微積概要

國立中山大學理學院院長
何衍璿
國立中山大學數學系助教
李銘槃 苗文綏
合編

國立編譯館

序

慨自歐風東漸,國人乃銳志科學之提倡.年來講求研究,致力未遑.惟實利之見太深,祇顧實用,忽略原理.積習相沿,遂致多數學子,徒知倣效,眞諦莫明,模糊强記,不能推究.長此因循,繩人步武,文化邁進,永不可期.言之良堪浩歎.同人等有見及此,輒思有所矯正,爰編微積概要一書,內容採擇,務求精審.原理闡發,必期詳明.全書共分十二章,章分節,以I, II, III,……記其序,節分目,以1, 2, 3,……識其別.提綱挈領,俾讀者易於明瞭.代數幾何二門,於此亦有相當之顧及,故可作爲初等微積學與普通數學之教本或參考書籍.惟倉卒付梓,舛誤深恐不免.尙望海內賢達,進而匡正之,幸甚.

民國廿四年春

編者識於國立中山大學理學院

目　錄

第一章　函數極限及連續

第二章　級　數

第三章 引數及微分

第四章 原函數及積分

第五章　函數展成級數及整級數之性質

第六章 未定形式

第七章 函數之變值

第八章　多變數之函數

第九章 積分方法

第十章　平面幾何應用

第十一章　二重積分及三重積分

第十二章　微分方程式概要

第一章

函數,極限及連續

I. 大綱

1. 函數(Function).

設有兩變數量,其中一值視其他之值而變,則謂此中一數量爲其他數量之函數.如設其一數量任意變更,則此數量名爲自變數(Independent Variable).茲以x表自變數,而設其由一數a變至一數$b(a<b)$,且經過a, b中一切之值.又令y爲他一變數,其與x之關係如下:當x爲a, b中之一值或等於a, b時,y有一確定(Determined)之值與x之值對應,則謂在間隔(Interval)(a, b)內,y爲x之函數,而以方程式$y=f(x)$表此二數之相關.

例——無論x爲何值,多項式$f(x)$常爲x之函數.在間隔$(-1, +1)$內,$\sqrt{1-x^2}$爲x之函數.

2. 極限(Limit).

極限之意義如下:

(其一) 設在間隔(a, b)內,$f(x)$爲x之函數,x_0爲間

隔內之一值.如謂函數$f(x)$於$x=x_0$時之極限爲A,意卽任與一正數ε,可得一正數α與之對應,使不等式$|h|<\alpha$產生不等式$|f(x_0+h)-A|<\varepsilon$〔設x_0+h屬於間隔(a, b)之值〕.

其二) 設x之絕對值大於一正數a時,$f(x)$爲x之函數.如謂函數$f(x)$於$x=+\infty$時之極限爲A,意卽任與一正數ε,可得一正數B與之對應,使不等式$|x|>B$產生不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$.此定義可用於$x=-\infty$時之情形.

例——當x爲無窮時,函數$\frac{1}{x}$之極限爲零.蓋以不等式$|x|>\frac{1}{\varepsilon}$產生不等式$\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon$,卽可令$B=\frac{1}{\varepsilon}$故也.

(其三) 除$x=x_0$外,設在間隔(a, b)內,$f(x)$爲x之函數.如謂函數$f(x)$於$x=x_0$時爲無窮,意卽任與一正數A,可得一正數α與之對應,使不等式$|h|<\alpha$產生不等式$|f(x_0+h)|>A$.

例——當$x=1$時,函數$\frac{1}{x-1}$爲無窮.蓋因除$x=1$外,無論x爲何值,$\frac{1}{x-1}$均爲x之函數.若令$x=1+h$,則不等式$|h|<\frac{1}{A}$產生不等式$\left|\frac{1}{h}\right|>A$,卽可令$\alpha=\frac{1}{A}$故也.

(其四) 設x之絕對值大於一正數a時,$f(x)$爲x之函數.如謂函數$f(x)$於$x=+\infty$時爲無窮,意卽任與一正

數 A，可得一正數 B 與之對應，使不等式 $|x|>B$ 產生 $|f(x)|>A$. 此定義可用於 $x=-\infty$ 時之情形.

[備考]——在普通情形，數量之變更者，其極限難以確定，下列二命題，吾人於本書中，承認其爲自明之理，特述於此，以資應用.

(一) 永不減少之變數量恆小於一常數量 L 者，則趨近於一極限 l. 此極限小於 L，或最多等於 L.

(二) 依同理，永不增大之變數量，恆大於一常數量 L' 者，則趨近於一極限 l'. 此極限大於 L'，至小亦等於 L'.

3. 不含常數項之多項式 (Polynomial):

設有不含常數項之多項式

$$f(x)\equiv a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_{m-1}x,$$

及已與一正數 ε. 無論此數之值爲如何小，常可得一正數 α，俾當 $|x|<\alpha$ 時，即有 $|f(x)|<\varepsilon$ 之關係. 蓋令 x 之值爲 a，$|a|=\rho$，$|a_i|=A_i$ $(i=0,1,\cdots\cdots,m-1)$，則 $|f(a)|\leqq A_0\rho^m+A_1\rho^{m-1}+\cdots\cdots+A_{m-1}\rho$. 欲 $|f(a)|<\varepsilon$，使 $A_0\rho^m<\frac{\varepsilon}{m}$，$A_1\rho^{m-1}<\frac{\varepsilon}{m}$，$\cdots$，$A_{m-1}\rho<\frac{\varepsilon}{m}$ 足矣. 此種不等式可書爲 $\rho<\sqrt[m]{\frac{\varepsilon}{mA_0}}$，$\rho<\sqrt[m-1]{\frac{\varepsilon}{mA_1}}$，$\cdots$，$\rho<\frac{\varepsilon}{mA_{m-1}}$. 故令 α 表上列不等式右邊各項之最小者，則當 $\rho=|a|<\alpha$ 時，$|f(a)|<\varepsilon$，是即 $|x|<\alpha$ 時，$|f(x)|<\varepsilon$ 也.

4. 極限之定理.

定理一——當 $x=x_0$ 時,設數個函數 $f(x), \phi(x), \psi(x), \cdots$ 之極限依次爲 $A, B, C, \cdots\cdots$,則各函數之代數和之極限等於各函數之極限之代數和.

例如 $f(x_0)+\phi(x_0)-\psi(x_0)\cdots$ 之極限爲 $A+B-C\cdots$. 即任與一正數 ε,可得一正數 α 與之對應,使不等式 $|h|<\alpha$ 產生不等式 $|f(x_0+h)+\phi(x_0+h)-\psi(x_0+h)\cdots-(A+B-C\cdots)|<\varepsilon$.

蓋因上列不等式之左邊小於 $S=|f(x_0+h)-A|+|\phi(x_0+h)-B|+|\psi(x_0+h)-C|+\cdots$,而 $f(x_0), \phi(x_0), \psi(x_0)\cdots$ 之極限依次爲 $A, B, C, \cdots$,故可得一正數 α,使不等式 $|h|<\alpha$ 產生不等式 $|f(x_0+h)-A|<\frac{\varepsilon}{n}, |\phi(x_0+h)-B|<\frac{\varepsilon}{n}, \cdots$ (n 表函數之個數),即有 $S<\varepsilon$ 之關係也.

定理二——當 $x=x_0$ 時,設數個函數 $f(x), \phi(x), \psi(x), \cdots$ 之極限依次爲 $A, B, C, \cdots\cdots$,則各函數之積之極限等於各函數之極限之積.

蓋任與一正數 ε,可得一正數 α 與之對應,使不等式 $|h|<\alpha$ 產生不等式 $|f(x_0+h)\phi(x_0+h)\psi(x_0+h)\cdots-ABC\cdots|<\varepsilon$. 玆證之如下:

令 $f(x_0+h)-A=a, \phi(x_0+h)-B=b, \psi(x_0+h)-C=c, \cdots$,因

$x=x_0$ 時，$f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)\cdots$ 之極限依次爲 A, B, C, $\cdots$, 故任與一正數 ε', 可得一正數 α 與之對應，使不等式 $|h|<\alpha$ 產生不等式 $|a|<\varepsilon'$, $|b|<\varepsilon'$, $|c|<\varepsilon'$, $\cdots$. 惟 $f(x_0+h)\,\phi(x_0+h)\times\psi(x_0+h)\cdots-ABC\cdots=(A+a)(B+b)(C+c)\cdots-ABC\cdots$, 而上式右邊爲含 a, b, c, $\cdots$ 各項之和. 今將 a, b, c, $\cdots$ 易爲 ε', 而 A, B, C, $\cdots$ 各數則以絕對值代之，卽有 $|f(x_0+h)\,\phi(x_0+h)\times\psi(x_0+h)\cdots-ABC\cdots|<P\varepsilon'+Q\varepsilon'^2+\cdots+R\varepsilon'^n$, 就中 n 表函數之個數，P, Q, R, $\cdots$ 表正數. 乃依前目選定 ε' 之值，使上列不等式之右邊小於 ε, 遂得定理之證矣.

定理三——當 $x=x_0$ 時，函數 $f(x)$, $\phi(x)$ 之極限爲 A, B $(B\neq 0)$, 則商 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ 之極限爲 $\dfrac{A}{B}$.

蓋任與一正數 ε, 可得一正數 α 與之對應，使不等式 $|h|<\alpha$ 產生不等式 $\left|\dfrac{f(x_0+h)}{\phi(x_0+h)}-\dfrac{A}{B}\right|<\varepsilon$. 茲證之於下：

令 $f(x_0+h)=A+a$, $\phi(x_0+h)=B+b$,

則
$$\frac{f(x_0+h)}{\phi(x_0+h)}-\frac{A}{B}=\frac{A+a}{B+b}-\frac{A}{B}=\frac{Ba-Ab}{B(B+b)}.$$

又令 A', B', 表 A, B 之絕對值，且任取一正數 ε' 小於 B' 者，則可得一正數 α, 使 $|h|<\alpha$ 產生 $|a|<\varepsilon'$, $|b|<\varepsilon'$.

故
$$\left|\frac{f(x_0+h)}{\phi(x_0+h)}-\frac{A}{B}\right|<\frac{\varepsilon'(A'+B')}{B'(B'-\varepsilon')}.$$

乃定 ε' 之值，使 $\dfrac{\varepsilon'(A'+B')}{B'(B'-\varepsilon')}<\varepsilon$,

或 $\dfrac{\varepsilon'(A'+B'+B'\varepsilon)-\varepsilon B'^2}{B'(B'-\varepsilon')}<0$, 即取 $\varepsilon'<\dfrac{\varepsilon B'^2}{A'+B'+B'\varepsilon}$ 足矣

[備考]——當 $x=x_0$ 時,設 $f(x)$ 之極限為 $A\neq 0$, 而 $\phi(x)$ 之極限為 $B=0$, 則商 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ 於 $x=x_0$ 時為無窮.此證委諸讀者

5. 例.

當 x 為無窮時,試求兩多項式之商.

$\dfrac{f(x)}{\phi(x)}=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$ 之極限.

上式可書為 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}=x^{m-n}\cdot\dfrac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_m}{x^m}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+\cdots+\dfrac{b_n}{x^n}}$.

當 x 為無窮時,$\dfrac{1}{x}$ 之極限為零,而 x^{m-n} 之系數之極限為 $\dfrac{a_0}{b_0}$. 故有下列三情形:

(其一)　$m>n$, 則 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ 為無窮,

(其二)　$m=n$, 則 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ 之極限為 $\dfrac{a_0}{b_0}$,

(其三)　$m<n$, 則 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ 之極限為零.

6. 連續 (Continuity).

設在間隔 (a, b) 內, $y=f(x)$ 為 x 之函數,又設 x_0 屬於

間隔 (a,b) 之一值.如謂函數 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 時爲連續,意即任與一正數 ε,可得一正數 α 與之對應,使不等式 $|h|<\alpha$ 產生不等式 $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$ [設 x_0+h 屬於間隔 (a,b) 之值].換言之,謂函數 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 時爲連續,卽 $f(x_0+h)$ 之極限爲 $f(x_0)$ 也(無論 h 趨近於零之情形如何).

設 x 爲間隔 (a,b) 之任何值 $(a<b)$,函數 $f(x)$ 常爲連續,且當 h 由任意之正值而趨近於零,$f(a+h)$ 之極限爲 $f(a)$,而 $f(b-h)$ 之極限爲 $f(b)$,則謂 $f(x)$ 在間隔 (a,b) 內爲連續.

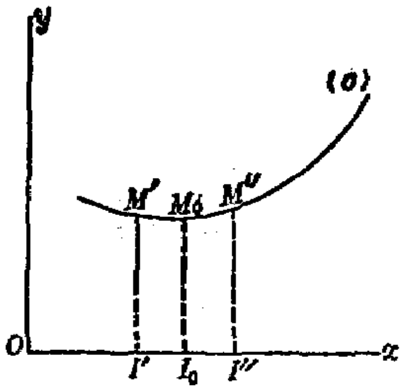
例——無論 x 爲何值,多項式 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m$ 恆爲連續,蓋因 $f(x+h)-f(x)$ 爲不含常數項之多項式(視 h 爲變數).故令 $|h|<\alpha$,卽有 $|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$ 之關係也.

由第4目更得結果如下:

設在某間隔內,數個函數爲連續,則各函數之代數和與各函數之積亦連續於此間隔內.設在某間隔內,$f(x)$ 及 $\phi(x)$ 兩函數爲連續,且 $\phi(x)$ 之值不爲零,則商 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ 亦連續於此間隔內.

7.　幾何釋義.

取位標軸 oxy (圖 1),則 $y=f(x)$ 代表一曲線 (c).由 ox



(圖 1)

軸上之三點$I_0(x_0,o)$, $I'(x_0-h,o)$, $I''(x_0+h,o)$作直線I_0M_0, $I'M'$, $I''M''$平行於oy軸,交(c)於$M_0(x_0,y_0)$, M', M''. 在線段$I'I''$內任取一點I,由I作直線IM平行於oy軸,截(c)於$M(x,y)$點.如謂函數$f(x)$於$x=x_0$爲連續,卽謂任與一正數ε,可得I', I''兩點與之對應,俾當I在線段$I'I''$內時,(M在$M'M''$弧之內)有$|y-y_0|<\varepsilon$之關係.

若已與之値ε愈小,則線段$I'I''$之選定亦愈短.當I趨近於I_0,則$y-y_0$趨近於零.

8. 無限項數列(Infinite Sequence).

令一數a_n對應於一正整數n,則可視a_n爲正整數n之函數.如謂a_n於$n=+\infty$時之極限爲A,意卽任與一正數ε,可得一正整數P與之對應,使n大於P時,卽有$|a_n-A|<\varepsilon$之關係. $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$名爲無限項數列,其極限則爲$A$.

定理——設無限項數列(1) $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n, \cdots\cdots$之極限爲$A$,且函數$f(x)$於$x=A$時爲連續,則無限項數列$f(a_1)$, $f(a_2), \cdots\cdots f(a_n), \cdots\cdots$之極限爲$f(A)$.

蓋任與一正數 ε, 可得一正整數 P 與之對應,使 n 大於 P 時,即有 $|f(a_n)-f(A)|<\varepsilon$ 之關係.茲證之於下:

因 $f(x)$ 於 $x=A$ 時爲連續,故任與一正數 ε,可得一正數 α 與之對應,使 $|h|<\alpha$ 產生 $|f(A+h)-f(A)|<\varepsilon$. 又因數列(1)之極限爲 A,故任與一正數 α,可得一正整數 P 與之對應,使 n 大於 P 時,即有 $|a_n-A|<\alpha$ 之關係.綜上兩因,如令 $h=a_n-A$, 即 $a_n=A+h$, 而 $|h|<\alpha$, 故 $|f(a_n)-f(A)|<\varepsilon$, $(n>P)$.

9. 數集之高低界.

集之觀念,人所共知,毋庸詮釋.而數之集曰數集 (Aggregate of Numbers). 如正數集,有理數集,小於 1 之數集等,即其例也.苟集中之數,咸小於一數 N,則謂該集有高界 (Upper Bound). 如集中之數,咸大於一數 N,則謂該集有低界 (Lower Bound). 故負整數集有高界而無低界,正整數集有低界而無高界,正負整數之數集無高低界,而介 0 與 1 間之有理數集,則高低界俱備者也.斯義已申,數集之界當進究之如次.

設有具高界之數集 (A) 焉.乃以 (A) 爲準,將一切之數分爲兩類.如 (A) 中有數大於某數者,則謂某數屬於第一類.如 (A) 中之數無大於某數者,則謂某數屬於第

二類.以(A)為有高界也,兩類之數必皆存在,且第一類之數必小於第二類之數.茲令α為第一類之一數,β為第二類之一數,則(A)必有數在間隔(α, β)內,但無一數能大於β.而等於$\frac{\alpha+\beta}{2}$之數γ,或屬於第一類,或屬於第二類.乃作一新間隔以替代間隔(α, β).如γ屬於第一類,則以(γ, β)代之.如γ屬於第二類,則以(α, γ)代之.下文以(α_1, β_1)記此新間隔.(α_1, β_1)為(α, β)之半,而有相同之性質,即(A)中至少有一數大於α_1,但無一數能大於β_1也.做此再由(α_1, β_1)定出新間隔(α_2, β_2),並繼續施行,即得間隔之無限項數列(α, β), (α_1, β_1), (α_2, β_2), ….,就中任一間隔為其前間隔之半,對於(A)之性質,咸與(α, β)同.因$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$為遞增之數列,且常小於$\beta$,故必有一極限$\lambda$,而$\beta, \beta_1, \beta_2, \cdots$為遞減之數列,且常大於$\alpha$,故亦必有一極限$\lambda'$(見第2目之備考).由$\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta-\alpha}{2^n}$觀之,當$n$無限增大,$\beta_n - \alpha_n$趨近於零,可見$\beta_n$與$\alpha_n$之極限相同.即$\lambda' = \lambda$.今以$L$表此同趨之極限,而述其下列二性質.是數$L$者,即所謂$(A)$之高界也.

(一)　(A)中之數無大於L者.

(二)　無論ε為如何小之正數,(A)中必有一數大於$L-\varepsilon$.

性質(一)實甚明顯.蓋若(A)中有一數$L+h\ (h>0)$大於L,則因n無限增大時,β_n以L爲極限.故當n大於某定值時,β_n將小於$L+h$.但β_n爲第二類之數,實無此情形也.性質(二)亦易知之.蓋設ε爲正數,則當n大於某定值時,α_n將大於$L-\varepsilon$.但(A)必有數大於α_n故(A)中有數大於$L-\varepsilon$明矣.又除L外,其他任何數,皆不能適合於上述之二性質.

數集(A)之高界L,可屬於(A),或不屬於(A).例如不大於2之有理數集,卽以2爲其高界.此2乃集中之數也.而不大於2之無理數集,其高界亦爲2,但2非集中之數也.所當特別注意者,當高界L非屬於(A)時,無論ε爲如何小之正數,(A)中必有無限之數大於$L-\varepsilon$.蓋若祇有有限之數大於$L-\varepsilon$,則此有限數中之最大者,將爲(A)之高界矣.

倣此如(A)有低界時,可證有一數L'合於下述二性質.

(一)　(A)中之數無小於L'者.

(二)　無論ε爲如何小之正數,(A)中必有一數小於$L'+\varepsilon$

此數L'卽所謂(A)之低界也.

10. 關於連續函數之定理.

定理一——設函數$f(x)$在二值a, b之間爲連續,且$f(a)\cdot f(b)<0$,則在a, b之間,方程式$f(x)=0$至少有一根.

設$a<b$,暫定$f(a)>0, f(b)<0$(餘做同理推論).於a, b之間插入$n-1$個算術中項,依由小至大之次序排成$x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$.并令$a=x_1, b=x_{n+1}$乃得數列$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n, x_{n+1}$.若其中各數均非$f(x)=0$之根,則必可尋出毘連二數$x_r, x_{r+1}$使有下列之關係:

$$f(x_r)>0, f(x_{r+1})<0, a\leqq x_r\leqq b.$$

乃令$x_r=a_1, x_{r+1}=b_1$,即得$b_1-a_1=\frac{b-a}{n}$.依前法插入$n-1$個算術中項於a_1, b_1之間,如各中項均非$f(x)=0$之根,應有二數a_2, b_2合於下列各條件:

$$f(a_2)>0, f(b_2)<0, a_1\leqq a_2<b_2\leqq b_1, b_2-a_2=\frac{b-a}{n^2}.$$

仿此繼續施行,則或得方程式$f(x)=0$之一根,或得二數列

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_p, \cdots\cdots,$$

$$b_1, b_2, \cdots\cdots, b_p, \cdots\cdots,$$

就中第一列任何位置之數永不小於其前者,而第二列任何位置之數永不小於其後者.

且有　　$f(a_p)>0, f(b_p)<0, b_p-a_p=\frac{b-a}{n^p}.$

由上列之不等式,即知 p 甚大時, b_p-a_p 小於任意之已與數,因 b_p 與 a_p 各有一極限(見第 2 目之備考)故 b_p 與 a_p 之極限同. 茲以 x_0 記之,而證 $f(x_0)=0$.

蓋因 x_0 爲在 a, b 間之數,且函數 $f(x)$ 在間隔 (a, b) 內爲連續,故 $f(a_p)$ 之極限爲 $f(x_0)$. 但無論 p 之値爲如何大, $f(a_p)$ 常爲正,故其極限 $f(x_0)$ 應爲正,或等於零. 依同理, $f(b_p)$ 常爲負,則其極限 $f(x_0)$ 不得爲正. 於是同時有 $f(x_0)\geqq 0, f(x_0)\leqq 0$. 然 $f(x_0)$ 之値爲確定者,可見 $f(x_0)=0$.

定理二——設函數 $f(x)$ 在間隔 (a, b) 內爲連續,則在此間隔內, $f(x)$ 必經過 $f(a)$ 至 $f(b)$ 之一切數值.

茲取 $f(a)<f(b)$ 以爲例,而設 A 爲 $f(a)$ 與 $f(b)$ 間之任一數 $[f(a)<A<f(b)]$,則在 a 與 b 之間必有一數 x_0 合於 $f(x_0)=A$.

蓋令 $\phi(x)=f(x)-A$,

即知　　$\phi(a)=f(a)-A<0, \quad \phi(b)=f(b)-A>0.$

惟 $\phi(x)$ 連續於間隔 (a, b) 內,而 $\phi(a)$ 之號與 $\phi(b)$ 之號相反,故必有一値 x_0 能令 $\phi(x_0)=f(x_0)-A=0$.

定理三——設函數 $f(x)$ 在間隔 (a, b) 內爲遞增

(Increasing) 或爲遞減 (Decreasing), 且經過 $f(a)$ 與 $f(b)$ 中一切之值,則函數 $f(x)$ 連續於此間隔內.

函數 $f(x)$ 於間隔 (a, b) 內爲遞增或爲遞減之定義如下:

任取 (a, b) 間之兩值 x_1, x_2, 如 $f(x_1)-f(x_2)$ 之號與 x_1-x_2 之號相同,則函數 $f(x)$ 爲遞增.如 $f(x_1)-f(x_2)$ 之號與 x_1-x_2 之號相反,則函數 $f(x)$ 爲遞減.

此義旣明,可以證本定理矣.設 $f(x)$ 在間隔 (a, b) 內遞增, x_0 爲間隔 (a, b) 內之一值, ε 爲任意選定之正數,其選定之法,在使數列

$$(1) \qquad f(x_0)-\varepsilon, \quad f(x_0), \quad f(x_0)+\varepsilon$$

各項之值介乎 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間,卽在間隔 (a, b) 內, x 之值可使 $f(x)$ 等於數列(1)中任一項之值.

故 $$f(x_0-a_1)=f(x_0)-\varepsilon, \quad f(x_0+a_2)=f(x_0)+\varepsilon,$$

就中 a_1, a_2 表正數,因 $f(x)$ 爲遞增,且經過 $f(a)$ 與 $f(b)$ 中一切之值故也.

由此觀之,當 x 變動於 x_0-a_1 至 x_0+a_2 之間, $f(x)$ 與 $f(x_0)$ 之差必小於 ε.

若命 a 爲 a_1, a_2 二數之小者, h 之絕對值小於 a, 則有 $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$; 卽當 $x=x_0$ 時,函數 $f(x)$ 爲連續.

依同理推至於$f(x)$為遞減函數之情形.

[備考]——如將間隔(a,b)任意分爲若干小間隔,此各小間隔以分間隔 (Partial Interval) 名之.

定理四——設函數$f(x)$連續於間隔(a,b)內,ε爲任意之正數,則間隔(a,b)常可拆爲若干分間隔,俾同屬一分間隔之任意二數x',x''合乎下式之關係.

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

令$c=\frac{a+b}{2}$.如謂此定理不爲眞,則(a,c),(c,b)兩間隔中,必有一間隔與(a,b)同性質,卽不能將該間隔拆爲分間隔合於定理之所陳述者也.與(a,b)同性質之間隔,以(a_1,b_1)記之.同理,如令$c_1=\frac{a_1+b_1}{2}$,則(a_1,c_1),(c_1,b_1)中,又必有一與(a_1,b_1)同性質者,又命之爲(a_2,b_2).倣此繼續施行,卽得無限項數列(a,b),(a_1,b_1),(a_2,b_2),……,就中每一間隔爲前者之半,而與原間隔有相同之性質焉.因無論n爲何值,間隔(a_n,b_n)常有兩數x',x''合於$|f(x')-f(x'')|>\varepsilon$之關係.如令$\lambda$爲數列$a,a_1,a_2,$……及數列$b,b_1,b_2,$……同趨之極限,則因函數$f(x)$於$x=\lambda$時爲連續,故可選定一正數$\eta$,俾$|x-\lambda|<\eta$時,有$|f(x)-f(\lambda)|<\frac{\varepsilon}{2}$之關係.且可選定$n$爲相當大之數,使$a_n$ b_n各與λ之相異小於η.如是,間隔(a_n,b_n)全屬間隔$(\lambda-\eta,\lambda+\eta)$之內

矣.若x', x''爲屬於間隔(a_n, b_n)任意之二數,即有

$$\left|f(x')-f(\lambda)\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|f(x'')-f(\lambda)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因得 $$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

是與假說相反,而定理之爲眞遂彰矣.

推論一——設$a, x_1, x_2, \cdots x_{p-1}, b$爲間隔$(a, b)$之一種分法,其所分成之$p$個分間隔,能合本定理之條件者,則在間隔$(a, x_1)$內即有$|f(x)|<|f(a)|+\varepsilon$.於特別情形$x=x_1$時,又有$|f(x_1)|<|f(a)|+\varepsilon$.同理,在間隔$(x_1, x_2)$內有$|f(x)|<|f(x_1)|+\varepsilon$.於是$|f(x)|<|f(a)|+2\varepsilon$.命$x=x_2$又得$|f(x_2)|<|f(a)|+2\varepsilon$.倣此施行,至於最後間隔,即得

$$|f(x)|<|f(x_{p-1})|+\varepsilon<|f(a)|+p\varepsilon.$$

故於間隔(a, b)內,函數$f(x)$之絕對值常小於$|f(a)|+p\varepsilon$.

可見凡函數之連續於間隔(a, b)內者,其在(a, b)內一切之數值皆爲有限(Finite).

推論二——設將間隔(a, b)拆爲分間隔$(a, x_1), (x_1, x_2), \cdots\cdots, (x_{p-1}\, b)$,使同屬一分間隔之二值$x', x''$適合$\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}$之關係.并命$\eta$爲一正數而小於$x_1-a, x_2-x_1, \cdots\cdots, b-x_{p-1}$各數者.乃於間隔$(a, b)$內任取適合不等式

$|x'-x''|<\eta$之兩數,而察$|f(x')-f(x'')|$之值.若x', x''同屬一分間隔,則有$\left|f(x')-f(x'')\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.否則$x', x''$必在相鄰之兩個分間隔內.此時易見$\left|f(x')-f(x'')\right|<2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon$.

是故任與一正數ε,必有一正數η與之對應,當間隔(a, b)內任意二數x', x''合乎$|x'-x''|<\eta$時,即有不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

此性質以函數$f(x)$齊一連續(Uniform Continuous)於間隔(a, b)內表之.

定理五——間隔(a, b)內之連續函數,至少必有一次達至其高界及其低界.

間隔(a, b)內之連續函數,在(a, b)內一切之值皆爲有限,前已證明,故其必有高界M及低界m.玆證x於間隔(a, b)內至少必有一值能令$f(x)=M$至x於間隔(a, b)內至少必有一值能令$f(x)=m$,可做而證明之.

令$c=\frac{a+b}{2}$,則$(a, c), c, b$兩間隔中,至少有一間隔含x之值能令$f(x)$之高界爲M者.乃命該新間隔爲(a_1, b_1)做此繼續施行,即得無限項數列(a, b), (a_1, b_1), (a_2, b_2),……就中每一間隔爲其前者之半,且在各間隔內,函數之高界均爲M.若令λ爲$a, a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$及$b, b_1, b_2, \cdots b_n, \cdots$同趨之極限,則$f(\lambda)=M$.蓋如謂$f(\lambda)=M-h(h>0)$,則可

取一正數η，俾當x介乎$\lambda-\eta,\lambda+\eta$之間時，$f(x)$之值常介乎$f(\lambda)-\frac{h}{2}$及$f(\lambda)+\frac{h}{2}$之間，卽$f(x)$之值常小於$M-\frac{h}{2}$.更令$n$增大，俾$a_n,b_n$各與$\lambda$之相異小於$\eta$，則間隔$(a_n,b_n)$全在間隔$(\lambda-\eta,\lambda+\eta)$之內，而$f(x)$於間隔$(a_n,b_n)$內不能以$M$爲高界矣.

合定理二定理五以觀之，卽知間隔(a,b)內之連續函數，必有一次經過m至M一切之值.

合定理四定理五以觀之，又見如函數$f(x)$連續於間隔(a,b)內，則可將間隔(a,b)分爲任意小之分間隔，俾$f(x)$在各間隔內之高界M_i與低界m_i之差，咸小於任意選定之正數.

11. 反函數(Inverse Function).

設函數$y=f(x)$連續於間隔(a,b)內，而爲遞增函數.令$f(a)=A,f(b)=B$，則$A<B$.任使x爲間隔(a,b)內之一值，則得一值y與之對應，在間隔(A,B)內者.反言之，任使y爲間隔(A,B)內之一值，則得一值x與之對應在間隔(a,b)內者，因$f(x)$爲遞增之連續函數也.

可見在間隔(A,B)內x爲y之函數.又此函數經過(a,b)中一切之值，而爲遞增，故連續於間隔(A,B)內.

上文所定之函數名爲函數$y=f(x)$之反函數.如以

$x=\phi(y)$ 表之,則無論 y 爲何值,應有 $y=f[\phi(y)]$ 之關係.無論 x 爲何值,應有 $x=\phi[f(x)]$ 之關係.

依同理推至於 $f(x)$ 爲遞減函數之情形.

12　代數函數 (Algebraic Function) 及超然函數 (Transcendental Function).

本書所論之函數,大別爲兩類,一曰代數函數,一曰超然函數.所謂 y 爲 x 之代數函數者,乃 y 與 x 有一代數之關係,卽其關係祇見加減乘除乘方開方之運算符號耳.藉相當之變換,可使此關係式左邊爲 x, y 之多項式,而右邊爲零.

玆分別下列各種代數函數:

(其一)　多項式之整函數(Integral Function).多項式之整函數之形爲 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 其連續之性,已於第6目論之.

(其二)　有理函數 (Rational Function). 此函數爲兩多項式之商,其形爲 $f(x)=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n}$
由第8目觀之,如分母之值異於零時,有理函數爲連續.

(其三)　函數 $x^{\frac{p}{q}}$ 就中 p, q 表互爲素數(Prime to each other)之正整數.如 q 爲偶數, p 爲奇數,則 $x^{\frac{p}{q}}$ 祇於 $x\geqq 0$ 時,有確定之實值.如 q 爲奇數,則無論 x 爲何值, $x^{\frac{p}{q}}$ 常爲 x

之函數.任與x以絕對值等而號異之兩值,則p為偶數時,$x^{\frac{p}{q}}$祇有一值.如p,q均為奇數時,$x^{\frac{p}{q}}$有絕對值等而號異之兩值.故研究$x^{\frac{p}{q}}$之變值,祇使x由0變至$+\infty$足矣.

由等式$a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+a^{m-2}b+\cdots+b^{m-1})$觀之,當$a,b$均為正時,$a^m-b^m$與$a-b$同號,故$a^{\frac{p}{q}}-b^{\frac{p}{q}}$與$a-b$同號,由是$x$為正時,函數$x^{\frac{p}{q}}$為遞增.又因$x=A^{\frac{q}{p}}$,則$x^{\frac{p}{q}}=A$,即此函數可達到任意之正值,而為連續函數(見第10目之定理三).

非代數函數,皆名為超然函數.如指數函數(Exponential Function),對數函數(Logarithmic Function),與三角函數(Trigonometric Function)等,即其例也.

下文論及指數函數與對數函數,至三角函數可於普通之三角學求之,茲從略.

II. 無理數,指數函數及對數函數

1. 無理數(Irrational Number).

欲詳究指數函數之性質,宜先知無理數之義.

凡正負整數,正負分數與零,統稱為有理數(Rational Number),其非有理數之實數,稱為無理數.如$\sqrt{2}$即其例也.

取 $\sqrt{2}=1.414\cdots$而察之．命 n, p 表正整數，$x_n=\frac{p}{10^n}$，$y_n=\frac{p+1}{10^n}$，就中 $p^2<2\times10^{2n}<(p+1)^2$，則 $x_1=\frac{14}{10}=1.4$，$x_2=\frac{141}{100}=1.41$，$x_3=\frac{1414}{1000}=1.414,\cdots$，$y_1=\frac{15}{10}=1.5$，$y_2=\frac{142}{100}=1.42$，$y_3=\frac{1415}{1000}=1.415,\cdots$．故得無限項數列 x_n，y_n，合於 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n\cdots<y_n<\cdots y_3<y_2<y_1$，其極限則相同．由此觀之，$\sqrt{2}$ 大於 x_n 之任何數，而小於 y_n 之任何數．此數不能等於分數，故以數列 x_n，y_n 斷定之．又數列各項均爲有理數，而 x_n，y_n 各成一數集．

廣言之，欲定一無理數 m，可將一切之有理數分成兩類，小於 m 者，以第一類之數名之，大於 m 者，則以第二類之數名之，故此種分類之法合於下列三條件：

(一) 凡有理數屬於第一類或二類．

(二) 凡第一類之任何數必小於第二類之任何數．

(三) 第一類之數無最大者，而第二類之數無最小者．

(一)，(二)兩條件由分類法而自明．茲證條件(三)足矣．蓋命 a 爲第一類數中之最大者，則可令 n 增大，使 $\frac{1}{n}$ 小於 $m-a$，卽有理數 $a+\frac{1}{n}<m$，而 $a+\frac{1}{n}$ 仍爲第一類之數也．

第二類之數無最小者,可依同理證之.

當吾人將一切之有理數分成兩類,使合乎上述之條件,則謂此種分類斷定一無理數 m. 依定義,此數 m 為大於第一類一切之數,而小於第二類一切之數.

2. x 為有理數之指數函數 a^x.

設 a 為正數,則函數 a^x 名為指數函數. 當 x 為有理數時,a^x 為 x 之函數. 蓋若 x 為正整數,則 a^x 為 x 個因數 a 之積. x 為正分數 $\frac{p}{q}$(p, q 表正整數),則 $a^{\frac{p}{q}}$ 有一實值. 如 x 為負數,可令 $x=-x'$,而 $a^x=\frac{1}{a^{x'}}$. 又 $a^0=1$. 至於 x 為無理數時,可藉下列數目以定之.

3. 定理一.

若 $a>1$,則指數函數 a^x 遞增. 若 $a<1$,則指數函數 a^x 遞減.

蓋設 x, y 為有理數,而 $x>y$,即有 $a^x-a^y=a^y(a^{x-y}-1)$. 惟以 $x-y$ 為正,故 $a^{x-y}-1$ 與 $a-1$ 同號. 又因 a^y 為正,可見 a^x-a^y 與 $a-1$ 同號.

如 $a>1$,則 $a^x>a^y$. 如 $a<1$,則 $a^x<a^y$.

4. 定理二.

設 x 為有理數而趨近於零,則 a^x 之極限為1.

蓋任與一正數 ε,可得一正數 α 與之對應,使不等

式$|x|<\alpha$產生不等式$|a^x-1|<\varepsilon$. 玆證之如下:

首設$a>1$, $x>0$, 則$a^x>a^0=1$. 而不等式$|a^x-1|<\varepsilon$可書爲$a^x-1<\varepsilon$, 卽$a^x<1+\varepsilon$. 今定一整數p, 使$a^{\frac{1}{p}}<1+\varepsilon$, 卽$a<(1+\varepsilon)^p$. 依二項式定理展$(1+\varepsilon)^p$, 將見$(1+\varepsilon)^p$大於$1+p\varepsilon$. 故可使$p$合於不等式$a<1+p\varepsilon$, 卽$p>\frac{a-1}{\varepsilon}$遂有$a<(1+\varepsilon)^p$, 而$a^{\frac{1}{p}}<1+\varepsilon$. 由此觀之, 如令$\alpha$爲一整數之倒數, 且此整數大於$\frac{a-1}{\varepsilon}$者, 則$a^\alpha<1+\varepsilon$. 當$x<\alpha$時, 卽有$a^x<a^\alpha<1+\varepsilon$. 故$a^x-1<\varepsilon$.

次設$x<0$, 而a仍大於1. 乃令$x=-x'$, 就中x'表正數. 則$a^x=\frac{1}{a^{x'}}$. 故當x趨近於零時, $a^{x'}$之極限爲1(見上段), 而a^x之極限亦然(見第I節第4目之定理三).

末設$a<1$. 令$\frac{1}{a}=b$, 則$a^x=\frac{1}{b^x}$. 因$b>1$, 故當x趨近於零時, b^x之極限爲1(見上兩段), 而a^x之極限亦然.

5. x爲無理數時之情形.

下文設$a>1$. 如$a<1$, 可依同理推出.

無理數x之斷定法, 已載於第1目. 今設(A)表a^α各數, 就中α爲關於x之第一類之任意有理數(見第1目). 又設(B)表a^β各數, 而β爲關於x之第二類之任意有理數. 則(A), (B)之性質合於下列條件.

(一) 凡(A)之任何數，必小於(B)之任何數.

蓋因$\alpha<\beta$，而$a>1$，故$a^{\alpha}<a^{\beta}$.

(二) (A)中之數無最大者.

設a^{α}屬於(A)之數，則(A)中必有一數大於a^{α}. 蓋以關於x之第一類數，有大於α之有理數存在也. 令α'表此有理數，則$a^{\alpha'}$屬於(A)，而$a^{\alpha'}>a^{\alpha}$.

(三) (B)中之數無最小者. 證法與前相似.

(四) 任與一正數ε，可得(A)中之一數與(B)中之一數，其差之絕對值小於ε.

因$a^{\beta}-a^{\alpha}=a^{\alpha}(a^{\beta-\alpha}-1)$，故令$k$爲大於$x$之有理數，即有$\alpha<k$，$a^{\alpha}<a^{k}$，而$a^{\beta}-a^{\alpha}<a^{k}(a^{\beta-\alpha}-1)$. 欲$a^{k}(a^{\beta-\alpha}-1)<\varepsilon$. 或$a^{\beta-\alpha}-1<\frac{\varepsilon}{a^{k}}$，可使$\beta-\alpha<\varepsilon'$，就中$\varepsilon'$爲一整數之倒數，此整數爲大於$\frac{a-1}{\frac{\varepsilon}{a^{k}}}$之數(見第4目). 今在第一類選一數$\alpha$，第二類選一數$\beta$，使$\beta-\alpha<\varepsilon'$. 此種選定之法不難，蓋令$\alpha_1$爲由第一類任取之數，$p$表正整數，乃定正整數$n$，使$\frac{1}{n}<\varepsilon'$，且令$\alpha_1+\frac{p}{n}$爲第一類之數，而$\alpha_1+\frac{p+1}{n}$則爲第二類之數. 遂得$\alpha=\alpha_1+\frac{p}{n}$，$\beta=\alpha_1+\frac{p+1}{n}$，$\beta-\alpha<\varepsilon'$.

(A)，(B)之性質旣如上述，故欲定a^{x}，可將小於或等

於(A)一切之有理數排列,成為第一類之數.又將大於或等於(B)一切之有理數排列,成為第二類之數.則此分類之法,合於第1目之(二),(三)條件.蓋由(A),(B)之成因,(A)中之數必小於(B)中之數,故第一類之數必小於第二類之數.又(A)中之數無最大者,故第一類之數亦然.依同理得知第二類之數無最小者.至關於第1目之(一)條件,則有下列兩情形可達到.

(其一)　第一類與第二類各數之合併,包含一切之有理數,則謂上述之分類法斷定一無理數a^x.

(其二)　有一有理數不見於第一類,亦不見於第二類,則此數大於(A)中各數,而小於(B)中各數,遂以a^x之值名之.

兩個有理數M,N不能同時離脫(A),(B)之外.蓋若有此兩數,而令$M<N$,即有$a^\alpha<M<N<a^\beta$.於是$a^\beta-a^\alpha>N-M$,與本目之(四)悖矣.

6. 定理三.

設x_0,x表有理數,則當x趨近於x_0時,a^x之限為a^{x_0}.

如$x=0$,則本定理之成立自不待言(見定理二).故設$x_0\neq0$,因$a^x=a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}$,而$a^{x-x_0}$之極限為1,可見$a^x$之極限為$a^{x_0}$(見第I節之第3目).

7. 由前數目所得之結果.

設 $a>1$, x 爲無理數,則可視 $x=\lim x_n$, 就中 $\lim x_n$ 表示關於 x 之第一類數中任一遞增數列之極限. ($\lim$ 爲 limit 之省略符號) 故 $a^x=a^{\lim x_n}$. 今因 x_n 爲遞增之有理數,故 $a^{x_1}, a^{x_2},\cdots\cdots a^{x_n},\cdots\cdots$ 爲遞增之數列.依第 I 節之第 2 目之備考,此數列必有一極限 L, 而 $L=a^{\lim x_n}=a^x$ (見定理三). 又由關於 x 之第一類數中,取他一遞增數列 x'_n, 則 $a^{\lim x'_n}=a^x=a^{\lim x_n}$ 故遞增數列 $a^{x_1'}\ a^{x_2'}\cdots\cdots a^{x_n'}\cdots\cdots$ 之極限亦爲 L.

當 x 由有理數而趨近於無理數 α 時,則 $a^\alpha=\lim\limits_{x\doteq\alpha}a^x$ (符號 $\doteq$ 表趨近之意) 已如前述,若 x 由無理數而趨近於 α, 則亦有 $\lim\limits_{x\doteq\alpha}a^x=a^\alpha$. 今證之於下:

令 x', x, x'' 表趨近於 α 之變數,就中 $x'<x<x''$, 又 x', x'' 爲由有理數而趨近於 α 者,故 $a^{x'}<a^x<a^{x''}$. 而 $\lim\limits_{x'\doteq\alpha}a^{x'}=\lim\limits_{x''\doteq\alpha}a^{x''}=a^\alpha$, 可見 $\lim\limits_{x\doteq\alpha}a^x=a^\alpha$.

8. 指數定律.

關於有理數之指數定律,能適用於無理數.欲明此理,宜先知下列補題.

(補題) 設 p, q 表正整數,則當 x 趨近於 x_0 時, $x^{\frac{p}{q}}$ 之極限爲 $x_0^{\frac{p}{q}}$.

欲證此題,可證當x趨近x_0時,$x^{\frac{1}{q}}$之極限爲$x_0^{\frac{1}{q}}$.換言之,任與一正數ε,即有一正數a與之對應,使$|h|<a$產生$|(x_0+h)^{\frac{1}{q}}-x_0^{\frac{1}{q}}|<\varepsilon$.茲分別$h>0$與$h<0$兩情形而論之.并設$x_0>0$,餘做同理推論.如$h>0$,則$|(x_0+h)^{\frac{1}{q}}-x_0^{\frac{1}{q}}|<\varepsilon$可書爲$\left(1+\dfrac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{q}}<1+\dfrac{\varepsilon}{x_0^{\frac{1}{q}}}$,解之得$h<x_0\left[\left(1+\dfrac{\varepsilon}{x_0^{\frac{1}{q}}}\right)^q-1\right]$.如$h<0$,則$|(x_0+h)^{\frac{1}{q}}-x_0^{\frac{1}{q}}|<\varepsilon$可書爲$\left(1+\dfrac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{q}}>1-\dfrac{\varepsilon}{x_0^{\frac{1}{q}}}$.解之得$h>x_0\left[\left(1-\dfrac{\varepsilon}{x_0^{\frac{1}{q}}}\right)^q-\quad\right]$.故令$a$爲二數$x_0\left[\left(1+\dfrac{\varepsilon}{x_0^{\frac{1}{q}}}\right)^q-1\right]$,$x_0\left[1-\left(1-\dfrac{\varepsilon}{x_0^{\frac{1}{q}}}\right)^q\right]$中之小者,則當$|h|<a$時,即有$|(x_0+h)^{\frac{1}{q}}-x_0^{\frac{1}{q}}|<\varepsilon$之關係也.

今述指數之定律如下:

設α,β表無理數,x爲有理數而趨近於α,y爲有理數而趨近於β,

則　(1) $a^\alpha a^\beta=a^{\alpha+\beta}$,　(2) $(a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta}$,　(3) $(ab)^\beta=a^\beta b^\beta$.

證明

(1)　因$a^x a^y=a^{x+y}$,

故　$$\lim a^x a^y=\lim a^{x+y},$$

但　$$\lim a^x a^y=\lim a^x\cdot\lim a^y=a^\alpha a^\beta,$$

而　$$\lim a^{x+y}=a^{\lim(x+y)}=a^{\alpha+\beta},$$

於是 $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}.$

(2) 因 $(a^x)^y=a^{xy}$,

故 $\lim\limits_{x\doteq\alpha}(a^x)^y=\lim\limits_{x\doteq\alpha}a^{xy}$,

卽 $(a^{\alpha})^y=a^{\alpha y}$,

由是 $\lim\limits_{y\doteq\beta}(a^{\alpha})^y=\lim\limits_{y\doteq\beta}a^{\alpha y}$,

遂得 $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}.$

(3) 因 $(a\alpha)^y=a^y\alpha^y$,

故 $\lim(a\alpha)^y=\lim a^y\alpha^y=\lim a^y\cdot\lim\alpha^y$,

卽 $(a\alpha)^{\beta}=a^{\beta}\alpha^{\beta}.$

9. a^x之性質.

玆分述下列兩端.

(其一) 無論x爲何值,a^x常爲連續.

蓋設 x_0 表任意數,卽得$a^{x_0+h}-a^{x_0}=a^{x_0}(a^h-1)$,又$a^h$於$h=0$時之極限爲1,故令$\varepsilon$爲任意之正數,則可得一正數$\alpha$與之對應,使$|h|<\alpha$產生$\left|a^h-1\right|<\left|\frac{\varepsilon}{a^{x_0}}\right|$卽當$|h|<\alpha$時,$|a^{x_0+h}-a^{x_0}|<\varepsilon$.

(其二) 若$a>1$,則當$x=+\infty$時,a^x爲正無窮.當$x=-\infty$時,a^x之極限爲零.若$a<1$,則當$x=+\infty$時,a^x之極限爲零.當$x=-\infty$時,a^x爲正無窮.

首設 $a>1$. 今證 $x=+\infty$ 時, a^x 爲正無窮. 換言之,任與一正數 A, 可得一正數 B 與之對應,使 $x>B$ 產生 $a^x>A$.

蓋令 $a=1+\alpha$, α 表正數. 乃定一正整數 p, 使 $(1+\alpha)^p>A$. 玆因 $(1+\alpha)^p$ 大於 $1+p\alpha$, 故 p 可由 $1+p\alpha>A$ 之關係得出. 當 $p>\dfrac{A-1}{\alpha}$ 時, $(1+\alpha)^p=a^p>A$, 如令 B 爲大於 $\dfrac{A-1}{\alpha}$ 之任意正整數, 則 $a^B>A$, 且當 x 大於 B 時, $a^x>a^B>A$.

更證 $x=-\infty$ 時, a^x 之極限爲零. 卽任與一正數 ε, 可得一正數 B 與之對應, 使 $|x|>B$ 產生 $a^x<\varepsilon$.

蓋令 $x=-x'$, x' 表正數, 則 $a^x=\dfrac{1}{a^{x'}}$ 而 $a^x<\varepsilon$ 可書爲 $a^{x'}>\dfrac{1}{\varepsilon}$. 故依所論, 如 x' 之值大於一正整數 B, 而 B 大於 $\dfrac{\frac{1}{\varepsilon}-1}{\alpha}$, 則 $a^{x'}>\dfrac{1}{\varepsilon}$.

次設 $a<1$, 令 $b=\dfrac{1}{a}$, 則 $b>1$, 而 $a^x=\dfrac{1}{b^x}$ 因 b^x 於 $x=\pm\infty$ 時之極限爲已知, 故 a^x 之極限亦可求出.

10. 指數函數之變值 (Variation).

綜上所述, 可將指數函數 a^x 之變值列表如下:

$a>1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
a^x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

$a<1$

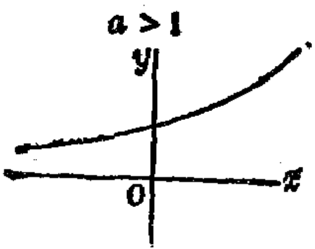
x	$-\infty$		0		$+\infty$
a^x	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

箭矢之向上者,示函數爲遞增. 箭矢之向下者,示函數

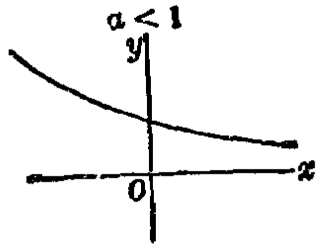
爲遞減.以後均用此種符號以表函數之遞增遞減.

曲線$y=a^x$之形狀,如下圖2圖3所示:

$a>1$　　　　　　$a<1$



(圖 2)



(圖 3)

11. 對數 (Logarithme).

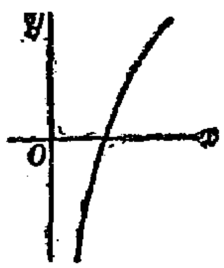
設a爲正數.因指數函數a^x爲連續,且由零遞增至$+\infty$ $(a>1)$,或由$+\infty$遞減至0 $(a<1)$,故任與一正值x,則有一正值y與之對應,合於$a^y=x$之關係.又y之值合於此關係者,祇有一値而已.故當x爲正時,y爲x之函數.此函數名爲x之對數,以a爲對數之底(Base).由此觀之,對數者,指數函數之反函數也(見第I節第11目).因指數函數爲連續之遞增或遞減函數,故當x爲正時,對數函數亦有此性質.

對數函數記爲$y=\log_a x$.此式與$a^y=x$實一而二,二而一者也.再取第10目而察之,卽知$y=\log_a x$之變值,如下表所示:

	$a>1$					$a<1$				
x	0		1		$+\infty$	x	0		1		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$\log_a x$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

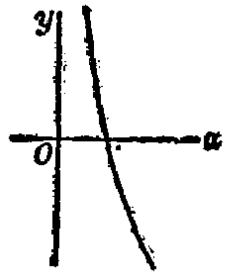
而曲線$y=\log_a x$之形狀,如下圖4圖5所示:

$a>1$



(圖　4)

$a<1$



(圖　5)

第一章之習題

(1) 當$x=x_0$時,設$f(x)$之極限爲$A\neq 0$,而$\phi(x)$之極限爲$B=0$,則$\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$於$x=x_0$時爲無窮.試證明之.

當n爲無窮時,試求下列各式之極限:

(2) $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

(3) $\sqrt{n^2+an+b}-\sqrt{n^2+cn+d}$.

(4) 當x趨近於a時,試求$\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}$之極限.并推出$\dfrac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}$於$x$趨近於$a$時之極限.

(5) 當x趨近於2時,求$\dfrac{(6+x)^{\frac{1}{3}}-(12-x^2)^{\frac{1}{3}}}{(6+x)^{\frac{1}{4}}-(12-x^2)^{\frac{1}{4}}}$之極限.

(6) 試察下列無限項數列有無極限.

(a) $\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5},\ \cdots\cdots\frac{1}{n},\ \frac{n+1}{n},$

(b) $u_1=\frac{1}{2}, u_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \ u_3=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \cdots u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$.

(7) 令$x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\sqrt{2+x_1}, \cdots x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$, 當$n$為無窮時,求$x_n$之極限.

(8) 當x趨近於零時,設函數$f(x)=a^x$之極限為1.試求一正數α,使不等式$|h|<\alpha$,產生不等式$|f(x+h)-1|<\frac{1}{10000}$.

(9) 試斷定無理數$\sqrt{3}$.

(10) 設a, b, c, d為有理數,λ為無理數,試察$\frac{a+b\lambda}{c+d\lambda}$是否為有理數.

(11) 當x趨近於零時,函數$y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1}$是否連續.

試研究下列曲線之連續性,並繪圖以表明之.

(12) $y=\frac{x-2}{x^2-4x+3}$.

(13) $y=\frac{1-x}{x^2+x+1}$.

(14) 問x為何值時,能使函數$\tan\left(\frac{\pi x}{x+1}\right)$不連續.

(15) 解不等式

(a) $\frac{1-x}{x+3}>2$,

(b) $\frac{2x-1}{x^2-4x+3}<1$.

(16) 解方程式

(a) $\log(x+\sqrt{1+x^2})=c$,

(b) $\log(x+\sqrt{x^2-1})=c$.

(17) 解方程組

$$\begin{cases} x^y=y^x \\ y=ax, \end{cases}$$

就中a為已與之正數.

第二章

級數

I. 大綱

1. 定義.

無限項數列 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots u_n, \cdots\cdots$ 各項之和 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ 謂之級數(Series).

試察級數從第一項至第n項之和.當n無限增加時,如此和有極限,則謂級數爲收斂(Convergent).其極限名曰級數之和.如n無限增加時,此和不能有極限,則級數謂之發散(Divergent).

公項u_n之級數,下文或簡稱爲級數u_n.

2. 例.

級數之最常見者爲算術級數.算術級數爲發散,自不待言,蓋其前n項之和與n同時無限增加也.

現取幾何級數$a+aq+aq^2+\cdots\cdots+aq^{n-1}+\cdots\cdots$考之,其前$n$項之和爲

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

茲分別各種情形如下：

(其一) $|q|<1$. 如 n 無限增加，q^n 之極限爲零，故 s_n 之極限爲 $\frac{a}{1-q}$. 而級數爲收斂.

(其二) $|q|>1$. 如 n 無限增加，q^n 及 s_n 均無限增加，故級數爲發散.

(其三) $q=1$. 上公式不復適用. 但 n 項之和爲 $s_n=na$，故級數爲發散.

(其四) $q=-1$. 單數項之和 s_{2n+1} 爲 a，雙數項之和 s_{2n} 爲零，此時數列 s_n 無極限(參閱第一章第I節之第8目)，故級數爲發散.

總括上述，幾何級數收斂之必須及充分條件乃公比 q 之絕對值小於1.

3. 定理.

當 n 無限增加時，斂級數第 n 項之極限必爲零.

依斂級數之定義，當 n 無限增加時，斂級數前 n 項之和 s_n 必有一極限 s. 故任與一正數 ε，必有一正整數 p 與之對應，當 $n>p$，卽有下列之關係

$$|s_n-s|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

同理,

$$|s_{n+1}-s|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

但 $\qquad u_{n+1}=s_{n+1}-s_n=s_{n+1}-s+s-s_n.$

於是 $\qquad |u_{n+1}|<|s_{n+1}-s|+|s-s_n|,$

即 $\qquad |u_{n+1}|<\varepsilon.$

此式表明u_{n+1}之極限爲零.

本定理之逆不爲眞,蓋u_n之極限雖爲零而級數未必收斂也

試取調和級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

考之.當n無限增加時,公項$\frac{1}{n}$之極限爲零,但下文證明其爲發級數.

用s_n代表前n項之和,

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n},$$

此式右邊各項除末項外均大於$\frac{1}{2n}$.

故 $\qquad S_{2n}-S_n>\frac{n}{2n}$, 即 $S_{2n}-S_n>\frac{1}{2}$.

上列末式之n,以$1.\ 2,\ 2^2\ldots 2^{p-1}$等值逐次代之,

$$S_2-S_1>\frac{1}{2},$$

$$S_{2^2}-S_2>\frac{1}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$S_{2^p}-S_{2^{p-1}}>\frac{1}{2}.$$

相加得 $$S_{2^p}-S_1>\frac{p}{2}.$$

由是推知 $$S_{2^p}>1+\frac{p}{2},$$

此式證明S_n無極限,故調和級數爲發級數.

結論.如級數公項不以零爲極限,則級數必發散.如級數公項之極限爲零,則須用其他方法以斷定級數之性質.

II. 正項級數

1. 定義及定理.

如級數之各項均爲正者,則該級數謂之正項級數.(Series of Positive Terms). 正項級數之S_n與n同時增加.茲分爲下列兩種情形:

(a) S_n常小於一定值.在此情形S_n有一極限S,而級

數爲收歛,且S_n常小於S(見第一章第I節第2目之備攷).

(b)S_n可大於一任意值,即S_n爲無窮大,則級數爲發散.

定理一——設從某項起,一正項級數之項小於另一正項級數之對應項,則如後級數爲收歛,前者亦然.

從一級數中删去有限之項數,級數之性質仍不變,此易見者也.故可設定理之某項爲第一項.

設正項級數

$$(u) \qquad u_1+u_2+\cdots\cdots u_n+\cdots\cdots$$

之項小於歛級數

$$(u') \qquad u'_1+u'_2+\cdots\cdots u'_n+\cdots\cdots$$

之對應項.用S_n及S'_n代表此兩級數前n項之和,則$S_n<S'_n$.因S'_n有一極限S',且$S'_n<S'$,故$S_n<S'$.由是證明級數(u)爲收歛.

定理二——設從某項起,一正項級數之項大於另一正項級數之對應項,則如後級數爲發散,前者亦然.

設級數(u)之各項大於級數(u')之對應項,而(u')設爲發散者,故$S_n>S'_n$.但S'_n與n同時增加,可知S_n亦無限增加,而(u)爲發級數明矣.

2. 公項爲$\frac{1}{n^k}$之級數.

此種級數之性質視k之值而定.如k大於1,則級數爲收斂.如k等於或小於1,則級數爲發散.茲分別證之如下:

(a) 先設$k>1$.令

$$S_n=1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^k},$$

則 $$S_{2n}-S_n=\frac{1}{(n+1)^k}+\frac{1}{(n+2)^k}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n)^k}.$$

上式右邊共有n項,而各項皆小於$\frac{1}{n^k}$,

故 $$S_{2n}-S_n<\frac{n}{n^k},\text{ 即 }S_{2n}-S_n<\frac{1}{n^{k-1}}.$$

不等式中之n以$1, 2, 2^2,\cdots\cdots 2^{p-1}$等值逐次代入之,

$$S_2-S_1<1,$$

$$S_{2^2}-S_2<\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$S_{2^p}-S_{2^{p-1}}<\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}},$$

相加得 $$S_{2^p}-S_1<1+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2^{p-1})^{k-1}}.$$

此不等式之右邊爲幾何級數之前p項,其公比$\frac{1}{2^{k-1}}$小於1者.今因級數之各項皆爲正,故其前p項之和小於

級數之和$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2^{k-1}}}$,

即
$$S_{2^p}<1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^{k-1}}}.$$

上式p乃任意之值,故無論n為何數,常可選定p之值,使$2^p>n$.由是

$$S_n<1+\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^{k-1}}}.$$

S_n既不能超過一定數,則級數為收斂明矣.

(*d*) 現設$k\leqq1$.如$k=1$,則得調和級數,吾人已知其為發級數矣.如$k<1$,則此級數之公項$\dfrac{1}{n^k}$大於調和級數之公項$\dfrac{1}{n}$,故仍為發級數(見第1目之定理二).

3. D' Alembert定理.

(*a*) 令k為小於1之定數.如從級數之某項起,比值$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$常小於k,則級數為收斂.

(*b*) 從級數之某項起,如比值$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$常大於1,則級數為發散.

(*a*) 設從第n項起

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<k,\qquad \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}<k,\ \cdots\cdots(k<1),$$

則 $u_{n+1}<ku_n,\ u_{n+2}<ku_{n+1},\cdots\cdots,\ u_{n+p}<ku_{n+p-1},\cdots\cdots,$

是即 $u_{n+1}<ku_n,\ u_{n+2}<k^2u_n,\ \cdots\cdots,\ u_{n+p}<k^pu_n,\ \cdots\cdots\cdots.$

可知從第$n+1$項起,級數之項小於幾何級數

$$ku_n+k^2u_n+\cdots\cdots k^pu_n+\cdots\cdots$$

之對應項.但此幾何級數爲收斂,故公項u_n之級數亦然.

(b) 如 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1,\ \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}>1,\cdots\cdots\cdots\cdots,$

則 $u_{n+1}>u_n,\ u_{n+2}>u_{n+1},\cdots\cdots\cdots,$

級數之各項逐漸增大,其公項自不能以零爲極限,故如定理云.

此定理之用法如下:令n無限增大,求$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$之極限.設λ爲此極限,則如

$\lambda<1$,級數爲收斂.

$\lambda>1$,級數爲發散.

$\lambda=1$,級數之性質未定.

何則,$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$既以λ爲極限,則無論ε爲何正數,必有一正整數p與之對應,如n大於p,即有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\lambda\right|<\varepsilon$$

此式可書爲

$$-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}-\lambda<\varepsilon,$$

或
$$\lambda-\varepsilon<\frac{u_{n+1}}{u_n}<\lambda+\varepsilon.$$

如λ小於1,則可選ε之值,使$\lambda+\varepsilon$仍小於1.故當$n>p$,比值$\frac{u_{n+1}}{u_n}$常小於1,而級數為收斂.

如λ大於1,則可選ε之值,使$\lambda-\varepsilon$仍大於1,故$\frac{u_{n+1}}{u_n}$常大於1,而級數為發散.

如λ為1,則除特別情形外,級數之性質難以斷定.但未至其極限時,如$\frac{u_{n+1}}{u_n}$常大於1,則級數為發散.

例——設有級數

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots(x>0)$$

此處$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{x}{1+\frac{1}{n}}$,其極限為$x$.故如$x<1$,級數為收斂.如$x>1$,級數為發散.如$x=1$,則得發散性之調和級數.

4. Cauchy 定理.

(a) 令k為小於1之定數.如從級數之某項起,$\sqrt[n]{u_n}$常小於k,則級數為收斂.

(b) 從級數之某項起,如$\sqrt[n]{u_n}$之值常大於1,則級數為發散.茲證明之如下:

(a) 蓋若 $\sqrt[n]{u_n}<k$, 則 $u_n<k^n$, k^n 乃一等比級數之公項,其公比小於1.可知級數爲收斂.

(b) 反言之,如 $\sqrt[n]{u_n}>1$, 則 $u_n>1$, 級數之公項不以零爲極限,故級數爲發散.

此定理之用法如下:令n無限增大,求 $\sqrt[n]{u_n}$ 之極限.設λ爲此極限,則如

$\lambda<1$, 級數爲收斂.

$\lambda>1$, 級數爲發散.

$\lambda=1$, 級數之性質未定.

證明與前目同.

例——設有級數,其公項爲 $u_n=a^{\frac{n^2+1}{n+1}}$.此處 $\sqrt[n]{u_n}=a^{\frac{n^2+1}{n(n+1)}}$.

當n無限增大時, $\sqrt[n]{u_n}$ 之極限爲a.故如 $a<1$, 級數爲收斂,如 $a>1$, 級數爲發散,如 $n=1$, 仍得發級數.

5. 同性質之級數

當n無限增大時,如比值 $\frac{u_n}{v_n}$ 有一極限異於零,則(u_n)及(v_n)兩級數同性質.

設 $\frac{u_n}{v_n}$ 之極限爲l, 且 $l>0$.任與小於l之正數ε,必有一正整數p與之對應,當n大於p時,

則有
$$l-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<l+\varepsilon$$

此式又可寫爲

$$(l-\varepsilon)v_n<u_n<(l+\varepsilon)v_n,$$

$l-\varepsilon$ 及 $l+\varepsilon$ 均爲正數.

先設級數 (v_n) 爲收斂,則級數 $[(l+\varepsilon)v_n]$ 與之同性質,而不等式 $u_n<(l+\varepsilon)v_n$ 證明 (u_n) 亦必爲斂級數.

次設級數 (v_n) 爲發散,則級數 $[(l-\varepsilon)v_n]$ 與之同性質,而不等式 $u_n>(l-\varepsilon)v_n$ 證明 (u_n) 亦必爲發級數.

(注意) 如 $\frac{u_n}{v_n}$ 之極限爲零,且 (v_n) 爲斂級數,則 (u_n) 亦爲斂級數,因從某項起 $u_n<\varepsilon v_n$,而 ε 爲任意之正數故也.

如 $n=\infty$ 時 $\frac{u_n}{v_n}$ 爲無窮大,且 (v_n) 爲發級數,則 (u_n) 亦爲發級數.因從某項起 $u_n>Av_n$,而 A 爲任意之正數故也.

6. 應用.

