近世幾何學

E. A. Askwith 著
方　俊　譯

商務印書館發行

序

幾何之學，種類不一。有以代數淺顯之法，明幾何深邃之理者，曰解析幾何，蓋以別於純粹幾何也。純粹幾何者，不以代數釋幾何，而煩難之處，莫由消除。例如圓錐曲線之性質，向以焦點與準線之關係闡明之，其煩難爲人所共知，此舊法也。自有近世幾何學以來，射影之理及對極法與反圓變換法三者，證明一切繁複之問題，不通於此者，必通於彼，法簡而易明，視解析幾何爲尤便焉。當今學校，已將近世幾何學一門，列爲課程之一，誠爲習高深算學者所必經之途；然尙無漢文之課本可用。科學之理，舉世皆同，而文字各國互異，我國以本國文字譯著科學書者尙尠，豈非憾事耶？今我友方君君選，費一載之功，譯成近世幾何學一書，我知其必有裨於當世矣。君選之於算學也，得一新書，似獲至寶，習之似味珍羞。我與君選嘗共事於河北，朝出作工，日暮歸來，我

倦即睡，或夜分睡醒，則荒村老屋中，一燈青瑩，君選輒猶埋首治算不已。蓋其勤如此，而其術遂日以精。顧我常怪君選何獨於算學深嗜如此，旋乃知其尊人德公先生，固以算學名家，嘗掌教於粵中；其叔祖子順先生，亦於四十年前，精究泰西疇人之術，然則君選承其家學，其嗜之也，固有所自來矣。

民國十七年八月二十四日李文瀾序

近世幾何學

目錄

近世幾何學

第一章

三角形之性質

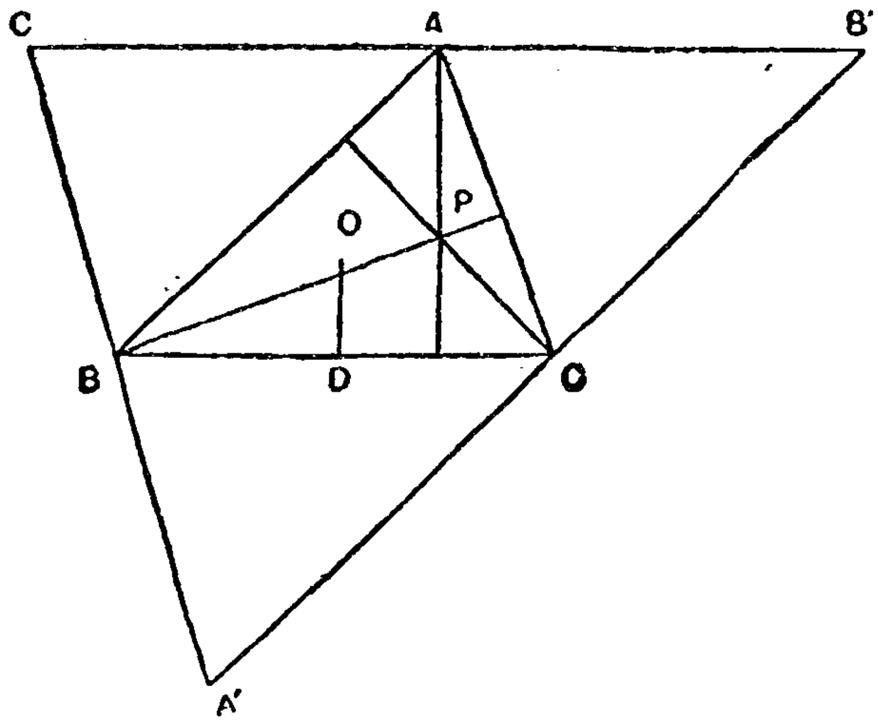
1. 本書所用之名詞，其義悉與初等幾何學同。其初等幾何學中所無者，則另加定義以說明之。

2. **定理** 自三角形三頂點所作垂於其對邊之直線交於一點(稱為垂心)。自此點至三角形一頂之距離等於外接圓心至其對邊之距離之二倍。

本定理之前部，已於初等幾何學中證明。茲證其後部。

自三角形之三頂 A,B,C，作三直線各平行於其對邊。此三直線交於 A′,B′,C′，如圖。

$\because$ $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 相似，其相當邊之比為 $1:2$,



故在△A'B'C'上任二點之距離，必等於 △ABC 上相當二點之距離之二倍。

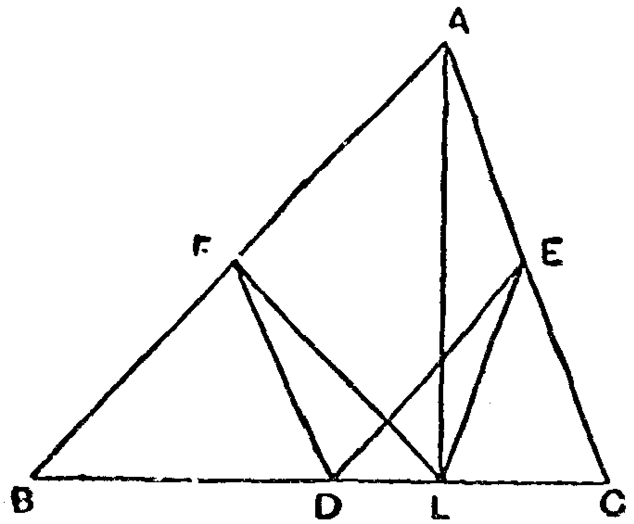
因 A，B，C 各爲 B'C'，C'A'，A'B' 之中點。故△ABC 之垂心 P，爲△A'B'C' 之外接圓心。

設 O 爲△ABC 之外接圓心，作 OD 垂於 BC。

則 OD 之於△ABC，與 AP 之於△A'B'C' 爲相當。故 OD 必爲 AP 之半。

3. **定理** 三角形三邊之中點，三頂點至其對邊之垂線足，以及聯其垂心及三頂點之直線之中點，同在一圓

周上。



設 D,E,F, 爲△ABC 三邊之中點。L,M,N 爲自 A, B,C 至其對邊之垂線足。O 爲外接圓心。P 爲垂心。

聯 FD,DE,FL,LE。

∵ E 爲 AC 之中點，$A\hat{L}C$ 爲直角，故E爲三角形 ALC 之外接圓心。

$$\therefore \quad E\hat{L}A = E\hat{A}L$$

同理 $$F\hat{L}A = F\hat{A}L$$

$$\therefore \quad F\hat{L}E = F\hat{A}E$$

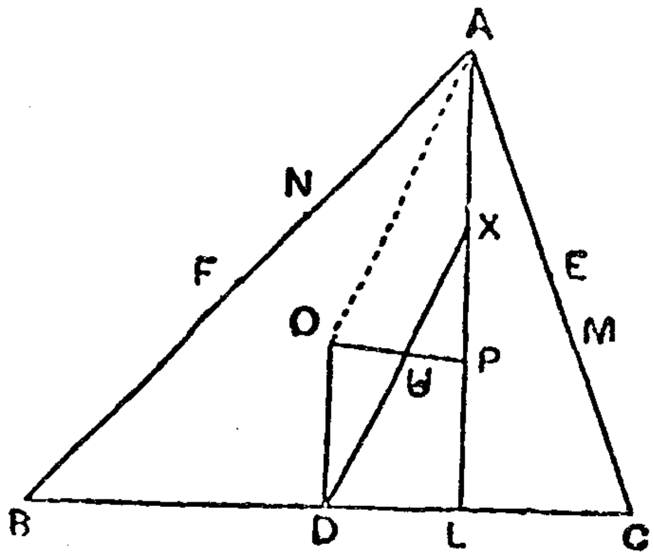
$$= F\hat{D}E$$。(因 DEAF 爲平行四邊形)

故 F, D, L, E 四點同在一圓周上。

同理可證 M 及 N 亦在 FDLE 圓周上。

設 U 為 OP 之中點，則自 U 垂直於 DL 之直線，必平分 DL。故過 D, E, F, L, M, N, 六點之圓之心，必在此垂線上。而此圓心亦在自 U 至 EM, 及 FN 之兩垂線上。

故 U 卽為此圓之圓心。



聯 DU 截 AP 於 X。

則因 $OU=UP$, $O\hat{U}D=P\hat{U}X$,

及 $O\hat{D}U=P\hat{X}U$,

故 $\triangle ODU \equiv \triangle XUP$。

∵ $XP=OD$, $DU=UX$。

故 DEF 圓亦過 X。

但 OD 等於 AP 之半，

∴X 爲 AP 之中點。

同理 此圓亦過 BP 及 CP 之中點。

4. 上節所論之圓稱爲九點圓。其半徑等於三角形之外接圓半徑之半。因 $\triangle ABC$ 之九點圓卽 $\triangle DEF$ 之外接圓。$\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 相似。而其邊長之比爲 1：2。故其外接圓之半徑，亦爲 $\triangle ABC$ 外接圓之半徑之半。

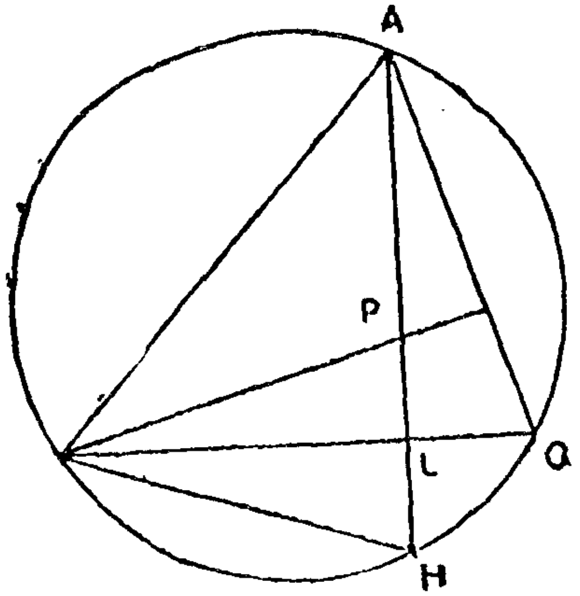
九點圓與內切及三旁切圓皆相切。此定理稱爲伏愛爾巴定理 Feuerbach's Theorem。將於十九章中以反圓變換法證明之。

5. **定理** 於 $\triangle ABC$，作 AL 垂於 BC，與三角形之外接圓交於 H。則 $PL=LH$。P 爲垂心。

聯 BH。

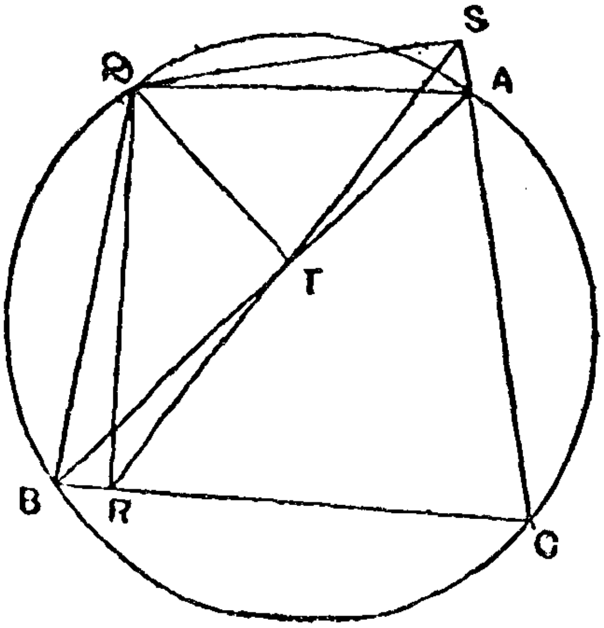
則 $H\hat{B}L=H\hat{A}C=L\hat{B}P$。(同爲 $B\hat{C}A$ 之餘角)

兩三角形 BPL，及 HBL，公有 BL。$B\hat{L}P$，$B\hat{L}H$ 皆等於直角。故爲全等。



$\therefore \qquad PL=LH$。

6. 定理 自$\triangle ABC$之外接圓上任一點,至此三角形三邊之垂線足,在一直線上。



設　R,S,T 爲自 Q 至三角形三邊之三垂足。如圖。

聯　QA 及 QB。

∵　Q,T,A,S 在一圓周上。(因 $\hat{T}$ 及 $\hat{S}$ 爲直角)

∴　$A\hat{T}S = A\hat{Q}S = Q\hat{A}S$ 之餘角 $=$ $Q\hat{B}C$ 之餘角 $=$ $B\hat{Q}R = B\hat{T}R$。(因Q,B,R,T 同在一圓上)

∴　RTS 爲一直線。

此直線稱爲西摩松線或稱垂足線 Simson's line or Pedal line。

7.　上節定理,其逆亦眞。卽

設自三角形平面上一點 Q,所作此三角形三邊之垂線之足在一直線上時,則 Q 在此三角形之外接圓周上。

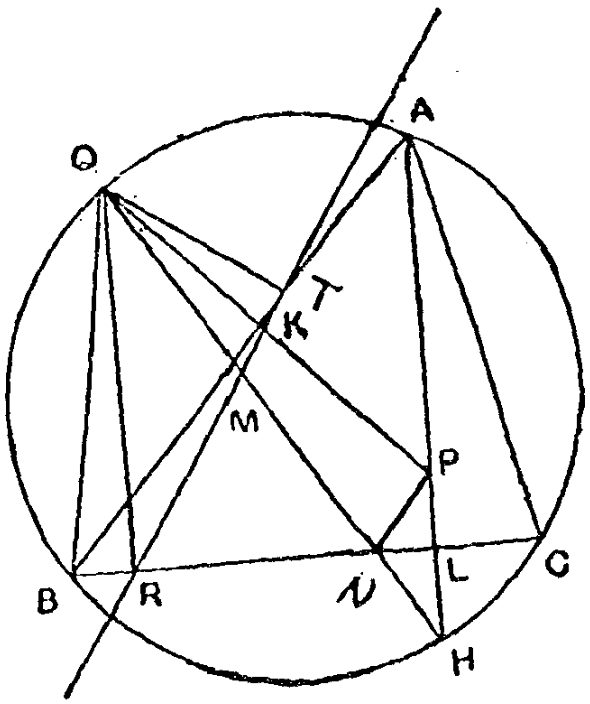
本定理可以上節之證法逆證之。

8.　**定理**　Q 點之垂足線,截聯 Q 及三角形垂心之直線成兩等分。

設 P 爲三角形之垂心。聯 QP,與Q之垂足線 q 交於 K。又設自 A 至BC 之垂線 AL 交外接圓於 H。

聯 QH,截 q 於 M,截 BC 於 N。

聯 PN 及 QB。



∴QBRT 爲圓內接四邊形，T 爲 Q 至 AB 之垂足。

$$Q\hat{R}T = Q\hat{B}T = Q\hat{H}A$$

$$= H\hat{Q}R (\because QR \parallel AH)。$$

$$\therefore \qquad QM = MR。$$

∴ M爲 QN 之中點。

但 $$P\hat{N}L = L\hat{N}H (\triangle PNL \equiv \triangle HNL)$$

$$= R\hat{N}M$$

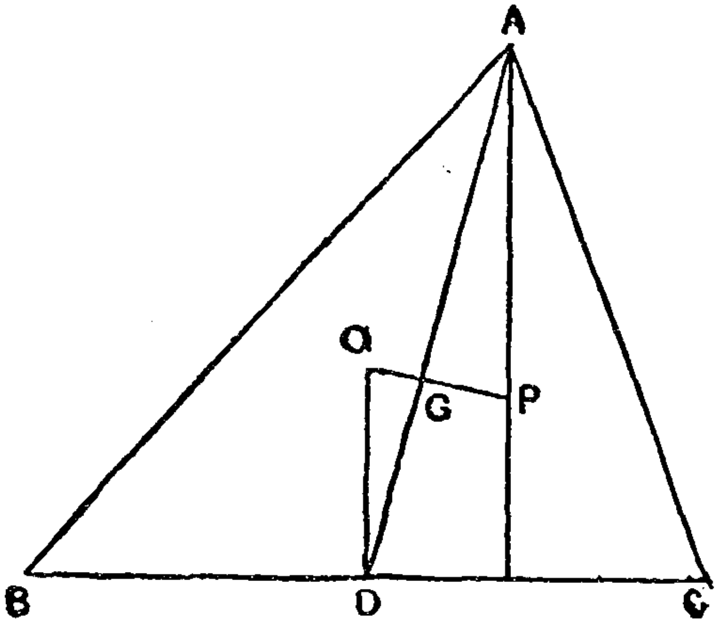
$$= M\hat{R}N。$$

$\therefore$　PN平行於RT。

$\therefore$　　$QK : KP = QM : MN$。

$\therefore$　　$QK = KP$。

9.　定理　三角形之三中線交於一點。此點三等分各中線並三等分聯外接圓心及垂心之直線。



三角形之三中線交於一點,初等幾何已證明。

設 O 及 P 各爲 $\triangle ABC$ 之外接圓心及垂心。

中線 AD 截 OP 於 G。

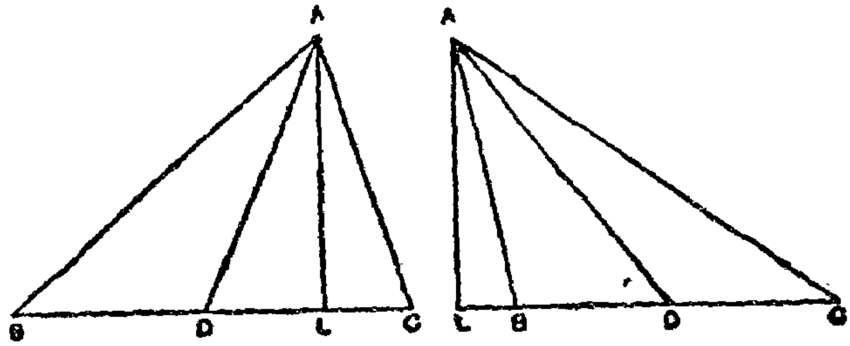
則 $\triangle APG$ 與 $\triangle ODG$ 相似。且 $AP = 2OD$。

$GP = 2OG$,　　$AG = 2DG$。

同理他中線亦三等分於 G。

10. 定理　設 AD 為 $\triangle ABC$ 之中線，則

$$AB^2+AC^2=2AD^2+2BD^2。$$



作　　AL 垂直於 BC。

則　$AC^2=AB^2+B^2C^2-2BC\cdot BL,$

$$AD^2=AB^2+BD^2-2BD\cdot BL。$$

以第一方程式減第二方程式之二倍。

得　　$AC^2-2AD^2=BC^2-AB^2-2BD^2。$

$$\therefore AB^2+AC^2=2AD^2+BC^2-2BD^2,$$

$$=2AD^2+2BD^2。(\because BC=2BD)$$

〔註〕　證本題時，線段之方向分正負。同向為同號，異向則反之。參看第三章 § 29。

11. 定理　設 D 爲 $\triangle ABC$ 之 BC 邊上之一點，而 $BD=\frac{1}{n}BC$,

則　$(n-1)AB^2+AC^2=nAD^2+(1-\frac{1}{n})BC^2$。

本題證與前節同。惟以 n 乘第二式，以第一等式減之，

得　$$AC^2-n\cdot AD^2=(1-n)AB^2+BC^2-n\cdot BD^2。$$

$$\therefore\ (n-1)AB^2+AC^2=n\cdot AD^2+BC^2-n\left(\frac{1}{n}BC\right)^2,$$

$$=nAD^2+(1-\frac{1}{n})BC^2。$$

12. 定理　設 $\triangle ABC$ 三邊 BC, CA, AB 之長各爲 a, b, c，而其和之半爲 s。

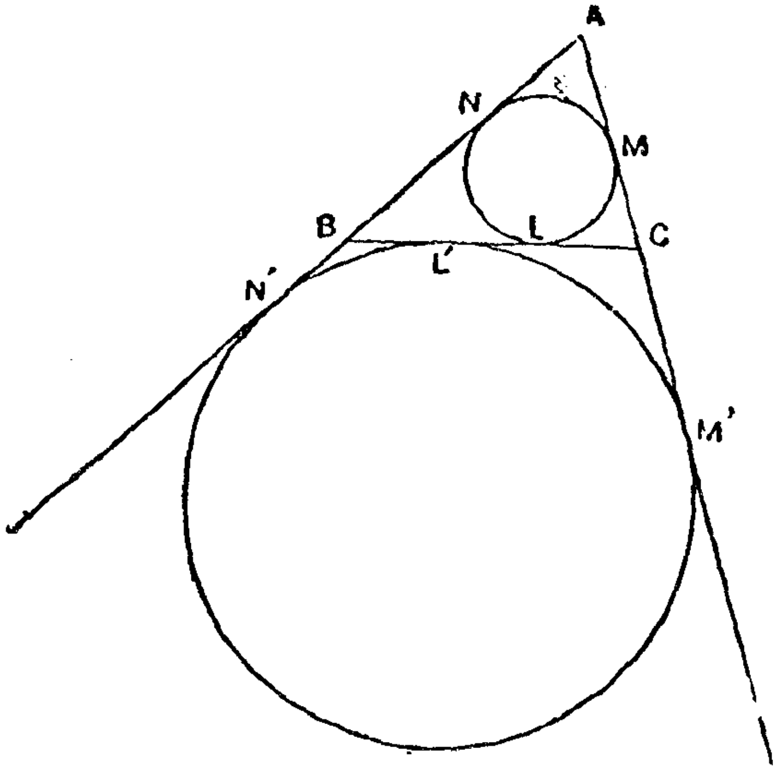
此三角形與其內切圓切於 L, M, N。則 A 與 M, N; B 與 L, N; C 與 L, M 之距離各爲 $s-a, s-b, s-c$。

又對 $\hat{A}$ 之旁切圓。其三切點爲 L', M', N'。則 A 與 M', N'; B 與 L', N'; C 與 L', M' 之距。各爲 $s; s-c; s-b$。
($\hat{B}$, $\hat{C}$ 倣此)

設內切圓切 BC, CA, AB 於 L, M, N。

因　$AM=AN$,　$CL=CM$,　$BL=BN$。

$\therefore$　$AM+BC=$三邊之和之半$=s$。



$$\therefore \qquad AM = s - a_{\circ}$$

同理證 $BL = BN = s - b,$

$CL = CM = s - c_{\circ}$

設對A之旁切圓切 BC, CA, AB 於 L′, M′, N′。

則 $AN' = AB + BN' = AB + BL',$

又 $AM' = AC + CM' = AC + CL'$。

$\therefore \quad 2AN' = AB + AC + BC = 2s_{\circ}$(因 $AM' = AN'$)

$$\therefore \qquad AN' = s.$$

$$BL' = BN' = s - c,\quad CL' = CM' = s - b。$$

系　$BL' = CL$。故 LL' 及 BC 同以一點爲中點。

習　題

1.　自三角形之三頂點，作其各對邊之垂線之足，成一三角形，稱爲垂足三角形。求證垂足三角形之內切圓心即爲原三角形之垂心；并證此三角形之各角，爲原三角形之相當角二倍之餘角。

2.　於三角形 ABC 之外接圓作一弦 PQ，平行於一邊 AB。則 P，Q 二點之垂足線交於自 C 至 AB 之垂線上。

3.　於三角形之外接圓周上任取三點，作其垂足線。則此三垂足線所成之三角形，與原三角形相似。

4.　設一三角形之外接圓上一弦之兩端之二垂足線相交成一定角，求此弦之軌跡。

5.　設於定圓周上有一定弦，以此弦爲底之內切三角形之垂心，重心，及九點圓心之軌跡各爲一圓。

6.　於空間有一動點。設自此點至二定點之距離之二乘方之和爲常數時。則此動點之軌跡爲一球面。

7. 設於三角形 ABC 三邊 BC，CA，AB 上三點 A′，B′，及 C′。則三個三角形 AB′C′，BC′A′，及 CA′B′之三外接圓心，成一與原三角形相似之三角形。

8. 設於三角形 ABC 之外接圓心爲心，任作一圓。截 BC 於 A_1，A_2，截 CA 於 B_1，B_2；截 AB 於 C_1，C_2。自 A_1 作 CA 及 AB 之垂線 A_1b_1 及 A_1c_1。自 A_2，B_1，B_2，C_1，C_2 亦作相當之垂線。則 Ab_1c_1 等六三角形之外接圓心，同在一圓周上。此圓之半徑爲原圓之半，且與△ABC 之九點圓爲同心。

9. 四邊形爲其兩對角線分爲四三角形。聯此四三角形之(i)四個垂心；或(ii)四個外接圓心，皆成平行四邊形。設此二平行四邊形之面積各爲$\triangle_1$及$\triangle_2$，而原四邊形爲△，則$2\triangle+\triangle_1=4\triangle_2$。

10. 自三角形之一頂，作直線，過對此頂之旁切圓與其對邊之切點。則此直線與內切圓之交點之一，距對邊爲最遠。

11. 設定點 A，B，C 爲已知。求作一三角形，及其內切圓，及一旁切圓，以 A 爲頂，B 及 C 各爲三角形與內切，

及旁圓之切點。

12. 設 A,B,C,D 爲一圓周上之四點。求證 $\triangle^s$BCD, CDA,DAB,ABC 之垂心亦同在一圓上，此圓與原圓相等。

13. 三角形之外接圓任一直徑兩端之二垂足線正交於九點圓上。

14. 設 O 及 P 各爲三角形 ABC 之外接圓心及垂心, OD 垂於 BC,與外接圓交於 K。則自 D 所作垂於 AK 之直線,必平分 KP。

15. 已知一定圓及其上一定點。且知自此點至一三角形之垂心及重心之離距。求作此三角形。

16. 分直線 AB 於 O,使成以下之比:

$l\cdot AO=m\cdot OB$。

設 P 爲任意一點。 求證

$l\cdot AP^2+m\cdot BP^2=(l+m)OP^2+l\cdot AO^2+m\cdot BO^2$。

又設 a,b,c,爲三角形 ABC 各邊之長,而

$a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2$ 等於一常數。求 P 之軌跡。

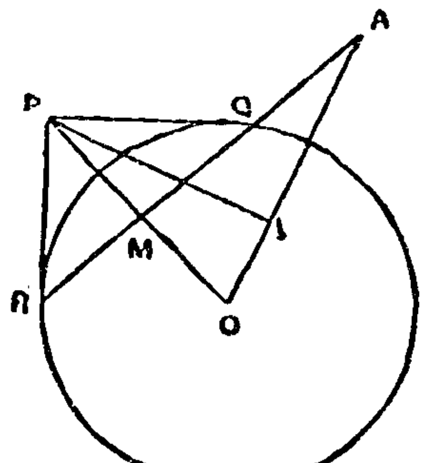
第二章

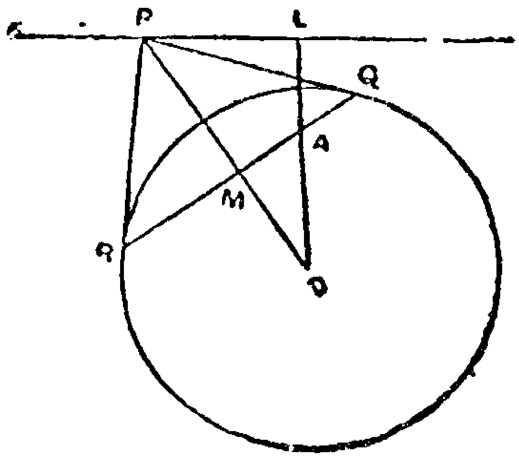
圓之性質

13. 定理　設 P 及 P' 爲一圓之半徑及其延長線上之兩點,同在圓心 O 之一旁,而 OP 及 OP' 之積,等於此圓半徑之平方。則 P, P' 對於此圓互稱爲逆點 Inverse point。

設自圓外一點 P,作二切線。則聯切點之弦與 OP 成正交(O 爲圓心)。設其交點爲 N, 則 OP·ON 等於圓半徑上平方,故 N 乃 P 之逆點。

14. 定理　於一圓之平面上有一定點，過定點任作





一弦,再自此弦兩端作兩切線,其交點在一定直線上。此定直線稱為定點之極線 Pelar。而定點則稱爲定直線之極點Pole。

設 O 為圓心,A 為定點。

過 A 任作一弦。自弦之兩端 Q,R 作二切線交於 P。

作 PL 垂直於 OA。

∵　OP 與 QR 正交於 M。

故　P,M,L,A 為共圓點。

∴　$OL\cdot OA=OM\cdot OP=$ 圓半徑之平方。

∴　L 為 A 之逆點,故為定點。

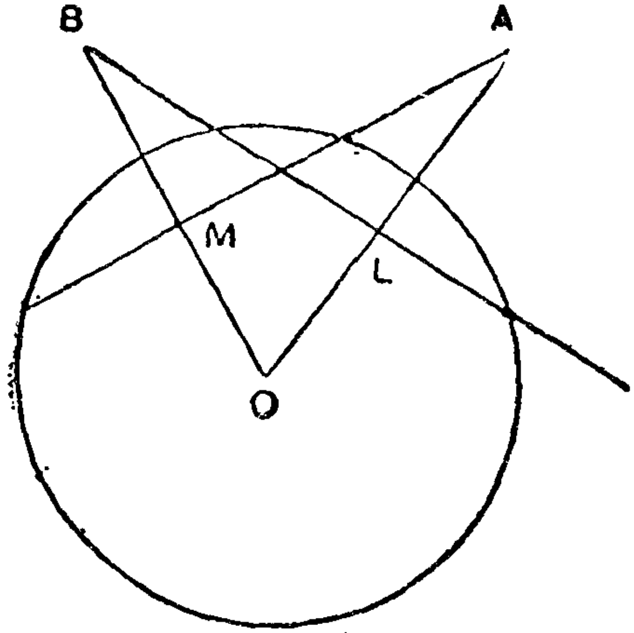
故 P 之軌跡為一直線,此直線與 OA 正交於 A 之逆點上。

15. 於前節中,同時證明:

自圓外一點作此圓之二切線,則聯此點之直線,為此點之極線。

幾何書中極點,極線之定義法甚多。有以切點弦為定義者。亦有以調和性為定義者。然本書則根據十四節之定義。

16. 定理 設A之極線過B則B之極線亦過A。



設BL爲A之極線，與OA正交於L。

作AM與OB正交於M。

則OM·OB＝OL·OA＝圓半徑之平方。

∴ AM爲B之極線。

卽A在B之極線上。

此兩點互稱爲點對。Conjugate points。

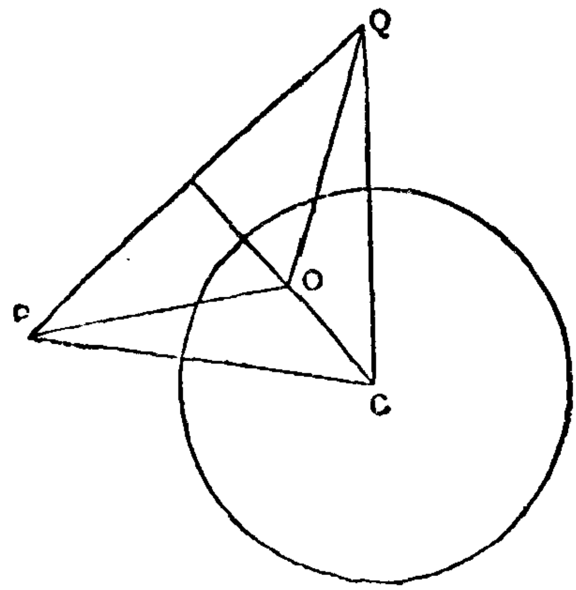
讀者當能明瞭兩逆點卽兩點對之特例。

設一直線過他一直線之極點時，則後者亦過前者之

極點。此二直線互稱爲線對 Conjugate lines。

如前所述,可知一直線上諸點之極線交於一點。此點卽爲直線之極點。

17. 定理　設 OP 及 OQ 爲圓上兩線對,與 O 之極線各交於 P 及 Q。則三角形 OPQ 之各頂爲對邊之極點。而圓心爲此三角形之垂心。



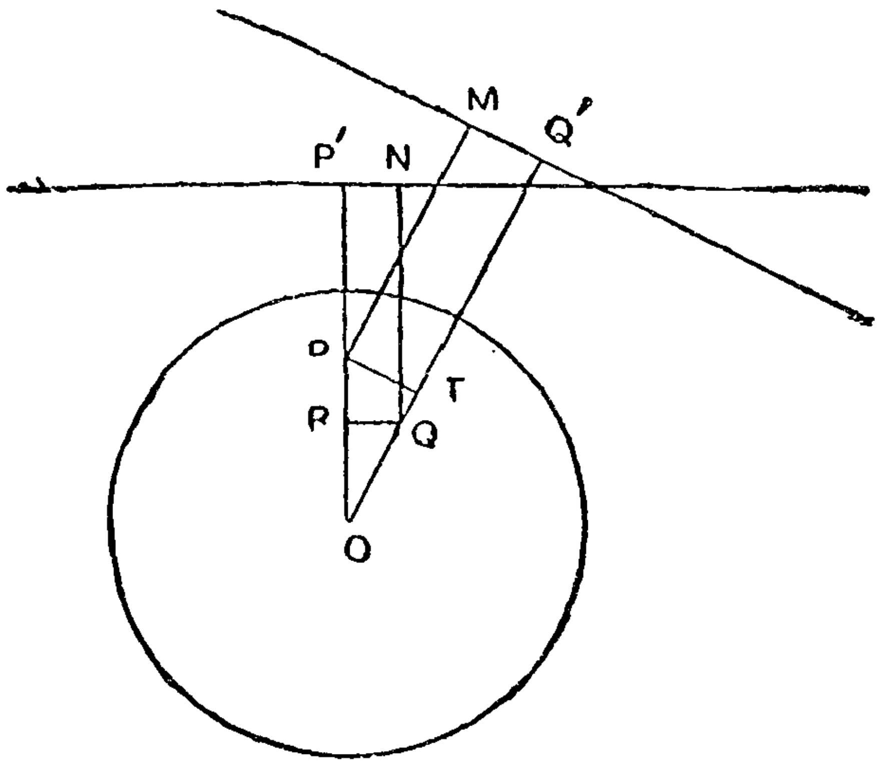
因 OP 及 OQ 爲圓上兩線對,故 OQ 之極點在 OP 上,而又在 O 之極線上。故 P 爲 OQ 之極點。

同理可證 Q 爲 OP 之極點。

又從圓心 C 與 O,P,Q 作聯線各垂直於其極線(卽其對邊)。故 C 爲△OPQ 之垂心。

三角形 OPQ 對於上述之圓稱為自極三角形。

18. 定理　設 P,Q 為一圓平面上之兩點,O 為圓心.則 OP：OQ＝P 與Q極線之距：Q 與 P 極線之距。



設 P' 及 Q' 各為 P 及Q之逆點。則 P, Q 之極線各過 P',Q'。

作 PM 及 QN 各垂於 P,Q 之極線。又作 PT 垂於 OQ,QR 垂於 OP。

則　$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$＝圓半徑平方。

又因 P,R,Q,T 爲共圓點。

故　$OR\cdot OP=OT\cdot OQ$。

$$\therefore\quad \frac{OQ'}{OP'}=\frac{OP}{OQ}=\frac{OT}{OR}=\frac{OQ'-OT}{OP'-OR}=\frac{PM}{QN}。$$

本定理稱爲沙耳門定理 Salmon's theorem。

19. 定理　同平面上兩圓之等切線之交點之軌跡爲一直線。此直線垂於聯兩圓心之直線。

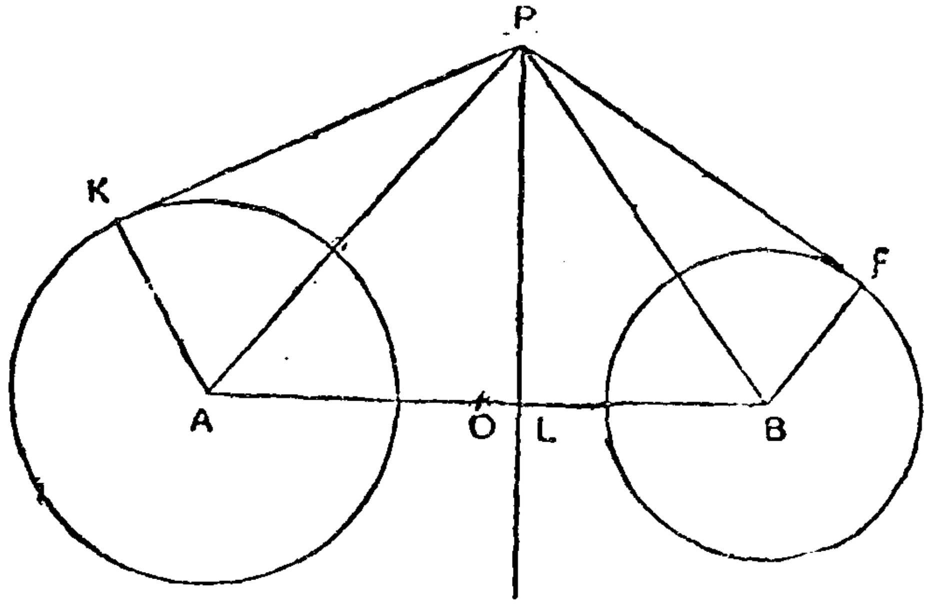
設 PK,PF 二圓之等切線。A,B 爲二圓之心。如圖。

作 PL 垂於 AB。聯 PA,PB,AK,及 BF。

則　$PK^2=AP^2-AK^2=PL^2+AL^2-AK^2$,

$$PF^2=PB^2-BF^2=PL^2+LB^2-BF^2。$$

$$\therefore\quad AL^2-AK^2=LB^2-BF^2。$$



$\therefore \quad AL^2-LB^2=AK^2-BF^2$。

$(AL-LB)(AL+LB)=AK^2-BF^2$。

設 O 爲 AB 之中點。

則 $2OL\cdot AB$＝兩圓半徑平方之差＝常數。

故 L 爲定點。P 之軌跡爲自 L 所作垂於 AB 之直線。

此軌跡稱爲根軸 Radical axis。

若兩圓相交，則公弦上各點至兩圓之每對切線皆相等。故公弦卽其根軸。

20. 定理 自兩圓平面上任一點 P，至此兩圓之切線上平方之差，與自 P 至根軸之距離成正比。

設 A 及 B 爲二圓之心。PQ 爲 A 圓之切線，PR 爲 B 圓之切線。作 PN 垂於根軸 NL，PM 垂直於 AB。

又設 O 爲 AB 之中點。

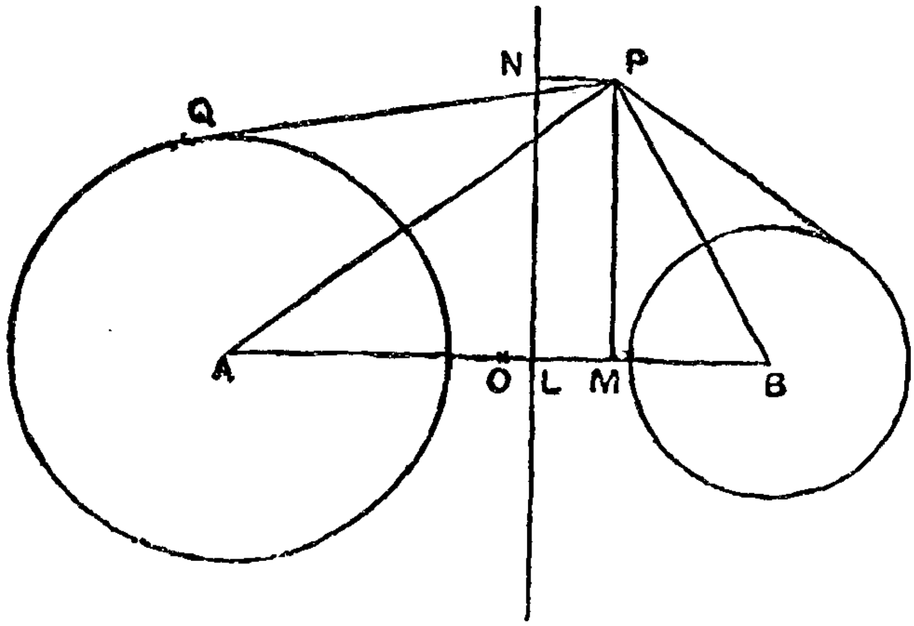
則 $PQ^2-PR^2=PA^2-AQ^2-(PB^2-BR^2)$

$=PA^2-PB^2-AQ^2+BR^2$

$=AM^2-MB^2-AQ^2+BR^2$

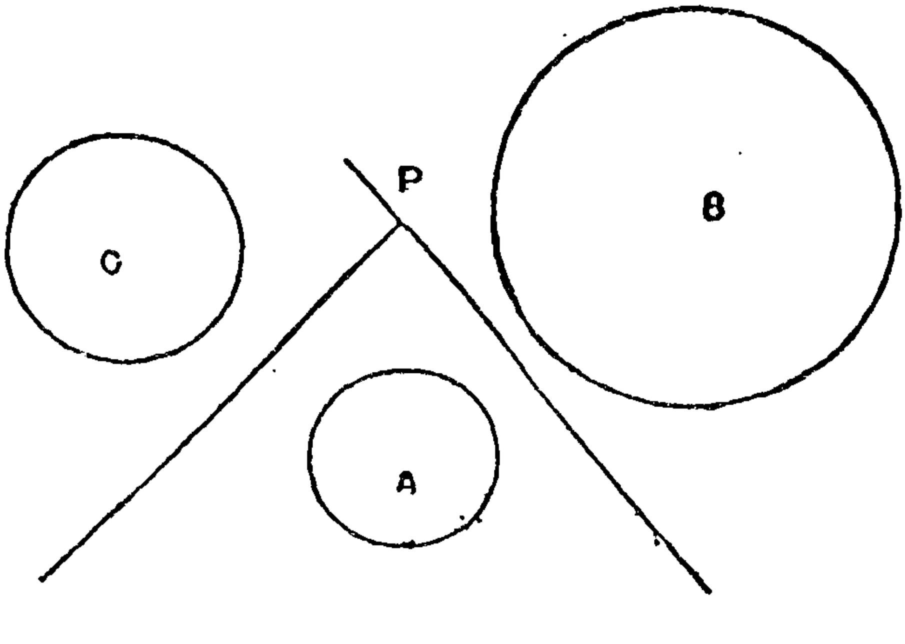
$=2OM\cdot AB-2OL\cdot AB$

$=2AB\cdot LM=2AB\cdot NP$。



21. **定理**　同平面上三圓，每對之根軸交於一點。

設 A，B 二圓之根軸與 A，C 二圓之根軸交於 P。



則　自 P 至 C 圓之切線＝至 A 圓之切線

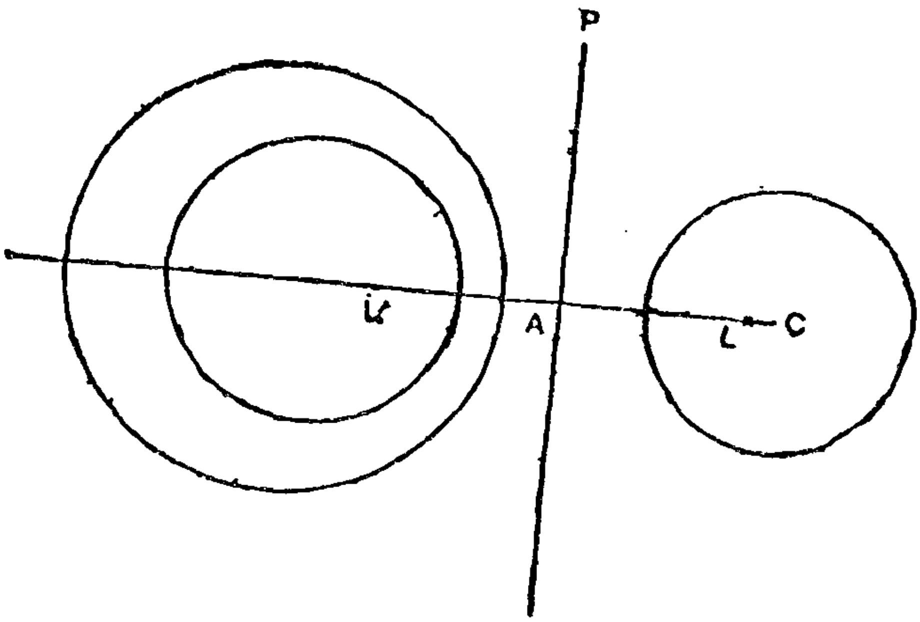
＝至 B 圓之切線。

∴　P 在 B，C 二圓之根軸上。

故三根軸交於一點。

22. 定義　於平面上有一組圓，若任一對圓皆以一定直線爲冪軸時，則此組爲同軸圓組 Coaxal circles。

此組各圓心同在一直線上，不證卽知。



設此直線與公共根軸交於 A。則自 A 至各圓之切線皆等。於圓心線上取二點 L 及 L′，使 AL，AL′ 皆等於自 A 至各圓切線之長。則 L 及 L′ 稱為此組中之極限點 Limiting points。

