Teilbarkeitskriterien und partielle Ziffernsummen

Wolfgang Radecke

Jena 01. Februar 2020 bis 8. Juni 2022

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

Das Thema ist hier: Hilfsmittel für Teilbarkeitstest, die man man im Kopf ausführen kann. Ein Teilbarkeitstest ist eine Rechenmethode um festzustellen, ob eine gegebene ganzeZahl n durch einen gegebenen Divisor d teilbar ist oder nicht. Die klassische Quersumme ist ein solcher Teilbarkeitstest, der für die Divisoren $d \in \{3, 9\}$ geeignet ist. Beispiel:

$$\begin{aligned} d &= 3 \\ n &= 123 \\ q(123) &= 3 + 2 + 1 = 6 \\ &= \text{ Summe der Werte aller Ziffern der dezimal geschriebenen Zahl } n \end{aligned}$$

Die Zahl n ist genau dann durch 3 teilbar, wenn die Quersumme $q(n)$ durch 3 teilbar ist.

Demnach ist 123 durch 3 teilbar. Es wird nicht behauptet, dass jede Zahl durch 3 teilbar ist, sondern nur dass die Frage der Teilbarkeit von n durch 3 auf die einfachere Frage der Teilbarkeit der Quersumme durch 3 zurückführbar ist - einfacher deshalb, weil die Quersumme als konkrete Zahl betrachtet, weniger Ziffern hat und kleiner ist als die ursprünglich vorgelegte Zahl. Für den Divisor $d = 9$ ist die Quersumme ebenfalls geeignet, allerdings kommt heraus, dass 123 nicht durch 9 teilbar ist, das $q(123) = 6$ nicht durch 9 teilbar ist. Die Quersumme ist hier die oben genannte Rechenmethode, die genannte genau dann wenn Aussage ist diejenige Eigenschaft der Quersumme, die sie zu einem Teilbarkeitskriterium qualifiziert. Die Quersumme ist auf Divisoren $d \in \{3, 9\}$ spezialisiert, für andere Divisoren werden wir andere Rechenmethoden heranziehen. Da die Teilbarkeitskriterien fürs Kopfrechnen geeignet sein sollen, soll auch für die anderen zu betrachtenden Rechenmethoden gelten, dass die Frage der Teilbarkeit dabei vereinfacht werden soll. Die Quersumme kann auch von einer bereits errechneten Quersumme gebildet werden:

$$q(q(1789)) = q(25) = 7... \text{ in beliebiger Verschachtelungstiefe}$$

Die genau dann wenn Aussage garantiert dabei, dass die Teilbarkeitseigenschaft in beliebiger Verschachtelungstiefe erhalten bleibt. Für das Kopfrechnen ist sie die Hauptmethode, um die Schwierigkeit der Entscheidung der Teilbarkeit zu reduzieren. Als Rechenmethode soll hier - abstrakt formuliert - jede Transformation $n \mapsto t(n)$ bezeichnet werden, wobei $t\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine Abbildung der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ in sich bedeutet. Selbstverständlich soll t mathematisch beschreibbar und möglichst auch im Kopf ausführbar sein.

Ein einführendes Beispiel:

Die partielle Quersumme: Man trenne die auf Teilbarkeit durch 3 zu testende Zahl $n = 123$ in zwei Teile auf:

$$123 \mapsto 12 \quad 3$$

Diese Teile werden linker Teil, rechte Ziffer genannt. Danach werden beide Teile addiert.

$$123 \mapsto (12, 3) \mapsto 12 + 3 = 15$$

Am Beispiel ist erkennbar, dass 15 ebenfalls durch 3 teilbar ist, und nicht die volle Quersumme gebildet wird, sondern nur die ganz rechte Ziffer zum linken Teil addiert wird. Dadurch ist auch die Benennung als partielle Quersumme motiviert. Auch die partielle Quersumme kann mehrfach verschachtelt angewendet werden:

$$123 \mapsto (12, 3) \mapsto 12 + 3 = 15 \mapsto (1, 5) \mapsto 1 + 5 = 6$$

mit dem Ergebnis, dass als Endresultat die volle Quersumme entsteht. Bei größeren Zahlen muss der Prozess eventuell mehrfach angewendet werden.

Mathematik-Terminologie

Mit $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$, $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ bezeichnen wir die Mengen der **natürlichen Zahlen, nichtnegativen ganzen Zahlen und ganzen Zahlen**. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ seien die Mengen der reellen bzw. der rationalen Zahlen. $\Longleftrightarrow$ steht für das logische *genau dann wenn*, $\Longrightarrow$ steht für logische Folgerung *wenn ... dann ...* ,
$\mathbf{mod}(n, m) \in \mathbb{N}_0$ ist der Rest von $n \in \mathbb{Z}$ bei der Division durch $m \in \mathbb{N}$.
Es wird auch die Bezeichnung $r_m(n) =_{def} \mathrm{mod}(n, m)$ verwendet.
Die Reste werden in $r_m(n) = \mathrm{mod}(n, m) \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ gewählt.
$\mathbf{d|n}$ steht für die Behauptung, dass d ein Teiler von n ist. Die Teilerfremdheit zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ wird mit $a \perp b$ notiert, und $\mathrm{gcd}(a, b)$ bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler von $a, b \in \mathbb{Z}$. Im Fall $a \perp b$ gilt $\mathrm{gcd}(a, b) = 1$. Es ist bekannt, dass $\mathrm{gcd}(a, b) = u*a+v*b$ ist, mit geeigneten Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$. Die Zahlen u, v sind nicht eindeutig bestimmt. Für etliche theoretische Zwecke ist aber ihre bloße Existenz ausreichend. Für eine Menge $\mathcal{A}$ bezeichnen wir mit $1_{\mathcal{A}}$ die charakteristische Funktion von $\mathcal{A}$.

$$1_{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{falls } e \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{falls } e \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Durch $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ wird die identische Abbildung $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ bezeichnet. Mit $\#_{10}(n)$ sei die Anzahl der Dezimalziffern von $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet, und mit $\#(\mathcal{A})$ bezeichnen wir die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge $\mathcal{A}$. Ist $\mathcal{A}$ eine unendliche Menge setzen wir $\#(\mathcal{A}) = \infty$.
${}^{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ sei die Menge aller Abbildungen $a : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$
Für $s, t \in \mathbb{Z}$ seien Intervalle definiert:

$$[\![s, t]\!] =_{def} \{u \in \mathbb{Z} : s \leqslant u \leqslant t\}$$
$$[\![s, t)\!) =_{def} \{u \in \mathbb{Z} : s \leqslant u < t\}$$
$$(\!(s, t]\!] =_{def} \{u \in \mathbb{Z} : s < u \leqslant t\}$$

Alle so definierte Intervalle sind endliche Mengen aufeinander folgender ganzer Zahlen. Im Falle $s > t$ sind die Intervalle leer, d.h. gleich der leeren Menge $\emptyset \subseteq \mathbb{Z}$. Gelegentlich lassen wir als Obergrenze t auch den Wert ∞ zu und benutzen dann nur eine $)\!)$-Klammer als Intervallbegrenzung. Der Wert ∞ ist daher niemals ein Element eines solchen Intervalls. Für *gewöhnliche Intervalle* als Teilmengen von $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ werden die Klammern $[,], (,)$ benutzt.
Für $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\lfloor x \rfloor =_{def} \max\{z : z \in \mathbb{Z}, z \leqq x\}$$
$$\lceil x \rceil =_{def} \min\{z : z \in \mathbb{Z}, z \geqq x\}$$

Wir verwenden
$\diamondsuit$ ———————————————————— $\diamondsuit$
, um das Ende der Formulierung einer Definition, eines Satzes, usw. ... anzuzeigen.

Teilbarkeit und Kopfrechnen

Es wird die Teilbarkeit von ganzen Zahlen durch Zahlen $d > 1$ $d \in \mathbb{N}$ betrachtet, die teilerfremd zu 10 sind. Dabei sollen vorrangig Fähigkeiten des Kopfrechnens für Zahlen im Dezimalsystem den Inhalt bestimmen. Eine solche Aufgabe zumindest schriftlich zu sehen, ist auch beim Kopfrechnen hilfreich. Für $d \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ ist $d|n$ die mathematische Aussage, dass d ein Teiler von n ist. Dies ist genauer formuliert die Aussage:

$$\text{Es gibt ein } z \in \mathbb{Z} \text{ derart, dass } n = z * d$$

- $d|n$ ist die Behauptung, dass d ein Teiler von n ist. Beispiel: $\mathbf{7|175}$.
- $d|n$? ist das Problem zu entscheiden, ob $d|n$ wahr oder falsch ist. Beispiel: $\mathbf{7|763}$ **?**.
- Das Problem $d|n$? wird für alle $n \in \mathbb{Z}$ behandelt, wobei fürs Kopfrechnen $n \in \mathbb{N}_0$ bevorzugt werden kann. Allerdings wird die hier zu entwickelnde Theorie auf die ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ bezogen. Divisoren werden aus $\mathbb{N}$ entnommen, wobei der Fall $d = 1$ als uninteressant eingestuft wird, da jede ganze Zahl durch 1 teilbar ist. Für *große Zahlen* n *und Divisoren* d kann die Entscheidung eines solchen Problems durchaus schwierig für den kopfrechnenden Menschen sein.
  Die hier vorzustellende Theorie und deren Anwendung beziehen ihre Daseinsberechtigung aus dieser Schwierigkeit.

Am einfachsten sind die Teilbarkeiten durch $d \in \{2, 5, 10\}$ zu entscheiden: Es genügt ein Blick auf die rechte Ziffer der zu testenden Zahl.

- Eine Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn die rechte Ziffer $\in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ist.
- Eine Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn die rechte Ziffer $\in \{0, 5\}$ ist.
- Eine Zahl ist genau dann durch 10 teilbar, wenn die rechte Ziffer eine 0 ist.
- Bei diesen Beispielen wird Dezimalschreibweise vorausgesetzt.

Damit betrachten wir die Teiler $d \in \{2, 5, 10\}$ als erledigt. Die Teilbarkeit durch 2 oder 5 kann im Kopf durch Betrachtung der rechten Ziffer der zu testenden Zahl entschieden werden. Es ist selbstverständlich, dass eine solche Entscheidung erst in der Schule erlernt wird - manchmal auch bereits im Vorschulalter.
Es sollen Teilbarkeitskriterien der folgenden Art betrachtet werden:

Trenne die zu testende Zahl n in linker Teil und rechte Ziffer und addiere ein ganzzahliges Vielfaches $m \cdot r$ der rechten Ziffer zum linken Teil. Dabei kann $m \in \mathbb{Z}$ auch negativ sein. Schau dann auf das Ergebnis und prüfe, ob daran die Teilbarkeit leichter zu erkennen ist.
Beipiel:476|7? 47 6 ←-- $m = -2$

$$\begin{array}{c} 47\ 6 \\ \hline 47 \\ -2 \cdot 6 = -12 \\ \hline = 35 \checkmark \end{array}$$

Das kleine Einmaleins (2. Klasse Grundschule) bringt die Erkenntnis, dass 35 durch 7 teilbar ist, weil $5 \cdot 7 = 35$. Der Multiplikator $m = -2$ ist speziell auf den Divisor 7 angepasst. Die hier folgende Theorie bringt die Gewissheit, dass auch 476 durch 7 teilbar ist.

Dazu müssen zunächst die Bestandteile (linker Teil , rechte Ziffer) mathematisch greifbar gestaltet werden. Grundlage dafür ist die in der elementaren Zahlentheorie bekannte Division mit Rest in $\mathbb{Z}$.

Die Produkt-Rest-Darstellung

Aussage 1 (Produkt-Rest-Darstellung in $\mathbb{Z}$ - Division mit Rest)
Für jedes $n \in \mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$n = p * q + r \text{ mit eindeutig bestimmten } q = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \in \mathbb{Z}, r \in \mathbb{N}_0 \text{ , } 0 \leqslant r < p \tag{1}$$

$$p * q \leqq n < p * (q + 1) \dashleftarrow \text{ q wird immer so bestimmt} \tag{2}$$

$$q \leqq \frac{n}{p} < (q + 1) \dashleftarrow \text{ das ist äquivalent zu (2)} \tag{3}$$

Dabei ist für $p = 1$ immer $q = n$, $r = 0$ gilt. Für $n = 0$ sind auch q , $r = 0$. Es wird bevorzugt an $n \in \mathbb{N}_0$ gedacht, q ist der Quotient und r ist der Rest von n bei der Division durch p.
Nach unserer allgemeinen Mathematik-Terminologie gilt: $r = r_p(n)$ und $q = l_p(n)$.
Die Bezeichnung $l_p(n) =_{\mathtt{def}} \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ wird hier alternativ eingebracht.
Falls p ein Produkt $p = e * f$ ist und ein Vielfaches $n = s * f$ mit $s \in \mathbb{Z}$ betrachtet wird gilt:

$$\text{gemäß (22): } s * f = (e * f) * q + t * f \text{ mit } t \in \{0, \ldots, e - 1\} \tag{4}$$

In (4) ist $t * f$ die spezielle Form des Restes r, also wieder ein Vielfaches von f. Zusätzlich sei noch folgende Aussage formuliert: Für festes $p \in \mathbb{N}$ ist die Zuordnung

$$n \mapsto (q, r) = \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, n - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor * p \right) : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \{0, \ldots, p - 1\} \text{ bijektiv} \tag{5}$$

Es sei betont:
Division mit Rest ist eine Operation, die zwei Resultate erzeugt: $n \mapsto (q, r)$
Dabei ist q der Quotient und r der Rest. Die inverse Operation ist $(q, r) \mapsto p * q + r$.

$$\mathbf{n = p * q + r \text{ wird auch Produkt-Rest-Darstellung bezüglich } p \text{ genannt}} \tag{6}$$

Dabei kann man sich p als fest gewählt denken, während $n \in \mathbb{Z}$ variiert. Nimmt man außer n noch p als Ausgangsmaterial dazu, kann man das so darstellen:

$$(p, n) \mapsto (q, r) = \left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, n - \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor * p \right)$$

♢————————————————————————————————♢

Helmut Hasse hat dafür die folgende schöne verbale Beschreibung geliefert: [1]

[1] Helmut Hasse: Vorlesungen über Zahlentheorie. Zweite Auflage. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg,1964, Division mit Rest auf Seite 23

Denkt man die Zahlgerade durch die ganzen Zahlen als Endpunkte in Intervalle der Länge 1 eingeteilt und jeweils den unteren Endpunkt zum Intervall hinzugerechnet, so ist q der untere Endpunkt desjenigen Intervalls, in dem die rationale Zahl $\frac{n}{p}$ liegt. Man nennt die so bestimmte ganze Zahl q auch das größte Ganze unter $\frac{n}{p}$ und bezeichnet sie mit $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$.

Ein sehr schönes Buch über elementare Zahlentheorie ist auch: Elementare Zahlentheorie [2]

Zerlegung (linkerTeil,rechteZiffer)

Wendet man die Division mit Rest für $p = 10, n \in \mathbb{Z}$ an, so ergibt sich:

Aussage 2 (Zerlegung $n \mapsto$ (linker Teil, rechte Ziffer))
Es gibt zwei Abbildungen

$$l : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$r : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0, \dots, 9\}$$
$$\text{derart dass}$$
$$n = 10 * l(n) + r(n) \text{ mit } 0 \leqq r(n) < 10 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{7}$$
$$l(n) =_{def} \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{8}$$
$$r(n) =_{def} n - 10 * l(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

Die in (5) notierte Zuordnung $n \mapsto (q, r)$ hat dann hier dir Gestalt

$$n \mapsto (q, r) = n \mapsto (l(n), r(n)) \tag{10}$$

◇————————————————————◇

Wir betrachten diese Beschreibung als mathematische Präzisierung unserer bisher eher informell gebrauchten Zerlegung $n \mapsto$ (linkerTeil,rechte Ziffer) mit der Anmerkung, dass rechte Ziffer immer bedeuten soll: Wert der rechten Ziffer in $\mathbb{N}_0$. Demnach sind $l(n), r(n)$ lediglich suggestiv andere Bezeichnungen für die bei der Division mit Rest durch 10 vorkommenden Quotienten und Reste. Im Falle von positivem n stimmen die Werte $l(n), r)n)$ auch gut mit der informellen Zerlegung im Beispiel $n = 314$ überein:

$$314 \mapsto (31, 4), \quad 31 = \left\lfloor \frac{314}{10} \right\rfloor, 4 = 314 - 10 * 31$$

Im Falle negativem n ist das allerdings deutlich anders:

$$-314 \mapsto (-32, 6) \text{ denn } -32 = \left\lfloor \frac{-314}{10} \right\rfloor, 6 = -314 - (-32) * 10 = 320 - 314$$

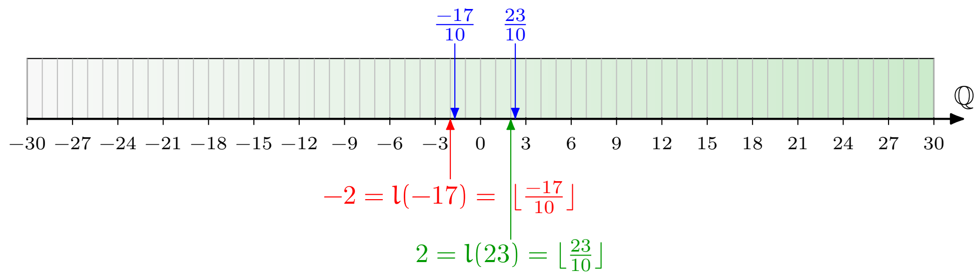
Das resultiert aus der in der Theorie der Division mit Rest genormten Festsetzung $0 \leqq r(n) < 10$.
Es kann auch mit der Dezimalkomma-Darstellung gearbeitet werden

$$\frac{-314}{10} = -31.4 \text{ mit Dezimalpunkt}$$

Daran erkennt man leichter, dass -32 die größte ganze Zahl $\leqq -31.4$ ist.
Die folgende Grafik verdeutlicht die Verhältnisse noch für andere negative Zahlen:

[2] Reinhold Remmert, Peter Ullrich: Elementare Zahlentheorie. Dritte Auflage. Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, ISBN 978-3-7643-7730-4, S. 267, Division mit Rest auf Seite 21

Grafik 3 (Beispiele für $n = -17, l(-17) = -2, r(-17) = 3, n = 23, l(23) = 2, r(23) = 3$)



Da es schwerfällt, sich bei gegebener konkreter negativer Zahl n die Lage des von Hasse genannten Intervall mit $\frac{n}{10} \in [q, q+1)$ vorzustellen, soll hier noch eine als Merkhilfe gedachte Formel vorgestellt werden.

$$l(-lr) = \begin{cases} -(l+1) \text{ falls } r > 0 \\ -l \text{ falls } r = 0 \end{cases} \tag{11}$$

$$r(-lr) = \begin{cases} 10 - r \text{ falls } r > 0 \\ 0 \text{ falls } r = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Dabei sei $n = -lr$ eine eher symbolisch gedachte Darstellung von n, bestehend aus dem separaten negativem Vorzeichen $-$ sowie 0 oder mehreren Dezimalziffern, die den linken Ziffern-Teil l von n repräsentieren und einer einzelnen rechten Dezimalziffer $r \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

$$l(-314) = -32 \dashleftarrow \qquad -314 \rightsquigarrow -\,\boxed{31}\,\boxed{4} \text{ mit } l = 31, r = 4 \dashrightarrow 6 \qquad = r(-314)$$

$$l(-17) = -2 \dashleftarrow \qquad -17 \rightsquigarrow -\,\boxed{1}\,\boxed{7} \text{ mit } l = 1, r = 7 \dashrightarrow 3 \qquad = r(-17)$$

Da die Fälle $d \in \{2, 5\}$ bereits als einfach behandelbar eingeordnet wurden, sollen jetzt Divisoren $d \perp 10$ betrachtet werden. Das sind solche, die teilerfremd zu 10 sind. Die enthalten weder 2 noch 5 in ihrer Primfaktorisierung. Allerdings erkennt man diese Eigenschaft leichter daran, dass $r(d) \in \{1, 3, 7, 9\}$ ist, denn wenn $r(d) \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ist, so ist d sicher eine gerade Zahl und 2 kommt in ihrer Primfaktorisierung vor. Wenn $r(d) \in \{0, 5\}$ ist, kommt 5 in der Primfaktorisierung vor. Umgekehrt ist für $r(d) \in \{1, 3, 7, 9\}$ der Divisor d niemals durch 2 oder 5 teilbar. Auf eine genauere Begründung wird hier verzichtet.

Der Hauptsatz über Teilbarkeit und partielle Ziffernsummen

Definition 4 (Partielle Ziffernsumme)
Für $d \in \mathbb{N}, d > 1, d \perp 10$ und $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ sei jede Abbildung der Form

$$\partial_d : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\partial_d(n) =_{def} l(n) + m * r(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

partielle Ziffersumme genannt. Der Buchstabe ∂ soll an partiell erinnern - wie bei partieller Ableitung.

◇ ——— ◇

Es soll nun angegeben werden, unter welchen Spezifikationen für den Multiplikator m eine partielle Ziffernsumme zu einem Teilbarkeitskriterium für den Divisor d wird. Der Multiplikator m

muss irgendwie von d abhängen. Es soll dann $\mathbf{m} = \mathbf{m}_d$ geschrieben werden. Ist diese Spezifikation erreicht, so haben wir in Gestalt von ∂_d einen brauchbaren Teilbarkeitshelfer fürs Kopfrechnen.

Definition 5 (Definition von m_d)

$$m_d =_{def} \begin{cases} -(d-1)/10 & \text{falls } r(d) = 1 \\ (3 * d + 1)/10 & \text{falls } r(d) = 3 \\ -(3 * d - 1)/10 & \text{falls } r(d) = 7 \\ (d+1)/10 & \text{falls } r(d) = 9 \end{cases} \tag{13}$$

und schreiben dann

$$\partial_d(n) = l(n) + m_d * r(n)$$

Für $r(d) \in \{3, 9\}$ ist m_d positiv und für $r(d) \in \{1, 7\}$ ist m_d negativ.

$\diamondsuit$ ——— $\diamondsuit$

Diese Definition kann man auch als Kopfrechenaufgabe zu Bestimmung von m_d formulieren. Die Anweisungen dazu lauten dann:

- Sieh nach, ob $r(d) \in \{1, 9\}$ ist.
- Wenn ja, richte dich nach der ersten bzw. letzten Anweisung in (13)
- Wenn nicht, multipliziere d mit 3. Dann wird $r(3 \cdot d) \in \{1, 9\}$ sein.
- Richte dich dann entsprechend nach der ersten bzw. letzten Anweisung in (13) bezüglich $d' = 3 \cdot d$

Die Behauptung $r(3 \cdot d) \in \{1, 9\}$ im dritten Punkt ergibt sich bei Beachtung der dezimalen Schreibweise einfach aus dem kleinen Einmaleins für die rechte Ziffer:

$$3 \cdot 3 \mapsto 9 \quad 3 \cdot 7 \mapsto 1$$

Tabelle 6 (Zuordnung $d \mapsto m_d$ für einige Primzahlen)

d	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79
m_d	1	-2	-1	4	-5	2	7	3	-3	-11	-4	13	-14	16	6	-6	-20	-7	22	8

Da in dieser Beispieltabelle die Werte $d \in \{2, 5\}$ ausgelassen wurden, sind alle Beispieldivisoren teilerfremd zu 10.
Wir werden jetzt zu gegebenem Divisor $d \perp 10$ noch eine weitere Zahl $k_d \in \{-1, 1, -3, 3\}$ ins Spiel bringen, die zu folgender Gleichung für den größten gemeinsamen Teiler 1 von $10, d$ führen soll.

$$m_d * 10 + k_d * d = 1 = gcd(10, d) \tag{14}$$

An diese Gleichung sieht man auch dass m_d ein Inverses von 10 im Ring $\mathbb{Z}/d*\mathbb{Z}$ ist.
Die multiplikativen Koeffizienten m_d, k_d vor $10, d$ sind im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Hier werden sie doch eindeutig durch die Bedingung $k_d \in \{-1, 1, -3, 3\}$ erzwungen. Der Faktor m_d ist ja bereits durch den oben beschriebenen Algorithmus eindeutig durch d bestimmt. Die Zuordnungen $d \mapsto m_d, d \mapsto k_d$ werden nicht im Stil von Funktionen $m(d), k(d)$ geschrieben, weil sie lediglich als Parameter für die Funktion $\partial_d()$ vorkommen und zwar explizit für m_d und implizit in der nachfolgenden ∂_d-Theorie für k_d. Zur Festlegung von k_d gehen wir die 4 Fälle $r(d) \in \{1, 3, 7, 9\}$ der Reihe nach durch.

- $\mathtt{r}(\mathtt{d}) = 1$ Dann ist $\mathtt{m_d} = -(\mathtt{d}-1)/10 \iff \mathtt{m_d} * 10 = -(\mathtt{d}-1)$ und

$$\mathtt{m_d} \cdot 10 + 1 \cdot \mathtt{d} = 1$$

- $\mathtt{r}(\mathtt{d}) = 3$ Dann ist $\mathtt{m_d} = (3 * \mathtt{d} + 1)/10 \iff \mathtt{m_d} * 10 = 3 * \mathtt{d} + 1$, und

$$\mathtt{m_d} \cdot 10 + (-3) \cdot \mathtt{d} = 1$$

- $\mathtt{r}(\mathtt{d}) = 7$. Dann ist $\mathtt{m_d} = -(3 \cdot \mathtt{d} - 1)/10 \iff \mathtt{m_d} \cdot 10 = -(3 \cdot \mathtt{d} - 1)$ und

$$\mathtt{m_d} \cdot 10 + 3 \cdot \mathtt{d} = 1$$

- $\mathtt{r}(\mathtt{d}) = 9$ Dann ist $\mathtt{m_d} = (\mathtt{d}+1)/10 \iff \mathtt{m_d}\ \mathtt{dot}10 = \mathtt{d} + 1$ und

$$\mathtt{m_d} \cdot 10 - 1 \cdot \mathtt{d} = 1$$

In den 4 möglichen Fällen $\mathtt{r}(\mathtt{d}) \in \{1, 3, 7, 9\}$ kann man daher in dieser Reihenfolge $\mathtt{k_d} \in \{1, -3, +3, -1\}$ ablesen. Mit diesen Festlegungen für $\mathtt{k_d}$ kann die jeweils charakterisierende letzte Gleichung einheitlich in der Form

$$\mathtt{m_d} * 10 + \mathtt{k_d} * \mathtt{d} = 1 \tag{15}$$

dargestellt werden.
Eine solche Darstellung nennt man auch *Bézout-Identität* für den größten gemeinsamen Teiler 1 von $10, \mathtt{d}$. Die *Bézout-Identität* ist die entscheidende Zutat für die Eigenschaften von $\partial_\mathtt{d}()$. Die durch dieses Verfahren erreichte Zuordnung $\mathtt{d} \mapsto \mathtt{r}(\mathtt{d}) \mapsto (\mathtt{m_d}, \mathtt{k_d})$ soll jetzt noch einmal durch eine Tabelle zusammenfassend dargestellt werden.

Tabelle 7 (Zuordnung $\mathtt{d} \mapsto \mathtt{r}(\mathtt{d}) \mapsto (\mathtt{m_d}, \mathtt{k_d}) \mapsto \partial_\mathtt{d}$)

$\mathtt{r}(\mathtt{d})$	1	3	7	9
$\mathtt{m_d}$	$-(\mathtt{d}-1)/10$	$(3\cdot\mathtt{d}+1)/10$	$-(3\cdot\mathtt{d}-1)/10$	$(\mathtt{d}+1)/10$
$\mathtt{m_d}$	$-\mathtt{l}(\mathtt{d})$	$3\cdot\mathtt{l}(\mathtt{d})+1$	$-(3\cdot\mathtt{l}(\mathtt{d})+2)$	$\mathtt{l}(\mathtt{d})+1$
$\mathtt{k_d}$	1	-3	3	-1

Dabei hängt die Zuordnung $(\mathtt{m_d}, \mathtt{k_d}) \mapsto \partial_\mathtt{d}$ nur von $\mathtt{m_d}$ ab:

$$\partial_\mathbf{d}(\mathbf{n}) = \mathbf{l}(\mathbf{n}) + \mathbf{m_d} \cdot \mathbf{r}(\mathbf{n}) \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}_\mathbf{0}$$

Für $\mathtt{r}(\mathtt{d}) \in \{3, 7\}$ gilt $\mathtt{k_d} = \mathtt{k}_{3*\mathtt{d}}$, $\mathtt{m_d} = \mathtt{m}_{3*\mathtt{d}}$ und daher auch $\partial_\mathtt{d} = \partial_{3*\mathtt{d}}$.

◊———————————————————————◊

Die zwei Zeilen für $\mathtt{m_d}$ liefern identische Resultate, was noch geklärt werden muss.
Jetzt steht die Aufgabe an, den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 8 (Hauptsatz über Teilbarkeit und partielle Ziffernsummen)
Sei $\mathtt{d} \in \mathbb{N}, \mathtt{d} > 1, \mathtt{d} \perp 10$ und $\mathtt{m_d}$ gemäß (13) festgelegt.

Dann gilt für die Funktion

$$\partial_\mathtt{d}(\mathtt{n}) =_{\mathtt{def}} \mathtt{l}(\mathtt{n}) + \mathtt{m_d} \cdot \mathtt{r}(\mathtt{n}) \quad ,\forall \mathtt{n} \in \mathbb{N}_0 \tag{16}$$

$$\mathbf{d}|\mathbf{n} \iff \mathbf{d}|\partial_\mathbf{d}(\mathbf{n}) \text{ für alle } \mathtt{n} \in \mathbb{N}_0 \tag{17}$$

◊———————————————————————◊

Die Aussage (17) ist gerade diejenige, die $\partial_\mathtt{d}$ zu einem Teilbarkeitskriterium macht.

Allgemeine Teilbarkeitseigenschaften

Einige Teilbarkeitseigenschaften die häufig benutzt werden, seien hier zusammengestellt:

Aussage 9 (Teilbarkeit und Divisionsreste für Produkt und Summe)
Neben dem Divisionsrest $r_a(n)$ definieren wir noch: $l_a(n) =_{def} (n - r_a(n))/a = \left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$.
Für $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{Z}$, $a > 0$ gilt:

$$a \perp b \Longrightarrow \quad a|(b * c) \iff a|c \tag{18}$$
$$a|b \Longrightarrow \quad a|(b + c) \iff a|c \tag{19}$$
$$a|b \Longrightarrow \quad r_a(b + c) = r_a(c) \tag{20}$$
$$b = v * a \Longrightarrow \quad r_a(v * a + c) = r_a(c) \tag{21}$$
$$r_a(b + c) = r_a\Big((r_a(b) + r_a(c)\Big) \tag{22}$$
$$r_a\Big(r_a(b)\Big) = r_a(b) \tag{23}$$
$$0 \leqq c < a \Longrightarrow \quad r_a(c) = c \tag{24}$$

Die Eigenschaft (21) wird verbal beschrieben durch:
Prinzip: Vielfache von a können bei der Bildung von $r_a()$ weggelassen (und auch zugefügt) werden.
Die Eigenschaft (24) wird verbal beschrieben durch:
Prinzip: Der Restoperator r_a kann verschwinden.

Beweis von Aussage 9.
Zu (18):
Zuerst sei $a|(b * c)$ vorausgesetzt. Da a, b teilerfremd sind, gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ derart, dass $u * a + v * b = 1$. Daraus folgt $c * u * a + v * b * c = c$ und a teilt beide Summanden von c. Den ersten, weil a explizit als Faktor darin vorkommt, den zweiten, weil $a|(b * c)$ vorausgesetzt ist. Damit ist die Beweisrichtung $a|(b * c) \Longrightarrow a|c$ klar. Die Richtung $a|c \Longrightarrow a|(b * c)$ ist ohnehin klar.
Zu (19):
$a|b$ sei vorausgesetzt also $b = v * a$. An Stelle von $\iff$ wird $\Rightarrow$ und $\Leftarrow$ bewiesen:
$\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} &a|(b + c) \Rightarrow (b + c) = u * a \Rightarrow c = u * a - b \\ &\Rightarrow c = u * a - v * a = (u - v) * a && \Longrightarrow a|c \end{aligned}$$

$\Leftarrow$:

$$\begin{aligned} &a|c \Rightarrow c = u * a \Rightarrow (b + c) = v * a + u * a \\ &(b + c) = (v + u) * a && \Longrightarrow a|(b + c) \end{aligned}$$

Zu (20): Die Gültigkeit ergibt sich einfach aus der Voraussetzung $a|b$. Dann ist $r_a(b) = 0$ und $r_a(b + c) = r_a(b) + r_a(c) = 0 + r_a(c) = r_a(c)$.
Zu (21): Dies ist einfach nur eine andere Formulierung von (20).
Zu (22):Benutzt wird die Definition von $\operatorname{mod}(n, a) = r_m(n) = n - \max\{z * a : z \in \mathbb{Z} , z * a \leqq n\}$.
Wenn $r_a(b) + r_a(c) < a$, dann gilt auch $0 \leqq r_a(b) + r_a(c) < a$ und für $n = (r_a(b) + r_a(c))$ gilt:

$$\begin{aligned} \max\{z * a : z \in \mathbb{Z} , z * a \leqq n\} &= a * 0 = 0 \\ r_a(r_a(b) + r_a(c) &= r_a(b) + r_a(c) - 0 \\ &= r_a(b) + r_a(c) \end{aligned}$$

Wenn $a \leqq r_a(b) + r_a(c) < 2 * a$ ist, gilt für $n = (r_a(b) + r_a(c))$

$$\begin{aligned} \max\{z * a : z \in \mathbb{Z}\,, z * a \leqq n\} &= a * 1 = a \\ r_a(r_a(b) + r_a(c)) &= (r_a(b) + r_a(c) - a) \\ \text{mit } 0 \leqq (r_a(b) + r_a(c) - a) &< a \\ \text{also } r_a(r_a(b) + r_a(c)) &= (r_a(b) + r_a(c) - a) \end{aligned}$$

Die vorletzte Beziehung zeigt dass $(r_a(b) + r_a(c) - a)$ der richtige Wert von $r_a(r_a(b) + r_a(c))$ ist. Auf den äußeren $r_a()$-Operator kann im Allgemeinen nicht verzichtet werden.
Zu (24): Das ist wegen der vorn vorausgesetzten Ungleichung klar.
Zu (23): Dies ist ein Spezialfall von (22) für $r_a(c) = 0$. □

Beweis des Hauptsatzes über Teilbarkeit und partielle Ziffernsummen (Satz 8).
Zu (17):
Man kann aus $d, \partial_d(n), m_d, r(n)$ den ursprünglichen Wert n rekonstruieren: Begonnen wird mit einer Gleichung, die aus der Bézout-Identität (15) $m_d * 10 + k_d * d = 1$ unmittelbar folgt, und am Ende der Gleichungsfolge verwendet wird. Übrigens gilt die Gleichung (28) unabhängig von aller Teilbarkeit immer.

$$-(m_d * 10 - 1) = k_d * d \tag{25}$$

$$\partial_d(n) = l(n) + m_d * r(n) \tag{26}$$

$$l(n) = (\partial_d(n) - m_d * r(n)) \tag{27}$$

$$n = 10 * l(n) + r(n) \text{ nach (7)} \tag{28}$$

$$\text{wegen (27) } n = 10 * \big(\partial(n) - m_d * r(n)\big) + r(n)) \tag{29}$$

$$n = 10 * \partial(n) - 10 * m_d * r(n) + r(n) \tag{30}$$

$$n = 10 * \partial(n) - (m_d * 10 - 1) * r(n) \tag{31}$$

$$\text{Mit (25) ergibt sich } n = 10 * \partial_d(n) + k_d * d * r(n)$$

$$n = k_d * d * r(n) + 10 * \partial_d(n) \tag{32}$$

Mit Blick auf die letzte Darstellung in (32) wird jetzt wie folgt argumentiert:
Der Summand $k_d * d * r(n)$ in (32) ist durch d teilbar, weil in diesem Produkt d als Faktor vorkommt. Daraus schließt man gemäß (19),(18): $a|b \Rightarrow (a|(b+c) \iff a|c)$ ←-- das ist (19)
Setzen wir dort $a{=}d\,, b{=}k_d * d * r(n)\,, c{=}10 * \partial_d(n)$ so ergibt sich wegen $d|(k_d * d * r(n))$:

$$d|\Big(\underbrace{\overbrace{k_d * d * r(n)}^{b} + \overbrace{10 * \partial_d(n)}^{c}}_{=n}\Big) \iff d|10 * \partial_d(n)$$

$$d|n \iff d|10 * \partial_d(n)$$

Und schließlich zu Vollendung des Beweises: $a \perp b \Rightarrow (a|(b * c) \iff a|c)$ ←-- das ist (18).
Setzen wir $a = d, b = 10, c = \partial_d(n)$ so ergibt sich wegen $d \perp 10$ aus der gerade gezeigten Anwendung von (20): $\mathbf{d|10 * \partial_d(n)} \iff \mathbf{d|\partial_d(n)}$. Insgesamt also $\mathbf{d|n} \iff \mathbf{d|\partial_d(n)}$ □

Bemerkung 10 (Über die Reste von $n, \partial_d(n)$ bei deren Division durch d)
Nach dem soeben bewiesenen Satz gilt die Beziehung

$$d|n \iff d|\partial_d(n)$$

Übersetzt man das in die Sprache der Reste in der Bezeichnungsweise $r_d(\cdot)$ für die Reste, so ergibt sich:

$$r_d(n) = 0 \iff r_d(\partial_d(n)) = 0$$
$$r_d(n) \neq 0 \iff r_d\Big(\partial_d(n)\Big) \neq 0$$

Das bedeutet: Der Rest 0 bleibt beim Übergang $n \mapsto \partial_d(n)$ erhalten (ist invariant) und Nichtreste werden auf Nichtreste abgebildet. Allerdings bleiben in der Regel die Restklassen der Nichtreste nicht invariant: $r_d(n) \neq r_d\Big(\partial_d(n)\Big)$. An der Gleichung (32) aus dem Beweis von Satz 8:

$$(32) \dashrightarrow n = k_d * d * r(n) + 10 * \partial_d(n)$$

kann man lediglich erkennen, dass $n, 10 \cdot \partial_d(n)$ die gleichen Reste haben, denn $r_d(k_d \cdot d \cdot r(n)) = 0$ hat als Vielfaches von d den Rest 0. Beim Kopfrechnen ist das kaum nützlich und der Begriff der Restklasse aus der Gaußschen Kongruenztheorie wurde hier nur oberflächlich gestreift.

