

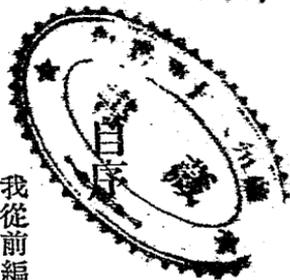
國 民 教 育 文 庫

小 學 算 術 教 科 書

俞 子 夷 著

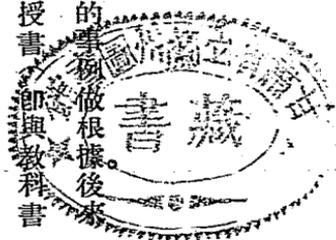
商 務 印 書 館 發 行





我從前編過一本小學算術教學法，已經把高深的理論免去，處處用實在的事例做根據。後來的覺得那本書還是用總括的敘述，距離實際教學遠些。頂好在實際教學用的教授書，即與教科書並行的，與那本教學法的中間，再要有一本較淺近，較切實的教學法，作入門的初步，實際從事教學者的日常參考。這一本便是完成這個使命的。內容是不照教科書的次序，而照加法減法乘法除法等彙類。每類中各個教材，都有較詳細較切實的具體教學方法。所以不論用那一種教科書的教員，都能按照教材，在本書裏找出確切有效的方法來。即使不是用定一種教科書的教員，也可以看了本書，自己斟酌，排定進行的程序教去。

把各種基本算法詳細分析了步驟，每次只叫學生學習一種的困難，是本書特別注重的一點。譬如砌牆，每一塊磚切得堅固時，完成的全牆自然也極堅固。大概小學教員所要用的方法，本書已包括得很多。儘够應用的了。若要進一步明白些所以然的理論，可以看以前出版的小學算術教學



法。只懂空理論，固然不切實用。只會呆方法而不懂方法的根據，也不能自由運用，隨境變化。先知道如何辦，然後再明白何以如此辦，這是正當的步驟。若要再進一步作專精的研究，當更著純講理論的書，將來有機會再說罷。

中華民國十七年四月二十四日

俞子夷在浙江大學

小學算術科教學法 85957

目錄

第一章	數目,數目的名字,數目字。.....	一
第一節	一到九各數.....	一
第二節	零.....	六
第三節	十以上到十九各數.....	九
第四節	二十以上各數.....	一二
第五節	一百以上各數.....	一七
第二章	加法.....	二四
第一節	加法的基本九九(上).....	二四



第二節	一部分加法九九的應用練習·····	三〇
第三節	加法的基本九九(下)·····	三四
第四節	各種進位的加法·····	三八
第三章	減法·····	四二
第一節	基本九九(上)·····	四二
第二節	應用練習·····	四八
第三節	基本九九(下)·····	五一
第四章	乘法·····	五七
第一節	5 以下的乘法九九·····	五九
第二節	應用練習·····	六四
第三節	六以上的九九·····	六九
第四節	法一位的乘法各種·····	七一

第五節	十的倍數乘各數	七六
第六節	法二位的乘法	七八
第七節	法三位的乘法	八〇
第五章	除法	八四
第一節	五以下的九九	八四
第二節	應用練習	八七
第三節	6 以上的九九	九二
第四節	法一位的除法各種	九七
第五節	十除及十的倍數除	一〇二
第六節	法二位以上的除法	一〇七
第七節	新的乘除算式	一一三
第六章	諸等數	一一五

第一節	小學生應學的是什麼	一一五
第二節	怎樣教法	一一八
第三節	非十進諸等數的四則算法	一二八
第四節	幾何形體	一三一
第七章	小數	一三三
第八章	應用問題	一四八
第九章	關於百分的各種	一五六
第一節	折扣	一五六
第二節	成分	一五八
第三節	利息	一六〇
第十章	分數	一六三



小學算術科教學法

3565

第一章 數目，數目的名字，數目字。

第一節 一到九各數

小學算術教學中第一件事便是怎樣教學生學習識數目，會用數目的名字，寫數目字。識數目和數目的名字在小孩子沒有上學以前，多少總懂得一些。所以這兩方面的教學工作，不過先整理，再想法擴充。至於數目字，卻完全要從頭教起。識數目是一個具體的經驗。有了經驗，然後在言語上，用數目的名字來表示；在文字上，用數目字來表示。若是沒有基本的數目觀念，而空唱數目的名字，甚至依樣葫蘆的寫數目的字，實在何嘗懂得數目！祇好算是因哥學話罷了！平常小學裏劈頭就教數目字的寫法，實在是一件舍本逐末的事。下面的幾個方法，是入手第一步用的教法。



一、叫學生數每行的人數，每排的人數，玻璃窗上的玻璃，手指等。數目大約在九以下，或五以下，要看學生經驗而定。每次數時，可以叫學生唱「一，二，三，四……」等。每次數完，總要說共有四個人，或共有四個手指頭……等。這是第一步。

二、數的東西同上面的彷彿。每次數了以後，仍舊要說共有幾件。同時可以在黑板上寫數目字給學生看。看時指了指數目字叫學生念。譬如數四個手指，說共有四個手指頭，寫示4字，叫學生念「四」。這是叫學生認數目字的入手方法。這方法要和數的觀念，數目的名稱連結在一起。這是第二步。

三、數的東西，宜用粉筆，石筆，毛筆，鋼筆，銅元等，較小一些的東西，並且要同時提出給學生看。能不必一個一個的數，看了就說出數目的名稱來，那末更好。若是說錯了，然後再一個一個的數。數後仍舊要說共有多少。再寫示數目字，念數目字。這是引導學生脫離一個一個的數而入於一看便知道一羣東西的多少。並且仍和數目名字。數目字形狀，連結起來。這是第三步。

四、不用眼睛看得見的東西來數，用拍手，擊桌，敲茶杯，吹叫子等方法使學生聽了聲音，數聲音

的次數不要叫學生開口唱一，二，三，四，五……等。叫他們靜聽。完後再叫學生說出數目來。譬如像拍三拍手，吹四聲叫子……等。仍舊寫示數目字，念數目字。這是擴充學生數的經驗到聽的方面及時間方面去。這可以算第四步。

五、以上四法都是先有可以直觀的數目經驗，然後及於數目的名字，及數目字的形狀。現在應當再進一步，由教員發命令，像拍三拍手，伸四個手指……等，叫學生聽了命令做。做對了，再寫示數目字叫學生念。這是上面四個方法的反過來，學生先聽見數目名字，自己去找合宜的數目，並且仍和數目字連結。這可以算第五步。

六、用稍厚一些的洋紙，做成一寸見方的方塊。上面寫着1 2 3 4 5等，或1到9等各數目字。每個學生一份，放在一個信封裏。上課時分發給學生，叫他們從信封裏拿出來放在桌子上。然後給學生看東西，或叫學生聽聲音。叫他們依照數目，拿出各自的方紙來；方紙上的數目字要和數目符合的。這是叫學生認識數目字的又一法，比了以前進了一步，所以算是第六步。

七、教員做一份三寸長二寸寬的片子，也要用硬些的洋紙做。片子上一面畫圓點，自1到5，或

到9。反面寫數目字。抽了片子給學生看，叫他們迅速認識數目，然後叫他們各自找方紙上的數目字。教員再示反面的數目字，對照。這是第五步和第六步的結合，並且用圓點代可以直觀的東西或聲音，所以比五六兩法要難得多。這可以算第七步。

八、這是第六步的反過來，抽片子給學生看數目字；叫他們依照了做動作，或拿東西。譬如抽示有4字的片子，向學生說：『誰能拍這許多次數手？』指名叫學生拍四拍手。然後說：『對的！是四拍』。這方法先看見數目，所以比以前的更難。可以算是第八步。

九、更進一步可以用畫來代替實物，數目名稱不口說。譬如用簡易圖形○作魚等，畫出五條魚，叫學生找方紙上的5字。又可以寫一個數目字及一個簡易的圖形如○等，叫學生畫出六個○的圖形來。這是第九步。

十、更進一步，可以同上法畫若干簡易的圖形，叫學生寫出數目字來。譬如畫○○○叫學生寫成3○之數。這是開始學寫數目字的方法。從上面來，一共十步，由數東西起，一直到開頭寫數目字，每一步的方法，總是比前一步進一層的。從此學生要寫數目字了。數目的寫法，約略也有些筆順，如

下：

1 2 3 4 5 6 7

學寫數目字不是一天兩天學得成的，也不是按了次序抄寫可以學得好的。要一面用一面學，才可以漸漸的希望成功。下面是練習寫數目字的方法。學生覺得實實在在的用，並且有比賽遊戲的精神，自然肯努力，容易成功。

1. 教員給學生看東西，聽聲音，叫學生口答數目的名字，再各自寫數目字。
2. 教員給學生看畫，東西，聽聲音，叫學生不開口，各自寫數目字。
3. 教員抽片子給學生看片子上的點子，叫學生不開口，各自寫數目字。

以上練習方法，起先稍緩，愈到後來，教員的動作愈快。學生興味好而努力大，以後開始學了加法以後，時常要寫答數，練習的機會正多。不過在未習加法以前，應當把上面所述種種教得有相當的成效。不然，根本數目觀念不明，或者數目名字不知，或者數字形狀不識，或者數字不會得寫，都可以阻

礙以後的學習。

以上是就普通小學開始一年級就特設算術科時間說的。若是改用新方法，從遊戲入手，沒有正式算學時間的，這種種方法，也可以和各種遊戲方法混和教學。由此可以漸漸的引入正式算術上去。一年生初學用的遊戲方法，見商務印書館出版社會化算術教授書第一冊。

第二節 零

上面一到九各數教過以後，當然可以學些加法，大約是和九以下的。我們爲了討論的便利起見，所以加法歸加法的一章裏去再論。學了些加法以後，便可以學些減法。減法的詳細，也要另外討論。教學生學零的意義，零的言語，零的寫法，都該在學了若干加法及減法以後。到了這時候開始教零，可以從下列的幾方面入手。

一、在社會化算術教授書（商務印書館出版）第一冊裏，揀定一二種遊戲，教學生做。做遊戲的結果，應當叫學生用數目字記出來。記法，或者在黑板上，或在學生的石板上，或者用紙，都可以。記了遊戲的結果，便於比賽誰勝誰負。若是遊戲時一次，一次的比，當然只要會寫數目。若是把遊戲的方

法稍微變通一下，每兩次一比，或每三次一比，便需要加法。遊戲時每次得到的分數，可以用數目字記出。若是有一次完全失敗，一分也沒有得到，那末一定要記0纔行。在兩次或三次一比的時候，0的關係尤其重要。不然，一方做了三次，有三個數目字，另一方也做了三次，只有兩個數目字。完全失敗的一次若不用0記出。表面看起來，彷彿只做了二次，不是還要有做一次的機會了嗎？記了0以後便可以明白表示，做是也做了三次，不過一次是空的。這樣，可以使學生對於零的意義深切明白。對於所以要記0的理由，格外了解。否則有數目便有數目字，沒有數目何必多寫個0呢？0雖是一個符號然而不是一個數目。0是用來保留數目的空地位的。從這一方面教，這一個根本觀念，頂容易透澈。

二、初學減法時，可以用些色彩顯明，學生在遠處也容易看見的東西，再備一隻空的匣子。先放若干東西在匣子裏，再從匣子裏拿出若干東西來，然後叫學生算，匣子裏還有多少。若是放入五個，拿出三個，匣子裏便存二個。若是放入五個，拿出也是五個，匣子裏完全沒有，成了一個空。上面的教法同時也可以學式子。放入五個寫5，拿出三個，在5下寫3，成5-3。匣子裏還存二個，在線下寫

2, 成 $53-2$ 。若放入 5 個, 拿出也是 5 個, 寫式便成 $55-$ 。結果, 匣子內空了, 所以寫 0 在線下, 成 $55-0$ 。若是不寫 0 在線下, 彷彿沒有算過; 寫了 0 以後, 才可以表示已經算過, 而匣內空無所有。

三、減法還可以用比較來算。譬如左面六個人, 右面四個人, 左面比右面多二個人。寫起式子來, 左面六個人寫 6, 右面四個人, 在 6 下寫 4, 成 $64-$ 。比了一比, 左面多 2 個人, 在線下寫 2, 便成 $64-2$ 。若是左面六個人, 右面也是六個人, 那末, 式子寫成 $66-$ 。比了一比, 兩面一樣, 沒有多也沒有少。寫 0 在線下, 便成 $66-0$ 。若是不寫, 便好像沒有算。寫 0, 所以表示已經算過, 而結果是沒有多少。

四、第一節裏的第七步, 有教員抽片子的練習。抽了片子給學生看片子上的點子, 叫他們說出數目來, 或者叫他們寫數目字。若片子裏加了一片沒有點子的, 那末, 學生寫數目字的時候, 可以寫 0。這時若是不寫了, 好像少了一張空白片子似的。要寫了 0, 纔可以表示有過一張空白片子。

上列四法, 不過是四方面各舉一個例子。實行起來, 每一方面還可以變化出好多方法來。各方面各用好多方法教學, 練習, 纔可以使學生徹底明白。零的寫法, 筆順如下:



第三節 十以上到十九各數

從前教小學生算術，喜歡早講理論，也喜歡丟開了實在經驗，在數目字上用功夫。所以開始學十以上各數目時，急急的先教理論，說明單位十位。要知道沒有根本數目的觀念，位子是無用的。位子不是理由，其實不過是種方便。我們應當先知道多少是十，多少是十二，……等等，然後到了要用數目字表示時，纔有位子的關係。位子不是數目，位子是寫數目時的一種方便。丟了數目的根本觀念在位子上用功夫，可以說是舍本逐末的方法。

我們也應當知道十寫10，十一寫11，是根據於我們十進的制度來的。若是我們的命數制度不是十進而是五進時，我們寫6時不必用6而寫成11。全般數字，只須1到5，五個和0够了。若是我們命數制度變成十二進，那末，數目字1到9便不够用了。要再添兩個，一代表十，一代表十一。假如用 y 來代表十，用 P 來代表十一時，我們的十五，決不寫成15，而是13了。我們的20便寫成18，我們的22便寫成1 y ，我們的23便成1 P 了。但是十五的數目，寫法不管你數字是十進的15或十二進的13，用點子畫出來，總是 $\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ ；二十三的數目，寫法不論是十進的23，或十二進的1 P ，用點子畫出來，總是

……這一段話雖然好像和教十以上數目沒什麼重大的關係，但是經此一說，我們才可以明白數目和數字寫法的區別。我們可以明白數目是根本，寫法不過是個方便罷了。明白了這一層道理，纔可以談教法。

教十以上各數目，大約可以和加法九九和過十的同時進行。加法九九練習到 $5\ 5\ \underline{1}$ ， $6\ 4\ \underline{1}$ ， $3\ 7\ \underline{1}$ ……等時，數目的基本觀念，儘可以在加法時直觀東西或聲音動作等。並且平常學生對於十的數目名字，大多可以說得不錯。所以這時候，只要教10的寫法，把 $5\ 5\ \underline{1}$ ， $6\ 4\ \underline{1}$ ， $3\ 7\ \underline{1}$ ……等式子的結果，寫成功 $5\ 5\ \underline{10}$ ， $6\ 4\ \underline{10}$ ， $3\ 7\ \underline{10}$ ……等就是了。這時候千萬不要教位字，使學生知道10整個的代表十就是了。

十一到十九各數，小學生往往不甚了解。先宜用實物，動作，聲音，等做十加五，十加七，十加三……等的加法，使學生明白十一到十九各數的根本觀念，數目的說法。到了相當純熟以後，才教15，17，13……等的寫法。教寫法時仍舊不講位字，15，整個的代表十五；17，整個的代表十七。何以不講位字？我說太早。十位上始終不過是1字，不足以表明位字的關係，等到更進了一步，要寫二十幾，四十幾

……時，十位上2代表二十，4代表四十，1代表十……等理由，纔可以歸納出來。要歸納須有相當的各方面的資料。僅僅十位是1，歸納成功法則時，資料不充足，徒然耗費唇舌罷了。

學生懂了11到19各數整個的寫法以後，可以用10 7，10 5，8 10，6 10，等加法及17 10，19 10，16 6，13 3，一等減法練習各數目的關係及寫法。這其中暗暗裏教學生十進和位子等。這種用練習而暗中教的方法，比了明講位子，效力要大得多。

到了大體純熟的時候，應當叫學生做一個表，從一而二而三，寫成一排，到十為止。再在一的底下寫十一，二的底下寫十二，……到十的底下寫20為止。這是整理出一個系統來。同時，也暗暗中有些十進和位子的關係教他們。二十也是整個的教。這裏不過是個開始，以下便接第四節的教法。學生寫成的表，如下：

1	2	3	4	5	6	7	8	6	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

若是小學裏教室內常備日曆，每天早上教學生認日子等的，那末，30 31以下的數目字，可以逐日認識。這認識是由漸來的，整個的，效力也極大。等到經過好幾個月的經驗以後，然後照第四節的

方法整理起來，當然是很自然的方法。記日曆的方法見社會化算術教授書第一冊。

此外，加法的練習進行，擴張到和十一以上去，當然有好多機會要練習11到19的各數及各數目的寫法。如此進行，一方面當然天天要寫加法的結果，11到19各數目的寫法，自然有機會練習。又一方面，經過加法的練習，也可以使11到19各數的觀念格外明確。起先的13不過是十和三的合併。此時的13，卻是 $\begin{array}{r} 3 \\ 7 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 7 \\ 6 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 8 \\ 5 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 5 \\ 8 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 4 \\ 9 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 9 \\ 4 \end{array}$ ，等多方面的結果了。再進而學 $\begin{array}{r} 11 \\ 2 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 2 \\ 11 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 12 \\ 1 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 1 \\ 12 \end{array}$ ，等加法以後，13的觀念更加擴張了。並且前面的表，也可以使學生暗暗中明白13是比12多1，比14少1，比3多10。13一個數目，經過種種的結果，又有在系列中的地位，當然觀念可以更加明確。

第四節 二十以上各數

二十以上到九十九各數，可以一起教學。教時仍不宜急急從數目字，講位子入手，仍舊要先從數目的觀念入手。到了這時候，決不能再聽學生一個一個的數。所以幾十，幾十和幾十幾……等，都應該使學生明白數目的多少，並且也要明白各數目的關係。先從十做基礎，兩個十叫二十，三個十

叫三十，四個十叫四十，……等等，可以用實物或圖畫，每十個一排，叫學生直觀。同時也可以叫學生用了尺在紙上畫小方格子，每十個一排，二排便是二十，三排便是三十，四排便是四十……等。一面教學生認識10, 20, 30, 40, ……等等數目的寫法。這時候仍舊不必講什麼位子，仍舊整個的認識够了。在這時候也可以教學生用尺，認識尺和寸，並且明白一尺是十寸的關係。因此便可以用尺寸的關係來練習幾十。譬如一尺是十寸，二尺便是二十寸，三尺便是三十寸，四尺便是四十寸等。

再可以用加法減法等練習，使上面的學習格外明確。譬如： $20\ 10$ ， $40\ 10$ ，等的加法； $20\ 30$ ， $30\ 20$ ， $40\ 30$ ， $50\ 20$ ，……等的加法；以及 $70\ 10$ ， $90\ 10$ ， $40\ 10$ ，等的減法； $40\ 30$ ， $80\ 50$ ， $60\ 20$ ，……等的減法。

還可以叫學生順數，10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 等逆數，90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10等。以上是認識幾十並學幾十的寫法等，算是第一步。

第二步，就是叫學生認識24, 36, 52, 48, ……等幾十幾的數目。仍舊可以照上面的方法，用實物或圖畫叫學生直觀。直觀時仍應每十個一排，零星的數目另作一起。譬如……：……這是二十三的圖

上；三十六便應作如此。……也可以叫學生畫小方格。

學生一面認識數目，一面懂得幾十幾各數目的念法，同時也學寫24, 36, 57, 92, ……等兩位數的寫法。

要學生上面的學習格外明確，仍舊可以用用尺寸等練習。譬如二尺是二十寸，二尺七寸便是二十七寸；四尺是四十寸，四尺五寸便是四十五寸……等。

用加減法練習可以分做二步。第一步是做20₄，6₃₀，50₈，7₈₀，等的加法及84₄，65₆₀，32₂，45₄₀，等的減法。這是使學生明白幾個和幾十合併成幾十幾的關係用的。第二步是32₅₆，40₂₅，等的加法及59₄₄，38₁₈，等的減法。這一類是平常的加減法。但是也能使學生認識數目的關係更加明確。還有5₄，6₈，等加九九，推廣開去，成₂₅，4₆₆，8₁，等加法，也可以幫助學生格外明白數目的關係。

到了這時候，當然也有好多乘法九九的教學。因乘法練習，也可以使這種數目的認識更多一層較深的意義。

到學生大體純熟時，可以仿照第三節裏的方法叫學生做表。每十個、一排，形狀大約如下：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

用了這一表可以使學生研究各數目的關係。橫看每行1到10。縱看便是31 41 51 61 …… 81 24 34 ……

：到94，等等。除100仍暫時整個的教以外，（詳細教法見下）1到99各數可以叫學生學些位子的關係。到了這時候，平常學生心裏，早已有這種位子的觀念了。他眼看表裏縱橫都很整齊，都有規律。心裏有位子系統的觀念，不過嘴裏說不出來。教員再提醒了，把位子的關係用言語說了出來，學生心裏一定大大的滿意。在他們正是有此意而不會說的時候，一旦能有人道破，多麼的爽快！這樣纔是真的啓發。開始講位子，學生尙沒有到自己覺得需要的時候，無論你如何問答，總不過是注入。教位子是很便當的。譬如五十六，有五個十，所以左面寫5；還有六個，所以右面寫6。合起來便成56。寫五十時，只有五十個，所以左面寫5；另外沒有了，所以右面寫0，合成50，只須規定：幾十的數目寫在左，幾個的數目寫在右，只有幾十而沒有幾個時，右面用0表明沒有。

一個一個的迅速順數，1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ……到99。再一個一個的逆數從99, 98, 97, 96, 95, 94, ……到1, 從3起, 13, 23, 33, 43, ……順數到93。從95, 85, 75, 65, ……逆數到5。這種種變化的數法，都可以幫助學生使明白數目的關係，和某數目在系列裏的地位。

一個數目的成立有好多的關係。譬如48就系列裏說，在47以上，49以下，比38多10，比58少十。就

分合上說是40和8，41和7，42和6，39和9；六個八，八個六，四個十二，十二個四……說不完的。也是一起教得完的。不過在相當程度的範圍以內，總宜多方的使學生明白。

第五節 一百以上各數

第一步，在一千以下。先從一百，二百，三百，四百，五百……而至一千。這裏並沒有什麼多大的困難。數目的名稱上，可以由一百，類推到二百，三百，四百，五百等。百是一個名字。四個百，便成四百，八個百便八百。彷彿斤是一個名字，四個斤是四斤，八個斤是八斤一樣。數目的寫法上，也可以由100，類推到200，300，400……等。滿了百，再向左方進一位。這位可以叫做百位。百位上的3，當然是三百。以上兩方面都可以類推得之。最困難的，便是數目的直觀。因為數目漸大，直觀漸漸感到困難。我們為便利教學起見，只可以用牙籤，火柴等細小輕便的東西。但是太細小了，學生又不容易看。用小方格紙，也是一個辦法。每張十行，每行十格，一張便是百格。七張便成七百格，十張便成一千格。或者平常學生看的書，也可以用來叫學生數書裏的字。銅元每百枚一包也還簡便，拿十包八包，給學生直觀。或者沒有什麼重大的困難。這時候的直觀數目，更不應一個一個的數。應當先每逢十個作一單位，譬如用

火柴，便十枚一紮。紮時用白色線。滿十紮時用青線紮成一大紮，便是一百。若是十個大紮再用紅線紮起來，就成一千。

除了直觀以外，還可以用些推想的材料，幫助學生明白幾百的數目觀念。譬如一丈是十尺是容易直觀的。十丈是一百尺，也還可以看到。由此推想；六百尺，八百尺，一千尺，應該從本教室到某處，或從本校門口到某地。又如一層的屋子，大約高一丈餘，有十尺多，一百多寸，二百寸，五百寸，一千寸，各各應該有二層樓三層樓，七八層樓那般高。放紙鶴的線也是一個絕好的資料。再如由一教室內學生五十人而推想到一百學生要二教室，四百學生要八教室，六百學生要十二教室，一千學生要二十教室等。照此用例證，就學生經驗範圍以內，幫助他們推想了，使幾百或一千的數目觀念格外明確。

第二步，是學各式的三位數目。名字是容易的，只須在已有經驗外再加上幾百便够了。寫法也不很難教，只須再向左進一位就是百。那末三位數目，左位管百，中位管十，右位管單個。要用牙籤火柴等說明，也很便易。青線大紮是百，寫在左位。白線小紮是十，寫在中位。不紮的單個，寫在右位。那末



0 是表示沒有單數的意思。其次便要用 908, 605, 等數目，學習寫法讀法。這種數目，在寫法方面還不難。中位十沒有，當然要用 0 來占好地位的。不然變成 985 了。讀法方面是新的。因為九百八，六百五，有時要和九百八十，六百五十容易混亂，所以要讀作九百另八，六百另五。

除了練習讀寫以外，也可以叫學生順數 100, 200, 300, 到 1000; 逆數 1000, 900, 到 100. 或者再順數 450, 550, 650, …; 逆數 860, 760, 660 等。再可以順數 125, 225, 325, 等，逆數 772, 672, 572, 等也還可以順數 235, 245, 255, …; 逆數 641, 631, 621, 611, 601, 591, 581, …; 471 等。

加法減法的練習，可以用 200, 200, 300, 108, 70, 5, 60, 300, 8, 的加法; 及 480, 400, 766, 700, 328, 28, 405, 5, 的減法。這種不重在加法減法而實在是一種變相的學習數目的關係和寫法讀法。乘除法也可以行。 64, 604, 32, 302, 3002, 以及這種乘法反過來的除法，都是很合宜的練習資料。

第二步，千以上到萬。這也沒有什麼困難。十個百成千，十個千成萬。逢十進一位，換一個新的名字。學生以前有過相當的經驗，這種關係，不難推想而得。位子關係，最右是單個的，向左便是十位，最左便是百位，更左便是千位，那末，萬位當然更在千位之左了。除此以外，也有若干新的困難點，且一說明如下。