根據前目之定理,欲知級數 (u_n) 之性質,可用他級數 (v_n) 代之,而 v_n 之選擇,乃使 $\frac{u_n}{v_n}$ 有一異於零之極限者.茲舉兩例如下:

(a) 設有級數,其公項

$$u_n=\frac{an^p+bn^{p-1}+\cdots\cdots}{a'n^q+b'n^{q-1}+\cdots},$$

p,q 爲正整數,a 及 a' 爲正數.此級數可用下列級數

$$v_n=\frac{n^p}{n^q}$$

代之.何則,

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{an^p+bn^{p-1}+\cdots\cdots}{n^p}:\frac{a'n^q+b'n^{q-1}+\cdots\cdots}{n^q},$$

當n無限增大時,$\frac{an^p+bn^{p-1}+\cdots\cdots}{n^p}$及$\frac{a'n^q+b'n^{q-1}+\cdots\cdots}{n^q}$以$a$及$a'$爲極限,故$\frac{u_n}{v_n}$之極限爲異於零之值$\frac{a}{a'}$.由此可知$(u_n)$及$(v_n)$兩級數同性質.

級數(v_n)又可書爲

$$v_n=\frac{1}{n^{q-p}}$$

故如$q-p>1$(即$q\geqq p+2$),則級數(u_n)爲收斂,如$q-p\leqq 1$,則級數(u_n)爲發散(見第2目).由是得定理如下:

如級數之公項爲兩個多項式之商,則分母之次數較分子之次數高2或2以上,乃級數爲收斂之必須及充足條件也.

(b) 設有級數(u_n),

$$u_n=\frac{\sqrt[3]{2n^2-1}}{\sqrt[4]{3n^3+2n+5}}$$

此可用級數(v_n)代之

$$v_n=\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[4]{n^3}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}}=\frac{1}{n^{\frac{1}{12}}}.$$

但(v_n)爲發散,故(u_n)亦然.

III. 各項爲任意符號之級數

1. 定理.

設有級數,其各項之符號正負相間,且各項之絕對值逐漸減少而以零爲極限者,則此級數必爲收斂.

設有級數

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots+u_{2n-1}-u_{2n}+\cdots\cdots,$$

由定理之假設 $u_1,u_2,\cdots\cdots$ 皆爲正,且 $u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots$ 則其單數項之和

$$S_{2n+1}=S_{2n-1}-(u_{2n}-u_{2n+1}).$$

因括弧內之值爲正,故 S_{2n+1} 較 S_{2n-1} 小,而單數項之和逐漸減少.又雙數項之和

$$S_{2n}=S_{2n-2}+u_{2n-1}-u_{2n},$$

因 S_{2n} 較 S_{2n-2} 大,故此和逐漸增大.由是

$$S_1>S_3>S_5>\cdots\cdots>S_{2n-1}>S_{2n+1}>\cdots\cdots,$$

$$S_2<S_4<S_6<\cdots\cdots<S_{2n}<S_{2n+2}<\cdots\cdots$$

玆證任一單數項之和必大於任一雙數項之和,先觀相鄰兩和

$$S_{2n}=S_{2n-1}-u_{2n},\quad S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1},$$

故 $\qquad S_{2n}<S_{2n-1},\qquad S_{2n}<S_{2n+1}.$

今察兩和 S_{2q} 及 S_{2p+1}. 設 h 爲大於 p 及 q 之數,

則　　$S_{2q}< S_{2h},\quad S_{2h}<S_{2h+1},\quad S_{2h+1}<S_{2p+1},$

故　　$$S_{2q}<S_{2p+1}.$$

綜上所述,可知單數項之和逐漸減少,但常大於 S_2, 故必有一極限. 雙數項之和逐漸增大,但常小於 S_1, 故亦必有一極限. 且此兩極限相同, 因 $S_{2n+1}-S_{2n}=u_{2n+1}$ 之極限爲零故也(依假設). S_n 既有一極限,可知級數爲收斂.

例——如

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots$$

爲斂級數.

2. 絕對收斂(Absolutely Convergent)及條件收斂(Conditionally Convergent).

(A) 絕對收斂.

設有級數其各項爲任意符號,今將各項之代數值換爲絕對值而成一級數. 如所成之級數爲收斂,則原級數亦然.而原級數名爲絕對收斂.

令 (1)　　$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$

表各項爲任意符號之級數. 將 $u_n(n=1,2,3\cdots\cdots)$ 易爲絕對值 U_n 則得一級數

(2) $$U_1+U_2+U_3+\cdots\cdots+U_n+\cdots\cdots.$$

因級數(2)為收斂(依假設),故無論p為何正整數,任與一正數ε,常可選定n之值,使$U_{n+1}+\cdots\cdots+U_{n+p}$小於$\varepsilon$而$|u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}|<U_{n+1}+\cdots+U_{n+p}<\varepsilon$,即級數(1)為收斂

此結果更可以下法得之.將u_n書為

$$u_n=(u_n+U_n)-U_n,$$

而察公項為u_n+U_n之級數

(3) $$(u_1+U_1)+(u_2+U_2)+\cdots\cdots+(u_n+U_n)+\cdots\cdots.$$

令S_n,S''_n,S'_n依次代表(1),(2),(3)之前n項之和,

則有

$$S_n=S'_n-S''_n.$$

因(2)為斂級數,故(3)亦然.蓋以(3)之各項不為負,而其公項不大於$2U_n$也.當n為無窮時,S_n之極限為S'_n之極限減去S''_n之極限,故級數(1)為收斂,而吾人可視之為(3)與(2)兩正項級數之差.

若將收斂正項級數之各項改變次序與組合,正項級數之和仍不變.

假定(1) $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$

為收斂正項級數,其和為S. 又令

(4) $$v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$$

爲一級數,其各項與(1)相同,但次序則否.即(1)中任一項見於(4)之某處,而(4)中任一項亦在(1)內也.今以Σ_m表(4)之前m項之和.因此m項在(1)內,故可選定n之值,使(1)之前n項包含(4)之前m項,而有

$$\Sigma_m<S_n<S.$$

又Σ_m與m同時增加,故上列不等式表明(4)爲收斂,而其和Σ不超過S.同理可證$S\leqq\Sigma$.於是$S=\Sigma$.

由此觀之,若(1),(4)兩級數中,有一爲發級數,則其他亦然.乃將(4)之各項組合成級數

$$(5)\qquad w_1+w_2+w_3+\cdots\cdots+w_m+\cdots\cdots,$$

就中 $w_1=v_1+v_2+\cdots\cdots+v_p,\quad w_2=v_{p+1}+\cdots\cdots+v_{p+q},$ $w_3=v_{p+q+1}+\cdots\cdots v_{p+q+r},\cdots\cdots$,則(5)之前$m$項之和$\Sigma'$等於(4)之前$N$項之和$(N>m)$.當$m$無限增加,$N$亦變爲無窮,而$\Sigma'$之極限等於$S$.

綜上所述,可知正項級數(1)之和不因改變各項之次序與組合各項而異也.

若(1)爲絕對收斂而各項之符號爲任意,則(1)之和爲(3)之和減去(2)之和.茲將(1)之各項變更次序與組合,成爲級數(5).又令$V_n=|v_n|$而成收斂之級數

$$(6)\quad (V_1+V_2+\cdots V_p)+(V_{p+1}+\cdots V_{p+q})+(V_{p+q+1}+\cdots+V_{p+q+r})$$

$+\cdots$, 及 (7) $(v_1+v_2+\cdots+v_p+V_1+V_2+\cdots+V_p)+(v_{p+1}+\cdots+v_{p+q}+V_{p+1}+\cdots+V_{p+q})+\cdots$, 則級數(5)爲(7)之和減去(6)之和. 惟以(2)爲收斂之正項級數,其和不因各項次序之變更與各項之組合而異,故(2)之和卽爲(6)之和. 今證(3)之和亦爲(7)之和.

令 Σ'_m 表(7)之前 m 項之和,則無論 m 爲何值,可令 n 增大,使(3)之前 n 項之和 $S'_n>\Sigma'_m$, 卽 Σ'_m 常小於(3)之極限(m 增加時 Σ'_m 不減少). 同理又知 S'_n 小於(7)之極限(n 增加時 S'_n 不減少). 於是(3)與(7)有相同之極限.

綜上所述,可知絕對斂級數之和不因改變各項之次序與組合各項而異也.

(*B*) 條件收斂.

設其斂級數,其各項爲任意符號.如將各項之代數值換爲絕對值而成之級數爲發散,則原級數名爲條件收斂.

例如級數 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}-\cdots$ 爲條件斂級數,蓋以調和級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ 爲發散故也.

若將條件斂級數各項變更次序與組合,則其和可因之而變.

蓋取級數(S) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\cdots\cdots$考之,即知其和等於$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right)$,就中$\sum_{n=0}^{n=\infty}$表示由$n=0$加至$n=\infty$.如將此級數書爲

$$(S')\quad 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}+\cdots\cdots,$$

而察其連續之三和S'_{3n}, S'_{3n+1}, S'_{3n+2},則知S'_{3n}與n同時增加,而$S'_{3n+1}>S'_{3n}>0$.又當n增加時,S'_{3n+1}減少而常大於零,故S'_{3n+1}有一極限.由$S'_{3n+1}-S'_{3n}$與$S'_{3n+1}-S'_{3n+2}$之值觀之,立見此極限與S'_{3n},S'_{3n+2}之極限相同.故級數(S')之和等於

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right).$$

由恆等式$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}=2\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}\right)$,即知級數$(S)$之和2倍於級數$(S')$之和.

3. 應用.

欲知各項爲任意符號之級數之性質,先研究其絕對值所成之級數,如所成之級數爲收斂,則依前目之定理,原級數亦爲收斂.如用第II節第3目或第4目之

方法,查得絕對值所成之級數爲發散,則原級數亦爲發散.蓋若$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$(或$\sqrt[n]{u_n}$)之極限大於1,則原級數之公項不以零爲極限故也.

例——設有級數,其公項

$$u_n=\frac{(n+1)x^n}{n^2},$$

試究其性質.

此處

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(n+2)x^{n+1}}{(n+1)^2}\div\frac{(n+1)x^n}{n^2}=\frac{(n+2)n^2}{(n+1)^3}x.$$

當n無限增大時,$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$之極限爲$|x|$.故級數爲收斂或發散,視$|x|$小於1或大於1而定.

如　$$x=+1,$$

則　$$u_n=\frac{n+1}{n^2},$$

此爲發級數之公項(第II節第6目之定理).如$x=-1$,

則　$$|u_n|-|u_{n+1}|=\frac{n+1}{n^2}-\frac{n+2}{(n+1)^2}=\frac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

此差常爲正,故公項之絕對值逐漸減少而以零爲極限,可知級數爲收斂(參閱本節第1目).

IV. 級數之和及積

1. 和之定理.

設有各項爲任意符號之斂級數

(1) $$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots,$$

(2) $$v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots,$$

其和爲S及S',則以u_n+v_n爲公項之級數

(3) $$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots\cdots+(u_n+v_n)+\cdots\cdots$$

亦必收斂,而其和爲$S+S'$.

用S_n, S'_n, Σ_n依次代表(1),(2),(3)之前n項之和,則有

$$\Sigma_n=S_n+S'_n.$$

當n無限增大時,S_n, S'_n之極限爲S及S',故Σ_n之極限爲$S+S'$.

同理,級數

$$(u_1-v_1)+(u_2-v_2)+\cdots\cdots+(u_n-v_n)+\cdots\cdots$$

必收斂,而以$S-S'$爲其和.

2. 積之定理.

設有任意符號之兩斂級數

(1) $$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots,$$

(2) $$v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots,$$

其和爲S及S'.如兩者之中,至少有一爲絕對收斂,則以

$$w_n=u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots\cdots+u_nv_1$$

爲公項之級數

(3) $u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots\cdots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots\cdots+u_nv_1)+\cdots\cdots$

亦必收斂,而以SS'爲其和.

設級數(1)爲絕對收斂,用S_n, S'_n, Σ_n依次表(1),(2),(3)之前n項之和.而究下列之差

$$\delta=\Sigma_{2n}-S_nS'_n,$$

就中 Σ_{2n} 爲 $u_\alpha v_\beta$ 各項之總和,其中 $\alpha+\beta$ 小於或等於 $2n+1$者.可知

$$\delta=u_1(v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots\cdots+v_{2n})+u_2(v_{n+1}+\cdots+v_{2n-1})+\cdots\cdots+u_nv_{n+1}$$
$$+u_{n+1}(v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n)+u_{n+2}(v_1+v_2+\cdots\cdots+v_{n-1})+\cdots\cdots+u_{2n}v_1.$$

因兩級數爲收斂,故無論n爲何值,必有A, B兩數存在,而能適合不等式

$$U_1+U_2+\cdots\cdots+U_n<A,(U_n=|u_n|),$$

$$|v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n|<B.$$

又因(1)爲絕對收斂,而(2)爲收斂,

遂有$U_{n+1}+U_{n+2}+\cdots\cdots\cdots+U_{n+p}<\dfrac{\varepsilon}{A+B}$

$|v_{n+1}+v_{n+2}+\cdots\cdots\cdots+v_{n+p}|<\dfrac{\varepsilon}{B+B}$(參閱第III節第2目).

故 $$|\delta|<(U_1+U_2+\cdots\cdots+U_n)\frac{\varepsilon}{A+B}+(U_{n+1}+\cdots\cdots+U_{2n})B.$$

即 $$|\delta|<A\frac{\varepsilon}{A+B}+\frac{\varepsilon}{A+B}B.$$

亦即 $$|\Sigma_{2n}-S_nS'_n|<\varepsilon.$$

此式證明Σ_{2n}與$S_nS'_n$同極限.但$S_nS'_n$之極限爲SS',故級數(3)爲收斂,且以SS'爲極限.

〔註〕 上之方法,證明(3)之雙數項之和有一極限.但仍須證(3)之單數項之和亦有相同之極限,證法始算完滿.此證委諸讀者.

V. 級數 e

1 緣起.

設有級數

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots,$$

其比值$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n!}\div\frac{1}{(n-1)!}=\frac{1}{n}$,此值以零爲極限,故級數爲收斂.此級數在分析數學上佔重要位置,特以級數e名之,並用e字代表其和.

當m無限增大時,$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$之極限爲$e$.此定理包含於下定理之中.

當m無限增大時，$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$之極限爲下列歛級數之和，

(1) $$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots,$$

x表任意之數.

先證一補題於下：

如$a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$皆爲正而小於1，

則 $(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\cdots(1-a_n)>1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

由恆等式觀之，

$$(1-a_1)(1-a_2)=1-(a_1+a_2)+a_1a_2.$$

因$a_1\ a_2$爲正，

故 $$(1-a_1)(1-a_2)>1-(a_1+a_2),$$

可知此補題適用於$n=2$時.現設補題適用至$n-1$，則有

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})>1-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}).$$

兩邊以正數$1-a_n$乘之，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_{n-1})(1-a_n)>1-(a_1+a_2+\cdots a_{n+1}+a_n)$$
$$+a_n(a_1+a_2+\cdots a_{n-1}),$$

可知 $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$.

此式之左邊旣小於1，而大於$1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，

故 $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)=1-\theta(a_1+a_2+\cdots+a_n)$,

θ表0與1間之一數.

2. 各種情形.

(*A*) 先設m爲正整數,依二項式定理,將$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$展開之

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{x}{m}+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}\frac{x^2}{m^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{p!}\frac{x^p}{m^p}+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-m+1)}{m!}\frac{x^m}{m^m}$$

$$=1+\frac{x}{1}+\left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{x^2}{1\cdot2}+\cdots+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{p!}$$

$$+\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)\frac{x^m}{m!}.$$

依補題

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)=1-\theta_p\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{m}+\cdots+\frac{p-1}{m}\right)$$

$$=1-\theta_p\frac{p(p-1)}{2m},$$

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{m}\right)\frac{x^p}{p!}=\frac{x^p}{p!}-\frac{x^2}{2m}\theta_p\frac{x^{p-2}}{(p-2)!},$$

θ_p爲0與1間之一數.將此式代入$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$展式中之第四項及其以後各項,

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\cdots\cdots+\frac{x^m}{m!}$$

$$-\frac{x^2}{2m}\left[1+\frac{\theta_3x}{1}+\frac{\theta_4x^2}{1\cdot2}+\cdots+\theta_m\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\right].$$

此式簡寫為 $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=S_{m+1}-\frac{x^2}{2m}A,$

就中 $$S_{m+1}=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots\cdots+\frac{x^m}{m!},$$

$$A=1+\frac{\theta_3 x}{1}+\frac{\theta_4 x^2}{1\cdot 2}+\cdots\cdots+\theta_m\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}.$$

因θ在0與1之間,故用ρ表x之絕對值,

即得 $$|A|<1+\rho+\frac{\rho^2}{1\cdot 2}+\cdots\cdots+\frac{\rho^{m-2}}{(m-2)!};$$

m無論如何增大,$|A|$常小於一斂級數,當m無限增大時,$\frac{x^2}{2m}$以零為極限,$\frac{x^2}{2m}A$亦然,而S_{m+1}之極限為級數(1)之和S.

由是證明$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$之極限為$S$.

(B) 現設m為任意之正數,選兩連續整數m'及$m'+1$合於下列之關係

$$m'<m<m'+1.$$

如x為正,則

$$1+\frac{x}{m'+1}<1+\frac{x}{m}<1+\frac{x}{m'},$$

$$\left(1+\frac{x}{m'+1}\right)^{m'}<\left(1+\frac{x}{m}\right)^m<\left(1+\frac{x}{m'}\right)^{m'+1},$$

$$\frac{\left(1+\frac{x}{m'+1}\right)^{m'+1}}{1+\frac{x}{m'+1}}<\left(1+\frac{x}{m}\right)^m<\left(1+\frac{x}{m'}\right)^{m'}\left(1+\frac{x}{m'}\right).$$

當 m 無限增大時，m' 及 $m'+1$ 亦然，$\left(1+\frac{x}{m'}\right)^{m'}$ 及 $\left(1+\frac{x}{m'+1}\right)^{m'+1}$ 同以 S 爲極限，而 $1+\frac{x}{m'}$ 及 $1+\frac{x}{m'+1}$ 同以 1 爲極限，$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ 遂介於兩數之間，其極限均爲 S 者，故亦必以 S 爲極限.

如 x 爲負，則

$$1+\frac{x}{m'}<1+\frac{x}{m}<1+\frac{x}{m'+1},$$

$$\left(1+\frac{x}{m'}\right)^{m'+1}<\left(1+\frac{x}{m}\right)^m<\left(1+\frac{x}{m'+1}\right)^{m'}$$

依同理，即知 m 無限增大時，$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ 亦以 S 爲極限.

再設 m 爲負．令 $m=-\mu$，則 μ 爲正，

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^{-\mu}=\left(\frac{\mu}{\mu-x}\right)^\mu=\left(1+\frac{x}{\mu-x}\right)^\mu$$

$$=\left(1+\frac{x}{\mu-x}\right)^{\mu-x}\left(1+\frac{x}{\mu-x}\right)^x$$

當 μ 無限增大時，$\left(1+\frac{x}{\mu-x}\right)^{\mu-x}$ 之極限爲 S，而 $\left(1+\frac{x}{\mu-x}\right)^x$ 之極限爲 1，故 $\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$ 仍以 S 爲極限.

由是證明前目之定理.

3. 備攷.

前已證明$m=\pm\infty$時,$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$之極限爲$e$.令$\alpha=\frac{1}{m}$,則$m$無限增大時,$\alpha$之極限爲零.故$\alpha=0$時,$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$之極限爲$e$.

玆設$\frac{x}{m}=\alpha$,則$m=\frac{x}{\alpha}$,

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=(1+\alpha)^{\frac{x}{\alpha}}=[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}]^x.$$

當m無限增大時,α之極限爲零,$(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$之極限爲$e$.故$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$以$e^x$爲極限.但由前目$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$以$S$爲極限,可知

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

此爲函數展成級數之一例.

第二章之習題

(1) (a) 設級數之公項u_n能書爲

$$u_n=f(n)-f(n+1),$$

其中$f(n)$代表一函數,當$n=+\infty$時,有一極限者.試證級數爲收歛.

(b) 公項爲

$$\frac{1}{n(n+1)},$$

$$\arc\tan\frac{1}{n^2+n+1},$$

$$\frac{\log\frac{n+1}{n}}{\log n\cdot\log(n+1)}$$

之級數是否收歛.并求級數之和.

(2) 設 $x>0$, 則級數 $u_n=\frac{1}{1+x^n}$ (卽公項爲 u_n 之級數) 是否收歛.

(3) 證明 $u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$ 爲發級數.

試求下列級數之收歛條件:

(4) $$u_n=\frac{x^n}{n!}.$$

(5) $$u_n=\frac{n}{1+x^n}.$$

(6) $$u_n=\frac{(n^2+1)x^n}{(n+1)!}.$$

(7) $$u_n=1-\cos\frac{x}{n^2}.$$

試究下列級數:

(8) $$u_n=\frac{1+n^2}{n!}.$$

(9) $$u_n=\frac{1}{2^n}\tan\frac{\pi}{2^n}.$$

(10) $$u_n=n^2e^{-n}.$$

(11) $$u_n=\frac{3n-1}{n^2+5}.$$

(12) $$u_n=\left(\frac{n-3}{3n^2-6n+7}\right)^2.$$

(13) $$u_n=\sqrt{\frac{3n^3+5n^2+6n+8}{n^4-5n^3-9}}.$$

(14) $$u_n=\sin^3\frac{\pi}{n}.$$

(15) $$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\tan\frac{\pi}{n}.$$

(16) $$u_n=\frac{n\sin\frac{1}{n}}{\sqrt[4]{n^3+1}}.$$

(17) $$u_n=\frac{(n-1)\sqrt[3]{n^5+2}}{(n^2-4n+1)\sqrt[4]{n^3+1}}.$$

(18) 證明級數 $u_n=\frac{n!}{n^n}$ 爲收斂.

(19) 設 $0<x<\frac{\pi}{2}$, 試察級數 $u_n=(\tan x)^{\frac{n^2-1}{n+2}}$ 是否收斂.

(20) 設 $\phi(n)$ 爲正整數 n 之函數, 當 n 無限增大時, $\phi(n)$ 之極限爲零, 試證

$$U_n=\log[1+\phi(n)], V_n=\phi(n)$$

兩級數同性質.

幷察級數 $u_n=\log\left(1+\frac{x^n}{n^2}\right)$, $v_n=\log(1+x^n)$

是否收斂.

(21) 歛級數之和之計算.

當 $n>p$ 時,設正級數 u_n 之各項合於不等式 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<k$, k 爲小於1之定數, 則用級數之前 n 項之和 S_n 以代級數之和 S, 其錯誤 R_n 小於 $u_n\frac{k}{1-k}$.

蓋因 $u_{n+1}<k\,u_n$, $u_{n+2}<k^2u_n$, $u_{n+3}<k^3\,u_n\cdots\cdots$,

則 $R_n<u_n(k+k^2+k^3+\cdots)$, 卽 $R_n<u_n\frac{k}{1-k}$.

依同理,當 $n>p$ 時,設歛級數 u_n 之各項合於不等式 $\sqrt[n]{u_n}<k$, k 爲

小於1之定數.則用級數之前n項之和S_n以代級數之和S,其錯誤R_n小於$\frac{k^{n+1}}{1-k}$.

例一——求級數$\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{3\cdot3^3}+\frac{2}{5\cdot3^5}+\cdots\cdots+\frac{2}{(2n-1)3^{2n-1}}+\cdots\cdots$之和,其錯誤以小於$\frac{1}{10^8}$為度.

無論n為何值.$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{1}{9}$,故$S-S_n<\frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}u_n=\frac{u_n}{8}$.乃定$n$之值,使錯誤$\frac{u_n}{8}$及計算$u_1, u_2, \cdots\cdots u_n$各項之錯誤,合共小於$\frac{1}{10^8}$.

今計算級數之各項$u_1, u_2, \cdots u_n$,使每項計算之錯誤小於$\frac{1}{10^9}$,其法可先求分數$\frac{2}{3}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^5}, \cdots\cdots$之值.由第二項起各分數之任一項乃將其前一項除以9而得.既得各分數之值後,依其先後之次序以$1, 3, 5, \cdots\cdots$除之,即得

$$u_1=\frac{2}{1\cdot3}=0.\ 666\ 666\ 66,$$

$$u_2=\frac{2}{3\cdot3^3}=0.\ 024\ 619\ 35,$$

$$u_3=\frac{2}{5\cdot3^5}=0.\ 001\ 646\ 09,$$

$$u_4=\frac{2}{7\cdot3^7}=0.\ 000\ 130\ 64,$$

$$u_5=\frac{2}{9\cdot3^9}=0.\ 000\ 011\ 29,$$

$$u_6=\frac{2}{11\cdot3^{11}}=0.\ 000\ 001\ 02,$$

$$u_7=\frac{2}{13\cdot3^{13}}=0.\ 000\ 000\ 09,$$

計算至u_7，即知$u_7<\frac{1}{10^7}$，而$S-S_7<\frac{1}{10^7}\cdot\frac{1}{8}<\frac{2}{10^9}$．又$u_1, u_2, \cdots\cdots u_7$各項計算之錯誤小於$\frac{1}{10^9}$，故各項之錯誤之和小於$\frac{7}{10^9}$，可見總錯誤小於$\frac{9}{10^9}$．

將以前求得之$u_1, u_2, \cdots\cdots u_7$各值而加之，得0.693 147 14．此值比$S$為小，但其錯誤小於$\frac{9}{10^9}$，故$S$在0.693 147 14與0.693 147 14$+\frac{9}{10^8}$$=0.693\ 147\ 23$之間，即所求之值為0.693 147．以此值代$S$則錯誤小於$\frac{1}{10^6}$．

例二——設$x=0.1$，試求級數$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}+\cdots$之和，其錯誤以小於$\frac{1}{1000000}$為度．

(注意) 設間號級數各項之絕對值逐漸減少而以零為極限．今將其前n項之和代級數之和，則錯誤小於第$n+1$項之絕對值．

(22) 求$e^2\ e^{\frac{1}{2}}\ e^{\frac{1}{3}}$之值，其錯誤以小於$\frac{1}{10000}$為度．

(23) 求下列兩級數之積：

$$1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{a^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots,$$

$$1+\frac{b}{1}+\frac{b^2}{2!}+\frac{b^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{b^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots.$$

(24) 試證下列兩級數

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+2}\,\frac{1}{2}x+\frac{1}{a+4}\,\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\cdots\cdots+\frac{1}{a+2n}\,\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}x^n+\cdots\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+\cdots\cdots+\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}x^n+\cdots\cdots$$

之積爲 $\frac{1}{a}\left[1+\frac{a+1}{a+2}x+\frac{(a+1)(a+3)}{(a+2)(a+4)}x^2+\cdots\cdots+\right.$

$$\left.\frac{(a+1)(a+3)\cdots(a+2n-1)}{(a+2)(a+4)\cdots(a+2n)}x^n+\cdots\cdots\right].$$

(25) 試求級數 $u_n=\frac{2n+3}{(n-1)\,n\,(n+2)}$ 之和:

試求下列每一級數之和:

(26) $\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\cdots\cdots+\frac{n^2}{n!}+\cdots\cdots$

(27) $\frac{1^3}{1}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{n^3}{n!}+\cdots\cdots$

(28) $\frac{1^4}{1}+\frac{2^4}{2!}+\frac{3^4}{3!}+\cdots\cdots+\frac{n^4}{n!}+\cdots\cdots$

(29) 試證第IV節第2目級數(3)之單數項之和與雙數項之和有相同之極限.

第三章

引數及微分

I. 無窮小

1. 定義.

若變量之極限為零者,則此變量名為無窮小(Infinitesimal).

已與視x而變之變量y,z.設當$x=x_0$時,此兩變量均為零.欲比較其量之大小,可求比值$\frac{y}{z}$於$x=x_0$時之極限.

(其一) 如$\frac{y}{z}$有異於零之極限,則謂y與z之無窮小之級(Order of Infinitesimal)相同.

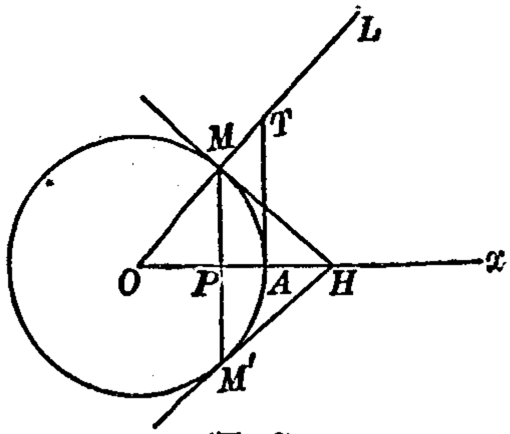
(其二) 如$\frac{y}{z}$之極限為零,則謂y之無窮小之級高於z之無窮小之級,或謂y對於z為無窮小.

(其三) 如$\frac{y}{z}$於$x=x_0$時為無窮,則謂y之無窮小之級低於z之無窮小之級.

2. 例.

當 x 趨近於零時，x 與 $\sin x$ 均為無窮小，而其無窮小之級相同.

蓋取一角 $(ox, oL)=x$ (圖 6)，在 o 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間者，以 o 為心，半徑為一單位作一圓，此圓與 ox, oL 兩直線交於 A, M，則 x 為弧 $\overset{\frown}{AM}$ 之長度.而 $\sin x$ 及 $\tan x$ 均為正.



(圖 6)

又令 M, M' 對稱於 ox，P 為直線 MM' 與 ox 之交點，H 為切線 MH 與 ox 之交點，T 為切線 AT 與直線 oL 之交點，卽有

$$\sin x=PM, \tan x=AT.$$

而
$$\overline{MM'}<\overset{\frown}{MM'}<\overline{MH}+\overline{HM'},$$

故
$$2\sin x<2x<2\tan x$$

以 $2\sin x$ 徧除之，

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}.$$

當 x 趨近於零 (上設 x 在 o 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間)，$\frac{1}{\cos x}$ 之極限為 1，而 $\frac{x}{\sin x}$ 之極限亦然.如將 x 換為 $-x$，$\frac{x}{\sin x}$ 之值仍不變，故當 x 由負值而趨近於零，$\frac{x}{\sin x}$ 之極限亦為 1.

由上所述，更知$\frac{x}{\tan x}$於$x=0$時之極限爲1.即x,$\sin x$,$\tan x$皆爲同級之無窮小.

3. <u>主要無窮小.</u>

如將數個無窮小與其中任一之無窮小相較,則此一無窮小名爲主要無窮小.

令x爲主要無窮小,y爲他一無窮小,無論正數n爲整數,分數,或無理數,如$\frac{y}{x^3}$有一異於零之極限,則y名爲<u>第n級之無窮小</u>(Infinitesimal of the nth Order). 令a爲此極限,即知$\frac{y}{x^n}=a+\varepsilon$ (ε之極限爲零). 而$y=(a+\varepsilon)x^n$,ax^n名爲y之<u>主要部份</u> (Principal Part) 如x與$\sin x$爲同級之無窮小,而x爲$\sin x$之主要部份,即其例也.

又設無窮小$y=1-\cos x$ (當x趨近於零),因$y=2\sin^2\frac{x}{2}$

故$\frac{y}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$, 而$\frac{y}{x^2}$之極限爲$\frac{1}{2}$,即無窮小$1-\cos x$之主要部份爲$\frac{x^2}{2}$.

4. <u>相當無窮小</u> (Equivalent Infinitesimal)

兩無窮小之比值之極限爲1者,則此兩無窮小爲相當.故相當之無窮小爲同級.

例如x與$\sin x$爲相當(見第2目),而$\log(1+x)$與x亦然(log表以e爲底之對數).

蓋因$\frac{\log(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\log(1+x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$,當$x$趨近於零,則$(1+x)^{\frac{1}{x}}$之極限爲$e$,故$\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$之極限爲$\log e=1$.

凡無窮小與其主要部份相當.蓋設y之主要部份爲ax^n,則$y=x^n(a+\varepsilon)$,ε之極限爲零.故$\frac{y}{ax^n}=1+\frac{\varepsilon}{a}$之極限爲1.

5. 關於無窮小之定理

定理一——兩無窮小爲相當之必須及充足之條件如下:

對於任一之無窮小,該兩無窮小之差爲無窮小.

此條件爲必須.設y與z兩無窮小爲相當,則$\frac{y}{z}$之極限爲1,而$\frac{y}{z}=1+\varepsilon$($\varepsilon$之極限爲零),故$\frac{y-z}{z}=\varepsilon$,即$y-z$對於$z$爲無窮小.

此條件爲充足.如$\frac{y-z}{z}=\varepsilon$,則$\frac{y}{z}=1+\varepsilon$,故$y$與$z$爲相當.

定理二——已與兩無窮小,如各以其相當之無窮小替代,則此兩無窮小之比值之極限不變.

蓋設y, z爲兩無窮小,y'相當於y, z'相當於z,則$\lim\frac{y'}{z'}=\lim\frac{y}{z}$.

今證之如下:

因 $y'=y(1+\varepsilon)$, $z'=z(1+\varepsilon')$, $\varepsilon, \varepsilon'$ 之極限皆為零,故 $\frac{y'}{z'}=\frac{y}{z}\cdot\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'}$,又因 $\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'}$ 之極限為 1, 於是 $\frac{y'}{z'}$ 之極限與 $\frac{y}{z}$ 之極限相同.

茲設一例以示本定理之用.

例——試求 $x=0$ 時, 比值 $\frac{\sin ax}{\tan bx}$ 之極限.

因 $\sin ax$ 相當於 ax, $\tan bx$ 相當於 bx,

故 $\lim\frac{\sin ax}{\tan bx}=\lim\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}$.

定理三——已與 n 個無窮小,其號相同,當 n 無限增大時各以零為極限,今將此無窮小各以其相當無窮小代之,則各無窮小之和之極限不變.

命 $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots y_n$ 為 n 個無窮小,當 n 無限增大時,各以零為極限者. 設此無窮小之和 $S_n=y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n$ 於 n 為無窮時之極限為 S. 又命 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_n$ 依次與 $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots y_n$ 相當, 今證當 n 為無窮時, $\Sigma_n=z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n$ 之極限亦為 S.

蓋依簡單之運算, 即知比值 $\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_n}{z_1+z_2+z_3+\cdots\cdots+z_n}$ 大於各比值 $\frac{y_1}{z_1}, \frac{y_2}{z_2}, \cdots\cdots\frac{y_n}{z_n}$ 之最小者, 而小於最大者. 但此

比值皆以1爲極限.於是$\dfrac{y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots+y_n}{z_1+z_2+z_3+\cdots\cdots+z_n}$之極限爲1,而$\Sigma_n$之極限爲$S$.

本定理將於定積分(Definite Integral)用之.

II. 引 數

1. 定義.

設$f(x)$爲在間隔(a,b)內之連續函數.又令x_0爲此間隔內之一值,則當h趨近於零時,$f(x_0+h)-f(x_0)$之極限爲零.玆察比值$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.無論$h$趨近於零之情形如何(參閱第一章第I節第5目),若此比值有一極限,則比值之極限名爲$f(x)$於$x=x_0$時之引數(Derivative),代數值h名爲變數x之增量(Increment).而代數值$f(x_0+h)-f(x_0)$名爲函數$f(x)$之增量.故引數者,乃變數增量趨近於零時,函數增量與變數增量之比值之極限也.惟當x趨近於零時,$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$爲$+\infty$或$-\infty$,則$x=x_0$時,$f(x)$無引數存在.

若無論x爲間隔(a,b)內之任何值(x可等於a或b),$f(x)$恆有引數,則在(a,b)內,此引數爲x之函數,常以$f'(x)$或$\dfrac{dy}{dx}$記之.

[備考]——常數之引數爲零.蓋設無論 x 爲何值，$f(x)$ 恆等於常數 c，則 $f(x+h)=C$. 於是無論 h 爲何值，$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 常爲零，故其極限亦然.

2. 連續與引數之關係.

欲 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 時有引數，必也 $f(x_0+h)-f(x_0)$ 趨近於零.故連續爲有引數之必須條件，但非充足條件，學者不可不知也.爰舉例於下以明之.

例——試察函數 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$. 當 $x=0$ 時，此函數爲連續而無引數.

函數之爲連續，實顯然易見.玆證 $x=0$ 時無引數足矣.

因 $f(0)=0$，而 $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\sin\dfrac{1}{h}$，故當 h 由數列

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi},\ \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2(k+1)\pi},\cdots\cdots\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi},\cdots\cdots$$

而趨近於零（k, n 表正整數），則 $\sin\dfrac{1}{h}$ 趨近於 1. 若 h 由數列

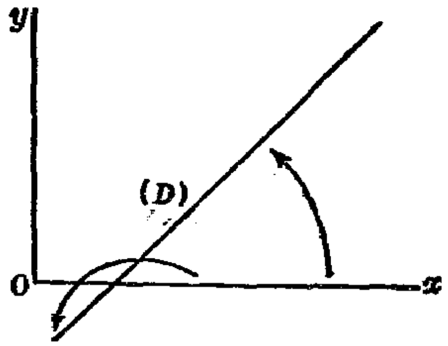
$$\frac{1}{2k\pi},\ \frac{1}{2(k+1)\pi},\cdots\cdots\frac{1}{2n\pi},\cdots\cdots$$

而趨近於零，則 $\sin\dfrac{1}{h}$ 趨近於零，即 $\sin\dfrac{1}{h}$ 之值因 h 趨近於零之情狀而異，故 $f(x)$ 於 $x=0$ 時無引數.

他如函數$x^{\frac{2}{3}}$, $x\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$等,均於 $x=0$ 時爲連續而無引數.當h趨近於零時,$\dfrac{h^{\frac{2}{3}}}{h}=h^{-\frac{1}{3}}$爲無窮大,而$\dfrac{h\dfrac{e^{\frac{1}{h}}}{1+e^{\frac{1}{h}}}}{h}=\dfrac{e^{\frac{1}{h}}}{1+e^{\frac{1}{h}}}$爲1或爲零,視$h$由正或由負趨近於零而定.

3. 幾何釋義.

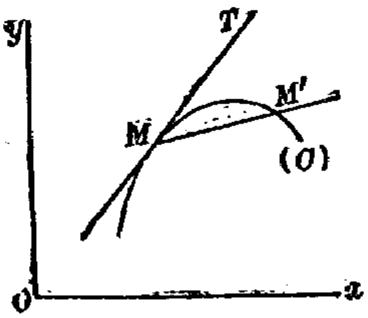
已與正交之位標軸ox, oy(圖 7),及一次方程式$y=ax+b$,此式代表一直線(D),a爲直線之角系數 (Angular Coefficient). 令(x_1, y_1), (x_2, y_2)爲(D)上之任意兩點,則有$y_1=a\,x_1+b$, $y_2=a\,x_2+b$,而角系數$a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\tan\alpha$, α表ox與(D)之任一方向之交角.



(圖 7)

今設函數$f(x)$連續於某間隔內,而有引數$f'(x)$, x_0及x_0+h爲此間隔內之值.如令$y=f(x)$,則(x, y)點晝一曲線(C)(圖 8).經過$M[x_0, f(x_0)]$, $M'[x_0+h, f(x_0+h)]$兩點之直線之角系數爲

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$



(圖 8)

當h趨近於零，則M'趨近於M.此角系數之極限爲$f'(x_0)$，而直線之極限爲MT，卽所謂M點之切線(Tangent)也.故切線MT之角系數爲$f(x)$於$x=x_0$時之引數.

當$f'(x_0)=0$，則$M[x_0,f(x_0)]$之切線平行於ox軸.當h趨近於零，如$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$爲無窮，則函數$f(x)$於$x=x_0$無引數，而$M[x_0,f(x_0)]$之切線與$oy$軸平行.

4　切線及法線之方程式.

$M_0[x_0,f(x_0)]$點之切線之角系數爲$f'(x_0)$，故其切線之方程式爲

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

如位標軸爲正交，則M_0點法線之方程式爲

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

III　簡單函數之引數

1.　x^m之引數.

(其一)　首設m爲正整數，則依二項式定理得

$$\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\frac{x^m+mhx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}h^2x^{m-2}+\cdots\cdots+h^m-x^m}{h}.$$

即 $$\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}hx^{m-2}+\cdots\cdots+h^{m-1},$$

當h趨近於零,$\frac{(x+h)^m-x^m}{h}$之極限爲mx^{m-1},故x^m之引數爲mx^{m-1}

(其二) 次設m爲正分數$\frac{p}{q}$,就中p,q爲正整數.令

$(x+h)^{\frac{p}{q}}=X,\ x^{\frac{p}{q}}=A,$

則 $$\frac{(x+h)^{\frac{p}{q}}-x^{\frac{p}{q}}}{h}=\frac{X-A}{h}$$
$$=\frac{X^q-A^q}{h}\cdot\frac{1}{X^{q-1}+AX^{q-2}+\cdots\cdots+A^{q-1}}.$$

當h趨近於零,$\frac{X^q-A^q}{h}=\frac{(x+h)^p-x^p}{h}$之極限爲$px^{p-1}$(因$p$爲正整數).又$X$之極限爲$A$,故$X^{q-1}+AX^{q-2}+\cdots\cdots+A^{q-1}$之極限爲 $qA^{q-1}=qx^{\frac{p}{q}(q-1)}$ 由是 $\lim\frac{(x+h)^{\frac{p}{q}}-x^{\frac{p}{q}}}{h}=\frac{px^{p-1}}{qx^{p-\frac{p}{q}}}$
$=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$,而$x^m$之引數仍爲$mx^{m-1}$.

(其三) 更設m爲負有理數.令$m=-\mu$,則μ爲正有理數,

而 $$\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\frac{(x+h)^{-\mu}-x^{-\mu}}{h}=\frac{\frac{1}{(x+h)^\mu}-\frac{1}{x^\mu}}{h},$$

即 $$\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=-\frac{(x+h)^\mu-x^\mu}{h}\cdot\frac{1}{x^\mu(x+h)^\mu}.$$

當 h 趨近於零，$\dfrac{(x+h)^{\mu}-x^{\mu}}{h}$ 之極限為 $\mu x^{\mu-1}$ (因 μ 為正有理數)，而 $(x+h)^{\mu}$ 之極限為 x^{μ}，故 $\dfrac{(x+h)^{m}-x^{m}}{h}$ 之極限為 $\dfrac{-\mu x^{\mu-1}}{x^{2\mu}}=-\mu x^{-\mu-1}$，是亦 $m x^{m-1}$ 也。

綜上所述，如 m 為有理數，則 x^m 之引數為 $m x^{m-1}$. 如 m 為無理數，則當 $x>0$ 時，x^m 為 x 之函數，其引數與前所得者無異 將於第V節第5目求之.

2. a^x 之引數.

茲求 $\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\cdot\dfrac{a^h-1}{h}$ 於 h 趨近於零時之極限.

當 h 趨近於零，a^h 之極限為1 (見第一章第II節第9目). 令 $a^h=1+\alpha$，并以 log 表 e 底之對數，則 $h\log a=\log(1+\alpha)$，而 $h=\dfrac{\log(1+\alpha)}{\log a}$ 故 $a^x\dfrac{a^h-1}{h}=a^x\log a\dfrac{\alpha}{\log(1+\alpha)}$. 當 h 趨近於零，則 α 亦趨近於零，而 $\dfrac{\alpha}{\log(1+\alpha)}$ 之極限為1 遂知 a^x 之引數為 $a^x\log a=\dfrac{a^x}{\log_a e}$.

特端——$a=e$，e^x 之引數為 e^x.

3. $\log_a x$ 之引數.

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

令 $\dfrac{h}{x}=\alpha$ 即 $h=\alpha x$，則有

$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\alpha}\log_a(1+\alpha)=\frac{1}{x}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. 當 h 趨近於零，α 亦趨近於零，而 $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 之極限爲 e. 故 $\frac{1}{x}\log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ 之極限爲 $\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\cdot\log_e a}$，此乃 $\log_a x$ 之引數也.

特端——$a=e$, $\log x$ 之引數爲 $\frac{1}{x}$.

4. $\cos x$ 之引數

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\frac{2\sin\frac{h}{2}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h},$$

以 $\frac{h}{2}$ 替代 $\sin\frac{h}{2}$，則上式右邊化爲 $-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)$，而其極限爲 $-\sin x$，故 $\cos x$ 之引數爲 $-\sin x$.

5. $\sin x$ 之引數.

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}.$$

以 $\frac{h}{2}$ 替代 $\sin\frac{h}{2}$，則上式右邊化爲 $\cos x$，即是 $\sin x$ 之引數也.

6. $\tan x$ 之引數.

$$\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$=\frac{1}{h}\cdot\frac{\sin(x+h)\cos x-\sin x\cos(x+h)}{\cos x\cos(x+h)}$$

$$=\frac{\sin h}{h}\,\frac{1}{\cos x\cos(x+h)}.$$

因 $\frac{\sin h}{h}$ 之極限爲1，而 $\cos(x+h)$ 之極限爲 $\cos x$，故 $\tan x$ 之引數爲 $\frac{1}{\cos^2 x}$.

7. 反函數之引數.

定理——設 $y=f(x)$ 與 $x=\phi(y)$ 互爲反函數，如第一章第I節第II目所定者．又設 x_0, y_0 爲 x 與 y 之對應值．當 $x=x_0$ 時，如函數 $f(x)$ 有異於零之引數 $f'(x_0)$，則函數 $\phi(y)$ 於 $y=y_0$ 時，有引數 $\phi'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

蓋因 $y_0=f(x_0)$, $x_0=\phi(y_0)$．故與 x_0 以增量 h, y_0 卽有增量 k 與之對應，合於 $y_0+k=f(x_0+h)$，及 $x_0+h=\phi(y_0+k)$.

遂得
$$\frac{\phi(y_0+k)-\phi(y_0)}{k}=\frac{h}{f(x_0+h)-f(x_0)}.$$

當 h 趨近於零時，上式右邊之極限爲 $\frac{1}{f'(x_0)}$，而 k 亦同時趨近於零，以 y 爲 x 之連續函數故也．由是 h 趨近於零時，$\frac{\phi(y_0+k)-\phi(y_0)}{k}$ 之極限 $\phi'(y_0)$ 等於 $\frac{1}{f'(x_0)}$.

無論 x 爲間隔 (a, b) 內之任何值，若 $f(x)$ 恆有不爲零之引數 $f'(x)$，則 $\phi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$．如以 y'_x 表 $f'(x)$，x'_y 表 $\phi'(y)$，卽

可將上式書爲$x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$或$y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$.

下列數目用本定理以求反三角函數(Inverse Trigonometric Function)之引數.

8 $\arccos x$之引數.

由$y=\arccos x$之關係,卽有$x=\cos y$,故$x'_y=-\sin y$,而$y'_x=\dfrac{1}{x'_y}=-\dfrac{1}{\sin y}$.今因$\sin y=\varepsilon\sqrt{1-\cos^2 y}$,就中$\varepsilon$代表$\pm1$,其號與$\sin y$之號相同,遂得$y'_x=-\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}}$.此乃$\arccos x$之引數也

上列所得之結果,可明之如次.任與x一值x_0,則y之對應值爲$2k\pi\pm z$,就中k爲整數,而z爲等於$\arccos x_0$之任一值,故y之引數$=\pm z$之引數,此引數視$\sin y$之號而定.若設y在間隔$[2k\pi,(2k+1)\pi]$內.且令x在間隔$(-1,+1)$內,則任與一值x,卽得一值y與之對應,并以一值爲限.反言之,任與一值y,亦得一值x與之對應,并以一值爲限.在此條件,y與x互爲反函數.

9. $\arcsin x$之引數.

由$y=\arcsin x$得$x=\sin y$,而

$y'_x=\dfrac{1}{x'_y}=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}}$,就中$\varepsilon$代表$\pm1$,其號與$\cos y$之號相同.

此結果可做前目解釋之.

又 $\arcsin x$ 之引數與 $\arccos x$ 之引數有相等之絕對值. 此可直接證明, 蓋令 $u=\arccos x$, $v=\arcsin x$, 則 $x=\cos u$, $x=\sin v$, 而 $\cos u=\sin v$, 即有 $\cos u=\cos\left(\frac{\pi}{2}-v\right)$, 故 $u=2k\pi\pm\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=a\pm v$ (a 表常數). 可見 $u'_x=\pm v'_x$.

10. $\arctan x$ 之引數.

由 $y=\arctan x$, 得 $x=\tan y$, 而
$y'_x=\frac{1}{x'_y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$, 故 $\arctan x$ 之引數爲 $\frac{1}{1+x^2}$.

已與 x 一值 x_0, 則 y 之值爲 $k\pi+z$, 就中 k 爲整數, 而 z 表 $\arctan x_0$ 之任一值. 此各值 $k\pi+z$ 不過常數之差, 故 y 之引數相同.

IV. 函數之函數之引數

1. 定義.

設 u 爲 x 之函數, 其關係以 $u=f(x)$ 表之. 又設 y 爲 u 之函數, 其關係則以 $y=\phi(u)$ 表之. 任與一值 x, 即得一值 u 與之對應, 而此值 u 亦有其對應之值 y, 故任與一值 x, 可得一值 y 與之對應, 即 y 爲 x 之函數, 該函數名爲

函數之函數 (Function of Function).

2. 引數之求法.

設u對於x有引數u'_x,而y對於u有引數y'_u,則y對於x有引數$y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

蓋令$x=x_0$時,$u=u_0$, $y=y_0$,而$x=x_0+\Delta x$時,$u=u_0+\Delta u$, $y=y_0+\Delta y$.如$\Delta u\neq 0$,卽有

$$(1)\qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\,\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

玆就$x=x_0$時u'_x之值$(u'_x)_0$異於零與否,分究如次.

(其一) 設$(u'_x)_0\neq 0$,則當$|\Delta x|$小於一正數a時,Δu異於零,故可應用(1)式得

$$(2)\qquad y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

(其二) 設$(u'_x)_0=0$.令與x以一列趨近於零之數值,卽得爲零或不爲零之對應增量Δu.如Δu異於零,則可應用(1)式而有(2)式之結果.如Δu等於零,則Δy隨之爲零而$\frac{\Delta y}{\Delta x}$以零爲極限.

故無論在何情形,公式$y'_x=y'_u\cdot u'_x$恆能成立.

3. 例.

(1) 設$y=\cos 3x$,試求y'_x.

令$u=3x$,則$y=\cos u$,

而 $y'_x=y'_u u'_x=-\sin u\cdot 3=-3\sin u=-3\sin 3x$.

(2) 設 $y=a^{\sin x}$，試求 y'_x.

令 $\sin x=u$，則 $y=a^u$，而

$y'_x=y'_u\cdot u'_x=a^u\cdot\log a\cdot\cos x=a^{\sin x}\cdot\log a\cdot\cos x$.

4. 推廣.

做第2目之推理可得結果如下：

設 $u=f(x)$，$v=\phi(u)$，$w=\psi(v)$，$y=g(w)$，且 u 對於 x 之引數爲 u'_x，v 對於 u 之引數爲 v'_u，w 對於 v 之引數爲 w'_v，y 對於 w 之引數爲 y'_w，則 y 對於 x 之引數爲 $y'_w\cdot w'_v\cdot v'_u\cdot u'_x$.

例——設 $y=\sqrt[4]{\operatorname{arc}\sin\frac{x}{3}}$，試求 y'_x.

令 $u=\frac{x}{3}$，$v=\operatorname{arc}\sin u$，$y=v^{\frac{1}{4}}$.

則 $y'_x=y'_v\cdot v'_u\cdot u'_x=\frac{1}{4}v^{-\frac{3}{4}}\cdot\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{3}$

$$=\frac{1}{4}(\operatorname{arc}\sin u)^{-\frac{3}{4}}\frac{\varepsilon}{\sqrt{9-x^2}}=\frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{\sqrt{9-x^2}\left(\operatorname{arc}\sin\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{4}}}.$$

($\varepsilon=\pm1$，其號與 $\cos v$ 之號相同).

V. 複函數

1. 定義.

已與數個函數 $u=\phi(x)$，$v=\psi(x)$，$w=g(x)$，……若與 x

一值,則 u, v, w……各有一確定之值與之對應.此 u, v, w……之值既定,如 y 有一確定之值對應於 u, v, w,……,則 y 名爲 x 之複函數(Composite Function).吾人以 $y=f(u, v, w\cdots\cdots)$ 記之.

當複函數爲數個函數之和或積,或爲兩函數之商時,其引數可依下列數目求之.

2. 和之引數.

設 u, v, w 爲 x 之連續函數,且有引數 u', v', w',則函數 $y=u+v+w$ 有一引數,此引數爲 $u'+v'+w'$.

蓋任與 x 以增量 Δx,則 u, v, w 得增量 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ 而 y 得增量 Δy,但因

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)+(w+\Delta w),$$

故
$$\Delta y=\Delta u+\Delta v+\Delta w.$$

將此式之兩邊以 Δx 除之,卽有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

當 Δx 趨近於零時,$\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}, \frac{\Delta w}{\Delta x}$ 之極限爲 u', v', w'(依假設),故 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 有等於 $u'+v'+w'$ 之極限,此卽 y 之引數也.由是得結果如下:

數個函數之和之引數,等於各函數之引數之和.

應用——求 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_{m-1}x+a_m$ 之引數.

依上所得之結果,立知

$$f'(x)=ma_0x^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+\cdots\cdots+2a_{m-2}x+a_{m-1}.$$

3. 積之引數.

設 $y=u_1u_2\cdots\cdots u_n$,就中 $u_1,u_2,\cdots\cdots u_n$ 爲 x 之 n 個函數,其引數爲 $u'_1,u'_2,\cdots\cdots u'_n$. 今求 y 之引數.

先設 $n=2$. 若與 x 以增量 $\triangle x$, 則 u_1, u_2 之增量爲 $\triangle u_1$, $\triangle u_2$. 而 y 之增量爲 $\triangle y$.

且 $$y+\triangle y=(u_1+\triangle u_1)(u_2+\triangle u_2),$$

故 $$\triangle y=(u_1+\triangle u_1)(u_2+\triangle u_2)-u_1u_2,$$

卽 $$\triangle y=u_2\triangle u_1+u_1\triangle u_2+\triangle u_1\triangle u_2.$$

將上式之兩邊徧除以 $\triangle x$,而略去無窮小 $\frac{\triangle u_1\triangle u_2}{\triangle x}$,

得 $$\frac{\triangle y}{\triangle x}=u_2\frac{\triangle u_1}{\triangle x}+u_1\frac{\triangle u_2}{\triangle x}.$$

當 $\triangle x$ 趨近於零, $\frac{\triangle u_1}{\triangle x}$, $\frac{\triangle u_2}{\triangle x}$ 之極限爲 u'_1,u'_2 (依假設),故 y 之引數爲 $y'=u_2u'_1+u_1u'_2$.

上式可書爲 $\frac{y'}{y}=\frac{u'_1}{u_1}+\frac{u'_2}{u_2}$, 由此可見 $\log y$ 之引數爲 $\frac{u'_1}{u_1}+\frac{u'_2}{u_2}$. 而 $\frac{y'}{y}$ 名爲 y 之<u>對數引數</u>(Logarithmic Derivative).

故兩函數之積之對數引數等於各函數之對數引數之和.

次設 n 爲任何正整數,且設上述之結果於 $n-1$ 個函數時爲眞,卽當 $z=u_1u_2\cdots\cdots u_{n-1}$ 時,則有

$$\frac{z'}{z}=\frac{u'_1}{u_1}+\frac{u'_2}{u_2}+\cdots\cdots\frac{u'_{n-1}}{u_{n-1}}$$

乃令 $y=zu_n$. 因 z 與 u_n 均設爲有引數,故 $\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}+\frac{u'_n}{u_n}$. 計及 $\frac{z'}{z}$ 之値.

遂得 $$\frac{y'}{y}=\frac{u'_1}{u_1}+\frac{u'_2}{u_2}+\cdots\cdots+\frac{u'_{n-1}}{u_{n-1}}+\frac{u'_n}{u_n}.$$

可見 n 個函數之對數引數等於各函數之對數引數之和. 若將上式之兩邊徧乘以 $y=u_1u_2\cdots\cdots u_n$, 卽得 y 之引數矣.

4. 商之引數.

設 $y=\frac{u}{v}$, 就中 u, v 爲 x 之函數,其引數爲 u', v' 今求 y 之引數.

若與 x 以增量 $\triangle x$, 則 u, v 之增量爲 $\triangle u, \triangle v$, 而 y 之增量爲 $\triangle y$, 且 $y+\triangle y=\frac{u+\triangle u}{v+\triangle v}$.

故 $$\triangle y=\frac{u+\triangle u}{v+\triangle v}-\frac{u}{v}=\frac{v\triangle u-u\triangle v}{v(v+\triangle v)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

當Δx趨近於零,$\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$之極限爲$u'$, v' (依假設),而$v+\Delta v$之極限爲v,故若$v\neq 0$,則y有一引數,此引數等於$\frac{vu'-uv'}{v^2}$.

例——求$\tan x$之引數

因$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$,故$\tan x$之引數爲

$$\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

5. u^v之引數

設u, v爲x之函數,其引數爲u', v'.今求$y=u^v$對於x之引數.

由$y=u^v$,得$\log y=v\log u$,即$y=e^{v\log u}$.如令$z=v\log u$,則$y=e^z$,而y之引數$y'=e^z\cdot z'$ (z'表z對於x之引數).

但$z'=v'\log u+\frac{v}{u}u'$,故$y'=e^{v\log u}\left(v'\log u+\frac{v}{u}u'\right)$,

即
$$y'=u^v v'\log u+v\,u^{v-1}u'.$$

特端——如$u=x$, $v=m$ (m表常數),則x^m之數爲$m x^{m-1}$ (參閱第III節第1目).

由此可見$y=u^v$之引數爲下列兩引數之和:

(其一) 設u爲常數所得之引數(參閱第II節第2目).

(其二)　設v爲常數所得之引數(參閱本目之特端).

6. 引數表.

綜合II, III, IV, V各節之結果遂得表如下:

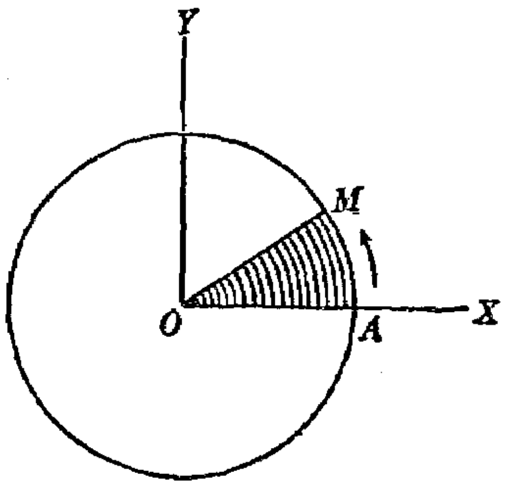
函　數	引　數
x^m	$m\,x^{m-1}$
a^x	$a^x \log a = \dfrac{a^x}{\log_a e}$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x \log a}$
$\log\ x$	$\dfrac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$x=\phi(y)$ [$x=\phi(y)$表$y=f(x)$之反函數而y有引數$f'(x)\neq 0$.]	$\dfrac{1}{f'(x)}$
$y=\operatorname{arc}\cos x$	$\dfrac{-\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}}$ ($\varepsilon=\pm 1$, 其號與$\sin y$之號同)
$y=\operatorname{arc}\sin x$	$\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{1-x^2}}$ ($\varepsilon=\pm 1$, 其號與$\cos y$之號同)
$\operatorname{arc}\tan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$u+v+w$ (u, v, w, 表x之函數而有引數u', v', w'者)	$u'+v'+w'$
$y=u\,v\,w$	$y\left(\dfrac{u'}{u}+\dfrac{v'}{v}+\dfrac{w'}{w}\right)$
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{v\,u'-u\,v'}{v^2}$
u^v	$u^v v' \log u + v\,u^{v-1} u'$

〔備考〕——三角函數 $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$, $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, $\csc x=\frac{1}{\sin x}$, $\operatorname{vers} x=1-\cos x$, $\operatorname{covs} x=1-\sin x$ 等，或爲兩函數之商，或爲兩函數之和，其引數可倣前數目之法求之．至反三角函數 $\operatorname{arc}\cot x$, $\operatorname{arc}\sec x$, $\operatorname{arc}\operatorname{vers} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{covs} x$ 等，其引數亦可倣第III節第7目求得，茲不贅．

VI. 雙曲線函數

1. 定義.

已與一圓（圖9），其心爲正交位標軸 XOY 之原點，其半徑之長等於1．令 A 爲 OX 與圓之交點，$M(X,Y)$ 爲圓上之任一點，x 爲弧 $\widehat{AM}$ 之代數值（以 A 爲量弧之原點，弧之正向如下圖箭矢所示），則由三角函數（或名圓函數 Circular Function）之定義，得



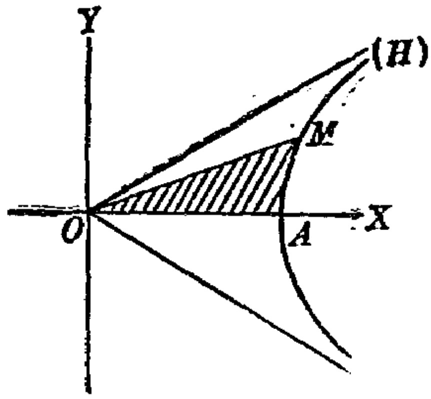
（圖 9）

$$X=\cos x,\ Y=\sin x,$$

$$\frac{Y}{X}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x=T,$$

T 表半徑 OM 之角系數．而 x 等於半徑動徑(Radius Vector). OM 所晝面積 OAM 之二倍，此面積爲代數值，其號與 x 之號同．

今以等腰雙曲線(Equilateral Hyperbola)(圖 10) 之一枝(H)替代上述之圓,而設等腰雙曲線半軸之長(等於中心O至頂點A之距離)爲1.則(H)之方程式爲$x^2-y^2=1$.



(圖 10)

故令 $x=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $y=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$,則$M(x,y)$爲(H)上一點.由定積分得知z爲半徑動徑OM所畫面積AOM之二倍,此面積爲代數值,其號與z之號同(將於第四章第III節第6目例二證明之).換言之,M在OX之上,則OAM爲正,M在OX之下,則OAM爲負也.今求z由$-\infty$變至$+\infty$時,x與y之變值.

求X與Y之引數得$X'=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$, $Y'=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$.由引數之定義,易知函數之引數大於零者,則函數爲遞增,函數之引數小於零者,則函數爲遞減.於是X與Y之變值如下表所示:

z	$-\infty$		0		$+\infty$
X'		$-$		$+$	
X	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$
Y'		$+$		$+$	
Y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

由此觀之,任與(H)上之一點 M,卽有一值 x 與之對應,并祇以一值爲限.反言之,任與一值 x,卽有(H)上之一點 $M(X,Y)$ 與之對應,并祇以一點爲限.故當 x 由 $-\infty$ 增變至 $+\infty$ 時,$M(X,Y)$ 畫(H)之全部.

依定義,X 爲 x 之雙曲線餘弦(Hyperbolic Cosine),Y 爲 x 之雙曲線正弦(Hyperbolic Sine).前者以 $Ch\,x$ 記之,後者以 $Sh\,x$ 記之.至 OM 之角系數 $T=\frac{Y}{X}$,則爲 x 之雙曲線正切(Hyperbolic Tangent),其記號爲 $Th\,x$.而函數 $Ch\,x$, $Sh\,x$, $Th\,x$ 等統爲雙曲線函數(Hyperbolic Function),可見雙曲線函數與圓函數實相似也.

由定義卽得公式如下:

(1) $$Ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad Sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

(2) $$Th\,x=\frac{Sh\,x}{Ch\,x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

更由(1)式得

(3) $$e^x=Ch\,x+Sh\,x,\quad e^{-x}=Ch\,x-Sh\,x.$$

2. 雙曲線函數之性質.

茲由 $y=Ch\,x$, $y=Sh\,x$, $y=Th\,x$ 各方程式所代表之曲線以明雙曲線函數之性質.本目所用之位標軸均設爲正交者.

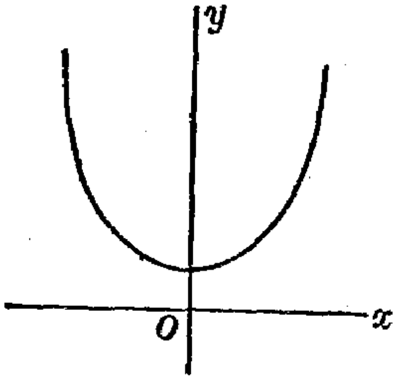
(*A*) 試作曲線 $y=Ch\,x$.

因 $Ch(-x)=Ch\,x$, 故曲線對稱於 y 軸. 欲窺曲線之全豹, 使 x 由 O 增變至 $+\infty$ 足矣.

求 $y=Ch\,x$ 之引數, 得 $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=Sh\,x$, 故 y 之變值可表列如下:

x	0		$+\infty$
y'	0	+	
y	1	↗	$+\infty$

而曲線 $y=Ch\,x$ 之形狀則如圖 11 所示:



(圖 11)

[備考]——曲線 $y=a\,Ch\dfrac{x}{a}$ 名爲懸線 (Catenary), a 表常數.

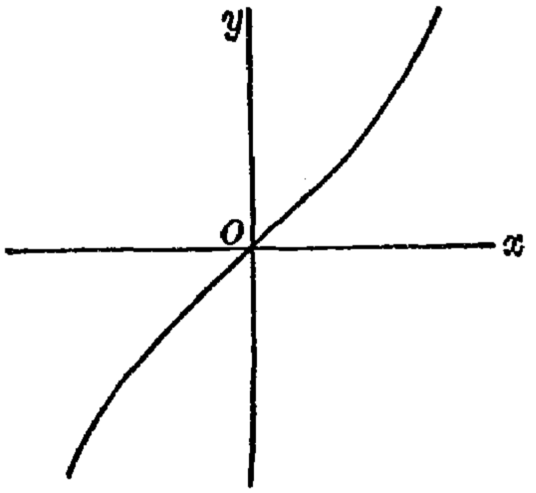
(*B*) 試作曲線 $y=Sh\,x$.