◇————◇

Es soll jetzt noch die Gleichheit der Werte für m_d in den beiden Zeilen von Tabelle 6 bewiesen werden.

Aussage 11 (Zu Definition 5 alternative (gleichwertige) Formeln für m_d)
Für $d \perp 10, d > 1$ gilt:

$$m_d = \begin{cases} -l(d) & \text{falls } r(d) = 1 \\ 3 \cdot l(d) + 1 & \text{falls } r(d) = 3 \\ -(3 * l(d) + 2) & \text{falls } r(d) = 7 \\ l(d) + 1 & \text{falls } r(d) = 9 \end{cases} \tag{33}$$

◇————◇

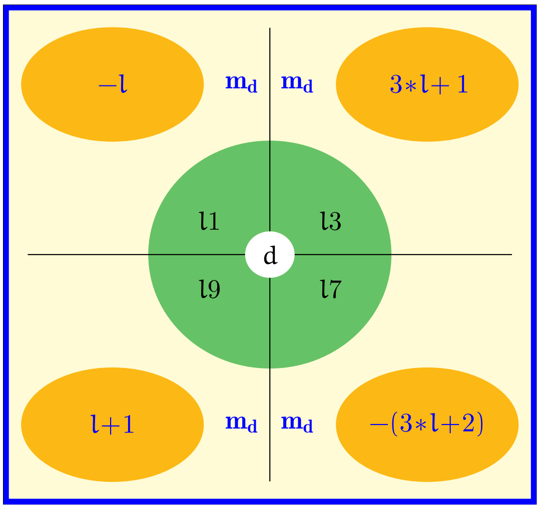
Beweis von Aussage 11.
Es wird gemäß (7) immer $d = 10 * l(d) + r(d)$ benutzt:

$$r(d) = 1 \Rightarrow \mathbf{m_d} = -(d-1)/10 = -(10 \cdot l(d) + 1 - 1)/10 = \mathbf{-l(d)}$$
$$r(d) = 3 \Rightarrow \mathbf{m_d} = (3 \cdot d + 1)/10 = \Big(3 \cdot (10 \cdot l(d) + 3) + 1\Big)/10 = 3 \cdot l(d) + 10/10 = \mathbf{3 \cdot * l(d) + 1}$$
$$r(d) = 7 \Rightarrow \mathbf{m_d} = -(3 \cdot d - 1)/10 = -(3 \cdot (10 \cdot l(d) + 7) - 1)/10 = -(\mathbf{3 \cdot l(d) + 2})$$
$$r(d) = 9 \Rightarrow \mathbf{m_d} = (d + 1)/10 = (10 \cdot l(d) + 9 + 1)/10 = \mathbf{l(d) + 1}$$

□

Die alternativen Formeln haben den Vorteil des geringeren Kopfrechenaufwands, da die Divisionen durch 10 vermieden werden und $l(d)$ als Quelle der Formeln verwendet wird. Dafür sind sie etwas schlechter zum Merken. Daraus resultiert die folgende mnemotechnische Abbildung:

Grafik 12 (Symbolik für die alternative Berechnung von m_d gemäß (33))



Dabei soll ein Divisor d in der Form $d \in \{l1,\ l3,\ l7,\ l9\}$ dezimal geschrieben werden, wobei l den linken Ziffernteil (ohne das negative Vorzeichen) von d bezeichnet, bestehend aus 0 oder mehreren Dezimalziffer und rechts die mögliche Ziffer $r \in \{1, 3, 7, 9\}$ notiert ist, wie es für zu 10 teilerfremde d notwendig ist. Die 4 Möglichkeiten sind innen im grünen Kreis eingezeichnet. Die Symbolik gibt dann außen in den orangenen Ellipsen an, wie ein Kopfrechner durch Hinsehen und wenig Rechnung bei gegebenem d den Multiplikator m_d bestimmen kann. In Tabelle 6 kann man sich das ansehen und üben. Als konkrete Beispiele für die Anwendung der partiellen Ziffernsummen seien aufgeführt:

$$m_7 = -2 \dashrightarrow 7|476\ ? \qquad\qquad 23|851\ ? \dashleftarrow m_{23} = 7$$
$$\partial_7(476) = 47 - 2*6 = 47 - 12 = 35 \qquad \partial_{23}(851) = 85 + 7 = 92$$
$$\partial_7(476) = 35 \qquad \partial_{23}(92) = 9 + 2*7 = 23$$
$$\text{also } 7|476\checkmark \qquad 23|851\checkmark$$

Den konkreten Quotienten erhält man bei der Anwendung von ∂_d noch nicht,
aber es ist $\mathbf{476/7 = 68}\,,\mathbf{476 = 68*7}$ und $\mathbf{851/23 = 37}\,,\mathbf{851 = 23*37}$.
Wir ordnen hier die partielle Quersumme in das Schema der partiellen Ziffernsummen ein: Aus (13) folgt, dass für $d \in \{3, 9\}$ der Wert $m_d = 1$ resultiert. Das ist genau der Multiplikator, der für die partielle Quersumme zuständig ist: $\partial_3(123) = \partial_9(123) = 12 + 1 \cdot 3 = 15$.
Damit entpuppt sich die partielle Ziffernsumme $\partial_3 = \partial_9$ als die partielle Quersumme.
Als einen Spezialfall sei noch der Divisor $d = 11$ genannt. Nach (33) ergibt sich $m_{11} = -1$. Zur Anwendung von ∂_{11} muss also die rechte Ziffer von n von dem linken Teil subtrahiert werden. Als Beispiele kann man aufschreiben:

$$\partial_{11}(143) = 14 - 3 = 11\checkmark \quad \partial_{11}(22) = 2 - 2 = 0\checkmark \quad \partial_{11}(333) = 33 - 3 = 30\times$$

Die Zahl 30 ist nicht durch 11 teilbar.

Bemerkung 13 (Diskussion des bisherigen Standes)
Für eine unendliche Menge von Divisoren nämlich $d \in \mathbb{N}, d \perp 10$ wurde jeweils eine Rechenmethode $n \mapsto \partial_d(n)$ angegeben, die dem Anwender die Entscheidbarkeit der Frage $d|n$? erleichtert.

Die Menge der Divisoren kann in vier Teilmengen angegeben werden:

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \{1, 11, 21, \dots\} \\
D_3 &= \{3, 13, 33, \dots\} \\
D_7 &= \{7, 17, 27, \dots\} \\
D_9 &= \{9, 19, 29, \dots\}
\end{aligned}
$$

Das sind 40% aller positiven Divisoren, soweit man bei einer unendlichen Menge von einem prozentualen Anteil sprechen kann. Jedem Divisor d ist die spezielle Rechenmethode

$$\partial_d(n) = l(n) + m_d \cdot r(n)$$

zugeordnet, die auch fürs Kopfrechnen geeignet ist. Durch die Offenlegung der Berechnung von m_d auch fürs Kopfrechnen haben sich die partiellen Ziffernsummen beihnahe als eine

einzige Kopfrechenmethode

qualifiziert, obwohl es unendlich viele sind. Dabei können verschiedene Kopfrechner natürlich mehr oder minder große Divisoren d und zu testende n beherrschen. Die unendlichen Menge der Divisoren d und Testzahlen n können sie allerdings niemals behandeln. Die hier begonnene Theorie erschließt jedoch eine Spur dieser Unendlichkeit und kann dabei Eigenschaften aufzeigen, die alle diese Zahlen betreffen. Mit dem Beweis von Satz 8 ist das ja bereits gelungen. Dabei wurde in die Menge D_1 auch den Divisor 1 eingeordnet. Wendet man auf die 1 diese Theorie an, so ergibt sich $m_1 = 0$ und

$$1|n \iff 1|l(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Das ist eine Trivialität, man kann allerdings nie wissen wozu eine Trivialität nützlich ist. Es wird sich noch herausstellen, dass die Theorie in den Teilbereichen $\{D_1, D_3, D_7, D_9\}$ erhebliche Unteschiede aufweist.

◊———◊

Die Quersumme und ∂_9

Es lohnt sich den Spezialfall $d = 9 \in D_9$ mit $m_9 = 1$, sie etwas näher zu analysieren.

Aussage 14 (Eigenschaften von ∂_9)

$$
\begin{aligned}
n &< \partial_9(n) \text{ falls } n < 0 && (34) \\
\partial_9(n) &< n \text{ falls } n > 9 && (35) \\
n &= \partial_9(n) \text{ falls } n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} && (36) \\
n - \partial_9(n) &\in \{k * 9 : k \in \mathbb{Z}\} && (37) \\
n &\equiv \partial_9(n) \pmod 9 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} && (38)
\end{aligned}
$$

◊———◊

Beweis von Aussage 14.
Es wird dabei benutzt:

$$l(n) < 0 \text{ wenn } n < 0 \text{ und } l(n) > 0 \text{ wenn } n > 9$$

$$
\begin{aligned}
n &= 10 * l(n) + r(n) \text{ gemäß } 7 \\
\partial_9(n) &= l(n) + r(n) \text{ wegen } m_9 = 1 \\
n - \partial_9(n) &= 10 * l(n) - l(n) = 9 * l(n) \\
n - \partial_9(n) &= 9 * l(n) > 0 \text{ wenn } n > 9 \\
\partial_9(n) &< n \text{ wenn } n > 9 \Longrightarrow (35) \\
n - \partial_9(n) = 9 * l(n) &< 0 \text{ wenn } n < 0 \\
n &< \partial_9(n) \text{ wenn } n < 0 \Longrightarrow (34)
\end{aligned} \tag{39}
$$

Die Gleichung (36) folgt für $n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ aus $l(n) = 0, m_9 = 1, n = r(n)$. Setzt man $k = l(n)$ so erkennt man aus (39) die Gültigkeit von (37) und die Beziehung (38) ist nur eine äquivalente Formulierung von (37). □

Mit (38) ist auch eine vollständige Aufklärung der Verhaltens der Iterationen von ∂_9 möglich, denn daraus folgt, dass $\partial_9(n)$ die Restklasse von $n \mod 9$ invariant lässt. Zunächst seien für alle $d \perp 10$ die Iterationen definiert.

Definition von Iterationen

Definition 15 (Iterationen ∂_d^i)
Für alle $n \in \mathbb{Z}$ wird gesetzt:

$$
\begin{aligned}
\partial_d^0(n) &=_{def} n \\
\partial_d^{i+1}(n) &=_{def} \partial_d\left(\partial_d^i(n)\right) \quad \forall i \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}
$$

Dabei kann man sich n als festen Startwert denken und dann die Folge $\left(\partial_d^i(n)\right)_{i=0,1,2,\ldots}$ mit variablem i betrachten. Dies ist eine rekursive Definition. Es ist $\partial_d^0 = id_{\mathbb{Z}}$ und $\partial_d^1 = \partial_d$.
◇————◇

Diese Konstruktion modelliert die verschachtelte Anwendung von ∂_d auf ihre eigenen Ergebnisse. Zum Beispiel ist $\partial_d^2(n) = \partial_d\left(\partial_d(n)\right)$. Es soll nun das Verhalten der unendlichen Folge $\left(\partial_9^i(n)\right)_{i=0,1,2,\ldots}$ untersucht werden. Aus (38) ergibt sich, dass zwei aufeinander folgende Glieder dieser Folge sich genau um ein Vielfaches von 9 unterscheiden. Bezeichnet daher $r' = r_9(n)$ den Rest des Startwertes bei der Division durch 9, so verbleiben alle Folgeglieder in der dadurch bestimmten Restklasse $\pmod 9$.

Aussage 16

$$\lim_{i \to \infty} \partial_9^i(n) \in \{0, 1, \ldots, 9\} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Genauer gelten folgenden Aussage:

$$n > 9, r' = r_9(n) = 0 \Longrightarrow \lim_{i \to \infty} \partial_9^i(n) = 9 \tag{40}$$

$$n > 9, r' = r_9(n) \in \{1, 2, \ldots, 8\} \Longrightarrow \lim_{i \to \infty} \partial_9^i(n) = r' \tag{41}$$

$$n < 0, r' = r_9(n) = 0 \Longrightarrow \lim_{i \to \infty} \partial_9^i(n) = 0 \tag{42}$$

$$n < 0, r' = r_9(n) > 0 \Longrightarrow \lim_{i \to \infty} \partial_9^i(n) = r' \tag{43}$$

Bemerkenswert ist die Konvergenz gegen 9 in (40) obwohl $r' = 0$ vorausgesetzt ist. Anders formuliert bedeutet das, dass die Folge für einen positiven Startwert $n = k \cdot 9$ dem finalen Zustand 9 zustrebt und nicht der 0. Für negative Vielfache $n = k' \cdot 9, k' < 0$ entsteht der Grenzwert 0 wie in (42) formuliert. Die Konvergenzen sind in dem Sinne speziell, dass die Folgen ab einem bestimmten von n abhängigen Index $i = i_n$ konstant gleich dem angegebenen Grenzwert sind. Insbesondere ist der jeweilige Grenzwert eindeutig vom Anfangswert n bestimmt. Eine Angabe zu eines eventuell vorhanden variierenden Anfangsstück der Folge bzw. dessen Länge können keine expliziten Angaben gemacht werden.

♢————————————————————♢

Die formulierten Behauptungen folgen alle aus Aussage 14, wobei insbesondere die Monotonieaussagen (34), (35) herangezogen werden müssen. Außerdem spielen die in (36) genannten Fixpunkte von ∂_9 eine Rolle. Jetzt kommen wir zu Quersumme. Dazu muss zunächst bemerkt werden, dass eine Quersumme einer negativen Zahl keinen Sinn macht, es sei den, man nimmt $q(n) = -q(-n)$ für $n < 0$. Das bringt aber nach erster Überlegung nichts ein. Wir betrachten daher:

Definition 17 (Quersumme)

$$\text{Sei } q\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$$

die folgende Abbildung:

$$q\colon n =_{def} \sum_{i=0}^{\infty} z_i \cdot 10^i \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} z_i$$

♢————————————————————♢

Dabei ist links die gewöhnliche Dezimaldarstellung von n mit $z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ aufgeschrieben und rechts die Summe aller ihrer Ziffern. Es wird vorausgesetzt, dass nur endlich viele Ziffern $z_i \neq 0$ vorkommen.[3]

Aussage 18 (Monotonieeigenschaften von q)

$$n \geqq q(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \tag{44}$$
$$n > q(n) \iff n > 9 \tag{45}$$
$$n - q(n) \in \{k * 9 : k \in \mathbb{N}_0\} \tag{46}$$

♢————————————————————♢

Beweis von Aussage 18.

[3] Digital root in the Online Encyclopedia of Integer Sequences

Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Dezimaldarstellung:($\#_{10}(n)$ sei die Anzahl der Dezimalziffern von n)

$$n = \sum_{i=0}^{\infty} z_i * 10^i \text{mit Ziffern } z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$$

$$\text{Nur endlich viele } z_i \text{ sind } \neq 0$$

$$q(n) = \sum_{i=0}^{\infty} z_i * 1$$

$$n \geqq q(n)$$

$$n > q(n) \iff n > 9$$

$$n = q(n) \iff n \leqq 9$$

$$q(n) \in \{1, \ldots, 9\} \iff \#_{10}(n) = 1$$

Es ist zu beachten, dass $q(0)$ hier nicht betrachtet wird. Damit sind (18) und (44) bewiesen.Zum Beweis von(45):

$$n - q(n) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i * (10^i - 1)$$

In dieser Summe sind alle Summanden durch 9 teilbar weil $10^i - 1$ durch 9 teilbar ist. Also gilt $9|(n - q(n))$ bzw. $(n - q(n)) = k * 9$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Das k lässt sich sogar hinschreiben:

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} z_i * (10^{i-1} + 1)$$

□

Definition 19 (Iterationen von q)
Für $i \in \mathbb{N}_0$ definieren wir rekursiv:

$$q^0(n) = n \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

$$q^1(n) = q(n) \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

$$q^{i+1}(n) = q\Big(q^i(n)\Big) \quad , n \in \mathbb{N}_0$$

◊ ◊

Mit diesen Definitionen von q^i lässt sich das analoge Programm im Vergleich zu ∂_9^i durchziehen. Diese Argumentationen führen wir nicht mehr ausführlich durch. Es gilt dann:

$$n > 9, r' = r_9(n) = 0 \Longrightarrow \lim_{i \to \infty} q_9^i(n) = 9 \tag{47}$$

$$n > 9, r' = r_9(n) \in \{1, 2, \ldots, 8\} \Longrightarrow \lim_{i \to \infty} q_9^i(n) = r' \tag{48}$$

Das bedeutet: Positive Vielfache von 9 werden letztendlich durch die Iterationen von q auf 9 abgebildet. Nichtvielfache von 9 werden auf den Repräsentanten ihrer eigen Restklasse $\in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ abgebildet. Der Unterschied zwischen $q^i(n)$ und $\partial_9^i(n)$ besteht lediglich darin, dass $q^i(n)$ kleinere Werte i benötigt, um seine Grenzwerte zu erreichen. Wir beschließen den Abschnitt über die Quersumme mit einem Beispiel, wie die Frage $9|n$ mit drei verschiedenen Rechenmethoden entschieden werden kann. Sei $n = 12345678013$ und $9|12345678013$? das zu entscheidende Problem.

- Starte mit 12345678013 und subtrahiere nacheinander solange 9 bis ein einstelliges Resultat erreicht ist:

$$4 \curvearrowleft 13 \curvearrowleft 22 \curvearrowleft \cdots \curvearrowleft 1234567809 \curvearrowleft 12345678013 \quad 13717442001 \text{ Schritte}$$

- Starte mit 12345678013 und wende solange wiederholt ∂_9 an, bis ein einstelliges Resultat erreicht ist.

-
$$4 \curvearrowleft 13 \curvearrowleft 130 \curvearrowleft \cdots \curvearrowleft 123456784 \curvearrowleft 1234567804 \curvearrowleft 12345678013 \quad 10 \text{ Schritte}$$

- Starte mit 12345678013 und wende solange wiederholt die Quersumme q an, bis ein einstelliges Resultat erreicht ist.

$$4 \curvearrowleft 40 \curvearrowleft 12345678013 \quad 3 \text{ Schritte}$$

Fazit: 12345678013 ist nicht durch 9 teilbar. Die Recheneffektivität spricht eindeutig für die Quersumme. Bei der ersten Methode muss man außerdem anmerken, dass die Gefahr sich zu verrechnen viel größer ist im Vergleich zu den beiden anderen Methoden.

Bemerkung 20 (Eindeutigket von ∂_d, m_d ?)
Da bereits beim Problem $9|n$ drei verschiedene Methoden aufgetaucht sind, kommt die Frage hoch **Ist die die Definition von ∂_d eindeutig bestimmt ?** Dies muss negativ beantwortet werden:
Aus dem Beweis des Hauptsatzes 8 ist ersichtlich, dass ∂_d ein d-Teilbarkeitskriterium gerade dadurch geworden ist, dass für unsere Wahl von m_d, k_d gerade die Bézout-Identität
$m_d * 10 + k_d * d = 1$ erfüllt ist. Es gibt für jeden Divisor d noch unendlich viele andere damit verwandte passende Teilbarkeitskriterien. Wählt man nämlich $m = m_d - \ell * d, k = k_d + \ell * 10$ für irgend ein $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so ist dadurch ein Paar $(m, k) \neq (m_d, k_d)$ entstanden, das wieder die entsprechende Bézout- Identität erfüllt:
$m*10+k*d = (m_d-\ell*d)*10+(k_d+\ell*10)*d) = m_d*10+k_d*d+\Big((-\ell)*d*10+\ell*10*d\Big)$
und die letzten beiden Summanden ergeben 0 ,also $m * 10 + k * d = m_d * 10 + k_d * d = 1$. Setzt man jetzt $\lambda(n) = l(n)+m*r(n), n \in \mathbb{N}_0$, so ist $\lambda()$ ebenfalls ein d-Teilbarkeitskriterium. Alle so gebildeten Rechenmethoden sind partielle Ziffernsummen im Sinne von Definition 4. Der Vorteil von ∂_d gegenüber λ ist aber der, dass in der Regel der Multiplikator m bei λ betragsmäßig wesentlich größer im Vergleich zu m_d ausfällt. Fürs Kopfrechnen zumindest ist λ schlechter geeignet als ∂_d. Da in die Bildungsvorschrift für ∂_d bzw. λ nur m_d bzw. m eingehen, kann man einfach nur für m, m_d einen Wechsel nach obiger Vorschrift in Betracht ziehen. Zur Berechnung des d-Teilbarkeitskriteriums braucht man k_d nicht. Einen speziellen Wechsel von m_d kann man immer probieren:

$$m_d \curvearrowright \begin{cases} m_d + d & \text{falls } m_d < 0 \\ m_d - d & \text{falls } m_d > 0 \end{cases}$$

Damit verändert man den Betrag von m_d um weniger als d, was erträglich erscheint. Bei $d = 7$ führt das zum Übergang $-2 \curvearrowright +5$, was erträglich ist. Bei $d = 13$ zu $4 \curvearrowright -9$, was schon schwerer fürs Kopfrechnen scheint. Die hier speziell für ∂_d vorgenommene Zuordnung $d \mapsto m_d$ ist auf jeden Fall fürs Kopfrechnen günstig.
◊ ◊

Fixpunkte von ∂_d

Im Abschnitt sind bereist Fixpunkte aufgetaucht. Für ∂_9 ist jedes $n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ Fixpunkt: $n = \partial_9(n)$. Diese Eigenschaft ist für ∂_9 und dessen Zusammenhang zur Teilbarkeit durch 9 harmlos, denn die Fixpunkte $n \in \{0, 9\}$ sind auch durch 9 teilbar und die $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ trivialerweise nicht, da sie kleiner als 9 sind. Es gibt aber für andere Divisoren Beispiele in denen der Zusammenhang zur Teilbarkeit etwas problematischer ist.

Beispiel 21 (Fixpunkte von ∂_{43})
Für $n \in \{43, 86, 129\}$ gilt $\partial_{43}(n) = n$. Das kann man mit $m_{43} = 13$ gemäß (5) bzw. der alternativen Form 11 leicht im Kopf nachrechnen. Problematisch ist insbesondere der Fixpunkt 129:

$$\partial_{43}(387) = 38 + 13 \cdot 7 = 129, \quad \partial_{43}(129) = 129$$

An dieser Stelle kommt der Kopfrechner zu keiner neuen Einsicht in die Teilbarkeit durch 43, da sich die zu testende Zahl nicht verändert (verkleinert). Ebenso verhält es sich mit

$$\partial_{43}(989) = 98 + 13 \cdot 9 = 215, \quad \partial_{43}(215) = 21 + 13 \cdot 5 = 86$$

Wenn der kopfrechnende Anwender nicht (anderweitig) erkennt, dass $129 = 3 \cdot 43,\ 86 = 2 \cdot 43$ ist, kann er den erhofften Rechenvorteil, der aus der Anwendung von ∂_{43} entstehen soll, nicht nutzen. Da sich herausstellen wird, dass $d = 43$ kein Einzelfall ist, ergibt sich die Aufgabe, generell für jedes $d \perp 10$ die Frage der Fixpunkte theoretisch zu klären.
♢ ♢

Bemerkung 22 (Fixpunkte bezüglich ∂_d sind eindeutig durch m_d bestimmt)
Das ist insofern bemerkenswert, dass

$$d \in D_3 = \{3, 13, 33, \dots\} \Longrightarrow m_d = m_{3*d} \tag{49}$$

$$d \in D_7 = \{7, 17, 27, \dots\} \Longrightarrow m_d = m_{3*d} \tag{50}$$

Diese Beziehungen folgen unmittelbar aus der Definition 5. Daher sind die zugeordneten Fixpunktmengen identisch.
♢ ♢

Der Fixpunktsatz

Satz 23 (Es gibt 10, 4 oder 2 Fixpunkte)
Für $d \perp 10, d > 1$ bezeichne $\mathcal{F}_d =_{def} \{n : n \in \mathbb{Z}, n = \partial_d(n)\}$ die Menge der Fixpunkte von ∂_d.
Dann gelten folgende Aussagen:
Für $d \in D_9$ gibt es $10, 4$ oder2 Fixpunkte:

$$9|d \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \left\{0, 1 \cdot \frac{d}{9}, 2 \cdot \frac{d}{9}, \dots 8 \cdot \frac{d}{9}, d\right\} \tag{51}$$

$$3|d, 9 \nmid d \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \left\{0, 1 \cdot \frac{d}{3}, 2 \cdot \frac{d}{3}, d\right\} \tag{52}$$

$$3 \nmid d \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \{0, d\} \tag{53}$$

Für $d \in D_1$ gibt es $\{10, 4\}$ oder 2 Fixpunkte:

$$9|d \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \left\{-d, -8\frac{d}{9}, \dots, -1\frac{d}{9}, 0\right\} \tag{54}$$

$$3|d, 9 \nmid d \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \left\{-d, -2 \cdot \frac{d}{3}, -1 \cdot \frac{d}{3}, 0\right\} \tag{55}$$

$$d \in D_1, d \nmid 3 \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \{-d, 0\} \tag{56}$$

Für $d \in D_3$ gibt es 10 oder 4 Fixpunkte:

$$3|d, 9|3 \cdot d \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \left\{0, 1 \cdot \frac{3 \cdot d}{9}, 2 \cdot \frac{3 \cdot d}{9}, \ldots, 8 \cdot \frac{3 \cdot d}{9}, 3 \cdot d\right\} \tag{57}$$

$$3 \nmid d \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \{0, d, 2 \cdot d, 3 \cdot d\} \tag{58}$$

Für $d \in D_7$ gibt es 10 oder 4 Fixpunkte.

$$3|d, 9|3 \cdot d \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \left\{-(3 \cdot d), -8 \cdot \frac{3 \cdot d}{9}, -7 \cdot \frac{3 \cdot d}{9}, \ldots, -1 \cdot \frac{3 \cdot d}{9}, 0\right\} \tag{59}$$

$$3 \nmid d \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \{-3 \cdot d, -2 \cdot d, 0\} \tag{60}$$

Dass es für $d \in D_3 \cup D_7$ nur 10 oder 4 Fixpunkte gibt liegt daran, dass $3 \cdot d$ immer durch 3 teilbar ist. Die Anzahl der Fixpunkte richtet sich danach, ob die 3 mindestens zweimal, genau einmal oder garnicht d teilt. Höhergradige Teilbarkeiten durch 3 spielen keine Rolle.

♢————————————————————♢

Beispiel 24 (Beispiele für 10 Fixpunkte)

$$\begin{aligned} d &= 33,\ m_{33} = 10 && \Longrightarrow \mathcal{F}_{33} = \mathcal{F}_{99} = \{0, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\} \\ d &= 27,\ m_{27} = -8 && \Longrightarrow \mathcal{F}_{27} = \mathcal{F}_{81} = \{-81, -72, -63, -54, -45, -36, -27, -18, -9, 0\} \end{aligned}$$

Für die negativen Fixpunkte sind beim Nachrechnen die Formeln (11) und (12) zu beachten. Zum Beispiel ist $\partial_{27}(-81) = -9 - 8 \cdot 9 = -9 - 72 = -81$.

♢————————————————————♢

Beweis von Satz 23.
Zu (51):
Zunächst soll eine alternative gleichwertige Fixpunktbedingung hergeleitet werden:

Fixpunktkriterien in D_9

Aussage 25 (Fixpunktkriterien in D_9)
Sei $d \in D_9$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$n - \partial_d(n) = 9 * l(n) - l(d) * r(n) \tag{61}$$

$$10 * (n - \partial_d(n)) = 9 * n - d * r(n) \tag{62}$$

$$n \in \mathcal{F}_d \iff l(n) * 9 = l(d) * r(n) \tag{63}$$

$$n \in \mathcal{F}_d \iff n * 9 = d * r(n) \tag{64}$$

♢————————————————————♢

Beweis von Aussage 25.
Dabei wird definitionsgemäß $l(n) = (n - r(n))/10,\ l(d) = (d - r(d))/10$ benutzt:

$$\begin{aligned} n - \partial_d(n) &= n - (l(n) + m_d * r(n)) \\ &= 10 * l(n) + r(n) - (l(n) + m_d * r(n)) \text{ gemäß (7)} \\ &= 10 * l(n) - l(n) + r(n) - m_d * r(n) \\ &= 9 * l(n) - (m_d - 1) * r(n) \\ &= 9 * l(n) - l(d) * r(n) \text{ gemäß (33)} \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} n - \partial_d(n) = 0 &\iff l(n) * 9 = l(d) * r(n) \\ n \in \mathcal{F}_d &\iff l(n) * 9 = l(d) * r(n) \end{aligned}$$

Damit ist (63) bewiesen. Zum Beweis von (64) wird so argumentiert:

$$\begin{aligned}
n - \partial_d(n) &= 9 * l(n) - l(d) * r(n) \leftarrow\text{-- das ist (61)} \\
n - \partial_d(n) &= 9 * ((n - r(n))/10) - ((d - r(d))/10) * r(n) \text{ nach Definition von } l(n), l(d) \\
10 * (n - \partial_d(n)) &= 9 * (n - r(n)) - (d - r(d)) * r(n) \\
10 * (n - \partial_d(n)) &= 9 * n - 9 * r(n) - (d - 9) * r(n) \\
10 * (n - \partial_d(n)) &= 9 * n - 9 * r(n) - d * r(n) + 9 * r(n) \\
10 * (n - \partial_d(n)) &= 9 * n - d * r(n)
\end{aligned}$$

Damit ist (64) bewiesen. □

Die Menge der Divisoren d, um die es geht, kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\{d :\in D_9, 9|d\} = \{9 + x * 90 \, : x \in \mathbb{N}_0\} \tag{66}$$

Dies kann man folgendermassen einsehen:
Für jedes $d \in D_9$ ist $r(d) = 9$ sowie $d = 10 * l(d) + 9$ nach (7) für $n = d$. Daher gilt:

$$\begin{aligned}
9|d &\iff 9|l(d) \text{ gemäß (19),(18) und weil } 9 \perp 10 \\
9|d &\iff l(d) \in \{x * 9 \, : x \in \mathbb{N}_0\} \\
9|d &\iff 10 * l(d) \in \{10 * 9 * x \, : x \in \mathbb{N}_0\} \\
9|d &\iff 10 * l(d) \in \{90 * x \, : x \in \mathbb{N}_0\} \\
9|d &\iff 10 * l(d) + 9 \in \{9 + x * 90 \, : x \in \mathbb{N}_0\} \\
9|d &\iff d \in \{9 + x * 90 \, : s \in \mathbb{N}_0\} \text{ weil nach (7) } d = 10 * l(d) + 9
\end{aligned}$$

Damit ist die (66) geklärt. Zur Herleitung der 10 Fixpunkte in (51) soll das Fixpunktkriterium (63) herangezogen werden. Dazu wird ein Divisor $d = 9 + x * 90$ gemäß (66) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &= l(d) * r(n) \\
9 * l(n) &= l(9 + x * 90) * r(n) \\
9 * l(n) &= x * 9 * r(n) \text{ weil } l(9 + x * 90) = x * 9 \\
l(n) &= x * r(n)
\end{aligned}$$

Da $r(n) \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ ist erhält man die folgenden 10 Gleichungen:

$$\begin{aligned}
l(n) &= x * 0 \text{ für } r(n) = 0 \\
l(n) &= x * 1 \text{ für } r(n) = 1 \\
l(n) &= x * 2 \text{ für } r(n) = 2 \\
l(n) &= x * 3 \text{ für } r(n) = 3 \\
l(n) &= x * 4 \text{ für } r(n) = 4 \\
l(n) &= d * 5 \text{ für } r(n) = 5 \\
l(n) &= x * 6 \text{ für } r(n) = 6 \\
l(n) &= x * 7 \text{ für } r(n) = 7 \\
l(n) &= x * 8 \text{ für } r(n) = 8 \\
l(n) &= x * 9 \text{ für } r(n) = 9
\end{aligned}$$

Die oberste Gleichung kann offenbar nur für $n = 0$ gelten, weil darin $l(n) = x * 0 = 0, r(n) = 0$ ist. Die zweite Gleichung kann wegen $r(n) = 1$ äquivalent durch $n = 10 * l(n) + 1 = 10 * x + 1 = (90 * x + 9)/9 = d/9$ also durch $\mathbf{n = 10 * x + 1 = d/9}$ ausgedrückt werden. Die anderen 8 verbleibenden Gleichungen für $r(n) \in \{2, 3, \ldots, 9\}$ sind äquivalent zu

$$n = 10 * l(n) + r(n) = 10 * x * r(n) + r(n) = r(n) * (10 * x + 1)$$

, woraus sich wegen $10 * d + 1 = d/9$ jeweils

$$n = r(n) * (d/9) \text{ für } r(n) \in \{2, 3, \ldots, 9\}$$

ergibt. Insgesamt sind das genau die 10 behaupteten Fixpunkte

$$\mathcal{F}_{\mathbf{d}} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1} \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{9}}, \mathbf{2} \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{9}}, \ldots, \mathbf{9} \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{9}}\}$$

Da durchgehend $\iff$ für die Auswertung der Fixpunktbedingungen verwendet wurden, kann es keine weiteren Fixpunkte geben und (51) bewiesen.
Zu (52):
Für die Bedingungen $d \in D_9, 3|d, 9 \nmid d$ wird folgende Darstellung dieser Divisorenmenge verwendet:

$$\{d : d \in D_9, 3|d, 9 \nmid d\} = \{19 + 30 * x : x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{29 + 30 * x : x \in \mathbb{N}_0\} \tag{67}$$

