溫特渥斯

# 立體幾何學解法

魏鏡譯



商務印書館發行

溫特渥斯

# 立體幾何學解法



武康魏 鏡譯

科學會編輯部出版
商務印書館發行

# 目　次

溫特渥斯

# 立體幾何學

## 問題正解

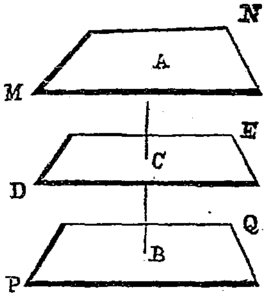
# 第六編

## 空間之線及平面

問題604. 求空間距兩平行面等遠之點軌。

〔解〕 命MN及PQ爲任何兩平行平面。

求距此二平面等遠之點軌。




(構圖) 於MN平面內之A點作一垂線。且引長之。遇PQ平面於B。

平分AB於C。通過C作一DE平面。爲AB之⊥。

則DE平面。即爲所求之軌矣。

〔證〕 平面DE∥平面MN。 § 527

故平面MN, DE及PQ互相平行。因知DE內之任一點。其距MN平面之遠為AC。

同理。DE內之任一點。其距PQ平面為BC。

但AC等於BC。故在DE內之任一點。其距MN及PQ等遠。

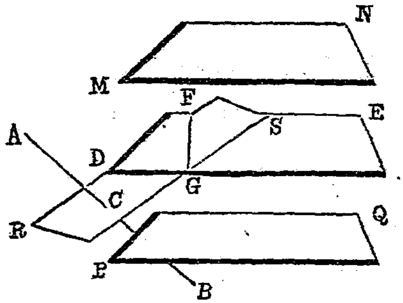
且一點之在 DE 之外者。其距一平面必較近或較遠於他一平面。

由是知DE為所求之軌。

**問題605.** 求空間距兩與點及兩與平面等遠之點軌。

〔解〕 命A及B為空間之任何兩與點。而MN及PQ為任何之兩平行面。

求距A, B及MN, PQ等遠之點軌。




(構圖) 作AB且平分之於C。通過C作RS平面。為BA之⊥。

作DE平面。平行MN及PQ。且適居於其中間。

命FG為RS及DE之交線。則FG即為所求之軌矣。

〔證〕　每點之在RS平面內者.其距A及B等遠.

§ 517

又每點之在DE平面內者.其距MN及PQ等遠.

問題 604

則每點之在RS及DE之交線FG內者.必距A, B及MN, PQ皆等遠矣.

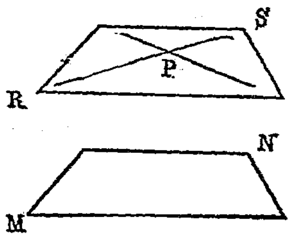
故FG為所求之軌.

(討論)　若AB⊥MN平面時.則除AB之中點適居乎MN及PQ之中間.而其軌為DE平面外.別無他軌矣.

在他例內.其軌均為直線.

問題606.　求通過一已知點而與一已知平面平行諸線之軌.

〔解〕　命MN為已知平面.而P為已知點.




求通過P點而平行MN之諸線之軌.

(構圖)　通過P點.作任何二線與MN平行.

通過此線.作RS平面.

則RS即為所求之軌矣.

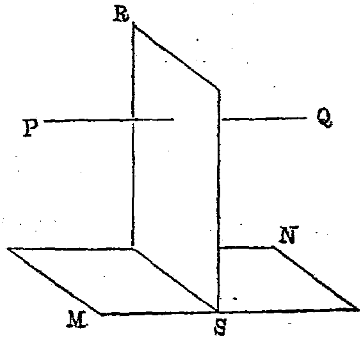
〔證〕　平面RS∥平面MN。　§ 533

能通過P點而與MN平行者，祇有RS平面。　§ 532

故所求之軌，爲通過與點而與與平面平行之平面。

問題607.　一與平面，距不在此平面內之二與點等遠，求此面內諸點之軌。

〔解〕　命MN爲與平面，而P及Q爲不在MN平面內之二與點。




試於MN平面內，求出距P及Q等遠諸點之軌。

(構圖)　作PQ。且通過其中點作RS平面，爲PQ之⊥，而交MN平面於AB。

則AB即爲所求之軌矣。

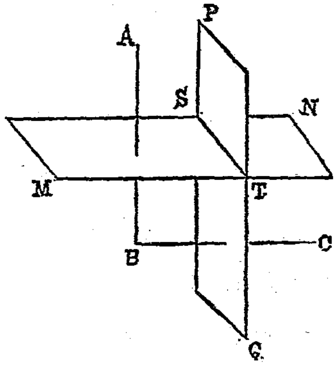
〔證〕　RS平面，爲在空間距P及Q等遠諸點之軌。

故RS與MN之交點AB，爲MN內之距P及Q等遠諸點之軌。

(討論)　若PQ⊥MN時，則不能求軌。　§§ 527, 504

問題608.　求空間一點，距三與點之不在一直線內等遠之軌。

〔解〕 命A, B及C爲不在一直線內之三與點。




求空間一點之距A, B及C等遠之軌。

(構圖) 作AB及BC。於AB之中點作一MN平面⊥AB。而於BC之中點作一PQ平面⊥BC。且命其交MN平面於ST。

則ST即爲所求之軌矣。

〔證〕 因ST在MN平面內。則任一點之在ST內者。其距A及B等遠。 § 517

又ST亦在PQ平面內。則任一點之在ST內者。其距B及C亦等遠。

故ST內之任一點。距A, B及C皆等遠。

則任一點之不在此線內者。亦不在MN及PQ二平面中之一個內。或兩箇內。則其距A, B及C決不能等遠。

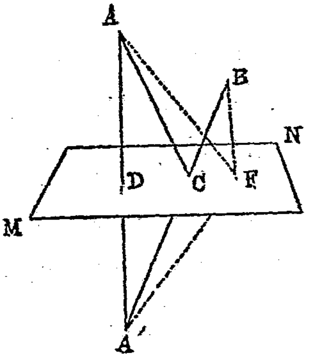
故ST爲所求之軌。

問題609. 求平面內一點。其距此平面一邊上兩與點之遠之和爲最小限。

〔解〕　命MN爲與平面.而A及B爲同在MN一邊之二與點.

求MN內之一點.使其距A及B之遠之和爲最小限.

(構圖)　自A作AD.爲MN平面之垂線.且引長至 A′.令DA′等於AD.作A′B.截MN於C.且作AC.




則 AC+BC.必小於自A及B至MN內任一他點所作一線之和.

〔證〕　命F爲MN平面內之他一點.乃作FB,FA及FA′.

今　FA=FA′.而 CA=CA′.　§ 517

但　BF+FA′>BC+CA′.　§ 49

∴　BF+FA>BC+CA.

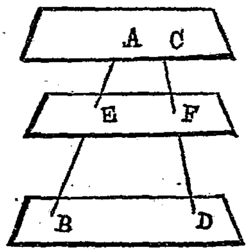
問題610.　AB線遇三平行面於A,E,B三點.且CD遇同平面於C,F,D三點.若AE=6寸,BE=8寸.而CD=12寸.求CF及FD.

(法)　AE:EB=CF:FD　§ 535

∴　AE+EB:EB=CF+FD:FD

即 $AB:EB=CD:FD$

$14:8=12:FD$




故 $FD=\frac{8\times 12}{14}$

$=\frac{96}{14}=6\frac{6}{7}$

$CF=CD-FD$

$=12-6\frac{6}{7}=5\frac{1}{7}$

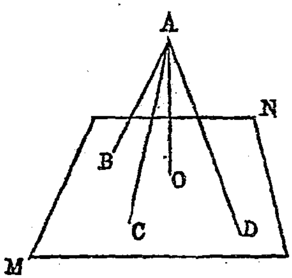
$\therefore$ $CF=5\frac{1}{7}$寸

而 $FD=6\frac{6}{7}$寸

問題611. 求自一外點至一與平面作一垂線。

〔解〕 命MN爲與平面。而A爲平面外之一與點。

求自A至MN平面作一垂線。




(構圖) 自A作任何三等線至MN平面。如AB, AC及AD是也。

於MN內。求出距B, C, D等遠之一點O。乃作AO。

則AO即爲所求之垂線矣。

〔證〕 自A至MN所作之垂線之足。距等長之斜線

AB, AC及AD等遠。 § 515

今MN內。其距B, C, D三點等遠者。祇有O點。 § 314

故OA爲自A至MN之垂線也。

問題612. 求在一與平面之一與點上作一垂線。

〔解〕 命A爲與平面MN內之任一點。

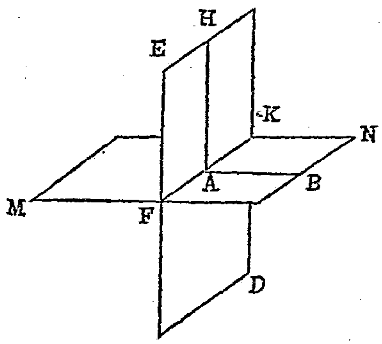
求於MN平面內之A點作一垂線。

(構圖) 於MN平面內。通過A作任一直線BA。

通過A作一ED平面⊥BA。而截MN於FAK。

於ED平面內。作AH⊥FK。

則AH即爲所求之垂線矣。




〔證〕 因BA爲ED平面之垂線。亦爲AH之垂線。 § 501

但AH⊥KH。(構圖)

∴ AH⊥BA及FK於MN平面之交點A。

故AH爲MN平面內A點之垂線。 § 507

問題613. 自離平面MN四寸之A點作斜線AC。長5寸。至平面。乃繞自A至平面所作垂線AB而

旋。C 點所過之處成一平圓。試求其面積。

(法) AB 爲 MN 平面之垂線。故亦爲 BC 之垂線。

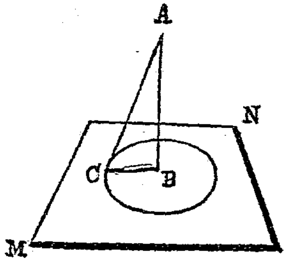
§ 501

$\therefore \overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$ § 372

$\therefore BC=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}$

$=\sqrt{5^2-4^2}$

$=3$




平圓面積 $=\pi R^2$

$=31416\times 3^2$

$=2.82744$

答 28.2744 方寸。

問題614. 自離平面 MN 8 寸之 A 點至平面作 AB 垂線。乃以 B 爲圓心。用 6 寸長之半徑。於平面上作圓。於圓周之 C 點作切線 CD。長 24 寸。求 AD 之長。

(法) 今 $AB\perp BC$。 § 501

$$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2 \quad \text{§ 371}$$

$$=8^2+6^2$$

$$=100$$

但 $AB\perp BC$ § 501

而 $BC \perp DC$ § 254

$\therefore AC \perp CD$ § 518

$\therefore \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$ § 371

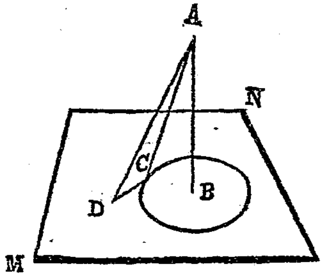
$= 100 + 24^2$

$= 100 + 576$

$= 676$

因知 $AD = \sqrt{676}$

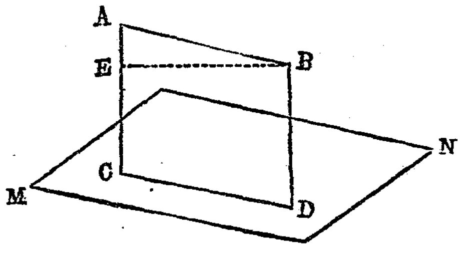
$= 26$




答二十六寸。

問題615. 一線至平面上所作射影等於本長試言此線與此平面之位置關係如何。

〔解〕 命 CD 爲 AB 線至 MN 平面上所作之射影且 CD 等於 AB, AB // CD, 故亦平行 MN 平面不然則 A 或 B 中將有一箇較他箇近於平面矣




設 $BD < AC$

作 BE⊥AC。則 BE 及 DC 當均為 AC 之垂線。且相平行。 § 104

∴ BE 及 DC 將相等。 § 180

但 BE<BA § 91

∴ DC<BA

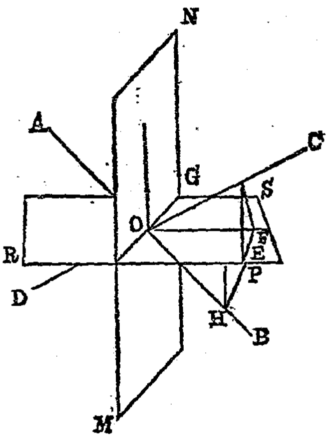
則與 DC 等於 BA 之題設相反。

∴ AB∥CD。亦平行 MN 平面。

問題616. 求空間與二交線等遠之點軌。

〔解〕 命 AB 及 CD 為空間相交於 O 之二線。

求距 AB 及 CD 等遠之點軌。




(構圖) 於 AB 及 CD 之平面內。作 OE 平分 ∠COB。通過 OE 作 RS 平面。為 AB 及 CD 之平面之⊥。

則 RS 平面。即為所求之軌矣。

〔證〕 自 RS 平面內之任一點 P。作 PF⊥OE。

則 PF 亦為 AB 及 CD 之平面之⊥。 § 551

作 FG⊥CD。而 FH⊥AB。且作 PH 及 PG。

則 PG 及 PH。各爲 CD 及 AB 之垂線。　§ 518

因　PF=PF　公邊

而　FG=FH　§ 162

∴　正△PFG=正△PFH　§ 144

因知　PG=PH　§ 128

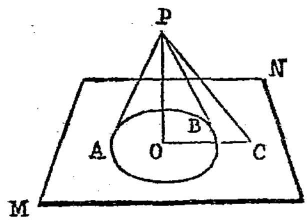
即 P 點距 CD 及 AB 等遠。

依同理。可求得他一軌。爲通過 ∠AOC 之平分線。而⊥CD 及 AB 之平面之 MN 平面。

問題617.　求空間與一圓周諸點等遠之點軌。

〔解〕　命 AB 爲 MN 平面。內以 O 爲心所作之圓周。

求空間之距圓周諸點等遠之點軌。




(構圖)　於 MN 平面內之 O 點。作一 OP 垂線。則 OP 即爲所求之軌矣。

〔證〕　自垂線中之任一點 P。至圓周之任二點。作 PA 及 PB。且作 PC 至 MN 平面之任一點之不在圓周內者。

今 PA 及 PB 相等。　§ 514

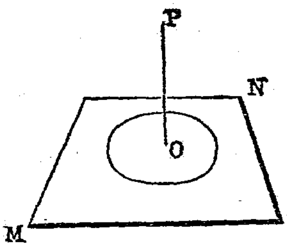
而 $PA \neq PC$ § 514

故 PO 爲所求之軌也。

問題618. 求平面內與面外一點等遠之點軌。

〔解〕 命 P 爲~~與~~已知點。而 MN 爲~~與~~已知平面。

於 MN 平面內。求出距 P 點等遠諸點之軌。




(構圖) 作 $PO \perp MN$ 平面。以 O 爲心。任意畫一圓周。

則此圓周。即爲所求之軌矣。

〔證〕 自 P 至此圓周之諸線等長。 § 514

故此圓周爲所求之軌也。

〔討論〕 若自 P 作一垂線。其垂線之足不能在 MN 平面內。則此題不能作。

問題619. 求距四點之不在同平面內者等遠之一點。

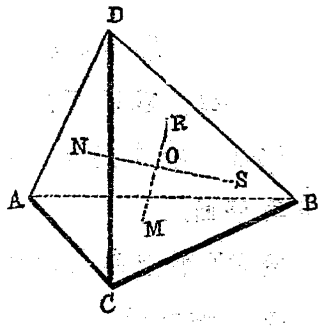
〔解〕 命 A, B, C, D 爲不在同平面內之四~~與~~已知點。

求距 A, B, C, D 等遠之一點。

(構圖) 作 AB, AC, BC, AD, CD, BD。

求出 △ABC, ACD 之外切圓周之圓心 M 及 N。

作 MR⊥ABC 平面.而 NS⊥ACD 平面.




MR 爲距 A, B, C 等遠諸點之軌。

而 NS 爲距 A, C, D 等遠諸點之軌。 § 516

且 MR 及 NS 在同平面內.

因通過 AC 之中點作一平面.爲 AC 之垂面.此平面內諸點.距 A 及 C 等遠。 § 516

故 MR 及 NS 必在同平面內。

又 MR 及 NS 爲二平面之垂線.而非平行.亦不能平行.故可相遇於一點 O.

∴ O 距 A, B, C, D 等遠。

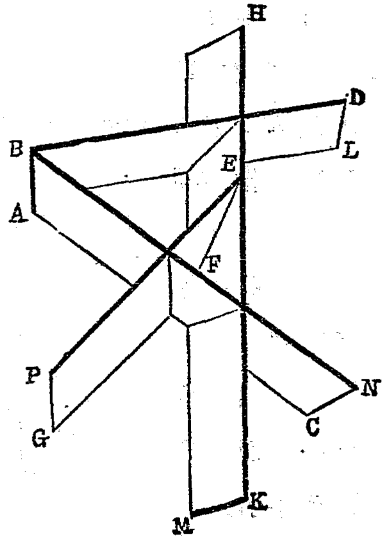
問題620. 兩箇二稜角之角鋒平行.且諸面彼此正交者.必相等或相輔.

〔解〕 命平面 HM⊥ 平面 AD.而平面 GE⊥ 平面 AN. AB 爲 AN 及 AD 之交線.而與 HM 及 GE 之交線 FE 平行.

求證二稜角 C-BA-D 等於二稜角 G-EF-K.而與二

稜角 G-EF-H 相輔。

〔證〕 設作一 BHK 平面 ⊥AB。截諸平面 CB, AD, HM, GE 於 BN, BD, HK, EP。




則 BHK 平面 ⊥FE 線。 § 520

NB 及 DB⊥AB 於同一點 B。而 HK 及 PE⊥FE 於同一點 E。 501

∴ ∠NBD 爲度二稜角 C-BA-D 之數。

∠HEP 爲度二稜角 G-EF-H 之數。

而 ∠PEK 爲度二稜角 G-EF-K 之數。 § 550

但 ∠NBD 等於 ∠PEK。而與 ∠HEP 相輔。

問題 90

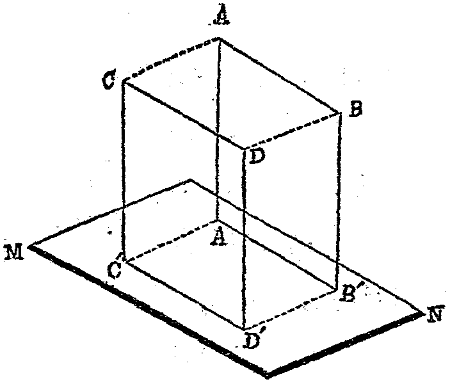
故二稜角 C-BA-D 等於二稜角 G-EF-K。而與二稜角 G-EF-H 相輔。

問題 621. 相等且平行之諸線。其在一平面上之射影。亦相等而平行。

〔解〕 命 AB 及 CD 爲相等且平行之二線。而 A'B' 及 C'D'。爲在 MN 平面上 AB 及 CD 之射影。

求證 A'B' 及 C'D' 相等且平行。

〔證〕 作 AC 及 BD。




AB 及 CD 在一平面內。 § 498

今 AB 及 CD 相等且平行。 題設

∴ ABCD 爲平行四邊形。而 AC 及 BD 亦相等且平行矣。 § 183

今諸平面 AB', CD', AC', BD'。皆爲 MN 平面之 ⊥。 § 554

且 AB' 平面平行 CD' 平面。不然。AB 及 C 爲諸平面與 ABCD 平面之交線。而能使之相遇。則與 AB 平行 CD 之題設不合。

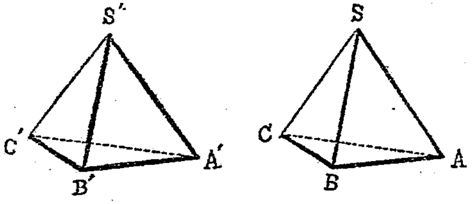
依同理。AC' 平面亦平行 BD' 平面。

∴ A'B' 與 C'D' 平行。 § 528

且 A'B' 與 C'D' 相等。 § 529

問題622. 兩箇三稜角。其一之兩箇二稜角及夾面角。等於他一之兩箇二稜角及面角。則必相等。且位置相似。

〔解〕 於三稜角 S-ABC 及 S'-A'B'C' 中。命二稜角 SA, SB 及面角 ASB。各與二稜角 S'A', S'B' 及面角 A'S'B' 相等。且位置相似。




求證三稜角 S-ABC 及 S'-A'B'C' 相等。

〔證〕 置三稜角 S-ABC 於三稜角 S'-A'B'C' 之上。則面角 ASB 與 A'S'B' 合一相等。

而 SBC 平面落於 S'B'C' 平面上。因二稜角 SB 等於 S'B' 也。 題設

且因二稜角 SA 等於 S'A'。故 ASC 平面落於 A'S'C' 平面上。

則 SBC 平面及 ASC 平面之交線 SC。亦必為 S'B'C' 及 A'S'C' 之交線。因知必與 S'B'C' 及 A'S'C' 之交線 S'C' 合一。

∴ 兩箇三稜角相等。 § 577

問題623. 兩箇三稜角。其一之兩箇面角及其夾二稜角。等於他一之兩箇面角及其夾二稜角。則必相等。且位置相似。

〔解〕 於三稜角S-ABC及S'-A'B'C'中。命面角ASB, BSC及其二稜角 SB。各等於面角 A'S'B', B'S'C' 及其二稜角S'B'。且位置相似。

求證三稜角S-ABC及S'-A'B'C'相等。

〔證〕 將三稜角 S-ABC 移於 S'-A'B'C' 之上。則角頂 S 落於 S' 上。而二稜角 SB 落於 S'B' 上。

平面 ASB 與 A'S'B'. 在同平面 A'S'B' 內。

因 ∠ASB 及 A'S'B' 相等。 題設

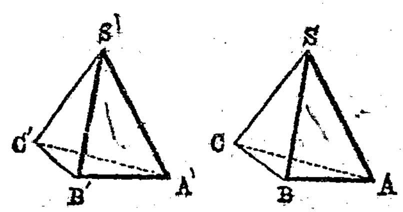
則 SA 落於 S'A' 上。

又面角 BSC 與 B'S'C'. 在同平面 B'S'C' 內。

因 ∠BSC 及 B'S'C' 相等。 題設

則 SC 落於 S'C' 上。

∴ 面角 ASC 及 A'S'C' 合一。 § 497




∴ 兩箇三稜角相等。

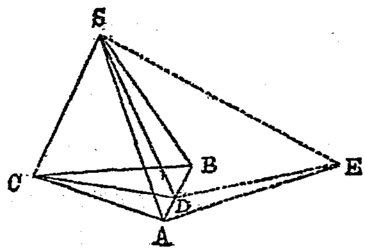
問題624. 若三稜角 S-ABC 之面角 ASB. 以 SD 線平分之.所成 CSD 角之小於等於或大於 ASC+BSC 二角之半和.依 CSD 之小於等於或大於一正角而定.

〔解〕 命 S-ABC 爲三稜角.而 SD 平分面角 ASB.求證下列三例.

第一例 $\angle CSD<90°$ 時.

求證 $\angle CSD<\frac{1}{2}(\angle ASC+\angle BSC)$

〔證〕 於 $\angle CSD$ 之平面內.作一 $\angle DSE$ 等於 $\angle CSD$.且於 AS 及 SE 之平面內.作一 AE 線.




今三稜角 S-ADE 等於三稜角 S-BDC. 問題 623

因有 $\angle ASD=\angle BSD$ 題設

$\angle DSE=\angle CSD$ 構圖

而 $\angle A\text{-}SD\text{-}E=\angle B\text{-}SD\text{-}C$ § 547, 1

$\therefore \angle ASE=\angle BSD$

於三稜角 S-CAE 內

$\angle CSE < \angle ASC + \angle ASE$ § 580

$\therefore$ $\angle CSE < \angle ASC + \angle BSC$

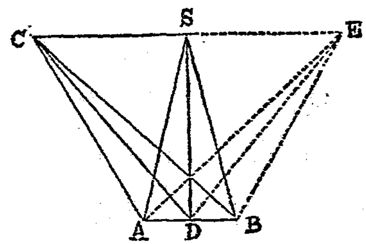
$\therefore$ $\angle CSD < \frac{1}{2}(\angle ASC + \angle BSC)$

第二例 $\angle CSD = 90°$ 時.

求證 $\angle CSD = \frac{1}{2}(\angle ASC + \angle BSC)$

〔證〕 引長 CS 至適當之一點 E, 乃作 EA, ED, EB.

今 $\angle CSD = \angle DSE = 90°$




由第一例知三稜角 S-ABC=三稜角 S-BDC

而 $\angle ASC = \angle BSC$

今 $\angle ASC + \angle ASE = 180°$ § 86

$\therefore$ $\angle ASC + \angle BSC = 180°$

$\therefore$ $\frac{1}{2}(\angle ASC + \angle BSC) = 90°$

因知 $\angle CSD = \frac{1}{2}(\angle ASC + \angle BSC)$

第三例 $\angle CSD > 90°$ 時.

求證 $\angle CSD > \frac{1}{2}(\angle ASC + \angle BSC)$

〔證〕 引長 CS 至適當之一點 E, 乃作 EA, ED, EB.

今 $\angle CSD + \angle DSE = 180°$ § 86

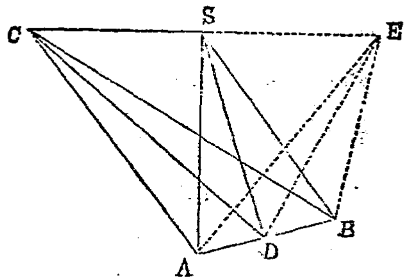
但 $\angle CSD > 90°$ 題設

$$\therefore \quad \angle DSE < 90^\circ$$

故 S-ABE 爲三稜角。

於三稜角 S-ABE 內。

$\angle DSE$ 小於 $\frac{1}{2}(\angle ASE + \angle BSE)$




## 第 一 例

今 $\angle CSD + \angle DSE = 180^\circ$

$\angle ASE + \angle ASC = 180^\circ$

又 $\angle BSE + \angle BSC = 180^\circ$ § 86

$\therefore \quad \angle DSE = 180^\circ - \angle CSD$

$\angle ASE = 180^\circ - \angle ASC$

而 $\angle BSE = 180^\circ - \angle BSC$

以 $\angle$s DSE, ASE 及 BSE 之價代之

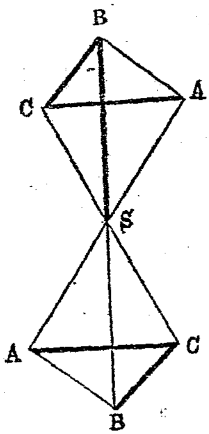
則 $180^\circ - \angle CSD < \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ASC + 180^\circ - \angle BSC)$

即 $180^\circ - \angle CSD < \frac{1}{2}\{360^\circ - (\angle ASC + \angle BSC)\}$

即 $180^\circ - \angle CSD < 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ASC + \angle BSC)$

$\therefore \quad \angle CSD > \frac{1}{2}(\angle ASC + \angle BSC)$

**問題625.** 兩等面之三稜角及其對稱三稜角必能相合。




〔解〕 命 S-ABC 爲兩等面三稜角。其 ∠ASB 等於 ∠BSC。且命 S-A′B′C′ 爲其對稱三稜角。

求證三稜角 S-ABC 及 S-A′B′C′ 能相合。

〔證〕 ∠ASB＝∠BSC 題設

∠C′SB′＝∠BSC § 93

∴ ∠ASB＝∠C′SB′ 公理 1

依同理 ∠BSC＝∠B′SA′

二稜角 A-BS-C＝二稜角 C′-B′S-A′ § 547

將 S-A′B′C′ 以 S 爲軸而旋之。使 SB′ 落於 SB 上。且相等二稜角 SB′ 及 SB 合一。

因 ∠B′SA′＝∠BSC 則 SA′ 將與 SC 合一。

依同理 SC′ 落於 SA 上。

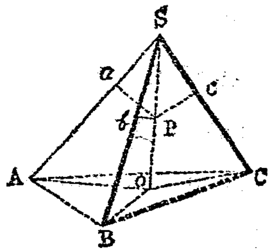
故兩箇三稜角之鋒合一。

∴ 兩箇三稜角合一。

**問題626.** 求距三稜角之三鋒等遠之點軌。

〔解〕 命 S-ABC 爲任何三稜角。

求距 SA, SB, SC, 三鋒等遠之諸點之軌。




(構圖) 截 SA, SB 及 SC 使其互等。乃作 AB, BC, CA。

於 ABC 平面內。求出距 A, B, C 等遠之一點 O。乃作 SO。

則 SO 即爲所求之軌矣。

〔證〕 因 O 距 A, B, C 等遠。而 SA=SB=SC。且 OS 公用。則 △OSA, OSB, OSC 互相等邊且相等。 § 150

故 ∠OSA, OSB 及 OSC 均相等。 § 128

由 SO 內之任一點 P。至 SA, SB, SC 三鋒。作 $Pa$, $Pb$, $Pc$ 三垂線。

因 SP 邊公用。於 S 頂之∠相等。

∴ 正△$SaP$=正△$SbP$=正△$ScP$ § 141

因知 $Pa=Pb=Pc$

∴ P 點距 SA, SB, SC 三鋒等遠。

若自 S 作一線至任一點之不在 SO 內者。決不能通至 ABC 平面上之距 A, B, C 等遠之一點。且不能至諸鋒作成諸等角。 § 155

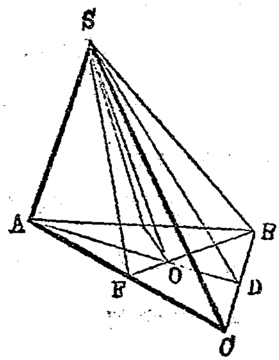
∴ 自此線內之任一點至三鋒之垂線亦決不相等。

由是知 SO 為距 SA, SB, SC 三鋒等遠諸點之軌。

問題627. 求距三稜角之三面等遠之點軌。

〔解〕 命 S-ABC 為三稜角。

求距 SAB, SBC, SAC 三面等遠之點軌。




(構圖) 作 SBF 平面平分其二稜角 SB。又作 SAD 平面平分其二稜角 SA。命 SO 為平分平面之交線。

則 SO 即為所求之軌。

〔證〕 於 SBF 平面內。SO 上之任一點其距 SBA 面及 SBC 面等遠。 § 559

依同理。任一點之在 SO 內者。其距 SAB 面及 SBC 面亦等遠。

故任一點之在 SO 內者。其距 SAB 面 SBC 面及 SAC 面皆等遠。

若 SO 外之任一點。亦必出乎 SBF 平面及 SAD

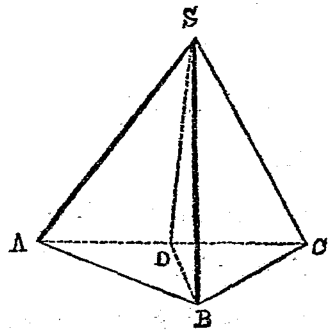
平面中之一箇或兩箇之外。則其距 SAB 面 SBC 面及 SAC 面決不能等遠。

∴ SO 爲所求之軌。

問題628. 若三稜角有兩箇面角相等。與此相等之二稜角亦必相等。

〔解〕 於三稜角 S-ABC 中。有面角 ASB 等於面角 BSC。

求證二稜角 SA 及 SC 相等。




〔證〕 作 SD 平分面角 ASC。

作 BSD 平面通過 SB 及 SD。

則三稜角 S-ABD 及 S-CBD 相對稱。 § 582

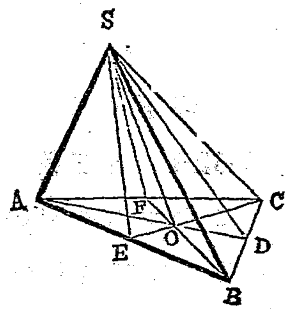
因 $\angle ASB=\angle CSB$

$\angle BSD=\angle BSD$ 公用

而 $\angle DSA=\angle DSC$ 構圖

∴ 二稜角 SA=二稜角 SC § 579

問題629. 平分三稜角之二稜角之三平面。必相交於一直線。




〔解〕 命 S-ABC 為三稜角,而平面 SAD, SBF, 及 SCE 各平分二稜角 SA, SB 及 SC。

求證 SAD, SBF 及 SCE 三平面同交於一直線。

〔證〕 命 SAD 及 SBF 相交於 SO 直線。

則每點之在 SO 內者,其距 SAC 平面及 SAB 平面等遠。 § 559

依同理,每點之在 SO 內者,其距 SBA 平面及 SBC 平面亦等遠。

故每點之在 SO 內者,其距 SCB 平面及 SCA 平面亦必等遠。

因知 SO 在二稜角 SC 之平分平面內。

∴ SAD, SBF, SCE 三平面同交於一直線。

# 第 七 編

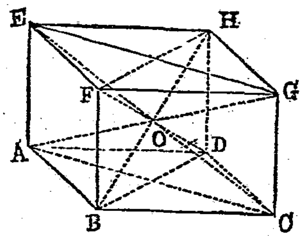
## 稜體 圓柱體 圓錐體

問題630. 平行稜柱體之兩對角線彼此平分。

〔解〕 命 AG, EC, BH, FD. 爲平行稜柱體 AG 之四對角線。

求證四對角線彼此平分.

