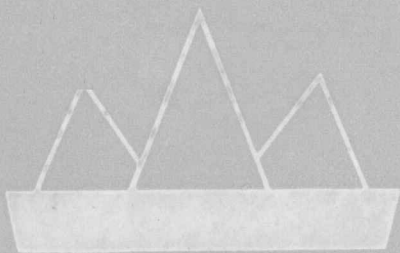


小學教師學習叢書

# 小學算術心理及教學法

吳志堯編





小學教師學習叢書

小學算術心理及教學法

吳志堯編

商務印書館發行

一九四九年十二月第一版

\*\*\*\*\*  
\* 版 權 所 有 \*  
\* 翻 印 必 究 \*  
\*\*\*\*\*

小學教師  
學習叢書

小學算術心理及教學法一冊

(39784.2)

基價肆元伍角

印刷地點外另加運費

編纂者

吳志堯

發行人

陳懋解

上海河南中路

印刷所

商務印書館

發行所

各地商務印書館

通



## 目 錄

第一章	算術教學的新趨勢	1
第二章	一個新的算術課程	17
第三章	學習算術的困難	31
第四章	診斷和補救	44
第五章	計算方法的改進	53
第六章	動機	75
第七章	練習	82
第八章	應用問題	94
附錄	關於改進小學算術科課程標準的意見	106
後記		117

# 小學算術心理及教學法

## 第一章 算術教學的新趨勢

### 一 算術教學的改造

算術在過去的小學課程上是主要科目之一。它何以能夠取得主要的地位呢？因為有這樣一個假定，以為算術可以訓練思想，增進智慧。現在才知道，這種假定是由於錯誤的學習心理的見解。從算術本身的作用方面看，它可以表示，試測或選擇智慧的程度，倒比培養或訓練思想來得強些。其實，只要凡是兒童所感覺興趣的工作，哪一件不能訓練思想？拿算術去訓練思想，特別是用那些和實際經驗相隔絕的算題，實在是得不償失，也許是捨本逐末的。

舊式算術教科書裏，像繁分數，立方根，繁複的度量衡一類的教材，原本當然不是那樣繁瑣，也是為了實用的目的才教的。後來逐漸和實際經驗脫節，實用的目的幾乎已經忘卻，把它們當作訓練思想的工具。從此愈變愈複雜，除出極少數特殊兒童，大

都望而生畏，養成一種懼怕厭惡的心理，彷彿算術是一件高不可攀的東西。其實所可懼怕的，何嘗是算術本身呢？錯誤的見解，故弄玄虛的方法，才真使兒童難以接近。至於那些艱奧的應用問題，一則由來已久，二則考試時往往有這些問題，因此教科書裏也加入了這一類的題目。

現在的見解已很不相同。一般人認為兒童的推理能力是逐漸發展成熟的。推理能力逐步成熟，適合他需要的各種經驗也自然能養成的。我們倘能留意兒童的需要，隨機施教，各種應用的技能，自然會逐漸學習。因此，新的主張便以為一切教學應適合兒童身心成熟的程度。當然算術教學也不能例外。例如，數的觀念，在兒童心智發展之中，由於各種內發的需要，與環境多方面的接觸，自然會逐漸形成。再如，計算的技能，也因為實際生活的需要，無形中經過許多適當的練習，大多數兒童不但能做，而且是樂於去做的。由於這種見解，算術課程正在產生不少良好的進步，和過去相比，算術教學較為顯著的改造有以下這幾方面：

1. 教學目標更趨於實際，和現實的生活情境密切協調。為了應付考試所設的那些矯揉造作的材料，已經顯見減少。同時幫助兒童正確而迅速地解決日常計算問題則見增多。

2. 教學初步計數和識數，盡量利用兒童的經驗與活動。

3. 在低年級裏，從實際的轉移到抽象的數的經驗，其間的

過渡更趨於緩慢，使這種過渡逐漸進展。

4. 各種單純的抽象的四則練習延遲教學的時期。

5. 有些材料延遲教學，有些材料竟取消了，其結果，各年級算術練習的份量已經減少。

6. 因為學校生活裏供給更多應用計算的機會，數量知識與計算方法的教學和實際的計算相互聯繫，機械的教學方式也減少了。

7. 若是供給更多的計算情境與經驗，應用問題的教學比以前反見提早。

8. 較為複雜的四則計算練習，延遲到兒童已相當成熟能學的時候再行教學。

9. 應用問題已經簡單化，其中文字與名詞已經改用普通語文，問題所包含的情境也都是現實的，以前教科書與練習材料裏那些故意造作，使兒童捉摸不定的題目已大都淘汰。

10. 練習方法的改進使數的運用與計算手續成為機械的，正確的，而又是自然的動作。每個練習都有特殊的作用，同時練習材料依據兒童實際可能熟習的程序，加以組織排列。

11. 教材與教具使兒童能自動利用，讓他們自己會負責去達到應該完成的作業，正式教學與一般共同的練習也便減少。

12. 個別差異有更多的注意。教學目標與課程標準已經分

化，使能有有有多方的適應，使學習遲緩的兒童也能夠有充分的學習。教學時有各種根據能力不同的分組。個別教學盡可能充分施行。

總之，低年級非正式的算術教學，利用各種活動，使兒童自然獲得許多數的經驗與計算方法，因而避免了許多對於算術的畏懼與負擔。教材按年作適當的分配，使兒童不至有許多不必要的，甚至於錯誤的練習。同時，以前一般流行的弊病，如猜數，扳指，記數與草率學習，缺少興趣等都顯然減少了。延遲四則的形式練習，使教師有較多機會鼓勵兒童去做實際的應用問題的解答。也許有人一時還不相信，兒童在四則的形式計算方面不過只有偶然的一些非正式教學，可是他們將實際經驗裏所自然發生那許多應用問題，竟會解答得那麼令人滿意。

## 二 延遲算術的正式教學

在一二年級裏，有些學校現在已經取消形式的抽象的計算作業。待兒童對於數的經驗比較成熟的時候，再做這些作業，其結果往往更能滿意。兒童最初所應該有的是對於數量的親切的感覺。並且必須待這種感覺增多之後，數的經驗已相當豐富，形式的計算才會產生對於兒童有益的效果。鸚鵡學語式的那種無意味的反覆，例如背誦『四加四等於八』，沒有什麼價值可言。

必須在各種實際生活的情境裏，讓兒童經驗過各種的四，然後才會發生對於四的真切感覺。

早在二十幾年以前(1916)，塔洛 (Taylor, T. S.) 在美國紐約市的小學裏做過一個規模較大的實驗，他指出，一年級不學算術的兒童，到三年級末，和從一年級起一直學習算術的兒童相比，他們的算術能力是相等的。稍遲於塔洛 (1919) 另有一個研究，根據四五年級兒童在校外自然運用計數的調查，建議在四年級以前可以毋須做算術的形式練習，他並且認為許多比較複雜和用處較少的算法可以延遲教學，或竟淘汰。此外若干同類的研究都證明正式的算術教學延遲一年或二年，其結果，在通用的標準上，照樣可以達到一般低年級兒童學習算術的成績。目前，不論採取何種練習方式，那些和實際經驗不相干的計算，在新式的前進的小學裏三年級以下幾乎都已經取消了。

德魯蒙女士 (Drummond, M.) 在她的一本算術心理與教學法的書裏，明確主張，沒有一個兒童，在他能夠數東西，並有正確的數的感覺以前，可以教他做形式的算術作業。她相信提前或急於教兒童學習算術是一件徒勞無功的事。經驗告訴我們，數的計算能力與知識和心智的成熟是亦步亦趨相依附着而發展的。與其急於教兒童學習算術，毋寧多多留心他們心智發展的情形來得切要。關於各項教材，在什麼時候開始教學最為適當，以

華虛朋 (Washburne, C. W.) 和他組織的七人委員會的研究規模最大，結果也最有影響。他們的研究包括 148 個城市的幾千兒童，其目標是決定各種算術教材達到哪一個智力年齡，學習起來最適當有效。每一項教材都規定一個適宜於學習的最低與最高的智力年齡，學習起來才適當有效。例如和在 10 以內的加法，最低的智力年齡是七歲四個月，最高是七歲十一個月。這便是說，一般兒童學習 10 以內的加法可以延到三年級再教也不遲。再如，同分母的加減法，最低是九歲十個月，最高是十一歲一個月。換言之，這種教材可以延遲到六年級才教。又如，多位數的除法，依照他們規定的智力年齡，須放到初中一年級才可以教學。這個研究的各項細節可供商討的地方很不少，可是它的基本觀點，無疑是正確的。這基本觀點是『在兒童的心智發展上有一個確定的時期，在這時期以前，教兒童學習某項某項算術材料是不會有什麼真實的效果的，到達這一時期，方才可有相當的成效』。華虛朋的研究在算術課程編制與改造上已經發生影響。例如，有系統的練習，即使是加法練習，延遲到三年級才有；多位數除法延遲到五年級；分數練習延遲到六年級，——這些意見已經都被人接受，並且在若干地方的課程上也已經規定實行了。

另外有一件我們通常都感覺到的事實，便是兒童初進學校，已經有若干數的經驗。有些兒童簡單的計數已經無形中學會。



有一個六歲的兒童，每天玩骨牌的結果，三個月內把加法九九都學會了。兒童在入學之前，計數的機會並不少，積聚的數的經驗也相當的多。這件事實告訴我們很可以信任兒童，在相當時期之內，讓他們從生活裏，去不斷地獲取數的經驗。學校只須促進他們這方面的動機，供給適當的情境便是了。兒童的心智沒有達到相當成熟的程度，在低年級裏勉強他們學習算術的結果，不但使他們厭惡或懼怕算術，並且因為這種不良態度，反而減少他們許多自然獲得數的經驗的機會。

### 三 簡化算術教材的內容

算術教材應該取決於實際社會生活裏的應用。用什麼，學什麼，至少在小學裏應該作為取材的第一依據。本世紀初，教育界人士已經開始懷疑一般當時通用的算術教科書的內容。1904年麥克茂雷 (McMurry, Frank M.) 首先公開提出一些可以取消的算術教材項目，他的問題是「現行算術課程有哪些教材應該刪去？」後來繼起的研究層出不窮，都一致承認麥克茂雷的建議是合理的，並且提出充分的證明支持他的建議。例如，有一個研究用問卷調查商人對於算術教材的意見，他們也同意許多沿襲的教科書裏的教材刪去以後，可以沒有什麼不方便。近三四十年來許多人的研究，以為算術教材應該刪繁就簡，符合實際的應



用。因此內容簡化的主張可以說完全肯定了。

日常生活所發生的各種問題，的確包含許多計算上的需要。可是實際的計算往往不及對於數量的思考來得多，換言之，思考倒比計算用得更多。而且，即使是比較複雜的思考，當然指實際生活方面關於數量的思考而言，又大都是十二歲兒童的一般智力所能夠做到的。普通一般成人的計算能力比實際應用上的需要也超過得多。總之，日常生活裏應用的計算實在是相當簡單的。一般成人與具有十二歲智力的兒童都能勝任，並且數量的思考更比計算的技能重要而用處多。因此，有些人主張兒童在學校裏不必規定他們必須達到最低限度的算術程度，假使學校裏的算術教學真能使思考與計算技能密切聯絡，至少在理論上這種主張是成立的。因為日常生活所需要的計算能力既有限，如其學校對於培養兒童的思考並不疏忽，那末這些計算能力可以要求兒童達到，並且也是他們所能夠達到的。

百分之九十的成人所用得到的算術，無非整數四則與極少數的分數。日常生活裏用到小數的計算已經極少，成人不過只須懂得小數的讀法已經夠用。許多研究證明分數的應用，最普通的是二分之一，三分之幾，四分之幾。此外，八分之幾，十二分之幾已極少用。至於像二分之一加四分之幾，或八分之幾，加十二分之幾，那真是偶然才有些用處。歸納起來，至低限度必需的算術

不過這些：數字的認識；數的常識和計數（如時間，重量，長度，容積，面積等），數的符號和名稱（如減，進位，整數，零等等）；四則的認識和計算能夠正確而迅速；簡單的分數，小數，百分數和實際需用的度量衡的計算；看了算題或聽人口述算題能夠清楚了解並計算。解答應用問題的能力，比只會計算是重要得多了。計算可以用算盤或計算器，比筆算不但方便迅速，而且也容易正確。可是對於某一個問題的各项條件的認識，和哪一個法則可以應用到這個具體問題，那便很少能夠倚賴計算的工具，必須運用解答應用問題的思考。因此算術教學決不僅要兒童計算得正確而迅速，並且要他們能夠了解各數的意義，同時能夠在自然的情境之中運用這些數的關係。使兒童對於實際問題能夠有充分的智慧的注意，養成他在各種情況之下，能善於將問題正確解答，這才是根本的要求。當然，這種解決問題的能力，有些是無從教學的，只可由兒童推理能力的自然成熟之中去逐漸形成。

適當的教法只須先注意一般兒童都需要的簡單算法。最需要同時也是最困難的地方才可加以練習，例如乘數是 1 的乘法，或是數目上須加一個 0，或如進位加法，數目上沒有 0，而須設想有一個 0 的存在等類的材料。經過這樣的教學，可聽任兒童，在比較豐富的學校學習情境之中，由於學習的遷移，讓他們自己去逐漸擴充。比較聰明的兒童，跟着智力日漸成熟，自然會注意

算法，多方運用的。有些兒童始終不能自由活用，或者說學習的遷移不容易，那末，這便表示這些兒童屬於數的思考有問題，或是對於計算的技能並不感覺有什麼需要。這種情形，我們也只有注意其思考方面狀況與促進他對於計算的需要入手。我們很可以相信，兒童心智漸趨於成熟，適當的環境自會刺激他們，使他們去嘗試，去運用數字。無內在的可能，無適當的情境，一切外鑠的教學，即使有表面的成效，也是臨時的。

#### 四 數的早期心理發展

從兒童入學以前日常活動的記錄，個案研究，和各種關於兒童數的經驗與概念的測驗中，我們可以看到兒童數的概念和應用，與心智自幼稚至成熟的發展，是兩相平行而自然地進展的。根據這類研究的結果，證明一年級算術課程與教科書的許多材料實在是不相干的。在正常環境之內，經過相當時間，兒童自然能夠學會像計數，解決簡單的計數問題，或了解數的關係一類的事。有的兒童，由於先天的好奇，興趣與能力的卓異，學習得更快更多。幼童的數的概念的發展是繼續不斷的一個生長程序，正和說話走路的連續不已的發展一樣。幼童不斷地用數目玩，用數目想，問關於數的問題，試驗關於數的東西，解答他們自己所設想的關於數的問題，利用數作為思想的捷徑。初次顯著表現對於

數的興趣，通常在五六歲的時候。兒童很早便歡喜玩耍包含數的遊戲，例如玩骨牌，豆囊，猜數遊戲等。有一個六歲的天才兒童，給他看十三個銅元，要他數出來，他說『呵！三個四是十二，再加一，便是十三。』有一個研究，證明從幼稚園到小學三年級的兒童，不經正式教學，由於經驗發展的結果，自然學會簡單的分數。問他怎樣會得的，他們說，一個橘子分做兩個半個，分做三份，或是說一塊蛋糕割做幾方。有一個五歲的兒童要求媽媽把麵包切出一半，他說：『我要看看一半一半』。有時他要求把一根繩子分做兩段。假使分得不是正好一半，他便嘖哩咕嚕起來。他又會試做樣子，要求只要半杯水喝；過些時候，他學會要四分之一杯水的樣子。分數的經驗從四五歲培育院的兒童已經常常可以發生。另外有一個七歲的女孩子問她火車票要三分錢一哩，二十五哩要多少錢，她回答說：『三個二十五；二十五，五十，七十五，要七十五分錢』。這個女孩子，從來不曾學過乘法。兒童在適當的機會裏，自然會隨機學習不少關於數的知識與算法。這種學習，不但對他富有意味，而且也持久。正式教學以前，他們已經相當會運用數目了。

可是兒童在入學前自然獲得的一些數的經驗，個別兒童之間差異很大，同時他們的經驗與社會環境的關係也密切。因此，當兒童入學的時候，要假定他們已經有哪些數的經驗，這是很不

容易列舉的。不過我們可以相信，入學前若干關於數的經驗對於學校裏數的觀念的培養很有幫助，惟須充分注意個別兒童的差異。這裏且舉出幾點一般兒童早期關於數的經驗的情形，可以幫助我們實際觀察時作為參考。

幼童的數的觀念，最初無非是一些不確定的印象，如沒有多少，一些兒，幾個，多一點，少一點，大一點，小一點等等。比較確定的數的觀念是後來才出現的。

幼童數東西，從一個一個的數，進步到兩個兩個，三個三個，或五個五個的數，對於他們解決包含  $2 \times 3$ ，或  $3 \times 4$  一類的實際問題，這是一個十分合法的步驟。這是使乘積成為有意義的第一個自然發生的步驟。雖然這個步驟決不能替代初步的乘法九九，當然也不能替代較複雜的乘法，如  $25 \times 25$  之類。可是乘積的觀念確是這樣開始的。

口頭唱數稍稍早於將實物數得正確，唱數時對於數的觀念仍然是模糊的。能夠從一說到十的兒童，不一定會將十件東西從一數到十。能夠口頭的說與實計的數聯合起來，這是一個顯著的進步。幼童常用手指從一數起，順著將數目數上去。比較大一點才會直接從被加數數上去，如三指加二指，直接從三指數四，五，說出五指。有些兒童會兩個兩個的加上去。

有的兒童，把一組東西看成一個單位，如四根火柴，四個紐

扣，或骨牌上的四點，常比別的年齡相等的兒童遲緩一些。有的兒童彷彿對於這種一組數量的感覺特別顯得欠缺。遲鈍與低能的兒童在這方面的發展幾乎全是落後的。

初級算術教學有希望的新途徑，將是培養兒童關於數的思考，先於有系統的算術教學。一切教學應該和兒童自然的發問相互聯絡。要兒童對於計算的方法加以熟練，惟有等到感覺這種方法的有用與需要，了解方法的意義，並且心智的成熟已經達到使他能夠學習這種方法的程度。教學所最須注意的，不在教材，而在兒童數的學習心理發展的實際情狀。

## 五 算術教學的進程

學習算術有兩個目標：第一是運用思想於含有數量的情境，第二是計算方法能夠熟練。第一目標和學習語文一樣，數字無非是一種算術的文字。兒童應該熟習若干數的符號，以便使用它們去解決問題，不論是店舖，工場，或廚房裏的問題，或課本上的問題。計算方法的熟練，要使基本九九的運算能夠自動的隨意的使用，免除冗長的，繁複的計算。

要使教學簡單化，要使學習的力量用得很經濟，應該把學習組成一個順序，成爲一個自然的系統，使學習有充分轉移的機會，使教材構成一個適宜於學習的組織。新的優良的算術教學

將各種計算方法與習慣，列為一個聯貫的順序，這個順序和兒童的心智發展是平行的。雖然這種順序目前還在嘗試之中，下列各項可供我們參考：

1. 數數和計數，數的大小，序數；抽象的數，(註一)數的概念；(註二)認識和使用各種數的符號；基本九九。
2. 錢幣，日曆，時鐘的認識和計算；整個和部份；長短，輕重，面積的測量和計算。
3. 數的應用，在簡單情境裏對於包含數的問題的感覺，教師和父母應該隨機指導兒童應用數去解決日常生活裏的問題，例如「現在鐘上是九點二十分，九點半我們要上音樂，還有多少時候？誰能夠在鐘上指出來？」
4. 從經驗裏了解加，減，乘，除的意義；養成計算方法的機械化（計算時，如記數，猜數等不良習慣都是由於計算手續不能機械化的緣故）；增加算術的字彙（如寬，高，積，方尺，畝等）；解答應用問題之先，不必求計算方法的純熟，方法的純熟和了解須在解答實際問題的應用之中去獲得。
5. 應用整數四則計算於上述第三項較為複雜困難的問題。
6. 分數，整數，小數，名數的四則計算；選取最低限度必須透徹的練習材料；數字的讀和寫；關於數的知識的擴充。
7. 擴充應用四則解答問題，度量衡應用的擴充；應用算術



