

【問題】103.  $4x+4y-5z=12$ ,  $8x+12y-13z=32$  ナルトキハ

$$\frac{x-1}{p} = \frac{y-2}{q} = \frac{z}{r} \text{ ナリトイフ. } p, q, r \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

但シ  $p^2+q^2+r^2=1$  トス.

【京大】

$$\text{答} \begin{cases} p = \frac{2}{\sqrt{29}}, q = \frac{3}{\sqrt{29}}, r = \frac{4}{\sqrt{29}} \\ p = \frac{-2}{\sqrt{29}}, q = \frac{-3}{\sqrt{29}}, r = \frac{-4}{\sqrt{29}} \end{cases}$$

### 9. 【有理式ノ値】

【問題】104.  $x + \frac{1}{x} = a$ ,  $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 6$  ナルトキ  $a$  ノ値ヲ求メ

ヨ.

答  $a=2$

【問題】105.  $x + \frac{1}{x} = 4$  ナルトキ  $x^4 - \frac{1}{x^4}$  ノ値ヲナルベク簡單

ナル形ニテ表ハセ.

【3.五高】

【解】  $x + \frac{1}{x} = 4$  ノ兩邊ヲ平方シテ  $x^2 + 2x \times \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 16$  ヨリ

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 14. \text{ 之レヨリ } x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 12 \text{ 即チ } \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 12$$

$$\text{故ニ } x - \frac{1}{x} = \pm 2\sqrt{3} \text{ トナル.}$$

$$\begin{aligned} \therefore x^4 - \frac{1}{x^4} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) \\ &= 14 \times 4 \times (\pm 2\sqrt{3}) = \pm 112\sqrt{3} \dots \text{答} \end{aligned}$$

【問題】106.  $x = a + \sqrt{a^2 - 1}$  ナルトキ  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  ノ値ヲ求メヨ.

$$\begin{aligned} \text{【注】 } x + \frac{1}{x} &= a + \sqrt{a^2 - 1} + \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}} \times \frac{a - \sqrt{a^2 - 1}}{a - \sqrt{a^2 - 1}} \\ &= a + \sqrt{a^2 - 1} + a - \sqrt{a^2 - 1} = 2a \text{ ヲ用フ.} \end{aligned}$$

答  $8a^3 - 6a$

【問題】107.  $x$  ガ  $x^2 + x - 1 = 0$  ノ根ナルトキ  $x^3 + 2x^2 + x + 1$  ノ値ヲ求メヨ. 【4.四高】

$$\begin{aligned} \text{【注】 } x^3 + 2x^2 + x + 1 &= x(x^2 + x) + (x^2 + x) + 1 \text{ 之レ } = x^2 + x = 1 \text{ ヲ} \\ &\text{代入ス.} \end{aligned}$$

答  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

【問題】108.  $x^2 = 5 - 3x$  ナルトキ  $2x^3 + 7x^2 + 3x + 20$  ノ値ヲ小數第二位マデ計算セヨ. 但シ  $x$  ヲ正數トス. 【3.弘高】

答 36.92

【問題】109.  $x = 3 + 3\sqrt{-1}$  及ビ  $x = 3 - 3\sqrt{-1}$  ナルトキ次ノ式

$x^3 - 5x^2 + 12x + 20$  ノ値ハ同一ナルコトヲ證明セヨ. 【3.名商】

$$\begin{aligned} \text{【注】 } x^3 - 5x^2 + 12x + 20 &= x^3 - 6x^2 + 9x + x^2 - 6x + 9 + 9x + 11 \\ &= x(x-3)^2 + (x-3)^2 + 9x + 11 \text{ 之レ} \\ (x-3)^2 &= -9 \text{ ヲ代入 } = x \times (-9) + (-9) + 9x + 11 = 2 \end{aligned}$$

【問題】110.  $x + y + z = 2$ ,  $x^2 + xy + y^2 + 2z = 3$  ナルトキ次ノ式ノ値ヲ求メヨ.  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$  【3.東京高波】

【方針】 一ツノ未知數 ( $z$ ) ニテ表ハスコトヲ工夫スル.

$$\text{【解】 } (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x+y+z) + 3 \dots \text{(A)}$$

サテ  $x^2 + y^2$  ヲ  $z$  ニテ表ハスコトヲ工夫スルニ  $x + y + z = 2$  ヨリ



$$\left. \begin{aligned} x+y &= 2-z \cdots (1) \text{ 平方シテ } x^2+2xy+y^2=4-4z+z^2 \\ x^2+xy+y^2+2z &= 3 \cdots (2) \Rightarrow x^2+xy+y^2=3-2z \end{aligned} \right\} \text{引キ算シテ}$$

$$xy = 1 - 2z + z^2$$

從ツテ (2) ヨリ  $x^2+y^2=3-2z-xy=3-2z-(1-2z+z^2)=2-z^2$

故ニ  $x+y=2-z$ ,  $x^2+y^2=2-z^2$  ヲ (A) 式ニ代入シテ

$$\begin{aligned} \text{原式} &= x^2+y^2+z^2-2x+y+z+3 \\ &= 2-z^2+z^2-2(2-z+z)+3=1 \cdots \text{答} \end{aligned}$$

【問題】111.  $x^2+y^2=1$ ,  $ax+by=c$  ナルトキ  $bx-ay$  ノ値如何.

答  $\pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}$  [4. 水高]

【注】  $(ax+by)^2+(bx-ay)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

【問題】112.  $a+3b+5c=0$ ,  $2a+4b+7c=0$  ナルトキ次式ノ値如何.

何.  $\frac{a^2+5b^2-2c^2}{3a^2-2b^2+5c^2}$  [4. 大阪高商]

【注】  $a=-\frac{1}{2}c$ ,  $b=-\frac{3}{2}c$  ヲ代入ス. 答  $7\frac{3}{5}$

【問題】113.  $\frac{x^2-5y+7}{x^2-5y+9}=5$  ナルトキ  $3x^2-15y+10$  ノ値ヲ求

メヨ. 答  $-18\frac{1}{2}$  [3. 早大]

【問題】114.  $a+\beta+\gamma=a$ ,  $a^2+\beta^2+\gamma^2=b$ ,  $\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=c$  ナルト

キ  $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$  ヲ  $a, b, c$  ニテ表ハセ. [4. 旅工]

【解】  $\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$  ヲ平方シテ  $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+2 \times \frac{a+\beta+\gamma}{a\beta\gamma}=c^2$

之レヨリ  $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=c^2-2 \times \frac{a}{a\beta\gamma} \cdots \cdots (A)$  ヲ得. サレ

バ假定式ヨリ  $a\beta\gamma$  ノ値ヲ求ムレバヨシ. 假定式 (3) ヨリ

$a\beta+\beta\gamma+\gamma a=ca\beta\gamma \cdots \cdots (4)$  次ギニ  $a+\beta+\gamma=a$  ヲ平方シテ

$a^2+\beta^2+\gamma^2+2(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)=a^2$  之レニ  $a^2+\beta^2+\gamma^2=b$  及ビ (4)

ヲ代入シテ  $b+2ca\beta\gamma=a^2$  ヨリ  $a\beta\gamma=\frac{a^2-b}{2c}$

之レヲ (A) = 代入スレバ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=c^2-2a+\frac{a^2-b}{2c}=c^2-\frac{4ac}{a^2-b}$$

答  $c^2-\frac{4ac}{a^2-b}$

【問題】115.  $x+y+z=a$ ,  $x^2+y^2+z^2=b^2$ ,  $x^3+y^3+z^3=c^3$  ナルトキ  $xyz$  ノ値ヲ求メヨ. [高校]

【注】 前題 15 公式参照.

答  $\frac{a^3-3ab^2+2c^3}{6}$

【問題】116.  $x=\frac{1}{(b-c)(c-a)}$ ,  $y=\frac{1}{(c-a)(a-b)}$ ,

$z=\frac{1}{(a-b)(b-c)}$  ナルトキ次式ノ値ヲ求メヨ.

$x^2+y^2+z^2-3xyz$ . [神工]

【注】 前題 69 [i] ヲ参考セヨ. 答 0

【問題】117.  $\frac{(b-c)x}{b+c}=\frac{(c-a)y}{c+a}=\frac{(a-b)z}{a+b}$  ナルトキ次式ノ値ヲ

求メヨ.  $(b-c)^2x+(c-a)^2y+(a-b)^2z$  答 0 [4. 早大]



## 10. 【二次方程式】

【問題】118.  $(x+m)(x+n)-4mx=(m-4)(n-4)$  ノ二根が零トナル様 =  $m, n$  ノ値ヲ定メヨ. 答  $m=1, n=3$  [4. 臺北高商]

【問題】119. 方程式  $2x^2-(a+b+c)x+4(ab+bc+ca)=0$  ノ二根が夫々  $a, b$  = 相等シキ様 =  $a, b, c$  ノ比ヲ定メヨ. [4. 二高]  
答  $-1:2:1$  又ハ  $2:-1:1$

【注意】  $a:b:c=7:7:-4$  ハ採用スベキモノニアラズ.

【問題】120. 一般ノ一元二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  ハ相異ナル二ツ以上ノ根ヲ有スル能ハザルコトヲ證セヨ. [4. 京城高]

【解】 相異ナル三根  $\alpha, \beta, \gamma$  ヲ有スルモノトスレバ何レモ原方程式ヲ満足ス.

$ax^2+bx+c=0$	$ax^2+bx+c=0$
$a\beta^2+b\beta+c=0$ (-)	$a\gamma^2+b\gamma+c=0$ (-)
$a(a^2-\beta^2)+b(a-\beta)=0$	$a(a^2-\gamma^2)+b(a-\gamma)=0$
$\therefore (a-\beta)\{a(a+\beta)+b\}=0$	$(a-\gamma)\{a(a+\gamma)+b\}=0$
然ルニ $a-\beta \neq 0$ ナレバ	然ルニ $a-\gamma \neq 0$ ナレバ
$a(a+\beta)+b=0 \dots (1)$	$a(a+\gamma)+b=0 \dots (2)$
=限ル	=限ル

因ツテ (1)-(2) ヲリ

$$\begin{array}{r} a(a+\beta)+b=0 \\ a(a+\gamma)+b=0 \quad (-) \\ \hline a(\beta-\gamma)=0 \end{array}$$

然ルニ二次方程式ナレバ  $a \neq 0$  従ツテ  $\beta-\gamma=0$  即チ  $\beta=\gamma$  コハ相異ナル三根  $\alpha, \beta, \gamma$  ナル假定ニ反ス. 従ツテ三根  $\alpha, \beta, \gamma$  ヲ有スルコト能ハズ, 其他ノ場合モ同様ナリ. 故ニ二根ヨリ多クノ根ヲ有セズ. [二根ヲ有スルコトハ公式ヨリ明ナリ]

【問題】121. 方程式  $a(1+x^2)+2bx+c(1-x^2)=0$  = 於テ  $a, b, c$  ガ一ツノ三角形ノ三邊ノ長サヲ表ハストキ根ヲ判別シ, 邊  $a$  = 對スル角ト此ノ方程式ノ根トノ關係ヲ求メヨ. [4. 海兵]

【解】 原方程式ヲ整理シテ  $(a-c)x^2+2bx+a+c=0$

判別式  $D$  ヲ作レバ  $D=b^2-(a-c)(a+c)=b^2+c^2-a^2$  ヲ得.

- (1)  $b^2+c^2 > a^2$  ナラバ  $b^2+c^2-a^2 > 0$  トナルヲ以テ不等實根ヲ有ス而シテ幾何學ニヨリ  $\angle A$  ハ鋭角トナル.
- (2)  $b^2+c^2 = a^2$  ナラバ  $b^2+c^2-a^2 = 0$  トナリテ等根ヲ有シ  $\angle A$  ハ直角ナリ.
- (3)  $b^2+c^2 < a^2$  ナラバ  $b^2+c^2-a^2 < 0$  トナリテ虚根ヲ有シ  $\angle A$  ハ鈍角トナル.
- (4)  $a=c$  ノトキ原方程式ハ  $bx+a=0$  トナルモ根ハ實根(負根)ニシテ  $\angle A$  ハ  $b^2+c^2 > a^2$  ノトキ鋭角,  $b^2+c^2 = a^2$  ノトキ直角,  $b^2+c^2 < a^2$  ノトキ鈍角ナリ.

【注意】 1.  $b^2+c^2 > a^2$  ノトキ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トスレバ

$$a+\beta = \frac{-2b}{a-c}, \quad a\beta = \frac{a+c}{a-c} \quad \text{ヨリ } a > c \text{ ナラバ } a+\beta = \text{負}, a\beta = \text{正}$$

トナルカラ二根ハ負ニシテ  $a < c$  ナラバ  $a+\beta = \text{正}, a\beta = \text{負}$  ヲ  
 ヲ絶対値ノ大ナル方ガ正ニシテ他ハ負トナル.

2.  $b^2+c^2 = a^2$  ノトキ根ハ  $\frac{b}{c-a}$  トナルヲ以テ  $a > c$  ノトキ負根,  $a < c$  ノトキ正根トナル.



【問題】122.  $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$  是於テ  $a, b, c$  及  
ビ  $x$  が實數ナルトキ  $a, b, c$  ハ  $x$  ヲ公比トスル等比級數ヲ  
ナスコトヲ證セヨ. [3. 高知高校, 4. 京大]

【問題】123. 次ノ二ツノ方程式ニ於テ (A) ガ不等ナル實根ヲ有  
スルトキハ (B) ハ虚根ヲ有スルコト及ソノ逆モ亦眞ナルコ  
トヲ證セヨ. [4. 松山高校]

$$(A) \quad x^2+2x+q=0,$$

$$(B) \quad (1+q)(x^2+2x+q)-2(q-1)(x^2+1)=0$$

【注】 (B) ノ判別式ヲ  $4(q-1)\{(1-q)^2+4\}$  マデ誘導セヨ.

【問題】124. 次ノ二次方程式ハ双方共ニ實根ヲ有スルカ、又ハ双  
方共ニ虚根ヲ有スルカナリ、之レヲ證明セヨ. [4. 五高]

$$x^2+px+q=0, \quad (x^2+q)(4q+3p^2)+p(p^2+12q)x=0$$

【注】 第二方程式ノ判別式ヲ  $(p^2-4q)^2$  マデ誘導ス.

【問題】125.  $x=a$  ナルトキニ二次式  $x^2+ax+b$  ガ負數ナラバ  
 $x^2+ax+b=0$  ハ相異ナル實根ヲモツコトヲ證シ、且ツコノ  
二根ト  $a$  トヲ比較セヨ. 但シ  $a, b, a$  ハ實數トス. [4. 高]

$$\text{【注】 } a^2+aa+b = \left(a+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2-4b}{4} < 0 \text{ ヲリ } \left(a+\frac{a}{2}\right)^2 < \frac{a^2-4b}{4}$$

之レヨリ  $a^2-4b > 0$  ヲ誘導シテ判別式ニ適用セヨ.

又二根ヲ  $x_1, x_2$  トスレバ  $x^2+ax+b=(x-x_1)(x-x_2)$  之レニ  
 $x=a$  トシテ  $a^2+aa+b=(a-x_1)(a-x_2) < 0$  ヲリ  $a$  ハ  $x_1$  ト  $x_2$   
トノ間ニアル.

【問題】126. 二次式  $x^2+px+q$  ガ  $x=a$  ノトキト  $x=b$  ノトキ  
トニ於テ相異ナル符號ノ數値ヲ有スルトキハ、二次方程式  
 $x^2+px+q=0$  ノ二根ハ相異ナル實數ニシテ又一根ハ  $a$  ト  $b$   
トノ間ニアルコトヲ證明セヨ. 但シ  $p, q, a, b$  ハ實數トス.  
[4. 長岡工]

【解】  $x^2+px+q=0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トスレバ

$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)$  トナル. 且ツ根ト係數ノ關係ヨリ  
 $\alpha+\beta=-p, \alpha\beta=q$  ヲ得. サテ  $\alpha=A+B\sqrt{-1}$  (但シ  $A, B$  ハ實  
數) ナラバ  $\alpha+\beta=-p$  (實數),  $\alpha\beta=q$  (實數) ヲリ  $\beta=A-B\sqrt{-1}$   
ニ限ル. 故ニ  
 $x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta)=\{x-(A+B\sqrt{-1})\}\{x-(A-B\sqrt{-1})\}$   
 $=(x-A)^2+B^2$

トナル而シテ  $(x-A)^2+B^2$  ハ  $x$  ガ如何ナル實數値ニ對シテモ  
常ニ正ナルヲ以テ  $x^2+px+q$  ハ常ニ正トナル. 從ツテ  $x=a,$   
 $x=b$  ト置キテモ符號變ズルコトガナイカラ假定ニ反スル. サレ  
バ  $\alpha=A+B\sqrt{-1}$  ナルコト能ハズ. 故ニ虚根ヲ有セズ而シテ  
 $A=0$  ノトキ  $\alpha=B\sqrt{-1}$  トナルモ同様デアル. サレバ  $\alpha, \beta$  ハ  
虚數ナル能ハズ從ツテ  $x^2+px+q=0$  ハ實根ヲ有スル.

次ギニ題意ニヨリ  $(a^2+pa+q)(b^2+pb+q) < 0$  然ルニ  
 $(a^2+pa+q)(b^2+pb+q)=(a-\alpha)(a-\beta)(b-\alpha)(b-\beta)$  因ツテ兩式  
ヨリ  $(a-\alpha)(a-\beta)(b-\alpha)(b-\beta) < 0$  即チ

$$(a-\alpha)(b-\alpha)(a-\beta)(b-\beta) < 0$$

從ツテ  $\left. \begin{matrix} (a-\alpha)(b-\alpha) > 0 \\ (a-\beta)(b-\beta) < 0 \end{matrix} \right\}$  ナルカ  $\left. \begin{matrix} (a-\alpha)(b-\alpha) < 0 \\ (a-\beta)(b-\beta) > 0 \end{matrix} \right\}$  ナリ

今  $a > b$  トスレバ  $(a-\alpha)(b-\alpha) > 0$  ヲリ  $a > b > \alpha$  カ又ハ  
 $a > \alpha > b$  ニシテ  $(a-\beta)(b-\beta) < 0$  ヲリ  $a > \beta > b$  ナリ. 同様ニ



$(a-\alpha)(b-\alpha) < 0, (a-\beta)(b-\beta) > 0$  より  $a > b$  ノトキ  $a > \alpha > b$  カ  $a > b > \beta, \beta > \alpha > b$  ナル 何レニシテモ一根ハ  $a$  ト  $b$  トノ間ニアリ.

【問題】127. 二次方程式  $mx^2 + (m+1)x + n = 0$  ガ  $m$  ノ如何ナル有理数ナルモ常ニ有理数ノ根ヲ有スルトキハ  $n=0$  又  $n=1$  ナルコトヲ證セヨ. [2. 名商]

【問題】128.  $2x^2 + ax - 3a^2 + x + 4a - b = 0$  ナル  $x$  = 關スル二次方程式ノ二根ガ  $a$  = 關スル整式ナル様ニ  $b$  ノ數値ヲ定メヨ. [3. 瀧大]

【注】判別式ガ完全平方数トナル場合ヲ考フ.

$$(5a-3)^2 + 8b - 8 \geq 0 \Rightarrow 8b - 8 = 0 \quad \text{答 } b=1.$$

【問題】129.  $a, b$  ガ實数ナルトキ二次方程式  $(a^2+b^2)x^2 - (a+b)^2x + 2ab = 0$  ノ二根ハ何レモ 1 ヨリ大ナラザルコトヲ證明セヨ. [3. 早大]

【注】  $(x-1)\{(a^2+b^2)x - 2ab\} = 0 \therefore x=1$  又ハ  $\frac{2ab}{a^2+b^2}$  サレバ  $1 - \frac{2ab}{a^2+b^2} \geq 0$  ヲ證ス.

【問題】130. 方程式  $x^2 - 2(a-3)x + 5a^2 + 1 = 0$  ノ二根ノ差ヲシテ最大ナラシムル  $a$  ノ實數値ヲ求メヨ. [2. 愛大]

【注】  $\{(a-3) + \sqrt{-4a^2 - 6a + 8}\} - \{(a-3) - \sqrt{-4a^2 - 6a + 8}\}$   
 $= 2\sqrt{\frac{41}{4} - \left(2a + \frac{3}{2}\right)^2}$  より  $a = -\frac{3}{4}$  ヲ得.

【問題】131. 二次方程式  $3bx^2 + 6ax - (3a+b) = 0$  ノ根ヲ求メ、然ル後  $a, b$  何レモ正数ナルトキ一根ハ 0 ト 1 トノ間ニアルコトヲ證明セヨ. [4. 水産]

【注】  $x = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{3}}$  より一根ガ 0 ト 1 トノ間ニアルルハ  $1 > \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1} - \frac{a}{b} > 0$  ヲ證ス. コハ  $a, b$  ガ正ヨリ  $\frac{a}{b}$  ハ正ナレバ  $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right) + 1 > \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + \frac{1}{3} > \left(\frac{a}{b}\right)^2$  より  $\frac{a}{b} + 1 > \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1} > \frac{a}{b}$  之レヨリ誘導ス.

【問題】132.  $a, b$  及ビ  $c$  ガ實数ナルトキ次ノ方程式ハ實根ヲ有スルコトヲ證セヨ.

$$[i] \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} = \frac{1}{c} \quad \text{[立大]}$$

$$[ii] \frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = 0 \quad \text{[北大]}$$

【注意】分數方程式ノ根ト、分母ヲ拂ツテ得タル方程式ノ根トハ一般的ニ同一デナイ.

【問題】133.  $x^2 - 2x + 1 + k(x^2 + 3x + 5) = 0$  ガ等根ヲ有スルトキハ  $k$  ノ値如何. [小樽]

$$\text{答 } k=0 \text{ 又ハ } -\frac{36}{11}$$

【問題】134. 二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ノ根ガ等根ナルトキ  $a+b+c=0$  ナラバ  $a=c$  ナルコトヲ證セヨ. [2. 神船]



【問題】135. 二次方程式  $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$  が等根ヲ有スルトキハ  $b$  ハ  $a$  及  $c$  ノ調和中項ナルコトヲ證セヨ. [4.長商]

【問題】136.  $(b-c)x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$  が等根ヲ有スルナラバ  $a, b, c$  ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ. [3.千歳]

【問題】137.  $x^2 + px + q = 0$  が等根ヲ有スルトキコノ値ハ次ノ方程式ヲ満足スルコトヲ證シ且ツコノ方程式ノ他ノ根ヲ求メヨ.  $ax^2 + p(a+b)x + q(a+2b) = 0$  [4.濱工]

$$\text{答} \quad \frac{-p}{2a}(a+2b)$$

【問題】138. 二次方程式  $(2a+2b+m)x^2 - 2(a-b)x - m = 0$  が等根ヲ有スルタメノ  $m$  ノ値ヲ決定シ, 且コノ  $m$  ノ各ノ値ニ對スルコノ方程式ノ根ノ積ハ 1 ニ等シキコトヲ證セヨ. [4.松本高校]

【問題】139.  $(x-a)(b-x) = 1$  が  $x=1$  ナル等根ヲ有スル様ニ  $a, b$  ノ値ヲ求メヨ.

$$\text{答} \quad a=3, b=5 \text{ 又ハ } a=5, b=3.$$

【問題】140. 次ノ代数式ノ値ヲ  $k$  ニ等シカラシムル  $x$  ノ値ハ唯一ツニ限ルトスレバ,  $k$  ノ値如何. [4.臺北醫]

$$\frac{3x^2 + 6x + 2}{2x^2 + 3x + 1}$$

$$\text{答} \quad k=2 \text{ 又ハ } 6.$$

【問題】141. 方程式  $\frac{2A}{x+a} + \frac{K}{x} + \frac{2B}{x-a} = 0$  が等根ヲ有スル如キ  $k$  ノ値ハ一般ニ二ツアルコトヲ示シ, 且其ノ二ツノ値ヲ  $k_1, k_2$  トスルトキハ  $k_1 k_2 = (A-B)^2$  ナルコトヲ證セヨ. [4.七高]

又  $(k_1 - k_2)^2 = 16AB$  ナルコトヲ證セヨ. [4.名工]

【註】等根條件ハ整理スレバ  $k^2 + 2(A+B)k + (A-B)^2 = 0$  サテ二根ヲ  $k_1, k_2$  トスレバ  $k_1 + k_2 = -2(A+B)$ ,  $k_1 k_2 = (A-B)^2$  ヲ用フ.

【問題】142.  $px^2 + qx + r = 0$  ノ一ノ根ガ他ノ根ヨリ  $k$  ダケ大ナルタメニハ係數  $p, q, r$  ノ間ニ如何ナル關係アルカ. [3.鳥巢]

$$\text{答} \quad q^2 - p^2 k^2 = 4pr$$

【問題】143. 方程式  $(14m-1)x^2 - 2mx + 1 = 0$  ノ二根  $\alpha, \beta$  ノ間ニ  $3\alpha\beta = 2\alpha - \beta$  ナル關係ノ成立スルタメニハ  $m$  ニ如何ナル値ヲ與フベキカ. [3.海兵, 4.陸軍]

$$\text{答} \quad \alpha < \beta \text{ ノトキ } m=0 \text{ 又ハ } m=15.$$

【問題】144. 二次方程式  $x^2 + px + p + 23 = 0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トスルトキ  $\alpha = 2\beta - 1$  ナル様ニ  $p$  ノ値ヲ定メヨ. [4.早大]

$$\text{答} \quad p=13 \text{ 又ハ } -8$$

【問題】145.  $x^2 + px + 12 = 0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トスルトキ次ノ關係アル如ク  $p$  ノ値ヲ定メヨ.  $(\alpha - \beta)^2 - \alpha\beta > 2(\alpha + \beta)$  [4.弘前]

$$\text{答} \quad p > \sqrt{61} - 1 \text{ 又ハ } p < -\sqrt{61} - 1$$



【問題】146. 次ノ二次方程式  $x^2 - (m-2)x - m - 3 = 0$  二於テソノ二根ノ平方ノ和ガ9ナルトキ  $x$  ノ値ヲ小數第三位マデ正シク計算セヨ.  $\square x = 1.561$  又ハ  $-2.561$

【問題】147. 或ル二次方程式ノ二根ノ和及ビ平方ノ和ヲ根トセル方程式ガ  $x^2 - 32x + 87 = 0$  ナルトキ初ノ二次方程式ヲ求めヨ. [3. 浦高]

【註】  $\alpha, \beta$  ヲ二根トスル方程式ハ  $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \dots (1)$  ナリ. 而シテ題意ニヨリ  $(\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) = 32 \dots (2)$   
 $(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) = 87 \dots (3)$  之レヨリ  $\alpha, \beta$  ヲ求めテ (1) ニ代入ス.  $\square x^2 - 3x - 10 = 0$  又ハ  $x^2 - 29x + 419 = 0$

【問題】148. 方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  ノ二根ノ和ヲ  $s_1$ , 平方ノ和ヲ  $s_2$ , 立方ノ和ヲ  $s_3$  トスレバ次ノ關係アルコトヲ證明セヨ. [3. 名商]

$$as_3 + bs_2 + cs_1 = 0$$

【問題】149. 甲乙二人ガ同一ノ一元二次方程式ヲ解キシニ甲ハ一次ノ項ノ係數ヲ書キ誤リ, 乙ハ常數項ヲ書キ誤リタルタメニ, 二根ノ絶對値ノ比トシテ, 甲ハ  $2:3$ , 乙ハ  $5:2$  ヲ得, 且ツ甲ノ大ナル根ハ  $-\frac{4}{5}$ , 乙ノ小ナル根ハ  $\frac{2}{8}$  ナリトイフ. 元ノ方程式ヲ求めヨ. [4. 新潟高校]

$$\square 75x^2 - 175x + 72 = 0$$

【問題】150.  $3x^2 - 6x + a = 0$  ノ二ツノ根ノ立方ノ和ハ4ナリトイフ  $a$  ノ値ヲ求めヨ. [4. 徳工]

$$\square a = 2.$$

【問題】151. 二次方程式  $x^2 + ax + b = 0$  ノ一根ガ他ノ根ノ三倍ナルトキ  $a, b$  ノ間ニ存在スル關係ヲ出セ. マタ此ノ場合二根トモ正ノ整數トシ, 其ノ積ノ最小ナル二根ヲ求めヨ. [3. 大醫大]

【註】 本書 16 頁問題 31 ノ如クシ  $b = \frac{3a^2}{16}$  ヲ得. 而シテ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トスレバ二根トモ正ナルタメニハ  $\alpha + \beta = -a$ ,  $\alpha\beta = b$  ヲ正ヨリ  $\alpha + \beta = -a$ ,  $\alpha\beta = b$  ニ於テ  $-a = \text{正}$ ,  $b = \text{正}$  トナル從ツテ  $a$  ハ負ノ整數ニシテ,  $b$  ハ正整數ナリ. サレバ二根ノ積ノ最小ハ  $\alpha\beta = b$ ,  $b = \frac{3a^2}{16}$ ,  $b = \text{正整數}$  ヲリ  $b = 3$  ニシテ  $a = -4$  ナリ. 故ニ  $\alpha + \beta = 4$ ,  $\alpha\beta = 3$  ヲリ二根ハ 1 ト 3 ナリ.

【問題】152. 二次方程式  $x^2 + px + q = 0$  二於テ一ノ根ガ他ノ根ノ  $n$  倍ナルタメニハ  $p, q$  ノ間ニ如何ナル關係存在スベキカ. 尙  $n = 4$  ナルトキ 30 ヲ超エザル  $p, q$  ノ正ノ整數値ヲ求めヨ. [3. 松山高校]

【註】 本書 16 頁問題 31 ヲリ  $np^2 = (n+1)^2q$  之レニ  $n = 4$  ヲ代入シテ後  $q = \frac{4}{25}p^2$  サレバ  $p = \text{順次} = 1, 2, 3, 4, \dots, 30$  ヲ與ヘテ  $q$  ガ正整數ナルモノニシテ然カモ 30 ヲ超エザルモノヲ取レバ  $p = 5, q = 4$  又ハ  $p = 10, q = 16$  ノ二組トナル.



【問題】153. 二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  二根  $m, n$  なるトキ  $mnb^2=ac(m+n)^2$  ナルトキ二根ノ關係如何. ■  $m:n$

【問題】154.  $ax^2+bx+c=0$  ノ二根ガ異符號ノ實數ナルタメニハ  $b^2-4ac>0$  及ビ  $ac<0$  ナルコトヲ證セヨ.

【註】  $ac<0$  ヨリ  $b^2-4ac>0$  ナルヲ以テ  $b^2-4ac>0$  ナル條件ハ不要ナリ.

【問題】155. 方程式  $x^2-2ax+b^2+c^2=0$  二根  $a$  ハ鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ニシテ  $b, c$  ハ他ノ二邊ナルトキ、此ノ方程式ノ二根ハ正ノ實數ナルコトヲ證セヨ. [3. 東船]

【註】  $b^2-4ac>0, a+\beta>0, a\beta>0$  ヲ證ス.