設 C 為此組中任一圓之心，r 為半徑。

又設 P 為根軸上任一點。

則 $PL^2=PL'^2=PA^2+AL^2=PA^2+AC^2-r^2$

$=PC^2-r^2=$ 自 P 至 C 圓之切線長。

故公根軸上任一點至各圓之切線，等於此點至 L 或 L′ 之距離。

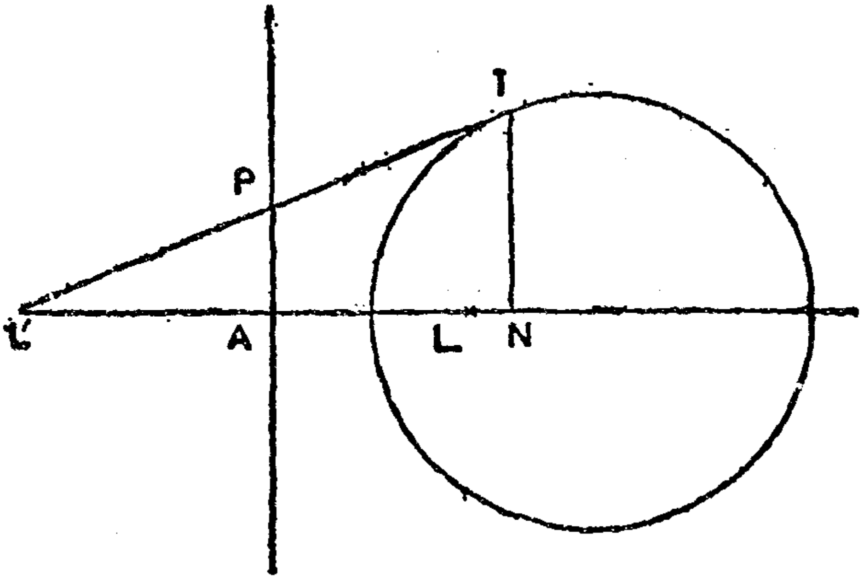
極限點 L 及 L′ 或稱為點圓。以此二點可視為同軸圓組中之二圓，半徑為無窮小。

二極限點不能同在一圓內。亦不能同在一圓之外。

若此圓組各圓相交於二點，則 A 在各圓之內。於是自 A 至各圓之虛點皆為虛線。故極限點亦為虛點。

23. 定理　同軸圓組之二極限點，對於組中任一圓，互為逆點。

設 C 為組中一圓之心。L 及 L′ 為二極限點。



自 L'作此圓之切線 L'T。此切線必爲組中之根軸平分於 P。

作 TN 垂直於 LL'。

則　　　$L'A : AN = L'P : PT$,

$$L'A = AN$$

但 A 爲 LL'之中點。

故 N 與 L 相合。

故 L 爲 L'之逆點。

24. 以下二定理甚易證明。讀者可以之爲習題。

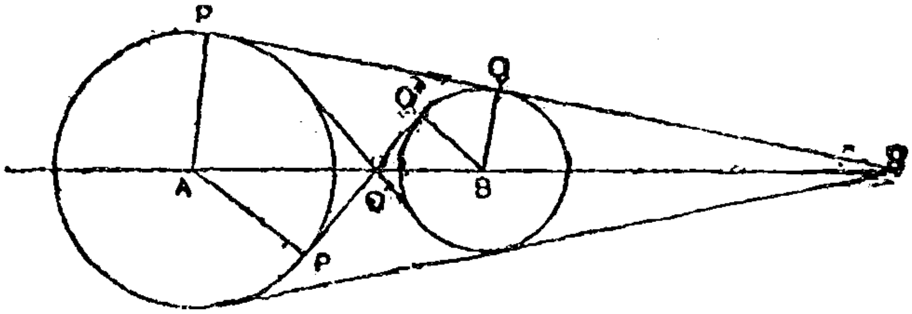
過二極限點之圓與組中各圓正交。即聯交點之二半

徑互相垂直。

圓組內任二圓之公切線之切點與一極限點成直角。

25. 公切線

定理　同平面二圓之內，外公切線與圓心線交於二點，內，外分圓心線成二圓半徑之比。



設外公切線與圓心線 AB 交於O。P,Q 爲切點。聯 AP 及 BQ。

則因　$\hat{P}=\hat{Q}=$直角。

$\therefore$　$\triangle APO$ 與 $\triangle BQO$ 相似。

$\therefore$　$AO:BO=AP:BQ$。

同理如內公切線與 AB 交於 O′,

則　$AO':O'B=$半徑之比。

自以上定理，可得作二圓之公切線之法。

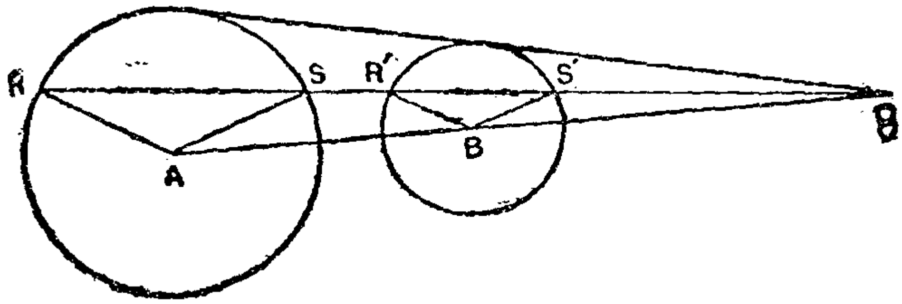
內，外分圓心線 AB 於 O′及 O。自O′ 或 O 作一圓之

切線,即亦爲他圓之切線。

如二圓相交,則 O′爲虛點。

如一圓完全在他圓之內,則 O 及 O′皆爲虛點。

26. 過 O 點作一直線與 A 圓交於 R,S, 與 B 圓交於 R′,S′,如下圖。



於Δ^s OAR 及 OBR′

$$OA : OB = AR : BR',$$

且 $R\hat{O}A = R'\hat{O}B$,而 $A\hat{R}S$ 及 $B\hat{R}'S$ 皆小於直角。

故二三角形相似。

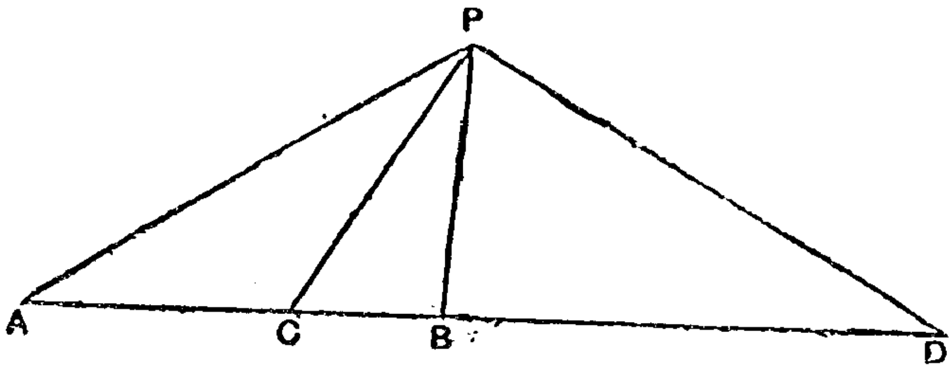
故 $OR : OR' = AR : BR' =$ 半徑之比。

同理可知 $OS : OS' =$ 半徑之比。

故若已知 A 圓及 O 點。內分聯 O 及 A 圓上諸點之直線。則諸分點聯成一圓,卽 B 圓也。故 B 圓可得自A 圓,或反之。因是 O 稱爲二圓之相似心。同理,O′ 亦爲二圓之

相似心。

27. 定理　一點動於一平面上，其與同平面上之兩定點距離之比爲定比時，則此點之軌跡爲圓。



設 A, B 爲二定點。內，外分 AB 於 C 及 D 使成定比。

設 P 爲動點，則 C 及 D 在 P 之軌跡上。

又設 P′ 爲此軌跡上另一點。

則因　$AP' : P'B = AC : CB = AD : BD$

$\therefore$　$P'C$, $P'D$ 爲 $A\hat{P'}B$ 之內外分角線。

故 $C\hat{P'}D$ 爲直角。

故 P′ 之軌跡(卽 P 之軌跡)爲以 CD 爲直徑之圓。

系 1. 若 P 不限於平面上，則其軌跡爲一球面。

系 2. 若內，外分 AB 於 C 及 D 使成等比。P 爲任一點而 $C\hat{P}D$ 爲直角。則 PC 及 PD 內分，外分 $A\hat{P}B$。

習　題

1. 自 A 圓周上任一點 P 至 B 圓之切線之平方，與自 P 至二圓之根軸之距離成正比。

2. 設 A,B,C 爲同軸之三圓，則自 C 上任一點至 A 及 B 之切線之比爲定比。

3. 設自 P 點至 A,B 二圓之切線之比爲定比時則。P 之軌跡爲一圓。

4. 設 A,B,C,……，諸圓爲同軸圓，X 爲另一圓，則A,X;B,X;C,X;……等對圓之根軸交於一點。

5. 同軸圓組中任一圓上一點 P至一極限點之距離之平方，與自 P 至根軸之距離成正比。

6. 二圓與他二圓各正交，則前者之根軸卽後者之圓心線。或反之。

7. 設自相似圓上任一點作二圓之切線兩對，則每對之夾角等於他對之夾角。[以二相似心聯線爲直徑之圓稱爲相似圓]

8. 設同平面上有三圓，以每兩圓作一相似圓，則所

得之三相似圓爲同軸。

9. 於定圓上求兩點與二定點同在一圓周上，同時又與另二定點同在一圓周上。

10. 設一直線截二定圓於 P，Q；及 P′，Q′，自 P，Q 作該圓之切線，又自 P′ 及 Q′ 作第二圓之二切線，截前二切線於四點。則此四點在與二定圓同軸之一圓上。

11. 設 C 爲同軸圓組中之一圓，於根軸之他旁取一點 Q。自 Q 作 C 圓之切線 QP。以 Q 爲圓心作二圓各過一極限點 K，K′。再自 P 作此二同心圓之切線。求證此二切線之長之比等於 PK : PK′。

12. 設 O 爲 C 圓上一定點，P 爲其上任一點。P 點對於 O 圓之逆點爲 Q。求證 Q 之軌跡爲一直線。

13. 同平面上有相交之三圓 C_1，C_2，C_3。C_1，C_2 之公弦過 C_3 之圓心；C_2，C_3 之公弦過 C_1 之圓心。求證 C_3，C_1 之公弦過 C_2 之圓心。

14. 設 A，B，C 三圓每對之根軸交於 R。作一圓外切此三圓，圓心 P。作另一圓內切此三圓，圓心 Q。求證 PQ 過 R。

15. 設 AB 爲 S 圓之直徑。以 AB 上任一點爲圓心，作 C 圓。A 及 B 對於 C 之逆點各爲 A' 及 B'。而 l 爲對於 S 任一點 O 之極線。求證對於 C，l 之極點爲 $A'B'$ 之中點。

16. 一組球切於一點 O，則不過 O 之平面截此組成同軸圓組。

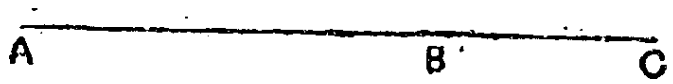
第三章

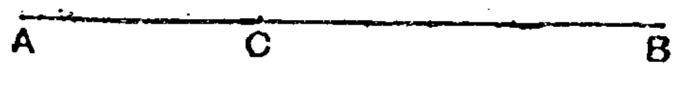
正負號　共點性與共線性

29. 於三角學及解析幾何學中，吾人依線段之方向以分正負。

於幾何學中不必規定何向為正，何向為負，以幾何學中無絕對之數量，所謂正負者，比較而得。故任意假定一方向為正時，反對之方向卽為負。

依上之假定，如一直線上有三點 A,B,C，則無論此三點之次序如何，　$AB+BC=AC$。





若 C 在 A,B 之間，BC 與 AC 不同號，故 $AB+BC$ 仍等於 AC。

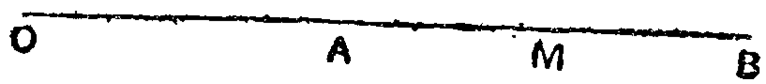
自前等式可得 $BC=AC-AB$。 此等式甚為緊要，在本書中屢屢用之，名為插點之等式。

例如於 AB 線段上插入一點 O，即得

$$AB=OB-OA。$$

30. 定理 設 M 爲 AB 之中點，O 爲其上任一點，則

$$2OM=OA+OB。$$



因 $$AM=MB。$$

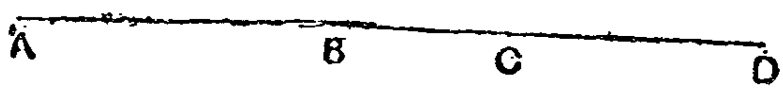
插入一點 O，得 $OM-OA=OB-OM$。

$$\therefore \quad 2OM=OA+OB。$$

31. 定義 諸點同在一直線上稱爲列點 Range of Points。

定理 設 A,B,C,D 成一列點，則

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD+CA\cdot BD=0。$$



於上式插入一點 A，則

$$AB(AD-AC)+AD(AC-AB)$$
$$-AC(AD-AB)=0。$$

此等式亦爲重要等式之一，故須熟記。

32. 設 A,B,C 三點成列點。但線段既線外之一點，則三角形 OAB,OBC 面積之比，等於其底邊之比。然除非而分正負，故面積亦宜分正負。面積之正負，乃依其周之繞轉方向，而規定如下：

設一人繞此面積而行，若此面積常在其左者（反時針向），則此面積稱爲正；反之（時針向）則爲負。

依以上之規定，則不論 A,B,C 之次序如何，

$$AB:BC=\triangle OAB:\triangle OBC$$
$$=\triangle AOB:\triangle BOC。$$

且　$\triangle OAB+\triangle OBC=\triangle OAC$。

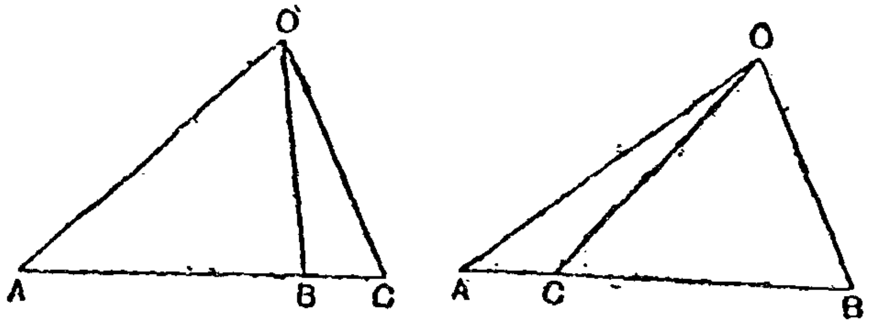
於是得　$\triangle OAB=\triangle OAC-\triangle OBC$。

33. 讀者已知 $\triangle OAB$ 之面積等於

$\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin A\hat{O}B$，而 $\triangle OBC$ 之面積爲

$\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin B\hat{O}C$；然 $\triangle OAB$，$\triangle OBC$ 之比，不卽爲

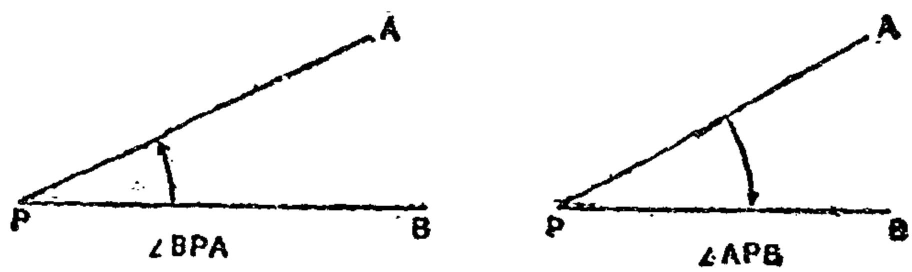
$\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin A\hat{O}B:\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin B\hat{O}C$。以而



積，線段既分正負，角度亦必分正負；否則決不能爲等式。

角度之正負，亦無一定。惟假設一向爲正，則反向卽爲負。

例如 $A\hat{P}B=-B\hat{P}A$



今試證角度之分號爲必須：

因 $$\frac{AB}{BC}=\frac{\triangle AOB}{\triangle BOC}=\frac{\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin A\hat{O}B}{\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin B\hat{O}C}$$

(OA，OB，OC 諸線量皆爲正號)

$$=\frac{OA\ \sin\ A\hat{O}B}{OB\ \sin\ B\hat{O}C}$$

而　$\sin(-x)=-\sin x$。

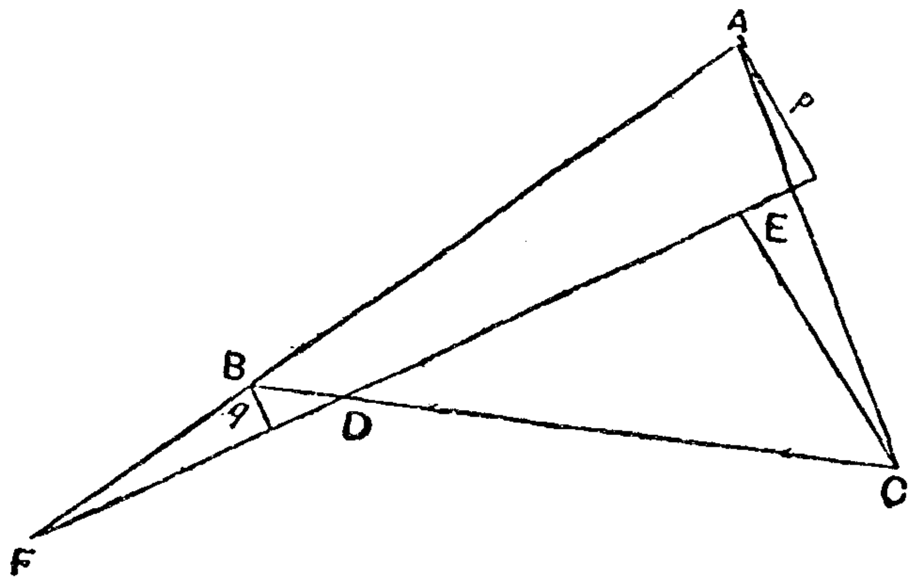
故若線段分號，角度亦須隨之而分號。

至於面積上則角度不必分正負，以面積亦爲 cos 之函數。

〔註〕 $\cos(-x)=\cos x$。故面積若設爲 cos. 函數時，則角度無正負之可言矣。

34. 孟萊勞定理 Menelaus' theorem

三角形三邊 BC, CA, AB 上各有一點 D, E, F。設 D, E, 及 F 同在一直線上時，則



$$AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD。$$

證本定理時線段,而積之正負依 § 29 與 § 32 之規定。

自 A,B,C 各作 p,q,r 三線垂直於 DEF,此三線量之正負依其在 DEF 之一旁或他旁而定。

於是 $\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{p}{q}$, $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{q}{r}$, $\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{r}{p}$。

故 $$\frac{AF \cdot BD \cdot CE}{AE \cdot BF \cdot CD}=1。$$

本定理之逆亦眞。 卽

於三角形三邊 BC,CA,AB 上各有一點 D,E,F,設

$AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$ 時,則 D,E,F 在一直線上。

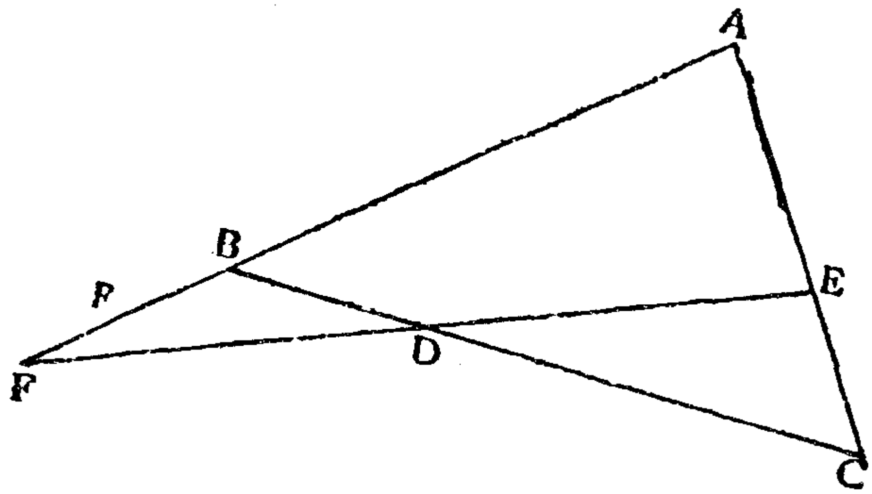
假設 DE 不與 AB 交於 F,而交於 F′,

則 $$AF' \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF' \cdot CD。$$

$$\therefore \quad \frac{AF'}{BF'}=\frac{AF}{BF}。$$

$$(AF+FF')BF = AF(BF+FF')。$$

$$FF'(BF-AF)=0。$$



但　　BF－AF≠0。

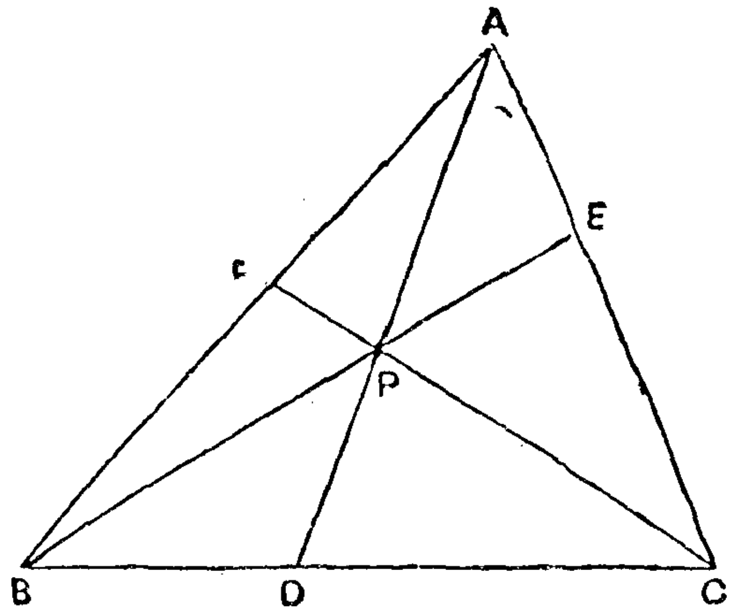
故　　　FF′＝0。

∴F′與F相重。

35. 西華定理 Ceva's theorem.

自三角形三頂點A,B,C作三直線各截其對邊於D,E,F,則

$$\frac{AF\cdot BD\cdot CE}{AE\cdot BF\cdot CD}=-1。$$



設 AD, BE, CF 交於一點 P。

$$則\frac{AF}{BF}=\frac{\triangle AFC}{\triangle BFC}=\frac{\triangle AFP}{\triangle BFP}$$

$$=\frac{\triangle AFC-\triangle AFP}{\triangle BFC-\triangle BFP}=\frac{\triangle APC}{\triangle BPC}。$$

$$同理\frac{BD}{CD}=\frac{\triangle BPA}{\triangle CPA},$$

$$\frac{CE}{AE}=\frac{\triangle CPB}{\triangle APB}。$$

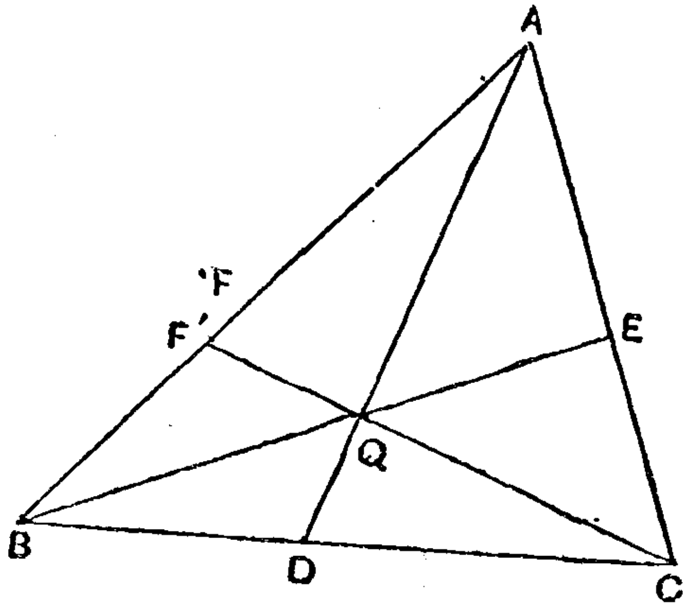
$$\therefore\quad \frac{AF\cdot BD\cdot CE}{AE\cdot BF\cdot CD}=\frac{\triangle APC}{\triangle BPC}\cdot\frac{\triangle BPA}{\triangle CPA}\cdot\frac{\triangle CPB}{\triangle APB}$$

$$=(-1)(-1)(-1)=-1。$$

本定理之逆亦眞，卽

於三角形三邊 BC，CA，AB 上各有一點 D，E，F，而

$\frac{AF \cdot BD \cdot CE}{AE \cdot BF \cdot CD} = -1$，　則 AD，BE，CF 交於一點。



設 AD，BE 交於 Q。 假設 CF 不截 AB 於 F，而截之於 F′。

則　　$AF' \cdot BD \cdot CE = -AE \cdot BF' \cdot CD$。

$$\frac{AF'}{BF'} = \frac{AF}{BF}。$$

$$(AF + FF')BF = AF(BF + FF')。$$

$$FF'(BF - AF) = 0。$$

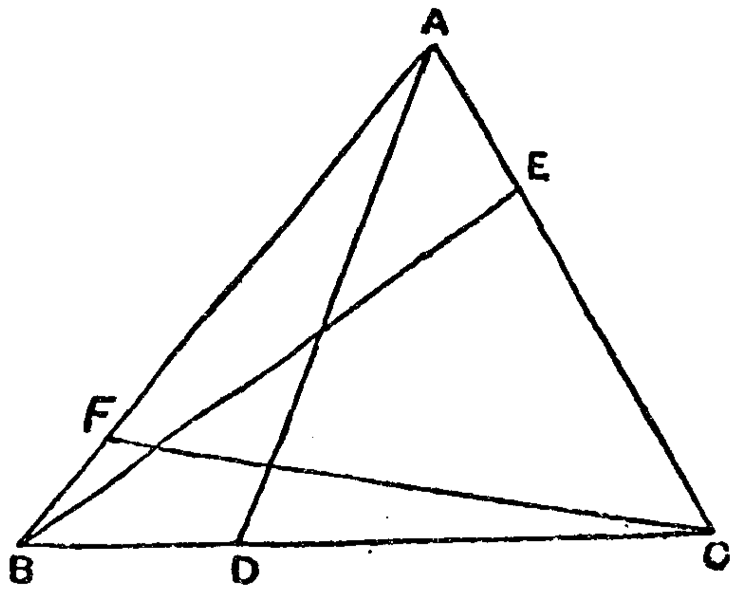
但 $BF-AF\neq 0$。

$\therefore \qquad FF'=0$

故F′與F相重。

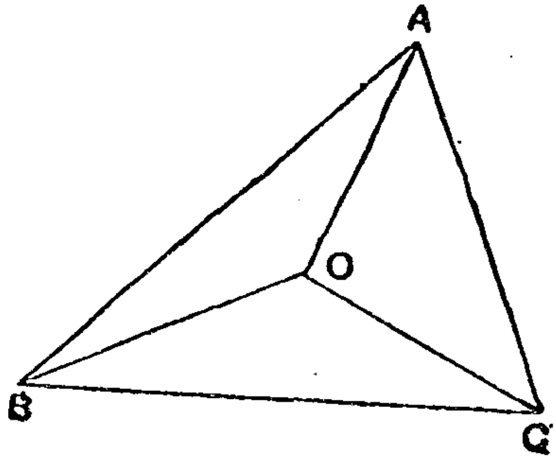
36. 定理 設 D,E,F 為三角形三邊 BC,CA,AB 之三點,則

$$\frac{AF\cdot BD\cdot CE}{AE\cdot BF\cdot CD}=\frac{\sin A\hat{C}F \sin B\hat{A}D \sin C\hat{B}E}{\sin A\hat{B}E \sin C\hat{A}D \sin B\hat{C}F}$$



因 $\dfrac{BD}{CD}=\dfrac{\triangle BAD}{\triangle CAD}=\dfrac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot \sin B\hat{A}D}{\frac{1}{2}AC\cdot AD \sin C\hat{A}D}$

$$=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin B\hat{A}D}{\sin C\hat{A}D}。$$



同理　$\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{AC}{BC}\cdot\dfrac{\sin\ A\hat{C}F}{\sin\ B\hat{C}F}$。

$\dfrac{CE}{AE}=\dfrac{BC}{AB}\cdot\dfrac{\sin\ C\hat{B}E}{\sin\ A\hat{B}E}$。

$\therefore\dfrac{AF\cdot BD\cdot CE}{AE\cdot BF\cdot CD}=\dfrac{\sin\ A\hat{C}F\ \sin\ B\hat{A}D\ \sin\ C\hat{B}E}{\sin\ A\hat{B}E\ \sin\ C\hat{A}D\ \sin\ B\hat{C}F}$。

系　西華定理可變爲以下之定理。

自三角形三頂 A, B, C 作三直線各截對邊於 D, E, F。若此三直角交於一點時，則

$$\frac{\sin\ A\hat{C}F\ \sin\ B\hat{A}D\ \sin\ C\hat{B}E}{\sin\ A\hat{B}E\ \sin\ C\hat{A}D\ \sin\ B\hat{C}F}=-1。$$

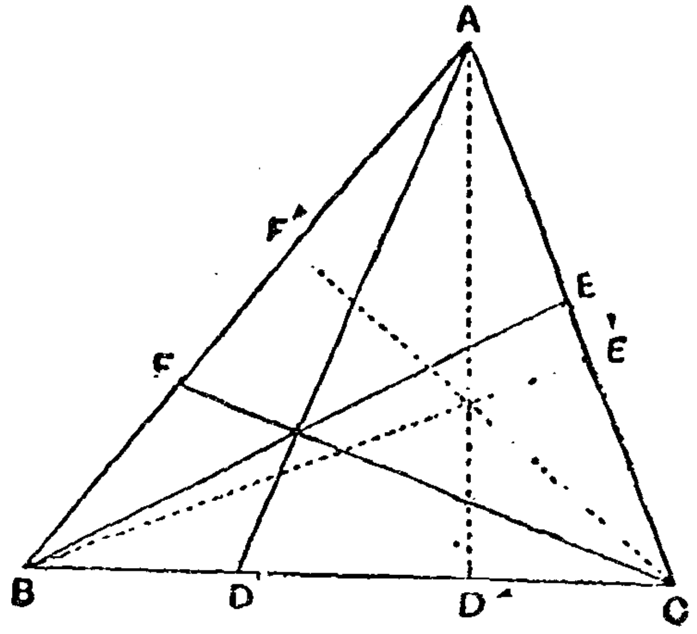
37. **等角線對** Isogonal conjugates.

定義 設自三角形 ABC 一頂 A 作二直線 AD 及 AD′，使 $B\hat{A}D = D'\hat{A}C$(非 $C\hat{A}D'$)，則AD及AD′稱爲線對。

定理 自三角形 ABC 三頂作三雙等角線對 AD，AD′；BE，BE′；CF，CF′。設 AD，BE，CF 交於一點，則 AD′，BE′，CF′ 亦交於一點。

因 $\dfrac{\sin B\hat{A}D}{\sin C\hat{A}D} = \dfrac{\sin D'\hat{A}C}{\sin D'\hat{A}B} = \dfrac{\sin C\hat{A}D'}{\sin B\hat{A}D'}$。

同理 $\dfrac{\sin C\hat{B}E}{\sin A\hat{B}E} = \dfrac{\sin A\hat{B}E'}{\sin C\hat{B}E'}$。



及
$$\frac{\sin A\hat{C}F}{\sin B\hat{C}F}=\frac{\sin B\hat{C}F'}{\sin A\hat{C}F'}。$$

但 AD,BE,CF 交於一點。

$$\therefore\ \frac{\sin B\hat{A}D\cdot\sin C\hat{B}E\cdot\sin A\hat{C}F}{\sin C\hat{A}D\cdot\sin A\hat{B}E\cdot\sin B\hat{C}F}=-1。$$

$$\therefore\ \frac{\sin C\hat{A}D'\cdot\sin A\hat{B}E'\cdot\sin A\hat{C}F'}{\sin B\hat{A}D'\cdot\sin C\hat{B}E'\cdot\sin A\hat{C}F'}=-1。$$

故 AD',BE',CF' 交於一點。

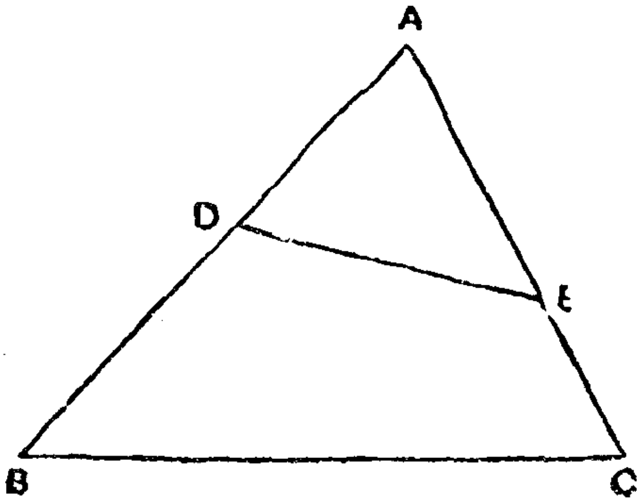
38. 定義　與三角形三中線成等角線對之三直線交於一點,稱爲此三角形之副重心 Symmedian point。

39. 定義　於三角形 ABC 之 AB,AC 二邊上各取一點,使 $AD\cdot A\hat{D}E=B\hat{C}A$, 則 DE 稱爲 BC 之反平行線 Antiparallel。

D,E,使凡反平行於 BC 之直線皆平行於 DE。

四邊形 DBCE 爲一圓內切四邊形。

若 AF 爲 △ABC 之一中線,平分 BC 及其平行線,與 AF 成等角線對之直線平分反平行於 BC 之諸直線。



上題讀者可自證之。

習　題

1. 三角形之一頂與其外接圓心之聯線，與自此頂至對邊之垂線成等角線對。

2. 聯三角形三頂及其對邊與內切圓之切點之三直線交於一點，而各頂聯其對邊之旁切圓與對邊之切點之三直線亦交於一點。

3. 設 ABC 爲一三角形，自其頂作其對邊之垂線 AD，BE，CF。又設 AG，BH，CK 各爲 EF，FD，DE 之垂線。求證 AG，BH，CK 交於一點。

4. 於三角形 ABC 一邊 AB 上取一點 K，使 KB

爲 AB 之三分之一。於 BC 上取 H 及 D，使 $BH=\frac{1}{3}BC$，及 $BD=\frac{1}{2}BC$。於 AC 上取一點 E，使 $CE=\frac{1}{2}CA$。CK 與 AD 交於 L。BL 與 AH 交於 M。CM 截 BE 於 N。求證 N 三等分 BE。

5.　設自三角形 ABC 之垂心作二直線，各垂直於A角之內外分角線。求證其垂足與 BC 之中點同在一直線上。

6.　設三角形 ABC 上，對 A 之旁切圓與 BC，CA，AB 三邊各切於 A_1，B_1，C_1，對 B 者各切於 A_2，B_2，C_2；對 C 者各切於 A_3，B_3，C_3。BE_2，CF_3 交於 P；BE_1，CF_1 交於 Q；E_2F_3 交 BC 於 X；F_3D_1 交 CA 於 Y；D_1E_2 交 AB 於 Z。求證 A，P，D_1Q 在一直線上。其以同法組成之每組四字各在一直線上，X，Y，Z 亦在一直線上。

7.　過圓之直徑 AB 之兩端作二切線，與圓周上另一點 E 之切線交於 C 及 D，則聯 AE，BE 中點之直線，與 AD，BC 交於一點。

8.　自三角形 ABC 作三直線 AD，BE，CF，各與對

邊所成之角皆相等(角之方向亦同)，此三直線成一三角形 A′B′C′。求證

$$\frac{A'B\cdot B'C\cdot C'A}{AE\cdot BF\cdot CD}=\frac{A'C\cdot B'A\cdot C'B}{AF\cdot BD\cdot CE}=\frac{BC\cdot CA\cdot AB}{AD\cdot BE\cdot CF}。$$

9. 過三角形之副重心，作三直線反平行於各邊，并各與其他二邊交於二點，所得之六點，在一圓周上，副重心爲其圓心。[此圓稱爲餘弦圓，以其所截一邊之長與對角之餘弦成正比。]

10. 過副重心作此三角形各邊之平行線，各截其他二邊於二點，所得之六點在一圓周上。圓心爲副重心與外接圓心聯線之中點。[此圓稱爲萊莫圓 Lemoine Circle]

11. 自三角形之頂 A,B,C 作三直線同過一點，各與對邊交於 D,E,F。過D,E,F 作一圓，與 BC,CA,AB 再交於 D′,E′,F′。求證 A′D,BE′,CF′ 亦交於一點。

12. 自三角形之三頂作其外接圓之切線，各與對邊相交。求證此三交點在一直線上。

13. 設於三角形三邊 BC, CA, AB 上各取二點 D, D′;E,E′;F,F′;使 BD=D′C, CE=E′A, AF=F′B。設 AD,BE,CF 交於一點，則 AD′,BE′,CF′ 亦交於一

點。

14. 自一三角形之副重心 S，作 SD，SE，SF 垂於三邊。求證 S 爲 $\triangle$DEF 之重心。

15. 聯副重心與三角形頂點之三直線，分此三角形爲三。求證此三個三角形面積之比等於原三角形各邊平方之比。

16. 內分三角形三邊 BC，CA，AB 於 D，E，F，使

$BA' : A'C = CB' : B'A = AC' : C'B$。設 $B'C'$ 之引長線與 BC 之引長線交於 A''。求證

$$BA'' : CA'' = CA'^2 : A'B^2。$$

第四章

射影

40. 如 V 及 A 爲空間任意二點，VA 與一平面遇於 A′，則 A′ 爲自 V 所得A之射影，V 稱爲射影之頂。

如 V 爲空間一點，a 爲空間一直線。平面 Va 與另一平面 π 交於一直線 a′，則 a′ 爲自 V 所得直線 a 之射影。

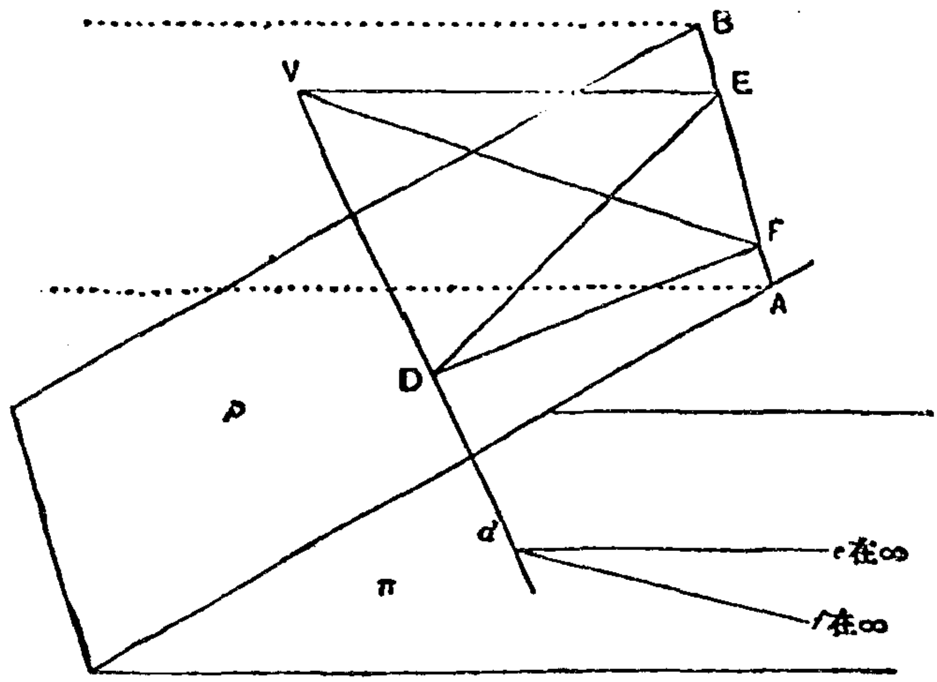
若 Va 平面平行於 π 平面，則二平面之交線在無窮遠，二平面之射影在無窮遠也。