一、直觀的東西，到了千以上，更感困難；就是火柴牙籤等細小東西，也覺得手續太麻煩。小方格紙到了三五千以上，也不容易直觀。所以千以上各數，只好多用那推想的材料，幫助學生得到些大體的觀念。前舉的丈尺、高度、人數等等，也可以用。或者更加些時間關係的資料。譬如一年三百六十五天，十年不過三千六百多天；活了三十歲，也不過過了一萬天光景。又如一天存一元，要積滿一百萬元（不計利息）要三千年纔可以。萬以上的數目，只好如此的推想。凡地理中種種統計，揀在相當範圍內的，像距離、人口、經濟、收支等等都是絕好的資料。其實萬以上的大數目，平均實用很少，不過統計報告內卻是常要用的。

二、是讀數目時零的問題，寫數目有四位、五位、或六位以上時，凡那一位沒有的，總是給他用 0。

占居好了地位。這是極容易的。不過，念起來時，中間的0有好多，每逢一〇念一零字，有時實在麻煩。而且右方沒有數目時，無論0位如何多，總是一個也不念的。700只念七千；9000只念九千；600只念七十。

六百只念九萬五千八百；64770只念六萬四千七百七十。這種讀法寫法宜最先教學生，其充便學。

等只有中間一個0的。這時候讀法還不生問題。學生學過408, 705, 等讀法的，當然可以讀來無誤。其次

便是3060, 5080之類。讀時只要管百位的0，單位本來60, 80, 也不必讀出零來的。這一種讀法，其

其次便是8007, 6004, 等中間百位千位都是0的，讀法，平常用零零二字表示。所以該讀八千另另七，六千

另另四。這是完全新的辦法，要十分注意。其次便可以用90005, 100008等中間有三四個0的數目。這種決不

是見一0讀一零的，無論0有多少至多只讀零零。九萬另另五，十萬另另八，不是九萬另另五，十萬另另八。最後可用70808, 100506, 60060, 100600, 等類0在各種地位的數目，叫學生練習寫法讀法。



三、我們的命數法到了萬以上，便有一個變化。在萬的以下，逢十進一位，換一個新的名字。十個百成千，十個千成萬。到了萬以上，逢十進一位，名字不再添用新的，就用萬做了標準，十萬，百萬，千萬，的叫着。這一個特點，要使學生明白。仍舊可以用名數來比較。譬如容量勺合升斗石，石以上不再換新名字，十石，百石，千石，的叫着。又如長度，分寸，丈，丈以上十丈，百丈，的叫着。明白了這許多例子，萬以上叫十萬，百萬，千萬，也沒有什麼希奇，並且也沒有什麼困難了。

四、和這一層有關係的，便是萬千之間往往用，來作區別。這是表明再進位去時，讀時用萬做標準，十萬百萬千萬的念了。譬如 125,8604，有了，讀時在，以左，一看便知一百二十五，所以讀一百二十五萬，右的，當然是八千六百另四。這叫做分頓法。凡數目過大時，分了頓看起來要便利得多。但是近來有好多統計資料，沿用英美的分頓法，不是在千萬之間用，而在百千之間用，在他們的命數法只到千，千以上不換新名字，叫十千，百千。所以他們三位分等，讀起來也很便利。譬如 32,6327 在中國讀起來三十二萬六千四百八十七，一看 32，便知三十二萬。若改三位分頓法，便成 326,4327 照英美讀法，是三百二十六千四百八十七。這樣纔覺得便利。如照中國讀法而也三位分

頓，實在麻煩。這好比穿了長袍馬褂，外罩西裝短雨衣，總覺得滿身不適。

萬以上再進了四位，便成萬萬，又換一個新名字叫億。億再逢十進位，仍叫十億，百億，千億等。滿了萬億又是進了四位，再換一名，叫做兆。兆以上仍用十兆，百兆，千兆等。已有十六位，儘够用的了。平常，億位還在統計裏遇到，兆以上是少見的了。三位分等，千以上進三位換一名字叫密林（常我們的百萬）由此進位，叫十密，百密。到千密已進三位，換一新名字叫別林。（當我們的十億）由此進位叫十別，百別。此等大數，只要當常識看，在五六年時叫學生學學。平常計算是很少用得到的。

千以上，幾萬，幾十萬，……等數目學習時，也可以叫學順數逆數，也可以做練習數目關係和寫法，讀法用的加減乘除。一切見第一步裏，這裏不再多說。

第二章 加法

教材排列方法，本來不是先教完了加法全體，再教減法的。但是爲說明便利起見，所以分別論述。實在組織，要錯縱交互。詳細辦法請看小學算術教學法（商務印書館出版）第二章。

加法，從一加一起，到人生日用的各種加法，雖同是加法，計算時的難易有很大的區別。若要學生練習得純熟迅速，應當把加法的方法細細分析，由易而難，一步一步的進行。每次學習少數的困難點。等到學習純熟以後，再加新的困難點。這樣漸漸成功習慣，纔可以達到完成的目的。下面按了次序，逐項的細細說去。

第一節 加法的基本九九（上）

基本九九，不是一口氣可以教得成功的。應當分別難易，一步一步的教。

一、第一步是和。在9以下的加法九九。這種加法大約在學生會得寫9以下各數目字的寫法

時便可開始。開始第一着，便是使學生明白加的意義。向來，小學裏教加法是逆了心理自然的順序進行的。往往開始先告訴學生要做加法，接着使用數目字，算式，加號（+）等教學生用式子計算。這是根本錯誤的。要知道符號是代表言語的，言語是表示意思的。沒有懂得加的意義，怎能教學生學加的言語，更何從使他們明白（+）符號所代表的是什麼。「加」是一個抽象的名詞，平常我們不很常用。所以初教加法，應當照下列步驟，由漸進行。

1. 教員預備好顏色鮮明，大小適宜，遠方學生也看得清楚的東西九個，空匣子一隻。教時不必說明是做加法，只算是一種遊戲。左手拿了幾個給學生看。譬如三個，放在空匣子裏。同樣右手拿二個給學生看，再放在匣子裏。再問學生匣子裏共有多少。指名回答。給學生看時，不宜常數三個東西，兩個東西，宜一看便說出三或二來。共計五個，可以拿出匣子裏的東西出來看。能看得清，便不必數。要看錯了，纔用數法來證明。

2. 進一步，可以照上面方法做遊戲，同時叫學生把匣子裏東西的總數，用數目字寫出來。法純是算，此法也學寫答數。

3. 再進一步，方法仍同1，不過在左手東西放到匣子裏去時，在黑板上寫3字，右手東西放下去時在黑板上3字下寫2字成32。更在學生寫了答數或說出答數後，黑板上寫一及5在32的下面成32—5。此法使學生計算時也看見式子的寫法。

4. 更進一步，不限定用一種東西，凡銅元，銀元，石筆，鉛筆，……等東西都可以用。方法和1同。東西宜變化。這是使學生明白什麼東西都可以合併起來的。寫式子仍同3項。

5. 更進一步，不用東西，用數目字及畫片代實在的東西。譬如先放一片，片子上有 $\frac{4}{1}$ 的；再放一片，片子上有 $\frac{3}{1}$ 的。此外方法同1項，寫式子同3項。

6. 更進一步，可以叫學生抄了寫示的式子做。教的方法仍舊和1項同。

7. 更進一步，可以省卻1項的教，預先寫示式子，叫學生做。有時叫學生抄式子，有時不必抄式子，只要寫出答數來。可以時常變化。

8. 更進一步，可以照從前認數目字時用的片子，上面寫了以下的各個算式。教員迅速，抽示，學生口答，或寫答數。

到此爲止，所用的九九，總是下列的三十六個。用時要錯縱交互，切勿接着次序。

8	7	6	5	4	3	2	1	7	6	5	4	3	2	1	6	5	4	3
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
2	1	5	4	4	3	2	1	4	3	2	1	3	2	1	2	1	1	1
3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8

第二步是初步的連加法。連加法實在就是九九練習的變相。不同的地方，(1)是三個或四個以上的數目連加，這是形式方面的不同。(2)是先把二個數目加了以後，要把這臨時的結果牢記在心裏，再在這看不見的數目上加第三個數目。這是一個頂重要的能力。若這種能力不好，將來做起加法來頂容易失敗。這種失敗不在九九不熟，在乎暗記的數目容易忘記。有人主張逐步把暗記的數目寫出來，記在旁邊。這是姑息的方法。如此，不但不能使學生暗記的本領加增，反而教他一種依賴的方法，阻礙他們這種本領的發展。依賴成功了習慣，將來做起加法，只有吃虧，不會便宜。

不過有幾種容易使學生忘掉那暗記數目的原因，我們不可不預先防止。譬如做連加法時分心，是一個頂重大的原因。在剛要加上第三個數目時，注意忽然移到別的地方去，於是暗記的數目

忘掉。所以應當教會學生自己集中注意，一口氣加，加完了再休息一下，做下一個題目。還可以叫學生口念那暗記的數目，也是一個補救的方法。在做九九的加時，不許學生一一念答數。譬如 $5+3=$ 學生不許念 $5+3$ ，應當看見 $5+3$ ，念 8 出來。這一層要在第一步 1 項時起頭便注意。寫示式子時，教員自己也不應常常 $5+3$ 的念着。到做連加時，譬如 $2+4+3=$ 不許念 $2+4+6+3+9$ ，只許看着 $2+4+6$ ；再看 $3+9$ 。中途若要注意分散，便嘴裏念 $6, 6, 6, 6, \dots$ 等到注意集中了再看着 $3+9$ 。

數手指也是一種容易使注意分散的弊病。一面要數手指，一面便把暗記的數目忘掉了。這是因爲第一步 $1, 2, 3$ ，各項進行太快，並且常常叫學生數的緣故。只有再多做第一步 $1, 2, 3, \dots$ 等各項的方法，而少叫學生抄寫式子，並且把連加法延緩。數手指的惡習沒有革除，一切進行，處處都是阻礙。亦有不數手指，在計算時自己用筆打點子數的救濟的方法和數手指一樣。

不會寫數目字也是一個重大的阻礙。這弊病不論加法九九或連加法，都是一樣的。加法是會做的，結果已經算好，不過在要寫答數的時候，因爲數目字寫法不熟，所以用心想了數目字的寫法

反而把答數忘掉的了。這種救濟要從兩面進行。一是不急急責學生寫答數，先多叫學生口答。一是另外多練習數目字的寫法。

連加法入手教的時候，仍舊宜仿照第一步裏1到8各項進行。應當先叫學生明白連加的意義，然後再寫示連加的式子。先從式子入手，學生勢必做了好久的連加法，結局沒有知道連加的意思。

教連加法先用三個數目的，後來可以用些四個數目的。也可以偶然用些五個數目的。只要結果在九以下。練習的時候，不必三個數目的呆要和三個數目的在一起，中間儘不妨插些第一步用的九九。後來教了四個數目的，仍舊可以常常插些三個數目的，或兩個數目的。初學要把困難點細細分析一步一步的進行。進行到了第二步便應當把第一步學過的一起組織起來；到第三步時，把一二兩步和第三步一起組織起來。所以練習時儘可以把學過的插入。

三、第三步，教過連加法，可以開始教學生自己檢答。加法從上加下去，檢答時從下加上來。在三個數目的連加法裏，這一層關係才容易明白。譬如 $3 + 2 + 4 = 9$ ，從上而下加，是5, 9；檢答是從下加上

來，便是6，9。兩次結果都是9，才知9的答數不錯。由此也可以推到平常的九九，也可以同樣檢答。從此以後學生計算時，總要叫他們自己檢答過後，才提出共同訂正或交給教員批正。從小就使學生有這種自己負責任的良好習慣。計算頂重要的是無誤，是要對於結果負責任。小學裏學生做算學，總是不當自己的事。檢答就是負責任的表示。

四，第四步，可以教九九的滿十者，像 $9\overset{1}{\underline{1}}$ ， $8\overset{2}{\underline{2}}$ ， $7\overset{3}{\underline{3}}$ ， $6\overset{4}{\underline{4}}$ ， $5\overset{5}{\underline{5}}$ ， $4\overset{6}{\underline{6}}$ ， $3\overset{7}{\underline{7}}$ ， $2\overset{8}{\underline{8}}$ ，19，等九個，連同以前學過的三十六個，共計四十五個。這種教法，和第一步彷彿。所應特別注意的，就是答數10的寫法。教10的寫法是整個的，不必講什麼位子。詳細已見第一章第三節。

在這時候的同時，可以照第一章第二節一的方法教0；在連加法裏夾進0去。方法見前。

加法九九和滿了十，也可以教 $2\overset{5}{\underline{3}}$ ， $7\overset{2}{\underline{1}}$ ，等及 $2\overset{4}{\underline{3}}$ ， $1\overset{2}{\underline{2}}$ ， $2\overset{2}{\underline{1}}$ ， $3\overset{1}{\underline{1}}$ ，等連加法和滿十的方法見本章本節的第二步。

第二節 一部分加法九九的應用練習

學了加法九九四十五個以後，若是接教十以上各數到十九，二十時，在教過數目寫法讀法以

後，可以把第一節的加法九九及連加法推廣練習。

一、第一步，做 $10 \overline{7}$ ， $10 \overline{5}$ ，等上面是10，下面是1到9等各數的加法。再可以上面寫1到9各數，下面寫10，像 $3 \overline{10}$ ， $8 \overline{10}$ ，等叫學生練習。

二、第二步，做 $11 \overline{4}$ ， $11 \overline{8}$ ， $13 \overline{5}$ ， $13 \overline{3}$ ，等的加法。這種加法不過比本章第一節裏的九九多了個十。同時也可以練習十以上各數的寫法。困難點只有答數上的十。凡答數有了兩位，在十以上時，頂要緊的，便是叫學生一氣念十幾。

三、第三步，和第二步彷彿，不過上下兩個數目易了地位。譬如 $4 \overline{15}$ ， $2 \overline{13}$ ， $1 \overline{16}$ ，等的加法都是。

四、第四步，是連加法。像 $14 \overline{2 \overline{1}}$ ， $2 \overline{14 \overline{1}}$ ， $2 \overline{4 \overline{11}}$ ， $10 \overline{2 \overline{5}}$ ， $5 \overline{10 \overline{4}}$ ， $3 \overline{3 \overline{10}}$ ， $17 \overline{0 \overline{1}}$ ， $4 \overline{13 \overline{0}}$ ， $2 \overline{0 \overline{15}}$ ，……等。

五、第五步，是以上各種形式的加法，和滿二十的。譬如 $10 \overline{10 \overline{20}}$ ； $18 \overline{2 \overline{14 \overline{6}}}$ ； $7 \overline{13 \overline{1}}$ ； $2 \overline{18 \overline{1}}$ ； $15 \overline{3 \overline{2}}$ ； $6 \overline{12 \overline{2}}$ ； $4 \overline{5 \overline{11}}$ ； $10 \overline{8 \overline{2}}$ ； $6 \overline{10 \overline{4}}$ ； $1 \overline{9 \overline{10}}$ ； $15 \overline{0 \overline{5}}$ ； $12 \overline{8 \overline{0}}$ ； $7 \overline{13 \overline{0}}$ ； $4 \overline{0 \overline{16}}$ ；

……等。這種可以和學習20的讀法寫法聯絡了做。

以上種種，只不過列舉了題目的形式。實在教學時決不是從式子入手的；仍舊要照第一節各步的方法，先從實在觀念開始，漸漸引到式子方面去。式子是實在觀念的符號。

若是學生學習數目的讀法寫法，過了二十，到九十九或一百時，上面四十五個九九的應用練習便格外的多了。列舉起來，有下列的各種格式。仍宜一步一步的進行，不要性急。譬如砌牆，以前的是牆腳，固然要打得堅固。以後的是大方腳，也不可疏忽。若下層堅固那末由此砌上去，雖十層，二十層的樓房也不怕坍塌。

一、第一步， $20 \begin{smallmatrix} 1 \\ \text{—} \end{smallmatrix}$ ， $40 \begin{smallmatrix} 1 \\ \text{—} \end{smallmatrix}$ ，及 $20 \begin{smallmatrix} 30 \\ \text{—} \end{smallmatrix}$ ， $30 \begin{smallmatrix} 20 \\ \text{—} \end{smallmatrix}$ ， $40 \begin{smallmatrix} 30 \\ \text{—} \end{smallmatrix}$ ， $50 \begin{smallmatrix} 20 \\ \text{—} \end{smallmatrix}$ 的加法。這是練習讀法寫法的。可以由一尺是十寸，二尺是二十寸，推到三尺是三十寸；由四尺是四十寸，二尺是二十寸，推到六尺是六十寸等。詳見第一章第四節。

二、第二步， $30 \begin{smallmatrix} 5 \\ \text{—} \end{smallmatrix}$ ， $5 \begin{smallmatrix} 30 \\ \text{—} \end{smallmatrix}$ 的加法。這種是練習幾十和幾合併成功幾十幾的關係，實在仍舊不過是讀法寫法的練習。也可以用二尺是二十寸，推到二尺七寸是二十七寸。詳見第一章第四節。

三、第三步， $33 \frac{2}{1}$ ， $3 \frac{36}{1}$ ，等的加法。這是幾十幾上加幾的加法，和沒有進位的。

四、第四步， $38 \frac{10}{1}$ ， $45 \frac{20}{1}$ ， $40 \frac{26}{1}$ ， $60 \frac{14}{1}$ ，等的加法。這是幾十幾及幾十相加的加法，和沒有進位的。

五、第五步， $35 \frac{23}{1}$ ，等的加法。這是幾十幾加幾十幾的加法，和沒有進位的。

六、第六步，從第一步化出來的連加法，有 $20 \frac{10}{20}$ ， $30 \frac{20}{20}$ ， $20 \frac{20}{20}$ ，等。

七、第七步，從第二步化出來的連加法，有 $30 \frac{2}{20}$ ， $40 \frac{20}{5}$ ， $4 \frac{30}{50}$ ，以及類於這種四個數目的連加法。更可以化出 $40 \frac{5}{2}$ ， $4 \frac{3}{20}$ ， $20 \frac{2}{5}$ ， $30 \frac{1}{20}$ ， $20 \frac{6}{3}$ ， $2 \frac{4}{20}$ ， $2 \frac{5}{6}$ ， $40 \frac{1}{2}$ ，等連加法。

八、第八步，從第三步化出來的連加法有 $52 \frac{3}{4}$ ， $4 \frac{52}{3}$ ， $3 \frac{4}{52}$ ，等。

九、第九步，從第四步化出來的連加法有 $38 \frac{10}{20}$ ， $30 \frac{25}{10}$ ， $20 \frac{40}{33}$ ，及類似這種四個的數目的連加法。更可以化出 $30 \frac{23}{2}$ ， $41 \frac{10}{6}$ ， $7 \frac{22}{40}$ ，等花式。

十、第十步，從第五步化出來的連加法有 $36 \frac{51}{12}$ ， $22 \frac{33}{32}$ ， $11 \frac{1}{2}$ ，等。更可以化出 $35 \frac{12}{40}$ ， $20 \frac{61}{1}$

17, 38 20 21, 等。再可以化出 $23 \begin{smallmatrix} 34 \\ 2 \end{smallmatrix} 1, 2 \begin{smallmatrix} 34 \\ 23 \end{smallmatrix} 1, 23 \begin{smallmatrix} 4 \\ 32 \end{smallmatrix} 1, 等。$

以上各式也可以相互合併，化出好多花樣來。

這種練習，起先仍宜從實在觀念開始，決不能入手時就從算式開始。不過這時候的實在觀念，決不是單獨的一個一個的數目，凡滿十的，總是當作一個。可以用牙籤火柴等紮了做例證。譬如 $35 \begin{smallmatrix} 2 \\ 20 \end{smallmatrix} 1$ ，應當三十是三紮，二十是二紮，共五紮，單另的 $5 \begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix} 1$ 共 7。所以答數是 57。

從式子開始學算法，本來是錯的。永遠脫不了實物，也是不對的。實物是基礎，式子是符號，算法是得到結果頂簡捷的方便，就是一種重要的工具。工具不熟，效力很小。所以實在觀念明白以後，應當把計算的方法練習得十分純熟。以上各種練習，一面可以使前學的九九得到變化應用練習的機會，一面可以用簡易的九九，不必進位的算法，先把平常加法中常用的花式，練習純熟。

第三節 加法的基本九九（下）

除去上面已經學過的四十五個九九以外，全般九九，還剩下面的幾個：

上便有一個真正正確的明字出現。如此，作文寫信時，才可以留出精神來在文章及信中事實上用心思考。算學也是這樣。九九純熟了，一見 $9 \cdot 6$ ，不加思索的知道 15，然後可以做各種的加法。基本習慣純熟了以後，才有餘時可以思考重大的關係。設使有人一舉足要思考如何走法，一動筆要思考如何寫法，一舉杯要思考如何喝法，這一人一生的精神只化在日常起居動作還不夠，更有什麼空時可以來研究別的大事！我們走路喝茶可以不加思索的，所以一面喝茶，一面走路，一面仍舊可以和人討論國家世界大事。從小把九九練成功了習慣，才可以學別的算學。所以用分析推理學和在 11 以上的九九是利不敵弊的。

不用分析推理，便用何法簡單說一句，便用實在經驗做基礎。不必多分析。至多把 $9 \cdot 2$ 、 $9 \cdot 3$ ，等和以前學過的 $9 \cdot 1$ — 10 聯絡了教。這是聯絡，不是分析。教的方法，仍舊如本章第一節，用實在的經驗做基礎。 $9 \cdot 3$ — 12 是事實。和 $3 \cdot 2$ — 5 同樣的是事實。 $9 \cdot 3$ —要分析了成功 $9 \cdot 1 \cdot 2$ ，何以 $3 \cdot 2$ —不再分析了成功 $3 \cdot 1 \cdot 1$ 。若要分析，勢必將 $5 \cdot 5$ —分析成功 $5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$ —而後止。如此分析，便成功一個一個數了。 $9 \cdot 3$ — 12 ，不明白時，做錯時，可以回訴諸實在經驗，猶之 $3 \cdot 2$ — 5 錯

了時用實物來證明一樣。所謂十進是命數法和寫數目法的一種制度，決不是推理的一個理由。9 3 一 是 12，不管命數法寫數法如何，事實上總是 12。若用十二進的寫法，十二可以寫成 10（見第一章第三節。）一定要分析成十的關係，並沒有什麼堅強的理由。就學習心理上而言，我們要使學生 9 3 一 和 12 成功堅固的連結。這連結愈堅強，學習的效果愈可靠。若要分析，勢必使 9 3 一 和 9 1 2 一 成了連結，再要 9 1 一 和 10 連結，10 2 一 和 12 連結。這是明明可以直接的而必要假手於 9 1 一，10 2 一，等，不是捨近而圖遠嗎？

教法同本章第一節練習的方法，也同。練習到相當程度時，也可以做連加法。

一、第一步，是 5 4 6 一 等。第一加暗記的數目仍在九以下，第二加時和才在 11 以上。

二、第二步，是 6 7 3 一 等。第一加暗記的數目，已在 11 以上。第二加時彷彿是 13 3 一 等不進位的加法了。

三、第三步，是 9 0 7 一，及 2 0 7 8 一，5 0 7 4 一 等。中間夾了 0，有的像上面的第一步，有的像上面的第二步。

以上不過舉些形式，教法見本章第一節，仍舊要注重從實在經驗入手的。

第四節 各種進位的加法

加法的基本九九已經習熟以後，可以學習通常的加法。但是仍舊宜分明步驟，一步一步的進行。不然，一時有了好多的困難，學生不容易習熟。大略可以分下列的幾步。

一、第一步是加法必須的一種基本習慣。由 $5\ 6$ 一、 $9\ 9$ 推而至於 $15\ 6$ 一、 $25\ 6$ 一、 $35\ 6$ 一、 \dots 等。這實在不過是九九的進一步。但是平常九九， $5\ 6$ 一、 11 ，答數直接把 11 寫出。 $15\ 6$ 一、 $25\ 6$ 一、 $35\ 6$ 一，等的加法，都要把 11 分開兩次寫答。先寫 11 的 1 ，再把 10 進到 15 的 10 成 20 ，或進到 25 的 20 成 30 ，或進到 35 的 30 成 40 ；再寫 2 或 3 或 4 ，然後連已經寫好的 1 合併成 21 或 31 或 41 等。初教時當然根據事實，由 5 加 6 得 11 而及於 $15\ 6$ 一得 21 ， $25\ 6$ 一得 31 ， $35\ 6$ 一得 41 。學生已經明白基本觀念以後，便應使他們知道進位的 10 和原有幾十合併起來的手續。並且要明白答數是兩個數目字連合起來成功一個數目。

二、第二步是連加法中要進位兩次的，像 $7\ 6\ 9$ 一。這種比上面第一步更難。第一次加的結

果13是看不見的。要暗中記牢，然後再做139—22的加法。這種加法，頂容易把暗記的十三半途忘掉。一切方法見本章第一節內。

三、第三步是把第二步再推廣出去，多用四個，五個六個，七個……數目，並且中間夾些0在內。這樣，加起來要連續暗記中途已經算出的結果。譬如536947，第一加得8，暗記8，第二加得14，暗記14，第三加得23，暗記23，第四加得27，暗記27，第五加得34，然後把答數寫出來。分別的說，就是一次九九，以後便連續做第一步的加法四次。頂困難的便是每次暗記的數目變化而要連續，暗記到五次之多。所以在半途稍稍分心，暗記的數目馬上忘掉。從此只好從頭再算。在數目較多的連加法，各人能夠持續注意的久暫是不同的。有人能連續注意暗記到十個數目以上，有的不過五六個數目便要分散。救濟的方法，便是照本章第一節裏說過的方法，自己覺得注意散時把暗記的數連續的念。等到注意集中了再加下去。

在起初當然不過用三四個數目的題目練習。後來漸漸推廣到五六個，七八個，或十個以上。人生日用的加法，總是好多連加的。學加法而不會連加，彷彿和沒有學過一樣。所以，加法的主要點在

此，不可不努力耐性的練習。單位連加法有了相當的習慣，一切加法，可以措置裕如的了。下面幾步的式樣，都不過是單位連加法的組合罷了。

四、第四步是兩位數的加法有進位的。譬如 $44\ 27$ ，個位九九 $4\ 7$ 一 11 ，把 1 進到十位加 4 得 5，再加 2 得 7。個位上沒有什麼困難。十位上有一個暗記的進位的 1，彷彿成功 $1\ 4\ 2$ 一的連加法。這進位的 5 要暗記，是一種新的困難點。又如 $44\ 57$ ， $54\ 67$ 一的加法，一切方法同上面說的一樣，只不過十位上加了以後要進到百位上去就是了。這一點好好注意，不難純熟。