〔證〕 通過相對二平行鋒 AE 及 CG 作一平面.交平行底於平行線 AC 及 EG. 則 ACEF 爲平行四邊形。




§ 183

∴ 其對角線 AG 及 EC 彼此平分. § 184

即 O 爲 AG 及 EC 之中點.

同理.通過相對二平行鋒 FG 及 AD 所作之平面.必成 AFGD 平行四邊形.

∴ O 爲對角線 AG 之中點.亦爲 FD 之中點.

§ 184

又通過相對二平行鋒 EH 及 BC 所作之平面,必成 EBCH 平行四邊形。

∴ O 爲對角線 EC 之中點,亦爲 BH 之中點。 § 184

由是知四對角線彼此平分。

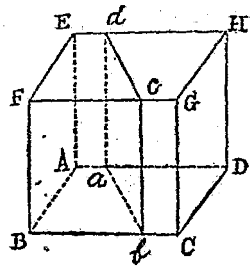
問題631. 正稜柱體之旁面爲長方形。

〔證〕 正稜柱體之旁鋒爲其底面之垂線。 § 591

故旁鋒爲正稜柱體底邊之垂線,即知旁面諸角爲正角。 § 501

因知旁面爲長方形。 § 167

問題632. 以一與稜柱體諸旁鋒平行之平面截此稜柱體所得截面爲平行四邊形。




〔解〕 命 $abcd$ 爲稜柱體 AG 之截面,而由 $abc$ 平面平行 AE, BF, CG, DH 諸鋒所構成者。

求證 $abcd$ 爲平行四邊形。

〔證〕 $ab$ 線與 $cd$ 線平行。 § 528

因 $abc$ 平面與 BF 平行,則 $bc$ 線及 FB,任何引長,不能相遇,故在同平面 ABF 內,且其線平行

依同理 $ab \parallel HD$。

但 $DH \parallel BF$。

$\therefore\ bc \parallel ad$。 § 521

由是知 $abcd$ 爲平行四邊形。

問題633. 若一正稜柱體之高爲18寸。其底之周界爲29寸。求其旁面積。

(法) $S=E\times P=(18\times 29)$方寸$=522$方寸。

問題634. 正稜柱體之高爲20寸。其底面爲三角形。三邊爲7寸8寸及9寸。求其旁面積。

(法) $S=E\times P=20\times(7+8+9)$

$=20\times 24=480$ § 608

答 480方寸。

問題635. 三角稜柱體之旁鋒爲20寸。其正截面爲一三角形。其三邊爲9寸10寸及12寸。求其旁面積。

(法) $S=E\times P=20\times(9+10+12)$

$=20\times 31=620$ § 607

答 620方寸。

問題636. 正稜柱體之高爲32寸。其底面爲三角形。其三邊爲12寸14寸及16寸。求其全面積。

(法) $S=E\times P=32\times(12+14+16)$

$=32\times 42=1344$ § 608

每底之面積$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 問題405

$=\sqrt{21\times 9\times 7\times 5}$

$=81.33$

全面積$=1344+2\times 81.33=1506.66$

答 15方尺6.66方寸。

問題637. 若兩長方平行稜體之高皆爲6寸.其一之底邊爲5寸及4寸。他一之底邊爲10寸及8寸.求其比率如何。

(法) $\dfrac{P}{P'}=\dfrac{5\times 4}{10\times 8}=\dfrac{1}{4}$ § 619

問題638. 若兩長方平行稜柱體之一之三度界.爲3, 4, 5. 他一之三度界爲9, 8, 10。求其比率如何.

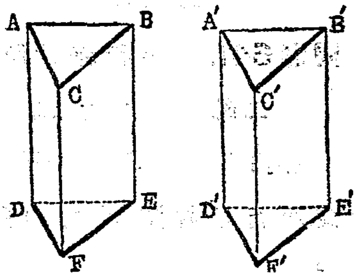
(法) $\dfrac{P}{P'}=\dfrac{3\times 4\times 5}{9\times 8\times 10}=\dfrac{1}{12}$ § 621

問題639. 若兩箇三角稜柱體之諸邊各相等.且同位.則此兩體相等.

[解] 命 ABC-DEF 及 A'B'C'-D'E'F' 爲兩三角稜柱體.其旁面 AF 等於 A'F'。CE 等於 C'E'. AE 等於 A'E'。且位置相似。

求證　　ABC-DEF＝A′B′C′-D′E′F′

〔證〕 相等多邊形之相當邊相等。




故　$AB=A'B'$

　　$AC=A'C'$

而　$BC=B'C'$

因知 $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$

§ 150

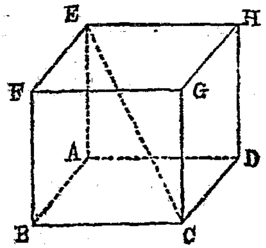
∴ ABC-DEF＝A′B′C′-D′E′F′

蓋以 AE面＝A′E′面　AF面＝A′F′面　題設

而 ABC底面＝A′B′C′底面 故也。

問題640. 長方平行稜柱體之對角線平方,等於三度界之平方和。

〔解〕 命 CE 爲對角線,而 CD, CB, CG 爲長方平行稜柱體之三度界。




求證　$\overline{CE}^2=\overline{CD}^2+\overline{CB}^2+\overline{CG}^2$

〔證〕 作 CA。

則 $\triangle ACD$ 及 ACE 爲正三角形。

故　$\overline{CA}^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=\overline{CD}^2+\overline{CB}^2$　§ 371

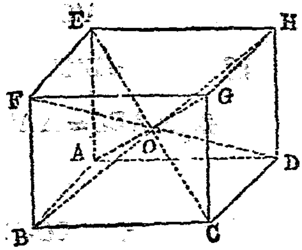
$= \overline{CD}^2 + \overline{CB}^2$

而 $\overline{CE}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AE}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CG}^2$ § 371

$\therefore \overline{CE}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CB}^2 + \overline{CG}^2$

**問題641.** 平行稜柱體四對角線之平方和等於十二鋒之平方之和。

〔解〕 命 AG, CE, BH, DF 為平行稜柱體AG之四對角線。




求證 $\overline{AG}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DF}^2$
$= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2 + \overline{BF}^2$
$+ \overline{CG}^2 + \overline{DH}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{GH}^2 + \overline{HE}^2$。

〔證〕 作 AC, EG, FH 及 BD。

因截面 AG 及 BH 為平行四邊形。 問題 63

$\overline{AG}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{EG}^2 + \overline{AC}^2$ 問題 280

而 $\overline{BH}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{DH}^2 + \overline{FH}^2 + \overline{BD}^2$ 問題 280

$\therefore \overline{AG}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DF}^2$
$= \overline{AE}^2 + \overline{CG}^2 + \overline{BF}^2 + \overline{DH}^2 + \overline{EG}^2 + \overline{FH}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2$

公理 2

又因底面 EG 及 AC 為平行四邊形。 題設

$\overline{EG}^2 + \overline{FH}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 + \overline{GH}^2 + \overline{HE}^2$ 問題 280

而 $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DA}^2$ 問題 280

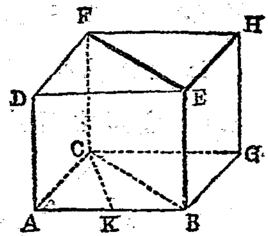
以 $\overline{EG}^2+\overline{FH}^2$ 及 $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$ 之值代之。

則 $\overline{AG}^2+\overline{BH}^2+\overline{CE}^2+\overline{DF}^2$

$$=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2+\overline{BF}^2+\overline{CG}^2+\overline{DH}^2$$
$$+\overline{AE}^2+\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{HE}^2$$

**問題642.** 三角稜柱體之體積.等於任何旁面乘自體鋒至此面所作垂線之半積。

〔解〕 命 ABC–DEF 爲三角稜柱體.而 CK 爲自 CF 鋒之任一點至 AE 面所作之垂線。




求證

ABC–DEF 之體積$=\frac{1}{2}$AE×CK.

〔證〕 於 AB, AC, AD 三鋒作一 AH 平行稜柱體。

則　稜柱體 ABC–DEF$\backsim\frac{1}{2}$平行稜柱體 AH。　§ 615

但　平行稜柱體 AH 之體積＝AE×CK。　§ 626

∴　稜柱體 ABC–DEF 之體積$=\frac{1}{2}$AE×CK.

**問題643.** 若正方體之鋒爲15寸.求其全面積.

(法)　每面之面積＝(15×15)方寸。　§ 398

∴　全面積＝6×(15×15)方寸

＝1350方寸。

**問題644.** 若長平方稜柱體之長界爲10寸.濶界 8

寸。高界 6 寸。求其全面積。

(法) 底面之周界 $=2\times(10+8)=36$ 寸。

旁面積 $=(6\times 36)$ 方寸 $=216$ 方寸。 § 608

上下兩底面之面積 $=2(10\times 8)$ 方寸。

$=160$ 方寸。 § 398

∴ 全面積 $=216$ 方寸 $+160$ 方寸 $=376$ 方寸。

問題 645. 若正三角稜柱體之高為 14 寸。其底面之三邊為 6, 5, 5 寸。求其體積。

(法) 底面之面積 $=\sqrt{8\times 2\times 3\times 3}$ 方寸

$=12$ 方寸。 問題 405

∴ $V=(14\times 12)$ 立方寸 $=168$ 立方寸。 § 628

問題 646. 正稜柱體之底面為斜正方形。其一邊為 10 寸。其短對角線為 12 寸。此稜柱體高 15 寸。求其全面積及體積。

(法) 底面之長對角線之和 $=\sqrt{10^2-6^2}=8$ § 372

底面 $=\frac{1}{2}(16\times 12)=96$ 問題 359

$S=4\times 10\times 15=600$ § 608

兩底面 $=2\times 96=192$

∴ $T=600$ 方寸 $+192$ 方寸 $=792$ 方寸

而 $V=(15\times 96)$ 立方寸 $=1440$ 立方寸

問題647. 有法稜柱體之高爲10尺。其底面爲三角形。每邊10寸。求其體積。

(法) 底面$=\frac{10^2\sqrt{3}}{4}$方寸$=25\sqrt{3}$方寸。

$=43.3$方寸$=\frac{43.3}{100}$方尺。 問題 404

$\therefore$ $V=\left(10\times\frac{43.3}{100}\right)$立方尺$=\frac{433}{100}$立方尺

$=3$立方尺。 § 628

問題648. 欲將無蓋槽之內面敷鉛。槽長4尺6寸闊2尺8寸。容42立方尺。問需鉛幾平方尺。

(法) 4尺6寸$=4\frac{3}{5}$尺$=\frac{23}{5}$尺

2尺8寸$=2\frac{4}{5}$尺$=\frac{14}{5}$尺

此槽之高$=\frac{42}{\frac{23}{5}\times\frac{14}{5}}=\frac{75}{23}$尺

$S=2\times\frac{75}{23}\times\left(\frac{23}{5}+\frac{14}{5}\right)$方尺$=80\frac{10}{23}$方尺 § 608

$B=\left(\frac{23}{5}\times\frac{14}{5}\right)$方尺$=12\frac{22}{25}$方尺 § 398

$80\frac{10}{23}$方尺$+12\frac{22}{25}$方尺$=93\frac{181}{575}$方尺

答 需鉛$93\frac{181}{575}$方尺。

問題649. 一無蓋槽長6尺。濶$4\frac{1}{2}$尺。容108立方尺之水。今欲將其諸邊及底面敷鉛。問需鉛幾平方尺。

$$B=\left(6\times4\frac{1}{2}\right)\text{方尺}=27\text{ 方尺} \qquad \S\ 398$$

$$\text{高}=\frac{108}{27}\text{方}=4\text{ 尺}$$

$$S=4\times2\times\left(6+4\frac{1}{2}\right)=84\text{ 方尺} \qquad \S\ 608$$

$$27\text{ 方尺}+84\text{ 方尺}=111\text{ 方尺。}$$

問題650. 一無蓋槽。以鐵為之。厚2寸。其內度界為長4尺6寸深2尺6寸。問空虛之時槽重幾何。以水滿之。槽重幾何。(鐵比重為7.2)

(法) 外邊長$=4$尺6寸$+4$寸$=4$尺10寸$=4\frac{1}{6}$尺

外邊濶$=3$尺$+4$寸$=3$尺4寸$=3\frac{1}{3}$尺

$$\text{底之體積}=\left(4\frac{5}{6}\times3\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)\text{立方尺}=2\frac{37}{54}\text{立方尺}$$

$$\text{諸邊體積}=2\times\left(4\frac{5}{6}\times2\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)\text{立方尺}=4\frac{1}{36}\text{立方尺}$$

$$\text{兩端體積}=2\times\left(3\times2\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}\right)\text{立方尺}=2\frac{1}{2}\text{立方尺}$$

$$2\frac{37}{54}+4\frac{1}{36}+2\frac{1}{2}=9\frac{23}{108}$$

$$空時之重=9\frac{23}{108}\times7\frac{1}{5}\times62\frac{1}{2}=4145\frac{5}{6}磅$$

$$水之重=4\frac{1}{2}\times3\times2\frac{1}{2}\times62\frac{1}{2}=2109\frac{3}{8}磅$$

$$以水滿之其重=4145\frac{5}{6}+2109\frac{3}{8}=6255\frac{5}{24}磅$$

**問題651.** 有法六稜柱體之高10尺。六邊形之每邊10寸。求其體積。

(法)　$a=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{100-25}$

$=\sqrt{75}=8.66025$。

底面$=6\times\frac{1}{2}(10\times8.66025)$方寸

$=259.8075$方寸。　§ 459

高$=10$尺$=100$寸

$\therefore$　$V=(100\times259.8075)$立方寸

$=25980.75$立方寸

$=25$立方尺$980.75$立方寸　§ 628

**問題652.** 一立方體內容水二噸。求其每一鋒之長。

$2$噸$=2\times2000$磅$=4000$磅。

所求4000磅水之體積。爲

$\frac{4000}{62\frac{1}{2}}$立方尺$=64$立方尺。

$\therefore$　立方體之每鋒$=\sqrt[3]{64}=4$尺。

問題653. 正立方體之一鋒爲$a$。求其面積體及立方之對角線。

(法)
$$T=6\times a\times a=6a^2$$
$$V=a\times a\times a=a^3$$

今以$d$代立方之對角線。

$$4d^2=12a^2 \qquad \text{問題 641}$$
$$\therefore\quad d^2=3a^2$$
$$\therefore\quad d=a\sqrt{3}$$

問題654. 正立方體一面之對角線爲$a$。求其體積。

(法) 命$x$爲立方體之鋒。

則
$$a^2=x^2+x^2=2x^2 \qquad \S\ 372$$
$$\therefore\quad x^2=\frac{a^2}{2}$$

即
$$x=\tfrac{1}{2}a\sqrt{2}$$
$$\therefore\quad V=x^3=(\tfrac{1}{2}a\sqrt{2})^3=\tfrac{1}{4}a^3\sqrt{2} \qquad \S\ 623$$

問題655. 長方平行稜柱體之三度界爲$a, b, c$。求其面積體積及對角線之長。

(法)
$$T=2ab+2ac+2bc$$
$$=2(ab+ac+bc)$$
$$V=abc \qquad \S\ 622$$

而
$$\text{對角線}=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \qquad \text{問題 640}$$

問題656. 一平行稜柱體之體積爲V。其三度界之比若 $m:n:p$。求此三度界。

(法) 命 $a, b, c$ 爲三度界。

則 $$a:m=b:n=c:p$$

$$\therefore \quad an=bm \quad 而 \quad bp=cn \qquad \S\ 327$$

$$\therefore \quad a=\frac{bm}{n} \quad 而 \quad c=\frac{bp}{n}$$

但 $$V=a\times b\times c \qquad \S\ 622$$

$$\therefore \quad V=\frac{bm}{n}\times b\times\frac{bp}{n}=\frac{b^3mp}{n^2}$$

$$\therefore \quad b=\sqrt[3]{\frac{n^2V}{mp}}$$

$$a=\sqrt[3]{\frac{m^2V}{np}}$$

而 $$c=\sqrt[3]{\frac{p^2V}{mn}}$$

問題657. 若一有法稜錐體之斜高爲16尺。其底面爲有法六邊形。每邊長12尺。求其旁面積。

(法) $$S=\frac{1}{2}L\times P=\frac{1}{2}\times 16\times(6\times 12)=576 \qquad \S\ 643$$

答　576方尺。

問題658. 若一有法稜錐體之斜高爲8尺。其底面爲有法五邊形。每邊長5尺。求其旁面積。

(法) $S=\frac{1}{2}L\times P=\frac{1}{2}\times 8\times(5\times 5)=100$ § 643

答 100方尺。

問題659. 若一有法稜錐體之斜高爲 6 尺.其底面爲正方形.每邊長 4 尺.求其全面積.

(法) $S=\frac{1}{2}L\times P=\frac{1}{2}\times 6\times(4\times 4)=48$ § 643

$B=4\times 4=16$ § 398

$\therefore$ $T=48$方尺$+16$方尺$=64$方尺.

問題660. 分稜錐體之斜高使爲比率 1:3。以一與底面平面之平面通過之。求底面與截面之比率。

(法) 平行底面之平面.亦分其高爲 1:3 之比率。

§ 645

若在上面之一分之高大時。

則 底面:截面$=4^2:3^2=16:9$ § 646

若在下面一分之高大時。

則 底面:截面$=4^2:1^2=16:1$ § 646

問題661. 以一與底面平行三面通過稜錐體所成截面之大半於底面.求此平面截其高所成二分線之比率.

(法) $x$ 爲自角頂至平面之遠。

則 $H-x$ 爲自底面至平面之遠。

$\therefore$　底面：截面$=2:1=H^2:x^2$　§ 646

$\therefore$　$H:x=\sqrt{2}:\sqrt{1}=1.414:1$　§ 338

$\therefore$　$H-x:x=1.414-1:1=0.414:1$　§ 333

問題662.　已知其底面爲正方形。每邊 3 尺 4 寸。其高 9 尺。求有法稜錐體之體積。

(法)　$3$ 尺 $4$ 寸$=3\frac{2}{5}$尺

$$V=\frac{1}{3}B\times H=\frac{1}{3}\times\left(3\frac{2}{5}\times3\frac{2}{5}\times9\right)\text{立方尺}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{2601}{25}\text{立方尺}$$

$$=34\frac{51}{75}\text{立方尺}$$　§ 652

問題663.　一有法稜錐體之高爲15尺。其底面爲等邊三角形。每邊10尺。試求其體積。

(法)　$B=\frac{10^2\sqrt{3}}{4}$方尺$=25\sqrt{3}$方尺　問題404

$\therefore$　$V=\frac{1}{3}\times(15\times25\sqrt{3})$立方尺$=125\sqrt{3}$立方尺

$=126.5$ 立方尺　§ 652

問題664.　一有法稜錐體之高爲20尺。其底面爲有法六邊形。每邊長 4 尺。求其體積。

(法)　$r=\frac{1}{2}R\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$　　問題 442

$B=\frac{1}{2}r\times P=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times6\times4$

$=24\sqrt{3}$　　§ 459

$V=\frac{1}{3}B\times H=\frac{1}{3}\times(24\sqrt{3}\times20)$

$=160\sqrt{3}=277.1$　　§ 652

答　277.1立方尺。

**問題665.** 一有法稜錐體之斜高爲18尺,其底面爲正方形,每邊10尺,求其全面積。

(法)　$S=\frac{1}{2}L\times P=\frac{1}{2}\times18\times(4\times10)=360$　　§ 643

$B=10\times10=100$　　§ 398

T=360方尺+100方尺=460方尺

**問題666.** 一有法稜錐體之斜高爲16尺,其底面爲正三角形,每邊 8 尺,求其全面積。

(法)　$S=\frac{1}{2}L\times P=\frac{1}{2}\times16\times(3\times8)=192$　　§ 643

$B=\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}=\frac{1}{4}\times8^2\times\sqrt{3}$

$=16\times\sqrt{3}=27.7$　　問題 404

T=192方尺+27.7方尺=219.7方尺

問題667. 一有法稜柱體之高爲72尺.其底面爲每邊32尺之正方形.求其全面積.

$$L=\sqrt{72^2+16^2}=\sqrt{5440}=73.75 \qquad \S\ 371$$

$$S=\frac{1}{2}L\times P=\frac{1}{2}\times 73.75\times 4\times 32=4720 \qquad \S\ 643$$

$$B=32\times 32=1024 \qquad \S\ 398$$

T=4720方尺+1024方尺=5744方尺

問題668. 一稜錐體已知其體積爲26立方尺936立方寸.其正方形底面之每邊爲3尺6寸.求高.

(法)　26立方尺936立方寸$=26\frac{117}{125}$立方尺

3尺6寸$=3\frac{3}{5}$尺.

$$V=\frac{1}{3}H\times 3\frac{3}{5}\times 3\frac{3}{5} \qquad \S\ 652$$

即
$$26\frac{117}{125}=\frac{1}{3}H\times 3\frac{3}{5}\times 3\frac{3}{5}$$

$$H=\frac{26\frac{117}{125}}{\frac{1}{3}\times 3\frac{3}{5}\times 3\frac{3}{5}}=6\frac{127}{540}$$

答　$6\frac{127}{540}$尺.

問題669. 一稜錐體已知其體積爲20立方尺.其三角形底面之三邊爲5尺4尺3尺.求高.

$$B=\sqrt{6\times1\times2\times3}=6$$ 公式 209 ~~問題105~~

$$V=\frac{1}{3}B\times H$$

$$20=\frac{1}{3}\times6\times H$$

$$\therefore\quad H=\frac{20}{\frac{1}{3}\times6}\text{尺}=10\text{尺}$$

**問題670.**　一有法稜錐體之底面爲正方形。每邊40尺其旁鋒101尺。求其體積之立方尺數。

(法)　底面之對角線$=\sqrt{40^2+40^2}=40\sqrt{2}$　　§ 371

而　$$\frac{1}{2}\times40\sqrt{2}=20\sqrt{2}$$

$$H=\sqrt{101^2-(20\sqrt{2})^2}=\sqrt{10201-800}$$

$$=\sqrt{9401}=96.9587$$　　§ 372

$$V=\frac{1}{3}\times40^2\times96.9587=51711.31$$

答　51711.31立方尺

**問題671.**　一有法稜錐體之斜高爲12尺。其底面爲等邊三角形內切於一圓。此圓之半徑爲10尺。求此稜錐體之體積。

(法)　命 $2x$ 爲三角形之邊。

則　$$4x^2=x^2+15^2$$

$$3x^2=225$$

$$x^2=75$$

$$\therefore \quad x=8.660$$

$$2x=17.320$$

$$H=\sqrt{12^2-5^2}=\sqrt{144-25}=\sqrt{119}=10.908$$

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(5\times17.320\times10.908)=472.3164$$

答 472.3164立方尺。

問題672. 一有法稜錐體之底面爲正方形。已知每邊爲 $a$。其面積爲 T。求其高積。

(法)

$$L=\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+H^2}$$

$$T=2aL+a^2$$

$$\therefore \quad T=2a\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+H^2}+a^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+H^2}=\frac{T-a^2}{2a}$$

$$\tfrac{1}{4}a^2+H^2=\frac{T^2-2a^2T+a^4}{4a^2}$$

$$H^2=\frac{T^2-2a^2T}{4a^2}$$

$$\therefore \quad H=\frac{1}{2a}\sqrt{T(T-2a^2)}$$

$$V=\tfrac{1}{3}a^2H=\tfrac{1}{3}a^2\times\frac{1}{2a}\sqrt{T(T-2a^2)}$$

$$=\frac{a}{6}\sqrt{T(T-2a^2)} \qquad \S\ 652$$

問題673. 一有法稜錐體之底面爲正方形。已知每

邊爲 $a$。其全面積爲 T。求其高。

(法) $$H=\frac{1}{2a}\sqrt{T(T-2a^2)}$$ 問題 672

問題674. 一有法稜錐體之底面爲正方形。已知其八鋒之長相等。其全面積爲 T。求每邊長幾何。

(法) $$L=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$T=2aL+a^2$$

$$\therefore\quad T=a^2\sqrt{3}+a^2$$

$$a^2=\frac{T}{\sqrt{3}+1}$$

$$\therefore\quad a=\sqrt{\frac{T}{\sqrt{3}+1}}=\sqrt{\frac{T}{2}(\sqrt{3}+1)}$$

問題675. 已知一有法稜錐體之高 H 及全面積 T。求其正方形底面之邊 $a$ 幾何。

(法) $$L=\sqrt{\frac{a^2}{4}+H^2}$$

$$T=2aL+a^2$$

$$\therefore\quad T=2a\sqrt{\frac{a^2}{4}+H^2}+a^2$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+H^2}=\frac{T-a^2}{2a}$$

$$\frac{a^2}{4}+H^2=\frac{T^2-2a^2T+T}{4a^2}$$

$$a^4+4a^2H^2=T^2-2a^2T+a^4$$

$$a^2(2T+4H^2)=T^2$$

$$a=\frac{T^2}{2T+4H^2}=\frac{2T^2}{4(T+2H^2)}$$

$$\therefore \quad a=\frac{T}{2}\sqrt{\frac{2}{T+2H^2}}$$

問題676. 二相似四面稜體之相當鋒相比若 6:7。求其二面積及二體積之比率。

(法) $S:S'=6^2:7^2=36:49$ § 670

$V:V'=6^3:7^3=216:343$ § 671

問題677. 若一箇四面稜體之鋒 $a$。又有他一相似四面稜體其大二倍。求其相當鋒。

(法) $V:V'=a^3:2a^3$

$\therefore$ $V'$ 之鋒 $=a\sqrt[3]{2}$

問題678. 一井之直徑 6 尺。水深 7 尺。問含水幾卡倫。但知每立方尺含水 $7\frac{1}{2}$ 卡倫。

(法) $V=\pi R^2H$ § 700

$=3.1416\times(3^2\times7)$ 立方尺

$=3.1416\times3^2\times7\times7.5$ 卡倫

$=1484.4$ 卡倫

問題679. 木爲正圓柱體。其直徑60生的邁當。以一

物體投入水中，而水平升高40生的邁當，求此物體之體積。

(法)　$V=\pi R^2H$

$=3.1416\times(30^2\times40)$ 立方生的

$=113097.6$ 立方生的邁當

問題680.　欲築一地道長100碼，其截面爲半圓形，其半徑長18尺，問移去幾立方碼之土。

(法)　18尺＝6碼

$$V=\frac{1}{2}\pi R^2H=\frac{1}{2}\times3.1416\times(6^2\times100)$$

$$=5654.88 \qquad \text{§ 700}$$

答　5654.88立方碼。

問題681.　欲得一鐵筒其直徑18寸長40尺，問須鐵板幾平方尺。

(法)　18寸＝$1\frac{4}{5}$

$$S=2\pi RH=3.1416\times\frac{9}{5}\times40$$

$=226.1952$ 方尺

答　226.1952方尺。

問題682.　一圓柱形桶高14寸，恰容2立方尺，求其半徑。

(法) 2立方尺＝2000立方寸。

$$V=\pi R^2H \qquad \S\ 700$$

即 $2000=\pi R^2H$

$$=\pi R^2\times 14$$

因得 $R^2=\dfrac{2000}{14\pi}=45.4727$

$$\therefore\quad R=6.74\text{ 寸。}$$

問題683. 一圓柱形桶欲容20立特。其高與直徑等。求其高及半徑。

(法) 20立特＝20000立方生的

$$V=\pi R^2H \qquad \S\ 700$$

$$20000=\pi R^2\times 2R=2R^3$$

$$\therefore\quad R^3=\frac{20000}{2\pi}=10000\times 0.31831$$

$$=3183.1$$

$$\therefore\quad R=\sqrt[3]{3183.1}=14.71\text{ 生的邁當。}$$

$$H=2R=2\times 14.71=29.42\text{ 生的邁當。}$$

問題684. 若正平圓柱體之全面積爲T。其底面爲R。求其高。

(法) $T=2\pi RH+2\pi R^2$ § 698

$$2\pi RH=T-2\pi R^2$$

$$\therefore \quad H=\frac{T}{2\pi R}-R$$

問題685. 若正平圓柱體之旁面積為S。其體積為V。求其底面之半徑及高。

(法) $S=2\pi RH$ § 698

$$V=\pi R^2H$$

$$SR=2\pi R^2H$$ § 700

$$2V=2\pi R^2H$$

$$\therefore \quad SR=2V$$

$$\therefore \quad R=\frac{2V}{S}$$

$$\therefore \quad S=2\pi\times\frac{2V}{S}\times H$$

$$\therefore \quad H=\frac{S}{2\pi\times\frac{2V}{S}}=\frac{S^2}{4\pi V}$$

問題686. 若正平圓柱體底面之周圍為C。其高為H。求其體積。

(法) $R=\frac{C}{2\pi}$ § 458

$$\therefore \quad V=\pi R^2H$$

$$=\pi\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2H=\frac{C^2H}{4\pi}$$ § 700

問題687. 已知一正平圓柱體之全面積為T。其高與底面之直徑等。求其體積V。

(法) $H=2R$

$V=\pi R^2H=2\pi R^3$ § 700

$T=2\pi RH+2\pi R^2$ § 698

$=4\pi R^2+2\pi R^2=6\pi R^2$

$\therefore\ R^2=\frac{T}{6\pi}$

$\therefore\ R=\sqrt{\frac{T}{6\pi}}$

$\therefore\ R^3=\frac{T}{6\pi}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}$

$\therefore\ V=2\pi\times\frac{T}{6\pi}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}$

$=\frac{T}{3}\sqrt{\frac{T}{6\pi}}=\frac{T}{18\pi}\sqrt{6\pi T}$

問題688. 若正平圓柱體底面之圓周為C。全面積為T。求其體積V.