【問題】156.  $x^2+px-q=0$  二根  $p$  ハ實數、 $q$  ハ正ノ實數ナルトキ此ノ方程式ハ一ツノ正根ト一ツノ負根トヲ有スルコトヲ證セヨ. [東商大]

【問題】157. 二次方程式  $x^2-px+q=0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トシ  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$  及ビ  $\alpha^3+\beta^3$  ヲ根トスル方程式ヲ作レ. [4. 松江校]

$$\text{■ } qx^2 - \{p^2 - 2q + p(p^2 - 3q)\}x + p(p^3 - 2q)(p^3 - 3q) = 0$$

【問題】158. 二次方程式  $px^2+qx+r=0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トシ、 $\frac{\alpha}{\alpha-1}, \frac{\beta}{\beta-1}$  ヲ根トセル方程式ヲ作レ. [4. 海軍]

$$\text{■ } (p+q+r)x^2 - (q+2r)x + r = 0$$

【問題】159.  $a:b:c=r:q:p$  ナルトキ方程式  $ax^2+bx+c=0$  ノ二根ハ  $px^2+qx+r=0$  ノ二根ノ逆數ナルコトヲ證セヨ. [4. 東京高校]

【問題】160. 二次方程式  $x^2+px+1=0$  ノ二根ヲ  $\alpha, \beta$  トシ、次ノ二次方程式  $x^2+qx+1=0$  ノ二根ヲ  $\gamma, \delta$  トスルトキ  $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)$  ヲ  $p, q$  ニテ表ハセ. [4. 京大]

$$\text{■ } q^2 - p^2$$

【問題】161. 二ツノ方程式  $x^2+ax+b=0, x^2+px+q=0$  ノ根ヲ夫々  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  トシ此ノ四數ノ間  $= \frac{\alpha-\gamma}{\gamma-\beta} = \frac{\alpha-\delta}{\beta-\delta}$  ナル關係アルトキ係數  $a, b, p, q$  ノ間ニ如何ナル關係アルカ. [2. 東船]

$$\text{■ } 2(b+q) = ap$$

【問題】162. 方程式  $x^2+ax+b=0$  ノ二根ニ夫々 1 ヲ加ヘタルモノガ方程式  $x^2-a^2x+ab=0$  ヲ満足ストイフ. 初メノ方程式ノ根ヲ索メヨ. 但シ  $a \neq 1$  ナリトス. [4. 一高]

$$\text{■ } x = 1 \pm \sqrt{2}$$

【問題】163.  $ax^2+2bx+c=0$  ノ二根ガ、 $(x+k)^2+6(x+k)+5=0$  ノ二根ニ等シキトキハ  $b^2=4a^2+ac$  ナルコトヲ證シ且  $k$  ノ値ヲ求メヨ. [4. 東城]

$$\text{■ } k = \frac{b}{a} - 3$$



【問題】164. 二次方程式  $x^2+(a+b)x+c^2=0$  ノ二根ノ差ト二次方程式  $x^2+cx+(a+b)c=0$  ノ二根ノ差トガ相等シキトキハ  $a+b=c$  ナルカ,  $a+b=-5c$  ナルカナリ. 之レヲ證セヨ.

[4 福井工]

【問題】165.  $x^2-3x+4c=0$  ト  $2x^2-13x+c=0$  トニ共通ノ一根ヲ有スル様ニ  $c$  ノ値ヲ定メヨ.

[4 慶應大]

答  $c=0$  又ハ  $-7$ 

【問題】166. 方程式  $x^2+ax+bc=0$ ,  $x^2+bx+ac=0$  ガ唯一ツノ根ヲ共有スルトキ, ソノ共通根ト他ノ二根トヲ根トスル方程式ハ  $x^3-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)x-\frac{1}{8}(a^3+b^3+c^3)=0$  ナルコトヲ證セヨ.

[4 三高]

【問題】167. ニツノ方程式  $x^2+px+q=0$ ,  $x^2+p'x+q'=0$  ガ共通ナル一根  $\alpha$  ヲ有スルモノトシ, 各々第二ノ根ヲ夫々  $\beta, \gamma$  トシテ  $\beta, \gamma$  ヲ求メヨ. 次ギニ  $\beta, \gamma$  ヲ根トスル方程式ヲ作り  $p-p'=a$ ,  $q-q'=b$ ,  $p+p'=c$ ,  $pp'=d$  トシテ其ノ方程式ヲ  $a, b, c, d$  ニテ表ハセ.

[2 名工]

$$\text{答 } \beta = \frac{q-q'}{p-p'} - p, \quad \gamma = \frac{q-q'}{p-p'} - p'$$

$$a^2x^2 - (2b-ac)ax + b^2 - abc + a^2d = 0$$

【問題】168. 方程式  $x^2+lx+a=0$ ,  $x^2+mx+b=0$ ,  $x^2+nx+c=0$  ノ何レノ二ツヲトルモ常ニ一ツノ共通根ヲ有ス. 然レドモスベテ共通ナル根ナシトシテ連乗積  $abc$  ヲ  $l, m, n$  ノ項ニテ表ハセ.

[成蹊]

【注】  $\alpha+\beta=-l, \alpha\beta=a, \beta+\gamma=-m, \beta\gamma=b, \alpha+\gamma=-n, \alpha\gamma=c$  ヲリ  $abc=(\alpha\beta\gamma)^2$  ヲ用フ [但シ  $\alpha+\beta=-l, \beta+\gamma=-m, \alpha+\gamma=-n$  ヲリ  $\alpha, \beta, \gamma$  ノ値ヲ見出ス]

$$\text{答 } \frac{(l+m-n)^2(l-m+n)^2(m+n-l)^2}{64}$$

【問題】169.  $ax^2+bx+c=0$  ト  $bx^2+cx+a=0$  トガ共通ノ一根ヲ有スルトキハ  $a^3+b^3+c^3=3abc$  ナルコトヲ證セヨ.

[高岡商]

【注】  $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} - (x^2+\frac{c}{b}x+\frac{a}{b})$  ヲリ共通根ハ  $x = \frac{a^2-bc}{b^2-ac}$  ナリ. 之レヲ原方程式ニ代入ス. 但シ  $b=0$  ノトキ,  $b^2-ac=0$  ノトキヲ吟味セヨ.

## 11. [二次三項式]

【問題】170.  $x^2+px+q=0$  ガ相異なる二ツノ實根  $\alpha, \beta$  ヲ有スルトキ  $x^2+px+q$  ハ  $x = \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta$  トスレバ常ニ負數ナルコトヲ證明セヨ.

[4 廣師]



【注】  $x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta) = x-\frac{1}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta$  を代入シタルトキノ結果ハ  $-\frac{2}{9}(\alpha-\beta)^2$  トナル。コハ  $-\frac{2}{9}(\alpha-\beta)^2 < 0$  ナレバ之レヲ用フ。

【問題】 171.  $x$  = 關スル二次方程式アリ、之レヲ零 = 等シト置キタル方程式ハ  $\frac{3}{2}$  ナル等根ヲ有ス。而シテ  $x$  ヲ 1 トスルトキ其ノ値ハ 1 ナリトイフ。ソノ整式ヲ求メヨ。 [4. 東船]

【注】  $\alpha+\beta, \alpha\beta$  ヲ用フル方便ナラン。 答  $4x^2-12x+9$

【問題】 172.  $x$  = 關スル二次三項式アリ。  $x = \frac{1}{6}(5 \pm 2\sqrt{3})$  ト置ケバ其ノ式ノ値ハ何レモ零トナリ。又  $x=2$  ト置ケバ其ノ式ノ値ハ 37 ナルトイフ。三項式ヲ求メヨ。 [3. 浦歌]

【注】  $\alpha+\beta, \alpha\beta$  ヲ用フル方便ナラン 答  $36x^2-60x+13$

【問題】 173. 二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  ガ相異なる實根ヲ有スルトキ  $ax^2+bx+c$  ハ  $x$  ノ實數値 = 對シテ正トモナリ又負トモナルコトヲ示セ。但シ  $a, b, c$  ヲ實數トス。 [3. 東大]

【問題】 174. 方程式  $ax^2+bx+c=0$  ガ相等シキ二ツノ實根ヲ有スルトキハ  $x$  ノ實數値 = 關シテ一元二次式  $ax^2+bx+c$  ノ値ハ常ニ  $a$  ト同符號ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

但シ  $a, b, c$  ハ實數ヲ表ハス。 [3. 朝大]

## 12. 【最大最小】

【問題】 175.  $a, b$  ハ二ツノ相異なる數ナルトキ  $x^2+px+q$  ガ

$x=a$  ノトキト  $x=b$  ノトキト = 於テ相等シキ値ヲ取ルナラバ、此ノ式ノ値ハ  $x = \frac{a+b}{2}$  ノトキ = 最小ナルコトヲ證セヨ。 [3. 長岡工]

【問題】 176.  $x$  = 關スル二次三項式アリ、 $x=1, 2, 3$  ヲ與ヘタルトキ其ノ數値ガ夫々 15, 10, 7 ナラバ此ノ式ノ極小値ヲ求メヨ。 答 6

【問題】 177.  $y=x^2+px+q$  = 於テ  $x = \frac{7}{4}$  ノトキ  $y = \frac{39}{16}$  ナル極小値ヲトルナラバ  $p, q$  ノ値如何。

$$\text{答 } p = -\frac{7}{2}, q = \frac{11}{2}$$

【問題】 178.  $x$  ハ正トシテ、 $x + \frac{a^2}{x}$  ノ値ヲ最小ナラシムル  $x$  ノ値ヲ見出セ。但シ  $a$  ハ實數ナリトス。 [4. 水戸]

$$\text{答 } x = a$$

【問題】 179.  $x+y=31$  ナルトキ  $x^2+y^2$  ノ値ヲ最小ナラシムベキ  $x, y$  ノ値ヲ求メヨ。 [長南]

$$\text{答 } x=y = \frac{31}{2}$$



【問題】180.  $x+y+z=5$ ,  $x-y+3z=3$  ナルトキ  $x^2+y^2+z^2$  ノ  
最小値ヲ求メ且ツコノトキ  $x, y, z$  ノ値ヲ求メヨ。  
但シ  $x, y, z$  ヲ實數トス。 [京高]

$$\text{答 } x=1\frac{2}{3}, y=2\frac{1}{6}, z=1\frac{1}{6}, \text{ 極小値 } 8\frac{5}{6}$$

【問題】181. 積ガ一定ナルトキ二ツノ正數ノ和ハ如何ナルトキ  
最小トナルカ。 [3. 名高]

【注】  $(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$  ガ便利ナラン。

答 二數ノ差ノ最小ノトキ。

【問題】182.  $x$  ノ二次函數  $y=a+bx-x^2$  ニ於テ  $x=1$  ナルトキ  
 $y=3$  ナル極大値ヲ取ルトイフ。此ノ函數ヲ求メヨ。

$$\text{答 } y=2+2x-x^2$$

【問題】183.  $x$  ガ實數ナルトキ  $x+\sqrt{6ax-7a^2-x^2}$  ノ最大値ヲ  
求メヨ。 [2. 高松高]

$$\text{答 } a>0 \text{ ノトキ } 5a; a<0 \text{ ノトキ } a$$

【問題】184. 與ヘラレタル數ヲ二分シ、其ノ積ヲ最大ナラシメ  
ヨ。 [2. 金高]

答 二根ノ差ノ最小ノトキ

【問題】185.  $x^2-2x$  ガ  $5x-10$  ヨリ大ナラザルタメノ  $x$  ノ極大  
値極小値ヲ求メヨ。 [3. 明高]

$$\text{答 } x=5, x=2.$$

【問題】186.  $x, y$  ガ實數ナルトキ  $x^2+y^2=6x-8y$  ニ適スル  $x, y$   
ノ極大及ビ極小ヲ求メヨ。 [長高]

$$\text{答 } \text{極大 } x=8, y=1 \text{ 極小 } x=-2, y=-9$$

【注】 判別式  $\geq 0$  ヲ用フ。

【問題】187.  $x$  ガ實數ナルトキ  $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$  ノ極大極小ヲ求メ  
ヨ。 [3. 京高]

$$\text{答 } \text{極大 } 7, \text{ 極小 } \frac{1}{7}$$

【問題】188.  $x$  ガスベテノ實數値ヲ取ルトキ分數式  $\frac{5x^2-3}{3x^2-4x+1}$   
ハアラユル實數値ヲ取り得ルコトヲ證セヨ。 [4. 明高]

【問題】189. 無税ニテ輸入スル商品アリ、今之ニ  $r$  割ノ税ヲ課  
スルトキハ輸入額ガ  $2r$  割ダケ減ズルモノトスレバ、最大  
額ノ税ヲ得ルニハ幾割ノ税ヲ課スベキカ。 [4. 山高]

【注】  $\frac{r}{10}\left(1-\frac{2r}{10}\right)=y$  ヨリ  $2r^2-10r+100y=0$  サテ  $r$   
ガ實數ナルタメニハ判別式ヲ作りテ  $y \leq \frac{1}{8}$  ヲ得、故ニ  $y$  ノ最  
大ハ  $\frac{1}{8}$  ナレバ  $2r^2-10r+100 \times \frac{1}{8}=0$  ヨリ  $r=2.5$  ヲ得。

答 2割5分

【注意】 3割 =  $\frac{3}{10}$  ト同様ニシテ  $r$  割 =  $\frac{r}{10}$  デアル。



【問題】190.  $a$  立ノ酒精ヲ入レタル甲樽ト之ト等量ノ水ヲ入レタル乙樽トアリ. 先ヅ甲乙兩樽ヨリ等量ヲクミ出シ之ヲ夫々乙樽甲樽ニ入レ, 次ニ甲乙兩樽ヨリ前ト同ジ量ヲクミ出シ之ヲ夫々乙樽甲樽ニ入ル. 此時乙樽ニ含マルル酒精ノ量が最大ナルタメニハクミ出ス可キ量ヲ如何ニ定ムベキカ.

[4. 七高]

【解】

	酒精	水
最初	甲 $a$ 立	乙 $0$
	乙 $0$	甲 $a$ 立

今  $x$  立汲ミ出シタルモノトス.

第一回ノ結果	甲 $(a-x)$ 立	乙 $x$ 立
	乙 $x$ 立	甲 $(a-x)$ 立

第二回目 = 甲ヨリ取り去ラル、酒精ハ  $x \times \frac{a-x}{a}$  立第二回目 = 乙ヨリ取り去ラル、酒精ハ  $x \times \frac{x}{a}$  ナリ

サレバ第二回ノ手續ヲ完結シタルトキ乙ニアル酒精ハ

$$\left\{ x + \frac{x(a-x)}{a} - \frac{x^2}{a} \right\} \text{立トナル}$$

$$\therefore x + \frac{x(a-x)}{a} - \frac{x^2}{a} = \frac{2(ax-x^2)}{a}$$

サレバ  $ax-x^2$  ノ最大ヲ求ムレバ可ナルヲ以テ

$$ax-x^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + ax - x^2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

從ツテ  $\frac{a}{2} - x = 0$  ノトキ即チ  $x = \frac{a}{2}$  ノトキ最大トナル,

$$\blacksquare \frac{a}{2} \text{ 立}$$

【問題】191. 直角ニ交叉スル  $X, Y$  兩直線アリ. 甲ハ  $X$  直線上ニ, 乙ハ  $Y$  直線上ニ夫々交叉點ヲ距ル甲ハ 50 尺乙ハ 100 尺ノ位置ヨリ共ニ交叉點ニ向ヒ同時ニ進行ヲ始メタリ. 而シテ甲ハ毎秒 4 尺乙ハ毎秒 3 尺ノ速度ヲ以テ方向ヲ變ズルコトナク其進行ヲ續クルモノトセバ, 甲ト乙トノ距離ノ極小値如何, 又時刻ハ初メヨリ幾秒ナルカ. [3. 東船]

【註】ピタゴラスノ定理ニヨリ求ムル距離ヲ  $d$  トシ, 時間ヲ  $t$  トスレバ  $d^2 = (50-4t)^2 + (100-3t)^2 = 25(t^2 - 40t + 500)$   
 $= 25\{(t-20)^2 + 100\}$   
 ヨリ  $t=20, d=50$  ヲ得. 答 50 尺, 20 秒

## 13. 【不 等 式】

【問題】192.  $a, b, c, d, x, y$  ガ實數ナルトキ次式ヲ證セヨ.

[2. 東雲]

[i]  $a^2 + b^2 > 2ab$

[ii]  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

[iii]  $2(a^2 + b^2 + c^2) - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$

[3. 仙工]

[iv]  $b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 \geq abc(a+b+c)$

[v]  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

【註】 [iii] 左邊  $= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$

[iv]  $2(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - 2abc(a+b+c)$   
 $= (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 + (ab-bc)^2 = \geq 0$

[v]  $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2$   
 $= (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2 = \geq 0$



【問題】193.  $a, b, c$  が正数ナルトキ  $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$  ナルコトヲ證セヨ.

【問題】194.  $l^2+m^2+n^2=1, x^2+y^2+z^2=1$  ナルトキ  $lx+my+nz \leq 1$  ナルコトヲ證セヨ.

【注】 上問 [v] = 留意セヨ.

【問題】195.  $a, b, c$  ハ互ニ相異ナル正数ニシテ且ツ  $a^2+b^2=1, c^2+d^2=1$  ナルトキハ  $ac+bd < 1$  及ビ  $ab+cd < 1$  ナルコトヲ證セヨ. [商船]

【注】  $(a-c)^2+(b-d)^2 > 0$  = 留意セヨ.

【問題】196.  $x, y$  が何レモ實数ナルトキハ  $x^2+y^2-xy$  ノ値ハ負数ニアラザルコトヲ證セヨ. [4. 仙工]

【注】 原式  $= x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$  ヲ用フ.

【問題】197.  $x, y$  が任意ノ實数ナルトキ  $x^4+y^4$  ト  $x^3y+xy^3$  トノ大小ヲ比較セヨ. [宮農, 浦教, 福高, 浦醫, 高嶺]

【注】  $x^4+y^4-(x^3y+xy^3) = (x-y)^2(x^2+xy+y^2)$  ト誘導シ,

$x^2+xy+y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$  ヲ誘導セヨ.

又  $(x-y)^2, \left(x + \frac{y}{2}\right)^2, \frac{3}{4}y^2$  ハ何レモ實数ノ平方ナレバ [正数]

又ハ [零] ナリ.

【問題】198.  $x$  が實数ナルトキ  $2x^4+1$  ハ  $2x^3+x^2$  ヨリ小ナラザルコトヲ證セヨ. [2. 神船]

【問題】199.  $x$  が實数ナラバ  $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$  ノ値ハ常ニ正ナルコトヲ證セヨ. [4. 京義]

【注】 原式  $= \{(x-1)(x-6)\}\{(x-3)(x-4)\}+10$   
 $= (x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10$   
 $= (x^2-7x+6)\{(x^2-7x+6)+6\}+10$   
 $= (x^2-7x+6)^2+6(x^2-7x+6)+10$   
 $= \{(x^2-7x+6)+3\}^2+1 = (x^2-7x+9)^2+1$

【問題】200.  $5x^4-12x^3+11x^2-3x+9$  ハ 3 ヨリモ大ナル  $x$  ノ凡テノ値ニ對シテ常ニ正ナルコトヲ證セヨ. [3. 同大]

【注】  $(5x^4-12x^3+11x^2-3x+9)+(x-3)$  ヨリ考ヘヨ.

【問題】201.  $x^2+px+\frac{p}{2}$  が  $x$  及ビ  $p$  ノ實数值ニ對シテ常ニ正ナル爲メニハ  $p$  ノ値ノ限界如何. [4. 愛大]

【注】 原式  $= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p(2-p)}{4}$  ヨリ  $p(p-2) < 0$   
 從ツテ  $0 < p < 2$ .

【問題】202.  $x^2-(8m-2)x+(15m^2-2m-7)$  が  $x$  ノ値ノ如何ニ拘ラズ正ナルタメニハ  $m$  ノ値ヲ如何ニ定ムヘキカ. [明專]  
 答  $4 > m > 2$ .

【注意】 虚数ノ大小ハ考ヘラレナイモノデアルカラ、虚数ト虚数、虚数ト實数トノ大小比較ハ不能デアル。サレバ不等式及ビ大小比較問題中ノ文字ハ何レモ實数ヲ表ハスモノデアル。



【問題】203. 二次式  $2x^2+ax+a-2$  の値ハ  $x$  ノ總テノ實數値ニ對シテ負トナルコトナシトセバ  $a$  ハ如何ナル實數ナルカ.

[4. 大阪高校]

【注】 原式  $= 2\left\{\left(x+\frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a-4}{4}\right)^2\right\}$  ヨリ  $a, x$  ハ實數ナレバ

$\left(x+\frac{a}{4}\right)^2 \geq 0$  而シテ  $\left(\frac{a-4}{4}\right)^2 \geq 0$  ヨリ  $\left(\frac{a-4}{4}\right)^2 = 0$  ノトキナレバ  $a=4$  フ得. □  $a=4$

【問題】204.  $a, x$  ハ實數ニシテ、且ツ  $p=x+a-3$  ナルトキ  $(ap-3x)(3a-px)$  ノ平方根ヲ實數ナラシムル  $x$  ノ値ノ範圍ヲ求メヨ. [4. 高知高校]

【注】  $(ap-3x)(3a-px) \geq 0$  ヨリ  $p$  ヲ消去シテ  $-(x+a)^2(a-3)(x-3) \geq 0$  フ得.

□  $x=-a; a=3$  ノトキ  $x$  ハ無條件;  
 $a>3$  ノトキ  $x \leq 3; a<3$  ノトキ  $x \geq 3$

【問題】205. 實數  $a, b, c$  ガ  $a>b>c$  又ハ  $a<b<c$  ナルトキ  $x^2-2(a+c-2b)x+(a-c)^2$  ハ  $x$  ガ如何ナル實數値ヲ取ルモ常ニ正ナルコトヲ證セヨ. [3. 海蔵]

【注】 原式  $= \{x-(a+c-2b)\}^2 + 4(a-b)(b-c)$  ト變形ス.

【問題】206. 四次式  $ax^4+hx^3+(2a+b)x^2+hx+a$  ガ  $x$  ノ總テノ實數値ニ對シテ正ナルタメノ條件ヲ求メヨ. [3. 水戸高校]

【解】 原式  $= x=0$  ヲ代入シテ正トナルタメニハ  $a>0$  デナケレバナラヌ. 次ギニ  $x$  ガ零デナイトキノ實數値ニ就テ考ヘル  
 $ax^4+hx^3+(2a+b)x^2+hx+a = x^2\left\{ax^2+2a+\frac{a}{x^2}+hx+\frac{h}{x}+b\right\}$   
 $= x^2\left\{a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+h\left(x+\frac{1}{x}\right)+b\right\}$

今  $x+\frac{1}{x}=y$  トスレバ  $=x^2\{ay^2+hy+b\}$

サレバ  $x$  ガ實數 ( $x=0$  ヲ除ク) ナル限リ  $x^2>0$  デアルカラ二次式  $ay^2+hy+b$  ノ正ナルトキヲ考フレバヨイ.

$ay^2+hy+b = a\left\{\left(y+\frac{h}{2a}\right)^2 + \frac{4ab-h^2}{4a^2}\right\}$  サテ前證ヨリ

$a>0$  デアルカラ  $\left(y+\frac{h}{2a}\right)^2 + \frac{4ab-h^2}{4a^2} > 0$  ガ  $y$  ノ凡テノ實數値ニ就テ成立スルタメニハ  $4ab-h^2 > 0$  デナケレバナラヌ (但シ  $h$  ハ實數) □  $a>0, 4ab>h^2$ . (但シ  $h$  ハ實數).

【問題】207.  $x, y, z$  ガ實數ニシテ  $xz > y^2$  ナラバ  $x^3+y^3+z^3$  ハ  $x$  ト同ジ符號ヲ持ツコトヲ證明セヨ. [4. 八高]

【方針】  $x$  ト同ジ符號ヲ有スルコトハツマリ  $x \times (\text{原式}) > 0$  カ  $x^3 \times (\text{原式}) > 0$  ナルコトヲ證明スルニアル.

【解】  $x^3(x^3+y^3+z^3) = x^6+x^3y^3+x^3z^3$  然ルニ  $xz > y^2$  ナレバ之レヲ代入シテ

$$x^6+x^3y^3+x^3z^3 > x^6+x^3y^3+y^6$$

$$\therefore x^3(x^3+y^3+z^3) > \left(x^3+\frac{1}{2}y^3\right)^2 + \frac{3}{4}y^6$$

$$\therefore x^3(x^3+y^3+z^3) > 0 \dots + x^2 \dots (x^2 > 0)$$

$\therefore x(x^3+y^3+z^3) > 0$  ヨリ  $x$  ト  $x^3+y^3+z^3$  トハ同符號ナラザルベカラズ.

$$\begin{aligned} & x^6+x^3y^3+y^6 \\ & = \left(x^3+\frac{1}{2}y^3\right)^2 + \frac{3}{4}y^6 \\ & = (\text{正數}) + (\text{正數}) > 0 \end{aligned}$$



【注意】  $x=0$  のとき  $xz > y^2$  より  $0 > y^2$  従って  $y$  は虚数トナルカラ假定(實數) = 反ス. 故に  $x=0$  の場合ナシ

【問題】 208. 整式  $(x^2+ax+b)(x^2-2x+3)$  が  $x-\alpha$  ニテモ,  $x-\beta$  ニテモ整除セラルトキ,  $x$  が  $\alpha$  と  $\beta$  との間ニアル任意ノ實數ナラバ上ノ四次式ノトル符號如何. 但シ  $\alpha, \beta$  ハ互ニ異ナル實數ナリトス. [4. 三高]

【註】 原式  $= (x-\alpha)(x-\beta)\{(x-1)^2+2\}$  より判定セヨ.

【問題】 209. [i]  $a, b, c$  ハ正數ニシテ  $a(b^2-c^2), 2abc, a(b^2+c^2)$  ハ  $b > c$  ナラバ直角三角形ノ三邊ノ長サヲアラハスコトヲ證明セヨ.

[ii] 上ノ性質ヲ利用シテ三邊ノ長サガスベテ整數ナル直角三角形ノ一ツヲ求メヨ. [4. 滿福大]

【註】  $a(b^2+c^2) > 2abc, a(b^2+c^2) > a(b^2-c^2)$  ヲ證シ後  
 $\{a(b^2+c^2)\}^2 = \{a(b^2-c^2)\}^2 + (2abc)^2$  ヲ證セヨ.  
 次ギニ  $a=1, b=2, c=1$  トシテ試ミヨ.

【問題】 210. 相異ナル四ツノ正數  $a, b, c, d$  ガ比例スルトキ  $a$  ヲ最大トスレバ  $a+d > b+c$  ナルコトヲ證セヨ.

[3. 福工; 4. 一高; 4. 廣工; 4. 和商]

【問題】 211.  $a, b, c, d$  ガ等差級數ヲナストキ次式ヲ證セヨ.

[i]  $ad < bc$  [ii]  $a^2+d^2 > b^2+c^2$  [4. 經高]

【問題】 212. 相異ナル四ツノ正數  $a, b, c, d$  ガ等比級數ヲナストキハ  $a+d > b+c$  ナルコトヲ證セヨ. [4. 早稲田]

【問題】 213.  $a, b, c$  ハ何レモ正ニシテ且等比級數ヲナストキハ次ノ關係式ヲ證明セヨ.  $a^2+b^2+c^2 > (a-b+c)^2$  [早大]

【問題】 214.  $a$  ガ實數ナルトキ  $\frac{1}{a^2+a+1}$  と  $a^2-a+1$  とノ大小如何. [3. 四高]

$$\text{【註】 } a^2-a+1 - \frac{1}{a^2+a+1} = \frac{a^4+a^2}{a^2+a+1}$$

$$\text{而シテ } a^4+a^2 \geq 0, a^2+a+1 = \left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

答  $a^2-a+1$  ノ方大

【問題】 215.  $a > 0$  ナルトキハ  $\frac{a}{(a+4)(a+9)}$  ノ値ハ  $\frac{1}{25}$  より大ナルコトナシ. 之レヲ證明セヨ. [4. 富山高]

【註】  $\frac{a}{(a+4)(a+9)} - \frac{1}{25} = \frac{-(a-6)^2}{25(a+4)(a+9)}$  ヲ吟味スルカ, 又ハ  
 $\frac{a}{(a+4)(a+9)} = k$  ト置キ分母ヲ拂ツテ實數條件ヨリ判別式ヲ作  
 レバ  $(k-1)(25k-1) \geq 0$  然ルニ  $a > 0$  より  $0 < \frac{a}{(a+4)(a+9)} < 1$   
 ナレバ  $0 < k < 1$  ヲ用フ.

【問題】 216. 二ツノ正整數アリ. 其ノ和ト各ノ逆數ノ和トノ積ハ 4 より小ナラザルコトヲ證セヨ. [3. 經高]

【註】  $(x-y)^2 \geq 0$  より  $(x+y)^2 \geq 4xy$  即チ  $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4$



【問題】217.  $b > 0, d > 0, \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  ナルトキハ  $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$  ナルコトヲ證セヨ. [3. 廣島高校]

【問題】218.  $a > b > 0, x^2 \geq 0$  ナルトキ次ノ關係アルコトヲ證セヨ.  $\frac{a+b}{a-b} \geq \frac{x^2 - 2bx + a^2}{x^2 + 2bx + a^2} \geq \frac{a-b}{a+b}$  [3. 山形高校]

【注】  $\frac{a+b}{a-b} - \frac{x^2 - 2bx + a^2}{x^2 + 2bx + a^2} = \frac{2b(x+a)^2}{(a-b)\{(x+b)^2 + (a^2 - b^2)\}}$  ト誘導ス. 且ツ  $a-b > 0, a^2 - b^2 > 0, (x+a)^2 \geq 0, (x+b)^2 \geq 0$

【問題】219.  $u, v$  ガ正數ニシテ  $c$  ヨリ小ナラバ  $v = \frac{u+v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$  モ又  $c$  ヨリ小ナルコトヲ證セヨ. [3. 佐賀高校]

【注】  $c-v = \frac{(c-u)(c-v)}{c(1 + \frac{uv}{c^2})}$  ト誘導シ.  $0 < u < c, 0 < v < c$  ヲ用フ.

【問題】220.  $R = \frac{(c-m) + (c-n)}{1 + \frac{(c-m)(c-n)}{c^2}}$  ニ於テ  $c, m, n$  ガ正ノ整數ニシテ  $m, n$  ハ  $c$  ヨリ小ナル時  $R < c$  ナルコトヲ證セヨ. [4. 京城商]

【問題】221.  $\left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2 > 1$  ナルトキハ  $a, b$  ノ絶對値ハ共ニ  $1$  ヨリ小ナルカ又ハ共ニ  $1$  ヨリ大ナルコトヲ證セヨ. [4. 山口高校]

【注】  $(1-a^2)(1-b^2) > 0$  ニ誘導ス.

【問題】222.  $a, b, c$  ガ正ニシテ相異ナルトキ  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > 3$  ナルコトヲ證セヨ. [2. 朝鮮大]

【注】  $a > b > c$  ヨリ  $a = b+x, c = b-y$  ト假定スレバ  $x > 0, y > 0$  デアル.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} &= \left(1 + \frac{x}{b}\right) + \left(1 + \frac{y}{b-y}\right) + \left(1 - \frac{x+y}{b+x}\right) \\ &= 3 + \frac{x^2}{b(b+x)} + \frac{y(x+y)}{(b+x)(b-y)} \\ &= 3 + \frac{x^2}{ab} + \frac{y(x+y)}{ac} \text{ ト誘導シテ試ミヨ.} \end{aligned}$$

【問題】223.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$  ナルコトヲ證セヨ. 但シ  $a, b, c$  ハ何レモ正ナルモノトス. [陸士]

### 【不等式ニ關スル正誤】

1.  $A > B$  ニシテ  $m > 0$  ナラバ  $\left\{ \frac{mA}{m} > \frac{mB}{m} \right\}$  デアル [正]

[不等式ノ兩邊ヲ正數デ乘除シテモ不等號ノ向キハ變ラヌ]

2.  $A > B$  ニシテ  $m < 0$  ナラバ  $\left\{ \frac{mA}{m} > \frac{mB}{m} \right\}$  デハナイ [誤]

$\left\{ \frac{mA < mB}{m < m} \right\}$  デアル [正]

【例】◎  $5 > 3$  ノ兩邊ニ  $-2$  ヲカケテ  $-10 < -6$ ,

◎  $5 > -8$  ノ兩邊ニ  $-3$  ヲカケテ  $-15 < 24$

◎  $-2 > -5$  ノ兩邊ニ  $-3$  ヲカケテ  $6 < 15$

[不等式ノ兩邊ヲ負數デ乘除スルト不等號ノ向キガ變ル]



【問題】224.  $a, b, c$  が何れも正ナルトキ  $\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} > 3$  ナルコトヲ證セヨ. [神商]

【問題】225. [i]  $ax+b > cx+d$  但シ  $a \neq 0$  [4. 臺農]  
[ii]  $x^2+3x < 28$  [4. 米工] } ヲ解ケ.

