gewone* temperaturen men altijd zal te doen hebben met het punt *C*, en niet met *A*, omdat dit laatste zich (zie fig. 2) bij mengsels van water en een normale (of anomale) stof altijd beneden -90°C . zal bevinden, en bij mengsels van twee normale stoffen (zie § 3) hoogstens een dertigtal graden beneden 0°C .

Men kan dus bijna altijd bij beperkte mengbaarheid het geval van fig. 4, of wel dat van fig. 6 verwachten. De *normale* plooi met het kritische mengpunt in *A* zal zich slechts in een groote minderheid van gevallen vertoonen, en kan als zeer exceptioneel beschouwd worden. Zoo zullen de mengsels van water met *phenol* (ALEXEJEV), met *barnsteenzuurmitril* (SCHREINEMAKERS), met *aniline* (ALEXEJEV), met *isoboterzuur* (id.), etc., etc. — welke alle een *bovenste* mengpunt vertoonen — bijna zeker voorbeelden aanbieden van het zeer algemeene geval van fig. 6 of van fig. 4.

e. Fig. 5 stelt wederom een overgangsgeval voor, waarbij de waarde van K_1 nog weer een weinig grooter is dan bij fig. 4. De twee plooiën — de normale en de geïsoleerde — zullen van af dit oogenblik tot één *doorlopende* plooi samenvallen.

f. Dit is het geval bij fig. 6. Men heeft het waargenomen bij mengsels van water en *secondaire butylalcohol* (ALEXEJEV). Maar — zooals wij reeds boven hebben opgemerkt, zullen er vele waarnemingen met een *bovenste* mengpunt, waarbij de samenstellingen der beide coëxisterende fasen bij lagere temperaturen al of niet tot elkaar beginnen te naderen, evengoed tot dit geval kunnen behooren

als tot dat van fig. 4. Het genoemde voorbeeld valt met zekerheid daaronder, omdat men heeft waargenomen, dat na de nadering der waarden van x deze bij nog lagere temperaturen opnieuw beginnen te divergeeren.

Fig. 7 laat zien, dat de vernauwing bij D , waar de kromme $K = f(T)$ in de nabijheid van de rechte OM komt, langzamerhand met toenemende waarden van K_1 zal verdwijnen, zoodat de plooi ten slotte wederom de *normale* gedaante zal aannemen — met dit verschil echter, dat het mengpunt C van onze quasi-normale plooi zich bij hogere temperaturen zal vertoonen dan het kritische punt A van de werkelijk normale plooi.

Opmerking. Het zal overbodig zijn op te merken, dat de *numerieke* berekeningen door middel van de formule (10) alleen dan kunnen worden uitgevoerd, wanneer aan de voorwaarden is voldaan, waaronder die uitdrukking is afgeleid. Dit zal dus slechts het geval wezen, wanneer werkelijk p tegenover $\frac{a}{v^2}$ (zie § 2) kan worden weggelaten, d.w.z. bij temperaturen, welke niet hoger zijn dan ongeveer de helft van de kritische temperatuur van het mengsel.

7. De vraag is nu, welke de voorwaarden zullen zijn, waaraan moet worden voldaan, opdat de overgangsgevallen van fig. 3 en fig. 5 kunnen optreden. Ook hier deelen wij alleen de uitkomsten der berekeningen mede, die wij dienaangaande hebben ingesteld. Wij hebben n.l. gevonden, dat de *geïsoleerde plooi* (fig. 4) alleen mogelijk is, wanneer de tweede (normale) stof een *kritische druk* heeft *tusschen ongeveer 35 en 70 atm.*, en dit nagenoeg onafhankelijk van de kritische temperatuur dezer stoffen (mits inliggende tusschen $\frac{1}{2}$ en 1 keer die van het water).

Alle normale ¹⁾ stoffen, welke een *kritischen druk* bezitten *boven ± 70 atm.*, kunnen zich *in alle verhoudingen* met het water mengen; alle dergelijke stoffen met een *kritischen druk beneden ± 35 atm.* vormen een *doorlopende plooi* (fig. 6).

Tot de eerste categorie van stoffen behooren die met betrekkelijk *klein molecuulairvolume* (veel anorganische stoffen en zouten); tot de tweede categorie die met betrekkelijk *groot molecuulairvolume* (veel organische stoffen).

Wat de factor $1 + \Delta = 1 + x(1 - x) \frac{\partial^2 \log p_c}{\partial x^2}$ betreft, zoo hebben

¹⁾ En zooals wij reeds boven zagen, ook vele *anomale* stoffen, waarbij de verandering van v gering is.

de berekeningen geleerd, dat deze bij *hoogere* temperaturen, waar β in de nabijheid van 1 komt, vrij groot kan worden, en ook vrij sterk van x afhankelijk is. Zoo vond ik b.v. voor dezen factor bij $\beta = 1$ ($T = 230^\circ$) de waarden 2,57, 2,54, 2,25, 1,94 en 1,70, resp. bij $x = 0,1, 0,2, 0,3, 0,4$ en $0,5$. Maar bij dergelijke hooge temperaturen gelden de afgeleide formules ook niet streng meer, daar p dan niet langer verwaarloosbaar is t. o. v. a/v^2 .

Evenwel zal voor *lagere* temperaturen, waar β dicht bij 0 komt, $1 + \Delta$ niet zeer veel van 1 verschillen, en ook weinig van x afhankelijk zijn. Bij deze temperaturen — en voor *die* temperaturen zijn de formules ook afgeleid — kan men derhalve $1 + \Delta$, zool niet verwaarloozen, dan toch als een konstanten factor beschouwen. Zoo vond ik bij $\beta = 0$ voor $1 + \Delta$ de waarden 1,08, 1,10, 1,10, 1,09 en 1,08, resp. bij $x = 0,1$ tot $0,5$.

Ten slotte heb ik de formule (10) toegepast op het geval van *triaethylamin* en water, en gevonden dat, al ligt de kritische druk, nl. 30 atm., beneden den zoeven aangegeven grensdruk van 35 atm., het optreden van een benedenste mengpunt bij ongeveer 18° C. door de boven gegeven theorie niet weersproken wordt. Men moet hierbij niet vergeten, dat wanneer de temperatuur, waarbij β praktisch $= 0$ is, boven -90° C. ligt, de bedoelde grensdruk ook beneden 35 atm. zal komen te liggen.

De Heer WINKLER biedt voor de Boekerij aan de dissertatie van den Heer G. W. MANSCHOT, getiteld: „Paralysis agitans”.

Na resumptie van het behandelde sluit de Voorzitter de vergadering.

CORRIGENDA.

De Heer J. A. C. OUDEMANS wenscht de volgende verbetering aan te brengen aan den slotzin van zijne mededeeling, in de vorige vergadering gegeven over het verslag: „Détermination de la latitude et d'un azimut etc.”

In plaats van dien zin leze men:

Ook mag er wel bij in aanmerking genomen worden, dat bij den heer POSTHUMUS MEYJES *drie* van de *twaalf* verschillen met het arithmetisch midden een *negatief* verschil, en bij spreker's bepalingen van 1879/80 *vijf* van de *negentien* een *positief* verschil vertoonen, dat deze grootheid ($0''88$) overtreft ¹⁾. Feitelijk kan het verschil tusschen beide resultaten dus als toevallig beschouwd worden.

Utrecht, 15 Januari 1905.

¹⁾ Het laatste verschil van 1879, $+1''74$, moet $+0''74$ gelezen worden.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 25 Februari 1905.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

Ingekomen stukken, p. 589.

P. H. SCHOUTE: „Over niet-lineaire stelsels van elkaar rakende bolruimten”, p. 589.

JAN DE VRIES: „Over een bijzonderen tetraedralen complex”, p. 600.

JAN DE VRIES: „Over een groep van stralencplexen met rationale complexkegels”, p. 605.

M. W. BEJERINCK: „Een obliqaat anaerobe gistings-sarcine”, p. 608.

Aanbieding van Boekgeschenken, p. 614.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is :

1°. Bericht van de Heeren SCHOUTE, JULIUS en ZWAARDEMAKER, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van het Bestuur van het 15^e Internationaal Medisch Congres, van 19—26 April te Lissabon te houden, met verzoek een afgevaardigde voor dat Congres te benoemen.

De Voorzitter verzoekt de medische leden daaromtrent van advies te willen dienen.

3°. 6^{ster} Bericht der Commission für die Festsetzung der Atomgewichte. Ter kennisneming voor de leden neergelegd.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt een mededeeling aan: „*Over niet-lineaire stelsels van elkaar rakende bolruimten*”.

1. Voor we tot ons eigenlijk onderzoek overgaan, is het noodzakelijk te onderzoeken, hoeveel bolruimten $n + 1$ willekeurig in de n -dimensionale ruimte R_n gegeven bolruimten aanraken. En op haar beurt eischt de beantwoording dezer vraag bekendheid met de ligging der gelijkvormigheids punten dier bolruimten. We beginnen dus met de

beschouwing dezer gelijkvormigheidspunten. Daarbij stellen we de bolruimte, die in R_n weer de meetkundige plaats is van de op een afstand r van het middelpunt M gelegen punten, door het symbool $B_n(M, r)$ voor.

2. Even als bij twee in een zelfde vlak gelegen cirkels komen bij twee in R_n liggende bolruimten $B_n(M_1, r_1)$ en $B_n(M_2, r_2)$ op de verbindingslijn $M_1 M_2$ der middelpunten twee gelijkvormigheidspunten voor, een uitwendig gelijkvormigheidspunt U_{12} en een inwendig gelijkvormigheidspunt I_{12} ; door U_{12} gaan de verbindingslijnen $P_1 P_2$ der uiteinden P_1, P_2 van rechtstreeks evenwijdige stralen, door I_{12} de verbindingslijnen $P_1 P'_2$ der uiteinden P_1, P'_2 van tegengesteld evenwijdige stralen.

We onderstellen nu, dat in R_n een aantal van $n + 1$ bolruimten $B_n(M_k, r_k)$, ($k = 1, 2, \dots, n + 1$) willekeurig gegeven is, en gaan nu de ligging der $(n + 1)_2$ paren gelijkvormigheidspunten $(U_{p,q}, I_{p,q})$ met betrekking tot elkaar onderzoeken. Daartoe merken we eerst op, dat de drie paren gelijkvormigheidspunten der drie bolruimten $B_n(M_i, r_i)$, ($i = 1, 2, 3$) de drie paren tegenoverstaande hoekpunten van een volledige vierzij vormen, daar ieder der vier puntendrietalen

$$(U_{12} U_{13} U_{23}), (U_{12} I_{13} I_{23}), (I_{12} U_{13} I_{23}), (I_{12} I_{13} U_{23})$$

uit drie punten eener rechte bestaat; we duiden deze lijnen in de aangewezen volgorde door

$$l_{123} \quad , \quad l_{12}^{(3)} \quad , \quad l_{13}^{(2)} \quad , \quad l_{23}^{(1)}$$

aan. Beschouwen we nu verder de $n - 1$ lijnenparen $(l_{12p}, l_{12}^{(p)})$ door U_{12} en de $n - 1$ lijnenparen $(l_{1p}^{(2)}, l_{2p}^{(1)})$ door I_{12} — waarbij p achtereenvolgens de $n - 1$ waarden $3, 4, \dots, n + 1$ aanneemt —, dan blijkt onmiddellijk, dat elke ruimte R_{n-1} door $n - 1$ lijnen l door U_{12} (of I_{12}) — met alle onderling verschillende aanwijzers p — van elk der $(n + 1)_2$ paren gelijkvormigheidspunten $(U_{p,q}, I_{p,q})$ er een bevat. Zoo zal een ruimte R_{n-1} door $n - 1$ lijnen l door U_{12} het punt $U_{p,q}$ of het punt $I_{p,q}$ bevatten, naarmate de beide lijnen l met p en q tot derden index gelijksoortig of ongelijksoortig zijn, en vindt bij een ruimte R_{n-1} door $n - 1$ lijnen l door I_{12} precies het omgekeerde plaats. Omdat de keus der lijnen l in beide gevallen met $n - 1$ bifurcaties overeenstemt, gaan er door elk der beide punten U_{12}, I_{12} 2^{n-1} dier ruimten R_{n-1} . Dus geldt de stelling:

„Er zijn 2^n ruimten R_{n-1} aan te wijzen, waarvan elk $(n + 1)_2$ gelijkvormigheidspunten van een stelsel van $n + 1$ willekeurig in

R_n gegeven bolruimten B_n bevat, en wel van elk der $(n+1)_2$ paren $(U_{p,q}, I_{p,q})$ een."

Op nadere bijzonderheden van ligging der gelijkvormigheidspunten behoeven we voor het doel, dat we ons hier stellen, niet verder in te gaan.

3. Uit de bekende eigenschappen van de figuur bestaande uit twee cirkels en hun gelijkvormigheidspunten leest men (fig. 1):

$$\left. \begin{array}{l} UP_1^u : UP_2 = r_1 : +r_2 \\ IP_1^i : IP_2 = r_1 : -r_2 \end{array} \right\} , \quad \left. \begin{array}{l} UP_1^u \cdot UP_2^u = UC_1^u \cdot UC_2 \\ IP_1^i \cdot IP_2^i = IC_1^i \cdot IC_2 \end{array} \right\}$$

Met behulp van deze betrekkingen vindt men gemakkelijk de

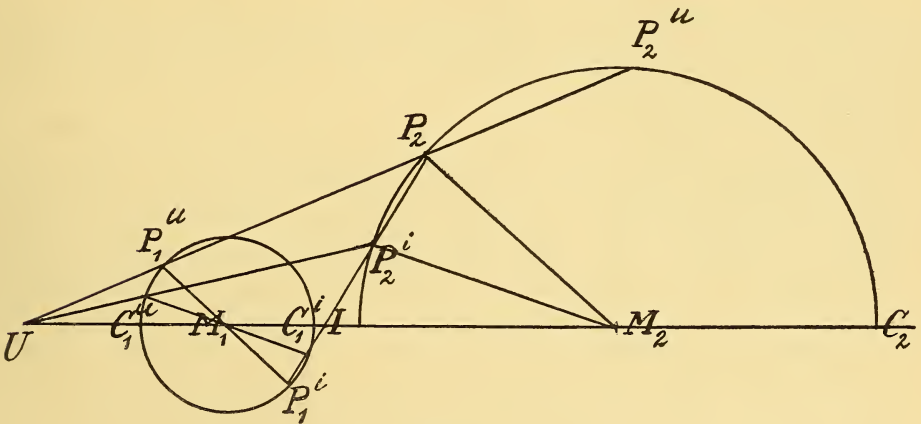


Fig. 1.

volgende stellingen, waarin voor $B_n(M_1, r_1)$ en $B_n(M_2, r_2)$ korthedshalve $B_n^{(1)}$ en $B_n^{(2)}$ geschreven is:

„De bolruimten $B_n^{(1)}$ en $B_n^{(2)}$ zijn gelijkvormig en positief gelijkstandig met U , gelijkvormig en negatief gelijkstandig met I tot gelijkvormigheidspunt en $\pm \frac{r_1}{r_2}$ tot verhouding van gelijkvormigheid. De met elkaar overeenkomende punten, P_1^u en P_2 in het eerste en P_1^i en P_2 in het tweede geval, noemt men *homoloog*.”

„De bolruimten $B_n^{(1)}$ en $B_n^{(2)}$ stemmen met elkaar overeen in een transformatie door weerkerige voerstralen met U tot centrum en $UC_1^u \cdot UC_2$ tot positieve macht en in een transformatie door weer-

keerige voerstralen met I tot centrum en IC_1^i . IC_2 tot negatieve macht. De met elkaar overeenkomende punten, P_1^u en P_2^u in het eerste en P_1^i en P_2^i in het tweede geval, noemt men *antihomoloog*. En de beide in deze stelling voorkomende transformaties, waardoor de bolruimten $B_n^{(1)}$ en $B_n^{(2)}$ in elkaar overgaan zullen verder kortheidshalve door de symbolen $U(1, 2)$ en $I(1, 2)$ aangeduid worden."

„Elke bolruimte B^n door een paar antihomologe punten P_1 en P_2 van $B_n^{(1)}$ en $B_n^{(2)}$ snijdt deze bolruimten onder gelijke hoeken. Raakt de bolruimte B_n door P_1 en P_2 in P_1 de bolruimte $B_n^{(1)}$ aan, dan zal zij in P_2 de bolruimte $B_n^{(2)}$ aanraken. En deze aanrakingen zullen gelijksoortig zijn of niet, naarmate U of I het centrum der antihomologe verwantschap is."

In verbinding met de algemeene stelling omtrent de ligging der gelijkvormigheidspunten vormen de tweede en derde dezer drie eenvoudige stellingen den grondslag eener methode tot oplossing van het vraagstuk een bolruimte B^n te construeeren, die $n + 1$ willekeurig in R_n gegeven bolruimten $B_n^{(1)}$, $B_n^{(2)}$, . . . $B_n^{(n+1)}$ aanraakt. Zoo als onmiddellijk blijken zal, beantwoordt aan elke der 2^n ruimten R^{n-1} door $(n+1)_2$ gelijkvormigheidspunten een paar aanrakende bolruimten B_n en is de aanraking van een dezer bolruimten met $B_n^{(p)}$ en $B_n^{(q)}$ gelijksoortig of niet, naarmate de gekozen ruimte R_{n-1} van de gelijkvormigheidspunten $U_{p,q}$, $I_{p,q}$ van $B_n^{(p)}$ en $B_n^{(q)}$ het eerste of het tweede bevat. Dus is 2^{n+1} het aantal der theoretische oplossingen. En wijst men uitwendige aanraking door het teeken $+$, inwendige aanraking door het teeken $-$ aan, dan zijn de 2^n paren van oplossingen aangewezen door de paren van elkaar geheel tegenovergestelde teekencombinaties der uit $n + 1$ termen bestaande reeks

$$\pm \pm \pm \dots \pm,$$

waarbij de twee oplossingen van een zelfde paar òf in alle teekens met elkaar overeenstemmen, òf in alle teekens van elkaar verschillen.

De constructie der rakende bolruimten bewijst het boven beweerde omtrent het aantal der oplossingen en haar verband met de 2^n ruimten R_{n-1} . We geven ze hier — om breedsprakigheid te vermijden —

voor het geval $n = 4$ in een vorm, waarbij ze zich onmiddellijk op het geval van een willekeurige n laat overdragen. Ze luidt :

a. „Zijn in R_4 de bolruimten $B_4^{(1)}, B_4^{(2)}, \dots, B_4^{(5)}$ willekeurig gegeven, is d_{123}^{45} de ruimte door de punten

$$U_{12}, U_{13}, U_{23}, U_{45}, I_{14}, I_{24}, I_{34}, I_{15}, I_{25}, I_{35}$$

en P_1 een geheel willekeurig punt van $B_4^{(1)}$, zoo bepale men de antihomologe punten P_2, P_3, P_4, P_5 van P_1 in de transformaties $U(1, 2), U(1, 3), I(1, 4), I(1, 5)$ en de bolruimte $B_4(P)$ door de vijf punten P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 .”

b. Is ε_1 het snijvlak van d_{123}^{45} met de machtruimte van $B_4^{(1)}$ en $B_4(P)$, zoo brenge men door ε_1 de twee raakruimten aan $B_4^{(1)}$ aan en duide met Q_1 en Q_1' de raakpunten aan.”

c. Eindelijk bepale men de puntenparen $(Q_2, Q_2'), (Q_3, Q_3'), (Q_4, Q_4'), (Q_5, Q_5')$, die antihomoloog zijn met (Q_1, Q_1') in de transformaties $U(1, 2), U(1, 3), I(1, 4), I(1, 5)$ en de bolruimten $B_4(Q)$ en $B_4(Q')$ gaande door de puntenvijftallen Q_1, Q_2, \dots, Q_5 en Q_1', Q_2', \dots, Q_5' . Deze bolruimten $B_4(Q)$ en $B_4(Q')$ vormen een der 2^n paren oplossingen van het vraagstuk.”

Het bewijs van deze constructie is eenvoudig. Bij beweging van P_1 over $B_4^{(1)}$ blijft de macht van elk der tien in d_{123}^{45} gelegen gelijkvormigheidspunten met betrekking tot de bolruimte $B_4(P)$ onveranderd; derhalve vormen de bolruimten $B_4(P)$, die mogelijk zijn, een bundel met d_{123}^{45} tot gemeenschappelijke machtruimte en is ε_1 een gemeenschappelijk machtvlak van $B_4^{(1)}$ met elk der bolruimten $B_4(P)$ diens bundels. Kiest men nu voor P een der beide raakpunten Q of Q' van $B_4^{(1)}$ met een ruimte door ε_1 , dan moet deze raakruimte eveneens in hetzelfde punt de door dit punt gaande bolruimte $B_4(Q)$ of $B_4(Q')$ aanraken, enz.

4. We komen nu tot het eerste gedeelte van ons eigenlijk onderzoek betreffende het stelsel der bolruimten B_n , die n willekeurig in R_n gegeven bolruimten $B_n(M_k, r_k)$, ($k = 1, 2, \dots, n$) aanraken, en brengen, den voor onze ruimte door REYE aangewezen weg volgend, het algemeene geval tot een meer eenvoudig geval terug, waarin

de middelpunten M_k der n bolruimten, die aangeraakt moeten worden, in een ruimte R_{n-2} liggen.

De middelpunten M_k der n gegeven bolruimten $B_n(M_k, r_k)$ bepalen een ruimte R_{n-1} , die deze bolruimten volgens „groote bolruimten” $B_{n-1}(M_k, r_k)$ en dus loodrecht snijdt. Zij O het machtpunt van deze n bolruimten B_{n-1} en r^2 de voorloopig positief onderstelde macht van dit punt met betrekking tot de bolruimten B_{n-1} . Dan snijdt de in R_{n-1} liggende bolruimte $B_{n-1}(O, r)$ de n bolruimten $B_{n-1}(M_k, r_k)$ en dus ook de n bolruimten $B_n(M_k, r_k)$ loodrecht. Derhalve doet een transformatie door weerkeeringe voerstralen met een willekeurig punt O' van het oppervlak der bolruimte $B_{n-1}(O, r)$ als centrum de n gegeven bolruimten $B_n(M_k, r_k)$ en de haar loodrecht snijdende bolruimte $B_{n-1}(O, r)$ overgaan in n nieuwe bolruimten B'_n en een haar loodrecht snijdende ruimte R_{n-2} . Dit bijzondere geval, waarbij de middelpunten M'_k der n bolruimten, die aangeraakt moeten worden, in een ruimte R_{n-2} liggen, zal eerst behandeld worden.

5. Is B''_n een bolruimte, die de n nieuwe bolruimten B'_n aanraakt, dan zal deze bolruimte B''_n bij draaiing om de ruimte R_{n-2} door de n middelpunten M'_k in elken stand de n bolruimten B'_n aanraken en dus een enkelvoudig oneindige reeks van aanrakende bolruimten vormen. In een willekeurige ruimte R_{n-1} door de asruimte R_{n-2} vindt men volgens de boven verkregen uitkomsten 2^{n-1} paren van bolruimten B''_{n-1} , die de in R_{n-1} liggende groote bolruimten B'_{n-1} van de n bolruimten B'_n aanraken, en elk dezer paren bestaat hier uit den aard der zaak uit twee bolruimten B''_{n-1} , die met betrekking tot R_{n-2} symmetrisch liggen. Daar elk dier paren bij draaiing tot een enkelvoudig oneindige reeks voert, zijn er 2^{n-1} zulke reeksen. De bolruimten van elk dier reeksen worden — vergelijk mijn vorige mededeeling op blz. 489 — door een n -dimensionalen torus $T_{n,1}$ omhuld; haar middelpunten liggen op een cirkel. En beperkt men zich tot een der 2^{n-1} reeksen, dan kan men het stelsel der n aangeraakte bolruimten B'_n uitbreiden tot een $n-2$ -voudig oneindige reeks door zich alle bolruimten voor te stellen, die uit de punten van R_{n-2} zoo beschreven worden, dat zij een der bolruimten van de enkelvoudig oneindige reeks en dus ook alle bolruimten dier reeks aanraken.

6. Bepalen we ons nu verder tot een enkele der 2^{n-1} enkelvoudig oneindige reeksen, dan hebben we dus twee stelsels van bolruimten gevonden, die de merkwaardige eigenschap bezitten, dat elke bolruimte van het eene stelsel elke bolruimte van het andere stelsel aanraakt. Van deze beide stelsels is het eene een enkelvoudig oneindige

reeks van even groote bolruimten met een cirkel $C(M_0, r_0)$, die M_0 en r_0 tot middelpunt en straal hebben en in het vlak ε_0 liggen mag, tot meetkundige plaats van middelpunten, terwijl het andere een $n-2$ -voudig oneindige reeks is met de ruimte R_{n-2} loodrecht in M_0 op ε_0 tot meetkundige plaats van middelpunten. Hoe vervormen zich deze beide stelsels, als we op beide — om weer tot onze n gegeven bolruimten B_n terug te keeren — de transformatie door weerkerige voerstralen met O' tot centrum en de boven gebruikte macht opnieuw toepassen?

De beantwoording dezer vraag wordt gemakkelijk gemaakt door de opmerking, dat de n -dimensionale figuur, bestaande uit de beide stelsels S'_1, S'_{n-2} en hun omvormingen S_1, S_{n-2} , een symmetrievlak bezit, het vlak σ door M_0, O' en de projectie O'' van O' op R_{n-2} . Dit vlak σ , dat het vlak van teekening vormt van fig. 2, heeft met ε_0 de met $O' O''$ evenwijdige middellijn m' van den cirkel $C(M_0, r_0)$ gemeen en staat volgens die lijn m' loodrecht op ε_0 ; dus is het symmetrievlak voor S'_1 . Verder heeft het met R_{n-2} de lijn $M_0 O''$ gemeen en staat het volgens die lijn a loodrecht op R_{n-2} ; dus is het ook symmetrievlak voor S'_{n-2} . En als het symmetrievlak is voor S'_1 en S'_{n-2} , dan is het dit ook voor S_1 en S_{n-2} , omdat het het centrum O' der transformatie bevat.

We bewijzen nu vooreerst, dat de middelpunten van de bolruimten van S_1 in een kegelsnee liggen. Daartoe beschouwen we in het symmetrievlak σ (fig. 2) de snijpunten M', M'' met den cirkel $C(M_0, r_0)$, den cirkel van doorsnee $C(M_1, r_1)$ met de bolruimte $B''_n(M_1, r_1)$ van S'_1 en het punt \bar{O} van de lijn $M' O'$, waarvoor $M' O' \cdot M' \bar{O} = r_1^2$ is. Dan is het punt A van a , dat van O' en \bar{O} even ver verwijderd is, het middelpunt van een bol $B_3(A, A O')$ met $A O'$ tot straal, die $B''_n(M', r')$ en dus ook alle bolruimten B''_n der enkelvoudig oneindige reeks loodrecht snijdt. Deze bol gaat door de transformatie door weerkerige voerstralen met O' tot centrum over in een vlak ε loodrecht op $O'A$, dat σ volgens een loodrecht op $O'A$ staande lijn m snijdt; dit vlak ε moet de middelpunten der bolruimten van S_1 bevatten, daar het al die bolruimten loodrecht snijdt. En verder blijft bij de transformatie het middelpunt eener bolruimte op de lijn, die dit punt met het centrum O' der transformatie verbindt; dus moet de scheve kegel met O' tot top en cirkel $C(M_0, r_0)$ tot basis de middelpunten van de bolruimten der reeks S_1 bevatten en is de meetkundige plaats dier middelpunten de kegelsnee van doorsnee van dezen kegel met het vlak ε . Van deze kegelsnee is m een as van symmetrie en zijn de punten \bar{M}' en \bar{M}'' , die de middelpunten der getransformeerde bolruimten $B''_n(M', r')$, $B''_n(M'', r')$ worden, toppen. Deze

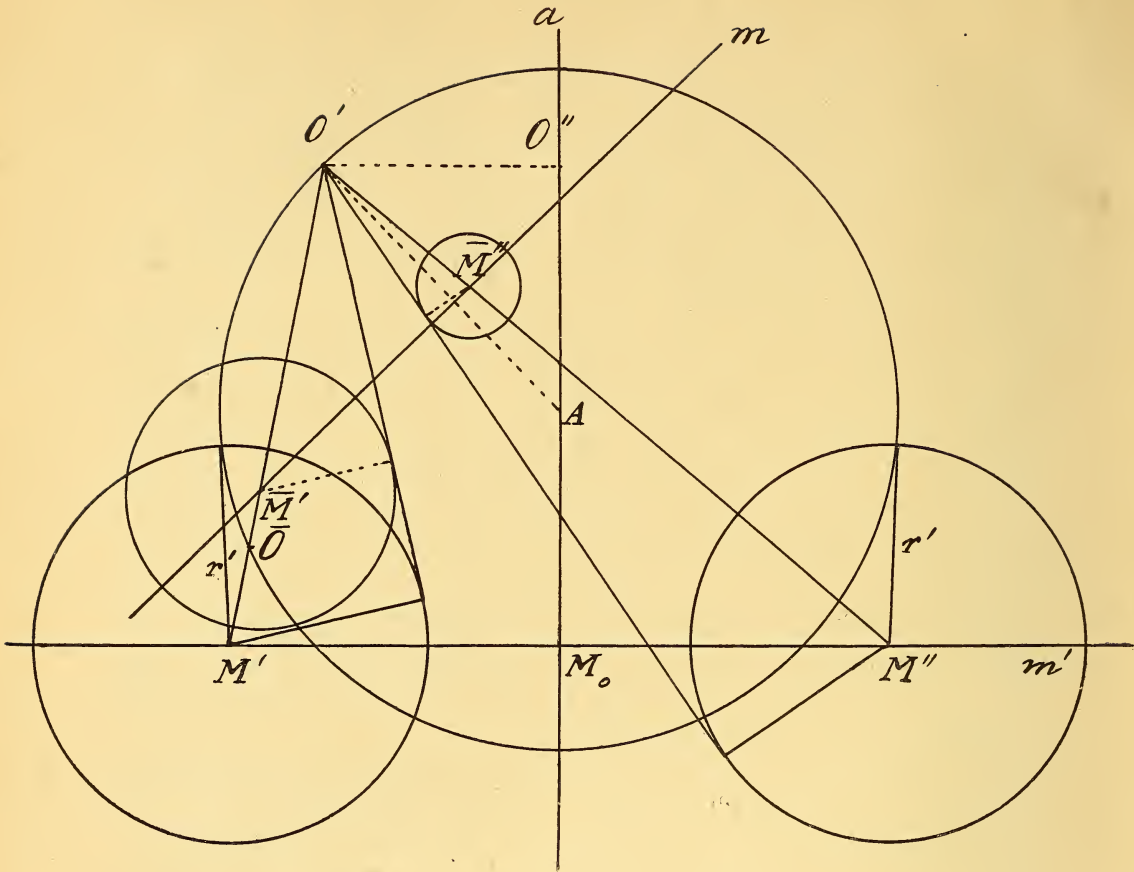


Fig. 2.

kegelsnee is een ellips E , een parabool P of een hyperbool H , naarmate geen, een of twee der bolruimten B''_n van S'_1 , door O' gaan, d. w. z. naarmate O' buiten de beide cirkels $C(M', r')$ en $C(M'', r'')$, op een dier cirkels, of binnen een dier cirkels ligt. Van deze drie gevallen stelt fig. 2 het eerste voor en dit wordt verder uitsluitend beschouwd.

In deze onderstelling, dat de gevonden kegelsnee een ellips E is, zullen de transformaties $B_n(\bar{M}', \bar{r}')$ en $B_n(\bar{M}'', \bar{r}'')$ van de bolruimten $B''_n(M', r')$ en $B''_n(M'', r'')$ iedere bolruimte $B_n(\bar{M}, \bar{r})$ van het stelsel S_{n-2} op dezelfde wijs aanraken. Uit den driehoek $\bar{M}\bar{M}'\bar{M}''$ volgt dan, als we de voerstralen $\bar{M}'\bar{M}$ en $\bar{M}''\bar{M}$ van \bar{M} ten opzichte van de vaste punten \bar{M}' en \bar{M}'' door u en v voorstellen, de betrekking $u - v = \pm(\bar{r}' - \bar{r}'')$. Dus is de meetkundige plaats der middelpunten van de bolruimten $B_n(\bar{M}, \bar{r})$ van het stelsel S_{n-2} de omwentelingsfiguur, die ontstaat, als de hyperbool H met \bar{M}' en \bar{M}'' tot brandpunten en $\pm(\bar{r}' - \bar{r}'')$ tot halve bestaanbare as in de ruimte R_{n-1} door R_{n-2} en

O om m draait. En omdat elke bolruimte B_n van S_1 de twee bolruimten van S_{n-1} aanraakt, die de toppen der hyperbool H tot middelpunten hebben, zijn omgekeerd die toppen der hyperbool H de brandpunten der ellips ε . Dus geldt de stelling :

„De bolruimten B_n' , die n willekeurig in R_n gegeven bolruimten B_n aanraken, vormen 2^{n-1} enkelvoudig oneindige reeksen. De bolruimten van een willekeurige dier reeksen hangen hierdoor samen, dat ze een bepaalde bolruimte $B_n^{(0)}$ loodrecht snijden en haar middelpunten op een bepaalde kegelsnee (K') liggen; de bepalende grootheden, bolruimte $B_n^{(0)}$ en kegelsnee (K'), veranderen van reeks tot reeks. Met elke reeks komt als omhullende van haar bolruimten een bepaalde gebogen ruimte van den vierden graad overeen, de n -dimensionale cyclide van DUPIN. En beperkt men zich tot een enkele reeks, dan laat het stelsel der n gegeven bolruimten B_n zich uitbreiden tot een $n-2$ -voudig oneindige reeks van bolruimten B_n , die hierdoor samenhangen, dat ze een andere bolruimte $B_n^{(0)}$ loodrecht snijden en haar middelpunten gelegen zijn op het oppervlak eener omwentelingsfiguur ontstaan door wenteling van een kegelsnee (K). Deze twee kegelsneden (K) en (K') liggen in onderling loodrechte vlakken zóó, dat de brandpunten van de eene toppen zijn van de andere en omgekeerd.”

7. De toegepaste transformatie door weerkeerige voerstralen wordt onmogelijk in het bestaanbare gebied als de gemeenschappelijke macht van het machtpunt O der n gegeven bolruimten B_n met betrekking tot die bolruimten negatief wordt. In dit geval kan men alvorens te transformeeren de stralen der n gegeven bolruimten zoo met een gemeenschappelijk bedrag verminderen, dat de straal van een dier bolruimten verdwijnt. Dan is de macht van het machtpunt \bar{O} der nieuwe bollen zeker positief. Door nu met het nieuwe stelsel te opereeren en daarna, als het stelsel \bar{S} gevonden is, de stralen der bolruimten van S met het aangenomen bedrag te vermeerderen, komt men tot het verlangde doel. Zoo als gemakkelijk blijkt, kan men zelfs de stralen van eenige der gegeven bolruimten met den straal der bolruimte, die punt-bolruimte worden gaat, vermeerderen, mits men de reeks der rakende bolruimten hiermee overeenkomstig kieze.

8. Zijn er ook niet-lineaire stelsels S_k en S_{n-k-1} van bolruimten B_n , respectievelijk k -voudig en $n-k-1$ -voudig oneindig, in R_n zoo gelegen, dat elke bolruimte van het eene stelsel alle bolruimten van het andere aanraakt?

Deze vraag moet, zoo als we hier stelkundig zullen aantoonen, bevestigend beantwoord worden.

Staan in een ruimte R_{n-1} van R_n de ruimten R_k en R_{n-k-1} , die slechts het punt O met elkaar gemeen hebben, in dit punt loodrecht op elkaar, is OP de loodlijn in O op R_{n-1} , OQ een willekeurige lijn door O in R_k , OR een willekeurige lijn door O in R_{n-k-1} en neemt men (fig. 3) in de vlakken OPQ en OPR een ellips (E) met de halve assen $OA = a$, $OB = b$ en een hyperbool (H) met de halve assen $OC = c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $OD = b$ aan, dan ontstaan door wenteling van (E) om OP in de ruimte $R_{k+1} = (OP, R_k)$ — waarbij ieder punt een bolruimte B_k beschrijft — een kwadratische omwentelingsruimte $O_{k+1}^{(2)}$, door wenteling van (H) om OP in de ruimte $R_{n-k} = (OP, R_{n-k-1})$ — waarbij ieder punt een bolruimte B_{n-k-1}

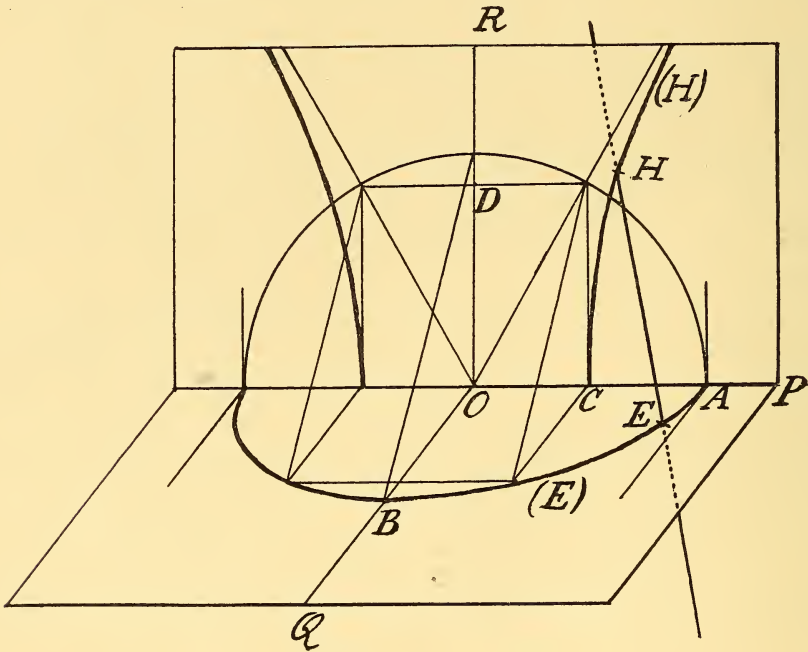


Fig. 3.

beschrijft — een kwadratische omwentelingsruimte $O_{n-k}^{(2)}$. Zijn nu E en H willekeurig gekozen punten dier omwentelingsfiguren, dan kan de afstand EH gemakkelijk berekend worden. Gebruikt men namelijk een rechthoekig coördinatenstelsel met O tot oorsprong, OP tot as OX_1 , het vlak OPE tot vlak OX_1X_2 , het vlak OPH tot vlak OX_1X_3 , dan zijn de coördinaten van de punten E en H

$E \dots x_1 = a \cos \varphi, \quad x_2 = b \sin \varphi, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \dots, x_n = 0,$
 $H \dots x_1 = c \sec \psi, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = b \tan \psi, \quad x_4 = 0, \dots, x_n = 0$
 en vindt men

$$EH = a \sec \psi - c \cos \varphi.$$

Hieruit volgt, dat de bolruimten $B_n(E, c \cos \varphi + \varrho)$ en $B_n(H, a \sec \psi + \varrho)$, waarbij ϱ een willekeurige constante voorstelt, elkaar aanraken en deze aanraking een inwendige of een uitwendige is, naarmate $c \cos \varphi + \varrho$ en $a \sec \psi + \varrho$ al dan niet hetzelfde teeken hebben. Dus geldt de stelling:

„Beschrijft men uit elk punt E van $O_{k+1}^{(2)}$ met $a \cos \varphi$ tot x_1 een bolruimte $B_n(E, c \cos \varphi + \varrho)$ en uit elk punt H van $O_{n-k}^{(2)}$ met $c \sec \psi$ tot x_1 een bolruimte $B_n(H, a \sec \psi + \varrho)$, waarbij ϱ een willekeurige constante voorstelt en φ en ψ alle mogelijke waarden aannemen, dan doet men twee stelsels S_k, S_{n-k-1} van bolruimten B_n ontstaan met de eigenschap, dat elke bolruimte van het eene alle bolruimten van het andere aanraakt”.

De beide stelsels van bolruimten worden door een zelfde gebogen ruimte van den vierden graad omhuld. Zijn namelijk van een rechthoekig coördinatenstelsel met O tot oorsprong en OP tot as OX_1 de assen $OX_2, OX_4, OX_5, \dots OX_{k+2}$ in R_{k+1} , de assen $OX_3, OX_{k+3}, OX_{k+4}, \dots OX_n$ in R_{n-k} gelegen, dan kunnen de coördinaten van twee willekeurig op $O_{k+1}^{(2)}$ en $O_{n-k}^{(2)}$ liggende punten E en H geschreven worden in den vorm

E	H
$x_1 = a \cos \varphi$	$x_1 = c \sec \psi$
$x_2 = b \sin \varphi \cos \varphi_1$	$x_2 = 0$
$x_3 = 0$	$x_3 = b \operatorname{tg} \psi \cos \psi_1$
$x_4 = b \sin \varphi \sin \varphi_1 \cos \varphi_2$	$x_4 = 0$
$x_5 = b \sin \varphi \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_3$	$x_5 = 0$
.
$x_{k+1} = b \sin \varphi \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots$ $\sin \varphi_{k-2} \cos \varphi_{k-1}$	$x_{k+1} = 0$
$x_{k+2} = b \sin \varphi \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots$ $\sin \varphi_{k-2} \sin \varphi_{k-1}$	$x_{k+2} = 0$
$x_{k+3} = 0$	$x_{k+3} = b \operatorname{tg} \psi \sin \psi_1 \cos \psi_2$
$x_{k+4} = 0$	$x_{k+4} = b \operatorname{tg} \psi \sin \psi_1 \sin \psi_2 \cos \psi_3$
.
$x_{n-1} = 0$	$x_{n-1} = b \operatorname{tg} \psi \sin \psi_1 \sin \psi_2 \dots$ $\sin \psi_{n-k-3} \cos \psi_{n-k-2}$
$x_n = 0$	$x_n = b \operatorname{tg} \psi \sin \psi_1 \sin \psi_2 \dots$ $\sin \psi_{n-k-3} \sin \psi_{n-k-2}$

en dan is

$$(x_1 - a \cos \varphi)^2 + (x_2 - b \sin \varphi \cos \varphi_1)^2 + x_3^2 + (x_4 - b \sin \varphi \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)^2 + \dots \\ + (x_{k+2} - b \sin \varphi \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{k-2} \sin \varphi_{k-1})^2 + x_{k+3}^2 + \dots + x_n^2 = \\ = (c \cos \varphi + \varrho)^2$$

de vergelijking der bolruimte $B_n(E, c \cos \varphi + \varrho)$. Schrijft men deze vergelijking in den vorm

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + b^2 - \varrho^2 = \\ = 2 \{ a x_1 \cos \varphi + b \sin \varphi [x_2 \cos \varphi_1 + x_4 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \dots + x_{k+2} \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{k-1}] \}$$

en daaronder de k vergelijkingen, die door differentiatie naar $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-1}$ uit haar ontstaan, dan geeft optelling der $k+1$ vergelijkingen, nadat men ze in het vierkant gebracht heeft

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + b^2 - \varrho^2 \right)^2 = 4 \left[(a x_1 + c \varrho)^2 + b^2 \left(x_2^2 + \sum_{i=4}^{k+2} x_i^2 \right) \right]. \quad (1)$$

En deze zelfde vergelijking verkrijgt men in de gedaante

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - b^2 - \varrho^2 \right)^2 = 4 \left[(c x_1 + a \varrho)^2 - b^2 \left(x_3^2 + \sum_{i=k+3}^n x_i^2 \right) \right],$$

als men de bolruimten van het stelsel S_{n-k-1} beschouwt.

9. Voor een veranderlijken parameter ϱ stelt vergelijking 1) een stelsel van evenwijdige n -dimensionale cycliden van DUPIN voor. Hierbij kan men vragen naar de n aantallen, die achtereenvolgens aangeven, hoeveel dier cycliden door een punt gaan of een lijn, een vlak, een ruimte, enz. aanraken. Bij dit onderzoek treedt het $k+(n-k-1)$ d. i. $n-1$ -voudige stralenstelsel der rechten op den voorgrond, die een willekeurig punt E van $O_{k+1}^{(2)}$ met een willekeurig punt H van $O_{n-k}^{(2)}$ vereenigen; het geval $n=3$ is in een klein opstel vroeger behandeld („*Prace matematyczno-fizyczne*”, deel 15, blz. 83—85, 1904). En op het meer algemeene geval gaan we hier niet in.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan: „*Over een bijzonderen tetraedraalen complex.*”

1. Door de vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k^2 \quad \dots \quad (1)$$

wordt een stelsel gelijkvormige ellipsoïden aangewezen.

De normaal in het punt P_1 op de ellipsoïde, welke dit punt

bevat, wordt bepaald door

$$\frac{a^2(x-x_1)}{x_1} = \frac{b^2(y-y_1)}{y_1} = \frac{c^2(z-z_1)}{z_1},$$

of ook door

$$x = \frac{a^2 + u}{a^2} x_1, \quad y = \frac{b^2 + u}{b^2} y_1, \quad z = \frac{c^2 + u}{c^2} z_1. \quad (2)$$

Voor hare orthogonale stralencoördinaten, d. z. de grootheden

$$p_1 = x - x', \quad p_2 = y - y', \quad p_3 = z - z', \\ p_4 = yz' - zy', \quad p_5 = zx' - xz', \quad p_6 = xy' - yx',$$

vinden wij

$$p_1 = \frac{u' - u}{a^2} x_1 \text{ enz.} \quad p_4 = \frac{(b^2 - c^2)(u' - u)}{b^2 c^2} y_1 z_1 \text{ enz.}$$

Hieruit volgt, dat de ∞^3 normalen van het stelsel ellipsoïden een quadratischen complex vormen met de vergelijking

$$a^2 p_1 p_4 + b^2 p_2 p_5 + c^2 p_3 p_6 = 0. \quad (3)$$

2. Voor de doorgangen der normaal met XOZ en YOZ heeft men achtereenvolgens $u'' = -b^2$ en $u' = -a^2$, dus

$$z'' = \frac{c^2 - b^2}{c^2} z_1 \quad \text{en} \quad z' = \frac{c^2 - a^2}{c^2} z_1.$$

Nu volgt uit

$$z'' : z' = (c^2 - b^2) : (c^2 - a^2)$$

dat de complex kan opgebouwd worden uit ∞^1 lineaire congruenties, waarvan de richtlijnen twee in XOZ en YOZ gelegen projectieve bundels van evenwijdige stralen vormen, welke de richtingen OX en OY hebben. De complex is dus *tetraedraal* en heeft tot *hoofdpunten* O en de oneindig ver op de assen gelegen punten X_∞ , Y_∞ , Z_∞ .

De doorgang van den complexstraal met XOY is bepaald door $u''' = -c^2$. Merkt men op, dat de parameter u evenredig is met den afstand van het door hem aangewezen punt P tot het punt P_1 , dan ziet men, dat uit

$$\frac{u''' - u'}{u''' - u''} = \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}$$

de kenmerkende dubbelverhouding van den complex wordt verkregen, n.l.

$$(P' P'' P''' P^\infty) = (a^2 - c^2) : (b^2 - c^2).$$

3. De voetpunten P_1 der uit het punt P_0 getrokken normalen liggen blijkbaar op de kubische kromme

$$x = \frac{a^2 x_0}{a^2 + v}, \quad y = \frac{b^2 y_0}{b^2 + v}, \quad z = \frac{c^2 z_0}{c^2 + v}, \quad \dots \quad (4)$$

welke door de punten $P_0, O, X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$ gaat ($v=0, \infty, -a^2, -b^2, -c^2$), dus een orthogonale kubische hyperbool ω^3 is. Elk van haar punten P_1 bepaalt een ellipsoïde, waarvoor P_1P_0 de normaal in P_1 is.

Door een gegeven punt P_1 gaan ∞^1 krommen ω^3 ; hun „*nulpunten*” P_0 worden aangewezen door

$$a^2x_0 = (a^2 + u)x_1, \quad b^2y_0 = (b^2 + u)y_1, \quad c^2z_0 = (c^2 + u)z_1, \quad . \quad (5)$$

en liggen dus op de normaal, welke P_1 tot voetpunt heeft.

Deze krommen zijn allen gelegen op het oppervlak, dat bepaald wordt door de vergelijkingen

$$x = \frac{(a^2 + u)x_1}{a^2 + v}, \quad y = \frac{(b^2 + u)y_1}{b^2 + v}, \quad z = \frac{(c^2 + u)z_1}{c^2 + v}, \quad . \quad . \quad (6)$$

of ook door de hieruit door eliminatie van u en v verkregen vergelijking

$$\begin{vmatrix} a^2(x - x_1) & x & x_1 \\ b^2(y - y_1) & y & y_1 \\ c^2(z - z_1) & z & z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Dezelfde vergelijking vindt men uit (3) als men de stralencoördinaten in de puntencoördinaten uitdrukt. *De meetkundige plaats der krommen ω^3 , welke door P_1 gaan, is dus de complexkegel van P_1 .*

In overeenstemming hiermede vindt men uit (6) voor $v = \text{const.}$ een rechte door P_1 , terwijl $u = \text{const.}$ een kromme ω^3 door P_1 aanwijst.

4. Uit het voorgaande volgt, dat alle bisecanten van een kromme ω^3 stralen van den complex zijn. Dit wordt nader bevestigd door de berekening van de stralencoördinaten der bisecante (v, v'). Men vindt uit (4)

$$p_1 = \frac{a^2x_0(v' - v)}{(a^2 + v)(a^2 + v')}, \quad \text{enz.}$$

$$p_4 = \frac{b^2c^2y_0z_0(b^2 - c^2)(v' - v)}{(b^2 + v)(c^2 + v)(b^2 + v')(c^2 + v')}, \quad \text{enz.}$$

waaruit gereedelijk volgt

$$a^2p_1p_4 + b^2p_2p_5 + c^2p_3p_6 = 0.$$

5. De coördinaatvlakken en het vlak in het oneindige zijn de hoofdvlakken van den complex. De complexkegel van een in een hoofdvlak gelegen punt moet ontaarden.

Inderdaad vindt men uit (7) voor $z_1 = 0$ de vlakken $z = 0$ en

$$(a^2 - c^2)y_1x - (b^2 - c^2)x_1y = (a^2 - b^2)x_1y_1 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

In verband hiermede bestaat de kromme ω^3 nu uit de hyperbool

$$z = 0, \quad (a^2 - b^2)xy + b^2y_1x - a^2x_1y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

en de door haar gesneden rechte

$$(a^2 - c^2)x = a^2x_1, \quad (b^2 - c^2)y = b^2y_1, \quad \dots \quad (10)$$

welke in het vlak (8) ligt.

Vervangt men in (7) x_1, y_1, z_1 door $\lambda q, \mu q, \nu q$ en herleidt daarna tot den vorm

$$a^2 \left(\frac{x}{q} - \lambda \right) (\nu y - \mu z) + b^2 \left(\frac{y}{q} - \mu \right) (\lambda z - \nu x) + c^2 \left(\frac{z}{q} - \nu \right) (\mu x - \lambda y) = 0,$$

dan levert $q = \infty$ de vergelijking

$$(a^2 - b^2)\lambda\mu z + (b^2 - c^2)\mu\nu x + (c^2 - a^2)\nu\lambda y = 0, \quad \dots \quad (11)$$

welke het vlak voorstelt, dat de normalen met de richting (λ, μ, ν) bevat. De voetpunten dezer normalen liggen blijkbaar op de rechte

$$x : \lambda a^2 = y : \mu b^2 = z : \nu c^2 \quad \dots \quad (12)$$

6. Wij bepalen de poollijn van de normaal n_1 , die P_1 tot voetpunt heeft, met betrekking tot de ellipsoïde (k_0).

Voor een willekeurig punt P' dier normaal vinden we het poolvlak

$$\sum_3 \frac{a^2 + u'}{a^4} x_1 x = k_0^2.$$

Voor alle waarden van u' gaat dit vlak door de snijlijn der vlakken

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = k_0^2, \quad \dots \quad (13)$$

$$\frac{x_1 x}{a^4} + \frac{y_1 y}{b^4} + \frac{z_1 z}{c^4} = 0 \quad \dots \quad (14)$$

Deze snijlijn is de gevraagde poollijn. Bij verandering van k_0 verplaatst ze zich blijkbaar evenwijdig aan zichzelf.

Uit (13) en (14) vindt men de vergelijking

$$\frac{(a^2 - b^2) y_1 y}{b^4} + \frac{(a^2 - c^2) z_1 z}{c^4} = k_0^2,$$

welke identiek wordt met de vergelijking

$$\frac{b^2 y}{y_2} - \frac{c^2 z}{z_2} = b^2 - c^2$$

van een projecteerend vlak der normaal n_2 met voetpunt P_2 , als voldaan is aan de voorwaarden

$$\frac{(a^2 - b^2) y_1}{k_0^2 b^4} = \frac{b^2}{(b^2 - c^2) y_2}, \quad \frac{(a^2 - c^2) z_1}{k_0^2 c^4} = \frac{-c^2}{(b^2 - c^2) z_2}.$$

Hieruit kunnen wij opmaken, dat de poolrechte der normaal n_1 ten opzichte van het oppervlak (k_0) weer een normaal n_2 is; de voetpunten P_1 en P_2 zijn aan elkaar toegevoegd door de involutorische betrekkingen

$$x_1 x_2 = a^6 k_0^2 : (a^2 - b^2) (a^2 - c^2),$$

$$y_1 y_2 = b^6 k_0^2 : (b^2 - a^2) (b^2 - c^2),$$

$$z_1 z_2 = c^6 k_0^2 : (c^2 - a^2) (c^2 - b^2).$$

Door polarisatie met betrekking tot elke der ellipsoïden wordt de complex dus in zich zelf omgezet. Dit strookt met een bekende eigenschap van den tetraedralen complex.

7. De voetpunten der normalen zijn dan in een involutorische quadratische verwantschap gerangschikt, welke een rechte omzet in een kubische ruimtekromme, dus den tetraedralen complex in een complex van kubische ruimtekrommen, welke alle door de punten $O, X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$ gaan.

Beschouwen wij in het algemeen de quadratische transformatie

$$xx' = \alpha^2, \quad yy' = \beta^2, \quad zz' = \gamma^2. \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Zij vervangt den door (2) aangewezen complexstraal door de kubische kromme

$$x' = \frac{a^2 \alpha^2}{(a^2 + u) x_1}, \quad y' = \frac{b^2 \beta^2}{(b^2 + u) y_1}, \quad z' = \frac{c^2 \gamma^2}{(c^2 + u) z_1}.$$

Stelt men nog

$$\frac{\alpha^2}{x_1} = x_0, \quad \frac{\beta^2}{y_1} = y_0, \quad \frac{\gamma^2}{z_1} = z_0, \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

dan wordt deze kromme aangewezen door

$$x' = \frac{a^2 x_0}{a^2 + u}, \quad y' = \frac{b^2 y_0}{b^2 + u}, \quad z' = \frac{c^2 z_0}{c^2 + u}.$$

Zij is dus de kromme ω^3 behoorende bij het „nulpunt” P_0 , dat in de transformatie met het voetpunt P_1 der normaal overeenkomt.

De normalencomplex wordt derhalve omgezet in den complex der krommen ω^3 .

In verband hiermede gaat de complexkegel van P_1 over in de meetkundige plaats der krommen ω^3 , welke het punt P_0 bevatten, dus (§ 3) in den complexkegel van P_0 . Inderdaad verandert de vergelijking (7) niet van vorm als men de betrekkingen (15) en (16) toepast.

8. Wordt de top van den complexkegel verplaatst over de rechte l , voorgesteld door

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2},$$

dan vormen de kegels een stelsel met index twee, voorgesteld door

$$\lambda_1^2 U_1 + 2 \lambda_1 \lambda_2 U_{12} + \lambda_2^2 U_2 = 0,$$

waar

$$U_1 = \sum_3 a^2 (x - x_1) (z_1 y - y_1 z) \quad , \quad U_2 = \sum_3 a^2 (x - x_2) (z_2 y - y_2 z),$$

$$2 U_{12} = \sum_3 a^2 \{ (x - x_2) (z_1 y - y_1 z) + (x - x_1) (z_2 y - y_2 z) \}.$$

De omhullende van dit stelsel, tevens meetkundige plaats der complexkegelsneden, welke l tot koorde hebben, heeft tot vergelijking

$$U \equiv U_1 U_2 - U_{12}^2 = 0.$$

De acht dubbelpunten, welke dit biquadratische *complexoppervlak* moet bezitten, zijn de snijpunten der oppervlakken

$$U_1 = 0 \quad , \quad U_{12} = 0 \quad , \quad U_2 = 0 \quad .$$

Immers, men heeft

$$\frac{\partial U}{\partial x} \equiv U_1 \frac{\partial U_2}{\partial x} + U_2 \frac{\partial U_1}{\partial x} - 2 U_{12} \frac{\partial U_{12}}{\partial x},$$

zoodat $\frac{\partial U}{\partial x}$ voor elk dier acht snijpunten verdwijnt.

Tot deze dubbelpunten behooren blijkbaar de punten $O, X_\infty, Y_\infty, Z_\infty$; de overige vier veranderen van plaats met de rechte l .

Dat l dubbelrechte van het complexoppervlak is, blijkt terstond door de substitutie $x = x_1 + \lambda q, y = y_1 + \mu q, z = z_1 + \nu q$; wegens $z_1 y - y_1 z = q (\mu z_1 - \nu y_1)$ verkrijgt U dan den factor q^2 .

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan:
„Over een groep van stralencomplexen met rationale complexkegels.”

§ 1. In een mededeeling, opgenomen in het Zittingsverslag van 24 April 1903 ¹⁾, heb ik een groep van stralencomplexen behandeld, welke de eigenschap bezitten, dat de complexkegel van een willekeurig punt rationaal is. In het volgende zal een tweede groep, met dezelfde eigenaardigheid, aangewezen worden.

Wij beschouwen een waaier (s) met top S , in het vlak σ , en, in een tweede vlak τ , een stralenstelsel $[t]$ met index n (dus het stelsel der raaklijnen van een rationale kromme τ_n) en onderstellen, dat de stralen t projectief zijn toegevoegd aan de stralen s . De transversalen van homologe stralen vormen dan een complex, die onderzocht zal worden.

Uit een willekeurig punt P wordt de waaier (S, σ) op het vlak τ geprojecteerd in een waaier (S', τ), die projectief is met $[t]_n$. Deze

¹⁾ „Over stralencomplexen, welke met een rationale ruimtekromme samenhangen,” XI, 762—767.

beide stralenstelsels brengen een kromme van den $(n+1)^{\text{en}}$ graad voort, welke in S' een n -voudig punt heeft; immers op een willekeurigen straal s' door S' ligt, buiten S' , het snijpunt van s' met den overeenkomstigen straal t ; op de stralen s' , die toegevoegd zijn aan de n stralen t , welke door S' gaan, valt dit snijpunt in S' , zoodat de meetkundige plaats van het punt (s', t) n maal door S' moet gaan; de kromme is derhalve van den graad $(n+1)$.

De complexkegel (P) is van den $(n+1)^{\text{en}}$ graad en de klasse $2n$, en heeft een n -voudige ribbe PS .

§ 2. Als het punt S' op de omhullende τ_n ligt, vallen twee van de n stralen t , die door S' gaan, samen, dus ook twee der raakvlakken door PS aan den kegel (P).

De meetkundige plaats der punten P , waarvoor twee raakvlakken door de n -voudige ribbe van den complexkegel samenvallen, is het kegelvlak Σ van den graad $2(n-1)$, dat de omhullende τ_n uit S projecteert.

De $3(n-2)$ keerrribben van Σ bevatten de punten P , waarvoor drie der raakvlakken van (P) langs de n -voudige ribbe samenvallen. De $2(n-2)(n-3)$ dubbelribben van Σ vormen de meetkundige plaats der punten P , waarvoor twee paren van raakvlakken van P , langs PS , samenvallen.

De kegel Σ is een bestanddeel van het *singuliere oppervlak* van den complex; de overige bestanddeelen zijn platte vlakken.

Daartoe behoort vooreerst het vlak σ . Elke rechte van σ wordt door n stralen t gesneden, is dus n maal als complexstraal te beschouwen. Bijgevolg is σ een *n -voudig hoofdvlak*. In verband hiermede ontardt de complexkegel van een in σ aangenomen punt P in n met σ samenvallende vlakken en in het vlak door P en de rechte t , welke met den door P bepaalden straal s overeenkomt.

Daarentegen is τ *enkelvoudig hoofdvlak*; immers elke van zijn rechten rust slechts op één straal s . De complexkegel van een in τ gelegen punt P ontardt in τ en in de n vlakken door P naar de n stralen s overeenkomende met de n door P getrokken rechten t .

Ten slotte zijn er nog $(n+1)$ *hoofdvlakken* γ_k , ($k=1$ tot $n+1$),

die elk twee homologe stralen s, t verbinden. Immers de punten der snijlijn van σ en τ worden door de projectieve stelsels (s) en $[t]_n$ in een verwantschap $(1, n)$ gerangschikt; in elke der $(n+1)$ coïncidenties C_k komen twee homologe stralen samen. In verband hiermede ontardt de complexkegel van een in een dezer hoofdvlakken aangenomen punt P in het samenstel van dit hoofdvlak met een kegel van den

n^{en} graad; want van de in τ gelegen projectieve stelsels (s') en $[t]_n$ vallen twee homologe stralen samen.

§ 3. De *complexkromme* (π) in het willekeurige vlak π is van de $(n+1)^{\text{e}}$ klasse en heeft de snijlijn ($\sigma \pi$) tot n -voudige raaklijn; zij is dus van den graad $2n$. Haar raakpunten met ($\sigma \pi$) worden op ($\sigma \pi$) ingesneden door de n stralen s , welke overeenkomen met de n stralen t door het punt ($\sigma \tau \pi$).

Als π gaat door een der $2(n-1)$ snijpunten van σ met de omhullende τ_n , dan vallen twee der raakpunten van ($\sigma \pi$) samen. Als meetkundige plaats van punten beschouwd, bestaat (π) dan uit een kromme van den $(2n-1)^{\text{en}}$ graad en de rechte ($\sigma \pi$).

De vlakken, welke complexkrommen bevatten, waarvoor twee raakpunten der veelvoudige raaklijn samenvallen, vormen $2(n-1)$ schoven, die hun toppen op de snijlijn van σ en τ hebben.

Gaat π door een straal s_1 , dan bestaat (π) als omhullende uit een waaier, die zijn top heeft in den doorgang van den homologen straal t_1 en uit den waaier (S, π), waarvan elke straal n maal tot den complex behoort, omdat hij door n stralen t wordt gesneden. Als meetkundige plaats van punten is (π) hier de $2n$ maal te tellen verbindingslijn der waaiertoppen.

Bevat π een straal t_1 , dan bestaat de omhullende (π) uit een waaier, die den doorgang S_1 van den homologen straal s_1 tot top heeft, en een kromme van de n^{e} klasse, waarvoor ($\sigma \pi$) een $(n-1)$ -voudige raaklijn is. Als figuur van den graad $2n$ valt (π) uiteen in een kromme van den graad $2(n-1)$, haar $(n-1)$ -voudige raaklijn en de raaklijn welke men nog uit S_1 aan haar kan trekken.

Legt men π door een der coïncidenties C_k , dan ontardt (π), op dezelfde wijze, in een waaier met top C_k en een kromme van de n^{e} klasse.

De complex bezit een n -voudig hoofdpunt S en $(n+1)$ enkelvoudige hoofdpunten C_k .

§ 4. Beschouwen wij thans het *complexoppervlak* A van een willekeurige rechte l , dus de omhullende der complexstralen, welke op l rusten. De stralen in een door l gelegd vlak π omhullen een kromme (π) van den graad $2n$ (§ 3). Is π een der $2n$ raakvlakken door l aan den complexkegel van het op l gelegen punt P , dan vallen twee der uit P naar (π) getrokken raaklijnen samen, zoodat P een punt van (π) is. Elk punt van l behoort dus tot $2n$ complexkrommen; bijgevolg is l een $2n$ -voudige rechte van A .

Het complexoppervlak is van den graad $4n$.

In de vlakken, welke l met de hoofdpunten C_k verbinden, ont-aardt (π) in een kromme van den graad $2(n-1)$ en twee rechten. Dit geschiedt ook als π door een der n stralen t gaat, welke op l rusten. In het vlak door l en S ont-aardt (π) in een $2n$ maal te tellen rechte.

In elk der vlakken, welke l verbinden met de snijpunten van τ_n en σ , bestaat (π) uit een kromme van den graad $(2n-1)$ en een rechte (§ 3).

Op A liggen, behalve de $2n$ -voudige rechte en een $2n$ -voudig torsale rechte, nog $6n$ enkelvoudige rechten.

Het vlak σ bevat $2(n-1)$ rechten van A en raakt A in de punten van een kromme van den graad $(n+1)$, welke de meetkundige plaats is van de punten, waar de complexkromme (π) haar n -voudige raaklijn ($\sigma\pi$) aanraakt. Immers, komt met den straal s_0 , die op l rust, overeen de straal t_0 , die σ in T_0 snijdt, dan valt een der raakpunten der complexkromme van het vlak (lT_0) met σ in den doorgang L_τ van l ; bijgevolg liggen de bedoelde raakpunten op een kromme van den $(n+1)^{en}$ graad. Deze kromme wordt voortgebracht door de in een overeenkomst $(1, n)$ gerangschikte waaiers (L_τ) en (S), heeft dus in S een n -voudig punt.

Het vlak τ raakt A volgens een kromme van den $(n+1)^{en}$ graad, welke de meetkundige plaats is van de raakpunten der krommen (π), in vlakken π door l , met de doorgangen ($\pi\tau$). Deze kromme heeft een n -voudig punt in den doorgang L_τ van l op τ ; de raaklijnen in dit veelvoudige punt zijn de doorgangen der vlakken π , welke ($\sigma\tau$) snijden op de n stralen s , toegevoegd aan de uit L_τ getrokken stralen t .

Het vlak τ heeft verder met A de omhullende τ_n gemeen. Immers, terwijl een punt P der rechte ($\pi\tau$) in het algemeen n raaklijnen der complexkromme (π) draagt, welke bepaald worden door de stralen s , overeenkomende met de n door P getrokken stralen t , vallen twee dier raaklijnen samen, zoodra P ligt op de omhullende τ_n ; dan behoort P evenwel tot de kromme (π), dus tot het complexoppervlak A .

Mikrobiologie. — De Heer M. W. BELJERINCK biedt eene mededeeling aan: "*Een obligaat anaerobe gistingssarcine.*"

De volgende eenvoudige maar toch nauw luisterende proef, geeft aanleiding tot het ontstaan van een krachtige door een sarcine veroorzaakte gisting, waarin mikroskopisch geen andere microben zichtbaar zijn, en die, bij juiste uitvoering een werkelijke reinkultuur der

gistingssarcine kan opleveren. De eenvoud der proefneming is verkregen door vele voorafgaande ondervindingen, die langzamerhand de levensvoorwaarden van de onderzochte mikrobe duidelijk hadden gemaakt, en die ik ten deele gemeenschappelijk met Dr. N. GOSLINGS opgedaan heb.

Bouillon met 3 tot 10 % glukose, of moutextrakt worden met fosforzuur aangezuurd tot een titer van 8 cc. normaal per 100 cc. kultuurvloeistof, en in een fleschje gebracht, dat daarmede geheel wordt aangevuld. De infectie geschiedt met een *grote hoeveelheid*¹⁾ opgeslibden tuingrond, waarvan men het zwaarste en grofste gedeelte vooraf heeft verwijderd, maar waarin toch nog zooveel vast materiaal is achtergebleven, dat dit in de kultuurvloeistof bezinkt tot een sliblaag van 5 tot 7 of meer millimeters dikte. De kultuur geschiedt in een thermostaat bij 37° C. Reeds na 12 uur verkeert de vloeistof in een sterke gisting, die 24 tot 36 uren voortduurt, en waarbij een grof schuim de oppervlakte bedekt, dat ontstaat door uit de diepte opstijgende gasblaasjes. Terwijl de vloeistof zelve geheel vrij van microben blijft, vertoont het mikroskopische beeld van het bezinksel een prachtige en rijke reinkultuur eener sarcine, waarvan de elementaire cellen meerendeels omstreeks 3.5 μ meten, zoodat de soort tot de grootste bekende vormen behoort, en de veelcellige sarcinepakketten gemakkelijk met het bloote oog zichtbaar zijn. Voor het meerendeel zijn deze kleurloos en doorzichtig en bezitten onregelmatige pakket-kanten. Hier en daar, maar veel minder algemeen ziet men een bruinachtigen, ondoorschijnenden vorm met meer regelmatig kubische pakketten, waarvan de cellen 2 à 2,5 μ meten.

Het schuim, dat op de gistende vloeistof drijft, bestaat uit slijm, waarin het gistingsgas eenigen tijd gevangen blijft. Dit slijm wordt voortgebracht door de buitenzijde der sarcinecellen, wier wand overigens uit celstof bestaat, welke met chloorzink-jodium violet-blauw wordt. Deze reactie is in 1865 bij de maagsarcine ontdekt door SURINGAR²⁾, die op grond daarvan de plantaardige natuur van dit organisme, dat ten volle met den kleincelligen vorm van de gistingssarcine overeenstemt, heeft verdedigd. De grootcellige vorm gelijkt meer op de figuren, welke LINDNER geeft³⁾ van zijn *Sarcina maxima*, gevonden, zooals hij het uitdrukt in „Buttersäuremaischen”, dat is in wort, waarin spontane boterzuurgisting. Ik ben echter niet overtuigd, dat de beide vormen werkelijk tot twee verschillende

1) Met *weinig grond* als infectiemateriaal is de proef onzeker.

2) W. F. R. SURINGAR, De sarcine (*Sarcina ventriculi* GOODSIR), pag. 7, Leeuwarden 1865. Hier vindt men zeer goede afbeeldingen.

3) Mikroskopische Betriebskontrolle in den Gärungsgewerben, 3e Aufl. p. 432, 1901.

soorten van sarcine behooren, want het is welbekend, dat in dit mikrobengeslacht groote morfologische verschillen bij dezelfde soort kunnen voorkomen.

Het gas is een mengsel van omstreeks 75 % koolzuur met 25 % waterstof; methaan is daarin niet aanwezig. Er wordt bovendien een vrij groote hoeveelheid zuur gevormd, welke bijvoorbeeld in een voedingsvloeistof met een begintiter van 6 cc. per 100, tot 20 cc. kan stijgen, een gehalte, dat alleen bij de technische melkzuurfermenten wordt teruggevonden. Verder ontstaat een eigenaardige reukstof, die aan de gewone melkzuurgisting door *Lactobacillus* herinnert. Indien, zooals waarschijnlijk is, dit zuur geheel of grootendeels uit melkzuur zal blijken te bestaan, kan de gistingssarcine beschouwd worden als het meest gedifferentieerde melkzuurferment, dat tot nu toe bekend is geworden.

Bij het gebruik van een voldoende hoeveelheid grond voor de infectie, dat wil zeggen van een betrekkelijk groot aantal sarcines, die daardoor bij de concurrentie in de gegeven omstandigheden in het voordeel zijn boven alle andere microben, blijkt de beschreven proef binnen zeer ruime grenzen te kunnen slagen. Zoo kan *in dat geval even goed in een open kolf als in een gesloten fleschje* de sarcinegisting worden verkregen, waaruit volgt, dat de sarcine een kleine hoeveelheid zuurstof verdragen kan; ja, zooals straks zal blijken, is deze onder alle omstandigheden zelfs noodzakelijk. Niettemin blijft de naam van obligaat anaerobe toch ook hier toepasselijk, omdat kultuur bij vollen luchtdruk onmogelijk is. Het zuur kan verder gevarieerd worden tusschen 3 en 11 cc. normaal fosforzuur per 100 cc. Het fosforzuur kan door melkzuur, zelfs door zoutzuur vervangen worden, indien de zuurtiter van laatstgenoemd zuur niet hooger dan 6 à 7 cc. per 100 cc. wordt genomen, maar niet door salpeterzuur.

In plaats van glukose kan rietsuiker gebruikt worden, maar met melksuiker en manniet slaagt de proef niet. Als stikstofbron is alleen pepton bruikbaar, gelijk die in moutextrakt en bouillon gevonden wordt; eenvoudiger stikstofbronnen zooals asparagine, ureum, ammoniak en salpeter zijn voor de stikstofvoeding der gistingssarcine ongeschikt. De temperatuur-grenzen zijn ruim en kunnen afwisselen tusschen 28° C. en 41° C.

Hoezeer men dus de proefneming in allerlei opzichten wijzigen kan, is de eerst beschreven inrichting daarvan aan te bevelen, omdat deze zich het beste aansluit aan het optimum der verschillende levensvoorwaarden.

Een bijzonder in het oog loopende en voor het onderzoek belangrijke eigenschap is de gemakkelijheid waarmede de gistingfunctie, dat

is het vermogen om gas te ontwikkelen, verloren gaat onder den invloed van een eigen afscheidingsprodukt, waarschijnlijk het zuur, en waardoor alle overentingën met verouderd materiaal volkomen vruchteloos worden. Overenting van nog in gisting verkeerende kulturen is dus noodzakelijk voor het welslagen van proeven met de gistingssarcine.

Dat de aëratie de levenskracht dezer obligaat anaerobe sarcine verhoogt en de toetreding van een weinig lucht op den duur zelfs noodzakelijk is, blijkt duidelijk uit het feit, dat de sterkste gistingen worden verkregen door in een gesloten flesch met gasafleider de gisting te doen plaats hebben met het sarcinebezinksel verkregen in een open kolf, terwijl vernieuwing der kultuurvloei-stof boven het sarcinebezinksel in een gesloten flesch ontstaan, na eenige herhaling tot verzwakking of stilstand der gisting aanleiding geeft.

Wenscht men de kultuur voort te zetten door overenting van *kleine hoeveelheden* materiaal eener ruwe gisting in de zelfde kultuurvloei-stof, dan moeten twee voorzorgen in acht genomen worden: Vooreerst, moet het overenten geschieden in het door koken lucht-vrij gemaakte voedsel, waarmede, nog voor de afkoeling, een fleschje geheel en al gevuld wordt, zoodat ook bij het koud worden geen lucht kan oplossen. In de tweede plaats blijkt een zuurtiter van minder dan 7 thans ontoereikend, deze moet tot 8 à 10 cc. worden opgedreven, omdat anders de melkzuurfermenten de overhand kunnen verkrijgen en de sarcine verdringen.

Uit de noodzakelijkheid van de verwijdering van de lucht ziet men, dat de gistingssarcine ongetwijfeld met de gewone anaerobieën overeenstemt, hetgeen op grond van het slagen der ruwe ophooping-proef *bij luchttoetreding* wellicht niet verwacht zou worden, maar het feit geldt op dezelfde wijze voor het algemeen als obligaat anaerobie erkende boterzuurferment, zoodat ook bij de gistingssarcine van mikroaërophilie behoort gesproken te worden. Het verdere onderzoek leert, dat in diepe reageerbuizen met moutextrakt-agar zeer gemakkelijk reinkulturen te verkrijgen zijn, waarbij de sarcine kenbaar is aan de opvallende grootte en buitengewoon snelle ontwikkeling der koloniën. Daarentegen heeft op moutextrakt- of vleeschbouillon-glukose-agar-platen met of zonder zuur bij 37° C. aan de lucht volstrekt geen groei van de sarcine plaats, wat overigens te verwachten was. Natuurlijk kunnen de pakketten ook zonder te groeien op de platen worden gezien en in reinen toestand daarvan worden afgenomen. Bij het gebruik van weinig zuur voor de ruwe ophooping ontwikkelen zich op de platen aan de lucht wel koloniën van melkzuurfermenten, behoorende tot het physiologische geslacht

Lactobacillus, die evengoed met als zonder lucht kunnen groeien, maar wier overige levensvoorwaarden ongeveer met die van de sarcine overeenstemmen. In dit geval leert de proefneming dus tegelijkertijd, dat ook overal in tuingrond echte melkzuurfermenten aanwezig zijn, waarvan tot nu toe het bewijs nog niet was geleverd.

Bij het gebruik van veel zuur, bijv. 10 cc. of meer normaalzuur per 100 c.c. kultuurvloeistof, waardoor de levensfunctiën der sarcine, zooals snelheid van groei en vermogen van zuurstofopneming, verminderd worden, komen zekere alcoholgisten, eigen aan tuingrond, tot ontwikkeling, maar deze kunnen, met de andere verontreinigingen der ruwe ophooping (zooals schimmels, *Mucor* en *Oidium*) door luchtafsluiting, dus door cultuur in gesloten fleschjes, beteugeld en verwijderd worden. Daarvoor is het evenwel noodzakelijk alle levenscondities voor de sarcine zoo gunstig mogelijk te maken en de temperatuur niet beneden 37° C. te laten dalen.

Het uitblijven van de boterzuurgisting (veroorzaakt door *Granulobacter saccharobutyricum*), welke zoo uiterst gemakkelijk bij luchtafsluiting in glukose-bouillon en in moutextrakt ontstaat, is te danken aan de zuurtiter van omstreeks 8 cc. of meer, waarbij deze gisting onmogelijk wordt.

Ofschoon de groei van de sarcine dus blijkbaar minder door het zuur benadeeld wordt dan die van de lactobacillen en van het boterzuurferment, laat zich toch gemakkelijk bewijzen, dat reeds 7 c.c. zuur per 100 minder gunstig zijn dan 3 of 5 cc. ook voor de ontwikkeling van sarcine zelve, zoodat het hooge zuurgehalte bij de ophooping alleen dient om de concurrentie met de genoemde fermenten mogelijk te maken. Beschikt men, door vroegtijdig overenten in moutextrakt met meer dan 8 cc. fosforzuur, over werkelijke reinkulturen, dan leert de verdere overenting in deze voedingsvloeistof bij geheele weglating van het zuur, dat ook dan nog krachtige groei en gisting plaats hebben, hoezeer met minder intensiteit dan bij de *optimale zuurtiter van 3 à 5 cc.* Men ziet hieruit hoe breed de grenzen zijn van de levenscondities der sarcine, zoodra de concurrentie met alle andere mikroben geheel is uitgesloten.

De ontdekking van deze zeker onverwachte gisting is voortgevloeid uit de bewerking van de algemeene vraag, welke organismen van den bodem in een suikerhoudende voedingsvloeistof bij aanwezigheid van zuur en bij onvolkomen aeratie tot ontwikkeling kunnen komen. Bij temperaturen van omstreeks 30° en lager blijken alcoholgisten, *Mucor racemosus* en *Oidium* de sterksten te zijn, maar dan reeds worden enkele sarcines waargenomen. Bij omstreeks 40° C. kunnen de meeste alcoholgisten van tuingrond, alsmede *Mucor* en *Oidium*

niet meer met de sarcine en de lactobacillen concurreeren, die dan de overwinning behalen. Toen dit was vastgesteld waren de laatste stappen, die tot de kultuur van de gistingssarcine alleen voerden, de herkenning van de obligate anaerobiose, en van het grootere weerstandsvermogen tegenover anorganische zuren van de sarcine dan van de lactobacillen en de boterzuurfermenten.

Reeds boven wees ik op de volkomen overeenstemming tusschen den kleincelligen vorm van de gistingssarcine met de beschrijving, welke SURINGAR van de maagsarcine geeft, en ik vermoed, dat in de gevallen van niet kultiveerbare maagsarcine, waarvan bijv. DE BARY spreekt ¹⁾, werkelijk aan de gistingssarcine moet gedacht worden. Daarvoor pleiten allerlei opmerkingen uit de oudere literatuur, door SURINGAR geciteerd. Maar nog veel overtuigender spreekt daarvoor de inrichting mijner ophoopingsproef, die bewijst, dat de levensvoorwaarden van de gistingssarcine juist van dien aard zijn, dat het leven daarvan in de maag mogelijk schijnt.

Een beslissing dienaangaande zal gemakkelijk kunnen verkregen worden door de herhaling dezer proef niet met tuingrond als infectiemateriaal, maar door daarvoor maagcontenta van zoodanig geval van maagsarcine te gebruiken. Het „niet kultiveerbaar” zijn kan bij DE BARY hetzelfde beteekenen als anaerobiose, want het is welbekend hoe moeilijk het zelfs tegenwoordig nog is anaerobien te kweken, indien men de leefwijze daarvan niet nauwkeurig kent.

Overigens twijfel ik niet aan de juistheid van de waarnemingen van FALKENHEIM ²⁾ en MIGULA ³⁾, die uit maagsarcine aerobe mikrokokkenkoloniën hebben zien ontstaan. Wel is waar is het mij niet gelukt deze waarneming ten aanzien van de gistingssarcine te bevestigen, maar bij andere sarcinensoorten heb ik den overgang in mikrokokken met zekerheid vastgesteld, en bij allerlei anaeroben, hoezeer niet tot het geslacht sarcine behorende, werden bij koloniënkulturen nu en dan fakultatief anaerobe stammen door selectie verkregen, die overigens in alle opzichten met de voor het uitzaaien gebruikte obligaat-anaeroben overeenstemden, zoodat ook deze verandering bij sommige individuen der gistingssarcine mogelijk schijnt. Ophoopings- of overentingsproeven met maaginhoud zullen echter alleen dan een stellig resultaat kunnen geven, indien nog in gisting verkeerende contenta ter beschikking staan; met lang bewaard materiaal zal ook in dit geval niets meer te beginnen zijn.

¹⁾ Vorlesungen über Bacterien, 1e Aufl. pg. 96, 1887.

²⁾ Archiv. f. experiment. Pathologie und Pharmacologie. Bd. 10, pg. 339, 1885.

³⁾ System der Bacteriën, Bd. 2, pg. 259, 1900.

Reeds de oudere waarnemers ¹⁾ zooals SCHLOSSBERGER (1847), SIMON (1849) en CRAMER (1858) hebben, ofschoon te vergeefs, getracht door een soort van ophoopingsproeven maagsarcine te kultiveeren, waarbij steeds kunstmatig maagsap met verschillende toevoegselen als kultuurvloeistof werd gekozen. Opmerkelijk en teekenend voor de toenmalige biologische opvattingen is het feit, dat zij voor de infectie niet den sarcinehoudenden maaginhoud zelve maar biergist gebruikten, meenende, dat de sarcine wel uit gistcellen zou ontstaan, die er eenigszins op gelijken en die steeds in de maag tegelijk met de sarcine worden gevonden.

Voor de Bibliotheek wordt aangeboden door den Heer PEKELHARING, namens den Heer ERNST COHEN: „Een physisch-chemische caricatuur”; door den Heer VAN DER STOK, namens het Kon. Nederl. Meteorologisch Instituut: 1°. Jaarboek van het Koninklijk Nederlandsch Meteorologisch Instituut, Jaarg. 25 (1903) *A.* Meteorologie, *B.* Aardmagnetisme; 2°. *Études des phénomènes de marée sur les côtes Néerlandaises. II. Résultats d'observations faites à bord des bateaux-phares Néerlandais par J. P. VAN DER STOK*; door den Heer HOLLEMAN, de dissertatie van den Heer H. VERMEULEN: „Plaatsbepaling der isomere dinitroanisolen”.

¹⁾ Geciteerd volgens SURINGAR (l. c.).

De vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING
DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING
van Zaterdag 25 Maart 1905.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

- Ingekomen stukken, p. 616.
- J. A. C. OUDEMANS: „Bericht omtrent de bepaling der Lengte van St. Denis (Ile de la Réunion) uitgevoerd in 1874”, p. 616.
- J. D. VAN DER WAALS: „De transformatie van een zijplooï in een hoofdplooï en omgekeerd”, p. 625. (Met één plaat).
- R. MEHMKE: „Ueber Trägheitsmomente und Momente beliebiger Ordnung in Räumen beliebiger hoher Stufe”. (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 630.
- L. BOLK: „Over de ontwikkeling van het cerebellum bij den mensch” (1ste mededeeling), p. 635. (Met één plaat).
- F. M. JAEGER: „Over Ortho-Nitro-Benzyltoluidine”. (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 641.
- F. M. JAEGER: „Over plaatsings-isomere Dichloornitrobenzolen”. (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 643.
- S. J. DE LANGE: „Over de uitloopers van gangliëncellen bij rust en vermoeienis”. (Aangeboden door de Heeren C. WINKLER en C. A. PEKELHARING), p. 649. (Met één plaatje).
- F. M. JAEGER: „Over mengbaarheid in den vasten agregaattoestand en isomorfie bij koolstofverbindingen”. (1ste Mededeeling). (Aangeboden door de Heeren H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM en A. F. HOLLEMAN), p. 651. (Met één plaatje).
- J. J. VAN LAAR: „Over de verschillende vormen en overgangen der grenslijnen bij gedeeltelijke mengbaarheid van twee vloeistoffen”. (Aangeboden door de Heeren H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM en J. M. VAN BEMMELEN), p. 660. (Met één plaat).
- W. HUISKAMP: „Over de aanwezigheid van fibrineglobuline in fibrinogeenoplossingen”, (Aangeboden door de Heeren C. A. PEKELHARING en K. ZWAARDEMAKER Cz.), p. 673.
- J. J. VAN LAAR: „Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale lijnen en van hunne plooi punten voor alle temperaturen, in het geval van mengsels van normale stoffen”. (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 685.
- E. VERSCHAFFELT: „Eenige waarnemingen over den lengtegroei van stengels en bloemstelen”. (Aangeboden door de Heeren HUGO DE VRIES en J. W. MOLL), p. 696.
- JAN DE VRIES: „Een groep van algebraïsche stralencomplexen”, p. 703.
- JAN DE VRIES: „Over netten van algebraïsche vlakke krommen”, p. 708.
- H. A. LORENTZ: „De beweging der electronen in de metalen, III”, p. 710.
- Aanbieding eener verhandeling van den Heer A. GORTER: „Eene physische theorie der herinnering”, p. 719.
- Aanbieding van Boekgeschenken, p. 720.
- Vaststelling van de Aprilvergadering op 22 April a. s., p. 720.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is :

1°. Missive van den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid dd. 7 Maart 1905 bericht gevende dat op de betaling van het subsidie voor de Geologische Commissie over 1905 orde gesteld is.

Voor kennisgeving aangenomen.

2°. Missive van de Internationale Associatie der Akademiën met verzoek bij de Regeering voorstellen te doen over oprichting van instellingen voor onderzoek der hersenen.

Op verzoek van den Voorzitter verklaren de Heeren WINKLER en BOLK zich bereid de Akademie hieromtrent van advies te dienen.

3°. Circulaire van een Conferentie van landbouwbotanici gedurende het internationale botanisch Congres in 1905 te Weenen te houden.

Daar geen der leden van de Afdeeling in de gelegenheid is het Congres bij te wonen wordt dit stuk voor kennisgeving aangenomen.

4°. Schrijven van den Heer PEDRO GOMEZ SANCHEZ te Madrid ter begeleiding van een werkje, getiteld „L'énergie obtenue par l'énergie”.

Ter kennisneming voor de leden beschikbaar gesteld.

Sterrekunde. — De Heer J. A. C. OUDEMANS, biedt, als *eerste mededeeling* betreffende zijne reis naar Réunion voor den Venus-overgang, aan een: „*Kort bericht omtrent de bepaling der Lengte van St. Denis, (Ile de la Réunion), uitgevoerd in 1874*”.

In onze gewone vergadering van 30 October 1875 heb ik eenige mededeelingen gedaan aangaande den stand van de berekening der waarnemingen, te St. Denis volbracht tijdens den Venus-overgang voorbij de zon van 9 December 1874. Die stand was in het kort deze, dat de berekeningen zoo ver uitgevoerd waren, als op dat oogenblik mogelijk was.

Verschillende omstandigheden, van mijnen wil onafhankelijk, zijn oorzaak geweest dat die stand tot het midden van verleden jaar onveranderd is gebleven, en die berekeningen toen eerst weder konden worden opgevat.

Wat ik toen mededeelde, is in het proces-verbaal dier vergadering te lezen; voorbijgaande hetgeen op de metingen met den heliometer betrekking heeft, en waarop ik nog later hoop terug te komen, wil ik alleen herinneren, dat er ook op de noodzakelijkheid gewezen werd, de Lengte der observatieplaats nauwkeurig te bepalen.

Daartoe hadden wij, (in dit geval de heeren ERNST VAN DE SANDE BAKHUYZEN, SOETERS en ik), een aantal bedekkingen van sterren door de maan waargenomen, en wel niet zoo zeer van heldere sterren, wier bedekkingen in den Nautical Almanac waren aangekondigd, als

wel van kleine sterren, van de 8e of 9e grootte, waarvan de plaatsen toen nog niet nauwkeurig bekend waren.

Deze moesten dus eerst door meridiaanwaarnemingen bepaald worden; onze geachte Voorzitter nam bereidwillig op zich, deze bepalingen aan de onder zijn bestuur staande sterrewacht te doen bewerkstelligen. Van elke ster zijn daar nu in den regel ten minste vier bepalingen gemaakt. Hoewel de bijgevoegde epochen aantoonen, dat zij tusschen de jaren 1879 en 1884 gedaan zijn, duurde het echter nog geruimen tijd, namelijk tot Nov. 1901, eer de reducties dier bepalingen zoo ver gevorderd waren, dat mij de resultaten konden worden medegedeeld.

Maar bij die mededeeling was ook de opmerking gevoegd, dat bijna al die sterren sedert ook wel aan andere sterrewachten waren waargenomen, zoodat ik het noodig oordeelde, al die bepalingen in de verschillende Annalen op te zoeken, en ze tot hetzelfde tijdstip te herleiden, ten einde, waar het noodig was, de eigene beweging in rekening te brengen. In vele gevallen bleek het, dat het voldoende was, alleen de Leidsche bepaling onveranderd aan te nemen.

Maar ook de fouten der maanstafels, dat wil zeggen, van de in den Nautical Almanac medegedeelde maansplaatsen, moesten uit maanwaarnemingen worden afgeleid. Hiertoe hebben gediend de waarnemingen met de meridiaancirkels te Parijs, Greenwich en Washington, en die met het Altazimuth te Greenwich.

Wel heeft NEWCOMB in 1876 in eene zeer lezenswaardige verhandeling, *Investigation of corrections to HANSEN's Tables of the moon, with tables for their application*, bijeengebracht, welke verbeteringen de formules, waarnaar de maanstafels van HANSEN berekend zijn, moesten ondergaan, welke termen er naar den stand der wetenschap in dat jaar, en welke empirische correctieterm er naar de bepalingen der laatste jaren nog aan moest worden toegevoegd, en eene daarop gegronde correctietabel, loopende van 1 September 1874 tot 31 Januari, gegeven, maar na een grafische voorstelling vervaardigd te hebben, van de correcties, door directe waarneming gevonden en aan NEWCOMB's tafel ontleend, meende ik toch aan eerstgenoemde de voorkeur te moeten geven.¹⁾

¹⁾ Eene verbetering moet eene der tafels van NEWCOMB, naar den tegenwoordigen stand der wetenschap, ondergaan. Hij zegt namelijk (blz. 9), dat HANSEN's parallactische equatie berustte op eene waarde $8''.916$ van de zons-parallaxis; dat echter de waarde, die hij in 1867 uit alle beschikbare gegevens afleidde, niet meer bedroeg dan $8''.848$, d. i. $0''.068$ minder, en dat de sedert uitgevoerde bepalingen eerder eene vermindering dan eene vermeerdering van dat getal aangeven. Tegenwoordig wordt algemeen als de meest waarschijnlijke waarde voor de zons-parallaxis aan-

Omtrent de Lengte van St. Denis moet ik opmerken, dat deze door den Franschen luitenant ter zee GERMAIN, in 1867 en 1868, door 13 doorgangen door den meridiaan van den eersten en 12 van den tweeden rand, opzettelijk bepaald was. In de *Connaissance des Temps* van 1871 vindt men een kort verslag van die bepaling. Hoewel de opgegevene 25 resultaten vrij goed met elkander overeenstemmen, hebben deze soort van bepalingen altijd het nadeel, dat het verschil in de constante fout, begaan bij het waarnemen van de doorgangen van den maansrand en van de vergelijkingsterren, omtrent dertigmaal vergroot op het resultaat overgaat. Bij eene lengtebepaling door sterrebedekkingen is een dergelijke nadeelige invloed niet te vreezen. ¹⁾ Duurden de zeereizen, noodig om Réunion te bereiken, niet zoo lang, dan zouden zij ook nog de gelegenheid aanbieden, de Lengte door het overbrengen der tijdmeters te bepalen. De resultaten, die de verschillende tijdmeters gegeven hebben, loopen echter zoo uiteen, dat zij alle waarde verliezen.

Het genoemde verslag van de bepaling van GERMAIN is vergezeld van een platten grond, ter verkenning der observatieplaatsen.

Men ziet uit dien platten grond, dat de rivier St. Denis ten westen der stad nagenoeg in eene noord-noord-westelijke richting in zee uitloopt, en dat de observatieplaats van GERMAIN nog westelijk van die rivier lag. Een gemetselde pilaar, waarop zijn meridiaankijker in 1867 en 1868 gestaan had, was gedurende ons verblijf, in 1874, nog aanwezig.

Het resultaat van GERMAIN's plaatsbepalingen werd door hem als volgt opgegeven:

Lengte der observatieplaats beoosten Parijs . . .	3 ^u 32 ^m 25 ^s ,7
Herleiding op den vlaggemast, oostelijk van den Barachois, d. i. van den kleinen kom, die bij de landing de sloepen beschermt	+ 1 ,07
Lengte van den vlaggemast beoosten Parijs . . .	3 ^u 32 ^m 26 ^s ,8

genomen 8".800, nog 0".048 minder dan de waarde van NEWCOMB. De parallactische correctie van NEWCOMB moet dus 1,7 maal grooter aangenomen worden, of anders gezegd: er moeten nog drie termen bij, namelijk

$$+ 0''.67 \sin D + 0''.05 \sin (D-g) - 0''.09 \sin (D + g'),$$

waarin D de middelbare elongatie der maan van de zon, g de middelbare anomalie der maan en g' die der zon beteekent.

¹⁾ NEWCOMB zegt bij den aanhef van zijne genoemde verhandeling: „Determinations of longitude from moon culminations are found by experience to be subject to constant errors which it is difficult to determine and allow for. It was therefore a part of the policy of the American Commission to depend on occultations rather than upon culminations for the determinations of longitudes, etc.”

Zuiderbreedte der observatieplaats uit 4 noordelijke en	
3 zuidelijke sterren.	20°52' 2",0
Herleiding op den vlaggemast	— 23 ,7
Zuiderbreedte van den vlaggemast.	20°51'38",3

Onze waarnemingen van sterrebedekkingen hadden op verschillende punten plaats, waarvan de onderlinge ligging door den heer SOETERS met alle nauwkeurigheid bepaald werd.

Uit den Nautical Almanac van 1874 het lengteverschil van Parijs en Greenwich = 9^m20^s63 ontleenende, zoo als het toen in de C. d. T. en in den N. A. opgegeven werd, volgde uit de zoo even medegedeelde getallen voor den vlaggemast $3^u41^m47^s,43$ beoosten Greenwich, en daarmede overeenkomstig:

Observatieplaats	L. beo. Gr.	Breedte
1 ^e op het erf van het Havenkantoor. . .	$3^u41^m47^s,32$	— 20°51'40",6
2 ^e op het erf van onze woning, N ^o . 51		
Rue du Conseil	48 ,11	46 ,1
3 ^e Bij of in de heliometertent op de batterij	47 ,81	35 ,3

De berekening der Lengte uit de sterrebedekkingen werd uitgevoerd op gedrukte formulieren, ingericht naar de methode, die ik in de Astronomische Nachrichten no. 1763 ontwikkeld heb. Deze bestaat daarin, dat men met eene aangenomene Lengte de declinatie der maan uit den sterrekundigen almanak ontleent, daarna de parallaxis berekent voor het punt aan den maansrand, waar de ster verdwenen is, en dat dus dezelfde rechte klimming en declinatie heeft als de ster; vervolgens, door bijtellen of aftrekken van twee termen, uit de rechte klimming der ster, die van het maans-middelpunt afleidt, en daarna weder in den Almanak opzoekt, met welk oogenblik b.v. Greenwich M. Tijd, deze rechte klimming overeenstemt. Komt de hieruit afgeleide Lengte der waarnemingsplaats overeen met de aangenomene, dan is deze de ware; komt zij er niet mede overeen, dan behoeft men slechts een klein gedeelte der berekening met eene gewijzigde Lengte der plaats over te doen, om dan uit de beide verschillen de juiste Lengte af te leiden.

Zij komt overeen met de methode, die in de 18e en het begin der 19e eeuw gebruikelijk was, (en die men o.a. in het bekende werk van BOHNENBERGER, *Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung* ontwikkeld vindt), met dit onderscheid dat toen de geheele berekening in lengte en breedte werd uitgevoerd, terwijl wij de rechte opklimming en declinatie gebruiken; en dat bij BOHNENBERGER c.s. van eene tweede hypothese geene sprake is.

Gaarne wil ik erkennen, dat de methode van BESSEL voor het berekenen van alle eklipische verschijnselen, dus ook voor het vooruitberekenen van sterrebedekkingen en voor de berekening van de lengte uit eene waargenomene bedekking te recht als de klassieke methode wordt aangemerkt, die dan ook in de meeste leerboeken alleen wordt medegedeeld, maar het kwam mij voor, dat de door mij aangegevene spoediger tot het doel bracht, en slechts in zeldzame gevallen in nauwkeurigheid voor die van BESSEL onderdoet. Het nadeel van de laatste methode bestaat in de lastige voorbereiding voor de berekening, waarvan men zich in het bekende leerboek van CHAUVENET, *a Manual of spherical and practical Astronomy*, Philadelphia 1874, deel I, blz. 550, kan overtuigen ¹⁾.

De horizontale equatoriale parallaxis der maan kon zonder correctie uit den Nautical Almanac worden afgeleid; wat den schijnbaren straal der maan aangaat, hoewel ik zelf in 1859 na een omvangrijk onderzoek eene bepaling van deze grootheid heb uitgevoerd, (zie V. & M. Nat. Afd. Deel VI, blz. 25 en verv.) die voor de verhouding van den middelbaren straal der maan tot den straal des aardequators de decimale breuk 0.27264 opleverde, (althans dit gaven de ten gronde gelegde sterrebedekkingen), nam ik na rijpe overweging de waarde $0.2725 \times$ de hor^e equ^e parallaxis $+0''04$ aan, hetgeen nagenoeg op hetzelfde neerkomt alsof de sinus v. d. schijnbaren maanstraal $=0.272525$ van de sinus der equatoriale horizontale parallaxis genomen wordt. Deze factor houdt het midden tusschen die, welke LUDWIG STRUVE in 1888 en J. PETERS in 1895 uit sterrebedekkingen tijdens totale maaneklipsen hebben afgeleid (0.272035 en 0.272518). De Nautical Almanac, die den straal, even als de parallaxis, aan de tafels van HANSEN ontleende, had steeds $1''4$ tot $1''6$ meer ²⁾ en dit verschil is nog altijd hetzelfde gebleven.

Omtrent de waargenomene bedekkingen is het volgende mede te deelen. Zij werden meestal door mijzelf waargenomen, hetzij door den Fraunhoferschen Kijker op voet, (met een objectief-opening van 11 c.m.) dien de heer STOOOP te Amsterdam de goedheid gehad had,

¹⁾ Ik heb één voorbeeld naar deze methode berekend; op $0^s,1$ na verkreeg ik dezelfde uitkomst als met de andere, maar er waren 57 logaritmen op te zoeken geweest, tegenover 37 volgens de andere methode.

Bij nadere overweging geloof ik echter dat de methode van BESSEL wel zoodanig gewijzigd kan worden, dat dit verschil aanmerkelijk minder wordt. Ik stel mij voor, dit nog nader te onderzoeken.

²⁾ CHAUVENET vermeldt het getal 0.27264 wel in eene noot als van mij afkomstig, maar gebruikt toch in zijn voorbeeld 0.27227 ($\log = 9.435000$), dat ik voor zoneklipsen aangegeven had, en dat voor sterrebedekkingen stellig (gemiddeld) te klein is.

aan de Commissie voor de waarneming van den Venusovergang te leen te geven, hetzij door den kijker van den heliometer, (objectief-opening $7\frac{1}{2}$ c.m.). Toen de hulp van den heer ERNST BAKHUYZEN later niet zoo veel als in het begin bij de oefeningen van Dr. KAISER met den fotoheliograaf vereischt werd, nam ook hij aan de waarneming der sterrebedekkingen deel, even als een enkele keer de Heer SOETERS.

In het geheel werden er 35 ingangen en 4 uitgangen waargenomen; het bleek echter dat er 12 ingangen en één uitgang verworpen moesten worden, zoodat er nog 23 ingangen en 3 uitgangen overbleven, dus in het geheel 26 waarnemingen, die bruikbare resultaten opleverden.

De reden tot dit verwerpen lag ten deele daarin, dat reeds bij het opteekenen der waarneming de aanmerking „onzeker” bijgevoegd was. Zwakte van de ster bij het naderen van den maansrand, of voorbijtrekkende wolken gaven tot die bijvoeging aanleiding. Bij de overigen bleek de correctie van de door GERMAIN bepaalde en dus door mij aangenomene Lengte zoo buitensporig groot te zijn, dat er aan eene of andere vergissing gedacht moest worden. Het lag voor de hand om te vermoeden dat er eene verkeerde ster voor de bedekte was aangezien, en in vijf gevallen gelukte het met behulp der sterrelijsten, de ware ster te vinden, doch in vier andere gevallen bleven alle pogingen vruchteloos. Ten slotte waren er vijf gevallen, dat de correctie der aangenomene lengte zoo groot gevonden werd (-21^s , -20^s , -28^s , -24^s en $+33^s$), dat er wel gedacht moest worden, hetzij aan eene vergissing, hoe onwaarschijnlijk ook, begaan bij het opschrijven van den tijd, hetzij aan de aanwezigheid eener zeer hooge verhevenheid aan het punt van den maansrand, waar de bedekking plaats had.

Wij zullen hier alleen de resultaten der goedgekeurde waarnemingen mededeelen, en merken nog op dat de gewichten G er bijgevoegd zijn, die gelijk genomen zijn aan $\sin^2 \psi$, als $2\psi =$ den boog is, die de ster achter de maanschijf beschrijft, als men deze namelijk als rustende beschouwt. (Volgens de notatie van CHAUVENET zou dit $\cos^2 \psi$ moeten zijn). Deze grootheid kon uit de getallen, voorkomende in de berekening, gemakkelijk worden afgeleid.

De berekeningen zijn alle in duplo uitgevoerd; de eene berekening door mij, de andere door den Heer KRESS, amanuensis der sterrewacht te Utrecht.