五、第五步是兩位數的連加法有進位的。 $44\ 27\ 56$ 一，等加法，個位是連加法。十位也是連加法，不過要記好進位的 1，並且結果要進到百位上去。 $44\ 27\ 50\ 21$ 一，等加法，不過個位上的連加法有 0，別的沒有什麼不同。 $48\ 96\ 97$ 一，等加法，進位的不限是 1 而是 2，別的和上面一樣。 $20\ 58\ 76\ 94\ 14$ ，進位的數目個位是 2，十位進到百位也是 2，別的和上面同。進位可以 3，4，5，6，……數目可以加多六七個，八九個，十個以上。

六、第六步是兩位數一位數相間的數目。如 $25\ 3\ 70\ 84\ 16\ 8$ 一，等。在個位上沒有什麼新花樣。十

位有時空了位子也不寫0。這是一種新的困難點。要使學生看空位子，當他有0一樣。在本章第二節裏這種樣子已經有過。不過在第二節裏，注重實在的經驗，所以20 4 32₁，教時注意在0 4 2₁連加得6；20 30₁得50；所以合共56。到了此時，數目繁多，要一位一位的分別了當是連加法做，所以要特別注意。

七、第七步是三位以上的加法。如 $\begin{array}{r} 304 \\ 78 \\ 45 \\ 3 \\ \hline 627 \end{array}$ 20₁等。不過是推廣到三位數或三位以上各數，並且以上各步的組合罷了。人生日用，除特殊統計以外，大概三位四位數是頂平常的。但是要加的數目却常常要在十個以上。所以做到加法練習，要注重在連加。進位無論1，2，或竟8，9，10，21，只要暗記一次，便可以進行把上一位的數目連續加下去。有一種惡習慣，教學生把進位的數目記在上位的末一個數目字下的線上，等上一位各數目一一加完以後才併進去。這是「其愚不可及也」的方法。明明一進位便可以和一上一位第一個數加起來，何必多一番記出的功夫！又加時只要念暗記的數，不必再念幾加幾。上例，應當念「12，17，20，27，」寫7，又念「2，9，13，15，17，」……決不可以念「4加8，12，加5，17，……」等。多念也是分散注意的一個原因。而且要使得計算遲鈍。

第三章 減法

減法就是加法的反過來。但減法有特獨的困難點，也應當分別步驟，按照了由漸的進行。

第一節 基本九九（上）

減法的基本九九，也有難易的分別。起先學的，是容易的一部份，就是加法九九和不過十的一部分。列舉有下列的各式，共計三十六個。

9	8	7	6	5	4	3	2	9	8	7	6	5	4	3	9	8	7
1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3
6	5	4	9	8	7	6	5	9	8	7	6	9	8	6	8	7	8
3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	8

初步教減法九九，第一件便是減的觀念。減有從比較生的。譬如我年七歲，妹妹年五歲，我比妹妹大幾歲，就是比較的減法。由比較比出多少來。減有又從剩餘生的。譬如我有銅元七枚，買紙用去

五枚，還剩幾枚，就是求剩餘的減法。由七去五剩二，減也有從找頭生的。譬如買東西四元五角大洋，付了一張五元鈔票，店家夥計找五角大洋，合了物價四元五角，共計五元。這是加法的變相，有的也叫做補法。補是補足找頭五角湊成五元的意思。教小學生學減法，這三種觀念宜都顧到，不要偏廢。

大約在前章第一節各步做得純熟的時候，便可以開始教減法。或從比始，或從剩餘始都行。不過每一步只宜學一種新的觀念。然後再混和練習。切不可一時貪多，三種同來，反而使得學生混淆不清。俗語說，貪多嚼不爛，便是這個意思。

一、第一步，若從剩餘開始，可以仿照前章第一節第一步的辦法，由漸進行。

1. 同前章第一節第一步的1，用東西和空匣子。先放五個在匣子裏，然後從匣子裏拿出三個來，叫學生想，匣子裏剩餘多少。也不要常數。

2. 同前章第一節第一步的2，算法同上面一樣，並且叫學生寫出答數來。

3. 同前章第一節第一步的3，算法同上面一樣，在放東西到匣子裏去時，在黑板上寫示5，在拿出三個東西來時，在黑板上5的下面寫3，成5-3，更在學生回答時，在5-3下面寫1-2，成

功53—2。這樣可以使學生看見式子的寫法。

4. 同前章第一節第一步的4，用各種東西，照上面的方法做，仍寫示式子。

5. 同前章第一節第一步的5，用數目字及畫片，代替實在的東西。算法及寫示式子，同上。

6. 同前章第一節第一步的6，叫學生在算時抄寫式子。

7. 同前章第一節第一步的7，叫學生看了式子做。

8. 同前章第一節第一步的8，把上面的三十六個式子，寫在片子。抽示練習。

以上各項完全和前章第一節第一步各項一樣。不過進行可以稍快。

二、第二步是學比的觀念。一切次序仍舊可以按照上面八項逐一進行。不過要用兩個空匣，放在左右。放五個東西在左面匣子裏，再放三個東西在右面的匣子，問：那一個匣子裏多？多幾個？其他方法可以照上面1，再用2，再用3，再用4。到這時候可以不必限定把東西放到匣子裏去，只要把各種東西陳列左右就是了。再用4項方法時，可以改在黑板上左右方畫簡單形體，不必放在匣子裏去。6，7，8各項和上面彷彿。

起先把東西放在匣子裏不許學生看，是要防學生一個一個的數。等到學生練習到4項時，不數而算的習慣已經漸有基礎，所以就並列在面前或畫在黑板上就是了。

三、第三步是尋找的觀念。仍舊可以和第一二步同樣，分做八項，一一按次的進行。起先放三個東西在匣子裏，然後問，還要放幾個才成五個？仍舊要獎勵不數。2同樣，並且叫學生寫答。這二項要做得較久，並且有時可以插些上面第一第二步比及剩餘的題目。三種中這一種的說話和寫式不是很符合。所以先要這找補的觀念弄得清清楚楚，然後才可以看式子。

到學生找補觀念明白透徹之時，可以進行3項。這時的說話和寫式不似前二步的順利。放三個東西時，寫示3。再問要多少才湊足五個時，在3上寫5成53。答了2時寫12。在53下面成5312。上二步寫時從上而下是一順的。這一步寫式，先要從下而上，結果再寫在下面。所以寫式是從中間起的。不必把這許多和學生多說。只要按照第3項方法做，做得多而久；後來再把前二步的混和了做，小學生自然會得習熟的。說法則，講理由，程度還沒有到。過早了，反而要招混亂的。

4、5兩項，當然只有一堆的東西或一張的畫片了。還有一個數目，是要等問後才聽到的。6項

仍舊可以照上面的方法做。7, 8 兩項也可以按照進行。只要在看起式子來時先看看下面的了, 然後想還要多少才是上面的5 就是了。

關於數手指, 記點子, 不會寫數目字等弊病, 和加法時的彷彿, 已詳前章第一節裏。找補觀念尤其容易引誘學生一個一個數了補上去, 所以開始時不使他們看見東西。

檢答的方法, 學了用式子計算以後, 便可以教。式子計算, 減法也是由上而下。檢答時, 從答數起, 算一個加法。譬如 $53 - 2$ 的減法, 算時從上而下。檢答時由 2 起加 3, 答數是 5。如此便是不錯的證據了。檢答可以養成學生對於答數不疏忽, 自己負責的好習慣。同時, 也暗暗中使他知道加法和減法的關係。

到這時候, 可以使學生分別加減二法的不同, 並且教『加法』及『減法』兩句說話。有了兩種不同的方法, 才需要相當的說話來區別。同時也不妨教『加』『減』二字。至於『+』『-』符號, 非到學寫等式時不必教的。

什麼叫加法? 不必教『凡二數或二數以上求和……』什麼叫減法? 也不必教什麼定義。這種

抽象的定義，那裏是初學加減法的小孩子所能領會！只要說 $5\ 3\ \underline{1}\ 8$ 等算法，叫加法； $5\ 3\ \underline{1}\ 2$ 等算法叫減法就是了。將來程度高深了，經驗充足，再教定義。

練習加法減法的遊戲方法，有好多種。詳細見社會化算術教授書第一冊。可以揀用。

四、第四步，從10內減各數。這決不要講什麼借位退位等的。只要用第一步，第二步，第三步的方法，由實在經驗求結果。10比4多6，是比的觀念。10裏拿去4剩餘6，是剩的觀念。4上再要多少才是10，是找補的觀念。仍宜分三層，逐漸進行。練習時可以把以前三十六個九九和下面的九個混和起來。這樣，共有四十五個九九了。

$$\begin{array}{r} 10 \\ \underline{1} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{2} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{3} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{4} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{5} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{6} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{7} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{8} \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{9} \end{array}$$

五、第五步，同數相減，結果是0。仍舊要按照第一步，第二步，第三步，再分各項，用同樣的方法，由實在經驗教去。7比7，沒有多少，所以是0。這是比的觀念。7個拿去了7個，沒有剩餘，所以結果是0，這是剩餘的觀念。7個，還要多少，才是7個？已經够了，不必找補，所以結果是0。這是找補觀念。先

用下面的九個九九練習時，當然要和前面的四十五個混和了用。

$$\begin{array}{r} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

六、第六步減數是0的九九，有下列的九個。

$$\begin{array}{r} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array}$$

這幾個比較的難於明白。用實在東西教，反而使得言語上發生困難。可以在社會化算術教授書第一冊裏揀幾種遊戲。做遊戲的結果，要比較分數的。若逢一方8分，一方0分時，便成80一的式子。這是第一步比的觀念。除不用實物比外，一切方法均同。用實物比，一方有東西，一方0，很難說話的。所以用遊戲中0分較好。第二步的剩餘觀念，仍舊可以用從前一樣的方法教。放了5個，拿出2個，匣內剩3個；拿出1個，便剩4個？沒有拿出，當然仍是5個。其他一切方法均同。第三步找補觀念，社會化算術教授書第一冊裏有一種配梅花的遊戲，只要配時一人手裏沒有東西，便要發生50一的關係。由此開始，再進2, 3, 4, 各項。

第二節 應用練習

應用練習，同時也學些減法的種種格式。在二十以下的，步驟如下：

一、第一步，和第二章第二節前半的第一步聯絡，做 $17\ 10$ ，及 $17\ 7$ ，等的減法。這兩種又與上節第五第六步有關係的。

二、第二步，和第二章第二節前半的第二步聯絡，做 $19\ 8$ ，等的減法。注意十位的 1 依然要寫在答裏。1 下空着沒有數目，暗暗中是 $1\ 0$ 一的減法。但是這種理論不必和學生多講，用實在東西證明， $19\ 8$ 一的減法，結果是 11 就够了。答數 11 要一氣念十一，也應當特別注意的。

三、第三步，和第二章第二節前半的第三步聯絡，做 $19\ 18$ 一等的減法。

四、第四步，和第二章第二節前半的第五步聯絡，做 $20\ 10$ 一及 $20\ 18$ 一，與 $20\ 8$ 一等的減法。仍舊用實在東西教。並且注意答數的寫法。

以上四步，不過列舉格式。教時仍要和第一節一樣，分別比的，剩餘的，找補的三方面。並且分別各項，由漸進行。到了數目九十九或一百時，步驟如下：

一、第一步，和第二章第二節後半的第一步聯絡，做 $30\ 10$ 一， $50\ 10$ 一， $40\ 20$ 一， $80\ 40$ 一，等的減法。也

可以用尺來做例證的。

二、第二步和第二章第二節後半的第二步聯絡，做 $35\ 30$ ，及 $35\ 5$ 等的減法。仍可以用尺來做例證。 $35\ 30$ 的減法，本只要兩位分別減。單位 $5\ 0$ 也是第一節裏學過的了。 $35\ 5$ 的減法，在單位上是 $5\ 5$ 第一節裏也已經學過的了。十位 3 下面空着，實在就是 $3\ 0$ 。這也本節在前半第二步裏有過的了。

三、第三步和第二章第二節後半的第三步聯絡，做 $35\ 2$ 及 $35\ 33$ 等的減法。 $35\ 2$ 的減法中十位上，下面空着沒有數目，要特別注意。

四、第四步和第二章第二節後半的第四步聯絡，做 $58\ 10$ ， $58\ 40$ ，及 $58\ 18$ ， $58\ 48$ 等的減法。
五、第五步和第二章第二節後半的第五步聯絡，做 $67\ 51$ 等的減法。

這種種練習，仍舊從實在觀念開始。凡滿十的，也好用牙籤或火柴等紮了做例證，決不可以一個一個的數。並且仍舊要顧到比，剩餘，及找補等三方面。觀念明白以後，也要在式子方面注意。這是準備學習一切減法的基礎。所以應當先由實物始，向着計算的方法上去。

第三節 基本九九(下)

減法九九還有下面的三十六個，都是11以上各數內減9以下各數的。

18	17	16	15	14	13	12	11	17	16	15	14	13	12	11	16	15	14
9	9	9	9	9	9	9	9	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7
13	12	11	15	14	13	12	11	14	13	12	11	13	12	11	12	11	11
7	7	7	6	6	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	3	3	2

這種也不必用分析推理算的。這種基本，應當算得十分純熟，以後做減法時才能便當。若是常常要分析推理，將來非常受累。仍和加法和過十一的一樣，由實在經驗入手。並且仍舊要由比剩餘，找補三方面，依次進行。各步仍要分項的教學，方法和第一節同。

第四節 各種減法

各種減法可以分出好多的步驟如下。當一一進行，使學生練習純熟。

一、第一步是569一的減法。計算方法有三種。

1. 利用找補觀念和減法檢答（見第一節內）方法，569一，先在單位上想，9找補多少

成16，寫7在單位下。進1。再想：暗記進的1再找補多少是5，寫4在十位下。答數成47。

2. $569 -$ 把上面的56分成40及16。 $169 -$ 減法得7，再有十位的4，答共47。

3. $569 -$ 的6加10變16，16減9答7。十位上5下也加1（就是10），5減1答4。答共

47。

三個方法，各有利弊。做熟了以後，有同樣的效力。不過在教的時候，1法頂容易明白。完全根據已學過的找補觀念及檢答法，所以沒有什麼新的花樣。並且加法減法的關係也常常聯絡。2法要多一種新的分析法，有時也叫借位或退位的。上位借一個下來或退一個下來作十，實在就是分析成40與10。3法說明頂討厭。上下同加十，頂難明白。

以上只就式子的計算立論的。在教學入手時當然要根據實在的觀念。初步由 $169 -$ 推到 $269 -$ ， $369 -$ ， $469 -$ ， $569 -$ ，……等等的減法練習。學生實覺的寫7，17，27，37，47……等等答數。要

到練習得相當純熟以後，才用1法或別法說明式子計算的方法。這先後次序，千萬不可以顛倒。

二、第二步是 $7638 -$ 等的減法。照1法，式子的計算法，是8加(8)才滿十六。寫8在單位下，進1。

暗記 1 和 3 成 4，4 加 (3) 才滿 7。寫 3 在十位下。答數 38。照 2 法，是 76 分出 16，16 減 8 是 8，在單位下寫 8。十位 7 分出 1 後成 6。6 減 3，答 3。答數共 38。3 法不必用，免說了。

三、第三步是 60 25 一等的減法。注重在單位上面的 0。照 1 法，是 5 加 (5) 才滿十。寫 5 在單位下。進 1。暗記進位的 1，加 2，是 3。再加 (3) 才滿 6。寫 3 在十位下。答數共 35。照 2 法，是 60 分出 10，10 5 一答 5。寫 5 在單位下。十位分出了 1 有 5。5 2 一 是 3。在十位下寫 3。答數共 35。3 法不必用，不再多說。

四、第四步，是 71 62 一等的減法。注重點在十位答沒有，不必寫 0。照 1 法，是 2 加 (9) 才滿十一，寫 9 在單位下。進 1。進位暗記的 1，加 6 是 7。不必再加便成 7，所以十位不寫了。0 是佔據位子的，以前已經明白。學到這裏，可以使學生比較 7 與 70 可以明白 70 上的 0 關係重大。再比較 7 與 07，可知 07 的 0，完全是贅瘤，一些也沒有用處。

二位數的減法，大概經此四步的學習，已經可以算大致完全的了。初教時當然仍要和第一步一樣，處處用實在經驗做根據。又上面 1 法或 2 法的說明都是詳細的說話。在學生自己做算題時，

切切不可每次如此詳細的念。只要心裏想的，只限於所得的數目。照1法，學生應該說的話如下：

第一步 569：『7，』『1，』『4，』『四十七。』第二步 7638：『8，』『1，』『4，』『3，』『三十八。』第三步 6025：『5，』『1，』『3，』『3，』『三十五。』第四步 7162：『9，』『1，』『7，』『九。』照2法，學生應該說的話如下：第一步 569：『16，』『7，』『4，』『四十七。』第二步 7638：『16，』『8，』『6，』『3，』『三十八。』第三步 6025：『10，』『5，』『5，』『3，』『三十五。』第四步 7162：『11，』『9，』『6，』『九。』

三位以上的減法，花式很多。大約可分下列各步。

五、第五步是 $\frac{837}{426}$ 的減法。各位都可以減。這實在是第二節裏第五步的變相，由二位推到三位就是了。若數目字的範圍早學到幾百，這種可以改作第二節的第六步。

六、第六步是 $\frac{7315}{515}$ 的減法。這種只有單位有進位1，十位百位都沒有。其實就是上面第四步的變相，多百位數目就是了。

七、第七步是 $\frac{927}{478}$ 的減法。這種單位十位都有進位1。照1法算沒什麼困難。照2法算時

十位的2先變1再由百位分出來，成11。這樣似乎周折不少。

八、第八步是 $\begin{array}{r} 536 \\ -208 \\ \hline \end{array}$ 328的減法。減數的十位是0，是要特別注意的。照1法算，進1和0是1。照2法算，3分去1成2，20是2，也不難。

九、第九步是 $\begin{array}{r} 920 \\ -478 \\ \hline \end{array}$ 442的減法。只要注意被減數單位上的0。實在和第三步彷彿。不過十位也是進1的。

十、第十步是 $\begin{array}{r} 903 \\ -744 \\ \hline \end{array}$ 159的減法。特別困難點在，被減數十位上的0。照1法算，不生困難。4加9是13。寫9在單位下，進1。1加4是5。5加5是10。寫5在十位下，進1。1加7是8。8加1是9。寫1在百位下。答數共一百五十九。若照2法算，03不能分析出13來，就是0也不能借1。到了這時候，2法要窮於應付了。只有勉強借1作10，等刻再還。或者從百位去分析下來。後者雖較合理，但是牽動三位，也太麻煩。所以自始就用1法爲是。

十一、第十一步是 $\begin{array}{r} 600 \\ -149 \\ \hline \end{array}$ 451的減法。困難點在被減數十位單位都是0上。用1法算也不困難。用2法算和第十步彷彿。

十二、第十二步是
$$\begin{array}{r} 563 \\ - 398 \\ \hline 165 \end{array}$$
 的減法。困難點在十位上。照 1 法，進 1。1 和 9 是 10，10 加 (6) 是 16。用 2 法，63 分析出 13，減 8，是 5。十位 6 變 5，百位 5 分析後，十位成 15，減 9，成 6。

十三、第十三步是
$$\begin{array}{r} 161 \\ - 63 \\ \hline 98 \end{array}$$
 的減法。困難點在減數只有二位，答數也只有二位。有些和第一步彷彿。不過第一步是二位減一位，答一位。

十四、第十四步是
$$\begin{array}{r} 10000 \\ - 9697 \\ \hline 303 \end{array}$$
 的減法。這是上面三步的混合。用 1 法算，要比 2 法清楚得多。

十五、第十五步是
$$\begin{array}{r} 10208 \\ - 9479 \\ \hline 729 \\ 10024 \\ - 7695 \\ \hline 2329 \\ 18006 \\ - 7398 \\ \hline 10608 \\ 1500 \\ - 307 \\ \hline 1193 \end{array}$$
 及其他各種的減法。殆是上面

各步的併合罷了。做減法宜用數目大些的做。數目大，位子多，變化的樣子也多了。只要上面各步做得純熟，花樣變化，也可以應付。用慣 1 法算的，更加便利得多。

89—72 來。至少也要從 82—83—84……下去到 88—64 然後才可以算出 89—72 來。這樣把 89 和上面的 88—64，再和上面的 87—56 等發生不必要的連結。這多少受累！因此計算別的乘法時要格外的慢，頂要緊的，要使 89 和 72 發生密切不可離的連結。和別的不要發生什麼不相干的關係。如此，一見 89 一便可以知道 72 的答數。

照了上面的理論，學乘法九九要混亂了學。但是太混亂了，22—99，同在一起教，也有好多不便。所以有上述的折衷辦法分作 2 一類，3 一類，4 一類，5 一類。每類中 22—23—24—25—，到 29—，不必排好次序，應當隨便抽了教學。至多再分二部分，把 22—23—24—25—，和 26—27—28—29—，再分兩半。先學前一半容易些的；再學後一半難些的。在學一半時，仍舊不要按照次序排列，要隨便抽用。這是怕學生一時嫌過多，來不及學會，所以分作兩半教學。平常不必如此，同類中八個九九一起抽用就是了。

先就 2, 3, 4, 5 四類說，也有主張先從 5 的一類起，再 2, 3, 4 各類按照次序進行的。這是因為 5 10 15 20……等數法是我們日常用慣的，所以學生較易明白。但從 2 起，平常我也常用一雙一對

6. 同5項畫的東西成下面的樣子，並且有式子。
 $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} 4$ 排 $3 \begin{array}{c} \times \\ \times \\ \times \end{array} 2$ 排 $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} 3$ 堆，及 $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 4$ 一， $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 2$ 一，
 $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 3$ 一，等式子各在畫的下面，叫學生做。

7. 只用 $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 4$ 一， $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 5$ 一， $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 2$ 一，……等式子叫學生做，此時可以教乘法的一句話及「乘」字等，以便和加法減法區別。

以上各項教法中，如有錯誤，可以用連加法來訂正。譬如 $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 5$ 一 15 ；可以用 $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 3$ 一 1 的連加法來證驗。同時也可以口唱上面說過的順數法，3, 6, 9, 12, 15等。但是要知道這是偶然錯誤時用的。頂要緊的，是使學生一見 $3 \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} 5$ 一知道15。多方練習，當然容易純熟。

二、2的九九。一切方法可以同第一步起。先用二支棒搭成 $\angle \wedge \vee \sqsubset \sqsupset \sqcap \sqcup$ 等角，先學角的名字。再如第一步2項由角學2的九九，也可以用筷子的雙數學。3項以下同第一步。

三、四的九九。一切方法同第一步。1項學四方形， $\square \square \square$ 等。餘同。

四、五的九九。一切方法同第二步。1項學星形， \star 。餘同。

以上九九學習時，可以做應用問題，學買東西，每件4銅元買7件等。詳細辦法見下。

五、學 $5\ 1$ ， $4\ 1$ ， $3\ 1$ ， $2\ 1$ ，等。可以在復習時由 $5\ 9$ ， $5\ 8$ ，退下去到 $5\ 3$ ， $5\ 2$ ，而及於 $5\ 1$ 。仍舊當用實在觀念入手。譬如用☆；一星五邊，只有一星，所以共只5邊，便成 $5\ 1$ 的式子。又譬如買物，五銅元一張紙，買一張只有5銅元，所以成 $5\ 1$ 的算式。先由實在入手，然後再從 $5\ 3$ ， $5\ 2$ ，推下去到 $5\ 1$ 。

六、還有 $1\ 9$ ， $1\ 8$ ， $1\ 7$ ，到 $1\ 2$ 等，可以由買一個銅元的東西九件，八件，或五件，六件等實在經驗入手。再在復習時由 $5\ 9$ ， $4\ 9$ ， $3\ 9$ ， $2\ 9$ ，推到 $1\ 9$ 。也可以用 $1\ 1\ 1\ 1\ 1$ 的連加法證明 $1\ 5$ 的乘法。

七、 $1\ 1$ 的乘法，可以列在最後。一個銅元的東西只買一件，所以只要一個銅元。也可以由 $3\ 1$ ， $2\ 1$ ，或 $1\ 3$ ， $1\ 2$ ，而推到 $1\ 1$ 。先用實在經驗教。後來再推得。

八、以上共計有下列各式，可以照加法減法同樣的辦法，寫在紙片上抽練。不必一定要等以上各步學完後才抽練的。學過一類後，便可以做片子抽練的。

一紮，便成功了三紮。三堆，每堆三紮，不是九紮？九紮不就是九十？也可以用尺寸證明。三尺是三十寸。三個三尺就是九尺。九尺不就是九十寸嗎？又可以用 $30\ 30\ 30$ ，連加法來說明。仍由實在經驗裏明白 90，把他寫出來就是了。不必講什麼 0 的算法。

三、第三步是 $32\ 3$ 一的乘法。這實在是 $30\ 3$ 一 90 及 $2\ 3$ 一 6 的合併。算法：3 乘 2 得 6，寫 6 在 3 下。3 乘 3 得 9，寫 9 在左面的 3 下。答是九十六。可以說明三個 2 是 6；三個 30 是 90；90 和 6 是 96。也可以用火柴牙籤等證明：二支，三次，共六支。三紮，三次，共九紮。合起來九紮又六支不是 96 支嗎？也可以用尺寸：三個二寸是 6 寸。三個三尺是九尺。所以三個三尺二寸是九尺六寸。又可以用連加法 $32\ 32$ 一證明。以上是初教時用的。教了以後要學生習熟上述的算法。

到數目的讀法寫法過了一百到九百九十九時，可以練習以下的各步：

四、第四步 $32\ 4$ ， 128 $41\ 5$ ， 205 等的乘法。實在是第三步的變相。單位不進，十位進，答數滿百。主要點在答數的進一位。算法：4 乘 2 得 8，在 4 下寫 8；4 乘 3 得 12，在 3 下寫 2，1 進到左面百位上去。答是 128。說明是四個 2 是 8；四個 30 是 120；120 和 8 是 128。用火柴牙籤證明：二支，四次共八支。三紮，四