因 $Sh(-x)=-Sh\,x$, 故曲線對稱於原點, 欲窺曲線之全豹, 使 x 由 O 增變至 $+\infty$ 足矣.

求 $y=Sh\,x$ 之引數, 得 $y'=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=Ch\,x$. 故 y 之變值可表列如下:

x	0		$+\infty$
y'	1	+	
y	0	↗	$+\infty$

而曲線之形狀，則如圖12所示：



(圖 12)

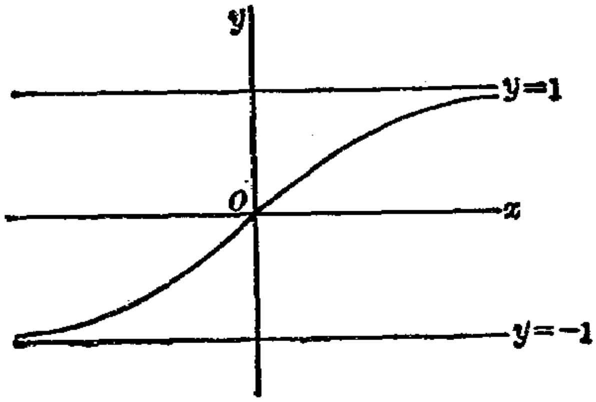
(C) 試作曲線 $y=Th\,x$.

因 $Th\,x=\frac{Sh\,x}{Ch\,x}$, 即知 $Th(-x)=-Th\,x$, 故曲線對稱於原點，欲窺曲線之全豹，使 x 由 O 增變至 $+\infty$ 足矣.

求 $y=Th\,x$ 之引數，得 $y'=\frac{Ch^2x-Sh^2x}{Ch^2x}=\frac{1}{Ch^2x}$. 蓋有 (4) $e^x\cdot e^{-x}=1=Ch^2x-Sh^2x$ 之關係存也［見前目之(3)式］. 故 y 之變值可表列如下：

x	0		$+\infty$
y'	1	+	
y	0	$\nearrow$	1

而曲線之形狀，則如圖13所示：



(圖 13)

此曲線以直線$y=1$, $y=-1$爲其漸近線(Asymptote).

[備考] 由公式 $Ch^2x-Sh^2x=1$, 立得$1-Th^2x=\frac{1}{Ch^2x}$. 因 $Ch\,x$ 常爲正, 故 $Ch\,x=\sqrt{1+Sh^2x}=\frac{1}{\sqrt{1-Th^2x}}$, $Sh\,x=Ch\,x\cdot Th\,x=\frac{Th\,x}{\sqrt{1-Th^2x}}$ 且 $Sh\,x=\pm\sqrt{Ch^2x-1}$ (此方根之號與x之號同).

3. 求和公式.

$$Ch\,(a+b)=\frac{e^{a+b}+e^{-(a+b)}}{2}=\frac{e^a\cdot e^b+e^{-a}e^{-b}}{2}.$$

由(3)式得

$$Ch(a+b)=\frac{1}{2}[(Cha+Sha)(Chb+Shb)$$
$$+(Cha-Sha)(Chb-Shb)],$$

此式化簡爲

(5) $$Ch\,(a+b)=Ch\,a\,Ch\,b+Sh\,a\,Sh\,b.$$

同理得

(6) $$Sh(a+b)=Sh\,a\,Ch\,b+Ch\,a\,Sh\,b.$$

如 $$b=a,$$

則 $$Ch2a=Ch^2a+Sh^2a,\quad Sh2a=2\,Cha\,Sha.$$

計及(4)式,卽知

$$Ch\,2\,a=2\,Ch^2a-1=2\,Sh^2a+1.$$

故 $$1+Ch\,a=2\,Ch^2\frac{a}{2}.$$

而 $$Ch\,a-1=2\,Sh^2\frac{a}{2}.$$

更由(5),(6)兩式得

(7) $$Ch\,a-Ch\,b=2\,Sh\frac{a+b}{2}Sh\frac{a-b}{2},$$

(8) $$Sh\,a-Sh\,b=2\,Ch\frac{a+b}{2}Sh\frac{a-b}{2}.$$

4. 反雙曲線函數(Inverse Hyperbolic Function)

分別下列各情形:

(其一) 設 $x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$,則當 $x\geqq1$ 時,已與一值 x,可得 y 之兩值,此兩值之絕對值同而號異.如設 $y>0$(或 $y<0$),則當 $x\geqq1$ 時,y 為 x 之函數.

由 $x=\frac{e^y+e^{-y}}{2}$ 得 $(e^y)^2-2x(e^y)+1=0$. 已與大於 1 之值 x,卽得 e^y 之兩值與之對應,此兩值之積為 1,故 y 之正值對應於 x 者合於 $e^y>1$.

解 $(e^y)^2-2x(e^y)+1=0$，得 $e^y=x\pm\sqrt{x^2-1}$. 若設 $y>0$，則 $e^y>1$，故 e^y 之值爲 $x\pm\sqrt{x^2-1}$ 兩值中之大者，即 $e^y=x+\sqrt{x^2-1}$，而 $y=\log(x+\sqrt{x^2-1})$. 當 $x\geqq 1$ 時，y 爲 x 之函數，常以 $y=Arg\,Ch\,x\,(y>0)$ 記之.

依同理，若設 $y<0$，則 $y=\log(x-\sqrt{x^2-1})$

$$=-\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

(其二) 設 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$，則 $(e^y)^2-2x(e^y)-1=0$. 此二次方程式有一正根一負根. 但 e^y 爲正，故祇有正根合於 $e^y>0$. 於是 $e^y=x+\sqrt{x^2+1}$，即 $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$. 無論 x 爲何值，y 爲 x 之函數，常以 $y=Arg\,Sh\,x$ 記之.

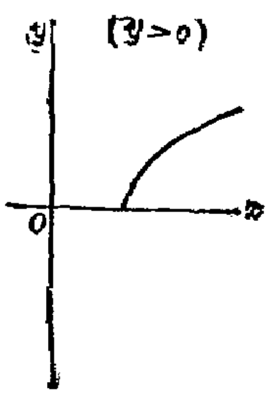
(其三) 設 $x=\dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$，則 $2y=\log\dfrac{1+x}{1-x}$.

即 $y=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}=\log\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. 當 $-1<x<1$ 時，y 爲 x 之函數，常以 $y=Arg\,Th\,x$ 記之.

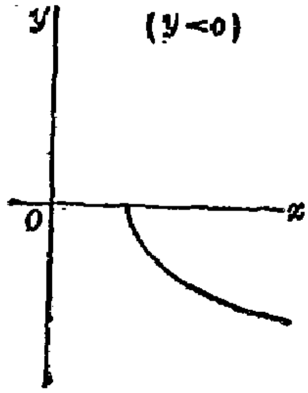
$y=Arg\,Ch\,x$，$y=Arg\,Sh\,x$，$y=Arg\,Th\,x$ 諸函數，名爲反雙曲線函數.

$y=Arg\,Ch\,x$，$y=Arg\,Sh\,x$，$y=Arg\,Th\,x$ 諸曲線之形狀，可由第2目而得之. 其法將 x 與 y 兩軸互換足矣. 故此種曲線之形狀如圖 14, 15, 16, 17 所示:

$y = \operatorname{Arg} \operatorname{Ch} x$

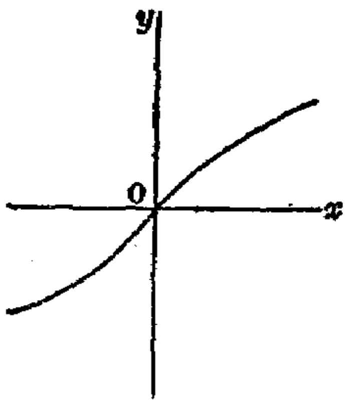


(圖 14)



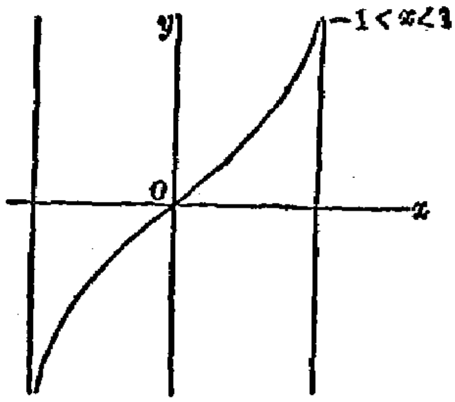
(圖 15)

$y = \operatorname{Arg} \operatorname{Sh} x$



(圖 16)

$y = \operatorname{Arg} \operatorname{Th} x$



(圖 17)

至反雙曲線函數之引數,可依第III節第7目求之.令y'表y對於x之引數,x'表x對於y之引數,即得下列結果:

如 $y=Arg\,Ch\,x$(并設 $y>0$),

則 $x=Ch\,y$.

而 $$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{Sh\,y}=\frac{1}{\sqrt{Ch^2y-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

如 $y=Arg\,Sh\,x$,則 $x=Sh\,y$,

而 $$y'=\frac{1}{x'}=\frac{1}{Ch\,y}=\frac{1}{\sqrt{Sh^2y+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

如 $y=Arg\,Th\,x$,則 $x=Th\,y$. 而 $y'=\frac{1}{x'}=Ch^2y=\frac{1}{1-Th^2y}$ $=\frac{1}{1-x^2}$.

上述之結果,可由 $y=\log(x+\sqrt{x^2-1})$, $y=\log(x+\sqrt{x^2+1})$, $y=\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 直接求出.

5. 備考.

第五章將載及 $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, 就中 $i^2=-1$. 惟 $Ch\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $Sh\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, 由此知可見圓函數與雙曲線函數之相似,不僅第1目所載者已也.

令 $u=ix$, 則 $\cos x=\frac{e^u+e^{-u}}{2}$, 此式可書爲 $\cos x=Ch\,u$. 同理得 $\sin x=\frac{Sh\,u}{i}$. 故如 $\sin x$ 與 $\cos x$ 有一關係 $f(\cos x, \sin x, \cos m\,x, \sin n\,x, \cdots)=0$, 即可得一關係 $f(Ch\,u, \frac{Sh\,u}{i}, Ch\,mu, \frac{Sh\,n\,u}{i}, \cdots)=0$ 與之對應. 反言之,如 $Ch\,u$ 與 $Sh\,u$ 有一關係

$\phi(Ch\,u, Sh\,u, Ch\,mu, Sh\,nu, \cdots)=0$, 亦可得一關係 $\phi(\cos x, i\sin x, \cos m\,u, i\sin n\,x, \cdots)=0$ 與之對應. 茲舉數例以明之於下:

例一——由 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

得 $$\frac{Sh^2x}{i^2}+Ch^2 x=1 \quad (\text{將}\,u\,\text{改寫爲}\,x),$$

即 $$Ch^2x-Sh^2x=1.$$

例二——由 $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$,

得 $$Ch(a+b)=Cha\,Chb-\frac{Sha}{i}\,\frac{Shb}{i},$$

即 $$Ch(a+b)=Cha\,Chb+Sha\,Shb.$$

例三——由 $\cos x=\dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$, $\sin x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$,

得 $$Chx=\frac{1-\dfrac{Th^2\frac{x}{2}}{i^2}}{1+\dfrac{Th^2\frac{x}{2}}{i^2}}, \quad \frac{Shx}{i}=\frac{\dfrac{2\,Th\frac{x}{2}}{i}}{1+\dfrac{Th^2\frac{x}{2}}{i^2}},$$

即 $$Chx=\frac{1+Th^2\frac{x}{2}}{1-Th^2\frac{x}{2}}, \quad Shx=\frac{2\,Th\frac{x}{2}}{1-Th^2\frac{x}{2}}.$$

VII. 第n引數

1. 定義.

設 $y=f(x)$ 之引數 $f'(x)$ 有一引數,則 $f'(x)$ 之引數名為 $f(x)$ 之第二引數(Second Derivative),常以 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 記之.至 $f'(x)$ 則可稱為 $f(x)$ 之第一引數(First Derivative),或簡稱 $f(x)$ 之引數.

依同理,如 $f''(x)$ 有一引數,則此引數名為 $f(x)$ 之第三引數(Third Derivative),常以 $f'''(x)$ 或 $\frac{d^3y}{dx^3}$ 記之.倣此推至 $f(x)$ 之第n引數(nth Derivative),其記號為 $f^{(n)}(x)$ 或 $\frac{d^ny}{dx^n}$.

2. 例.

例一——設 $f(x)=x^m$,

則
$$f'(x)=mx^{m-1},\quad f''(x)=m(m-1)x^{m-2},$$
$$f'''(x)=m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$
$$f^{(IV)}(x)=m(m-1)(m-2)(m-3)x^{m-4},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n}.$$

如 m 為正整數,則第 $m+1$ 之引數與其後各引數皆為零.

例二——設 $f(x)=\cos x$,

則
$$f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$f''(x)=\cos\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
故
$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right).$$
同理，$\sin x$之第n引數爲$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

例三——設有m次之多項式
$$f(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_{m-1}x+A_m.$$
今與x以增量h，試就h之方指數之遞增以展出$f(x+h)$

因$f(x+h)=A_0(x+h)^m+A_1(x+h)^{m-1}+\cdots+A_{m-1}(x+h)$ $+A_m$，故不含h之項爲$f(x)$，而h之系數爲
$$mA_0x^{m-1}+(m-1)A_1x^{m-2}+\cdots+A_{m-1}=f'(x).$$
廣言之，h^p之系數爲
$$A_0\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{p!}x^{m-p}$$
$$+A_1\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-p)}{p!}x^{m-p-1}+\cdots\cdots=\frac{f^{(p)}(x)}{p!}.$$
遂得所求之展式如下：
$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^p}{p!}f^{(p)}(x)+\cdots+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(x).$$

3. **Leibniz 公式.**

設$y=uv$，u與v表x之函數．求y之第一引數，

得 $\dfrac{dy}{dx}=v\dfrac{du}{dx}+u\dfrac{dv}{dx}$. 再求 y 之第二第三引數,

得 $$\frac{d^2y}{dx^2}=v\frac{d^2u}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\cdot\frac{dv}{dx}+u\frac{d^2v}{dx^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=v\frac{d^3u}{dx^3}+3\frac{d^2u}{dx^2}\ \frac{dv}{dx}+3\frac{du}{dx}\ \frac{d^2v}{dx^2}+u\frac{d^3v}{dx^3}.$$

故設 $n=2, n=3$ 至 $n=n$ 時, 則有

(1) $$\frac{d^ny}{dx^n}=v\frac{d^nu}{dx^n}+n\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\ \frac{dv}{dx}+\frac{n(n-1)}{2!}\ \frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\ \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-p+2)}{(p-1)!}\ \frac{d^{n-p+1}u}{dx^{n-p+1}}\ \frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}\ \frac{d^{n-p}u}{dx^{n-p}}\ \frac{d^pv}{dx^p}+\cdots\cdots+u\frac{d^nv}{dx^n}.$$

今證 y 之第 $n+1$ 引數可以 $n+1$ 易 (1) 式之 n 而得之. 由 (1) 式得

(2) $$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=v\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}+(n+1)\frac{d^nu}{dx^n}\ \frac{dv}{dx}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-p+2)}{(p-1)!}\ \frac{d^{n-p+1}u}{dx^{n-p+1}}\ \frac{d^pv}{dx^p}$$

$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}\ \frac{d^{n-p+1}u}{dx^{n-p+1}}\ \frac{d^pv}{dx^p}$$

$$+\cdots\cdots+u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}.$$

令 $C^p_{n+1}=\dfrac{(n+1)n\cdots(n+1-p+1)}{p!}$, $C^{p-1}_n=\dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+2)}{(p-1)!}$,

$$C^p_n=\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!},$$

則 $C^p_{n+1}=C^{p-1}_n+C^p_n$, 而 (2) 式公項 $\dfrac{d^{n-p+1}u}{dx^{n-p+1}}\dfrac{d^pv}{dx^p}$ 之系數爲 C^p_{n+1}, 卽 (2) 式可寫爲

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=v\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}+C^n_{n+1}\frac{d^nu}{dx^n}\frac{dv}{dx}+\cdots+C^p_{n+1}\frac{d^{n-p+1}u}{dx^{n-p+1}}\frac{d^pv}{dx^p}$$

$$+\cdots+C^n_{n+1}\frac{du}{dx}\frac{d^nv}{dx^n}+u\frac{d^{n+1}v}{dx^{n+1}}.$$

故無論 n 爲何正整數, (1) 式恆能成立, 且 (1) 式之右邊除首尾兩項有一因數 u 或 v 外, 其餘各項 $\dfrac{d^{n-p}u}{dx^{n-p}}\dfrac{d^pv}{dx^p}$ 之系數與 $(a+b)^n$ 展式之系數相同.

(1) 式名爲 Leibniz 公式.

VIII. 微 分

1. 定義.

設函數 $y=f(x)$ 有引數 $f'(x)$. 若與 x 以增量 $\triangle x$, 則 y 有增量 $\triangle y$. 當 $\triangle x$ 趨近於零, $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ 之極限爲 $f'(x)$, 故 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}=f'(x)+\varepsilon$, ε 之極限爲零.

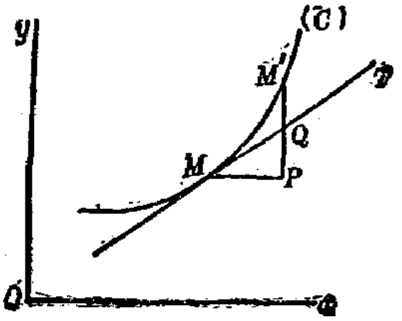
上式可書爲 $\Delta y=[f'(x)+\varepsilon]\Delta x.$

如令 Δx 爲主要無窮小 (見第I節第3目), 則當 $f'(x)$ 異於零時, Δy 爲第一級之無窮小,其主要部份爲 $f'(x)\Delta x$, 此主要部份名爲函數 y 之微分 (Differential), 吾人以 dy 或 $df(x)$ 記之. 故 $dy=f'(x)\Delta x$. 可見函數之微分, 乃其引數與變數之任意增量之積也.

若察 $x=x$ 之關係卽得 $dx=\Delta x$, 而 $dy=f'(x)\Delta x$, 可書爲 $dy=f'(x)dx, \dfrac{dy}{dx}=f'(x)$. 由是 $\dfrac{dy}{dx}$ 匪特爲引數之符號, 且有商之意義在也.

2. 幾何釋義.

取位標軸 oxy, 而察 $y=f(x)$ 所代表之曲線 (c)(圖18), $M(x,y)$ 爲 (c) 上之一點, MT 爲此點之切線.



(圖 18)

又令 $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 爲 (c) 上 M 之鄰點. 由 M 作直線 MP 平行於 ox 軸, 由 M' 作直線 $M'P$ 平行於 oy 軸, 此二直線相交於一點 P, 而 $M'P$ 與 MT 相交於一點 Q, 則 $\Delta x=dx=MP$, $\Delta y=PM'$, $dy=f'(x)dx=PQ$. 而 PQ 爲 $\Delta y=PM'$ 之主要部份.

3. 函數之函數之微分.

設 $y=f(u)$，u 爲自變數 x 之函數，則 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$，而 $dy=y'_x dx=y'_u u'_x dx$，但 $u'_x dx$ 爲函數 u 之微分，故 $dy=y'_u du=f'(u)du$．遂得結果如下：

無論 u 爲 x 之函數或爲變數，微分 dy 均等於引數 $f'(u)$ 與 du 之積．

4. 複函數之微分．

玆分別下列各情形：

(其一) 函數和之微分．

命 $y=u+v+w$，就中 u, v, w 爲 x 之函數．

因
$$y'_x=u'_x+v'_x+w'_x,$$

將上式之兩邊徧乘以 dx，

$$y'_x dx=u'_x dx+v'_x dx+w'_x dx.$$

故
$$dy=du+dv+dw.$$

(其二) 積之微分．

命 $y=uv$，就中 u, v 爲 x 之函數．因 $y'=uv'_x+vu'_x$，將上式之兩邊徧乘以 dx，

$$y'_x dx=uv'_x dx+vu'_x dx.$$

故
$$dy=udv+vdu.$$

依同理，設 $y=u_1 u_2\cdots\cdots u_n$，就中 u_i 爲 x 之函數 $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$，則 $\dfrac{dy}{y}=\dfrac{du_1}{u_1}+\dfrac{du_2}{u_2}+\cdots\cdots+\dfrac{du_n}{u_n}$.

(其三) 商之微分.

命 $y=\frac{u}{v}$, 就中 u, v 為 x 之函數.

因 $$y'_x=\frac{vu'_x-uv'_x}{v^2},\qquad 故\ dy=\frac{vdu-udv}{v^2}.$$

5. 第 n 微分.

設有函數 $y=f(x)$, 其微分為 $dy=f'(x)\,dx$. 此微分可稱為 y 之第一微分 (First Differential). 微分之有次第亦如引數之有次第也.

$f'(x)\,dx$ 之微分, 則名為 y 之第二微分 (Second Differential). 惟求 $f'(x)\,dx$ 之微分時, 應假定 dx 為常數, 蓋本此假定, 第 n 引數之符號 $\frac{d^ny}{dx^n}$ 有商之意義, 而於計算甚為利便也.

依微分之定義, 得 $d(dy)=f''(x)\,dx\cdot dx$. 如以 d^2y 代表 $d(dy)$, dx^2 代表 dx 之平方, 則上式可書為 $d^2y=f''(x)\,dx^2$. 於是 y 之第二引數為 $\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)$, 而符號 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 有商之意義, 計算便利明矣. 同理得 y 之第 n 微分 $d^ny=f^{(n)}(x)\,dx^n$. 此式可書為 $\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)$.

若設 $y=f(u)$, u 為變數 x 之函數, 則與 x 以增量 dx, 即得 $dy=f'(u)\,du$, 已如第 3 目所述. 至 y 之第二微分則為 $d^2y=f''(u)du^2+f'(u)d^2u$, 此式之 d^2u 為 u 之第二微分. 當 u

爲 y 之直接變數 (y 非函數之函數), 則 du 爲常數, 而 $d^2u=0$. 故 d^2y 之形因 u 爲直接變數與否而異也.

IX. 引數之性質

1. 定理.

設函數 $f(x)$ 在間隔 (a, b) 內有引數 $f'(x)$, 且當 $x=a$, $x=b$ 時, $f(x)=0$. 則在 (a, b) 內, 必有一數能令 $f'(x)$ 爲零.

蓋依假設當 $x=a$, $x=b$, 函數 $f(x)=0$. 故若在間隔 (a, b) 內函數恆爲零, 則其引數在此間隔內亦恆爲零, 定理不待證而自明矣. 若在此間隔內函數非恆爲零, 則函數之值或爲正或爲負. 玆取其有爲正值者而言之. 在此情形, 間隔 (a, b) 內必有一值 c 能令 $f(c)$ 達至其高界(見第一章第I節之第9第10兩目). 當 h 爲正數, 則比值 $\dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ 不大於零, 故其極限 $f'(c)\leqq 0$. 但 $f'(c)$ 又爲不小於零之比值 $\dfrac{f(c-h)-f(c)}{-h}$ 之極限, 可見 $f'(c)=0$.

若視 $y=f(x)$ 爲平面 xoy 上之曲線, 則此曲線必有一點 $M[c, f(c)]$, 其切線與 ox 軸平行 [c 表間隔 (a, b) 內之一值].

2. Rolle 定理.

設在間隔 (a, b) 內 $f(x)$ 有引數 $f'(x)$, 又設 a, b 爲 $f(x)$

毗連之二根,則在 (a,b) 內 $f(x)$ 至多有一根.

蓋若 $f(x)$ 有二根 α,β 在 (a,b) 內,則在間隔 (α,β) 內必有一數 γ 能令 $f'(x)$ 爲零(見前目),與所設者悖矣.

3. 中值定理(Theorem of Mean Value).

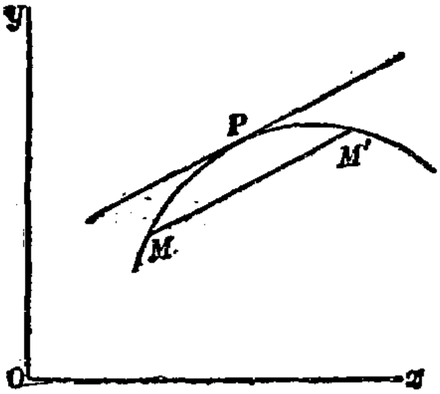
設在間隔 (a,b) 內 $f(x)$ 有引數,則在 (a,b) 內可得一數 c 能令 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

令 A 表 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,則 $f(b)-f(a)-A(b-a)=0$. 將此式之 a 易以 x,而察函數 $\phi(x)=f(b)-f(x)-A(b-x)$,即知其在 (a,b) 內有引數,蓋以其爲有引數之連續函數之和也. 當 $x=a$ 時,$\phi(x)=0$(根據 A 之成因),又當 $x=b$ 時,$\phi(x)=0$ 故在 (a,b) 內必有一值 c 能令 $\phi(x)$ 之引數 $\phi'(x)$ 爲零(見第1目). 因 $\phi'(x)=-f'(x)+A$,於是 $\phi'(c)=-f'(c)+A=0$,即 $A=f'(c)$,而 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

如令 $b=a+h,\ c=a+\theta h,\ 0<\theta<1$.

則 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 可書爲 $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$.

若察 $y=f(x)$ 所代表之曲線(c)(圖19),及其上之兩點 $M[a,f(a)]$, $M'[b,f(b)]$,則此曲線必有一點 $P[c,f(c)]$ 其切線與 MM' 弦平行.



(圖 19)

4. 應用.

根據中值定理,即得下列二定理.

定理一——函數之引數在某間隔內全爲零,乃函數在此間隔內爲常數之必須及充足條件也.

蓋若函數在某間隔內爲常數,則其引數爲零.反言之,若函數之引數在某間隔內爲零,則設α,β爲該間隔內之任意兩值,即有$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0$,故$f(\beta)=f(\alpha)=$常數.

定理二——設兩函數均有引數,其引數相同之必須及充足條件爲此兩函數之差等於常數.

蓋若$f(x)$之引數$f'(x)$與$\phi(x)$之引數$\phi'(x)$相同,則無論x爲何值$f'(x)-\phi'(x)$恆爲零.故依定理一即知$f(x)-\phi(x)=$常數.反言之,若$f(x)-\phi(x)=$常數,則$f'(x)-\phi'(x)=0$,而$f'(x)=\phi'(x)$.

5. 中值定理之推廣.

設在間隔(a,b)內$f(x)$與$\phi(x)$兩函數有引數,且$\phi'(x)$於(a,b)內不爲零.則在(a,b)內,必有一數c合於$\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}=\frac{f'(c)}{\phi'(c)}$.

蓋令 $A=\dfrac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}$, 則 $f(b)-f(a)-A[\phi(b)-\phi(a)]=0$
茲察函數 $F(x)=f(b)-f(x)-A[\phi(b)-\phi(x)]$, 即知其在 (a,b) 內有引數,且當 $x=a$, $x=b$ 時, $F(x)=0$, 故在 (a,b) 內必有一數能令 $F'(x)=0$, 此數以 c 記之, 遂得 $F'(x)=-f'(x)+A\phi'(x)$. 而 $F'(c)=-f'(c)+A\phi'(c)=0$. 於是

$$A=\frac{f'(c)}{\phi'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{\phi(b)-\phi(a)}.$$

如令 $$b=a+h,\ c=a+\theta h,\ 0<\theta<1,$$

則 $$\frac{f(a+h)-f(a)}{\phi(a+h)-\phi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\phi'(a+\theta h)}.$$

X. 變數之更換

1. 自變數與他變數之互換.

設 $y=f(x)$, 就中 x 爲自變數, y 爲 x 之函數, 亦名他變數 (Dependent Variable). 若視 x 爲 y 之函數, 而以 x 對於 y 之引數表示 y 對於 x 之引數, 則由第III節第7目得

(1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\qquad\left(\frac{dx}{dy}\neq 0\right).$$

(1) 式之右邊爲 y 之函數. 求 y 之第二引數,

得 $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx}\text{(見第IV節第2目)},$$

即
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

計及(1)式,上式變爲

(2)
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

同理得

(3)
$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}-3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},$$

餘類推.

例——設有方程式$3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0.$

如將自變數與他變數互換,則由(1),(2),(3)三式得

(3)
$$\left(-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right)^2-\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\left(-\frac{\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}-3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5}\right)$$
$$-\left(-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right)\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)^3=0.$$

簡之
$$\frac{d^3x}{dy^3}\frac{dx}{dy}+\frac{d^2x}{dy^2}=0.$$

2. 他變數之更換.

設 y 爲 x 之函數,而又爲 z 之函數,則 $y=f(x)$, $y=\phi(z)$. 今視 z 爲 x 之函數,而以 z 與其對於 x 之引數表示 y 對於 x 之引數.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\phi'(z)\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left[\phi'(z)\frac{dz}{dx}\right]=\frac{dz}{dx}\frac{d}{dx}\phi'(z)+\phi'(z)\frac{d^2z}{dx^2}.$$

但
$$\frac{d}{dx}\phi'(z)=\frac{d}{dz}\phi'(z)\frac{dz}{dx}=\phi''(z)\frac{dz}{dx},$$

故 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\phi''(z)\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2+\phi'(z)\dfrac{d^2z}{dx^2}$. 至於 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, $\dfrac{d^4y}{dx^4}$,……等可倣前法求之.

例——已與方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=1+\dfrac{2(1+y)}{1+y^2}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

今以 $y=\tan z$ 之關係,將他變數 y 更換爲 z. 問已與方程式如何變形.

因
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\cos^2 z}\frac{dz}{dx},$$

而
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^2 z}\frac{dz}{dx}\right)$$

$$=\frac{d^2z}{dx^2}\frac{1}{\cos^2 z}+\frac{dz}{dx}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\cos^2 z}\right)\frac{dz}{dx}$$

$$=\frac{d^2z}{dx^2}\frac{1}{\cos^2 z}+\frac{2\sin z}{\cos^3 z}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2$$

將　$\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 之等值代入已與方程式而化簡之,

卽得
$$\frac{d^2z}{dx^2}-2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2-\cos^2 z=0.$$

3. 自變數之更換.

設 y 爲 x 之函數,而 x 爲 t 之函數,則可視 y 爲 t 之函數.今以 x 對於 t 之引數,及 y 對於 t 之引數表示 y 對於 x 之引數

因
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt},\qquad \text{故}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

又
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

卽
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}.\quad \text{餘類推.}$$

例——已與方程式 $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0$. 今設 $x=\cos t$ 之關係,而取 t 爲自變數,問已與方程式如何變形.

因
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\sin t},$$

而
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{dy}{dt}\,\frac{1}{\sin t}\right)\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{dy}{dt}\,\frac{\cos t}{\sin^3 t},$$

故已與方程式可書爲 $\sin^2 t\left(\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{dy}{dt}\,\frac{\cos t}{\sin^3 t}\right)$
$+\frac{\cos t}{\sin t}\,\frac{dy}{dt}=0$, 卽 $\frac{d^2y}{dt^2}=0.$

第三章之習題

求下列各函數之引數:

1) $y=\frac{15x^4-30x^3+40x^2-20x+7}{(x-1)^5}$. (2) $y=(3x-4)\sqrt[4]{(x+1)^3}$.

(3) $y=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}+\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. (4) $y=(x^3-3x^2+6x-6)e^x$.

(5) $y=\log(x+\sqrt{x^2+h})$(h 表常數). (6) $y=\log\tan\frac{x}{2}$.

(7) $y=\log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. (8) $y=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\sin x}$.

(9) $y=\frac{x}{1+x^2}+\arctan x$.

(10) $y=\frac{\sin x}{5}\left[\frac{1}{\cos^5 x}+\frac{4}{3\cos^3 x}\right]+\frac{8}{15}\tan x$.

(11) $y=2e^{\sqrt{x}}(x\sqrt{x}-3x+6\sqrt{x}-6)$. (12) $y=x^x$.

(13) $y=(\cos x)^{\sin x}$. (14) $y=x^{\frac{1}{x-1}}$.

(15) $y=(5\cos 2x^4)^{x+1}$ (16) $y=(\tan x)^{\log x}$.

(17) $y=x^{x^x}$.

(18) 求 $\operatorname{arc\,tan}\frac{1}{x}$, $\operatorname{arc\,tan}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\operatorname{arc\,tan}(\sqrt{1+x^2}-x)$ 之引數，并將所得之結果解釋之.

(19) 設 $0<x<1$, $-\frac{\pi}{2}<z<+\frac{\pi}{2}$, 試求 $y=2\operatorname{arc\,tan}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$. 與 $z=\operatorname{arc\,sin}(2x-1)$ 之引數，并將所得之結果解釋之.

(20) 如令 $y=\frac{\operatorname{arc\,cos} x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(0<\operatorname{arc\,cos} x<\pi)$.

或
$$y=\frac{\log(x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2-1}},$$

則有
$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}-xy+1=0,$$

試證明之.

(21) 已知 $\sin x+\sin(x+h)+\sin(x+2h)+\cdots+\sin(x+nh)$

$$=\frac{\sin\left(x+\frac{nh}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}},$$

試求 $\cos x+\cos(x+h)+\cos(x+2h)+\cdots+\cos(x+nh)$ 之和.

(22) 已知 $\sin x\sin\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\sin\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right)$

$$=\frac{\sin nx}{2^{n-1}},$$

求證 $\csc^2 x+\csc^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\csc^2\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)+\cdots+\csc^2 x\left(x+\frac{n-1}{n}\pi\right)=n^2\csc^2 nx$.

(23) 應用 $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$ 公式，以求兩曲線 $y^2=2px$, $x^2+y^2=a^2$ 之交角（卽於交點處兩曲線之切線之交角）.

并求於交點處各曲線之法線之方程式.

(24) 求證兩曲線 $x^2-y^2=5$, $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ 成正交(即於交點處兩曲線之切線成正交).

(25) 若兩曲線 $ax^2+by^2=1$, $a'x^2+b'y^2=1$ 成正交,試求 a, b, a', b' 之關係.

(26) 試以 $\mathrm{Ch}x$ 與 $\mathrm{Sh}x$ 表示 $\mathrm{Ch}mx$, $\mathrm{Sh}mx$ (m 表整數).

(27) 試證 $x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ 之第 n 引數為 $(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

求下列各函數之第 n 引數.

(28) $y=\frac{1}{x^2-1}$, $z=\frac{1+x}{1-x}$.

(注意) $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$.

(29) $y=\cos ax$, $z=\sin ax$ (a 表常數).

(30) $y=e^{x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)$, $z=e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$ (θ 表常數).

(31) $y=\sin^2x$, $z=\cos^2x$.

應用 Leioniz 公式,以求下列各函數之第 n 引數.

(32) $y=x^2a^x$.　　(33) $y=xe^x$.

(34) $f(x)=e^x\sin x$.　　(35) $f(x)=\cos ax\cos bx$.

(36) 設 $f(\theta)$ 及 $\phi(\theta)$ 為 θ 之兩函數,其引數為 $f'(\theta)$, $\phi'(\theta)$, 又設 $x=f(\theta)-\phi'(\theta)$, $y=\phi(\theta)+f'(\theta)$, $X=f'(\theta)\sin\theta-\phi'(\theta)\cos\theta$, $Y=f'(\theta)\cos\theta+\phi'(\theta)\sin\theta$, 試證恆等式.

$$(dx)^2+(dy)^2=(dX)^2+(dY)^2,$$

(37) 設 $u=[f'(x)]^{\frac{1}{2}}$, $v=f(x)[f'(x)]^{-\frac{1}{2}}$,

試證
$$\frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dx^2}.$$

[式中 $f(x)$ 為 x 之函數,其引數為 $f'(x)$].

(38) 設 $x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t.$

試求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(39) 設 $x=a\operatorname{arc}\cos\frac{a-y}{a}-(2ay-y^2)^{\frac{1}{2}}$,

試求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(40) 如將自變數與他變數互換，則方程式

$\left(3a\frac{dy}{dx}+2\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left(a\frac{dy}{dx}+1\right)\frac{dy}{dx}\ \frac{d^3y}{dx^3}$ 如何變形.

(41) 已與方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+xy\frac{dy}{dx}+\sec^2 x=0.$

今設 $x=\operatorname{arc}\tan t$ 之關係，而取 t 爲自變數，問已與方程式如何變形

(42) 已與方程式 $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(a+1)x\frac{dy}{dx}-y=0.$

今設 $t=\log x$ 之關係，而取 t 爲自變數，問已與方程式如何變形.

(43) 已與方程式 $x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=0.$

今設 $x=e^t$ 之關係，而取 t 爲自變數，問已與方程式如何變形.

第四章

原函數及積分

1. 定義及定理

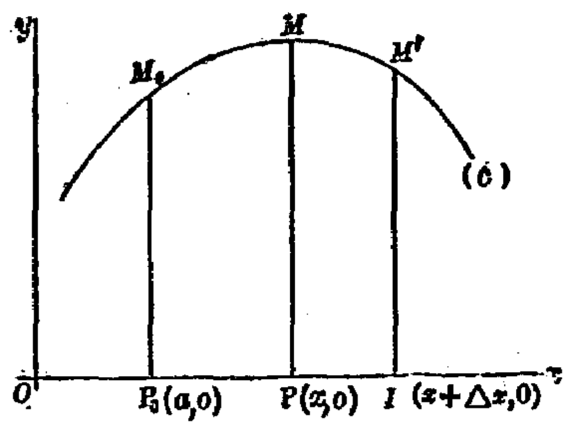
1. 原函數(Primitive Function).

設函數$\phi(x)$之引數爲$f(x)$,則$\phi(x)$稱爲$f(x)$之原函數.

定理——凡連續函數有無限個原函數,且此原函數之相異處祇差一常數.

設c爲未定常數,$\phi(x)$爲$f(x)$之原函數.因$\phi(x)+c$之引數亦爲$f(x)$,則$\phi(x)+c$亦爲$f(x)$之原函數,而c之値爲任意常數,故$f(x)$之原函數有無限多也.故欲證明本定理,證明有一原函數存在足矣.

玆設位標軸oxy爲正交,而察方程式$y=f(x)$所代表之曲線(c)(圖 20),就中$f(x)$在間隔(a_1, b_1)內爲連續函數.令M_0爲(c)上任意一定點,其縱量爲M_0P_0,橫量爲a,而a在a_1, b_1之間者.M爲(c)上一動點,縱量爲MP,橫量爲x.又令直線M_0P_0, P_0P, MP及弧M_0M所包之面積爲



(圖 20)

U, 則 U 爲 x 之函數明甚.玆證此函數之引數爲 $f(x)$.

下文假定 $f(x)$ 常爲正,如 $f(x)$ 爲負時,將於第2目論之.

設 M 遷至鄰近一點 M', 其橫量 $oP'=x+\triangle x$, 而 $PP'=\triangle x$ 爲橫量 oP 之增量.令函數 U 之增量爲 $\triangle U=$ 面積 $MPP'M'$. 試取 $\triangle U$ 而究之. MM' 爲 (c) 之弧段.令在此弧上最高點之縱量爲 H, 最低點之縱量爲 h, 乃得兩矩形之面積 $\triangle x\cdot h$, $\triangle x\cdot H$ 與面積 $\triangle U$ 有下之關係:

$$h\cdot\triangle x<\triangle U<H\cdot\triangle x,$$

$$h<\frac{\triangle U}{\triangle x}<H.$$

當 $\triangle x$ 趨近於零, h, H 之極限同爲 M 點之縱量 $f(x)$,

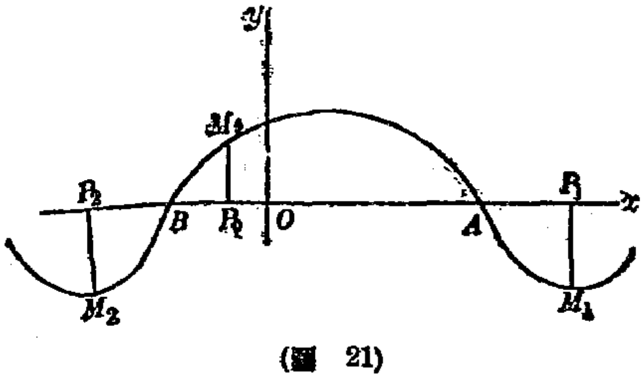
故
$$\lim_{\triangle x\doteq 0}\frac{\triangle U}{\triangle x}=f(x).$$

是即表明 U 之引數爲 $f(x)$, 而 $f(x)$ 有一原函數存在也.

又 M_0 爲 (c) 上任意一點,即橫量 x 在 (a_1, b_1) 間爲任意常數,而 U 因 M_0 而變,故 U 有無限之個數,即 $f(x)$ 之原函數有無限多也.

2. $f(x)$ 不常正之情形.

前目之證明,設 $f(x)$ 在間隔 (a, x) 內爲正,且 x 常大於 a,此非普通情形也.茲廣言之.設 U 爲 (c) 與 ox, M_0P_0, MP 各直線所包之面積之代數和.面積代數值之制定,則於直線 M_0P_0 右邊之面積中,如在 ox 軸上者,面積之號爲正,在 ox 軸下者,其號爲負.至在直線 M_0P_0 左邊之面積,其號之規定適與上相反(如圖 21).



(圖 21)

當 MP 移至 P_1M_1 位置,

$$U = M_0P_0A - M_1P_1A.$$

若 MP 移至 M_2P_2 位置,

$$U = M_2P_2B - M_0P_0B.$$

面函數U對於x之引數爲$f(x)$,可做前理證之.

設$f(x)$之原函數爲$\phi(x)$,則面積U函數之形爲$\phi(x)+c$.又當$x=a$時,易知U爲零.故常數c可由下式斷定

$$\phi(a)+c=0,\ c=-\phi(a).$$

遂得
$$U=\phi(x)-\phi(a).$$

由此觀之,因求平面上之面積,乃得連續函數之原函數.是則任一連續函數,恆爲某函數之引數可知矣.

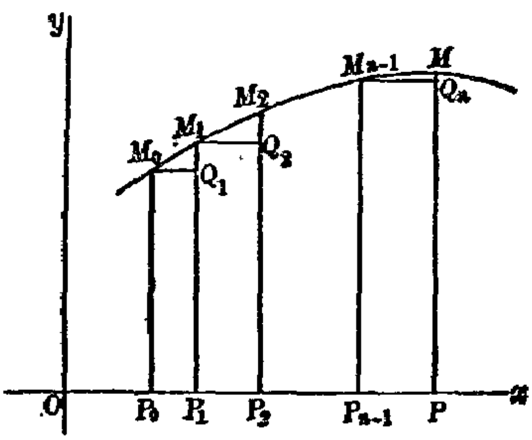
3. 曲線與直線所包面積之他種求法.

設P點之橫量爲b,而b在a_1, b_1之間.令函數U於$x=b$時之值爲A,則A代表M_0P_0PM之面積,

而
$$A=\phi(b)-\phi(a)$$

此面積A亦可由下法求之.

設$a<b$,在間隔(a, b)內$f(x)>0$, M_0. M爲曲線上之點,其橫量依次爲a, b者(圖 22).令M_0, M在x軸上之投影爲P_0, P,將P_0P分爲n份(等份或不等份),其分點爲$P_1, P_2, \cdots P_{n-1}$,由此分點各引y



(圖 22)

軸之平行線,令與曲線相交於 $M_1, M_2 \cdots M_{n-1}$. 而將面積 A 分爲 n 份. 設此 n 份爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$,

則 $$A = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n.$$

更由 M_0 引 ox 軸之平行線,交 $M_1 P_1$ 於 Q_1, 由 M_1 引 ox 軸之平行線交 $M_2 P_2$ 於 Q_2. 依此行之,乃得 $M_0 P_0 P_1 Q_1$, $M_1 P_1 P_2 Q_2, \cdots\cdots M_{n-1} P_{n-1} P Q_n$ n 個矩形,令其面積依次爲 $r_1, r_2, \cdots\cdots r_n$, 當 n 無限增大, $P_0 P_1, P_1 P_2, \cdots\cdots$ 以零爲極限,而 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$; $r_1, r_2, \cdots\cdots r_n$ 爲無窮小. 玆證

$$r_1 + r_2 + \cdots\cdots + r_n$$

之極限亦爲 A.

因 A 等於 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$, 欲證 $r_1 + r_2 + \cdots\cdots + r_n$ 之極限爲 A, 乃證 $r_1 + r_2 + \cdots\cdots + r_n$ 與 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$ 之極限相同,或證 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$; $r_1, r_2, \cdots\cdots r_n$ 兩組無窮小依次相當足矣(參閱第三章第 I 節第 5 目之定理三).

首證當 $P_0 P_1$ 趨近於零時, $\frac{a_1}{r_1}$ 之極限爲 1. 設 h, H 爲 $M_0 M_1$ 弧中最低及最高之縱量,

則 $$h \cdot P_0 P_1 < a_1 < H \cdot P_0 P_1,$$

而 $$r_1 = M_0 P_0 \cdot P_0 P_1.$$

由上二式,卽得

$$\frac{h}{M_0 P_0} < \frac{a_1}{r_1} < \frac{H}{M_0 P_0}.$$

當 P_0P_1 趨於零時,h, H 之極限同爲 M_0P_0,故 $\frac{a_1}{r_1}$ 之極限爲1.依同理可證 $\frac{a_n}{r_n}$ 之極限亦爲1.故當 n 無限增加,$r_1+r_2+\cdots\cdots+r_n$ 之極限亦爲 A.

令 $P_1, P_2, \cdots\cdots P_{n-1}$ 各點之橫量依次爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_{n-1}$,則 $r_1, r_2, \cdots\cdots\cdots r_n$ 依次等於 $f(a)(x_1-a)$, $f(x_1)(x_2-x_1)\cdots\cdots\cdots f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$,

故 $$A=\lim_{n\doteq\infty} S_n=\lim_{n\doteq\infty}[f(a)(x_1-a)+f(x_1)(x_2-x_1)+\cdots\cdots+f(x_{n-1})(b-x_{n-1})].$$

4. 各種情形之討論.

前目之證明,乃假定 $a<b$,在間隔 (a, b) 內,$f(x)>0$.其餘情形,結果相服.茲分別證之如下:

(其一) 若 $a<b$,在間隔 (a, b) 內,$f(x)<0$,則 $f(a), f(x_1)$ $f(x_2), \cdots\cdots f(x_{n-1})$ 皆爲負,$x_1-a, x_2-x_1, \cdots\cdots, b-x_{n-1}$ 皆爲正,而 $f(a)(x_1-a), f(x_1)(x_2-x_1), \cdots\cdots f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$ 表 $r_1, x_2, \cdots\cdots r_n$ 各矩形面積之負值.在此情形,A 之值爲負.

(其二) 若 $a<b$,而 M_0M 弧與 ox 軸有一或一以上之交點[即 $f(x)$ 於間隔 (a, b) 內,$f(x)$ 之號不一定],則 S_n 爲正負各數之代數和.而各數之絕對值代表一矩形之面積.至其符號之正負,乃視乎該矩形在 ox 軸上或下而定.而 A 仍爲 S_n 之代數值.

(其三) $a>b$. 在此情形, $a>x_1>x_2\cdots>x_n>b$, 而 x_1-a, x_2-x_1, ……$b-x_{n-1}$ 皆爲負.各矩形之面積符號之正負,視乎各矩形在 ox 軸之下或上而定. 則 S_n 之極限亦爲 A.

綜上觀之,無論在何種情形, S_n 之極限恆爲 A. 更據第2目 A 爲函數 U 當 $x=b$ 時之值, 而 $A=\phi(b)-\phi(a)$, $\phi(x)$ 爲 $f(x)$ 之原函數, 遂有以下之定理:

設 $f(x)$ 於間隔 (a,b) 內爲連續函數, 將 (a,b) 間插入 $n-1$ 項成遞增或遞減數列

$$a, x_1, x_2, \cdots\cdots x_{n-1}, b,$$

則當 n 無限增加各分段以另爲極限時,

$$S_n = f(a)(x_1-a) + f(x_1)(x_2-x_1) + \cdots\cdots + f(x_{n-1})(b-x_{n-1})$$

之極限爲 $\phi(b)-\phi(a)$, 而 $\phi(x)$ 爲 $f(x)$ 任一原函數.

5. 近代分析採用之方法.

以上所用之方法, 雖屬簡易. 惟當 $y=f(x)$ 爲連續而處處無引數時, 則 $y=f(x)$ 之圖線根本不能畫出, 以 M_0P_0PM 爲有一面積之假設,失所憑藉矣. 爰述近代分析所採用之方法如次.

設函數 $f(x)$ 連續於間隔 (a,b) 內 $[a<b]$. 以遞增之數列 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 將 (a,b) 分爲 n 個分間隔, 並於間隔 (x_{i-1}, x_i) 內任取一值 ξ_i. 乃令

$$\sum_{i=1}^{i=n}(x_i-x_{i-1})f(\xi_i)=$$

$$(x_1-a)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\cdots+(b-x_{n-1})f(\xi_n).$$

如將間隔(a,b)之拆分變更,而使已有一拆分之最長分間隔趨近於零,則上式左邊趨近於一極限.證之如次.

設$f(x)$在間隔(a,b)內之高低界爲M,m,在分間隔(x_{i-1},x_i)內之高低界爲M_i,m_i.則無論i爲何值,下列關係恆能成立.

$$m\leqq m_i\leqq M_i\leqq M.$$

令$l_i=x_i-x_{i-1}$,此正數l_i卽爲間隔(x_{i-1},x_i)之長.

由 $$m_i\leqq f(\xi_i)\leqq M_i$$

得 $$\Sigma\, l_i\, m_i\leqq\Sigma\, l_i f(\xi_i)\leqq\Sigma\, l_i\, M_i.$$

任與一種拆分[以一種之遞增數列將(a,b)拆爲分間隔]卽有$\Sigma\, l_i\, m_i$,$\Sigma\, l_i\, M_i$兩和與之對應.玆究由各種可能之拆分所得之兩和.

令 $$s=\Sigma\, l_i\, m_i,\qquad S=\Sigma\, l_i\, M_i,$$

則因 $$M_i\leqq M,$$

故 $$S=\Sigma\, l_i\, M_i\leqq\Sigma\, l_i\, M=M\,\Sigma\, l_i=M\,(b-a).$$

卽 $$S\leqq M(b-a).$$

同理 $$s\geqq m(b-a).$$

先取兩種不同之拆分而觀之.設第二種拆分仍保留第一種拆分之$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_{n-1}$各値,并令對應於第一種拆分所得之兩和爲$s$與$S$,對應於第二種拆分所得之兩和爲$s'$與$S'$,則欲由第一種拆分變成第二種拆分,可以若干項之和替代S中之每一項,如取S中之一項$l_i M_i$爲例,應使M_i與l_i對於此若干項之和之關係,如M與$b-a$對於S然.此若干項之和爲S'之一部份而不大於$l_i M_i$,

故 $$S' \leqq S,$$

依同理 $$s' \geqq s.$$

由種種可能之拆分而觀之,則由$\Sigma l_i M_i$所成之和成一數集(S),由$\Sigma l_i m_i$所成之和成一數集(s),而(S),(s)有下述二性質.

(一) (S)中之數必大於或等於(s)中之數.

蓋設P, P'爲任兩種拆分,S爲由P所得(S)之一數,s'爲由P'所得(s)之一數.又施第三種拆分P'',但仍保留P與P'之分點.更令S''爲由P''所得(S)之一數,s''爲由P''所得(s)之一數.

則 $$S \geqq S'', \quad S'' \geqq s', \quad S'' \geqq s''.$$

故 $$S \geqq s'.$$

(二) 於(S)及(s)中必有兩數相差爲任意小者.

蓋依齊一連續函數之性質(參閱第一章第I節第10目定理四之推論二),任與一正數ε必有一正數α與之對應,當間隔(a, b)內任意二值x, x'合於不等式$|x-x'|<\alpha$時,即有$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$之關係.乃取一種拆分使其中最大分間隔(x_{i-1}, x_i)之長小於α者.並令M_i, m_i爲該間隔中$f(x)$之高低界,則無論i爲何值,M_i與m_i之差恆小於ε.由是所取之拆分合於此種條件時,其兩和S, s有下列關係

$$S-s=\Sigma l_i M_i-\Sigma l_i m_i=\Sigma l_i (M_i-m_i)<\Sigma l_i \varepsilon=\varepsilon(b-a),$$

即
$$S-s<\varepsilon(b-a).$$

因ε爲任意小之正數,故可選定ε之值俾$\varepsilon(b-a)$爲任意小,遂得(二)之證矣.

(一),(二)之性質已如上述,乃設l爲(s)之高界,L'爲(S)之低界.則由(一)得$l\leqq L'$.蓋以(s)中之數必小於或等於(S)中之數,故令S爲(S)中之任一數,即有$l\leqq S$,而此結果適合於(S)中之任何數,可見$l\leqq L'$.但由(二)易知l不能小於L',蓋如謂$l<L'$則於(S)中,任取一數S,於(s)中任取一數s,當有下式之關係

$$s\leqq l<L'\leqq S.$$

由是 $$S-s\geqq L'-l.$$

如取正數ε小於正數$L'-l$,則$S-s$將大於ε矣.是與(二)違背也.故(s)之高界與(S)之低界相等.此相等之數以I記之.

更廣而推究之,取一列之拆分$P_1, P_2, \cdots P_h \cdots$,而使$P_h$中之最大間隔$\lambda_h$之長趨近於零.令$S_h$為由$P_h$所得$(S)$之一數,$s_h$為由$P_h$所得$(s)$之一數,并令$\varepsilon, \alpha$俱為正數,其對應之關係如前所述者,則$h$為相當大之值時,即得$\lambda_h<\alpha$.依前所論,立知

$$S_h-s_h<\varepsilon(b-a).$$

是表明S_h-s_h之極限為零也.

惟 $$S_h\geqq I\geqq s_h,$$

故S_h, s_h均以I為極限.又因$\Sigma l_i f(\xi_i)$常介於S_h, s_h之間,其極限同為I也明矣.

II. 積 分

1. 定積分(Definite Integral).

前節第5目$\Sigma l_i f_i(\xi_i)$之極限I(即第4目S_n之極限),吾人恆記之如下

$$\int_a^b f(x)dx,$$

此式名爲函數$f(x)$由a至b之定積分.依此記號立知

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

2. a, b之互換.

將等式

$$\Sigma l_i f(\xi_i)=(x_1-a)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\cdots\cdots+(b-x_{n-1})f(\xi_n)$$

之兩邊變號,得

$$-\Sigma l_i f(\xi_i)=(x_{n-1}-b)f(\xi_n)+(x_{n-2}-x_{n-1})f(\xi_{n-1})+\cdots\cdots\cdots+$$
$$(x_1-x_2)f(\xi_2)+(a-x_1)f(\xi_1).$$

此式右邊之極限爲$\int_b^a f(x)dx$,

故得
$$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx.$$

3. 間隔之劃分.

設c爲間隔(a, b)內任意一數,令$c=x_p$,則

$$\Sigma l_i f(\xi_i)=[(x_1-a)f(\xi_1)+(x_2-x_1)f(\xi_2)+\cdots\cdots+(c-x_{p-1})f(\xi_p)]+$$
$$[(x_{p+1}-c)f(\xi_{p+1})+(x_{p+2}-x_{p+1})f(\xi_{p+2})+\cdots\cdots+(b-x_{n-1})f(\xi_n)].$$

上式右邊第一項之極限爲$\int_a^c f(x)dx$,而第二項之極限爲$\int_c^b f(x)dx$,

故得
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

4. 推廣.

設 $c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots c_{k-1}$ 爲 a, b 間之數，依前得

$$\int_a^b = \int_a^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \int_{c_2}^{c_3} + \cdots\cdots + \int_{c_{k-1}}^b.$$

故

$$\int_a^b - \int_{c_{k-1}}^b - \int_{c_{k-2}}^{c_{k-1}} - \cdots\cdots - \int_{c_2}^{c_3} - \int_{c_1}^{c_2} - \int_a^{c_1} = 0.$$

而

$$\int_a^b + \int_b^{c_{k-1}} + \int_{c_{k-1}}^{c_{k-2}} + \int_{c_{k-2}}^{c_{k-3}} + \cdots\cdots + \int_{c_3}^{c_2} + \int_{c_2}^{c_1} + \int_{c_1}^a = 0.$$

5. 備考.

以前所述，均設 $f(x)$ 於間隔 (a, b) 內爲連續，其積分卽由 a 積至 b. 若設間隔 (α, β) 全在 (a, b) 之內，而取積分 $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ 考之，則因 $\overrightarrow{\alpha c_i} + \overrightarrow{c_i \beta} = \overrightarrow{\alpha\beta}$，故當 c_i 在 (a,b) 內時，上目之結果恆能成立.

6. 積分之中值定理.

設函數 $f(x)$ 於間隔 (a, b) 內爲連續，m, M 爲此函數於此間隔內之低界及高界，

則　　$$m < f(x) < M.$$

依 $S, 3$ 之性質(見第 I 節之第5目)，

得
$$m(b-a)<\int_a^b f(x)dx<M(b-a).$$

此式可書爲下形
$$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a),$$

就中μ爲介於m, M間之數.

因函數於間隔(a, b)內爲連續,則在此間隔內必有一數ξ,能令$f(\xi)=\mu$(參閱第一章第I節第10目之定理二),

遂得
$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi).$$

7. 在定間隔內函數之中值.

設$a<b$,函數$f(x)$於間隔(a, b)內爲連續,將此間隔插入$x_1, x_2, \cdots\cdots x_{n-1}$各值,而分成$n$等份,

則 $a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<b$, $x_1-a=x_2-x_1=\cdots=b-x_{n-1}=\dfrac{b-a}{n}$.

當x之值爲$a, x_1, x_2\cdots\cdots x_{n-1}, b$時,函數之對應值依次爲$f(a), f(x_1), f(x_2), \cdots\cdots f(x_{n-1}), f(b)$,其平均數值爲
$$\frac{f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\cdots\cdots+f(x_{n-1})+f(b)}{n+1}.$$

茲試取此值而究之:以$\dfrac{b-a}{n}$徧除上式分子分母,并計及$\dfrac{b-a}{n}=x_1-a=x_2-x_1=\cdots\cdots$之關係,乃得

$$\frac{(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1})+\frac{b-a}{n}f(b)}{(b-a)\frac{n+1}{n}}.$$

當n無限增大,$\frac{b-a}{n}$之極限爲零,且$(x_1-a)f(a)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots\cdots+(b-x_{n-1})f(x_{n-1})$之極限與$\Sigma l_i f(\xi_i)$之極限同爲$\int_a^b f(x)dx$,而分母之極限爲$b-a$.遂得平均值之極限爲

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

此極限稱爲函數$f(x)$在間隔(a, b)內之中值.依前目可知此值卽爲μ也.

8. 原函數存在之又一證法.

設$f(x)$爲某間隔內之連續函數,x_0, x爲該間隔內之二值.試取積分$\int_{x_0}^x f(x)dx$而究之.若視x_0爲定值,x爲變數,則此積分爲x之函數,

令
$$F(x)=\int_{x_0}^x f(x)dx,$$

卽有
$$F(x+h)=\int_{x_0}^{x+h}f(x)dx=\int_{x_0}^x f(x)dx+\int_x^{x+h}f(x)dx$$

故
$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h}f(x)dx.$$

或書爲$F(x+h)-F(x)=hf(\xi)$(ξ爲介於$x, x+h$間之一數)

當 h 趨近於零時，$f(\xi)$ 趨近於 $f(x)$，而上式之右邊以零爲極限，故 $F(x)$ 爲一連續函數，且有引數 $f(x)$，蓋以 $\lim\limits_{h \doteq 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$ 也．可見凡連續函數 $f(x)$ 必爲某函數之引數，某函數者卽所謂 $f(x)$ 之原函數也（參閱第I節之第1目）．

如設 c 爲任意常數，則 $f(x)$ 之其他原函數可以 $F(x)+c$ 記之．依此又得

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx=F(x)+c.$$

當　$x=x_0$，$F(x_0)+c=0$，

故
$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx=F(x)-F(x_0).$$

［備考］——由積分之中值定理（見第6目），

得
$$\int_{a}^{b} f(x)dx=(b-a)f(\xi).$$

此式恰與微分之中值定理相似，蓋以 $\int_{a}^{x} f(x)dx$ 之引數爲 $f(x)$ 也．

設 $f(x)$ 之原函數爲 $F(x)$，

則有
$$f(x)=F'(x),\ \int_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a),$$

而
$$F(b)-F(a)=(b-a)F'(\xi).$$

9. 未定積分(Indefinite Integral).

$f(x)$之普通原函數恆以$\int f(x)dx$表之,此原函數稱爲$f(x)$之未定積分.若令$\phi(x)$爲$f(x)$之任一原函數,

則
$$\int f(x)dx=\phi(x)+c,$$
就中c爲任意常數.由此可知
$$f(x)=\phi'(x),\qquad 或 f(x)dx=d\phi(x).$$

[備考]——如$f(x)$之未定積分爲已知,則曲線$y=f(x)$與ox軸及平行oy軸二直線圍成之面積,立可求出.

如謂積某函數,意卽求該函數之未定積分也.又以上所述之積分(定或未定)祇有單一符號$\int$,故以單積分(Simple Integral)名之,與第十一章所載者有別.

III 未定積分題解簡要

求任意函數之原函數(卽求未定積分),本無普通之方法.玆所述及,祇爲某種特別方法,可適用於某種函數者耳.下文略示簡易積分之求法,其稍涉繁深者,將於第九章究之.

1. 簡單函數之積分.

由簡單函數引數表,可立得函數之積分如下表所示:各積分之常數,皆以c記之.表中±號之採擇,可依第

三章以定之.

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c, \qquad \int\frac{dx}{x}=\int\frac{d(-x)}{(-x)}=\log|x|+c,$$

$$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+c, \qquad \int\cos x\,dx=\sin x+c,$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+c, \qquad \int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+c,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\pm\operatorname{arc}\sin x+c,\\ \pm\operatorname{arc}\cos x+c,\end{cases} \qquad \int\frac{dx}{+1x^2}=\operatorname{arc}\tan x+c,$$

$$\int Ch\,x\,dx=Sh\,x+c, \qquad \int Sh\,x\,dx=Ch\,x+c,$$

$$\int\frac{dx}{Ch^2 x}=Th\,x+c, \qquad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}=\operatorname{Arg}Sh\,x+c,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\pm\operatorname{Arg}Ch\,x+c, \qquad \int\frac{dx}{1-x^2}=\operatorname{Arg}Th\,x+c.$$

2. 和之積分.

數個函數和之引數,等於各函數之引數之和,前第三章第V節第2目,經已證明.依此反推之,易見數個函數和之積分,等於各函數之積分之和.

應用——求多項式$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_{m-1}x+a_m$之積分.

依上所得之結果,立知

$$\int f(x)dx=\frac{a_0}{m+1}x^{m+1}+\frac{a_1}{m}x^m+\cdots\cdots+\frac{a_{m-1}}{2}x^2+a_m x+c.$$

3. 更換變數之方法.

設 $F(x)$ 爲 $\int f(x)dx$ 之一原函數,

則 $$F(x)=\int f(x)dx,\qquad F'(x)=f(x).$$

令 x 爲一新變數 t 之函數,其關係爲 $x=\phi(t)$ 者,則 $F(x)$ 化爲 $F[\phi(t)]$, 乃得

$$\Phi(t)=F[\phi(t)].$$

求兩邊對於 t 之引數,

$$\Phi'(t)=F'[\phi(t)]\phi'(t)=f[\phi(t)]\phi'(t).$$

由上式得 $$\Phi(t)=\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt.$$

又因 $$\Phi(t)=F(x)=\int f(x)dx,$$

故 $$\int f(x)dx=\int f[\phi(t)]\phi'(t)dt.$$

由是經 $x=\phi(t)$ 之更換後,乃得一新積分,先積此新積分,然後以 t 之值代入,則所求之 $F(x)$ 即可得矣

4. 例.

(一) 求 $\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}$.

令 $x^2+1=t$, 則 $2xdx=dt$,

而 $$\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{2t}+c,$$

故 $$\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2(x^2+1)}+c.$$

(二) 求 $\int\frac{dx}{\sin x}$.

令 $\tan\frac{x}{2}=t$, 則 $x=2\arctan t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

但 $$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},$$

故 $$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+c=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c.$$

(三) 求 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$.

令 $\sqrt{x^2+a}=t-x$, 則 $x^2+a=(t-x)^2$, $x=\frac{t^2-a}{2t}$,

$$\sqrt{x^2+a}=\frac{t^2+a}{2t},\quad dx=\frac{t^2+a}{2t^2}dt.$$

故 $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+c=\log|x+\sqrt{x^2+a}|+c$$

(四) 求 $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

令 $x=\frac{1}{t}$, 則 $dx=-\frac{dt}{t^2}$,

而 $$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=-\varepsilon\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}},$$

($\varepsilon=\pm1$, 其號與 t 之號同).

故依前題, 如 $t>0$, 卽 $x>0$,

得
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=-\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c$$
$$=-\log\left|\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}\right|+c=\log\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$$
$$=\log\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|+c.$$

如 $t<0$, 卽 $x<0$,

得
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c$$
$$=\log\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}\right|+c$$
$$=\log\left|\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}\right|+c$$
$$=\log\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|+c.$$

故仍有相同之結果.

或令 $x=\tan t$, 則 $dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}$.