Das kann man so einsehen:
Ausgehend von (7)in der Form $d = 10*l(d)+r(d)$ argumentieren wir für (67): Da für $d \in D_9$ der Rest $r(d)$ immer durch 3 und 9 teilbar ist, entscheiden sich gemäß (19) und (20) die Teilbarkeiten an $l(d)$. Für $9 \nmid d$ müssen also bei $l(d)$ die Vielfachen von 9 ausgelassen werden:

$$\begin{aligned}
d \in D_9 : 3|d, 9 \nmid d &\iff l(d) \in \{3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48, 51, \ldots\} \\
\{3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48, 51, \ldots\} &= \{3, 12, 21, 30, \ldots\} \cup \{6, 15, 24, 33, \ldots\} \\
\{3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33, 39, 42, 48, 51, \ldots\} &= \{3 + 9 * x : x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{6 + 9 * x : d \in \mathbb{N}_0\} \\
&\text{Wegen } d = 10 * l(d) + r(d), r(d) = 9 \text{ folgt} \\
d \in D_9 : 3|d, 9 \nmid d &\iff d \in \{39 + 90 * x : x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{69 + 90 * x : x \in \mathbb{N}_0\}
\end{aligned}$$

Damit ist (25) bewiesen. Jetzt wird ein $d = 39+90*x$ in das Fixpunkt-Kriterium (63) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
l(n) * 9 &= l(d) * r(n) \\
l(n) * 9 &= l(39 + 90 * x) * r(n) \\
l(n) * 9 &= (3 + 9 * x) * r(n)
\end{aligned}$$

Aus der letzten Zeile folgen drei Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned}
(3 + x * 9) * r(n) &\equiv 3 * r(n) && \pmod 9 \\
\text{für } r(n) \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \text{ gilt } 3 * r(n) &\not\equiv 0 && \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv 0 && \pmod 9
\end{aligned}$$

Die erste Beziehung ergibt sich aus (19) weil $9|l(n) * 9$ und $9|(x * 9 * r(n))$ also $3 * r(n) = (9 * l(n) - 9 * x * r(n)) = 9 * (l(n) - x * r(n))$ also ein Vielfaches von 9. Die zweite Beziehung ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
&\{3 * r(n) : r(n) \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}\} = \{3, 6, 12, 15, 21, 24\} \\
\Rightarrow &\{r_9(3 * r(n)) : r(n) \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}\} = \{3, 6\}
\end{aligned}$$

Die dritte Beziehung ist offensichtlich. Daraus folgt, dass nur die Reste $r(n) \in \{0,3,6,9\}$ zu einer Gleichung $9 * l(n) = (3 + x * 9) * r(n)$ führen können, weil Beziehungen mit $\not\equiv \pmod 9$ niemals zu Gleichungen werden können. Da $r(n) \in \{0,1,\ldots,9\}$ liegt und $r(n) \in \{1,2,4,5,7,8\}$ nach den Zwischenergebnissen nicht in Betracht kommen, müssen eine oder mehrere der folgenden 4 Alternativen gelten:

$$
\begin{aligned}
9 * l(n) &= (3 + x * 9) * 0 \leftarrow\text{-- Hier gilt } r(n) = 0\\
9 * l(n) &= (3 + x * 9) * 3 \leftarrow\text{-- Hier gilt } r(n) = 3\\
9 * l(n) &= (3 + x * 9) * 6 \leftarrow\text{-- Hier gilt } r(n) = 6\\
9 * l(n) &= (3 + x * 9) * 9 \leftarrow\text{-- Hier gilt } r(n) = 9
\end{aligned}
$$

Daraus lesen wir in der ersten und letzten Zeile sofort zwei Lösungen ab:

$$
\begin{aligned}
n &= 0 \text{ Ein Fixpunkt wegen } l(n) = r(n) = 0\\
l(n) &= (3 + x * 9) \text{ weil in der letzten Zeile eine 9 herausgekürzt werden kann}\\
10 * l(n) &= (30 + x * 90)\\
10 * l(n) + 9 &= (39 + x * 90)\\
n &= d \text{ Noch ein Fixpunkt}
\end{aligned}
$$

Damit sind {0,d} als Fixpunkte von ∂_d identifiziert. Zwei weitere Lösungen lesen wir aus den Zeilen mit $r(n) = 3$ und $r(n) = 6$ ab:

$$
\begin{aligned}
&9 * l(n_1) = (3 + x * 9) * 3 \,\| \iff 3 * l(n_1) = (3 + x * 9) \iff l(n_1) = (1 + x * 3)\\
&\qquad \Downarrow \text{ wenn man oben ganz rechts mit 10 multipliziert}\\
&9 * l(n_1) = (3 + x * 9) * 3 \,\| \iff 10 * l(n_1) + 3 = (10 + x * 30 + 3) \iff n_1 = 13 + x * 30 \iff 3 * n_1 = d\\
&\quad 3 * n_1 = d \iff n_1 = d/3\\
&9 * l(n_2) = (3 + x * 9) * 6 \,\| \iff 3 * l(n_2) = (3 + x * 9) * 2 \iff l(n_2) = (1 + x * 3) * 2\\
&\qquad \Downarrow \text{ wenn man oben ganz rechts mit 10 multipliziert}\\
&9 * l(n_2) = (3 + x * 9) * 6 \,\| \iff 10 * l(n_2) + 6 = (10 + x * 30) + 6 \iff n_2 = 2 * n_1\\
&\qquad n_2 = 2 * n_1 \iff n_2 = 2 * (d/3)
\end{aligned}
$$

Damit sind auch $\{1 \cdot \frac{d}{3}, 2 \cdot \frac{d}{3}\}$ als Fixpunkte von ∂_d identifiziert, und mehr können nicht auftreten. Damit ist der Fall $d \in \{39 + 90 * s : s \in \mathbb{N}_0\}$ bewiesen. Allerdings ist es so, dass man hier noch eine stützende Bemerkung zu Herleitung der Gleichungen für n_1, n_2 einflechten muss. Es ist so, dass die Werte $x \in \mathbb{N}_0$ umkehrbar eindeutig den Werten in $d : d \in D_9, 3|d$ zugeordnet sind. Diese Zuordnung geschieht über die Formel $d = 39 + x \cdot 90$. Für n_1 war zunächst ein $d' \in D_3, l(d') = 1 + 3 \cdot x,\ r(d') = 3$ entstanden. Wegen $3|d,\ l(d) = 9, 3|9$ muss daher auch $3|l(d)$ gelten. Wenn man also $3 \cdot l(d')$ bildet, muss genau $l(d)$ entstehen. Daher ist am Ende ausgehend von $n_1 = \frac{d}{3}$ in einer mehrfachen $\Leftrightarrow$-Kette wieder zurück zur Bedingung $9 * l(n) = (3 + x * 9) * 3,\ r(n) = 3$ zu finden. Diese ist für $r(d) = 3$ äquivalent zur Fixpunkteigenschaft. Eine ähnliche stützende Bemerkung ist für die Herleitung der Gleichung $n_2 = 2 \cdot n_1$ notwendig.
Es ist jetzt noch der Fall $d = 69 + x \cdot 90$ zu behandeln:

$$
\begin{aligned}
l(n) * 9 &= l(d) * r(n)\\
l(n) * 9 &= l(69 + 90 * x) * r(n)\\
l(n) * 9 &= (6 + 9 * x) * r(n)
\end{aligned}
$$

Aus der letzten Gleichung folgen drei Zwischenergebnisse:

$$\begin{aligned}(6 + x * 9) * r(n) &\equiv 6 * r(n) && \pmod 9\\ \text{für } r(n) \in \{1,2,4,5,7,8\} \text{ gilt } 6 * r(n) &\not\equiv 0 && \pmod 9\\ 9 * l(n) &\equiv 0 && \pmod 9\end{aligned}$$

Die erste Beziehung ergibt sich aus (3) weil $9|(x * 9 * r(n))$. Die zweite Beziehung ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\{6 * r(n) : r(n) \in \{1,2,4,5,7,8\}\} &= \{6, 12, 24, 30, 42, 48\}\\ \Rightarrow \{r_9(6 * r(n)) : r(n) \in \{1,2,4,5,7,8\}\} &= \{3, 6\}\end{aligned}$$

Die dritte Beziehung ist offensichtlich. Daraus folgt, dass nur die Reste $r(n) \in \{0, 3, 6, 9\}$ zu einer Gleichung $9 * l(n) = (6 + x * 9) * r(n)$ führen können , weil Beziehungen mit $\not\equiv \pmod 9$ niemals zu Gleichungen werden können. Da $r(n) \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ liegt und $r(n) \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ nach den Zwischenergebnissen nicht in Betracht kommen, müssen eine oder mehrere der folgenden 4 Alternativen gelten:

$$\begin{aligned}9 * l(n) &= (6 + 9 * x) * 0 \leftarrow\!\!-\!- \text{ Hier ist } r(n) = 0\\ 9 * l(n) &= (6 + 9 * x) * 3 \leftarrow\!\!-\!- \text{ Hier ist } r(n) = 3\\ 9 * l(n) &= (6 + 9 * x) * 6 \leftarrow\!\!-\!- \text{ Hier ist } r(n) = 6\\ 9 * l(n) &= (6 + 9 * x) * 9 \leftarrow\!\!-\!- \text{ Hier ist } r(n) = 9\end{aligned}$$

Aus erster und letzter Zeile lesen wir wieder zwei Fixpunkte ab:

$$\begin{aligned}n &= 0 \text{ Ein Fixpunkt wegen } l(n) = r(n) = 0\\ l(n) &= (6 + x * 9) \text{ aus der letzten Gleichung 9 heraus gekürzt}\\ 10 * l(n) &= (60 + x * 90)\\ 10 * l(n) + 9 &= (69 + x * 90)\\ n &= d \text{ Noch ein Fixpunkt}\end{aligned}$$

Zwei weitere Lösungen lesen wir aus den Zeilen mit $r(n) \in \{3, 6\}$ ab

$$\begin{aligned}9 * l(n_1) &= (6 + x * 9) * 3 \,\| \iff 3 * l(n_1) = (6 + x * 9) \iff l(n_1) = (2 + x * 3)\\ 9 * l(n_1) &= (6 + d * 9) * 3 \,\| \iff 10 * l(n_1) + 3 = (20 + x * 30 + 3) \iff n_1 = 23 + x * 30\\ n_1 &= 23 + x * 30 \iff 3 * n_1 = d \iff n_1 = d/3\\ 9 * l(n_2) &= (6 + x * 9) * 6 \,\| \iff 3 * l(n_2) = (6 + x * 9) * 6 \iff l(n_2) = (2 + d * 3) * 2\\ 9 * l(n_2) &= (6 + x * 9) * 6 \,\| \iff 10 * l(n_2) + 6 = (40 + x * 30) + 6 \iff n_2 = (46 + x * 30)\\ n_2 &= 46 + s * 30 \iff n_2 = 2 * n_1 \iff n_2 = 2 * (d/3)\end{aligned}$$

Damit sind auch $\{1 \cdot \frac{d}{3}, 2 \cdot d3\}$ als Fixpunkte von ∂_d identifiziert, und mehr kann es nicht geben. Damit ist auch im Fall $d = 69 + 90 \cdot x$ die Gleichung $\mathcal{F}_d = \{0, 1 \cdot \frac{d}{3}, 2 \cdot \frac{d}{3}, d\}$ bewiesen.

Beispiel 26 $(x = 7 \mapsto d = 39 + 90 \cdot 7 = 669,\ 3|669,\ 9 \nmid 669)$
In dem Fall ist $m_d = 67$ und man kann $\mathcal{F}_{669} = \{0, 223, 446, 669\}$ leicht im Kopf überprüfen:

$$\begin{aligned}\partial_{669}(223) &= 22 + 67 \cdot 3 = 22 + 201 = 223\\ \partial_{669}(446) &= 44 + 67 \cdot 6 = 44 + 302 = 446\\ \partial_{669}(669) &= 66 + 67 \cdot 9 = 66 + 603 = 669\end{aligned}$$

◊————————————————————◊

Bei der Gelegenheit hat sich heraus gestellt:
Ein $d \in D_9$ ist genau dann durch 3 teilbar,wenn $l(d)$ durch 3 teilbar ist.

Für $d \in D_9$ ist jetzt noch (53) zu beweisen. Diese Behauptung lautet:

$$d \in D_9,\ 3 \nmid d \Longrightarrow \mathcal{F}_d = \{0, d\}$$

Diesmal wird ein elementares zahlenthoeretisches Hilfsmittel ins Rennen geschickt, das aus dem bereits genannten Buch von Helmut Hasse (ohne Beweis) entnommen wird:

Aussage 27 (Lineare Kongruenzen)
Damit die Kongruenz $a \cdot x \equiv b \pmod{m}$ lösbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß der größte gemeinsame Teiler $d = (a, m)$ der Restklasse $a \pmod{m}$ auch in b aufgeht, d. h. daß $b \equiv 0 \pmod{d}$ ist. Ist dies der Fall, so wird die Kongruenz durch genau d Restklassen $x \pmod{m}$ gelöst, die eine Restklasse $x \pmod{\frac{m}{d}}$ zusammensetzen.
♢————————————————————————————♢

Dazu muss noch bemerkt werden, dass alle Elemente der Restklasse $a \pmod{m}$ den gleichen größten gemeinsamen Teiler $d = (a, m)$ mit m gemeinsam haben. Zu (53):

$$\{d \in D_9 : 3 \nmid d\} = \{19 + 30 * x : x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{29 + 30 * x : x \in \mathbb{N}_0\} \tag{68}$$

Dafür müssen bei $l(d)$ alle Vielfachen von 3 ausgelassen werden:

$$\begin{aligned}
d \in D_9 : 3 \nmid d &\iff l(d) \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots\}\\
d \in D_9 : 3 \nmid d &\iff l(d) \in \{1 + 3 * x : s \in \mathbb{N}_0\} \cup \{2 + 3 * x : s \in \mathbb{N}_0\}\\
&\text{Wegen } d = 10 * l(d) + 9 \text{ folgt}\\
d \in D_9 : 3 \nmid d &\iff d \in \{10 + 30 * x + 9\} \cup \{20 + 30 * x + 9 : x \in \mathbb{N}_0\}\\
d \in D_9 : 3 \nmid d &\iff d \in \{19 + 30 * x\} \cup \{29 + 30 * x : x \in \mathbb{N}_0\}
\end{aligned}$$

Damit ist auch (68) geklärt.
Begonnen wird mit:$d = 19 + 30 * x,\ x \in \mathbb{N}_0$. Dann ist offenbar $l(d) = (1 + 3 * x)$

$$9 * l(n) = (1 + 3 * x) * r(n) \text{ gemäß Fixpunktkriterium (63)}$$

Wegen $r(n) \in \{0, 1, \dots, 9\}$ müssen für das Vorliegen von Fixpunkten daher eine oder mehrere der folgenden 10 Alternativen erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &= (1 + 3 * x) * 0 \dashleftarrow r(n) = 0\\
9 * l(n) &= (1 + 3 * x) * 1 \dashleftarrow r(n) = 1\\
9 * l(n) &= (1 + 3 * x) * 2 \dashleftarrow r(n) = 2\\
9 * l(n) &= (1 + 3 * x) * 3 \dashleftarrow r(n) = 3\\
9 * l(n) &= (1 + 3 * x) * 4 \dashleftarrow r(n) = 4\\
9 * l(n) &= (1 + 3 * x) * 5 \dashleftarrow r(n) = 5\\
9 * l(n) &= (1 + 3 * x) * 6 \dashleftarrow r(n) = 6\\
9 * l(n) &= (1 + 3 * x) * 7 \dashleftarrow r(n) = 7\\
9 * l(n) &= (1 + 3 * x) * 8 \dashleftarrow r(n) = 8\\
9 * l(n) &= (1 + 3 * x) * 9 \dashleftarrow r(n) = 9
\end{aligned}$$

Daraus lesen wir in erster und letzte Zeile die Fixpunkte $\{0, \mathtt{d}\}$ ab. Für 0 ist das unmittelbar einzusehen, weil dort $\mathtt{l}(0) = 0, \mathtt{r}(\mathtt{n}) = 0$ ist. Für $\mathtt{d}$ geht das in der letzten Zeile wegen $\mathtt{r}(\mathtt{n}) = 9$ so:

$$\begin{aligned}
9 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) &= (1 + 3 * \mathtt{x}) * 9 \\
9 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) &= (1 + 3 * \mathtt{x}) * 9 \iff \mathtt{l}(\mathtt{n}) = (1 + 3 * \mathtt{x}) \text{ durch herauskürzen der 9} \\
10 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) + 9 &= (10 + 30 * \mathtt{x} + 9) = (19 + 30 * \mathtt{x}) = \mathtt{d} \\
\text{also } \mathtt{n} &= \mathtt{d}
\end{aligned}$$

Aus restlichen 8 Gleichungen für $\mathtt{r}(\mathtt{n}) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kommt man wegen $9|9 * \mathtt{l}(\mathtt{n})$ die folgenden 8 potentiellen Kongruenzen, indem auf der rechten Seite ausmultipliziert und auf die Form $\mathtt{a} \cdot \mathtt{x} \equiv \mathtt{b} \pmod 9$ um gestellt wird , für die in Aussage 27 formuliert ist.

$$\begin{aligned}
3 \cdot \mathtt{x} &\equiv -1 \pmod 9 \\
6 \cdot \mathtt{x} &\equiv -2 \pmod 9 \\
9 \cdot \mathtt{x} &\equiv -3 \pmod 9 \\
12 \cdot \mathtt{x} &\equiv -4 \pmod 9 \\
15 \cdot \mathtt{x} &\equiv -5 \pmod 9 \\
18 \cdot \mathtt{x} &\equiv -6 \pmod 9 \\
21 \cdot \mathtt{x} &\equiv -7 \pmod 9 \\
24 \cdot \mathtt{x} &\equiv -8 \pmod 9
\end{aligned}$$

Hier geht die $\Longleftarrow$-Bedingung zur Fixpunkteigenschaft verloren, da aber gezeigt werden soll, dass diese 8 Kongruenzen nicht erfüllt sein können, können dann erst recht nicht die ursprünglichen 8 Gleichungen erfüllt sein. Die 8 Kongruenzen passen genau auf linearen Kongruenzen aus Aussage 27 für die Fälle $\mathtt{a} \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}$, $\mathtt{m} = 9$. Dazu müssen jeweils die größten gemeinsamen Teiler der $\{(\mathtt{a}, 9) : \mathtt{a} \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}\}$ berechnet werden. Diese sind in dieser Reihenfolge $\{3, 6, 9, 3, 3, 9, 3, 6\}$ und für diese müssten der Reihe nach die Teilbarkeiten

$$3|-1,\ 6|-2,\ 9|-3,\ 3|-4,\ 3|-5,\ 9|-6,\ 3|-7,\ 6|-8$$

erfüllt sein, was aber in keinem dieser Fälle zu trifft. Damit ist auch klar, dass die 8 Gleichungen für $\mathtt{r}(\mathtt{n}) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ aus denen die potentielle Kongruenzen hergeleitet wurden, nicht gelten können. Damit ist für $\mathtt{d} = 19 + 30 \cdot \mathtt{x}$ die Fixpunktmenge $\mathcal{F}_{\mathtt{d}} = \{0, \mathtt{d}\}$ ist.

Die gleiche Rechnung muss noch für den Fall $\mathtt{d} = 29 + 30 * \mathtt{x}$ durchgeführt werden. Für diese $\mathtt{d}$ gilt offenbar $\mathtt{l}(\mathtt{d}) = 2 + 3 * \mathtt{x}$ und man erhält daraus nach dem Fixpunktkriterium 63 die folgenden 10 Gleichungen

$$
\begin{aligned}
9 * l(n) &= (2 + 3 * x) * 0 \dashleftarrow r(n) = 0\\
9 * l(n) &= (2 + 3 * x) * 1 \dashleftarrow r(n) = 1\\
9 * l(n) &= (2 + 3 * x) * 2 \dashleftarrow r(n) = 2\\
9 * l(n) &= (2 + 3 * x) * 3 \dashleftarrow r(n) = 3\\
9 * l(n) &= (2 + 3 * x) * 4 \dashleftarrow r(n) = 4\\
9 * l(n) &= (2 + 3 * x) * 5 \dashleftarrow r(n) = 5\\
9 * l(n) &= (2 + 3 * x) * 6 \dashleftarrow r(n) = 6\\
9 * l(n) &= (2 + 3 * x) * 7 \dashleftarrow r(n) = 7\\
9 * l(n) &= (2 + 3 * x) * 8 \dashleftarrow r(n) = 8\\
9 * l(n) &= (2 + 3 * x) * 9 \dashleftarrow r(n) = 9
\end{aligned}
$$

Aus der ersten Gleichung folgt $n = 0$ als Fixpunkt. Aus der letzten Zeile $9 * l(n) = (2 + 3 * x) * 9$ also unter Berücksichtigung von $r(n) = 9$ folgt

$$
\begin{aligned}
l(n) &= (2 + 3 * x)\\
10 * l(n) &= (20 + 30 * x)\\
10 * l(n) + 9 &= (29 + 30 * x)\\
n &= d \text{ gemäß dem anfänglichen Ansatz}
\end{aligned}
$$

Daher ist auch d als Fixpunkt von ∂_d verifiziert. Aus den restlichen 8 Gleichungen erschließt man für $r(n) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ die folgenden Kongruenzen, und zwar auf der rechten Seite ausmultipliziert und auf die Form $a \cdot x \equiv b \pmod 9$ gebracht.

$$
\begin{aligned}
3 \cdot x &\equiv -2 \pmod 9\\
6 \cdot x &\equiv -4 \pmod 9\\
9 \cdot x &\equiv -6 \pmod 9\\
12 \cdot x &\equiv -8 \pmod 9\\
15 \cdot x &\equiv -10 \pmod 9\\
18 \cdot x &\equiv -12 \pmod 9\\
21 \cdot x &\equiv -14 \pmod 9\\
24 \cdot x &\equiv -16 \pmod 9
\end{aligned}
$$

Die größten gemeinsamen Teiler $\{(a, 9) : a \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24\}\}$ sind in dieser Reihenfolge

$$3, 6, 9, 3, 3, 9, 3, 3$$

und es müssten gemäß Aussage 27 die potentiellen Teilbarkeiten

$$3| - 2,\ 6| - 4,\ 9| - 6,\ 3| - 8,\ 3| - 10,\ 9| - 12,\ 3| - 14,\ 3| - 16$$

gelten, wenn die Kongruenzen zutreffen würden. Dies ist aber durchweg nicht der Fall. Daher können auch die ursprünglichen 8 Gleichungen aus denen sie hervorgegangen sind, nicht erfüllt sein. Also ergeben sich keine weiteren Fixpunkte und $\mathcal{F}_d = \{0, d\}$ ist bewiesen.

Der Fall $d \in D_9$ innerhalb des Beweises des Fixpunktsatzes 23 ist damit abgeschlossen.
Jetzt müssen die Divisoren $d \in D_1 = \{11, 21, 31, \dots\}$ behandelt werden. Der Divisor 1 ist ausgelassen worden, denn ∂_1 hat wegen $m_1 = 0$ nur den Fixpunkt 0, was uninteressant ist. Diesmal werden die Darstellung der entsprechenden Teilermengen zusammenfassend voraus geschickt:

Aussage 28 (Darstellung von Teilermengen für $d \in D_1$)

$$\{d \in D_1, d > 1, 9|d\} = \{81 + x * 90,\ x \in \mathbb{N}_0\} \tag{69}$$

$$\{d \in D_1, d > 1, 3|d, 9 \nmid d\} = \{21 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{51 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}\{d \in D_1, d > 1, 3 \nmid d\} = &\{11 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{31 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\}\\ &\cup \{41 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{61 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\}\\ &\cup \{71 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{91 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\}\end{aligned} \tag{71}$$

Die in (71) rechts aufgeführten Teilermengen sollen entsprechend mit $D_{11}, D_{31}, D_{41}, D_{61}, D_{71}, D_{91}$ bezeichnet werden.
$\diamondsuit$———————————————————————————$\diamondsuit$

Beweis von Aussage 28.
Für (69) wird wie folgt argumentiert:
Die kleinste Zahl $d \in D_1$, die durch 9 teilbar ist, ist $d = 81$. Für alle anderen $d \in D_1$, die durch 9 teilbar sind, muss deren Differenz zu 81 durch 9 teilbar sein. Da die Elemente von D_1 untereinander eine durch 10 teilbare Differenz haben müssen die durch 9 teilbaren Elemente eine durch $10 * 9 = 90$ teilbare Differenz zu 81 haben, weil $10 * 9$ das kleinste gemeinsame Vielfache von $10, 9$ ist. Damit ist (69) wohl begründet. Zusätzlich bemerken wir noch: $9|d \iff l(d) + 1 = \partial_9(d)|d$, ohne dass bereits klar ist, ob das nützlich ist.
Zu (70): Die beiden kleinsten Elemente von D_1, die durch 3 aber nicht durch 9 teilbar sind, sind $21, 51$. Alle anderen Elemente von D_1 mit dieser Bedingung folgen mit Differenz $3 * 10 =$ kleinstes gemeinsames Vielfaches von $3, 10$, wobei die durch 9 teilbaren Elemente ausgelassen werden müssen, da in (70) $9 \nmid d$ gefordert wird. Daher müssen genau die beiden in (70) genannten Mengen $\{21 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{51 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\}$ in die Teilermenge aufgenommen werden.
Zu (71): Die ersten 6 Elemente von D_1, die nicht durch 3 teilbar sind, sind in (71) aufgeschrieben, wobei dies genau diejenigen sind, die nicht durch (69) und (70) bereits erfasst sind. Da für die letzteren die Wiederholungsperiode 90 gilt, ist auch für die nicht durch 3 teilbaren Elemente diese Wiederholungsperiode zutreffend. $\square$

Außerdem seien noch folgende vorbereitende Tatsachen aufgeschrieben:

Aussage 29 (Rechnungen mit dem *linken Teil* $\mathbf{l}()$)
Für $n, o \in \mathbb{Z}$ gilt

$$l(n + o) = \begin{cases} l(n) + l(o) \text{ falls } r(n) + r(o) \leqq 9 \\ l(n) + l(o) + 1 \text{ falls } r(n) + r(o) > 9 \end{cases} \tag{72}$$

$$l(\nu * 10 + o) = \nu + l(o) \text{ für } \nu \in \mathbb{Z} \tag{73}$$

$$l(\nu * 10) = \nu \text{ für } \nu \in \mathbb{Z} \tag{74}$$

Dabei ist (73) die nützlichste Eigenschaft: $\nu * 10$ *kann als Wert* ν *additiv heraus gezogen werden.*
$\diamondsuit$———————————————————————————$\diamondsuit$

Beweis von Aussage 29 .
Zu (72):

$$\begin{aligned}
n + o &= 10 * l(n) + r(n) + 10 * l(o) + r(o) \text{ gemäß (7)} \\
&= 10 * (l(n) + l(o)) + r(n) + r(o) \\
&= \begin{cases} 10 * l(n+o) + r(n) + r(o) \text{ falls } r(n) + r(o) \leqq 9 \\ 10 * l(n+o) + 10 + r(n) + r(o) - 10 \text{ falls } r(n) + r(o) > 9 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 10 * l(n+o) + r(n) + r(o) \text{ falls } r(n) + r(o) \leqq 9 \\ 10 * (l(n+o) + 1) + r(n+o) \text{ falls } r(n) + r(o) > 9 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{10 * l(n+o) + r(n) + r(o)}{10} \right\rfloor \text{ falls } r(n) + r(o) \leqq 9 \\ \left\lfloor \dfrac{10 * (l(n+o) + 1)}{10} \right\rfloor \text{ falls } r(n) + r(o) > 9 \end{cases} \\
&= \begin{cases} l(n) + l(o) \text{ falls } r(n) + r(o) \leqq 9 \\ l(n) + l(o) + 1 \text{ falls } r(n) + r(o) > 9 \end{cases}
\end{aligned}$$

Zu beachten ist dabei:
$\left\lfloor \dfrac{r'}{10} \right\rfloor = 0$ für $0 \leqq r' < 10$ und $\left\lfloor \dfrac{10 * \nu}{10} \right\rfloor = \nu$ sowie $\left\lfloor \dfrac{\nu * 10 + r'}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\nu * 10}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{r'}{10} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{\nu * 10}{10} \right\rfloor = \nu$.
Zum Beweis von (73) wird $n = \nu * 10 + o$ gesetzt und (72) angewendet. Dabei ergibt sich wegen $r(\nu * 10) = 0$ dass: $r(\nu * 10) + r(o) = r(o) \leqq 9$ und es ist $l(\nu * 10) = \nu$.
Damit ergibt sich $l(\nu * 10 + o) = \nu + l(o)$ gemäß (72).
Zum Beweis von (74) kann gesagt werden, dass dies ein Spezialfall von (73) für $o = 0$ ist und man muss nur noch $l(0) = 0$ berücksichtigen. □

Zum Beweis von (54):

Fixpunktkriterien in D_1

Aussage 30 (Fixpunktkriterien in D_1)
Sei $d \in D_1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$\partial_d(n) - n = -9 * l(n) - (l(d) + 1) * r(n) \tag{75}$$

$$n - \partial_d(n) = 9 * l(n) + (l(d) + 1) * r(n) \tag{76}$$

$$n \in \mathcal{F}_d \iff 9 * l(n) = -(l(d) + 1) * r(n) \tag{77}$$

◊————◊

Beweis von Aussage 30.

$$\begin{aligned}
\partial_d(n) - n &= l(n) - l(d) * r(n) \text{ wegen } m_d = -l(d) \text{ für } d \in D_1\\
\partial_d(n) - n &= l(n) - l(d) * r(n) - (10 * l(n) + r(n)) \text{ wegen (7)}\\
&= -9 * l(n) - l(d) * r(n) - r(n)\\
\partial_d(n) - n &= -9 * l(n) - (l(d)+1) * r(n) \dashleftarrow \text{ Damit ist (75) gezeigt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_d(n) - n = 0 &\iff -9 * l(n) - (l(d)+1) * r(n) = 0\\
\partial_d(n) - n = 0 &\iff 9 * l(n) = -(l(d)+1) * r(n)\\
n \in \mathcal{F}_d &\iff 9 * l(n) = -(l(d)+1) * r(n) \dashleftarrow \text{ Damit ist (77) gezeigt}
\end{aligned}$$

Und (76) ist äquivalent zu (75). □

Das soll jetzt benutzt werden um die 10 Fixpunkte in (54) herzuleiten. Dabei soll (69) benutzt werden.

$$\begin{gathered}
d = 81 + 90 * x\\
9 * l(n) = -(l(81 + 90 * x) + 1) * r(n)\\
\Downarrow \text{ nach (73)}\\
9 * l(n) = -(1 + 9 * x) * r(n)
\end{gathered}$$

Der Ausdruck $-(l(d)+1)$ wird jetzt umgeformt unter Berücksichtigung der Kodierung von d gemäß (69):

$$\begin{aligned}
-(l(d)+1) &= -(l(81 + x * 90) + 1)\\
&= (8 + x * 9 + 1) \text{ wegen (73)}\\
-(l(d)+1) &= -(x+1) * 9
\end{aligned}$$

Aus Aussage 65 bezüglich D_9 wird daher bezüglich D_1:

$$9 * l(n) = -(x+1) * 9 * r(n) \tag{78}$$

$$n \text{ ist Fixpunkt von } \partial_{81+g*90} \iff l(n) = -(x+1) * r(n) \tag{79}$$

Dabei ist zu beachten, dass für negative n der Wert $l(n)$ ebenfalls negativ ist und es gilt $n < l(n) < 0$, wenn $n < -d$.
In das erreichte Fixpunktkriterium 79 setzen wir alle 10 möglichen Reste $r(n) \in \{0, \ldots, 9\}$ ein und erhalten folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
l(n) &= -(x+1) * 0 \text{ für } r(n) = 0\\
l(n) &= -(x+1) * 1 \text{ für } r(n) = 1\\
l(n) &= -(x+1) * 2 \text{ für } r(n) = 2\\
l(n) &= -(x+1) * 3 \text{ für } r(n) = 3\\
l(n) &= -(x+1) * 4 \text{ für } r(n) = 4\\
l(n) &= -(x+1) * 5 \text{ für } r(n) = 5\\
l(n) &= -(x+1) * 6 \text{ für } r(n) = 6\\
l(n) &= -(x+1) * 7 \text{ für } r(n) = 7\\
l(n) &= -(x+1) * 8 \text{ für } r(n) = 8\\
l(n) &= -(x+1) * 9 \text{ für } r(n) = 9
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist genau für $n = 0$ erfüllt. Zur Untersuchung der zweiten Gleichung für $r(n) = 1$ stellen wir fest, dass

$$\begin{aligned} l(n) &= -(x+1) * 1 \\ 10 * l(n) + 1 &= -(x+1) * 10 + 1 \\ n &= -(x+1) * 10 + 1 \\ n &= -d/9 \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung sich aus folgender Rechnung ergibt.

$$-d/9 = -(81 + x * 90)/9 = -(9 + gx * 10) = -(10 + x * 10) + 1 = -(x+1) * 10 + 1$$

Damit ergibt die zweite Gleichung die Lösung $n = -d/9$. Die anderen 8 Gleichungen für

$$r(n) = r' \in \{2, \ldots, 9\}$$

ergeben sich in der Gestalt

$$\begin{aligned} l(n) &= -(x+1) * r' \\ n = 10 * l(n) + r' &= -(x+1) * 10 * r' + r' \\ n &= -((x+1) * 10 + 1) * r' \\ n &= -r' * (d/9) \end{aligned}$$

Damit sind außer $n = 0$ die weiteren 9 Lösungen des Gleichungssystems folgende.

$$n_{r'} = -r' * (d/9), \ r' \in \{1, \ldots, 9\}$$

Das sind gerade die 10 für $d \in D_1, \ 9|d$ in (54) behaupteten Fixpunkte. Zum Beweis von (55): Es soll die Darstellung (70) verwendet werden, die hier nochmal hingeschrieben wird:

$$\{d \in D_1, d > 1, 3|d, 9 \nmid d\} = \{21 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{51 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\}$$

1.Fall $d = 21 + d * 90$ mit einem $x \in \mathbb{N}_0$:
Es soll wieder das Fixpunktkriterium (78) angewendet werden. Dazu berechnen wir wieder $-(l(d) + 1)$ unter Verwendung von (73).

$$\begin{aligned} -(l(d) + 1) &= -(l(21 + x * 90) + 1) \\ &= -(2 + x * 9) + 1) \\ -(l(d) + 1) &= -(3 + x * 9) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 9 * l(n) &= -(3 + x * 9) * 0 \text{ für } r(n) = 0 \\ 9 * l(n) &= -(3 + x * 9) * 1 \text{ für } r(n) = 1 \\ 9 * l(n) &= -(3 + x * 9) * 2 \text{ für } r(n) = 2 \\ 9 * l(n) &= -(3 + x * 9) * 3 \text{ für } r(n) = 3 \\ 9 * l(n) &= -(3 + x * 9) * 4 \text{ für } r(n) = 4 \\ 9 * l(n) &= -(3 + x * 9) * 5 \text{ für } r(n) = 5 \\ 9 * l(n) &= -(3 + x * 9) * 6 \text{ für } r(n) = 6 \\ 9 * l(n) &= -(3 + x * 9) * 7 \text{ für } r(n) = 7 \\ 9 * l(n) &= -(3 + x * 9) * 8 \text{ für } r(n) = 8 \\ 9 * l(n) &= -(3 + x * 9) * 9 \text{ für } r(n) = 9 \end{aligned}$$