爲文化與實用的工具（如記載溫度，計算平均溫度，畫簡單溫度升降圖等）。

數的了解，符號的使用，計算的純熟，這三方面應該同時進行。要能同時進行當然須將學習採取圓周式的組織較爲適當，因爲這樣才可以保證各種計算習慣的完整，並使各項技能都能得到練習。例如，我們常覺得有一種錯誤，將分數與錢幣的材料放到將近畢業的時候才教。其實，這種材料，五六歲的兒童已經開始經驗到；教學與經驗的脫節，徒使教學時彷彿成爲生疏的材料。如其採取圓周式的課程，在幼稚園裏便可介紹最簡單的分數；當然不是爲了訓練，而是兒童生活上有着這樣的需要。兒童對於錢幣與分數的經驗逐漸增加，教師又隨時輔助兒童擴充這方面的概念，等到小學高年級時，自然便可以學習像  $90\frac{3}{4} \div 30\frac{1}{4}$  一類的題目，或解答像『布每尺 6 角 7 分， $4\frac{3}{8}$  尺要多少錢？』一類的應用題，或者做像這一類加法  $\frac{285.40\text{元}}{34.58}$  對於小數點也可以不發生什麼困難。四則計算的熟練，也應該在解答應用問題覺得有需要的時候，加以特別的練習；不必將所有加法九九，在一年級時學得太多。加法練習，應該分配於各年級的材料裏去，使兒童不斷地有機會練習，這樣才可以得到加法技能自然的，無意的，或者說機械的控制。



〔註一〕 抽象的數，如 5，並非指 5 隻貓，5 個球，五根棒子，而是指各種五樣東西的那個 5，正如白的貓，白的紙，白的牆壁，離開具體的某樣白的東西，專指『白的』那性質而言一樣。

〔註二〕 數的概念，不僅是一個抽象的數，如 5，同時有它本身的特殊性質，5 在 4 與 6 之間，5 是一個奇數等等，正如『白』是一個概念一樣。

## 第二章 一個新的算術課程

### 一 培育院和幼稚園(三歲到五歲或六歲)

平常三五歲的兒童已經會數着手指足指唱數。平常四歲的兒童能夠數出四個銅錢，並且能夠就他所數的東西，逐一指出數目來。這幾歲的兒童可以對於低年級算術課本上的數字並不覺得怎樣生疏。父母或別的兒童教圖畫裏如雞，貓一類的東西，可以幫助他們估計其中有多少東西。三歲的兒童開始感覺五比二多，十比五多，雖然他們對於數的概念還是絕對模糊不定的。他們開始會分別一個，二個，五個，並且在數的時候，能夠指點出來說，「這是一個，二個，五個」。他們開始有時間的感覺。有些近六歲的兒童開始會說時間，開始有鐘點，分鐘，一天，和尺，寸，以及錢幣的概念。對於大的數目，他們只有一個模糊的意思，一百萬看來不比一百多。四歲的兒童開始會用手指表示他們的年紀。在許多人面前，他們會數出幾個蘋果或小餅子給大家看。他們開始認識數字，並且對於抄寫或默寫數字都有興趣。

以上這些自發的學習，在日常家庭和遊戲同伴們的環境裏，一般兒童，不要多少指導，自然而然能夠會得的。假使他們做錯

了，不要每次都改正他們，正像初會說話，沒有人聽見他們說錯便去改正一個樣子。他們的錯誤實在並非錯誤，不過數的感覺和經驗不夠完全。時間稍長，經驗稍多，會使他們補充和改正過來的。用特殊的方法，使他們對於數有一種早熟的學習，在這些年齡的時候是絕對不適當的。這時候，任何關於數的直接教學都不需要。可是兒童的發問，要鼓勵他們，並且應該回答得很得法。供給許多可以數的東西，有時可以量量輕重，長短。他們對於鐘上的數字有興趣的時候，可以讓他們觀察。在這一時期裏，兒童還不會經常和數目或數字發生關係，一切都是隨機的，偶然的。

## 二 一年級

數東西，量東西，記數，用錢，估計大小，多少和時間，一般六七歲的兒童自然會發生這些興趣。一年級和前一個階段沒有顯著的差別。數的心理發展是漸進的，連續的。遊戲是記數最有力量的活動，無意中給了他們若干數的經驗。日課表引起他們留心時間。各種團體活動擴充他們的數的知識和應用。工作，例如摺紙剪紙，教他們相當準確的量法。教室裏的車子，小船，小娃娃的床，都可以用來增加他們量的技能。許多兒童只是記數，卻很少留心怎樣去計數，這正是促進他們計數愈來愈快的方法。數小朋友，數各種東西的機會自然在增多起來。兩個一數，或五個一數

必須先於一個一個的數。表演做買賣可以教他們講價和付錢。烹飪可以學習用糖鹽的分量。利用撲滿可以學儲蓄。付報費或捐款可以教他們必須將錢付清楚。一百和五百或一千的比較才會有比較清楚的概念。記菜帳或開菜單需要把價錢寫清楚，有時甚至於不妨學習元角分的寫法。日常談話和發問使他們語彙逐漸增加，這時他們開始感覺有些數的語詞，如「比較大些，比較短些，比較重些，比較多些，圓形，方形，三角形，五角形，一對，加上，減去，多多少，剩多少」等等。能幹的教師常常鼓勵兒童這方面的發表，希望他們在教室裏的各種活動以及和環境的接觸，一年級時能在數的經驗上有很快的進步。

兒童歡喜數東西的自然傾向，要多方鼓勵，不能阻止。數字不能產生實際數量的感覺，並且也看不出實際的數量來，因此一年級時單純的數字學習是很不適當的。一年級開始時，兒童那些幼稚的問話，教師不應加以阻止。若是要求他做任何正式計算的事，應該慢慢地給他們各種指示，使他們無形中在各方面有很快的發展。可是一切關於數的學習畢竟是非正式的，約算為以後比較正式的學習作一種準備罷了。應注意的，這些是以後學習算術能夠成功所必具的基礎，並且這是一個不可多得的大好時機。教師須認清兒童學習算術的各種可能，這些可能性對於計劃以後的教學是十分需要的。有些基本九九可以從數數和玩骨牌一

類的遊戲裏自然學會，這種學習必然為兒童所記住。少數最聰明的兒童，到一年級結束的時候，已經可以學會加法九九。學年結束時，教師可以考查兒童寫一到十的數字的情形。不會寫而有興趣的，要幫他們學會來。寫錯的，倒寫的，要用範字幫他們自己對照改正。依着端正的範字和教師謹慎細心的指示，兒童自然會改正錯誤。如其有相當的關於數的準備測驗材料，這時也可試用。關於兒童學習情形的記載是以後的重要參考，應該交給二年級教師。這種記載，比甲乙丙之類的成績記分，對於教師的幫助是大得多了。

### 三 二年級

二年級兒童正是七八歲，這是學習算術最好的一個時期，可惜以前的算術教學輕輕地放過這個機會。開始時，教師第一件工作應該查看一年級時兒童的學習記載。中間隔開一個暑假，應該重新將兒童的算術能力考查一次。他們可以因為興趣，願望與各種學習的機會的改變，可能有或大或小的進步。教師應該將兒童這時的能力和程度作個別的記載，然後計劃教材綱要，和個別指導的方法。

考查和記載的項目可以包括這些：(1)數數，一個一數，兩個一數，五個一數，十個一數，甚至於三個一數，四個一數，看實際

情形，可以試探開去。從兒童已經會數的那些數目，可以曉得這方面的考查可以延展到怎樣一個程度。(2)和在 10 以內或超過 10 的加法。(3)口述簡單的問題，如『我已經有五分錢，媽媽又給了我五分，我一共有多少錢？』(4)報告時間。(5)用寸量東西。(6)寫 10 以內或超過 10 的數字。(7)說明數字的意思，包括  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ 。觀察兒童做加法，是一個一個加上去的呢，還是數東西，還是猜，還是靠記憶，然後才得到正確的答數。

二年級算術開始，無論教材教法，根據一年級的結果，應該和一年級結束時密切銜接，不能有所間斷。在這一個階段裏，應該供給兒童豐富的活動課程，使他們有充分學習數和計算的機會。這時仍舊不必規定專學算術的時間。認數，計算，和讀書寫字以及其他活動，都只須依他們的興趣進行。每天有一個或長或短的團體學習的機會。算術和讀書或其他活動的交替，不必有分明的界線。這時期應該不斷地鼓勵兒童估計答數，例如，『兩倍有多少？小得多，大概有多少？剩得不多，大概有多少？』等等。這是培養兒童一種估量評度的習慣，對於以後年級較高，求正確解答應用問題時是很需要的。寫數字的訓練可以擴充到 100。

這時兒童的成績應該達到怎樣一個標準，正如一年級一樣，不必有什麼規定。日常隨機教學的材料，可以選擇一部份編為測驗。在學年開始和結束的時候，可從考查和測驗的結果上去比較

估量兒童的進步。關於認數和計算方面的任何進步，都可以作為成績，不必有什麼一致的形式。假使照預定的教材綱要，不能有什麼滿意的結果，那是教師的失敗比兒童更多，更值得重視。至於在智力上短於計算的兒童，不能達到一般的程度，那是另一回事了；問題是在程度的相差，卻不是性質的不同。

#### 四 三年級(八歲至九歲)

照二年級開始時的辦法，教師應該將兒童已經學習的材料和情形，根據以前歷次考查或測驗的結果，以及預定教學的材料，詳細開列出來。複習和在10以下的加法，再學習和在10以上的加法。連加法不須暗記進位的，如 $2+3+4$ ，先加以非正式的練習，然後學習減法。到學年結束時，可以學習簡單的乘法。每日在校時間或每年就學時期較長的學校教材可以再增加些。智力較好的兒童或每班人數較少的，在這一年裏應該更多注意自動的，無意的或機械的計算方法的培養。參照各種情形，應該訂出一個本級的教材最低限度標準。學習遲緩的兒童需要較多的反覆練習。但是這種反覆練習，也絕對不可強迫，應該引起他們自動的興趣。

像二年級一樣，算術作業應該和有興趣的團體活動相結合。二三年級之間必須密切銜接，不過練習時間可以不斷地逐漸增



加。練習時，兒童注意的集中，可以開始逐漸注意起來，作為一種要求。正確先於速率，這時也可開始注意。到學年結束時，速率的標準可以提出介紹。速率需要快些，而又能注意正確，可以表演給全班看。這時兒童的數的概念已漸漸正確，計算也漸漸清楚起來。計算以前，對於答數的估計仍舊很需要。全部小學時期，以至於初中一二年級，都應該注重估計。比二年級，可以有更多的時間用在解答應用問題和練習的作業上。利用各種機會討論二分之一，三分之一，四分之一等分數，用圖表解答包含分數的應用問題。從測量和稱東西一類的經驗裏，使兒童對於 $\frac{1}{2}$ ， $\frac{1}{3}$ ， $\frac{1}{4}$ ，和 $\frac{3}{4}$ 得到更清楚的認識，從用錢的經驗學習小數。

### 五 四年級(九歲至十歲)

開始時教師仍舊應該將兒童已經學習的材料和情形，列舉出來，不可認為以前的教材，兒童當然會做的，這點須特別注意。假使以前的教材不曾熟練，要訂立一個新的教材綱要，不但難以適當，簡直是不可能的。兒童也許需要一個月的複習，並且也不是一般的，攏統的複習，而是依照各個兒童不同的情形，加以複習。兒童需要些什麼複習，可以根據開始時測驗的結果而決定。若是這時有的兒童，和在10以內的加法還不熟，教師不必以為



四年級的兒童連這個都不會，而焦躁起來。常識的判斷與明智的辨別比任何課程上的規定都重要。惟有根據兒童真實的情形去教學，才會有良好的成效。通常一般四年級的算術課程，至少在學年開始的時候是不合兒童的需要的。有些計算的習慣，經過暑假，已經生疏或遺忘，須加以複習，重新溫理一次。連加法中途暗記進位須多多練習，不要以為暗記 20 的會加了，暗記 40 的自然會做的。每個不同的步驟，都要練習。兩位數進位加法和退位減法，須用基數作加數或減數，利用簡單的習題和問題，逐漸引入。所有的減法和加法，都須加以複習。練習時可以應用各種由易而難的練習片。這一年乘法須特別注意。除法九九，各種分數式，簡單的分數應用題可以開始學習。從乘法的練習裏，可以引出像 18 的  $\frac{1}{2}$ ，35 的  $\frac{1}{7}$ ，84 的  $\frac{1}{6}$ ，21 的  $\frac{1}{3}$  一類的練習。包含加減乘的筆算應用題，這時已經重要。若干問題可以直接從兒童的團體活動之中產生。有時可由兒童自己出題。從家庭生活和報紙廣告等也可以選取適當的題材。數的字彙可以從閱讀和討論計算問題之中去擴充。直到這時，等式的計算和一些有關等式的符號，如括弧等，可以毋須介紹；若是第四學年將終時，時間有餘，也不妨教學。否則可以延遲到五年級去。兒童很少需要等式才可以計算。可是等式可以輔助做應用題時的思考，並且為應付校外各種需要，所以也應該加以練習。

各種可以應用數和計算的機會須善為利用。記載身長體重，檢查並登記電話號碼，包含數字的文字和數字的讀法寫法，認識門牌和車號，看鐘錶和寒暑表等，買物付錢，查日曆，編簿籍頁數，記算菜帳，估計各種需用物品的數量，計劃開會的用費，登記和檢查各種用費等等，應盡量利用。各種活動增多，應用數和計算的機會也增加，教材愈見得豐富，能利用得法，這時的進步是很快的。教師可以隨時將實際活動的材料編為應用問題，同時也可以指導兒童自動搜集這些作為應用問題。當然，並非兒童所設計的每個問題都可以作為算術題材，可是一般日常生活的問題，不但適合兒童的經驗，而且可以增加各種用語的了解和使用，因此容易產生相當的功效。教師的判別去取自然極重要的。

四年級的兒童對於自動使用練習書，已經漸感興趣。他們能夠相互訂正；記載成績，填寫成績比較表；保管成績，作為最後比賽之用。這類工作他們已經可以自動去做。優良教師往往能夠充分利用這時兒童的自動能力，使學習能夠又活潑，又有興趣。

## 六 五年級(十歲至十一歲)

兒童以前的學習，教師仍須考查記載。加減乘的基本九九應該很快地加以複習。經教師指導的定時的練習，這時可以加多次數或時間。各項基本算法的熟練情形，教師須經常記載，每一步

驟不使兒童忽略過去。數數已經不應該再發現。兒童都應該計算得又正確，又敏捷，而且經過二三十分鐘的練習，不現疲勞。寫的應該整潔而又顯得謹慎。任何樣式的數字，讀寫都已經不感困難。這時兒童自學能力已相當的強，一切學習的結果應該大部份由他們自動去進行。使用課本，做功課應該省時而有秩序。簡單的應用問題應該自己能夠閱看了解，在規定的短時期內，作正確的解答。計算時能夠有一個步驟次序的觀念，並且歡喜和別人或自己比賽縮短計算的時間。

這一年裏，加減法可用比較用多位的數目。包含零的練習亦可加多。乘法練習可以擴充到各種方法和形式。乘數多位的乘法，每位的乘積，都能夠寫得合式，加得正確，並須多加練習。乘數二位以下的應用問題已可使用。複習除法九九，做簡單的除法練習。這一年裏除法應該特別注重。仍和以前一樣，各種方法的應用問題，每日由教師口述，讓全班共同討論解答，然後演算課本上或練習書上的應用問題。簡單的分數應用題也可以加以練習，不過其中所包含的分數須兒童所能了解的。

## 七 六年級(十一歲至十二歲)

像以前各年考查並列舉兒童過去學習的情況，仍然必須要做。無論算術課程如何簡單化，如何組織完美，少數一部份兒童

總不能對於必需的知識和算法徹底熟練。有些兒童從別校轉入，對於這種漸進的課程缺少某一部份熟練。許多計算技能的欠缺，主要原因大都是練習不夠。所以第一個月應該複習四則，注重演算的正確。這一年裏，爲了保持已經養成的習慣和促進以後的學習，可以注重以下各項教材：擴充乘法練習，注意包含零的各種計算和各種位乘數的乘法；簡單的除法練習，由被除數位數的逐漸增加，自然導入多位數除數的除法；簡單的分數四則練習。分數和錢幣已經熟悉，四年級結束時他們應該很會應用  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$  等分數，並了解其意義。給他們看  $5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}$ ，沒有一個人再答不出來。從一年級起經常有分數的練習，同時日常生活上和實測等方面的需要，從低年級起已經逐漸熟悉分數的意義和用處；五六年級只是增加分數的單獨演算，目的在使他們計算敏捷。所以這時已經毋須討論分數的意義，只是繼續把分數當作整數那樣的使用。應用題可以逐漸複雜，使兒童慢慢地會思考兩三個步驟的問題，和各種計算上所需要的字彙。有些問題，只須估計答數和決定算法，不必一定求出答數。生活所常用的各種名數的計算，這時也須加以練習。

學習遲緩的兒童可以集中注意於簡單的除法。除數多位數的除法也可以延遲。不過簡單的除法可以仿多位數的除法，將演算儘可能延長，如  $6 \overline{)135186}$ 。

像  $\frac{369}{781}$  一類的分數，通常都可以用除法計算，因此最大公約數，這時沒有學習的必要。

## 八 初中一年級(十二歲至十三歲)

初中和小學的算術必須保持密切的聯繫，其間截然的劃分是極有害的事。因此，兒童在小學時所已經學過的材料和學習的情形，仍須根據以前的記載和測驗的結果，詳細列舉出來。因為課程不銜接，結果使一部份兒童留級。留級只會使學習遲緩的兒童退步。有些年齡較大的兒童，沒有經過上述小學的課程，必須再有一番極實際的練習。教師應該依照他們的需要，給予相當時期複習算術。沒有充分的準備，不能立刻開始一般初中的算術課程。初中算術課程往往是為學習迅速的兒童設想的，因此對於學習遲緩的兒童必須有種種補救的教學。

分數和多位數除法應盡量增加練習的時間。不能假定這部份材料在小學裏已經完全學會。像上述小學算術課程，在某種意義上，確實將全部課程延遲了一些，初中課程應該依照這課程進度繼續上去。現在的小學，特別是由於課程的改進，留級和退級的情形已經大大減少。同時很少兒童，因為學業跟不上而中途休學，這是課程適合他們能力的緣故。因此，一般小學畢業生，若是不能立刻適應初中課程，初中教師貿然責備小學教師的失職，實

在是對於現在的小學課程缺乏認識所造成的。此外，現在的小學容納了各種各樣的兒童，決不是像過去只注重升學的目的。爲了適應多方面的需要，基礎的課程當然只能減少份量，簡化內容。這一事實，爲了有些地方的強迫教育，事實上已延長到十四歲或十五六歲，初中教師實有認識的必要。

初中一年級關於實際的應用問題的練習仍舊應該繼續注重。等式的應用也應該逐漸增加，作爲學習代數的一種準備。各種應用圖表的繪製和計算，也是學習代數的一種準備。分數的練習仍須和錢幣有相當的聯絡，然後再增加單獨的演算。複名數的計算已經可以側重於形式，不必完全取材於實際經驗。應用問題仍以活動和興趣爲中心。

開始學習百分比應該和實際活動聯絡，例如，將做對題數百分比畫成比較圖。小數的讀法寫法，和日常談話中小數的應用，應該加以練習。比較複雜的錢幣問題的計算，以及關於這方面的經驗，這時也可以多加注意。

### 九 初中二年級(十三歲至十四歲)

利用各種測驗，像以前列舉兒童學習的情況，仍須有詳細的記載。這種記載應該保藏起來，作爲以後的參考。分數和多位數除法須繼續練習。小數的計算可以逐漸加深。百分比和各種實用