次，共十二紮。十二紮是一大紮又二紮，合起來共一大紮，二紮又八支，所以是128。尺寸證明是四個2寸是8寸。四個3尺是12尺。所以四個三尺二寸是12尺8寸。又可以用 $32 \ 32 \ 32 \ 32$ 一連加法證明。415，因為4乘5是20，所以4下寫進0，2到百位上，答是205。

五、第五步， $30 \ 5 \underline{\quad} 150$ ； $50 \ 4 \underline{\quad} 200$ 等。可以仿照第二步。不過這是答在百以上的。

六、第六步， $300 \ 2 \underline{\quad} 600$ 等不進位的。起先不過應用讀數寫法的觀念。三大紮，二次共六大紮，所以寫600，若在尺寸後教過丈，那末三丈有300寸；二次共6丈，即600寸。根本觀念先弄明白0的乘法擱在後面再說。也可以用連加法

$$\begin{array}{r} 300 \\ 300 \\ \hline 600 \end{array} \text{證明。}$$

七、第七步， $312 \ 2 \underline{\quad} 624$ 等不進位的。算法：2乘2得4，在2下寫4。2乘1得2，在1下寫2。2乘3得6，在3下寫6。答是624。說明等等，一切仿照第三步。這裏證明要用大紮，用丈。連加法證明也是很好的。

八、第八步， $310 \ 2 \underline{\quad} 620$ 等不進位的。可以開始教0的乘法了。算法：2乘0得0，在2下寫0。2乘1得2，在1下寫2。2乘3得6，在3下寫6。答是620，說明等等，一切可仿照第三步。這裏只有大紮，

小紮，沒有另支，所以單位0；只用丈尺不用寸，所以單位是0，連加法證明更清楚。先要用實在經驗弄明白了，然後才可以學上述關於0的乘法的算法。

九、第九步， $203\overset{3}{-}609$ 等不進位的算法，3乘3得9，在3下寫9，3乘0得0，在0下寫0，3乘

2得6，在2下寫6。答是609。說明等等，一切同上。這裏只有大紮及另支，沒有小紮，所以十位是0；有丈及寸而無尺，所以十位是0。連加法證明更好。仍先用實在經驗弄明白了，再學上述的算法。

十、第十步。09一，08一，……到01一等九九。由上面八、九兩步的練習歸納出來的。可以如

本章第一節寫在片子上和從前的混和了練習。

十一、第十一步，2110一，3010一，等用十乘的。這是由第一步推演出來的。不必當他二位法數的乘法。也不必教什麼法數0的算法。用火柴，牙籤，尺寸等證明。十個一寸，變了一尺；十個二尺，變了二丈。所以十個二尺一寸，變了二丈一尺。十個三尺是三丈；不就是三百寸嗎？也可以用連加法證明。

到數目的讀法寫法，過了一千以上，可以練習下面的各步：

十二、第十二步，
$$\begin{array}{r} 300\ 4 \\ \underline{\quad\quad} \\ 1200, \end{array}$$
 500 $\underline{\quad\quad}$ 2000 等算法；4 乘 0 得 0，在 4 下寫 0。4 乘 0 得 0，在 0 下寫 0。

4 乘 3 得 12，在 3 下寫 2，進 1 到千位上去。答是 1200。這彷彿第五步。教法同第五步。
$$\begin{array}{r} 500\ 4 \\ \underline{\quad\quad} \\ 2000 \end{array}$$
 4 乘 5 得 20，5 下寫 0 進 2 到千位，餘同。

十三、第十三步，
$$\begin{array}{r} 312\ 4 \\ \underline{\quad\quad} \\ 1248, \end{array}$$
 523 $\underline{\quad\quad}$ 1046 等算法：4 乘 2 得 8，在 4 下寫 8。4 乘 1 得 4，在 1 下寫 4。

4 乘 3 得 12，在 3 下寫 2，進 1 到千位上去。答是 1248 這彷彿第七步。教法同第七步。
$$\begin{array}{r} 523\ 2 \\ \underline{\quad\quad} \\ 2 \end{array}$$
 2 乘 5 得

10，5 下寫 0，進 1 到千位，餘同。

十四、第十四步，
$$\begin{array}{r} 420\ 4 \\ \underline{\quad\quad} \\ 1680, \end{array}$$
 420 $\underline{\quad\quad}$ 2100 等。這彷彿第八步。教法同第八步。進位到千同十三步。

十五、第十五步，
$$\begin{array}{r} 401\ 6 \\ \underline{\quad\quad} \\ 2406, \end{array}$$
 401 $\underline{\quad\quad}$ 2005 等。這彷彿第九步，教法同第九步。進位到千同十三步。

十六、由十一步，可以推演到 $\begin{array}{r} 410 \\ \underline{\quad\quad} \\ 415 \\ \underline{\quad\quad} \\ 300 \\ \underline{\quad\quad} \\ 406 \\ \underline{\quad\quad} \end{array}$ 等。方法同十一步。

十七、由第一步，第六步，可以推演到 $\begin{array}{r} 4000 \\ \underline{2} \\ 8000 \end{array}$ 等。方法同第一步，第六步。

十八、由第八步，可以推演到 $\begin{array}{r} 3200 \\ \underline{3} \\ 9600 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 2340 \\ \underline{2} \\ 4680 \end{array}$ 等。方法同第八步。

十九、由第七步，可以推演到 $\begin{array}{r} 2133 \\ \underline{3} \\ 6399 \end{array}$ 等。方法用第七步。

二十、由第十二步，可以推演到 $\begin{array}{r} 4000 \\ \underline{3} \\ 12000 \end{array}$ ，由十三步，可以推演到 $\begin{array}{r} 5423 \\ \underline{2} \\ 10846 \end{array}$ ，由十四步，可以推演到

$\begin{array}{r} 4200 \\ \underline{4} \\ 16800 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 4230 \\ \underline{3} \\ 12690 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 5100 \\ \underline{4} \\ 20400 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 5240 \\ \underline{2} \\ 10480 \end{array}$ ，由十五步，可以推演到 $\begin{array}{r} 3020 \\ \underline{4} \\ 12080 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 4003 \\ \underline{3} \\ 12009 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 4010 \\ \underline{5} \\ 20050 \end{array}$ ， $\begin{array}{r} 5002 \\ \underline{4} \\ 20008 \end{array}$ 等。這都在萬以

第三節 六以上的九九

6個，7個，8個，9個的順數逆數已見本章的開端。仿照5個以下的方法做去，不必多說。

一、九九仍舊分類教的好。6的九九，可以用六角紙鶴，六人一桌飯，每星期上課六天等入手。7的九九，可以用一星期七天，七星旗等入手。8的九九，可以用蟹的脚，八卦，棋盤，每路八格等入手。9

的九九，可以用九宮格，九連環等入手。

二、一切步驟，看本章第一節第一步，3的九九各項，念到後來，1, 2, 3, 4, 等項進行愈快，用式子愈早。此外，練習仍要多。第二節各式的應用練習仍應做。

三、各九九，先用2到9乘，如 $6 \frac{2}{1}$ ，到 $6 \frac{9}{1}$ ； $7 \frac{2}{1}$ ，到 $7 \frac{9}{1}$ ； $8 \frac{2}{1}$ ，到 $8 \frac{9}{1}$ ； $9 \frac{2}{1}$ ，到 $9 \frac{9}{1}$ ；等。後來也要同本章第一節第五步一樣，教學 $6 \frac{1}{1}$ ， $7 \frac{1}{1}$ ， $8 \frac{1}{1}$ ， $9 \frac{1}{1}$ ；並且也要同本章第二節第一步一樣，教學 $6 \frac{10}{1}$ ， $7 \frac{10}{1}$ ， $8 \frac{10}{1}$ ， $9 \frac{10}{1}$ ；等。

四、各九九宜有聯絡比較的復習，把 $2 \frac{9}{1}$ ， $9 \frac{2}{1}$ ； $3 \frac{8}{1}$ ， $8 \frac{3}{1}$ ； $7 \frac{8}{1}$ ， $8 \frac{7}{1}$ ；組織在一起。這方法要在習熟之後，不可太早。

五、又可以把結果同的九九，組織在一起復習。像 $3 \frac{6}{1}$ ， $6 \frac{3}{1}$ ； $2 \frac{9}{1}$ ， $9 \frac{2}{1}$ ；等組織在一起。等。也要在練習純熟之後，整理復習，可以使學生融會貫通。或者可以叫學生做一張表。

六、根據本章第二節，第一步，第五步，第六步，第八步，第九步，第十步，第十一步，……等經驗，由第二節第十步 $0 \frac{9}{1}$ ，到 $0 \frac{1}{1}$ ；總結出 $9 \frac{0}{1}$ ，到 $1 \frac{0}{1}$ ，等九九。到此，乘法基本九九完成了。如下表。

一、第一步是 $24\overset{3}{1}$ 、 $25\overset{2}{1}$ 等。這是從第二節第三步變出來的。主要困難點在於進位。加法的進位，一進便可以 and 十位第一數合併，併後只要暗記結果，繼續加去。乘法卻不然，進的 1 或 2 以上，要暗中記好，等十位乘好以後再行加上去。這個暗記的習慣要養成，千萬不可以教學生把暗記的進位的 1 或 2 以上用數目字或點子記出。習慣了記出便依賴成性，將來做乘法起來非常遲鈍，非常受累。這是算法。至於說明證明等，當然在算法之先。要實在經驗明白以後，才可以學算的方法。說明證明的方法同第二節第三步。算法：3 乘 4 得 12，在 3 下寫 2，記進 1。3 乘 2 得 6，加 1 得 7，在 2 下寫 7。答 72。25 $\overset{2}{1}$ 乘 5 得 10，在 2 下寫 0，記進 1。2 乘 2 得 4，加 1 得 5，在 2 下寫 5。答 50。

二、第二步是 $46\overset{6}{1}$ 、 $55\overset{4}{1}$ 等。這是從第二節第四步變出來的。主要困難點同一步。十位乘後也有進位，這是第二節第四步學過的了。說明證明等仍在算法前，同第二節第四步。算法：6 乘 6 得 36，在 6 下寫 6 進 3。6 乘 4 得 24，加 3，得 27，在 4 下寫 7，2 進到百位寫出。

三、第三步是 $37\overset{3}{1}$ 、 $111\overset{17}{6}$ 、 102 等。十位乘後本來不必進位的。因單位進上來的加了起來，所以要進位了。這一點不很困難。第一步第二步練習純熟的，極容易明白。教法仍同第二節第三四步。

四、第四步是 $\begin{array}{r} 349 \\ \underline{306} \\ 469 \\ \underline{414} \end{array}$ 等。十位本來只進 2 或 3，到百位，因 3 單位進上來的加了起來，十位進百位時，2 要成 3，3 要成 4。這和第三步彷彿。方法可以同第三步。

一位乘二位的乘法，各種式樣可以完全了。以下是一位乘三位的。

五、第五步，是 $\begin{array}{r} 3143 \\ \underline{942} \\ 1125 \\ \underline{560} \end{array}$ 等。這是單位要進位的。困難點同本節第一步。又如 $\begin{array}{r} 2373 \\ \underline{711} \end{array}$ ，

117 $\begin{array}{r} 6 \\ \underline{702} \end{array}$ 等，十位本不必進位，因有了第三步的關係；所以十位也進到百位了。

六、第六步是 $\begin{array}{r} 2423 \\ \underline{726} \\ 1415 \\ \underline{705} \end{array}$ 等。這種進位在十位到百位。困難點也同本節第一步，又如

372 $\begin{array}{r} 3 \\ \underline{1116} \\ 1716 \\ \underline{1026} \end{array}$ 等，因了第三步的關係，所以百位進到千位。

七、第七步是 $\begin{array}{r} 1466 \\ \underline{876} \\ 1544 \\ \underline{616} \end{array}$ 等。這種進位，單位到十位，十位到百位都有。困難點同本節第

二步。又如 $\begin{array}{r} 3429 \\ \underline{3078} \\ 3743 \\ \underline{1122} \\ 1726 \\ \underline{1032} \end{array}$ 等，因有了第三

步的關係，所以百位要進到千位上了。

八、第八步是 $\begin{array}{r} 8128 \\ \underline{6496} \\ 8125 \\ \underline{4060} \end{array}$ 等，單位百位都有進位而十位沒有進位的。困難點同本節第

一步及第二節第十三步。又如

$$\begin{array}{r} 837 \\ \underline{3} \\ 2511, \\ 217 \\ \underline{6} \\ 1302 \end{array}$$

等，十位因有了第三步的關係而進到百位。

九、第九步是

$$\begin{array}{r} 731 \\ \underline{6} \\ 4386, \\ 841 \\ \underline{5} \\ 4205 \end{array}$$

等，十位百位有進位而單位不進的。困難點同第二步及第二

節第十三步。又

$$\begin{array}{r} 341 \\ \underline{9} \\ 3069, \\ 461 \\ \underline{9} \\ 4149 \end{array}$$

等又含了第四步的關係。

十、第十步是

$$\begin{array}{r} 732 \\ \underline{6} \\ 4392 \\ 742 \\ \underline{5} \\ 3710, \end{array}$$

等各位都有進位。困難點同第二步及第二節第八步。又如

548

$$\begin{array}{r} 7 \\ \underline{7} \\ 3836 \end{array}$$

又含了第四步的關係。若

$$\begin{array}{r} 748 \\ \underline{7} \\ 5236 \end{array}$$

卻含了二層第四步的關係。

十一、第十一步是

$$\begin{array}{r} 240 \\ \underline{3} \\ 720, \\ 250 \\ \underline{2} \\ 500 \end{array}$$

等。似第一步而未位有0。困難點同第一步及第二節第

八步。又如

$$\begin{array}{r} 370 \\ \underline{3} \\ 1110, \\ 170 \\ \underline{6} \\ 1020 \end{array}$$

等，又含了第三步的關係。

十二、第十二步是

$$\begin{array}{r} 460 \\ \underline{6} \\ 2760, \\ 550 \\ \underline{4} \\ 2200 \end{array}$$

等。似第二步而未位有0。困難點同第一步及第二節第

八步。又如
$$\begin{array}{r} 3409 \\ \hline 3060, \\ 4609 \\ \hline 4140 \end{array}$$
 等，又含了第四步的關係。

十三、第十三步是
$$\begin{array}{r} 2063 \\ \hline 618, \\ 1045 \\ \hline 520 \end{array}$$
 等。這種有一個新的困難點，就是十位本來是 0，因單位進上了來，0 不見了。可以用連加法，丈尺寸等先證明，然後再學算法：3 乘 6 得 18，在 3 下寫 8 記進 1。3 乘 0 得 0，加 1 得 1，在 0 下寫 1。3 乘 2 得 6，在 2 下寫 6。答 618。
$$\begin{array}{r} 1045 \\ \hline 520 \end{array}$$
 5 乘 4 得 20，在 5 下寫 0，記進 2。5 乘 0 得 0，加 2 得 2，在 0 下寫 2。5 乘 1 得 5，在 1 下寫 5。答 520。

十四、第十四步是
$$\begin{array}{r} 6048 \\ \hline 4832, \\ 5058 \\ \hline 4040 \end{array}$$
 等。這種困難點同十三步及第二節的十三步。

十五、第十五步是法一位乘四位五位的。不過是以上各步的合併罷了。

以上各步均宜先從實在經驗入手，然後再教計算方法。第二節裏的說明證明方法仍當先用。算法是心裏進行的次序，不是嘴裏說的。說的要簡單。譬如第十步，
$$\begin{array}{r} 7425 \\ \hline 520 \end{array}$$
 算法是：5 乘 2 得 10 在 5 下寫 0，進 1。5 乘 4 得 20，加 1 得 21，在 4 下寫 1，進 2。5 乘 7 是 35，加 2 得 37，在 7 下寫 7，進 3 到千位，寫 3。答數 10。口念的是：『10』寫 0，『1』寫 1，『20』寫 2，『21』寫 1，『2』寫 2，『35』寫 5，『37』寫 7，『3』寫 3，『三千』

『七百十』

第五節 十的倍數乘各數。

第二節第一步是 $4 \overline{10}$ 等；第十一步是 $21 \overline{10}$ ， $30 \overline{10}$ 等；第十六步是 $410 \overline{10}$ ， $415 \overline{10}$ ， $300 \overline{10}$ ，

$406 \overline{10}$ 等；由此可以教20到90各數乘35，80等兩位數及400，808，329等三位數。因為第三節第六步已經

學過0乘各數的九九，所以70乘585時， $585 \overline{70}$ ，先用0乘，寫作 $585 \overline{70} 0$ 。然後依照第四節第十步乘；

寫如 $585 \overline{70}$ 。70乘580時，先用0乘，寫作 $580 \overline{70} 0$ 。然後依照第四節第十二步乘，寫如

$580 \overline{70}$ 。70乘508時，先用0乘，寫作 $508 \overline{70} 0$ 。然後依照第四節第十四步乘寫如 $508 \overline{70}$ ，

40600 。70乘500時，先用0乘，寫作 $500 \overline{70} 0$ ，然後依照第二節第十二步乘，寫如 $500 \overline{70}$ ，

35000 。

上面的寫法一律作 $30 \overline{40}$ ， $35 \overline{60}$ ， $400 \overline{60}$ ， $420 \overline{80}$ ， $456 \overline{90}$ ， $506 \overline{70}$ 等，總是單位上齊頭的。併且

答的單位也是齊頭的寫，如

$$\begin{array}{r} 30 \\ \hline 1200, \\ 30 \\ \hline 1200, \\ 35 \\ \hline 2100, \\ 35 \\ \hline 2100, \\ 400 \\ \hline 24000, \\ 400 \\ \hline 24000, \\ 420 \\ \hline 33600, \\ 420 \\ \hline 33600, \\ 456 \\ \hline 41040, \\ 456 \\ \hline 35420, \\ 41040, \\ 506 \\ \hline 35420. \end{array}$$

舊來有種

種如下的寫法：

$$\begin{array}{r} 30 \\ \hline 40 \\ \hline 1200, \\ 35 \\ \hline 60 \\ \hline 2100, \\ 400 \\ \hline 60 \\ \hline 24000, \\ 420 \\ \hline 80 \\ \hline 33600 \\ 456 \\ \hline 90 \\ \hline 41040, \\ 506 \\ \hline 70 \\ \hline 35420 \end{array}$$

等，有 0 時忽移向右，忽

移向左，位子不確定，弄得學生混亂。一律單位齊頭寫，可以認明位子，按步進行。所以答裏的 0 不會弄錯。

再推而廣之，可以數學用 200, 100 到 900 乘兩位數及三位數，譬如

$$\begin{array}{r} 357 \\ \hline 600 \\ \hline 357 \\ \hline 214200. \end{array}$$

先用 0 乘，寫如

$$\begin{array}{r} 357 \\ \hline 600 \\ \hline 357 \\ \hline 214200. \end{array}$$

時，先兩次

再用法數十位的 0 乘，寫如

$$\begin{array}{r} 357 \\ \hline 600 \\ \hline 357 \\ \hline 214200. \end{array}$$

然後依照第四節第十二步，寫如

$$\begin{array}{r} 357 \\ \hline 600 \\ \hline 357 \\ \hline 214200. \end{array}$$

時，先兩次

用 0 乘，寫如

$$\begin{array}{r} 307 \\ \hline 600 \\ \hline 307 \\ \hline 184200. \end{array}$$

然後依照第四節第十四步乘，寫如

$$\begin{array}{r} 307 \\ \hline 600 \\ \hline 307 \\ \hline 184200. \end{array}$$

時，先兩次用 0 乘，寫如

370

$$\begin{array}{r} 370 \\ \hline 600 \\ \hline 370 \\ \hline 222000. \end{array}$$

然後依照第四節第十二步乘，寫如

$$\begin{array}{r} 370 \\ \hline 600 \\ \hline 370 \\ \hline 222000. \end{array}$$

時，先兩次用 0 乘，寫如

$$\begin{array}{r} 300 \\ \hline 600 \\ \hline 300 \\ \hline 00. \end{array}$$

然

後依照第二節第十二步乘寫如

$$\begin{array}{r} 300 \\ 600 \\ \hline 180000. \end{array}$$

就是

$$\begin{array}{r} 30 \\ 500 \\ \hline 15000, \end{array}$$

單位仍要齊頭。決決不寫作

$$\begin{array}{r} 357 \\ 600 \\ \hline 214200, \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 307 \\ 600 \\ \hline 184200, \\ 370 \\ 600 \\ \hline 222000, \\ 300 \\ 600 \\ \hline 180000, \\ 30 \\ 500 \\ \hline 15000 \text{ 等。} \end{array}$$

又以上各種，不必當做二位法數的乘法論。算他一種特殊的方法。若作兩位法數的乘法論，又要如

$$\begin{array}{r} 464 \\ 30 \\ \hline 000 \\ 1392 \\ \hline 13920 \end{array}$$

等，用迂遠的方法了。

第六節 法二位的乘法

法二位，被乘數二位或三位沒有什麼關係，算法是一樣的。困難點不在法數單位的乘。因為這是第四節第二節裏已經學過了。困難的主要在於法數十位的乘，以及二次的部份積合併起來。譬如 2686 先照第四節第二步的方法，266 是毫無困難。其次便是繼續下去，十位的 8 乘 26，8 乘 6 得 48 在 28 下寫 8。進 4。8 乘 2 得 16，加 4 得 20，在 1 下寫 0，進 2 到左一位上去，寫 2。如此

便寫成 $\begin{array}{r} 2686 \\ \hline 156 \end{array}$ 兩次乘好，再把 $\begin{array}{r} 156 \\ 208 \\ \hline 156 \\ 208 \end{array}$ 加起來。8 右空位，當他有個 0 在。寫成 $\begin{array}{r} 2686 \\ \hline 156 \\ 208 \\ \hline 2236 \end{array}$

答二千二百三十六。這是算法。證明：6 乘 26，照第四節第二步算，得 156。80 乘 26，照第五節算得 2080。二

次結果合併起來，共得 $\begin{array}{r} 2236 \end{array}$ 。可見算法無誤。其實，十位 8 乘時 208 所得寫在 2 8 5 下，就是右方

$\begin{array}{r} 66 \\ \hline 6 \end{array}$ 下省去一個 0，這一層關係學生不難了解。了解是容易的。要平常計算時十位乘時寫在十位之下，並且兩次乘好後把部份積加起來，（下面一個部份積右方單位上缺了一個 0）成功習慣，是要經過練習才得純熟的。練習時注意做法的次序，及寫答的地位。

被乘數三位的例子，如 $\begin{array}{r} 52785 \\ \hline 52785 \\ 2635 \end{array}$ 。先用 5 乘 527 照第四節的方法。寫作 $\begin{array}{r} 52785 \\ \hline 2635 \end{array}$ 。再用 8 乘 527，得 4216。

只要第一數 6 寫在法數 8 的直下，以後進位等等，仍和第四節的算法一樣。寫成 $\begin{array}{r} 52785 \\ \hline 2635 \\ 4216 \\ \hline 2236 \end{array}$ 。兩次

部份積加起來。寫如 $\begin{array}{r} 52785 \\ \hline 2635 \\ 4216 \\ \hline 44795 \end{array}$ ，答是四萬四千七百九十五。

學生算時，仍舊不許把進位的數目記出，一定要暗記。嘴裏又不許念幾乘幾或幾加幾等。仍照第四節末了的念法。能鼓勵學生心裏算。手裏寫答，不必念的，自然更好。

第七節 法三位的乘法

法數三位的乘法其實不過多乘一次，和法數二位的乘法，沒有多大的區別。新的困難點，只不過不要忘記第三次的乘，和第三次乘時，答的第一個數目要寫在法數百位的直下。例如，

用 8 乘 $\begin{array}{r} 467 \\ \times 258 \\ \hline \end{array}$ ，照第四節的算法，寫如 $\begin{array}{r} 467 \\ \times 258 \\ \hline 3736 \\ 2335 \\ \hline \end{array}$ 。其次用 5 乘 $\begin{array}{r} 467 \\ \times 258 \\ \hline 2335 \\ \hline \end{array}$ ，照第六節的方法，答第一個數目 5 寫在

法數 5 的直下，成 $\begin{array}{r} 467 \\ \times 258 \\ \hline 2335 \\ \hline \end{array}$ 。其次，用 2 乘 $\begin{array}{r} 467 \\ \times 258 \\ \hline 934 \\ \hline \end{array}$ ，算法也和第四節的一樣，只要把答第一個數目 4，寫

在法數 2 的直下，成 $\begin{array}{r} 467 \\ \times 258 \\ \hline 934 \\ \hline \end{array}$ 。最後加起來，留心右方空的地位，沒有 0 的，當他有 0 就是了。寫

出來，便成 $\begin{array}{r} 467 \\ \times 258 \\ \hline 2335 \\ 934 \\ \hline 120486 \end{array}$ 就是。答十二萬零四百八十六。證明同第六節。8 乘 $\begin{array}{r} 467 \\ \times 50 \\ \hline 23350 \end{array}$ ；

200 乘 467 得 93400 加起來也得 120486, 算法無誤。其實法數百位 2 就是 200; 乘得的 934, 就是 93400; 右方十位單位省

卻兩個 0 罷了。其他同第六節。

若逢法末位是 0 的, 那末不過是第六節與第五節二者的結合罷了。例如, $\begin{array}{r} 645 \\ \underline{870} \end{array}$ 先照第五節方法, 用 70 乘 645, 寫作 $\begin{array}{r} 645 \\ \underline{870} \end{array}$ 。再照第六節方法用 8 乘 645, 答第一個 0 字寫在法數 8 的直下, 成功,

$\begin{array}{r} 645 \\ \underline{870} \\ 45150 \\ \underline{5160} \end{array}$ 再照第六節方法加起來, 成 $\begin{array}{r} 645 \\ \underline{870} \\ 45150 \\ \underline{5160} \end{array}$ 答五十六萬一千一百五十。證明: 70 乘 645 是

$\begin{array}{r} 45150; \\ 800 \text{ 乘} \\ 645 \text{ 是} \\ \underline{516000;} \end{array}$ 併起來便是 561150, 算法無誤。其實法數百位 8 即 800; 乘得 5160, 就是 516000; 右方十位單位省去兩個 0 罷了, 其他與第六節同。

若逢法十位是 0, 那末有些不同了。這可以算是一種新花樣。例如, $\begin{array}{r} 645 \\ \underline{504} \end{array}$ 先照第四節方法用