Die erste Gleichung für $\mathtt{r}(\mathtt{n}) = 0$ ist wieder nur für $\mathtt{n} = 0$ erfüllbar, womit sich 0 als Fixpunkt von $\partial_{\mathtt{d}}$ erweist. Die letzte Gleichung für $\mathtt{r}(\mathtt{n}) = 9$ werten wir wie folgt aus:

$$\begin{aligned} 9 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) &= -(3 + \mathtt{x} * 9) * 9 \\ \mathtt{l}(\mathtt{n}) &= -(3 + \mathtt{x} * 9) \\ \mathtt{n} = 10 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) + 9 &= -(3 + \mathtt{x} * 9) * 10 + 9 \\ \mathtt{n} &= -(30 + \mathtt{x} * 90) + 9 \\ \mathtt{n} &= -(21 + \mathtt{x} * 90) \\ \mathtt{n} &= -\mathtt{d} \end{aligned}$$

Damit erweist sich auch $-\mathtt{d}$ als Fixpunkt von $\partial_{\mathtt{d}}$
Unter den anderen 8 Gleichungen sehen die für $\mathtt{r}(\mathtt{n}) \in \{3, 6\}$ auswertbar aus. Für $\mathtt{r}(\mathtt{n}) = 3$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} 9 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) &= -(3 + \mathtt{x} * 9) * 3 \\ 3 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) &= -(3 + \mathtt{x} * 9) \\ \mathtt{l}(\mathtt{n}) &= -(1 + \mathtt{x} * 3) \\ &? \Downarrow \mathtt{r}(10 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) + 3) = 3 \Rightarrow \mathtt{n} = 10 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) + 3 \text{ gemäß } (7) \\ 10 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) + 3 &= -(1 + \mathtt{x} * 3) * 10 + 3 \\ \mathtt{n} &= -(10 + \mathtt{x} * 30) + 3 \\ \mathtt{n} &= -\mathtt{d}/3 \end{aligned}$$

Wobei sich die letzte Gleichung aus folgender Rechnung ergibt.

$$-\mathtt{d}/3 = -(21 + \mathtt{x} * 90)/3 = -(7 + \mathtt{x} * 30) = -(10 + \mathtt{x} * 30) + 3$$

Damit ist $-\mathtt{d}/3$ als Fixpunkt von $\partial_{\mathtt{d}}$ erkannt.
Die Gleichung für $\mathtt{r}(\mathtt{n}) = 6$ werten wir wie folgt aus.

$$\begin{aligned} 9 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) &= -(3 + \mathtt{x} * 9) * 6 \\ 3 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) &= -(3 + \mathtt{x} * 9) * 2 \\ \mathtt{l}(\mathtt{n}) &= -(1 + \mathtt{x} * 3) * 210 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) + 6 && = -(1 + \mathtt{x} * 3) * 2 * 10 + 6 \\ &? \Downarrow \mathtt{r}(10 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) + 6) = 6 \Rightarrow \mathtt{n} = 10 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) + 6 \text{ gemäß } (7) \\ \mathtt{n} &= -(20 + \mathtt{x} * 60) + 6 \\ \mathtt{n} &= -2 * (\mathtt{d}/3) \end{aligned}$$

Wobei sich die letzte Gleichung aus folgender Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} -2 * (\mathtt{d}/3) &= -2 * (21 + \mathtt{x} * 90)/3 \\ &= -2 * (7 + \mathtt{x} * 30) \\ &= (-14 - 2 * \mathtt{x} * 30) \\ &= -(20 + \mathtt{x} * 60) + 6 \end{aligned}$$

Damit hat sich auch $-2*(\mathtt{d}/3)$ als Fixpunkt von $\partial_{\mathtt{d}}$ erwiesen. Es verbleibt noch die Aufgabe, die anderen 6 Gleichungen für $\mathtt{r}(\mathtt{d}) \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ als unerfüllbar nachzuweisen. Das sind folgende Gleichungen

$$9 * \mathfrak{l}(n) = -(3 + x * 9) * 1 \text{ für } \mathfrak{r}(n) = 1$$
$$9 * \mathfrak{l}(n) = -(3 + x * 9) * 2 \text{ für } \mathfrak{r}(n) = 2$$
$$9 * \mathfrak{l}(n) = -(3 + x * 9) * 4 \text{ für } \mathfrak{r}(n) = 4$$
$$9 * \mathfrak{l}(n) = -(3 + x * 9) * 5 \text{ für } \mathfrak{r}(n) = 5$$
$$9 * \mathfrak{l}(n) = -(3 + x * 9) * 7 \text{ für } \mathfrak{r}(n) = 7$$
$$9 * \mathfrak{l}(n) = -(3 + x * 9) * 8 \text{ für } \mathfrak{r}(n) = 8$$

Falls diese 6 Gleichungen gelten sollten werden daraus daraus die folgenden 6 Kongruenzen, wobei das negative Vorzeichen weggelassen werden kann.

$$(3 + x * 9) * 1 \equiv 0 \pmod 9$$
$$(3 + x * 9) * 2 \equiv 0 \pmod 9$$
$$(3 + x * 9) * 4 \equiv 0 \pmod 9$$
$$(3 + x * 9) * 5 \equiv 0 \pmod 9$$
$$(3 + x * 9) * 7 \equiv 0 \pmod 9$$
$$(3 + x * 9) * 8 \equiv 0 \pmod 9$$

Multipliziert man die hinteren Faktoren ind die Klammer (...) hinein ergibt sich als zu beweisende Beziehungen:

$$9 * x + 3 \equiv 0 \pmod 9$$
$$18 * x + 6 \equiv 0 \pmod 9$$
$$36 * x + 12 \equiv 0 \pmod 9$$
$$45 * x + 15 \equiv 0 \pmod 9$$
$$63 * x + 21 \equiv 0 \pmod 9$$
$$72 * x + 24 \equiv 0 \pmod 9$$

Um zu zeigen, dass keine dieser Kongruenzen gelten kann, wird Aussage 27 angewendet: Dazu müssen die größten gemeinsamen Teiler $(a, 9) : a \in \{9, 18, 36, 45, 63, 72\}$ berechnet werden: Diese sind alle gleich 9. Andererseits gilt

$$9 \nmid 3,\ 9 \nmid 6,\ 9 \nmid 12,\ 9 \nmid 15,\ 9 \nmid 21,\ 9 \nmid 24$$

Somit können diese Kongruenzen nach Aussage **??** nicht erfüllt sein und es ergeben sich keine weiteren Fixpunkte. Die Menge der Fixpunkte ist daher wie in (55) behaupet:

$$\mathcal{F}_d = \{-d, -2 \cdot \frac{d}{3}, -1 \cdot \frac{d}{3}, 0\}$$

2.Fall $d = 51 + x * 90$:

Es soll wieder das Fixpunktkriterium (78) angewendet werden. Dazu berechnen wir wieder $-(\mathfrak{l}(d) + 1)$ unter Verwendung von (73).

$$\begin{aligned} -(\mathfrak{l}(d) + 1) &= -(\mathfrak{l}(51 + x * 90) + 1) \\ &= -(5 + x * 9) + 1) \\ -(\mathfrak{l}(d) + 1) &= -(6 + x * 9) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann das folgende Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 0 \text{ für } r(n) = 0 \\
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 1 \text{ für } r(n) = 1 \\
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 2 \text{ für } r(n) = 2 \\
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 3 \text{ für } r(n) = 3 \\
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 4 \text{ für } r(n) = 4 \\
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 5 \text{ für } r(n) = 5 \\
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 6 \text{ für } r(n) = 6 \\
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 7 \text{ für } r(n) = 7 \\
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 8 \text{ für } r(n) = 8 \\
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 9 \text{ für } r(n) = 9
\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ist nur für $n = 0$ erfüllbar, womit 0 sich als ein Fixpunkt herausgestellt hat. Aus der letzten Gleichung folgern wir:

$$\begin{aligned}
l(n) &= -(6 + x * 9) \text{ hier sind } l(n),\ n \text{ negativ} \\
10 * l(n) + 9 &= -(6 + x * 9) * 10 + 9 \\
n &= -(60 + x * 90) + 9 \\
n &= -(51 + x * 90) \\
\text{also } n &= -d \text{ mit der Anmerkung } r(-d) = 10 - 1 = 9
\end{aligned}$$

Damit ist bisher $\{-d, 0\} \subseteq \mathcal{F}_d$ hergeleitet. Unter den anderen 8 Gleichungen sehen die für $r(n) \in \{3, 6\}$ auswertbar aus:

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 3 \text{ hier sind } l(n),\ n \text{ negativ} \\
3 * l(n) &= -(6 + x * 9) \\
l(n) &= -(2 + x * 3) \\
&?\Downarrow r(10 * l(n) + 3) = 3 \Rightarrow n = 10 * l(n) + 3 \text{ gemäß (7)} \\
10 * l(n) + 3 &= -(2 + x * 3) * 10 + 3 \\
10 * l(n) + 3 &= -(20 + x * 30) + 3 \\
n &= -(20 + x * 30) + 3 \\
n &= -(17 + x * 30) \\
n &= -d/3
\end{aligned}$$

Die oben rechts neben $?\Downarrow$ aufgeschriebene Begründung ist klar, aber der Ansatz $10 * l(n) + 3$ ist *tricky*. Der Ansatz wurde schon in Hinblick auf das erhoffte Resultat $n = -d/3$ gewählt, denn wenn $d \in D_1, 3|d$, folgt $r(-d) = 9, r(-d/3) = 3,\ 3|l(d)$. Der *Trick* wurde oben schon mehrmals angewendet. Das ist der

Bemerkung 31 (Der Dezimalrest-Ergänzungstrick: $\mathbf{l(n) = y \mapsto n = 10 * y + r'}$)
Wenn irgend eine Gleichung der Form

$$l(n) = y$$

vorliegt, und daraus eine Gleichung für n, $r(n) = r' \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ entstehen soll, wobei der Wert r' eine wohlbegründete Erwartung ist, so geht man über zu $10 * l(n) + r' = 10 * y + r'$ und erhält dann

$$n = 10 * y + r'$$

und versucht diese nach n aufzulösen.

$\diamond$———————————————————————————————————————$\diamond$

Für $r(n) = 6$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 6 \text{ hier sind } l(n),\ n \text{ negativ} \\
3 * l(n) &= -(6 + x * 9) * 2 \\
l(n) &= -(2 + x * 3) * 2 \\
l(n) &= -(4 + x * 6) \\
10 * l(n) + 6 &= -(4 + x * 6) * 10 + 6 \\
n &= -(40 + x * 60) + 6 \\
n &= -(34 + x * 60) \\
n &= -2 * (17 + x * 30) \\
n &= -2 * (d/3) \text{ nach dem Resultat für } r(n) = 3
\end{aligned}$$

Bisher ergibt sich $\{-d, -1 \cdot \frac{d}{3}, -2 \cdot \frac{d}{3}, 0\} \subseteq \mathcal{F}_d$. Jetzt müssen noch die 6 Fälle $r(n) \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ behandelt werden. Aus diesen Geichungen ergeben sich die folgenden 6 Kongruenzen

$$\begin{aligned}
(6 + x * 9) * 1 &\equiv 0 \pmod 9 \\
(6 + x * 9) * 2 &\equiv 0 \pmod 9 \\
(6 + x * 9) * 4 &\equiv 0 \pmod 9 \\
(6 + x * 9) * 5 &\equiv 0 \pmod 9 \\
(6 + x * 9) * 7 &\equiv 0 \pmod 9 \\
(6 + x * 9) * 8 &\equiv 0 \pmod 9
\end{aligned}$$

Beziehungsweise:

$$\begin{aligned}
9 * x + 6 &\equiv 0 \pmod 9 \\
9 * x + 12 &\equiv 0 \pmod 9 \\
9 * x + 24 &\equiv 0 \pmod 9 \\
9 * x + 30 &\equiv 0 \pmod 9 \\
9 * x + 42 &\equiv 0 \pmod 9 \\
9 * x + 48 &\equiv 0 \pmod 9
\end{aligned}$$

Um Aussage 27 anwenden zu können, berechne ich:

$$\{(a, 9) : a \in \{6, 12, 24, 30, 42, 48\}\} = \{3, 3, 3, 3, 3, 3\}$$

und stelle fest, dass $3 \nmid b$ für $b \in \{6, 12, 24, 30, 42, 48\}$. Daher kann nach Aussage 27 keine dieser Kongruenzen erfüllt sein und erst recht nicht keine der ursprünglichen 6 Gleichungen aus denen

sie hergeleitet wurden.
Also ergeben sich keine neuen Fixpunkte und $\mathcal{F}_d = \{-d, -1 \cdot \frac{d}{3}, -2 \cdot \frac{d}{3}, 0\}$ ist bestätigt. Für $d \in D_1$ ist noch der Beweis von (56) zu erbringen. Dazu sollen die Darstellungen der entsprechenden Teilermengen gemäß (71) benutzt werden. Das wird hier nochmal hingeschrieben:

$$\begin{aligned}\{d \in D_1, d > 1, 3 \nmid d\} = &\{11 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{31 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \\ &\cup \{41 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{61 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \\ &\cup \{71 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\} \cup \{91 + x * 90, x \in \mathbb{N}_0\}\end{aligned}$$

Leider sind das 6 einzelne Mengen aber es wird versucht weitgehend alle zusammen zu behandeln. Die Tatsache, dass aus den resultierenden Gleichungen jeweils 0 als Fixpunkt entsteht wird ohne direkten Beweis gelassen, da das jeweils klar ist. Zuunächst werden gemäß (78) alle entstehenden Gleichungen auf den Fall $r(n) = 9$ spezialisiert, wobei gleich der auf beiden Seiten vorkommende Faktor 9 herausgekürzt wird.

$$\begin{aligned}l(n) &= -(1 + x * 9) + 1 \\ l(n) &= -(3 + x * 9) + 1 \\ l(n) &= -(4 + x * 9) + 1 \\ l(n) &= -(6 + x * 9) + 1 \\ l(n) &= -(7 + x * 9) + 1 \\ l(n) &= -(9 + x * 9) + 1\end{aligned}$$

Mit dem Dezimalrest-Ergänzungstrick ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}n &= -(2 + x * 9) * 10 + 9 \\ n &= -(4 + x * 9) * 10 + 9 \\ n &= -(5 + x * 9) * 10 + 9 \\ n &= -(7 + x * 9) * 10 + 9 \\ n &= -(8 + x * 9) * 10 + 9 \\ n &= -(10 + x * 9) * 10 + 9\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}n &= -(20 + x * 90) + 9 = -(11 + x * 90) = -d \\ n &= -(40 + x * 90) + 9 = -(31 + x * 90) = -d \\ n &= -(50 + x * 90) + 9 = -(41 + x * 90 = -d \\ n &= -(70 + x * 90) + 9 = -(61 + x * 90) = -d \\ n &= -(80 + x * 90) + 9 - (71 + x * 90) = -d \\ n &= -(100 + x * 90) + 9 = -(91 + x * 90) = -d\end{aligned}$$

Eine zweite Rechnung dazu ist gemäß (77) für $r(n) = 9$

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &= -(l(d) + 1) * r(n) \\
9 * l(n) &= -(l(d) + 1) * 9 \\
l(n) &= -\ (l(d) + 1) \\
10 * l(n) + 9 &= -(l(d) + 1) * 10 + 9 \\
n &= -(l(d) * 10 + 10) + 9 \\
n &= -(l(d) * 10 + 1) \\
n &= -d \text{ wegen } d \in D_1
\end{aligned}$$

wieder durch Anwendung des Dezimalrest-Ergänzungstricks, diesmal ohne die einzelnen Spezialisierungen der Dezimalreste aufzuschreiben. Zusammen mit $0 \in \mathcal{F}_d$ haben wir in allen 6 Fällen das in (56) behauptete Teilresultat $\{-d, 0\} \subseteq \mathcal{F}_d$ erhalten. Es fehlt jetzt noch, dass durch die anderen 8 Fälle für $r(n) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ keine neuen Fixpunkte dazu kommen. Dazu wird die fixpunktchrakterisiernde Bedingung (77) für diese Dezimalreste aufgeschrieben:

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &= -(l(d) + 1) * 1 \\
9 * l(n) &= -(l(d) + 1) * 2 \\
9 * l(n) &= -(l(d) + 1) * 3 \\
9 * l(n) &= -(l(d) + 1) * 4 \\
9 * l(n) &= -(l(d) + 1) * 5 \\
9 * l(n) &= -(l(d) + 1) * 6 \\
9 * l(n) &= -(l(d) + 1) * 7 \\
9 * l(n) &= -(l(d) + 1) * 8
\end{aligned}$$

Leider kann man daraus in dieser allgemeinen Form keine nützlichen Schlüsse ziehen. Daher muss auf die Darstellungen der Teilermengen zugegriffen werden. Für D_{11} ergibt sich:

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &= -(1 + x * 9 + 1) * 1 \\
9 * l(n) &= -(1 + x * 9 + 1) * 2 \\
9 * l(n) &= -(1 + x * 9 + 1) * 3 \\
9 * l(n) &= -(1 + x * 9 + 1) * 4 \\
9 * l(n) &= -(1 + x * 9 + 1) * 5 \\
9 * l(n) &= -(1 + x * 9 + 1) * 6 \\
9 * l(n) &= -(1 + x * 9 + 1) * 7 \\
9 * l(n) &= -(1 + x * 9 + 1) * 8
\end{aligned}$$

Wenn es rechts um die Teilbarkeit durch 9 geht, können die Summanden $x * 9$ gemäß (19) weggelassen werden. $\mathfrak{a}|\mathfrak{b} \Longrightarrow \mathfrak{a}|(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) \iff \mathfrak{a}|\mathfrak{c}$ ⇠-- **Das ist** (19):

$$9 * l(n) \equiv -(1+1) * 1 = -2 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(1+1) * 2 = -4 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(1+1) * 3 = -6 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(1+1) * 4 = -8 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(1+1) * 5 = -10 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(1+1) * 6 = -12 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(1+1) * 7 = -14 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(1+1) * 8 = -16 \pmod 9$$

Daran ist leicht zu erkennen, dass keine der rechten Seiten durch 9 teilbar ist. Daher kommen aus D_{11} keine neuen Fixpunkte dazu.
Die Behandlung von D_{31} führt nach weglassen der Summanden $x * 9$ zu folgenden Kongruenzen:

$$9 * l(n) \equiv -(3+1) * 1 = -4 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(3+1) * 2 = -8 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(3+1) * 3 = -12 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(3+1) * 4 = -16 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(3+1) * 5 = -20 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(3+1) * 6 = -24 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(3+1) * 7 = -28 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(3+1) * 8 = -32 \pmod 9$$

Und keine der rechten Seiten ist durch 9 teilbar. Daher kommen auch aus D_{31} keine neuen Fixpunkte.

Für D_{41} ergeben sich folgende Kongruenzen:

$$9 * l(n) \equiv -(4+1) * 1 = -5 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(4+1) * 2 = -10 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(4+1) * 3 = -15 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(4+1) * 4 = -20 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(4+1) * 5 = -25 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(4+1) * 6 = -30 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(4+1) * 7 = -35 \pmod 9$$
$$9 * l(n) \equiv -(4+1) * 8 = -40 \pmod 9$$

Und keine der rechten Seiten ist durch 9 teilbar. Daher kommen auch aus D_{41} keine neuen Fixpunkte dazu.

Für D_{61} ergeben sich folgende Kongruenzen:

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &\equiv -(6+1) * 1 = -7 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(6+1) * 2 = -14 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(6+1) * 3 = -21 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(6+1) * 4 = -28 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(4+1) * 5 = -35 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(6+1) * 6 = -42 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(6+1) * 7 = -49 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(6+1) * 8 = -56 \pmod 9
\end{aligned}$$

Und keine der rechten Seiten ist durch 9 teilbar. Daher kommen auch aus D_{61} keine neuen Fixpunkte dazu.

Für D_{71} ergeben sich folgende Kongruenzen:

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &\equiv -(7+1) * 1 = -8 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(7+1) * 2 = -16 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(7+1) * 3 = -24 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(7+1) * 4 = -32 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(7+1) * 5 = -40 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(7+1) * 6 = -48 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(7+1) * 7 = -56 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(7+1) * 8 = -64 \pmod 9
\end{aligned}$$

Und keine der rechten Seiten ist durch 9 teilbar. Daher kommen auch aus D_{71} keine neuen Fixpunkte dazu.

Für D_{91} ergeben sich folgende Kongruenzen:

$$\begin{aligned}
9 * l(n) &\equiv -(9+1) * 1 = -10 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(9+1) * 2 = -20 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(9+1) * 3 = -30 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(9+1) * 4 = -40 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(9+1) * 5 = -50 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(9+1) * 6 = -60 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(9+1) * 7 = -70 \pmod 9 \\
9 * l(n) &\equiv -(9+1) * 8 = -80 \pmod 9
\end{aligned}$$

Und keine der rechten Seiten ist durch 9 teilbar. Daher kommen auch aus D_{91} keine neuen Fixpunkte dazu. Damit ist $\mathcal{F}_{\mathbf{d}} = \{-\mathbf{d}, \mathbf{0}\}$ - wie in (56) behauptet - bewiesen. Gemäß Bemerkung 22 sind damit auch die Fixpunktmengen für $\mathbf{d} \in D_3 \cup D_7$ bestimmt. Die genauen Beschreibungen sind durch (57) ,(58),(59),(60) gegeben. Der Fixpunktsatz 23 ist damit vollständig bewiesen. $\square$

Der Beweis ist elementar, aber ermüdend schreibaufwendig. Die Beweisformulierung hätte ebenso mit der Aussage 27 über lineare Kongruenzen geführt werden können.

Bemerkung 32 (Bedeutung der Fixpunkte für die Teilbarkeit)
Für $d \in D_9 \cup D_1$ stiften die Fixpunkte keine Verwirrung für einen Kopfrechner. man muss sich nur merken, dass

$$d \in D_9 \Longrightarrow \{0, d\} \subseteq \mathcal{F}_d$$
$$d \in D_1 \Longrightarrow \{-d, 0\} \subseteq \mathcal{F}_d$$

Diese Fixpunkte führen immer zur Teilbarkeit. Die anderen eventuell vorhandenen Fixpunkte liegen für $d \in D_9$ in $\{1, \ldots, d-1\}$, sind also $< d$, was zur Nichtteilbarkeit führt. Für $d \in D_1$ in $\{-(d-1), \ldots, -1\}$, was ebenfalls Nichtteilbarkeit bedeutet.
Für $d \in D_3 \cup D_7$ ist die Situation, wie am Beispiel $d = 43$ bereits diskutiert. Es kommen Fixpunkte dazu, auf die der Kopfrechner eventuell nicht vorbereitet ist. Deshalb hilft der Fixpunktsatz, auf diese Fälle vorbereitet zu sein.
♢————————————————————————————♢

Partielle Ziffernsummen als Permutation

Es stellt sich heraus, dass jede partielle Ziffernsumme bei eingeschränktem Definitionsbereich eine Permutation darstellt.

Definition 33 (∂_d Als Permutation)
Für $d \in D_9$ sei

$$\partial_d \colon \{1, \ldots, d-1\} \longrightarrow \{1, \ldots, d-1\} \tag{80}$$
$$\partial_d(n) = l(n) + m_d * r(n) \quad \forall n \in \{1, \ldots, d-1\} \tag{81}$$

Für $d \in D_1$ sei

$$\partial_d \colon \{-(d-1), \ldots, -1\} \longrightarrow \{-(d-1), \ldots, -1\} \tag{82}$$
$$\partial_d(n) = l(n) + m_d * r(n) \quad \forall n \in \{-(d-1), \ldots, -1\} \tag{83}$$

Für $d \in D_3$ sei

$$\partial_d \colon \{1, \ldots, 3*d-1\} \longrightarrow \{1, \ldots, 3*d-1\} \tag{84}$$
$$\partial_d(n) = l(n) + m_d * r(n) \quad \forall n \in \{1, \ldots, 3*d-1\} \tag{85}$$

Für $d \in D_7$ sei

$$\partial_d \colon \{-(3*d-1), \ldots, -1\} \longrightarrow \{-(3*d-1), \ldots, -1\} \tag{86}$$
$$\partial_d(n) = l(n) + m_d * r(n) \quad \forall n \in \{-(3*d-1), \ldots, -1\} \tag{87}$$

Für diese Permutationen wird noch die symbolische Bezeichnung $\begin{pmatrix} & \cdots \\ \partial_d & \cdots \end{pmatrix}$ eingeführt, die sich an die übliche Bezeichnung für Permutationen anlehnt. Diese Bezeichnung schließt dann ausdrücklich die in der Definition angegebenen Definitionsbereiche ein. Insbesondere gehören $\{0, d, 3d, -d, -3d\}$ nicht zu den Definitionsbereichen.
♢————————————————————————————♢

In Gestalt von ∂_9 haben wir bereits eine spezielle Form dieser Permutation kennen gelernt: Man vergleiche (36). Dort wurden die Elemente $\{0, d = 9\}$ zum Definitionsbereich hinzugezählt. Den Wert 0 könnte man für alle $d \in D_9 \cup D_1$ zum Definitionsbereich hinzufügen, weil das ein

Fixpunkt ist. wir werden aber am Definitionbereich $\{1, \dots, d-1\}$ festhalten. Zu ∂_9 stellen wir noch die spezielle Form

$$\partial_9(n) = n \quad \forall n \in \{1, \dots, 8\}$$

fest. Das ist die Identität $id_{\{1,\dots,8\}}$.

$$\begin{pmatrix} \partial_9 \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Für die ∂_d als Permutation wird parallel dazu auch das gleiche Funktionssymbol verwendet wie für partielle Ziffernsumme, die den Definitionsbereich $\mathbb{Z}$ hat. Selbstverständlich muss die Definition 33 dadurch den Nachweis gerechtfertigt werden, dass ∂_d umkehrbar eindeutig seinen Definitionsbereich auf sich abbildet.

Aussage 34 (Für $d \in D_9 \cup D_3$ ist ∂_d bijektiv)
Die Umkehrabbildungen haben die Gestalt:

$$\partial_d^{-1}(n) = l_{m_d}(n) + 10 * r_{m_d}(n) \text{ für } d \in D_9 \tag{88}$$

$$\partial_d^{-1}(n) = l_{m_{3*d}}(n) + 10 * r_{m_{3*d}}(n) \text{ für } d \in D_3 \tag{89}$$

Die Bezeichnung l_m haben wir (für $m = p$) in der Formulierung der Aussage 1 eingeführt.
◇————————————————————◇

Beweis von Aussage 34.
Zunächst wird gezeigt, dass ∂_d auf dem Definitionsbereich $\{1, \dots, d-1\}$ in sich abbildet. Unter Beachtung von $m_d > 0$ und $10 * m_d - 1 = d$ überlegen wir uns:
Sei $n \in \{1, \dots, d-1\}$. Dann kann n nach der Division mit Rest gemäß Aussage 1 dargestellt werden in der Form $n = t * 10 + s$ mit $t \in \{0, \dots, (m_d - 1)\}$ und $s \in \{0, \dots, 9\}$, denn das ist für alle $n \in \mathbb{Z}$ möglich, also auch für $n \in \{1, \dots, d-1\}$. Die Beschränkung $t \leqq (m_d - 1)$ ergibt sich daraus, dass für den nächst größeren Wert $t = m_d$ bereits mindestens $10 * m_d + 0 = d + 1$ entsteht. Die Paare $(t, s) \in \{(0, 0), (m_d - 1, 9)\}$ kommen in der Darstellung nicht vor.
Der kleinste Wert m_d von $\partial_d(10 * t + s)$ wird für $t = 0, s = 1$ angenommen. Der größte Wert $(m_d - 1 + m_d * 9)$ für $t = m_d - 1, s = 9$ und das ergibt die erste Zeile in folgender Rechnung.

$$\begin{aligned} 1 \leqq \partial_d(10 * t + s) &= t + m_d * s \leqq (m_d - 1) + m_d * 9 \\ &= (m_d - 1) + 10 * m_d - m_d = 10 * m_d - 1 \\ &= d \\ &\Downarrow \\ &0 \leqq \partial_d(n) \leqq d \end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir dass ∂_d injektiv ist. Dazu seien $n = 10 * t + s$, $n' = 10 * t' + s'$ zwei Elemente von $\{1, \dots, d-1\}$, und wir nehmen an, dass $\partial_d(n) = \partial_d(n')$ ist. Das bedeutet

$$\begin{aligned} t + m_d * s &= t' + m_d * s' \\ 0 &= (t - t') + m_d * (s - s') \\ 0 &\equiv ((t - t') + m_d * (s - s')) \pmod{m_d} \end{aligned}$$

Wir können $t \geqq t'$ annehmen. Da immer $0 \equiv m_d * (s - s') \pmod{m_d}$ ist und
$t, t' \in \{0, \dots, (m_d - 1)\}$ muss auch $0 \equiv (t - t') \pmod{m_d}$ sein. Das geht aber nur für $t = t'$, denn ansonsten wäre

$$\begin{aligned} (t - t') &\in \{1, \dots, (m_d - 1)\} \\ \text{und } (t - t') &\not\equiv 0 \pmod{m_d} \end{aligned}$$

Aus $0 = (t - t') + m_d * (s - s') = m_d * (s - s')$ folgt dann $0 = m_d * (s - s')$ und $(s - s') = 0$ nach Division durch $m_d > 0$. Es ergibt sich insgesamt $s = s'$, $t = t'$ und $10 * t + s = n = n' = 10 * t' + s'$. Also ist ∂_d injektiv. Da $\{1, \ldots, d-1\}$ eine endliche Menge ist, muss ∂_d bijektiv sein, denn ansonsten hätte das Bild $\partial_d(\{1, \ldots, d-1\})$ weniger Elemente als $\{1, \ldots, d-1\}$, was bei gleichmächtigen endlichen Mengen unmöglich ist.
Zum Beweis von (88):
Es sei $n = 10 * t + s \in \{1, \ldots, d-1\}$ mit $t \in \{0, \ldots, (m_d - 1)\}$ und $s \in \{0, 1, \ldots, 9\}$, wobei die Paare $(0, 0), (m_d - 1, 9)$ nicht zu berücksichtigen sind. Dann können wir unter Berücksichtigung von $r_{m_d}(t + m_d * s) = t$ und $l_{m_d}(t + m_d * s) = s = (t + m_d * s - t)/m_d = s$ wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned}
\partial_d(10 * t + s) &= t + m_d * s \\
\partial_d^{-1}(\partial_d(10 * t + s)) &= \partial_d^{-1}(t + m_d * s) \\
&= l_{m_d}(t + m_d * s) + 10 * r_{m_d}(t + m_d * s) \\
&= s + 10 * t \text{ also} \\
\partial_d^{-1}(\partial_d(10 * t + s)) &= s + 10 * t \text{ und daher allgemein formuliert} \\
\partial_d^{-1}(\partial_d(n)) &= n
\end{aligned}$$

Damit ist eine erforderliche Gleichung $\partial_d^{-1} \circ \partial_d = id_{\{1, \ldots, d-1\}}$ bewiesen. Für endliche Mengen als Definitionsbereich muss die Gültigkeit von $\partial_d \circ \partial_d^{-1} = id_{\{1, \ldots, d-1\}}$ nicht auch noch nachgewiesen werden. Damit ist (88) bewiesen, und (89) ergibt sich aus $d \in D_3 \Rightarrow 3 * d \in D_9$, wobei noch zu berücksichtigen ist, dass für $d \in D_3$ die Argumentation für die Behauptung

$$\partial_{3*d} \text{ bildet } \{1, \ldots, 3 * d - 1\} \text{ umkehrbar eindeutig auf sich ab}$$

nur von der Tatsache $3 * d \in D_9$ abhängt. Das muss also nicht nochmal durchgekaut werden. $\square$

Es sei noch eine der üblichen Dastellungen für Permutationen aufgeschrieben:

$$\partial_d = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 9 & 10 & 11 & \ldots & 19 & \ldots & (d-1) \\ 1 * m_d & \ldots & 9 * m_d & 1 & 1 + 1 * m_d & \ldots & 1 + 9 * m_d & \ldots & m_d - 1 + 8 * m_d \end{pmatrix}$$

Die Funktion $\partial_d^{-1}(n) = l_m(n) + 10 * r_m(n)$ ist die Entsprechung für ∂_d im Zahlensystem zur Basis m. Die Tatsache dass der Faktor 10 bei $r_m(n)$ auftaucht ist ebenfalls kein Zufall. Es ist nämlich 10 eine Inverse von m im Ring $\mathbb{Z}/d * \mathbb{Z}$. Diese Ziffern-Interpretation wird hier aber hier nicht benötigt. Zum Beipiel für $d = 159$ gilt $m_{159} = 16$ und wir landen damit in der *hexagesimalen/hexadezimalen* Zahlenschreibweise, die eventuell im Kopf für Computer-Programmierer beherrschbar ist. In der gewöhnlichen Mathematik sind Permutationen Teilgebiet der Kombinatorik. Zum Beispiel zählt man die Anzahl aller Permutationen auf einem Definitionsbereich $\{1, \ldots, n\}$. Diese Anzahl ist $n!$ also für $n = 6$ ist das $6! = 1*2*3*4*5*6 = 720$. Dabei kommt es nur selten vor, dass für eine konkrete Permutation eine formelmäßige Beschreibung zu Verfügung ist. Hier im Fall von ∂_d ist das anders. Die Funktion als Formel $\partial_d(n) = l(n) + m_d * r(n)$ kommt zuerst und nachträglich stellt sie sich als Permutation heraus. Man hat hier nicht die Wahl, alle Permutationen auf $\{1, \ldots, d-1\}$ zu betrachten. Allerdings kann man alle diese Permutationen für alle $d \perp 10$ analysieren. Für den kopfrechnenden Menschen sind Kenntnisse dazu auch nützlich, denn man kann beim Kopfrechnen *zufällig* in eine Permutation hineinrutschen. Insbesondere kommt man dabei eventuell nicht zu einer Entscheidung der Teilbarkeit. Wenn man zum Beispiel mit dem Startwert $n = 3$ beginnt und fortlaufend ∂_7 darauf anwendet, landet man wegen $\partial_7(3) = -6$ in einem Permutationszyklus

$$3 \mapsto (-6 \; -9 \; -3 \; -15 \; -12 \; -18)$$

und alle Elemente in der runden Klammer werden unendlich zyklisch durchlaufen. Die 3 und alle Elemente in der runden Klammer sind nicht durch 7 teilbar.