算術可以正式教學，利用記帳，辦小銀行，開支票，作收支對照表，研究家庭和機關的預算等活動。聯絡社會活動和社會科教學增進兒童認識經濟問題的背境。初中二年級結束，應該熟悉百餘普通應用的算術名詞和術語。舊式教科書裏的銀行拆息，分期付款，公債股票，平方根，立方根等教材，大部份因為兒童缺乏經驗，沒有什麼良好的效果。照以上所介紹的算術課程，實施的結果，使優秀兒童到初二，甚至於初一，對於這類舊式教材已經有了良好的基礎。究竟這類教材應使兒童學到怎樣一個程度，那末不妨依兒童的了解程度和學習能力，作為取材的標準。若是有平方根的問題發生，教師可以加以解釋和示範，不必一定要求兒童去練習。編製預算常是小學高年級和初中一二年級一種適當有益的活動。通常比較優良的初中算術教科書對於四則都有相當充分的複習。有了堅實而穩固的基礎，才可以希望有良好的算術成績。因此新的算術課程莫不集中注意於基礎方面。



### 第三章 學習算術的困難

大多數兒童厭惡算術是一件顯而易見的事實。其原因，不待深究便可知道的，便是他們從計算上實在得不到什麼興趣，並且也不知道算術和日常生活有什麼關係。做算術使他們不斷地碰着錯誤，無形中養成了一種失敗的感覺。尤其使他們害怕的是應用問題，看到一個問題，簡直不知從何着手，彷彿其中有些神祕似的。事實上，要能夠解答教科書上的應用問題，須持續着長時間的注意，才可以把握問題；而且好幾方面的情形，須一下子都能注意到；各種不同的情形須不斷地加以判斷，希望有一個最後的決定；各種關係還須有一個輕重的衡量；最後好容易有了一個答案，還須校核一下它是否正確——這一切，試想能有幾個兒童辦得到。照我們傳統的教法去教算術，一般兒童實在是沒法使他們有興趣，這簡直是苦工。小學裏的各種科目，就所化的時間而言，沒有比算術再得不償失，浪廢時間的了。

有人以為造成兒童學習算術的困難，不外乎三方面的因素——課本，教法和課程。課本當然可以盡量求其精美合用，並且也應該這樣努力，可是這不是沒有限度的。它究竟不過只是一種工具而已，不能完全寄希望於此。教法，假使只把它看成一種技



術，當然也可以盡量研究改進，但是它決不能離開教育的對象——兒童。因此單就教法講，它也很容易技窮的。課程當然有很大的關係，可是究竟怎樣的課程才真正是好的課程呢？總之，假使不在兒童和算術的真實關係上去探索研究，而只是離開兒童，單獨去改進課本，教法和課程，壓根兒是隔靴搔癢。假使能夠從兒童心理方面去了解他學習算術的困難，那末課本，教法和課程的改進，才真正能夠解除他們的困難。

以下就兒童心理方面來分析學習算術的困難究竟是怎樣發生的。

### 一 智力與算術

現在一般算術教學的目標與標準，幾乎完全不適合兒童智力成熟的程度。它們只是表示成人對於兒童的要求；他們的要求集中於思想知識一方面。其結果只是產生兒童對於學習的反感，不能集中注意，不能引起努力，根本輕視他們的興趣。一個兒童能夠學算術，他先要會得思考，會得判斷，會得分辨，會得衡量，會得選擇，會得求證。不然他只有碰釘子。即使是簡單的計算，也要他的知覺，記憶，判斷的能力夠得上，否則，只有受着不及格，退級，休學一類的處分。分數的熟練，應該等待智力成熟到哪種程度，才辦得到？多位數除法應該什麼時候學習才適宜？這一類

的問題，直到最近才有人提出，向來只有認為兒童應該學習分數和多位除法，什麼時候才應該，那是不成問題的。經過華虛朋的研究，現在才知道，多位數除法，放在六年級教，比四五年級好得多；分數熟練若放在初中一二年級比通常放在五年級更為合適。平常一般四五年級的算術課程，比兒童智力成熟的程度，大致要超過二年。課程上所需要兒童智力發展的速率往往比他們實際的發展來得快。而且，課本上的應用問題，只有極少數是單純的算術問題。它們所包含的，除出數的運用和數的知識，還有各種生活上的經驗，對於事物的思考，並且要作抽象的思考。試想每打鉛筆值三元二角，六打要多少錢，唯一的刺激是課本上的文字，或教師口裏的聲音，這和實際去買鉛筆，袋裏取錢去付，兩種情境是何等的不同！學校裏實際的學習，其進步的速率，大致只及標準上所規定的進度的一半，但是標準年復一年地保持着不生疑問。極大多數的兒童一年一年地跟着標準跑，他落後到一個什麼程度！最不幸的自然只有被淘汰，而學校還以淘汰他們而沾沾自喜。學校所重視的，往往只在學習的分量，這種分量是否與兒童的能力配合便不問了。

以上的情形還是就一般中智（智力商數在100左右）的兒童而言。普通一般下智的兒童，對於現在的算術課程幾乎完全是不勝任的。雖然算術能力差的不一定都是下智兒童，可是下智兒

童在他們的實足年齡，學校所安排的應該學習的算術課程，他們幾乎全部不能學習。有些教師，對於下智兒童，提早算術的教學，事實上因為他們的身心發展配合不上，結果也是徒然浪廢時間，奪去了他們其他有益的學習的機會。毛登(Morton)曾經用過推理測驗 (reasoning test) 測驗三類智力不等的兒童，結果是，智力商數 117 的一組，推理分數平均 24 分，智力商數 100 的一組，推理分數平均 18 分，智力商數 72 的一組，推理分數 12 分。雖然算術能力與推理能力不是完全相關，可是它們之間有着正相關，是可以無疑的。下智兒童的推理能力低，他們學習算術決難和中智上智的兒童用同樣材料，同一進度，當然也是無疑的。因此，即在同一年級，算術課程也需要分化，以適應各種智力不同的兒童。對於學習緩慢的兒童，須大大減低課程的要求。他們所須學習的最低限度的教材，只是些簡單的，實際的數量經驗，如買賣，記帳，測量，數字讀寫之類，並且也必須適合他們可以學習的年齡。

即使是中智上智的兒童也需要心理上有充分的準備，才可以正式學習算術。當然下智的兒童更其如此。當兒童在某一個年齡，只會做遊戲，看圖畫，收集和玩弄東西，數數，計數，問些他們所見到或想到的問題，開始可以用些簡單的符號去思想，或者只有些幼稚的判斷與分辨，這時候便要他們學習千種以上的關於

數量的事實，雖然也有極少數兒童竟能有驚人的成績，但是大多數卻不斷地發生無窮的困難。假使不在開始的時候，注意到『哪一個兒童在心理準備上已經可以學習算術？其次一步應該怎樣進行？』那末，必然有接二連三的困難與失敗在等着出現。年幼的兒童最初有的一些關於數的知識，都是泛泛的，不正確的。有些兒童甚至還不曾接觸到數的事實，已經要他們學習課本上的數字，這種強使他們從事實立刻轉移到符號，或者躐過事實，一下子就學習符號，這基礎是如何的空虛？以後的困難當然也就源源而來。一年級兒童化了多少時在學習這幾個數字的符號，抄黑板上抽象的問題，寫下不知所云的答數。有人說，低年級過早作算術練習，結果養成了扳指計數，猜數，轉輾作間接的解答等惡習慣。到了高年級，因為種種不良習慣的束縛，使他們感到莫大的紛擾與困難，因此又必須重新教學。

過去有一種流行的見解，認為有些兒童因為心理或生理的特殊狀態，他們根本上不能學習算術，彷彿定命的缺少算術能力。最近根據算術心理的研究，知道這種見解實在是無的放矢。正像閱讀一樣，即使最嚴重的能力短缺，都是由於習慣，經驗或一般智力的原因。所謂『數盲』（number blindness），除出極少數病理現象的情形以外，也可說是由於過份缺乏教學或一般智力低下的緣故。有些常態兒童，算術能力顯得特別落後，經過

適合他們需要的教學，態度可以改變，算術能力也便有進步。有時也有智力很高的兒童，但是他們卻缺少一般年齡，經驗與學習環境相同的常態兒童所能保持的算術知識。普通情形，算術能力低下的女生比較男生多，而且在學校裏年數多的較年數少的也來得多。因此，可以說算術能力的低下，有各種不同的原因，卻不是定命的必然低下，與一般智力當然有關係，卻沒有絕對的關係。比較重要的原因還是教學不能與智力的發展相協調，缺乏心理上充分的準備的緣故。

## · 二 性格與算術

算術的學習，和其他科目一樣，可以由性格，學習狀況，工作習慣與學習態度而影響其成敗。態度常常又是受着家庭或同伴的影響。有一個研究，發現兒童學習算術的失敗一部份是由於母親的寵愛。兒童的智力成熟的程度，雖然儘可學習算術，但是他們卻缺少努力，注意散漫，沒有學習的習慣，從來就不希望達到可能達到的標準。家庭確乎有時造成兒童對於算術的厭惡，無形中養成了一種反抗的態度。父母或是爲了自己算術能力的特別欠缺，或是對於算術有一種很深的反感，使兒童受了薰染，以爲算術是不能學習的功課，因而使兒童愈感覺困難，愈加深偏見。情緒上的固執，對於任何教學的拒絕，缺乏自信，恐懼失敗，演算

注重速率時神經的緊張，厭惡與不能專心等等，都可以造成失敗。有些兒童的性格，顯得躁急，忙亂或是神經不安定，有些兒童，倔強執拗，反抗不馴，或過分自克，或神經過敏，這些情緒上特殊的傾向也都能容易造成學習算術的困難，除非他們具有非常的智力。

### 三 學習的遷移

對於學習遷移的疏忽或不認識，也是造成兒童學習算術發生困難的一個因素。加法與減法，乘法與除法，其間關聯很密切，但是教學時都是分別進行，不相聯絡。教材上既無聯絡，教學時亦無聯絡。兒童偶而表現有舉一反三的遷移能力，教師也往往不加关注。應用問題的解答，需要很多的遷移，可是經過幾年計算方法的教學，一旦便跳到應用問題的練習。即使問題能充分適合兒童的經驗，可是對於各種方法的關聯，向來缺少注意，也足以造成解答的困難。知道什麼時候用乘法，假使不和應用問題密切聯繫，沒有特殊的練習，別說教室以外不會用，便是在教室以內也很少會用的。乘法必須經過各種各樣的情境之中去使用。除非數字的排列，問題的形式等各方面都使兒童有充分的機會運用乘法，兒童對於乘法便很難會通，他的反應都是零零碎碎的，決難知道怎樣在一個生疏的情境之中去運用乘法。 $3+9=12$  和  $13+9$

$=22$  或  $23+9=32$  是不相同的問題。 $5+6+4$  和  $\overset{5}{\underset{6}{4}}$  的形式也不

相同的。 $6 \times 7$  和  $\overset{378}{\times 6}$  的難度也不相同的。問題的性質與形式不相同，問題的難度不相同，每一問題必須都熟練，才能夠會通，才顯得轉移的功用，才有希望達到舉一反三的最後成功。再如，

$\overset{13070}{\times 250}$  練習之後， $\overset{13070}{\times 250}$  仍須練習， $13,070 \times 250$  亦須練習，這

樣才能認識一種方法的同中之異與異中之同。在多種練習之中，能得同異的要點，某一種方法才可以說得上熟練。當然智力高的兒童，遇到新異的情境，比智力低的容易有遷移。但是這也並非說智力高的兒童不必經過各種特殊的練習，因為遷移的難易是一回事，遷移必有賴於各種方式的練習又是另一回事。一個方法的各種方式，其中有一個是基本方式，例如上舉的  $3+9$ ， $6 \times 7$  和

$\overset{13070}{\times 250}$ ，必須先使基本方式得到澈底的了解和熟練，才可以學習

其他各種變易的方式。基本方式愈熟練，當然變易方式也便當。因此，目前兒童所發生種種的困難，在遷移方面的原因，第一是由於基本方式不熟練，第二是由於各種變易方式的疏忽或不齊全，造成了一種散漫生疏的學習。其他各科當然也有這種情形，算術方面更其顯明就是了。



## 四 教學法與課程上的錯失

許多算術上的困難都由於教學上忘記了學習算術的兒童。因此，將算術看成一種形式的與生活情境不相聯屬的學科。有一個調查報告，大多數小學裏只有百分之三的教學是關於算術在實際生活上的應用與意義。此外都是單調無味的練習。有些學校，百分之八十五的時間集中在基本九九的練習，只有不及百分之十五的時間教學其他方法。叫一個兒童到黑板上去演算，其餘兒童在下面看着，這已經是一種流行的好方法。俗語所說『車子放在馬前面』，這是好久以來對於算術教學的一種恰當的批評。機械的演算做了幾年，才將計算方法應用到實際問題上去。因為向來不注意應用，不但使兒童無法利用計算方法去解答教科書上的虛幻問題，即使他們自己的極簡單的問題也無法利用。

練習的材料與進度，全班都是一律的；進展不是過速，便是輕輕掠過，完全憑着教師的意見與向來的習慣去決定。有些兒童在某一方面的計算技能確乎是成功的，但是也只可說使他進行次一步驟不發生什麼障礙，至於這一種技能本身是否穩妥堅定便難於保證了。因為如其是充分穩妥而堅定的話，決不能單從機械的練習上去得到的。有些教師在整年之內只集中在一方面的教材，雖然詳盡無遺，可是其他方面也便疏忽了。總之，一切學



習，無論透徹的程度怎樣，畢竟是偏頗不全，支離破碎，而且只是爲計算的方法而學習，其他許多重要方面都是遺漏了的。那末教師何以不能從開始起便將整個算術的範圍按步就班地進行呢？何以他們要急躁地將材料向兒童注入呢？這是由於行政當局，甚至於家長，有形無形地要他拿出成績來，他們自己也要求教室裏經常的有着緊張的學習空氣。其結果卻造成了教室動亂不寧，兒童不停地捏弄着橡皮，鉛筆，紙張，摸着袋裏的玩物，偷看小說，做白日夢，胡思亂想。學期結束，兒童竟有將教科書焚燬，毆辱教師的事情發生。

在這種惡劣的情形之下，新的改革當然也逐漸出現。放棄了舊的課程，算術完全根據兒童的經驗與興趣。這些學校的一二年級已經沒有正式的算術時間。有一位新式小學二年的教師，有人問她希望兒童做些什麼作業，應該用怎樣一種課本。她回答說，只須看看教室，便可發現一些自然學習算術的情境，鐘可以讓兒童看時間，膳食表要他們將每日吃的多少東西填上去，尺要他們量各樣東西，寒暑表要他們看溫度，各種玩具，有的可計數，有的可以比大小，長短，輕重。任何教科書與補充材料，她都不希望採用。這種新式的活動課程，固然有它的許多優點，可是也有若干問題有待於解決。例如，活動課程是否只須兒童有少量計算的技能便夠了？隨機教學能否證明比較系統的方法更爲有益？怎樣

保持兒童各年級學習的連續性？問題教學法或設計法是否對於一切兒童都同樣有利？兒童能否得到充分練習的機會，使他們所學習的習慣能夠固定？學年終舉行的標準測驗有些什麼結果？已經養成的良好工作和學習習慣是否可以引致以後學習算術的成功？是否兒童的學習算術的興趣便可作為教學的依據？小學用了新方法教學的結果，兒童進入中學，算術成績更好，還是更壞？能否以後和受舊法教學的兒童相比？這些問題當然需要更多的試驗來切實解答。目前所發現的缺點已有這樣幾點：缺少經常的循序的教學與練習；不容易按日作規定的練習，因此計算的習慣不能堅固保持；對於各種不同的算術經驗，設計法只能供給一小部份的經驗；一般工作的習慣不免散漫無序；時間也顯見得浪廢；學習遲緩的兒童少能利用新的學習機會，對他們的指導也常常不夠；簡單的像計數一類的習慣，在非正式的練習中固然養成得很好，但是較複雜的技能因此便遲誤了。新近根據算術心理的研究，又有人提出另一種相反的主張，認為基本九九之類的技能，能越早養成，那末後來學習算術成功的可能也愈大；而且認為有系統的算術教學較為有益。這兩點，無論新式或舊式的教學事實上都同樣是疏忽的。由於這種疏忽，因此學習效率只有表面的提高，而實際是低落的。

## 五 其他因素

兒童學習算術的困難可由智力，性格，學習，教法等各方面因素而造成，當然這是爲了研究與說明的便利，才有這樣的分析。每個兒童是一個整個的人，他在算術裏所發生的困難有着各方面的因素，而且各人都不同的。認識這一個根本事實，可以使我們了解學習過程決不是什麼空想與偶然的事，而須依循着確定的原則；並且這樣才可以使我們了解個別兒童的問題。當然，除出這些屬兒童與學習的本身問題以外，其他還有若干外在的因素，那些因素必定仍然因人而異。最普遍而又有相當重大影響的，例如缺課，跳級，每班人數過多等，無形中也增加了不少學習上的困難。

長期缺課影響學習的落後是顯而易見的。對於智力較低或學習緩慢的兒童影響更大。學期中教學已經進展到相當時期的缺課比學期開始時的影響，當然也較大。跳級或轉學，使學習突然感到生疏，種種方面須有新的適應，若是缺乏特殊的指導，也往往容易造成學習上的困難。四五十人以上的班級，學生的智力經驗的差異更複雜，教科書的用處更加顯得重要，教法不得不更趨於形式化，管理的問題增多，教師也更辛苦，一切都加深了本章所舉影響學習困難的各種因素，因此這問題實在是很嚴重的。

有人以爲上智與下智的兒童一處教學，可以使下智的兒童受到激勵，事實上卻並不如此。下智的兒童常常失敗，只能減少自信，增加困難。各種外在的因素，因爲較易改變，所以也容易着手補救。若是這些方面也難於改進，那末對於以上所舉各因素自然也就不免存着自欺的藐視了。

## 第四章 診斷和補救

任何一個複雜的學習問題，其中所包含的困難之點，很少是顯而易見的，必須經過仔細而謹慎的診斷，才能明白。教學上的許多錯誤，不經過診斷，不發現兒童學習困難的真正原因，補救和改進勢必無從着手。增加練習和懲罰獎勵，事實上沒有什麼用處。發現了兒童在學習上有重大的困難，這種困難大都不是臨時出現的，實際上都經過長期的醞釀，有各方面的因素湊合而成的。舊時的教學都是個別進行，而且都用口述口答，也許診斷還不重要。現在的大班教學，靜的學習，筆寫的作業，兒童有什麼錯誤和困難，教師不易注意，因此診斷便成爲必要的了。

新近一般關於算術的診斷，只是使用某一種測驗，將兒童的困難臚列出來，這不但範圍過狹，而且只知病象，不知病源。兒童智力的發展與課程的要求是否相稱；性格以及兒童對於算術的好惡，家庭的影響等方面對於學習算術有些什麼關係；兒童在以前的學校裏的學習情形怎樣；缺課的情形怎樣；練習的分量，教材的進度等方面有些什麼問題；全班兒童一般的能力怎樣，這種種問題，如其要能比較確切地診斷出兒童的困難，都應該歸入診斷的範圍。診斷的方法，可以使用各種正式或非正式的測驗，可以