Resultaten voor de lengte van St. Denis-Réunion, (vlaggemast), door sterbedekkingen verkregen, geen onderscheid makende tusschen in- en uitgangen,

1874	Waarnemer	Ster	In-of Rand Uitgang	ΔL = Corr. Germain	G	$G \Delta L$	ε	$G \varepsilon^2$
September	19 O.	Arg. Z. 223 No. 75	<i>I D</i>	+2.26 ^s	0.70	+1.58 ^s	+3.18 ^s	7.08
»	» O.	Cordoba III.1589	<i>I D</i>	+6.64	0.74	+4.91	+7.56	37.29
»	» O.	» XVIII.124	<i>I D</i>	+8.21	0.60	+4.93	+9.12	49.90
»	22 O.	33 Capricorni	<i>I D</i>	+1.00	0.29	+0.29	+1.92	1.07
»	» O.	Arg. Z. 255 No. 27	<i>I D</i>	-6.10	0.50	-3.15	-5.18	13.42
»	» O.	» » » » 32	<i>I D</i>	-1.54	0.63	-0.97	-0.62	0.24
»	» O.	» » » » 34	<i>I D</i>	-1.51	0.89	-1.34	-0.59	0.31
»	» O.	» » » » 35	<i>I D</i>	-5.75	0.97	-5.57	-4.83	22.63
»	26 O.	73 Piscium	<i>U D</i>	+3.11	0.91	+2.83	+4.03	14.78
October	2 O.	53 Geminorum	<i>U D</i>	+1.27	0.28	+0.36	+2.19	1.34
»	4 O.		<i>U D</i>	+4.39	1.00	+4.39	+5.31	28.20
»	16 B.	Arg. Z. 223 No. 47	<i>I D</i>	-3.91	1.00	-3.91	-2.99	8.94
»	» B.	»	<i>I D</i>	+9.67	0.40	+3.87	+10.59	44.86
»	» O.B.	» » » 49	<i>I D</i>	-5.99	0.95	-5.69	-5.07	24.42
»	» O.B.	» » » 52	<i>I D</i>	+3.84	0.51 ⁵	+1.98	+4.76	11.67
»	» O.B.	» » » 51	<i>I D</i>	+4.65	0.49	+2.28	+5.57	15.20
»	» S. B.		<i>I D</i>	-4.26	0.99	-4.22	-3.34	11.05
»	» B.	Gould 24851	<i>I D</i>	+5.84	0.87	+5.08	+6.76	39.76
»	17 O.		<i>I D</i>	+5.39	0.19	+1.03	+6.31	7.57
»	» O.	Arg. Z. 241 No. 9	<i>I D</i>	-5.10	0.58	-2.96	-4.18	10.13
»	» O.	» » 231 » 12	<i>I D</i>	+1.15	0.35	+0.40	+2.07	1.50
»	» O.	» » » » 11	<i>I D</i>	-4.73	0.62	-2.93	-3.81	9.00
»	18 B.	» » 239 » 103	<i>I D</i>	-5.10	0.95	-5.07	-4.18	16.60
»	19 B.	» » 247 » 99	<i>I D</i>	-2.62	0.98	-2.57	-1.70	2.83
»	» B.	z Capricorni	<i>I D</i>	-4.22	0.97	-4.09	-3.30	10.56
»	» B.		<i>I D</i>	-8.95	0.94	-8.41	-8.03	60.61
					18.30 ⁵	+33.93	25 $m^2 = 450.96$	
						-50.78	$m^2 = 18.04$	
						-16.85	$m = \pm 4.25$	
						$\Delta L = -0.92 \pm 0.99,$		

Resultaten voor de lengte van (St. Denis) Réunion,
 ingangen en uitgangen afzonderlijk.

De 3 uitgangen geven $\Sigma G = 2.19$ $\Sigma G \Delta L = + 7.58$ dus $\Delta L = + 3^s.462$
 De geheele som was $\frac{18.30^s}{16.11^s}$ $\frac{- 16.85}{- 24.43}$ „ $\Delta L = - 1.516$
 dus de ingangen alleen: $\frac{16.11^s}{- 24.43}$ „ $\Delta L = - 1.516$
 Gemiddeld: $+ 0^s.97$

ε	ε^2	G	$G\varepsilon^2$
Ingangen			
+3.78	14.29	0.70	10.00
+8.16	66.59	0.74	49.28
+9.73	94.67	0.60	56.80
+2.52	6.35	0.29	1.84
-4.58	20.98	0.50	10.49
-0.02	0	0.63	0
+0.01	0	0.89	0
-4.23	17.89	0.97	17.35
-2.39	5.71	1.00	5.71
+11.19	125.22	0.40	50.09
-4.47	19.98	0.95	18.98
+5.36	28.73	0.51 ^s	14.80
+6.17	38.07	0.49	18.65
-2.74	7.51	0.99	7.43
+7.36	54.17	0.87	47.13
+6.91	47.75	0.19	9.07
-3.58	12.82	0.58	7.32
+2.67	7.13	0.35	2.50
-3.21	10.30	0.62	6.39
-3.58	12.82	0.95	12.18
-1.10	1.21	0.98	1.19
-2.70	7.29	0.97	7.07
-7.43	55.20	0.94	51.89
Uitgangen			
-0.35	0.12	0.91	0.11
-2.19	4.80	0.27	1.34
+0.93	0.86	1.00	0.86

N.B. Daar er geene reden bestaat, te onderstellen dat een uitgang aan den donkeren rand zooveel nauwkeuriger zou zijn dan een ingang aan den donkeren rand, heb ik ze met elkander vereenigd.

$$22 m^2 = 406.16$$

$$m^2 = 1.8.06$$

$$m = 4.34^s$$

(dit niet gebruikt)

Bij elkander:

$$24m^2 = 408.47$$

$$m^2 = 17.02$$

$$m = \pm 4.13^s$$

$$\frac{m^2}{16.115} = 1.056 \quad \sqrt{=} \pm 1^s.03,$$

$$\frac{m^2}{2.19} = \frac{7.78}{8.84} \quad \sqrt{=} \pm 2.79.$$

$$\frac{4}{2.21} \quad \sqrt{=} \pm 1.49.$$

$$m = \pm 1.08$$

(dit niet gebruikt)

Wij vinden dus:

als wij ingangen en uitgangen te zamen nemen:

Correctie der Lengte naar GERMAIN — $0^s,92 \pm 0^s,99$ (m. fout)

als wij ze van elkander scheiden: $+ 0,97 \pm 1,49$ (,, ,,)

en komen dus tot het besluit dat de door ons waargenomen sterrebedekkingen onbeslist laten of de Lengte van St. Denis zoo als GERMAIN die in 1867 en 1868 bepaald heeft, vergroot of verkleind moet worden, of, met andere woorden, dat zij zijn resultaat bevestigen.

Eerst dezer dagen heb ik ontwaard dat de *Connaissance des Temps* tegenwoordig, en wel sedert 1886, eene Lengte voor die plaats oopgeeft, die 1^s2 of $18''$ grooter is; in de laatste kolom der tabel van geografische liggingen staat ook: GERMAIN cor. 86. Er is echter niet aangegeven op welken grond; ik heb daarom naar Parijs geschreven met verzoek om opheldering daarover.

Ook moet ik opmerken, dat het boven gebruikte lengteverschil Parijs—Greenwich, naar de 1902 uitgevoerde bepaling door Fransche en Engelsche waarnemers grooter moet aangenomen worden. Het resultaat namelijk, door de Engelsche waarnemers verkregen, was $9^m 20^s,932 \pm 0^s006$; door de Fransche $9^m 20^s 974 \pm 0^s008$, gemiddeld $9^m 20^s,953$.

Wij voegen hier ten slotte nog bij eene vergelijking der uit de meridiaanwaarnemingen afgeleide en de door NEWCOMB naar zijne formules gegevene correcties der maansephemeride van den *Nautical Almanac* 1874.

M. T. Greenwich	Uit meridiaan- waarnemingen.		Newcomb.		N. — Merid.	
	^s	"	^s	"	^s	"
Sept. $19\frac{1}{8}$	-0.52	-4.3	-0.39	+0.3	+0.13	+4.6
22 $\frac{1}{6}$	-0.54	-4.9	-0.49	-2.4	+0.02	-0.5
22 $\frac{5}{12}$	-0.51	-2.1	-0.49	-2.6	+0.02	-0.5
26 $\frac{1}{6}$	-0.73	-5.9	-0.70	-5.8	+0.03	+0.1
Oct. $2\frac{1}{2}$	-0.79	+1.7	-0.95	+0.6	-0.16	-1.1
4 $\frac{1}{2}$	-0.75	0.0	-0.77	+2.9	-0.02	+2.9
16 $\frac{1}{5}$	-0.35	-4.1	-0.47	+0.4	-0.12	+4.5
17 $\frac{1}{4}$	-0.43	-2.0	-0.46	-0.4	-0.63	+2.4
18 $\frac{1}{3}$	-0.35	-1.2	-0.45	-1.3	-0.10	-0.1
19 $\frac{1}{3}$	-0.34	-2.5	-0.44	-2.0	-0.10	+0.5
					^s	"
					Gemiddeld: -0.03	+1.3

Het gemiddelde verschil is dus zeer gering; toch kan nog nagegaan worden of, indien de correcties naar NEWCOMB aangenomen worden, de onderlinge overeenkomst niet verbeterd wordt.

Wat de meridiaanwaarnemingen aangaat, wellicht zijn die ook wel aan andere sterrewachten verricht, (Leiden, Pulkowa, enz.) Ik stel mij voor, dit nog nader te onderzoeken; het is echter niet waarschijnlijk dat het resultaat veel gewijzigd zal worden.

Ten slotte nog deze opmerking dat blijkens den „Post en Telegraafgids”, het eiland Mauritius, reeds met Europa telegrafisch verbonden is, en dat het dus wel te verwachten is, dat dit wel spoedig met Réunion ook het geval zal zijn; dan zal het Bureau des Longitudes zeker niet verzuimen, pogingen aan te wenden, om eene telegrafisch bepaalde Lengte van St. Denis te verkrijgen.

Utrecht, 24 Maart 1905.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS spreekt over: “*De transformatie van een zijplooï in een hoofdplooï en omgekeerd.*”

Heeft men bij een binair mengsel de temperatuur opgevoerd boven de kritische temperatuur van een der componenten, dan bezit het ψ -oppervlak een plooï, die niet de geheele breedte van $x = 0$ tot $x = 1$ inneemt, maar die gesloten is aan de zijde van den component waarvoor T_k beneden de gekozen waarde van T ligt. In normale gevallen vertoont zulk een aan een zijde gesloten plooï geen bijzondere omstandigheden, en kan een dubbelraakvlak van de opene zijde af geregeld over de binodale lijn voortgerold worden tot aan het plooïpunt toe. Er zijn echter ook gevallen waarin complicaties optreden, en reeds in mijn „Théorie moléculaire” ben ik er bij de beschrijving van het ψ -vlak op bedacht geweest, dat naast de hoofdplooï een tweede plooï aanwezig kan zijn. Heeft het gelijktijdig bestaan van twee plooïen over een zeer groot temperatuurinterval plaats, dan is er aanleiding om van een dwarsplooï en een lengteplooï te spreken en de niet-mengbaarheid in den vloeistofvorm aan een lengteplooï toe te schrijven. Maar bestaan die twee plooïen slechts over een klein temperatuurinterval dan is het beter om van een hoofdplooï en een zijplooï te spreken; en ik heb deze namen gekozen, omdat werkelijk in zulke gevallen een der plooïen als hoofdplooï kan beschouwd worden, en de andere slechts als zijplooï fungeert. Maar, wat tot hiertoe nog niet opgemerkt is, daarbij komt de omstandigheid voor, dat bij zekere temperatuur die twee plooïen hunne rollen

omkeeren. Wat zijplooï was, wordt hoofdplooï, terwijl de hoofdplooï afdaalt tot zijplooï.

Ik heb hierbij voornamelijk het oog op de beschrijving van de veranderingen, die het ψ -vlak ondergaan moet bij verandering van de waarde van T , om rekenschap te geven van de waarnemingen van KUENEN over de kritische verschijnselen van mengsels van aethaan en sommige alcoholen.

Bij deze mengsels is bij een waarde van T slechts weinig grooter dan T_k van ethaan op het ψ -vlak een continu verloopende plooï zonder eenige complicatie. Maar bij verhooging van T verschijnt er behalve het aanwezige plooïpunt aan de ethaanzijde, een nieuw plooïpunt dat meer naar de zijde van den alcohol gelegen is. Van die temperatuur T_1 af is er dus van een driephasendruk sprake. Bij verdere verhooging van T breidt die nieuwe plooï zich uit, en bij een bepaalde hoogere waarde van $T = T_2$ verdwijnt het plooïpunt dat in den beginne aanwezig was. Dan eindigt de driephasendruk, en van dan af heeft de plooï haar eenvoudige gedaante weder hernomen. Tusschen T_1 en T_2 heeft men dus een plooï met twee plooïpunten. Spreekt men bij een plooï van een basis en een top, dan heeft men tusschen T_1 en T_2 een plooï met één basis en twee toppen. Buiten de grenzen van T gelijk aan T_1 en T_2 , bezit de plooï slechts één basis en één top. Maar terwijl even boven T_1 de nieuw zich vertoonende top zich slechts weinig buiten de binodale lijn der oorspronkelijke plooï uitbreidt, zal bij hoogere waarde van T deze top zich verder uitbreiden, terwijl de top aan de ethaanzijde gelegen inkrimpt, om bij T_2 geheel te verdwijnen, en zooals wij zullen aantonen als zijplooï te verdwijnen.

Terwijl dus de bij T_1 verschijnende plooï oorspronkelijk zijplooï is, moet er een transformatie plaatsgrijpen bij klimmende waarde van T , waardoor deze zijplooï in hoofdplooï verandert. Daarentegen moet dat gedeelte der plooï, dat bij T_1 in de nabijheid van het beneden T_1 bestaande plooïpunt gelegen was, en dus toen hoofdplooï was, bij waarden van T even beneden T_2 tot zijplooï zijn verlaagd.

Dat de onderscheiding tusschen hoofdplooï en zijplooï niet een willekeurige is, maar één welke in den aard der zaak ligt, blijkt, als men nagaat, welke van de twee toppen, die tusschen T_1 en T_2 aanwezig zijn, bij de basis van de plooï behoort, en als dat beslist is, men zich de vraag stelt op welke wijze de binodale lijn van den anderen top volledig moet gemaakt worden.

Men stelle zich dus de vraag, als men het dubbelraakvlak over de binodale lijn van het basisgedeelte der plooï laat rollen, welke van de twee aanwezige toppen door voortgezette rolling zal worden bereikt.

Raadpleegt men fig. 1, dan ziet men gemakkelijk in, dat een rollend raakvlak, dat van den rechterkant aankomt, en in de beide raakpunten A' en A'' is aangekomen, een nieuw raakpunt in A heeft verkregen, gelegen op dezelfde isopiëst, en zoo geworden is tot een vlak, dat in drie punten raakt. Bij de onderstelde temperatuur bestaat er dus een driephasendruk. In dat geval bestaan er twee toppen van een plooi, nl. P en Q . Maar welke van die twee toppen bij het basisgedeelte, dat rechts van $A' A''$ ligt, behoort, daarover kan geen twijfel zijn. Laat men nl. het rollend raakvlak, als het de lijn $A A'$ tot nodelijn heeft, verder voortrollen, dan wordt de binodale lijn aan den kant der kleine volumina tusschen de punten A'' en A aangevuld met de lijn $A'' B C A$, terwijl aan den anderen kant de configuratie $A' B' C A'$ de aanvulling geeft aan de zijde der grootere volumina. Dit is in overeenstemming met de teekening in mijn *Théorie Moléculaire*. (Cont. II pag. 23). Verder voortrollende bereikt men dus P als top der plooi. Wij hebben dus recht het gedeelte der plooi $A' P A$ als behoorende tot de hoofdplooi te rekenen. Er ligt nu wel over en naast de hoofdplooi een tweede configurate, waarvan $A Q A''$ een gedeelte is. Laat men een rollend raakvlak daarover bewegen, beginnende in Q , dan eindigt de daardoor beschreven binodale lijn niet in de punten A en A'' , maar is het vlak in die punten aangekomen en dus weder in den stand van den driephasendriehoek gekomen, dan kunnen wij het verder continu voortrollen tot het een punt der spinodale lijn bereikt. Dit punt is in de figuur 1 door D aangeduid. Dan heeft de binodale lijn, waarover wij nu spreken, een minimumdruk verkregen; het geconjugeerde punt D' is dan een keerpunt¹⁾.

Bij verder voortrollen doorloopt de binodale lijn aan de linkerzijde het gedeelte $D E'$ en aan de rechterzijde het gedeelte $D E$, waar weder de spinodale lijn wordt ontmoet. Daar is voor dat gedeelte een maximumdruk, terwijl nu in E' een keerpunt aanwezig is. En eindelijk wordt deze plooi, die in Q haar top had, gesloten door het stuk harer binodale lijn $E' R E$. Op dat gedeelte coëxisteeën, als wij ook labiele fasen als realiseerbaar zouden denken, toestanden tusschen E' en R met geconjugeerde tusschen E en R . Het punt R sluit als onrealiseerbaar plooi punt deze zijdplooi.

Dat bij de genoemde mengsels van ethaan en alcohol even boven T' , het nieuw zich vertoonende plooi punt Q aan de alcoholzijde tot de teekening van fig. 1 voert, en Q dan top eener zijdplooi is, daarover kan geen twijfel bestaan. Zijn de punten A en A'' nog uiterst

¹⁾ Over het bewijs van deze en dergelijke eigenschappen raadplege men Cont. II, fig. 3. Verder de zeer belangrijke studiën van KORTEWEG over de theorie der plooiën.

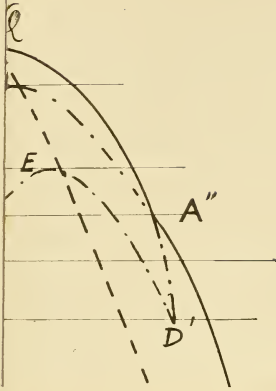
dicht bij elkander gelegen, dan moeten à fortiori de afstanden dier punten tot punten van de spinodale lijn uiterst klein zijn, en is dus terecht ondersteld dat het raakvlak in $A' A''$ bij verder voortrollen, door de spinodale lijn heengaat aan de zijde van A'' .

Dat aan den anderen kant bij temperaturen even beneden T_2 de plooi waarvan P de top is als zijplooi zal moeten beschouwd worden, kan om dezelfde redenen evenmin betwijfeld worden. Boven T_2 n.l. is alleen de top Q aanwezig en vertoont de geheele plooi van haar basisgedeelte af niet de minste complicatie. Alleen bij het dalen der temperatuur beneden T_2 ontstaat er dan bij P (in den stand n.l. die dat punt bij die temperatuur heeft) in den beginne een uiterst kleine uitbuiging, en dezelfde redenen die er ons toe brachten om even boven T_1 het punt Q als top eener zijplooi te beschouwen, moeten er ons nu toe leiden om P als top eener zijplooi te beschouwen. In fig. 3 is de teekening der binodale lijnen voor dat geval gegeven. Alleen is daar ondersteld dat de temperatuur reeds zooveel beneden T_2 is gedaald, dat de zijplooi een zoodanige uitgebreidheid heeft verkregen, dat zij uitwendig bezien niet van een gedeelte eener hoofdplooi is te onderscheiden.

Zoowel in fig. 1 als in fig. 3 is er asymmetrie tusschen de beide binodale lijnen der toppen P en Q . En nu moet bij vloeiende verandering van T_1 tot T_2 , of omgekeerd, fig. 1 door vloeiende verandering in fig. 3 overgaan of omgekeerd. Die overgang eischt een waarde van T , waarbij de asymmetrie tusschen de beide toppen P en Q is weggevallen. Hoe de loop der binodale lijnen bij de overgangstemperatuur zijn moet is in fig. 2 voorgesteld. Dan heeft men een plooi met één basis, maar met twee hoofden.

Vergelijkt men fig. 1 met fig. 2, dan is het eenige verschil, dat de punten B' en E' zijn samengevallen, wat medebrenkt dat de node die bij B' behoort, en die welke bij E' behoort, dus de punten B en E , eveneens samenvallen. Van uit de figuur 2 komt men tot fig. 1, door in het samengevallen punt, dat door B' en E' is aangeduid de saamgevloeiende deelen weder van elkander te scheiden, en hetzelfde in het saamgevallen punt $B E$ te doen. Evenzoo komt men van uit fig. 2 tot fig. 3. Maar de wijze waarop die scheiding geschiedt moet is voor die twee overgangen verschillend. Wat voor het eene geval in het linkerpunt geschiedt, heeft in het andere geval in het rechts gelegen punt plaats.

Het samenvallen van de punten B' en E' is in fig. 2 geteekend in de spinodale lijn; evenzoo het samenvallen van de punten B en E . De spinodale lijn is n.l. de kromme, die aldus is aangeduid — — — —, en welke door de punten $B E' P D R C Q B E$ loopt. Dat dat samenvallen



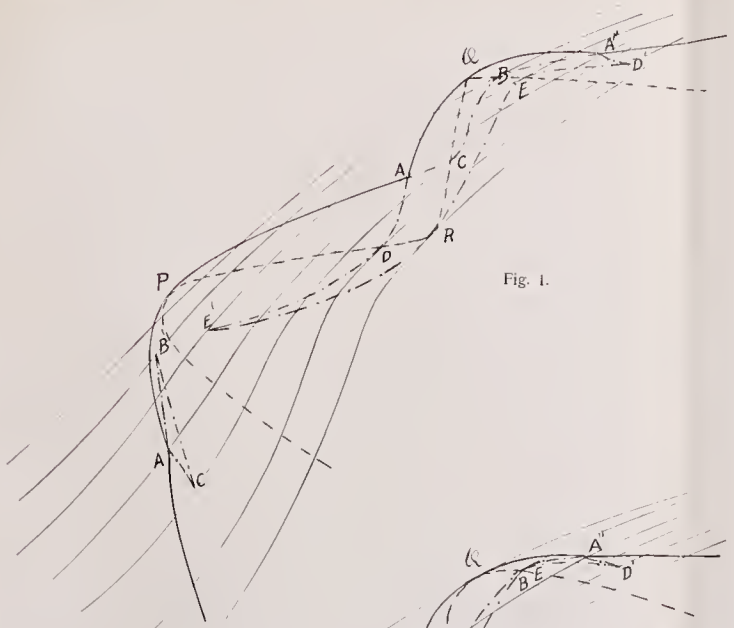


Fig. 1.

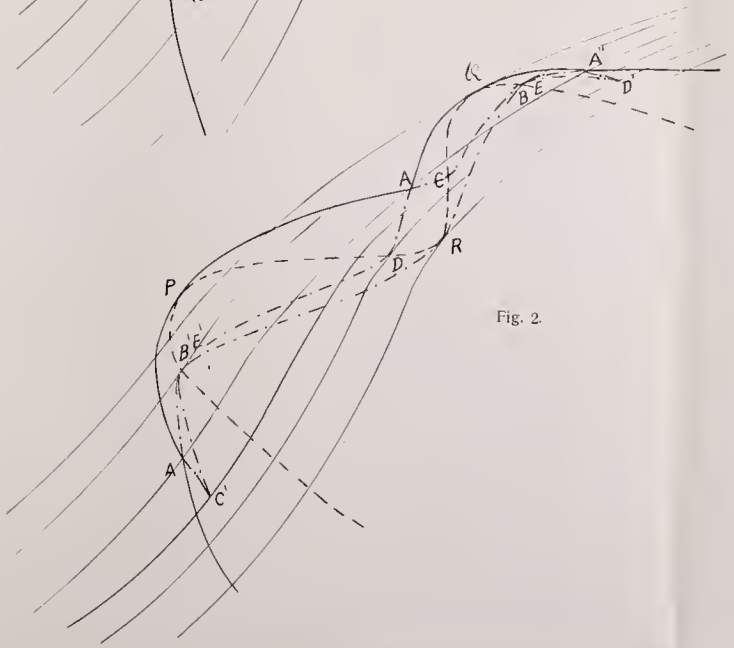


Fig. 2.

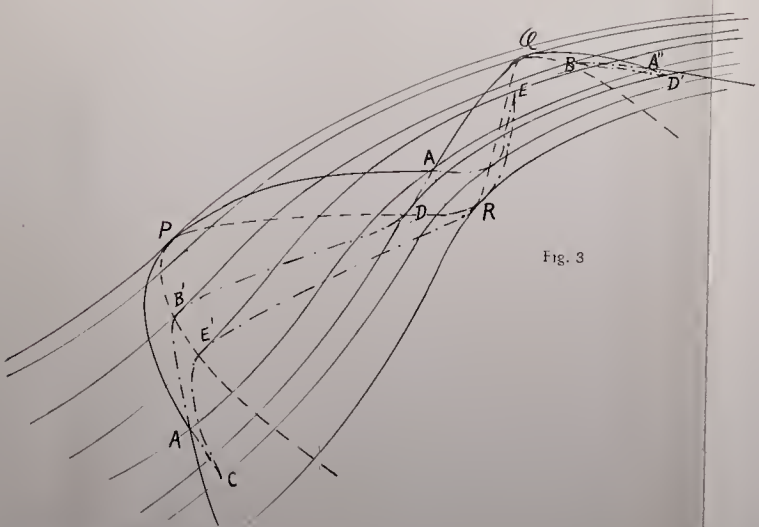


Fig. 3.

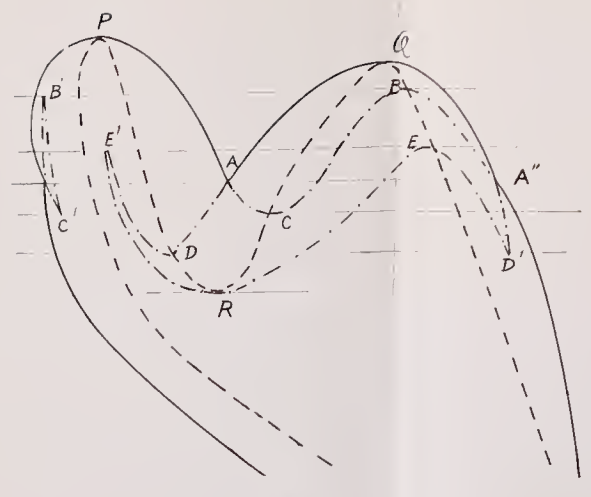


Fig. 4.

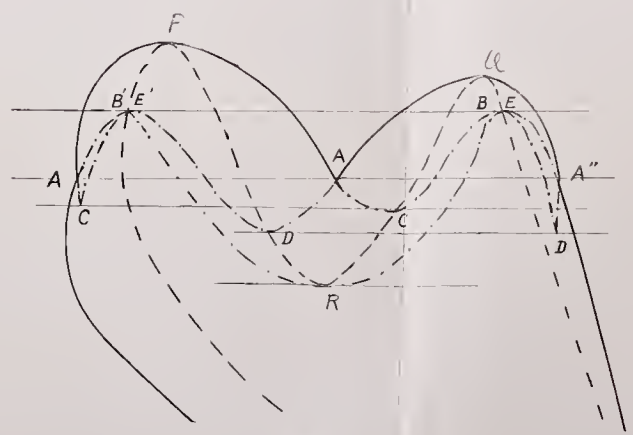


Fig. 5.

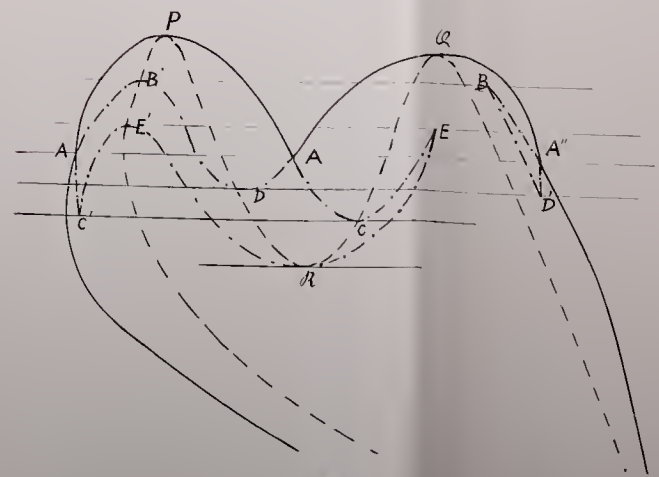


Fig. 6.

in de spinodale lijn moet plaats grijpen was te voorzien uit het kenmerk, dat wij gebezigd hebben om te onderscheiden tusschen hoofdplooi en zijplooi. Wij moesten Q als top der zijplooi beschouwen, als het rollende raakvlak in den stand $A' A''$ aangekomen, verder rollende de spinodale lijn bereikte aan de zijde bij A'' , dus in de ruimte binnen den top Q gelegen. Omgekeerd was P top der zijplooi als dit geschiedde aan de andere zijde bij A' . Voor het geval, dat er symmetrie is tusschen de beide toppen P en Q moet het ontmoeten der spinodale lijn aan beide zijden te gelijk geschieden. Maar wij hadden ook als kenmerk voor hoofdplooi kunnen bezigen, dat de hoofdplooi die plooi is, die waar de punten B en E' gescheiden zijn¹⁾. De vergelijking van deze beide kenmerken voert tot het feit dat de vereeniging van de punten B' en E' moet geschieden op de spinodale lijn. Maar zoolang de beide toppen P en Q aanwezig zijn, is er, wat ook de beteekenis dezer toppen zijn moge, nog een derde plooi-punt aanwezig, n.l. het punt R , behoorende bij een samenstelling van het binair mengsel dat inligt tusschen de samenstellingen behoorende bij de punten P en Q .

In de figuren 4, 5 en 6 zijn de volledige (p, x) lijnen voor de coëxisterende fasen aangegeven. Fig. 4 voor een temperatuur die weinig boven T_1 ligt, en waarbij Q nog top der zijplooi is, en fig. 6 voor temperaturen beneden T_2 , waarbij P nog top der zijplooi is. Fig. 5 geldt dan voor de overgangstemperatuur. De differentiaalvergelijking voor deze (p, x) -lijn is, zooals ik als bekend mag aannemen:

$$v_{21} dp = (x_2 - x_1) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2 \partial p T} dx_1 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (\alpha)$$

Telkens als de (p, x) -lijn een punt met de spinodale lijn $\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2 \partial p T} = 0\right)$ gemeen heeft, is p maximum af minimum. Dit is in de plooi-punten het geval, maar ook in de andere punten, waarin een fase, die met een ander coëxisteert, door de spinodale lijn gaat. In fig. 5 moeten er dus bij $P, Q, B'E', BE, D, C, R$ maxima of minima aanwezig zijn. Berekent men uit de differentiaalvergelijking de waarde van $\frac{d^2 p}{dx_1^2}$ voor de punten $B'E'$ en BE , dan blijkt, dat daar voor de twee takken die elkander raken, deze waarde even groot is. Differentieeren wij vergelijking (α) , dan verkrijgen wij:

$$v_{21} \frac{d^2 p}{dx_1^2} + \frac{dp}{dx_1} \frac{d(v_{21})}{dx} = (x_2 - x_1) \left\{ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^3 \partial p T} + \frac{d^2 v}{dx_1^2 \partial p T} \frac{dp}{dx_1} \right\} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2 \partial p T} \frac{d(x_2 - x_1)}{dx_1}.$$

¹⁾ Men vergelijkte Wiskundige opgaven enz. IV^{de} deel, 5^{de} stuk, Vraagstuk CXXXIX, waar bovendien aangetoond is, dat de takken der binodale-lijn die elkander in $B'E'$ raken dezelfde kromming hebben. Evenzoo de geconjugeerde die elkander in BE raken.

Daar $\frac{dp}{dx_1}$ en $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2}{}_{pT}$ gelijk nul is, vereenvoudigt zich deze vergelijking tot

$$v_{21} \frac{d^2 p}{dx_1^2} = (x_2 - x_1) \left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^3} \right)_{pT}.$$

De grootheden v_{21} , $(x_2 - x_1)$ en $\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x_1^3} \right)_{pT}$ zijn voor beide takken gelijk en dus ook $\frac{d^2 p}{dx_1^2}$. In fig. 5 is dit bij de teekening van de takken in de nabijheid van de punten BE' niet vervuld. Beter in de nabijheid der punten BE . Ook bij de keerpunten is hier en daar in de behoorlijke kromming der takken een onnauwkeurigheid waar te nemen. Maar de figuren moeten geheel als schematische worden beschouwd. De eigenschap, dat de elkander rakende krommen in fig. 2 gelijke kromming hebben, en dat dit evenzoo het geval is met de elkaar rakende krommen in fig. 5, hangen natuurlijk ten nauwste samen. Uit

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{vT} + \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_{xT} \frac{dv}{dx}$$

en

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}{}_{vT} + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial v}{}_{xT} \left(\frac{dv}{dx} \right) + \frac{\partial^2 p}{\partial v^2}{}_{xT} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{\partial p}{\partial v}{}_{xT} \frac{d^2 v}{dx^2}$$

volgt voor twee krommen, die door een zelfde punt gaan, en die dus $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial v}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}$ en $\frac{\partial p}{\partial v}$ gelijk hebben, en die elkander in dat punt raken, en bij gevolg ook $\left(\frac{dv}{dx} \right)$ gelijk hebben, dat de gelijkheid van $\frac{d^2 v}{dx^2}$ ook de gelijkheid van $\frac{d^2 p}{dx^2}$ eischt en omgekeerd. De stelling van KORTEWEG, die ook door KLUYVER bewezen is, zou dus ook langs den hier gevolgden weg kunnen bewezen worden.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt een mededeeling aan van Prof. Dr. R. MEHMKE in Stuttgart, „*Ueber Trägheitsmomente und Momente beliebiger Ordnung in Räumen beliebig hoher Stufe.*”

(Mede aangeboden door den Heer KORTEWEG).

In den Mathematischen Annalen Band 23 (1884) S. 143—151 habe ich einen Weg zur Berechnung von Trägheitsmomenten gezeigt, der leicht und schnell zum Ziel führt und von der Zahl der Dimensionen des Raumes unabhängig ist. Als Beispiel wurde dort von mir

der Fall eines mit homogener Masse erfüllten Gebildes im Raum von $(n-1)$ Dimensionen gewählt, das dem Tetraeder analog ist, also nach der bekannten Ausdrucksweise des Herrn SCHOUTE ein Simplex S_n . Ohne hiervon Kenntnis gehabt zu haben, hat Herr SCHOUTE kürzlich in den Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIX (1905) diesen Fall auf andere Art behandelt und er ist zu demselben Ergebnis gekommen. Statt mich mit dem Hinweis auf diese Tatsachen zu begnügen, werde ich mitteilen, wie man auf demselben Wege Momente von höherer als der zweiten Ordnung finden kann. Diese Aufgabe ist freilich am angegebenen Orte S. 146—147 für ein Simplex schon soweit vorbereitet worden, dass nur noch ein kleiner Schritt zu ihrer Lösung nötig gewesen wäre.

Setzen wir einen ebenen Raum von $(n-1)$ Dimensionen voraus, einen Raum von der „Stufe“ n , wie GRASSMANN schon 1844 sagte, oder vom „Punktwert“ n , wie Herr SCHOUTE in seinem vorzüglichen Lehrbuch der mehrdimensionalen Geometrie sich ausdrückt. Das Moment r -ter Ordnung M_r eines beliebigen, diesem Raum angehörigen materiellen Gebildes in Bezug auf einen in demselben Raum enthaltenen Raum E von $(n-1)$ -ter Stufe (also $n-2$ Dimensionen) ist

$$M_r = \int r^r dm,$$

wo r den Abstand eines mittleren Punktes p in einem Element jenes Gebildes von E , dm die Masse des Elementes bezeichnet. Nach GRASSMANN ist aber

$$r = [E p],$$

d. h. gleich dem „äusseren“ Produkt von E und p , wenn wir sowohl E als p den numerischen Wert 1 beilegen, folglich

$$M_r = \int [E p]^r dm (a)$$

Ich nehme an, dass r eine positive ganze Zahl sei. Ist r eine gerade Zahl und soll das Moment in Bezug auf einen Raum A berechnet werden, dessen Stufenzahl kleiner als $(n-1)$ ist, handelt es sich also z. B. um das Trägheitsmoment in Bezug auf eine Axe ($r = 2$), dann wird nach GRASSMANN

$$r^2 = [A p | A p],$$

wo das Zeichen | die „innere“ Multiplikation bedeutet, und wir erhalten

$$M_r = \int [A p | A p]^{\frac{r}{2}} dm. b)$$

Die beiden Fälle $a)$ und $b)$ können durch eine und dieselbe Inte-

gration erledigt werden, wenn man sich des von GRASSMANN eingeführten sehr nützlichen Begriffes der "Lückenausdrücke" bedient.

Setzen wir nämlich aus $[Ep]^v$ oder $[Ap | Ap]^2$ den Punkt p symbolisch heraus und bezeichnen jede dadurch entstandene Lücke mit PEANO durch $*$, so kommt

$$r^v = [E*]^v \cdot p^v \quad \text{bzw.} \quad r^v = [A* | A*]^2$$

oder

$$r^v = Lp^v,$$

wo der (mit v Lücken versehene) Ausdruck L im ersten Fall gleich $[E*]$, im zweiten Fall gleich $[A* | A*]^2$ ist. Da nun L bei der Integration konstant bleibt, kann man es vor das Integralzeichen setzen, wodurch man erhält:

$$M_v = L \cdot \int p^v dm = Lp^{(v)} \dots \dots \dots (1)$$

Damit ist die Aufgabe zurückgeführt auf die Bestimmung der „Punktgrösse v -ten Grades“

$$p^{(v)} = \int p^v dm, \quad \dots \dots \dots (2)$$

die zum gegebenen materiellen Gebilde gehört. (Die v -te Potenz eines Punktes p haben wir uns als den v -fachen Punkt p vorzustellen. Das algebraische Produkt von v verschiedenen Punkten ist der Inbegriff dieser Punkte, wobei wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren eines algebraischen Produktes die Reihenfolge der Punkte willkürlich ist. Die Summe beliebig vieler derartiger Grössen hat zunächst nur formale Bedeutung, lässt sich aber durch ein Gebilde v -ter Ordnung, das Analogon des Trägheitsellipsoides, geometrisch veranschaulichen). Das Integral 2) hängt nur von der Gestalt und Massenverteilung des gegebenen materiellen Gebildes ab, und während bei der gewöhnlichen Behandlung unserer Aufgabe mit Hilfe Cartesischer Koordinaten der Raum E oder A auf die Integration einen recht störenden Einfluss haben kann, ist dieser Einfluss hier ganz beseitigt. Verschiedene andere Aufgaben führen auf ein ebensolches Integral wie 2). Wünschen wir z.B. die kinetische Energie T eines (starrten oder affinveränderlichen) stetig bewegten Massensystems für irgend einen Zeitpunkt zu berechnen, so ist

$$2 T = \int v^2 dm,$$

unter v die Grösse der Geschwindigkeit eines mittleren Punktes p

im Element dm verstanden. Aber v^2 ist gleich dem „inneren“ Quadrat des Vektors $\frac{dp}{dt}$, der die Geschwindigkeit von p nach Grösse und Richtung darstellt:

$$v^2 = \frac{dp}{dt} \mid \frac{dp}{dt},$$

und wenn das Symbol \mathfrak{A} eine gewisse Affinität bezeichnet, wird der augenblickliche Geschwindigkeits-Zustand des Massensystems angegeben durch

$$\frac{dp}{dt} = \mathfrak{A}p,$$

folglich hat man

$$T = Lp^{(2)},$$

$$L = \frac{1}{2} [\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}], \quad p^{(2)} = \int p^2 dm.$$

Auch die Bestimmung der statischen Summe der bei der Bewegung des Massensystems in irgend einem Zeitpunkt hervorgerufenen Trägheitskräfte beliebiger Ordnung und die Bestimmung der z. B. von J. SOMOFF betrachteten Energien höherer Art führt auf das Integral $p^{(2)}$.

Es macht nicht die geringsten Schwierigkeiten, das Integral $p^{(2)}$ für ein Simplex konstanter Dichte mit den Ecken a_1, a_2, \dots, a_n zu ermitteln. Wir können setzen

$$p = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n,$$

woraus alle Punkte innerhalb des Simplex erhalten werden, wenn man den Zahlgrössen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ alle mit der Bedingung

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$$

verträglichen positiven Werte gibt. Denkt man sich das Simplex in Elemente zerlegt von der Gestalt des Parallelotops, d. h. des $(n-1)$ -dimensionalen Analogons zum Parallelepipid unseres gewöhnlichen Raumes, und zwar mit Kanten, die parallel den von a_1 ausgehenden Kanten des Simplex sind, so ergibt eine leichte Rechnung, die a. a. O. S. 147 nachgesehen werden kann,

$$dm = (n-1)! M d\lambda_2 d\lambda_3 \dots d\lambda_n,$$

wo M die Masse des ganzen Simplex bezeichnet. Daher wird

$$p^{(2)} = (n-1)! M \int (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n)^2 d\lambda_2 d\lambda_3 \dots d\lambda_n.$$

Der polynomische Satz liefert

$$(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n)^v = \sum \frac{v!}{v_1! v_2! \dots v_n!} \lambda_1^{v_1} \lambda_2^{v_2} \dots \lambda_n^{v_n} a_1^{v_1} a_2^{v_2} \dots a_n^{v_n}$$

mit

$$v_1, v_2, \dots, v_n = 1, 2, \dots, n, \quad v_1 + v_2 + \dots + v_n = n.$$

Andererseits ist nach einem bekannten Satz von LIOUVILLE unter den obigen Bedingungen für $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$:

$$\begin{aligned} \int \lambda_1^{v_1} \lambda_2^{v_2} \dots \lambda_n^{v_n} d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n &= \frac{v_1! v_2! \dots v_n!}{(v_1 + v_2 + \dots + v_n + n - 1)!} = \\ &= \frac{v_1! v_2! \dots v_n!}{(v + n - 1)!} \end{aligned}$$

folglich

$$p^{(v)} = \frac{v! (n-1)!}{(v + n - 1)!} M \sum_{v_1, v_2, \dots, v_n=1}^n a_1^{v_1} a_2^{v_2} \dots a_n^{v_n} \dots \quad (3)$$

mit

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = v.$$

Die Summe rechts könnte man offenbar aus $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^v$ dadurch erhalten, dass man nach dem polynomischen Satz entwickelte, aber die Polynomkoeffizienten alle unterdrückte. Der Faktor

$$\frac{v! (n-1)!}{(v + n - 1)!}$$

ist nichts anderes als die reciproke Anzahl der Glieder. Durch Einsetzen des erhaltenen Wertes von $p^{(v)}$ in 1) findet man, wenn der Abstand der Ecke a_i des Simplex von dem Raum E oder A mit y^i bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} M_v &= \frac{v! (n-1)!}{(v + n - 1)!} M \sum y_1^{v_1} y_2^{v_2} \dots y_n^{v_n} \\ &\quad (v_1 + v_2 + \dots + v_n = v). \end{aligned}$$

Für $v = 2$ habe ich a. a. O. die Summe in 3) auf eine Summe von $(n + 1)$ bzw. n Quadraten zurückgeführt, mit andern Worten den Simplex durch ein System von $(n + 1)$ bzw. n einzelnen Massenpunkten ersetzt, die ihm hinsichtlich aller mit dem Trägheitsmoment zusammenhängenden Fragen äquivalent sind. Für $v > 2$ scheint eine Reduktion ähnlicher Art sich weniger leicht ausführen zu lassen.

Stuttgart, den 23 März 1905.

Anatomie. — De Heer BOLK biedt eene mededeeling aan: „*Over de ontwikkeling van het cerebellum bij den mensch*”. (Eerste mededeeling).

Naar aanleiding van het feit dat de lobulatie van het volwassen Primatencerebellum in 't algemeen en dat van den mensch in het bijzonder, in meerdere opzichten afwijkt van die bij de overige zoogdieren, zoodat eene homologiseering der kwabben bij het Primatencerebellum hier en daar moeilijkheid oplevert, heb ik een onderzoek ingesteld naar de ontwikkeling der groeven en lappen van de kleine hersenen bij den mensch, ten einde te trachten op deze wijze opheldering te krijgen omtrent eenige punten in de anatomie van het Primatencerebellum, die langs vergelijkend anatomischen weg niet tot oplossing gebracht konden worden. Dit onderzoek strekt zich uit over een veertigtal cerebella van menschelijke vruchten met eene kruin-zoolenlengte van 5 tot 30 cM.

Alle objecten waren in Formol gehard en wel in situ; alcohol-materiaal is voor de studie van dit ontwikkelingsproces niet bruikbaar.

Een volledig systematisch onderzoek naar de lappenvorming van het cerebellum bij den mensch heeft tot nu toe niet plaats gehad. RETZIUS geeft in zijn bekend standaardwerk — *Das Menschenhirn* — een groot aantal afbeeldingen van ontwikkelingsstadien, ook van het cerebellum, doch eene beredeneerde toelichting daartoe ontbreekt. Voorts mogen hier genoemd zijn uit ouder tijd de mededeelingen van KÖLLIKER en SCHWALBE, uit jonger tijd die van KUTHAN, ELLIOT SMITH en CHARNOCK BRADLEY. In 't algemeen echter zijn deze onderzoekingen aan een voor dit doel ontoereikend materiaal verricht, tengevolge waarvan meeningen zijn gangbaar geworden, die ik als onjuist heb leeren kennen. In 't bijzonder geldt dit bijv. de opvatting over de ontstaanswijze van den sulcus horizontalis. Vooral met het oog op de individueele variaties die vooral in de latere periode der lobulatie optreden, is het een vereischte om het onderzoek aan een uitgebreid materiaal uit te voeren, wil men zich een zuiver en aaneengesloten beeld van het proces vormen, en wel leeren onderscheiden wat hierbij norm, wat uitzondering is.

Men kan in het morphogenetisch proces van het menschelijk cerebellum drie perioden onderscheiden, de eerste periode is die van de ontwikkeling der „kleinhersenlamelle” tot aan het verschijnen der eerste schorsgroeve; de tweede en derde periode zijn die der groeven- en lappenvorming, waarbij in de tweede periode die groeven optreden, die voor het zoogdiercerebellum in 't algemeen kenschetsend zijn, in de derde periode ontstaan de specifieke groeven en lappen

van het Prinatocerebellum. In deze eerste mededeeling zullen alleen de eerste en tweede periode in hoofdzaak worden beschreven.

De Figuren 1, 2, 3 en 4 zijn voldoende om een beeld te geven van de ontwikkeling der „kleinhersenslamelle” tot aan het tijdstip van het ontstaan der eerste groeve. Figuur 1 is ontleend aan een foetus van 5 cM. kruin-zoollengte. De brug- en halsbocht hebben hun hoogsten graad van kromming bereikt. Het cerebellum doet zich als de reeds tamelijk verdikte „Kleinhirnlamelle” van MIHALCOVICs voor. Opmerkelijk is dat de verdikking bij den mensch intraventriculair gekeerd is, bij het konijn en varken (CHARNOCK BRADLEY) en bij het schaap (KUTHAN) puilt juist de extraventriculaire vlakke ’t meest uit.

Uit Figuur 2a en 3a blijkt nu dat de konvexiteit der intraventriculaire vlakke hoe langer zoo grooter wordt, terwijl de buitenvlakke zich slechts flauw welft. Tengevolge daarvan heeft in Fig. 3 het cerebellum op doorsnede een driehoekige gedaante gekregen, met één extra-, twee intraventriculaire vlakten, van deze laatsten ziet eene basaalwaarts, de andere kaudaalwaarts. De oorspronkelijke kaudale rand der „Lamina cerebellaris” is daardoor met de insertie van het epitheliale ventrikeldak naar boven geschoven. Daar zich nu intijds de Plica chorioïdea gevormd heeft, is de eigenaardige toestand ontstaan die door His voor het menschelijk cerebellum is beschreven, maar waarvan het voorkomen door KUTHAN ontkend is, omdat hij daarvan bij het schaap geen spoor kon ontdekken, niettegenstaande een volledige ontwikkelingsserie tot zijn beschikking stond. Het voorste blad van de Plica chorioïdea, de z.g.n. lamina chorioïdea is nu toch evenwijdig aan de naar achterziende intraventriculaire vlakke van het cerebellum uitgespannen en er ontstaat tusschen deze vlakke en de genoemde lamina eene spleetvormige ruimte. His beschrijft dit zoo, dat de lamina chorioïdea het cerebellum ten deele zakvormig omhult, en in hoeverre dit het geval is blijkt uit Fig. 3b waar het cerebellum van ter zijde gezien geschetst is. In Fig. 4 nu vindt men van dezen toestand niets meer terug, de Plica chorioïdea insereert aan den thans naar achter gekeerden rand van het cerebellum. Ook in dit opzicht kan ik de waarnemingen van His tegenover KUTHAN bevestigen, dat n.l. de lamina chorioïdea zich tegen de naar achter ziende intraventriculaire vlakke aanlegt en met deze verkleeft. Daardoor is deze laatste tot een extraventriculaire vlakke geworden en de Plica chorioïdea heeft een nieuwe secundaire insertielijn aan het cerebellum gekregen. Tevens is daardoor nu de buitenvlakke convex geworden, de binnenvlakke vertoont als eerste aanduiding van de tent in haar achterste deel een ondiepe groeve die als *Incisura fastigii* te onderscheiden is. De primitieve insertielijn van de lamina

chorioïdea moet men in Fig. 4 zoeken op den top van de extraventriculaire vlakke, zijdelings ligt zij meer kaudaalwaarts, zooals uit Fig. 3*b* volgt. Dit ontwikkelingsstadium van het cerebellum bij den mensch schijnt door de eigenaardige wijze waarop het laatste zich verdikt principieel te verschillen van dat bij andere zoogdieren, waar de kleinhersenslamel op doorsnede een meer afgeplatte lensvormige gedaante behoudt.

Aanvankelijk heeft de verdikte lamina cerebellaris den vorm van een halven ring, die loodrecht staat op het voorste deel van de lengteas van het rhombencephalon en zijdelings zonder scherpe grens overgaat in de nog relieflooze regio pontis (Fig. 2*b*). Spoedig zwellen de laterale deelen der lamina cerebellaris tamelijk sterk kolfvormig aan (Fig. 3*b*) waardoor eene duidelijke begrenzing tusschen hersenstam en cerebellum ontstaat. Deze laterale aanzwellingen herinneren aan den bilateralen aanleg van het cerebellum bij lager vertebraten (o. a. door SCHAPER bij Teleostii geconstateerd). Toch is deze laterale afgrenzing slechts tijdelijk, zoodra de Pons zich begint te differentieeren verdwijnt zij weder, om eerst in een veel later stadium, als de schors reeds rijkelijk gelamelliseerd is opnieuw te ontstaan.

Intusschen hebben zich gedurende de verdikking der lamina cerebellaris in het grensgebied tusschen Mesencephalon en Rhombencephalon ontwikkelingsverschijnselen afgespeeld die tot het ontstaan van Plica encephali dorsalis (KUPFER), Isthmus rhombencephali en Velum medullare anterius leiden. In het jongste afgebeelde stadium (Fig. 1) gaat de voorrand van de Lamina cerebellaris direct in het middenhersendak over, alleen is de achterrand van dit laatste een weinig naar binnen ingestulpt. Een Isthmus rhombencephali of Plica encephali dorsalis bestaan nog niet. In het aansluitend ontwikkelingsstadium (Fig. 2*a*) heeft het mesencephalon een duidelijk begrensden, loodrecht op het dak staanden achterwand gekregen, de inrolling naar binnen van den achterrand van het dak bestaat nog; is ook nog ten deele in Fig. 3 zichtbaar, maar in Fig. 4 tengevolge van de verdikking van den achterwand van het mesencephalon verdwenen. In Fig. 2 is de Plica encephali dorsalis ontwikkeld, naar voren begrensd door den achterwand van het mesencephalon naar achter door de Lamina cerebellaris. Met het ontstaan der Plica gaat een draaiing der Lamina cerebellaris gepaard waarvan nu de voorrand niet meer zooals in Fig. 1 naar voren, doch naar onder gelegen is, en dientengevolge is nu ook in beginsel de Isthmus rhombencephali aangeduid. Alsnu wordt de bodem van de Plica encephali dorsalis breeder, er ontstaat (Fig. 3*a* en 4) tusschen de verdikte lamina cerebellaris en het mesencephalon een dunne tussenplaat, de eerste aanleg van het velum medullare anterius.

De verdere details uit deze ontwikkelingsperiode evenals die der volgende zullen elders uitvoerig worden vermeld.

De lobulatie der kleine hersenen in de tweede periode is daarvoor gekenmerkt, dat de groeven die het kleinhersenvlak in meerdere gebieden verdeelen, met uitzondering van een enkele, in het mediaanvlak ontstaan en van hieruit zijwaarts dringen. Deze interlobulaire groeven zijn dus met uitzondering van een enkele onparig, en verdeelen het foetale cerebellum van den mensch in een aantal lappen, die zich zonder moeite laten homologiseeren met die welke ik als typisch voor het volwassen zoogdiercerebellum heb leeren kennen.

De mediaansnede van een cerebellum met aanduiding der eerst optredende groeven is in Fig. 5 weergegeven. De incisura fastigii is in vergelijking met Fig. 4 meer naar voren geschoven. Op de extraventriculaire vlakte zijn duidelijk twee groeven te onderscheiden, eene, een weinig rostraal van den top van het cerebellum, een tweede op korten afstand van den margo myelencephalicus. Welke van deze beide het eerst ontstaat heb ik niet kunnen beslissen, klaarblijkelijk ontstaan zij ongeveer gelijktijdig, daar ik bij drie cerebella uit dit stadium telkens reeds beide aanwezig vond. (Totale lengte van het foetus 8 à 10 cM). De voorste groeve is de sulcus primarius (1), de typische, aan elk zoogdiercerebellum zonder moeite terug te vinden hoofdgroeve, die de beide kwabben van het cerebellum: Lobus anterior en Lobus posterior — van elkander scheidt. De achterste groeve (3) is de sulcus uvulo-nodularis (*mih*) (sulcus postnodularis van ELLIOT SMITH, sulcus praeuvularis van ZIEHEN, Fissure IV van CHARNOCK BRADLEY). Zij begrenst den Nodus naar voren, d. i. in de richting van het mesencephalon. Tusschen deze beide groeven is op het bovenste gedeelte van het achtervlak eene nog ondiepe inzinking te zien, de eerste aanduiding van de Fissura secunda (ELLIOT SMITH, *mih*), sulcus inferior anterior van ZIEHEN, Fissure *d* van CHARNOCK BRADLEY. Het cerebellum bezit, in dit stadium van achter bezien een eenigszins biscuitvormige gedaante (Fig. 6) en ligt met de voorvlakte zijner zijstukken tegen de occipitaalpolen der hemisferenblaasjes aan. Behalve de beide genoemde, van de mediaanlijn uitgaande groeven bezit het cerebellum in dit stadium reeds een bilateraal symmetrisch opgetreden sulcus, die op korten afstand van den margo myelencephalicus gelegen is. Deze groeve (*p*), die zich in latero-mediale richting ontwikkelt, is het homologon der groeve die ik bij het zoogdiercerebellum als Fissura parafloccularis onderscheiden heb. Zij begrenst naar voren den reeds een weinig uitpuilenden zoogenaamden Recessus lateralis. De voorwand van dezen Recessus lateralis is door

KÖLLIKER als Gyrus chorioïdeus onderscheiden. Het komt mij voor dat de benaming „Gyrus floccularis” een meer kenschetsende is, daar toch uit dit reeds zoo vroeg afgegrensde smalle kleinhersenzoompje later de Flocculi ontstaan.

In een volgend stadium (Fig. 7 en 8) is de sulcus primarius (1) dieper en de Fissura secunda (2) tot een duidelijke groeve geworden; er is bovendien eene eerste bijgroeve ontstaan in den Lobus anterior. Later wordt deze Lobus door drie groeven in vier kwabjes gescheiden, het is mij echter niet gelukt te beslissen welke van deze drie het eerst optreedt. Dat de in Fig. 6 en 7 aanwezige, eerst optredende sulcus in den Lobus anterior inderdaad de door ELLIOT SMITH als sulcus praeculminatus onderscheiden groeve is, heb ik niet kunnen bevestigen, terwijl ook uit eene vergelijking mijner cerebella van den mensch uit dit stadium met de overeenkomstige Figuren door CHARNOCK BRADLEY van het konijn en het varken gegeven, blijkt, dat deze eerste groeve in den Lobus anterior bij den mensch verder verwijderd ligt van den sulcus primarius, dan bij de beide genoemde dieren. Zoo kan ik dan ook niet beslissen of deze eerste groeve in den Lobus anterior bij den mensch homolog is met de „Fissure I” van CHARNOCK BRADLEY. Ook in den Lobus posterior is eene nieuwe groeve in de mediaanlijn ontstaan, tusschen den sulcus primarius (1) en de Fissura secunda (2). Deze groeve, in de volgende figuren met 4 aangeduid is de sulcus praepyramidalis (mihi) (sulcus inferior posterior van ZIEHEN, Fissure suprapyramidalis van ELLIOT SMITH, Fissure III van CHARNOCK BRADLEY). Deze Fissura praepyramidalis begrenst naar voren de Pyramis en verkrijgt spoedig de lengte der Fissura secunda. Deze laatste kan bij hare verdere ontwikkeling regelmatig in laterale richting zich verlengen, of wel (Fig 8b 2') er ontstaat in de Hemisfeer op korten afstand boven de Fissura para-floccularis (ρ) zelfstandig een groeve die spoedig met de Fissura secunda konflueert. Terwijl zich tevens de Recessus laterales verder uitbochten, vloeit de Fissura para-floccularis (Fig. 7b, 8b, ρ) met den sulcus uvulo-nodularis samen, waardoor de Gyri flocculares met den Nodus een van het overige cerebellum afgegrensd geheel vormen. ELLIOT SMITH vermeldt dat de Fissura para-floccularis ook met de Fissura secunda (2) kan konflueeren. Deze waarneming kan ik voor andere zoogdieren op grond van den bouw van het volwassen cerebellum bevestigen, aan mijn embryonaal materiaal van den mensch heb ik zulk een geval niet waargenomen. Wel mondt in een later stadium de Fissura secunda van boven in de Fissura para-floccularis uit.

Bij het cerebellum van een foetus van 13 cM. zijn de hemisferen niet meer zoo ballonvormig aangezwollen, doch hebben, van

achter gezien den meer hoekigen vorm gekregen, die hun nu gedurende een langeren tijd der ontwikkeling eigen is (Fig. 9a). De mediane zone is nog steeds, zelfs in het achterste gebied van den Lobus anterior een weinig ingezonken. De sulcus primarius (1) ligt nog betrekkelijk ver naar achter, de sulcus praepyrimalis (4) heeft zich reeds tamelijk ver in de Hemisferen voortgezet, doch zoo, dat de zijstukken met het transversaal verloopende middelstuk een naar onder open stompen hoek vormen. Deze eigenaardige gedaante vormt gedurende de volgende ontwikkelingsperiode, waarin de interpretatie der groeven niet altijd gemakkelijk is, een uitstekend diagnosticum voor den sulcus praepyrimalis. De Fissura secunda (2) heeft zich tot aan den zijrand van het cerebellum voortgezet, tengevolge waarvan de Regio tonsillaris (Fig 9a t) nu alzijdig begrensd is. Steeds is dit gebied meer of minder eivormig aangezwollen. De Gyrus floccularis is door een overlansche groeve in twee kwabjes gesplitst. In dit stadium zijn dus reeds de uvula met de bijbehorende zijgedelten en evenzoo de nodulus met zijn zijgebieden in principe gedifferentieerd. Dit snelle ontwikkelingsproces contrasteert sterk met den nog zeer eenvoudigen toestand dien men in 't overige deel van den Lobus posterior aantreft, en pleit wel eenigszins voor de meening van ELLIOT SMITH, die het complex van uvula met tonsillen, nodulus met flocculi als een meer zelfstandige kwab van het cerebellum beschouwt. Opmerking verdient voorts de bijzondere oppervlakteverdeeling in de mediaanlijn tusschen sulcus primarius (1) en Fissura secunda (2). De sulcus praepyrimalis (4) toch deelt dit gebied aanvankelijk steeds in twee ongelijk groote helften; de onderste helft, — de grootste — gelegen tusschen sulcus praepyrimalis (4) en Fissura secunda is de aanleg van de Pyramis, terwijl uit de zeer smalle bovenste helft, gelegen tusschen sulcus primarius (1) en sulcus praepyrimalis, ontstaan moeten: Declive, Folium vermis en Tuber vermis. In dit opzicht is een parallelisme op te merken tusschen phylogenetische en ontogenetische ontwikkeling van het cerebellum. Het smalle gebied toch tusschen sulcus primarius en sulcus praepyrimalis is homoloog met dien Lobulus, dien ik op de mediaansnede van het zoogdiercerebellum als Lobulus C, heb onderscheiden en die eerst bij de Primaten tot zeer sterke ontwikkeling komt.

De voorvlakte en mediaansnede van het cerebellum van een foetus van 15 cM. zijn in Fig. 10 weergegeven. Dit ontwikkelingsstadium is belangrijk, omdat nu het foetale menshencerebellum dezelfde lobulatie vertoont, die ik als het grondtype van het zoogdiercerebellum in 't algemeen heb leeren kennen, een stadium dat

L. BOLK. „Over de ontwikke

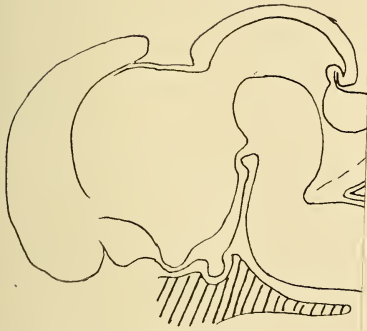


Fig. 1.



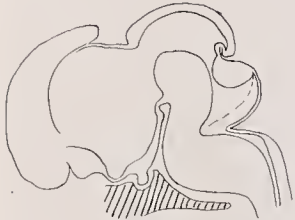


Fig. 1.



Fig. 2a.



Fig. 2b



Fig. 3a.

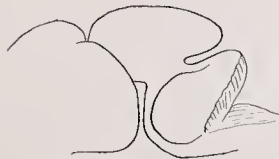


Fig. 3b



Fig. 4

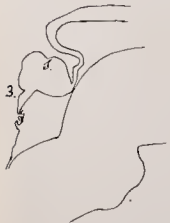


Fig. 5.

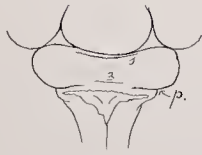


Fig. 6.



Fig. 7a.



Fig. 7b

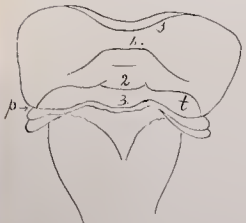


Fig. 9a

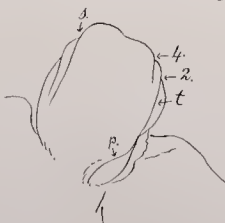


Fig. 9b.

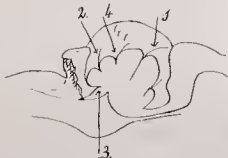


Fig. 8a.



Fig. 8b.



Fig. 8c



Fig. 10a



Fig. 10b.

slechts kort duurt, daar nu spoedig die groeven optreden die aan de primaten in 't algemeen of aan de Anthropeïden en den mensch meer in 't bijzonder eigen zijn, en waarvan men de homologa bij andere zoogdieren mist. Zooals toch uit Fig. 10*b* te zien is, wordt nu op mediaandoorsnede èn de Lobus anterior èn de Lobus posterior — beide van elkander door den Sulcus primarius (1) gescheiden — door drie groeven in vier kwabjes verdeeld. Bij het zoogdierecerebellum heb ik de vier kwabjes van den Lobus anterior als Lobulus 1, 2, 3 en 4 onderscheiden, dit laatste onmiddellijk voor den sulcus primarius gelegen, de vier kwabjes van den Lobus posterior onderscheidde ik als Lobulus *a* (homoloog met den Nodulus), Lobulus *b* (homoloog met de uvula) Lobulus C₁ (homoloog met de Pyramis) en Lobulus C₂ (homoloog met het kompleks van Declive, Folium vermis en Tuber vermis). Zooals uit eene vergelijking met de onderzoekingen van CHARNOCK BRADLEY volgt, komt het in Fig. 9 en 10 geschetste stadium bij den mensch dan ook zeer sterk overeen met een ontwikkelingsstadium dat vóór de definitieve lobulisatie door het cerebellum van andere zoogdieren (varken en konijn) doorloopen wordt. Hoe sterk dan ook het Primatencerebellum in zijn definitieven vorm van dat der overige zoogdieren moge afwijken, het grondplan der lobulisatie is, blijkens de nu geschetste ontwikkelingsperiode niet verschillend van dat der overige mammalia. In de nu volgende periode echter slaat het een eigen ontwikkelingsweg in, er treden, als inleiding tot de lamellisatie van de schors, groeven op die voor de primaten specifiek zijn, en die in de tweede mededeeling zullen worden beschreven.

Scheikunde. De Heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: *Over „Ortho-Nitro-Benzyltoluïdine”*.

(Mede aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM).

Indertijd is door NORDENSIÖLD het *o*-Nitrobenzyl-derivaat van het *para*-Toluïdine, met smeltpunt van 72° C. onderzocht, en door hem als *tetragonaal* beschreven, met de parameter-verhouding: $a : c = 1 : 0,6230$; de verbinding vertoont slechts ééne combinatie-vorm, nl. {111}, en is optisch-éénassig; positief. (Bull. Geol. Instit. Upsala, (1892), pag. 84, e.v.; Ref. Zeits. f. Kryst. **24**, 147).

Ter vergelijking heb ik het *o*-Nitrobenzyl-derivaat van het *ortho*-Toluïdine¹⁾ onderzocht, en deel thans de resultaten hieronder mede.

Uit aceton omgekristalliseerd, waarin de bij 96° C. smeltende ver-

¹⁾ Ber. d. d. Chem. Ges. **25**.3582.

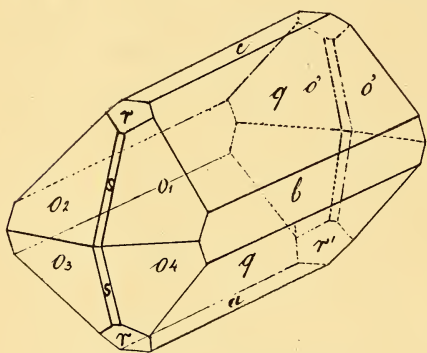
binding zeer oplosbaar is, vormt de stof zeer groote, doorzichtige, lichtgele, of liever lichtgroengele kristallen, welke sterken glans bezitten, en bij langer liggen aan de lucht een meer bruinen tint aannemen. Ook worden wel in de lengte uitgegroeide, prismatische naalden verkregen.

Eerstgenoemde kristallen zijn nagenoeg isometrisch ontwikkeld, en bezitten vele combinatie-vormen; nauwkeurige metingen waren zeer wel uit te voeren.

Rhombisch-bipyramidaal.

De parameters zijn:

$$a : b : c = 0,8552 ; 1 : 0,6138.$$



o-Nitro Benzyl-*o*-Toluïdine.

Waargenomen vormen: $q = \{021\}$, sterk praedomineerend en glanzend; $o = \{211\}$, breed ontwikkeld, en scherpe reflexen leverend; $r = \{101\}$, goed gevormd en glanzend; $c = \{001\}$, smaller, doch goed reflekteerend; $b = \{010\}$, mat, soms slechts met een enkel vlak voorhanden; meest iets breeder dan c , doch ook wel smaller; $s = \{201\}$, smal, en voor meting ongeschikt;

't symbol is uit het zone-verband afgeleid.

De habitus is meest dikprismatisch volgens de a -as; vooral de kleinere kristallen zijn zeer regelmatig gevormd.

<i>Gemeten:</i>	<i>Berekend:</i>
$c : q = (001) : (021) = *50^{\circ} 50'$	—
$c : r = (001) : (101) = *35 40$	—
$b : q = (010) : (021) = 39 9$	$39^{\circ} 10'$
$o : r = (211) : (101) = 27 20$	$27 10$
$o : o = (211) : (2\bar{1}\bar{1}) = 65 8$	$65 18$
$o : c = (211) : (001) = 57 26$	$57 21$
$o : o = (211) : (2\bar{1}\bar{1}) = 38 46$	$38 40$
$q : o = (021) : (211) = 53 16\frac{1}{2}$	$53 18$
$q : r = (021) : (101) = 59 1'$	$59 8'$
$b : o = (010) : (211) = 70 38$	$70 40$

Volkomen splijtbaar parallel $\{021\}$, duidelijk volgens $\{211\}$.

In nagel-olie als immersie-vloeistof is de ligging der elasticiteits-richtingen op de vlakken van $\{010\}$, $\{021\}$ en $\{001\}$, normaal ten opzichte der a -as georiënteerd. 't Optisch assenvlak is $\{100\}$; de eerste middellijn staat loodrecht op $\{010\}$. Op de vlakken van $\{021\}$ is in

konvergent gepolariseerd licht een levendig gekleurd interferentiebeeld zichtbaar; buitengewoon sterke dispersie van rhombisch karakter, met om de eerste middellijn: $\rho > r$. In nagel-olie bedraagt de schijnbare assenhoek ongeveer 49° voor de roode, en ongeveer 46° voor de groene stralen.

De olie deed op {021} oplossingsfiguurtjes ontstaan, welke den vorm hadden van gelijkbeenige trapezia; zij zijn in overeenstemming met de aangegeven symmetrie der kristallen.

Het specifiek gewicht is: 1,278, bij 15° C.; het equivalentvolume is: 189,28, en de topische assen zijn:

$$\chi : \psi : \omega = 6,0875 : 7,1175 : 4,3688$$

Hoewel van het *para*-derivaat van NORDENSKJÖLD in symmetrie verschillend, is de analogie der beide isomeren toch in de waarde der verhouding $b : c$ duidelijk te erkennen:

$$o\text{-Nitrobenzyl-}para\text{-Toluïdine} : a : b : c = 1,000 : 1 : 0,6230.$$

$$o\text{-Nitrobenzyl-}ortho\text{-Toluïdine} : a : b : c = 0,8552 : 1 : 0,6138.$$

Het verschil in stand van methyl- en amino-groep ten opzichte van elkaar, heeft dus voornamelijk slechts eene variatie der kristalparameters in ééne richting ten gevolge.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt eene mededeeling aan van Dr. F. M. JAEGER: „*Over plaatsings-isomere Dichloornitrobenzolen.*”

(Mede aangeboden door den Heer H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM).

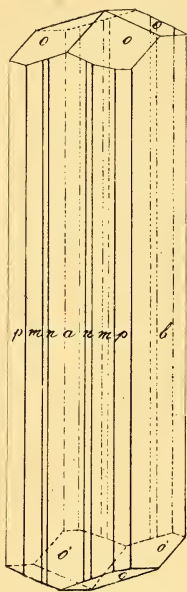
Van de zes theoretisch-mogelijke dichloornitrobenzolen, welke ik voor eenigen tijd ter onderzoek van den heer Prof. Dr. HOLLEMAN ontving, gelukte het, er vier in zóódanig meetbaren vorm te verkrijgen, dat hunne kristallografische bepaling naar wensch te volvoeren was.

Het verkrijgen van behoorlijk ontwikkelde kristallen dezer stoffen, is, ondanks het groot kristallisatie-vermogen der meeste, eene lastige en zeer tijdroovende zaak. Schuld daaraan is voor een deel de zeer groote oplosbaarheid in de meeste organische oplosmiddelen, welke, in verband met de lage smeltpunten dezer verbinding, vaak tot niet onaanzienlijke oververzadiging aanleiding geeft, zoodat, bij de dan plaatsgrijpende spontane kristallisatie, geen goedgevormde individuën, maar moeilijk te onderzoeken kristal-aggregaten ontstaan. Voor een deel echter is ook de bijzondere weekheid der gevormde kristallen oorzaak, dat de meeste kromme vlakken en aanzienlijke geometrische storingen vertoonen. Daarbij worden de vlakken, tijdens het meten, door de warmte der lichtbron spoedig mat, zoodat aldus

de onnauwkeurigheid der metingen nog door de onscherpe begrenzing der signaal-reflexen verhoogd wordt.

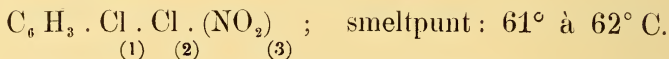
Van de onderzochte lichamen zijn de *ortho*-dichloorderivaten beide rhombisch, de *meta*-derivaten waarschijnlijk alle monoklien, en het *para*-dichloorderivaat triklien; alleen de geometrisch goed bepaalde lichamen dezer reeks zijn hier uitvoeriger beschreven. Zij vertoonen in kristalvorm betrekkelijk weinig overeenkomst met elkaar; wel grootendeels een gevolg van de aanzienlijke deformatie van het molekuul door de onderlinge aantrekking der Cl-atomen en der (NO₂)-groep.

Fig. 1.



1-2-Dichloor-3-Nitro-Benzol.

a. 1-2-Dichloor-3-Nitro-Benzol.



Uit een mengsel van aethylacetaat en aether kristalliseert deze verbinding, en evenzoo uit ijsazijn, bij zeer langzame verdamping van 't oplosmiddel, in kleurlooze, zijde-achtige naalden, welke door kleine, glanzende pyramidenvlakjes begrensd zijn. (Fig. 1).

Rhombisch-bipyramidaal.

$$a : b : c = 0,6472 : 1 : 0,2780.$$

Waargenomen vormen: $a = \{100\}$ en $b = \{010\}$, even sterk ontwikkeld en beide zeer glanzend; $p = \{230\}$, $m = \{110\}$, $n = \{430\}$; de laatste vorm is de smalste der drie, en reflekteert minder scherp dan p en m ; a vertoont soms eene fijne streeping parallel $o : a$; $o = \{133\}$, glanzend, goede reflexen leverend.

De vertikaal-zone is geometrisch. zeer zuiver gebouwd. De aan verschillende kristallen waargenomen hoekwaarden wijken slechts onbelangrijk van de gemiddelde waarden af.

	<i>Gemetten:</i>	<i>Berekend:</i>
$a : p = (100) : (230) =$	*44° 9'	—
$o : o = (133) : (\bar{1}33) =$	*30 51½'	—
$p : m = (230) : (110) =$	11 21	11°14'
$m : n = (110) : (430) =$	7 7½'	7 1
$n : b = (430) : (010) =$	27 23	27 35½'
$a : o = (100) : (133) =$	82 16	82 7
$b : o = (010) : (103) =$	74 36	74 34
$o : o = (133) : (\bar{1}33) =$	15 32	15 46

Goed splijtbaar volgens o . Op m en p zijn in cassia-olie rechtehoekige etsfiguurtjes te zien, welke in overeenstemming zijn met de aangegeven symmetrie. In de vertikaal-zone is op alle vlakken de richting der optische elasticiteits-assen georiënteerd. Een assenbeeld werd niet waargenomen.

Het specifiek gewicht der naaldjes werd met behulp van kaliumkwikzilverjodide-oplossing bepaald op: 1,721 bij 14° C.; het equivalent-volume is dus: 111,56, en de topische assen worden:

$$\chi : \psi : \omega = 5,5190 : 8,5272 : 2,3706..$$

b. 1-3-Dichloor-2-Nitro-Benzol.

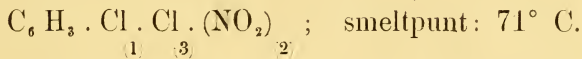
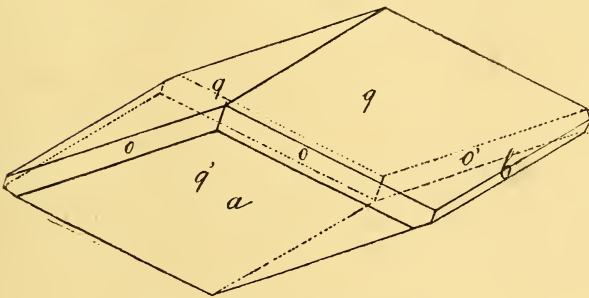
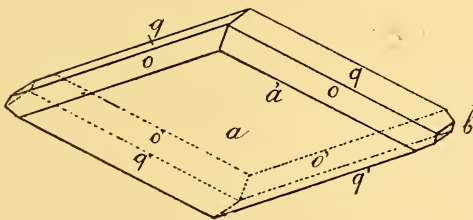


Fig. 2a



1-3-Dichloor-2-Nitro-Benzol.

Fig. 2b.



1-3-Dichloor-2-Nitro-Benzol.

Uit zwavelkoolstof kristalliseert deze verbinding in groote, kleurlooze, dunne platen van parallelogramvormigen omtrek, of ook wel in kleinere, dikke kristalletjes, zooals in fig. 2a en 2b zijn afgebeeld.

De kristallen zijn veelal mat, en moeilijk meetbaar; soms echter ook glanzender en glashelder.

Monoklien-prismatisch.

$$a : b : c = 0,6696 : 1 : 0,4149.$$

$$\beta = 87^\circ 51\frac{2}{3}'.$$

Waargenomen vormen :

$$a = \{100\}, \text{ gewoonlijk sterk}$$

vóórheerschend, en altijd scherp reflekteerend; $q = \{011\}$, glanzend, en wel òf even smal als o , òf het breedst van alle ontwikkeld, zoodat de kristallen naar de klino-as kort-prismatisch schijnen; $o = \{111\}$, gewoonlijk smal, veelal parallel $a : o$ gestreept, en vrij mat reflekteerend; $b = \{010\}$, zeer smal, en vaak slechts rudimentair voorhanden.

	<i>Gemeten:</i>	<i>Berekend:</i>
$a : o = (100) : (111) = *$	$58^{\circ}44'$	—
$q : q = (011) : (0\bar{1}1) = *$	$45 \quad 2\frac{1}{2}$	—
$a : q = (100) : (011) = *$	$88 \quad 1\frac{1}{2}$	—
$o : q = (111) : (01\bar{1}) =$	$127 \quad 55$	$128^{\circ}25'$
$o : q = (111) : (011) =$	$29 \quad 17$	$29 \quad 17\frac{1}{2}$
$a : b = (100) : (010) =$	$89 \quad 57$	$90 \quad 0$
$o : o = (111) : (1\bar{1}1) =$	$38 \quad 38$ (circa)	$38 \quad 16$

Eene duidelijke slijtbaarheid werd niet gevonden.

De uit aceton verkregen kristallen, welke zeer groot, maar zeer dof waren, vertoonen *a* vóórheerschend; dan *b*; zij zijn volgens de vertikaal-as langgestrekt, en bezitten nog een vorm, welke waarschijnlijk {233} is, met $(233) : (100) = 67^{\circ}33'$, berekend: $67^{\circ}24'$. Op *a* diagonale uitdooving; 't optisch assenvlak is {010}; ééne optische as treedt bijna loodrecht op *a* uit.

Het specifiek gewicht is 1,603, bij 17°C. ; het equivalent-volume: 119,77.

Topische assen: $\chi : \psi : \omega = 5,0596 : 7,5561 : 3,1350$.

Ofschoon de parameter-verhouding $a : b$, en de hoek β bij dit isomeer vergelijkbaar zijn met die van het 1-2-3-derivaat:

1-3-Dichloor-2-Nitro-Benzol: $a : b = 0,6696 : 1$; $\beta = 87^{\circ}52'$

1-2-Dichloor-3-Nitro-Benzol: $a : b = 0,6472 : 1$; $\beta = 90^{\circ}$.

zoo zijn beider kristalvormen toch tamelijk verschillend; de verhouding $\frac{b}{c}$ van 't laatste lichaam is ongeveer $1\frac{1}{2}$ maal die van het eerste derivaat.

c. 1-3-Dichloor-5-Nitro-Benzol.

$\text{C}_6 \text{H}_3 \cdot \text{Cl} \cdot \text{Cl} \cdot (\text{NO}_2)_5$; smeltpunt: 65°C.

In alcohol of ijsazijn, in welke oplosmiddelen de verbinding een buitengewoon groot kristallisatie-vermogen openbaart, ontstaan meestal zeer lange, platte zuilen van aanzienlijke dikte, of ook wel rechthoekig of schief begrensde, licht wijgele, dunne plaatjes. Door de groote weekheid der stof en hare sterke plasticiteit, zijn de kristallen in de meeste gevallen zóózeer vervormd en verwrongen, dat metingen onmogelijk zijn. Bij uiterst langzame verdamping verkrijgt men soms ook wel betere, hoewel steeds zeer vlakken-arme kristallen, Zij bezitten eenen eigenaardigen, aan nitrobenzol herinnerenden reuk.

Monoklien-prismatisch.

$a : b = 0,5940 : 1$; $\beta = 58^{\circ}43'$.

Waargenomen vormen: $a = \{100\}$, breed en sterk glanzend; $b = \{010\}$, smaller en minder sterk glanzend; ontbreekt vaak heelemaal; $m = \{110\}$, smal, en $c = \{001\}$, klein, doch zeer goed spiegelen; de habitus is gestrekt naar de c -as, en volgens $\{100\}$ afgeplat.

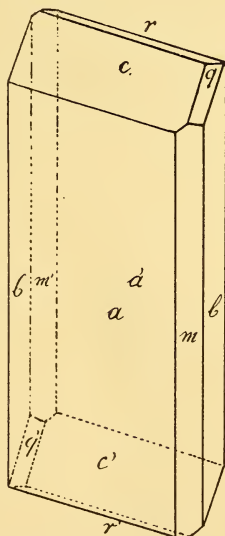
	<i>Gemeten:</i>	<i>Berekend:</i>
$b : m = (010) : (110) =$	* 63 5	
$a : c = (100) : (001) =$	* 58 43	—
$a : m = (100) : (110) =$	26 58	26°55'
$m : m = (110) : (\bar{1}10) =$	126 15	126 10
$m : c = (110) : (001) =$	—	62 25
$b : c = (010) : (001) =$	89 57	90 0

Volkomen spijlbaar volgens $\{010\}$, goed volgens $\{001\}$.

Op $\{100\}$ georienteerde uitdooving; op $\{010\}$ onder 28° ten opzichte der vertikaal-ribbe. 't Optisch assenvlak is $\{010\}$; aan den rand van het gezichtsveld is op $\{100\}$ eene optische as zichtbaar; de assenhoek is klein. De richting der vertikaal-as is hier de as van grootste elasticiteit.

Op $\{100\}$ waren ets-verhoogingen waar te nemen, met als omtrek gelijkbeenige trapezia, wier hoekpunten met een in 't midden gelegen punt door rechte lijnen verbonden schijnen; het genoemde punt ligt dicht bij de kleinste, dan bij de grootste der twee evenwijdige zijden van het trapezium. Zij zijn in overeenstemming met de aangegeven symmetrie.

Fig. 3.



1-4-Dichloor-2-Nitro-Benzol.

Het specifiek gewicht is: 1,692, bij 14° C.; het aequivalent-volume is dus: 113,4.

d. 1-4-Dichloor-2-Nitro-Benzol.

$C_6H_3 \cdot Cl \cdot Cl \cdot (NO_2)$; Smeltpunt: $54^\circ,5$ C.
(4) (1) (2)

In de meeste oplosmiddelen openbaart deze stof een zeer groot kristallisatievermogen; echter zijn maar zelden meetbare kristallen te verkrijgen, daar de meeste aldus verkregen individuen wegens de groote weekheid van de materie, belangrijke geometrische storingen vertoonen, en veelal kromme en zeer doffe vlakken bezitten.

Indertijd is de kristalvorm onvolledig

bepaald door BODEWIG; hij onderzocht kristallen, welke uit zwavelkoolstof verkregen waren, doch slaagde er niet in, combinatie's te verkrijgen, welke eene volledige bepaling der kristalparameters veroorloofden. (Zeits. f. Kryst. 1. 589; Ann. Ch. Phys. (4). 15. 257).

Uit aceton verkreeg ik verreweg de grootste kristallen, — soms enkele centimeters lang; zij zijn geheel van het prismatische type der door BODEWIG onderzochte kristallen, en bezitten bovendien nog een lateraal-prisma; echter vertoonen ze zulke aanzienlijke storingen en zijn meest zóó mat, dat aan eene nauwkeurige meting niet te denken viel.

't Best slaagde ik door kristallisatie uit aethylacetaat, met een weinig tetrachloorkoolstof vermengd; de aldus verkregen, naar {100} afgeplatte, licht wijngelc of kleurlooze kristallen zijn zeer zuiver gebouwd, en laten nauwkeurige meting toe.

Triklieii-pinaköidaal.

$$a : b : c = 0,8072 : 1 : 0.8239$$

$$A = 79^{\circ} 33' \quad \alpha = 92^{\circ} 48'$$

$$B = 114^{\circ} 51\frac{1}{2}' \quad \beta = 112^{\circ} 51'$$

$$C = 58^{\circ} 35' \quad \gamma = 60^{\circ} 5'$$

Waargenomen vormen: $a = \{100\}$, vóórheerschend, goed spiegclend, beter dan $b = \{010\}$, welke vorm ook smaller is; $c = \{001\}$, zeer glanzend en goed ontwikkeld; $m = \{110\}$, smal, doch goed reflekteerend; $q = \{011\}$, smal, sterk glanzend; $r = \{\bar{1}01\}$, wat breeder, en goede reflexen leverend.

De kristallen zijn afgeplat volgens a , en gestrekt in de richting der c -as.

	<i>Gemeten:</i>	<i>Berekend:</i>
$a : c = (100) : (001) =$	* $65^{\circ} 8\frac{1}{2}'$	--
$a : b = (100) : (010) =$	* 121 25	—
$b : c = (010) : (001) =$	* 100 27	—
$a : r = (\bar{1}00) : (\bar{1}01) =$	* $50 12\frac{1}{2}'$	—
$c : q = (001) : (011) =$	* 45 39	—
$q : b = (011) : (010) =$	54 44	$54^{\circ} 48'$
$c : r = (001) : (\bar{1}01) =$	$64 40\frac{1}{2}'$	$64 40\frac{1}{2}'$
$m : b = (110) : (010) =$	75 23	75 19
$m : a = (110) : (100) =$	46 2	46 6
$r : q = (\bar{1}01) : (011) =$	51 50	51 35
$m : r = (\bar{1}\bar{1}0) : (\bar{1}01) =$	65 36	65 22
$m : q = (110) : (011) =$	62 54	63 3

Zeer volkomen splijtbaar naar {001}; het splijtingsvlak is zeer glanzend.

Op {100} scheeve uitdooving; het bedrag daarvan is klein: slechts circa $7^{\circ} 40'$ ten opzichte der vertikale ribbe; in konvergent licht neemt men op dit vlak een donkere hyperbool waar.

Het specifiek gewicht der kristallen is: 1,696, bij 12° C.; het equivalent-volume bedraagt dus: 113,20.

De topische assen zijn: $\chi : \psi : \omega = 4,8484 : 6,0065 : 5,1422$.

Physiologie. — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van den Heer S. J. DE LANGE: „*Over de uitloopers van gangliëncellen bij rust en vermoeienis.*”

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING).

MANOUÉLIAN heeft op het laboratorium van MATTHIAS DUVAL proeven genomen over de mogelijkheid om bij slaap door vermoeienis veranderingen aan te toonen aan de dendriten van de gangliëncellen. Zijn resultaten zijn verschenen in de Comptes Rendus de la Société de Biologie, 28 Févr. 1898 en later.

Hij gebruikte muizen als proefdieren en richtte zijn proeven in als volgt: Een uur lang werd een muis in een kooi heen en weer gejaagd zonder haar rust te gunnen; het vermoeide dier sliep daarna in of bleef ten minste volkomen stil zitten. Het contrôle-dier werd volkomen rustig gehouden. Beide dieren werden daarop gedood en stukjes van de hersenen snel volgens GOLGI gefixeerd. Het resultaat was reeds bij zwakke vergrooiting duidelijk: de uitsteeksels van de dendriten zijn verdwenen, in de plaats daarvan zijn aan de dendriten kogelvormige verdikkingen te vinden, teruggetrokken vertakkingen, die zich van de naburige eindvertakking zouden hebben losgemaakt. „On pense, en présence de ces images, à celle d'une sangsue vue comparativement dans l'état d'élongation et dans l'état de rétraction en boule.”

Vóór hem heeft RABL-RÜCKHARDT eveneens een hypothese over de amoëboïde beweging in de cellen van het centraalzenuwstelsel gegeven, die echter niet op microscopische vondsten steunde (Neurolog. Centralblatt 1890, blz. 199). De onderzoekingen van WIEDERSHEIM aan een levende Crustacee, Leptodora hyalina, en die van PERGENS e. a. aan de retina van Leuciscus rutilus brachten een bevestiging van de vermoedens van RABL-RÜCKHARD.

WIEDERSHEIM heeft de bewegingen der zenuwceluitloopers onder den

microscop kunnen vervolgen en komt dan ook tot de slotsom: „dasz die centrale Nervensubstanz nicht in starre Formen gebannt, sondern dasz sie activer Bewegungen fähig ist.”

J. DEMOOR injecteerde honden morfine in letale doses en nam vóór den dood een stukje hersenschors. Ook hij vond evenals STEFANOWSKA, die muizen aetheriseerde, de veranderingen, die MANOÚÉLIAN vond: de uitloopers klein en parelsnoervormig.

Twee Amerikaansche schrijvers, FRANK en WEIL, hebben echter bij genarcotiseerde dieren die resultaten niet verkregen.

Om zekerheid te krijgen of werkelijk verschillen waarneembaar waren, heb ik op het laboratorium van Prof. WINKLER eenige proefnemingen gedaan.

In de eerste plaats zijn de proeven van STEFANOWSKA en DEMOOR door mij herhaald, zij het dan ook dat ik niet in alle opzichte hetzelfde verrichtte.

De muizen werden niet met aether, doch met chloroform genarcotiseerd: terstond na den dood volgde de decapitatie, de kop werd opgevangen in vloeistof, bereid volgens de door COX gemodificeerde methode van GOLGI en de hersenen onder de vloeistof uitgepraepareerd. Ter contrôle werd een niet genarcotiseerde muis op dezelfde wijze behandeld. Ik kon in de microscopische hersenpraeparaten, die met het vriesmicrotoom verkregen waren, bij beide dieren geen verschillen waarnemen.

Evenmin was dit het geval bij muizen, die ik volgens DEMOOR met telkens herhaalde doses morphine inspoot, tot de dood intrad.

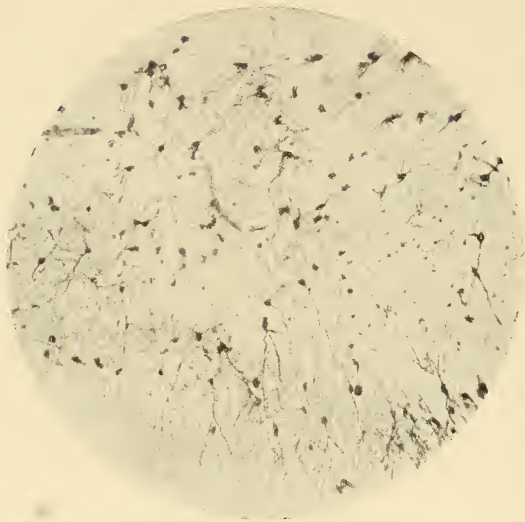
In de meening, dat de resultaten wellicht minder goed waren, doordat de decapitatie eerst na den dood verricht was, heb ik de proeven van MANOÚÉLIAN nauwkeurig herhaald.

Een muis werd in een draaiende kooi geplaatst, zoodat het diertje loopen moest. Door een watermotortje werd de kooi in beweging gehouden. Gedurende 4 uur werd de beweging voortgezet, het proefdier was dus doodmoe. Intusschen was het contrôledier in het donker gehouden, ingepakt in watten. Na afloop van dien tijd werden beide dieren snel gedecapiteerd, de kop in de fixeerende vloeistof opgevangen en de hersenen daarin uitgepraepareerd.

Na 2½ maand werd in celluloidine ingesmolten en van beide hersenen seriecoupes gemaakt in frontale richting. Op deze wijze was het mogelijk vergelijkbaar materiaal te krijgen.

Ter verdere contrôle werd nogmaals een paar muizen opgeofferd, ten einde met de methode van NISSL aan te toonen, dat de bekende veranderingen in de verdeling van de gemakkelijk tingeebare deelen van het protoplasma der zenuwcellen aanwezig waren. Terwijl toch

S. J. DE LANGE. „Over de uitloopers van gangliëncellen bij rust
en vermoeienis.”



Zenuwcellen uit den ammonshoorn van een door 4 uur loopen
uitgeput proefdier.

in normale omstandigheden het zich electief kleurende deel van het protoplasma der gangliencellen in klompjes verdeeld is, lossen die klompjes zich bij vermoeienis meer en meer op en wordt derhalve de tinctie van het cellijf homogeen (plasmolyse, chromatolyse).

Deze veranderingen zijn aan de gangliencellen van het vermoeide proefdier duidelijk aanwezig: de vermoeienis was exquisiet.

De praeparaten volgens de door Cox gemodificeerde methode van GOLGI vertoonen nu schoone vertakkingen zoowel bij het niet vermoeide, als bij het afgematte proefdier. In de aan het laatste dier ontleende fotografische afbeelding, welke hiernevens gaat vindt men geen spoor van ingetrokken uitsteeksels, of kogelvormige verdikkingen, evenmin een paarsnoervorm.

Nevenaande afbeelding geeft gangliencellen te zien uit den Ammonshoorn van het vermoeide proefdier en overal elders in de hersenschors waren deze cellen, niet te onderscheiden van die van het contrôle-dier.

Het is mij dus niet mogen gelukken volgens deze methode veranderingen door sterke vermoeienis aan te toonen.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: „*Over mengbaarheid in den vasten aggregaattoestand en isomorfie bij koolstofverbindingen.*” (Eerste mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer A. F. HOLLEMAN).

Sedert de ontdekking der isomorfie door MITSCHERLICH, is het vermogen van isomorfe verbindingen, om bij menging met elkaar, eene homogene vaste fase van continu-variabele samenstelling te kunnen vormen aan talrijke gevallen experimenteel gedemonstreerd.

In later jaren zijn theoretische beschouwingen over het verloop der smeltkrommen bij stoffen, welke zulke mengingsreeksen kunnen geven, door verschillende onderzoekers opgesteld, en heeft men, aanknoopend aan de leer van het fasen-evenwicht, en met behulp van thermodynamische ontwikkelingen, een eenigszins volledig beeld ontworpen, van de bijzondere gevallen, welke bij lichamen van de genoemde soort mogen verwacht worden.

Omgekeerd echter is het niet geoorloofd uit 't verloop der smeltkromme of oplosbaarheidslijnen *alleen*, besluiten te trekken op voorhanden „isomorfie”. Immers sedert het begrip der „vaste oplossingen” zijne intrede in de chemie deed, heeft het experiment reeds talrijke gevallen

leeren kennen, waarin amorfe, en ook wel gekristalliseerde vaste oplossingen bestaan tusschen lichamen, welke of in *geen*, of in onbekend kristallonomisch verband tot elkaar staan. Men denke b.v. slechts aan de amorfe glazen, anderzijds aan de kristallijne mengsels van ijzerchloride en salmiak. Bijzonder frappant wordt deze dwaling gevoeld in de chemie der koolstofverbindingen: men kent niet slechts continue reeksen van kristallijne mengsels tusschen morfotroopverwante, koolstofhoudende derivaten, zooals bij MUTHMANN's teephtaalzuurderivaten, — maar ook bij organische molekulen, die weinig of niets met elkaar te maken hebben, is zulke menging, ook in gekristalliseerden toestand, gekonstateerd.

Meer in 't bijzonder zijn het BRUNI en zijne mede-arbeiders, die uit lange reeksen van kryoskopische bepalingen besluiten, dat de meest ongelijksoortige organische stoffen „mengkristallen” en „vaste oplossingen” met elkaar geven kunnen, en die aldus heele reeksen van „isomorfe verbindingen” opstellen, van welker kristallonomisch verband op enkele uitzonderingen na, niet alleen niets bekend is, maar van welke de kristallograaf wel à priori de waarschijnlijkheid van „isomorfie” zeer gering zal achten.

In elk geval is de betrekking, welke tusschen „kristallonomische vormverwantschap” en „mengbaarheid” bestaat, nog in 't geheel niet bekend. Zijn lichamen „isomorf”, d.w.z. bezitten gekristalliseerde fasen geordende molekulaire structuren, welke uit elkaar door geringe deformatie ontstaan kunnen gedacht worden, — dan kunnen zulke fasen, gemeenlijk eene homogene meng-fase van variabele samenstelling leveren, en zullen hunne op 't fasen-evenwicht gebaseerde betrekkingen het verloop kunnen hebben, welke de theorie aanwijst. Maar het omgekeerde is geenszins het geval: en de vraag naar al of niet aanwezige „isomorfie” kan *enkel en alleen* door gedetailleerd kristallonomisch onderzoek bevestigd en afdoende beantwoord worden.

Voor al kan het probleem belang hebben, voorzooverre het betrekking heeft op het vaststellen der *grenzen*, waarin morfotroopverwante molekuulsoorten zulk eene „mengbaarheid” kunnen vertoonen. Immers 't woord „isomorfie” heeft betrekking op eene reeks bijzondere gevallen bij eene serie veel algemeener verschijnselen der kristallonomie, nl. op diè, welke het verband uitdrukken tusschen de chemische konstitutie der lichamen, welke in substitutie-verband tot elkaar staan, met den hun eigen kristalvorm, welke verschijnselen onder den naam van „morfotropie” saamgevat worden. Treedt de chemische verwantschap van zulke substitutie-derivaten *binnen* zekere grenzen, dan zullen morfotrope stoffen „iso-morfotroop” kunnen

worden, en zich dan ook in begrensde of zelfs misschien wel in onbegrensde verhouding met elkaar kunnen mengen. En is de verwantschap van zulke lichamen andermaal zóó innig geworden, dat aan hunne kristal-structuren op grond van *al* hunne fysische eigenschappen eene bijna identieke geaardheid moet worden toegeschreven, dan worden zulke iso-morfotrope stoffen werkelijk „isomorf” en is menging steeds mogelijk.

Uit het gezegde volgt, dat het begrip der „isomorfie” eene zekere gradatie toelaat; de kristallonoom alleen kan den graad van „isomorfie” in elk geval schatten, door de grootte te meten, welke de parameters der molekulare structuur in de te vergelijken gevallen aanwijzen, en vooral door de analogie in de kohesie-verschijnselen der kristalfase te bestudeeren. Naarmate de verschillen in de waarden der genoemde molekulare structuur-parameters kleiner zijn, en naarmate eene meer volledige overeenkomst in splijtingsrichtingen en oppervlaktegeaardheid der gelijksoortige begrenzingsvlakken aanwezig is, is eene innigere isomorfie voorhanden, en wordt de waarschijnlijkheid voor algeheele mengbaarheid in gekristalliseerden toestand tegelijk grooter.

Dat er in de gevallen, welke BRUNI onderzocht, inderdaad zulke van *echte* isomorfie aanwezig kunnen zijn, — daaraan valt niet te twijfelen, en het volgend onderzoek moge dat zelfs bewijzen. Maar dat vele der als „isomorfie” gekwalificeerde gevallen van mengbare stoffen, slechts gevallen van isomorfotropie, of zelfs slechts van morfotropie binnen relatief wijde grenzen zullen kunnen zijn, — mag evenmin uit het oog verloren worden.

Een en ander maakt het hoogst gewenscht, een omvangrijk onderzoek van organische lichamen op hunne mengbaarheid in den vasten toestand in te stellen, en hand in hand te doen gaan met een naar hunnen kristalvorm, om aldus over een en ander meer licht te verkrijgen. Eene eerste bijdrage daartoe levert het volgende onderzoek.

I. Nitro-, en Nitrosoderivaten der benzolreeks.

Naar aanleiding van enkele kristallografische feiten was ik reeds lang van plan, de morfotropische werking van NO_2 -, en NO -substitutte in aromatische molekulen aan een nader onderzoek te onderwerpen. Nieuw belang kreeg de zaak voor mij door de waarneming van de omzetting van *o-Nitrobenzaldehyde* in *o-Nitroso-benzoëzuur* in gekristalliseerden toestand onder den invloed van 't licht, en door eene recente verhandeling van BRUNI en CALLEGARI (Gazz. Chim. It. (1904), 34. II, 246), welke onderzoekers op grond van kryoskopische afwijkingen, tot de vorming van vaste oplossingen besluiten. Laatstgenoemde onderzoekers komen o.m. tot de volgende konklusie's:

1. In 't algemeen kunnen aromatische *nitroso*-derivaten vaste oplossingen vormen met de overeenkomstige *nitro*-derivaten.

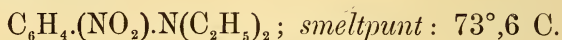
2. In die vaste oplossingen, zoowel als in de vloeibare, welke eene groene kleur bezitten, hebben de *nitroso*-verbindingen enkelvoudige molekuulgrootte.

Voorals de eerste konklusie wenschte ik aan een nader onderzoek te toetsen.

a. *Para-Nitro-Diaethyl-Aniline en Para-Nitroso-Diaethyl-Aniline.*

Vooreerst heb ik de reeds vroeger, door SCHRAUF en mijzelve¹⁾ verrichte onderzoekingen over 't *p-Nitro-diaethyl-aniline* uitgebreid. Daar ik de kristallen van het *nitroso*-derivaat, alleen naar eisch uit aethylacetaat + ligoïne kon verkrijgen, — zoo moesten eveneens de kristallen der *nitro*-verbinding uit hetzelfde oplosmiddel gevormd worden, om beide lichamen, onder dezelfde konditie's gevormd, scherp met elkaar te kunnen vergelijken.

1. **p-Nitro-diaethyl-aniline.**



Kristallen uit aethylacetaat + ligoïne. (Fig. 1).

Fig. 1.

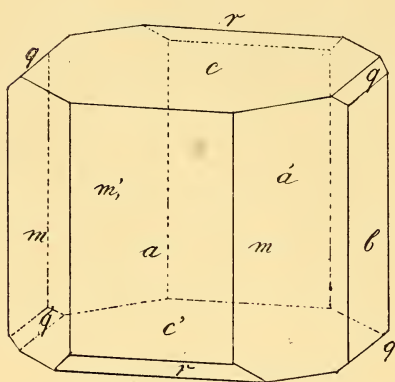
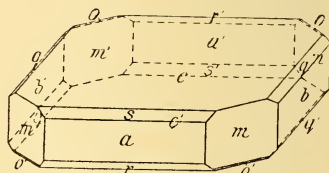


Fig. 2.



p-Nitrodiaethylaniline, uit alcohol.

p-Nitrodiaethylaniline, uit aethylacetaat.

Kortprismatische, of naar de *b*-as iets gestrekte, naar {100} afgeplatte, bruingele kristallen, met schoonen roodvioletten weerschijn op {001}.

Monoklien-prismatisch.

$$a : b : c = 1,0342 : 1 : 1,9788.$$

$$\beta = 80^\circ 34'.$$

De metingen, etc., zijn identiek met de vroeger door mij aange-

¹⁾ JAEGER, Z. f. Kryst. **40**. 127. (1905); cf *ibid.* **11**, 105, Ref.

F. M. JAEGER: „Over mengbaarheid in den vasten aggregaattoestand en isomorfie bij koolstofverbindingen“ (Eerste mededeeling).

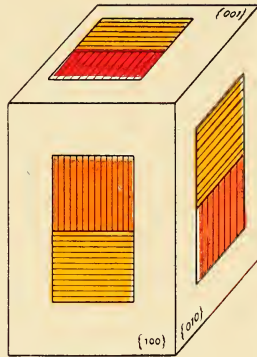


Fig. 3.

Pleochroïsme van p-Nitro-diaethyl-aniline.

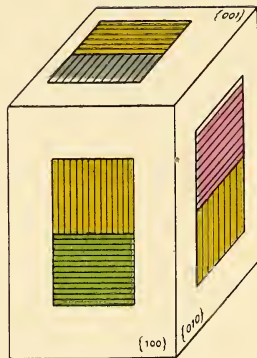


Fig. 5.

Pleochroïsme van p-Nitroso-diaethyl-aniline.

gevene. Alleen de habitus der kristallen is een andere dan die der vroeger uit alcohol verkregen kristallen (Fig. 2); c en m geven ideale reflexen; a zeer goed, doch vaak wat gekromd. Alleen c heeft een violetten weerschijn; het reflex is licht-lila gekleurd, Etsfiguren op $\{100\}$ waren in overeenstemming met de aangegeven symmetrie.

Zeer volkomen slijtbaar parallel $\{001\}$; goed naar $\{010\}$, met schulpachtige breukvlakke.

Optisch gedrag. Het optisch gedrag der verbinding is hoogst merkwaardig. (Fig. 3).

Voreerst zijn de kristallen sterk pleöchroïtisch; op $\{001\}$, zwavelgeel en bloedrood; de arceering geeft de trillingsrichting der gepolariseerde stralen aan; op $\{010\}$, geel en oranje; op $\{100\}$, geel en oranjegeel. Op $\{001\}$ ziet men in konvergent licht twee roode absorptiehyperbolen, als de zich openende armen van een assenkruis.

Op $\{100\}$ is een excentrisch assenbeeld waar te nemen; de assenhoek is zeer klein, zoodat er schijnbaar een éénassig beeld voorhanden is, met eene kruising der assenvlakken voor rood en groen licht. De assen voor rood liggen in een vlak $\parallel b$ -as, voor groen in een $\parallel c$ -as. De hoek voor de roode stralen is kleiner dan voor de groene. De dubbelbreking is positief; de eerste middellijn helt in 't symmetrievlak ten opzichte van de normaal op $\{100\}$; er is dus tegelijk eene geneigde en eene horizontale dispersie voorhanden.