Aussage 35 (Für $d \in D_1 \cup D_7$ ist ∂_d bijektiv)
Die Umkehrabbildung hat die Gestalt:

$$\text{Für } d \in D_1 \text{ ist: } \partial_d^{-1}(n) = -r_d(-10 * n) \quad \forall n \in \{-(d-1), \dots, -1\} \tag{90}$$

$$\text{Für } d \in D_7 \text{ ist: } \partial_d^{-1}(n) = \ -r_{3*d}(-10 * n) \text{ für } n \in \{-(3*d-1), \dots, -1\} \tag{91}$$

◇———◇

Beweis von Aussage 35.
Zuerst soll für $d \in D_1$ gezeigt werden, dass ∂_d die Menge $\{-(d-1), \dots, -1\}$ in sich abbildet. Dazu wird wieder gemäß der Division mit Rest in Aussage 1 der Ansatz

$$n = 10 * t + s \text{ mit } t \in \{-l(d), \dots, -1\}, s \in \{0, \dots, 9\}$$

gewählt und die Werte dort sind $\partial_d(10 * t + s = t - l(d) * s$. Zum Beispiel ist für $d = 61$ ist $t \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1\},\ s \in \{0, \dots, 9\}\}$.
Für $d \in D_1$ gilt $10 * l(d) + 1 = d$ also $10 * l(d) = (d-1)$ und $-10 * l(d) = -(d-1)$ Der minimale Wert von $\partial_d(10 * t + s) = -t - l(d) * s$ wird für das Paar $(t, s) = (-l(d), 9)$ angenommen und beträgt $-l(d) - l(d) * 9 = -10 * l(d) = d - 1$. Der maximale Wert wird für $(t, s) = (-1, 0)$ angenommen und beträgt -1. Als Resultat haben wir die erwartete Aussage:

$$-(d-1) \leqq \partial_d(10 * t + s) \leqq -1$$

Die bedeutet

$$\partial_d \colon \{-(d-1), \dots, -1\} \to \{-(d-1), \dots, -1\}$$

Jetzt ist die Injektivität von ∂_d nachzuweisen. Dazu seien zwei Paare
$(t, s),\ \ (t', s')$ aus $\{-l(d), \dots, -2, -1\} \times \{0, \dots, 9\}$ vorgegeben, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t \geqq t'$ angenommen werden kann. Damit analysieren wir unter der Annahme $\partial_d(10 * t + s) = \partial_d(10 * t' + s')$ die Differenz

$$\begin{aligned} \partial_d(10 * t + s) - \partial_d(10 * t' + s') &= t - l(d) * s - (t' - l(d) * s) \\ &= (t - t') - l(d) * (s - s') \\ (t - t') &= -l(d) * (s - s') \\ (t - t') &= l(d) * (s' - s) \end{aligned}$$

Wegen $t, t' \in \{-l(d), \dots, -1\},\ t \geqq t'$ ist dann $0 \leqq t - t' \leqq (l(d) - 1) < l(d)$ und es kann aus der letzte oberen Zeile geschlossen werden, dass $t - t'$ durch $l(d)$ teilbar ist. Wegen $(t - t') < l(d),\ l(d) > 0$ geht das nur, wenn $(t - t') = 0$ ist und daraus folgt auch $(s' - s) = 0$. Insgesamt haben wir $t = t',\ s = s'$ hergeleitet und damit ist gezeigt:

$$\partial_d \colon \{-(d-1), \dots, -1\} \to \{-(d-1), \dots, -1\} \text{ ist injektiv und auch bijektiv}$$

Dabei folgt **bijektiv** aus der Endlichkeit der betrachteten Menge $\{-(d-1), \dots, -1\}$. Jetzt muss noch eine entsprechende Umkehrformeln nachgewiesen werden. Für die wird wieder die obige Darstellung $n = 10*t+s$. mit $t \in \{-l(d), \dots, -1\},\ s \in \{0, \dots, 9\}$ gewählt: Da bereits nachgewiesen wurde, dass $\partial_d(n) = t - l(d) * s$ die gesamte Menge $\{-(d-1), \dots, -1\}$ durchläuft, kann man der Umkehrabbildung $n \mapsto -r_d(-10 * n)$ ihre Argumente in dieser Kodierung vorsetzen.

$$\begin{aligned}
-r_d\Big(-10 * (t - l(d) * s)\Big) &= -r_d\Big(-10 * t + 10 * l(d) * s\Big) \\
&= -r_d\left(10 * \Big(l(d) * (s + 1 - 1) - t\Big)\right) \\
&= -r_d\left(10 * \Big(l(d) * 1 + l(d) * (s - 1)\Big) - 10 * t\right) \\
&= -r_d\Big(10 * l(d) + 10 * l(d) * (s - 1) - 10 * t\Big) \\
&= -r_d\Big(10 * l(d) + 1 - 1 + 10 * l(d) * (s - 1) - 10 * t\Big) \\
&= -r_d\Big(d - 1 + 10 * l(d) * (s - 1) - 10 * t\Big) \text{ weil } 10 * l(d) + 1 = d \\
&\Downarrow \text{ nach dem Prinzip (21): Vielfache von } d \text{ weglassen} \\
-r_d\Big(-10 * (t - l(d) * s)\Big) &= -r_d\Big(10 * l(d) * (s - 1) - 10 * t - 1\Big)
\end{aligned}$$

Damit nicht immer $t < 0$ eine Rolle spielt, wird t durch $t' = -t$ substituiert und man erhält den Ausduck

$$-r_d\left(10 * \Big(l(d) * (s - 1) + t'\Big) - 1\right) \text{ mit } t' \in \{1, 2, \dots, l(d)\},\ s \in \{0, \dots, 9\}$$

Wegen $l(d) = (d - 1)/10$ hat dieser Ausdruck auch die Gestalt

$$\begin{aligned}
&-r_d\left((d - 1) * (s - 1) + 10 * t' - 1\right) \\
&-r_d\Big(d * s - d * 1 - 1 * s + 1 + 10 * t' - 1\Big) \\
&-r_d\Big(-1 * s + 1 + 10 * t' - 1\Big) \text{ nach dem Prinzip (21): Vielfache von } d \text{ weglassen} \\
&-r_d\Big(10 * t' - s\Big)
\end{aligned}$$

Hier kann wieder versuchen werden, den größten und den kleinsten Wert für die Argumente von r_d zu bestimmen: Der kleinste Wert ist 1 für $t' = 1,\ s = 9$. Der größte ist $10 * l(d) = (d - 1)$ und wird für $t' = l(d),\ s = 0$ angenommen. Daher gilt:

$$1 \leqq 10 * t' - s \leqq (d - 1)$$

und nach dem Prinzip:(24) kann der Restoperator r_d verschwinden. Es ergibt sich in Fortsetzung der Analysekette:

$$\begin{aligned}
-r_d\Big(-10 * (t - l(d) * s)\Big) &= -(10 * t' - s) \\
&= 10 * (-t') + s \\
&= 10 * t + s \text{ nach Rücksubstitution } t' \mapsto t
\end{aligned}$$

Jetzt ist das Ziel erreicht:

$$\mathbf{10} * \mathbf{t} + \mathbf{s} \xmapsto{\partial_d} \mathbf{t} - \mathbf{l}(\mathbf{d}) * \mathbf{s} \xmapsto{\partial_d^{-1}} \mathbf{10} * \mathbf{t} + \mathbf{s}$$

Das ist für $n = 10 * t + s$ genau die zu zeigende Behauptung:

$$\partial_d^{-1}(\partial_d(n)) = n \quad \forall n \in \{-(d-1), \ldots, -1\}$$

Damit ist (90) beweisen, und (91) folgt aus der Tatsache $d \in D_7 \Rightarrow 3 * d \in D_1$ $\square$

Zusammenfassende Beweiserläuterung.
Es wurden folgende Methoden verwendet:

- $l(d)$ zugunsten von d eleminieren: Das beruht auf $d = 10 * l(d) + 1$ für $d \in D_1$.
- Gemäß dem Prinzip (21) Vielfache von d soweit aus den Argumenten arg des Restoperators $r_d()$ entfernen, dass nur noch Werte $0 \leqq arg < d$ vorkommen.
- Restoperator $r_d()$ nach dem Prinzip (24) verschwinden lassen.

Bedeutung der Permutationen für Teilbarkeitsfragen

Es wurde bereits bemerkt, dass beim Kopfrechnen sehr oft die mehrfach verschachtelte Anwendung von ∂_d gängige Praxis ist. Damit gelangt der Anwender oft in den Wirkungsbereich einer dieser Permutationen und sollte daraus Teilbarkeitsschlüsse ziehen können. Zumindest für $d \in D_1 \cup D_9$ ist die Situation sehr klar:

Die Definitionsbereiche dieser Permutationen enthalten ausschließlich Elemente, die nicht durch d teilbar sind:

$$\{-(d-1), \ldots, -1\} \cup \{1, \ldots, (d-1)\} \subseteq \{n : n \in \mathbb{Z}, d \nmid n\}$$

Zumindest sollt ein Kopfrechner noch wissen, bezüglich welchen Divisors d er gerade agiert und daran sollte er erkennen, ob er sich im Definitionsbereich einer Permutation $\left(\partial_d^{\cdots}\cdots\right)$ mit seiner Kopfrechnung befindet. Dann kann er zumindest für $d \in D_1 \cup D_9$ die Teilbarkeitsfrage negativ entscheiden. Etwas schwieriger wird es für $d \in D_3 \cup D_7$. Dann muss beachtet werden, dass gemäß dem Prinzip $\partial_d = \partial_{3 \cdot d}$ der Definitionsbereich etwa um den Faktor 3 vergrößert ist. Außerdem enthält er dann auch Elemente, für die Teilbarkeit bezüglich d vorliegt- nicht aber für $3 \cdot d$. Das wurde bereits in der Einleitung zum Thema **Fixpunkte**für $d = 43$ vorgeführt:

$$\mathcal{F}_{43} = \{43, 86, 129\} \subseteq \{n : 43 | d\}, \quad \text{aber } 129 \nmid 43, 129 \nmid 86 \text{ für } d = 129 = 3 \cdot 43$$

Die verschachtellte Anwendung von ∂_d führt bei festem Startwert n zur Folge der Iterationen: $\left(\partial_d^i(n)\right)_{i=0,1,2,\ldots}$. Das ist Motiv genug das Verhalten der Iterationen hinsichtlich ihrer Beziehungen zu Permutationen und Fixpunkten näher zu analysieren.

Permutationen,Iterationen Fixpunkte und Teilbarkeit

In diesem Abschnitt wird in Bezug auf Iterationen folgende Situation betrachtet:

Der Startwert n wird positiv relativ groß gewählt, bzw. negativ relativ klein - zumindest aus Sicht des kopfrechnenden Anwenders:

$$n \lll \quad -d \quad \| \quad d \quad \lll n$$

Denn aus Sicht der Teilbarkeit wird man solche Werte betrachte, weil dafür die Teilbarkeit nicht offensichtlich ist und die Anwendung von ∂_d Vorteile bringt. In einer solchen Situation sollen Tendenzen und Grenzwerte der Folge $\left(\partial_d^i(n)\right)_{i=0,1,2,\ldots}$ analysiert werden.

Permutationszyklen

Definition 36 (Permutationszyklus)
Sei π eine Permutation mit Definitionsbereich $\{1, \ldots, n\}$. Ein Permutationszyklus mit Notation

$$(m_1\ m_2\ \ldots m_k)$$

ist eine auf einer Teilmenge $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ paarweise verschiedener Elemente $m_i \in \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ definierte Permutation c, deren Werte auf der Teilmenge mit den Werten von π übereinstimmen und für die gilt:

$$c(m_1) = \pi(m_1) = m_2, \ldots, c(m_{k-1}) = \pi(m_{k-1}) = m_k, c(m_k) = \pi(m_k) = m_1$$

In der üblichen Bezeichnungsweise für Permutationen würde das so aussehen:

$$c = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & \ldots & m_{k-1} & m_k \\ m_2 & m_3 & \ldots & m_k & m_1 \end{pmatrix}$$

Die Elemente von $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ werden in dieser Reihenfolge kreisförmig aufeinander abgebildet. Vom Definitionsbereich des Zyklus c wird nicht verlangt, dass dieser ein ganzahliges Intervall ist. Ebenso wird dies nicht von einer beliebigen Permutation π verlangt. Dies ist nur manchmal eine bezeichnungstechnische Bequemlichkeit. Die Elemente eines Zyklus

$$c = (m_1\ m_2\ \ldots m_k)$$

werden mit Leerzeichen getrennt notiert, also nicht mit Kommata dazwischen. Die Beziehung zur ursprünglichen Permutation π wird manchmal verbal dadurch zum Ausdruck gebracht, dass man sagt c wird (ist) von π erzeugt. Falls keine ursprüngliche Permutation als Erzeuger gewählt wird, kann man auch willkürlich einen Zyklus

$$c = (m_1\ m_2\ \ldots m_k)$$

hinschreiben (definieren). Dies tun wir aber nicht für unsere durch ∂_d erzeugten Zyklen.
◊ ◊

Man kann sich leicht überlegen, dass jede Permutation auf einer endlichen Menge in verschiedene Zyklen zerfällt, wobei der Fall, dass nur ein Zyklus entsteht, vorkommen kann. Beginnt man nämlich mit einem $m_1 \in \{1, \ldots, n\}$ und bildet fortlaufend $\pi(m_1) = m_2 = \pi(\pi(m_1)) = m_3 \ldots$, so muss nach n oder weniger Schritte wieder m_1 entstehen, weil die Bilder $\pi(m)$ nicht aus ihrem eigenen Definitionsbereich heraus laufen können. Auf diese Weise erhält man einen ersten Zyklus. Wenn die Elemente dieses Zyklus den Definitionsbereich $\{1, \ldots, n\}$ noch nicht vollständig ausgeschöpft haben, kann man aus der Restmenge ein neues Element m wählen und damit einen neuen Zyklus beginnen. Es kann auch vorkommen, dass ein solcher Zyklus nur das einzige Element m enthält. Dann ist ein Zyklus der Länge 1 entstanden. Ansonsten ist k die Länge des Zyklus. Zyklen werden also immer durch verschachtelte Aufrufe einer Permutation erzeugt dar. Es wird solange verschachtelt aufgerufen, bis das Startelement wieder auftaucht. Den so erzeugten Zyklus bezeichnen wir mit

Definition 37 (Von einem Element erzeugter Zyklus)

$$\langle m\rangle_\pi =_{\mathtt{def}} \langle m\rangle = (m \;\; \pi(m) \;\; \pi(\pi(m)) \;\ldots\; \pi^{-1}(m)\;)$$

Dabei kann der untere Index π weggelassen werden, wenn im Kontext klar ist, welche Permutation π gemeint ist.

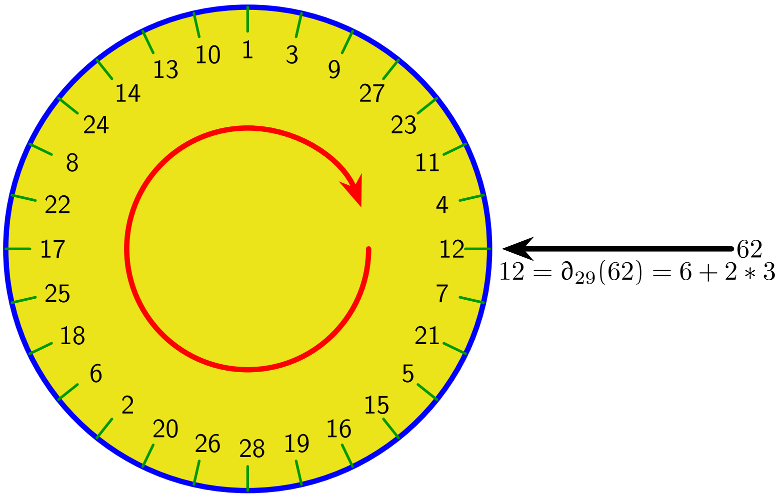
◇———◇

Bezüglich einer vorgegebenen Permutation π betrachten wir ausschließlich maximale Zyklen. Das sind solche, die sich von selbst schließen, nachdem mit fortlaufend iterierten Anwendungen von π das inverse des Startelements erstmals erreicht wird. Insbesondere betrachten wir keine Transpositionen - das sind Zyklen der Länge 2 - soweit diese sich nicht durch Anwendung von π selbst schließen, wie etwa bei ∂_{11}. Die Zyklus- Notation $\langle m\rangle$ ist nicht umkehrbar eindeutig, den jedes Element e, das im Zyklus vorkommt, kann als Startelement gewählt werden. Für $l \neq m$ muss daher nicht $\langle l\rangle \neq \langle m\rangle$ gelten. Für die Permutationen ∂_d mit $d \in D_9$ können wir zum Beispiel die Iterationen $\partial_d^i(q)$ verwenden, um für $q \in \{1, \ldots, (d-1)\}$ zu schreiben:

$$\langle q\rangle_{\partial_d} =_{\mathtt{def}} (\; q \; \partial_d^1(q) \; \partial_d^2(q) \;\ldots\; \partial_d^{-1}(q)\;)$$

Das ist der von q erzeugte Zyklus von ∂_d. Die Elemente von $\langle q\rangle$ durchlaufen beginnend bei q ein Anfangsstück der unendlichen Folge $\left(\partial_d^i(q)\right)_{i\in\mathbb{N}_0}$ und die gesamte Folge durchläuft diesen Zyklus unendlich oft kreisförmig. Es ist noch $\partial_d^0(q) = q$ gemäß Definition 15 zu beachten. Der Zyklus endet in dieser Folge, wenn erstmals das Startelement $\partial_d^{-1}(q)$ wieder auftaucht. Dieses wird aber am Ende nicht nochmal hingeschrieben. Ein Beispiel soll für $d = 29$ gezeigt werden.

Grafik 38 (Ein Zyklus der Länge 28 in der Permutation ∂_{29})



Die Grafik zeigt auch, dass ∂_{29} die $62 > 29$ auf den Wert 12 im Zyklus abbildet, wobei $m_{29} = 3$ ist.

◇ ◇

Hier ist es so, dass der gesamte Definitionsbereich $\{1, \ldots, 28\}$ von $\left(\partial_{29}{}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}\right)$ genau durch einen Zyklus erfasst wird.

Im Folgenden sollen allgemeine qualitative Aussagen formuliert und bewiesen werden, die die verschachtelten Aufrufe ∂_d^i der partiellen Ziffernsummen betreffen. Dabei soll auch der Zusammenhang zur entsprechenden Teilbarkeitsfrage $d|n$? analysiert werden.

Tendenzen von Iterationen

Satz 39 (Verhalten der Iterationen für $d \in D_1 \cup D_9$)
Für $d \in D_1$ sind die Zahlen in $\{-d, 0\}$ Fixpunkte und es gilt:

$$\partial_d^i(-k * d) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} -d \qquad \text{monoton wachsend } \forall k \in \mathbb{N} \tag{92}$$

$$\partial_d^i(k * d) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{monoton fallend } \forall k \in \mathbb{N} \tag{93}$$

$$\partial_d^i(n) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_d \cdot^{\cdot^{\cdot}}\right) \qquad \text{monoton wachsend } \forall n \in \mathbb{Z}^-,\ d \nmid n \tag{94}$$

$$\partial_d^i(n) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_d \cdot^{\cdot^{\cdot}}\right) \qquad \text{monoton fallend } \forall n \in \mathbb{N},\ d \nmid n \tag{95}$$

Für $d \in D_9$ sind die Zahlen in $\{0, d\}$ Fixpunkte und es gilt:

$$\partial_d^i(-k * d) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{monoton wachsend } \forall k \in \mathbb{N} \tag{96}$$

$$\partial_d^i(k * d) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} d \qquad \text{monoton fallend } \forall k \in \mathbb{N} \tag{97}$$

$$\partial_d^i(n) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_d \cdot^{\cdot^{\cdot}}\right) \qquad \text{monoton wachsend } \forall n \in \mathbb{Z}^-,\ d \nmid n \tag{98}$$

$$\partial_d^i(n) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_d \cdot^{\cdot^{\cdot}}\right) \qquad \text{monoton fallend } \forall n \in \mathbb{N},\ n > d,\ d \nmid n \tag{99}$$

Dabei sei $\mathbb{Z}^-$ die Menge der negativen ganzen Zahlen (ohne die 0). Wenn als Grenzwert eine Permutation der Form $\left(\partial_d \cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ angegeben ist, ist das eher im Sinne eines Grenzobjekts gemeint, denn es ist kein üblicher Grenzwert in $\mathbb{R}$. Trotzdem soll die symbolische *Grenzbezeichnung* $\underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_d \cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ beibehalten werden. Die Monotonie-Aussagen gelten nur bis zum Eintritt in die Permutation $\left(\partial_d \cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$. Es wird ersichtlich, dass immer ein Grenzwertverhalten in der Form $\underset{i\to\infty}{\longrightarrow}$ eintritt. Entweder ist der Grenzwert ein Zyklus - also kein Grenzwert im Sinne der Analysis. Oder der Grenzwert ist ein Fixpunkt und das ist ein Grenzwert im Sinne der Analysis, wenn auch ein sehr spezieller Fall. Die Werte der Iterationen wandern nie ins *Unendliche*, weder ins positive noch ins negative *Unendliche*.

Alles drängt ins Zentrum - Das ist die zentrale qualitative Aussage.

Rechnet man die Fixpunkte zu den Zyklen, so kann man sagen:

Die Iterationen $\partial_d^i(n)$ laufen immer in einen Zyklus hinein.

Das ist der durch n bestimmte *Eigenzyklus*.
Wenn beim Kopfrechnen die Iterationen in einen Permutationszyklus einlaufen, muss man sich daran erinnern, dass dieser ungünstige Fall eintreten kann. Der Anwender ist aber dann im Fall *Nichtteilbarkeit* gelandet. Zumindest in $D_1 \cup D_9$ ist das klar. Die Formulierungen bringen durch das jeweilige Grenzobjekt $\left(\partial_d \cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ noch nicht richtig zum Ausdruck, dass eigentlich ein Zyklus das Grenzobjekt = Grenz-Zyklus ist. Allerdings kann man selten einen konkreten Hinweis auf den Grenz-Zyklus geben.

♢————————————————————♢

Die Aussagen von Satz 39 gelten etwas angepasst auch in $D_3 \cup D_7$, wenn zuvor der Übergang $d \curvearrowright d' = 3 * d$ durchgeführt wird. Auf eine genaue Formulierung wird hier verzichtet. Die Aussagen dieses Satzes 39 zeigen aber auf jeden Fall, dass man sich bei der Anwendung der iterierten

partiellen Ziffernsummen hinsichtlich der Entscheidung über die Teilbarkeit eines Startwertes verbessert. Die Verbesserung tritt dadurch ein, dass sich die Folge der Zwischenergebnisse immer mehr der Umgebung von $0 \in \mathbb{Z}$ nähert, wobei die Anzahl der Ziffern kleiner wird.
Vor dem Beweis kommen zunächst zwei Hilfsaussagen:

Aussage 40 (Ungleichungen für $n, \partial_d(n)$ für $d \in D_9$)

$$n > \partial_d(n) \quad \forall n > d \tag{100}$$
$$n < \partial_d(n) \quad \forall n < 0 \tag{101}$$

◇————————————————————————————————◇

Beweis von Aussage 40.
Zu(100):
Ausgehend vom Fixpunktkriterium 25 und den dort formulierten Gleichungen (61),(62) wird wie folgt argumentiert:

$$n - \partial_d(n) = 9 * l(n) - l(d) * r(n) \leftarrow\text{--} \text{ das ist (61)}$$
$$10 * (n - \partial_d(n)) = 9 * n - d * r(n) \leftarrow\text{--} \text{ das ist (62)}$$

Setzt man in der letzten Zeile rechts den größten Wert $r(n) = 9$ ein, so folgt wegen $9 \geqq r(n)$:

$$9 * n > d * 9 \Rightarrow 9 * n > d * r(n) \Rightarrow 10 * (n - \partial_d(n)) = 9 * n - d * r(n) > 0$$
$$n > d \Rightarrow n - \partial_d(n) > 0$$
$$n > d \Rightarrow n - \partial_d(n) > 0 \Rightarrow n > \partial_d(n)$$

Damit ist (100) gezeigt.
Zu (101):

$$n < l(n) = \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \leqq \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor + m_d * r(n) \quad \forall n < 0$$

□

Aussage 41 (Ungleichungen für $n, \partial_d(n)$ für $d \in D_1$)

$$\partial_d(n) < n \quad \forall n > 0 \tag{102}$$
$$n < \partial_d(n) \quad \forall n < -d \tag{103}$$

◇————————————————————————————————◇

Beweis von Aussage 41.
Zu (102):

$$
\begin{aligned}
\partial_d(n) &= l(n) - l(d) * r(n) \\
&= \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor - l(d) * r(n) \\
&\leqq \frac{n}{10} - l(d) * r(n) && \text{weil } \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \leqq \frac{n}{10} \\
&< 10 * \frac{n}{10} - l(d) * r(n) && \text{weil } \frac{n}{10} < 10 * \frac{n}{10} \\
&= n - l(d) * r(n) && \text{weil } 10 * \frac{n}{10} = n \\
\partial_d(n) &< n && \text{weil } -(l(d) * r(n)) < 0
\end{aligned}
$$

Zu (103):
Sei $d \in D_1,\ n < -d, n = -t * 10 + r'$ mit $-t < -l(d),\ r \in \{0, \dots, 9\}$:
1.Fall $r(n) = r' = 0$: Dann ist gemäß (12) $n = -t * 10 < t = \partial_d(n)$, womit die behauptete echte Ungleichung $n < \partial_d(n)$ sicher erfüllt ist.
2. Fall $r(n) = r(-t * 10 + r') = (10 - r') > 0$:
Die Voraussetzung $n < -d$ notieren wir in der äquivalenten Form $-\mathbf{d} > \mathbf{n}$. Gemäß (12) ist dann $l(n) = l(-t * 10 + r') = -(t + 1)$. Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\partial_d(n) &= \partial_d(-t * 10 + r') \\
&= -(t + 1) - l(d) * (10 - r') \text{ gemäß (11), (12)} \\
&= -(t + 1) - l(d) * 10 + l(d) * r' \\
&\geqq -(t + 1) - l(d) * 10 + l(d) * 1 \leftarrow\text{--}\ \text{ für } r' \text{ den kleinsten Wert 1 eingesetzt} \\
&= -(t + 1) - (d - 1) + l(d) \text{ weil } l(d) * 10 = d - 1 \\
&= -t - d + l(d) \\
&= -t + l(d) - d \\
&= (l(d) - t) - d \\
&> -d \text{ weil } (l(d) - t) > 0 \\
\partial_d(n) &> n \text{ nach obiger Voraussetzung } -\mathbf{d} > \mathbf{n}
\end{aligned}
$$

$\square$

Beweis von Satz 39.
Begonnen wird mit dem Fall $\mathtt{d} \in D_9$:
Zu (97): $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(\mathtt{k} * \mathtt{d}) \underset{\mathtt{i}\to\infty}{\longrightarrow} \mathtt{d}$ monoton fallend $\forall \mathtt{k} \in \mathbb{N} \dashleftarrow$ Das ist(97)

Aus (100) schließen wir, dass die Folge $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(\mathtt{k} * \mathtt{d})$ solange streng fällt, wie nicht $\mathtt{d}$ erreicht wird. Dieser Wert muss aber erreicht werden, denn im Bereich $\mathbb{N}$ gibt es keine unendlichen streng fallenden Folgen. Damit ist (97) gezeigt.

Zu (96): $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(-\mathtt{k} * \mathtt{d}) \underset{\mathtt{i}\to\infty}{\longrightarrow} 0$ monoton wachsend $\forall \mathtt{k} \in \mathbb{N} \dashleftarrow$ Das ist(96)

Die Folge $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(-\mathtt{k} * \mathtt{d})$ ist in Abhängigkeit von $\mathtt{i}$ streng monoton wachsend, solange die Werte < 0 bleiben. Das kann aber nicht für alle $\mathtt{i}$ gelten, weil für nach oben beschränkten Folgen dies nicht für unendlich viele gelten kann. Daher muss diese Folge letztendlich den Fixpunkt 0 erreichen, weil alle Folgeglieder nach dem Hauptsatz 8 Vielfache von $\mathtt{d}$ sind.
Zu (98): $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(\mathtt{n}) \underset{\mathtt{i}\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_{\mathtt{d}}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ monoton wachsend $\forall \mathtt{n} \in \mathbb{Z}^-,\ \mathtt{d} \nmid \mathtt{n} \dashleftarrow$ Das ist (98)

Da die Folge $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(\mathtt{n})$ mit einem Wert startet, der kein Vielfaches von $\mathtt{d}$ ist, bleibt die Folge nach dem Hauptsatz 8 immer im Bereich der Nichtvielfachen von $\mathtt{d}$ und ist monoton wachsend solange die Werte < 0 bleiben. Daher muss die Folge irgendwann positive Werte annehmen. Es soll jetzt zusätzlich gezeigt werden, dass die Folge in den Definitionsbereich $\{1, \ldots, \mathtt{d} - 1\}$ der Permutation $\left(\partial_{\mathtt{d}}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ eintritt. Für den ersten iterierten Wert $\mathtt{n}'$, der positiv wird, kann man auch $\mathtt{n}' \in \{1, \ldots, \mathtt{d} - 1\}$ mit folgender Überlegung zeigen: Offenbar wird für $\mathtt{n} < 0$ der größte Wert von $\partial_{\mathtt{d}}(\mathtt{n})$ für $\mathtt{n} = -1$ angenommen: $\partial_{\mathtt{d}}(\mathbf{-1}) = \mathbf{-1 + m_d * 9 = -1 + 10 * m_d - m_d = d - m_d < d}$, denn $\mathtt{l}(\mathtt{n})$ ist monoton wachsend und die jeweiligen maximalen Werte für Argumente in $\{10 * \mathtt{l}(\mathtt{n}), \ldots, 10 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) + 9\}$ nämlich $\partial_{\mathtt{d}}(10 * \mathtt{l}(\mathtt{n}) + 9)$ sind ebenfalls monoton wachsend.
Daher laufen für $\mathtt{n} < 0$ die Iterationen $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(\mathtt{n})$ direkt in das Permutationsintervall $\{1, \ldots, \mathtt{d} - 1\}$ hinein und verbleiben dann für wachsendes $\mathtt{i}$ ständig dort.
Zu (99) : $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(\mathtt{n}) \underset{\mathtt{i}\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_{\mathtt{d}}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ monoton fallend $\forall \mathtt{n} \in \mathbb{N},\ \mathtt{n} > \mathtt{d},\ \mathtt{d} \nmid \mathtt{n} \dashleftarrow$ Das ist (99)

Für die in (99) angegebenen Startwerte $\mathtt{n}$ ist nach (100) die Folge $\left(\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(\mathtt{n})\right)_{\mathtt{i}=0,1,2,\ldots}$ solange echt monoton fallend, solange deren Glieder $> \mathtt{d}$ bleiben. Da es in $\mathbb{N}$ keine unendlichen echt fallenden Folgen gibt, muss es einen Index $\mathtt{i}_{\mathtt{n}} > 0$ geben, für den $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}_{\mathtt{n}}}(\mathtt{n}) \leqq \mathtt{d}$ wird.Für diesen gilt aber auch $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}_{\mathtt{n}}}(\mathtt{n}) < \mathtt{d}$, denn der Wert $\mathtt{d}$ ist wegen der Voraussetzung $\mathtt{d} \nmid \mathtt{n}$ nach dem Hauptsatz 8 ausgeschlossen. Da mit einem Startwert $\mathtt{n} > \mathtt{d} > 0$ begonnen wurde, sind die Glieder der Folge $\left(\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(\mathtt{n})\right)_{\mathtt{i}=0,1,2,\ldots}$ auch alle > 0, denn der Wert 0 kann wegen $\mathtt{d}|0,\ \mathtt{d} \nmid \mathtt{n}$ nach dem Hauptsatz 8 nicht vorkommen. Daher befinden sich die Folgeglieder für $\mathtt{i} \geqq \mathtt{i}_{\mathtt{n}}$ alle im Definitionsgebiet $\{1, \ldots, \mathtt{d} - 1\}$ der Permutation $\left(\partial_{\mathtt{d}}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ und verbleiben dort für immer. Damit sind alle Aussagen für $\mathtt{d} \in D_9$ verifiziert.

Nun zu den Aussagen für $\mathtt{d} \in D_1$:
Zu (92): $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(-\mathtt{k} * \mathtt{d}) \underset{\mathtt{i}\to\infty}{\longrightarrow} -\mathtt{d}$ monoton wachsend $\forall \mathtt{k} \in \mathbb{N} \dashleftarrow$ Das ist (92)

Nach (103) ist die Folge $\left(\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(-\mathtt{k} * \mathtt{d})\right)_{\mathtt{n}=0,1,2,\ldots}$ streng monoton wachsend und nach oben durch 0 beschränkt. Da es in $\mathbb{Z}$ keine derartigen unendlichen Folgen gibt, muss die Folge ab einem Wert $\mathtt{k}_{\mathtt{n}}$ konstant $= 0$ sein, da das ein Fixpunkt ist.
Zu (93): $\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(\mathtt{k} * \mathtt{d}) \underset{\mathtt{i}\to\infty}{\longrightarrow} 0$ monoton fallend $\forall \mathtt{k} \in \mathbb{N} \dashleftarrow$ Das ist(93)

Nach (102) ist die Folge $\left(\partial_{\mathtt{d}}^{\mathtt{i}}(\mathtt{k} * \mathtt{d})\right)_{\mathtt{k}=0,1,2,\ldots}$ streng monoton fallend und alle Folgeglieder sind $> \mathtt{d}$.Da es keine unendlichen Folgen dieser Art gibt, muss ab einem $\mathtt{k}_{\mathtt{n}}$ der Wert $\mathtt{d}$ angenommen werden. Da dies ein Fixpunkt ist, verbleibt die Folge für immer dort. Das ist gerade die Grenzwertaussage von (93).

<u>Zu (94):</u>$\partial_d^i(n) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_d\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ monoton wachsend $\forall n \in \mathbb{Z}^-,\ d \nmid n \dashleftarrow$ Das ist(94)

Sei $n < -d$. Als Folge von (102) ist die Folge $\left(\partial_d^i(n)\right)_{i=0,1,2,\ldots}$ streng monoton wachsend, solange die Glieder $< -d$ bleiben. Hier kommt wieder der übliche Schluss, dass die Folge nicht immer unterhalb von $-d$ bleiben kann. Es muss daher einen Index i_n geben, für den $-d \leqq \partial_d^{i_n}(n)$ ist. Weil $d \nmid n$ vorausgesetzt wurde, gilt das nach dem Hauptsatz 8 auch für alle Folgeglieder. Daher kann der Fall $-d = \partial_d^{i_n}(n)$ nicht eintreten. Das führt zu $-d < \partial_d^{i_n}(n)$. Da alle Folgeglieder negativ sind, gilt auch $\partial_d^{i_n}(n) < 0$. Damit ist die Folge im Definitionsbereich von $\left(\partial_d\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ angekommen,was gerade die Behauptung von (94) ist.

<u>Zu (95):</u>$\partial_d^i(n) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_d\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ monoton fallend $\forall n \in \mathbb{N},\ d \nmid n \dashleftarrow$ Das ist (95)

Nach (102) ist die Folge $\left(\partial_d^i(n)\right)_{i=0,1,2,\ldots}$ streng monoton fallend:

$$\text{Solange } \partial_d^i(n) > 0 \text{ bleibt gilt: } < \cdots < \partial_d^3(n) < \partial_d^2(n) < \partial_d^1(n) < n$$

Da es in $\mathbb{N}$ keine unendlichen echt fallenden Folgen gibt, erreicht die Folge für irgend einen Index i_n einen negativen Wert. Hier muss wieder gezeigt werden, dass

$$-(d-1) \leqq \partial_d^{i_n}(n) \leqq -1$$

, denn es könnte passieren, dass $\partial_d^{i_n}(n)$ gleich im Bereich $< -d$ landet. Der Fall $\partial_d^{i_n}(n) = -d$ kann wegen der Voraussetzung $d \nmid n$ nicht eintreten. Für $d \in D_1$ müsste gezeigt werden:

$$n > 0 \Rightarrow \partial_d(n) > -d \tag{104}$$

Die folgende Tabelle zeigt für $n \in \mathbb{N}$ die Zuordnung $n \mapsto \partial_d(n)$ in zwei Zeilen:

Tabelle 42

n	1	2	$\cdots$	9	10	11	12	$\cdots$	19	20	$\cdots$
$\partial_d(n)$	$-l(d)$	$-2*l(d)$	$\cdots$	$-9*l(d)$	1	$1-l(d)$	$1-2*l(d)$	$\cdots$	$1-9*l(d)$	2	$\cdots$

Unter den ersten 9 Einträgen in der unteren Zeile ist der Wert $-9*l(d)$ der kleinste. Die Werte der Zuordnungen $10 \mapsto 1,\ 20 \mapsto 2,\ \cdots$ liegen alle in $\mathbb{N}$, sind also > 0. Die 9 nächsten Werte

$$1-l(d),\ 1-2*l(d),\ \cdots 1-9*l(d)$$

sind jeweils um 1 größer als ein entsprechender Wert der ersten 9 Einträge (ohne $1-\cdots$), und dieses Muster setzt sich nach rechts über ganz $\mathbb{N}$ fort, wobei der Zuwachs $1-\cdots$ selbst immer größer wird.

$$1-\cdots \curvearrowright 2-\cdots \curvearrowright 3-\cdots \curvearrowright \ldots$$

Daher ist $-l(d)*9$ das globale Minimum:

$$-9*l(d) = \min\{\partial_d(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

Wegen $10*l(d) = d-1$ ist $-(d-1) = -10*l(d) < -9*l(d))$. Damit ist die bisher fehlende Beziehung(104) ebenfalls klar. Der letztendliche Schluss für die Folge $\left(\partial_d^i(n)\right)_{i=0,1,2,\ldots}$ geht so: Solange die Folgeglieder > 0 sind, fallen sie echt. Da alle Glieder $\geqq -(d-1)$ sind, können die Folgeglieder nicht unendlich oft echt fallen. Daher erreicht ein Folgeglied einen negativen Wert mit $-(d-1) \leqq \partial_d^{i_n}(n) \leqq -1$. Ab diesem Index i_n befindet sich die Folge im Definitionsbereich $\{-(d-1),\dots,-1\}$ der Permutation $\left(\partial_d \cdot\overset{\dots}{}\cdot\cdot\right)$ und verbleibt ewig dort. Auch das fallende Monotonieverhalten geht in $\{-(d-1),\dots,-1\}$ verloren. Wegen $d \nmid n$ gilt diese Nichteilbarkeit nach Satz 8 auch für alle Folgeglieder $d \nmid \partial_d^i(n)$. Daher kommt wegen $d|0$ der Wert 0 auch nicht unter den Folgegliedern vor. Erwähnenswert ist noch

$$\text{Für } n > 0,\ d \nmid n \text{ ist die Folge nach unten beschränkt } -(d-1) \leqq \partial_d^i(n) \quad \forall i \in \mathbb{N}_0$$

Selbstverständlich ist sie dann auch - da sie bei n startet - nach oben beschränkt und enthält nur endlich viele Werte, was aus dem Eintritt in die Permutation $\left(\partial_d \cdot\overset{\dots}{}\cdot\cdot\right)$ resultiert. □

Es sei hier darauf hingewiesen, dass zwischen dem Verhalten der Iterationen $\partial_d^i(n)$ bei festem n als Funktion von i und dem Verhalten von $\partial_d(n)$ als Funktion von n ein grundlegender Unterschied besteht. Die Iterationen sind mehrfach verschachtelte Aufrufe von ∂_d auf bereits zuvor in der Verschachtelung erreichte Ergebnisse. Demgegenüber ist das Verhalten von $\partial_d(n)$ bei variierendem n einfach das Verhalten einer gewöhnlichen Funktion. Oben im Satz 39 sind immer die Iterationen betroffen.

