Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Vorlesung 24

Die homologische Charakterisierung von regulären Ringen

Jean-Pierre Serre ist der dritte von links.

Der folgende Satz heißt Satz von Hilbert-Serre. Von Hilbert ist dabei die graduierte Situation, die wir kurz in Bemerkung 24.4 erläutern.

SATZ 24.1. *Für einen lokalen noetherschen Ring R sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *R ist regulär.*
(2) *Jeder endliche R-Modul besitzt eine endliche projektive Dimension (und zwar $\leq \dim(R)$).*
(3) *Der Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$ besitzt endliche projektive Dimension.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Wir führen Induktion über die Dimension d von R. Wenn $d = 0$ ist, so liegt ein Körper vor, und ein endlicher R-Modul ist einfach ein endlichdimensionaler Vektorraum. Diese besitzen eine Basis und sind somit frei, besitzen also die projektive Dimension 0. Sei also nun $d \geq 1$ und die Aussage für reguläre Ringe kleinerer Dimension schon bewiesen. Wir nehmen ein $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, was es nach dem Lemma von Nakayama geben muss. Nach Lemma 21.4 ist der Restklassenring $R/(f)$ ebenfalls regulär und hat kleinere Dimension. Es sei nun M ein endlicher R-Modul. Wenn M frei ist, so ist die Aussage klar. Es sei M nicht frei (insbesondere nicht 0) und

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine minimale freie Auflösung. Es ist zu zeigen, dass diese endlich ist. Es sei N der Kern der Abbildung $F_0 \to M$. Wir schneiden die Auflösung ab und erhalten eine minimale freie Auflösung

$$\cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow N = \operatorname{kern} \varphi_0 \longrightarrow 0\,.$$

Da M nicht frei ist, ist N nicht der Nullmodul.

Da f nach Satz 21.5 ein Nichtnullteiler in R ist und N ein Untermodul eines freien Moduls ist, folgt, dass f auch ein Nichtnullteiler für N ist. Wir können somit Lemma Anhang 8.2 anwenden und erhalten einen exakten Komplex

$$\cdots \longrightarrow F_2/fF_2 \longrightarrow F_1/fF_1 \longrightarrow N/fN \longrightarrow 0\,.$$

Dieser ist eine freie Auflösung des $R/(f)$-Moduls N/fN. Er ist minimal: Der Rang von F_1 ist die minimale Erzeugendenzahl von N über R und diese ist die K-Dimension von $N/\mathfrak{m}N$, die wiederum die minimale Erzeugendenzahl von N/fN über $R/(f)$ ist. Entsprechend muss man für $F_2, F_3, \ldots$ argumentieren. Nach Induktonsvoraussetzung ist

$$F_n/fF_n \,=\, 0$$

für ein n. Wegen $f \in \mathfrak{m}$ muss dann aber schon $F_n \,=\, 0$ sein. (2) $\Rightarrow$ (3). Das ist eine Einschränkung. (3) $\Rightarrow$ (1). Es sei

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 = R \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

eine minimale freie Auflösung des Restklassenkörpers. Wir zeigen durch Induktion über n, dass R regulär ist. Bei $n \,=\, 0$ wird der exakte Komplex zu

$$0 \longrightarrow F_0 = R \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0\,,$$

d.h. R ist isomorph zu seinem Restekörper und somit selbst ein Körper, also insbesondere regulär. Sei nun $n \,\geq\, 1$ und die Aussage für kleinere n bewiesen. Wir betrachten das linke Ende der Auflösung

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \ldots\,,$$

wobei F_n und F_{n-1} frei und nicht 0 sind. Das Bild liegt in $\mathfrak{m}F_{n-1}$ wegen der Minimalität und wegen $n \,\geq\, 1$. Wir behaupten, dass $\mathfrak{m}$ kein assoziiertes Primideal von R ist. Andernfalls wäre

$$\mathfrak{m} \,=\, \operatorname{Ann}(h)$$

für ein $h \in R$, $h \neq 0$, und insbesondere wäre

$$h\mathfrak{m} \,=\, 0.$$

Dann wäre auch $h\mathfrak{m}F_{n-1} \,=\, 0$ und somit $hF_n \,=\, 0$, was aber bei einem freien Modul nicht sein kann. Dies bedeutet nach Lemma Anhang 13.8, dass $\mathfrak{m}$ einen Nichtnullteiler enthalten muss. Daher ist die Dimension von R zumindest 1. Daher ist die Inklusion

$$\mathfrak{m}^2 \,\subset\, \mathfrak{m}$$

echt und nach Lemma Anhang 15.2 gibt es ein $f \in \mathfrak{m}$ mit $f \notin \mathfrak{m}^2 \cup \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(R)} \mathfrak{p}$. Insbesondere ist f ein Nichtnullteiler. Ähnlich wie im Beweis von (1) nach