De hellingshoek is iets grooter dan bij 't nitroso-derivaat.

2. *p*-Nitroso-diaethyl-aniline.

Voor eenigen tijd ¹⁾ heb ik over het *para*-Nitroso-diaethyl-aniline: $C_6H_4(NO)N(C_2H_5)_2$, met smeltpunt van $82,2^\circ C$, enkele voorloopige mededeelingen gedaan. Het is mij sedert dien gelukt deze verbinding in voor onderzoek meer geschikten vorm te verkrijgen, om aldus de verwantschap met het overeenkomstige *para*-Nitro-derivaat scherper vast te stellen.

De in genoemde verhandeling beschreven kristallen hadden het voorkomen van smaragdgroene, rechthoekige plaatjes, welke het best uit aceton verkregen werden. Zij zijn zeer arm aan combinatievormen, en vertoonen slechts $a = \{100\}$ praedomineerend, $m = \{110\}$ en $b = \{010\}$, terwijl $c = \{001\}$ gewoonlijk slechts rudimentair voorhanden is. Zij werden als monoklien-prismatisch bepaald, met $\beta = 85^\circ 53'$ circa, en $a : b = 1,0166 : 1$; op $\{100\}$ is een interferentiebeeld zichtbaar, onder geringe helling met de normaal op dat vlak; de assenhoek is klein,

¹⁾ F. M. JAEGER, Ueber morphotropische Beziehungen bei den in der Amino-Gruppe substituirten Nitro-Anilinen. Z. f. Kryst. **40**. (1905), 113—146; zie p. 140.

de dispersie gemiddeld, met $q < v$ om de scherpe bissectrix, de dubbelbreking is positief.

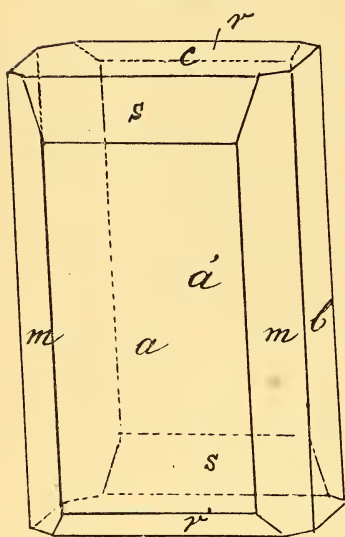
Nauwkeuriger onderzoekingen hebben, zooals blijken zal, deze gegevens in hoofdzaak bevestigd. Het betere materiaal verkreeg ik uit een mengsel van aethylacetaat en ligroïne, waarin de verbinding bij verwarming werd opgelost. Bij langzame verdamping ontstaan rechthoekig omgrensde, dikkere plaatjes, of ook wel smaragdgroene prisma's, welke op enkele vlakken een prachtigen, violetten weerschijn bezitten. Zij vertoonen bijzonderen glans, en slechts zelden eene kromming van $\{100\}$; zeer nauwkeurige bepalingen konden dus worden uitgevoerd.

De symmetrie is *monoklien-prismatisch*: de assenverhouding:

$$a : b : c = 1,0178 : 1 : 1,9611.$$

$$\beta = 85^\circ 43'.$$

Fig. 4.



p-Nitroso-diethylamine.

Waargenomen vormen: $a = \{100\}$, het breedst van alle ontwikkeld, en goed reflekteerend, soms iets gekromd; $m = \{110\}$ en $b = \{010\}$, ongeveer even sterk ontwikkeld, b gewoonlijk iets breder, soms echter ook veel smaller dan m , en veel scherper reflekteerend, met licht-violet reflex; $c = \{001\}$, ideaal reflekteerend, eveneens met violet reflexbeeld; $r = \{\bar{1}02\}$, glanzend, meest smaller, soms iets beter ontwikkeld, en scherp reflekteerend; de reflexen zijn vaak violet, meest echter ongekleurd of geel-achtig; $s = \{101\}$, breed, doch zeer mat, en slechts bij benadering meetbaar; $t = \{\bar{1}.0.13\}$, als vicinaalvorm zeer smalin enkele gevallen waargenomen.

De habitus der kristallen is gestrekt volgens de vertikaal-as, met afplating naar $\{100\}$.

Gemeten :

Berekend :

$a : c = (100) : (001) = *85^\circ 43'$	—
$a : m = (100) : (110) = *45 \ 25\frac{1}{2}$	—
$c : r = (001) : (\bar{1}02) = *45 \ 59\frac{1}{2}$	—
$r : a = (\bar{1}02) : (\bar{1}00) = 48 \ 19$	$48^\circ 17\frac{1}{2}'$
$a : s = (100) : (101) = 26 \ 39$	$26 \ 29$
$s : c = (101) : (001) = 59 \ 4$	$59 \ 14$
$c : m = (001) : (110) = 87 \ 5$	$87 \ 0$
$m : b = (110) : (010) = 44 \ 33$	$44 \ 34\frac{1}{2}$
$m : r = (\bar{1}10) : (\bar{1}02) = 62 \ 11$	$62 \ 9\frac{2}{3}$
$m : s = (110) : (101) = 52 \ 0$ (circa)	$51 \ 5$

De kristallen splijten uiterst volkomen naar {001}, met glanzend scheidingsvlak; onvolkomen naar {010}, met schulpachtige breuk. Etsfiguren werden niet verkregen.

Optisch gedrag. De verbinding vertoont merkwaardige optische eigenschappen.

Vooreerst de prachtige, violette reflexie van de vlakken {001}, {010} en $\{102\}$, welke op de overige vlakken gemist wordt. Van eene streeping dezer vlakken is deze weerschijn niet afkomstig. Splijt men een kristal volgens c of b , dan heeft het scheidingsvlak eveneens dien weerschijn, en ook eene streep, met de kristallen op porcelein gemaakt, vertoont hetzelfde verschijnsel. De lichtreflexen van de goniometerlamp, op deze vlakken, zijn prachtig licht-lila gekleurd; op de andere vlakken wit, soms geelachtig.

Dan vertoont de verbinding op {100}, {010} en {010} het pleöchroïtisch gedrag, zooals in fig. 5 is afgebeeld; de arceering geeft weer de trillingsrichting der beide gepolariseerde stralen aan, welke volgens de normaal op 't resp. vlak invallen. Op {100} is een onderscheid alleen bij dikkere kristallen waarneembaar, op {001} zijn de kleuren lichtgroen en donker, eenigzins blauwachtig groen; op {010} is 't verschil 't sterkst, n.l. lichtgroen en donkerviolet; de laatste kleur is inderdaad, zooals me bleek, geen oppervlakte-weerschijn, maar de kleur der fase bij *doorvallend* licht. Op {001} zijn zwakke absorptiebundels van hyperbolischen vorm waarneembaar, gelijkend op een zich bij draaiing van de tafel openend assenkruis.

Het optisch assenvlak is bijkans horizontaal; de spitse middellijn maakt een kleinen hoek met de normaal op {100}. In konvergent licht is een zeer schoon assenbeeld waarneembaar, met kleinen assenhoek en eene middelsterke dispersie van rhombisch karakter; de dispersie van genoemde middellijn is $\varrho < \nu$, de dubbelbreking is positief.

Als wij de kristallonomische assen resp. a, b, c noemen, is dus de optische oriëntering van het elasticiteits-ellipsoïde in dezelfde volgorde; γ, β, a , — waarin $a > \beta > \gamma$. De dubbelbreking is zwak.

Op {100} en {001} georiënteerde uitdooving; op {010} was de zeer kleine hellingshoek der elasticiteits-as met de vertikaal-as, wegens de sterke absorptie niet voldoende scherp vast te stellen; ze is niet van 90° te onderscheiden.

Het specifiek gewicht der kristallen werd bij 15°C. bepaald op: 1,240; het equivalent-volume is dus: 143,53, en de topische assen worden:

$$\chi : \psi : \omega = 4,2363 : 4,1623 : 8,1626 .$$

De volkomen *isomorfie* van *p-Nitrodiaethylamine* en *p-Nitroso-*

diaethylaniline is hiermede ten volle bewezen. Ter vergelijking stel ik hiernevens de eigenschappen van beide lichamen naast elkaar.

p-Nitro-diaethyl-aniline :

Monoklien-prismatisch.

$$a : b : c = 1,0342 : 1 : 1,9788.$$

$$\chi : \psi : \omega = 4,4276 : 4,2807 : 8,4710.$$

$$d = 1,225$$

$$v = 158,36$$

Hoekwaarden :

$$(110) : (100) = 45^\circ 34'$$

$$(100) : (10\bar{2}) = 51^\circ 13'$$

$$(100) : (001) = 80^\circ 34'$$

In aethylacetaat + ligroïne is de habitus afgeplat naar {100} en gestrekt naar de *c*-as; ook wel volgens de *b*-as.

Zeer volkomen splijtbaar naar {001}, goed volgens {010}, met schelpachtige breuk.

Op {001} violette weerschijn.

Optische orienteering : γ, β, α .

Dubbelbreking positief.

Op {100}, weinig hellend een assenbeeld met kleinen assenhoek; assenvlak parallel de *b*-as voor de roode, parallel de *c*-as voor de groene stralen; dispersie : $\rho < \nu$.

Kleur : bruingeel.

Sterk pleochroïtisch : bloedrood-geel-oranje.

Op *c* absorptiebundels.

Er is niet de minste twijfel, of aan beide lichamen komt een geheel analoge molekulare structuur toe : splijtbaarheid, optische orienteering en oppervlaktegeaardheid der kristalvlakken, stemmen geheel overeen.

Uit gemengde oplossingen van beide componenten ontstaan groen-zwarte, kleinkristalliseerende mengkristalletjes, met levendigen staal-blauwen weerschijn.

p-Nitroso-diaethyl-aniline :

Monoklien-prismatisch.

$$a : b : c = 1,0178 : 1 : 1,9611.$$

$$\chi : \psi : \omega = 4,2363 : 4,1623 : 8,1626.$$

$$d = 1,240$$

$$v = 143,53$$

Hoekwaarden :

$$(110) : (100) = 45^\circ 25\frac{1}{2}'$$

$$(100) : (10\bar{2}) = 48^\circ 17\frac{1}{2}'$$

$$(100) : (001) = 85^\circ 43'$$

In aethylacetaat + ligroïne is de habitus afgeplat naar {100} en gestrekt naar de *c*-as.

Zeer volkomen splijtbaar naar {001}, goed volgens {010}, met schelpachtige breuk.

Op {001}, en op {010}, { $\bar{1}02$ } violette weerschijn.

Optische orienteering : γ, β, α .

Dubbelbreking positief.

Op {100}, weinig hellend, een assenbeeld met kleinen assenhoek; assenvlak parallel de *b*-as; rhombische dispersie : $\rho < \nu$.

Kleur : smaragdgroen.

Sterk pleochroïtisch : violet-lichtgroen-blauwgroen.

Op *c* absorptiebundels.

Als bij verreweg de meeste isomorfe mengsels, is 't kristallisatievermogen aanzienlijk kleiner dan bij elk der componenten afzonderlijk. Onder den mikroskoop zijn deze mengkristalletjes dunne, olijfgroene plaatjes, welke op hun vóórheerschend vlak weinig of geen pleochroïsme vertoonen. In konvergent licht is een prachtig interferentiebeeld waar te nemen: geringe neiging ten opzichte van de normaal op 't horizontale vlak, elliptische ringen, en kleine assenhoek, echter *groot*er dan in beide componenten. De dubbelbreking is positief; de dispersie heeft rhombisch karakter en vertoont: $\rho < \nu$.

Uit de laatste moederloogen komen mengkristallen van lichtere kleur, welke zijdeachtige naalden met geringeren oppervlakte-weerschijn als boven voorstellen. Overigens zijn zij optisch voortzettingen der zooeven beschreven mengkristallen. Uit de mengsels der beide componenten in den gesmolten toestand zetten zich deze mengkristallen met prachtig staalblauwen glans tegen den wand van 't buisje af.

Een inzicht in 't gedrag der beide isomorfe lichamen in den vloeistoestand levert het onderzoek der smeltkromme van binaire mengsels. Wegens de donkere kleur der smelt, werd langs grafischen weg het verloop der afkoelingskromme nagegaan; de bepalingen geschieden als gewoonlijk, in 't apparaatje volgens VAN ELJK. Opgemerkt zij, dat al deze smelten tot vaste fasen stollen, welke eveneens een prachtigen violetten of blauwen weerschijn bezitten,

Het nitro-derivaat heeft eene grootere latente smeltwarmte dan het nitroso-derivaat; in beide gevallen was het calorisch effect bij de stolling echter zeer goed waarneembaar. De benedenste stollingslijn is aanzienlijk minder scherp te bepalen dan de bovenste.

Aldus werd gevonden:

Een mengsel van 100 % *p-Nitro*-deriv. en 0 % *p-Nitroso*-d. smolt bij: 73°,6 C.

Een mengsel van 85,14 % *p-Nitro*-deriv., en 14,86 % *p-Nitroso*-d. begint te stollen bij: 75°,2 C., en eindigt te stollen bij: 74°,9 C.

Een mengsel van 72,5 % *p-Nitro*-d. en 27,5 % *p-Nitroso*-d. begint te stollen bij: 76°,2 C., en eindigt te stollen bij: 75°,9 C.

Een mengsel van 54,4 % *p-Nitro*-d. en 45,6 % *p-Nitroso*-d. begint te stollen bij: 77°,6 C., en eindigt te stollen bij: 77°,3 C.

Een mengsel van 38,64 % *p-Nitro*-d. en 61,36 % *p-Nitroso*-d. begint te stollen bij: 78°,2 C., en eindigt te stollen bij: 77°,9 C.

Een mengsel van 10,0 % *p-Nitro*-d. en 90,0 % *p-Nitroso*-d. begint te stollen bij: 80°,8 C., en eindigt te stollen bij: 80°,6 C.

Een mengsel van 0 % *p-Nitro*-d. en 100 % *p-Nitroso*-d. smolt bij: 82°,2 C.

De samenstelling is gegeven in molekuul-procenten.

In fig. 6 is het verloop der smeltkromme grafisch voorgesteld, en de dubbele lijn voor begin-, en eindstolpunten weergegeven. Men ziet, dat het karakter der lijn op eene continue reeks van mengkristallen wijst; het gemiddeld temperatuur-interval tusschen begin-, en eindstolling bedraagt ongeveer $0^{\circ},3$ C.

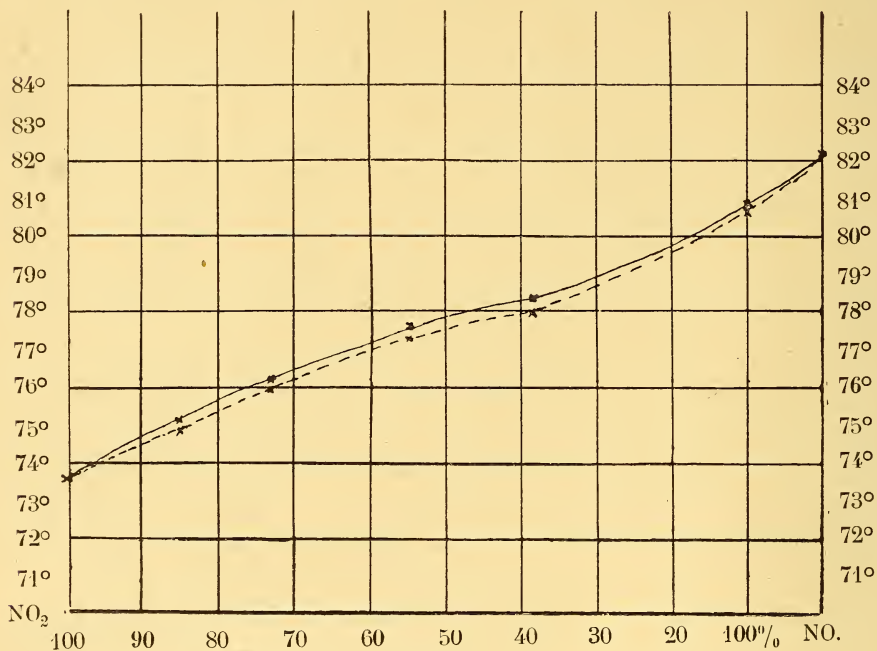


Fig. 6.

Uit het onderzoek blijkt dus eenerzijds de volledige isomorfie van *p*-Nitro-diaethylaniline en *p*-Nitroso-diaethyl-aniline en anderzijds hunne volkomen mengbaarheid in den vasten staat.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt eene mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „Over de verschillende vormen en overgangen der grenslijnen bij gedeeltelijke mengbaarheid van twee vloeistoffen.”

(Mede aangeboden door den Heer J. M. VAN BEMMELLEN).

1. In een voorgaande Verhandeling ¹⁾ toonde ik aan, dat wanneer een der beide componenten van een binair mengsel *anomaal* is, de T, x -voorstelling der spinodale lijn, en dus ook die der connodale lijn, de z.g. verzadigings- of grenskromme $x = f(T)$, verschillende aldaar

¹⁾ Deze Verslagen van 28 Jan. 1905.

geteekende vormen kan aannemen, welke geleidelijk in elkaar kunnen overgaan. Het hangt daarbij hoofdzakelijk slechts af van de grootte van den *kritischen druk* van den normalen, in verband met dien van den anomalen component, welke der verschillende vormen zich bij een bepaald stoffenpaar zal voordoen.

Een bevestiging van de door mij ontwikkelde theorie, d.w.z. van de uit de algemeene vergelijkingen door mij afgeleide gevallen en overgangen, wordt gevonden in de omstandigheid, dat men die gevallen en overgangen *in geheel dezelfde volgorde bij een en dezelfde stof* kan realizeren, en wel door *uitwendigen druk*. Evenals bij *verschillende* normale stoffen als tweede component de in fig. 7 l. c. geteekende vorm bij betrekkelijk *lage* kritische drukken (t. o. v. dien van den anomalen component) ontstaat, en die van fig. 2 l. c. bij betrekkelijk *hooge* kritische drukken, zoo zal ook bij een zelfde paar stoffen de vorm van fig. 7 bij betrekkelijk *lagen* uitwendigen druk kunnen gerealiseerd worden, en die van fig. 2 bij betrekkelijk *hoogen* uitwendigen druk, terwijl wederom bij tusschenliggende drukken al de overgangsgevallen in dezelfde volgorde zullen terugkeeren.

2. Wij hebben daartoe slechts een blik te slaan op de p, T -voorstelling van de verschillende grenskrommen bij *aethaan* en *methyylalcohol*, zooals die door KUENEN ¹⁾ naar aanleiding zijner experimenteelen bepalingen is ontworpen (zie fig. 1). Uit den vorm der van C_2 (de hoogste kritische temperatuur, die van CH_3OH) uitgaande kromme, welke de drukken aangeeft, waarbij bij verschillende temperaturen de twee coëxisterende fasen samenvallen, en waarboven dus volledige homogeniteit intreedt, ziet men nl. terstond, dat al naar de grootte van den druk *een* kritisch mengpunt a kan voorkomen (bij de drukken 1 en 2), *twee*, nl. a en b, c (bij 3), *drie* nl. a, b en c (bij 4); weer *twee*, d.w.z. (a, b) en c (bij 5), en eindelijk wederom *een*, nl. c (bij 6). (zie ook fig. 2).

Nog duidelijker komt dit alles uit, wanneer men een *ruimte*-voorstelling ontwerpt in verband met fig. 1 en van eenige achtereenvolgende p, x -doorsneden. In fig. 1 stellen D_1 en D_2 de dampdruklijnen der beide componenten voor; ΔM is de driephasendruklijn, welke in M , waar de gasphase 3 met de aethaanrijkste vloeistofphase 1 samenvalt, plotseling wordt afgebroken, omdat zij daar de kritische lijn, d.w.z. de lijn der plooi punten P , nl. $C_1 C_2$, ontmoet. Voorbij M bestaat er slechts coëxistentie tusschen de *fluide* phase 3, 1 en de alcoholrijkste vloeistofphase 2. Het is het evenwicht tusschen deze

¹⁾ Phil. Mag. (6) 6, 637—653, speciaal p. 641 (1903).

laatste twee fasen, waarvan in fig. 2 bij verschillende drukken de T, x -voorstelling is ontworpen. (De gestippelde grenslijn 0 geldt voor een druk beneden den kritischen druk van den tweeden, en boven dien van den eersten component). Voor het driefasenevenwicht tot aan M geldt onder den (veranderlijken) driefasendruk de T, x -voorstelling van fig. 3. In fig. 4 is de bedoelde ruimtevoorstelling geteekend, welke nu verder vanzelf duidelijk is ¹⁾. Voor de verschillende hoogere drukken zijn daarin de corresponderende T, x -doorsneden geteekend.

Opmerking. Van C_2 af (zie fig. 1) tot aan het maximum bij 126° , waar a en b samenvallen, en ook van het minimum bij 26° af, waar b en c samenvallen, tot aan de laagste temperaturen, zal drukvermeerdering de kritische mengtemperatuur Q *verlagen*, en zullen deze mengpunten in de T, x -doorsneden bij standvastigen druk (zie fig. 2) *boven* mengpunten zijn. Daarentegen zal van het maximum bij 126° af tot aan het minimum bij 26° drukvermeerdering de kritische mengtemperatuur *verhoogen*, en zullen de bedoelde mengpunten *beneden* mengpunten zijn.

Dat drukvermeerdering, zooals uit fig. 1 en de p, x -voorstellingen blijkt, de menging ten slotte steeds *bevordert* — zoowel in het geval van een bovenmengpunt als in dat van een benedenmengpunt — is ook in overeenstemming met de T, x -voorstelling van fig. 2. Immers bij een *boven* mengpunt (zie ook fig. 5) zal een punt A , *binnen* de grenslijn gelegen, bij drukverhooging, waarbij T_0 naar het lagere punt T_1 wordt verschoven ($\frac{dT}{dp}$ is n.l. *negatief*, zooals wij boven zagen), *buiten* de nieuwe grenslijn komen te liggen. En dit zelfde zal blijkbaar het geval wezen bij een *beneden* mengpunt, waar $\frac{dT}{dp}$ *positief* is.

Tot het behandelde type behoort ook $\text{SO}_2 + \text{H}_2\text{O}$, $\text{C}_2\text{H}_6 + \text{H}_2\text{O}$, en ook *aether* en *water*. Dit laatste mengsel met dit onderscheid alleen, dat hier de samenstelling van de dampphase voortdurend *tusschen* de beide vloeistofphasen inligt (zie fig. 3a). KUENEN ²⁾ vond, dat bij 201° de dampphase samenvalt met de aetherrijkste vloeistofphase. De driefasendruk is dan 52 atm. (Bij C_1 is $T_1 = 195^\circ$, $p_1 = 38$ atm).

De p, x -voorstellingen zouden thans een *maximum-dampdruk* ver-

¹⁾ Deze ruimtevoorstelling (zonder de T, x -doorsneden) was reeds onafhankelijk van mij door BÜCHNER ontworpen; doch niet in zijn Verhandeling (V. K. A. v. W. 28 Jan. 1905) opgenomen.

²⁾ Z. f. Ph. Ch. 28, 342—365, speciaal p. 352 (1899).

toonen, indien de beide vloeistofphasen 1 en 2 identiek konden worden. In verband hiermede zal de driephasendruk grooter (hier slechts eenige mM.) zijn dan de dampdrukken van elk der componenten, en uit fig. 1 volgt dan onmiddellijk, dat de critische lijn $C_1 C_2$, of liever $C_1 M$, van C_1 af aanvankelijk zal terugloopen, 'd.w.z. een *minimum* zal vertoonen. In het geval van $C_2H_6 + CH_3OH$, waar de samenstelling der dampphase *buiten* die der vloeistofphasen ligt, zal de driephasendruk altijd *tusschen* de dampdrukken der componenten inliggen.

3. Wat nu voor het geval $C_2H_6 + CH_3OH$ de voorstelling der z.g. dwars- en lengteplooi op het ψ -vlak bij verschillende temperaturen (in hare projectie op het v, x -vlak) betreft, zoo zal het duidelijk zijn, dat het bovenbeschouwde plooi punt Q van de lengteplooi steeds aan de zijde der *kleine* volumens ligt. Immers drukverhooging bevordert (zie boven) ten slotte de menging.

De achtereenvolgende vervormingen der dwars- en lengteplooi zijn verder, in overeenstemming met de p, x -doorsneden, in fig. 6 *schematisch* voorgesteld. De hier optredende lengteplooi wordt door VAN DER WAALS¹⁾ — evenals in het straks te behandelen geval — als een *vervormde* dwarsplooi beschouwd. Vele vragen echter, met deze plooiën in verband staande, verliezen — zooals VAN DER WAALS reeds opmerkte²⁾ — van hunne beteekenis, en worden van *secondair* belang, zoodra men er in slaagt de dikwijls zoo gecompliceerde vervormingen, welke zich bij de verschillende plooiën kunnen voordoen, *in verband te brengen met andere eigenschappen* der in het mengsel voorkomende stoffen. En met dit laatste is in mijn voorgaande Verhandeling een begin gemaakt. Daarin werd aangetoond, hoe de *gewone* theorie der associatie in staat is de verschillende mogelijke vormen der grenskrommen kwalitatief, en in vele gevallen zelfs quantitatief weer te geven.

4. Beschouwen wij thans het *tweede* der in een recente Verhandeling van BAKHUIS ROOZEBOOM en BÜCHNER³⁾ aangegeven *drie* hoofdtypen, waarvan het *eerste* boven uitvoerig besproken is.

Fig. 7 geeft hiervan de p, T -voorstelling; fig. 8 de T, x -voorstelling van eenige doorsneden bij constanten druk (de gestippelde grenslijnen hebben daarbij betrekking op drukken tusschen die van M'' en C_2 , en op die beneden M').

¹⁾ Deze Verslagen 7, p. 467 (1899).

²⁾ Id. 25 Oct. 1902, p. 399.

³⁾ Id. 28 Jan. 1905, p. 531—537.

De reeks p, x -voorstellingen, en de ruimtevoorstelling (mede alreeds door BÜCHNER ontworpen) blijven hier achterwege. Wij vinden dit geval bij mengsels van *aethaan* met *aethyl-*, *propyl-*, *isopropyl-* en *normalen butylalcohol*, alle door KUENEN ¹⁾ onderzocht. Ook behoort hiertoe *triaethylamin* + *water*, en eenige andere mengsels ²⁾ met een *benedenmengpunt* (bij het laatstgenoemde ligt dit bij 18°,3 C.). Uit fig. 8 en uit de p, x -voorstellingen is nl. duidelijk zichtbaar, dat M' thans een *benedenmengpunt* is, in tegenstelling met M bij fig. 1, hetwelk een *bovenmengpunt* was. Want waar bij M (fig. 1) de driephasendruk *eindigt, vangt* deze bij M' *aan*. Later evenwel, bij M'' , vloeit de gasphase weer samen met de eerste (aethaanrijkste) vloeistofphase (doordat de driephasendruklijn $M'M''$ wederom de kritische lijn C_1C_2 ontmoet), waarna het verdere verloop als bij het voorgaande type is. De T, x -voorstelling met veranderlijken driephasendruk, dus tusschen M' en M'' (fig. 9a) is daarmee in overeenstemming.

Het blijkt dat hier evenmin als bij het voorgaande hoofdtype een eigenlijk *bovenmengpunt* in den gewonen zin bestaat. Immers in beide gevallen vallen bij het eindigen van den driephasendruk 1 en 3 samen, en niet 1 en 2 (zie fig. 3a en 9a). De dampphase wordt identiek met de bovenste vloeistofphase en verdwijnt, maar dan blijven er toch nog twee fasen over, de onderste vloeistofphase 2 en de liquide phase 1, 3. Deze echter gaan bij verdere temperatuursverhooving, zooals de ruimtevoorstellingen (zie o. a. fig. 4) duidelijk aangeven, altijd aan de dampspanningslijn der 2^{de} phase bij $x_1 = x_2 = 1$ in elkaar over (zie ook de gestippelde grenscurven in fig. 2 en 8). Begint men dus met een mengsel van een bepaalde samenstelling, dan komt men bij temperatuursverhooving ten slotte buiten de grenscurve 1, 3 op het oogenblik dat de vloeistofphase 2 geheel verdwenen is. Hiermede is meteen geprecizeerd, hetgeen ik in mijn voorgaande Verhandeling beweerde, dat nl. het bestaan van een *benedenmengpunt* noodzakelijk dat van een hooger gelegen *bovenmengpunt* medebrengt. Een eigenlijk *critisch* punt is het, zooals wij zagen, echter niet.

Uit de reeks p, x -voorstellingen zou men nog kunnen zien, dat de grenslijn der beide vloeistofphasen met het plooi punt Q beneden de temperatuur, waarbij 1 en 2 samenvallen (bij M'), niet *binnen* de grenslijn damp—vloeistof komt, zooals KUENEN ³⁾ meent, maar *geheel verdwenen* is. Er is dan ook geen grond te onderstellen, dat bij het

¹⁾ Z. f. Ph. Ch. 28, p. 358—363 (1899).

²⁾ O. a. β -Collidine, en de basen der pyridine- en chinolinereeksen met H_2O .

³⁾ Phil. Mag. l.c. p. 645.

punt M' drukverlaging wederom blijvende ontmenging zou moeten veroorzaken (wanneer die toestand realiseerbaar ware), naar KUENEN blijkbaar o. a. bij mengsels van triaethylamin en water „undoubtedly” meende te moeten verwachten ¹⁾. Wat hij in een ander geval bij propaan en methylalcohol heeft waargenomen ²⁾, moet m. i. daaraan worden toegeschreven, dat de expansie even boven het (boven)mengpunt de temperatuur een weinig heeft doen dalen, waardoor hij op het beneden den driefasendruk gelegen (metastabiele) gedeelte van de beide vloeistoflijnen terecht kwam. Maar toen het keerpunt bereikt was, sloeg onmiddellijk de toestand om, en kwam er door verdere expansie weer homogene vloeistof en damp.

Daar drukvermeerdering wederom de menging bevordert, zooals blijkt uit fig. 7 en uit de p, x -voorstellingen, zoo zal de plooi op het ψ -vlak in hare v, x -projectie wederom het plooi punt Q naar de zijde der *kleine* volumina gekeerd hebben. Fig. 10 geeft een schematisch beeld van de achtereenvolgende vervormingen der beide plooiën, of liever van de dwarsplooi, want wij kunnen de lengteplooi met VAN DER WAALS weer als een vervormde dwarsplooi beschouwen.

In fig. 7 ziet men, dat drukvermeerdering de kritische mengpunten Q verhoogt, tenminste aanvankelijk, wanneer de lijn $M'C_2$ een maximum mocht vertoonen; en uit de p, x -voorstellingen, dat deze mengpunten dan wederom *beneden* mengpunten zullen zijn, evenals in fig. 1 tusschen het minimum en het maximum in de lijn der kritische punten Q .

Ook bij het tweede hoofdtype kan de driefasendruk of *tusschen* de dampdrukken der beide componenten inliggen, zooals bij C_2H_6 met de genoemde alcoholen, als wanneer de samenstelling der dampphase buiten die der vloeistoffen zal liggen — of *groter* zijn dan die der componenten. Dan is er weer een *maximum-dampdruk* na het samenvallen der beide vloeistoffen beneden het benedenmengpunt, en ligt de samenstelling der dampphase *tusschen* die der vloeivloeistoffen ³⁾ (zie fig. 9b). Het spreekt vanzelf, dat in fig. 7 de kritische lijn C_1C_2 , of liever C_1M'' , alsdan aanvankelijk wederom

¹⁾ Id. p. 652.

²⁾ Id. p. 646.

³⁾ Dat bij het samenvallen der beide vloeistoffen 1 en 2 in het punt M' niet tegelijk de dampphase 3 met 1 en 2 behoeft samen te vallen, werd reeds door KUENEN opgemerkt, en nog vroeger door mij voor een dergelijk geval (evenwicht tusschen 2 vaste fasen en 1 vloeibare fase) theoretisch afgeleid. Dit is natuurlijk eveneens het geval bij een bovenmengpunt, zooals b.v. uit de proeven van SCHREINEMAKERS met *water* en *phenol* is gebleken. Wij komen hierop in § 8 nog uitvoeriger terug.

terugloopt, dus een *minimum* vertoont; ook zal dan de critische lijn $M'C_2$ de zoeven genoemde niet tusschen C_1 en M'' schijnbaar snijden, maar links van C_1 blijven. Dit geval komt o.a. voor bij mengsels van *water* en *triaethylamin*, waar tengevolge der bijna volledige niet-mengbaarheid der beide componenten boven het benedengpunt de driephasendruk maar uiterst weinig geringer zal zijn dan de *som* der dampdrukken der beide componenten. Zoo vond KUENEN, dat bij 93°C de driephasendruk 142,6 cM. was, terwijl de dampdrukken van triaethylamin en water resp. circa 86 en 58,6 cM. waren, samen dus 144,6 cM.

5. Het is opmerkelijk, dat het gebied van den driephasendruk voortdurend inkrimpt, naarmate men tot *hoogere alcoholen* opklimt (KUENEN). Bij $\text{C}_2\text{H}_6 + \text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ waren de temperaturen bij M' en M'' resp. $31^\circ,9$ (46 atm.) en $40^\circ,7$ (55 atm.); bij $\text{C}_2\text{H}_6 + \text{C}_2\text{H}_7\text{OH}$ zijn deze $38^\circ,7$ en $41^\circ,7$; bij $\text{C}_2\text{H}_6 + \text{isopropylalcohol}$? en $\pm 44^\circ$; bij *n*-butylalcohol $38^\circ,1$ en $39^\circ,8$ (55 atm.) Eindelijk waren bij isoamylalcohol geen drie fasen meer te realizeren, zoodat daar de kritische punten Q met de critische punten P samenvallen tot ééne doorlopende critische lijn van C_1 tot C_2 (Hoofdtype III).

Hiermede in overeenstemming is het feit, dat de anomaliteit der alcoholen afneemt, naarmate deze hooger zijn. Wij naderen dan nl. hoe langer hoe meer tot het geval van mengsels van *normale* stoffen, waar alleen bij *zeer lage* temperaturen (zie mijne voorgaande Verhandeling) splitsing in twee vloeistofflagen kan optreden. KUENEN vond dan ook, dat bv. $\text{C}_2\text{H}_6 + \text{aether}$ zich in alle verhoudingen mengen, terwijl $\text{C}_2\text{H}_6 + \text{H}_2\text{O}$, evenals $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$, weer een driephasenevenwicht vertoonen.

De invloed van het hooger worden van den *alcohol* is ook merkbaar aan mengsels van CS_2 met verschillende alcoholen. Zoo worden voor de bovenmengpunten van CS_2 met CH_3OH , $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$, $\text{C}_3\text{H}_7\text{OH}$ en $\text{C}_4\text{H}_9\text{OH}$ achtereenvolgens gevonden $+40^\circ,5$ (ROTHMUND), $-10^\circ,6$ (KUENEN), -52° (K) en -80° (K).

Door KUENEN werd mede de invloed van de *koolwaterstof* onderzocht. Terwijl, naar wij boven zagen, bij $\text{C}_2\text{H}_6 +$ verschillende alcoholen de scheiding tusschen type I en II tusschen CH_3OH en $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ lag, en die tusschen II en III tusschen *n*-butyl- en isoamylalcohol, ligt thans bij $\text{CH}_3\text{OH} +$ verschillende koolwaterstoffen de scheiding tusschen I en III tusschen C_2H_6 en C_3H_8 . Propana en de volgende koolwaterstoffen $+ \text{CH}_3\text{OH}$ behooren dus, evenals $\text{C}_2\text{H}_6 +$ isoamylalcohol en de meeste andere, door GUTHRIE, ALEXEJEV en ROTHMUND

onderzochte mengsels met een *bovenmengenpunt*, tot het *derde* hoofdtype, hetwelk wij thans kortelijk zullen beschouwen.

6. Het *derde* hoofdtype is hoofdzakelijk hierdoor gekarakteriseerd, dat de driephasendruklijn de critischen lijn $C_1 C_2$ *niet* meer ontmoet, maar reeds van te voren tot een eind gekomen is (fig. 11). Dit derde type kan ontstaan òf uit het tweede type, doordat (zie fig. 7) de driephasendruklijn MM' hoe langer hoe meer inkrimpt, om ten slotte geheel te verdwijnen, zooals bij den overgang van $C_2H_6 + C_4H_9OH$ op $C_2H_6 + C_5H_{11}OH$ (zie boven) — òf uit het eerste type, wanneer ΔM reeds vóór $C_1 C_2$ eindigt. In het eerste geval (bv. bij $C_2H_6 + C_4H_9OH$, $C_2H_6 +$ aether) bestaat er in het geheel geen driephasenevenwicht — of het moest zijn bij zeer lage temperaturen, wat volgens de theorie (zie mijne voorgaande Verhandeling) zelfs verwacht kan worden, zoodat dan ook de vraag zich voordoet, of ook in het geval van fig. 7 niet bij lagere temperaturen een nieuwe driephasendruklijn aanwezig is, op welke vraag wij aan het einde dezer Verhandeling nog zullen terugkomen — in het tweede geval bestaat er van het begin af een driephasendruk, welke bij een bepaalde temperatuur verdwijnt (*bovenmengenpunt*). Tot dit laatste geval behooren de mengsels van CH_3OH met C_3H_8 , enz., $H_2O + CO_2$, $CS_2 +$ verschillende alcoholen (KUENEN), alsook de meeste vroeger reeds onderzochte mengsels (zie boven).

Maar er bestaat bij dit derde hoofdtype nog een ander verschil. Vooreerst kan nl. de driephasendruklijn weer òf tusschen òf buiten de dampdruklijnen der beide componenten liggen, met alle gevolgen daaraan in de p, x -voorstellingen, enz. (zie boven) verbonden. Wat de mengsels van CH_3OH met C_3H_8 , C_5H_{12} , C_6H_{14} betreft, zoo wordt bij alle gevonden (KUENEN, l.c.), dat de driephasendruk *hooger* dan de dampdruk der koolwaterstoffen is, in tegenstelling met $C_2H_6 + CH_3OH$, tot type I behoorende, waar de driephasendruk lager dan de dampdruk van C_2H_6 was. Ook bij phenol van water (SCHREINEMAKERS, v. D. LEE), $H_2O + CS_2$ (REGNAULT) — waar overeenkomstig de uiterst geringe mengbaarheid de driephasendruk weer iets kleiner is dan de som der dampdrukken der componenten — $H_2O + Br_2$ (BAKHUIS ROOZEBOOM), $H_2O +$ isobutylalcohol (KONOWALOW), $CS_2 + CH_3OH$ en C_2H_5OH (KUENEN), $H_2O +$ Aniline (KUENEN), enz. vindt men overal den driephasendruk hooger dan de dampdrukken van elk der componenten. Slechts bij $H_2O + SO_2$ (BAKHUIS ROOZEBOOM), en bij nog een paar andere stoffen ($S +$ Xylol en Toluol, $CO_2 + H_2O$) weet men met zekerheid, dat de driephasendruk tusschen de dampdrukken der beide componenten inligt.

Er is echter nog een ander, belangrijk verschil. Terwijl bij type I (fig. 1) de critische lijn QC_2 , afwisselend positieve en negatieve $\frac{dT}{dp}$ vertoont, en bij type II (fig. 7) $\frac{dT}{dp}$ in den beginne bij M' uit den aard der zaak altijd positief is (het punt Q verschijnt immers eerst bij M') — zoo kan thans bij type III het aanvangsverloop van MQ zoowel naar links als naar rechts zijn.

Is dit naar *links*, d.w.z. is $\frac{dT}{dp}$ negatief, dan zal evenals in fig. 1 tusschen C_2 en het maximum en tusschen het minimum en de laagste temperaturen, bij deze bovenmengpunten drukverhooging de critische mengtemperatuur weder *verlagen*, en de plooi op het ψ -vlak zal in haar v, x -projectie het plooi punt Q wederom naar de zijde der *kleine* volumens gekeerd hebben. (Dit is eveneens het geval bij $C_2H_6 + \text{isoamylalcohol}$, waar geen driefasenevenwicht kon geconstateerd worden, maar waarbij het plooi punt Q , dat hier met P identiek geworden is, evenals bij mengsels van C_2H_6 met de *lagere* alcoholen, weer sterk naar de x -as verschoven is). Men vindt dit o.a. bij $C_3H_8 + CH_3OH$.

Maar wanneer het aanvangsverloop van MQ naar *rechts* is, zooals bij $C_5H_{12} + CH_3OH$, $C_6H_{14} + CH_3OH$, en bij phenol en water, dan zal drukverhooging het punt Q *verhoogen*, en zal de genoemde plooi het plooi punt Q thans voor het eerst naar de zijde der *grootte* volumens gekeerd hebben.

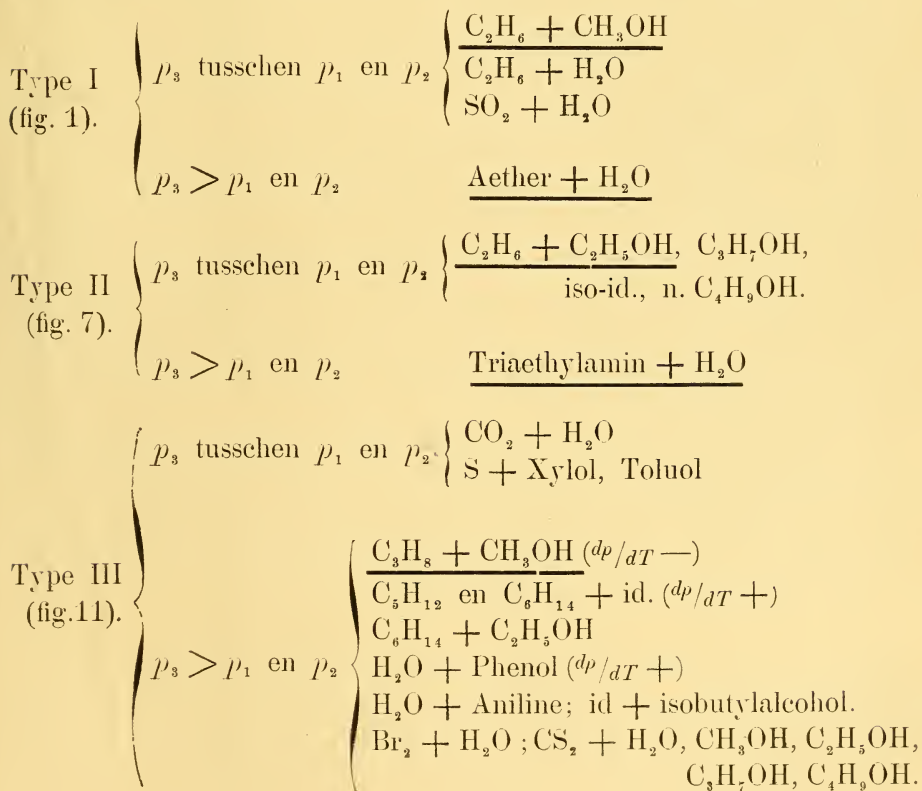
De vraag of de lengteplooi als in het geval van phenol en water nog eene tweede plooi punt bij zeer kleine volumina, dus onder zeer hooge drukken, zal vertoonen — m. a. w. of de coëxisterende vloeistofphasen, na eerst te divergeeren, later weer in samenstelling tot elkaar zullen naderen, is nog niet met zekerheid theoretisch beantwoord (zie evenwel § 9). Het komt mij echter voor, dat waar bij $C_3H_8 + CH_3OH$ de plooi het plooi punt Q naar de zijde der *kleine* volumens gekeerd heeft, terwijl C_5H_{12} en C_6H_{14} , eveneens met CH_3OH , dit punt naar de zijde der *grootte* volumina hebben gekeerd, er een *geleidelijke* overgang moet bestaan tusschen beide soorten van lengteplooiën, en dat ook de laatste (zoolang zij nl. zich nog niet van de vloeistoflijn der dwarsplooi heeft losgemaakt, d. w. z. beneden het bovenmengpunt) als een aanhangsel der dwarsplooi moet worden beschouwd. Eerst wanneer de lengteplooi zich boven de kritische mengtemperatuur geheel van de vloeistoflijn der dwarsplooi heeft losgewikkeld, kan zij m. i. als een *zelfstandige* plooi, naast de dwarsplooi, worden opgevat. Dit is geheel in overeenkomstig met hetgeen

b. v. de grenslijnen in de T, x -voorstelling vertoonen (zie fig. 2).

Zoolang de beide gedeelten der grenslijn, bv. N^o. 2, zich nog niet hebben afgescheiden, kan men moeilijk van twee grenslijnen spreken: het blijft één doorlopende grenslijn: eerst voorbij het overgangsgeval N^o. 3, bv. bij N^o. 4, heeft men het recht van twee geïsoleerde grenslijnen te spreken.

Wat de hoogten der verschillende kritische mengpunten betreft, zoo vermelden wij nog, dat bij $C_3H_8 + CH_3OH$ het bovenmengpunt werd gevonden bij 21° C., bij $C_5H_{12} + id.$ bij 19°5, en bij $C_6H_{14} + id.$ bij circa 40°. Neemt men C_6H_{14} met C_2H_5OH , dan daalt de laatste temperatuur onmiddellijk tot — 65°.

7. Al het voorgaande recapitulerende, zoo hebben wij dus het volgende korte overzicht (p_3 beteekent den driephasendruk, p_1 en p_2 de dampdrukken der beide componenten).



8. Wij zagen boven, dat in geval de samenstelling der dampphase *tusschen* die der beide vloeistoffen inligt — hetgeen het geval is, wanneer de driephasendruk *hooger* is dan de dampdrukken van elk der componenten — er *na* het samenvallen der vloeistofphases 1 en

2 een *maximum*-dampdruk moet aanwezig zijn. Dit maximum kan echter reeds aanwezig zijn *voor* het samenvallen dezer vloeistofphases, hetgeen hiermede in verband staat, dat dit maximum, dat oorspronkelijk bij lagere temperaturen als minimum (zie de figg. 12) in het metastabiele gebied aanwezig was, langzamerhand tot een maximum geworden is, en vóór het samenvallen van 1 en 2 naar *buiten* is getreden. De dampphase 3, die bij lagere temperaturen altijd tusschen 1 en 2 inlag, wat hare samenstelling betreft, behoeft nl. niet daartusschen te blijven tot aan het oogenblik van samenvallen van 1 en 2 toe, zooals men vroeger meende, maar kan lang voor dien tijd naar buiten zijn gekomen (zie ook fig. 9*b*). Het zou integendeel hoogst toevallig wezen, wanneer 3 tegelijk met 1 en 2 tot één phase samensmolt. Bij *phenol* en *water* heeft SCHRÉINEMAKERS dan ook dit naar buiten treden proefondervindelijk aangetoond ¹⁾.

Op welke wijze dat naar buiten treden plaats heeft, is het eerst door mij ²⁾ in een reeks van figuren duidelijk aangetoond en quantitatief vervolgd, en wel bij de coëxistentie van 2 vaste oplossingen en 1 vloeistofphase, terwijl het hier — wat natuurlijk geheel hetzelfde is ³⁾ — de coëxistentie van 2 vloeibare en 1 gasvormige phase geldt. Men keere de in genoemde Verhandeling geteekende figuurtjes 9—14 (die op smeltlijnen betrekking hebben, dus T, x -voorstellingen zijn) om, en men krijgt de hier gereproduceerde fig. 12. (Hierbij is fig. 12 der bedoelde Verhandeling weggelaten). Naar men zich herinneren zal, is het geval, hetgeen t. o. v. vloeistof—damp bij phenol—water verwezenlijkt is, t. o. v. vast—vloeibaar gerealiseerd bij $\text{AgNO}_3 + \text{NaNO}_3$. (alleen was daar het minimum van fig. 14*b* i. e. bij *D* reeds verdwenen).

Een klein halfjaar na het verschijnen mijner Verhandeling kwam ook KUENEN ⁴⁾ onafhankelijk van mij tot geheel hetzelfde inzicht. Wat in de Verhandeling van KUENEN op blz. 471 en 472 beschreven is, dekt zich geheel met het door mij in genoemde Verhandeling op blz. 184—186 beschrevene en afgebeelde.

9. Nu wij de drie hoofdtypen voldoende meenen te hebben gekarakteriseerd, en in de veelheid der verschijnselen eenige eenheid hebben gebracht, rijst vanzelf de vraag naar een nog verdere syn-

¹⁾ Z. f. Ph. Ch. **35**, p. 462—470 (1900).

²⁾ K. A. v. W. 27 Juni 1903.

³⁾ De berekeningen beruften op de VAN DER WAALS'sche toestandsvergelijking, zoodat de uitkomsten daarvan à fortiori van toepassing zijn op het geval van 2 vloeistofphases en 1 gasphase.

⁴⁾ K. A. v. W. 31 Oct. 1903.

these, naar een nog hogere eenheid. Meermalen toch hadden wij reeds gelegenheid bij de behandeling der verschillende hoofdtypen treffende overeenkomsten en geleidelijke overgangen op te merken bij dikwijls groot verschil. Ook moet voorzeker het feit, dat wanneer een hogere alcohol of een hogere koolwaterstof genomen wordt, dikwijls plotseling een geheel ander type te voorschijn treedt, zeer de aandacht trekken. Dit alles dringt er ons als het ware toe te zoeken naar het *éne* grondtype, waarvan de drie bovenbehandelde typen weer bijzondere gevallen zijn.

Ook de *analytische* beschouwing van het vraagstuk brengt ons op dit denkbeeld. Immers de coëxistentie van twee vloeistofphasen en een gasphase, of van twee vloeistofphasen, of eindelijk van één vloeistofphase en een gasphase, wordt door één en dezelfde toestandsvergelijking beheerscht, en het moet derhalve theoretisch altijd mogelijk zijn al de verschillende gevallen, die zich kunnen voordoen, terug te brengen tot *twee* grondverhoudingen: die der *kritische temperaturen* en die der *kritische drukken* der beide componenten — geheel op dezelfde wijze als ik vroeger *al* de verschillende typen bij mengkristallen, waar twee vaste fasen naast één vloeistofphase optreden, uit *twee* grondverhoudingen: ditmaal die der *smelttemperaturen* en der *smeltwarmten* der beide componenten, heb afgeleid.

Teneinde eenig denkbeeld te geven van de wijze, waarop de samenhang der drie hoofdtypen kan gedacht worden, heb ik de fig. 13 geteekend. Op theoretische gronden n.l. schijnt het mij waarschijnlijk toe, dat de plooiingslijn, waarop de kritische punten Q der z.g. vloeistofplooi gelegen zijn, algemeen de gedaante heeft van die van fig. 1, waarvan we zulk een fraai voorbeeld bij $C_2H_6 + CH_3OH$ bezitten.

Het hangt er nu echter maar van af, of die kritische lijn den driefasendrukcurve *niet* snijdt, zooals bij het *eerste* hoofdtype (fig. 13*a*), waar die curve reeds *vroeger* de lijn $C_1 C_2$ der gewone kritische temperaturen in M heeft gesneden, en alzoo opgehouden heeft te bestaan — of *wel* snijdt.

Maar in dit laatste geval kan blijkbaar die snijding nog op tweeërlei wijze plaats vinden. Of, zooals in fig. 13*b* geteekend is (*tweede* hoofdtype), waar de driefasendrukcurve *tweemaal* gesneden wordt, eens in het bij $C_2H_6 + C_2H_5OH$, enz. of bij triaethylamin + H_2O waargenomen benedenmengpunt M' , maar ook vóór dien tijd nog in een bovenmengpunt M , dat gewoonlijk veel lager ligt, en nog niet is waargenomen (of door het optreden van vaste fasen niet realiseerbaar is). (zie ook fig. 4 mijner voorgaande Verhandeling).

Maar ook kan het geval van fig. 12*c* zich voordoen (*derde* hoofd-

type), waar de driefasendruklijn vóór de critische lijn C_1C_2 niet ten tweeden male in een benedenmengpunt M' wordt gesneden. (zie fig. 2 der zooeven geciteerde Verhandeling).

In al de drie gevallen zou dan de critische lijn Q in de hoogste kritische temperatuur C_2 der beide componenten eindigen.

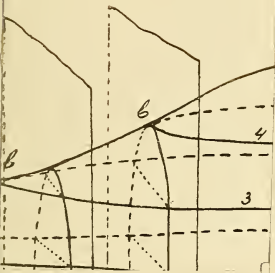
Wat het andere uiteinde betreft, zoo leert de theorie — zooals ik in een afzonderlijke Verhandeling heb aangetoond — dat dit altijd bij een bepaalde grenstemperatuur loodrecht zal loopen ($p = \infty$). *Beneden* die grenstemperatuur is de lengteplooi naar de zijde der kleine volumens dus altijd *ongesloten*, *boven* die temperatuur daarentegen *gesloten*, zoodat men dan door voldoende drukverhooging tenslotte altijd homogeniteit kan bereiken.

Hieruit blijkt tevens, dat wanneer (zie fig. 11) de critische lijn Q zich aanvankelijk naar *rechts* beweegt, deze richting ten slotte altijd zal omkeeren, zoodat bij hooge drukken de richting der critische lijn Q weer naar links is gewend, om bij een bepaalde grenstemperatuur loodrecht te verloopen. Dit staat daarmede in verband, dat de lengteplooi, welke in dit geval hare opening naar de zijde der kleine volumens heeft gekeerd, zich bij hoogen druk (mits bij temperaturen beneden de grenstemperatuur) altijd zal sluiten.

Wat overigens de algemeene allure van de critische lijn Q aangaat, zoo schijnt deze niet in onmiddellijk verband te staan met het al of niet anomaal zijn van een of van beide componenten. De anomaliteit der componenten oefent waarschijnlijk alleen dezen invloed uit, dat de critische curve Q met haar *middengedeelte* wordt *opgelicht* tot in of boven het critisch gebied. In verband hiermede moet men niet vergeten, dat in de nabijheid der critische punten van elk der componenten de invloed der normaliteit meestal verdwijnt. Heeft men bv. $C_2H_6 + H_2O$, dan zal in de nabijheid van $365^\circ C.$ het water al lang normaal zijn, en in de nabijheid van $32^\circ C.$ zal de vloeistofphase, die bijna geheel uit aethaan bestaat, het water in zoo verdunnen toestand bevatten, dat dit bijna geheel tot enkelvoudige moleculen zal zijn overgegaan.

In een afzonderlijke Verhandeling zal op het *theoretisch* gedeelte aangaande den loop der verschillende spinodale en plooi-puntslijnen nader worden ingegaan. Veel van wat in het eind dezer Verhandeling slechts kon worden aangeduid, zal daar uitvoeriger worden besproken.

J.



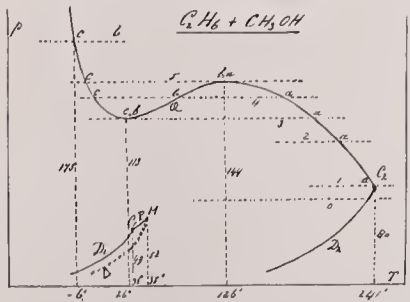


Fig. 1.

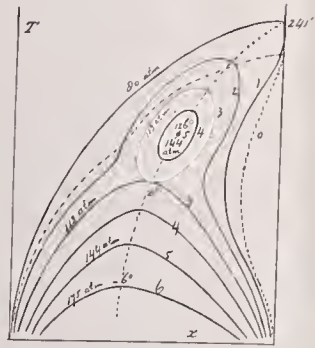


Fig. 2.

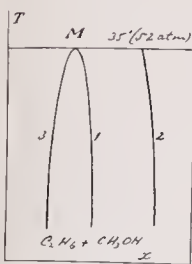


Fig. 3.

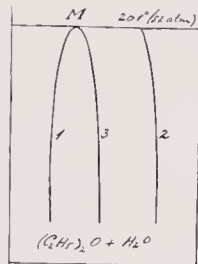


Fig. 3a.

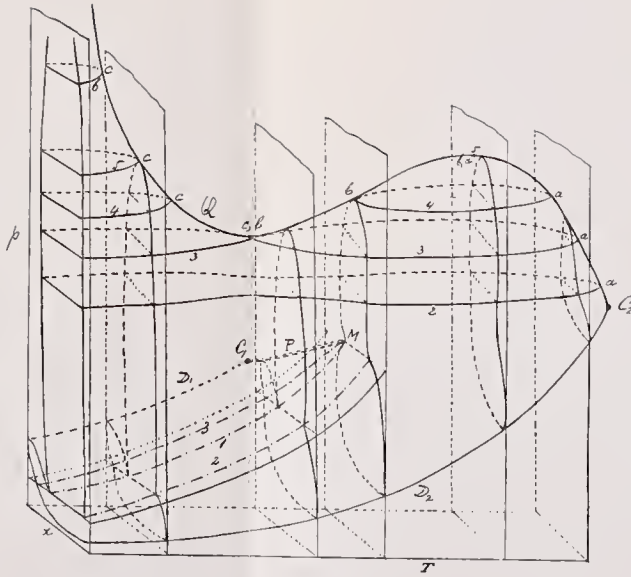


Fig. 4.

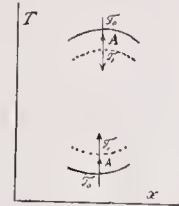


Fig. 5.

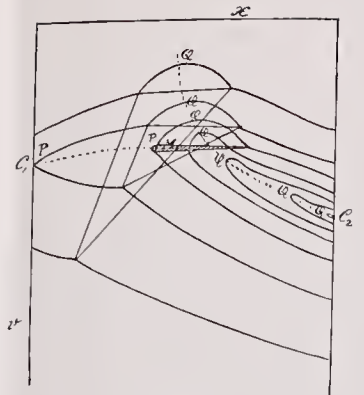


Fig. 6.

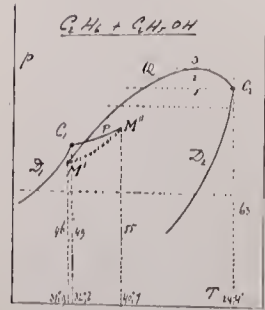


Fig. 7.

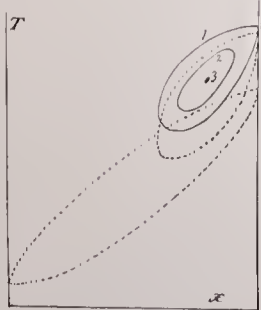


Fig. 8.

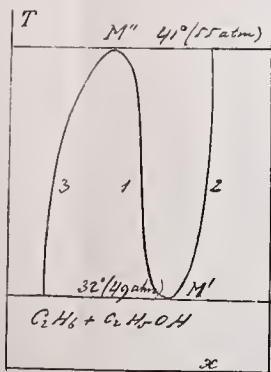


Fig. 9a.

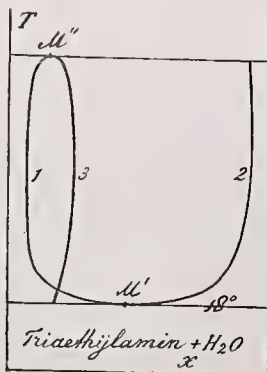


Fig. 9b.

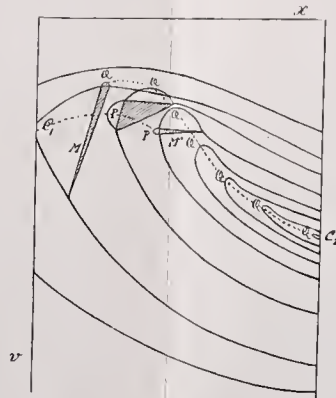


Fig. 10.

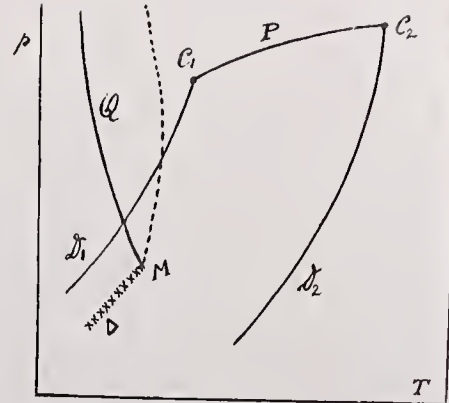


Fig. 11.

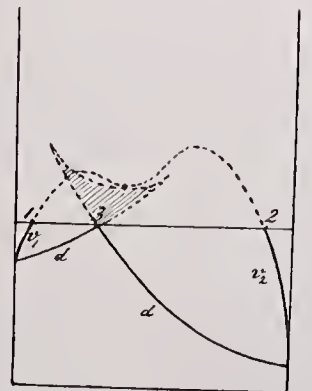


Fig. 12a.

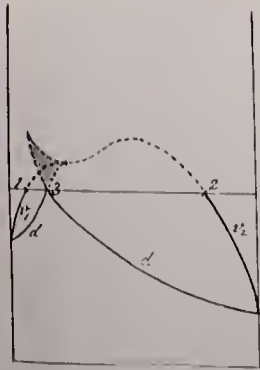


Fig. 12b.

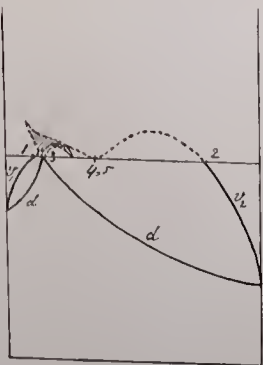


Fig. 12c.

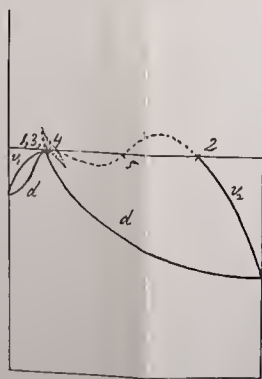


Fig. 12d.

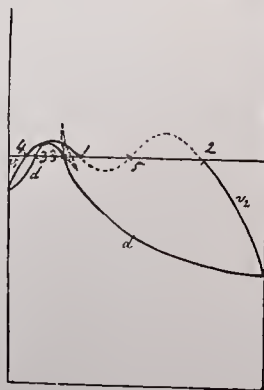


Fig. 12e.

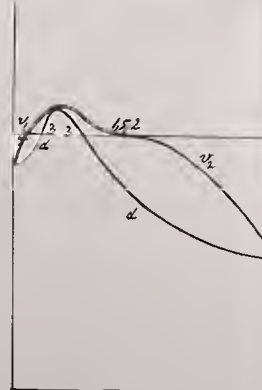


Fig. 12f.

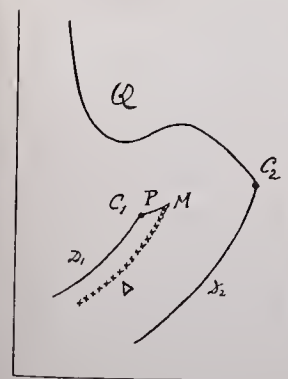


Fig. 13a.

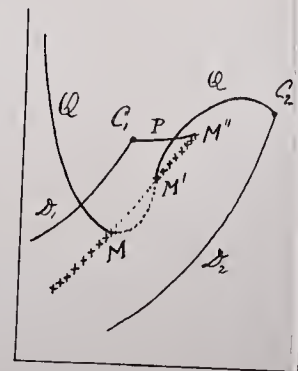


Fig. 13b.

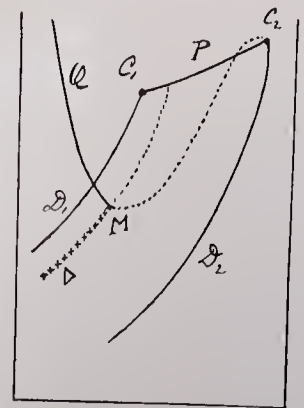


Fig. 13c.

Physiologie. — De Heer PEKELHARING biedt eene mededeeling aan van den Heer W. HUISKAMP: „*Over de aanwezigheid van fibrineglobuline in fibrinogeenoplossingen.*”

(Mede aangeboden door den Heer ZWAARDEMAKER).

Nadat door HAMMARSTEN was aangetoond, dat in fibrinogeenoplossingen, die door verwarming tot 55° of door middel van fibrineferment gestold waren, eene, later fibrineglobuline genoemde eiwitstof voorkomt, welke bij 64° coaguleert, bestonden met betrekking tot het voorkomen of ontstaan van deze eiwitstof verscheidene mogelijkheden.

Vooreerst kon de oorspronkelijke fibrinogeenoplossing de fibrineglobuline reeds als bijmengsel bevat hebben; in de tweede plaats was het mogelijk, dat bij de stolling door verwarming of door middel van fibrineferment het fibrinogeenmolekuul gesplitst werd en wel zoodanig, dat eene onoplosbare stof, de fibrine, naast eene oplosbare, de fibrineglobuline ontstond; tenslotte zou de fibrineglobuline misschien ook een veranderd in oplossing gebleven fibrinogeen, eene soort van oplosbare fibrine kunnen zijn.

Tegen de eerste dezer mogelijkheden heeft HAMMARSTEN¹⁾ gewichtige bewijsgronden aangevoerd en door zijne latere onderzoekingen werd bij hem meer en meer de overtuiging gevestigd, dat de fibrineglobuline eene eenigszins veranderde oplosbare fibrine zou zijn.

Aanleiding tot het nemen van de hierna te melden proeven over deze vraag gaf een onderzoek van CALUGAREANU²⁾, waarin de schrijver o. a. betoogt, dat natriumfluoride in sterke concentratie de werking van geringe hoeveelheden fibrineferment zeer krachtig doet toenemen. CALUGAREANU bereidde paardeoxalaatplasma, dat eene geringe hoeveelheid fibrineferment bevatte, echter zoo weinig, dat het plasma vrij langen tijd vloeibaar bleef.

Werd dit plasma gemengd met fluornatrium tot een gehalte van ongeveer 3%, hetzij door toevoeging van eene verzadigde oplossing van Na Fl of ook van fijn gepoederd Na Fl, dan ontstond eene nagenoeg oogenblikkelijke stolling. Dat het gevormde neerslag werkelijk fibrine is, leidt CALUGAREANU daaruit af, dat het evenals fibrine in verdunde zoutoplossingen niet oplost. Verder vond CALUGAREANU, dat paardeoxalaat-plasma, indien het slechts volkomen vrij van ferment was, door toevoeging zelfs van verscheidene volumina 3% Na Fl niet stolde. Wanneer dus geen ferment aanwezig is, blijft het

¹⁾ Pflügers Archiv., Bd. 22, blz. 431.

²⁾ Arch. internat. de Physiol. Vol. II, blz. 12.

natriumfluoride onwerkzaam, waaruit CALUGAREANU besluit, dat het Na Fl zijne werking op het fibrineferment, niet op het fibrinogeen uitoefent.

Bij eene herhaling van de proeven van CALUGAREANU verkreeg ik gedeeltelijk van de zijne afwijkende uitkomsten.

Het bleek namelijk, dat ook volkomen fermentvrije fibrinogeen-bevattende oplossingen met natriumfluoride een neerslag gaven; dit neerslag is, ingeval paardefibrinogeen gebruikt wordt, geleïchtig en herinnert daardoor min of meer aan stolling; neemt men voor de proef runderfibrinogeen of runderbloedplasma dan is het neerslag vlokkig en gelijkij dus althans uiterlijk niet op een stolsel.

In de tweede plaats bleek, dat het door Na Fl gevormde neerslag bij eene doelmatige behandeling gemakkelijk kon worden opgelost en dat deze oplossingen met fibrineferment stolden.

Eenige proeven zal ik hier uitvoeriger beschrijven.

Een konijn werd 65 cem. bloedzuiger-extract in de vena jugularis gespoten; vervolgens werd het bloed uit de Carotis in een geparaffineerd centrifugeerglaasje opgevangen en werden de bloedlichaampjes afgecentrifugeerd. Op deze wijze bereid plasma bevat, zooals door PEKELHARING ¹⁾ aangetoond werd, geen ferment; het hier bedoelde plasma bleef dagenlang, zoolang als het bewaard werd, vloeibaar; toch ontstond door toevoeging van driemaal het volumen aan verzadigde natriumfluorideoplossing langzaam een vlokkig neerslag; eene uit het plasma bereide fibrinogeenoplossing kon eveneens door toevoeging van verzadigde fluornatriumoplossing neergeslagen worden; door verzadiging met fluornatrium in substantie ontstond onmiddellijk een neerslag.

Andere proeven werden met paardefibrinogeen gedaan. De gebruikte fibrinogeenoplossingen, die door driemaal neerslaan met keukenzout uit oxalaatplasma bereid werden, vertoonden, zelfs na verscheiden dagen bewaard te zijn, geen spoor van stolling; door toevoeging van Ca Cl₂ werd noch bij 37° noch bij kamertemperatuur stolling veroorzaakt. In zulk eene fibrinogeenoplossing ontstaat door toevoeging van het dubbele volumen verzadigde fluornatriumoplossing dadelijk een groot neerslag ²⁾; dit geleïchtig neerslag kan gemakkelijk om een roerstaaf gewonden en zoo, tot verder onderzoek, uit de vloeïstof genomen worden. Het met water afgespoelde neerslag bezat de volgende eigenschappen. In 3—5% keukenzout loste het bij kamertemperatuur niet merkbaar op; gemakkelijker gelukte de oplossing op deze wijze

¹⁾ Untersuchungen über das Fibrinferment. Verhand. Kon. Akad. van Wet. Amsterdam 1892.

²⁾ Het mengsel bevat dan niet veel meer dan 3% Na Fl.

bij lichaamstemperatuur of beter nog bij 40—45°. Bij het afkoelen komt het neerslag niet terug. Het snelst wordt echter eene volledige oplossing verkregen, wanneer men als oplosmiddel $\frac{1}{20}\%$ Ammoniak gebruikt; wanneer daarbij met een roerstaaf het neerslag zooveel mogelijk fijn verdeeld wordt, kunnen op deze wijze gemakkelijk vrij geconcentreerde oplossingen bereid worden. Eene dergelijke oplossing kan, na toevoeging van keukenzout tot een gehalte van 3—5%, ge-neutraliseerd worden zonder dat opnieuw een neerslag ontstaat (slechts dan, wanneer de concentratie van de oplossing zeer groot was, sloeg dikwijls na eenigen tijd een deel van de opgeloste stof weer neer; dit neerslag loste echter bij 37° op). Zulk eene oplossing kan op dezelfde wijze nogmaals met het dubbele volumen verzadigde fluornatriumoplossing neergeslagen en in $\frac{1}{20}\%$ ammoniak opgelost worden. Dergelijke door een- of tweemaal neerslaan met NaFl bereide neutrale, 3—5% keukenzout bevattende oplossingen bezaten alle eigenschappen van fibrinogeen; door toevoeging van een gelijk volumen verzadigde keukenzoutoplossing ontstond een groot neerslag; azijnzuur veroorzaakte een in overmaat oplosbaar neerslag; de coagulatietemperatuur lag bij 54°; de oplossingen stolden met fibrineferment snel en volkomen, waarvoor ik de volgende proeven als voorbeelden aanhaal.

5 ccm. fibrinogeenoplossing van 0.342% + 1 ccm. oplossing van fibrineferment; de stolling begint (bij 37°) na $\frac{1}{2}$ uur; het buisje stolt verder volkomen.

5 ccm. van dezelfde fibrinogeenoplossing + 5 druppels runderbloedserum; de stolling begint (bij 37°) na tien minuten; na een uur was een vast stolsel ontstaan.

Een buisje met 5 ccm. van dezelfde oplossing ter contrôle zonder ferment bij 37° geplaatst bleef volkomen vloeibaar.

De bovenstaande proeven werden nu herhaald met paardeoxalaatplasma, dat niet volkomen vrij van ferment was, zooals uit het deeltelijk stollen van het opgevangen bloed bleek; de uitkomsten waren in het algemeen dezelfde; alleen loste het met NaFl verkregen neerslag iets moeilijker op; de oplossing van dit neerslag bezat intusschen de eigenschappen van eene fibrinogeenoplossing en stold met fibrineferment.

Voorts werden nog proeven genomen met fermentvrij runderfibrinogeen, bereid volgens de methode van HAMMARSTEN. Het bleek, dat voor het neerslaan van dit fibrinogeen met NaFl meer fluornatriumoplossing noodig was dan voor paardefibrinogeen. Het met NaFl verkregen vlokkige neerslag loste bij 37° gemakkelijker op in verdunde keukenzoutoplossing dan het met NaFl neergeslagen paarde-

fibrinogeen, daarentegen minder gemakkelijk in $\frac{1}{20}$ ‰ ammoniak; reeds bij kamertemperatuur losten vrij groote hoeveelheden in 3—5‰ NaCl op. De coagulatietemperatuur van de neutrale, ongeveer 3‰, keukenzout bevattende oplossing lag bij 53—54°; toevoeging van azijnzuur veroorzaakte een neerslag, dat in overmaat oploste; door halve verzadiging met keukenzout kon het fibrinogeen neergeslagen worden. Dat de oplossing met fibrineferment stolt, blijkt uit de volgende proef. 5 ccm. van de oplossing in 3‰ NaCl + 5 druppels runderbloedserum. Volledige stolling na twee uren.

Ofschoon het na de bovenstaande proeven den schijn hebben mag, dat het fibrinogeen bij het neerslaan met Na Fl onveranderd blijft, doet het nader onderzoek toch eene opmerkelijke verandering aan het licht komen. Verwarmt men n.l. eene oplossing van met Na Fl neergeslagen fibrinogeen eenigen tijd op 55—58°, dan vindt men in de van het coagulum afgefiltreerde vloeistof bijzonder weinig fibrineglobuline; wordt het fibrinogeen tweemaal met fluornatrium neergeslagen, dan kan uit de oplossing daarvan geen of slechts geringe sporen van fibrineglobuline bereid worden, zooals uit de volgende proeven blijkt.

I. Eene volgens HAMMARSTEN bereide oplossing van paardefibrinogeen werd voor een deel tweemaal met Na Fl neergeslagen; het laatste neerslag werd in $\frac{1}{20}$ ‰ ammoniak opgelost en de oplossing na toevoeging van keukenzout genentraliseerd. 8 ccm. van deze oplossing, welke 0.445‰ fibrinogeen bevatte, werden 5 minuten op 55—60° verwarmd; vervolgens werd gefiltreerd; het heldere filtraat werd tot 72° verwarmd, waardoor slechts eene geringe opalescentie ontstond, die niet merkbaar toenam, nadat de vloeistof zwak zuur gemaakt en daarna gekookt werd. Ter vergelijking werd uit 8 ccm. van dat gedeelte van de fibrinogeenoplossing, hetwelk niet met Na Fl behandeld was, op dezelfde wijze eerst het fibrinogeen gecoaguleerd en daarna in het filtraat de fibrineglobuline; ofschoon de voor deze proef gebruikte fibrinogeenoplossing 0.565‰ fibrinogeen bevatte en dus slechts weinig meer geconcentreerd was dan de met Na Fl bereide oplossing, was de gevonden hoeveelheid fibrineglobuline toch zeer veel grooter, daar er bij verhitting tot op 70° een aanzienlijk vlokkig neerslag ontstond.

Eene andere proef gaf de volgende uitkomsten.

II. De oplossing van het niet met Na Fl neergeslagen fibrinogeen bevatte 0.634‰ fibrinogeen, die van het tweemaal met Na Fl gepraecipiteerde 0.452‰ fibrinogeen. Nadat uit beide oplossingen het fibrinogeen door verhitten tot 55—58° en affiltreeren van het coagulum verwijderd was, werden van elk filtraat 5 ccm. gemengd met $1\frac{1}{2}$ ccm.

van eene verzadigde oplossing van pikrinezuur. In het filtraat van het met Na Fl behandelde fibrinogeen ontstond slechts eene opalescentie, die na eenigen tijd in een zeer gering neerslag overging; in het filtraat van het niet met Na Fl neergeslagen fibrinogeen ontstond daartegen dadelijk een groot neerslag.

III. Eene oplossing van runderfibrinogeen werd door viermaal het volumen verzadigde fluornatriumoplossing neergeslagen; daarna werd het neerslag afgecentrifugeerd, met water uitgewassen en in 4% keukenzout opgelost; de oplossing bevatte 0,232% fibrinogeen; nadat dit door verwarming tot op 55—58° en affiltreeren van het coagulum verwijderd was, bleef het filtraat bij koken volkomen helder en bevatte dus geen fibrineglobuline, ofschoon de oorspronkelijke fibrinogeenoplossing slechts eens met Na Fl neergeslagen was.

Het blijkt dus, dat door middel van fluornatrium fibrinogeenoplossingen kunnen verkregen worden, die bij verhitting geen fibrineglobuline of slechts sporen daarvan leveren. Dit pleit voor de opvatting, dat de fibrineglobuline reeds in de oorspronkelijke, niet verhitte, fibrinogeenoplossing aanwezig was, hetzij gebonden aan fibrinogeen, hetzij eenvoudig als bijmengsel en dat dus de fibrineglobuline niet door verandering van het fibrinogeen gedurende de verhitting ontstaat; in het laatste geval toch zou het niet verklaarbaar zijn, waarom het met Na Fl bereide fibrinogeen niet evengoed in dezelfde mate bij verhitting in fibrineglobuline zou veranderen. Is daarentegen de fibrineglobuline reeds van te voren in de fibrinogeenoplossing aanwezig, dan kan alles daarmede verklaard worden, dat bij de behandeling met Na Fl de fibrineglobuline, althans grootendeels, in het filtraat overgaat, terwijl het eigenlijke fibrinogeen neerslaat. De mogelijkheid, dat de fibrineglobuline niet mee neerslaat blijkt uit de volgende proef. In eene volgens de methode van HAMMARSTEN bereide oplossing van paardfibrinogeen werd het fibrinogeen door verhitting tot 60° gecoaguleerd en afgefiltreerd; aan het filtraat werd het dubbele volumen verzadigde fluornatriumoplossing toegevoegd; de vloeistof bleef volkomen helder.

De vraag, of bij het neerslaan van het fibrinogeen met Na Fl de fibrineglobuline in het filtraat overgaat, kan door het filtraat te onderzoeken niet onmiddellijk beantwoord worden, daar het fibrinogeen met Na Fl niet volledig neerslaat; in het filtraat bevindt zich dus nog eene zekere hoeveelheid fibrinogeen en wanneer men daarnaast na verhitting al fibrineglobuline vindt, bestaat toch de mogelijkheid, dat al deze fibrineglobuline van de in het filtraat aanwezige hoeveelheid fibrinogeen afkomstig is; slechts het quantitatief onderzoek kan hier beslissen: wanneer bij het neerslaan met Na Fl de fibrineglobuline in het filtraat over-

gaat, moet uit dit filtraat ongeveer evenveel fibrineglobuline bereid kunnen worden als uit de oorspronkelijke fibrinogeenoplossing. Daar het met NaFl neergeslagen fibrinogeen niet volkomen vrij van fibrineglobuline is, kan intusschen eene nauwkeurige overeenstemming niet verwacht worden. Ik laat hier vooreerst de resultaten van eene dergelijke proef volgen.

a) 100 ccm. van eene zuivere volgens HAMMARSTEN bereide paardefibrinogeenoplossing werden met 200 ccm. verzadigde fluornatriumoplossing neergeslagen. Het neerslag werd met een roerstaaf uit de vloeistof genomen, goed uitgeperst, tot constant gewicht gedroogd en gewogen; de stof werd daarna voorzichtig verbrand; het gewicht van de aschvrije stof bleek 0,2435 gram te bedragen. Nadat het met NaFl verkregen neerslag verwijderd was, bleef eene heldere vloeistof over, die, aangezien de gebruikte oplossing van NaFl, zooals meestal het geval is, zwak alkalisch reageerde, met eenige druppels verdund azijnzuur geneutraliseerd werd. De vloeistof (285 ccm.) werd vervolgens in een waterbad een kwartier op 55—60° verhit; het gecoaguleerde fibrinogeen werd op een gewogen aschvrij filter afgefiltreerd, met verdunde keukenzoutoplossing en daarna met water uitgewassen, tot constant gewicht gedroogd en te zamen met het filter gewogen; het filter met de stof werd voorzichtig verbrand. Het bleek, dat 0.2262 gram aschvrij fibrinogeen op het filter aanwezig geweest was; deze hoeveelheid werd verkregen uit 285 ccm.: in de oorspronkelijke 300 ccm. zouden dus 0.2381 gram gevonden worden zijn.

Ter bepaling van het gehalte aan fibrineglobuline werden 250 ccm. van de van het gecoaguleerde fibrinogeen afgefiltreerde vloeistof in het waterbad een kwartier op 67—69° verhit. De vloeistof bleef tot 64° volkomen helder; om eene zoo volledig mogelijke coagulatie te verkrijgen werden, zoodra de vloeistof troebel begon te worden, 5 ccm. 1% kopersulfaatoplossing toegevoegd; het coagulum werd daardoor grofvlokkig en kon gemakkelijk afgefiltreerd worden. Het gewicht van de afgefiltreerde fibrineglobuline werd vervolgens op dezelfde wijze als dit bij het gecoaguleerde fibrinogeen geschiedde, bepaald en bedroeg 0.1141 gram aschvrije stof; uit 300 ccm. filtraat zou dus 0.1369 gram verkregen zijn. In de van de fibrineglobuline afgefiltreerde vloeistof kon geen eiwit meer aangetoond worden.

b) Ter vergelijking werd bepaald hoeveel fibrineglobuline de gebruikte fibrinogeenoplossing zonder behandeling met NaFl leverde. Daartoe werden weer 100 ccm. van deze oplossing met 200 ccm. $4\frac{3}{4}\%$ keukenzoutoplossing gemengd, waardoor volumen en zoutgehalte in deze proef met die in proef a) gelijk gemaakt werden. Door

een kwartier op 55—60° te verhitten werd het fibrinogeen geocoaguleerd en verder als boven behandeld; het gewicht van het fibrinogeen bedroeg 0.4548 gram aschvrije stof. Van de van het geocoaguleerde fibrinogeen afgefilterde vloeistof werden 250 ccm. een kwartier op 67—69° verhit; tot op 64° bleef, evenals in proef *a*) de vloeistof volkomen helder; ook hier werden, zoodra de eerste troebelheid zichtbaar werd, 5 ccm. 1% Cu SO₄ toegevoegd. De geocoaguleerde fibrineglobuline werd afgefilterd en als boven verder behandeld; het gewicht van de fibrineglobuline bedroeg 0.1354 gram aschvrije stof, dus op 300 ccm. filtraat berekend 0.1625 gram; in de van de geocoaguleerde fibrineglobuline afgefilterde vloeistof kon geen eiwit meer aangetoond worden.

De resultaten dezer proeven samenvattende vinden we, dat in proef *a*), na de verwijdering van het met Na Fl verkregen neerslag, 0.2381 gram fibrinogeen en 0,1369 gram fibrineglobuline aanwezig waren en in proef *b*) 0.4548 gram fibrinogeen en 0.1625 gram fibrineglobuline. De hoeveelheid fibrinogeen was dus in proef *a*) wegens het neerslaan met Na Fl tot op $\frac{52}{100}$ verminderd, terwijl de hoeveel-

heid fibrineglobuline slechts eene vermindering tot op $\frac{85}{100}$ vertoonde.

Ei moet dus bij het neerslaan met Na Fl eene aanzienlijke hoeveelheid fibrineglobuline in het filtraat overgegaan zijn. Het verschil van 0.0256 gram tusschen de in beide proeven gevonden hoeveelheden fibrineglobuline, moet, afgezien van fouten in de bepaling, daaraan toegeschreven worden, dat het met Na Fl neergeslagen fibrinogeen niet volkomen vrij van fibrineglobuline is; het gewicht van dit neerslag bedroeg 0.2435 gram; trekken we daarvan 0.0256 gram, als zijnde fibrineglobuline, af, dan bevatte het neerslag op 100 mg. bij 55° coaguleerbaar fibrinogeen 11.7 mg. fibrineglobuline; in proef *b*) werd op 100 mg. bij 55° coaguleerbaar fibrinogeen 35.7 mg. fibrineglobuline gevonden en in proef *a*) na de verwijdering van het met Na Fl verkregen neerslag op 100 mg. bij 55° coaguleerbaar fibrinogeen 57.5 mg. fibrineglobuline. Door het neerslaan met Na Fl werd dus de fibrinogeenoplossing gesplitst in een neerslag, dat betrekkelijk weinig en een filtraat, dat betrekkelijk veel fibrineglobuline bevatte.

In proef *a*) werd door het Na Fl ongeveer de helft van het fibrinogeen neergeslagen; de van dit neerslag afgegoten vloeistof was helder; laat men echter eene dergelijke vloeistof eenigen tijd staan, dan wordt ze troebel en na 24 uren is weer een nieuw neerslag ontstaan; in het filtraat van dit neerslag ontstaat weer opnieuw eene troebelheid enz. tot ten slotte na eenige dagen nagenoeg al het

fibrinogeen neergeslagen is. Het is na de bovenstaande proeven te verwachten, dat er, naarmate meer fibrinogeen neerslaat, relatief (d. w. z. tegenover de hoeveelheid niet neergeslagen fibrinogeen) meer fibrineglobuline in het filtraat zal aanwezig zijn; dit vermoeden wordt door de twee volgende proeven bevestigd.

1. 100 ccm. paardefibrinogeenoplossing van 0.642% werden met 200 ccm. verzadigde fluornatriumoplossing neergeslagen; het neerslag werd met een roerstaaf verwijderd en de vloeistof bleef daarna tweemaal 24 uren staan. Nadat het na dien tijd neergeslagen fibrinogeen door filtreeren verwijderd was, werd in 250 ccm. filtraat het gehalte aan fibrinogeen en fibrineglobuline op dezelfde wijze bepaald als in de bovenstaande proef *a*). Het bleek, dat in deze 250 ccm. 0.0742 gram fibrinogeen en 0.1113 gram fibrineglobuline aanwezig waren.

2. 100 ccm. van dezelfde fibrinogeenoplossing werden met 200 ccm. verzadigde fluornatriumoplossing neergeslagen; na verwijdering van het neerslag bleef de vloeistof acht dagen staan; er ontstond daarbij, wegens het gehalte aan Na Fl, geen rotting; het opnieuw gevormde neerslag werd afgefiltreerd; het filtraat werd na korten tijd weer troebel en na 24 uren was nog een gering neerslag ontstaan, dat afgefiltreerd werd. Het filtraat werd met een paar druppels verdund azijnzuur geneutraliseerd; bij verhitting van de neutrale vloeistof tot 55—60° ontstond slechts eene uiterst geringe opalescentie; het fibrinogeen was dus door het Na Fl nagenoeg volledig neergeslagen; nadat de opaliseerende vloeistof gefiltreerd was ontstond bij verhitting van het filtraat op 67—69° een aanzienlijk vlokkig neerslag.

Terwijl in proef *a*) na verwijdering van het met NaFl verkregen neerslag in het filtraat nog $1\frac{3}{4}$ maal zooveel fibrinogeen als fibrineglobuline aanwezig was, bevatte het overeenkomstige filtraat in proef 1) slechts $\frac{2}{3}$ maal zooveel fibrinogeen als fibrineglobuline, terwijl in proef 2) tegenover eene aanzienlijke hoeveelheid fibrineglobuline slechts eene minimale hoeveelheid fibrinogeen aanwezig was.

De uitkomsten van de boven beschreven proeven leiden tot het besluit, dat bij de coagulatie van het fibrinogeen de fibrineglobuline niet uit fibrinogeen ontstaat, maar dat deze eiwitstof reeds van te voren in de fibrinogeenoplossing aanwezig is, want het zou anders niet verklaarbaar zijn, dat aan den eenen kant het met NaFl neergeslagen fibrinogeen geen of slechts weinig fibrineglobuline levert en dat aan den anderen kant de van dit neerslag afgefilterde vloeistof fibrineglobuline in des te grooter hoeveelheid bevat.

Er dienen hier nog een paar tegenwerpingen besproken te worden, die tegen dit besluit gemaakt zouden kunnen worden.

Vooreerst zou men — met het oog daarop, dat het met NaFl neergeslagen fibrinogeen moeilijker in verdunde keukenzoutoplossing oplost dan het gewone fibrinogeen en dat de oplossing door verhitting geen fibrineglobuline levert — kunnen vragen, of de met NaFl neergeslagen stof toch misschien niet een soort van oplosbare fibrine is, zooals b.v. de door DENIS beschreven „fibrine concrète pure”. Deze laatste loste ook voornamelijk bij 40° in verdunde keukenzoutoplossing op, terwijl de oplossing bij kamertemperatuur uiterst langzaam ging. Tegen de opvatting van de met NaFl neergeslagen stof als oplosbare fibrine pleit vooreerst de coagulatietemperatuur, welke door DENIS voor de opgeloste „fibrine concrète pure” bij 60—65° gevonden werd, terwijl ze voor de met NaFl neergeslagen stof in elk geval niet boven 55° ligt. Het krachtigste bewijs tegen de meening, dat deze laatste stof fibrine is, n.l. het vermogen van deze stof om met fibrineferment te stollen, heb ik reeds meermalen vermeld; neemt men verder nog in aanmerking, dat het met NaFl bereide fibrinogeen zich ook ten opzichte van azijnzuur, halve verza-diging met keukenzout enz. geheel als gewoon fibrinogeen gedraagt, dan kan daarmede de meening, dat deze stof fibrine is, wel als weerlegd beschouwd worden.

Wat de geringe oplosbaarheid van het met NaFl neergeslagen fibrinogeen in verdunde keukenzoutoplossing betreft, zoo kan deze eigenaardigheid misschien daardoor verklaard worden, dat bij de behandeling met NaFl eene weinig oplosbare fluoorverbinding van het fibrinogeen gevormd wordt, die in keukenzoutoplossing slechts zeer langzaam oplost; wegens de dan aanwezige groote overmaat van chloorionen zal deze oplossing wellicht met eene verwisseling van het fluor door chloor gepaard gaan. Dat er eene fluoorverbinding ontstaat wordt nog waarschijnlijker, wanneer men bedenkt, dat, wegens het geringe zoutgehalte van de fluornatriumoplossing, aan een eigenlijk uitzouten wel niet te denken valt.

Men zou zich verder nog kunnen voorstellen, dat door fluornatrium het fibrinogeen weliswaar als zoodanig wordt neergeslagen, maar dat daarbij (vooral omdat de fluornatriumoplossingen gewoonlijk zwak alkalisch reageeren) een deel van het fibrinogeen in fibrineglobuline omgezet wordt, waardoor dan de aanwezigheid van fibrineglobuline in het filtraat verklaard zou zijn. Afgezien daarvan, dat dan nog niet verklaard zou zijn, waarom het met NaFl neergeslagen fibrinogeen bij verhitting geen fibrineglobuline levert, zou men volgens deze voorstelling moeten verwachten dat, wanneer het fibrinogeen voor de tweede of derde maal met NaFl werd neergeslagen, eveneens een deel daarvan in fibrineglobuline omgezet zou worden, die in

het filtraat zou moeten te vinden zijn; dit is echter niet het geval: men vindt onder deze omstandigheden in het filtraat slechts zeer weinig of geen fibrineglobuline.

Wanneer dus aangenomen moet worden, dat de fibrineglobuline reeds vooraf in de fibrinogeenoplossingen aanwezig is, dan is daarmee de vraag nog niet opgelost, of deze eiwitstof aan het fibrinogeen gebonden is, dan wel als een eenvoudig bijmengsel beschouwd moet worden.

Voor eene verbinding pleiten proeven van HAMMARSTEN ¹⁾, waardoor aangetoond werd, dat uit geconcentreerde fibrinogeenoplossingen na verhitting op 56—60° en affiltreeren van het coagulum relatief minder fibrineglobuline te verkrijgen was dan uit dezelfde oplossingen, nadat ze verdund waren. Indien de fibrineglobuline alleen een bijmengsel was, zou men moeten verwachten, dat de betrekking tusschen de hoeveelheden fibrinogeen en fibrineglobuline altijd dezelfde zou zijn; is daarentegen de fibrineglobuline aan het fibrinogeen gebonden, dan kunnen de bevindingen van HAMMARSTEN zoo verklaard worden, dat in verdunde fibrinogeenoplossingen de fibrineglobuline gemakkelijker afgesplitst wordt. Op eene verbinding wijst ook het feit, dat, wanneer eene fibrinogeenoplossing voor de eerste maal met Na Fl wordt neergeslagen, eene niet onaanzienlijke hoeveelheid fibrineglobuline mee wordt neergeslagen.

Tegen eene verbinding pleit echter, dat bij het neerslaan met Na Fl de fibrineglobuline althans grootendeels in het filtraat overgaat, want het is toch moeilijk aan te nemen, dat toevoeging van een alkalizout als Na Fl tot een gehalte van ongeveer 3%, eene afsplitsing van fibrineglobuline ten gevolge zou hebben. De volgende waarneming kan hierover misschien eenig licht geven.

100 ccm. paardefibrinogeenoplossing werden tweemaal met het dubbele volumen verzadigde fluornatriumoplossing neergeslagen; de gebruikte oplossing van Na Fl reageerde bij uitzondering nagenoeg neutraal; met lakmoespapier was de alkalische reactie nauwelijks merkbaar. Een deel van deze fluornatriumoplossing werd nu door toevoeging van 0.8 ccm. normaal natronloog op 200 ccm. van de fluornatriumoplossing zwak alkalisch gemaakt; hiermede werden 100 ccm. van dezelfde fibrinogeenoplossing op dezelfde wijze tweemaal neergeslagen. Uit de met neutraal en met alkalisch Na Fl verkregen neerslagen werden twee fibrinogeenoplossingen van gelijke concentratie bereid. Het fibrinogeen werd in beide gevallen door verhitting op 55—60° ge-coaguleerd en afgefiltreerd. Het filtraat van het met zwak alkalische

¹⁾ Loc. cit.

fluornatriumplossing bereide fibrinogeen gaf door verhitting tot 70° of door toevoeging van pikrinezuur slechts een zeer gering neerslag, terwijl het neerslag van fibrineglobuline in het andere filtraat duidelijk grooter, misschien twee of driemaal zoo groot was.

Hieruit zou volgen, dat de vermoedelijke afsplitsing van fibrineglobuline niet door het NaFl maar door de alkalische reactie van de fluornatriumplossing teweeggebracht wordt; voor deze afsplitsing zijn dan echter reeds uiterst geringe hoeveelheden alkali voldoende, want ook die fibrinogeenoplossing, die met nagenoeg neutraal NaFl bereid was, leverde nog zeer veel minder fibrineglobuline dan eene niet met NaFl behandelde fibrinogeenoplossing van dezelfde concentratie. Het vermoeden, dat ook water, in het bijzonder bij verhooging van de temperatuur, de afsplitsing van fibrineglobuline zal kunnen teweegbrengen ligt hierdoor voor de hand; indien dit het geval is, zou dus in eene fibrinogeenoplossing aanwezig zijn eene verbinding van fibrineglobuline met fibrinogeen, die meer of minder sterk hydrolytisch gesplitst is en deze opvatting is, naar het mij voorkomt, het best met de feiten in overeenstemming te brengen. De afsplitsing zal in dit geval bij verhoogde temperatuur b. v. bij 55—60° tamelijk volledig kunnen zijn; uit verdunde oplossingen kan dan echter relatief meer fibrineglobuline verkregen worden dan uit geconcentreerde, omdat in het eerste geval de afsplitsing vollediger zal zijn wegens de grootere overmaat van water. Dat bij het neerslaan met NaFl niet al de fibrineglobuline in het filtraat overgaat, wordt, indien men slechts eene gedeeltelijke hydrolytische splitsing aanneemt, begrijpelijk.

Indien de fibrineglobuline wegens de hydrolyse, zij het ook slechts voor een deel, eenvoudig met het fibrinogeen gemengd is, kan — met het oog daarop, dat door halve verzadiging met keukenzout, zooals dit bij de bereiding van fibrinogeen gebruikelijk is, geene volledige praecipitatie van de fibrineglobuline plaats heeft — niet verwacht worden, dat in elke fibrinogeenoplossing de betrekking tusschen de hoeveelheden fibrinogeen en fibrineglobuline, dezelfde zal zijn; dit kan wellicht tot de verklaring van eenige waarnemingen van HAMMARSTEN ¹⁾ bijdragen, waaruit bleek, dat fibrinogeenoplossingen uit verschillend plasma bereid, weliswaar relatief verschillende hoeveelheden fibrineglobuline leveren, dat daarbij echter eene verdunde oplossing niet altijd relatief meer fibrineglobuline levert dan eene geconcentreerde.

Ten slotte zal ik hier nog eenige feiten bespreken, die op de stolling door middel van ferment betrekking hebben.

¹⁾ loc. cit. blz. 456.

Aan de identiteit van de fibrineglobuline, die bij de stolling door ferment verkregen wordt en die welke na de coagulatie van het fibrinogeen door verhitting in het filtraat wordt aangetroffen, valt wegens de overeenstemming in samenstelling, coagulatietemperatuur enz. wel niet te twijfelen. Wanneer echter aangenomen worden moet, dat de fibrineglobuline in de fibrinogeenoplossingen reeds van te voren aanwezig is, dan vervalt voorshands elke grond om aan te nemen, dat bij de stolling door ferment de fibrineglobuline nog op andere wijze, b.v. door omzetting uit fibrinogeen, zou ontstaan, te meer omdat de hoeveelheid fibrineglobuline, die men door stolling met ferment verkrijgt, gemiddeld zeker niet grooter is dan die, welke men door verhitting uit eene fibrinogeenoplossing kan bereiden. HAMMARSTEN ¹⁾ vond weliswaar, dat in zwak alkalische oplossingen door ferment relatief weinig fibrine gevormd werd en dus relatief veel eiwit in oplossing bleef; dit kan echter gedeeltelijk daardoor verklaard worden, dat wegens de alkalische reactie de fibrineglobuline zeer volledig afgesplitst werd, deels ook, zooals HAMMARSTEN zelf doet opmerken, daardoor, dat onder deze omstandigheden een deel van de fibrine als „oplosbare fibrine” in oplossing bleef.

Uit het feit, dat eene oplossing van fibrinogeen, waaruit door middel van Na Fl de fibrineglobuline verwijderd is, met fibrineferment stolt, moet men afleiden, dat door de verwijdering van de fibrineglobuline het eigenlijke fibrinogeen niet, zooals men volgens de door SCHMIEDEBERG gegeven en voor korten tijd nog door HEUBNER ²⁾ verdedigde formule verwachten zou, in fibrine omgezet wordt en dat in het algemeen de fibrineglobuline bij de stolling geene belangrijke rol speelt. Het stollingsproces moet dus bestaan in eene verandering van het fibrinogeenmolecuul zelf. Dat er in het serum van gestolde fibrinogeenoplossingen fibrineglobuline aanwezig is, kan ongedwongen daaruit verklaard worden, dat zich reeds in de fibrinogeenoplossing fibrineglobuline in vrijen toestand in grootere of kleinere hoeveelheid bevond; de onderstelling dat het ferment eene afsplitsing van fibrineglobuline bewerkstelligt, is dus, naar men hieruit afleiden mag, overbodig.

¹⁾ Pflügers Archiv, Bd. 30, blz. 479.

²⁾ Arch. f. exp. Pathol. u. Pharmakol. Bd. 49, blz. 229.

Scheikunde. — De Heer LORENTZ biedt een mededeeling aan van den Heer J. J. VAN LAAR: „*Een nauwkeurige uitdrukking voor het verloop der spinodale lijnen en van hunne plooi punten voor alle temperaturen, in het geval van mengsels van normale stoffen.*”

(Mede aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM).

1. Het is bekend, dat de punten van het ζ -vlak, beantwoordende aan punten der spinodale lijn van het ψ -vlak, gegeven zijn door de eenvoudige betrekking

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)_{p,T} = 0,$$

overstemmende met de voorwaarde $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial v}\right)^2 = 0$,¹⁾ wanneer men in plaats van de thermodynamische potentiaal de vrije energie gebruikt, en niet x, p en T , maar x, v en T de onafhankelijke veranderlijken zijn.

Daar nu verder bij normale componenten bv.

$$\mu_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial n_1} = \zeta - x \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

is, zoo zal $\frac{\partial \mu_1}{\partial x} = -x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$ zijn, en de bovenstaande voorwaarde kunnen vervangen worden door

$$\frac{\partial \mu_1}{\partial x} = 0.$$

Nu is

$$\mu_1 = C_1 - \left(\omega - x \frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + RT \log(1-x),$$

waarin C_1 een zuivere temperatuurfunctie, en ω gegeven is door

$$\omega = \int p dv - pv.$$

De voorwaarde $\frac{\partial \mu_1}{\partial x} = 0$ komt dus neer op

$$x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{RT}{1-x} = 0,$$

of

$$RT = x(1-x) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \dots \dots \dots (1)$$

¹⁾ Zie o.a. VAN DER WAALS, Cont. II, p. 137.

waarvan ook in mijne voorgaande Verhandeling¹⁾ (zie bl. 575) werd uitgegaan.

Nu bestaat de moeielijkheid hierin, dat de nauwkeurige berekening van $\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}$ tot vrij ingewikkelde uitkomsten leidt, zoodat VAN DER WAALS zich dan ook meestal met benaderingen vergenoegde. Deze bestonden daarin, dat in den vloeibaren toestand bij genoegzaam lage temperaturen 1^e. p werd weggelaten tegenover $\frac{a}{v^2}$, 2^e. termen van de orde $v - b$ tegen die van de orde v werden verwaarloosd.

Gaat men nl. uit van de VAN DER WAALS'sche toestandsvergelijking

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT,$$

waarin b als *niet* van v en T afhankelijk zal worden beschouwd, dan vindt men voor ω :

$$\omega = RT \log (v - b) + \frac{a}{v} - pv \dots \dots \dots (2)$$

Schrijft men nu voor $v - b$ in de plaats $\frac{RT}{p + a/v^2}$ en laat p weg, dan wordt

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = - RT \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{a}{v^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{v} \right),$$

waarin VAN DER WAALS dan nog verder v door b verving, en ter illustratie van verschillende eigenschappen $\frac{a}{b}$ met T_x en $\frac{a}{b^2}$ met p_x in verband bracht.

Dit is dus een heel stel benaderingen, en terecht merkte Prof. LORENTZ mij dan ook op, dat men in zulke gevallen goed zal dienen toe te zien in hoever de eene benadering niet in strijd is met een andere, en tot welke temperaturen de uitkomsten, met bovenstaande uit-

drukking voor $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ afgeleid, bruikbaar blijven. VAN DER WAALS zelve

beschouwde de door hem opgestelde uitdrukking dan ook slechts als een meer of minder grove benadering, maar die in elk geval beter

is dan de vroegere uitdrukking $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{v} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{b} \right)$, waarbij de

term met $\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{a}{v^2}$ was weggelaten.

Nu toonde ik in mijn voorgaande Verhandeling aan, dat die weg-

¹⁾ Deze Verslagen, 28 Jan. 1905.

gelaten term bij *lage* temperaturen, en bij *normale* stoffen, waar de kritische drukken zelden ver uiteen loopen, meestal zeer gering is, en van *geheel dezelfde* orde als $\frac{v-b}{b}$, wat wèl wordt verwaarloosd.

Alleen bij hoogere temperaturen heeft die term grooten invloed, maar dan is de gebruikte uitdrukking voor $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ op verre na niet nauwkeurig genoeg meer, want dan is nòch p te verwaarloozen t. o. v. van $\frac{a}{v^2}$, nòch mogen dan termen van de orde $\frac{v-b}{b}$ worden weggelaten.

De zaak staat dus zoo: bij genoegzaam lage temperaturen mag men gerust de vroegere eenvoudige uitdrukking $\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{b} \right)$ blijven gebruiken, tenminste bij normale stoffen; maar bij hoogere temperaturen is ook de nieuwe uitdrukking met den term $\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{a}{v^2}$ ontoereikend.

En te meer doet zich de behoefte naar een meer nauwkeurige uitdrukking voor $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ en $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$ gevoelen, wanneer men — vooral met het oog op den loop der plooiptuuskromme — ook iets aangaande het verloop der spinodale lijnen van af de laagste temperaturen tot aan de hoogste kritische temperatuur toe wil weten.

Ik heb daarom getracht dit vraagstuk tot oplossing te brengen; te meer werd ik daartoe aangemoedigd, daar mij spoedig bleek, dat de geheel exacte uitkomsten niet zoo ingewikkeld zijn als ik verwachtte. Integendeel deed zich hier het meermalen voorkomende feit voor, dat de nauwkeurige uitdrukking betrekkelijk eenvoudiger is dan de benaderde.

