Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 16

Lokal freie Garben

Definition 16.1. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{F}$ auf einem beringten Raum X heißt *lokal frei* vom *Rang* r, wenn es eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und $\mathcal{O}_{U_i}$-Modulisomorphismen $\mathcal{F}|_{U_i} \cong (\mathcal{O}_{U_i})^r$ für jedes $i \in I$ gibt.

Für $r = 1$ erhält man die invertierbaren Garben, diese sind einfach die lokal freien Garben vom Rang r. Die einfachsten lokal freien Garben sind die *freien Garben* ist $\mathcal{O}_X^r$ (zu $r \in \mathbb{N}$). Gemäß der Definition ist eine lokal freie Garbe lokal, also auf einer Überdeckung aus offenen Mengen, frei. Lokal lassen sich also freie Garben und lokal freie Garben nicht unterscheiden. Lokal freie Garben reflektieren daher globale Eigenschaften des beringten Raumes X.

Wir betrachten lokal freie Garben auf Schemata, wo sich enge Beziehungen zu projektiven und flachen Moduln ergeben. Lokal freie Garben sind insbesondere kohärente Moduln. Über einem lokalen Ring sind alle lokal freien Garben frei, da das Spektrum nur einen abgeschlossenen Punkt enthält und dieser nur die Gesamtmenge als offene Umgebung besitzt. Wenn man jedoch zu einem lokalen Ring das punktierte Spektrum $U = D(\mathfrak{m}) = \operatorname{Spek}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ betrachtet, so gibt es darauf in der Regel viele nichttriviale (nichtfreie) lokal freie Garben, die Eigenschaften des lokalen Ringes (der Singularität) widerspiegeln. Da jedes Schema durch affine Schemata überdeckt wird, muss man insbesondere zuerst die lokal freien Garben auf einem affinen Schema verstehen.

Satz 16.2. *Sei R ein kommutativer noetherscher Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

1. *Die Lokalisierungen $M_{\mathfrak{p}}$ sind frei vom Rang r für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(R)$.*
2. *Die Lokalisierungen $M_{\mathfrak{m}}$sind frei vom Rang r für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R.*
3. *Es gibt Elemente $f_1, \ldots, f_k \in R$, die das Einheitsideal erzeugen derart, dass die Nenneraufnahmen M_{f_j} für jedes $j = 1, \ldots, k$. frei vom Rang r sind.*
4. *Die zu M gehörige kohärente Garbe $\widetilde{M}$ auf $\operatorname{Spek}(R)$ ist lokal frei vom Rang r.*

Beweis. (1) ⇒ (2). Dies ist eine Spezialisierung. (2) ⇒ (3). Wir fixieren ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$. Nach Voraussetzung gibt es einen $R_\mathfrak{m}$-Modulisomorphismus

$$\varphi\colon (R_\mathfrak{m})^r \longrightarrow M_\mathfrak{m}.$$

Wir schreiben das Bild des i-ten Standardvektors e_i als

$$\varphi(e_i) = \frac{m_i}{g_i}$$

mit $m_i \in M$ und $g_i \in R \setminus \mathfrak{m}$. Es sei $g = g_1 \cdots g_r$ das Produkt der Nenner. Wir betrachten die Situation über $D(g)$. Der Isomorphismus φ ist über $D(g)$ (auf R_g) definiert, d.h. wir haben einen R_g-Modulhomomorphismus

$$\psi\colon (R_g)^r \longrightarrow M_g,$$

der in der Lokalisierung an $\mathfrak{m}$ den Isomorphismus φ induziert. Allerdings ist ψ im Allgemeinen kein Isomorphismus. Es sei $v_1, \ldots, v_s$ ein Erzeugendensystem für den Modul M. Da ψ auf $R_\mathfrak{m}$ eine Surjektion induziert, gibt es Elemente $u_j = \frac{a_j}{h_j} \in (R_\mathfrak{m})^r$, die nach v_j abbilden. Die Nenner h_j gehören nicht zu $\mathfrak{m}$, daher können wir g durch $h = gh_1 \cdots h_s$ ersetzen und erhalten