(2) ist dann auch der Komplex (der Kern der nullten Abbildung ist hier das maximale Ideal)

$$0 \longrightarrow F_n/fF_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_2/fF_2 \longrightarrow F_1/fF_1 \longrightarrow \mathfrak{m}/f\mathfrak{m} \longrightarrow 0$$

exakt. Da $\mathfrak{m}/f\mathfrak{m}$ nicht der Restklassenkörper von $F/(f)$ ist, können wir nicht unmittelbar die Induktionsvoraussetzung anwenden. Unter dem R-Modulhomomorphismus

$$R \longrightarrow \mathfrak{m}/f\mathfrak{m},\, 1 \longmapsto [f],$$

wird genau $\mathfrak{m}$ auf 0 abgebildet, wir haben also eine injektive Abbildung

$$R/\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}/f\mathfrak{m}.$$

Wegen $f \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ können wir f zu einem minimalen Erzeugendensystem $f, g_2, \ldots, g_s$ von $\mathfrak{m}$ ergänzen. Wir behaupten, dass es einen wohldefinierten Modulhomomorphismus

$$\mathfrak{m}/f\mathfrak{m} \longrightarrow R/\mathfrak{m}$$

gibt, der linksinvers zur obigen Einbettung ist. Dabei wird ein Element

$$h \,=\, af_1 + b_2g_2 + \cdots + a_sg_s$$

auf a abgebildet. Zum Nachweis der Wohldefiniertheit sei

$$h \,=\, a'f + b_2'g_2 + \cdots + b_s'g_s$$

eine weitere Darstellung. Dann ist

$$0 \,=\, (a-a')f + (b_2 - b_2')g_2 + \cdots + (b_s - b_s')g_s$$

in $\mathfrak{m}/f\mathfrak{m}$ und das bedeutet

$$(a-a')f + (b_2 - b_2')g_2 + \cdots + (b_s - b_s')g_s \,=\, fc$$

mit $c \in \mathfrak{m}$. Wäre $a-a' \notin \mathfrak{m}$, so wäre dies eine Einheit und damit auch $a-a'-c$. Doch dann könnte man f als Linearkombination der $g_2, \ldots, g_s$ ausdrücken im Widerspruch zur Minimalität. Es gibt also eine direkte Zerlegung

$$\mathfrak{m}/f\mathfrak{m} \,=\, R/\mathfrak{m} \oplus N$$

mit einem weiteren R- (oder $R/(f)$-)Modul N. Nach Lemma 23.18 besitzen in einer solchen Situation auch die Summanden eine endliche projektive Dimension, die nicht größer als die projektive Dimension der Summe ist. Somit besitzt also der Restklassenkörper eine endliche projektive Dimension über $R/(f)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist somit $R/(f)$ regulär, und seine Dimension ist nach dem Hauptidealsatz um 1 kleiner als die von R. Dies gilt auch für die Einbettungsdimension. Somit ist R regulär. □

Der folgende Satz heißt Satz von Auslander-Buchsbaum-Serre.

Satz 24.2. *Für einen lokalen regulären Ring R ist jede Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ ebenfalls regulär.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Der Restklassenmodul $R/\mathfrak{p}$ ist endlich erzeugt, deshalb gibt es nach Satz 24.1 (2) eine endliche freie Auflösung

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow R/\mathfrak{p} \longrightarrow 0\,.$$

Wir tensorieren diese Sequenz mit der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$. Da die Tensorierung mit einer Nenneraufnahme nach Lemma 23.4 exakt ist, erhalten wir eine endliche freie Auflösung (über $R_{\mathfrak{p}}$)

$$0 \longrightarrow F_n \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_2 \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow F_1 \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow$$
$$F_0 \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow R/\mathfrak{p} \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

Wegen

$$R/\mathfrak{p} \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} = \kappa(\mathfrak{p})$$

(nach Proposition Anhang 6.9 (2)) ist dies eine freie Auflösung des Restklassenkörpers von $R_{\mathfrak{p}}$. Nach Satz 24.1 (3) ist somit $R_{\mathfrak{p}}$ regulär. □

Die vorstehende Aussage ist ein typisches Beispiel dafür, wie durch die Entwicklung einer neuen Theorie ein zuvor schwieriges Problem „plötzlich“ einfach wird. Ohne die homologische Charakterisierung von regulären Ringen ist der Nachweis dieser Lokalisierungseigenschaft schwierig.