2. Schrijft men de vergelijking (2) in den vorm

$$\omega = \frac{a}{v} + RT \log (v-b) - p (v-b) - pb,$$

dan wordt

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{v} \right) + \left(\frac{RT}{v-b} - p \right) \frac{\partial (v-b)}{\partial x} - p \frac{db}{dx}.$$

Nu is $\frac{RT}{v-b} - p = \frac{a}{v^2}$, derhalve vindt men verder:

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{da}{dx} - \frac{a}{v^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a}{v^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a}{v^2} \frac{db}{dx} - p \frac{db}{dx},$$

of

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{da}{dx} - \left(p + \frac{a}{v^2} \right) \frac{db}{dx}, \quad \dots \dots \dots (3)$$

waarin geen $\frac{\partial v}{\partial x}$ meer voorkomt.

Schrijft men nu

$$a = (1-x)^2 a_1 + 2x(1-x) a_{12} + x^2 a_2,$$

en neemt de betrekking $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ als vervuld aan, waardoor de berekeningen en uitkomsten eenigzins vereenvoudigd worden, zonder dat de juistheid van deze laatsten veel zal lijden ¹⁾, dan wordt

$$a = \frac{((1-x) \sqrt{a_1} + x \sqrt{a_2})^2}{2}.$$

Verder wordt voor b aangenomen de gewone lineaire uitdrukking

$$b = \frac{(1-x) b_1 + x b_2}{2}.$$

De onderstellingen, die dus bij de volgende berekeningen ten grondslag liggen, zijn de volgende.

1°. de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS, met b onafhankelijk van v en T .

2°. de gewone onderstellingen omtrent a en b .

3°. de speciale onderstelling $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$.

Uit de neergeschreven uitdrukkingen voor a en b volgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dx} = 2 \left((1-x) \sqrt{a_1} + x \sqrt{a_2} \right) (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) = 2 \sqrt{a} \cdot (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) \\ \frac{d^2 a}{dx^2} = 2 (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})^2 \\ \frac{db}{dx} = b_2 - b_1 \quad ; \quad \frac{d^2 b}{dx^2} = 0. \end{array} \right.$$

Had men a_{12} niet $= \sqrt{a_1 a_2}$ gesteld, dan ware $\frac{d^2 a}{dx^2} = 2(a_1 + a_2 - 2a_{12})$, dus slechts iets minder eenvoudig geworden.

3. Gaan wij thans over tot de berekening van $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$.

Voor (3) kunnen wij schrijven:

¹⁾ Ik voor mij bezit de overtuiging, dat de uitdrukking $a_{12} = \sqrt{a_1 a_2}$ bij normale stoffen juist is. In elk geval zal de onnauwkeurigheid tengevolge van deze aanname wel niet grooter zijn dan die van de gebruikte toestandsvergelijking zelf.

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{2\sqrt{a}}{v} (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) - \left(p + \frac{a}{v^2} \right) (b_2 - b_1),$$

zoodat wij verkrijgen, wanneer ter bekorting voor $\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}$ wordt geschreven α , en β voor $b_2 - b_1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \frac{2}{v} (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1})^2 - \frac{2\sqrt{a}}{v^2} (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) \frac{\partial v}{\partial x} - \\ &\quad - (b_2 - b_1) \left\{ \frac{2\sqrt{a}}{v^2} (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}) - \frac{2a}{v^3} \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = \\ &= \frac{2\alpha^2}{v} - \frac{2\alpha\beta\sqrt{a}}{v^2} + \left(\frac{2\alpha\beta}{v^2} - \frac{2a\sqrt{a}}{v^2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{2}{v} \left\{ \alpha^2 - \alpha\beta \frac{\sqrt{a}}{v} + \frac{\sqrt{a}}{v} \left(\beta \frac{\sqrt{a}}{v} - a \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right\}. \end{aligned}$$

Wij moeten dus $\frac{\partial v}{\partial x}$ berekenen.

Uit de toestandsvergelijking $\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT$ volgt:

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{db}{dx} \right) + (v - b) \left(\frac{1}{v^2} \frac{da}{dx} - \frac{2a}{v^3} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,$$

waaruit

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\left(p + \frac{a}{v^2} \right) \frac{db}{dx} - \frac{v-b}{v^2} \frac{da}{dx}}{p + \frac{a}{v^2} - \frac{2a(v-b)}{v^3}},$$

of ook

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\frac{db}{dx} - \frac{1}{RT} \frac{(v-b)^2}{v^2} \frac{da}{dx}}{1 - \frac{2a/v}{RT} \frac{(v-b)^2}{v^2}} \dots \dots \dots (4)$$

Substitueert men dit in de laatste vergelijking voor $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$, dan ontstaat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} &= \frac{2}{v} \left[\left(\alpha^2 - \alpha\beta \frac{\sqrt{a}}{v} \right) \left\{ 1 - \frac{2a/v}{RT} \frac{(v-b)^2}{v^2} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{a}}{v} \left(\beta \frac{\sqrt{a}}{v} - a \right) \left(\beta - \frac{2a\sqrt{a}}{RT} \frac{(v-b)^2}{v^2} \right) \right] : \left(1 - \frac{2a/v}{RT} \frac{(v-b)^2}{v^2} \right), \end{aligned}$$

wijl $\frac{da}{dx} = 2a\sqrt{a}$ en $\frac{db}{dx} = \beta$ is. Verdere uitwerking geeft na belangrijke vereenvoudiging:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{2}{v} \frac{\left(a - \beta \frac{\sqrt{a}}{v} \right)^2}{1 - \frac{2a/v (v-b)^2}{RT v^2}} \dots \dots \dots (5)$$

Vergelijkt men deze geheel nauwkeurige uitdrukking met de in de voorgaande Verhandeling door mij afgeleide, waarbij p en $\frac{v-b}{v}$ werden weggelaten, dan ziet men dat de nauwkeurige uitdrukking (5) reeds eenvoudiger is dan de benaderde, welke met behulp van van de toenmaals afgeleide waarden voor $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{v} \right)$ en $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{a}{v^2}$ gemakkelijk is op te schrijven.

4. De vergelijking (1) gaat dus over in

$$RT = \frac{2x(1-x)}{v^3} \frac{(av - \beta \sqrt{a})^2}{1 - \frac{2a/v (v-b)^2}{RT v^2}},$$

d.w.z. in

$$RT - 2 \frac{a (v-b)^2}{v v^2} = \frac{2x(1-x)}{v^3} (av - \beta \sqrt{a})^2,$$

of in

$$RT = \frac{2}{v^3} \left[x(1-x) (av - \beta \sqrt{a})^2 + a(v-b)^2 \right].$$

$$\begin{aligned} \text{Nu is } av - \beta \sqrt{a} &= a(v-b) + ab - \beta \sqrt{a} \\ &= a(v-b) + a(b_1 + x\beta) - \beta(\sqrt{a_1} + xa) \\ &= a(v-b) + (ab_1 - \beta \sqrt{a_1}) = a(v-b) + (b_1 \sqrt{a_2} - b_2 \sqrt{a_1}). \end{aligned}$$

Daardoor wordt (vergelijk ook VAN DER WAALS, Cont. II, p. 45):

$$RT = \frac{2}{v^3} \left[x(1-x) \left\{ (b_1 \sqrt{a_2} - b_2 \sqrt{a_1}) + a(v-b) \right\}^2 + a(v-b)^2 \right], \dots (6)$$

zijnde de gezochte, onder bovenstaande onderstellingen geheel algemeene uitdrukking voor $T = f(v, x)$, waardoor bij elke willekeurige temperatuur de v, x -projectie der spinodale lijn volkomen bepaald is. Men kan ook een z.g. „spinodaal oppervlak” $T = f(v, x)$ ontwerpen, en uit de achtereenvolgende doorsneden $T = \text{const.}$ de vormen der spinodale lijnen van dwars- en lengteplooiën onmiddellijk nagaan, en wel in geheel dezelfde v, x -voorstelling als door VAN DER WAALS wordt gebruikt voor de projectie der spinodale lijnen van de oppervlakken $\psi = f(T, v, x)$ bij verschillende waarden van T .

5. De vergelijking (6) geeft al dadelijk tot een paar gevolgtrek-

kingen aanleiding, welke daaruit zonder eenige verdere berekening zijn af te leiden.

1^e. Is nl. $v = b$, d.w.z. wordt bij willekeurige x het grensvolume b_x bereikt, dan reduceert zich (6) tot de in het begrenzende v, x -vlak liggende grenskromme

$$RT = \frac{2}{b^3} x(1-x)(b_1 \sqrt{a_2} - b_2 \sqrt{a_1})^2, \dots \dots \dots (6a)$$

d.w.z. dezelfde uitdrukking, welke men door de vroegere benaderde methode voor kleine waarden van v had gevonden.

Het blijkt thans duidelijk, dat *alleen* bij $v = b$ de bovenstaande uitdrukking streng geldig is. In elk ander geval komen er termen met $v - b$ bij. Maar ook volgt uit de gevonden uitdrukking (6), dat *zoolang* termen met $v - b$ mogen verwaarloosd worden, de formule (6') de projectie van de spinodale lijn op het T, x -vlak bij benadering aangeeft, zonder dat het noodig is den door VAN DER WAALS aangebrachten correctieterm met $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \frac{a}{b^2}$ in acht te nemen. In een vroegere verhandeling liet ik reeds zien, dat deze correctieterm bij mengsels van *normale* stoffen gering is, ongeveer van de orde $v - b$.

Daar het tweede lid van de grensuitdrukking (6^a) altijd *positief* is, ook al mocht $a_{12} < \sqrt{a_1 a_2}$ zijn, zoo zal derhalve de *lengteplooi* op het ψ -vlak (want het is duidelijk, dat in de nabijheid van $v = b$ de spinodale lijn tot de lengteplooi, die als een uitstulping van de dwarsplooi kan beschouwd worden, behoort) boven een bepaalde temperatuur T_0 zich *altijd* aan de zijde der kleine volumina zal sluiten.

Die temperatuur T_0 is de plooi puntstemperatuur, behoorende bij (6^a); zij is gegeven door (6^a), in verband met de daaruit afgeleide uitdrukking voor $\frac{dT}{dx} = 0$, die voor het plooi punt na eliminatie van T de waarde

$$x_c = \frac{1}{r} \left[(r+1) - \sqrt{r^2 + r + 1} \right],$$

waarin $r = \frac{b_2 - b_1}{b_1}$, levert. (zie VAN DER WAALS, Cont. II, en ook mijne voorgaande Verhandeling, bl. 579). Alleen wanneer $b_2 = b_1$ is ($r = 0$) zal $x_c = 1/2$ zijn. In elk ander geval is x_c naar de zijde van het kleinste moleculairvolume verschoven.

Precies *bij* T_0 zal die sluiting bij het grensvolume $v = b$ ($x = x_c$) plaats vinden; bij waarden van $T < T_0$ zal de lengteplooi tot aan de kleinste volumina *ongesloten* blijven. Immers (zie de ruimtevoorstelling), dan zal een doorsnede $T = \text{constant}$ de grenskromme 6^a,

die in het grensvlak $v = b$ ligt, volgens een rechte lijn doorsnijden.

Die temperatuur T_0 kan dus in zekeren zin als een *derde* kritische temperatuur beschouwd worden. Want *boven* die temperatuur zal bij waarden van v in de nabijheid van b , d.w.z. bij zeer groote drukken, *nooit splitsing in twee vloeistoflagen* kunnen plaats vinden, evenmin als *boven* de gewone kritische temperaturen bij de enkelvoudige stoffen nooit splitsing in een vloeistof- en een dampphase kan intreden.

2^e. Is $v = \infty$, dan is voor elke waarde van x , $T = 0$. D.w.z., dan kan aan (6) niet voldaan worden. De plooi strekt zich dus nooit tot $v = \infty$ uit.

3^e. Is $x = 0$ of 1, dan gaat (6) over in de beide grenskrommen, liggende in de beide begrenzende T, v -vlakken, nl.

$$RT = \frac{2a_1}{v^3} (v - b_1)^2 \quad \text{en} \quad RT = \frac{2a_2}{v^3} (v - b_2)^2.$$

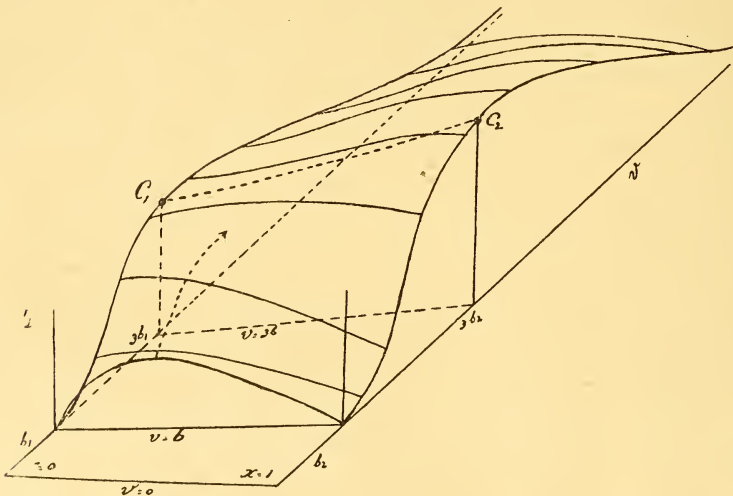
Met $v = 3b_1$ (resp. $3b_2$) geven deze beide curven behoorlijk

$$RT_1 = \frac{8}{27} \frac{a_1}{b_1} ; \quad RT_2 = \frac{8}{27} \frac{a_2}{b_2}, \quad (6^b)$$

hetgeen wederom een goede contrôle is op de juistheid onzer boven afgeleide formule.

Die beide kritische punten zijn tevens plooiptunten der (dwars-)plooi, want men kan gemakkelijk aantonen, dat aldaar $\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)_x$, en

ook $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_v = 0$ is.



Voor wij er nu toe overgaan de vergelijking voor de plooiptuntenkromme af te leiden, wil ik er nog even op wijzen, dat het tweede

$$f = \frac{2}{v^3} \left[x(1-x) \left\{ \pi + a(v-b) \right\}^2 + a(v-b)^2 \right].$$

De waarde van $\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{p,T}$ vinden wij uit (4), nl.

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{p,T} = \frac{\beta - \frac{2a\sqrt{a}(v-b)^2}{RT}}{1 - \frac{2a/v(v-b)^2}{RT}}.$$

En daar de noemer van deze uitdrukking niet $= \infty$ kan worden, gaat dus (7) over in

$$\left(1 - \frac{2a/v(v-b)^2}{RT} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\beta - \frac{2a\sqrt{a}(v-b)^2}{RT} \right) \frac{\partial f}{\partial v} = 0. \quad (7a)$$

Nu is

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} v^3 \frac{\partial f}{\partial x} &= \theta^2(1-2x) - 2x(1-x)\theta a\beta - 2a(v-b)\beta + 2a\sqrt{a}(v-b)^2 \\ \frac{1}{2} v^3 \frac{\partial f}{\partial v} &= 2x(1-x)\theta a + 2a(v-b) \end{aligned} \right\} - \frac{3\varphi}{v},$$

wanneer men $\pi + a(v-b)$ ter verkorting θ noemt, en $\frac{1}{2} v^3 f$ door φ voorstelt.

Hierdoor gaat (7a) over in

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{2a/v(v-b)^2}{RT} \right\} \left\{ \theta^2(1-2x) + 2a\sqrt{a}(v-b)^2 \right\} - \left\{ \beta - \frac{2a\sqrt{a}(v-b)^2}{RT} \right\} \frac{3\varphi}{v} + \\ & + 2 \left\{ x(1-x)\theta a + a(v-b) \right\} \left[\left\{ \beta - \frac{2a\sqrt{a}(v-b)^2}{RT} \right\} - \beta \left\{ 1 - \frac{2a/v(v-b)^2}{RT} \right\} \right] = 0. \end{aligned}$$

Hierin is nu de vorm tusschen [] blijkbaar:

$$- \frac{2\sqrt{a/v}(v-b)^2}{RT} (av - \beta\sqrt{a}) = - \frac{2\sqrt{a/v}(v-b)^2}{RT} \theta,$$

daar $av - \beta\sqrt{a} = \pi + a(v-b) = \theta$ is. Verder is volgens (6) $RT = \frac{2\varphi}{v^3}$, zoodat wij verkrijgen:

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 - \frac{a(v-b)^2}{\varphi} \right\} \left\{ \theta^2(1-2x) + 2a\sqrt{a}(v-b)^2 \right\} - \left\{ \beta - \frac{a\sqrt{a}v(v-b)^2}{\varphi} \right\} \frac{3\varphi}{v} - \\ & - \frac{2\theta\sqrt{a}(v-b)^2}{\varphi} \left\{ x(1-x)\theta a + a(v-b) \right\} = 0. \end{aligned}$$

En daar $\varphi - a(v-b)^2 = x(1-x)\theta^2$ is, zoo verkrijgen wij na vermenigvuldiging met φ :

$$x(1-x)\theta^2 \left[\theta^2(1-2x) + \underline{2a\sqrt{a(v-b)^2}} \right] - 3 \frac{x(1-x)\theta^2 + a(v-b)^2}{v} \left\{ \beta\varphi - a\sqrt{a.v(v-b)^2} \right\} - 2\theta\sqrt{a(v-b)^2} \left[\underline{x(1-x)\theta a} + a(v-b) \right] = 0.$$

Hierin vallen de onderstreepte termen weg. En voor $\beta\varphi - a\sqrt{a.v(v-b)^2}$ kan men schrijven:

$$\beta x(1-x)\theta^2 - \sqrt{a(v-b)^2}(av - \beta\sqrt{a}) = \beta x(1-x)\theta^2 - \sqrt{a(v-b)^2}\theta,$$

zoodat wij na deeling door θ en vermenigvuldiging met v verkrijgen:

$$x(1-x)\theta^3 \left[(1-2x)v - 3x(1-x)\beta \right] + \sqrt{a(v-b)^2} \left[-2av(v-b) + 3x(1-x)\theta^2 - 3\sqrt{a}\beta x(1-x)\theta + 3a(v-b)^2 \right] = 0,$$

of eindelijk:

$$\left\{ x(1-x)\theta^3 \left[(1-2x)v - 3x(1-x)\beta \right] + \sqrt{a(v-b)^2} \left[3x(1-x)\theta(\theta - \beta\sqrt{a}) + a(v-b)(v-3b) \right] \right\} = 0, \quad \dots \quad (8)$$

waarin $\theta - \beta\sqrt{a}$ nog door $av - 2\beta\sqrt{a}$ kan worden vervangen.

Dit is dus de gezochte vergelijking van de v, x -projectie der meetkundige plaats van al de plooi punten, die bij verschillende T op de ψ -vlakken kunnen voorkomen. Gecombineerd met (6) vinden wij de punten van het door (6) voorgestelde oppervlak, welke aan de plooi puntsvoorwaarde voldoen, d. w. z. de vergelijking van de plooi puntslijn als ruimtekromme. Die vergelijking (6) kan worden geschreven:

$$\underline{RT = \frac{2}{v^3} \left[x(1-x)\theta^2 + a(v-b)^2 \right]}, \quad \dots \quad (6)$$

waarin dus $\theta = \pi + a(v-b)$, en $\pi = b_1\sqrt{a_2} - b_2\sqrt{a_1}$.

Voor $v = b$ gaat (8) over in

$$(1-2x)b - 3x(1-x)\beta = 0,$$

gevende $x_c = \frac{1}{r} \left[(r+1) - \sqrt{r^2 + r + 1} \right]$, zooals wij reeds boven

(in § 5) voor dit grensgeval hebben afgeleid.

Tenslotte maken wij er opmerkzaam op, dat de doorsneden van het door (6) gegeven oppervlak bij constant volume *alleen bij* $v = b$ tot aan $T = 0$ ($x = 0$ en 1) doorloopen. Bij alle volumina $> b$ zal, naar uit (6) onmiddellijk blijkt, bij $x = 0$ of 1 T een *eindige* waarde, n.l. $\frac{2a(v-b)^2}{v^3}$ aannemen. De T, x -grenslijn houdt dan bij

$x = 0$ of 1 bij genoemde waarde van T plotseling aan de T -as op (zie ook de ruimtevoorstelling).

De eigenlijke discussie der vergelijkingen (6) en (8) moet voor eene afzonderlijke Verhandeling worden bewaard. Er zal dan o.a. blijken, dat de verschillende vormen der spinodale en plooiopuntlijnen, welke speciaal bij anomale stoffen worden aangetroffen, reeds bij *normale* stoffen mogelijk zijn, mits de verhouding der beide kritische temperaturen T_2/T_1 slechts groot genoeg zij. Die door (6) gegeven spinodale lijnen zullen voor verschillende temperaturen gemakkelijk berekenbaar blijken, en wat den loop der plooiopuntlijnen betreft (er zijn er twee, die onafhankelijk van elkaar zijn), zoo zullen op eenvoudige wijze eenige gevolgtrekkingen daaromtrent kunnen worden afgeleid.

Ook zal blijken, wat trouwens de aard der vergelijking (6) reeds mede brengt, dat lengte- en dwarsplooi — tenminste wat de *spinodale* lijnen betreft (zie ook VAN DER WAALS, Cont. II, p. 175) — geen afzonderlijke plooiën zijn, maar één enkele plooi, waarvan het plooiopunt al naar de omstandigheden nu eens aan de zijde der kleine volumina, dan eens elders kan liggen.

Plantenkunde. — De Heer HUGO DE VRIES biedt eene mededeeling aan van den Heer E. VERSCHAFFELT, „*Eenige waarnemingen over den lengtegroei van stengels en bloemstelen.*”

(Mede aangeboden door den Heer J. W. MOLL.)

Reeds een oppervlakkige waarneming leert dat in vele gevallen de groei van stengels, blad- en bloemstelen in hooge mate afhankelijk is van de daarop zittende organen: knoppen, bladschijf, bloemen. Worden deze laatste verwijderd, zoo staat de groei der axiele deelen meestal stil en sterven deze zelfs na korter of langer tijd af.

In de literatuur heb ik echter geen onderzoekingen vermeld gevonden, waardoor men zou hebben getracht dit verschijnsel nader te analyseeren; en, bijvoorbeeld in het geval van bloemstelen, na te gaan of het wegsnijden van bepaalde deelen der bloem evenveel invloed had op den groei van den steel als het verwijderen der bloem in haar geheel. Bij eenige voorjaarsplanten heb ik dit thans door groeimetingen kunnen uitmaken, en zal hieronder in het kort de uitkomsten mededeelen.

Bij voorkeur heb ik mij daarvoor tot bloemen gewend, omdat hier aan den top van eenzelfde spil organen van verschillende phy-

siologische functie samen voorkomen, en de proeven dientengevolge grooter afwisseling toelieten. In een geval, dat van *Eranthis hiemalis* Salisb., zal ik eenigszins uitvoeriger den loop van het onderzoek en zijn resultaten beschrijven; om de overige onderzochte voorbeelden beknopter te bespreken.

De stengel van *Eranthis* draagt, zooals bekend is, aan zijn top een enkele bloem en vlak onder deze, tot een soort breede kraag vereenigd, een krans van drie groene, in slippen verdeelde, zittende bladen. Zoolang de stengel nog onder den grond zit, is zijn top scherp naar beneden omgebogen, en is de nog volkomen gesloten bloem, beschermd door de drie daaromheen geslagen, nog gele bladen, hangend. Zoodra de stengeltop boven den grond uitsteekt, en ook de bloem vrij is gekomen, richt deze zich op, om zich spoedig te ontplooiën; dan spreidt ook de basaalkraag zich uit, en wordt groen. De groeimetingen werden gedaan in het stadium begrepen tusschen het tijdstip waarop de stengel nog niet boven den grond zichtbaar is, en dat, waarop bloembladen en meeldraden afgevallen zijnde, enkel nog de bevruchte stampers overblijven. Om dezen tijd staat de lentegroei stil. Of naderhand, tijdens het rijp worden der vruchten, zooals bij andere planten een nieuwe periode van groei aanbreekt, heb ik niet onderzocht.

De planten, die tot het onderzoek dienden, werden overgebracht in een kweekkas van den Amsterdamschen Hortus botanicus, waarin de temperatuur gemiddeld 20° C. bedroeg, en waarin zich de exemplaren zeer snel en volkomen normaal ontwikkelden.

Ik zal beginnen met door een paar voorbeelden duidelijk te maken, dat de aanwezigheid der boven aan den top zittende organen noodig is om den stengel zijn normalen lengtegroei te laten doorloopen.

De stengel van een *Eranthis* was 4 Febr. 1905 40 mm. lang, gemeten van de basis bij het rhizoom tot de inplanting van den bladkrans. In de kweekkas gebracht, werd de plant aanvankelijk dagelijks gemeten, later om de twee dagen; korthedshalve zal ik hier enkel de lengte opgeven, die de stengel telkens na vier of vijf dagen had bereikt.

Datum	4.2.05	8.2	13.2	17.2	22.2	26.2
Lengte in mm.	40	89	135	154	162	162

In denzelfden tijd was de ontwikkeling van een stengel, waarop bladeren en bloem waren weggesneden:

Datum	4.2	8.2	13.2	17.2
Lengte	49	52	54	55

Ander voorbeeld van den groei bij een normalen stengel:

Datum	5.2	9.2	13.2	17.2	22.2	26.2
Lengte	44	98	128	145	150	150

en bij een stengel van bloem en bladeren beroofd:

Datum	5.2	9.2	13.2	17.2
Lengte	97	103	104	104

Terwijl bij normale *Eranthis*-stengels de top met de daarop gezeten bloem zich, in de kweekkas, na een paar dagen geheel had opgericht, bleef daarentegen de haakvormige kromming bij de van bloem en bladkrans beroofde stengels gedeeltelijk bestaan, en was het slechts zeer langzaam dat het uiteinde zich eenigermate oprichtte. Wat geen wonder is, als men weet dat het verdwijnen dezer kromming op ongelijkzijdigen groei van den stengeltop berust.

Nu werden op een reeks *Eranthis*-planten de boyen aan den stengel voorkomende organen slechts voor een gedeelte weggenomen; bijv. de drie groene bladen, de bloembladen, de meeldraden, de stampers. Van dag tot dag werd de lengte van de stengels gemeten. Het resultaat dezer proefnemingen is bijzonder duidelijk geweest. Zoolang de groene bladeren onbeschadigd bleven, was de lengtegroei van den stengel normaal te noemen. Hoogstens bleef deze iets beneden zijn gewone lengte, als of de geheele bloem of bepaalde bloemdeelen werden weggesneden. Daarentegen werd de groei zeer aanzienlijk belemmerd door het wegsnijden van den groenen bladkrans. Dat dit zoo is volgt uit de hieronder medegedeelde metingen.

Eranthis-stengel waarop enkel de drie bladen onder de bloem bewaard zijn, terwijl de bloem zelf is verwijderd:

Datum	7.2	11.2	15.2	19.2	22.2	26.2
Lengte in mm.	51	107	134	141	141	141.

Ander voorbeeld van hetzelfde geval:

Datum	6.2	10.2	13.2	17.2	22.2	26.2
Lengte in mm.	58	104	129	135	135	135

Eranthis-stengel, waarvan de basale bladkrans is weggesneden, terwijl de bloem ongeschonden blijft:

Datum	6.2	10.2	13.2	17.2	19.2
Lengte in mm.	86	96	97	100	100

Ander voorbeeld van hetzelfde geval :

Datum	7.2	11.2	15.2	17.2
Lengte in mm.	59	72	74	74

Terwijl dus een stengel die van zijn bloem werd beroofd, in den tijd van twaalf dagen zijn lengte met 176 % in de eerste en 133 % in de tweede proef vermeerderde, was deze lengtetoenamen in denzelfden tijd, bij een stengel waarop de bloem bewaard, maar de bladkrans weggenomen was, respectievelijk slechts 16 % en 25 %.

De invloed op den groei der aanwezigheid van den bladkrans volgt dus uit het voorgaande duidelijk genoeg. Ook in de andere door mij onderzochte gevallen moge de groei van de nog enkel een bloem dragende stengels iets aanzienlijker zijn geweest, dan die van stengels waarop en bloem en bladkrans verwijderd waren, stellig is dat de lengtegroei voor verreweg het grootste gedeelte wordt geregeld door de aanwezigheid der groene bladeren.

Hiermede staat ook in verband dat, na verwijdering van den bladkrans, de bloem zich slechts zeer langzaam en vaak ook maar gedeeltelijk, opricht.

Ofschoon het niet zeer waarschijnlijk is, zou toch het vermoeden kunnen rijzen, dat de waargenomen beteekenis der drie bladen daarop berust dat zij den stengel voorzien moeten van voedsel. Dit is echter niet zoo, zooals daaruit volgt dat in het donker dezelfde uitkomsten worden verkregen, dat dus ook de aanwezigheid der niet assimileerende bladeren een sterken lengtegroei van den stengel mogelijk maakt, die uitblijft zoodra enkel de bloem nog aan den top bewaard is gebleven. Het zal wel overbodig zijn ten bewijze hiervan getallen aan te voeren.

Evenmin komt het me na het voorgaande noodig voor in extenso de metingen mede te deelen, waaruit volgt dat het verwijderen der stampers, der meeldraden, of der bloembladen bij *Eranthis* weinig of geen invloed heeft op den lengtegroei van den stengel. Daarentegen is het niet zonder belang op te merken dat de bladkrans vrij volledig moet worden weggesneden, wil men den groei spoedig zien ophouden. De drie groene bladeren vertoonen namelijk zelf basalen groei; en als hun voet niet wordt beschadigd, kan deze in den loop van eenige dagen merkbaar aan omvang toenemen; tegelijkertijd zet de stengel zijn lengtegroei voort.

Voorbeeld: voet der drie groene bladeren bewaard; ook de bloem onbeschadigd.

Datum	8.2	11.2	15.2	20.2	26.2
Lengte in mm.	54	81	113	145	142

Reeds den 15en was de bladkrans aanzienlijk uitgegroeid; aan den rand was van een wond niets meer te bemerken. In denzelfden tijd had een stengel van 102 mm. lengte, waarop de bladkrans zoo volledig mogelijk was weggesneden, terwijl de bloem onaangeroerd bleef, slechts 117 mm. lengte bereikt.

Mocht men thans geneigd zijn te denken dat niet de aanwezigheid van den krans groene bladen, maar het onbeschadigd zijn van de inplanting der bladen op den stengel datgene is waar het hier op aankomt, zoo kan ik hiertegen aanvoeren dat men van deze inplantingszone rondom een laagje weefsel kan verwijderen zonder dat de lentegroei er ernstig door wordt benadeeld. Ook van den eenigszins gewelfden bloembodem kan men een stuk afsnijden, of hem in het midden uithollen, zonder er meer gevolgen van te zien dan van het afplukken der daarop gezeten bloemdeelen.

Ten slotte zij hier nog vermeld dat *Eranthis*-stengels, dicht bij de inplanting op het rhizoom afgesneden, in staat zijn nog dagen lang te groeien als zij met den voet in water worden gezet, en hetzelfde laten zien als gansche plantjes. Verder is de aanwezigheid van één der drie groene bladen voldoende om een aanzienlijken lentegroei van den stengel mogelijk te maken: bijv. verlenging van 53 tot 89 mm. in veertien dagen. Dat ook bij de *Eranthis*-bladen de groei van den bladsteel afhankelijk is van de aanwezigheid der bladschijf behoeft hier nu geen verder betoog meer; ik heb me er echter ook door metingen van overtuigd.

Galanthus nivalis L. verschaft ons de gelegenheid op ditzelfde gebied verschijnselen van anderen aard waar te nemen. Bij deze plant loopt de stengel ook uit in één enkele bloem, die echter, als zij volwassen en ontloken is, hangt aan een dunnen, slappen, bloemsteel. Deze is ingeplant op den top van den stengel, waar ook de twee vergroeide schutbladen staan, die den bloemknop vóór zijn ontplooiing omhulden. Hier moeten wij derhalve den invloed nagaan van de terminale organen zoowel op den groei van den stengel als op dien van den bloemsteel.

Wat de lengtegroei van den stengel betreft, deze is volkomen onafhankelijk van de aanwezigheid der bloem. Een enkel voorbeeld zal voldoende zijn om dit aan te toonen. De stengel werd gemeten van het punt waar hij uit den bol te voorschijn kwam, tot de inplanting der schutbladen; deze omgaven nog de bloemknop; bij *a.* bleef de plant onbeschadigd, bij *b.* werden schutbladen en bloem tot aan den voet weggesneden.

Datum	13.2	16.2	20.2	23.2	26.2
Lengte in mm. a.	90	133	157	161	162
b.	46	60	90	105	108

Daarentegen houdt de groei van den bloemsteel op zoodra de bloem wordt verwijderd. De invloed der bloem op dit orgaan is zelfs zoo groot, dat reeds na een paar dagen de steel van afgesneden bloemen aan den top geel wordt, en spoedig, van boven naar beneden, afsterft. De metingen wijzen er op dat het vruchtbeginsel hier, zoolal geen overwegende, dan toch een aanzienlijke rol speelt. Zoo verlengden zich bloemstelen van reeds geopende bloemen tusschen 28.2.05 en 6.3.05, in twee gevallen, resp. van 16 en 14 mm. tot 23 en 24 mm.; een bloem waarvan het perianth werd verwijderd, in denzelfden tijd, van 17 tot 21 mm., terwijl twee van hun bloem beroofde bloemstelen, resp. 20 en 14 mm. lang, het den volgenden dag tot 22 en 16 mm. hadden gebracht, doch daarna afstierven. Afknippen der meeldraden heeft geen grooten invloed op den groei; doch blijft de groei wel heel gering als èn meeldraden èn perianth worden verwijderd, zoodat bij *Galanthus* het vruchtbeginsel den groei van den bloemsteel wel in hooge mate, maar toch niet uitsluitend beheerscht. Daarentegen blijft de bloemsteel leven zoolang het vruchtbeginsel aan zijn top nog aanwezig is.

Volkomen hetzelfde doet zich voor bij *Narcissus Pseudo-Narcissus* L., waar de stengel gewoon doorgroeit als de bloem wordt afgesneden, de bloemsteel echter ophoudt te groeien en afsterft zoodra het vruchtbeginsel ontbreekt. Ik kan hier nog bijvoegen dat het voor den stengelgroei geen verschil uitmaakt of men den top afsnijdt boven of beneden de aanzwelling, die het punt aangeeft, waar schutbladen en bloemsteel zijn ingeplant, zoodat ook deze zone geen beteekenis heeft voor den groei der daaronder gelegen deelen. Ook in het basale gedeelte afgesneden, en dus van den bol afgezonderde stengels van *Galanthus* en *Narcissus*, of zelfs stukken daarvan, als die worden genomen van planten met nog gesloten bloemknoppen, groeien flink door, de bloemknop moge er al dan niet op aanwezig zijn.

Tulipa Gesneriana L. vertoont wederom iets anders. Hier wordt de bloem gedragen door een bebladerden stengel; de naar de basis toe gelegen stengelleden houden ongeveer op met groeien tegen den tijd dat de bloem van buiten zichtbaar wordt, en zich zal gaan openen. In dit stadium echter groeit het bovenste stengellid, met de bloem aan den top, nog aanzienlijk in de lengte. Daarvoor is nu de aanwezigheid der bloem volstrekt noodzakelijk. Het bovenste stengel-

lid staat in zijn groei stil, en sterft af, zoodra de bloem afgesneden wordt.

Voorbeeld: *a.* bloem aanwezig; *b.* bloem verwijderd. Gemeten enkel het bovenste stengellid.

	Datum	6.3	8.3	13.3
Lengte in mm.	<i>a.</i>	42	53	83
	<i>b.</i>	41	42	44

Uit de hieronder medegedeelde metingen is de beteekenis der verschillende bloemdeelen op te maken:

- a.* perianth verwijderd.
- b.* meeldraden verwijderd.
- c.* stamper verwijderd.

	Datum	6.3	8.3	13.3
Lengte in mm.	<i>a.</i>	36	41	45
	<i>b.</i>	46	63	70
	<i>c.</i>	41	51	68

Ofschoon dus verwijdering van elk der orgaankransen op zich zelf den groei van het bovenste stengellid gedeeltelijk onderdrukt, blijkt toch dat hierin aan de bloembladen de aanzienlijkste beteekenis toekomt. Het bovenstaande is trouwens slechts een voorbeeld, gekozen uit meerdere overeenstemmende metingen.

Ten slotte werden ook nog eenige waarnemingen gedaan op *Crocus vernus* All. Daar hier het vruchtbeginsel vrij diep ligt, weggedoken in de buis, gevormd door de groene bladen, en de schutbladen die daar omheen zijn gelegen, moesten voor de metingen opengesneden planten worden gebruikt, waarbij de bloem in haar geheele lengte werd blootgelegd. Daarvoor werden bloemen gekozen, die nog door schutbladen omgeven, en volkomen gesloten, even met den top boven den grond zichtbaar werden. Het bleek echter dat in dit stadium de stengel waarop de bloem is gezeten ongeveer zijn volle lengte had bereikt en nog slechts enkele millimeter groeide. De verdere lengtegroei, die nog zeer aanzienlijk is, en de bloem boven den grond brengt, komt zoo goed als geheel voor rekening der kroonbuis, tusschen het vruchtbeginsel en de losse slippin van het bloemdek. Enkel op dit stadium heb ik verder mijn aandacht gevestigd. Een paar metingen der kroonbuis zal ik mededeelen.

- a. bloem onbeschadigd.
 b. kroonslippen verwijderd.
 c. kroonslippen, meeldraden en stijl bij het bovenste uiteinde der vergroeide kroonbuis weggesneden.

	Datum	8.3	9.3	11.3
Lengte in mm.	a.	46	101	108
	b.	55	84	84
	c.	31	72	72

De verwijdering van de terminale organen is dus wel niet zonder invloed gebleven op den groei der kroonbuis, doch heeft dezen niet in zoo sterke mate kunnen beperken als dit in vorige gevallen is gebleken.

Opmerking verdient ook nog dat het wegsnijden der antheren en der stempels niet verhinderde dat meeldraden en stijl ongeveer hunne normale lengte bereikten.

Samenvattend, heeft het onderzoek dus geleerd dat de normale lengtegroei van den stengel bij *Eranthis hiemalis* slechts mogelijk is bij aanwezigheid van den bladkrans aan den top, terwijl de bloem daarop geen invloed uitoefent. Dit laatste geldt insgelijks voor den stengel van *Galanthus nivalis* en *Narcissus Pseudo-Narcissus*; de bloemsteel echter, bij deze beide planten, staat in zijn groei stil zoodra de bloem wordt afgesneden, waarbij het vruchtbeginsel vooral van beteekenis blijkt. Bij *Tulipa Gesneriana* is het voornamelijk door het bloemdek dat de lengtegroei van het bovenste stengellid wordt geregeerd; bij *Crocus vernus* ten slotte is de groei van kroonbuis, meeldraden en stijl in hooge mate onafhankelijk van de aanwezigheid zoowel van bloemdekslippen als van antheren en stempels.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „*Een groep van algebraische stralencomplexen.*”

§ 1. In de onderstelling dat de stralen a van een waaier (A, a) projectief zijn met de krommen van den n^{den} graad, b^n , welke door n^2 vaste punten, B_k , van het vlak β gaan, beschouwen wij den complex der stralen welke op homologe lijnen rusten. Voor $n = 1$ vindt men blijkbaar den *tetraedralen complex*.

Uit eenig punt P wordt (A, a) op β geprojecteerd in een waaier (A', β) , die met den bundel (b^n) een kromme c^{n+1} voortbrengt. Wij hebben dus een *complex van den graad* $(n + 1)$.

De kromme c^{n+1} verandert blijkbaar niet als men het punt P langs de rechte AA' verplaatst; de doorgangen der ∞^3 complexkegels (P) met het vlak β behooren dus tot een stelsel ∞^3 . Het is gemakkelijk in te zien, dat zij een *net* vormen.

Immers, zal zulk een kromme c^{n+1} het punt X bevatten, en is b_X^n de kromme door B_k en X , a_X de daaraan toegevoegde straal uit A , dan moet het punt A' gelegen zijn op de rechte, die X verbindt met den doorgang van a_X op het vlak β . Evenzoo levert een tweede punt, waardoor c^{n+1} moet gaan, een tweede rechte, welke A' bevat. Daar c^{n+1} bepaald is, zoodra men A' heeft, kan men dus door twee willekeurige punten van β een kromme c^{n+1} leggen.

Op de rechte $\alpha\beta$ bepalen de gegeven bundels een verwantschap $(1, n)$; haar $(n + 1)$ coïncidenties C_k liggen op elke c^{n+1} . Het net heeft dus $(n^2 + n + 1)$ vaste basispunten ¹⁾.

§ 2. Als A' zich verplaatst langs een in β gelegen rechte a' , die het vlak α in S snijdt, zal de kromme c^{n+1} steeds moeten gaan door de n punten D_k welke a' gemeen heeft met de aan den straal AS toegevoegde kromme b^n . Zij gaat dan door $(n + 1)^2$ vaste punten, beschrijft dus een in het net begrepen bundel.

Tot de $3n^2$ dubbelpunten van tot dien bundel behorende krommen moeten gerekend worden de n snijpunten van $\alpha\beta$ met de c^n , welke door de punten B_k en D_k gaat. Derhalve bevat a' , buiten S , $(3n^2 - n)$ punten A' , waarvoor de overeenkomstige kromme c^{n+1} een dubbelpunt vertoont.

Als A' met een der basispunten B_k samenvalt, dan brengen de projectieve bundels (A') en (b^n) een c^{n+1} voort, die in dat punt B een dubbelpunt bezit. Volgens een bekende eigenschap vervangt B dan twee der dubbelpunten voorkomende in den bundel (c^{n+1}) , welke ontstaat als men A' langs een door B getrokken rechte a' verplaatst. Hieruit volgt, in verband met het voorgaande:

De meetkundige plaats der toppen van complexkegels, welke een dubbelribbe bezitten, is een kegel Δ van den graad $n(3n - 1)$, die A tot top heeft en twee maal door elke ribbe AB_k gaat.

§ 3. Als P het vlak α doorloopt, bestaat de complexkegel (P) steeds uit het vlak α en een kegel van den graad n , die door α langs de rechten AC_k wordt gesneden. Dus is α een *hoofdvlak* en tevens bestanddeel van het singuliere oppervlak.

¹⁾ Ter bepaling van dit bijzondere net kan men blijkbaar slechts $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ punten B en drie punten C willekeurig kiezen.

Ook β behoort hiertoe. Immers, ligt P in β , dan behooren tot den complex de stralen uit P naar den straal a , die overeenkomt met de door P getrokken kromme b^n . Alle overige complexstralen door P liggen in β ; daar zij allen een straal a en de toegevoegde kromme b^n snijden, dus n complexstralen vertegenwoordigen, ontaardt (P) in het vlak a en het n -voudig gelegde vlak β . Dus is β een *n-voudig hoofdvlak* en bestaat het *singuliere oppervlak* uit een enkelvoudig vlak, een n -voudig vlak en een kegel Δ van den graad $n(3n - 1)$.

De complex bezit $(n^2 + n + 2)$ enkelvoudige *hoofdpunten*, nl. het punt A , de n^2 punten B_k en de $(n + 1)$ punten C_k .

§ 4. De dubbelpunten van tot een net behoorende krommen c^p liggen, zooals bekend is, op een kromme H van den graad $3(p - 1)$, de kromme van HESSE van het net, welke twee maal door elk vast punt van het net gaat. Deze eigenschap kan op de volgende wijze aangetoond worden.

Men neemt een rechte l en een punt M willekeurig aan. De c^p , welke l in L raakt, snijdt ML nog in $(p - 1)$ punten Q . Daar de krommen, die door M gaan, een bundel vormen, zoodat $2(p - 1)$ van hen l aanraken, gaat de m.pl. van Q $2(p - 1)$ maal door M , is derhalve van den graad $3(p - 1)$. Door elk van haar snijpunten S met l gaat een c^p , die met elke der rechten l en MS twee in S samenvallende punten gemeen heeft, dus een dubbelpunt dezer c^p is.

Bijgevolg is de m.pl. der dubbelpunten een kromme van den graad $3(p - 1)$.

Gaat l door een basispunt B van het net, dan snijdt de bundel, die door M bepaald wordt, op l een involutie van den graad $(p - 1)$ in. Daar deze $2(p - 2)$ coïncidenties L oplevert, is de m.pl. van Q nu slechts van den graad $(3p - 5)$. Dus vertegenwoordigt B voor elke door dat punt getrokken rechte l twee snijpunten met de m.pl. der dubbelpunten, is derhalve een dubbelpunt dier kromme.

Raakt l in B_1 aan de kromme c_1^p , welke in B_1 een dubbelpunt heeft, en kiest men M willekeurig op deze kromme, dan hebben de krommen van den door M aangewezen bundel in B_1 een vaste raaklijn, en is B_1 een der coïncidenties der involutie van den graad $(p - 1)$. De m.pl. der dubbelpunten heeft dan in B_1 drie samenvallende punten met l gemeen; zij heeft bijgevolg in B_1 dezelfde raaklijnen als c_1^p .

Voor het net N^{n+1} der in het vlak β gelegen krommen c^{n+1} ontaardt de meetkundige plaats der dubbelpunten H in de rechte $a\beta$ en een kromme van den graad $(3n - 1)$. Immers $a\beta$ vormt met elke kromme b een ontaarde kromme c^{n+1} .

De meetkundige plaats der dubbelribben van complexkegels is een kegel met top A , van den graad $(3n - 1)$, die de n^2 rechten AB_k tot dubbelribben heeft.

§ 5. De raaklijnen in de dubbelpunten van een net N^p omhullen een kromme Z der klasse $3(p - 1)(2p - 3)^1$, de kromme van ZEUTHEN. Zij ontaardt voor het bovenbedoelde net N^{n+1} ; immers de raaklijnen aan de krommen b^n in hun snijpunten met $\alpha\beta$ omhullen een kromme, die een bestanddeel der kromme Z moet zijn. De bundel (b^n) is projectief met den bundel van zijn poolkrommen p^{n-1} t. o. v. een punt O ; de snijpunten van homologe krommen vormen een kromme van den graad $(2n - 1)$; in elk van haar snijpunten S met $\alpha\beta$ wordt een kromme b^n door OS aangeraakt; deze raaklijnen omhullen derhalve een kromme Z' der klasse $(2n - 1)$.

De kromme van ZEUTHEN bestaat dus voor N^{n+1} uit de omhullende Z' en een kromme Z'' van de klasse $3n(2n - 1) - (2n - 1) = (3n - 1)(2n - 1)$.

De paren van raaklijnen in de dubbelpunten van eigenlijke krommen van N^{n+1} bepalen op een rechte l een symmetrische verwantschap met kenmerkend getal $(2n - 1)(3n - 1)$. Tot de coïncidenties behooren de snijpunten S van l met de kromme H ; aan zulk een punt S zijn $(2n - 1)(3n - 1) - 2$ punten toegevoegd, die buiten S liggen; dus is S een dubbele coïncidentie. De overige $4(n - 1)(3n - 1)$ coïncidenties zijn blijkbaar afkomstig van keerpuntsraaklijnen.

De meetkundige plaats der toppen van complexkegels, die een keerribbe bezitten, bestaat uit $4(n - 1)(3n - 1)$ ribben van den kegel Δ .

Een algemeen net van den graad $(n + 1)$ bevat $12(n - 1)n$ keerpuntkrommen, dus $4(n - 1)$ meer; derhalve vervangt elke der $2(n - 1)$ figuren, die uit de rechte $\alpha\beta$ en een haar aanrakende kromme b^n bestaat, twee krommen c^{n+1} met keerpunt. De dubbelpunten dezer figuren vormen blijkbaar met de punten C_n de doorsnede van $\alpha\beta$ met de kromme H .

§ 6. Op de doorgangen van een vlak π met de vlakken α en β bepalen de bundels (a) en (b^n) twee puntenreeksen in verwantschap $(n, 1)$; de omhullende der verbindingsrechten van homologe punten is blijkbaar een kromme der $(n + 1)^e$ klasse, welke $\alpha\pi$ raakt in haar snijpunt met den straal α , die toegevoegd is aan de kromme b^n door het punt $\alpha\beta\pi$, terwijl ze $\beta\pi$ raakt in haar snijpunten met

¹⁾ Dit is op eigenaardige wijze aangetoond door Dr. W. BOUWMAN (Ueber den Ort der Berührungspunkte von Strahlenbüscheln und Curvenbüscheln, N. Archief voor Wiskunde, 2e reeks, IV, 264).

de kromme b_0^n , waarvoor de overeenkomstige straal door $a\beta\pi$ gaat.

De complexkromme van het vlak π heeft de rechte $\beta\pi$ tot n -voudige raaklijn, is dus rationaal.

Als de kromme b_0^n den doorgang $\beta\pi$ aanraakt, dan is de veelvoudige raaklijn tevens buigraaklijn.

Wij letten nu op de raaklijnen r uit het punt $S \equiv a\beta$ aan de met a overeenkomende kromme b^n . De omhullende dezer raaklijnen heeft de rechte $a\beta$ tot veelvoudige raaklijn; haar raakpunten zijn de $2(n-1)$ coïncidenties der involutie, welke de bundel (b^n) op $a\beta$ insnijdt. Daar S blijkbaar $n(n-1)$ rechten r uitzendt, is de bedoelde omhullende van de klasse $(n-1)(n+2)$.

De vlakken, welke een complexkromme bevatten, waarvan de n -voudige raaklijn tevens buigraaklijn is, omhullen een vlakke kromme van de klasse $(n-1)(n+2)$.

§ 7. De kromme (π) kan op drie verschillende wijzen ontaarden.

Ten eerste kan het punt $a\beta\pi$ met zich zelf overeenkomen, zoodat (π) uiteenvalt in een *waaier* en een *kromme der n^{de} klasse*. Dit geschiedt blijkbaar als π door een der hoofdpunten C_k gaat.

Ten tweede kan de involutie op $\beta\pi$ ontaarden, zoodat al haar groepen een vast punt bevatten; ook dan zondert zich een *waaier* van complexstralen af. Dit zal gebeuren, wanneer π door een der hoofdpunten B_k gaat.

Ten derde kan π het hoofdpunt A bevatten. Dan bepaalt de kromme b^n , die overeenkomt met den straal $a \equiv a\pi$, op $\beta\pi$ de toppen van n waaiers, terwijl ook A de top is van een waaier. De kromme π is dan door $(n+1)$ *waaiers* vervangen.

In een vlak door $a\beta$, dus door alle hoofdpunten C_k , bestaat (π) natuurlijk ook uit $(n+1)$ *waaiers*.

Een ontaarding in *twee waaiers* met een kromme der klasse $(n-1)$ vindt plaats, als het vlak π twee hoofdpunten B_k of een punt B_k en een punt C_k bevat.

§ 8. Om een analytische voorstelling van den complex te verkrijgen, kunnen wij uitgaan van de vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_3 &= 0 & , & & x_1 + \lambda x_2 &= 0; \\ x_4 &= 0 & , & & a_x^n + \lambda b_x^n &= 0. \end{aligned}$$

Hier zijn a_x^n en b_x^n homogene functies van x_1, x_2, x_3 , van den graad n .

Voor de snijpunten X en Y van een complexstraal met a en β is dan

$$x_1 : p_{13} = x_2 : p_{23} = x_4 : p_{43},$$

$$y_1 : p_{14} = y_2 : p_{24} = y_3 : p_{34}.$$

Na substitutie, en eliminatie van λ , vindt men een vergelijking van den vorm

$$p_{23} (a_1 p_{14} + a_2 p_{24} + a_3 p_{34})^n = p_{13} (b_1 p_{14} + b_2 p_{24} + b_3 p_{34})^n,$$

waar door den exponent tusschen boogjes in herinnering wordt gebracht, dat hier aan een symbolische machtsverheffing moet gedacht worden.

Stelt men in $p_{k4} = x_k y_4 - x_4 y_k$ de coördinaat x_4 gelijk aan nul, dan vindt men voor den doorgang van den complexkegel van Y op β de vergelijking

$$(y_3 x_2 - y_2 x_3)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^n = (y_3 x_1 - y_1 x_3)(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^n,$$

of korter

$$y_1 x_3 b_x^n - y_2 x_3 a_x^n + y_3 (x_2 a_x^n - x_1 b_x^n) = 0.$$

Hieruit blijkt op nieuw, dat de doorgangen der complexkegels een net vormen.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan:

„*Over netten van algebraïsche vlakke krommen*”.

Is een net van krommen van den graad n voorgesteld door een vergelijking in homogene coördinaten

$$y_1 a_x^n + y_2 b_x^n + y_3 c_x^n = 0,$$

dan kan men aan de kromme, welke door een stel waarden $y_1 : y_2 : y_3$ is aangewezen, het punt Y toevoegen, dat y_1, y_2, y_3 tot coördinaten heeft, en omgekeerd.

Een homogene lineaire betrekking tusschen de parameters y_k wijst dan een rechte, als m. pl. van Y , aan, welke overeenkomt met een in het net begrepen bundel.

Met de kromme van HESSE, H , die door de dubbelpunten van tot het net behorende krommen gaat, komt nu een kromme (Y) overeen, waarvan de graad gemakkelijk is te bepalen. Immers, de bundel die door een willekeurige rechte l_Y wordt vertegenwoordigd, heeft $3(n-1)^2$ dubbelpunten. Voor den graad n'' van (Y) vindt men dus $n'' = 3(n-1)^2$.

Heeft een der krommen van een bundel in een der basispunten een dubbelpunt, dan vervangt zij twee der $3(n-1)^2$ tot den bundel behorende krommen met dubbelpunt. De beeldrechte l_Y raakt dan aan de kromme (Y), en omgekeerd.

Onderstellen wij, dat het net b vaste punten bezit, dan gaat H twee maal door elk dier basispunten, heeft dus met de door een bepaald punt Y aangewezen netkromme c_Y^n nog $(nn'-b)$ enkelvoudige punten D gemeen; hier stelt $n' = 3(n-1)$ den graad van H voor.

De kromme c^n welke in D een dubbelpunt heeft, bepaalt met c_Y^n een bundel, die afgebeeld wordt door een raaklijn der kromme (Y) . Hieruit volgt, dat de klasse van (Y) wordt aangewezen door $k'' = 3n(n-1) - 2b$.

Ook het geslacht g'' dezer kromme is gemakkelijk te vinden. Daar de punten van (Y) één aan één zijn toegevoegd aan de punten van H , hebben deze krommen hetzelfde geslacht. Men heeft dus

$$g'' = \frac{1}{2}(n'-1)(n'-2) - b = \frac{1}{2}(3n-4)(3n-5) - b.$$

Wij zullen nu het aantal dubbelpunten en het aantal keerpunten van (Y) zoeken. Deze aantallen, σ'' en \varkappa'' , voldoen aan de betrekkingen

$$\begin{aligned} 2\sigma'' + 3\varkappa'' &= n''(n''-1) - k'', \\ \sigma'' + \varkappa'' &= \frac{1}{2}(n''-1)(n''-2) - g''. \end{aligned}$$

Hieruit volgt, na eenige herleiding,

$$\begin{aligned} \sigma'' &= \frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11) + b, \\ \varkappa'' &= 12(n-1)(n-2). \end{aligned}$$

De kromme (Y) heeft dubbelpunten in de punten Y_B , die de beelden zijn van de krommen c_B^n , welke een dubbelpunt bezitten in een basispunt van het net. Immers, met elke rechte door een punt Y_B komt een bundel overeen, waarin c_B^n voor twee dubbelpuntskrommen moet gerekend worden.

Elk der overige dubbelpunten van (Y) is het beeld van een kromme c^n , die in het bezit is van twee dubbelpunten.

Een net N^n bevat dus $\frac{3}{2}(n-1)(n-2)(3n^2-3n-11)$ krommen met twee dubbelpunten.

Met een keerpunt van (Y) zal overeenkomen een kromme, welke in elken bundel, waartoe zij behoort, twee dubbelpuntskrommen vangt. Volgens een bekende eigenschap moet die kromme zelf een keerpunt hebben. Voor een bepaalden bundel is haar keerpunt een der basispunten; deze bundel heeft tot beeld de raaklijn in het overeenkomstige keerpunt van (Y) .

In een net N^n komen $12(n-1)(n-2)$ krommen met een keerpunt voor.

De beide hier bewezen eigenschappen worden gewoonlijk slechts

De elektrische stroom per eenheid van doorsnede is de som van de twee stroomen die aan de positieve en de negatieve electronen te danken zijn. Hij wordt voorgesteld door

$$\left(\frac{4\pi l_1 A_1 e_1^2}{3h_1 m_1} + \frac{4\pi l_2 A_2 e_2^2}{3h_2 m_2} \right) E$$

en men heeft dus voor het geleidingsvermogen

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \dots \dots \dots (49)$$

wanneer men

$$\sigma_1 = \frac{4\pi l_1 A_1 e_1^2}{3h_1 m_1}, \quad \sigma_2 = \frac{4\pi l_2 A_2 e_2^2}{3h_2 m_2}$$

stelt. Voor deze grootheden, die men de bij de twee electronengroepen behorende *gedeeltelijke geleidingsvermogens* kan noemen, kan men (verg. § 8) ook schrijven

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot \frac{l_1 N_1 e_1^2 u_1}{aT}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \cdot \frac{l_2 N_2 e_2^2 u_2}{aT} \dots (50)$$

§ 17. Bij alle andere vraagstukken die in de twee voorgaande mededeelingen besproken werden, doet zich nu een moeilijkheid voor. Wij zullen gemakkelijk verschillende ter sprake komende grootheden zoo kunnen bepalen, dat de toestand in een geopende of gesloten keten in zekeren zin stationair is, in zooverre nl. dat in geen deel der keten een steeds voortgaande opeenhooping van positieve of negatieve lading plaats heeft. Hiertoe is voldoende dat de *totale* stroom, d. w. z. de som der stroomen die aan de twee electronensoorten te danken zijn, voor elke doorsnede van een geopende keten 0 en voor elke doorsnede van een gesloten keten even groot is. Maar, al is aan deze voorwaarde voldaan, dan is daarmee nog niet gezegd, dat ook elke gedeeltelijke stroom op zich zelf in het eene geval overal 0 en in het andere geval overal even sterk is. Integendeel zullen onze vergelijkingen ons leeren dat, wanneer men niet zeer bijzondere en weinig aannemelijke onderstellingen maakt, de gedeeltelijke stroomen althans niet in alle gevallen aan deze voorwaarden kunnen voldoen. Doen zij dat niet, dan verandert, zooals men gemakkelijk inziet, het aantal positieve, en eveneens het aantal negatieve electronen dat tusschen twee doorsneden van den geleider aanwezig is. Daar nu, juist omdat de totale stroom aan elke doorsnede dezelfde is, de verandering van het aantal negatieve deeltjes gelijk moet zijn aan die van het aantal positieve deeltjes, kunnen wij zeggen dat de twee electronenstroomen in den regel ten gevolge zullen hebben dat in het eene deel van de keten een opeenhooping van „neutrale electriciteit” en in het andere deel een vermindering

van de hoeveelheid daarvan plaats heeft. Over hetgeen er dan verder zal gebeuren kan men verschillende onderstellingen maken. Men kan vooreerst aannemen dat overal waar steeds nieuwe electronen in een deel der keten komen, die deeltjes worden vastgelegd, b.v. aan de metaalatomen; de toestand zou dan niet in werkelijkheid stationair zijn, maar als „quasi-stationair” kunnen worden aangeduid. Deze opvatting brengt mede dat men aanneemt dat in die deelen der keten die voortdurend vrije electronen aan de andere deelen afgeven, steeds, door splitsing van metaalatomen, nieuwe vrije electronen ontstaan en men zou zich dan moeten voorstellen dat bij alle tot nog toe genomen proeven dit proces altijd door heeft plaats gehad, zonder dat iets dat op een vertraging ervan wijst, kon worden waargenomen, m. a. w. dat de voorraad neutrale electriciteit onuitputtelijk is.

Een andere opvatting is deze dat de neutrale electriciteit van de plaatsen waar zij door de electronenstromen wordt opeengehoopt, naar de andere deelen der keten teruggevoerd wordt door een proces van diffusie. Men zou zich kunnen voorstellen dat men hierbij te doen heeft met deeltjes die elk bestaan uit twee vast met elkaar verbonden electronen, het eene positief en het andere negatief, en dat de diffusie dezer deeltjes het gevolg is van hunne warmtebeweging. De toestand zou dan *werkelijk* stationair kunnen worden.

Zowel bij de eerste opvatting als bij de nadere uitwerking der tweede stuit men op groote zwaarigheden.

§ 18. Bij de wiskundige behandeling der vraagstukken waarmede wij te doen zullen hebben, verdient het aanbeveling een paar hulp-grootheden in te voeren.

In het algemeen, in een niet-homogeen deel van de keten, zal voor een der electronensoorten de versnelling X bestaan uit het in (30) aangewezen deel X_m en uit het deel $\frac{e}{m} E$, dat aan de elektrische kracht E te wijten is, zoodat de formule (21) voor den electronenstroom overgaat in

$$v = \frac{2}{3} \pi l \left[\frac{1}{h^2} \left(-\frac{2hA}{m} \frac{dV}{dx} + \frac{2heA}{m} E - \frac{dA}{dx} \right) + 2 \frac{A}{h^2} \frac{dh}{dx} \right], \quad (51)$$

Er is nu een bepaalde waarde der elektrische kracht E aan te wijzen, waarbij deze electronenstroom 0 is. Duiden wij die electromotorische kracht door E aan, dan is, zooals men gemakkelijk uit (51) afleidt,

$$E = \frac{1}{e} \frac{dV}{dx} + \frac{m}{2he} \frac{d \log A}{dx} + \frac{m}{e} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{h} \right) \quad \dots \quad (52)$$

en in het algemeen

$$v = \frac{4}{3} \pi l \frac{e A}{h m} (E - E).$$

Hieraan beantwoordt een elektrische stroom, waarvoor men de uitdrukking vindt als men met e vermenigvuldigt. De factor waarmede $E - E$ dan vermenigvuldigd is, is klaarblijkelijk niet anders dan het gedeeltelijke geleidingsvermogen dat aan de beschouwde electronensoort te danken is.

Wanneer wij nu in den vorm (52) van (14) gebruik maken en hem op beide soorten van electronen toepassen, vinden wij

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{e_1} \frac{dV_1}{dx} + \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e_1} \frac{d \log A_1}{dx} + \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e_1} \frac{dT}{dx} \\ E_2 &= \frac{1}{e_2} \frac{dV_2}{dx} + \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e_2} \frac{d \log A_2}{dx} + \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e_2} \frac{dT}{dx} \end{aligned} \right\} \dots (53)$$

Is verder op de beschouwde plaats de normale doorsnede weer, evenals vroeger, Σ , dan heeft men voor de twee gedeeltelijke stroomen

$$i_1 = \sigma_1 (E - E_1) \Sigma, \quad i_2 = \sigma_2 (E - E_2) \Sigma, \quad \dots (54)$$

en voor den geheelen stroom, met het oog op (49),

$$i = i_1 + i_2 = (\sigma E - \sigma_1 E_1 - \sigma_2 E_2) \Sigma. \quad \dots (55)$$

Het verdient hierbij opgemerkt te worden dat, zoodra E_1 en E_2 verschillend zijn, de twee gedeeltelijke stroomen i_1 en i_2 zich niet meer als de geleidingsvermogens σ_1 en σ_2 verhouden. Men kan echter uit de laatste vergelijkingen gemakkelijk afleiden

$$i_1 = j_1 + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} (E_2 - E_1) \Sigma, \quad i_2 = j_2 + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} (E_1 - E_2) \Sigma,$$

als men stelt

$$j_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma} i, \quad j_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma} i.$$

De grootheden j_1 en j_2 zijn dan de intensiteiten die de gedeeltelijke stroomen *zouden* hebben, wanneer zij evenredig waren met de gedeeltelijke geleidingsvermogens.

§ 19. Wij beschouwen nu in de eerste plaats een ongesloten keten, uit verschillende metalen samengesteld, en overal op dezelfde temperatuur gehouden. Daarbij nemen wij even als in § 6 aan dat het eene metaal geleidelijk in het andere overgaat. Wij noemen de uiteinden van de keten P en Q en rekenen x langs de keten van het eerste uiteinde naar het tweede.

In den stationairen of quasi-stationairen toestand zullen zekere potentiaalverschillen bestaan, en kan men stellen

$$E = - \frac{d\varphi}{dx}.$$

Uit de voorwaarde dat $i = 0$ is, volgt dan blijkens (55)

$$\frac{d\varphi}{dx} = - \frac{\sigma_1}{\sigma} E_1 - \frac{\sigma_2}{\sigma} E_2. \quad \dots \quad (56)$$

Dit geeft, wanneer men de waarden (53) substitueert, $\frac{dT}{dx} = 0$ stelt en van P naar Q integreert,

$$\begin{aligned} \varphi_Q - \varphi_P = & - \frac{1}{e_1} \int_P^Q \frac{\sigma_1}{\sigma} \frac{dV_1}{dx} dx - \frac{1}{e_2} \int_P^Q \frac{\sigma_2}{\sigma} \frac{dV_2}{dx} dx - \\ & - \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e_1} \int_P^Q \frac{\sigma_1}{\sigma} \frac{d \log A_1}{dx} dx - \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e_2} \int_P^Q \frac{\sigma_2}{\sigma} \frac{d \log A_2}{dx} dx \quad \dots \quad (57) \end{aligned}$$

Heeft het potentiaalverschil deze waarde, dan is $i = 0$, maar de gedeeltelijke stroomen hebben de van 0 verschillende waarden

$$i_1 = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} (E_2 - E_1) \Sigma, \quad i_2 = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma} (E_1 - E_2) \Sigma.$$

Daar bovendien deze waarden in het algemeen van punt tot punt zullen veranderen, doet zich reeds in dit eenvoudige geval de omstandigheid voor waarvan in § 17 gesproken werd.

Men kan nu vooreerst beproeven zoodanige onderstellingen te maken dat de toestand werkelijk stationair wordt. Daarbij stuit men op de moeilijkheid dat bezwaarlijk aan de tweede wet der thermodynamica kan worden voldaan. Deze vereischt n.l. dat wanneer in de ongesloten keten een stationaire toestand met overal dezelfde temperatuur bestaat, in de deelen der keten noch ontwikkeling noch absorptie van warmte plaats heeft. Ik ben er niet in geslaagd, omtrent de „neutrale electriciteit” in de keten, het diffundeeren daarvan uit het eene deel naar het andere en het dissociatie-evenwicht tusschen de vrije electronen, de aan de metaalatomen vastgehechte en de neutrale uit positieve en negatieve electronen samengestelde electriciteit eenigszins aannemelijke en eenvoudige voorstellingen te vinden, waardoor aan de genoemde voorwaarde voldaan wordt.

Men komt niet met de thermodynamische wetten in strijd wanneer men aanneemt dat er alleen een quasi-stationaire toestand ontstaat. Stelt men zich voor dat in sommige deelen der keten voortdurend positieve en negatieve electronen in gelijk aantal aan de metaal-

deeltjes worden vastgelegd, terwijl in andere deelen het omgekeerde plaats heeft, dan komt men wel tot een voortdurende warmteontwikkeling op de eene en een warmteabsorptie op de andere plaats, maar op thermodynamische gronden is daartegen, juist omdat er nu niet meer van een werkelijken evenwichtstoestand sprake is, niets in te brengen. Men zou het stelsel kunnen vergelijken met twee in dezelfde ruimte geplaatste, van elkaar gescheiden, waterhoudende stoffen met ongelijke dampspanning. Ook in dit laatste stelsel zal bij het overdistilleeren warmte onophoudelijk in de eene stof ontstaan en in de andere verdwijnen.

Intusschen is het weinig bevredigend, te moeten aannemen dat tusschen twee metalen van dezelfde temperatuur die elkaar aanraken, geen werkelijk evenwicht bestaat, en dat niet alleen de bedoelde ontwikkeling en absorptie van warmte plaats heeft, maar bovendien de toestand der metalen hoe langer hoe meer wordt gewijzigd.

Het schijnt dus dat er niet anders overblijft dan aan te nemen dat er *geen* opeenhooping van vrije electriciteit plaats heeft, m. a. w. dat niet alleen $i = 0$ is, maar ook i_1 en i_2 elk afzonderlijk. De voorwaarde hiervoor is dat $E_1 = E_2$ is, d. w. z. dat de electriche kracht die noodig is om den eenen electronenstroom te doen ophouden, ook juist voldoende is om den anderen tot staan te brengen. Dit vereischt blijkens (53) dat in elk punt der keten

$$\frac{1}{e_1} \frac{dV_1}{dx} + \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e_1} \frac{d \log A_1}{dx} = \frac{1}{e_2} \frac{dV_2}{dx} + \frac{2}{3} \frac{d \log A_2}{dx} \quad (58)$$

is of met het oog op (48), dat

$$\frac{2}{3} \alpha T \frac{d \log (A_1 A_2)}{dx} + \frac{d(V_1 + V_2)}{dx} = 0.$$

Men kan dit ook uitdrukken door te zeggen dat overal in de keten

$$\log(A_1 A_2) + \frac{3}{2\alpha T} (V_1 + V_2) = \psi(T)$$

dezelfde waarde heeft, dat dus deze uitdrukking een van den aard der metalen onafhankelijke temperatuurfunctie is ¹⁾. Neemt men eindelijk nog aan dat de toestand van een bepaald metaal bij een bepaalde temperatuur steeds dezelfde is, onverschillig met welk metaal het in aanraking is, dan moeten A_1 en A_2 in de laatste uitdrukking waarden hebben, die alleen van den aard der metalen afhankelijk zijn, dezelfde waarden waarmee men te doen zou hebben als de metalen elkaar niet aanraakten.

Tengevolge der onderstelling $E_1 = E_2$ gaat (56) over in

¹⁾ Verg. DRUDE, Annalen der Physik, 1 (1900), p. 591.

$$\frac{d\varphi}{dx} = -E_1 = -E_2$$

en (57) in

$$\begin{aligned} \varphi_Q - \varphi_P &= \frac{1}{e_1} (V_{1P} - V_{1Q}) + \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e_1} \log \left(\frac{A_{1P}}{A_{1Q}} \right) = \\ &= \frac{1}{e_2} (V_{2P} - V_{2Q}) + \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e_2} \log \left(\frac{A_{2P}}{A_{2Q}} \right), \quad . \quad . \quad (59) \end{aligned}$$

welke beide laatste waarden, juist ten gevolge van (58), gelijk zijn. Het blijkt nu dat het potentiaalverschil alleen van den toestand der metalen aan het uiteinde van de keten afhangt, en dat dus aan de wet der spanningsreeks voldaan is.

Trouwens ook wanneer wij deze laatste op den voorgrond gesteld hadden, zouden wij tot de boven gemaakte onderstellingen geleid zijn. Zal nl. de waarde (57) alleen van den toestand aan het begin en het einde van de keten afhangen, dan moeten de waarden van $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ en $\frac{\sigma_2}{\sigma}$ in de tusschengelegen deelen, die op een ingewikkelde wijze van de vrije weglengte der electronen in die deelen afhangen, eruit verdwijnen. Dit kan nauwelijks op andere wijze verkregen worden dan door overal $E_1 = E_2$ te stellen. Men komt dan tot (59) en moet nu nog de onderstelling maken dat de toestanden in P en Q door den aard der metalen bepaald zijn.

§ 20. De theorie van een thermo-electrische keten zou, als men twee soorten van vrije electronen aanneemt, het eenvoudigst worden, zoo men mocht onderstellen dat ook in die deelen der keten, waar het metaal homogeen is, maar de temperatuur van punt tot punt verandert, de grootheden E_1 en E_2 gelijk zijn. Dit is echter zeer onwaarschijnlijk. Uit de vergelijkingen (53) zou dan nl. volgen, als men gemakshalve aanneemt dat V_1 en V_2 in een zelfde metaal onafhankelijk van de temperatuur zijn, zoodat $\frac{dV_1}{dx} = 0$ en $\frac{dV_2}{dx} = 0$ is,

$$\frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e_1} \frac{d \log A_1}{dx} + \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e_1} \frac{dT}{dx} = \frac{2}{3} \frac{\alpha T}{e_2} \frac{d \log A_2}{dx} + \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e_2} \frac{dT}{dx},$$

of, daar $e_2 = -e_1$ is,

$$T \frac{d \log (A_1 A_2)}{dx} = -4 \frac{dT}{dx}.$$

Hieruit zou volgen dat $A_1 A_2$ omgekeerd evenredig met de vierde macht der absolute temperatuur is, en dan zou, zooals men uit (13)

en (14) kan afleiden, $N_1 N_2$ omgekeerd evenredig met T moeten zijn, wat bezwaarlijk kan worden aangenomen.

Wij dienen dus wel E_1 en E_2 als verschillend van elkaar te beschouwen. Dit neemt niet weg dat men voor de in de keten werkende electromotorische kracht een vrij eenvoudige uitdrukking kan opstellen. Vervangt men nl. in (55) E door $-\frac{d\varphi}{dx}$, dan verkrijgt men in de onderstelling dat de keten ongesloten, en dus $i = 0$ is, weer de formule (56), waaruit voor de gezochte electromotorische kracht volgt

$$F = \varphi_Q - \varphi_P = - \int_P^Q \frac{1}{\sigma} (\sigma_1 E_1 + \sigma_2 E_2) dx \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Is echter de keten gesloten (zoodat de punten P en Q samenvallen), dan vindt men door (55) met $\frac{dx}{\sigma \Sigma}$ te vermenigvuldigen, E door $-\frac{d\varphi}{dx}$ te vervangen en langs de geheele keten te integreeren, daarbij in aanmerking nemende dat i overal dezelfde waarde heeft,

$$i \int \frac{dx}{\sigma \Sigma} = F. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Deze formule drukt de wet van OHM uit, daar de integraal in het eerste lid den weerstand van de keten voorstelt.

§ 21. Wij kunnen uit de vergelijking (60) nog een belangrijke gevolgtrekking afleiden, wanneer wij onderstellen, evenals in § 10 c , dat in een contactplaats de temperatuur overal even hoog is, en dat dus temperatuurverschillen alleen in de homogene deelen der keten voorkomen.

Uit het in § 19 gezegde volgt dat dan het deel der integraal (60) dat door een contactplaats wordt opgeleverd, kan worden voorgesteld als het verschil van twee grootheden die, behalve van de temperatuur, de eene alleen van den aard van het eerste en de andere alleen van den aard van het tweede metaal afhangen. Wat de bijdrage betreft, die van een homogeen deel van de keten, tusschen twee contactplaatsen, afkomstig is, merken wij op dat E_1 en E_2 in zulk een deel den vorm $f(T) \frac{dT}{dx}$ hebben, wanneer, zooals wij zullen aannemen, ook nu weder A_1 en A_2 door den aard van het metaal en de temperatuur bepaald zijn. Daar nu in een bepaald metaal

$\frac{\sigma_1}{\sigma}$ en $\frac{\sigma_2}{\sigma}$ door de temperatuur bepaald moeten zijn, neemt het deel van (60) dat bij een homogeen deel der keten behoort, den vorm

$$\int_{T'}^{T''} \chi(T) dT$$

aan, wanneer T' en T'' de temperaturen der contactplaatsen zijn. Het kan dus worden voorgesteld als het verschil der waarden die een zekere van den aard van het metaal en de temperatuur afhankelijke grootheid voor $T = T'$ en $T = T''$ aanneemt.

Deze overwegingen leiden tot het besluit dat de electromotorische kracht in een willekeurige keten door de temperaturen der contactplaatsen bepaald wordt, en dat, als er twee metalen I en II en twee contactplaatsen met de temperaturen T' en T'' zijn, de in § 10, *c* beschouwde electromotorische kracht $F_{I,II}$ kan worden voorgesteld door een uitdrukking van den vorm

$$F_{I,II} = \zeta_I(T'') - \zeta_I(T') - \zeta_{II}(T') + \zeta_{II}(T''),$$

waarin $\zeta_I(T)$ en $\zeta_{II}(T)$ zekere door den aard van het eerste en van het tweede metaal bepaalde temperatuurfunctiën zijn.

Uit deze vergelijking besluit men gemakkelijk tot de in de formule (47) uitgedrukte wet der thermo-electrische reeks. Men ziet dat het, om tot deze te geraken, voldoende is, de in (58) uitgedrukte onderstelling te aanvaarden en bovendien aan te nemen dat, ook in een thermo-electrische keten, de grootheden A_1 en A_2 in elk punt door den aard van het daar aanwezige metaal en de temperatuur bepaald worden.

Ter wille van de algemeenheid moge hier nog de wijziging worden vermeld, die de afgeleide formules ondergaan, wanneer men onderstelt dat er, behalve de electricische kracht die het gevolg is van potentiaalverschillen nog, in de richting van de keten, een uitwendige kracht op de electronen werkt, die evenredig is met hun lading en een van 0 verschillende lijnintegraal oplevert. Wij stellen die kracht door E_e voor, en noemen de lijnintegraal

$$\int E_e dx = F_e$$

de „uitwendige electromotorische kracht” die in de keten werkt. In de formules (54) moeten wij nu E door $E + E_e$ vervangen. Dien-tengevolge gaat (55) over in

$$i = \{\sigma(E + E_e) - \sigma_1 E_1 - \sigma_2 E_2\}.$$

Past men vervolgens hierop dezelfde bewerking toe als straks op

(55), dan vindt men in plaats van (61) de meer algemeene betrekking

$$i \int \frac{dx}{\sigma \Sigma} = F + F_e.$$

§ 22. Wij zouden nu de warmteverschijnselen die in de thermo-electrische keten plaats hebben, op een dergelijke wijze als in §§ 12 en 13 kunnen behandelen, maar ik zal dat wegens de moeilijkheden waarop men stuit achterwege laten. Ik merk alleen op dat men bij de beschouwing niet alleen van het PELTIER-effect en het THOMSON-effect, maar zelfs van de warmtegeleiding rekening zou moeten houden met de warmteontwikkeling die aan de „verbinding” der tegengestelde electronen tot „neutrale electriciteit” beantwoordt en met de warmteabsorptie, waarmede het ontstaan van nieuwe vrije electronen gepaard gaat.

Een eenigszins bevredigende uitwerking van het denkbeeld dat, als de temperatuur overal constant wordt gehouden, de toestand ook werkelijk stationair is, is mij niet gelukt, en een quasi-stationairen toestand met voortdurende opeenhooping van neutrale electriciteit op de eene en vermindering van den voorraad daarvan op de andere plaats zal men niet licht willen aannemen.

Alles samengenomen komt het mij voor dat de moeilijkheden aan twee soorten van vrije electronen verbonden, zoo groot zijn dat het de voorkeur verdient, zoolang de beschouwing van het HALL-effect en de daarmede verwante verschijnselen niet beslist tot deze voorstelling dwingt, slechts ééne soort aan te nemen. Men blijft dan ook in overeenstemming met de uit vele andere verschijnselen afgeleide gevolgtrekking dat de negatieve electronen een grootere bewegelijkheid dan de positieve hebben, en met de uitkomsten waartoe het onderzoek naar de massa der electronen geleid heeft. Men weet dat men, terwijl de massa der negatieve electronen gebleken is zeer veel kleiner dan die van een waterstofatoom te zijn, voor de positieve electronen een massa van dezelfde orde van grootte als die van de atomen der chemische elementen gevonden heeft. Het ligt daarom voor de hand aan te nemen dat in de metalen de positieve lading aan de atomen gebonden is en zich dus alleen over een kleinen afstand in de atomen of met de atomen kan verplaatsen, maar niet van het eene atoom op het andere kan overgaan.

Physiologie. — Voor de Werken der Akademie wordt aangeboden door den Heer WINKLER eene verhandeling van den Heer A. GORTER: „Eene physische theorie der herinnering”.

De Voorzitter verzoekt de Heeren PLACE en ZWAARDEMAKER daaromtrent in de volgende vergadering advies te willen uitbrengen.

Voor de Bibliotheek worden aangeboden door den Heer WINKLER de dissertatie van den Heer K. H. BOUMAN: Experimenteële onderzoekingen over het cerebrale optische stelsel"; door den Heer HAGA de dissertatie van den Heer G. VAN DIJK: „De zilvervoltameter; door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM de dissertatie van den Heer H. J. VAN WIJK: Onderzoekingen over het stelsel overchloorzuur en water"; door den Heer JULIUS: „Het ongelijkmatige stralingsveld”.

Op voorstel van den Voorzitter wordt besloten de eerstvolgende vergadering te houden op Zaterdag 22 April a. s.

De Vergadering wordt gesloten.

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 22 April 1905.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

I N H O U D.

Ingekomen stukken, p. 722.

ERNST DE VRIES: „Over het Ganglion Vomeronasale”. (Aangeboden door de Heeren T. PLACE en H. ZWAARDEMAKER Cz.), p. 723. (Met één plaat).

J. W. VAN BISSELIËCK: „Over de innervatie van het rompmyotoom”. (Aangeboden door de Heeren T. PLACE en W. EINTHOVEN), p. 727. (Met één plaat).

K. BES: „De vergelijking van den negenden graad voorstellende de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken”. (Aangeboden door de Heeren J. CARDINAAL en D. J. KORTEWEG), p. 730.

G. C. J. VOSMAER en H. P. WIJSMAN: „Over den bouw van sommige kiezelspicula bij sponsen. I. De styli van *Tethya lyncurium*”, p. 733.

JAN DE VRIES: „Over lineaire stelsels van algebraïsche vlakke krommen”, p. 748.

JAN DE VRIES: „Eenige kenmerkende getallen van een algebraïsch oppervlak”, p. 753.

H. G. JONKER: „Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland. I. De Hondsrug in de provincie Groningen. 2. Bovensilurische zwerfsteenen. 2de mededeeling: Zwerfsteenen van den ouderdom der Oostbaltische zonen H en I”. (Aangeboden door de Heeren K. MARTIN en J. M. VAN BEMMELEN), p. 758.

A. W. VISSER: „Een paar opmerkingen over auto-katalyse en de omzetting van γ -oxyzuren, met en zonder toevoeging van zuren, opgevat als ionenreactie” (Aangeboden door de Heeren H. J. HAMBURGER en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 770.

PH. KOHNSTAMM: „Een formule voor der osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen, wier damp de gasvetten volgt”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 781.

PH. KOHNSTAMM: „Kinetische afleiding van VAN 'T HOFF's wet voor den osmotischen druk in een verdunde oplossing.” (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 788.

PH. KOHNSTAMM: „Osmotische druk of thermodynamische potentiaal”. (Aangeboden door de Heeren J. D. VAN DER WAALS en P. ZEEMAN), p. 800.

J. WEEDER: „Nauwkeurige benaderingsformules voor de verhoudingen der driehoeken in de berekening van eene elliptische baan uit 3 waarnemingen”. (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 811.

MAX REINGANUM: „Ueber electrooptische Konstanten der Metalle”. (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en H. A. LORENTZ), p. 820.

ARTHUR W. GRAY: „Toepassing van den baroscoop op de bepaling van de dichtheden van gassen en dampen” (Voorloopige Mededeeling). (Aangeboden door de Heeren H. KAMERLINGH ONNES en H. A. LORENTZ), p. 822.

W. EINTHOVEN: „Verdere mededeelingen over den snaargalvanometer”, p. 824.

Aanbieding van Boekgeschenken, p. 886.

Erratum, p. 886.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen zijn :

1°. Bericht van de Heeren MAC GILLAVRY en MARTIN, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z. Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken, bericht gevende dat H. M. de Koningin de benoeming van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN en D. J. KORTEWEG tot Voorzitter en Onder-Voorzitter der Afdeeling heeft bekrachtigd.

3°. Circulaire van het U. S. Naval Observatory te Washington over een „Notice of a special series of midnight Telegraphic time signals to be sent out by the U. S. Naval Observatory on May 3, 1905.”

De Voorzitter deelt mede, dat er pogingen in 't werk zullen worden gesteld om aan het verzoek om medewerking te voldoen, evenwel meent hij dat voor de Afdeeling als zoodanig geen aanleiding bestaat om deze zaak ter hand te nemen; hij stelt voor de circulaire voor kennisgeving aan te nemen. Aldus wordt besloten.

4°. Uitnoodiging van den Naturwissenschaftlichen Verein für Schleswig-Holstein te Kiel tot bijwoning van het feest ter herdenking van het 50-jarig bestaan der Vereeniging op 17/18 Juni a.s.

Zal met een schrijven van gelukwensch beantwoord worden.

5°. Circulaire van het Congrès international de Botanique, van 11—18 Juni 1905 te Weenen te houden, ter begeleiding van een drietal exemplaren van den Texte synoptique des documents destinés à servir de base aux débats du congrès.

Voor kennisgeving aangenomen.

6°. Circulaire van het 4th International ornithological Congress van 12—17 Juni a.s. te Londen te houden.

7°. Schrijven van den Heer H. VAN MEERTEN te Buitenzorg, waarin de wenschelijkheid wordt uitgesproken om het verband na te gaan tusschen de verschillende physische eigenschappen van het water en dit, proefondervindelijk bepaald, wetenschappelijk op te zoeken.

De Voorzitter verzoekt de Heeren KAMERLINGH ONNES en ZEEMAN hieromtrent van advies te willen dienen.

Physiologie. — De Heer PLACE biedt een mededeeling aan van den Heer ERNST DE VRIES: „*Over het Ganglion Vomeronasale*”.

(Mede aangeboden door den Heer ZWAARDEMAKER).

Een goed gefixeerd menschelijk embryo gaf aanleiding tot enkele opmerkingen over de structuur van eenige tot het rhinencephalon behorende deelen. Het embryo was gefixeerd in 10 % oplossing van formaldehyd, en mat na de fixatie 55 m.M. over zijn grootste lengte. De ouderdom was niet bekend, maar de lengte, en het feit dat het corpus callosum nog niet was ontwikkeld, wijzen op een ouderdom van $2\frac{1}{2}$ —3 maanden.

Na de fixatie werd de schedel dicht langs de basis cranii afgesneden, in paraffine ingesmolten, en in een volkomen serie frontale coupes, ter dikte van $10\ \mu$ gesneden. Hierbij kon een lichte afwijking der coupes van het frontale vlak niet vermeden worden, zoodat de rechter hemisfeer het eerst werd getroffen. Het grootste gedeelte der coupes werd met haematoxyline en eosine gekleurd, enkele op een andere manier met haematoxyline alleen.

Hier volgt eene beschrijving van de rechter foetale hemisfeer, die in de microscopische praeparaten als de linker helft gezien wordt. Alleen die deelen, die meer direct op het rhinencephalon betrekking hebben, worden besproken; tevens zijn hieraan toegevoegd 4 teekeningen van dwarscoupes, en twee halfschematische constructiefiguren, n.l. projecties van den lobus olfactorius op een sagittaal verlopend vlak, uit de opeenvolgende coupes geconstrueerd. Deze beide figuren vertoonen dus alleen die krommingen van den lobus olfactorius, welke in een sagittaal vlak verlopen, of een component in deze richting hebben; de lijnen genummerd I—IV geven de plaatsen aan der geteekende dwarscoupes.

In dit stadium van ontwikkeling is de lobus olfactorius een uitstulping van de hemisfeerenbasis naar beneden, waarin zich een deel van den ventriculus lateralis voortzet. Aan de externe zijde van den lateralen wand van de hemisfeer geeft een vlakke groeve, de fissura rhinica, de grens aan tusschen reuklob en hemisfeer. Deze fissura rhinica (fig. I, II, III, F. rh.) loopt in fronto-occipitale richting.

De externe zijde van den medialen hemisfeerenwand vertoont ook een groeve als grens tusschen lobus olfactorius en hemisfeer, de breede fissura prima van His, die in het meest naar voren liggende deel ook in fronto-occipitale richting verloopt, naar achteren echter zich meer verticaal ombuigt (fig. I, II, F. pr.).

Door deze beide groeven begrensd, vertoont de lobus olfactorius een dubbele kromming: van lateraal naar mediaal, en in geringe mate van achteren naar voren. Het cornu anterius van den lateralen ventrikel stulpt zich in den lobus olfactorius uit, om vlak onder den top van den bulbus te eindigen. Ook hier ziet men dezelfde krommingen; de voorwaartsche kromming echter is in de linker hemisfeer duidelijker uitgedrukt. Afgezien van deze krommingen heeft dit deel van den ventrikel een trechtervormige gedaante, met de punt aan den top van den bulbus olfactorius, en het breedste gedeelte uitmondende in den lateralen ventrikel van de hemisfeer.

De groeven aan de buitenzijde van den lobus olfactorius laten op de binnenvlakte niet de minste daarmede overeenkomende instulping zien. De ventriculaire zijde van den lateralen wand is verdikt door het corpus striatum, dat scherp begrensd begint 2 m.M. achter de frontale pool van de hemisfeer. Het door His beschreven „Crus epirhinicum”, dat van het striatum uit naar voren verloopende, dit laatste met het rhinencephalon moet verbinden, bestaat hier niet. Ook naar de ventrale zijde is het corpus striatum scherp begrensd, hier een lijst vormende, de crista ventralis corporis striati (fig. I, Cr. v. str.) die begeleid wordt door een diepe groeve, den sulcus ventralis striati (fig. I, S. v. str.). Deze groeve aan de interne zijde van den lobus olfactorius komt niet geheel overeen met de fissura rhinica der externe zijde. De ventrale striatumlijst loopt eerst in voor-achterwaartsche richting, en buigt vervolgens meer naar mediaal en ventraal om op den achterwand der trechtervormige uitstulping van den lateralen ventrikel in den lobus olfactorius. Op den medialen wand gekomen gaat deze lijst over in een analoge vorming van dezen wand, welke tot het rhinencephalon behoort.

De formatie der interne zijde van den medialen wand doet zich voor als een scherp begrensde verdikking waaraan echter niet beantwoordt eenige verandering der buitenoppervlakte. Zij begint, vrij scherp begrensd, op iets grooter afstand van de frontale pool van de hemisfeer dan het corpus striatum. Dorsaal en ventraal is deze verdikking begrensd door zeer diepe groeven, de sulci rhinencephali dorsalis en ventralis (fig. I, II, S. rh. d. en S. rh. v.). De ventrale rand nu dezer verdikking aan den medialen hemisfeerenwand, de crista rhinencephali ventralis, verloopt eerst in fronto-occipitale richting, om dan over te gaan in de reeds besproken crista ventralis striati (zie fig. II, cr. v., waar de lijst schuin is getroffen in haar verloop over den achterwand der trechtervormige holte van den lobus olfactorius).

Bezien wij deze lijst van boven, dan heeft zij eene hoefijzervormige

gedaante, met de opening naar voren gekeerd, terwijl de top naar achteren, en tevens iets naar ventraal komt te liggen. De verbinding tusschen corpus striatum en rhinencephalon, welke oorspronkelijk in de basis van den zijventrikel gelegen was, komt door het uitgroeien van het rhinencephalon, en de daarmee gepaard gaande uitstulping van den ventriculus lateralis, op den achterwand dezer uitstulping te liggen. De verbinding tusschen striatum en rhinencephalon is dus primair.

In deze phase van ontwikkeling wordt de bulbus olfactorius begrensd door een cirkelvormige groeve, de sulcus circularis bulbi (fig. I, II, V, S. c. b.), die, aan de voorzijde diep insnijdende, aan de beide zijvlakken wat minder diep wordt, en aan den achterkant van den bulbus slechts een vlakke groeve vormt. De top van den bulbus ligt ventraal, en iets naar mediaal, terwijl de vorm uit fig. V duidelijk is.

De zenuwen die tot de formatie van het rhinencephalon behooren, vormen twee groepen, van elkaar geheel gescheiden, welke zich op twee verschillende plaatsen met het cerebrum verbinden. De vezels van de eerste soort, de *Nn. olfactorii s. str.* treden aan den top van den bulbus olfactorius in het rhinencephalon. Zij zijn van de tweede, straks te bespreken soort gemakkelijk te onderscheiden doordat zij zeer weinig kernen bevatten, die tevens kleiner zijn, en doordat de grondsubstantie zich met eosine belangrijk zwakker kleurt dan de tweede soort. Deze zenuwen begeven zich naar het slijmvlies der regio olfactoria, waar zij in zeer fijne takjes eindigen. Nergens bestaat een verbinding dezer zenuwen met die der tweede soort.

De tweede soort van zenuwen verlaat de hersenen in vier stammen, in het mediale deel van den sulcus circularis bulbi, waar tevens de oppervlakkige laag van den wand van de hemisfeer veel rijker is aan langwerpige kernen (A. vn. fig. I, II, III, IV, VI). Deze vier wortels hebben veel meer, en grooter kernen dan de *Nn. olfactorii*, terwijl eosine veel sterker wordt opgenomen.

Samen vereenigen zich deze vier wortels (fig. III, IV, VI, Rd. vn.) in het ganglion olfactorium (fig. III, IV, VI, G. vn.).

De hieruit komende zenuwvezels vormen vijf stammen (fig. VI, Nn. vn.) welke alle komen te liggen langs het mediane neustusschot. Doordat echter de schedel van het embryo hier langs de basis cranii was afgesneden, kon hun verloop niet verder worden nagegaan.

Een tweede menschelijk embryo echter van ongeveer denzelfden ouderdom, doch slecht geconserveerd, toonde in hoofdzaak dezelfde verhoudingen. Hier was het mogelijk den geheelen loop der uit het ganglion komende zenuwstammen te vervolgen in de submucosa van

het septum mediale nasi, waar zij alle convergeerend liepen naar het Organon vomeronasale (RUYSCH, JACOBSON), om daarin te eindigen. Deze *nervi vomeronasales* zijn niet alleen veel rijker aan kernen dan de nervi olfactorii, maar zij bevatten ook over bijna hun geheele verloop duidelijke ganglien-cellen.

Het ganglion olfactorium van His heeft dus met de echte reukzenuwen geen verbinding, maar is het *Ganglion vomeronasale*, sensorisch ganglion, behoorende bij het JACOBSON'sche orgaan (fig. VI). Bij het menschelijk embryo van twee en een halve maand ligt het, zooals de halfschematische figuur VI laat zien, in het niveau van den bulbus olfactorius en mediaal hiervan. Naar de peripherie gaan hiervan af de nervi vomeronasales, en centraalwaarts gaan de z.g. interne wortels van de reukzenuw (Rd. vn.) naar een breed, driehoekig veld aan de oppervlakte van de hemisfeer, de *Area vomeronasalis* (A. vn.), waar zij de hersenen binnentreden.

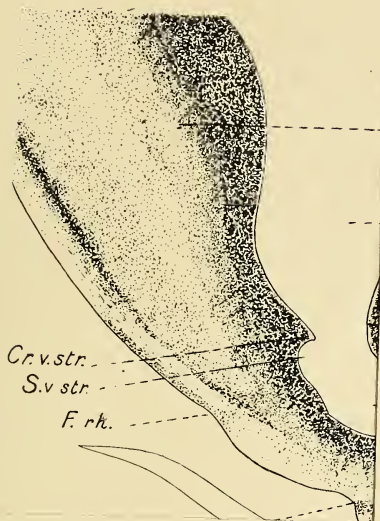
Onderzoekt men de verhoudingen bij *Cavia cobaya*, dan blijkt het JACOBSON'sche orgaan hier twee zenuwstammen te bezitten, die op geringen afstand, nog in de submucosa van den neus, ieder een aanzwelling vertoonen, waarin een groot aantal gangliencellen liggen. Het hier dus parige ganglion vomeronasale heeft twee wortels, die zich echter spoedig vereenigen met de nervi olfactorii, waarmee zij nu samen door de Lamina cribrosa de schedelholte bereiken, waar zij zich sikkelvormig om den bulbus olfactorius uitbreiden, aan de mediale zijde tot in den sulcus circularis bulbi, lateraal iets minder ver.

Waarschijnlijk zullen alle vertebraten deze verhoudingen vertoonen, en ofschoon men aan het bestaan van een JACOBSON's orgaan bij anamnia kan twijfelen, is het toch zeer waarschijnlijk dat de zenuw beschreven door LOCY (Anat. Anzeiger, 1905 Heft 2 en 3) bij Selachiers, identisch is met de boven beschreven nervus vomeronasalis.

Het organon vomeronasale moet men dus beschouwen als een apart zintuig, met onbekende functie, maar in alle gevallen geheel onafhankelijk van de peripheere reukbanen, daarentegen wel tot het rhinencephalon behoorende.

Mijn dank breng ik hier aan Prof. J. W. LANGELAAN, onder wiens leiding de bovenstaande onderzoekingen zijn gedaan.

ERNST DE VRIES: „Over



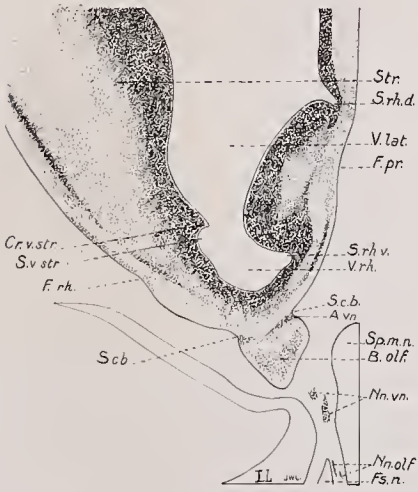


Fig. 1.

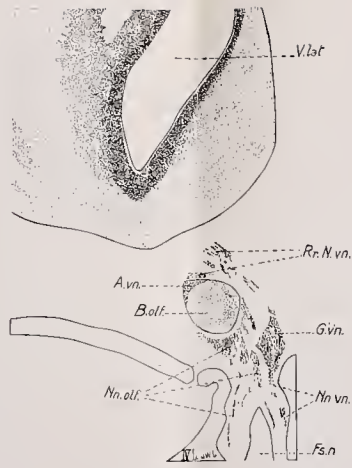


Fig. 4.

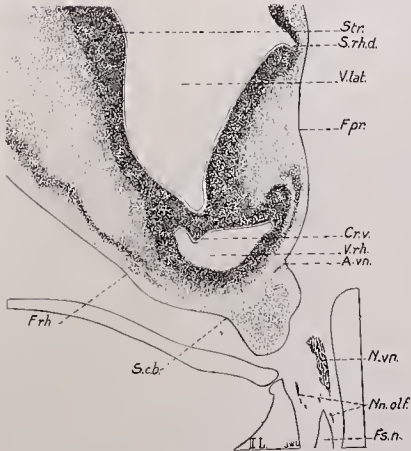


Fig. 2.

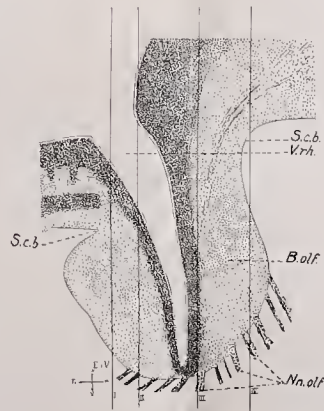


Fig. 5.

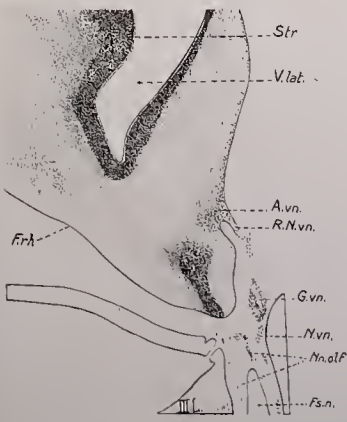


Fig. 3.

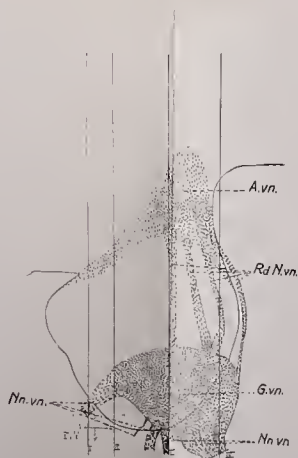


Fig. 6.

Physiologie. — De Heer PLACE biedt een mededeeling aan van den Heer J. W. VAN BISSELIK (uit het anatomisch kabinet te Leiden): „*Over de innervatie van het rompmyootoom*”.

(Mede aangeboden door den Heer W. EINTHOVEN).

Dit onderzoek is een vervolg op de eerste mededeeling van Prof. LANGELAAN: „*Over den vorm van het rompmyootoom*”¹⁾ en is onder diens leiding gedaan in het anatomisch kabinet te Leiden.

Het doel van dit onderzoek was na te gaan of een enkele spinale zenuw een enkel myotoom innerveerde.

De methode, die gevolgd werd, bestond uit het prepareren van een spinale zenuw, om te zien of de verschillende gebieden, waarheen de vezels van die spinale zenuw liepen, tot één en hetzelfde myotoom behoorden. Hiertoe werd een *Acanthias* of *Mustelus* overlangs doorgesneden en met $\frac{1}{10}$ % osmiumzuur-oplossing behandeld. De zenuwen kleurden zich zwart en waren met het bloote oog of met een loupe gemakkelijk te volgen.

Het bleek toen dat alle zenuwen door het bindweefsel gingen, dat tusschen de myotomen ligt, zoodat het noodzakelijk was dit intermyotomale weefsel nauwkeurig te prepareren.

Het myotoom zelf is bedekt door een zeer dunne laag fibreus weefsel, dat het perimysium voorstelt. Dit perimysium strekt zich uit tusschen de spiervezels van het myotoom en vormt zoo het endomysium. Dit omgeeft aan alle kanten de spiervezels en steunt op die wijze het spierweefsel. Waar het spierweefsel onderbroken is, loopt dit steunweefsel door en stelt ons zodoende in staat te herkennen, welke deelen van het spierweefsel tot één myotoom behooren. De myotomen, die aldus bedekt worden door hun perimysium, zijn van elkaar gescheiden door een grover en dichter fibreus weefsel. Dit intermyotomale weefsel vormt lamellen, die slechts zeer los verbonden zijn met het perimysium, zoodat het mogelijk is, deze lamellen te isoleeren.

De lamellen gaan in het fibreuze weefsel van de huid over en ofschoon ze daarmede één samenhangend geheel vormen, is de plaats van overgang duidelijk aanwezig. Waar het myotoom een eenvoudigen vorm heeft, valt deze overgang samen met de grens van het myotoom; is het myotoom echter in een piek verlengd, dan kruist die insertielijn de piek.

Fig. I stelt het buitenoppervlak voor, uitgerold in een plat vlak.

¹⁾ Verslag K. Akad. v. W. Amsterdam, 28 Mei 1904.

De zwarte lijn geeft den overgang aan van het intermyotomale septum in de huid. Waar het myotoom zich tot een piek verlengd heeft is het septum uitgerekt, daar de overgangslijn gefixeerd is op de huid. Aangezien de geheele piek bedekt is door dit uitgerekte deel van het septum, ligt dit, voorzoover de piek tegen de huid aanligt, tegen het corium. Dit gedeelte is driehoekig van vorm en slechts zeer los door enkele vezels met het corium verbonden. Dit maakt het mogelijk deze driehoekige slippin van het corium los te prepareeren. De overgang van het intermyotomale weefsel op de overgangslijn is direct.

Evenals de myotomen over elkaar grijpen, doen dit ook de driehoekige slippin van het intermyotomale weefsel. Samenhangend met de richting waarin de piek zich uitstrekt, zien wij, dat slippin behoorend bij pieken, die gericht zijn naar het caudale einde van het lichaam, elkander zoodanig bedekken, dat een meer caudale slip boven een meer craniale ligt. Bij een naar den kop gerichte piek ligt juist de slip, die meer craniaal overgaat in de huid, het oppervlakkigst. Fig. II geeft het intermyotomale weefsel aan, voorzoover het tegen de huid aanligt.

Aan de mediale zijde gaat het intermyotomale septum over in het bindweefsel, dat het asskelet bedekt. Dit gaat dorsaalwaarts over in een lamel, die de rechter van de linker helft van de dorsale musculatuur scheidt. Ventraalwaarts gaat dit bindweefsel over in de fascia transversa, welke het cavum abdominale bekleedt.