(法) $V=\pi R^2H$ § 700

$T=2\pi R^2+2\pi RH$ § 698

$C=2\pi R$ § 458

$\therefore\ R=\frac{C}{2\pi}$

$\therefore\ V=\pi\times\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2\times H=\frac{C^2H}{4\pi}$

而 $$T=2\pi\times\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2+2\pi\times\frac{C}{2\pi}\times H$$

$$=\frac{C^2}{2\pi}+CH$$

$$\therefore\quad CH=T-\frac{C^2}{2\pi}$$

$$\therefore\quad \frac{C^2H}{4\pi}=\frac{CT}{4\pi}-\frac{C^3}{8\pi^2}$$

$$\therefore\quad V=\frac{CT}{4\pi}-\frac{C^3}{8\pi^2}$$

$$\therefore\quad V=\frac{C}{8\pi^2}(2\pi T-C^2)$$

問題689. 若正平圓柱體之體積爲V。其高爲H.求其全面積T。

(法) $$V=\pi R^2H \qquad \S\ 700$$

$$\therefore\quad R^2=\frac{V}{\pi H}\quad 而\quad R=\sqrt{\frac{V}{\pi H}}$$

$$T=2\pi RH+2\pi R^2 \qquad \S\ 698$$

即 $$T=2\pi\sqrt{\frac{V}{\pi H}}\times H+2\pi\times\frac{V}{\pi H}$$

$$=2\pi H\sqrt{\frac{V}{\pi H}}+\frac{2V}{H}$$

$$=2\sqrt{\pi VH}+\frac{2V}{H}$$

問題690. 若正平圓柱體之體積爲V。其高等於直徑.求其高H及全面積T。

(法) $$H=2R$$

$$\therefore \quad R=\frac{H}{2}$$

$$V=\pi R^2H=\pi\left(\frac{H}{2}\right)^2\times H=\frac{\pi H^3}{4} \qquad \S\ 700$$

$$\therefore \quad H^3=\frac{4V}{\pi}$$

$$\therefore \quad H=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

$$T=2\pi RH+2\pi R^2 \qquad \S\ 698$$

即 $$T=2\pi\times\frac{H}{2}\times H+2\pi\left(\frac{H}{2}\right)^2$$

$$=\pi H^2+\frac{1}{2}\pi H^2$$

$$=\frac{3}{2}\pi H^2$$

$$=\frac{3}{2}\pi\left(\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}\right)^2$$

$$=\frac{3}{2}\pi\sqrt[3]{\frac{16V^2}{\pi^2}}$$

$$=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

問題691. 已知正平圓柱體之全面積為T。其高為H。求其半徑R及體積V。

(法) $$T=2\pi RH+2\pi R^2 \qquad \S\ 698$$

$$2\pi R^2+2\pi RH=T$$

$$4\pi^2R^2+4\pi^2RH+\pi^2H^2=2\pi T+\pi^2H^2$$

$$2\pi R+\pi H=\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}$$

$$2\pi R=-\pi H+\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}$$

$$R=\frac{H}{2}+\frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}$$

$$V=\pi R^2H \qquad \S\ 700$$

$$=\pi\left(\frac{H^2}{4}-\frac{H}{2\pi}\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}+\frac{T}{2\pi}+\frac{H^2}{4}\right)\times H$$

$$=\pi H\left(\frac{H^2}{2}-\frac{H}{2\pi}\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}+\frac{T}{2\pi}\right)$$

$$=\frac{H}{2}(\pi H^2-H\sqrt{2\pi T+\pi^2H^2}+T)$$

問題692. 正平圓錐平截體兩底面之半徑為20寸.及13寸.若其高為15寸.且以一與其兩底面平行之一平面平分之.求分得兩平截體之旁面積.

(法) $L=\sqrt{15^2+7^2}=\sqrt{274}=16.552$ § 371

每平截體之斜高$=\frac{1}{2}\times 16.552$

$=8.276$

中截面之半徑$=\frac{1}{2}(20+13)=16.5$ § 187, § 189

下面之平截體之旁面積$=\frac{1}{2}(C+c)\times L$ § 727

$=\frac{1}{2}(2\pi R+2\pi r)\times L$

$=\pi L(R+r)$

$=3.1416\times 8.276\times(20+16.5)$

$=948.9956784$

上面之平錐體之旁面積$=3.1416\times 8.276\times(16.5+13)$

$=766.9965072$

答　949方寸，767方寸。

**問題693.** 正平圓錐體底面之半徑爲8尺，其高10尺。求其旁面積全面積及其體積。

(法)　$L=\sqrt{10^2+8^2}=\sqrt{164}=12.806$　§ 371

$S=\pi RL=3.1416\times(8\times 12806)$方尺

$=321.85$方尺　§ 723

$B=\pi R^2=3.1416\times(8)^2$方尺

$=201.06$方尺　§ 463

$T=321.85$方尺$+201.06$方尺$=522.91$方尺

$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\times 3.1416\times(8^2\times 10)$立方尺

$=670.21$立方尺　§ 725

**問題694.** 正平圓錐體之高等於其底面之直徑，求其底面積及旁面積之比率。

(法)　$B=\pi R^2=\frac{1}{4}\pi H^2$　§ 463

$$L=\sqrt{H^2+\frac{H^2}{4}}=\sqrt{\frac{5H^2}{4}}=\tfrac{1}{2}H\sqrt{5} \qquad \S\ 371$$

$$S=\tfrac{1}{2}\pi H\times\tfrac{1}{2}H\sqrt{5}=\tfrac{1}{4}\pi H^2\sqrt{5} \qquad \S\ 723$$

$$\therefore \quad \frac{B}{S}=\frac{\frac{1}{4}\pi H^2}{\frac{1}{4}\pi H^2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$$

問題695. 正平圓錐體之斜高爲 2 尺。今欲分其旁面積爲兩等分。問須於距角頂若干遠之處。以一與底面平行之平面割此斜高。

(法)

$$S=\pi RL=2\pi R \qquad \S\ 723$$

$$S:S'=2:1$$

$$\therefore \quad L:L'=\sqrt{2}:1$$

$$2:L'=\sqrt{2}:1$$

$$\therefore \quad L'=\sqrt{2}=1.414$$

答 1.414 尺。

問題696. 若將平圓錐體之高二倍之。其體積如何。若將底面之半徑二倍之。或高及底面之半徑皆二倍。則又如何。

〔解〕

$$V=\tfrac{1}{3}\pi R^2H \qquad \S\ 725$$

若 H 二倍之。則 V 亦爲 4 倍。

若 R 二倍之。則 V 爲 $2^2$(或 4)倍。

若 H 及 R 皆倍之。則 V 爲 2×4(即 8)倍。

問題697. 正平圓錐積之斜高L。等於其底面之直徑。求其全面積T。

(法)

$$2R=L$$

$$\therefore \quad R=\frac{L}{2}$$

$$T=\pi RL+\pi R^2 \qquad \text{§.723}$$

$$=\pi(\tfrac{1}{2}L)L+\pi(\tfrac{1}{2}L)^2$$

$$=\tfrac{1}{2}\pi L^2+\tfrac{1}{4}\pi L^2$$

$$\tfrac{3}{4}\pi L^2$$

問題698. 若T為正平圓錐體之全面積。其斜高等於其底面之直徑。求其體積V。

(法)

$$2R=L$$

$$T=\pi RL+\pi R^2 \qquad \text{§ 723}$$

$$=\pi R(2R)+\pi R^2$$

$$=3\pi R^2$$

$$\therefore \quad R^2=\frac{T}{3\pi}$$

$$\therefore \quad R=\sqrt{\frac{T}{3\pi}}$$

$$L^2=H^2+R^2 \qquad \text{§ 371}$$

$$(2R)^2=H^2+R^2$$

$$\therefore \quad H^2=3R^2$$

$$\therefore\quad H=R\sqrt{3}$$

$$=\sqrt{\frac{T}{\pi}}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H \qquad \S\ 725$$

$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{T}{3\pi}\right)\sqrt{\frac{T}{\pi}}=\frac{T}{9}\sqrt{\frac{T}{\pi}}$$

**問題699.** 若T為正平圓錐體之全面積，R為其底面之半徑，求其體積V。

(法)　$$T=\pi RL+\pi R^2 \qquad \S\ 723$$

但　$$L^2=H^2+R^2 \qquad \S\ 371$$

$$\therefore\quad L=\sqrt{H^2+R^2}$$

$$\therefore\quad T=\pi R\sqrt{H^2+R^2}+\pi R^2$$

$$\sqrt{H^2+R^2}=\frac{T-\pi R^2}{\pi R}$$

$$H^2+R^2=\frac{T^2-2\pi RT+\pi^2R^4}{\pi^2R^2}$$

$$H^2=\frac{T^2-2\pi R^2T}{\pi^2R^2}$$

$$H=\frac{1}{\pi R}\sqrt{T(T-2\pi R^2)}$$

但　$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H \qquad \S\ 725$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^2\times\frac{1}{\pi R}\sqrt{T(T-2\pi R^2)}$$

$$=\frac{R}{3}\sqrt{T(T-2\pi R^2)}$$

問題700. 若T為正平圓錐體之全面積.S為其旁面積.求其體積V。

$$T=\pi RL+\pi R^2=\pi R(L+R) \qquad \S\ 723$$

$$S=\pi RL \qquad \S\ 723$$

但 $$L^2=H^2+R^2 \qquad \S\ 371$$

$$\therefore\quad H=\sqrt{L^2-R^2}$$

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{L^2-R^2} \qquad \S\ 725$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{(L+R)(L-R)}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{R(L+R)(\pi R^2)(\pi R)(L-R)}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\{\pi R(L+R)\}(\pi R^2)\{\pi R(L-R)\}}$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{T(T-S)(2S-T)}{\pi}}$$

問題701. 證不等面積錐體之公式.可用以求圓錐平截體之體積.及圓錐體之體積.及圓柱體之體積.

〔證〕 不等面稜錐體之公式.與不等面稜柱體之公式通用.不過$b=0$耳.故此題可依§738證之.茲不多贅矣.

問題702. 欲作一錫管上直徑28寸.下直徑14寸.高24寸.問需錫幾平方尺。

(法) $L=\sqrt{24^2+7^2}=\sqrt{576+49}$

$=\sqrt{625}=25$ § 371

$S=\pi L(R+R')$ § 727

$=3.1416\times25\times(14+7)$

$=1649.34$

1649.34 平方寸=16 平方尺 49.34 平方寸。

問題703. 有大理石柱為正平圓錐平截體形.其斜高12尺.其兩面之半徑為3尺6寸及2尺4寸。僱人磨之.每平方尺60仙.問共費錢幾何。

(法) $S=\pi L(R+R')$ § 727

$=3.1416\times12\times(3\frac{3}{5}+2\frac{2}{5})$

$=226.1952$

共費錢$=226.1952\times.60$圓

$=135.71712$圓。

問題704. 有法稜錐平截體之斜高為20尺.其二正方形底面之邊為40尺及16尺.求其體積。

(法) $H=\sqrt{20^2-12^2}=\sqrt{400-144}$

$=\sqrt{256}=16$ § 372

$$V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb}) \qquad \S\ 657$$

$$=\frac{1}{3}H(40^2+16^2+40\times16)$$

$$=\frac{1}{3}H(1600+256+640)$$

$$=\frac{1}{3}\times16\times2496$$

$$=13312$$

答　13312立方尺。

問題705. 若一稜錐平截體之兩底面爲有法多邊形。其邊爲一尺及二尺.又知此體積爲12立方尺。求其高。

(法) $$\sqrt{1^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3}=0.866$$

$$b=6\times\frac{1}{2}\times(1\times0.866)$$

$$=2.598 \qquad \S\ 459$$

$$b:B=1^2:2^2=1:4 \qquad \S\ 446$$

$$\therefore\quad B=4\times2.598=10.392$$

$$V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$$

即 $$12=\frac{1}{3}H(10.392+2.598+5.196)$$

$$36=18.186H$$

$$H=\frac{36}{18.186}=1.93$$

答 1.98尺。

問題706. 正平圓錐平截體高14尺。其體積爲924立方尺。知其兩底面之半徑和爲9尺。求兩半徑。

(法) 命R及9−R爲兩半徑。

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr) \qquad \S\ 730$$

$$924=\frac{1}{3}\times\frac{22}{7}\times 14\{R^2+(9-R)^2+R(9-R)\}$$

$$=\frac{44}{3}(R^2+81-18R+R^2+9R-R^2)$$

$$63=R^2-9R+81$$

$$R^2-9R=-18$$

$$4R^2-(\quad)+81=9$$

$$2R-9=\pm 3$$

即 $2R=12$ 或 $6$

$$R=6 \text{ 或 } 3$$

$$9-R=3 \text{ 或 } 6$$

故兩半徑爲6尺及3尺。

問題707. 正平圓錐體之斜高爲30尺。其底面圓周10尺。今以與底面平行之一平面割之。得一新圓

錐體。其斜高爲 6 尺。求所成平截體之旁面積及體積。

(法) 命 $C'$ 爲截面之圓周。

$$C'=\frac{6}{30}\times 10=2$$

則 $$S=\frac{1}{2}\times 24(10+2)=12\times 12=144 \qquad \S\ 727$$

今 $$2\pi R=10 \quad 及 \quad 2\pi r=2$$

$$\therefore \quad R=\frac{5}{\pi} \quad 及 \quad r=\frac{1}{\pi}$$

$$H=\sqrt{24^2-\left(\frac{4}{\pi}\right)^2}=\sqrt{576-\frac{16}{\pi^2}}=23.966$$

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr) \qquad \S\ 730$$

$$=\frac{1}{3}\pi\times 23.966\left(\frac{25}{\pi^2}+\frac{1}{\pi^2}+\frac{5}{\pi^2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times 23.966\times\frac{31}{\pi}$$

$$=\frac{1}{3}\times 23.966\times 31\times 0.31831$$

$$=78.829$$

答 78.829 立方尺。

**問題 708.** 一稜錐平截體之兩底面爲正方形。邊長 8 尺及 6 尺。又有一稜柱同高。其底面爲距平截體之兩底面等遠之截面。且與其底面平行。求其兩體積之較。

(法) $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$ § 657

$=\frac{1}{3}H(64+36+48)$

$=\frac{1}{3}H\times 148$

$=49\frac{1}{3}H$

$V'=49H$

$\therefore\quad V\sim V'=\frac{1}{3}H$

問題709. 一荷蘭風磨爲正圓錐平截體形。高12邁當。其兩底面之外直經爲16邁。及12邁。內直經爲12邁及10邁。問需石幾立方邁當以造之。

(法) $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)$

$=\frac{1}{3}\pi\times 12(64+46+48)$

$=4\pi\times 148$

$=592\pi$

$V'=\frac{1}{3}\pi\times 12(36+25+30)$

$=4\pi\times 91$

$=364\pi$

$592\pi-364\pi=228\pi=228\pi=716.2848$

答 需石716.28立方邁當.

問題710. 一工坊之烟通爲有法稜錐平截體形。高180尺。其兩底面爲正方形邊。長10尺及16尺。其

內管爲正方形。兩底面之邊同長 7 尺。問需材幾立方尺以造此烟通。

(法) $V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})$ § 657

$=\frac{1}{3}\times 180(256+100+160)=60\times 516=30960$

$V'=180\times 7^2=180\times 49=8820$ § 624

30960 立方尺 $-$ 8820 立方尺 $=$ 22140 立方尺。

問題 711. 旋成圓錐平截體之斜高爲 L。其高爲 H。其旁面積 S。求其體積 V。

(法) $S=\pi LR+\pi Lr$ § 727

$r=R-\sqrt{L^2-H^2}$

$S=\pi LR+\pi LR-\pi L\sqrt{L^2-H^2}$

$S=2\pi LR-\pi L\sqrt{L^2-H^2}$

$\therefore\quad R=\frac{S}{2\pi L}+\frac{1}{2}\sqrt{L^2-H^2}$

$r=\frac{S}{2\pi L}-\frac{1}{2}\sqrt{L^2-H^2}$

$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)$ § 730

$$=\frac{1}{3}\pi H\left\{\frac{S^2}{4\pi^2L^2}+\frac{S\sqrt{L^2-H^2}}{2\pi L}+\frac{1}{4}(L^2-H^2)\right.$$

$$+\frac{S^2}{4\pi^2L^2}-\frac{S\sqrt{L^2-H^2}}{2\pi L}+\frac{1}{4}(L^2-H^2)$$

$$\left.+\frac{S^2}{4\pi^2L^2}-\frac{1}{4}(L^2-H^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\pi H\left\{\frac{3S^2}{4\pi^2L^2}+\frac{1}{4}(L^2-H^2)\right\}$$

問題712. 一正立方體之每邊長12寸。變爲一正稜柱體。其底面長16寸。濶12寸。求此稜柱體之高。及二體全面積之較。

(法) $V=(12)^3$ 立方寸$=1728$ 立方寸 § 623

$B=(16\times12)$ 方寸$=192$ 方寸 § 398

$H=(1928\div192)$ 寸$=9$ 寸

$T=6\times(12\times12)$ 方寸$=864$ 方寸

$T'=2(16\times12+16\times9+12\times9)$ 方寸

$=2(192+144+108)$ 方寸

$=2\times444$ 方寸$=888$ 方寸

$T'-T=888$ 方寸$-864$ 方寸$=24$ 方寸

問題713. 長方平行稜柱體之三度界爲 $a, b, c$。(i) 已知其等值正平圓柱體底面之半徑爲 $a$。求其高。(ii) 已知其等值之正平圓錐體之高爲 $a$。求其底面半徑。

(法) (i) $V=abc=\pi a^2H$ § 622 § 700

$\therefore\ H=\frac{abc}{\pi a^2}=\frac{bc}{\pi a}$

(ii) $V=abc\frac{1}{3}\pi R^2H$ § 725

$$\therefore \quad H=\frac{3abc}{\pi a^2}=\frac{3bc}{\pi a}$$

問題714. 有法稜錐體之高12尺。變為有法稜柱體。其底面相等。求其稜柱體之高。

(法) $V=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}B\times 12$ § 652

$V'=BH$ § 628

$\frac{1}{3}B\times 12=BH$

$$\therefore \quad H=\frac{4B}{B}=4\text{尺}$$

問題715. 圓柱體之直徑14尺。高8尺。其等值正稜柱體之底面為正方形。邊長4尺。求高。

(法) $V=\pi R^2H$ § 700

$=3.1416\times 7^2\times 8=1231.51$

$V'=BH$ § 628

$1231.51=4^2H=16H$

$$\therefore \quad H=\frac{1231.51}{16}=76.97$$

答 76.97尺。

問題716. 正立方體之每邊為$a$。其等值正平圓錐體之底面半徑為R。求高。

(法) $V=a^3$ § 623

$V'=\pi R^2H$ § 700

$$\therefore \quad a^3 = \pi R^2 H$$

$$\therefore \quad H = \frac{a^3}{\pi R^2}$$

**問題717.** 兩個等值正平圓柱體之高相比。若 4:9。若其一之直徑為 6 尺。求他一之直徑。

(法) $V = \pi R^2 H = \pi 3^2 H = 9\pi H$ § 700

$$V' = \pi R'^2 \left(\frac{9H}{4}\right) = \frac{9\pi R'^2 H}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{9\pi R'^2 H}{4} = 9\pi H$$

$$R'^2 = 4 \quad 即 \quad R' = 2$$

$$直徑 = 2R' = 4 尺$$

**問題718.** 一正平圓柱體之直徑為 6 尺。與一正平圓錐體之直徑 7 尺者等值。若此圓錐體之高為 8 尺。求圓柱體高。

(法) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 8 = \frac{98\pi}{3}$ § 725

$V' = \pi R'^2 H' = \pi 3^2 H' = 9\pi H'$ § 700

$$\therefore \quad 9\pi H = \frac{98\pi}{3}$$

$$\therefore \quad H' = \frac{98}{27} 尺 = 3.63 尺$$

**問題719.** 有法稜錐平截體高 6 尺。其兩底面為正方形。每邊長 5 尺及 8 尺。今有一等值有法稜錐

體。其底面爲正方形。邊長12尺。求高。

$$V=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{Bb})\qquad \S\ 657$$

$$=\frac{1}{3}\times 6(64+25+40)$$

$$=2\times 129=258$$

$$V'=\frac{1}{3}B'H'\qquad \S\ 652$$

$$258=\frac{1}{3}\times 144H'$$

$$\therefore\quad H'=5\frac{3}{8}\text{尺}$$

問題720. 旋成圓錐平截體。高5尺。其兩底面之直徑爲2尺及3尺。今有一正平圓柱體與之等值。其底面積等於以一與平截體兩底面平行且等遠之一平面割之所成截面之面積。求此圓柱體之高。

(法)

$$V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)\qquad \S\ 730$$

$$=\frac{1}{3}\pi\times 5\left(\frac{9}{4}+1+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{3}\times\frac{19}{4}\times\pi=\frac{95}{12}\pi$$

$$V'=\pi R'^2H'\qquad \S\ 700$$

$$\frac{95\pi}{12}=\pi\frac{25}{16}H'$$

$\therefore \quad H'=5\frac{1}{15}$尺

問題721. 有法四面稜體每邊3寸。求其等值正立方體之邊。

(法) 底面之中垂線$=\sqrt{9-\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{27}{4}}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{3}$ § 372

$\frac{2}{3}$之$\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\sqrt{3}=\sqrt{3}$

$H=\sqrt{3^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$ § 372

$B=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}\sqrt{3}=\frac{9}{4}\sqrt{3}$ § 403

$V=\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}\sqrt{3}\times\sqrt{6}$ § 652

$=\frac{9}{4}\sqrt{2}=\frac{9}{4}\times1.41421=3.181973$

$\therefore$ 正立方體之邊$=\sqrt[3]{3181973}=1.47$寸

問題722. 有法八面稜體每邊3寸。求其等值正立方體之邊。

(法) 命H為兩稜錐體之各個之高。而此兩稜錐體為由八面稜體所分得者。又命V為每稜錐體之體積。

則 $H=\sqrt{3^2-\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{9-\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ § 372

而　$V=\frac{1}{3}\times 3^2\times\frac{3}{2}\sqrt{2}=\frac{9}{2}\sqrt{2}$　§ 652

$2V=9\sqrt{2}=9\times 1.41421$

$=12.72789$

故　正立方體之邊$=\sqrt[3]{12.72789}$寸

$=2.33$寸

問題723. 一槽之三度界爲4尺3尺2尺。今一槽之形與此相似而容量四倍之。求度界。

$1:4=4^3:x^3$ § 672,　$1:4=3^3:x^3$　$1:4=2^3:x^3$

$x^3=256$　$x^3=108$　$x^3=32$

∴　$x=6.35$尺　$x=4.76$尺　$x=3.17$尺

問題724. 有一圓柱體於此。欲作他圓柱體。(1)其面積爲此體之$n$倍。(2)其體積爲此體之$n$倍。問須以何數乘其度界。

(法)　(1)　$\sqrt{n}$　§ 701

(2)　$\sqrt[3]{n}$　§ 701

問題725. 一稜錐體以一與其底面平行之平面過角頂及底面之中間割之。問全稜錐體與割成稜錐體兩體積相比如何。

(法)　$V:V'=2^3:1=8:1$　§ 672

問題726. 有法六面稜錐體之高36尺.其底面每邊6尺.今有一相似稜錐體.其體積爲前者二十分之一.求其度界.

(法) $$20:1=36^3:H^3 \qquad \S\ 672$$

$$H^3=\frac{36^3}{20}=2332.8$$

$$H=\sqrt[3]{2332.8}=13.2625\ 尺$$

$$20:1=6^3:a^3 \qquad \S\ 672$$

$$a^3=\frac{6^3}{20}=10.8$$

$$a=\sqrt[3]{10.8}=2.2104\ 尺$$

問題727. 稜錐體每旁鋒之長爲四邁當.今欲以與其底面平行之一平面割之.分其體爲二等分.問須於距角若干遠之處割其旁鋒.

(法) $$V:V'=4^3:x^3 \qquad \S\ 672$$

$$2:1=64:x^3$$

$$\therefore\quad x^3=32$$

$$\therefore\quad x=3.17\ 邁當$$

問題728. 稜錐體之旁鋒爲$a$.今欲以與其底面平行之二平面割之.分其體爲三等分.問須於距角頂若干遠之處割其旁鋒.

(法) $V:V'=a^3:a'^3$ § 672

$3:1=a^3:a'^3$

$3a'^3=a^3$

$\therefore\quad a'=a\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

又 $V:V'=a^3:a''^3$ § 672

$3:2=a^3:a''^3$

$3a''^3=2a^3$

$\therefore\quad a''=a\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

問題 729. 稜錐體之旁鋒為 $a$。今欲以與其底面平行之一平面割之。分其體之二分。此二分相比。若 3:4。問須於距角頂若干遠之處割其旁鋒。

(法) $V:V'=a^3:a'^3$ § 672

$7:3=a^3:a'^3$

$7a'^3=3a^3$

$\therefore\quad a'=a\sqrt[3]{\frac{3}{7}}$

問題 730. 二相似圓錐體之體積為 54 立方尺及 432 立方尺。第一體之高為 6 尺。求第二體之高。

(法) $\sqrt[3]{54}:\sqrt[3]{432}=6:H$ § 726

$1:\sqrt[3]{8}=6:H$

$$1:2=6:H$$

$$\therefore \quad H=2\times6=12$$

**問題731.** 二正平圓柱體之直徑皆與高等。其二體積相比。若 3:4。求其二高之比率。

(法) $$V=\pi R^2H=2\pi R^3$$ § 700

$$V:V'=2\pi R^3:2\pi R'^3$$

$$1:\frac{3}{4}=R^3:R'^3$$

$$R:R'=1:\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=1:0.90856$$

**問題732.** 正平圓柱體之高為20尺。其直徑10尺。又一相似圓柱之體積為此體積之16分之15。求其度界。

(法) $$H:H'=\sqrt[3]{V}:\sqrt[3]{V'}$$ § 701

$$20:H'=1:\sqrt[3]{\frac{15}{16}}$$

$$20:H'=1:0.97871$$

$$\therefore \quad H'=20\times0.97871$$

$$=19.5742\text{ 尺}$$

$$2R:2R'=\sqrt[3]{V}:\sqrt[3]{V'}$$ § 701

$$10:2R'=1:\sqrt[3]{\frac{15}{16}}$$

$$10:2R'=1:0.98871$$

$$\therefore \quad 2R'=10\times0.97871\text{ 尺}$$

$$=9.7871\text{ 尺}$$

問題733. 旋成圓錐之高爲H。其底面之半徑爲R。求一相似圓錐體。其體積大於此三倍者之度界。

(法) $$H:H'=\sqrt[3]{V}:\sqrt[3]{V'} \qquad \S\ 726$$

$$H:H'=1:\sqrt[3]{3}$$

$$H'=H\sqrt[3]{3}$$

$$R:R'=\sqrt[3]{V}:\sqrt[3]{V'} \qquad \S\ 726$$

$$R:R'=1:\sqrt[3]{3}$$

$$\therefore \quad R'=R\sqrt[3]{3}$$

問題734. 正圓錐平截體之高。爲全圓錐積之高之5分之二。問此平截體之體積與全圓錐體之體積相比如何。

(法) 命V爲圓錐體之體積。

V′爲截去之部分之體積。

V″爲平截體之體積。

$$V:V'=H^3:H'^3 \qquad \S\ 726$$

$$=5^3:3^3=125:27$$

$$V'':V=125-27:125$$
$$=98:125$$

問題735. 一稜錐平截體高8尺.其兩底面之相當邊為四尺及3尺.問此平截體之體積與全稜錐體之體積相比如何.