故
$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}=\int\frac{dt}{\sin t}=\log\left|\tan\frac{t}{2}\right|+c$$
$$=\log\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right|+c.$$

(五) 求 $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx.$

令 $x=a\frac{1}{\cos t}$, 則 $dx=\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt$

故 $\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=a\int\tan^2 t\,dt=a\int\frac{dt}{\cos^2 t}-a\int dt=a\tan t-at+c$

$$=\sqrt{x^2-a^2}-a\operatorname{arc}\cos\frac{a}{x}+c.$$

(六) 由簡單之更換變數,更得結果如下:

$$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{d(ax+b)}{ax+b}=\frac{1}{a}\log|ax+b|+c,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{d\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=\operatorname{arc}\sin\frac{x}{a}+c,$$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\frac{x}{a}}{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\operatorname{arc}\tan\frac{x}{a}+c,$$

$$\int\tan x\,dx=\int\frac{\sin x\,dx}{\cos x}=-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=-\log|\cos x|+c.$$

5. 分部積分 (Integration by Parts).

設 u, v 爲 x 之函數,

則 $$duv=vdu+udv.$$

故得 $$uv=\int v\,du+\int u\,dv,$$

即 $$\int u\,dv=uv-\int v\,du.$$

由是觀之,苟 $\int v\,du$ 較 $\int u\,dv$ 爲簡,則可將繁難問題化簡矣.此式稱分部積分公式.

例一——設 $u=\log x$, $v=x$, 由分部積分之公式得

$$\int\log x\,dx=x\log x-\int x\frac{dx}{x}=x\log x-x+c.$$

例二——求 $\int xe^x\,dx$.

令 $u=x$, $v=e^x$, $du=dx$, $dv=e^x\,dx$, 代入分部積分公式得

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=e^x(x-1)+c.$$

例三——求 $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$.

欲求此積分,先求 $x\sqrt{x^2+a}$ 之微分.

因 $$d\left[x\sqrt{x^2+a}\right]=\sqrt{x^2+a}\,dx+\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

兩邊積之,

(1) $$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

但 $$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{x^2+a-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\sqrt{x^2+a}\,dx-a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$$

計及前目例(三),又得

(2) $\displaystyle\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\sqrt{x^2+a}\,dx-a\log|x+\sqrt{x^2+a}|.$

由(1),(2)兩式卽得

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\log|x+\sqrt{x^2+a}|,$$

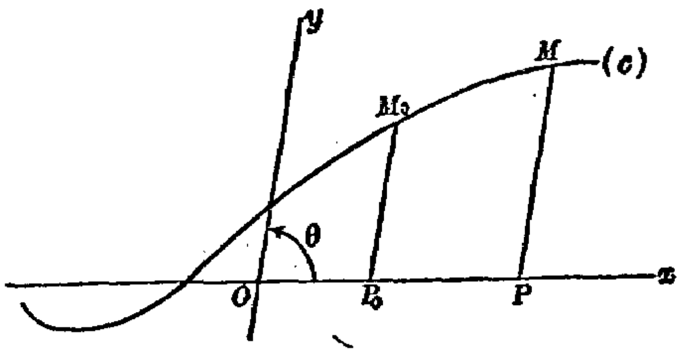
$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}-\frac{a}{2}\log|x+\sqrt{x^2+a}|.$$

6. 面積.

設斜交位標軸ox, oy,相交於o,其交角爲θ,曲線(c)(圖23)之方程式爲$y=f(x)$.依前所論,知(c)與ox, M_0P_0及MP諸直線所包之面積A爲x之函數,其引數爲$f(x)\sin\theta$.

故
$$A=\sin\theta\int_{x_0}^{x}f(x)dx.$$

就中x_0表M_0之橫量,x表M之橫量.



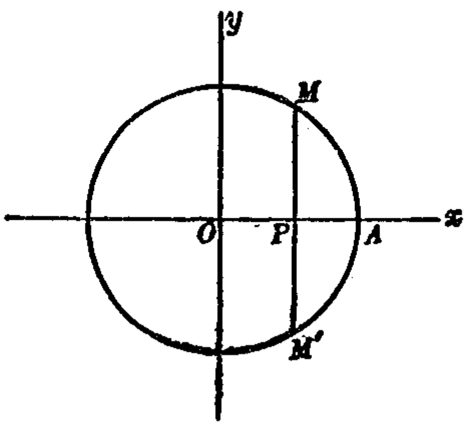
(圖 23)

玆舉例以明面積之求法:

例一——圓弧與弦所包(弓形)之面積.

設位標軸爲正交(卽$\theta=\frac{\pi}{2}$),圓心爲原點o,半徑爲R(圖 24),則圓之方程式爲

$$y=\pm\sqrt{R^2-x^2}.$$



(圖 24)

當圓弧在ox軸上,上式方根之號爲正,在ox軸下,上式方根之號爲負.玆取弦MM'與y軸平行,與x軸交於$P(a,o)$,則弓形MAM'之面積爲

$$A=2\int_a^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

令 $x=R\cos\phi$, $a=R\cos\alpha$, 則 $dx=-R\sin\phi\,d\phi$. 且當$x=R$時,$\phi=0$.

由是 $$A=-2\int_\alpha^0 R^2\sin^2\phi\,d\phi=R^2\int_0^\alpha(1-\cos 2\phi)d\phi$$

$$=R^2(\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha).$$

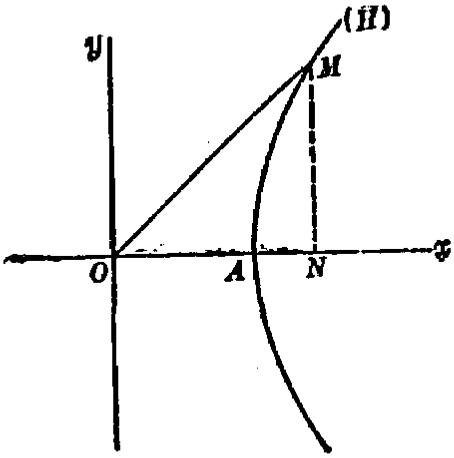
因弧MM'之長$l=2R\alpha$,故上式可書爲

$$A=\frac{1}{2}R(l-R\sin\omega),$$

就中ω爲角MOM'.

例二——等腰雙曲線與半徑動徑所包之面積.

設位標軸oxy爲正交,等腰雙曲線(圖 25)之方程式爲$x^2-y^2=1$, 半徑動徑與雙曲線之一枝(H)相交於$M(x,y)$, ox軸與(H)相交於$A(1,0)$,茲求oMA之面積.



(圖 25)

作直線MN垂直於ox,垂線之足爲$N(x,o)$,則在AM弧上,x,y之值爲正,

故　　NAM之面積$=\int_1^x ydx=\int_1^x\sqrt{x^2-1}\,dx,$

令　　$x=Chu,$　則　$dx=Sh\,u\,du,$

而　　$\sqrt{x^2-1}=\sqrt{Ch^2u-1}=Shu,$

於是$\int_1^x\sqrt{x^2-1}\,dx=\int_o^u Sh^2u\,du=\frac{1}{2}\int_o^u(Ch2u-1)du=\frac{Sh2u}{4}-\frac{u}{2}$

又面積　$oMN=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}Chu\,Shu=\frac{Sh2u}{4}.$

故　oAM之面積$=oNM$之面積$-ANM$之面積

$$=\frac{u}{2}.$$

此面積爲代數值，其號與x之號相同.

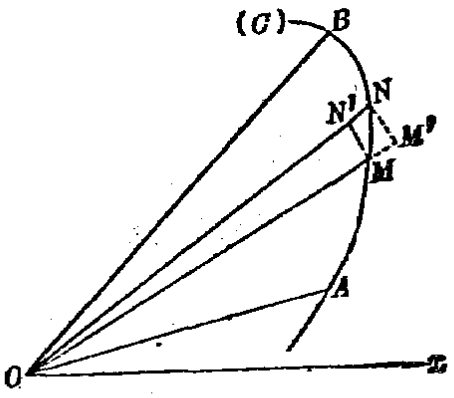
附註：若(H)爲普通雙曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

則oAM之面積$=\frac{1}{2}ab\log\left|\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right|$. 此證委諸讀者.

7. 極位標制面積之求法.

曲線(c)之一段AB與兩半徑動徑oA, oB所包成扇形AoB(圖 26)之面積，可以下述方法求之.



(圖 26)

設曲線(c)之方程式爲$\rho=f(\theta)$, oA, oB與ox軸交角依次爲θ_0, θ_1 $(\theta_1>\theta_0)$. 將角$\theta_1-\theta_0$分爲n份，俾當n無限增加時，每份以零爲極限. 玆以MoN記其一份，并令M, N之位標依次爲(ρ,θ), $(\rho+\triangle\rho,\theta+\triangle\theta)$. 以$o$爲中心，$\rho$; $\rho+\triangle\rho$爲半徑作MN', NM'兩圓弧，得扇形MoN', $M'oN$，其面積依次爲$\frac{\rho^2\triangle\theta}{2}$, $\frac{(\rho+\triangle\rho)^2\triangle\theta}{2}$. 而扇形$MoN$之面積介於$MoN'$, $M'oN$兩面積之間. 但$\frac{\rho^2\triangle\theta}{2}$, $\frac{(\rho+\triangle\rho)^2\triangle\theta}{2}$爲相當之無窮小，其主要部份爲

$\frac{\rho^2\triangle\theta}{2}$,故 MoN 之面積之主要部份等於 $\frac{\rho^2\triangle\theta}{2}$.由是扇形 AoB 之面積等於扇形 MoN 面積之和之極限,即 $\sum_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{\rho^2\triangle\theta}{2}$ 之極限也(參閱第三章第I節第5目之定理三).若 ρ 爲 θ 之連續函數,則此和爲有極限,其極限爲 $\int_{\theta_0}^{\theta_1}\frac{\rho^2 d\theta}{2}$.

IV. 定積分之推廣

1. 積分間隔爲無窮大時之情形.

設函數 $f(x)$ 連續於間隔 (a, b) 內,且設 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 之原函數,則依定積分之記號得

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

就中 a, b 爲有限之值 $(a<b)$.而間隔 (a,b) 或以積分間隔名之.今試推廣定積分記號,而察 a, b 爲無窮時之情形.

先假定 b 趨至 $+\infty$,若 $\int_a^b f(x)\,dx$ 趨近於一極限,則此極限以 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 記之.

而
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\doteq+\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\doteq+\infty} F(b) - F(a).$$

次假定 a 趨至 $-\infty$; b 爲有限之值,若 $\int_a^b f(x)\,dx$ 趨近

於一極限,則此極限以 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ 記之.

而 $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \doteq -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \lim_{a \doteq \infty} F(a),$$

更依同樣記號得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a \doteq -\infty \\ b \doteq +\infty}} \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b \doteq +\infty} F(b) - \lim_{a \doteq -\infty} F(a).$$

例一 求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{a^2+x^2} = \lim_{\substack{x' \doteq -\infty \\ x'' \doteq +\infty}} \int_{x'}^{x''} \frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$= \frac{1}{a}\left[\lim_{x'' \doteq +\infty}\left(\arctan\frac{x}{a}\right) - \lim_{x' \doteq -\infty}\left(\arctan\frac{x}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{a}.$$

2. 函數 $f(x)$ 在積分間隔內爲不連續時之情形.

分別下列兩情形:

(其一) 先設 $f(x)$ 連續於間隔 $(a, b-\varepsilon)$ 內 (ε 爲任意小之正數), 但 $f(x)$ 於 $x=b$ 時爲不連續,

則 $$\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = F(b-\varepsilon) - F(a);$$

就中$F(x)$爲$f(x)$之原函數.當ε趨近於零時,如$\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$趨近於一極限,則此極限仍以$\int_a^b f(x)\,dx$記之.

而
$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\doteq o}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\doteq o}F(b-\varepsilon)-F(a).$$

次設$f(x)$連續於間隔$(a+\varepsilon,b)$內,但$f(x)$於$x=a$時爲不連續,且當ε趨近於零時,$\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$趨近於一極限,則此極限仍以$\int_a^b f(x)\,dx$記之.

而
$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\doteq o}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx=F(b)-\lim_{\varepsilon\doteq o}F(a+\varepsilon).$$

更設$f(x)$連續於間隔$(a+\varepsilon,b-\eta)$內(就中ε,η爲任意小之正數),但$f(x)$於$x=a,x=b$時爲不連續,則依同樣記號,

得
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a+\varepsilon}^{b-\eta}f(x)\,dx=\lim_{\eta\doteq o}F(b-\eta)-\lim_{\varepsilon\doteq o}F(a+\varepsilon).$$

(其二)令x'爲間隔(a,b)內之一值.設$x=x'$時$f(x)$爲不連續,而$f(x)$於此間隔內之其他各值爲連續,則以$\int_a^b f(x)\,dx$表示$\int_a^{x'}f(x)\,dx+\int_{x'}^b f(x)\,dx$,而依前記號得

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \doteq o}\int_a^{x'-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta \doteq o}\int_{x'+\eta}^b f(x)\,dx$$

$$= F(b) - F(a) + \lim_{\varepsilon \doteq o} F(x'-\varepsilon) - \lim_{\eta \doteq o} F(x'+\eta).$$

同理可推至$f(x)$於$x=x'$, $x=x''$ ……爲不連續時之情形.

例一 求$\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

令 $\dfrac{x-a}{b-a}=t$, 則 $dx=(b-a)\,dt$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t-t^2}} = 2\int \frac{d\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} = 2\arcsin\sqrt{t}+c$$

$$= 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + c.$$

故 $$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \lim_{\substack{\varepsilon \doteq o \\ \eta \doteq o}} \int_{a+\varepsilon}^{b-\eta} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

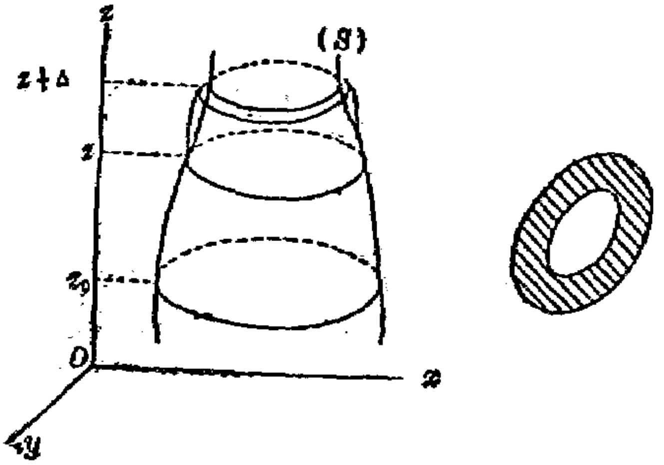
$$= \lim_{\eta \doteq o} 2\arcsin\sqrt{\frac{b-\eta-a}{b-a}} - \lim_{\varepsilon \doteq o} 2\arcsin\sqrt{\frac{a+\varepsilon-a}{b-a}} = \pi.$$

V. 兩平行底面間之體積

1. 體積之計算.

令V爲固體(S)在兩平行底面間之體積(圖 27).取正交位標軸$oxyz$,令xoy面與(S)之底面平行.設此兩底面

之平面之方程式爲 $z=z_0$, $z=z$, 就中 z_0 爲常數, z 爲變數. 當 z 增加 $\triangle z$, 體積 V 則增加 $\triangle V$. 故 V 爲 z 之函數. 此函數以 $V(z)$ 表之. 玆求此函數之引數, 然後計算 V 之值.



(圖 27)

以 (P), (P') 記兩底面 z 及 $z+\triangle z$. 作一柱面 (Cylinder) (s), 其在 (P) 之截口 (Section) 與 (S) 在 (P) 之截口相同者. 而 (s) 在 (P) 與 (P') 間之體積, 則以 $\triangle v$ 記之. 今先證無窮小 $\triangle V$, $\triangle v$ 爲相當. 蓋將 $\triangle V$ 之側面 (Lateral Surface) 投影於 (P) 上, 則此投影爲一環形. 命 A_i, A_e 依次爲此環形內周界及外周界內之面積, 則以環形內外周界爲底所成兩柱面之體積 $A_i\triangle z$, $A_e\triangle z$ 與 $\triangle V$ 有下之關係

$$A_i\triangle z<\triangle V<A_e\triangle z.$$

又命 A 爲 (S) 在 (P) 上截口之面積, 則

$$\frac{A_i}{A}<\frac{\Delta V}{A\Delta z}<\frac{A_e}{A},$$

即
$$\frac{A_i}{A}<\frac{\Delta V}{\Delta v}<\frac{A_e}{A}.$$

當 Δz 趨近於零，ΔV 側面之投影趨近於 A 之周界，故 A_i, A_e 均趨近於 A，而 $\frac{A_i}{A}$, $\frac{A_e}{A}$ 之極限爲 1. 可見 ΔV, Δv 爲相當無窮小.明乎此，則 $V(z)$ 之引數易得矣.

因平面上之面積代表一函數，如以 $A(z)$ 記 A 所代表之函數，則以 A 爲底之柱面之體積 $\Delta v=A(z)\Delta z$. 由是

$$\lim\frac{\Delta V}{\Delta z}=\lim\frac{A(z)\Delta z}{\Delta z}=A(z),$$

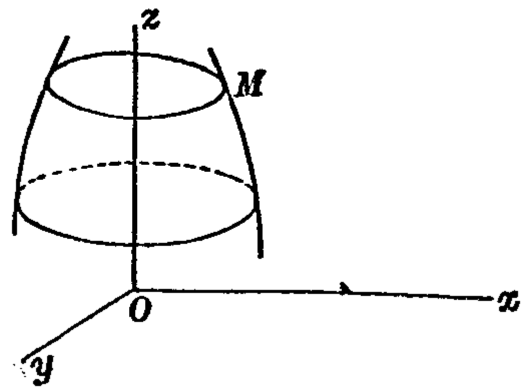
而
$$\frac{dv}{dz}=A(z).$$

遂得體積之公式如下：

$$V=\int_{z_0}^{z}A(z)\,dz.$$

2. 旋轉面之體積.

曲面爲平曲線繞其面上一定軸旋轉所產成者，名曰旋轉面 (Surface of Revolution)，此定軸名曰旋轉軸 (Axis of Revolution). 令 oz 爲旋轉軸，則因旋轉面與平面 $z=z$ 之截口爲圓，此圓由曲線之 $M(x, y, z)$ 點繞 oz 軸所



(圖 28)

產成,其中心卽在 oz 軸上(圖 28),故其面積爲 $A(z)=\pi r^2$, 就中 r 表 M 至 oz 軸之距離.

由 zox 位標面與旋轉面之截口觀之,令此截口在此位標面之方程式爲 $z=f(x)$,則依旋轉面之定義,卽知旋轉面之方程式爲 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$,或可書爲 $z=f(r)$,故旋轉面與 $z=z_0$, $z=z$ 兩平面所包含之體積 $V=\int_{z_0}^{z}\pi r^2\,dz$, 就中 r 爲 z 之函數,以 $z=f(r)$ 定之.

3. 例.

例一——設有<u>錐面</u> (cone),其方程式爲 $x^2+y^2=z^2$ 試求此錐面與 $z=z_0$, $z=h(z_0<h)$ 兩平面所包含之體積 V.

如令 A 表平面 $z=z$ 與錐面之截口之面積,則 $A=\pi z^2$.

故
$$V=\int_{z_0}^{h}\pi z^2\,dz=\frac{\pi}{3}(h^3-z_0^3).$$

若以B表平面$z=h$與錐面之截口之面積，則$B=\pi h^2$，而$V=\frac{B}{3h^2}(h^3-z_0^3)$. 當$z_0=0$時，$V=\frac{Bh}{3}$

例二——設有一球其方程式爲$x^2+y^2+z^2=R^2$. 試求此球與$z=z_0$，$z=z$兩平面所包含之體積V.

令A表平面$z=z$與球之截口之面積，

則
$$A(z)=\pi r^2=\pi(R^2-z^2).$$

故
$$V=\int_{z_0}^{z}\pi(R^2-z^2)\,dz=\pi R^2(z-z_0)-\frac{\pi}{3}(z^3-z_0^3).$$

當$z_0=-R$，$z=R$時，即得全球之體積$\frac{4\pi R^3}{3}$.

第四章之習題

計算下列之積分：

(1) $\int\frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{2x+1}}$. (2) $\int\frac{dx}{(x-4)\sqrt{x^2-2x+3}}$.

(3) $\int\cos^3 x\,dx$. (4) $\int\sin^3 x\,dx$.

(5) $\int\cos^4 x\,dx$. (6) $\int\sin^4 x\,dx$.

(7) $\int Sh^3 x\,dx$. (8) $\int Ch^4 x\,dx$.

(9) $\int\frac{dx}{\cos 2x}$. (10) $\int\frac{dx}{Ch\,2x}$.

(11) $\int x^3 e^x\,dx$. (12) $\int\arc\sin x\,dx$.

(13) $\int \arctan x\,dx.$　　(14) $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}.$

(15) $\int (x+1)^2 \cos x\,dx.$　　(16) $\int x \log x\,dx.$

(17) $\int \cos x \log \sin x\,dx.$　　(18) $\int x^3(a-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$

(19) $\int_1^2 \frac{2x+1}{x^2-3x+7}\,dx.$　　(20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\,dx.$

(21) 應用分部積分，求證：

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2m)}\,\frac{\pi}{2},$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x\,dx = \frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots(2m)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2m+1)}\,\frac{\pi}{2}$ (m 爲正整數).

(22) 設位標軸爲正交，試求拋物線 $y^2=2px$ 與圓 $x^2+y^2=R^2$ 所包之面積.

(23) 求拋物線 $y^2=4x-12$ 與雙曲線 $4x^2-y^2=36$ 所包之面積.

(24) 求曲線 $y=\frac{2x}{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}$ 與 ox 軸及直線 $x=3a$ 所包之面積.

(25) 試求心狀線 (Cardioid) $\rho=a(1-\cos\theta)$ 之面積.

(26) 求兩曲線 $\rho=5-2\sin\theta$, $\rho=\frac{8}{\sqrt{3}}\cos\theta$ 所包之面積.

(27) 求擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ 與 ox 軸所包之面積.

(28) 試證三葉曲線 $\rho=a\sin 3\theta$ 之面積等於其外接圓面積之四分一.

(29) 如 $a>0$,

則 $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \log\left| x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{a}}\right|.$$

如 $a<0$,

則 $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}.$$

試證明之.

(30) 試證下列兩公式:

$$\int \sqrt{ax^2+k}\,dx=\frac{x\sqrt{ax^2+k}}{2}+\frac{k}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+k}},$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{4ac-b^2}{8a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

計算下列定積分:

(31) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ (32) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$.

(33) $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dx}{(a-x)^n}$.

(34) 求橢圓之面積,并求其繞 ox 軸所產生之體積.

(35) 有圓 $x^2+(y-b)^2=a^2$ 繞 ox 軸旋轉,試求此圓產生之體積.此圓所產生之曲面名曰環形圓紋面(Torus).

(36) 有懸線 $y=a\,\mathrm{Ch}\dfrac{x}{a}$ 繞 ox 軸旋轉,產成一旋轉曲面.試求此旋轉曲面與垂直於 ox 軸之兩平面所包之體積.

(37) 有內擺線(Hypocycloid) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 繞 ox 軸旋轉,試求此內擺線產生之體積.

第五章

函數展成級數及整級數之性質

I. 函數展成級數

1. Taylor公式.

設函數$f(x)$爲m次多項式,由第三章第VII節第2目得

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^m}{m!}f^{(m)}(a).$$

今設$f(x)$爲普通連續函數具有各級引數(即第一第二,及其後一切之引數),則下式

$$f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots\cdots$$

爲無限項級數.欲察此級數是否收歛,其值是否爲$f(a+h)$,可取

$$f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{2!}f''(a)-\cdots\cdots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

而究之.設A爲常數而合於

$$(1)\quad f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\frac{h^2}{2!}f''(a)-\cdots-\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)-Ah^{n+1}=0.$$

令 $a+h=b$, 以 $b-a$ 代 (1) 之 h 得

(2) $$f(b)-f(a)-\frac{b-a}{1}f'(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)-\cdots\cdots-\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

$$-A(b-a)^{n+1}=0.$$

再以 x 代上式之 a, 且令 $\phi(x)$ 表所得之結果,

則 $$\phi(x)=f(b)-f(x)-\frac{b-x}{1}f'(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f''(x)-\cdots\cdots-$$

$$\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)-A(b-x)^{n+1}.$$

設當 x 在間隔 (a,b) 內, 函數 $f(x)$ 有第一至第 $n+1$ 引數,則 $\phi(x)$ 在間隔 (a,b) 內有引數. 又當 $x=a$, $x=b$ 時, $\phi(x)$ 之值爲零,則依第三章第 IX 節第 1 目之定理, x 在 (a,b) 間隔內必有一值 c 能令 $\phi'(c)=0$.

計算 $\phi(x)$ 各項之引數,

得 $$\phi'(x)=-f'(x)-\left[\frac{b-x}{1}f''(x)-f'(x)\right]$$

$$-\left[\frac{(b-x)^2}{2!}f'''(x)-\frac{b-x}{1}f''(x)\right]-\cdots\cdots$$

$$-\left[\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)-\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x)\right]$$

$$+(n+1)A(b-x)^n.$$

簡之卽得 $$\phi'(x)=-\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)+(n+1)A(b-x)^n.$$

因 $\phi'(c)=0,$

故 $-\frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)+(n+1)A(b-c)^n=0.$

又因$b-c$之值不為零，

故
$$A=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

以$a+h$代b. 而以$a+\theta h$表在間隔$(a, a+h)$內之c值(θ為大於零而小於1之值)，則上式變為

$$A=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}.$$

於是(1)式可書為

(3) $$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n,$$

就中
$$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

(3)式稱為Taylor公式，R_n稱為殘餘 (Remainder). 此式在解析數學中致用最廣. 惟須注意者，當x在間隔(a, b)內，$f(x)$確有第一至第$n+1$引數，(3)式方能適用. 今假定此條件能合，並當n為無限大時，其殘餘

$$\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

趨近於零，則得Taylor級數

(4) $$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\cdots.$$

2. 定理.

Taylor 級數爲收斂而其和爲$f(a+h)$之必須及充足條件如下:當n增至無限大時,殘餘R_n之極限爲零.

以S_{n+1}表此級數前$n+1$項之和,則(3)式可書爲

$$f(a+h)=S_{n+1}+R_n.$$

由上式觀之,當S_{n+1}之極限爲$f(a+h)$,則R_n之極限必爲零.反言之,若R_n之極限爲零,則S_{n+1}之極限爲$f(a+h)$,遂得定理之證.

3. Maclaurin 公式.

由 Taylor 公式以o代a,x代h,則得 Maclaurin 公式

$$f(x)=f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\frac{x^2}{2!}f''(o)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(o)+R_n,$$

就中 $$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),\ (0<\theta<1).$$

此式之成立,必須當x在間隔(o,x)內,函數$f(x)$具有第一至第$n+1$引數.

若x在間隔(o,x)內,函數$f(x)$具有各引數,則得 Maclaurin 級數

$$f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\frac{x^2}{2!}f''(o)+\cdots\cdots$$

此級數爲收斂而其和爲$f(x)$之條件,與前目所載者相同.

超然函數中之極限,如當x等於某值時,不能確定,可用Taylor或Maclaurin公式展開以審察之.

4. 指數函數之展開.

設$f(x)=e^x$.無論x爲何值,e^x之各引數俱爲e^x,且當n無限增大時,$R_n=0$,故e^x可展成收斂級數.當$x=0$時e^x之值爲1.應用Maclaurin公式得

(5) $$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots.$$

令　$x=1$得

$$e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots.$$

以$-x$代(5)之x得

(5′) $$e^{-x}=1-\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}-\cdots$$

計及(5)與(5′)兩式得

(6) $$\begin{cases}\operatorname{Sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\cdots,\\[2ex]\operatorname{Ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots.\end{cases}$$

5. 三角函數之展開.

(a)　設$f(x)=\sin x$由第三章第VII節第2目得

$$f^{(p)}(x)=\sin\left(x+p\frac{\pi}{2}\right),\quad 故\ f^{(p)}(o)=\sin p\frac{\pi}{2}.$$

$$f'(o)=1,\ f''(o)=0,\ f'''(o)=-1,\ f^{(\mathrm{IV})}(o)=0,\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$f^{(4n+1)}(o)=1,\ f^{(4n+2)}(o)=0,\ f^{(4n+3)}(o)=-1,\ f^{(4n+4)}(o)=0\cdots\cdot.$$

順次代入 Maclaurin 公式，且計及 $R_n=0$ 得

$$(7)\quad \sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+\frac{x^{4n+1}}{(4n+1)!}-\frac{x^{4n+3}}{(4n+3)!}+\cdots.$$

(b) 設 $f(x)=\cos x$. 由第三章第VII節第2目，

得
$$f^{(p)}(x)=\cos\left(x+p\frac{\pi}{2}\right),$$

故 $f'(o)=0,\quad f''(o)=-1,\quad f'''(o)=0,\quad f^{(\mathrm{IV})}(o)=1,\cdots\cdots,$

$f^{(4n+1)}(o)=0,\ f^{(4n+2)}(o)=-1,\ f^{(4n+3)}(o)=0,\ f^{(4n+4)}(o)=1,\cdots\cdots.$

代入 Maclaurin 公式，且計及 $R_n=0$，得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots\cdots$$

［備考］——由 $\cos x$ 與 $\sin x$ 之展式得

$$\cos x+i\sin x=\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots\right)$$
$$+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots\right).$$

根據 e^x 之展式，則上式可書爲

$\cos x+i\sin x=e^{ix}$（虛數項級數之理論，本書從略．茲不過示其結果耳）．將上式之 i 易以 $-i$ 得

$$\cos x-i\sin x=e^{-ix},$$

由上二式合併即有

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

6. 問題.

試用Taylor公式證明代數方程式$f(x)=0$有m個根等於x_1之必須及充足條件爲

$$f(x_1)=0, f'(x_1)=0, f''(x_1)=0, \cdots\cdots, f^{(m-1)}(x_1)=0, f^{(m)}(x_1)\neq 0.$$

令$x=x_1+h$,將$f(x)$依$x-x_1$之升冪展成Taylor級數得

$$f(x)=f(x_1)+\frac{(x-x_1)}{1}f'(x_1)+\cdots\cdots+\frac{(x-x_1)^m}{m!}f^{(m)}(x_1)$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{(x-x_1)^n}{n!}f^{(n)}(x_1).$$

就中n爲$f(x)$之次數.如謂$f(x)=0$有m個根等於x_1,即謂$f(x)$以$(x-x_1)^m$爲其因數.由此展式觀之,欲$f(x)$以$(x-x_1)^m$爲因數,則其必須及充足條件爲展式中最初m項之係數$f(x_1), f'(x_1), \cdots f^{(m-1)}(x_1)$皆爲零.故如定理云.

玆設一例,以示此問題之用.

例——已知方程式$f(x)\equiv x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$有等根,試解之.

求$f(x)$之第一引數得

$$f'(x)=5x^4-4x^3-15x^2+2x+8.$$

因$f(x)$, $f'(x)$之最高公因數爲$(x+1)^2$ $(x-2)$. 卽知$f''(x)$亦以$(x+1)$爲其因數.故$f(x)=(x+1)^3(x-2)^2$, 而$f(x)$以-1爲三重根,以2爲二重根.

II. 整級數

1. 定義.

設有級數

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots,$$

就中$a_0, a_1, a_2\cdots\cdots$表代數值,$x$表一變數,則(1)稱爲整級數(英文爲 Power Series, 法文爲 Série Entière, 此名由法文譯出).

當x在間隔$(-R, +R)$內,若級數(1)爲收斂,則此級數之和爲x之函數,設函數(1)收斂於間隔$(-R, +R)$內則此函數爲連續.如將(1)式逐項求其引數或積分,則所成之整級數,卽爲(1)式之引數或積分,且此級數於$-R<x<+R$時爲連續.其證法將於本章第II第III兩節及之.

2. 整級數之定理.

定理一——當$x=x_0$時,設級數(1)任一項之絕對値

均小於一定之正數M,則當$|x|<|x_0|$時,級數(1)爲絕對收斂.

由假設

$$|a_n x_0^n|<M$$

而
$$a_n x^n=a_n x_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n,$$

$$|a_n x^n|=|a_n x_0^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

故
$$|a_n x^n|<M\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

玆因 $|x|<|x_0|$,故幾何級數

(2)
$$M+M\left|\frac{x}{x_0}\right|+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2+\cdots\cdots+M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n+\cdots\cdots$$

之公比$\left|\frac{x}{x_0}\right|$小於1,而爲斂級數.又因級數(2)各項均大於級數(1)相應項之絕對值,而級數(2)爲收斂,故級數(1)爲絕對收斂.

定理二——當$x=x_0$時,設級數(1)爲收斂,則當$|x|<|x_0|$,級數(1)爲絕對收斂.

蓋當$x=x_0$時,級數(1)爲收斂,故n增至無窮大時,$a_n x_0^n$之極限爲零,而級數(1)任一項之絕對值,均小於一定值.由定理一之證明,卽知級數(1)於$|x|<|x_0|$爲絕對收斂.

推論——若級數(1)於$x=x_1$時爲發散,則當$|x|>|x_1|$時,級數(1)亦爲發散.

設$|x_2|>|x_1|$,則級數(1)於$x=x_2$時必爲發散.蓋若爲收斂,則依本定理之證明,級數(1)於$x=x_1$時將爲收斂矣.

3. 由上述定理所得之結果.

綜上所述,整級數之收斂情形,可分下列三種:

(a) 無論x爲何值,級數恆爲收斂.例如

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots,$$

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdots\cdots$$

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\cdots.$$

蓋當n無限增大時,$\frac{u_{n+1}}{u_n}$之極限爲零,故無論n爲何值,上列各級數均爲收斂.吾人已知其依次等於e^x, $\sin x$, $\cos x$矣.

(b) 除$x=0$外,無論x爲何值,級數恆爲發散,例如

$$1+x+2!\,x^2+\cdots\cdots+n!\,x^n+\cdots\cdots.$$

蓋除$x=0$外,當n無限增大時,比值$\frac{u_{n+1}}{u_n}=nx$爲無窮.

故級數爲發散.

(c) 收斂或發散之級數.

$|x|$小於某正數R時,級數爲收斂.$|x|$大於R時,級數爲發散.即級數之收斂發散,視x在間隔$(-R,+R)$之內外而定.惟當$x=\pm R$,級數之收斂與否,須加特別考察,方能知其究竟.此間隔名爲收斂間隔 (Interval of Convergence),而R名爲收斂半徑(Radius of Convergence).

茲察下列三級數

$$x+2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{x^n}{n^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

當n無限增大時,$\frac{u_{n+1}}{u_n}$之極限爲x.故如$|x|<1$,則級數爲收斂.如$|x|>1$,(參閱第2目之定理二)則級數爲發散.可見級數之收斂間隔爲$(-1,+1)$,而收斂半徑爲1.

當$x=\pm1$,第一級數爲發散,第三級數爲收斂,而第二級數於$x=1$爲發散,於$x=-1$爲收斂.

收斂間隔可由$-\infty$伸至$+\infty$,此時R變爲無窮.如級數(a)即其例也.又收斂間隔可縮爲零,如級數(b)即其例也.

4. 級數之殘餘(Remainder).

設有收斂級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots,$$

今以S_n表此級數前n項之和,S表級數之和,則當n增至無限大,$S-S_n$之極限爲零.

令$S-S_n=R_n$,則R_n謂之關於S_n之級數殘餘(或簡稱殘餘).

而 $$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

當n無限增大,R_n之極限爲零.換言之,任與一正數ε可得一正整數p與之對應,使$n>p$產生$|R_n|<\varepsilon$.

5. 整級數殘餘之定理.

設有整級數

(1) $$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots,$$

其殘餘爲 $R_n(x)=a_nx^n+a_{n+1}x^{n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$

若整級數(1)爲收斂,則當n無限增大,$R_n(x)$之極限爲零.換言之,若x在收斂間隔$(-R.\ +R)$內,則$R_n(x)$之極限爲零.

設x之值在間隔$(-\rho,\ +\rho)$內,就中ρ爲小於R之任一正數.則當$x=\rho$時,級數(1)爲絕對收斂.茲以A_n表a_n之絕對值,即知級數

(2) $$A_0+A_1\rho+A_2\rho^2+\cdots\cdots+A_n\rho^n+\cdots\cdots$$

爲收斂之正級數.如以R_n'表此級數之殘餘,

則 $$R'_n=A_n\rho^n+A_{n+1}\rho^{n+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

因x在$(-\rho, +\rho)$間隔內,

故 $$|a_n x^n|<A_n\rho^n,$$

$$|a_{n+1}x^{n+1}|<A_{n+1}\rho^{n+1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

於是 $$|R_n(x)|<R_n'.$$

(2)既爲收斂之正級數,故任與一正數ε,可得一整數p與之對應,使$n>p$時,有$R_n'<\varepsilon$之關係.由此關係,即得

$$|R_n(x)|<\varepsilon,$$

而定理之證遂彰矣.

當x在間隔$(-\rho, +\rho)$內變更,如任與一正數ε,恆得一正整數p與之對應,使$n>p$產生$|R_n(x)|<\varepsilon$者,則級數名爲齊一收斂(Uniform Convergence).於此可見整級數在收斂間隔內爲齊一收斂.

6. 整級數之連續性(Continuity of Power Series).

設整級數

(1) $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

之收斂間隔爲$(-R, +R)$, x_0爲在此間隔內之值,則當

$x=x_0$時，此級數之和$f(x)$爲一連續函數.

蓋任與一正數ε，可得一正數α與之對應，使不等式$|h|<\alpha$產生不等式$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$.茲證之如下：

令 $\phi_n(x)$表級數(1)前n項之和，$R_n(x)$表其殘餘，

則 $f(x)=\phi_n(x)+R_n(x)$,

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\phi_n(x_0+h)-\phi_n(x_0)+R_n(x_0+h)-R_n(x_0),$$

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<|\phi_n(x_0+h)-\phi_n(x_0)|+|R_n(x_0+h)|+|R_n(x_0)|.$$

茲因$|x_0|<R$,故在$|x_0|$與R之間,可得一正數ρ使$|x_0+h|<\rho$，就中h表適當小之值.又因級數(1)在間隔$(-\rho,+\rho)$內爲齊一收斂,故無論x爲此間隔內之任何值,恆可選定n，使有

$$|R_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}, \qquad |R_n(x_0+h)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

更因多項式$\phi_n(x)$於$x=x_0$時爲連續,故任與一正數$\frac{\varepsilon}{3}$可得一正數α與之對應,使不等式$|h|<\alpha$產生不等式

$$|\phi_n(x_0+h)-\phi_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

而 $$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

故函數$f(x)$於$-R<x<+R$時爲連續.至$x=\pm R$時,如級數(1)仍爲收斂,則函數$f(x)$亦爲連續.其證明非本書所及.

III. 整級數之積分及引數

1. 整級數之積分(Integration of Power Series).

設x在間隔$(-R, +R)$內,整級數

(1) $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

爲收斂.將此級數逐項求其積分,且由0積至x,得

(2) $$\frac{a_0x}{1}+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\cdots\cdots,$$

若x在收斂間隔$(-R,+R)$內,則級數(2)爲收斂,而其和爲

$$\int_0^x f(x)dx.$$

蓋以$R_n(x)$表級數(1)之殘餘,

則 $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+R_n(x).$$

將上式兩邊由0積至x得

$$\int_0^x f(x)dx=a_0x+\frac{a_1x^2}{2}+\frac{a_2x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{a_nx^{n+1}}{n+1}+\int_0^x R_n(x)dx.$$

用S_n表級數(2)前n項之和,則此式可書爲

$$\int_0^x f(x)\,dx-S_n=\int_0^x R_n(x)\,dx.$$

因x在間隔$(-R, +R)$內,故可得一正數ρ合於$|x|<\rho<R$.由是當x在間隔$(-\rho, +\rho)$內變更,任與一正數ε,可得一

整數p與之對應,使$n>p$產生

$$|R_n(x)|<\varepsilon.$$

遂得
$$\left|\int_0^x R_n(x)\,dx\right|<\left|\int_0^x \varepsilon\,dx\right|,$$

即有
$$\left|\int_0^x R_n(x)\,dx\right|<\left|\varepsilon x\right|,$$

$$\left|\int_0^x f(x)\,dx-S_n\right|<\left|\varepsilon x\right|.$$

吾人可選定ε,使εx小於任何值.故當n無限增大,S_n之極限為$\int_0^x f(x)\,dx$.

依第II節第6目,$\int_0^x f(x)\,dx$連續於收斂間隔$(-\rho,+\rho)$內.

2. 整級數引數之定理.

當x在間隔$(-R,+R)$內,設級數

(1) $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

為收斂,將級數(1)逐項求其引數,得

(3) $$a_1+2a_2x+\cdots\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

若x在收斂間隔內,則(3)式為斂級數,其和為$f'(x)$.

蓋因$|x|<R$,故可得一正數ρ合於$|x|<\rho<R$之關係.

又因 $$n a_n x^{n-1} = a_n \rho^n \frac{n}{\rho}\left(\frac{x}{\rho}\right)^{n-1},$$

故令 A_n 及 X 依次表 a_n 及 x 之絕對值,

則得 $$n A_n X^{n-1} = A_n \rho^n \frac{n}{\rho}\left(\frac{X}{\rho}\right)^{n-1}.$$

更因級數(1)當 x 在間隔 $(-R, +R)$ 內爲收斂,故以 $A_n \rho^n$ 爲公項之級數亦收斂於此間隔內. 由是無論 n 爲何值, $A_n \rho^n$ 常小於一定值 M, 卽有

$$n A_n X^{n-1} < \frac{M}{\rho} n \left(\frac{X}{\rho}\right)^{n-1}$$

可見級數(3)各項之絕對值必小於級數

$$\frac{M}{\rho} + \frac{M}{\rho} 2 \frac{X}{\rho} + \frac{M}{\rho}\cdot 3\left(\frac{X}{\rho}\right)^2 + \cdots\cdots + \frac{M}{\rho}\cdot n\left(\frac{X}{\rho}\right)^{n-1} + \cdots\cdots$$

之相應項. 惟上列級數之第 n 項與其前項之比爲 $\frac{n}{n-1}\frac{X}{\rho}$, 當 n 無限增大, 此比值之極限爲 $\frac{X}{\rho} < 1$, 故上列級數爲收斂. 而級數(3)亦然.

令 $\phi(x)$ 表級數(3)之和. 由前目之理論得

$$\int_0^x \phi(x)\, dx = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n + \cdots\cdots$$

比較級數(1), 卽知

$$\int_0^x \phi(x)\, dx = f(x) - a_0,$$

於是 $$\phi(x)=f(x).$$

3. 整級數之第 n 引數.

由前目已知整級數

(1) $$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots$$

於 $-R<x<+R$ 時有引數 $f'(x)$, 而 $f'(x)$ 等於級數(1)各項引數之和,此引數為

(2) $$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\cdots.$$

依同理, $f'(x)$ 亦收斂於間隔 $(-R,+R)$ 內. 故 $f'(x)$ 於 $-R<x<+R$ 時有引數

$$f''(x)=2a_2+2\cdot3a_3x+\cdots\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots\cdots$$

即 $f(x)$ 有第二引數. 如此類推,乃知 $f(x)$ 之第 n 引數

(3) $$f^{(n)}(x)=1\cdot2\cdot3\cdots n\,a_n+2\cdot3\cdot4\cdots n(n+1)a_{n+1}x+\cdots\cdots$$

亦收斂於此間隔內, 且當 $-R<x<+R$ 時, $f^{(n)}(x)$ 為連續函數.

令 $x=0$ 代入(3)式得

$$a_0=f(o),\ a_1=f'(o),\ a_2=\frac{f''(o)}{2!},\ \cdots\cdots\ a_n=\frac{f^{(n)}(o)}{n!}.$$

故(1)式可書為

$$f(x)=f(o)+x\,f'(o)+\frac{x^2}{2!}f''(o)+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(o)+\cdots\cdots$$

可見函數 $f(x)$ 之展式與 Maclaurin 公式無異. 故任一函

數之展成整級數不許有兩種展式.

IV. 應用

1. 對數函數之展開.

如 x 在間隔 $(-1, +1)$ 內,則幾何級數

$$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-1}+\cdots\cdots$$

爲收斂,其和爲 $\frac{1}{1-x}$.

故
$$\frac{1}{1-x}=1+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-1}+\cdots\cdots$$

將上式兩邊由 0 積至 x,得

$$\int_0^x\frac{dx}{1-x}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots,$$

即 (1)
$$-\log(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots.$$

同樣如 x 在間隔 $(-1, +1)$ 內,則有

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots$$

將上式各邊由 0 積至 x,得

(2)
$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots\cdots$$

(1), (2) 兩式之兩邊相加,得

(3) $$\log\frac{1+x}{1-x}=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\right].$$

當 x 在間隔 $(-1, +1)$ 內,則展式(1), (2), (3) 能成立.

當 $x=1$ 時,級數(2)爲收斂.此級數之和爲 $\log 2$ (參閱第II節第6目).

而 $$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots\cdots$$

任意正整數之自然對數(Natural Logarithm 卽以 e 爲底之對數),可由(3)式求之.蓋設 n 表正整數,而令 $\frac{1+x}{1-x}=\frac{n+1}{n}$,則得 $x=\frac{1}{2n+1}$,因 x 之值在 0 與 1 之間,故以之代入(3)式,得

$$\log\frac{n+1}{n}=2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\cdots\right],$$

卽 $$\log(n+1)=\log n+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right].$$

由此式可陸續求得各整數之自然對數.

蓋令 $n=1$,

則 $$\log 2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}+\cdots\cdots\right]$$

$$=0.693147\cdots\cdots$$

令 $n=2$,

則 $$\log 3=\log 2+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}+\cdots\cdots\right]$$

$$=1.098612\cdots\cdots$$

令 $$n=3,$$

則 $$\log 4=2\log 2.$$

令 $$n=4,$$

$$\log 5=2\log 2+2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3\cdot 9^3}+\frac{1}{5\cdot 9^5}+\cdots\cdots\right]$$

$=1.609438\cdots\cdots.$

餘類推.

又因 $\log 10=\log 2+\log 5=2.302585$, 故令 $M=\frac{1}{\log 10}$ $=0.434294$

卽有 $$\log_{10} n=\frac{\log n}{\log 10}=M\log n$$

而n之普通對數(Common Logarithm 卽以10爲底之對數)可得矣.

2. Arctan x 之展開.

若x之值在間隔$(-1,+1)$內,則級數

$$1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots\cdots$$

爲收斂,其和爲$\frac{1}{1+x^2}$.

故 $$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots\cdots$$

將上式兩邊由0積至x,且計及$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$,並選定$\arctan x$之值在$-\frac{\pi}{2}$與$+\frac{\pi}{2}$之間者,則得

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots\cdots.$$

因$x=1$時,上式右邊仍爲收斂之級數,故有

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \cdots\cdots.$$

3. 指數函數之展開.

由整級數之性質更可證明級數

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots$$

之和爲e^x.

蓋因無論x爲何值,此級數恆爲收斂.茲以y表其和,則有

$$y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots\cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\cdots.$$

而y爲x之連續函數,且有引數

$$y' = 1 + \frac{x}{1} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\cdots.$$

可見 $$y' = y,$$

卽 $$\frac{y'}{y} = 1.$$

積之, $\log y = x + c$ (就中 c 爲常數),

故　$y = e^{x+c}$.

當　$x = 0$, 則 $y = 1$, 故 $c = 0$.

遂得　$y = e^x$.

a^x 之展式可由 e^x 之展式得之. 蓋因 $a = e^{\log a}$, 而 $a^x = e^{x \log a}$

故　$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{x^2 (\log a)^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^n (\log a)^n}{n!} + \cdots\cdots.$$

4. <u>二項級數</u> (Binomial Series).

設 m 表常數或爲整數或爲分數, 則級數

$$y = 1 + \frac{m\,x}{1} + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots\cdots + \frac{m(m-1)\cdots\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots\cdots$$

名爲二項級數.

此級數之第 $n+1$ 項與其前項之比爲 $\frac{m-n+1}{n} x$, 故當 n 無限增大時, 如 $|x| < 1$ 則 $\left|\frac{m-n+1}{n} x\right|$ 之極限小於 1. 卽當 x 在間隔 $(-1, +1)$ 內, 二項級數爲收斂.

又當 $-1 < x < +1$ 時, y 爲 x 之連續函數, 且有引數

$$y' = m\left[1 + \frac{m-1}{1} x + \frac{(m-1)(m-2)}{2!} x^2 + \cdots\cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)\cdots\cdots(m-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \cdots\cdots \right].$$

各邊乘以$\frac{1+x}{m}$得

(1) $$\frac{y'(1+x)}{m}=(1+x)\left[1+\frac{m-1}{1}x+\frac{(m-1)(m-2)}{2!}x^2+\cdots\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+\cdots\cdots\right].$$

上式x^n之系數爲

$$\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n)}{n!}+\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{(n-1)!},$$

即 $$\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}.$$

故(1)式之右邊等於

$$1+\frac{mx}{1}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

遂得 $$\frac{(1+x)y'}{m}=y.$$

即 $$\frac{y'}{y}=\frac{m}{1+x}.$$

兩邊求其積分得$\log y=m\log(1+x)+\log c$,就中c爲常數.

故 $$y=c(1+x)^m.$$

當 $x=0$,則$y=1$.故$c=1$,

而 $$(1+x)^m=1+\frac{mx}{1}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots\cdots.$$

此式以x在間隔$(-1,+1)$內爲其成立之條件.

5. $\arcsin x$之展開.

設x之值在間隔$(-1,+1)$內,則由二項級數,即得$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$之展式.蓋可以$-\frac{1}{2}$, $-x^2$依次易二項級數之m, x故也.依此得

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\cdots\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5,\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6,\cdots\cdots\cdots\cdots2n}x^{2n}+\cdots\cdots$$

兩邊由0積至x並選定$\arcsin x$之值在$-\frac{\pi}{2}$與$+\frac{\pi}{2}$之間者,則得

$$\arcsin x=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots\cdots\cdots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\cdots\cdots.$$

第五章之習題

(1) 試以$(x-1)$表示$\log x$.

(2) 試以x表示$\sin(a+x)$.

(3) 將$\mathrm{Ch}\,x$及$\mathrm{Sh}\,x$展爲整級數,并將所得之結果推出$\mathrm{Th}\,x$之展式之最初三項.

求下列各函數展式之最初四項:

(4) $f(x)=\frac{x}{\sin x}$.　　(5) $f(x)=\frac{x}{\mathrm{Sh}\,x}$.

(6) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$.

試將下列各函數展爲級數：

(7) $y=\dfrac{\log(1+x)}{1+x}$.

(8) $y=\dfrac{1+x}{1-x^3}$ $[|x|<1]$.

(9) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ 與 $z=(\arcsin x)^2$.

(10) $y=\dfrac{\log(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$ 與 $z=[\log(x+\sqrt{1+x^2})]^2$.

(11) $y=e^{h\cos x}\cos(h\sin x)$ 與 $z=e^{h\cos x}\sin(h\sin x)$.

(12) $y=e^{x\operatorname{Ch}a}\operatorname{Ch}(x\operatorname{Sh}a)$ 與 $z=e^{x\operatorname{Ch}a}\operatorname{Sh}(x\operatorname{Sh}a)$.

(13) $\displaystyle\int_0^x\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$

(14) $\displaystyle\int_0^x\frac{\sin x\,dx}{x}$.

(15) 試證

$$\arctan\frac{1-x}{1+x}=\frac{\pi}{4}-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,$$

就中 $\arctan\frac{1-x}{1+x}$ 之值係規定在間隔 $\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)$ 內者.

(16) 試證 $$\int_0^1\frac{1-x^m}{1-x}dx=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}$$

[就中 m 爲正整數 $|x|<1$].

(17) 試證

$$\log\frac{\sin x}{x}=\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)^2$$
$$+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)^3-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots\right)^n+\cdots.$$

(18) 試證

$$f\left(\frac{x}{1+x}\right)=f(x)-\frac{x^2}{1+x}f'(x)+\cdots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(1+x)^n}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(1+x)^{n+1}}\frac{f^{(n+1)}\left[\frac{x+\theta x^2}{1+x}\right]}{(n+1)!}.$$

(19) 求 $\int_0^1\frac{\log(1+x)}{x}$.

求下列各函數之主要無窮小:

(20) $y=(x)^{\frac{1}{3}}-(\sin x)^{\frac{1}{3}}$.

(21) $y=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\operatorname{Sh} x}$.

(22) 試證方程式 $x^3+px+q=0$ 有重根之條件為 $4p^3+27q^2=0$.

(23) 求方程式 $x^4+px^2+qx+r=0$ 有三重根之條件.

試藉等根之理論,以解下列方程式:

(24) $x^5-15x^3+10x^2+60x-72=0$.

(25) $x^5-3x^4-5x^3+13x^2+24x+10=0$.

(26) 本書已計算 log 2, log 3 及 log 5 之值, 試推出 log 540 之值, 其錯誤以小於 $\frac{1}{1000}$ 為度.

第六章

未定形式

引言

設函數$F(x)$於$x=a$時無意義,惟當x趨近於a, $F(x)$以A為其極限,則謂$x=a$時,函數$F(x)$之值為A.如x趨近於a時函數之形式為$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0或1^∞,而以A為極限,即其例也.

此種形式名為未定形式(Indeterminate Form),就中1代表趨近於1之數,0代表趨近於0之數.本章斷定上列形式之值.

I. Hospital 法則及其應用

1　Hospital 法則.

當$x=a$時,設分數$\frac{f(x)}{\phi(x)}$之分子分母均為零或均為無窮,且x趨近於a時,比值$\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$之極限為A,則A即為分數$\frac{f(x)}{\phi(x)}$於$x=a$時之極限.

未定形式$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$之極限，可藉此法則求之．茲分別明之如下：

形式一——$\frac{0}{0}$．

設$f(a)=\phi'(a)=0$，且函數$f(x)$，$\phi(x)$在含a之間隔內均有引數．則依第三章第XI節第5目，

得
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{\phi(a+h)-\phi(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\phi'(a+\theta h)},\qquad (0<\theta<1).$$

因 $f(a)$，$\phi(a)$均為零，

故
$$\frac{f(a+h)}{\phi(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{\phi'(a+\theta h)}.$$

當h趨近於零，上式右邊之極限為A(依Hospital法則之假設)，故上式左邊之極限亦為A，是即$\frac{f(x)}{\phi(x)}$於$x=a$時之極限為A也．

由此觀之，欲求$\frac{f(x)}{\phi(x)}$於$x=a$時之極限，求$\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$於$x=a$時之極限足矣．

若$f'(a)$，$\phi'(a)$為異於零之有限值，則$\frac{f(a)}{\phi(a)}$之極限不為零．若$f'(x)=0$，$\phi'(a)\neq 0$，則$\frac{f(a)}{\phi(a)}$之極限為零．若$f'(a)\neq 0$，$\phi'(a)=0$，則$\frac{f(a)}{\phi(a)}$為無窮．惟當$f'(a)=\phi'(a)=0$，則$\frac{f'(a)}{\phi'(a)}$仍呈未定形式$\frac{0}{0}$．根據前理，可進求$\frac{f''(a)}{\phi''(a)}$之值．若$f''(a)$，

$\phi''(a)$ 仍均為零,再求$\dfrac{f'''(a)}{\phi'''(a)}$之值可矣.餘類推.

形式二——$\dfrac{\infty}{\infty}$.

設於$x=a$時,函數$f(x)$,$\phi(x)$均為無窮,而$\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$之極限為l.茲證當$x=a$,$\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$之極限亦為l.

下述證文中,設$x<a$.而$x>a$之情形,可依同理證明之.

蓋因於$x=a$時$\dfrac{f'(x)}{\phi'(x)}$之極限為l,故任與一正數ε必有小於a之數α與之對應,當$\alpha<x<a$,有下不等式關係

(1) $$\left|\frac{f'(x)}{\phi'(x)}-l\right|<\varepsilon.$$

且x在α與a之間時,更有

(2) $$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\phi(x)-\phi(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)},$$

就中ξ介於α與a之間.計及(1)式,

得 $$\left|\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}-l\right|<\varepsilon,$$

或 $$\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}=l+\varepsilon',\qquad (|\varepsilon'|<\varepsilon).$$

(2) 式又可書為

(3)
$$\frac{f(x)}{\phi(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{\phi(a)}{\phi(x)}}=\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)}.$$

當 $x=a$ 時, $f(x)$, $\phi(x)$ 均為無窮, 故 $\dfrac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{\phi(a)}{\phi(x)}}$ 之極限為 1. 換言之,任與一正數 ε, 則在間隔 (α, a) 內, 必有一數 β 與之對應, 當 $\beta<x<a$, 有下式關係

$$\left|\frac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{\phi(a)}{\phi(x)}}-1\right|<\varepsilon,$$

或
$$\frac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{\phi(a)}{\phi(x)}}=1+\varepsilon'', \qquad (|\varepsilon''|<\varepsilon).$$

由是(3)式化為

$$\frac{f(x)}{\phi(x)}(1+\varepsilon')=l+\varepsilon',$$

即
$$\frac{f(x)}{\phi(x)}=\frac{l+\varepsilon'}{1+\varepsilon''}$$

而
$$\frac{f(x)}{\phi(x)}-l=\frac{l+\varepsilon'}{1+\varepsilon''}-l=\frac{\varepsilon'-l\,\varepsilon''}{1+\varepsilon''},$$

故
$$\left|\frac{f(x)}{\phi(x)}-l\right|<\frac{\varepsilon\,(l'+1)}{1-\varepsilon},$$

就中l'表$|l|$之絕對值.從此可定ϵ之值,俾不等式之右邊,小於任意之正數.可見$x=a$時,$\frac{f(x)}{\phi(x)}$之極限亦爲l.

如當$x=a$時$\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$爲無窮,則$\frac{f(x)}{\phi(x)}$亦爲無窮,其證法與前略同,茲不贅.

依此,欲求$\frac{f(x)}{\phi(x)}$於$x=a$時之極限,求$\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$於$x=a$時之極限可矣.此法與前段所述之法無異.

若$f'(x)$,$\phi'(x)$於$x=a$時,又均爲無窮,$\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$仍呈未定形式$\frac{\infty}{\infty}$,則可進求$\frac{f''(x)}{\phi''(a)}$之值,即得$\frac{f(x)}{\phi(x)}$於$x=a$時之值.餘類推.

例一 求於$x=0$時$y=\frac{\log\cos px}{\log\cos qx}$之值.

當$x=0$,此函數呈未定形式$\frac{0}{0}$.茲求其分子分母引數比值,

得
$$\frac{p\tan px}{q\tan qx}.$$

當$x=0$,此比值又呈未定形式$\frac{0}{0}$,故又求分子分母之第二引數比值,

得
$$\frac{p^2/\cos^2 px}{q^2/\cos^2 qx}.$$

當 $x=0$,此比值之極限爲 $\frac{p^2}{q^2}$,卽 $x=0$ 時 y 之值也.此結果可以他法得之.因當 x 趨近於零時,函數 $\tan px$, $\tan qx$ 均爲無窮小,故若以 px, qx 替易之,將見 $\frac{p\tan px}{q\tan qx}$ 之極限亦爲 $\frac{p^2}{q^2}$.

2. $x=\infty$ 時之情形.

設分數 $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ 於 $x=\infty$ 時,呈未定形式 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$,前述法則,仍能適用.蓋可令 $x=\frac{1}{t}$,將原分數化爲 $\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\phi\left(\frac{1}{t}\right)}$,則此分數於 $t=0$ 時,呈未定形式 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 矣.求分子分母對 t 之引數之比值,

得
$$\frac{-\frac{1}{t^2}f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2}\phi'\left(\frac{1}{t}\right)}=\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\phi'\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

當 $t=0$,此比值若以 A 爲極限,則 A 卽 $\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\phi\left(\frac{1}{t}\right)}$ 於 $t=0$ 時之極限.換言之,如 $\frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ 於 $x=\infty$ 時,以 A 爲極限,則 A 卽爲

$\frac{f(x)}{\phi(x)}$於$x=\infty$時之極限也.是故求$\frac{f(x)}{\phi(x)}$於$x=\infty$時之值,直接用Hospital法則可矣.

例——求$x=\infty$時$y=\frac{x}{\log x}$之值.

當$x=\infty$,函數呈未定形式$\frac{\infty}{\infty}$.求引數之比值,得$\frac{1}{\frac{1}{x}}=x$.當$x=\infty$,此比值爲無窮,即當$x=\infty$,y之值爲無窮也.

3. 未定形式$0\cdot\infty$.

已與函數$f(x)$,$\phi(x)$.當$x=a$時,設$f(x)=0$,而$\phi(x)$爲無窮,則兩函數之積呈未定形式$0\cdot\infty$.欲求此未定形式於$x=a$時之值,可依前述法則求之.蓋因

$$f(x)\cdot\phi(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{\phi(x)}}\text{或}f(x)\cdot\phi(x)=\frac{\phi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

於$x=a$時,呈未定形式$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$,與前所述者無以異也.

4. 未定形式$\infty-\infty$.

設有函數$f(x)-\phi(x)$,當$x=a$時,$f(x)$,$\phi(x)$均爲正無窮,則函數呈未定形式$\infty-\infty$.若視$\phi(x)$爲函數之一因子,

則
$$f(x)-\phi(x)=\phi(x)\left[\frac{f(x)}{\phi(x)}-1\right],$$

就中$\frac{f(x)}{\phi(x)}$於$x=a$時,呈未定形式$\frac{\infty}{\infty}$.今求$\frac{f(x)}{\phi(x)}$於$x=a$時之值,此值以λ記之.若λ異於1,則函數於$x=a$時之值爲無窮.若$\lambda=1$,則函數於$x=a$時,又呈未定形式$\infty\cdot 0$可依第3目求之.

例—— 求$x=\infty$時$y=x-\log x$之值.

因
$$x-\log x=\log x\left(\frac{x}{\log x}-1\right),$$
而$\frac{x}{\log x}$於$x=\infty$時之值爲無窮(見第2目之例).故$x=\infty$時,y之值爲無窮.

II. 展式之應用

1. 殘餘之變形.

設函數$f(x)$在間隔(o, x)內,具有各引數.應用Maclaurin公式,

得
$$f(x)=f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(o)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x),$$
就中n爲任意選定之整數,θ介於0與1之間.今以λ表示$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)$,則上式化爲
$$f(x)=f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(o)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(o)+\lambda x^{n+1}$$

n既選定後,則λ爲x之函數,其値爲有限.而殘餘R_n可書爲λx^{n+1}.例如

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\lambda x^3,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\lambda_1 x^5,$$

$$(1+x)^m=1+\frac{mx}{1}+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\lambda_2 x^4,$$

就中$\lambda, \lambda_1, \lambda_2$表$x$之函數,其値爲有限者.

2. 應用例題.

求 $y=\dfrac{x\cos x-\sin x}{e^x-e^{-x}-2x}$於$x=0$時之値.

此式於$x=0$時,呈未定形式$\dfrac{0}{0}$.但因

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\lambda x^4,$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\mu x^5,$$

$$e^x\quad=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\lambda' x^4.$$

$$e^{-x}\quad=1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\mu' x^4,$$

當$x=0$, $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$皆爲有限之値,故將$\cos x$, $\sin x$之展式代入y之分子,得

$$x\left(1-\frac{x^2}{2}+\lambda x^4\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+\mu x^5\right)=-\frac{x^3}{3}+\alpha x^5.$$

就中$\alpha=\lambda-\mu$. 又將e^x, e^{-x}之展式代入y之分母，得

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\lambda' x^4-\left(1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\mu' x^4\right)-2x=\frac{x^3}{3}+\alpha' x^4,$$

就中$\alpha'=\lambda'-\mu'$. 由是

$$y=\frac{-\dfrac{x^3}{3}+\alpha x^5}{\dfrac{x^3}{3}+\alpha' x^4}=\frac{-1+3\alpha x^2}{1+3\alpha' x}$$

故當$x=0$, y之值為-1.

若以 Hospital 法則求之，則須求第三引數之比值. 第一，第二，第三引數之比值依次為

$$\frac{-x\sin x}{e^x+e^{-x}-2},\quad \frac{-x\cos x-\sin x}{e^x-e^{-x}},\quad \frac{-2\cos x+x\sin x}{e^x+e^{-x}},$$

當$x=0$時，第一，第二引數比值仍呈未定形式$\frac{0}{0}$，而第三引數比值之極限則為-1，與用展式求得之結果相同.

8. $x=a\neq 0$時之情形.

前目所述，係$x=0$時之情形. 若x為異於零之有限值，則可令$x=a+t$，將x之函數，化為t之函數. 乃依前目方法，而求$t=0$時t之函數之極限足矣. 茲示一例如下：

例——求$x=e$時，$y=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\log x-1}$之值.

此式右邊於$x=e$時，呈未定形式$\dfrac{0}{0}$，乃令$x=e+t$，則

$$\sqrt{x}=\sqrt{e+t}=\sqrt{e}\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\left[1+\frac{1}{2}\,\frac{t}{e}+\lambda\,t^2\right],$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{e}=\sqrt{e}\left[\frac{t}{2e}+\lambda\,t^2\right],$$

$$\log x=\log(e+t)=\log\left\{e\left(1+\frac{t}{e}\right)\right\}=\log e+\log\left(1+\frac{t}{e}\right)$$

$$=1+\frac{t}{e}+\mu\,t^2.$$

由是原式化為

$$y=\frac{\sqrt{e}\left(\dfrac{t}{2e}+\lambda\,t^2\right)}{\dfrac{t}{e}+\mu\,t^2}=\frac{\sqrt{e}\,(\frac{1}{2}+\lambda\,et)}{1+\mu\,et}.$$

當$t=0$時，y之極限為$\dfrac{\sqrt{e}}{2}$，即$x=e$時，y之極限為$\dfrac{\sqrt{e}}{2}$也.