答 [i]  $a > c$  ノトキ  $x > \frac{d-b}{a-c}$ ;  $a < c$  ノトキ  $x < \frac{d-b}{a-c}$   
[ii]  $4 > x > -7$

【問題】226.  $n$  が如何ナル範圍ノ數デアレバ  $n^2+n+5$  ハ  $3n+7$  ヨリ 1 以上大デアルカ. 答  $3 > n > -1$ . [3. 大倉]

3.  $A > B$  ヲ平方スレバ  $A^2 > B^2$  ト限ラナイ. [判定不明]

【例】◎  $5 > 3$  平方シテ  $25 > 9$  ◎  $3 > -2$  平方シテ  $9 > 4$

◎  $3 > -7$  平方シテ  $9 < 49$  ◎  $-2 > -5$  平方シテ  $4 < 25$

[不等式ノ兩邊ヲ平方スレバ不等號ノ向キハ不明デアル. 絶對値ノ大ナル方が平方スレバ大トナル]

4.  $A^2 > B^2$  ヲ開ケバ  $A > B$  [正],  $A > -B$  [正],  $-A < B$  [正],  $-A < -B$  [正] デアル. [但シ  $A > 0, B > 0$  トス]

5.  $A > B, C > D$  ナラバ  $A+C > B+D$  デアル [正]

6. ◎  $A > B, C > D$  ナラバ  $A-C > B-D$  トハ限ラナイ. [判定不明]

【例】◎  $18 > 10, 3 > 2$  ヨリ  $18-3 > 10-2$

◎  $18 > 10, 15 > 3$  ヨリ  $18-15 < 10-3$

◎  $18 > 10, -1 > -3$  ヨリ  $18-(-1) > 10-(-3)$

◎  $18 > 10, -2 > -15$  ヨリ  $18-(-2) < 10-(-15)$

【問題】227.  $x^2-5x+6 > 0$  ニシテ同時ニ  $x^2-9x+8 < 0$  ナルベキ  $x$  ノ範圍ヲ求メヨ. [2. 長岡工]

答  $8 > x > 3, 2 > x > 1$

【注】  $x^2-5x+6 > 0$  |  $x^2-9x+8 < 0$   
 $(x-2)(x-3) > 0$  |  $(x-1)(x-8) < 0$   
 $\therefore \left. \begin{array}{l} (x-2) > 0 \\ (x-3) > 0 \end{array} \right\}$  カ又ハ |  $\therefore \left. \begin{array}{l} x-1 > 0 \\ x-8 < 0 \end{array} \right\}$  カ又ハ  
 $\left. \begin{array}{l} (x-2) < 0 \\ (x-3) < 0 \end{array} \right\}$  カナリ |  $\left. \begin{array}{l} x-1 < 0 \\ x-8 > 0 \end{array} \right\}$  カナリ

【問題】228.  $a > b$  ニシテ且ツ  $c > d$  ナラバ常ニ  $ac > bd$  ナルカ. [3. 長岡工]

【注】  $a=3, b=-5, c=8, d=-1$  又ハ  $a=3, b=-5, c=2, d=-4$  又ハ  $a, b, c, d$  が何れも負數ノトキヲ驗セ.

【問題】229.  $A, B$  ハ共ニ正ノ整數デ  $3000 < A < 3025; 25 < B < 30$  デアルコトヲ知レバ  $\frac{A}{B}$  ハ如何ナル二整數ノ間ニアルカ. ナルベク狭イ範圍デ此ノ二整數ヲ求メヨ. [4. 大倉商]

答  $100 < \frac{A}{B} < 121$

7.  $A > B, C > D$  ナラバ  $A-D > B-C$  デアル [正]

【例】◎  $18 > 10, 3 > 2$  ヨリ  $18-2 > 10-3$

◎  $18 > 10, 15 > 3$  ヨリ  $18-3 > 10-15$

◎  $18 > 10, -1 > -3$  ヨリ  $18-(-3) > 10-(-1)$

◎  $18 > 10, -2 > -15$  ヨリ  $18-(-15) > 10-(-2)$



【問題】230.  $a$  及  $b$  が夫々  $60 < a < 85$  及  $30 < b < 34$  ナル範囲  
 = 於テ與ヘラレタルトキ,  $a+b$ ,  $a-b$ ,  $ab$ , 及  $\frac{a}{b}$  ハ夫々  
 如何ナル二整数ノ間ニアルカ. [2. 大器大]

$$\begin{array}{l} \text{【注】} \\ \frac{60 < a < 85}{30 < b < 34} (+) \quad \frac{60 < a < 85}{34 > b > 30} (-) \quad \frac{60 < a < 85}{\times 30 < b < 34} \\ \hline 90 < a+b < 119 \quad 26 < a-b < 55 \quad 1800 < ab < 2890 \\ \\ \frac{60 < a < 85}{34 > b > 30} \Rightarrow 1 \frac{13}{17} < \frac{a}{b} < 2 \frac{5}{6} \quad \therefore 1 < \frac{a}{b} < 3. \\ \frac{60}{34} < \frac{a}{b} < \frac{85}{30} \end{array}$$

$$\text{【注】 } 90 < a+b < 119, 26 < a-b < 55, 1800 < ab < 2890, 1 < \frac{a}{b} < 3$$

【注意】  $a-b$  ト  $\frac{a}{b}$  トノ場合ヲ注意セヨ.

8.  $A > B, C > D$  ナラバ  $A \times C > B \times D$  トハ限ラナイ [判定不明]

【例】  $\odot 5 > 3, 4 > 2 \Rightarrow 5 \times 4 > 3 \times 2$

$\odot 5 > 3, 2 > -4 \Rightarrow 5 \times 2 > 3 \times (-4)$

$\odot 5 > 3, -2 > -5 \Rightarrow 5 \times (-2) > 3 \times (-5)$

$\odot 15 > 4, -2 > -5 \Rightarrow 15 \times (-2) < 4 \times (-5)$

但シ  $\begin{cases} A > B > 0, C > D > 0 \text{ ナラバ } A \times C > B \times D \text{ デアル [正]} \\ 0 > A > B, 0 > C > D \text{ ナラバ } A \times C < B \times D \text{ デアル [正]} \end{cases}$

9.  $A > B, C > D$  ナラバ  $\frac{A}{C} > \frac{B}{D}$  トハ限ラナイ [判定不明]

10.  $A > B, C > D$  ナラバ  $\frac{A}{D} > \frac{B}{C}$  トハ限ラナイ [判定不明]

但シ  $\begin{cases} A > B > 0, C > D > 0 \text{ ナラバ } \frac{A}{D} > \frac{B}{C} \text{ デアル [正]} \\ 0 > A > B, 0 > C > D \text{ ナラバ } \frac{A}{D} < \frac{B}{C} \text{ デアル [正]} \end{cases}$

【問題】231. 小数第四位未満ヲ四捨五入スルコトニヨリテ二数  
 $a, b$  ノ近似値トシテ  $a=3.1416, b=1.7321$  ヲ得タリ. 之レ  
 ヲ用キテ  $a+b, a-b, ab$  ヲ信用シ得ル位マデ算出セヨ.

[3. 大器大]

【解】  $a=3.1416$  = 於テ小数第四位ノ6ハ四捨五入ノ結果デア  
 カテ  $3.14155 \dots$  ノ小数第五位ノ5ヲ切上ゲタル場合アリ.  
 故ニ  $a \geq 3.14155$  ヲ得. 又  $3.14164 \dots$  ノ小数第五位4ヲ  
 切捨タル場合アリ 故ニ  $a < 3.14165$  トナル.  
 従ツテ  $3.14155 \leq a < 3.14165$  ヲ得.  
 同様ニ  $1.73205 \leq b < 1.73215$  ナリ.

$$\begin{array}{l} (1) \quad \frac{3.14155 \leq a < 3.14165}{1.73205 \leq b < 1.73215} (+) \quad \text{【} a+b \text{】ノ算出} \\ \hline 4.8736 \leq a+b < 4.8738 \quad \text{之レヨリ小数第三位マデ兩邊トモ同} \\ \text{一ナレバ } a+b \text{ ノ信用シ得ル位ハ小数第三位マデナリ.} \end{array}$$

$$a+b=4.873$$

(2)  $a-b$  ヲ算出スルニハ少シ注意ヲ要ス.

$a-b$  ノ最大ハ  $a$  ノ最大ト  $b$  ノ最小トヲ組合ハス.

$a-b$  ノ最小ハ  $a$  ノ最小ト  $b$  ノ最大トヲ組合ハス.

$$\begin{array}{l} \therefore \frac{3.14155 \leq a < 3.14165}{1.73215 > b \geq 1.73205} (-) \\ \hline 1.4094 < a-b < 1.4096 \quad \text{之レヨリ } a-b=1.409 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (3) \quad \frac{3.14155 \leq a < 3.14165}{1.73205 \leq b < 1.73215} (\times) \\ \hline 3.14155 \times 1.73205 \leq ab < 3.14165 \times 1.73215 \end{array}$$

$$5.4413216775 \leq ab < 5.4418090475 \Rightarrow ab=5.441$$

$$\text{【注】 } a+b=4.873; a-b=1.409; ab=5.441$$



【問題】232.  $a, b$  二数アリ,  $a=1.234+x$ ,  $b=2.718+y$  ニシテ  $x, y$  ノ絶対値ハ何レモ  $0.0005$  ヨリモ大ナラズトイフ. 然ラバ  $ab$  ト  $1.234 \times 2.718$  トノ差ハ  $0.002$  ヨリモ小ナルコトヲ證セヨ. [陸士]

【問題】233. 小數第六位ヲ四捨五入シタル値  $\gamma=7.37329$  及ビ  $\pi=3.14159$  ヲ用ヒテ半徑  $\gamma$  ナル圓ノ周  $s$  ヲ公式  $s=2\pi\gamma$  ヨリ求ムルニ, 小數第何位マデ正シキ數字ヲ望ミ得ルカ.

答 小數第三位 (46.327) [2. 成城高波]

【問題】234. 正ノ整数  $n$  ノ正ノ平方根ノ整数部ヲ  $a$  トスレバ其ノ小數部ト  $\frac{n-a^2}{2a}$  トノ差ハ  $\frac{1}{2a}$  ヨリモ小ナルコトヲ證明セヨ. [陸士]

【注】 小數部ヲ  $p$  トスレバ  $(a+p)^2=n$  ヲ得. 之レヲ變形シテ

$$\frac{p^2}{2a} = \frac{n-a^2}{2a} - p \quad \text{然ルニ } p^2 < 1 \text{ ナレバ之レヲ用フ.}$$

【問題】235.  $\frac{4}{13}$  ノ分母子ニ同ジ數ヲ加ヘタルモノガ  $\frac{29}{31}$  ヨリ大ナルベキ, 最小正整数値ヲ求メヨ. [4. 名高]

【注】  $\frac{4+x}{13+x} > \frac{29}{31}$  サテ  $x > 0$  ヨリ  $13+x > 0$  ナレバ分母ヲ拂

$$\text{フテ } x > 126\frac{1}{2} \text{ トナル.}$$

答 127

## 14. 【分數方程式】

【問題】236. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$[i] \quad \frac{x^2-3x}{x^2-1} + 2 + \frac{1}{x-1} = 0$$

[4. 大阪商大, 3. 水原]

$$[ii] \quad \frac{1-3x}{x^2-1} + \frac{1}{x-1} + 3 = 0$$

[3. 廣師]

$$\text{答 } [i] \quad -\frac{1}{3}, \quad [ii] \quad -\frac{1}{3}$$

【問題】237. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$[i] \quad \frac{9}{5-x-x^2} = 1+x+x^2$$

[3. 商專]

$$[ii] \quad \frac{2x-3}{3x-5} + \frac{3x-5}{2x-3} = \frac{5}{2}$$

[3. 鳥農]

【注】  $1+x+x^2=y$  トセヨ.

$$\text{答 } [i] \quad 1, -2 \quad [ii] \quad 1, \frac{7}{4}$$

【問題】238. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$[i] \quad \frac{x+1}{x+3} + \frac{x+3}{x+5} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+5}{x+7}$$

[4. 新潟高波]

$$[ii] \quad \frac{x+a}{a-x} + \frac{x+b}{b-x} + \frac{x+c}{c-x} = 3$$

[4. 福商]

$$[iii] \quad \frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$$

[4. 京商]

【注意】 分數方程式ノ根トハ原方程式ヲ満足スルモノノミヲ取ルモノト規約ス. サレバ分數方程式ニ於テハ必ズ驗算ヲシテ根ヲ決定スルモノト定ム.



【注】各項ヨリ1ヲ引キテ簡單ニセヨ。

又 [iii] ハ  $\frac{x-a}{b} = \alpha, \frac{x-b}{a} = \beta$  トスルモヨシ。

$$\text{答 [i] } -4 \quad \text{[ii] } 0, \frac{1}{3}\{a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}\}$$

$$\text{[iii] } 0, a+b, \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

### 15. 【無理方程式】

【問題】239. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\text{[i] } x^2 - x + 3\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{2} + 7 \quad \text{[4. 新潟高校]}$$

$$\text{[ii] } x^2 + 3 - \sqrt{2x^2 - 3x + 2} = \frac{3}{2}(x+1) \quad \text{[3. 米工]}$$

【注】  $2x^2 - 3x + 2 = y$  ト置ケ。  $\text{答 [i] } -\frac{1}{2}, 2 \quad \text{[ii] } \frac{1}{2}, 1$

【問題】240. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\text{[i] } \sqrt{x} - \sqrt{5-x} = 1 \quad \text{[4. 広島高工]}$$

$$\text{[ii] } \sqrt{x+2} + \sqrt{3x+5} = \sqrt{2x-3} \quad \text{[2. 水産]}$$

答 [i] 4 [ii] 不能。

【問題】241.  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1$  ヲ解ケ。

【方針】根式ニツアルトキハ普通  $\sqrt{1+x} = 1 + \sqrt{1-x}$  ノ如ク一ツヲ移項シテ平方スルガ通則デアル。サテ

$$\text{平方シテ } 1+x = 1+2\sqrt{1-x}+1-x \quad \text{ヨリ } 2x-1 = 2\sqrt{1-x}$$

【注意】根號  $\sqrt{\quad}$  ハ正ヲ表ハスモノト規約ス從ツテ此ノ規約ヨリ  $\sqrt{x+3} = -2$  ハ不能デアル。又根號方程式ヲ解クタメニ平方セルトキハ必ず檢算ヲ行フテ満足スルモノ、ミヲ根トシテ採用シ答案ニハ檢算ヲ明記スルモノトス。

更ニ平方シテ  $(2x-1)^2 = 4(1-x)$  ヲリ  $4x^2 = 3$  トナルガ然シ本問ノ如キハ移項セズ平方スレバ  $x$  ハ消去スルカラ

一般ニ斯様ナ點

ニ留意シテ、移項スベキカ、又ハ如何ニ移項スレバヨイ

カヲ調

察ヨリ判定ス。

【解】  $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = 1$  兩邊ヲ平方シテ

$$(\sqrt{1+x})^2 - 2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x} + (\sqrt{1-x})^2 = 1 \quad \text{ヨリ}$$

$$1+x - 2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x} + 1-x = 1$$

$$\therefore 1 = 2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x} \quad \text{更ニ平方シテ}$$

$$1 = 4(1+x)(1-x) \quad \text{ヨリ } 4x^2 = 3$$

$$\text{從ツテ } x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ヲ得。}$$

$$\begin{aligned} \text{【檢算】 } x &= \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ノトキ} \\ &\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \\ &= \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}+1}{4}} - \sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1 - \sqrt{3}+1}{2} = 1 \end{aligned}$$

即チ満足ス

$$\begin{aligned} \text{【檢算】 } x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ノトキ} \\ &\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \\ &= \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3-2\sqrt{3}+1}{4}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}+1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1 - \sqrt{3}-1}{2} = -1 \end{aligned}$$

満足セズ

$$\text{答 } x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



【問題】242. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$[i] \sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x} = 2 \quad [2. 慶教]$$

$$[ii] \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}} \quad [4. 三高]$$

$$\text{答} [i] \sqrt{2}, [ii] -\sqrt{2}$$

【問題】243. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$[i] \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{1-x} = 1 \quad [3. 北大]$$

$$[ii] \sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$$

$$\text{答} [i] \frac{16}{25}, [ii] \frac{5}{4}$$

【問題】244. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$[i] x - a\sqrt{x-a} = a \quad (\text{但シ } a > 0) \quad [3. 早大]$$

$$[ii] \sqrt{3ax-x^2} - \sqrt{x^2-3bx} = \sqrt{3x(a-b)} \quad [4. 大分商]$$

$$\text{答} [i] a, a^2+a \quad [ii] 0, 3b, 3a \text{ ハ } a=0 \text{ 又ハ } a=b \text{ ノトキ根ナリ.}$$

【問題】245.  $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3x}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3x}}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3x}}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3x}}}}$  ヲ解ケ. [4. 七高]

答 1.

【注】  $\sqrt{3x}=y$  トシテ後有理化シテ分母ヲ拂フ方便ナランカ.【問題】245.  $\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{(x-c)^2+b^2}} = 0$  ヲ解ケ.但シ  $a, b$  ハ正ニシテ  $c$  ハ零ナラズトス. [高校]

【注】 移項シテ平方シ後兩邊ヨリ夫々 1 ヲ引キテ求メヨ. (検算困難)

$$\text{答} \frac{ac}{a+b}, a-b=0 \text{ ノトキ } \frac{c}{2} \text{ ハ根ナリ.}$$

【問題】247.  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2k$  ハ  $k$  ノ如何ナルトキ根ヲ有セザルカ. 但シ  $k > 0$  トス. [海兵]

【注】  $\frac{k^2+4}{k^2}$  ヲ検算スルト  $\sqrt{\frac{(k^2+2)^2}{k^2}} + \sqrt{\frac{(k^2-2)^2}{k^2}}$  トナルガ、根號  $\sqrt{\quad}$  ハ正ヲ表ハシ且ツ  $k > 0$  デアルカラ  $k^2 > 2$  ノトキハ  $2k$  トナリ、 $k^2 < 2$  ノトキハ  $\frac{4}{k}$  トナルカラ満足シナイ。従ツテ  $\sqrt{2} > k > 0$  ノトキ根ヲ有セナイ。

## 16. 【高次方程式】

【問題】248. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$[i] x^3 = 1 \quad [4. 法大] \quad [ii] x^3 = 27. \quad [3. 長商]$$

$$\text{答} [i] 1, \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, [ii] 3, \frac{3}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$$

【問題】249. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$[i] x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad [3. 東聖]$$

$$[ii] (x^2+x)^2 + 4(x^2+x) - 12 = 0 \quad [4. 京商]$$

$$\text{答} [i] \pm 1, \pm 3 \quad [ii] 1, -2, \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-23})$$

【問題】250. 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$[i] x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0 \quad [4. 昭商]$$

$$[ii] 4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = 0 \quad [3. 千商]$$



【注】  $4x^4 - 4x^3 - 7x^2 - 4x + 4 = (4x^4 + 4) - (4x^3 + 4x) - 7x^2$

今 $x + \frac{1}{x} = y$ トス	$= x^2 \left\{ 4 \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 4 \left( x + \frac{1}{x} \right) - 7 \right\}$
レバ $\left( x + \frac{1}{x} \right)^2 = y^2$ ヨ	$= x^2 \{ 4(y^2 - 2) - 4y - 7 \}$
リ $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$	ヨリ $4y^2 - 4y - 15 = 0$
	トシテ $y = -\frac{3}{2}$ 又ハ $\frac{5}{2}$

従ツテ  $x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{2}$  及ビ  $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$  ヨリ  $x$  フ求メヨ。

答 [i]  $1, \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{5})$  [ii]  $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{4}(-3 \pm \sqrt{-7})$

【問題】251. 共通根ヲ有スルコトヲ知リテ次ノ方程式ヲ解ケ。

[i]  $2x^2 - 5x^2 + x + 2 = 0, 6x^2 - 7x^2 + 1 = 0$  [4. 福岡高校]

[ii]  $3x^3 - 5x^2 - 43x - 35 = 0,$

$9x^4 - 18x^3 - 109x^2 - 102x - 140 = 0$  [4. 東實]

【注】 [ii] 兩式ノ最大公約數ヲ連除法ニテ求メ後之レニテ兩式

ヲ割リテ始末セヨ。G.C.M. =  $3x^2 - 8x - 35$

答 [i]  $1, 2, -\frac{1}{2}$  [ii]  $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

【問題】252. 方程式  $x^3 - 6x^2 + ax + b = 0$  ノ根ガ夫々  $1, 3$  及ビ  $c$

ナリトイフ。  $a, b$  及ビ  $c$  ノ値ヲ決定セヨ。

答  $a = 11, b = -6, c = 2.$

【問題】253.  $x^3 - (2p+1)x + 2p = 0$  ナル方程式ノ三根ノ内二根ガ

相等シキトキ  $p$  ノ値如何。 [4. 四高]

【注】  $x^3 - (2p+1)x + 2p = (x-\alpha)^2(x-\beta)$  トシテ等係數比較法ニ  
ヨレ。

答  $1, -\frac{1}{8}$

【問題】254.  $18x^3 - 45x^2 + mx - 10 = 0$  ノ三根ガ等差級數ヲナス

トキ  $m$  ノ値及ビ三根ヲ求メヨ。

【注】  $18x^3 - 45x^2 + mx - 10 = 18\{x - (a-d)\}\{x - a\}\{x - (a+d)\}$  ト

シテ等係數ヲ比較スルカ又ハ根ト係數ノ關係ヲ用フ。

答  $m = 37, 三根ハ \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1.$

【問題】255.  $a, b$  ガ共ニ正ニシテ  $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$  ガ三ツノ

實根ヲ有スルトキハ  $b \geq 3a$  ナルコトヲ證セヨ [東商]

【注】  $(x+1)\{ax^2 - (a-b)x + a\} = 0$  トシテ考ヘヨ。

【問題】256. 方程式  $x^3 - 3b^2x + 2c^3 = 0$  ガ相異なる二根  $\alpha$  及ビ  $\beta$

ヲ有スルトキハ  $a = -2b = -2c$  ナルコトヲ證明セヨ。

但シ  $b, c$  ハ實數トス。

[4. 商大農科]

【三次方程式ノ根ト係數ノ關係】

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$  ヨリ

$= a\{x^3 - (a+\beta+\gamma)x^2 + (a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - a\beta\gamma\}$

$\therefore a + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, a\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, a\beta\gamma = -\frac{d}{a}$



【問題】257.  $x^4 - p^2 = x^2 - 5p + 6$  ノ四根ガ悉ク實數ナルタメ  $= p$  ノ取ルベキ値ノ範圍ヲ求メヨ. [北大]

【註】  $\{x^2 - (p-2)\}\{x^2 + (p-3)\} = 0$  ヲリ  $x = \pm\sqrt{p-2}, x = \pm\sqrt{3-p}$  ヲ求メテ考ヘヨ.

$$\text{答 } 3 \geq p \geq 2.$$

### 17. 【聯立方程式】

【問題】258. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

[i]  $6x^2 - xy - 2y^2 = 20, 18x^2 - 27xy + 10y^2 = 28$  [東高]

[ii]  $x^2 - 2y^2 = 4y, 3x^2 + xy - 2y^2 = 16y$  [4. 松山高]

【註】 [i]  $6x^2 - xy - 2y^2 = (3x - 2y)(2x + y) = 20$   
 $3x - 2y + 0, 2x + y + 0 =$  注意ス,

■ [i]  $(2, 1); (-2, -1)$  [ii]  $(0, 0); (-4, 2); \left(\frac{12}{7}, \frac{4}{7}\right)$

【問題】259. 次ノ方程式ヲ解ケ.

[i]  $x^2 + xy + x = 14, y^2 + xy + y = 28$  [4. 松江高]

[ii]  $xy + x = 3, x^2 + 2y + y^2 = 9$  [4. 山口高]

■ [i]  $(2, 4); \left(-\frac{7}{3}, -\frac{14}{3}\right)$

[ii]  $(3, 0); (1, 2); (-3, -2); (-1, -4)$

【問題】260. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

[i]  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = x^2 + y^2 = 2$  [4. 経略高]

[ii]  $\frac{y}{x} - \frac{1}{xy} = 2, xy - \frac{x}{y} = 8$  [4. 水産]

■ [i]  $(1, 1); \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$

[ii]  $(2, 2 \pm \sqrt{5}); (-2, -2 \pm \sqrt{5})$

【問題】261. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

[i]  $x^2 - xy + y^2 = 3, x^3 + y^3 = 9$  [4. 大阪高]

[ii]  $xy(x+y) = 180, x^3 + y^3 = 189$  [4. 京城高]

■ [i]  $(1, 2); (2, 1)$  [ii]  $(4, 5); (5, 4)$   
 (但シ虚根ハ除キタリ)

【問題】262. 次ノ聯立方程式ニ適スル  $x, y$  ノ實數値ヲ求メヨ.

[i]  $x^2 + xy + y^2 = 13(x+y), x^2 - xy + y^2 = 14(x-y)$  [3. 大工]

[ii]  $y^2 = \frac{x^2(a+x)}{a-x}, x^2 - ax - a^2 = 0$  [3. 七高]

【註】 [i] (1)-(2) ヲリ  $2xy = 27y - x \dots \dots x = \frac{27y}{2y+1} \dots \dots (3)$

(但シ  $2y+1 \neq 0$  トス) 又 (1)+(2) ヲリ  $2x^2 + 2y^2 = 27x - y$  之レニ (3) ヲ代入シテ整理シ  $\frac{y\{(2y+1)^2 - 9\}}{(2y+1)^2} = 0$  之レヨリ求ム.

[ii] (1) ヲリ  $y$  ガ實數ナルタメニハ  $(a+x)(a-x) > 0$  デナケレバナラヌ. 故ニ  $-a < x < a \dots \dots (3)$  次ギニ (2) ヲリ

$x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})a$  從ツテ (3) ニ適スル  $x$  ノ値ハ  $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})a$



サレバ之レヲ (1) = 代入シテ後整理シ分母ヲ有理化スルト

$$y = \pm \frac{\sqrt{5}-1}{2} \{ \sqrt{\sqrt{5}-2} \} a \text{ ヲ得.}$$

$$\text{■ [i] } (0, 0); (12, 4),$$

$$\text{[ii] } \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})a, \pm \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)(\sqrt{\sqrt{5}-2})a.$$

【問題】263. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\text{[i] } x+y+z=6, x^2+yz=7, x^2+y^2+z^2=14. \quad \text{[長崎, 富嶺]}$$

$$\text{[ii] } x+y-3z=7, x^2+y^2+z^2=9-2z, yz+zx+xy=2z^2+3z \quad \text{[陸士]}$$

$$\text{[iii] } xy=24-x, yz=8-z, xz=12 \quad \text{[海峽]}$$

$$\text{[iv] } yz=20 \quad x(50-z)=9, 5zx=y(50-z) \quad \text{[3. 陸士]}$$

【註】 [i]  $\text{■}$  = 着眼シテ (2) ヨリ  $yz=7-x^2 \dots (4)$ ,

$$\text{(3) ヨリ } (y+z)^2 - 2yz = 14 - x^2 \quad \text{之レ} = (1), (4) \text{ ヲ代入シテ}$$

$$(6-x)^2 - 2(7-x^2) = 14 - x^2 \quad \text{之レヨリ } x \text{ ヲ求メヨ.}$$

[ii] (3) ヨリ  $z(x+y)+xy=2z^2+3z$  之レ = (1) ヲ代入シテ  $z(7+3z)+xy=2z^2+3z$  即チ  $xy = -z^2 - 4z \dots (4)$ ,

(2) ヨリ  $(x+y)^2 - 2xy + z^2 = 9 - 2z$ . 之レ = (1), (4) ヲ代入シテ

$$(7+3z)^2 - 2(-z^2 - 4z) + z^2 = 9 - 2z$$

之レヨリ  $z$  ヲ求メヨ.

[iii] (1) ヨリ  $x(y+1)=24 \dots (4)$ , 之レヨリ  $y+1 \neq 0$

$$\text{次ギ} = \text{(2) ヨリ } z(y+1)=8 \quad \text{之レヲ (4) = 代入シテ}$$

$$x(y+1)=3z(y+1)$$

然ル =  $y+1 \neq 0$  ナレバ  $x=3z$  之レヲ (3) = 代入シテ解ケ.

$$\text{[iv] (1) ヨリ } z \neq 0 \text{ 故} = y = \frac{20}{z} \dots (4), \text{ 又 (2) ヨリ}$$

$$z = \frac{9}{50-z} \dots (5) \quad (\text{但シ } 50-z \neq 0) \text{ 因ツテ (4), (5) ヲ (3) =}$$

$$\text{代入シテ } 5xz \times \frac{9}{50-z} = \frac{30}{z} \times (50-z) \text{ 故} = 9z^2 = 4(50-z)^2$$

兩邊ヲ平方 = 開イテ  $3z = \pm 2(50-z)$  之レヨリ  $z$  ヲ求メヨ.

$$\text{■ [i] } (1, 2, 3); (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1)$$

$$\text{[ii] } (1, 3, -1); (3, 1, -1);$$

$$\left( \frac{-9+\sqrt{161}}{6}, \frac{-9-\sqrt{161}}{6}, \frac{-10}{3} \right);$$

$$\left( \frac{-9-\sqrt{161}}{6}, \frac{-9+\sqrt{161}}{6}, \frac{-10}{3} \right)$$

$$\text{[iii] } (6, 3, 2); (-6, -5, -2)$$

$$\text{[iv] } \left( \frac{3}{10}, 1, 20 \right); \left( \frac{3}{50}, \frac{-1}{5}, -100 \right)$$

【問題】264. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

[i]

$$(x+1)(x+y+z) = 16$$

$$(y+1)(x+y+z) = 24$$

$$(z-2)(x+y+z) = 24$$

[4 東外]

[ii]

$$x(x+y+z) = 12$$

$$(2y+z)(x+y+z) = 36$$

$$(y+2z)(x+y+z) = 42$$

[4. 四高]

[iii]

$$x^2+y^2 = 2a^2 + \frac{z^2}{2}, \quad y^2+z^2 = 2b^2 + \frac{x^2}{2}, \quad z^2+x^2 = 2c^2 + \frac{y^2}{2}$$

[2. 神船]

【註】 [i], [ii] 三式ヲ加フ [ii] (1) × 3 + (2) + (1) ヨリ求ム.

$$\text{■ [i] } (1, 2, 5); (-3, -4, -1) \quad \text{[ii] } (2, 1, 3); (-2, -1, -3)$$

$$\text{[iii] } x = \pm \frac{2}{3} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$



【問題】265. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\left. \begin{array}{l} \text{[i]} \\ xy+y+2x-6=0 \\ yz+2z+3y-18=0 \\ zx+3x+z-9=0 \end{array} \right\} \text{[4. 愛媛大]} \quad \left. \begin{array}{l} \text{[ii]} \\ x^2=y(y+z) \\ y^2=z(z+x) \\ z^2=x(x+y) \end{array} \right\} \text{[4. 八高]}$$

【註】 [i] (1)  $\Rightarrow$   $(x+1)(y+2)=8$ . 他モ同様ニ變形シテ後三式ヲ掛ケ合ハス.

$$\text{[ii] (1)} \times \text{(2)} \times \text{(3)} \Rightarrow x^2y^2z^2 = xyz(y+z)(z+x)(x+y)$$

$$\therefore xyz = 0 \dots (4) \text{ 又ハ } xyz = (x+y)(y+z)(z+x) \dots (5)$$

次ギニ三式ノ邊々ヲ加フレバ  $xy+yz+zx=0 \dots (6)$  サレバ組合セ方ハ次ノ二通りアリ.

$$\text{即チ } \left. \begin{array}{l} xyz=0 \\ xy+yz+zx=0, \\ x^2=y(y+z) \end{array} \right\}$$

$$\text{又 } \left. \begin{array}{l} xyz=(x+y)(y+z)(z+x), \\ xy+yz+zx=0 \end{array} \right\}$$

$$\text{公式 } (x+y)(y+z)(z+x)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

$$\text{答 [i] } (1, 2, 3); (-3, -6, -9) \quad \text{[ii] } (0, 0, 0)$$

【問題】266. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\text{[i] } x+y+z=a^2x+b^2y+c^2z=xyz+a^4x+b^4y+c^4z=0$$

[4. 松山高校]

但シ  $a, b, c$  ハ何レモ相異ナルモノトス.

$$\text{[ii] } ax=by=cz=du, \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{u}=\frac{1}{m} \quad \text{[4. 四高]}$$

【註】 [i]  $x+y+z=0, a^2x+b^2y+c^2z=0$  之レヨリ  $x:y:z$  ヲ求ムレバ  $\frac{x}{b^2-c^2}=\frac{y}{c^2-a^2}=\frac{z}{a^2-b^2}$  之レヲ  $k$  ト置キ  $x, y, z$  ノ値ヲ求メテ  $xyz+a^4x+b^4y+c^4z=0$  = 代入シ後變形スレバ  $(b^2-c^2)(c^2-a^2)(a^2-b^2)k(k^2-1)=0$  之レヨリ  $k=0$  又ハ  $1$  又ハ  $-1$  ヲ得. 從ツテ之レヲ  $k$  ト置キタル式ニ適用ス.