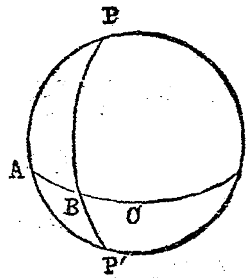
(法) $V:V'=4^3:3^3=64:27$ § 672

$$V'':V=64-27:64$$
$$=37:64$$

# 第八編

## 球體

問題736. 一大平圓之平分一他大平圓之與弧成正角者。其圓內任一點皆距與弧之兩端等遠。




〔解〕 命 AC 爲大平圓之與弧。PBP′ 爲大平圓。而平分 AC 弧成正角。

求證每點之在大平圓 PBP′ 內者。其距 A 及 C 等遠。

〔證〕 作 AB, AC, BC 三弦線。

AB弦＝BC弦 § 241

⊙PBP′ 通過 AC 弧之極。 § 754

但 AC 弧之極。距 A 及 C 等遠。其距離可以直線上度之。

∴ ⊙PBP′之平面爲AC弦中點之⊥。 §§ 469, 517

故每點之在大平圓 PBP′ 內者。其距 A 及 C 等遠。

問題737.　一球體之半徑為4寸。自球面之任一點為極。於球體上作一平圓。其作圓之兩脚規張開三寸。求此圓之面積。

〔解〕　命O為球體之心。P為極。而A為平圓內之一點。於平面 △POA 內。PO=OA=4。而 PA=3。

$$\triangle POA\text{之面積}=\sqrt{\frac{1}{2}\times1\frac{1}{2}\times1\frac{1}{2}\times2\frac{1}{2}}$$

$$=5.56$$ 問題 405

又 $\triangle POA\text{之面積}=\frac{1}{2}\times4\times h=2h$ § 403

$$5.56=2h$$

$$\therefore\ r=h=2.78$$

小圓面積$=\pi r^2=3.1416\times2.78^2$

$$=24.28$$

答　24.28方寸。

問題738.　有法四面稜體之邊為$a$。求其內切球體之半徑R。及外切球體之半徑R′

〔解〕　命D-ABC為有法四面稜體。而$a$為其邊。此四面稜體每面之外切圓之半徑。

為 $$\frac{abc}{4\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}$$ 問題 315

有法四面體內切球之半徑等於由頂至底之垂線之[illegible]



$$=\frac{a^3}{4\sqrt{(\frac{3}{2}a)(\frac{1}{2}a)(\frac{1}{2}a)(\frac{1}{2}a)}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

命 M。為 △ACD 外切圓之圓心。

而 M′。為 △ABC 外切圓之圓心。

作 M。O 及 M′O。為 ACD 面及 ABC 面之垂線。

於正 △BMC 內。$MC=\frac{a}{\sqrt{3}}$。而 $BC=a$。

$$\therefore\quad BM=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2a^2}{3}}=\frac{1}{3}a\sqrt{6}\qquad\text{§ 372}$$

$$\therefore\quad R=OM=\frac{1}{4}BM(\text{問題 829})=\frac{1}{4}\times a\sqrt{6}$$

$$=\frac{1}{12}a\sqrt{6}$$

於正 △OMC 內。$OM=\frac{1}{12}a\sqrt{6}$。而 $MC=\frac{a}{\sqrt{3}}$。

$$\therefore\quad OC=\sqrt{\left(\frac{1}{12}a\sqrt{6}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{24}a^2}$$

$$=\frac{1}{4}a\sqrt{6}\qquad\text{§ 371}$$

$$\therefore\quad R'=\frac{1}{4}a\sqrt{6}$$

**問題 739.** 球體之直徑 10 寸。以一平面距其圓心 3 寸割之。求所得截面之直徑幾何。

〔解〕　命 $r$ 為圓之半徑。$d$ 為其直徑。而此圓為平面割球體所成之截面也。

作球體之兩半徑至截面之直徑之兩端。則成一兩等邊三角形。且其每足之長爲 5 寸。中垂線爲 3 寸。

$$\therefore\quad r=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$$

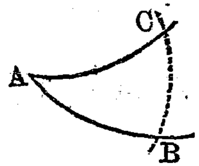
$$\therefore\quad d=2\times r=2\times 4=8$$

答 8 寸。

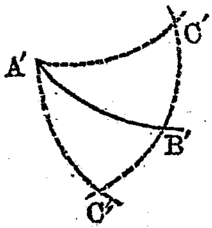
**問題 740.** 於與大平圓弧上之一與點。求作一弧角。等於一與弧角。

〔解〕 命 A′ 爲 ED 弧中之任一點。BAC 爲任與角。求作一角。等於 ∠BAC。須以 A′ 爲項。A′D 爲其一邊。

(構圖) 以 A 爲極。以一象限爲半徑弧。作 BC 弧。以 A′ 爲極。作大平圓 B′M 弧。




於此弧上取 B′C′ 等於 BC。過 A′ 及 C′。作大平圓弧 A′C′。則 B′A′C′。即爲所求之角矣。



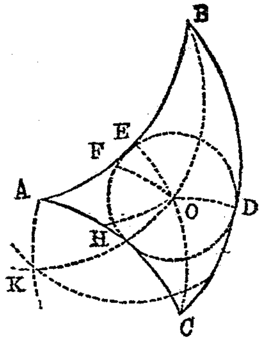

〔證〕 BC 弧及 B′C′ 弧。爲度 ∠A 及 A′ 之數。 § 779

但 BC=B′C′ 構圖

$$\therefore\quad \angle BAC=\angle B'A'C'$$

**問題 741.** 求作一與弧三角形之內切圓

〔解〕 命 ABC 爲任弧△。




求作弧 △ABC 之內切圓。

(構圖) 以 B 爲極。BA 爲半徑弧。作 AG 弧。

以 A 及 G 爲極。以大於 $\frac{1}{2}$AG 爲半徑弧。作二弧相交於 K。

通過 K 及 B 作一大平圓弧。

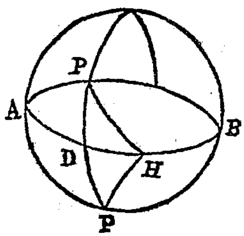
依同樣作 CE。自 BK 及 CE 之交點 O。作大平圓弧 OD⊥BC 邊。

以 O 爲極。OD 爲半徑弧。作 ⊙DFH。則 ⊙DFH。即爲所求之內切圓。

〔證〕 作大平圓弧 KA 及 KG。

取 BF=BD。CH=CD。並作大平圓弧 OF 及 OH。

因 △BAK 及 BGK 互相等邊。 構圖




且知必互相等角。 § 810

∠OBF=OBD

∴ △OBF 及 OBD 相等。

§ 808

故 OF⊥AB 而等於 OD。

依同理。可證得 OH⊥AC 而等於 AD。

據此意。可證得 ⊥s OD, OF, 及 OH 爲度自 O 至 CB 邊 AB 邊及 AC 邊之距離之數。

命 PD 爲自 P 至 ADB 弧所作 = ⊥s 之小者。而 PH 爲自 P 至 ADB 之他一大平圓弧。

則　　$PD<PH$

因　　$HP=HP'$　　問題 736

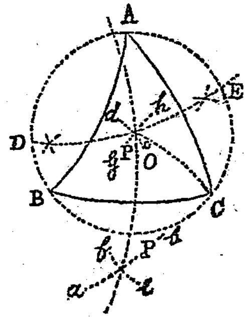
$\therefore\ PD+P'D<PH+HP'$　　§ 816

$\therefore\ 2PD<+2PH$。或 $PD<PH$。

故此⊙內切於與 △ABC。且割其邊於 D, F, H。

**問題 742.** 求作與弧三角之外切圓。

〔解〕　命 ABC 爲任何弧三角形。




求作弧 △ABC 之外切圓。

(構圖)　以 A 爲極。以大於 $\frac{1}{2}$AB 爲半徑弧。作 $ab$ 弧及 CD 弧。

以 B 爲極。以同半徑弧作 $cf$ 弧及 $gh$ 弧。而交前弧於 P 及 P'。

通過 P 及 P' 作一大平圓弧 OP'P。

依同樣。作大平圓弧 DE。

以 PP′ 及 ED 之交點 O 爲極。OB 爲半徑弧。作 ⊙BCA。

則 ⊙BCA。即爲所求之外切圓。

〔證〕 因 P 及 P′ 距 A 及 B 等遠。 構圖

此距離可以大平圓弧度之。彼距 A 及 B 亦等遠。可以直線上度之。

且球心距 A 及 B 亦等遠。

因知 PP′ 弧之平面。爲 AB 中點之 ⊥。 §§ 496, 517

故 O 距 A 及 B 等遠。其距離可以直線度之。而等遠可以大平圓弧度之。 § 517

依同理。O 距 B 及 C 等遠。

故外切圓之以 O 爲極。OB 爲半徑弧作之者。必能通過 ABC 三點。

**問題 743.** 與弧三角形之三邊爲 $60°$, $80°$, 及 $100°$。求其極三角形之諸角。

〔解〕 由 § 793 之理。知極三角形之三角爲 $120°$, $100°$ 及 $80°$ 矣。

**問題 744.** 與弧三角形之三角爲 $70°$, $75°$, 及 $95°$。求其極三角形之諸邊。

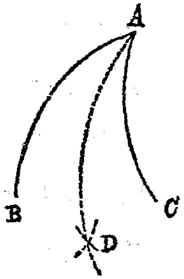
〔解〕 由 §793 之理。因知其極三角之三邊爲 110°, 105° 及 85°。

問題 745. 兩球體之半徑一爲 12 寸。一爲 20 寸。求其上兩箇互等角三角形之二相當邊之比率。

〔解〕 由 §811 之附記之理。得

$$12:20=3:5$$

問題 746. 求平分一與弧角。




〔解〕 命 BAC 爲與弧角。

求平分之。

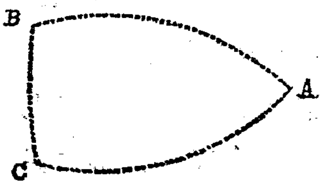
(構圖) 以 A 爲極。以一象限爲半徑弧。作弧。交 AB 於 B。AC 於 C。

以 B 及 C 爲極。以大於 BC 之距離之半爲半徑弧。作二弧。相交於 D。

通 A 及 D 作一大平圓弧。

則 AD 弧平分弧 ∠BAC。

問題 747. 已知二邊及其夾角。求作一弧三角形。




(構圖) 作大平圓弧 AB。等於與邊之一。

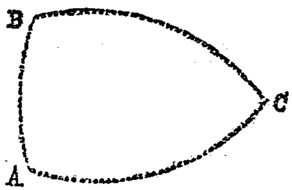
又作大平圓弧 AC。使 ∠BAC 等於與角。

取AC等於二與邊中之他一邊。

通過B及C作大平圓之弧。

則△ABC。爲所求之弧三角形。

問題748. 已知二角及一夾邊。求作一弧三角形。

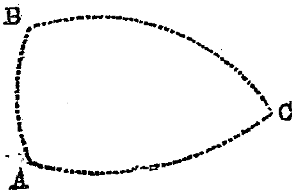



(構圖) 作大平圓弧AC。等於與邊。

過A及C作大平圓弧AB及CB。命其相交於B。而使∠CAB及ACB等於二與角。

則△ABC。即爲所求之弧三角形矣。

問題749. 已知三角。求作一弧三角形。




(構圖) 作一大平圓弧AC。等於諸與邊之第一邊。

以A及C爲極。以與邊中之第二及第三邊爲半徑弧。作二弧。相交於B。

通過A及B與C及B作兩大平圓弧。

則△ABC。即爲所求之弧三角形矣。

問題750. 已知三角。求作一弧三角形。

(構圖) 在二極三角形內。其一之每邊與他一之對角相輔。

故可以與三與角相輔之三邊。作一弧三角形。


問題 749

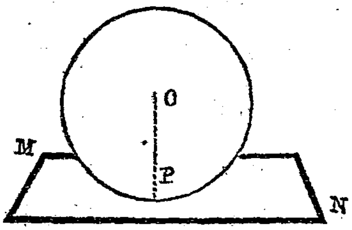
則以此三角形之每頂爲極。以一象限爲半徑。作諸大平圓弧。使成一弧三角形。則此弧三角形。即爲所求之弧三角形矣。

問題751. 求於球面上一與點。作一切面通過之。

〔解〕 命O爲球心。

P爲球面上之一點。

求作一平面。切球面於P點。




(構圖) 作OP半徑。

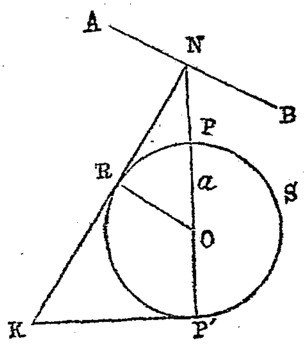
作MN平面 ⊥OP 於P。

則MN爲所求之平面。　§ 765

問題752. 求作一平面。通過球體外之一與線。而爲此球體之一切面。

〔解〕 命AB爲球體外之一與線。而O爲球體之心。

求作一平面。通過 AB 而切球體。




(構圖) 通過 AB 及心 O 作一平面。

其與球體之交線。爲球體之大平圓。

今命 P′SPR 爲此大平圓。

自 AB 內之任一點 N 至 ⊙P′SPR。作 NRK 切線。

通過 N 及 O 作 NOP′。而通過 P 作 P′K⊥PN。

以 NP′ 爲軸。將 NKP′ 形繞 NP 而旋之。則 PRP′ 半圓將造成一與球體。而 △NKP′ 將成一外切圓錐體。(此時 AB 仍定如恒)。

通過 AB 至此圓錐體作一切面。則此平面。即爲所求球體之切面矣。

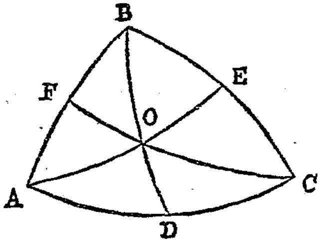
〔證〕 每一圓錐體之元素與球面僅有一公點。

故圓錐體之任何切面之通過 AB 含圓錐體之一元素者。而與球面亦僅有一公點。因知爲球面之切面。

§ 741

問題753. 弧三角形之三中分線過於一點。

〔解〕 命 ABC 爲任何弧三角形。而 AE, BD 及 CH。爲 $\triangle ABC$ 之三中分線。




求證 AE, BD, CF 相交於一點。

〔證〕 AE 弦 BD 弦及 CF 弦爲平面 $\triangle ABC$ 之中分線。相交於一點。 問題 27

$\therefore$ AE 弧 BD 弧 CF 弧亦相交於一點。

問題 754. 已知半徑。求作一球面。通過三與點。

〔解〕 命 R 爲已知之半徑。A, B, C 爲三與點。

求以 R 爲半徑。作一球面。通過 A, B, C。

〔分析〕 球心之距 A, B, C 每點之遠爲 R。故此球面。可以以距 A, B, C 等遠之一點爲心。R 爲半徑作之。

〔構圖〕 以 A 爲心。R 爲半徑。作球體。又以 B 及 C 爲心。R 爲半徑。作二球體。

由是以三球面之公點爲心。R 爲半徑。作諸球體。則此球體之面內。必含三與點。

〔證〕 自公點至 A, B, C 之距離。等於與半徑 R。故以公點爲心。R 爲半徑。作球面。必通過諸點。

(討論) 若三球體中之一個截他二面之交點.則合題意者有二。

若一球體切他二個之切點或交點.則合題意者僅有一。

若三球面並無公點者.則無合意矣。

問題755. 已知半徑.求作一球面.通過二與點.且切一與平面。

〔解〕 命 R 爲已知之半徑.MN 爲與平面,而 A 及 B 爲二與點。

求以 R 爲半徑.作一球面.通過 A 及 B.而切 MN 平面。

〔分析〕 球心距 A 及 B 之遠必爲 R.故球心在 A 及 B 爲心.R 爲半徑所作之二球面內。

但球心距 MN 平面之遠.亦必爲 R。

故此球心.又當在與 MN // 之平面內.且此平面與 MN 平面相距爲 R。

(構圖) 以 A 爲心.R 爲半徑作一球體.又以 B 爲心.R 爲半徑.作球體。

且作二平面與 MN 平面平行.而令其距離爲 R。

以二球面及一平面之公點爲心.R 爲半徑.作諸球

面.必通過二與點.而切與平面。

〔證〕 由構圖.知球心距 A 及 B 之遠爲 R。故該球面.必通過 A 及 B。

又由構圖.知球心距 MN 平面之遠爲 R。故該球面必切 MN 平面。

(討論) 諸球之交點 A 及 B。屬於與 MN 平行之平面內.則此問題爲不定。

若與 MN 平行之平面之一個.切二球面之交點.則合題意者有二。

若二球體及平面無公點.則無合題意者。

若點在平面對邊上.或兩個在平面內.則亦無合題意者.

問題 756. 已知半徑.求作一球面.通過二與點.且切一與球體。

〔解〕 命 R 爲與半徑。A 及 B 爲任二與點.而以 O 爲心之球體.其半徑爲 R′。

求以 R 爲半徑.作球面.通過 A,B。而切球體 O。

〔分析〕 球體之心.距 A 及 B 之每點爲 R.

故此球心.當在以 A 及 B 爲心。R 爲半徑所作之二球面內.

作一球體。可以切與球體者。其二球心相距之遠。必等於二半徑之和或較。此一定之理也。

(構圖) 以 A 及 B 爲心。R 爲半徑。作二球體。

以 O 爲心。以 $R+R'$ 及 $R\sim R'$ 爲半徑。作二球體。

以第一次二球面及第二次二球面之公點爲心。R 爲半徑。作諸球體。必通過二與點。且切與球體矣。

〔證〕 每球心距 A 及 B 爲 R。

故每球面必通過 A 及 B。

每球心與與球體之心相距。爲其二半徑之和或較。

故每球面必切與球體。

(討論) 若 A 及 B 之球面。與以 O 爲心之球面之公點有 4, 3, 2, 1, 0。則合題意之球面。亦有 4, 3, 2, 1, 0。

**問題757.** 通過一與大平圓之極所作一切大平圓弧。必與此大平圓之圓周正交。

〔解〕 命 P 爲大平圓 ABC 之極。而 PA 爲通過 P 點交 ⊙ABC 於 A 之大平圓弧。

求證 $PA \perp ABC$。

〔證〕 今弧 $\angle PAB$。以以 A 爲極。而夾於兩邊之間之大平圓弧度之。 § 779

$\therefore$ $\angle PAB$ 以自 P 至 ⊙ABC 之距離度之。

$\therefore$ $\angle PAB$ 爲正弧角。

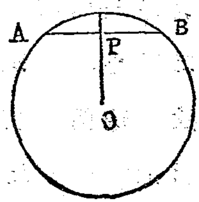
因知 $PA \perp ABC$。

問題758. 其面通過球體內一與點之最小平圓,爲其面與一通過與點之半徑正交者。

〔解〕 命 P 爲以 O 爲心之球體內之一與點。

求證通過 P 點之最小平圓,爲其面與通過 P 點之半徑作正交者。

〔證〕 作一平面,通過 P 點及球體之心。




AB 弦 $\perp$OP,爲於大平圓內通過 P 之最短弦。 問題 109

故 AB 爲通過 P 點之最小平圓之直徑。

故此最小平圓,通過 P 點而與通過 P 點之半徑作正交。

問題759. 已知球體半徑爲10寸,求有角$30^\circ$之月形面積

(法) $$L=\frac{\pi R^2A}{90}$$ § 831

$$\frac{3.1416\times10^2 30}{90}=104.72$$

答 104.72 方寸。

問題760. 已知球體直徑爲16寸。求有角75°之月形面積。

(法) $$L=\frac{\pi R^2 A}{90}$$ § 831

$$=\frac{3.1416\times 8^2\times 75}{90}=167.552$$

答 167.552方寸。

問題761. 一弧三角形之三角爲120°, 100°及95°。問其爲球面上之何分。且若此球體之半經爲6寸。問其面積爲幾平方寸。

(法) $$E=120°+100°+95°-180°=135°$$

$$\frac{\Delta}{8}=\frac{135}{720}=\frac{3}{16}$$ § 835

$$\Delta=\frac{\pi R^2 E}{180}=\frac{3.1416\times 6^2\times 135}{180}=84.8232$$ § 836

答 84.8232方寸。

問題762. 若球體之直徑爲16寸。求弧三角形之三角100°, 120°及140°者之面積。

(法) $$E=100°+120°+140°-180°=180°$$

$$\Delta=\frac{\pi R^2 E}{180}$$ § 836

$$=\frac{3.1416\times 8^2\times 180}{180}=201.0624$$

答 201.0624方寸。

**問題763.** 若二球體之二半徑爲 6 寸及 4 寸。兩圓心相距 5 寸。問二球相交。所得交圓之面積幾何。

(法) 命 S 爲三角形之面積。此三角形爲連合兩圓心之圓心線。及自兩圓心至截面周上之任一點之二半徑所構成者。

$$S=\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{2}}=\frac{15}{4}\sqrt{7}$$

問題 405

$$S=\frac{5}{2}R$$

$$\therefore\ \frac{5}{2}R=\frac{15}{4}\sqrt{7}$$

即 $$R=\frac{3}{2}\sqrt{7}$$

圓面積 $=\pi R^2=3.1416\times\left(\frac{3}{2}\sqrt{7}\right)^2$ § 463。

$$=49.4802$$

答 49.4802 方寸

**問題764.** 求體之直徑 5 寸。於距心 1 寸之處以平面割之。求所成平圓之半徑。

(法) $$R=\sqrt{\left(2\frac{1}{2}\right)^2-1^2}$$ § 372

$$=\frac{1}{2}\sqrt{25-4}=\frac{1}{2}\sqrt{21}$$

答 $\frac{1}{2}\sqrt{21}$ 寸。

問題765. 兩球同一圓心。其二半徑為R及R'。若一平面與內球體相切。其在外球體內所成截面之面積幾何。

(法)　$r=\sqrt{R^2-R'^2}$　　§ 372

面積$=\pi r^2=\pi(R^2-R'^2)$　　§ 463

問題766. A及B為相距8寸之二點。求空間距A,5寸距B,7寸一點之軌。

(法) 命R為自諸軌之任一點C至AB之垂線。

則　$R=\frac{2}{c}\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$　　問題 312

$=\frac{2}{8}\sqrt{10\times3\times5\times2}$

$=\frac{1}{4}\times10\sqrt{3}=\frac{5}{2}\sqrt{3}$

故諸點之軌。為以R之足為心。R為半徑所作之圓周。

問題767. 同球體中之二平行截面之半徑為$a$及$b$。兩截面相距之遠為$d$。求此球體之半徑幾何。

(法) 命OA及OB為自球心至兩平面之垂線。

$$OA=\sqrt{R^2-a^2}\quad OB=\sqrt{R^2-b^2}$$

$$OA-OB=d=\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{R^2-b^2}$$

$$\therefore\ d+\sqrt{R^2-b^2}=\sqrt{R^2-a^2}$$

$$d^2+2d\sqrt{R^2-b^2}+R^2+b^2=R^2-a^2$$

$$2d\sqrt{R^2-b^2}=b^2-a^2-d^2$$

$$4d^2R^2-4b^2d^2=a^4+b^4+d^4-2a^2b^2-2b^2d^2+2a^2d^2$$

$$4d^2R^2=a^4+b^4+d^4+2b^2d^2+2a^2d^2-2a^2b^2$$

$$R=\frac{1}{2d}\sqrt{a^4+b^4+d^4+2b^2d^2+2a^2d^2-2a^2b^2}$$

**問題768.** 已知球體之直徑為 (1) 10寸. (2) 1尺9寸. (3) 2尺4寸. (4) 7尺. (5) 10.5尺.求其面積.

(法) (1) $S=4\pi R^2=4\times 3.1416\times 5^2$ 方寸.

$=314.16$ 方寸 § 824

(2) $S=4\pi R^2=4\times 3.1416\times\left(\frac{1.9}{2}\right)^2$ 方尺

$=11.3412$ 方尺

(3) $S=4\pi R^2=4\times 3.1416\times(1.2)^2$ 方尺

$=18.0946$ 方尺

(4) $S=4\pi R^2=4\times 3.1416\times\left(\frac{7}{2}\right)^2$ 方尺

$=153.9384$ 方尺

(5) $S=4\pi R^2=4\times 3.1416\times(5.25)^2$ 方尺

$=346.3614$ 方尺

問題769. 已知球體之面積為 (1) 616平方寸。(2) $38\frac{1}{2}$平方尺。(3) 9856平方尺。求其面積。

(法) (1) $S=4\pi R^2=\pi D^2$ § 824

$616=3.1416\times D^2$

$D^2=616\times 0.31831$ § 481

$=196.07896$

$\therefore\ D=\sqrt{196.07896}=14$

即 $D=14$ 寸。

(2) $S=\pi D^2$

$38\frac{1}{2}=3.1416\times D^2$

$D^2=38.5\times 0.31831$

$=12.254935$

$\therefore\ D=\sqrt{12.254935}=3.5$

即 $D=3.5$ 尺

(3) $S=\pi D^2$

$9856=3.1416\times D^2$

$D^2=9856\times 0.31831$

$=3137.26336$

$D=\sqrt{3137.26336}=56$

即 $D=56$ 尺

問題770. 有半球形屋頂,已知其圓周爲66尺.問需幾平方尺之鉛以覆之。

(法) $S=2\pi R^2=66R$ § 824

$R=\frac{66}{2\pi}=33\times0.3831$ § 458

$S=66\times33\times0.31831=693.28$

答約 693.28方尺。

問題771. 屋頂上之圓球,已知其直徑爲6尺.欲鍍金.問需銀幾何.但鍍金每平方寸需銀7分。

(法) $S=\pi D^2=3.1416\times(6)^2$ 方尺 § 824

$=113.0976$ 方尺

$=11309.76$ 方寸

$11309.76\times7=79168.32$

答 791圓6角8.32分。

問題772. 一球體之面積與一大平圓周同數.求其半徑之值。

(法) $S=4\pi R^2$ § 824

$C=2\pi R$ § 458

$\therefore\ 4\pi R^2=2\pi R$

$2R=1$

$2R=\frac{1}{2}$

問題773. 月形之角爲30°。其全體之面積爲4平方尺。求此月形之面積。

(法)
$$L:S=30:360 \qquad \S\ 829$$
$$L:4=1:12$$
$$\therefore\ L=\frac{4}{12}=方尺\frac{1}{3}方尺$$

問題774. 弧三角形之三角爲 43°27′ 及 81°57′ 及 114°36′。問其面積爲球面積之幾分。

(法) $E=43°27'+81°57'+114°36'-180°=60°$
$$\frac{\Delta}{S}=\frac{E}{720}=\frac{60}{720}=\frac{1}{12} \qquad \S\ 835$$

問題775. 弧三角形之三角爲 60°, 70° 及 80°。而球體之半徑爲14尺。求此三角形之面積。

(法) $E=60°+70°+80°-180°=30°$
$$\triangle面積=\frac{\pi R^2E}{180} \qquad \S\ 836$$
$$=\frac{3.1416\times14^2\times30}{180}=102.6256$$

答　102.63方尺。

問題776. 弧三角形之三邊爲 80°, 74° 及 128°。球體之半徑爲14尺。求其極三角形之面積之平方尺數。

(法) 極三角形之三角為$100°, 106°, 52°$。 § 793

$\therefore\quad E=100°+106°+52°-180°=78°$

極三角形之面積$=\dfrac{\pi R^2E}{180}$ § 836

$=\dfrac{3.1416\times14^2\times78}{180}$方尺

$=266.83$方尺

問題777. 球體上弧多邊形之四角為 $100°, 120°, 140°, 160°$。球體之半徑為 $10\frac{1}{2}$ 尺,求此多邊形之面積。

(法) $E=\pi-(n-2)180°$

$T=100°+120°+140°+160°=520°$

$E=520°-(2\times180°)$

$=520°-360°=160°$

$\dfrac{\text{面積}}{S}=\dfrac{160}{720}=\dfrac{2}{9}$ § 837

$S=4\pi R^2=4\times3.1416\times10.5\times10.5$ § 824

$\therefore$ 面積$=\dfrac{4\times3.1416\times105\times105}{9}=307.8768$

答 307.88方尺。

問題778. 四面弧稜體之諸面成角 $80°, 100°, 120°, 150°$。稜錐體之旁鋒長42尺,求其底面積之平方尺數。

(法)　$E=T-(n-2)180^\circ$

$T=80^\circ+100^\circ+120^\circ+150^\circ=450^\circ$

$E=450^\circ-(2\times180^\circ)$

$=450^\circ-360^\circ=90^\circ$

$\frac{\text{面積}}{S}=\frac{90}{720}=\frac{1}{8}$　§ 837

$S=4\pi R^2=4\times3.1416\times42^2$　§ 824

$\text{面積}=\frac{4\times3.1416\times42^2}{8}=2770.8912$

答　2770.89方尺。

問題779.　三角弧稜錐體之諸面成角60°, 80°, 100°。稜錐體之底面積為 $4\pi$ 平方尺,求其球體之半徑。

(法)　$E=60^\circ+80^\circ+100^\circ-180^\circ=60^\circ$

$\triangle\text{面積}=\frac{\pi R^2E}{180}=\frac{\pi R^2\times60}{180}=\frac{1}{3}\pi R^2$　§ 836

$4\pi=\frac{1}{3}\pi R^2$

$\therefore\ R^2=12$

即　$R=\sqrt{12}=3.46$

答　3.46尺。

問題780.　球體之直徑21尺,求一分圓高5尺者之曲面積。

(法)　面積$=2\pi RH$　§ 826

$=2\times 3.1416\times 10.5\times 5$

$=329.8680$

答　329.87方尺。

問題781. 球體之半徑為R。求一球帶.其面積等於一大平圓之面積者之高。

(法)　$z=2\pi RH$　§ 826

大平圓$=\pi R^2$　§ 463

$\therefore\ 2\pi RH=\pi R^2$

$2H=R$

$\therefore\ H=\frac{R}{2}$

問題782. 一底面之球帶其高為$h$.其底面之半徑為$r$。求其面積.又當其高為前之二倍時.其面積如何。

(法)　面積$=\pi\times$(弦)$^2$　§ 828

$=\pi\times(\sqrt{h^2+r^2})^2$

$=\pi\times(h^2+r^2)$

若其高大二倍.則面積為$2\pi(h^2+r^2)$。

問題783. 設地球為一球體.其半徑為4000英里.割成之球帶.其高為3200英里.求其面積。

(法) $s=2\pi RH$ § 826

$=2\times3.1416\times40000\times3200$

$=80424960$

答 80424960方英里

問題784. 一平面割一球體之半徑爲R者成二球帶其較大一分之面積爲全面積及較小一分面積之中率.求此平面距球體圓心之遠。

(法) 命二球帶之高爲$2R-H$及$H$,

則 $$\frac{2\pi R(2R-H)}{2\pi RH}=\frac{2\pi RH}{4\pi R^2}$$ §§ 826, 824

$$\frac{2R-H}{H}=\frac{H}{2R}$$

$$4R^2-2RH=H^2$$

$$H^2+2RH+R^2=5R^2$$

$$H+R=R\sqrt{5}$$

$$H=R\sqrt{5}-R$$

$$\text{平面距圓心之遠}=R\sqrt{5}-R-R$$

$$=R(\sqrt{5}-2)$$

問題785. 一球體之半徑爲R.以二平行面之距其圓心等遠者割之.二平面間球帶之面積等於其兩底面面積之和.求平面距圓心之遠。

(法) 命 $a$ 爲每截面之半徑。

則 $$a=\sqrt{R^2-\tfrac{1}{4}H^2}$$ § 372

$$z=2\pi RH$$ § 826

$$2B=2\pi a^2=2\pi(R^2-\tfrac{1}{4}H^2)$$

$$\therefore\ 2\pi RH=2\pi(R^2-\tfrac{1}{4}H^2)$$

$$H^2+4RH=4R^2$$

$$H^2+4RH+4R^2=8R^2$$

$$H+2R=2R\sqrt{2}$$

$$H=2R\sqrt{2}-2R$$

$$\tfrac{1}{2}H=R\sqrt{2}-R=R(\sqrt{2}-1)$$

問題786. 以 $30^\circ$ 之弧旋轉生一球帶。此弧之半徑爲 $r$。又此弧繞其直徑旋轉之時。通過其兩端之一。求其球帶之面積。

(法) 命 AC 爲半徑。而 AB 爲自心至截面之距離。

則 $$AB=\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}r^2}=\frac{r}{2}\sqrt{3}$$ § 372

$$BC=r-\frac{r}{2}\sqrt{3}$$

即 $$H=\frac{r}{2}(2-\sqrt{3})$$

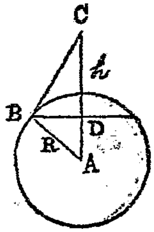
$$z=2\pi RH$$ § 826

$$=2\pi r\times\frac{r}{2}(2-\sqrt{3})=\pi r^2(2-\sqrt{3})$$

問題787. 球體之半徑爲R。以一燈置於距球體之遠爲$h$之處。映或球帶之面積幾何。

(法) 於相形$\triangle$ADB及ABC內

$$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$$ § 351




即 $$\frac{AD}{R}=\frac{R}{R+h}$$

$$AD=\frac{R^2}{R+h}$$

$$DE=R-\frac{R^2}{R+h}=\frac{Rh}{R+h}$$

$$z=2\pi R\times\frac{Rh}{R+h}=\frac{2\pi R^2h}{R+h}$$ § 826

問題788. 若人登於高處爲地球半徑之一端。問此人能視地球之面若干遠。

(法) $$z=\frac{2\pi R^2h}{R+h}$$ 問題787

但 $$h=R$$

∴ $$z=\frac{2\pi R^3}{2R}=\pi R^2$$

$$S=4\pi R^2$$ § 824

$$\frac{Z}{S}=\frac{\pi R^2}{4\pi R^3}=\frac{1}{4}$$

問題789. 若人欲視地球面六分之一。問須升高幾何。

(法) $$S=4\pi R^2$$

$$Z=\frac{S}{6}=\frac{2}{3}\pi R^2$$

但 $$Z=\frac{2\pi R^2h}{R+h}$$ 問題 787

$$\therefore \quad \frac{2\pi R^2h}{R+h}=\frac{2\pi R^2}{3}$$

即 $$\frac{h}{R+h}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \quad 3h=R+h$$

$$\therefore \quad h=\tfrac{1}{2}R$$

**問題790.** 球體直徑之平方比其內切方體一鋒之平方若 3:1。

(法) 命 $a$ 爲內切立方體之一鋒。

球體之直徑$=2R=$立方體之對角線。但立方體之對角線$=a\sqrt{3}$ 問題 653

$$\therefore \quad 2R=a\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad (2R)^2:a^2=(a\sqrt{3})^2:a^2=3a:a^2=3:1$$