4. $x=\infty$ 時之情形.

若$x=\infty$時，函數呈未定形式.欲求其極限，可令$x=\dfrac{1}{t}$，將x之函數化為t之函數，然後求t之函數於$t=0$時之極限.

例——求$x=+\infty$時，$y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}$之值.

此函數於$x=+\infty$時呈未定形式$\infty-\infty$. 令$x=\frac{1}{t}$, 則

$$u=\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}=\frac{1}{t}\left(1+(t+t^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{t}\left[1+\frac{1}{2}(t+t^2)-\frac{1}{8}(t+t^2)^2+\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{t}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}t+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$v=\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1}=\sqrt[3]{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+1}$$

$$=\frac{1}{t}\left(1+(t+t^2+t^3)\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{1}{t}\left[1+\frac{1}{3}(t+t^2+t^3)-\frac{1}{9}(t+t^2+t^3)^2+\cdots\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{t}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}t+\cdots\cdots,$$

故　$y=u-v=\frac{1}{6}+\frac{11}{72}t+\cdots\cdots.$

當$t=0$, 即得$y=\frac{1}{6}$.

5. e^x或$\log x$與$x^m (m>0)$增大之比較.

(1)　求$y=\frac{e^x}{x^m}$於$x=+\infty$時之值.

因e^x之引數常爲e^x, 當$x=+\infty$, e^x爲無窮. 惟x^m之第n引數(n表大於m之最小整數)於$x=+\infty$時爲零.可見

當 $x=+\infty$, $\frac{e^x}{x^m}$ 爲無窮大.

(2) 求 $y=\frac{\log x}{x^m}$ 於 $x=\infty$ 時之值.

令 $\log x=t$, 則 $x=e^t$. 當 $x=+\infty$ 時, $t=+\infty$.

而
$$\frac{\log x}{x^m}=\frac{t}{e^{mt}}=\frac{1}{m}\frac{mt}{e^{mt}}.$$

當 $t=+\infty$, $\frac{mt}{e^{mt}}$ 之極限爲零. 故 $\frac{\log x}{x^m}$ 於 $x=+\infty$ 時之極限爲零.

由上述之結果可立知 $x^m\log x$ 於 $x=0$ 時之極限爲零. 蓋令 $\log x=-t$, 則 $x=e^{-t}$. 當 $x=0$ 時, $t=+\infty$.

而
$$x^m\log x=-te^{-mt}=-\frac{1}{m}\frac{mt}{e^{mt}},$$

由前已知 $t=+\infty$ 時, $\frac{mt}{e^{mt}}$ 之極限爲零. 是即 $x=0$ 時, $x^m\log x$ 之極限爲零也.

III. 指數函數之未定形式

指數函數之未定形式有三, 0^0, ∞^0, 1^∞ 是也. 其極限之求法, 可取函數之對數, 而求對數之極限, 則函數之極限隨得之矣. 茲示各例如次:

1. 未定形式 0^0.

例 —— 求 $x=0$ 時, $y=x^x$ 之值.

取y之對數得$\log y=x\log x$. 由本章第II節第4目之(8)卽知$x\log x$於$x=0$時之極限爲零,故y之值爲1.

2. 未定形式∞^0.

例一——求$x=+\infty$時,$y=x^{\frac{1}{x}}$之值.

取y之對數得$\log y=\frac{1}{x}\log x$. 由本章第II節第4目之(2),卽知$x=+\infty$時,$\frac{\log x}{x}$之極限爲零.故y之值爲1.

3. 未定形式1^∞.

求此未定形式之極限,除依上述方法外,更可照下法求之.蓋此形式可書爲$(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$,就中$\alpha,\beta$之極限爲零,

而
$$(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}=e^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

(參閱第二章第V節第3目). 故若$\frac{\alpha}{\beta}\left(\text{未定形式}\frac{0}{0}\right)$之極限爲$\lambda$,則$(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$之值爲$e^\lambda$.

例一——求$x=0$時,$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$之值.

取y之對數,得$\log y=\frac{\log(1+x)}{x}$.此式右邊分子分母之引數之比值爲$\frac{1}{1+x}$,故$x=0$時,$\log y$之極限爲1,卽$y$之值爲$e$(此結果可由第三章第I節之第4目得出).

例二——求$x=1$時,$y=(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$之值.

令 $\alpha=1-x,\ \beta=\dfrac{1}{\tan\frac{\pi x}{2}}$，則原式化爲

$$y=(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}=\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}},$$

就中 $$\frac{\alpha}{\beta}=(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}=\frac{(1-x)\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}.$$

當 $x=1$，$\sin\frac{\pi x}{2}$ 之極限爲1. 而 $\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$ 又呈 $\dfrac{0}{0}$，乃求分子分母引數之比值，得 $\dfrac{-1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}$. 以1代 x，則知此比值爲 $\dfrac{2}{\pi}$. 故 y 於 $x=1$ 時之值爲 $e^{\frac{2}{\pi}}$.

[備考]——$x=1$ 時 $\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$ 之極限又可如下求之：

令 $x=1+t$,

則 $$\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\frac{-t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)}=\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}.$$

因 $x=1$ 時，$t=0$. 故可視 $\sin\frac{\pi t}{2}$ 爲無窮小，而以 $\frac{\pi t}{2}$ 易 $\sin\frac{\pi t}{2}$，立知 $\dfrac{t}{\frac{\pi t}{2}}$ 之極限爲 $\dfrac{2}{\pi}$，即 $x=1$ 時 $\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}$ 之極限爲 $\dfrac{2}{\pi}$.

第六章之習題

當 $x=1$ 時,求下列各函數之值.

(1) $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+7x-2-2\sqrt{2x-1}}{x^2-2x-1+2\sqrt{2x-x^2}}$.

(2) $f(x)=\dfrac{(2-x^3)^{\frac{1}{3}}-(5-4x^2)^{\frac{1}{2}}}{x(8x^2+8x^3)^{\frac{1}{4}}-(20x^4+12x^6)^{\frac{1}{5}}}$.

(3) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{1-x+\log x}$.

(4) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\log x}$.

(5) $f(x)=(1+\log x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$.

當 $x=0$ 時,求下列各函數之值.

(6) $f(x)=\dfrac{2\tan x-\tan 2x}{x(1-\cos 3x)}$.

(7) $f(x)=\dfrac{\tan\pi x-\pi x}{2x^3\tan\pi x}$.

(8) $f(x)=x^n\log x$.

(9) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x^2}+\dfrac{1}{x(e^{2x}-1)}$.

(10) $f(x)=x^{\sin x}$.

(11) $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

(12) $f(x)=(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$.

(13) $f(x)=\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

(14) $y=x^{x^n}$.

當 $x=+\infty$ 時，求下列各函數之值.

(15) $y=\dfrac{\sqrt{x^4+x^3}-x^2-\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8}}{\sqrt[3]{x^6+x^5}-x^2-\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{9}}$.

(16) $y=\left(\dfrac{x^3+2x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}-(x^2+x)^{\frac{1}{2}}$.

(17) $y=(x^3+a\,x^2+b\,x+c)^{\frac{1}{x}}$.

當 $x=\pm\infty$ 時，求下列各函數之值.

(18) $y=\left(\dfrac{x^3+2x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}-(x^2+2x)^{\frac{1}{2}}$.

(19) $y=2^x\sin\dfrac{a}{2^x}$.

(20) $y=x-x^2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

(21) $y=\left(\mathrm{Ch}\dfrac{a}{x}\right)^x$.

(22) $y=\dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$.

(23) $y=\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\tan x$.

(24) $y=(\sin x-1)\,e^{\tan x}$.

(25) $y=(\tan x)^{\cos x}$.

(26) $y=(\cos x)^{\cos x}$.

(27) $y=(1+\cos x)^{\tan x}$.

(28) 級數之公項爲 $u_n=e^{\frac{1}{n}}-1-\dfrac{1}{n}$，問此級數是否收斂.

(29) 在第I節第1目中，當 $x=a$ 時，如 $\dfrac{f'(a)}{\phi'(a)}$ 爲無窮，則 $\dfrac{f(x)}{\phi(x)}$ 亦爲無窮，試證明之.

第七章

函數之變值

I. 遞增遞減函數

遞增遞減函數之定義,已載於第一章第I節第10目,玆以下列二定理表明函數之遞增遞減條件.

定理一——設函數$f(x)$連續於間隔(a, b)內,並在此間隔內有引數,則$f'(x)$在間隔(a, b)內之號爲正,乃函數$f(x)$在間隔(a, b)內爲遞增之必須及充足條件也.

(a) 必須條件.設函數$f(x)$在間隔(a, b)內爲遞增,x_0, x_0+h爲此間隔內之任意兩值,依定義得

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>0.$$

當h趨近於零時,$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$之極限爲$f'(x_0)$,由是$f'(x_0)$之號爲正,或等於零.

(b) 充足條件.設$f'(x)$在間隔(a, b)內之號爲正,[除x等於特別值x'能令$f'(x)$爲零外],又設x_1, x_2爲間隔(a, b)內之任意值,則由中值定理,

得 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)$ [就中ξ為間隔(x_1, x_2)內之值].

因$f'(x)$在間隔(a, b)內之號恆為正,故$f'(\xi)$之號為正,即$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$之號為正.由是$f(x)$在間隔$(a, b)$內為遞增.

惟當間隔(x_1, x_2)內有一值x'能令$f'(x)=0$時,則可假定$x_1<x'<x_2$,且將此間隔分為兩間隔(x_1, x'), (x', x_2),因$f'(x)$在間隔(x_1, x')及(x', x_2)內之號為正,故由中值定理,

得
$$\frac{f(x')-f(x_1)}{x'-x_1}>0, \qquad \frac{f(x_2)-f(x')}{x_2-x'}>0.$$

於是
$$f(x_1)<f(x')<f(x_2),$$
$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0.$$

如$f'(x)$在間隔(x_1, x_2)內不祇為零一次,可依同理證明之.

定理二——設函數$f(x)$連續於間隔(a, b)內,並在此間隔內有引數,則$f'(x)$在間隔(a,b)內之號為負,乃函數$f(x)$在間隔(a, b)內為遞減之必須及充足條件也.

此定理之證法,與定理一相似,茲不多贅.

II. 極大極小

1. 定義.

設函數$f(x)$連續於間隔(a, b)內,x_0為(a, b)內之一

值，若能尋出一正數 a，使 h 在間隔 $(-a,+a)$ 內時，常有 $f(x_0+h)<f(x_0)$ 之關係者，則謂函數 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 爲極大 (Maximum). 如常有 $f(x_0+h)>f(x_0)$ 之關係，則謂函數 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 爲極小 (Minimum).

2. 定理.

設函數 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 爲極大或極小，且 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 時有引數，則 $f'(x)$ 於 $x=x_0$ 時爲零.

假定 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 爲極大，則可得一正數 a，當正數 $h<a$，卽有

$$f(x_0-h)-f(x_0)<0,\ f(x_0+h)-f(x_0)<0,$$

故
$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}>0,\ \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}<0.$$

當 h 趨近於零時，上列不等式左邊之極限爲 $f'(x_0)$，但以其號相反，故 $f'(x_0)=0$.

若函數 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 爲極小，則可仿上法證明 $f'(x_0)=0$.

[注意]——本定理之逆不爲眞. 若 $f'(x)$ 於 $x=x_0$ 時爲零，則 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 時，未必爲極大或極小.

3. 極大極小之判斷.

設 x_0 爲 $f'(x)=0$ 之一根，今察 $f(x_0)$ 是否爲極大極小由極大極小之定義，卽得結果如下：

若能尋出一正數α，使$f(x)$於間隔$(x_0-\alpha, x_0)$內為遞增，於間隔$(x_0, x_0+\alpha)$內為遞減，則$f(x)$於$x=x_0$時為極大.

若能尋出一正數α，使$f(x)$於間隔$(x_0-\alpha, x_0)$內為遞減，於間隔$(x_0, x_0+\alpha)$為遞增，則$f(x)$於$x=x_0$時為極小.

故欲察$f(x_0)$是否為極大極小，可令ε表甚小之正數，而察$f'(x_0-\varepsilon)$與$f'(x_0+\varepsilon)$之號足矣.

如
$$\begin{cases} f'(x_0-\varepsilon)>0 \\ f'(x_0+\varepsilon)<0, \end{cases}$$
則$f(x)$於$x=x_0$時為極大.

如
$$\begin{cases} f'(x_0-\varepsilon)<0 \\ f'(x_0+\varepsilon)>0, \end{cases}$$
則$f(x)$於$x=x_0$時為極小.

如
$$\begin{cases} f'(x_0-\varepsilon)<0 \\ f'(x_0+\varepsilon)<0, \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} f'(x_0-\varepsilon)>0 \\ f'(x_0+\varepsilon)>0, \end{cases}$$
則$f(x)$於$x=x_0$時非極大亦非極小.

若函數$f'(x_0)$在間隔$(x_0-\alpha, x_0)$及$(x_0, x_0+\alpha)$內之號不能斷定，而$f(x)$在此間隔內有第$n+1$引數，

且　$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

則由Taylor公式得

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h), (0<\theta<1).$$

因 $f(x)$ 有第 $n+1$ 引數,故 $f^{(n)}(x)$ 於 $x=x_0$ 時爲連續. 又因 $f^{(n)}(x_0)$ 不爲零,故可尋出一正數 a,當 h 在間隔 $(-a,+a)$ 內,$f^{(n)}(x_0+\theta h)$ 之號與 $f^{(n)}(x_0)$ 之號同.

(1) 設 n 爲偶數,若 $f^{(n)}(x_0)$ 爲正,則函數於 $x=x_0$ 時爲極小. 若 $f^{(n)}(x_0)$ 爲負,則函數爲極大.

(2) 設 n 爲奇數,則當 h 在間隔內,$f(x_0+h)-f(x_0)$ 之號因 h 之號而變,故無極大極小.

4. 函數無引數時之情形.

前目所設爲函數 $f(x)$ 於 $x=x_0$ 時有引數,此函數極大極小之必須條件爲 $f'(x_0)=0$. 若 $x=x_0$ 時 $f(x)$ 無引數,則欲知 $f(x_0)$ 是否極大極小,可察 $f'({}_0x\pm\varepsilon)$ 之號(ε 代表甚小之正值).

例如函數 $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$ 於 $x=1$ 時無引數,但當 $x=1-\varepsilon$,$f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$ 之號爲負,當 $x=1+\varepsilon$,$f'(x)$ 之號爲正,故 $f(x)$ 於 $x=1$ 時爲極小

5. 應用問題.

問題一——工匠擬造壔形無蓋之盛水器,其底爲正方形,其容積定爲64立方尺,其所用之材料則旁面每方尺價值1元,底面每方尺價值2元. 茲欲成本最廉,問此器之底邊與高各若干.

(解) 令x爲所求之高度,l爲所求之底長,

則 $$l^2x=64.$$

故 $$l=\frac{8}{\sqrt{x}}.$$

而盛水器之成本爲

$$y=2l^2+4lx,$$

即 $$y=\frac{128}{x}+32\sqrt{x}.$$

其引數爲

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{128}{x^2}+\frac{16}{\sqrt{x}}.$$

欲x之值能令y爲極小(成本最廉),必須$\frac{dy}{dx}=0$,

即 $$\frac{128}{x^2}=\frac{16}{\sqrt{x}}.$$

$$x^{\frac{3}{2}}=8$$

故 $$x=4.$$

又當$x=4-\varepsilon$, $\frac{dy}{dx}<0$. 當$x=4+\varepsilon$, $\frac{dy}{dx}>0$ (ε表甚小之正值).由是$x=4$時,y爲極小.故此器之高爲4尺,而底邊之長亦爲4尺.

問題二——某汽船每小時所需之煤量與船速率之立方成比例,而水流之速率爲每小時a里.今使此船

逆流而上,且欲所需之煤量最小,問船每小時之速率若干.

(解) 設 $v=$ 所求之速率,

則 $kv^3=$ 每小時所需之煤量(就中 k 爲正常數),

又 $v-a=$ 船逆流每小時之速率.

故船行一里所需之煤量爲 $y=\dfrac{kv^3}{v-a}$.

此式表示 y 爲 v 之函數,其對於 v 之引數爲

$$\frac{dy}{dv}=\frac{kv^2(2v-3a)}{(v-a)^2}.$$

欲 v 之值能令 y 爲極小,必須 $\dfrac{dy}{dv}=0$,

即 $$kv^2(2v-3a)=0.$$

故 $$v=0 \text{ 或 } v=\frac{3a}{2}.$$

若察 $\dfrac{dy}{dv}$ 之號,易知 $v=0$ 時,y 不爲極小,而 $v=\dfrac{3a}{2}$ 時 y 爲極小.故所求之速率爲每小時 $\dfrac{3a}{2}$ 里.

III. 反曲點及漸近線

1. 反曲點 (Point of Inflection).

設函數 $f(x)$ 有各引數(或在某間隔內有各引數),茲察方程式 $y=f(x)$ 所代表之曲線.當 x 增變時,如 y' 爲正,

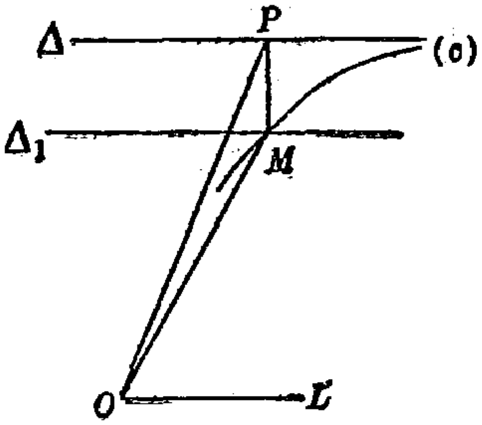
則y遞增.如y'爲負,則y遞減.若順次推之,卽知y''爲正,則y'遞增.y''爲負,則y'遞減.然y'爲曲線$y=f(x)$之切線角系數,角系數漸增,曲線依y軸之正向環抱.角系數漸減,曲線依y軸之負向環抱.在此兩種環抱之分界,曲線必有一點其橫量x能令y''爲零者,蓋以y''設爲連續函數故也.由此觀之,如曲線某點之橫量能令$y''=0$,而不能令$y'''=0$,則當x增變經過此點橫量之値時,y''變號而曲線環抱之向亦變.廣言之,如曲線某點之橫量能令$y''=y'''=\cdots\cdots y^{(2n)}=0$,而不能令$y^{(2n+1)}=0$,則當$x$增變經過此點橫量之値時,$y''$之號變.倘更能令$y^{(2n+1)}=0$,而不能令$y^{(2n+2)}=0$,則$y''$之號不變.當$x$經過某點之橫量時,如$y''$變號者,則該點名爲反曲點.

上文設$f(x)$有各引數.若當$x=x_0$,$f(x)$無引數時,則上述結果不能適用.惟當x增變經過x_0時,如$f''(x)$變號,則$[x_0,f(x_0)]$亦爲反曲點.玆取曲線$y=1+(x-2)^{\frac{1}{3}}$以爲例.當$x=2$時,$y'=\dfrac{1}{3}(x-2)^{-\frac{2}{3}}$爲無窮.故其時$y$無引數.但當$x$增變經過2時,$y''=-\dfrac{2}{9}(x-2)^{-\frac{5}{3}}$由正而變爲負.故(2,1)爲反曲點.

2. 漸近線(Asymptote).

設曲線(c)(圖29)有一無窮遠之枝.令MP表枝上

之一點 M 與定直線 Δ 之距離. 若 M 在枝上趨於無窮遠處, MP 趨近於零, 則謂 Δ 爲此無窮遠枝之漸近線.



(圖 29)

設 Δ 爲 (c) 之漸近線, 於包含曲線之平面上取一定點 O, 并聯結 OM 及 OP 兩線段. 若察三角形 OMP,

得
$$\frac{\sin \widehat{POM}}{\sin \widehat{OPM}}=\frac{MP}{OM},$$

即
$$\sin \widehat{POM}=\frac{MP}{OM}\sin \widehat{OPM}$$

當 M 在 (c) 上趨於無窮遠處時, MP 之極限爲零, OM 爲無窮, 而 $\sin \widehat{OPM}$ 爲有限之值, 故 $\sin \widehat{POM}$ 爲零, 即 OM 與 OP 相重也. 但 OP 之極限爲平行於 Δ 之直線 OL, 由是 OM 亦以 OL 爲極限, 此所謂<u>漸近方向</u> (Asymptotic Direction) 也.

令 M 之位標爲 (x,y). 如 x 爲無窮時, y 之極限爲常數 y_0, 則 $y=y_0$ 爲曲線之漸近線. 如 x 爲常數 x_0 時, y 爲無窮, 則 $x=x_0$ 爲曲線之漸近線. 如 x 及 y 同時爲無窮, 則應求 $\frac{y}{x}$ 之極限. 玆分三種情形而論之:

(其一) 如 $\frac{y}{x}$ 之值爲無窮,則漸近方向平行於 Oy 軸,而漸近線不見於平面上之有限距離處.此漸近方向名爲平行於 Oy 軸之抛物方向(Parabolic Direction).蓋以其與抛物線 $x^2=2py$ 之漸近方向相同也.

(其二) 如 $\frac{y}{x}$ 之極限爲零,則漸近方向平行於 Ox 軸,而漸近線不見於平面上之有限距離處.此漸近方向名爲平行於 Ox 軸之抛物方向.

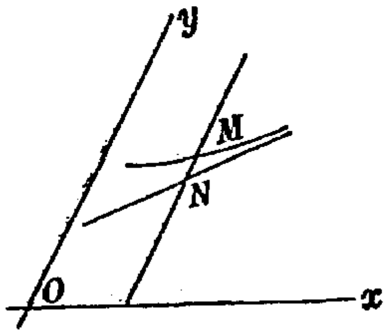
(其三) 如 $\frac{y}{x}$ 之極限爲異於零之常數 c,則漸近方向之角系數爲 c.玆取 O 爲原點,命 Δ_1 爲過 M 而平行於 OL 之直線,則 OL 之方程式爲 $y=cx$ 而 Δ_1 之方程式爲 $Y-y=c(X-x)$,

即
$$Y-cX-(y-cx)=0.$$
欲求 Δ_1 之極限,求 $y-cx$ 之極限足矣.

設 $y-cx$ 之極限爲 d,則 Δ_1 之極限爲漸近線 Δ,其方程式爲

$$Y=cX+d.$$

欲究曲線 (c) 對於漸近線之位置,可任作直線平行於 Oy (圖30).命 $X=x$ 爲其方程式,M, N 依次表其與曲線及漸近線之交點.



(圖 30)

更令y為M之縱量,Y為N之縱量,

則
$$Y=cx+d,$$
而
$$y-Y=y-cx-d.$$
當x趨近於無窮,$y-cx$之極限為d. 故上式右邊為無窮小.

如$y-cx-d$為正,則$y-Y$為正,而曲線在漸近線之上,如$y-cx-d$為負,則$y-Y$為負,而曲線在漸近線之下.

IV. 曲線繪畫法舉例

下列數曲線之位標軸均設為正交者:

1. 例一.

作曲線
$$y=\frac{\log_a x}{x}.$$

欲y為x之函數,必須x為正數. 當x為任何正數時,y為連續函數,其引數為

$$y'=\frac{\log_a e-\log_a x}{x^2}.$$

y'之號與$\log_a e-\log_a x$之號同. 如a大於1,則y'與$e-x$同號,如a小於1,則y與$x-e$同號. 故究y'之號,須視a之值大於1或小於1而定之. 玆分別論之於下:

(1)　$a>1$. 則y'在間隔$(0, e)$為正,在間隔$(e,+\infty)$為

負，故函數 y 在間隔 $(0,e)$ 內爲遞增，在間隔 $(e,+\infty)$ 內爲遞減．故當 $x=e$ 時，函數 y 爲極大．

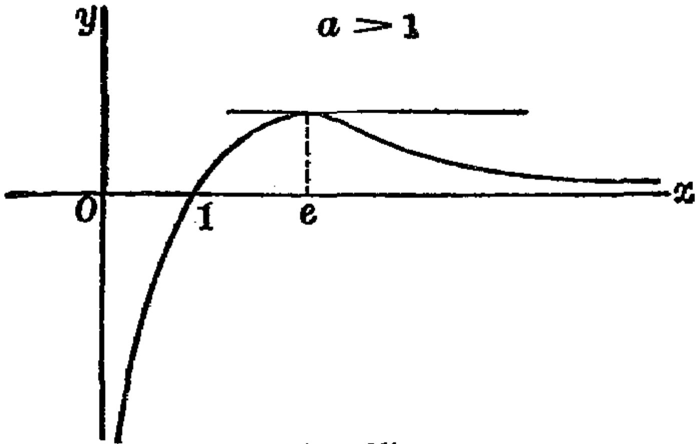
當 x 由正數趨近於零時，$\log_a x$ 之號爲負，由是 y 爲負數．當 $x=+\infty$ 時，函數 y 之値呈未定形式 $\frac{\infty}{\infty}$，依 Hospital 法則求得其値爲

$$\left(\frac{\frac{1}{x}\log_a e}{1}\right)_{x=\infty}=0.$$

茲將 y 之變值列表明之：

x	0		1		e		$+\infty$
y'			$+$		0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\log_a e}{e}$	$\searrow$	0

又當 $x=0$ 時，$y=-\infty$．當 $x=+\infty$ 時，$y=0$．故兩直線 $y=0$，$x=0$ 爲曲線之漸近線．而曲線之形狀如圖 31.



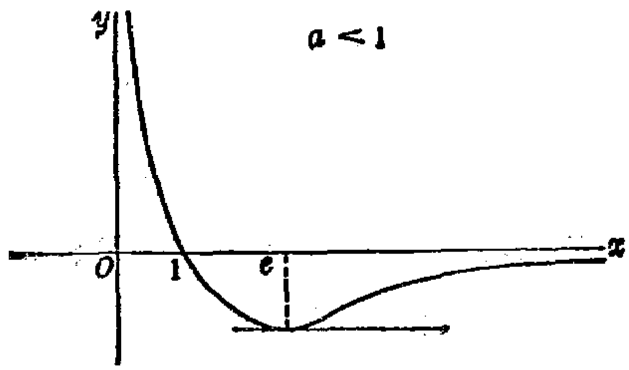
(圖 31)

(2)　$a<1$. 則y在間隔$(0, e)$內爲遞減，在間隔$(e, +\infty)$內爲遞增. 故當$x=e$時y爲極小.

茲將y之變值列表明之:

x	0		1		e		$+\infty$
y'			$-$		0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\dfrac{\log_a e}{e}$	$\nearrow$	0

而曲線之形狀如圖32.



(圖　32)

2　例二.

作曲線　$$y=\frac{x^3}{x^2+2x-3}$$

x之值可任變，由負無窮以至於正無窮. 除$x^2+2x-3=0$(卽$x=-3$及$x=1$)外，y爲x之連續函數. 當$x=-3$及$x=1$時，y爲無窮，故曲線之漸近線平行於y軸者有二，其方程式爲$x=-3$及$x=1$.

當x趨近於無窮,y亦趨近於無窮,而比值

$$\frac{y}{x}=\frac{x^3}{x^3+2x^2-3x}$$

之極限爲1,故漸近方向之角系數爲1.又以

$$y-x=\frac{x^3-(x^3+2x^2-3x)}{x^2+2x-3}$$

之極限爲-2,故曲線有漸近線,其方程式爲

$$Y=X-2.$$

欲知曲線對於漸近線之位置,可令$X=x$,而定$y-Y$之號.

因 $$y-Y=y-x+2=\frac{x^3}{x^2+2x-3}-x+2=\frac{7x-6}{x^2+2x-3},$$

故當x趨近於無窮,上式右邊之分母爲正無窮,而分子之號與x之號同,如x爲正無窮時,$y-Y$爲正無窮小,而曲線在漸近線之上,如x爲負無窮時,$y-Y$爲負無窮小,而曲線在漸近線之下.

又漸近線與曲線相交之點,其位標合於下列兩式

$$y=\frac{x^3}{x^2+2x-3},$$

$$y=x-2.$$

解之得 $$\begin{cases} x=\dfrac{6}{7}, \\ y=-\dfrac{8}{7}. \end{cases}$$

故在有限距離處漸近線與曲線相交一點其位標爲

$$x=\frac{6}{7},\quad y=-\frac{8}{7}.$$

求y之引數,

得
$$y'=\frac{x^2(x^2+4x-9)}{(x^2+2x-3)^2}.$$

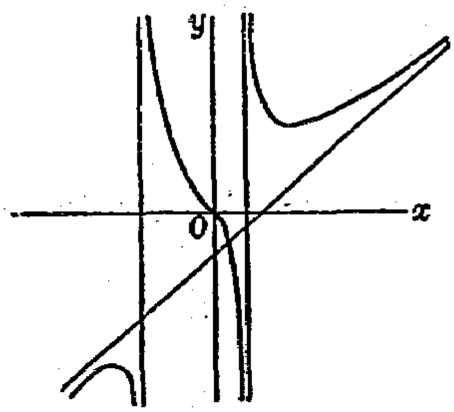
能令y'爲零之數值爲$x^2=0$與$x^2+4x-9=0$之根.解此兩式得$x=0$及$x=-2\pm\sqrt{13}$.茲列表以明函數y之變值如下:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{13}$		-3		0		1		$-2+\sqrt{13}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$+\infty$

今進而求曲線環抱之方向.求y'之引數,

得
$$y''=\frac{2x(7x^2-18x+27)}{(x^2+2x-3)^3}.$$

因$7x^2-18x+27=0$無實根,故欲y''爲零必須$x=0$.當x增變將至0時y''爲正,故曲線向上環抱.當x超過零時y''爲負,故曲線向下環抱.可見在有限距離處,曲線有一反曲點,其位標爲$x=0$, $y=0$.又



(圖 33)

當 $x^2+2x-3=0$ 時, y'' 爲無窮.惟當 x 由小於 -3 以至大於 -3, 及由小於 1 以至大於 1 時, y'' 均變號.故曲線上之點,其横量爲 $x=-3$, $x=1$ 者,亦爲曲線之反曲點.不過在無窮遠處耳.曲線之形狀如圖33所示.

3. 例三.

作曲線 $$x=\frac{t^3}{4t^2-1},\quad y=\frac{t^4}{4t^2-1}.$$

欲作曲線,可察 t 由 $-\infty$ 增至 $+\infty$ 時, x 及 y 之變值.除 $t=\pm 2$ 外, x 及 y 均爲連續函數.又以 t 易 $-t$, 則 y 不變,而 x 變號.故任與絕對值同而號異之兩值 t 及 $-t$, 有對稱於 oy 軸之兩點與之相應.於是可取 t 由 0 增變至 $+\infty$, 作曲線之半段,更依其對稱於 oy 軸以完成其全部.

求 x 及 y 之引數.

得 $$\frac{dx}{dt}=\frac{t^2(4t^2-3)}{(4t^2-1)^2},\qquad \frac{dy}{dt}=\frac{4t^3(2t^2-1)}{(4t^2-1)^2}.$$

除 $t=0$ 及 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{dx}{dt}$ 爲零外, $\frac{dx}{dt}$ 在間隔 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 外爲正,在間隔 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 內爲負.又當 $t=0$ 及 $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{dy}{dt}$ 爲零.而 $\frac{dy}{dt}$ 在間隔 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ 內爲正,在間隔 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

內爲負,於 $t>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 時爲正,於 $t<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 時爲負.

依上所論,得表如次.

t	0			$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
x	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$ 極小	$\nearrow$	$+\infty$
y	0 極大	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{4}$ 極小	$\nearrow$	$\frac{9}{32}$	$\nearrow$	$+\infty$

切線之角係數爲
$$\frac{dy}{dx}=\frac{4t(2t^2-1)}{4t^2-3}$$

而
$$\lim_{t \doteq 0}\frac{dy}{dx}=0.$$

故對應於 $t=0$ 及 $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 之點之切線平行於 ox 軸,而對應於 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 之點之切線平行於 oy 軸.

今進而求曲線之漸近線,當 $t=\frac{1}{2}$, x 及 y 同爲無窮,而 $\frac{y}{x}=t$ 之極限爲 $\frac{1}{2}$. 故漸近線之角係數爲 $\frac{1}{2}$.

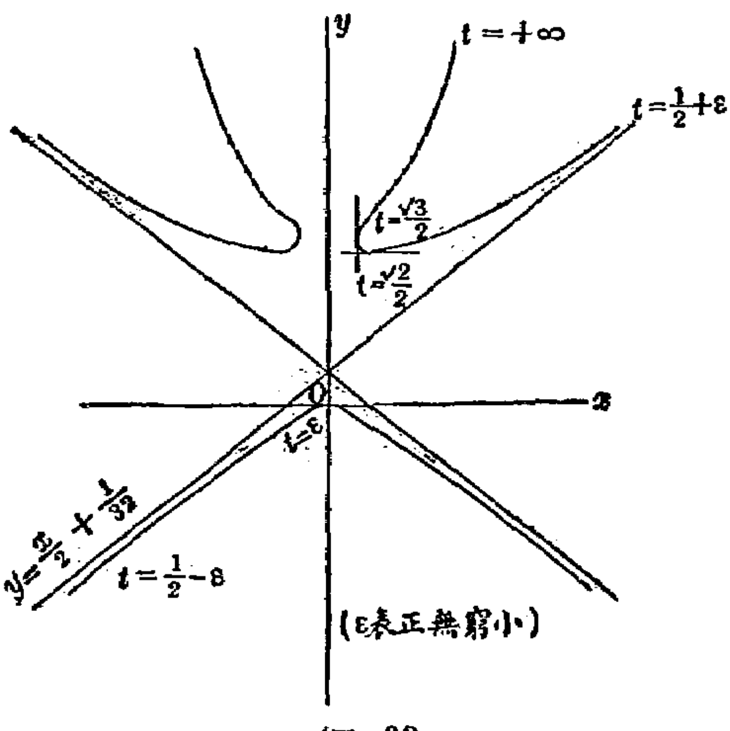
又
$$\lim_{t \doteq \frac{1}{2}}\left(y-\frac{x}{2}\right)=\frac{t^4-\frac{1}{2}t^3}{4t^2-1}=\frac{1}{32},$$

可見漸近線之方程式爲
$$Y=\frac{X}{2}+\frac{1}{32}.$$

欲知曲線對於漸近線之位置,應令$X=x$,而察t趨近於$\frac{1}{2}$時,$y-Y$之號.

因
$$y-Y=y-\frac{x}{2}-\frac{1}{32}=\frac{(2t-1)(8t^2+4t+1)}{2(2t+1)}.$$

且當t趨近於$\frac{1}{2}$,分數$\frac{8t^2+4t+1}{2(2t+1)}$之號常爲正,故$y-Y$之號與$2t-1$之號同.若$t$由小於$\frac{1}{2}$而趨近$\frac{1}{2}$,則$y-Y$之



(圖 34)

號爲負,故曲線在漸近線之下.若t由大於$\frac{1}{2}$而趨近$\frac{1}{2}$,則$y-Y$之號爲正,故曲線在漸近線之上.又當$t=+\infty$,

x及y同爲無窮,惟$\frac{y}{x}$亦爲無窮,此時曲線之漸近方向爲拋物方向.

綜上所述得曲線之形狀,如上圖34所示.

第七章之習題

求下列函數之極大極小:

(1) $y=10x^6-12x^5+15x^4-20x^3+20.$

(2) $y=\frac{e^x}{\sin(x-a)}.$　　(3) $y=\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2+x^2}.$

(4) 鐵匠有鐵108平方尺,擬造一正方形底無蓋之長方箱.今欲該箱容積最大,則其長高各若干.

(5) 某人買一矩形之田共540畝,一邊以河爲界,餘三邊圍以竹籬,問此田長闊各若干使所需之竹籬爲最少.

(6) 甲乙兩地相距15里,乙地爲運河所經之處,甲地距此運河9里,今欲從甲地使一信差以最短時間至乙地.設此人步行每小時4里,船行每小時6里,問此人應步行若干里.

(7) 一工匠擬造一圓柱形無蓋之鐵桶,其容積爲2000立方寸.底邊所用之鐵之價值2倍於旁邊所用者.茲欲成本最廉,問此鐵桶之高度若干.

(8) 有矩形之厚紙一片,長12寸,闊9寸,今將此厚紙之四角各截去相等之正方形,而摺成一開口之紙盒.茲欲使此紙盒之容積最大,問所截去之正方形之面積幾何.

(9) 設兩數之積爲常數,試求此兩數之和之最大值.

(10) 設一鐵道與甲埠距離爲10里,與乙埠距離爲8里.而甲乙

兩埠之距離爲15里.今欲在鐵道之旁建一車站,而使車站與甲乙兩埠距離之和爲最小,試定此車站之位置.

(11) 橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 內接一矩形,問此矩形最大之面積若干.

(12) 設以 R 爲半徑之球,內接一圓錐體,問此圓錐體最大之體積幾何.

(13) 設以 p 爲直角三角形之斜邊,求此三角形最大面積時,其兩腰之長度幾何.

試研究下列各函數之變值:

(14) $y=\sin x+\sin 2x.$　(15) $y=\cos x+\frac{1}{\sin x}.$　(16) $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

試繪畫下列曲線:

(17) $y=\frac{x}{x^2-5x+4}.$　(18) $y=\frac{x(x^2-9)}{x^2-1}.$

(19) $y=\sqrt[3]{x^3-3x+2}.$　(20) $y=\sqrt[3]{ax^2+bx^3}.$

(21) $y=e^{-\frac{1}{a^2}}.$　(22) $y=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$

(23) $x=\frac{t^2+1}{t},\ y=\frac{2t-1}{t^2}.$　(24) $x=\frac{4t^2+6}{2t^2-3},\ y=\frac{12t}{2t^2-3}.$

(25) 試定對數之底,使有一數與其對數相等者.並討論之.

第八章

多變數之函數

I. 極限,連續,偏引數

1. 定義.

設有變數ω,其值依數個自變數$x, y, z, \cdots\cdots$而變.而變數$x, y, z, \cdots\cdots$各能任意變更,彼此間無相互之關係.若當$x, y, z, \cdots\cdots$依次在間隔$I_x, I_y, I_z, \cdots\cdots$內變更,且任與一組$x, y, z, \cdots\cdots$之值,可得$\omega$之一值與之對應,則謂在間隔$I_x, I_y, I_z, \cdots\cdots$內,$\omega$為多變數$x, y, z, \cdots\cdots$之函數.常以$f(x, y, z, \cdots\cdots)$, $\phi(x, y, z, \cdots\cdots)$, $\psi(x, y, z, \cdots\cdots)$, $\cdots\cdots$表之.當$x=a$, $y=b$, $z=c, \cdots\cdots$,函數$f(x, y, z, \cdots\cdots)$之值則以$f(a, b, c, \cdots\cdots)$記之.

2. 極限及連續.

設在間隔$I_x, I_y, I_z, \cdots\cdots$內,$f(x, y, z, \cdots\cdots)$為$x, y, z, \cdots\cdots$之函數,則函數之極限與連續之定義如下:

(一) 如謂函數$f(x, y, z, \cdots\cdots)$於$x=x_0, y=y_0, z=z_0, \cdots\cdots$

時之極限為A,意即任與一正數ε,可得一正數a與之對應,當各變數$x, y, z,$………之增量$h, k, l,$………(設$x_0+h,$ $y_0+k, z_0+l,$………依次為在間隔$I_x, I_y, I_z,$………內之值)之絕對值小於a時,有下列不等式之關係

$$|f(x_0+h, y_0+k, z_0+l, \cdots\cdots)-A|<\varepsilon.$$

第一章第I節第4目關於極限之定理,讀者當能記憶.多變數之函數亦有相類之定理,證法仿前,茲不多贅.

(二) 如謂函數$f(x, y, z, \cdots\cdots)$於$x=x_0, x=y_0, z=z_0,$………時為連續,意即於$x=x_0, y=y_0, z=z_0,$………時函數之極限為$f(x_0, y_0, z_0, \cdots\cdots)$也.

多變數之多項式,恆為各變數之連續函數,此易知者;讀者證之.

3. 偏引數(Partial Derivative).

茲為簡便起見,特以含三自變數之函數言之.

設函數$\omega=f(x, y, z,)$為x, y, z之連續函數.若視y, z為常數,則$f(x, y, z)$祇為單變數x之連續函數.其對於x之引數常以$f'_x(x, y, z)$或ω'_x記之.同理$f'_y(x, y, z)$或ω'_y表函數對於y之引數(z與x不變),而$f'_z(x, y, z)$或ω'_z表函數對於z之引數(x與y不變).$f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)$

三者(或 ω'_{z},………),稱為函數 $f(x,y,z)$ 對於 x,y,z 之第一偏引數(First Partial Derivative).此種第一偏引數亦為 x,y,z 之函數,其對於 x,y,z 之引數,則以 $f''_{x^2}(x,y,z)$, $f''_{xy}(x,y,z)$, $f''_{xz}(x,y,z)$, $f''_{yx}(x,y,z)$, $f''_{y^2}(x,y,z)$, $f''_{yz}(x,y,z)$, $f''_{zx}(x,y,z)$, $f''_{zy}(x,y,z)$, $f''_{z^2}(x,y,z)$ 記之.且名為函數 $f(x,y,z)$ 之第二偏引數.至第三,第四,………偏引數之義均可照此推之.廣言之,多變數函數 $\omega=f(x,y,z\cdots\cdots)$ 之第 n 偏引數為 $f^{(n)}_{x^py^qz^r\cdots\cdots}(x,y,z\cdots\cdots)$,就中 $p,q,r,\cdots\cdots$ 均為正整數(或為零),而 $p+q+r+\cdots\cdots=n$.此偏引數更有 $f^{(n)}_{x^py^qz^r\cdots}$, $f_{x^py^qz^r\cdots}$, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\cdots}$,…種種記號.

4.關於偏引數之定理.

第 n 偏引數在某種條件下不因求引數次序之先後而異.茲分二步證之如下:

(一) 設函數 $f(x,y)$ 之第二偏引數 $f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yx}(x,y)$ 為連續,則 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$.

令
$$\phi(y)=f(x+h,y)-f(x,y),$$
$$\psi(x)=f(x,y+k)-f(x,y),$$

則
$$\phi(y+k)-\phi(y)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y),$$

$$\psi(x+h)-\psi(x)=f(x+h,y+k)-f(x+h,y),$$
$$-f(x,y+k)+f(x,y).$$

故 $\phi(y+k)-\phi(y)=\psi(x+h)-\psi(x)$

應用中值定理(參閱第三章第IX節第3目),得

(1) $$k\phi'(y+\theta k)=h\psi'(x+\theta_1 h),$$

就中θ,θ_1均介於0與1之間.

但 $$\phi'(y)=f'_y(x+h,y)-f'_y(x,y),$$
$$\psi'(x)=f'_x(x,y+k)-f'_x(x,y).$$

由是(1)式化爲

(2) $$k[f'_y(x+h,y+\theta k)-f'_y(x,y+\theta k)],$$
$$=h[f'_x(x+\theta_1 h,y+k)-f'_x(x+\theta_1 h,y)]$$

如視$y+\theta k$爲常數,則由中值定理,

得 $f'_y(x+h,y+\theta k)-f'_y(x,y+\theta k)=hf''_{yx}(x+\theta_2 h,y+\theta k)$,

$(0<\theta_2<1)$.若視$x+\theta_1 h$爲常數,

又得 $f'_x(x+\theta_1 h,y+k)-f'_x(x+\theta_1 h,y)=kf''_{xy}(x+\theta_1 h,y+\theta_3 k)$,

$(0<\theta_3<1)$.而(2)式化爲

$$khf''_{yx}(x+\theta_2 h,y+\theta k)=hkf''_{xy}(x+\theta_1 h,y+\theta_3 k).$$

即 $$f''_{yx}(x+\theta_2 h,y+\theta k)=f''_{xy}(x+\theta_1 h,y+\theta_3 k).$$

因 $f''_{yx}(x,y),f''_{xy}(x,y)$爲連續,故當$h,k$趨近於零時,上式左邊以$f''_{yx}(x,y)$爲極限,右邊以$f''_{xy}(x,y)$爲極限.

故　　$f''_{yx}(x,y)=f''_{xy}(x,y)$.

（二）設函數 $\omega=f(x,y,z)$ 有連續之第五偏引數 $f^{(\mathrm{v})}_{x^2y^2z}$, ……, $f^{(\mathrm{v})}_{xzyxy}$, $f^{(\mathrm{v})}_{xyzxy}$…等（共 $\frac{5!}{2!2!1!}=30$ 個），則此偏引數皆相同.

茲證 $f^{(\mathrm{v})}_{xzyxy}=f^{(\mathrm{v})}_{xyzxy}$ 以爲例.

因　　$f_{z}=f_{z}$，根據（一）之理，易知

$$f'''_{zxy}=f'''_{xyz}.$$

故　　$$f^{(\mathrm{v})}_{xzyxy}=f^{(\mathrm{v})}_{xyzxy}.$$

同理可證　　$f^{(\mathrm{v})}_{xyzxy}=f^{(\mathrm{v})}_{xyxzy}=f^{(\mathrm{v})}_{xyxyz}=f^{(\mathrm{v})}_{x^2y^2z}=$……,

而定理之證遂彰矣.

5. 不同之第 n 偏引數之個數.

由前可見第 n 偏引數中，有相同者，有不相同者.而不同者之個數，亟應予考之.試取二變數函數及三變數函數之偏引數觀之，易知二變數函數 $f(x,y)$ 不同之第一偏引數有二 (f'_x, f'_y)，不同之第二偏引數有三 $(f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{y^2})$，不同之第三偏引數有四 $(f'''_{x^3}, f'''_{x^2y}, f'''_{xy^2}, f'''_{y^3})$ 而三變數函數 $f(x,y,z)$ 不同之第一偏引數有三 (f'_x, f'_y, f'_z)，不同之第二偏引數有六 $(f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{xy}, f''_{xz}, f''_{yz})$，不同之第三偏引數有十 $(f'''_{x^3}, f'''_{y^3}, f'''_{z^3}, f'''_{x^2y}, f'''_{x^2z},$

$f'''_{xy^2}, f'''_{xz^2}, f'''_{y^2z}, f'''_{yz^2}, f'''_{xyz}$). 由此觀之,可知不同之第$n$偏引數屬於二變數函數者,其個數等於二項式之$n$乘方$(x+y)^n$展式之項數(即$n+1$). 屬於三變數函數者,其個數則等於三項式之$n$乘方$(x+y+z)^n$展式之項數.廣言之,不同之第$n$偏引數,屬於$m$變數函數者,其個數等於$m$項式之$n$乘方展式之項數,依組合(Combination)之理,立見此項數爲

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+m-1)}{1\cdot2\cdots\cdots(m-2)(m-1)},$$

是即m變數函數之不同第n偏引數之個數也.

II. 複函數之引數及微分

1. 引數.

設複函數$y=f(u, v, w)$有連續之第一偏引數$f'_u(u, v, w), f'_v(u, v, w), f'_w(u, v, w)$, 而$u, v, w$爲$x$之連續函數,且有引數$u', v', w'$, 則$y$亦爲$x$之連續函數,並有引數

$$y'=u'f'_u(u, v, w)+v'f'_v(u, v, w)+w'f'_w(u, v, w).$$

蓋與x以增量$\triangle x$, 則u, v, w得增量$\triangle u, \triangle v, \triangle w$, 而$y$得增量$\triangle y$,

故 $$y+\triangle y=f(u+\triangle u, v+\triangle v, w+\triangle w),$$

$$\triangle y=f(u+\triangle u, v+\triangle v, w+\triangle w)-f(u, v, w),$$

此式又可書爲

$$\Delta y=f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)$$
$$+f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u, v, w+\Delta w)$$
$$+f(u, v, w+\Delta w)-f(u, v, w).$$

應用中值定理,

得
$$f(u+\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)$$
$$=\Delta u f'_u(u+\theta\,\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w),$$
$$f(u, v+\Delta v, w+\Delta w)-f(u, v, w+\Delta w)$$
$$=\Delta v f'_v(u, v+\theta_1\,\Delta v, w+\Delta w),$$
$$f(u, v, w+\Delta w)-f(v, v, w)$$
$$=\Delta w f'_w(u, v, w+\theta_2\,\Delta w),$$

就中$\theta, \theta_1, \theta_2$均介於0與1之間. 由是$\Delta y$之値化爲

$$\Delta y=\Delta u f'_u(u+\theta\,\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)$$
$$+\Delta v f'_v(u, v+\theta_1\,\Delta v, w+\Delta w)$$
$$+\Delta w f'_w(u, v, w+\theta_2\,\Delta w).$$

將此式之左右兩邊徧除以Δx

得
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}f'_u(u+\theta\,\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w)$$
$$+\frac{\Delta v}{\Delta x}f'_v(u, v+\theta_1\,\Delta v, w+\Delta w)$$
$$+\frac{\Delta w}{\Delta x}f'_w(uvw+\theta_2\,\Delta w).$$

當 x 趨近於零，則 $\Delta u, \Delta v, \Delta w$，趨近於零，而 $\frac{\Delta u}{\Delta x}, \frac{\Delta v}{\Delta x}, \frac{\Delta w}{\Delta x}$ 之極限為 u', v', w'. 且 $f'_u(u+\theta_1\Delta u, v+\Delta v, w+\Delta w), f'_v(u, v+\theta_1\Delta v, w+\Delta w), f'_w(u, v, w+\theta_2\Delta w)$ 之極限為 $f'_u(u, v, w)$, $f'_v(u, v, w) f'_w(u, v, w)$,

遂得 $$y' = u' f'_u(u, v, w) + v' f'_v(u, v, w) + w' f'_w(u, v, w).$$

2. 例——下列各題中，試求 y 之引數：

(一) $$y = a u + b v + c w.$$

因 $$f'_u = a, f'_v = b, f'_w = c,$$

故 $$y' = a u' + b v' + c w'.$$

(二) $$y = u v w.$$

此處 $$f'_u = v w, f'_v = u w, f'_w = u v,$$

故 $$y' = u' v w + u v' w + u v w'.$$

(三) $$y = \frac{u}{v}.$$

因 $$f'_u = \frac{1}{v},\ f'_v = -\frac{u}{v^2},$$

故 $$y' = \frac{u'}{v} - \frac{u v'}{v^2} = \frac{v u' - u v'}{v^2}.$$

(四) $$y = u^v.$$

因 $$f'_u = v u^{v-1}, f'_v = u^v \log u,$$

故 $$y' = u' v u^{v-1} + v' u^v \log u.$$

以上結果，與第三章第V節第2, 3, 4各目所得者無異.

3. 微分.

複函數引數之求法，已如上述.若 y 對於 x 之引數爲已知，則 y 之微分卽可立得.蓋以 $\frac{dy}{dx}\cdot dx=dy$ 故也.

由是　$$dy=f'_u u'\,dx+f'_v v'\,dx+f'_w w'\,dx,$$

卽　$$dy=f'_u\,du+f'_v\,dv+f'_w\,dw.$$

或記爲　$$dy=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw.$$

4 第 n 引數.

複函數 $y=f(u, v, w)$ 之第二及第二以上之引數，亦可依第1目求之.

因　$$y'=u'\,f'_u+v'\,f'_v+w'\,f'_w.$$

故
$$\begin{aligned}
y''&=u''f'_u+v''f'_v+w''f'_w\\
&\quad+u'(u'f''_{u^2}+v'f''_{uv}+w'f''_{uw})\\
&\quad+v'(u'f''_{uv}+v'f''_{v^2}+w'f''_{vw})\\
&\quad+w'(u'f''_{wu}+v'f''_{wv}+w'f''_{w^2}).\\
&=u''f'_u+v''f'_v+w''f'_w+u'^2f''_{u^2}+v'^2f''_{v^2}+w'^2f''_{w^2}\\
&\quad+2v'w'f''_{vw}+2w'u'f''_{wu}+2u'v'f''_{uv}.
\end{aligned}$$

餘可類推.

5. u, v, w 爲 x 之一次式之情形.

設 u, v, w 爲 x 之一次式,則 u', v', w' 爲常數,而 $u''=v''=w''=0$. 前目所得第二引數化爲

$$y''=u'^2 f''_{u^2}+v'^2 f''_{v^2}+w'^2 f''_{w^2}+2u'v'f''_{uv}+2u'w'f''_{uw}$$
$$+2v'w'f''_{vw}.$$

因
$$y'^2=(u'f'_u+v'f'_v+w'f'_w)^2$$
$$=u'^2 f'^2_u+v'^2 f'^2_v+w'^2 f'^2_w+2u'v'f'_u f'_v$$
$$+2u'w'f'_u f'_w+2v'w'f'_v f'_w,$$

故將 y'^2 與 y'' 相較,卽知欲求第二引數,可取第一引數平方之,乃將 $y'^2, f'^2_u, f'_u f'_v, \cdots\cdots$ 依次易爲 $y'', f''_{u^2}, f''_{uv}\cdots\cdots$ 足矣.

又 $y'^n=(u'f'_u+v'f'_v+w'f'_w)^n$. 如將 y'^n 易爲 $y^{(n)}$, $f'^{\alpha}_u f'^{\beta}_v f'^{\gamma}_w$ $(\alpha+\beta+\gamma=n)$ 易爲 $f^{(n)}{}_{u^\alpha v^\beta w^\gamma}$, 且以 $(u'f'_u+v'f'_v+w'f'_w)_n$ 表上式右邊更換後之結果,適得 $y^{(n)}=(u'f'_u+v'f'_v+w'f'_w)_n$.

今證無論 n 爲何正整數,上式恆能成立.蓋於 $n=2$ 時,此公式之成立,已無疑義,故欲證公式之成立,可假定其適用於 n, 卽能適用於 $n+1$.

因 (1) $y'^n=(u'f'_u+v'f'_v+w'f'_w)^n=\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}u'^{\alpha}v'^{\beta}w'^{\gamma}f'^{\alpha}_u f'^{\beta}_v f'^{\gamma}_w$,

故
$$y^{(n)}=\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}u'^{\alpha}v'^{\beta}w'^{\gamma}f^{(n)}_{u^\alpha v^\beta w^\gamma},$$

就中$\alpha+\beta+\gamma=n$，而$A_{\alpha\beta\gamma}=\frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$，即$(a+b+c)^n$展式中$a^\alpha b^\beta c^\gamma$之系數也．又因$f^{(n)}_{u^\alpha v^\beta w^\gamma}$，爲$u, v, w$之複函數．故求$y^{(n)}$對$x$之引數，得

$$(2)\qquad y^{(n+1)}=\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\,u'^\alpha v'^\beta w'^\gamma\Big[u' f^{(n+1)}_{u^{\alpha+1}v^\beta w^\gamma}+v' f^{(n+1)}_{u^\alpha v^{\beta+1}w^\gamma}$$
$$+w' f^{(n+1)}_{u^\alpha v^\beta w^{\gamma+1}}\Big].$$

將(2)式右邊之第$n+1$引數換爲第一引數之乘積，則(2)式右邊變爲

$$\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\,u'^\alpha v'^\beta w'^\gamma f'^\alpha_u f'^\beta_v f'^\gamma_w(u' f'_u+v' f'_v+w' f'_w)$$
$$=(u' f'_u+v' f'_v+w' f'_w)\Sigma A_{\alpha\beta\gamma}\,u'^\alpha v'^\beta w'^\gamma f'^\alpha_u f'^\beta_v f'^\gamma_w,$$

計及(1)式之關係，即知(2)式右邊更換後可書爲

$$(u' f'_u+v' f'_v+w' f'_w)^{n+1}.$$

故於$(u' f'_u+v' f'_v+w' f'_w)^{n+1}$之展式中．將第一引數之乘積復易爲第$n+1$引數，遂得

$$y^{(n+1)}=(u' f'_u+v' f'_v+w' f'_w)_{n+1}.$$

6. Taylor 公式在三變數函數之推廣．

設有函數$f(x,y,z)$．試求函數$f(x+h, y+k, z+l)$依h,k,l升冪之展式．此問題曾由Cauchy解答之，其法如次：

令　$F(t)=f(x+ht, y+kt, z+lt)$，則$F(t)$爲t之函數．依Maclaurin公式展之，

得 $$F(t)=F(0)+\frac{t}{1}F'(0)+\frac{t^2}{1\cdot 2}F''(0)+\cdots\cdots+\frac{t^n}{n!}F^{(n)}(0)+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta t),\quad (0<\theta<1).$$

就中$F(0), F'(0), \cdots F^{(n)}(0)$為$F(t)$及其第一至第$n$引數於$t=0$時之值. 如令$t=1$, 則上式化為

(1) $$F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{1\cdot 2}F''(0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta).$$

因$x+ht$, $y+kt$, $z+lt$均為t之一次式, 若以u, v, w依次代之, 則依前目求$F(t)$對於t之各引數,

得 $$F^{(p)}(t)=(u'f'_u+v'f'_v+w'f'_w)_p=(hf'_u+kf'_v+lf'_w)_p.$$

如令$t=0$, 則u, v, w依次化為x, y, z而$F^{(p)}(0)$可記為

$$F^{(p)}(0)=(uf'_x+kf'_y+lf'_z)_p.$$

同理,

$$F^{(n+1)}(\theta)=(hf'_x+kf'_y+lf'_z)_{n+1},$$

惟右邊於展開後, 應將x, y, z依次以$x+\theta h, y+\theta k, z+\theta l$易之. 由是(1)式化為

(2) $$f(x+h, y+k, z+l)=f(x,y,z)+hf'_x+kf'_y+lf'_z+\frac{1}{1\cdot 2}(hf'_x+kf'_y+lf'_z)_2+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}\left(hf'_x+kf'_y+lf'_z\right)_n+R_n,$$

就中 $$R_n=\frac{1}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\theta).$$

(2) 式名爲三變數函數之Taylor公式.

7. 特端.

(其一) 若$f(x,y,z)$爲x,y,z之n次多項式,則$R_n=0$如令$\phi_n(x,y,z)$表多項式$f(x,y,z)$之n次項之代數和,則有

$$\frac{1}{n!}(hf'_x+kf'_y+lf'_z)_n=\phi_n(h,k,l). \tag{3}$$

蓋(3)式左邊爲h,k,l之n次齊次多項式,各項之系數又爲$f(x,y,z)$之第n偏引數,遂無x,y,z存乎其間.故可令$x=y=z=0$,而$\frac{1}{n!}(hf'_x+kf'_y+lf'_z)_n$不因之而變也.可見$\frac{1}{n!}(hf'_x+kf'_y+lf'_z)_n$爲多項式$f(h,k,l)$之$n$次項之代數和,是卽與$\phi_n(h,k,l)$無異也.

(其二) 若$f(x,y,z)$爲二次多項式,則依前(2),(3)兩式得$f(x+h,y+k,z+l)=f(x,y,z)+hf'_x+kf'_y+lf'_z+\phi_2(h,k,l)$,就中$\phi_2(x,y,z)$表$f(x,y,z)$之二次項之代數和.若$x,y,z$依次與$h,k,l$互易,則得

$$f(h+x,k+y,l+z)=f(h,k,l)+xf'_h(h,k,l)+yf'_k(h,k,l)$$
$$+zf'_l(h,k,l)+\phi_2(x,y,z).$$

(其三) 若$f(x,y,z)$爲二次齊次式,則$\phi_2(x,y,z)$與$f(x,y,z)$全等,前段(其二)之結果化爲

$$f(x+h,\ y+k,\ z+l)$$
$$=f(x,\ y,\ z)+hf'_x+kf'_y+lf'_z+f(h,\ k,\ l),$$
$$f(h+x,\ k+y,\ l+z)$$
$$=f(h,\ k,\ l)+xf'_h+yf'_k+zf'_l+f(x,\ y,\ z).$$

兩式比較之,

得 $$hf'_x+kf'_y+lf'_z=xf'_h+yf'_k+zf'_l.$$

此關係在解析幾何常用之.無論函數所含之變數幾何,仍得相似之結果.

8. 中值定理在三變數函數之推廣.

設三變數函數$f(x,\ y,\ z)$有連續之第一偏引數.

令 $$F(t)=f(x+ht,\ y+kt,\ z+lt),$$

則$F(t)$可視爲單變數t之函數.茲求其引數,

得 $$F'(t)=hf'_x(x+ht,\ y+kt,\ z+lt)+kf'_y(x+ht,\ y+kt,\ z+lt)$$
$$+lf'_z(x+ht,\ y+kt,\ z+lt).$$

應用中值定理於函數$F(t)$,

得 $$F(1)-F(0)=F'(\theta),\quad (0<\theta<1).$$

故 $$f(x+h,\ y+k,\ z+l)-f(x,y,z)=hf'_x(x+\theta h,\ y+\theta k,\ z+\theta l)$$
$$+kf'_y(x+\theta h,\ y+\theta k,\ z+\theta l)+lf'_z(x+\theta h,\ y+\theta k,\ z+\theta l).$$

中值定理在三變數以上之函數,可倣此推之.

9. 二變數函數之極大極小.

設 x, y 依次在間隔 I_x, I_y 內，函數 $z=f(x,y)$ 有第一之偏引數，又設 x_0, y_0 依次為 I_x, I_y 內之一值，若能尋出一正數 α(α 可任何小)，使 h, k 在間隔 $(-\alpha,+\alpha)$ 內時，常有 $f(x_0+h, y_0+k)<f(x_0, y_0)$ 之關係，則謂函數 z 於 $x=x_0, y=y_0$ 為極大．如常有 $f(x_0+h, y_0+k)>f(x_0, y_0)$ 之關係，則謂函數 z 於 $x=x_0, y=y_0$ 為極小．

若視 y 為常數而等於 y_0，則 z 化為單變數 x 之函數，且有第一之偏引數．如此函數於 $x=x_0$ 為極大或極小，則當 $x=x_0, y=y_0$ 時，$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 必為零(參閱第七章第II節第2目)．同理，當 $x=x_0, y=y_0$ 時，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 亦為零．由此觀之，凡 x, y 之值，能令函數 z 為極大或極小者，必適合

$$(1)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=0$$

之關係．故欲求 x, y 能令函數 z 為極大或極小之值，解聯立方程式(1)足矣．但(1)式祇為函數 z 極大或極小之必須條件，而非充分者(參閱第七章第II節第2目)，則(1)式之解，未必能令函數為極大或極小也．

設 x_0, y_0 為(1)式之公解，且於 $x=x_0, y=y_0$ 時，$f(x,y)$ 之第二偏引數不全為零，而第三偏引數為連續．則由 Taylor 公式得

$$(2)\qquad \begin{aligned}\Delta &= f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0)\\ &=\frac{1}{1\cdot 2}(h^2 f''_{x_0^2}+2hkf''_{x_0y_0}+k^2f''_{y_0^2})+R,\end{aligned}$$

就中$f''_{x_0^2}, f''_{x_0y_0}, f''_{y_0^2}$表函數$z$之第二偏引數於$x=x_0, y=y_0$時之值,而$R=\frac{1}{3!}(hf'_x+kf'_y)_3$(但於展開後,$x, y$應易為$x_0+\theta h, y_0+\theta k$者).因$h, k$為甚小之值,而在(2)式之右邊$R$所含$h, k$之乘方較其前諸項所含者為高,故在普通情形,$R$必小於其前諸項之和.可見$\Delta$之號,全視$h^2f''_{x_0^2}+2hkf''_{x_0y_0}+k^2f''_{y_0^2}$之號而定.如令$A=f''_{x_0^2}$, $B=f''_{x_0y_0}$, $C=f''_{y_0^2}$,則欲知三項式$Ah^2+2Bhk+Ck^2$之號可分究下列三種情形:

(其一) $B^2-AC>0$.此時三項式有不等之兩實根.而三項式之號因$\frac{k}{h}$之值而異,故當$x=x_0, y=y_0$時,函數z非極大亦非極小.

(其二) $B^2-AC<0$.此時三項式常與A及C同號(A與C之號必同,否則$B^2-AC>0$).若A及C之號為負,則函數z於$x=x_0, y=y_0$時為極大.若A及C之號為正,則函數z於$x=x_0, y=y_0$時為極小.

(其三) $B^2-AC=0$.此時函數z有無極大極小,不能依前法判斷,須加特別考察,方能知其究竟(參閱Goursat著之Mathematical Analysis第一卷).

III. 多變數函數之全微分

1. 全微分(Total Differential).