和兒童談話，詢問一切有關的情形，可以用問卷徵集家長或年齡較大學生的意見，可以研究各種有關的記載。

### 一 診斷測驗

爲了要認識兒童學習算術的實際現狀，不能不採用一種詳細而合用的測驗。測驗的結果，可將全班和逐題的分數作詳細的分析。從這種分析裏，可以大致認識全班程度的大概情形，和每個兒童在班裏所處的地位，以及能與不能程度，可以作爲次一步診斷的根據。這種分析不但對教師與兒童都有利，而且因爲知道了個人的欠缺，教學也可以知所輕重，時間也自然節省。根據測驗的結果，哪些兒童需要特別指導的，便可選擇出來。大致在全班分數的分佈上，底下三分之一或四分之一的兒童都需要作進一步的診斷研究。這進一步的診斷要決定兒童具有或缺少哪些算術的能力或一般的能力。對於特別落後的兒童，必須就上章所舉各方面的因素，詳細研究所以發生困難的原因。關於兒童一般的能力，可以用皮納智力測驗，去認識其大致情狀。測驗裏有疑問的題目，更可叫兒童個別的重新口述，並叫他說明逐步計算的步驟，以明瞭其思想的程次。根據測驗結果，所臚列出來的兒童算術能力，也許有錯誤或不可靠的地方。繼續研究以後，應該重列一次。將兩次所列出的單子，一同作爲根據，可靠性當然要更加

大些。這種列舉的項目大致可以包括以下這些：(1)基本九九：加、減、乘、除。(2)百位數以上的四則。基本九九會做的兒童，百位數以上的四則是否能做，不能推想他一定會做，必須亦加以測驗。計算時應注意速率，一切錯誤，包含零的計算，各種特殊的，習慣性的算法。(3)四則式題的計算。各式例題應作口述的回答。觀察各位數字相加時，眼球跳動的情形，進位，退位，零的處置，以及較大的數的計算。(4)橫式立式各種符號的使用。(5)關於數的知識與字彙。(6)數字與數的文字的書寫。(7)用數字與用文字讀各種的數。(8)閱讀包含數字與數的文字的讀物。注意速率，了解，與眼球跳動的情形。(9)解答應用問題。應作口述的解答並說明如何解答的方法。(10)解答口述的應用題。以上各項材料的測驗，無論時間上可加以限制，或不限時間，兩種測驗均須舉行。教師須觀察並記載一切的反應，須判斷兒童怎樣求得正或誤的答數。兒童怎樣對付問題的方法比求得的答數更有意義，因此更須注意。各種測驗上屢次出現的錯誤與不做的題目亦須注意。

測驗材料應力求齊備普遍，包括各類題目，題數亦須充分，題目難易距離要大。若有測驗時間的限制，那末只須一類題目，卻是應該包括全部算術的範圍。現成測驗的選擇須求材料可靠與內容齊備。為適合實際應用，可參考已出版的優良測驗自行編造。團體測驗當然時間較省，但是為了個別兒童的困難須作深



細的研究，個別的或口述的測驗亦須兼用。兒童於測驗時，任何發聲的反應均須仔細記錄。測驗材料和記載等必須保留。

口述的方法，正如朗讀一樣，是診斷測驗中必要的步驟。口述可以知道被測驗兒童反應的快慢，可以發現他遲疑，錯亂，反覆，失落，無序等情形，以及處理問題的方法與是否需要鉛筆幫助。口述解答應用問題，可以看出閱讀的困難，緩慢，無序等情形，以及朗讀數字和名詞的能力。若是讀音發生困難，那末便可以知道他對於了解的欠缺。如其題目的範圍能儘量擴充到算術教材的至大限度，同時又採取口述的方法，這真是最理想的診斷方法。假使時間是限定的，那末只能採用兒童最容易錯誤的一部份材料，可是測驗所應該包括的範圍卻仍不宜於忽略。測驗時應準備各種需要的材料，如卡片，量尺，錢幣，日曆，黑板，粉筆，鉛筆，紙張等等。卡片對於測驗基本九九是很有用的。若是回答緩慢，可以記錄每一次反應的時間。並且同一卡片材料，可以重覆若干次，使測驗的可靠性可以增大。此外普通字彙測驗可以測驗閱讀緩慢和字彙缺乏的兒童。智力測驗可以看出兒童智力的程度。

## 二 其他診斷方法

教學上的診斷有三個目的，第一，要確定學習低劣的情狀究竟怎樣；第二，要考查學習成敗的範圍究竟怎樣；第三，經過詳盡



的研究，要發現學習的困難和成績的低劣，其原因究竟怎樣。第一二兩個目的，可以憑測驗的結果與精密的分析研究去達到。第三個目的，若只憑測驗的結果是無從了解其根本原因的。因此，便必須另有其他診斷的方法。這些方法包括各種記載的研究，詢問兒童及其友伴，訪問家庭，觀察與實驗。

各種記載表包括學期成績報告單，學籍表，兒童過去進過的學校所有的各項有關表冊。這些材料當然是很雜亂的而且可靠性也不大。不過爲了要明瞭兒童過去學業和品性的歷史，除出這些記載，幾乎無法調查。在目前一般學校的記載都很草率零亂的情形之下，希望自必有限，但是一鱗半爪，也許可以看到些線索。偶或有些歷史悠久辦理認真的學校能夠供給些比較翔實的記載，如缺課登記或入學成績之類，那當然是可貴了。若是某些兒童的過去歷史，已知其大概，那麼就所需要的各問題，擬成極少暗示的問卷，分請他們的親友，家屬與以前的師長填寫，經過仔細分析，更可了解他們的各種情形。家庭訪問，如能謹慎仔細進行，不但對於兒童實際生活環境，可有進一步的認識，而且父母或保護人無意中對兒童的態度與意見，實在是極可貴的資料。兒童在功課上發生了缺陷，能夠了解他在家庭裏的情形，至少在原因上可以找到相當的佐證，這類資料不經過訪問，是很難得到的。若是賢明的家長，能共同參加研索其原因，那是更可貴了。平

常對於兒童學習情形的觀察，如發問，做習題，測驗，平時有關計算的行為如買東西，繳費等等，仔細觀察其動作，亦可發現許多跡象。當然這種常識的偶然的觀察，其可靠程度很不定，只能供給若干旁證。更為客觀可靠的觀察，必須限制條件，控制情境，在某種確定的狀況之下進行。例如在規定時間之內，令兒童看了卡片計算，在時間，反應和一切動作等方面都詳細記載。預定的問話，可以在適當時發問，仔細觀察他的反應怎樣。這種觀察，觀察者自己必須有相當的經驗，對於需要觀察的方面須有充分的準備，記載的方法要熟練，這樣才能求得有利的結果。實驗是就某一兒童的困難，詳細考查的結果，認為真正的原因尚不能確定，因此，抉擇某一有代表性的問題，利用以上所舉各種方法，作極精密的控制，經過相當時間的記錄，探求這個問題的答案。這種實驗，當然非平常教師所可能，大都由專門人員負責。現在關於算術心理的各種結果，多數便由這類實驗而來。教師至少須經常留意這類實驗報告的結論，有時與本班兒童的切身問題是很有關係的，應善為利用。

### 三 補救方法

在平常情形之下，對於成績特別落後的兒童，其困難所在，其原因怎樣，在有經驗的教師，是相當容易發現的。問題卻在如何補

救的方法。補救的方法，充其極，不過是應付一種特殊的困難，完全是爲了學習的不適當而實施的。若是教室裏教學情形能夠積極改進，那末補救便可減少。目前種種補救的方法，無非是對付流行的固定課程和不合心理發展的教法的一種反響。因此，一切的補救還須多多注意預防種種學習困難的造成，使教室環境，教法，目標與作業指定先有積極的改進。消極的方法，如譴責，恐嚇，懲罰以及『關晚學』與增加家庭作業，都是罪不應得的辦法。留級與重習也只是浪廢時間。補救無非就學習上發生困難的兒童給以重新訓練。重新訓練當然比初度的訓練要困難，因爲錯誤的習慣必須改變，不良的態度必須矯正。而且也不在使受補救的兒童能夠很快地趕上全班一般的程度。在一個相當長的時期裏，要使他習練一種技能，養成一種態度，逐漸能夠達到滿意的成績，使他能繼續作有效的學習。

補救的方法當然應該根據適當的診斷，而對症發藥。診斷結果所發現的學習缺陷，明瞭其性質與原因之後，才可以設計一種合適的補救辦法。可能的時候，應該和專家商討宜於採取怎樣一種材料與方法。一般教師往往只見到算術成績的若干方面，一般學習的原則便少能注意。例如，某一兒童對於分數除法常常攪擾不清，教師只認爲他上課時不注意，在家裏不做功課，或是不歡喜學分數。其實這都不過只是些現象。若要明其究竟，必須在學

習與行爲方面有些更深的了解。

計劃與進行一種補救的辦法，以下幾方面應該注意：(1) 決定了適當的補救辦法，應該始終依着順序進行，不能容許任何例外。(2) 方法須力求簡單，使工作，時間與材料盡量單純而有系統，以免不重要的材料浪廢時間，良好的習慣才可很快養成。(3) 教師的態度須樂觀。從改進的結果上規定合理的目標，一切學習能依照目標有條有理地進行。(4) 避免過分的樂觀，不要將兒童的能力估計得過高。(5) 補救的目標與標準須有十分明確的決定。(6) 開始時須用兒童經驗範圍以內的普通問題，讓他們最初覺得工作輕鬆愉快，有繼續再做的願望。(7) 常常考查學習的結果，用明顯的記載將進步表示出來，讓兒童自己也會覺得有進步。(8) 「儘箸裹粽」，量布裁衣。照着兒童現在的能力與算術的實際程度去指定作業。(9) 不要替兒童思想，任何時候都讓他們自己判斷，讓他們表示自己能夠獨立。每次工作時間盡量讓他們有自動的機會。(10) 算術時間只是專作計算技能的改進，同時在其他各科教學方面，可注意一般能力的改進。(11) 測驗用的練習材料須盡可能預先準備，切忌臨時準備。(12) 用一切可能的方法，引起學習的動機。竭力稱贊他們的成功。小錯誤可以不管。避免情緒上的刺激。(13) 充分使他們應用，讓他們自己從應用上去發現算法的意義。(14) 除出作適當比賽的時候，不要將每人的成

績和別人比較。

補救教學最重要的原則是讓兒童自己對學習的結果能夠負責。這當然須依兒童的年齡與智力應有所不同。平常十歲的兒童都可以讓他保管自己的材料，保管和記載成績進度表，記錄指定的作業，核對自己或別人的答案並記載成績，報告練習的時間。對於成績低落的兒童，雖然他們一時也許不能完全做到這些，但是必須信任他們自己會做。兒童自己逐漸能夠對學習的進步與錯誤負責以後，根據成績的記載，他們慢慢地會自己規定以後的作業。惟有循此途徑，才可以希望他們變更習慣，改進技能。要達此目的，一切補救的實施當然都須是個別的，或是將少數困難大致相同的兒童合為一組。教師對兒童的同情以及對他們的心理狀態的了解，在正常教學上已經很重要，對於補救教學，幾乎是決定成敗的最要因素。

## 第五章 計算方法的改進

### 一 計數的習慣

用手指計數是小孩子的一種自然的動作。我們問他有幾隻手指，要他伸出手指來表示幾歲，都給了他使用手指計數的鼓勵。我們的數字制度也是根據這手指計數的原始傾向而來的。小孩子既有十隻手指，用它們來計數實在是勢所必然的。從發展兒童早期數的感覺方面講，用手指計數的傾向，不但應該完全承認，而且是絕對必要的。可是爲了培養計算技能的正確與速率，這種計數方法終於必須放棄。用手指計數對於計算速率的妨礙，正如朗讀妨礙閱讀的速率一樣。要小孩子算一加二，他立刻可以答出三來。若是要他算九加七，他也許要扳着手指，慢慢地算出十六來。要養成這十六也像三那樣立刻說出來，自然不是立刻可能。不過假使需要手指幫忙才算得出來，九加七和十六之間便難構成一個直接的結合，所以手指計數必須先放棄。

要放棄手指的幫助，也許還須經過一個部分計算的過渡。例如要他算三加四，他會說『三加三是六，再加一是七』。這種迂曲費時，而且笨拙的方法，只可說是一個過渡，最後仍然應該放

棄的。若是過早開始給兒童做計算的練習，那末他不得不依賴計數，甚至於做數目比較大的加法也仍然要靠計數。假使在短時期內更要很快地教他們做全部加法九九，那末簡直鼓勵他們用計數方法，而且已經養成的簡單的加的結合，也會被破壞的。因為兒童的智力與以往的學習經驗，各人都不相同，有些兒童在這方面的問題更較嚴重，需要教師極大的細心與耐煩。錯誤的習慣養成以後，要破除這種習慣，反而更麻煩費力了。

用實物幫助計算，若不適可而止，愈鼓勵得多，計數的習慣愈牢固，對於數的結合的反應愈不利。用木棒，水果，書本等等，學習三加四，對於養成數的概念當然有幫助，可是對於自動的直接的三加四是七的結合便受了障礙了。這其間需要教師的機智是很大的。教師容許兒童有計數的習慣，我們不能否認，因為三四十個兒童在一起，他的注意也難於周到。即使他不容許，兒童在家庭裏也難免不養成這種習慣。因此，教師應該努力的是怎樣減少兒童的計數，慢慢地讓他放棄這個習慣。

要使兒童放棄計數，一二年便不應該有正式的算術教學。二加四，一加三等等的結合，用不着多費時間，在經驗裏，他們儘有自然的機會可以學習。只須有少數的結合，偶然做些練習便可以了。正確的結合沒有造成以前，切忌注意速率。練習片，一面寫着兩個相加的數，一面將相加數與答數都寫上。給兒童看了相加



的數，讓他有一個記憶的機會，然後再給他看答數。若是結合還未牢固，便要求他算得快，勢必令他不得不用手指幫助。練習片的使用最好是個別進行，在團體之中，難免使一部份兒童來不及想。總之，初步開始，數的結合必求其直接，自然而牢固。計數的方法，雖不能亦不必避免，但到適當的時機必須要轉移到數與數直接的自動的結合上去。

## 二 寫數字

大部份教師不認識兒童寫數字的困難對於學習算術的不良影響。小孩子的寫字是一個緩慢而煩難的發展，他對於數的思想比數字的書寫要快得多。他想的是一個0，但是可以寫成一個2。教師只憑他的寫，卻看不到他的想，因此便確定他錯了。而且小孩子往往將數目倒寫。13寫成31，教師告誡他，先寫1，再寫3。他回答說：「我是這樣寫的」。事實上他確是先寫1，後寫3，不過將1寫在右面，3寫在左面就是了。假使常有這種倒寫的情形發生，最好讓兒童自己將答數和練習片對照。數字寫不端正，應該專作練習，在算術練習時，只能要他寫字謹慎，卻不能便作為練習。當然專做的練習，也不能定時的，作枯燥無味的書寫，應該也像寫字教學一樣，有練習的動機與適當的材料。一般偏重速率的演算測驗，往往造成數字的誤寫。口述的速算測驗多多舉



行，可以防止這種錯誤。另一種常有的錯誤，便是將數字的地位寫錯。這是大都由於練習時欠注意的緣故。先須引起兒童數字地位正確的重要，練習時要他們注意集中，而且答數地位寫錯的題目，不能認為做對。

### 三 計算的一般錯誤和困難

有一種相當普遍的觀念，認為凡是計算的錯誤都是極特殊的，因此矯正起來必須每個兒童分別進行。事實上，同類的錯誤一再出現。有經驗的教師大致料得到一般兒童將會發生哪些錯誤。教學時做過診斷工作的教師，看了某些錯誤，可以曉得大致在哪些時候出現，哪些兒童最容易犯哪種錯誤。這些一般的錯誤有這樣幾種：(1)計算手續上的錯誤，或符號弄錯；(2)計算錯誤；(3)猜想和不當心；(4)數字寫錯；(5)間接的解答和使用輔助的記號；(6)計算手續上關於零的錯誤；(7)扳指一類的計數。有一個研究發現三年級兒童常有的錯誤是計數；間接的解答，如「三加三是六，再加一是七」之類；猜想和回憶正確的答數（回憶正確的答數，例如  $\overset{3}{+}4$  已經會做，看了  $\overset{13}{+}4$ ，不能直接寫出 7，而回憶到以前的  $\overset{3}{+}4$  才知道 7）。

各種錯誤的發生常是起因舊習慣的干涉，舊習慣障礙着新

習慣的形成。例如把除號( $\div$ )當做減號( $-$ ),把乘號( $\times$ )當作加號( $+$ )。年幼的兒童,以前怎樣教他,養成了習慣,便只會這樣反應,例如以前做的加法都有加號,後來碰着不用加號的加法便感覺困難了。可是日常活動裏任何一種問題,都是沒有符號的。算術的計算必須經過正確的練習,使它最後能成自動的反應。達到最大的效率時,計算時口裏不但不出聲說着『五加八是十三』,而且即使不出聲,喉頭的肌肉也不顯出收縮,甚至於不能想『五加八是十三』;必須聽到五加八,或看見  $\overset{5}{+}8$ ,立刻會有 13 的反應。能夠直接反應,才算達到了最高的效率,可是很少兒童能夠達到這種程度。除非兒童對於大部份的基本九九都能有直接的自動的反應,做應用問題時便難免發生困難了。

另一個錯誤的來源是舊教材還不會相當熟練,便進行新教材,往往容易引起錯亂,產生許多學習上的困難。例如,基本九九的習慣還不牢固,便教位數較多的除法,兒童沒有什麼準備,徒然造成許多紊亂。計算上大多數的困難都發現在三年級以上的兒童,這因為教師假定兒童基本九九已經熟練,亦不經過考查,便開始新教材;在新教材裏有許多形式,以前都不曾有過練習,困難便自此發生。最不幸的,從此又養成了若干不良習慣。

教材上有一個引起人注意的問題,便是基本九九裏是否有若干結合是比較困難的。多數研究都指明確是這樣,可是各種結

合的不同是在所需練習份量的多少，而不是有些結合原本是比較困難的。因此，正確的教學，練習作適當的分配，同時，特殊的地方有相當的注重；這三方面能加注意，現在的許多學習上的困難都可以避免。

大多數研究基本九九的錯誤所根據的材料，都是高年級兒童的計算。他們已經學過五六年的算術。另一方面，低年級兒童對於各種基本九九結合的練習，時間與分量的分配是很雜亂的。

若是  $\overset{9}{+7}$  和  $\overset{2}{+3}$  有同樣分量的練習，這兩個結合的難易便可無

甚分別。可是練習的分配，即使在校內，能夠盡量注意其勻稱，但

是校外的練習機會終難控制。因此大家都承認  $\overset{9}{+7}$  比  $\overset{2}{+1}$  難，這

個可以由於  $\overset{9}{+7}$  的練習比較少，亦可以由於不容易計數。通常在

教材本身上除  $\overset{5}{+5}$  以外，進位的都比較困難； $\overset{4}{+4}$  與其他便於計

數的一些結合，便比較容易。包含零的乘法和除法所以常常使兒

童困難，這因為兒童將每一個數字都認為有一種實在的意義。若

是把零也作為有實在意義的一個數字去教，困難自然便發生了。

原始人沒有零的觀念，也因為他們的數目觀念只限於感覺到的量，此外，超出他們實際感覺之外，他們也就沒有這種觀念了。

假使算術只包括簡單的基本九九，那末教與學也比較容易

了。可是算術除出加減乘除的九九以外，還需要思想上能夠運用這些算法，能夠從心算上求得結果。因此在計算上兒童所應有的注意，記憶與想像也便很大了。

#### 四 加法

在經過多年訓練，有了好多經驗的成人看來，是何等簡單的事，對於初學的兒童實際上是極複雜的。據桑戴克的分析，兩位數的加法至少包括這樣八個主要的方法：(1)排齊數目的位數；(2)記住每位數目相加的結果；(3)將看見的數加到想着的數上去；(4)每一行數目裏有空的地位不去管它（如  $\overset{14}{+9}$  加數十位的地位既沒有數，便不去管它）；(5)逢着零，聽任它去，（如  $\overset{60}{+15}$  或  $\overset{40}{+30}$ ）；(6)個位數相加能應用到十位數相加，（如  $\overset{8}{+5}$ ， $\overset{28}{+5}$ ）；(7)個位數相加以後，寫在和的個位上的數，知道這是表示位數，不像單位數相加那樣便表示和數（如  $\overset{6}{+3}$  和  $\overset{16}{3}$ ，兩個 9 所表示的意思是不同的）；(8)進位。主要的方法雖只有八個，可是兒童實際所發生的困難卻多了許多。據好些人的研究，兒童所最多發現的加法上的困難有以下這些：(1)在計算方面，如加九九基本