[ii] 第一式ヲ  $k$  ト置キテ  $\frac{1}{x}=\frac{a}{k}$  以下同様之レヲ第二式ニ用フ.

$$\text{答 [i] } (0, 0, 0); (b^2-c^2, c^2-a^2, a^2-b^2); (c^2-b^2, a^2-c^2, b^2-a^2)$$

$$\text{[ii] } x=\frac{m}{a}(a+b+c+d)$$

【問題】267. 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\text{[i] } \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2, \quad x^2-y^2+x-2=0$$

[4. 東京府高校]

$$\text{[ii] } x+y+2\sqrt{x+y}=15, \quad x^3+y^3=189$$

[3. 高松商]

$$\text{答 [i] } (2, 2), \quad \text{[ii] } (4, 5); (5, 4)$$

【問題】268.  $x, y, z$  ノ正數値ニ對シテ次ノ聯立方程式ガ成立スルタメノ條件ヲ求メヨ.

$$x+y+z=a, \quad xy=bz, \quad x^2+y^2=z^2 \quad \text{[4. 静岡高校]}$$

【解】 (3)  $\Rightarrow$   $(x+y)^2-2xy=z^2$  之レニ (1), (2) ヲ代入シテ  $(a-z)^2-2bz=z^2$  解ケバ  $z=\frac{a^2}{2(a+b)}$  サテ  $z>0$  (題意) ナレバ

$$\frac{a^2}{2(a+b)}>0 \text{ 然ルニ } a^2>0 \quad \therefore a+b>0 \dots (A)$$

次ギニ  $z$  ノ値ヲ (1), (2) ニ代入シテ



$$x+y = \frac{a(a+2b)}{2(a+b)} \dots\dots (B), xy = \frac{a^2b}{2(a+b)} \dots\dots (C), \text{而シテ (B), (C)}$$

$$\text{ヲ満足スル } x, y \text{ ノ値ハ } t^2 - \frac{a(a+2b)}{2(a+b)}t + \frac{a^2b}{2(a+b)} = 0$$

$$\text{ノ根デアル。之レヲ簡單ニシテ } 2(a+b)t^2 - a(a+2b)t + a^2b = 0$$

$$\text{之レガ實根條件ハ判別式ヲ作リテ } a^2(a+2b)^2 - 8a^2b(a+b) \geq 0$$

$$\text{即チ } a^2 - 4ab - 4b^2 \geq 0$$

$$\therefore \{a - 2(\sqrt{2}+1)b\}\{a + 2(\sqrt{2}-1)b\} \geq 0 \dots\dots (D)$$

次ギニ  $x, y$  ガ正(題意)ナラバ (B), (C) ヨリ

$$\frac{a(a+2b)}{2(a+b)} > 0, \frac{a^2b}{2(a+b)} > 0 \text{ 然ルニ (A) ヨリ } a+b > 0 \text{ ナレバ}$$

$$a(a+2b) > 0 \dots\dots (E), a^2b > 0 \dots\dots (F) \text{ 而シテ } a^2 > 0 \text{ 従ツテ}$$

$$(F) \text{ ヨリ } b > 0 \text{ 之レト (A) トヨリ即チ } a+b > 0, b > 0 \text{ ヨリ}$$

$$a+2b > 0 \text{ 之レヲ (E) = 適用スレバ } a > 0 \text{ ヲ得。因ツテ}$$

$$a > 0, b > 0 \text{ 之レヲ (D) = 用フレバ } a + 2(\sqrt{2}-1)b > 0 \text{ ヨリ}$$

$$a - 2(\sqrt{2}+1)b \geq 0 \text{ トナル故ニ } a \geq 2(\sqrt{2}+1)b \text{ ヲ得。サレバ求}$$

$$\text{ムル條件ハ } a > 0, b > 0, \text{ 且ツ } a \geq 2(\sqrt{2}+1)b \text{ ナリ。}$$

### 18. 【方程式 異例】

【問題】269. 次ノ方程式ノ  $x$  ノ二根ガ相等シキトキ  $x, y$  ノ値

ヲ求メヨ。

$$[i] \quad x^2 + y^2 - 2ax - 2by - c^2 = 0 \quad \text{[小橋]}$$

$$[ii] \quad 3y^2 - 10xy + 10x^2 - 2 = 0 \quad \text{[3. 精工]}$$

$$\text{解} [i] \quad x = a, y = b \pm \sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

$$[ii] \quad (x=1, y=2), (x=-1, y=-2)$$

【問題】270. 次ノ方程式ニ適スル  $x, y$  ノ實數値ヲ求メヨ。

$$[i] \quad xy(x+y) = 1 \quad \text{[4. 早大]}$$

$$[ii] \quad x^2 + 4y^2 - 2xy + x + 2y + 1 = 0 \quad \text{[商大]}$$

$$[iii] \quad (x^2 + xy - 12)^2 + (xy - 2y^2 - 1)^2 = 0 \quad \text{[海兵]}$$

$$[iv] \quad (x^2 + b^2)^2 + (y^2 + a^2)^2 = 2(ax + by)^2 \quad \text{[商船]}$$

$$[註] [ii] \quad x \text{ ニツキテ整理シ } x^2 + (1-2y)x + (4y^2 + 2y + 1) = 0$$

$$x \text{ ガ實數ナルベキ條件ヲ求ムレバ } (1-2y)^2 - 4(4y^2 + 2y + 1) \geq 0$$

$$\text{之レヨリ } -3(1+2y)^2 \geq 0 \text{ 而シテ } y \text{ ガ實數ノトキ成立スル}$$

$$\text{タメニハ } -3(1+2y)^2 = 0 \text{ ノトキノミナリ。之レヨリ } y \text{ ヲ}$$

$$\text{求メ後 } x \text{ ヲ求ム。}$$

$$[iii] \quad x, y \text{ ガ實數ナラバ } (x^2 + xy - 12)^2, (xy - 2y^2 - 1)^2 \text{ ハ何レ}$$

$$\text{モ正又ハ零ナレバ其ノ和ガ零ナルタメニハ } x^2 + xy - 12 = 0,$$

$$xy - 2y^2 - 1 = 0 \text{ デナケレバナラス。故ニ之レヲ解ク。}$$

$$[iv] \quad ( )^2 + ( )^2 = 0 \text{ ト變形スレバ [iii] ト同様ナリ。}$$

$$\text{解} [i] \quad x=y > 0 \text{ 又ハ } x=y \leq -\sqrt{4} \quad [ii] \quad \left(x = -1, y = -\frac{1}{2}\right),$$

$$[iii] \quad (3, 1); (-3, -1); \left(\frac{8}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right); \left(-\frac{8}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$[iv] \quad (a, b); (-a, -b)$$

【問題】271.  $x, y$  ノ實數値ニ對シテ  $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$  ガ成立

スルタメノ  $x, y$  ノ範圍ヲ定メヨ。(但シ  $a > 0$  トス)

[3. 松山高校]

【解】  $x$  ニツキテハ三次式デアルガ  $y$  ニツキテハ二次式デアル

カラ次數ノ低ヘ方ヲ主眼トシテ  $y$  ノ二次方程式トシテ取扱フ。

$$\text{整理シテ } (x+a)y^2 = x^2(a-x) \quad \therefore y = \pm x \sqrt{\frac{a-x}{x+a}}$$



サテ  $x, y$  が實數ナラバ  $\frac{a-x}{x+a} \geq 0$  デナケバナラヌ。之レヨリ

$\frac{a-x}{x+a} = 0$  ノトキ  $x=a$  而シテ  $a > 0$  ナレバ  $x > 0$  即チ  $x$  ハ

實數デアル。又  $\frac{a-x}{x+a} > 0$  ヨリ分母、分子ハ同符號デナケバナラヌ。即チ  $a-x > 0, x+a > 0$  カ  $a-x < 0, x+a < 0$  カガ同時ニ成立スレバヨイカラ  $a > x > -a$  ( $a > 0$  ヨリ  $x$  ハ實數) カ  $a < x < -a$  カトナルガ  $a > 0$  ヨリ  $a < x < -a$  ハ成立セス。

以上ヲ總合シテ  $a \geq x > -a$  ヲ得。此ノ關係ヲ代入シテ  $y$  ノ範圍ヲ定ムレバ  $-\infty < y < \infty$  ヲ得。

$$\text{答 } a \geq x > -a, -\infty < y < \infty.$$

【問題】272.  $x, y, z$  が實數ニシテ  $z+xy \neq 0, x^2+y^2+z^2+2xyz=1$  ナルトキハ  $x$  ト  $y$  トノ絶對値ハ共ニ 1 ヨリ大ナルカ又ハ共ニ 1 ヨリ小ナルコトヲ證セヨ。 [4. 山口高俊]

【證】  $x, y$  ニツキテノ關係ヲ求ムルヲ以テ第二式ヲ  $z$  ニツキテ整理スレバ  $z^2+(2xy)z+(x^2+y^2-1)=0$  從ツテ  $z$  が實數ナルタメノ條件ハ  $(2xy)^2-4(x^2+y^2-1) \geq 0$  之レヨリ  $x^2y^2-x^2-y^2+1=0$  變形シテ  $(x^2-1)(y^2-1) \geq 0$  故ニ兩因數ハ同符號ヲトルヲ以テ  $x^2-1 \geq 0, y^2-1 \geq 0$  カ或ハ  $x^2-1 \leq 0, y^2-1 \leq 0$  ナリ。

從ツテ  $x^2 \geq 1, y^2 \geq 1$  カ  $x^2 \leq 1, y^2 \leq 1$  ナリ。

而シテ  $x^2=1$  ノトキ  $x=\pm 1$  トナル。之レヲ原方程式ニ代入スレバ  $x=1$  ノトキ第一式ヨリ  $z+y \neq 0$ , 第二式ヨリ

$y^2+z^2+2yz=0$  即チ  $(y+z)^2=0$  コハ  $z+y \neq 0$  ト相矛盾ス。

故ニ  $x=1$  ハ不能ナリ。同様ニ  $x=-1$  ノトキモ不能トナル。

又  $y^2=1$  ノトキモ同様ニシテ不能トナル。

故ニ  $x^2 > 1, y^2 > 1$  カ  $x^2 < 1, y^2 < 1$  カナリ。

然ルニ  $x^2 > 1$  ハ  $x$  ノ絶對値ガ 1 ヨリ大ナルコトヲ表ハス。

( $x^2 > 1$  ヨリ  $x > 1, x < -1$  ヲ得。  $x < -1$  ハ  $x$  ノ絶對値ガ 1 ヨリ大ナリ)

サレバ  $x^2 > 1, y^2 > 1$  ニシテモ  $x^2 < 1, y^2 < 1$  ニシテモ其ノ絶對値ハ共ニ 1 ヨリ大ナルカ、共ニ 1 ヨリ小ナルコトヲ示ス。

【問題】273.  $x, y$  が正ノ整數ニシテ  $(2x-y)(x-2y)=5$  ナルトキ  $x, y$  ノ値ヲ求メヨ。 [4. 浦高]

【註】  $x, y$  ハ實數デアルカラ  $(2x-y), (x-2y)$  ハ何レモ整數ダガ正負ハ不明デアル然シ免モ角ニツノ整數ノ積ガ 5 トナレバヨイカラ  $5=1 \times 5 = (-5) \times (-1)$  ヨリ

$$\left. \begin{matrix} 2x-y=1 \\ x-2y=5 \end{matrix} \right\} \text{カ} \left. \begin{matrix} 2x-y=5 \\ x-2y=1 \end{matrix} \right\} \text{カ} \left. \begin{matrix} 2x-y=-5 \\ x-2y=-1 \end{matrix} \right\} \text{カ} \left. \begin{matrix} 2x-y=-1 \\ x-2y=-5 \end{matrix} \right\}$$

カデアルガ  $(2x-y)-(x-2y)=x+y$  トナリ  $x, y$  ハ正整數デアルカラ  $(2x-y)-(x-2y)=x+y > 0$  ヨリ  $2x-y > x-2y$  之レヨリ

$$\left. \begin{matrix} 2x-y=5 \\ x-2y=1 \end{matrix} \right\} \text{カ} \left. \begin{matrix} 2x-y=-1 \\ x-2y=-5 \end{matrix} \right\} \text{カノ二組トナル。}$$

$$\text{答 } x=3, y=1 \text{ 又ハ } x=1, y=3$$

【問題】274. 次ノ方程式ヲ満足スル  $x, y$  ノ正整數ヲ求メヨ。

$$[i] \ x^2-y^2=17 \quad [北大] \quad [ii] \ 2xy-3x+2y=9 \quad [3. 龍溪]$$

$$\text{答 } [i] \ (9, 8), [ii] \ (1, 3); (5, 2)$$



【問題】275. 連立方程式  $2x^2+3y^2=a$ ,  $x+y=b$  を満足スル二組ノ根ヲ夫々  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  トスルトキ  $x_1+x_2=6$ ,  $y_1y_2=3$  ナル様ニ  $a, b$  ノ値ヲ求メヨ. [4. 神船]

【解】 第二式ヨリ  $y=b-x$  之レヲ第一式ニ代入シテ整理ス.  
 $2x^2+3(b-x)^2=a$  ヨリ  $5x^2-6bx+(3b^2-a)=0$  此ノ方程式ノ二根ガ題意ニヨリ  $x_1, x_2$  ナルヲ以テ根ト係数ノ關係ヨリ  $x_1+x_2=\frac{6}{5}b$  而シテ題意ニヨリ  $x_1+x_2=6$  因ツテ兩式ヨリ  $\frac{6}{5}b=6$  即チ  $b=5$  次ギニ第一式ヨリ  $x=b-y$  ト變形シ第二式ニ代入シテ整理スレバ  $5y^2-4by+(2b^2-a)=0$  從ツテ  $y_1y_2=\frac{2b^2-a}{5}=3$  之レヨリ  $a=2b^2-15$  之レニ  $b=5$  ヲ代入シテ  $a=35$  ヲ得.

$$\text{答} \quad a=35, b=5$$

【問題】276. 連立方程式  $Ax^2+By^2=1$ ,  $y=mx+b$  ノ二組ノ根ヲ  $x_1, y_1$  及ビ  $x_2, y_2$  トスルトキ  $x_1x_2$  及ビ  $y_1y_2$  ヲ  $A, B, m, b$  ニテ表ハセ. [3. 海兵]

$$\text{答} \quad x_1x_2=\frac{Bb^2-1}{A+Bm^2}, \quad y_1y_2=\frac{Ab^2-1}{A+Bm^2}$$

【問題】277. 連立方程式  $x+m(y-1)=0$ ,  $x^2+y^2=x$  ノ根ヲ  $x_1, y_1$  及ビ  $x_2, y_2$  トシ  $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$  ナルベキ  $m$  ノ値ヲ求メヨ. [商船]

【注】  $x=m(1-y)$  ヲ (2) ニ代入シ.

$$(m^2+1)y^2-(2m^2-m)y+m^2-m=0 \quad \text{ヨリ}$$

$$y_1+y_2=\frac{m^2-m}{m^2+1}, \quad y_1y_2=\frac{m^2-m}{m^2+1}$$

$$\text{又} \quad (x_1-x_2)=m(1-y_1)-m(1-y_2)=m(y_2-y_1)$$

$$\therefore (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(m^2+1)(y_1-y_2)^2,$$

$$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=\frac{-3m^2+4m}{(m^2+1)^2}$$

$$\therefore \frac{-3m^2+4m}{m^2+1}=1 \quad \text{ヲ解ケ.} \quad \text{答} \quad m=\frac{1}{2}$$

【問題】278. 連立方程式  $ax+by=1$ ,  $cx^2+dy^2=1$  ノ二根ガ相等シキタメニハ係数ノ間ニ如何ナル關係アルベキカ. [3. 横商] [4. 慶應]

$$\text{答} \quad a^2d+b^2c=cd$$

【問題】279. 連立方程式  $ax+by=1$ ,  $cx^2+2dxy+ey^2=1$  ガ唯一組ノ根ヲ有スルタメノ條件ヲ求メヨ. 尚ソノ一組ノ根ヲ與ヘヨ. 但シ各係数何レモ零ナラズ且ツ  $\frac{b}{a}$ ,  $\frac{d}{c}$ ,  $\frac{e}{d}$  ハ互ニ等シカラズトス. [3. 雙龍大]

【注】 第一式ヨリ  $y=\frac{1-ax}{b}$  之レヲ第二式ニ代入シテ整理スレバ  $(b^2e-2abd+a^2e)x^2+2(bd-ae)x+(e-b^2)=0$  之レガ等根ヲ有スルニハ 判別式=0 デアルカラ  $(bd-ae)^2-(e-b^2)(b^2e-2abd+a^2e)=0$  サテ  $b \neq 0$  ニ注意シテ  $b^2$  ニテ割り整理スレバ  $d^2-ec-2abd+b^2e+a^2e=0$  之レガ求ムル條件デアル.



【注意】 假定  $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}, \frac{e}{d}$  は相等シカラズハ  $b^2c - 2abd + a^2e \neq 0$   
ヲ吟味スルトキニ必要デアル。

## 19. 【方程式應用問題】

【問題】 280. 5 = テ割り切レル三桁ノ整数アリ。其ノ数字ノ和ハ  
20 = シテ其ノ数字ト数字ヲ逆ノ順序ニ並ベタル数字トノ差ハ  
198 ナリト云フ。其ノ数字ヲ求ム。 [4. 四高]

■ 785

【問題】 281. 二位ノ整数アリ。ソノ数字ハ丁度各位ノ数字ノ和ノ  
七倍ニ等シトイフ。モシソノ数字ノ順ヲ轉倒スレバソノ数字  
ハ数字ノ和ノ四倍ニ等シキコトヲ證シ、且ツ斯ノ如キ数字ヲ  
求メヨ。 [4. 新高]

■ 21, 42, 63, 84

【問題】 282. 甲乙二人ノ職工アリ。或期間甲ハ休マズニ働キテ  
賃金 43 圓 20 錢ヲ得、乙ハコノ期間中ニ ± 日間休ミシタ  
メ賃金 30 圓ヲ得タリ。モシ乙ガ休マズシテ甲ガ ± 日間休  
ミタリトセバ兩人ノ賃金ハ同額トナリシナラントイフ。ソ  
ノ期間及ビ各人ノ日給ヲ問フ。 [4. 三高]

■ 24日, 甲 1圓80錢 乙 1圓50錢

【問題】 283. 甲ハ或日數間或賃銀デ働イテ 42 圓ヲ得、乙ハ之レ  
ヨリ 8 日少イ日數間異ル賃金デ働イテ 39 圓ヲ得タ。モシ  
甲ガ乙ノ日數間、乙ガ甲ノ日數間ダケ働クトスレバ乙ノ賃  
金ノ方ガ甲ヨリ 37 圓多クナルト云フ。各人一日ノ賃金及  
ビ働イタ日數ヲ求メヨ。 [4. 和高]

■ 甲 2圓, 21日; 乙 3圓, 13日

【問題】 284. 若干人集リテ茶話會ヲ開クニ若シ人員ヲ 10 人増シ  
一人前ノ費用ヲ 10 錢ツツ高クセバ定額ヨリ 19 圓ヲ増ス  
ベク、又人員ヲ 15 人減ジ一人前ノ費用ヲ 30 錢ツツ高ク  
セバ定額ヨリ 4 圓 50 錢ヲ減ズベシト云フ。人数及ビ一人前  
ノ費用如何。 [4. 新高]

■ 60人, 1圓20錢

【問題】 285. 或ル人 11500 圓ヲ二口ニ分チ各異ナリタル利率ニ  
テ貸シ付ケタルニ各口ヨリ相等シキ利息ヲ得タリ。今若シ  
其ノ利率ヲ交換シテ貸サバ一年ノ利息ハ夫々 360 圓及ビ  
302 圓 50 錢ナルベシトイフ。各口ノ金額及ビ年利率各如  
何。 [3. 四高]

【註】 利率ヲ  $p, q$  トシ一方ノ貸シ付ケ金ヲ  $x$  圓トスレバ

$$p(11500 - x) = qx \dots (1), \quad q(11500 - x) = 360 \dots (2), \quad px = 302.5 \dots (3)$$

サテ連々相乘ジテ

$$p(11500 - x) \times px \times 360 = qx \times 302.5 \times q(11500 - x)$$



ヨリ  $x(11500-x)+0$  従ツテ  $360p^2=302.5q^2$

∴  $p=\pm\frac{55}{60}q$  トシテ用フ。(負値ハ不要)

■ (6000圓, 5分5厘); (5500圓, 6分)

【問題】286. 或ル人 18000 圓ヲ年利率若干ニテ預ケ入レ, 一年後ソノ利子中ヨリ 610 圓ヲ費消シ, 残リヲ元金ニ加ヘテ前ト同利率ニテ預ケ入レシニ, ナホ一ケ年ヲ經タル後元利合計 19578 圓 20 錢トナレリト云フ. 年利率如何. [4. 山形]

【註】 利率ヲ  $r$  トスレバ  $\{18000(1+r)-610\}(1+r)=19578.2$  ヲ得. 次ギニ  $1+r=x$  トスレバ  $18000x^2-610x-19578.2=0$  ヲ解ケ. ■ 0.06

【問題】287. 甲乙二人ノ走者アリ. 或池ノ周ヲ反對ノ方向ニ廻ハルトキハ一分毎ニ相會シ, 此池ヲ一周スルニ要スル時間ハ甲ハ乙ヨリ五十秒少シ. 若シ兩人此池ノ周ヲ同ジ方向ニ廻ハルトキハ甲ハ何分毎ニ乙ヲ追ヒ越スカ. [4. 大阪高陵]

【註】 先ヅ兩人ノ速サヲ求メヨ. 次ギニ同方向ニ走リテ兩人ガ一新ナル時間ハ甲ガ乙ヨリ一周多ク廻ルニ要スル時間ニ等シ. ■ 5分

【問題】288. 甲乙二人ニテ前後二回 800 米競走ヲナセルニ最初甲ハ乙ヨリ 4 秒先ニ出デテ 6.4 米負ケ, 次ニ 20 米先ニ出デテ 12 米負ケタリ, 甲乙各々何秒ニテ 800 米ヲ走ルカ. [4. 松本]

【解】 1 米ヲ走ルニ甲ハ  $x$  秒, 乙ハ  $y$  秒ヲ要スルモノトスレバ次ノ方程式ヲ得.

$$(800-6.4)x-4=800y \dots\dots(1)$$

$$(800-20-12)x=800y \dots\dots(2)$$

因ツテ (1)-(2) ヲヨリ  $25.6x-4=0$  ∴  $x=\frac{5}{32}$  従ツテ (1)

ヨリ  $y=\frac{3}{20}$  サレバ甲, 乙ガ 800 米ヲ走ルニハ

甲  $800 \times \frac{5}{32} = 125$ , 乙  $800 \times \frac{3}{20} = 120$  ヲ得.

■ 甲 125 秒 乙 120 秒

【問題】289. 甲乙二旅人アリ, 甲ハ東地ヨリ乙ハ西地ヨリ同時ニ相向テ出發シ甲ガ乙ヨリ 30 里ダケ多ク歩ミタルトキ兩人出會ヒタリ, 其後甲ハ 4 日ニシテ西地ニ達シ乙ハ 9 日ニシテ東地ニ達セリト云フ, 東西兩地ノ距離如何. [4. 松江]

【解】 甲, 乙毎日ノ速サヲ  $x$  里,  $y$  里 トシ, 兩地間ノ距離ヲ  $s$  里トスレバ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ得.

$$4x+9y=s \dots\dots(1), \quad 9y-4x=30 \dots\dots(2), \quad \frac{4x}{y}=\frac{9y}{x} \dots\dots(3)$$

因ツテ (3) ヲヨリ  $2x=\pm 3y$  但シ負數ヲ捨テ、 $x=\frac{3}{2}y$  ヲ (2)ニ代入シテ  $y=10$  従ツテ  $x=15$  之レヲ (1)ニ代入シテ  $s=150$  ヲ得. ■ 150 里

【問題】290. 或ル人若干斤ノ道ヲ旅行スルニ 32 斤ヲ行キタル後, 一時間ニ 1.6 斤宛ソノ速サヲ増シタル爲メ  $\frac{1}{3}$  時間早く到着セリ, 若シ初メヨリコノ増シタル速サニテ行キタランニハ一時間早く到着ス可シトイフ. コノ道程ヲ求ム. [4. 神船]



【解】 求ムル道程ヲ $x$ 軒, 毎時ノ速サヲ $a$ 軒トスレバ題意ニヨリ

$$\frac{32}{a} - \frac{32}{a+1.6} = 1 - \frac{1}{3} \dots (1), \quad \frac{x}{a} - \frac{x}{a+1.6} = 1 \dots (2) \quad \text{ヲ得.}$$

$$\text{サテ (1) ヨリ} \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1.6} = \frac{1}{48} \dots (3),$$

$$(2) \text{ ヨリ} \quad \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1.6} = \frac{1}{x} \dots (4)$$

$$\text{因ツテ (3), (4) ヨリ} \quad \frac{1}{48} = \frac{1}{x} \quad \therefore x=48 \quad \text{答 48 軒}$$

【問題】291. 列車出發後 7.5 時ニシテ故障起リ速サノ  $\frac{1}{6}$  ヲ減

ジタルガタメニ 30 分遅着セリ. 若シ故障ガナホ 45 哩進行セル後ニ起リクランニハ是ヨリ 15 分早く着シ得タルベシト云フ. 列車ノ經過セシ距離幾何カ. [4. 名商]

答 360 哩.

【問題】292. 甲乙二船アリ. 甲ハ東港ヨリ西港ニ, 乙ハ西港ヨリ東港ニ向ヒテ, 夫々一定ノ速サニテ出發シ $t$ 時間後ニ出會

セリ. ソレヨリ乙ハソノ速サヲ毎時 7 哩増シタルニ, 出會セシ時刻ヨリ更ニ  $\frac{3}{4}t$  時間後ニ甲乙同時ニ目的港ニ到着セ

リ. 二船ノ最初ノ速サヲ求ム. [4. 水産]

答 甲 12 哩, 乙 9 哩

【問題】293. 甲乙兩人アリ甲ハ午前 10 時ニ A 地ヲ出發シテ B 地ニ向ヒ, 乙ハ午前 10 時 24 分ニ B 地ヲ出發シテ A 地ニ向ヘリ, 而シテ兩人ハ B 地ヲ距ル 2 哩ノ地點ニテ出會ヒタル後, 乙ハ A 地ニ至リ 1 時間, 甲ハ B 地ニ至リテ 2 時 54 分間ノ休憩後, 歸路ニツキ午後 6 時 54 分ニ兩地ノ丁度中央地點ニテ再會セリト云フ. A, B 兩地ノ距離如何. [4. 東醫]

答 5 哩.

【問題】294. 甲乙兩地ノ距離 250 哩アリ. A 列車ハ毎時 28 哩ノ速サニテ甲地ヨリ乙地ニ向ヒ, ソレヨリ 1 時間 45 分ヲ經テ B 列車ハ毎時 22 哩ノ速サニテ乙地ヨリ甲地ニ向ヘリ. ソノ後更ニ 1 時間 30 分ヲ經テ C 列車モ亦乙地ヲ出發シテ甲地ニ向ヒタルニ, 先ヅ A 列車ニ出會ヒ, ソレヨリ 30 分ヲ經テ B 列車ヲ追ヒ越セリトイフ. C 列車毎時ノ速サ如何.