Es soll jetzt doch ein Beispiel für einen Grenz-Zyklus aufgeschrieben werden: Dazu wird $d = 11$ gewählt, wobei $m_{11} = -1$ ist. Die vollständige Zyklendarstellung dieser Permutation ist:

$$\left(\partial_{11} \cdot\overset{\dots}{}\cdot\cdot\right) = (\,-10\ \ -1\,)\,(\,-9\ \ -2\,)\,(\,-8\ \ -3\,)\,(\,-7\ \ -4\,)\,(\,-6\ \ -5\,)$$

Das sind 5 Zyklen der Länge 2, was leicht im Kopf unter Berücksichtigung von (11), (12) nachgerechnet werden kann. Die Permutation ist **selbstinvers**. Die Normaldarstellung ist:

$$\left(\partial_{11} \cdot\overset{\dots}{}\cdot\cdot\right) = \begin{pmatrix} -10 & -9 & -8 & -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 & -8 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

Wenn zum Beispiel der Startwert $n = 11217$ für die Folge $\partial_{11}^i(n)$ gewählt wird, ergibt sich

$$\text{Für } i = 1,2,\dots\ 11217 \overset{1}{\curvearrowright} 1114 \overset{2}{\curvearrowright} 107 \overset{3}{\curvearrowright} 3 \overset{4}{\curvearrowright} -3 \overset{5}{\curvearrowright} -8 \overset{6}{\curvearrowright} -3 \overset{7}{\curvearrowright} -8 \overset{i}{\curvearrowright} \dots$$

Die Folge der Werte ist endlich: $\partial_{11}^i(11217) \in \{11217, 1114, 3, -3, 8\} \quad \forall i = 0,1,2,\dots$
Die Folge bewegt sich letztendlich für immer im 2-er Zyklus $(-3\ \ -8)$.
Dieser wird auch **Eigenzyklus von n = 11217** genannt. Er ist in folgender Weise durch den Startwert $n = 11217$ vorher bestimmt:

$$r_{11}(11217) = 8,\ 8 \equiv -3 \pmod{11} \text{ weil } -3 = 8 - 11$$

Das bedeutet: Das erste Element $-\mathbf{3}$ des Grenz-Zyklus, der durch die Folge $\left(\partial_{11}^i(n)\right)_{i=0,1,2,\dots}$ erreicht wird, ist durch die Restklasse **11217** $\equiv$ (mod **11**) vorher bestimmt. Allerdings liegt das andere Element $-\mathbf{8}$ nicht in der gleichen Restklasse. Auf diesen Umstand wurde bereits in der Bemerkung 10 unmittelbar nach dem Beweis von Hauptsatz 8 verwiesen.
Eventuell kann man erwarten, dass bei einem anderen Startwert n' mit gleichem Rest $8 = r_{11}(n')$ die Folge im gleichen Grenz-Zyklus $(-3\ -8)$ ankommt. Das Grenzverhalten für den Divisor $d = 11$ und den Startwert $n = 11217$ kann daher konkreter durch

$$\partial_{11}^i(11217) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} (-3\ \ -8)$$

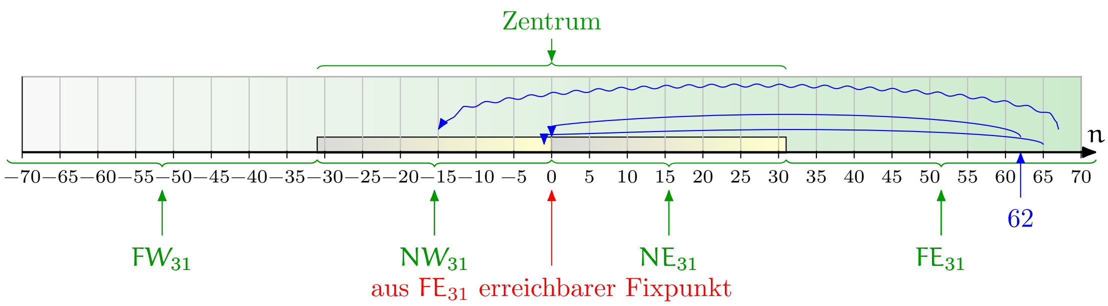
ausgedrückt werden. Da ein Zyklus kein irgend wie zu bestimmendes Startelement hat - wegen der Kreisförmigkeit der Angelegenheit - können Zyklen auch mit beliebigem Startelement angegeben werden, solange die ursprünglich notierten kreisförmigen Übergänge dabei erhalten bleiben:

$$\partial^{i}_{11}(11217) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} (-8\ \ -3)$$

wäre auch möglich und gültig.
Die Angabe eines $\mathsf{Grenz\text{-}Zyklus}$ ist daher der ganz allemeinen Angabe der $\mathsf{Grenz\text{-}Permutation}$ vorzuziehen. Allerdings wird so etwas nur in konkreten Beispielen erreichbar sein.

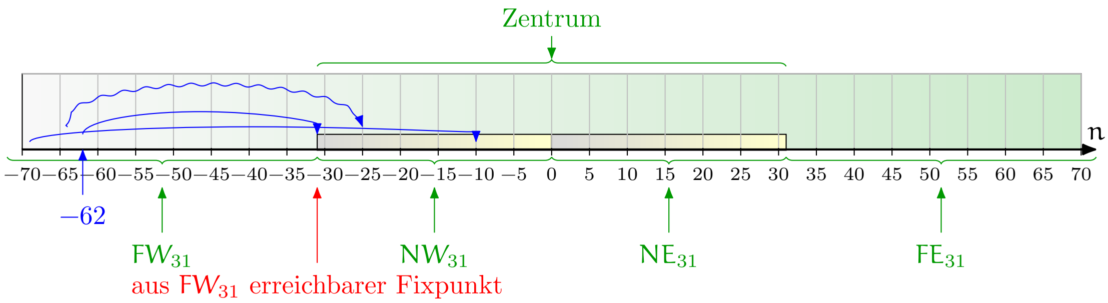
Für die folgenden Grafiken sei eine geografisch motivierte Sprechweisen für die Lage Elemente auf der Zahlengeraden $\mathbb{Z}$ gewählt: Das Zentrum ist die direkte Umgebung von $0 \in \mathbb{Z}$. Der ferne Westen steht für sehr kleine negative Werte $n \lll 0$. Der mittlere Westen ist ein Intervall $\{-(d-1), \ldots, -1\}$. Der mittlere Osten ist ein Intervall $\{1, \ldots, d-1\}$ und der ferne Osten ist ein Bereich sehr großer positiver Werte $0 \lll n$.

Grafik 43 (Verhalten von $\partial^{i}_{31}(n)$ für $i = 0, 1, \ldots$ $n \in \mathsf{FE}_{31}$ fallend aus dem fernen Osten)



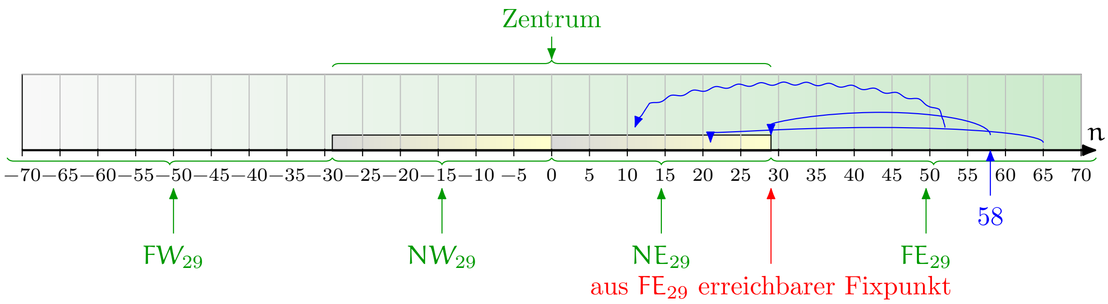
Es ist noch zu bemerken, dass $\{-30, \ldots, -1\} \subset \mathsf{NW}_{31}$ der Wirkungsbereich der Permutation $\left(\partial_{31}\overset{\cdots}{\cdot\cdot}\right)$ ist. Falls $n \in \mathsf{FE}_{31}$, $31 \nmid n$ ist, landet letztlich $\partial^{i}_{31}(n)$ immer dort: $\partial^{i}_{31}(n) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_{31}\overset{\cdots}{\cdot\cdot}\right)$.
Der ferne Westen ist aus dem Osten nicht erreichbar.

Grafik 44 (Verhalten von $\partial^{i}_{31}(n)$ für $i = 0, 1, \ldots n \in \mathsf{FW}_{31}$ wachsend aus dem fernen Westen)



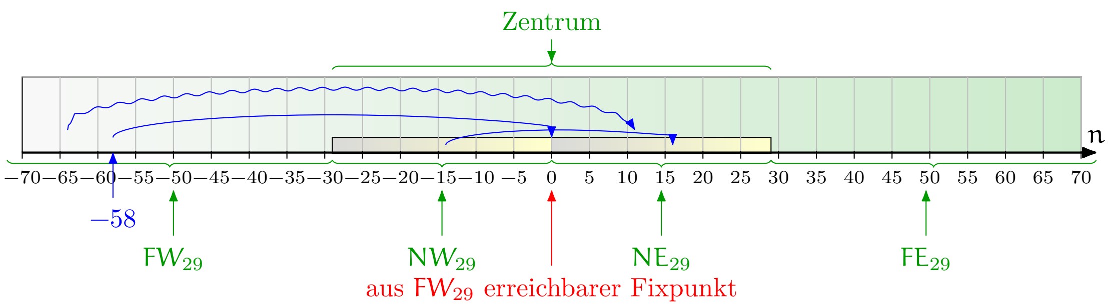
Bemerkenswert ist noch, dass aus Fernwest kommend niemals positive Werte erreicht werden. Der gesamte Osten ist aus dem Westen nicht erreichbar. Entweder es wird der Fixpunkt -31 erreicht oder $\partial^{i}_{31}(n) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_{31}\overset{\cdots}{\cdot\cdot}\right)$.

Grafik 45 (Verhalten von $\partial_{29}^{i}(n)$ für $i = 0, 1, \ldots$ $n \in \mathsf{FE}_{29}$ fallend aus dem fernen Osten)



Der gesamte Westen ist aus dem Osten unerreichbar. Alles landet beim Fixpunkt 29 oder es gilt $\partial_{29}^{i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_{29}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$, mit dem Wirkungsbereich der Permutation $\{1, \ldots, 28\} \subset \mathsf{NE}_{29}$.

Grafik 46 (Verhalten von $\partial_{29}^{i}(n)$ für $i = 0, 1, \ldots$ $n \in \mathsf{FE}_{29}$ wachsend aus dem fernen Westen)



Aus dem gesamten Westen erreicht man den Fixpunkt 0 oder es gilt $\partial_{29}^{i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \left(\partial_{29}\cdot^{\cdot^{\cdot}}\right)$ und das ist die Permutation im nahen Osten. Der ferne Osten ist aus dem Westen unerreichbar. Die Grafiken verdeutlichen nochmals das Prinzip:

Die Iterationen drängen sich tendenziell ins Zentrum

Teilbarkeit für zusammengesetzte Divisoren

Offensichtlich ist die Menge der zu 10 teilerfremden Divisoren abgeschlossen bezüglich Multiplikation. Das erkennt man leicht daran, dass die Eigenschaft 2 und 5 nicht in der Primfaktorisierung zu haben, sich bei Multiplikation von den Faktoren auf das Produkt überträgt. Es stellt sich in dieser Hinsicht heraus, dass dadurch neue überraschende Einsichten zur Teilbarkeit und zu Permutationszyklen entstehen. Zu Fixpunkten kann nicht viel neues kommen, da diese nur von der Teilbarkeit des Divisors durch kleine Potenzen von 3 beeinflusst werden. Begonnen wird mit:

Das Teilbarkeitslemma für nichtprime Divisoren

Lemma 47 (Teilbarkeit bei nichtprimen Divisoren $d \perp 10$)
Es sei $d = p * q$ mit $1 < p, q < d,\ d, p, q \perp 10$. Dann gelten die folgenden beiden Beziehungen

$$p|n \iff p|\partial_{p*q}(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \tag{105}$$
$$\partial_{p*q}(s * p) \in p * (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \text{ für } s \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \tag{106}$$

Die Beziehung (106) kann etwas mehr anschaulich in der Form

$$s * p \overset{\partial_{p*q}}{\mapsto} s' * p \text{ mit einem } s' \in \mathbb{Z},\ s' \neq 0 \tag{107}$$

formuliert werden.
◇————————————————————◇

Beweis von Lemma 47.
Der Beweis kann beinahe identisch aus dem Beweis des Hauptsatzes 8 übernommen werden.

$$\begin{aligned}
\partial_{p*q}(n) &= l(n) + m_{p*q} * r(n) \\
l(n) &= \partial_{p*q}(n) - m_{p*q} * r(n) \\
n &= 10 * l(n) + r(n) \\
n &= 10 * \Big(\partial_{p*q}(n) - m_{p*q} * r(n)\Big) + r(n) \\
n &= 10 * \partial_{p*q}(n) - 10 * m_{p*q} * r(n) + r(n) \\
n &= 10 * \partial_{p*q}(n) - (10 * m_{p*q} - 1) * r(n) \\
n &= 10 * \partial_{p*q}(n) + k_{p*q} * p * q * r(n)
\end{aligned}$$

Dabei sei $k_{p*q} = k_d$ wie in der Formulierung von Satz 8 definiert und die Identität

$$-(10 * m_{p*q} - 1) = k_{p*q} * p * q$$

ergibt sich aus der Bézout-Identität (15) :$m_d * 10 + k_d * d = 1$. Mit Blick auf die letzte Zeile

$$n = 10 * \partial_{p*q}(n) + k_{p*q} * p * q * r(n)$$

ergibt sich, da der rechte Summand ein Vielfaches von p ist, unter Benutzung von (19)

$$p|n \iff p|10 * \partial_{p*q}(n) \iff p|\partial_{p*q}(n)$$

wobei für das letzte $\iff$ noch $p \perp 10$ und (18) ausgenutzt werden muss. Damit ist (105) bewiesen und (106) ist nur eine andere Formulierung von (105) und besagt, dass Vielfache von p durch ∂_{p*q} wieder auf Vielfache von p abgebildet werden. Man kann nach (105) einfach schließen:

$$s * p \in p * (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \Longrightarrow \partial_{p*q}(s * p) \in p * (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

Das gleiche Verhalten gilt auch für den anderen Faktor q. □

Bemerkung 48 (Nützlichkeit von (105))
Diese Beziehung ist fürs Kopfrechnen eher ungeeignet, da sich der Ausdruck $\partial_{p*q}(n)$ in der Regel für den menschlichen Kopfrechner nicht einfacher verhält als die Aufgabenstellung $p|n$?. Trotzdem ist ein Szenarium offengelegt, das besagt:

Mit einer einzigen Testfunktion ∂_d können simultan Teilbarkeitsfragen zu mehreren Divisoren untersucht werden, wenn d keine Primzahl ist. Das Beispiel $d = 351 = 3*117 = 13*27 = 9*39$ zeigt ,dass das außer für $d = 351$ noch für die Divisoren $d \in \{3, 117, 13, 27, 9, 39\}$ gilt. Ein menschlicher Anwender hat aber das Problem, die Faktorisierung zu erkennen.

Die Aussage ist jedoch insbesondere in der Form (106) für die folgenden Untersuchungen von Permutationszyklen wertvoll, da das Verhalten von ∂_{p*q} auf den Vielfachen der Faktoren von d beschrieben wird. Da der Faktor p keine Sonderrolle spielt, gelten (105) und (106) auch für q. Die Herausnahme der 0 in (106) ist dadurch motiviert, dass die Zuordnung $0 \overset{\partial_d}{\mapsto} 0$ eine vollkommen isolierte Erscheinung ist.

♢————♢

Permutationszyklen von von partiellen Ziffernsummen

Permutationszyklen spielen immer durch ihren Zusammenhang mit den Iterationen ∂_d^i eine bedeutende Rolle für die Teilbarkeitsfrage $d|n$?. Insbesondere verweist das durch Satz 39 offen gelegte Grenzverhalten der Folge $\left(\partial_d^i(n)\right)_{i=0,1,2,\ldots}$ auf die Rolle der Permutationszyklen. Die Motivation für die Analyse von Permutationszyklen kann bereits von der partiellen Quersumme ∂_9 her begriffen werden. Dort wurde festgestellt, dass die Fixpunkte von ∂_9 Grenzobjekte sind, die bereits am Startwert n der Folge $\left(\partial_9^i(n)\right)_{i=0,1,2,\ldots}$ ablesbar sind. Das Grenzobjekt ist nämlich:

$$\partial_9^i(n) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} r_9(n) \text{ falls } r(n) > 0 \dashleftarrow \text{ vorhersagbar aus dem Startwert } n \\ 9 \text{ falls } r(n) = 0 \dashleftarrow \text{ vorhersagbar aus dem Startwert } n \end{cases}$$

Das Grenzobjekt ist also sozusagen vom Startwert leicht vorhersagbar. Dieses Verhalten ist aber nicht in der gleichen Form auf ∂_d für $d \neq 9$ übertragbar. Es besteht aber die Hoffnung, dass die Grenz-Zyklen im Fall $d \neq 9$ eine ähnlicheRolle spielen können. Das hängt aber davon ab, ob der zu erwartende Grenz-Zyklus auch ausgehend vom Startwert vorhergesagt werden kann. Für die Zyklenanalyse ist folgendes nützlich, wobei immer von $d = p*q$ mit $1 < p, q < d,\ p, q \perp 10$ ausgegangen wird und Aussagen über p auch entsprechend für q gelten, ohne dass das explizit formuliert wird.

Aussage 49 (Vorzeichenverhalten von ∂_{p*q})
Für $d \in D_1 \cup D_7$ gilt

$$\partial_{p*q}(-s*p) \in p*\mathbb{Z}_{<0} \text{ für } s \in \mathbb{N} \tag{108}$$

$$\partial_{p*q}(s*p) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} p*\mathbb{N} \text{ für } s \in \mathbb{N} \tag{109}$$

Für $d \in D_3 \cup D_9$ gilt

$$\partial_{p*q}(s*p) \in p*\mathbb{N} \text{ für } s \in \mathbb{N} \tag{110}$$

$$\partial_{p*q}(-s*p) \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} p*\mathbb{Z}_{<0} \text{ für } s \in \mathbb{N} \tag{111}$$

♢————♢

Beweis von Aussage 49.
Die Beziehung (108) ergibt sich einfach dadurch, dass $m_{p*q} < 0$ für $d \in D_1 \cup D_7$ ist und ebenfalls $l(-s*p) < 0$ wird. Die Beziehung (109) soll nur beschreiben, dass die Werte von $\partial_{p*q}(s*p)$ für positive Vielfache von p zumindest auf einem Anfangsstück für kleine s nicht durchgängig positiv sind sondern erst für genügend große positive s positiv bleiben. Da genauere Aussagen hier nicht gebraucht werden, wird auf einen genaueren Beweis verzichtet.
Die Beziehung (110) ergibt sich dadurch, dass für $d \in D_3 \cup D_9$ sowohl $m_{p*q} > 0$ als auch $l(s*p) > 0$ sind. Die Beziehung (111) soll nur beschreiben, dass die Werte $\partial_{p*q}(-s*p)$ nicht durchgängig negativ sind, sondern erst für genügen kleine negative Argumente negativ bleiben. Auf nähere Einzelheiten verzichte ich. □

Beispiel 50 (Beispiele für Grenzobjekte bezüglich $d \in D_1$)
Für jedes $d \in D_1$ und $t \in \{1, \dots, l(d)\}$ gilt

$$\partial_d(-(10^k * t)) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \langle -t \rangle_{\partial_d} \ \forall k \in \mathbb{N}$$

♢ ♢

Für die Notation $\langle m \rangle$ sei auf Definition 37 verwiesen. Das ist dejenige Zyklus, der m enthält. Als konkretes Beispiel sei $z = -400000$ im Fall $d = 41$ genannt:

$$\partial_{41}(-400000) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \langle -4 \rangle_{\partial_{41}} = (\ -4\ \ -25\ \ -23\ \ -31\ \ -40\ )$$
$$\partial_{41}^4(-400000) = -40$$

Das resultiert aus der Tatsache, dass bei einem Argument mit k Nullen rechts in der Dezimaldarstellung (hier k=5) bei jeder iterativer Anwendung von ∂_d eine Null verloren geht, unabhängig davon ob das Argument negativ oder positiv ist.
Auf eine explizite beweismäßige Formulierung wird verzichtet. Die zweite Zeile im Beispiel benennt den ersten Eintrittspunkt in den Zyklus $\langle -4 \rangle_{\partial_{41}}$. Die Bedingung $t \in \{1, \dots, l(d)\}$ ist notwendig, für $-t * 10 \in \{-(d-1), \dots, -1\}$, damit das zykluserzeugende Element überhaupt im Wirkungsbereich der Permutation ∂_d liegt - für $d = 41$ also in $\{-40, \dots, -1\}$. Die angegebene konkrete Notation des Zyklus $\langle -4 \rangle_{\partial_{41}}$ ist bereits oben aufgeschrieben worden. Im Beispiel kommen außer $t = 4$ noch $t \in \{1, 2, 3\}$ in Betracht:

$$\partial_{41}^i(-(10^k * 1)) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \langle -1 \rangle_{\partial_{41}^i} = (\ -1\ \ -37\ \ -16\ \ -18\ \ -10\ )\ \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\partial_{41}(-(10^k * 2)) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \langle -2 \rangle_{\partial_{41}} = (\ -2\ \ -33\ \ -32\ \ -36\ \ -20\ )\ \forall k \in \mathbb{N}$$
$$\partial_{41}^i(-(10^k * 3)) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \langle -3 \rangle_{\partial_{41}} = (\ -3\ \ -29\ \ -7\ \ -13\ \ -30\ )\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Es verhält sich in diesen Fällen immer so:
Beginnend beim Startelement $-(10^k * t)$ werden erstmal $k-1$ rechte Nullen abgebaut. Dann tritt die Folge $\partial_d^i(-(10^i * t))$ erstmals in def Definitionsbereich von $\left(\partial_d{}^{\cdots}\right)$ ein und kreist dann unendlich oft im Zyklus $\langle -t \rangle_{\partial_d}$. Das Beispiel ist sehr speziell und kann auch im Kopf leicht durchschaut werden. Aus der Beziehung (106) können jedoch sehr viel allgemeinere Bespiele konstruiert werden:

Grenzzyklen für zusammengesetzte Divisoren

Aussage 51 (Grenz-Zyklen für zusammengesetzte Divisoren)
Sei $d = p * q$ mit $d, p, q \perp 10,\ 1 < p, q < d$. Dann gilt für jedes $s \in \{1, \ldots, q-1\}$:

$$\partial^i_{p*q}(\pm s * p) \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} \langle \pm s * p \rangle_{p*q}$$

Dabei gilt $+s$ für $d \in D_3 \cup D_9$ und $-s$ für $d \in D_1 \cup D_7$.
Die Elemente des angegebenen Zyklus bestehen ausschließlich aus Vielfachen von p. Man kann nicht erwarten, dass diese Zyklen für verschiedene s auch verschieden sind.
Die Elemente $e = s * p$ dieser Permutationszyklen sind immer $e \neq \pm 1$ je nachdem ob das Permutationsintervall im positiven oder im negativen Teil von $\mathbb{Z}$ liegt, da nur Vielfache von p vorkommen. Das führt zu der Tatsache, dass diese Permutationszyklen niemals maximale Länge $d-1$ haben. Anders ausgedrückt haben diese Permutationen immer mehrere Zyklen,die auch Fixpunkte sein können.
♢————————————————————————————————♢

Beweis von Aussage 51.
Das ist ganz leicht überlegt: Für $s \in \{1, \ldots, q-1\}$ ist $s * p$ ein Element des Definitionsbereichs der Permutation $\left(\partial_{p*q} \overset{\cdots}{\cdot\cdot}\right)$ und diese werden gemäß (106) wieder auf Vielfache von p abgebildet.
Der Übergang auf Vielfache geschieht sogar nach (106) auf der gesamten Zahlenachse $\mathbb{Z}$ □

Damit ist auch gleich noch eine besondere Art von Zyklen entdeckt worden.

Definition 52 (Produkt-Zyklus)
Besitzen alle Elemente eines Permutationszyklus $m_1\ m_2\ \cdots\ m_k$ einen gemeinsamen Teiler p, so wird dieser Zyklus Produkt-Zyklus genannt.
♢————————————————————————————————♢

Die Co-Faktoren, die in diesen Produkt-Zyklen auftauchen - also die $s \neq p$ bilden dann eine eigene Permutation, die offenbar zur Permutation $\left(\partial_q \overset{\cdots}{\cdot\cdot}\right)$ gehört.

Beispiel 53 ($d = p * q$ mit $p = 19,\ q = 31,\ s = 1,\ d = 19 * 31 = 589,\ m_{589} = 59$)

19∗(1 28 9 4 19 5 16 14 20 2 25 18 8 7 10)
=(19 532 171 76 361 95 304 266 380 38 475 342 152 133 190)

Die 15 Elemente des oberen Zyklus der Faktoren werden jeweils mit 19 multipliziert und ergeben dann den unteren Zyklus der Permutation $\left(\partial_{19*31} \overset{\cdots}{\cdot\cdot}\right)$ Diese Permutation hat insgesamt 9 Zyklen, davon 2 der Länge 15, einen der Länge 18 und 6 der Länge 90. Der Zyklus der Faktoren gehört zur Permutation π_{31}, die eine Spiegelung am 0-Punkt der Permutation $\left(\partial_{31} \overset{\cdots}{\cdot\cdot}\right)$ ist. Dazu kann mann sich Aussage 74 ansehen.
♢————————————————————————————————♢

Den unteren Zyklus im Kopf nachzurechnen fällt wegen $m_{589} = 59$ schon schwer. Zumindest den ersten und letzten Übergang kann man probieren:

$$19 \mapsto 1 + 9 * 59 = 1 + 531 = 532 \quad \| \quad 190 \mapsto 19 + 0 * 59 = 19$$

Auf diese Weise können massenweise Beispiele erzeugt werden:

Beispiel 54 (Ein Beispiel im Negativen: $p = 13, q = 17, d = p * q = 221,\ m_{221} = -22$)

$$
\begin{aligned}
-13 * (&-1\ -12\ -8\ -11\ -13\ -3\ -2\ -7\ -16\ -5\ -9\ -6\ -4\ -14\ -15\ -10\ ) \\
= (&-13\ -156\ -104\ -143\ -169\ -39\ -26\ -91 \\
&-208\ -65\ -117\ -78\ -52\ -182\ -195\ -130\ )
\end{aligned}
$$

Der Zyklus von $\left(\partial_{13*17} \cdots\right)$ hat 16 Elemente. Der Zyklus der Faktoren gehört zu π_{51}.
Die Permutation hat 32 Zyklen darunter 2 der Länge 6 einen der Länge 16 und 4 der Länge 48

♢ ♢

In den Zyklen gemäß Aussage 51 fällt noch auf, dass die Elemente 1, -1 aus dem Definitionsbereich von $\left(\partial_d \cdots\right)$ nicht darin auftauchen, da ja die Elemente Vielfache von p, $-p$ sind. Das bedeutet: Die maximal mögliche Länge $d-1$ wird für keinen Permutationszyklus von $\left(\partial_d \cdots\right)$ erreicht. Andererseits gibt es Beispiele, für die diese maximale Länge erreicht wird. Für $d = 29$ trifft das zu, wie bereits in der Grafik 114 gezeigt wurde. Insgesamt kann dazu folgendes formuliert werden:

Permutationszyklen maximaler Länge

Aussage 55 (Permutationszyklen maximaler Länge $d - 1$ von $\left(\partial_d \cdots\right)$)
Permutationszyklen maximaler Länge $d - 1$ von $\left(\partial_d \cdots\right)$ kann es höchstens dann geben, wenn $d \in D_1 \cup D_9$ Primzahl ist und .

♢ ♢

Der Zusatz $d \in D_1 \cup D_9$ kommt wieder dadurch zustande, dass für $d \in D_3 \cup D_7$ die Gleichung $\partial_d = \partial_{3*d}$ gilt und die Permutation damit von der Nichtprimzahl $3 * d$ bestimmt wird. Die Permutation $\left(\partial_{3*d} \cdots\right)$ hat daher gemäß Aussage 51 immer den Zyklus $\langle \pm 3 \rangle$ der ausschließlich aus Vielfachen $\neq 0$ von 3 besteht. Da ± 1 nicht unter diesen Vielfachen von ± 3 auftaucht, kann es keine Zyklen maximaler Länge geben.

Die Zyklen maximaler Länge sind in sofern interessant, dass deren Elemente außer 0 $\pmod d$ alle anderen Restklassen $\pmod d$ durchlaufen. Sie kommen in dieser Hinsicht $\left(\partial_9 \cdots\right)$ am nächsten, denn für $d = 9$ ist das Restklassenverhalten völlig durchsichtig.

Aussage 56
Unter der ersten zehn Primzahlen $d \in D_1 \cup D_9 \quad d \leqq 100$ haben folgenden Permutationszyklen maximaler Länge

$$19, 29, 59, 61$$

und für folgende trifft dies nicht zu

$$11, 31, 41, 71, 79, 89$$

Dabei ist zu beachten, dass für maximale Zykluslänge ausschließlich $d \in D_1 \cup D_9$ in Frage kommen.

♢ ♢

Vermutung 1 (Vermutung über Permutationszyklen maximaler Länge)
Unter allen Primzahlen $d \in D_1 \cup D_9$ gibt es jeweils unendlich viele, deren Permutationen $\left(\partial_d \cdots\right)$ Zyklen maximaler Länge besitzen (dann genau einen) und es gibt auch unendlich viele, die keinen Zyklus maximaler Länge besitzen.

Es sind keine Ideen zum Beweis dieser Vermutung bekannt. Die beiden Möglichkeiten wurde innerhalb von $D_1 \cup D_9$ per Computerprogramm für eine relativ große endliche Anzahl (100 000) von Primzahlen überprüft.
Dabei wurde ein Verhältnis von etwa **35**% **zu** **65**% zugunsten Zyklen nichtmaximaler Länge festgestellt.

Die Gesamtbilanz sieht es so aus:

Zyklen in	maximal	nicht maximal	maximal	nicht maximal
D_9	19475	30509	38.96%	61.03%
D_1	16001	34015	31.99%	68.0%
$D_1 \cup D_9$	35476	64524	35.47%	64.52%

Die Permutationen $\left(\partial_d \cdots\right)$ mit $d \in D_9$ mit maximalen Zyklen haben ein Übergewicht von 9 Prozentpunkten gegenüber denen mit $d \in D_1$.

Die Produkt-Rest-Darstellung von ∂_d

Nach Aussage 1 kann jedes $n \in \mathbb{Z}$ in der Form $n = k * d + u$ mit $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqq u < d$ dargestellt werden. Man setze in (1) $p = d$ und $q = k$, $r = u$, dann ergibt sich diese Darstellung. Die Umbenennungen $q \mapsto k$, $r \mapsto u$ sind nur als Variablensubstitution zu verstehen. In diesem Abschnitt soll es um die Frage gehen, welche Erkenntnisse man über die Produkt-Rest-Darstellung bezüglich d von $\partial_d(k * d + u)$ erlangen kann. Das sind die Werte von ∂_d . Nach Aussage 1 muss das immer möglich sein, denn die Werte von ∂_d sind ganz gewöhnliche ganze Zahlen aus $\mathbb{Z}$.
Bemerkenswert ist allerdings, dass der Funktion $\partial_d(n)$ ihre Argumente in der Form $n = k*d+u$ präsentiert werden. Es handelt sich dann um eine einmal verschachtelte Produkt-Rest- Darstellung bezüglich d.
Vom Standpunkt der Teilbarkeitsfrage $d|(k * d + u)$?, mit $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leqq u < d$ macht das keinen Sinn, da die Teilbarkeit sofort durch Betrachtung von u entschieden werden kann:

$$d|(k * d + u)? \begin{cases} \text{ja falls } u = 0 & \checkmark \\ \text{nein falls } u > 0 & \times \end{cases}$$

Die Motivation für diesen Abschnitt ist daher eher auf Erkenntnisse bezüglich des globalen Verhaltens von ∂_d auf seinem gesamten Definitionsbereich $\mathbb{Z}$ ausgerichtet. Für die folgenden Formulierungen sei noch auf $[\![0, d)\!) = \{0, \ldots, d-1\}$ und $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geqq x \in \mathbb{R}$ aus der Mathematik-Terminologie verwiesen. Da hier oft die Funktion $\partial_d(k*d+u)$ bei festem $u \in [\![0, d)\!)$ als Funktion von k betrachtet wird, soll dafür eine spezielle Bezeichnung eingeführt werden:

$$\partial_{d,u}(k) = \partial_d(k * d + u)\ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{112}$$

Produkt-Rest-Darstellung für $d \in D_9$

Lemma 57 (Die Produkt-Rest-Darstellung von ∂_d für $d \in D_9$)
Für $d \in D_9$, $u \in [\![0, d[\![$ und festem $n \in \mathbb{Z}$ gelten folgende Beziehungen:

$$\text{Vertauschungsrelation-1:} \quad r_d(\partial_d(n)) = \partial_d(r_d(n)) \text{ , } \forall n \in \mathbb{Z} \tag{113}$$
$$\text{Vertauschungsrelation-2:} \quad r_d(\partial_d^{i+1}(n)) = \partial_d(r_d(\partial_d^{i}(n)) \ \forall i \in \mathbb{Z} \tag{114}$$

Bei festem $u \in [\![0, d[\![$ gilt:

$$r_d(\partial_d(k * d + u)) = \partial_d(u) \ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{115}$$
$$\text{10 gleiche Werte} \dashrightarrow \partial_d(k * d + u) = \partial_d(u) \ \forall k \in \{-(10 - (r(u) + 1)), \ldots, r(u)\} \tag{116}$$
$$\partial_d(k * d + u) = \left\lceil \frac{k - r(u)}{10} \right\rceil * d + \partial_d(u) \text{ , } \forall k \in \mathbb{Z} \tag{117}$$

Dabei ist $\left\lceil \frac{x}{10} \right\rceil$ die beste ganzzahlige Approximation von $\frac{x}{10}$ von oben.
Die Gleichung (117) wird als Die Produkt-Rest-Darstellung von ∂_d bezeichnet. In (116) sind genau 10 aufeinander folgende Werte von k aufgeführt, die sich beiderseits vom Ursprung $0 \in \mathbb{Z}$ befinden. Auf diesen 10 Werten nimmt $\partial_d()$ den konstanten Wert $\partial_d(u) = 0 * d + \partial_d(u)$ an. Im Spezialfall $u = 0$ gilt

$$\partial_d(k * d) = 0 \text{ für } k \in \{-9, \ldots, 0\}$$

Die Eigenschaft von $\partial_d(k*d+u)$ bei wachsendem k und festem u immer 10 aufeinander folgende gleiche Werte zu haben, setzt sich auf ganz $\mathbb{Z}$ fort. Bezeichnet $k_u = -(10 - (r(u) + 1))$ so gilt $k_u \in \{-9, \ldots, 0\}$ und für alle $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\partial_d(k * d + u) = \ell * d + \partial_d(u) \text{ konstant für alle } k \in \{k_u + 10 * \ell, \ldots, k_u + 10 * \ell + 9\} \tag{118}$$

Für $\ell = 0$ wird hier nochmals die Beziehung (116) reproduziert. An den Sprungstellen $k_u + 10 * \ell$ springt $\partial_d(k * d + u)$ um den Wert $+d$, wobei an diesen Stellen bereits der höhere Wert gültig ist.

