Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 76

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 76.1. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$\alpha\colon U \longrightarrow V$$

eine Karte (also $U \subseteq M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen). Zeige, dass α ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 76.2. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine Abbildung. Es sei $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung von M. Zeige, dass φ genau dann differenzierbar ist, wenn alle Einschränkungen $\varphi_i = \varphi|_{U_i}$ differenzierbar sind.

Aufgabe 76.3. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und

$$f, g\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbare Funktionen auf M. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Abbildung
$$f \times g\colon M \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, x \longmapsto (f(x), g(x)),$$
ist differenzierbar.
(2) $f + g$ ist differenzierbar.
(3) $f \cdot g$ ist differenzierbar.
(4) Wenn f keine Nullstelle besitzt, so ist auch f^{-1} differenzierbar.

Aufgabe 76.4. Es seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dies einen Ringhomomorphismus

$$\varphi^*\colon C^1(N, \mathbb{R}) \longrightarrow C^1(M, \mathbb{R}),\, f \longmapsto f \circ \varphi,$$

induziert.

Aufgabe 76.5. Zeige, dass zu $m \leq n$ die Einbettung des Unterraumes $\mathbb{R}^m$ in den $\mathbb{R}^n$, die durch $(x_1, \ldots, x_m) \mapsto (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ gegeben ist, beliebig oft differenzierbar ist.

Aufgabe 76.6. Zeige, dass die offene Zylinderoberfläche $S^1 \times]0,1[$ zu $S^1 \times \mathbb{R}$, zur punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und zu $S^2 \setminus \{N, S\}$ diffeomorph ist.

Aufgabe 76.7. Es sei $]a, b[$ ein offenes Intervall und

$$f\colon\ ]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Es sei M die äußere Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers. Zeige, dass diese Menge eine zu einem offenen Zylinder diffeomorphe Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 76.8. Zeige, dass eine Ellipsoidoberfläche und die Einheitssphäre C^∞-diffeomorph sind.

Aufgaben zum Abgeben

In der folgenden Aufgabe interpretiere man $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 76.9. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C},\ (z, w) \longmapsto zw.$$

Für welche Punkte $u \in \mathbb{C}$ ist die Faser über u eine Mannigfaltigkeit? Man gebe jeweils eine möglichst einfache Beschreibung des Diffeomorphietyps.

Aufgabe 76.10. (6 Punkte)

Es seien zwei Punkte P und Q auf der Einheitssphäre gegeben. Zeige, dass es einen Diffeomorphismus der Sphäre in sich gibt, der P in Q überführt.

Aufgabe 76.11. (4 (1+1+2) Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zu jeder offenen Teilmenge $U \subseteq M$ betrachten wir die Menge $C^1(U, \mathbb{R})$ der differenzierbaren Funktionen auf U. Es sei $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung.

(1) Zeige, dass zu $V \subseteq U$ offen und $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ auch die Einschränkung $f|_V$ zu $C^1(V, \mathbb{R})$ gehört.
(2) Sei $f \in C^1(M, \mathbb{R})$. Zeige, dass $f = 0$ genau dann ist, wenn sämtliche Einschränkungen $f|_{U_i} = 0$ sind.

(3) Es sei eine Familie $f_i \in C^1(U_i, \mathbb{R})$ von Funktionen gegeben, die die „Verträglichkeitsbedingung“ $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ für alle i, j erfüllen. Zeige, dass es ein $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ gibt mit $f|_{U_i} = f_i$ für alle i.

Aufgabe 76.12. (5 Punkte)

Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die mindestens zwei Elemente besitze. Zeige, dass es differenzierbare Funktionen

$$f, g \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt mit $f, g \neq 0$, aber $fg = 0$.