**問題791.** 已知球體之直徑爲 (1) 13 寸 (2) 3 尺 6 寸 (3) 10 尺 6 寸 (4) 14.7 尺求其體積。

(法) (1) $V=\frac{1}{6}\pi D^3=\frac{1}{6}\times 3.1416\times 13^3$ § 845

$$=1150.3492$$

答 1150.35 立方寸

(2) $V=\frac{1}{6}\pi D^3=\frac{1}{6}\times 3.1416\times(3.6)^3$ § 845

$=24.4291$

答 24.4291 立方尺。

(3) $V=\frac{1}{6}\pi D^3=\frac{1}{6}\times 3.1416\times(10.6)^3$ § 845

$=623.6160$

答 623.6160 立方尺。

(4) $V=\frac{1}{6}\pi D^3=\frac{1}{6}\times 3.1416\times(14.7)^3$ § 845

$=606.13245$

答 1663.23 立方寸。

問題792. 已知球體積爲 (1) 75 立方尺 1377 立方寸。(2) 179 立方尺 1152 立方寸。(3) 1047.816 立方尺。(4) 33.808 立方尺。求其直徑。

(法) (1) $V=\frac{1}{6}\pi D^3$ § 845

$76.377=\frac{1}{6}\times 3.1416\times D^3$

$D^3=6\times 0.31831\times 76.377$

$D^3=145.86937722$

$D=\sqrt[3]{145.86937722}=5.3$ 尺

即 $D=5.3$ 尺

(2) $V=\frac{1}{6}\pi D^3$

$180.152=\frac{1}{6}\times 3.1416\times D^3$

$D^3=6\times 0.31831\times 180.152$

$D^3=344.06509872$

$D=\sqrt[3]{344.06509872}=7.1$

$\therefore$ $D=7.1$ 尺

(3) $V=\frac{1}{6}\pi D^3$ § 845

$1047.816=\frac{1}{6}\times 3,1416\ D^3$

$D^3=6\times 0.31831\times 1047.816$

$=2001.18186576$

$\therefore$ $D=12.6$ 尺

(4) $V=\frac{1}{6}\pi D^3$ § 845

$38.808=\frac{1}{6}\times 3.1416D^3$

$D^3=6\times 0.31831\times 38.808$

$=74.11784688$

$D=4.2$ 尺

**問題793.** 已知球體之圓周為45尺,求其體積。

(法) $D=\frac{45}{\pi}$

$$V=\frac{1}{6}\pi D^3=\frac{1}{6}\times\pi\times\frac{45^3}{\pi^3} \qquad \S\ 845$$

$$=\frac{1}{6}\times 0.31831^2\times 45^3$$

$$=1538.8$$

答 1538.8立方尺。

問題794. 已知一大平圓周C。求球體之體積V。

(法)
$$V=\frac{1}{6}\pi D^3 \qquad \S\ 845$$

$$C=\pi D \qquad \S\ 458$$

$$\therefore\ D=\frac{C}{\pi}$$

$$\therefore\ V=\frac{\pi}{6}\times\frac{C^3}{\pi^3}=\frac{C^3}{6\pi^2}$$

問題795. 已知球體之體積V。求其半徑R。

(法)
$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\therefore\ R^3=\frac{3V}{4\pi}$$

$$\therefore\ R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

問題796. 若一球體之圓周及體積同數。求其半徑R。

(法)
$$\frac{4}{3}\pi R^3=2\pi R$$

$$\frac{2}{3}R^2=1$$

$$2R^2=3$$

$$R^2=1.5$$

$$R=\sqrt{15}=\frac{1}{2}\sqrt{6}=1.2247$$

**問題797.** 球體面積與其外切立方形相比若 $\pi:6$。

(法) 命 $a$ 爲外切立方體之鋒。

則 $a=2R$

球體之體積 $=\frac{4}{3}\pi R^3$ § 845

$$\therefore\quad \tfrac{4}{3}\pi R^3 : a^3=\tfrac{4}{3}\pi R^3 : (2R)^3$$

$$=\tfrac{4}{3}\pi R^3 : 8R^3=\pi : 6$$

**問題798.** 一鐵球之直徑爲 4 寸,重 9 磅,又一鐵圓殼厚 2 寸,其外直徑爲 20 寸,求其重。

(法) $V : V''=20^3 : 4^3=5^3 : 1^3=125 : 1$ § 846

$\therefore$ V 重量 $125\times 9$ 磅 $=1125$ 磅

$$V' : V''=16^3 : 4^3=4^3 : 1=64 : 1$$

$\therefore$ V′ 重量 $64\times 9$ 磅 $=576$ 磅

$$V-V'=1125\text{ 磅}-576\text{ 磅}=549\text{ 磅}$$

**問題799.** 球體之半徑 7 尺,求所成弧楔體之角爲 $36°$ 者之體積。

(法) $$\frac{W}{V}=\frac{36^\circ}{360^\circ}=\frac{1}{10}$$

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\times3.1416\times7^3$$

$$=1436.7584 \qquad \S\ 845$$

$$\therefore\ W=\frac{1}{10}\times1436.76\text{立方尺}$$

$$=143.68\text{立方尺}$$

問題800. 若一弧楔體之體積爲1立方尺,全球體之體積爲6立方尺,求此弧楔體之角。

(法) $$\frac{W}{V}=\frac{1}{6}=\frac{\text{弧楔體之角}}{360}$$

$$\therefore\ \text{弧楔體之角}=\frac{1}{6}\times360^\circ=60^\circ$$

問題801. 若一弧分圓體之底面所成球帶形之面積爲3平方尺,球體之半徑爲1尺,求此圓分體之體積。

(法) $$V=\frac{1}{3}RZ=\frac{1}{3}\times(1\times3)\text{立方尺}$$

$$=1\text{立方尺} \qquad \S\ 848$$

問題802. 球分圓體之底面之半徑爲16寸,球體之半徑爲20寸,求此分圓體之體積。

(法) 自球心至底面之垂線。

$$=\sqrt{20^2-16^2}=\sqrt{144}=12 \qquad \S\ 372$$

$\therefore\quad a=20-12=8$

$$V=\frac{1}{2}\pi r^2a+\frac{1}{6}\pi a^3 \qquad \S\ 849$$

$$=\frac{1}{2}\times3.1416\times16^2\times8+\frac{1}{6}3.1416\times8^3$$

$$=3216.9984+268.0832$$

$$=3485.0816$$

答 3485.08立方寸。

問題803. 一浴桶之內部為弧分圓形。其上面之直徑為16寸。最深之處6寸。問其能盛水幾平特。但每$7\frac{1}{2}$格龍等於一立方尺。八格龍等於一平特。

(法) $$V=\frac{1}{2}\pi r^2a+\frac{1}{6}\pi a^3 \qquad \S\ 849$$

$$=\frac{1}{2}\times3.1416^2\times8^2\times6+\frac{1}{6}\times3.1416\times6^3$$

$=2008.06666752$ 立方寸

$=2.00806666752$ 立方尺

盛水 $=2.00806666752\times7.5$ 格龍

$=10.0403333376$ 格龍

$=10.0403333376\div8$ 平特

$=1.2550416672$ 平特

問題804. 一球帶之面積為S.其所屬球體之體積為V.求此球帶之高。

(法)　$V=\frac{4}{3}\pi R^3$　§ 845

$S=2\pi RH$　§ 826

$\therefore\ H=\frac{S}{2\pi R}$

而　$R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

$2\pi R=2\pi\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}=\sqrt[3]{6\pi^2V}$

$\because\ H=\frac{S}{\sqrt[3]{6\pi^2V}}$

問題805. 弧分圓體之兩底面之半徑爲 6 尺及 8 尺.其高 3 尺.求其體積.

(法)　$V=\frac{H}{2}(\pi r^2+\pi r'^2)+\frac{\pi H^3}{6}$

$=\frac{3}{2}(\pi 6^2+\pi 8^2)+\frac{\pi 3^3}{6}$　§ 849

$=3.1416\times(150+4.5)$

$=485.3772$

答　485.3772 立方尺.

問題806. 若一三角弧稜錐體之底面(一弧三角形)爲 100°.球體之半徑爲 7 尺.求此稜錐體之體積.

(法)　$E=3\times100^\circ-180^\circ=120^\circ$

$$\triangle面積=\frac{\pi R^2E}{180}=\frac{3.1416\times 7^2\times 120}{180}$$

$$=102.6256 \qquad \S\ 836$$

$$V=\frac{1}{3}R\times B=\frac{1}{3}\times 7\times 102.6256$$

$$=239.4597 \qquad \S\ 847$$

答 239.46立方尺。

問題807. 球體之圓周爲 $28\pi$ 尺。自其圓心作一箇三稜角。其所成三箇二稜角爲 $80°, 105°$ 及 $140°$。求其三面所成弧稜錐體之體積。

(法) $C=2\pi R=28\pi$ § 458

$\therefore\ R=14$

$$E=80°+105°+140°-180°=145°$$

$$\triangle面積=\frac{\pi R^2E}{180}=\frac{3.1416\times 14^2\times 145}{180}$$

$$=496.0237 \qquad \S\ 836$$

$$V=\frac{1}{3}R\times B=\frac{14}{3}\times 496.0237$$

$$=2314.7773 \qquad \S\ 847$$

答 2314.78立方尺。

問題808. 四面弧稜錐體之諸面成角 $80°, 100°, 120°, 150°$。稜錐體之旁角鋒爲 $3\frac{1}{3}$ 尺。求此稜錐體之體積。

(法) $E=80°+100°+120°+150°-360°$

$=90°$

$$\frac{面積}{S}=\frac{90}{720}=\frac{1}{8} \qquad § 837$$

$$S=4\pi R^2=4\times3.1416\times\left(\frac{7}{2}\right)^2 \qquad § 824$$

$$\therefore\ 面積=\frac{1}{8}\times4\times3.1416\times\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$V=\frac{1}{3}R\times B=\frac{1}{3}\times\frac{7}{2}\times\frac{1}{8}\times4\times3.1416\times\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$=22.44935$

答 22.45立方尺。

問題809. 已知一底面之弧分圓體之體積為V。其高為$h$。求所屬球體之半徑R。

(法) $$V=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\pi h^2R-\frac{1}{3}\pi h^3 \qquad § 849$$

$$\therefore\ R=\frac{V+\frac{1}{3}\pi h^3}{\pi h^2}=\frac{V}{\pi h^2}+\frac{h}{3}$$

問題810. 一球體浮於液體之比重為S者之上。其面積四分之一高於水平。其半徑為R。試求其重。(浮上之重等於其所壓開液體之重)。

(法) $z=2\pi RH \qquad § 826$

$$\frac{1}{4}S=\pi R^2=2\pi RH \qquad § 824$$

$$\therefore \quad H=\frac{1}{2}R$$

液體之體積 $=\pi H^2\left(R-\dfrac{H}{3}\right)$ § 849

$$=\pi\frac{R^2}{4}\times\left(R-\frac{R}{6}\right)$$

$$=\frac{\pi R^2}{4}\times\frac{5R}{6}=\frac{5\pi R^3}{24}$$

球體之體積 $=\dfrac{4}{3}\pi R^3$

故所壓開液體之積 $=\dfrac{4}{3}\pi R^3-\dfrac{5}{24}\pi R^3$

$$=\frac{9}{8}\pi R^3$$

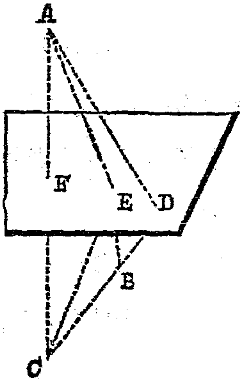
所求之重 $=\dfrac{9}{8}\pi R^3 S$

## 雜 例 題

問題 811. 求於一與平面中定一點,使其距相對兩邊二與點之遠之較爲最大數。

〔解〕 命 A 及 B 爲 MN 平面相對兩邊之二與點。

求MN平面內之一點。使其與A及B相距之遠之較為最大。




(構圖) 自A作AF。為MN平面之垂線。且引長至C。命FC等於AF。通過C及B作一直線。遇平面於一點D。

則D即為所求之點。

〔證〕 命E為MN平面內之他一點。乃作EA, EC, EB及AD。

則 $DC=DA$

而 $EC=EA$ § 517

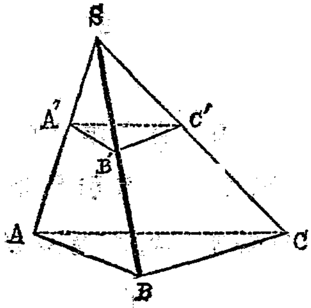
$\therefore\ DA-DB=DC-DB=BC$

$EA-EB=EC-EB<BC$ § 138

$\therefore\ DA-DB>EA-EB$

(討論) 若A及B距平面等遠。則其距離之較為O。即其距離之較不能為最大。

問題812. 以一平面與四面稜體之任一面平行割之。割得之一分。仍為四面稜體。與原四面稜體相似。




〔解〕 命A'B'C'爲與四面稜體S-ABC之ABC平行之割面。

求證S-A'B'C'與S-ABC相似。

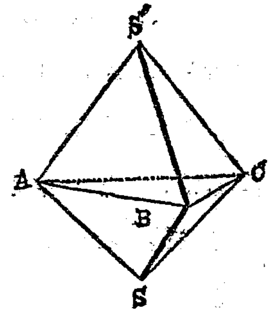
〔證〕 A'B', B'C', C'A'各與AB, BC, CA平行. § 528

故S'A'B'面S'B'C'面及S'C'A'面。各與SAB面SBC面及SCA面相似。 § 354

三稜角S爲兩四面稜體公有。且三稜角A', B', C'等於三稜角A, B, C。 § 582

因四面稜體有諸立體角相等。且諸面亦相似。而同位。故兩四面稜體相似。 § 664

問題813. 兩箇對稱四面稜體相等。




〔解〕 命S-ABC及S'-ABC爲兩個對稱四面稜體。且ABC面爲公平面。

求證S-ABC∽S'-ABC

〔證〕 兩四面稜體有 ABC 公底.且其中垂線 HS 及 HS′ 相等。

$$\therefore \quad S\text{-}ABC \backsimeq S\text{-}ABC$$

問題814. 兩箇對多面稜體.可以分解爲同數之四面稜體互相對稱。

〔解〕 命 A 及 B.爲兩個對稱多面稜體。

求證兩個對稱多面稜體.可以分解爲同數之四面稜體互相對稱。

〔證〕 自任何頂點作對角線.分 A 爲諸四面稜體。

於 B 作相當之對角線.分 B 爲諸四面稜體。

任何二相當四面稜體.其諸頂點互相爲對稱.故所分諸四面稜體.互相對稱。

問題815. 兩箇對稱多面稜體相等。

〔解〕 命 A 及 B 爲任何兩個對稱多面稜體。

求證 $A \backsimeq B$

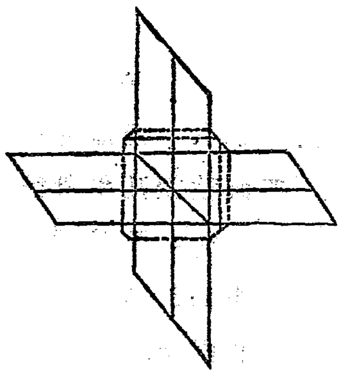
〔證〕 兩個對稱多面稜體.可以分解爲同數之諸四面稜體.互相對稱。 問題 814

且任何兩個對稱四面稜體等値。 問題 813

$$\therefore \quad A \backsimeq B$$

問題816. 若一立體.有兩平面相對稱.而彼此正交

則此兩平面之交線爲此立體之對稱軸。



〔解〕 命 MN 及 RS 爲任一立體中之相正交且相對稱之二平面面 YY′ 爲其交線。

求證 YY′ 爲此立體之對稱軸。

〔證〕 通過立體面之任一點 P，作一平面，爲交線 YY′ 之⊥。

則此面必與 MNRS 作正交。 §.555

故含於截面內諸平面間諸點，爲 P 之對稱諸點。

命 $p$ 及 $p'$ 爲 P 之對稱點。

而命 XX′ 及 ZZ′，爲 MN 及 RS 平面與截面之交線。

則 P$p'$ 及 P$p$ 爲 XX′ 及 ZZ′ 所平分，與之作諸正角。

以 XX′ 及 ZZ′ 言之，截面爲對稱，O 爲對稱心。

今連合 O 及截面之對稱點與 YY′ 作正∠。

故 YY′ 爲對稱軸。

問題817. 若一立體有三平面相對稱，而彼此正交，

則此三平面之交點爲此立體之對稱三軸此三軸之公交點爲其對稱心。

〔解〕 今一立體有 A, B, C 三平面相對稱。而彼此正交。

求證三平面之交線。爲此立體之對稱三軸。而三軸之公交點。爲其對稱心。

〔證〕 (i) 由問題816, 知 A, B, 之交線, 爲對稱軸。

依同理知 A, C 及 B, C 之交線。亦爲對稱軸。

(ii) 通過立體之 P, P′ 二點。作諸平面。平行對稱三平面之每一個。於是成一長方平行稜柱體。

平行稜柱體之角頂。皆在立體之面內。因任二角頂在同稜上爲對稱的。此以平面⊥其稜。P 在面內言之。

故立體面之任何點 P。有對稱 P′ 在面內。

故對稱平面之交線之交點。爲對稱心。

問題 818. 球體之體積。與其內切立方體之體積相比。若 $\pi:\frac{2}{3}\sqrt{3}$

(法) 命 $a$ 爲內切立方體之稜。

則 $2R=a\sqrt{3}$ 問題 790

$$\therefore\ a=\frac{2R}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}R\sqrt{3}$$

$\therefore$ 立方體之體積$=\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3=\frac{8}{9}R^3\sqrt{3}$ § 623

而球體之體積$=\frac{4}{3}\pi R^3$ § 845

$\therefore$ 球體:立方體$=\frac{4}{3}4\pi R^3:\frac{8}{9}R^3\sqrt{3}$

$$=\pi:\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

問題819. 有法四面稜體之每鋒為6寸.求其內切球體之面積.

(法) $R=\frac{9}{12}\sqrt{6}=\frac{6}{12}\sqrt{6}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{6}$ 問題 73

$S=4\pi R^2=4\times3.1416\times\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2$ 方寸

$=4\times3.1416\times15$ 方寸

$=18.8496$ 方寸 § 829

問題820. 若一底面之球帶.為所餘球面積及全球面積之中率.求此球帶底面距球體圓心之遠。

(法) 命 H 為球帶之高。

則 $2R-H=$球帶 $Z'$ 之高.

$2R-H:H=H:2R$ § 827

$\therefore \quad 4R^2-2RH=H^2$ § 327

$H^2+2RH=4R^2$

$H+R=R\sqrt{5}$

$H=R(\sqrt{5}-1)$

$\therefore \quad H-R=R(\sqrt{5}-2)$

問題821. 若一稜錐平截體之兩底面爲二正方形。每邊長20尺及16尺。又一稜柱體之底面爲此平截體之一截面。與兩底面平行等遠。且稜錐平截體與稜柱體各高24尺。求其兩體積之較。

(法) 平截體之體積$=\frac{1}{3}H(B+b+\sqrt{B+b})$ § 657

$=\frac{1}{3}\times 24(20^2+16^2+\sqrt{20^2\times 16^2})$

$=\frac{1}{3}\times 24(400+256+320)$

$=\frac{1}{3}\times 24\times 976$

$=7808$

稜柱體體積$=B\times H$ § 628

$=\left\{\frac{1}{2}(20+16)\right\}^2\times 24$

$=18^2\times 24$

$=7776$

$7808-7776=32$立方尺

問題822. 若地球爲半徑長4000英里之一球體,於海面立一燈塔,高100尺,問可照至幾遠。

〔解〕 由問題787,知

$$Z=\frac{2\pi R^2 b}{R+b}=\frac{2\pi R^2 b}{R+b}=\frac{2\times 3.1416\times(2000)^2\times\frac{5}{132}}{2000+\frac{5}{132}}=238$$

答 238英方里差,

問題823. 若空氣之分配至距地面50英里之高處而止,而地球設爲半徑長4000英里之球體,求空氣之體積幾何;

(法) 地球及空氣之體積 $=\frac{4}{3}\pi R^3$ § 845

$=\frac{4}{3}\times 3.1416\times 4050^3$

$=4.1888\times 66430125000$

而地球之體積 $=\frac{1}{3}\pi R^3$ § 845

$=\frac{4}{3}\times 3.1416\times 4000^3$

$=4.1888\times 64000000000$

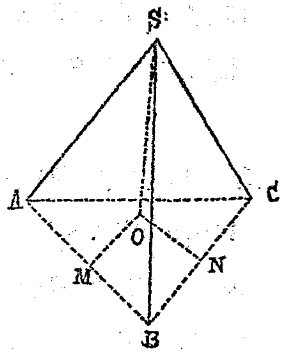
故空氣體積 $=4.1888\times 66430125000-4.1888\times 64000000000$

$=4.1888(66430125000-64000000000)$

$=4.1888\times 2430125000$

$=10179307600$ 方英里

問題824 求作一線通過任何三稜角之角頂。與其諸邊作相等之角。




〔解〕 命 S-ABC 爲任何三稜角。

求作一線通過 S 而與其邊 SA, SB, SC 作諸等角。

(構圖) 取 SA 等於 SB 等於 SC。乃作 AB, BC, 及 AC。

於 ABC 平面內。作 MO 及 NO 爲 AB 及 BC 中點之⊥。

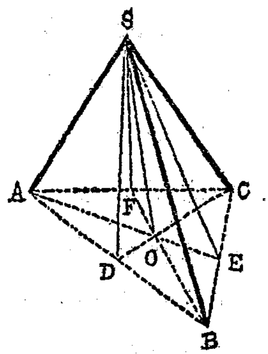
自公點 O 以線連其角頂 S。則 OS 即爲所求之線矣。

〔證〕 O 在 ABC 平面內。且距 A, B, C 三點等遠。 § 160

故 O 爲自 S 至 ABC 平面之垂線之足。 § 515

∴ ∠s OSA, OSB, OSC 相等。 § 515

問題825. 任何三稜角中通過其三綠。而平分其對面角之三平面。必相遇於一直線。




〔解〕 命 S-ABC 爲任何三

稜角。而 SD, SE, 及 SF 爲其諸面角之平分線。

求證 ASE, BSF, 及 CSD 三平面相交於一直線。

〔證〕 截取 SA, SB, SC 令其互相等長。乃作 AB, BC, CA。

作 AE, BF 及 CD。割 SD, SE, SF, 於 D, E, F 三點。

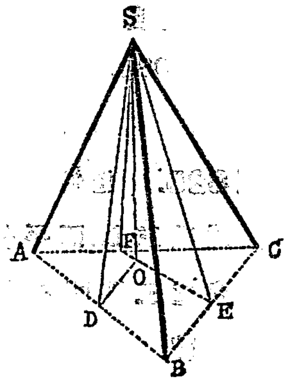
△SAB, SBC, SCA 皆爲兩等邊三角形。 (構圖)

因知三平分 SD, SE 及 SF 即爲△之中分線。 § 149

故 AE, BF, CD 爲 △ABC 之中分線。但中分線同交於一點 O。 問題 27

故 ASE, BSF, CSD 有 O 及 S 二點公用。因知其必同交於 SO 直線。

問題826. 任何三稜角中。通過其諸面角之平分線。而與其諸面正交之三平面。必相遇於一直線。




〔解〕 命 S-ABC 爲任何三稜角。而 SD, SE, SF, 爲三面角之平分線。

求證通過 SD, SE, SF 而垂線 ASB, BSC, CSA 三面之三平面。必相交於一直線。

〔證〕 取 SA 等於 SB 等於 SC。乃作 AB, BC, CA。

命 D, E, F 各爲 SD, SE, SF 之交點。

於 △ABC 內。自 D, E, F 至其對邊 AB, BC, CA 作三垂綫。

但 △SAB, SBC, 及 SCA。皆爲兩等邊。 (構圖)

∴ SD, SE 及 SF 三平分線。即爲 AB, BC, CA 中點之垂線。 § 149

故在 ABC 平面內。於 D, E, F 之三垂線相遇於一點。 問題 25

因 AB⊥DS 及 DO。故亦爲 SDO 平面之⊥。 § 507

∴ ABS⊥SDO 平面。 § 554

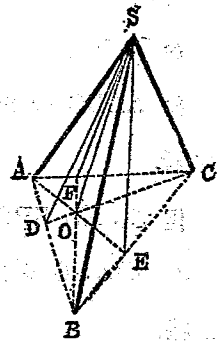
依同理。OES⊥BSC 平面。而 OFS⊥CAS 平面。

因知三平面通過三稜角之三面角之平分線。且各爲其面之垂線。即知其有 O 及 S 二公點。故知其同交於一直線 OS。

問題 827. 任何三稜角中。通過諸鋒而與其相對諸面正交之三平面。必相遇於一直線。

〔解〕 命 S-ABC 爲任何三稜角。

求證三平面之通過 SA, SB 及 SC 三鋒。而爲相對之面 SBC, SCA, 及 SAB 之⊥者必同交於一直線。




〔證〕 命二垂平面通過 SC 及 SB 面而相交於 SO。

通過 SA 及 SO 作一平面。截 SBC 面於 SE。通過 SO 內之任一點 O。作一平面。為 SO 之⊥。

乃命 AB, BC 及 AC。為此平面與三稜角三面之交線。而 AE, BF, 及 CD。為此平面與通過三稜所作之平面之交線。

SAE, SBF, SCD 三平面中之每一個。為 ABC 平面之⊥。 § 554

今 SCD⊥SAB

∴ AB⊥SDC

故 CD⊥AB § 501

依同理 BF⊥AC

故於 △ABC 內。BF 及 CD。為自角頂 B 及 C 至對邊 AC 及 AB 所作之⊥。

因知 AE。為自角頂 A 至 AC 邊之⊥。

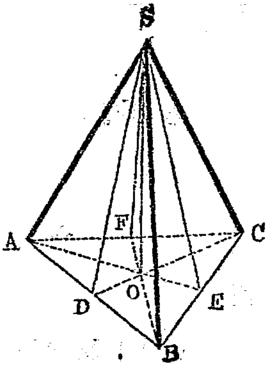
而通過 BF 及 CD 之交點。 § 問題 26

因 SAF 平面。為 ABC 平面之⊥。或 ASE 平面通過 SA 而為其對面 SBC 之⊥。 § 554

故三平面之通過 SA, SB 及 SC 三鋒而為相對諸面之⊥者。同交於一直線 OS。

問題828. 四面稜體中。通過其旁鋒而至其底面諸對邊之中點之諸平面。必相遇於一直線。

〔解〕 命 S-ABC 為任何四面稜體。而 D, E, 及 F 為其底邊之中點。




求證 SAE, SBF 及 SCD 三平面。同交於一直線。

〔證〕 AE, BF, 及 CD 必同交於一點 O。 問題 27

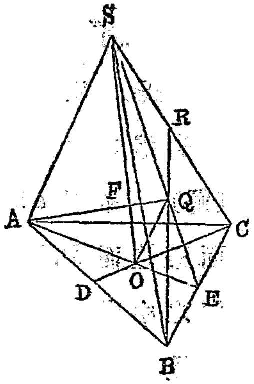
故 SAE SBF 及 SCD 三平面有 S 及 O 二點公用。因知其必同交於 SO 直線。

問題829. 自四面稜體之各角頂。至其對面諸中分線之交點。作諸直線皆相遇於一點。曰。重心。此重心分諸直線使其短分線與全線相比。若 1:4.

〔解〕 命 S-ABC 為四面稜體。而 AQ 及 SO 為自 A 及 S 至相對之面 BSC 及 ABC 之中分線之交點 Q 及 O 所作之直線。

求證 AQ 及 SO 相交所分得之短分線與其全長

之比若1:4。




〔證〕 作OQ。而自$\triangle$AES之角頂A及S至其對邊作AQ及SO。且命其相交於F。

今 $EO=\frac{1}{3}EA$ 而 $EQ=\frac{1}{3}ES$ 問題27

故 $\triangle$OEQ與AES爲相似形。 § 357

$\therefore$ $OQ=\frac{1}{3}AS$ § 351

而 $OQ /\!/ AS$ § 345

$\triangle$OFQ及AFS互相等角且相似。 § 354

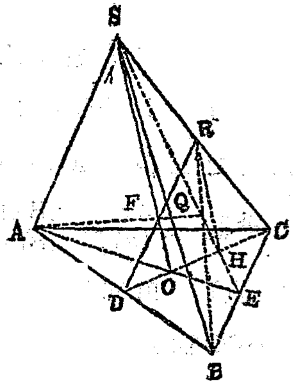
$\therefore$ $OF=\frac{1}{3}FS$ 而 $QF=\frac{1}{3}FA$ § 351

即 $OF=\frac{1}{4}OS$ 而 $QF=\frac{1}{4}QA$

依此理。可知自B及C至對面之中分線交點所作之二線相交於F。而所分得之短分線與其全長之比若1:4矣。

**問題830.** 作諸直線。連四面稜體相對鋒之中點。皆通過此四面稜體之重心。且皆爲此重心之所平分。

〔解〕 命 S-ABC 爲任何四面稜體.而DR爲連相對二鋒 AB 及 SC 之中點之直線。




求證DR爲四面稜體之重心所平分。

〔證〕 命 O 爲 ABC 面之中分線 AE 及 CD 之交點。

作 SO. 且通過 R 作 RH 與 SO 平行.因 SO 及 RD 在 DCS 平面內相交於 F。

今 $HC=OH$ 而 $RH=\frac{1}{2}SO$ § 342

但 $DO=\frac{1}{2}OC$ 問題 27

故 $DO=OH$

$OF=\frac{1}{2}HR=\frac{1}{4}SO$

而 $DF=FR$

蓋因 $\triangle OFD$ 與 HRD 相似。

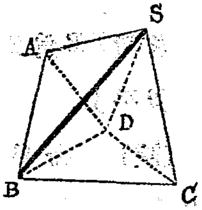
而 $OD=\frac{1}{2}DH$ 故也。

即知 F 爲四面稜體之重心而平分 DR 線。

依此理.可推知連四面稜體之任何二對鋒中點之直線.恒爲其重心所平分。

問題831.　平分四面稜體諸二稜角之平面分諸對鋒爲二分線與此二稜角旁二面之面積成比例。

〔解〕　命 SBD 平面平分四面稜體之二稜角 A-SB-C。




求證　$\frac{AD}{DC}=\frac{\triangle SAB}{\triangle SBC}$

〔證〕　因四面積體 S-ABD 及 S-DBC 同高。

$$\therefore \quad \frac{S\text{-}ABD}{S\text{-}DBC}=\frac{\triangle DBA}{\triangle DBC} \qquad \S\ 653$$

因　　$\triangle$DBA 及 DBC 之中垂線相同。

$$\therefore \quad \frac{\triangle DBA}{\triangle DBC}=\frac{DA}{DC} \qquad \S\ 405$$

$$\therefore \quad \frac{S\text{-}ABD}{S\text{-}DBC}=\frac{DA}{DC} \qquad 公理\ 1$$

知 D 爲四面稜體 S−ABD 及 S−DBC 之公頂點。而 SAB 及 SBC 爲其底面則其高亦相等

$$\therefore \quad \frac{D\text{-}SAB}{D\text{-}SBC}=\frac{\triangle SAB}{\triangle SBC}$$

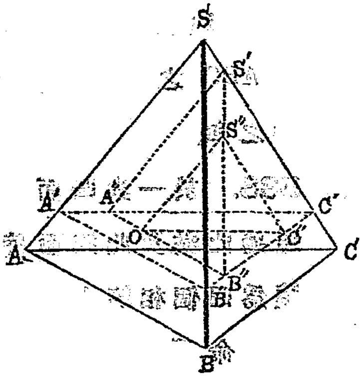
即　$$\frac{S\text{-}ABD}{S\text{-}DBC}=\frac{\triangle SAB}{\triangle SBC} \qquad \S\ 653$$

$$\frac{DA}{DC}=\frac{\triangle SAB}{\triangle SBC}$$

問題832.　有法四面稜體之高等於自四稜體內任

點至四面所作四垂線之和。

〔解〕 命O為有法四面稜體 S-ABC 內之任一點。




求證自O至四面稜體之四面所作之四垂線之和，等於此四面面稜體之高。

〔證〕 通過O作 A′B′C′ 平面，與 ABC 面平行。

則 S-A′B′C′ 亦為有法四面稜體， 問題 812

S-ABC 之高，等於 S-A′B′C′ 之高，加自O至 ABC 面之遠之和。

通過O作 SA″C″ 平面，與 SAB 面平行。

則 S′-A″B″C′ 或 C′-S′A″B″ 為有法四面稜體。 問題 812

C′-SA′B′ 之高，等於 C′-S′A″B″ 之高，加自 O至 SAB 面之垂線之和。

又通過O作 OS″C″ 平面，與 SAC 面平行。

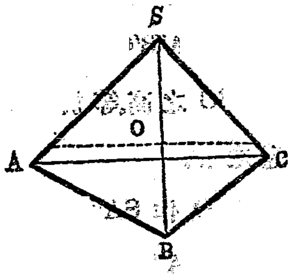
則 B″-OS″C″ 為有法四面稜體。 問題 812

B″-A″S″C″ 之高.等於 B″-OS″C″ 之高.加自 O 至 SAC 面之垂線之和.