結合上的錯誤；有零的加法；直式方面的錯誤；橫式方面符號不明的錯誤；答數寫的地方不對；忘記進位或不必進位而進位；將同一數加了兩次；連加法失落加數；連加法不能暗記部份的和；進位時加錯數目；一行數目不能依次加下去，跳着加；三十誤作四十，一百誤作二百那樣的跳越；一部份加好以後，反覆重加等等；(2)其他計算手續方面：因計數而遲緩；用別種方法做加法；數字看錯；(3)數字書寫方面：答數寫得歪斜；答數倒寫，如 13 寫成 31；數字反寫，如 3 寫成 8。這種種錯誤，各有原因，應先明了其原因，或由於習慣的不好，或由於知覺或記憶的錯誤，或由於算術知識的欠缺，或由於注意的鬆懈；診斷出錯誤或困難的真正原因，才可以個別地謀補救和矯治。

新近關於加法的計算方法的研究，認為由上而下相加比由下而上相加為合適，不過如其加時用由上而下的方法，驗算時用自下而上的方法，那末這兩種方法都有用處。有一些研究，雖認為驗算可以增進加法的技能，但是究竟確否這樣，還需要更多的證明。

## 五 減法

減法的計算方法，最多用的不外這樣四種：(1)減去法，或退位減法，如  $\begin{array}{r} 6 \\ -3 \end{array}$  或  $\begin{array}{r} 14 \\ -9 \end{array}$ ，3 從 6 裏減去，9 從 14 裏減去；(2)退位

等加法，如  $\overset{63}{-15}$ ，5 從 13 裏減去，被減數所借的 10 加在減數上，

因此十位數相減，成爲 2 從 6 裏減去，計算時設想作  $\overset{6}{-2} \overset{13}{5}$  的式

子；(3) 退位補法，如  $\overset{5}{-2} \overset{2}{7}$ ，7 加 5 等於 12，2 加 2 等於 4；(4) 退位等加補法，如上例，7 加 5 等於 12，3 加 2 等於 5，被減數 10 位上的借位在減數上加上，所以 2 成爲 3，3 補 2 得 5。以上這四種方法，最通用的是第一種退位減法，據愛倫(Allen) 的調查，全美國通用的減法 48% 是這種方法；其他三種方法都不及三分之一。至於這四種方法，究竟哪一種比較的好，現有的研究尚沒有一致的結論。第一種方法所以比較通用，也因為低年級兒童比較容易學習。若是教學減法的時期能稍延遲，待兒童智力較爲成熟，教學技術合適，那末任何一種方法都可教學，都有同樣的成績。一般認爲這四種方法並不一樣有效，那是因為教學技術，練習份量，兒童的成熟與準備程度等的不相同的緣故。若是加法已經學會，那末用補法做減法亦比較便利；不過補法只用一種意義的減法（例如， $\overset{8}{-3}$ 是想作 3 加幾是 8，或 8 是 3 加幾），而且這一種意義是抽象而又不自然的。因此年幼的兒童大都不容易了解。有一個研究，比較二年級兒童用減去法與補法的成效，結果是簡單的減法，減去法顯然較補法優良（平均高 4.5 分）。

減法與除法比加法與乘法使兒童感覺更多的困難，這可能是由於方法的難易程度有所不同，也可能由於所需要的練習份量並不相同，而且事實上加法乘法都先教，同時兒童在日常生活上加法乘法也比較用得更多。

減法最多發生的困難有這些：由零所發生的困難比加法上這種困難多得多；減九九基本結合上的錯誤；退位上的錯誤，有時退了位，忘記在前一位數上減去1，有時忘記退位，有時不需要退位而退位；部份的差數記不牢；由於計算方法的變換，而發生的錯亂。因為加減有許多類似的地方，所以困難也便相同；教學加法能夠減少或避免了若干錯誤，做減法時也便減少了許多可能的錯誤。

## 六 乘法

乘法的計算先須加法基本九九熟練，進位與連加等都能不錯。若是加法的基礎不好，乘法幾乎成爲四則中最困難的部份。現在乘法教學開始過早，一則兒童心智成熟程度不能適應，二則加減法的困難增加乘法的錯誤，因此使兒童更感覺乘法的難學。有人並且懷疑乘法口訣也影響計算的困難。至於乘法本身的困難，第一是由於其中包含若干步驟，第二是由於需要相當的記憶與心算。主要的困難有：(1)加九九和乘九九基本結合的錯誤；



(2) 乘時進位的錯誤；(3) 加時進位的錯誤；(4) 零的處置；(5) 部份積數右手的地位放錯；(6) 部份積數寫錯；(7) 相乘作為相加。做慣了加法，進位 1，和數便相當增大；可是在乘法時，進位 1，加在積數裏，影響較小，因此乘法裏的 1，常常容易發生錯誤。乘數是 1 的乘法，有些兒童亦往往不容易了解，這因為日常生活很少碰見這類問題，而且是比較抽象的緣故。從加法過渡到乘法，例如  $3 \times 5$ ，除出少數智力極高的兒童能夠直接相乘，大部份都是用三個 5 相加。這惟有常常使兒童比較乘比加簡便，多做練習，消滅相加的舊習慣，乘的新習慣才可漸漸養成。另一項普遍的困難，發生於進位時的記憶薄弱或錯誤，例如  $\overset{25}{\times} 7, 85$  的 3，必須能夠記住，才可以加到  $2 \times 7$  的積上面去，而這個加又必須心算，彷彿到某處店裏去買一件東西，半途經過某處必須另外帶一件東西，這是比較容易忘記的。況且乘法又是較多抽象的計算，兒童更不容易記憶了。

口訣的不適當，一則機械的背誦極少意味，二則應用時兒童往往須從頭背起，既費時間，而且又容易錯誤。廢除口訣的實驗，直至最近才開始進行，使用簡單的乘法測驗，同時限以最少的時間，使受測驗的兒童無法利用乘法表。不過主要的工作還在平時教學方面，必須每一個乘九九結合，能夠有充分的直接經驗，而且須經常作適當的練習。



## 七 除法

除法是四則中最困難的部份。最後學習，練習也最少。因為做除法，加減乘都要用到，以前如有困難，便集中在這裏。因此最多發生的困難是在加減乘除基本九九的結合的不熟練，其次是關於退位，餘數，和計算手續上的錯誤。學習除法的形式，許多兒童也感到困難。商數是 1 和商數裏接連有兩個零的題目，多數兒童也常發生錯誤。像  $6 \overline{) 4592}$  一類簡單的除法，看似不複雜，而實際上在兒童的思想裏一下子須做好些工作；即使加減乘的計算沒有困難，做一個除法題目，也須應付許多複雜的問題。至於多位數的除法，除出計算的手續以外，更需要判斷，估計，以及同時在思想裏進行若干工作的能力。據艾樓 (Early) 舉行一套測驗以後的分析，並參照其他研究的結果，關於兒童做多位數除法的錯誤，加的錯誤佔 10%，減的錯誤佔 25%，乘的錯誤（進位的錯誤除外）佔 10%，估計商數的錯誤佔 25%，被除數的錯誤佔 10%，數字寫錯與看錯佔 10%，其他錯誤佔 10%。

矯正兒童做除法的各種方法有下列幾種：(1) 商數從旁邊改寫到上面；(2) 商數恰正寫在被除數上面；(3) 被除數減畢以後，每次寫一商數（有些兒童常漏落商數的一部份）；(4) 有餘數的除數單位的除法，如  $31 \div 7 = 4$  餘 3，應有充分練習；(5) 用除數

前兩個數字試求商數；(6)注意再三出現的商數。

## 八 四則計算的熟練

上面已將計算上的一般困難，與四則特有的困難和性質加以說明。四則的熟練是一種基本能力，正如閱讀與寫字基本能力一樣，是以後許多學習的工具。要能夠善用與活用這種工具，必須求其熟練，使用時沒有障礙，很少錯誤，養成能夠自動運用，自由支配的習慣。第一步當然先須練習基本九九，然後才可以練習比較複雜的四則計算。

要使基本九九能夠透徹熟練，最早一步手續，須先將每一兒童在這方面的技能上有哪些困難與需要，根據診斷與觀察的結果，詳細列舉出來。

像學習其他閱讀與寫字的技能一樣，注意的控制是第一要事。若是不能有適當的注意，那末必須給他相當時期的個別指導，直到他能夠開始學習為止。最初做加九九，必須使他對於加數被加數與答數之間養成一種直接的結合，如看了或聽見  $\frac{4}{2}$  相加，立刻能將這兩個數與 6 有一個結合，要避免猜想與計數等任何的錯誤。開始時，練習的材料愈少愈好，新材料慢慢地加進去，不能比兒童所能夠消化會通的材料更多或更快。必須每日有反覆練習，使習慣能確實養成。每一兒童，每一材料所需要的練習須

有不同的規定。零必須注意。一般兒童與個別兒童對於加減乘除各種基本結合的難易程度亦必須注意。例如，1 加 2, 3……9；2 加 1, 2, 3……9；3 加 1, 2, 3；4 加 4；5 加 5；6 加 6；以上各對數交換的加，如 2 加 1，3 加 1 等等：以上這些加的結合，一般認為都是比較容易養成習慣的。此外的加九九結合便有各種不同的情形，不但難度有差異，而且各兒童所發生的困難也不相同。下面這五個結合可以作為練習的開始。將這些題目寫在練習片上，一

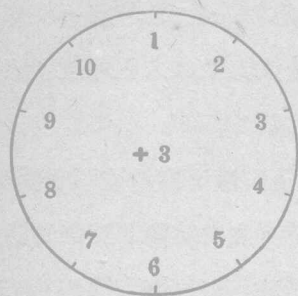
	5	9	4	8	5	面寫題目，一面寫題目與下
第一日	<u>7</u>	<u>6</u>	<u>3</u>	<u>5</u>	<u>4</u>	面的答數。這些題目，兒童都
	×	×	✓	×	✓	曾學過，先須經過複習。練習
	×	×	✓	×	✓	開始，每天練習時間，每張練
	✓	×	✓	×	✓	習片給他看三次，每次每張
第二日	✓	×	✓	✓	✓	練習片答對的，照左表，作一

✓，錯的，作一×。五張練習片可以混亂了，一張一張給他看。連續六次以後，給他記一紅色的記號。然後改作每天練習一次，連續五天，使他們能夠都答對。練習畢，給他記一藍星或其他記號。此後每星期再練習一次，直至連續三次答對為止，給他記一金星或黑記號。至此，已可認為這些結合已經熟練。不過隨時遇到可以應用的機會，還須加以練習應用。這種步驟，當然不必一律，可依兒童進步的速率，而定反覆練習次數的多少。最主要的是在一

組練習片不會完全熟練，新的練習片不能加入進去。若是一組練習片，在一次練習時間以內，能連續答對六次，那末便可換新練習片。

錯誤必須作適當而嚴重的警誡。答數失落比答錯較不重要。看了練習片，對於答數發生疑慮不定時，立即給他看正確的答數，減少猜想的機會。這樣的練習，一直繼續下去，直到迅速的正確的反應成爲自動的習慣爲止。練習與測驗過早，容易發生錯誤。提示練習片的時間須緩緩減少；不要以爲計算速率突然增加便可改變已經養成的計數，猜想等習慣。練習開始時，可以毋須限制時間。爲保持兒童的興趣，可以將練習用遊戲方法去記分，一則可以引起學習的需要，二則可以將計算得到若干真實的意義。筆算練習可以少用。筆算容易使兒童消耗時間，而且教師不能發現兒童所最感困難的地方。即使以後做較複雜的計算及應用問題，也宜於多用心算。某些練習在表面上熟練以後，以後相當時期之內還須繼續複習，使兒童能有過度的學習，免得以後應用時生疏或遺忘。尤其年幼小的兒童，即使學到完全純熟，因爲他們的學習都是極特殊的，難免以後的應用還有錯失。若是初始的基本結合學習得很完善，以後的保持便可無慮。

加減乘九九的練習可以使用各種適用的教具，如以下的鐘面圖。使用這種教具練習加法或乘法，可以避免兒童用口訣。口



訣容易造成錯誤，以後矯正這種錯誤是很費時的。減法的補法可以自然從加法產生。兒童學會了『五加二是七』，問他『五加幾是七』，他是很習慣的。同時商業上也有這種問話的習慣。鐘面圖將中間的 3 蓋住，便可做補法練習

，例如『一加幾是六』，『二加幾是七』之類。乘法開始，可以叫兒童數兩個二，三，四，……，不必有順序，免得背誦口訣。近來常有人主張，一切數的學習，在計算以前，必須明瞭數的意義。這個問題，下面亦將提到。不過實際上兒童學習基本算法到達純熟無誤的程度，對於數的意義也有不甚了解的。意義的思考常常干涉自動的反應。爲了達到自動反應的練習，練習時不討論數的意義，這種反應的習慣更容易養成。至於計算應用問題，當然不僅自動的反應便夠用，那末非了解數的意義不可了。

據有一個研究的報告說，四則混合的練習往往比較長時期單獨分別做加減乘除的練習有利。加法與減法，乘法與除法，在材料的難易與進度的適當配合上，混合練習，不但時間節省，效力較大，而且容易貫通。

基本九九熟練以後，練習材料仍然愈簡單愈好。據有一個調查說，各種加法練習材料，五位數以上的習題只佔少於百分之

二。因為日常生活上所遇到的問題，數目都是很小的。不過偶而

加入一些數目極大的習題，例如  $\begin{array}{r} 9603457293 \\ - 3726509837 \\ \hline \end{array}$ ，兒童也會覺得

好玩，歡喜去做，一方面可以證驗計算的習慣是否牢固，同時亦

可以看出注意力持久的程度。而且就實用的目的講， $\begin{array}{r} 237 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$  與

$\begin{array}{r} 845 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$  固然有用處； $\begin{array}{r} 263954 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$  也是同樣有用處的。這個問題不在

教材的本身，而在教材的分配與進度。練習材料依難易繁簡作合

適的排列，對於練習的效能有極大的幫助。例如加九九以後，先

是兩位數加一位數及兩位數不進位或進位的加法，然後再擴充

到被加數加數都是三位數的加法。直式練習純熟以後，再加入橫

式的練習。這當然是大體上的順序。各次練習材料亦須作有系統

的連貫，例如  $\begin{array}{r} 6 \\ +4 \\ \hline \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 26 \\ +4 \\ \hline \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 36 \\ +4 \\ \hline \end{array}$ ； $\begin{array}{r} 26 \\ +14 \\ \hline \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 36 \\ +14 \\ \hline \end{array}$  之類。每次練習加入

一步新材料，純熟後，再加一步。這樣練習的時間當然比通常要加多了。

因為練習材料有系統，兒童的進步也顯得有程序。每次練習都要兒童自己核對以後，記入成績記載表，使他自己可以按日看出錯誤日漸減少，正確逐漸加大，速率逐漸加快。

## 九 分數，小數與百分數

一般情形，造成兒童學習分數，小數與百分數的困難，大部份是由於基本九九與整數四則沒有良好的基礎。少數關於分數的困難，是過遲利用兒童對於分數的經驗，開始學習分數使用與實際經驗脫節的教科書上的分數形式，分數的練習很少能夠實用，最小公倍數與最大公約數所造成的紛亂。兒童所常用的分數，分母很少是在十以上的。成人用 $\frac{1}{2}$ 的機會要佔全部分數的百分之六十，此外便是 $\frac{1}{4}$ ， $\frac{1}{3}$ 與以4，或3的倍數8，12，16做分母的分數。其他分數的用處便很少了。成人如此，兒童也是如此。約分無非徒增紛亂，假使用的分數都是很小的，約分便不需要了。約分的方法最多只可作為聰明兒童的一種算術遊戲。分數除法，除數倒轉作乘法做，兒童的經驗裏往往很不容易了解。像『 $\frac{7}{8}$ 裏有多少 $5\frac{1}{4}$ ？』一類無用的問題，教科書裏實在太多了。假使只用適合兒童具體經驗的簡單分數，那末教科書上的分數圖解或其他分數教具也沒有什麼用處了。這種圖解或教具也只是加添不必要的複雜，實在是不自然的。開始教學分數先可自極簡單的乘除入手，例如9的 $\frac{1}{3}$ ，6的 $\frac{1}{2}$ ，20的 $\frac{1}{5}$ 等等。兒童對於整數四則既熟練，從這些計算方面所得到的分數的概念與用途是很清楚的。因為概念能夠清楚，計算手續還不是和整數四則一樣，只



是一個練習問題。因此最近在分數教學方面的研究都注重在分數教材的簡化，主張淘汰一切無用的練習材料。

小數的學習若能盡量與十進的幣制聯絡起來，不但教材可以簡化，使兒童真切了解其意義和主要的用處，更可使學習也減少許多困難。若是對錢幣的使用有了實際經驗，那末分數加減何以要對齊小數也不難使兒童了解。小數四則的計算，估計其近似值是一步重要的手續。能夠估計，計算的錯誤便容易發現和矯正。同時數字的書寫須注意整齊清楚，有許多答數的錯誤都由數字與小數寫得不清楚的緣故。過去關於小數除法的困難，自從德魯息 (Durshel) 在 1917 年發表研究報告，中學畢業生，隔了四年未習算術，用『標準式』做小數除法仍舊是百分之一百正確。從那時起，『標準式』便普遍採用，向來小數除法的困難也因此大大減少。『標準式』亦稱『澳洲式』，便是將有小數的除數化為整數的算法，如  $5.9 \overline{) 687.31}$ ，化為  $59 \overline{) 6873.1}$ ，除數被除數都倍十倍。這種各倍十倍，百倍……的方法，對於最後的值不生影響，用整數除法叫兒童證驗，他們是很容易了解的。

百分比計算方法最特殊的地方是百分比一詞的意義。此外都不過以前各種算法的應用，因此所發生的困難都和分數，小數，整數的困難相同。一切重大的錯誤，若是多費時間在算法規則的熟習，不如偏重於百分比意義的充分了解，而這種了解又必

須求之於各種實際的經驗。所以嚴格說起來已不屬於計算問題的範圍了。

## 十 兩個問題

最近關於計算方法的學習，各種研究集中於這樣兩個問題：第一個問題是『注重意義的了解對於學習計算方法的成功有多少幫助？』第二個問題是『有系統的練習應該在什麼時候開始？』

第一個問題，據勃朗耐爾 (Brownell) 的研究結論，認為對於數與計算方法的了解是有效的計算一個主要的先決條件。他主張算術教學應該注重兒童的了解，特別是最初學習計算技能的時期。其他有若干研究都與勃朗耐爾有同樣的主張，例如西爾 (Thiele) 提出二年級開始學習加法以前，發展兒童了解的各種優點；帕潑 (Piper) 的分數教學的研究，哈拉潑與墨潑司 (Harap and Maps) 的分數與小數的研究都證明兒童對於教材內容的了解可以增進學習技能的效力。勃朗耐爾簡直認為做退位減法時用輔助記號（包括退位的記數，或其他各種符號，用手指計數，通常也包括在內），也可以幫助兒童增進了解。