4 乘 645, 寫作 $\begin{array}{r} 645 \\ \times 4 \\ \hline 2580 \end{array}$ 。這是沒有什麼新奇的。其次十位的 0 便是新的困難點。我們可以由第五節

推演出來, 知道 0 乘 645 時, 只要在法的 0 的直下寫一個 0, 記出空位就是了。所以寫成 $\begin{array}{r} 645 \\ \times 504 \\ \hline 2580 \quad 0 \end{array}$ 。

其次便是百位 5 乘 645, 那是上面已經學過的了。只要把答的第一個數目字 5 寫在法數 5 的直下,

便成 $\begin{array}{r} 645 \\ \times 504 \\ \hline 2580 \\ 32250 \\ \hline 325080 \end{array}$ 。末了加起來是和上面學過的一樣。寫如: $\begin{array}{r} 645 \\ \times 504 \\ \hline 2580 \\ 32250 \\ \hline 325080 \end{array}$ 答三十二萬五千另八十。

證明: 4 乘 645 是 2580; 500 乘 645 是 322500; 併起來便是 325080, 算法無誤。只要注意十位 0 下, 寫一個 0, 別的便沒有什麼大困難了。

有時要遇到 $\begin{array}{r} 78 \\ \times 852 \\ \hline 78 \\ 850 \\ 805 \\ \hline \end{array}$, 等好像被乘數比乘數少了一位, 表面上看起來似乎有些困難。其實不必慌的, 一步一步的算法還是一樣的。被乘數少一位, 便少乘一位是了。寫答的地位還是不變的。只要多練習, 不必特別多說明的。說明沒有什麼新的可說, 不過是和上面說過的一樣。

算時進位要暗記。又念時仍照第六節末了的一樣。

乘法快好結束了。結果還有個檢答法要說一說。乘與除往往聯絡了教的。所以乘除互用，便是一種檢答。乘法，用除法檢答，除法用乘法檢答。不過在沒有學除法時，乘法的檢答只好用連加法了。凡第四節以前的均可用連加法檢答。已經在各方方法證明說明裏說過，這裏不贅。學了法數兩位以上的乘法，一定要在未學法數兩位以上除法的以前先行檢答。那末，可以把乘數與被乘數上下互易再做一次乘法。若兩次答數同的，便是計算不錯的證據。譬如 $37 \overline{64}$ ，可用 $64 \overline{37}$ 檢答， $508 \overline{80}$ ，可用 $80 \overline{508}$ 檢答； $76 \overline{809}$ ，可用 $809 \overline{76}$ 檢答。檢答宜注重。一方面養成對於計算負責的好習慣，一方面又多一次的變化練習。這是一舉兩得的方法。

第五章 除法

教學除法，至早總要在第四章第一節五以下乘法九九習熟，並且前章第二節的應用練習略有經驗以後。乘與除本來是相反的。若能互相聯絡了教，當然可以收互相補足的效。但是學生學習乘法沒有相當習慣時，教除法過早了，反而使學生容易混亂。

第一節 五以下的九九

一、已經在乘九九學過以後，除九九不必一定要仿照乘九九的辦法，分別 2, 3, 4, 5 各類進行；儘可把已學過的五以下的九九混和了學，九九是下面的三十六個。

$5 \overline{)45}$	$5 \overline{)40}$	$5 \overline{)35}$	$5 \overline{)30}$	$5 \overline{)25}$	$5 \overline{)20}$	$5 \overline{)15}$	$5 \overline{)10}$	$5 \overline{)5}$
$4 \overline{)36}$	$4 \overline{)32}$	$4 \overline{)28}$	$4 \overline{)24}$	$4 \overline{)20}$	$4 \overline{)16}$	$4 \overline{)12}$	$4 \overline{)8}$	$4 \overline{)4}$
$3 \overline{)27}$	$3 \overline{)24}$	$3 \overline{)21}$	$3 \overline{)18}$	$3 \overline{)15}$	$3 \overline{)12}$	$3 \overline{)9}$	$3 \overline{)6}$	$3 \overline{)3}$

$\frac{2}{18}$ $\frac{2}{16}$ $\frac{2}{14}$ $\frac{2}{12}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{2}{2}$

教學時不必照上面的次序排列，每次抽取十個左右，照下列的步驟教。第二次再在未抽用的裏抽取若干教，更和已學的混和練習。每次加若干新的，要好好的教。一到練習，便把學過的混和進去。計三十六個，大約分做三四次，可以完結。每次的步驟，大略如下：

1. 要學除的觀念。用以前用過的東西及空匣九隻。譬如教³⁾ $\frac{18}{9}$ 的九九，使用三隻空匣，一個東西，叫學生想個方法分裝三隻空匣內，要每匣裏的東西一樣多少。先由學生想出種種方法來。頂笨的方法，就是拿了18個東西，一個一個的輪流放在匣子裏。結末看三隻匣子裏各有多少。頂便捷的方法，就是利用乘法九九 $3 \times 6 = 18$ ，算出6來。然後再每匣裏放六個東西，看是否恰好。一個九九如此，教過以後，再用別個九九同樣的教。教了十多個九九以後，告一段落。
2. 不限定一種東西，可以用各式各樣的東西，像銅元，銀元，火柴，棒，筷等……等等，照上法學習除的觀念。同時在黑板上寫示式子。18個東西，寫18。分放三隻匣子，或分作三堆，寫³⁾成18。每³⁾

匣各是6個，寫6，成 $\overline{6}$ 18。
 3) $\overline{6}$ 18。6要寫在8的上面。

3. 不用實在東西，不過嘴說出魚，人，球，橘子……等東西，寫示式子，練習。可以叫學生寫答。或者抄了式子，再寫答。

4. 只寫示式子，叫學生做。此時可以教除法的一句話，並且教「除」字，以便和加減乘區別。

二、上面三十六個九九，每次用十個左右教。練習時新舊混和。只學等分的除的觀念，算是第一步。以後仍用上面的三十六個九九，仍用上面的四項次序，再教包含除的觀念，也叫比的除的觀念。譬如1項，用匣子，叫學生想18個東西，每匣三個，可以分裝幾匣。起先仍舊叫學生自己想。再用頂笨的方法，每三個放一匣，看放滿幾匣時東西放完。然後再看共有幾匣放了東西。再教學生利用乘九的 $\overline{3}$ 6—18，算出 $\overline{3}$ 18是6來，便可以預先知道要放六隻匣子。再來實驗一回，恰够放完。仍用十多個九九如此教。2項也可以用各種東西，同方法做。3項也可以口述東西，不用實物。4項也可以只寫式子練習。三十六個九九仍要經過三四次，每次分四項進行，一一教完。這算第二步。

三、第三步是復習，並且把兩種除的觀念比較。譬如18個東西，分三匣，每匣六個。又如18個東西，每匣三個，可放六匣。照2項用種種東西比較。照3項不用實物而口述東西比較。這樣可以使學生明白同是 $\overline{18}$ 有二種的意義。同是利用乘九九算出6來，也可以有兩種的意義。

四、第四步，是由第三步推演到 $\overline{1)9}$ ， $\overline{1)8}$ ， $\overline{1)7}$ ， $\overline{1)6}$ ， $\overline{1)5}$ ， $\overline{1)4}$ ， $\overline{1)3}$ ， $\overline{1)2}$ ，最後學 $\overline{1)1}$ 。仍舊可以用上述1, 2等項方法，來用實物證明。以後練習，便可以把以上四十五個式子，寫在片子上抽示了，叫學生迅速答出來，或者迅速寫出答數來。

第二節 應用練習

應用練習，同時也學些除法的格式。分列步驟如下：

- 一、第一步是 $\overline{4)40}$ ， $\overline{5)50}$ 等，就是第四章第二節第一步的回原。這也是九九的推演，教法可以同第一節。不必講位子，也不要講4除0，5除0等算法。應當由實在經驗明白四十分四起，每起是十；又四十，每起四，可以平分作十起等。又 $\overline{10)40}$ ， $\overline{10)50}$ 等不過是寫法讀法的一種。

二、第二步是 $\overline{3)90}$ 等，就是第四章第二節第二步的回原。這可以從 $\overline{1)9}$ 九九推演出來。教時可

以用尺寸，十支一紮的火柴牙籤等說明。一切用實在經驗求結果，仍不必講 0 的算法。

三、第三步是 $\overline{3)96}$ 等，就是第四章第二節第三步的回原。仍可用尺寸；十支紮及另支的火柴牙

籤等說明。又照上面第二步 $\overline{3)90}$ 得 30；照九九 $\overline{3)6}$ 得 2。所以 $\overline{3)96}$ 的答數便是 30 又 2，即 32。算法：

除 9 得 3，在 9 上寫 3。3 除 6，得 2，在 6 上寫 2。答是三十二。

四、第四步是 $\overline{4)120}$ 等，就是第四章第二節第五步的回原。仍用第二步的教法。

五、第五步是 $\overline{4)208}$ 等，就是第四章第二節第四步的回原。仍應先用火柴尺寸等說明。又照

上面第四步， $\overline{4)120}$ 得 30；照九九 $\overline{4)8}$ 得 2；所以 $\overline{4)128}$ 答是 30 又 2，即 32。算法： $\overline{4)12}$ 得 3，寫 3

在 2 上。 $\overline{4)8}$ 得 2，寫 2 在 8 上。答是三十二。這和第三步彷彿，不過起先被除數要看兩位。

六、第六步是 $\overline{2)600}$ 等，就是第四章第二節第六步的回原。可以應用寫數讀數的觀念，再用丈尺

寸，火柴牙籤等實在經驗教。不必說明 0 的除法。

七、第七步是 $\overline{2)624}$ 等，就是第四章第二節第七步的回原。仍應先用丈尺寸，火柴牙籤等說明。也

可以照第六步 $\overline{2)600}$ 得 300；照第二步 $\overline{2)20}$ 得 10；照九九 2 除 4 得 2。所以 $\overline{2)624}$ ，答是 300，10，又 2，即三百十二。算法： $\overline{2)624}$ 得 3，在 6 上寫 3； $\overline{2)20}$ 得 1，在 2 上寫 1； $\overline{2)4}$ 得 2，在 4 上寫 2。答是三百十二。

八、第八步是 $\overline{3)960}$ 等，就是第四章第二節第八步的回原。仍先用丈尺寸，火柴牙籤等說明。又照

第六步 $\overline{3)900}$ 得 300；照第二步 $\overline{3)60}$ 得 20。所以 $\overline{3)960}$ ，答應是 300 又 20，即 320。算法： $\overline{3)9}$ 得 3，在 9 上寫 3； $\overline{3)6}$ 得 2，在 6 上寫 2； $\overline{3)0}$ 得 0，在 0 上寫 0。答共三百二十。

九、第九步是 $\overline{2)608}$ 等，就是第四章第二節第九步的回原。仍先用丈尺寸，火柴牙籤等說明。又照

第六步 2 除 600 得 300；以九九 2 除 8 得 4；所以 2 除 608 答應是 300 又 4，即 304。算法：2 除 6，得 3，在 6 上寫 3，2 除 0，得 0，在 0 上寫 0；2 除 8，得 4，在 8 上寫 4；答共三百另四。

十、第十步，由上面二步，學了 0 的除法，歸納出 1) 0，2) 0，……到 9) 0 等的九九。可以照第一節

第一步第 4 項，寫在片子上，和以前的九九混和了練習。

十一、第十一步是 4) 1200，5) 2000 等，就是第四章第二節第十二步的回原。教法同第四步彷彿的算

法：4 除 12，得 3，在 2 上寫 3；4 除 0，得 0，在 0 上寫 0；又 4 除 0，得 0，在 0 上寫 0；答共三百。實在和第六步一樣的，不過起先要看了兩位才好除。

十二、第十二步是 4) 1284，2) 1046 等，就是第四章第二節第十三步的回原。算法和第七步彷彿。開始

先看了兩位除，又和第五步彷彿。

十三、第十三步是

$$\begin{array}{r} \overline{4)1680,} \\ 5)2100 \end{array}$$

等，就是第四章第二節第十四步的回原。算法和第八步彷彿。開始

先看了二位除，又和第四步彷彿。

十四、第十四步是

$$\begin{array}{r} \overline{6)2406,} \\ 5)2005 \end{array}$$

等，就是第四章第二節第十五步的回原。算法和第九步彷彿。開始

先看了兩位除，又彷彿第四步及第五步。

十五、第十五步：由第六步可以推演出

$$\begin{array}{r} \overline{2)8000} \end{array}$$

等來；由第七步可以推演出

$$\begin{array}{r} \overline{3)6399} \end{array}$$

來；由第八步可以

推演

$$\begin{array}{r} \overline{3)9600,} \\ \overline{2)4680,} \end{array}$$

等來。這都是第四章第二節第十七、十八、十九各步的回原。

十六、第十六步：由十一步可以推演出

$$\begin{array}{r} \overline{3)12000} \end{array}$$

來；由十二步可以推演出

$$\begin{array}{r} \overline{2)10846} \end{array}$$

來；由第十三步可以

推演出

$$4) \overline{16800},$$

$$3) \overline{12960},$$

$$4) \overline{20400},$$

$$2) \overline{10480},$$

等來；由十四步可以推演出

$$4) \overline{12080},$$

$$3) \overline{12009},$$

$$5) \overline{20050},$$

$$4) \overline{20008}$$

等來。這是第四章第二

節第二十步的回原。

除法的檢答，當然可以用乘法。叫學生做慣檢答，可以養成自己負責的好習慣，同時也是復習乘法。 $\overline{96}$ ，得32。檢答時 32×96 。無誤。餘類推。

第三節 6 以上的九九

6, 7, 8, 9, 各九九的教法仍舊和第一節所說的一樣，也要分四項依次進行。第一步是等分的，第二步是包含的。第三步是復習比較。用的東西等可以照舊。抽片子練習也照舊。九九如下列：

$$6) \overline{54}$$

$$6) \overline{48}$$

$$6) \overline{42}$$

$$6) \overline{36}$$

$$6) \overline{30}$$

$$6) \overline{24}$$

$$6) \overline{18}$$

$$6) \overline{12}$$

$$6) \overline{6}$$

$$7) \overline{63}$$

$$7) \overline{56}$$

$$7) \overline{49}$$

$$7) \overline{42}$$

$$7) \overline{35}$$

$$7) \overline{28}$$

$$7) \overline{21}$$

$$7) \overline{14}$$

$$7) \overline{7}$$

$$8) \overline{72}$$

$$8) \overline{64}$$

$$8) \overline{56}$$

$$8) \overline{48}$$

$$8) \overline{40}$$

$$8) \overline{32}$$

$$8) \overline{24}$$

$$8) \overline{16}$$

$$8) \overline{8}$$

$9\overline{)81}$ $9\overline{)72}$ $9\overline{)63}$ $9\overline{)54}$ $9\overline{)45}$ $9\overline{)36}$ $9\overline{)27}$ $9\overline{)18}$ $9\overline{)9}$

練習純熟以後，再總合第一節第四步裏1的九九，第二節第一步裏關於10的九九；以及第二節第十步裏0的九九等比較總結，整理出一個系統來。如下表：

$1\overline{)0}$	$1\overline{)1}$	$1\overline{)2}$	$1\overline{)3}$	$1\overline{)4}$	$1\overline{)5}$	$1\overline{)6}$	$1\overline{)7}$	$1\overline{)8}$	$1\overline{)9}$	$1\overline{)10}$
$2\overline{)0}$	$2\overline{)2}$	$2\overline{)4}$	$2\overline{)6}$	$2\overline{)8}$	$2\overline{)10}$	$2\overline{)12}$	$2\overline{)14}$	$2\overline{)16}$	$2\overline{)18}$	$2\overline{)20}$
$3\overline{)0}$	$3\overline{)3}$	$3\overline{)6}$	$3\overline{)9}$	$3\overline{)12}$	$3\overline{)15}$	$3\overline{)18}$	$3\overline{)21}$	$3\overline{)24}$	$3\overline{)27}$	$3\overline{)30}$
$4\overline{)0}$	$4\overline{)4}$	$4\overline{)8}$	$4\overline{)12}$	$4\overline{)16}$	$4\overline{)20}$	$4\overline{)24}$	$4\overline{)28}$	$4\overline{)32}$	$4\overline{)36}$	$4\overline{)40}$
$5\overline{)0}$	$5\overline{)5}$	$5\overline{)10}$	$5\overline{)15}$	$5\overline{)20}$	$5\overline{)25}$	$5\overline{)30}$	$5\overline{)35}$	$5\overline{)40}$	$5\overline{)45}$	$5\overline{)50}$
$6\overline{)0}$	$6\overline{)6}$	$6\overline{)12}$	$6\overline{)18}$	$6\overline{)24}$	$6\overline{)30}$	$6\overline{)36}$	$6\overline{)42}$	$6\overline{)48}$	$6\overline{)54}$	$6\overline{)60}$
$7\overline{)0}$	$7\overline{)7}$	$7\overline{)14}$	$7\overline{)21}$	$7\overline{)28}$	$7\overline{)35}$	$7\overline{)42}$	$7\overline{)49}$	$7\overline{)56}$	$7\overline{)63}$	$7\overline{)70}$
$8\overline{)0}$	$8\overline{)8}$	$8\overline{)16}$	$8\overline{)24}$	$8\overline{)32}$	$8\overline{)40}$	$8\overline{)48}$	$8\overline{)56}$	$8\overline{)64}$	$8\overline{)72}$	$8\overline{)80}$
$9\overline{)0}$	$9\overline{)9}$	$9\overline{)18}$	$9\overline{)27}$	$9\overline{)36}$	$9\overline{)45}$	$9\overline{)54}$	$9\overline{)63}$	$9\overline{)72}$	$9\overline{)81}$	$9\overline{)90}$

$10)0$ $10)10$ $10)20$ $10)30$ $10)40$ $10)50$ $10)60$ $10)70$ $10)80$ $10)90$ $10)100$

教學到這裏，上面第二節裏各式的應用練習仍應做。到了純熟時，便要開始一樣新的工作。就是有餘的九九。在開始的時候，仍舊應當按照第一節第一第二步各分4項，用實物使學生切實明白。譬如2除13，照等分法，二分得6，餘一個。照包含法，13，每二個分，六次，餘一個。仍宜照第一節第三步方法比較。寫式是 $6 \dots 1$

2) $\overline{13}$ 。但是儘不妨就教 $6 \frac{1}{2}$ 的寫法。在學生看來，同是新的寫式。並且將來

總要學後一種的，何勿統一的入手就學一種。後式 $1 \frac{1}{2}$ 可以念作『二分一』這便是一個還要2去分的意思。其實後式容易懂。

有餘的九九，是一種九九，決不是一種應用練習。從前當了應用練習，所以學生沒有把各個有餘的九九平均練習。因此學習以後的各種除法時，常常發生困難。下表是有餘九九的全部。教時分次抽用。大約每次十五個到二十個，五六次可以教完。每教一次要多練習。練習時宜新舊混和。也要把無餘的九九夾雜進去。

$\overline{2)3}$	$\overline{2)5}$	$\overline{2)7}$	$\overline{2)9}$	$\overline{2)11}$	$\overline{2)13}$	$\overline{2)15}$	$\overline{2)17}$	$\overline{2)19}$	
$\overline{3)4}$	$\overline{3)5}$	$\overline{3)7}$	$\overline{3)8}$	$\overline{3)10}$	$\overline{3)11}$	$\overline{3)13}$	$\overline{3)14}$	$\overline{3)16}$	$\overline{3)17}$
$\overline{3)19}$	$\overline{3)20}$	$\overline{3)22}$	$\overline{3)23}$	$\overline{3)25}$	$\overline{3)26}$	$\overline{3)28}$	$\overline{3)29}$		
$\overline{4)5}$	$\overline{4)6}$	$\overline{4)7}$	$\overline{4)9}$	$\overline{4)10}$	$\overline{4)11}$	$\overline{4)39}$
$\overline{5)6}$	$\overline{5)7}$	$\overline{5)8}$	$\overline{5)9}$	$\overline{5)11}$	$\overline{5)12}$	$\overline{5)49}$
$\overline{6)7}$	$\overline{6)8}$	$\overline{6)9}$	$\overline{6)10}$	$\overline{6)11}$	$\overline{6)13}$	$\overline{6)14}$	$\overline{6)59}$
$\overline{7)8}$	$\overline{7)9}$	$\overline{7)10}$	$\overline{7)11}$	$\overline{7)12}$	$\overline{7)13}$	$\overline{7)15}$	$\overline{7)16}$	$\overline{7)69}$
$\overline{8)9}$	$\overline{8)10}$	$\overline{8)11}$	$\overline{8)12}$	$\overline{8)13}$	$\overline{8)14}$	$\overline{8)15}$	$\overline{8)17}$	$\overline{8)79}$
$\overline{9)10}$	$\overline{9)11}$	$\overline{9)12}$	$\overline{9)13}$	$\overline{9)14}$	$\overline{9)15}$	$\overline{9)16}$	$\overline{9)17}$	$\overline{9)19}$
$\overline{10)11}$	$\overline{10)12}$	$\overline{10)13}$	$\overline{10)14}$	$\overline{10)15}$	$\overline{10)16}$	$\overline{10)17}$	$\overline{10)18}$	$\overline{10)19}$	$\overline{10)21}$
$\overline{10)22}$	$\overline{10)23}$

到此可以學一種應用練習。就是把第二節各式的結末使他除起來有個餘數。例如：

一、 $\overline{3)95}$ 等是第二節第三步化出來的。

二、 $\overline{4)129}$ ， $\overline{5)208}$ ，等是同上第五步化出來的。

三、 $\overline{2)625}$ ， $\overline{5)559}$ ，等是同上第七步化出來的。

四、 $\overline{3)607}$ 等是同上第九步化出來的。

五、 $\overline{4)1287}$ ， $\overline{5)1056}$ 等是同上第十二步化出來的。

六、 $\overline{6)2409}$ ， $\overline{5)2007}$ ，等是同上第十四步化出來的。

其他如 $\overline{3)6398}$ 等是同上第十五步化出來的。又如

$$\overline{2)10847},$$

$$\overline{6)12009},$$

$$\overline{7)56008},$$

等都是同上第十六步化出來的。餘

可以類推。

有了餘，檢答起來要乘後把餘數加上。譬如 4 除 1287 ，答 $321\frac{3}{4}$ 。檢答時 $321\frac{4}{4}$ 得 1284 再加三得 1287 ，結果無誤。多做一次檢答，可以使學生格外明白這種結末有餘的除法。就是九九有餘的，也可以同樣的檢答。譬如 $3)28$ 得 9 餘 1。檢答 $9\ 3$ 得 27，加 1，得 28，無誤。

第四節 法一位的除法各種

法一位的各種除法，除第二節各式以外，還有以下的種種。宜分步進行，練習純熟。

一、第一步是 $3)72$ ， $2)50$ 等，第一次除有餘，和下一位合併了再除。算法： 3 除 7 得 2 ， $2\ 3$ 是 6 ，所

以 7 去 6 ，還多 1 。這是和第三節下半段有餘的九九一樣。在 7 上面寫 2 。其次是 1 和下一位的 2 合成 12 。這一點有些困難了。這是有餘的九九裏所沒有過的，當特別注意。 3 除 12 ，是 4 ，在 2 上面寫 4 。這也是學過的，沒有什麼新的困難。答共二十四。若用實在經驗說明，先把 70 用 3 除，得 20 ，餘 10 。原來還有 2 ，一起剩下 12 ，再用 3 除，得 4 ，所以答是 20 及 4 ，即 24 。

二、第二步是 $\overline{6)276}$ 等。這種和上面的一種有一不同點，就是入手除時要用二位，其他與上面的同。

三、第三步是 $\overline{3)942}$ ，等。第一除沒有餘，第二除有餘，併入下一位的被除數合成幾十幾，或幾十再除。第三除沒有餘。其實與第一步彷彿，不過多了百位數。

四、第四步是 $\overline{3)726}$ ， $\overline{5)705}$ 等。第一除有餘，併入下一位的被除數合成幾十幾或幾十再除。第二及第三除沒有餘。

五、第五步是 $\overline{6)876}$ ， $\overline{4)616}$ 等。第一除有餘，併入下一位的被除數合成幾十幾或幾十再除。第二除同樣有餘，再要併下一位的被除數合成幾十幾或幾十再除。第三除沒有餘。

六、第六步是 $\overline{8)6496}$ ， $\overline{5)4060}$ 等。這一種和第三步彷彿，不過第一除要用二位。

七、第七步是

$$6) \overline{4380},$$

$$5) \overline{4205}$$

等。這一種和第四步彷彿，第一除也要用二位。

八、第八步是

$$6) \overline{4392},$$

$$5) \overline{3710}$$

等。這一種和第五步彷彿，第一除也要用二位。

九、第九步是

$$3) \overline{720},$$

$$2) \overline{500}$$

等。和第一步彷彿而末位是0。3除0，當然得0，在0上寫0就是了。由

實在經驗可以說明

3除

700得200餘100。併320合共120。3除120得40。所以答是240。

十、第十步是

$$6) \overline{2760},$$

$$4) \overline{2200}$$

等。這一種和第九步彷彿，不過第一除要用兩位。

十一、第十一步是

$$3) \overline{618},$$

$$5) \overline{520}$$

等。第一步沒有餘。第二位不能除而有餘，要合併末一位被除數，才

可以除。算法：3除6得2，在6上寫2。3除1不能除，1上寫0，1併下一位的8合成18。3除18得6，在8上寫6。答二百另六。這種商中間有另，頂要當心。若是不留心，答便要變成26，那就大錯。用實

在經驗可以說明 3 除 600 得 200, 3 除 18 得 6, 所以答是 200 又 6, 即 206。

十二、第十二步是

$$\overline{8)4832},$$

$$\overline{8)4040}$$

等。這一種和第十一步彷彿, 不過第一除要用二位。

以上各步均可先從實在經驗入手。第二節裏的說明方法當一一先用, 然後再學算法。

以上種種都是可以除得完的。還有下面各式是上面十二步中化出來的, 結末除不完的。

一、 $\overline{3)74}$, $\overline{2)51}$ 等是第一步化出來的。

二、 $\overline{6)279}$, $\overline{4)223}$ 等是第二步化出來的。

三、 $\overline{3)943}$, $\overline{5)564}$ 等是第三步化出來的。

四、 $\overline{3)727}$, $\overline{5)708}$ 等是第四步化出來的。

十、	九、	八、	七、	六、	五、
$\overline{6)2765}$,	$\overline{3)721}$	$\overline{6)4395}$,	$\overline{6)4389}$,	$\overline{8)6498}$,	$\overline{6)877}$,
$\overline{4)2203}$	$\overline{2)501}$	$\overline{5)3713}$,	$\overline{5)4208}$,	$\overline{5)4064}$	$\overline{4)618}$
等是第十步化出來的。	等是第九步化出來的。	等是第八步化出來的。	等是第七步化出來的。	等是第六步化出來的。	等是第五步化出來的。