故 S-ABC 之高.等於自 O 至四面稜體之四面之四垂線之和.

問題833. 於一與四面稜體中求一點.使諸平面之通過此點.及此四面稜體之諸鋒者.分此四面稜體爲四個相等之四面稜體.

〔解〕 命 S-ABC 爲任何四面稜體.求此四面稜體中之一點.使諸平面之通過此點及諸鋒者.分此四面稜體爲四個相等之四面稜體.




(構圖) 作一平面與 ABC 平行.使其距離等於自 S 至 ABC 之距離之四分之一.

又作第二平面.與 SAB 平行.使其距離等於自 C 至 SAB 之距離之四分之一.又作第三平面.與 SAC 平行.使其相距爲自 B 至 SAC 之距離之四分之一.

命 O 爲三平面之交.

則 O 即爲所求之一點.

〔證〕 由構圖,知 O 在四面稜體之內.

以 O 爲角頂. ABC 爲底面之稜錐體.與 $\frac{1}{4}$ S-ABC 等值。

盖以其同底面,且其高爲 S-ABC 之高四分之一故也.

依同理 $$\text{O-SAB} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\text{C-SAB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\text{S-ABC}$$

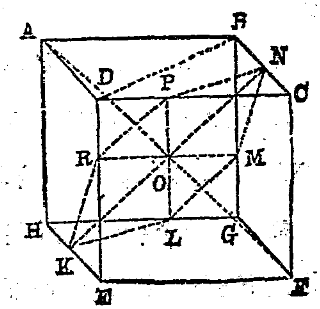
而 $$\text{O-SAC} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\text{B-SAC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\text{S-ABC}$$

$$\therefore \quad \text{O-SBC} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\text{S-ABC}$$

$$\therefore \quad \text{O-ABC} \Leftrightarrow \text{O-SAB} \Leftrightarrow \text{O-SAC} \Leftrightarrow \text{O-SBC}$$

問題 834. 求以一平面割正立方體,使其所成截面,爲有法六邊形.




〔解〕 命 A-HEFG 爲任何正立方體.

求以一平面截此正立方體,使其所成之截面,爲有法六邊形.

(構圖) 作 AF 爲正立方體之對角線.且通過其中點 O 作一平面.爲 AF 之 ⊥。

則構成一 KLMNPR 截面.此截面即爲所求之有法六邊形矣。

〔證〕 P 點距 A 及 F 等遠。 § 517

但 $\overline{AP}^2=\overline{AD}^2+\overline{DP}^3$

而 $\overline{FP}^2=\overline{FC}^2+\overline{CP}^2$ § 371

故 $\overline{DP}^2=\overline{CP}^2$ 即 $DP=CP$

因知 P 爲 DC 鋒之中點。

依同理.N 爲 BC 鋒之中點.餘可類推。

故 $PN=\frac{1}{2}DB$ § 189

即知截面之每邊.等於正立方面體之對角線之半。

截面之通過 O.而與 DAHE∥ 者.等於 DAHE.且過 P 及 L。

$\therefore\ OP=OL=\frac{1}{2}$(DH 之對角綫)

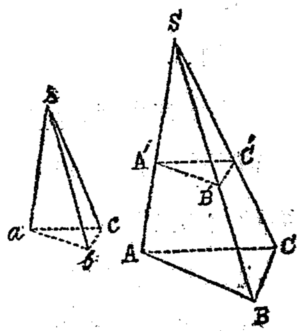
∴ △OPR, ORK 等等.爲等角三角形.而 ∠RPN, PNM 等等之每角等於 120°。

故 KLMNPR 截面.爲有法六邊形。 § 429

問題 835. 若兩箇四面稜體.其一之一箇二稜角.與

他一之一箇二稜角相等。且此等角旁之諸平面彼此相似。且位置相似。則此兩箇四面稜體相似。

[解] 命 S-ABC 及 *s-abc* 爲兩個四面稜體。其一之二稜角 SB。等於他一之二稜角 *sb*。而一之 SAB 面及 SBC 面。與他一之 *sab* 及 *sbc* 相似。




永證 S-ABC 及 *s-abc* 相似。

[證] 移四面稜體 *s-abc* 於四面稜體 S-ABC 之上。則其角頂及兩箇二稜角相合。

因 $\angle BSA = \angle bsa$ 及 $\angle BSC = \angle bsc$ § 351

則 *sc* 將落於 SC 上。而 *sa* 將落于 SA 上。

命 S-A′B′C′ 代 *s-abc* 之位置。

因 SAB 面及 SBC 面。各與 *sab* 面及 *sbc* 面相似。

則 $A'B' \parallel AB$ 而 $B'C' \parallel BC$

故 A′B′C′ 爲一截面。而與 ABC 面平行。

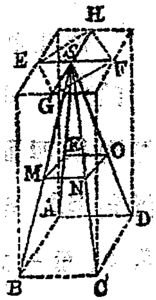
故 S-A′B′C′ 與 S-ABC 相似。 問題 812

即 *s-abc* 與 S-ABC 相似。

問題 836. 永割四稜角。使其截面爲平行四邊形。

〔解〕 命S-ABCD爲任何四面稜角。

求割S-ABCD須使其截面爲平行四邊形。




(構圖) 命 ESF 爲相對二面(即 BSD 及 ASD) 之平面之交線。

而 HSG 爲相對二面 ASB 及 CSD 之平面之交線。

此二交線可定一 HSE 平面通過角頂 S。

通過 SA 綫之任一點 K。作一平面與 HSE 平面平行因得一 KMNO 截面。

則 KMNO 即爲所求之▱。

〔證〕 KM 與 HG 平行。 § 528

依同理 ON // HG

$\therefore$ KM // ON § 521

照比 WN // KO

故 KMNO 爲▱。 § 166

問題837. 兩箇多面稜體爲同數四面稜體所組成。彼此相似且位置相似則此兩箇多面稜體相似。

〔解〕 命 OD 及 O′D′。爲同數四面稜體所組成之兩個多面稜體彼此相似且位置亦相似。

求證 OD 與 O'D' 相似.

〔證〕 任何相當兩立體角.如 B 及 B' 爲相等之相似四面稜體.位置亦相似.

故兩立體角及平面角相等.且自相似四面稜體.知

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{PB}{P'B'}=\frac{BC}{B'C'} \qquad \S\ 667$$

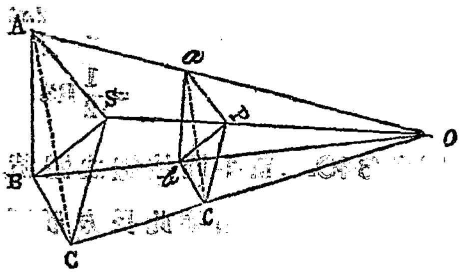
即相當鋒成比例.

故相當之諸立體角相等.且相當之諸面相似.因知兩箇多面稜體相似.

問題888. 若兩箇相似稜錐體之相當諸面.彼此平行.則聯此兩箇稜錐體相當角頂之諸直線相遇於一點.

〔解〕 命兩箇相似稜錐體 S-ABC 及 $s$-$abc$ 之相當諸面兩兩平行.

求證 $Ss$, $Aa$, $Bb$ 及 $Cc$ 諸線.通過相當角頂.而同交於一點 O.




〔證〕 因相當諸面平行.相當諸鋒亦平行.

命 O 爲 Aa 過 Ss 之點.

則 $\triangle$OSA 及 $osa$ 相似 § 354

$\therefore$ $OS : os = AS : as$ § 351

$\therefore$ $OS - os : SO = AS - as : AS$ § 333

即 $Ss : SO = AS - as : AS$

又命 O′ 爲 $Cc$ 截 $Ss$ 延線之點。

則 $O'S : O's = CS : cs = AS : as$、

$\therefore$ $Ss : SO' = AS - as : AS$ § 333

$\therefore$ $SO' = SO$

即 $Cc$ 截 $Ss$ 與 $Aa$ 截 $Ss$ 同在於一點。

依同理知 $Bb$ 截 $Ss$ 與 $Cc$ 截 $Ss$ 同在於一點。

$\therefore$ $Ss$ $Aa$ $Bb$ 及 $Cc$ 相遇一點。

問題839. 正平圓柱體之體積等於其旁面積乘其半徑之二分之一之積。

(法) $S = 2\pi RH$. § 698

$$V = \pi R^2 H = \frac{1}{2}R(2\pi RH)$$ § 700

$$= \frac{1}{2}RS$$

問題840. 正平圓柱體之體積等於生此之旋轉長方形之面積乘此長方形兩對角對相遇一點所生圓周之長之積。

(法) 命 R 爲半徑，H 爲高。V 爲正平圓柱體之體積。

則 R 爲所生長方形之底邊。而 H 爲其中垂線。

因長方形之對角相交於諸平行邊之中間。$\frac{1}{2}$R 爲對角線交點所生圓周之半徑。

今 長方形之面積=RH。 § 398

而對角線交點所作之圓周等於 $\pi$R。 § 458

$$V=\pi R^2H=(RH)(\pi R)$$ § 700

故題云云。

問題841. 若正平圓柱體之高。等於其底面之直徑。

則其體積。等於其全面積乘其半徑三分之一。

〔解〕 命 R 爲正平圓柱體之底面之半徑。2R 爲其高。V 爲其體積。而 T 爲其全面積。

求證 $V=\frac{1}{3}RT$

〔證〕 $T=2\pi R^2+(2\pi R)2R$ § 698

$=6\pi R^2$

而 $V=(\pi R^2)2R$ § 700

$=\frac{1}{3}R(6\pi R^2)$

$=\frac{1}{3}RT$

問題842. 求證不等面稜柱體公式.可用以求球體之體積.

(法) $$V=\frac{1}{6}H(B+b+4M) \qquad \S\ 733$$

於球體 B 及 $b=0$ 而 M 爲大平圓

$$\therefore \quad 4M=4\pi R^2 \qquad \S\ 463$$

$$\therefore \quad V=\frac{1}{6}\times 2R\times 4\pi R^2=\frac{4}{3}\pi R^3$$

問題843. 一球帶與一大平圓等值.求其高.

(法) $$Z=2\pi RH \qquad \S\ 826$$

$$\text{大平圓}=\pi R^2 \qquad \S\ 463$$

$$\therefore \quad 2\pi RH=\pi R^2$$

$$2H=R$$

$$\therefore \quad H=\frac{1}{2}R$$

問題844. 一弧五邊形之諸角.爲 122°, 128°, 131°, 160°, 161°. 求其面積.

但其所屬球體之面積.爲 150 平方尺.

(法) $E=T-(n-2)180^\circ$

$T=122^\circ+128^\circ+131^\circ+160^\circ+161^\circ=702^\circ$

$E=702^\circ-3\times 180^\circ=162^\circ$

$$弧五邊形=\frac{162}{720}\times 150\ 方尺$$

$$=33\frac{3}{4}\ 方尺$$

問題845. 己知半徑。求作一球體。通過一與點。且切二與面。

〔解〕 命 R 爲任何與半經。A 爲任何一與點。而 MN 及 PQ。爲任何二與平面。

求以 R 爲半徑。作一球面。通過 A 點。而切 MN 及 PQ 二平面。

〔分析〕 球體之心。必在以 A 爲心。R 爲半徑。所作之球面內。且必在與 MN 平面相距爲 R 之與 MN 平行之一平面內。而其邊含 A。且亦必在距 PQ 平面爲 R 之與 PQ 平行之一平面內。須其邊含有 A 者。

(構圖) 以 A 爲心。R 爲半徑。作一球體。

於 A 邊上作一平面 //MN 平面。且使其距 MN 平面爲 R。

又於 A 邊上作一平面 //PQ 平面。且使其距 PQ 平面爲 R。

以所作之二平面。及所作之球體之諸公點爲心。R 爲半徑。作諸球體。均能通過 A。而切 MN 及 PQ 二平面矣。

〔證〕 由構圖.知 A 距球心為 R。故所作之諸球體之面.必均通過 A 點.又由構圖.知球心之距 MN 及 PQ 二平面皆為 R 遠.故諸球體必均切 MN 及 PQ 二平面也。

(討論) 若與點在與平面所成之二稜∠之內.則合題意或有 2 或有 1 或無.以視乎所作之球面與所作之平面之公交點有 2 或 1 或無而定。

若與點在與平面內.而此與平面中之與點上所作之⊥.能截距與點為 R 之處所作之平面之交線.則合題意者有一.否則此不能作。

當二與平面相平行時.(i)若兩平行面中間之距離為 2R.而與點適在二平行面正中間.則此題無限.(ii)若與點在平行面之一個之內者.則合題意者僅有一個而已。

問題 846. 已知半徑.求作一球體.通過一與點.且切二與球體。

〔解〕 命 R 為任何與半徑.A 為任一與點.而 O 及 O′ 為以 R′ 及 R″ 為半徑所作之球體之心。

求以 R 為半徑.作一球面.通過 A 點.而切二與球體 O 及 O′。

第一例。二球體相交。而點在二球體外。

(構圖) 以 A 爲心。R 爲半徑。作球體。以 O 及 O′ 爲心。R′+R 及 R″+R 爲半徑。作二球體。

以所作三球面之諸公點爲心。R 爲半徑。作諸球體。必通過 A 點。而切二球體。

〔證〕 由構圖。A 距諸球心爲 R。故所作諸球面。必均能通過 A 點。

又由構圖。球心距 O 及 O′ 之遠爲 R′+R 及 R″+R。故所作之諸球面。必切二與球體之每一箇。

第二例。二球體相交。而點在一球體之面內。

〔構圖〕 以 A 爲心。R 爲半徑。作球體。O 及 O′ 爲心。R′+R 及 R″+R 爲半徑。作二球體。

以所作三球體之諸公點爲心。R 爲半徑。作諸球體。必能通過 A 點。而切二與球體之每一個。

〔證〕 與第一例同。

第三例。點在一球面。

(構圖) 構圖證法與第一例同。茲不復贅。

(討論) 若點在球體之中。或一球體在他一球體中。則皆不可作。

問題 847. 已知半徑。求作一球體。通過一與點。且切

一與面及一與球體。

〔解〕 命 $R$ 爲任與半徑。$A$ 爲任一與點。$MN$ 爲與平面。而 $O$ 爲以 $R$ 爲半徑之與球體之心。

求以 $R$ 爲半徑。作一球體。通過 $A$ 點。而切 $MN$ 平面及球體。

(構圖) 以 $A$ 爲心。$R$ 爲半徑。作一球體。又以 $O$ 爲心。$R'+R$ 及 $R'-R$ 爲半徑。作二球體。

於距與平面爲 $R$ 之處。作二平面。平行與平面。

然後以球體 $A$ 及平行平面及所作二球體之諸公點爲心。$R$ 爲半徑。作諸球面。均能通過 $A$。而切 $MN$ 平面及球體 $O$。

〔證〕 由構圖。$A$ 距球心爲 $R$。故所作諸球體之每個。必能通過 $A$ 點。又由構圖。$MN$ 平面距諸球心爲 $R$。故所作諸球體之每個。必能切 $MN$ 平面。

因所作諸球心距 $O$ 爲 $R'+R$ 或爲 $R'-R$。故所作諸球體。必能切與球體 $O$。

**問題 848.** 已知半徑。求作球體。切三與面。

〔解〕 命 $R$ 爲任何與半徑。而 $MN$, $PQ$ 及 $RS$。爲任何三與平面。

求以 $R$ 爲半徑。作球體。切 $MN$, $PQ$ 及 $RS$ 三與平面。

(構圖) 於距 MN 平面爲 R 遠之處作二平面與之平行。

於距 PQ, RS 爲 R 遠之處作諸平面各自與 PQ 及 RS 平行。

然後以諸平面中之任何三個之諸公點爲心。R 爲半徑作諸球體均能切三與平面。

〔證〕 自球心之每個至 MN, PQ 及 RS 三與平面之遠皆爲 R。故所作諸球體均能切三與平面。

(討論) 若諸與平面有一公點則合題意之球體有八。

若三與平面有一公線或相平行則不能作。

**問題849.** 已知半徑求作球體切三與球體。

〔解〕 命 R 爲任何與半徑而 $O_1$, $O_2$ 及 $O_3$ 爲以 $R_1$, $R_2$ 及 $R_3$ 爲半徑之三與球體之心。

求以 R 爲半徑作球體切三與球體 $O_1$, $O_2$ 及 $O_3$。

(構圖) 以 $O_1$ 爲心。$R_1+R$ 爲半徑作一球體。

又以 $O_2$ 及 $O_3$ 爲心。$R_2+R$ 及 $R_3+R$ 爲半徑作二球體。

然後以所作之三球體之面之諸公點爲心。R 爲半徑作諸球體必切三與球體 $O_1$ $O_2$ 及 $O_3$ 之每一箇。

〔證〕　所作球心。距與球體之每一個之心之遠。爲其二半徑之和。故所作諸球體。必能切三與球體也。

(討論)　合題意之球體有 2 或 1 或 0。視乎所作三球體之面之公切點有 2 或 1 或 0 而定。

若所作三球體相交於同一圓內。則此題爲無定。

若三與球體之一個。在他個之內。而又一個則在其外。則此題不能作。

若三與球體之兩箇。在第三個 $O_3$ 之內。則以 $O_1$, $O_2$, $O_3$ 爲心。而以 $R_1+R$, $R_2+R$, $R_3+R$ 爲半徑。作三球面。其公點。即爲所求球體之心。

問題850.　已知半徑。求作球體。切二與面及一與球體。

〔解〕　命 R 爲任何與半徑。MN 及 PQ 爲任何二與平面。而 O 爲以 R′ 爲半徑之與球體之心。

求以 R 爲半徑。作一球面。切 MN, PQ 平面。及球體 O。

(構圖)　以 O 爲心。而以 $R'+R$ 及 $R'-R$ 爲半徑。作二球體。

於距 MN 平面爲 R 遠之處。作二平面與之平行。

又於距 PQ 平面爲 R 遠之處。亦作二平面與之平行。

然後以所作四平面之兩箇.及二球體之一個之諸公點爲心.R爲半徑.作諸球體.必能切 MN, PQ 二平面.及球體 O.

〔證〕 每與平面之距所求得之諸球體之心之遠爲R.故所求得之諸球體.必均能切MN及PQ二平面.

每與球心距所求得之諸球體之心之遠爲 $R'+R$ 或 $R'-R$.故所求得之諸球體.必均能切與球體O也.

(討論) 若二與平面相交.而其交線通過與球體.則可得十六箇球體.

若兩平面不截.則合題意之球體有2或1或0.

若二與平面平行.而二與平面中間之距離爲2R.則此題爲無定.或有一個合題之球體.或無合題意之球體.視乎其正中間所作之平面.與以 $R'+R$ 爲半徑所作之球體.或割或切或無公點而定.

若二與平面平行.而其中間之距離小於2R.或大於2R.則皆不能作.

**問題851.** 已知半徑.求作球體.切二與球體及一與面.

〔解〕 命R爲與半徑.MN爲與平面.而 $O_1$ 及 $O_2$ 爲 $R_1$ 及 $R_2$ 爲半徑之二與球體之心.

求以R爲半徑.作球體.切MN平面及球體 $O_1$ 及 $O_2$.

(構圖)　於距 MN 平面為 R 之處作二平面與 MN 平面平行。

又以 $O_1$ 及 $O_2$ 為心而以 $R_1+R$ 及 $R_2+R$ 為半徑作二球體。

然後以所作二球體之面及二平面中之一個之公點為心 R 為半徑作球體必能切 MN 平面及球體 $O_1$ 及 $O_2$。

〔證〕　證法與850問大旨相同。

(討論)　若二與球體同在與平面之一邊則合題意者有 2 或 1 或 0。

若在與平面相對兩邊則不能作然若切與平面於同一點則合題意者亦有 2。

若一球體在他一球體之內則不能作。

若所作球體 $O_1$ 及 $O_2$ 之交點與平行 MN 之平面之一個合一則此題為無定。

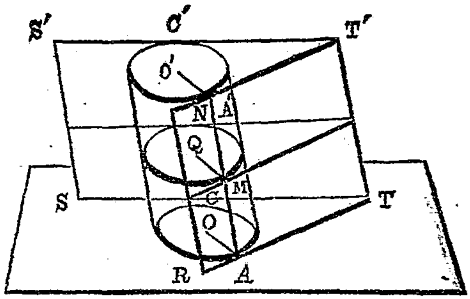
問題852.　求作一平面通過一與點與一與平圓柱體相切。

第一例.　與點在圓柱體之弧面內。

〔解〕　命 AC 為與平圓柱體而命其與點在 AA′ 元素內。

求作一平面切圓柱體於AA′元素。

(構圖) 作半徑OA。及AT切底面。作一平面RT′。通過AA′及AT。




此平面即爲所求之切面矣。

〔證〕 通過平面內之任一點P之不在AA′元素內者。作一平面。平行底面。而交圓柱體於⊙MN。則RT′平面。在MP內乃自⊙MN之心作QM。 §694 §506

MP及MQ∥AT及OA。 §528

∴ ∠PMQ=∠TAO §534

故PM切⊙MN於M §253

因知P在⊙MN平面外。且知其在圓柱體外。

故RT′平面。含AA′元素。而不割圓柱體。即知其切圓柱體。

第二例。 與點在圓柱體外。

(構圖) 通過P作PT∥圓柱體之元素。過底面之平面於T。

自T作TA及TC切底面。　§ 317

則ATP及CTP平面。爲所求之切面。

〔證〕 因　AA′ // TP。　(構圖)

RT′平面通過PT及A點含AA′元素。

因RT又含AT切線。故知其爲圓柱體之切面。

依同理。TS′亦爲圓柱體之切面。

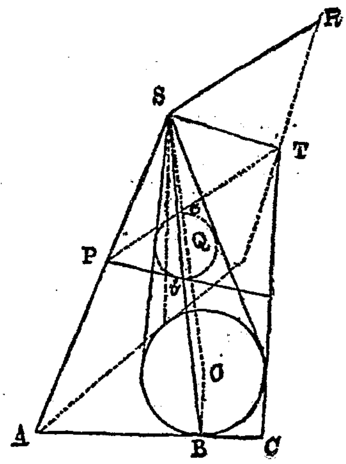
問題853. 求作一平面。通過一與點與一與平圓錐體相切。

第一例。與點在圓錐之旁面內。

〔解〕 命S-BD爲與平圓錐體。而與點在BS元素內。

求作一平面。切圓錐體於BS元素。

(構圖) 作半徑OB。作AB。切至底面於B。作一平面通過BS及AB則ABS平面即爲所求之切面矣。




〔證〕 通過此平面中之任一點之不在BS元素內者。作一平面。平行底面。交圓錐體於

$\odot bc$。而 ABS 平面在 $bc$ 內。 §718 §506

自 $\odot bc$ 之心 Q 作 $Qb$。

$$Pb \text{ 及 } Qb \parallel AB \text{ 及 } OB。 \qquad § 528$$

$$\therefore \quad \angle PbQ = \angle ABO \qquad § 534$$

故 $Pb$ 切 $\odot bc$ 於 $b$。 § 253

即知 P 在 $\odot bc$ 外。亦即知其圓錐體外。

故 ABS 含有元素 BS。而不割圓錐體。則必切圓錐體。

明矣。 § 709

第二例。與點在圓錐體外。

〔解〕 命 P 爲一與點在圓錐體 S-BD 之外者。

求作一平面。通過 P 而切圓錐體。

(構圖) 作 SP。且引長截底平面於一底 A。

自 A 作 AB 及 AD。切底面而通過 SA 及二切線作 ABS 及 ADS 平面。

此二平面即爲所求之切面。

〔證〕 因 SB 及 SD 線爲圓錐體之元素而 ABS 及 ADS 平面爲含一元素之平面且於元素足切底面。

故由第一例知二平面中之每一個爲圓錐體之切面。

**問題854.** 一球體之體積爲一立方碼求其半徑及面積。

(法) $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ § 845

$$R^3=\frac{3V}{4\pi}$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}=\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}}=\sqrt[3]{.75\times 0.31831}$$

$$=\sqrt[3]{0.2387325}=0.62035$$

$S=4\pi R^2=4\times 3.1416\times .62035^2=4.836$ § 824

$\therefore\quad R=.62035$ 碼

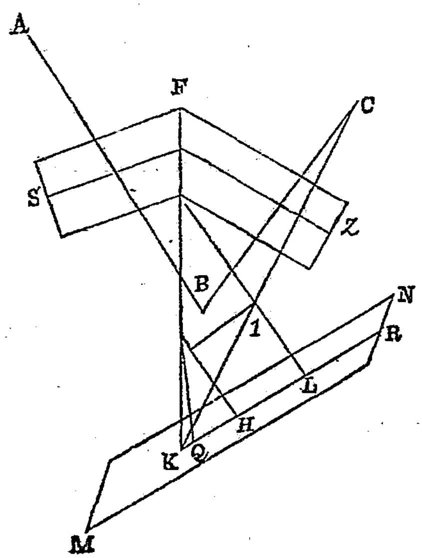
而 $S=4.836$ 平方碼.

**題題855.** 一球體之面.通過三與點.且切一與平面。求其圓心。

〔解〕 命 A, B 及 C, 爲空間之任何三與點.而 MN 爲與平面。

求出球體之心.使以此心作一球面.能通過三與點 A, B, C, 而切與平面 MN。

〔分析〕 所求之心.距 A 及 B 等遠.故必在爲 AB 線中點



之垂平面內。 § 517

依同理。更知其必在爲 BC 線中點之垂平面內。

故此圓心。當在此二平面之交線內。

且此圓心。距 C 及 MN 平面。亦必等遠。故知此圓。必在交線中之距 C 及 MN 平面等遠之一點。

(構圖) 作 AB 及 BC。且各平分之。

通過 AB 之中點 D。作平面 SOF⊥AB。

通過 BC 之中點 E。作平面 ZOF⊥BC。

命 FP 爲二平面之交線。而遇 MN 平面於 K。

通過 FP。作一平面⊥MN 平面。而相交於 KR。

作 CK。且於 CK 內之任一點 P。作一 PH⊥KR。

以 P 爲心。PH 長爲半徑。作一弧於 FKC 平面內。截 KC 於 I 及 Q。

作 PI。且通過 C 作 CO//PI。而交 FP 於 O。

設以 O 爲心。OC 爲半徑。作一球面。必通過 A, B, C 三點。而切 MN 平面。故 O 即爲所求之球心。

〔證〕 O 點距 A, B, C 等遠。 § 517

自 O 作 OL⊥KR

則　　OL⊥MN 平面　　§ 551

而　　PH 與 OL 平行。　　§ 104

| | | |
|---|---|---|
| 故 | △KPH 與 KOL 相似。 | § 354 |
| | ∴　KP : KO = PH : OL. | § 351 |
| 但 | △KPI 與 KOC 亦相似。 | § 354 |
| | ∴　KP : KO = PI : OC | § 351 |
| 因知 | PH : OL = PI : OC | 公理 1 |
| 但 | PH = PI | (構圖) |
| | ∴　OL = OC | |

故以 O 為心。OL 或 OC 為半徑。作一球面。必通過 A, B, C 三與點。而切 MN 平面也。

(討論)　若二點在 MN 平面內。或在其相對兩邊。則不能求。

若有一點(如 A)在 MN 平面內者。則合題意之球心。有時有一。有時亦無。蓋於 MN 平面內 A 點作一垂線。有時能截 ⊥AB 及 BC 中點之二平面之交線。有時不能截其交線也。

若三點同在平面之一邊。則合題意之球心。有時有二。有時有一。有時亦無。則視乎 ∠CKF <, =, > ∠FKR 而定。

**問題856.**　一球體之面。切二平面。且通過二與點之在此二平面之間者。求其圓心。

〔解〕 命 MN 及 PQ 爲二與平面。而 A 及 B。爲在此二平面之間之二與點。

求球體之心。使以此點爲心。作一球體之面。能切二與平面。且通過二與點。

〔分析〕 所求之心。必距 A 及 B 等遠。故知其必在爲 AB 中點之 ⊥ 之平面內。

且所求之心。距 MN 平面及 PQ 平面亦必等遠。故在平分中間二稜角之平面內。因知在二平面之交線內。

又此心距 B 及 MN 等遠。

故此心當爲交線內之距 B 及 MN 平面等遠之一點。

(構圖) 平分 MN 平面及 PQ 平面中間之二稜角。作 AB。作一平面平分 AB。且爲 AB 之 ⊥。

命 FK。爲此平面與平分二稜角之平面之交線。

依問題855之構圖法。可於 FK 內。求出距 B 及 MN 平面等遠之一點 O。

若以 O 爲心。OA 爲半徑。作一球面。必通過 A, B. 而切 MN 及 PQ 矣。

故 O 爲所求球體之心。

〔證〕 因O在平分二與平面中間之二稜角之平面內.故距二與平面等遠。 § 559

又因O在AB中點之⊥平面內.故距A及B亦等遠。

且O距B及MN平面.亦等遠。 (構圖)

故O距A及B及MN平面PQ平面.皆等遠.因知以O爲心之球體之面.可通過A,B二點.而切MN及PQ二平面也。

(討論) 若二與平面相平行.則作一平面在二平行平面之正中間。

若二點同在平面之一旁.則合題意之圓心有2或1或0。 問題855

**問題857.** 一球體之體積爲外切平圓柱體三分之二.其面積爲圓柱體全面積之三分之二.試證之。

〔解〕 命V爲體積。S爲面積.而V′爲平圓柱體之體積.T爲平圓柱體之全面積.