Fig. III stelt de overgangslijn voor van het intermyotomale septum. Zooals men ziet zijn er twee plaatsen, waar het spierweefsel is onderbroken, omdat het myotoom van buiten naar binnen steeds dunner wordt. Waar dit gebeurt, liggen de lamellen tegen elkaar en vormen zoo twee doorlopende septa. De afstand, waarover het spierweefsel is onderbroken in de nabijheid van het sagittale vlak, bedraagt drie myotomen voor het eerste septum en twee voor het tweede. Er liggen dus vier respect. drie lamellen in die septa tegen elkaar. De gestippelde velden in fig. III behooren tot één myotoom, zooals blijkt, wanneer het myotoom geprepareerd wordt.

Elke spinale zenuw ontspringt uit het ruggemerg met twee wortels, die afzonderlijk het ruggemergskanaal verlaten door twee openingen (*AR* en *PR* fig. IV). Zoodra de wortels het ruggemergskanaal verlaten hebben, verdeelen zij zich ieder in twee takken, waarvan de één opstijgt (asc. f.) en de ander neerdaalt (desc. f. fig. VI). Beide opstijgende takken vereenigen zich en vormen een gemengde zenuw, den ramus posterior internus (int. br. fig. VI). De zijtakken hiervan gaan in het intermyotomale weefsel over bij 3 *D* — 5 *D* (fig. IV)

en verlaten het septum om in de huid over te gaan, op de in fig. V gelijkelijk aangeduide plaatsen. Voordat deze zijtakken de huid bereiken, geven ze weder zijtakjes af, die de uitgerekte deelen van het intermyotomale weefsel, welke tegen de huid aanliggen, innerveeren.

Voordat de opstijgende worteltakken zich vereenigd hebben, geven zij ieder een dun zijtakje af. Deze zijtakjes vereenigen zich tot een dunne gemengde zenuw, den eersten ramus posterior externus (ext. br. I. fig. VI). Zij treden bij 2 *D* fig. IV in het septum om op de overeenkomstige plaats (fig. V) in de huid over te gaan.

Beide neerdalende worteltakken geven voor hun vereeniging elk een dun zijtakje af, die samen een dunne gemengde zenuw vormen, den tweeden ramus posterior externus (ext. br. II fig. VI). Deze huidtak treedt in en verlaat het septum bij 1 *D* (fig. IV en V).

De tot nu toe beschreven zenuwen innerveeren het dorsale deel van het myotoom en het intermyotomale weefsel.

De neerdalende worteltakken vereenigen zich en vormen een gemengde zenuw, die zich weldra in twee deelen splitst. De eene tak innerveert het laterale deel van het myotoom en het intermyotomale weefsel, terwijl de andere de voortzetting is van den hoofdstam, die aan de mediale zijde dwars over de myotomen heenloopt en het ventrale deel van het myotoom en het intermyotomale weefsel innerveert. De tak voor het laterale deel van het myotoom splitst zich in twee deelen, een ramus lateralis externus en internus (ext. br. en int. br. fig. VI). De ramus externus verdeelt zich wederom in twee takjes, waarvan de een recurrent is en den top van het laterale deel van het myotoom innerveert. De ramus externus treedt in het septum bij *L* 1 . 2 (fig. IV) en verlaat het bij 1 *L* en 2 *L* (fig. V). De ramus internus treedt in bij 3 *L* — 6 *L* (fig. IV) en verlaat het septum bij 3 *L* — 6 *L* (fig. V).

De tak, die het ventrale deel van het myotoom en het intermyotomale septum innerveert, vertoont een dergelijk beeld als de tak voor het laterale deel. Deze tak verdeelt zich eveneens in twee takken, namelijk een ramus anterior externus en internus. De ramus anterior externus gaat bij *V* 1 . 2 . (fig. IV) in het septum en verdeelt zich in twee fijnere zijtakken, waarvan de een rechtstreeks de huid bereikt (2 *V*) en de andere eerst een eind terugloopt (recurrent), om daarna in de huid over te gaan (1 *V* fig. V). De ramus anterior internus kan men tot de vena lateralis (*V* . *L* . fig. IV) vervolgen. Hij gaat dan in een ijlen plexus over. Op zijn weg naar de vena laterales geeft de ramus anterior internus verscheiden takken af, die de huid langs het intermyotomale septum bereiken (3 *V*—6 *V*

fig. IV en V). 5 V en 6 V vormen echter voordat ze in de huid overgaan een plexus, welke de meest ventrale deelen van het myotoom bedekt.

De wortels en hoofdtakken van de spinale zenuw hebben een submyotomaal verloop en ondergaan geen onmiddellijken invloed van den vorm van het myotoom. De zijtakken daarentegen, die alle langs het septum de huid bereiken, zijn daardoor gebonden aan den vorm van myotoom.

Het verloop van de eindtakjes in het corium werd nog niet volledig genoeg bestudeerd voor een mededeeling van de uitkomsten.

De boven gegeven beschrijving van de spinale zenuw heeft alleen betrekking op het gedeelte van den romp tusschen de borstvin en de eerste rugvin.

Conclusies:

1. Eén spinale zenuw innerveert één myotoom en het intermyotomale weefsel, waardoor de zijtakken verloopen.

2. De wortels en hoofdtakken liggen submyotomaal; de zijtakken doorboren nooit een myotoom, maar gaan altijd door het intermyotomale weefsel naar de huid. In het algemeen liggen ze tusschen het perimysium en het intermyotomale weefsel.

3. In overeenstemming met den vorm van het myotoom vertoont de spinale zenuw een verdeling in een dorsale, laterale en ventrale tak.

4. Alle grootere zijtakken zijn gemengd en bevatten dus elementen zoowel van den voorsten als van den achtersten wortel.

Wiskunde. — De Heer CARDINAAL biedt een mededeeling aan van den Heer K. BES: „*De vergelijking van den negenden graad, voorstellende de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken.*”

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

1. In het verslag van de gewone vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeling van 28 Januari 1905 komt eene mededeeling voor van Prof. CARDINAAL „Over de vergelijkingen, waardoor de meetkundige plaats der hoofdassen van een bundel kwadratische oppervlakken bepaald wordt”.

2. Prof. CARDINAAL stelt drie niet homogene vergelijkingen van den tweeden graad op tusschen twee veranderlijke parameters λ en k ,



ing van
itkomst,
n graad
en weg
egenden
toe aan
evatten,
ensch te

el „Thé-
7) geeft
emen en
bepalen.
na deze
derlijke
(1) van

deze de

$$\left. \begin{array}{l})\lambda\mu + \\)\lambda\mu + \\)\lambda\mu + \end{array} \right\} (\alpha)$$

der loo-
n nu de

$$Q_1 = a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + a_{13}B_3 + b_{11}A_1 + b_{12}A_2 + b_{13}A_3,$$

$$Q_2 = a_{21}B_1 + a_{22}B_2 + a_{23}B_3 + b_{21}A_1 + b_{22}A_2 + b_{23}A_3,$$

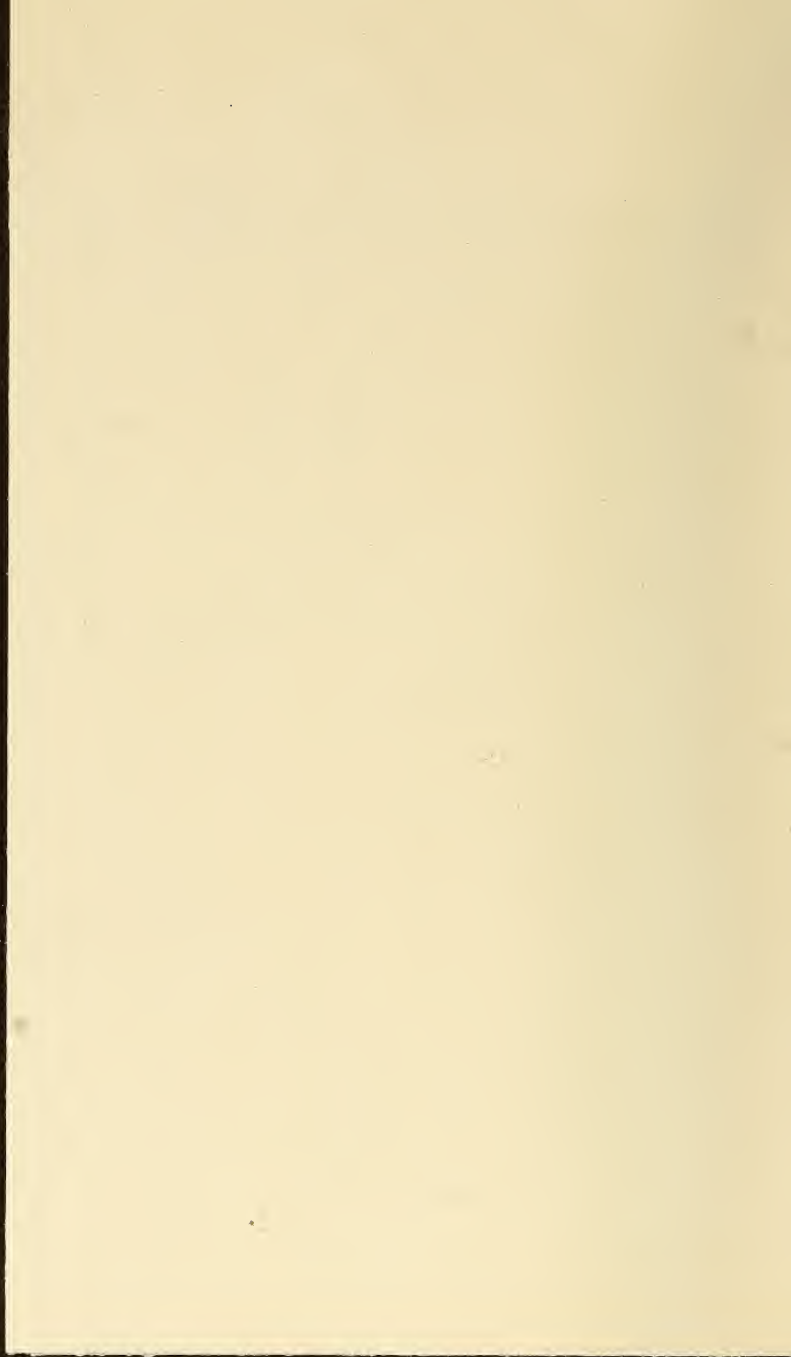
$$Q_3 = a_{31}B_1 + a_{32}B_2 + a_{33}B_3 + b_{31}A_1 + b_{32}A_2 + b_{33}A_3,$$

$$R_1 = b_{11}B_1 + b_{12}B_2 + b_{13}B_3,$$

$$R_2 = b_{21}B_1 + b_{22}B_2 + b_{23}B_3,$$

$$R_3 = b_{31}B_1 + b_{32}B_2 + b_{33}B_3,$$

waardoor de vergelijkingen (α) overgaan in de volgende :



en tracht door eliminatie dezer parameters tot de vergelijking van het gevraagde oppervlak te komen. De door hem verkregen uitkomst, vergelijking (8), schijnt eene vergelijking van den twaalfden graad te zijn. Dit is in strijd met het door hem langs meetkundigen weg verkregen resultaat, hetwelk eene vergelijking van den negenden graad deed verwachten. Hij schrijft deze tegenstrijdigheid toe aan factoren, die de gevonden vergelijking mogelijkerwijze kan bevatten, zonder evenwel in het zoeken naar deze factoren naar wensch te slagen.

3. De methode van eliminatie voorgedragen in mijn opstel „Théorie générale de l'élimination” (Verhandelingen, Dl. VI, n^o. 7) geeft het middel aan de hand bedoelde tegenstrijdigheid weg te nemen en de door Prof. CARDINAAL gezochte vergelijking werkelijk te bepalen.

Daartoe kan men uitgaan van zijne vergelijkingen (5), na deze vooraf homogeen gemaakt te hebben ten opzichte der veranderlijke parameters, hetwelk geschieden kan door de vergelijking (1) van den oppervlakkenbundel aan te nemen in den vorm :

$$\mu A + \lambda B = 0 .$$

Ontwikkelt men nu de vergelijkingen (5), dan nemen deze de volgende gedaante aan :

$$\left. \begin{aligned} (a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3)\mu^2 + (a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + a_{13}B_3 + b_{11}A_1 + b_{12}A_2 + b_{13}A_3)\lambda\mu + \\ + (b_{11}B_1 + b_{12}B_2 + b_{13}B_3)\lambda^2 + A_1\mu k + A_1\lambda k = 0 , \\ (a_{12}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3)\mu^2 + (a_{12}B_1 + a_{22}B_2 + a_{23}B_3 + b_{12}A_1 + b_{22}A_2 + b_{23}A_3)\lambda\mu + \\ + b_{12}B_1 + b_{22}B_2 + b_{23}B_3)\lambda^2 + A_2\mu k + B_2\lambda k = 0 , \\ (a_{13}A_1 + a_{23}A_2 + a_{33}A_3)\mu^2 + (a_{13}B_1 + a_{23}B_2 + a_{33}B_3 + b_{13}A_1 + b_{23}A_2 + b_{33}A_3)\lambda\mu + \\ + (b_{13}B_1 + b_{23}B_2 + b_{33}B_3)\lambda^2 + A_3\mu k + B_3\lambda k = 0 . \end{aligned} \right\} (a)$$

De coëfficiënten dezer vergelijkingen zijn lineaire functiën der loopende coördinaten x , y en z . Ter vereenvoudiging kan men nu de volgende notaties invoeren :

$$\begin{aligned} P_1 &= a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3 , \\ P_2 &= a_{12}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3 , \\ P_3 &= a_{13}A_1 + a_{23}A_2 + a_{33}A_3 , \\ Q_1 &= a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + a_{13}B_3 + b_{11}A_1 + b_{12}A_2 + b_{13}A_3 , \\ Q_2 &= a_{12}B_1 + a_{22}B_2 + a_{23}B_3 + b_{12}A_1 + b_{22}A_2 + b_{23}A_3 , \\ Q_3 &= a_{13}B_1 + a_{23}B_2 + a_{33}B_3 + b_{13}A_1 + b_{23}A_2 + b_{33}A_3 , \\ R_1 &= b_{11}B_1 + b_{12}B_2 + b_{13}B_3 , \\ R_2 &= b_{12}B_1 + b_{22}B_2 + b_{23}B_3 , \\ R_3 &= b_{13}B_1 + b_{23}B_2 + b_{33}B_3 , \end{aligned}$$

waardoor de vergelijkingen (a) overgaan in de volgende :

$$\left. \begin{aligned} P_1 \mu^2 + Q_1 \lambda \mu + R_1 \lambda^2 + A_1 \mu k + B_1 \lambda k &= 0, \\ P_2 \mu^2 + Q_2 \lambda \mu + R_2 \lambda^2 + A_2 \mu k + B_2 \lambda k &= 0, \\ P_3 \mu^2 + Q_3 \lambda \mu + R_3 \lambda^2 + A_3 \mu k + B_3 \lambda k &= 0, \end{aligned} \right\} \dots (b).$$

4. Welke voorwaarde moet nu tusschen de coëfficiënten dezer vergelijkingen bestaan, zullen zij een gemeenschappelijk wortelstelsel toelaten? Het antwoord op deze vraag luidt, dat daarvoor geen voorwaarde vereischt wordt. Aan deze vergelijkingen wordt namelijk voldaan, onafhankelijk van de waarden der coëfficiënten, door het wortelstelsel :

$$\lambda = 0, \quad \mu = 0, \quad k = \text{willekeurig}.$$

Hiermede in overeenstemming is het resultaat, dat men verkrijgt door toepassing der methode aangegeven in § 118 mijner verhandeling „Théorie générale de l'élimination.” Volgens deze methode zou men voor den resultant moeten vinden het quotient van twee determinanten achtereenvolgens van den 15^{den} en van den 3^{den} graad. In het onderhavige geval, waarin men heeft

$$a_6 = 0, \quad b_6 = 0 \text{ en } c_6 = 0,$$

verkrijgt men, hoe men de determinanten ook kieze, steeds tot quotient eene grootheid, die identiek nul is.

De bovenvermelde vergelijking (8) kan dus ook niet anders zijn dan eene identiteit.

5. Nadat dit resultaat is vastgesteld, is het niet moeilijk meer de vraag te beantwoorden, hoe men de vergelijking der verlangde meetkundige plaats kan verkrijgen. Daartoe moet men de voorwaarde uitdrukken, dat aan de vergelijkingen (b) voldaan wordt door nog een tweede stelsel wortels.

De hiervoor vereischte voorwaarde is, dat alle determinanten gelijk aan nul zijn bevat in den assemblant (85), voorkomende in § 118 der reeds vermelde verhandeling. Toegepast op de vergelijkingen (b), geeft dit slechts één vergelijking, n.l.:

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 P_1 & Q_2 P_2 & Q_3 P_3 \\ R_1 & P_1 R_2 & P_2 R_3 & P_3 \\ A_1 Q_1 & A_2 Q_2 & A_3 Q_3 \\ B_1 R_1 Q_1 & B_2 R_2 Q_2 & B_3 R_3 Q_3 \\ & R_1 & R_2 & R_3 \\ & A_1 & A_2 & A_3 \\ & B_1 A_1 & B_2 A_2 & B_3 A_3 \\ & & B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = 0,$$

zijnde de vergelijking der verlangde meetkundige plaats. Zij is van den negenden graad, in overeenstemming met de meetkundige onderzoekingen van Prof. CARDINAAL.

Dierkunde. — De Heer VOSMAER biedt, mede namens Prof. Dr. H. P. WIJSMAN, een mededeeling aan: „*Over den bouw van sommige kiezelspicula bij Sponzen. I. De styli van Tethya lyncurium.*”

Nadat SCHWEIGGER (1819) had aangetoond, dat de spicula van Sponzen in sommige gevallen *niet* uit koolzure kalk bestaan, vond GRANT (1826) dat zij kiezel bevatten en BOWERBANK (1841 a) wees er ten slotte op, dat er buitendien nog organische stof aanwezig is. Hij steunde daarbij op de waarneming, dat bij verhitting een deel verkoolde. KÖLLIKER (1864) merkte intusschen op, dat de bruine of zwarte kleur die bij verhitting optreedt, stellig niet alléén mag worden toegeschreven aan verkoolde organische stof; bij opvallend licht schijnen de verhitte spicula wit, en de donkere plaatsen bij doervallend licht wezen dus op de aanwezigheid van „iucht”. THOULET (1884) vond dan ook geen organische stof en komt tot de slotsom: „les spicules sont donc constitués par de la silice pure”, die hij met opaal vergelijkt. Ook SOLLAS (1885) vindt de kiezelstof op opaal gelijkend. Sedert dien tijd is men het er over eens geworden, dat de spicula van kiezelponzen bestaan uit een soort opaal, en dat op een of andere wijze toch organische stof aanwezig is. Hiermede houdt echter de eensgezindheid op. De chemische analyses toch, die zijn verricht, wijzen aanmerkelijke verschillen aan omtrent de hoeveelheid water verbonden aan de kiezel in den vorm van een gel. Pogingen om de stof door een formule aan te duiden zijn dan ook als mislukt te beschouwen; de formules wisselen van $2 (SiO_2) + H_2O$ tot $5 (SiO_2) + H_2O$. F. E. SCHULZE (1904) trekt hieruit het besluit: „dass, entweder die Siphone keinen bestimmten konstanten Wassergehalt haben, oder dass die organischen Zwischenlamellen . . . einen je nach der vorgängigen stärkeren oder geringeren Austrocknung wechselnden Gehalt an Wasser haben”.

Zeker is wel dit, dat zelfs in het gunstigste geval de hoeveelheid organische stof zóó gering is dat zij chemisch niet met zekerheid kon worden aangetoond. Behandeling der spicula met fluorwaterstofzuur heeft intusschen voldoende zekerheid gegeven, dat die organische stof toch aanwezig is. In welken vorm en waar die in de spicula wordt aangetroffen, daarover heerscht evenzeer verschil van meening. Wij zullen zien, dat dit voor verschillende spicula zeer verschillend is.

Behalve de kiezel, die zich als een soort opaal gedraagt, en waarvoor wij den naam *spicopaal* voorstellen, en de organische stof, welke F. E. SCHULZE, met uitbreiding van den oorspronkelijk door HAECKEL

gebezigten term, *spiculine* genoemd heeft, zijn in sommige kiezel-spicula nog sporen gevonden van Na, K, Cl, Fe, Mg, en Ca. De hoeveelheid van deze stoffen is echter zóó gering, dat zij voor onze beschouwingen mögen worden verwaarloosd.

Wat nu den bouw der kiezel-spicula aangaat, zoo had reeds GRAY (1835) gevonden, dat de naalden van *Hyalonema* een lamellaire structuur bezitten, die vooral duidelijk wordt na verhitting. Deze lamellen liggen concentrisch om een kanaal, het centraalkanaal, welke holte, zooals KÖLLIKER (1864) het eerst aantoonde, door een organische streng wordt opgevuld, den centraaldraad. CLAUS (1868) vond toen, dat de kiezel-massa, die onmiddellijk aansluit aan den centraaldraad, geen lamellairen bouw vertoont; hij noemde dien homogenen cylinder den ascyinder. Volgens MAX SCHULTZE (1860) zouden nu de longitudinale streepen, die men vooral na verhitting der naalden waarneemt, hieraan te danken zijn, dat lagen van kiezel met dunne organische lagen afwisselen; de eerste zijn volgens S. isotroop, de tweede anisotroop. De buitenste laag vond men in den regel van organischen aard.

In al deze gevallen hadden de onderzoekers slechts een bepaalde naaldsoort op het oog; het lag voor de hand, dat deze onderzoekingen bij voorkeur verricht zijn aan groote naalden. GRAY, CLAUS en MAX SCHULTZE onderzochten de groote naalden van Hexactinellida als *Hyalonema* en *Euplectella*. De vraag was in hoeverre een dergelijke bouw en samenstelling ook voor andere kiezel-spicula golden.

Reeds KÖLLIKER (l.c.) had er op gewezen, dat hij niet in alle gevallen den centraaldraad had kunnen aantoonen.

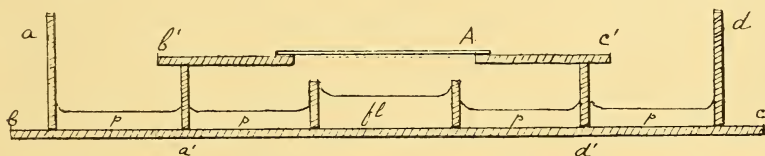
Evenmin is het gelukt vast te stellen, dat lagen spicopaal en spiculine altijd met elkander afwisselen, zelfs niet dáar, waar duidelijke longitudinale streepen zijn waar te nemen. Verwarring heerscht er met betrekking tot de aanwezigheid van een z.g.n. spiculum-scheede. Eenigszins nauwkeurige bepalingen der brekings-indices voor verschillende kiezel-spicula ontbreken.

Het was dus wenschelijk een poging te wagen hieromtrent meer zekerheid te verkrijgen. Sinds F. E. SCHULZE (1904) de enorme naalden van *Monorhaphis* nader onderzocht, scheen men hierin een leidraad te hebben om na te gaan, in hoeverre spicula van andere groepen al of niet overeenkomen in bouw, chemische en physische eigenschappen met die van genoemde Hexactinellida.

Wij zijn nu begonnen de groote bundelnaalden van *Tethya lynceurium* te onderzoeken. Eerst nadat wij hieromtrent eenige zekere gegevens hadden, hebben wij de uitkomsten vergeleken met hetgeen wij bij andere vormen vonden.

In de eerste plaats hebben wij een antwoord gezocht op de vraag : komen er in de lange naalden van *Tethya* behalve de centraaldraad nog andere organische elementen voor, hetzij in den vorm van een scheede, hetzij als lamellen tusschen de spicopaal-lagen, hetzij beide.

De meest voor de hand liggende methode om de organische stof op te sporen, is natuurlijk het oplossen van het spicopaal door fluoorwaterstofzuur. Vroegere onderzoekers, die dit middel hebben toegepast, hebben verzuimd nauwkeurig te vermelden hoe zij hun proeven inrichtten. Wanneer men, zooals SOLLAS (1888 p. XLIX) deed, de geïsoleerde spicula in een druppel water legt en een druppel fluoorwaterstofzuur toevoegt, dan ziet men in den regel het spicopaal spoedig oplossen en alleen den centraaldraad overblijven. Voegt men een te kleinen druppel fluoorwaterstofzuur toe, dan staakt de werking in den regel. Aangezien men de randen van het dekglas met balsem (SOLLAS) of iets dergelijks bestrijkt, ten einde te voorkomen dat de voor het mikroskoop uiterst gevaarlijke dampen vrij komen, kan de vloeistof waarin de spicula eenmaal liggen, niet zuurder worden gemaakt. Buitendien kan men op die wijze geen afdoende voorzorgen nemen om den invloed van het glas beslist uit te sluiten. De vraag was dus in de eerste plaats een toestel te bedenken waardoor men zonder gevaar voor de lenzen, naar willekeur de hoeveelheid fluoorwaterstof kon vermeerderen of verminderen. Aanvankelijk hebben wij daarvoor kastjes van eboniet vervaardigd voorzien van gezaponeerde venstertjes. Het fluoorwaterstofzuur trachtten wij in gasvormigen toestand door het toestelletje te voeren. Deze methode, theoretisch goed, bleek in de praktijk bezwaren te hebben, die zóo groot waren, dat wij ons op andere wijze trachtten te helpen. Wij meenen hierin ten slotte volkomen geslaagd te zijn en wel op vrij eenvoudige wijze. De bijgevoegde afbeelding spreekt grooten-



deels voor zich zelf. Uit een plaat doorzichtig celluloid van 1 mm dikte is een bakje *abcd* vervaardigd¹⁾. De bodem is 6×10 cm.;

¹⁾ De zuiver afgesneden en gereinigde celluloid-plaatjes worden met aceton gemakkelijk aan elkaar geplakt. Terwijl men de aan elkaar te bevestigen deelen tegen elkaar drukt, laat men met een dun penseel een kleine druppel aceton toevloeden. De celluloid-deelen kleven terstond aan elkaar. De naden worden voor alle zekerheid nog met zapon overgoten. Celluloid is te verkrijgen bij de D. Celluloid-Fabrik te Leipzig.

de hoogte 1.5 cm. Midden op den bodem van het bakje is een opstaande celluloid-rand hoog 5 mm. geplakt. Een tweede celluloid-bakje $a'b'c'd'$ meet 4.5×6 cm. (bodem) en is hoog 8 mm. In het midden van den bodem van dit bakje is een opening gesneden van 2×2.5 cm. Deze opening wordt van onderen gedekt door een dunner celluloid-plaatje (hoogstens 0.5 mm.) metende 2.5×3.5 cm. Dit dunne plaatje A wordt door middel van zachte paraffine lucht- en waterdicht bevestigd tegen $b'c'$. Nu brengt men de te onderzoeken spicula op den bodem van het bakje $a'b'c'd'$, bijv. in een druppel water. Ten einde dezen druppel vlak uit te breiden drukt men er een uiterst dun, droog vliesje celluloid tegen ¹⁾. Daarna giet men in de buitenruimte van het eerste bakje paraffinum liquidum (p), in de binnenruimte fluorwaterstofzuur (fl.) (uit den handel, op 3 of 4 water). Alsnu draait men het bakje $a'b'c'd'$ om, en plaatst het in $abcd$. Daar de ondervinding had geleerd, dat het fluorwaterstofzuur gasvormig op den duur door dunne laagjes celluloid heen dringt, kon men verwachten dat het uiterst dunne celluloid-vliesje geen beletsel zou zijn voor de dampen en dat deze dus de spicula wel zouden oplossen. Het heeft zelfs een voordeel, want de werking gaat daardoor nog geleidelijker en langzamer, zonder dat men genoodzaakt is zijn toe- vlucht te nemen tot zwakkere oplossingen.

Op deze wijze nu hebben wij een toestelletje verkregen, dat aan de eischen voldeed van: afwezigheid van glas, langzame inwerking en volkomen veiligheid (door de afsluiting met paraff. liq.) voor de lenzen, terwijl men de inwerking langer of korter kan doen duren al naar gelang men verkiest. Toen het ons gebleken was, dat het er voor onze onderzoekingen weinig toe deed of men de spicula (uit alcohol-preparaten) isoleerde door middel van kunstmatig maagsap (dagen bij 35° C.) of wel door eenvoudig koken met zoutzuur, hebben wij aan de laatste methode als eenvoudiger de voorkeur gegeven. Zulke in zoutzuur een paar minuten gekookte spicula werden herhaaldelijk met water gespoeld, al of niet gecentrifugeerd en bij kamertemperatuur gedroogd; wij bedoelen in het vervolg op deze wijze geïsoleerde spicula, indien niet het tegendeel uitdrukkelijk vermeld is. Brengt men nu eenige dezer spicula in een druppel water, gedekt door een celluloidvliesje, dan kan men die onder het mikroskoop bestudeeren, nagaan of zij een normaal voorkomen hebben, of zij gaaf zijn enz. enz. Ook, en daarvoor is *Tethya* een geschikt object, welke z.g.n. open, welke gesloten zijn. Na deze voorstudie van het preparaat, stellen

¹⁾ Vliesjes celluloid verkrijgt men eenvoudig door zapon in gewenschte dikte uit te gieten op een glazen plaat, op de wijze zooals men collodium platen vervaardigt.

wij het bloot aan de inwerking van fluorwaterstofzuur, op boven beschreven wijze. De tijd, welke verloopt vóór een begin van inwerking is waar te nemen, hangt natuurlijk af van de concentratie van het zuur, de dikte der waterlaag en de dikte van het celluloidvliesje. In den regel zagen wij na 30 à 50 minuten ontwijfelbare inwerking. Het is wenschelijk de aandacht allereerst te vestigen op breukvlakten, aangezien de werking hier het eerst onmiskenbaar wordt.

BÜTSCHLI (1901) wees er op, dat de oplossing van de kiezel op meer dan ééne wijze geschieden kan. Wij kunnen dit voor de staafnaalden van *Tethya* bevestigen. Let men op hetgeen er gebeurt aan het gebroken einde van een naald dan ziet men dat het z.g.n. centraalkanaal, d.w.z. de kiezel rondom den centraaldraad, trechtervormig wordt uitgehold. De tophoek van den kegel is van den aanvang af scherp, en wordt steeds scherper. Dit wordt terstond waargenomen bij het begin van de werking. BÜTSCHLI zegt (l. c. p. 258—259) hiervoor het volgende: „Män könnte wegen dieser so häufigen Bildung einer trichterförmigen Auflösungshöhle an den Enden auf die Vermuthung kommen, dass die Angreifbarkeit und Löslichkeit der Schichten von aussen nach innen, gegen den Achsenfaden successive zunehme. Eine solche Annahme scheint jedoch zur Erklärung der Erscheinung nicht nöthig, vielmehr dürfte sie sich schon daraus hinreichend erläutern, dass die Flusssäure allmählich in den geöffneten Achsenkanal eindringt und gleichzeitig auch in dem Masse stärker wirkt, als der Achsenkanal durch Auflösung erweitert wird, indem dann eine grössere Menge der Säure zur Verfügung steht.“ Wij meenen, dat het verschijnsel er wel degelijk op wijst, dat de binnenste spicopaal-lagen gemakkelijker oplossen. Immers, men ziet de scherp-kegelvormige uitholling reeds aanmerkelijk voortgeschreden, voor een spoor van inwerking aan de rest van de breukvlakte te zien is. De randen blijven geruimen tijd scherp. En overeenkomstige beelden verkrijgt men bij inwerking van kokende kaliloog. Nadat een dergelijke uitholling reeds vrij ver is voortgeschreden, begint het spiculum ook van buiten af op te lossen. Er ontstaat dan ten slotte een dunwandige kiezelloker waarin de centraaldraad vrij ligt, totdat alle spicopaal is verdwenen.

Beschouwt men de inwerking van het fluorwaterstofzuur aan volkomen gave naalden, dan ziet men weder eenig verschil naarmate de naald spits toeloopt of wel meer afgerond is. Stompe styli, een overgang vormende tot strongyli, bieden eenigen tijd aan de inwerking van het zuur weerstand; is echter eenmaal een oplossing van buiten af begonnen, dan gaat het proces regelmatig door; het spiculum

wordt steeds dunner. Bij puntig toeloopende styli wordt, naar het schijnt, de punt het eerst aangetast, en komt van buiten af de centraaldraad te voorschijn. In sommige gevallen wordt dan toch bovendien een uitholling langs den centraaldraad waargenomen. In andere gevallen heeft dit niet plaats, en men verkrijgt dan zeer eigenaardige beelden: het spiculum zelf wordt steeds dunner en van den centraaldraad wordt een steeds langer stuk zichtbaar, zoodat het geheel op een koetsierszweep gelijkt, te meer omdat de dunne draad meestal gekromd of gegolfd is als een koord, terwijl de rest recht blijft.

Reeds BÜTSCHLI wees er op, dat somtijds „durch lokale stärkere Auflösung der Kieselsubstanz dellenartige Vertiefungen der Nadeloberfläche” tot stand komen. „Indem diese Vertiefungen schliesslich zu Löchern werden, die bis zum Achsenkanal reichen, wird dieser der Flusssäure zugänglich und nun beginnt von diesen Löchern des Kanals aus . . . die innere Auflösung der Kieselsubstanz unter Entwicklung zweier trichterförmiger Höhlen . . .” Ook dit verschijnsel kunnen wij bevestigen; o. i. wijst het er evenzeer op, dat het spicopaal rondom den centraaldraad gemakkelijker oplost dan de periphere lagen, — het verschijnsel is bezwaarlijk anders te verklaren. Spicula, die op de boven beschreven wijze blootgesteld worden aan de inwerking van fluoorwaterstofzuur, leeren, dat na oplossing van het spicopaal niet alleen een organische centraaldraad overblijft, maar ook een uiterst dun vliesje, dat de buitenste laag spicopaal bedekte. Dit vliesje, dat dus de ware spiculum-scheede vertegenwoordigt, is buitengewoon teêr, zoodat het zeer spoedig scheurt en schrompelt. De aanwezigheid is toch o. i. buiten twijfel; om het als buitenste laagje te kunnen waarnemen, moet echter met groote voorzichtigheid worden gewerkt. In sommige preparaten vonden wij het in de meeste gevallen. Dat het niet altijd te zien is, kan voor een deel worden toegeschreven aan de zoutzuurbehandeling om de spicula te isoleeren, voor een deel ook misschien hieraan dat het reeds bij het leven van de spons is te gronde gegaan. Ook de centraaldraad is niet altijd aan te toonen of althans niet als gaaf draadje door de geheele lengte van het spiculum. Bij voorzichtige oplossing kan men waarnemen dat, terwijl de kiezelcylinder steeds dunner in diameter wordt, een fijn lijntje te zien is op de plaats van den oorspronkelijken buitenomtrek van het spiculum. Onderzoekt men de spicula in water, dan vertoonen zich de randen natuurlijk als vrij breede zwarte streepen, aangezien de brekings-index van het spicopaal aanmerkelijk hooger is dan die van het water. Bij de trapsgewijze oplossing komen de breede zwarte randen nader tot elkaar en duidelijk neemt men het fijne buitenrandje waar — de optische doorsnede

van de spiculum-scheede. Onderzoekt men, terwijl de fluorwaterstof inwerkt, in zure fuchsine, dan ziet men den centraaldraad zich donker rood kleuren naarmate deze vrij komt, terwijl de scheede flauw rood getint wordt.

Van de aanwezigheid van organische lamellen, zgn. spiculine-lamellen, zooals die zoo duidelijk en gemakkelijk is aan te toonen in de groote naalden van Hexactinellida, is bij *Tethya* niets te zien. Wel vonden wij enkele malen iets wat er op geleek, maar in die gevallen konden de beelden steeds verklaard worden door plooiën van de scheede. Wij meenen daarom, dat spiculine-lamellen bij *Tethya* niet voorkomen, en kunnen het dus niet eens zijn met MINCHIN (1900) wanneer hij voor alle kiezelnaalden zegt (l. c. p. 40): „the mineral matter is deposited round it (i. e. de centraaldraad) in concentric lamellae of colloid silica, alternating with lamellae of organic nature”.

Met betrekking tot de bovengemelde spiculum-scheede heerscht in de literatuur eenige verwarring. Wat F. E. SCHULZE in zijn laatste onderzoekingen (1904) „Spicula-scheide” noemt, is niet homoloog met wat wij hier als scheede hebben aangeduid. Dat wij den term scheede toch gebruiken, berust op overwegingen van historischen aard, waaruit blijkt, naar het ons voorkomt, dat het woord oorspronkelijk gebruikt is voor vormingen tot het spiculum zelf behoorende, homoloog met het product, dat ook aan kalkspicula wordt aange troffen, waar het trouwens het eerst is aangetoond. In dezen zin wordt het woord scheede ook door MINCHIN gebruikt, die het nieuwste en beste algemeen boek over Porifera schreef.

Als de ontdekker van de spiculum-scheede mogen wij KÖLLIKER (1864) beschouwen. Wij gelooven, dat het aan geen redelijken twijfel onderhevig is, wat KÖLLIKER er mede bedoelde, al moeten wij toegeven, dat de opvatting, die hij van het product had, niet altijd even duidelijk blijkt, en er van den aanvang af dus reeds eenige begripsverwarring heeft geheerscht.

KÖLLIKER zegt (l. c. p. 64—65), sprekende van „*Nardoa spongiosa*”: „Ausserdem finden sich dann noch nach der Auflösung der Spicula durch Essigsäure, zahlreiche Lücken, welche diese Bildungen enthalten, die allen von einer scharfen Linie begrenzt sind, wie bei *Dunstervilia*. Bei *Nardoa* glaube ich mich davon überzeugt zu haben, dass diese scharfe Linie der optische Ausdruck einer selbständigen Scheide der Spicula ist . . .” Wat KÖLLIKER bedoelt met „selbständig”, wordt eenigszins duidelijk door de verklaring, welke hij laat volgen, dat in alle kanalen punten van spicula uitsteken, waarvan na inwerking van azijnzuur, „an der Stelle des in die Flimmercanäle hineinragenden Strahles der genannten Spicula zarte Scheiden leer zurück (bleiben)”.

Deze scheeden zijn, volgens KÖLLIKER, misschien een „Rest von Bildungszellen”. Nu voegt hij er echter nog bij: „freie Spicula zeigen, der Einwirkung der Essigsäure ausgesetzt, keine solche Scheide . . .” Wat hier met „freie” spicula wordt bedoeld is niet duidelijk. Het kan nauwelijks iets anders beteekenen als geïsoleerde spicula. Gebeurt dit mechanisch, dan is de scheede even duidelijk te zien als bij spicula in situ. Heeft men chemisch geïsoleerd, dan bewijst de afwezigheid van een scheede na zuur-inwerking natuurlijk niets.

Het is gemakkelijk genoeg de proef van KÖLLIKER te herhalen, vooral bij dunwandige vormen zooals bijv. *Leucosolenia*. Spreidt men een stukje van een wijde, opengesplakte buis van *L. variabilis* in water onder het mikroskoop uit en laat men voorzichtig wat azijnzuur toevloeien, dan ziet men de koolzure kalk langzaam oplossen en weldra komen de scheeden met hun scherpe randen, zooals KÖLLIKER beschrijft, te voorschijn. Die scherpe randen zijn vooral duidelijk op plaatsen, waar de spicula geheel in het parenchym liggen; aan de uitstekende stralen ziet men de kegelvormige spiculine-mantel als een homogeen, uiterst dun vliesje achterblijven. Nog duidelijker misschien wordt het verschijnsel, indien men de spons op het objectglas kleurt bijv. met karmaluin (GRÜBLER). De veelal zwak zuur reageerende karmaluin lost de kalk op en kleurt de scheede purper; donker purper zijn de „scherpe randen” (optische doorsnede), terwijl de uitstekende naalden of stralen zwak purperkleurig zijn. Onderzoekt men dergelijke preparaten in glycerine of canadabalsem, dan zijn plaatsen waar de kalk is opgelost of waar die nog aanwezig is, nauwelijks te onderscheiden. Het polarisatie-mikroskoop geeft intusschen onmiddellijk absolute zekerheid. Er is dus inderdaad een speciaal laagje organische stof, welke strak om het spiculum sluit, die met het spiculum min of meer zuiver kan geïsoleerd worden, daarvan echter niet anders te scheiden is, dan door oplossing van de kalk. Het is wel buiten twijfel, dat dit het laagje is, waaraan KÖLLIKER den naam van „Scheide” gaf. Zoo heeft ook MINCHIN het opgevat.

De vraag is nu in hoeverre bij kiezelnaalden zulke organische hulsels voorkomen, vergelijkbaar met de scheeden der kalknaalden. Wij gelooven, dat die inderdaad aanwezig zijn; dat het organische vliesje boven beschreven van *Tethya*-spicula het gezochte homologon is. Reeds vroeger heeft men dergelijke producten gezien. Zoo schrijft NOLL (1888 p. 16-17): „Noch ist für die Spicula von *Desmacidon Bosei* eines Ueberzugs von organischer Substanz Erwähnung zu thun,Hauptsächtich nach Behandlung der Präparate mit einer Höllensteinlösung weniger deutlich mit Acidum pyrophos-

phoricum, manchmal auch mit Picrocarmin wurde derselbe sichtbar. Stifte, die isoliert, ohne Ueberzug von verkittendem Spongin, über die Hälfte frei aus dem Schwammgewebe hervorstanden oder auch solche, die ganz frei lagen, waren besonders nach der Silberfärbung gleichmässig mit einem lichtbraunen Ueberzuge versehen, der trotz seiner geringen Dicke doppelte Konturen erkennen liess und die Stifte gleichmässig überdeckte Die Spicula von *Desmacidon Bosei* besitzen also einen homogenen hautartigen Ueberzug von organischer Substanz, der verschiedene Farbstoffe aufnimmt. Wir wollen ihn als Spicula-Oberhaut bezeichnen” Terwijl NOLL meent dat dit vliesje iets anders is als wat KÖLLIKER bij kalkspicula vond, gelooven wij integendeel dat het aequivalente vormingen zijn. Evenals KÖLLIKER er op doelt dat zijn „Scheide” misschien een „Rest von Bildungszellen” is, schrijft NOLL dat zijn „Oberhaut” is „der Rest der die Nadeln bildenden Zellen”. SOLLAS eindelijk beschreef in het zelfde jaar (1888) zulk eene scheede, die zichtbaar werd na behandeling met fluoorwaterstofzuur. Beschrijving en afbeelding (l. c. p. XLIX, Pl. XLIII, fig. 18) ontleend aan spicula van *Dorypteres dendyi* laten aan duidelijkheid niets te wenschen over. “Although at first sight the acid appears to remove all the substance of the spicule except the axial rod, careful observation will show that this is not the case, for a delicate film of organic matter also remains behind; it has the form of a hollow sheath, corresponding in form and position with the outermost boundary of the original spicule; between it and the axial rod the whole of the spicule is completely removed. The spicule thus consists of a central organic axis, surrounded by concentric layers of opal, the outermost of which is invested in a spicule sheath of organic matter or rather of organic matter in intimate association (chemical union?) with silica”. Onze bevindingen omtrent het voorkomen van een dergelijke scheede bij andere kiezelspicula hopen wij in een volgende mededeeling te beschrijven, daar wij ons thans tot de styli van *Tethya* wenschen te beperken.

Indien nu deze opvatting juist is, dan mogen andere hulsels die men eventueel om de naalden vindt niet den naam van scheede dragen.

F. E. SCHULZE heeft in zijn laatste werk met zijn bekende zorgvuldigheid hulsels beschreven van de enorme naalden van *Monoraphis*. Tot ons leedwezen kunnen wij er om bovengemelde redenen niet mede instemmen dat hulsel „Scheide” te noemen. Aangezien SCHULZE aantoonde, dat dit hulsel zoowel dient als omkleeding van ieder spiculum als ook om naast elkaar liggende spicula te verbinden, en dit ook voor andere spicula schijnt te gelden, stellen wij

voor het *periapt*¹⁾ te noemen. SOLLAS (1880 p. 401²⁾) beschreef een dergelijk hulsel om spicula van *Isops phlegraei*. BÜTSCHLI vindt het bij *Tethya lyncurium*, welke waarneming wij kunnen bevestigen. Het wordt gevormd door bindweefsel met duidelijke fibrillen en cellen; het heeft dus met het spiculum als zoodanig niets te maken en blijft daarom hier verder buiten bespreking. Mutatis mutandis is de verhouding van periapt tot spiculum-scheede als die van perimysium tot sarcolemma.

Wij hebben boven reeds gezien, dat bij het oplossen van het spicopaal voor alles de centraaldraad duidelijk te voorschijn treedt. De aanwezigheid van een dergelijke organische streng wordt bij zgn. makroskieren door niemand meer betwijfeld. Ofschoon wij er evenmin aan twijfelen, dat die draad normaliter aanwezig is, zoo valt het niet tegen te spreken, dat hij in sommige gevallen geheel of gedeeltelijk afwezig kan zijn. Wij houden dit intusschen voor pathologische afwijkingen.

Wat den vorm van den draad betreft, zoo schrijft BÜTSCHLI (1901 p. 253): „eigenthümlich ist das Querschnittsbild des Fadens, das... stets deutlich dreieckig erscheint, gleichgültig ob der äussere Umriss des Nadelquerschnitts selbst etwas dreiseitig oder ganz kreisrund ist. Vielfach ist jedoch auf den Nadelquerschnitten zu erkennen, dass der Querschnitt des Achsenfadens sechseckig erscheint, indem die Ecken des dreiseitigen Umrisses regelmässig abgestumpft sind”. De centraaldraad zou dus in die gevallen — o.a. ook bij *Tethya* — niet een cilindervormige, maar een driekantige staaf zijn. Terwijl reeds vroeger BOWERBANK (1864) bij „*Geodia*” blijkbaar iets dergelijks had gezien, kwam F. E. SCHULZE (1904) tot het besluit, dat de doorsnede der centraaldraden van Hexactinellida cirkelvormig is. Wegens deze tegenspraak hebben wij den centraaldraad van *Tethya* ook in dit opzicht aan nauwkeurig heronderzoek onderworpen. De beoordeeling van den vorm van den centraaldraad op doorsnede geschiedde vooreerst aan fijngevreven spicula. In dit poeder, in een agaten mortiertje bereid, bevinden zich steeds een aantal stukjes van ongeveer cilindrischen vorm, zij het ook met onregelmatige breukvlakte. Onderzoekt men deze in glycerine (brekings-index 1.4508; cf. infra) dan kan men, daar het spicopaal hierin nagenoeg onzichtbaar wordt, zeer scherp beoordeelen door hooger of lager instellen, of men de cilindrische stukjes spicula voor zich ziet, nauwkeurig volgens de lengte-as bekeken, dan wel, in eenigszins schuinen stand. Let men

1) περιάπτω, ombinden.

2) Niet in 1890; dit is klaarblijkelijk een drukfout bij SCHULZE (1904 p. 204); ook niet p. 440—441, maar p. 400—401.

alleen op de stukjes waarvan men ontwijfelbaar den centraaldraad op dwarse optische doorsnede te zien krijgt dan blijkt (olie-immersie LEITZ) de vorm van den centraaldraad driehoekig met afgesneden hoeken, soms zelfs vrij scherp. In de tweede plaats onderzochten wij geïsoleerde centraaldraden. Door het dekglas eenigszins te schuiven breken een aantal kleine stukjes vrij wel recht af. Tevens ziet men dat door de beweging van de vloeistof deze stukjes kantelen, en een aantal krijgt men op deze wijze van alle kanten te zien. Bij sterke vergrooting (ZEISS, homog. imm.) vonden wij ook dan ontwijfelbaar driehoekige doorsneden. Hoe vreemd het ook moge schijnen, dat de centraaldraden driehoekig zijn, wij kunnen niet anders dan de waarneming van BÜTSCHLI voor *Tethya* bevestigen. Varicositeiten en scherpe insnoeringen zagen wij bij *Tethya* zelden. Normaliter zijn de geïsoleerde centraaldraden volkomen glad; de diameter is grootendeels overal gelijk, behalve aan de uiteinden. Deze zijn, bij gave draden, òf afgerond òf spits toeloopend, overeenkomstig de bekende vormen der spitse of stompe styli. Afwijkingen van dezen regel schijnen ons pathologisch. Niet minder zonderling als de vorm op doorsnede bleek te zijn, is de consistentie der centraaldraden, waaraan dan ook wel de oorzaak is toe te schrijven van de oneenigheid, die men bij verschillende auteurs vindt. Bijzondere verschijnselen, die men aan de draden waarneemt, geven daartoe zeker aanleiding. Immers, terwijl men aan den eenen kant ziet, hoe bij ontkiezeling de vrijkomende centraaldraden in de vloeistof buigen, krommen, zelfs slingeren, zoodat bij eenigszins groote hoeveelheden zij zich als ineengestremgelde kluwen zijde voordoen, namen wij aan den anderen kant zeer vaak waar, dat zij onmiddellijk breken wanneer men tracht er een met een naald of pincet te isoleeren. Reeds boven zagen wij hoe zij meestal vrijwel recht afbreken. Tot op zekere hoogte heeft dus BÜTSCHLI gelijk wanneer hij de centraaldraden „spröde” noemt; maar het is geenszins de broosheid bijv. van een glazen draad. De stof laat zich het best vergelijken met agar-agar. Ook daar vindt men een zekere weekheid en buigzaamheid, gepaard met de eigenschap om plotseling te scheuren of te breken. Dergelijke verschijnselen neemt men ook aan gels waar op een bepaald punt van dehydratie. Homogeen is de centraaldraad der styli van *Tethya* — als geheel genomen — geenszins. In de eerste plaats is, vooral aan met jodium gekleurde draden duidelijk een dubbele omtrek waar te nemen. Men kan zich daarvan overtuigen zoowel aan geïsoleerde, maar overigens gave draden, als op doorsneden. De bovenvermelde driehoekige figuren vertoonen (homogene immersie) binnen- en buitenrand duidelijk driehoekig. Deze wand van den centraaldraad is be-

trekkelijk dik — ongeveer een vierde of een vijfde van den totalen diameter. De centraaldraad is dus als een gevulde buis te beschouwen; terwijl de wand homogeen schijnt te zijn, is de inhoud soms korrelig, oogenschijnlijk van een ietwat weekere consistentie als de wand. Wij leiden dit af uit de beelden, die men verkrijgt bij sterk gebogen of geknikte draden. De vormen, die men ziet, doen denken aan de gedaanten, die een gebogen resp. geknikte caoutchouc buis aanneemt, welke met een geheel of half vloeibare massa is gevuld. Dergelijke beelden verkrijgt men nooit bij een solieden, buigzamen cylinder.

Een eigenaardig verschijnsel neemt men nog waar bij de ontkiezeling van gebroken naalden. Zooals wij boven zagen, wordt de naald aan de breukvlakte trechtervormig uitgehold. Let men daarbij op de gevallen, dat de draad op gelijke hoogte als het spicopaal is afgebroken, dan neemt men waar, dat onder den invloed van het fluoorwaterstofzuur de draad iets krimpt. Nu schijnen echter wand en inhoud van den draad niet in gelijke mate te krimpen; het gevolg is, dat een deel van den inhoud buiten den wand uitpuilt. Misschien heeft ook BÜTSCHLI dit verschijnsel waargenomen. Zijn figuur 24 op Pl. XXI gelijkt sterk op de door ons verkregen beelden; BÜTSCHLI geeft evenwel een andere verklaring van dit beeld: hij houdt het voor „manschettenartig” ingesnoerd.

Volgens BÜTSCHLI bestaat de centraaldraad uit een eiwitachtige stof. Evenals F. E. SCHULZE kunnen wij ons in het algemeen met deze uitspraak vereenigen. In MILLON'S reagens gekookt vertoonen de draden in fijngewreven spicula een duidelijk lichtgeele kleuring, zoowel in de stukjes, die overlans als die op doorsnede gezien worden. In het bijzonder is de kleuring goed te onderscheiden bij stukjes waar een deel van den centraaldraad uitgeraakt is, en waarbij dus de holte gedeeltelijk ongekleurd is, gedeeltelijk den geelen centraaldraad vertoont. Aan geïsoleerde centraaldraden, zoowel als aan draden die door partiële ontkiezeling vrij gekomen waren, doch nog met het onopgeloste spicopaal samenhangen, konden wij verder constateeren, dat zij zich door jodium geel kleuren. Door salpeterzuur van 25% zwellen zij eenigszins op, en kleuren zich daarbij licht geel, welke kleur door daaropvolgende inwerking van ammoniak in een iets donkerder gele overgaat. Bij verwarming in salpeterzuur lost de draad op; evenzoo door kaliloog (30%). Uit deze reacties mag wel worden afgeleid, dat de centraaldraad, al bestaat hij wellicht niet geheel daaruit, tenminste eiwitachtige stoffen bevat.

Een dubbele breking konden wij op geenerlei wijze in den centraaldraad aantoonen.

Wat de styli van *Tethya lyncurium* betreft, zijn wij dus tot de

slotsom gekomen dat zij bestaan uit een organischen centraaldraad en een organische scheede, tusschen welke beide elementen nu het spicopaal is afgescheiden. Organische lamellen hebben wij *niet* kunnen aantoonen. Toch vindt men onder bepaalde omstandigheden duidelijke longitudinale, resp. concentrische streepen; hiervan moet een verklaring worden gegeven.

Ter voorkoming van misverstand en verwarring willen wij reeds dadelijk de aandacht er op vestigen, dat men twee zaken scherp uit elkaar moet houden n.l. de verschillende *lagen* van spicopaal en hare *grensvlakken*.

Wij hopen aan te toonen, dat de bekende streepen niets anders zijn dan de optische doorsneden dezer grensvlakken, en dat deze onafhankelijk zijn van de al of niet gelijkheid der lagen. Het voorkomen van dergelijke grensvlakken, d.w.z. van plaatsen tusschen twee opvolgende spicopaal-lagen kan men gemakkelijk makroskopisch aantoonen bij lagen kunstmatige kiezelgels. Giet men op een laag kiezelgel terstond na de stolling opnieuw een laag nog niet gestold kiezelzuur en herhaalt men dit eenige malen, dan blijkt dat de aldus verkregen lagen kiezelgel aanvankelijk niet samenhangen. Eerst bij het indrogen wordt de massa één geheel; echter blijft dan steeds op doorsnede de ligging der grensvlakken zichtbaar. Er kan dus in een kiezelgel een lamellaire structuur bestaan, waarbij de lagen door zichtbare grensvlakken van elkaar gescheiden worden, zonder dat in deze grensvlakken zich een andere stof, bijv. een organische lamel, behoeft te bevinden. Wij komen hierop later terug.

De middelen, die ons ten dienste staan om achter den bouw van de spicula te komen zijn niet eenvoudig. Behalve het langzaam oplossen van het spicopaal door fluorwaterstofzuur en daarbij waarnemen wat er geschiedt, is sedert GRAY (1835) het verhitten toegepast, waardoor de lamellaire bouw duidelijker zichtbaar wordt. IJIMA (1901) heeft gewezen op het nuttig effect van verschillende media. Wij zullen zien, dat sommige spicula, bestudeerd bijv. in canadabalsem of wel in glycerine dusdanig verschillende beelden geven, dat men aanvankelijk meent met geheel verschillende soorten van spicula te doen te hebben. Het kwam ons daarom voor, dat men wel eens beginnen mocht met een wat nauwkeuriger bepaling van den brekings-index van het spicopaal voor verschillende spicula. Het eenige wat wij daaromtrent in de literatuur vonden is de mededeeling van SOLLAS (1885), die in het algemeen voor spicula $n = 1,449$ opgeeft.

Voor de bepaling van den brekings-index der spicula hebben wij gebruik gemaakt van de sedert SOLLAS ook in de mineralogie alge-

meen bekende methode n.l. te onderzoeken in welke vloeistof zij onder het mikroskoop onzichtbaar worden. Als criterium, dat aangeeft of de brekings-index van het spiculum veel of weinig verschilt van dien van het medium, en in welken zin het verschil ligt, is het optreden van gekleurde randen haast nog scherper dan het al of niet verdwijnen. Ten einde de werking te ontgaan van vloeistoffen, die van invloed konden zijn op een mogelijk watergehalte der spicula, maar ook dien invloed te kunnen aantonen, hebben wij eenerzijds gebruik gemaakt van met water niet mengbare vloeistoffen, anderzijds van een waterhoudend medium. De brekingsindices werden bepaald met den refractometer van ABBE, die voor gevallen als deze, waar een aantal cijfers in korten tijd moeten vastgesteld worden onder het mikroskopisch werk door, niet alleen door zijn handigheid den voorkeur verdient boven het weliswaar nog nauwkeuriger toestel van PULFRICH, maar vooral ook daardoor, dat de bepalingen in het daglicht geschieden.

Als vloeistoffen, die met water niet mengbaar zijn, gebruikten wij de reeks paraffinum liquidum ($n = 1.4759$), petroleum ($n = 1.4568$), benzine ($n = 1.3994$) en petroleum-aether ($n = 1.3780$),

Het gelukte door mengsels van petroleum en benzine den brekings-index der naalden te bepalen op 1.4508—1.4510. Om een indruk te geven van de mate van zekerheid der bepaling zij vermeld, dat een duidelijk verschil is waar te nemen tusschen de spicula gezien in een mengsel van 20 c.c. petroleum met 3 c.c. benzine ($n = 1.4500$) en in een mengsel van 20 c.c. petroleum met 2.5 c.c. benzine ($n = 1.4510$).

Als waterige vloeistof gebruikten wij verdunde glycerine en vonden ook hierin de meest volledige verdwijning bij 1.4508. Bovendien hebben wij gebruik gemaakt van de volgende media: lucht, methylalcohol, water, acet. kalic., kreosoot, bergamotolie, venet. terpentijn, cederolie, citroenolie, ol. thymi, ol. pini silv., pepermuntolie, nagelolie (al of niet met alc. absol. vermengd), canadabalsem, en monobroomnaphthaline. Voor het gebruik bleken echter de eerst genoemde de voorkeur te verdienen.

In glycerine van $n = 1.4508$ nu is bij sommige spicula van het spicopaal inderdaad niets meer te zien, en blijft alleen de centraaldraad als een licht blauwachtige streng zichtbaar. Voor alle styli geldt, dat de centraaldraad sterker lichtbrekend is, dan het spicopaal. Bij nauwkeurige beschouwing (ZEISS. Apochr. obj. 8, oc. 4) neemt men aan de meeste spicula nog een scherp helder lijntje waar als buitengrens en een stelsel van flauwe longitudinale lijnen tusschen buitenkant en centraalkanaal. Bij zwakkere vergrooting is de lamellaire structuur niet te zien, de buitengrens daarentegen als een uiterst fijn lijntje.

Hoogstwaarschijnlijk is dat fijne lijntje, dat bij sterker vergrooing dubbelen omtrek vertoont, de (organische) spiculumscheede. Zeer duidelijk blijkt hierbij ook hoe de centraaldraad plaatselijk kan zijn verdwenen — door welke oorzaak daargelaten: daar ter plaatse toch houdt de helder blauwe lijn (de centraaldraad) plotseling op. Is de glycerine in het kanaal ingedrongen dan ziet men alleen het even aangeduide spicopaal; is er lucht ingedrongen dan is dit natuurlijk terstond aan de veel zwakkere lichtbreking te zien. De beelden, die men verkrijgt van styli, geïsoleerd door koken met zoutzuur, door zoutzuur met kaliumchloraat, door digestie met maagsap of door koken met zwavelzuur en kaliumbichromaat komen in hoofdzaak met elkander overeen.

Dit wordt nu echter geheel anders indien men de spicula gedurende eenige dagen droogt boven fosforpentoxyd. Wij hebben naalden, eensdeels gedroogd gedurende drie dagen boven fosforpentoxyd bij kamertemperatuur, anderdeels boven fosforpentoxyd in de toluolstoom van VICTOR MELJER bij 104° , op dezelfde wijze onderzocht. Tusschen de breking der verwarmde en der onverwarmde spicula is geen verschil te bespeuren. De bepaling van den brekings-index is iets minder scherp dan die der op gewone wijze gedroogde spicula omdat de lamellaire structuur door het droogen duidelijker is geworden en daardoor het voor het oog verdwijnen iets minder juist is te constateeren. Toch gelukte het ons in petroleum-benzine den brekings-index te bepalen op $n = 1.4052-1.4055$; ook met glycerine en water wordt hetzelfde verkregen. Laat men nu de gedroogde spicula in glycerine van $n = 1.4055$, onder afsluiting met vaseline, liggen dan ziet men van buiten naar binnen toe gelijdelijk de breking toenemen, en na een dag vertoonen zich de naalden weder sterk lichtbrekend. Zooveel mogelijk van de glycerine uitwendig bevrijd en overgebracht in glycerine van $n = 1.4508$ blijken zij hierin te verdwijnen en dus weder op hun vorig (normaal) watergehalte teruggekomen te zijn. Hetzelfde geschiedt met boven P_2O_5 gedroogde spicula, die daarna aan de lucht zijn blootgesteld geweest. Anderzijds hebben wij een proef genomen om te zien in hoeverre er verschil bestaat tusschen de mikroskopische beelden, die men van op gewone wijze gedroogde spicula verkrijgt en die, welke waargenomen worden indien de spicula na isolatie en uitwasschen niet anders werden gedroogd dan door wegzuigen van het water door filtreerpapier en vervolgens terstond in de glycerine ($n = 1.4508$) werden bekeken. Wij vonden inderdaad wel eenig verschil; een verschil grooter dan dat het eenvoudig kon worden toegeschreven aan sporen van nog buiten aanhechtend water. Het schijnt dus, dat bij het lang droogen

aan de lucht bij kamertemperatuur het spicopaal reeds iets van het water verliest.

Derhalve blijkt, dat het spicopaal bestaat uit waterhoudend kiezelzuur dat boven P_2O_5 water kan afstaan, daarbij in brekings-index vermindert en uit een waterige vloeistof of vochtige lucht weder de oorspronkelijke hoeveelheid water kan opnemen. Het spicopaal gedraagt zich dus ten opzichte van het absorptie-vermogen tegenover water geheel als een kiezelgel, zooals dit door de bekende uitvoerige onderzoekingen van VAN BEMMELEN is vastgesteld geworden.

(Wordt vervolgd).

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan „*Over lineaire stelsels van algebraïsche vlakke krommen.*”

§ 1. De raakpunten der raaklijnen uit een punt O naar de krommen c^n van een bundel liggen op een kromme t^{2n-1} welke ik de *tangentiaalkromme* van O zal noemen. Zij is een bijzonder geval van een door CREMONA¹⁾ aangewezen kromme. Door EMIL WEYR²⁾, GUCCIA³⁾ en W. BOUWMAN⁴⁾ is zij toegepast bij het bewijzen van eigenschappen van bundels en netten.

Is een lineair stelsel $(c^n)_k$ van ∞^k krommen c^n gegeven, dan kan men de m.pl. beschouwen van de punten P_{k+1} , waar een kromme van dat stelsel een $(k+1)$ -puntige aanraking heeft met een rechte, die door het vaste punt O gaat.

Om den graad $g(k)$ der m. pl. (P_{k+1}) te bepalen, beschouw ik de krommen van $(c^n)_k$, die in de punten P van een rechte l een k -puntige aanraking hebben met de overeenkomstige rechte OP . Elke straal OP snijdt de door P aangewezen kromme nog in $(n-k)$ punten Q . Daar elk snijpunt van l met de m. pl. der punten Q blijkbaar een punt P_{k+1} zal wezen, is de m. pl. (Q) een kromme van den graad $g(k)$.

De krommen van $(c^n)_k$ welke door O gaan, vormen een stelsel $(c^n)_{k-1}$. De graad van de m. pl. der punten P_k , waar een c^n van dit laatste stelsel een k -puntige aanraking met OP heeft, wordt blijkbaar door $g(k-1)$ aangewezen. Op l liggen dus $g(k-1)$ punten P , waarvoor een der overeenkomstige punten Q met O samenvalt;

¹⁾ CREMONA—CURTZE, Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven (1865) bl. 119.

²⁾ Sitzungsberichte der Akademie in Wien, LXI, 82.

³⁾ Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (1895), IX, 1.

⁴⁾ Nieuw Archief voor Wiskunde (1900), IV, 258.

m. a. w. de m. pl. (Q) gaat $\varphi(k-1)$ maal door O , is derhalve van den graad $\varphi(k-1) + (n-k)$.

Ter bepaling van $\varphi(k)$ heeft men dus de teruglopende betrekking

$$\varphi(k) = \varphi(k-1) + (n-k).$$

Uit haar leidt men af, dat

$$\varphi(k) = \varphi(1) + \frac{1}{2}(k-1)(2n-k-2)$$

is. Hier stelt $\varphi(1)$ den graad der tangentialkromme voor, dus $(2n-1)$. Derhalve vindt men

$$\varphi(k) = \frac{1}{2}(k+1)(2n-k).$$

De meetkundige plaats der punten, waar een kromme c^n , behoorende tot een k -voudig oneindig lineair stelsel, een $(k+1)$ -puntige aanraking heeft met een rechte die door een vast punt O gaat, is een kromme van den graad $\frac{1}{2}(k+1)(2n-k)$, waarop O een $\frac{1}{2}k(k+1)$ -voudig punt is.

Immers op een rechte r door O bepaalt $(c^n)_k$ een involutie van den graad n en den rang k . Het aantal $(k+1)$ -voudige elementen dezer involutie bedraagt $(k+1)(n-k)$; dat is tevens het aantal punten P_{k+1} , welke op r liggen. Bijgevolg is O een $\frac{1}{2}k(k+1)$ -voudig punt op (P_{k+1}) .

§ 2. Elke straal r door een vast punt O wordt door $2(n-1)$ krommen c^n van een bundel (c^n) aangeraakt; de raakpunten T zijn de dubbelpunten der involutie, welke (c^n) op r insnijdt. De door deze punten T aangewezen krommen c^n snijden r nog in $2(n-1)(n-2)$ punten S . Als r om O wentelt, zullen de punten S een kromme doorloopen, welke ik de *satellietkromme* van O zal noemen.

Deze kromme gaat $(n+1)(n-2)$ maal door O ; immers als r samenvalt met een der raaklijnen uit O aan de c^n die door O gaat, dan ligt een der punten S in O . De kromme (S) is dus van den graad $(n+1)(n-2) + 2(n-1)(n-2) = (n-2)(3n-1)$.

Is B een basispunt van (c^n) , dan liggen op OB , buiten O en B , slechts $2(n-2)$ punten T (de dubbelpunten eener I^{n-1}). Dus raakt OB in B de tangentialkromme van O aan, terwijl zij $(n-2)$ -voudige raaklijn van (S) is.

De $2(n-2)$ krommen c^n , welke OB aanraken, werpen ieder een punt S in B . Elk basispunt is dus een $2(n-2)$ -voudig punt der satellietkromme.

De gemeenschappelijke punten van de tangentialkromme t^{2n-1} en de satellietkromme $s^{(3n-1)(n-2)}$ vormen vier groepen.

Ten eerste zijn er $(n+1)(n-2)$ in O vereenigd.

Ten tweede liggen er $2(n-2)$ in elk basispunt B ,

Ten derde raken de beide krommen elkaar in elk buigpunt dat zijn raaklijn door O zendt.

Ten vierde snijden zij elkander in de raakpunten van elke dubbelraaklijn, die door O gaat.

Nu omhullen de buigraaklijnen van een bundel een kromme der klasse $3n(n-2)$.¹⁾

Derhalve bedraagt het aantal der raakpunten van dubbelraaklijnen door O

$$(n-2)(3n-1)(2n-1) - (n-2)(n+1) - 2(n-2)n^2 - 6n(n-2) = \\ = 4n(n-2)(n-3).$$

De dubbelraaklijnen der tot een bundel behoorende krommen c^n omhullen een kromme van de klasse $2n(n-2)(n-3)$.

§ 3. In navolging van EMIL WEYR²⁾ beschouwen wij de kromme c^{n+1} welke voortgebracht wordt door den bundel (c^n) met den daaraan projectief toegevoegden bundel der raaklijnen in een basispunt B . Daar elke c^n haar raaklijn nog in $(n-2)$ punten snijdt, is B een drievoudig punt der c^{n+1} . Hieruit volgt gemakkelijk dat door B $(n+4)(n-3)$ raaklijnen aan c^{n+1} kunnen getrokken worden. Even zoovele dubbelraaklijnen van den bundel (c^n) hebben een hunner raakpunten in B .

Wij beschouwen nu de satellietkromme van B . Op elken straal r door B liggen $2(n-2)$ raakpunten T , dus $2(n-2)(n-3)$ punten S . Valt r samen met een der zoeven genoemde dubbelraaklijnen, dan ligt een der punten S in B . Dus is B een $(n+4)(n-3)$ -voudig punt op (S) en blijkt de graad van (S) gelijk te zijn aan $(n+4)(n-3) + 2(n-2)(n-3) = 3n(n-3)$.

De tangentiaalkromme van B heeft in B een *drievoudig* punt; immers een straal door B draagt slechts $(2n-4)$ punten T , terwijl de kromme t van den graad $(2n-1)$ is.

Van de gemeenschappelijke punten van t^{2n-1} en $s^{3n(n-3)}$ liggen er $3(n+4)(n-3)$ in B , $2(n-3)$ in elk der overige (n^2-1) basispunten en twee in elk der buigpunten, die hun raaklijn door B zenden.

Het aantal dier buigraaklijnen is $3n(n-2) - 9$, daar elke der drie buigraaklijnen, welke hun buigpunt in B hebben, driemaal in rekening moet gebracht worden. Dit blijkt uit de beschouwing van een (c^3), waar een basispunt slechts op buigraaklijnen kan liggen, waarvoor het zelf buigpunt is. Nu bedraagt dit aantal *drie*, terwijl de klasse der omhullende der buigraaklijnen *negen* is.

¹⁾ Immers dit is het aantal der raaklijnen van t^{2n-1} , welke, afgezien van de n^2 raaklijnen OB , door O kunnen getrokken worden.

²⁾ Sitzungsberichte der Akad. in Wien, LXI, 82.

Voor het aantal der niet in B gelegen raakpunten van dubbelraaklijnen uit B vindt men dus

$$3n(n-3)(2n-1) - 3(n+4)(n-3) - 2(n-3)(n^2-1) - 6(n-3)(n+1) = \\ = 4(n-3)(n-4)(n+1).$$

Derhalve ligt B op $2(n-4)(n-3)(n+1)$ dubbelraaklijnen. Dit aantal is $2(n-3)(n+4)$ minder dan het aantal dubbelraaklijnen uit een willekeurig punt. De $(n-3)(n+4)$ dubbelraaklijnen, die een van haar raakpunten in B hebben, moeten dus tweemaal in rekening gebracht worden.

De omhullende der dubbelraaklijnen heeft in elk basispunt een $(n+4)(n-3)$ -voudig punt.

§ 4. De meetkundige plaats van de raakpunten D der dubbelraaklijnen van (c^n) gaat blijkbaar $(n+4)(n-3)$ maal door elk basispunt (§ 3). Daar een willekeurige c^n op hare dubbelraaklijnen $n(n-2)(n^2-9)$ raakpunten D heeft, snijden c^n en de kromme (D) elkaar in $n^2(n+4)(n-3) + n(n-2)(n^2-9)$ punten. Bijgevolg is de m.pl. der raakpunten D een kromme van den graad $(n-3)(2n^2+5n-6)$.¹⁾

Wij zullen nu de m.pl. beschouwen van de punten W waarin een c^n door haar dubbelraaklijnen gesneden wordt.

Daar elk basispunt B op $2(n-4)(n-3)(n+1)$ dubbelraaklijnen ligt (§ 3), gaat de kromme (W) met evenveel takken door B . Zij heeft dus met een willekeurige c^n $2n^2(n-4)(n-3)(n+1) + \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)(n-4)$ punten gemeen. Hieruit volgt dat de kromme (W) van den graad $\frac{1}{2}(n-4)(n-3)(5n^2+5n-6)$ is.

De krommen (D) en (W) hebben buiten de basispunten een aantal punten gemeen gelijk aan

$$\frac{1}{2}(n-4)(n-3)^2(5n^2+5n-6)(2n^2+5n-6) - \\ - 2n^2(n-4)(n-3)^2(n+1)(n+4).$$

Hieruit volgt :

In een bundel (c^v) hebben

$$\frac{1}{2}(n-4)(n-3)^2(10n^4+35n^3-21n^2-80n+20)$$

krommen een buigpunt waarvan de raaklijn de kromme nog in een ander punt aanraakt.

§ 5. De meetkundige plaats der buigpunten I van (c^v) heeft een drievoudig punt in elk basispunt en een dubbelpunt in elk der $3(n-1)^2$ dubbelpunten van den bundel. Hieruit vindt men terstond,

¹⁾ Zie P. H. SCHOUTE, Wiskundige opgaven, II, 307.

dat de kromme (I) van den graad $6(n-1)$ en van de klasse $6(n-2)$; ($4n-3$) is ¹⁾.

Bepalen wij thans den graad der m. pl. van de punten V , welke een c^n op haar buigraaklijnen insnijdt.

Daar een basispunt B op $3(n-3)(n+1)$ buigraaklijnen ligt, gaat de kromme (V) met evenveel takken door B . Met een willekeurige c^n heeft ze derhalve $3n^2(n-3)(n+1) + 3n(n-2)(n-3)$ punten gemeen.

Bijgevolg is (V) een kromme van den graad $3(n-3)(n^2+2n-2)$.

De krommen (I) en (V) hebben nu, buiten de basispunten om, een aantal punten gemeen, dat voorgesteld wordt door

$$18(n-1)(n-3)(n^2+2n-2) - 9n^2(n-3)(n+1).$$

Deze punten kunnen slechts afkomstig zijn van het samenvallen van buigpunten met een der punten, welke zij met de betrokken c^n nog gemeen hebben, dus van *raaklijnen met vierpuntige aanraking*. Daar zulk een *undulatiepunt* twee buigpunten vervangt, dus raakpunt van (I) en (V) is, volgt hieruit:

In een bundel (c^n) hebben $\frac{9}{2}(n-3)(n^3+n^2-8n+4)$ krommen een undulatiepunt.

§ 6. Laat een drievoudig oneindig lineair stelsel van krommen c^n gegeven zijn.

De c^n welke een rechte l in het punt P osculeert, snijdt den door het willekeurig gekozen punt O getrokken straal OP nog in $(n-1)$ punten Q .

De krommen van $(c^n)_3$ welke door O gaan, vormen een net $(c^n)_3$, dat l in de groepen van een involutie I_2^n snijdt. Daar deze $3(n-2)$ drievoudige elementen bezit, gaat de m. pl. (Q) $3(n-2)$ -maal door O , is derhalve van den graad $(4n-7)$.

Elk van haar snijpunten K met l is blijkbaar een dubbelpunt op een kromme van $(c^n)_3$, met l en OK als raaklijnen.

Elke rechte is dubbelpuntsraaklijn voor $(4n-7)$ krommen van het stelsel.

Hieruit volgt nu dat de m. pl. der dubbelpunten K , welke een hunner raaklijnen door het willekeurig gekozen punt M zenden, een kromme van den graad $(4n-5)$ is; immers M is een dubbelpunt van een c^n , ligt dus op twee takken van (K).

Elk punt K der willekeurige rechte l is dubbelpunt van een tot $(c^n)_3$ behoorende kromme. De snijpunten M en M' van de raaklijnen

¹⁾ Zie BOBEK, Casopis (Prag), XI, 283.

in K met de willekeurig gekozen rechte m zijn paren van een symmetrische verwantschap met kenmerkend getal $(4n - 5)$. Tot de coïncidenties behoort het snijpunt M_0 van l en m , en wel tweemaal, omdat de c^n , die in dat punt een dubbelpunt heeft, twee punten M_0' levert, welke met M_0 samenvallen. De overige coïncidenties zijn afkomstig van raaklijnen in keerpunten. Hieruit volgt:

De meetkundige plaats der keerpunten van een drievoudig oneindig lineair stelsel van krommen van den graad n is een kromme van den graad $4(2n - 3)$.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan over: „*Eenige kenmerkende getallen van een algebraïsch oppervlak*”.

In het volgende zal aangetoond worden hoe men, langs eenvoudigen weg, een aantal der kenmerkende getallen van een algemeen oppervlak van den n^{den} graad kan vinden.¹⁾ Daartoe zal gebruik gemaakt worden van regelvlakken gevormd door hoofdraaklijnen of dubbelraaklijnen.

§ 1. Ik beschouw vooreerst het regelvlak **A** der hoofdraaklijnen a waarvan de raakpunten A in een gegeven vlak α liggen. De kromme α^n , volgens welke α het oppervlak ϕ^n snijdt, is blijkbaar dubbelkromme van **A**. Daar de raaklijnen in de $3n(n - 2)$ buigpunten van α^n hoofdraaklijnen van ϕ^n zijn, heeft **A** met ϕ^n gemeen $3n(n - 2)$ rechten en de dubbel te tellen kromme α^n , is dus een regelvlak van den graad $n(3n - 4)$.

De beide hoofdraaklijnen a en a' in een punt van α^n hebben elk drie punten met ϕ^n gemeen; bijgevolg behoort α^n zesmaal tot de doorsnede van **A** en ϕ^n . Deze oppervlakken hebben nog een ruimtekromme van den graad $n^2(3n - 4) - 6n$ gemeen, welke de $3n(n - 2)(n - 3)$ punten bevat waar ϕ^n gesneden wordt door de in α gelegen hoofdraaklijnen a . In elk der overige $n(11n - 24)$ snijpunten van deze kromme met a heeft ϕ^n met een rechte a vier samenvallende doorsneden. Hieruit volgt:

De meetkundige plaats der punten waar ϕ^n een vierpuntige raaklijn bezit (flecnodale lijn) is een ruimtekromme van den graad $n(11n - 24)$.

§ 2. Nu bepaal ik den graad van het regelvlak **B** gevormd door de hoofdraaklijnen die ϕ^n in punten B van het vlak β snijden.

¹⁾ Men vindt de bedoelde getallen in SALMON-FIEDLER, „Analytische Geometrie des Raumes”, dritte Auflage, II, 622—644, en in SCHUBERT, „Kalkül der abzählenden Geometrie”, p. 236.

Uit elk punt B van de doorsnede β^n vertrekken $(n-3)(n^2+2)$ hoofdraaklijnen; dit aantal wijst tevens het aantal bladen van \mathbf{B} aan, welke elkaar langs β^n doorsnijden. De in β gelegen buigraaklijnen behooren blijkbaar $(n-3)$ -maal tot het bedoelde regelvlak. Zijn graad is dus gelijk aan

$$n(n-3)(n^2+2) + 3n(n-2)(n-3) = n(n-1)(n-3)(n+4).$$

Volgens § 1 hebben $n(3n^2-4n-6)$ hoofdraaklijnen hun raakpunt A op α^n en een van hun snijpunten B op β^n . Dit getal wijst dus den graad aan van de kromme langs welke ϕ^n door \mathbf{B} wordt geosculeerd. Behalve deze aanrakingskromme en de veelvoudige kromme β^n hebben ϕ^n en \mathbf{B} nog gemeen de m. pl. der punten B' welke de hoofdraaklijnen AB nog op ϕ^n insnijden. Deze kromme (B') is van den graad $n^2(n-1)(n-3)(n+4) - 3n(3n^2-4n-6) - n(n-3)(n^2+2) = n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3)$.

§ 3. Om te vinden hoe vaak het punt A samenvalt met een der $(n-4)$ punten B' , projecteer ik de puntenparen (A, B') uit een rechte l . De vlakken door l worden zoodoende gerangschikt in een verwantschap met de kenmerkende getallen $n(3n^2-4n-6)(n-4)$ en $n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3)$. Elke rechte α , welke op l rust, bevat blijkbaar $(n-4)$ paren (A, B') , levert dus een $(n-4)$ -voudige coïncidentie. De overige coïncidenties zijn afkomstig van coïncidenties $A \equiv B'$. Nu is $n(3n^2-4n-6)(n-4) + n(n-2)(n-4)(n^2+5n+3) - n(n-1)(n-3)(n+4)(n-4) = n(n-4)(6n^2+2n-24)$. Dit is dus het aantal vierpuntige raaklijnen, die ϕ^n in een punt B van β^n snijden.

De snijpunten van ϕ^n met haar vierpuntige raaklijnen vormen een kromme van den graad $2n(n-4)(3n^2+n-12)$.

Is f' de graad van het regelvlak der vierpuntige raaklijnen, dan heeft men blijkbaar de betrekking

$$nf' = 4n(11n-24) + 2n(n-4)(3n^2+n-12) = 2n^2(n-3)(3n-2).$$

De vierpuntige raaklijnen vormen een regelvlak van den graad $2n(n-3)(3n-2)$.

Voegt men aan het raakpunt F van een vierpuntige raaklijn de $(n-4)$ punten G toe welke die raaklijn nog met ϕ^n gemeen heeft, dan ontstaat een stelsel van puntenparen (F, G) , waarvan het aantal coïncidenties weer kan bepaald worden met behulp van de verwantschap waarin zij de vlakken door een as l rangschikken. Langs den boven aangegeven weg vindt men voor dit aantal

$$n(11n-24)(n-4) + 2n(n-4)(3n^2+n-12) - 2n(n-3)(3n-2)(n-4) = n(n-4)(35n-60).$$

Het oppervlak ϕ^n bezit $5n(n-4)(7n-12)$ vijfpuntige raaklijnen.

§ 4. Terugkeerende tot het regelvlak **B** (§ 2) beschouw ik de snijpunten der ruimtekromme (B') met het vlak β . Elk snijpunt van φ^n met een in β gelegen buigraaklijn kan als het punt B , elk de overige $(n-4)$ als een punt B' beschouwd worden. De kromme (B') ontmoet β^n derhalve $3n(n-2)(n-3)(n-4)$ -maal op de buigraaklijnen van β^n . In elk der overige snijpunten van (B') met β wordt φ^n aangeraakt door een rechte die elders drie samenvallende punten met φ^n gemeen heeft. Ik noem zulk een rechte een raaklijn $t_{2,3}$, A haar *osculatiepunt*, B haar *raakpunt*.

De raakpunten der raaklijnen $t_{2,3}$ vormen een kromme van den graad $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12)$.

§ 5. In elk punt C der kromme γ^n volgens welke φ^n door het vlak γ gesneden wordt, beschouw ik de $(n-3)(n+2)$ raaklijnen c die φ^n nog in een punt C' aanraken. Op het regelvlak **C** der dubbelraaklijnen c is γ^n een veelvoudige kromme, langs welke $(n-3)(n+2)$ bladen elkaar doorsnijden. Daar elke in γ gelegen dubbelraaklijn twee rechten van **C** vertegenwoordigt, is de graad van dit regelvlak gelijk aan $n(n-3)(n+2) + n(n-2)(n-3)(n+3)$ of $n(n-3)(n^2+2n-4)$.

φ^n en **C** raken elkaar langs de m.pl. (C') der tweede raakpunten. Van deze kromme bevat γ de raakpunten der in γ gelegen rechten c benevens de punten $C \equiv C'$, waar een rechte c vierpuntige raaklijn is. Derhalve bedraagt de graad van (C') $n(n-2)(n^2-9) + n(11n-24)$ of $n(n^3-2n^2+2n-6)$.

Behalve de dubbel te tellen kromme (C') en de $2(n-3)(n+2)$ -maal te tellen kromme γ^n hebben **C** en φ^n nog gemeen de m.pl. der punten S , welke de dubbelraaklijnen c op φ^n insnijden. De kromme (S) is van den graad $n^2(n-3)(n^2+2n-4) - 2n(n^3-2n^2+2n-6) - 2n(n-3)(n+2)$ of $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$.

Tot de in γ gelegen punten van (S) behooren de snijpunten van γ^n met haar dubbelraaklijnen c . Daar elk der beide raakpunten van c als het punt C kan beschouwd worden, zijn deze snijpunten S dubbel in rekening te brengen. De overige $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6) - n(n-2)(n^2-9)(n-4)$ in γ gelegen punten S zijn blijkbaar osculatiepunten van raaklijnen $t_{2,3}$. Hieruit volgt dus:

De osculatiepunten der hoofdtraaklijnen, die φ^n nog elders aanraken, vormen een kromme van den graad $n(n-4)(3n^2+5n-24)$.

De kromme (A) en (B) welke door de osculatiepunten en raakpunten der raaklijnen $t_{2,3}$ gevormd worden, hebben de raakpunten der vijfpuntige raaklijnen gemeen. Hiermee rekening houdende, vindt men (door opnieuw uit een as l te projecteeren) voor den graad van

het regelvlak der rechten $t_{2,3}$ de uitdrukking $n(n-2)(n-4)(n^2+2n+12) + n(n-4)(3n^2+5n-24) - 5n(n-4)(7n-12)$.

De hoofdraaklijnen van ϕ^n , welke het oppervlak bovendien nog aanraken, vormen een regelvlak van den graad $n(n-3)(n-4)(n^2+6n-4)$.

§ 6. De dubbelraaklijnen c , welke ϕ^n in punten D van het vlak σ snijden, vormen een regelvlak \mathbf{D} , waarop de doorsnede σ^n van ϕ^n met σ een veelvoudige kromme is, welke $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)^2$ bladen draagt. Daar verder elke dubbelraaklijn van σ^n tot $(n-4)$ verschillende punten D behoort, is de graad van \mathbf{D} gelijk aan $\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)(n^2+n+2) + \frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)(n-4) = n(n-1)(n+2)(n-3)(n-4)$.

Volgens § 5 hebben $n(n-4)(n^3+n^2-4n-6)$ dubbelraaklijnen c een hunner raakpunten C in een gegeven vlak γ en tevens een van hun raakpunten D in het vlak σ . Dit getal wijst dus den graad aan van de kromme, langs welke \mathbf{D} en ϕ^n elkaar aanraken. Houdt men rekening met de veelvoudige kromme σ^n , dan blijkt dat de punten D' , welke de rechten van \mathbf{D} , buiten de raakpunten C en de in σ gelegen snijpunten D om, met ϕ^n gemeen hebben, een ruimte-kromme (D') vormen, waarvan de graad gelijk is aan

$$n^2(n-1)(n+2)(n-3)(n-4) - 2n(n-4)(n^3+n^2-4n-6) -$$

$$\frac{1}{2}n(n-3)(n-4)(n^2+n+2) = \frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(2n^2+5n+3).$$

Deze kromme snijdt σ blijkbaar $(n-4)(n-5)$ -maal op elke dubbelraaklijn van σ^n . In elk van haar overige snijpunten met σ wordt ϕ^n aangeraakt door een rechte, die nog in twee andere punten raaklijn aan het oppervlak is. Hieruit volgt:

De raakpunten C der drievoudige raaklijnen van ϕ^n vormen een kromme (C) van den graad $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(n^2+5n+12)$.

§ 7. Op elke rechte c van het regelvlak \mathbf{D} liggen $(n-5)$ punten D' , die in $\frac{1}{2}(n-5)(n-6)$ paren D', D'' kunnen gerangschikt worden. Worden deze puntenparen uit een as l geprojecteerd door vlakkenparen λ', λ'' , dan vormen deze een symmetrisch stelsel met kenmerkend getal $\frac{1}{2}n(n-2)(n-4)(n-5)(2n^2+5n+3)(n-6)$. Elke rechte c , welke l snijdt, bepaalt een vlak λ , dat blijkbaar $(n-5)(n-6)$ coïncidenties $\lambda' \equiv \lambda''$ vertegenwoordigt. De overige coïncidenties van het stelsel (λ) zijn afkomstig van samenvallingen $D' \equiv D''$, dus van drievoudige raaklijnen d . Daar evenwel elk der drie raakpunten van een rechte d door samenvallen van D' met D'' kan ontstaan, is het aantal drie-

¹⁾ In CREMONA—CURTZE, *Theorie der Oberflächen*, bl. 66, staat bij vergissing $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n-2)$ voor het aantal dubbelraaklijnen, die ϕ^n in een van zijn punten snijden.

voudige raaklijnen welke ϕ^n op de kromme σ^n snijden, slechts het derde deel van het aantal der bedoelde coïncidenties van (λ) , dus gelijk aan

$$\frac{1}{3} n (n-4) (n-5) (n-6) \{ (n-2) (2n^2+5n+3) - (n-1) (n+2) (n-3) \} = \\ \frac{1}{3} n (n-4) (n-5) (n-6) (n^3+3n^2-2n-12).$$

Dit is tevens de graad der kromme (D) gevormd door de punten D , welke de drievoudige raaklijnen d nog met φ^n gemeen hebben.

Nu kan ook de graad x van het regelvlak (d) gevonden worden. Daar dit regelvlak door ϕ^2 in de punten van (C) geraakt en in de punten (D) gesneden wordt, heeft men nl.

$$nx = n (n-2) (n-4) (n-5) (n^2+5n+12) + \\ \frac{1}{3} n (n-4) (n-5) (n-6) (n^3+3n^2-2n-12).$$

Hieruit vindt men :

De drievoudige raaklijnen van φ^n vormen een regelvlak van den graad $\frac{1}{3} n (n-3) (n-4) (n-5) (n^2+3n-2)$ 1).

§ 8. Om den graad der spinodale lijn te vinden, beschouw ik de paren van hoofdtraaklijnen a, a' , waarvan het gemeenschappelijk raakpunt A in het vlak α ligt. Worden twee stralen s en s' van een waaier (S, σ) aan elkaar toegevoegd, als ze op twee rechten a en a' rusten, dan ontstaat in (S, σ) een symmetrische verwantschap met kenmerkend getal $n(3n-4)$. De coïncidenties kunnen tot drie groepen gebracht worden.

Ten eerste kunnen a en a' denzelfden straal s snijden; hun verbindingsvlak is dan raakvlak, hun snijpunt A ligt op het pooloppervlak van S . Zulk een straal s valt samen met twee van de aan hem toegevoegde stralen s' . De eerste groep bevat dus $n(n-1)$ dubbele coïncidenties.

Ten tweede kan s de kromme α^n snijden; ook dan valt hij met twee stralen s' samen. De tweede groep bestaat dus uit n dubbele coïncidenties.

Ten slotte ontstaat een enkelvoudige coïncidentie, als a met a' samenvalt. Het aantal dezer samenvallingen bedraagt blijkbaar $2n(3n-4) - 2n(n-1) - 2n = 4n(n-2)$. Hieruit volgt:

De parabolische punten vormen een ruimtekromme (spinodale lijn) van den graad $4n(n-2)$.

1) In SALMON-FIEDLER staat op bl. 638 bij vergissing n^2+3n+2 in plaats van n^2+3n-2 .

Op bl. 643 vindt men de afleiding van het aantal viervoudige raaklijnen en der aantallen raaklijnen $t_{4,2}$, $t_{3,2,2}$ en $t_{3,3}$.

Geologie. — De Heer MARTIN biedt eene mededeeling aan van den heer H. G. JONKER: „*Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland. I. De Hondsrug in de provincie Groningen. 2. Bovensilurische zwerfsteenen.* — *Tweede mededeeling: Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zonen H en I.*”

(Mede aangeboden door den heer J. M. VAN BEMMELEN).

H.

Behalve de in mijn vorige mededeeling (33) beschreven Borealis-kalk, (waarop ik straks nog even terugkom), zijn zwerfsteenen met *Pentamerus*-resten bij Groningen zeer zeldzaam. Slechts drie stukken kan ik hier noemen; in twee daarvan is de soort niet te bepalen, terwijl in het derde stuk, gevonden op de Noorderbegraafplaats in Groningen, *Pentamerus estonus* EICHW. voorkomt. Deze bepaling staat echter ook niet boven alle verdenking en met name zou ik niet beslist durven zeggen, dat dit fossiel niet *Pentamerus oblongus* Sow. kan zijn, die in uiterlijk immers bijna geheel met de eerstgenoemde species overeenkomt (12, p. 81 en 3, T. XVIII, f. 4^a). Waar deze laatste vorm op Gotland zeker ten deele als de werkelijke *P. estonus* EICHW. moet opgevat worden (27, p. 98), laat zich ook over de herkomst van dit stuk niets met zekerheid zeggen, daar het gesteente, een verweerde, gele kalksteen, daarvoor geen voldoende aanwijzingen geeft. Intusschen zij deze zwerfsteen hier volledigheidshalve toch even vermeld.

Omtrent de Borealis-kalk wil ik nog meedeelen, dat ik later toch nog een bijna volledig exemplaar van *Pentamerus borealis* EICHW., blijkbaar afkomstig uit een Groninger zwerfsteen, hier in 't museum heb gevonden. De overeenstemming met de vroeger genoemde specimen van Weissenfeld is echter niet zeer groot, doordat de top der ventrale klep in ons exemplaar veel sterker gekromd is en zoodoende beter beantwoordt aan EICHWALD's beschrijving.

Het zou zeer wenschelijk zijn, dat deze bestaande verwarring ten opzichte van de bovensilurische Pentamerensoorten eens door een nauwkeurig onderzoek werd opgeheven.

31. Clathrodictyonkalk.

Witte kalksteen, soms met meer of minder lichtgeelachtig-grijze tint. Op de oppervlakte en in holten is de kleur meer geel. Steeds kristallijn, vertoonen de zeer onregelmatige breukvlakken een eigen-

aardigen vetachtigen zijdeglans, die zeer kenmerkend is. Wordt de kleur een enkele maal wat donkerder, dan blijft de glans behouden. Het gesteente vormt een echten stromatoporenkalksteen, hetgeen aan sommige stukken goed waar te nemen valt, doordat ze bestaan uit zwak gekromde, concentrische lagen, wier oppervlakte met kleine, knobbelvormige verhevenheden („mamelons”) bedekt is (25, Pl. XVII, f. 14), die het zeer waarschijnlijk maken, dat we hier te doen hebben met

Clathrodictyon variolare ROSEN sp.

De structuur dezer versteening is echter niet goed na te gaan wegens het kristallijne karakter van het gesteente.

Eigenlijke fossielen bevat deze zwerfsteensoort verder alleen in den vorm van eigenaardige conische holten, naar de punt toe veelal iets gebogen. Van binnen zijn ze steeds met ringvormige randen bezet; deze liggen gemiddeld ruim 1 mM. uit elkaar in exemplaren van gemiddelde grootte. De holte is dikwijls geheel opgevuld met waterheldere, gekristalliseerde calciëet. De tamelijk dikke wand dezer versteening vertoont aan den buitenkant zwakke, eenigszins onregelmatig loopende groeistrepen. FRIEDRICH SCHMIDT, Akademiker in St. Petersburg, wien ik een stuk van dezen kalksteen toezond, was zoo vriendelijk me mee te deelen, dat deze holten afkomstig zijn van *Cornulites* sp. (1, T. 26, f. 5—8), een op Oesel veel voorkomend fossiel der I-zone bij St. Johannis.

Dergelijke zwerfsteen en zijn bij Groningen volstrekt niet zeldzaam, zooals uit het volgende lijstje blijkt:

Noorderbegraafplaats,	Groningen	6
Boteringesingel,	„	7
Nieuwe Kijk in 't Jatstraat	„	1
Nieuwe Veelading,	„	3
Schietbaan,	„	1
Achter 't Sterrebosch,	„	1
	„	1
Café „de Passage”, Helpman		1
Villa „Edzes” bij Haren		1
„'t Huis de Wolf” bij Haren		1
„Klein-Zwitserland” bij Harendermolen		1

Omtrent het voorkomen der genoemde stromatoporensoort deelt NICHOLSON mede, dat hij haar gevonden heeft bij Borkholm en Worms in de Borkholmer laag in Estland, maar vooral ook menigvuldig heeft aangetroffen in de Estonus-zone aldaar, hoofdzakelijk bij Kat-

tentack. (25, p. 151). Van Gotland noemt hij haar niet, ofschoon dat niet voldoende is om haar voorkomen aldaar met zekerheid uit te sluiten. LINDSTRÖM noemt trouwens wel drie andere soorten van dit geslacht (16, p. 22). Onder mijn vergelijkingsmateriaal bevindt zich een exemplaar van Klein-Ruhde, ten W. van Kattentack gelegen in de H-zone in Estland. Dat gesteente is iets donkerder, meer grijs; maar toch zijn onder onze stukken voorbeelden aan te wijzen, die daarop volkomen gelijken, zoodat men de overeenstemming bepaald frappant kan noemen. De beschreven *Cornuliten* komen daarin niet voor, wat trouwens bij een stuk van zulke kleine afmetingen ($7 \times 6 \times 2$ c.M.) geene verwondering hoeft te baren.

Ten slotte wil ik nog even vermelden, dat ik in een zwerfsteen van stromatoporenkalk op Gotland, petrografisch niet geheel met onze stukken overeenkomende, analoge *Cornulites*-holten heb aangetroffen. De vindplaats daarvan ligt vlak ten N. van Högklint, boven op het veld (niet op het strand). Intusschen is deze versteening voor de nadere ouderdomsbepaling van het gesteente van weinig belang, daar er onder den meestal opgegeven naam *Cornulites serpularius* SCHLOTH. wel meerdere soorten zullen verborgen zijn.

Alles samengenomen, schijnt het me mogelijk (misschien zelfs waarschijnlijk), dat deze Clathrodictyonkalk afkomstig is van de H-zone in Estland of van hare westelijke voortzetting.

In aansluiting hiermee dient vermeld, dat onder de zeer talrijke stromatoporen van den Hondsrug (waarvan slechts zeer zelden specifieke bepalingen mogelijk zijn) er twee voorkomen, die door hun karakteristieke astrorhizae zich laten bepalen als

Stromatopora discoidea LONSD. sp. . . . 25, Pl. XXIV, f. 2.

Beide stukken, gevonden op de Noorderbegraafplaats en in de Violenstraat in Groningen, bestaan uit fijnkorrelig-kristallijnen (stromatoporen-)kalksteen; het eerste is geheel wit en lijkt daardoor zeer op Clathrodictyonkalk, het tweede is meer grijs en ook gedeeltelijk verweerd, waardoor die overeenkomst niet zoo groot is.

Deze species, in Wenlock limestone van Engeland zeer gewoon, komt ook voor in de buurt van Wisby op Gotland. NICHOLSON noemt die Gotlander exemplaren echter „usually highly mineralised” (25, p. 191), wat met mijn materiaal van Gotland alleen in zooverre overeenkomt, dat dit fossiel slechts als een niet altijd zeer dikke kristallijne korst voorkomt in mergel of mergeligen kalksteen. LINDSTRÖM geeft haar slechts op uit *h* (16, p. 22), zijne jongste zone van het bovensiluur van Gotland (*f*, DAMES). Ik voer daartegen aan,

dat ik een, trouwens door een geringer aantal astrorhizae eenigszins afwijkend exemplaar heb gevonden in den kalkmergel even ten N. van Högkint, daar als vaste rots aanwezig; dit fossiel is afkomstig uit eene laag ongeveer 1 M. boven het strand. Dit petrographische en stratigraphische voorkomen is, naar het me voorkomt, met den ouderdom *h* moeilijk overeen te brengen; het andere hier in 't museum aanwezige exemplaar steunt mijne waarneming slechts in zooverre, dat het stuk nog duidelijke mergelresten bevat. De vindplaats daarvan is echter niet nader aangegeven.

Met deze Gotlander stukken hebben onze Groninger vondsten in 't algemeen weinig gelijkenis; intusschen komt deze versteening ook voor in Estland, bij Klein-Ruhde in de Estonus-zone. Daarom zijn deze beide stukken hier geplaatst, ofschoon voor hunne herkomst uit deze oostbaltische streken bij gebrek aan vergelijkingsmateriaal geene verdere gegevens zijn bij te brengen.

I.

Zverfsteen, die in ouderdom met de Onderste Oeselsche zone in het oostbalticum overeenkomen, zijn bij Groningen niet zeldzaam. BONNEMA heeft eenige jaren geleden daarop reeds gewezen (31); dit korte opstel draagt evenwel meer een palaeontologisch karakter, zoodat ik die mededeelingen hier eenigszins wil aanvullen en uitbreiden.

32. Baltica-kalk.

In onverweerden toestand tamelijk harde, taaie, fijnkorrelig-kristallijne kalksteenen van een heldergrijze of lichtbruingrijze kleur. Sommige stukken zijn bijna dicht; enkele gedeelten zijn van binnen blauwgrijs gekleurd, zoodat het gesteente oorspronkelijk misschien die kleur zal hebben vertoond. Door verweering gaat de heldergrijze tint over in licht-geelgrijs; de oneffen breukvlakken zijn dan vaak vuilgeel en bruin gevlekt. Kristallijne calciet komt weinig voor. De kalksteen is vrij zuiver, weinig mergelachtig en slechts zelden in geringe mate dolomietisch. Echte dolomieten komen hieronder niet voor. Gelaagdheid is niet waar te nemen. De afmetingen der gevonden stukken gaan tot ongeveer 25 c.M.

Fossielen zijn niet zeer menigvuldig aanwezig; in hoofdzaak Ostracoden, waaronder Leperditienschalen de belangrijkste zijn. Helderbruin in het onverweerde gesteente, zijn de kleppen, die in een enkel stuk soms talrijk voorkomen, bij verweering bijna wit geworden.

Evenals met de later te beschrijven jongere Leperditienskalken dikwijls het geval is, is deze kalksteen ook nogal vaak met Stromatoporenkalk verbonden; de straks te noemen versteeningen komen daarin evenwel nooit voor. Naast deze groote Ostracodenresten komen ook veelvuldig kleine Beyrichien- en Primitienkleppen voor, die echter eerst bij verweering goed zichtbaar worden. De fossiele fauna bestaat uit de volgende soorten:

Leperditia baltica HIS. sp.

Strophomena rhomboidalis WILCK. sp.

Strophomena sp.

Atrypa reticularis L.

Meristella sp.

Encrinurus punctatus WAHLB.

Zaphrentis conulus LINDSTR. 28, p. 32, T. VI, f. 65—68.

Orthoceras sp.

Murchisonia sp.

Tentaculites sp.

Primitia seminulum JONES. 14, p. 413, Pl. XIV, f. 14.

Primitia mundula JONES 23 T. XXX, f. 5—7; 18, p. 375, Pl. XVI.

Beyrichia Jonesii BOLL. 17, p. 13, T. II, f. 10—11.

Beyrichia spinigera BOLL. 23, p. 501, T. XXXI, f. 19—20.

De eerstgenoemde Leperditienssoort is in alle stukken aanwezig; alle andere fossielen komen echter slechts òf een enkele maal òf in een enkel stuk voor, behalve de kleine ostracoden. Ik heb me evenwel niet veel moeite gegeven het aantal soorten daarvan (grootendeels ook reeds door BONNEMA vermeld) te vergrooten, omdat hunne stratigraphische waarde tegenwoordig toch nog maar klein is. Om ouderdom en herkomst te bepalen, kunnen we ons dus beperken tot de mededeeling, waar en in welke lagen de gidsversteening dezer groep, *Leperditia baltica* HIS. sp. (naar welke ik, in overeenstemming met de algemeen gebruikte namen Phaseoluskalk en Grandiskalk, deze kalksteen heb genoemd), voorkomt.

Vooraf zij echter even weer het aantal en de speciale vindplaats der hier gevonden stukken opgegeven:

Noorderbegraafplaats,	Groningen	7
Boteringesingel,	„	4
Noorderbinnensingel,	„	5
Violenstraat,	„	1
Nieuwe Boteringestraat,	„	1
Nieuwe Kijk-in 't Jatstraat	„	2
Nieuwe Veelading,	„	1

	Groningen	1
„Oude Verzameling”		3
Helpman		2
Hilghesteede, Helpman		1
Tusschen Helpman en Haren		2
Harendermolen		1

In 't geheel dus 31 stukken. Het gevonden aantal is vermoedelijk veel grooter, omdat ik hier alleen de met zekerheid hiertoe behoorende zwerfsteenen heb vermeld; onder de talrijke kalksteenen met soortelijk niet te bepalen Leperditienresten zullen zeker nog een aantal schuilen, die van dezen ouderdom zijn.

Leperditia baltica His. sp.