41. 於 ρ 平面上有一點 D，以平面外一點 V 爲頂，射影於第二平面 π 上，則 ρ 平面上有一直線同時射影於無窮遠，此直線乃過 V 并平行於 π 之平面與 ρ 之交線也。

此直線之於 ρ 平面，稱爲遠射直線 Vanishing line。

ρ，π 二平面之交線稱爲射影軸，此軸平行於遠射線。

42. **定理** 設 ρ 平面上一角 $E\hat{D}F$ 與遠射線 AB 交於 E，及 F，V 爲射影頂，則 $E\hat{D}F$ 在另一平面 π 上之射影等於 $E\hat{V}F$。



設平面 VDE 與 π 交於 de。

但平面 VEF 平行於 π，故此兩平面與 VDE 平面之交線必互平行，卽 VE 平行於 de。

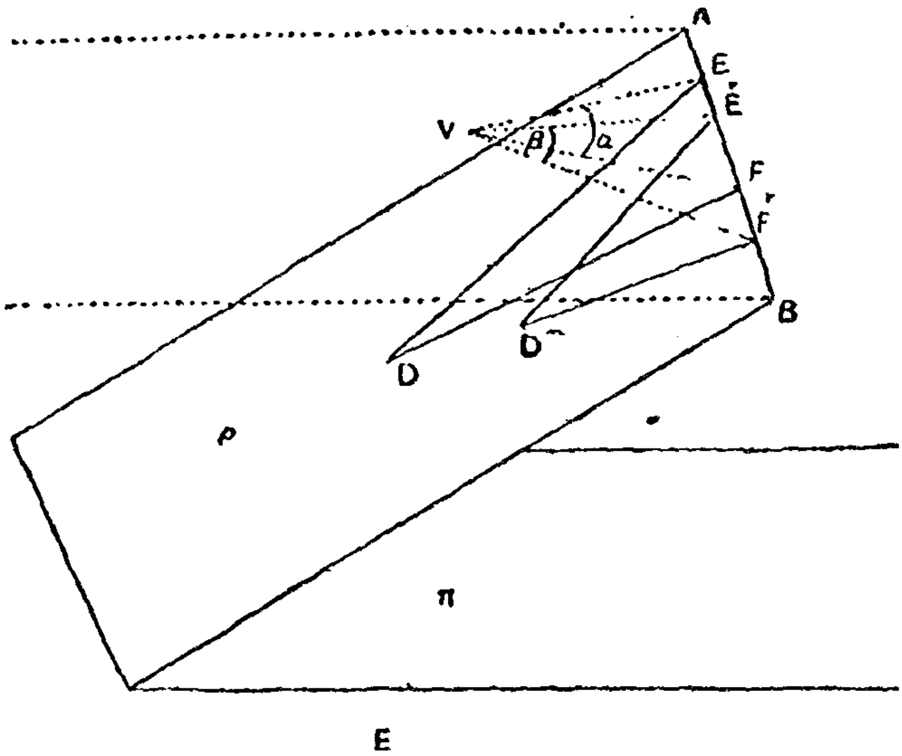
同理 df 平行於 VF。

故 $\quad e\hat{d}f = E\hat{V}F$。(d 爲 D 之射影)

故於 ρ 平面上任意一角，夾邊與遠射線交於二點，則射影頂 V 與此二點之聯線所夾之角等於射影之角。

43. 定理 ρ 平面上任一直線得射影於另一平面 π 上成無窮遠線，同時得將 ρ 平面上任意二角射影於 π 使

成定角。



設 AB 爲 ρ 平面上一直線。過 AB 作一平面平行於 π。

則以此平面上任一點爲射影頂， AB 於 π 平面上之射影，必爲無窮遠線，卽 AB 爲遠射線。

又設 $E\hat{D}F$ 及 $E'\hat{D}'F'$ 爲 ρ 平面上之二角，其夾邊與遠射線 AB 交於 E, F；及 E′, F′，今欲射影此二角於 π 平面上，使各等於定角 α 及 β。

於 EF 及 E'F' 上各作一弧，使其所含之角各等於 α 及 β。

設此兩弦交於 V。

則如以 AB 射影頂時，AB 射於 π 成無窮遠線；$E\hat{D}F$ 及 $E'\hat{D'}F'$ 二角射成二角各等於 α 及 β。

系 1. 任一三角形得射影於他平面上成一正三角形。

因如將此三角形之兩角同時皆射成 60 度角，則第三角亦爲 60 度。

系 2. 任一四邊得射成正方形。

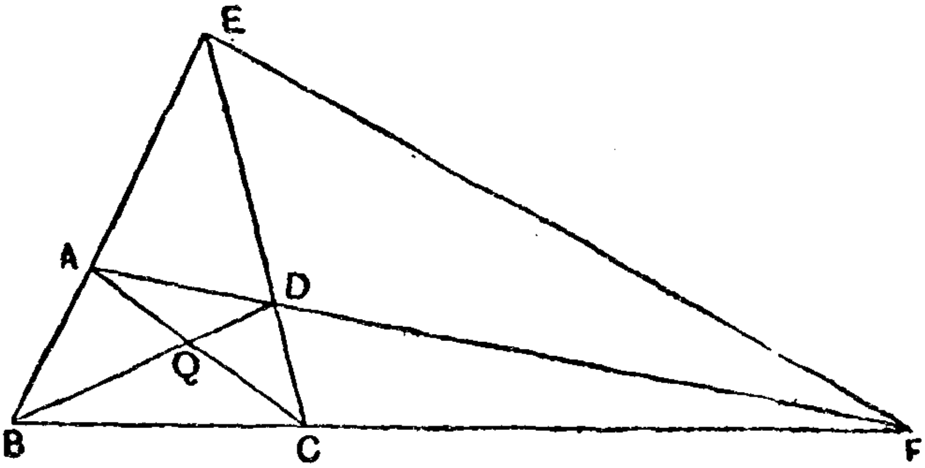
設 ABCD 爲四邊形，EF 爲第三對角線。

〔註〕 四邊形爲同平面四直線所組成之形。此四直線交於六點，聯每兩對點之直線稱爲對角線，其數有三。在形外者稱爲第三對角線。

餘二對角線 AC，BD 交於 Q。

今若將 EF 射影於無窮遠，同時將 $B\hat{A}D$，及 $B\hat{Q}A$ 射成直角。則此四邊形卽射成正方形。

證 因 EF 射影於無窮遠，卽 □ABCD 之射影爲平行四邊形。



又因 $B\hat{A}D$ 射影成直角,則使□ABCD 成矩形。

$A\hat{Q}B$ 射影成直角,則使□ABCD 成正方形。

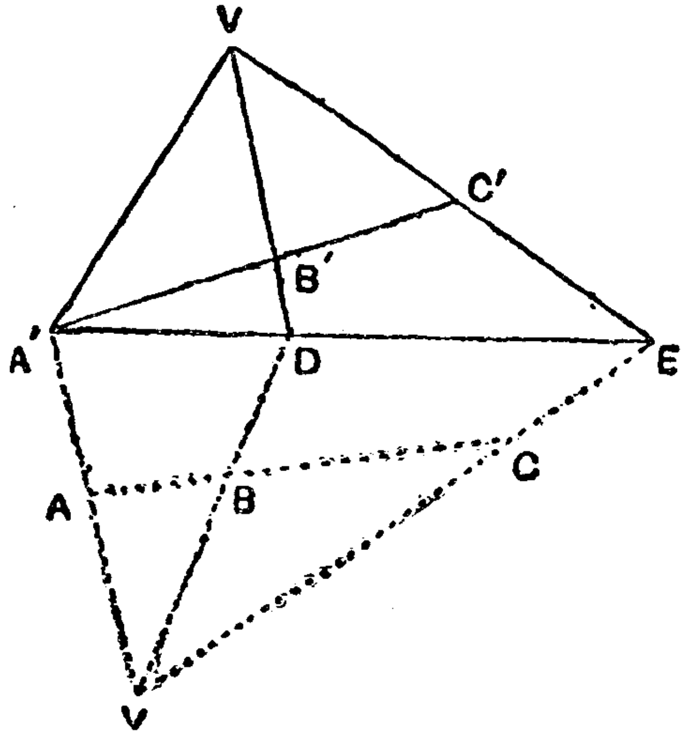
44. 於 § 43中,若 DE 平行於 AB, 則依下法進行,仍得同樣結果。

於 ρ' 上作 FV,使 $E\hat{F}V$ 等於 α 之餘角, 則射影頂爲 FV 與在 E'F' 上之弧(含 β 角之弧)之交點。

若 D'F' 亦平行於 AB, 則同樣作 F'V,使 $E'\hat{F'}V$ 等於 β 之餘角,射影頂爲 FV 與 F'V 之交點。

45. 於 § 43中,若 EF,E'F' 上之兩弧不相交, 則射影頂爲虛點;然此射影仍爲可能, 惟不能以圖表之, 名爲虛射影。

46. 定理　一列點上三點，與另一列點上任三點互成射影。



設 A, B, C 為一列點，A′, B′, C′ 為另一列點，二列點不同平面(含此二列點之二直線稱為欹斜直線)。

聯 AA′。

於 AA′ 上取一點 V，聯 VB, VC。過 A′ 作一直線截 VB, VC 各於 D, E 二點。

聯 DB′及 EC′，因二線為同平面故相交。設其交點為

V′,聯 V′A′。

則以 V 爲射影頂時,ABC 得射成 A′DE。再以 V′ 爲頂,A′DE 又與 A′B′C′ 射影。

47. 前節所述,ABC 列點經過兩次射影始與 A′B′C′ 列點成射影。在其他書中,此二列點不稱爲射影,而謂二列點相關;然在本書中,二列點無論經過若干次之射影而成互射,皆稱爲射影。

一列點上四點尋常不能與他列點上四點成射影,然在一定條件之下,二列點方成射影。於次章中將論及之。

習　題

1. 求證 ρ 平面上一組平行線得射影於他平面上成一組交於一點之直線。

2. 設 ρ 平面上有兩角,一角之兩夾邊各與他角之夾邊交於遠射線上,則二角之射影爲相等之二角。

3. 求證一平面上三角得射影於他平面上各等於 α。

4. 設 PQ 爲一直線,R 爲其引長線上之一點。求證此直線得射影於他平面上,成另一直線。使 R 之射影在

PQ 之射影之間，射影及平面之位置如何，方能有此結果。[此題至爲重要，讀者能明此，卽不難明瞭雙曲線爲圓之射影矣。見第九章。]

5. 於三角形 ABC 各邊 BC, CA, AB 上各有一點 A_1, B_1, C_1。設 B_1C_1 與 BC 交於 F；C_1A_1 與 CA 交於 G；A_1B_1 與 AB 交於 H；FH 與 BB_1 交於 M；FG 與 CC_1 交於 N。求證 MG, NH 及 BC 交於一點。

6. 求證一三角形及過各頂幷交於一點之三直線得射影於他平面上，使三直線成射影三角形之三中線。

7. 於一三角形 ABC 作 AA_1, BB_1, CC_1 交於一點，各截對邊於 A_1, B_1, C_1。B_1C_1 與 BC 交於 A_2；C_1A_1 與 CA 交於 B_2；A_1B_1 與 AB 交於 C_2。求證 A_2, B_2, C_2 在一直線上。

[射影此圖形於他平面上使 AA_1, BB_1, CC_1 射成射影三角形之中線。]

8. 一三角邊及其射形三角形各相當邊交於一直線上。

第五章

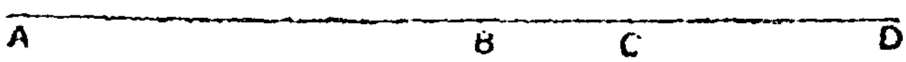
交比

48. 定義 設 A,B,C,D 四點成一列點,則$\dfrac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}$稱爲此列點之交比 Cross-ratio。符號爲(ABCD)。

49. 四字母之排列法有二十四種,故有一列點有四點,則此列點之交比有二十四種。然無論其爲何種交比,分母與分子之關係如下:

設分子爲一定,以分子之第一字母與第四字母字組成一項,再以分子之第三與第二字母另組成一項,二者之積卽爲分母。

50. 二十四種交比,因其値之關係可分爲六組,而此六組皆有相連之關係。



設 $(ABCD)=\lambda$。

(1) 每兩字母各與其他兩字母同時交換,結果不變

因 $(BADC)=\frac{BA\cdot DC}{BC\cdot DA}=\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}=(ABCD)$。

$(CDAB)=\frac{CD\cdot AB}{CB\cdot AD}=\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}=(ABCD)$。

$(DCBA)=\frac{DC\cdot BA}{DA\cdot BC}=\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}=(ABCD)$。

故 $(ABCD)=(BADC)=(CDAB)$

$=(DCBA)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$。

(2) 設以第一與第三字母互換,或以第二與第四字母互換,則結果爲原值之倒數。

因 $(CBAD)=\frac{CB\cdot AD}{CD\cdot AB}=\frac{AD\cdot CB}{AB\cdot CD}=\frac{1}{(ABCD)}$

$=\frac{1}{\lambda}$。同理可證其他。

故 $(ADCB)=(BCDA)=(DABC)$

$=(CBAD)=\frac{1}{\lambda}\cdots(2)$。

(3) 設以第二第三字母互換則結果等於1減原值。

因 $AB\cdot CD+BC\cdot AD+CA\cdot BD=0$。 §31

$\therefore\quad -\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}+1-\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=0$。

$\therefore\quad 1-\lambda=\frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=(ACBD)$。

故自(1)式可得

$$(ACBD)=(BDAC)=(CADB)$$
$$=(DBCA)=1-\lambda, \cdots(3)$$

(4) 設再自(3)式以第二與第四字母交換,則得:

$$(ADBC)=(BCAD)=(CBDA)$$
$$=(DACB)=\frac{1}{1-\lambda}。(4)$$

(5) 自(4)式以第二與第三字母交換。得

$$(ABDC)=(BACD)=(CDBA)$$
$$=(DCAB)=1-\frac{1}{1-\lambda}$$
$$=\frac{\lambda}{\lambda-1}。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(6) 自(5)式以第二與第四字母交換,得

$$(ACDB)=(BDCA)=(CABD)$$
$$=(DBAC)=\frac{\lambda-1}{\lambda}。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

設二列點各有四點,一列點之一種交比與第二列點之相當交比相等,則各相當交比皆相等;此二列點稱爲等交比列點。

51. 定理 設 D 及 E 爲 ABC 列點上之兩點,而

$(ABCD)=(ABCE)$,則 D,E 必相重。

因 $$\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}=\frac{AB\cdot CE}{AE\cdot CB}。$$

$\therefore$ $$AE\cdot CD=AD\cdot CE。$$

$\therefore$ $$(AD+DE)CD=AD(CD+DE)。$$

$\therefore$ $$DE(AD-CD)=0。$$

$\therefore$ $$DE\cdot AC=0。$$

但 $$AC\neq 0。$$

故 $$DE=0。$$

即 D,E 相重。

52. 定理 平面上一列點之四點與其射影成等交比。

設以 V 爲射影頂,列點 ABCD 之射影爲列點 A'B'C'D'。

則 $$\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}=\frac{\triangle AVB}{\triangle AVD}\cdot\frac{\triangle CVD}{\triangle CVB}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}VA\cdot VB\ \sin A\hat{V}B}{\frac{1}{2}VA\cdot VD\sin A\hat{V}D}\cdot\frac{\frac{1}{2}VC\cdot VD\ \sin C\hat{V}D}{\frac{1}{2}VC\cdot VB\ \sin C\hat{V}B}$$

$$=\frac{\sin A\hat{V}B\sin C\hat{V}D}{\sin A\hat{V}D\sin C\hat{V}B}.$$ (面積,角度之符號依 §32, §33之規定)

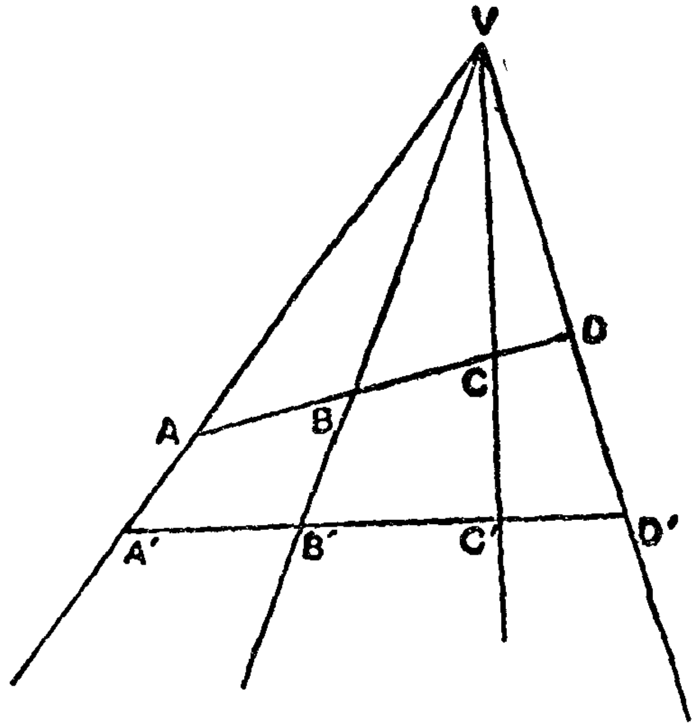
同理可知 $\dfrac{A'B' \cdot C'D'}{A'D' \cdot C'B'} = \dfrac{\sin A'\hat{V}B' \sin C'\hat{V}D'}{\sin A'\hat{V}D' \sin C'\hat{V}B'}$。

但無論射影平面之位置如何，

$$\frac{\sin A'\hat{V}B' \sin C'\hat{V}D'}{\sin A'\hat{V}D' \sin C'\hat{V}B'} = \frac{\sin A\hat{V}B \sin C\hat{V}D}{\sin A\hat{V}D \sin C\hat{V}B}。$$

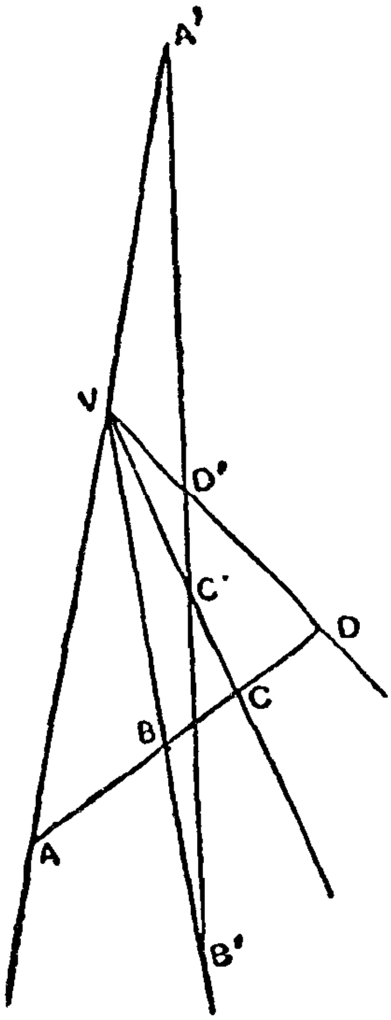
於第一圖中顯而易見。

（第一圖）

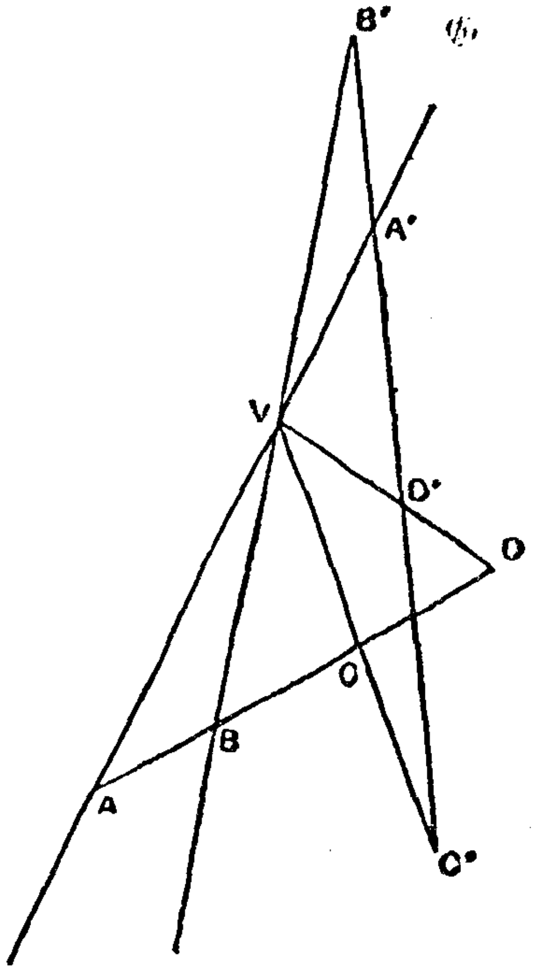


設其位置如第二圖，可證之如下：

（第二圖）



（第三圖）



∵　$\sin A'\hat{V}B'=\sin B'\hat{V}A=-\sin A\hat{V}B$。

及　$\sin A'\hat{V}D'=\sin D'\hat{V}A=-\sin A\hat{V}D$。

又因　$\sin C'\hat{V}D'=\sin C\hat{V}D$。

$\sin C'\hat{V}B'=\sin C\hat{V}B$。

故其結果不變。

於第三圖中，則

$$\sin A'\hat{V}B' = \sin A\hat{V}B,$$

$$\sin A'\hat{V}D' = \sin C'\hat{V}D',$$

$$\sin A'\hat{V}D' = \sin D'\hat{V}A = -\sin A\hat{V}D,$$

$$\sin C'\hat{V}B' = \sin B\hat{V}C = -\sin C\hat{V}B。$$

故於第二及第三圖中，亦得(ABCD)＝(A'B'C'D')。

53. 定義 同平面并交於一點之一組直線稱爲束線 Pencil of lines。交點稱爲此束線之頂。任一直線與此束線各直線相交者，稱爲此束線之橫線 Transversal。

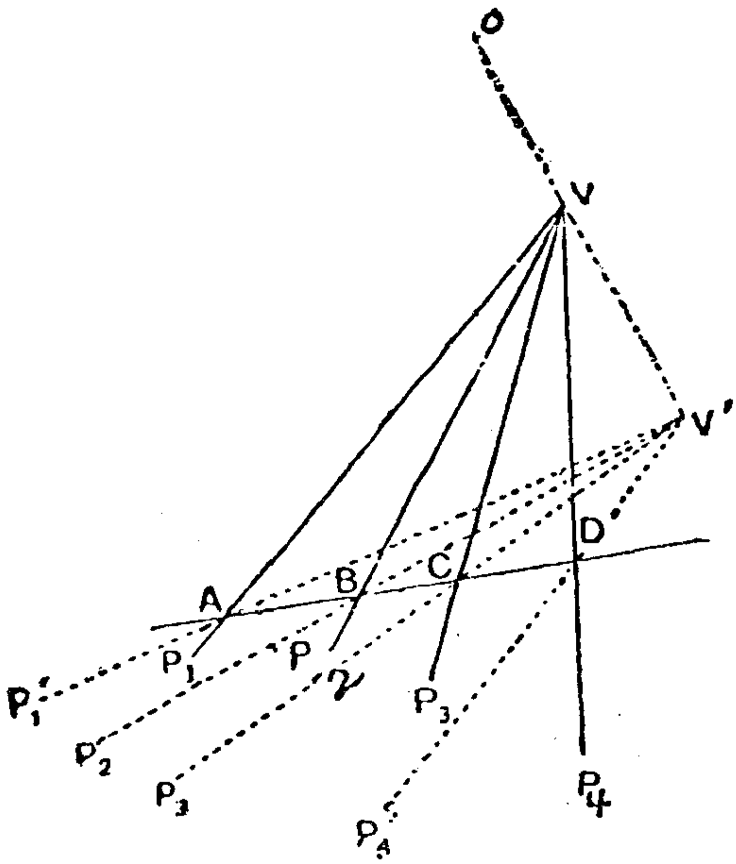
設 VP_1, VP_2, VP_3, VP_4，爲一束線，一橫線截之成一列點。自 § 52 之定理，可知無論此橫線之位置如何，其所截得之列點之交比爲一常數。

此交比卽爲前述束線之交比，可以 $P(P_1, P_2, P_3, P_4)$ 代之。

一束線射影於他平面上，則射影束線之交比等於原者之交比。

設 $V(P_1, P_2, P_3, P_4)$ 爲一束線。以 O 爲頂，射影之於

他平面。



以二平面之交線爲一橫線，截原束線於A,B,C,D。

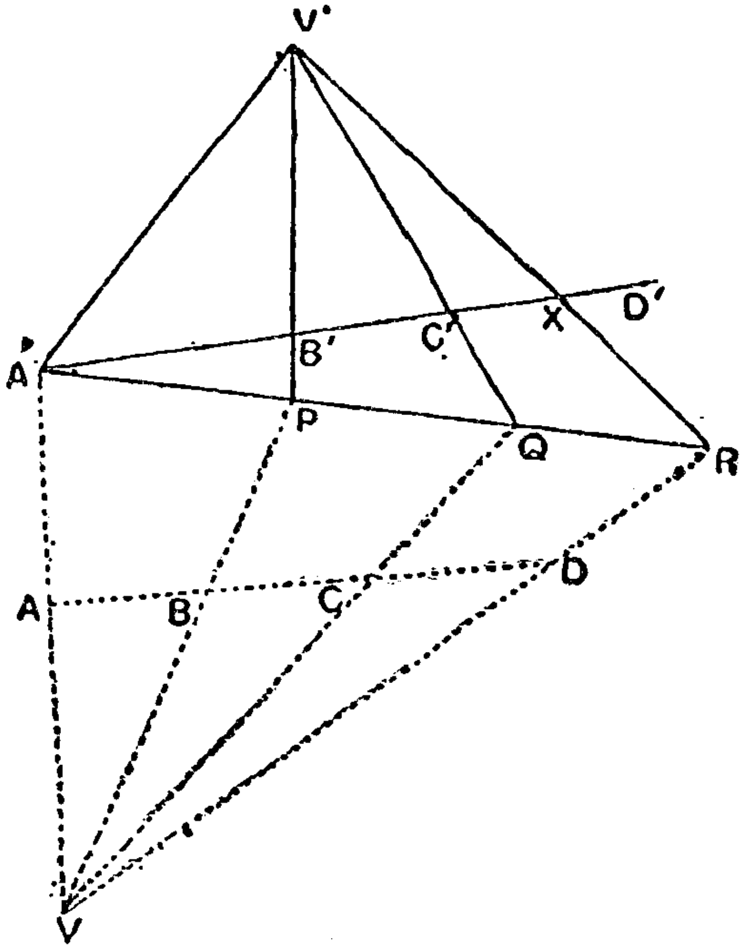
又設 V' 爲V之射影，$V'P_1'$ 等爲 VP_1 等之射影。

則 ABCD 亦爲 $V'(P_1',P_2',P_3',P_4')$ 之橫線。

$\therefore\quad V(P_1,P_2,P_3,P_4)=(ABCD)=V'(P_1',P_2',P_3',P_4')$。

54. 定理 設 ABCD 及 A'B'C'D' 爲二列點而 (ABCD)=(A'B'C'D') 則兩列點互成射影。(二列點不

必在一平面上。



聯 AA' 於其上聯一點 V。

又聯 VB, VC, VD。過 A 作直線截此三聯線於 P, Q, R, 則 APQR 直線在 VAD 平面上。

聯 PB' 及 QC', 設此二直線交於 V'。聯 V'A' 及 V'R, 設 V'R 截 A'D' 於 X。

則　$(ABCD)=(A'PQR)=(A'B'C'X)$。

但　$(ABCD)=(A'B'C'D')$。　　原設

$\therefore$　$(A'B'C'X)=(A'B'C'D')$。

$\therefore$　X 與 D'相重。

故以 V 為頂 ABCD 與 A'PQR 相射影。再以 V' 為頂，卽與 A'B'C'D' 相射影。

55. 定義　設二列點 ABCDE……及 A'B'C'D'E'…。其一上之任意四點之交比與其他上之相當四點之交比相等時，則稱為相似列點 Homographic Ranges。

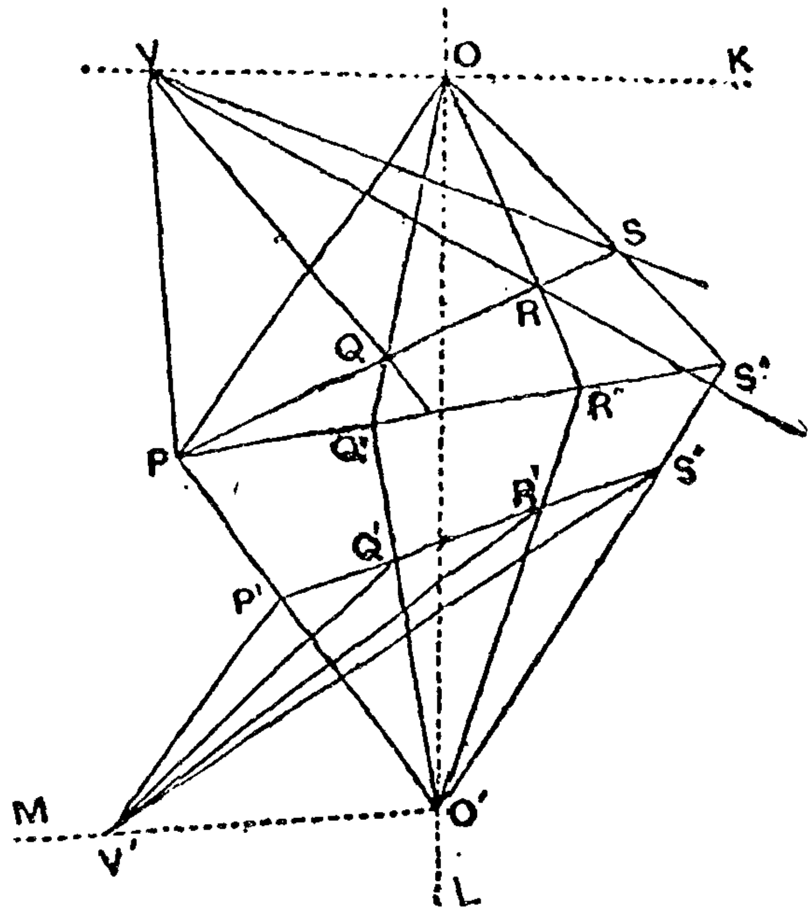
定義　二束線 V(P, Q, R, S, T, ……) 及 V'(P', Q', R', S', T'……)，其一上任意四線之交比等於其他上相當四線之交比時，則稱為相似束線。

相似列點以 $(ABCDE\cdots\cdots)=(A'B'C'D'E'\cdots\cdots)$ 等式表之。

二相似列點互成射影，讀者當能用 § 54 證明之。

56. 定理　二相似束線互成射影。

設 V 及 V' 為二束線之頂，此二束線各為一橫線所截於 PQRS……及 P'Q'R'S'……成二列點，如圖。



此二列點各以 O 及 O' 射影之於一公共列點 P Q''R''S''……§ 54

於 VO 上取一點 K 射影之，則

O(PQRS ……)得射影成O(PQRS……)，即

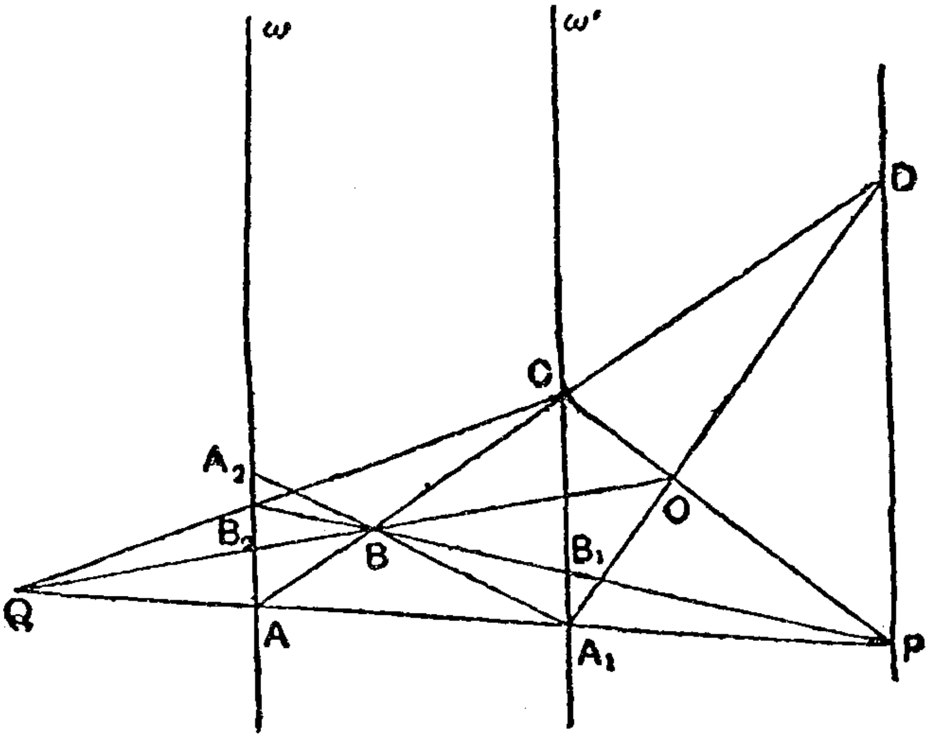
O(P Q''R''S''……)，而此束線若以 OO' 上一點 L 射影之，則得 O'(P Q''R''S''……)，即 O(P'Q'R'S'……)。

再以 O'V' 上一點 M 射影之，即射影成 V'(P'Q'R'

S'……)束線矣。

57. 本章諸定理至為重要，茲舉一題，以明其應用。

於平面上有二平行直線，求作一直線過一定點并平行於二平行直線。本題只許以直線作之。



設 $A\omega$ 及 $A'\omega'$ 為二定直線，因二線為平面，故其交點在無窮遠。設 ω 或 ω' 即為其交點(此時 ω 即為 ω')。

又設 P 為定點。

作 AC 截二平行線於 A 及 C，於此線上取一點 B。

聯 PA 截 $A_1\omega'$ 於 A_1。

聯 PB 截 $A_1\omega'$ 於 B_1，$A\omega$ 於 B_2。

聯 PC。

設 A_1A 與 B_2C 交於 Q。

QB 與 CP 交於 O。

A_1O 與 AC 交於 D。

則 PD 卽所求之直線也。

證 因
$$\begin{aligned}(A_1B_1C\omega') &= B(A_1B_1C\,\omega') = (A_2B_2A\omega)\\ &= A_1(A_2B_2A\omega) = (BB_2PB_1)\\ &= C(BB_2\,PB_1) = (AQ\,PA_1)\\ &= O(A\,Q\,P\,A_1) = (A\,B\,C\,D)\end{aligned}$$

$\therefore \quad P(A_1B_1C\omega') = P(ABCD)$。

$\therefore$ PD 直線卽 $P\omega'$ 直線也。

故 PD 與二定直線平行。

習題

1. 設 $(ABCD) = -\frac{1}{3}$，$AB = \frac{1}{3}AD$，則 $CD = \frac{1}{3}AD$。

2. 設一列點已知三點 A, B, C，幷已知(ABCD)之

值，求 D。

3. 設一橫線與束線 O(ABCD) 之一直線 OD 平行，截其他三直線於 A, B, C。求證 O(ABCD) = AB/CB。

4. 設 (ABCD) = (ABC′D′)。求證

$$(ABCC') = (ABDD')。$$

5. 設 ABCD 為一列點，而 (ABCD) = (ADCB)。求證此二交比之值等於 −1。

6. 一三角形之外接圓心，重心，九點圓心，垂心成一列點。其二十四種交比，八個等於 −1，八個等於 2，八個等於 $\frac{1}{2}$。

7. 設四平面交於一直線，任一平面截之成一束線，其交比為常數。

第六章
透　　視

58. 定義　設二圖形各為 P,Q,R,S……諸點及 P′,Q′,R′,S′,……諸點所組成,若聯二圖形之相當點之直線,如 PP′,QQ′,RR′,SS′,……等,交於一點 O,則此二圖形稱為互相透視 Perspective,　O 稱為透視心 Centre of Perspective。

自此定義,可知一圖形及其射影互相透視,而射影頂,即為透視心。讀者或將謂透視即射影,然二者大有區別,玆特舉數端以明之。

同在一平面上之二圖形有時互相透視,然不能即謂之互相射影。

射影乃以一圖形自一平面上,用面外一點,射於第二平面上之謂也。而於透視則無平面之意。最要者,即聯二圖形相當點之直線交於一點而已。

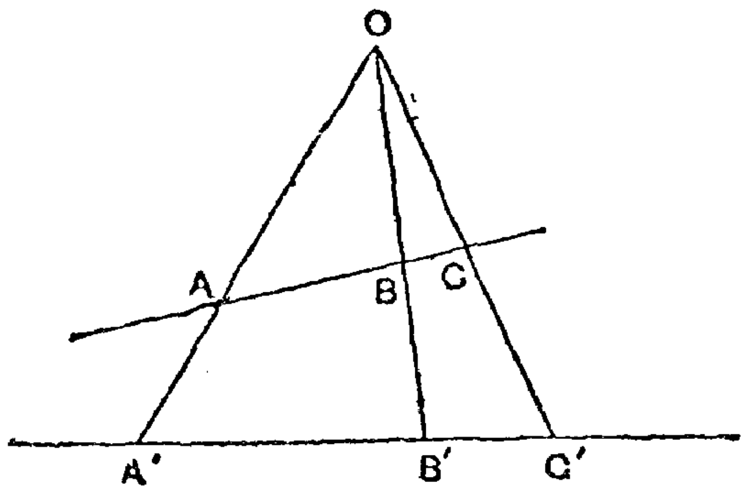
故若二圖形互相射影(一次射影)亦互透視。然二透

視圖形則不必爲互射影。

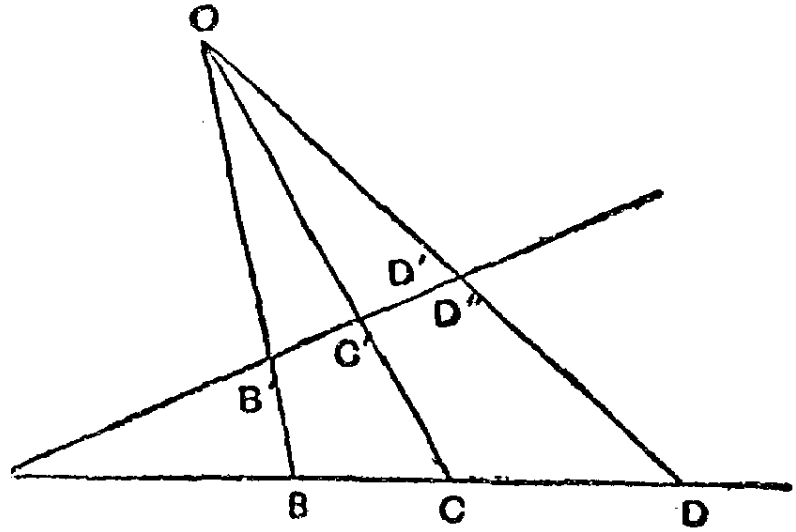
59. 以上定義，可知若二列點爲互透視，則必在一平面上。

因若 A,B,C,……及 A′,B′,C′,……互相透視，O 爲透視心，則 A′B′ 及 AB 在一平面上，卽含 OA,OB 二直線之平面也。

二列點若互相透視，則爲相似列點。然相似列點，不必盡爲透視。



60. 定理 設二相似列點交於一點，若此點爲一列點之一點，幷爲他列點之相當點時，則二列點爲透視。



設 (ABCDE……)=(AB′C′D′E′……)。

又設 BB′與 CC′ 交於 O。

聯 OD 截 AB′ 於 D″。

則 (AB′C′D′)=(ABCD)=(AB′C′D″)。

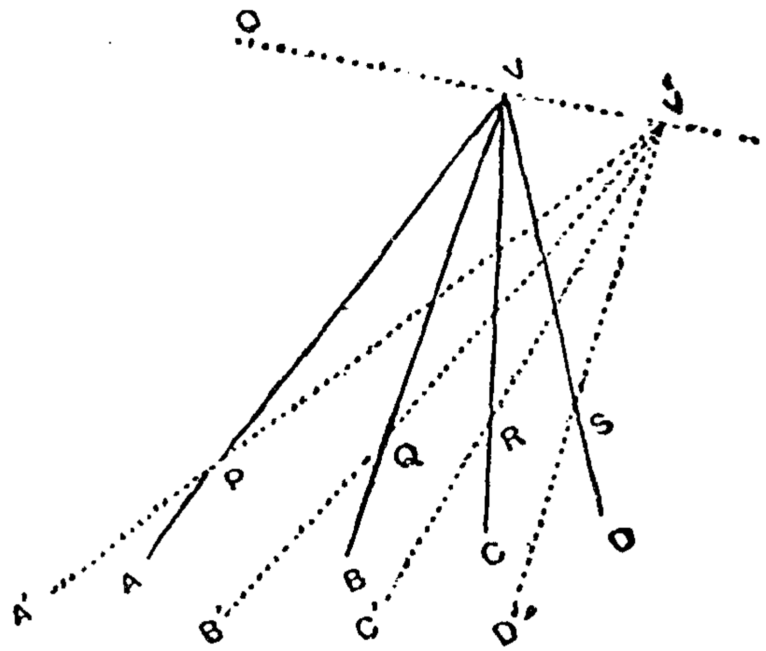
故 D′ 與 D″相重。

故聯一對相當點之直線必過 O，故二列點相透視。

61. 二束線 V(A,B,C,D,……)及V′(A′,B′,C′,D′,……)，如 V 與 V′ 相透視，且 VA 上一切點與 VA′ 上一切相當點透視，VB 上各點與 VB′相當點透視……，則二束線爲透視。