◇—◇

Bemerkung 58
Die Beziehungen (115), (116), (118) bedeuten zusammen mit der Bemerkung über die Sprungstellen, dass bei festem $u \in [\![0, d[\![$ die Funktion $\partial_d(k * d + u)$ als Funktion von k eine auf ganz $\mathbb{Z}$ wachsende Treppenfunktion mit Treppenbreite 10 und Sprüngen vom Wert $+d$ ist. Die Auswahl der Argumente von ∂_d in der Form $k * d + u$ ist in Wirklichkeit keine Einschränkung des Definitionsbereichs, da $n = k * d + u$ ganz $\mathbb{Z}$ durchläuft.

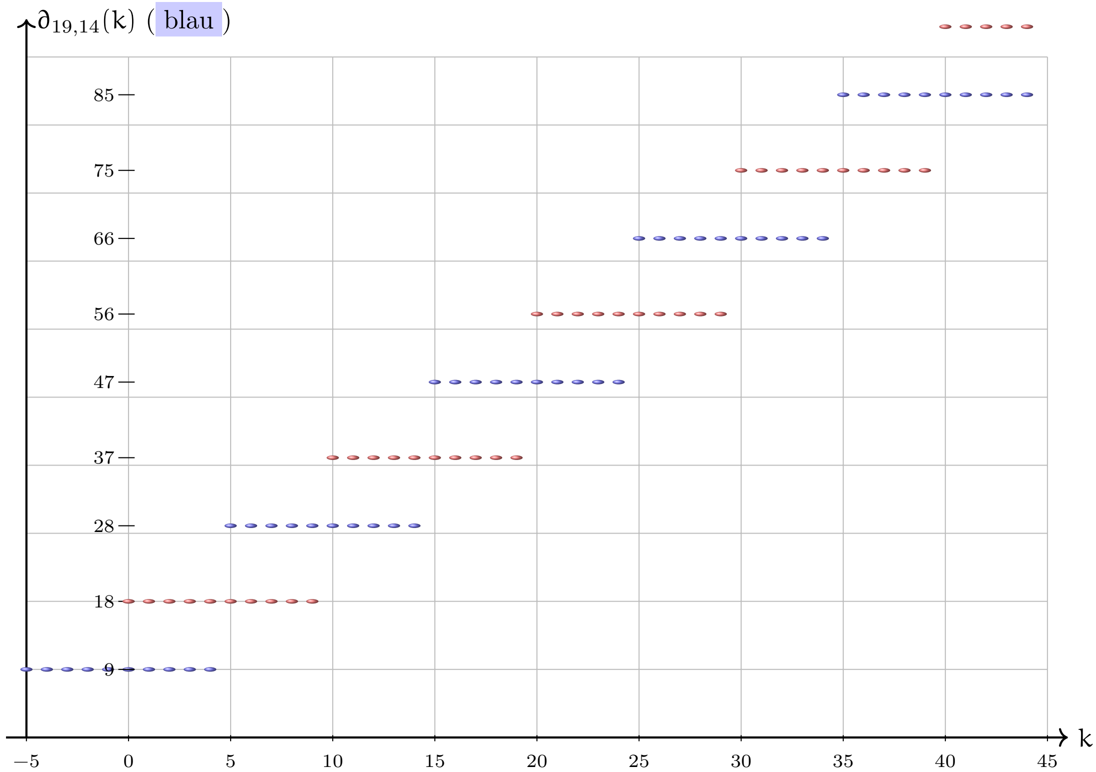
Durch (118) **ist die Funktion ∂_d eindeutig festgelegt, und ebenso durch** (117)**.**

Eine Deutung von (113) und (115):
Der Rest $r_d(\partial_d(n))$ wird vom Rest $r_d(n)$ durch einmalige Transformation $r_d(n) \mapsto \partial_d(r_d(n))$ bestimmt. Dies ist die Verallgemeinerung des Verhaltens von ∂_9, wo die Reste auch so transformiert werden, allerdings mit dem Unterschied, dass $\partial_9(r) = r$ für $r \in \{0, \ldots, 9\}$ die Reste unverändert lässt. Man vergleiche dazu (38).

◇—◇

Nach dem Motto Bilder sagen es manchmal besser als Worte hier eine Beispielgrafik:

Grafik 59 ($\partial_{19,14}(k), -5 <= k <= 45$ (blau), $\partial_{19,9}(k), 0 <= k <= 45$ (rot))



Die blaue Funktion gehört zu $u = 14$ die rote zu $u = 9$. Die blaue Treppenstufe (blau) auf Höhe $9 = \partial_{19}(14)$ ist diejenige, die durch (116) spezifiziert ist. Wenn man $u \in [\![0, 19)\!)$ variiert, würde die Höhe gemäß der Permutation ∂_{19} variieren und die Lage der Treppenstufe würde sich gemäß $r(u) + 1$ verändern. Die Höhen-Differenz aufeinander folgender blauer bzw. roter Treppenstufen beträgt hier immer $d = 19$. Die oberste rote Treppenstufe ist nicht mehr bis zur vollen Breite 10 eingezeichnet.

Bemerkung 60
Die Grafik bedeutet nicht, dass ∂_d ständig steigt, es wurden ja bewusst nur die Werte k variiert, was für $\partial_d()$ nur aufeinander folgende Argumente mit Differenz $+d$ bedeutet. Durch zusätzliche Variation von $u \in [\![0, d)\!)$ würde der typische Sägezahnverlauf von $\partial_d()$ sichtbar werden. Für die blaue Treppenfunktion sind die Sprungstellen $\{\ldots, -45, -35, -25, -15, -5, 5, 15, 25, 35, 45, \ldots\}$, wobei dort der höhere Wert angenommen wird.

◇

Zum Beweis von Lemma 57 werden einige Vorbereitungen benötigt.

Aussage 61 (Verhalten von $\partial_d(n)$ für $d \in D_9$ beim Übergang $n \curvearrowright n+d$)

$$r(n+d) = \begin{cases} r(n) - 1 \text{ falls } r(n) > 0 \\ 9 \text{ falls } r(n) = 0 \end{cases} \tag{119}$$

$$l(n+d) = \begin{cases} l(n) + m_d \text{ falls } r(n) > 0 \\ l(n) + (m_d - 1) \text{ falls } r(n) = 0 \end{cases} \tag{120}$$

$$\partial_d(n+d) = \begin{cases} \partial_d(n) \text{ falls } r(n) > 0 \\ \partial_d(n) + d \text{ falls } r(n) = 0 \end{cases} \tag{121}$$

◊ ◊

Beweis von Aussage 61.

Zu (119):

Dies ist eine Folge von $r(d) = 9$. Die rechte Ziffer $r(n+d)$ der Summe $n+d$ ist rechte Ziffer der Summe $r(n)+r(d)$ und hat den Wert $r\Big(r(n)+r(d)\Big)$. Es ist $r = r_{10}$ zu beachten. Falls n negativ ist, stimmt das mit der rechtenZiffer nicht. Trotzdem sind die hier verwendeten Argumentationen gültig. Es ist nur $0 \leqq r(n) \leqq 9$ zu beachten.

$r(n)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r(n)+9$	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$r(n+d) = r\Big(r(n)+9\Big)$	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Zur Berechnung der letzten Zeile wird (22) für $a = 10$ verwendet. Das bedeutet hier

$$r(n+d) = r\Big(r(n) + r(d)\Big) = r\Big(r(n) + 9\Big)$$

Zwei Beispiele:

$$6 = r(126) = r(117+9) = r\Big(r(117) + r(9)\Big) = r(7+9) = r(16) = 7 - 1 = 6$$

$$4 = r(-126) = r(-135+9) = r\Big(r(-135) + r(9)\Big) = r\Big(5+9\Big) = r(14) = 5 - 1 = 4$$

Zu (120):

$$n + d = 10 * l(n) + r(n) + 10 * l(d) + r(d) \leftarrow\text{-- zweimal (7) angewendet}$$
$$n + d = 10 * l(n) + r(n) + 10 * l(d) + 9 \text{ wegen } d \in D_9$$
$$n + d = 10 * \Big(l(n) + l(d)\Big) + (r(n) + 9)$$
$$n + d = 10 * (l(n) + (m_d - 1)) + (r(n) + 9) \text{ weil gemäß (33) } l(d) = m_d - 1$$
$$\Downarrow \text{ weil } r(n) + 9 = r(n) - 1 + 10$$
$$n + d = 10 * (l(n) + (m_d - 1)) + \begin{cases} 10 + (r(n) - 1) \text{ falls } r(n) > 0) \\ 9 \text{ falls } r(n) = 0) \end{cases}$$
$$n + d = \begin{cases} 10 * \Big(l(n) + (m_d - 1) + 1\Big) + r(n+d) \text{ falls } r(n) > 0 \\ 10 * \Big(l(n) + (m_d - 1)\Big) + 9 \text{ falls } r(n) = 0 \end{cases}$$

Die Manipulation $9 = -1 + 10$ macht nur dann Sinn, wenn $\mathsf{r}(\mathsf{n}) - 1 \geqq 0$ entsteht. Aus der letzten Gleichung schließen wir unter Berücksichtigung von $\mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = 9$ für $\mathsf{r}(\mathsf{n}) = 0$:

$$\mathsf{n}+\mathsf{d} = \begin{cases} 10 * (\mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{m}_\mathsf{d}) + \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) > 0 \\ 10 * (\mathsf{l}(\mathsf{n}) + (\mathsf{m}_\mathsf{d} - 1)) + \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) = 0 \end{cases}$$

Wobei $\mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = 9$ für $\mathsf{r}(\mathsf{n}) = 0$ ist, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \mathsf{n}+\mathsf{d} &= 10 * (\mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{m}_\mathsf{d}) + \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) > 0 \\ \mathsf{n}+\mathsf{d} &= 10 * (\mathsf{l}(\mathsf{n}) + (\mathsf{m}_\mathsf{d} - 1)) + \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) = 0 \end{aligned}$$

Wegen $\mathsf{l}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = (\mathsf{n}+\mathsf{d} - \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}))/10$ ergibt sich:

$$\mathsf{l}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = \begin{cases} \mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{m}_\mathsf{d} \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) > 0 \\ \mathsf{l}(\mathsf{n}) + (\mathsf{m}_\mathsf{d} - 1) \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) = 0 \end{cases}$$

was für (120) zu beweisen war. Die Argumentation ist allerdings etwas kompliziert.
Zu (121): Unter Benutzung von (119), (120)wird folgende Rechnung durchgeführt:
1. Fall $\mathsf{r}(\mathsf{n}) > 0$:

$$\begin{aligned} \partial_\mathsf{d}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) &= \mathsf{l}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) + \mathsf{m}_\mathsf{d} * \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) \\ &= \mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{m}_\mathsf{d} + \mathsf{m}_\mathsf{d} * (\mathsf{r}(\mathsf{n}) - 1) \text{ weil hier } \mathsf{l}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = \mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{m}_\mathsf{d},\ \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = \mathsf{r}(\mathsf{n}) - 1 \\ &= \mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{m}_\mathsf{d} * \mathsf{r}(\mathsf{n}) \\ \partial_\mathsf{d}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) &= \partial_\mathsf{d}(\mathsf{n}) \end{aligned}$$

2. Fall $\mathsf{r}(\mathsf{n}) = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_\mathsf{d}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) &= \mathsf{l}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) + \mathsf{m}_\mathsf{d} * \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) \\ &= \mathsf{l}(\mathsf{n}) + (\mathsf{m}_\mathsf{d} - 1) + \mathsf{m}_\mathsf{d} * \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) \text{ weil hier } \mathsf{l}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = \mathsf{l}(\mathsf{n}) + (\mathsf{m}_\mathsf{d} - 1) \\ &= \mathsf{l}(\mathsf{n}) + (\mathsf{m}_\mathsf{d} - 1) + \mathsf{m}_\mathsf{d} * 9 \text{ weil hier } \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = 9 \\ &= \mathsf{l}(\mathsf{n}) + 10 * \mathsf{m}_\mathsf{d} - 1 = \partial_\mathsf{d}(\mathsf{n}) + 10 * \mathsf{m}_\mathsf{d} - 1 \text{ weil } \mathsf{r}(\mathsf{n}){=}0 \Rightarrow \partial_\mathsf{d}(\mathsf{n}) = \mathsf{l}(\mathsf{n}) \\ \partial_\mathsf{d}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) &= \partial_\mathsf{d}(\mathsf{n}) + \mathsf{d} \text{ denn gemäß (13) ist } \mathsf{d} = 10 * \mathsf{m}_\mathsf{d} - 1 \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist die Behauptung von (121) bewiesen. □

Ein Transformationverhalten von $\partial_\mathsf{d}()$

Als weitere Vorbereitung auf den Beweis der Produkt-Rest-Darstellung von ∂_d dient die folgende.

Aussage 62 (Ein Verschiebungsgesetz für ∂_d)
Für $\mathsf{d} \in \mathbb{N}, \mathsf{d} \perp 10$ gilt

$$\partial_\mathsf{d}(\mathsf{n} + 10 * \ell * \mathsf{d}) = \ell * \mathsf{d} + \partial_\mathsf{d}(\mathsf{n}) \quad \forall \ell \in \mathbb{Z} \tag{122}$$

♢————————————————————♢

$*$

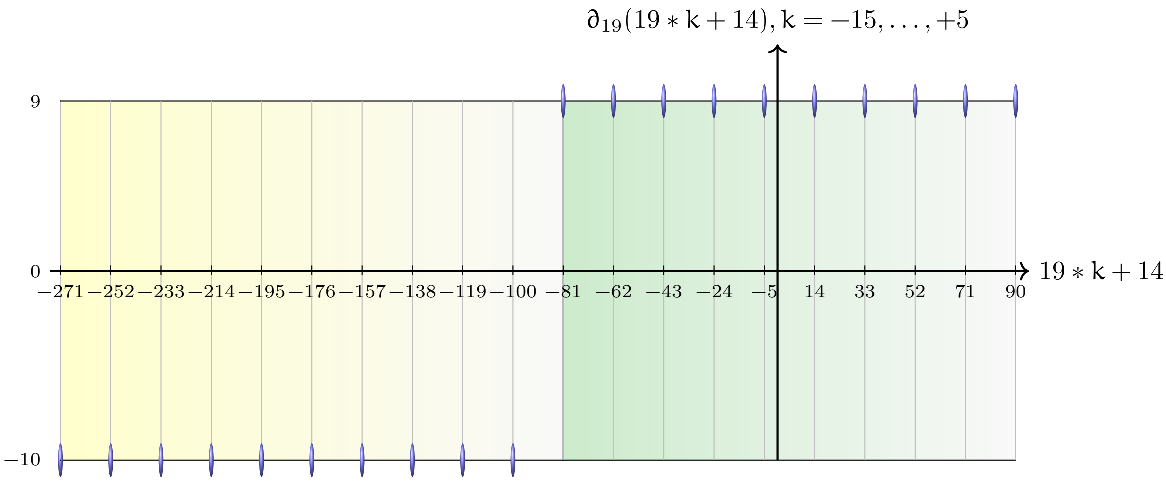
Beweis.

$$\begin{aligned} \partial_d(n + 10 * \ell * d) &= l(n + 10 * \ell * d) + m_d * r(n + 10 * \ell * d) \\ &\Downarrow \text{ bei } r = r_{10} \text{ können Vielfache von 10 weggelassen werden} \\ &= l(n + 10 * \ell * d) + m_d * r(n) \\ \text{gemäß (21)} &\Downarrow \text{ nach (73) in Aussage 29} \\ \partial_d(n + 10 * \ell * d) &= l(n) + \ell * d + m_d * r(n) \\ \partial_d(n + 10 * \ell * d) &= \ell * d + \partial_d(n) \end{aligned}$$

Dabei ist (73) die Beziehung $\dashrightarrow l(\nu * 10 + o) = \nu + l(o)$. □

Das bedeutet: Addition eines Vielfachen $10 * \ell * d$ bei den Argumenten von ∂_d egal ob ℓ positiv oder negativ ist, verändert den Wert von $\partial_d()$ in kontrollierbarer Weise um den Wert $\ell * d$ also steigend oder fallend je nach Vorzeichen von ℓ. Die Veränderung unterscheidet sich im Vergleich zur Veränderung des Arguments um den Faktor 10 nämlich $(n + 10 * \ell * d) \mapsto \ell * d + \partial_d(n)$, was zu erwarten ist. Und die Veränderung wirkt auch so wie durch Lemma 57 beschrieben: Fallend bei Argumentverringerung und steigend bei Argumentvergrößerung.

Grafik 63 (Funktionsverlauf von $\partial_{19}(k * 19 + 14)$für $k \in \{-15, -14, \ldots, +5\}$)



Gezeigt wird für $\partial_{19}()$ die Transformation (122) für $\ell = -1$ vom grün-grauen Bereich in den gelb-grauen Bereich. Durch die blauen Marken werden nur Funktionswerte für Argumente $n = k * 19 + 14$ im Abstand $d = 19$ erfasst. Es werden genau zwei Treppenstufen nach Bemerkung 58 dargestellt.

Beweis von Lemma 57.
Zum Beweis von (113).
Es sei $n = k * d + u$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $u \in [\![0, d)\!)$. Mit diesem Ansatz sind gemäß Aussage 1 spezialisiert auf $p = d$ alle $n \in \mathbb{Z}$ erfasst. Für $k = 0$ gilt $n = u$ und wir erhalten gemäß (24)

$$r_d(\partial_d(u)) = \partial_d(u) = \partial_d(r_d(u))$$

weil $0 \leqq \partial_d(u) < d$ (Restoperator weglassen). Für die beiden letzten Ungleichungen berücksichtigen wir, dass $\partial_d(0) = 0$ und das $\partial_d()$ auf $(\!(0, d)\!) = \{1, \ldots, d-1\}$ eine Permutation ist (vergleiche Definition 33 und Aussage 34). Damit ist für $k = 0$ die in (113) behauptete Gleichung bewiesen. Für den Fall der $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ erkennt man nach (121), dass bei variierendem k sich $\partial_d(k * d + u)$ nur um Vielfache von d von $\partial_d(u)$ unterscheidet. Nach dem Prinzip (21), dass Vielfache von d beim Restoperator r_d weggelassen werden können, sind daher sind die Reste $r_d(\partial_d(k * d + u)) = \partial_d(u) = \partial_d(r_d(k * d + u))$ alle identisch, womit (113) für alle $k \in \mathbb{Z}$ bewiesen ist. Da in dieser Argumentation $u \in [\![0, d)\!)$ unspezifisch benutzt wurde, ist (113) insgesamt bewiesen.

Zu (114):

$$
\begin{aligned}
r_d(\partial_d^{i+1}(n)) &= r_d\Big(\partial_d(\partial_d^{i}(n))\Big) \text{ nach Definition der Iterationen 15} \\
&\Downarrow \text{ nach Anwendung von (113)} \\
r_d(\partial_d^{i+1}(n)) &= \partial_d(r_d(\partial_d^{i}(n))
\end{aligned}
$$

Das ist gerade die Behauptung von (114).

Zu (115): $r_d(\partial_d(k * d + u)) = \partial_d(u)$:

Dies ist nur eine formal anders aussehende Version von (113), wenn man $n = k * d + u$ und $r_d(k * d + u) = u$ berücksichtigt. Die Beziehung bedarf daher keines neuerlichen Beweises.

Zu (116):

Zunächst sei die dortige Behauptung noch mal hier hingeschrieben:

$$
10 \text{ gleiche Werte } \dashrightarrow \partial_d(k * d + u) = \partial_d(u)\ \forall k \in \{-(10 - (r(u) + 1)), \ldots, r(u)\}
$$

Begonnen wird mit $k = 0$. Dann kann bis $k = r(u)$ fortlaufend (121) angewendet werden

$$
\begin{aligned}
&\partial_d(0 * d + u) = \partial_d(u) \\
&\partial_d(1 * d + u) = \partial_d(u) \text{ durch Anwendung von (121) weil } r(n + d) = r(n) - 1 > 0 \\
&\qquad \ldots\ldots \\
&\partial_d(r(u) * d + u) = \partial_d(u) \text{ durch Anwendung von (121) weil } r(r(u) * d + u) = 0
\end{aligned}
$$

Nach $r(u)$ Schritten der Form $\cdot \curvearrowright \cdot + d$ ist der Wert $r(\cdot) = 0$ erreicht Damit sind die $r(u) + 1$ nichtnegativen Werte von k abgearbeitet und die Treppenstufe gleicher Werte endet nach rechts. Für die negativen Werte von k wird eine Version von (121) benötigt, die den Übergang $n \curvearrowright n - d$ beschreibt. Eine solche ist:

$$
\partial_d(n - d) = \begin{cases} \partial_d(n) \text{ falls } r(n) < 9 \\ \partial_d(n) - d \text{ falls } r(n) = 9 \end{cases} \tag{123}
$$

Diese Gleichung ist durch wohlüberlegtes Rückwärtsdenken aus (121) abgeleitet. Dabei ist noch zu beachten, dass beim Übergang $n \curvearrowright n - d$ für $d \in D_9$ die Reste $r()$ wachsen.

$$
\begin{aligned}
&\partial_d(-1 * d + u) = \partial_d(u) \text{ wegen (123) weil } r(-1 * d + u) < 9 \\
&\partial_d(-2 * d + u) = \partial_d(u) \text{ wegen (123) weil } r(-2 * d + u) < 9 \\
&\qquad \ldots\ldots \\
&\partial_d(-(10 - (r(u) + 1)) * d + u) = \partial_d(u) \text{ wegen (123) weil } r(-(10 - (r(u) + 1)) * d + u) = 9
\end{aligned}
$$

Nach $10 - (r(u) + 1)$ Schritten der Form $\cdot \curvearrowright \cdot - d$ ist der Wert $r(\cdot) = 9$ erreicht und die Treppenstufe gleicher Werte endet nach links. Insgesamt sind das

$$
r(u) - (-10 - (r(u) + 1)) + 1 = 10
$$

gleiche Werte. Dabei ist zu beachten, dass für $a \leqq b$ die Menge $\{a, \dots, b\}$ die Anzahl $b - a + 1$ Elemente hat. Daher kommt oben die ganz rechte $+1$.
Wenn zum Beispiel $r(u) = 6$ ist, sind zuletzt noch $10 - (r(u) + 1) = 3$ Gleichungen geblieben, und $r(-k * d + u) \in \{7, 8, 9\}$ für $k \in \{-1, -2, -3\}$. Es ist noch zu beachten, dass der Übergang $-3 * d + u \curvearrowright -4 * d + u$ innerhalb von (116) nicht mehr ausgeführt wird. Es endet immer mit $r(\cdot) = 9$.
Damit ist (116) abgearbeitet.

Zu (118):

Wendet man das Verschiebungsgesetz (122) auf die Werte
$n = k * d + u,\ k \in \{-(10 - (r(u) + 1)), \dots, r(u)\}$ an, so ergibt sich (118) unmittelbar.

Betrachtet man $\partial_d(k*d+u)$ als Funktion von $k \in \mathbb{Z}$, so befindet man sich für $r(k*d+u) = 9$ auf dem linken oberen Anfang eine Treppenstufe und verbleibt dort für wachsendes k für weitere 9 Schritte bis der Reste-Wert $r(k * d + u + 9) = 0$ erreicht ist. Die Ursache für die Länge 10 der Treppenstufen ist die Wirkung der Funktion $l(n)$, die eine Division durch 10 beinhaltet.

Zu (117):

$$\text{Das ist (117)} \dashrightarrow \partial_d(k * d + u) = \left\lceil \frac{k - r(u)}{10} \right\rceil * d + \partial_d(u)\ , \forall k \in \mathbb{Z} \text{ für festes } u \in \{0, \dots, d - 1\}$$

Ein direkter Beweis dieser Gleichung scheint schwierig. Es wird daher die Strategie verfolgt, die Eigenschaften der beiden Funktionen auf der linken und rechtenSeite von (117) in Abhängigkeit von k bei festem u so zu analysieren, dass das sich beide Funktionen als identisch erweisen. Wie schon in Bemerkung 58 formuliert ist $\partial_d(k * d + u)$ bei festem u als Funktion von k gesehen eine für $k \in \mathbb{Z}$ definierte monoton wachsende Treppenfunktion mit konstanter Treppenbreite 10 und Sprungstellen der Größe d. Dafür sei jetzt die Bezeichnungsweise $\partial_{d,u}(k)$ aus (112) bevorzugt. Dabei hängt die Lage der Sprungstellen von u ab.

Treppenfunktionen

Wie kann man eine solche Funktion $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eindeutig beschreiben ?. Es seien folgende Bestimmungsstücke definiert:

Definition 64 (Merkmale von Treppenfunktionen)
Sei $t : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ eine monoton wachsend Treppenfunktion mit Treppenbreite 10 und konstanter Sprunghöhe $h \in \mathbb{N}$. Dafür werde folgende Merkmale definiert:

- Die Sprunghöhe h.
- Eine Treppenstufe ist ein Intervall $S \subset \mathbb{Z}$ mit $|S| = 10$ Elementen mit konstantem Wert $v = t(s)\, \forall s \in S$. Eine Treppenstufe ist eine solche Menge in der k mit Schrittweite 1 variieren kann.
- Die zentrale Treppenstufe $C = \{c, \dots, c + 9\}$ ist diejenige mit $0 \in C$ mit dem kleinsten Element c (es muss dann $c \leqq 0 \leqq c + 9$ sein).
- Der zentrale Wert V ist derjenige konstante Wert, den t auf C annimmt.

- Der zentrale Quotient $\mathsf{K} = \left\lfloor \frac{\mathsf{V}}{\mathsf{d}} \right\rfloor$ ist der Quotient aus der Produkt-Rest-Darstellung von V (für $\mathsf{h} = \mathsf{d}$).

Für die Produkt-Rest-Darstellung wird die Sprunghöhe $\mathsf{h} = \mathsf{d}$ anvisiert. Der zentrale Quotient ist ebenfalls für diese Anwendung in die Liste der Merkmale aufgenommen worden, obwohl er für die eindeutige Beschreibung einer Treppenfunktion nicht benötigt wird. Man könnte auch andere Treppenbreiten als 10 betrachten, allerdings wird hier darauf verzichtet.

◊ ◊

Ehe der Beweis von Lemma 57 fortgesetzt wird soll hier ein Einschub über Treppenfunktionen der oben definierten Art erfolgen. Die Funktionen $\mathtt{Floor}(x) = \lfloor x \rfloor$ und $\mathtt{Ceil}(x) = \lceil x \rceil$ definiert für $x \in \mathbb{R}$ können als Bausteine für Treppenfunktionen dienen.

Aussage 65 (Floor und Ceil als Treppenfunktion)
Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sind die Funktionen

$$\mathtt{tt}, \mathtt{t} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \tag{124}$$

$$\mathtt{tt}(k) = \left\lceil \frac{k - a}{10} \right\rceil + b \tag{125}$$

$$\mathtt{t}(k) = \left\lfloor \frac{k - a}{10} \right\rfloor + b \tag{126}$$

Treppenfunktionen mit Treppenbreite 10 und Sprunghöhe $h = 1$. Man kann auch $b = 0$ betrachten.

◊ ◊

Beweis von Aussage 65.
Für $k \in \mathbb{Z}$ durchläuft auch $k - a$ ganz $\mathbb{Z}$ insbesondere werden alle Vielfachen von 10 durchlaufen. Das sind genau die Sprungstellen von $\mathtt{t}, \mathtt{tt}$. Zwischen zwei aufeinander folgenden Vielfachen von 10 also bei $k - a = 10 * \nu + r$ mit $r \in \{0, \ldots, 9\}$ sind die Werte konstant, weil $\frac{10 * \nu + r}{10} = \nu + \frac{r}{10}$ und demzufolge gilt $\left\lceil \frac{10 * \nu + r}{10} \right\rceil = \nu$ und $\left\lfloor \frac{10 * \nu + r}{10} \right\rfloor = \nu + 1$. Daher sind die Vielfachen von 10 die Sprungstellen. Offensichtlich steigen beide Funktionen an diesen Stellen um den Wert $h = 1$, weil $\frac{10 * (\nu + 1)}{10} - \frac{10 * \nu}{10} = 1$. □

Folgerung 66 (Rechte Seite von (117) als Treppenfunktion)
Die Funktion $\left\lceil \frac{k - r(u)}{10} \right\rceil * d + \partial_d(u)$ betrachtet als Funktion von $k \in \mathbb{Z}$ ist eine wachsende Treppenfunktion mit Treppenbreite 10 und Sprunghöhe $h = d$. Die Sprunghöhe ergibt sich aus de Multiplikation mit d in der aufgeschriebenen Formel. Die Treppenbreite ergibt sich aus der Treppenbreite von $\mathtt{tt}$ in Aussage 65

◊ ◊

Aussage 67 (Ein Verschiebungsgesetz für $\mathtt{tt}, \mathtt{t}$)
Es seien $\mathtt{tt}, \mathtt{t}$ die beiden Funktionen aus Aussage 65. Für diese gilt für alle $\ell \in \mathbb{Z}$

$$\mathtt{tt}(k + \ell * 10) = \ell + \mathtt{tt}(k) \; \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$\mathtt{t}(k + \ell * 10) = \ell + \mathtt{t}(k) \; \forall k \in \mathbb{Z}$$

◊ ◊

Beweis von Aussage 67.
Das ergibt sich unmittelbar aus $\frac{k-a+10*\ell}{10} = \ell + \frac{k-a}{10}$ und anschließendem Übergang zu $\mathtt{Ceil}, \mathtt{Floor}$. □

Aussage 68 (Charakterisierung von Treppenfunktionen)
Ein Treppenfunktion ist durch die Merkmale

- Sprunghöhe h
- Zentrale Treppenstufe C
- Zentraler Wert V

aus Definition 64 eindeutig festgelegt, wobei der Begriff Treppenfunktion und die Treppenbreite 10 in diese Aussage als Grundvoraussetzung mit eingehen.
♢————————————————————♢

Beweis von Aussage 68.
Durch den zentralen Wert ist die Treppenfunktion auf der zentralen Treppenstufe $C = \{c, \ldots, c+9\}$ festgelegt. Die anderen (unendlich vielen) Treppenstufen sind

$$S_\ell = \{10 * \ell + c, \ldots, 10 * \ell + c + 9\} \text{ für } \ell \in \mathbb{Z}$$

Da an den Stellen $k = 10 * \ell + c$ jeweils ein Sprung der Höhe h auftritt, sind dadurch auch die konstanten Werte $v = V + \ell * h$ auf S_ℓ eindeutig bestimmt. Da die Vereinigung aller Treppenstufen $= \mathbb{Z}$ ergibt, ist die Treppenfunktion vollständig festgelegt. □

Hier endet der allgemeine Einschub über Treppenfunktionen. Bis jetzt wurde beim Beweis von (116) folgendes erreicht: Sei $\partial_{d,u}(k)$ die durch (112) definierte Funktion. Durch die bisherigen Analysen in Aussage 61 und (116) über 10 gleiche Werte hat sich folgendes heraus gestellt:

- Setzt man $c = -(10 - (r(u) + 1))$ so ist $C = \{c, \ldots, c+9\}$ die zentrale Treppenstufe von $\partial_d(k, u)$.
- Es ist $V = \partial_d(0, u) = \partial_d(u)$ der zentrale Wert von $\partial_d(k, u)$.
- Es ist $K = 0$ der zentrale Quotient von $\partial_d(k, u)$.
- Durch (118) sowie (71) ist außerdem gezeigt, dass $\partial_{d,u}$ auf $\mathbb{Z}$ eine monoton wachsende Treppenfunktion mit Treppenbreite 10 und Sprunghöhen d ist.

Jetzt wird zum Vergleich die Funktion

$$\begin{aligned} \mathtt{tt} &: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ \mathtt{tt}(k) &= \left\lceil \frac{k - r(u)}{10} \right\rceil * d + \partial_d(u),\ k \in \mathbb{Z}, u \in \{0, \ldots, d-1\} \end{aligned}$$

auf der rechten Seite von (117) betrachtet. Da die Gleichheit $\partial_{d,u} = \mathtt{tt}$ gezeigt werden soll werden zur Anwendung von Aussage 68 die Merkmale Sprunghöhe,zentrale Treppenstufe und zentraler Wert bestimmt werden. Die Sprunghöhe ist d, wie aus der Formel für $\mathtt{tt}$ unmittelbar hervorgeht. Der zentrale Wert wird an der Stelle 0 berechnet und ergibt sich zu $\partial_d(u)$, weil für

$r(u) \in \{0, \ldots, 9\}$ der Wert $\left\lceil \frac{0 - r(u)}{10} \right\rceil = 0$ ist. Für variierendes $k \in \{-(10 - r(u) + 1), \ldots, r(u)\}$ ergibt sich offensichtlich $k - r(u) \in \{-9, \ldots, 0\}$ und daraus ergibt sich

$$\left\lceil \frac{k - r(u)}{10} \right\rceil = 0 \; \forall k \in \{-(10 - r(u) + 1), \ldots, r(u)\}$$

und daher ist der zentrale Wert $0 + \partial_d(u)$ der konstante Wert auf der zentralen Treppenstufe. Damit hat tt

- Die Sprunghöhe d
- Die zentrale Treppenstufe $C = \{-(10 - r(u) + 1), \ldots, r(u)\}$.
- Den zentralen Wert $V = \partial_d(u)$.

Damit hat sich das Verhalten von $tt(k)$ für $k \in \{-(10 - (r(u) + 1)), \ldots, r(u)\}$ als genau so herausgestellt, wie das von $\partial_{d,u}(u)$. Nach Aussage(112) ist deshalb $tt = \partial_{d,u}$ und (117) ist bewiesen. Damit ist auch der Beweis von Lemma 57 vollendet. □

Bemerkung 69
Zur Verdeutlichung der zentralen Treppenstufe $C = \{c, \ldots, c + 9\}$ von $\partial_{d,u}$ und tt sei mit $\mathbb{Z}_- = \{z : z \in \mathbb{Z}, z < 0\}$ folgendes genannt:

- Ist $r(u) = 0$ so gilt $C \subset \mathbb{N}_0$.
- Ist $0 < r(u) < 9$ so gilt $C \cap \mathbb{Z}_- \neq \varnothing$ und $C \cap \mathbb{N}_0 \neq \varnothing$
- Ist $r(u) = 9$ so gilt $c = 0$ und $C = \{0, \ldots, 9\} \subset \mathbb{N}_0$

Dabei ist für c immer die Abhängigkeit $c = (-(10 - (r(u) + 1))$ von u zu beachten.