- Literatuur: 1869. KOLMODIN, 2, p. 13, f. 2—3.
 1873. SCHMIDT, 4, p. 15—17, f. 19—21.
 1876. ROEMER, 5, T. 19, f. 7.
 1878. MARTIN, 6, p. 45.
 1880. KOLMODIN, 8, p. 134.
 1883. SCHMIDT, 10, p. 11—13, T. I, f. 1—3.
 1884. KIESOW, 11, p. 275, T. IV, f. 4.
 1885. REMELÉ, 13, p. 26, no. 226.
 1888. LINDSTRÖM, 16, p. 5, no. 25.
 1890. KIESOW, 19, p. 89—91, T. XXIII, f. 14—16.
 1890. SCHMIDT, 20, p. 255.
 1890. DAMES, 21, p. 1125.
 1891. KRAUSE, 22, p. 5, 7.
 1891. KRAUSE, 23, p. 488, T. XXIX, f. 1—3.
 1891. SCHMIDT, 24, p. 123.
 1895. STOLLEY, 27, p. 109.
 1898. BONNEMA, 29, p. 452.
 1900. CHMIELEWSKI, 30, p. 17—20, 33; T. I, f. 17—20.
 1900. BONNEMA, 31, p. 138—140.

Uit de hierboven aangehaalde (wat de latere opgaven betreft, tamelijk volledige) literatuur over deze versteening blijkt, dat er langen tijd eene zekere verwarring en onzekerheid der soortgrenzen heeft bestaan, welke eerst eenige jaren geleden is opgeheven. Naast de echte *L. baltica* His., gekenmerkt door de kamvormige streeping van den omslag der linker klep (*L. pectinata* SCHMIDT) — welk verschijnsel in een twintigtal der hier gevonden zwerfsteenen goed is waar te nemen —, had SCHMIDT ook nog eene andere species beschreven: *L. Eichwaldi* SCHM. BONNEMA heeft aangetoond, dat beide

soorten vereenigd moeten worden (31); vrijwel gelijktijdig is dit ook door CHMIELEWSKI opgemerkt. Deze onderscheidt echter naast den typischen vorm nog twee variëteiten :

L. baltica, var. *Eichwaldi* SCHMIDT
 „ „ „ *formosa* CHMIEL.

Deze beide variëteiten zijn onder onze zwerfsteenen vertegenwoordigd, var. *Eichwaldi* niet zeldzaam, var. *formosa* minder dikwijls. Intusschen zijn de kenmerken dezer variëteiten volstrekt niet scherp, zoodat er overgangen zijn daartusschen en tusschen de echte soort, wat CHMIELEWSKI trouwens zelf ook waargenomen heeft. Daarmede komt overeen, dat deze variëteiten stratigraphisch eigenlijk geene beteekenis hebben; op deze gronden heb ik gemeend al deze vormen als ééne soort onder den naam van *Leperditia baltica* HIS. sp. te mogen samenvatten.

In zwerfsteenen is zij herhaaldelijk gevonden. KIESOW beschrijft haar uit „weisslich-grauen Mergelkalk” van Langenau, uit „ziemlich verwitterter und in Folge dessen gelblich gefärbter Kalk mit zahlreichen Schalen der *Leperditia baltica* HIS. (F. SCHMIDT); daneben finden sich *Encrinurus punctatus*, *Atrypa reticularis*, und einige schlecht erhaltene *Beyrichien*, u. s. w.” van Zoppot-Olivaer Walde, eveneens in Westpruisen. Het eerste gesteente komt geheel overeen met kalksteen van Langers in 't N.O. van Gotland, het tweede vertoont goede overeenstemming met het voorkomen van Oesterly-strand bij Slite. Daarom leidt hij deze stukken van Gotland af. (Van het samen voorkomen van *L. baltica* HIS. sp. en *L. Hisingeri* SCHM., waarover ik in mijn vorige mededeeling sprak (33, p. 560), is hij later niet meer zeker — 19, p. 90). In zijn nu reeds meermalen aangehaalde voortreffelijke verhandeling beschrijft CHMIELEWSKI kort een zestal gesteenten, waarin hij *L. baltica* in Kurland, Kowno, Oost- en Westpruisen heeft aangetroffen. Het meest met onze zwerfsteenen overeenkomend schijnt wel zijn uit Kowno afkomstige: „hellbräunlich-grauer, deutlich krystallinischer, wenig thoniger, fester, unebenbrüchiger Kalkstein mit *Encrinurus punctatus* (30, p. 33),” te zijn. Over de herkomst laat hij zich niet bepaald uit.

Verder westelijk wordt deze soort nog genoemd uit Brandenburg door REMBLÉ en KRAUSE, veelal in gezelschap van fossielen, welke ook in onze zwerfsteenen voorkomen, en uit kalksteenen, die, voorzoover dit uit de korte beschrijvingen is op te maken, in sommige opzichten wel met de onze overeenkomen. STOLLEY beschrijft uit Sleeswijk-Holstein eveneens verschillende dier kalksteenen, waaronder „ein gelber Kalk enthält neben *L. baltica* HIS., *Atrypa reticularis* L.

und *Encrinurus punctatus* WAHLENBERG" weder opvalt. Van Groeningen werd onze soort reeds in 1878 door MARTIN vermeld, van Kloosterholt later ook, door BONNEMA (29, p. 452).

Uit deze opgaven omtrent het erratisch voorkomen der species blijkt voldoende, dat deze soort van Kurland en Kowno tot Nederland is verspreid, al zijn dan ook nergens zulke zwerfsteenen in groote hoeveelheden aangetroffen. In het Scandinavisch-baltisch gebied komt ze in vaste rots op verschillende plaatsen voor :

1°. Op M a l m ö bij Christiania, wat voor ons van minder belang is ;
 2°. Op G o t l a n d, waar SCHMIDT haar voorkomen als volgt beschrijft:
 „Das grosse Centralmergelgebiet von Follingbo bis Slite und Fårö, das bald aus reinen Mergeln, bald aus Mergeln mit Kalken wechselnd besteht, wird neben andern Fossilien besonders durch die ursprüngliche *Leperditia baltica* HIS. mit kammförmiger Zeichnung auf dem Umschlag der linken Schale characterisirt, die einerseits auch bis zu den Mergeln von Westergarn vordringt und andererseits sich vielfach auch in den oberen Kalken der Wisby-Region findet, so bei Heideby und Martebo. Auf Fårö bei Lansa kommt sie zusammen mit *Zaphrentis conulus* LINDSTR., *Strophomena imbrex* VERN. u. a. im Kalk vor, wechselnd mit *Megalomus*-banken." (20, p. 255). Deze plaatsen behooren tot SCHMIDT's middelste zone ; KOLMODIN noemt haar ook nog van Oestergarn en Hammarudd bij Kräklingbo (8, p. 134), waar zeker jongere lagen voorkomen. Op de beide laatste plaatsen heb ik lang gezocht, doch haar niet kunnen vinden. Volgens LINDSTRÖM : b—c.

3°. Op O e s e l is deze soort een gidsversteening der Onderste Oeselsche zone I. Langen tijd was ze alleen bekend uit dolomiet van Kiddemetz (var. *Eichwaldi*), doch is later, SCHMIDT's voorspelling waar makende, ook in kalksteenen op het schiereiland Taggamois aan de N.W.-kust gevonden. Alleen daar bestaat die zone uit kristallijnen kalksteen ; overal elders uit dolomiet of mergel (9, p. 46—49).

Met betrekking tot de herkomst dezer nu in ouderdom vastgestelde zwerfsteenen gelden de volgende beschouwingen. Allereerst is belangrijk dat Schonen niet in aanmerking kan komen, wijl *Leperditia baltica* daar niet voorkomt. In 't algemeen pleit tegen Gotland het mergelige karakter van het daar ontwikkeld gesteente ; zeker hebben we wel alleen rekening te houden met het noordoostelijk deel van het eiland. Hoewel onze zwerfsteenen nu in 't geheel niet den indruk maken uit mergelige lagen afkomstig te zijn, zegt dit toch niet zoo heel veel, omdat daar op Gotland de kalksteen met *L. baltica* toch niet overal bepaald als kalksteen uit mergel is te beschouwen. De vraag naar de herkomst is dus zonder zeer uitgebreid vergelijkings-

materiaal niet op te lossen. Dit bezit ik niet; alleen een enkel stuk kalksteen van Slite komt niet met onze zwerfsteen overeen; dit gesteente van Slite is anders gekleurd en ook veel kristallijner en verraadt door mergelresten en een kleine concretie van pyriet-kristalletjes zijne afkomst uit mergel. Wat nu Oesel aangaat, ook daarvan heb ik slechts een enkel stuk met *L. baltica* ter vergelijking. Het is afkomstig van Kiro vlak ten Z. van Taggamois, en stemt met onze zwerfsteen veel beter overeen. Het is echter slechts een onaanzienlijk, verweerd stuk, zoodat dit niet zoo heel veel beteekent.

Resumeerende, is de herkomst onzer zwerfsteen waarschijnlijk te zoeken tusschen Oesel en Gotland, waar er alle reden is om aan te nemen dat langs de lijn Fårö—Taggamois kalksteen van den ouderdom der I-zone ontwikkeld zijn of waren.

Aan deze Baltica-kalk sluiten zich nu meer of minder nauw verschillende gesteenten aan, die wegens hun fossielen inhoud het best tot de Onderste Oeselsche zone kunnen worden gerekend.

a. Geelgrijze kalksteen met :

Proetus concinnus DALM., var. *Osiliensis* SCHM. 26, T. IV, f. 1—9.

Calymmene tuberculata BRÜNN. 26, T. I, f. 1—7.

Cyphaspis elegantula LOV. sp. 7, T. XVII, f. 7.

Encrinurus punctatus WAHLB.

Strophomena rhomboidalis WILCK. sp.

Orthis sp.

Ze gelijken volkomen op sommige stukken Baltica-kalk en zullen ook in ouderdom daarvan wel niet veel verschillen. Zonder hun voorkomen hier in bijzonderheden na te gaan, geeft het volgende lijstje voldoende aan, waarom ze op deze plaats worden vermeld :

	Gotland (16)	Oesel (26)
<i>P. concinnus</i> DALM., (var. <i>Osiliensis</i> SCHM.)	(c—e)	I
<i>C. tuberculata</i> BRÜNN.	c—f	I
<i>C. elegantula</i> LOV. sp.	c	I

Een achttal stukken van dezen kalksteen zijn afkomstig van de volgende vindplaatsen :

Boteringesingel,	Groningen	2
Noorderbinnensingel,	„	2
Nieuwe Veelading,	„	1
	„	1
Hilghestede,	Helpman	1
	„	1

Als herkomstgebied moet weder het terrein tusschen Gotland en Oesel worden beschouwd op grond van geheel gelijksoortige beschouwingen als bij de Baltica-kalk zijn vermeld.

b. Misschien behooren hiertoe ook twee kalksteenen met

Bumastes barriensis MURCH.

gevonden aan de Nieuwe Veelading en de Schietbaan in Groningen, wijl HOLM deze versteening in het oostbalticum noemt uit *I* (15, p. 37), LINDSTRÖM uit *b—h* op Gotland (16, p. 4, N°. 64).

c. In de derde plaats mogen hier verschillende kalksteenen met

Encrinurus punctatus WAHLB.

even worden vermeld. Deze „Encrinuruskalken” zijn in ouderdom niet nader te bepalen wegens het ontbreken van andere daarvoor geschikte versteeningen. Sommige koralen, *Favosites* en *Halysites*, waarmede ze soms voorkomen, kunnen daartoe geen dienst doen.

d. Onder de groote massa koralen uit den Groninger Hondsrug zijn stellig vele van den ouderdom der Onderste Oeselsche zone, zooals b. v. *Thecia Swinderenana* GOLDF. en andere. Ik wil me evenwel thans daarmee niet bezig houden, doch deze met al de andere koralen, wier ouderdom bijna nooit tusschen enge grenzen is te bepalen, later samen als „Koralenkalk” behandelen.

e. Ten slotte wil ik even melding maken van een enkel stuk donkergroenachtig-grijze mergelkalk, hetwelk talrijke pygidia en kopschilden eener *Calymmene*-soort bevat. Deze zwerfsteen, gevonden aan de Boteringesingel in Groningen, doet denken aan de mergelagen van St. Johannis der *I*-zone op Oesel, doch stemt ook absoluut overeen met mergels van verschillende plaatsen op Gotland. Over de herkomst valt dus niets te zeggen. Waarschijnlijk hebben we hier te doen met REMELÉ's „Grünlichgrauer Calymmenekalk”. (13, p. 27).

Hiermede is de opsomming der zwerfsteenen van den ouderdom *I* ten einde. Alleen zij hieraan nog even toegevoegd, dat deze zone zeer goed nog rijk vertegenwoordigd kan zijn onder de uiterst menigvuldige dolomieten van Groningen. Deze bevatten hier echter slechts hoogst zelden versteeningen en laten zich op grond daarvan niet in scherp gescheiden groepen splitsen. Aan het eind der beschrijving van de bovensilurische zwerfsteenen hoop ik intusschen nog een en ander hierover te kunnen meedeelen.

L I T E R A T U R.

1. MURCHISON, R. J. — »*The silurian system*”.
London, 1839.
2. KOLMODIN, L. — »*Bidrag till k nnedomen om Sverges siluriska Ostracoder*”.
Inaug.-Dissert., Upsala, 1869.
3. DAVIDSON, TH. — »*A monograph of the British fossil Brachiopoda. III. Devonian and silurian species*”.
London, 1864—’71.
4. SCHMIDT, F. — »*Miscellanea Silurica. — I. Ueber die russischen silurischen Leperditien mit Hinzuziehung einiger Arten aus den Nachbarländern*”.
Mém. de l’Ac. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, VIIe S r., T. XXI, no. 2 ; 1873.
5. ROEMER, F. — »*Lethaea geognostica. I. Lethaea palaeozoica*”. Atlas.
Stuttgart, 1876.
6. MARTIN, K. — »*Niederländische und nordwestdeutsche Sedimentärgeschiebe, ihre Uebereinstimmung, gemeinschaftliche Herkunft und Petrefacten*”.
Leiden, 1873.
7. ANGELIN, N. P. — »*Palaeontologia scandinavica*”.
Stockholm, 1878.
8. KOLMODIN, L. — »*Ostracoda Silurica Gothlandiae*”.
 fvers af Kongl. Svensk. Vet.-Akad. Förhandl. 1879, no. 9, p. 133—139 ; 1880.
9. SCHMIDT, F. — »*Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten nebst geognostischer Uebersicht des ostbaltischen Silurgebiets*”.
Abtheilung I.
Mém. de l’Ac. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, 7e S r., T. XXX, no. 1 ; 1881.
10. SCHMIDT, F. — »*Miscellanea Silurica. — III. 1. Nachtrag zur Monographie der russischen Silurischen Leperditien*”.
Mém. de l’Ac. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, VIIe S r., T. XXXI, no. 5 ; 1883.
11. KIESOW, J. — »*Ueber silurische und devonische Geschiebe Westpreussens*”.
Schrift. d. naturf. Ges. in Danzig, N. F., VI, 1, p. 205—300 ; 1884.
12. ROEMER, F. — »*Lethaea erratica*”.
Palaeont. Abhandl., herausg. v. W. Dames u. E. Kayser, II, 5 ; 1885.
13. REMELÉ, A. — »*Katalog der beim internationalen Geologen-Congress zu Berlin ausgestellten Geschiebesammlung*”.
Berlin, 1885.
14. RUPERT JONES, T. and
HOLL, H. B. — »*Notes on the Palaeozoic Bivalved Entomostraca. — XXI. On some Silurian Genera and Species*”.
Ann. and Magaz. of Nat. Hist., 5 Ser., Vol. XVII, p. 403—414 ; 1886.
15. HOLM, G. — »*Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten*”.
Abtheilung III.
Mém. de l’Ac. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, 7e S r., T. XXXIII, no. 8 ; 1886
16. LINDSTRÖM, G. — »*List of the fossil faunas of Sweden. II. Upper Silurian*”.
Stockholm, 1888.

17. KIESOW, J. — »*Ueber gotländische Beyrichien*».
Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges., XL, p. 1—16; 1888.
18. RUPERT JONES, T. — »*Notes on the palaeozoic Bivalved Entomostraca. XXVII. On some North-American (Canadian) Species*».
Ann. and Magaz. of Nat. Hist., 6 Ser., Vol. III, p. 373—387; 1889.
19. KIESOW, J. — »*Beitrag zur Kenntniss der in westpreussischen Silurgeschieben gefundenen Ostracoden*».
Jahrb. d. k. pr. geol. Landesanst. u.s.w. f. 1889, p. 80—103; 1890.
20. SCHMIDT, F. — »*Bemerkungen über die Schichtenfolge des Silur auf Gotland*».
Neues Jahrbuch, 1890, II, p. 249—266.
21. DAMES, W. — »*Ueber die Schichtenfolge der Silurbildungen Gotlands und ihre Beziehungen zu obersilurischen Geschieben Norddeutschlands*».
Sitz.-Ber. d. k. pr. Ak. d. Wiss. zu Berlin, 30 Oct. 1890; Bd. XLII, p. 1111—1129.
22. KRAUSE, A. — »*Die Ostrakoden der silurischen Diluvialgeschiebe*».
Wiss. Beilage z. Progr. d. Luisenstädtischen Oberrealschule zu Berlin, Ostern 1891.
23. KRAUSE, A. — »*Beitrag zur Kenntniss der Ostrakodenfauna in silurischen Diluvialgeschieben*».
Zeitschr. d. deutsch. geol. Ges., XLIII, p. 488—521; 1891.
24. SCHMIDT, F. — »*Einige Bemerkungen über das baltische Obersilur in Veranlassung der Arbeit des Prof. W. DAMES über die Schichtenfolge der Silurbildungen Gotlands*».
Bull. d. l'Ac. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, N. S. II (XXXIV), 1892, p. 381—400; auch: Mém. géol. et paléont., tirés du Bull. etc., T. 1, p. 119—138.
25. NICHOLSON, H. A. — »*A monograph of the British Stromatoporoids*».
The Palaeontographical Society, London, 1886—'92.
26. SCHMIDT, F. — »*Revision der ostbaltischen silurischen Trilobiten*».
Abtheilung IV.
Mém. de l'Ac. Imp. d. Sc. de St. Pétersbourg, 7e Sér., T. XLII, no. 5; 1894.
27. STOLLEY, E. — »*Die cambrischen und silurischen Geschiebe Schleswig-Holsteins und ihre Brachiopodenfauna. I. Geologischer Theil*».
Arch. f. Anthrop. u. Geol. Schleswig-Holsteins u.s.w., I, 1, p. 35—136; 1895.
28. LINDSTRÖM, G. — »*Beschreibung einiger obersilurischer Korallen aus der Insel Gotland*».
Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handl., XXI, Afd. IV, no. 7; 1896.
29. BONNEMA, J. H. — »*De sedimentaire zwerfblokken van Kloosterholt (Heiligenlee)*».
Versl. v. d. gew. Verg. d. Wis- en Nat. Afd. d. Kon. Ak. v. Wet. v. 29 Jan. 1898, dl. VI, p. 448—453.
30. CHMIELEWSKI, C. — »*Die Leperditien der obersilurischen Geschiebe des Gouvernement Kowno und der Provinzen Ost- und Westpreussen*».
Schrift. d. phys.-oekon. Ges. zu Königsberg, Jg. 41, p. 1—38; 1900.

31. BONNEMA, J. H. — »*Leperditia baltica* His. sp., hare identiteit met *Leperditia Eichvaldi* Fr. v. Schm. en haar voorkomen in Groninger diluviale zwerfblokken”.

Versl. v. d. gew. Verg. d. Wis- en Nat. Afd. d. Kon. Ak. v. Wet. v. 30 Juni 1900, dl. IX, p. 138—140.

32. JONKER, H. G. — »*Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland.*

I. De Hondsrug in de provincie Groningen.

1. Inleiding. Cambrische en ondersilurische zwerfsteenen”.

Acad. Proefschrift, Groningen, 1904.

33. JONKER, H. G. — »*Bijdragen tot de kennis der sedimentaire zwerfsteenen in Nederland.*

I. De Hondsrug in de provincie Groningen.

2. Bovensilurische zwerfsteenen.

Eerste mededeeling: Zwerfsteenen van den ouderdom der oostbaltische zone G”.

Versl. v. d. gew. Verg. d. Wis- en Nat. Afd. d. Kon. Ak. v. W. v. 28 Jan. 1905, dl. XIII, 2, p. 548—565.

Groningen, Min.-Geol. Instituut, 4 April 1905.

Scheikunde. — De Heer HAMBURGER biedt eene mededeeling aan van den Heer A. W. VISSER, getiteld: „*Een paar opmerkingen over auto-katalyse en de omzetting van γ -oxyzuren, met en zonder toevoeging van andere zuren, opgevat als ionenreactie.*”

(Mede aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM).

1. Door OSTWALD ¹⁾ is als algemeene vergelijking voor katalytische processen opgesteld:

$$\frac{dx}{dt} = \{k_1 + \sum k f(x)\} (A - x)(B - x) \dots,$$

waarin door $\sum k f(x)$ de veranderlijke katalytische invloeden worden aangegeven; hierbij wordt door den schrijver de opmerking gemaakt, dat hij geen algemeene methode kan aangeven om uit het waargenomen verloop van een bepaalde reactie iets te zeggen omtrent den vorm van de functie $f(x)$.

Bij de bestudeering van de omzettingen van saccharose door invertase en van salicine door emulsine, heb ik aangetoond ²⁾, dat de

¹⁾ OSTWALD, Lehrbuch der Allgem. Chem. II, 2, p. 270.

²⁾ VISSER, Dissertatie, Amsterdam 1904. Binnenkort zal een vertaling daarvan in het Zeitschr. f. phys. Chem. worden opgenomen.

hierbij optredende veranderlijke katalytische invloeden door de invoering van een juiste maat voor de *intensiteit* van een katalysator, gedurende het geheele reactieverloop, konden worden aangegeven en het komt mij voor, dat de in mijn dissertatie aangegeven weg om die intensiteitsverandering van een katalysator gedurende het reactieverloop vast te stellen, een algemeene methode genoemd kan worden om bovengenoemde functie te bepalen.

Het eenvoudigste geval, dat zich laat denken, is wel dit, dat de intensiteitsverandering van den katalysator met de concentratieverandering der stof, waarop zij inwerkt, standvastig is. In dat geval is:

$$-\frac{dI}{dC} = k_2,$$

dus :

$$I = k_1 - k_2 C.$$

In deze vergelijking is $I = k_1$, wanneer $C = 0$ is, dus is k_1 de intensiteit van den katalysator als alles is omgezet, terwijl k_2 de toename is in intensiteit, wanneer de concentratie de eenheid kleiner wordt.

Schematisch kan dit aldus worden voorgesteld:

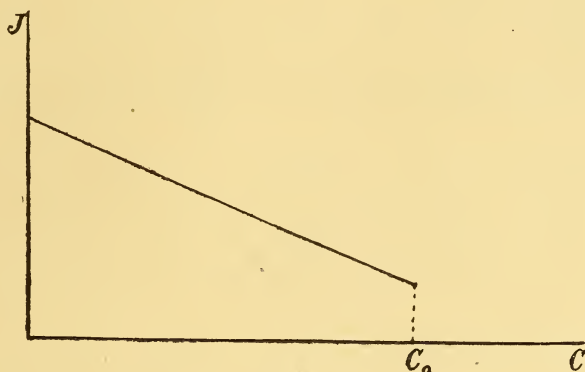


Fig. 1.

De reactievergelijking voor een monomoleculaire reactie, waarbij de intensiteit van een katalysator een rol vervult, kan worden voorgesteld door:

$$-\frac{dC}{dt} = k C I.$$

Voor het onderstelde geval dus door:

$$-\frac{dC}{dt} = k (k_1 - k_2 C) C.$$

Dit is dezelfde vergelijking als door OSTWALD ¹⁾ is opgesteld voor positieve auto-katalytische processen, maar het komt mij voor, dat door invoering van het intensiteitsbegrip de in de formules voorkomende constanten een meer omlijnde beteekenis krijgen.

Voor de negatieve auto-katalyse geldt dan:

$$\frac{dI}{dC} = k_2$$

$$I = k_1 + k_2 C$$

en hierin is weer k_1 de intensiteit, als alles is omgezet, en k_2 de afname in intensiteit, wanneer de concentratie met de eenheid vermindert.

Schematisch kan dit aldus worden voorgesteld:

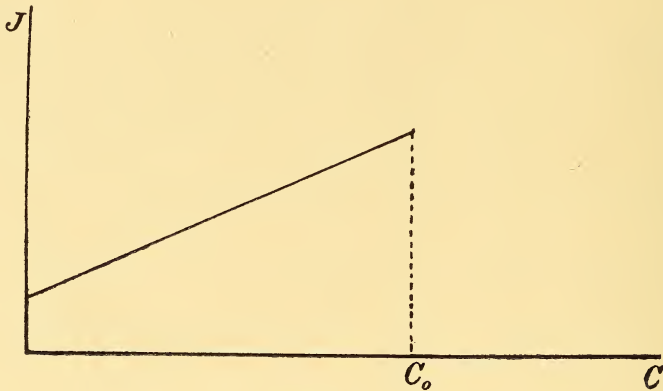


Fig. 2.

Onder positieve auto-katalyse heeft men dan te verstaan een toename in de intensiteit van den katalysator bij het voortgaan der reactie; onder negatieve auto-katalyse een afname in die intensiteit.

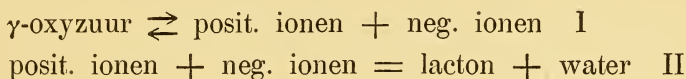
2. Als voorbeelden van reacties, waarbij auto-katalyse optreedt, kunnen gelden de vrijwillige omzettingen van oplossingen van γ -oxyzuren in hun lactonen. Het zuur is gesplitst in ionen en deze zouden, volgens de opvatting van PAUL HENRY ²⁾, die de omzetting bestudeerde van γ -oxyboterzuur en oxyvaleriaanzuur, het niet gesplitste deel van het oxyzuur omzetten en dus enkel en alleen katalytisch werken. Ik heb mij de vraag gesteld of deze omzettingen ook op te vatten zijn als ionenreacties, omdat het mij voorkomt, dat het rationeeler is deze omzettingen aldus op te vatten en als zoodanig te brengen onder de wetten der massawerking, daar wij niet weten

¹⁾ Lehrb. der Allgem. Chem. II, 2 p. 263 e. v.

²⁾ Z. f. phys. Chem. X, p. 111 e. v.

wat katalyse eigenlijk is. Gebruik makende van de onderzoeken van PAUL HENRY ben ik tot een zeer bevredigend resultaat gekomen.

Volgens deze opvatting is het oxyzuur op elk oogenblik in evenwicht met zijn ionen en deze zetten zich om in 't lacton, dus volgens 't schema :



Zooals reeds is gemeld, denkt PAUL HENRY zich deze omzetting zóó, dat alleen het niet gesplitste deel van het oxyzuur in lacton verandert en de ionen enkel en alleen katalytisch werken, want, zegt hij, voegt men HCl of H₂SO₄ toe, dan wordt de dissociatiegraad van het oxyzuur verminderd, d. w. z. het evenwicht wordt verschoven naar den kant van het oxyzuur en de concentratie van de negatieve ionen van het oxyzuur wordt geringer en wanneer nu het gedissocieerde deel van het zuur zich omzette, dan zou de reactiesnelheid onder deze omstandigheden niet zoo sterk stijgen. Het komt mij voor, dat deze redeneering niet juist is; de concentratie der neg. ionen van 't oxyzuur wordt geringer door toevoeging van H-ionen in den vorm van HCl, maar daartegenover staat, dat de concentratie der positieve H-ionen enorm stijgt en om de reactievergelijking op te stellen, moeten wij, als wij de reactie als ionenreactie opvatten, deze beide concentraties met elkaar vermenigvuldigen.

3. In de eerste plaats komen de vrijwillige omzettingen van de γ -oxyzuren ter sprake. Bij de opstelling van reactievergelijkingen moet men bedenken, dat de omzetting van γ -oxyzuren in lactonen niet volledig is.

Stel de concentratie van 't γ -oxyzuur bij den aanvang = C_0
 " " " " " " " na een tijd t = C

Stel, dat dan het deel p van 't oxyzuur in ionen is gesplitst, dan is de concentratie van 't oxyzuur = $(1 - p) C$ en de concentratie der ionen = pC .

Volgens vergelijking I (pag. 3) is dan :

$$\frac{p^2 C}{1-p} = k.$$

k is de dissociatie-constante van 't oxyzuur.

Stel de concentratie der ionen na een tijd $t = y$, dan is :

$$y = pC = \frac{1}{2} \{ \sqrt{4kC + k^2} - k \}$$

Het schema :



geeft als reactievergelijking, wanneer de conc. verandering van 't water verwaarloosd wordt,

$$-\frac{dy}{dt} = k_1 y^2 - k_2 (C_0 - C).$$

Hierin is

$$(C_0 - C) = \frac{kC_0 - y^2 - ky}{k}$$

de conc. van 't gevormde lacton.

De bovenstaande diff. vergelijking geeft na invoering van deze waarde voor $C_0 - C$ en na integratie

$$\gamma t = l(y - \alpha) - l(y - \beta) + \text{const.}$$

Voor $t = 0$ wordt $y = y_0$, d.i. de conc. der ionen bij den aanvang, en de vergelijking:

$$\gamma = \frac{1}{t} l \frac{(y - \alpha)(y_0 - \beta)}{(y - \beta)(y_0 - \alpha)}$$

Deze vergelijking is dezelfde, als in mijn dissertatie is afgeleid voor alle bimoleculaire reacties, waarbij een evenwicht optreedt.

Hierin is dus:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{2} \{ \sqrt{4kC_0 + k^2} - k \} && \text{de aanvangsconc. der ionen,} \\ y &= \frac{1}{2} \{ \sqrt{4kC + k^2} - k \} && \text{de conc. der ionen na een tijd} = t, \\ \beta &= y_\infty = \frac{1}{2} \{ \sqrt{4kC_\infty + k^2} - k \} && \text{de eindconcentratie der ionen,} \\ \alpha &= \frac{-\beta C_0}{C_0 - \beta} && \text{(zie pag. 14 van mijn dissertatie).} \end{aligned}$$

De C_0 en C werden vastgesteld door titratie met barytwater.

k is de dissociatie-constante van 't oxyzuur en kon uit geleidbaarheidsbepalingen worden vastgesteld.

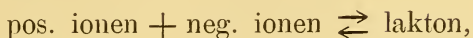
4. Bij de vrijwillige omzetting van de oxyzuren is de C_∞ niet bepaald en dit is noodig om β en α te berekenen. De vraag doet zich dus voor, hoe men deze kan bepalen. In den evenwichtstoestand

is $-\frac{dy}{dt} = 0$, dus:

$$\begin{aligned} k_1 y_\infty^2 &= k_2 (C_0 - C_\infty) \\ y_\infty &= \frac{1}{2} \{ \sqrt{4kC_\infty + k^2} - k \}, \text{ dus is} \\ 2 \times \frac{k_2}{k_1} &= \frac{2kC_\infty + k^2 - k\sqrt{4kC_\infty + k^2}}{C_0 - C_\infty}. \end{aligned}$$

Hierin is C_0 , de aanvangsconcentratie, bekend; eveneens k , de

dissociatie-constante. Kennen wij dus $\frac{k_2}{k_1}$, d.i. de reciproke waarde van de evenwichtsconstante van de omzetting:



dan is C_∞ te berekenen.

Deze evenwichtsconstante is te vinden uit een serie bepalingen, waarbij de eindtoestand is vastgesteld van een bepaalde hoeveelheid oxyboterzuur, wanneer HCl werd toegevoegd, dus als werkzaam bestanddeel H-ionen. Op pag. 112 van zijn verhandeling zegt de schrijver, dat bij 20 cc. van het oxyzuur 5 cc. van het te onderzoeken zuur (HCl of H_2SO_4) werd gevoegd; volgens tabel 64 op pag. 116 wordt 5 cc. N. HCl toegevoegd, de oplossing wordt dus $\frac{1}{4}$ N. aan HCl en bij de totale splitsing van 't HCl in die concentratie ook $\frac{1}{4}$ N aan H-ionen.

In den evenwichtstoestand zijn dus de posit. H-ionen van het γ -oxyzuur en die van 't HCl en de negat. ionen van het oxyzuur in evenwicht met het lacton.

Uit de gegevens van bovengenoemde tabel 64 kan men berekenen, dat $\frac{k_2}{k_1} = 1715 \times 10^{-9}$.

De omzetting van het oxyvaleriaanzuur voert ook tot een evenwicht; maar was van het oxyboterzuur in den evenwichtstoestand $\pm 65\%$ omgezet, van 't oxyvaleriaanzuur heeft zich dan 93% omgezet.

Voor deze omzetting wordt gevonden voor:

$$\frac{k_2}{k_1} = 15 \times 10^{-7}.$$

PAUL HENRY verwaarloost bij deze omzetting het optredende evenwicht, omdat het zoover verschoven is naar den kant der splitsingsproducten. Wordt deze omzetting als ionenreactie opgevat, dan mag dit niet gebeuren, zooals uit de getallen op pag. 6 blijkt; immers de eindconc. der ionen is in 't eene geval 0.000701 en de beginconc. 0.002690 en in 't tweede geval de eindcon. der ionen 0.000501 en de beginconc. 0.001885.

De volgende tabellen, ontleend aan de serieën van bepalingen van PAUL HENRY, doen zien, dat bovenstaande reactievergelijking juist is.

Voor de vrijwillige omzetting van het γ -oxyboterzuur vindt men:

Tab. 92 en 93. PAUL HENRY. pag. 128.

$$C_0 = 0.17166$$

$$\beta = 0.000741$$

$$\alpha = -0.000703$$

Tab. 94 en 95. PAUL HENRY. pag. 128

$$C_0 = 0.3390$$

$$\beta = 0.001313$$

$$\alpha = -0.001318$$

t in uren.	y	γ .	t in uren.	y	γ .
0	0.001810	—	0	0.002549	—
25	0.001742	0.00067	24	0.002476	0.00085
66	0.001634	71	48	0.002372	97
120	0.001520	71	72	0.002274	107
148 $\frac{1}{2}$	0.001476	68	123	0.002118	110
172	0.001448	66	151 $\frac{1}{2}$	0.002049	109
219	0.001377	66	174 $\frac{1}{2}$	0.002006	106
∞	0.000741	—	192	0.001925	119
			∞	0.001313	—

Voor de vrijwillige omzetting van het γ -oxyvaleriaanzuur kunnen de volgende tabellen dienen.

Tab. 66. PAUL HENRY. pag. 118.

$$C_0 = 0.3580$$

$$\beta = \gamma_{\infty} = 0.000701$$

$$\alpha = -0.000703$$

Tab. 72 en 73. PAUL HENRY. pag. 121.

$$C_0 = 0.1769$$

$$\beta = 0.000501$$

$$\alpha = -0.000502$$

0	0.002690	—	0	0.001885	—
240	0.002607	0.000032	390	0.001830	0.0000193
450	0.002541	29	4170	0.001705	226
1170	0.002350	30	1860	0.001615	226
1500	0.002266	31	2640	0.001520	230
1890	0.002188	30	3300	0.001460	225
2840	0.002053	28	4080	0.001385	227
3530	0.001942	28	4710	0.001335	225
4310	0.001895	27	5550	0.001275	224
4940	0.001773	27	6900	0.001185	225
6170	0.001580	26	∞	0.000501	—
7740	0.001557	25			
∞	0.000701	—			

5. Door den schrijver is aangetoond, dat, wanneer zooveel van een vreemd zuur (HCl , H_2SO_4) wordt toegevoegd en daardoor de concentratie der H-ionen gedurende het geheele reactieverloop als constant beschouwd mag worden, de gewone reactievergelijking geldt, dus in dit geval die van de monomoleculaire reactie, waarbij een evenwicht optreedt.

Beschouwen wij deze reacties als ionenreacties, dan is gemakkelijk aan te toonen, dat in 't onderstelde geval die vergelijking voor den dag komt.

Is de concentratie van het oxyzuur op een bepaald tijdstip C , die der toegevoegde H-ionen $= C'$ en p het deel van het oxyzuur, dat in ionen is gesplitst, dan is : $C_{\text{oxyzuur}} = (1 - p) C$; $C_{\text{H-ionen}} = p C + C'$; $C_{\text{neg. ionen}} = p C$.

Het zuur is in evenwicht met zijn ionen, dus is:

$$\frac{p(pC + C')}{1-p} = k.$$

Zijn zooveel H-ionen toegevoegd, dat men deze concentratie als standvastig mag beschouwen, dan is $pC + C'$ een constante en bovenstaande vergl. wordt:

$$\frac{p}{1-p} = k',$$

d.w.z. welke waarde C , de conc. van 't oxyzuur, verkrijgt, p blijft standvastig en gedurende het geheele reactieverloop zal de conc. der negat. ionen hetzelfde deel bedragen van 't aanwezige oxyzuur. Wij hebben in dit geval dus:

neg. ionen + posit. ionen = lacton + water.

Stel de conc. der neg. ionen = y ,

„ „ „ „ pos. „ = C_H ,

dan is

als „ „ van het lacton = C_L ,

en „ „ „ „ water = C_W ,

$$-\frac{dy}{dt} = k_1 C_H y - k_2 C_W C_L = k'_1 y - k'_2 C_L = k'_1 y - k'_2 (C_0 - C);$$

immers C_H en C_W zijn als constant te beschouwen.

Hierboven is aangetoond, dat gedurende het reactieverloop

$$\begin{aligned} y &= pC \\ \frac{dC}{dy} &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

Uit deze en de voorgaande vergelijking volgt, dat:

$$-\frac{dC}{dt} = \frac{k'_1}{p} C - \frac{k'_2}{p} (C_0 - C) = k_1'' C - k_2'' (C_0 - C)$$

en dit is de diff. vergl. voor een monomol. reactie, waarbij een evenwicht optreedt.

6. Voegen wij in plaats van HCl of H₂SO₄ een zuur toe als azijnzuur, dat ten deele gesplitst is in ionen, dan worden wel H-ionen toegevoegd, maar dan is de concentratie der H-ionen gedurende het geheele reactieverloop niet meer als constant te beschouwen.

Stel de aanv. conc. van 't oxyzuur = C_0 ,
 „ „ „ „ „ „ 't azijnzuur = C' ,
 „ de conc. van 't oxyzuur na een tijd $t = C$ en veronderstellen wij, dat een deel a van 't oxyzuur is gesplitst in ionen en een deel b van 't azijnzuur, dan is :

$$\begin{aligned} C_{\text{oxyzuur}} &= (1 - a) C; & C_{\text{H-ionen}} &= aC + bC' \\ C_{\text{azijnzuur}} &= (1 - b) C; & C_{\text{neg. ionen oxyz.}} &= aC \\ & & C_{\text{neg. ionen azijnz.}} &= bC' \end{aligned}$$

Op elk tijdstip is het oxyzuur in evenwicht met de H-ionen en zijn negatieve ionen, en evenzoo het azijnzuur, dus gelden de twee evenwichtsvergelijkingen :

$$\frac{a(aC + bC')}{1 - a} = k_1 \quad \text{en} \quad \frac{b(aC + bC')}{(1 - b)} = k_2.$$

De dissociatie-constanten k_1 en k_2 van 't oxyzuur en 't azijnzuur zijn nagenoeg gelijk, dus is $a = b$, en

$$\frac{a^2(C + C')}{1 - a} = k \quad ; \quad k = 0.000207.$$

$$a = \frac{\sqrt{4k(C + C') + k^2} - k}{2(C + C')}$$

$$C_{\text{neg. ionen oxyz.}} = aC = \frac{C \{ \sqrt{4k(C + C') + k^2} - k \}}{2(C + C')} = y.$$

$$C_{\text{H-ionen}} = a(C + C') = \frac{1}{2} \{ \sqrt{4k(C + C') + k^2} - k \} = \frac{C + C'}{C} y.$$

Hieruit volgt, dat:

$$C = \frac{y}{2k} \{ (y + k) + \sqrt{(y + k)^2 + 4kC'} \}.$$

Wij hebben weer :

neg. ionen + posit. ionen \rightleftharpoons lacton, dus :

$$\begin{aligned} - \frac{dy}{dt} &= k_1 \left(\frac{C + C'}{C} \right) y^2 - k_2 (C_0 - C) = \\ &= \frac{k k_1 + k_2}{2k} \left[(y + k) + \sqrt{(y + k)^2 + 4kC'} \right] y - k k_1 y - k_2 C_0. \end{aligned}$$

Stel $y + k + \sqrt{(y + k)^2 + 4kC'} = z,$

dan is : $y = \frac{z^2 - 4kC'}{2z} - k$

en $\frac{dy}{dz} = \frac{z^2 + 4kC'}{2z^2}$

en wanneer wij $\frac{2k}{k_1 k_2 + k_2} = N$ stellen,

$$-\frac{1}{N} \cdot \frac{dt}{dz} = \frac{z^2 + 4kC'}{z \{ (z^2 - 2kz - 4kC')(z - Nk_1) - 2Nk_2 C_0 z \}} =$$

$$= \frac{z^2 + 4kC'}{z^3 - (Nk_1 k_2 + 2k)z^2 + 2(Nk_1^2 k_2 - 2kC' - Nk_2 C_0)z + 4Nk_1^2 k_2 C'} =$$

$$= \frac{p}{z} + \frac{q}{z - \alpha} - \frac{r}{z - \beta} + \frac{s}{z - \gamma}.$$

Dus is :

$\alpha + \beta + \gamma = Nk_1 k_2 + 2k$ (a); $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 2(Nk_1^2 k_2 - 2kC' - Nk_2 C_0)$ (b);
 $-\alpha\beta\gamma = 4Nk_1^2 k_2 C'$ (c)

Uit (b) en (c) volgt :

$\alpha + \gamma = \frac{2\beta(Nk_1^2 k_2 - 2kC' - Nk_2 C_0) + 4Nk_1^2 k_2 C'}{\beta^2}$ (d)

$\alpha\gamma = -\frac{4Nk_1^2 k_2 C'}{\beta}$ (e)

Uit (a) en (d) volgt :

$\beta^3 - (Nk_1 k_2 + 2k)\beta^2 - 2\beta(Nk_1^2 k_2 - 2kC' - Nk_2 C_0) - 4Nk_1^2 k_2 C' = 0$. (f)

Is er evenwicht, dan wordt $-\frac{dz}{dt} = 0$ en dit gebeurt, wanneer de noemer van bovenstaande diff. vergel. nul wordt. De vergelijking, die men dan in z verkrijgt is dezelfde als vergelijking (f) in β , dus is $\beta = z_\infty$ (de waarde van z , als er evenwicht is ingetreden).

De waarde voor N weer in vergelijking (f) invoerende, verkrijgt men :

$$\beta^3 = \left\{ \frac{2k^2}{k + \frac{k_2}{k_1}} + 2k \right\} \beta^2 - \left\{ \frac{2k^3}{k + \frac{k_2}{k_1}} - 2kC' - \frac{2k \cdot \frac{k_2}{k_1} \cdot C_0}{k + \frac{k_2}{k_1}} \right\} 2\beta - \frac{8k^3 C'}{k + \frac{k_2}{k_1}} . (g)$$

Voor de constanten p, q, r en s vindt men :

$$p = -\frac{4kC'}{\alpha\beta\gamma}; \quad q = \frac{\alpha^2 + 4kC'}{\alpha(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}; \quad r = \frac{\beta^2 + 4kC'}{\beta(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} \text{ en } s = \frac{\gamma^2 + 4kC'}{\gamma(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}.$$

De volgende tabellen zijn ontleend aan de waarnemingen van PAUL HENRY over de inwerking van azijnzuur op oxyvaleriaanzuur.

Daarvoor is $k = 0.0000207$ en $\frac{k_2}{k_1} = 15 \times 10^{-7}$ (zie pag. 5), dus bij gegeven C_0 , (aanv. conc. van 't oxyzuur) en C' (conc. van het azijnzuur) is uit vergl. (g) β te berekenen. Uit (d) en (e) zijn dan α en γ te berekenen.

Voor deze omzetting wordt de reactie vergelijking

$$\frac{k k_1 + k_2}{2k} \times t = p l \frac{z_0}{z} + q l \frac{z_0 - \alpha}{z - \alpha} - r l \frac{z_0 - \beta}{z - \beta} + s l \frac{z_0 - \gamma}{z - \gamma}.$$

Tab. 74 en 75. PAUL HENRY. pag. 123.

$C_0 = 0.1708$	$p = 26976,89$
$C' = 0.2058$	$q = - 232,46$
$\beta = 0.0041945$	$r = - 233,84$
$\alpha = -0.004153$	$s = -27005,45$
$\gamma = 0.000035$	

Tab. 76 en 77. PAUL HENRY. pag. 123.

$C_0 = 0.1795$	$p = 25905,42$
$C' = 0.01977$	$q = - 497,543$
$\beta = 0.001653$	$r = - 499,052$
$\alpha = -0.001597$	$s = -25906,92$
$\gamma = 0.000024$	

t in uren.	z	$\frac{k k_1 + k_2}{2k}$	t in uren.	z	$\frac{k k_1 + k_2}{2k}$
0	0.005495	—	0	0.004083	—
210	0.005439	0.014	390	0.003947	0.0126
390	0.005349	21	4170	0.003706	128
4170	0.005226	21	4860	0.003521	128
4860	0.004953	21	2640	0.003330	127
2640	0.004806	21	3300	0.003206	128
3300	0.004692	22	4080	0.003082	126
4080	0.004591	23	4710	0.002987	125
4710	0.004529	23	5550	0.002859	127
5550	0.004435	25			

Ook deze tabellen geven bevredigende waarden voor de reactieconstanten.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan van den Heer PH. KOHNSTAMM: „*Een formule voor den osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen, wier damp de gaswetten volgt*”.

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

§ 1. De formule voor den osmotischen druk kan men op tweeërlei wijze afleiden: langs thermodynamischen en kinetischen weg. Die beide tegenover elkaar plaatsende bedoel ik geenszins een volstrekte tegenstelling, integendeel geloof ik — een meening die ik binnenkort elders meer uitvoerig hoop te ontwikkelen — dat zonder een op kinetische beschouwingen gebaseerde toestandsvergelijking de thermodynamica haar arbeid zelfs niet kan aanvangen, en dat men dus slechts van een tegenstelling van „zuiver kinetische” en „thermodynamisch-kinetische” beschouwingen kan spreken.

Niet talrijk zijn degenen die getracht hebben langs thermodynamischen weg formules voor den osmotischen druk van meer geconcentreerde oplossingen te vinden. Alleen HONDIUS BOLDINGH¹⁾ en daarna VAN LAAR²⁾ hebben er op gewezen, dat uit de leer van den thermodynamischen potentiaal blijkt, dat de concentratie van de oplossing niet in den vorm x , maar als $\log(1-x)$ behoort in rekening gebracht te worden, en dat voor volgende benadering een correctie-term van den vorm ax^2 moet worden aangebracht, en in den laatsten tijd is de laatstgenoemde opnieuw met groote warmte voor die uitkomst in het strijdperk getreden.

Talrijker zijn de pogingen om langs direkten, moleculairtheoretischen weg den osmotischen druk in geconcentreerde oplossingen te bepalen; ik noem die van BREDIG³⁾, NOYES⁴⁾, BARMWATER⁵⁾, WIND⁶⁾.

Dit feit is verrassend omdat VAN 'T HOFF zelf, al heeft hij een bepaalde opvatting over het wezen van den osmotischen druk, zijn vergelijkingen toch nooit daarop heeft durven baseeren, maar zeer nadrukkelijk als grondslag voor zijn leer van den osmotischen druk heeft aangewezen de thermodynamische beschouwingen, door middel waarvan hij den osmotischen druk uit de gaswetten afleidt. En het is te meer verrassend, omdat al die pogingen zich beroepen op den

¹⁾ Diss. Amsterdam 1893.

²⁾ Zsch. phys. Ch. **15**, 466 (1894).

³⁾ Zsch. phys. Ch. **4**, 444.

⁴⁾ Zsch. phys. Ch. **5**, 53.

⁵⁾ Zsch. phys. Ch. **28**, 115.

⁶⁾ Arch. Néerl. (2) **6**, 714.

gedachtengang, die VAN DER WAALS tot zijn toestandsvergelijking voerde, terwijl VAN DER WAALS zelf toch duidelijk getoond heeft, dat naar zijn meening de osmotische druk niet aldus moet gezocht worden, maar langs thermodynamischen weg, in verband met de door hem gegeven toestandsvergelijking. Dat men desondanks zoo vaak den anderen weg ingeslagen heeft, schijnt mij opmerkelijk om de grootere voorliefde, die er uit spreekt voor zuiver kinetische beschouwingen. De redenen, waarom ik deze voorliefde in dit geval niet deel, zullen blijken uit een andere mededeeling, in dit Verslag voorkomende; hier wil ik mij houden aan de thermodynamische methode, speciaal in den door VAN DER WAALS aangegeven vorm.

§ 2. In § 18 van zijn Théorie Moléculaire behandelt VAN DER WAALS het geval, dat van een binair mengsel de eene komponent zich door een gegeven ruimte kan uitbreiden, terwijl de andere beperkt is tot een deel van die ruimte. Hij toont aan, dat dan voor evenwicht vereischt is een drukverschil tusschen de deelen dier ruimte, dat voor verdunde oplossingen de waarde heeft, die de wet van VAN 'T HOFF aangeeft. Daarbij wordt gebruik gemaakt van een onderstelling, die zeer plausibel is (en die zich trouwens op dezelfde manier als de evenwichtsvoorwaarde in het algemeene geval laat bewijzen), dat n.l. het evenwicht bereikt is, als de thermodynamische potentiaal van het diosmeerende bestanddeel in beide deelen der ruimte gelijk is. Die voorwaarde zal ik hier toepassen op een binair mengsel van willekeurige bestanddeelen en willekeurige concentratie, waarvan de damp de gaswetten volgt, en dat door een semipermeabelen wand in evenwicht is met de eene komponent in zuiveren toestand onder den druk van haar eigen damp. Hoe zulk een evenwicht in een bepaald geval in werkelijkheid bereikt zou kunnen worden, en of dit mogelijk zou zijn, behoeven wij daarbij niet te bespreken.

§ 3. Wij stellen, dat $(1-x)$ diosmeerende en x niet-diosmeerende moleculen aanwezig zijn, dan is de thermodynamische potentiaal der diosmeerende stof in het mengsel:

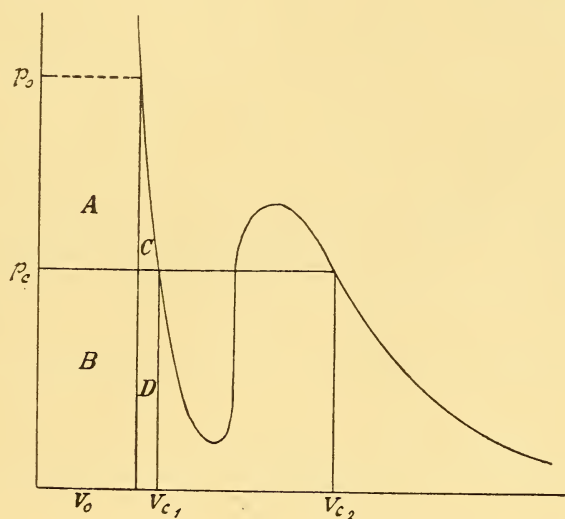
$$M_1 \mu_1 = \psi - v \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)_x - x \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_v = \\ = \int_v^\gamma p dv + p v + MRT \ln(1-x) - x \int_v^\gamma \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{vT} dv + F(T)$$

waarin de integraties moeten uitgestrekt worden van een volume γ , zoo groot, dat alle wetten der ideale gassen daar van toepassing zijn tot het volume in quaestie, terwijl $F(T)$ een temperatuurfunctie is, die hier slechts als additieve constante optreedt. Om nu de integraties

te kunnen uitvoeren hebben wij — zooals boven reeds gezegd werd — een toestandsvergelijking $p = f(v, T)$ noodig.

Ik zal daartoe aannemen de vergelijking van VAN DER WAALS met constante b ; al ontvangen wij zoo ook zeker geen strikt juiste uitkomsten, wij zullen althans kunnen oordeelen over de grootheden die in de formule moeten optreden.

§ 4. Zij nu in Fig. 1 aangegeven de isotherm van het mengsel, terwijl de horizontale lijn getrokken is volgens den bekenden regel van MAXWELL¹⁾; de druk door die lijn aangegeven is dus wat VAN DER WAALS den coïncidentiedruk van het mengsel noemt en aanduidt met het teeken p_c . De volumina aan het uiteinde van die lijn noemen wij v_{c_1} en v_{c_2} , terwijl door p_o en v_o voorgesteld worden druk en volume van het mengsel, op de genoemde wijze in evenwicht.



Nu kunnen wij de integraal $\int_{v_o}^{\gamma} p dv$ splitsen in drie deelen:

$$\int_{v_o}^{v_{c_1}} p dv + \int_{v_{c_1}}^{v_{c_2}} p dv + \int_{v_{c_2}}^{\gamma} p dv$$

Voor de middelste kunnen wij schrijven:

1) Door een vergissing met het cliché is deze lijn hier veel te hoog getrokken. Ook de vorm der isotherm is gebrekkig weergegeven. Maar de figuur is ook geheel schematisch bedoeld.

$$\int_{v_{c_1}}^{v_{c_2}} p dv = p_c (v_{c_2} - v_{c_1})$$

Daar volgens onderstelling de damp de gaswetten volgt, is:

$$p_c v_{c_2} = MRT$$

Om dezelfde reden kunnen wij in de derde integraal p vervangen door MRT/v . De integratie uitvoerende krijgen wij dan $MRT \log \gamma / v_{c_2}$ waarvoor wij ook kunnen schrijven $MRT \log p_c / p_\gamma$. We krijgen dus:

$$\int_{v_o}^{\gamma} p dv + p_o v_o = \int_{v_o}^{v_{c_1}} p dv + p_o v_o - p_c v_{c_1} + MRT + MRT \log p_c / p_\gamma.$$

§ 5. Beschouwen wij de eerste drie termen. De eerste is in de figuur voorgesteld door het vak $C + D$, de tweede door $A + B$, de derde door $B + D$. De drie termen samen zijn dus $A + C$. Is nu de damp, zooals wij onderstelden, zeer verdund en dus de temperatuur ver van de kritische, derhalve ook de isotherm zeer steil bij het uittreden uit de grenslijn (of juist bij den druk p_c , die echter aan de vloeistofkant slechts zeer weinig van de grenslijn verwijderd is), dan kunnen wij C tegen A verwaarloozen, en dat met te meer recht naarmate de druk p_o hooger, dus het mengsel in quaestie geconcentreerder is. Immers $C = \int_{v_o}^{v_{c_1}} p dv - D$. Voeren wij in

$$p = \frac{MRT}{v-b_x} - \frac{a_x}{v^2}$$

en integreeren wij, dan krijgen wij:

$$\frac{C}{A} = \frac{MRT \log(v_{c_1} - b) + \frac{a}{v_{c_1}} - MRT \log(v_o - b) - \frac{a}{v_o} - \left(\frac{MRT}{v_{c_1} - b} - \frac{a}{v_{c_1}^2} \right) (v_{c_1} - v_o)}{\left(\frac{MRT}{v_o - b} - \frac{a}{v_o^2} \right) v_o - \left(\frac{MRT}{v_{c_1} - b} - \frac{a}{v_{c_1}^2} \right) v_o}$$

Komen wij bij zeer hooge drukken, dan nadert $v_o - b$ tot nul en worden dus teller en noemer beide oneindig, maar de noemer van hooger orde dan de teller. Trouwens reeds aan den vorm der isotherm, die steeds steiler gaat loopen, is het te zien, dat wij door C tegen A te verwaarloozen percentsgewijs kleiner fout maken hoe hooger p_o . En dat de verwaarloozing bij kleine osmotische drukken geoorloofd is zal wel geen betoog behoeven. We kunnen dus voor de drie in deze § behandelde termen zetten:

$$A = (p_o - p_c) v_o.$$

§ 6. Er blijft nog te berekenen de term $\int_v^\gamma \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{vT} dv$. Ook deze integraal splitsen wij weer in drieën: $\int_{v_o}^{v_{c_1}} + \int_{v_{c_1}}^{v_{c_2}} + \int_{v_{c_2}}^\gamma$. De laatste

integraal is nu nul, volgens de wet van AVOGRADO. De middelste vinden wij uit de boven reeds gebruikte verg.:

$$\int_{v_{c_1}}^{v_{c_2}} p dv = p_c (v_{c_2} - v_{c_1})$$

door te differentieeren, in aanmerking nemende, dat de grenzen van de integraal functies van x zijn. Wij krijgen:

$$\int_{v_{c_1}}^{v_{c_2}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{vT} dv + \left[p \frac{\partial v_c}{\partial x} \right]_1^2 = \frac{\partial p_c}{\partial x} (v_{c_2} - v_{c_1}) + p_c \frac{\partial v_{c_2}}{\partial x} - p_c \frac{\partial v_{c_1}}{\partial x}.$$

Nu is aan de grenzen van de integraal p juist p_c ; we houden links en rechts dus alleen de eerste leden over.

Ten slotte het eerste stuk $\int_{v_o}^{v_{c_1}} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dv$. Daar wij $\int_{v_o}^{v_{c_1}} p dv$ hebben kunnen verwaarloozen, zou men misschien kunnen meenen, dat ook dit stuk weggelaten kon worden. Maar, daar uit de toestandsvergelijking

volgt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{MRT}{(v-b)^2} \frac{db}{dx} - \frac{da/dx}{v^2},$$

blijkt deze integraal van hooger orde te zijn dan de andere voor kleine waarden van $v-b$. We behouden dus dit stuk. De integratie uitvoerende krijgen wij:

$$- \left[\frac{MRT}{v-b} \frac{db}{dx} - \frac{da/dx}{v} \right]_{v_o}^{v_{c_1}}.$$

Hierin kunnen wij $MRT/v-b$ vervangen door $p + a/v^2$, zoodat onze uitdrukking voor den thermodynamischen potentiaal wordt:

$$M_1 u_1 = MRT l(1-x) + p_o v_o - p_c v_o + MRT + MRT l p_c / p_o - x \frac{\partial p_c}{\partial x} (v_{c_2} - v_{c_1}) + x \frac{db}{dx} (p_c - p_o) + x \frac{db}{dx} \left\{ \frac{a}{v_{c_1}^2} - \frac{a}{v_o^2} \right\} - x \frac{da}{dx} \left\{ \frac{1}{v_{c_1}} - \frac{1}{v_o} \right\} + F(T).$$

§ 7. Deze waarde moeten wij nu gelijk stellen aan den thermodynamischen potentiaal van de diosmeerende stof in zuiveren toestand. Daar we deze onder den druk van haar eigen damp denken is de te berekenen grootheid even groot als de thermodynamische potentiaal van den verzadigden damp, d.w.z.

$$\int_{v_g}^{\gamma} p dv + p_g v_g + F(T)$$

waar we door den index g aangeven, dat de grootheid op de grenslijn moet genomen worden. Nu is wegens de onderstelde geldigheid der gaswetten :

$$\int_{v_g}^{\gamma} p dv + p_g v_g = MRT \log p_g/p_{\gamma} + MRT$$

Stellen wij de hier verkregen uitdrukking gelijk aan die uit de vorige §, dan vallen $F(T)$, MRT en $MRT \log p_{\gamma}$ aan beide zijden tegen elkaar weg. Wat we overhouden kunnen we aldus schrijven :

$$(p_o - p_c) \left(v_o - x \frac{db}{dx} \right) = -MRT \log \frac{p_c(1-x)}{p_g} + x \frac{\partial p_c}{\partial x} (v_{c_2} - v_{c_1}) + x \frac{da}{dx} \left(\frac{1}{v_{c_1}} - \frac{1}{v_o} \right) + x a \frac{db}{dx} \left\{ \frac{1}{v_{c_1}^2} - \frac{1}{v_o^2} \right\}$$

Nu kunnen v_{c_1} en v_o nooit veel schelen. Bedraagt de osmotische druk van een waterige oplossing bijv. 1000 Atm. dan verschillen deze volumina nog slechts enkele percenten. In de beide laatste termen, die zelve slechts correctietermen zijn, kunnen wij dus in elk geval $v_{c_1} = v_o$ stellen, zoodat die termen wegvallen. Voorts kunnen wij v_{c_1} tegen v_{c_2} verwaarloozen en voor v_{c_2} schrijven $MRT \log p_c$. Daardoor wordt onze verg. :

$$p_o - p_c = - \frac{MRT}{v_o - x \frac{db}{dx}} \left\{ \log \frac{p_c(1-x)}{p_g} - x \frac{d \log p_c}{dx} \right\}$$

De nog overgebleven v_o mogen wij natuurlijk niet door v_{c_1} vervangen, vooreerst omdat die uitdrukking hier in den hoofdterm staat, vervolgens omdat de vervanging van v_o door v_{c_1} zich in een term van de orde $1/v - b$ natuurlijk veel meer doet gevoelen dan in $1/v$. Maar in elk geval zal altijd, wanneer men werkelijk met

osmotische drukken te doen heeft, de druk nooit zoo groot zijn dat men niet zonder eenig bezwaar v_o zou mogen berekenen met behulp van den compressibiliteitscoëfficiënt van de verzadigde vloeistof.

§ 8. De grootheid $p_o - p_c$, die wij gevonden hebben, is niet identiek met den osmotischen druk; deze is veeleer $p_o - p_g$, maar de overgang van de eene grootheid op de andere is zonder eenig bezwaar. Verwaarloozen wij in onze formule de termen, die met x vermenigvuldigd zijn, tegen die waarin dit niet het geval is, stellen wij $p_c = p_g$, en nemen wij v_g , in stede van v_o , wat voor zeer verdunde oplossingen geoorloofd is, dan krijgen wij:

$$P = p_o - p_g = - \frac{MRT}{v_g} \log(1-x)$$

wat bij ontwikkeling van den log. en weglaten van de hoogere machten de bekende formule van VAN 'T HOFF geeft.

Het zij mij vergund er op te wijzen, dat ook een meer nauwkeurige behandeling den logarithmischen vorm oplevert, waarvoor BOLDING en VAN LAAR zijn opgekomen — en dat dit zoo moest zijn viel ook niet te betwijfelen —, maar dat zij tevens toont, dat VAN LAAR te absoluut sprak ¹⁾, toen hij beweerde, dat in den noemer v_g (of v_o) nooit een correctieterm behoeft aangebracht te worden in verband met de grootte der moleculen.

In de tweede plaats wijs ik er op, dat wij den osmotischen druk vinden uitsluitend uitgedrukt in wat VAN DER WAALS genoemd heeft thermische grootheden. Het in aanmerking nemen van de verdunningswarmte of andere warmtehoeveelheden, 't welk VAN 'T HOFF ²⁾ voor geconcentreerde oplossingen noodig schijnt te achten en EWAN ³⁾ uitgevoerd heeft, blijkt niet noodig te zijn. Ook wanneer wij alle ingevoerde verwaarloozingen vermeden hadden, dus niet aangenomen hadden, dat de damp de gaswetten volgt, noch dat in sommige termen $v_o = v_{c1}$ mag gesteld worden, noch dat het stuk C tegen A verwaarloosd mag worden, noch ten slotte (het belangrijkste) dat b als constant beschouwd mag worden, zouden wij klaarblijkelijk niet met eenige warmtehoeveelheid te doen hebben gekregen. Dit schijnt mij van belang, omdat èn theoretisch, èn experimenteel de calorische grootheden zoo veel moeilijker toegankelijk zijn dan de thermische.

¹⁾ l. c.

²⁾ K. Svenska Vet. Ak. Hand. 21. Aangehaald bij EWAN Zsch. phys. Ch. 14 409 en 410.

³⁾ Zsch. phys. Ch. 14, 409 en 31, 22.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan van den Heer PH. KOHNSTAMM: „*Kinetische afleiding van VAN 'T HOFF'S wet voor den osmotischen druk in een verdunde oplossing.*”

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

§ 1. Wanneer wij afzien van meer ingewikkelde theorieën als die van POYNTING¹⁾, die den osmotischen druk wil verklaren uit een associatie van oplosmiddel en opgeloste stof, en die van BACKLUND²⁾, die er zelfs aethergolven voor schijnt³⁾ noodig te hebben, zijn omtrent het wezen van den osmotischen druk hoofdzakelijk twee theorieën ontwikkeld; de statische en de kinetische. De eerste theorie vindt ijverige verdedigers in PUPIN⁴⁾ en BARMWATER⁵⁾; dat zij zich nauwkeurig rekenschap gegeven hebben van hun beweringen schijnt mij twijfelachtig. Althans de laatste geeft als bezwaar tegen de kinetische natuur van den osmotischen druk aan: „Ein molekulares Bombardement in einer Flüssigkeit ist mir immer etwas sonderbar vorgekommen”; desondanks beschouwt hij de toestandsvergelijking van VAN DER WAALS geenszins als een „sonderbar” staaltje van valsch vernuft, maar als een navolgenswaardig voorbeeld. Hoe dit zij, wie niet geheel breken wil met al onze voorstellingen omtrent heteroëen evenwicht zal wel zulk een toestand nooit anders dan statistisch, d. w. z. als een stationairen toestand van een groot aantal bewegende deeltjes kunnen verklaren. Dit neemt natuurlijk niet weg, dat de vraag gesteld kan worden welke krachten noodig zijn om dien evenwichtstoestand in 't leven te roepen. Daarin ligt opgesloten, dat de aanhangers der statische theorie niet ten eenen male ongelijk behoeven te hebben wanneer zij beweren, dat de oorzaak van den osmotischen druk in aantrekkingskrachten te zoeken is. Over dit punt zal ik nog een enkele opmerking maken aan het einde van deze mededeeling.

§ 2. Veel belangrijker dan deze statische theorie van den osmotischen druk is de kinetische. De groote meerderheid van haar aanhangers (over enkele uitzonderingen spreek ik straks) baseert zich op de experimenteel en thermodynamisch bewezen gelijkheid van den osmotischen druk en den gasdruk (den druk, dien de molekulen van de opgeloste stof in dezelfde ruimte zouden uitoefenen

¹⁾ Phil. Mag. **42**, 289.

²⁾ Lunds Univ. Aarsskrit **40**.

³⁾ Ik ken zijn stuk alleen uit een referaat in de Beibl. **29**, 375.

⁴⁾ Diss. Berlijn 1889.

⁵⁾ Diss. Kopenhagen 1898 en Zsch. phys. Ch. **28**, 115.

als zij daar alleen en in verdunden gastoestand aanwezig waren) en leidt daaruit af, dat beide dezelfde oorzaak hebben in dien zin, dat de opgeloste stof in beide gevallen in denzelfden toestand aanwezig is en dus ook gelijke werking uitoefent; dit wordt dan zoo ongeveer uitgedrukt, dat het oplosmiddel de opgeloste stof in den verdunden gastoestand overvoert. Die opvatting schijnt mij dubbel merkwaardig; vooreerst omdat zij vrij wel de algemeen heerschende schijnt te zijn ¹⁾, vervolgens omdat alleen zij mij schijnt te kunnen verklaren, waarom de leer van den osmotischen druk zoo snel populair is geworden, terwijl GIBBS' methode ter oplossing van dezelfde vraagstukken nauwelijks de aandacht trok. Inderdaad bezit de genoemde opvatting alle eigenschappen voor een groote populariteit: zij schijnt een eenvoudige, zeer aanschouwelijke verklaring te geven van de zoo frappante door VAN 'T HOFF ontdekte wet; zij knoopt aan aan de een ieder bekende gaswetten; zij schijnt in den osmotischen druk een grootheid te leeren kennen, die even karakteristiek is voor den opgelosten toestand als de ons allen bekende uitwendige druk voor een gas. Daartegenover legt het nauwelijks gewicht in de schaal, dat die „verklaring” toch eigenlijk een woordverklaring is, die juist in 't midden laat wat eigenlijk verklaard moet worden, n.l. hoe het

¹⁾ Een bewijs voor deze meening valt uit den aard der zaak moeilijk te leveren, daarom slechts de volgende citaten tot staving ervan.

“If we look a little more closely into the matter we find that in the case of dilute solutions, at least, there is far more likelihood of the dissolved substance being in a condition comparable with that of a gas.” (WALKER, Introduction to Physical Chemistry, 148).

„Ich glaube dargethan zu haben — *im Gegensatz zu der zur Zeit allgemeinen Auffassung* — dass es nicht notwendig ist eine freie Bewegung der gelösten Moleküle wie für die Gase anzunehmen. Wenn ein fester Körper in einer Flüssigkeit gelöst, oder eine Flüssigkeit mit einer anderen gemengt wird, so wird eine neue Flüssigkeit erhalten, von deren Molekülen es nicht gestattet ist, andere Beweglichkeit anzunehmen, als diejenige, die Flüssigkeiten charakterisiert.” (BARMWATER l. c. pag. 143). „Aus den klassischen Arbeiten von VAN 'T HOFF und ARRHENIUS geht nun hervor, dass die Körper bei Gegenwart von Lösungsmittel thatsächlich mehr oder minder dem Gaszustand näher gerückt werden,” en even te voren: „Andererseits konnte ich mir . . . nicht verhehlen, dass gerade diese Gegenwart und Einwirkung des Lösungsmittels doch die notwendige Vorbedingung für den Eintritt des gasähnlichen Zustandes sei; . . . daher ist aber ein gasähnlicher (also kinetischer) Zustand nur unter dieser Einwirkung vorhanden und hört sofort auf, sobald diese Einwirkung beseitigt ist. *Es sei betont, dass diese Auffassung durchaus nichts Neues bietet, dass sie vielmehr wohl einem Jeden eigen ist, der den Begriff des osmotischen Druckes kennen gelernt hat.*” BREDIG. l. c. pag. 445 en 444). De cursiveeringen zijn van mij, de spatieeringen van de geciteerde auteurs.

Eindelijk zie men VAN LAAR's Voordracht in 't Bataafsch Genootschap pag. 2 en 3 en het daar aangehaalde voorbeeld.

komt, dat het oplosmiddel die werking op de opgeloste stof uitoefent. Erger echter is het, dat die verklaring ten eenen male in strijd is met al wat wij van vloeistoffen en gassen weten, en als volkomen onhoudbaar moet worden gequalificeerd. Immers denken wij ons slechts de bekende osmotische proef met een glazen klok, die, van onderen door een membraan gesloten, gevuld is met rietsuikeroplossing en geplaatst in een bekeerglas met zuiver water, dat zoolang naar binnen dringt tot het evenwicht is ingetreden. Ware nu de druk P , die op de membraan uitgeoefend wordt, een gevolg van het feit, dat de opgeloste stof zich in de klok in een toestand bevond, die meerdere of mindere overeenkomst met den gastoestand heeft, dan zouden die moleculen van de opgeloste stof ook op den glaswand van de klok denzelfden druk moeten uitoefenen, m. a. w. de watermoleculen zouden op dien wand binnen en buiten denzelfden druk (van 1 Atm.) uitoefenen. Dit nu is een geheel onaannemelijk resultaat, zooals direkt uit het volgende blijkt. Denken wij dezelfde oplossing als in de klok opgesloten in een vat met zuiger onder den druk van haar verzadigden damp $p_g - \Delta p_g$ waar Δp_g de „dampdrukvermindering” is. De rietsuikerdeeltjes dragen tot dien druk niets of zoo goed als niets bij ¹⁾ zooals blijkt uit het feit, dat zij niet of zoo goed als niet in damp overgaan kunnen; de geheele druk wordt geleverd door de waterdeeltjes. Nu persen wij de vloeistof samen tot zij een druk $P + p_g$ gekregen heeft, zij is nu in volkomen denzelfden toestand als de vloeistof in de klok wanneer wij afzien van de onmiddellijke omgeving van de membraan. In de zoeven aangenomen onderstelling zouden nu de waterdeeltjes tegen den zuiger een druk p_g uitoefenen, de suikerdeeltjes een druk P , d. w. z. de druk van de laatste zou met een ongeveer 1000 maal zoo groot bedrag zijn toegenomen als die van de eerste, terwijl hun aanvanke-lijke druk minstens honderdduizendmaal kleiner was. En het resultaat zou zijn, dat de, stel 2, suikerdeeltjes, die op de 1000 waterdeeltjes aanwezig zijn, een dubbel zoo grooten druk zouden uitoefenen als deze 1000 te zamen. Het is geheel buiten twijfel, dat de druk $P + p_g$ op den zuiger of den glaswand der klok uitsluitend door de watermoleculen wordt uitgeoefend, en wanneer hij dit bedoelde had **LOTHAR MEYER** zeker gelijk toen hij beweerde ²⁾, dat de osmotische druk een gevolg was van de botsingen van het oplosmiddel.

Ook in dit opzicht laat de theorie van het gasachtig karakter der opgeloste stof ons geheel in den steek, dat zij volkomen in het duister laat, waarom dan in een geïsoleerde oplossing, bijv. een rietsuiker-

¹⁾ Misschien zou de druk dier deeltjes zelfs wel blijken negatief te zijn.

²⁾ Zsch. Phys. Ch. 5, 23.

oplossing, die wij in een bekersglas aan de lucht hebben staan, niets bespeurd wordt van het gasachtig karakter der opgeloste stof. Want dat in dit geval oplosmiddel en opgeloste stof minder innig met elkaar in aanraking zijn dan bij de osmotische proef, kan toch niet in ernst beweerd worden.

§ 3. Kunnen wij dus de verklaring der wetten van den osmotischen druk niet zoeken in een bijzonderen toestand van de stof, eigen aan verdunde oplossingen, dan eischt met te meer klem het zoo merkwaardige door VAN 'T HOFF geformuleerde feit een verklaring.

Geen minderen dan LORENTZ ¹⁾ en BOLTZMANN ²⁾ hebben pogingen daartoe aangewend, toch schijnt ook door hun arbeid het vraagstuk mij nog niet geheel opgelost. Trouwens daarmede ben ik in overeenstemming met Prof. LORENTZ' eigen meening; in den aanhef van zijn stuk qualificeert hij het als een „freilich nur zum Teil gelungene Untersuchung“. Slechts over de redenen van die gedeeltelijke mislukking zal ik waarschijnlijk van Prof. LORENTZ in meening verschillen. Wat toch is het geval? Het gedrag van vloeistoffen wordt volkomen beheerscht door het optreden van de grootheden a en b in de toestandsvergelijking. Alleen een opgeloste stof in verdunnen toestand schijnt zich daarvan te emancipeeren, blijkens de wet van VAN 'T HOFF, waarin noch de eene, noch de andere optreedt. Dit feit eischt verklaring. Nu is het niet moeilijk in te zien, waardoor de a hier zou kunnen verdwijnen; de membraan wordt aan de eene zijde door de oplossing begrensd, aan de andere zijde door het zuivere oplosmiddel. Denken wij haar dun ten opzichte van de grootte der werkingssfeer, dan is het duidelijk, dat aan de membraan de kracht $\frac{a_x}{v_o^2}$ die naar de oplossing werkt, bij

eerste benadering wegvalt tegen de kracht $\frac{a}{v_g^2}$ naar de andere zijde.

Moeilijker is het in te zien, waarom ook de b wegvalt, d. w. z. waarom de moleculen van de opgeloste stof zich schijnen te bewegen als door een ledig, in stede van door een ruimte, die voor een zeer groot deel door de moleculen van het oplosmiddel is ingenomen.

Juist op dit meest belangrijke punt nu verschaft ons Prof. LORENTZ' opstel voor zoover ik heb kunnen zien, geen licht. En het schijnt mij niet twijfelachtig, dat dit in de eerste plaats te wijten is aan een onjuiste opvatting van het begrip „kinetische druk“. Volgens Prof. LORENTZ is deze altijd gelijk $\frac{2}{3}$ van de kinetische energie der zwaartepuntsbeweging van de deeltjes, die zich in de eenheid van

¹⁾ Zsch. phys. Ch. 7, 37 en Arch. Néerl. 25, 107.

²⁾ Zsch. phys. Ch. 6, 474 en 7, 88.

volume bevinden. Hij is dus onafhankelijk van het volume van die deeltjes. Nu zou dat alleen een quaestie van naam zijn, wanneer die kinetische druk niet tevens gedefinieerd werd als de hoeveelheid beweging, in de tijdseenheid door de oppervlakteëenheid gedragen ten gevolge van de warmtebeweging der moleculen; en dat deze grootheid afhankelijk is van het aantal botsingen en dus van het volume der moleculen schijnt mij na KORTEWEG's bewijs ¹⁾ niet voor tegenspraak vatbaar te zijn. Het is dan ook juist deze kinetische druk, die in de toestandsvergelijking wordt voorgesteld door $MRT/v - b$. Door zijn definitie stelt LORENTZ in de plaats daarvan MRT/v en zijn stuk kan dus geen opheldering geven op het punt, dat deze het meest noodig heeft. Dat wij desondanks aan LORENTZ' arbeid een belangrijke verruiming van onze inzichten te danken hebben, zal naar ik hoop blijken uit het vervolg van deze mededeeling.

Ook BOLTZMANN's stuk laat ons in het duister, waarom de grootheid b , die anders zulk een belangrijke rol speelt bij vloeistoffen, geen invloed schijnt te hebben op de waarde van den osmotischen druk. In de vergelijkingen, die hij opstelt, houdt hij met de grootte der moleculen nergens rekening ²⁾ en het blijkt niet waarom hij dat niet doet. Voorts blijft hij staan bij de uitkomst, dat de osmotische druk gelijk is aan de som van de drukkingen door de beide soorten van moleculen uitgeoefend, zonder dat hij zich uitlaat over de rol van de eene soort of de andere. Om die redenen kan ik ook in BOLTZMANN's stuk geen afdoende oplossing van ons probleem zien.

§ 4. Om daartoe te geraken schijnt het mij in de eerste plaats noodig een drietal definities te geven.

1°. Zij gegeven een vloeistof (of een gas). Te midden daarvan plaats ik een lichaam van volmaakt elastische ondoordringbare stof, die geen aantrekking op de moleculen van de vloeistof uitoefent. De dikte van dit lichaam (of vlakje) zij oneindig klein; het hebbe een

¹⁾ Deze verslagen (2) 10, 363 en Arch. Néerl. 12, 254. Men zie ook het eenvoudiger, misschien nog meer overtuigende bewijs voor één afmeting in Nature 44, 152. In Prof. LORENTZ' bewijs (l. c. 39) is dan ook, zooals den aandachtigen lezer niet zal ontgaan, niet rekening gehouden met de botsingen en met het daaruit volgende feit, dat een hoeveelheid beweging een afstand overspringt of zich met oneindige snelheid gedurende een oogenblik beweegt. En de erkenning van de juistheid van KORTEWEG's argumentatie ligt dunkt me dan ook reeds in het feit, dat Prof. LORENTZ voor de ingevoerde vreemde vaste lichamen den eisch moet stellen, dat zij onbewegelijk zijn (l. c. 40) of van oneindige massa (l. c. 42) wat voor dit geval op hetzelfde neerkomt.

²⁾ Zoo vooral l. c. 475 verg. (4), die blijkbaar onjuist is wanneer een deel van den cylinder niet voor molecuulmiddelpunten beschikbaar is, doordat het ingenomen is door afstandssferen.

oppervlak van 1 cm^2 . De „kinetische druk” in die vloeistof is dan de hoeveelheid beweging in de tijdseenheid door de moleculen van de vloeistof op dit lichaam overgedragen (of bij de elastische botsingen van dit lichaam ontvangen).

2°. In de tweede plaats breng ik een lichaam aan, dat zich van het zooveen genoemde alleen daardoor onderscheidt, dat het zeer dik is ten opzichte van de werkingssfeer der moleculen. De hoeveelheid

1) Dat ik een lichaam invoer, dat de moleculen der vloeistof niet aantrekt, geschiedt eenvoudigheidshalve, maar is voor het wezen der zaak niet noodig. Brengt men een wand aan, die de vloeistof *wel* aantrekt, dan zullen de vloeistofmoleculen de oppervlakte daarvan natuurlijk met zeer veel grootere snelheid bereiken en dientengevolge aan den wand een veel grootere hoeveelheid beweging meedeelen. Maar de deeltjes van de oppervlakte zullen anderzijds nu met een evenveel grooter kracht de vloeistof ingetrokken worden. De elastische verplaatsing van de oppervlakte deeltjes van den vasten wand, en daarmede (bij voldoende elasticiteit) die van de daaronder gelegen lagen, m. a. w. de druk, die zich in het vaste lichaam voortplant en die bijv. met een manometer van welken aard ook zou gemeten worden, zal in beide gevallen dus volkomen gelijk zijn. Willen wij ook rekening houden met negatieve uitwendige drukken, dan zullen wij zelfs de definitie met behulp van een aantrekkend lichaam *moeten* geven, omdat in dit geval een niet-aantrekkend lichaam in 't geheel niet door de moleculen van de vloeistof zou worden bereikt. (Verg. het bekende feit, dat voor de waarneming van den negatieven druk sterk adhaereerende wanden noodig zijn). In dit geval is eenvoudig de impuls van de aantrekkingskracht der moleculen grooter dan de hoeveelheid beweging, die zij den wand meedeelen (en die nog zeer groot kan zijn), de elastische verplaatsing is dus niet van de vloeistof af, maar naar deze toe.

Ook in het geval dat wij met capillaire lagen rekening willen houden, eischt onze definitie nadere bespreking. Vooreerst geldt daaromtrent wat wij in de vorige alinea betoogden, want evenals bij negatieve drukken is in de capillaire laag, zooals VAN DER WAALS in zijn theorie der capillariteit aangetoond heeft, de aantrekking der omliggende lagen noodzakelijke voorwaarde van stabiel evenwicht. Maar voorts gehoorzaamt, zooals HULSHOFF (Deze Versl. 8, 432 en Diss. Amsterdam 1900) heeft aangetoond, in dit geval de boven gedefinieerde grootheid niet meer aan de wet van PASCAL, daar zij, gemeten volgens de richting van de laag en loodrecht daarop, verschillende waarde heeft. Men zou in dit geval misschien kunnen spreken van een totalen uitwendigen druk, die te splitsen ware in een uitwendigen vloeistofdruk en een uitwendigen elastischen druk. De beschouwing van capillaire lagen, bijv. om een vrij zwevend bol, leert verder, dat het „uitwendig” in den naam „uitwendigen druk” niet zoo moet opgevat worden, als men licht zou doen, n.l. zóó, dat de reactiekracht van dezen druk, zooals hij in een bepaald punt heerscht, zou aangrijpen in punten buiten het systeem in quaestie, iets wat trouwens altijd min of meer willekeurig zou zijn, daar wij de grenzen van ons systeem naar willekeur kunnen kiezen. De bewering: de uitwendige druk in een punt der vloeistof (capillaire laag) is zòó groot, wil eenvoudig zeggen, dat, *wanneer ik daar ter plaatse een vreemd lichaam zou brengen, zonder den toestand verder te veranderen dan daarvoor noodzakelijk is*, dit lichaam een druk zou ondervinden van die grootte, en een elastische vormverandering zou ondergaan, die daarmede evenredig is, in de capillaire laag van den genoemden bol dus in verschillende richtingen verschillend.

beweging, door dit lichaam per tijdseenheid op de moleculen overgedragen, heete de „uitwendige druk” in die vloeistof.

3°. In de derde plaats breng ik in de vloeistof (die ik nu denk een mengsel te zijn) een lichaam aan, dat zich van het sub 2° genoemde slechts daardoor onderscheidt, dat het de moleculen van de eene componente (oplosmiddel) doorlaat zonder eenige verandering in hun snelheid te brengen. Of zulk een lichaam in de werkelijkheid kan voorkomen, daarmede laat ik mij thans niet in. De druk, dien dit lichaam nu ondervindt, en die bijv. gemeten zou kunnen worden door de elastische verplaatsing van de deeltjes van zijn oppervlakte, noem ik den „osmotischen druk” in die vloeistof.

Uit deze definities is reeds duidelijk, dat de hier gedefinieerde osmotische druk in verdunde oplossingen van de orde moet zijn van den kinetischen druk door de opgeloste stof uitgeoefend, en niet van die van den uitwendigen. Want deze beide verschillen van elkaar, doordat voor den kinetischen druk $\frac{a}{v^2}$ is weggevallen, en dit zal voor verdunde oplossingen ook voor den hier gedefinieerden osmotischen druk het geval zijn, zooals blijkt uit de boven (§ 3) gegeven rede-neering. Ik zal verder aantoonen, dat die osmotische druk in verdunde oplossingen de waarde heeft, door de wet van VAN 'T HOFF aangegeven, en dat hij in elk geval even groot is als de bekende experimenteel ingevoerde en meetbare osmotische druk, d.w.z. het verschil in uitwendigen druk van oplossing en zuiver oplosmiddel onder den druk van zijn eigen damp bij evenwicht door een semipermeabelen wand.

§ 5. Voor dit bewijs moet ik in herinnering brengen een reeds vroeger ¹⁾ door mij gebruikte formule van CLAUSIUS. Laat een punt zich vrij kunnen bewegen in een ruimte W . CLAUSIUS ²⁾ toont aan — wat trouwens reeds van te voren plausibel is — dat het aantal botsingen van dit punt per secunde tegen een wand van oppervlak S evenredig is aan S/W (de evenredigheidsfactor is alleen afhankelijk van de snelheid van het punt).

Zij nu gegeven een wand als sub. 2°. gedefinieerd, en trekken wij een vlak evenwijdig aan dien wand op een afstand $\frac{1}{2} \sigma$ (σ is de diameter van de moleculen, die wij bolvormig denken); dit vlak noemen wij het stootvlak, omdat het middelpunt van een molecuul, dat tegen den wand botst zich in dit vlak bevindt. Wij passen thans de formule van CLAUSIUS op dien wand toe. Daarbij moet in acht

¹⁾ Deze Vers. XII, 965.

²⁾ Kinetische Theorie der Gase, 60.

genomen worden, dat het middelpunt van een molecuul zich niet vrij kan bewegen in het geheele volume der vloeistof; immers binnen de afstands-sferen van andere moleculen (bollen om het middelpunt van elk molecuul met een straal σ getrokken) vermog het niet te komen; in de plaats van W hebben wij dus te stellen $v-2b$, als $2b$ ¹⁾ het volume der afstands-sferen is. Nu is echter ook niet het geheele stootvlak voor botsingen toegankelijk, ook een deel daarvan valt binnen afstandssferen. Om

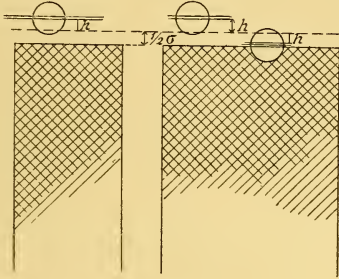


Fig. 1.

dit deel te bepalen trekken wij twee vlakken (Fig. 1) op afstanden h en $h + dh$, evenwijdig aan het stootvlak. Wij bepalen hoeveel molecuulmiddelpunten zich daartusschen bevinden en welk deel van het stootvlak zich binnen hun afstandssfeer bevindt. Om te vinden welk deel van het stootvlak in 't geheel binnen afstandssferen valt moeten wij dan nog naar h integreeren tusschen 0 en $\frac{1}{2}\sigma$. Het blijkt dan, dat wij in stede van S in de formule voor het aantal botsingen tegen den wand moeten zetten $S(1-b/v)$, zoodat de druk evenredig wordt aan

$$\frac{S\left(1 - \frac{b}{v}\right)}{v - 2b}$$

of bij eerste benadering

$$\frac{S}{v - b} \text{ ,}^2)$$

§ 6. Passen wij thans de redeneering van de vorige paragraaf toe op de botsingen van de niet diosmeerende stof op een wand als sub 3^o gedefinieerd. Wij nemen aan, dat de oplossing zoo verdund is, dat het volume der moleculen van de opgeloste stof verwaarloosd mag worden tegenover het geheele volume. Eenvoudigheidshalve — schoon het thans voor het wezen van het bewijs niet noodig is — nemen wij aan dat de moleculen van het oplos-

1) Eenvoudigheidshalve bepaal ik mij tot den eersten term, ofschoon wij met vloeistoffen te doen hebben; dit is hier geoorloofd, omdat de andere termen voor onze vraag (de afleiding der wet van VAN 'T HOFF) evenmin van invloed zijn als de eerste.

2) Mocht men bezwaren hebben tegen den hier gevolgden gedachtengang, dan kan men in BOLTZMANN'S Gastheorie (II, 6—9) een bewijs vinden voor deze formule, dat in het wezen der zaak geheel met het in den tekst gegevene overeenkomt, maar misschien aan sommigen strenger zal toeschijnen. Daar vindt men ook de boven aangegeven integratie uitgevoerd.

middel bollen zijn. Dan moet ook hier weer het beschikbare volume gelijk $v-2b$ worden gesteld; maar het deel van het stootvlak, dat voor botsingen beschikbaar is, wordt nu anders. Want daar de moleculen van het oplosmiddel door den wand heengaan, kunnen nu hun middelpunten zich eyengood aan de andere zijde van het stootvlak bevinden. Wij hebben dus thans niet te integreeren naar h van 0 tot ${}^1_2\sigma$, maar van $-{}^1_2\sigma$ tot $+{}^1_2\sigma$, wat blijkbaar de dubbele waarde oplevert. De druk op den wand wordt dus evenredig aan:

$$\frac{S(1-2b/v)}{v-2b} = \frac{S}{v} {}^1_1)$$

zoodat de invloed der moleculen van het oplosmiddel verdwijnt en de formule van VAN 'T HOFF bewezen is voor de door ons gedefinieerde grootheid.

§ 7. Dat deze voorts steeds even groot is als de experimenteel meetbare grootheid blijkt als volgt. Laten wij ons de werking van de membraan zoo voorstellen, dat deze de moleculen van het oplosmiddel geheel ongehinderd doorlaat, maar die van de opgeloste stof volkomen elastisch terugbotst. Iets dergelijks zou plaats grijpen als de membraan werkte als „molecuulzeef”, d.w.z. als de poriën van dien aard waren, dat de (kleiner gedachte) moleculen van het oplosmiddel passeeren kunnen, de andere niet. Deze zouden dan volgens definitie een druk op de membraan uitoefenen, gelijk aan onzen osmotischen druk. Daar de andere moleculen geheel ongehinderd door den wand heen gaan, treden zij niet met dezen in wisselwerking en oefenen er dus geen kracht op uit. Het experimenteel meetbare drukverschil aan weerszijden der membraan moet dus even groot zijn als de door ons gedefinieerde grootheid.

Nu heeft echter LORENTZ aangetoond ²⁾, dat de hier aangenomen onderstelling omtrent de membraan volstrekt niet noodzakelijk is. Integendeel; neemt men aan, dat de membraan dik is ten opzichte van de werkingssfeer, dat haar materie een volume vult groot ten opzichte der aanwezige openingen en dat zij de moleculen der opgeloste stof zwak aantrekt, terwijl deze sterk door het oplosmiddel worden aangetrokken — geen van alle onwaarschijnlijke onderstellingen — dan komt men tot het resultaat, dat geen der opgeloste

¹⁾ Het is duidelijk, dat wij dezelfde uitkomst zouden krijgen wanneer wij voor het volume der vrije afstandssferen niet $2b$, maar $f(b/v.)$ genomen hadden. Daar immers het stootvlak in ons tegenwoordig geval geheel willekeurig ligt ten opzichte der moleculen van het oplosmiddel zal het deel van het stootvlak, dat binnen vrije afstandssferen ligt, zich tot het geheele oppervlak verhouden als het volume der vrije afstandssferen tot het geheele volume.

²⁾ l. c.

deeltjes de membraan bereikt, laat staan daarop een druk uitoefent; de membraan wordt dan geheel door het zuivere oplosmiddel omspoeld. En dat dit geval inderdaad in de natuur het gewone is, wordt waarschijnlijk gemaakt door het feit, dat volstrekt niet, zooals wij boven onderstelden, juist de kleinere moleculen diosmeeren en de grootere niet. De membraan schijnt dus niet als molecuulzeef te werken. Men komt er dan licht toe te onderstellen, dat de membraan in 't geheel niet een positieve afstooting op de niet-diosmeerende stof uitoefent, maar dat zij die deeltjes alleen veel minder sterk aantrekt dan het oplosmiddel, zoodat de opgeloste deeltjes daarom niet door de membraan heengaan, omdat zij in de nabijheid daarvan slechts uiterst weinig voorkomen. Die opvatting vindt steun in het feit, dat alleen die stoffen niet-diosmeerend schijnen te zijn, die zeer weinig in damp overgaan en dus de grenzen der vloeistofkrachtens hun eigen warmtebeweging alleen niet kunnen bereiken.

Maar hoe dit zij, ook in dit geval blijft onze conclusie doorgaan. Immers wanneer de moleculen der opgeloste stof niet (of in oneindig gering aantal) de membraan bereiken, dan zullen er niet ver van de membraan twee vlakken zijn aan te wijzen, *A*, waar de moleculen der opgeloste stof nog hun normale snelheid bezitten, *B*, waar die snelheid tot nul gedaald is. Tusschen *B* en de membraan bevindt zich dan zuiver oplosmiddel. Om zulk een laag volledig te behandelen zou men natuurlijk een theorie moeten geven, zooals VAN DER WAALS die voor den overgang vloeistof-dampvormig heeft gegeven ¹⁾, uitgebreid voor een mengsel op de wijze als van ELDIK ²⁾ dit gedaan heeft. Maar voor ons doel is dit gelukkig niet noodig. Wij behoeven slechts op te merken, dat de laag *AB* in haar geheel thans volkomen denzelfden invloed op den bewegingstoestand der opgeloste moleculen heeft als het mathematische bovenvlak der membraan zoeven. De laag *AB* in haar geheel zal dus even goed als de membraan zoo straks naar beneden gedrukt worden met een kracht gelijk aan den door ons gedefinieerden osmotischen druk, en die kracht overdragen op de daaronder liggende laag van het zuivere oplosmiddel, dat met deze kracht naar buiten wordt geperst. Maar die kracht van persing is klaarblijkelijk gelijk aan het experimenteel te meten drukverschil ³⁾.

¹⁾ Verh. dezer Ak. (2) 1; Arch. Néerl. 28, 121 en Zsch. phys. Ch. 13, 657.

²⁾ Diss. Leiden 1898.

³⁾ Dit hydrostatisch bewijs kan zonder moeite vervangen worden door een zuiver kinetisch, al is het laatste wat omslachtiger. De laag *AB*, die zich (natuurlijk ten gevolge van de nabijheid der membraan) gedraagt als een waterlaag, waardoor de opgeloste stof niet kan doordringen (Vergelijk de bekende osmotische proef van NERNST) deelt aan de moleculen der opgeloste stof per seconde een hoeveelheid beweging mede gelijk aan den door ons gedefinieerden osmotischen druk en

§ 8. Daarmede schijnt mij de wet van VAN 'T HOFF voor verdunde oplossingen kinetisch geheel op dezelfde wijze verklaard als de wet van BOYLE-GAY-LUSSAC-AVOGADRO voor verdunde gassen en die van VAN DER WAALS voor vloeistoffen en gassen, d.w.z., wij hebben een kinetisch inzicht gekregen hoe die wetten voortvloeien uit den bewegingstoestand in de homogene stofmassa, terwijl wat er gebeurt in de eventueel (waarschijnlijk altijd) aanwezige inhomogene grenslagen buiten beschouwing is gebleven.

Er blijkt uit de verklaring ten duidelijkste, dat VAN LAAR te ver gaat, wanneer hij beweert ¹⁾, dat men niet van osmotischen druk in een geïsoleerde oplossing kan spreken. Ook hier heeft dit begrip duidelijke physische beteekenis en de wetten die het beheerschen laten zich afleiden. Of men daarom verstandig doet het in de theorie der oplossingen op den voorgrond te plaatsen en al het andere er aan vast te knopen, is een vraag waarop ik in een afzonderlijke mededeeling wensch terug te komen.

Hier vooreerst nog deze opmerking. Het verkregen inzicht in de natuur van den osmotischen druk stelt ons in staat na te gaan welke grootheden in de formule voor meer geconcentreerde oplossingen

ontvangt zelf een even groote hoeveelheid in tegengestelden zin, die zij op de onderliggende lagen doet overgaan zooals de kinetische theorie leert. (Zie bijv. BOLTZMANN Zsch. phys. Ch. 6, 480). Nu beweegt de watermassa, die in de nabijheid van de membraan is (ter weerszijden, gerekend aan de eene zijde van *B*, aan de andere van een vlak, zoo ver van de membraan, dat deze er geen werking meer op uitoefent), zich in haar geheel niet naar beneden, dus moet zij een gelijken en tegengestelden impuls ontvangen, die natuurlijk van niets anders dan de membraan kan uitgaan. Van welken aard de daarbij werkende krachten zijn ligt geheel in het duister. De gewone moleculaire attractie kan het niet zijn, want dan zou de boven de membraan aanwezige dichtere vloeistof waarschijnlijk sterker naar beneden getrokken worden dan de daaronder aanwezige naar boven. Men zou aan wrijving in de poriën kunnen denken, maar deze zou dan in de eene richting anders moeten zijn dan in de andere: Kortom geen enkele g'ssing zou ik daaromtrent durven wagen. Alleen dit is zeker, dat zoodanige krachten als ten minste het thans door ons gestelde geval werkelijk ooit voorkomt) moeten bestaan. Dit blijkt reeds hieruit, dat het zuivere oplosmiddel boven de membraan onder hoogerem druk staat, dus grootere dichtheid bezit, dan daaronder. Zulk een evenwicht komt bij allerlei kinetische quaesties voor (vloeistof-damp, gas onder den invloed der zwaartekracht), maar de noodzakelijke voorwaarde is altijd een kracht, die bij oppervlakkige beschouwing het resultaat schijnt te hebben, dat de *snelheid* der moleculen in het eene deel (dus de temperatuur) hooger zou zijn dan in het andere, maar inderdaad alleen op de *dichtheid* invloed blijkt te hebben. De membraan, die dezen impuls levert, ontvangt uit de reactie een even grooten terug en zoo zien wij ook hier, zij het dan middellijk, een kracht gelijk aan den door ons gedefinieerden osmotischen druk van binnen naar buiten op de membraan uitgeoefend.

¹⁾ Chem. Weekblad 1905, N^o. 9, § 3. Voordracht Bat. Gen. 3.

moeten optreden. In de eerste plaats zal het voor geconcentreerde oplossingen niet meer waar zijn, dat de term a/v^2 verdwijnt, èn omdat aan weerszijden van de membraan de dichtheid, v , èn omdat de concentratie en dus de a verschillend zullen zijn. Vervolgens zal — zooals blijkt uit ons bewijs — bij hoogere concentraties het volume der moleculen mee gaan spreken, en wel niet alleen van de opgeloste stof, maar ook van het oplosmiddel. Want daar aan weerszijden van de membraan de dichtheid verschillend is, zal het gedeelte van het stootvlak, dat binnen afstandssferen dezer moleculen valt, niet meer door de boven aangegeven waarde worden voorgesteld. Daar eindelijk de moleculen van verschillende grootte zijn, zal als de termen b_1 en b_2 optreden ook $b_{1,2}$ niet kunnen ontbreken. De formule, die men aldus vindt, zal zeker niet gelijk zijn aan de in de voorgaande mededeeling langs thermodynamischen weg gevondenene, want deze is afgeleid uit de toestandsvergelijking met constante b , terwijl de kinetische beschouwingen geen twijfel laten, dat b een volumefunctie is. Mocht er reële verkleining van b bestaan, dan is ook daarmede rekening te houden bij het overschrijden der membraan.

Het is verre van mij een poging te doen om zulk een vergelijking op te stellen. Daartoe zou het, zooals uit het voorgaande blijkt, noodig zijn, dat men op zijn minst alle moeilijkheden wist te overwinnen, die een nauwkeurige toestandsvergelijking in den weg staan. En kon men dit — de voorafgaande mededeeling bewijst het — dan zou de definitieve formule op een wijze te vinden zijn, die ons niet opnieuw bloot zou stellen aan het maken van fouten. Ik zal daarom ook niet op de vraag ingaan op welke wijze de kinetisch afgeleide formule voldoen kan aan den eersten eisch, dien men aan elke formule voor geconcentreerde oplossingen stellen mag, dat zij de waarde ∞ geve voor het geval, dat de diosmeerende stof geheel uit de oplossing is verdwenen.

§ 9. Liever zal ik mij nog een enkele opmerking veroorloven over de vraag of onze kinetische beschouwing insluit, dat de zoogenaamde statische theorie van den osmotischen druk, die de oorzaak van het verschijnsel in aantrekkingskrachten zoekt, geheel onjuist is? Het komt mij voor, dat wij met het oog op het door LORENTZ bewezene die vraag ontkennend moeten beantwoorden. Wel hebben wij gezien, dat de aantrekking van oplosmiddel en opgeloste stof eerst bij merkbaar geconcentreerde oplossingen een rol gaat spelen, en dat men niet kan nalaten den osmotischen druk uit een „moleculares Bombardement” te verklaren. Maar het door LORENTZ behandelde geval toont wel, dat het geheele osmotische verschijnsel wel eens uitslui-

tend het gevolg zou kunnen zijn, niet zoozeer van de aanwezigheid van aantrekkende krachten, dan wel juist aan het tegendeel daarvan, het gebrek aan aantrekking tusschen de moleculen van de meeste vaste stoffen en zekere andere vaste stoffen, die membranen vormen. Bedoelen de voorstanders der statische theorie niets anders met hun bewering: dat de osmotische druk uit aantrekkingskrachten moet verklaard worden, dan schijnen zij mij voorloopig tegen elken aanval beveiligd te zijn.

Natuurkunde. — De Heer VAN DER WAALS biedt een mededeeling aan van den Heer PH. KOHNSTAMM: „*Osmotische druk of thermodynamische potentiaal.*”

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

§ 1. De leer van de thermodynamische functies, waardoor GIBBS ons in staat gesteld heeft uit de toestandsvergelijking van een systeem in homogenen toestand af te leiden welke heterogene evenwichten zullen intreden, heeft gedurende een reeks van jaren slechts in zeer beperkten kring de aandacht getrokken. Hoe groot het gebied ook was, dat door GIBBS voor onderzoek was opengesteld, de door hem aangegeven methoden schenen zóó abstract, dat slechts zeer enkelen met de ontginning een aanvang durfden te maken. Met één slag veranderde dit, toen het VAN 'T HOFF in 1885 gelukte in de plaats van die schijubaar zoo abstracte methoden een andere te stellen, die van den osmotischen druk, die in hooge mate tot de verbeelding spreekt. De theorie der oplossingen, die vóór dien tijd slechts voor enkelen bestaan had, werd alras een van de meest bewerkte en besproken onderwerpen van physica en chemie; zij is zich sinds in onverdeelde belangstelling blijven verheugen.

Het spreekt van zelf, dat de aandacht, nu sinds een twintigtal jaren in zoo ruime mate geschonken aan de vragen van het heterogene evenwicht, ook bevorderlijk is geweest voor het in ruimer kring bekend worden van de methoden van GIBBS tot oplossing van zulke vragen. Maar al moge dan de naam van GIBBS tot de meest bekende en gevierde in physica en chemie behooren, dat zijn methoden algemeen aangenomen zijn kan ook thans nog niet gezegd worden.

De aanhanger van een mechanische (of, wil men liever, statistische) natuurbeschouwing heeft allerminst reden dezen loop van zaken uitsluitend te betreuren, want hij vindt daarin een duidelijke aanwijzing, dat de beschouwingen voor wier juistheid hij opkomt, geenszins zoo verouderd, zelfs dood, zijn als hij vaak hoort verkondigen. En

ware de algemeen gangbare meening — die zeker niet weinig bijdraagt tot de grootere populariteit van den osmotischen druk boven den thermodynamischen potentiaal — inderdaad juist, dat de eerste grootheid *wel* een eenvoudige aanschouwelijke beteekenis bezit, de laatste daarentegen *niet*, dan zou er onder overigens gelijke omstandigheden, voor hem niet veel twijfel bestaan aan welke methode hij de voorkeur moest geven.

Maar die algemeen gangbare meening schijnt mij moeilijk houdbaar en aan de andere zijde komt het mij voor, dat in vele opzichten de thermodynamische potentiaal te verkiezen is boven den osmotischen druk en dat men dus goed zal doen zich de vraag te stellen of men niet èn bij het onderzoek èn bij het onderwijs weder tot de oudere methode zal terugkeeren?