定理 設二互相透視之束線，在二不相同之平面上，

則共有一橫線，且爲相似束線。



設此二束線，各爲 V(ABCD……)，V'(A'B'C'D'…)，則 VA 及 V'A' 爲同平面，故相交。設交點爲 P。

同理 VB，V'B' 交於 Q；VC，V'C' 交於 R；VD，V'D' 交於 S；………。

則 P，Q，R，S，……在第一束線之平面上，亦在第二束線之平面上，故在二平面之交線上，卽 P，Q，R，S，……爲一直線。

又因 V(A，B，C，D，……) = (PQRS……) = V'(A'，

B′,C′,D′,……),故此束線相似。

含 P,Q,R,S,……之直線稱爲透視軸。

62. 自本章透視之定義,一平面上任意二束線皆爲透視。

設二束線之各對相當線交於 P,Q,R,S……,P,Q,R,……等點不必在一直線上;若 P,Q,R………在一直線上,則二束線稱爲同軸束線 Coaxally in Perspective。

若二束線爲同軸則必相似。

63. 於其他幾何教本中,定義常有異於本書者。如彼等以二束線各相當線交於一直線上者爲透視,然本書則依 §62 之定義爲標準,而命前者爲同軸透視。故二透視束線之在異平面者,必爲同軸透視,而同在一平面者則否。

64. 定理 設同平面上二相似束線有一公線,而此線又爲二束線之相當線,則二束線爲同軸透視。

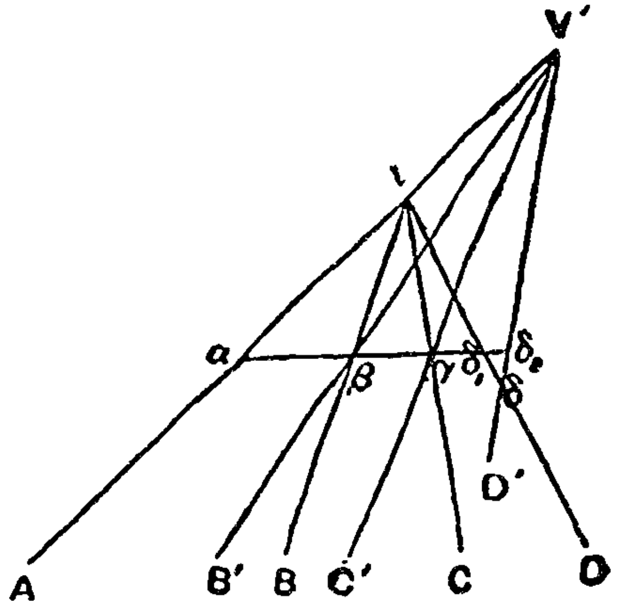
設二束線爲 V(A,B,C,D,……),及 V′(A,B′,C′,D′,……)。

V′VA 爲公線。

又設 VB 與 V′B′ 交於 β; VC 與 V′C′ 交於 γ; VD

與 V'D' 交於 δ。

聯 $\beta\gamma$ 與 V'VA 交於 α;而與 VD 及 V'D' 各交於 δ_1 及 δ_2。



因二線束線相似。

故 $$V(ABCD)=V'(AB'C'D')。$$

$$\therefore \quad (\alpha\beta\gamma\delta_1)=(\alpha\beta\gamma\delta_2)。$$

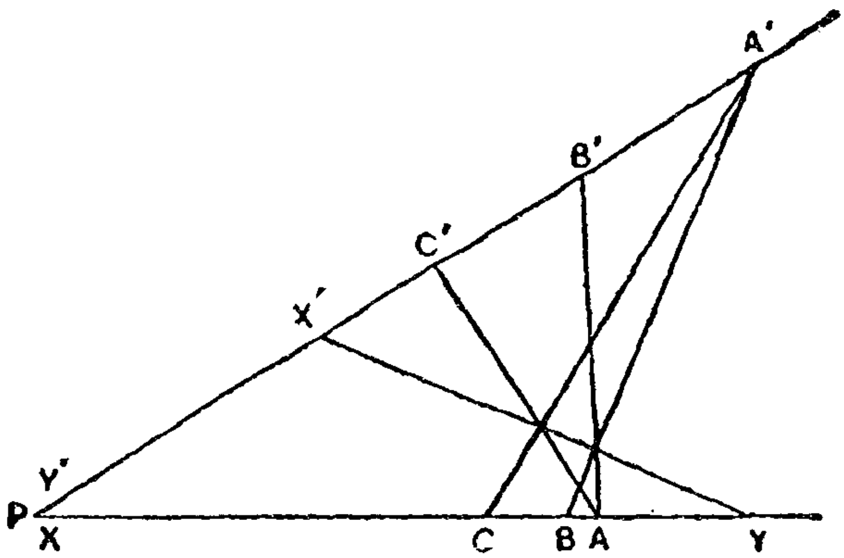
故 δ_1 與 δ_2 相合於 δ。

故 VD 與 V'D' 交於 $\beta\gamma$ 直線上。

同理可證其餘各對相當線皆交於 $\beta\gamma$ 線上。

故二束線爲同軸透視。

65. 定理 設二相似之列點 ABCD…，及 A'B'C'D' 交於一點，而此點不爲二列點之相當點時，則每對交叉聯線之交點(如AB'，A'B之交點)皆在一直線上。



設二列點交於 P。

原設謂在 ABC……上之 P 不與 A'B'C'…… 上之 P 相當，故爲便利計，可以二字母代 P。設 P 點在 ABC…上稱爲 X；在 A'B'C'…上則稱爲 Y'。

設 A'B'C'…上有一點 X' 與 ABC 上之X(卽 P)相當，

ABC…上有一點 Y 與 A'B'C' 上之 Y'(卽 P)相當，

則 $(ABCXY\cdots)=(A'B'C'X'Y'\cdots)$。

$\therefore\quad A'(ABCXY\cdots)=A(A'B'C'X'Y'\cdots)$。

此二束線中，有 AA′ 為相當之公線。

故自前節可知，此束線之各對相當線交於一直線上。

卽 A′B，AB′；A′C，AC′；A′X，AX′；A′Y，AY′；…。

故每對交叉聯線之交點之軌跡為 X′Y 直線。

X′Y 稱為此相似束線之軸。

如二列點之交點為二列點之相當點時，則此定理亦眞。讀者當能證之。

66. 定理 設同平面二相似束線 V(A，B，C，…)及 V′(A，B，C，…) 無公共之相當線。若 VP 及 V′Q′；VQ 及 V′P′(VP，V′P′，VQ，VQ′ 為任意二對相當線)交於二點，則聯此二交點之直線必過一定點。

此定理可與前節同法證之。

讀者從此卽知本定理乃 § 65 之對極定理。

透視三角形

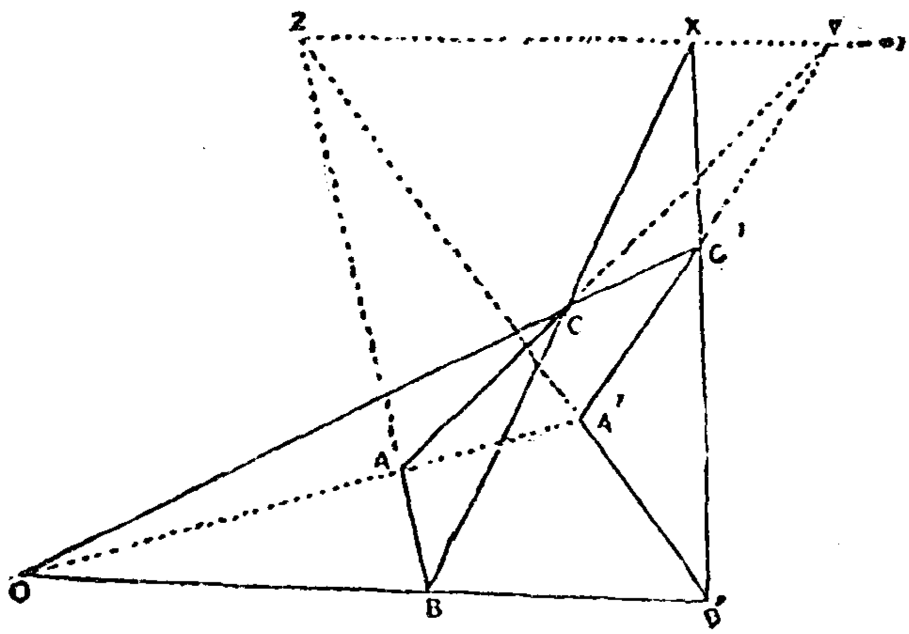
67. 定理 設二三角形之三相當頂之聯線交於一點，則其相當邊之交點在一直線上。其逆亦眞。

1. 設此二三角形不在一平面上。

設 O 爲透視心。

因 BB′與 CC′交於 O，BC 與 B′C′必相交。設交點爲 X。

同理 CA 與 C′A′相交，設交於 Y。AB 與 A′B′相交，設交點爲 Z。



今 X，Y，Z 皆在 ABC 平面上，同時又在 A′B′C′ 平面上，故此三點必在二平面之交線上。故

本定理之逆可證之如下：

設二三角形 ABC，及 A'B'C'，每對相當邊之交點 X，Y，Z 在一直線，今欲證其頂點之聯線 AA'，BB'，CC' 交於一點。

因 BC 與 B'C' 相交，故同在一平面上。同理，其餘兩對相當邊，亦各同在一平面。

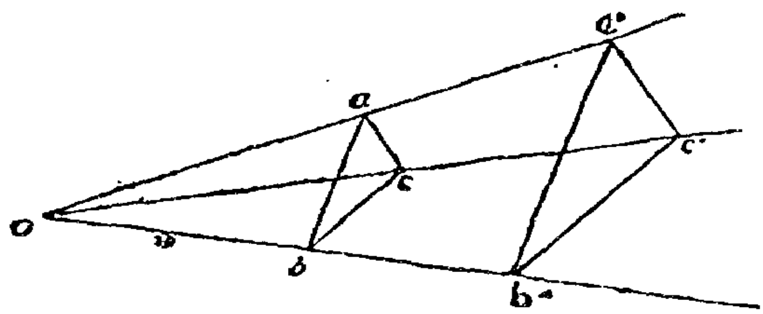
此三平面 BCC'B'，CAA'C'，ABB'A'，每二平面之交線各爲 AA'，BB'，及 CC'。

但此三平面不同交於一直線，故不交於一點 O。

O 在 AA' 上，亦在 BB' 及 CC' 上。

卽 AA'，BB'，CC' 三聯線交於一點也。

2. 設二三角形同在一平面上。



先設二三角形爲透視，卽聯各對頂點之直線交於一點。

設三對當邊交於 X, Y, 及 Z。今欲證 X, Y, Z 在一直線，射影原圖形於他平面上，使 X, Y 射於無窮遠。

於射影圖形中，以相同之小字母代各點。

則 $ob : ob' = oc : oc'$, 因 $bc \parallel b'c'$

$= oa : oa'$。 因 $ca \parallel c'a'$

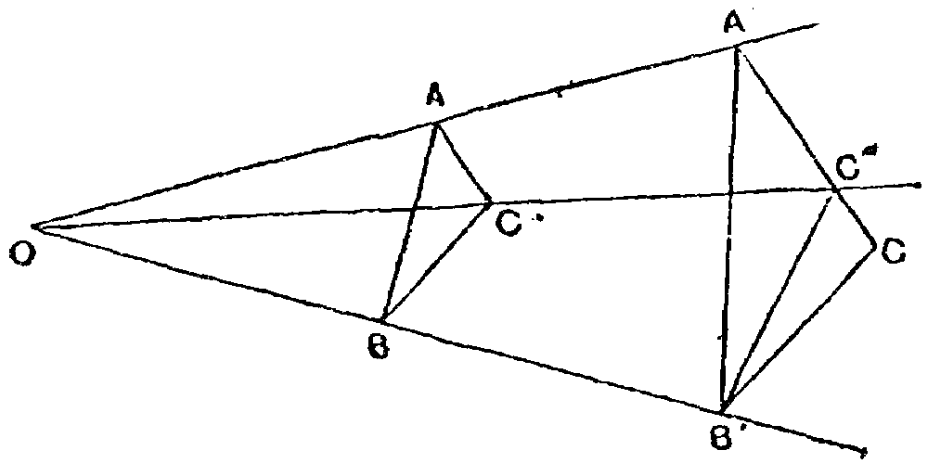
$\therefore$ $ab \parallel a'b'$。

故 Z 點之射影亦在無窮遠。

故 X, Y, Z 同在遠射線上。

逆定理可證之如下:

設 X, Y, Z 同在一直線上，求證此二三角形爲透視。



設 AA′ 與 BB′ 交於 O。

聯 OC 與 △A′B′C′ 一邊 A′C′ 交於 C″。

則 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C''$ 爲透視。

$\therefore$ BC 與 $B'C''$ 交於 YZ 直線上。

但 BC 與 $B'C'$ 交於 YZ 上(卽 X 點)。　原設

$\therefore$ $B'C''$ 與 $B'C'$ 爲一直線。

卽 C'' 與 C' 相重。

故 $\triangle ABC$ 與 $\triangle A'B'C'$ 相透視。

〔註〕 同平面二三角形之證法亦可不以射影法證明。法於他平面上作一三角形與二三角形皆爲透視，則可證原平面之二透視三角形各對相當之交點，皆在二平面之交線上。

68. 定理 設二三角形 ABC 與 $A'B'C'$ 透視。 而

$A'B', A'C'$ 各交 BC 於 A_1, A_2;

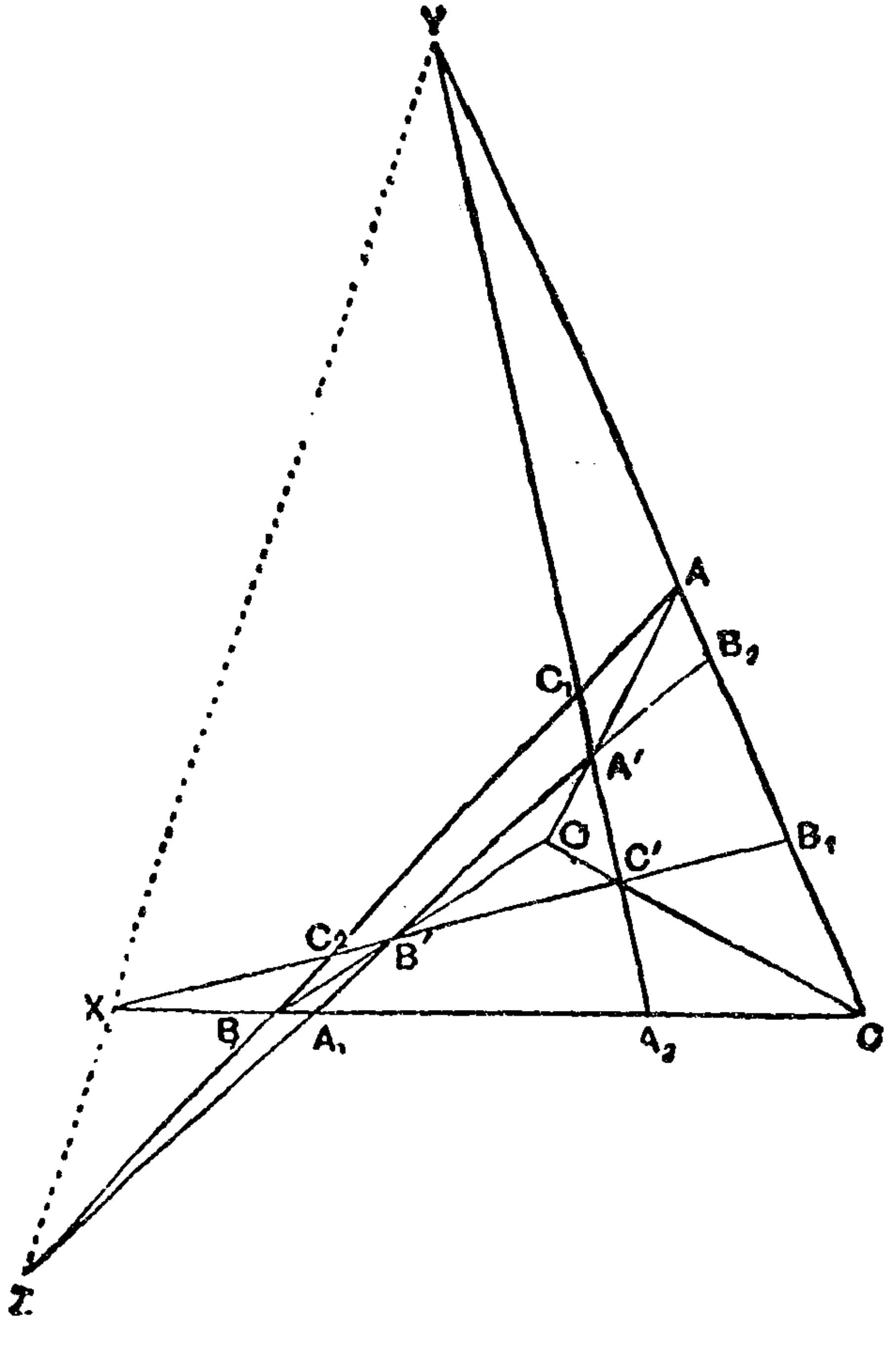
$B'C', B'A'$ 各交 CA 於 B_1, B_2;

$C'A', C'B'$ 各交 AB 於 C_1, C_2。　則

$$AB_1 \cdot AB_2 \cdot CA_1 \cdot CA_2 \cdot BC_1 \cdot BC_2 = AC_1 \cdot AC_2 \cdot BA_1 \cdot BA_2 \cdot CB_1 \cdot CB_2。$$

因　BC, $B'C'$ 交於X; CA, $C'A'$ 交於 Y; AB, $A'B'$ 交於 Z。

因 X, B_1, C_2 同在一直線上。



$$\therefore \qquad \frac{AB_1 \cdot CX \cdot BC_2}{AC_2 \cdot BX \cdot CB}=1。$$

因 Y, C_1, A_2 同在一直線上。

$$\therefore \qquad \frac{AY \cdot CA_2 \cdot BC_1}{AC_1 \cdot BA_2 \cdot CY}=1。$$

又因 Z, A_1, B_2 在一直線上。

$$\therefore \qquad \frac{AB_2 \cdot CA_1 \cdot BZ}{AZ \cdot BA_1 \cdot CB_2}=1。$$

故 $$\frac{AB_1 \cdot AB_2 \cdot CA_1 \cdot CA_2 \cdot BC_1 \cdot BC_2 AX \cdot CX \cdot BZ}{AC_1 \cdot AC_2 \cdot BA_1 \cdot BA_2 \cdot CB_1 \cdot CB_2 \cdot AZ \cdot BX \cdot CY}=1。$$

然 X, Y, Z 在一直線上。

$$\therefore \qquad \frac{AY \cdot CX \cdot BZ}{AZ \cdot BX \cdot CY}=1。$$

$$\therefore \qquad \frac{AB_1 \cdot AB_2 \cdot CA_1 \cdot CA_2 \cdot BC_1 \cdot BC_2}{AC_1 \cdot AC_2 \cdot BA_1 \cdot BA_2 \cdot CB_1 \cdot CB_2}=1。$$

本定理之逆亦眞。證法以前證法倒置卽得。

系 三角形 ABC 與以下三個三角形皆透視。

(1) 以 A_1B_2, B_1C_1 及 C_2A_2 爲三邊之三角形。

(2) 以 A_1B_1, B_2C_2 及 C_1A_2 爲三邊之三角形。

(3) 以 A_1B_1, B_2C_1 及 C_2A_2 爲三邊之三角形。

此系讀者當不難證明之。

習 題

1. 設 ABC 與 $A'B'C'$ 二列點同在一平面上。 BC' 與 $B'C$ 交於 A_1；CA'，$C'A$ 交於 B_1；AB'，$A'B$ 交於 C_1。求證 $A_1B_1C_1$ 爲一直線。

2. 同平面上二三角形 ABC，$A'B'C'$ 相透視，O 爲透視心。過 O 作一直線不與兩三角形同平面，於此直線上取二點S及 S'。求證於空間有一三角形與 ABC 透視，亦與$\triangle A'B'C'$ 透視，各以 S 及 S' 爲透視心。

3. 假設不同平面上之兩透視三角形爲同軸。應用前題以證明同平面上之兩透視三角形爲同軸。

4. 設 ABC 及 $A'B'C'$爲透視之二三角形。BC'，$B'C$ 交於 A_1；CA'，$C'A$ 交於 B_1；AB'，$A'B$ 交於 C_1，則三角形 $A_1B_1C_1$ 與原三角形皆透視，且此三個三角形公有一透視軸。

5. 設三個三角形兩兩相透視，且公有一透視軸，則三透視頂同在一直線上。

6. 直線 AC 上有兩點 Q 及 R， AD 上有一點 V。VD與另一直線 AB 交於 Z；VR，AB 交於 Y。於AB上另

取一點 X。聯 XQ 與 AD 交於 U;聯 XR 與 AD 交於 W。求證 YU,ZW 及 AC 交於一點。

7. 設以 a',b',c' 代替△A'B'C' 中對 A',B',C'頂角之邊。而此 Ab' 表示自 A 至 b'之垂線之長。其他垂線亦以同法表明之。則若△ABC 與△A'B'C' 透視時,

$$Ab'\cdot Bc'\cdot Ca' = Ac'\cdot Ba'\cdot Cb'。$$ 其逆亦眞。

8. 設 ABC 與 A'B'C' 爲同平面二透視三角形,則

$$\frac{\sin A\hat{B}C'\sin A\hat{B}A'\sin B\hat{C}A'\sin B\hat{C}B'}{\sin A\hat{C}B'\sin A\hat{C}A'\sin C\hat{B}A'\sin C\hat{B}C'}$$

$$\cdot\frac{\sin C\hat{A}B'\sin C\hat{A}C'}{\sin B\hat{A}C'\sin B\hat{A}B'}=1。$$

9. 同平面二透視三角形得射影成兩等邊三角形。

10. ABC 爲一三角形。I_1,I_2,I_3 爲對 A,B,C 頂點之旁切圓心。I_2I_3 與 BC 交於 A_1; I_3I 與 CA 交於 B_1; I_1I_2 與 AB 交於 C_1。求證 $A_1B_1C_1$ 爲一直線。

第七章

調和列點

69. 定義　一直線上四點 ABCD，若$(ABCD)=-1$，則此四點稱為調和列點 Harmonic range。

自交比之定義,得

$$\frac{AB\cdot CD}{AD\cdot CB}=-1。$$

$$\frac{AB}{AD}=-\frac{AB-AC}{AD-AC}=\frac{AB-AC}{AC-AD}。$$

則 AC 為 AB 及 AD 之調和中項。此即命名之義。

設　$(ABCD)=-1$，則依 §50 可得二十四種交比之值。

(ABCD),(BADC),(CDAB),(DCBA),

(ADCB),(BCDA),(CBAD),(DABC),各等於1。

故不但 AC 為 AB 及 AD 之調和中項，亦

BD 爲 BA 及 BC 之調和中項；

DB 爲 DC 及 DA 之調和中項；

CA 爲 CB 及 CD 之調和中項。

調和列點亦可以 $(AC,BD)=-1$ 表之。而稱 A,C 爲對於 B,D 之調和點對；或 B,D 爲對於 A,C 之調和點對。自以上八個交比，可見 A,C 爲一對，B,D 又爲一對，兩對相間排列，而得 -1 之值。

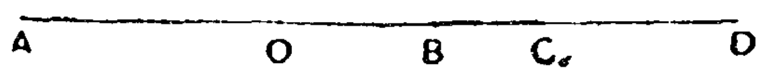
有時本書稱 D 點爲第四調和點。或謂 B,D 調和分離 AC；或A,C 調和分離 BD。

定義　一直線截一線束於四點成調和列點時，則此束線稱爲調和束線 Harmonic pencil。

一角之內，外分角線與此角之二夾邊成調和線束。

70. 定理　設$(AC,BD)=-1$。而 O 爲 AC 之中點。則

$$OB\cdot OD=OC^2=OA^2。$$



因　　　$(ABCD)=-1$。

$$AB \cdot CD = -AD \cdot CB。$$

於諸線段中插入一點 O，得

$$(OB-OA)(OD-OC) = -(OD-OA)(OB-OC)。$$

但 $$OA = -OC。$$

$$\therefore (OB+OC)(OD-OC) = -(OD+OC)(OB-OC)。$$

$$\therefore \quad OB \cdot OD + OC \cdot OD - OB \cdot OC - OC^2$$

$$= -OD \cdot OB + OC \cdot OD - OB \cdot OC + OC^2。$$

$$\therefore \quad 2OB \cdot OD = 2OC^2。$$

$$\therefore \quad OB \cdot OD = OC^2 = AO^2 = OA^2。$$

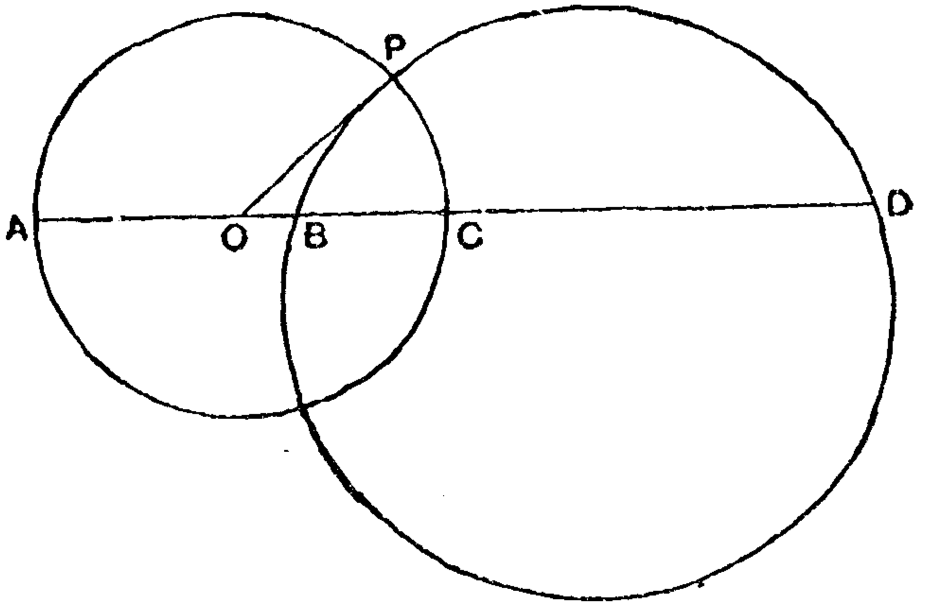
設 O′ 為 BD 之中點，則

$$O'C \cdot O'A = O'B^2 = O'D^2。$$

系 1. 本定理之逆亦眞。卽設 A，B，C，D 爲一列點，O 爲 AC 之中點。若 $OC^2 = OB \cdot OD$ 時，則 $(AC, BD) = -1$。

系 2. 已知列點上三點 A，B，C，以 AC 爲直徑作圓，則對於此圓，B 點之逆點，卽此列點之第四調和點。

71. 定理 設 $(AC, BD) = -1$。以 AC 爲直徑作一圓，則過 B，C 二點之任何圓必與前圓正交。



設以 AC 爲直徑之圓與過 B,D 之任一圓交於 P。

又設 O 爲 AC 之中點。

則　　$OB \cdot OD = OC^2 = OP^2$。

故　OP 爲 BPD 圓之切線。

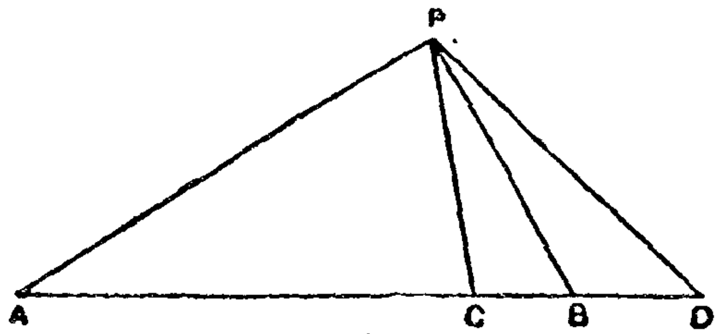
故二圓爲正交。

同理可證 O 圓與過 B,D 二點之任何圓皆爲正交。

系 1.　設 A,B,C,D 爲一列點，而以 AC 爲直徑之圓與過 B,D 二點之任何圓爲正交，則$(AC, BD) = -1$。

系 2.　設二圓正交，則一圓調和分離他圓之直徑。

72. 定理 設 $P(AB,CD)=-1$，而 $A\hat{P}B$ 爲直角。則 PA, PB 爲 $C\hat{P}D$ 之內外分角線。



作一橫線截此調和束線於 A, B, C, D。

則 $$(AB,CD)=-1。$$

$$\therefore \quad \frac{AC\cdot BD}{AD\cdot BC}=-1。$$

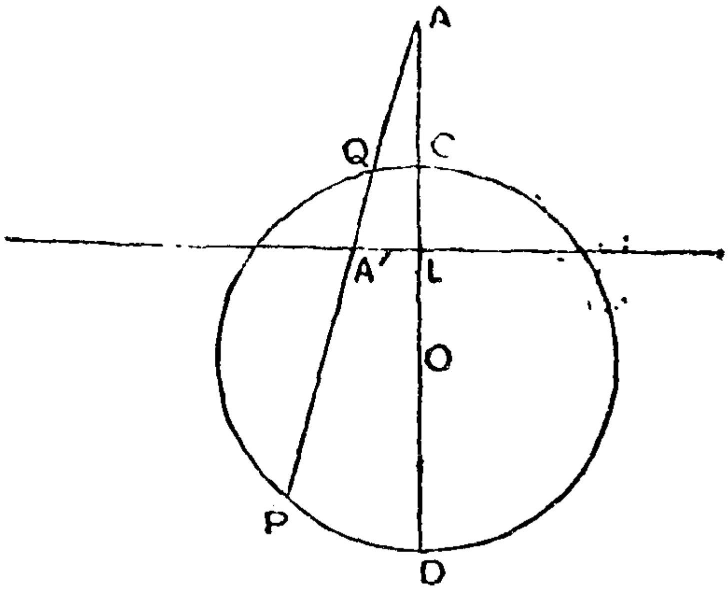
$$AC:AD=CB:BD。$$

因 P 在以 AB 爲直徑之圓上。

$$\therefore \quad PC:PD=CB:BD=AC:AD。\quad §27$$

故 PB, PA 爲 $C\hat{P}D$ 之內，外分角線。

73. 定理 設 A, A' 爲對於一圓之逆點。聯 AA' 之直線與圓交於 P, Q，則 $(PQ,AA')=-1$。



過 A 作此圓之直徑與圓交於 C, D, 如圖。

A 之極線交 CD 於 L。

設 O 為圓心。

則極點與極線之關係，可得

$$OL \cdot OA = OC^2。$$

$$\therefore \qquad (CD, LA) = -1。$$

故以CD為直徑之圓(即原設之圓)與過 A, L 二點之任何圓為正交。

但 A' 在 A 之極線上。

故以 AA' 為直徑之圓必過 L。(因 $A\hat{L}A'$ 為直角)

故此圓與 O 圓正交。

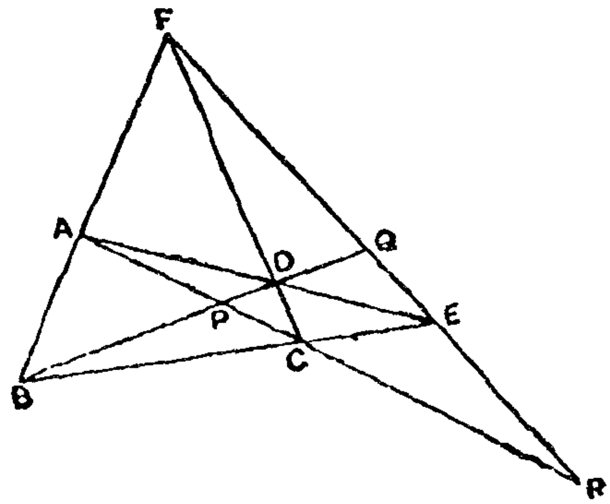
但 O 圓過 P 及 Q。

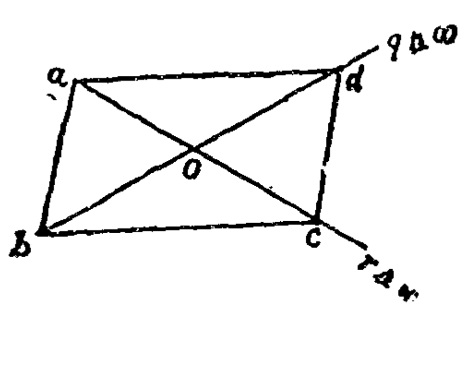
$\therefore \qquad (PQ, AA') = -1$。

本定理可變爲以下之定理。

設 A 爲一圓平面上之一點，則過 A 點之弦爲 A 及其極線分成調和列點。

74. 定理　四邊形任二對角線調和分離其他對角線。





設 AB,BC,CA,AB,當四邊形之四邊，此四邊交於 A,B,C,D,E,F，則其三對角線爲 AC,BD,EF。

射影此圖形於他平面上,使 EF 射影無窮遠,用各小字母於射影圖形上,則 abcd 爲平行四邊形。

則三對角線交於 P,Q,R,如圖。

則　(BPDQ)＝(bpdq)

$$=\frac{pp\cdot dq}{bq\cdot dp}=\frac{bp}{dp}\left(因\frac{dq}{bq}=\frac{\infty}{\infty}=1\right)$$

$$=-1。$$

同理　　　(APCR)＝－1。

又　(FQER)＝B(FQER)＝(APCR)＝－1。

故任一對角線爲其他二對角線調和分離。

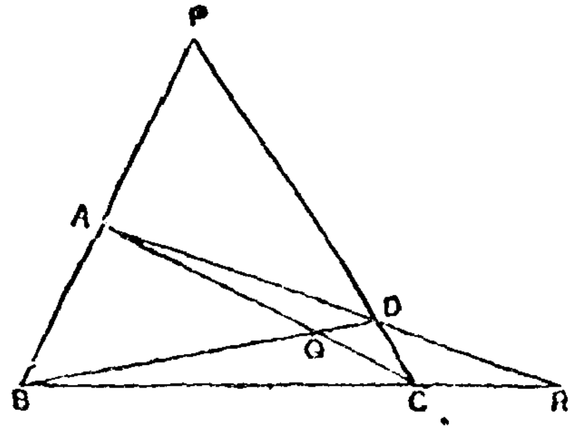
系　過 P,Q,R 三點之圓與以任一對角線爲直徑之圓正交。

自本定理之證中,可知若 A,B,M,ω 爲一列點,M爲 AB 之中點,ω 爲無窮遠點,則(AB,Mω)＝－1。

75. 於圖形幾何學中，四邊形之意義與尋常幾何中不同。其義謂四邊形者,乃同平面上四直線所組成之圖形。此四直線交於六點。除原有之四直線外,尙可聯以三直線,

此三直線稱爲對角線。一對角線在四直線所圍之面積之外者，稱爲第三對角線。

76. 四邊形 Quadrilateral 與四角形 Quadrangle 不爲同物。前者已於 § 75 中說明之。後者乃爲同平面上四點，每兩點以直線聯之，所得六直線，組成一圖形，稱爲四角形。此圖形中，除原有之四點外，尙有三交點，稱爲此四角形之對角點。



以上定義，可以圖明之。

設 A,B,C,D 爲四角形之四點。每二點聯以直線，得 AB,BC,CD,DA,AC 及 BD 六直線。

AB 與 CD;AC 與 BD;AD 與 BC 皆稱爲對邊。

對邊之交點 P,Q,R，稱爲對角點。三角形 PQR 稱

為對角三角形。

四角形之調和性質如下:

交於一點之四角形兩對邊及對角三角形之二邊成調和束線。

以§74定理證明此題。

因對角三角形對於四角形之調和關係，此三角形又稱為調和三角形。

習　題

1. 同平面二直線 AB, CD 上各一點 M 及 N。求證 M 及 N 得射影於他平面上，使其射影各為 AB, CD 之射影之中點。

2. 過三角形 ABC 之頂點各作一直線 AA_1, BB_1, CC_1，作截對邊於 A_1, B_1, C_1。設此三直線交於一點。聯 B_1C_1 與 BC 交於 A_2；C_1A_1，與 CA 交於 B_2；A_1B_1，與 AB 交於 C_2。求證 $(BC, A_1A_2)=-1$, $(CA, B_1B_2)=-1$, $(AB, C_1C_2)=-1$。

3. 若以前題中之 A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 為直徑作三圓。

求證此三圓爲同軸。[設以 A_1A_2, B_1B_2 爲直徑之二圓交於 P，證明 $C_1\hat{P}C_2$ 爲直角，應用前題及 § 27]

4. 設 E 爲列點 ADC 外一點。B 爲 CE 直線上一動點。AE 與 BD 於交 Q；CQ 與 DE 交於 R；BR 與 AC 交於 P，則無論 B 在 CE 之任何位置，P 爲一定點。

5. 三角形 ABC 一邊 BC 上一點 M，過 M 作直線平行於 AC 及 AB，各截 AB 及 AC 於 B′ 及 C′。BC′，B′C 交於 P；AP，B′C′ 交於 M′。求證

$$M'B' : M'C' = MB : MC。$$

6. 設 (D，D′)，(E，E′)，(F，F′) 各爲一三角形各邊 BC，CA，AB 上之兩點，各調和分各邊。求證 EF，E′F′ 交於 BC 上；FD，F′D′ 交於 CA 上；DE，D′，E′ 交於 AB 上。

7. 設 V 爲 $\triangle ABC$ 平面上之一點。作 VA′，VB′，VC′ 各平分 $B\hat{V}C$，$C\hat{V}A$，$A\hat{V}B$，并各截 BC，CA，AB 於 A′，B′，C′。設 A″，B″，C″ 各爲列點 BA′C，B′B′A，AC′B 之第四調和點。求證 A″，B″，C″ 在一直線上。

8. 自三角形頂點 A，B，C 作垂於對邊之直線，AA_1，BB_1，CC_1。A_1B_1 交 AB 於 C_2。聯 A 及此三角形之垂心 AP，

X 爲 AP 之中點。C_1X 與 BB_1 交於 T。求證 $C_2P\perp BC$。

9. 設 A 爲定圓外一點，P 爲圓周上一點。於 A 點作 AP 之垂線，於其上取一點 F，以 AP 及 AF 爲二邊作矩形 PAFQ。若 P 沿定圓周移動時，Q 之軌跡爲一直線。

10. 於△ABC之BC邊上取二點A_1,A_2，使$(A_1B_2'BC)=-1$。同樣於 CA，AB 上各取 B_1，B_2，及 C_1，C_2。求證 AA_1，BB_1，CC_1 在一直線上，則 AA_1，BB_1，CC_1 交於一點。

11. 過三角形之三頂點作三直線 AA_1，BB_1，CC_1，同過一點，各截對邊於 A_1，B_1，C_1。B_1C_1 與 BC 交於 A_2；C_1A_1 與 CA 交於 B_2；A_1B_1 與 AB 交於 C_2。求證以A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 爲直徑所作之圓各與 △ABC 之外接圓正交，且四圓心在一直線上。

12. 設 A，B 對於一圓爲點對，M 爲 AB 之中點。求自 M 至此圓之切線之長等於 MA。

13. 於一組圓之平面上有二定點，若此二定點對於組中任一圓皆爲點對，則每二圓之根軸交於一點。

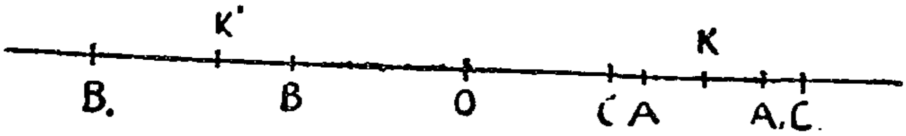
14. 於一組圓之平面上二定點，對於組中任一圓皆互爲逆點，則此組圓爲同軸。

第八章

對合列點

77. 定義　設 O 及 $A, A_1, B, B_1, C, C_1, \cdots\cdots$ 等為一直線上諸點，而

$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = \cdots\cdots = k$，則謂各點對 $A, A_1; B, B_1; C, C_1; \cdots\cdots$ 等在一對合列點 Involution。而每對之點，則稱為對合點對 Conjugates，有時或稱其一為其他之伴 mate。



O 點稱為對合列點之中心，K 稱為對合常數。若 K 為正數，則對合點對同在 O 之一旁。在此情形之下，於 O 之兩旁可得二點 K 及 K'，使 $OK^2 = OK'^2 = k$。依上述之定義，K 及 K' 各自為伴。故稱為對合列點之重點 Double points。然 K 幷非 K' 之伴，以 $OK \cdot OK' = -k$ 故也。