$$\psi\colon (R_h)^r \longrightarrow M_h$$

mit Elementen $u_j = (R_h)^r$ derart, dass die $\psi(u_j)$ in $M_\mathfrak{m}$ auf die Erzeuger v_j einschränken. Dies bedeutet, dass es Elemente $p_j \notin \mathfrak{m}$ mit $p_j\psi(u_j) = p_jv_j$ in M_h gibt. Wenn man h durch $p = hp_1 \cdots p_s$ ersetzt, erhält man, dass ψ ebenfalls surjektiv ist. Es sei N der Kern von (diesem neuen) ψ. Da φ injektiv ist, gilt $N_\mathfrak{m} = 0$. Da R noethersch ist, ist N nach Lemma 20.8 (Kommutative Algebra) endlich erzeugt und so gibt es wiederum ein Element f, $f \notin \mathfrak{m}$, mit $N_f = 0$. Indem wir weiter verkleinern erhalten wir einen Isomorphismus $\psi\colon (R_f)^r \to M_f$ für ein f, $f \notin \mathfrak{m}$.

Wir wissen also, dass es zu jedem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ eine offene Umgebung $\mathfrak{m} \in D(f_\mathfrak{m})$ derart gibt, dass $M_{f_\mathfrak{m}}$ frei vom Rang r ist. Daher enthält

$$\bigcup_{\mathfrak{m} \text{ maximal ideal}} D(f_\mathfrak{m})$$

alle maximalen Ideale und auch alle Primideale, es liegt also eine offene Überdeckung von Spek (R) vor. Daher ist nach Proposition 8.4 (4) $(f_\mathfrak{m} : \mathfrak{m} \text{ maximal})$ das Einheitsideal, und dieses wird bereits von endlich vielen der $f_\mathfrak{m}$ erzeugt. (3) ⇒ (4). Da die Elemente das Einheitsideal erzeugen, überdecken die zugehörigen offenen Mengen $D(f_j)$, $j = 1, \ldots, k$, das Spektrum Spek (R). Da M_{f_j} freie R_{f_j}-Moduln vom Rang r sind, liegen $\mathcal{O}_X|_{D(f_j)}$-Modulisomorphismen $\widetilde{M}|_{D(f_j)} \cong \widetilde{(R_{f_j})^r} \cong \mathcal{O}^r_{D(f_j)}$ vor. Daher ist $\widetilde{M}$ lokal frei. (4) ⇒ (1). Sei $\mathfrak{p} \in$ Spek (R) ein Primideal. Die lokale Freiheit bedeutet, dass wir eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ derart haben, dass die $\widetilde{M}|_{U_i}$ frei vom Rang r sind. Somit gibt es einen Index i mit $\mathfrak{p} \in U_i$. Indem wir zu einer eventuell kleineren offenen Umgebung von $\mathfrak{p}$ übergehen können wir $U_i = D(f)$ mit $f \notin \mathfrak{p}$ übergehen. Dabei gilt, dass $\widetilde{M_f} \cong \widetilde{M}|_{D(f)}$ frei vom Rang r ist. Doch dann ist erst recht die Lokalisierung $M_{\mathfrak{p}}$ frei vom Rang r. □

Das Beispiel aus Aufgabe 14.7 zeigt, dass es bei einem nichtnoetherschen Ring R einem Modul M mit $M_{\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}$ geben kann, ohne dass diese Isomorphie auf eine offene Umgebung fortsetzbar ist.

Wir setzen lokal freie Moduln in Bezug zu projektiven Moduln.

Definition 16.3. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Der Modul M heißt *projektiv*, wenn es zu jedem surjektiven R-Modulhomomorphismus

$$\theta\colon\, A \longrightarrow B$$

und jedem Modulhomomorphismus

$$\varphi\colon\, M \longrightarrow B$$

einen Modulhomomorphismus

$$\psi\colon\, M \longrightarrow A$$

mit

$$\varphi = \theta \circ \psi$$

gibt.