§ 2. Die vraag is voor korten tijd opnieuw aan de orde gesteld door den Heer VAN LAAR in een voordracht voor het Bataafsch Genootschap in Rotterdam ¹⁾, die gevolgd werd door een artikel: Over tastbare en ontastbare grootheden ²⁾. Al erken ik gaarne, dat deze opstellen voor mij de aanleiding waren om het vraagstuk van den osmotischen druk opzettelijk te overwegen, er zou voor mij geen reden zijn de denkbeelden van den Heer VAN LAAR hier ter sprake te brengen, wanneer alleen zijn voordracht verschenen ware. Want met de strekking van deze kan ik mij ten volle vereenigen — al zou ik natuurlijk niet elke zinsnede daarvan voor mijn rekening nemen, zooals trouwens reeds uit mijn voorgaande mededeelingen in dit Verslag gebleken is — en ik zou dus hier slechts behoeven na te gaan wat naar mijn meening aan die voordracht toe te voegen ware. Met zijn tweede opstel echter — en ik denk daarbij voornamelijk aan de §§ 6 en 7, door den schrijver zelf als de kern van zijn opstel aangewezen —, schijnt de Heer VAN LAAR mij de goede zaak, die hij met zooveel warmte voorstaat, meer na- dan voordeel gedaan te hebben, en reeds om die reden meen ik tegen dit deel van zijn betoog te moeten opkomen. Ik geloof niet mis te tasten wanneer ik de grondgedachte ervan aldus weergeef: Wel is waar kunnen wij ons geen aanschouwelijke voorstelling ³⁾ vormen van het wezen van den thermodynamischen potentiaal, maar dat kunnen wij evenmin omtrent den osmotischen druk; en wij behoeven ons daarover niet te verbazen, want het verbeterd wijsgeerig inzicht van de laatste

¹⁾ Ook verschenen Chem. Weekblad, 1905, N^o. 1.

²⁾ Chem. Weekblad, 1905, N^o. 9.

³⁾ De Heer VAN LAAR spreekt van een „tastbaar begrip”. Het zou mij te voeren, wilde ik aangeven, waarom ik meen die woorden te mogen en zelfs te moeten vervangen door de hier gekozenen.

jaren schenkt ons de overtuiging, dat onze natuurwetenschap nooit anders werkt dan met fictieve (zij het scherp bepaalde) begrippen, die er niet de minste aanspraak op mogen of kunnen maken het werkelijke wezen der dingen weer te geven. Het is dan ook aan dit inzicht te danken, dat in den laatsten tijd meerdere stemmen opgaan voor het gebruik van den thermodynamischen potentiaal.

§ 3. Nu meen ik in de voorgaande mededeeling afdoende de onjuistheid van de tweede stelling te hebben aangetoond, en daar ik mij volgaarne en met volle overtuiging schaar onder de door den Heer VAN LAAR bestreden „tastbaarheidsmensen” zou zijn betoog mij er toe brengen tegen den thermodynamischen potentiaal partij te kiezen wanneer ik mij met zijn eerste en zijn laatste stelling beter zou kunnen vereenigen dan met zijn tweede. Dit echter is geenszins het geval.

De laatste, wijsgeerig-historische stelling moet ik hier uit den aard der zaak laten rusten, en ik beperk mij dus tot die omtrent het aanschouwelijk karakter van den thermodynamischen potentiaal. Het komt mij voor, dat wij ons van deze grootheid een voorstelling kunnen vormen, die niet achter behoeft te staan bij die van eenige andere statistische grootheid. Dat de Heer VAN LAAR dit over het hoofd heeft gezien schijnt mij voornamelijk te wijten aan twee omstandigheden, waarvan de eene nauwelijks van invloed schijnt te kunnen zijn, want het is een nomenclatorische quaestie. Een spraakgebruik volgend, dat mij er niet minder verwerpelijk om schijnt te zijn, omdat het vrij veelvuldig voorkomt, geeft de Heer VAN LAAR den naam „thermodynamische potentiaal” niet aan de onder dien naam door GIBBS in de wetenschap ingevoerde grootheid, maar aan een van de andere door GIBBS ingevoerde functies, de ζ -functie. Er zijn meer redenen dan die van piëteit alleen, die dit onraadzaam maken. De werkelijke (GIBBS'sche) potentiaal *is* inderdaad een potentiaal, d.w.z. hij is constant in een ruimte waar evenwicht heerscht, en zijn niet-constant-zijn beteekent, dat er geen evenwicht bestaat. Althans wanneer er geen capillaire of uitwendige krachten werken; en in dit geval komt de overeenkomst van den thermodynamischen potentiaal met de potentialen van andere energieën misschien nog duidelijker aan het licht. Want in dit geval behoeft men bij den (GIBBS'schen) thermodynamischen potentiaal slechts de andere potentialen, die in die ruimte bestaan, op te tellen om een grootheid te krijgen, den totalen potentiaal, die ook thans weer bij evenwicht constant is door de geheele ruimte. De ζ -functie heeft noch de eene eigenschap, noch de andere, behalve als wij te doen hebben met een enkele stof

tiaal van een homogene phase, waarop geen uitwendige krachten werken, geen andere is dan het aantal deeltjes, dat per secunde een wand bereikt, als in de vorige mededeeling § 4 sub 2^o. gedefinieerd, als deze wand wordt aangebracht te midden dier homogene phase.

Toch eischt die definitie nog eenige nadere toelichting, omdat het aantal moleculen, waarvan hier sprake is, een grensvlak der phase bereikt dat geen aantrekking op die deeltjes uitoefent, terwijl op de deeltjes, waarvan boven sprake was en wier aantal VAN DER WAALS berekend heeft, n.l. zij, die overgaan uit de eene phase in de andere, *wel* een kracht werkt naar de andere phase gericht. Maar dit verschil is, naar ik geloof, slechts schijnbaar. Ook in de vergelijkingen, waartoe VAN DER WAALS komt, heeft het eene lid uitsluitend op de eene phase, het andere op de tweede betrekking; er komen geen termen in voor, uit factoren bestaande waarvan de eene op de eerste phase, de andere op de tweede slaat. Dat men tot die uitkomst moest geraken, laat zich trouwens begrijpen, immers de thermodynamische potentialen zelf hebben slechts òf op de eene òf op de andere phase betrekking en zijn door den toestand in die phase op zichzelf beschouwd geheel bepaald.

Dat in elk geval bij de definitie van den thermodynamischen potentiaal het eene aantal voor het andere in de plaats mag gesteld worden blijkt als volgt. Denken wij ons een vloeistof in evenwicht met haar damp. Het aantal deeltjes, dat thans per oppervlakteëenheid door de grenslaag gaat, is dat, waarover VAN DER WAALS handelt; denken wij ons nu op die vloeistof een laag van een stof gelegd, die de moleculen niet aantrekt; zij die laag dik ten opzichte van de werkingssferen en voorzien van kleine kanalen. Het aantal deeltjes, dat deze kanalen binnendringt van weerszijden is het aantal, dat wij in onze definitie gebruikten. Nu beweer ik, dat door het aanbrengen van deze laag het evenwicht van de homogene phasen ¹⁾

als van de andere grootheid. Er is dus volkomen overeenstemming van ons geval met dat van de temperatuur, gemeten bijv. in Celsiusmaat, en niemand heeft toch zeker bezwaar te zeggen, ook als hij denkt aan deze temperatuurschaal, dat de beteekenis van de temperatuur is de gemiddelde levende kracht van de zwaartepuntsbeweging der moleculen.

1) Het evenwicht in de niet-homogene, capillaire laag wordt door het aanbrengen van zulk een wand *wel* verstoord. Immers, zooals VAN DER WAALS heeft aangetoond (verg. de noot pag. 793) is het evenwicht in een vlak van zulk een laag alleen stabiel tengevolge van de aantrekkende krachten door de omringende vlakken uitgeoefend. Door het aanbrengen van de door ons bedoelde laag zal dus de toestand in de overgangslagen aanmerkelijk gewijzigd worden, wat trouwens te voorzien was. Op onze redeneering heeft dit geen invloed, want wij hebben door het woord „homogeen” in onze definitie deze overgangslagen uitdrukkelijk uitgesloten. Dat dit

niet verstoord kan zijn, d.w.z. de druk en de concentraties van deze zullen niet veranderen. Immers ware dit wel het geval dan zouden wij met behulp van zulk een laag een zoogenaamd perpetuum mobile van de tweede soort kunnen vervaardigen en dus in strijd komen met de tweede wet der warmtetheorie. Daaruit volgt, dat gelijkheid van het door VAN DER WAAËS bedoelde aantal gelijkheid insluit van het door ons in de definitie gebruikte, en dat wij dus het laatste voor het eerste in de plaats mogen zetten bij de definitie van thermodynamischen potentiaal.

§ 5. Daarmede zijn wij nu tot een aanschouwelijke voorstelling van den thermodynamischen potentiaal gekomen, die voor zoover ik zien kan in niets onderdoet voor die van temperatuur, uitwendigen druk, kinetischen druk, aantal botsingen, gemiddelde weglengte enz. Dat wij daarom nog niet de waarde van den thermodynamischen potentiaal in een bepaald geval gemakkelijk uit die voorstelling kunnen afleiden behoeft geen betoog, evenmin, dat het allicht wel altijd verstandiger zal blijven den thermodynamischen potentiaal met behulp van thermodynamische functies af te leiden dan uit directe kinetische beschouwingen. Aan deze laatste ontsnapt men weliswaar op deze wijze evenmin, maar men maakt gebruik van het resultaat dier beschouwingen, zooals het in de toestandsvergelijking voor ons ligt. In deze beide opzichten echter staat de thermodynamische potentiaal in geen enkel opzicht bij den osmotischen druk achter, zooals uit mijn beide vorige mededeelingen speciaal § 8 van de tweede blijkt.

§ 6. De Heer VAN LAAR deelt ons mede, dat men hem naar aanleiding van zijn voordracht verzocht had voor den osmotischen druk en de kinetische opvatting daarvan „iets in de plaats” te geven en wel iets, waarbij men zich „iets denken” kan¹⁾. Mij schijnt dit verzoek heel wat minder ongeoorloofd dan den Heer VAN LAAR en ik meen er in de voorgaande bladzijden aan te hebben voldaan. Thans zij het mij vergund aan te toonen, dat dit „iets anders” tevens „iets beters” is.

Vooreerst schijnt het mij weinig gelukkig in de theorie der mengsels een drukgrootheid zoo op den voorgrond te plaatsen. Zoodra men die theorie algemeen behandelt, d. w. z. ook uitwendige krachten en

in elk geval noodig was blijkt ook al uit het reeds boven door ons gememoreerde feit, dat de thermodynamische potentiaal voor zulke lagen niet meer de grootheid is, die het evenwicht bepaalt, maar dat daarvoor de totale potentiaal in de plaats treedt. Wij moeten dus zeker niet naar zulke lagen gaan, om den thermodynamischen potentiaal in zijn eenvoudigste beteekenis te leeren kennen.

¹⁾ Chem. Weekblad 1905 No. 9, § 3. De aanhalingsteekens zijn van den Heer VAN LAAR.

capillaire verschijnsels opneemt (die toch dikwijls zoo belangrijk zijn; men denke aan kritische punten) blijkt het toch, dat de druk een grootheid is, die slechts met groote voorzichtigheid mag worden gehanteerd en geenszins in aanmerking komt als fundamenteele variabele¹⁾. In heel wat hooger mate geldt dit bezwaar voor den osmotischen druk. Immers deze is, zooals wij gezien hebben, niet een grootheid, die karakteristiek is voor den toestand waarin de oplossing zich bevindt; de eigenaardige wetten van den osmotischen druk komen niet daarvandaan, dat de stof in verdunde oplossing in een bijzonderen, eigenaardigen toestand verkeert; zij hebben alleen — in hun algemeenheid — hun oorsprong in onze willekeur, die met behulp van fictieve begrippen op het papier eigenaardige toestanden in 't leven roept, die in de werkelijkheid nooit bestaan. Want men sluite toch niet zijn oogen voor dit onloochenbare feit, — en allermint behooren zij dit te doen die zoo wars zijn van „hypothesen” —, dat al die semipermeabele wanden, nu ja, in enkele gevallen te verwezenlijken zijn, maar dat daar duizenden en duizenden gevallen tegenover staan, waarin wij niet den geringsten grond hebben aan hun bestaan te gelooven. Welke reden is er aan te nemen, dat er ooit een wand gevonden zal worden, doordringbaar voor toluol en niet voor benzol, en een tweede wand, voor benzol doordringbaar en niet voor toluol, en wat is het anders dan een fictie om van een wand te spreken, doordringbaar voor rietsuiker en niet voor water. (Immers ook deze is noodig, zie VAN 'T HOFF, Vorlesungen II, 24). En stellen wij zelfs het gunstigste geval; dat zulke wanden werkelijk bestonden, blijft het dan niet volkomen fictie de theorie van geconcentreerde oplossingen daarmee te willen behandelen? Men bedenke slechts, dat staal, ons sterkste materiaal, al wordt het nog zoo dik gekozen nauwelijks drukken boven 5000 Atm. kan verdragen, wat dan te denken van een semipermeabelen wand voor dien zulk een druk slechts een kleinigheid is. En nu heb ik volstrekt geen bezwaar tegen zulke fictieve begrippen als zij volstrekt onvermijdelijk zijn, — het voorgaande toont het voldoende — maar waartoe dient het er mede te werken, wanneer wij een andere grootheid hebben, van eenvoudige beteekenis, die *wel* voor den toestand karakteristiek is, waarin zich het mengsel bevindt, die gedefinieerd kan worden geheel alleen uit de eigenschappen der stof, die wij voor ons hebben?

Daarbij sluit zich een ander bezwaar aan. Wie met den osmotischen druk werkt — de historie leert het — is maar al te zeer geneigd een mengsel niet te beschouwen als een individu, dat op

¹⁾ Men verg. de noot op p. 793.

zich zelve beschouwd en uit zich zelve gekend moet worden, maar als een andere stof (oplosmiddel), min of meer gemodificeerd door de aanwezigheid van de „opgeloste stof”. Zoo verliest men geheel uit het oog, dat beide componenten in een mengsel in volkomen denzelfden toestand aanwezig zijn (de zonderlinge theorie van de „gasachtigheid” der opgeloste stof bewijst het); men gaat over het hoofd zien, dat opgeloste stof en oplosmiddel geheel willekeurige namen zijn, die alleen recht van bestaan hebben als men zich bepaalt tot een van de beide uiterste gevallen; men komt er toe de eigenschappen van een stof te willen verklaren uit die van een andere, zich dikwijls in geheel andere omstandigheden bevindende; men gaat allerlei gewaagde benaderingen en compromissen toepassen; men komt tot de zonderlingste associatie- en dissociatietheorieën. Hoe vruchtbaar daarentegen juist de tegenovergestelde methode is, het geheele werk van VAN DER WAALS, het experimenteele en theoretische materiaal in aansluiting daaraan speciaal te Leiden verzameld (o. a. over het gedrag van mengsels ten opzichte van de wet der overeenstemmende toestanden) ligt daar om het te bewijzen.

§ 7. Men zal mij misschien te gemoet voeren, dat dit alles theoretische bezwaren zijn al of niet van waarde, maar dat daartegenover het practische voordeel staat, dat berekeningen met den osmotischen druk zooveel eenvoudiger zijn dan met den thermodynamischen potentiaal, maar die tegenwerping mist allen grond. Immers kinetische berekening kan daarmede niet bedoeld zijn, en voor de thermodynamische berekening geldt integendeel, dat men bij het gebruik maken van den thermodynamischen potentiaal niet één stap behoeft te doen, dien men niet op volkomen dezelfde wijze doet bij gebruik maken van den osmotischen druk. Gaarne zoude ik, om dit te bewijzen, afdrukken en stap voor stap volgen het bewijs door VAN 'T HOFF in zijn Vorlesungen gegeven, maar daar dit bewijs — door VAN 'T HOFF met zorg gekozen uit beschouwingen deels van hem zelf, deels van Lord RAYLEIGH, deels van Dr. DONNAN, dus zeker het fraaiste en eenvoudigste dat te vinden is — twee bladzijden druks beslaat zal ik slechts de hoofdbewerkingen aangeven en daarnaast de bewerkingen stellen, die bij dezelfde verwaarloozingen voor den thermodynamischen potentiaal noodig zijn.

1. Verwijder uit een oplossing van osmotischen druk P diosmotisch een hoeveelheid oplosmiddel, die een volume v inneemt. Door de stof wordt een arbeid $\underline{-Pv}$ geleverd.

2. Verwaarloos de dampspanningsverandering en de contractie der oplossing. (Dit wordt niet uitdrukkelijk gezegd, maar is blijkbaar voor het bewijs noodig).

3. Laat de hoeveelheid opgeloste stof diosmotisch verdampen, die in v opgelost was; haar volume zij dan V , de verrichte arbeid is:

$$\underline{\frac{pV}{}}$$

(als wij v tegen V verwaarloozen).

4. Laat den damp zich uitbreiden tot oneindig volume; de verrichte arbeid is:

$$\int_V^\infty p dv = \underline{MRT l \frac{V_\infty}{V}}$$

5. Pers nu dien damp weer in de oplossing dan wordt er een arbeid door de stof verricht:

$$-\int_V^\infty p dv = \underline{-MRT l \frac{V_\infty}{V}}$$

6. De totale hoeveelheid arbeid moet nul zijn, dus:

$$Pv = pV$$

1. De thermodynamische potentiaal is:

$$M\mu = pv + \int_{v_0}^{\gamma} p dv + MRT l (1-x) + F(T) + \int_{v_0}^{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_{vT} dv$$

pv wordt hier: $\underline{p_0 v_0}$.

2. Verwaarloos de veranderlijkheid van p met x en de compressibiliteit der vloeistof, dan is

$$\int_{v_0}^{\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dv = 0 \quad \text{en} \quad \int_{v_0}^{v_{c_1}} p dv = 0.$$

3.

$$\int_{v_{c_1}}^{v_{c_2}} p dv = \underline{p_c (v_{c_2} - v_{c_1})}$$

4.

$$\int_{v_{c_2}}^{\gamma} p dv = \underline{MRT l \frac{\gamma}{v_{c_2}}}$$

5. De thermodynamische potentiaal van zuiver water is:

$$M\mu = pv + \int_{v_g}^{\gamma} p dv + F(T)$$

$$\int_{v_g}^{\gamma} p dv = \underline{MRT l \frac{\gamma}{v_{c_2}}}; \quad pv = \underline{p_c v_{c_2}}$$

6. De beide potentialen zijn gelijk, dus:

$$(p_0 - p_c) v_{c_1} = -MRT l (1-x)$$

wat ondanks de verschillende notatie hetzelfde is, als men $\log(1-x)$ door $-x$ vervangt.

Men ziet dus, dat met elke integratie rechts een volkomen gelijksoortige bewerking links overeenkomt, al heeft zij daar niet altijd op dezelfde stof betrekking. Het eenige verschil is, dat men rechts de integratie direct uitvoert en links werkt met zuigers en membranen. En nu zal er niet licht iemand meer dan ik prijs stellen op aanschouwelijke voorstelling, maar dat men een integratie langs een isotherm niet vermag uit te voeren, zonder er twee zuigers en drie membranen bij te pas te brengen, dat schijnt mij toch een weinig „des Guten zu viel”.

§ 8. En nu hebben wij het gunstigste geval beschouwd: verdunde oplossingen; hoe staat het met meer geconcentreerde? Men zal zeker ook daarvoor kringprocessen kunnen bedenken, zoodat men de in mijn eerste mededeeling uitgevoerde berekeningen kan doen zonder den naam „thermodynamische potentiaal” te noemen, maar men zal zeker niet langs thermodynamischen weg een formule voor den osmotischen druk kunnen opstellen, zonder de daar voorkomende integralen te bepalen.

Daardoor zou het den schijn krijgen alsof beide methoden in wezen eigenlijk gelijk waren; dit is zoo niet, de osmotische methode heeft nadeelen, die de andere niet kent. Immers wat wenscht men eigenlijk langs beide wegen te leeren kennen? Toch niet den osmotischen druk zelf, en de eigenschappen der oplossingen onder dien druk, dat wil bij geconcentreerde oplossingen zeggen: in merkbaar gecomprimeerden toestand. Datgene, waarom het te doen is, zijn de eigenschappen der oplossingen onder den druk van hun verzadigden damp: vriespunts- en dampspanningsverlaging, kookpuntsverhooging en deelingscoëfficiënt of juist(er) (men verg. boven § 6) vriespunt, kookpunt, dampspanning van het mengsel en de concentratie van coëxisterende fasen. En dit geldt niet alleen voor physici en chemici, die zelden of nooit met membranen werken, maar ook voor de biologen, voor wie membranen zoo uiterst gewichtig zijn. Want drukverschillen van een tiental atmosferen zullen toch bij biologische proeven wel zoo goed als nooit voorkomen en a fortiori niet in het levend organisme. Het evenwicht tusschen twee oplossingen zal dus wel nooit bereikt worden door *drukverschil*, maar door het *concentratieverschil*, vereischt om den druk gelijk te doen zijn. Met gecomprimeerde oplossingen heeft men dus ook hier niet te maken ¹⁾.

1) Om die reden zou men ook bij de behandeling van werkelijk osmotische vragen nauwelijks veel verliezen wanneer men zich gewende ze zonder „osmotischen druk” te behandelen en eenvoudig de concentraties aan weerszijden vanden

Voor de berekening beteekent dit, dat men bij gebruik maken van den thermodynamischen potentiaal de integratie langs de isotherm slechts behoeft uit te strekken tot den druk p_c , en de thermodynamische potentiaal is dan met voldoende benadering te bepalen uit de bekende dampdrukformule

$$- \log \frac{p_c}{p_k} = f \left(\frac{T_k}{T} - 1 \right)$$

zij het ook met den experimenteel bepaalden factor 7 in stede van de theoretisch gevonden waarde 4. Maar gebruikt men den osmotischen druk, dan kan men de integratie tot p_0 uit den aard der zaak niet missen (in den term $\int \frac{\partial p}{\partial x} dv$) en het is juist dit stuk van de isotherm, dat het minst bekend is, waar bijv. de variabiliteit van b zich het sterkst doet gevoelen, zelfs de eenige term, waarop deze invloed heeft als men de zooveen genoemde dampdrukformule gebruikt. Geheel noodeloos maakt men dus het resultaat minder zeker door het invoeren van den osmotischen druk.

En gesteld zelfs, dat men de gezochte uitdrukking gevonden had, wat zou men dan nog hebben? De grootheden, die men inderdaad wenscht te kennen en die ik reeds noemde, hangen wel bij verdunde oplossingen op eenvoudige wijze met den osmotischen druk samen, maar wij hebben geen enkele reden dit ook voor geconcentreerde oplossingen aan te nemen, of liever men kan wel met zekerheid zeggen, dat dit niet het geval is. Hoe daarentegen met behulp van den thermodynamischen potentiaal die grootheden zich laten bepalen, heeft VAN DER WAALS ons reeds vijftien jaar geleden geleerd.

§ 9. En ten slotte vergeete men toch niet, dat oplossingen van niet-vluchtige stoffen bij lage temperaturen wel een groote rol spelen in de natuur, maar dat zij toch niet de *eenige* stoffen zijn die bestaan, en evenmin de eenige, die de wetenschappelijke aandacht verdienen. En toch moet de leer van den osmotischen druk noodzakelijk tot deze bepaald blijven. Men leidt zoo gaarne de wetten van kookpuntsverhooging en dampdruksverlaging uit den osmotischen druk af, maar men vergeet gewoonlijk, dat vele oplossingen juist kookpuntsverlaging

wand invoerde. Wel zou men op die wijze aan helderheid van uitdrukking winnen, getuige het voorbeeld door den Heer VAN LAAR aangehaald (Tastb. Gr. §5). Want de daar gegeven interpretatie moge nu juist of onjuist zijn, moeilijk kan ontkend worden, dat de gewraakte zinsneden licht misverstaan zullen worden in den zin van de bekende en herhaaldelijk ernstig besproken vraag van PUPIN, hoe toch bijv. een CaCl_2 oplossing van niet minder dan 53 Atm. osmotischen druk in een dun bekglas kan bewaard worden zonder dit uiteen te doen springen?

en dampdrukverhooging bezitten ¹⁾, en dat in elk geval zoodra de opgeloste stof ook maar in 't geringste vluchtig is de veranderingen van kookpunt en dampdruk niet meer uit den osmotischen druk kunnen afgeleid worden. En het is duidelijk, waarom? Het ligt immers reeds in elke definitie van den osmotischen druk, dat men hem alleen kan toepassen op die gevallen, waarin de eene komponent zich in zuiveren toestand uit het mengsel laat afscheiden, zooals NERNST voor het eerst duidelijk heeft uitgesproken. Daarmede is dus niet alleen het gansche gebied van hoogere temperaturen, waarbij alle stoffen min of meer vluchtig worden, uitgesloten, maar ook alle gevallen van niet totale ontmenging in vloeistof- of vasten toestand. Ook de methode der vriespunt daling wordt daardoor getroffen. Wel kan men de vriespunt daling uit den osmotischen druk berekenen, maar alleen dan, wanneer, zooals bij water en rietsuiker, de vaste stof die zich afscheidt, niet van variabele samenstelling is. Vaste oplossingen en mengkristallen in alle verhoudingen, die toch juist in de scheikunde zoo zeer de aandacht trekken, laten zich op deze wijze niet behandelen.

De physische chemie in haar tegenwoordigen toestand, herinnert wat haar quantitative deel betreft, in hooge mate aan de scheepvaart van een volk, dat het kompas nog niet kent. De kustscheepvaart wordt ijverig beoefend, hetzelfde beperkte gebied telkens en telkens doorkruist; maar in de open zee ver van den rand, durft men zich niet te begeven, en te recht, want groot is het gevaar van ondergang in de hooggaande golven van wilde hypothesen. Daaraan kan alleen een einde komen door een betrouwbaar kompas. De physische chemie kan het zich verschaffen als zij haar leer van den osmotischen druk wil laten varen voor die van den thermodynamischen potentiaal in verband met een goed gefundeerde toestandsvergelijking.

Sterrenkunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. WEEDER: „*Nauwkeurige benaderingsformules voor de verhoudingen der driehoeken in de berekening van eene elliptische baan uit 3 waarnemingen.*”

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN).

De plaatsen in de ruimte, ingenomen door de waargenomen planeet of komeet op de tijden t_1 , t_2 en t_3 duid ik aan door P_1 , P_2 en P_3 en de plaats der zon door Z .

Bij het berekenen van eene elliptische baan wordt ongeveer als

¹⁾ Verg. Théorie Moléculaire § 17.

volgt te werk gegaan; eerst becijfert men langs den weg van opeenvolgende benadering de afstanden $P_1Z = r_1$, $P_2Z = r_2$, $P_3Z = r_3$ uit de gegevens der waarnemingen, om vervolgens uit deze 3 afstanden, langs rechtstreekschen weg en zonder daarbij gebruik te maken van de tusschentijden, de elementen der baan te berekenen. Uit de verkregen ellips kunnen dan als een toets op de nauwkeurigheid der uitkomsten, de tusschentijden weer berekend en met de werkelijke vergeleken worden. Bij volmaakte overeenstemming voldoet de gevonden ellips aan alle voorwaarden van het vraagstuk, maar in den regel is het anders. De oorzaak hiervan is, dat men zich ter berekening van de afstanden r_1 , r_2 en r_3 bedient van benaderingsformules om de verhoudingen $\frac{\text{driehoek } P_1ZP_2}{\text{driehoek } P_1ZP_3} = n_2$ en $\frac{\text{driehoek } P_2ZP_3}{\text{driehoek } P_1ZP_3} = n_1$ uit te drukken in de tusschentijden en de drie te zoeken afstanden zelf, met verwaarloozing van termen van de 2^e, 3^e of 4^e orde der tusschentijden. Er zijn namelijk voor n_1 en n_2 verschillende uitdrukkingen voorgesteld, de eene door grooteren eenvoud, de andere door grootere nauwkeurigheid zich aanbevelend, doch voor zoover mij bekend is laten alle, in het algemeene geval van ongelijke tusschentijden, grootheden buiten rekening van de 4^e orde der tusschentijden.

De fouten in de berekende afstanden r_1 , r_2 en r_3 en die in de uit hen afgeleide baanelementen zijn in het algemeen van dezelfde orde als de verwaarloozing toegelaten in de uitdrukkingen voor n_1 en n_2 .

Nauwkeurige en tegelijk eenvoudige uitdrukkingen voor n_1 en n_2 zijn gegeven door J. W. GIBBS¹⁾.

Het doel van deze mededeeling is, naar het denkbeeld van GIBBS, voor n_1 en n_2 uitdrukkingen te ontwikkelen, die de termen van de 4^e orde insluiten; terwijl eene nieuwe afleiding voor de GIBBS'sche verhoudingen zich daarbij voordoet.

Zij in de gezochte ellips P de plaats van het hemellicht ten tijde t , x en y hare rechthoekige coördinaten in het baanvlak met oorsprong in de zon, en $r = ZP$, zoo voldoen x en y aan de onderstaande differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{x}{r^3} = \ddot{x} \qquad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{y}{r^3} = \ddot{y}$$

in welke vergelijkingen, in plaats van den tijd t , als onafhankelijk veranderlijke $\tau = k(t-t_1)$ is gesteld; τ is dus de tijd, gerekend van

¹⁾ J. W. GIBBS, On the determination of elliptic orbits from three complete observations. Memoirs of the national academy of sciences. Vol. IV, 2; p. 81. Washington 1889.

het tijdstip der eerste waarneming af en uitgedrukt in de eenheid, voor welke in het zonnestelsel de versnelling gelijk 1 is op een afstand van de zon, die als eenheid van lengte is aangenomen; k is de constante van GAUSS [$\log k = 8.235\ 581\ 4414 - 10$].

De rechthoekige coördinaten van P_1, P_2, P_3 door respectievelijk gelijke indices onderscheidende, merk ik op, dat $n = \frac{x_1 y - y_1 x}{x_1 y_3 - y_1 x_3} = \frac{\text{driehoek } P_1 Z P}{\text{driehoek } P_1 Z P_3}$ aan eene gelijksoortige differentiaalvergelijking voldoet als x en y , namelijk:

$$\frac{d^2 n}{d\tau^2} = -\frac{n}{r^3} = \ddot{n}.$$

Op de tijden	$t_1 (\tau = 0),$	$t_2 (\tau = \tau_3),$	$t_3 (\tau = \tau_2)$	zijn
de waarden van n	0	$+ n_3$	$+ 1$	
en die van \ddot{n}	0	$-\frac{n_3}{r_3^3}$	$-\frac{1}{r_3^3}$	

Bij ontwikkeling van n naar MAC LAURIN in de reeks der opklimmende machten van τ , zullen derhalve de termen van de 0^e en 2^e macht ontbreken. Gaat men bij die ontwikkeling niet verder dan de 4^e macht van τ , zoo behoeft men slechts 3 onbepaalde coëfficiënten die zich uit de onderstaande 4 betrekkingen laten elimineeren.

$$\begin{aligned} n_3 &= K_1 \tau_3 + K_3 \tau_3^3 + K_4 \tau_3^4 + f_4 \\ 1 &= K_1 \tau_2 + K_3 \tau_2^3 + K_4 \tau_2^4 + F_4 \\ -\frac{n_3}{r_3^3} &= + 6K_3 \tau_3 + 12K_4 \tau_3^2 + f_2 \\ -\frac{1}{r_3^3} &= + 6K_3 \tau_2 + 12K_4 \tau_2^2 + F_2. \end{aligned}$$

De overblijvende betrekking levert eene uitdrukking op voor n_3 in τ_2, τ_3, r_2, r_3 en de resttermen f_4, F_4, f_2 en F_2 .

De indices, die ik voor de resttermen gebruikt heb, geven aan, van welke orde der tusschentijden deze zijn; zoo is F_4 , die begint met $K_5 \tau_2^5$, van de 4^e orde der tusschentijden, hetgeen blijkt door de coëfficiënten K uit te drukken in de afgeleiden van n voor $\tau = 0$ en de laatste met behulp van de differentiaalvergelijking voor n te ontwikkelen als producten van \dot{n}_0 . Om duidelijker te zijn, laat ik hier die ontwikkeling volgen.

$$\frac{d^3 n}{d\tau^3} = -n\dot{z} - z\ddot{n}, \quad \text{waar } z \text{ gesteld is voor } \frac{1}{r^3}$$

$$\frac{d^4 n}{d\tau^4} = (z^2 - \ddot{z})n - 2\dot{z}\dot{n}$$

$$\frac{d^5 n}{d\tau^5} = (4z\dot{z} - \ddot{z})n + (z^2 - 3\dot{z})\dot{n}.$$

Uit de differentiaalvergelijking $\frac{d}{d\tau}(r^3\ddot{r} + r) = 0$, aan welke r voldoet, laat zich de volgende differentiaalvergelijking voor $z = \frac{1}{r^3}$ afleiden :

$$\ddot{z} = \dot{z} \left(5 \frac{\ddot{z}}{z} - \frac{40}{9} \frac{\dot{z}^2}{z^2} - z \right)$$

waarvan men zich kan bedienen, om uit de hoogere afgeleiden van n \ddot{z} te verwijderen.

$$\frac{d^5 n}{d\tau^5} = 5 \left(z - \frac{\ddot{z}}{z} + \frac{8}{9} \frac{\dot{z}^2}{z^2} \right) \dot{n} + (z^2 - 3\dot{z}) \dot{n}.$$

Voor $\tau = 0$ is $n = 0$ en $\dot{n} = K_1$, derhalve

$$K_3 = -\frac{1}{6} z_1 K_1, \quad K_4 = -\frac{1}{12} \dot{z}_1 K_1, \quad K_5 = \frac{z_1^2 - 3\dot{z}_1}{120} K_1.$$

Door substitutie van deze uitdrukkingen voor de coëfficiënten K in de tweede der 4 betrekkingen, wordt deze :

$$1 = K_1 \tau_2 \left\{ 1 - \frac{1}{6} z_1 \tau_2^2 - \frac{1}{12} \dot{z}_1 \tau_2^3 + \frac{z_1^2 - 3\dot{z}_1}{120} \tau_2^4 \dots \right\}$$

en hieruit is duidelijk dat K_1 en de andere coëfficiënten K voorzover zij van de tusschentijden afhangen, zijn van de orde $\frac{1}{\tau_2}$.

Uit de 4 betrekkingen met de onbepaalde coëfficiënten K_1, K_3, K_4 wordt door eliminatie van deze gevonden :

$$\left\{ n_3 - f_4 - \frac{\tau_2^2 + \tau_2 \tau_3 - \tau_3^2}{12} \left(\frac{n_3}{r_2^3} + f_2 \right) \right\} \tau_2 = \left\{ 1 - F_4 - \frac{\tau_3^2 + \tau_3 \tau_2 - \tau_2^2}{12} \left(\frac{1}{r_3^3} + F_2 \right) \right\} \tau_3.$$

Uit deze vergelijking los ik op :

$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \frac{1 - \frac{\tau_3^2 + \tau_3 \tau_2 - \tau_2^2}{12 r_3^3}}{1 - \frac{\tau_2^2 + \tau_2 \tau_3 - \tau_3^2}{12 r_2^3}} + R_4$$

waarin de restterm

$$R_4 = \frac{f_4 + f_2 \frac{\tau_2^2 + \tau_2 \tau_3 - \tau_3^2}{12} - \frac{\tau_3}{\tau_2} \left\{ F_4 + F_2 \frac{\tau_3^2 + \tau_3 \tau_2 - \tau_2^2}{12} \right\}}{1 - \frac{\tau_2^2 + \tau_2 \tau_3 - \tau_3^2}{12 r_2^3}}.$$

Deze restterm is klaarblijkelijk van de 4^e orde der tusschentijden. Termen hooger dan de 4^e orde verwaarloozende, kan men in R_4 , f_4 door $K_5\tau_3^5$, F_4 door $K_5\tau_2^5$, f_2 door $20K_5\tau_3^3$ en F_2 door $20K_5\tau_2^3$ vervangen; en verkrijgt dan als correctieterm van de 4^e orde

$$+\frac{1}{3}K_5\tau_3(\tau_2 + \tau_3)(\tau_2 - \tau_3)(2\tau_2 - \tau_3)(\tau_2 - 2\tau_3),$$

welke uitdrukking wegens den laatsten factor verdwijnt voor het geval van gelijke tusschentijden.

De overeenkomstige benaderingsformule voor n_1 laat zich afleiden door de naar den tijd veranderlijke verhouding $\frac{\text{driehoek } PZP_3}{\text{driehoek } P_1ZP_3}$ te ontwikkelen naar opklimmende machten van $k(t_3 - t)$, en voorts te handelen, zooals hier is uiteengezet voor n_3 . De uitkomst voor n_1 wordt uit de vorige verkregen door de indices 1 en 3 met elkander te verwisselen, waarbij met τ_1 wordt bedoeld $k(t_3 - t_2)$; derhalve:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \frac{1 - \frac{\tau_1^2 + \tau_1\tau_2 - \tau_2^2}{12r_1^3}}{1 - \frac{\tau_2^2 + \tau_2\tau_1 - \tau_1^2}{12r_2^3}} - R_4.$$

De restterm van n_1 is niet alleen van gelijke orde als die van n_3 , maar heeft zelfs in de 4^e orde gelijke absolute waarde, doch ander teeken. Men ziet dit in, door gebruik makende van de betrekking $\tau_2 = \tau_1 + \tau_3$, de correctie van de 4^e orde voor n_3 uit te drukken in τ_1 en τ_3 ; ze verkrijgt daardoor den in τ_1 en τ_3 symmetrischen vorm:

$$\frac{1}{3}K_5\tau_1\tau_3(2\tau_1 + \tau_3)(\tau_1 + 2\tau_3)(\tau_1 - \tau_3).$$

Hier mag in de rest van n_1 de coëfficiënt $L_5 = K_5$ gesteld worden.

Steeds leveren derhalve deze benaderingsformules voor $n_1 + n_3$ eene, met insluiting van de 4^e orde der tusschentijden, nauwkeurige waarde op (verg. p. 818).

De noemers dezer uitdrukkingen voor n_1 en n_3 , ofschoon hier naar den vorm ongelijk, zijn inderdaad gelijk; de uitdrukkingen zelf komen overeen met die, welke volgen uit de door GIBBS aangenomen grondvergelijking tusschen de 3 vectoren ZP_1 , ZP_2 en ZP_3 , welke zich gemakkelijk tot onderstaanden vorm laat brengen:

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_1}{\tau_2} \left(1 - \frac{\tau_1^2 + \tau_1\tau_2 - \tau_2^2}{12r_1^3} \right) \overline{ZP_1} + \frac{\tau_3}{\tau_2} \left(1 - \frac{\tau_3^2 + \tau_3\tau_2 - \tau_2^2}{12r_3^3} \right) \overline{ZP_3} = \\ & = \left(1 - \frac{\tau_2^2 + \tau_2\tau_3 - \tau_3^2}{12r_2^3} \right) \overline{ZP_2}. \end{aligned}$$

Aan deze vergelijking wordt door de werkelijke plaatsen van het hemellicht voldaan bij verwaarloozing eener rest, die van de 5^e orde der tusschentijden is. Dit beteekent intusschen weinig ten opzichte van de nauwkeurigheid der naar GIBBS' methode berekende plaatsen, door welke ze streng bevredigd worden; immers zal elk stel vectorcorrecties $\Delta \overline{ZP}_1$, $\Delta \overline{ZP}_2$ en $\Delta \overline{ZP}_3$ de overeenstemming beneden de 5^e orde der tusschentijden niet verstoren, mits deze voldoen aan:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} \Delta \overline{ZP}_1 + \frac{\tau_3}{\tau_2} \Delta \overline{ZP}_3 = \Delta \overline{ZP}_2$$

en zelf niet beneden de 3^e orde dier tusschentijden zijn. Daar in de GIBBS'sche methode de verhoudingen n_1 en n_3 met fouten van de 4^e orde zijn aangedaan, zou hieruit volgen dat de naar die methode berekende plaatsen ook in de 4^e orde onjuist zijn. Aan de omstandigheid evenwel dat GIBBS' methode voor $n_1 + n_3$ de termen van 4^e orde in alle gevallen insluit, is het te danken, dat hare uitkomsten toch wel in termen der 4^e orde juist zijn.

Deze bijzonderheid der GIBBS'sche methode is in het licht gesteld door E. WEISS ¹⁾.

Ten einde voor n_1 en n_3 uitdrukkingen te verkrijgen, die in alle gevallen de 4^e orde der tusschentijden insluiten, en behalve die tusschentijden slechts $\frac{1}{r_1^3} = z_1$, $\frac{1}{r_2^3} = z_2$ en $\frac{1}{r_3^3} = z_3$ bevatten, heb ik gebruik gemaakt van de reeds op bladz. 3 afgeleide betrekking $K_3 = -\frac{1}{6} z_1 K_1$.

Uitgaande van de ontwikkeling:

$$n = K_1 \tau + K_3 \tau^3 + K_4 \tau^4 + K_5 \tau^5 + \text{rest van } 5^{\text{e}} \text{ orde}$$

kan ik over de volgende betrekkingen tusschen de coëfficiënten K , en de grootheden z_1 , z_2 , z_3 en n_3 beschikken.

$$\begin{aligned} n_3 &= K_1 \tau_3 + K_3 \tau_3^3 + K_4 \tau_3^4 + K_5 \tau_3^5 + f_5 \\ 1 &= K_1 \tau_2 + K_3 \tau_2^3 + K_4 \tau_2^4 + K_5 \tau_2^5 + F_5 \\ - z_2 n_3 &= \quad + 6K_3 \tau_3 + 12K_4 \tau_3^2 + 20K_5 \tau_3^3 + f_3 \\ - z_3 &= \quad + 6K_3 \tau_2 + 12K_4 \tau_2^2 + 20K_5 \tau_2^3 + F_3 \\ 0 &= K_1 z_1 + 6K_3 \end{aligned}$$

Door eliminatie van K_1 , K_3 , K_4 en K_5 wordt uit deze de volgende vergelijking verkregen.

¹⁾ E. WEISS, Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Denkschriften der Mathem. Naturw. Classe der Wiener Akademie. Bd. LX (1893).

$$\begin{aligned} & \tau_2 \left\{ (n_3 - f_5) \left(1 + \frac{\tau_2^2 (2\tau_2 - 5\tau_3)}{60\tau_3} z_1 \right) - \right. \\ & \quad \left. - (n_3 z_2 + f_3) \left(\frac{2\tau_2^3 + 2\tau_2^2 \tau_3 + 2\tau_2 \tau_3^2 - 3\tau_3^3}{60\tau_3} - \frac{\tau_2^2 \tau_3 (4\tau_2 - 3\tau_3)}{720} z_1 \right) \right\} = \\ = & \tau_3 \left\{ (1 - F_5) \left(1 + \frac{\tau_3^2 (2\tau_3 - 5\tau_2)}{60\tau_2} z_1 \right) - \right. \\ & \quad \left. - (z_3 + F_3) \left(\frac{2\tau_3^3 + 2\tau_3^2 \tau_2 + 2\tau_3 \tau_2^2 - 3\tau_2^3}{60\tau_2} - \frac{\tau_3^2 \tau_2 (4\tau_3 - 3\tau_2)}{720} z_1 \right) \right\}. \end{aligned}$$

Ter bekorting vervang ik hierin de uitdrukkingen die alleen afhangen van de tusschentijden, door enkele letters, stellende:

$$\begin{aligned} A_{2,3} &= \frac{\tau_2^2 (2\tau_2 - 5\tau_3)}{60\tau_3} & A_{3,2} &= \frac{\tau_3^2 (2\tau_3 - 5\tau_2)}{60\tau_2} \\ B_{2,3} &= \frac{-2\tau_2^3 - 2\tau_2^2 \tau_3 - 2\tau_2 \tau_3^2 + 3\tau_3^3}{60\tau_3} & B_{3,2} &= \frac{-2\tau_3^3 - 2\tau_3^2 \tau_2 - 2\tau_3 \tau_2^2 + 3\tau_2^3}{60\tau_2} \\ C_{2,3} &= \frac{\tau_2^2 \tau_3 (4\tau_2 - 3\tau_3)}{720} & C_{3,2} &= \frac{\tau_3^2 \tau_2 (4\tau_3 - 3\tau_2)}{720}. \end{aligned}$$

dan levert de vergelijking, opgelost naar n_3 , voor deze verhouding de onderstaande uitdrukking op:

$$n_3 = \frac{\tau_3}{\tau_2} \times \frac{1 + A_{3,2} z_1 + B_{3,2} z_3 + C_{3,2} z_1 z_3}{1 + A_{2,3} z_1 + B_{2,3} z_2 + C_{2,3} z_1 z_2} + R_5 \quad . \quad . \quad (I)$$

De restterm R_5 bevat de grootheden F_5 , f_5 , F_3 en f_3 ; voor deze stel ik, ten einde de waarde van R_5 in de 5^e orde der tusschentijden op te maken, $f_5 = K_6 \tau_3^6$, $F_5 = K_6 \tau_2^6$, $f_3 = 30 K_6 \tau_3^4$ en $F_3 = 30 K_6 \tau_2^4$; er wordt dan gevonden:

$$R_5 = \frac{1}{2} K_6 (\tau_2^4 - \tau_2^3 \tau_3 - \tau_2^2 \tau_3^2 - \tau_2 \tau_3^3 + \tau_3^4) \tau_3 (\tau_2 - \tau_3).$$

Daar de 4^{de} machtsvergelijking $1 - x - x^2 - x^3 + x^4 = 0$ een wortel heeft tusschen 0 en 1, en wel $x = 0,5806$, zullen de termen van de 5^e orde uit de rest verdwijnen, als $\tau_3 = 0.5806 \tau_2$.

De overeenkomstige benadering voor n_1 wordt verkregen door eene uitdrukking, welke ontstaat uit die voor n_3 door overal de indices 1 en 3 met elkander te verwisselen, derhalve:

$$n_1 = \frac{\tau_1}{\tau_2} \times \frac{1 + A_{1,2} z_3 + B_{1,2} z_1 + C_{1,2} z_3 z_1}{1 + A_{2,1} z_3 + B_{2,1} z_2 + C_{2,1} z_3 z_2} \quad . \quad . \quad (II)$$

De beteekenis der nieuwe letters is naar het voorschrift der verwisseling van indices 1 en 3.

$$\begin{aligned} A_{1,2} &= \frac{\tau_1^2 (2\tau_1 - 5\tau_2)}{60\tau_2} & A_{2,1} &= \frac{\tau_2^2 (2\tau_2 - 5\tau_1)}{60\tau_1} \\ B_{1,2} &= \frac{-2\tau_1^3 - 2\tau_1^2 \tau_2 - 2\tau_1 \tau_2^2 + 3\tau_2^3}{60\tau_2} & B_{2,1} &= \frac{-2\tau_2^3 - 2\tau_2^2 \tau_1 - 2\tau_2 \tau_1^2 + 3\tau_1^3}{60\tau_1} \\ C_{1,2} &= \frac{\tau_1^2 \tau_2 (4\tau_1 - 3\tau_2)}{720} & C_{2,1} &= \frac{\tau_2^2 \tau_1 (4\tau_2 - 3\tau_1)}{720}. \end{aligned}$$

In de rest, die behoort bij deze uitdrukking voor n_1 , zal de term van 5^e orde:

$$\frac{1}{2} L_6 (\tau_2^4 - \tau_2^3 \tau_1 - \tau_2^2 \tau_1^2 - \tau_2 \tau_1^3 + \tau_1^4) \tau_1 (\tau_2 - \tau_1)$$

verdwijnen ingeval $\tau_1 = 0.5806 \tau_2$, derhalve grijpt dat verdwijnen in geen geval plaats tegelijk voor n_1 en voor n_3 .

L_6 treedt op als coëfficiënt van τ_6 in de reeksontwikkeling voor driehoek PZP_3 naar opklimmende machten van $\tau = k(t_3 - t)$, terwijl driehoek P_1ZP_3 door K_6 de coëfficiënt werd aangegeven van τ^6 in de reeksontwikkeling voor driehoek P_1ZP driehoek P_1ZP_3 , waar de veranderlijke τ beteekent $k(t - t_1)$.

Indien de eerste vier ontwikkelingen geschiedde naar machten van $k(t - t_3) = -\tau$, zou tusschen elk paar gelijknamige coëfficiënten het verband bestaan, dat hare som ten opzichte van τ_2 ééne orde hooger was dan de coëfficiënten zelf. Men mag dus, termen van hoogere orde dan de 5^{de} verwaarloozende, de coëfficiënten K_6 en L_6 in absolute waarde gelijk, doch verschillend van teeken aannemen.

Van een dergelijk verband maakte ik op bladz. 815 gebruik, toen ik de coëfficiënten K_5 en L_5 in de resten van 4^e orde aan elkaar gelijk stelde. Bij de nieuwe uitdrukkingen voor n_1 en n_3 laten zich nu, door te stellen $L_6 = -K_6$, de volgende waarden afleiden voor den restterm der 5^e orde van $n_1 + n_3$.

$$\text{Rest van } n_1 + n_3 = \frac{1}{2} K_6 \tau_1 \tau_2 \tau_3 (\tau_1 - \tau_3) (2\tau_2^2 + \tau_1 \tau_3).$$

Bij gelijkheid der tusschentijden is de fout in $n_1 + n_3$ derhalve van de 6^e orde.

Naar de aangegeven handelwijze de termen der 4^e orde insluitend, vindt men voor de 3^e verhouding

$$\frac{\text{driehoek } P_2ZP_1}{\text{driehoek } P_3ZP_2} = \frac{n_3}{n_1}$$

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{\tau_3}{\tau_1} \times \frac{1 + A_{3.1}z_2 + B_{3.1}z_3 + C_{3.1}z_2z_3}{1 + A_{1.3}z_2 + B_{1.3}z_1 + C_{1.3}z_2z_1}, \quad \dots \quad (III)$$

en daarbij als rest der 5^e orde

$$+ \frac{1}{2} K_6 \frac{\tau_3}{\tau_1} \tau_2^2 (\tau_3^4 + \tau_3^3 \tau_1 - \tau_3^2 \tau_1^2 + \tau_3 \tau_1^3 + \tau_1^4)$$

Voor een der voorbeelden uit GAUSS' *Theoria Motus* (Libr. II, Sect. I cc. 156—158) heb ik naar de formules I, II en III de 3 verhoudingen becijferd. De streng juiste waarden dier verhoudingen en de uitkomsten der GIBBS'sche uitdrukkingen voor dit voorbeeld ontleen ik aan P. HARZER's *Bestimmung und Verbesserung der Bahnen von Himmelskörpern nach drei Beobachtungen* p. 8. ¹⁾

¹⁾ Publication der Sternwarte in Kiel, XI.

De heliocentrische beweging der planeet Pallas was van de 1^e tot de 3^e waarneming 22° 33'.

$$\begin{aligned} \log \tau_1 &= 9.8362703 & \log \tau_2 &= 0.0854631 & \log \tau_3 &= 9.7255594 \\ \log r_1 &= 0.3630906 & \log r_2 &= 0.3507163 & \log r_3 &= 0.3369508 \end{aligned}$$

Deze waarden voor $\log r$ zijn ook naar HARZER, en verschillen een weinig van die naar GAUSS.

Uitkomsten voor	$\log n_1$	en voor	$\log n_3$
GIBBS	9.7572961	GIBBS	9.6480108
Formule II	9.7572928	Formule I	9.6480167
Streng	9.7572923	Streng	9.6480201

Formule III levert mij op: $\log \frac{n_3}{n_1} = 9.8907237$.

Met de opgegeven logarithmen komen de onderstaande getalwaarden overeen.

	n_1	n_3	$n_3 : n_1$
Streng	0.5718634	0.4446518	0.7775491
F. II	0.5718641	F. I 0.4446484	F. III 0.7775418
verschillen	— 0.0000007	+ 0.0000034	+ 0.0000073

Uit de resttermen der formules berekende ik, dat de resten der 5^e orde zich verhouden als — 9, + 72 en + 140. Vergelijkt men deze getallen met de overblijvende verschillen, dan blijkt, dat zij voor dit voorbeeld tot de 7^e decimaal verdwijnen zouden, indien het gelukte ook de termen der 5^e orde in de uitdrukkingen op te nemen.

Wat de becijfering der van τ_1, τ_2, τ_3 afhankelijke grootheden A en B betreft, wijs ik er op, dat die vlug geschiedt door deze vormen aldus te wijzigen:

$$\begin{aligned} A_{12} &= -\frac{\tau_3}{10} \left(\frac{1}{2} \frac{\tau_1^2}{\tau_3} + \frac{1}{3} \frac{\tau_1^2}{\tau_2} \right) & B_{1,2} &= +\frac{\tau_1}{10} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tau_2^2}{\tau_1} - \frac{1}{3} \left(\tau_1 + \tau_2 + \frac{\tau_1^2}{\tau_2} \right) \right\} \\ A_{2,1} &= -\frac{\tau_3}{10} \left(\frac{1}{2} \frac{\tau_2^2}{\tau_3} - \frac{1}{3} \frac{\tau_2^2}{\tau_1} \right) & B_{2,1} &= +\frac{\tau_2}{10} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tau_1^2}{\tau_2} - \frac{1}{3} \left(\tau_1 + \tau_2 + \frac{\tau_2^2}{\tau_1} \right) \right\} \\ A_{32} &= -\frac{\tau_1}{10} \left(\frac{1}{2} \frac{\tau_3^2}{\tau_1} + \frac{1}{3} \frac{\tau_3^2}{\tau_2} \right) & B_{3,2} &= +\frac{\tau_3}{10} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tau_2^2}{\tau_3} - \frac{1}{3} \left(\tau_2 + \tau_3 + \frac{\tau_3^2}{\tau_2} \right) \right\} \\ A_{2,3} &= -\frac{\tau_1}{10} \left(\frac{1}{2} \frac{\tau_2^2}{\tau_1} - \frac{1}{3} \frac{\tau_2^2}{\tau_3} \right) & B_{2,3} &= +\frac{\tau_2}{10} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tau_3^2}{\tau_2} - \frac{1}{3} \left(\tau_2 + \tau_3 + \frac{\tau_2^2}{\tau_3} \right) \right\} \\ A_{3,1} &= -\frac{\tau_2}{10} \left(\frac{1}{2} \frac{\tau_3^2}{\tau_2} + \frac{1}{3} \frac{\tau_3^2}{\tau_1} \right) & B_{3,1} &= +\frac{\tau_3}{10} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tau_1^2}{\tau_3} + \frac{1}{3} \left(\tau_1 - \tau_3 + \frac{\tau_3^2}{\tau_1} \right) \right\} \\ A_{1,3} &= -\frac{\tau_2}{10} \left(\frac{1}{2} \frac{\tau_1^2}{\tau_2} + \frac{1}{3} \frac{\tau_1^2}{\tau_3} \right) & B_{1,3} &= +\frac{\tau_1}{10} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\tau_3^2}{\tau_1} + \frac{1}{3} \left(\tau_3 - \tau_1 + \frac{\tau_1^2}{\tau_3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Diese Grenze lässt sich aus den Versuchen von HAGEN und RUBENS angenähert berechnen.

Die Beziehung der MAXWELL'schen Theorie

$$(100 - R) \sqrt{\sigma \lambda} = \text{const} (3)$$

ist angenähert erfüllt von $\lambda = 4 \mu$ ab (S. Tabelle S. 884 loc. cit.), die mittleren Abweichungen vom Mittelwert sind kleiner als 10 % von ungefähr $\lambda = 10 \mu$ ab.

Man kann daher, um die Grössenordnung festzulegen, ungefähr 10μ als Grenze für die genauere Gültigkeit der Beziehung (3) setzen.

Die entsprechende Periode ist $3,33 \cdot 10^{-14}$ sec, die Zeit der Kraft-richtung in einem Sinn $1,67 \cdot 10^{-14}$ sec.

Diese Zeit setzen wir der mittleren Zeit τ zwischen zwei Stössen gleich.

Es lässt sich also aus (2) unmittelbar $\frac{e^2 \mathfrak{N}}{m}$ berechnen.

Für Kupfer ergibt sich mit σ_{18}° gleich $39,2 \cdot 10^{-5}$ der Wert von $\frac{e^2 \mathfrak{N}}{m}$ zu $47,04 \cdot 10^9$ in electromagnetischen Einheiten.

Diese Zahl stimmt in der Grössenordnung ganz mit den aus den Dispersionstheorien folgenden überein.

Setzt man nämlich für e/m den Wert für Kathodenstrahlen $1,86 \cdot 10^7$ ein, so wird $e \mathfrak{N}$ zu $2,53 \cdot 10^8$ electromagnetischen Einheiten. Wenn auf jedes Kupferatom eine Ladung kommt von der Grösse einer einwertigen Ionenladung, so würde die Electricitätsmenge eines Vorzeichens in der Volumeinheit, mit der Dichte 8,8 für Kupfer, $1,34 \cdot 10^8$ betragen, also von der oben gefundenen Grössenordnung sein. Damit ist aber das Resultat in Ubereinstimmung mit den Dispersionstheorien der Metalle und Nichtmetalle ¹⁾.

Weiter kann man folgern, dass bei guten Leitern die Zahl der freien Electronen, wegen ihrer Uebereinstimmung in der Grössenordnung mit der Zahl der Atome, sich mit der Temperatur nicht sehr ändern wird.

Die Grössenordnung für die Weglänge l erhält man für das gewählte e/m , wenn man in (2) für u den aus der Gastheorie folgenden Wert einsetzt. Es ergibt sich l zu $1,97 \cdot 10^{-7}$ cm.

Die eingehendere Theorie wird also in ihren Resultaten durch diese Betrachtung im wesentlichen gestützt.

Strassburg, im März 1905.

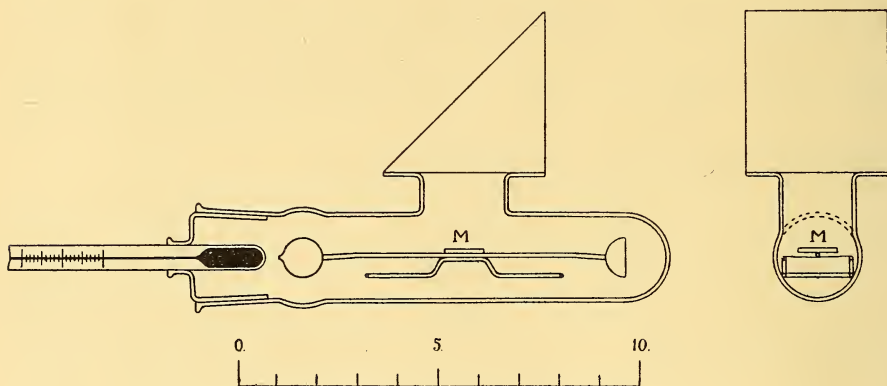
¹⁾ P. DRUDE. Optische Eigenschaften und Electronentheorie. Ann. d. Phys. 14 S. 677—725 und S. 936—961.

H. A. LORENTZ, Zittingsversl. Kon. Ak. van Wetensch. Amsterdam, S. 506, 1898/99.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. No. 94a uit het Nat. Lab. te Leiden Dr. ARTHUR W. GRAY. *Toepassing van den baroscoop op de bepaling van de dichtheden van gassen en dampen.* (Voorloopige mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer LORENTZ.)

Tot het bepalen van de dichtheden van gassen, in 't bijzonder van stroomend gas hebben FITZGERALD¹⁾, LOMMEL²⁾, SIEGERT en DÜRR³⁾, MESLANS⁴⁾, PRECHT⁵⁾ e. a. op verschillende wijze gebruik gemaakt van het beginsel van den baroscoop. Bij den toestel, die in het volgende beschreven is, was het er vooral om te doen eene groote gevoeligheid te verkrijgen bij eene weinig omslachtige behandeling en bij een gering volume.



De toestel is in bijgaande figuur in hoofdtrekken afgebeeld. Een glazen capillair draagt aan het eene uiteinde een gesloten glazen bol, aan het andere een halfbolvormige schaal van denzelfden diameter, hetzelfde gewicht en hetzelfde glas. Deze capillair is bevestigd op een horizontalen kwartsdraad, gespannen op een glazen raampje, en voorzien van een spiegel^{tje} M, zoodat draaiingen om de kwartsdraad⁶⁾ als as met kijker en schaal kunnen worden gemeten.

¹⁾ G. F. FITZGERALD. Fortschritte der Physik v. 41, p. 102, 1885.

²⁾ E. LOMMEL. Wied. Ann. v. 27, p. 144, 1886.

³⁾ A. SIEGERT en W. DÜRR. Zs. f. Instr.k. v. 8, p. 258, 1888.

⁴⁾ M. MESLANS. C. R. v. 117, p. 386, 1893.

⁵⁾ H. PRECHT. Zs. f. Instr.k. v. 13, p. 36, 1893.

⁶⁾ Het denkbeeld van den kwartsdraad ontleende ik aan de gevoelige chemische balans van NERNST en RIESENFELD. Beibl. v. 28, p. 380, 1904 waarop Prof. KAMERLINGH ONNES mijne aandacht vestigde. Veel gevoeliger instrumenten zijn echter de kwartsdraad zwaartekrachtbalans van THRELLFALL en POLLOCK R. S. Trans. v. 193, A, p. 215, 1900 en de magnetograph van WATSON, Proc. Phys. Soc. London. v. 19, p. 102, 1904.

Heeft men het instrument gecalibreerd, dan wordt de dichtheid van het daarin gebrachte gas onmiddellijk door de schaalaflezing gegeven, terwijl de thermometer- en manometeraflezings het mogelijk maken de dichtheid van het gas onder normale omstandigheden, wanneer de samendrukbaarheid van het gas bekend is uit de waargenomen dichtheid af te leiden.

De calibratie kan worden verricht met behulp van een enkel gas, waarvan men de dichtheid bij verschillende drukkingen bij eenzelfde temperatuur met voldoende nauwkeurigheid kent, of met behulp van verschillende gassen, van welke onder bekenden druk en bij bekende temperatuur de dichtheid bekend is, of eindelijk met behulp van een ruitertje.

Door het tegenover elkaar stellen van den bol en de half bolvormige schaal van gelijk buitenoppervlak wordt getracht fouten te elimineeren, die het gevolg mochten kunnen zijn van neerslag van damp in den toestel op het glas. Natuurlijk moet het instrument tegen temperatuurveranderingen beschermd worden door het op geschikte wijze met een mantel te voorzien of in een bad te dompelen. Een vaste vergelijkingsspiegel (niet in de figuur te zien) is wenschelijk om een mogelijke hellingsverandering van den toestel aan te wijzen.

Om een denkbeeld van de gevoeligheid van den beschreven toestel te verkrijgen werden eenige voorloopige metingen verricht.

De afmetingen waren :

diameter van den bol	1.0	cM.
„ „ „ capillairen balansarm	0.1	cM.
lengte „ „ „ „	7.0	„
massa van het geheele opgehangen stelsel	0.67	G.
lengte van den kwartsdraad	1.4	cM.

De toestel werd met droge lucht gevuld, en de schaalaflezings genomen bij verschillende drukkingen van 0.3 cM. tot nagenoeg 90 cM. Met een kwartsdraad van ongeveer 0,005 cM. diameter en een schaalafstand van 255 cM. kwam 0,1 mM. verandering op de schaal overeen met een verandering van ongeveer $0,0002 \frac{\text{gram}}{\text{liter}}$ verandering in dichtheid. Deze gevoeligheid bleef dezelfde bij alle dichtheden, die werden nagegaan, d.w.z. eene verandering van 0.1 mM. op de schaal gaf een verandering van ongeveer $\frac{1}{6000}$ in de dichtheid van lucht bij normale omstandigheden aan. De schaalafstand had gemak-

kelijk grooter genomen kunnen worden, en de gevoeligheid had nog belangrijk verhoogd kunnen worden door een grooteren bol, een langeren arm en een langeren en dunneren kwartsdraad te nemen.

Daar verder de schaaluitslag, ten minste in eerste benadering, evenredig is aan de verandering in dichtheid, is de nauwkeurige kennis van de uitslagen van slechts een gering aantal dichtheden noodig om het instrument voldoende te calibreeren. Om de uiterste nauwkeurigheid te bereiken moeten natuurlijk eenige correcties, bijv. voor de invloed van de temperatuur op den kwartsdraad, worden aangebracht.

Het beschreven instrument werd ontworpen om het verloop van een scheiding van atmosferische gassen door gefractioneerde destillatie bij lage temperatuur te volgen, welke Prof. KAMERLINGH ONNES wenschte te verrichten en te doen controleeren door dichtheidsbepalingen; het is echter duidelijk dat het gebruik er van niet tot dit gebied beperkt is. De toestel kan dienen om de dichtheid van gassen en dampen onder verschillende omstandigheden te bepalen, dus ook om hunne compressibiliteit te onderzoeken; maar hij is in 't bijzonder geschikt om kleine veranderingen van dichtheid aan te toonen. Professor KAMERLINGH ONNES heeft reeds aangegeven dat de toestel gebruikt zou kunnen worden om de samenstelling der coëxisterende damp- en vloeistofphasen te bepalen in gevallen waarin de chemische analyse moeilijkheden medebrengt of onmogelijk is, bijv. bij mengsels van twee inerte gassen uit de atmosfeer.

Over details van constructie en verdere verbeteringen zal in een nadere mededeeling, die tevens de uitkomsten van meer nauwkeurige en meer uiteenloopende beproevingen zal bevatten, worden gehandeld.

Physiologie. — De Heer EINTHOVEN doet verdere mededeelingen over den snaargalvanometer. „*Analyse der snaargalvanometrische krommen. Massa en spanning van den kwartsdraad en weerstand der draadbeweging.*”

I N H O U D.

1. Inleiding.
2. De grondstellingen der gevolgde methode.
3. De massa der snaar.
4. De weerstand der snaarbeweging.
5. De versnelling.
6. Analyse van eenige krommen.
7. Absolute maten van de massa der snaar en den weerstand der snaarbeweging.
8. De spanning van den kwartsdraad.
9. De bruikbaarheid van den snaargalvanometer voor bepaalde doeleinden.

1. *Inleiding.*

Registreert men de bewegingen van den kwartsdraad in den snaar-galvanometer met het doel om verschillende onregelmatige schommelingen in elektrische spanning of elektrischen stroom te leeren kennen, dan zal men in vele gevallen in de direct geschreven kromme een juist of nagenoeg juist beeld der gezochte stroomschommelingen mogen zien. Deze gevallen doen zich voor, wanneer de uitslagen van den kwartsdraad aperiodisch zijn en sneller dan de stroomschommelingen, die moeten worden geregistreerd. Als voorbeeld herinneren wij hier aan de galvanometrische registratie van het menschelijk electrocardiogram, waarvan de verschillende toppen, zooals bij een vroegere gelegenheid werd bewezen, in de juiste verhouding door de geregistreerde kromme worden weergegeven ¹⁾).

Wenscht men zeer snelle stroomschommelingen te registreeren, dan moet men de galvanometeruitslagen eveneens zeer kort van duur maken, hetgeen gemakkelijk geschieden kan door de snaar sterk te spannen. Evenwel moeten daarbij, om oscillaties te vermijden, de bewegingen der snaar op de een of andere wijze worden gedempt. De condensatormethode kan hier goede diensten bewijzen ²⁾), vooral als men haar op zoodanige wijze in toepassing brengt, dat men de kwartsdraadbeweging ongeveer op de grens der aperiodiciteit brengt.

Wij moeten echter opmerken, dat de galvanometer bij het sneller worden zijner uitslagen aan gevoeligheid verliest. Wanneer de duur van een uitslag, die steeds op de grens der aperiodiciteit wordt gehouden, a -maal verkort wordt, vermindert de gevoeligheid a^2 -maal.

Nu komt het voor, dat men zeer snelle stroomwisselingen wenscht te meten, die zoo zwak zijn, dat zij, om waarneembaar en meetbaar te zijn, een gevoeligen stand van den galvanometer vereischen, waarbij dan de condensator-methode niet meer met goed gevolg kan worden toegepast.

Zijn in deze omstandigheden de uitslagen van den galvanometer minder snel dan de stroomschommelingen, die moeten worden onderzocht, dan zal de kromme, die door den kwartsdraad wordt geschreven, deze schommelingen niet juist meer kunnen weergeven. Wij moeten dan, zooals ook bij vele capillair-electrometrische krommen is geschied, uit de eigenschappen van het gebruikte instrument en de gegevens van de direct geregistreerde kromme de waarde der werkelijke stroomschommelingen berekenen. De berekening kan tot de constructie van

¹⁾ Zie deze „Verslagen” 12, p. 122, 1903.

²⁾ Zie deze „Verslagen” 13, p. 284, 1904.

een nieuwe kromme leiden, die dan in alle deelen de juiste uitdrukking der bedoelde schommelingen is.

De wijze, waarop capillair-electrometrische krommen worden berekend, is bekend ¹⁾. Voldoen de krommen, die met den snaargalvanometer worden geschreven, aan dezelfde eischen, en kan men ook *dezelfde* berekening op haar toepassen?

Deze vraag moet in 't algemeen ontkennend worden beantwoord. Wij zullen in dit opstel de krommen van den snaargalvanometer trachten te analyseeren, en aantonen, dat zij tot even nauwkeurige constructies aanleiding geven als de capillair-electrometrische krommen, maar dat de wijze van berekenen een andere is.

Als vanzelf komen daarbij eenige eigenschappen van den galvanometer met name de spanning en de massa der snaar en de weerstand der snaarbeweging ter sprake. Het bedrag dezer drie grootheden zullen wij in absolute maat trachten uit te drukken, waardoor een helderder licht zal kunnen vallen op haar beteekenis voor de bruikbaarheid van het instrument in het algemeen en voor de veranderingen, die met voordeel zouden kunnen worden aangebracht, om den galvanometer aan bijzondere doeleinden dienstbaar te maken.

2. *De grondstellingen der gevolgde methode.*

Bij de analyse van de krommen, die door den snaargalvanometer worden geschreven, gaan wij uit van de veronderstelling, dat de luchtweerstand, dien de kwartsdraad ondervindt, evenredig toeneemt met de snelheid, waarmede de draad zich beweegt.

Deze veronderstelling, die op theoretische gronden gerechtvaardigd is, wordt, zooals later blijken zal, door de uitkomst der analyse ook praktisch bewezen.

Nemen wij haar als waar aan, dan moeten wij ook verwachten, dat de beweging der snaar volkomen bepaald wordt door de wetten, die de beweging van een schommelend voorwerp met electromagnetische demping beheerschen. Want door de electromagnetische demping wordt juist op dezelfde wijze als in onze omstandigheden door de luchtdemping een weerstand ontwikkeld, die evenredig toeneemt aan de snelheid van het in beweging verkeerende lichaam. In den snaargalvanometer komen luchtdemping en electromagnetische demping beide voor. Zij kunnen in dezelfde eenheden worden uitgedrukt en het effect harer samenwerking is steeds gelijk aan het effect van één van beide, wanneer in het laatste geval slechts het bedrag

¹⁾ Zie voor een literatuuropgave: PFLÜGER's Archiv f. d. ges. Physiol. Bd. 99, S. 472, 1903.

gelijk gemaakt wordt aan de som der bedragen van elke demping afzonderlijk. Met andere woorden : als r_a den weerstand door luchtdemping ¹⁾ en r_b den weerstand door electromagnetische demping voorstelt, dan mag voor den weerstand der totale demping

$$r = r_a + r_b (1)$$

in rekening worden gebracht.

De bewegingswetten van een schommelend voorwerp met electromagnetische demping zijn o. a. uitvoerig behandeld in het leerboek van KOHLRAUSCH ²⁾. Zij komen overeen met de wetten, die de lading of ontleding bepalen van een condensator door een geleider met weerstand en zelfinductie, en die men in verschillende handboeken ³⁾ over electriciteitsleer vermeld vindt. De in bovengenoemde werken gegeven formules vormen de basis voor onze verdere berekeningen.

Noemt men :

m de schijnbare massa van het snaarbeeld,

r den schijnbaren weerstand, die de snaarbeweging dempt, en

c de gevoeligheid van den galvanometer voor constanten stroom, dan kunnen zich twee toestanden voordoen. In den eersten toestand is de beweging oscilleerend en

$$r < \sqrt{\frac{4m}{c}} (2)$$

in den tweeden toestand is de beweging aperiodisch en

$$r > \sqrt{\frac{4m}{c}} (3)$$

De eenheden, waarin m , r en c worden uitgedrukt, en de betekenis die aan de woorden „schijnbare massa van het snaarbeeld” en „schijnbare weerstand” moet worden toegekend, behandelen wij bij de hieronder volgende beschouwingen over

3. De massa der snaar.

Het is praktisch niet of nagenoeg niet mogelijk, de massa der snaar door directe weging te leeren kennen. Daarvoor is het gewicht te klein. Ook een berekening van de massa uit de afmetingen en uit het soortelijk gewicht van kwarts en zilver leidt niet tot het doel, daar de meting van den diameter van den fijnen draad en van de

¹⁾ Behalve de luchtdemping en de gewone electromagnetische demping zijn er nog andere, zeer zwakke, dempende invloeden werkzaam, die evenwel hier mogen worden verwaarloosd. Zij komen in hoofdst. 7 nader ter sprake.

²⁾ Lehrbuch der praktischen Physik, S. 448. 1901.

³⁾ Zie o. a. J. A. FLEMING. The alternate current transformer. London. I, p. 370. 1890.

dikte der nog veel fijnere zilverlaag niet met de vereischte nauwkeurigheid kunnen plaats hebben, en wel te meer niet, omdat de zilverlaag dikwijls ongelijkheden vertoont en onregelmatig van dikte is.

Wij moeten daarom een anderen weg inslaan, en wij bereiken ons doel op de eenvoudigste wijze, wanneer wij van de „schijnbare massa van het snaarbeeld” uitgaan. Het beeld, dat bij sterke vergroting van het midden van den kwartsdraad ontworpen wordt, beweegt zich, telkens als de snaar uitslaat, langs een rechte lijn over een millimeterschaal. Wij denken ons in de plaats van dit snaarbeeld een stoffelijk punt, waarop een kracht werkt, die gelijk is aan de kracht, waardoor de geheele snaar wordt bewogen. De versnelling, die het fictieve stoffelijke punt van deze kracht ondervindt, bepaalt dan datgene, wat wij de „schijnbare massa van het snaarbeeld” noemen.

De eenheid, waarin deze schijnbare massa moet worden uitgedrukt, hangt uit den aard der zaak af van de eenheden, die wij voor de kracht en voor de versnelling kiezen. Daar de oorzaak der snaarbeweging de elektrische stroom is, die door den galvanometer wordt gezonden, kan men de bewegende kracht uitdrukken in eenheden van stroomsterkte. Wij kiezen hiervoor de mikrampère.

De eenheid der versnelling wordt bepaald door de eenheden, die gekozen worden voor den weg en voor den tijd. In overeenstemming met de millimeterschaal, waarlangs het snaarbeeld zich beweegt, wordt de weg in millimeters uitgedrukt, terwijl het doelmatig is, om ook voor de eenheid van tijd den millimeter te nemen. Immers wordt de uitslag van den kwartsdraad geregistreerd op een schrijfvlakte, die met eenparige snelheid loodrecht op de richting der snaarbeweging wordt voortgeschoven, zoodat in de geregistreerde krommen, die ons steeds de gegevens voor de verdere berekening moeten verstrekken, de tijd door een lengtemaat wordt voorgesteld.

De bovengenoemde eenheden van kracht, weg en tijd vormen een stelsel, dat men millimeter-mikrampère- of [$mm - \mu A$]-stelsel mag noemen. In dit stelsel uitgedrukt, is de eenheid van de schijnbare massa m de massa, die van de kracht van 1 mikramp. de versnelling van 1 mM. weg per mM. tijd ondervindt.

De eenheid van den schijnbaren weerstand (of beter van den schijnbaren weerstandscoefficient)¹⁾ r is de kracht van 1 mikramp.,

¹⁾ Het woord „weerstandscoefficient” drukt het begrip van r beter uit dan het woord „weerstand”. Doch het laatste is eenvoudiger en wordt in de electriciteitsleer als geleidingsweerstand ook in den door ons bedoelden zin gebruikt. In dit opstel zal meermalen van „weerstand” in plaats van „weerstandscoefficient” worden gesproken.

die de beweging der snaar tegenhoudt, wanneer het snaarbeeld zich beweegt met een snelheid van 1 mM. weg per mM. tijd. De eenheid van gevoeligheid c is de gevoeligheid, waarbij de kracht van 1 mikramp. een uitslag van 1 mM. van het snaarbeeld veroorzaakt.

Deze eenheden zijn constant, zoolang de veldsterkte H tussehen de polen van den electromagneet, de lengte l van den kwartsdraad, de vergrooting b van het snaarbeeld en de bewegingssnelheid V van de schrijfvlaakte onveranderd blijven.

Is de snaar strak gespannen en wordt zij plotseling door een constanten stroom doorstroomd, dan zal zij gedempte schommelingen volbrengen. Daarbij is de toestand aanwezig, die wij 't eerst nader wenschen te beschouwen en die uitgedrukt wordt door formule (2):

$$r < \sqrt{\frac{4m}{c}} \dots \dots \dots (2)$$

Verder gelden dan de volgende formules (4) en (5):

$$\tau = 2\pi \sqrt{mc} \dots \dots \dots (4)$$

$$T = \tau \sqrt{1 + \frac{A^2}{\pi^2}} \dots \dots \dots (5)$$

Hierin beteekent τ de periode, die zonder demping aanwezig zou zijn, terwijl T de werkelijke periode met demping voorstelt.

$$A = \lg n k, \dots \dots \dots (6)$$

terwijl k de dempingsverhouding beteekent, $k = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \text{enz.}$, waarbij $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de uitslagen met demping zijn.

Uit de formules (4), (5) en (6) volgt

$$m = \frac{T^2}{c \{39,5 + 4 (\lg n k)^2\}} \dots \dots \dots (7)$$

Daar de periode T in millimeters uitgedrukt wordt, verandert de waarde van m bij verandering van de snelheid V , waarmede de schrijfvlaakte wordt voortbewogen. Bij onze metingen was nagenoeg steeds $V = 500$ mM. per sec. Slechts bij een paar photogrammen had de chassis een andere snelheid, en bij deze zullen wij dus een kleine omrekening moeten toepassen, ten einde alle verkregen waarden van m onderling te kunnen vergelijken.

Om m_α in de millimetermikrampère-eenheden uit te drukken bij een photogram, waarbij de bewegingssnelheid van den chassis is V_α mM. per sec., terwijl m_β voor een bewegingssnelheid van den chassis van V_β bekend is, maakt men gebruik van de betrekking:

$$m_\alpha = m_\beta \times \left(\frac{V_\alpha}{V_\beta} \right)^2 \dots \dots \dots (8)$$

Uit het bovenstaande zien wij, dat de metingen, die worden vereischt, om bij een bekende waarde van V de waarde van m te kunnen berekenen, zich bepalen tot:

- de gevoeligheid c ,
- de uitslagen $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ enz. en
- de periode T .

De meting van de gevoeligheid c levert geen moeilijkheid op. Men kent de stroomsterkte uit de electromotorische kracht van de stroombron en de gebruikte weerstanden. Voor de stroombron deden accumulatoren dienst, welker electromotorische kracht zeer constant bleef en op 2 Volt mocht worden gesteld, terwijl de weerstanden òf uit manganinrheostaten òf wel uit een vooraf nagemeten graphietrheostaat van SIEMENS II. HALSKE werden genomen.

De uitslag van den kwartsdraad wordt op het photogram gemeten, waarop zich het netwerk van kwadraat-millimeters bevindt. Met de loupe schat men gemakkelijk 0,1 mM., waardoor dus een uitslag van 30 mM., die veelvuldig werd toegepast, met een nauwkeurigheid van 0,3 % bekend wordt.

Is de blijvende uitslag $= u$ mM., de stroomsterkte $= i$ mikrampère, dan is de gevoeligheid $c = \frac{u}{i}$ millimeter per mikrampère.

De bedragen der schommelingen $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ enz. worden evenals de blijvende uitslag direct op het netwerk van kwadraat-millimeters afgelezen. Daar echter deze bedragen kleiner zijn dan u en de absolute fout in elke meting onveranderd $= 0,1$ mM. blijft, is de nauwkeurigheid, waarmede de waarde van $k = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \dots$ enz. bekend wordt, niet groot. Bovendien wordt dikwijls een duidelijk verschil tusschen α_1 en α_2 gevonden, zoodat wij genoodzaakt zijn een gemiddelde te berekenen, bijv. door $k = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_3}}$ te stellen. Gelukkig heeft echter het bedrag van k , *zooals het bij onze metingen voorkomt*, slechts een geringen invloed op de einduitkomst en kunnen betrekkelijk groote verschillen in k nauwelijks een wijziging in de berekende waarde van m brengen.

Van de grootste beteekenis is de meting der periode T , die in formule (7) in het kwadraat voorkomt. Het geheele bedrag van T is steeds zeer klein, in sommige gevallen zelfs minder dan 1 mM., zoodat het wenschelijk is, hier de meting tot op zeer kleine onderdeelen van een millimeter nauwkeurig uit te voeren.

Eerst heb ik daartoe een voortreffelijk astronomisch instrument

gebruikt, dat bestemd is voor het onderzoek van hemelfotogrammen, en dat door den Directeur der Leidsche Sterrenwacht welwillend te mijner beschikking werd gesteld ¹⁾. Later maakte ik uitsluitend gebruik van een gewoon mikroskoopstatief, model I^a van de firma CARL ZEISS. Het statief is voorzien van de groote beweegbare kruistafel dierzelfde firma. Op deze tafel is een plankje bevestigd, dat de kruisbewegingen medemaakt, waarbij het steeds gedragen wordt door een gladde steunvlakke, waarover het gemakkelijk heenschuift. Op het plankje, dat in zijn midden een ruime opening heeft, wordt de photographische plaat gelegd, die moet worden uitgemeten.

Als objectief wordt a_1 met een brandpuntsafstand van 40 mM. gebruikt, terwijl als oculair het eveneens door ZEISS geleverde RAMSDEN's oculair met micrometerschroef en trommelaflezing dienst doet. Het oculair wordt zoodanig gesteld, dat de bewegingsrichting van den meetdraad met de richting der abscissen van het photogram samenvalt. Nadat men het mikroskoop scherp op het photogram heeft ingesteld en tevens er voor heeft zorg gedragen, dat het uit te meten beeld en het beeld van den kruisdraad in hetzelfde optische vlak liggen, schroeft men de mikroskoopbuizen met een opzettelijk daartoe vervaardigden metalen beugel stevig aan het statief vast. De buizen moeten geheel onbeweeglijk aan het statief verbonden zijn. Ook het oculair is aan de mikroskoopbuis vastgeschroefd, zoodat men het met de hand betasten kan, zonder dat daarbij de geringste verplaatsing van den kruisdaad ten opzichte van het uit te meten beeld wordt waargenomen. Voor eenigszins nauwkeurige metingen zijn deze maatregelen onmisbaar.

Bij ingeschoven mikroskoopbuizen correspondeert 1 schaaldeel van de trommel met iets minder dan 5μ op het photogram, en daar 0,1 schaaldeel gemakkelijk geschat kan worden, is de aflezingsfout kleiner dan 0.5μ . Men zou zich echter vergissen, wanneer men meende, dat nu ook het resultaat der geheele meting met dezelfde nauwkeurigheid bekend kon worden. Immers blijven er nog fouten over van anderen oorsprong.

Zoo gaan wij bijv. bij onze metingen uit van de schaduwlijnen, die op het photogram het net van kwadraat-millimeters vormen, een basis, die op zichzelf reeds niet vrij van fouten is. De ordinaten van het net worden geregistreerd door een snel draaiende schijf met spaken, waardoor 500 schaduwen per seconde op de photographische plaat worden geworpen. De variaties in de omwentelingssnelheid der schijf veroorzaken slechts geringe fouten. Terwijl wij ons voornemen,

¹⁾ Gaarne breng ik Professor VAN DE SANDE BAKHUYZEN hier mijn besten dank voor zijn vriendelijke hulp.

dezen tijdmarkeerder later uitvoeriger te beschrijven, kunnen wij er thans reeds van mededeelen, dat de omwentelingssnelheid zeer constant is en naar alle waarschijnlijkheid steeds tot op 0,1 % nauwkeurig met het vooraf bepaalde bedrag overeenkomt. Maar de waarborg wordt gemist, dat de onderlinge afstanden der spaken, hoewel met zorg op de draaibank geteekend, aan even strenge eischen beantwoorden.

De grootste fouten zullen wel door de instelling van den kruisdraad worden gemaakt. Wel is waar kan men op een fijnen, scherpen top, die het omkeerpunt eener snaarbeweging voorstelt, verrassend nauwkeurig instellen, zoodat men daarbij geen grooter fout dan van 1μ behoeft te maken, doch men is dikwijls in de noodzakelijkheid om het juiste midden van een breederen top aan te geven, waarbij uit den aard der zaak de fout grooter wordt. Bij vele onzer metingen der periode T moet de fout op 1 tot 2% worden geschat.

Thans mogen de resultaten van eenige metingen volgen.

Bij een bewegingssnelheid der gevoelige plaat van $V = 100$ mM. per sec., werden van snaar n^o. 10 eenige photogrammen gemaakt.

Hierbij was de gevoeligheid $c = 10.92$ mM. per mikrampère,

de periode $T = 0.43$ mM.,

de dempingsverhouding $k = 3.3$.

Naar formule (7) wordt uit bovenstaande gegevens de massa berekend op $m = 3.76 \times 10^{-4}$ [mm — μA].

Ter vergelijking met volgende uitkomsten wordt dit bedrag naar formule (8) omgerekend voor een bewegingssnelheid der gevoelige plaat van 500 mM. per seconde. Men vindt dan $m = 9.4 \times 10^{-3}$ [mm — μA].

Een andere serie metingen bij dezelfde snaar gaf — althans tot in het tweede cijfer — precies dezelfde uitkomst. De bewegingssnelheid der gevoelige plaat was hier 500 mM. per sec.

Verder was $c = 3.5$ mM. per mikramp.,

$T = 1.16$ mM.,

en $k = 1.83$,

waaruit weder berekend wordt, dat $m = 9.4 \times 10^{-3}$ [mm — μA].

De overeenstemming in de beide einduitkomsten is vooral opvallend bij het groote verschil in de gevoeligheid c en de periode T .

Snaar n^o 13 is dunner dan n^o 10, terwijl zij bovendien een geringeren geleidingsweerstand bezit. De metingen, bij het plotseling doorvoeren van een constanten stroom, leeren, dat bij $V = 500$, en $c = 5.69$, de waarde van $T = 1.32$ en die van $k = 3.1$ is. Hieruit laat zich volgens formule (7) berekenen, dat de massa $m = 6.9 \times 10^{-3}$ [mm — μA].

De grondformule, waardoor deze kromme wordt voorgesteld, en die men in de vroeger reeds genoemde leerboeken ¹⁾ vermeld vindt, luidt

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{mc} q = 0 \dots \dots \dots (9)$$

Hierin hebben *m*, *r* en *c* dezelfde beteekenis als vroeger en wel is *m* de schijnbare massa van het snaarbeeld, *r* de schijnbare weerstand, die de snaarbeweging dempt, en *c* de gevoeligheid van den galvanometer voor constanten stroom. *t* beteekent de tijd en *q* de afstand van het snaarbeeld tot zijn tweeden evenwichtsstand of anders uitgedrukt: de afstand van een willekeurig punt *p* der kromme tot de lijn *CD*.

Alle eenheden worden weder uitgedrukt in het millimeter-mikram-père- of [*mm — μA*]-stelsel.

Noemt men ϱ den kromtestraal in een willekeurig punt der kromme, dan is

$$\varrho = \pm \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2q}{dt^2}} \dots \dots \dots (10)$$

en stellen wij verder den tangens van den hellingshoek $\frac{dq}{dt} = v$, dan kunnen wij schrijven:

$$q = crv + cm \frac{(1 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho} \dots \dots \dots (11)$$

Hierin is ϱ positief wanneer *v* toeneemt, negatief wanneer *v* afneemt bij de toename van *t*.

Voor het geval dat $\varrho = \infty$ mag worden gesteld, wordt formule (11) vereenvoudigd tot:

$$q = crv \dots \dots \dots (12)$$

Dit geval moet zich ergens voordoen in een punt *s* der kromme. Van *B* af tot *s* is in ieder punt der kromme de holle zijde bovenwaarts gericht; van *s* tot *D* is de holle zijde benedenwaarts gericht, terwijl *s* zelf de plaats van overgang voorstelt. Voor het punt *s* is $\varrho = \infty$, zoodat voor dit punt dus formule (12) geldt. Wij schrijven haar in den vorm

$$r = \frac{q}{cv} \dots \dots \dots (13)$$

¹⁾ Zie KOHLRAUSCH t. a. p. p. 450 en FLEMING t. a. p. p. 368.

Om met behulp van bovenstaande formule het bedrag van den weerstand r te kunnen bepalen, moet de gevoeligheid c van den galvanometer bekend zijn, terwijl twee waarden met betrekking tot het punt s in de kromme moeten worden gemeten, n.l. de afstand q tot den tweeden evenwichtsstand en de tangens v van den hellingshoek.

De metingen geschieden met hetzelfde mikroskoopstatief I^a, dat reeds in het vorige hoofdstuk is vermeld, en op welks tafel de photographische plaat door middel van schroefbewegingen in twee loodrecht op elkaar staande richtingen kan worden verschoven.

Als objectief wordt weder α_1 of een sterker brekende lens gebruikt, terwijl als oculair een inrichting dienst doet, die hier nader moet worden beschreven.

Aan den buitenkant van een HUYGENS' oculair n^o. 2 is een wijzer bevestigd. Wordt het oculair om de optische as gedraaid, dan schuift deze wijzer langs een cirkelvormige, in graden verdeelde wijzerplaat, die aan de mikroskoopbuis is vastgeschroefd. Zoodoende kan worden afgelezen, hoeveel men het oculair in de mikroskoopbuis omdraait. Verder bevindt zich in het brandvlak van de ooglenzen van het oculair een fijne kruisdraad, die aldaar zoodanig is aangebracht, dat het kruispunt in het middelpunt ligt van het gezichtsveld. Hierdoor zal bij de draaiing van het oculair in de mikroskoopbuis, terwijl de kruisdraad meedraait, het kruispunt onbeweeglijk blijven staan. De geheele inrichting, wier voornaamste onderdeelen zijn ontleend aan den analysator van het polarisatiemikroskoop van ZEISS, werkt zeer nauwkeurig en stelt ons in staat, in korten tijd een aantal metingen te volbrengen. Men gaat daarbij aldus te werk:

Een photographisch negatief of beter nog een diapositief wordt zoodanig onder het mikroskoop geplaatst, dat een der bewegingsrichtingen van de kruistafel met de richting der abscissen van het photogram samenvalt. Verder wordt de geheele mikroskoopbuis weder op zoodanige hoogte onbeweeglijk vastgeschroefd, dat het reële beeld van de uit te meten figuur in hetzelfde vlak komt te liggen als de oculairdraden. Op deze wijze kan men gemakkelijk en vlug met behulp der kruistafelschroeven het beeld van ieder willekeurig punt van het photogram met het kruispunt van het oculair doen samenvallen.

Men begint met een abscis in het kruispunt te plaatsen en draait dan het oculair zóó, dat een der beide gekruiste draden, bijv. draad A met deze abscis samenvalt. Daarna wordt een willekeurig punt P der kromme in het kruispunt geplaatst. Het oculair wordt nu opnieuw gedraaid, en wel zóó, dat draad A in het punt P een raaklijn aan de kromme vormt. De hoek, dien het oculair gedraaid

moet worden, om van den eersten in den tweeden stand te komen, is de hellingshoek der kromme in het punt *P*. Hij wordt op de wijzerplaat in geheele graden afgelezen, terwijl de tienden moeten worden geschat. Zoo kan in ieder willekeurig punt, nadat het in het kruispunt der oculairdraden is gebracht, een raaklijn aan de kromme worden getrokken en de hellingshoek der kromme in dit punt worden gemeten. De methode, die ook aanbeveling verdient voor de uitmeting van andere, met name capillair-electrometrische krommen, laat aan gemakkelijheid en snelheid weinig te wenschen over, terwijl over haar nauwkeurigheid o.a. geoordeeld kan worden uit de onderstaande resultaten.

In de netvormig verdeelde schalen, die tegelijk met de photographische opname der kwartsdraadbeweging op onze platen worden gefotographeerd, staan de ordinaten niet volkomen loodrecht op de abscissen, hetgeen daaraan moet worden toegeschreven, dat het spleetbeeld, dat door de cylinderlens op de photographische plaat wordt gevormd niet volkomen loodrecht staat op de bewegingsrichting van den chassis. Mijn oorspronkelijk plan, om de hierdoor veroorzaakte fout met behulp van een berekening te corrigeeren, heb ik laten varen, daar de afwijking slechts 0.3 bedraagt.

Bovendien kan men bij de meting van hellingshoeken, die kleiner zijn dan 45° een abscis, — bij de grootere een ordinaat tot basis nemen, waardoor de afwijking van nog geringer beteekenis wordt.

Maar uit de meting dier afwijking met het draaibare oculair kan blijken, dat de hoekmetingen slechts met fouten van hoogstens 0.1 behoeven te geschieden. De onderstaande tabel kan dit bewijzen.

T A B E L I.

Nummer der plaat.	Richting der abscissen.	Richting der ordinaten.	Vershil in richting van abscissen en ordinaten.	Afwijking van het gemiddelde bedrag van 89.7 .
<i>A</i> 22	110.8	21.05	89.75	$+ 0.05$
<i>A</i> 37.	200.6	111.0	89.6	$- 0.1$
<i>A</i> 123	123.0	33.3	89.7	0
<i>A</i> 124	122.8	33.0	89.8	$+ 0.1$
<i>A</i> 132	122.9	33.2	89.7	0

Zij behoeft geen nadere toelichting. In de voorlaatste kolom vinden wij de resultaten vermeld van de meting der hoeken, waaronder

op verschillende photographische platen de abscissen door de ordinaten worden gesneden. Nemen wij als gemiddelde waarde een hoek aan van $89,^{\circ}7$, dan zien wij, dat de grootste afwijking hiervan slechts $0,^{\circ}1$ bedraagt.

Evenwel moet worden opgemerkt, dat de richting der raaklijn in een punt van een kromme niet zoo nauwkeurig bepaald kan worden als de richting van een abscis of een ordinaat. Hoe sterker de kromming eener lijn is en hoe sneller de krommingsveranderingen plaats grijpen, des te onzekerder wordt de bepaling van de richting der raaklijn in een willekeurig punt.

Het punt s , waarin de te onderzoeken lijn zonder kromming is, kan onder het mikroskoop gemakkelijk worden gevonden.

Men brengt achtereenvolgens een aantal punten der kromme, waarin deze door de abscissen of de ordinaten gesneden wordt, in het kruispunt der oculairdraden en meet naar de boven beschreven methode in al die punten de hellingshoeken. Men merkt op, dat bij het grooter worden der abscissen de hellingshoeken eerst toenemen en daarna afnemen. Op de plaats van overgang moet zich het gezochte punt bevinden, waarin de kromming der lijn $= 0$, of $\varrho = \infty$ is.

Op deze wijze is in het gezochte punt reeds van zelf de hellingshoek bekend, terwijl de afstand van het punt tot den tweeden evenwichtsstand van den kwartsdraad onmiddellijk op de netvormig verdeelde schaal kan worden afgelezen. Hierbij worden geheele millimeters direct aangeduid, terwijl de tienden moeten worden geschat.

Een door den kwartsdraad geschreven kromme lijn heeft in vele gevallen een vrij groote breedte. In deze omstandigheden kan men haar als een dubbele kromme beschouwen en de meting der hellingshoeken zoowel aan de bovenzijde als aan de onderzijde van het kwartsdraadbeeld uitvoeren, waardoor een contrôle wordt uitgeoefend, die de nauwkeurigheid van het eindresultaat verhoogt.

Voordat wij kunnen overgaan tot het noemen van de bedragen, die door onmiddellijke meting zijn gevonden, moeten wij nog stilstaan bij de bewegingssnelheid van den chassis. De meeste photographieën zijn genomen bij een bewegingssnelheid van den chassis $V = 500$ mM. per seconde. Om de waarden van v , die wel in het millimeter-mikrampère-stelsel zijn uitgedrukt, maar toch bij verschillende waarden van V zijn gemeten, onderling vergelijkbaar te maken, worden zij allen berekend voor $V = 500$. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de formule :

$$r_{\beta} = r_{\alpha} \frac{V_{\beta}}{V_{\alpha}} \dots \dots \dots (14)$$

waarin r_z de schijnbare weerstand van den kwartsdraad beteekent bij een bewegingssnelheid van den chassis van V_z mM. per sec., terwijl r_β met een bewegingssnelheid van V_β correspondeert.

Verder moet nog rekening worden gehouden met de omstandigheid, dat het netwerk op het photogram niet altijd uit nauwkeurige kwadraten bestaat. Zooals in het vorige hoofdstuk reeds werd medegedeeld, is de omwentelingssnelheid van onze schijf met spaken, waardoor de ordinaten worden geregistreerd, zeer constant. De fout in het absolute bedrag behoeft op niet hooger dan 0.1 % te worden aangeslagen. Maar de bewegingssnelheid van den chassis kan niet zoo nauwkeurig geregeld worden. Wel mag de snelheid van een eenmaal in beweging zijnden chassis als volkomen constant worden beschouwd, maar tusschen photogrammen, die op verschillende tijden genomen zijn, kan de snelheid tamelijk veel verschillen. Vandaar dat de afstanden tusschen de ordinaten op de eene plaat iets grooter zijn dan op de andere.

De afstand tusschen de abscissen is op alle platen volkomen gelijk. Dit is ook niet anders te verwachten, daar de abscissen geregistreerd worden door het schaduwbeeld van een glazen schaal, die op eenige millimeters afstand van den beweegbaren chassis vast opgesteld is. De glazen schaal, die zeer fijne verdeelstrepen bevat, is door de firma ZEISS opzettelijk voor ons doel vervaardigd.

De onderlinge afstanden der abscissen en ook de onderlinge afstanden der ordinaten worden onder het mikroskoop gemeten met behulp van de millimeterverdelingen met nonius, die zich op de boven reeds beschreven kruistafel bevinden. Voor 30 schaaldeelen langs een ordinaat wordt steeds 30,1 mM. gevonden, zoodat 1 schaaldeel langs een ordinaat steeds = 1,0033 mM. mag worden gesteld.

De schaaldeelen langs een abscis in de middelste helft of het middelste derde deel van eenzelfde plaat zijn ook onderling gelijk, zooals bijv. uit de volgende metingen van Photogram A 34 blijken kan, zie tabel II. (p. 839).

Men denke hierbij, dat de monius ons niet in staat stelde, nauwkeuriger af te lezen dan tot op 0,1 of 0,05 mM., zoodat wij bij deze betrekkelijk ruwe metingen de onderlinge afstanden der ordinaten als volkomen gelijk moeten aanmerken. Nauwkeuriger metingen zijn reeds in het vorige hoofdstuk vermeld, en behoeven hier niet nogmaals ter sprake te komen.

Uit de tabel volgt, dat in het onderzochte photogram 1 schaaldeel langs een abscis = 0,9675 mM. Daar boven ook reeds de lengte van een schaaldeel langs een ordinaat in millimeters is vermeld, kunnen wij een schaaldeel langs een abscis direct in schaaldeelen langs een

TABEL II.

Nummer van den ordinaat.	Aflezing op de millimeter-verdeeling.	Lengte van 10 schaaldeelen langs een abscis in millimeters.
0	61.2	—
10	51.5	9.7
20	41.9	9.6
30	32.2	9.7
40	22.5	9.7
50	12.8	9.7
60	3.15	9.65

ordinaat uitdrukken. Noemen wij dit bedrag d , dan is in photogram A 34 de gezochte waarde $d = 0,964$. In andere photogrammen vonden wij waarden voor d , die afwisselden tusschen 1,033 en 0,901.

Indien d eenigszins belangrijk van de eenheid afwijkt, moet het bedrag van den tangens van den hellingshoek worden gecorrigeerd. Is de tangens van den gemeten hellingshoek $= v$, dan zal, om de waarde van r te leeren kennen in de plaats van v het produkt vd in rekening moeten worden gebracht.

Formule (13) moet dan worden vervangen door

$$r = \frac{q}{cvd} \dots \dots \dots (15)$$

Thans mogen eenige metingsresultaten volgen, die ter wille van een gemakkelijk overzicht in onderstaande tabel III zijn vereenigd.

TABEL III.

Nummer v. d. kwartsdraad.	Nummer v. h. photogram.	q in millimeters.	c in millimeters per mikrampère.	v	d	V in millimeters per sec.	r_a in $[mm-\mu A]$ berekend voor $V = 500$.
10	50	23.5	1093	6.02	1.032	100	0.0193
13	A 37	21.8	798	1.637	0.975	500	0.0174
14	A 123	23.6	1133	1.322	0.984	500	0.0160
14	A 124	21.6	563	3.006	0.901	500	0.0155

Tijdens het registreeren der krommen, waarop de getallen van bovenstaande tabel betrekking hebben, was steeds een groote weerstand, -- van meer dan 1 Megohm, -- in den galvanometerketen geschakeld, zoodat de electromagnetische demping mocht worden verwaarloosd en de weerstand r_a der snaarbeweging alleen door luchtdemping werd veroorzaakt. Wij zien, dat het bedrag r_a , dat bij alle krommen berekend is voor $V = 500$, in de volgorde der nummers 10, 13 en 14 van de kwartsdraden afneemt. In dezelfde volgorde neemt ook de dikte der verzilverde snaren af. De diameter bedraagt voor snaar 10 zonder zilver 2.4μ , met zilver 3.0μ

„ „ 13 „ „ 1.6μ , „ „ 2.5μ

„ „ 14 „ „ 1.7μ , „ „ 1.9μ

Wij laten in het midden, welke functie de luchtdemping is van den diameter der snaar, doch willen hier in 't bijzonder wijzen op den invloed, dien de demping kan ondervinden van het meer of minder glad zijn der zilverlaag, waarmede de kwartsdraden zijn bedekt. Vooral snaar 14 heeft een zoo goed als volkomen gladde zilverbekleding, terwijl de huid van snaar 10 duidelijk zichtbare ongelijkheden vertoont.

Wij wenschen thans na te gaan, of het bedrag van r_a voor een bepaalde snaar als constant mag worden beschouwd, hoe ook de spanning van den kwartsdraad en daarmede de snelheid zijner uitslagen mocht worden gewijzigd.

Daartoe is het noodig r_a nogmaals te meten en wel bij strak gespannen snaar en ocsilleerenden uitslag, doch de methoden, die ons hierbij ten dienste staan, leveren op verre na niet zoo nauwkeurige resultaten op als boven konden worden vermeld. Wij brengen hier twee wijzen van meten nader ter sprake.

In de eerste plaats kan gebruik gemaakt worden van dezelfde methode, die boven reeds dienst heeft gedaan, maar die thans onder ongunstige omstandigheden wordt toegepast. Daar de snaar snelle bewegingen maakt, wordt de tangens v van den hellingshoek groot, waardoor zijn bedrag niet met de gewenschte nauwkeurigheid kan worden vastgesteld. Verder neemt ook de onzekerheid in de waarde van q zeer toe.

Van de krommen, met behulp waarvan in het vorige hoofdstuk de massa der snaar berekend is, vertoont plaat A 61 van snaar 13 de grootste waarde van T , nl. $T = 1,32$ mM. Ik heb daarom deze kromme uitgezocht, om een poging te wagen, hierbij volgens for-

mule (15), $r = \frac{q}{cvd}$, het bedrag van r te leeren kennen.

$$r = \frac{4T \lg n k}{c \{39,5 + 4 (\lg n k)^2\}} \dots \dots \dots (18)$$

Om vergelijkbare waarden te verkrijgen, berekenen wij r steeds voor een bewegingssnelheid V van den chassis van 500 mM. per seconde waarbij wij nogmaals van formule (14) $r_\beta = r_\alpha \frac{V_\beta}{V_\alpha}$ gebruik maken.

Naar de beide laatstgenoemde formules wordt nu voor vier der 5 krommen, die in het vorige hoofdstuk gediend hebben, om m te leeren kennen, de waarde van r berekend. Tijdens het schrijven van deze vier krommen was telkens een groote weerstand van meer dan 1 Megohm in de galvanometerketen geschakeld, zoodat de weerstand tegen de snaarbeweging weder alleen door de wrijving der lucht werd veroorzaakt. Wij kunnen dus r nader omschrijven als r_a . De resultaten der berekening vindt men in de onderstaande tabel IV vereenigd.