十一、 $\overline{3)620}$ ，等是第十一步化出來的。

$\overline{5)523}$ ，

十二、 $\overline{8)4839}$ ， $\overline{8)4047}$ 等是第十二步化出來的。

$\overline{8)4839}$ ，

$\overline{8)4047}$

以上的檢答法同上面第二節，第三節所說。結末除完的用乘法，結末除不完的，乘 3 再加餘數。以上第二節及本節各式除法的計算，方法是學生心裏想的，決不是嘴裏念的。念的愈簡愈好，限於中途的結果和餘。例如

$\overline{6)4399}$ ，

寫 $\overline{1}6$ 。『七百三十一又餘一』又如 8 除四千八百三十九，算時應念『6』寫 6。『0』寫 0，『4』寫 4。『7』寫 7。『8』寫 8。『六百另四又餘七。』

第五節 十除及十的倍數除

第二節第一步裏有過

$\overline{10)40}$ ，

$\overline{10)50}$ ，

等學過，這裏可推演出去，做

$\overline{10)210}$ ，

$\overline{10)300}$ ，

等。用牙籤，火柴，尺寸等

說明，也不難明白。二丈一尺分作十。二丈十分之，每得二尺；一尺十分之，每得一寸。所以二丈一尺，十分之得二尺一寸。這是等分除。又如二丈一尺就是二十一尺。這是包含除。同樣再推演出去便可以

做

$$10 \overline{)4100},$$

$$10 \overline{)4150},$$

$$10 \overline{)3000},$$

$$10 \overline{)4060} \text{ 等。}$$

上面的做熟以後，便做結末除不完的。譬如

$$10 \overline{)45}$$

$$10 \overline{)62},$$

的九九罷了。其次便是

$$10 \overline{)218},$$

$$10 \overline{)505} \text{ 等。}$$

仍舊可以用上面的尺寸，牙籤火柴等方法說明。再進便是

$$10 \overline{)5109},$$

$$10 \overline{)3886},$$

$$10 \overline{)5007}$$

$$10 \overline{)7092}, \text{ 等。}$$

以上種種，都不必當他是二位法數的除法。應當由實在經驗裏得到結果，然後把答寫出來。寫

法如下：

$$\begin{array}{r} 30 \\ 10 \overline{) 300} \\ \underline{21} \\ 10 \overline{) 210} \\ \underline{4} \frac{5}{10} \\ 10 \overline{) 45} \\ \underline{21} \frac{8}{10} \\ 10 \overline{) 218} \\ \underline{50} \frac{5}{10} \\ 10 \overline{) 505} \end{array}$$

算法：10 除 30，得 3，在 0 上寫 3。10 除 0 得 0，在 0 上寫

0。答三十。又 10 除 21 得 2，餘 1，在 1 上寫 2。1 和下位 0 合成 10，10 除 10，得 1，在 0 上寫 1。答二十一。餘類推。讀時不必如此累贅，照第四節結末的讀法，行了。

十的倍數除各種數目，比較 10 除要難些。但是我們儘可以照下列步驟，由漸進行。若能練習純熟，也非難學。

一、

$$\underline{30) 90},$$

$$\underline{50) 100},$$

等是讀數寫數練習的變相。三個三十是九十，二個五十是一百，以及三個四十是

120，等都可用在經驗和九九及讀數寫數等聯絡了學習。一方面再把計算形式練習純熟。 $\underline{3) 90}$ ，

$\underline{3) 150}$ ，等是基本的練習。答數位，不必照二位法數的除法講。由實在經驗證明，應當寫的地位。這

是一個重要的基礎。先應當把第一節及第三節無餘的九九，一起化成上面的形式，細細練習到純

熟。然後再進一步，把第三節下半有餘的九九，也化成

$$\begin{array}{r} 30 \overline{)100}, \\ 50 \overline{)160}, \\ 80 \overline{)350}, \end{array}$$

等，先由實在經驗明白意思，然

後再細細練習到純熟。

二、是

$$\begin{array}{r} 30 \overline{)72}, \\ 50 \overline{)216}, \\ 80 \overline{)334} \end{array}$$

等有餘的除法。這仍是九九的變相練習，不過結末有餘。72 比二個 30 多 12；

216 比四個 50 多 16；334 比四個 80 多 14。這種除法不過比上面第一步下半的稍為變化，結末有了餘數，

別的沒有什麼困難。

三、可以做

$$30 \overline{)960},$$

$$40 \overline{)1200},$$

$$40 \overline{)2080},$$

$$20 \overline{)6000},$$

$$20 \overline{)6240},$$

$$30 \overline{)9600},$$

$$20 \overline{)6080},$$

$$40 \overline{)20000},$$

$$20 \overline{)10460},$$

$$50 \overline{)21000},$$

$$60 \overline{)24060}$$

等，中途無餘，結末除得完的。

四、可以做

$$30 \overline{)980},$$

$$30 \overline{)986},$$

$$40 \overline{)2090},$$

$$40 \overline{)2056},$$

$$50 \overline{)5590},$$

$$50 \overline{)5598},$$

$$30 \overline{)6070},$$

$$30 \overline{)6072},$$

$$40 \overline{)12870},$$

$$40 \overline{)12876},$$

$$50 \overline{)20080},$$

$$50 \overline{)20084},$$

等，中途無餘，結末除不

完的。

五、可以做

$$30 \overline{)720},$$

$$20 \overline{)500},$$

$$40 \overline{)2200},$$

$$30 \overline{)9420},$$

$$50 \overline{)7050},$$

$$60 \overline{)8760},$$

$$80 \overline{)64960},$$

$$50 \overline{)42050},$$

$$60 \overline{)43920},$$

$$30 \overline{)7200},$$

$$40 \overline{)22000},$$

$$50 \overline{)5200},$$

$$80 \overline{)40400},$$

等，中途有餘，結末

除得完的。

六、可以做

$$20 \overline{)510},$$

$$20 \overline{)514},$$

$$60 \overline{)2790},$$

$$40 \overline{)2238},$$

$$30 \overline{)9430},$$

$$50 \overline{)5648},$$

$$30 \overline{)7276},$$

$$50 \overline{)7080},$$

$$40 \overline{)6180},$$

$$60 \overline{)8775},$$

$$50 \overline{)40648},$$

$$80 \overline{)64980},$$

$$60 \overline{)34890},$$

$$50 \overline{)42086},$$

$$60 \overline{)43955},$$

$$50 \overline{)37130},$$

$$30 \overline{)7212},$$

$$20 \overline{)5010},$$

$$60 \overline{)27658},$$

$$40 \overline{)22030},$$

$$30 \overline{)6200},$$

$$50 \overline{)5234},$$

$$80 \overline{)48392},$$

$$80 \overline{)40470}$$

等，中途有餘，結末除不完。

以上各種的算法，譬如六項末一個

$$80 \overline{)40470};$$

80 除 404，得 5，餘 4，在 4 上寫 5。4 與下位 7，合成 47。80

除47，是0，在7上寫0。47再併下位0，合成470。80除470，得5，餘70，在0上寫5。餘寫在5後， $70 \overline{) 80}$ 答

$70 \overline{) 80}$ 。口念法及檢答等法，見前節。

第六節 法二位以上的除法

法數兩位以上的除法，主要的困難點在於方法的手續。第一步是試商，初學的人頂感困難。其他商和法相乘，把部份積從被除數裏減，減餘的一定要比法小，以及被除數下一位移併了再除，等手續和以前彷彿。不過以前是心裏暗記了不寫出來的。現在因為數目太多，容易忘記，所以詳細的——寫了出來。還有減餘的要比法數小，因為試商的關係，往往容易弄錯。在以前學的除法裏試商容易，決不會有錯誤。到了此時，試商稍有不慎，便要使減餘的不比法小，因而商數位子，弄得大錯特錯。就試商的難易，先分列步驟如下：

一、第一步 $21 \overline{) 882}$ 等算法：因為21近於20，所以根據第五節試商起來，容易得到商4，4乘21得84，

比88小，減餘4，比法21小，所試商4是不錯的。在8上寫4，再把4乘21的84寫出來，寫在88的下面。再做減法。寫如：

$$\begin{array}{r} 21 \overline{) 882} \\ \underline{84} \\ 4 \end{array}$$

這和第四節彷彿。不過第四節算時心裏暗記。這裏把暗記的明白寫了出來罷了。被除數下一位和餘數的4移併成42，寫成4

$$\begin{array}{r} 21 \overline{) 882} \\ \underline{84} \\ 42 \end{array}$$

再以在2上寫2，2乘21的42寫在42下。寫式成42

$$\begin{array}{r} 21 \overline{) 882} \\ \underline{84} \\ 42 \end{array}$$

42除完無餘，商共42。檢答用21和42乘，結果是882，所以除法不錯。

二、第二步

等。算法：因為29近於30，所以按照第五節，試商起來，大約是1。一個29是29，比35

小，減餘6，比法29小，所以商1不錯。在5上寫1，一個29是29，寫在35下，減餘6。寫式如：

$$\begin{array}{r} 1 \\ 29 \overline{) 3567} \\ \underline{29} \\ 6 \end{array}$$

下位的 6 移併成 66，再試商大約是 2，2 個 29 是 58，比 66 小，減餘 8 比法 29 小，所以第二商 2 是不錯的。在 6 上寫 2，2 個 29 是 58，從 66 裏減，餘 8。寫式成：

$$\begin{array}{r} 12 \\ 29 \overline{) 3567} \\ \underline{29} \\ 66 \\ \underline{58} \\ 8 \end{array}$$

得 3。3 個 29 恰是 87，除完。寫式成：

$$\begin{array}{r} 123 \\ 29 \overline{) 3567} \\ \underline{66} \\ 58 \\ \underline{87} \\ 87 \\ \underline{123} \\ 3567 \end{array}$$

三、第三步

等。算法：法 16 既不近於 10，又不近於 20，而恰巧在 10 到 20 之間，所以試商起來，頂

是困難。應當先想法若 10 時，商是 9；法若 20 時，商是 4，現在法是 16，商總介乎 9 與 4 之間。試 5，5 個 16 是 80，比 98 小，減餘 18，比 16 大，不對。試 6，6 個 16 是 96，比 98 小，減餘 2，比 16 小，所 6 是對的。6 乘 16 得 96。減法，餘 2，寫式成：

$$\begin{array}{r} 6 \\ 16 \overline{) 9824} \\ \underline{96} \\ 2 \end{array}$$

下位 2 移併成 22。16 試，若是 2，要 32，比 22 大，2 不對。所以商是 1，1

個16是16，比22小，減餘6，比16小，商1寫在2上，式成：

$$\begin{array}{r} 61 \\ 16 \overline{) 9824} \\ \underline{96} \\ 22 \\ \underline{16} \\ 6 \end{array}$$

下位4移併成64，再試。若

法是20，商是3；若法是10，商是6。16介乎10與20之間，商也在3與6之間。當是5，5個16要80，比64大，不對。商4，4個16恰是64，除完。寫式成：

$$\begin{array}{r} 614 \\ 16 \overline{) 9824} \\ \underline{96} \\ 22 \\ \underline{16} \\ 64 \\ \underline{64} \\ 0 \end{array}$$

商共614。16乘9824，除法不錯。

四、第四步 74

$$\begin{array}{r} 87 \overline{) 6438} \\ \underline{609} \end{array}$$

348 348等。這種困難點在於第一商。被除數首二位64比法87小，所以第一試

商要用被除數的首三位643，才可以用87除。以下的手續同前面的三步。

五、第五步

$$\begin{array}{r} 412 \frac{1}{3} \\ 36 \overline{) 14840} \\ \underline{144} \\ 44 \\ \underline{36} \end{array}$$

80 72 8等。這種第一試商同第四步，也要用被除數的首三位。末一

次移併時是被除數末位的0與減餘的8，合成80。這也是一個注意點。再有結末除不完結，末次試

商也要和前兩次試商一樣。減餘的寫出來，是第三節裏已經學過的。於答時36乘412再加8，得14840，除

法不錯。

$$\begin{array}{r}
 \text{六、第六步} \quad 91\frac{2}{4}\frac{7}{7} \\
 \hline
 47) 4300 \\
 \underline{423} \\
 70 \\
 \underline{47} \\
 23 \text{ 等。這一種和第五步彷彿，被除數末二位是0，有的被除數末三}
 \end{array}$$

位全是0的。算法同第五步。只要當心0，不要忽過。0雖沒有數，但是有個位子。

$$\begin{array}{r}
 \text{七、第七步} \quad 146\frac{3}{5}\frac{7}{8} \\
 \hline
 58) 8505 \\
 \underline{58} \\
 270 \\
 \underline{232} \\
 385 \\
 \underline{348} \\
 37 \text{ 等。這一種也和第五步彷彿。不過被除數第三位的0，在移}
 \end{array}$$

併時要留心些。其餘一樣。

$$\begin{array}{r}
 \text{八、第八步} \quad 590 \\
 \hline
 67) 39530 \\
 \underline{335} \\
 603 \\
 \underline{603} \\
 0 \text{ 等。這一種有一個特別的困難。被除數末位是0，除到0的前一}
 \end{array}$$

位已經除完。起先商59，因為除完之後，被除數末位還有0，所以商末位也要補一個0，位子才可以不錯。商是590，用67乘才得39530；若是商作59，用67乘時，得3953，便不對了。這種實在和第四節第九步第十步彷彿。

九、第九步 $640\frac{47}{94}$

$$\begin{array}{r} 94 \overline{) 60207} \\ \underline{564} \\ 380 \\ \underline{376} \\ 47 \end{array}$$

等。這一種第二次除了以後，減餘4，移併下位的7，合成47，仍比

94小，不能滿1，所以商中要補一個0，才可以寫餘數。若是商作64，乘94，加47，決不是60207，要640乘94，加47，才是60207，所以商應作 $640\frac{47}{94}$ 。這種實在和第四節下半九步十步彷彿。

十、第十步 $103\frac{12}{74}$

$$\begin{array}{r} 74 \overline{) 7634} \\ \underline{74} \\ 234 \\ \underline{222} \\ 12 \end{array}$$

等。這種困難點在第一次減餘2，下位3移併作23，比74小，不滿

商1，所以商中應寫0，再把下位4移併成234，再除。商若13，乘74，加12，決不是7634，一定商要103，乘74，加

12才是7634，除法不錯。這種實在和第四節下半十一、十二步彷彿。

檢算法，上面已經說過。做時讀法也宜簡。大概只要把寫出來的念。其餘在心裏算，不必嘴裏念。

第七節 新的乘除算式

以上所說乘法除法算式，都是沿用習慣上通用的。有一種頂容易使初學者感到困難的，就是做乘法時，法數和被乘數的地位是在上下的，一到法二位以上除法時，中途商和法相乘時，地位在斜對角而不是在上下的。學生初學法二位的除法時，這一層也是頂大的不慣。往往因此發生錯誤。若把法二位以上的乘法的算式，法數改寫在上，被乘數改寫在下，而在除法中把法數寫在被除數的上面，商數更在其上，中間加一條橫線，那末，除法中乘起來和乘法統一了。如此，可以減少一種無謂的困難。譬如前章第七節的乘法，改作：

$$\begin{array}{r} 258 \\ \times 467 \\ \hline 3736 \\ 2335 \\ 934 \\ \hline 120486 \end{array}$$

又如第六節第十步的除法，改作：

$$\begin{array}{r} 103\frac{1}{4} \\ \underline{74} \\ 7634 \\ \underline{74} \\ 234 \\ \underline{222} \\ 12 \end{array}$$
 如此寫法，位子也容易齊，檢答時不必另外抄寫，法數在商數下，做乘法也極

便利。中途法與商相乘的時候，也和乘法一致了。法一位的除法，可以寫成

$$\begin{array}{r} 505\frac{1}{8} \\ \underline{8} \\ 4047. \end{array}$$

這是一種嘗試，或者不能十分妥善。教者若能丟開慣用的寫式，自己先練習純熟，然後再教學生用，或者可以比得出新舊兩種算式或那一種便利。但是要注意，自己沒有用熟，切勿貿然教學生用。有好多方法，弊病不在方法的本身上，却在用的人不熟。用熟了再教，才可以真正比較出優劣來。

第六章 諸等數

向例諸等數是自成一個段落，大約在整數加減乘除教完以後才教的。這是很不經濟的辦法。諸等數如能和整數加減乘除聯絡了教，有好多相互便利的地方。譬如尺寸的關係，是一種十進的關係。尺寸的十進，比了不名數的十進更具體，更容易直觀。學進位加法時大可以和尺寸或別種十進諸等數聯絡。所以諸等有大部份可以分散了組織，和整數加減乘除聯絡。有一部份特殊的，當然不能不獨立了教，獨立了練習。還有若干是要分插開來的。我們分別細說。

第一節 小學生應學的是什麼

先來討論教材的內容。度有丈尺寸分釐……等。這是用來度各種長短的。里是只限於道路距離用的。度布無論幾千匹，幾百匹，總用丈做單位，決不用里。講到里的道路，往往是半里，四分之一里等，平常也不計較一丈二丈。丈尺寸分釐等是十進的。里和丈是非十進的。分別了，既合事實，又很便

利。弓或步，不過是一種的用具，不是制度。猶之某幾處地方的營造工人爲便利計，常用六尺長木杆。因爲普通房屋，那裏通行一丈二尺闊的，所以六尺的木杆，是一種極好的工具。用弓也爲他取攜便利，量好後二弓一丈，可以心算。計算單位當用丈尺寸分爲一組，叫長度。分以下的釐太細了。尺上大概到半分爲止。丈里又爲一組，叫里程，專度道路的。在教的時候，應當分三步。先學尺和寸，大約在一年，學過九九滿十時便可以教。分宜在後，在一年後半或二年，要數目學過一百以上後才學。丈更在後。或者先尺寸，後來教丈，再後來教分也好。這三步不是緊接的，宜分插在整數加減乘除中間。里要三年學乘法以後，才可以教。教了以後，練習，也就是一種乘法的練習。

量有石斗升合勺等。第一步宜叫升與斗。比尺寸稍後。石可以在丈以後。也宜分插。勺是空的單位名稱，其實沒有這種量器。並且太少了，平常用到升爲止。至多教些合。合宜在最後。斛和弓是工具，不是單位。這器的二量便是一石。因爲石太大，做了量器笨重不便。這全是十進的。

衡有兩種貴重的用兩錢分釐，粗笨的用斤兩擔。金銀綢緞，十六兩二十兩，兩以上仍是十進。平常斤兩以下，錢不常用。噸也漸漸通行，可以和斤擔等同教。先教斤兩，大約在乘法以後，在里丈以前。

或後。更後教擔及噸。兩錢分釐等宜在更後。這雖是十進的，因為日常使用較少，所以延到三年或四年以後。

貨幣的制度頂亂。一年時加減法裏就可以學銅元或制錢。制錢不通行的地方，制錢宜在後。完全照十進算。這就是日常的錢碼。但是千以上，在錢碼裏不叫萬而用十千百千的。這要到學了千萬的數目以後才學。在學過乘法以後，可以插入角子和銅元或制錢換算的方法。不通行角子的地方，這步可以省去。更進可以學大洋一元兌換銅元或制錢的算法。大約到學過除法以後，才可以教洋碼。就是貨幣的輔幣本位。這時可以學大洋一角和小角一角的比較，及每角大洋貼水等算法。銀碼更無實物可見，可以不教。大商埠的五六年級可以學些銀碼，洋碼，錢碼的換算方法。要和小數乘法法聯絡了教。

計時制度，先學時鐘，一年二年便可以插入。再學時分，均在乘法以後。秒也可以同時學。一方面初學乘法九九，便可以插入日週。後來再插月日。三年級學了乘法以後，才可以插教年月。同時或插在四年裏，教月份的大小，閏月等。陰陽曆的比較，宜延到五六年。這是因為較複雜的緣故。

正長方面積，學了乘法便可以教。單位先學方尺，再學方寸，方丈在後。畝分釐毫是土地的計算單位。量地積時用丈尺，先求得方尺方丈，然後再改算爲畝分釐毫。畝分中夾雜方丈方尺，決無這種制度。六方丈是分，滿十分的便成畝。學了法一位的除法，便可以聯絡了學。實是不滿六方丈的若照除法論便成小數，所以有些困難。其實一律改用方尺做了基礎，六方尺是毫，做了除法，商在單位的是毫，十位的是釐，百位的是分，千位的是畝。改算以後，一律十進。畝以上百畝爲頃，也很容易。有的地方習慣無頃，便可省去。五六年可以學方里。

立方先學立方寸，後學立方尺，立方丈在最後。立方寸和立方尺，可以比方尺方寸稍後。立方丈宜在五年。同時可以學些沙土的計算法。沙土不用立方尺，也不用立方丈，單位是一丈平方一尺高，叫做一方。實在當一立方丈的十分之一，就是一百立方尺。

第二節 怎樣教法

諸等數的單位名稱，決不是空講可以學得會的。一定先要觀察更要多多的使用，這是第一步。同時學習各單位間的關係。關係明瞭以後，便是由練習而使關係純熟。這是第二步。所謂化法聚法，



或名通法命法，就是指這各單位間關係而言。十進的關係，不必特別練習儘可和加減乘除同時學習。在非十進的，當然要練習化法聚法。儘可和乘法除法聯絡進行。第三步是做諸等的四則。十進的儘可和整數聯絡。非十進的，當然要特別另教。

化法聚法題中材料宜簡單合於實在的狀況。四則計算亦然。尺寸二等，丈尺，二等，寸分二等是日常習用的。丈尺寸三等，尺寸分三等，也還可以遇到。丈尺寸分四等是不常見的。論丈的時候，誰也不管分的了。舊來里丈尺寸分五等的化法聚法以及四則，實在太不近情。同樣，石斗，斗升，升合各二等是頂常用的。石斗升三等也還可以遇到。石斗升合四等，只有專業收租納稅的人才用。兩錢，錢分，分釐各二等也是常用的。兩錢分，錢分釐，各三等也還遇到。兩錢分釐四等以上的又是專業金銀的人才用。斤兩，擔斤各二等也是常用的。論擔者決不計兩，所以三等的便少用了。貨幣的錢碼，本不成諸等。洋碼的元角分三等或元角分釐四等都是通行的。計時的時日，時分，分秒，日月，年月各二等也是常用的。年月日三等很少用。（不是我們紀年的某年某月某日是要計算的幾個年幾個月幾個日子）論日的不計分；論時的不計秒；三等以上便不常用。面積百進，體積千進，至多也常用二等。三

等以上更難遇到。地積，平常用畝分釐三等。六方尺的地，除了大都市以外，是不值多少錢的。畝分釐毫四等是專業土地賣買者才用。若用六方尺一毫的基礎改算，那末便要常用畝分釐毫四等了。

以上算是通則，以下再把各種步驟稍稍詳細的說一說。

教長度先用尺，叫學生學量教室的窗，門，黑板，牆，桌高，椅高……等等。這時的尺，可用木片或竹片或厚紙條等做，上面不要分寸。學生每人要有一支。先量，後寫，再可以做些加減法。或者用舊報紙連接起來代替布匹，教學生表演開布店賣買布匹。也可以表演縫工裁衣，進一步宜先用不滿一尺而有長短的東西比較。此時需要寸的單位。就在學生各自的尺上量出寸來。桌面，椅面，筆，書，紙，簿子等的長闊都是很好的材料，可以用來叫學生量。仍舊可以表演布店，縫工等。同時也練習加減法。

教分時，可以先用更短的東西來做比較，使學生感覺需要分的單位。量時宜用幾寸幾分的東西，也宜用不滿一寸的東西。此時可以做尺寸，寸分各二等的加法減法及尺寸分，三等的加法減法。又可以做法一位或二位，被乘數二等或三等的乘法以及被除數二等或三等的除法。算法和整數的一樣，不必再說。被除數是諸等的除法，只要結末一位的單位是相同，其他方法與整數一樣。譬如

2尺4寸)7尺2寸

當然和

24)72

一樣。若逢

8寸)4尺

應變成

8寸)4尺0寸

就和

8)40

一樣了。加減乘除都可以和表

了做應用問題。凡學過以上諸等以後，圖畫手工裏，應當盡量應用。可以用尺時一建，關州立省爾立手工聯
作計劃，都應預先算好了才可以動手工作。

教丈時可以叫學生量教室的長寬，以及廊，繩，布匹，場地，籬笆，牆……等。先用尺量，後來使學生感覺尺的單位太短，然後教丈。若沒有皮帶尺的，可以自己製作繩尺。用麻繩，每尺縛一記號便成。有了這種繩尺，量起來非常便利。再做加減乘除各法，同上一樣。計算的題目，除表演布店，縫工外，尤宜和常識聯絡了，學畫教室及校舍的平面圖。這時候可以學縮尺，並且把丈尺寸分等關係同時聯絡練習。跳遠，擲球，造屋等，都是很好的材料，可以學習丈尺的計算的。

里丈關係，宜由常識科內發生動機。以學校為中心，求各學生家庭的距離；求著名地方和學校



的距離；求遠足地點和學校的距離；求本地和鄰近村城山林河道等的距離……等等，都是絕好的材料。如能利用課餘，用繩尺把附近三五里內重要地點，一一實測，在路上做出標識，再畫成附近地圖，那末學生學得的效果很大。一面學算術，一面也是極好的基本地理。如有本市本村地圖的，也可以用地圖求距離，將縮尺回原。先在圖上得幾寸幾分，再照縮尺比例化成丈數，再換算成里。賽跑交通速度等也都是很好的材料。