關於第二個問題有系統的練習應該在什麼時候開始，一般主張都認為僅僅在兒童的心理有所準備便可開始，那是不夠的。在兒童心智尚未相當成熟以前，若是便開始練習，梅亦斯 (My-

ers) 認為養成一個錯誤已經是無限度的嚴重了。正如桑戴克早年在算術心理一書裏所說：『其他條件都相同的話，那末不要去養成任何日後須加以破除的習慣』。這話的意思，要養成一個習慣，當然應該具備必須養成的若干條件。若是這些條件都具備了，但是日後這個習慣還是要去破除它的，那末便不應該去養成它。養成一個習慣固然不容易，破除一個習慣更不容易。梅亦斯所強調的嚴重性，其原因亦是如此。梅亦斯另外又提出一個事實，他說一年級時注重計算的速率反增加了錯誤的百分比。許多研究都主張練習可以延遲到三年級或更遲才開始，對於兒童的妨礙可以較少。據艾塔 (Etta) 在 1935 年的一個實驗報告裏提出的材料，六年級以前沒有有系統的計算練習的兒童，測驗的成績是這樣：加法 82 分；減法 48 分；乘法 27 分；簡單除法 18 分；多位數除法 0 分。其他一年級至五年級有過算術練習的兒童，用同樣測驗材料，其成績是這樣：加法 91 分；減法 85 分；乘法 76 分；簡單除法 73 分；多位數除法 60 分。這個報告並且指示，練習一年以後，有練習與無練習的兩班兒童，加減乘除的成績都幾乎相等。這至少可以證明二年級以前沒有正式的算術練習並無影響。年級愈高，影響愈大。同時，加法即使在五年以內完全沒有練習，影響也並不大，計算的技能愈複雜，當然愈需要練習。正式練習應該什麼時候開始的問題現在幾乎已經變為要否正式練習的問

題了。一二年級不需要練習可以說成爲定論。目前的問題已經是一個探究練習本身性質的問題了。

## 第六章 動機

### 一 學習的需要與動機

美國著名算術心理專家威爾遜 (Wilson, G. M.) 曾與鮑特 (Porter, E. R.) 合做過一個研究，證明兒童學習乘法，在一個相當長的時期內，百分之百的理想可以有助於他們的學習，始終維持着興趣與技能而不減退。百分之百是說理想的充分。什麼是理想呢？第一是兒童要求學這樣東西，或者說，他們有學這樣東西的需要或願望。第二是他們覺得能夠學習這樣東西，他們自覺有成功的希望。可是這二者究竟也不能憑空而起，必須學習的環境，教材的組織與教師的指導使他們可以滿足需要，達到希望。有了這內外一致，充分可以進行學習的情境，我們便可承認學習的動機已經存在。任何學習有了這種動機，興趣可以持續，努力可以激發，錯誤可以逐漸減少，技能可以慢慢純熟，目標才能達到。

1926年威爾遜曾發表一個算術教學實況的調查，全美五千個教師，僅有極少數利用兒童的經驗，同時真正的遊戲也很少。換言之，學習的需要，他們是不注意的。後來在1934年威爾遜又

發表一個稱爲『算術的新標準』的實驗報告。參加實驗的二三年級兒童有一千人。他們不用通用的教學方式去學習算術。他們的第一種活動是在學校裏開各種小商店——玩具店，花店，雜貨店等等。第二種活動是玩各種的遊戲。玩的目的注重勝負，卻不在計算。二年級結束時，做這個實驗的甲市兒童，經過一個包括一百個加九九的測驗。同時，乙市二年級結束的兒童，他們是用平常方式學習算術的，也用同樣材料測驗一次。此外，丙市三年級結束的兒童，他們也是用平常方式學習算術的，也用同樣材料測驗一次。測驗結果，以中點分數論，甲市是 100，乙丙市都是 99。在做實驗的甲市三年級兒童，每星期開小商店一天，其餘四天仍舊用平常的算術練習。學年結束，經過威爾遜自編的一種測驗，結果加法平均分數 97.8，減法 95.6。這種測驗的平均正確度與其他測驗比較，大致達百分之六十。總觀這個實驗的結果，雖然二年級有正式的算術教學與沒有正式算術教學的的成績相差極小，幾等於零，可是至少可以知道遊戲方法與正式教學是一樣有效的。至於甲市三年級的成績，更可知道遊戲方法與正式教學的混合可以產生相當良好的效果。三年級以下，廢除正式教學，完全利用兒童的需要與經驗，採取自由的遊戲或其他活動去進行也許沒有多少人懷疑其成效。問題在三年級以上的算術教學是否也可用同樣方式而得到滿意的結果呢。這方面的實驗正在

進行之中。雖然很多人有這種信念，可是需要更多客觀事實的證明。現在已經有的實驗上的證明，至少可以使我們承認這種見解決不是空虛的假想。例如上章提到過的哈拉潑與墨潑斯的實驗便證明用活動方式也可以學習小數與分數。他們曾經用實驗方法，證明克利夫蘭（Cleveland）地方所規定的 27 種計算小數的技能，不用正式教學，也可包括到 13 種活動裏去學習。在另一個研究裏，他們又證明用活動方式學習某一測驗裏所包括的名數與分數乘除，可以熟練到 84% 的程度。根據這些事實，我們至少可以認識，即使比較複雜的計算技能，若是能夠從兒童的需要上去利用學習的動機，也可以得到教學的效果。至於這種效果是否比正式教學的效果更持久，更豐富，更能使兒童活用，那只有仍舊用實驗的方法去證明，臆測是不足取信的。

爲什麼學習的動機起於兒童當前的切身需要，他便會感覺興趣，因此而引發出許多的活動來呢？這因爲，由於這種動機的活動大致符合他們身心成熟的程度；既包括身體的活動，又不需要過分的心智上被動的努力；一切不單調，不厭倦，使他們覺得有意義，有價值；結果也並不遼遠，可以親身體察；而且有時可以和若干本身無趣味的工作自然聯繫；又常常是團體的，合作的學習。活動之中有寫數字與計算的必要，他們容易了解這種必要，而且有一種要求具備這種能力，使用這種工具的願望。真正的學



習是這種心理狀態的一個當然結果。正式的教學，誠如威爾遜調查的結果根本並不重視這種學習的需要，沒有真正的動機，因此就不免流於枯燥而空虛的形式。

## 二 進步的認識

對於學習進步的認識也是一個影響動機的一個有力因素。一般學習心理實驗都指明知道工作進步的情形，造成一種有利於改進工作的態度。若是對於工作的進步只有一部份的認識，那末也仍然能夠繼續工作。若是完全不知道工作進步的情形，那末便不容易產生有效的結果。認識進步的情形可以促使自己和過去的工作比較，或和別人的工作相比較。因為求進與好勝是一個人的根本傾向。工作的成績吸引人的注意，使他感到滿足與愉快。這裏所須注意的，便是認識工作的結果，也可以產生沮喪或失敗的感覺，而缺少自信，這就需要教師的機智與調度了。

1917年，戚潑曼與浮德 (Chapman and Feder) 曾做過一個實驗。他們用一種加法測驗，將三十二個兒童，分為加法能力相等的甲乙兩組。兩組兒童每天都做十分鐘練習，繼續十天。甲組兒童，每天將全組平均成績畫成進步曲線，告訴他們；若是超過平均成績的兒童，更用星的記號獎勵他們；若是實驗結束，成績超過全組人數一半的，更提名獎勵。乙組兒童完全不讓他們知道

進步的情形，教師也絕無表示。結果，甲組第一次練習平均做 14 個習題，最後一次平均做 20.2 個習題，進步 43%。乙組第一次平均做 14 個習題，最後一次降低到 12.9 個習題。從這個實驗裏，可以看到認識工作的進步對於動機的影響是很不小的。因此，進步曲線，成績比較表，測驗成績，以及適當的診斷與補救對於學習的影響，都為一般優良教師所採用。

### 三 獎勵與責備

獎勵與責備對於學習的動機發生相當的影響，也已經有若干實驗的證明。1925 年郝洛克 (Hurlock, E. B.) 曾發表過一個實驗。他用不同的激勵方法給兒童做一套加法測驗。第一天給全體兒童做一個加法測驗預試。根據測驗結果，將他們分為能力相等的甲乙丙丁四組。甲乙丙同在一處測驗，在測驗中，甲組時作獎勵，乙組只是責備，丙組不去睬它。丁組放到另一個教室，照平常進行。根據測驗的結果，仔細分析，郝洛克的結論說，獎勵的一組比責備的一組成績好。獎勵與責備的兩組，比不睬的一組成績好。可是不睬的一組卻又比平常教學的一組好。有人認為在乙丙二組之前的獎勵，這獎勵才成為一個動機。因此獎勵與責備還與當時的情境有關。丙組雖不睬它，可是在那個情境裏，終究不能沒有相當影響，這也許可以說明何以丙組的成績勝過平常教

學的一組的緣故。

另外還有一個比較有趣的實驗。主試人是卜克與諾佛爾 (Book, W. F. and Novell, L.)。有一部份的實驗是雙位數乘雙位數的心算。被試人是 112 個大學生。每次練習一分半鐘。每逢星期一,三,五,每天練習 15 次,共 45 次。被試人分爲能力相等的甲乙兩組。甲組有練習的動機,乙組沒有動機。甲組被試人讓他們知道每次練習的成績,常常鼓勵他們改進算法,並要他們注意用簡算法。乙組只告訴他們努力做,但不讓他們知道成績。三十次練習完畢以後,甲組改爲沒有動機,乙組給他們動機。實驗結果,前三十次,甲組照最初成績進步 434%,乙組進步 362%,乙組差甲組 72%。後來 15 次,兩組的進步便相反。甲組進步 15%,乙組進步 29%,乙組幾達甲組進步的兩倍。這一個實驗不但告訴我們動機有利於學習,而且動機取消以後,學習的進步便會減退。

鮑曼 (Bowman) 關於調查兒童歡喜做的應用問題的研究裏另外又提出一點值得注意的意見。他說一般認爲有興趣的研究問題,卻與解答應用問題的動機無甚關係。兒童所歡喜的是那些有希望解答的問題,換言之,是那些他們自信能解答的問題。擴大起來說,哪一次學習不是有着困難或問題要待解決。材料本身有無興趣尙在其次,問題與困難是否使兒童能夠了解,他們有否

信能夠去謀解決倒是更爲重要。一切的獎勵與責備，如其能以鼓勵兒童自信爲目的，那末由此所引起的學習動機必然有利的，可貴的。若是獎勵偏於空洞，責備成爲消極，不但無益，而且有害。

## 第七章 練習

### 一 練習的功効與條件

在正常情形之下，練習有兩種用處：第一，練習可以獲得一種新的技能；第二，已經得到的新技能可以達於一種完善的程度。練習可以獲得新的技能，憑常識的判斷便可知道。不過實驗的證明更可使我們確認這件事實。例如，勃蘭 (Brown, J. C.) 曾經用 222 個小學童做過一個實驗，在 30 節基本九九的教學時間內，半數兒童每次有五分的練習，其餘半數沒有練習，其他一切教學都相同。實驗開始與結束時都經過測驗。結果，就能做的題數講，有練習的平均 16.9，無練習的平均 6.4，相差幾達三倍；就所得分數講，有練習的平均 24.2，無練習的平均 9.4，相差亦達兩倍半多。假使其他因素都相同，那末顯然有練習的佔優勢。一種新技能的獲得或養成，固然須靠相當的練習。若是已經獲得的技能，沒有繼續的練習，它仍須遺忘，所以保持這種技能，使它達於完善的程度，也要靠練習。

練習決不能僅憑單調的反覆。練習的動機怎樣，練習時注意怎樣，練習的活動意義怎樣，技能所需要的能力與練習的兒童的

能力是否合適，身體的情形怎樣，練習的順序怎樣，練習時間的長短與分配怎樣，練習的技能本身性質怎樣，這一些條件都須與練習的目標相配合，這樣才能得到練習的功效。

單調的反覆為什麼不能養成技能？因為在練習中無數動作，有的對於所要養成的技能有利，有的有礙，必須在嘗試時能有所判別。判別力強，對於成功與不成功的動作便能加以選擇。不斷地選擇，成功的動作才能多反覆，浪廢的，無用的動作可以減少。這裏所謂判別力，當然也是一個複雜的因素，它必須靠練習的動機，對於練習的意義的認識，練習能力的相當，練習時的注意程度以及練習時的情境等條件來決定。所須注意的，一個技能的養成，只是單靠反覆是不夠的，必須同時能夠有所判別，有所選擇。練習的需要指導也因此才顯得重要。無指導，不控制的練習，可能結果一無所成。若是將一個無指導的自習與受着指導作適當方式的練習兩相比較，有指導的練習可以集中力量，知所輕重，無指導的自習往往動作散亂，鬆弛，缺少聯貫。前者能夠得到經濟的，正確的，有效的結果，後者所得到的只是偶然的，無意味的結果。因此，一個計算技能的養成與保持，在練習過程之中，並不是一套簡單的反覆，而是靠着各種有效條件的湊合。這些條件的總和，這裏稱為判別選擇的能力。這種能力的發展需要指導，需要合適的情境。

## 二 練習的分佈與組織

關於算術練習至少有這樣五個問題可以注意：(1)練習的時間與次數應該怎樣分佈才比較有效？(2)加減乘除單獨練習和混合練習，哪一種比較好？(3)練習材料的組織對於練習效果有什麼影響？(4)基本九九的難易順序有怎樣的排列？(5)正確與速率應該怎樣注意？

練習時間的長短與次數的多少對於練習效果的影響，雖然早在 1913 年便有人作實驗的研究，可是迄今還不能有定論。最早的吉爾培(Kirby)的實驗認為練習愈分散，效果愈良好。據他說，每天二十分鐘的四則練習遠不及二分鐘的練習效果來得好。可是桑戴克等的實驗又認為二十分鐘的練習也可以同樣有效。另外有一個研究又主張不超過十分鐘的練習比較好。練習時間的長短也許要依練習的性質，動機，與兒童的程度等因子來決定，因為各個練習，這些方面的因子都不同，練習時間的最高限度便有所不同。至於次數的多少，如其是專為養成一個技能，那末次數便須多，可能每天一次；若是目的在保持已養成的技能，那末次數可以較少，每週一次，甚至相隔更長的也不妨。

一般現狀，加減乘除是依次分別教學的。教學加法時，做加法練習。教學除法時，做除法練習。這顯然有一種優點，加法混入



減法一類的錯誤的攪擾比較少。可是，四則的計算容易單獨練習，若是應用問題的計算必須合用各種方法，採用混合的練習，自然比較便利。但是就養成計算技能的效果上說，究竟哪種方式較好，各種實驗的結論也還不能一致，大體上一般意見都認為混合練習稍勝。特別是四則初步學習已告一段落以後，混合練習似更為合適。賴潑(Repp, A. C.)曾於1930年發表過一個比較這兩種練習方式的實驗。實驗的對象是613個十二歲的兒童，分為能力相等的甲乙兩組。甲組用單獨練習，例如整數加法，在第一，第十及第十九週，共練習二十次；另一種方法，如分數除法，在第八，第十七及第廿六週，亦練習二十次。像這樣的分配，在全部實驗期間二十六週裏，共練習十二種計算方法。甲組每週只練習一種方法。乙組混合練習，每週練習九種方法，每種方法每週有兩次或三次的練習。甲乙兩組練習的分量完全相同。實驗開始及結束時都經過測驗。結束時的混合測驗，單獨練習的甲組，答對題數從最初平均92.41進步到113.94。混合練習的乙組從92.41進步到153.05。甲乙兩組相差21.11。混合練習較佔優勢。而且甲組最初測驗成績最低的，結束時比較的進步也最大。同時甲組在正確與速率方面都佔優勢。雖然如此，但是混合練習的一組，各種分數都並不高，因此也不能肯定這個問題已可得到結論。

關於練習的組織，不外乎兩個辦法。一種辦法將某項計算技

能，例如加九九的全部結合盡量作均衡的分佈。另一種辦法只包含一部份的結合，將某些結合的練習特別加多。大多數算術教科書編者所以採取第二種辦法，無意中認為某些結合練熟以後，這種計算能力可以轉移未曾練習的結合方面去。若是顧慮到練習遷移的限度，那末聰明的辦法不如將全部技能都包括進去。因此，一個有適當組織的練習，一方面不遺漏任何計算的技能，而另一方面在練習份量的支配上又能有所輕重。反過來說，一個組織不適當的練習，一方面既略去了若干計算技能，另一方面練習份量的支配又偏於一些容易的結合。這兩種辦法究竟優劣如何，萊斯女士 (Luse, Eva M.) 曾於 1927 年發表過一個精密的實驗。被實驗的是六百個五年級的兒童。半數兒童用第一種組織適當的練習，其他半數用第二種用無適當組織的練習。兩種練習材料的形式在表面上幾乎完全相同，使教育局長在半小時以內的審閱選擇之中可以分辨不出來。兩組兒童的練習時間也完全相同，都是每天十五分鐘，繼續練習五十天。實驗結果，有適當組織的練習那一組，做正題數自 31.1% 至 84.4%，無適當組織的練習那一組做正題數自 13.2% 至 60.8%；前者超過後者，在加法方面 17.7%，減法方面 18.8%，乘法方面 35%，除法方面 23.9。這些結果練習的材料不但應該包括練習技能的全部範圍，而且應該有適當的分配。學習上有一條公認的原則，要養成某一項技

能，使須有包括這項技能的全部範圍的訓練；辣斯的這個實驗與這原則是吻合的。後來其他的研究也證明辣斯結論的正確。因此我們可以相信，算術練習應該就所須練習的技能全部範圍，將各項技能應有練習的份量作適當的支配，才可能得到練習的最大功效。

可是現在通行的教科書卻疏忽了這種原則。據奈忒(Knight, F. B.) 分析八種算術教科書的材料，350 個多位數的加法，教科書裏平均只有 30 個。有些材料又比旁的材料多了許多，例如單位數的加法，在八種教科書裏平均有 33 次，可是三位數不進位的加法卻只有一次。100 個加九九的結合，平均只有 44 個，19 個包含零的結合卻一次都沒有。在那八種教科書裏，平均有五個單元的加法材料，卻是多位數加法只有兩個單元。在十種教科書裏，關於 % 的教材出現 34 次，卻是只有一次將百分數化爲小數。這些不過僅就奈忒的分析略舉少數例子。奈忒指明算術教科書對於全部計算技能的疏忽實在很大，適當分量的支配也極爲欠缺。其實也不僅教科書這樣，一般教師自編的練習材料，除非有謹慎選擇與組織的練習以外，大部份也不能在這方面有什麼注意。

關於基本九九難易程度的研究，自 1915 年郝洛惠 (Holloway) 開始以後，繼起有克拉潑 (Clapp) 及奈忒與裴倫斯

(Knight and Behrens)等人的研究。這類研究大都用以下這四種方法來決定難易的程度：(1)每一結合所發生困難的次數，困難次數多比較難，困難少的比較易；(2)每一結合反應所需要的時間長短，長的較難，短的較易；(3)教師對於各種結合難易的意見，多數人認為難的較難，認為易的較易；(4)每一結合需要學習時間的長短或反覆次數的多少。這四種方法，雖為各個研究所採用，但並非同樣可靠。其中以教師的判斷較少可靠性。其他三種方法，若是在同樣情形之下使用，也許可靠性可以相等。但須注意兒童以往學習的影響，注意最初開始學習的情形，結果較為可靠。不過無論如何，任何方法總以避免教學方法，學習動機，學習能力等等因子的影響，所以要確定難易的程度實在是極不容易的。例如克拉潑發現包括零的結合是相當困難的。可是新的研究認為包含的零的結合若不開始過早，也可以沒有什麼特殊的困難。

可是這種難易程度的排列，雖然有許多限制，對於教師分配練習的分量究竟有相當的幫助，因此像克拉潑所發表的基本九九難易順序普遍為教師們所認為有參考的價值，克拉潑的研究發表於1924年，後來在1928年又有奈忒與裴倫斯的研究發表。後者雖被實驗的兒童甚少，可是他綜合前人的研究，而且用的方法也相當的嚴密，因此很可供教師和繼續研究的參考。奈忒與裴

倫斯所用的方法，將兒童學習某一結合時反應的次數，錯誤的次數，最初學會時反應的時間，與每一結合所需複習的時間等都一同計算進去。100 個加九九結合被實驗的是 25 個二年級兒童；100 個減九九結合，被實驗的是 15 個二年級的兒童；100 個乘九九結合是 25 個三年級的兒童。除法九九結合他們不會做。可以參考克拉潑的研究。他用的方法雖只計算每一結合的錯誤次數，可是被實驗的兒童達 6232 人，可靠性當然也較大。不過這些難易的順序，在應用時必須注意學習時各方面的情形。奈忒與斐倫斯和克拉潑所排列的加減乘除難易順序如下：