Bemerkung 24.3. In einem lokalen regulären Ring gibt es für den Restklassenkörper $R/\mathfrak{m} = K$ eine explizite endliche Auflösung, die sogenannte *Koszul-Auflösung*. Für ein minimales Erzeugendensystem

$$\mathfrak{m} = (f_1, \ldots, f_n)$$

hat sie die Form

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow R^{\binom{n}{n-1}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow R^{\binom{n}{3}} \longrightarrow R^{\binom{n}{2}} \longrightarrow$$
$$R^n \stackrel{f_1,\ldots,f_n}{\longrightarrow} R \longrightarrow R/\mathfrak{m} \longrightarrow 0,$$

wobei sich die Abbildungen links durch gewisse alternierende Produkte der Linearform $R^n \to R$ ergeben.

Bemerkung 24.4. Zum Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ über einem Körper K und einem endlich erzeugten graduierten Modul M gibt es eine endliche graduierte freie Auflösung, d.h. die freien auflösenden Moduln sind von der Form (im Sinne von Definition 16.3)

$$F = \bigoplus_{i \in I} R(-d_i)$$

und die Modulhomomorphismen sind homogen.

Bemerkung 24.5. Die Lokalisierung an einem Primideal kann regulär sein, ohne dass der Ausgangsring regulär ist. In der Tat ist das ein sehr häufiges und typisches Verhalten. Wenn beispielsweise R ein Integritätsbereich ist, so ist die Lokalisierung am Primideal

$$\mathfrak{p} = (0)$$

der Quotientenkörper von R, und als Körper stets regulär. In einer Primidealkette

$$(0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{m}$$

gibt es somit ein größtes Primideal, das regulär ist (dieses kann gleich $\mathfrak{m}$ sein). Wenn nämlich $R_{\mathfrak{p}_i}$ regulär ist, so ist $R_{\mathfrak{p}_j}$ für $j \leq i$ eine Lokalisierung von $R_{\mathfrak{p}_i}$ und somit nach Satz 24.2 selbst regulär.

Die analytische Situation

Wenn man sich auf Polynome und die durch sie definierten Singularitäten beschränkt, so ergibt sich ein gewisses Defizit dadurch, dass der Satz über implizite Abbildungen nicht in dieser Kategorie gilt. In den regulären Punkten zu polynomialen Abbildungen gibt es gemäß dem Satz lokal Diffeomorphismen zwischen den Fasern und offen Bällen im $\mathbb{K}^n$, aber diese Diffeomorphismen sind nur sehr selten durch Polynome gegeben. Insbesondere gibt es zwischen zwei glatten Punkten $P_1 \in V_1$ und $P_2 \in V_2$ gleicher Dimension keinen polynomialen Isomorphismus, obwohl es einen Diffeomorphismus gibt. Das ist nicht immer befriedigend, und es gibt grundsätzlich zwei Möglichkeiten, dies zu umgehen. Man kann mit formalen Potenzreihen arbeiten, mit denen man formale Isomorphismen ausdrücken kann und wofür die Komplettierung von lokalen Ringen entscheidend ist. Oder man kann, bei $K = \mathbb{C}$, holomorph arbeiten und ausnutzen, dass es eine holomorphe Version des Satzes über implizite Abbildungen gibt, so dass die Diffeomorphismen, wenn die definierenden Funktionen holomorph sind, lokal durch konvergente Potenzreihen beschrieben werden können.

Definition 24.6. Eine auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ definierte Funktion

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$$

heißt *holomorph*, wenn sie komplex-differenzierbar ist.

Definition 24.7. Eine auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ definierte Funktion

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$$

heißt *komplex-analytisch*, wenn sie sich in jedem Punkt $P \in U$ auf einer offenen Umgebung $P \in V \subseteq U$ durch eine konvergente Potenzreihe beschreiben lässt.

Der folgende Satz ist ein Hauptsatz aus der Funktionentheorie mehrerer Variablen.

Satz 24.8. *Es sei*

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ definierte Funktion. Dann ist f genau dann holomorph, wenn f komplex-analytisch ist.

Definition 24.9. Es sei $P \in \mathbb{C}^n$. Dann nennt man den Ring aller in einer offenen Umgebung von P definierten holomorphen Funktionen den *Ring der konvergenten Potenzreihen* in P. Dabei werden Funktionen identifiziert, wenn sie auf einer gemeinsamen offenen Umgebung von P übereinstimmen, und die Addition und die Multiplikation wird auf offenen Umgebungen durchgeführt, auf denen beide Funktionen definiert sind.