設函數 $w=f(x,y,z)$ 有各級之偏引數．當 x,y,z 取得增量 $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ 時，則 w 隨得增量 $\triangle w$，

而 $$\triangle w=f(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)-f(x,y,z).$$

此式可書爲

$$\begin{aligned}\triangle w=&f(x+\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)-f(x, y+\triangle y, z+\triangle z)\\&+f(x, y+\triangle y, z+\triangle z)-f(x,y,z+\triangle z)\\&+f(x,y,z+\triangle z)-f(x,y,z).\end{aligned}$$

應用中值定理(參閱第三章第IX節第8目)，

則有 $$\begin{aligned}\triangle w=&f'_x(x+\theta_1\triangle x, y+\triangle y, z+\triangle z)\triangle x\\&+f'_y(x, y+\theta_2\triangle y, z+\triangle z)\triangle y+f'_z(x,y,z+\theta_3\triangle z)\triangle z,\end{aligned}$$

就中 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ 均爲介於零與1之間之數．當 $\triangle x, \triangle y, \triangle z$ 趨近於零時，$\triangle w$ 之主要部份爲

$$f'_x(x,y,z)\triangle x+f'_y(x,y,z)\triangle y+f'_z(x,y,z)\triangle z.$$

此式稱爲函數 w 之全微分，常以 dw 表之，即 $dw=f'_x\triangle x+f'_y\triangle y+f'_z\triangle z$．若視 y,z 爲常數，x 爲變數，則當 x 取得增量 $\triangle x$ 時，$\triangle w$ 之主要部份爲 $f'_x\triangle x$．而 $f'_x\triangle x=f'_x dx$（因 x 爲自變數，參閱第三章第VIII節第1目）有偏微分 (Partial Differential) 之名．依同理可得其餘之偏微分 $f'_y dy, f'_z dz$．故 w 之全微分爲其各偏微分之和，

即 $$dw=f'_x dx+f'_y dy+f'_z dz.$$

全微分dw之全微分則謂之w之第二全微分(Second Total Differential).用d^2w以記之.但增量dx, dy, dz經第一次選定,以後即用此增量,故可視爲常數.準此

$$d^2w=\frac{\partial\, dw}{\partial x}dx+\frac{\partial\, dw}{\partial y}dy+\frac{\partial\, dw}{\partial z}dz$$

$$=(f''_{x^2}dx+f''_{xy}\,dy+f''_{xz}\,dz)dx$$

$$+(f''_{xy}\,dx+f''_{y^2}\,dy+f''_{zy}\,dz)dy$$

$$+(f''_{xz}\,dx+f''_{yz}\,dy+f''_{z^2}\,dz)dz$$

$$=f''_{x^2}\,dx^2+f''_{y^2}\,dy^2+f''_{z^2}\,dz^2+2f''_{xy}\,dx\,dy$$

$$+2f''_{xz}\,dx\,dz+2f''_{yz}\,dy\,dz.$$

若以f'^2易f'',則上式右邊化爲$f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz$之平方,故可記爲$d^2w=(f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz)_2$.

依同理,第n全微分可書爲

$$d^nw=(f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz)_n.$$

此式成立之證,與前節第5目同,茲不贅.

例——求兩變數函數之全微分.

設有函數$w=f(x, y)$.如用Monge記號將第一第二偏引數記爲$p=f'_x$, $q=f'_y$, $r=f''_{x^2}$, $s=f''_{xy}$, $t=f''_{y^2}$,

則 $$dw=p\,dx+q\,dy,\ 而\ d^2w=r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2, \cdots\cdots.$$

2. 複函數之全微分.

設有複函數 $\omega=f(u,v,w)$,就中 u,v,w 為四變數 x,y,z,t 之函數,故 ω 亦為此四變數之函數.茲求 ω 之全微分.依定義得

$$d\omega=\frac{\partial \omega}{\partial x}dx+\frac{\partial \omega}{\partial y}dy+\frac{\partial \omega}{\partial z}dz+\frac{\partial \omega}{\partial t}dt,$$

但 ω 為 u,v,w 之複函數,依求複函數引數之方法,

得
$$\frac{\partial \omega}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t},$$

將上列四式之兩邊依次乘以 dx,dy,dz,dt 而加之,則左邊之和為 $d\omega$,而右邊 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 之系數為

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz+\frac{\partial u}{\partial t}dt,$$

即 u 之全微分 du 也.同理 $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial f}{\partial w}$ 之系數為 v,w 之全微分 dv,dw.遂得

(2)
$$d\omega=\frac{\partial f}{\partial u}du+\frac{\partial f}{\partial v}dv+\frac{\partial f}{\partial w}dw.$$

此式與前目(1)式相似.由此觀之,複函數 $f(u,v,w)$ 之第

一全微分與視u, v, w爲自變數所得者相同.惟u, v, w爲自變數時,du, dv, dw爲常數,而u, v, w爲x, y, z, t之函數時,du, dv, dw則爲u, v, w之全微分耳.

特端——

如 $$\omega=u+v+w,$$

則 $$d\omega=du+dv+dw.$$

如 $$\omega=uv,$$

則 $$d\omega=u\,dv+v\,du.$$

如 $$\omega=\frac{u}{v},$$

則 $$d\omega=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

3. 定理.

若兩函數所含之變數相同,有相同之全微分者,則此兩函數祇差一常數.

設兩函數爲$f(x, y, z)$, $\phi(x, y, z)$,而有

$$f'_x\,dx+f'_y\,dy+f'_z\,dz=\phi'_x\,dx+\phi'_y\,dy+\phi'_z\,dz.$$

今將上式書爲

$$(f'_x-\phi'_x)dx+(f'_y-\phi'_y)dy+(f'_z-\phi'_z)dz=0.$$

無論dx, dy, dz之值如何,此式恆能成立,

故 $$f'_x-\phi'_x=0,\quad f'_y-\phi'_y=0,\quad f'_z-\phi'_z=0.$$

上三式表兩函數之差$f(x,y,z)-\phi(x,y,z)$與x,y,z無關故此兩函數祇差一常數.

IV. 陰函數及其引數之求法

1. 陰函數 (Implicit Function).

以不解出之方程式表示某函數與變數之關係者,則該函數名爲陰函數.

欲求陰函數之引數,宜先知下列定理,其證法本書從略(參閱Goursat著之Mathematical Analysis第一卷).

定理——設$x=x_0, y=y_0$爲x,y之一組之値合於$f(x,y)=0$之關係者.又設x,y接近於此組之値時,函數f及其偏引數均爲連續函數.若$x=x_0, y=y_0$時,偏引數f'_y不爲零,則有以x爲自變數之函數合於$f(x,y)=0$者.此函數於$x=x_0$之隣近爲連續,當x變爲x_0,函數之値爲y_0,而合乎此種情形之函數僅有一個.

2. 引數之求法.

無論x爲何數,函數$f(x,y)$均等於零.故$f(x,y)$對於x之引數,亦必等於零.但$f(x,y)$爲x,y之複函數(由前目定理,y爲x之函數),可見

$$f'_x(x,y)+\frac{dy}{dx}f'_y(x,y)=0,$$

(1) $$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

又 y' 爲 x, y 之函數. 若 $f(x, y)$ 有連續之第二偏引數, 則 y 有第二引數. 蓋可視 y' 爲 $u = f'_x$, $v = f'_y$ 之複函數, 而 f'_x, f'_y 爲 x, y 之複函數故也. 求(1)式兩邊對於 x 之引數,

得 $$y'' = -\frac{f'_y(f''_{x^2} + y' f''_{xy}) - f'_x(f''_{xy} + y' f''_{y^2})}{(f'_y)^2}.$$

計及(1)式, 上式化爲

$$y'' = \frac{f'_x(f''_{xy} f'_y - f''_{y^2} f'_x) - f'_y(f''_{x^2} f'_y - f''_{xy} f'_x)}{(f'_y)^3}.$$

即 $$y'' = \frac{1}{(f'_y)^3} \begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f'_x \\ f''_{xy} & f''_{y^2} & f'_y \\ f'_x & f'_y & 0 \end{vmatrix}.$$

V. 齊次函數

1. 定義.

設有函數 $f(x, y, z)$ 若以 tx, ty, tz 依次易 x, y, z 而有關係 $f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z)$ 者, 則 $f(x, y, z)$ 稱爲齊次函數 (Homogeneous Function). 而 m 稱爲齊次之次數. 此次數可爲正負整數或正負分數. 例如齊次多項式爲齊次函數. 而函數 $\sqrt[3]{\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{x + y + z}}$ 亦爲齊次. 其齊次數爲 $\frac{1}{3}$.

2. Euler 定理.

設$f(x,y,z)$爲m次齊次函數,則有

(1) $$xf'_x+yf'_y+zf'_z=mf(x,y,z).$$

因 $f(x,y,z)$爲m次齊次函數,

故 $$f(tx,ty,tz)=t^m f(x,y,z).$$

而 $f(tx,ty,tz)$爲$tx,ty,tz,$之複函數.如求上式兩邊對於t之引數,

得 $xf'_x(tx,ty,tz)+yf'_y(tx,ty,tz)+zf'_z(tx,ty,tz)=mt^{m-1}f(x,y,z).$

令$t=1$,遂有

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=mf(x,y,z)$$

3. Euler 逆定理.

凡函數能合前目(1)式之關係者,必爲m次齊次函數.

蓋將(1)式中之x,y,z依次以tx,ty,tz易之,即得

$$\frac{xf'_{tx}(tx,ty,tz)+yf'_{ty}(tx,ty,tz)+zf'_{tz}(tx,ty,tz)}{f(tx,ty,tz)}=\frac{m}{t}$$

如視此式之左邊爲t之函數而積之,立見

$$f(tx,ty,tz)=ct^m,$$

就中c爲x,y,z之函數而不含t者.令$t=1$,

則得 $$f(x, y, z)=c.$$

故 $$f(tx, ty, tz)=t^m f(x, y, z).$$

遂得逆定理之證.

第八章之習題

求下列各函數之 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(1) $x^3+y^2-3z+a=0.$

(2) $\arcsin\frac{x}{z}+\log\left(\frac{x+y}{z}\right)=0.$

(3) $\frac{x^2+y^2}{z^2}+\frac{x^2+z^2}{y^2}+\frac{y^2+z^2}{x^2}=0.$

(4) 設 $u=(y-z)(z-x)(x-y).$

試證 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0.$

(5) 設 $u=\log(\tan x+\tan y+\tan z).$

試證 $\sin 2x\frac{\partial u}{\partial x}+\sin 2y\frac{\partial u}{\partial y}+\sin 2z\frac{\partial u}{\partial z}=2.$

(6) 設 $z=x+yf(z).$

求證 $\frac{\partial}{\partial y}\left[\phi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(z)f(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right].$

(7) 設 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+\phi\left(\frac{y}{x}\right).$

求證 $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

(8) 求函數 $f(x, y)=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ 之極大極小.

(9) 設有函數 $f(x, y, z)=xyz$, 而 $x+y+z=a$(a 爲常數). 試求函數之極大極小.

(10) 證明函數 $\dfrac{(ax+by+c)^2}{x^2+y^2+1}$ 之最大值爲 $a^2+b^2+c^2$.

(11) 內接於圓之三角形中,試求其最大面積者.

(12) 於定體積之正六面體中,其最小之面積者爲正方體,試證明之.

(13) 證明函數 $xe^{y+x\sin y}$ 無極大極小.

(14) 設一數 a 分爲三份,問此三份數之積爲最大時,其積幾何.

(15) 橢圓面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 內接一長方體,問此體最大之體積若干.

求下列各函數之第一第二全微分.

(16) $z=3x^3+4x^2y^2-6x\cos y$.

(17) $z=\arcsin\sqrt{x^2+y^2}$.

(18) $u=xyz$.

(19) $u=\dfrac{ay+bz}{cz+ax}$.

(20) 設 $u=e^{ax+by+cz}$.

求證 $d^n u=e^{ax+by+cz}(adx+bdy+cdz)^n$.

求下列陰函數之引數.

(21) $y\sin x-\cos(x-y)=0$.

(22) $\dfrac{y\log x}{x\log y}=\dfrac{x\log y}{y\log x}$.

(23) $y=1+xe^y$.

(24) $\arcsin\left(\dfrac{y^3+x^3-3x^2y}{y^3+x^3-3xy^2}\right)^{\frac{1}{2}}=a$.

(25) $ax+by+xy=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$.

(26) 設 $x^3+y^3+z^3-3xyz=0$, $x+y+z=0$, $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{dz}{dx}$.

(27) 求 $x^y=y^x$ 之第二引數.

(28) 求 $x^5-5xy+y^5=0$ 之第三引數.

第九章

積分方法

求函數之積分,已於第四章述之,惟限於簡單函數,其稍涉繁複者,尚未論及.本章則於各種函數之積分,分別究之,前所具者,茲從略焉.

I. 有理函數之積分

1. 引言.

求有理函數積分之普通方法,須將此函數分解爲數個簡單函數,然後逐一求其積分.此各函數積分之和,等於其和之積分.如第四章第III節第2目,求多項式之積分,即其例也.如函數爲分數,則可將其分解爲偏分數(Partial Fraction).依代數理論,凡偏分數之形,有下列二種:

$$\frac{A}{(x-a)^m},\quad \frac{Px+Q}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

故求有理分數之積分,祇求上兩式之積分足矣.

2. 求 $\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m}$.

若 $m=1$,

則 $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)} = A\log(x-a)+c.$$

若 $m \neq 1$,

則 $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^m} = A\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+c.$$

$$= -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}}+c.$$

3. 求 $\int \frac{(Px+Q)dx}{[(x-a)^2+\beta^2]^n}$.

因 $$\frac{Px+Q}{[(x-a)^2+\beta^2]^n} = \frac{P(x-a)}{[(x-a^2)+\beta^2]^n}+\frac{Pa+Q}{[(x-a)^2+\beta^2]^n},$$

故 $$\int \frac{(Px+Q)dx}{[(x-a)^2+\beta^2]^n} = P\int \frac{(x-a)dx}{[(x-a)^2+\beta^2]^n}$$

$$+(Pa+Q)\int \frac{dx}{[(x-a)^2+\beta^2]^n}$$

先求積分 $\int \frac{(x-a)dx}{[(x-a)^2+\beta^2]^n}$. 因 $(x-a)^2+\beta^2$ 微分之半爲 $(x-a)dx$, 故若 $n=1$,

則 $$\int \frac{(x-a)dx}{[(x-a)^2+\beta^2]^n} = \frac{1}{2}\log[(x-a)^2+\beta^2]$$

若 $n \neq 1$,

則 $$\int \frac{(x-\alpha)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}=\frac{1}{2}\,\frac{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{1-n}}{1-n}.$$

今進而求積分

$$\int \frac{dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}.$$

令 $x-\alpha=t$，則上式可書爲

$$\int \frac{dt}{(t^2+\beta^2)^n}.$$

如 $n=1$，

則 $$\int \frac{dt}{t^2+\beta^2}=\frac{1}{\beta}\arctan\frac{t}{\beta}.$$

如 $n\neq1$，

可令 $I_n=\int \frac{dt}{(t^2+\beta^2)^n}$，而依下法求之：

因 $$\frac{d}{dt}\,\frac{t}{(t^2+\beta^2)^{n-1}}=\frac{(t^2+\beta^2)(3-2n)+2\beta^2(n-1)}{(t^2+\beta^2)^n}$$

$$=\frac{3-2n}{(t^2+\beta^2)^{n-1}}+\frac{2\beta^2(n-1)}{(t^2+\beta^2)^n},$$

故 $$\frac{t}{(t^2+\beta^2)^{n-1}}=(3-2n)\,I_{n-1}+2\,\beta^2(n-1)\,I_n.$$

卽 $$I_n=\frac{t}{2\,\beta^2(n-1)(t^2+\beta^2)^{n-1}}-\frac{(3-2n)}{2\,\beta^2(n-1)}I_{n-1}.$$

由是 I_n 爲 I_{n-1} 之函數．設 $n=2$，則由上式可求得 I_2．蓋 $I_1=\frac{1}{\beta}\arctan\frac{t}{\beta}$ 爲已知也．既得 I_2，則 I_3 可以求出，逐次

推求，遂得 I_n 矣.

4. 例.

例一——求 $\int\frac{1}{x^6-1}dx$.

因　$x^6-1\equiv(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,

故分解 $\frac{1}{x^6-1}$ 爲偏分數,卽得形式

$$\frac{1}{x^6-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1}.$$

今斷定 A, B, C, D, E, F 六常數，以 $-x$ 代上式之 x,

則　$$\frac{1}{x^6-1}=\frac{-A}{x+1}+\frac{-B}{x-1}+\frac{-Cx+D}{x^2-x+1}+\frac{-Ex+F}{x^2+x+1}.$$

但據偏分數之理論，任何分數不許有兩種分解,

故　$-A=B,\ Ex+F\equiv-Cx+D,\ E=-C,\ F=D,$

卽　$$\frac{1}{x^6-1}\equiv\frac{A}{x-1}-\frac{A}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{-Cx+D}{x^2-x+1}.$$

以 x^6-1 乘恆等式之兩邊,

得　$$1\equiv A(x^3+1)(x^2+x+1)-A(x^3-1)(x^2-x+1)$$
$$+(Cx+D)(x^3+1)(x-1)+(-Cx+D)(x^3-1)(x+1).$$

令 $x=1$，則 $1=6A$，卽 $A=\frac{1}{6}$.

令 $x=0$，則 $1=2A-2D$，而 $D=A-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}$.

又恆等式右邊x^4之系數$2A-2C+2D$應爲零.

故
$$C=A+D=-\frac{1}{6}.$$

由是 $$\frac{1}{x^6-1}\equiv\frac{1}{6(x-1)}-\frac{1}{6(x+1)}-\frac{x+2}{6(x^2+x+1)}+\frac{x-2}{6(x^2-x+1)}.$$

$$\int\frac{dx}{x^6-1}=\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{6}\int\frac{(x+2)dx}{x^2+x+1}$$
$$+\frac{1}{6}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx.$$

更因 $$\int\frac{dx}{x-1}=\log(x-1),\quad\int\frac{dx}{x+1}=\log(x+1),$$

$$\int\frac{(x+2)\,dx}{x^2+x+1}=\int\frac{(x+\frac{1}{2})\,dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\log(x^2+x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}},$$

$$\int\frac{(x-2)\,dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}},$$

遂得 $$\int\frac{dx}{x^6-1}=\frac{1}{6}\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{1}{12}\log\left(\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+c.$$

例二——求$\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

令
$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}\equiv\frac{A}{x}+\frac{Lx+M}{(x^2+1)^2}+\frac{Px+Q}{x^2+1},$$

則 (1)　$1\equiv A(x^2+1)^2+(Lx+M)x+(Px+Q)(x^2+1)x.$

令　$x=0$, 則 $A=1.$

比較　x^4之系數,得$0=A+P$, 故$P=-1.$

比較　x^3之系數,得$Q=0.$

將A, P, Q之值代入(1)式,

得
$$1\equiv(x^2+1)^2-(x^2+1)x^2+(Lx+M)x,$$
$$Lx+M\equiv(x^2+1)x-x^3-2x.$$

令　$x=0$, 則　$M=0.$

令　$x=1$, 則　$L=-1.$

故
$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{(x^2+1)^2}-\frac{x}{x^2+1}.$$

而
$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}-\int\frac{xdx}{x^2+1}$$
$$=\log x+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{2}\log(x^2+1)+c$$
$$=\log\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{2(x^2+1)}+c.$$

例三——求$\int\frac{(3x^2+1)dx}{(x-1)^5}$.

令 $x-1=t$,

則
$$\int\frac{(3x^2+1)dx}{(x-1)^5}=\int\frac{3(t+1)^2+1}{t^5}dt$$

$$=\int\frac{3t^2+6t+4}{t^5}dt$$

$$=3\int\frac{dt}{t^3}+6\int\frac{dt}{t^4}+4\int\frac{dt}{t^5}$$

$$=-\frac{3}{2t^2}-\frac{2}{t^3}-\frac{1}{t^4}+c$$

$$=-\left[\frac{3}{2(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^4}\right]+c.$$

II. 能化爲有理函數之函數之積分

1. $x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{p'}{q'}}$……等之有理函數之積分.

茲求 $\int R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{p'}{q'}}\cdots\cdots)\,dx$, 就中 $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}$ ……等爲不可約之分數, R 爲 $x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{p'}{q'}}$……等之有理函數.

設 n 爲 q, q', q'', ……等之最小公倍數,

則 $$n=\lambda q,\ n=\lambda' q',\ n=\lambda'' q''\cdots\cdots.$$

命 $$v^n=x,$$

則 $$dx=nv^{n-1}dv,\ x^{\frac{p}{q}}=v^{\lambda p},\ x^{\frac{p'}{q'}}=v^{\lambda' p'},\ x^{\frac{p''}{q''}}=v^{\lambda'' p''}\cdots\cdots,$$

由是 $$\int R(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{p'}{q'}}, x^{\frac{p''}{q''}}\cdots)dx=n\int R(v^n, v^{\lambda q}, v^{\lambda' q'}\cdots)\,v^{n-1}dv.$$

上式右邊爲 v 之有理函數之積分,可應用前節之方法求之

例一　求 $\displaystyle\int\frac{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}dx.$

令　$x=u^6,$

則得　$$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}dx=\int\frac{u^3+2u^{10}}{u^2+1}6u^5du=6\int\frac{u^8+2u^{10}}{u^2+1}du.$$

又因　$$2u^{10}+u^8=(u^2+1)(2u^8-u^6+u^4-u^2+1)-1,$$

故　$$6\int\frac{u^8+2u^{10}}{u^2+1}du=6\int(2u^8-u^6+u^4-u^2+1)du-6\int\frac{du}{u^2+1}$$

$$=6\left(\frac{2u^9}{9}-\frac{u^7}{7}+\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+u\right)-6\arctan u+c,$$

而　$$\int\frac{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}dx=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}$$

$$+6x^{\frac{1}{6}}-6\arctan x^{\frac{1}{6}}+c.$$

2. $x, y^{\frac{p}{q}}, y^{\frac{p'}{q'}}$……等之有理函數之積分.

茲求 $\int R(x, y^{\frac{p}{q}}, y^{\frac{p'}{q'}}\cdots\cdots)dx$, 就中 $\frac{p}{q}, \frac{p'}{q'}, \cdots\cdots$ 爲不可約之分數, y 爲 x 之函數, 其形爲 $\frac{ax+b}{a'x+b'}$. R 爲 $x, y^{\frac{p}{q}}, y^{\frac{p'}{q'}}\cdots\cdots$ 等之有理函數.

因　$$y=\frac{ax+b}{a'x+b'},$$

故　$$x=\frac{b-b'y}{a'y-a},\qquad dx=\frac{ab'-a'b}{(a'y-a)^2}dy,$$

而 $\int R(x, y^{\frac{p}{q}}, y^{\frac{p'}{q'}}, \cdots\cdots) dx$

$$=\int R\left(\frac{b-b'y}{a''y-a}, y^{\frac{p}{q}}, y^{\frac{p'}{q'}}\cdots\right)\frac{ab'-a'b}{(a'y-a)^2}dy.$$

即 $\int R(x, y^{\frac{p}{q}}, y^{\frac{p'}{q'}}, \cdots\cdots) dx$ 爲 $y, y^{\frac{p}{q}}, y^{\frac{p'}{q'}}\cdots\cdots$ 等之有理函數之積分,故可用前目之方法求之.

例一 求 $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx.$

令 $x-2=y,$ 則 $dx=dy.$

而 $$\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx=\int\frac{y+3}{(y+2)\,y^{\frac{1}{2}}}dy.$$

又令 $y^{\frac{1}{2}}=u,$ 則 $dy=2\,udu.$

而 $$\int\frac{y+3}{(y+2)\,y^{\frac{1}{2}}}dy=2\int\frac{(u^2+3)}{(u^2+2)u}udu=2\int du+2\int\frac{du}{u^2+2}$$

$$=2u+\sqrt{2}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}+c.$$

故 $$\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx=2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{2}}+c.$$

3. 求二項式 $x^m(a+bx^n)^p$ 之積分(就中 m, n, p 爲有理數).

令 $x^n=t,$ 則 $dx=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}dt,$

$$\int x^m(a+bx^n)^p=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt.$$

(a)　如p爲整數,則上式之積分已於第1目論之

(b)　如$\frac{m+1}{n}$爲整數,則上式之積分已於第2目論之.

(c)　如$\frac{m+1}{n}+p$爲整數,則將上式積分書爲

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx=\frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt,$$

此積分已於第2目論之.

故當p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$有爲整數者,則二項式之積分均可求得矣.

如p, $\frac{m+1}{n}$, $\frac{m+1}{n}+p$均非整數,則宜用分部積分方法以變換二項式積分之形.蓋令

$$u=(a+bx^n)^p,\qquad dv=x^m dx,$$

則 (1)　$\int x^m(a+bx^n)^p dx$

$$=\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}-\frac{nbp}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

又令　$u=x^{m-n+1}$, $dv=(a+bx^n)^p\,x^{n-1}dx$,

則 (2)　$\int x^m(a+bx^n)^p dx$

$$=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m-n+1}}{(p+1)bn}-\frac{m-n+1}{(p+1)bn}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx.$$

惟因 $\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx$

$$=a\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx+b\int x^m(a+bx^n)^p dx.$$

計及(2)式,得

(3) $$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

$$=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m-n+1}}{b(np+m+1)}-\frac{a(m-n+1)}{b(np+m+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx.$$

以 $m+n$ 代(3)式之 m,得

(4) $$\int x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{(a+bx^n)^{p+1}x^{m+1}}{a(m+1)}$$

$$-\frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx.$$

計及(1)式與(4)式之關係,而以 m 代 $m+n$,得

(5) $$\int x^m(a+b^n)^p dx$$

$$=\frac{(a+bx^n)^p x^{m+1}}{m+np+1}+\frac{nap}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.$$

同樣計及(2)式與(3)式之關係,而以 m 代 $m-n$,得

(6) $$\int x^m(a+bx^n)^p dx$$

$$=-\frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{na(p+1)}+\frac{m+np+n+1}{na(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx.$$

以上六式均得減少二項式指數之絕對值.如當 $m+1$,

$p+1, m+np+1$ 三數中有一數爲零,則 $\frac{m+1}{n}, p, \frac{m+1}{n}+p$ 必有整數者,而二項式積分即爲 (a), (b), (c) 三種情形之一矣.

4. x 及 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 之有理函數之積分.

茲求 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$,就中 R 爲 x 及 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 之有理函數, a, b, c 表實數.欲將 $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 化爲有理函數之積分,宜分别下列兩情形:

(其一) $a>0$.

令 $\sqrt{ax^2+bx+c}=x\sqrt{a}+t$,

則 $ax^2+bx+c=ax^2+2tx\sqrt{a}+t^2$,

$$x=\frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}},\quad dx=\frac{-2t^2\sqrt{a}+2bt-2c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}dt,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\frac{(t^2-c)\sqrt{a}}{b-2t\sqrt{a}}+t.$$

由是已與積分可化爲 t 之有理函數之積分.

(其二) $a<0$.

此時三項式 ax^2+bx+c 必有兩實根 α, β,否則無論 x 爲何實值, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 之值恆爲虛矣.

故 $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$.

如令 $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=t(x-\alpha)$,

則 $a(x-\beta)=t^2(x-\alpha)$.

而 $x=\dfrac{\alpha t^2-a\beta}{t^2-a},\quad dx=\dfrac{2at(\beta-\alpha)}{(t^2-a)^2}dt.$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-\alpha)=\frac{at(\alpha-\beta)}{t^2-a}.$$

由是已與積分可化爲 t 之有理函數之積分.

5. 特例.

前目積分所用之更換變數,係普通方法,但求此種函數之積分,在某種特例時,更有簡便之法.例如

$$\int\frac{(Px+Q)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\qquad \int\frac{dx}{(x-m)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

兩積分,則可依下法求之:

(1) $\displaystyle\int\frac{(Px+Q)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

$$=\frac{P}{a}\int\frac{(ax+\frac{b}{2})dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(Q-\frac{bP}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$=\frac{P}{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+\left(Q-\frac{bP}{2a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

令 $x=\dfrac{1}{t}+m$, 則

(2) $$\int\frac{dx}{(x-m)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{(am^2+bm+c)t^2+(2am+b)t+a}}$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}}.$$

就中 $A=am^2+bm+c,\ B=2am+b,\ C=a$.

故依第四章之習題,得

$(A>0)$ $$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}=\frac{1}{\sqrt{A}}\log\left|x+\frac{B}{2A}+\sqrt{\frac{Ax^2+Bx+C}{A}}\right|.$$

$(A<0)$ $$\int\frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}=\frac{1}{\sqrt{-A}}\text{arc sin}\frac{2Ax+B}{\sqrt{B^2-4AC}}.$$

而(1),(2)兩積分卽可求得矣.

6. e^{ax}之有理函數之積分.

茲求 $\int f(e^{ax})dx$,就中$f(e^{ax})$表e^{ax}之有理函數.

如令 $e^{ax}=t$,則 $dx=\dfrac{dt}{at}$.

而 $$\int f(e^{ax})dx=\frac{1}{a}\int\frac{f(t)}{t}dt.$$

故 $\int f(e^{ax})dx$可化爲t之有理函數之積分.

例一　求 $\int\dfrac{dx}{e^x+e^{-x}}$.

令 $e^x=t$，則 $dx=\dfrac{dt}{t}$.

而 $$\int\frac{dx}{e^x+e^{-x}}=\int\frac{dt}{t\left(t+\dfrac{1}{t}\right)}=\int\frac{dt}{t^2+1}=\arctan t+c$$

$$=\arctan e^x+c.$$

7. 對數函數積分及反三角函數積分之特例.

設 $\phi(x)$ 爲有理函數，

則因 $$\frac{d}{dx}\{\log\phi(x)\}=\frac{\phi'(x)}{\phi(x)},$$

$$\frac{d}{dx}\{\arctan\phi(x)\}=\frac{\phi'x}{1+\{\phi(x)\}^2},$$

故 $\log\phi(x)$, $\arctan\phi(x)$ 之引數亦爲有理函數. 茲以 $P\{\phi(x)\}$ 表 $\log\phi(x)$ 或 $\arctan\phi(x)$，而究 $f(x)P\{\phi(x)\}$ 之積分〔就中 $f(x)$ 爲有理函數〕. 令 $u=P\{\phi(x)\}$, $dv=f(x)\,dx$,

則 $du=P'\{\phi(x)\}\,\phi'(x)\,dx,\qquad v=\int f(x)\,dx=F(x).$

而 $\int f(x)\,P\{\phi(x)\}\,dx$

$$=F(x)\,P\{\phi(x)\}-\int F(x)\,P'\{\phi(x)\}\phi'(x)\,dx.$$

(a) 若 $F(x)$ 爲有理函數，則上式左邊末項爲有理函數之積分，故可依前節之積分方法求之.

(b) 若 $F(x)$ 爲對數函數或反三角函數，則可再用

分部積分方法求之.

〔備考〕——$f(x)[P\{\phi(x)\}]^n$ (n 爲正整數)之積分,得用分部積分方法求之.

例——求 $\int \frac{\log(1+x^2)}{x^2}dx$.

令 $u=\log(1+x^2)$, $\quad dv=\frac{dx}{x^2}$

則 $du=\frac{2xdx}{1+x^2}$, $\quad v=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}$,

故 $$\int\frac{\log(1+x^2)}{x}dx=-\frac{\log(1+x^2)}{x}+\int\frac{2dx}{1+x^2}$$
$$=-\frac{\log(1+x^2)}{x}+2\arctan x+c.$$

8. **有理函數 $R(\sin x, \cos x)$ 之積分.**

令 $\tan\frac{x}{2}=t$,

則 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

故 $$\int R(\sin x, \cos x)=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

上式右邊爲 t 之有理函數之積分,可用前節之方法求之.

例——求 $\int\frac{dx}{\cos x-\cos a}$,就中 a 爲常數.

令 $\tan\frac{x}{2}=t,\ \tan\frac{a}{2}=\alpha.$

則得 $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x-\cos a}=-(1+\alpha^2)\int\frac{dt}{t^2-\alpha^2}=-\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\log\left|\frac{t-\alpha}{t+\alpha}\right|+c$

$$=\frac{1}{\sin a}\log\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{a}{2}}{\tan\frac{x}{2}-\tan\frac{a}{2}}\right|+c.$$

9. 特端.

茲令 $R(\sin x,\cos x)=F(x)$ (就中 R 表 $\sin x$ 及 $\cos x$ 之有理函數). 而分究下列三情形:

(a) 設 $F(x)$ 之週期爲 π, 即 $F(x+\pi)=F(x)$, 此時 $F(x)$ 爲 $\tan x$ 之有理函數.

蓋以 $\cos x\tan x$ 代 $\sin x$, 以 $\frac{1}{1+\tan^2 x}$ 代 $\cos^2 x$, 則 $F(x)$ 之形可書爲

$$F(x)=\frac{A(\tan x)+B(\tan x)\cos x}{C(\tan x)+D(\tan x)\cos x},$$

就中 A, B, C, D 表 $\tan x$ 之多項式.

但 $\displaystyle F(x+\pi)=\frac{A(\tan x)-B(\tan x)\cos x}{C(\tan x)-D(\tan x)\cos x},$

而 $F(x)=F(x+\pi),$

故 $\displaystyle F(x)=\frac{A(\tan x)+B(\tan x)\cos x}{C(\tan x)+D(\tan x)\cos x}=\frac{A(\tan x)-B(\tan x)\cos x}{C(\tan x)-D(\tan x)\cos x}$

$$=\frac{2A(\tan x)}{2C(\tan x)}=\frac{A(\tan x)}{C(\tan x)}.$$

由此觀之，欲求 $F(x)$ 之積分，令 $\tan x=t$ 足矣.

例一　求 $\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$.

令 $\tan x=t$,

則 $$\int\frac{dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\int\frac{dt}{a^2+b^2t^2}=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{bt}{a}\right)+c$$

$$=\frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b\tan x}{a}\right)+c.$$

(b) 設 $F(x)$ 爲奇函數，即 $F(-x)=-F(x)$，則 $F(x)$ 爲 $\cos x$ 之有理函數與 $\sin x$ 之乘積.

蓋以 $1-\cos^2 x$ 代 $\sin^2 x$，而不變 $\sin x$，則 $F(x)$ 可書爲

$$F(x)=\frac{A(\cos x)+B(\cos x)\sin x}{C(\cos x)+D(\cos x)\sin x},$$

就中 A, B, C, D 表 $\cos x$ 之多項式.

但 $$F(-x)=\frac{A(\cos x)-B(\cos x)\sin x}{C(\cos x)-D(\cos x)\sin x},$$

而 $F(-x)=-F(x)$,

故 $$F(x)=\frac{A(\cos x)+B(\cos x)\sin x}{C(\cos x)+D(\cos x)\sin x}=\frac{-A(\cos x)+B(\cos x)\sin x}{C(\cos x)-D(\cos x)\sin x}$$

$$=\frac{2B(\cos x)\sin x}{2C(\cos x)}=\frac{B(\cos x)\sin x}{C(\cos x)}.$$

由此觀之，欲求 $F(x)$ 之積分，令 $\cos x=t$ 足矣.

例一　求 $\int\frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$.

令 $\cos x=t$,

則 $$\int\frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}=-\int\frac{dt}{at^2+b(1-t^2)}$$

$$=-\frac{1}{b}\int\frac{dt}{1+\frac{a-b}{b}t^2}.$$

如 $$\frac{a-b}{b}>0.$$

則 $$\int\frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}=\frac{1}{\sqrt{(a-b)b}}\arctan\left\{\sqrt{\frac{a-b}{b}}\cos x\right\}+c.$$

如 $$\frac{a-b}{b}<0.$$

則 $$\int\frac{\sin x\,dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}=\frac{1}{2\sqrt{(b-a)b}}\log\left|\frac{1-\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x}{1+\sqrt{\frac{b-a}{b}}\cos x}\right|+c.$$

(c) 設 $F(\pi-x)=-F(x)$. 則倣(b)之推論, 卽如 $F(x)$ 爲 $\sin x$ 之有理函數與 $\cos x$ 之乘積 $R(\sin x)\cos x$ (就中 R 爲 $\sin x$ 之有理函數). 欲求 $F(x)$ 之積分, 令 $\sin x=t$ 可也.

10. 有理函數 $R(Sh\,x, Ch\,x)$ 之積分.

令 $Th\frac{x}{2}=t$

則 $$Sh\,x=\frac{2t}{1-t^2},\quad Ch\,x=\frac{1+t^2}{1-t^2},\quad dx=\frac{2\,dt}{1-t^2}.$$

故　$$\int R(Sh\,x, Ch\,x)\,dx=\int R\left(\frac{2t}{1-t^2},\frac{1+t^2}{1-t^2}\right)\frac{2\,dt}{1-t^2}.$$

上式右邊爲t之有理函數之積分,可用前節之方法求之.

例一　求$\displaystyle\int\frac{dx}{5\,Ch\,x+3\,Sh\,x+4}$.

令　$Th\frac{x}{2}=t$

則　$$\int\frac{dx}{5\,Ch\,x+3\,Sh\,x+4}=\int\frac{2\,dt}{(t+3)^2}=-\frac{2}{t+3}+c$$

$$=-\frac{2}{Th\frac{x}{2}+3}+c.$$

如函數R爲$Th\,x$之有理函數,則可令$Th\,x=t$以求其積分.

例一　求$\displaystyle\int\frac{dx}{Th^2\,x}$.

令　$Th\,x=t$,

則　$$\int\frac{dx}{Th^2\,x}=\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}=\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{1-t^2}$$

$$=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+c$$

$$=-\frac{1}{Th\,x}-\frac{1}{2}\log\left|\frac{Th\,x-1}{Th\,x+1}\right|+c.$$

III. 雜 例

1. $\tan^n x$ 及 $\cot^n x$ 之積分(n爲正整數).

令 $I_n=\int \tan^n x\,dx.$

因 $d(\tan^{n-1}x)=(n-1)\tan^{n-2}x\,(1+\tan^2 x)\,dx,$

故 $I_n=\int \tan^n x\,dx=\dfrac{\tan^{n-1}x}{n-1}-\int \tan^{n-2}x\,dx,$

即 $I_n=\dfrac{\tan^{n-1}x}{n-1}-I_{n-2}.$

同樣得 $I_{n-2}=\dfrac{\tan^{n-3}x}{n-3}-I_{n-4},$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$

又 $I_1=\int \tan x\,dx=-\log|\cos x|+c,\ I_0=\int dx=x+c.$

設 n 爲偶數,

則得
$$I_n=\int \tan^n x\,dx=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-\frac{\tan^{n-3}x}{n-3}+\frac{\tan^{n-5}x}{n-5}-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}-1}(\tan x-x)+c.$$

設 n 爲奇數,

則得
$$I_n=\int \tan^n x\,dx=\frac{\tan^{n-1}x}{n-1}-\frac{\tan^{n-3}x}{n-3}+\frac{\tan^{n-5}x}{n-5}-\cdots+(-1)^{\frac{n+1}{2}}\left[\frac{\tan^2 x}{2}+\log|\cos x|\right]+c.$$

同理設 n 爲偶數,

得 $$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3} x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5} x}{n-5}$$

$$+\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}(\cot x + x) + c.$$

設 n 爲奇數,

得 $$\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3} x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5} x}{n-5}$$

$$+\cdots\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{\cot^2 x}{2} + \log|\sin x|\right] + c.$$

2. $\sin^{2m} x \cos^{2n} x$ 之積分.

設 m 爲整數,而令 $I_{m,n} = \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx$,

則此式可書爲

$$I_{m,n} = \int \sin^{2m-1} x \cos^{2n} x \sin x\,dx,$$

因 $-\frac{1}{2n+1}\cos^{2n+1} x$ 之微分爲 $\cos^{2n} x \sin x\,dx$, 故用分部積分

得 $$I_{m,n} = -\sin^{2m-1} x \frac{\cos^{2n+1} x}{2n+1}$$

$$+\frac{2m-1}{2n+1}\int \sin^{2m-2} x \cos^{2n} x\,(1-\sin^2 x)\,dx,$$

卽

$$(A)\qquad I_{m,n}=-\frac{\sin^{2m-1}x\cos^{2n+1}x}{2(m+n)}+\frac{2m-1}{2(m+n)}I_{m-1,n}.$$

由(A)式逐次求其分部積分,則每次可將m之值減少1,而n之值不變.若$\sin x$之指數爲負,則以$1-m$代(A)式之m,得

$$(B)\qquad I_{-m,n}=\frac{\sin^{1-2m}x\cos^{2n+1}x}{1-2m}+\frac{2(n-m+1)}{1-2m}I_{-m+1,n}.$$

同樣得

$$(C)\qquad I_{m,n}=\frac{\sin^{2m+1}x\cos^{2n-1}x}{2(m+n)}+\frac{2n-1}{2(m+n)}I_{m,n-1}.$$

$$(D)\qquad I_{m,-n}=-\frac{\sin^{2m+1}x\cos^{1-2n}x}{1-2n}+\frac{2(m+1-n)}{1-2n}I_{m,-n+1}.$$

用此四公式,則最後可令m,n爲零.若$m+n=0$,

則 $\int\sin^{2m}x\cos^{2n}x\,dx=\int\tan^{m}x\,dx$,故可依前目以求之.

3. 餘弦乘積之積分.

茲求 $\int\cos(ax+b)\cos(a'x+b')\cos(a''x+b'')\cdots\cdots dx.$

由三角公式

得 $$\cos u\cos v=\frac{1}{2}\cos(u+v)+\frac{1}{2}\cos(u-v).$$

由是數個餘弦之積,若其角度均爲x之一次式,可化爲數個餘弦之和,其角度亦均爲x之一次式.

故 $$\int \cos(ax+b)\cos(a'x+b')\cos(a''x+b'')\cdots\cdots dx$$

$$=\int \Sigma \cos(Ax+B)dx.$$

上式每項積分之形,有下列兩種:

(a)　$A \neq 0.\quad \int \cos(Ax+B)dx=\frac{1}{A}\sin(Ax+B)+c.$

(b)　$A=0,\quad \int \cos B\,dx=x\cos B+c.$

應用此法,亦可求 $\sin^m x\cos^n x$ 之積分 (就中 m, n 表正整數).

因 $$\sin^m x\cos^n x=\cos^m\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos^n x,$$

故 $\sin^m x\cos^n x$ 可化爲數個餘弦及正弦之和.其角度均爲 x 之倍數者,而 $\sin^m x\cos^n x$ 之積分可立得矣.

4. $e^{ax} R(\sin x, \cos x)$ 之積分.

設 $R(\sin x, \cos x)$ 爲 $\sin x$ 及 $\cos x$ 之多項式,則 $\int e^{ax} R(\sin x, \cos x)\,dx$ 每項之形爲 $\int e^{ax}\sin^m x\cos^n x\,dx$, 由前目已知 $\sin^m x\cos^n x$ 可化爲 $\Sigma \sin px+\Sigma\cos qx$, 故求下列之兩積分足矣.

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\qquad \int e^{ax}\sin bx\,dx.$$

應用分部積分，

得 $$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}\sin bx}{b}-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{e^{ax}\cos bx}{b}+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx.$$

於是

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2},$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}.$$

5. $H(x)\,e^{ax}\sin bx$ 及 $H(x)\,e^{ax}\cos bx$ 之積分 [$H(x)$ 表 x 之多項式].

應用分部積分，令 $u=H(x)\,e^{ax}$, $dv=\sin bx\,dx$, 則得

(1) $$\int H(x)\,e^{ax}\sin bx\,dx=-\frac{1}{b}H(x)\,e^{ax}\cos bx$$
$$+\frac{1}{b}\int H'(x)\,e^{ax}\cos bx\,dx+\frac{a}{b}\int H(x)e^{ax}\cos bx\,dx.$$

又令 $u=H(x)\,e^{ax}$, $dv=\cos bx\,dx$, 則得

(2) $$\int H(x)\,e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}H(x)\,e^{ax}\sin bx$$
$$-\frac{1}{b}\int H'(x)e^{ax}\sin bx\,dx-\frac{a}{b}\int H(x)e^{ax}\sin bx\,dx.$$

計及 (1), (2) 兩式，得

(3)
$$\int H(x)\,e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}H(x)\,e^{ax}$$
$$-\frac{a}{a^2+b^2}\int H'(x)\,e^{ax}\sin bx\,dx$$
$$+\frac{b}{a^2+b^2}\int H'(x)\,e^{ax}\cos bx\,dx.$$

及

(4)
$$\int H(x)\,e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}H(x)\,e^{ax}$$
$$-\frac{a}{a^2+b^2}\int H'(x)\,e^{ax}\cos bx\,dx-\frac{b}{a^2+b^2}\int H'(x)\,e^{ax}\sin bx\,dx.$$

逐次用(3),(4)兩式,至得

$$\int e^{ax}\sin bx=\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}e^{ax},$$
$$\int e^{ax}\cos bx=\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}e^{ax}.$$

即可解決本題.

第九章之習題

求有理函數之積分:

(1) $\int\frac{(x^2+1)\,dx}{(x-2)^3}$.　　(2) $\int\frac{(2x^4+1)\,dx}{x^3(x^2+x+1)}$.

(3) $\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+1)^3}$.　　(4) $\int\frac{dx}{x^3-1}$.

(5) $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.　　　(6) $\int\frac{dx}{ax^4+bx^2+c}$.

(7) 設α與β為不相等之兩數,今欲$\int\frac{(x-a)(x-b)}{(x-\alpha)^2(x-\beta)^2}dx$為$x$之代數函數,則$a, b, \alpha, \beta$四數應有何關係.

求x及$\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{\frac{p}{q}}$之有理函數之積分:

(8) $\int\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$.　　　(9) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}$.

(10) $\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}+2x\sqrt{x-1}\right)dx$.　　　(11) $\int\frac{xdx}{2+\sqrt{1+x}}$.

(12) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.　　　(13) $\int\frac{\sqrt{x+1}}{6(\sqrt[3]{x+1})}dx$.

(14) $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

求下列二項式之積分:

(15) $\int\frac{x^5\,dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.　　　(16) $\int\frac{dx}{(1+x^3)^{\frac{1}{3}}}$.

(17) $\int\frac{x^5}{(a+bx^2)^{\frac{1}{2}}}$.

求x及$\sqrt{ax^2+bx+c}$之有理函數之積分.

(18) $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}}$.　　　(19) $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}$.

(20) $\int\frac{xdx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.　　　(21) $\int x^3\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}\,dx$.

(22) $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}dx$.　　　(23) $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}$.

求下列指數函數之積分:

(24) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{3x}-1}\,dx.$　　(25) $\int \frac{a^x}{ma^x+n}\,dx$

(26) $\int \sqrt{1-e^{2x}}\,dx.$

求 $\sin x$ 及 $\cos x$ 之有理函數之積分:

(27) $\int \frac{dx}{5+4\cos x}.$　　(28) $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}.$

(29) $\int \frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x}.$　　(30) $\int \frac{dx}{\tan x-\tan a}.$

(31) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$　　(32) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

(33) $\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx.$　　(34) $\int \cos^4 x \sin^3 x\,dx.$

(35) $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}.$　　(36) $\int \frac{dx}{(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)^2}.$

求 $Sh\,x$ 及 $Ch\,x$ 之有理函數之積分:

(37) $\int \frac{dx}{Shx-Sha}.$　　(38) $\int \frac{dx}{Thx-Tha}.$

(39) $\int \frac{dx}{Ch^2x+Sh^2x}.$　　(40) $\int \frac{dx}{Th^3x}.$

求下列餘弦乘積之積分:

(41) $\int \cos x\cos 2x\cos 3x\,dx.$

(42) $\int \cos(x+2)\cos(2x+3)\cos(3x+4)\,dx.$

用分部積分方法求積:

(43) $\int \frac{\arctan x}{x^2}\,dx.$　　(44) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

(45) $\int x^2 e^x \sin 3x\,dx.$　　(46) $\int x^2 e^x \cos 3x\,dx.$

試求下列之積分:

(47) $\int e^{ax}\sin^3 x\,dx.$ (48) $\int e^{ax}\cos^3 x\,dx.$

(49) $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$ (50) $\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$

(51) $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}.$ (52) $\int \frac{dx}{(a+b\sin x)^2}.$

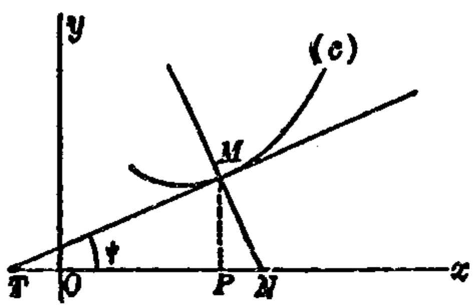
第十章

平面幾何應用

I. 切線長,法線長,及次切線長,次法線長

1. 正交位標制.

設曲線(c)在$M(x, y)$點之切線法線(圖35)與ox軸依次交於T, N. 由M引y軸之平行線與ox軸相交於P. 則MT稱爲切線長(Length of Tangent), MN稱爲法線長(Length of Normal), PT稱爲次切線長(Length of Subtangent), PN稱爲次法線長(Length of Subnormal).



(圖 35)

令MT與ox軸之交角爲ψ. 因$\tan\psi=\dfrac{dy}{dx}=y'$, 故依定義得

$$次切線長=PT=y\cot\psi=\frac{y}{y'},$$

$$次法線長=PN=y\tan\psi=y\,y',$$

切線長 $=MT=y\dfrac{1}{\sin\psi}=y\dfrac{\sqrt{1+\tan^2\psi}}{\tan\psi}$

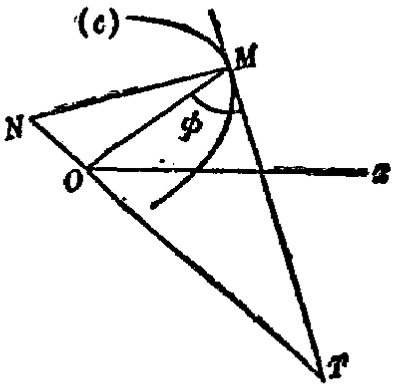
$=y\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y'}$,

法線長 $=MN=y\dfrac{1}{\cos\psi}=y\sqrt{1+\tan^2\psi}$

$=y\sqrt{1+y'^2}$

2. 極位標制.

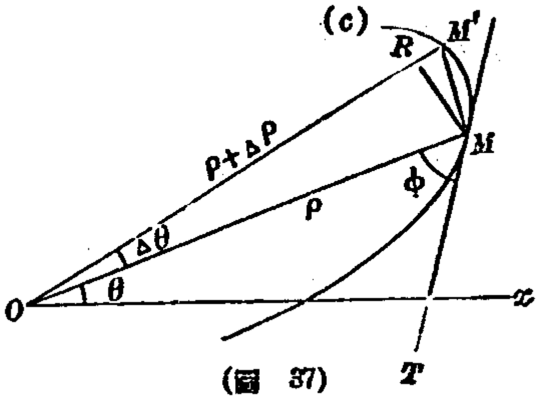
設曲線(c)在$M(\rho,\theta)$之切線為MT,法線為MN(圖36).聯結極點o與M點得半徑動徑oM.過o引直線垂直於oM,與MT交於T,與MN交於N.則MT稱為極切線長(Length of Polar Tangent),MN稱為極法線長(Length of Polar Normal),oT稱為極次切線長(Length of Polar Subtangent),oN稱為次極法線長(Length of Polar Subnormal).茲先斷定oM與MT之交角ϕ,以便推求MT,MN,oT,oN之值:



(圖 36)

令 $M'(\rho+\triangle\rho,\theta+\triangle\theta)$ 為 (c) 上 M之鄰點 (圖37).引割線MM'.又由M引直線MR垂直於oM',交 oM' 於 R.則

$$oM'=\rho+\triangle\rho,\quad MR=\rho\sin\triangle\theta,\quad oR=\rho\cos\triangle\theta.$$



(圖 37)

而 $\tan RM'M=\dfrac{MR}{RM'}=\dfrac{MR}{oM'-oR}=\dfrac{\rho\sin\Delta\theta}{\rho+\Delta\rho-\rho\cos\Delta\theta}.$

當$\Delta\theta$趨近於零時,則M'趨近於M,而割線MM'以切線MT爲極限,且角$RM'M$以ϕ爲極限.由是

$$\tan\phi=\lim_{\Delta\theta\doteq 0}\frac{\rho\sin\Delta\theta}{\rho+\Delta\rho-\rho\cos\Delta\theta}$$

$$=\lim_{\Delta\theta\doteq 0}\frac{\rho\sin\Delta\theta}{2\rho\sin^2\dfrac{\Delta\theta}{2}+\Delta\rho},$$

即
$$\tan\phi=\lim_{\Delta\theta\doteq 0}\frac{\rho\dfrac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\dfrac{2\rho\sin^2\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta}+\dfrac{\Delta\rho}{\Delta\theta}}$$

$$=\lim_{\Delta\theta\doteq 0}\frac{\rho\dfrac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\dfrac{\rho\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}\sin\dfrac{\Delta\theta}{2}}{\dfrac{\Delta\theta}{2}}+\dfrac{\Delta\rho}{\Delta\theta}}$$

而 $$\lim_{\Delta\theta\doteq 0}\frac{\Delta\rho}{\Delta\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}=\rho', \qquad \lim_{\Delta\theta\doteq 0}\sin\frac{\Delta\theta}{2}=0,$$

$$\lim_{\Delta\theta\doteq 0}\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}=1, \qquad \lim_{\Delta\theta\doteq 0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}}=1,$$

故 $$\tan\phi=\rho\frac{d\theta}{d\rho}=\frac{\rho}{\rho'}.$$

$\tan\phi$之值已定,遂得

$$MT=\frac{\rho}{\cos\phi}=\rho\sqrt{1+\tan^2\phi}=\rho\frac{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}}{\rho'},$$

$$MN=\frac{\rho}{\sin\phi}=\rho\sqrt{1+\cot^2\phi}=\sqrt{\rho^2+\rho'^2},$$

$$OT=\rho\tan\phi=\frac{\rho^2}{\rho'}$$

$$ON=\rho\cot\phi=\rho'.$$

II. 曲線之弧長

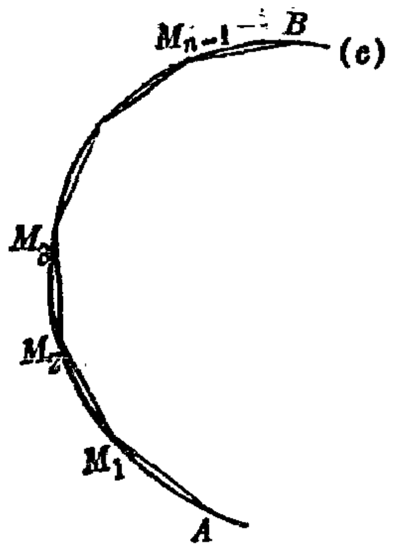
1. 弧長之計算.

設弧AB爲曲線(c)之一段.作弧AB之內接n邊折線$AM_1M_2\cdots\cdots M_{n-1}B$(圖38).若$n$無限增大,且每邊以零爲極限,則折線之長有一極限,玆證明之於下.折線之長之極限名曰AB之弧長.

設位標軸爲正交，曲線(c)之參數方程式爲

$$x=f(t),\qquad y=\phi(t).$$

令a, b依次爲參數t對應於A, B之值，就中$a<b$. 并設當t由a增變至b時，(x, y)點常依一定之向晝弧AB(否則將弧AB分段，使t增變時，此條件成立於弧AB之各段). 在弧AB內取



(圖 38)

$n-1$點，如$M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_{n-1}$. 更令$t_i$爲$t$對應於$M_i$之值，$C_i$爲$M_{i-1}M_i$邊之長.

則
$$a<t_1<t_2<\cdots\cdots<t_{n-1}<b,$$

$$C_i=\sqrt{[f(t_i)-f(t_{i-1})]^2+[\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})]^2}.$$

但依中值定理，

$$f(t_i)-f(t_{i-1})=(t_i-t_{i-1})f'(h_i),$$

$$\phi(t_i)-\phi(t_{i-1})=(t_i-t_{i-1})\phi'(k_i),$$

就中h_i, k_i介於t_{i-1}, t_i之間(參閱第三章第IX節第3目)

故
$$C_i=(t_i-t_{i-1})\sqrt{f'^2(h_i)+\phi'^2(k_i)}.$$

而折線之長爲

$$\overline{AM_1}+\overline{M_1M_2}+\cdots\cdots+\overline{M_{n-1}B}=\Sigma C_i.$$

卽求當 $t_1-a, t_2-t_1, \cdots\cdots b-t_{n-1}$ 皆趨近於零時 ΣC_i 之極限足矣.今先證明 C_i 得以 $\gamma_i=(t_i-t_{i-1})\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\phi'^2(t_{i-1})}$ 代之,而 ΣC_i 之極限不變.

蓋因
$$\frac{C_i}{\gamma_i}=\frac{\sqrt{f'^2(h_i)+\phi'^2(k_i)}}{\sqrt{f'^2(t_{i-1})+\phi'^2(t_{i-1})}}.$$

故當 t_i 趨近於 t_{i-1} 時, h_i, k_i 均以 t_{i-1} 爲極限.由是 $\frac{C_i}{\gamma_i}$ 之極限爲 1,而 C_i 與 γ_i 爲相當之無窮小.依第三章第I節第5目定理三,知 ΣC_i 與 $\Sigma\gamma_i$ 有相同之極限.又依第四章定積分之定義, $\Sigma\gamma_i$ 之極限(折線之邊數增至無窮),卽定積分 $\int_a^b\sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)}\,dt$ 也.故弧 AB 之長 s 可表示如下

$$s=\int_a^b\sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)}\,dt.$$

2. 定理.

當弧長趨近於零時,弧長與弦長之比值以 1 爲極限.

蓋取無窮小之弧長 M_0M_1,令 t_0, t_1 爲 t 對應於 M_0, M_1 之值 $(t_0<t_1)$, s 爲弧 M_0M_1 之長,則

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)}\,dt.$$

應用積分中值定理(第四章第II節第8目之備考)

得
$$s=(t_1-t_0)\sqrt{f'^2(\xi)+\phi'^2(\xi)},\quad t_0<\xi<t_1.$$

又令C為弦M_0M_1之長,則

$$C=\sqrt{[f(t_1)-f(t_0)]^2+[\phi(t_1)-\phi(t_0)]^2}=(t_1-t_0)\sqrt{f'^2(h)+\phi'^2(k)},$$

就中h,k介於t_0,t_1之間.

由是
$$\frac{s}{C}=\frac{\sqrt{f'^2(\xi)+\phi'^2(\xi)}}{\sqrt{f'^2(h)+\phi'^2(k)}}.$$

當M_1趨近於M_0,t_1趨近於t_0,而ξ,h,k亦趨近於t_0.故$\frac{s}{C}$之極限為1.

3. 正負號之採擇.

設o,M為曲線(c)上之兩點,o為定點,M為動點,t_0,t依次為參數t對應於o,M之值.茲分兩情形如次:

(其一)　當一點畫(c)由o至M時,若t之值由t_0遞增至t,則oM之弧長s為

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)}\,dt.$$

故s為t之函數,其對於t之引數為

$$\frac{ds}{dt}=+\sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)}.$$

(其二)　當一點畫(c)由o至M時,若t之值由t_0遞減至t.

則
$$s=-\int_{t_0}^{t}\sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)}\,dt,$$

而 $$\frac{ds}{dt}=-\sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)}.$$

無論何種情形,恆得

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=f'^2(t)+\phi'^2(t).$$

$$ds^2=f'^2(t)dt^2+\phi'^2(t)\,dt^2$$

$$=dx^2+dy^2.$$

而 $$ds=\pm\sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)}\,dt.$$

若視弧長s為代數值,則當s與t同時增加,上式應採正號,否則應採負號.

當已與曲線(c)之方程式為x與y之關係時,欲求(c)由$A(a,c)$至$B(b,d)$之弧長,可用下列公式求之,

$$s=\pm\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

$$s=\pm\int_c^d\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy.$$

4. 例.

例一——求懸線之弧長.

設有懸線,其方程式為

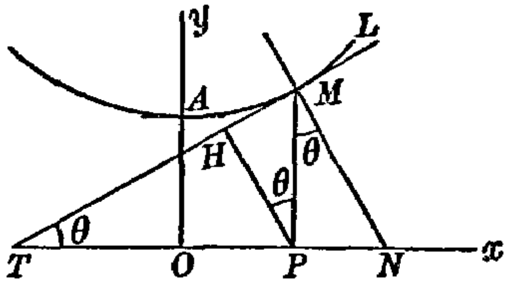
$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)=aCh\frac{x}{a},$$

就中a為常數.茲先究此曲線之形狀.

以 $-x$ 易方程式中之 x, 則 y 之值不變, 故此曲線對稱於 oy 軸. 而 y 之引數爲 $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)=Sh\frac{x}{a}$, 當 x 爲正數, y' 之號常爲正. 當 x 由 o 增至 $+\infty$, y 則由 a 增至 $+\infty$. 依此變値卽得曲線由 $A(o, a)$ 伸至 $+\infty$ 之一枝 AL. 又在 A 點 y' 之值爲零, 故該點之切線平行於 ox 軸. 欲求 AL 在無窮遠處之漸近方向, 究 $\frac{y}{x}$ 之極限可矣.

因
$$\frac{y}{x}=\frac{a}{2}\left[\frac{e^{\frac{x}{a}}}{x}+\frac{e^{-\frac{x}{a}}}{x}\right],$$

應用 Hospital 法則, 易知 $\frac{e^{\frac{x}{a}}}{x}$ 爲無窮, 而 $\frac{e^{-\frac{x}{a}}}{x}$ 之極限爲零, 卽 $\frac{y}{x}$ 爲無窮. 故 AL 以 oy 軸爲拋物方向. 遂得懸線之形如右(圖 39).



(圖 39)

命 x 爲自變數. 在曲線上取 $M(x, y)$ 點, 其横量 x 爲正數者. 而求 AM 之弧長.

因
$$ds^2=dx^2+dy^2,$$

而
$$dy=Sh\frac{x}{a}\,dx,$$

故
$$ds^2=\left(1+Sh^2\frac{x}{a}\right)dx^2,$$

$$=Ch^2\frac{x}{a}dx^2,$$

$$ds=\pm Ch\frac{x}{a}dx.$$

如取A爲量弧之原點,弧之正向與x之正向相同,

則
$$ds=+Ch\frac{x}{a}dx.$$

由是AM之弧長爲

$$s=\int_0^x Ch\frac{x}{a}dx=a\,Sh\frac{x}{a}.$$

令M點之切線MT與ox軸之交角爲θ,

則
$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}=Sh\frac{x}{a}.$$

故
$$s=a\tan\theta.$$

又因
$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+Sh^2\frac{x}{a}=Ch^2\frac{x}{a},$$

即
$$y\cos\theta=a.$$

過M引直線MP垂直於ox,交ox於P,引直線PH垂直於MT,交MT於H.則在直角三角形MHP中,角HPM等於θ.

而
$$PH=MP\cos\theta=y\cos\theta=a,$$

$$MH=PH\tan\theta=a\tan\theta=s,$$

故
$$MH=AM\text{之弧長}.$$

例二——求擺線之弧長.

當一圓滾轉於一定直線上,圓周上任一點M之軌跡,稱曰擺線(Cycloid)(圖40).取正交位標軸oxy,定直線爲ox軸,以M在ox軸之處爲原點,並設M之位標爲(x, y),圓之半徑爲R,圓心爲c,則當圓與ox之接觸點畫oI時,M點畫曲線oM,故圓弧IM等於線段$\overline{oI}$.命交角(CM,CI)等於一參數t,

則　$pr.\,oM = pr.\,oI + pr.\,IC + pr.\,CM$. ($pr.$ 爲 projection 之省寫表投影之意).

故

$$x = Rt + R\cos(CM, ox) = Rt + R\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= Rt - R\sin t,$$

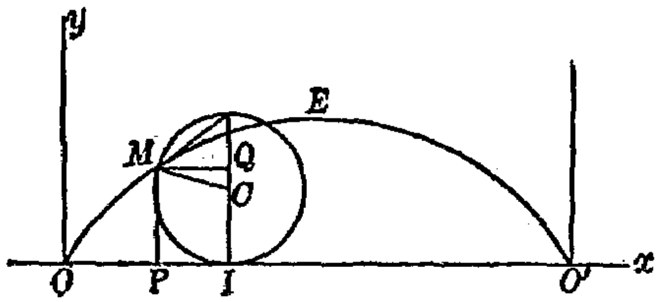
$$y = R + R\cos(CM, oy) = R + R\cos(t + \pi)$$

$$= R - R\cos t$$

即擺線之參數方程式爲

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t).$$

若以$2\pi + t$易t,則y之值不變,而x之值變爲$x + 2\pi R$.由此可見擺線爲無限相同之弧首尾相接所構成.每一弧首尾均在ox軸上,其距離爲$2\pi R$,又以$2\pi - t$易t,則x變爲$2\pi R - x$,而y之值不變,故此曲線又對稱於



(圖 40)

$x=\pi R$之直線.由此觀之,欲繪畫擺線,應知其一弧 oEo' 之形狀;欲知其一弧 oEo' 之形狀,令 t 由 o 增變至 π,而察 x 與 y 之變值足矣.

令 M 爲擺線上之一點,對於此點之參數值 t 在 o 與 2π 之間者.茲取 o 向量弧之原點,弧之增向與 t 之增向相同.而求 oM 之弧長 s.

因 $$dx=R(1-\cos t)dt,\quad dy=R\sin t\,dt,$$

而 $$ds^2=dx^2+dy^2=R^2[(1-\cos t)^2+\sin^2 t]dt^2$$
$$=2R^2(1-\cos t)dt^2$$
$$=4R^2\sin^2\frac{t}{2}dt^2,$$

故 $$ds=+2R\sin\frac{t}{2}dt.$$

由是 $$s=2R\int_o^t\sin\frac{t}{2}dt=4R\left(1-\cos\frac{t}{2}\right),$$

而擺線一弧 oEo' 之長爲 $8R$.

5. 極位標制弧長之計算.

一點之正交位標x, y與極位標ρ, θ之關係爲

$$x=\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta.$$

故
$$dx=-\rho\sin\theta\,d\theta+\cos\theta\,d\rho,$$
$$dy=\rho\cos\theta\,d\theta+\sin\theta\,d\rho.$$

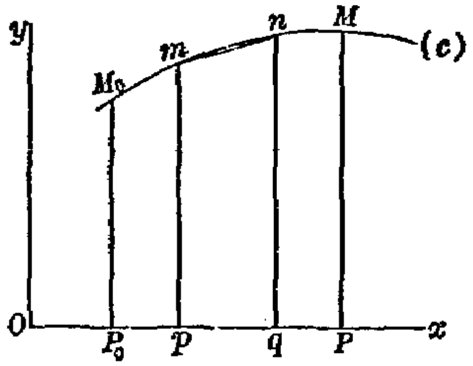
而
$$ds=\pm\sqrt{dx^2+dy^2}=\pm\sqrt{\rho^2d\theta^2+d\rho^2}$$
$$=\pm\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\pm\sqrt{\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2+1}\,d\rho.$$

由是欲得極位標方程式之曲線由(ρ_1,θ_1)至(ρ_2,θ_2)之弧長,可用下列公式求之:

$$s=\pm\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\,d\theta,$$
$$s=\pm\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{\rho^2\left(\frac{d\theta}{d\rho}\right)^2+1}\,d\rho.$$

6. 備考——旋轉面之面積.