[4. 名商]

答 32 哩

【問題】295. 甲ハ自動車ニテ乙ハ徒歩ニテ同時ニ東地ヨリ西地ニ向ツテ出發シ, 甲ハ途中ニテ下車シテ其後徒歩ニテ西地ニ向ヒ, 自動車ハ直ニ引返シテ乙ニ出會ヒ之ヲ乗セテ直ニ西地ニ向ツタトコロ出發後 1 時間ニシテ甲乙同時ニ西地ニ到着シタトイフ. 兩地間ノ距離ヲ求メヨ. 但シ自動車ノ



速サハ毎時二十軒，甲、乙ノ徒歩ノ速サハ相等シクシテ毎時四軒デアル。 ■ 100軒 [4. 廣南]

【問題】296. 甲、乙ノ二エアリ，或仕事ヲナスニ兩人同時ニ働カバ  $8\frac{2}{5}$  日ニテ成就シ，又甲 3 日乙 2 日働カバ其仕事ノ  $\frac{2}{7}$  ヲ成就シ得ベシト云フ，若シ單獨ニテ働カバ其仕事ヲ成就スルニ各幾日ヲ要スベキカ。 [4. 南大隈]

【註】 仕事ヲ 1 トシ，甲ノミナラバ  $x$  日，乙ノミナラバ  $y$  日ヲ要スルモノトスレバ

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \times 8\frac{2}{5} = 1, \quad \frac{1}{x} \times 3 + \frac{1}{y} \times 2 = \frac{2}{7} \quad \text{ヲ得.}$$

■ 甲 21日，乙 14日

【問題】297. 甲乙ナル二管アリ，甲管ノミニテ一ツノ樽ニ水ヲ滿タスニ要スル時間ハ，乙管ノミニテ滿タスニ要スル時間ヨリ 5 分少ク，甲乙二管ニテ滿タスニハ 6 分ヲ要ス，乙管ノミニテコノ樽ノ容積ノ 7 倍ヲ有スル樽ヲ滿タスニハ何分ヲ要スルカ。 [4. 北大]

【註】 樽ハ  $a$  立入レトシ，甲管ノミナラバ  $x$  分，乙管ノミナラバ  $y$  分ニテ滿タスモノトスレバ甲ハ一分間  $= \frac{a}{x}$  立，乙ハ一分間  $= \frac{a}{y}$  立ヲ注入ス。故ニ  $x+5=y$ ,  $6\left(\frac{a}{x} + \frac{a}{y}\right) = a$ , 之レヨリ  $y=15$  ヲ得。 ■ 1時間45分

【問題】298. 河ニ沿ヒ 7200 米隔タレル甲乙兩村間ヲ舟ニテ往復スル水夫アリ。甲村ヨリ乙村マデ漕ギ上ルニ二時間ヲ要セリ。歸途其ノ  $\frac{3}{5}$  ヲ漕ギ下リ後ハ流ニ任セテ下リシニ乙村出發後二時間十二分ニテ甲村ニ歸レリ。コノ水夫ノ静水ヲ漕グ速サ及水流ノ速サヲ求メヨ。 [4. 海關]

【註】 静水ヲ漕グニ毎時  $x$  米，水流ノ速サヲ毎時  $y$  米ナリトス

$$\begin{aligned} \text{レバ} \quad \frac{7200}{x-y} = 2, \quad \frac{7200 \times \frac{3}{5}}{x+y} + \frac{7200 \times \frac{2}{5}}{y} = 2\frac{12}{60} \quad \text{ヲ得} \end{aligned}$$

$$11y^2 - 5400y - 25920000 = 0 \dots\dots (y-1800)(11y+14000) = 0$$

■ 水流ノ速サ毎時 1800 米，静水ヲ漕グ速サ毎時 5400 米

【問題】299. 或ル水夫河流ヲ上下スルニ平素ノ漕力ニテハ 5 里ヲ漕ギ下ルト 1 里ヲ漕ギ上ルトニ同時間ヲ要ス。今漕ギ上ルトキ漕力ヲ増シテ平素ノ  $\frac{3}{2}$  トシ漕ギ下ルトキ漕力ヲ減ジテ平素ノ  $\frac{2}{3}$  ト爲シ，3 里ノ河流ヲ上下スルニ 5 時 51 分間ヲ要シタリト云フ。河流ノ速サヲ求メヨ。 [4. 高知]

■  $\frac{2}{3}$  里

【問題】300. 射撃兵アリ。455 米ヲ隔リタル的ヲ撃チタルニ，發射後  $4\frac{1}{3}$  秒ヲ經テ的中シタル響ヲ聞ケリ。又射撃兵ヨリ 600 米，的ヨリ 370 米ヲ隔リタル所ニ居ル傍觀者ハ發射



ノ響ヲ聞キシ後  $2\frac{1}{3}$  秒ヲ経テ的中シタル響ヲ聞ケリト言フ。然ラバ音ノ速サ、及ビ彈丸ノ速サハ平均毎秒幾米ナルカ。 [4. 福工]

【註】音ノ速サ毎秒  $x$  米、彈速ヲ毎秒  $y$  米トスレバ次ノ方程式ヲ得ベシ。

$$\frac{455}{x} + \frac{455}{y} = 4\frac{1}{3}, \quad \frac{455}{y} + \frac{370}{x} - \frac{600}{x} = 2\frac{1}{3}$$

$$\text{引キ算ヨリ } \frac{455}{x} - \frac{370}{x} + \frac{600}{x} = 2 \quad \therefore x = 342.5$$

圖 音速毎秒 342.5 米、彈速毎秒  $151\frac{8}{19}$  米

【問題】301. 酒ヲ充セル或樽ヨリ酒 8 升ヲ汲出シ アトヲ水ニテ充タシ、次ニ此混合酒 4 升ヲ汲出シ再ビ之ヲ水ニテ充タシタルニ此樽ノ中ノ酒ト水トノ比ハ 18:7 トナレリトイフ此樽ノ容量ハ何程ナルカ。 [4. 學習]

【解】樽ハ  $x$  升入レトス。8 升ヲ汲ミ出シテ水ヲ入レルト酒ハ  $(x-8)$  升、水ハ 8 升ノ混合酒トナルカラ、4 升汲ミ出セバ此ノ中ニ酒ハ  $4 \times \frac{x-8}{x}$  升デアル從ツテ第二回完了後樽ニ殘レル

$$\text{酒ハ } \left\{ x - 8 - \frac{4(x-8)}{x} \right\} \text{ 升} = \frac{(x-8)(x-4)}{x} \text{ 升} \quad \text{デアル。}$$

故ニ酒ト全量トノ比ヲ考ヘテ

$$\frac{(x-8)(x-4)}{x} : x = 18 : 18+7 \quad \text{トナル。}$$

$$\text{之レヨリ } 7x^2 - 300x + 800 = 0 \dots\dots (7x-20)(x-40) = 0$$

$$\text{故ニ } x = \frac{20}{7} \text{ 又ハ } 40 \text{ ヲ得。而シテ } \frac{20}{7} \text{ 升ヨリ } 8 \text{ 升ヲ汲ミ}$$

出スコトハ出來ナイカラ捨テル。 圖 4 斗

【問題】302. 洋酒ニテ充滿セル樽アリ、ソレヨリ洋酒 0.2 立ヲ出シ之ヲ水ニテ補ヒ又其混合液 0.1 立ヲ出シ再ビ之ヲ水ニテ充タシタルニ樽内ノ洋酒ト水トノ比ハ 5:4 ニナレリト云フ。モトノ洋酒量何程ナリシカ。 [4. 商大豫]

圖 0.6 立

【問題】303. 錫ト鉛トノ合金アリ、其ノ目方 180 瓦ニシテ、水中ニテコレヲ衡レバ 21 瓦ヲ減ズ。今錫 37 瓦ヲ水中ニテ衡レバ 5 瓦ヲ減ジ、鉛 23 瓦ヲ水中ニテ衡レバ 2 瓦ヲ減ズト言フ。然ラバ此ノ合金中ノ錫ト鉛ハ各々幾瓦ナルカ。

【註】水中ニテ失フ方ヲ考ヘテ方程式ヲ作レ。

圖 錫 111 瓦、鉛 69 瓦 [4. 福工]

【問題】304. 上製品ト並製品トノ雜貨ヲ販賣スルニ、六圓ニ付並製品ハ上製品ヨリモ一枚多ク與ヘル筈ノ處、上製、並製各六圓分宛賣渡ス際、上製ト並製トヲ全ク取違ヘテ渡シタタメ、結局全體デ 30 錢安ク賣ツタコトニナツタ。然ラバ上製、並製一枚ヲ夫々何程ニテ賣ルベキ品デアツタカ。 [4. 大倉商]

圖 上 1圓50錢、下 1圓20錢

【問題】305. 上下二種ノ鶏卵アリ、一圓ニ付キ下ハ上ヨリモ 5 個安シ、今上下各一圓ヅツノ注文ニ、誤リテ上ト下トノ個數ヲ取違ヘテ渡セルタメ五錢ノ損失ヲ來セリト云フ。各一個ノ價何程ナルカ。 圖 上 5 錢、下 4 錢 [4. 商專]



【問題】305. 商人アリ、正當ノ利益ノ外ニ尙一割一分ノ利ヲ得ンガ爲ニ賣買ニ要スル不正ノ秤ヲ別々ニ偽造セリ。然ルニ或ル品物ノ賣買ニ際シ此ノ秤ヲ誤リテ使用セシガ爲ニ僅カニ原價ヲ得タルノミナリシトイフ。正當ノ利益ノ歩合何程ナルカ。

[4. 松山高校]

【解】 正當ノ利益ノ歩合ヲ  $r$  トス。買入用秤ニテ  $x$  匁ハ——賣出用秤ノ  $y$  匁トナル。買入レ一匁  $a$  錢ノモノハ——賣出一匁  $a(1+r)$  錢トナル。買入代金  $ax$  錢ハ——賣出シ代金  $a(1+r)y$  錢トナル。

故ニ次ノ方程式ヲ得ベシ。

$$ax(1+r+0.11) = a(1+r)y \dots (1) \quad (\text{誤マラヌトキ})$$

$$ay = a(1+r)x \dots (2) \quad (\text{誤マリタルトキ})$$

之レヲ解クニ邊々相乗ジテ

$$a^2xy(1+r+0.11) = a^2xy(1+r)^2 \dots + a^2xy \quad (\text{但シ } a^2xy \neq 0)$$

$$1+r+0.11 = (1+r)^2 \quad \text{今 } 1+r = y \text{ トスレバ}$$

$$y+0.11 = y^2 \quad \text{ヨリ } y^2 - y - 0.11 = 0 \dots (y+0.1)(y-1.1) = 0$$

$$\therefore y = -0.1 \text{ 又ハ } y = 1.1 \text{ 而シテ } 1+r = y \text{ ヨリ } y \text{ ハ正ナレバ}$$

$$\text{負値ヲ捨テ } y = 1.1 \text{ ノミヲトル。故ニ } 1+r = 1.1 \text{ ヨリ } r = 0.1$$

ヲ得。

■ 1割。

【問題】307. 正方形ヲナセル土地アリテ各邊ノ中央ニ門アリ。北門ヨリ北行二十歩（一步ノ間隔ハ 1.8 尺トス）ニシテ一樹アリ。人ガ南門ヨリ南行スルコト十四歩。更ニ西折シテ行クコト一千七百七十五歩ニシテ土地ノ西北隅ト樹木トガ相重ナリテ見エタリト云フ。此土地ノ面積ハ幾坪ナルカ。

■ 5625 坪 [4. 浦和]

【問題】308. 相等シキ速サヲ以テ航行スル三戦艦 A, B, C アリ。ABC ハ正三角形ヲナシ、航路ノ方向ハ AB = 垂直ニシテ C ヲ先頭トス。今一巡洋艦ガ直線航路ヲ取リテ A ヲリ出發シテ B = 出會フマデ = 30 分ヲ要シ、B ヲリ出發シテ C = 出會フマデ = 1 時 20 分ヲ要セリ。然ラバ C ヲリ出發シテ A = 出會フマデニハ何分ヲ要スベキカ。但シ艦ノ速サハ各一定ナリトス。

■ 11分15秒 [4. 海兵]

【問題】309. 井戸ヲ數臺ノポンプニテ汲ムアリ。之ヲ汲ミ盡スニ 3 臺ニテ 9 時間カ、リ、4 臺ニテ 6 時間カ、ルナラバ、6 臺ニテ幾時間カ、ルカ。但シ井戸ニハ初メニ一定量ノ水アリ、汲ミ出スニ從ツテ湧キ出ヅル水ノ量ハ毎時一定セルモノト見做ス。

[4. 姫路]

【註】 ポンプ一臺ニテ一時間ニ  $a$  石汲ミ出シ、井戸ニハ  $b$  石ノ水アリテ、一時間ニ  $c$  石湧出スルモノトシ 6 臺ニテ汲ミ盡スニ  $x$  時間ヲ要スルモノトスレバ  $3 \times 9a = b + 9c$ ,  $4 \times 6a = b + 6c$   $6 \times x \times a = b + cx$  ヲ得。

■ 3 時 36 分



【問題】310. 海底ノニケ所ニ鉛直ニ立テル長サ相等シキ甲乙二本ノ棒アリ。干潮時ニハ棒ノ水面ニ出ヅル部分甲ハ乙ノ  $m$  倍ナリシガ水深  $a$ 「メートル」増シタル満潮時ニハ棒ノ水面ニ出ヅルコト甲ハ乙ノ  $n$  倍トナレリ。甲乙ノ水深ノ差如何。 [4. 海兵]

$$\text{答} \quad \frac{(m-1)(n-1)a}{n-m} \text{ 米}$$

【問題】311. 一辺  $8\frac{1}{2}$  寸角ノ重箱ノ縁ヲ甲、乙二匹ノ蟻ガ同一角ヨリ同時ニ異リタル方向ニ走り始メ、出發セシ角ノ正反對ノ角ヲ甲蟻ガ  $1\frac{1}{2}$  寸過ギタルトキ乙蟻ニ始メテ出合ヒタリ、若シ斯クノ如キ速サニテ兩蟻ガ此縁ヲ廻リ續クルモノトセバ始メテ或ル一角ニテ出會フマテニ甲ハ何程ノ距離ヲ歩ムベキカ。 [4. 高専]

【解】 甲ガ  $(8\frac{1}{2} \times 2 + 1\frac{1}{2})$  寸即チ 18.5 寸走ル時間ト乙ガ 15.5 寸走ル時間ハ同一デアル。今兩蟻ガ出發シテヨリ邊ノ數ガ 甲ハ  $x$ 、乙ハ  $y$  ニテ出會フタルモノトスレバ其ノ時間ハ同一デアルカラ次ノ方程式ヲ得。

$$\frac{8.5x}{18.5} = \frac{8.5y}{15.5} \quad \therefore x = \frac{37}{31}y$$

而シテ  $x$  ト  $y$  トハ邊ノ數ナレバ正整数デナケレバナラヌ。從ツテ  $x$  ヲ最小整数トナスニハ  $y=31$  トナル。從ツテ  $x=37$  ヲ得。

且ツ反對ノ方ニ廻リテ相會スルノデアルカラ  $x+y$  ハ正方形ノ邊ノ數ノ和即チ 4ノ倍数デナケレバナラヌ從テ  $\frac{x+y}{4} = \text{整数}$  ヲ満足スルコトガ必要デアル。然ルニ  $x=37, y=31$  ハ之レヲ満足ス。  $[(37+31)+4=17]$  サレバ甲ハ  $8\frac{1}{2} \times 37 = 314\frac{1}{2}$  寸ヲ走ル。  $\text{答} \quad 314\frac{1}{2}$  寸

【問題】312. 甲乙兩人正方形 ABCD ヲ廻ルニ甲ガ A ヲ發シ B ニ達シタル時乙ハ A ヲ發シテ甲ト同方向ニ廻ルモノトス。乙出發後甲乙二人ガ初メテ正方形ノ同一邊上ニ來ルマデノ時間如何。但甲、乙ノ速サハ夫々毎分 54 間及ビ 46 間ニシテ正方形ノ一邊ノ長サハ 70 間トス。 [10. 商大] [4. 弘前]

【解】 甲ノ速サハ乙ノ速サヨリ大デアルカラ題意ニ適スルニハ甲ガ 70 間  $\times 2 = 140$  間以上乙ニ近追スレバヨイカラ其ノ時間ヲ  $t$  トスルト  $(54-46)t \geq 140$  ヲ得。

$$\text{故ニ} \quad t > \frac{140}{8} \quad \text{即チ} \quad t \geq \frac{35}{2} \quad \text{且ツ} \quad \frac{54t}{70} = \text{正整数デナケレバ}$$

$$\text{ナラヌ} \quad \text{因ツテ} \quad \frac{54}{70}t = N \quad \text{トスレバ} \quad t = \frac{35}{27}N \quad \text{從ツテ}$$

$$\frac{35}{27}N \geq \frac{35}{2} \quad \text{ヨリ} \quad N \geq \frac{27}{2} \quad \text{即チ} \quad N \geq 13.5 \quad \text{而シテ} \quad N \text{ ハ正}$$

整数ノ最小ナルモノヲ取レバ可ナルヲ以テ  $N=14$  ヲ得。サレバ  $t = \frac{35}{27} \times 14 = 18\frac{4}{27}$  トナル。

$$\text{答} \quad 18\frac{4}{27} \text{ 分}$$



【問題】313. 周囲 400 間ノ高塀ヲ以テメグラシタル正方形ノ邸アリ。今甲乙兩人ガ塀ノ相隣レル隅ヨリ同時ニ同方向ニ向ツテコレヲ廻リ始ム。甲ハ乙ヨリモ前ニアツテ其速サ毎分 42 間、乙ノ速サハ 34 間ナリ。然ラバ兩人出發後始メテ一方ガ他ヲ見出シ得ルニハ幾時間ヲ要スルカ。 [3. 算工]

$$\text{答 } 20\frac{4}{21} \text{ 分}$$

### 20. 【消 去 法】

方程式ノ數 (相異ナルモノガ) 未知數ノ數ヨリモ多キトキハ各係數間ニ或一定ノ關係アルニアラザレバ夫等ノ方程式ニ同時ニ適合スル未知數ノ値ナシ。

此ノ場合ニ其ノ係數間ノ關係ヲ求ムルコトヲ名ヅケテ假設ノ方程式ヨリ未知數ヲ消去スルトイフ。消去法ニ關スル問題ハ既ニ所々ニテ説明セリ。

前題 63, 64, 66, 67, 151, 152 ナドハ消去法デアル。

【問題】314.  $ax^2+bx+c=0$ ,  $lx^2+mx+n=0$  ヨリ  $x$  ヲ消去セヨ。

$$\text{答 } (an-cl)^2 = (bl-am)(cm-bn)$$

【問題】315.  $a=x(2-ax)$ ,  $b=1-\frac{2x^2}{1+x^2}$  ヨリ  $x$  ヲ消去セヨ。

$$\text{答 } a^2+b^2=1$$

【證士】

【問題】316. 次式ヨリ  $x, y, z$  ヲ消去セヨ。

$$[i] \frac{x^2(y+z)}{a^3} = \frac{y^2(z+x)}{b^3} = \frac{z^2(x+y)}{c^3} = \frac{xyz}{abc} = 1$$

[3. 法大]

$$[ii] x^2(y+z)=a^3, y^2(z+x)=b^3, z^2(x+y)=c^3, xyz=abc$$

[4. 京義]

$$\text{答 } [i] a^3+b^3+c^3+abc=0 \quad [ii] a^2+b^2+c^2+2abc=1$$

【問題】317.  $\frac{ax+by}{x+y} = \frac{by+cz}{y+z} = \frac{cz+ax}{z+x}$  ナルトキ  $a, b, c$  ノ間

ニ如何ナル關係アルベキカ、但シ  $x, y, z$  ハ何レモ 0 ナラズトス。 [4. 滿數]

$$\text{答 } a=b=c$$

【問題】318. 次式ヨリ  $x, y, z$  ヲ消去セヨ。

$$[i] ax+cy+bz=0, cx+by+az=0, bx+ay+cz=0$$

$$[ii] \frac{y-z}{y+z}=a, \quad \frac{z-x}{z+x}=b, \quad \frac{x-y}{x+y}=c$$

$$\text{答 } [i] a^3+b^3+c^3=3abc, \quad [ii] a+b+c+abc=0.$$

### 21. 【根 數 及 根 式】

【問題】319.  $\frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{27}-2\sqrt{2}+2\sqrt{8}-\sqrt{50}}$  ノ値ヲ小數第三位マデ計算セヨ。 [4. 大分商]

$$\text{答 } 0.577$$

【問題】320.  $\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} - \frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$  ヲ簡單ニセヨ。

$$\text{答 } 2\sqrt{3} \quad [4. 通商]$$



【問題】321.  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2(1 + \sqrt{3})$ ,  $\sqrt{ab} = 3 + 2\sqrt{3}$  ナルトキ次ノ式ノ値ヲ四捨五入シテ小數第五位マデ求メヨ. [4. 海兵]

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \quad \text{■ } 8.8453$$

【問題】322.  $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{9-2} + 2\sqrt{9}}} =$  最モ近キ整数ハ 4 ナルコトヲ證明セヨ. [4. 海軍]

【問題】323.  $P = \frac{3x^2 + y^2}{2x}$ ,  $Q = \frac{x^2 + 3y^2}{2y}$ ,  $xy = 1$  ナルトキ次式ノ値ヲ求メヨ. 但シ各文字ハスベテ實數トス. [3. 早大]

$$\{\sqrt{P+Q}\}^2 - \{\sqrt{P-Q}\}^2 \quad \text{■ } 2\sqrt{2}$$

【問題】324. 有理數ヲ係數トスル二次方程式ノ一解ハ  $1 + \sqrt{2}$  ナリ. 此ノ方程式ヲ求メヨ. [4. 弘前]

【注】 求ムル方程式ヲ  $x^2 + px + q = 0$  トスレバ  
 $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$  トナルヲ以テ  $\frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = 1 + \sqrt{2}$  ト置キテ  $-p + \sqrt{p^2 - 4q} = 2 + 2\sqrt{2}$  ヨリ  $-p = 2$ ,  
 $\sqrt{p^2 - 4q} = 2\sqrt{2}$  トシテ求メヨ.  $\text{■ } x^2 - 2x - 1 = 0$

【問題】325. 一ツノ有理數ト二次根數トノ和ヨリナル二項式アリ, 其ノ式ノ立方ヲ 8 = テ除シタル商ハ原式ト其ノ有理數トノ和ニ等シトイフ. 元ノ二項式如何. [早大]

$$\text{■ } \sqrt{5} + 1 \text{ 又ハ } \sqrt{5} - 1.$$

【問題】326. 方程式  $x^2 + Ax + B = 0$  = 於テ A ト B トハ有理數ニシテ此ノ方程式ノ一解ハ  $\sqrt{9} - \sqrt{3}$  ナリトイフ. A, B ノ値如何. [山梨工]

【注】  $\sqrt{9} - \sqrt{3}$  ヲ方程式ニ代入シテ整理シテ  
 $B + (\sqrt{3} - \sqrt{3})A = -6 + 9(\sqrt{3} - \sqrt{3})$  ヨリ  $B = -6$ ,  
 $(\sqrt{3} - \sqrt{3})A = 9(\sqrt{3} - \sqrt{3})$  ヲ得.  $\text{■ } A = 9, B = -6.$

【問題】327. a 及ビ b ハ有理數ニシテ  $a + b\sqrt{5}$  ガ  $1 + \sqrt{5}$ ,  $16 + 8\sqrt{5}$  ノ比例中項ヲナストキ a 及ビ b ノ値ヲ見出セ. [3. 弘高]

$$\text{■ } a = 6, b = 2 \text{ 又ハ } a = -6, b = -2$$

【問題】328.  $\sqrt{a + \sqrt{b}} = x + \sqrt{y}$  ナルトキ四ツノ數  $x, y, a, b$  ハ何レモ有理數ニシテ且ツ  $b, y$  ハ完全平方數ニアラザルトキハ  $\sqrt{a - \sqrt{b}} = x - \sqrt{y}$  ナルコトヲ證セヨ. [陸士]

【問題】329.  $\sqrt{x} = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}$  ナルトキ  $\frac{x + 2 + \sqrt{4x + x^2}}{x + 2 - \sqrt{4x + x^2}}$  ノ値ヲ求メヨ. [高校]

$$\text{■ } a \geq 1 \text{ ノトキ } a^2$$

【問題】330.  $x = b\sqrt{2a - b^2}$  ナルトキ, 次ノ式ノ値ヲ求メヨ.

$$\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} \quad \text{[3. 三高]}$$

■  $a \geq b^2 > 0$  ノトキ  $\frac{\sqrt{2a - b^2}}{b}$ ;  $b^2 > a > \frac{b^2}{2}$  ノトキ  $\frac{b}{\sqrt{2a - b^2}}$   
 但シ  $b = 0$  又ハ  $2a = b^2$  ナラバ與式ハ値ヲ有セズ.



【問題】331.  $2x = a + \frac{1}{a}, 2y = b + \frac{1}{b}$  ナルトキ次ノ式ノ値ヲ求メ

ヨ.  $xy + \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$  [3. 滿數] [廣師]

☐  $(a^2-1)(b^2-1) \geq 0$  ノトキ  $\frac{a^2b^2+1}{2ab}$

$(a^2-1)(b^2-1) \leq 0$  ノトキ  $\frac{a^2+b^2}{2ab}$

【問題】332.  $\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}} - \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} - \frac{4}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$  ヲ簡單

ニセヨ. ☐ 0 [4. 新潟]

【問題】333.  $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3+\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8+\sqrt{3-\sqrt{5}}}}$  ヲ計算シ小數第

三位未滿ヲ四捨五入セヨ. [4. 三高]

☐ 5.236

【問題】334.  $\sqrt{ab+c^2} + \sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)} + \sqrt{(a-c)^2}$  ヲ簡單ニ

セヨ. [愛媛]

☐  $\sqrt{\frac{(a+c)(b+c)}{2}} + \sqrt{\frac{(a-c)(b-c)}{2}} + k$

但シ  $\begin{cases} a-c \geq 0 & \text{ノトキ } k = a-c \\ a-c \leq 0 & \text{ノトキ } k = -(a-c) \end{cases}$

【問題】335.  $(7-4\sqrt{3})x^2 + (2-\sqrt{3})x = 2$  ヲトケ. [3. 神南]

【註】先ヅ  $(7+4\sqrt{3})$  ヲカケテ形ヲ直ス.

☐  $2+\sqrt{3}$  又ハ  $-2(2+\sqrt{3})$

## 22. 【比 及 比 例】

【問題】336.  $6x^2 - 23xy + 20y^2 = 0$  ナルトキ  $\sqrt{3x+2y} : \sqrt{2x-y}$

ノ値ヲ求メヨ.

[大工]

☐  $\sqrt{3\frac{3}{5}}$  又ハ  $\sqrt{2\frac{3}{8}}$

【問題】337.  $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$  ヨリ  $x:y:z$  ノ比ヲ求メヨ.

☐ 4:2:3 [高松商]

【問題】338.  $x=1$  及ビ  $x=2$  ガ  $\frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{3x-5} = 0$  ニ適

合スルトキ  $A:B:C$  ノ連比ヲ求メヨ.

[大倉商]

☐ 3:-10:1

【問題】339.  $\frac{x(y+z)}{27} = \frac{y(z+x)}{32} = \frac{z(x+y)}{35}$  ナル關係ヨリ  $x:y:z$

ヲ決定セヨ. 但シ  $x, y, z$  ハ何レモ零ナラズ.

[4. 海嶺]

【註】 $k$  ト置キテ解ケ

☐ 3:4:5

【問題】340. 米麥若干表アリ. 其ノ價ノ比ハ 12:13, 各一疋ノ

價ノ比ハ 4:3, 各一俵ノ目方ノ比ハ 9:11 ナリトイフ. 俵

數ノ比ヲ求メヨ.

☐ 11:13 [4. 商大專]

【問題】341. 某校ノ文科ト理科トノ受験者ノ比ハ  $l:m$  ニシテ合

格者ノ比ハ  $a:b$ , 又不合格者ノ比ハ  $c:d$  ナリトイフ. 各

科ニ於ケル合格者ト受験者トノ比ヲ求メヨ.

[4. 新潟高校]

☐  $\frac{a(dl-cm)}{l(ad-bc)}, \frac{b(mc-dl)}{m(bc-ad)}$



【問題】342. 北半球ニ於テハ陸ノ面積ノ海ノ面積ニ對スル比ハ  
 $2:5$ ニシテ南半球ニ於テハ陸ト海トノ面積ノ比ハ  $3:25$ ナ  
 リト云フ. 地球ノ全表面ニ於ケル陸ト海トノ面積ノ比如何.  
 答 11:45 [4. 二高]

【問題】343. 甲乙二個所ノ賣地アリ. 其面積ノ比ハ  $7:6$ , 其一坪  
 ノ提供價格ノ比ハ  $5:4$ ナリトス. 或ル人甲地ノ  $\frac{1}{3}$ , 乙地  
 ノ  $\frac{1}{4}$ ヲ一坪ニツキ提供價格ヨリ何レモ  $5$ 圓 ツツ廉ク購  
 ヒシニ買價ノ比ハ  $2:1$ ナリシトイフ. 各地一坪ノ買價如何.  
 答 45圓, 35圓 [4. 一高]

【問題】344.  $a, b, c, d$ ガ比例ヲナストキ次式ヲ證明セヨ.

[i]  $(ab+cd):(ab-cd)=(a^2+c^2):(a^2-c^2)$  [4. 複高]

[ii]  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{a} : \frac{c^3}{d} + \frac{d^3}{c} = ab:cd$  [4. 松江高校]

[iii]  $\frac{a^{2n}+b^{2n}+c^{2n}+d^{2n}}{a^{-2n}+b^{-2n}+c^{-2n}+d^{-2n}} = (abcd)^n$  [金工]

【問題】345.  $a, b, c, d$ ガ連比例ヲナストキ次式ヲ證明セヨ.

$$(b-c)^2 + (c-a)^2 + (d-b)^2 = (a-d)^2$$
 [海兵]

【問題】346.  $b$ ガ  $a, c$ ノ比例中項ナルトキ次式ヲ證セヨ.

$$(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2) = a^4+b^4+c^4$$
 [彦高]

【問題】347.  $\frac{a}{a^2+ab+b^2} = \frac{c}{b^2+bc+c^2}$ ナルトキ  $b$ ハ常ニ  $a, c$   
 ノ比例中項ナリヤ. [商專]

答  $a+c$ ノトキニ限ル

【問題】348.  $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ ト  $11\sqrt{7}+13\sqrt{5}$ トノ比例中項ヲ求メヨ.  
 答  $\pm(\sqrt{7}+\sqrt{5})$  [大商]

【問題】349. 比例ヲナス四ツノ實數アリ. 外項ノ和ハ  $2a$ , 内項  
 ノ和ハ  $2b$ , 各項ノ平方ノ和ハ  $4$ ナリ コノ四數ヲ求メヨ.  
 但シ  $a, b$ ハ實數ナリトス. [4. 陸士]

【解】比例ヲナス四ツノ實數ヲ  $x, y, z, u$ トスレバ次ノ方程式ヲ得.

$$x:y=z:u \cdots \cdots yz=xu \cdots \cdots (1)$$

$$x+u=2a \cdots \cdots (2), \quad y+z=2b \cdots \cdots (3)$$

$$x^2+y^2+z^2+u^2=4 \cdots \cdots (4)$$

之レヲ解クニ (4)ヲ變形シテ  $(x+u)^2-2xu+(y+z)^2-2yz=4$

之レニ (1), (2), (3)ヲ代入シテ  $(2a)^2-2xu+(2b)^2-2yz=4$ .