TABEL IV.

Nummer v. d. kwartsdraad.	Nummer v. h. photogram.	$\lg n k$.	T in millimeters.	c in millimeters per mikramp.	V in millimeters per sec.	r_a in $[\text{mm} - \mu A]$, berekend voor $V = 500$.
10	46	(1.19)	0.43	10.92	100	(0.0207)
„	A 18	(0.604)	1.16	3.5	500	(0.0196)
13	A 61	(1.13)	1.32	5.69	500	(0.02355)
14	A 129	(1.335)	1.—	5.75	500	(0.0199)

Ook deze uitkomsten missen de nauwkeurigheid, die kan worden verkregen, wanneer de snaarbeweging langzaam is. De moeilijkheid is gelegen in het bedrag van k , dat, zooals vroeger reeds werd opgemerkt, een groote onzekerheid oplevert.

In de volgende tabel V vindt men de gemiddelde bedragen van

TABEL V.

Nummer v. d. kwartsdraad.	r_a bij zwakke spanning v. d. kwartsdraad.	r_a bij sterke spanning v. d. kwartsdraad.	Verhouding van r_a bij sterke spanning tot r_a bij zwakke spanning.
10	0.0193	(0.0201)	1.04
13	0.0174	(0.0210)	1.21
14	0.0157	(0.0199)	1.27

de waarden van r_a , zooals zij bij de berekening naar de bovengenoemde drie methoden zijn gevonden, overzichtelijk weergegeven.

Wij zien, dat het bedrag van r_a bij een sterke kwartsdraadspanning een weinig grooter is. Hieruit moet worden afgeleid, dat de weerstand, die door de wrijving der lucht wordt veroorzaakt, niet volkomen evenredig toeneemt met de snelheid der snaarbeweging, maar dat bij zeer snelle snaarbewegingen de toeneming van den luchtweerstand iets grooter is.

Evenwel heeft deze uitkomst op onze verdere berekeningen praktisch geen invloed. De toeneming in het bedrag van r_a mag zeer klein worden genoemd. De grootste vermeerdering geschiedde in de verhouding van 1 : 1,27, terwijl kwartsdraadspanningen werden toegepast, die van 1 tot 324 uiteenliepen. Dat bij geringer snaarspanningen dan de boven toegepaste de evenredigheid tusschen de snelheid der snaarbeweging en den weerstand door de wrijving der lucht behouden blijft, is reeds bij een vroegere gelegenheid ¹⁾ voldoende gebleken. Een ijkingskromme bij een gevoeligheid van 1 mM. uitslag voor 10^{-10} Ampere werd op een photographische plaat geregistreerd, die met een snelheid van 10 mM. per sec. werd voortbewogen. Nadat de gevoeligheid 10 maal was verminderd en de bewegingsnelheid der photographische plaat 10 maal was vergroot, werd opnieuw een ijkingskromme geschreven. Deze laatste vertoont denzelfden vorm als de eerste, men kan beide ijkingskrommen zóó op elkaar leggen, dat zij elkaar nagenoeg over haar geheele lengte bedekken.

Wij mogen dus zeggen, dat de spanningen kunnen varieeren van 1 tot bijna 3000, terwijl het bedrag van r_a slechts een onbeteeke-nende verandering ondergaat.

Wij wenden ons thans tot het bedrag van de electromagnetische damping, uitgedrukt door r_b . De waarde van r_b is niet anders dan de ponderomotorische kracht, die de snaar door haar beweging in het magnetische veld ondervindt bij de eenheid van snelheid van het snaarbeeld.

Wordt deze ponderomotorische kracht in het $[mm - \mu A]$ -stelsel weergegeven, dan wordt zij uitgedrukt door een zeker aantal mikram-pères bij de gegeven draadlengte en de gegeven veldsterkte.

De berekening kan op de volgende wijze worden uitgevoerd.

De electromotorische kracht E , die in een draad wordt verwekt, welke loodrecht op de krachtlijnen van een homogeen magnetisch

¹⁾ Zie deze „Verslagen” 12, p. 122. 1903.

veld staat en met een snelheid van v_1 centimeters per seconde verplaatst wordt in een richting, die tegelijk loodrecht op haar lengterichting en loodrecht op de krachtlijnen staat, is

$$E = v_1 lH \times 10^{-8} \text{ Volt},$$

waarin l de lengte van den draad in centimeters en H de veldsterkte in [C. G. S.] beteekent.

Wanneer het midden der snaar zich met een snelheid v_1 beweegt, mag men voor de gemiddelde snelheid van alle onderdeelen der snaar $\frac{2}{\pi} v_1 = 0,637 v_1$ stellen, zoodat voor de electromotorische kracht e , die door een uitslag van den kwartsdraad wordt verwekt, geschreven mag worden

$$e = 0,637 v_1 lH \times 10^{-8} \text{ Volt.} \quad (19)$$

Verder hebben wij

$$v_1 = v \times \frac{V}{10b}, \quad (20)$$

waarin evenals boven v_1 de snelheid beteekent van het midden der snaar, uitgedrukt in centimeters per seconde, v de snelheid van het snaarbeeld, uitgedrukt in millimeters weg per millimeter tijd, V de snelheid van den chassis in millimeters per seconde en b de toegepaste vergrooiting.

Vullen wij in formule (19) de waarde v in, zooals die in formule (20) is gegeven, dan hebben wij

$$e = \frac{0,637 v V lH \times 10^{-9}}{b} \text{ Volt.}$$

Noem den weerstand in de galvanometerketen w Ohm, dan is de stroomsterkte I , die door de beweging van den kwartsdraad in de keten wordt veroorzaakt, en die wij in mikrampères uitdrukken,

$$I = \frac{e \times 10^6}{w} = \frac{0,637 v V lH \times 10^{-3}}{wb} \text{ mikrampères.} \quad . . . (21)$$

De ponderomotorische kracht, die de snaar ondervindt, wordt door I [mm — μA] uitgedrukt.

Stellen wij dus in formule (21) $v = 1$, dan wordt $I = r_b$, zoodat wij hebben

$$r_b = \frac{0,637 V lH \times 10^{-3}}{wb} [\text{mm} - \mu A] \quad . . . (22)$$

Uit bovenstaande formule (22) blijkt, dat, om r_b te kunnen berekenen, V , l , w , b en H bekend moeten zijn. Van deze grootheden kunnen de vier eerstgenoemde met genoegzame nauwkeurigheid worden gemeten, terwijl daarentegen het bedrag van de veldsterkte

De berekening van H is uitgevoerd voor snaar 13. Plaat A 34 vertoont een kromme, die geschreven werd, toen plotseling een constant potentiaalverschil tusschen de einden van den kwartsdraad werd aangebracht, terwijl de galvanometerketen gesloten werd door een kleinen uitwendigen weerstand, waarvan het bedrag mag worden verwaarloosd. De analyse der kromme leert, dat $q = 24.8$, $c = 89.4$, $v = 0.98$ en $d = 0.964$, waaruit met behulp van de formule $r = \frac{q}{cvd}$ (15)

kan worden afgeleid, dat $r = 0.0294$.

Wij hebben vroeger reeds r_a leeren kennen als 0.0174, waaruit volgt, dat $r_b = 0.0120$.

De geleidingsweerstand van den kwartsdraad is $w = 9000$ Ohm, en hieruit wordt naar formule (25) berekend, dat $H = 17600$ [C. G. S.].

Wij laten thans twee tabellen volgen. In tabel VI vindt men voor drie kwartsdraden de gegevens, die ons in staat stellen, om volgens formule (15) de waarde van r te berekenen. De bewegingssnelheid V van den chassis is steeds 500 mM. per sec., terwijl de galvanometerketen gesloten is door een kleinen uitwendigen weerstand, waarvan het bedrag mag worden verwaarloosd.

TABEL VI.

Nummer v. d. kwarts- draad.	Geleidings- weerstand w v. d. kwartsdraad.	Nummer v. h. photo- gram.	q in milli- meters.	c in milli- meters per mikramp.	v .	d	r in [mm- μ A].
10	10000	A 22	20.7	535	1.24	1.005	0.0312
13	9000	A 34	24.8	894	0.98	0.964	0.0294
14	17800	A 132	26.4	582	2.33	0.927	0.0210

In tabel VII vindt men de waarden van r_a uit tabel III en die van r uit tabel VI vereenigd. Het verschil tusschen beide waarden is in de voorlaatste kolom als r_b vermeld, terwijl in de laatste kolom de waarde van r_b is aangegeven, zooals die naar formule (22) wordt berekend, terwijl voor H het bedrag van 17600 [C. G. S.] is aangenomen.

De overeenstemming tusschen de waarden van deze beide kolommen is zeer bevredigend, en mag als een bewijs gelden voor de nauwkeurigheid, waarmede men in 't algemeen met behulp van de formule $r = \frac{q}{cvd}$ (15) den weerstand der snaarbeweging kan bepalen.

De verhouding van de direct gemeten waarden van r_a tot r is
 voor snaar 10 als 1 : 1,615
 „ „ 13 „ 1 : 1,69
 „ „ 14 „ 1 : 1,34

TABEL VII.

Nummer der snaar.	w in Ohms.	r_a gemeten.	r gemeten.	r_b berekend uit de gemeten waarden van r en r_a .	r_b berekend uit de lengte der snaar en de veldsterkte.
10	10000	0.0193	0.0312	0.0119	0.0108
13	9000	0.0174	0.0294	0.0120	0.0120
14	17800	0.0157	0.0210	0.0053	0.0061

Aan het slot van dit hoofdstuk mogen eenige regels volgen over den toestand, waarbij de kwartsdraadbeweging juist de grens der aperiodiciteit bereikt. In dezen toestand geldt de betrekking:

$$c = \frac{4m}{r^2} \dots \dots \dots (26)$$

Men zou volgens bovenstaande formule de waarde van c wenschen te bepalen uit m en r , doch in hoofdstuk 6 zal blijken, dat de schijnbare massa m van het snaarbeeld een waarde is, die bij zwakke kwartsdraadspanningen niet constant is.

Men kan daarom uit metingen, die bij andere snaarspanningen zijn verricht, niet of moeilijk afleiden, hoe groot m is voor het geval, dat de grens der aperiodiciteit is bereikt. En als m onbekend is, kan uit den aard der zaak ook c niet worden berekend.

Wil men dus de gevoeligheid leeren kennen, waarbij de grens der aperiodiciteit intreedt, dan is men genooddaakt, haar direct experimenteel te bepalen. De uitkomsten van een aantal dergelijke bepalingen, die wij, zooals begrijpelijk is, slechts zeer in 't ruwe hebben uitgevoerd, vindt men in de onderstaande tabel VIII vereenigd.

Uit de gegevens van bovenstaande tabel en uit de bedragen van r zou men de waarden van m kunnen berekenen.

Eveneens die van de tijdconstante ¹⁾ \mathbf{T} naar de formule $\mathbf{T} = \frac{rc}{2}$.

Deze berekeningen moeten echter achterwege blijven, dewijl c hier een veel te geringe nauwkeurigheid bezit, om aan de uitkomsten eenige beteekenis te kunnen toekennen.

¹⁾ Zie FLEMING t. a. p. p. 377 en volg.

TABEL VIII.

Nummer der snaar.	Gevoeligheid c voor de grens- waarde der aperiodiciteit.	
	bij luchtdemping alleen.	bij luchtdemping en electromagne- tische demping gecombineerd.
10	(120)	(50)
13	(130)	(45)
14	(115)	(55)

5. *De versnelling.*

Wanneer wij een kromme analyseeren, die door den capillair-electrometer is geschreven, en het potentiaalverschil wenschen te leeren kennen, dat op een gegeven oogenblik tusschen het kwik en het zwavelzuur heeft geheerscht, hebben wij behalve met de eigenschappen van het instrument en de bewegingssnelheid der schrijfvlaakte alleen nog rekening te houden met de snelheid der meniscusbeweging. Wanneer wij daarentegen een kromme analyseeren, die door den snaargalvanometer is geschreven, kunnen wij in 't algemeen niet met de analoge gegevens volstaan. Dikwijls zal het noodig zijn, niet alleen de snelheid maar ook de versnelling in rekening te brengen, die het snaarbeeld vertoont.

Dit moet daaraan worden toegeschreven, dat in den capillair-electrometer de weerstand der meniscusbeweging zeer groot is ¹⁾ in vergelijking met de massa van den kwikdraad, zoodat deze massa mag worden verwaarloosd, wanneer men het aanwezige potentiaalverschil uit de bewegingssnelheid wenscht te berekenen, terwijl bij den snaargalvanometer de weerstand der kwartsdraadbeweging zeer gering is en dus de massa van den draad in vele gevallen een duidelijken invloed op de snelheid zijner uitslagen uitoefent.

Bovenstaande beschouwingen kunnen overzichtelijk worden weergegeven met behulp van formule (11), die reeds in het voorgaande hoofdstuk werd ontwikkeld.

$$q = crv + cm \frac{(1 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \dots \dots \dots (11)$$

¹⁾ Over den invloed van den wrijvingsweerstand op de meniscusbeweging in LIPPMANN'S capillair-electrometer, zie deze „Verslagen" VIII, p. 177. 1899.

Indien v zeer groot is ten opzichte van m , mag de tweede term achter het $=$ teeken vervallen en wordt de formule

$$q = crv \dots \dots \dots (12)$$

Deze formule (12) is van toepassing zoowel bij de analyse van capillair-electrometrische krommen als bij die krommen van den snaargalvanometer, bij welke v klein en q groot is.

Daarentegen mag bij matige bedragen van v en q de massa m niet meer worden verwaarloosd, zoodat dan de analyse der kromme alleen mogelijk zal zijn, wanneer behalve de snelheid ook de versnelling gemeten kan worden, die het snaarbeeld op een gegeven oogenblik vertoont. Deze versnelling, als schijnbare versnelling van het snaarbeeld uitgedrukt in millimeters weg per millimeter tijd, is niet anders dan $\frac{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$.

Stelt men de algemeene omstandigheden onder welke een kromme met den snaargalvanometer geschreven wordt, en verder nog den afstand van een willekeurig punt der kromme tot de nul-lijn bekend, dan zal men den tangens v van den hellingshoek en bovendien den kromtestraal q moeten meten, om het potentiaalverschil te kunnen berekenen, dat tusschen de einden van den kwartsdraad geheerscht heeft op het oogenblik, dat het genoemde willekeurige punt werd geregistreerd. Men mag zeggen dat onder onveranderde algemeene omstandigheden ieder punt der kromme volledig gekenmerkt is door zijn afstand tot de nul-lijn en de waarden van v en q .

De afstand tot de nul-lijn kan in onze krommen wegens de aanwezigheid van het net van kwadraatmillimeters al zeer gemakkelijk worden nagegaan, terwijl wij in het voorgaande hoofdstuk hebben uiteengezet hoe v gemeten wordt. Thans moet dus alleen nog worden beschreven, op welke wijze wij de waarde van den kromtestraal q 't best kunnen leeren kennen.

Wij hebben drie verschillende methoden beproefd om q te meten, van welke slechts één praktisch bruikbaar is gebleken. De beide andere mogen hier slechts met een enkel woord worden vermeld.

Vooréerst werd van een groote teekening waarop een aantal cirkellijnen met verschillende, nauwkeurig bekende stralen waren aangebracht, langs photographischen weg een verkleind diapositief vervaardigd. Op het diapositief varieeren de stralen stelselmatig van 0,5 mM. tot ∞ . Het moet op zoodanige wijze op de uit te meten kromme worden gelegd, dat een der cirkellijnen op een willekeurig punt der kromme met deze laatste samenvalt. Door directe vergelijking zal dan in dat punt de waarde van q kunnen worden gemeten.

De tweede methode bestaat uit de meting van drie punten der kromme, die op kleine maar onderling gelijke afstanden van elkaar zijn gelegen. Noemt men den onderlingen afstand van de beide uiterste punten k , en den afstand van het middelste punt tot de rechte lijn, die de beide uiterste punten vereenigt, p , dan is de kromtestraal op de uitgemeten plaats

$$\varrho = \frac{k^2 + 4p^2}{8p}.$$

Hierin stelt k de koorde en p den pijl van den uitgemeten cirkelboog voor.

De derde methode, zooals boven reeds werd opgemerkt, de eenige, die met goed gevolg werd aangewend, bestaat in de meting van de hellingshoeken van twee dicht bij elkaar gelegen punten der kromme.

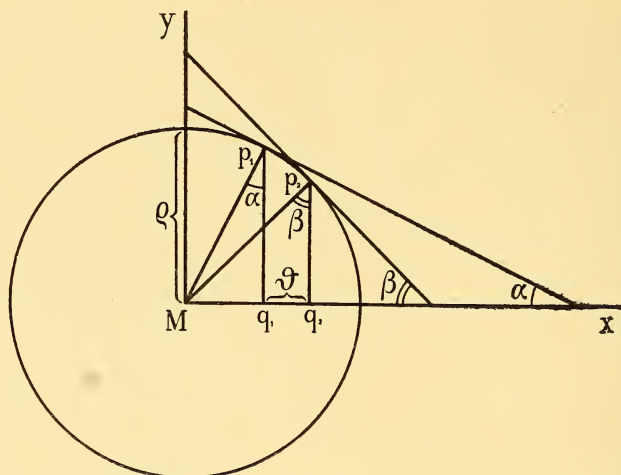


Fig. 2.

Stel dat p_1 en p_2 zie fig. 2, twee dicht bij elkaar gelegen punten eener kromme zijn, wier kromtestraal in alle punten tusschen p_1 en p_2 dezelfde waarde ϱ behoudt, terwijl de hellingshoek der kromme in p_1 wordt voorgesteld door α , en in p_2 door β .

MX is een abscis in het coördinatenstelsel, dat als een net van kwadraatmillimeters gelijktijdig met de kromme is geregistreerd, doch dat hier op de figuur is weggelaten, terwijl MY , p_1q_1 en p_2q_2 ordinaten zijn.

Men ziet uit de figuur, dat

$$\sin \alpha = \frac{Mq_1}{\varrho} \quad \text{en} \quad \sin \beta = \frac{Mq_2}{\varrho}.$$

Stelt men $Mq_2 - Mq_1 = \vartheta$, dan wordt

$$q = \frac{\vartheta}{\sin \beta - \sin \alpha} \dots \dots \dots (27)$$

Het bedrag van ϑ kan op eenvoudige wijze in het net van kwadraatmillimeters worden afgelezen, terwijl de hoeken α en β gemeten moeten worden met behulp van het kruisdraad-oculair. Deze inrichting en de nauwkeurigheid, die men er mede kan bereiken, zijn reeds in het vorige hoofdstuk behandeld geworden; wij vragen ons nu nog af, in welke gevallen de bepaling van q al of niet praktisch nut kan hebben.

Beschouwen wij nogmaals formule (11)

$$q = crv + cm \frac{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}}{q}, \dots \dots \dots (11)$$

ditmaal als uitdrukking van een kromme, die de gedempte slingeren van een strak gespannen kwartsdraad weergeeft. Voor ieder omkeerpunt in de kromme moet de waarde van $v = 0$ worden gesteld. Voor een omkeerpunt wordt de formule dus

$$q = \frac{cm}{q}$$

of

$$m = \frac{q}{c} q, \dots \dots \dots (28)$$

waarin de gevoeligheid c een nauwkeurig bekende waarde is. Men zou dus slechts q en q behoeven te bepalen, om uit ieder omkeerpunt direct een waarde voor m te kunnen berekenen.

Doch hier is het praktische bezwaar gelegen in de snelle verandering die q reeds bij matigè waarden van q vertoont. De tijd ϑ moet nu zóó klein genomen worden, dat hij, — althans met behulp van onze meetinrichting, wanneer het mikroskoop met het kruisdraad-oculair is gemonteerd, — niet meer met voldoende nauwkeurigheid kan worden gemeten. En daardoor wordt ook q zelf onnauwkeurig bekend.

Wij besluiten dus, dat de meting van q praktisch geen waarde heeft, om bij sterk gespannen oscilleerende snaar het bedrag van m te leeren kennen. Dit bedrag is trouwens voor dat geval reeds op alleszins bevredigende wijze volgens de in hoofdstuk 3 beschreven methode bepaald.

Maar de meting van q verkrijgt praktische waarde, wanneer men de schijnbare massa wil leeren kennen van een snaarbeeld, dat bij slechts zwakke of matige spanning van den kwartsdraad een kromme

heeft geregistreerd¹⁾. Men kan bij de analyse van verschillende krommen niet volstaan met de eenmaal berekende werkelijke massa van den kwartsdraad, daar, zooals vroeger reeds is vermeld en uit het volgende hoofdstuk nog nader blijken zal, de schijnbare massa van het snaarbeeld met de spanning van den kwartsdraad zeer belangrijk wordt gewijzigd.

Ten slotte merken wij nog op, dat als de snelheid v groot is, ook de hoeken α en β groot worden, waardoor bij gelijk verschil in hoekgrootte het verschil der sinussen afneemt. Hiermede neemt ook de nauwkeurigheid af, waarmede ϱ bekend kan worden.

Ook wanneer ϱ zeer groot wordt, verliest de bepaling aan nauwkeurigheid, daar dan bij gelijke waarde van v het verschil tusschen $\sin \alpha$ en $\sin \beta$ sterk afneemt. Dit bezwaar heeft echter geen praktische beteekenis, daar bij de analyse van een kromme de waarde van ϱ , zoodra deze een zekere grens overschrijdt, zonder groote fout op ∞ mag worden gesteld.

6. *Analyse van eenige krommen.*

Wij geven in dit hoofdstuk de resultaten weer van eenige der door ons uitgevoerde analyses van krommen, die geschreven werden, terwijl plotseling een bekend, constant blijvend potentiaalverschil tusschen de einden van den kwartsdraad werd aangebracht.

De eerste der hier nader te bespreken krommen is geregistreerd bij vrij geringe spanning van den kwartsdraad, d. i. dus bij vrij gevoeligen stand van den galvanometer. Ordin. 1 mM. = $1,87 \times 10^{-9}$ Ampère of de gevoeligheid $c = 535$. De bewegingssnelheid van de gevoelige plaat is $V = 500$ mM. per sec., dus is de waarde van een abscislengete van 1 mM. = 2σ .

Wij stellen het oogenblik van het begin van den electrischen stroom op $t = 0$. Nu worden bij $t = 1 \sigma, 2 \sigma, 3 \sigma$ enz. de hellingshoeken der kromme gemeten. In de onderstaande tabel IX vindt men in de eerste kolom de waarden van t uitgedrukt in duizendsten seconden en in de tweede kolom de waarde van den tangens v der op die tijden aanwezige hellingshoeken.

In de derde kolom zijn de waarden van het product rcv opgenomen, die op de volgende wijze zijn berekend.

Als van het eerste gedeelte der kromme de holle zijde bovenwaarts is gericht, keert zich de holle zijde van het tweede gedeelte der kromme benedenwaarts. Op de plaats van overgang is $\varrho = \infty$.

¹⁾ Hoe daarbij ook een afzonderlijke berekening van ρ kan worden vermeden, zal in het volgende hoofdstuk nader blijken.

TABEL IX. (snaar 10, Plaat A 22).

1	2	3	4	5	6
t in duizend- sten eener seconde.	v	$r c v$	q in milli- meters. Gemeten.	q in milli- meters. Berekend.	Vershil tusschen de gemeten en de berekende waarden van q in millim.
0	—	—	24.6	—	—
1	0.762	12.7	24.2	17.8	— 6.4
2	0.863	14.5	23.8	21.7	— 2.1
3	1.000	16.7	23.3	23.4	0.1
4	1.083	18.1	22.7	23.8	1.1
6	1.238	20.7	21.4	20.7	— 0.7
—	(1.236)	(20.7)	(20.7)	(20.7)	(0)
8	1.235	20.7	20.1	20.7	0.6
10	1.139	19.1	18.9	18.4	— 0.5
12	1.103	18.5	17.7	17.9	0.2
14	1.028	17.2	16.6	16.4	— 0.2
16	0.945	16.0	15.5	15.5	0
18	0.926	15.5	14.5	15.0	0.5
20	0.856	14.2	13.6	13.6	0
22	0.798	13.4	12.7	13.0	0.3
24	0.770	12.9	11.9	—	1.0
26	0.705	11.8	11.1	—	0.7
28	0.680	11.4	10.4	—	1.0
30	0.615	10.3	9.7	—	0.6
32	0.572	9.6	9.1	—	0.5
34	0.541	9.1	8.5	—	0.6
36	0.501	8.4	8.0	—	0.4
38	0.481	8.1	7.5	—	0.6
40	0.451	7.6	7.1	—	0.5
42	0.423	7.1	6.5	—	0.6
44	0.398	6.7	6.2	—	0.5
46	0.368	6.2	5.8	—	0.4
48	0.361	6.0	5.4	—	0.6
50	0.350	5.9	5.1	—	0.8
52	0.311	5.2	4.7	—	0.5
54	0.303	5.1	4.4	—	0.7
56	0.279	4.7	4.1	—	0.6
66	0.181	3.0	2.8	—	0.2
76	0.135	2.3	2.0	—	0.3
86	0.0945	1.6	1.5	—	0.1
96	0.0682	1.1	1.0	—	0.1

Hier is volgens formule (13)

$$r = \frac{q}{cv} \dots \dots \dots (13)$$

of

$$rc = \frac{q}{v},$$

zoodat uit de bedragen, die q en v hier vertoonen, de waarde rc kan worden berekend. Voor ieder ander punt der kromme wordt dan het constante bedrag rc vermenigvuldigd met de waarde van v , die voor dat punt geldt.

In de vierde kolom vindt men als directe metingsresultaten de waarden van q aangegeven, dat zijn de afstanden van het snaarbeeld tot den tweeden evenwichtsstand.

In de vijfde kolom zijn de waarden van q vermeld, zooals die zijn berekend volgens de formule

$$q = crv + cm \frac{tg\beta - tg\alpha}{\vartheta}, \dots \dots \dots (28a)$$

terwijl in de zesde kolom de verschillen tusschen de gemeten en de berekende waarden van q weergegeven zijn.

Bovenstaande formule (28a) heeft een nadere toelichting noodig.

Zij is verkregen door in formule (11) de waarde $\frac{(1 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho}$ te vervangen door $\frac{tg\beta - tg\alpha}{\vartheta}$.

Zooals boven reeds werd opgemerkt, is $\frac{(1 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{\varrho}$ of $\frac{d^2 q}{dt^2}$ niet anders dan de uitdrukking voor de versnelling. Daar wij als eenige methode, om ϱ te meten, gebruik hebben gemaakt van de meting van twee hoeken α en β , zie fig. 2, kunnen wij, als deze hoeken toch eenmaal bekend zijn, met behulp hunner tangenten ook direct een uitdrukking vinden, die bij benadering de versnelling weergeeft.

De snelheid in het punt p_1 , zie fig. 2, wordt weergegeven door $tg\alpha$, in het punt p_2 door $tg\beta$. Het verschil in snelheid is $tg\beta - tg\alpha$. Nemen wij aan, dat gedurende den tijd ϑ de versnelling constant is, dan wordt deze uitgedrukt door

$$\frac{tg\beta - tg\alpha}{\vartheta}$$

Door formule (28a) te gebruiken in plaats van formule (11) vereenvoudigen wij de berekening belangrijk. In de eerste plaats wordt

het opzoeken van de sinussen van α en β overbodig, terwijl de tangenten dezer hoeken, die toch noodig zijn geweest, om crv te bepalen, reeds bekend zijn. En vervolgens behoeven de waarden van $\frac{3}{(1 + v^2)^2}$ niet te worden berekend.

De gegevens, die hebben gestrekt om de waarde van de versnelling te bepalen, zijn opgenomen in tabel X. Tevens vindt men hier ver-

TABEL X (snaar 10, Plaat A 22).

1	2	3	4	5	6	7	8
t in duizendsten eener seconde.	$\frac{3}{(1 + v^2)^2}$ in milli- meters.	$tg\alpha$	$tg\beta$	$\frac{tg\beta - tg\alpha}{3}$	Vershil tus- schen rcv en d. gemeten waarden van q in millime- ters.	$cm \frac{tg\beta - tg\alpha}{3}$ in millimeters.	Algebraïsche som v. d. waarden der beide vorige kolommen in millimeters.
1	1	(0.696, ¹)	0.836	0.167	— 11.5	5.1	— 6.4
2	1	0.762	1.000	0.238	— 9.3	7.2	— 2.1
3	1	0.863	1.083	0.220	— 6.6	6.7	0.1
4	2	0.863	1.238	0.187	— 4.6	5.7	1.1
6	—	—	—	(0)	— 0.7	(0)	— 0.7
8	—	—	—	(0)	0.6	(0)	0.6
10	2	1.235	1.103	— 0.066	0.2	— 0.7	— 0.5
12	2	1.139	1.028	— 0.055	0.8	— 0.6	0.2
14	2	1.103	0.945	— 0.079	0.6	— 0.8	— 0.2
16	2	1.028	0.926	— 0.051	0.5	— 0.5	0
18	2	0.945	0.856	— 0.045	1.0	— 0.5	0.5
20	2	0.926	0.798	— 0.064	0.6	— 0.6	0
22	2	0.856	0.770	— 0.043	0.7	— 0.4	0.3

meld in de zesde kolom het verschil tusschen rcv en de gemeten waarde van q , in de zevende kolom het bedrag $cm \frac{tg\beta - tg\alpha}{3}$ en in

¹) α is hier berekend naar de formule $\alpha = 2\gamma - \beta$, waarin γ den hellingshoek der kromme voorstelt op den tijd $t = 1$.

de laatste kolom de algebraïsche som van de bedragen van de zesde en de zevende kolom.

Indien onze metingen een absolute nauwkeurigheid hadden, zouden de bedragen van kolom 8 alle $= 0$ moeten zijn.

Bij de berekening van de tabellen IX en X is de correctie verwaarloosd, die moet worden aangebracht, wanneer een schaaldeel langs een abscis niet even groot is als een schaaldeel langs een ordinaat. Wij hebben dus aangenomen, dat het net van kwadraat-millimeters uit werkelijke vierkanten bestaat of m. a. w. dat $d = 1$. Dit heeft geen invloed op de berekende waarden van rcv , daar de correctie van r die van v compenseert; maar wel op de bedragen van $\frac{tg\beta - tga}{\vartheta}$. Evenwel zijn de verschillen niet van die grootte, dat zij

de correctie noodzakelijk zouden maken: het beeld van de analyse blijft in 't algemeen toch onveranderd.

Wij kunnen de resultaten der metingen en berekeningen, die door bovenstaande tabel IX in cijfers zijn weergegeven, door een graphische voorstelling verduidelijken. In figuur 3, die met tabel IX correspondeert, is het net van kwadraat-millimeters ongeveer 2-maal vergroot weergegeven. Een schaaldeel langs een abscis $= 2\sigma$; een schaaldeel langs een ordinaat $= 1,87 \times 10^{-9}$ Ampère.

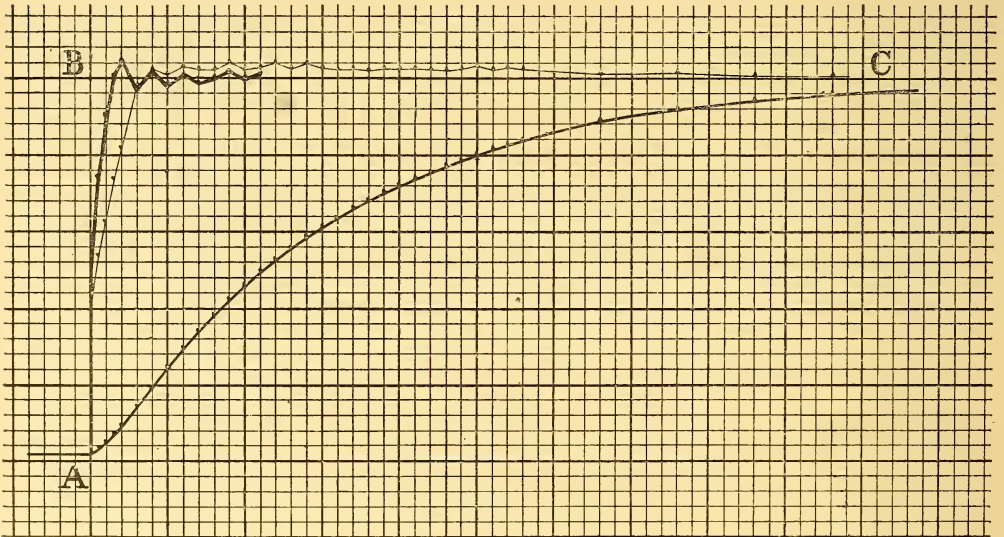


Fig. 3

Snaar N^o. 10, Photogr. A 22, Tabel IX en X.

Absc. 1 schaaldeel $= 2\sigma$, ordin. 1 schaaldeel $= 1,87 \times 10^{-9}$ Amp.

De regelmatig gebogen lijn van middelbare dikte stelt de geregistreerde kromme voor. Op het tijdstip $t=0$ wordt de constante stroom doorgevoerd. Bij een ideale, volkomen nauwkeurige analyse zouden wij tot de constructie van twee rechte lijnen gevoerd worden, van welke de eerste bij A loodrecht stijgt tot B en de tweede horizontaal van B verder gaat tot C . De resultaten der werkelijke analyse volgens kolom 5 van tabel IX worden voorgesteld door de dikke lijn, terwijl de dunne lijn de waarden van rcv volgens kolom 3 der genoemde tabel voorstelt.

Voor de schijnbare massa m zijn twee verschillende waarden in rekening gebracht, en wel is m in de eerste 4 duizendsten seconde gesteld op 0,0567, dat is $6 \times$ grooter dan het bedrag, dat in hoofdstuk 3 gevonden is. Bij $t=6\sigma$ en $t=8\sigma$ oefent m geen invloed uit, daar op deze tijden $\varrho = \infty$ mag worden gesteld. Van $t=10\sigma$ af is m opnieuw in rekening gebracht, doch thans voor een waarde van 0,0187 of een $2 \times$ grooter bedrag dan dat van hoofdstuk 3.

Wanneer men een enkele waarde voor m in rekening brengt, worden de resultaten der constructie veel minder fraai en de vraag doet zich voor, of wij de gansche analyse niet als waardeloos moeten gaan beschouwen, nu het blijkt, dat wij in de onmogelijkheid verkeerden, om voor m een constant bedrag aan te nemen.

Wij merken hiertegenover in de eerste plaats op, dat zooals aanstonds nog nader blijken zal, de variatie in de waarde van m alleen bij een groote gevoeligheid van den galvanometer, dus bij een geringe spanning van den kwartsdraad in aanmerking komt. Verder kan ook bij den gevoeligsten galvanometerstand nog een belangrijk gedeelte der analyse met vrucht worden toegepast. Praktisch zal immers een kromme, bijv. zooals die bij vele electrophysiologische onderzoekingen kan worden verkregen, uit deelen van verschillende kromming bestaan en steeds een aantal punten vertoonen, waarin $\varrho = \infty$ of de versnelling $= 0$ mag worden gesteld. In al die punten behoeft men met m geen rekening te houden. Daar r met groote nauwkeurigheid kan worden gemeten, geschiedt hier de analyse in alle opzichten bevredigend.

Verder zal overal, waar de kromming niet te sterk en tevens de hellingshoek niet te groot is, — in ons geval reeds in alle punten, die later dan 0,004 seconde na de stroomsluiting zijn geregistreerd, — met vrucht de door ons ontwikkelde analyse kunnen worden toegepast, zooals uit tabel IX en figuur 3 voldoende blijkt. Voor iedere bepaalde kwartsdraadspanning brenge men daarbij een bepaalde waarde voor m in rekening.

De oorzaak, waarom in 't algemeen m bij verschillende spanning

van den kwartsdraad door een ander bedrag wordt vertegenwoordigd, komt in hoofdstuk 8 nader ter sprake. Wij moeten ons hier evenwel vragen, waarom m ook nog kan wisselen, terwijl de gevoeligheid van den galvanometer en daarmee de spanning van den kwartsdraad onveranderd blijven. In de eerste plaats hebben wij ter verklaring van dit onvoorziene en eenigszins teleurstellende verschijnsel naar fouten in de meting gezocht, die veroorzaakt zouden kunnen worden, doordat de niet scherp afgebeelde rand van den kwartsdraad bij een buiging der kromme photographisch misvormd wordt. Maar de hierdoor veroorzaakte fouten zijn veel te gering, om het verschijnsel op te helderen; zij worden bovendien ook grootendeels opgeheven wanneer de metingen aan den onderkant van het snaarbeeld door die aan den bovenkant van het beeld worden gecontrôleerd.

De waarschijnlijkste verklaring moet, naar het mij voorkomt, gezocht worden in de ongelijkmatigheid van het magnetische veld. Het middelste deel van den kwartsdraad bevindt zich tusschen de objectieven der mikroskopen, waar het magnetische veld slechts zeer zwak is in vergelijking met het veld, waarin zich de overige deelen van den kwartsdraad bevinden. De ponderomotorische kracht, die den kwartsdraad tot uitwijking brengt, wanneer hij wordt doorstroomd, is dus in het midden der snaar zwakker dan aan de beide einden. Deze laatste trekken als 't ware het midden zijwaarts weg, en aldus wordt het begrijpelijk, dat bij zwakke kwartsdraadspanning de verplaatsing van het middenstuk verlaat wordt.

Hoe strakker de kwartsdraad gespannen wordt, des te gelijkmatiger zal hij zich over zijn geheele lengte gaan bewegen. Wij mogen daarom verwachten, dat bij een minder gevoeligen galvanometerstand de waarden, die voor m in rekening moeten worden gebracht, meer aan elkaar gelijk zullen zijn.

In de tabellen XI en XII en de daarbij behoorende figuur 4 geven wij eerst nog de analyse weer van een kromme, die door snaar n^o. 14 is geschreven. De tabellen en de figuur behoeven geen nadere toelichting, daar zij volkomen vergelijkbaar zijn met de boven besprokene van snaar n^o. 10. Wij hebben hier weder $V = 500$, dus 1 mM. van een abscis $= 2\sigma$. Verder is $c = 582$, dus ordinaat 1 mM. $= 1,72 \times 10^{-9}$ Amp. Het bedrag van m is in de eerste 5 duizendsten eener seconde gesteld op 0,037, dit is ruim $10 \times$ grooter dan de waarde, die in hoofdstuk 3 is gevonden. Bij $t = 6\sigma$ en $t = 7\sigma$ oefent m geen invloed uit. Van $t = 8\sigma$ af is m weder in rekening gebracht en wel voor een waarde van 0,00688 of ruim $1,9 \times$ grooter dan het bedrag van hoofdstuk 3.

Eenige andere krommen, die eveneens bij gevoeligen stand van

den galvanometer zijn geregistreerd geven na de analyse figuren te aanschouwen, die geheel met de beide boven geschreven figuren 3

TABEL XI (snaar 14, Plaat A 132).

1	2	3	4	5	6
t in duizend- sten eener seconde.	v	$r c v$	q in milli- meters. Gemeten.	q in milli- meters. Berekend.	V. rschil tusschen de gemeten en de berekende waarden van q in millim.
0	—	—	32.7	—	—
1	1.664	18.8	31.9	27.0	— 4.9
2	1.872	21.2	31.0	29.9	— 1.1
3	2.069	23.4	30.0	30.8	0.8
4	2.215	25.0	29.2	29.7	0.5
5	2.290	25.9	28.0	28.4	0.4
6	2.332	26.4	26.9	26.4	— 0.5
—	(2.332)	(26.4)	(26.4)	(26.4)	(0)
7	2.332	26.4	25.9	26.4	0.5
8	2.204	25.0	25.0	24.5	— 0.5
10	2.087	23.6	23.0	23.0	0
12	1.881	21.3	21.1	20.6	— 0.5
14	1.753	19.8	19.5	19.2	— 0.3
16	1.613	18.3	17.9	17.9	0
18	1.511	17.1	16.5	16.7	0.2
20	1.418	16.0	15.1	15.5	0.4
22	1.280	14.5	13.9	14.0	0.1
24	1.179	13.3	12.8	13.0	0.2
26	1.111	12.6	11.7	12.3	0.6
28	1.032	11.7	10.7	11.4	0.7
30	0.942	10.7	9.9	—	0.8
32	0.848	9.6	9.0	—	0.6
34	0.821	9.3	8.2	—	1.1
36	0.751	8.5	7.5	—	1.0
38	0.676	7.7	6.9	—	0.8
40	0.635	7.2	6.3	—	0.9
42	0.563	6.4	5.8	—	0.6
44	0.504	5.7	5.2	—	0.5
46	0.456	5.2	4.8	—	0.4
48	0.423	4.8	4.4	—	0.4
50	0.382	4.3	4.0	—	0.3
52	0.350	4.0	3.7	—	0.3
56	0.304	3.4	3.1	—	0.3
60	0.254	2.9	2.6	—	0.3
70	0.151	1.7	1.7	—	0

en 4 overeenkomen. Zij behoeven daarom hier niet nader te worden vermeld.

TABEL XII (snaar 14, Plaat A 132.)

1	2	3	4	5	6	7	8
t in duizendsten eener seconde.	s in milli- meters.	$tg\alpha$	$tg\beta$	$\frac{tg\beta - tg\alpha}{s}$	Vershil tus- schen <i>rev</i> en d. gemeten waarden van q in millime- ters.	$cm \frac{tg\beta - tg\alpha}{s}$ in millimeters.	Algebraische som v. d. waarden der beide vorige kolommen in millimeters.
1	1	(1.488) ¹⁾	1.872	0.384	— 13.1	8.2	— 4.9
2	1	1.664	2.069	0.405	— 9.8	8.7	— 1.1
3	1	1.872	2.215	0.343	— 6.6	7.4	0.8
4	1	2.069	2.290	0.221	— 4.2	4.7	0.5
5	1	2.215	2.332	0.117	— 2.1	2.5	0.4
6	—	—	—	(0)	— 0.5	(0)	— 0.5
7	—	—	—	(0)	0.5	(0)	0.5
8	2	2.332	2.087	— 0.122	0	— 0.5	— 0.5
10	2	2.204	1.881	— 0.161	0.6	— 0.6	0
12	2	2.087	1.753	— 0.167	0.2	— 0.7	— 0.5
14	2	1.881	1.613	— 0.134	0.3	— 0.6	— 0.3
16	2	1.753	1.511	— 0.121	0.4	— 0.4	0
18	2	1.613	1.418	— 0.097	0.6	— 0.4	0.2
20	2	1.511	1.280	— 0.115	0.9	— 0.5	0.4
22	2	1.418	1.179	— 0.119	0.6	— 0.5	0.1
24	2	1.280	1.111	— 0.084	0.5	— 0.3	0.2
26	2	1.179	1.032	— 0.073	0.9	— 0.3	0.6
28	2	1.111	0.942	— 0.084	1.0	— 0.3	0.7

¹⁾ α is hier weder berekend naar de formule $\alpha = 2\gamma - \beta$, zie de noot onder tabel X.

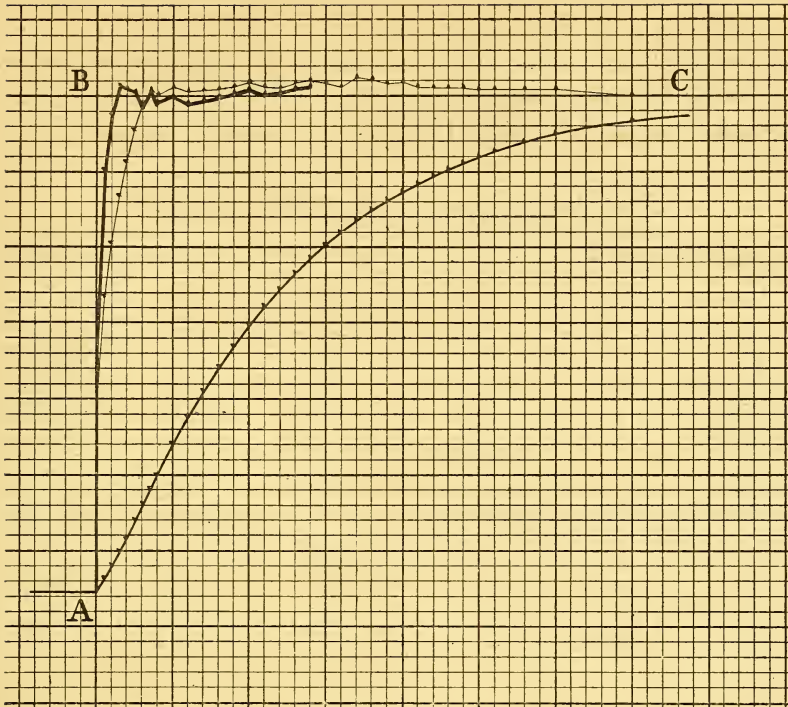


Fig. 4.

Snaar N^o. 14, Photogr. A 132, Tabel XI en XII.

Absc. 1 schaaldeel = 2σ , ordin. 1 schaaldeel = $1,72 \times 10^{-9}$ Amp.

Daarentegen willen wij niet nalaten de resultaten weer te geven van de analyse eener kromme, die bij minder gevoeligen galvanometerstand is geschreven. Men vindt de getallen vereenigd in de tabellen XIII en XIV, die evenals de daarbij behorende figuur 5 geheel op dezelfde wijze zijn ingericht als de onmiddellijk voorafgaande tabellen en figuren. Het geldt een kromme van snaar 14, geschreven met 1 Megohm in de galvanometerketen. Wij hebben hier $c = 115,2$, dus ordinaat 1 mM. = $8,67 \times 10^{-9}$ Ampère, terwijl abscis 1 mM. weder = 2σ is.

De waarde van m kan hier constant gehouden worden en wel op een bedrag, dat 1,45 maal grooter is dan het bedrag, dat bij sterke snaarspanning in aanmerking zou komen.

Wij zien, dat de meeste der onderzochte punten worden berekend met een fout, die kleiner is dan 1 mM., en dat de correctie reeds na 1σ vrij nauwkeurig geschiedt. De fout bedraagt na 1σ 1,4 op den totalen uitslag van 30,6 mM., d. i. 4,6 %. Hiermede is bewezen, dat men door middel van de analyse der kromme bij een gevoelig-

heid van den galvanometer van $c = 115,2$, waarbij 1 mM. uitslag met een stroom van $8,67 \times 10^{-9}$ Ampère correspondeert, de werkelijke stroomsterkten kan leeren kennen, te beginnen bij 1σ na de stroomsluiting en dan telkens van $0,5\sigma$ tot $0,5\sigma$ verder gaande.

Naar alle waarschijnlijkheid kunnen bovengenoemde tijden nog

TABEL XIII (snaar 14 Plaat A 125).

1	2	3	4	5	6
t in duizend- sten eener seconde.	v	$r c v$	q in milli- meters. Gemeten.	q in milli- meters. Berekend.	Vershil tusschen de gemeten en de berekende waarden van q in millim.
0	—	—	30.6	—	—
0.5	10.78	18.2	28.4	22.2	— 6.2
1	12.71	21.45	25.6	24.2	— 1.4
1.5	13.15	22.2	22.2	(22.2)	(0)
2	12.71	21.45	19.3	18.7	— 0.6
2.5	10.89	18.4	17.0	15.2	— 1.8
3	10.02	16.9	14.2	14.3	0.1
3.5	8.71	14.7	12.0	11.7	— 0.3
4	7.50	12.65	10.2	10.1	— 0.1
5	5.700	9.6	7.3	7.8	0.5
6	4.504	7.6	4.9	6.0	1.1
7	3.078	5.2	3.3	3.9	0.6
8	2.251	3.8	2.1	3.0	0.9
9	1.688	2.85	1.2	2.1	0.9
10	1.163	2.0	0.6	1.4	0.8
11	0.740	1.2	0.2	0.8	0.6

aanzienlijk worden verkort, wanneer men de bewegingssnelheid van de photographische plaat vergroot. Bij de in dit opstel vermelde krommen is voornamelijk van bewegingssnelheden van den chassis van 500 mM. per seconde gebruik gemaakt, maar het behoeft geen betoog, dat men met verbeterde mechanische inrichtingen ook over

TABEL XIV (snaar 14, Plaat A 125).

1	2	3	4	5	6	7	8
t in duizendsten eener seconde.	s in milli- meters.	$tg\alpha$	$tg\beta$	$\frac{tg\beta - tg\alpha}{s}$	Vershil tus- schen <i>r e v</i> en d. gemeten waarden van q in millime- ters.	$cm \frac{tg\beta - tg\alpha}{s}$ in millimeters.	Algebraïsche som v. d. waarden der beide vorige kolommen in millimeters.
0.5	0.5	(9.36) ¹⁾	12.71	6.70	— 10.2	4.0	— 6.2
1	0.5	10.78	13.15	4.74	— 4.2	4.8	— 1.4
1.5	—	—	—	(0)	(0)	(0)	(0)
2	0.5	13.15	10.89	— 4.52	2.1	— 2.7	— 0.6
2.5	0.5	12.71	10.02	— 5.38	1.4	— 3.2	— 1.8
3	0.5	10.89	8.71	— 4.36	2.7	— 2.6	0.1
3.5	0.5	10.02	7.50	— 5.04	2.7	— 3.0	— 0.3
4	1	10.02	5.700	— 4.32	2.5	— 2.6	— 0.1
5	1	7.50	4.504	— 3.00	2.3	— 1.8	0.5
6	1	5.700	3.078	— 2.622	2.7	— 1.6	1.1
7	1	4.504	2.251	— 2.253	1.9	— 1.3	0.6
8	1	3.078	1.688	— 1.390	1.7	— 0.8	0.9
9	1	2.251	1.163	— 1.088	1.6	— 0.7	0.9
10	1	1.688	0.740	— 0.948	1.4	— 0.6	0.8
11	1	1.163	(0.439) ²⁾	— 0.724	1.0	— 0.4	0.6

1) Berekend, zie de noot onder tabel X.

2) β is hier berekend op overeenkomstige wijze als de eerste α uit de tabel.

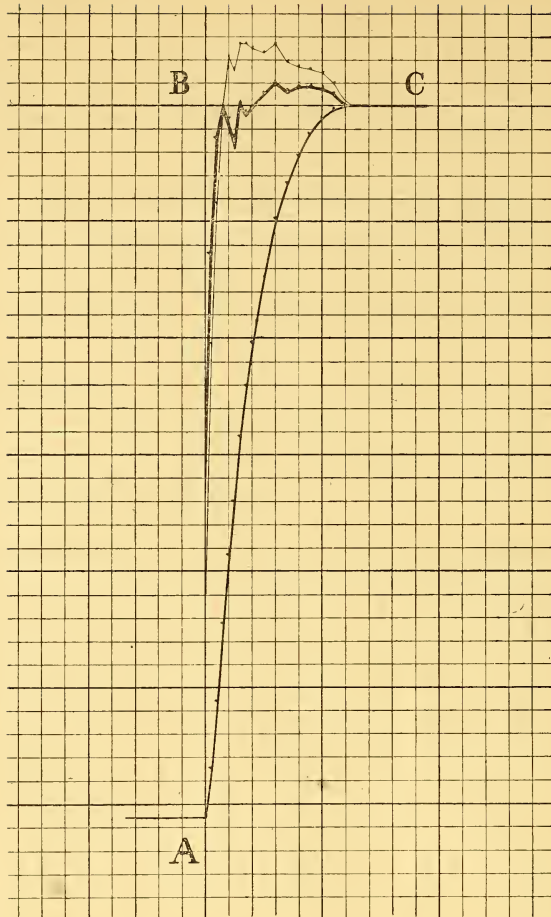


Fig. 5.

Snaar N^o. 14, Photogr. A 125, Tabel XIII en XIV.

Absc. 1 schaaldeel = 2σ , ordin. 1 schaaldeel = $8,67 \times 10^{-9}$ Amp.

grooter bewegingssnelheden zal kunnen beschikken. Onlangs zijn wij er in geslaagd zeer regelmatige bewegingssnelheden van 1 M. per seconde te verkrijgen.

Aan het slot van dit hoofdstuk mogen wij er aan herinneren, dat een analyse der kromme alleen noodig is, wanneer men zeer zwakke stroomen in zeer korte tijden wensch te meten. Zoodra de galvanometerstand minder gevoelig mag zijn, kan men met toepassing van een dempingsmethode, die vroeger reeds werd beschreven, krommen verkrijgen, die in minder dan 1σ de juiste stroomsterkte onmiddellijk registreeren.

7. *Absolute maten van de massa der snaar en den weerstand der snaarbeving.*

Is eenmaal m als de schijnbare massa van het snaarbeeld in millimetermikrampère-eenheden bekend, dan kost het niet veel moeite, om de werkelijke massa der snaar in grammen te berekenen. Wij moeten daartoe eerst in formule (7) de waarden van T en c in de gewone eenheden van het [C.G.S.]-stelsel uitdrukken, en vervolgens moet er rekening gehouden worden met de omstandigheid, dat wel is waar het midden der snaar en dus ook het snaarbeeld rechtlijnig heen en weer schommelt, maar dat toch de beweging van den kwartsdraad in zijn geheel een samengestelder karakter draagt.

Noem m_1 de werkelijke massa der snaar in grammen, T_1 de periode in seconden en c_1 de gevoeligheid in centimeters uitslag van het midden der snaar per dyne, dan is

$$m_1 = m \times \left(\frac{T_1}{T} \right)^2 \times \frac{c}{c_1} \times \frac{\pi^2}{8} \dots \dots \dots (29)$$

De factor $\frac{\pi^2}{8}$ wordt veroorzaakt door de omstandigheid, die wij boven reeds noemden. Terwijl wij de methode, volgens welke het bedrag van den factor berekend wordt, zullen mededeelen, nadat eerst de snaarspanning zal zijn ter sprake gebracht, gaan wij thans over tot een nadere behandeling van de waarden van $\frac{T_1}{T}$ en $\frac{c}{c_1}$.

T stelt den tijd in millimeters voor, terwijl de bewegingssnelheid van den chassis V m.M. per sec. bedraagt. De tijd in seconden is dus

$$T_1 = \frac{T}{V}$$

of

$$\frac{T_1}{T} = \frac{1}{V} \dots \dots \dots (30)$$

Om de waarde van $\frac{c}{c_1}$ te bepalen, moeten wij rekening houden met de toegepaste vergrooing b , de magnetische veldsterkte H en de lengte der snaar l .

H is in [C. G. S.]-eenheden en l in centimeters uitgedrukt.

c is, gelijk vroeger reeds werd vermeld, de gevoeligheid, uitgedrukt in millimeters uitslag van het snaarbeeld per mikrampère, terwijl c_1 de gevoeligheid is, uitgedrukt in centimeters uitslag van het midden der snaar zelve per dyne.

De kracht, die den kwartsdraad doet afwijken, wanneer hij met

een stroom van 1 mikrampère wordt doorstroomd, bedraagt $\frac{Hl}{10^7}$ dynes. Dienovereenkomstig is

$$c = c_1 \times \frac{Hl}{10^7} \times 10b,$$

of

$$\frac{c}{c_1} = \frac{Hlb}{10^6} \dots \dots \dots (31)$$

Met behulp van de formules (29), (30) en (31) kunnen wij nu m_1 nader uitdrukken in m en wel

$$m_1 = \frac{\pi^2}{8} m \times \frac{Hlb}{10^6 V^2} \dots \dots \dots (32)$$

De nauwkeurigheid, waarmede m_1 in grammen berekend kan worden, hangt uit den aard der zaak in de eerste plaats af van de nauwkeurigheid, waarmede m in $[mm-\mu A]$ -eenheden bekend is, en verder van de nauwkeurigheid der waarden van H , l , b en V . De laatste grootheid komt in formule (32) in het kwadraat voor en zou dus een overwegende beteekenis kunnen hebben. Maar de door ons gebruikte tijdschrijvende inrichting werkt, zooals wij vroeger reeds opmerkten, met zóó groote nauwkeurigheid, dat wij de fouten in de waarde van V wel mogen verwaarloozen.

Ook l en b kunnen met genoegzame nauwkeurigheid worden gemeten, terwijl wij voor H het bedrag in rekening brengen, dat in hoofdstuk IV hiervoor is gevonden, te weten 17600 [C. G. S.].

De fout in het absolute bedrag van m_1 geloof ik op eenige weinige procenten te mogen stellen.

In formule (32) is

$$\begin{aligned} H &= 17600, \\ l &= 12,7, \\ b &= 660, \\ V &= 500, \end{aligned}$$

waaruit volgt, dat $m_1 = 7,28 \times 10^{-4} m \dots \dots \dots (33)$

In hoofdstuk III werd gevonden :

- voor snaar N^o. 10 $m = 9,4 \times 10^{-3} [mm - \mu A]$
- „ „ „ 13 $m = 6,9 \times 10^{-3}$ „ „
- „ „ „ 14 $m = 3,6 \times 10^{-3}$ „ „

Naar formule (33) wordt daaruit voor de massa der snaren in absolute maat berekend :

- voor snaar N^o. 10 $m_1 = 6,85 \times 10^{-6}$ gram.
- „ „ „ 13 $m_1 = 5,02 \times 10^{-6}$ „
- „ „ „ 14 $m_1 = 2,62 \times 10^{-6}$ „

Terloops zij hier opgemerkt, dat wij om geluiden te registreeren, gebruik maken van een zeer lichte, korte snaar: een 2,5 cM. langen, 1 μ dikken kwartsdraad, waarvan het gewicht op ongeveer $1,5 \times 10^{-7}$ gram mag worden geschat.

Uit de lengte l , den diameter d van den blanken kwartsdraad en het soortelijk gewicht s van kwarts kan het gewicht van het kwarts berekend worden als

$$g = \frac{d^2}{4} \pi ls.$$

Dit gewicht is wegens de onzekerheid van d slechts onnauwkeurig bekend. Maar in verband met de waarde van m_1 kan het ons toch dienen, om een globale voorstelling te verkrijgen van de gewichtsverhoudingen van kwarts en zilver in de snaar. Op deze wijze berekend vinden wij die verhouding in

snaar 10	als 1 kwarts	op 3.5	zilver
„ 13	„ 1	„ „	6.4 „
„ 14	„ 1	„ „	2.4 „

Wij gaan er thans toe over, den weerstand der snaarbeweging in absolute maat uit te drukken. Volgens de vroeger gegeven definitie is r de schijnbare weerstand der snaarbeweging in mikrampères, wanneer het snaarbeeld zich beweegt met een snelheid van 1 mM. weg per millimeter tijd.

Wij noemen r' den weerstand der snaarbeweging in dynes, wanneer het midden der snaar zich beweegt met een snelheid van 1 cM. per seconde.

De bovengenoemde eenheid r heeft betrekking op een veldsterkte H , een kwartsdraadlengte l , een vergrooing b en een bewegingsnelheid der schrijfvlaakte van V .

Daar de kracht van $1 \mu A$ gelijk is aan $\frac{Hl}{107}$ dynes, kunnen wij schrijven :

$$r' = r \times \frac{Hl}{107} \times \frac{10 b}{V}$$

of

$$r' = r \times \frac{Hlb}{106 V} \dots \dots \dots (34)$$

Vullen wij hierin weder de bovengenoemde waarden in voor H , l , b en V dan wordt

$$r' = 0,295 r \dots \dots \dots (35)$$

Het is onnoodig, hier van de electromagnetische demping de absolute maten aan te geven. Deze zijn reeds in hoofdstuk IV ter

sprake gekomen, waar zij ons gediend hebben, om het bedrag van H nauwkeurig te leeren kennen. Daarentegen mogen de absolute maten van de luchtdemping r'_a wel worden vermeld.

In hoofdstuk IV werd de luchtdemping gevonden

voor snaar N ^o . 10	$r_a = 0,0193$	[mm - μA]
„ „ „ 13	$r_a = 0,0174$	„ „
„ „ „ 14	$r_a = 0,0157$	„ „

Naar formule (35) wordt hieruit berekend

voor snaar N ^o . 10	$r'_a = 0,00569$	dynes.
„ „ „ 13	$r'_a = 0,00513$	„
„ „ „ 14	$r'_a = 0,00463$	„

Het schijnt mij niet ongewenscht toe, deze bedragen te vergelijken met die, welke men met behulp van de kinetische gastheorie zou kunnen berekenen. Doch daarbij zou moeten worden in aanmerking genomen, dat wij met r'_a behalve de luchtdemping nog andere oorzaken van demping hebben samengevat.

Deze oorzaken zijn drie in getal:

1^o. Indien het magnetisch veld ongelijkmatig is, kunnen er tijdens een uitslag van den kwartsdraad wervelstroomen in de zilverlaag ontstaan.

2^o. Indien de snaar para- of diamagnetisch is, kan zij door haar beweging stroomen induceeren in het ijzer der poolschoenen.

3^o. Ook een onmagnetische snaar zal, wanneer zij doorstroomd wordt en zich beweegt, een electriciteitsbeweging in de poolschoenen induceeren.

Alle drie oorzaken zijn evenwel zoo gering, dat zij ten opzichte van de luchtdemping vermoedelijk wel mogen worden verwaarloosd.

8. *De spanning van den kwartsdraad*

S.

Om in verschillende omstandigheden de spanning van den kwartsdraad te berekenen, beginnen wij met een bijzonder geval aan te nemen, en wel dat de draad sterk gespannen is en zich over haar geheele lengte in een homogeen magnetisch veld bevindt. Een constante stroom, die door den galvanometer gevoerd wordt, veroorzaakt een blijvende uitwijking van het midden van den draad, die daarbij den vorm van een kettinglijn aanneemt.

Noemt men de bedoelde uitwijking u_1 , en de ponderomotorische kracht, die de draad ondervindt, i_1 , dan is de spanning :

$$S = \frac{i_1 l}{8u_1} \dots \dots \dots (36)$$

Snaar n^o. 10 heeft blank een diameter van 2,4 μ . Hieruit laat zich berekenen, dat zij zóó mag worden gespannen, dat de gevoeligheid van den galvanometer tot een minimum van $c_{\min} = 0,529$ wordt gereduceerd. Het maximum der praktisch bruikbare gevoeligheid is $c_{\max} = 10^5$. De verhouding $\frac{c_{\max}}{c_{\min}} = 1,89 \times 10^5$ geeft de mogelijke variatie in gevoeligheid weer, die ontegenzeggelijk enorm mag worden genoemd.

Het bedrag van c_{\max} geeft ons aanleiding om de daarmede corresponderende spanning S_{\min} ter sprake te brengen. Volgens formule (40) zouden wij voor $c = 10^5$ de spanning op $2,39 \times 10^{-6}$ gram, berekenen, een waarde, die ongerijmd mag heeten, daar het gewicht van de hier als voorbeeld gebruikte snaar n^o. 10 = $6,85 \times 10^{-6}$ gram, d. i. bijna 3 maal meer bedraagt, en de spanning eener vertikaal uitgestrekte snaar immers in geen geval kleiner dan haar eigen gewicht kan zijn. Maar deze ongerijmde uitkomst kan gemakkelijk worden verklaard, wanneer wij bedenken, dat formule (40) alleen geldt, zoolang als de kwartsdraad strak gespannen blijft, en zich dus als een snaar gedraagt, hetgeen wij ook bij de berekening der spanning voorop hebben gesteld.

Wij moeten uit de verkregen resultaten besluiten, dat de kwartsdraad zich bij geringe spanning niet meer als een snaar beweegt. Er zijn voldoende gegevens, om te bewijzen, dat de beweging van den kwartsdraad zelfs dan nog niet volkomen met de trilling van een snaar overeenkomt, wanneer de gevoeligheid tot $c = 100$ is verminderd en dus de spanning ruim 300 maal grooter is dan het eigen gewicht van den draad.

Er mag niet uit het oog worden verloren, dat er behalve de invloed der spaninrichting, verschillende krachten zijn, die op den kwartsdraad werken. Indien de draad zoo dun is, dat zijn elasticiteit mag worden verwaarloosd, terwijl alleen de zwaartekracht in rekening behoeft te worden gebracht, dan zal hij bij volkomen verslapping den vorm eener kettinglijn aannemen. Is hij paramagnetisch, dan zal hij in het sterke, nimmer volmaakt homogene magnetische veld naar een der polen worden gebogen. En wanneer zijn elasticiteit niet mag worden verwaarloosd, zal hij vormen aannemen, die door den stand en de richting der uiteinden bij de bevestigingsplaatsen worden bepaald, terwijl bovendien een geringe torsie om de lengteas haar invloed kan doen gelden.

Wanneer men de spanning van den draad geleidelijk vermeerderd door het bovineinde van den draad opwaarts te schroeven, kan men

met het mikroskoop gemakkelijk het oogenblik waarnemen, waarop de draad recht getrokken is. Vóórdat de draad recht is, zal het draadmidden bij het strakker aanhalen der spaninrichting zich nagenoeg in een horizontaal vlak verplaatsen. Nadat de draad recht getrokken is, verplaatst het draadmidden zich tengevolge van de rekking van den draad, bovenwaarts en wel met de helft van het bedrag der verplaatsing van het draadeinde. Is de draad eenmaal recht getrokken, dan zal reeds een geringe spanningsvermeerdering hem noodzaken, zich als een gespannen snaar te bewegen.

De uitkomsten der berekening omtrent de spanning van den kwartsdraad zijn in overeenstemming met de verhouding, die er tusschen deze en den afstand der beide draadeinden bestaat. Van de meeste kwartsdraaden mocht aangenomen worden, dat zij juist op de grens van het gestrekt zijn verkeerden, wanneer hun gevoeligheid correspondeerde met ongeveer 1 mM. uitslag voor 10^{-8} Amp. dus $c = 100$. Zeer geringe veranderingen in den onderlingen afstand der draadeinden brengen in dezen toestand reeds groote verschillen in gevoeligheid te weeg. Wanneer daarentegen de onderlinge afstand der draadeinden eenmaal zoover is verkort of verlengd, dat daardoor de gevoeligheid of aanzienlijk vergroot is, bijv. tot 1 mM. uitslag voor 10^{-10} Amp., of wel aanzienlijk verkleind tot 1 mM. uitslag voor 10^{-7} Amp., dan wordt de toestand gewijzigd. Dan kunnen groote verplaatsingen die met behulp der spaninrichting aan het boveinde van den kwartsdraad worden medegedeeld, slechts betrekkelijk geringe veranderingen in de gevoeligheid veroorzaken.

Verder vertoont de gevoeligheid van den eenmaal gestrekten draad een toename, die omgekeerd evenredig is aan de lengtetoename. Zoo zal bijv. bij snaar n^o 13 voor een rekking van 100μ de gevoeligheid afnemen van $c = 100$, tot $c = 10$, en voor nogmaals 100μ rekking van $c = 10$ tot $c = 5$. De gevoeligheden zijn omgekeerd evenredig aan de spanningen, zoodat wij mogen zeggen, dat de spannings-toenamen aan de lengtetoenamen evenredig zijn, hetgeen van een gespannen elastischen draad ook moet worden verwacht. Bij lengtetoenamen, die zich verhouden als 0 : 1 : 2 verhouden zich de spanningstoename als $\left(\frac{1}{100}\right) : \frac{1}{10} : \frac{1}{5}$ of als $\left(\frac{1}{10}\right) : 1 : 2$.

Wij gaan thans over tot het afleiden van den factor $\frac{\pi^2}{8}$ in formule (29) en onderstellen daarbij weder, dat de snaar strak gespannen is en zich over haar geheele lengte in een homogeen magnetisch veld bevindt.

Volgens de wetten, die de trillingen eener snaar beheerschen, is

$$S = \frac{4lm_1}{\tau_1^2},$$

waarin τ_1 de periode in seconden beteekent, die zonder demping aanwezig zou zijn, terwijl, zooals vroeger reeds werd vermeld, S de spanning in dynes, l de lengte in centimeters en m_1 de werkelijke massa der snaar in grammen voorstelt.

Nu is volgens formule (38) ook $S = \frac{l}{8c_1}$, dus kunnen wij schrijven

$$\frac{4lm_1}{\tau_1^2} = \frac{l}{8c_1}$$

of

$$m_1 = \frac{\tau_1^2}{32c_1} \cdot \dots \cdot \dots \cdot \dots \quad (41)$$

Uit formule (4) weten wij, dat $\tau = 2\pi\sqrt{mc}$ of wel $m = \frac{\tau^2}{4\pi^2c}$, waaruit in verband met formule (41) volgt, dat

$$\frac{m_1}{m} = \left(\frac{\tau_1}{\tau}\right)^2 \times \frac{c}{c_1} \times \frac{\pi^2}{8},$$

en daar $\frac{\tau_1}{\tau} = \frac{T_1}{T}$ is, mogen wij ook schrijven :

$$m_1 = m \times \left(\frac{T_1}{T}\right)^2 \times \frac{c}{c_1} \times \frac{\pi^2}{8}.$$

Bovenstaande formule is identisch met formule (29), waardoor het bewijs geleverd is, dat de door ons gezochte factor inderdaad $\frac{\pi^2}{8}$ is.

Wij veroorloven ons hier een uitweiding over de berekening van den gezochten factor voor het geval, dat de beweging van den kwartsdraad afwijkt van de trilling eener snaar. Daarbij blijven wij echter steeds aannemen, dat de draad zich over zijn geheele lengte in een homogeen magnetisch veld bevindt.

In de eerste plaats kan gemakkelijk worden aangegeven, wanneer de gezochte factor gelijk aan de eenheid moet zijn. De gespannen draad zou zich daarbij steeds loodrecht op zijn lengterichting moeten verplaatsen, waarbij hij dan in zijn geheel juist dezelfde bewegingen zou moeten volbrengen, die in werkelijkheid alleen door het snaar-midden worden uitgevoerd.

In de tweede plaats wenschen wij de berekening te maken voor het geval, dat de beide helften van den draad na een uitslag de twee

opstaande zijden van een gelijkbeenigen driehoek vormen, terwijl wij aannemen, dat de bewegingen, die het midden van den draad maakt, overeenkomen met de bewegingen van het middenpunt eener snaar. De gezochte factor krijgt dan de waarde van $\frac{3}{2}$ en wordt op de volgende wijze gevonden.

Het arbeidsvermogen van beweging van den draad wordt berekend, terwijl deze in de phase van snelste beweging verkeert. De snelheid van het midden van den draad zij daarbij v_1 , en de massa xm_1 zij gelijkmatig over de geheele lengte van den draad verdeeld. Onder deze omstandigheden en steeds bij de veronderstelling dat de beide helften van den draad rechte lijnen blijven, is het arbeidsvermogen van beweging

$$E = \frac{xm_1v_1^2}{6} (42)$$

De eerstgenoemde denkbeeldige draad voor welken wij den gezochten factor als 1 hebben leeren kennen, hebbe de massa m_1 en volbrengte dezelfde bewegingen als het middenpunt van den laatstgenoemden. Dan is zijn arbeidsvermogen in dezelfde phase van beweging

$$E_1 = \frac{m_1v_1^2}{2} (43)$$

Noem den blijvenden uitslag u_1 , en de totale ponderomotorische kracht $=k_1$, dan is de arbeid, dien de ponderomotorische kracht heeft verricht, wanneer een uitslag is volbracht,

in het eerste geval $E_1 = k \times u_1$,

in het tweede geval $E = k \times \frac{1}{2} u_1$,

waaruit volgt, dat $E_1 = 2 E (44)$

Uit de formules (42), (43) en (44) volgt nu dat

$$\frac{xm_1v_1^2}{3} = \frac{m_1v_1^2}{2}$$

dus $x = \frac{3}{2}$.

9, *De bruikbaarheid van den snaargalvanometer voor bepaalde doeleinden.*

In sommige opzichten kan het ter beoordeeling van de bruikbaarheid van een galvanometer gewenscht zijn, diens normaalgevoelheid te kennen.

Deze wordt berekend ¹⁾ naar de formule

¹⁾ Zie formule (5) in Ann. d. Phys. 12. p. 1063. 1903.

$$E_3 = \frac{a}{10t^2 I v \sqrt{w}} \dots \dots \dots (45)$$

waarin E_3 de normaalgevoeligheid,
 a de uitslag in millimeters,
 t de periode eener geheele schommeling (\sim) in seconden,
 berekend voor ongedempte slingeren ¹⁾,
 I de stroomsterkte in Ampères,
 v de mikroskopische vergrooting, en
 w de inwendige geleidingsweerstand in Ohms beteekent.

Naar aanleiding van een lezenswaardig opstel van WALTER P. WHITE ²⁾ merken wij op, dat het begrip *normaalgevoeligheid* volkomen scherp in een formule is gedefinieerd en dus geen aanleiding behoeft te geven tot misverstand. Het genoemde begrip kan van groot nut zijn ter beoordeeling van eventueele veranderingen, die aan een bestaanden galvanometer kunnen worden aangebracht, of die bij de constructie van een nieuw instrument met voordeel kunnen worden toegepast. In de normaalgevoeligheid bezit men een zeer te waardeeren, belangrijk gegeven van een galvanometer, maar het behoeft nauwelijks te worden gezegd, dat daardoor de bruikbaarheid van het instrument nog op verre na niet is bepaald.

Bij de beoordeeling van de bruikbaarheid spelen immers nog tal van eigenschappen een groote rol, zooals b.v. de praktisch bereikbare inwendige weerstand, de grootte der demping, de constantie van het nulpunt, de evenredigheid der uitslagen aan de stroomsterkten enz.

De normaalgevoeligheid bedraagt

van draad 10.	10 ⁶ ,
„ „ 13.	1,4 × 10 ⁶ ,
„ „ 14.	2 × 10 ⁶ ,
„ „ 20 (in hoofdstuk 7 terloops genoemd)	2,1 × 10 ⁶ .

Slaagde men er in, een aluminiumdraad te vervaardigen van 1 μ diameter en 12,7 cM. lengte, d. i. dus van gelijke lengte als elk der drie eerstgenoemde kwartsdraden, dan zou men een galvanometer

¹⁾ In Ann. d. Phys. t. a. p. hebben wij met t den duur eener geheele schommeling (\sim) aangeduid. Door deze qualificatie is uitgedrukt, dat onze formules slechts voor een periodische beweging in aanmerking komen. Het komt ons gewenscht voor, thans nog uitdrukkelijk daarbij te vermelden, dat de periode t voor ongedempte schommelingen berekend moet zijn.

²⁾ WALTER P. WHITE. Sensitive moving coil galvanometers. The physical review vol. 19, n^o. 5, p. 305. 1904.

verkrijgen, waarvan de inwendige weerstand 5180 Ohm en de normaalgevoeligheid 35×10^6 bedroeg.

Wij moeten thans nog eenige andere voorwaarden bespreken, waardoor de bruikbaarheid van den snaargalvanometer voor verschillende doeleinden wordt bepaald.

Men kan de methoden van galvanometrisch onderzoek onderscheiden in :

- I. Die, waarbij een schommelende uitslag wordt vereischt en
- II. Die, waarbij de uitslag liefst aperiodisch moet volgen.

De eerstgenoemde methoden worden weder onderscheiden in *IA*, die met een langzame periode, zooals in een gewonen ballistischen galvanometer, en *IB*, die met een snelle periode, zooals in den optischen telefoon van MAX WIEN en den vibratie-galvanometer van RUBENS.

De onder *IA* genoemde methoden worden toegepast bij de meting van capaciteiten en bij de meting van kleine tijden naar POUILLET, in 't algemeen steeds dan, wanneer een geringe hoeveelheid electriciteit gemeten moet worden.

Nu maken de eigenschappen van den snaargalvanometer het ook reeds mogelijk, deze geringe hoeveelheden electriciteit te meten bij een aperiodischen uitslag. Inderdaad is, als de elektrische stroom slechts kort genoeg duurt, de uitslag der snaar evenredig aan de hoeveelheid doorgevoerde electriciteit.

Voor de geringste hoeveelheid electriciteit, die nog kan worden aangetoond, werd bij een vroegere gelegenheid ¹⁾ als uitkomst van een ruwe berekening gevonden 5×10^{-12} Ampèreseconden, overeenkomende met de lading van een bol van 4,5 cM. straal bij den potentiaal van 1 Volt. Deze berekening gold een uitslag van 0,1 mM. van snaar n^o. 10. Bij snaar n^o. 18 hebben wij de directe meting werkelijk uitgevoerd. De gevoeligheid bleek nog iets grooter te zijn: 1 mM. uitslag voor 4×10^{-11} Coulombs, zoodat met dezen draad een hoeveelheid van 4×10^{-12} Coulombs aantoonbaar is.

Maar de gevoeligheid voor geringe hoeveelheden electriciteit zou nog aanzienlijk worden verhoogd, wanneer men de demping der snaarbeweging kon opheffen of verminderen, bijv. door de snaar in een luchtledige ruimte te sluiten. Wij zouden dan een langzaam schommelenden kwartsdraad verkrijgen, die duizenden malen gevoeliger zou zijn dan de gevoeligste thans bestaande ballistische galvanometers.

IB. De snaargalvanometer kan op voortreffelijke wijze als optische

¹⁾ Zie deze „Verslagen” 12, p. 880. 1904.

telefoon of als vibratie-galvanometer dienst doen, en dus met voordeel den telefoon vervangen zoowel ten behoeve van de meting van zelfinducties als van electrolytische weerstanden.

Voor het eerstgenoemde doel heb ik hem met goed gevolg gebruikt ¹⁾, toen in de plaats van den verzilverden kwartsdraad een dunne metaaldraad tusschen de polen van den electromagneet was gespannen. Het bleek zeer gemakkelijk te zijn, de periode der snaartrillingen met die der gebruikte wisselstroomen te doen overeenkomen. In eenige seconden heeft men de snaarspanning nauwkeurig tot op het gewenschte bedrag verhoogd of verlaagd; en voor mijn doel lieten noch de gevoeligheid noch de zekerheid van de aflezing iets te wenschen over.

Mocht het noodig zijn, de gevoeligheid te vergrooten, dan zou men een luchtledig kunnen aanbrengen, waardoor men in staat zou worden gesteld, om minder gedempte trillingen te verkrijgen ook van den lichtsten kwartsdraad. Verder moet worden opgemerkt, dat een luchtledig niet altijd noodig is, om weinig gedempte slingeringen te voorschijn te roepen, en wel in 't bijzonder niet, wanneer men wisselstroomen van zeer kleine periode bijv. van 0,001 seconde en kleiner aanwendt. Want hoe strakker men den kwartsdraad spant, des te geringer wordt de dempingsverhouding.

II. De methoden, waarbij de galvanometeruitslag liefst aperiodisch moet volgen, worden onderscheiden in IIA, die met langzamen en IIB, die met snellen uitslag.

IIA. Van die met langzamen uitslag kiezen wij twee voorbeelden: de meting van stroomen met grooten uitwendigen weerstand, zooals zij bij het onderzoek van isolatie-weerstanden toegepast wordt en de meting van stroomen met geringen uitwendigen weerstand, zooals die bij het onderzoek van thermostroomen wordt uitgevoerd.

Bij deze beide metingen kunnen uitslagen van langen duur bijv. van 10 of 20 seconden met goed gevolg worden aangewend. Daarbij speelt de normaalgevoeligheid van den kwartsdraad in den galvanometer, zooals die thans met de sterke luchtdemping in het Leidsche laboratorium is opgesteld, geen rol meer. De massa heeft in deze omstandigheden slechts een geringen invloed op de beweging van den draad en de snelheid van den uitslag wordt in hoofdzaak bepaald door de hoegrootheid der demping. Deze wordt bij de meting van isolatieweerstanden alleen door de wrijving der lucht beheerscht.

¹⁾ Ueber Nervenreizung durch frequente Wechselströme. PFLÜGER's Archiv f. d. ges. Physiol. 82, S. 101, 1900. Zie ook „Onderzoekingen” Physiol. laborat. Leiden. 2e R. IV en V.

Kon men door het aanbrenge van een luchtledige ruimte de beweging van den kwartsdraad op de grens der aperiodiciteit brengen, en daarbij door voldoende geringe spanning den kwartsdraad langzaam laten uitslaan, dan zou men een instrument verkrijgen, waarmede men duizenden malen grootere isolatieweerstanden meten kon dan thans met de gevoeligste galvanometers mogelijk is,

Bij de metingen van thermostroomen komen sommige der goede eigenschappen van den snaargalvanometer 't minst tot haar recht. Men stuit bij deze metingen behalve op het bezwaar der luchtdemping nog op dat der electromagnetische demping, die al spoedig zeer aanzienlijk wordt.

De electromagnetische demping is bij onveranderde veldsterkte omgekeerd evenredig aan den geleidingsweerstand der keten. Bij draad n°. 10 verhouden zich bij een geleidingsweerstand van 10000 Ohm in de gesloten keten de luchtdemping en de electromagnetische demping als 1 : 0,6. Meet men een isolatieweerstand, dan blijft de electromagnetische demping achterwege en zal deze draad ongeveer 15 seconden noodig hebben voor een uitslag, wanneer de gevoeligheid geregeld is op 1 mM. voor 10^{-11} Amp. Bij de meting van een thermostroom, waarbij de uitwendige weerstand in de keten verwaarloosd mag worden en alleen met den galvanometerweerstand van 10000 Ohm behoeft te worden gerekend, zal bij dezelfde gevoeligheid de duur, die voor een uitslag wordt vereischt, 1,6 maal grooter dus 24 sec. zijn. Stelt men tot voorwaarde, dat de duur van een uitslag het bedrag van 15 seconden niet mag overschrijden, dan zal men zich met een 1,6-maal geringere gevoeligheid moeten tevreden stellen, en 1 mM. uitslag verkrijgen voor $1,6 \times 10^{-11}$ Amp. of voor $1,6 \times 10^{-7}$ Volt.

Daar 0,1 mM. uitslag praktisch nog goed kan worden waargenomen, zal men met den thans bestaanden galvanometer bij de meting van thermostroomen nog spanningen van $1,6 \times 10^{-8}$ Volt kunnen aantonen.

Het aanbrenge van een luchtledige ruimte zou de gevoeligheid voor het aantonen van geringe spanningen slechts weinig vergrooten, en het minimum niet verder terugbrengen dan tot $0,6 \times 10^{-8}$ Volt. Ook het gebruik van een kwartsdraad met geringeren weerstand zal slechts weinig verandering in deze gevoeligheid kunnen brengen. Wordt de geleidingsweerstand van den kwartsdraad n -maal geringer, dan wordt het kleinste waarneembare spanningsverschil $\left(\frac{1}{n} + 0,6\right) \times 10^{-8}$ Volt.

Doch er zijn twee middelen ter vergrooting van de gevoeligheid

$$\mathbf{T} = \frac{2m}{r},$$

waarin \mathbf{T} de tijdsconstante voorstelt.¹⁾

Beide formules hebben betrekking op het $[mm - \mu A]$ stelsel. Drukken wij r_1 in dynes, m_1 in grammen en \mathbf{T}_1 in seconden uit, dan krijgen wij

$$r_1 = \frac{l^2 H^2}{w} \times \frac{2}{\pi} \times 10^{-9} \text{ dynes} \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

$$c = \frac{m_1 l H}{r_1^2} \times \frac{32}{\pi^2} \times 10^{-6} \text{ b millimeters per mikrampère.} \quad . \quad (47)$$

en

$$\mathbf{T}_1 = \frac{m_1}{r_1} \times \frac{16}{\pi^2} \text{ seconden} \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Uit de formules (46), (47) en (48) wordt afgeleid, dat

$$c = \frac{w}{Hl} \times 10^3 \pi \times b \mathbf{T}_1 \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Noemt men c_s de gevoeligheid voor een spanningsverschil en wel uitgedrukt in millimeters uitslag per mikro-Volt, dan is

$$c = c_s w$$

waaruit in verband met formule (49) volgt, dat

$$c_s = \frac{1}{Hl} \times 10^3 \pi \times b \mathbf{T}_1 \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Verder leiden wij uit de formules (46) en (48) af, dat

$$\mathbf{T}_1 = \frac{m_1 w}{l^2 H^2} \times \frac{8 \times 10^9}{\pi} \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

De beide laatstgenoemde formules (50) en (51) verstrekken ons alle gegevens, om op gemakkelijke wijze den invloed na te gaan, die verschillende veranderingen in den galvanometer uitoefenen op diens gevoeligheid voor thermostroomen.

In de eerste plaats wijzen op de omstandigheid, dat het dikker of dunner maken van een draad geen wijziging van de gevoeligheid c_s ten gevolge heeft, wanneer slechts het produkt $m_1 w$ in formule (51) onveranderd blijft. Maakt men van een metaaldraad gebruik, dan blijft, als men steeds draden van hetzelfde metaal en van dezelfde lengte neemt, de waarde $m_1 w$ vanzelf onveranderd, hoe men ook de dikte van den draad wijzigt. Het kan een voordeel opleveren, een zwaren, dikken draad te gebruiken, daar hierbij de luchtdemping verwaarloosd mag worden, zonder dat de draad in het luchtledige

¹⁾ Zie FLEMING, t. a. p. p. 377 en volg.

behoeft te worden geplaatst. Ook kunnen de praktische moeilijkheden van het aanbrengen van een zeer zwakke spanning hier wellicht met behulp van een veerende spaninrichting beter worden opgelost dan bij gebruik van een dunnen draad.

In de tweede plaats wijzen wij er op, dat volgens formule (50) de gevoeligheid c_s omgekeerd evenredig is aan de veldsterkte en de draadlengte.

Wij wijden eerst onze aandacht aan de veldsterkte en denken ons daarbij den draad van onveranderlijke lengte $l = 12,7$ cM. De vraag, tot hoe ver de veldsterkte onder deze voorwaarden mag worden verminderd, kan beantwoord worden met behulp van formule (51).

Om de gevoeligheid tot een maximum op te voeren, moet de veldsterkte tot een minimum worden teruggebracht. Zijn \mathbf{T}_1 en l constant, dan moet daarbij volgens (51) $m_1 w$ tot een minimum worden gemaakt. Wanneer men een draad van een homogene substantie gebruikt, wordt $m_1 w$ alleen door den aard der stof bepaald, zoodat de vraag naar het minimum van H teruggebracht wordt tot de vraag, welke stof het minimum van $m_1 w$ veroorzaakt. Dit is, voor zooverre ik kan nagaan, aluminium, dat voor $l = 12,7$ cM., een waarde van $m_1 w_{Al} = 1,394 \times 10^{-3}$ heeft.

Nemen wij voor \mathbf{T}_1 de waarde van 2,5 sec. aan, dan is na 10 seconden de uitslag bijna volbracht. Er moet dan nog een afstand ter waarde van 1,85 % van den totalen uitslag worden afgelegd. Na 12,5 sec. is deze laatste afstand gereduceerd tot 0,68 %, na 15 seconden tot 0,25 % van den totalen uitslag.

Stellen wij nu in formule (51) $\mathbf{T}_1 = 2,5$, $l = 12,7$ en $m_1 w$ als minimum $= 1,394 \times 10^{-3}$, dan wordt het minimum van H berekend op 940 [C. G. S.].

Volgens formule (50) wordt dan daaruit het maximum der gevoeligheid berekend op $c_s = 434$ mM. per mikrovolt.

Wij wenden ons thans tot de verkorting van l . Werd er bij de nuttige verkleining van H spoedig een grens bereikt, dit is niet het geval bij de verkorting van l , die, zoolang men niet op praktische bezwaren stuit, tot een willekeurige mate mag worden doorgevoerd. Maakt men l korter bijv. a -maal, dan worden daardoor zoowel de massa als de geleidingsweerstand elk a -maal verkleind. Het bedrag van $m_1 w$ wordt dus a^2 -maal kleiner, zoodat \mathbf{T}_1 onveranderd blijft (formule 51) en de gevoeligheid c_s (formule 50) a -maal wordt vergroot.

Er zij ons nu nog een laatste opmerking veroorloofd omtrent de beide formules (50) en (51). Wij veronderstellen eerst, dat zij beide gelden, en dat de waarden van m_1 , w , l en H zoo gekozen zijn,

dat $T_1 = 2,5$. Daarna nemen wij aan, dat de massa m_1 veranderd wordt, terwijl al het overige in het instrument, dus ook w , constant blijft, en vragen ons af, hoe daardoor de beweging van den draad wordt gewijzigd. Wordt m_1 vergroot, dan wordt de beweging van den draad oscilleerend. Wordt m_1 verkleind, dan blijft de beweging aperiodisch maar overschrijdt zij de grens der aperiodiciteit. De duur van den uitslag wordt verlengd, terwijl de gevoeligheid onveranderd blijft.

Dit laatste komt met den feitelijken toestand in den door mij gebruikten snaargalvanometer overeen. De massa van den kwartsdraad is in werkelijkheid zeer gering. Was zij $= 0$, dan zou de duur van den uitslag juist dubbel zoo groot zijn, als wanneer m_1 het gewenschte bedrag bezat ¹⁾. Het heeft dus in deze omstandigheden een voordeel, de massa van den draad tot op een zeker bedrag te verhoogen.

Snaar n^o. 18 heeft een massa en een luchtweerstand, die niet nauwkeurig zijn gemeten, doch niet veel van de overeenkomstige waarden van snaar n^o. 10 zullen verschillen. Haar geleidingsweerstand is echter ongeveer $2 \times$ geringer en bedraagt 5100 Ohm. Bij een uitslagduur van ongeveer $\frac{1}{2}$ minuut is de gevoeligheid $c_s = 20$ mM. per mikro-Volt. Kon ik de massa dezer snaar doelmatig vergrooten, dan zou ik bij onveranderde gevoeligheid de beweging op de grens der aperiodiciteit brengen en een uitslagduur van ongeveer 15 seconden verkrijgen.

Hier mag worden opgemerkt, dat draad n^o. 18 gemakkelijk zóó zwak kan worden gespannen, dat zijn uitslagduur op ongeveer één minuut wordt gebracht, waarbij dan de gevoeligheid verhoogd wordt tot $c_s = 40$ mM. per mikro-Volt. Daar, zooals de photogrammen bewijzen, 0,1 mM. nog kan worden afgelezen, kan met draad 18 feitelijk nog een spanning van $2,5 \times 10^{-9}$ Volt worden aangetoond. Ook bij deze geringe spanning van den draad blijft het nulpunt constant, terwijl het beeld van den kwartsdraad bij het verschuiven over een vrij lang stuk der schaal scherp blijft. Het mag merkwaardig heeten, dat men in staat is, een hangend draadje van slechts eenige duizendsten milligrammen gewicht met de grootste regelmatigheid zóó langzaam te verplaatsen.

II B. Wij komen nu aan de methoden, waarbij de galvanometer-uitslag aperiodisch en tegelijk snel moet plaats hebben.

¹⁾ De tijdconstante verdubbelt, wanneer $m_1 = 0$, zie FLEMING t. a. p.

Er behoeft nauwelijks aan te worden herinnerd, dat bij de meting van isolatieweerstanden de vergrooting van m_1 juist hetzelfde voordeel zal kunnen opleveren als boven voor de meting van thermostroomen is vermeld.

Deze methoden vinden in de eerste plaats haar toepassing in de electrotechniek, bijv. bij het onderzoek naar den vorm der potentiaal-schommelingen en stroomschommelingen, die men verkrijgt met behulp van dynamomachines, interruptoren, inductiesleden enz. Voor dergelijk onderzoek wordt reeds met goed gevolg gebruik gemaakt van den oscillograaf, een werktuig, dat wel is waar een aanzienlijk geringere gevoeligheid bezit dan de snaargalvanometer, maar dat toch bij de meting van sterkere stroomen voortreffelijke diensten kan verlenen.

In de tweede en voor ons doel voornaamste plaats vinden de onder IIB genoemde methoden haar toepassing in de electrophysiologie. Hier kan de snaargalvanometer in vele gevallen door geen ander instrument worden vervangen.

Men kan een aantal electrophysiologische onderzoekingen van den meest verschillenden aard met dezelfde snaar volbrengen. Zoo wordt op het laboratorium thans een zelfde snaar N^o. 18 gebruikt voor het onderzoek van het electrocardiogram, van hartstonen en geluiden in het algemeen, van retinastroom en van zenuwstroom. Toch wenschen wij hier kortelijks na te gaan, aan welke voorwaarden een snaar moet voldoen, die men uit een aantal beschikbare snaren uitkiest, om bij een bepaald electro-physiologisch onderzoek de gunstigste resultaten op te leveren.

Beginnen wij met het registreeren van het menschelijk electrocardiogram. Men kan hierbij den stroom van beide handen afleiden. De handen en onderarmen worden gedompeld in groote met NaCl-oplossing gevulde poreuze potten, die in glazen vaten met Zn SO₄-oplossing geplaatst zijn. In de zinksulfaat-oplossing bevinden zich geëmalgeerde zinkcilinders die door geleiddraden aan den galvanometer worden verbonden. Onder deze omstandigheden wisselt de geleidingsweerstand van het menschelijk lichaam bij verschillende personen tusschen ongeveer 1000 en 2000 Ohm, welk bedrag belangrijk kleiner is dan de weerstand van een dunnen verzilverden kwartsdraad. Van de vroeger genoemde kwartsdraden 10, 13 en 14 zal N^o. 13 bij het schrijven van het electrocardiogram de gunstigste resultaten opleveren, daar van dezen draad de geleidingsweerstand het geringst is. Wel is waar is de normaalgevoeligheid van draad N^o. 14 ongeveer 1,4-maal grooter, doch de stroomen, die deze draad van het kloppende hart ontvangt, zullen wegens den grooteren weerstand bijna tweemaal zwakker zijn.

Boven n^o. 10 heeft draad 13 behalve zijn geringeren geleidingsweerstand nog het voordeel van te bezitten een geringeren luchtweerstand tegen de beweging. Deze laatste eigenschap speelt hier

een gewichtige rol. Want om uitslagen van doelmatige grootte, bijv. van 10 tot 15 mM. te verkrijgen, moet de gevoeligheid van den galvanometer zóó worden geregeld, dat een spanningsverschil van 10^{-4} Volt in de keten met 1 mM. ordinaatlengte correspondeert. De kwartsdraad moet, om dit te bereiken, vrij zwak worden gespannen, zoodat de uitslagen aperiodisch zijn en in deze omstandigheden zal een vermindering van den weerstand der snaarbeweging een versnelling van den uitslag ten gevolge hebben.

Houden wij aan de bovengenoemde voorwaarde vast, dat een spanningsverschil van 10^{-4} Volt in de keten, met 1 mM. ordinaatlengte moet correspondeeren, dan schrijven wij met snaar n^o. 13 een menschelijk electrocardiogram dat bijna absoluut nauwkeurig is.

Met snaar n^o. 10 en vooral met snaar n^o. 14 worden dan echter krommen geschreven, die correcties noodig maken. Hoewel de bedragen dezer correcties klein zijn en een vollen millimeter niet overschrijden, zoodat men ze in vele gevallen verwaarloozen mag, is het toch niet overbodig om hier met een enkel woord aan de oorzaak der afwijkingen te herinneren. Zij is gelegen in de verhouding van de snelheid van den galvanometeruitslag tot de snelheid van de potentiaalschommeling bij de hartsactie.

Hoe sneller de galvanometeruitslag geschiedt, des te nauwkeuriger zal het photogram der potentiaalschommeling zijn.

De gevoeligheid van snaar n^o. 14 moet voor het schrijven van het menschelijk electrocardiogram zoo worden geregeld, dat ongeveer 1 mM. ordinaatlengte met $0,5 \times 10^{-8}$ Ampère correspondeert. Nu wordt de grenswaarde der aperiodiciteit bij dezen kwartsdraad in een keten met geringen uitwendigen weerstand eerst bereikt bij een ongeveer vier-maal grootere spanning der snaar. Kon men door het aanbrengen van een luchtledig den weerstand der snaarbeweging verminderen, zoodat de grens der aperiodiciteit reeds bereikt werd bij de eerstgenoemde gevoeligheid, dan zou men bij het schrijven van het electrocardiogram de snelheid der snaarbeweging aanzienlijk vergrooten, waardoor ook snaar 14 de potentiaalschommelingen bijna absoluut nauwkeurig zou kunnen weergeven.

Wij gaan thans over tot de behandeling van een tweede voorbeeld uit de electrophysiologie, het onderzoek van de actiestroom eener zenuw. Hierbij verschillen de eischen, die aan den galvanometer moeten worden gesteld in vele opzichten van de boven omschrevene. Kiest men tot object een kikvorschzenuw uit, van welke de stroom naar den galvanometer moet worden afgeleid, dan zal men met een grooten uitwendigen weerstand bijv. van 10^5 Ohm rekening moeten houden.

Ten opzichte hiervan mag de galvanometerweerstand, zelfs die van draad n°. 14 gering worden genoemd. Het voor den te meten stroom beschikbare, door de zenuwactie veroorzaakte potentiaalverschil is belangrijk grooter dan bij het onderzoek naar het menschelijk electrocardiogram te voorschijn komt, maar de duur van een zenuwactiestroom is korter, en wordt door slechts weinige duizendsten seconden gemeten.

Deze gegevens wijzen ons den weg bij de keuze van een kwartsdraad.

In de eerste plaats zien wij gemakkelijk in, dat de verschillen in den geleidingsweerstand van de kwartsdraden onderling slechts een onbeteekenenden invloed kunnen uitoefenen op de intensiteit van den actiestroom, daar immers de zenuwweerstand zelf in de keten overwegend is. Verder moet de uitslag van den kwartsdraad zeer snel zijn, de spanning dus groot en daar een oscillerende uitslag moet worden vermeden, zal het gewenscht zijn de spanning op zoodanige wijze te regelen, dat de snaarbeweging op de grens der aperiodiciteit wordt gebracht. Doch ook in deze omstandigheden is de uitslag nog niet snel genoeg om den zenuwactiestroom nauwkeurig weer te geven. Wij moeten daarom middelen aanwenden, die ons in staat stellen, om de snelheid van den uitslag te vergrooten, zonder dat de beweging oscillerend wordt. Men zal moeten trachten de demping te vergrooten en kan daartoe met goed gevolg de vroeger door ons beschreven „condensator methode” toepassen.¹⁾

Hier komen wij dus tot eischen, die tegenovergesteld zijn aan die, welke wij bij de boven behandelde methoden herhaaldelijk hebben moeten stellen. Terwijl wij toen het aanbrenge van een luchtledig als een belangrijk voordeel moesten beschouwen, wordt nu juist de vergrooing der demping een dringende behoefte.

Onder deze omstandigheden komt het begrip van de normaalgevoeligheid tot zijn volle recht, en men mag kortweg zeggen, dat van een aantal draden van gelijken geleidingsweerstand die met de grootste normaalgevoeligheid de meest verkieslijke is. Is de uitwendige weerstand in de keten groot ten opzichte van den galvanometerweerstand, dan zal van een aantal draden met gelijke normaalgevoeligheid die met den meesten geleidingsweerstand moeten worden verkozen.

Voor het onderzoek van den actie-stroom eener kikvorschenuw moet dus van de drie meer genoemde draden N°. 14 bovenaan worden gesteld, daar zoowel het bedrag der normaalgevoeligheid als dat van den weerstand van dezen draad de overeenkomstige bedragen der beide andere draden overtreffen.

¹⁾ Zie deze „Verslagen” 13, p. 284. 1904.

Ten slotte mogen nog eenige opmerkingen volgen over de wijze, waarop men de snelheid van den uitslag tot een maximum kan opvoeren. Een groote snelheid wordt in 't algemeen ten koste van de gevoeligheid verkregen. Maar er zijn een aantal onderzoekingen met name het registreeren van geluiden ¹⁾, waarbij de gevoeligheid van den snaargalvanometer zonder bezwaar zeer aanzienlijk mag worden verkleind. Zelfs wanneer de snaar, op gevaar af van te breken, maximaal gespannen wordt én dus haar gevoeligheid tot een minimum is gereduceerd, kunnen betrekkelijk zwakke geluiden het snaarbeeld nog uit het gezichtsveld slaan.

Door snaar N^o. 14 strak te spannen, konden wij haar een oscillerende beweging mededeelen, welker periode $T = 1,41 \sigma$ bedroeg. Wanneer de oscillaties met behulp van de condensatormethode werden gedempt, kon een uitslag worden verkregen, die in den tijd van $0,8 \sigma$ tot stand kwam en dan tot op een fout van 3 % aan de te meten stroomsterkte evenredig was ²⁾. Verlangde men een nauwkeurigheid van 0,3 %, dan moest men zich met een uitslagduur van $2,2 \sigma$ tevreden stellen. De gevoeligheid was hierbij 1 mM. uitslag voor 3×10^{-7} Ampère.

Uit de opgaven van het vorige hoofdstuk blijkt, dat in bovengenoemde omstandigheden de spanning van snaar N^o. 14 nog $3 \times$ kan worden vergroot, voor dat haar draagkracht wordt bereikt. Spant men de snaar dus zoo sterk, dat zij op het punt is te breken, dan zullen haar uitslagen $\sqrt{3}$ -maal sneller worden, zoodat haar oscillaties een periode van $T = 0,815 \sigma$ zullen vertoonen. Praktisch hebben wij echter de spanning van snaar N^o. 14 niet zoo hoog opgevoerd.

De vraag om snellere oscillaties te verkrijgen werd eenvoudig opgelost door van een korteren draad gebruik te maken. Snaar n^o. 20, die boven reeds ter sprake kwam, heeft een diameter van 1μ en is 25 mM. lang. Bij een doelmatige spanning, die zonder gevaar van breken kon worden toegepast, vertoonde zij bij een gevoeligheid van 1 mM. uitslag voor 10^{-5} Ampère oscillaties van een periode van $0,31 \sigma$.

Deze periode komt overeen met die van een toon van 3230 trillingen per seconde, dus ongeveer g^{2s^4} of bijna de hoogsten toon van de gewone piano. Wij moeten hierbij opmerken, dat men de snaar nog verkorten en strakker spannen kan, zoodat men gemakkelijk een veel hoger trillingsgetal kan bereiken, terwijl verder ook niet uit het oog mag worden verloren, dat een snaar met langzamen

¹⁾ Over de methode om geluiden te registreeren, zie deze „Verslagen” XII p. 876. 1904.

²⁾ Zie deze „Verslagen” 13, p. 289, 1904.

uitslag toch zeer nauwkeurig geluidstrillingen van hooge frequentie kan registreeren. Zoo gaven de snaren N^o. 10, 13 en 14 bij zwakke spanningen en langzame uitslagen de geluidsgolven weer van een stemvork van 2380 geheele trillingen per seconde. De geregistreerde periode was ongeveer 24-maal korter dan de eigen periode van den kwartsdraad. Wanneer dezelfde verhouding van perioden geldt bij gebruik van snaar N^o. 20, dan zal deze gemakkelijk in staat moeten zijn, tonen van 77000 geheele trillingen per seconde weer te geven. Bij een latere gelegenheid hoop ik op het registreeren van geluiden nader terug te komen. Ook zal een bespreking van de praktische uitvoering van eenige der boven beschreven proeven en een beschrijving van verschillende modellen van den snaargalvanometer tot een volgende verhandeling moeten worden uitgesteld.

Voor de Bibliotheek worden aangeboden: 1^o. door den Heer WIND namens den Directeur van het Kon. Nederlandsch Meteorologisch Instituut: *a*. Observations Néerlandaises pour les études internationales des nuages en 1896—1897. *b*. Maandijksch Overzicht der weersgesteldheid in Nederland. 1^e Jaargang 1904; 2^o. door den Heer JAN DE VRIES de dissertatie van Mej. A. A. DALHUIZEN: „Over eenige aantallen van kegelsneden, die aan acht voorwaarden voldoen”; 3^o. door den Heer K. MARTIN de dissertatie van den Heer A. L. ZAALBERG: „Differentiaal-meetkundige eigenschappen van stralensstelsels”; 4^o. door den Heer HUGO DE VRIES: „Species and Varieties. Their origin by mutation. Lectures delivered at the University of California by HUGO DE VRIES. Edited by DANIEL TREMBLY MAC DOUGAL”; 5^o. door den Heer A. F. HOLLEMAN de dissertatie van den Heer C. H. SLUITER: „Het mechanisme van eenige organische reacties.”

De vergadering wordt gesloten.

ERRATUM.

Blz. 620, r. 18 v. o. staat: 0.272035, lees: 0.272535.

„ 621, „ 7 „ „ „ die de ster, lees: waarvan de ster der koorde.

„ 623, in het midden „ $m^2 = 1.8.06$, lees: 18.06.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 01309 7332