對合列點中任一對點對，與兩二重點有調和關係，即 $(AA_1, KK') = -1$。

若 k 爲一負數，則點對在 O 之兩旁，而兩重點爲虛點。

以 $AA_1, BB_1, CC_1, \cdots\cdots$ 爲直徑作圓，則成一組同軸圓組。公共根軸與此直線交於 O，K 及 K' 爲此組之二極限點。

更有進者，若以 KK' 爲直徑作圓，則列點中每點，對於此圓，爲其伴之逆點。

於一對合列點中，若已知兩對點對，或一對點對及一重點，或兩重點，即可作此列點。

78. 定理 若 C, C_1 屬於 $A, A_1; B, B_1$ 二對點對所定之對合列點，則 $(ABCA_1) = (A_1B_1C_1A)$。反之，若

$(ABCA_1) = (A_1B_1C_1A)$，則 $A, A_1; B, B_1; C, C_1$ 爲一對合列點。

先證本定理之第一部：

設 O 爲此列點之中心，k 爲對合常數。

則 $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1$。

$$\therefore\ (ABCA_1)=\frac{AB\cdot CA_1}{AA_1\cdot CB}$$

$$=\frac{(OB-OA)(OA_1-OC)}{(OA_1-OA)(OB-OC)}$$

$$=\frac{\left(\frac{k}{OB_1}-\frac{k}{OA_1}\right)\left(\frac{k}{OA}-\frac{k}{OC_1}\right)}{\left(\frac{k}{OA}-\frac{k}{OA_1}\right)\left(\frac{k}{OB_1}-\frac{k}{OC_1}\right)}$$

$$=\frac{(OB_1-OA_1)(OA-OC_1)}{(OA-OA_1)(OB_1-OC_1)}$$

$$=\frac{A_1B_1\cdot C_1A}{A_1A\cdot C_1B_1}=(A_1B_1C_1A)。$$

以上乃以代數法證明，於下節中，將以幾何法證之。

玆將繼續證本定理之第二部：

假設 C' 為 C 之伴。

自前半節所證明，得

$$(ABCA_1)=(A_1B_1C'A),$$

但　$$(ABCA_1)=(A_1B_1C_1A),$$　原設

$$\therefore\ (A_1B_1C_1A)=(A_1B_1C'A),$$

故 C_1 與 C' 相合。

系1　若 $A,A_1;B,B_1;C,C_1;D,D_1$。同屬於一對合列點。

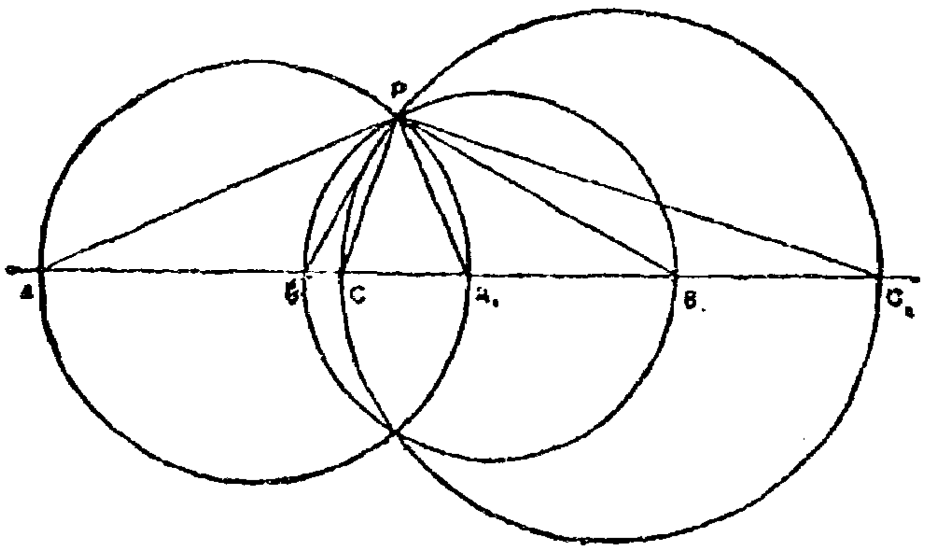
則　　$(ABCD)=(A_1B_1C_1D_1)$。

系 2　若 K 及 K′ 爲兩重點，

則　　$(AA_1KK')=(A_1AKK')$，

又　　$(ABKA_1)=(A_1B_1KA)$。

79. 前定理之第一部，可以幾何法證之如下：



設此三對點對 $A,A_1;B,B_1;C,C_1$ 屬於一對合列點。

則以 AA_1,BB_1,CC_1 爲直徑之三圓爲同軸。(§ 77)

設此三圓交於 P，

則 $A\hat{P}A_1$，$B\hat{P}B_1$，$C\hat{P}C_1$ 皆爲直角。

故　　$P(ABCA_1)=P(A_1B_1C_1A)$。

$$\therefore\ (ABCA_1)=(A_1B_1C_1A)。$$

若三圓不交於實點，本定理亦眞，其解釋詳下第十八章。

80. 前定理亦可以文字言之。卽一直線上三對點對，若每對中一點，及其中一點之伴，所成之交比，等於其他三點用同法所得之交比時，則三對點對屬於一對合列點。

此交比中，點之次序並無關係。惟各相當點則須在同一位置。故前定理之交比，亦可以

$$(AA_1BC)=(A_1AB_1C_1),$$

或　$(AA_1C_1B_1)=(A_1ACB)$ 等代之。

81. **定理**　對合列點之射影亦爲一對合列點。

設 $A, A_1; B, B_1; C, C_1$; 爲一對合列點以小字母代其射影。

則　$(ABCA_1)=(A_1B_1C_1A)$。

但　$(ABCA_1)=(a\,b\,c\,a_1)$,

及　$(A_1B_1C_1A)=(a_1b_1c_1a)$。

$\therefore$　$(a\,b\,c\,a_1)=(a_1b_1c_1a)$。

$\therefore$　$a, a_1; b, b_1; c, c_1$ 爲一對合列點。

原列點之兩重點之射影，亦爲射影列點之重點。然前

者之中心，則不射成後者之中心。

82. 對合線束。

一束線 VP, VP′, VQ, VQ′, VR, VR′,……，爲一橫線所截，若得一對合點列，則稱此線束爲對合束線。此束線無論爲何橫線所截，必得一對合列點。此理甚明，不證即知。

聯 V 及任一橫線所截成之對合列點之重點之兩直線，稱爲重線 Double lines。

兩重線與任一對對合線對成調和束線。

由以上之結果，可知若 VA 及 VA′ 爲以 VD 及 VD′ 爲重線之對合束線之一對線對，則 VD 及 VD′ 同時亦爲以 VA 及 VA′ 爲重線之束線之線對。

83. 圓之對合線對

定理 在一直線上，對於一圓之各對點對，皆屬於一對合列點。此直線與圓之兩交點，即其兩重點。

設 P, Q 爲對於 C 圓之任一對點對，又設 O 爲 PQ 直線之極點。

則 OPQ 爲一自極三角形，（即每頂點爲其對邊之極

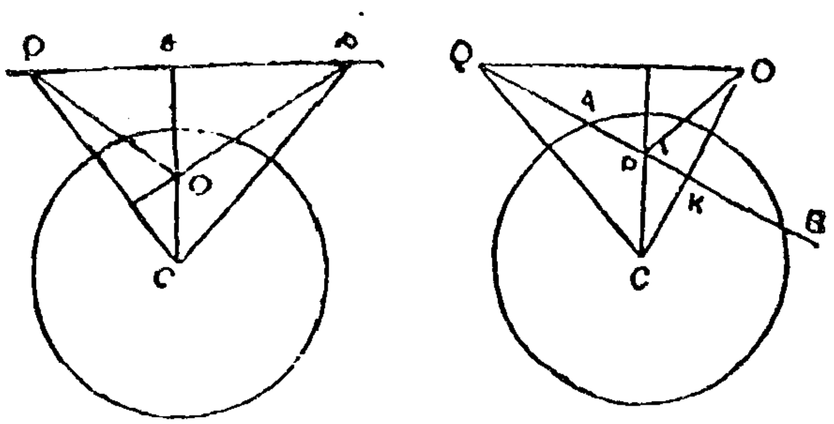
點)。而圓心 C 爲此三角形之垂心。(第二章 § 17)

自 C 作 CK 垂直於 PQ,

則　　　　$PK \cdot KQ = KO \cdot KC$,

$$\therefore \quad KP \cdot KQ = OK \cdot KC = \text{常數}。$$

故 P, Q 屬於一對合列點,其對合常數爲 $OK \cdot KC$。



於右圖中 PQ 與圓交於 A 及 B 二點, $OK \cdot KC$ 等於 KA^2 或 KB^2, 故 A 及 B 爲此列點之兩重點。於左圖中 PQ 不與圓相交,故其兩重點爲虛點。

84. 定義　一圖形爲數點及數直線所組成, 若對於一定圓或圓錐曲線,各點之極線, 及各線之極點, 另組成一圖形,此新圖形稱爲前者之對極圖形;而關於二圖形之兩定理,互稱爲對極定理。

以下定理，即為前節定理之對極。

定理 經過一定點，對於一圓之各對線對，屬於一對合束線。自定點所作此圓之切線即其重線。

因任一對過定點 O 之線對，與 O 之極線之兩交點，屬於一對合列點。其重點為極線與圓之交點。

故各線對同屬於一對合束線，其重線即聯 O 及 O 之極線與圓之交點之二直線，即自 O 所作圓之切線也。

若 O 在圓內，則重線為虛線。

85. 正交線束 Orthogonal Involution

若一束線中每對直線正交時，則稱此線束為正交線束。

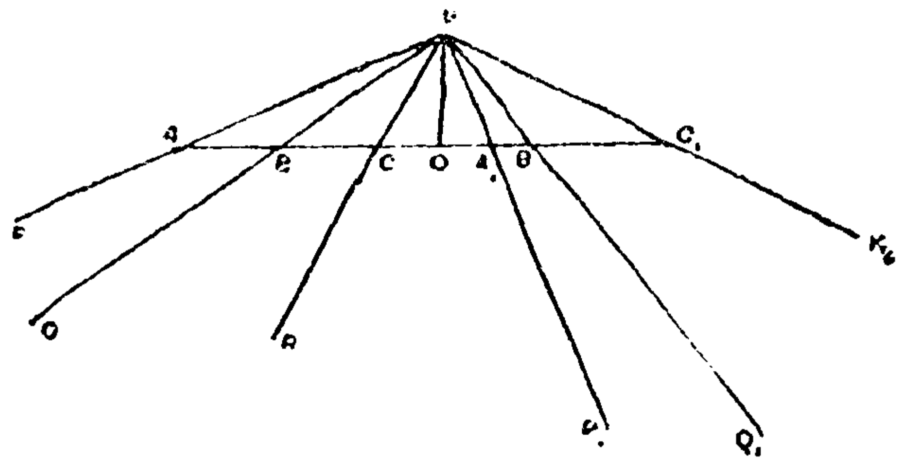
正交束線為對合束線之一種，於下可以證明之。

若以此束線之頂為圓心，任作一圓，則任一對正交線對，對於此圓成線對。自前節之定理，可知此束線亦為對合束線。

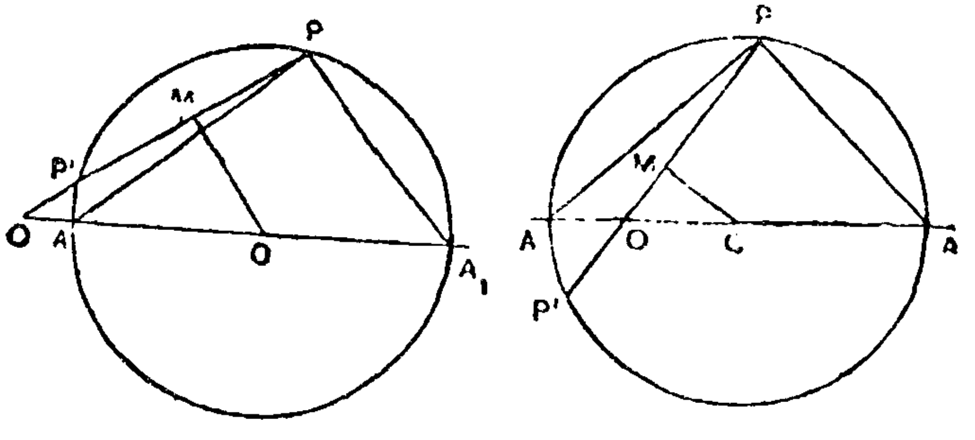
設 VP 與 VP_1；VQ 與 VQ_1；…… 各夾一直角，以一橫線 t 截之於 A, A_1；B, B_1；……。作 VO 垂於 t。

則 $OA \cdot OA_1 = -OV^2 = OB \cdot OB_1 = \cdots\cdots$。

故此對合列點之重點爲虛點。



86. **定理**　任何對合束線中若各對對合線對不皆爲正交時，則必有一對爲正交，然亦不能多於一對。



設 P 爲對合束線之頂，l 爲一橫線，截束線之中線於 O。又設 k 爲對合常數。

聯 OP，於其上或其引長線上，取一點 P′，使 OP·OP′

等於常數 k。

則 P 及 P′ 在 O 之同旁，或異旁，依 k 之值為正，為負而定。

平分 PP′ 於 M。作 MC 垂直於 PP′，與 l 交於 C。以 C 為圓心，CP 為半徑，作圓，與 l 交於 A 及 A_1。

則 $$OA\cdot OA_1=OP\cdot OP'=k。$$

故 A，A_1 屬於 l 上之一定對合點對。

又因 $A\hat{P}A_1$ 在半圓內，故為直角。

故此對合束線中有一對對合線對為正交。然此等線對不能有兩對，以兩對對合線對即定一對合束線。若一對合束線中有兩對線對成正交，則其餘各對亦皆成正交，而為正交束線矣。

87. 定理 一對合束線射影成一對合束線，任一對合束線，得射影成一正交束線。

設於 ρ 平面上有一對合束線，π 為另一平面，此束線之各直線與二平面之交線交於 A，A_1；B，B_1；C，C_1；等點。O 為束線之頂。其射影於 π 平面上為 O′。

則 A，A_1；B，B_1；C，C_1；……；成對合列點。

故　$O'(A,A_1;B,B_1;C,C_1;\cdots\cdots;)$為一對合束線。

若將兩對對合線對所夾之角，同時射成直角，則此線束之射影，為一正交線束。

〔註〕　射影一對合束線成正交線束時，同時可將平面任一直線，射影於無窮遠。

習　題

1. 一直線截一同軸圓組於數對點，成一對合列點，其兩重點與此組之二極限點，同在一圓周上。

2. 設 $A,A_1;B,B_1;$定一對合列點，K 及 K'為其兩重點，則 $A,B_1;A_1,B;K,K'$ 另成一對合列點。

3. 設對合束線之兩重線正交時，則每對對合線對所夾之角，為此二線所內外分。

4. 同平面兩透視三角形 ABC, $A'B'C'$ 之各對相當邊 $BC,B'C';\cdots\cdots;$交於，$P,Q,R;$又 AA',BB',CC'，各與直線交於 P',Q',R'。求證 $(PP',QQ',RR',)$為一對合線束。

5. 以四邊形之三對角線為直徑之三圓為同軸，其

公共根軸必過此四邊形對角三角形之外接圓心。

6. 於一三角形之平面上有二點，自每點至三角形之三頂點之距離之比爲定比。求證聯此二點之直線，必過此三角形之外接圓心。

第九章

圓 錐 曲 線

88. 定義　圓錐曲線 Conic section or conic(或稱圓錐截面)者,乃圓之圓錐射影所得之曲線也。

設於 ρ 平面上有一圓,以平面外一點射影之於 π 平面上,則於 π 平面上或得一圓或得一種曲線,通稱為圓錐曲線。因射影法之不同,可得三種圓錐曲線,其各種性質亦隨之而異。

89. 含圓之平面上有一直線,射影圓於他平面之時,同時將此直線射影於無窮遠,於第四章中,命此直線為遠射線。因遠射線位置之不同,射影曲線可分為三種。

(1)　若遠射線與圓相切,於射影平面上得一曲線,名為拋物線 Parabola。

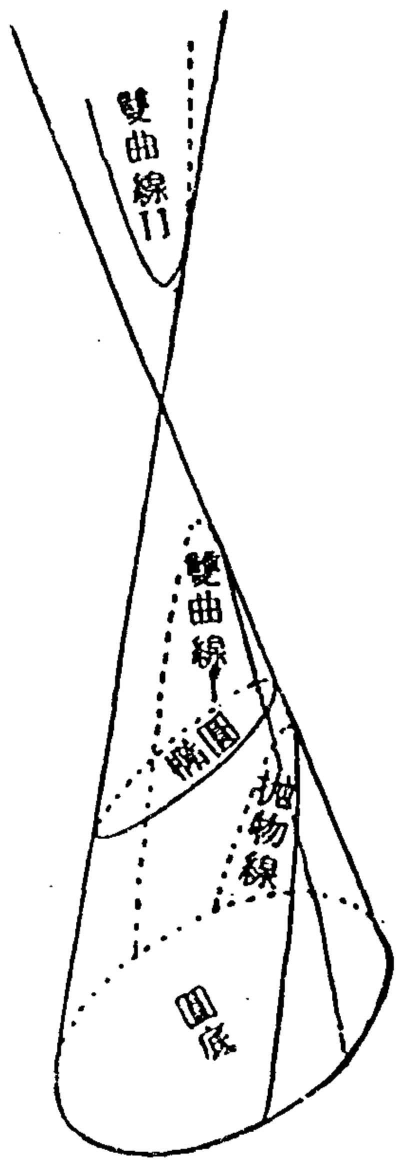
(2)　若遠射線不與圓相切,亦不相交,得一曲線,名橢圓 Ellipse。

(3)　若遠射線與圓相交,所得之曲線為兩段,名雙

曲線 Hyperbola。

此三種曲線更可以圓錐體之截面解說之，然此種解說與上述者實爲同物。

設以一平面截一圓錐體，若此平面與圓錐體之斜高平行，則得一拋物線。若此平面不與圓錐體之底相交時，則得一橢圓。若此平面平行於聯圓錐頂及圓底上任一點之直線時，則得一雙曲線。



右圖所示，卽圓錐體爲三種位置不同之平面所截。雙曲線有兩段，欲得其第二段，須引圓錐體之斜面，使成兩對頂之圓錐體。

90. 焦點及準線 Focus and Directrix。

於一平面上有一定點及一定直線，一點動於其間，而自動點至定點與至定直線之距離之比爲常數時，則動點之軌跡爲一圓錐曲線，定點稱爲焦點，定直線稱準線，常數稱爲離心率 Eccentricity，恆以 e 代之。

尋常幾何書中，對於圓錐曲線之定義，皆以焦點及準線之關係定之，然近世幾何學中，則以圓錐曲線爲圓之射影，而以射影性質，證明前者之關係。

於後數節中，將證明離心率之值等於，小於，或大於一，視圓錐曲線爲拋物線，爲橢圓，或爲雙曲線而定。

91. 關於圓錐曲線之課本，皆以焦點及準線證題，而不知此等曲線皆爲圓之射影也。以焦點及準線證題，複雜而不易明，凡讀過此種書者，類能知之，若易以射影法，同是一題，不數語卽可了之矣。

於次章中，將證明凡具有焦點及準線之關係之曲線，皆可得自圓之射影。

92. 圓錐曲線之射影性質。

圓錐曲線旣爲圓之射影，故有圓之一切射影性質。

(1) 一直線僅能與圓交於二點， 故於射影平面上，一直線僅能與圓之射影(圓錐曲線)交於二點。自圓外一點，可作一圓之二切線，故於射影平面上，自圓錐曲線外一點，可作此曲線之二切線。

(2) 圓錐曲線亦有極點與極線之關係，即曲線上過一定點之弦兩端之切線交點之軌跡爲一直線。

(3) 於圓錐曲線之平面上有兩點 A 及 B，若 A 之極線過 B，則B之極線亦過 A。A，B 二點稱爲點對。

(4) 於圓錐曲線之平面上有二直線 l 及 l'。若 l 之極點在 l' 上時，則 l' 之極點在 l 上。二直線 l 及 l' 稱爲線對。

(5) 圓之極點與極線有調和關係，故於射影平面上，圓錐曲線之極點與極線亦有調和關係。[因圓錐曲線及其極點與極線，各爲一圓及其極點與極線之射影也。又因交比射影其值不變。]

(6) 一直線上對於一圓之各對點對，屬於一對合列點，又因對合列點之射影，仍爲一對合列點，故一直線上對於一圓錐曲線之各對點對屬於一對合列點。其重點乃

直線與曲線之交點。

(7)　同理,過一定點對於一圓錐曲線之各對線對屬於一對合束線,其重線乃自定點至此曲線之兩切線。

93. 圓之射影在一定條件之下亦為一圓。

定理　於含圓之平面上有一點P若射影此圖形於他平面上使過P點對此圖之各線對,射影成正交束線,且使P之極線射影於無窮遠,則所得之曲線仍為一圓。

因P之極線為無窮遠,則過P點任一弦之兩端之切線交於無窮遠,且因過P點之線對為正交線對,故此二切線交於(即平行於)過P點與弦垂直之直線上。故二切線與聯切線之弦成直角。

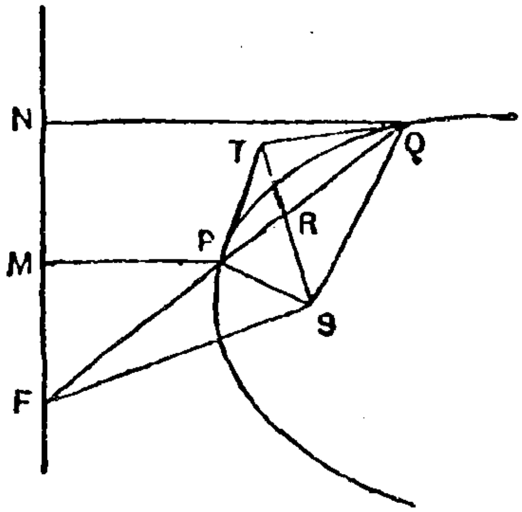
由是此曲線各點之切線皆垂於聯P點及切點之線,故曲線為圓,P為圓心。

系　圓得射影成另一圓,以圓內任一點射影成圓心。

94. 以下定理證明圓錐曲線之焦點,準線即為極點,極線。

定理　於圓之射影曲線之平面上有一點S,若過S對於此曲線之各對線對為正交束線時,則S為曲線之焦

點，其極線爲準線。



設 P 及 Q 爲曲線上任兩點，兩點之切線交於 T。

聯 ST 截 PQ 於 R。設 S 之極線與 PQ 交於 F。

聯 SF。作 PM 及 QN 垂於 S 之極線。

因 S 之極線過 F，T 之極線亦過 F。

故 F 之極線必同時過 S，T，即 ST 爲 F 之極線。

$\therefore$ SF 及 ST 爲對於此曲線之一雙線對。

但各雙線對爲正交。原設

故 $\qquad T\hat{S}F=$直角

又自極點與極線之調和性。得

$$(FR,PQ)=-1。$$

故 ST 及 SF 爲 $\widehat{PSQ}$ 之內外分角線。§ 72

$\therefore$ $SP : SQ = FP : FQ = PM : QN$。

$\therefore$ $SP : PM = SQ : QN$。

故此曲線上任一點至 S 之離距，與至 S 之極線之離距之比爲一常數。故 S 爲此曲線之焦點，其極線爲準線。

有時 S 之極線爲無窮遠，則此曲線爲圓。

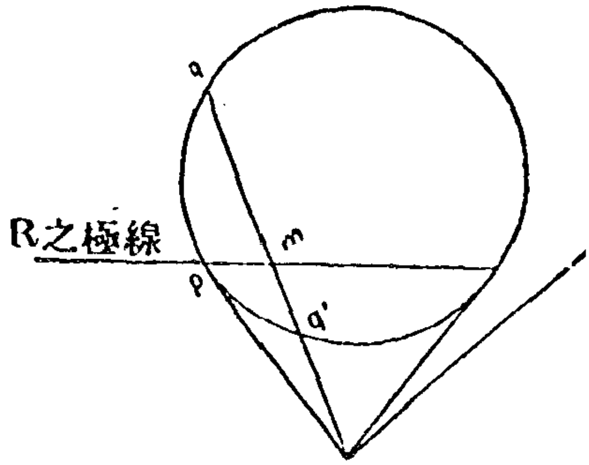
故圓亦可視爲圓錐曲線之一。其焦點與圓心相重，其準爲無窮遠線，而其離心率爲半徑與無窮大之比，故爲 0。

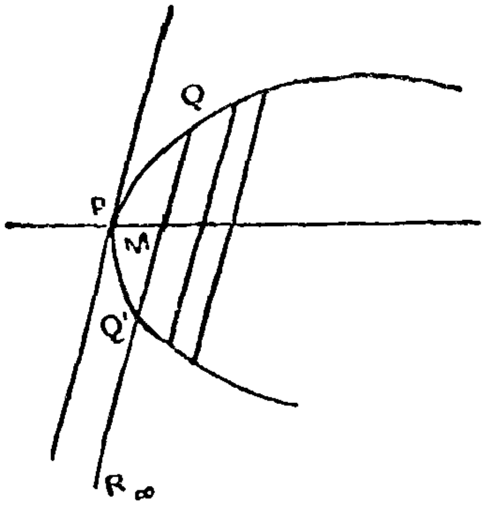
定義　圓錐曲線上過焦點之弦稱爲焦弦 Focal chord，而聯焦點與曲線上一點之直線稱焦半弦 Focal radius，然非謂焦弦之半也。

95. 平行弦

定理　於圓錐曲線（或圓射影）上，一組平行弦之中點皆在一直線上，自此直線與曲線交點所作之切線，亦平行於各弦。

且平行弦組中各弦之兩端之切線，交於聯中點之直線上。此直線與此組中各弦及平行於各弦之直線，對於曲線成線對。





此定理可以射影之觀念解之。

設於一平面上有一圓錐曲線，及其上一組平行弦，此圖形必爲他平面上一圓及一組交於一點之弦之射影。

因此組弦之射影爲平行弦，故知此組弦之交點必在

遠射線上。設 F 爲其交點，其射影 R 在無窮遠，如上圖。

設 QQ′ 爲平行弦之一。M 爲其中點。QQ′ 及 M 各爲圓平面上過 r 之一弦 qq′ 及其上一點 m 之射影。

已知　　$(QQ', MR) = -1$。 §74

故　　$(qq', mr) = -1$。

卽 m 在 r 之極線上。

故 m 之軌跡爲一直線。故其射影 M 之軌跡亦爲一直線。

設 M 之軌跡與曲線交於 P，P 必爲 m 之軌跡（卽 r 之極線）與圓交點 ρ 之射影。

因自 ρ 所作之切線必過 r，故於射影圖形上，自 P 所作之切線必過 R，卽平行於 QQ′ 也。

又因 r 在 qq′ 直線上，故 qq′ 之極點在 r 之極線上，卽 q，q′ 二點之切線交於 r 之極線上，於射影圖形上，自 Q，Q′ 所作之切線必交於平行弦之中線（卽 R 之極線）上。

再於圓平面上，任何過 r 之直線之極點必在 r 之極線上。故於射影圖形上，任何過 R 之直線之極點必在 R 之極線上。卽任何平行於弦之直線之極點在弦組之中線

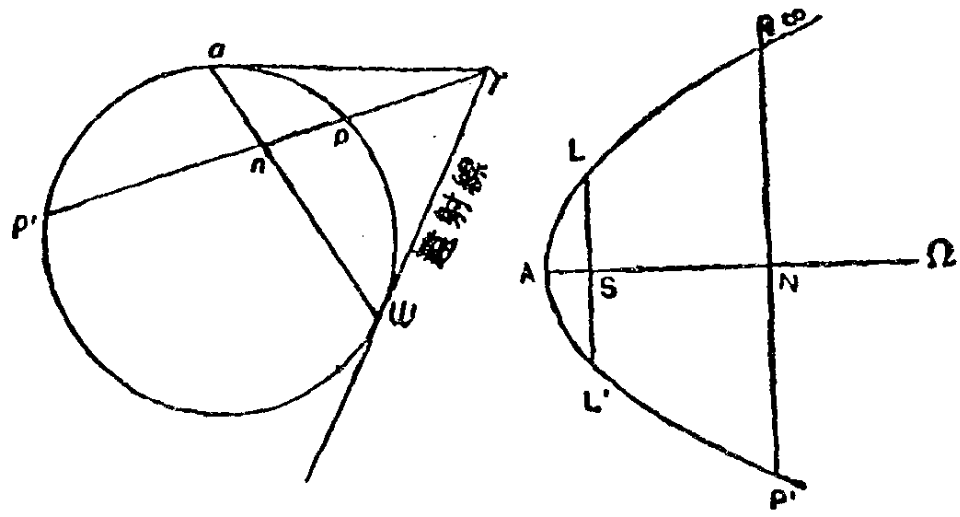
上，故任何平行於此平行弦組之直線與弦組之中線成線對。

96. 凡圓之射影皆有焦點及準線之關係。玆分論拋物線，橢圓及雙曲線如次。

定理 拋物線（或遠射線與相切時，所得此圓之射影。）有一對稱軸，與此曲線交於二點，其一在無窮遠。

設遠射線與圓切於 ω。

以過遠射線之平面上一點 V 爲射影頂。聯 $V\omega$。自 V 作 $V\omega$ 之垂線 Vr 與遠射線交於 r。



設 ωa 爲 r 之極線。過 r 作一弦 $\rho\rho'$ 與 $a\omega$ 交於 n。

則 $(\rho\rho', nr) = -1$。

以此圖形射影於平行於含 V 之平面上。

於射影圖中以大字母代各小字母。

因 $r\hat{V}\omega$ 爲直角,故 $r\hat{n}\omega$ 之射影 $R\hat{N}\Omega$ 亦爲直角。

故 $\rho\rho'$ 之射影 PP' 垂於 $a\omega$ 之射影 $A\Omega$。

$$\therefore \qquad (PP',NR)=-1。[因\ (\rho\rho'Nr)=-1]$$

又因 R 在無窮遠。故 N 爲 PP' 之中點。故任何垂直於 $A\Omega$ 之弦必爲 $A\Omega$ 所平分。故此曲線以 $A\Omega$ 爲軸成對稱。

此軸與拋物線交於二點:一爲實點, A, 稱爲拋物線之頂;一爲虛點, Ω, 在無窮遠。

又因 $r\hat{a}\omega$ 之射影爲直角。[因 $r\hat{V}\omega$ 爲直角]

故 $R\hat{A}\Omega$ 亦爲直角,卽頂點之切線垂於其軸。

無窮遠線(卽遠射線之射影)與此曲線切於無窮遠 Ω 點。

97. 定理 拋物線(遠射線與圓相切時,所得此圓之射影)有焦點及準線之關係,其離心率爲 1。

設 P 爲此曲線上之一點, PNP' 爲垂於軸之弦, 與軸交於 N。

自 P 及 P′ 作切線，其交點 T 必在軸上。§95

因 T 為 P P′ 之極點。

故 $(TN, A\Omega) = -1$。[A為曲線頂。Ω 為無窮遠點]

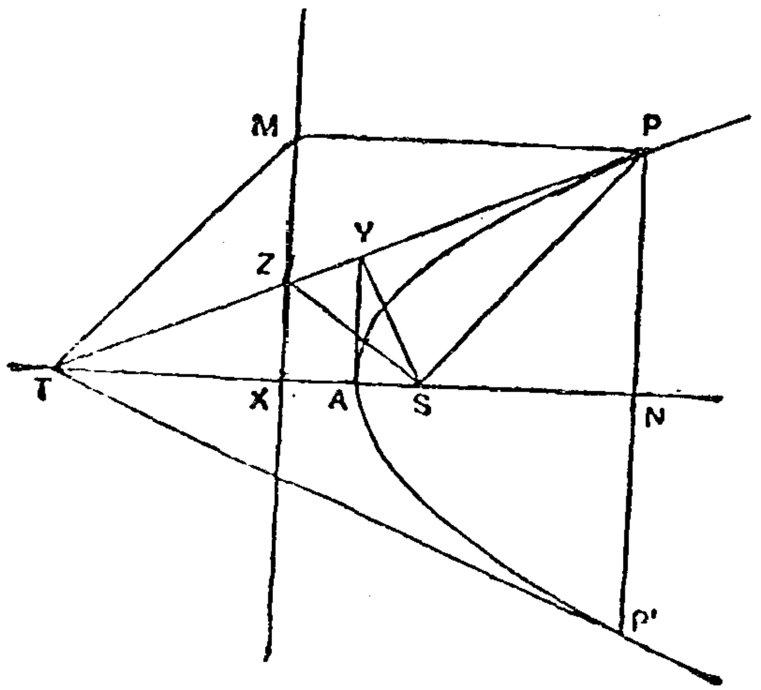
又因 Ω 在無窮遠。故 TA＝AN。

設 PT 與 A 之切線交於 Y，自 Y 作 PT 之垂線，與軸交於 S，S 之極線必與 PP′ 平行，卽與軸正交。[§95]

設此極線為 MX，與軸交於 X，與 PT 交於 Z。

設 PM 垂於此極線。

聯 SP 及 SZ。



因 S 爲 PX 之極點。

$$\therefore \qquad (XS, A\Omega) = -1。$$

$$\therefore \qquad XA = AS。$$

又因 $TA = AN$。故 $TS = XN = MP$。

但 $$TY : YP = TA : AN = 1。$$

故 $$\triangle TYS \equiv \triangle PYS。\quad 故 \quad PS = TS。$$

故 $$PM = TS。$$

且 ST 等於且平行於 PM。又 $SP = TS$。故 SPMT 爲一菱形。故 PT 二等分 $S\hat{P}M$。

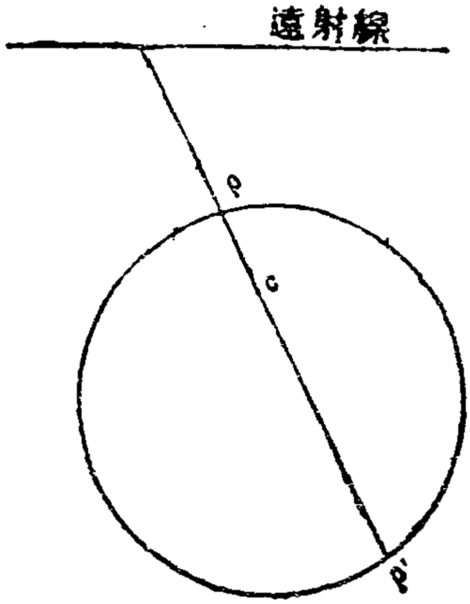
故 $$\triangle SPZ \equiv \triangle MPZ。$$

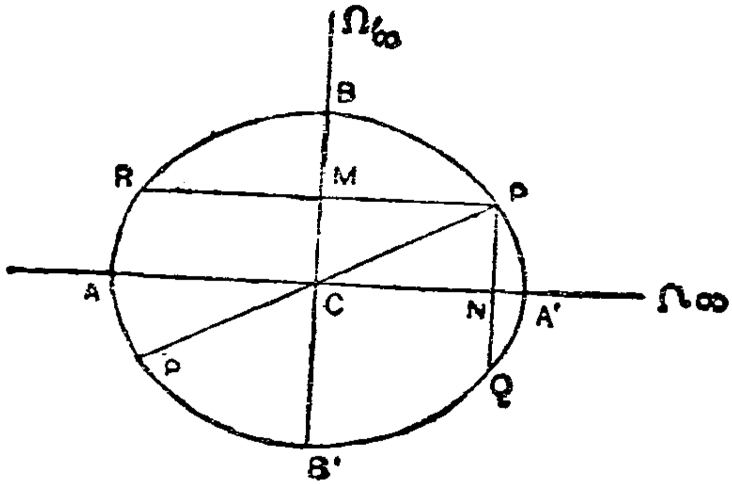
故 $$Z\hat{S}P = Z\hat{M}P = 直角。$$

因 S 之極線過 Z，P 之極線(卽自 P 所作之切線)亦過 Z，故 Z 爲 SP 之極點。故 SZ 與 SP 對於此拋物線成線對；ST 與過 S 之直線與軸亦成線對。[§95] 由是可知過 S 之各對線對成一正交線束。故 S 及其準線爲焦點及準線，[§94] 而離心率爲 $SP : PM = 1$。

98. 不與遠射線相切或相交之圓之射影，或爲一圓，或爲一圍有面積之曲線，此曲線有二互相垂直之對稱軸。

曲線在此兩軸上截取不等之兩弦。





設 c 爲遠射線之極點，$\rho\rho'$ 爲過 c 點之任一弦。

則 $\rho\rho'$ 與遠射線之交點及 c 調和分離 $\rho\rho'$ 弦。

於射影圓形上以大字母代各小字母。

c 之極線與 PP′ 之交點及 C 調和分離 PP′。

但C極線在無窮遠。 故PC＝CP′。

故任何過 C 之弦皆平分於 C。由是 C 稱爲此曲線之心。過 C 之弦稱爲直徑。

一直徑兩端之二切線必平行，因此二切線交於 C 之極線上，即交於無窮遠也。

設過 C 對於此曲線之各對線對成正交束線。則此曲線爲圓。已於 §93 中證明。

若過 C 之各對線對不爲正交束線。則所成之對合線束。必有一對直線成正交。 (§86)

設此對正交直線各截曲線於 A，A′ 及 B，B′。

作 PQ 及PR二弦各垂於 AA′及 BB′，幷交於 N及M。

設 Ω，Ω′ 各爲 AA′，BB′ 上之無窮遠點。

則因 Ω′ 爲 AA′ 之極點。 又 PQ 過 Ω′。

∴　　$(PQ, N\Omega') = -1$。

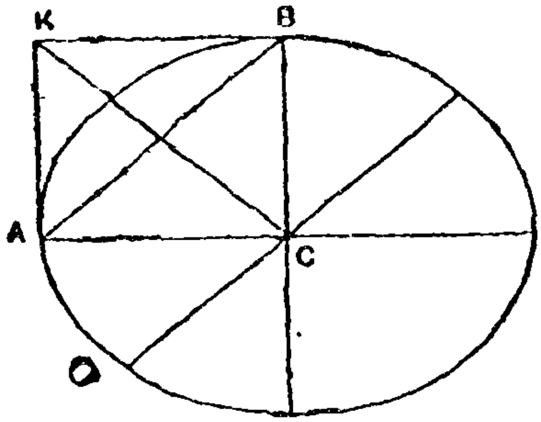
∴　　$PN = NQ$。

同理證　　$PM = MR$。

故此曲線對於 ACA′ 及 BCB′ 二直線成對稱，二直線稱爲對稱軸。

第二步須證 AA′ 不能等於 BB′。

設 A 及 B 之切線交於 K，則 CAKB 爲一矩形，且 CK 平分 AB。



但 CK 平分過 C 并平行於 AB 之弦，故 CK 與過 C 并平行於 AB 之直線成線對。(§95)

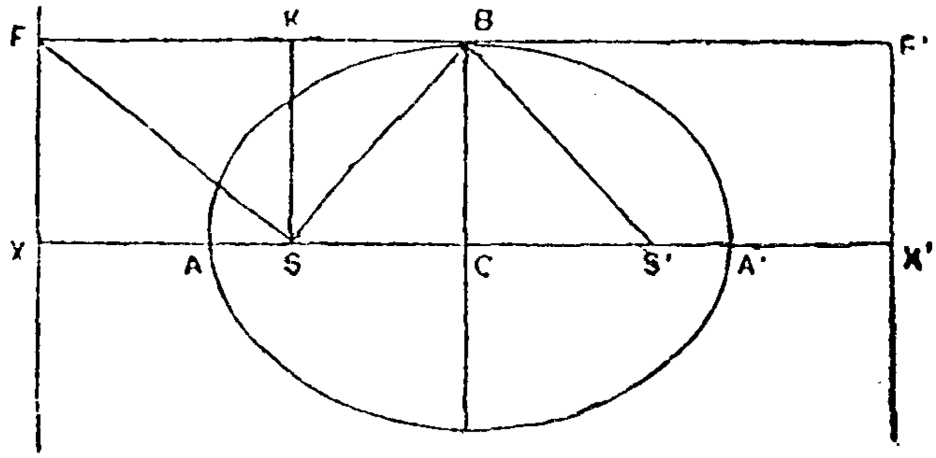
假設 CA＝CB，則 AB 與 KC 成正交，則過 C 對於曲線之各對線對所成之對合束線，已有兩對直線成正交，故爲正交束線，是與原設相反。

故 AA′ 必不能等於 BB′。

設 AA′＞BB′，則AA′ 稱長軸 Major axis; BB′ 稱短

軸 Minor axis。

99. 定理　橢圓（不與遠射線相切或相交之圓之射影）有焦點及準線之關係，其離心率恆小於 1。



設此射影不爲圓，已於 § 98 證明所得之曲線有二對軸稱 AA′ 及 BB′。設 AA′ 爲長軸。

以 B 爲圓心，CA 之長爲半徑。畫弧截長軸於 S 及 S′。

則對於此曲線 S，S′之極線必皆垂直於 AA′。(§ 95)

設此二極線與 AA′交於 X，X′，幷與F點之切線交於 F 及 F′。

因 S 及 B 之極線皆過 F，故 SB 爲 F 之極線。

於是 SF 及 SB 爲線對。

又因S爲XF之極點。

故 $(AA',CX)=-1$。

∴ $CS\cdot CX=CA^2$。

作SK平行於CB，與BF交於K。

則 $BK\cdot KF=CS\cdot SX=CS(CX-CS)$

$$=CA^2-CS^2$$

$$=SB^2-CS^2=SK^2$$。

故 $F\hat{S}B$ 爲直角。

於過S諸對線對中，已知 KS, XS; FS, BS 兩對爲正交，故成一正交束線。

故S及其極線爲此曲線之焦點及準線。

同理S'及其極線亦爲此曲線之焦點及準線。

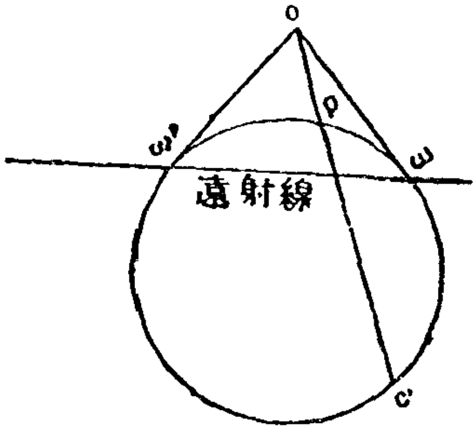
離心率 $=SB:BF=CA:CX<1$。

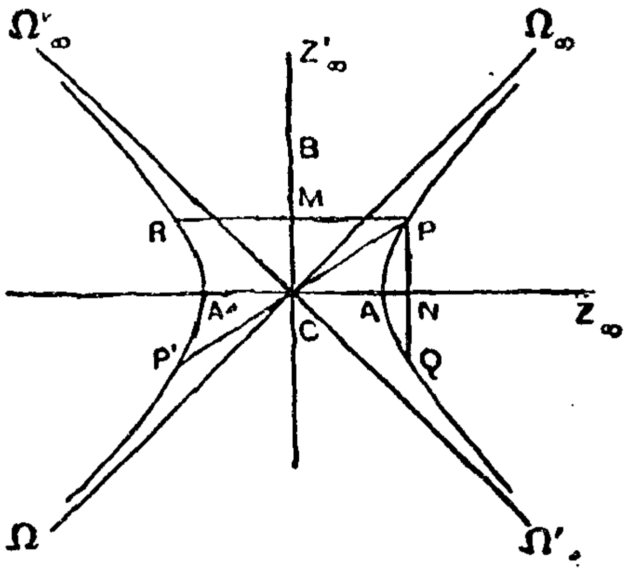
又因 $CS\cdot CX=CA^2$，離心率亦等於 $CS:CA$。

當S與S'之距離漸漸縮小，二準線之距離漸漸遠移，直至S與S'相重。二準線移至無窮遠，而曲線遂成一圓。(見§94註)