即チ  $xu=a^2+b^2-1$  之レヲ組合ハスニ次ノ二通リアリ

$$\left. \begin{aligned} x+u &= 2a \\ xu &= a^2+b^2-1 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (A) \text{ト}$$

$$\left. \begin{aligned} y+z &= 2b \\ yz &= xu = a^2+b^2-1 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots (B) \text{ナリ}$$

サテ (A)ヲ解クニ  $u=2a-x$ ヲ代入シテ  $(2a-x)x=a^2+b^2-1$

整理シテ  $x^2-2ax+a^2+b^2-1=0$ ヨリ  $x=a \pm \sqrt{1-b^2}$

從ツテ  $u=a \mp \sqrt{1-b^2}$ ヲ得. 而シテ  $x$ ハ實數ナルヲ以テ

$1-b^2 \geq 0$ ナルコトヲ要ス. 從ツテ  $b$ ノ取り得ル限界ハ

$1 \geq b \geq -1$ トナル.  $(x=a+\sqrt{1-b^2}, u=a-\sqrt{1-b^2});$

$$(x=a-\sqrt{1-b^2}, u=a+\sqrt{1-b^2})$$

同様ニ (B)ヲ解ケバ  $(y=b+\sqrt{1-a^2}, z=b-\sqrt{1-a^2});$

$$(y=b-\sqrt{1-a^2}, z=b+\sqrt{1-a^2})$$

トナリ  $1 \geq a \geq -1$ ヲ得. 因ツテ上ノ根ヲ組合ハストキハ



$$[x=a+\sqrt{1-b^2}, y=b+\sqrt{1-a^2}, \\ z=b-\sqrt{1-a^2}, u=a-\sqrt{1-b^2}]$$

$$[x=a+\sqrt{1-b^2}, y=b-\sqrt{1-a^2}, \\ z=b+\sqrt{1-a^2}, u=a-\sqrt{1-b^2}]$$

$$[x=a-\sqrt{1-b^2}, y=b+\sqrt{1-a^2}, \\ z=b-\sqrt{1-a^2}, u=a+\sqrt{1-b^2}]$$

$$[x=a-\sqrt{1-b^2}, y=b-\sqrt{1-a^2}, \\ z=b+\sqrt{1-a^2}, u=a+\sqrt{1-b^2}]$$

然ルニ比例式ニ於テハ  $x:y=z:u$  ヨリ  $x:z=y:u$  又ハ  $u:y=z:x$  又ハ  $u:z=y:x$  ト變形シ得ルヲ以テ上ノ四組ノ中何レカ一組ノ答ニテ可ナリ。

$$\text{答 } a+\sqrt{1-b^2}, b+\sqrt{1-a^2}, b-\sqrt{1-a^2}, a-\sqrt{1-b^2} \\ \text{但シ } a^2 < 1, b^2 < 1.$$

【問題】 350.  $x-y$  ガ  $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \text{反比例ヲナスナラバ } x^2+y^2$  ハ  $xy$  = 比例スルコトヲ證セヨ。 [明專]

$$\text{【註】 } (x-y)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) = k \text{ ヨリ } (x-y)^2 = -kxy$$

$$\therefore (x+y)^2 = 4xy - kxy \text{ 即チ } (x+y)^2 = (4-k)xy \text{ ヨリ考ヘヨ。}$$

【問題】 351.  $x^2+y^2$  ガ  $x^2-y^2$  = 比例シテ變化スルナラバ,  $x+y$  モ亦  $x-y$  = 比例シテ變化スルコトヲ證セヨ。 [4. 福工]

【問題】 352.  $x, y, z$  ハ變數ナレドモ其ノ和ハ一定ナリ。モシ  $(x-y+z)(x+y-z)$  ガ  $yz$  = 正比例スルトキハ  $y+z-x$  ハ  $yz$  = 正比例スルコトヲ證セヨ。

【問題】 353. ニツノ量  $A, B$  = 關聯シテ變化スル量  $O$  アリ,  $B$  ラ一定ニシ  $A$  ノミヲ變化セシムルトキ,  $C$  ハ  $A$  = 比例シ, 又  $A$  ラ一定ニシ  $B$  ノミヲ變化セシムルトキ,  $B$  = 比例ス。然ラバ  $A, B$  共ニ變化セシムルトキ,  $O$  = イカナル變化ガ生ズルカ。之ヲ求メ, 且證明セヨ。 [4. 山梨工]

【解】  $A, B$  ノ數値ガ夫々  $a, b$  ナルトキノ  $C$  ノ數値ヲ  $c$  トス。(但シ  $a, b, c$  ハ定マレル數値トス)。今  $B$  ラソノマヽトシ  $A$  ノミガ任意ノ値  $x$  = 變ジタルトキ  $b$  ノ値ガ  $z'$  = 變ズルモノトスレバ假定ニヨリ  $a:x=c:z'$  (正比例) 即チ  $z' = \frac{c}{a}x$  (1) ヲ得。

次ギニ  $A$  ハ  $x$  ノマヽニテ  $B$  ノミガ任意ノ値  $y$  = 變ジタルトキ  $C$  ハ  $z'$  ヨリ  $z$  = 變ゼルモノトスレバ假定ヨリ  $b:y=z':z$  (正比例) 即チ  $z' = \frac{bz}{y}$  (2) トナル

因ツテ (1), (2) ヨリ  $\frac{c}{a}x = \frac{bz}{y}$  即チ  $z = \frac{c}{ab}xy$  ヲ得。

而シテ  $\frac{c}{ab}$  ハ一定値ナルヲ以テ  $\frac{c}{ab} = k$  トスレバ  $z = kxy$  トナルヲ以テ  $z$  ハ  $x, y$  ノ積ニ比例ス。

【問題】 354.  $s$  ハ  $t$  = 比例スル數ト  $t^2$  = 比例スル數トノ和ニシテ,  $t=2$  ノトキ  $s=104, t=5$  ノトキ  $s=500$  ナリトイフ。 $t=90$  ノトキ  $s$  ノ値ヲ求メヨ。 [4. 廣工]

答 131400



【問題】355. ニツノ變數アリソノーツハ  $x$  = 正比例, 他ノーツハ  $x$  = 反比例,  $y$  ハコノ二變數ノ和 = 正比例スルモノトス  $x=2$  ナルトキ  $y=3$ ,  $x=3$  ナルトキ  $y=5$  トシ  $x$  ト  $y$  トノ關係ヲ表ハス式ヲ求メヨ. [4. 北大隈]

$$\text{答 } 9x^2 - 5xy = 6$$

【問題】356. 遊星ガソノ軌道ヲ一周スルニ要スル時間ノ平方ハソノ遊星ト太陽トノ距離ノ立方ニ比例ス. 今地球ト火星トノ太陽ヨリノ距離ノ比ハ 25:38. ニシテ地球ガ軌道ヲ一周スルニ要スル時間ハ 365.25 日ナリトセバ火星ガ軌道ヲ一周スルニハ幾日ヲ要スルカ. [3. 成城高校]

$$\text{答 } 682.87 \text{ 日}$$

【問題】357. 平面へ垂直ニ吹キ付クル風ノ壓力ハ, 其ノ平面ノ廣サト風速ノ自乗トノ積ニ比例ス. 風速毎秒一米ノ風ガ一平方米ノ平面へ垂直ニ吹キツケルトキノ壓力ヲ 80 瓦トスレバ, 風速毎秒 15 米ノ風ガ高サ一間, 長サ五間ノ板塀ニ垂直ニ吹キ付クルトキノ壓力ハ幾貫ナルカ. [4. 大倉商]

$$\text{答 } 79\frac{41}{121} \text{ 貫}$$

【問題】358. 甲乙二船アリ, 甲ハ八千噸, 乙ハ二萬七千噸ナリ. 二船ハ相似形ニシテ即チ其噸數ハ長サノ三乗ニ比例スルモノトスレバ, 二船ノ船腹ヲ塗ルニ要スル費用ノ比如何. 但シ費用ハ船腹ノ面積ニ比例スルモノトス. 答 4:9 [機工]

【問題】359. 某汽船ガ航行中ニ要スル石炭料ハ其ノ速サノ二乗ニ比例シ, 毎時 10 哩ニテ進ムトキ毎時 50 圓ノ石炭ヲ費ストイフ. 尙航行中ハ其ノ速サノ如何ニ關セズ毎時 50 圓ノ雜費ヲ要ストセバ總費用 1200 圓ニテ 100 哩ヲ航行センニハ其ノ速サヲ何程トスベキカ. [海産]

【解】一時間ノ石炭料ヲ  $X$  圓トシ, 一時間ノ速サヲ  $V$  哩トスレバ速サノ二乗ニ比例スルカラ  $X = k \cdot V^2 \dots (1)$  ヲ得. 之レニ  $X = 50$ ,  $V = 10$  ヲ代入シテ  $[50 = k \cdot 10^2]$  ヨリ  $k = \frac{1}{2}$  従ツテ(1)式ハ  $X = \frac{1}{2} V^2 \dots (2)$  トナル. 而シテ題意ニヨリ一時間ノ航行費用ハ  $(X + 50)$  圓ナリ, 今 1200 圓ニテ 100 哩ヲ行クニ  $t$  時ヲ要セリトスレバ毎時ノ速サハ  $\frac{100}{t}$  哩トナルカラ  $V = \frac{100}{t}$  即チ  $t = \frac{100}{V} \dots (3)$  又一時間ノ費用ハ  $\frac{1200}{t}$  圓ニシテコハ  $(X + 50)$  圓ニ等シイノデ  $X + 50 = \frac{1200}{t}$  之レニ (2), (3) ヲ代入シテ  $\frac{1}{2} V^2 + 50 = \frac{1200}{100} V \therefore V^2 - 24V + 100 = 0$  之レヲ解ケバ  $V = 12 \pm \sqrt{44}$  ヲ得.

$$\text{答 } (12 \pm \sqrt{44}) \text{ 哩 (即チ 18.6 哩又ハ 5.4 哩)}$$

【問題】360. 或貨物列車ノ機關車ハ貨車ヲ連結シナイトキニハ毎時 36 哩宛走ル程度デアツテ, 貨車ヲ連結スルト, 其ノ連結貨車ノ個數ノ平方根ニ比例スル分量ダケ速サガ減ズル今貨車九個ヲ連結スルト其ノ速サハ毎時 30 哩デアル. 然



ラバ毎時 25 哩以上ノ速ヲ保クシメル爲ニハ率引シ得ル  
貨車ノ最多數ハ幾個カ。 [4. 大谷大專] [4. 大倉商]

【解】 連結貨車ノ數ヲ  $N$  トシ、毎時ノ速ヲ  $V$  哩トスレバ題意  
ニヨリ  $V = 36 - k\sqrt{N}$  ……(A) ヲ得。今  $V = 30$ ,  $N = 9$  ヲ  
(A) 式ニ代入スルト  $30 = 36 - k\sqrt{9}$  ヲリ  $k = 2$  ヲ得。因ツ  
テ (A) 式ニ  $k = 2$  ヲ代入スレバ  $V = 36 - 2\sqrt{N}$  従ツテ  $V \geq 25$   
ヨリ  $36 - 2\sqrt{N} \geq 25$   $\therefore 11 \geq 2\sqrt{N}$   
サテ  $11 > 0$ ,  $2\sqrt{N} > 0$  ヲリ平方シテ  $121 \geq 4N$   $\therefore 30\frac{1}{4} \geq N$   
従ツテ  $N$  ノ最大ハ 30 トナル。 圖 30 輛

【問題】 361. 某家ノ生活費ハ家族ノ人數ガ一定ナルトキニハ時  
日ニ比例シ、時日ガ一定ナルトキハ一部ハ定額ニシテ一部  
ハ家族數ニ比例ストイフ。今家族 4 人、3 ヶ月ノ生活費ハ  
225 圓、家族 5 人 4 ヶ月間ノ生活費ハ 360 圓ナリトセバ  
家族 10 人 6 ヶ月間ノ生活費ハ幾許ナルカ。 [松山高商]

【註】 家族四人六ヶ月ノ費用ト、家族五人六ヶ月ノ費用トヲ先ヅ  
算出スレバ何レモ時間ガ一定トナルカラ生活費 ( $L$ ) ノ一部ハ定  
額  $a$  圓ニシテ残部ハ人數 ( $N$ ) ニ比例スルカラ  $L = k \cdot N + a$  ヲ  
リ求メヨ。 圖 990 圓。

【問題】 362. 或ル食堂ニ於テ、食券一枚ノ價ガ 10 錢ナリシトキ  
平均一日ノ食券發賣數ハ 390 枚ナリシニ、食券一枚ノ價ガ  
13 錢トナリタルトキ平均一日ノ食券發賣數ハ 45 枚ダケ減  
ジタリト云フ。今食券發賣數ノ減少ハ食券ノ價ノ増加ニ比

例スルモノトセバ、此ノ食堂ノ收入ヲ最モ多クスルニハ食  
券一枚ノ價ヲ何程ト定ムベキカ。 [4. 長岡工]

【註】 食券一枚ノ價  $x$  錢ナルトキ、發賣數ヲ  $y$  枚、收入ヲ  $s$  錢  
トスレバ  $s = xy$ ,  $390 - y = k(x - 10)$  ヲリ求ム。 圖 18 錢

【問題】 363. 一塊ノ銅ニ亞鉛 3 斤ヲ融合シ、ソノ中ヨリ 9 斤ヲ取  
リタルモノニ更ニ亞鉛 9 斤ヲ融合シタルニ銅ト亞鉛トノ比  
5:7 トナリタリト云フ。最初ノ銅ノ目方ヲ求メヨ。

圖 15 斤 [4. 陸士]

【問題】 364. 上中下三種ノ酒ヲ混ジタル三個ノ樽アリ、甲樽ハ各  
酒ノ割合 5:2:1 乙樽ハ 2:5:1 丙樽ハ 3:1:4 ナリ、今  
之ヲ混ジテ各酒ヲ等分ニ含メル混合酒九升ヲ作ラントス、  
然ラバ各樽ヨリ何升ヅツヲ採ルベキカ。 [4. 松山高商]

■ 甲  $\frac{1}{3}$  升、乙  $3\frac{2}{3}$  升、丙 5 升

### 23. 【等差級數】

【問題】 365.  $a, b, c$  ガ等差級數ヲナストキハ  $a^2(b+c), b^2(c+a),$   
 $c^2(a+b)$  モ又等差級數ヲナスコトヲ證明セヨ。

[4. 鳥巢]

【問題】 366.  $\frac{b+c}{bc-1}, \frac{1}{b}, \frac{a+b}{ab-1}$  ガ等差級數ヲナストキハ  $a, \frac{1}{b}, c$

モ又等差級數ヲナスコトヲ證セヨ。

但シ  $1+b^2 \neq 0$  トス。

[3. 慶大]



【問題】367.  $y = Ax^2 + Bx + C$  二於テ  $x$  ノ値ガ順次  $= a, a+d, a+2d$  及ビ  $a+3d$  ナルトキ  $y$  ノ値ヲ夫々  $P, Q, R$  及ビ  $S$  トセバ  $Q-P, R-Q$ , 及ビ  $S-R$  ハ等差級数ヲナスコトヲ證セヨ.

【問題】368. 三數  $\frac{a}{b-c}, \frac{b}{c-a}, \frac{c}{a-b}$  ガ等差級数ヲナストキ, 次ノ關係アルコトヲ證セヨ. [4. 山形]

$$\frac{a^3 - 2b^3 + c^3}{a^2 - 2b^2 + c^2} = \frac{a+b+c}{2}$$

【問題】369. 一ツノ數  $a$  ヲ等差級数ヲナス三ツノ部分  $x, y, z =$  分ツトキハ  $x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y) = \frac{2}{9}a^3$  ナルコトヲ證セヨ. [意大]

【問題】370. 直角三角形ノ三邊ガ等差級数ヲナストキ其ノ三邊ノ比如何. [2. 京城大]

$$\blacksquare 3:4:6$$

【問題】371. 周圍 1 ナル直角三角形ノ三邊ノ上ノ正方形ノ面積ガ等差級数ヲナストキ, ソノ斜邊ノ長サヲ小數第二位マデ求メ, 第三位ニ於テ四捨五入セヨ. [4. 東京高校]

$$\blacksquare 0.42$$

【問題】372. 等差級数ヲナス三數アリ, 其ノ和ハ 18 ニシテ其ノ平方ノ和ハ 126 ナリ, 各數ヲ求メヨ. [4. 水原鐵]

$$\blacksquare 3, 6, 9$$

【問題】373. 1 ト 10 トノ間ニ二整数ヲ挿入シ, 四整数ニツキ相隣レル二數ノ差ヲ作ルトキ, ソレ等ノ差ガ等差級数ヲナシ且ツ公差ガ正數ナル様ニセヨ. [4. 意大]

$$\blacksquare (1, 4); (2, 5); (3, 6)$$

【問題】374. 等差級数ヲナス四ツノ整数アリ, 其ノ平方ノ和ハ 120 ニシテ, 第二數ト第四數トノ積ハ第一數ト第三數トノ積ノ 2 倍ヨリ大ナルコト 8 ナリ, 此ノ四ツノ整数ヲ求メヨ. [高校]

$$\blacksquare (2, 4, 6, 8); (-2, -4, -6, -8)$$

【問題】375. 等差級数ノ第  $(n-3)$  項, 第  $(n-4)$  項ヲ夫々  $p, q$  トシ第  $n$  項ヲ  $r$  ニテ表ハセ. [2. 商大豫科]

$$\blacksquare 4p-3q$$

【問題】376. 等差級数ノ第  $(p+q)$  番目ハ  $m$  ニシテ第  $(p-q)$  番目ハ  $n$  ナルトキ第  $p$  番目及第  $q$  番目ノ項ヲ書ケ. [海兵]

$$\blacksquare p \text{ 番目 } \frac{1}{2}(m+n); q \text{ 番目 } m + \frac{(n-m)p}{2q}$$

【問題】377.  $\frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}} + 2 + \frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}} + \dots$  ナル等差級数

ノ公差ヲ簡單ニシ然ル後  $n$  項マデノ和ヲ求メヨ. [4. 小樽]

$$\blacksquare \text{公差 } \sqrt{3}, \text{和 } \frac{n}{2}[4 + \sqrt{3}(n-3)]$$



【問題】378. 等差級数  $n$  項ノ和ハ  $n$  ノ値ノ如何ニ關セズ

$n(5n-4)$  ナルトキ初項ト公差トヲ求メヨ。 [横高]

②

■ 初項 1, 公差 10

【問題】379. 三桁ノ整数ニシテ 17 ニテ割ルトキ 2 殘ルモノ、

和ヲ求メヨ。 [3. 短高]

【註】三桁ノ最小數ニシテ且ツ 17 ノ倍數ハ 102, 最大數ハ 986  
ナレバ題意ニ適スル級數ハ 104, 121, 138, ……988 ナリ。

■ 28938

【問題】380. 1 ヨリ 1000 マデノ間ニ於テ末尾ニ 3 若シクハ 7

ヲ有スル整数ノ總和ヲ求メヨ。 [3. 高專]

【註】  $s = (3+7) + (13+17) + (23+27) + (33+37) + (43+47) + \dots$   
 $\dots + (993+997)$   
 $= 10 + 30 + 50 + 70 + 90 + \dots + 1990 = 100000$

■ 100000

【問題】381. 1 ヨリ 500 マデノ整数ノ中, 2 ノ倍數ニモアラズ又

5 ノ倍數ニモアラザル整数ノ總和ヲ求メヨ。 [東師]

【註】2 ノ倍數デナイ整数ハ奇數デアルカラ 1, 3, 5, 7, ……499  
ノ和カラ 5 ノ倍數ヲ引キ去レバヨイ。

■ 37750.

【問題】382. 1, 3, 5, ……ナル連續奇數  $(2n+1)$  個ノ中, 3 ノ倍

數ナルモノ總和ヲ求メヨ。 [4. 佐賀]

【解】第  $(2n+1)$  番目ノ項ヲ求ムルニ  $a=1, d=2$ , 及ビ公式

$l = a + (n+1)d$  ヨリ  $l = 1 + \{(2n+1)-1\}2 = 4n+1$  トナル。

因ツテ連續奇數ハ次ノ如シ。

1, 3, 5, 7, 9, 11, ……  $(4n+1)$

而シテ  $2n+1$  ハ項數ナレバ  $n$  ハ正整数ナリ。從ツテ如何ナル  
整数ニテモ 3 ノ倍數カ, 3 ノ倍數ヨリ 1 ダケ大ナルカ又ハ小  
ナレバ  $n=3p, n=3p-1, n=3p+1$  ニ限ル。

(但シ  $p$  ハ正整数)

[i]  $n=3p-1$  トスレバ  $(2n+1)$  個ノ連續奇數ハ下ノ如シ

但シ末項  $l = 4n+1 = 4(3p-1)+1 = 12p-3 = 3(4p-1)$   
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ……  $3(4p-1)$

之レヨリ 3 ノ倍數ヲ書キ並べルト

3, 9, 15, ……  $3(4p-1)$  トナル, 其ノ項數ハ

$a=3, d=6, l=3(4p-1)$  ヲ公式  $l = a + (n-1)d$  ニ代入シ

テ  $3(4p-1) = 3 + (n-1) \times 6$  ヨリ  $n=2p$  從ツテ

$s = 3+9+15+\dots+3(4p-1) = \frac{2p\{3+3(4p-1)\}}{2} = 12p^2$

[但シ公式  $s = \frac{n(a+l)}{2} = a=3, n=2p, l=3(4p-1)$

ヲ用フ] 而シテ  $n=3p-1$  ヨリ  $p = \frac{n+1}{3}$

$\therefore s = 12p^2 = 12 \times \left(\frac{n+1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}(2n+2)^2$  ヲ得。

[ii]  $n=3p$  トスレバ  $l = 4n+1 = 12p+1$  ナルヲ以テ連續  
奇數ハ下ノ如シ。

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ……  $(12p-3), (12p-1), (12p+1)$

之レヨリ 3 ノ倍數ヲ書キ並べルト

3, 9, 15, ……  $(12p-3)$  以下 [i] ト同様ノ手順ニヨリ



其ノ和ヲ求ムレバ  $s = \frac{1}{3}(2n)^2$  ヲ得.

[iii]  $n=3p+1$  ノトキ  $l=4n+1=4(3p+1)+1=12p+5$   
從ツテ奇數ハ

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ……………(12p+1), (12p+3), (12p+5)

サレバ3ノ倍數ノ和  $= 3+9+15+\dots+(12p+3)$

$$= 12p^2 + 12p + 3 = 3(2p+1)^2$$

$$= \frac{1}{3}(6p+3)^2 = \frac{1}{3}(2n+1)^2$$

☐  $n=3p-1$  ノトキ  $\frac{1}{3}(2n+2)^2$ ;  $n=3p$  ノトキ  $\frac{1}{3}(2n)^2$ ;

$n=3p+1$  ノトキ  $\frac{1}{3}(2n+1)^2$

【問題】383. 次ノ級數ノ任意項數ノ和  $= 1$  ヲ加フレバ或ル奇數ノ平方ナルコトヲ證セヨ. 8, 16, 24, 32, …… [4. 演義]

【問題】384. 項數ガ偶數ナル等差級數アリ, 其ノ奇數番目ノ項ノ和ハ 120, 偶數番目ノ項ノ和ハ 136 ニシテ末項ハ初項ヨリ大ナルコト 30 ナラバ此ノ級數ノ項數如何. [3. 演義]

【註】項數ガ偶數ナレバ  $2n$  トスルト

$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots, \{a+(2n-2)d\}, \{a+(2n-1)d\}$

奇數番目ノ項ノ和  $\dots n\{a+(n-1)d\} = 120$  ヨリ

$$n(a+nd) - nd = 120 \dots\dots\dots (1)$$

偶數番目ノ項ノ和  $\dots\dots n(a+nd) = 136 \dots\dots\dots (2)$

$$\text{又 } a+30 = a+(2n-1)d \dots (3)$$

(1), (2) ヨリ  $136 = 120 + nd \therefore nd = 16 \dots (4)$  又 (3) ヨリ

$30+d = 2nd$  之レニ (4) ヲ代入シテ解ケ. ☐ 8

【問題】385. 項數ガ奇數ナル等差級數ニ於テ奇數番ノ項ノ和ハ 50 ヲシテ, 偶數番ノ項ノ和ハ 40 ナルトキ其項數及中項ヲ見出セ. [4. 演義]

☐ 項數 9; 中央項 10

【問題】386. 等差級數ノ初項ト第十項トノ和ハ 7, 又第二項ノ平方ト第九項ノ平方トノ和ハ  $27\frac{2}{9}$  ナルトキ第八項ヨリ第十九項マデノ和ヲ求メヨ. ☐ 74 又ハ 10

【問題】387. 等差級數  $1000 + 997 + 994 + 991 + \dots =$  於テ

[i] 負號ヲ取ル最初ノ項ヲ求メヨ.

[ii] 第何項マデノ和ガ最小正整數トナルカ.

☐ [i] 第 335 項 [ii] 667 項

【問題】388. 初項正ナル等差級數ノ第三項マデノ和ト, 第十一項マデノ和トガ相等シキトキ第  $n$  項マデノ和ハ  $n$  ノ如何ナル値ニ對シテ最大トナルカ.

【註】  $3(a+d) = 11(a+5d)$  ヨリ  $d = \frac{-2a}{13}$  之レヲ和ノ公式ニ代入

$$\text{スレバ } s = \frac{a}{13}\{14n - n^2\} = \frac{a}{13}\{7^2 - (7-n)^2\} \text{ ヨリ } n=7 \text{ ヲ得.}$$

☐  $n=7$

【問題】389. 等差級數 2, 5, 8, …… , 200 及ビ 2, 7, 12, …… , 202 = 於テ相合致スル項ノ數如何又ソレ等ノ項ノ和如何.

☐ 14 項, 和 1393



【問題】390. 一ツノ等差級数ノ第  $p$  項ハ  $\frac{1}{q}$  ニシテ第  $q$  項ハ  $\frac{1}{p}$  ナルトキ此級数ノ第  $pq$  項ニ至ル總和ハ  $\frac{1}{2}(pq+1)$  ナルコトヲ證セヨ. [3. 名工]

【問題】391. 等差級数ノ初項ヨリ第  $p$  項マデノ和ト、初項ヨリ第  $2p$  項マデノ和トガ相等シキトキハ、初項ヨリ第  $3p$  項マデノ和ノ値如何. 答 0 [3. 明大]

【問題】392. 等差級数ニ於テ第  $m$  項ヲ  $p$ 、第  $n$  項ヲ  $q$ 、第  $m$  項マデノ和ヲ  $s_m$ 、第  $n$  項マデノ和ヲ  $s_n$  トシ  $s_m : s_n = m^2 : n^2$  ナラバ  $p : q = (2m-1) : (2n-1)$  ナルコトヲ證セヨ.

【問題】393. ニツノ等差級数ノ第  $n$  項マデノ和ノ比ガ  $n$  ノ値ノ如何ニ關セズ恒ニ  $7n+2 : n+4$  ニ等シキトキハ、其ノ各級数ノ第  $m$  項ノ比如何. 答  $14m-5 : 2m+3$ .

【註】ニツノ級数ヲ  $a, a+d, a+2d, \dots; a', a'+d', a'+2d', \dots$

トシ其ノ  $n$  項マデノ和ヲ  $s, s'$  トスレバ

$$s : s' = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} : \frac{n\{2a'+(n-1)d'\}}{2} \quad \text{ヨリ}$$

$7n+2 : n+4 = 2a+(n-1)d : 2a'+(n-1)d' \dots (1)$  デアル. 又第

$m$  項ヲ夫々  $l, l'$  トスレバ  $l : l' = a+(m-1)d : a'+(m-1)d' \dots (2)$

トナル. サレバ (1) ヲ變ジテ (2) ヲ作レバヨイ. (1) ヨリ

$$7n+2 : n+4 = a + \frac{(n-1)d}{2} : a' + \frac{(n-1)d'}{2} \quad \text{トナルカラ之レト(2)}$$

トヲ比較シテ  $\frac{n-1}{2} = m-1$  デアレバヨイ. 之レヨリ.

$n=2m-1$  トナルカラ  $n=2m-1$  ヲ (2) 式ニ代入スレバヨイ

【問題】394. 等差級数ヲ  $n$  項ツツノ組ニ分テバ、各組ノ和ハ等差級数ヲナシ、初メノ等差級数ノ公差ト終リノ等差級数ノ公差トノ比ハ  $1 : n^2$  ニ等シキコトヲ證セヨ. [千葉]

【問題】395.  $a+3a+5a+\dots$  ナル  $4n$  項ノ等差級数アリ. 此ノ級数ノ相隣レル二項ノ間ニ  $4n$  項ノ等差中項ヲ挿入シテ此ノ挿入項ノ和ヲ原級数ノ和ノ半分ニ等シカラシメントス. 中項ヲ挿入スベキ相隣レル二項如何. [筑工]

答 第  $n$  項ト第  $n+1$  項トノ間

【問題】396.  $3n$  項ノ等差級数アリ、最初ノ  $n$  項ノ和ヲ  $A$ 、次ノ  $n$  項ノ和ヲ  $B$ 、最後ノ  $n$  項ノ和ヲ  $C$  トシ次式ヲ證セヨ.

$$B^2 - AC = \left(\frac{A-C}{2}\right)^2 \quad \text{[筑工]}$$

【問題】397. 一ツノ多角形ノ内角ノ大サハ順ニ等差級数ヲナシ、ソノ公差ハ  $3^\circ$  ニシテ最大ナル角ハ  $177^\circ$  ナリトイフ. 邊数ヲ問フ. [3. 廣師]

答 16

【問題】398. 甲乙兩人初日ニ同額ノ金ヲ得. 二日目ヨリハ毎日甲ハ前日ニ得タル金ヨリ三圓ツツ多ク、乙ハ八圓ツツ多ク得テ若干日ノ後甲乙兩人ノ總所得金合セテ四百二十圓トナ



リタリ, 且ツ甲ノ得タル總額ハ乙ノ得タル總額ノ半分ナリ  
シトイフ 甲乙ノ初日ニ得タル金ハ一人如何程ナリシカ.

図 7 圖 [4. 五高]

【問題】399. 道路上ノ一ヶ所ニ置カレタル 20 本ノ電柱ヲ一回ニ一本宛運ビ, 其所ヨリ道路上 100 米距リタル地點ヨリ道路ニ沿フテ 40 米置キニ列ベントス. 往キニハ毎分 60 米, 復リニハ毎分 80 米ノ速サニテ歩ムモノトセバ, 運搬ヲ始メテヨリ最後ノ柱ヲ置キ終ルマデニ要スル時間ヲ求メヨ.

図 4 時 29 分 15 秒 [賣師]

#### 24. 【調和級数】

【問題】400. 調和級数ノ第  $p$  項ヲ  $x$ , 第  $q$  項ヲ  $y$ , 第  $r$  項ヲ  $z$  トシ次式ヲ證セヨ.

$$(q-r)yz+(r-p)zx+(p-q)xy=0$$

【解】 等差級数ノ逆數ガ調和級数デアルカラ 初項  $a$ , 公差  $d$  ナル等差級数ヲ考フ.

等差級数	調和級数	之レヲ證
第 $p$ 項 $= a+(p-1)d$	$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{x} = a+(p-1)d \\ \frac{1}{y} = a+(q-1)d \\ \frac{1}{z} = a+(r-1)d \end{array} \right\} \Rightarrow$	明スベキ
第 $q$ 項 $= a+(q-1)d$		式ヲ變形
第 $r$ 項 $= a+(r-1)d$		セルモノ ニ代入ス

$$\begin{aligned} & (q-r)yz+(r-p)zx+(p-q)xy \\ & = xyz \left\{ \frac{1}{x}(q-r) + \frac{1}{y}(r-p) + \frac{1}{z}(p-q) \right\} \\ & = xyz \left\{ q \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right) + r \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) + p \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right) \right\} \\ & = xyz \{ q(p-r) + r(q-p) + p(r-q) \} \\ & = xyz \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore (q-r)yz+(r-p)zx+(p-q)xy=0$$

【問題】401.  $a, b, c$  ガ調和級数ヲナストキ  $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$  モ亦調和級数ヲナスコトヲ證明セヨ.

【問題】402.  $b$  ガ  $a$  ト  $c$  トノ調和中項ナルトキ次式ヲ證明セヨ.

$$[i] \quad \frac{1}{b-a} + \frac{1}{b-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

$$[ii] \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}, \frac{1}{b} + \frac{1}{c+a}, \frac{1}{c} + \frac{1}{a+b} \text{ ハ調和級数ヲナス.}$$

#### 25. 【等比級数】

【問題】403. 三ツノ數  $a, b, c$  ガ等比級数ヲナストキハ  $a^2+b^2, ab+bc, b^2+c^2$  モ亦等比級数ヲナスコトヲ證セヨ.

【問題】404.  $a+b+c, b+c-a, c+a-b, a+b-c$  ガ  $r$  ヲ公比トスル等比級数ヲナストキハ  $r^3+r^2+r=1$  ナルコトヲ證セヨ.

【注】  $b+c-a=(a+b+c)r, (c+a-b)=(a+b+c)r^2, (a+b-c)=(a+b+c)r^3$  ノ邊々ヲ加ヘヨ.