Der Ring der konvergenten Potenzreihen wird mit $\mathcal{O}_P$ bezeichnet. Dieser Ring hängt nur von der Dimension, also der Anzahl der Variablen ab, nicht aber vom Punkt P. Häufig wird er auch mit $\mathcal{O}_n$ bezeichnet. Zum Nullpunkt bilden die Variablen $X_1, \ldots, X_n$ ein minimales Erzeugendensystem des maximalen Ideals. Zum Polynomring $K[X_1, \ldots, X_n]$ bzw. zur Lokalisierung $K[X_1, \ldots, X_n]_{X_1,\ldots,X_n}$ besteht die Beziehung

$$\begin{aligned} K[X_1, \ldots, X_n]/(X_1, \ldots, X_n)^s &= K[X_1, \ldots, X_n]_{X_1,\ldots,X_n}/(X_1, \ldots, X_n)^s \\ &= \mathcal{O}_n/(X_1, \ldots, X_n)^s \end{aligned}$$

für alle s, d.h. die Restklassenringe zu Potenzen des maximalen Ideals stimmen in den verschiedenen Konzepten überein. Somit stimmen beispielsweise auch die Hilbert-Samuel-Funktion, das Jacobiideal und die Milnorzahl zu einem Polynom etc. überein.

Lemma 24.10. *Der Ring der konvergenten Potenzreihen in $P \in \mathbb{C}^n$ ist lokal mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P = \{f \in \mathcal{O}_P |\, f(P) = 0\}$.*

Beweis. Es ist klar, dass $\mathfrak{m}_P$ ein Ideal ist. Wenn die holomorphe Funktion f nicht zu $\mathfrak{m}_P$ gehört, so ist $f(P) \neq 0$ und dann ist f auch in einer offenen Umgebung von P nullstellenfrei. Dort ist $1/f$ eine wohldefinierte holomorphe Funktion und das bedeutet, dass f in $\mathcal{O}_P$ eine Einheit ist. Also handelt es sich bei $\mathfrak{m}_P$ um das einzige maximale Ideal. □

Ohne Beweis erwähnen wir den folgenden Satz.

Satz 24.11. *Der Ring der konvergenten Potenzreihen in $P \in \mathbb{C}^n$ ist regulär der Dimension n.*

Holomorphe Funktionen $(f_1, \ldots, f_m) : U \to \mathbb{C}^m$ auf einer offenen (in der euklidischen Topologie) Menge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ legen wie im algebraischen Fall eine (analytische) Nullstellenmenge

$$Z = \{P \in U |\, f_j(P) = 0 \text{ für alle } j\} \subseteq U$$

fest. Der lokale holomorphe Ring zu $P \in Z$ besteht aus allen in einer Umgebung von P auf Z definierten holomorphen Funktionen, und dieser ist nach Definition gleich

$$\mathcal{O}_{Z,P} = \mathcal{O}_P/(f_1, \ldots, f_m).$$

Die holomorphe Version des Satzes über imlizite Abbildungen besagt, dass falls die Jacobimatrix zu den f_j im Punkt P surjektiv ist, dass es dann eine biholomorphe Abbildung zwischen einer offenen Umgebung $P \in U' \subseteq Z$ und einer offenen Menge $U'' \subseteq \mathbb{C}^{n-m}$ gibt, die Z als komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension $n-m$ nachweist. In diesem Fall induziert die biholomorphe Abbildung einen Ringisomorphismus

$$\mathcal{O}_{Z,P} \cong \mathcal{O}_{n-m}.$$

Das bedeutet, dass der lokale holomorphe Ring zu einem glatten Punkt auf einer d-dimensionalen analytischen Nullstellenmenge stets isomorph zum Ring der konvergenten Potenzreihen in d Variablen ist.

Die folgende Aussage, die wichtige Beziehungen zwischen

$$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}$$

und dem lokalen Ring $\mathcal{O}_n$ der holomorphen Funktionen beschreibt, wird mit Hilfe der Komplettierung bewiesen.

Satz 24.12. *Für die Lokalisierung* $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}$ *und den lokalen Ring* $\mathcal{O}_n$ *der holomorphen Funktionen gelten folgende Beziehungen.*

(1) *Die natürliche Abbildung*

$$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)} \longrightarrow \mathcal{O}_n$$

ist injektiv und flach.

(2) *Für ein Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}$ *ist*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\mathcal{O}_n \cap \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}$$

(3) *Für ein Ideal* $\mathfrak{a} \subseteq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}$, *dessen Radikal gleich* $(X_1, \ldots, X_n)$ *ist, gilt*

$$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}/\mathfrak{a} = \mathcal{O}_n/\mathfrak{a}\mathcal{O}_n.$$

Dies bedeutet beispielsweise, dass zu einem Polynom $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ mit einer isolierten Singularität die Milnorzahl wegen

$$\mathcal{O}_n/J_f = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}/J_f$$

algebraisch und holomorph berechnet werden kann. Oder: Zu einem polynomialen Ideal $\mathfrak{a} \subseteq (X_1, \ldots, X_n)$ ist

$$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}/\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^k = \mathcal{O}_n/\big(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^k\big),$$

was bedeutet, dass die Hilbert-Samuel-Funktion des lokalen Ringes

$$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1,\ldots,X_n)}/\mathfrak{a}$$

mit ihrer holomorphen Version übereinstimmt.

Abbildungsverzeichnis