化聚方法當然和乘法聯絡。先學2里5里化丈數，單單一個乘法。

$$180 \begin{array}{r} 2 \\ \hline 360; \end{array}$$

$$180 \begin{array}{r} 5 \\ \hline 900 \end{array}$$

式中不必

記名只要算完後，自己知道是360丈及900丈就是了。再學90丈及45丈等化丈數。乘了以後再要加180

$$180 \begin{array}{r} 2 \\ \hline 360 \end{array}$$

$$90$$

$$450;$$

180 $\begin{array}{r} 3 \\ \hline 540 \\ \hline 630 \end{array}$ 等，也不必在式子內記名。聚法也有二步。一是720丈聚作里，單單一個除法

$$180 \begin{array}{r} 4 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$720$$

式

$$180 \begin{array}{r} 4 \\ \hline 720 \end{array}$$

式

中不必記名。一是 260 丈

510 丈

聚作里。做起來是一種有餘的除法。

$1\frac{80}{180}$

$$\begin{array}{r} 180 \overline{) 260} \\ \underline{180} \\ 80; \end{array}$$

$2\frac{59}{180}$

$$\begin{array}{r} 180 \overline{) 510} \\ \underline{360} \\ 150 \end{array}$$

式中不必記

名。

$$2\frac{150}{180} \text{ 就是 } 2 \text{ 里又 } 150 \text{ 丈。}$$

容量的教法，先是斗升。可以用了量器，叫學生實習。這不能每人一份，共同輪流實習爲便。量米，豆，穀，沙等。一面可以表演糧食店，學習加減乘除等算法。計算家中學校裏的食料問題，計算家畜家禽的飼料問題，都是很合實際的材料。石的教學宜參觀糧食行或有斛器的人家。先叫學生實習，量足五斗成一斛，然後教二斛便成一石。計算問題可以取材佈種，收穫，打米，磨粉，食料，等實際問題。

重量的斤兩，宜用秤實習。先稱較重的，後稱較輕的。平常用的秤有二三個紐，太複雜，最好定製只有一紐的。用慣以後，再用家用的秤實習。一面實習，一面可以表演開店買賣。同時計算。先做化聚，和乘法聯絡。同丈里一樣。先學 4 斤化兩等，只須一個乘法 $16 \frac{4}{1} = 64$ 便得 64 兩。再進做 2 斤化兩，

要乘了再加， $16 \begin{array}{r} 2 \\ - 32 \\ \hline 6 \end{array}$ 才得 38 兩。式子裏不必記名。聚法先做 64 兩聚作斤等，不過一個除法

$4 \begin{array}{r} 64 \\ - 64 \\ \hline 0 \end{array}$ 進一步學 54 兩聚作斤兩等 $3 \begin{array}{r} 6 \\ - 18 \\ \hline 6 \end{array}$
 16) $54 \begin{array}{r} 48 \\ - 6 \\ \hline 0 \end{array}$ 式中不必記名。6_T 就是 3 斤 6 兩。關於擔及噸的

計算問題可以取材於柴料煤炭等。其他照上述。

學兩錢分厘時，宜用戥稱銀元，信件，首飾等，表演金銀首飾店或表演郵局。一方面也可以學些郵局寄費的算法。較重的可以用上述的秤稱。這是十進的，不必化聚，就可以學加減乘除各法，如長度一樣。

貨幣是日常用的，無論什麼買賣問題都可以計算貨幣。錢碼不成諸等，只要留意千以上不用萬的一端就是了。洋碼是十進的，方法同長度。兌換是乘除算法，應當和乘法除法聯絡。

計時先學時鐘，這動機在學校極容易引起。到校，放學，上課，退課，都與時間有關。先學鐘面上的文字及長短針的行轉。可以用厚紙做一個鐘模型，叫學生練習認識，初時只要幾點，幾刻，一點作四刻就是了。學過以後，每次上課退課可以叫學生看了教室內的時鐘報告。經過相當練習以後，可以

叫學生觀察一天裏共有多少鐘點。一日是二十四時，分上午下午，鐘面只有十二時……等等都可教。教過以後，每次上課退課，應當報告上午幾點幾刻，或下午幾點幾刻。同時可以學些計算，譬如早上九時上課，到十二時退課，距幾時？或上午八時到下午六時距幾時？等問題。取材可以用關於作業、休息、睡眠以及起居等。時間表也是很好的材料。

進一步，把一刻細分，叫學生學看幾點幾分。此時可以學一時是六十分的關係。從此報告時刻要用上午或下午幾點幾分。可以利用工作、遊戲，叫學生每做一工作先記時刻。到做完再看時刻。計算相距幾分或幾時幾分。一切比賽，收發均可說「看幾分鐘內誰做得多——」等。學生作業上可以叫他們把所須幾分記上。火車汽車開行時間表，是一種很好的練習材料。

同時另一方面叫學生記日記，用日曆，學一星期共有七天的關係。積了一學年，可以整理出一年十二個月，一年三百六十五天等。逢閏的年份，便利用機會教閏。每月各有幾天，也應當積一年的日曆，用歸納方法整理出來。計算各人的生年月，實足年齡等是極切實的材料。歷史有好多可以聯絡的地方。名人的生死年月便是一例。

秒太短，要用賽跑，拍照，測驗，按脈，呼吸等才感到需要。好得秒數和鐘表滴得聲有密切關係，所以用了有秒針的表，也可以由好奇心引起學習的動機。宜直觀跑步，走路，工作，呼吸等的秒數。

化聚等法，可以仿照斤兩，丈里等分步進行。都可以和乘法聯絡了學。

初學面積，宜用厚紙做一尺四方的單位量器，用此量器去量黑板，地板，窗，門，桌子，等面積。每量一個單位，用粉筆線劃出。這是使學生明白方尺的基本觀念。後來叫學生實習。如此實太周折。並且每次量後總有粉筆線劃出的方格可見，可以引導學生明白不必用厚紙量器，只須在長方形或正方形的邊上用尺量，把尺數相乘，便可以得到面積的方尺數。此時學生必十分快活。於是再一一如法實習，看新法求得結果，是否和原來量得的相同。學方寸，可以同樣方法，叫學生實習量，書，紙，日曆，簿子，石板，等長闊的邊，相乘求得面積的方寸數目。再可以叫學生在白紙上畫正方形，長方形，而劃分一寸見方的方塊用來證驗。同時也可以學方分。算式中要長闊用同單位，千萬不要記名。三寸二分長，八分闊的條紙，面積是 $32 \frac{8}{256}$ 方分，即 2 方寸又 $\frac{56}{56}$ 方分。一方尺有一百方寸；一方寸有一百方分，只要畫了圖，劃分作小方格，極容易明白的。方丈宜在場地上去學。一方丈有一百方尺，也可

以實地用石灰線劃出。從此可以叫學生學量教室、廊、場地、園地等面積。又可以用縮尺學繪教室平面圖、校舍平面圖、以及校園計劃圖等。

地積改算畝分厘毫，可以和上述教室校舍校園面積等聯絡下去。只須教學生地積不用方丈，常用畝分、厘毫，然後把已求得的方丈數改算就是了。又可以叫學生各自量自己家庭、田地、園地的大略面積，各各改算畝分厘毫。這事在大都市很不容易實行，宜帶領學生到空地、體育場、公園、郊外去實習。改算成了畝分厘毫，完全十進，不必化聚，可以學加減乘除各法。

方里不易直觀，應當和地理聯絡了教，在地圖上，照縮尺求。可以用學校附近地圖劃出一方里的區域，四方里的區域，九方里的區域等，看區域內包含些什麼地方。這是初步的學法，以後常和地理聯絡。

立方用處很少。先用一寸立方的積木堆積起來，求體積和長闊高的關係。一立方尺有一千立方寸，也可以由此推算出來。同時量各種箱子、匣子、櫃子、抽屜的長闊高，求體積。算式中只要單位同，不必記名。譬如四寸長三寸闊，二寸高的匣子，求體積是 $4 \times 3 \times 2 = 24$ 二十四立方寸。立方丈，和立

方尺的關係，可以仿照上述方法。以一塊積木代一立方尺，便可以明白室內空氣有多少立方丈，可以量了教室的長闊高而求得。各室一一求，再各生回家去量了房屋求。由此可以算出每人占的空氣，不開窗門以及臥室人多不開窗的空氣不够等，都是絕好實用的資料。此外開溝築堤，建牆等也是切用的材料。沙土石方宜先參觀。計算也不難，只須把立方丈數用10除便是了。

以上各種都應該實習，計算實際問題。化聚法練習，不過是幫助各等間關係的記憶罷了。能多做實際問題，關係也能自然的反復而熟習。化聚法練習稍稍減輕，也可以的。

第三節 非十進諸等數的四則算法

諸等數的加減乘除，用途實在比上述各種實際問題來得少。非十進諸等數的四則算法，應當特別分教。頂主要的困難點在於進位。分述如下：

一、加法，如 $\begin{array}{r} 40 \text{ 丈} \\ 90 \\ 52 \\ \hline 182 \end{array}$ ，
 $\begin{array}{r} 7 \text{ 里} \\ 3 \\ 6 \\ \hline 13 \end{array}$ ，
 $\begin{array}{r} 14 \text{ 兩} \\ 12 \\ 11 \\ 0 \\ \hline 37 \end{array}$ ，
 $\begin{array}{r} 4 \text{ 斤} \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ \hline 15 \end{array}$ ，
 等。先從丈位或兩位加起，182丈是一里又2丈；37兩是2斤又

5兩。所以在丈下寫2，進1；在兩下寫5，進2，里位如1736，共17里；斤位如24253，共

16斤。答數17里2丈；16斤5兩。寫式如：

$$\begin{array}{r}
 7里40丈 \\
 3 \quad 90 \\
 6 \quad 52 \\
 \hline
 17里2丈; \\
 4斤14兩 \\
 2 \quad 12 \\
 5 \quad 11 \\
 3 \quad 0 \\
 \hline
 16斤5兩,
 \end{array}$$

進位的務用心算，勿要寫出。

二、減法

如 60日

$$\begin{array}{r}
 18年 \quad 60日 \\
 12 \quad 185 \\
 \hline
 \end{array}$$

5時 35分
3 40

等。先做日位或分位，60日不能減185日，想：1年又60日即425日。185日再

要加幾日才是425日，照平常減法，425得240日。在日位下寫240日，進1，年位13再加5成18，所以在

年位下寫5。答共5年又240日。又分位35不能減40，1時35分，即95分，照平常減法，95得55分。在

分位下寫55，進1。時位4，再加1成5，在時位下寫1。答共1時55分。寫式如：

$$\begin{array}{r}
 18年 \quad 60日 \\
 12 \quad 185 \\
 \hline
 5年240日; \\
 5時 \quad 35分 \\
 3 \quad 40 \\
 \hline
 1時 \quad 55分,
 \end{array}$$

三、乘法

4斤12兩

$$\begin{array}{r}
 50里100丈 \\
 15 \\
 \hline
 \end{array}$$

等。先乘兩位，12得48，24得288，兩聚成斤18

$$\begin{array}{r}
 16)288 \\
 16 \\
 \hline
 128 \\
 128 \\
 \hline
 \text{進} \\
 18 \text{斤。再乘} \\
 \text{斤}
 \end{array}$$

位， $4 \frac{24}{96}$ 加進的 18 斤得 114 斤。得共 114 斤。寫式如：
 4 斤 $12 \frac{24}{96}$ 兩
 $16 \quad 48$
 $8 \quad 24$
 $\hline 96 \text{ 斤 } 288 \text{ 兩}$
 $114 \text{ 斤 } 0 \text{ 兩}$
 又先乘丈位
 100
 15
 $\hline 1500$
 丈聚成

里， $8 \frac{60}{180}$
 $180 \overline{) 1500}$
 $\quad 1440$
 $\quad \hline \quad 60$
 進 8，再乘里位 $50 \quad 15$
 $\hline 250$
 50
 $\hline 750$ ，加進位的 8 里，得 758 里。寫式如：
 $50 \text{ 里 } 100 \text{ 丈}$
 $\quad \quad 15$
 $\hline 250 \quad 500$
 $50 \quad 100$
 $\hline 750 \text{ 里 } 1500 \text{ 丈}$
 $758 \text{ 里 } 60 \text{ 丈}$

四、除法，第一種除數是非諸等數，如：

$$1 \text{ 斤 } 4 \frac{22}{32} \text{ 兩}$$

$$32 \overline{) 41 \text{ 斤 } 6 \text{ 兩}}$$

$$\quad \quad 32$$

$$\quad \quad \hline 9 \quad 144$$

$$\quad \quad 150$$

$$\quad \quad \hline \quad \quad 128$$

9 斤 6 兩共 150 兩，再除。得 $4 \frac{22}{32}$ 兩答共 1 斤又 $4 \frac{22}{32}$ 兩。

22 先除斤位，得 1 斤，餘 9 斤。併入兩位

若逢

$$45 \overline{) 3 \text{里} 30 \text{丈}}$$

時，里位不能除，三里併入丈位共 570 丈，用 45 除，寫式如下：

$$12 \frac{30}{45} \text{丈}$$

$$45 \overline{) 3 \text{里} 30 \text{丈}} \\ \underline{540} \\ 570 \\ \underline{45} \\ 120 \\ \underline{90} \\ 30 \\ \underline{30} \\ \text{得，} 12 \text{又}$$

30
4

丈。

第二種法數，也是諸等數，如

12 兩

用 6 兩

除時，應先把兩個數目，一律化作兩，

7 斤 12 兩

成

124 兩；

3 斤 6 兩

成

54

兩，然後照平常除法算

$$2 \frac{16}{54}$$

$$54 \overline{) 124} \\ \underline{108}$$

16 答

$$2 \frac{16}{54}$$

這答數決不是斤兩。

諸等的檢答法，一切和整數同。

第四節 幾何形體

小學生所學幾何形體，不過是些名稱。長方正方，當然和面積聯絡了學。立體，當然和立體積聯絡了學。此外不過是些並行線，角，三角，菱形，圓形，橢圓，圓柱體等幾種。學習時不必計算，也不必講什

麼幾何定理。頂主要的是觀察。譬如觀察鐵路軌道，物品上的雙線邊，格子，信箋等等，可以學習並行線。觀察以後便是作圖，學作信箋方格等，都要使用並行線的畫法。角，三角，菱形，圓形等，都可以學習作圖方法。只要有一枝尺，一個圓規，便可學習。學時宜多方應用，畫成各種幾何形的圖案。如此，名稱，作圖方法，與形狀三者經過多方練習以後，可以連結得牢固。做手工時有好多可以利用的機會。教材宜分插各處，不能集合。

第七章 小數

中國人向來用慣小數，不用分數。小數是我們固有的，分數是輸入的。西洋却先有分數；小數的發明在分數以後。我們有所謂斤兩法的，就是把兩數變成斤的小數。譬如『一退六二五』就是一兩變成斤的小數，應作、0.625的意思，不過我們的小數，向來沒有小數點的。這是應當補足的。

小數有附帶單位名的，也有不帶單位名而抽象的。學習小數，當然應從有單位名的入手。第一步可以和十進諸等數聯絡了教。十進諸等數的寫法，要把各單位名字一一詳細的寫出。在單位名沒有純熟時，當然應該一一寫出，如

5	尺	分	升	錢
4	丈	寸	斗	兩
2	尺	6	寸	6
8	石		7	

……等。若是單位的名稱及關係既經純熟時，自然覺

得詳寫單位名的累贅，這時候便可以把小數點的用法介紹給學生。用了小數點，只須把點左一位

的單位名寫出，其他不必多寫。所以小數點的功用是在指定單位。譬如：4.5丈，2.64尺，石兩，8.68石，7.4兩等。同時可以教\$的洋碼符號。 $\$1.25$ 即大洋一元二角五分。比1元2角5分寫法要簡便許多。

第二步可以使學生明白小數點指定的單位，可以移動。譬如：4.5丈可作45尺，2.64尺可以作264丈，26.4寸，264分，8.68石可

以作86.8斗，868升；7.4兩可以作74錢分，740等。同理，3升可以作.3斗，.03石；2.5寸可以作.25尺，.025丈，3合可以作.3升；.03斗，.003石。此等練習可以使學生習熟單位的關係，同時又可以明白習熟小數的寫法。

第三步是做加減法，仍舊和十進諸等的加減法聯絡。在十進諸等裏加法如：

$$\begin{array}{r}
 2\text{石}5\text{斗}4\text{升} \\
 3\quad 6\quad 6 \\
 4\quad 9\quad 8 \\
 2\quad 5\quad 0 \\
 \quad 4\quad 7 \\
 3\quad 0\quad 6 \\
 \hline
 17\text{石}2\text{斗}1\text{升}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 7\text{兩}2\text{錢}5\text{分} \\
 \underline{38} \\
 58\ 0\ 0 \\
 \underline{217\ 5} \\
 275\text{兩}5\text{錢}0\text{分} \\
 \text{除法} \\
 \text{如:} \\
 4\text{斗}4\frac{1}{5}\frac{0}{8}\text{升} \\
 \hline
 56) 24\text{石}7\text{斗}4\text{升} \\
 \underline{22\ 4} \\
 2\ 34 \\
 \underline{2\ 24} \\
 10 \\
 \text{改用} \\
 \text{小數後,} \\
 \text{乘法} \\
 \text{如:} \\
 7.25\text{兩} \\
 \underline{38} \\
 5800 \\
 \underline{2175} \\
 275.50\text{兩} \\
 \text{除法} \\
 \text{如:} \\
 4\frac{1}{5}\frac{0}{8}\text{石} \\
 \hline
 56) 24.74\text{石} \\
 \underline{224} \\
 234
 \end{array}$$

第四步是做乘法，法不是小數的。仍舊和十進諸等數的乘法聯絡。在十進諸等真乘法如：

時應當一律改用石或斗或升的單位，如

$$\begin{array}{r}
 3.00\text{石} \\
 .15 \\
 \underline{.26} \\
 3.41\text{石} \\
 \text{或} \\
 30\text{斗} \\
 1.5 \\
 \underline{2.6} \\
 34.1\text{斗} \\
 \text{或} \\
 300\text{升} \\
 15 \\
 \underline{26} \\
 341\text{升}。
 \end{array}$$

點，跟了單位。不過做加減法時應當一律用同樣的單位。這是應當特別注意的。譬如 3石，1.5斗，26升，做加法

減法如：

$$\begin{array}{r}
 36\text{元}2\text{角}0\text{分} \\
 \underline{25\ 8\ 4} \\
 10\text{元}3\text{角}6\text{分}, \\
 \text{改用} \\
 \text{小數後,} \\
 \text{加法} \\
 \text{如} \\
 2.54\text{石} \\
 3.66 \\
 4.98 \\
 2.50 \\
 .47 \\
 3.06 \\
 \hline
 17.21\text{石} \\
 \text{減法} \\
 \text{如} \\
 \$36.20 \\
 \underline{25.84} \\
 \$10.36 \\
 \text{單位可以移動祇要小數}
 \end{array}$$

224

10 乘法答數裏的小數點的地位，當然要跟了單位而定，所以不生什麼困難。一切說明，有實

在的單位可作例證，7兩另用38乘，當然270多兩，決不會27兩多，也決不會2700多兩。24石多用56除，當然只好4斗，決不會4石，也決不會4升的。

第五步由有單位名的小數，引導到不帶單位名的抽象小數上去。此時讀法，譬如1.25讀若「又小數二五」或「又點二五」就是了。並且做不記單位名的小數的加法，減法，乘法，除法。乘除的法數，當然不合小數。例如：加法

$$\begin{array}{r} 12.15 \\ .04 \\ 1.87 \\ 256.5 \\ 3.216 \\ .007 \\ 40 \\ 25 \\ \hline 338.843 \end{array}$$

注意空的地位及小數點在一直線上。減法

$$\begin{array}{r} 32.8 \\ 15.645 \end{array}$$

17.155

被減數中右端無0，減時要當他有0在。乘法

$$\begin{array}{r} 3.75 \\ 108 \\ \hline 3000 \\ 375 \\ \hline 405.00 \end{array}$$

除法

$$\begin{array}{r} 44 \\ 56 \overline{) 24.64} \\ \underline{224} \\ 224 \\ \hline \end{array}$$

等。除法先

做除得完的。除不完的見後。

第六步，法含有小數的乘法，可以和面積體積求法聯絡了教。譬如：一尺二寸的正方形，求面積時，從前用12寸的12和12乘，作 $\begin{array}{r} 12 \\ \times 12 \\ \hline 24 \\ 12 \\ \hline 144 \end{array}$ 方寸，即1方又4寸。若用尺作單位，便成 $\begin{array}{r} 1.2 \\ \times 1.2 \\ \hline 2.4 \\ 12 \\ \hline 1.44 \end{array}$ 即

一方尺又44方寸。又如3尺2寸長，8寸寬的長方形，從前用寸做單位作 $\begin{array}{r} 32 \\ \times 8 \\ \hline 256 \end{array}$ ；256方寸，即2方尺又56方寸。若用尺做單位，便成 $\begin{array}{r} 3.2 \\ \times 0.8 \\ \hline 2.56 \end{array}$ 。由此可以進一步學沒有單位名的小數乘法 $\begin{array}{r} 3.6 \\ \times 0.4 \\ \hline 1.44 \end{array}$ ；

$\begin{array}{r} 36 \\ \times 0.4 \\ \hline 144 \end{array}$ ； $\begin{array}{r} 36 \\ \times 0.4 \\ \hline 144 \end{array}$ 等。不必教死記小數位數的呆笨方法，應當叫學生明白實在的大小多少應有

若干。細分步驟有下列各項。

1. $\begin{array}{r} 2.52 \\ \times 3.4 \\ \hline 1008 \\ 756 \\ \hline 8.568 \end{array}$ 3 又另乘 2 又另，至少要在 6 以上，因為 3 乘 2 是 6，所以答一定是 8.568，決不是 .8568，也決不是 85.68。

2. $\begin{array}{r} .52 \\ 3.4 \\ \hline 208 \\ 156 \end{array}$ 3 又另乘 5 至多不過 1 又另。可用十進諸等數 5 石作例證，3 乘 5 至多

1 石有另。所以答是 1.768，決不是 17.68，也決不是 .1768。

3. $\begin{array}{r} 3.17 \\ .48 \\ \hline 2536 \\ 1268 \end{array}$ 1.5216 .48 不滿一半，乘 3，至多不過 1.5 可用長方求面積作例證，四寸多寬，三尺

長，至多一方尺另。所以答 1.5216 決不是 15.216，也決不是 15216。

4. $\begin{array}{r} .26 \\ .84 \\ \hline 104 \\ 208 \end{array}$.2184 仍可用長方求面積作例證。二寸多寬，八寸多長的，面積決不滿一方尺，

不過二十方寸左右。所以 .2184 決不是 2.184，更不是 21.84。

5. $\begin{array}{r} .2 \\ .3 \\ \hline .06 \end{array}$; $\begin{array}{r} .13 \\ .13 \\ \hline 39 \\ 13 \end{array}$.0169, 等。仍用正方長方求面積作例證，以尺作單位，.2 .3 就是二

寸和三寸。面積 6 方寸，用方尺作單位時，一定是 .06，決不是 .6，更不是 6，同樣一寸三分的正方形面積，只有一方寸另，所以 .0169，決不是 .169，也決不是 .00169。

$$\begin{array}{r}
 6. \\
 \underline{.04} \\
 .0068; \\
 \underline{.06} \\
 .0080 \text{ 等。}
 \end{array}$$

也可以用上述面積求法作例證來說明，然後決定答裏的小數。

以上的乘法只算是初步，要和下面折扣百分聯絡了，多練習以後，學生對於這種種乘法可以格外的明白純熟。所以頂好先做了些面積，等到折扣百分以後，再學不有單位名的法小數的乘法。那末這裏的六項一律改作求面積的問題，叫學生多量的練習就是了。題目可以用表的形式出，譬如求下列各題的面積：

長	1.25尺	3.4寸	7.26尺	.35尺	.4尺	.2尺	.06丈	.04丈
寬	.8尺	.5寸	.48尺	.52尺	.3尺	.1尺	.3丈	.02丈

第七步是關於小數的除法。這種應當細分步驟。

1. 整數除整數，除不完的。在從前是用分數形式記出餘數，便算了事。現在可以除下去，得到商裏的小數。並且教四捨五入等。四捨五入之前，先要定除到幾位為止。要除到幾位，先須看所

要精密的程度而定。愈精密，小數位子愈多。平常不外三位或四位而止。若定三位，宜除出四位，然後把末了一位四捨五入。若定四位，便應除到五位，然後把第五位四捨五入。譬如：

$$\begin{array}{r}
 12.8275 \\
 29 \overline{) 372} \\
 \underline{29} \\
 82 \\
 \underline{58} \\
 240 \\
 \underline{232} \\
 80 \\
 \underline{58} \\
 220 \\
 \underline{203} \\
 170 \\
 \underline{145} \\
 25
 \end{array}$$

除時，整數用完時附 0，商中應作小數點說明，整數

到此為止。

可用十進諸等數證明： 372 算石數時，答應 12 石，8 是斗了，所以應在 2 後用，記明。除到四位小數，未

是 5（5 以上 6 7 8 9 亦同）應當在第三位 7 加 1，作 8，所以答是 12.828 弱。附一弱字，所以表明五入，

實際要比 12.828 稍微少些。若答數是 12.8273 （末位 4 以下 3 2 1 亦同）便可捨去，作 12.827 強。附一強字，所以表

明四捨，實際比 12.827 稍微多些。

$$\begin{array}{r}
 2. \\
 \hline
 .55172 \\
 29 \overline{) 16} \\
 \underline{145} \\
 150 \\
 \underline{145} \\
 50 \\
 \underline{29} \\
 210 \\
 \underline{203} \\
 70 \\
 \underline{58} \\
 12
 \end{array}$$

等，整數除整數商是小數。仍可用十進諸等證明，

開手29除16兩不夠的，所以當是錢除，商便是5錢開始了。答五位，末2，四捨。答 $.5517$ 強。若是290除16

答便是 $.0552$ 弱了。因為錢位也不夠除要分位才可得5，所以商5在分位，即 $.05$ 兩。全答 $.0552$ 弱。

$$\begin{array}{r}
 3. \\
 \hline
 1.2827 \\
 29 \overline{) 37.2} \\
 \underline{29} \\
 82 \\
 \underline{58} \\
 240 \\
 \underline{232} \\
 80 \\
 \underline{58} \\
 220 \\
 \underline{203} \\
 17
 \end{array}$$