設在正交位標軸oxy之平面上,有平曲線(c)(圖41)$y=F(x)$,令M_0, M爲曲線之兩點,其橫量依次爲a, b者.今將弧M_0M任意內接折線,而使曲線繞ox軸旋轉,則當折線各邊趨近於零時,折線所產生之面積有



(圖 41)

一極限.可證之如下.此極限名曰弧 M_0M 繞 ox 軸旋轉所產生之面積,即旋轉面之面積也.

令 mn 爲折線之一邊,此邊產生截頭錐面 (Frustum of a Cone) 之側面積 $\Delta\omega=\pi(pm+qn)\overline{mn}$,就中 p,q 表 mn 在 ox 軸之投影.茲求各邊之投影 pq 趨近於零時 $\Sigma\Delta\omega$ 之極限.

令 y, $y+\Delta y$ 表 m,n 之縱量,即知 $\Delta\omega=\pi(2y+\Delta y)\overline{mn}$ 又令 Δs 表弧 $\widehat{mn}$ 之長度,而以 $\Delta\omega_1$ 表 $2\pi y\Delta s$,則因

$\dfrac{\Delta\omega}{\Delta\omega_1}=\dfrac{2y+\Delta y}{2y}\cdot\dfrac{\overline{mn}}{\Delta s}$,故 $\Delta\omega$ 與 $\Delta\omega_1$ 兩無窮小爲相當.而 $\Sigma\Delta\omega$ 之極限等於 $\Sigma\Delta\omega_1$ 之極限.

當 Δs 趨近於零時,$\Sigma\Delta\omega_1$ 之極限爲 $A=2\pi\int_a^b yds$,此定積分表示弧 M_0M 繞 ox 軸旋轉所產生之面積.

上式假定 a 小於 b,而 s 之增向與 x 之增向相同.

故
$$ds=+\sqrt{1+F'^2(x)}dx,$$

而
$$A=2\pi\int_a^b F(x)\sqrt{1+F'^2(x)}\,dx.$$

設曲線之方程式爲參數方程式 $x=f(t)$, $y=\phi(t)$ 對應於 M_0, M_1 兩點之參數爲 t_0, t_1.且當 a 增至 b 時,t 由 t_0 遞增或遞減至 t_1,

則
$$ds=\pm\sqrt{f'^2(t+\phi'^2(t)}\,dt.$$

而 $$A=\pm 2\pi\int_{t_0}^{t_1}\phi(t)\sqrt{f'^2(t)+\phi'^2(t)}\,dt.$$

此式右邊積分前之正負號,視t遞增遞減以爲斷.

例——若將擺線之一弧oEo'(見第4目)繞ox軸旋轉,試求此弧所產生之面積A.

因$y=R(1-\cos t)$, 且$ds=2R\sin\frac{t}{2}dt$,

故 $$A=2\pi\int_0^{2\pi}2R^2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt=8\pi R^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt.$$

$$=8\pi R^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt$$

$$=16\pi R^2\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\frac{t}{2}-1\right)d\cos\frac{t}{2}$$

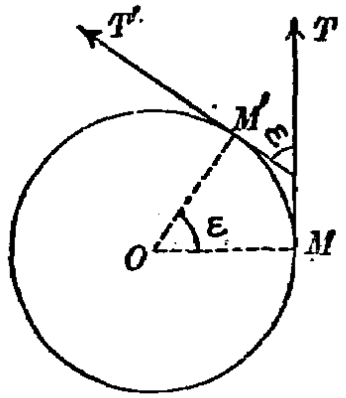
$$=\frac{64\pi R^2}{3}.$$

III. 曲率,曲率半徑,曲率中心,漸屈線及漸伸線

1. 曲率與曲率半徑之定義.

圓之大者,其弧之彎曲較小.圓之小者,其弧之彎曲則較大.職是之故,半徑之反商,稱曰圓之曲率(Curvature).設有以o爲心,R爲半徑之圓,於圓周上取任意之弧MM'小於半周者(圖42),於M,M'兩點作切線MT,

$M'T'$,使其向與弧之正向相同.令MT與$M'T'$之交角爲ε.因角$MoM'=\varepsilon$,故弧$MM'=R\varepsilon$.

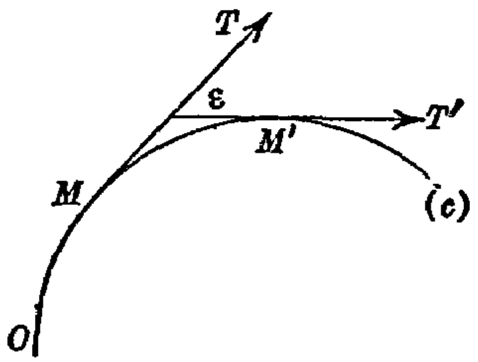


(圖 42)

而
$$\frac{1}{R}=\frac{\varepsilon}{弧\ MM'}.$$
由此觀之,無論弧MM'爲如何,比值$\frac{\varepsilon}{弧\ MM'}$恆爲常數.換言之,圓之曲率處處相同.

圓之曲率,已如上述.茲更及平曲線之曲率如下:

設M, M'爲平曲線(c)上兩鄰點(圖 43).於M, M'作切線MT, $M'T'$,使其向與弧之正向相同.令MT, $M'T'$之交角爲ε.當M及M'在曲線上移動,比值$\frac{\varepsilon}{弧\ MM'}$隨之而變,此比值名曰弧$MM'$之平均曲率



(圖 43)

(Average Curvature).當M'趨近於M,如比值$\frac{\varepsilon}{弧\ MM'}$有一極限,則此極限名曰曲線在$M$點之曲率,此曲率之反商,則名曰$M$點之<u>曲率半徑</u> (Radius of Curvature).在(c)上取一點o,並選定弧之正向,則凡(c)之一點M,均對應於一代數值s.其絕對值爲oM之弧長.

設曲線上一點之位標爲參數t之函數,則s亦爲t之函數,且可以下式定之

$$ds^2=dx^2+dy^2.$$

如令MT與ox軸之交角爲a,則a亦爲t之函數.當M移動至鄰點M',則s變爲$s+\Delta s$,a變爲$a+\Delta a$(Δs, Δa爲代數值).

由是　　$\varepsilon=|\Delta a|$,　弧$M'M=|\Delta s|$.

可見　　$$\frac{\varepsilon}{\text{弧}\,MM'}=\left|\frac{\Delta a}{\Delta s}\right|.$$

當M'趨近於M, $\left|\frac{\Delta a}{\Delta s}\right|$趨近於一極限$\frac{da}{ds}$,就中$da$, ds表a, s對於t之微分.故M點曲率之值爲$\left|\frac{da}{ds}\right|$,而曲率半徑爲$\left|\frac{ds}{da}\right|$.

[備考]——此定義可用於空間扭曲線(Skew Curve).

2. 曲率與曲率半徑之求法.

曲線之方程式,有以表縱橫量之關係者,有以參數表位標者,有屬極位標制者.因此種方程式之不同,而曲率與曲率半徑公式之形遂異.不過可藉知其一足以推其餘耳.茲分述公式之形如下:

(一) 方程式表縱橫量之關係者.

令x爲自變數,

則
$$ds=\pm\sqrt{1+y'^2}\,dx$$
若s之正向與x之正向相同,則上式方根之號爲正,否則爲負.

因
$$\tan\alpha=y',$$
故
$$\alpha=\operatorname{arc}\tan y',$$
$$d\alpha=\frac{y''}{1+y'^2}dx.$$
以ds, $d\alpha$之值代入$\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$,遂得$M$點之曲率爲
$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$
而M點之曲率半徑爲
$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$
若$y''=0$(即如M爲反曲點),則M點之曲率爲零,而曲率半徑爲無窮.若$y''\neq 0$,則於M點鄰近,曲線同在MT之一側,讀者可藉Taylor之展式證之.

(二) 方程式以參數表位標者.

設曲線之參數方程式爲
$$x=f(t),\qquad y=\phi(t).$$

因
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left\{\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right\}\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

故以$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$之值代入K及R之等式，卽得

$$K=\frac{\left|\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right|}{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{|dx\,d^2y-dy\,d^2x|}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$R=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{|dx\,d^2y-dy\,d^2x|}.$$

玆更示直接推求之法如次：

若命x', y', x'', y''表x, y對t之第一及第二引數，

則因
$$K=\left|\frac{da}{ds}\right|,$$

而
$$ds^2=dx^2+dy^2=(x'^2+y'^2)\,dt^2,$$

卽
$$ds=\pm\sqrt{x'^2+y'^2}\,dt.$$

又因切線之角係數爲 $\frac{y'}{x'}$,

故 $$\alpha=\arc\tan\frac{y'}{x'}.$$

$$d\alpha=\frac{1}{1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2}\cdot\frac{x'y''-y'x''}{x'^2}dt=\frac{x'y''-y'x''}{x'^2+y'^2}dt.$$

由是 $$K=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y''-y'x''|}.$$

[備考]——空間扭曲線 $x=f(t)$, $y=\phi(t)$, $z=\psi(t)$ 之曲率半徑 R 以下式定之.

$$R^2=\frac{ds^6}{A^2+B^2+C^2},$$

就中 $$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

$$A=dy\,d^2z-dz\,d^2y,\ B=dz\,d^2x-dx\,d^2z,$$

$$C=dx\,d^2y-dy\,d^2x.$$

其證明非本書所及.

(三) 方程式屬極位標制者.

設曲線方程式表極位標 ρ,θ 之關係.若依變數更換方法,則由前(二)段令 $t=\theta$,

得
$$K=\frac{\left|\frac{dx}{d\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2}-\frac{dy}{d\theta}\frac{d^2x}{d\theta^2}\right|}{\left[\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

但
$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$

故
$$\frac{dx}{d\theta}=-\rho\sin\theta+\cos\theta\frac{d\rho}{d\theta},$$

$$\frac{dy}{d\theta}=+\rho\cos\theta+\sin\theta\frac{d\rho}{d\theta},$$

$$\frac{d^2x}{d\theta^2}=-\rho\cos\theta-2\sin\theta\frac{d\rho}{d\theta}+\cos\theta\frac{d^2\rho}{d\theta^2},$$

$$\frac{d^2y}{d\theta^2}=-\rho\sin\theta+2\cos\theta\frac{d\rho}{d\theta}+\sin\theta\frac{d^2\rho}{d\theta^2}.$$

以$\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$, $\frac{d^2x}{d\theta^2}$, $\frac{d^2y}{d\theta^2}$之值代入K之等式,即得

$$K=\frac{\left|\rho^2+2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right|}{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

而
$$R=\frac{1}{K}=\frac{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2+2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right|}$$

茲更直接求之如次:

依本章第I節第2目,令切線MT與ox軸之交角爲α,

則
$$\alpha=\theta+\phi.$$

求上式兩邊對於θ之引數，

得
$$\frac{d\alpha}{d\theta}=1+\frac{d\phi}{d\theta}.$$

但
$$\tan\phi=\frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}}\text{（參閱第I節第2目），}$$

$$\phi=\arctan\frac{\rho}{\frac{d\rho}{d\theta}}.$$

而ϕ對於θ之引數爲

$$\frac{d\phi}{d\theta}=\frac{\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}}{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}.$$

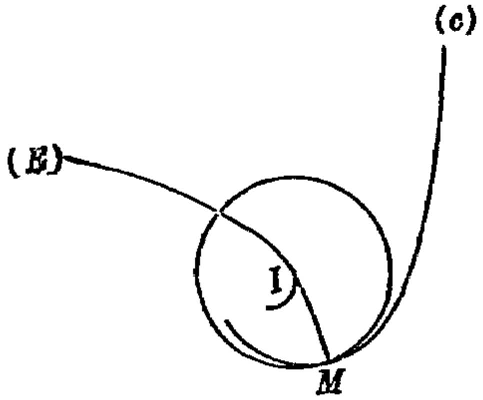
由是
$$\frac{d\alpha}{d\theta}=\frac{\rho^2+2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}}{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}.$$

又因
$$\frac{ds}{d\theta}=\pm\sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2}\text{（參閱第II節第5目），}$$

故
$$K=\frac{\left|\rho^2+2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right|}{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

$$R=\frac{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\rho^2+2\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\right|}.$$

3. 曲率中心與漸屈線之定義及求法.



(圖 44)

曲線(c)將其$M(x,y)$點之法線分爲兩段.在凹部處之段上,取一點I(圖44),令$MI=R$,則I點稱曰曲率中心 (Center of Curvature).當M畫曲線(c),I亦畫一曲線(E).此曲線(E)稱曰漸屈線(Evolute).又以I爲心,R爲半徑之圓,稱曰曲率圓 (Circle of Curvature).依切線法線之定義,易知曲線(c)在M點之法線之方程式爲

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x).$$

如令x_1, y_1爲I點之位標,則因I在M點法線上,

故
$$y_1-y=-\frac{1}{y'}(x_1-x).$$

依比例之定理,得

$$\frac{x_1-x}{-y'}=\frac{y_1-y}{1}=\pm\frac{\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2}}{\sqrt{1+y'^2}}=\pm\frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

即
$$\frac{x_1-x}{-y'}=\frac{y_1-y}{1}=\pm\frac{1+y'^2}{y''}.$$

若$y'>0$,則曲線依y之正向環抱.而I之縱量大於M之縱量,故$y_1-y>0$.若$y'<0$,則$y_1-y<0$.可見y_1-y之號常與y'之號同.

故
$$\frac{x_1-x}{-y'}=\frac{y_1-y}{1}=+\frac{1+y'^2}{y''}$$

由是

$$(1)\begin{cases} x_1=x-\dfrac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ y_1=y+\dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}$$

此卽曲率中心I之位標也.

若欲求(E)之方程式表x_1與y_1之關係者,則由(c)之方程式及(1)式消去x, y二變數足矣.

若曲線(c)之方程式為

$$x=f(t),\qquad y=\phi(t).$$

則以

$$y'=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}},\qquad y''=\frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3},$$

及x, y之等值代入(1)式,卽得漸屈線(E)之參數方程式如下:

$$(2)\begin{cases} x_1=f(t)-\dfrac{\dfrac{dy}{dt}\left[\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right]}{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}} \\ y_1=\phi(t)+\dfrac{\dfrac{dx}{dt}\left[\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2\right]}{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}} \end{cases}$$

例一——求拋物線 $y^2=4px$ 之漸屈線.

因 $$\frac{dy}{dx}=\frac{2p}{y},\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{4p^2}{y^3},$$

故由(1)式得

$$x_1=3x+2p,\quad y_1=-\frac{y^3}{4p^2}.$$

即 $$x=\frac{x_1-2p}{3},\ y=-(4p^2y_1)^{\frac{1}{3}}.$$

代入拋物線之方程式,遂得漸屈線之方程式

$$py_1^2=\frac{4}{27}(x_1-2p)^3.$$

例二——求擺線.

$$x=R(t-\sin t),$$

$$y=R(1-\cos t)$$

之漸屈線.

因 $$\frac{dx}{dt}=R(1-\cos t),\quad \frac{dy}{dt}=R\sin t,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=R\sin t,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=R\cos t,$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=2R^2(1-\cos t),$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=R^2(\cos t-1),$$

故由(2)式得

$$x_1=R(t+\sin t),$$

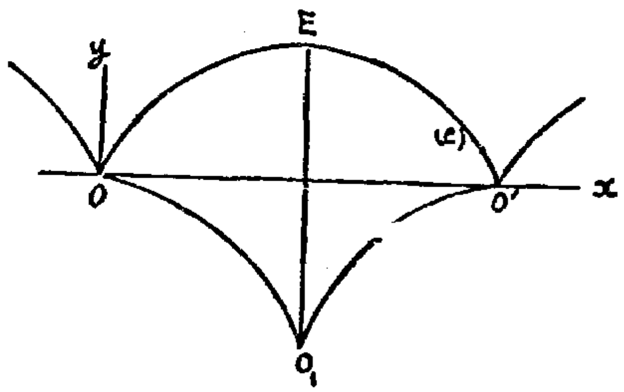
$$y_1=-R(1-\cos t).$$

若令 $t=t_1-\pi,\ X=x_1+\pi R,\ Y=y_1+2R,$

則
$$X=R(t_1-\sin t_1),$$

$$Y=R(1-\cos t_1).$$

此式與巳與擺線之方程式同形.可見擺線之漸屈線亦爲擺線(圖45).



(圖 45)

如欲由 $x_1=R(t+\sin t)$, $y_1=-R(1-\cos t)$ 消去 t, 則因

$$t=\text{arc vers}\left(\frac{-y_1}{R}\right),$$

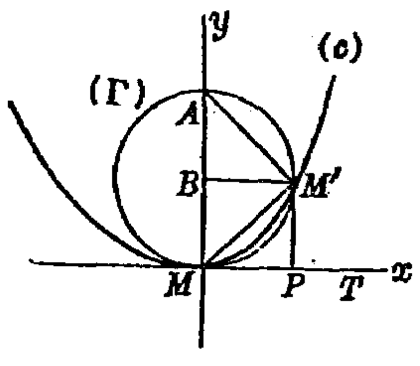
$$R\sin t=\pm R\sqrt{\frac{R^2-(y_1+R)^2}{R^2}}=\pm\sqrt{-y_1(2R+y_1)}$$

故得　$$x_1=R\,\text{arc vers}\left(\frac{-y_1}{R}\right)\pm\sqrt{-y_1(2R+y_1)}$$

4. 定理.

設 M, M' 爲曲線 (c) 上兩鄰點, MT 爲 M 之切線, $M'P$ 爲過 M' 而垂直於 MT 之直線, 而 P 爲 $M'P$ 與 MT 之交點, 則當 M' 趨近於 M 時, 比值 $\dfrac{\overline{MP}^2}{2PM'}$ 之極限等於 M 之曲率半徑.

取 M 爲原點, M 之切線 MT 爲 x 軸, M 之法線爲 y 軸 (圖 46). 幷設 (c) 之方程式爲 $y=f(x)$. 因 M 爲原點, 切線 MT 爲 x 軸, 故 $f(0)=0$, $f'(0)=0$. 由是 M 之曲率半徑爲 $\dfrac{1}{|f''(o)|}$. 茲將 y 展成 Maclaurin 級數,



(圖 46)

得　$$y=\frac{x^2}{2}f''(o)+\frac{x^3}{6}f'''(\theta x),(0<\theta<1).$$

故 $$\frac{2y}{x^2}=f''(0)+\frac{x}{3}f'''(\theta x)$$

當x趨近於零,即得

$$\lim\frac{2y}{x^2}=f''(0).$$

故 $$R=\lim\frac{x^2}{2y}=\lim\frac{\overline{MP}^2}{2PM'},$$

遂得定理之證.

[備考]——此證法係假定在M之鄰近,(c)依y軸之正向環抱(即y之值爲正).若(c)依y軸之負向環抱(即y之值爲負),則$\frac{x^2}{2y}$之極限等於$-R$.

5. 密切圓.

設一圓(Γ)切曲線(c)於M點,又交(c)於一鄰點M'.玆證當M'點趨近於M點時,(Γ)之位置有一極限,而(Γ)所趨近之極限稱爲(c)於M點之密切圓(Osculating Circle)(圖48).

過M'作MM'之垂直線,交M之法線於A,則(Γ)之直徑爲$2r=MA$.引$M'B$垂直於MA,則在直角三角形$MM'A$內,

$$\overline{M'B}^2=MB\cdot BA=MB(2r-MB),$$

即
$$r=\frac{\overline{M'B}^2}{2MB}+\frac{MB}{2}$$
$$=\frac{\overline{MP}^2}{2PM'}+\frac{PM'}{2}.$$

當M'趨近於M時,MP, $M'P$之極限爲零,而$\frac{\overline{MP}^2}{2M'P}$之極限爲$M$之曲率半徑$R$,卽$r$之極限爲$R$.如於$MA$上取一點$I$,令$MI=R$.將見$(\Gamma)$之極限爲以$I$爲心,$R$爲半徑之圓,卽$M$之曲率圓也.

6. 曲率半徑與漸屈線弧長之關係,漸伸線.

在曲線(c)上取定點爲量弧之原點,幷定量弧之正向.又令切線之向與弧之增向相同,而此切線之向與ox軸正向之交角,則以α記之,其正負之值如三角學所定.

準此得
$$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=\pm\frac{dx}{ds},$$
$$\sin\alpha=\pm\frac{y'}{\sqrt{y'^2+1}}=\pm\frac{dy}{ds}.$$

若x(或y)與s同時增加,則α爲銳角.若s增而x(或y)減,則α爲鈍角.

故
$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\ \sin\alpha=\frac{dy}{ds}.$$

若已與弧段中無反曲點,則可選定s之正向,使s與α同

時增加.在此情形,曲線(c)上$M(x,y)$點之曲率半徑爲

$$R=\frac{ds}{d\alpha}.$$

令M之曲率中心爲$I(x_1, y_1)$,則MI與ox軸之交角爲

$$\alpha_1=\alpha+\frac{\pi}{2}.$$

由是I之位標爲

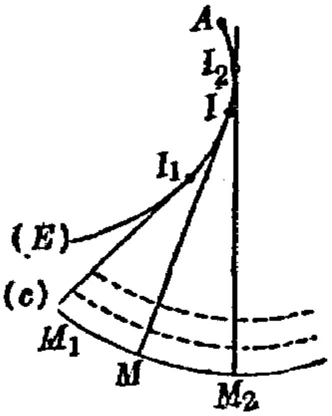
$$x_1=x+R\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=x-R\sin\alpha,$$

$$y_1=y+R\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=y+R\cos\alpha.$$

故　$$dx_1=\cos\alpha\,ds-R\cos\alpha\,d\alpha-\sin\alpha\,dR=-\sin\alpha\,dR,$$

$$dy_1=\sin\alpha\,ds-R\sin\alpha\,d\alpha+\cos\alpha\,dR=\cos\alpha\,dR.$$

而$\frac{dy_1}{dx_1}=-\cot\alpha$.是卽表明(c)於$M$之法線,卽$(E)$於$I$之切線也.將$dx_1, dy_1$等式兩邊平方而加之,且令$s_1$表漸屈線上一定點至$I$之弧長.遂得關係式如下:



$$ds_1^2=dx_1^2+dy_1^2=dR^2,$$

卽　$$ds_1=\pm dR.$$

(圖 47)

假定(c)之曲率半徑R之增向與弧之增向相同,乃選定(E)之弧向,使與R同時增加(圖 47),

則　$$ds_1=dR,$$

而　$$s_1=R+c,\quad (c=\text{常數}).$$

令 R_1, R_2 依次為 (c) 於 M_1, M_2 之曲率半徑，

則 $$\text{弧}\, I_1 I_2 = R_2 - R_1.$$

由此觀之，若 (E) 為已知，則 (c) 可藉機械而作之．蓋取一定長之線段，固定其一端於 (E) 上一點 A．然後將此線令與 (E) 重合由 A 至於 I，其餘線段則令其重合於 I 之切線上．令 M 為其餘線段之一點，則當線段與 (E) 重合至 I_2 時，M 之位置為 M_2．當線段與 (E) 重合至 I_1 時，M 之位置為 M_1．廣言之，當 I 畫 (E) 時，則 M 畫 (c)．又令 $IM = l$，s_1 為 (E) 自 A 至 I 之弧長，k 為任意常數，即知此作圖法可以式表之

$$s_1 + l = k.$$

因 M 既為其餘線段任取之點，故 (c) 之數為無限．而 (c) 名為漸伸線 (Involute).

IV. 二重點

設 $M(x_0, y_0)$ 為代數曲線 $f(x, y) = 0$ 上之一點，則此點切線之方程式為 $(X - x_0) f'_{x_0}(x_0, y_0) + (Y - y_0) f'_{y_0}(x_0, y_0) = 0$．若 $f'_{x_0}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x_0, y_0) = 0$，則此切線之方程式不存在．當 $x = x_0, y = y_0$ 時，如 $f(x, y)$ 之第一偏引數全為零，而第

二偏引數不全爲零,則 M 名爲曲線之二重點(Double Point). 在曲線上取 M 之隣點 $M'(x_0+h,\ y_0+k)$. 命 $\frac{k}{h}=t$, 則依 Taylor 公式之推廣得

$$\frac{1}{2}(f''_{x_0^2}+2tf''_{x_0y_0}+t^2f''_{y_0^2})+\frac{h}{3!}(f'_{x_0}+tf'_{y_0})_3+\cdots=0.$$

就中 $(f'_{x_0}+tf'_{y_0})_3$ 從 $(f'_{x_0}+tf'_{y_0})^3$ 之展式得出,乃以 $f^{(n)}$ 易展式之 $(f')^n$ 所得之結果也. 當 h 趨近於零, 上式化爲

$$(1)\qquad f''_{x_0^2}+2tf''_{x_0y_0}+t^2f''_{y_0^2}=0.$$

分別下列三情形:

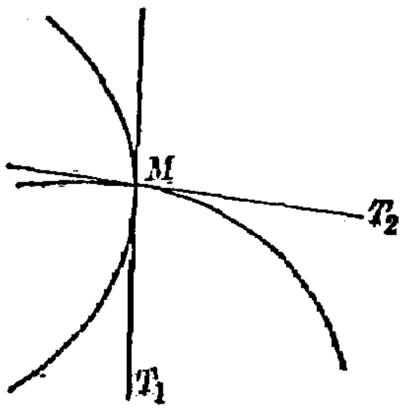
(其一) 如 $f''^2_{x_0y_0}-f''_{x_0^2}f''_{y_0^2}>0$, 則(1)式有不等之實根 t_1, t_2. 而 M 點之切線之角係數爲 $\frac{y_0+k-y_0}{x_0+h-x_0}=\frac{k}{h}=t$. 今因 t 有二值,故曲線有二枝相交於 M,其切線爲 MT_1, MT_2 (圖 48). 此二切線之方程式爲

$$Y-y_0=t_1(X-x_0),$$

$$Y-y_0=t_2(X-x_0),$$

其合併之方程式爲

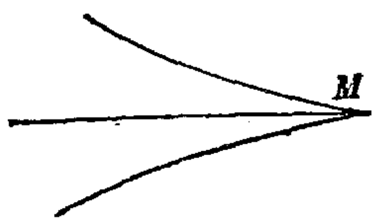
$$(Y-y_0)^2f''_{y_0^2}+2(Y-y_0)(X-x_0)f''_{x_0y_0}+(X-x_0)^2f''_{x_0^2}=0.$$



(圖 48)

(其二)　如$f''^2_{x_0y_0}-f'_{x_0^2}f'_{y_0^2}<0$,則(1)式無實根.而曲線無實點與$M$爲隣,故$M$有孤立點(Isolated Point)之名.

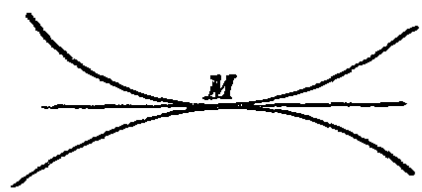
(其三)　如$f''^2_{x_0y_0}-f'_{x_0^2}f'_{y_0^2}=0$,則(1)式之兩根相等$t_1=t_2$.而$MT_1$與$MT_2$相重,此時$M$有逆點(Cusp)之名.下列圖 49 所示之逆點稱爲第一類之逆點.圖 50所示之逆點稱爲第二類之逆點.



(圖　49)

(圖　50)

有時逆點之隣近得如圖51所示.



(圖　51)

若將位標軸之原點遷至M,使ox軸與M之切線相重,即得曲線之二枝對於其公切線ox之位置矣.

[備考]——當$x=x_0$, $y=y_0$時,如$f(x,y)$之第一第二偏引數均全爲零,而第三偏引數不全爲零,則$M(x_0,y_0)$名爲曲線$f(x,y)=0$之三重點(Triple Point).至重點之爲三重以上者,亦可照此定義推之.

V. 包線

1. 定義及求法

設平曲線之方程式含一參數a,其形爲

(1) $$f(x, y; a)=0.$$

則曲線之形狀及位置,每因a而變,而(1)式表一族之曲線(A Family of Curves).若曲線族中每一曲線(c),均切於一定曲線(Γ),則(Γ)稱爲(c)之包線(Envelope).而(c)則謂爲(Γ)所包.包線之定義已明,茲進求其方程式如次:

設曲線(c)與其包線相切於一點(x, y),則x, y爲a之未知函數,而能適合於(1)式者.設$x=\phi(a)$, $y=\psi(a)$爲此二未知函數,$\delta x, \delta y$比例於(c)之切線之一段在位標軸ox, oy之投影.因無論a爲何值,(c)與(Γ)於(x, y)點之切線恆相重合,故必有

(2) $$\frac{\frac{dx}{da}}{\delta x}=\frac{\frac{dy}{da}}{\delta y}.$$

但在曲線族同一之曲線(c)上,a之值爲常數,故由(1)式得

(3) $$\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y=0.$$

又因以a爲自變數之函數$x=\phi(a)$, $y=\psi(a)$適合於(1)式,故由(1)式又得

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{da}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{da}+\frac{\partial f}{\partial a}=0.$$

計及(2),(3),(4)三式之關係,遂知

$$(5)\qquad \frac{\partial f}{\partial a}=0.$$

由是可見二未知函數$x=\phi(a)$, $y=\psi(a)$即爲(1),(5)兩式之公解.故曲線族如有包線,則由(1),(5)兩式消去a,即得包線之方程式矣.

但由(1),(5)兩式消去a後之結式(Resultant)果爲包線之方程式乎,亟應究之.設$R(x,y)=0$表此結式,(c_0)爲參數之值等於a_0時(1)式所代表之曲線,$M_0(x_0,y_0)$爲兩曲線

$$(6)\qquad f(x,y,a_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial a_0}=0$$

之交點,則在普通情形時,(1),(5)兩式公解之形爲$x=\phi(a)$, $y=\psi(a)$.且當$a=a_0$, x化爲x_0,而y化爲y_0,故當$a=a_0$,即得

$$(7)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_0}\left(\frac{dx}{da}\right)_0+\frac{\partial f}{\partial y_0}\left(\frac{dy}{da}\right)_0=0.$$

除$\dfrac{\partial f}{\partial x_0}=\dfrac{\partial f}{\partial y_0}=0$外(即除$M_0$爲重點外),計及(3)式立知

(7)式表示c_0之切線與(x,y)點所畫軌跡之切線重合.故$R(x,y)=0$或表(c)之包線,或表重點之軌跡.

例——茲察曲線族之方程式$f(x,y,a)=y^4-y^2+(x-a)^2=0$,由此方程式與$\frac{\partial f}{\partial a}=-2(x-a)=0$消去$a$,即得

$$y^4-y^2=0.$$

此式表$y=0, y=+1, y=-1$三直線.而曲線族可將曲線(c_0) $y^4-y^2+x^2=0$平行於ox軸直遷而得.惟(c_0)以原點(o,o)爲二重點,且與oy軸相交於$(0,1)$, $(0,-1)$時,即與直線$y=\pm 1$相切.故$y=0$爲曲線族二重點之軌跡,而$y=\pm 1$二直線,則爲曲線族之包線.

若曲線族方程式含兩參數.

$$F(x,y,a,b)=0, \tag{8}$$

而a,b合於一關係$\phi(a,b)=0$,則在此情形,b可視爲a之函數,此函數以$\phi=0$定之.即(8)式可視爲含一參數之方程式.命F對於a之偏引數等於零,

得 $$\frac{\partial F}{\partial a}+\frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da}=0.$$

又由$\phi=0$得 $$\frac{\partial \phi}{\partial a}+\frac{\partial \phi}{\partial b}\frac{db}{da}=0.$$

由所得之二式消去$\frac{db}{da}$,則有

(9) $$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial \phi}{\partial b}-\frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial \phi}{\partial a}=0.$$

故包線之方程式爲(9)式與$F=0,\phi=0$消去a後之結式.

2. 定理.

若曲線族有包線,則包線上各點皆爲族中隣近兩曲線交點之位置之極限.

設同族鄰近兩曲線,(c_1), (c_2)之方程式依次爲

$$f(x,y,a)=0,\quad f(x,y,a+h)=0.$$

此斷定交點之方程式,可易以相當二方程式

$$f(x,y,a)=0,\frac{f(x,y,a+h)-f(x,y,a)}{h}=0.$$

但當(c_2)趨近於(c_1),即h趨近於零時,第二方程式化爲$\frac{\partial f}{\partial a}=0$.是卽表明包線上各點,皆爲鄰近兩曲線交點之位置之極限也.

3. 法線之包線.

曲線在$M(x,y)$點之法線之方程式爲

$$X-x+y'(Y-y)=0.$$

因y爲x之函數,故此直線之位置,依參數x而變.求上式對於x之偏引數,並令其等於零,

得 $$-1-y'^2+(Y-y)y''=0.$$

由此式與法線之方程式解出X及Y,得

$$X=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},\ Y=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

是卽曲線之漸屈線之方程式也.

由定理2卽知曲率中心爲鄰近兩法線交點之位置之極限.

4. 備考.

因 $f(x,y,a)=0,\frac{\partial f}{\partial a}=0$ 爲在方程式$f=0$中a有二等根之必須及充足條件(參閱第五章第I節第6目),故欲得包線之方程式,可謂參數a有等根足矣.

例——試求拋物線$y^2=4px$之法線之包線.

因 $y'=\frac{2p}{y}$,故法線之方程式爲

$$Y-y=-\frac{y}{2p}(X-x),$$

卽

$$Y-y=-\frac{y}{2p}\left(X-\frac{y^2}{4p}\right),$$

$$y^3+8p^2\left(1-\frac{X}{2p}\right)y-8p^2Y=0.$$

上式爲參數y之三次式,其有等根之條件爲

$$4(8p^2)\left(1-\frac{X}{2p}\right)^3+27Y^2=0,$$

即
$$pY^2=\frac{4}{27}(X-2p)^3,$$

此包線之方程式也(參閱第III節第3目例一).

VI. 斜交或正交曲線系

設位標軸爲正交,已與平曲線族之方程式爲

(1)
$$F(X, Y, a)=0,$$

就中a爲參數.試求與此族中之曲線相交成一定角V之曲線族.

令x, y爲xoy平面上任一點M之位標.若(1)族中之一曲線(c)經過此M點,則有

(2)
$$F(x, y, a)=0,$$

且c在此點之角係數爲$-\frac{F'_x}{F'_y}$.在普通情形F'_x, F'_y含有參數a,而a之值可由(2)式定之.若令所求曲線族中經過M點之一曲線(Γ),在M之角系數爲$\frac{dy}{dx}$,而(c)與(Γ)之交角爲V,則有

(3)
$$\tan V=\frac{\frac{dy}{dx}+\frac{F'_x}{F'_y}}{1-\frac{dy}{dx}\frac{F'_x}{F'_y}}.$$

若V爲直角,則此式化爲

(4) $$F'_x\frac{dy}{dx}-F'_y=0.$$

由(2),(3)或(2),(4)兩式消去a,即得一含$\frac{dy}{dx}$, x, y之方程式.此方程式名曰第一級微分方程式(Differential Equation of the First Order).其定義及積法將於第十二章詳之.若方程式由(2),(3)兩式消去a所得者,則其積得之方程式所表之曲線,名曰斜交曲線系(Oblique Trajectories).若方程式由(2),(4)兩式消去a所得者,則其積得之方程式所表之曲線,名曰正交曲線系(Orthogonal Trajectories).

第十章之習題

下文之曲線方程式中,設a, b均爲常數,求證

(1) $y^2=2(ax+b)$之次法線長爲常數.

(2) $y=ae^{-\frac{x}{b}}$之次切線長爲常數.

(3) $(x+a)^2+y^2-b^2=0$之法線長爲常數.

(4) $x=a\left(\log\left|\tan\frac{\phi}{2}\right|+\cos\phi\right)$, $y=a\sin\phi$之切線長爲常數.

(5) $\rho=a(\theta-b)$之極次法線長爲常數.

(6) $\frac{1}{\rho}=\frac{\theta-b}{a}$之極次切線長爲常數.

(7) $\rho=a\cos(\theta-b)$之極法線長爲常數.

(8)　$\pm\theta+b=-\sqrt{\frac{a^2-\rho^2}{\rho^2}}+\operatorname{arc}\cos\frac{\rho}{a}$ 之極切線長爲常數.

求下列曲線任一點之切線長,法線長,次切線長及次法線長.

(9)　$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$

(10)　$\rho^2=a^2\cos 2\theta$.

(11)　曲線 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ 任一點之切線截位標軸 ox, oy 於 A, B 兩點,求證 OA 與 OB 之和爲常數.

(12)　曲線 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 上任一點之切線爲兩位標軸 ox, oy 截成一線段,求證此線段之長爲常數.

(13)　求證等腰雙曲線 $2xy=a^2$ 上任一點之切線與位標軸所成之三角形之面積爲常數.

(14)　試證兩曲線 $\rho=a(1+\cos\theta)$, $\rho=a(1-\cos\theta)$ 成正交.

(15)　求兩曲線 $\rho=a\sin 2\theta$, $\rho=a\cos 2\theta$ 之交角.

設 a 爲常數,試計算下列曲線之弧長.

(16)　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 弧之全長.

(17)　$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ 由 $t=0$ 計算至 $t=t_1$.

(18)　$\rho=e^{a\theta}$ 由原點計至 (ρ_1, θ_1) 點.

(19)　設有曲線.

$\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ (a 爲常數),試求 $t=\frac{\pi}{2}$ 時曲線之曲率半徑.

試求下列曲線任一點之曲率半徑.

(20)　$\rho=a\theta$.

(21)　$\rho=a(1-\cos\theta)$.

(22)　$\rho^2=a^2\cos 2\theta$.

求下列曲線之漸屈線,并作圖以明之.

(23) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ (a表常數).

(24) $\begin{cases} x=4t \\ y=3+t^2. \end{cases}$

(25) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

(26) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

(27) 有圓 $x^2+(y-b)^2=a^2$ 繞 ox 軸旋轉,試求此圓產生之曲面面積.

(28) 一橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 繞 ox 軸旋轉,試求此橢圓產生之曲面面積.

(29) 求擺線 $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ 之一圈繞 ox 軸旋轉,所產生之曲面面積.

(30) 求曲線 $y^2=x^3-x^2$ 之孤立點.

(31) 試究曲線 $(y-x^2)^2=x^n$ 之逆點.

(32) 求證原點爲曲線 $x^4+2ax^2y-ay^3=0$ 之三重點,并求此點切線之角系數.

試繪畫下列曲線.

(33) $x^4-ax^2y+by^3=0$.

(34) $x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0$.

(35) $y^2=x^3-x^2$.

(36) 求直線族 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 之包線(m爲參數).

(37) 設有一族之圓,以垂直於拋物線之軸之弦爲圓之直徑者.試求此族圓之包線.

(38) 已與拋物線 $y^2=4px$, 及一族之圓,其中心在拋物線上,而圓needs過拋物線之頂點(Vertex)者.試求此族圓之包線.

(39) 設有一族之橢圓.其方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,就中 a 與 b 之和爲

常數,試求此族橢圓之包線.

(40) 已與剪狀曲線(Cissoid)其方程式 $y^2=\frac{x^3}{2a-x}$

(a) 如視 a 為參數,則上式表一剪狀曲線族,試求此曲線族之正交系之微分方程式.

(b) 求此剪狀曲線繞其漸近線旋轉所產生之體積.(參閱第四章末兩節)

第十一章

二重積分及三重積分

I. 二重積分

1. 定義及體積之計算.

計算平曲線一段所包之面積,即有單積分之引用.此面積之極限爲內接無限小矩形之和.反言之,任何單積分得以平曲線一段所包之面積表之,前已明之矣.計算下文所定之體積,即有二重積分 (Double Integral) 之引用.取正交之位標軸 $oxyz$.設在 xy 平面上,有一閉曲線 c.玆以 c 爲準線 (Directrix) 作柱面 H,令其直母線平行於 oz 軸,而求一體積 V,其側面爲柱面 H,底面爲 c 所包之面積,上面爲曲面 S 之一段者(圖 52).至 S 之方程式,則以 $z=f(x,y)$ 表之,就中 $f(x,y)$ 爲 xy 之連續函數.

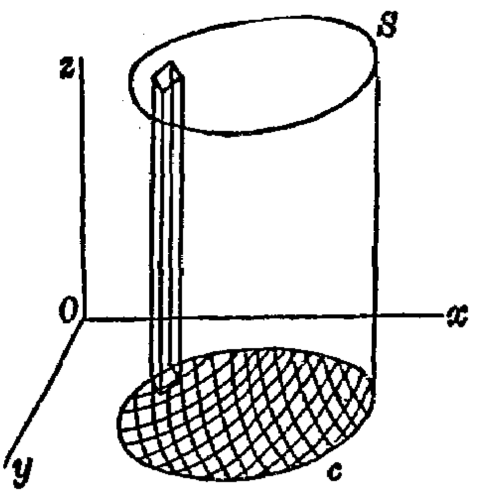
今先假定此段曲面各點之 z 值皆爲正.將 c 所包之面積分爲極多個之極小面積原素 $\Delta\omega$.此面積之分法,

可設在 c 內之面積分爲兩組之曲線,同組中之曲線極爲隣近,而與他組曲線相交.則 c 內之面積分爲 n 個四邊形,其面積以 $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \cdots\cdots \Delta\omega_n$ 記之.乃以面積原素 $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \cdots\cdots \Delta\omega_n$ 之周界爲準線,各作縱垂柱面(xy 設爲水平面),此種柱面上截於曲面 S,下截於平面 xy,而成體積 $V_1, V_2 \cdots\cdots V_n$,遂得

(1) $$V = V_1 + V_2 + \cdots\cdots V_n.$$

或書爲 $$V = \lim(V_1 + V_2 + \cdots\cdots V_n),$$

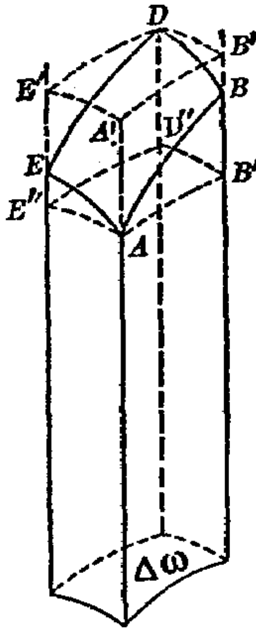
蓋以無論 n 如何增大,上式右邊之值,恆等於常數 V 故也.今以下文所定之內接柱體易各體積元素 $V_1, V_2, \cdots\cdots V_n$,在圖 52 中,體積 V_1 之底面爲 $\Delta\omega_1$,上面爲曲面 S 之一段 $ABDE$.此段之曲面在 xy 平面之投影爲 $\Delta\omega_1$ 如



(圖 52)

令 Z_1 及 z_1 依次表 $ABDE$ 內最高點及最低點之 z 值,則此處 Z_1 爲 D 點之高,z_1 爲 A 點之高.過 D, A 兩點作水平面 $DE'A'B'$ 及 $AB''D'E''$,則得同底之高低兩柱體,高者名曰外接柱體,其體積爲 $Z_1\Delta\omega_1$.低者名曰內接柱體,其

體積爲 $z_1\Delta\omega_1$. 至以 $\Delta\omega_2$ 爲底,所得之外接內接柱體,可以 $Z_2\Delta\omega_2$, $z_2\Delta\omega_2$ 記其體積. 餘類推.



(圖 53)

當 n 無限增大,而 $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2, \cdots \Delta\omega_n$ 各化爲點時,則內接柱體之和之極限爲 V.

即 (2) $V=\lim(z_1\Delta\omega_1+z_2\Delta\omega_2+\cdots\cdots\cdots +z_n\Delta\omega_n)$.

玆證明之於下:

蓋因 $$V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n$$

與 $$z_1\Delta\omega_1+z_2\Delta\omega_2+\cdots\cdots+z_n\Delta\omega_n$$

之項數相等,而號亦全同,欲證此兩和有相同之極限,證其於 n 無窮增大時,任何兩對應項之比值之極限爲 1 足矣.

因 $$z_1\Delta\omega_1<V_1<Z_1\Delta\omega_1,$$

以 $z_1\Delta\omega_1$ 偏除之,得

$$1<\frac{V_1}{z_1\Delta\omega_1}<\frac{Z_1}{z_1}.$$

當原素 $\Delta\omega_1$ 化爲一點 P_1 時,則 Z_1 與 z_1 同化爲 P_1 點之高,即 $\frac{Z_1}{z_1}$ 趨近於 1, 而 V_1 與 $z_1\Delta\omega_1$ 爲相當無窮小.

遂得　　$V=\lim(z_1\triangle\omega_1+z_2\triangle\omega_2+\cdots\cdots+z_n\triangle\omega_n)$

以上證明內接柱體之和之極限爲體積V,與第四章證明平曲線一段所包面積之極限爲內接矩形之和,有相同之原理焉.$z_1\triangle\omega_1+z_2\triangle\omega_2+\cdots\cdots+z_n\triangle\omega_n$之極限爲$V$,用$V=\iint z d\omega$表之.

此兩重符號$\iint$表兩次單積分,可得體積V之值,將於第II第III兩節明之.故稱$\iint zd\omega$爲二重積分.欲表乘積$zd\omega$之和,其每項$d\omega$爲c內之一切面積原素者,可謂此二重積分伸張於c之面積內,或以$\iint_{(c)}zd\omega$記之,而c之面積稱爲積分場(Field of Integration).

依同理,外接柱體體積$Z_1\triangle\omega_1$, $Z_2\triangle\omega_2,\cdots\cdots Z_n\triangle\omega_n$之和亦以體積$V$爲極限.其表示之法如前.

2. 曲面之各種位置.

前目設S在平面xy之上方,若S全在平面xy之下,則z之號恆爲負,惟面積原素$d\omega$應爲正.故$\iint zd\omega$之變號表體積之值.

又若S之一部在平面xy之上方,而一部在下,則$\iint zd\omega$表上下兩體積之差.

本目所得正負值與第四章第I節第2目所得者實相似也.

II. 二重積分在正交位標制之計算

1. 普通方法.

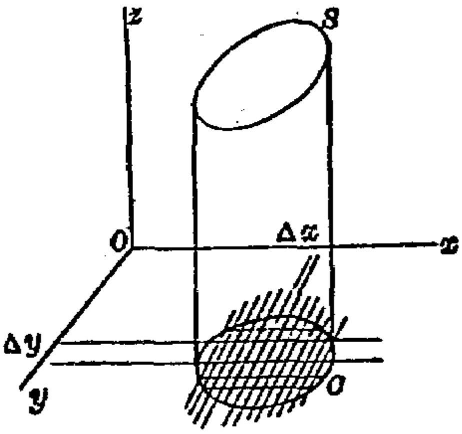
欲計算體積V,以曲面$z=f(x,y)$,及以c為底之柱面所包成者,則有二重積分$V=\iint_{(c)}zd\omega$之引用.今在xy平面上,用$x=$常數.$y=$常數,兩組直線分c之面積為無限個之無限小矩形(如圖54),此種矩形之邊平行於正交位標軸ox,oy.如以Δx,Δy記其中一矩形之邊長,則此矩形之面積$\Delta\omega=\Delta x\Delta y$.

因體積V等於乘積$zd\omega$之和之極限,故為乘積$z\Delta x\Delta y$之和之極限.

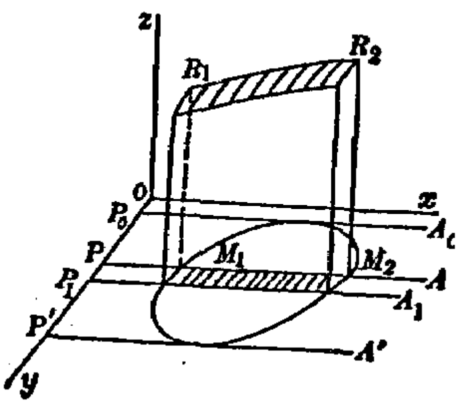
即
$$V=\iint_{(c)}z\,dx\,dy.$$

以$f(x,y)$代z,

得
$$V=\iint_{(c)}f(x,y)\,dx\,dy.$$



(圖 54)



(圖 55)

如逐次以分成之無限小矩形$dx\,dy$爲柱體之底,則本題爲求此等柱體體積$z\,dx\,dy$之和.茲先求其一部份柱體之和T,此部份柱體之底爲面積原素$dx\,dy$所成,而在平行於ox軸之兩直線PA及P_1A_1之間者(如圖55).令此兩平行線之距離爲dy,

卽有
$$oP=y,\ oP_1=y+dy,\ dy>o.$$

T爲V中一薄片之體積,而薄片則在包含直線PA,P_1A_1之兩縱垂平面間(xy設爲水平面).薄片中任一柱體之體積爲$z\,dx\,dy=f(x,y)\,dx\,dy$.其中各柱體均以dy爲底之一邊長,而dy可視爲常數,

故
$$T=dy\,\Sigma f(x,y)\,dx.$$

此式之和乃以x爲變數之單積分,

卽
$$T=dy\int f(x,y)\,dx.$$

今進而求此式積分之間隔,與ox軸距離爲$oP=y$之直線AP由M_1點入面積c,至M_2點爲出c之處.如以x_1,x_2記M_1,M_2之橫量,則x_1,x_2爲y之已知函數.蓋以c爲已與之曲線也.欲得薄片內柱體之體積,可令dy及y爲常數,且令x由x_1變至x_2而求乘積$f(x,y)\,dx\,dy$之和足矣.

依此得
$$T=dy\int_{x_1}^{x_2}f(x,y)\,dx.$$

由是體積T可用一積分得之.又單積分$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx$爲$y$之函數,蓋以$y$在$\int$之內而$x_1$及$x_2$爲$y$之函數故也.

准此得
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx=\psi(y),$$
$$T=dy\,\psi(y).$$

因體積V爲此種薄片體積T之和,此和藉單積分$\int\psi(y)\,dy$得之.而積分間隔之斷定,亟應考求.欲得一切薄片,可使直線PA穿過面積c之種種位置,故引曲線c之兩切線P_0A_0及$P'A'$,平行於ox軸者,並令$\overline{oP_0}=y_0$,$\overline{oP'}=y'$,則$\overline{oP}=y$變更於y_0與y'之間,

遂得
$$V=\int_{y_0}^{y'}\psi(y)\,dy=\int_{y_0}^{y'}dy\int_{x_1}^{x_2}f(x,y)\,dx.$$

此式之運算,乃先求$\int_{x_1}^{x_2}f(x,y)dx$,此積分爲y之函數.然後乘以dy,更由y_0積至y'.

同理,若先求柱體原素$z\,dx\,dy$,在平行於yz平面兩平面間者.則計算之次序適與前相反.須先求對於y之積分,然後求對於x之積分.

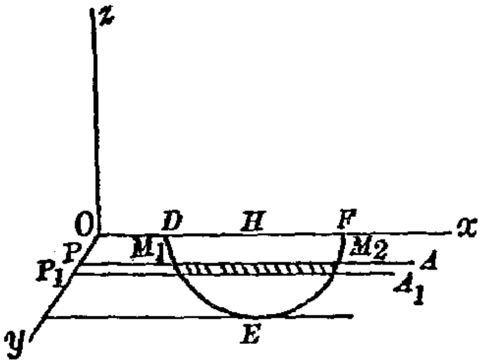
[備考]:——如令$z=1$,則$\iint_{(c)}dx\,dy$表c所包之面積.

2. 例.

例——設曲面S之方程式爲$z=xy$,曲線c爲xy平

面上之半圓 DFE,其圓心爲 ox 軸上之 H 點,而 $oH=2$,其半徑爲1(圖56),此圓之方程式爲

$$(c)\qquad (x-2)^2+y^2=1.$$



(圖 56)

所求體積 V 之側面乃以半圓爲底之柱面,上截於曲面 $z=xy$ 下截於 xy 平面,

故 $$V=\iint_{(c)} z\,dx\,dy=\iint_{(c)} xy\,dx\,dy.$$

茲先求柱體原素 $z\,dx\,dy$ 之和 T,其中各柱體之底 $dx\,dy$ 爲在平行 ox 軸之兩直線 AP 及 A_1P_1 間者.此兩平行線與 ox 軸之距離爲 y 及 $y+dy$,故得薄片之體積 $T=dy\int xy\,dx$.

在此薄片中,y 及 dy 爲常數,而 x 由 x_1 變至 x_2,就中 x_1 及 x_2 乃直線 PA 與半圓 c 之交點 M_1, M_2 之横量也.

由是 $$T=dy\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx.$$

又 x_1, x_2 爲 y 之函數,而合於方程式 $x^2-4x+y^2+3=0$.此式之 y 爲 oP 之值,

故 $$x_1=2-\sqrt{1-y^2},\qquad x_2=2+\sqrt{1-y^2},$$

$$\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx=\frac{y}{2}(x_2^2-x_1^2)=4y\sqrt{1-y^2},$$

而 $$T=4y\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

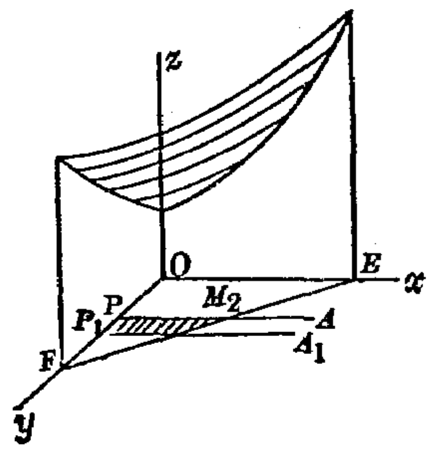
因體積V爲各薄片之和,故 $V=\int 4y\sqrt{1-y^2}\,dy$.欲得各薄片,可使直線$PA$平行於$ox$軸移動由$DF$之位置,至與圓$c$相切,即使$y$由0變至1足矣.准此得

$$V=\int_0^1 4y\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{4}{3}.$$

例二:——設三角oEF有二邊在ox, oy軸上,其餘一邊在直線EF上(如圖57),而EF之方程式爲$x+y-1=0$.試求一體積V,由xy平面,曲面$z=2x^2+y^2+1$及以oEF爲底之柱面所包成者.所求之體積爲

$$V=\iint(2x^2+y^2+1)\,dx\,dy.$$

此二重積分爲伸張於三角形oEF之面積.



(圖 57)

玆先求柱體原素$(2x^2+y^2+1)\,dx\,dy$之和,其底在平行ox軸之兩直線PA及P_1A_1之間者.此兩平行線與ox軸之距離爲y及$y+dy$,故此種柱體原素體積之和爲

$$T=dy\int_{x_1}^{x_2}(2x^2+y^2+1)\,dx.$$

就中　　$x_1=0,\quad x_2=1-y.$

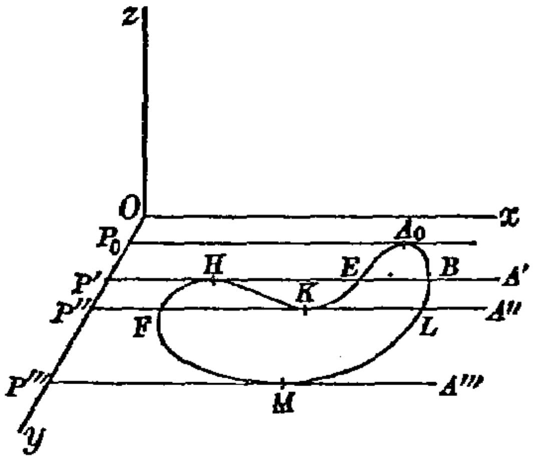
即　$T=dy\int_0^{1-y}(2x^2+y^2+1)\,dx=dy\left[\frac{2}{3}(1-y)^3+y^2-y^3+1-y\right].$

而　$V=\int_0^1\left[\frac{2}{3}(1-y)^3+y^2-y^3+1-y\right]dy=\frac{3}{4}.$

3. 備考.

以前所述,乃設平行於 ox 軸之直線 PA 與積分場 c 之周界祇有兩交點 M_1 及 M_2. 若曲線 c 之形極爲複雜,與直線 PA 相交點爲任意偶數,則可用截線將面積 c 分爲 n 份面積 $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$. 而此等面積之周界,各與平行於 ox 軸之直線祇有兩交點. 如命 $I_1, I_2, \cdots\cdots I_n$ 依次表二重積分伸張於面積 $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$, 則伸張於面積 c 之二重積分爲 $I_1+I_2+\cdots\cdots+I_n$.

茲舉一例以明之.設曲線 c 之形如圖58所示. 以平行於 ox 軸而切於曲線 c 之直線 $P_0A, P'A'$, $P''A''$ 及 $P'''A'''$ 分 c 之面積爲四份面積 EA_0B, FHK, $KEBL$ 及 $FKLM$. 此份面積之周界各與平行於 ox 軸之直線祇有兩交點,如命



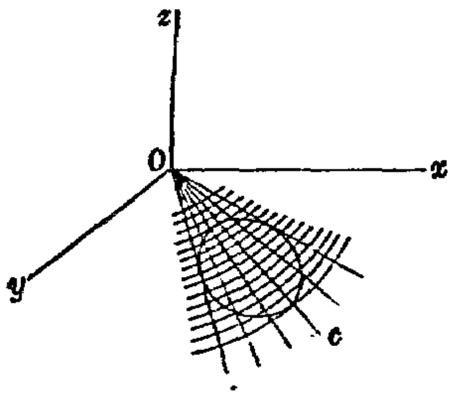
(圖 58)

二重積分伸張於各份面積爲I_1, I_2, I_3, I_4則二重積分伸張於面積c爲$I_1+I_2+I_3+I_4$.

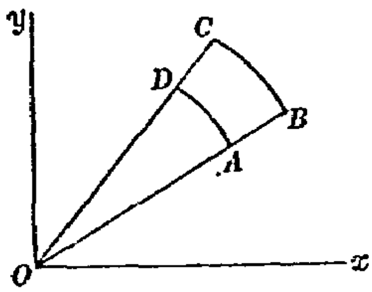
III. 二重積分在極位標制之計算

1. 方法.

令ρ及θ依次表xy平面上M點之半徑動徑oM及極角



(圖 59)



(圖 60)

$\widehat{xoM}$. 試用極位標制計算二重積分$\iint(x, y)\,d\omega$伸張於xy平面上之曲線c所包含之面積

茲用$\rho=$常數, $\theta=$常數兩組曲線分c之面積爲無限個之無限小面積原素$d\omega$. 曲線$\rho=$常數乃以o點爲中心之圓, $\theta=$常數即由o點所引出之直線, 而$d\omega$爲一四邊形$ABCD$(圖 60), 此四邊形有兩邊爲直線oAB, oCD, 其交角爲$d\theta$. 又有兩邊爲圓弧AD, BC, 其中心爲o點.

其半徑爲$\rho, \rho+d\rho$. 故$d\omega$相當於一矩形$ABCD$之面積. 此矩形之一邊$AB=d\rho$, 一邊$AD=\rho d\theta$(見備考), 卽有$d\omega=\rho d\rho d\theta$.

又因　$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,$$

故二重積分$\iint f(x,y)\,d\omega=\iint f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho d\rho d\theta$.

可書爲　$$\iint f(x,y)\,d\omega=\iint\phi(\rho,\theta)\,\rho d\rho d\theta.$$

就中　$\phi(\rho,\theta)$爲ρ及θ之函數.

[備考]:——面積$ABCD$得以$AB\cdot AD$表之者,蓋將其高級無窮小之項省去,而不影響於體積之和之值也.

如命$\triangle\theta=\widehat{AoD}$, $\triangle\rho=AB$.

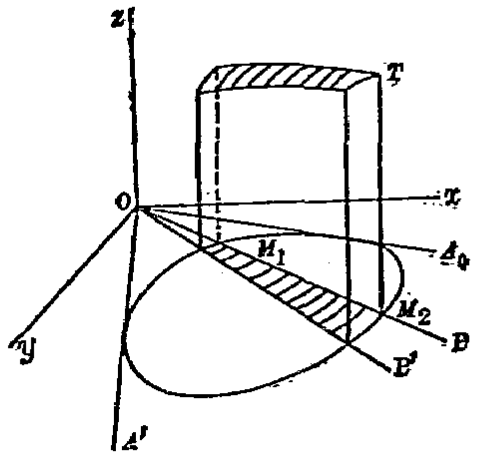
則面積$ABCD=\triangle\omega=\dfrac{1}{2}\left[(\rho+\triangle\rho)^2-\rho^2\right]\triangle\theta$

$$=(\rho\triangle\rho+\frac{1}{2}\triangle\rho^2)\,\triangle\theta.$$

因$(\rho\triangle\rho+\frac{1}{2}\triangle\rho^2)\triangle\theta$與$\rho\triangle\rho\triangle\theta$爲相當之無窮小,故$\Sigma\phi(\rho,\theta)(\rho\triangle\rho+\frac{1}{2}\triangle\rho^2)\triangle\theta$之極限與$\Sigma\phi(\rho,\theta)\,\rho\triangle\rho\triangle\theta$之極限相同,此極限卽二重積分$\iint\phi(\rho,\theta)\,\rho d\rho d\theta$也.

[積分之計算]:——求上式二重積分$\iint_{(c)}\phi(\rho,\theta)\rho d\rho d\theta$, 乃求柱體原素$\phi(\rho,\theta)\,\rho d\rho d\theta$之和也. 此柱體原素之底爲面積$c$之面積原素$d\omega$所成.茲先求其一部份柱體體積之和$T$,其中之柱體之底$d\omega$爲在兩直線$oP$及$oP'$之

間者.此兩直線與 oz 軸之交角爲 $\widehat{zoP}=\theta$, $\widehat{zoP'}=\theta+d\theta$.



(圖 61)

就中 $d\theta$ 表無限小正數(圖 61),可見 T 等於 V 中一薄片之體積.此薄片在 zoP 及 zoP' 兩平面之間者,

且 $$T=d\theta\,\Sigma\,\phi(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho,$$

就中 $d\theta$ 與 θ 爲常數.

$$T=d\theta\,\Sigma\,\phi(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho,$$

而 ρ 之變值由下文定之.

設原點 o 在面積 c 之外,或在 c 之周界上,直線 oP 與 c 之周界之交點爲 M_1 及 M_2,如令 $oM_1=\rho_1$, $oM_2=\rho_2$,則 $d\theta\,\Sigma\,\phi(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho$ 之 ρ 值,由 ρ_1 變至 ρ_2.此和 Σ 乃以 ρ 爲變數之單積分由 ρ_1 積至 ρ_2 者也.

遂得 $$T=d\theta\int_{\rho_1}^{\rho_2}\phi(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho.$$

又ρ_1及ρ_2爲θ之函數,此函數爲由曲線c之方程式所定.

故
$$\int_{\rho_1}^{\rho_2}\phi(\rho,\theta)\,\rho\,d\,\rho=\psi(\theta)$$

[就中$\psi(\theta)$爲θ之函數].

而
$$T=d\,\theta\,\psi(\theta).$$

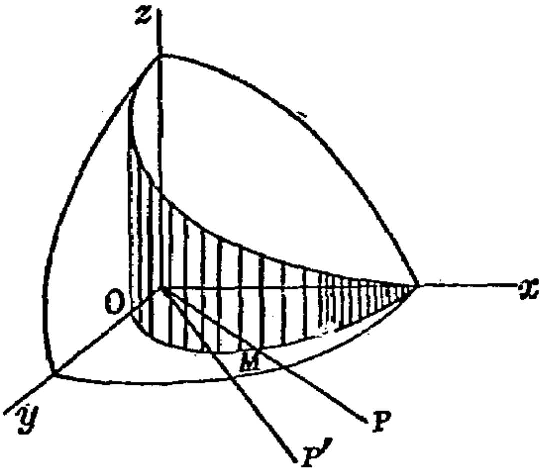
薄片之體積T既定,則薄片體積T之和V,可藉單積分$\int\psi(\theta)\,d\,\theta$得之.設由原點$o$引曲線$c$之兩切線$oA_0$及$oA'$與$ox$軸之交角爲$\theta_0$及$\theta'$,則積分間隔爲由$\theta_0$積至$\theta'$,

故
$$V=\Sigma\,T=\int_{\theta_0}^{\theta'}\psi(\theta)\,d\,\theta=\int_{\theta_0}^{\theta'}d\,\theta\int_{\rho_1}^{\rho_2}\phi(\rho,\theta)\,\rho\,d\,\rho.$$

上式之運算乃先求$\int_{\rho_1}^{\rho_2}\phi(\rho,\theta)\rho d\rho$,此積分爲$\rho$之函數.函數既定,然後以$d\theta$乘之.更由$\theta_0$積至$\theta'$.

[備考]:——如令$z=1$,則$\iint_{(c)}\rho\,d\,\rho\,d\,\theta$表$c$所包之面積.

2. 例.



(圖 62)

設有一球面以原點爲中心,a爲半徑(圖62表此球八分之一).在ox軸上,取$oA=a$爲直徑,作xy平面上之半圓c.試求一體積V,由球面,xy平

面及以c爲底之柱面所包成者.

此球面之方程式爲

$$x^2+y^2+z^2-a^2=0,$$

或書爲 $$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}.$$

在xy平面上用極位標制得

$$z=\sqrt{a^2-\rho^2}.$$

故 $$V=\iint_{(c)} z\,d\,\omega=\iint_{(c)}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta.$$

令oP及oP'爲無限鄰近兩直線,其與ox軸之交角依次爲θ及$\theta+d\theta$,則體積V之薄片體積T在兩平面zoP及zoP'之間者爲

$$T=d\,\theta\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\,\rho,$$

就中ρ_1及ρ_2爲直線oP與半圓c之交點M_1, M_2之ρ值.因半圓過原點o,故$\rho_1=o$.至ρ_2則爲θ之函數.由直三角形AoM_2觀之,卽得$\rho_2=a\cos\theta$.