Ein Modul ist genau dann projektiv, wenn er ein direkter Summand von einem freien Modul ist.

Lemma 16.4. *Es sei R ein kommutativer lokaler Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M genau dann frei, wenn M ein projektiver Modul ist.*

Beweis. Dass freie Moduln projektiv sind wurde in Lemma 30.2 (Kommutative Algebra) bewiesen. Sei also M projektiv. Es sei $m_1, \ldots, m_n$ ein minimales Erzeugendensystem von M und sei

$$p\colon\, R^n \longrightarrow M$$

der zugehörige surjektive Modulhomomorphismus. Wegen der Minimalität ist

$$(R/\mathfrak{m})^n \longrightarrow M/\mathfrak{m}M$$

eine $R/\mathfrak{m}$-lineare bijektive Abbildung. Wegen der Projektivität gibt es einen Modulhomomorphismus $i\colon\, M \to R^n$ mit $p \circ i = \mathrm{Id}_M$. Dann ist

$$R^n \cong M \oplus N$$

mit $N = \operatorname{kern} p$ und wobei wir M mit $i(M)$ identifizieren. Wir betrachten nun

$$R^n \xrightarrow{\cong} M \oplus N \longrightarrow M$$

und die induzierten $R/\mathfrak{m}$-linearen Abbildungen

$$(R/\mathfrak{m})^n \longrightarrow M/\mathfrak{m}M \oplus N/\mathfrak{m}N \longrightarrow M/\mathfrak{m}M\,.$$

Hierbei ist sowohl die Abbildung links als auch die Gesamtabbildung bijektiv. Daher muss $N/\mathfrak{m}N = 0$ sein. Aus Satz 21.3 (Kommutative Algebra) folgt $N = 0$ und somit ist $R^n = M$ frei. $\square$

Lemma 16.5. *Es sei R ein noetherscher kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M genau dann lokal frei, wenn M ein projektiver Modul ist.*

Beweis. Die eine Richtung folgt direkt aus Lemma 16.4 unter Berücksichtigung von Aufgabe 16.16. Zum Beweis der Umkehrung sei $p\colon L \to M$ ein surjektiver Modulhomomorphismus mit einem endlich erzeugten freien R-Modul L. Es ist zu zeigen, dass es einen Homomorphismus $i\colon M \to L$ mit $p \circ i = \mathrm{Id}_M$ gibt. Dies ist insbesondere dann gesichert, wenn man zeigen kann, dass der natürliche Homomorphismus

$$\mathrm{Hom}_R\,(M, L) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\,(M, M),\ \varphi \longmapsto p \circ \varphi,$$

surjektiv ist, da ja dann insbesondere die Identität getroffen wird. Nach Satz Anhang 1.4 kann man die Surjektivität lokal testen. Für die Homomorphismenmoduln gilt unter den gegebenen Endlichkeitsvoraussetzungen

$$(\mathrm{Hom}_R\,(M, L))_{\mathfrak{p}} = \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}\,(M_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}).$$

Die Surjektivität von

$$\mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}\,(M_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}\,(M_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}})$$

folgt aber für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ aus der Freiheit von $M_{\mathfrak{p}}$ und Lemma 30.2 (Kommutative Algebra). $\square$

Es gilt ferner der folgende Satz, den wir nicht beweisen.

Satz 16.6. *Es sei R ein kommutativer noetherscher Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *M ist lokal frei.*
(2) *M ist ein projektiver Modul.*
(3) *M ist ein flacher Modul.*

Mit dem folgenden Satz erhält man viele lokal freie Garben, die im Allgemeinen nicht trivial sind.

Satz 16.7. *Sei X ein noethersches Schema und sei*

$$\theta\colon \mathcal{F} \longrightarrow G$$

ein surjektiver Garbenhomomorphismus zwischen lokal freien Garben auf X. Dann ist der Kern von θ ebenfalls lokal frei.