等，整數除帶小數，從前除不完的，到被除數末一

位止。現在繼續除下去，到四位或五位，再四捨五入。答 1.283 弱。仍可用十進諸等作例證。丈被除數到 37.2

尺位止，除不完時可以再除寸，分……等下去。

$$\begin{array}{r}
 4 \\
 \hline
 29 \overline{) 1282} \\
 \underline{29} \\
 82 \\
 \underline{58} \\
 240 \\
 \underline{232} \\
 80 \\
 \underline{58} \\
 22
 \end{array}$$

等。商第一位便是小數。餘同前。例證仍可以用十進諸

等。3.72石，用29除，商第一位當然便是斗，決不會滿一石的了。答28強。若法是290，第一位商，斗還不够，

要升位才能除，所以答.01石，開始即是一升。全答是.0128，強。

$$\begin{array}{r}
 5. \\
 \hline
 7 \overline{) 942} \\
 \underline{7} \\
 24 \\
 \underline{21} \\
 32 \\
 \underline{29} \\
 82 \\
 \underline{58} \\
 240 \\
 \underline{232} \\
 8
 \end{array}$$

等，被除數是小數的。例證仍可用十進諸等。942兩用

7除，商第一位便是錢。答.1346弱。尺用29除，商第一位不是寸而是分。所以是.01開始，決不是.1開

始。答.013弱。

$$\begin{array}{r} 8. \\ \underline{.5965} \\ 2.9 \overline{) 1.73} \\ \underline{145} \\ 280 \\ \underline{261} \\ 190 \\ \underline{174} \\ 160 \\ \underline{145} \\ 15 \end{array}$$

等，被除數 1.7 不能用 2.9 除，所以商第一位便是小數。仍

1 元有另商到 1.2 後尙除不完，再照前繼續除下去。答 1.283 弱。決不是 12.83 也不是 1.283。

$$\begin{array}{r} 7. \\ \underline{1.2827} \\ 2.9 \overline{) 3.72} \\ \underline{29} \\ 82 \\ \underline{58} \\ 240 \\ \underline{232} \\ 80 \\ \underline{58} \\ 220 \\ \underline{203} \\ 17 \end{array}$$

等。仍可用十進諸等證明。3.72 元多，用 2.9 除，至多商

也不是 12 元，更不是 120 元。答 17，用 3 除答 11 多。所以答 12 元。不必死記小數位，應當從實在的多少想，答 12 元才合，決不是 1.2 元

$$\begin{array}{r} 6. \\ \underline{1.2} \\ 2.9 \overline{) 34.8} \\ \underline{29} \\ 58 \\ \underline{58} \\ 2 \\ 2.5 \overline{) 5} \\ \underline{50} \\ 50 \end{array}$$

等，法裏有小數，商是整數的。可用十進諸等證明。34.8 元用 2 一除

可以用十進諸等證明。1.73丈用2.9除，答不滿丈，所以答第一位一定是小數。答是.597弱。決不是5.97。若如

等1.73石用29.5除，商不但不是斗並且要在升位，答是.059弱。

$$\begin{array}{r} .0586 \\ 29.5 \overline{) 1.73} \\ \underline{1475} \\ 2550 \\ \underline{2360} \\ 1900 \\ \underline{1770} \\ 130, \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9. \\ \underline{11.7241} \\ 2.9 \overline{) 34} \\ \underline{29} \\ 50 \\ \underline{29} \\ 210 \\ \underline{203} \\ 70 \\ \underline{58} \\ 120 \\ \underline{116} \\ 40 \\ \underline{29} \\ 11 \end{array}$$

等。仍可用十進諸等證明。2除34石答17

石，³除34，答11石餘。2.9除34石，當然有11石多。答11.724強。

$$\begin{array}{r} 10. \\ \underline{.81081} \\ 3.7 \overline{) 3} \\ \underline{296} \\ 40 \\ \underline{37} \\ 300 \\ \underline{296} \\ 40 \\ \underline{37} \\ 3 \end{array}$$

等。仍用十進諸等證明。3.7除3兩不滿一兩，答從錢位

始。答。8.108。強。不是。若如 8.108。若如 29.5 除 3，商的第一位也是小數。3 石不能用 29.5 除。30 斗，便够 1 斗了。又如 29.5

除 2 時，2 石當然不够。29.5 除。20 斗仍不够，要作 200 升時，才可除。所以商第一位在升位，當作 .06 開始。

11. $\overline{3.7).42}$ 等，仍用十進諸等證明。42 尺用 3.7 除，商第一位總在寸位，所以商第一位的 1 是 1。

若是 $\overline{5.6).42}$ 時；4 寸不能用 5.6 除，要作分位才可以。所以商的第一位 7 是 .07。

12. $\overline{.24).96}$;
 $\overline{.24).12}$;
 $\overline{.24).1.92}$;
 $\overline{.32).19.2}$;
 $\overline{.24).9.6}$;
 等，只須用十進諸等證明，極容易明白的。96 石用 24 石除，當然

答 4 12 石用 24 石除，就是 1200 升用 24 升除，答是 50。
 1.92 石用 24 石除，答 8。
 19.2 石用 32 除，即 1920 升，用 32 升除，答

60，9.6 石用 24 石除，即 960 升用 24 升除，答 40。

13.

由12項推出去到除不完的，便成

$$\begin{array}{r} .24) \underline{.325} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .38) \underline{.216} \\ \end{array}$$

等。仍用十進諸等來證明， $.325$ 用 $.24$ 除，商第一

位當然是整數。 $.38$ 石
 $.216$ 石

時商的第一位決不夠1而是小數。又如

$$\begin{array}{r} .912) \underline{.0312} \\ \end{array}$$

則商的第一位要在小數第

二位。即三升裏決不滿9斗，連9升也不够。所以退下到小數第二位始。

14.

$$\begin{array}{r} .24) \underline{3.25} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .38) \underline{21.6} \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .45) \underline{221} \\ \end{array}$$

等仍照12項決定商的第一位。 3.25 元用 $.24$ 元除商的第一位在十位。 21.6 元用 $.38$ 元除，

商的第一位當在十位。 221 元用 $.45$ 除，商的第一位當在百位。 $.5$ 元除 2.5 元，商的第一位是單位。

以上各法頂好先用十進諸等做。等到折扣百分以後，再學不有單位名附記的各種小數的除法。又學習乘法不重在計算。計算是和整數一樣的。頂主要的是在答裏的位子及小數點。所以有

一種除法練習，不必做完，只要找出第一位商及小數點的位置子就完了。如此練習，可以節省計算的時間來，充分練習小數點的地位。

檢答是依舊要做的。凡做出答數來都要如整數一樣的檢答。檢答也可以決定小數位子的錯不錯。譬如

$$\begin{array}{r} \underline{.24} 9.6 \\ \text{的除法, 若答作 4 時, 檢答起來數目雖不錯而位子不合。} \\ \underline{.24} \quad 4 \\ \underline{\quad .96} \quad \text{不對, 應作 } \\ \underline{\quad .24} \quad 40 \\ \underline{\quad \quad .96} \quad 9.60 \end{array}$$

才對。所以答要40才對。

第八章 應用問題

應用問題這一個名字，實在有些欠妥。問題不一定要用文字來寫的。凡是要找出答案的，都可以算是一個問題。不知道人家姓名而要想辦法知道他，便是一個問題。不知道一封信有多少重，貼五分郵票寄往別地方去够不够，而拿信來秤一秤重量，也是一個問題。要知 25—1 一共有多少，也是一個問題。至於應用的意思，更被人誤用了。平常以為學過加法練習以後，用文字組織些事實來，叫學生看了文字做些加法，便算是加法的應用問題。這樣辦法有二個錯誤。一個是先後倒置。我們要叫學生學加法，先要使學生明白加法的意義，感到加法的需要，然後學起來才有生氣。照這樣講，應當先有加法的問題，問題裏要用加法，才能學習開始。若把應用問題放在加法練習以後，那末起先學的加法，究竟是爲了什麼學的什麼是個加法？不是只好叫學生盲目的跟了教員練習了嗎？

又一個錯誤是把應用問題做了各種方法的附屬品。其實應用問題的要點——也就是應用

問題的主要困難點，不在加法而在乎某種事實是需要加法，某種關係是需要減法的決定。若是加法後做加法的應用題，減法後做減法的應用題，那末學生可以不必思考，凡是應用問題的計算法總是和才學過的算法一致的。這樣的學應用題，不過仍是練習的變相，仍舊沒有使學生學習如何解答。

我們教應用問題，第一步應當就學生經驗範圍裏感覺到各種計算的需要。然後再教他們如何計算的方法。所以應用問題是開始就要用的，快不是到算法學會了才做的。此後計算技能的練習，當然是很重要的工作。但是同時仍宜使學生日常做應用問題，和技能的練習相間進行。所以起先的應用問題，十之八九是用學生日常的遊戲工作做材料的。小孩子生活裏，只有這種才是感到切身的，才覺得有解決的價值。

不過，常常在小孩子已知的範圍裏去玩，做也不是妥善的辦法。我們所謂教，是引導學生自己向外擴張，向上發展的意思。所以我們在第二步，一方面練習技能，一方面也宜把新的遊戲方法介紹給學生。使學生玩了新的遊戲，更從新的遊戲裏生出更進一步的計算的需要出來。不但是遊戲，

有許多故事，和日常的工作，行動，也很有好多需要計算的機會。好好利用，都是應用問題的資料。社會化算術教授書第一第二冊裏有好多具體的方法和例子。這書是商務印書館出版的。

上面第二步是實在的具體的應用問題。下面再進到第三步。學生日常生活比較簡單，需要計算方法和範圍往往只限於極淺近的方法。若是學校組織改善，各科教法革命，那末隨時隨地的實際應用問題也不在少數。譬如個人書籍用品的買入，個人的簿記，學校的賣販部，園藝，手工，地理，社會，公民，等以及級會，運動會，學藝會，種樹，遠足，旅行，學校新聞，通信，時事……各科，課外，多有應用問題的資料。這種材料不能編定在教科書裏，要教員平日留心，處處利用。有好多著名小學的實地報告中，這種例子不少。

第四步是更推而廣之。凡是實際遇不到的，由教員引起了動機做表演。表演是學生所歡迎的。表演又能使人設身處境，要學生設身處境的覺得需要解決，利用表演是頂好的方法。譬如表演開裁縫店可以需要學丈尺寸的問題。表演開米店，可以學石斗升。表演坐火車旅行，可以學時間，速率，以及其他和旅行有關係的種種問題。社會化算術教科書第一冊至第八冊裏都有。一二兩冊裏更

多。參看小學算術教學法（著者編譯，商務印書館發行）第四章第三節例子第一類。

第五步由表演而想像。使學生想像自己在問題裏。這實在也是算學的故事。每種應用題成功一件有趣的故事。有若干連續的問題組織在這故事的中心。問題的連續，不一定要上一題的答數做下一題裏用的數目。數目上或計算法上，儘可不連續。然而事實是有連貫的，決不是一題說牛，一題說燈，彷彿考題一般的，雜貨店式的。參看社會化算術教科書第一冊至第八冊及小學算術教學法第四章第三節例子第二類。現在教科書裏的應用問題却只以方法做了中心，附屬在某方法之後。問題的境遇是隨便亂拉，雜湊，事實沒有中心的。這一種的應用問題頂好淘汰不用。要用，只當是考題。既是考題，算法決不能限於新學的一種，應當把凡是以前學過的，都混和起來才對。

因為做這種想像的問題不能實在表演，或實際動作的——其實也不必實際動作或實在表演的。因為我們教學目的是要從具體裏引導學生到抽象的路上去，所以學生程度漸高應當漸漸離開具體的而進入想像的——所以應當教學生會用圖表圖解等來幫助想像。用線條，方格，以及各種圖形來代表問題裏的數量和關係。譬如有時間距離求速率時，若用一線代表全距離，把全距

離按照時間等分，每單位時間的速率，可以一目瞭然。而這問題所以要用除法做的理由也在圖形裏表現出來的了。社會化算術教科書各冊裏有好多問題叫學生畫圖形，也可以參看。

所謂想像的問題，也並不是一定要連續幾個的。有時問題做得好，一個問題也能成功一個故事。文字淺顯而生動，內容豐富，就是這種問題必備的條件。平常的應用問題，往往貪圖省字，弄成骷髏一般。譬如：『百粒豆手中搶到四十八粒，散落地上的只拾了一半，問散失多少？』這一題枯燥已極。若改成：『玉英跟爹爹出去，在靈隱買了一串珠串。數數看，共是一百粒。後來戴了幾天，一不小心，珠串的線忽然斷了。珠子落在地上，四面滾開去。幸虧玉英搶得快，有好多搶在手裏。手裏的共四十八粒。別的落在地上。四面找，找到了落地的一半。所以玉英不見了……粒珠子。』便成功了一則故事了。有人做過試驗，後式比前式容易解答。

但是程度漸漸的進步，學生應當會得用字代了所求的數，列成方程式來解答問題。這便是第六步。到了這時候可以學習方程式的寫法及「+」，「-」，「×」，「÷」，「=」等符號的意義和寫法。這樣的學去，加和減合成一個式子。乘和除亦然。譬如 $5+4=9$ 的式子，以及 $3+2+5+6=16$ 的式子，

凡是所求數目在 = 號後的要求加；在 = 號前的便要減。又如 $7 \times 8 = 56$ 凡是求 56 的要乘；求 7 或 8 的便是除。照此，前面珠串問題便成下式： $48 + 2 \times 26 = 100$ 所以先做 $100 - 48 = 52$ 的減法，再做 $26 \div 2 = 13$ 的除法，便可以得 26。這是最後的一步，由此便引導到方程式去。但是千萬不能教得太早。太早了容易流於機械。要在學生做應用題很純熟，能自己覺悟到其中關係時，然後一經說破，學生乃恍然大悟。從此運用方程式益加便利。若死記方式，不如不教。

學習橫寫形式及「+」，「-」，「×」，「÷」，「=」等或移早在第四步與第五步間亦好。過早反而使學生混亂。小孩子解決實際問題及表演問題時，他們不管什麼加減乘除，也不自知要用什麼方法，自然而然的做起來了，學過橫寫形式以後，可以叫學生練習看了問題，寫成橫式，再記一個大約的答數，不再詳細計算。這方法可以利用好多計算的時間來學習或討論問題的解答法。若要詳細求答數的，在第六步以前儘可不列橫式，也不必記什麼單位名（諸等一定要記名）譬如前例珠串

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 48 \\ \hline 52 \\ - 26 \\ \hline 26 \\ \div 2 \\ \hline 13 \end{array}$$

無論在第幾步，如逢兩數或兩數以上比較時，儘可稍微介紹些負數的觀念。就是第一步的遊戲，若逢甲得6分，乙得8分時可以問：『誰勝？』『勝幾分？』便作 $8-6=2$ ；答乙勝2分。也可以問：『誰敗？』『敗幾分？』儘可以作 $6-8=-2$ ；答是甲負2分。『-』負號作比較少或敗的意思。其他凡逢比較的減法多可以如此稍進，也可以略為學些正數和負數的加減。完全用應用問題，決不是空練習。這一方面的詳細可以參看中華教育界第一卷第一期『小學算學裏代數的根苗』一文。

應用問題取材的資料除了上面第六章諸等數裏所列舉的及本章以上各步所述各方面以外，平常總是買賣的居大多數。我們平日使用算學的，確也是買賣的問題居多。但是農民的耕作，佈種，收穫，病害，副產，畜牧，飼料；工人的工作，圖樣，原料，工具，運輸，交通，時間；社會地理的統計；居家的衣食，用具，燈火，飲水，預算，決算；以及學校或地方上的經濟，統計，衛生，清道，火政，路政，……等等都是很好的材料。只要學生能力够，興味足，和社會地理自然手工農業公民等聯絡了，應用問題的背景格外的好，而經過計算以後，別科的經驗也可以格外的透澈。但是要注意，從第四步起才可以漸漸引入。大概第五步可以用得更多些。其中有學生及學校家庭裏容易得到實在經驗的，可以在第三步時

用。

其他可以參看小學算術教學法第四章第三節。

第九章 關於百分的各種

第一節 折扣

我們向來的折扣和西洋的百分折扣有不同的地方。他們是扣去百分之幾，我們是折剩多少。定價一元的東西實售八角半時，我們叫八五折，他們叫扣百分之十五。我們的折是單位，在第一位小數。他們的百分，也是單位，却拿第二位小數作主體。我們八五折，也叫八折半。他們却叫百分之八十五。

百分各種，宜用折扣開始。這是頂實際的，頂具體的。學生買教科書，用品等早有這種經驗的了。第七章小數乘法，有一部份法是小數的，應該和折扣聯絡。其實還可以排在折扣百分之後。開始教時，當然用買賣做資料。第一步應當使學生學折扣的意義，這是頂要緊。這實在是一個比率，並且是小於一的比率，所以較為抽象一些。宜用定價一元實售八角，定價一元實售七角，……等簡易心

算題歸納出「折」的一個名字。並且知道是一個小數。八折即 0.8 ，七折即 0.7 ，九折，六折，即 0.9 ， 0.6 ，五折一名對折。四折，三折，等又有倒六折，倒七折等別名。同時做二元實售一元四角，五元實售三元，……求幾折的題目練習。

第二步是學習八五折，七折半，二五折，……等名字。仍用買賣做材料求一元實售八角半，一元實售五角六分……等簡易心算題，歸納出「八五折」，「五六折」等名字，並且知道是二位小數。八五折即 0.85 ，五六折即 0.56 ；同時做二元實售一元五角，七元實售五元八角一分，等求幾幾折的題目練習。

經過這二步以後，小數便有一個名字，在買賣中第一位小數叫折。幾折，幾幾折的意義，既然明白以後，便可以學「定價五元四角，八五折實價多少？」等關於各種買賣的題目。並且可以學開發票。這是第三步。由此便可以證明第七章第六步的法小數的乘法。那種乘法，頂好移在這種第三步之後。用買賣問題算，便是這裏的第三步。不用買賣問題算，便是第七章第六步的小數乘法。

第四步是「買某物打了七四折時，實付二元五角九分，定價多少？」等的題目。這種題目做過

以後，可以引渡到第七章第七步12, 13, 14, 各項法小數的除法。

折扣中還有什麼雙九扣，七折八扣等，不過是一種折了又折的意思。雙九扣就是八一折，七折八扣，便是五六折。先學時可以叫學生分二次做。後來再教他們這種簡便的方法，就是用心算二次折扣，乘成功一個數目。 $.9 \text{—} .81$ ； $.7 \text{—} .8 \text{—} .56$ ，然後再做。這是第五步。算時題目可以做求實價，也可以做求原來的定價。

第二節 成分

折扣只限於買賣，成分却是普遍的比率。農家收成，商店交易，雨量，生產……一切都用成分。既學過了折扣，再學成分時，不過是一個別名罷了，意義也容易明白。不同的即是第一位小數，分是第二位小數，折扣却專指一位小數說的。

入手當然先要明白成分的意義。可以用學生請假等做材料。譬如一百學生到了七十人，若說七折是不通行的。不是買賣時，我們叫做七成。於是同折扣第一步一樣，練習求幾成。這是第一步。

第二步，可以仿照折扣第二步的樣子，使學生明白一百個字寫了六十八個，不叫六八折而叫

寫了六成八分。再練習求幾成幾分的題目。

第三步，也可以仿照折扣第三步的辦法，求人口三千七百萬的九成六分等。接下去便可練習第七章第六步法小數的乘法。

第四步，也可以仿照折扣第四步的辦法，求幾成幾分的原額多少。接下去便可練習第七章第七步12, 13, 14各項法小數的除法。

第五步又是一個別名，就是教學生，不論折扣，不論幾成幾分，可以統統採用二位小數，叫做百分。所以八折八成本是.8；若呆定作分，便成功80分即80，叫做百分之八十。七五折，六成三，當然作.75，即百分之七十五及百分之六十三。並且教%的符號，75% 63%等寫法。練習題目可再細分，先求百分之幾十，再求百分之幾十幾……等如上述的一，二，三，四各步。

第六步，教百分之三，百分之五等不滿一折，不滿一成的意義及寫法。03 05即三分及五分。寫時可作3% 5%。練習也可以再細分，先求百分之幾，再如上述三步，四步等，逐漸進行。

第七步，總結束到一個公式： $\frac{\text{小數}}{\text{小數}} = \frac{\text{幾成}}{\text{幾成}}$ 然後照第八章第六步的說法，以後解決百

分題目，可以用方程式。只要有這一個公式，切切不可照從來的用三個公式。不過公式的歸納要在最後，太早教了，反而容易使學生混亂。

成分習題的材料可以利用地理，工業裏，學校裏，本地的，各地的，世界的，各種統計。自然研究裏的混合物成分，以及溶解度，合金，化學工業製造配合方案，……等等都是絕好的資料。

有一個特別的注意，就是在第六步後問題裏要夾「去年米價平均每石十元五角；今年平均價每石十二元五角五分。照去年做標準，今年米價是去年的百分之幾？」等題目。這種答數是120%此種比百大的百分數，從前不很顧到，所以學生遇到了要發生困難。現在的物價指數等，常要用120%150%等，所以要和96%7%等一樣的看重，一樣的練習。就是照第三第四步求子數；求母數時，也常要插入過百分之百的材料。

第三節 利息

利息也是百分法的一種，不過多一個時期。第一步入手之初，應當先從儲蓄借貸等使學生明

白利息的意義。借貸或者學生一時不易明白，可以先從組織儲蓄會開始。使學生知道，若干錢存放滿若干時期以後，可以生出若干的利錢來。其次，便是教何以錢能生錢的道理。存放的錢由銀行或店家拿去經商或借給別人經商。經商而有盈餘，用若干來作借貸的酬報。因此儲蓄者可以得到利息。到此，學生可以明白借貸和利息的關係了。接着便學存或借若干，一年後得利或給利若干而求利率。並且學利率的名稱叫做幾分幾厘。幾分幾厘，即成分裏的幾成幾分，即百分之幾。

第二步，是學求利息的。譬如存洋三百元，利率八厘，一年應得利多少等。時期總是一年的。這一種和成分的第三步彷彿。

第三步，仍是求利息，不過時期不限一年，可以用二年三年五年等等。不過只是整數的年數，不必用有奇零的。

第四步，學月利。要注意月利一分是百分之一即1%，月利一厘是在小數第三位，此外月利的時期應當用月份作單位。一年作十二個月算。

第五步，學銀行儲蓄六個月一結的方法，只須把年利的利息折半照第二步做便是了。

此外日利，複利不必教的。即使要教，也只須教表的用法就是了。

公債股票等投資問題，不過利息的應用。意義的學習，當然仍可以用表演入手。意思明白以後，習題，宜切近實際。平常投資問題，像「百元票面的股票，買入時市價九十一元，股票去年給利息每股八厘。照買入的市價算，實際利率是幾%？」等頂是普通民衆所必需的。其他銀行裏商場裏專門的算法，不是商業學校，可以不必教學。保險可以看小學算術教學法第四章第二節。

第十章 分數

小學裏算術，照上面幾章教學，如能件件有相當成績，已經是很好的了。但是人家一定要說缺了一部份極重要的分數。我說分數是不重要的，中國學生儘可不學。西洋人小數的發明在分數之後，所以分數靠着因襲的勢力苟延殘喘的還留存着。英美的諸等不是十進的居多，所以用些簡便的分數來計算，有時的確是比較的便利。用米突制的德法等國，日常已經不需要用分數了。中國諸等也是十進的居大多數，所以日常計算，儘可不用分數。

有人說用了分數，計算結果，要比小數精確。小數若逢除不盡的，只好四捨五入。這話未免有些不對。試看工程師，統計家……一切重要精密的計算，却偏偏丟開分數而用小數。三角函數，對數等，總是用小數的，從來沒有看見過用分數的。重要精密的計算，那一個答數不是用小數的。我們只在公式內看見用分數的寫式來代除法，我們從來沒有看見過測量，設計，統計等，結果有用分數作答

案的精密與不精密在於小數位的多少，不能說小數一定不如分數的精密的。英尺是非十進的，然而測量家用的英尺却不作十二寸而是十等分的。這可見英美人自己也知非十進的不便，所以重要的測量有改向十進的趨勢呢。改向十進，便是丟開分數而用小數。

有人說分數乘除中有約分的簡捷方法，純用小數，計算時却要多少不少的冤枉。我說這不是一定要學分數的理由。我們平常的除法中，大可以利用約分相同的簡捷法。第一步，先學用同數把除法裏的法數和被除數除了，商是不變的。譬如

$$\begin{array}{r} 2) \cdot 8 \\ 4) 16 \\ 10) 40 \\ 20) 80 \\ 200) 800 \end{array}$$

等結果是相同的。第二步再練

習，使學生凡逢

$$25) \overline{65}$$

$$64) \overline{8832}$$

等題目時，先約小成

$$5) \overline{13}$$

$$8) \overline{1104}$$

$$2) \overline{551}$$

等，然後再除。這樣，不過是除法中的一

個簡便方法罷了，不必硬拉到分數裏去。有乘法法連貫的，至多教了用「一」代「÷」號，乘除連寫一式內，先約小了，然後再求結果，像

$$\frac{54 \times 36}{48}$$

即

$$\frac{54 \times 3}{4}$$

即

$$\frac{27 \times 3}{2}$$

即

$$40.5$$

2) 81

這仍不過是乘除的簡

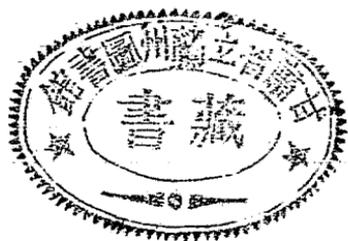
捷法，不關分數的。懂了這種簡便方法及寫式以後，不懂分數，不生問題了。其實 $81 \div 2 = 40.5$ 等形



第十章 分數

式可以刪除，自始便用 $\frac{81}{2} \parallel 20.5$ 就可以了。

即使有人反對這說法，以為分數尚有存在的價值，那末，在中學裏去學。小學生總可以不必學的。為實用論，分數完全無用，已如上述。小學生的算術是拿實用做目標的。



中華民國三十七年二月文庫本第一版

(39785.5)

國民教育文庫
小學算術科教學法一冊

定價國幣貳元伍角

印刷地點外另加運費

* 版 翻 *
* 權 印 *
* 所 必 *
* 有 究 *

著者 俞子夷

主編者 朱百農

發行人 朱經農
上海河南中路

印刷所 商務印書館

發行所 商務印書館
各地



3.08

2

1963年濟