100. 定理 雙曲線（與遠射線相交之圓之射影）有

一對正交之對稱軸,僅一軸與此曲線相交。





設於含圓之平面上，遠射線與圓交於 ω 及 ω'，c 爲 ωω' 之極點。過 c 任作一弦 ρρ'，則 ρρ' 與 ωω' 之交點及 c 二點調和分 ρρ' 弦。

於射影圖形上，以大字母代小字母，則 PP'弦與 C 之

極線（即遠射線 $\omega'\omega'$ 之射影）之交點及 C 二點調和分 PP'。但 C 之極線在無窮遠，故 PC＝CP'。

故於此曲線上，任何過 C 之弦皆平分於 C。因是，C 稱爲曲線之心，而過之弦稱爲直徑。

於圓平面上，過 c 之直線不常與圓相交。故於射影，過 C 之直線有時亦不與雙曲線相交。

又於圓平面上，過 c 之各對線對屬於一對合束線。自 c 所作之兩切線爲其兩重線。各對線對中，僅一線與圓相交。於射影圖形上，對於曲線之各對線對屬於一對合束線。每對之中僅一與曲線相交。$C\Omega$，$C\Omega'$ 爲兩重線。

更有進者，上述之對合束線不能爲正交束線，因有兩重線故也。於是僅有一對直線成正交。

設此對直線爲 CA 及 CB，CA 截曲線於 A 及 A'。

$C\Omega$ 及 $C\Omega'$ 與曲線切於無窮遠，稱漸近線 Asymtotes。

因曲線上每對線對所成之對合束線以 $C\Omega$ 及 $C\Omega'$ 爲兩重線，故 $C(\Omega\Omega', AB)=-1$。 §82

又因 CA 與 CB 正交，故爲 $\Omega\hat{C}\Omega'$ 之兩分角線。

再過 P 作 PQ 及 PR 二弦各垂於 CA 及 CB，且各

交於 N 及 M。

設 Z 及 Z′各爲 CA，CB 上之無窮遠點，則因 Z′爲 AA′之極點，PQ 又過 Z′，故有

$$(PQ, NZ') = -1。$$

$$\therefore \qquad PN = NQ。$$

同理證 $\qquad PM = MR。$

故此曲線有兩對稱軸：其一與曲線相交，稱貫軸 Transversal axis；其一不與曲線相交，稱配軸 Conjugate axis。

〔註〕 配軸之長。此時尙不能知，以不與曲線相交故也。然此軸亦有定長，於十三章中將論及之。

101. 定理 雙曲線有焦點及準線之關係，其離心率恆大於 1。

仍用前節之圖，以 C 爲圓心，CA 爲半徑畫圓與 CΩ 及 CΩ′交於 K，L′及 K′，L，如下圖。

因 CA 平分 $\Omega\hat{C}\Omega'$，故 KL 及 K′L′皆垂於 AA′。

故 KL 及 K′L′之極點 S 及 S′皆在 AA′直線上。(§95)

設 KL 及 K′L′與 AA′交於 X 及 X′。

則　　　$(AA', SX) = -1$。

$\therefore$　　　$CS \cdot CX = CA^2 = CK^2$。

$\therefore$　　$C\hat{K}S$ 爲一直角。

K 之極線必過 S，因S之極線過K；又必過 Ω，因KΩ爲此曲線Ω點之切線。

$\therefore$ SΩ爲K之極線，卽SK與SΩ對於此曲線成線對。

但Ω在無窮遠，故SΩ平行於KΩ。卽SΩ垂直於SK。

於是過S之線對中，已知SC及其垂線；SK及SΩ兩對線對爲正交。故過S之各對線對所成之束線爲一正交束線。故S及其極線爲曲線之焦點及準線。

同理　S′及其極線K′L′爲曲線之焦點及準線。

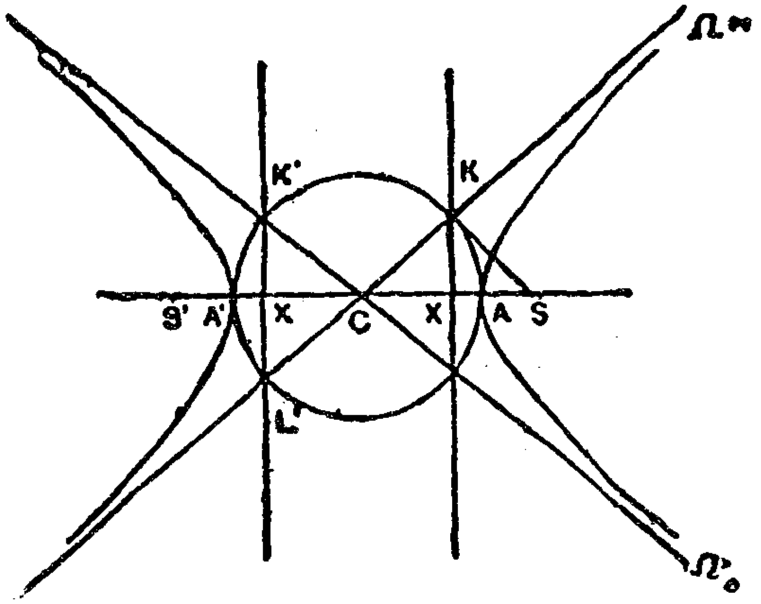
離心率　　$= S\Omega$：自Ω至KL之垂線長

$= K\Omega$：自Ω至KL之垂線長

$= CK : CX = CA : CX > 1$。

因　$CS \cdot CX = CA^2$。離心率又爲　$CS : CA$。

離心率更可以下法得之。



$$離心率 = SA : AX = CS - CA : CA - CX$$
$$= CS \cdot CX - CA \cdot CX : CX(CA - CX)$$
$$= CA : CX。$$

102. 有心及無心圓錐曲線，直徑

橢圓及雙曲線皆有一心，任何經過此心之弦(直徑)必爲之平分，此二曲線名爲有心圓錐曲線。拋物線無心名爲無心圓錐曲線。

於§95，已證明平行弦之中點皆在一直線上。於有心曲線，此直線必過曲線心，以平行於諸弦之直徑必平分於心也。於拋物線，則此直線必平行於其對稱軸，以平行

之諸弦乃圓平面上同過遠射線上一點 O 諸弦之射影；而諸平行弦中點之軌跡乃 O 之極線之射影也。然 O 之極線與圓交於 ω。於射影圖形上，平行弦之中線與曲線交於 Ω，即交於無窮遠點。於是可知拋物線上一組平行弦之中點之軌跡與過 Ω 之弦平行，即平行於軸。(參看 § 97 圖)

於拋物線之平面上，任一平行於軸之直線，必平分一組平行弦，故稱此直線爲拋物線之直徑。然其意與有心曲線者異，蓋無一定長度，且無中點也。

103. 直徑之縱坐標 Ordinates of diameters。

設一組平行弦爲一直徑所平分，則此組中各平行弦稱爲此直徑之雙縱坐標，而弦之一半稱爲直徑之縱坐標。

一直徑之縱坐標必平行於自直徑與曲線交點之切線。

對稱軸之縱坐標必垂直於軸。

拋物線之軸，橢圓之長軸，及雙曲線之貫軸上之縱坐標，尋常只稱「縱坐標」，其他之縱坐標，則須註明屬於何直徑。故若謂拋物線，或橢圓，或雙曲線上一點 P 之縱坐標，其義即謂自 P 至其軸，長軸，或貫軸之垂線。

〔註〕 於有心圓錐曲線，各有兩對稱軸，尋常以含焦

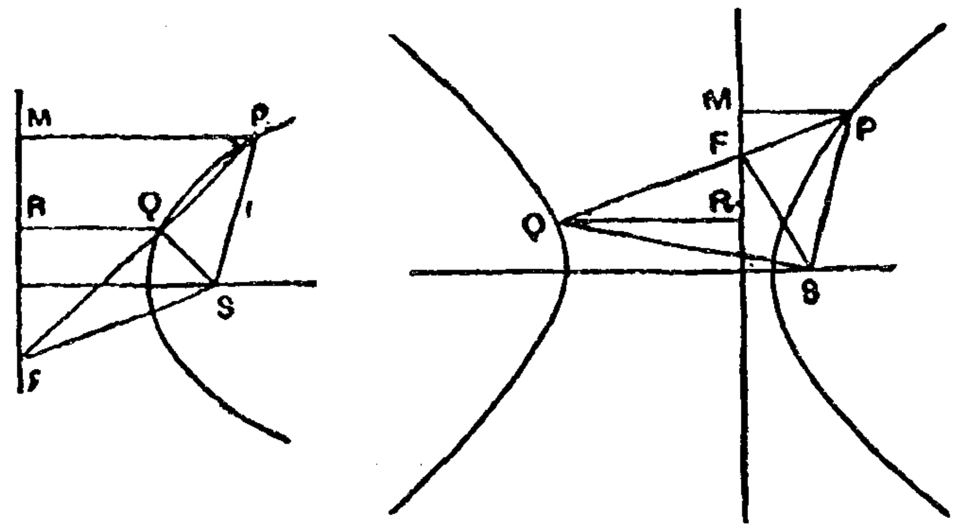
點之軸(長軸,橫軸)單稱爲「軸」。不含焦點者,則須以短軸或縱軸表明之。

104. 本章所述乃使讀者明瞭圓錐曲線之大意。此等曲線皆自圓之射影所得者。於次章中將論圓錐曲線共有之性質。而再次三章,則將分論拋物線,橢圓,及雙曲線。

第十章

圓錐曲線共有之性質

105. 定理 圓錐曲線之一弦 PQ(或 PQ 之引長線)與一準線交於 F。S 爲對此準線之焦點。則 SF 內分或外分 $P\hat{S}Q$。



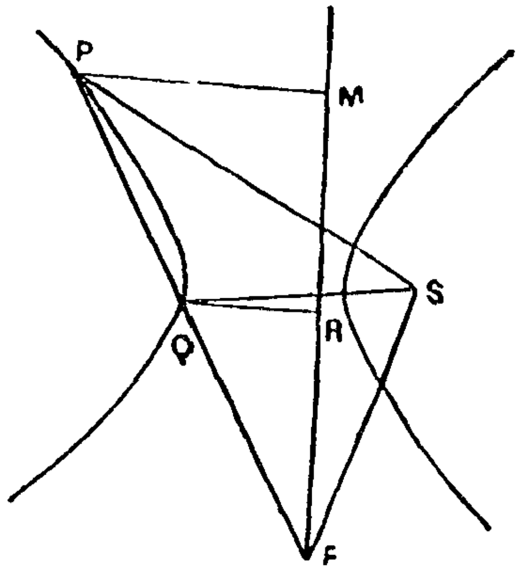
作 PM 及 QR 垂於準線。以 e 代離心率。

則 $$SP : PM = e = SQ : QR。$$

$$SP : SQ = PM : QR$$

$$= FP : FQ。$$

[二三角形 FQR 及 FPM 相似]



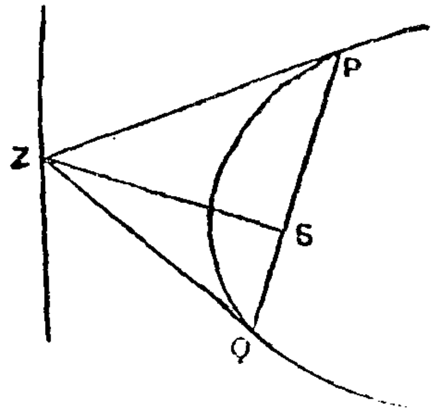
故於第一及第三圖中，SF 平分 $P\hat{S}Q$ 之外角；而於第二圖中，則平分 $P\hat{S}Q$。

自上證，可知 P，Q 二點若同在曲線之同段上，SF 平分 $P\hat{S}Q$ 之外角。若在異段上，（此種情形僅雙曲線有之）則分其內角。

106. 定理　自曲線上一點作切線與一準線交於 Z。若 S 爲相當焦點，則 $Z\hat{S}P$ 爲直角。

此定理可以極點，極線之關係證之如下：

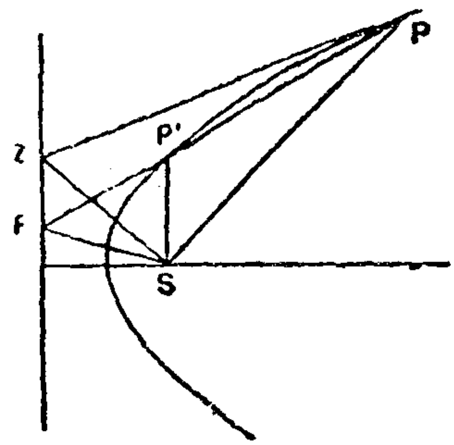
因焦點與準線有極點與極線之關係，故通徑 PSQ 兩端之切線必交於準線上。交點 Z 爲 PQ 之極點。



於是SZ與SP為線對,因SP之極點在SZ上也。

前此已證明,交於焦點之各對線對為正交,故 $Z\hat{S}P$ 為直角。

於次節中,將證明凡有焦點,準線關係之曲線皆為圓之射影。故此定理須用焦點,準線之關係證之如下:



P點之切線,可視為一弦PP'當P'向P移動時之極限。

設PP'與準線交於F,則SF平分PSP'之外角。§105

今命 P′向 P 移動，則 P′距 P 愈近，$P\hat{S}P'$ 之外角愈近於二直角。

故　$Z\hat{S}P=$ P′ 向 P 移動時，$F\hat{S}P'$ 之極限

$=$直角。

此第二證中，同時亦證明任一焦弦兩端之切線交於準線上，因自 S 作此弦之垂線與準線交於 Z，則 Z 必為此弦兩端之切線之交點也。

107. 前章中曾證凡圓之射影所得之曲線，皆有焦點及準線之關係。此時將證其逆定理。

定理　凡有焦點及準線之關係之平面曲線，皆為圓之射影。

106 節之第二證中，已證明若一曲線有焦點與準線之關係，則焦弦兩端之切交於相當準線上，其交點與焦點之聯線垂於此焦弦。

今試將此圖形射於他平面上，使準線射於無窮遠，而交於焦點之各對線對所成之對合束線(正交束線)射影成另一正交束線。(§ 87)

則所得之射影有以下之關係：

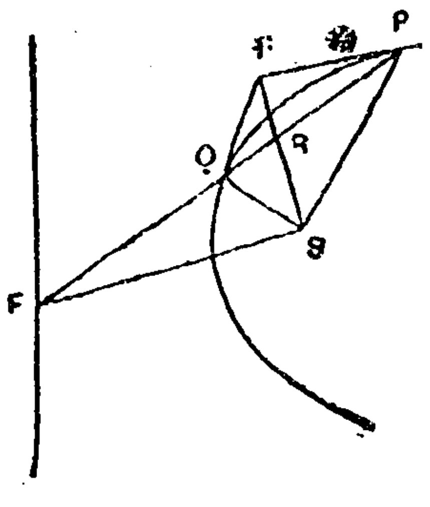
設 S 爲焦點之射影，則過 S 之弦兩端之切線交於無窮遠，而交點(無窮遠點)與 S 之聯線垂於此弦。

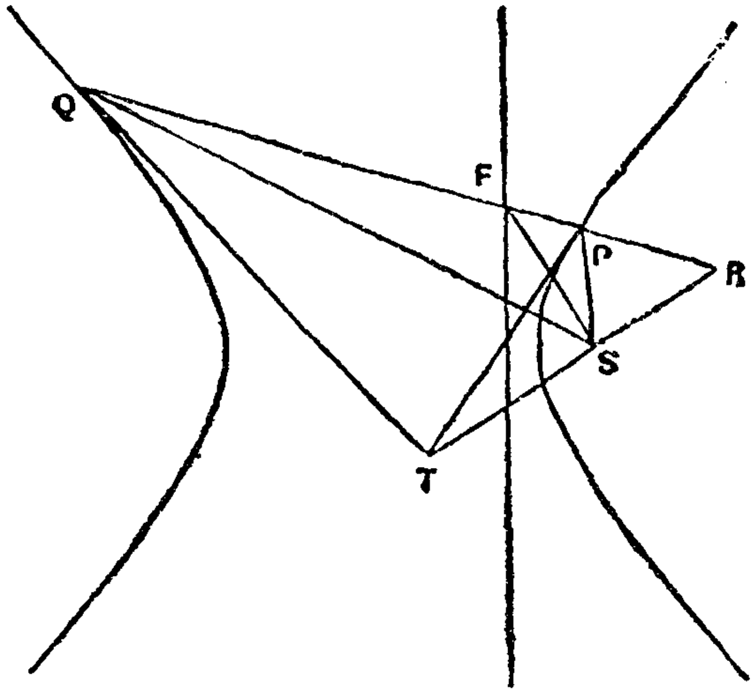
於是此曲線任一過 S 之弦兩端之切線垂於此弦，故爲一圓，S 爲圓心，而原平面上之曲線即此圓之射影也。

108. 上節之曲線，射影成一圓，其準線射於無窮遠。讀者若與前章之定理相比較，即知曲線平面上有一直線，在無窮遠。若將曲線射於他平面成一圓，此直線同時射成遠射線。此遠射線與圓相切，不相遇，或相交，視曲線之離心率等於，小於，或大於 1 而定。

109. **切線** Tangents

定理 自曲線外一點作切線 TP 及 TQ，S 爲一焦點，則 ST 內分或外分 $P\hat{S}Q$。若 PQ 與相當準線遇於 F，則 $T\hat{S}F$ 爲直角。





設　TS 與 PQ 交於 R。

因 T 之極線過 F。故 F 之極線過 T。

又 F 爲準線(S 之極線)上之一點，故其極線過 S。故 ST 爲 F 之極線。

於是 ST 與 SF 對於此曲線成線對，故爲正交。

且　$$(PQ, FR) = -1。$$

∴　$$S(PQ, FR) = -1。$$

故 SR 及 SF 爲 $P\hat{S}Q$ 之內外分角線。

〔註〕 若 P, Q 在曲線之同段上，則ST分內角；若在

異段上，則分其外角。

切線既與雙曲線之第一段相切，必不能再與他段相切，因一直線僅與圓切於一點，其射影亦然。

110. 自圓錐曲線外一點，作此曲線之切線。作法乃前節定理之應用。

作法 （仍用前節之圖） 聯 ST，截曲線於 K 及 K′。於弦 KK′ 上取 R，使 $(TR, KK') = -1$。（§70 系 2）

作 SF 垂於 ST，與對 S 之準線交於 F。聯 FR 與曲線交於 P 及 Q。

則 TP 及 TQ 卽所求之切線也。

證 因 ST 及 SF 爲線對，故正交。

$\therefore$ ST 之極點在 SF 上。

但 ST 之極點又在準線（卽 S 之極線）上。

故 F 爲 ST 之極點，卽 F 之極線過 T。

故 T 之極線過 F。

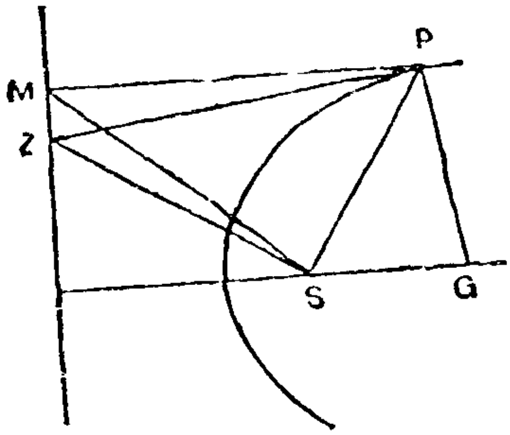
但 T 之極線又過 R，因 $(TR, KK') = -1$。

於是 FR 爲 T 之極線，FR 與曲線交於 P 及 Q，故 TP，TQ 爲此曲線之切線。

111. 法線 Normal

定義　自切線與曲線之切點，所作垂於切線之直線，稱此點之法線。

定理　曲線上一點 P 之法線與軸交於 G。 設 S 爲其焦點，e 爲離心率， 則 $SG=e\cdot SP$。



設 P 點之切線與對 S 之準線交於 Z。

作 PM 垂於準線。

因 PM 平行於軸。 $M\hat{P}S=P\hat{S}G$。

又因 $P\hat{M}Z$ 與 $P\hat{S}Z$ 皆爲直角， 故 PSZM 爲圓內切四邊形。

而 $S\hat{M}P=S\hat{Z}P=S\hat{P}Z$ 之餘角 $=S\hat{P}G$。

於是 $\triangle SPG$ 與 $\triangle PMS$ 相似。

故 $$SG : SP = SP : PM = e。$$

$$\therefore \quad SG = e \cdot SP。$$

於雙曲線中，若P不在以S爲焦點之一段上。

則 $$\hat{SMP} = \pi - \hat{SZP}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \hat{SPZ} = \hat{SPG}。$$

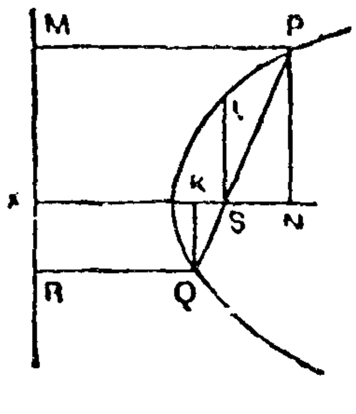
故本定理亦眞。

112. 首通徑 Latus rectum

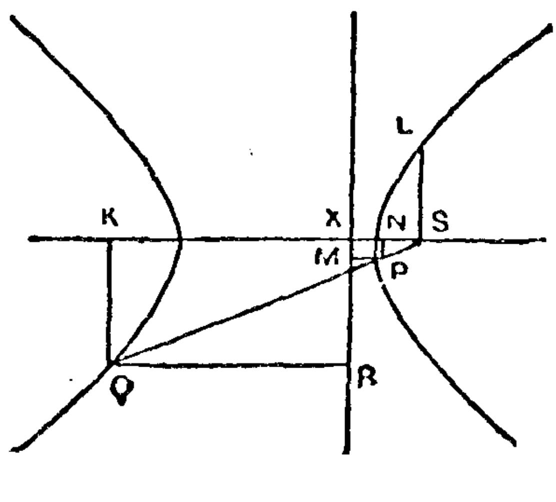
定義 焦弦之垂於軸者稱正焦弦。其半則稱正焦半弦。則依103節可知正焦弦乃過焦點對於軸之雙縱坐標。

定理 焦點分任何焦弦爲兩段，其調和中項爲正焦半弦。

（第一圖）



（第二圖）



設 SL 為正焦半弦。PSQ 為任一焦弦。

作 PM 及 QR 垂於準線。又作 PN，QK 垂於軸。

則 $SP:PM=e=SL:SX=SQ:QR$。

又因 $\triangle PSN$ 與 $\triangle QSK$ 相似。

$$\therefore \quad SP:SQ=SN:KS$$
$$=XN-XS:XS-XK\text{（第一圖）}$$
$$=MP-XS:XS-RQ\text{（第一圖）}$$
$$=e(MP-XS):e(XS-RQ)$$
$$=SP-SL:SL-SQ。$$

故 $\dfrac{1}{SP}+\dfrac{1}{SQ}=\dfrac{2}{SL}$。即 SL 為 SP 及 SQ 之調和中項。

若 P，Q 在曲線之異段上，則可證之如下：

$$SP:SQ=NS:KS$$
$$=XS-XN:KX+XS\text{（第二圖）}$$
$$=e(XS-MP):e(QR+XS)$$
$$=SL-SP:SQ+SL。$$

$$\therefore \quad SP(SQ+SL)=SQ(SL-SP)。$$

$$\therefore \quad SQ\cdot SL-SP\cdot SL=2SP\cdot SQ。$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{SP}-\frac{1}{SQ}=\frac{2}{SL}。$$

故 SP,SL,及 SQ 或其負數,成調和級數,視 P,Q 之在曲線之同段或異段上而定。

系 焦點分任一通徑爲兩段,其積與此通徑長成正焦弦比。

因 $$\frac{1}{SP}\pm\frac{1}{SQ}=\frac{2}{SL}。$$

設 P爲以 S 爲焦點之一段上之一點,則無論 Q 在此段上或在異段上,上式可化爲下式:

$$\frac{PQ}{SP-SQ}=\frac{2}{SL}。$$

$$\therefore \qquad SP\cdot SQ=\frac{1}{2}SL\cdot PQ。$$

即 $$SP\cdot SQ\propto PQ。$$

113. 定理 任何圓錐曲線得射影成一圓,以此曲線平面上任一點射成圓心。

設 P 爲曲線平面上任意一點。

射影此圖形使 P 之極線射於無窮遠,且使過 P 點對於此曲線之各對線對所成之對合束線,射影成一正交束線。(§ 87)若依上述之條件而行,則曲線之射影爲一圓。

證法參看 § 93。

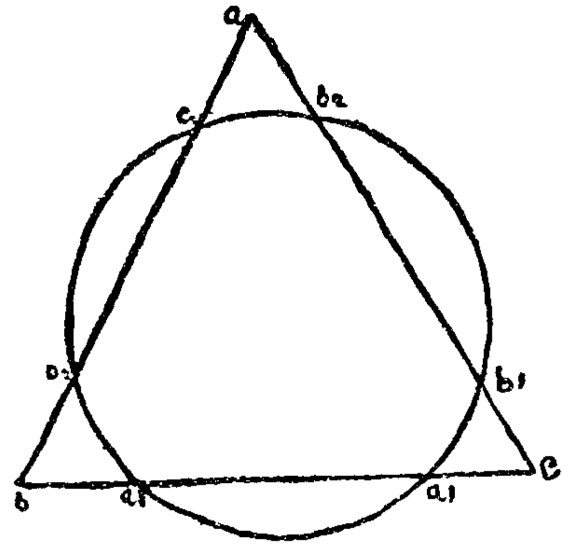
〔註〕 若 P 在曲線之外(即自 P 可作二切線),則射影不能以圖表之,即所謂虛射影是也。故欲此射影為實,P 必須在曲線之內。

114. **卡諾定理** Carnot's Theorem。

設一圓錐曲線與三角形 ABC 之三邊交於 $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$,則

$$AB_1 \cdot AB_2 \cdot CA_1 \cdot CA_2 \cdot BC_1 \cdot BC_2$$
$$= AC_1 \cdot AC_2 \cdot BA_1 \cdot BA_2 \cdot CB_1 \cdot CB_2。$$

設此曲線成一圓,於射影圖形上,以小字母代各大字母。



則因 $$ab_1\cdot ab_2=ac_1\cdot ac_2;$$

$$ca_1\cdot ca_2=cb_1\cdot cb_2;$$

$$bc_1\cdot bc_2=ba_1\cdot ba_2\text{。}$$

∴ $$ab_1\cdot ab_2\cdot ca_1\cdot ca_2\cdot bc_1\cdot bc_2$$

$$=ac_1\cdot ac_2\cdot ba_1\cdot ba_2\cdot cb_1\cdot cb_2\text{。}$$

故以a_1b_2, b_1c_2, c_1a_2 爲三邊之三角形與 $\triangle abc$ 互相透視。(§68)

故於原平面上以 A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2 爲三邊之三角形與$\triangle ABC$相透視。

故自 §68,可知

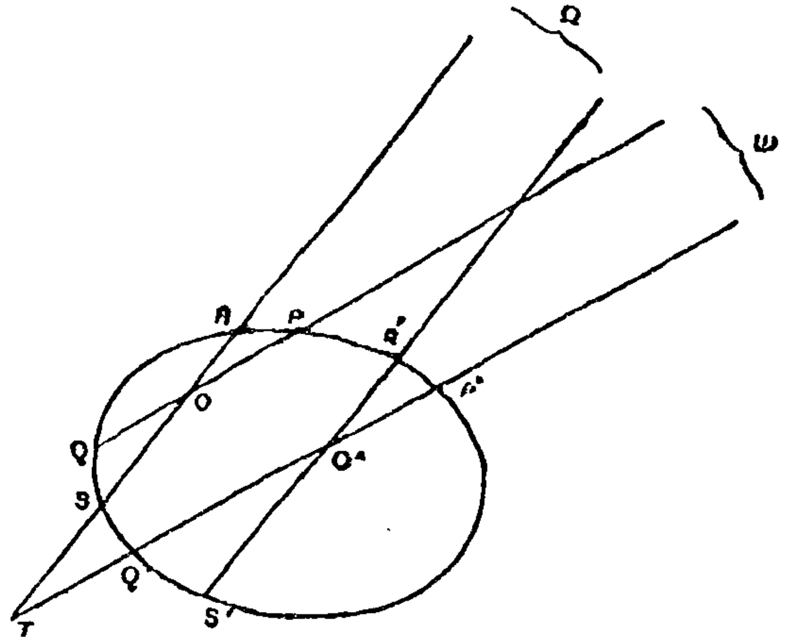
$$AB_1\cdot AB_2\cdot CA_1\cdot CA_2\cdot BC_1\cdot BC_2$$

$$=AC_1\cdot AC_2\cdot BA_1\cdot BA_2\cdot CB_1\cdot CB_2\text{。}$$

115. 牛頓定理 Newton's Theorem。

圓錐曲線上兩弦 PQ 則 RS 交於一點 O。若 O 爲動點,而 PQ 及 RS 之方向不變時, 則 $OP\cdot OQ/OR\cdot OS$ 之值不變。

設 O' 爲曲線平面上另一點,過 O'作 P'Q' 及 R'S' 二弦各平行於 PQ,RS。



則 PQ, P'Q' 之交點 ω，及 RS, R'S' 之交點 Ω 皆在無窮遠。

設 P'Q' 與 RS 交於 T。

應用卡諾定理於 $\triangle\omega OT$，可得

$$\frac{\omega P\cdot\omega Q\cdot OR\cdot OS\cdot TP'\cdot TQ}{\omega P'\cdot\omega Q'\cdot TR\cdot TS\cdot OP\cdot OQ}=1。$$

但
$$\frac{\omega P}{\omega P'}=1,\ \frac{\omega Q}{\omega Q'}=1。$$

$$\therefore\quad \frac{TP'\cdot TQ'}{TR\cdot TS}=\frac{OP\cdot OQ}{OR\cdot OS}。$$

再應用卡諾定理於 $\triangle\,\Omega TO'$，可得

$$\frac{\Omega R\cdot\Omega S\cdot TP'\cdot TQ'\cdot O'R'\cdot O'S'}{\Omega R'\cdot\Omega S'\cdot O'P'\cdot O'Q'\cdot TR\cdot TS}=1。$$

$$\therefore\qquad \frac{TP'\cdot TQ'}{TR\cdot TS}=\frac{O'P'\cdot O'Q'}{O'R'\cdot O'S'}。$$

故 $$\frac{OP\cdot OQ}{OR\cdot OS}=\frac{O'P'\cdot O'Q'}{O'R'\cdot O'S'}$$

故 $\frac{OP\cdot OQ}{OR\cdot OS}$ 爲常數。

〔註〕 應用牛頓定理時,須注意線之正負。

116. 牛頓定理極爲重要,以後往往應用之。本節及以下數節,皆示此定理之應用。

定理 設圓錐曲線上二弦 PP′ 與 QQ′ 交於 O。則 $OP\cdot OP' : OQ\cdot OQ'$ 等於平行於此二弦之焦弦之比。

設平行於 PP′ 及 QQ′ 之兩焦弦爲 psp′ 及 qsq′。S 爲焦點。

應用牛頓定理。

$$OP\cdot OP' : OQ\cdot OQ' = Sp\cdot Sp' : Sq\cdot Sq'$$
$$= pp' : qq' (\S\ 112)$$

特例 若 PP′,QQ′ 交於曲線心上。則 $OP'=-OP$; $OQ'=-OQ$。於是得

$$OP^2 : OQ^2 = pp' : qq'。$$

117. 定理 設 OP 及 OP′ 為一圓錐曲線之二切線，則 $OP^2 : OQ^2$ 等於平行於此二切線之通徑之比。

設焦弦 pSp′ 及 qSq′ 各平行於 OP 及 OQ。

切線 OP 可視為過 O 之弦 OPP′，當 P′ 向 P 移動時之極限，故 OP 乃與曲線交於兩相重之點 P，P。

同理 OQ 與曲線交於相重之兩點 Q，Q。

應用牛頓定理。

$$OP \cdot OP : OQ \cdot OQ = Sp \cdot Sp' = Sq \cdot Sq'。$$

$$\therefore \qquad OP^2 : OQ^2 = pp' : qq'$$

於有心圓錐曲線中，此比等於平行於焦弦之半徑平方之比。

故於有心圓錐曲線，同過一點之二切線之比，等於平行於此二切線之半徑之比。

118. 定理 一圓與一圓錐曲線交於四點，則每對聯交點之弦與軸成等角。

設圓與圓錐曲線交於 P，Q′，P′，Q′ 四點，PP′ 與 QQ′ 交於 O。作焦弦 pSp′ 及 qSq′ 各平行於 PP′ 及 QQ′。

應用牛頓定理。

$$OP\cdot OP' : OQ\cdot OQ' = Sp\cdot Sp' : Sq\cdot Sq'$$

$$= pp' : qq'。$$

但 P, Q, P', Q' 亦在圓周上。

故 $$OP\cdot OP' = OQ\cdot OQ'。$$

$\therefore$ $pp' = qq'$。及 $Sp\cdot Sp' = Sq\cdot Sq'$。

於是二焦弦旣相等其被焦點平分之兩段之積亦必等,故此二焦弦必以軸成對稱。故與之平行之兩弦 PP', QQ' 亦必以軸成對稱,卽各與軸成等角。

同理可證其餘兩對聯交點之弦。

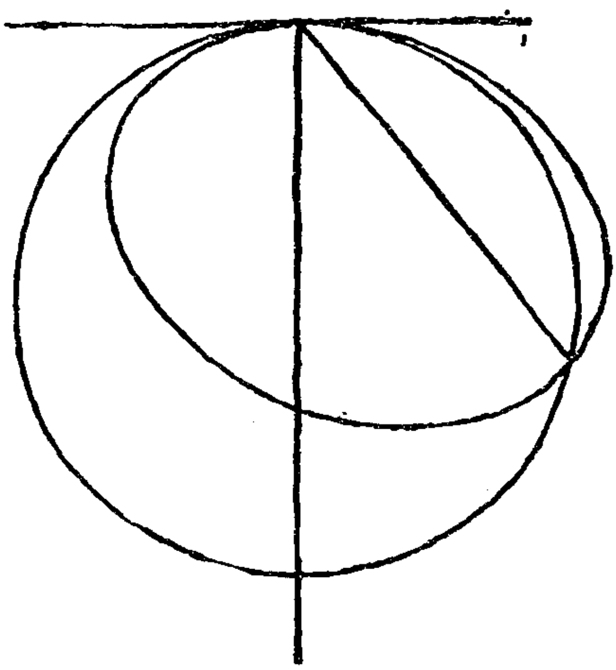
系 若一圓與一圓錐曲線切於一點而交於二點,則切點之公切線及聯二交點之直線與軸成等角。

119. 曲率圓 Circle of Curvature。

於圓錐曲線之平面上,可作無數圓與此曲線共切於一點 P,各圓心皆在此曲線 P 點之法線線上。此等圓於切點之外尙各與曲線交於二點。其中有一圓,其兩交點之一與切點相重。此圓稱爲圓錐曲線 P 點之曲率圓。曲線與曲率圓於切點之附近有同一之曲率,故名。曲率圓常用於

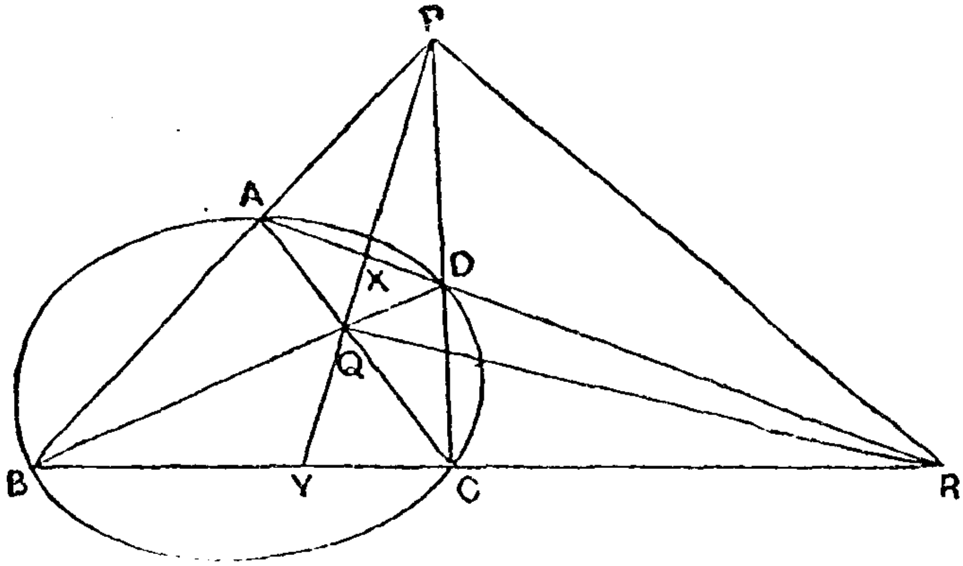
微分學中,然與圓錐曲線甚有關係,故於分論三種圓錐曲線時,亦插入數段以討論之。自 § 118,可知若曲率圓與曲線交於 Q,則P點之切線及 PQ 與軸成等角。

下圖示圓錐曲線與其上一點之曲率圓。



120. 自極三角形 Self-Polar Triangle。

定理 若一四邊形之四頂皆在一圓錐曲線上。則其對角三角形(或稱調和三角形)爲對於此曲線之自極三角形。——即每頂爲其對邊之極點。



設 ABCD 為四邊形,其對角三角形為 PQR。PQ 截 AD 於 X,截 BC 於 Y。

則　　$(AD, XR)=-1$。

∴　R之極線過X[§95 之 5]

又　　$(BC, YR)=-1$。

∴　R 之極線過 Y。

∴　PQ 為 R 之極線。

同理　QR 為 P 之極線,PR 為 Q 之極線。

習　題

1.　POP′ 及 QOQ′ 為圓錐曲線上之二弦。求證 PQ

P′Q′交於 O之極線上。[射影此曲線使成圓，以O射成圓心]

2. 正焦弦 LSL′ 兩端之切線與近於此弦之曲線頂 A 之切線交於 T，則 TS＝TA。

3. 曲線上任一點 P 之切線與一準線交於 F。幷與對此準線之正焦弦交於 D。則 SD：SF＝離心率。

4. 設 PSP′ 為一焦弦，Q 為曲線上一點，PQ 及P′Q 與對焦點 S 之準線交於 F 及 F′。求證 $F\hat{S}F'$ 為直角。

5. 設一圓錐曲線與 △ABC 之三邊 BC，CA，AB 切於 D，E，F，則 AD，BE，CF 交於一點。[應用 § 114]

6. 自拋物線上 P 點作 PN 垂於軸。設 A 為此曲線之頂。則P無論在此曲線上之任何位置。PN：AN 為常數。

7. 過二定點 D，E 作一組圓錐曲線。使各曲線之焦點與 D，E 作成之角為定角。 求證聯對於各曲線 DE 之極點與相當焦點之直線同過一點。

8. 圓錐曲線上一組平行弦之中線 [即各弦中點之軌跡] 與一準線交於 F 點，則聯此點與相當焦點之直線必垂於諸平行弦。

9. 二圓錐曲線共以一點為其一焦點。則二相當之

準線必交於二曲線之公弦上。

10. 於圓錐曲線P點之切線上任取一點T。設S爲焦點。作TM垂於SP，TN垂於對S之準線。則SM:TN＝e。(亞當定理 Adam's Theorem)

11. 一組圓錐曲線以一定直線爲一焦弦，并以其上一定點爲焦點。求證首通徑兩端之軌跡爲一圓。

12. 圓錐曲線上Q點之法線與曲線再交於R，平分QR之直徑截曲線於P。P點之法線再交曲線於U。求證PU爲過Q之直徑所平分。

13. PQ爲圓錐曲線之一弦。與軸交於K。T爲PQ之極點。設平分PQ之直徑與一準線交於Z。S爲相當焦點。求證TS平行於ZK。

14. A,B,C,D爲圓錐曲線上之四點。AB,CD交於E;AC,BD交於F;A及D之切線交於G。求證EFG爲一直線。[射影此曲線成一圓。并使AD,BC射成平行線]

15. 設一六邊形內接於一圓錐曲線。則各對對邊交於一定線上。[巴斯格爾定理 Pascals Theorem。證法射影此曲線成圓。并使兩對對邊之交點射於無窮遠。]

16. 一組圓錐曲線同切 AB,AC 二定直線爲 B 及 C, D 爲一定點。 設 BD 及 CD 與組中任一曲線交於 P 及 Q。求證 PD 與 BC 交於一定點。

17. 一圓錐曲線與 △ABC 之邊 BC,CA,AB 交於 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2,而 AA_1,BB_1,CC_1 交於一點。求證 AA_2,BB_2,CC_2 亦交於一點。

18. 設 S,A,B,C 爲四定點, 以 S 爲一焦點并同時過 A,B,C 之圓錐曲線有四。其三爲雙曲線,三點 A,B,C 不在同段上。餘一或爲拋物線,或爲橢圓,或爲 A,B,C 同在一段上之雙曲線。

19. 求證一圓及圓內一點 P,圓外一點 Q,得同時射影成一雙曲線。P 成曲線心, Q 成焦點。

20. 雙曲線過中心之任一對線對(稱直徑對)中, 僅一與曲線相交。

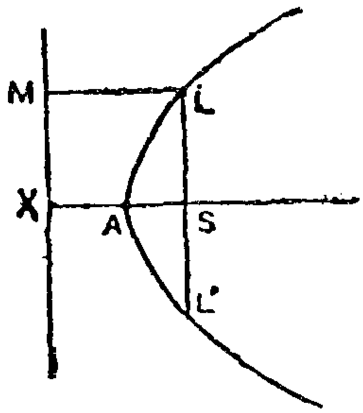
第十一章

拋物線

121. 拋物線之形狀，已於 96 及 97 二節中略述之矣。本章將進而論其專有之性質。

於全章各節之附圖上，以 S 表示焦點，X 表示準線與軸之交點，A 表示曲線之頂，Ω 表示曲線平面上之無窮遠點，此點乃曲線與無窮遠線(遠射線之射影)之切點也。以上各字母，將用於本章各節，以表示上述各點。以此數點，屢屢用於圖形之上，今各以一定字母代替，使其一致，則不必反復加以說明矣。