求證 $V=\frac{2}{3}V'$ 而 $S=\frac{2}{3}T$

〔證〕 今. $H=2R$

$V=\frac{4}{3}\pi R^3$ § 845

$V'=\pi R^2H=2\pi R^3$

$$\therefore \quad \frac{V}{V'}=\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3}=\frac{2}{3}$$

$$V=\tfrac{2}{3}V'$$

又 $S=4\pi R^2$ § 824

$T=2\pi R(H+R)=6\pi R^2$ § 698

$$\frac{S}{T}=\frac{4\pi R^2}{6\pi R^2}=\frac{2}{3}$$

$$\therefore \quad S=\tfrac{2}{3}T$$

問題858. 一與球體有一圓柱體外切之。又一圓錐體內切於此圓柱體。若任作二平面。與三體之軸正交。則二平面間球體之一分。等於相當圓柱體之一分與圓錐體之一分之較。

〔解〕 命 LFK 爲任何圓。而 RGPQ 爲其外正方形。RP 及 GQ 爲對角線。LK 爲圓之直徑。而與 RQ 平行。AB 及 CD 爲割圓。而 ⊥LK 之二線。

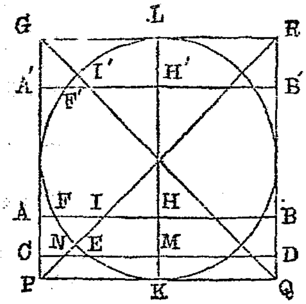
若以 LK 爲軸。將此形旋轉一周。則圓成一球體。而正方形成一外切圓柱體。$\triangle$ORG 及 OPQ 成爲兩箇圓錐體。而 AB 及 CD 成爲與 LK 軸成垂線之二平面。

求證以 LK 爲軸。旋轉一周時。其球體所生之 HFEM。與平圓柱體所生之 HACM。及截頂圓錐體所生之 HINM 之較等值。

〔證〕　命　$OK=R$

$OH=a$

$OM=b$




球體一分所生之 HFEM，與球體之一分所生之 HFEK 及 MEK 之較等值。

若 $h$ 代一底面之球體一分之高。

由 §849 得一底面之球體一分之體積為

$$V=\pi h^2(R-\tfrac{1}{3}h)$$

若　$h=HK=R-a$

則　$V=\pi(R-a)^2\{R-\tfrac{1}{3}(R-a)\}$

$=\pi(\tfrac{2}{3}R^3-aR^2+\tfrac{1}{3}a^3)$ ………………… (1)

若　$h=MK=R-b$

則　$V=\pi(R-b)^2\{R-\tfrac{1}{3}(R-b)\}$

$=\pi(\tfrac{2}{3}R^3-bR^2+\tfrac{1}{3}b^3)$ ………………… (2)

自 (1) 減 (2) 則得

HFEM 體積 $=\pi R^2(b-a)-\tfrac{1}{3}R(b^3-a^3)$ ……… (3)

因　$MC=R$

而　$MH=OM-OH-b-a$

由 §700 得

$$\text{HACM 體積} = \pi R^2(b-a) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

因　　　PK=OK=R　　NM=MO=$b$

而　　　　　　IH=OH=$a$

HINM 所生之體積。等於 OMN 所生之圓錐體之體積中。減去 OHI 所生之圓錐體之體積。

$$\text{OMN 圓錐體} = \tfrac{1}{3}\text{MO} \times \pi\overline{\text{NM}}^2$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi b^3 \qquad \S\ 725$$

$$\text{OHI 圓錐體} = \tfrac{1}{3}\text{OH} \times \pi\overline{\text{IH}}^2$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi a^3$$

$$\therefore \quad \text{HINM 體積} = \tfrac{1}{3}\pi(b^3 - a^3) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

從 (3) (4) (5) 知

$$\text{HFEM 體積} = \text{HACM 體積} - \text{HINM 體積}$$

〔詳論〕 若 A′B′ 及 CD 所生之二平面在圓心相對之二邊。則 HFEM 所生之球體之一分之體積。等於自全球體之體積中。減 EMK 及 FH′L 所生之二球體一分之體積。

設　　　　　　OH′=$a$

H′F′EM 體積

$$= \tfrac{4}{3}\pi R^3 - \pi(\tfrac{2}{3}R^3 - aR^2 + \tfrac{1}{3}a^3) - \pi(\tfrac{2}{3}R^3 - bR^2 + \tfrac{1}{3}b^3)$$

$$= \text{MH′C′A 體積} - \text{OH′I′ 體積} - \text{OMN 體積}$$

問題859. 一球體之直徑爲12寸。通過其圓心作一圓孔。其直徑爲3寸。求所餘體積。

(法) 球體之體積$=\frac{1}{6}\pi D^3=\frac{1}{6}\times3.1416\times12^3$

$=904.9808$ § 845

但圓孔爲一旋成圓柱體。及兩箇相等之一底面之球體一分。

圓柱體之高$=\sqrt{12^2-3^2}=\sqrt{135}=11.6189$ § 372

圓柱體之體積$=\pi R^2H=3.1416\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\times11.6189$

$=82.1294$ § 700

每球體一分之高$=\frac{1}{2}\times(12-11.6189)$

$=\frac{1}{2}\times0.3811=0.1905$

每球體一分之體積$=\pi a^2\left(R-\frac{a}{3}\right)$ § 849

$=3.1416\times0.1905^2\left(6-\frac{0.1905}{3}\right)$

$=3.1416\times0.1905^2\times5.9365$

$=0.6768$

∴ 圓孔之體積$=(82.1294+2\times.6768)$立方寸

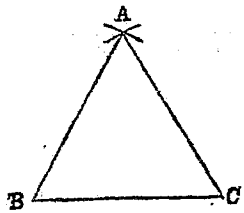
$=(82.1294+1.3536)$立方寸

$=83.4830$立方寸

故 餘 體 積$=(904.7808-83.4830)$立方寸

$=821.2978$立方寸

問題860. 一等邊三角形繞其邊爲軸而旋若其邊長爲 $a$。求所生立體之面積。



〔解〕 命 ABC 爲等邊三角形。而其每邊爲 $a$。

求以 AB 爲軸將 $\triangle ABC$ 旋轉一周所生之立體之面積。

〔法〕 自 C 至 AB 邊作 CD 垂線。

則 $BD=\frac{1}{2}a$ § 149

而 $CD=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{BD}^2}=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ § 372

今 $\triangle ABC$ 繞 AB 軸而旋其所生之立體之面積爲正$\triangle CBD$ 繞 BD 軸而旋所生圓錐體之旁面積之二倍。

但正$\triangle CBD$ 繞 BD 軸而旋所生之圓錐體之旁面積爲

$$\pi RL=\pi\times CD\times BC=\pi\times\frac{1}{2}a\sqrt{3}\times a$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3} \qquad \text{§ 723}$$

∴ 所求之面積$=2\times\frac{1}{2}\pi a^2\sqrt{3}$

問題861. 一長方形。次第繞其相連二邊而旋。生二立體。問二立體之體積相比如何。但二邊之長爲 $a$ 及 $b$。

(法) 若長方形繞 $a$ 軸而旋。所生之立體。其高爲 $a$。而底面之半徑爲 $b$。

即 $$H=a \qquad R=b$$

$$\therefore \quad V=\pi R^2H=\pi b^2a \qquad \S\ 700$$

若長方形繞 $b$ 軸而旋。所生之立體。其高爲 $b$。而底面之半徑爲 $a$。

即 $$H=b \text{ 而 } R=a$$

$$\therefore \quad V'=\pi R^2H=\pi a^2b$$

因知 $$\frac{V}{V'}=\frac{\pi b^2a}{\pi a^2b}=\frac{b}{a}$$

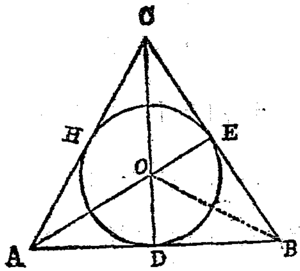
即 $$V:V'=b:a$$

問題862. 一箇等邊三角形。繞其中垂線而旋。生一圓錐體。又其內切圓生一球體。問此圓錐體之旁面積。與球體之面積相比如何。

〔解〕 命 HDE 爲 ABC 等邊三角形之內容圓。而 $a$ 爲等邊三角形之一邊。

因三角形爲等邊。故中垂線即爲其中分線。亦即爲

其平分線。且能通過圓心。




OD 及 OE。爲自圓心 O 至 AB 及 BC 二切點之二半徑。

今 $OD=\frac{1}{3}CD$ 問題27

但 $CD=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{DB}^2}$

$=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ § 372

故 $OD=\frac{1}{6}a\sqrt{3}$

圓錐體之旁面積$=\pi RL=\frac{1}{2}\pi a^2$ § 723

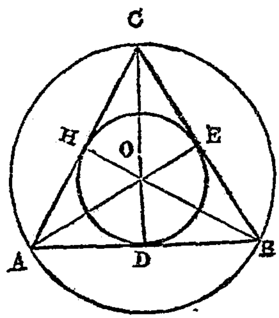
球體之面積$=4\pi R^2=4\pi(\frac{1}{6}a\sqrt{3})^2$

$=\frac{1}{3}\pi a^2$ § 824

$$\frac{\text{圓錐體旁面積}}{\text{球體之面積}}=\frac{\frac{1}{2}\pi a^2}{\frac{1}{3}\pi a^2}=\frac{3}{2}$$

$\therefore$ 圓錐體旁面積 : 球體面積$=3:2$

問題863. 一箇等邊三角形。繞其一高而旋。生一圓錐。又其內切圓及外切圓生二球體。問三體之體積相比如何。




〔解〕 命 ABC 爲等邊三角形。而其邊爲 $a$。HDE 爲其內切圓。ABC 爲其外切圓。

(法) 由問題862之解釋知CD中垂線平分等邊三角形且通遍兩圓心。

今內切圓之半徑$=\frac{1}{6}a\sqrt{3}$。 問題 862

命 V 爲圓錐體之體積。$V_1$ 爲內切球體之體積而 $V_2$ 爲外切球體之體積。

則 $$V=\frac{1}{3}\pi R^2H \qquad \S\ 725$$

$$R=\frac{1}{2}a$$

$$H=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$\therefore\ V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2\times\frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$=\frac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3}$$

又 $$V_1=\frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \S\ 845$$

$$R=\frac{1}{6}a\sqrt{3}$$

$$\therefore\ V_1=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{6}a\sqrt{3}\right)^3=\frac{1}{54}\pi a^3\sqrt{3}$$

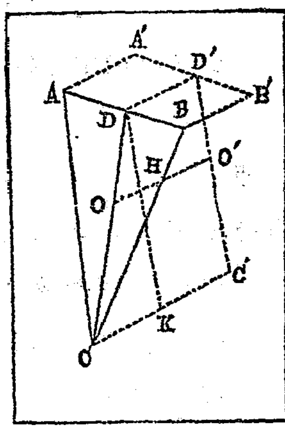
$$V_2=\frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \S\ 845$$

$$R=OB=\frac{2}{3}=\frac{1}{2}a\sqrt{3}=\frac{1}{3}a\sqrt{3} \qquad 問題\ 27$$

$$\therefore \quad V_3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{1}{3}a\sqrt{3}\right)^3=\frac{4}{27}\pi a^3\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad V:V_1:V_2=\frac{1}{24}\pi a^3\sqrt{3}:\frac{1}{54}\pi a^3\sqrt{3}:\frac{4}{27}\pi a^3\sqrt{3}=9:4:32$$

**問題864.** 自一與三角形之平分線之交點,作一垂線至任平面之不與此三角形相交者,則此線等於自此三角形之諸角頂至同平面所作三垂線之和之三分之一。




〔解〕 自△ABC之平分線交點 O,作 OO′ 爲不與此三角形相交之 MN 平面之垂線,而 AA′, BB′ 1 CC′ 爲自三角形之三角頂至同平面之三垂線。

求證 $$OO'=\frac{1}{3}(AA'+BB'+CC')$$

〔證〕 設 CC′ 爲諸垂線之最長者。

自 AB 邊之 D 點,作 DD′,爲平面之垂線,且通過 D 於 DCC′ 內作 DK∥MN 平面。

今 AA′, DD′ 及 BB′ 在同一平面內,此平面與 MN 平面之交線爲 A′D′B′。

於 AA′, BB′ 梯形內。$AA'+BB'=2DD'$。　　　§ 190

DD′, OO′, CC′ 諸垂線。同在一平面內。

且　　　$2DD'+KC=3HO'$　　　§ 180

於 DCK 及 DHO 兩相似三角形內。

$$DC=3DO \qquad \text{問題 } 27$$

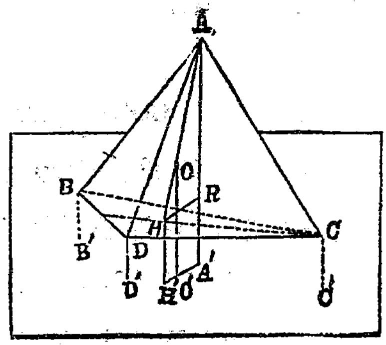
$$\therefore\ KC=3OH \qquad \S\ 351$$

$$\therefore\ AA'+BB'+CC'=2DD'+KC'+CK$$

$$=3(HO'+OH)$$

即　　　$OO'=\frac{1}{3}(AA'+BB'+CC')$

問題 865. 自四面稜體之重心。至一平面之不與此四面稜體相交者。作一垂線。則此線等於自此四面稜體之諸角頂至同平面所作四垂線之和之四分之一。




〔解〕 命 OO′ 為自四面稜體 ABCD 之重心 O。至不與此四面稜體相交之 MN 平面之垂線。而 AA′, BB′, CC′ 及 DD′ 為自四面稜體之四角頂。至同平面所作之四垂線。

求證 $OO'=\frac{1}{4}(AA'+BB'+CC'+DD')$

〔證〕 命 H 為 BDC 面之中分線之交線。則 O 在 HA 線之上而與 H 相距為 $\frac{1}{4}$HA。 問題 829

通過 HAA' 平面內之 H。作 HR∥MN 平面。而截 OO' 於 K。

今 $BB'+CC'+DD'=3HH'$ 問題 864

$3HH'+RA'=4KO'$ § 180

於 HAR 及 HOK 兩相似三角形內

$HA=4HO$ 問題 829

$\therefore\ AR=4OK$ § 351

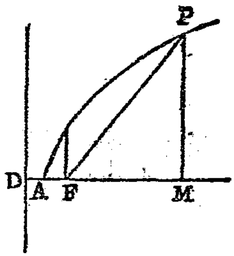
故
$$\begin{aligned}BB'+CC'+DD'+AA'&=3HH'+RA'+AR\\&=4(KO'+OK)\\&=4OO'\end{aligned}$$

$$\therefore\ OO'=\frac{1}{4}(AA'+BB'+CC'+DD')$$

# 第九編

## 圓錐截線

問題866. 若一點之橫軸等於其縱軸則各等於通徑。




〔解〕 命 AM 爲 P 點之橫軸而等於 P 點之縱軸 PM。

求證 $AM=PM=4AF$

〔證〕 $\overline{PM}^2=4AF\times AM$ § 862

但 $PM=AM$ 題設

$\therefore PM=4AF$

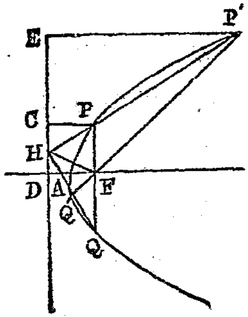
$\therefore AM=PM=4AF$

問題867. 若一割線 PP′ 遇準線於 H。則 HF 爲心半徑 FP 及 FP′ 所作外角之平分線。

〔解〕 命 PP′ 割線割準線於 H。而 PF 及 P′F 爲 P 點及 P′ 點之心半徑。

求證 HF 平分 ∠PFP′ 之外角。

〔證〕 作 PC 及 P′E。爲準線之垂線。




則正△HPC 與 HP′E 相似。 § 356

∴ PH : P′H = PC : P′E. § 351

但 PC = PF 而 P′E = P′F § 350

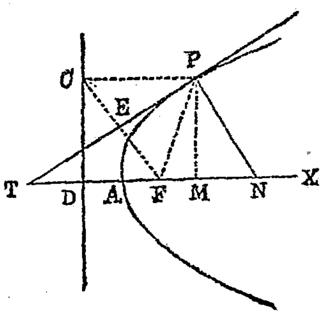
∴ PH : P′H = PF : P′F

∴ HF 爲 PFP′ 之外角平分線。 § 349

問題868. 求於拋物線之一與點。作一切線及一法線。

〔解〕 命 P 爲 PA 拋物線之與點。求於 P 作一切線及一法線。

(構圖) (1) 作 PM 縱軸。於此軸上取 AT = AM。並作 PT。則 PT 爲所求之切線。 § 876




作 PN⊥PT 於 P。

則 PN 爲所求之法線。 § 874

(2) 取 MN = 2AF。並作 PN.

則 PN 爲所求之法線。 § 877

作 $PT \perp PN$ 於 P。

則 PT 爲所求之切線。 § 874

(3) 作 FP。又作 PC。爲準線之垂線。

作 PT 平分 $\angle FPC$。

則 PT 爲所求之切線。 § 869

問題869. 求作一拋物線之切線。與一與線平行。

〔解〕 命 F 爲拋物線之心。而 KH 爲與線。

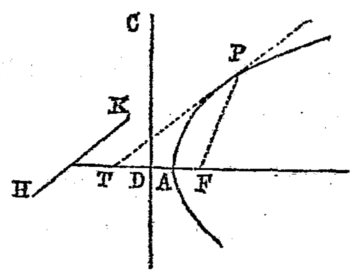
求作此拋物線之切線。與 KH 平行。

(構圖) 作心半徑 FP。

使 $\angle XFP = 2DHK$。

作 PT 切線於 P。 問題 868

則 PT 即爲所求之切線矣。




〔證〕 $\angle XFP = \angle FTP + \angle FPT$

$= 2\angle FTP$ §§ 137, 871

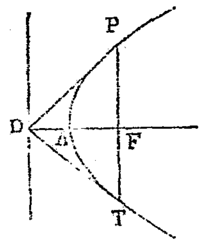
但 $XFP = 2\angle DHK$ (構圖)

$\therefore \angle FTP = \angle DHK$ 公理 7

$\therefore$ $PT \perp KH$ § 114

問題870 於通徑兩端所作二切線相遇於 D.

〔證〕 $FP = FT$ § 871




若 P 在通徑之端。

$FP = 2AF$ § 861

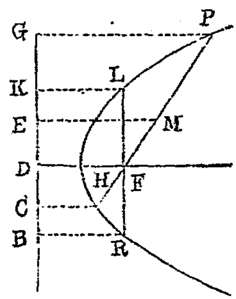
$\therefore$ $FT = 2AF = FD$

故知在通徑兩端之二切線。相遇於 D 點。

問題871. 通徑為心弦之最短者.

〔解〕 命 LR 為通徑。而 PFH 為任何他心弦。

求證 $LR < PH$




〔證〕 作 PG, LR, HC 及 RB. 均為準線之垂線。

$\therefore$ $GP > CH$, $FP > FH$ § 850

$\therefore$ M 為 PH 之中點。而在 PF 線上。

作 $ME \perp$ 準線及 LR.

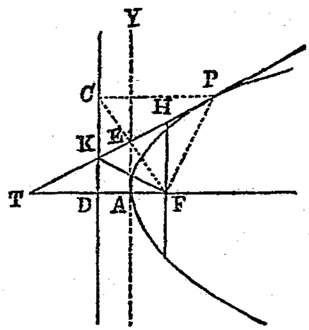
則 $2DF < 2EM$

但 $LR = 2DE$ § 861

而 $PH = FP + FH = GP + CH = 2EM$ §§ 850, 190

$\therefore\ LR<PH$

問題872. 任一點之切線遇準線及通徑之引長線於距心等遠之二點。




〔解〕 命 PT 爲 P 點之切線遇準線於 K。及通徑之引長線於 H。

求證 $FK=FH$

〔證〕 命 E 爲自 F 至 PT 之垂線之足。

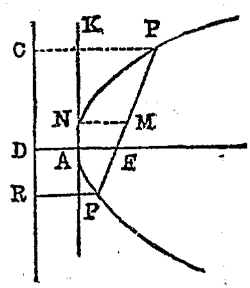
則 E 在 AT 內。而 AY 爲 A 點之切線。 § 873

$\therefore\ AD=AF$

則 $EK=EH$ § 187

$\therefore\ FK=FH$

問題873. 一圓之直徑爲FP者。與切線切於 A。




〔解〕 命 FP 爲 P 點之心半徑。而 AK 爲 A 點之切線。

求證以 FP 爲直徑之圓。與 AK 相切。

〔證〕 作 PC⊥ 準線.截 AK 於 K.

乃於 FP 之中點 M.作 MN⊥AK.

則 AK∥準線. § 872

$FP=PC=PK+KC=PK+AF=2NM$ §§ 850, 190

$\therefore\ FM=NM$

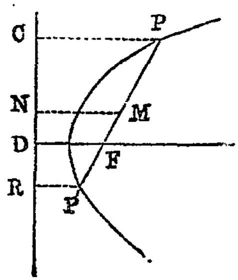
故圓之以 M 爲心.MF 爲半徑者.與 AK 相切於 A. § 253

**問題874.** 準線與圓之任何心弦爲直徑者相切.

〔解〕 命 PP′ 爲心弦.

求證以 PF 爲直徑之圓.

與準線相切.




〔證〕 作 PC 及 PR⊥準線.

則 $PP'=PF+P'F$

$=PC+P'R$ § 850

$\therefore\ \frac{1}{2}PP'=\frac{1}{2}(PC+P'R)$ 公理 7

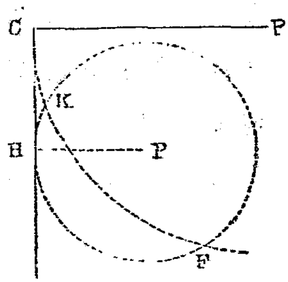
即 $\frac{1}{2}PP'$ 等於自 PP′ 中點至準線相距之遠. § 190

故圓之以 PP′ 爲直徑者.與準線相切 § 253

**問題 875.** 已知二點及準線求心.

〔解〕 命 P 及 P′ 爲拋物線上二與點.至準線作 PH 及 PC′ 二垂線.以 P 及 P′ 爲心. PH 及 P′C 爲半徑.

作二弧。相交於 F 及 K。

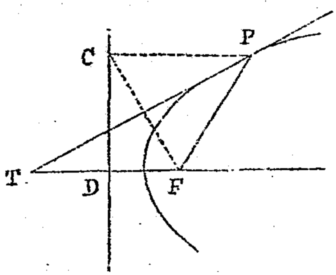



則 F 及 K。爲所求之心。

〔證〕 因 P 及 P′ 每箇距 K 及 BC 等遠。

以 K 爲心。BC 爲準線作之。能通過 P 及 P′。依同理。拋物線之以 F 爲心。BC 爲準線。亦能通過 P 及 P′。

**問題 876.** 垂線 FC 平分 TP。(見命題四之圖)



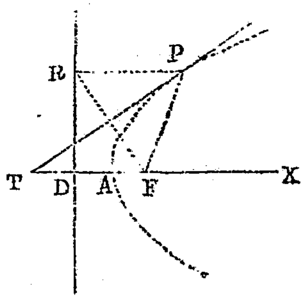

〔證〕 FP=FT § 871

FC⊥PT 設題

∴ FC 平分 TP § 149

**問題 877.** 已知心及軸線。求作拋物線。與一直線相切。

〔解〕 命 F 爲心。TX 爲一拋物線之軸。PT 爲與直線。




求作一拋線。與 PT 相切。

〔構圖〕 自 F 作 FH⊥TP。

乃引長之至 R。使 HR 等於 FH。作 RD⊥TX。

而 RP // TX。

乃以 F 爲心。DR 爲準線。作一拋物線 AP。

則 AP。即爲所求之拋物線矣。

〔證〕 作 FP 至 TP 及 RP 之割線之一點。

∴ HR=HF 而 RF⊥TP (構圖)

PR=PF § 160

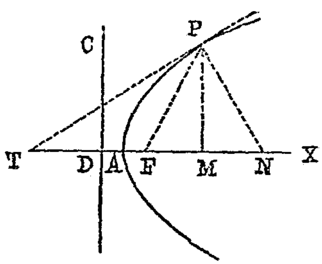
故 P 在拋物線 AP 上。 § 850

∠FPT=∠RPT § 95

故 TP 與 AP 相切於 P。 § 865

問題878. 若 PN 爲任一法線。PNF 爲等邊三角形。

則 PF 等於通徑。




〔解〕 命 PN 爲 P 點之法線。PNF 爲等邊三角形

求證 PF=4AF

〔證〕 作 PM 縱軸。

PM 平分 FN § 149

∴ FM=MN=2AF § 877

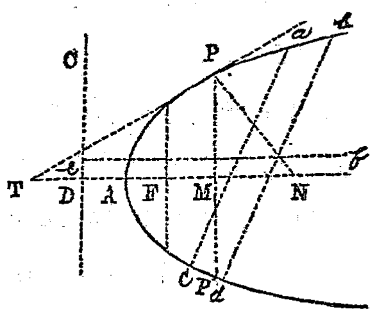
PF=FN=4AF

問題879. 已知一拋物線。求其準線軸線及心。

〔解〕 命 P'AP 為已知之拋物線。

試求其準線軸線及心。

(構圖) 作任何二平行絃 $ac$, $bd$。且各平分於 $e$ 及 $f$。乃作 $ef$。




則 $ef$ 為直徑。 § 888

自拋物線之任一點 P。作 $PP' \perp ef$。且通過其中點 M。作 $MT \parallel ef$。而交拋物線於 A。

則 MT。即為其軸。而 A 為頂。

因軸線平分絃線之為直徑之垂線者故也。

取 $AT=AM$ 並作 TP。

則 PT。為 P 點切線。 § 876

而 $MN=$通徑之半 § 877

取 $AF=AD=\frac{1}{2}MN$ § 877

則 F 為其心。而 TM 上 D 點之垂線即為準線矣。

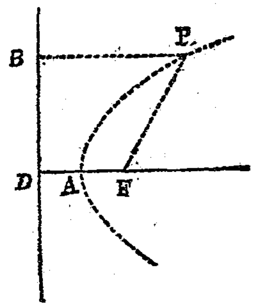
問題880. 一圓通過一與點。而與一與直線相切。求其圓心之軌。

〔解〕 命 F 為與點。DB 為與直線。

求通過 F 而切 DB 之圓心軌。

以 F 爲心。DB 爲準線。作一拋物線 AP。

則 AP。拋物線即爲所求圓心軌。




〔證〕 命 P 爲拋物線之任一點。

作 FP。並作 PB⊥DB。

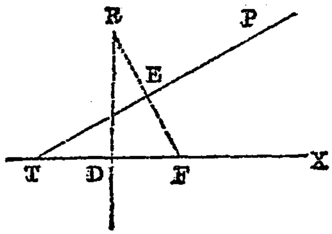
因 PF=PB。則圓之以 P 爲心。PF 爲半徑者。必通過 F 而切 DB。

§ 253

但拋物線中之任一點。其距心比距準線爲近。拋物線外之任一點。其距心比距準線爲遠。 § 865

故知此拋物線。即爲所求之圓心軌也。

問題 881. 已知軸線切線及切點。求拋物線之心及準線。




〔解〕 命 TX 爲軸線。TP 爲切線。P 爲切點。

求其心及準線。

求分 TP 於 E。作 REF 爲 TP 之垂線。而交 TX 於 F。

則 F 爲心。

截取 ER=EF

並作 RD⊥TX

則 DR 爲軸線。

〔證〕 垂線平分 TP 通過心。 問題 876

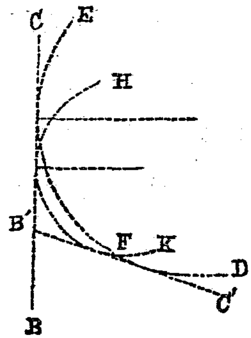
故 F 爲心。

此切線⊥FR。

故 RD 爲準線。

問題882. 已知二點及心求準線。

〔解〕 命 P 及 P′ 爲拋物線上之二點。F 爲心。求其準線。




(構圖) 以 P 爲心。PF 爲半徑。作 KH 弧。以 P 爲心。P′F 爲半徑。作 DE 弧。

作公切線 BC 及 B′C′。

則 BC 及 B′C′。均爲所求之準線。

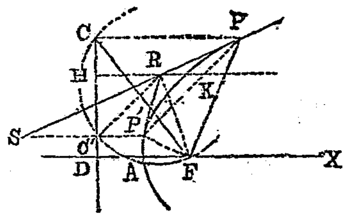
〔證〕 因 P 及 P′ 距 F 及 BC 遠等。 § 254

故拋物線之以 F 爲心。BC 爲準線者。心能通過 P 及 P′。 §§ 850, 866

依同理。拋物線之以 F 爲心。B'C' 爲準線者。亦能通過 P 及 P'。

故 BC 及 B'C'。皆爲所求之準線。

問題883. 自任何點所作切線。及至切點諸心半徑所成三角形相似。




〔解〕 命 RP 及 RP'. 爲自 R 至拋物線所作二切線。而 PF 及 P'F。爲 P 及 P' 之心半徑。

求證 △RPF 及 P'RF 相似。

〔證〕 作 PC 及 P'C'。爲準線之垂線。乃作 RC 及 RC'。

| | | |
|---|---|---|
| 因 | $FP=CP$ | § 850 |
| | $PR=PR$ | 公邊 |
| 而 | $\angle FPR=\angle CPR$ | § 869 |
| 因知 | △FPR 及 CPR 相等。 | § 143 |
| | $\therefore$ $FR=RC$ 而 $\angle RCP=\angle RFP$ | § 128 |
| 依同理 | $C'R=FR$ 而 $\angle RC'P'=\angle RFP'$ | |
| | $\therefore$ $FR=RC=RC'$ | 公理 1 |

以 R 爲圓心。RC 爲半徑。作一圓。通過 CC'F.

因 $\frac{1}{2}$C'F 弧。爲度 $\angle FCC'$ 之數。 § 289

而 $C'F$ 弧爲度 $\angle FRC'$ 之數。 § 288

$$\angle FCC'=\tfrac{1}{2}\angle FRP$$

但 $\angle FRP'=\angle P'RC'$ § 128

$$\therefore\ \angle FRP'=\angle FCC'=\angle FPR$$

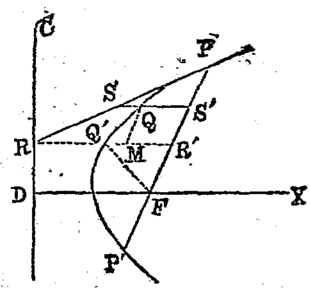
又 $\angle RFP=\angle RFP'$ § 883

∴ $\triangle RPF$ 及 $P'RF$ 相似。 § 355

問題884. 若拋物線之直徑以一弦及其任一端之切線截之則此切線在切線及弦線間爲此曲線所分之二分線相比若此弦之二分線相比。

〔解〕 命直徑 $SQS'$ 遇 $PP'$ 弦於 $S'$ 而遇 $PR'$ 切線於 $S$.