Beweis. Da die lokale Freiheit eine lokale Eigenschaft ist, können wir direkt annehmen, dass

$$X = \operatorname{Spek}(R)$$

ein affines Schema zu einem noetherschen Ring R ist und (durch weitere Verkleinerung der offenen Menge) dass ein surjektiver Modulhomomorphismus $\theta \colon R^r \to R^s$ vorliegt. Nach Satz 20.11 (Kommutative Algebra) gibt es ein $\varphi \colon R^s \to R^r$ mit

$$\theta \circ \varphi = \mathrm{Id}_{R^s} .$$

Somit gibt es eine direkte Summenzerlegung

$$R^r = \operatorname{kern} \theta \oplus R^s$$

und θ ist die Projektion auf den Summanden R^s. Damit ist $\operatorname{kern} \theta$ nach Lemma 30.3 (Kommutative Algebra) ein projektiver R-Modul und nach Lemma 16.5 lokal frei. □

Bemerkung 16.8. Zu Elementen $f_1, \ldots, f_n \in R$ in einem kommutativen Ring R gehört der Modulhomomorphismus $R^n \to R$, $e_i \mapsto f_i$. Das Bild ist das von den f_i erzeugte Ideal, insbesondere ist diese Abbildung nur dann surjektiv, wenn die f_i das Einheitsideal erzeugen. Der zugehörige Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X^n \to \mathcal{O}_X$ ist im Allgemeinen auch nicht surjektiv und der Kern ist im Allgemeinen nicht lokal frei. Wenn man allerdings die Einschränkung dieses Garbenhomomorphismus auf die offene Teilmenge $U = \bigcup_{i=1}^n D(f_i)$ betrachtet, also $\mathcal{O}_U^n \to \mathcal{O}_U$, so erhält man einen surjektiven Garbenhomomorphismus, da auf den einzelnen $D(f_i)$ wegen $\frac{1}{f_i} e_i \mapsto 1$ ein surjektiver Garbenhomomorphismus vorliegt. Der Kern ist dann nach Satz 16.7 eine lokal freie Garbe auf dem quasiaffinen Schema U, es wird mit $\operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n)$ bezeichnet, man sprich von einer *Syzygiengarbe* oder *Kerngarbe*. Wenn R ein lokaler Ring ist und die f_i ein Ideal erzeugen, dass zum maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ primär ist (d.h. die f_i schneiden geometrisch den abgeschlossenen Punkt heraus), so ist die Syzygiengarbe eine lokal freie Garbe auf dem punktierten Spektrum $D(\mathfrak{m})$.

Beispiel 16.9. Die Variablen $X_1, \ldots, X_n \in K[X_1, \ldots, X_n] = R$ definieren das maximale Ideal $(X_1, \ldots, X_n)$ und die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow R^n \longrightarrow (X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow 0$$

von R-Moduln, wobei der i-te Standardvektor e_i auf X_i geschickt wird. Dies induziert gemäß Lemma 14.9 eine kurze exakte Sequenz von quasikohärenten Moduln

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(\widetilde{X_1, \ldots}, X_n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}_K^n}^n \longrightarrow (X_1, \widetilde{\ldots,} X_n) \longrightarrow 0$$

auf dem affinen Raum $\mathbb{A}_K^n$. In der Mitte steht eine freie Garbe, links und rechts stehen (außer bei kleinen n) keine lokal freien Garben. Wenn man diese Sequenz aber auf das punktierte Spektrum

$$U = D(X_1, \ldots, X_n) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

einschränkt, so wird rechts nach Aufgabe 14.1 das maximale Ideal zur Strukturgarbe und somit liegt die Situation

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \mathcal{O}_U^n \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow 0$$

aus Bemerkung 15.8 vor, wobei jetzt links die lokal freie Syzygiengarbe steht. Für $n = 3$ ist dies die Garbenversion zu Beispiel 1.2.