## 加 法

5+9	3+6	8+3	3+1	3+0
7+9	6+9	4+3	2+3	3+3
8+7	9+6	8+8	4+1	5+0
5+8	5+7	7+4	1+6	0+0
8+9	3+7	2+8	8+0	0+5
9+7	9+3	9+2	1+4	0+6
7+8	6+4	3+8	1+7	2+1
8+5	3+9	2+5	1+2	7+0
4+9	4+7	2+7	1+3	7+1
6+8	7+3	8+2	4+4	5+1
9+5	5+3	5+4	0+8	2+2
9+8	6+3	2+9	0+9	6+0
4+6	6+5	2+4	5+5	0+7
7+5	2+6	4+0	6+1	0+4
6+7	3+4	7+7	1+5	0+1
9+4	5+6	4+2	1+8	2+0
4+8	8+4	6+6	1+9	9+0
8+6	6+2	7+2	9+1	1+0
7+6	9+9	5+2	8+1	1+1
3+5	4+5	3+2	0+2	0+3

## 減 法

15-6	12-3	11-2	10-9	10-5
15-8	18-9	6-4	8-4	5-1
13-8	13-7	7-5	6-2	6-6
13-4	11-3	11-9	3-2	2-2
14-8	8-2	9-4	6-1	5-5
17-8	12-7	10-8	2-1	10-1
15-7	8-5	10-7	9-8	9-1
16-9	16-8	10-3	11-5	4-4
13-9	12-5	9-2	8-7	9-0
14-6	9-3	10-6	6-3	4-0
16-7	15-9	5-2	8-1	8-0
14-5	7-2	5-3	12-4	3-0
14-9	13-6	10-2	7-1	7-0
17-9	7-4	8-6	9-9	7-7
13-5	12-9	6-5	5-4	1-1
9-6	12-8	11-6	7-6	3-3
8-3	7-3	12-6	8-8	5-0
11-8	10-4	4-3	2-0	6-0
9-5	11-4	14-7	4-1	1-0
11-7	9-7	4-2	3-1	0-0

## 乘 法

6×9	9×4	6×5	3×3	1×6
7×8	5×8	3×4	2×3	1×5
7×6	3×8	5×5	9×2	2×5
8×6	6×8	9×9	6×2	7×1
4×8	7×4	5×3	3×0	8×1
4×9	6×6	5×4	2×7	1×4
7×9	9×5	0×1	1×0	5×0
7×7	8×9	7×3	8×0	0×8
6×7	3×6	5×2	3×2	0×3
4×7	8×3	6×0	2×8	4×0
7×5	4×4	7×2	0×2	4×1
5×9	8×4	3×5	0×9	2×6
8×8	9×8	8×2	2×1	0×0
9×7	4×3	2×9	2×2	1×9

$8 \times 5$	$5 \times 7$	$0 \times 4$	$1 \times 2$	$1 \times 3$
$9 \times 6$	$9 \times 3$	$4 \times 2$	$0 \times 5$	$5 \times 1$
$3 \times 9$	$4 \times 5$	$0 \times 6$	$2 \times 0$	$6 \times 1$
$8 \times 7$	$3 \times 7$	$1 \times 1$	$1 \times 7$	$9 \times 0$
$4 \times 6$	$6 \times 4$	$0 \times 7$	$3 \times 1$	$9 \times 1$
$5 \times 6$	$6 \times 3$	$2 \times 4$	$7 \times 0$	$1 \times 8$

## 除 法

$2 \div 2$	$45 \div 9$	$18 \div 9$	$27 \div 3$	$49 \div 7$
$9 \div 9$	$30 \div 6$	$16 \div 8$	$16 \div 4$	$40 \div 8$
$28 \div 4$	$3 \div 1$	$4 \div 1$	$7 \div 1$	$72 \div 8$
$1 \div 1$	$35 \div 7$	$20 \div 4$	$12 \div 4$	$18 \div 6$
$36 \div 4$	$18 \div 3$	$6 \div 1$	$40 \div 5$	$24 \div 3$
$8 \div 8$	$7 \div 7$	$32 \div 8$	$21 \div 7$	$72 \div 9$
$3 \div 3$	$5 \div 5$	$35 \div 5$	$21 \div 3$	$20 \div 5$
$6 \div 6$	$4 \div 4$	$27 \div 9$	$30 \div 5$	$8 \div 2$
$56 \div 8$	$63 \div 9$	$5 \div 1$	$12 \div 3$	$12 \div 2$
$54 \div 6$	$0 \div 5$	$0 \div 3$	$15 \div 5$	$15 \div 3$
$9 \div 1$	$0 \div 9$	$64 \div 8$	$12 \div 6$	$14 \div 2$
$24 \div 6$	$54 \div 9$	$48 \div 8$	$36 \div 6$	$10 \div 5$
$0 \div 1$	$0 \div 2$	$0 \div 4$	$16 \div 2$	$6 \div 2$
$6 \div 3$	$0 \div 7$	$0 \div 6$	$14 \div 7$	$81 \div 9$
$32 \div 4$	$0 \div 8$	$42 \div 7$	$24 \div 8$	$9 \div 3$
$18 \div 2$	$8 \div 1$	$36 \div 9$	$48 \div 6$	$10 \div 2$
$8 \div 4$	$45 \div 5$	$28 \div 7$	$24 \div 4$	$25 \div 5$
$56 \div 7$	$42 \div 6$	$63 \div 7$	$2 \div 1$	$4 \div 2$

## 三 正確與速率

上一節開始時所提出的五個問題，前四個是屬於練習材料與方法方面的，第五個實在是練習目標的問題。若是高度的正確是練習所必具的目標，那末注重速率可以結果使正確降低，這已經有實驗的證明。可是這也不是說，練習可以不注意速率。適當



的辦法是正確與速率能相並作適當的注意。過重速率固然可以發生不良的影響，只重正確而輕忽速率，至少在應用的觀點上講也不是適當的。

練習的早期階段裏便注意速率，專家的意見一致認為對於結果有不良的影響，因為只能加強練習的錯誤。而且若在開始練習時能注重正確，那末以後在速率方面也容易進步。所以開始時能夠正確，便是導向速率的一條正道。注意速率，一直可以延遲到一切基本結合能有機械的，自動的反應以後。練習的早期階段裏，錯誤當然不少，若在這時便注重速率，錯誤的動作不容易淘汰，對於正確反應所有的機智與敏感便受着窒礙。速率是因各人的神經組織與習慣而不相同的。二個九歲的四年級兒童，同受一個算術測驗，得到同樣的正確，可是一個做五十個題目只需二分鐘，另一個卻需四分鐘。

有人鑒於正確與速率的相關是很高的，正確度高，速率也大，便認為增進速率便可提高正確。其實這種相關高的妥善解釋，只可說，高度的速率是成熟的，正確的動作所同具的一種自然現象。

算術練習的正確異常重要。限制作短時間的速算最容易使兒童猜測答數，猜測便造成了錯誤的反應。經過相當時期錯誤的習慣養成以後，結果發生了許多困難。練習的早期階段裏，絕

對須讓兒童多多得到正確的反應，不能容許有細微的錯誤。謹慎而細心的指導十分重要。兒童的錯誤的反應當然不少，所須注意的是錯誤逐漸減少，正確的反應逐漸固定。一切容易增加錯誤的機會，如比賽，缺少注意等等，均須避免。惟有正確的反應，才需要練習，才需要不斷的練習，過度的練習。

## 第八章 應用問題

### 一 錯誤在哪裏？

計算的技能是解答應用問題的一種工具，它本身不是目的。許多解答應用問題的錯誤都由於缺少這種了解而起。大多數教室裏把計算技能的練習與應用問題的解答，當作兩件不相關聯的事在進行。練習只圖技能的熟練，既不明瞭某種方法的意義，也不用它去解答任何問題。許多研究都發現兒童的計算技能與解答應用問題的能力相差很大。算術教學時間的支配又何嘗不是這樣？用於練習計算技能的時間要超過解答應用問題的時間多少倍？兒童在解答應用方面的經驗實在是很少的！教師們都固執着一個信念：計算的方法必須先學會；只有計算十足熟練以後，才可以對付應用問題。課本上哪一個計算方法不是把應用問題放在最後。這種態度與辦法結果造成了兒童解答應用問題的低能。

在這種情形之下，一般教室裏學習應用問題的情形怎樣呢？兒童看到了應用題，先是不免有點恐慌，他有一套本領，卻是無從用起。一句習慣性的問話便是『用什麼法子做呢？』彷彿一個問

題，只要知道用加法或減法，乘法或除法做的，便可以解決了。最驚人的，在應用問題的思想重壓之下，計算的習慣也被打破了。我們不能希望一個兒童只是會做乘法，或背口訣，看到了像這樣一個問題，『三分錢一隻梨子，買八隻要多少錢？』一下子便能答出來。傳統習慣，教師總是先出好了一批問題，叫兒童去『想』。他們自己是不會出問題的。彷彿教室裏預先由教師佈置得好好的，只是讓他們來看了驚奇便是了。『我們一天要用多少粉筆？』『這個遊戲，我們勝了幾分？』『一月份有多少天？』像這樣的簡單問題，也都是教師先替他們說出來的。不知多少良機都在無意中錯過了。

教學上的錯誤直接間接又造成了兒童的錯誤。有好些研究會將兒童的錯誤列舉出來。大多數研究都是根據應用問題的答數，也有少數研究分析每一問題解答的過程。根據兒童口述怎樣解答一個問題的研究，至今還不曾發現過，這也許是最可靠的研究法。關於一般兒童解答應用問題的錯誤大致有下列這些：基本九九計算上的不正確；算法用錯；只注意問題裏的數字，不注意其他文字；閱讀習慣不好，問題看不清楚；數的名詞（如磅，公里等）不了解；不能有正確的判斷；問題的線索看錯；數的知識欠缺（如不知一呎是幾吋之類）；不會用估計方法校對答數；對於問題缺少興趣與努力；問題抄錯；答數寫不正確；不能就全部

問題思想，做了一步，以後不能續做；注意薄弱或散漫。補救或矯正以上這些錯誤的方法大致有以下幾方面：(1)使兒童閱讀問題能夠了解；(2)明瞭專門名詞或術語；(3)放棄問題裏無關的觀念及詞句；(4)根據問題裏的數字決定算法；(5)抄出計算要用的數字；計算答數；校核結果；就困難所在謀補救或矯正。

## 二 應用問題教學的改進

各種關於兒童解答應用問題的研究都指出這方面的教學有許多不適當的地方。究竟哪些方法比較適當，因為實驗時所用教法頗有不同，因此教學的結果亦不易比較。而且各種方法受不能控制的因子，如教師的熱心與機警等，相當影響，同時像這類因子對教學結果的良否也許比方法的影響更顯著，所以要決定哪種教法比較良好還不能有較為客觀的標準。可是若干研究根據測驗的結果都認為有系統的，持續不息的訓練可以提高解答應用問題的成績。

好些研究都認為兒童對於問題內容在知識方面都有着嚴重的欠缺。例如關於物價的問題，原是極實際的，可是兒童對於物價缺少真實的經驗，因此問題也變成抽象了，思想便不容易有着落。因為缺少經驗，就失去判斷答數是否合適的能力。教科書上的問題，何以使他們厭惡懼怕，覺得不安全，有失敗的憂疑，固然

尙有其他原因，對於問題內容的生疏，知識經驗的欠缺，實際上是一個重大的原因。近來有些新式的小學裏，用兒童自己搜集來的問題，或教師由現實環境取材的問題替代教科書上的問題。試用結果，確乎效率較大。據康諾與豪肯斯 (Connor and Hawkins) 的實驗，證明用這些問題作應用問題的練習，兒童關於這方面的能力有顯著的進步。波士頓大學 (Boston University) 繼續有若干研究報告都確說採用兒童自己所搜集的問題，經教師的指導，可以有效地增進解答應用問題的能力。

關於指導兒童解答問題的手續，下面這幾個步驟可以加以注意：第一，先讓他們思考要解答的是什麼，這提問愈明確清楚愈好；同時必須讓他們自己找尋需要解答的所在。第二，題目裏有些什麼事實可以幫助他們去認識，使他們可以參照決定要解答的確是什麼？第三，題目裏有哪些文字，事實，甚至於數字可以放棄不顧。這一個步驟的目的在撇開無關的事實或文字，前一個步驟是要確定有關解答的事實或文字。有些兒童經過第二步已經可以確定要求解答的所在，可是許多兒童不但要知道有關的事實，而且還須能夠撇開不相干的攪擾。第四，爲了要解答問題，那末怎麼樣來處理題目裏數字，而求到答數呢？第五，估計答數大約是多少。第六，計算正確的答數，加以核對。如其以上這幾個步驟，可以幫助兒童解答問題，那末指定一些應用問題作爲家庭作

業，顯然便不甚適當。因為這些步驟，與其說解答應用問題的步驟，不如說指導的步驟。教師可以參照這些步驟去指導，臨時有偶發的特殊的問題可以幫助解決，避免兒童一切的猜測，計數，迂迴間接的計算等不良習慣。

開始時應該多用只包含一步計算的問題，例如『每枝六分錢的鉛筆，買了三枝，要多少錢？』簡單的問題，至少有二種優點：第一，兒童可以無用猜測；若是比較成熟的兒童，可以讓他多作出聲的想，把算法說出來；較不成熟的兒童，可以用實物幫助他們想。第二，開始時若用二三步計算的問題，便不容易看出兒童思想的順序；不經濟的或錯誤的思想，在開始時疏忽過去，逐漸造成更重大的困難。

但是簡單的問題並非說題目的文字，名詞或數字簡單些便夠了。簡單不僅在形式。有時題目的形式雖簡單，卻是略去了思想的實質，也使兒童無可憑藉，例如『八角錢一斤的糖，買了五斤，五分錢一個的蛋，買了二十個，一共要多少錢？』與『王成家裏來了幾個客人，他的媽媽準備請客人吃點心，便喚他上街去買五斤每斤八角錢的糖，再買二十個五分錢一個的蛋。他的媽媽應該一共給他多少錢？』前一個問題形式上固然比較簡單，可是兒童看了，只是數的計算，一點沒有思想所需的資料，成為索然無味的計算。因此，一個簡單的問題還須有一個生動的情境去配合



它。形式上過份的簡單，略去了思想的情境，兒童無可想像。空洞的計算，事實上不成爲『應用問題』，失去對於問題的真切感覺。對問題能有真切的感覺，才可以找求問題需要解答的所在。

對於答數試作估計應該是一個重要的步驟，既可以集中思想於題目裏情境與重要名詞，又可以避免猜測與過重呆板的計算。例如『張大的橘子，每籃要賣八角五分，一共賣去了五十八籃，他收進多少錢』？先可暗示兒童，若是張大的橘子每籃只賣八角，一共賣去六十籃，可以收進多少錢。估計應該讓兒童自動，估計後可以將方法與原因報告出來。估計要看問題的性質。猜測雖有時形似估計，卻斷乎不能與估計混淆。估計必有理由。爲什麼這樣估計，往往便是計算的方法，例如上例，能夠作  $.8 \times 60$  的估計，便可以作  $.85 \times 58$  的計算了。

下面幾種方法可以幫助兒童注意尋求合理解答的方法。第一種方法，將問題列舉幾點，其中有正有誤，讓兒童看了問題決定。例如童彩兒買了六枝鉛筆，每枝五分，她付出一元，可以找回多少』？下面可以列出這樣幾點：(1)童彩兒失落了一元；(2)鉛筆六分錢一枝，(3)沒有找回；(4)找回七角錢。讓兒童分別就每一點作是(+)非(-)符號，測驗他對於問題的了解。

第二種方法叫兒童決定算法。例如『張寶康想要儲蓄八元，他現在已經有了三元六角，還要儲蓄多少？』在題目下面可以分

開寫加，減，乘，除四個字，讓他決定。再如，『一個木匠做了八小時工作，拿到工錢七元二角，若是他做了六小時半工作，他可以拿多少工錢？』題目下面可以這樣寫：\_\_\_加\_\_\_；\_\_\_減\_\_\_；\_\_\_乘\_\_\_；\_\_\_除\_\_\_；然後加 減 乘 除。第一步先讓兒童將題目應該計算的數字，依照題意，分別填入。然後決定求得答數應該用哪些算法。

第三種方法將問題用文字敘述，完全沒有數字，問兒童怎樣解決問題。例如『若是你知道一本書的價格，那末買了幾本書，應該付多少錢，怎樣計算？若是你知道買幾本書要付多少錢，那末買了二本書，應該付多少錢，怎樣計算？』

第四種方法將問題裏一部份的事實略去，讓兒童看了題目，把應該補充的事實，填在題下的虛線上。例如『皮太太買了一部七十五元的縫紉機，說明預先按月付款，她應該在幾個月以前便開始付款？』略去的事實是.....

第五種方法將一段文字裏加入一部份不相干的事實進去，測驗兒童看了文字，能否了解問題的要點，剔出不相干的事實。若是看不出不相干的部份，便可證明問題的內容並不了解。例如，『一個工人掘一條二尺寬的溝，每天工資三元。他每天大約掘了四十尺。到了月底，他拿了一千元工資。』問他有什麼錯誤。

第六種方法給兒童看同樣方式的兩個問題，要他將同點與

異點說出來。這也可以測驗兒童對於問題了解的程度。例如，『梅麗買了五分錢二枝的鉛筆六枝，她付出三角錢，找回多少錢？』與『梅麗又買了五分錢一枝的鉛筆六枝，她付出三角錢，還有錢找回嗎？』

以上這些方法，目的在幫助兒童了解問題，便是上面所舉六個步驟的應用。這些方法，可以就兒童的困難與錯誤，依照問題的性質，隨時設計。假使不能善用，徒成治絲益紊，那是不但對兒童解答問題無所助益，簡直增加紛亂，那不是更誤事了？

對於年幼與缺乏想像能力的兒童，可以多用圖解去幫助他們了解。幾乎任何問題，無一不可以用圖解，可是教室裏實際應用圖解的仍是極少。這個解釋，只可以說，教師所重視似乎只在問題，只在要求兒童解答問題，卻疏忽着他們怎樣才能夠將問題解答出來。

與圖解相彷彿，而實際徒然增加一重思想上的負擔的，是有些教師常用的表解，將解答的步驟一步一步的排列出來，或將問題裏的事實一項一項的列舉出來。原意也許是幫助兒童，結果不但替代了兒童活潑的想像，而且阻礙了思想。這與用表解學習文法一樣。即使一時可以使兒童對於繁複的句法或問題得到了解，但是平時應用句法與思考問題決不是憑分析每一字，每一事實的性質的。若是以為問題的複雜不能不用表解，使它清晰些，那

當然不是表解的無用，而是問題不適合兒童的程度。平常慣用的立式，雖有它特殊的功用，但是任何問題必須先立式後計算，那是倒果爲因。兒童所受到的重負更甚於表解。立式是說明問題是怎樣解決的，卻不是怎樣拿它去解決問題。

### 三 推理問題

解答一個應用問題的思想過程通常都稱作推理 (reasoning)。數學原是推理的典型。可是事實的證明大多數小學兒童都不適宜於推理。據孟祿 (Monroe, W. S.) 用相當簡單的應用問題測驗，研究大批七年級 (相當於初中一年級) 兒童的解答，他的結論是大多數兒童解答問題不憑推理，而是就題目上的數字作幾乎是隨意的計算。果而將問題答對，也似乎只憑着習慣。若是問題的內容對他們是熟悉，而且其中沒有什麼不相干的材料，那末大都可以解答正確。若是問題是生疏的，或是他們看來是新的問題，那末比較少數的兒童才有推理的嘗試。大多數兒童或是沒有這種嘗試，或是解答錯誤。英國的勃拉德福 (Bradford) 對於這方面的研究也有同樣的結論。