求證 $SQ:QS'=PS':S'P'$




〔證〕 作 $RQ'R'$ 直徑。$PP'$ 爲一縱軸。

作 $QM \parallel PP'$ 遇 $RR'$ 於 M。並作 $Q'F$。

今 $\overline{PR'}^2=4FQ'\times Q'R'$

而 $\overline{QM}^2=4FQ'\times Q'M$ § 862

∴ $\overline{PR'}^2-\overline{QM}^2=4FQ'\times MR'$ 公理 3

但 $\overline{PR'}^2-\overline{QM}^2=\overline{PR'}^2-\overline{Q'R'}^2$

$$=PS'\times S'P'$$

而 $MR'=QS'$

$$\therefore\ PS':S'P'=4FQ:QS'$$

$$\therefore\ QS':SP'=PS':4FQ'$$

於相似△PS′S及PR′R內

$$SS':PS'=RR':PR' \qquad \S\ 351$$

$$=2Q'R':PR' \qquad \S\ 885$$

$$=PR':2Q'F$$

$$=PP':4Q'F$$

$$\therefore\ SS':PP'=PS':4Q'F$$

$$\therefore\ QS':S'P'=SS':PP'$$

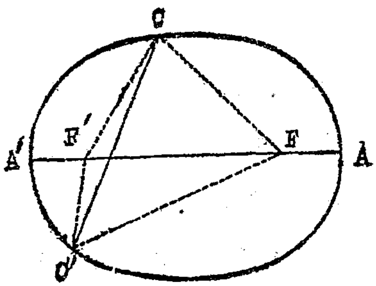
$$\therefore\ QS':SS'=S'P:PP'$$

$$\therefore\ SQ:QS'=PS':S'P'$$

**問題885.** 長軸為一橢圓中所作弦之最長者。

〔解〕 命 $AA'$。為 $ACA'C'$ 橢圓之長軸，而 $CC'$ 為任一他弦。

求證 $AA'>CC'$




〔證〕 作諸心半徑。$CF, CF', C'F, C'F'$

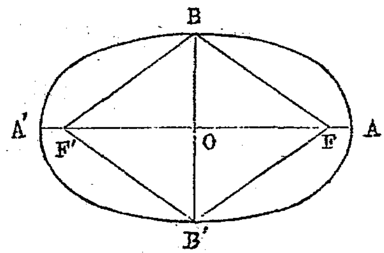
$CC' < F'C + F'C'$ § 138

而 $CC' < FC + FC'$

$\therefore\ 2CC' < (F'C + FC') + (F'C' + FC') < 4a$ 公理 4

$\therefore\ CC' < 2a$ 或 $AA'$。 公理 7

問題886. 若 $FBF'$ 爲正角。則 $a^2 = 2b^2$。




〔解〕 於 $ABA'B'$ 橢圓內。命 $\angle FBF'$ 爲正角。

求證 $a^2 = 2b^2$

〔證〕 $\overline{F'B}^2 + \overline{FB}^2 = \overline{FF'}^2$ § 371

即 $2a^2 = (2C)^2 = 4C^2$

$= 4(a^2 - b^2)$

$\therefore\ 2a^2 = 4b^2$

$\therefore\ a^2 = 2b^2$

問題887. 求作橢圓一與點之切線及法線。

〔解〕 命 P 爲 $ABA'B'$ 橢圓形之一與點。

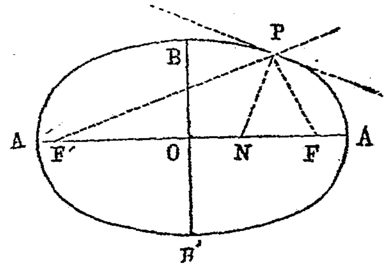
求作 P 點之切線及法線。

(構圖) 作諸心半徑 FP 及 F'P。

引長 F'P 至一點 G。

作PT平分∠FPG。

則PT。爲所求之切線。 § 925




於P作PN⊥PT。

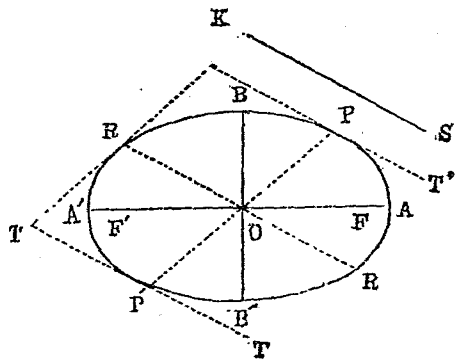
則 PN。即爲所求之法線。 § 933

問題888. 求作橢圓之一切線。與一與直線平行。

〔解〕 命ABA'B'爲與橢圓。而KS爲與直線。

求作橢圓一切線。與KS平行。

(構圖) 作直徑RR'//KS。於R作切線RT。 問題887




作直徑PP'//RT。

於P及P'作PT''及P'T'二切線。

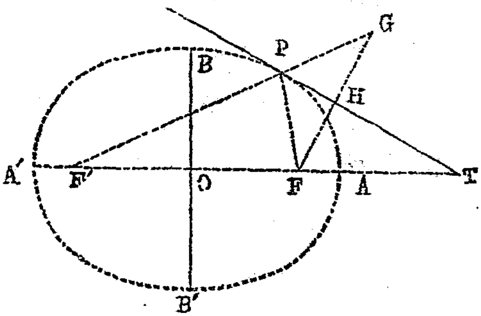
〔證〕 直徑PP'與RR'相屬。 (構圖)

∴ PT''及P'T'//RR'。即//KS。 § 939

問題889. 已知二心。求作一橢圓。切一與直線。

〔解〕 命F及F′爲已知之二心而PT爲已知之直線。

求以F及F′爲心作橢圓切PT。




(構圖) 作FH⊥PT。且引長之至G。令HG等於FH。

作F′G截切線於一點P。作PF。

以F及F′爲心作AA′P橢圓。而F′G或F′P+PF爲常數和。

則AA′P即爲所求之橢圓。

〔證〕 F及F′爲其心而通過P。 (構圖)

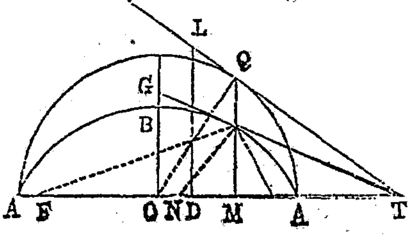
PH平分FG。且作正交。 (構圖)

故PH平分∠FPG。且爲P點之切線。 § 925

問題890. 求證 $\overline{OF}^2=OT\times ON$。 (見§931之圖)

〔證〕 $OT=\frac{a}{d}$ § 936

$ON=e^2d$ § 936



$$OT \times ON = \frac{a^2}{d} \times e^2 d = a^2 e^2 = \overline{OF}^2$$

**問題891.** 求證 $OM : ON = a^2 : c^2$。 (見 §931 之圖)

〔證〕 $OM = d$

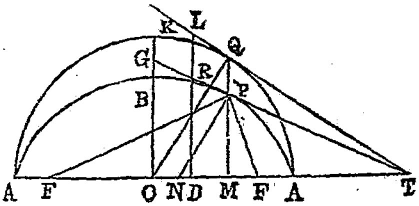
§ 936

$ON = e^2 d$ § 936

$\therefore$ $OM : ON = d : e^2 d$

$= 1 : e^2$

$= a^2 : a^2 e^2 = a^2 : c^2$




**問題892.** 短軸爲一楕圓中所作直徑之最短者。

〔解〕 命 $PP'$。爲 $AA'$ 楕圓之任一直徑。求證短軸爲楕圓中所作直徑之最短者。

〔證〕 作諸心半徑 $FP$ 及 $F'P$。

$\overline{OP}^2 + \overline{OF}^2$

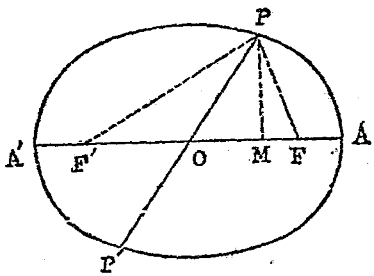
$= \frac{1}{2}(\overline{F'P'}^2 + \overline{FP}^2)$ §377

$= \frac{1}{2}(a + ed)^2 + \frac{1}{2}(a - ed)^2$

§ 915

$= a^2 + e^2 d^2$

$\therefore$ $OP = \sqrt{a^2 + e^2 d^2 - c^2}$

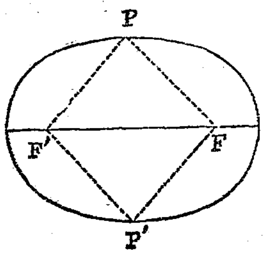


故 $\sqrt{a^2+e^2d^2-c^2}$ 爲最小時。(即 $d=0$ 時。)則 OP 爲最小。

故 OP 與短軸合一時。OP 爲最小。

問題893. 問於一楕圓之何點作法線。可通過此楕圓之中點。

〔解〕 凡 P 點之法線。爲平分線時。則能通過 F′F 之中點 O。

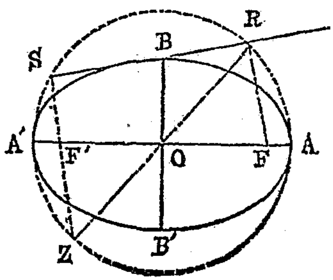



或 $\angle$F′PF=0 時。

故 P 點法線之能通過 O。不過 FPF′ 爲兩等邊三角形時。或 $\angle$FPF′=0 時耳。故知其在軸端。

問題894. 若 FR 及 F′S。爲自二心至任一切線所作之二垂線。則 FR×F′S=$b^2$。

〔證〕 作一楕圓之助圓。引長 SF′ 過助圓於 Z。乃作 RZ。




今 R 及 S 在助圓之圓周內。 § 928

ZSR 爲正角。 題設

∴ RZ 通過圓心 O。且爲助圓直徑。 § 290

因 $OR=OZ$ § 217

$OF=OF'$ § 905

而 $\angle FOR=\angle F'OZ$ § 93

∴ $\triangle ORF=\triangle OZF'$ § 143

因知 $FR=F'Z$ § 128

∴ $FR\times F'S=F'Z\times F'S$

$=F'A'\times F'A$ § 318

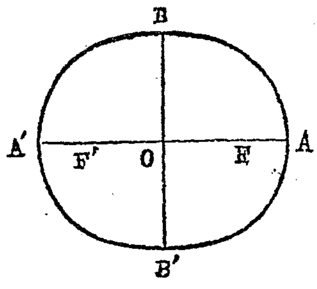
$=(a-c)(a+c)$

$=a^2-c^2$

$=b^2$ § 907

問題895. 一橢圓之半短軸。爲長軸被一心所截得二分線之中率。

〔解〕 命 AA′ 爲橢圓之長軸。F 及 F′ 爲其心。




求證 $F'A'\times F'A=b^2$

〔證〕 $F'A'=a-c$

而 $F'A=a+c$

∴ $F'A'\times F'A=(a+c)(a-c)$

$=a^2-c^2=b^2$ § 907

問題896. 一橢圓之面積,與其助圓之面積相比,若其短軸與長軸相比。

〔解〕 命 $2b$ 爲橢圓之短軸,而 $2a$ 爲其長軸。

求證 橢圓:助圓$=2b:2a$

〔證〕 橢圓之面積$=\pi ab$ § 942

助圓之面積$=\pi a^2$ § 463

$\therefore$ 橢圓:助圓$=\pi ab:\pi a^2$

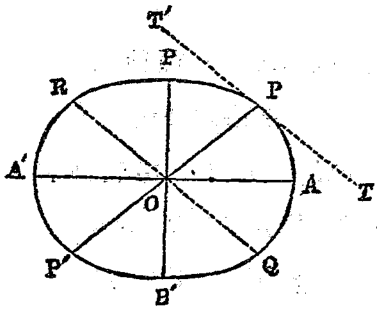
$=b:a$

$=2b:2a$

問題897. 求作一直徑,與一與橢圓之直徑相屬。

〔解〕 命 PP′ 爲橢圓 ABA′B′ 之直徑。

求作一直徑,與 PP′ 相屬。



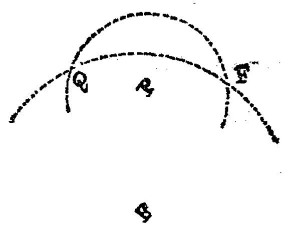

(構圖) 於 P 點作 TT′ 切線。

作一 QOR 直徑,與 TT′ 平行。

則 QOR,則爲所求之相屬直徑。

問題898. 已知 $2a, 2b$ 一心及橢圓之一點,求作橢圓。

〔解〕 命 F′ 爲橢圓之一心。而 P 爲其一與點。且 $2a$ 及 $2b$ 皆爲已知。



求作橢圓。

（構圖） 以 P 爲心。$2a-PF'$ 爲半徑。作一圓。

以 $a$ 爲弦。以 $b$ 爲其一邊。作一正三角形。

則 $c$ 爲其他一邊。 § 907

以 F′ 爲心。$2c$ 爲半徑。作一圓。交第一次之圓於 F 及 Q。

則以 F′ 及 F 爲心。或 F′ 及 Q 爲心。$2a$ 爲長軸。作一橢圓。即爲所求之橢圓矣。

〔證〕 因每橢圓以 F′ 爲心。且通過 P。

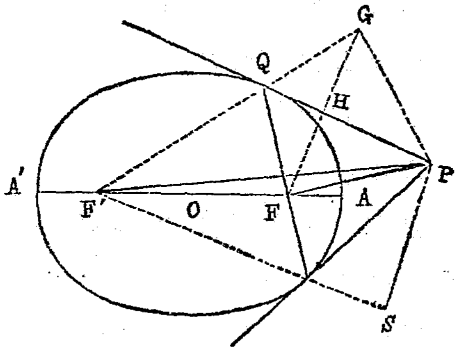
蓋以 $PF'+PF=2a$ 或 $PF'+PQ=2a$。

且知每個之長軸爲 $2a$。短軸爲 $2b$。

**問題899.** 若自一點 P。作一橢圓之二切線 PQ 及 PR。則 PQ 及 PR。與任一心作二等角。

〔解〕 命 PQ 及 PR 爲自與點 P 至 AQA′R 橢圓所作之二切線。

求證 $\angle PF'Q=\angle PF'R$




〔證〕 命此二切線爲依 § 929 法所作成者。

因 $F'G = F'S$

$= 2a$ (構圖)

$PG = PS$ (構圖)

而 $PF' = PF'$

$\therefore \quad \triangle PF'G = \triangle PF'S$ § 150

$\therefore \quad \angle PF'Q = \angle PF'R$ § 128

又因 $FG = FP$ (構圖)

$QG = QF$ (構圖)

$PQ = PQ$

$\therefore \quad \triangle PGQ = \triangle PFQ$ § 150

$\therefore \quad \angle PFQ = \angle PGQ$ § 128

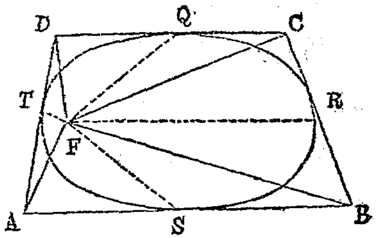
依同理 $\angle PFR = \angle PSR$

但 $\angle PGQ = \angle PSR$ § 128

$\therefore \quad \angle PFR = \angle PFQ$ 公理 1

**問題900.** 若一四邊形外切於一橢圓,其相對任二邊與任一心所作二角之和,等於二正角。

〔解〕 命 ABCD 爲 RQTS 橢圓之外切四邊形。而 A, B, C, D 四角頂連其一心 F′。




求證

$$\angle AF'D+\angle CF'B=2\text{ 正角}$$

而 $\angle AF'B+\angle CF'D=2\text{ 正角}$

〔證〕 至切點作諸心半徑 F′Q, F′R, F′S, F′T。

今 $\angle AF'T=\angle SF'A$ 問題 899

$\angle TF'D=\angle DF'Q$

$\angle CF'R=\angle CF'Q$

而 $\angle RF'B=\angle BF'S$

$\therefore$ $\angle AF'T+\angle T'D+\angle CF'R+\angle RF'B$

$=\angle SF'A+\angle DF'Q+\angle CF'Q+\angle BF'S$ 公理 2

即 $\angle AF'D+\angle CF'B=\angle AF'B+\angle CF'D$

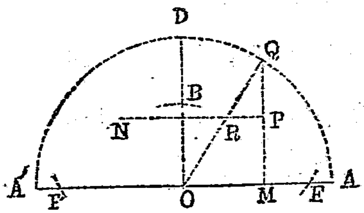
但 四角之和$=4$ 正角 § 73

$\therefore$ $\angle AF'D+\angle CF'B=2\text{ 正角}=\angle AF'B+\angle CF'D$

**問題 901.** 己知長軸及橢圓之一點,求其兩心。

〔解〕 命 AA′ 爲橢圓之長軸,而 P 爲曲線上之一點。

求橢圓之心。




(構圖)　作一 AQA′ 助圓。

於 AA′ 之中點 O。作 OD⊥AA′。

作 PM⊥AA′。且引長之遇助圓於 Q。

作 OQ。並作 PN∥AA′。截 OQ 於 R。

於 OD 上取 OB。等於 OR。

以 B 爲心。OA 爲半徑。作弧。截 AA′ 於 F 及 F′。

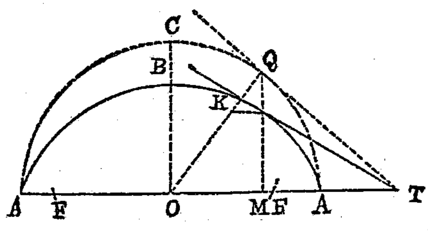
則 F 及 F′。即爲所求之心。

〔證〕　P 爲橢圓上之一點。AA′ 爲其長軸。其心爲 F 及 F′。而其短軸爲 OB。　§ 918

**問題902.** 己知長軸及切橢圓之一直線。求其兩心。

〔解〕　命 AA′ 爲橢圓之長軸。而 PT 爲切線。

試求其心。




(構圖)　作 ACA′ 助圓。而自 PT 及 AA′ 引長線之交點 T。作 TQ 切線。

作 QO。且作 QM⊥AA′。而截 PT 於 P。通過 P 作

PK // AA'。而交 QO 於 K。於 AA' 之 O。作 CO⊥。取 OB 等於 OK。且以 B 爲心。OA 爲半徑。作弧。截 AA' 於 F' 及 F。

則 F' 及 F。即爲所求之心。

〔證〕 MT 爲次切線。 § 931

故 P 爲切線。

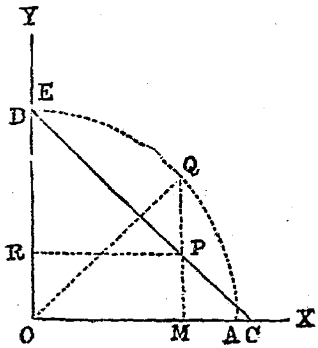
$$OK=b$$ § 918

因 $$BF'=BF=a$$

∴ F' 及 F 爲橢圓之心。

問題 903. 若一直線移動其兩端。常與二定直線之彼此正交者相切。則移動線之任一點生一橢圓。

〔解〕 命 DC 直線。移動兩端 C 及 D。常在彼此正交之 OX 及 OY 內。




求證在此線內之任一點 P。成一橢圓。

〔證〕 以 O 爲心。DP 爲半徑。作 AQE 弧。

作 PM⊥OX。而 PR // OX。

引長 MP 遇弧於 Q。乃作 OQ。

因 $OM=RP$ § 180

$QO=DP$ (構圖)

$\therefore$ 正$\triangle OMQ=$正$\triangle RPD$ § 151

$\therefore$ $RD=MQ$ § 128

正$\triangle$PMC 及 DRP 相似 § 356

$\therefore$ $MP:RD=CP:PD$ § 351

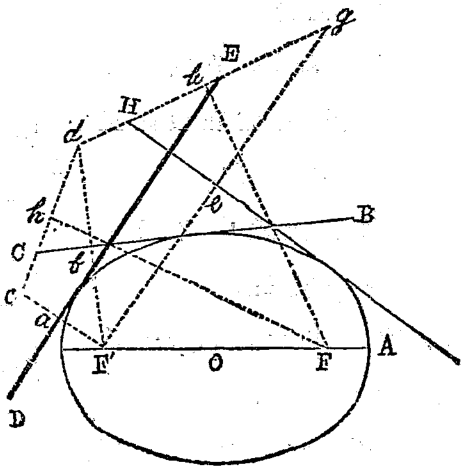
$\therefore$ $MP:MQ=CP:OQ$

故Q在以OQ為半徑之圓內。而P在以OQ及PC或DP及PC為半軸之橢圓內。

**問題904.** 已知一心及三切線。求作一橢圓。

〔解〕 命F′為已知之一心。而ED, BC, HI 為已知之三切線。

求作橢圓。




(構圖)

作 $F'a\perp DE$。且引長至$c$。

命 $ac=F'a$。

作 $F'b\perp Bc$。且引長至$d$。命 $bd=F'b$。

作 $F'e \perp HI$。且引長至 $g$。命 $eg = F'e$。

乃作 $cd$ 及 $dg$。且於 $cd$ 及 $dg$。作平分垂線 $n$F 及 KF。

此二垂線相交於 F。

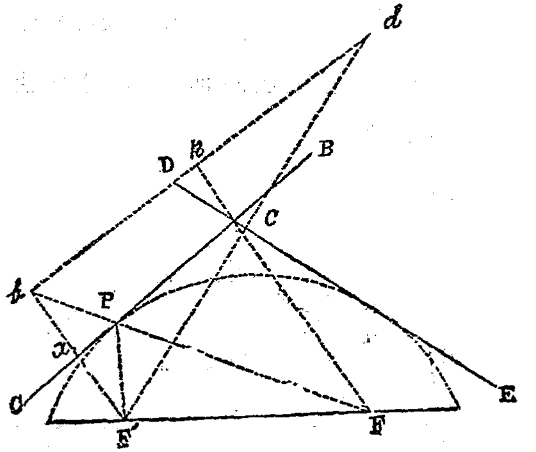
以 F′ 及 F 爲心。$d$F 爲長軸。作一橢圓。

則此橢圓。即爲所求之橢圓。

〔證〕 由問題889之證法。知橢圓之以 F′ 及 F 爲心。以 $CF = dF = gF$ 爲長軸。與 DE, CB, HI 三線相切矣。

**問題905.** 已知一心二切線。及二切點之一。求作橢圓。

〔解〕 命 F′ 爲已知之一心。BC 及 DE 爲已知之二切線。P 爲 BC 之切點。



求作橢圓。

(構圖) 作 F′P。又作 PF。使所成之 ∠BPF 等於 ∠CPF′。

作 $F'a \perp BC$。且引長至 $b$。命 $ab$ 等於 $F'a$。

作 $F'c \perp DE$。且引長至 $d$。命 $cd$ 等於 $F'c$。

作 $bd$。於 $bd$ 作一平分垂線 KF。交 PF 於 F。

由是以 F 及 F′ 爲心。$b$F 或 F′P+PF 爲長軸。作一橢圓。

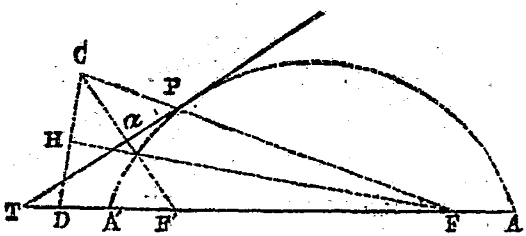
則此橢圓。即爲所求之橢圓矣。

〔證〕 此橢圓以 F 及 F′ 爲心。$b$F 或 $d$F 爲長軸。必切 DE。且切 BC 於 P。(見問題899證法)

**問題906.** 已知一心一頂點及一切線。求作橢圓。

〔解〕 命 F′ 爲已知之心。而 A′ 爲已知之頂點。PT 爲已知之一切線。

求作橢圓。



(構圖) 通過 A′ 及 F′. 作 A′T 線.

作 $F'a \perp TP$. 且引長至 $c$. 命 $ac$ 等於 $F'a$.

取 $$A'D = A'F'$$

作 DC. 於 DC 作一平分垂線 HF. 交 AA′ 於 F.

取 $$FA = A'F'$$

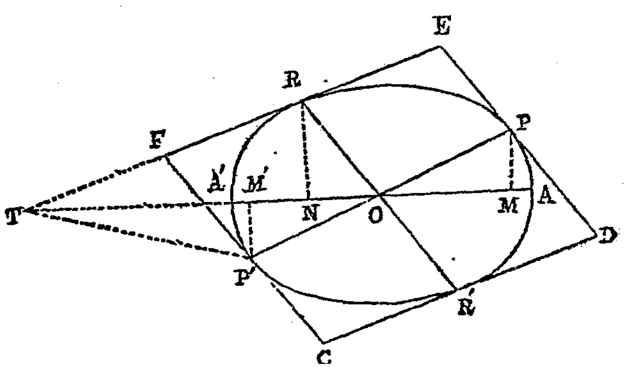
以 F 及 F′ 爲心. A′A 爲長軸. 作一橢圓.

則此橢圓. 即爲所求之橢圓矣.

〔證〕 此橢圓以 F′ 爲心. A′ 爲頂. AA′ 爲長軸. 由問題 889 證法. 知必切 TP 於 P.

**問題 907.** 於橢圓相屬二直徑之四端作切線. 所成平行四邊形之面積. 等於此橢圓諸軸所成長方形之面積.

〔解〕 PP′ 及 RR′ 爲相屬二直徑. 而 CDEF 爲 P, P′,



R, R′ 四點之切所構成之平行四邊形。

求證 $\square CDEF \backsimeq 4ab$

〔證〕 命 R 點之切線遇 A′O 之引長線於 T, 乃作 P′T。且作縱軸 PM, RN 及 P′M′。

因 $RT \parallel PO$

$\square P'ORF \backsimeq 2 \times \triangle P'OT$

$= OT \times M'P'$ § 400 § 403

$\because$ $MP = M'P'$ $M'P' : ON = b : a$ § 941

$\therefore$ $OT \times M'P' : OT \times ON = b : a = ab : a^2$ § 340

但 $OT \times ON = a^2$ § 932

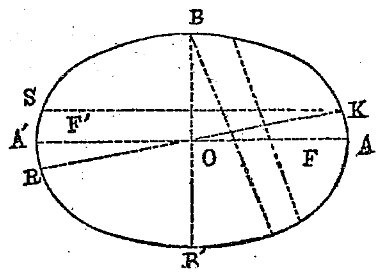
$\therefore$ $OT \times M'P' = ab$

$\therefore$ $\square P'ORF = ab$

但 $\square CDEF \backsimeq 4 \square P'ORF$

$\therefore$ $\square CDEF = 4ab$

**問題908.** 已知一橢圓。以作圖法求其中點兩心及兩軸。




〔解〕 命 ABA′B′ 爲已知之橢圓。

求其中點兩心及兩軸。

(構圖)　作任何二平行弦。且通過其中點作 KOR。

則直徑之中點 O。即爲所求之中點矣。

以 O 爲心。OK 爲半徑。畫弧。交橢圓於 K 及 S 二點。

作 KS 弦。此弦即爲一軸之弦。因其兩端 K 及 S 距中點 O 等遠故也。

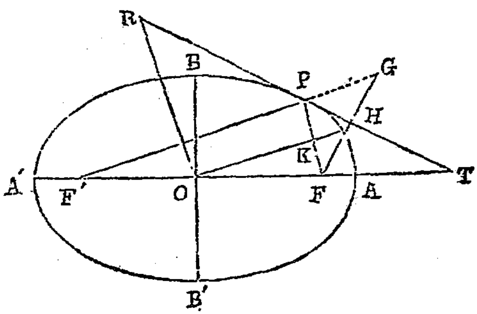
通過 O 作 AA′, BB′ 二直徑。而命 BB′ 爲 KS 之垂線。AA′ 平行 KS。

則 AA′, BB′。即爲所求之二軸。AA′ 爲長軸。BB′ 爲短軸。

以 B 爲心。OA 爲半徑。畫弧。與 AA′ 相交於 F 及 F′ 二點。

則 F 及 F′。即爲所求之兩心。

**問題 909.**　以橢圓之任一心半徑爲直徑。作圓。必與其助圓相切。




〔解〕　命 P 爲 ABA′B′ 橢圓上之任一點。而 FP 及 F′P 爲二心半徑。

求證以 FP 爲直徑作圓。必與

其助圓相切。

〔證〕 引長F'P至G。令PG等於PF。乃作FG。

通過O作OH∥F'G。而與FP及FG相交於K及H。

則OH平分FP及FG。 § 188

且通過以FP爲直徑所作之圓之心。 § 217

今 $OH=\frac{1}{2}F'G=a$ § 189

$\angle KHP=\angle F'PR$ § 112

$\angle F'PR=\angle HPG$ § 93

$\angle HPG=\angle KPH$ § 145

$\angle KHP=\angle KPH$ 公理 1

$\therefore\quad KP=KH$ § 147

$$OK=OH-KH=a-KP$$

故圓之以FP爲直徑者。與助圓相切。因助圓之圓心與此圓之圓心之距離。等於二半徑之較也。

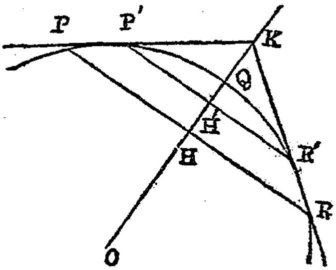
問題910. 橢圓任一點P之縱軸及切線。遇一直徑於H及K。則 $OH\times OK=\overline{OQ}^2$。此Q點爲直徑割此橢圓之點。

〔證〕 作P'R'∥PR。而爲OQ所平分於H。

命PP'引長遇OQ之引長線於K。

則 $HK:H'K=PH:P'H'=RH:R'H'$ § 351

故 RR′ 引長。示遇 OQ 之引長線於 K。如將平行二弦移至 PK 及 RK 上。




則成爲P點及R點之切線。

故弦之兩端之切線。交於直徑上。

此直徑與弦爲相屬者又以線連弦之中點至二切線之交點。必通過橢圓之中心。

於 Q 作 QE 切線。遇 PK 於 E。

且作 QG // PK。遇 PR 於 G。

則 PEQG 爲平行四邊形。而 EG 平分 PQ。

∴ EG 必通過中心 O。

因知 $OH:OQ=OG:OE$

∴ $OH:OQ=OQ:OK$

即 $OH\times OK=\overline{OQ}^2$

——(畢)——

民國二十一年一月二十九日
敝公司突遭國難總務處印刷
所編譯所書棧房均被炸燬附
設之涵芬樓東方圖書館尚公
小學亦遭殃及盡付焚如三十
五載之經營隳於一旦迭蒙
各界慰問督望速圖恢復詞意
懇摯銜感何窮敝館雖處境艱
困不敢不勉為其難因將需用
較切各書先行覆印其他各書
亦將次第出版惟是圖版裝製
不能盡如原式事勢所限想荷
鑒原謹布下忱統祈　垂鑒

上海商務印書館謹啓



中華民國元年六月初版
民國廿二年二月印行 [redacted]後第一版

（二九五九）

温特渥斯 立體幾何學解法一冊

每冊定價大洋壹元
外埠酌加運費匯費

翻譯者　魏鏡

發行者　科學會編譯部

印刷者　商務印書館　上海河南路

發行所　商務印書館　上海及各埠

商