【問題】405. 四項ヨリナル等比級数アリ。各項ノ和ガ  $\alpha$ 。又各項ノ平方ノ和ガ  $\beta$  ナルトキ、第二項ト第三項ノ和ハ方程式  $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x = \frac{1}{2}(x^2 - \beta)$  ヲ満足スルコトヲ證セヨ。

【註】  $\alpha = a(1+r)(1+r^2)$ ,  $\beta = a^2(1+r^2)(1+r^4)$ ,  $x = a(1+r)$  ヲ用ヒテ左邊  $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x$  ヲ計算スレバ  $a^2r(1+r+2r^2+r^3+r^4)$  トナル。同様ニ右邊モ計算ス。

【問題】406. 初項  $a, b$  ナル二ツノ等比級数アリ。今ソノ對應項ヲ邊々相加ヘテ作りタル級数ガ又等比級数ヲナストキ初メノ二ツノ等比級数ノ公比ハ相等シキコトヲ證セヨ。

【問題】407. 三角形ノ三邊ガ等比級数ヲナストキハ、其公比ハ  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ヨリ大ニシテ  $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$  ヨリ小ナルコトヲ證セヨ。

【註】 三邊ヲ  $a, ar, ar^2$  トスレバ三角形ノ二邊ノ和ハ一邊ヨリ大ナルカラ次ノ三式ヲ得。

$a+ar > ar^2$ ,  $a+ar^2 > ar$ ,  $ar+ar^2 > a$  ヨリ  $a \neq 0$  ナレバ  $a$  ヲ去リテ  $r^2 - r - 1 < 0 \dots (1)$ ,  $r^2 - r + 1 > 0 \dots (2)$

$r^2 + r - 1 > 0 \dots (3)$  ヲ満足スル  $r$  ノ範圍ヲ求ムレバ可ナリ。

(1) ヨリ  $r^2 - r - 1 = r^2 - r + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$

從ツテ  $\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0 \therefore \left(r - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(r - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) < 0$

之レヲ満足スル  $r$  ノ値ハ  $\frac{\sqrt{5}+1}{2} > r > -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \dots (4)$ ,

又 (2) ハ  $\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  ナレバ  $r$  ノ制限ハナイ。

(3) ヨリ  $\left(r + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 > 0$  之レヲ満足スル  $r$  ノ範圍ハ

$r > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \dots (5)$  カ  $r < -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \dots (6)$  カナリ故ニ

(4) ト (5) トヨリ  $\frac{\sqrt{5}+1}{2} > r > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  ヲ得。

【問題】408. 斜邊ガ  $b$  ナル直角三角形アリ。其三邊ガ等比級数ヲナス時、他ノ二邊ヲ求メヨ。 [4. 姫路]

$$\text{答 } \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)b, b\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

【問題】409. 等比級数ヲナス三數ノ和ハ 28 ニシテ其各ノ平方ノ和ハ 336 ナリトイフ。三數ヲ求メヨ。 [小樽]

$$\text{答 } 4, 8, 16.$$

【問題】410. 金 350 圓ヲ 4 人ニ分配セシニ其等ノ所得ハ等比級数ヲナシ其最モ多キモノト最モ少キモノトノ差ト他ノ二人所得ノ差トノ比ハ 37:12 ニ等シトイフ。各ノ所得如何。

$$\text{答 } 54 \text{ 圓}, 72 \text{ 圓}, 96 \text{ 圓}, 128 \text{ 圓} \quad [4. \text{松江高校}]$$

【問題】411. 各年ニ於ケル A, B, C 三國ノ人口ノ比ハ  $a:b:c$  ナリシガ、或國ノ人口ハ年々公比夫々  $r, r', r''$  ナル等比級数ヲナシテ増加セリ。而シテ  $n$  年後ニ於ケル三國ノ人口ハ公比  $m$  ナル等比級数ヲナセリ。然ラバ公比ノ比  $r:r':r''$  如何。 [4. 海兵]

$$\text{答 } r:r':r'' = \sqrt[n-1]{bc} : \sqrt[n-1]{acm} : \sqrt[n-1]{acm^2}$$



【問題】412. 等比級数ノ第二項ハ  $\frac{2}{3}$ , 第五項ハ  $\frac{9}{4}$  ナル等比級数ノ初項ヨリ第七項マデノ和ヲ求メヨ. [陸士]

$$\text{答 } 14\frac{43}{144}$$

【問題】413. 或ル等比級数ノ和ハ 65 ニシテ其ノ最大項ハ 45 ナリ. 今此ノ級数ヲ更ニ積ケテ取り, 項數始メノ二倍ニ至ル處マデ加フレバ其ノ和ハ 1820 ナリトイフ. 此ノ級数ヲ求メヨ. [大工]

【注】  $a > 0$  ノトキ  $r > 1$  トナリテ最大項ハ  $ar^{n-1} = 45$  ナリ.  $a < 0$  ノトキ  $r < 1$  トナリ  $r^n = 27$  ヨリ  $-1 \leq r \leq 1$  ナルコトヲ得ズ. 又  $r < -1$  ナルトキ  $r^n = 27$  ガ成立スルタメニハ  $n$  ハ偶數デナケレバナラヌ從ツテ  $n-1$  ハ奇數ナルヲ要ス. 而シテ  $r < -1$  ニシテ  $n$  ガ偶數ナラバ  $ar^{n-1} > 0$  トナリ之レガ最大項トナルヲ以テ  $ar^{n-1} = 45$  トナリ後  $r = 3$  ヲ得ベク, コハ  $r < -1$  ナル假定ニ反ス故ニ  $a < 0$  ナルコト能ハズ.

$$\text{答 } 5, 15, 45,$$

【問題】414. 公比 3, 末項 486, 和 728 ナル等比級数ノ初項及項數ヲ求メヨ.

$$\text{答 } \text{初項 } 2, \text{ 項數 } 6$$

【問題】415. 初項 1. 公比  $\sqrt{2}$ , 項數  $2n-1$  ナル等比級数ニ於テ奇數番目ノ項ノ和ト偶數番目ノ項ノ和トハ何レガ大ナルカ. [愛大]

$$\text{答 } \text{奇數番目ノ方大ナリ}$$

【問題】416. 項數奇數ナル等比級数アリ. 其ノ中央項ハ其ノ級数ノ和ト各項ノ逆數ヨリナル級数ノ和ノ逆數トノ比例中項ナルコトヲ證セヨ. [東工]

【問題】417. 奇數ノ項數ヲ有スル等比級数ノ和ヲ  $p$  トシ, 又此ノ級数ニ於テ各偶數番目ノ項ノ符號ヲ變ジタル級数ノ和ヲ  $q$  トスレバ此ノ級数ノ各項ノ平方ノ和ハ  $pq$  ナルコトヲ證セヨ. [大工]

### 26. 【無限等比級数】

【問題】418.  $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$  無限項ノ和ヲ求メヨ.

$$\text{答 } 4+3\sqrt{2}.$$

【問題】419. 無限等比級数アリ. 其ノ和ハ  $\frac{4}{9}$  ニシテ第二項ハ  $-\frac{1}{3}$  ナリトイフ. 初項及公比ヲ求メヨ. [4日大]

$$\text{答 } \text{初項 } \frac{2}{3}, \text{ 公比 } -\frac{1}{2}$$

【問題】420. 各項ガ正ナル無限等比級数ノ公比ガ  $\frac{1}{2}$  ヨリ小ナルトキハ其ノ和ハ初項ノ 2 倍ヨリモ小ナルコトヲ證明セヨ. [東師]

【問題】421.  $s = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$ ,  $s' = 1 + b + b^2 + b^3 + \dots$  ヲ二ツノ無限級数ノ和トスレバ次ノ無限級数ノ和ハ  $\frac{3s'}{s+s'-1}$



ナルコトヲ證セヨ。但シ  $a, b$  ノ絶対値ハ 1 ヨリ小ナリトス。

$$1+ab+a^2b^2+a^3b^3+\dots$$

【問題】422. 或ゴム球ガ床上ニ落ツルトキ、其落下ノ高サノ八割マデ反跳ス。今此球ヲ高サ 1 米 ノ所ヨリ落サバ球ガ床上ニ静止スルニ至ル迄ニ運動スベキ距離如何。 [3. 臺南高]

答 9 米

【問題】423.  $a$  圓ヲ有スル人第一回ニ其ノ所持金ノ  $\frac{1}{2}$  ヲ損シ、

第二回ニハ第一回ノ損失ノ  $\frac{1}{3}$  ヲ利シ、第三回ニハ第二回

ノ利益ノ  $\frac{1}{2}$  ヲ損シ、第四回ニハ第三回ノ損失ノ  $\frac{1}{3}$  ヲ利シ、

順次以上ノ如ク損益ヲ繰リ返シ永續スルトキ此人ノ所有金ハ如何ナル金額ニ成行クベキカ。 [商大]

答  $\frac{3}{5}a$  圓。

【問題】424. 一ツノ正方形ノ四邊ノ中點ヲ結ビテ正方形ヲ作り更ニ此新正方形ノ四邊ノ中點ヲ結ビテ正方形ヲ作り順次ニカクシテ無限ニ正方形ヲ作レバ夫等ノ新正方形ノ面積ノ總和ト原ノ正方形ノ面積トノ差ヲ求メヨ。 [米工]

答 0

【問題】425. 與ヘラレタル三角形ノ三中線ヲ邊トスル第二ノ三

角形ヲ作り、更ニソノ三中線ヲ以テ第三ノ三角形ヲ作ル。カクノ如キ手續ヲ限リナク續ケ行クトキコレラノ三角形ノ面積ノ和ヲ求メヨ。 [3. 松山高校]

答 原三角形ノ 3 倍

【問題】426. 一邊  $a$  ナル正六邊形ニ内接スル圓ヲ畫キ、更ニ此ノ圓ニ内接スル正六邊形ヲ畫キ順次ニコノ方法ヲ無限ニ繰返シテ生ズル圓ノ面積ノ和ヲ求メヨ。 [3. 山梨工]

答  $3a^2$

### 27. 【級数混合】

【問題】427. 次ノ級数ノ第  $n$  項マデノ和ヲ求メヨ。

[i]  $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, 3\frac{1}{8}, \dots$  [3. 成城高校]

[ii]  $(a+b) + (a^2+3b) + (a^3+5b) + \dots$

答 [i]  $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2^n-1}{2^n}$  [ii]  $\frac{a(1-a^{2n})}{1-a^2} + n^2b$

但シ  $a=1$  ノトキ  $n(1+nb)$ ;  $a=-1$  ノトキ  $n(nb-1)$

【問題】428.  $a, b, c$  ガ等差級数ヲナシ、 $a, b-a, c-a$  ガ等比級数ヲナストキハ  $a, b, c$  ノ比如何。 [3. 東義]

答 1:1:1 又ハ 1:3:5

【問題】429.  $a, b, c$  ガ等差級数ヲナシ、 $a, b, c+1$  ガ等比級数ヲナストキハ  $a=(a-b)^2=(b-c)^2$  ナルコトヲ證セヨ。 [2. 華大]



【問題】41. 三行三列=並べタル九個ノ數アリ. 各列ノ三數ハ夫々等差級數ヲナシ, 各行ノ三數ハ等比級數ヲナストキ此等ノ等比級數ノ公比ハ夫々相等シキコトヲ證セヨ. [3. 海軍]

【方針】本問=ハニツノ分岐點ガアル. 等差級數ヲナス様=假定スベキカ, 又等比級數ヲナス様=假定スベキカラ判定スルコトデアル.

$$\left. \begin{array}{l} a-d, a, a+d \\ [i] \quad b-k, b, b+k \\ c-m, c, c+m \end{array} \right\} \text{又ハ} \left. \begin{array}{l} a \quad b \quad c \\ [ii] \quad ar \quad bm \quad ck \\ ar^2 \quad bm^2 \quad ck^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ノ何レヲ用} \\ \text{フベキカ} \end{array}$$

[i] ヲ取レバ各行ハ等比級數ヲナスコトヨリ

$$(b-k)^2 = (a-d)(c+m) \text{ ヲ得ベク}$$

[ii] ヲ取レバ各列ハ等差級數ヲナスニヨリ  $2b = a+c$  ヲ得ベシ. 之レヨリ計算ノ便利上 [ii] ヲ取ル方ガ手數ヲ除キ得ルコトヲ知ル.

【解】各行ノ三數ハ等比級數ヲナスヲ以テ  $a, ar, ar^2, b, bm, bm^2, c, ck, ck^2$  ト假定スルヲ得. 而シテ各列ハ等差級數ヲナスヲ以テ  $2b = a+c \dots (1)$   $2bm = ar+ck \dots (2)$   $2bm^2 = ar^2+ck^2 \dots (3)$  ノ三式ヲ得. [此ノ三式ヨリ  $r=m=k$  ヲ誘導スレバヨイ]

(1) ヲ (2) = 代入シテ  $(a+c)m = ar+ck$  之レヲ適當=移項シテ  $a(m-r) = c(k-m) \dots (4)$  又 (1) ヲ (3) = 代入シテ

$$(a+c)m^2 = ar^2+ck^2 \dots a(m^2-r^2) = c(k^2-m^2)$$

即チ  $a(m+r)(m-r) = c(k+m)(k-m)$

之レ= (4) ヲ代入シテ  $(m+r)c(k-m) = c(k+m)(k-m)$

變形シテ  $c(k-m)(m+r-k-m) = 0 \dots c(k-m)(r-k) = 0$

故=  $0=0$  ナルカ又ハ  $k-m=0$  ナルカ又ハ  $r-k=0$  ナリ.

[i] サテ  $c=0$  ナラバ等比級數ヲナス三數ハ  $0, 0, 0$  トナルヲ以

テ  $k$  ハ不定ナリ. 故=  $c=0$  ヲ除ク

[ii] 次ギ=  $k-m=0$  ヲヨリ  $k=m$  ヲ得. 之レヲ (4) = 代入スレバ  $a(m-r)=0$  前=  $c \neq 0$  トナリシ如クニシテ  $a \neq 0$  從ツテ  $m=r$  ヲ得. 故=之レヲ總合シテ  $r=m=k$  ヲ得.

[iii] 更=  $r-k=0$  即チ  $r=k$  ノトキ (2) ヲヨリ  $(a+c)m = (a+c)k$  トナルヲ以テ  $(a+c)(m-k) = 0$  ヲヨリ  $a+c=0$  又ハ  $m-k=0$  ヲ得. 而シテ  $a+c=0$  ナラバ (1) ヲヨリ  $b=0$  トナルヲ以テ  $c \neq 0$  ト同様  $b \neq 0$  從ツテ  $a+c \neq 0$  ヲヨリ  $m-k=0$  即チ  $m=k$  =限ル. サレバ  $r=m=k$  ヲ得.

因ツテ何レノ場合モ  $r=m=k$  ヲヨリ其ノ公比ハ相等シキヲ知ル.

【問題】431.  $a, b, c$  ガ等差級數ヲナシ,  $b, c, d$  ガ等比級數ヲナシ  $c, d, e$  ガ調和級數ヲナストキハ  $a, c, e$  ハ等比級數ヲナスコトヲ證明セヨ. [3. 同大]

【問題】42. 等比級數ヲナス三數アリ, 其ノ初項, 第二項, 第三項ヨリ順次= 2, 6, 15, ヲ減ジテ得タル數ハ等差級數ヲナシ其ノ和ハ 12 ナリトイフ. 始メノ三數ヲ求メヨ. [3. 海兵]

■ 5, 10, 20

【問題】43. 四數  $A, B, C, D$  アリ.  $A, B, C$  ハ等比級數ヲナシ  $B, C, D$  ハ等差級數ヲナシ  $A+D=14$  ニシテ  $B+C=12$  ナリトイフ. 四數  $A, B, C, D$  ヲ求メヨ. [明專]

$$\text{■ } A=2, B=4, C=8, D=12; A=\frac{25}{2}, B=\frac{15}{2}, C=\frac{9}{2}, D=\frac{3}{2}$$

【問題】44. 等差級數ヲナス四數アリ. 順次之レ= 1, 1, 3, 9 ヲ



加フレバ等比級数ヲナストイフ。各数ヲ求メヨ。 [神高]

■ 1, 3, 5, 7

【問題】435. 公差が3ナル等差級数ト、公比が2ナル等比級数トアリ、此二ツノ級数ノ第一項ヨリ第五項マデノ和ノ合計ハ148ニシテ又第一項ヨリ第十項マデノ和ノ合計ハ3254ナリ。各級数ノ第一項ハ如何。 [2. 松山高]

■ 等差5; 等比3

【問題】435. 級数アリ、奇数番目ノ項ハ等差級数、偶数番目ノ項ハ等比級数ヲナストイフ。其ノ初メノ四項ヲ1, 2, 3, 4トスルトキ其ノ始メノ $n$ 項ノ和ヲ求メヨ。但シ $n$ ヲ奇数トス。

$$\text{■ } \frac{(n+1)^2}{4} + 2\left(2^{\frac{n-1}{2}} - 1\right) \quad [2. 徳工]$$

【問題】437.  $a, b, c$ ハ等差級数ヲナシ、 $x$ ヲ $a, b$ ノ等比中項、 $y$ ヲ $b, c$ ノ等比中項トスレバ、 $x^2, b^2, y^2$ ハ等差級数ヲナスコトヲ證明セヨ。 [3. 福岡高校]

【問題】438. 二数アリ、其ノ差ハ32ニシテ其等比中項ト等差中項トノ差ハ8ナリトイフ。二数ヲ求メヨ。 [長高]

■ 4ト36

【問題】439. 方程式 $x^2 - px + q = 0$ ノ二根ノ等差中項及調和中項ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

$$\text{■ } 2px^2 - (p^2 + 4q)x + 2pq = 0$$

【問題】440.  $a, b, c$ ハ $h$ ヲ公差トスル等差級数ニシテ、 $b, c, d$ ハ

等比級数ヲナス。次ニ $a, b, c'$ モ等比級数ヲナシ、 $b, c', d'$ ハ等差級数ヲナスモノトス。 $a$ 及ビ $h$ ヲ正ナリト假定シト $d'$ トノ大小ヲ決定セヨ。 [海欄]

【解】  $b = a + h \dots (1)$ ,  $c = a + 2h \dots (2)$ ,  $c^2 = bd \dots (3)$ ,  
 $b^2 = ac' \dots (4)$   $2c' = b + d' \dots (5)$  是等ノ式ヨリ $d, d'$ ヲ $a, h$   
ニテ表ハスベシ。(3)ヨリ $d = \frac{c^2}{b} = \frac{(a+2h)^2}{a+h}$ 又(5)ヨリ

$$d' = 2c' - b = \frac{2b^2}{a} - b = \frac{(a+h)(a+2h)}{a}$$

$$\therefore d - d' = (a+2h) \times \frac{a^2 + 2ah - (a+h)^2}{a(a+h)} < 0 \quad \therefore d < d'$$

【問題】441. 和ガ $6 + \sqrt{20}$ ナル無限等比級数アリテ、初項、第二項及ビ第四項ハ等差級数ヲナストキ初項ヲ求メヨ。 [武高]

■ 4

【問題】442.  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ ヲソレソレ初項 $a$ 、公比 $r$ 、項数 $1, 2, 3, \dots, n$ ナル等比級数ノ和トスルトキ次式ノ値ヲ出來ルダケ簡單ナル式ニテ表ハセ [2. 北大]

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$$

$$\text{■ } \frac{a}{1-r} \left\{ n - \frac{r(1-r^n)}{1-r} \right\} \text{ 但シ } r=1 \text{ ノトキ } \frac{n(n+1)}{2} a$$

【問題】443.  $x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + 9x^9 + \dots$ ノ $n$ 項マデノ和ヲ求メヨ。

【解】 第 $n$ 項ヲ求メンニ、奇数列 $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ ノ第 $n$ 項ヲ見出スニ 公式 $l = a + (n-1)d$ ヨリ $l = 1 + (n-1) \times 2 = 2n - 1$



トナル。從ツテ第  $n$  項ハ  $(2n-1)x^{2n-1}$  ナリ。今和ヲ  $s$  トス。

$$s = x + 3x^3 + 5x^5 + \dots + (2n-3)x^{2n-3} + (2n-1)x^{2n-1}$$

$$-) x^2s = x^3 + 3x^5 + 5x^7 + \dots + (2n-3)x^{2n-1} + (2n-1)x^{2n+1}$$

$$s - x^2s = x + 2x^3 + 2x^5 + 2x^7 + \dots + 2x^{2n-1} - (2n-1)x^{2n+1}$$

$$s(1-x^2) = x - (2n-1)x^{2n+1} + (2x^3 + 2x^5 + 2x^7 + \dots + 2x^{2n-1})$$

而シテ括弧内ハ初項  $2x^3$ 、公比  $x^2$ 、項數  $(n-1)$  ナル等比級數ヲナス。

$$\text{故} = s(1-x^2) = x - (2n-1)x^{2n+1} + \frac{2x^3[1-(x^2)^{n-1}]}{1-x^2} \quad \text{トナル。}$$

$$\therefore s = \frac{x - (2n-1)x^{2n+1}}{1-x^2} + \frac{2x^3\{1-x^{2n-2}\}}{(1-x^2)^2}$$

$$\text{答} \quad x^2+1 \text{ ノトキ} \quad \frac{x - (2n-1)x^{2n+1}}{1-x^2} + \frac{2x^3(1-x^{2n-2})}{(1-x^2)^2}$$

$$x=1 \text{ ノトキ} \quad n(n+1); \quad x=-1 \text{ ノトキ} \quad -n(n+1)$$

【問題】444. 次ノ級數ノ  $n$  項ノ和ヲ求メヨ。

[i]  $1 + (1+x) + (1+x+x^2) + (1+x+x^2+x^3) + \dots$

[ii]  $1 + (1+2) + (1+2+3) + \dots + (1+2+3+\dots+n)$

[iii]  $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots$  [高松商]

$$\text{答} \quad \text{[i]} \quad \frac{n}{1-x} - \frac{x(1-x^n)}{(1-x)^2}$$

但シ  $x=1$  ノトキ  $\frac{n(n+1)}{2}$

[ii]  $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$

[iii]  $\frac{9}{4}$

【問題】445.  $0.5 + 0.55 + 0.555 + 0.5555 + \dots$   $n$  項ノ和ヲ求メヨ。

$$\text{答} \quad \frac{5n}{9} - \frac{10^n - 1}{10^n}$$

【問題】443. 次ノ級數ノ和ヲ簡單ニセヨ。

$$p(1+i)^{n-1} + (p+q)(1+i)^{n-2} + (p+2q)(1+i)^{n-3} + \dots$$

$$+ \{p+(n-2)q\}(1+i) + \{p+(n-1)q\}$$

但シ  $n$  ハ正數トス。 [大倉商]

【註】  $1+i=s$  トスレバ

$$\text{原式} = p(x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \dots + x + 1)$$

$$+ q\{x^{n-2} + 2x^{n-3} + \dots + (n-2)x + (n-1)\}$$

且ツ  $s = x^{n-2} + 2x^{n-3} + \dots + (n-2)x + (n-1)$

$$-) \frac{s}{x} = x^{n-3} + 2x^{n-4} + \dots + (n-2) + \frac{1}{x}(n-1)$$

$$s\left(1 - \frac{1}{x}\right) = x^{n-2} + x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + x + 1 - \frac{1}{x}(n-1)$$

$$s \times \frac{x-1}{x} = \frac{x^{n-2}\left[1 - \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{1}{x}} - \frac{1}{x}(n-1)$$

$$= \frac{(x^n - 1) - 1}{x-1} - \frac{1}{x}(n-1)$$

$$\therefore s = \frac{x(x^{n-1} - 1)}{(x-1)^2} - \frac{n-1}{(x-1)} = \frac{x(x^{n-1} - 1) - (n-1)(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$\text{答} \quad \frac{p}{i}\{(1+i)^n - 1\} + \frac{q}{i^2}\{(1+i)^n - (1+i) - (n-1)i\}$$



【問題】447. 或級数ノ初項ハ 1 =シテ偶数番目ノ各項ハ其ノ前ノ項ノ  $p$  倍=等シク, 奇数番目ノ各項ハ其ノ前ノ項ノ  $q$  倍=等シトイフ. 此ノ級数ノ  $2n$  項ノ和ヲ求メヨ. [高校]

$$\text{答 } pq \neq 1 \text{ ノトキ } \frac{(1+p)(1-p^n q^n)}{1-pq}$$

$$pq = 1 \text{ ノトキ } n(1+p).$$

【問題】448. 連続セル偶数ヲ (2, 4); (6, 8, 10); (12, 14, 16, 18); ……ノ如キ群=分チタルトキ第  $n$  群=属スル諸数ノ和ヲ求メヨ. [北大]

【注】第  $n$  群ノ項数ハ  $(n+1)$  個アリテ, 其ノ初項ハ連続偶数ヲ書き並べタル 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, ……ノ第  $\{2+3+4+\dots+(n-1)+n\}+1$  番目即チ第  $\frac{n(n+1)}{2}$  番目ナレバ 公式  $l=a+(n-1)d$  ヲリ  $l=2+\left\{\frac{n(n+1)}{2}-1\right\} \times 2$  即チ  $=n(n+1)$  トナル. 従ツテ 第  $n$  群ハ初項  $n(n+1)$ , 公差 2, 項数  $(n+1)$  ナル等差級数ナリ.  $\text{答 } n(n+1)(n+2)$

【問題】449. 次ノ区割=於ケル第  $n$  項ノ和ヲ求メヨ.

[i] (1, 2); (3, 4, 5); (6, 7, 8, 9); (10, 11, 12, 13, 14); …… [高給]

[ii] 13; (14, 15); (16, 17, 18); (19, 20, 21, 22); …… [陸士]

$$\text{答 [i]} \frac{1}{2}n(n+1)(n+2) \quad \text{[ii]} \frac{n}{2}(n^2+25)$$

【問題】450. 1ヲ3倍シテ2ヲ加へ, 其ノ結果ヲ3倍シテ2ヲ加へ, 更=其ノ結果ヲ3倍シテ2ヲ加フル等, 順次此ノ如キ手續ヲ繰り返スコト  $n$  回=及ブトキ最後=得ル数ヲ求メヨ.

$$\text{答 } 2 \times 3^n - 1 \quad \text{[8. 山口高校]}$$

【問題】451. 或整数ヲ二等分シ, 其ノ商=端数アラバ, 之ヲ棄テ次=此ノ得タル整数ヲ二等分シ, 其ノ商=端数アラバ之レヲ棄テ此ノ如クスルコト  $n$  回=シテ最後ノモノハ 1 トナリタリ, 此ノ如キ整数ノ最大ナルモノ及ビ最小ナルモノ如何.

$$\text{答 } \text{最小 } 2^n, \text{ 最大 } 2^{n+1} - 1 \quad \text{[高校]}$$

28. 【指数】

【問題】452. 次ノ式ヲ簡單=セヨ.

$$[i] \frac{1}{1-x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{1+x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{1+x} + \frac{4}{1+x^2} \quad \text{[3. 熊本]}$$

$$[ii] \frac{ax^{-1} + a^{-1}x + 2}{a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - 1} \quad \text{[4. 京城高]}$$

$$\text{答 [i]} \frac{8}{1-x^2} \quad \text{[ii]} \frac{(a+x)(a^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}})}{(ax)^{\frac{1}{2}}}$$

【問題】453.  $x^y = y^x, x^a = y^b$  ナルトキ  $x, y$  ヲ  $a, b$  =テ表ハセ. 但シ  $x, y, a, b$  ヲ正数トス. [3. 東大]

【答】 $a \neq b$  ナラバ  $x=y=1$  又ハ  $x = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}, y = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}$   
 $a=b$  ナルトキ  $x=y$  ナル凡テノ  $x, y$  ノ正数值=對シテ成立シ根ハ不定.

【問題】454.  $x = \frac{1}{2}(b^{\frac{1}{a}} - b^{-\frac{1}{a}})$  ナルトキハ  $\{x + \sqrt{1+x^2}\}^a = b$  ナルコトヲ證明セヨ. [3. 大阪高校]

【問題】455.  $x = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$  ナルトキ次ノ等式ヲ證セヨ.  
 $2a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\{x+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\}^{-1} = a+b \quad \text{[3. 海軍]}$



【問題】456.  $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}}$  二シテ  $0 < a < 1$  ナルトキ

方程式  $\frac{X-x}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{Y-y}{-y^{\frac{1}{2}}}$  二於テ  $Y=0$  ナルトキノ  $X$  ノ

値ヲ  $X_0$  又  $X=0$  ナルトキノ  $Y$  ノ値ヲ  $Y_0$  トスルトキ  $\sqrt{X_0^2 + Y_0^2}$  ノ値ヲ  $a$  ヲ以テ表ハセ。 [3. 松本高校]

【解】  $\frac{X-x}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{Y-y}{-y^{\frac{1}{2}}}$  二於テ  $Y=0$  ナルトキノ  $X$  ノ値ハ  $X_0$  ナ

ルヲ以テ  $\frac{X_0-x}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{0-y}{-y^{\frac{1}{2}}}$  ヲ得。之レヨリ  $X_0-x = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

即チ  $X_0 = x + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$  變形シテ  $X_0 = x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$  ……(1)

同様ニ  $X=0$  トシテ  $Y_0 = y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$  ……(2) ヲ得。

$$\therefore X_0^2 + Y_0^2 = x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2 + y^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2$$

$$= (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2 (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$$

$$= (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^3$$

$$= \left[ (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{3}{2}} \right]^3$$

$$= (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2$$

$\therefore \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = \sqrt{(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2}$  而シテ根號内ハ完全平方數ナレバ開キタル結果ガ正ナル様ニ注意ヲ要ス。

$$a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} \text{ ナレバ } 0 < a < 1 \text{ ノトキ } 0 < a^{\frac{1}{2}} < 1$$

ナルモ  $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}} > 1$  トナルヲ以テ  $a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}} < 0$  トナル。

故ニ  $\sqrt{(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2} = -(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})$  トシテ取扱フベキナリ。

因ツテ  $\sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = -(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) = a^{-\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}}$  ヲ得。

【問題】457. 次ノ方程式ヲ解ケ。

[i]  $4^{x+1} - 2^{x+1} = 240$  [4. 東海]

[ii]  $2^{2-3x} = 8^{y-5}, 3^y = 9^{x-3}$  [3. 金工]

[iii]  $\frac{y^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{1}{2}} - (x-1)^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}}, \frac{y}{4} = 1 - (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$  [4. 畿西]

[iv]  $xy^{\frac{1}{2}} + yx^{\frac{1}{2}} = 20, x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = 65$  [4. 東海]

【註】 [i]  $4^{x+1} = (2 \times 2)^{x+1} = 2^{x+1} \times 2^{x+1} = (2^{x+1})^2$  ヲリ  $2^{x+1} = y$

ト置ケバ  $y^2 - y - 240 = 0$  ヲリ  $(y-16)(y+15) = 0$

故ニ  $y = 16$  又  $-15$  然ルニ  $2^{x+1} > 0$  ヲリ  $y > 0$  ナレバ  $-15$

ヲ捨ツ。  $2^{x+1} = 16 = 2^4$  ヲリ解ケ。

[ii]  $8 = 2^3$  ヲリ  $9 - 8x = 3(y-5), y = 2(x-3)$  ヲ解ケ。

[iii]  $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \sqrt{2}$  平方シテ

$$\frac{y}{2x - 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} = 2 \therefore \frac{y}{4} = x - \sqrt{x^2 - 1} \text{ 之レニ (2) ヲ}$$

變形シテ  $\sqrt{x^2 - 1} = 1 - \frac{y}{4}$  ヲ代入スレバ  $\frac{y}{4} = x - \left(1 - \frac{y}{4}\right)$  ヲ

リ  $x = 1$  従ツテ  $y$  ヲ求メテ檢算ヲナセ。

[vi]  $x^{\frac{1}{2}} = a, y^{\frac{1}{2}} = \beta$  トスレバ  $a^2\beta + a\beta^2 = 20, a^3 + \beta^3 = 65$

ヲ解ケバヨイ。  $(a+\beta)^3 = a^3 + \beta^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 = 65 + 3 \times 20$  ヲリ

$a+\beta = 5$  (但シ虚根ヲ捨ツ) 之レヲ  $a^2\beta + a\beta^2 = 20$  ニ代入シテ

$a\beta \times 5 = 20$  ヲリ  $a\beta = 4$ 。因ツテ  $a+\beta = 5, a\beta = 4$  ヲ解ケ。

■ [i]  $x = 3$  [ii]  $x = 3, y = 0$  [iii]  $x = 1, y = 4$

[iv]  $x = 1, y = 16; x = 16, y = 1$



## 29. 【對 數】

【問題】458.  $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$  ナルコトヲ證セヨ. [4. 栄工]

【問題】459.  $x = a^p$  及ビ  $x = b^q$  ナルトキ  $\log_a b = \frac{\log_a x}{\log_b x}$  ナルコトヲ證セヨ. [4. 上野]

【問題】460.  $y = 10^{\frac{1}{1-\log x}}$ ,  $z = 10^{\frac{1}{1-\log y}}$  ナルトキニハ  $x = 10^{\frac{1}{1-\log z}}$  ナルコトヲ示セ. [3. 彦商]

【問題】461. 正數  $a, b, c, d, \dots$  ガ等比級數ヲナストキ  $\log a, \log b, \log c, \log d, \dots$  ガ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ. [4. 山商]

【問題】462.  $\log_a N, \log_b N$  及ビ  $\log_c N$  ガ調和級數ヲナストキハ  $a, b$  及ビ  $c$  ハ如何ナル級數ヲナスカ. [4. 京城高工]

## ■ 等比級數

【問題】463.  $\log 2 = 0.3010$ ,  $\log 3 = 0.4771$ ,  $\log 7 = 0.8451$  ヲ知リテ次式ノ値ヲ求メヨ.

[i]  $\log 3 \times \sqrt[3]{225} \times \sqrt{72}$  [4. 東師]

[ii]  $\log_7 \sqrt{2}$  ト  $\log_2 \sqrt{14}$  [3. 上野]

■ [i] 2.1898 [ii] 0.17811; 3.80736

【問題】464. 次ノ式ノ値ヲ求メヨ.