♢ ♢

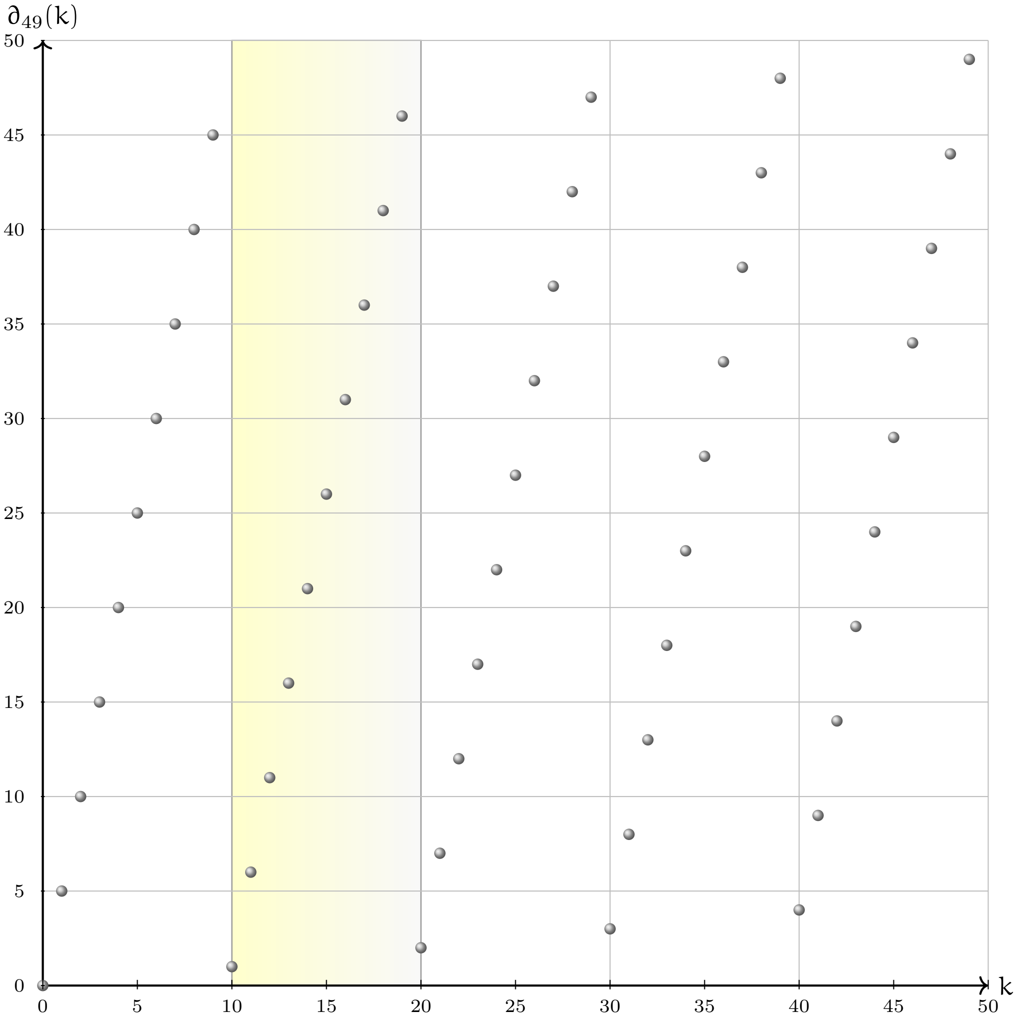
Bemerkung 70
Die Produkt-Rest-Darstellung von ∂_d hat zur Folge, dass:

$$\lim_{k \to \pm\infty} (n - \partial_d(n = k * d + u)) = \lim_{k \to \pm\infty} (n - \partial_d(n) + (u - \partial_d(u)) = \pm\infty$$

Die Werte $\partial_d(n = k*d+u)$ entfernen sich immer weiter von den Argumenten $n = k*d+u$. Dies ist bedingt durch die Entfernung zwischen k und $\left\lceil \frac{k + 10 * \ell - r(u)}{10} \right\rceil$, die etwa den Verkleinerungs-Faktor 10 beinhaltet. Dabei spielen für sehr große positive Werte von k und sehr kleine negative Werte die Korrekturen $-r(u)$ und $u - \partial_d(u)$ keine Rolle mehr. Trotzdem hat auch in diesen Extremlagen die Funktion $\partial_d(n) = l(n) + m_d * r(n)$ ihr typisches **Sägezahnverhalten** bedingt durch den Term $m_d * r(n)$ und $r(n) \in \{0, \ldots, 9\}$. Das resultiert in jeweils 10 Zuwächsen $n \mapsto n+1$ ein ständiges auf und ab von $m_d * r(n)$.

♢ ♢

Grafik 71 (Funktionsverlauf von $\partial_{49}(k)$für $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 49\}$)



Das 5×10-Raster mit 10×5-Zellengröße ist so gewählt, dass in jeder Zelle genau ein Paar $\left(k, \partial_{49}(k)\right)$ des Funktionsgrafen liegt, wobei für die Zellen der linke und untere Rand dazu gehört, während der rechte und obere Rand nicht dazu gerechnet werden. Daran sieht man auch, dass ∂_{49} im gezeigten Bereich eine Permutation ist.

Die Permutation π_d

Definition 72 (Die Permutation π_d)
Für $d \in D_1$ sei folgende Permutation definiert

$$\begin{aligned} \pi_d \colon \{1, \ldots, d-1\} &\to \{1, \ldots, d-1\} \\ \pi_d(n) &=_{def} r_d(\partial_d(n)) \text{ für } n \in \{1, \ldots, d-1\} \end{aligned}$$

Diese Definition bedarf noch einer Rechtfertigung. Zuerst ist zu begründen, dass π_d in die Menge $\{1, \ldots, d-1\}$ abbildet:
Da ∂_d ofenbar den Wert 0 nur für das Argument 0 annimmt, ist für $n \in \{1, \ldots, d-1\}$ der Wert $\partial_d(n) \neq 0$, er kann aber auch negativ sein. Allerdings gilt

$$r_d \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$$

,d.h $r_d(\cdot)$ erzeugt ausschließlich nichtnegative Werte. Nach (102) gilt außerdem $\partial_d(n) < n$ für $n > 0$. Wenn dann $\partial_d(n) > 0$ ist, gilt $r_d(\partial_d(n)) = \partial_d(n) \in \{1, \ldots, d-1\}$. Wenn anderenfalls $\partial_d(n) < 0$ ist, so ist $-d < \partial_d(n) < 0$, weil der kleinste mögliche Wert $9 * m_d > 10 * m_d = -(d-1)$ ist. Also ist $\partial_d(n) \in \{-(d-1), \ldots, -1, +1, \ldots, (d-1)\}$. Damit können wir wie folgt weiter rechnen:

$$r_d(\partial_d(n)) = (\partial_d(n) - (-d)) = d + \partial_d(n) \in \{1, \ldots, d-1\} \tag{127}$$

Insbesondere gilt:

$$(-d) = max\{z * d : z \in \mathbb{Z}, z * d \leqq \partial_d(n)\} \text{ falls } \partial_d(n) < 0 \tag{128}$$

Aussage 73 (π_d ist injektiv)
Die Abbildung $\pi_d \colon \{1, \ldots, d-1\} \to \{1, \ldots, d-1\}$ ist injektiv.

Beweis von Aussage 73.
Seien $n, n' \in \{1, \ldots, d-1\}$ und $\pi_d(n) = \pi_d(n')$. Dann ist $n = n'$ zu zeigen. Es werden wieder die zwei Fälle $\partial_d(n) = \partial_d(n') > 0$ und $\partial_d(n) = \partial_d(n') < 0$ behandelt.
1.Fall $\partial_d(n) = \partial_d(n') > 0$: Sei $m = (d-1)/10 = -m_d$ Dann gilt nach der Produkt-Rest-Darstellung 1 $n = 10 * t + s, n' = 10 * t' + s'$ mit $t, t' \in \{0, \ldots, m-1\}, s, s' \in \{0, \ldots, 9\}$ und $\partial_d(n) = \partial_d(n')$ bedeutet jetzt

$$\begin{aligned} t + m_d * s &= t' + m_d * s' \\ (t - t') &= m_d * (s' - s) \\ (t' - t) &= m * (s' - s) \text{ nach Multiplikation mit } -1 \end{aligned}$$

Daher ist $(t' - t) \equiv 0 \pmod{m}$. Das geht aber nur für $t = t'$, denn ansonsten wäre

$$\begin{aligned} (t - t') &\in \{-(m-1) \ldots, -1, 1, \ldots, (m-1)\} \\ \text{und } (t - t') &\not\equiv 0 \pmod{m} \end{aligned}$$

Daraus folgt $m * (s' - s) = 0$ und somit $s = s'$, was insgesamt gleichbedeutend mit $n = n'$ ist.
2.Fall $\partial_d(n) = \partial_d(n') < 0$:
Dann ist wie oben schon in (127) notiert

$$\begin{aligned} \pi_d(n) &= r_d(\partial_d(n)) = d + \partial_d(n) \in \{1, \ldots, d-1\} \\ \pi_d(n') &= r_d(\partial_d(n')) = d + \partial_d(n') \in \{1, \ldots, d-1\} \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von (128). Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} \pi_d(n) = \pi_d(n') &\iff \partial_d(n) = \partial_d(n') \\ &\iff l(n) + m_d * r(n) = l(n') + m_d * r(n') \end{aligned}$$

Jetzt können wir nach der Produkt-Rest-Darstellung 1 ansetzen:

$$n = 10 * t + s, \; n' = 10 * t' + s' \text{ mit } t, t' \in \{0, \ldots, d-1\}, \; s, s' \in \{0, \ldots, 9\}$$

und es gilt unter Beachtung von $m = -m_d$ zu beweisen:

$$\begin{aligned} t + m_d * s &= t' + m_d * s' \\ (t - t') &= m_d * (s' - s) \\ (t' - t) &= m * (s - s') \text{ nach Multiplikation mit } -1 \end{aligned}$$

Ab hier führt die gleiche Argumentation wie im 1. Fall zu $t = t',\ r = r',\ n = n'$. □

Aussage 74 (Für $d \in D_1$ ist $\left(\partial_d^{\cdots}\right)$ die Spiegelung von π_d am Nullpunkt $0 \in \mathbb{Z}$)
Sei $d \in D_1,\ d > 1$. Dann gilt:

$$\left(\partial_d^{\cdots}\right) = -1 * \pi_d \tag{129}$$

$$\partial_d(-n) = -1 * \pi_d(n) \text{ für } n \in \{1, \ldots, (d-1)\} \tag{130}$$

Wie in (130) formuliert, müssen die Definitionsbereiche ebenfalls gespiegelt werden. Auch könnte der Faktor -1 jeweils auf die andere Seite der Gleichungen wechseln.
◇————————————————————◇

Beweis von Aussage 74.
Es sei $d \in D_1,\ d > 1$ vorausgesetzt. Jedes $n \in \{1, \ldots, d-1\}$ hat gemäß Aussage 1 dann eine Darstellung der Form $n = 10 * t + s$ mit $t \in \{0, \ldots, (l(d) - 1)\}, s \in \{0, \ldots, 9\}$, wobei die Kombination $t = 0, s = 0$ ausgeschlossen wird, weil dann $n = 0$ nicht zum Definitionsbereich der Permutation gehört.Es werden zunächst die Werte die jeweils die linke Begrenzung von $T_t = \{10 * t, 10 * t + 1, \ldots, 10 * t + 9\}$ bilden, betrachtet, also $n = 10 * t,\ t = 1, \ldots, l(d) - 1$. Für diese Werte gilt unter Berücksichtigung von (11) und (12):

$$\begin{aligned} \partial_d(10 * t) &= t \\ r_d(t) &= t \\ \pi_d(10 * t) &= t \end{aligned}$$

Das muss jetzt mit $\partial_d(-(10 * t))$ verglichen werden:

$$\begin{aligned} \partial_d(-10 * t) &= l(-10 * t) - l(d) * r(-10 * t) \\ \partial_d(-10 * t) &= -t \text{ gemäß (12)} \end{aligned}$$

Für die Werte $n = 10 * t$ stimmt daher die Behauptung. Jetzt müssen die Werte $n = 10 * t + s$ mit $s > 0$ betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \partial_d(10 * t + s) &= t - l(d) * s \\ r_d(10 * t + s) &\stackrel{?}{=} t - l(d) * s + d \\ &= t - l(d) * s + (10 * l(d) + 1) \\ &= t - l(d) * s + (10 * l(d) + 1) \\ &= \mathbf{t - l(d) * (10 - s) + 1} \end{aligned}$$

Dabei ist eventuell die Zeile mit dem Fragezeichen $\stackrel{?}{=}$ erklärungsbedürftig: Für $s > 0$ gilt
$-d < \partial_d(10 * t + s) < 0$ und $-d = (-1) * d$ ist das größte Vielfache von d, das $\leqq$ diese Werte ist. Daher muss zur Bildung von $r_d()$ die Differenz $\partial_d(10 * t + s) - (-d)$ gebildet werden. Genau

das wurde in der $\stackrel{?}{=}$-Zeile getan.
Vergleicht man den Wert in der letzten Zeile mit $\partial_d(-(10*t+s)$ ergibt sich :

$$\begin{aligned}\partial_d(-(10*t+s)) &= l(-(10*t+s)) - l(d)*(10-s)\\ &= -(t+1) - 10*l(d) + l(d)*s \text{ gemäß (33)}\\ &= -t + (s-10)*l(d) - 1\\ &= -(t+(10-s)*l(d)+1)\\ &= (-1)*(\mathbf{t}-\mathbf{l}(\mathbf{d})*(\mathbf{10}-\mathbf{s})+\mathbf{1})\end{aligned}$$

Das ist auch für diese Werte die behauptete Beziehung in (129). Die Beziehung (130) ist nur die ausführliche Version von (129) und ist damit ebenfalls bewiesen. □

Produkt-Rest-Darstellung für $d \in D_1$

Für das folgende Lemma sei hier nochmals an die Permutation π_d aus Definition 72 erinnert:

$$\pi_d(n) = r_d(\partial_d(n)) \text{ für } n \in \{1, \ldots, d-1\}$$

Lemma 75 (Die Produkt-Rest-Darstellung von ∂_d und für $d \in D_1$)
Für $d \in D_1,\ d > 1,\ u \in \{1, \ldots, d-1\}$ gelten die folgenden Beziehungen:

$$r_d(\partial_d(n)) = \pi_d(r_d(n)) \text{ für } n \in \mathbb{Z} \tag{131}$$

$$\text{10 gleiche Werte} \dashrightarrow \partial_d(k*d+u) = \pi_d(u)\ \forall k \in \{-r(u), \ldots, -r(u)+9\} \tag{132}$$

Falls $r(u) > 0$ ist gilt

$$\partial_d(k*d+u) = \left\lfloor \frac{k-(10-r(u))}{10} \right\rfloor * d + \pi_d(u)\ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{133}$$

Falls $r(u) = 0$ ist gilt

$$\partial_d(k*d+u) = \left\lfloor \frac{k}{10} \right\rfloor * d + \pi_d(u)\ \forall k \in \mathbb{Z} \tag{134}$$

Dabei ist $\left\lfloor \frac{x}{10} \right\rfloor$ die größte ganzahlige Approximation der Zahl $\frac{x}{10}$ von unten und das ist anders als im Fall $d \in D_9$, wo mit $\left\lceil \frac{x}{10} \right\rceil$ die kleinste ganzzahlige Approximation von oben benutzt wird.
◇————————————————————————————————◇

Die Beziehung (133) ist am besten vergleichbar zu (117) in Lemma 57. Die Produkt-Rest-Darstellungen von ∂_d in (133),(134) sind die **Hauptaussagen** von Lemma 75. Daraus folgt alles andere.

Aus (133) (134) folgt auch, dass bei festem $u \in \{0, \ldots, (d-1)\}$ die beiderseits unendliche Folge

$$\Big(\partial_d(k*d+u)\Big)_{k\in\{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}}$$

eine in Abhängikeit von k wachsende Treppenfunktion mit jeweils 10 aufeinander folgenden identischen Werten ist, die an von $r(u)$ abhängigen Werten jeweils eine Sprungstelle mit Differenz d hat. Falls $r(u) = 0$ ist, erfolgt bei 0 ein Sprung. Insbesondere ist in (133) auch der Werte $u = 0$ zugelassen und damit sind die Vielfachen $k*d,\ k \in \mathbb{Z}$ mit erfasst. Die Werte von $\partial_d(k*d)$ bilden also auch eine derartige Treppenfunktion und die Sprungstellen der Treppe sind die $k*10$-fachen von d.

Beweis von Lemma 75.
Sei $\mathsf{d} \in D_1, \mathsf{d} > 1$. Als Vorbereitung beweisen wir für alle $\mathsf{n} \in \mathbb{Z}$:

$$\mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = \begin{cases} \mathsf{r}(\mathsf{n}) + 1 \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) < 9 \\ 0 \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) = 9 \end{cases} \tag{135}$$

$$\mathsf{r}(\mathsf{n}-\mathsf{d}) = \begin{cases} \mathsf{r}(\mathsf{n}) - 1 \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) > 0 \\ 9 \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) = 0 \end{cases} \tag{136}$$

$$\mathsf{l}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = \begin{cases} \mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{l}(\mathsf{d}) \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) + \mathsf{r}(\mathsf{d}) \leqq 9 \\ \mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{l}(\mathsf{d}) + 1 \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) + \mathsf{r}(\mathsf{d}) > 9 \end{cases} \tag{137}$$

$$\partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = \begin{cases} \partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}) \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) < 9 \\ \partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}) + \mathsf{d} \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) = 9 \end{cases} \tag{138}$$

$$\partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}-\mathsf{d}) = \begin{cases} \partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}) \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) > 0 \\ \partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}) - \mathsf{d} \text{ falls } \mathsf{r}(\mathsf{n}) = 0 \end{cases} \tag{139}$$

<u>Zu (135):</u> Am einfachsten ist es erstmal den Fall $\mathsf{n} \geqq 0$ zu betrachten. Ist dann $\mathsf{r}(\mathsf{n}) < 9$ so folgt wegen $\mathsf{r}(\mathsf{d}) = 1$ unmittelbar $\mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = \mathsf{r}(\mathsf{n}) + 1$. Das ist das elementare Rechnen mit Dezimalzahlen. Im Fall $\mathsf{r}(\mathsf{n}) = 9$ folgt ebenso elementar $\mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = 0$. Falls $\mathsf{n} < 0$ ist kann zu n gemäß Bemerkung 21 ein Vielfaches von 10 addiert werden, ohne den Dezimalrest $\mathsf{r}(\mathsf{n})$ zu verändern. Dieses Vielfache kann so gewählt werden, dass die entstehende Summe $\geqq 0$ wird. Damit sind wir beim bereits bewiesenen Fall angelangt.
<u>Zu (136):</u>
Das ist nur die rückwärts gelesene Beziehung (135) und muss daher nicht neu bewiesen werden.
Zu (137).
Hier ist ebenfalls hilfreich, sich zuerst mit dem Fall $\mathsf{n} \geqq 0$ zu befassen. In dem Fall ist die Behauptung (137) ebenfalls klar, denn im Fall $\mathsf{r}(\mathsf{n}) < 9$ erfolgt für $\mathsf{l}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) = \mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{l}(\mathsf{d})$ kein Übertrag aus der Addition der rechten Ziffern $\mathsf{r}(\mathsf{n}), \mathsf{r}(\mathsf{d})$. Und im Fall $\mathsf{r}(\mathsf{n}) = 9$ ergibt sich genau der in (137) behauptete Übertrag +1. Für den Fall $\mathsf{n} < 0$ kann wieder ein Vielfaches von 10 zu n addiert werden, um auf einen Wert $\geqq 0$ zu kommen. Darauf wird die erste Rechnung angewendet und am Schluss kann das Vielfache von 10 wieder subtrahiert werden, um zur behaupteten Gleichung zu kommen.
<u>Zu (138):</u>
Zuerst wir der Fall $\mathsf{r}(\mathsf{n}) < 9$ betrachtet. Es gilt $\mathsf{m}_{\mathsf{d}} = -\mathsf{l}(\mathsf{d})$ und daher

$$\begin{aligned} \partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) &= \mathsf{l}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) + \mathsf{m}_{\mathsf{d}} * \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) \\ &= \mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{l}(\mathsf{d}) - \mathsf{l}(\mathsf{d}) * (\mathsf{r}(\mathsf{n}) + 1) \\ &= \mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{l}(\mathsf{d}) - \mathsf{l}(\mathsf{d}) * \mathsf{r}(\mathsf{n}) - \mathsf{l}(\mathsf{d}) \\ &= \partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}) \end{aligned}$$

wie in (138) behauptet. Im Fall $\mathsf{r}(\mathsf{n}) = 9$ rechnen wir mit $\mathsf{d} = 10 * \mathsf{l}(\mathsf{d}) + 1$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) &= \mathsf{l}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) + \mathsf{m}_{\mathsf{d}} * \mathsf{r}(\mathsf{n}+\mathsf{d}) \\ &= \mathsf{l}(\mathsf{n}) + \mathsf{l}(\mathsf{d}) + 1 + \mathsf{m}_{\mathsf{d}} * 0 \\ &= \mathsf{l}(\mathsf{n}) - \mathsf{l}(\mathsf{d}) * \mathsf{r}(\mathsf{n}) + \mathsf{l}(\mathsf{d}) * \mathsf{r}(\mathsf{n}) + 1 \\ &= \mathsf{l}(\mathsf{n}) - \mathsf{l}(\mathsf{d}) * 9 + \mathsf{l}(\mathsf{d}) * 9 + \mathsf{l}(\mathsf{d}) + 1 \\ &= \partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}) + 10 * \mathsf{l}(\mathsf{d}) + 1 \\ &= \partial_{\mathsf{d}}(\mathsf{n}) + \mathsf{d} \text{ weil } \mathsf{d} = 10 * \mathsf{l}(\mathsf{d}) + 1 \end{aligned}$$

wie in (138) behauptet.
Zu (139):
Die ist nur die rückwärts gelesene Beziehung (138) und bedarf deshalb keines neuen Beweises. Aus (138) folgt, dass *Treppenverhalten* von $\partial_d(n + k * d)$ in Abhängigkeit von k: Jeweils 10 aufeianderfolgende Werte sind identisch, dann erfolgt ein posititiver Sprung um den Wert d nach oben. Das ist das, was in (133) etwas genauer behauptet wird. Diese genauere Formulierung muss noch bewiesen werden.
Zu (131):
Wenn zunächst nur $n \in \{0, \ldots, d-1\}$ betrachtet wird, haben wir es mit der Definition von π_d zu tun, denn für diese Argumente gilt $r_d(n) = n$. Durch den Beweis von Aussage 73 der Permutationseigenschaft von π_d, ist (131) für $n \in \{0, \ldots, d-1\}$ automatisch erfüllt, wobei dies für $n = 0$ ebenso gilt. Der Rest wird durch (138) erledigt, weil beim Übergang $n \mapsto \pm d$ sich $\partial_d(n)$ nur um $\pm d$ verändert und Vielfache von d bei $r_d()$ gemäß (21) wegelassen werden können. Also ist (131) auch in diesem Fall bewiesen.
Die Beziehungen (131) und (132) sind bereits durch Aussage 74 und die Permutationseigenschaft von π_d bewiesen.
Zu (132):
Es wird zunächst $k = 0$ gesetzt, woraus sich $\partial_d(0 * d + u) = \partial_d(u)$ ergibt. Allerdings ist dieser Wert wegen $r(u) > 0$ und $m_d = -l(d)$ negativ, und $\partial_d(u) \in \{-(d-1), \ldots, -1\}$. Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned}
\partial_d(u) &= \partial_d(u) - d + d \\
&= \partial_d(u) - (-d) - d \quad (*) \\
&= r_d(\partial_d(u)) - d \\
\partial_d(h) &= -1 * d + \pi_d(u) \qquad (140)
\end{aligned}$$

In $(*)$ ist dabei (104) zu berücksichtigen. Falls $r(u) > 0$ ist verändert sich bei negativem $k \in \{-1, -2, \ldots\}$ gemäß (139) $\partial_d(k * d + u)$ so lange nicht bis gemäß (139) nach $r(u)$ Schritten $r(k{*}d{+}u{-}r(u){*}d)$ den Wert 0 erreicht hat. Wenn bei positivem Zuwachs für $k \in \{1, \ldots, 10 - r(u)\}$ das Argument von ∂_d jeweils ein Increment von $+d$ erfährt verändert sich der Funktionswert solange nicht, wie $r()$ den Wert 9 erreicht. Insgesamt sind das $r(u) + 10 - r(u) = 10$ konstante Werte. Den Wert dieser Konstanten erhält man, wenn in $\partial_d(k * d + u)$ der Wert $k = 0$ eingesetzt wird, erhält man $\partial_d(u)$ und dieser Wert ist negativ. Außerdem gilt $-d < \partial_d(u) < 0$. Daher ist $\partial_d(u) = -1 * d + \partial_d(u) - (-d) = -1 * d + r_d(\partial_d(u)) = -1 * d + \pi_d(u)$. Das ist der konstante Wert den man in (132) erhält. Wir merken uns diesen Wert, denn jetzt gehen wir:
Zu (133): Zu zeigen ist:

$$\partial_d(k * d + u) = \left\lfloor \frac{k - (10 - r(u))}{10} \right\rfloor * d + \pi_d(u)$$

Es sei wie im Beweis von Lemma 57 die Begriffe aus Definition 64 eingesetzt. Aus dem Beweis von (132) erkennt man, dass

- Die zentrale Treppenstufe bezüglich $\partial_{d,u}(k) = \partial_d(k * d + u)$ ist $\{-r(u), \ldots, -r(u) + 9\}$.
- Der zentrale Wert ist $\partial_{d,u}(0) = \partial_d(u)$.
- Der zentrale Quotient ist $K = -1$, abgeleitet aus der obigen Rechnung für $\partial_d(u)$ im Beweis von (132).

Diese Merkmale kann man vergleichen mit den entsprechenden Werten für die Funktion

$$t(k) =_{def} \left\lfloor \frac{k - (10 - r(u))}{10} \right\rfloor * d + \pi_d(u)$$

Setzt man hier wieder $k = 0$, so ergibt das

$$\left\lfloor \frac{-(10 - r(u))}{10} \right\rfloor * d + \pi_d(u) = -1 * d + \pi_d(u) = \partial_d(u)$$

wobei die rechte Gleichung sich aus (140) ergibt. Also hat t sowohl den richtigen zentralen Wert $V = \partial_d(u)$ und den richtigen zentralen Quotienten $K = -1$- Die im Vergleich zu $\partial_{d,u}$ richtige zentrale Treppenstufe ergibt sich offensichtlich aus dem Wert $-(10 - (r(u))$ über dem Bruchstrich in $\left\lfloor \frac{\cdot}{10} \right\rfloor$. Das ist schon mal der richtige Wert im Vergleich mit (132). Für $k \in \{-r(u), \ldots, -r(u) + 9\}$ variiert $k - (10 - r(u)) \in \{-10, -9, \ldots, -1\}$. Daraus ergibt sich

$$\left\lfloor \frac{k - (10 - r(u))}{10} \right\rfloor = -1 \text{ und } \left\lfloor \frac{k - (10 - r(u))}{10} \right\rfloor * d + \pi_d(u) = -1 * d + \pi_d(u) = \partial_d(u)$$

Das ist einer der 10 konstanten Werte, die für k links und rechts von $k = 0$ auftreten. Damit ist (132) auf der zentralen Treppenstufe $C = \{-r(u), \ldots, -r(u) + 9\}$ gezeigt. Damit ist nach Aussage 68 gezeigt, dass t und $\partial_{d,u}$ identische Funktionen sind, womit (133) gezeigt ist.

Zu (134): Das sei nochmal hier hingeschrieben:

Falls $r(u) = 0$ ist gilt $\partial_d(k * d + u) = \left\lfloor \frac{k}{10} \right\rfloor * d + \pi_d(u) \; \forall k \in \mathbb{Z}$

Zunächst wird $k = 0$ betrachtet. Dann liegt $u \in \{0, \ldots, d - 1\}$ und entweder ist $u = 0$ oder $u \in \{1, \ldots, d - 1\}$ Im ersten Fall ist $\partial_d(u) = 0$ und $\left\lfloor \frac{0}{10} \right\rfloor * d + \pi_d(u) = 0$. Im anderen Fall sind $u, \pi_d(u) \in \{1, \ldots, d - 1\}$, da π_d eine Permutation mit diesem Definitionsbereich ist. Daher gilt $\partial_d(u) = r_d(\partial_d(u)) = \pi_d(u)$ Das bedeutet:

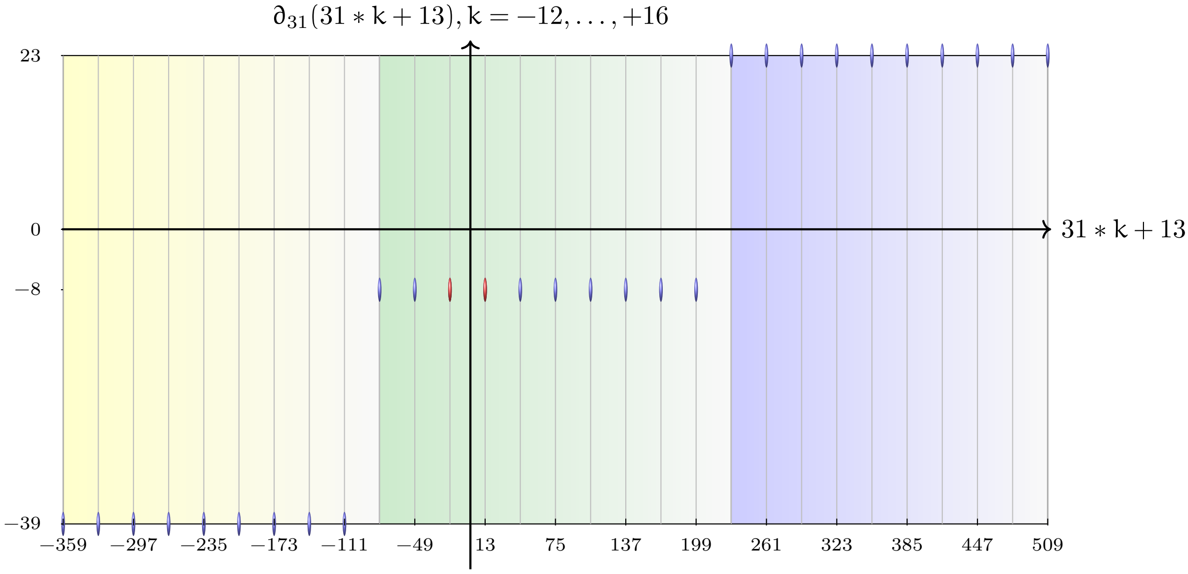
- Die zentrale Treppenstufe von $\partial_{d,u}$ ist $\{0, \ldots, 9\}$.
- Der zentrale Wert ist $\pi_d(u)$
- Die Sprunghöhe ist nach (138) und (139) d

Zum Vergleich müssen diese Merkmale noch für die Funktion

$$t(k) = \left\lfloor \frac{k}{10} \right\rfloor * d + \pi_d(u)$$

auf der rechten Seite von (134) bestimmt werden. Für $k = 0$ ergibt sich $t(k) = \pi_d(u)$ und das ist der zentrale Wert von t. Für $k = -1$ ergibt sich der Wert $-1 * d + \pi_d(u)$ Daher kann -1 nicht zur zentralen Treppenstufe gehören. Deshalb ist $\{0, \ldots, 9\}$ die zentrale Treppenstufe von t. Die Sprunghöhe d ergibt sich unmittelbar aus der Formel für t (134) ist gezeigt. Nach Aussage 68 stimmen daher t und $\partial_{d,u}$ überein und (134) ist gezeigt. Dass die Treppenbreite von t der Wert 10 ist folgt aus Aussage 65, weil sich die Treppenbreite von der dort benutzten Version t von Floor vererbt. $\square$

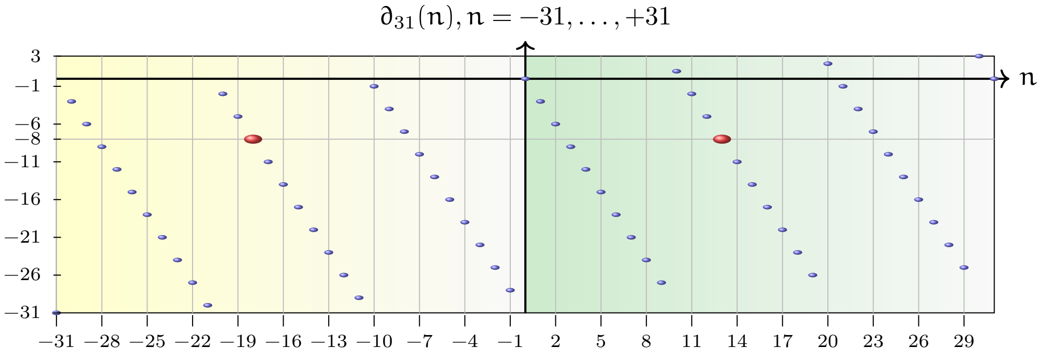
Grafik 76 (Funktionsverlauf von $\partial_{31}(k * 31 + 13)$für $k \in \{-12, -11, \ldots, +16\}$)



Gezeigt wird der treppenförmige Verlauf von $\partial_{31}(k{*}31{+}13)$. Nur die obersten beiden Treppenstufen sind vollständig erfasst. Durch die blauen Marken werden nur Funktionswerte für Argumente $n = k * 31 + 13$ im Abstand $d = 31$ erfasst.

Zum Vergleich eine Grafik, die zeigt, wie sich ∂_{31} verhält, wenn Argumente im Abstand 1 verwendet werden. Dies ist das Sägezahnverhalten.

Grafik 77 (Funktionsverlauf von $\partial_{31}(n)$für $n \in \{-31, -30, \ldots, +31\}$)



Gezeigt wird der Verlauf von $\partial_{31}(n)$ für Argumente im Abstand 1. Von den Werten aus Grafik 76 sind nur zwei erfasst, die in beiden Grafiken rot eingezeichnet sind.

Bemerkung 78 (Über den Wertebereich von ∂_d)

Die Funktion ∂_d bildet $\mathbb{Z}$ surjektiv auf ganz $\mathbb{Z}$ ab, allerdings nicht bijektiv.

An der Produkt-Rest-Darstellung für ∂_d etwa für $d \in D_9$ in der Form

$$\partial_d(k * d + u) = \left\lceil \frac{k - r(u)}{10} \right\rceil * d + \partial_d(u)$$

kann man nämlich auf der rechten Seite leicht erkennen, dass die Werte von ∂_d alle Elemente des Bildbereiches $\mathbb{Z}$ erfassen. Das liegt daran, dass zum einen durch $\left\lceil \frac{k - r(u)}{10} \right\rceil$ alle Vielfachen von 10 durchlaufen werden und damit nach der Multiplikation mit d auch alle Vielfachen von d. Durch Variation von $u \in [\![0, d)\!)$ werden dann auch die Zwischenräume zwischen zwei Vielfachen von d durchlaufen, weil ∂_d in $[\![0, d)\!)$ eine Permutation ist. Genauer ist es sogar so:

Jedes $z \in \mathbb{Z}$ hat genau 10 Urbilder von ∂_d.

Das sind jeweils die Treppenstufen bezüglich $\partial_{d,u}$ und bezüglich ∂_d sind es endliche arithmetische Folgen der Länge 10 mit Differenz d.
Die gleiche Argumentation gilt auch für $d \in D_1$, weil $\left\lfloor \frac{k - (10 - r(u))}{10} \right\rfloor$ bzw. $\left\lfloor \frac{k}{10} \right\rfloor$ alle Vielfachen von 10 durchlaufen und π_d eine Permutation in $[\![0, d)\!)$ ist.
♢ ♢