由是 $$T=d\,\theta\int_0^{a\cos\theta}\sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\,\rho=\frac{a^3}{3}(1-\sin^3\theta)\,d\,\theta.$$

若使半徑動徑oP繞o旋轉,由ox軸轉至oy軸,卽得V中各薄片體積.

故 $$V=\frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\,\theta=\frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

且知體積V與球八份一體積(圖 62)之差爲$\frac{2}{9}a^3$.

3. 備考

若由原點所引出之直線與積分場 c 之周界不祇有兩交點,則交點之數爲多於二之偶數.直線 oP 初入面積 c 之點爲 M_1,出點爲 M_2,再入點爲 M_3,再出點爲 M_4,……,則以 ρ 爲變數之積分.應由 ρ_1 積至 ρ_2,再由 ρ_3 積至 ρ_4,…….

4. 原點 o 在積分場內之情形.

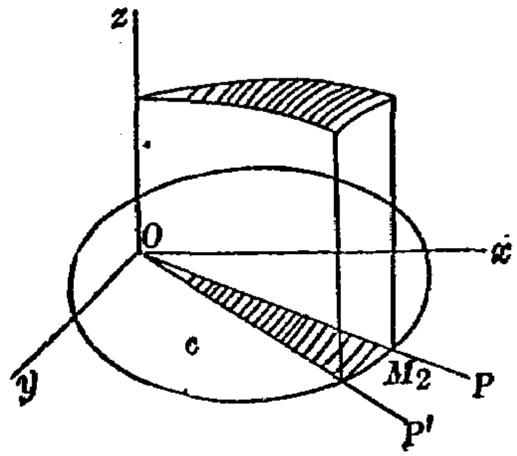
以前所述乃設原點 o 在積分場 c 之外.當 o 在 c 之內時,則積分之間隔應酌量變更.茲先察薄片體積 T 其底在 oP 及 oP' 之間者(圖 63),令 oP 與 oP' 之交角爲 $d\theta$,則 T 內柱體之體積 $\phi(\rho,\theta)\,\rho\,d\theta\,d\rho$ 之 ρ 值,應由 o 變至 ρ_2 就中 ρ_2 爲 oP 出 c 處之 M_2 點之 ρ 值.

遂得
$$T=d\theta\int_0^{\rho_2}\phi(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho.$$
在此積分,ρ_2 爲 θ 之函數,此函數爲曲線 c 之方程式所定.

故
$$\int_0^{\rho_2}\phi(\rho,\theta)\,d\rho=\psi(\theta)$$
而
$$T=d\theta\,\psi(\theta).$$

此種薄片體積 T 之和,乃所求之體積 V 也.將上式由 o 積至 2π.

得 $$V=\Sigma T=\int_0^{2\pi}\psi(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\rho_2}\phi(\rho,\theta)\,\rho\,d\rho.$$



(圖 63)

5. 在極位標制計算二重積分之別法.

前數目之計算體積V,乃先求薄片體積,其底在兩直線oP及oP'之間,而此兩直線之交角爲無限小$d\theta$者.本目乃先求柱體原素之和T,其底在無限隣近之兩圓弧間,而此兩圓同以極點o爲中心,以ρ及$\rho+d\rho$爲半徑者.今假設極點o在面積c之外,或在c之周界上由此二圓觀之,以ρ爲半徑之圓與曲線c之交點爲M_1及M_2(圖 64),$\widehat{xoM_1}=\theta_1$ $\widehat{xoM_2}=\theta_2$,則兩圓與c包成環形.茲求在環形內之體積原素$\phi(\rho,\theta)\rho\,d\theta\,d\rho$之和$T$,

則 $$T=\Sigma\phi(\rho,\theta)\,\rho\,d\theta\,d\rho.$$

惟在環形內,ρ及$d\rho$之值不變.

故 $$T=\rho\,d\rho\,\Sigma\phi(\rho,\theta)\,d\theta.$$

將θ由θ_1變至θ_2,

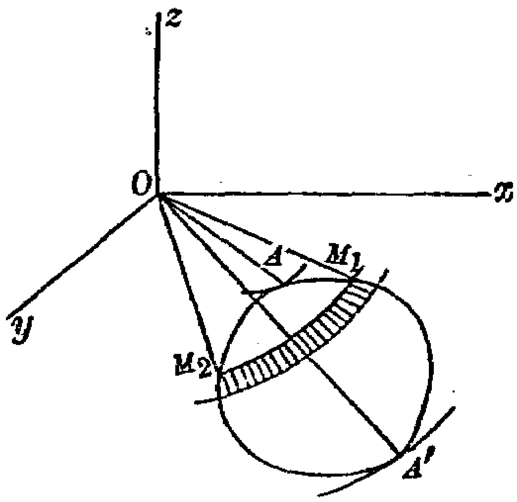
即得 $$T=\rho\,d\rho\int_{\theta_1}^{\theta_2}\phi(\rho,\theta)\,d\theta.$$

因θ_1及θ_2為ρ之函數,

故 $\int_{\theta_1}^{\theta_2}\phi(\rho,\theta)d\theta=\psi(\rho)$.

而 $T=\rho\,d\rho\,\psi(\rho)$.

體積 V 為此種薄環體積T之和,此和可藉單分$\int\rho\,\psi(\rho)d\rho$得之.欲斷定積分間隔,可使$\rho$之值變更,至環形佔面積$c$之種種位置為度.如使$\rho$值遞減至最小之值$\rho_0$,即得一圓$\rho=\rho_0$切曲線$c$於$A$.如使$\rho$值遞增至最大之值$\rho'$即得一圓$\rho=\rho'$切曲線於$A'$.可見$\rho$變更於$\rho_0$與$\rho'$之間,則環形佔面積$c$之種種位置矣.



(圖 64)

准此得 $$V=\int_{\rho_0}^{\rho'}\rho\,\psi(\rho)\,d\rho=\int_{\rho_0}^{\rho'}\rho\,d\rho\int_{\theta_1}^{\theta_2}\phi(\rho,\theta)\,d\theta.$$

此式之運算乃先求對於θ之積分,然後求對於ρ之積分.

上文設極點o在面積c之外,若o在c之內,則因ρ之值有下列二種情形:

(其一) 當 ρ 小於某值 ρ_0 時,則得全在 c 內之閉環形.如求以此環形爲底之薄片體積 T,則以 θ 爲變數之積分,應由 o 積至 2π.

准此得
$$T=\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\phi(\rho\ \theta)\,d\theta$$

今使 ρ 由 o 變至 ρ_0,即得以閉環爲底之薄片體積 T 之和 $\int_0^{\rho_0}\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\phi(\rho,\theta)\,d\theta$.

(其二) 當 ρ 大於某值 ρ_0 時,則得交曲線 c 於 M_1, M_2 兩點之圓,而所得之環形與體積之計算與上文圖 64 所示者相同.

IV. 曲面之面積

1. 面積之計算.

欲計算曲面之面積,宜先知曲面之切面 (Tangent Plane).設有曲面其方程式爲 $F(x,y,z)=0$, $M(x,y,z)$ 爲曲面上任取之點.在曲面上過 M 點之曲線爲數無限,惟在普通情形時.此種曲線於 M 點之切線同在一平面上.玆證明之如次.此平面名曰曲面於 M 點之切面.

因過 M 點之曲線上各點之位標爲一參數之函數,而合於方程式 $F(x,y,z)=0$,故 M 點切線一段之投影 dx, dy, dz 合於 $F'_x\,dx+F'_y\,dy+F'_z\,dz=0$,又 M 點切線之方程式

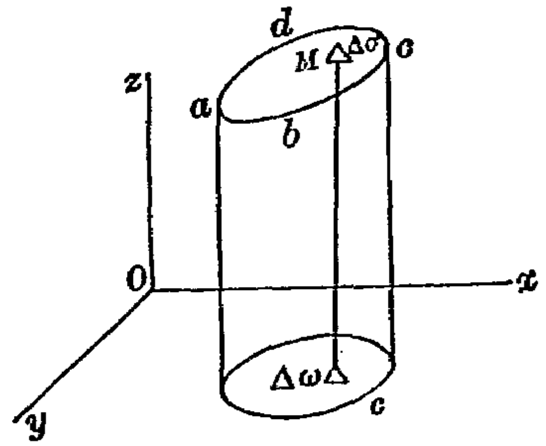
爲 $\frac{dx}{X-x}=\frac{dy}{Y-y}=\frac{dz}{Z-z}$. 欲得切線之軌跡由 $F'_x dx+F'_y dy+F'_z dz=0$ 與 $\frac{dx}{X-x}=\frac{dy}{Y-y}=\frac{dz}{Z-z}$ 消去 dx, dy, dz 足矣. 故若 F'_x, F'_y, F'_z 不全爲零, 則 M 點切線之軌跡爲一平面 $(X-x)F'x+(Y-y)F'y+(Z-z)F'z=0$.

當曲面之方程式爲 $z=f(x,y)$, 則 M 點切面之方程式爲 $Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$, 就中 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$.

曲面上任一段面積之值,亦可伸張於平面積之二重積分得出.茲察曲面之一段爲周界 $abcd$ 所包者,欲求此段面積之值, 可將其內接以小平面之多面體(圖65). 當內接多面體之面數無限增多, 至各面化爲一點 M 之切面. 而面積趨近於零時, 則此內接多面體各面積之和之極限, 卽所謂此段曲面之面積也.

設以 $\Delta\sigma$ 記多面體中一小面之面積, 則此段曲面之面積爲 $S=\lim\Sigma\Delta\sigma$. 符號 Σ 乃表多面體各面之和或簡書爲 $S=\iint d\sigma$. $d\sigma$ 表無限小面之面積.

如將曲面投射於 xy 平面. 則周界 $abcd$ 之影爲閉曲線 c. 爲簡便起見, 設曲面之影全在曲線 c 內, 任一點之平行 oz 軸之直線祇交曲面於一點. 若情形爲不適合, 可將曲面分爲數部份, 使各部份均適合上文之假設.



(圖 65)

在內接多面體之面於 xy 平面之投影爲 c 內之面積原素.例如面積 $\Delta\sigma$ 在 xy 平面之投影爲平面積 $\Delta\omega$;

而 $$\Delta\omega=\Delta\sigma\cos\alpha,\quad \Delta\sigma=\frac{\Delta\omega}{\cos\alpha},$$

α 表含 $\Delta\sigma$ 之平面與平面 xy 所成之銳角.

故 $$S=\lim\Sigma\Delta\sigma=\lim\Sigma\frac{\Delta\omega}{\cos\alpha}.$$

當 $\Delta\sigma$ 化爲曲面之一點 M,而含 $\Delta\sigma$ 之平面趨近 M 點之切面時,則 α 趨近於 M 點之切面與 xy 平面之交角,換言之,M 點之法線(過 M 而垂直於切面之直線)與 oz 軸所成之銳角 $\widehat{N,z}$ 也.(設位標軸爲正交).

准此得 $$S=\lim\Sigma\frac{\Delta\omega}{\cos(N,z)}$$

此和乃伸張於平面曲線 c 所有之面積原素,因 $\dfrac{\Delta\omega}{\cos(N,z)}$

與$\frac{\Delta\omega}{\cos\alpha}$為相當無窮小,故$\Sigma\frac{\Delta\omega}{\cos(N,z)}$之極限與$\Sigma\frac{\Delta\omega}{\cos\alpha}$之極限相同.

可見
$$S=\iint_{(c)}\frac{d\omega}{\cos(N,z)}.$$

因子$\frac{1}{\cos(N,z)}$之值極易求得.蓋M點之切面方程式為
$$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$$
故此切面與xy平面所成之銳角之餘弦為
$$\cos(N,z)=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$
遂得
$$S=\iint_{(c)}\sqrt{1+p^2+q^2}\,d\omega.$$

如曲面S之方程式$z=f(x,y)$為已知,則z為x及y之已知函數,故p,q亦為x及y之已知函數.

且
$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\phi(x,y).$$
$\phi(x,y)$表x及y之已知函數.

而
$$S=\iint_{(c)}\phi(x,y)\,d\omega.$$
計算此積分可用正交位標制或極位標制.其法如前.

2. 例——球面積之一段.

設球之中心為原點o,半徑為a,則球之方程式為$x^2+y^2+z^2=a^2$.在此球上有一周界E,其在xy平面之投影為閉曲線c.試求在E內之面積.

將球之方程式之左邊求其對於x, y之引數,得

$$x+pz=0,\quad y+qz=0.$$

故
$$p=-\frac{x}{z},\quad q=-\frac{y}{z}.$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}=\frac{a}{z}\ (z>0),$$

$$S=\iint_{(c)}\frac{a}{z}\,d\omega=a\iint_{(c)}\frac{d\omega}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

由幾何易得$\cos(N,z)=\frac{z}{a}$,蓋聯o點與球面上M點之直線oM,即爲此球在M點之法線,故

$$z=a\cos(N,z),\ \frac{1}{\cos(N,z)}=\frac{a}{z}.$$

例如曲線c爲z平面上之半圓,其直徑$oA=a$如圖62所示.試求球面一段之面積,其投影爲半圓c者.今用極位標制以計算二重積分.

因
$$z=\sqrt{a^2-\rho^2},\quad d\omega=\rho\,d\rho\,d\theta,$$

故
$$S=a\iint_{(c)}\frac{\rho\,d\rho\,d\theta}{\sqrt{a^2-\rho^2}}.$$

先求對於ρ之積分,即得面積S一部份之和T,此部份之面積投射於兩極角$\widehat{xoP}=\theta$及$\widehat{xoP'}=\theta+d\theta$之間者.由$oM_1=a\cos\theta$之關係,即知$T=a\,d\theta\int_0^{a\cos\theta}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}=a^2(1-\sin\theta)\,d\theta$.若使$op$繞$o$旋轉,由$ox$軸轉至$oy$軸,則$oP$盡量面積$c$之全部,

故 $$S=\Sigma T=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)d\theta=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

3. 二重積分之別例.

設周界$abcd$包成曲面之一段(圖65),而周界在水平面xy之投影爲c.又設函數ψ連續於周界內之任一點.今將周界內之曲面分爲無限個之無限小面積$d\sigma$.試究一乘積之和爲每一原素$d\sigma$與ψ在此原素之值所成者.此和爲二重積分$\iint\psi d\sigma$.且可化爲伸張於c之二重積分.

蓋令$d\omega$爲$d\sigma$在xy平面之投影,又令(N,z)爲$d\sigma$之極限之切面與oxy平面所成之銳角.

則 $$d\omega=d\sigma\cos(N,z),$$

$$\iint\psi d\omega=\iint\frac{\psi}{\cos(N,z)}d\omega.$$

因 $\cos(N,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$爲$x$及$y$之函數,而函數$\psi$連續於周界內之任一點$M$,故$\psi$亦爲$M$點之位標$x$及$y$之函數.遂得形式如下:

$$\iint\psi d\sigma=\iint_{(c)}\phi(x,y)d\omega.$$

此積分可用正交位標制,或極位標制以求之.其法仍與前同

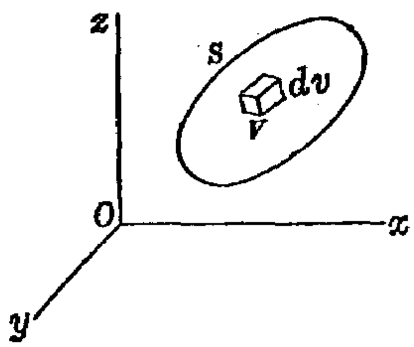
V. 三重積分

1. 定義.

設有一閉曲面S及一函數$\phi(x, y, z)$. 此函數在S所包之體積V中各點之值爲確定.玆將體積V分爲體積原素dv,此種原素可化爲點,而其體積趨於零者(圖66).試究每個體積原素dv與函數$\phi(x, y, z)$乘積之和,就中x, y, z表dv化爲一點時之位標.

如以$\iiint_{(v)} \phi(x,y,z)dv$記乘積之和,

則 $\iiint_{(v)} \phi(x,y,z)\,dv$稱爲



(圖 66)

$\phi(x, y, z)$ 伸張於 S 所包之體積 V 之三重積分 (Triple Integral).

分解體積V爲無限小體積原素所得之dv形式,視採用之位標制而異.

2. 三重積分在正交位標制之計算.

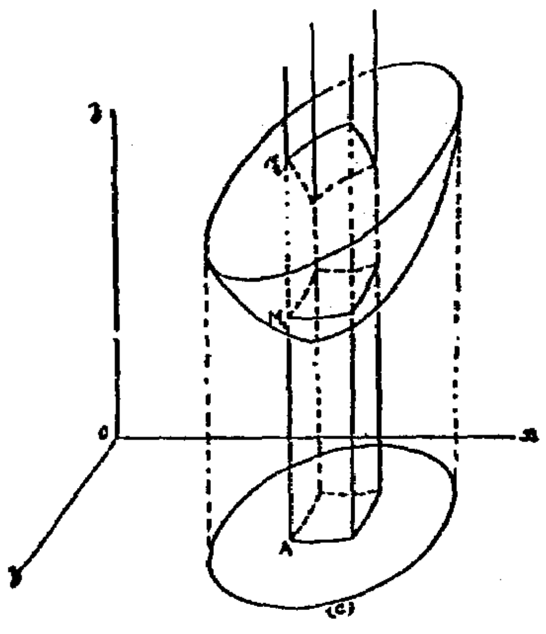
玆以無限隣近而與位標面之平行平面分體積V爲無限小之平行六面體.此種六面體之稜平行位標

軸，其稜長為 dx, dy, dz. 其體積為 $dv = dx\,dy\,dz$. 故上述之三重積分為

$$I = \iiint \phi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

欲求此積分可繼續積三次，以 x, y, z 之一為變數者.

設 c 為曲面 S 在 xy 平面投影之周界，在 c 內任取一矩形，其中一頂點為 $A(x, y)$，其餘三頂點為 $(x+dx, y)$, $(x, y+dy)$, $(x+dx, y+dy)$（圖 67），則此矩形之面積為 $dx\,dy$. 乃以之為底，作一角柱體有四稜平行 oz 軸者. 角柱體之稜 AA' 由 $M_1(x, y, z)$ 入 V，至 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 出 V.



（圖 67）

茲先求原素$\phi(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$之和,其中之平行六面體原素$dx\,dy\,dz$全在此角柱體之內者.此種六面體各以$dx\,dy$為底疊成柱形,而z及dz之值則因各六面體而異,但x,y,dx,dy均為常數,故此和為

$$P=dx\,dy\,\Sigma\phi(x,y,z)\,dz.$$

由z_1計至z_2得$P=dx\,dy\int_{z_1}^{z_2}\phi(x,y,z)\,dz.$

又由曲面S之方程式卽知z_1,z_2為x及y之函數,故$\int_{z_1}^{z_2}\phi(x,y,z)\,dz$為$x$及$y$之函數.如以$f(x,y)$表$\int_{z_1}^{z_2}\phi(x,y,z)dz$.

則
$$I=\Sigma P=\iint_{(c)}f(x,y)\,dx\,dy.$$

上式之和為伸張於面積c之二重積分,其計算已載於前節第3目矣.

同理,如將六面原素$dx\,dy\,dz$疊成平行於ox軸或oy軸之柱形,則I之計算須先求對於x或對於y之積分.

[備考]:——

若令$\phi(x,y,z)=1$,則I表V之體積.

第十一章之習題

(1) 不等式$x>1$, $y>1$, $x+y<3$斷定xy平面上之積分場c,試計算二重積分$\iint_{(c)}\frac{dx\,dy}{(x+y)^3}$.

(2) 求旋轉拋物面$x^2+y^2=az$與平面$z=a$所包成之體積.

(3) 求兩圓 $\rho=a\cos\theta$, $\rho=b\cos\theta$, $(a<b)$ 所包含之面積.

(4) 計算 $\int_0^\pi\int_0^{a(1-\cos\theta)}\rho^3\,d\rho\,d\theta$.

(5) 應用二重積分以求曲線 $\rho=a(1+\cos\theta)$, $\rho=2a\cos\theta$ 所包之面積.

(6) 已與拋物面 $y^2+z^2=4ax$, 拋物柱面 $y^2=ax$ 及平面 $x=3a$.

(a) 求拋物柱面與平面截拋物面之曲面面積.

(b) 求拋物面與平面截拋物柱面之曲面面積.

(7) 求錐面 $x^2+z^2=y^2$ 之一葉 (One Nappe) 截球面 $x^2+y^2+z^2=2ay$ 之曲面面積.

(8) 求旋轉柱面 $x^2+y^2=ax$ 截球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 之曲面面積.

(9) 求旋轉柱面 $x^2+y^2=ax$ 截錐面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 之曲面面積.

(10) 求曲面 $z^2+(\sqrt{x^2+y^2}-c^2)=a^2$ (設 $c>a$) 之全面積.

(11) 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 之全面積.

(12) 求曲面 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 所包之體積.

(13) 求兩柱面 $x^2+y^2=r^2$, $x^2+z^2=r^2$ 所包之體積.

(14) 求橢圓面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所包之體積.

(15) 求柱面 $x^2+y^2=ax$ 與平面 $Ax+By+Cz=0$, $A'x+B'y+C'z=0$ 所包之體積.

(16) 求橢圓柱面 $\left(\frac{x-h}{a}\right)^2+\left(\frac{y-k}{b}\right)^2=1$ 與平面 $z=0$ 及雙曲線拋物面 $xy=cz$ 所包之體積.

(17) 求旋轉柱面 $x^2+y^2=a^2$ 與兩平面 $x+y=z$, $z=0$ 所包之體積.

(18) 已與一旋轉錐面及一球面,旋轉錐面之頂點.在球面上,其軸爲球面之直徑者,試求此兩曲面所包之體積.

第十二章

微分方程式概要

I. 定義及定理

定義——設單變數 x 之函數 y 與其各引數 $y', y'', \cdots\cdots y^{(n)}$ 有下之關係.

(1) $$f(x, y, y', y'', \cdots\cdots y^{(n)}) = 0.$$

此關係名曰第 n 級微分方程式(Differential Equation of the nth Order). 凡能適合此方程式之函數,名曰方程式之積分 (Integral). 積某方程式或解此方程式云者,卽求能合該方程式之一切函數之謂也.

定理——凡 x 之函數 y 含有 n 個任意常數者,能適合於一第 n 級微分方程式,且此式與各常數無關.

設函數 y 與變數 x 之關係含有 n 個任意常數,並令此關係爲

(2) $$\phi(x, y, c_1, c_2, \cdots\cdots c_n) = 0.$$

乃求 y 對 x 之第一至第 n 引數,卽得斷定各引數之方程式

$$
(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial x}+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}y'=0, \\ \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}y'+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}y'^2+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}y''=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \dfrac{\partial^n\phi}{\partial x^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\dfrac{\partial\phi}{\partial y}y^{(n)}=0, \end{cases}
$$

(2), (3) 共有 $n+1$ 個方程式,由此各方程式消去 n 個任意常數 $c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$, 即得 $x, y, y', y'', \cdots\cdots y^{(n)}$ 之關係式之形爲 $f(x, y, y', y'', \cdots\cdots y^{(n)})=0$. 是即函數 y 適合之第 n 級微分方程式也. 故如定理云.

定理二——已與第 n 級微分方程式(1),則在普通情形時,有含 n 個任意常數之函數適合於此方程式者.

蓋將(1)式解出 $y^{(n)}$.

$$
(4)\qquad y^{(n)}=F(x, y, y', y'', \cdots\cdots y^{(n-1)}),
$$

則當 $x=x_0$, 而 $y, y', y'', \cdots\cdots y^{(n-1)}$ 依次等於任意之值 y_0, y_0', $y_0'', \cdots\cdots y_0^{(n-1)}$ 時, $y^{(n)}$ 之值 $y_0^{(n)}$ 爲 $y_0, y_0', y_0'' \cdots\cdots y_0^{(n-1)}$ 之函數,此函數由 (4) 式斷定之. 又求 (4) 式兩邊之引數,得 $y^{(n+1)}=\psi(x, y, y', \cdots\cdots y^{(n)})$. 此式表明 $y^{(n+1)}$ 之值 $y_0^{(n+1)}$ 爲 y_0, $y_0', y_0'', \cdots\cdots y_0^{(n-1)}$ 之函數. 同理得知 $y^{(n+2)}, y^{(n+3)}, \cdots\cdots$ 之值 $y_0^{(n+2)}, y_0^{(n+3)}, \cdots\cdots$ 爲 $y_0, y_0', y_0'', \cdots\cdots y_0^{(n-1)}$ 之函數. 由 Taylor 公式得

$$y=y_0+(x-x_0)y_0'+\frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0''+\cdots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}y_0^{(n)}+\cdots$$

當x之值在收斂間隔內時,y為x之函數,而含有n個任意常數,且能適合(1)式.故如定理云.

函數y稱為方程式(1)之普通積分(General Integral)簡名曰通積.或謂之(1)式之解(Solution).當n個任意常數中,有常數之值為定數時,則該函數稱曰特別積分(Particular Integral).又簡稱曰特積.若方程式有某積分不包含於通積之內者,則此積分稱為奇異積分 (Singular Integral).或簡稱奇積.而通積所表之n個參數曲線族名為(1)式之積分曲線(Integral curves).而(1)式之特積,卽為積分曲線中之一曲線之方程式也.

本章所及,祇限於第一級與第二級微分方程式,且不過擇其易於解答者言之耳.

II. 第一級微分方程式

以下c表任意常數.

1. 分離變數法.

設微分方程式之形為

(1)　$$XY+X_1Y_1y'=0,$$

就中X, X_1爲x之函數.Y, Y_1爲y之函數.以X_1Y徧除上式兩邊以分離變數,

得 $$\frac{Y_1}{Y}dy+\frac{X}{X_1}dx=0,$$

積之得

$$\int\frac{Y_1}{Y}dy+\int\frac{X}{X_1}dx=c.$$

故解(1)式之問題化爲單積分之問題,此爲吾人已知者也.

例一——設有方程式$y'=y^2$.

分離變數而積之,

得 $$\int\frac{dy}{y^2}=\int dx+c,$$

即 $$-\frac{1}{y}=x+c.$$

故通積爲 $$y=-\frac{1}{x+c}.$$

例二——設有方程式$(x^2-1)y'=xy$.

分離變數得

$$\frac{dy}{y}=\frac{xdx}{x^2-1}.$$

積之得 $$\log y^2=\log(x^2-1)-\log c.$$

故通積爲 $$cy^2=x^2-1.$$

例三——設有方程式 $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a\frac{dy}{dx}+y=0$ (a表常數).

解出$\frac{dy}{dx}$,

得
$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-y^2}}{y},$$

即
$$dx=\frac{ydy}{a\pm\sqrt{a^2-y^2}},$$

故
$$x+c=\int\frac{ydy}{a\pm\sqrt{a^2-y^2}}.$$

令 $\pm\sqrt{a^2-y^2}=t$, 即 $a^2-y^2=t^2$, 而 $y\,dy=-t\,dt$.

由是 $x+c=-\int\frac{t\,dt}{a+t}=-\int\left(1-\frac{a}{a+t}\right)dt=-t+a\log(a+t)$.

以t之值代入上式,即得通積
$$x+c=\mp\sqrt{a^2-y^2}+a\log(a\pm\sqrt{a^2-y^2}).$$

2. 齊次方程式.

設方程式對於x, y爲齊次,其形可書爲
$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

欲積此方程式,可令$\frac{y}{x}=t$, 則$\frac{dy}{dx}=t+x\frac{dt}{dx}$.

由是齊次方程式化爲
$$t+x\frac{dt}{dx}=f(t).$$

分離變數得
$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{f(t)-t},$$

故
$$\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{f(t)-t}+c.$$

此積分已得,乃以t之值代入,即得方程式之通積矣.

3. 平直方程式.

凡微分方程式所含之$\frac{dy}{dx}$及y均為一次者,稱曰平直方程式(Linear Equation).其形為

(1)
$$f(x)\frac{dy}{dx}+\phi(x)y+\psi(x)=0.$$

如令$\psi(x)=0$,則得$f(x)\frac{dy}{dx}+\phi(x)y=0$,此式名為(1)式之輔助式(Auxiliary Equation).

欲積(1)式,可令$y=uv$(u, v表x之函數),

則
$$\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}.$$

以y,$\frac{dy}{dx}$之值代入(1)式,即有

(2)
$$u\left[f(x)\frac{dv}{dx}+v\phi(x)\right]+vf(x)\frac{du}{dx}+\psi(x)=0.$$

茲先選定函數v,俾u之系數為零,則

(3)
$$f(x)\frac{dv}{dx}+v\phi(x)=0.$$

上式可書爲

$$\frac{dv}{v}=-\frac{\phi(x)}{f(x)}dx.$$

積之得
$$\log v=-\int\frac{\phi(x)}{f(x)}dx.$$

故可令
$$v=e^{g(x)},\ 就中\ g(x)=-\int\frac{\phi(x)\,dx}{f(x)}.$$

以 v 之值代入(2)式,卽得

$$e^{g(x)}f(x)\frac{du}{dx}+\psi(x)=0.$$

卽
$$du=-\frac{\psi(x)}{e^{g(x)}f(x)}dx.$$

故
$$u=-\int\frac{\psi(x)}{e^{g(x)}f(x)}dx+c.$$

而平直方程式之通積爲

$$y=uv=e^{g(x)}\left[-\int\frac{\psi(x)}{e^{g(x)}f(x)}dx+c\right].$$

由上式觀之,如令(3)式之通積 $c_1e^{g(x)}$ (c_1表任意常數)代(3)式之特積 $e^{g(x)}$,(1)式之通積仍不變,而(3)式之特積卽輔助式之特積也.

例——試積 $x(x-a)\frac{dy}{dx}-(x+a)y+b^2=0.$

令 $y=uv$,則上式可化爲

$$x(x-a)\left[u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}\right]-(x+a)uv+b^2=0.$$

(4) $$u\left[x(x-a)\frac{dv}{dx}-v(x+a)\right]+x(x-a)v\frac{du}{dx}+b^2=0.$$

此式之輔助方程式爲

$$x(x-a)\frac{dv}{dx}-v(x+a)=0.$$

即 $$\frac{dv}{v}=\frac{x+a}{x(x-a)}dx.$$

因 $$\frac{x+a}{x(x-a)}=\frac{2}{x-a}-\frac{1}{x}.$$

故 $$\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x-a}-\frac{dx}{x}.$$

而上式之特積爲 $\log v=2\log(x-a)-\log x$,

即 $$v=\frac{(x-a)^2}{x}.$$

以 v 之值代入(4)式,

得 $$(x-a)^3\frac{du}{dx}+b^2=0.$$

由是 $$u=-b^2\int\frac{dx}{(x-a)^3}+c=\frac{b^2}{2(x-a)^2}+c$$

而 y 之通積爲 $y=uv=\dfrac{(x-a)^2}{x}\left[\dfrac{b^2}{2(x-a)^2}+c\right]$

$$=\frac{b^2}{2x}+\frac{c(x-a)^2}{x}.$$

[備考一]——若令 $y_1=e^{g(x)}$, $F(x)=-e^{g(x)}\int\dfrac{\psi(x)\,dx}{e^{g(x)}f(x)}$,

則(1)之通積可書爲

$$y=cy_1+F(x),$$

就中 y_1 爲輔助式之特積,若於此通積中,令 $c=0$, 則 $y=F(x)$, 可知 $F(x)$ 爲(1)式之特積.又通積可書爲

$$y=cy_1+Ay_1+F(x).$$

令 $y_2=Ay_1+F(x)$,

則 $$y=cy_1+y_2.$$

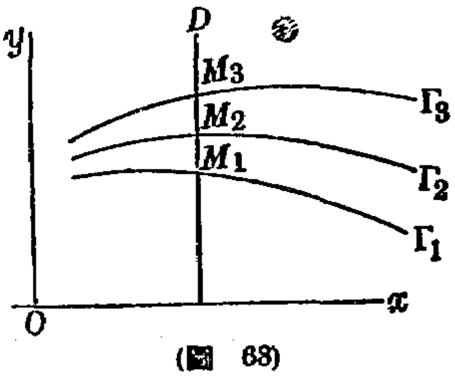
而 y_2 又爲(1)式之特積.由此觀之,方程式(1)之通積爲一任意常數與兩特積所構成,其一爲(1)式之特積,餘一則爲輔助式之特積也.

[備考二]——令 c 等於三特值 c_1, c_2, c_3, 則得三特積 Y_1, Y_2, Y_3, $Y_1=c_1 y_1+y_2$, $Y_2=c_2 y_1+y_2$, $Y_3=c_3 y_1+y_2$.

而 Y_1, Y_2, Y_3 有下之關係

(4) $$\frac{Y_3-Y_1}{Y_2-Y_1}=\frac{c_3-c_1}{c_2-c_1}=\text{常數}.$$

令 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 爲對應於特值 c_1, c_2, c_3 之積分曲線(圖 68), D 爲平行於 oy 軸之任意直線.並令 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ 依次與 D 相交於 M_1, M_2, M_3,



(圖 68)

則 $$\frac{Y_3-Y_1}{Y_2-Y_1}=\frac{M_3M_1}{M_2M_1}=\text{常數}.$$

4. Bernoulli 方程式.

設方程式之形爲

$$f(x)\frac{dy}{dx}+\phi(x)y+\psi(x)y^n=0.$$

就中 n 爲異於零與 1 之數. 以 y^n 徧除全式之兩邊,

得 $$f(x)y^{-n}\frac{dy}{dx}+\phi(x)y^{1-n}+\psi(x)=0.$$

令 $y^{1-n}=z$, 則

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx},$$

即 $$y^{-n}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{n-1}\ \frac{dz}{dx}.$$

由是原式化爲

$$-\frac{1}{n-1}f(x)\frac{dz}{dx}+\phi(x)z+\psi(x)=0,$$

是即平直方程式也. 依前目先求得 z 之通積, 然後以 y^{1-n} 易 z, 即得方程式之通積矣.

例——求 $x\frac{dy}{dx}+y-y^2\log x=0$ 之通積.

以 y^2 除全式之兩邊,

得 $$xy^{-2}\frac{dy}{dx}+y^{-1}-\log x=0.$$

令$y^{-1}=z$,則方程式化爲

$$-x\frac{dz}{dx}+z-\log x=0.$$

更令$z=uv$,又得

$$(1)\qquad u\left(-x\frac{dv}{dx}+v\right)-xv\frac{du}{dx}-\log x=0.$$

今選定函數v,俾u之系數爲零,得$-x\frac{dv}{dx}+v=0$.其特積爲$v=x$.以v之值代入(1)式,

得
$$+x^2\frac{du}{dx}+\log x=0.$$

$$du=-\frac{\log x}{x^2}dx.$$

用分部積分法積之,

得
$$u=\frac{1}{x}\log x+\frac{1}{x}+c.$$

故
$$z=uv=\log x+1+cx.$$

而所求之通積爲

$$y=\frac{1}{z}=\frac{1}{\log x+1+cx}.$$

5. Riccati方程式.

此式之形爲

$$\frac{dy}{dx}+f(x)+\phi(x)y+\psi(x)y^2=0.$$

若知其一特積,則其通積可立得.蓋設 y_1 爲一特積,而令 $y=y_1+z$,則原式化爲

$$\frac{dz}{dx}+\left[\frac{dy_1}{dx}+f(x)+\phi(x)y_1+\psi(x)y_1^2\right]$$
$$+\phi(x)z+2\psi(x)y_1z+\psi(x)z^2=0,$$

依假設

$$\frac{dy_1}{dx}+f(x)+\phi(x)y_1+\psi(x)y_1^2=0.$$

故 $$\frac{dz}{dx}+\phi(x)z+2\psi(x)y_1z+\psi(x)z^2=0.$$

是即 Bernoulli 方程式也.乃令 $z=\frac{1}{\omega}$, 以化成平直方程式,即知 ω 之形爲

$$\omega=cF(x)+G(x).$$

故 Riccati 方程式之通積之形爲

$$y=y_1+\frac{1}{cF(x)+G(x)}=\frac{cF_1(x)+G_1(x)}{cF(x)+G(x)}.$$

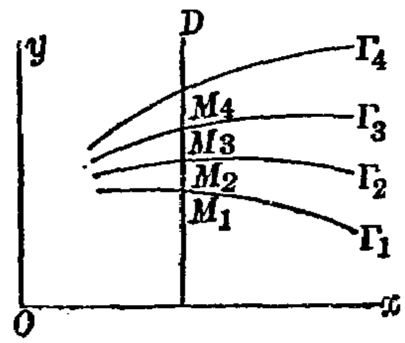
如以任意特值 c_1,c_2,c_3,c_4 代 c,即得四特積 Y_1,Y_2,Y_3,Y_4.

而 $$\frac{Y_4-Y_1}{Y_4-Y_2}\div\frac{Y_3-Y_1}{Y_3-Y_2}=\frac{c_4-c_1}{c_4-c_2}\div\frac{c_3-c_1}{c_3-c_2}=\text{常數}.$$

此關係表明 Riccati 方程式任意四特積之非調和複比爲常數.故若方程式之三特積爲已知,則其通積可立得.蓋有

$\frac{y-Y_1}{y-Y_2}\div\frac{Y_3-Y_1}{Y_3-Y_2}=k$之關係存也($k$表任意常數).

令$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4$爲對應於特值$c_1,c_2,c_3,c_4$之積分曲線(圖 69), D爲與oy軸平行之任意直線.並令$\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4$依次與$D$相交於$M_1$, M_2, M_3, M_4,將見此四點間之距離有如下之關係.



(圖 69)

$$\frac{M_4M_1}{M_2M_1}\div\frac{M_4M_3}{M_2M_3}=\text{常數}.$$

6. Lagrange方程式.

此式之形爲$y+x\phi(y')+\psi(y')=0$.其積法乃以p易y',然後求對於x之引數,即得

$$p+\phi(p)+[x\phi'(p)+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}=0.$$

更視p爲自變數,x爲p之函數,將方程式書爲

$$\frac{dx}{dp}[p+\phi(p)]+x\phi'(p)+\psi'(p)=0.$$

遂得平直方程式.可依第3目方法積之.設所求之結果爲

$$x=f(p,c),$$

則
$$-y=f(p,c)\,\phi(p)+\psi(p).$$

是卽積分曲線之參數方程式.欲求Lagrange方程式之通積,從上列兩式消去p可也.

例——設有方程式$4y'^3-6y'^2+9(y-x)=0$.

先將方程式書爲

(1) $$4p^3-6p^2+9(y-x)=0.$$

次求對於x之引數,

得 $$4(p^2-p)\frac{dp}{dx}+3(p-1)=0,$$

卽 $$(p-1)(4pdp+3dx)=0.$$

遂得二解答如下

(其一) $p=1$.

以p之值代入(1)式,

得 $$-2+9(y-x)=0.$$

此爲巳與方程式之奇積.

(其二) $2p^2+3x=3c$.

以x之值代入(1)式,得積分曲線

$$x=\frac{1}{3}(3c-2p^2),$$

$$y=\frac{1}{9}(9c-4p^3).$$

消去p後卽得巳與方程式之通積

$$2(x-c)^3+3(y-c)^2=0.$$

7. Clairaut 方程式.

此式之形為

$$(1)\qquad y=x\frac{dy}{dx}+f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

是即 Lagrange 方程式之特例也.其積法乃求對於 x 之引數,

得
$$\frac{d^2y}{dx^2}\left[x+f'\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]=0.$$

此式有二解答

(其一) $\frac{d^2y}{dx^2}=0.$

則
$$\frac{dy}{dx}=c.$$ 計及 (1) 式,

得
$$y=cx+f(c),$$

此為 (1) 式之通積.其積分曲線為直線族.

(其二) $x+f'\left(\frac{dy}{dx}\right)=0.$

由上式與 (1) 式消去 $\frac{dy}{dx}$, 即得不含任意常數之方程式,而為 (1) 式之奇積.

III. 第二級微分方程式

以下 c 及 c' 均表任意常數,

1. 特例.

(其一) 不含 y 之方程式——設有不含y之方程式

$$(1)\qquad f(x, y', y'')=0.$$

欲積此式可令$y'=z$,則$y''=z'$.而(1)式化爲第一級微分方程式

$$f(x, z, z')=0.$$

設上式之通積爲$z=\phi(x, c)$.則$dy=\phi(x, c)dx$.故(1)式之通積爲

$$y=\int\phi(x, c)\,dx+c'.$$

例——設有方程式 $\dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'}=R$, ($R$表常數).以 z 易 y',并分離變數而積之,

得
$$\frac{x-c}{R}=\int\frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

欲求此式右邊之積分,可令$z=\tan\phi$,

則
$$dz=\frac{d\phi}{\cos^2\phi},\quad 1+z^2=\frac{1}{\cos^2\phi},$$

而
$$\int\frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\cos\phi\,d\phi=\sin\phi.$$

但
$$\sin\phi=\frac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}},\ 故\int\frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}},$$

$$\frac{x-c}{R}=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}},$$

即 $$z^2=\frac{(x-c)^2}{R^2-(x-c)^2}.$$

以 $\frac{dy}{dx}$ 易 z 得

$$dy=\frac{(x-c)\,dx}{\pm\sqrt{R^2-(x-c)^2}}.$$

遂得本例之通積為 $y-c'=\pm\sqrt{R^2-(x-c)^2}$,

即 $$(x-c)^2+(y-c')^2=R^2.$$

可見平曲線之曲率半徑為常數者,乃圓族也.

(其二) 不含 x 之方程式——設有不含 x 之方程式

(2) $$f(y,\,y',\,y'')=0.$$

令 $y'=p$, 則 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\,\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$, 代入上式,得第一級微分方程式

$$f\left(y,\,p,\,p\frac{dp}{dy}\right)=0.$$

設此式之通積為

$$p=\phi(y,\,c).$$

則 $$dx=\frac{dy}{\phi(y,\,c)}.$$

故 (2) 式之通積為 $x+c'=\int\frac{dy}{\phi(y,\,c)}$.

2. 常數係數之第二級平直微分方程式

設方程式之形為

$$y''+ay'+by=f(x),$$

就中 a, b 表常數，$f(x)$ 表 x 之函數者，稱曰常數系數之第二級平直微分方程式．而 $f(x)$ 名爲方程式之第二段 (Second Member)．茲將方程式有第二段與無第二段之情形，分別言之．至常數系數之第 n 級平直微分方程式之積法，亦可依下文推出，本書從略．

3. 無第二段之方程式．

定義——設 y_1, y_2 均爲方程式之積分．若 $\frac{y_2}{y_1}$ 之比值非常數，則謂 y_1, y_2 爲互異 (Distinct) 之積分．

定理——設有無第二段方程式

(1) $$y''+ay'+by=0,$$

y_1, y_2 爲其互異之任意二積分，則此式一切積分之形皆爲 $cy_1+c'y_2$．

令 $y=y_1z$ (z 爲未知函數)，則 $y'=y_1z'+y'_1z$, $y''=y_1z''+2y_1'z'+y_1''z$．將 y, y', y'' 之值代入 (1) 式，立得

$$y_1z''+2y_1'z'+y_1''z+a(y_1z'+y_1'z)+by_1z=0,$$

即 $$y_1z''+(2y_1'+ay_1)z'+(y_1''+ay_1'+by_1)z=0.$$

依假設 y_1 爲 (1) 式之積分，故 z 之系數爲零．

由是 $$y_1z''+(2y_1'+ay_1)z'=0,$$

(2) $$\frac{z''}{z'}=-\frac{2y_1'+ay_1}{y_1}.$$

任與(1)式之積分 Y, 則(2)式有一積分 Z 與之對應, 以 $Y=y_1 Z$ 之關係定之者. 反言之, 任與(2)式之一積分 Z, 則(1)式亦有一積分 Y 與之對應, 同以 $Y=y_1 Z$ 之關係定之者. 茲因 $y=y_2$ 能適合於(1)式, 故 $z=\dfrac{y_2}{y_1}$ 能適合於(2)式. 且依假設 $z=\dfrac{y_2}{y_1}$ 非常數, 故若命 $z_1=\dfrac{y_2}{y_1}$, 則 z_1' 異於零.

遂得
$$\frac{z_1''}{z_1'}=-\frac{2y_1'+ay_1}{y_1}.$$

而(2)式可書為
$$\frac{z''}{z'}=\frac{z_1''}{z_1'}.$$

於是
$$\log z'=\log z_1'+\log c'.$$

即
$$z'=c'z_1',$$

積之得
$$z=c'z_1+c=c'\frac{y_2}{y_1}+c.$$

由此觀之, 凡(2)式之積分之形皆為 $c'\dfrac{y_2}{y_1}+c$. 故凡(1)式積分之形皆為 $y_1\left(c'\dfrac{y_2}{y_1}+c\right)$, 即 $c'y_2+cy_1$ 也. 可見(1)式之通積即為 $cy_1+c'y_2$, 且必無奇異積分. 欲求(1)式之通積, 求其互異之二積分足矣.

4. 指標方程式.

命 $y=e^{rx}$ (r 表常數). 則 $y'=re^{rx}$, $y''=r^2e^{rx}$. 以 y, y', y'' 之值代入(1)式,

得
$$e^{rx}(r^2+ar+b)=0.$$
而方程式
$$f(r)\equiv r^2+ar+b=0$$
稱曰指標方程式(Characteristic Equation).若α爲此式之根,則因$\alpha^2+a\alpha+b=0$,故$e^{\alpha x}$爲(1)式之積分.茲就指標方程式之根α,β相等與否分別而論之於下:

(其一)　$\alpha\neq\beta$.

在此情形,(1)式有互異之二積分$e^{\alpha x}$, $e^{\beta x}$.而(1)式之通積爲$ce^{\alpha x}+c'e^{\beta x}$.若$\alpha,\beta$爲相配之虛數,

可令
$$\alpha=p+iq,\quad \beta=p-iq.$$
則
$$e^{\alpha x}=e^{(p+iq)x}=e^{px}\,e^{qix}=e^{px}\,(\cos qx+i\sin qx),$$
$$e^{\beta x}=e^{(p-iq)x}=e^{px}\,e^{-qix}=e^{px}(\cos qx-i\sin qx).$$
而
$$ce^{\alpha x}+c'e^{\beta x}=e^{px}\cos qx(c+c')+ie^{px}\sin qx(c-c').$$
令
$$c+c'=A,\quad i(c-c')=B.$$
卽知通積可書爲
$$e^{px}(A\cos qx+B\sin qx),$$
就中A,B表任意常數(以後準此).

例一——設有方程式$y''-a^2y=0$.

此式之指標方程式爲$r^2-a^2=0$.其根爲a及$-a$.故已與方程式之通積爲$Ae^{ax}+Be^{-ax}$.

例二——設有方程式 $y''+a^2y=0$.

此式之指標方程式爲 $r^2+a^2=0$. 其根爲 $\pm ai$ 故已與方程式之通積爲 $A\cos ax+B\sin ax$,

(其二) $\alpha=\beta$.

在此情形,祇得一積分 $e^{\alpha x}$. 但易知 $xe^{\alpha x}$ 亦爲一積分.可以 $xe^{\alpha x}$ 代(1)式之 y 而驗之.茲更以別法證之於下:

由前已知無論 x, r 爲何數,恆有下式成立

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{rx}+a\frac{d}{dx}e^{rx}+be^{rx}=e^{rx}f(r).$$

求此式兩邊對於 r 之引數,得

$$(E)\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{rx}\right)+a\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dx}e^{rx}\right)+b\frac{d}{dr}e^{rx}=e^{rx}f'(r)+e^{rx}xf(r).$$

但多變數函數之第 n 引數,不因求引數次序之先後而異,

故 $$\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{rx}\right)=\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d}{dr}e^{rx}\right)=\frac{d^2}{dx^2}(xe^{rx}),$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dx}e^{rx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dr}e^{rx}\right)=\frac{d}{dx}(xe^{rx}),$$

(參閱第八章第I節第4目). 而 (E) 式可書爲

$$\frac{d^2}{dx^2}(xe^{rx})+a\frac{d}{dx}(xe^{rx})+bxe^{rx}=e^{rx}[xf(r)+f'(r)].$$

因 α 爲 $f(r)=0$ 之重根,故 $f(\alpha)=0, f'(\alpha)=0$.

由是 $$\frac{d^2}{dx^2}(xe^{ax})+a\frac{d}{dx}(xe^{ax})+bxe^{ax}=0.$$

此式表明 xe^{ax} 亦爲 (1) 式積分,故 (1) 式之通積爲 $Ae^{ax}+Bxe^{ax}$.

5. 有第二段之方程式.

茲究有第二段之方程式

$$y''+ay'+by=F(x),$$

設已知此式之任意積分 $\phi(x)$.

則 $$\phi''(x)+a\phi'(x)+b\phi(x)=F(x),$$

命 $y=\phi(x)+z$, z 爲未知函數. 以 y 之值代入已與式,

得 $$\phi''(x)+z''+a[\phi'(x)+z']+b[\phi(x)+z]=F(x).$$

計及 $\phi(x)$ 爲積分之關係,

得 $$z''+az'+bz=0.$$

由此觀之,求函數 z 之問題,卽解無第二段方程式 $y''+ay'+by=0$ 之問題也. 故已與式之通積之形爲 $cy_1+c'y_2+\phi(x)$. 而有第二段方程式之通積,可由無第二段方程式之通積與有第二段方程式之任一積分相加而得之.

茲就下列特端以定 $\phi(x)$.

(其一) $F(x)$ 爲 n 次多項式之情形

若b不爲零,則可求出n次多項式爲已與式之積分.蓋令$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$, ($a_0, a_1,\cdots\cdots a_n$爲待定系數),而將方程式之第一段化爲$n$次多項式.且令兩段同次之系數相等,則有$n+1$個方程式,足以斷定$n+1$個系數$a_0, a_1,\cdots\cdots a_n$故也.

例——設有方程式$y''+y'-2y=2x^3-3x^2-5$.
以$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$易y, $3a_0x^2+2a_1x+a_2$易y', $6a_0x+2a_1$易y'',則有

$$6a_0x+2a_1+3a_0x^2+2a_1x+a_2-2(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)$$
$$\equiv 2x^3-3x^2-5.$$

令兩段同次系數相等,則有

$$-2a_0=2,$$
$$3a_0-2a_1=-3,$$
$$6a_0+2a_1-2a_2=0,$$
$$a_2-2a_3=-5.$$

解之得$a_0=-1, a_1=0, a_2=-3, a_3=1$.故已與式之一積分爲三次多項式$-x^3-3x+1$.又$y''+y'-2y=0$之通積爲$ce^x+c'e^{-2x}$,已與式之通積爲$ce^x+c'e^{-2x}-x^3-3x+1$.

[備考]——若$b=0, a\neq0$.則須以$n+1$次多項式易y,所得之積分有一系數可以任意.

若 $a=0$, $b=0$. 則方程式化爲 $y''=F(x)$. 可用兩次單積分求之.

(其二) $F(x)$ 爲 $ke^{\alpha x}$ (k 及 α 表常數) 之情形.

在此情形, 方程式之形爲

$$y''+ay'+by=ke^{\alpha x}. \tag{1}$$

其無第二段方程式之指標方程式爲

$$f(r)\equiv r^2+ar+b=0.$$

茲證定理於下.

(一) 若 α 非指標方程式之根, 則可求出一常數 λ, 使 $\lambda e^{\alpha x}$ 爲 (1) 式之積分.

(二) 若 α 爲指標方程式之單根, 則可求出一常數 λ, 使 $\lambda xe^{\alpha x}$ 爲 (1) 式之積分.

(三) 若 α 爲指標方程式之二重根, 則可求一常數 λ. 使 $\lambda x^2e^{\alpha x}$ 爲 (1) 式之積分.

由前已知無論 x, r 爲何數, 恆有下式:

$$\frac{d^2}{dx^2}e^{rx}+a\frac{d}{dx}e^{rx}+(be^{rx})=e^{rx}f(r), \tag{2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(xe^{rx})+a\frac{d}{dx}(xe^{rx})+b\,xe^{rx}=e^{rx}[f'(r)+xf(r)]. \tag{3}$$

求 (3) 式兩邊對於 r 之引數, 得

(4) $\frac{d^2}{dx^2}(x^2e^{rx})+a\frac{d}{dx}(x^2e^{rx})+bx^2e^{rx}=e^{rx}[f''(r)+2xf'(r)+x^2f(r)]$.

(一) 若α非$f(r)=0$之根,則以α易(2)式中之r,

得
$$\frac{d^2}{dx^2}(e^{\alpha x})+a\frac{d}{dx}(e^{\alpha x})+be^{\alpha x}=e^{\alpha x}f(\alpha),$$

故以$\lambda e^{\alpha x}$易(1)式之y,

得
$$f(\alpha)\lambda e^{\alpha x}=k e^{\alpha x}.$$

即
$$\lambda=\frac{k}{f(\alpha)},$$
可見$\frac{ke^{\alpha x}}{f(\alpha)}$爲(1)式之一積分.

(二) 若α爲$f(r)=0$之單根,則$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)\neq 0$, 以α易(3)式之r,

得
$$\frac{d^2}{dx^2}(xe^{\alpha x})+a\frac{d}{dx}(xe^{\alpha x})+bxe^{\alpha x}=e^{\alpha x}f'(\alpha).$$

故以$\lambda xe^{\alpha x}$易(1)式之y,

得
$$\lambda f'(\alpha)e^{\alpha x}=k e^{\alpha x}$$

即
$$\lambda=\frac{k}{f'(\alpha)}.$$

可見$\frac{kxe^{\alpha x}}{f'(\alpha)}$爲(1)式之一積分.

(三) 若α爲$f(r)=0$之二重根,則$f(\alpha)=0$, $f'(\alpha)=0$, $f''(\alpha)\neq 0$. 以α易(4)式之r,

得
$$\frac{d^2}{dx^2}(x^2e^{\alpha x})+a\frac{d}{dx}(x^2e^{\alpha x})+bx^2e^{\alpha x}=e^{\alpha x}f''(\alpha).$$

故以λx^2e^{ax}易(1)式之y,

得　$$\lambda e^{ax}f''(a)=ke^{ax}.$$

即　$$\lambda=\frac{k}{f''(a)}.$$

可見$\dfrac{kx^2e^{ax}}{f''(a)}$爲(1)式之一積分.

遂得定理之證.

例一——設有方程式$y''-4y'+5y=4e^{3x}$.

因3非指標方程式$f(r)\equiv r^2-4r+5=0$之根,故已與式有一積分爲$\dfrac{4e^{3x}}{f(3)}=2e^{3x}$. 又無第二段方程式之通積爲$e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$. 由是已與式之通積爲

$$e^{2x}(A\cos x+B\sin x)+2e^{3x}.$$

例二——設有方程式$3y''-7y'+2y=2e^{\frac{x}{3}}$.

因$\dfrac{1}{3}$爲指標方程式$f(r)\equiv 3r^2-7r+2=(r-2)(3r-1)=0$之單根,故已與式有一積分$\dfrac{2xe^{\frac{x}{3}}}{f'\left(\frac{1}{3}\right)}=-\dfrac{2xe^{\frac{x}{3}}}{5}$. 又無第二段方程式之通積爲$ce^{2x}+c'e^{\frac{x}{3}}$,由是已與式之通積爲

$ce^{2x}+c'e^{\frac{x}{3}}-\dfrac{2xe^{\frac{x}{3}}}{5}$.

例三——設有方程式$4y''+4y'+y=\dfrac{3}{5}e^{-\frac{x}{2}}$.

此式之指標方程式 $f(r)\equiv 4r^2+4r+1\equiv(2r+1)^2=0$ 有二重根 $-\frac{1}{2}$. 故已與式有一積分 $\frac{3x^2e^{-\frac{x}{2}}}{5f''(-\frac{1}{2})}=\frac{3x^2e^{-\frac{x}{2}}}{40}$. 又無第二段方程式之通積為 $e^{-\frac{x}{2}}(c+c'x)$. 由是已與式之通積為 $e^{-\frac{x}{2}}(c+c'x)+\frac{3x^2e^{-\frac{x}{2}}}{40}=e^{-\frac{x}{2}}\left(c+c'x+\frac{3x^2}{40}\right)$

(其三) $F(x)$ 為多項式及指數函數 ke^{ax} 之和之情形.

玆先述定理如下:

定理——設有方程式

$$(1)\qquad y''+ay'+by=F_1(x)+F_2(x)+\cdots\cdots+F_p(x)=\Sigma F_i(x),$$

就中 $F_1(x), F_2(x),\cdots\cdots F_p(x)$ 表多項式或指數函數 ke^{ax}.

令

$$(2)\qquad \begin{cases} y''+ay'+by=F_1(x), \\ y''+ay'+by=F_2(x), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ y''+ay'+by=F_p(x). \end{cases}$$

若得 (2) 式中每式之一積分, 則此積分之和即為 (1) 式之積分.

蓋設 $\phi_1(x), \phi_2(x),\cdots\cdots\phi_p(x)$ 依次為 (2) 式中第一, 第二, $\cdots\cdots$第 p 式之積分, 則

$$\phi_1''(x)+\ \ \phi_1'(x)+b\phi_1(x)=F_1(x),$$

$$\phi_2''(x)+a\phi_2'(x)+b\phi_2(x)=F_2(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\phi_p''(x)+a\phi'_p(x)+b\phi_p(x)=F_p(x).$$

相加得

$$\Sigma\phi_i''(x)+a\,\Sigma\phi_i'(x)+b\,\Sigma\phi_i(x)=\Sigma F_i(x).$$

是卽證明函數 $\Sigma\phi_i(x)=\phi_1(x)+\phi_2(x)+\cdots\cdots+\phi_i(x)$ 爲 (1) 式之一積分也.

[備考]——當方程式第二段含有 $A_1\cos mx$, $B_1\sin mx$ (A_1, B_1, m 均表常數) 時, 上述之方法仍能適用. 蓋以 $\frac{e^{mix}+e^{-mix}}{2}=\cos mx$, $\frac{e^{mix}-e^{-mix}}{2i}=\sin mx$ 故也.

例——設有方程式 $y''-3y'+2y=x^2+e^x-\sin 2x$.

此式可書爲

(3) $$y''-3y'+2y=x^2+e^x-\frac{e^{2ix}}{2i}+\frac{e^{-2ix}}{2i}.$$

玆先求下列各式之積分:

(4) $$y''-3y'+2y=x^2,$$

(5) $$y''-3y'+2y=e^x,$$

(6) $$y''-3y'+2y=-\frac{e^{2ix}}{2i},$$

(7) $$y''-3y'+2y=\frac{e^{-2ix}}{2i}.$$

依系數之斷定法易知$\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$為(4)式之一積分.而指標方程式$f(r)\equiv r^2-3r+2=0$之根為1及2.故(5)式有一積分$\frac{xe^x}{f'(1)}=-xe^x$.又因$2i$非$f(r)=0$之根,故(6)式有一積分

$$\frac{-e^{2ix}}{2if(2i)}=\frac{e^{2ix}}{4i(1+3i)}=-\frac{e^{2ix}}{4(3-i)}=-\frac{e^{2x}(3+i)}{40}.$$

欲得(7)式之一積分,祇將$-i$易(6)式積分之i足矣.由是(1)式之積分為

$$y=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}-xe^x-\frac{e^{2ix}(3+i)}{40}-\frac{e^{-2ix}(3-i)}{40}$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}-xe^x-\frac{3\cos 2x-\sin 2x}{20}.$$

又無第二段方程式之通積為$ce^x+c'e^{2x}$,故(1)式之通積為

$$ce^x+c'e^{2x}+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}-xe^x+\frac{\sin 2x-3\cos 2x}{20}.$$

第十二章之習題

試定下列各曲線.

(1) 次法線長為常數者.　(2) 次切線長為常數者.

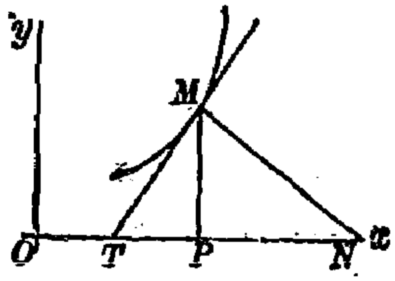
(3) 法線長為常數者.　(4) 切線長為常數者.

(5) 極次切線長為常數者.　(6 極次法線長為常數者.

(7) 極法線長為常數者.　(8) 極切線長為常數者.

(9) 設位標軸oxy為正交,平曲線上M點之切線MT與ox軸相

交於T, M點之法線MN與ox軸相交於N, 令P爲M在ox軸之投影. 如圖70所示.



(圖 70)

試定合於下列關係之平曲線:

(a) oT爲oP與常數a之算術中項.

(b) oT爲oP與常數a之幾何中項.

(c) oT爲oP與常數a之調和中項

試積下列方程式:

(10) $(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1-y^2.$　　(11) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2a\frac{dy}{dx}+y=0.$

(12) $(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}-xy=0.$　　(13) $x\,dx+y\,dy=m(x\,dy-y\,dx).$

(14) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}-1=0.$

(15) 試定平曲線合於$oN=MN$之關係者(見圖70).

試積平直方程式:

(16) $(1-x^2)y'+2xy-4x=0.$　　(17) $y'-\frac{y}{\sin x}+1-\cos x=0.$

(18) $xy'-y+\log x=0.$　　(19) $y'-2y+e^x=0.$

試積 Bernoulli 方程式:

(20) $3y'\cos x+y\sin x-\frac{1}{y^2}=0.$　　(21) $(1+x^2)y'=xy+x^2y^2.$

(22) $xy'+y-\frac{a^2}{xy^3}=0.$　　(23) $y'+\frac{xy}{1-x^2}=x\sqrt{y}.$

(24) 已知$\frac{dy}{dx}(1-\sin x\cos x)+y^2\cos x-y+\sin x=0$之特積爲$y=\cos x$,試求其通積.

(25) 設曲線上任一點切線之角系數等於該點與原點連結直線之角系數之二倍,試求此曲線之方程式.

試積 Lagrange 方程式:

(26) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2x\frac{dy}{dx}+y+1=0.$　　(27) $x=1+\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$

(28) $y=x\frac{dy}{dx}+\frac{m}{\frac{dy}{dx}}.$　　(29) $x+y\frac{dy}{dx}=a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$

(30) 設位標軸oxy爲正交,有一族直線與ox軸相交於P,與oy軸相交於Q,試求此族直線適合於下列條件之包線:

(a) oP與oQ之和爲常數,

(b) oP與oQ之差爲常數,

(c) oP與oQ之積爲常數,

(d) oP與oQ之商爲常數.

試求下列各曲線族之正交曲線系:

(31) $y^2=\frac{x^3}{2c-x}$ [參閱第十章之第40習題].

(32) $x^2+y^2-2cy+c^2=0.$　　(33) $\rho=\frac{p}{1+c\cos\theta}.$

(34) $\rho^2=c\frac{\theta}{\pi-\theta}$ (c表參數).

(35) 解方程組 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=3x-y,\\ \frac{dy}{dt}=x+y.\end{cases}$　　(36) (a)解方程組 $\begin{cases}\frac{dx}{dt}=x-y-t-2,\\ \frac{dy}{dt}=y+t.\end{cases}$

(b) 設 $t=0$ 時, $x=0$, $y=0$, 試定一曲線 c 合於此關係者.

(c) 求兩直線 $x=0$, $x=1$ 與曲線 c 所包之面積.

(d) 求直線 $x=1$ 與曲線 c 所包之面積.

(e) 由 $(1,-1)$ 點祇能作一直線與 c 相切, 試證明之.

(37) 設平曲線之曲率半徑在定直線之投影爲常數, 試求此曲線之方程式.

(38) 如令 ω 爲圖 70 之 M 點之曲率中心, 試定平曲線合於 $\frac{MN}{M\omega}=n$ 之關係者 (n 表正常數或負常數). 並察 $n=\pm\frac{1}{2}$ 或 $n=\pm 1$ 之特端.

試求下列第二級微分方程式.

(39) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$　　(40) $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$

(41) $2(1-y)\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0.$　(42) $y''-3y'+2y=0.$

(43) $y''-4y'+5y=0.$　　(44) $y''-2y'+5y=0.$

(45) $9y''-6y'+y=0.$　　(46) $y''+2y'+y=8e^x.$

(47) $y''+2y'+y=x^3+3e^{2x}-2e^{-x}+\cos x.$

(48) $y''-4y'+3y=6x+1+4e^x-7e^{-x}+\cos 2x.$

(49) $y''-2y'+3y=\sin x.$　　(50) $2y''-y'-y=3\cos 2x-\sin 2x.$

微積概要勘誤表

章	節	目	誤	正
四	II	7 (中段)	…………………… …以 $\frac{b-a}{n}$ 徧除上式分子分… ……………………	…………………… …以 $\frac{b-a}{n}$ 徧乘上式分子分 ……………………
四		習題 21(6)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m-1}x\,dx=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2m)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2m+1)}\frac{\pi}{2}$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\,dx=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2m)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2m+1)}$.
四		習題 23	求拋物線 $y^2=4x-12$ 與雙……	求拋物線 $y^2=4x$ 與雙………
五	III	1 (末)	依第II節……連續於收斂間隔 $(-\rho, +\rho)$ 內.	依第II節……連續於間隔 $(-\rho, +\rho)$ 內.

中華民國二十五年三月初版

周

微積概要 一冊

（52241·3）

每冊定價國幣貳元捌角

外埠酌加運費匯費

編纂者 國立中山大學數學系助教 李銘槃
國立中山大學理學院院長 何衍璿
國立中山大學數學系助教 苗文綏

出版者 國立編譯館

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