定理 正焦弦 $= 4\,AS$



設 LSL' 爲正焦弦。作 LM 垂於準線。

則 $LL'=2\,LS=2\,LM=2XS=4\,AS$。

122. 定理　若 PN 爲 P 點之縱坐標，則

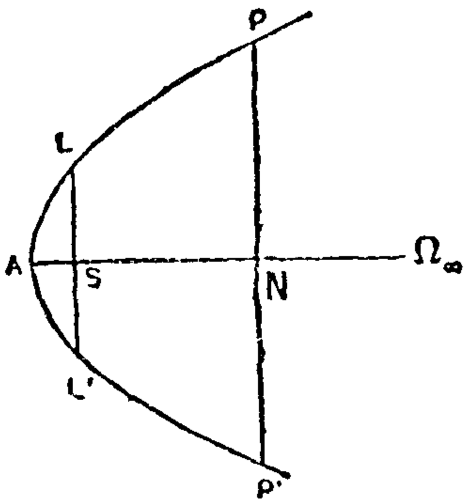
$PN^2=4AS\cdot AN$。

設 PN 與拋物線再交於 P'。LSL' 爲正焦弦。

應用牛頓定理：

$$NP\cdot NP' : SL\cdot SL'=NA\cdot N\Omega : SA\cdot S\Omega,$$
$$=NA : SA,$$

（因 Ω 在無窮遠故也）。



$\therefore$　　$PN^2 : SL^2=AN : AS,$

$\therefore$　　$PN : 4AS^2=AN : AS,$

$$\therefore \quad PN^2=4AS \cdot AN。$$

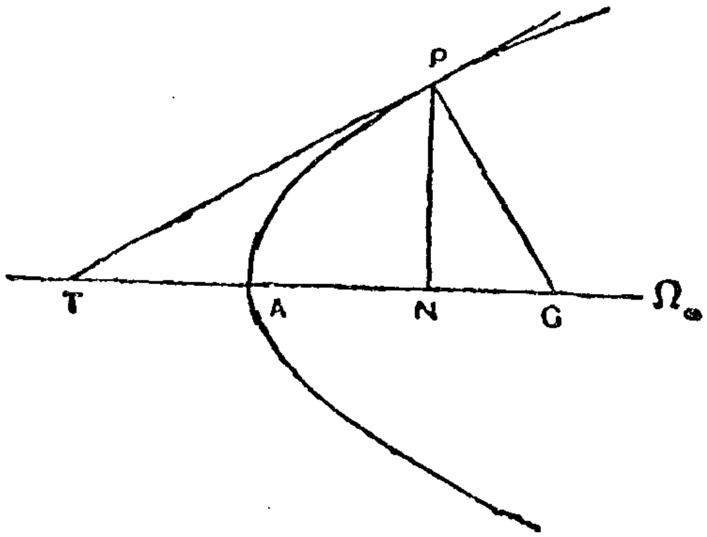
本定理乃 134 節之特例。

自本定理,可知拋物線乃一動點之軌跡。此動點至一定直線 l 之距離之二乘方,與至與 l 正交之定直線 l' 之距離之比,等於一常數,此常數等於正焦弦之長。l 爲軸。l 爲拋物線頂點之切線。

依上所言,可得兩拋物線,以 l' 而爲對稱。故欲定此拋物線,須知此曲線在 l 之何旁。

123. 切線及法線

定理　設 P 點之切線及法線各與軸交於 T 及 G;又 PN 爲 P 點之縱坐標,則



(1)　　$TA = AN$。

(2)　　$NG = 2AS$。

第一種關係已於97節中證明,故略。

第二種關係可證之如下:

因 $T\hat{P}G$ 為直角,

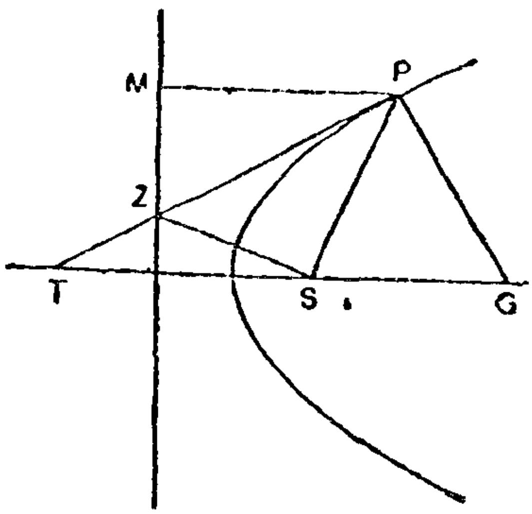
$$PN^2 = TN \cdot NG = 2\,AN \cdot NG。$$

但　　$PN^2 = 4AS \cdot AN$(§121),

$$\therefore\quad NG = 2AS$$

定義　NG 稱為次法線 Subnormal,拋物線之次法線為一常數。

124. 定理　拋物線上任一點之切線,與過此點之焦弦及軸成等角。



設 P 點之切線與準線交於 Z，與軸交於 T。作 PM 垂於準線。

於 $\triangle SPZ$ 及 $\triangle MPZ$，各有一直角，

又 $SP=PM$，PZ 爲公邊，

$\therefore \quad \triangle SPZ \equiv \triangle PZM$。

$\therefore \quad S\hat{P}T = T\hat{P}M = S\hat{T}P$。

系　設 P 點之法線與軸交於 G，則 $SG=SP=ST$。

由前定理，已知 $\quad S\hat{P}T = S\hat{T}P$。

故 $\quad ST=SP$。

又因二角餘 $S\hat{P}G$ 及 $S\hat{G}P$ 相等，

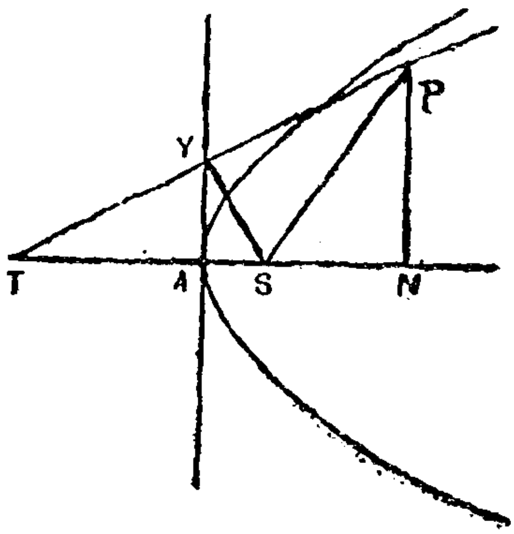
故 $\quad SP=SG$。

本系亦可用 111 節以證明之，以拋物線之 e 爲 1 也。

125. 定理　自拋物線之焦點 S，至此曲線上任一切線之垂線之足 Y，在曲線頂之切線上，且 $SY^2=SA\cdot SP$。

本定理之第一部，已於證97節定理時同時證明，然亦可用下法以證明之。

設 P 點之切線與軸交於 T，因 $ST=SP$，故 SY 平分 PT。



聯 AY。

設 PN 爲 P 點之縱坐標。　$TA=AN$。

$\therefore$ AY 平行於 NP，卽 AY 爲拋物線頂點之切線也。

又因 $S\hat{Y}T$ 爲直角。 AY 垂於 ST。

$$\therefore \qquad SY^2=SA\cdot ST=SA\cdot SP。$$

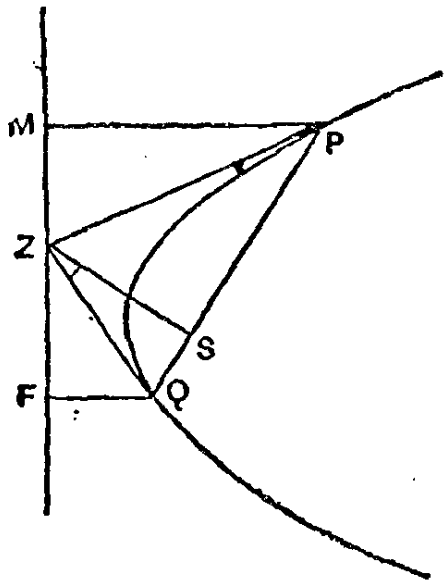
系 1　$S\hat{P}Y=S\hat{Y}A$。

系 2　設自一定點至一動直線之垂線足之軌跡爲一直線時，則此動直線常切於一拋物線，其焦點卽定點。

定義　一動直線常切於一曲線，則此曲線稱爲動直線之曲線包 Envelope。

126. 一對切線之關係

定理　焦弦兩端之切線正交於準線上。



此二切線交於準線上，已於 106 節之末證之。

玆將證此二切線爲正交。

設 PSQ 爲一焦弦。P, Q 二點之切線交於 Z。作 PM, 及 QF 垂直於準線。

則　　$\triangle SPZ \equiv \triangle MPZ$(124 節)

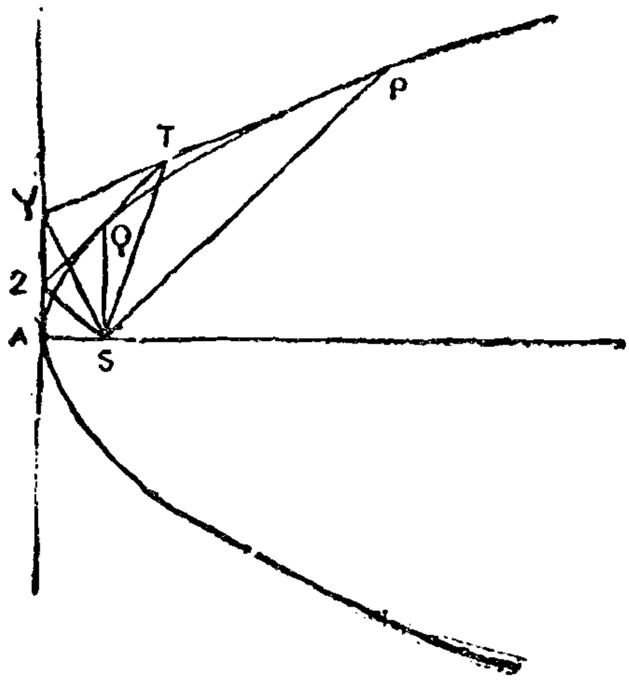
$\therefore$　　$S\hat{Z}P = M\hat{Z}P$。

同理證　　$S\hat{Z}Q = F\hat{Z}Q$

故　　$P\hat{Z}Q =$ 直角。

127. 定理　設TP及TQ爲一拋物線之二切線，則三

角形 SPT 及 STQ 相似。



設 PT, TQ 各與準線交於 Y 及 Z, 則 $S\hat{Y}P$ 及 $S\hat{Z}P$ 皆爲直角(§ 125)。

又因　$S\hat{P}Y = S\hat{Y}A$(§ 125, 系 1。)

$= S\hat{T}Z$(因 S, Z, Y, T 在一圓上)。

故　$S\hat{P}T = S\hat{T}Q$。

又因　$P\hat{S}T = T\hat{S}Q$(§ 109),

故三角形 $S\hat{P}T$ 與 STQ 相似。

系 1　$ST^2 = SP \cdot SQ$。

因　$SP : ST = ST : SQ$。

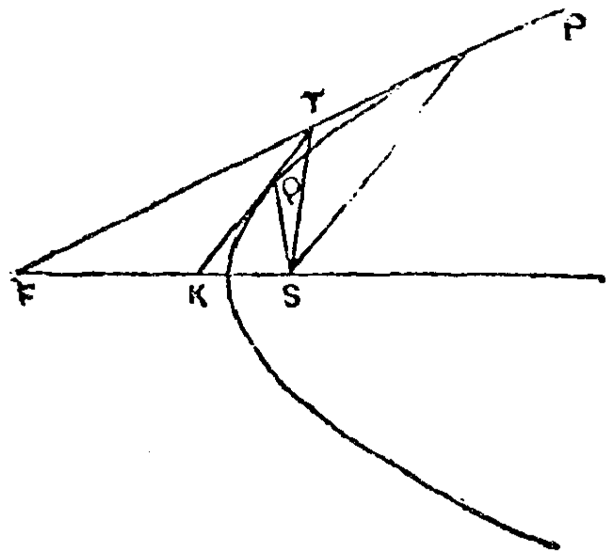
系 2　　$TP^2 : TQ^2 = SP : SQ$。

因　$TP^2 : TQ^2 = \triangle SPT : \triangle STQ$,

$= SP \cdot ST : ST \cdot SQ$(因 $P\hat{S}T = T\hat{S}Q$)

$= SP : SQ$。

128. 定理　拋物線上兩切線之夾角之外角,等於兩切點與焦點所成角之半。



設 P 及 Q 二點之切線交於 T,并各與軸交於 F 及 K。

則　$F\hat{T}K = S\hat{K}Q - S\hat{F}P$,

$= S\hat{Q}K - S\hat{P}T$,

$= 2R\angle s - S\hat{Q}T - S\hat{P}T$,

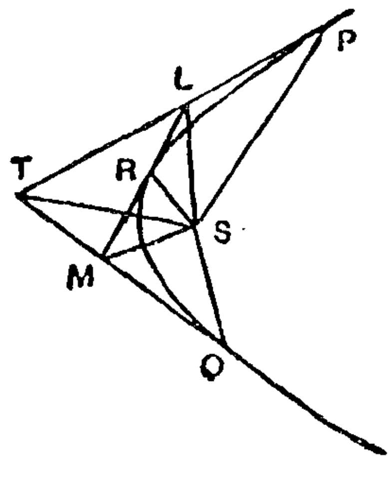
$$=2R\angle-S\hat{T}P-S\hat{P}T,$$

$$=T\hat{S}P=\frac{1}{2}P\hat{S}Q$$

129. 三角形之旁切拋物線

於三種圓錐曲線中，僅有一種爲有限制之曲線。其餘二種(拋物線及雙曲線)，皆無限制。此二種曲線不能有外切三角形。然尋常爲便利起見，若一三角形之三邊同切於一曲線者，卽稱爲此曲線之外切三角形，不論其包圍曲線與否。拋物線爲無限制曲線之一，故所謂外切三角形者，實一旁切三角形也。此下一節，卽關於拋物線外切三角形之定理。

130. 定理 外切於拋物線之三角形之外接圓必過其焦點。



自§125，知自焦點至三角形之三邊之垂線足，皆在拋物線頂點之切線上。

故焦點與此三角形之三頂點同在一圓周上(§7之逆)。

本定理亦可證之如下：

三角形之三邊與拋物線切於P，Q，及R。

因$\triangle SPL$與$\triangle SLR$相似；

故 $$S\hat{L}R = S\hat{P}L。$$

又因$\triangle SPT$與$\triangle STQ$相似；

故 $$S\hat{T}Q = S\hat{P}T。$$

$$\therefore \quad S\hat{L}M = S\hat{T}M。$$

故SLTM同在一圓周上。

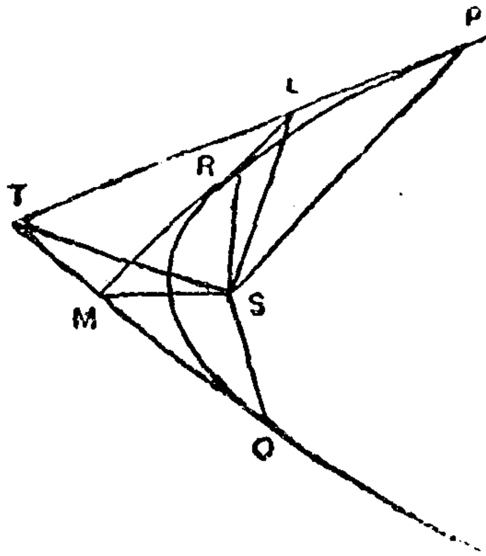
系 外切於拋物線之三角形之垂心在準線上。

設此三角形為TLM。上題已證明自S至三邊之垂線足，皆在拋物線頂點之切線上，故此切線即為三角形之西摩松線。故聯S及三角形之垂心之直線，必平分於此切線(§8)。故垂心在準線上。

131. 定理 拋物線上二點P，Q之切線交於T，另一點R之切線截前二者於L及M，則三角形SLM與

SPT 及 STQ 相似；且

$$PL : LT = TM : MQ = LR : RM。$$



由前定理，可知 S 在 $\triangle TLM$ 之外接圓上。

$\therefore$ $$S\hat{M}L = S\hat{T}L。$$

又因 $\triangle SPL$ 與 $\triangle SLR$ 相似，得 $S\hat{L}M = S\hat{P}T$。

$\therefore \triangle SLM$ 與 $\triangle SPT$ 相似，故亦與 $\triangle STQ$ 相似。

且 $$S\hat{L}M = S\hat{T}M，$$ 又有

$$S\hat{R}L = S\hat{L}P = 180 - S\hat{L}T = S\hat{M}T，$$

因而 $\triangle SLR$ 與 $\triangle STM$ 相似；

$\therefore$ $$LR : TM = SR : SM = MR : MQ。$$

(因 $\triangle SRM$ 與 $\triangle SMQ$ 相似)

∴　　　$LR:RM=TM:MQ$。

同理　　　$MR:RL=TL:LP$;

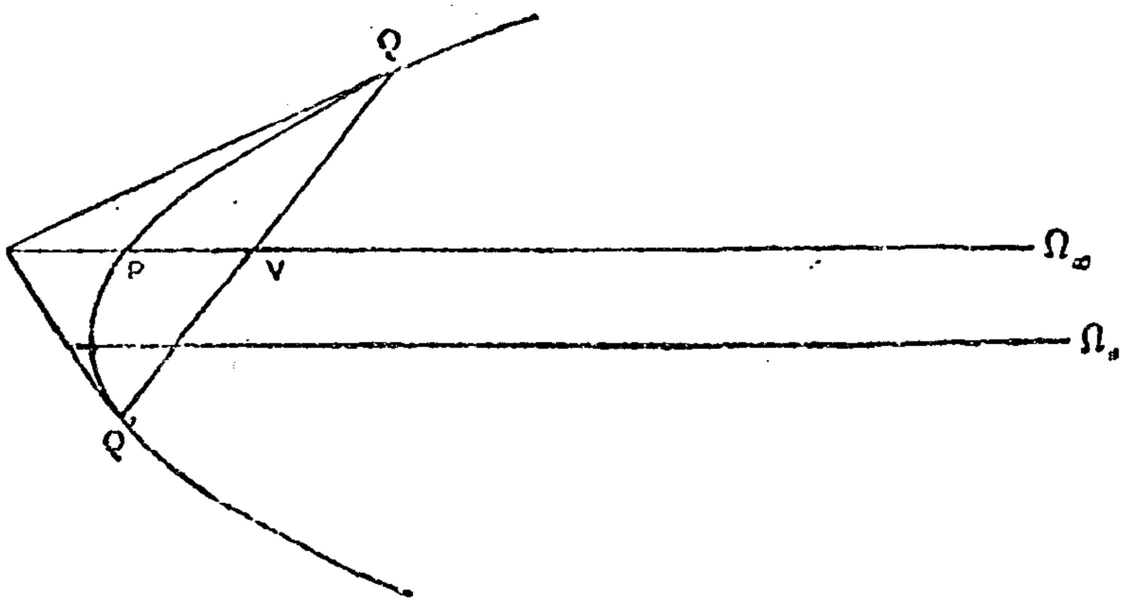
故　$PL:LT=TM:MQ=LR:RM$。

132. 直徑

拋物線之直徑,已於§102言及。玆將舉其重要之性質,述之如下:

任何平行於軸之直線,皆爲此曲線之直徑。每一直徑,必平分一組平行弦。此組中任一弦兩端之切線,交於此直徑上。

定理　設TQ及TQ′爲拋物線之兩切線,TV爲一



直徑,平分一弦 QQ′ 於 V,且與曲線交於 P;則 TP=PV。

因 PV 平行於軸,故與軸交於無窮遠點 Ω。

應用極點與極線之調和關係,

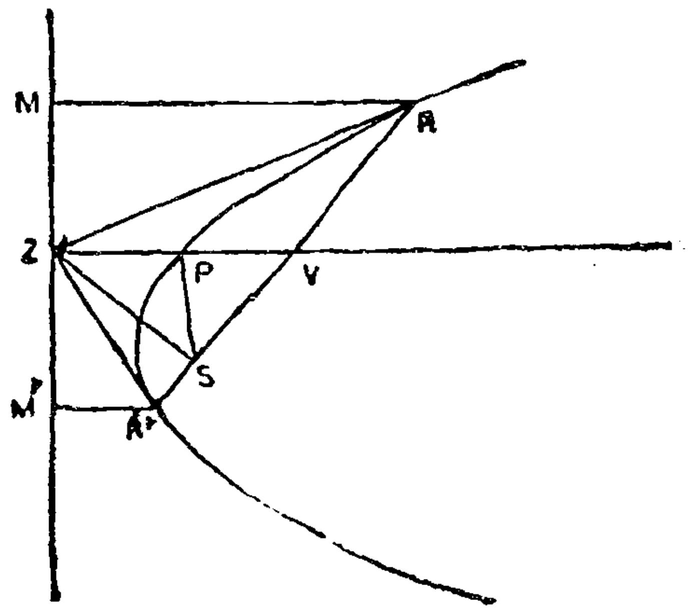
得　　$(TV, P\Omega) = -1$。

∴　　$PV = TP$。

〔註〕 TA=AN(§ 123)爲本定理之特例。

133. 定理　任一焦弦之長,等於平分此焦弦拋物線之交點至其焦點之距離之四倍。

設 RSR′ 爲一焦弦,PV 爲直徑,平分此焦弦於 V;R 及 R′ 之切線交於 Z,Z 必在準線上。



且 $ZP=PV$(§132)。

但 $Z\hat{S}V$ 爲一直角(§106),

$\therefore$ $SP=PV=ZP$。

作 RM 及 R'M' 垂於準線。

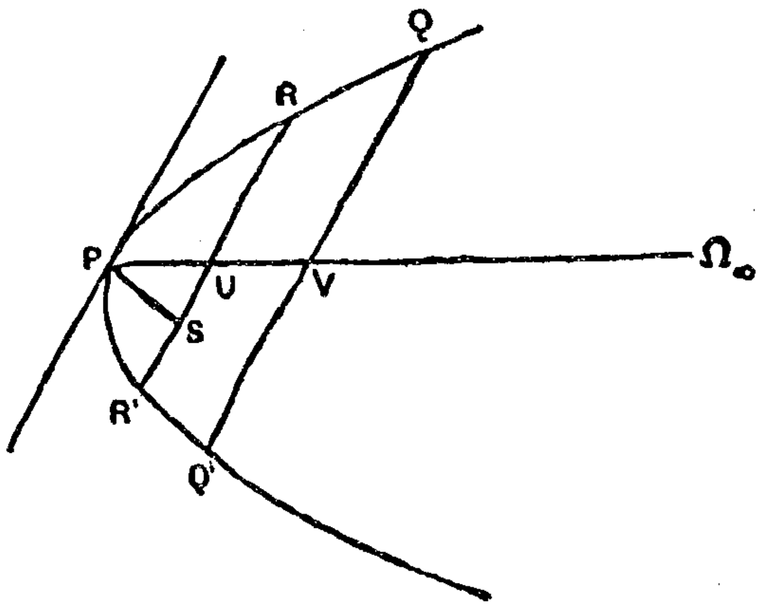
則 $2VZ=RM+R'M'$,(因 V 爲 RR'之中點故)

$=RS+SR'=RR'$。

$\therefore$ $RR'=4PV=4SP$。

134. 定理 設 QV 爲對於直徑 PV, Q 點之縱坐標:

則 $QV^2=4SP\cdot PV$。



引長 QV 使再截拋物線於 Q',則 $QV=VQ'$。

作焦弦 RSR′ 平行於 QQ′ 截直徑於 U，RU=UR′。

設直徑 PV 與曲線再交於無窮遠點 Ω。

應用牛頓定理：

$$VQ\cdot VQ' : VP\cdot V\Omega = UR\cdot UR' : UP\cdot U\Omega,$$

$$\therefore\ VQ\cdot VQ' : UR\cdot UR' = VP\cdot V\Omega : UP\cdot U\Omega$$

$$= VP : UP。$$

$$\therefore\quad QV^2 : RU^2 = VP : UP。$$

$$\therefore\quad \frac{QV^2}{PV} = \frac{RU^2}{PU} = \frac{4\,SP^2}{SP} = 4SP。$$

$$\therefore\quad QV^2 = 4SP\cdot PV。$$

〔註〕 §122 之定理爲本節之特例。

自本定理，可知拋物線乃一動點之軌跡；自此動點至一定直線 l 之距離之平方，與至另一定直線 l′ 之距離之比，爲一常數。l 爲一直徑，l′ 爲此二定直線交點上之切線。

設 QV 與軸所成之角爲 α。

$QV = Q$ 至 PV 之垂線 × Cosec α。

$PV = Q$ 至 P 點之切線之垂線 × Cosec α。

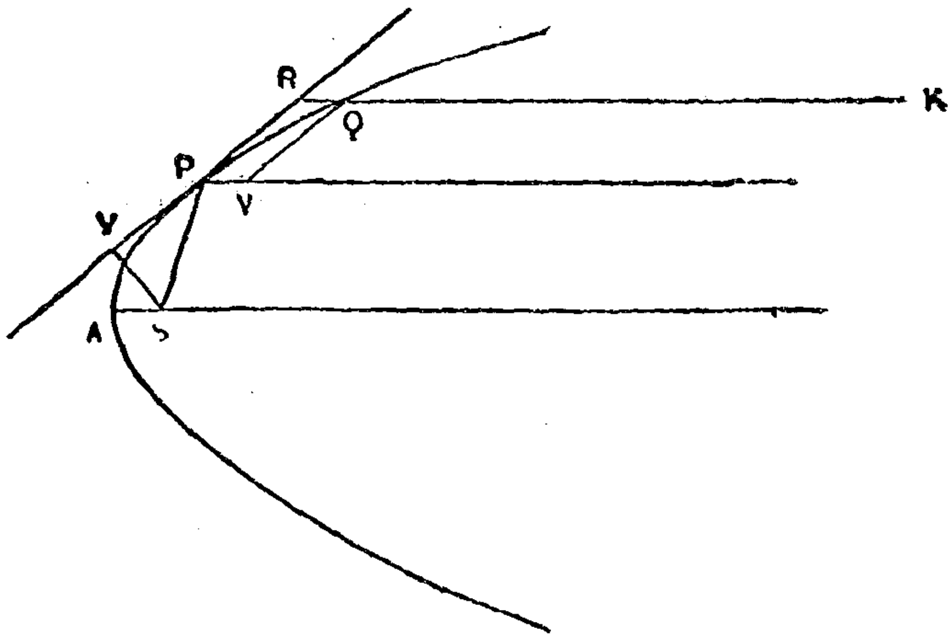
∴ (自 Q 至 PV 之垂線)^2 × Cosec^2 α

=4 SP·(自 Q 至 P 點之切線之垂線) Cosec α。

由是，自 Q 至 PV 之垂線之平方，與自 Q 至 P 點切線之垂線之比，等於 $4\,SP\times\sin\alpha$，卽等於自 S 至 P 點切線之垂線 SY。故若一動點動於 l 及 l′ 之平面上，而其至 l 之距離之平方，爲至 l′ 之距離之 K 倍時，則其軌跡爲一拋物線。其軸與 l 平行，其焦點在距 l′，$\frac{K}{4}$ 之距離之平行線上，焦點又在過 l 及 l′ 之交點之直線上，此直線與 l′ 之夾角，等於 l 與 l′ 之夾角。

135. 曲率圓

於 §119 中略言圓錐曲線之曲率圓；本章將示求作一拋物線上任一點之曲率圓之方法。



已知 P 點之曲率圓心在 P 點之法線上，若再知過 P 點任一弦之長，此圓卽可求得。以既知此弦之長，則自弦之他端作垂線與法線交於 P'，PP' 卽此圓之直徑也。

定理　拋物線 P 點之曲率圓，其過 P 幷平行於軸，或過 P 幷過焦點 S 之弦，等於 4 SP。

此二弦必等，因與 P 點之切線成等角故。

先設一圓與拋物線切於 P 點，幷交於 Q；過 Q 作拋物線之直徑，與圓再交於 K，且與 P 點之切線交於 R。作 Q 點對於直徑 PV 之縱坐標 QV。

則因 RP 爲圓之切線；　RQK 爲截線。

故　$$RQ\cdot RK=RP^2。$$

$$\therefore\qquad RK=\frac{RP^2}{RQ}=\frac{QV^2}{PV}=4SP(\S 134)。$$

今 Q 若向 P 移動，至其極限，與 P 相重，則 RK 成爲 P 點之曲率圓，過 P 幷平行於軸之弦之長。

故此弦等於 4 SP。

系　P 點之曲率圓直徑之長等於 $\frac{4\,SP^2}{SY}$，SY 爲自焦點至 P 點切線之垂線。

因　$$\frac{4\,\mathrm{SP}}{\text{直徑}}=\cos(\text{法線與軸之交角})$$

$$=\sin(\text{切線與軸之交角})$$

$$=\sin(\text{切線與 SP 之交角})$$

$$=\frac{\mathrm{SY}}{\mathrm{SP}}。$$

$$\therefore\quad \text{直徑}=\frac{4\,\mathrm{SP}^2}{\mathrm{SY}}。$$

〔註〕 曲率圓之直徑,通常稱爲曲率徑。過 P 之弦,則稱爲曲率弦。

習　題

1. 設 PSP′ 爲拋物線一焦弦，PN 及 P′N′ 爲對軸之縱坐標,求證　$\mathrm{PN}\cdot\mathrm{P'N'}=4\mathrm{AS}^2=4\mathrm{AN}\cdot\mathrm{AN'}$。

2. 設一組拋物線共切於一直線，并共以一點爲焦點,求證諸拋物線之頂皆在一圓周上。

3. 平面上一直線繞一定點而轉，此直線上任一點之軌跡爲一拋物線。

4. 設 QV 爲對於直徑 PV，Q 點之縱坐標，QD 爲 PV 之垂線,則　$\mathrm{QD}^2=4\mathrm{AS}\cdot\mathrm{PV}$。

5. 設 PQ 及 PR 爲拋物線之二弦，過 Q 之直徑與 PR 交於E,過 R 之直徑與 PQ 交於 F；求證 EF 平行於 P 點之切線。[射影拋物線成圓,以 E 射成圓心。]

6. 一圓與一拋物線切於 P,幷交於 Q,及 R；此拋物線過 P 及 Q 之直徑，各與圓再交於一點，則聯此二點之直線與 P 點之切線平行。[應用 § 116 之系]

7. 設 TP 及 TQ 二切線爲第三切線截於 L 及 M,則

$$\frac{TL}{TP}+\frac{TM}{TQ}=1。$$

8. 拋物線上 P 點之法線與曲線再交於 Q。PN 爲對於軸，P 點之縱坐標，而 T 爲 PQ 之極點。 求證

$$PQ : PT = PN : AN。$$

9. 拋物線 P 點之法線與曲線再交於 Q。設 P,Q 與 S 成直角；則 $SQ=2SP$。

10. 設 TP 及 TQ 爲一拋物線之兩切線，而 PQ 又爲 P 點之法線，則準線平分 TP。

11. 三角形 ABC 外切於一拋物線。S 爲其焦點。求證自 A,B,C 所作各垂於 SA,SB,SC 之直線交一點。

12. 拋物線上 P 及 Q 二點之切線交於 T;作 PK 及 QL 垂直於 TQ 及 TP,求證二三角形 STK 與 STL 相等。

13. 三角形 ABC 動於一平面上。A沿一直線移動,而 AB 常過一定點,則 AC 之曲線包爲一拋物線。

14. 設 LL′ 爲拋物線之正焦弦,L之切線與另一切線交於 V,則 SL·LP=VL·VL′。

15. 一圓與一拋物線切於 P,且過其焦點 S,則此曲線與圓再相交,或不相交,視曲線之正焦弦是否小於P而定。

16. 同軸之二拋物線之正焦弦相等。而一拋物線之任一切線距焦點之距離,等於此切線爲第二拋物線所截得之長。求證首通徑等於自焦點至曲線頂之距離之六十四倍。

17. TQ 及 TR 爲一拋物線之二切線,與曲線上 P 點之切線交於 Y 及 Z,過 T 作直徑與曲線交於 U。求證 U 點之切線平分 YZ。又若焦點爲 S,則 $YZ^2=4SP\cdot TU$。

18. 拋物線正焦弦一端之曲率圓之半徑等於過此端之法線之二倍。

19. 設拋物線上任一點 P 之切線截軸於 T，而 P 點之曲率圓與曲線再交於 Q，則 $PQ=4PT$。

20. 拋物線上 P 點之曲率圓上，過 P 幷過曲線頂 A 之弦之長等於 $\frac{4\,PY^2}{AP}$，Y 爲自焦點至 P 點切線之垂線足。

第十二章

橢圓

136. 橢圓之形狀已於 § 98 及 § 99 中略述之矣。茲將進而論其專有之性質。

於全章之附圖上。以 S 及 S′ 表示二焦點。X 及 X′表示二準線與長軸之交點。A 及 A′ 表示長軸之兩端。B 及 B′ 表示短軸之兩端。C 表示曲線之心。長軸之端尋常爲橢圓之頂。前此已證明 $CS:CA=CA:CX=e$(離心率)

離心率愈小,則橢圓愈近圓形;而離心率愈近於1,則橢圓愈扁;至離心率等於 1 ,則成一直線。

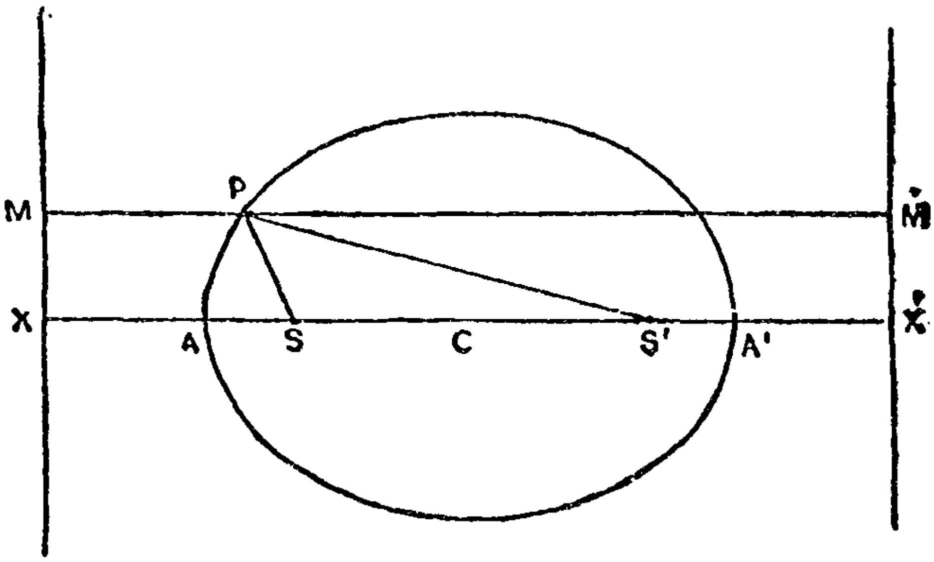
137. 定理　橢圓上任一點與兩焦點距離之和等於 AA'。

設 P 爲橢圓周上一點。MPM' 垂於準線。

則　$SP=e\cdot MM'$;　$S'P=e\cdot PM'$。

$$\therefore\quad SP+P'M=e(PM+PM')=e\cdot XX'$$

$$=2e\cdot CX=2CA=AA'。$$

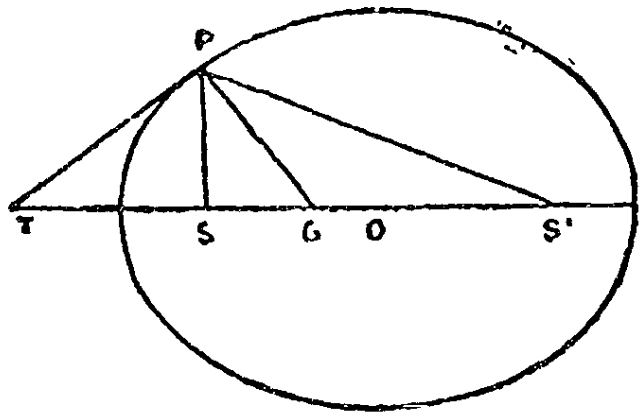


系　同焦點之二橢圓不能相交。

自本定理可知橢圓乃一動點之軌跡，此動點與二定點之距離之和爲常數。

138. 切線與法線

定理　橢圓上任一點之切線與法線；平分過此點二



焦弦所夾角之外角及內角。

設 P 點之切線及法線各與軸交於 T 及 G。

則自 § 111, $SG=e\cdot SP$; $S'G=e\cdot S'P$。

$\therefore\ SG:GS'=SP:PS'$。

故 PG 平分 $S\hat{P}S'$。

但 PT 與 PG 正交,故 PT 平分 $S\hat{P}S'$ 之外角。

系 $CG\cdot CT=CS^2$。

因 PG 及 PT 爲 $S\hat{P}S'$ 之內外平分線。

故 $(GT,SS')=-1$。

139. 定理 設 SY 及 S'Y' 爲二焦點至 P 點之切線之垂線,則 YY' 同在以 AA' 爲直徑之圓上,且

$$SY\cdot S'Y'=BC^2。$$

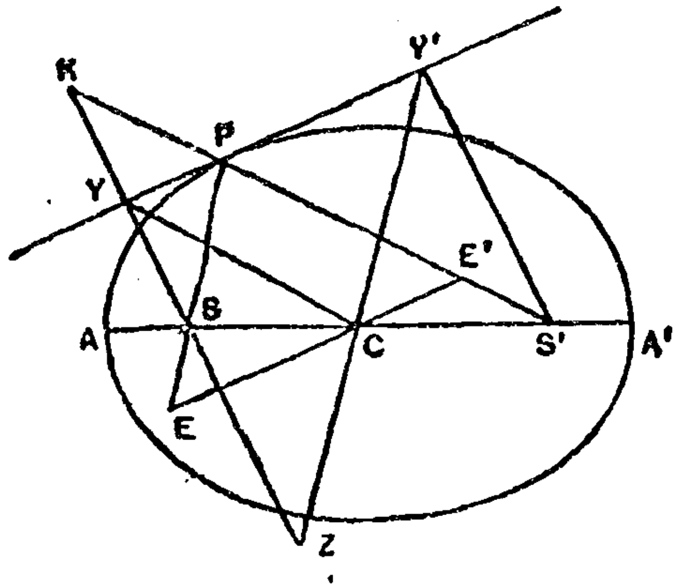
引長 SY 與 S'P 交於 K。

則因 $S\hat{P}Y=K\hat{P}Y$; $S\hat{Y}P=K\hat{Y}P$; 又 PY 爲公邊。

故 $\triangle SPY\equiv\triangle KPY$。

$\therefore\ PK=SP$; 又 $KY=SY$。

$\therefore\ KS'=KP+PS'=SP+PS'=AA'$。 § 137



又因 Y 為 KS 之中點； C 為 SS' 之中點，

故 CY 平行於 S'K， 且$CY=\frac{1}{2}S'K=CA$。

由是 Y 在以 AA' 為直徑之圓周上；同理可證 Y'。

更有進者，$Y'\hat{Y}S$ 為直角， 則 YC 之引長線必與 YS 交於圓周上一點 Z。

$\because \quad \triangle CSZ \equiv \triangle CS'Y'$， $SZ=S'Y'$。

$$\therefore \quad SY\cdot S'Y'=SY\cdot SZ=SA\cdot SA'=CA^2-CS^2$$
$$=BC^2$$

系 1 平行於 YY' 之直徑與 SP，S'P 交於 E，E'，則 $PE=PE'=AC$。

因 PYCE′ 為一平行四邊形，∴PE′=CY=AC。

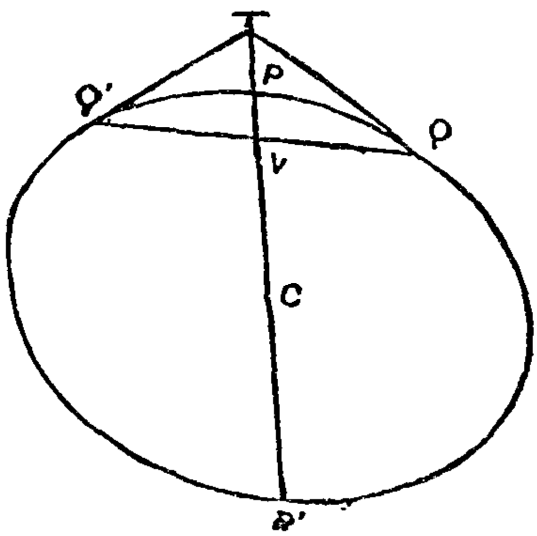
同理 PE=AC。

系 2 一直線繞一定點移動，若自定點至此直線之垂線足在一圓周上，且動點在此圓之內，則動直線之曲線包為一橢圓。

系 3 一直線繞其一旁之二定點而動，若自二定點至動直線之二垂線之積等於一常數時，則動直線之曲線包為一橢圓。

定義 以橢圓之長軸為直徑所作之圓，稱輔圓 Auxiliary circle。

140. 定理 設 TQ 及 TQ′ 為橢圓之二切線，C 為



心。TC 與 QQ'交於 V，與曲線交於 P，則 $CV \cdot CT = CP^2$。

設 TC 與曲線再交於 P'，則因 T 爲 QQ' 之極點。

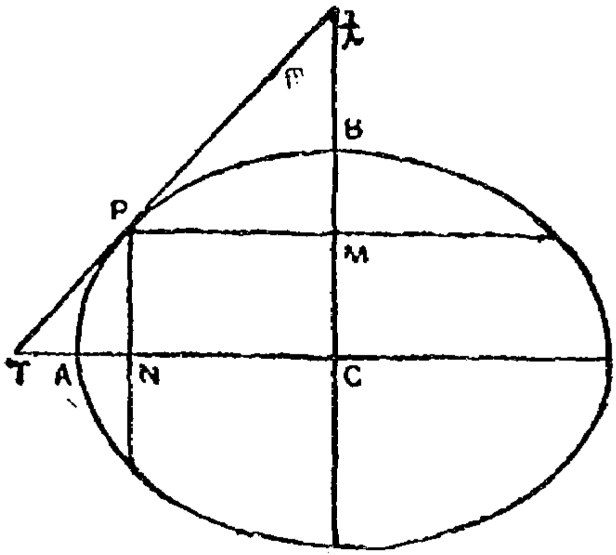
$$(TV, PP') = -1。$$

因 C 爲 PP' 之中點，故 $CV \cdot CT = CP^2$。

特例　設橢圓上一點 P 之切線與大，小軸各交於 T 及 t；PN 及 PM 爲對於此二軸之縱坐標，則

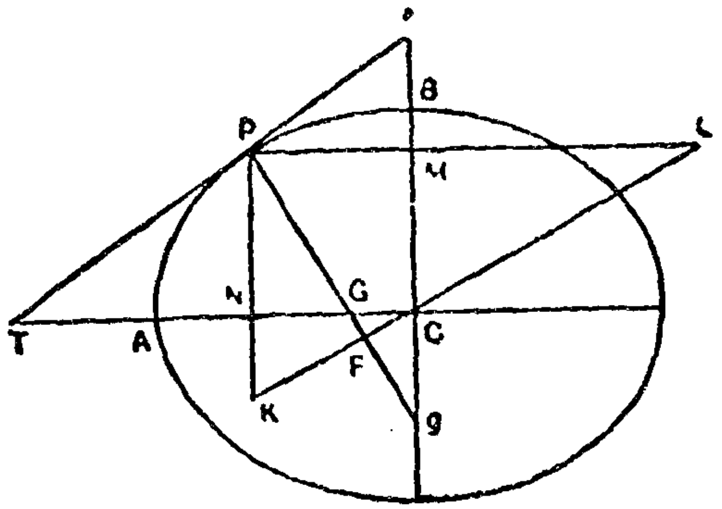
$$CN \cdot CT = AA^2;$$

$$CM \cdot Ct = CB^2。$$



141. 定理　設橢圓上一點 P 之法線，與長短軸交於 G 及 g，且與垂於法線之直徑交於 F。則

$$PF \cdot PG = BC^2; \quad PF \cdot Pg = AC^2$$



自 P 作對於長短軸之縱坐標 PN 及 PM。各與垂於法線之直徑交於 K 及 L，如上圖。

設 P 點之切線與長短軸交於 T 及t。

則 NKFG 在一圓周上。(因 $\hat{N}$ 及 $\hat{F}$ 皆爲直角)