推理原是算術，尤其是解答應用問題所不可少，但是有些推理能力必須等待他自然發展，不是教學所可能的。若是在應用問題的錯誤是由於推理能力未成熟，在未成熟前，教學不會有效。

甚至於最簡單的應用問題，也需要推理能力有相當的成熟；像這所謂相當成熟的程度，有少數小學兒童是始終達不到的。因此研究兒童算術推理能力的欠缺，一般智力與心智成熟狀況便成一個主要的對象。

智力和解答應用問題的關係，最好拿皮納智力測驗來說明。在皮納的測驗裏，在十四歲那一段上才放了以下三個問題，通常教科書裏像這樣的問題都放在四年級或五年級（十歲或十一歲）。這三個問題是(1)『有一個人的薪水是每星期二十元，他每星期要儲蓄六元，儲滿三百元，要多少時間？』(2)『鉛筆每二枝要賣五分錢，你拿五角錢去，可以買多少枝？』(3)『布每碼的價錢是三角五分，七尺要多少錢？』這三個問題所以放在十四歲那一段裏，皮納的意思，只有到達這個年齡的智力，才能夠解答。一般編教科書的人卻認為，這些問題裏，不包含分數，小數或多位數除法，所以放在較低的年級裏。他們完全沒有注意到即使在這樣比較簡單的問題裏，兒童推理的困難。

兒童到達哪一個年齡才有推理能力，這是辯論不休的一個問題。以前曾有人以為十二歲是最低限度。著名兒童心理學家畢該（Piaget）的研究，認為常態兒童的最低限度還可提早。四歲兒童已可用初淺的計算去推理。皮納智力測驗裏七歲與九歲的階段裏已經有簡單的計算問題。這個問題的答案不在兒童有沒

有推理能力，而在某一類問題需要成熟到如何程度的推理能力。

教科書裏的許多許多矯揉造作的問題，如『安娜有一元的八分之三，白達有十六分之一，馬麗有二十五分之三，倪南有四分之三，他們一共有多少』？這幾乎不是推理能力應該到達哪一階段才能做的問題，而是完全忽視了兒童推理能力的問題。日常生活裏許多自然發生的問題，既不像教科書裏那樣夾着一些名詞術語，而且計算的方式也不相同，可是它們有着一個生動的情境，合着生活的習慣，即使有時也較為不簡單，但不為兒童所厭棄。因此推理能力發展到可以計算這類問題的時期，也仍然需要問題切合實際的經驗。

#### 四 語文問題

近來又有若干研究注意到應用問題的意義與語文對於解答的影響。一般兒童對於熟悉的問題或用日常慣用的文字敘述的問題，測驗結果，成績稍高。有許多困難都起於問題裏語詞的生疏。閱讀能力的欠缺成爲了解問題的障礙。多用朗讀可以增進對於問題的了解。增加閱讀算術問題的經驗，閱讀簡單的問題，不必完全解答出來，常可以幫助他們增進了解。

了解的一大障礙是許多一知半解的名詞術語。每一名詞術語，必須補充適當的經驗，使兒童了解其意義。而且這類名詞術

語在日常生活不能常常遇到，因此不能用單獨的，形式的教學，必須與具體的事實或情境相聯絡，多注意實際的應用。有時用少數問題作比較細緻的討論，往往比多數問題較有良好的效果。



## 附錄 關於改進小學算術科課程標準的意見

### 一 課程與課程標準

所謂課程，是指兒童在學校影響之下的一切經驗而言。兒童在校內以及對於家庭社會等各方面的接觸，經教師的指導薰陶，而發生，而形成的各種經驗，都包括在課程之內。因此，課程應該關照着兒童個人的和團體的生活的各個主要方面，同時應該輔導兒童從事或參與學校以外的對他們有意義而需要的各種活動。

可是，在通用的習慣上，課程又常指一連串或一系列的各種學科的內容而言。每種學科由教育行政機關，就其目標、內容和教法等作扼要的列舉和指示，以輔助教師計劃課程和教學，這便成了課程標準的雛形。這裏所說教育行政機關無非指我國過去和目前情形而言。其實在我國，關於學校應設學科、時數、目標和內容要點，也不一定全是教育行政機關擬訂。例如，民國十一年實行新學制，當時中小學的課程綱要，便是由教育團體所擬訂。這種課程綱要，可由一個學校自行擬訂，可由幾個學校或一地方的學校會同擬訂。擬訂的時候，教育行政人員、教師、家長、地方人

士和教育學者，看情形和需要，都可以參與其事。因為這種綱要適合地方情形和實際需要，自然可以作為學校活動和教學的憑藉和指引，而且可以不絕地修訂。惟有像這一類的課程綱要，層出不窮地發表出來，道地的，適用的課程標準，才有產生的可能。例如美國哥倫比亞大學師範學院所收集的各種課程綱要便有四萬餘份之多，而且大都是一九三〇年以後十年之間所出的。該院每年十二月份的「課程雜誌」(Curriculum Journal)照例公佈一個當年新出的較有價值的課程綱要目錄。這大量的綱要都是說明各地各校的實際活動。有了這樣的基礎，再加其他各方面的研究，具有指導性質，可以作為依循準繩的課程標準自然便成功了。

一個課程標準是輔助各地方計劃和實施學校課程的依據，它是各種學科的內容和形式的一個範型，它敘明每科主要而必需的目標，它扼要提舉每科每年最低限度所應有的教學，這種標準，在美國都由各州教育局訂定，分送各地方參考。因為國情的關係，美國是沒有全國性的課程標準的。

我國至目前為止，只有教育部頒佈的一種課程標準。以全國幅員之廣，各地情形之懸殊，一種標準而能全國各地普遍適用，當然是很不容易的，幾乎是不可能的。好在現在頒佈的憲法，採取地方均權制。將來在教育方面，中央僅規定或執行教育制度，

省市縣均可分別在教育方面自行立法執行。這個當然還須看中央所訂的教育制度彈性如何，不過地方自主的端倪已見。單就學校課程而論，像英、美等國，固然完全由地方自主，即在戰前希特勒秉政時期的德國，政制力求中央集權，而學校課程悉聽地方自主，各邦都有本邦的學校課程的規定。所以，據筆者妄測，今後，不論遲早，我國各省市當有課程標準出現；從上述課程標準的作用上看，從憲法規定的政制趨勢上看，這推測也許可能實現，而且是希望它實現的。

據歷來參與教育部暫行課程標準以及課程標準的人談，最初所以將課程加上「標準」二字，原是準備各地依據這個標準自行訂定切於實際現狀的課程，因此，三十一年頒行的課程標準以前的各次標準，都只規定目標、作業要項和教學要點，大體上只規定範圍，指示要點，無非使各地學校在實施上有所參照依據而已。這見解實在是正確的。可惜三十一年頒行的課程標準，鑒於過去的「標準中祇規定作業要項，而無具體的教材要目，雖富有彈性，各地可斟酌需要情形，編選教材，但因伸縮性太大，教材往往陷於太艱深太繁瑣之弊病」，（註一）因此，可以增加教材要目的各科都照加了。教材過於艱深的病徵，其原因不必盡是規定的作業要項伸縮性太大。而教材要目的規定，卻是彷彿為教科書編者開了一個目錄。這種要目，無人敢信其盡善盡美。假使由地

方自行訂定，各就所需，可以多到如前述美國一機關所收集的，十年之間達四萬種之多。我國如此大國，只有教育部所訂頒的一種，即使詳細靡遺，亦未免有掛一漏萬之慮。教育部既有國定本課本頒行，這實在便是教材要目的一個具體實例。但須教科書編印自由競爭，適用的教材要目自然會循着優勝劣敗的道理而存在。教育部所訂要目，可以作為輔導之用，且可以多訂幾種，以供採擇。課程標準只須定各科目標和教材大綱。教育部最近準備修訂課程標準，竊以仍宜循三十一年以前的辦法，作技術上的修訂。這次修訂也許將是二十年來教育部訂頒課程標準的一個歷史的段落。以後各省市訂頒課程標準，當參考教育部近二十年來的經驗，以教育部行將修訂頒佈的標準為藍本，為借鑑，從此出現更多切近各地需要的優良標準。我們需要各種各樣的由地方自行訂定的課程綱要，同時我們也需要適合各地情形由省級教育行政機關訂定的課程標準。綱要愈道地愈實際，愈好，標準是愈簡要愈顧大體，愈好。本文循此意義，提供若干關於小學算術課程標準方面的意見。

## 二 小學算術教學的目標

目標是某一科課程標準的重心。這是全部教學的指歸。這一編的是教師指導兒童活動所步趨的最後歸宿；經過一個程序的

教學，兒童的技能、知識、態度和理想，應該達到某一個理想的境界，才算是這一科的教學已經成功。目標的意義如此，它在某一科課程標準上地位的重要也就可想而知。名之謂「標準」，它自然具有一種指導的作用；它所釐定的目標當然應該清晰確定而富有意義。意義由於價值，價值高的，意義也大。例如，對於中國的六歲至十二歲的兒童，在數的經驗和計算技能方面有價值的學習，其意義當然也豐富而值得重視。所以，某一科的教學目標可以說是決定於這一科學習的價值，明晰確定是說價值的明晰和確定。

那末，小學算術教學的價值是憑什麼決定的呢？這有兩方面的因素：第一是社會的效用，第二是學習的心理。社會的效用是說個人的和團體的生活上的需要。生活上既有一種數量的事實的存在，生活的維持和豐富必須能夠善於處理這些數量的事實。可是，亦不能單憑生活上的需要來決定，兒童心理的發展從一歲左右起，已經開始發生數的經驗；這種經驗的發展，像身體的生長一樣有其自然的程序。假使所教學的，將社會的效用和心理的發展，配合得恰到好處，不僅學習的效率大，而且是這種學習的價值也高。因此，我們可以說，目標的決定是由於價值的判斷。

這種價值的判斷，必須求之於對兒童的生活和學習的認識，要能夠在這兩方面有透徹深細而謹慎的觀察和研究，才可以有

價值判斷的憑藉。價值的判斷不明切，跟着自然是目標的混淆含糊，其結果是學習的效率的低下。

這裏筆者先介紹兩位有專門研究的學者對於小學算術教學所舉述的目標，（註二）然後再略加闡釋。

「簡單地說，一個現代適用的算術課程，除出小學教育的總目標之外，有這樣四個目標：（一）輔助兒童認識和理會一種知識，這種知識使他了解並欣賞生活裏關於數的各種應用；（二）使兒童注意於數怎樣促進人類的進步，並使他注意各種關於數的制度，發展到現在，其中所有的問題，總之，一切屬於數的社會現象的方面；（三）發展兒童處理日常環境中的數的問題所應有的機智和才能，以及有效的關於數的思維方法；（四）發展兒童計算和運用數的主要技能。」

算術教學的對象可以說有四方面：數的現象和制度，數的思考和計算的技能。數的現象和其他的自然現象一樣，雖然是客觀的存在着的，如多少、大小、長短、輕重和方圓等等；可是兒童能夠發覺這類現象的存在，從而去玩弄、比較、運用，則須依着心智的發展，有着自然的程序。教師所可為的是觀察兒童這方面的發展，在環境方面作適宜的佈置，讓兒童認識數的現象，在觀念上得到了合適的發展，學習算術可以說才完成最初步的基礎。等到需要用數目去數，用數字去記，用工具去量，這已經引起一種人

爲制度的應用。人爲的制度，例如尺和秤，時間和里程的計數，都有着豐富的社會的意義；根本上，制度是社會生活的產物。因此，任何屬於制度方面的教學，和社會生活密切相結合着的，便活潑有效，否則便僵硬乏味。至於數的思考和計算的技能，兩者固不可分，思想上的發展必須伴之以技能上的熟練，而技能的練習亦絕不可缺少思想上的活動。思想技能，兩相伴隨，雖然重要，卻是必須落在一個真實的生活情境裏，因爲惟有如此，算術才能有它社會的意義，它本身才成爲一個社會生活所必需的工具。這點算術的社會性的認識（所謂「算術的社會學」）是近年來這方面的研究很注重的一點。

歸納起來說，目標是憑學習的價值來決定的，學習的價值要看社會的效用和心理的發展，兩相配合呼應的情況而定。根據這一個觀點，就教育部三十年公佈的小學算術科課程標準的目標，我們試擬這樣三點修正的意見：

（一）算術教學第一個目標是使兒童了解事物中數的意義和關係，培養兒童數的概念。從事物中所了解的數的意義和關係，這是社會的意義和關係，不是孤立的數的意義和關係的了解。換言之，數的意義和關係必須從兒童的生活經驗中去了解，不用「生活經驗」而說「事物」，無非使得意思更顯豁一點，因爲生活經驗，必有事物爲對象，兒童所了解到的數的意義和關係，都



應該親身直接從事物上去得到。特別是數的關係，實際可以說是事物的關係，無非用數將它表示出來，所以尤其非從事物上去了解不可。同時，數的意義和關係的了解，必須發展到概念的形成。先是從一件一件具體的事物上得到了解，最後能夠從各個具體的了解歸納而成概念，這才是有指導的學習所要達到的目標。

(二)第二個目標是發展兒童解決日常生活問題中應用數的能力。我們把解決日常生活中的問題所應該發展和培養的思維方法、機智、和謹慎細心等態度都用「能力」二字去概括了，因為解決問題的能力，原本是一種比較基本比較重要的思維能力，假使為明瞭起見，當然也不妨分析開來說。我們所注重的是兒童所能經驗到的「日常生活中的問題」，其發生，處理以至於解決，這過程中如何應用數去對付問題的全部能力，好似用文字或其他工具去解決問題一樣。

(三)第三個目標是發展兒童計算的技能和習慣。關於計算技能的發展，我們把原文中「正確和敏捷」幾個字略去了，因為技能的養成，思想、態度和情緒等方面都很重要，方法尤其不可忽視，僅標出技能所最後達到的狀態「正確和敏捷」，似乎容易疏忽技能發展的動機和過程中所應該培養和發展的各種因素。

以上三點擬議當然可資商榷討論的地方很多，我們所着眼的是算術教學的社會的效用，思維的發展和計算的技能等三方

面，這三方面當然又有不可分離的關係，每一方面的顧及必會牽涉其他兩方面。至於究竟那一方面比較的更重要呢？這須將問題引入較深的理論的討論，本文且暫止於此了。

### 三 小學算術教材的範圍

據現代學校課程研究的結果，關於課程的範圍有以下幾項重要的意見：（一）課程應該注意兒童在學校影響之下的一切經驗，（二）依據兒童的需要和興趣，以及他們生活的各方面，作為決定課程範圍的基礎，（三）使用系統的有效的的方法，去發現並供給全體兒童廣泛的需要和興趣，一方面須適合各階段兒童身心發展的狀況，另一方面需要必求有真切，興趣必求其富有意味，（四）時分的支配，單元的連續和教材的年級配置須容許較大的伸縮，（五）比較抽象和專門的教材延遲教學的時期。這幾項意見對於小學算術課程便發生了以下幾種影響：

（一）延遲算術的正式教學。一、二年級不特設算術科的時間。算術的活動在常識、工作、唱遊各科中隨機教學，切實從兒童遊戲和生活的需要裏去取材。

（二）簡化算術教材的內容。算術教材應該依照實際社會生活裏的應用；用什麼，學什麼，至少在小學裏應該作為取材的第一根據。據實際的調查，百分之九十的成人所需要的算術無非整數

四則和極少數的分數。日常生活裏，小數的計算已經極少，普通一般人，只須懂得小數的讀法已經夠用。許多研究證明分數的應用，最常用的僅是二分之一，三分之幾，四分之幾。此外，八分之幾，十二分之幾，已經不多用。至於二分之一加四分之幾，或八分之幾加十二分之幾，只是偶然才有些用處。據一些小學算術課程研究的結果。歸納起來，最低限度必需的算術不過這些；數字的認識，數的常識和計數（如時間、重量和容積之類）；數的符號和字彙（如減、進位、整數、折扣和利息等等，這些在算術裏都有特殊的涵義，因此必須認識清楚）；四則的認識和計算能夠熟練而正確；分數、小數、百分數和實際所需用的簡單的度量衡；看了算題或聽人口述算題能夠清楚了解。

（三）教材的進度，不用分年，而用分段的排列，如低、中、高各段。這樣放寬教材範圍的伸縮性，一則可以適應實際教學的需要，二則計劃教學單元的時候，教材的連續和順序，反而更可以趨於細緻緊湊，並且同一類教材可以設計幾個單元進行。

（四）教材大綱不僅列舉數的認識和計算方法，同時須加入關於數和計算的符號和字彙，以及如實測等有代表性的活動。這樣才可使教師和教科書編者在運用大綱的時候，除出計算方法，還能兼顧到兒童的興趣和活動以及必需的概念的養成。

以上這四方面，也許可供修正小學算術課程標準關於教材

部份的參考。究竟低年級沒有正式的算術科以後，應該怎樣教學，教材內容應該怎樣簡化，教材進度應該怎樣排列，教材大綱裏應加入那些活動和字彙符號的舉例等問題，實在是修訂課程標準所必須的實際準備工作，並且這些問題只能在實際課程上先作不斷地試驗，才可能訂定比較可資依循參考的標準。

(註一)「小學課程標準第二次修訂經過」見三十一年教育部頒行的小學課程標準，頁一。

(註二)見 New York Regent's Inquiry 中 C. L. Thiele 及 Leo T. Brueckner 二氏之報告。

## 後 記

今日我們檢討百餘年來小學算術教學的發展，飲水思源，不能不對裴斯塔洛齊深致敬仰感謝的衷誠。在他那時候，小學裏還沒算術這一科。即使間或有這種學習的，也無非增加小孩子的厭惡與苦痛。他根據『教育的心理化』的信念，創闢出一條新途。在他的被稱爲『近代小學的搖籃』的部格都夫學校裏，小孩子最歡喜做的是畫圖和做算術。甚至於星期日小孩子也聚集在教室裏做着算術玩。這是1801年那時候的事，舉世也許只有那一個學校才有這幅光景。海爾巴德親自到那裏訪問參觀，看見真理已經進入寒微的門庭——小學，油然而起崇敬之感，稱他爲『高貴的裴斯塔洛齊』。那時當得『高貴的』三個字的尊稱的，只有王帝，貴族，教士，一個終日與窮苦孩子在一處的教師，竟也配受這麼的稱頌！

早在裴斯塔洛齊生前，一個值得記憶的年份，1821年，英國有蒲倫（Pullen, P. H.）的一本介紹裴斯塔洛齊心算教學的書出版；美國有考爾朋（Colburn, Warren）的裴斯塔洛齊算術初階出版。考爾朋的書在英美應用極廣，通行了五十多年，並譯成幾國文字；美國算術教學第一次真正的革新是從這本書開始的。

考爾朋採取了裴斯塔洛齊的發展的原則，放棄了一切算術上傳統的規則。他主張，規則必須了解才有用，但是了解又必須是兒童從發展之中自己所製定的規則。裴斯塔洛齊的發展原則，從此在算術教學上立定了堅固的基礎。考爾朋的書前面五十二頁是一千個只須教師口述的心算題，完全不教數字，目的在啓發兒童數的觀念。心算先於筆算，這流行到現在的方法，也是由裴斯塔洛齊發明，考爾朋傳播而起的。

這本疏淺的小書，編者的私意，只是想略窺百餘年來裴斯塔洛齊對於兒童學習算術的理想已經發展到怎樣一個狀況。近代算術教學所以能有優良的成績，幾乎完全靠心理的研究。本書雖極其簡略，若是自首至尾將心理的觀點與方法全部撇開，恐將一無所有。這裏所提到的一些實驗研究或教學方法，根本都是從兒童學習心理的觀點出發。編者不敢掩飾，這裏所提到的心理問題實在是很淺泛的，至於教學方法也不能十分道地而實際。不過只能作為進一步研究的踏脚而已。希望引起一點研究的興趣，日後能夠拿出一些我們自己的材料來。

編者 三七,三,九杭州西湖羅苑