$\log \left\{ \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}} \right\}^{-\frac{1}{2}}$  ■  $-\frac{1}{6}$  [3. 小樽]

【問題】435.  $\log_a 30$  ガ 2 ト 3 トノ間ニアルトキ; 底  $a$  ハ如何ナル整数ヲトリ得ルヤ.

【解】  $\log_a 30 = x$  トスレバ  $a^x = 30$  ヲリ  $a = 30^{\frac{1}{x}}$  ..... (1) 然ルニ題意ニヨリ  $3 > x > 2$  ナルヲ以テ  $\frac{1}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$  之レト (1) トヨリ  $30^{\frac{1}{3}} < 30^{\frac{1}{x}} < 30^{\frac{1}{2}}$   $\therefore \sqrt[3]{30} < a < \sqrt{30}$  ヲリ  $3 \dots < a < 5 \dots$  ナレバ  $a$  ハ 4 ト 5 トノ整数ヲ取ルコトヲ得.

■ 4 又ハ 5

【問題】436.  $\log(x^2 y^3) = a$ ,  $\log \frac{x}{y} = b$  ヲリ  $\log x, \log y$  ヲ求メヨ.

■  $\log x = \frac{a+3b}{5}$ ,  $\log y = \frac{a-2b}{6}$  [4. 大分]

【問題】437. 次ノ各式ニ適合スル  $x$  ノ値ヲ求メヨ. [4. 仙工]

[i]  $\log_{10} \sqrt{1000} = x$ , [ii]  $\log_2 15129 = 2$

■ [i]  $\frac{3}{2}$  [ii] 123

【問題】438. 次ノ方程式ヲ解ケ.

[i]  $\log(x+3) + \log(x-3) = 0$  [4. 和歌商]

[ii]  $\log(x^2-1) - \log(x-1) = 1$  [4. 横商專]

[iii]  $\log x^2 - \frac{15}{\log x} + 4 = 0$  [4. 東商專]

[iv]  $x+y=10$ ,  $\log x + \log y = 4 \cdot \log 2$  [3. 日醫]

【註】  $0 = \log 1$ ,  $1 = \log 10$ ,  $2 = \log 100$  = 注意ス.

[i]  $\log(x+3)(x-3) = \log 1$  ヲリ  $(x+3)(x-3) = 1$

[ii]  $\log \frac{x^2-1}{x-1} = \log 10$  ヲリ  $\frac{x^2-1}{x-1} = 10$



【iii】  $3 \log z - \frac{15}{\log z} + 4 = 0$  今  $\log z = y$  トシテ

$3y - \frac{15}{y} + 4 = 0$  フ解ケ.

【iv】  $\log sy = \log 2^4$  ヲ  $sy = 2^4 = 16$

■ [i]  $\sqrt{16}$ , [ii]  $\frac{\sqrt{37}-1}{2}$  [iii]  $10^{\frac{1}{2}}$  又ハ  $0.001$

[iv]  $(2, 8); (8, 2)$

【問題】459. 次ノ方程式ヲ解ケ. 但シ  $\log 2 = 0.301$

[i]  $5^{5x} = 8$ , [4. 東大] [ii]  $5^{7-2x} = 2^{x+4}$  [4. 長崎]

■ [i] 0.2583 [ii] 1.538

【問題】470. 或數ノ常用對數ノ2倍ハ, ソノ數ノ3割ト1トノ和ノ常用對數ヨリ1ダケ大ナリ, コノ數ヲ索メヨ. [2. 高岡工]

■ 5

【問題】471.  $x$  及ビ  $y$  ハ互ニ無關係ニ變化スル二量ニシテ  $u$  ハ  $\log x =$  比例シ,  $y$  ノ二乗ニ逆比例スル量ナリ. 今  $x=10$ ,  $y=5$  ナルトキ  $u=1$  ナラバ  $x=100$ ,  $y=10$  ナルトキ  $u$  ノ値如何. [4. 東大]

【註】  $u = k \cdot \frac{\log x}{y^2}$  ニシテ  $\log 10 = 1$ ,  $\log 100 = 2$  フ用フ.

■  $\frac{1}{2}$

【問題】472.  $a, ar, ar^2, ar^3, \dots, ar^n$  ナル級數ノ各項ノ對數ノ和ヲ求メヨ. [3. 東大]

■  $(n+1) \left\{ \log a + \frac{n}{2} \log r \right\}$

【問題】473.  $\log 3 = 0.47712$  ヲ知リテ  $81^{100}$  ト  $100^{81}$  トハ何レが大ナルカヲ定メヨ. [4. 明大]

■  $100^{81}$  ノ方大ナリ

【問題】474.  $\log 2 = 0.3010$  ナルコトヲ知リテ  $8^{10}$  ハ幾何ノ數ナルカ. [4. 浦和]

【解】  $x = 8^{10}$  トシテ兩邊ノ對數ヲトレバ

$\log x = 10 \log 8 = 10 \log 2^3 = 10 \times 3 \log 2 = 30 \times 0.3010 = 9.030$  ヲ

$\log x = 9.030$  即チ指標ハ9ナルヲ以テ  $x$  ハ  $(9+1)$  桁ノ數ナリ

[但シ  $n$  桁ノ數ノ對數ノ指標ハ  $(n+1)$  デアル]

■ 10 桁

【問題】475. (A)  $\left(\frac{81}{80}\right)^{2000}$  = 於ケル整數部ノ桁數及ビ

(B)  $\left(\frac{5}{6}\right)^{1000}$  = 於ケル小數點ト最初ノ有効數字トノ

間ニアル零ノ數ソレゾレ何程カ.

但シ  $\log 2 = 0.30103$ ,  $\log 3 = 0.47712$  ナリトス. [3. 神戶]

【解】 (A) ハ前題 474 ト同様ニシテ 11 桁トナル.

(B)  $x = \left(\frac{5}{6}\right)^{1000}$  トシテ兩邊ノ對數ヲトリ

$\log x = 1000 \{ \log 5 - \log 6 \}$

$= 1000 \{ \log 10 - \log 2 - \log 3 \} = 1000 \{ 1 - 0.79918 \} = -79.18$

$= 80 - 79.18 = 80.82$  ヲリ指標ハ  $-80$  ナルヲ以テ求ムル  $0$  ノ數ハ  $80 - 1 = 79$  ナリ.

■ (A) 11 桁, (B) 79.



【問題】476.  $(1.08)^x$  の値が 100 と 1000 との間ニアルタメニ整数  $x$  ノ取り得ル値ノ限界ヲ求メヨ.

但シ  $\log 2 = 0.30103$ ,  $\log 3 = 0.47712$  トス. [4. 東大]

【解】 題意ニヨリ  $100 < 1.08^x < 1000$

$\therefore \log 100 < \log 1.08^x < \log 1000$  即チ  $2 < x \cdot \log 1.08 < 3 \dots (1)$

然ルニ  $\log 1.08 = \log \frac{108}{100} = \log \frac{2^2 \times 3^3}{10^2} = 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 - \log 10^2$   
 $= 0.03342$  之レヲ

(1) = 代入シテ  $2 < x \times 0.03342 < 3$  ヨリ  $\frac{2}{0.03342} < x < \frac{3}{0.03342}$

即チ  $59.8 < x < 89.7$  ナルヲ以テ  $x$  ガ整数ナルタメニハ  
 $59 < x < 90$  ヲ得. [4. 東大]

【問題】477.  $x$  ハ正ノ整数ヲ表スモノトシ  $1.35^x$  ノ整数部ガ 5 桁ナル爲ニ有スベキ  $x$  ノ最大値及ビ最小値如何.

但シ  $\log 2 = 0.30103$ ,  $\log 3 = 0.47712$ . [3. 山商]

■ 最小 31, 最大 38

【問題】478. 或人所持金ノ  $\frac{1}{5}$  ヲ費シ, 次ニ其殘金ノ  $\frac{1}{5}$  ヲ費シ,

次ニ又其殘金ノ  $\frac{1}{5}$  ヲ費シ, 次第ニカクノ如ク費ストキ

遂ニ殘金ガ初メノ所持金ノ  $\frac{1}{100}$  ヨリモ少クナルハ幾回

ノ後ナルカ. 但シ  $\log 2 = 0.30103$ . [4. 慶工]

【註】  $(\frac{4}{5})^n < \frac{1}{100}$

■ 21 回後.

【問題】479. 初項 1, 公比  $\frac{1}{2}$  ナル無限等比級數アリ, ソノ  $n$  項ノ和ヲコノ級數ノ總和ノ  $\frac{123}{125}$  ヨリ大ナラシメントス.  $n$  ノ限界如何. 但シ  $\log_{10} 2 = 0.3010$  トス. [4. 神船]

【註】  $n$  項ノ和  $= 2(1 - \frac{1}{2^n})$ , 無限項ノ和  $= 2$  ナレバ

$2(1 - \frac{1}{2^n}) > 2 \times \frac{123}{125}$  即チ  $\frac{2}{125} > \frac{1}{2^n}$  ヨリ  $2^{n+1} > 125$

$\therefore (n+1) \log 2 > \log 125 \therefore n+1 > 6.9 \dots$

■  $n \geq 6$

【問題】480. 無限等比級數ノ初項 1, 公比  $\frac{1}{2}$  ニシテ其總和ト  $n$  項ノ和トノ差ヲシテ  $\frac{1}{100000}$  ヨリ小ナラシムベキ  $n$  ノ最大値ヲ求メヨ. 但シ  $\log 2 = 0.30103$  トス. [4. 大東]

■  $n = 17$

【問題】481.  $3 \times 3^3 \times 3^9 \times 3^{27} \times \dots$  ガ丁度 1,000,000,000 ヲ超過シ得ルタメニハ 3 ノ何乗マデヲ採ルベキカ.

但  $\log 3 = 0.47712$  トス. [3. 高岡商]

【解】 求ムル項數ヲ  $n$  トスレバ第  $n$  番目ノ項ハ  $3^{2^{n-1}}$  ナリ.

$\therefore 3 \times 3^3 \times 3^9 \times \dots \times 3^{2^{n-1}} = 3^{1+3+9+\dots+2^{n-1}} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$

因フテ題意ニヨリ  $3^{\frac{n(n+1)}{2}} > 1000000000$  ヲ得. 從ツテ

$\frac{n(n+1)}{2} \log 3 > \log 10^9 \therefore \frac{n(n+1)}{2} > \frac{9}{0.47712}$

$\therefore n(n+1) > 37.7 \dots$  然ルニ  $n$  ハ項數ナレバ正整数ナリ.

從ツテ  $5 \times 6 = 30$ ,  $6 \times 7 = 42$  ヨリ  $n \geq 6$  ヲ得.

■ 6 乗又ハ其ノ以上.



【問題】482. 或ル年度ニオケル某會社員 10 人ノ賞與金總額ハ 1000 圓ナリ今各人ノ賞與金ヲ順次ニ前者ノ  $\frac{1}{10}$  ヅツ多カラシムル如ク分配セントス最低額ヲ何程トナスベキカ。

但シ  $\log 1.100 = 0.04139$ ,  $\log 2.593 = 0.41380$ ,  $\log 2.594 = 0.41397$  [3. 高松商]

【注】 最小額ヲ  $y$  圓トスレバ

$$y \left\{ 1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{11}{10}\right)^9 \right\} = 1000 \text{ ヲ得. 而シテ}$$

$$1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \dots + \left(\frac{11}{10}\right)^9 = 10 \left\{ \left(\frac{11}{10}\right)^{10} - 1 \right\} \text{ サテ}$$

$$A = \left(\frac{11}{10}\right)^{10} \text{ トスレバ } \log A = 10 \cdot \log 1.1 = 10 \times 0.04139 = 0.4139$$

$\therefore \log A = 0.4139$  サレバ與ヘラレタル對數ヲ用ヒテ

$$0.41397 - 0.41380 : 0.4139 - 0.4138 = 2.594 - 2.593 : x \quad \text{ヨリ}$$

$$x = 0.000588 \quad \therefore A = 2.593 + 0.00059 = 2.59359$$

$$\text{從ツテ } 10 \left\{ \left(\frac{11}{10}\right)^{10} - 1 \right\} = 10 \{ 2.59359 - 1 \} = 15.9359$$

$$\text{故ニ } y = \frac{1000}{15.9359} = 62.75 \text{ トナル. } \text{圖 62 圓 75 錢強}$$

【問題】483. 或事業ニ出資セル人アリテ第一回ニ金 1,000 圓ノ利益金ヲ受取り其内金 100 圓ヲ消費シ其後毎回ノ利益金ノ  $\frac{1}{10}$  ヅツ増ス如キ金額ノ利益金ヲ受取り且毎回第一回ノ消費額ノ  $\frac{1}{10}$  ヅツヲ増ス如キ金額ヲ消費スルモノトス斯

ノ如キ方法ヲ 10 回繰返セルトキノ此人ノ所有金額ハ何程トナルヤ. (圓未滿切捨) 但シ  $\log 1.1 = 0.04139$ ,  $\log 2.593 = 0.41380$ ,  $\log 2.594 = 0.41397$ . [4. 高松商]

圖 14342 圓

### 30. 【複 利 法】

【問題】484. 年末毎ニ金  $R$  圓ヅツヲ年利率  $i$ , 一年一期ノ複利ニテ銀行ニ預クルトキ  $n$  年後ニ於ケル元利合計ヲ求ムル公式ヲ作レ.

$$\text{答 } \frac{1+i}{i} [(1+i)^n - 1]R \quad [4. 東商專]$$

【問題】485. 毎二年ノ初メニ  $a$  圓宛ヲ積立テ一年毎ニ  $t$  ノ複利ヲ附スルモノトセバ  $n$  年後ノ元利合計如何. [3. 松山商]

$$\text{答 } n \text{ ガ偶數ノトキ } \frac{a(t+1)^2}{t(t+2)} \{(t+1)^n - 1\} \text{ 圓;}$$

$$n \text{ ガ奇數ノトキ } \frac{a(t+1)^2}{t(t+2)} \{(t+1)^{n+1} - 1\}$$

【問題】486. 年利率 5 分, 一年毎ノ複利法ニ於テハ幾年後ニ初メテ元利合計ガ元金ノ 8 倍以上トナルカ. [4. 京醫]

但シ  $\log 2 = 0.30103$ ,  $\log 3 = 0.47712$ ,  $\log 7 = 0.84510$ .

圖 43 年 11 ヶ月後

【問題】487. 元金壹千圓ヲ年八分ノ複利ニテ利殖シ (利息ハ毎年ノ終リニ元金ニ繰入ルルモノトス) 元利合計壹萬圓ヲ得ルニハ何年ヲ要スルヤ. 但シ  $\log 2 = 0.30103$ ,  $\log 3 = 0.47712$

圖 30 年 [4. 三重農]



【問題】488. 負債金三萬五千圓ヲ五ヶ年据置キ其後毎年初ニ同一金額宛ヲ支拂ヒ十五回ニテ之ヲ返済セントス。年利率七分五厘ノ複利ニ依ルモノトシテ此場合ノ年賦金ヲ算出スル式ヲ作レ。 [4. 松山商]

【解】 35000 圓滿 5 年間ノ元利合利ハ  $35000 \times 1.075^5$  圓トナル  
此時ニ始メテ第一回ノ償却金ヲ支拂フナレバ之レヲ  $x$  圓トス、  
次ギニ第二回ニ  $x$  ヲ支拂フノハ第一回ノ時カラ考フレバ丁度滿一年トナルカラ第二回ノ  $x$  圓ハ元利合計デアル 従ツテ

$A(1+0.075) = x$  ヲリ現價  $A = \frac{x}{1.075}$  圓トナル。以下同様ニシテ現價ヲ出セバヨイカラ

$$35000 \times 1.075^5 = x + \frac{x}{1.075} + \frac{x}{1.075^2} + \frac{x}{1.075^3} + \dots + \frac{1}{1.075^{14}}$$

$$= x \left( 1 + \frac{1}{1.075} + \frac{1}{1.075^2} + \frac{1}{1.075^3} + \dots + \frac{1}{1.075^{14}} \right)$$

$$x = 2625 \times \frac{1.075^{15}}{1.075^{15} - 1} \dots \text{圖}$$

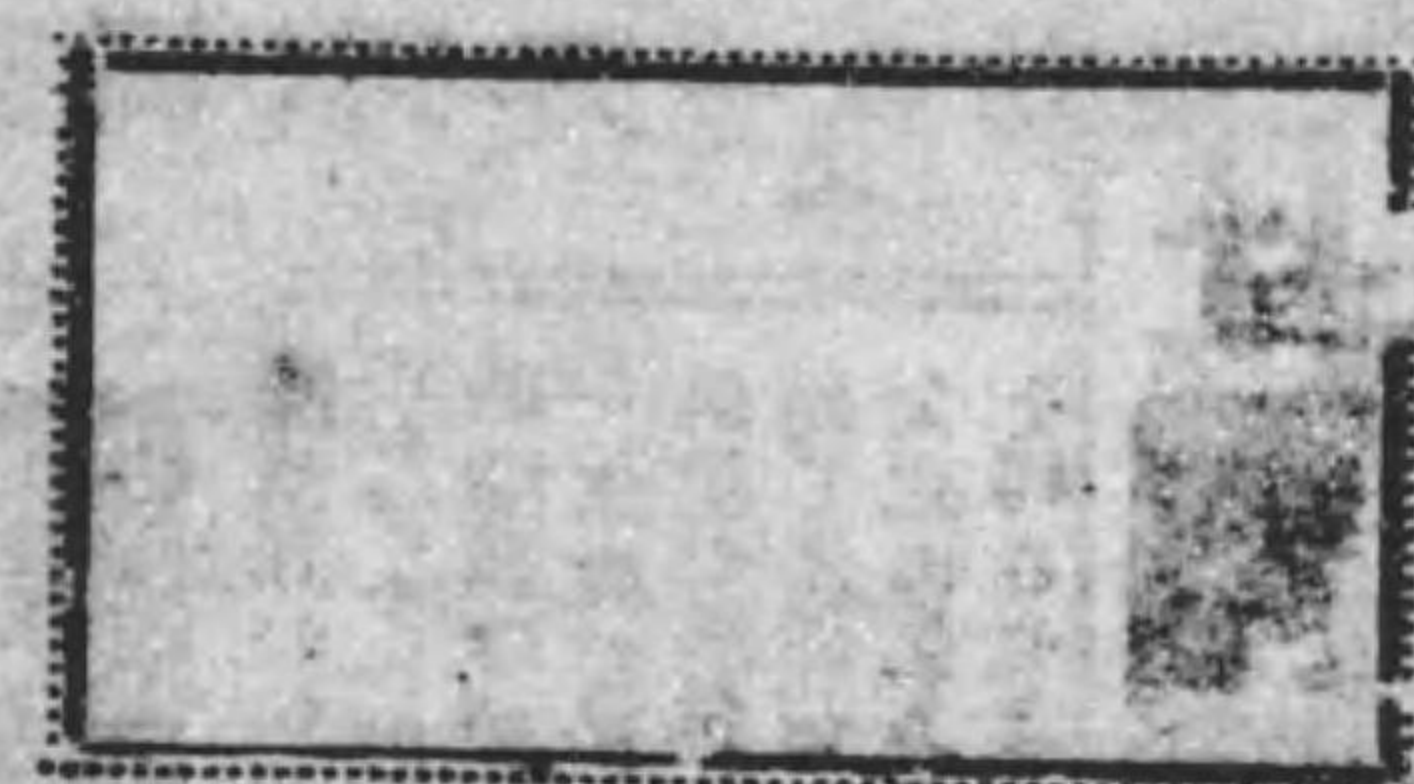
【問題】489.  $P$  圓ノ社債ヲ募集シ  $m$  年据キ後毎年同額ツツ償却シ  $n$  年間ニテ償却シ終ルニハ毎年ノ償却金額ヲ問フ。但シ利率ハ年  $r$  ノ複利トス。 [2. 秋鐘]

$$\frac{Pr(1+r)^{m+n-1}}{(1+r)^n - 1} \text{ 圓}$$

【問題】490. 金  $a$  圓ヲ年利  $r$  ノ複利ニテ借入レ其後滿一ヶ年目毎ニ同額ノ金額  $b$  圓ヲ仕拂ヒテ  $n$  回ニテ負債金額ヲ償却セントス。  $b$  ヲ求ムル公式ヲ問フ。 [2. 宇農]

$$\frac{a(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \text{ 圓}$$

昭和四年十月十日 印刷  
昭和四年十月十五日 發行  
昭和四年十月廿日 再版  
昭和四年十月廿五日 三版  
昭和四年十月卅日 四版



【定價壹圓二拾錢】

監 修 者 吉 岡 斗 松

東京市神田區表神保町三番地

印 刷 發 行 者 梅 津 英 吉

發 行 所

東京市神田區表神保町三番地

シグナル週報社

電話神田(25)一九七三番  
振替東京二九三三一番

發 賣 所 研 精 堂

振替六七三一六番



生先範正藤佐筆主漢國ルナグシ  
てに習講土日が生先は著名二の  
す齋を果効の一同とく聞を義講

版四

# 受験漢文研究

定價一圓  
八折

版五

# 受験國文研究

定價九角  
六折

國漢界の佐藤正範先生の名譽は今更々々々と云ふ迄もなく、「五名堂國漢」  
「シグナル國語漢文研究」等全國多數中學校の副教養として教育界氏の  
御禮の榮を得て居ります。  
本書の發行の趣旨は只今シグナル日土講習會に於て本二書を以て  
先生が講義せられてゐますが、東京附近に在住者は勿論先生の講義を  
聴くに便利があるが、遠隔の地にある學生諸君には甚だ遺憾が多少ある。  
先生に乞ふて、日土講習に於て先生より直接講習を受けると同一の效果  
を得させようと、茲に著述を乞ふた次第である。是非共御一顧を願ひます。

東京 三軒 社報週ルナグシ  
東京 三軒 社報週ルナグシ  
東京 三軒 社報週ルナグシ

佐藤正範著【第九卷】

# 受験 現代文要解

三六九、二〇〇頁  
定價九角  
六折

は向傾の題出文國

に文代現や今

りあ、つれさ中集

解説は一文毎に「大旨」  
「筋道」「通解」「注意」  
「附言」で以て、これを  
丁寧、親切に解説し、  
苟くも誤解を決まらず、  
真の理解を得ると云ふも  
のは正にかくの如きも  
ので助ければならぬ。



國文解題の要訣は要領を捉へずして、  
と雖も、その要領の要に、内容を要するに  
違ふところはない。これが要領によりて如何に  
解答を要するかと云ふ事か。



中法則  
心則

# 國文新解釋

定價一圓二錢  
送料六錢

中村好著

## 三目標

- 一、根本の力の培養  
…要語・文法・修辭法・解釋・運用…
- 二、應用の才能  
…考へ方・答へ方…
- 三、試験問題型の研究  
…出し方・問ひ方…

## 五大特色

- (一) 最も新しき編纂法に  
示り國文の法則中心を
- (二) 解釋の要領と詳述を  
考へ方の要領と詳述を
- (三) 骨の髄まで及ぶ
- (四) 試験問題に及ぶ
- (五) 本語法・文法・修辭法・解釋法・句釋法の應用の才能を自在に

學習  
受驗

# 覚え易き國文法

定價一圓三錢  
送料八錢

### 本書の特色

左の點に注意して「覚え易いやうに」といふ事を着目として  
考案編纂した。

- ① 説明が簡潔で、然かも丁寧で、用意が周到に拂はれてゐる事。
- ② 組織が整頓してゐて、何處を見ても一目瞭然だから、要點が直につかめること。
- ③ 組立が辭典的で、どの章、どの節も獨立しても意味があるから、目次によつて探せば、疑問は忽ち釋然と氣持よく氷解すること。
- ④ 高校、専門校、最近試験問題約三百題を分類して、各章に添へ、之に丁寧なる解答を加へたこと。
- ⑤ 普通文法書に見る事の少い要領を得た正確法要訣を加へたこと。
- ⑥ 國文解釋に必要缺くべからざる文法的知識の應用を最近試験問題に試みて、其の應用方法の實例を示した事。

鈴木鶴吉新著



岡田實彦先生著 (第七版)

# 新編 英文解釋の基礎

三五判 400頁  
定價 1圓30銭  
送料 8銭



## 果卵のあやうさ

英文解釋の出題方針は 年々進んで中學に於けるラーダ本位に集中し取りつゝあり。四年級の英語受驗科に於いて其の色は特に甚しからんとす。

## 大なる誤解

ラーダ本位と云ふは 國語が在學中どれかの中學で得たラーダの一二期中より必ず出題されると云ふのではない。ラーダ中の英語を基礎とせる英文の應用が求められる事なのである。

## こゝに方して

ラーダそのものから一旦離れ 然も既修の知識を秩序よく分類整理し 記憶に便ならしめ再びラーダに還らしむる良參考書——即ち岡田先生の英文解釋の基礎が必要となつて来るのである。

第四高等學校教授

文學士 大森虎亮先生著

巻頭に「實邊の兎」「元堂」「芭蕉庵古蹟」を掲ぐ

# 詳解 奥の細道の新研究

大森虎亮先生著  
四頁  
定價 圓貳角  
十銭

奥の細道の新研究出づ！ 本書出でて従来の註釋書は月影の星影に似たり、本書は従来の註釋書と異なり著註を附せず、異説を不問にせず、又冗漫なる附屬隨筆に非ず。統一ある方法を以て語句・語義は一語一詞も有しせず註釋し、著註の語を正し新説を加へ、故事熟語は一々典拠を開明し、特許正誤も異を辨、其意義にして考證に互る者は、各章後考を設けて詳説す。又全篇を章段に分ちて異文を作り、此の種の文に困難なる句を設け、各家異説を試み、巻頭に詳考なる解説を掲げて鑑賞、批評し、又日本文及び西文、會長が各地に歸したる俳句を摘録し、且俳句索引、俳句人名索引、語句索引及地名索引及索引を挿入して完全なる研究書とせり。



ARNOLD  
BENNETT

HOW TO LIVE

ON 24 HOURS A DAY

◆。新しき思想と言葉と語句は!! 英學生好讀物

諸君! 一月月××圓の收入で、どう生活するか? が問を離れぬであらう。だが一日廿四時間を如何に利用するかを考へてみる者は少い。「諸君は毎日此の廿四時間で、生活せねばならぬ。諸君は其中から睡眠と快楽と金と補足と、名譽と、そして諸君の不滅の魂の進展とを抜き出ださねばならぬ。之れを有教に用ふこと、之れ程、金を要し又之れ程實現に痛感せしむるものは無い。時の世界には富を潤かする諸君も、智慧を享有する諸君も無い。天才だからと云ふても一日に一時間餘分に與へられる暇でも無い。諸君! 無限に奪ひ品物を好きなだけ無敵なしに使ひ給へ」とその良道と方法とを説つたこの論文は英國の文豪ベネット氏の原書で、極く新しい文章で新しい思想に至る處に溢れ溢つて居る。譯者は英文界の巨魁藤澤謙、原文の思想をハツキと和文と對照して諸君の努力の多からん事を望む。

# 24時間生活活法

横井進太郎 譯註  
岡田實慶

四六版クロス製 定價 壹圓六拾錢  
英和文對照譯註 送料八 錢

東京市神田區 發行所 シグナル週報社 東京一  
表神保町三 發賣所 研 精 堂 九三三  
二六六 三三三

岡田實慶・横井進太郎 共著

## 和文英譯分析的的研究

最新刊  
〔一〕著者は……………  
我國受験界の兩巨星。  
〔二〕内容は……………  
新考案による分析式。  
〔三〕譯者は……………  
懇切なる指導に感謝せん。  
〔四〕これぞ……………  
本書の名譽高き處。

本文を讀むしむげか文て讀本  
無英の文や或分たらの 'に書  
ま譯書二うは新。と併之就は  
れの三英句し和語をい先  
た同かを譯とて文がと知てづ  
。圖ら指すな長のら 何法能  
最も解けるし文部と件にべ  
近英或方てはに分類し けに  
のつな註法英並新とて次於  
好てなとを文つ足しに英にて  
著譯し文段のかさて英譯 '和  
でさ '法へ語のれ 'りす同文  
あると上 '進短す同 'へ題英  
るやん並最に文 '題一'かを譯  
るやんに最通とこと'か語の  
に和英にすなれ稱賞をけ

三六新製三三七頁  
定價 一圓十錢  
送料 六 錢



推理による  
新制化學精粹

編社報週ルナグン修監生先寅山小中一立府京東

第八編 增  
頁十七百三型新六四

化學といふ廣汎なる範圍に亘る科目の受験準備には  
指針となる良参考書を選べ。参考書の失敗は結局受験  
の失敗に非ずして何ぞ。

四年度入學試験問題及解答



英語、數學、以外化學についても高邁なく注意を拂へ。  
いかに英・數によき評點を取らうとも化學に失敗すれ  
ば結局合格は難し。  
明晰……叮嚀……簡易 これ唯一の参考書として本書  
を推す所以なり。

定價一圓三十錢  
八冊八錢

最新刊  
受験物理の参考

最新刊



長特の書本

東京府立一中教員 小山寅先生監修・シゲナル出版

- 〔一〕重要事項は活字を大にし、特に指定あるが故に、意  
急の場合には特にこの部分をだけを更に熟讀せよ。
- 〔二〕各學校別の出題方針、問題の難易、一目瞭然。
- 〔三〕近年の傾向である實驗に関する問題に特に注意を拂  
へり。
- 〔四〕問題は昭和三年施行の分まで最近二十餘年のものを  
網羅し一々解説を加ふ。

四六判四二〇頁  
定價一圓五十錢  
送料八錢

シゲナル出版社發行  
東京市神田區美土町三

受験参考書としての白眉  
新制度に應ずる良参考書

附 昭和四年度入試問題解説



# 高等・專門學校 入學試驗問題集

(英語) 定價 25 送料 04 (數學) 定價 20 送料 04

— 四年度施行 —

## 高等・專門學校 入試問題解答

◇ 時の流れを見よ！  
◇ 過去の歴史を探れ！  
◇ 三年、四年の  
問題及解答を見よ！

〔三年度〕

シグナル社發行

- ◎ 英語 岡田實麿著 定價 五五錢 送料 四錢
- ◎ 數學 吉岡斗松著 定價 二五錢 送料 二錢
- ◎ 國漢 佐藤正範著 定價 四五錢 送料 四錢

# シグナル社 代理部

本を買ふなら  
何より先に代理部へ  
往復ハガキで  
問合せられよ

## 新本二冊り 古本三冊

- 代理部は諸君の参考書買集めの使役です。
  - 代理部は諸君の御注文通りの品をお取次します。
  - 代理部は綺麗な中古本を定價の三四割安でお取次します
  - 代理部の扱ふ品には落丁又は汚損の甚しいものは絶対にありません。
  - 代理部は迅速、親切を旨とします。
- (御問合せは往復ハカキ利用・五日以内に御返事します)
- 但し 御問合せは必ず「書名」「著者名」「發行所」を明記のこと。  
古本のことです。内容見本は御座いません。
- 其他新刊書も御取次ぎ致します。(何處の發行物も取扱ひます)
- ◎ 御申込次第中古本の目録・價格・送料表を急送します◎



# 入学試験問題の解答

昭和四年度

【高等専門學校】

佐藤正範先生著 收容校數九七校

國語漢文科

四六版一五八頁 金五十錢 送料四錢

高見豊先生校閱 收容校數一三〇校

數學科

四六版四六〇頁 金一圓十錢 送料四錢

村井知至先生監修 收容校數一三〇校  
山縣五十雄先生監修 重要單語熟語表附

英語科

四六版四〇〇頁 金八十錢 送料八錢

- ① 諸君の机上に四年度の入学試験問題集ありや？
  - ② 若し無ければ何故これを備へざるや？
  - ③ 今年の入試問題の性質をも知らずして明年の入試に諸君は應ぜんとするか？
- ……速かにこの模範解答に接せよ。