Determinantengarben

Definition 16.10. Zu einer lokal freien Garbe $\mathcal{G}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ vom Rang r nennt man die Vergarbung der Prägarbe

$$U \mapsto \bigwedge^r \Gamma(U, \mathcal{G})$$

die *Determinantengarbe* von $\mathcal{G}$. Sie wird mit $\operatorname{Det} \mathcal{G}$ bezeichnet.

Satz 16.11. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von lokal freien Garben auf X. Dann gibt es eine kanonische Isomorphie

$$\operatorname{Det} G \cong \operatorname{Det} F \otimes \operatorname{Det} H.$$

Beweis. Es sei r der Rang von $\mathcal{F}$ und s der Rang von $\mathcal{H}$. Wir betrachten offene Teilmengen $U \subseteq X$, auf denen die drei beteiligten Garben trivialisieren und worauf die Garbensurjektion $\mathcal{F} \to \mathcal{H}$ einen Schnitt besitzt. Solche offenen Mengen überdecken X. Es liegt dann die Situation

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_U^r \longrightarrow \mathcal{O}_U^{r+s} \longrightarrow \mathcal{O}_U^s \longrightarrow 0$$

vor und sei

$$\theta \colon \mathcal{O}_U^s \longrightarrow \mathcal{O}_U^{r+s}$$

ein Schnitt. Wir definieren

$$\Psi \colon \bigwedge^r \mathcal{O}_U^r \times \bigwedge^s \mathcal{O}_U^s \longrightarrow \bigwedge^{r+s} \mathcal{O}_U^{r+s}$$

durch

$$\Psi(u_1 \wedge \ldots \wedge u_r, w_1 \wedge \ldots \wedge w_s) := u_1 \wedge \ldots \wedge u_r \wedge \theta(w_1) \wedge \ldots \wedge \theta(w_s).$$

Diese Abbildung ist unabhängig vom gewählten Schnitt θ. Für einen weiteren Schnitt θ' liegt ja $\theta - \theta'$ in $\mathcal{F}$. Doch dann ist

$$\begin{aligned} & u_1 \wedge \ldots \wedge u_r \wedge \theta'(w_1) \wedge \ldots \wedge \theta'(w_s) \\ = \; & u_1 \wedge \ldots \wedge u_r \wedge (\theta(w_1) + u_1') \wedge \ldots \wedge (\theta(w_s) + u_s') \\ = \; & u_1 \wedge \ldots \wedge u_r \wedge \theta(w_1) \wedge \ldots \wedge \theta(w_s), \end{aligned}$$

da ja stets eine lineare Abhängigkeit zwischen den $r+1$ Vektoren $u_1, \ldots, u_r, u'_j$ vorliegt und daher die entsprechenden Dachprodukte 0 sind. Die Abbildung Ψ ist bilinear und definiert daher eine lineare Abbildung

$$\tilde{\Psi}\colon \ \bigwedge^r \mathcal{O}_U^r \otimes \bigwedge^s \mathcal{O}_U^s \longrightarrow \bigwedge^{r+s} \mathcal{O}_U^{r+s}.$$

Da die Abbildungen kanonisch sind, induzierten sie auf kleineren offenen Teilmengen stets die gleiche Abbildung. Daher verkleben sie nach Korollar 4.10 zu einem Garbenhomomorphismus

$$\bigwedge^r \mathcal{F} \otimes \bigwedge^s \mathcal{H} \longrightarrow \bigwedge^{r+s} \mathcal{G}.$$

Dieser ist lokal aufgrund der expliziten Beschreibung ein Isomorphismus, also nach Lemma 4.6 auch global ein Isomorphismus. □

Korollar 16.12. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei*

$$\mathcal{F} \,=\, \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_r$$

eine direkte Summe von invertierbaren Garben. Dann ist

$$\operatorname{Det} F \,\cong\, \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_r.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.22. □

Abbildungsverzeichnis