$\therefore PF \cdot PG = PN \cdot PK = CM \cdot Ct = BC^2$。

又因 gFML 同在一圓周上，(因 $\hat{F}$,$\hat{M}$ 皆爲直角)

$\therefore PF \cdot Pg = PM \cdot PL = CN \cdot CT = CA^2$。

142. 定理 設橢圓上 P 點之法線與長軸交於 G，而 PN 爲對此軸之縱坐標，則 $CG = e^2 \cdot CN$。

設 P 點之切線與長軸交於 T。

於 § 138 之系已證明 $CG \cdot CT = CS^2$。

但　$CN \cdot CT = CA^2$。

∴　$CG : CN = CS^2 : CA^2 = e^2$。

∴　$CG = e^2 \cdot CN$。

系　$NG : NC = BC^2 : AC^2$。

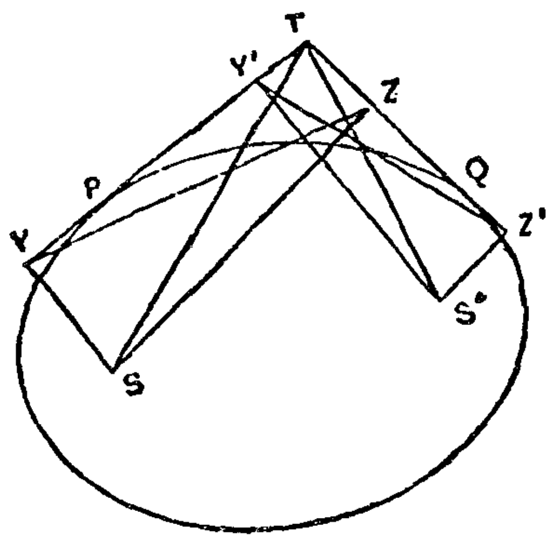
因　$CG : CN = CS^2 : CA^2$。

∴　$CN - CG : CN = CA^2 - CS^2 : CA^2$

$= BC^2 : AC^2$。

143. 一對切線之關係

定理　橢圓之二切線交於一點，則聯此點與一焦點之直線與一切線之夾角，等於聯他焦點之直線與餘一切線之夾角。



設TP及TQ爲二切線；S,S′爲焦點，求證

$P\hat{T}S=S'\hat{T}Q$。

作SY及S′Y′垂於TP;SZ及S′Z′垂於TQ。

則 $SY\cdot S'Y'=BC^2=SZ\cdot S'Z'$。(S § 139)

$\therefore \quad YS : SZ=S'Z' : S'Y'$。

又因 $Y\hat{S}Z=Y\hat{T}Z$ 之補角(因 $S\hat{Y}T$, $T\hat{Z}S$ 皆爲直角)

$=Y'\hat{S}'Z'$

故二三角形SYZ及S′Y′Z′相似。

$\therefore \quad S\hat{Z}Y=S'\hat{Y}'Z'$。

但 $S\hat{Z}Y=S\hat{T}Y$； $S'\hat{Y}'Z'=S'\hat{T}Z'$。

$\therefore \quad S\hat{T}Y=S'\hat{T}Y'$。

144. **準圓** Director circle

定理 橢圓上二切線，常切於一橢圓而移動，則其交點之軌跡爲一圓，稱此橢圓之準圓。

設TP及TQ爲正交之二切線。

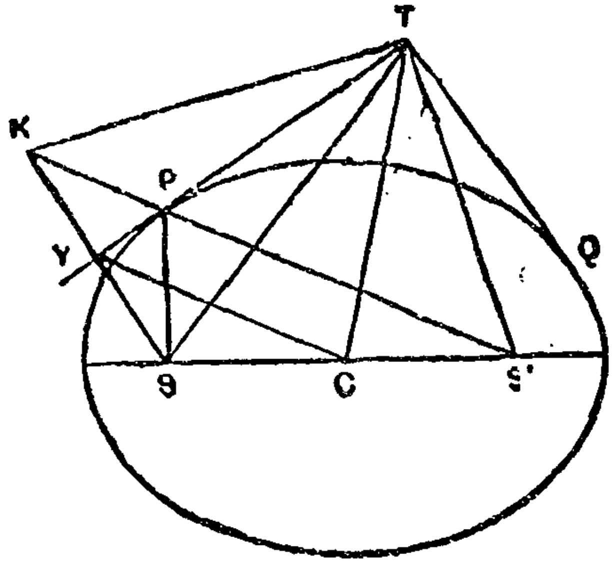
作SY垂於TP與S′P交於K。

則自 § 139， $SY=YK$； $S'K=AA'$。

故 $\triangle SYT\cong\triangle KYT$。

$\therefore$　$ST=KT$，　又 $K\hat{T}P=S\hat{T}P=Q\hat{T}S'$。

$\therefore$　$K\hat{T}S=P\hat{T}Q=$直角。



今有　$2CT^2+2CS^2=ST^2+S'T^2$(§ 10)

$$=KT^2+S'T^2$$

$$=KS'^2=4CA^2。$$

$$\therefore CT^2=2CA^2-CS^2=2CA^2-(CA^2-CB^2)$$

$$=CA^2+CB^2。$$

故 T 之軌跡爲一圓；以 C 爲圓心，以$\sqrt{CA^2+CB^2}$爲半徑。

§ 145.　一對直徑對

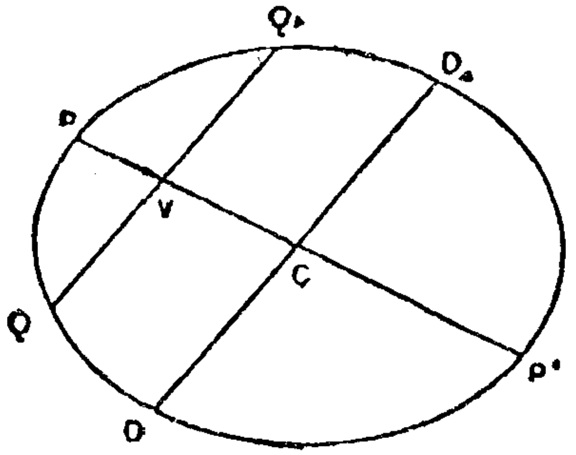
於圓錐曲線之平面上，一直線之極點，(對於此曲線)若在另一直線上，則後者之極點在前者之上，此二直線稱為線對，讀者已知之矣。若一對線對皆為此曲線之直徑，則此一對直徑稱為直徑對。自 § 95，可知一直徑兩端之切線平行於他直徑，且平行於一直徑之諸弦為第二直徑之所平分，且此等弦皆為對於第二直徑之雙縱坐標，橢圓之兩軸乃正交之直徑對也。

146. 定理 設 PCP′及 DCD′為一橢圓之一對直徑對。QV 為對於直徑 PCP′ 之縱坐標。則

$$QV^2 : PV \cdot VP' = CD^2 : CP^2。$$

引長 QV 使再與橢圓交於 Q′，

應用牛頓定理，則



$$VQ \cdot VQ' : VP \cdot VP' = CD \cdot CD' : CP \cdot CP'。$$

但 $VQ' = -VQ; CD' = -CD; CP' = -CP$。

$$\therefore \quad QV^2 : PV \cdot VP' = CD^2 : CP^2$$

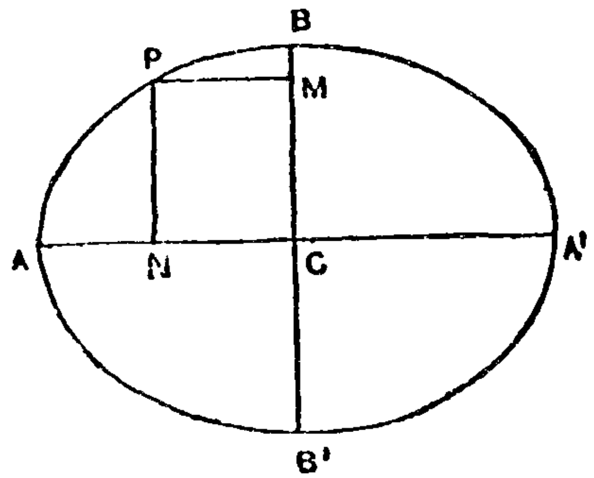
自本定理，可知若一動點至一定直線 l 之距離之平方，與至另二互相平行之定直線 l′, l″ 之距離之積之比爲常数。且此動點常在 l′ 與 l″ 之間，則此動點之軌跡爲一橢圓。l 爲一直徑，l′ 及 l″ 爲 l 與曲線之交點之切線。

147. 前定理之特例

設 PN 及 PM 爲對於長軸及短軸之縱坐標。

則 $$PN^2 : AN \cdot NA' = BC^2 : AC^2;$$

$$PM^2 : BM \cdot MB' = AC^2 : BC^2。$$



系　正焦弦$=2BC^2/AC$。

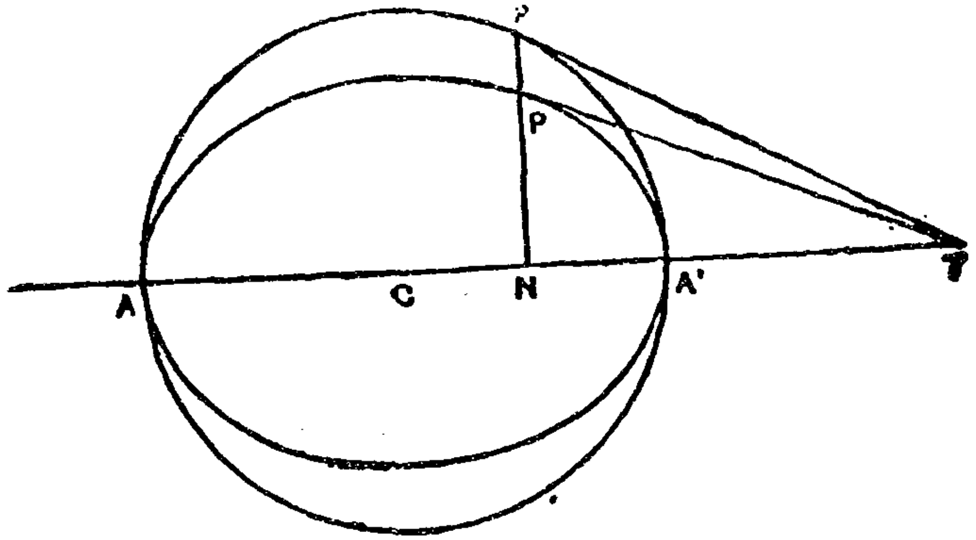
因若 SL 爲正焦弦，則

$SL^2 : AS\cdot SA' = BC^2 : AC^2$；且 $AS\cdot SA' = BC^2$ 故也。

148. 輔圓(§ 139)

定理　設 P 爲橢圓上一點，PN 爲對於長軸之縱坐標，PN 之引長線與輔圓交於 p，則

$$NP : Np = BC : AC。$$



因 $PN^2 : AN\cdot NA' = BC^2 : AC^2$。 § 147

又因 $A\hat{p}A'$ 爲直角。故 $pN^2 = AN\cdot NA'$。

$\therefore PN : pN = BC : AC$。

p 稱爲輔圓上 P 點之對應點。或 P 稱爲橢圓上 p 點

之對應點。於兩對應點所作圓及橢圓之切線交於長軸之上。

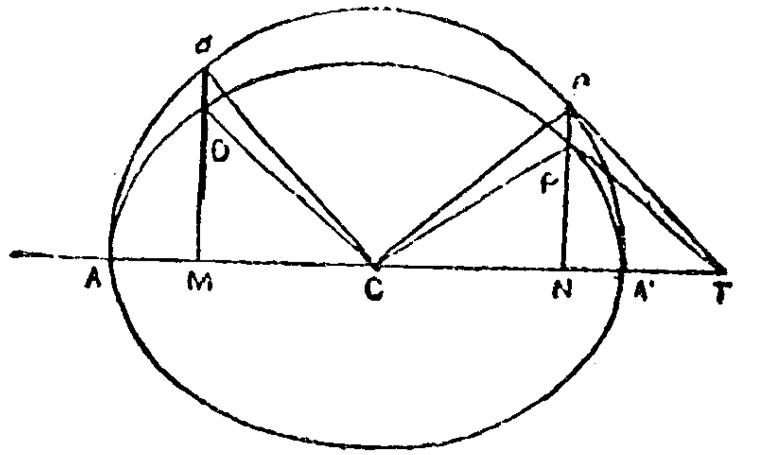
因設 P 之切線與長軸交於 T，則 $CN \cdot CT = CA^2$。(§ 141)

$\therefore$ T 為對於輔圓 pN 之極點，卽 p 點之切線過 T。

讀者當能以同法證明下題。

設對於短軸之縱坐標 PM 與以短軸 BB′ 為直徑之圓交於 p′，則 $PM : p'M = AC : BC$。

149. 定理　設 CP 與 CD 為對於橢圓之半徑對，而 p 及 d 為輔圓上 P，D 之對應點，則 $p\hat{C}d$ 為直角。



設 p 及 P 之切線與長軸交於 T，過 P 及 D 作對於長軸之縱坐標 PN 及 DM。

因 TP 平行於 CD。$\triangle PNT$ 與 $\triangle DMC$ 相似。

$\therefore$ $PN : DM = NT : MC$。

但 $PN : pN = BC : AC = DM : dM$。

$\therefore$ $PN : DM = pN : dM$。

$\therefore$ $pN : dM = NT : MC$。

卽 $pN : NT = dM : MC$。

二三角形 pNT 與 dMC 內，其二相當邊之比等，而所夾之角又等(皆爲直角)，故相似。

$\therefore$ $M\hat{C}d = N\hat{T}p$。

$\therefore$ Cd 平行於 Tp。

$\therefore$ $d\hat{C}p = C\hat{p}T =$ 直角。

系 $pN = CM$; $dM = CN$，因 $\triangle CNp \equiv \triangle dMC$。

自此又得以下二比例：

$PN : CM = BC : AC$; $DM : CN = BC : AC$。

150. 定理 設 CP 與 CD 爲對於橢圓之一對半徑對。

則 $CP^2 + CD^2 = CA^2 + CB^2$。

仍用前節之圖。

$$CP^2=CN^2+PN^2=CN^2+\frac{BC^2}{AC^2}\cdot pN^2。$$

及 $$CD^2=CM^2+DM^2=pN^2+\frac{BC^2}{AC^2}\cdot dM$$

$$=pN^2+\frac{BC^2}{AC^2}\cdot CN。$$

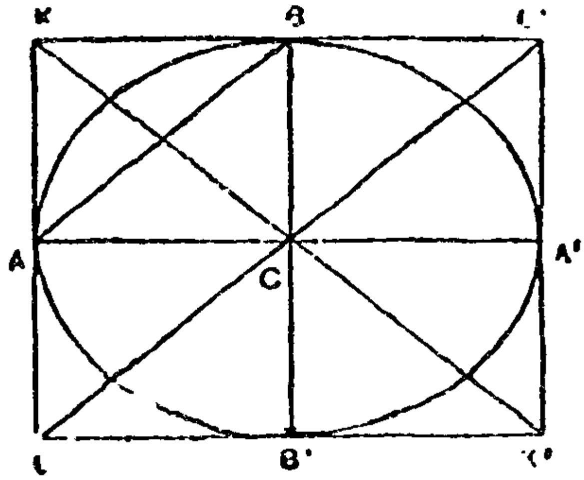
$$\therefore\ CP^2+CD^2=\left(1+\frac{BC^2}{AC^2}\right)(pN^2+CN^2)$$

$$=\left(1+\frac{BC^2}{AC^2}\right)AC^2=AC^2+BC^2。$$

151. 相等直徑對

橢圓中之各對直徑對，僅有一對長度相等。

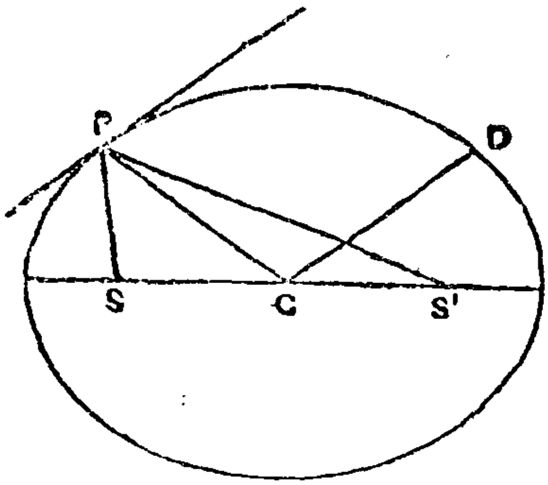
若於長，短軸之端作切線成一矩形；此矩形之兩對角線即等直徑對也。(下圖之 KK′ 及 LL′) 此二直徑之相等，



乃因橢圓以長軸或短軸成對稱故;而其成線對,則因KC平分AB,而AB又平行於LL'故也。

152. 定理 設CP與CD爲橢圓之一對半徑對。則

$$SP \cdot S'P = CD^2$$

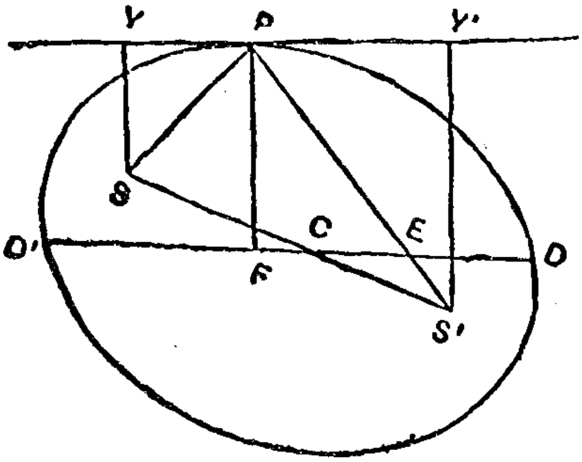


因C爲SS'之中點。

$$\begin{aligned}2CP^2+2CS^2 &= SP^2+S'P^2\\ &= (S'P+SP)^2-2SP\cdot S'P\\ &= 4CA^2-2SP\cdot S'P。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad SP\cdot S'P &= 2CA^2-CP^2-CS^2\\ &= CA^2+CB^2-CP^2=CD^2(\S\ 150)\end{aligned}$$

153. 定理 設CP,CD爲橢圓之一對半徑對;P點之法線與CD交於F,則 $PF\cdot CD=AC\cdot BC$。



作 P 點之切線。自焦點作此切線之二垂線 SY 與 S'Y'; 聯 SP 及 S'P 與 CD 交於 E。

則二三角形 SPY 及 S'PY' 相似。

$$\therefore \quad SY : SP = S'Y' : S'P$$

$$\therefore SY \cdot S'Y' : SP \cdot S'P = SY^2 : SP^2$$

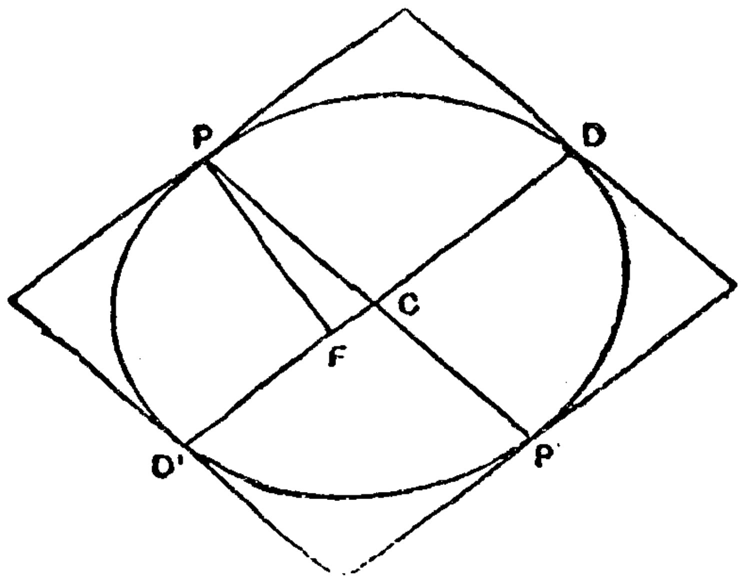
$$= PF^2 : PE^2。$$

(因$\triangle^s$ SYP 與 PFE 相似)

$$\therefore \quad BC^2 : CD^2 = PF^2 : AC^2。$$

$$即 \quad PF \cdot CD = AC \cdot BC。$$

系 橢圓上任一對直徑對之端所作之四切線成一平行四邊形;此平行四邊形之面積等於 4 AC·BC。



因此平行四邊形之面積等於平行四邊形 PD'之四倍。

而 ▱PD' = PF·CD = AC·BC 故也。

154. 曲率圓

定理 橢圓上 P 點之曲率圓上，過 P 并過曲線心之弦之長等於 $2CD^2/CP$。CD 與 CP 爲橢圓上一對直徑對。

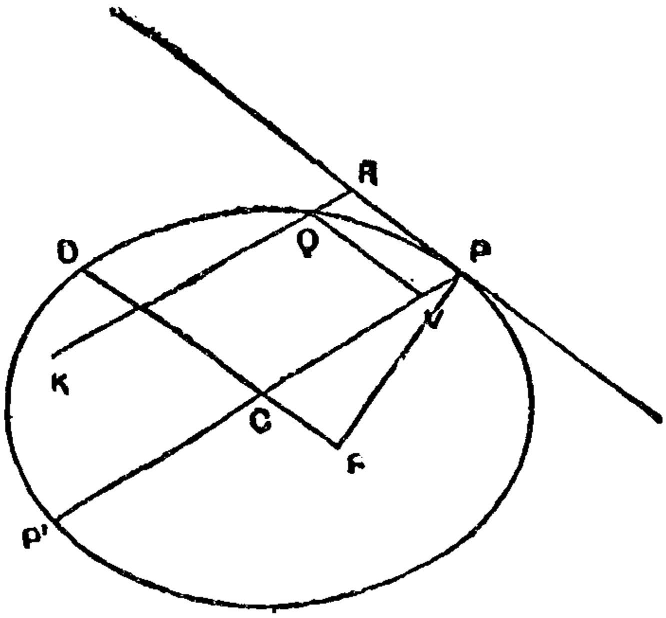
設一圓與橢圓切於 P，并交於 Q。

作直徑 PCP' 之縱坐標 QV。

又設 QK 爲曲率圓之一弦，與 PCP' 平行，交 P 點之切線於 R。

則自圓之關係有： $RQ \cdot RK = RP^2$。

$$\therefore \quad RK = \frac{RP^2}{RQ} = \frac{QV^2}{PV} = \frac{CD^2}{CP^2} \cdot VP'。(\S\ 146)$$



今令Q向P移動，至其極限與P相重，則P點之曲率圓，過P并過C之弦之長，等於

$$\frac{CD^2}{CP^2}\cdot VP' \text{ 之極限(當 Q 向 P 移動時)}$$

$$=\frac{CD^2}{CP^2}\cdot 2\,CP=\frac{2CD^2}{CP}。$$

系 此曲率圓之直徑等於 $2CD^2/PF$。F為切點P之法線與CD之交點。

因 直徑: $\frac{2CD^2}{CP}=\sec(\text{法線與 CP 之交角})=CP : PF$。

$\therefore$直徑$=\frac{2CD^2}{PF}=\frac{2CD^2}{AC\cdot BC}$。

習題

1. 求證 $CS:CX=CS^2:CA^2$。

2. 設 SL 爲橢圓正焦弦，則 $SL=e\cdot SX$。用此關係證明 $SL=BC^2/AC$。

3. 設 P 爲橢圓上一點，P 點之切線與法線各與短軸交於 T 及 G。S, S′ 爲此曲線之焦點，求證 T, P, G, S, S′ 五點在一圓周上。

4. 設二定圓內切(卽一圓在他圓之內)，則同時切於此二圓之圓之心之軌跡爲一橢圓，二定圓心爲其焦點。

5. 設橢圓上 P 點之切線與長軸交於 T，NG 爲 P 點之次法線，求證 $CT\cdot NG=BC^2$。

6. 橢圓上 P 點之法線與短軸交於 g，P 點之切線與曲線頂 A 之切線交於 V，求證 $Sg:SC=PV:VA$。

7. 設 P 點之法線與長軸交於 G，則 PG 爲自二焦點至 P 點之切線之二垂線之調和中項。

8. 設一橢圓常切於二正交之直線而移動，則橢圓心之軌跡爲一圓。

9. 設 P 點動於一橢圓周上；S, S′ 爲其焦點，則

$\triangle PSS'$ 之內切圓心之軌跡爲一圓。

10. 設 CQ 爲橢圓之半徑，與 P 點之法線成線對，則 CP 與 Q 點之法線成線對。

11. 設 P 爲橢圓上一點；S,S′ 爲二焦點，A 爲曲線頂，則 $P\hat{S}A$ 及 $P\hat{S'}A$ 二角之分角線交於 P 點之切線上。

12. 設一圓內切一橢圓於二點，Q 爲橢圓上任一點，自 Q 作圓之切線 QT，與圓切於 T。求證若 QL 爲公弦之垂線時，則 $QT = e \cdot QL$。

13. 已知一定點及一定三角形，求作一橢圓，使此定三角形對於橢圓常成自極三角形。

14. 設 P 爲橢圓上任一點；A,A′ 爲曲線之頂，AP 及 A′P 與一準線交於 E 及 F，則 E,F 與對此準線之焦點成直角。

15. 一組橢圓共以一定點爲其一焦點，幷同切於二直線，則各橢圓之準圓屬於一同軸圓組。

16. SY 爲自橢圓焦點 S 至一切線之垂線，於 SY 之引長線上，取 K，使 $KY = SY$；則自 K 所作準圓之切線之平方，等於 SY 平方之二倍。

17. 橢圓上相等直徑對之一直徑一端之曲率圓，必過此直徑之他端。

18. 設 S, S′ 爲橢圓之二焦點，B 爲短軸之一端；則過 S, S′, B 之圓，與短軸之交點，爲 B 點之曲率圓心。

19. 設橢圓上 P 點之曲率圓過焦點 S，作 SE 平行於 P 點之切線，與過 P 點之直徑交於 E，則 E 分此直徑爲 3 : 1。

20. 一直線與一橢圓切於 F，同時并切橢圓 P 點之曲率圓於 E，FE 與 P 點之切線交於 O，則 (TO, EF) $=-1$。

第十三章
雙曲線

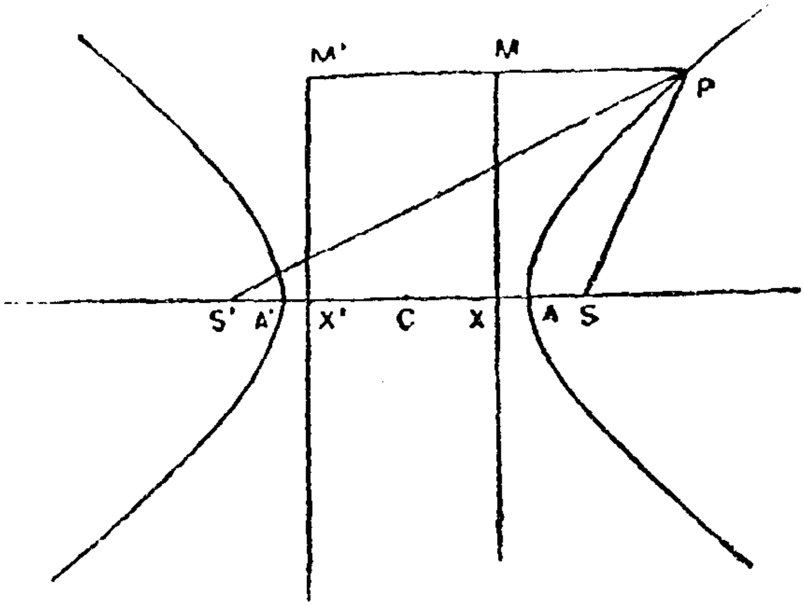
155. 雙曲線之形狀及其得自射影之法，已於 § 100，及101中略言之矣。茲將進而論其異於他種圓錐曲線之性質。

於全章之附圖上，雙曲線之兩頂以 A，A′ 代；二焦點以 S，S′ 代；準線與貫軸之交點以 X，X′ 代；曲線心，卽貫軸之中點以 C 代。貫軸之兩端尋常稱爲雙曲線之頂。

前已證明　$CS : CA = CA : CX = e$(離心率)。

156. 於本章中將論雙曲線之一般性質；其專關於等腰雙曲線(卽二漸近線爲正交之雙曲線)之定理，則於次章中論之。雙曲線及橢圓皆爲有心圓錐曲線。故有甚多相彷之定理，其證法亦大同小異；但雙曲線有一對漸近線(卽與曲線切於無窮遠之二切線也)，故有特殊之性質。

157. **定理**　雙曲線上任一點至二焦點之距離之差，等於貫軸 AA′ 之長。



設 P 為雙曲線上任一點，

作 MPM' 垂於二準線，如圖。

則　　$S'P = e \cdot PM'$；$SP = e \cdot PM$。

∴　　$S'P \backsim SP = e \cdot XX = AA'$。

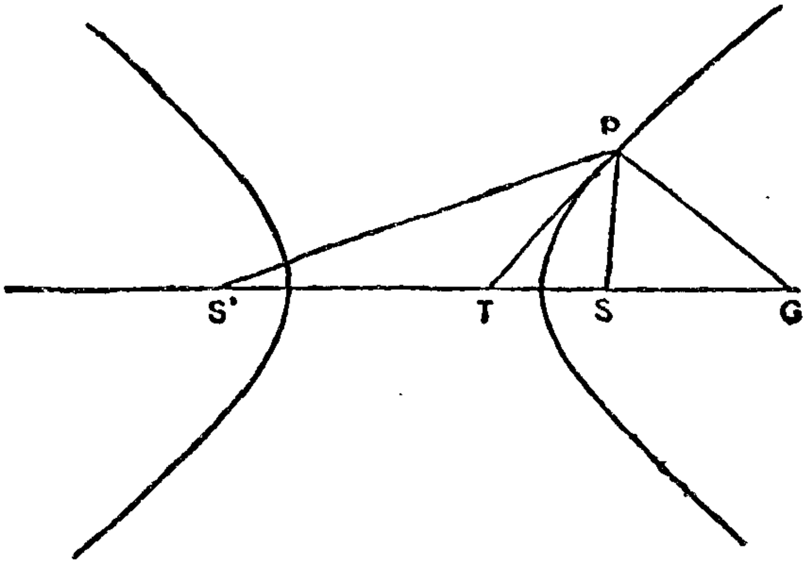
若 P 在 P 分段上，則 $S'P - SP = AA'$；若在右段上，

則　　$SP - S'P = AA'$。

系　同焦點之二雙曲線不能相交。

158. 切線及法線。

定理　雙曲線上任一點之切線及法線，各平分此點兩通徑所夾角之內角與外角。



設雙曲線上P點之切線及法線各交貫軸於 T 及 G;

自 § 111　$SG=e\cdot SP, S'G=e\cdot S'P$。

∴　$SG : SP=S'G : S'P$。

故 PG 爲 $S\hat{P}S'$ 外角之分角線。

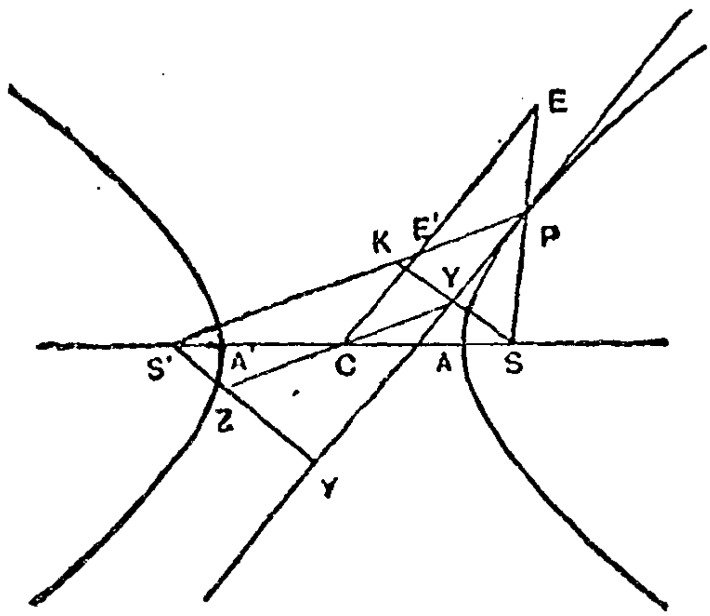
因 PT 垂於 PG,故爲 $S\hat{P}S'$ 內角之分角線。

系 1. $CG\cdot CT=CS^2$。因$(SS', TG)=1$。

系 2. 同焦點之雙曲線及橢圓爲正交，即自交點所作雙曲線及橢圓之切線成正交。

159. 定理　設自雙曲線之二焦點作其一切線之垂線 SY 及 S'Y',則 Y, Y' 在以 AA' 爲直徑之圓(稱輔圓 Auxiliary circle)上。

且 $SY \cdot S'Y'$ 爲常數。



設 SY 與 S'P 交於K。

∵　　$S\hat{P}Y = K\hat{P}Y$ (§ 158)

且 $S\hat{Y}P = K\hat{Y}P$；PY 爲公邊。

故　　$\triangle SPY \equiv \triangle KPY$。

∴　　$SY = YK : PK = SP$。

又因 C 爲 SS' 之中點，故 CY 平行於 S'K。

$$CY = \frac{1}{2}S'K = \frac{1}{2}(S'P - KP) = \frac{1}{2}(S'P - SP)$$

$$= \frac{1}{2}AA' = CA。$$

於是 Y (同理亦可證 Y')在以 AA' 爲直徑之圓周上。

設 S'Y' 與圓再交於 Z，則因 $Y\hat{Y'}Z$ 爲直角；故 YZ 爲圓之直徑，而 C 在 YZ 上。

又因△SCY≡△S'CZ。故 S'Z＝SY。

$$\therefore\ SY\cdot S'Y'=S'Z\cdot S'Y'=S'A'\cdot S'A=CS^2-CA^2$$
$$=\text{常數}。$$

系 1. 平行於 P 點切線之直徑與 SP 及 S'P 交於 E, E'。則 PE＝PE'＝CA。

系 2. 一直線繞一定點而動，自定點至此直線之垂線之足之軌跡爲一圓時，則動直線之曲線包爲一雙曲線。

系 3. 一直線動於二定點之間，若自二定點至此動直線之二垂線之積爲一常數時，則動直線之曲線包爲一雙曲線，以二定點爲焦點。

160. 雙曲線配軸之長

雙曲線之配軸不與雙曲線相交，前已言之矣。故所謂配軸之長者，不過一假定之長；其義與橢圓短軸之長異也。今若於配軸之上，C 之兩旁，取 B, B' 使

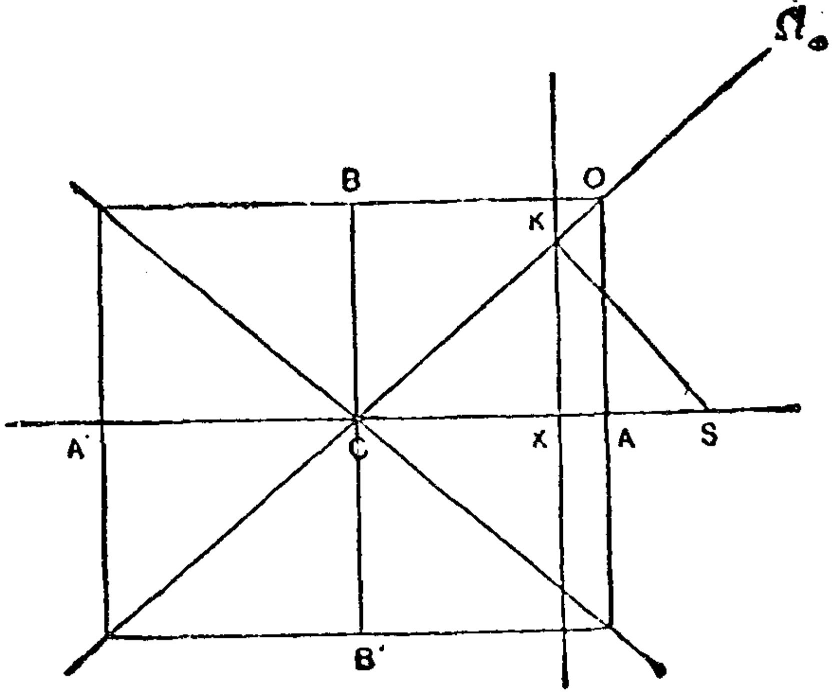
$BC^2=B'C^2=CS^2-CA^2=AS\cdot A'S$。由是則前節之

$SY \cdot S'Y'$ 等於 BC^2 矣。(參觀 § 139) BB' 之長尋常卽謂爲配軸之長；然須注意者，BB' 非爲一直徑，以不能與曲線相交故也。

161. 定理　設以雙曲線二頂之切線爲二邊，并以二漸近線爲二對角線，作一矩形，則此矩形之他兩邊必與配軸交於 B 及 B'。

設 A 之切線與漸近線 $C\Omega$ 交於 O，對 S 之準線與 $C\Omega$ 交於 K。則因 $C\hat{K}S$ 爲直角；又因 $CK=CA$。(§ 101)

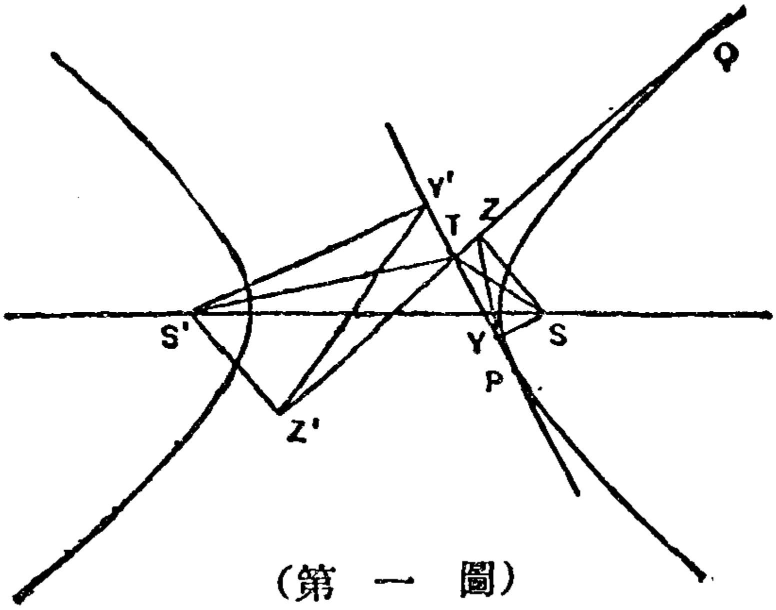
$$\triangle CKS \equiv \triangle CAO。$$



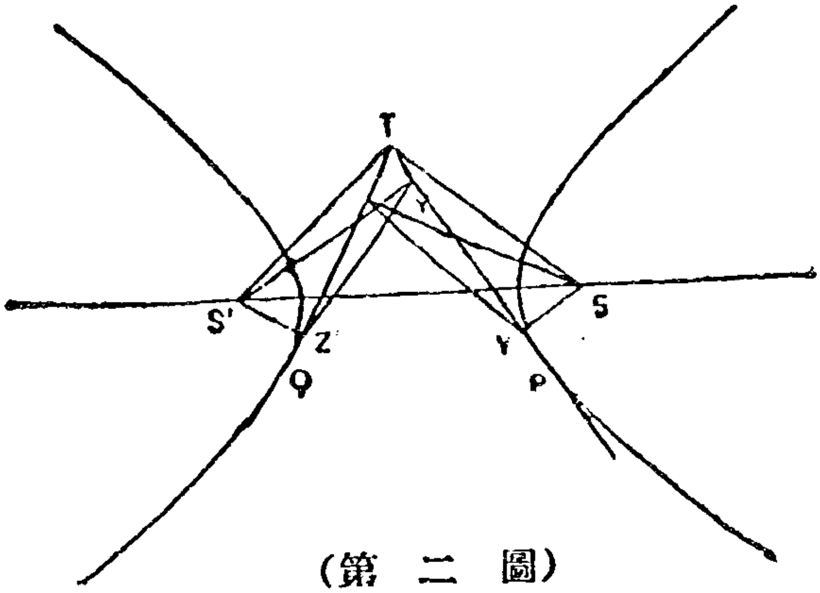
故 $AO^2=SK^2=CS^2-CA^2=CS^2-CA^2=BC^2$。

故此矩形之他二邊過 B 及 B′。

162. 一對切線之關係



(第　一　圖)



(第　二　圖)

定理 雙曲線上二切線交於一點，此點與一焦點之聯線與一切線之夾角，等於或補於與他焦點之聯線與第二切線之夾角。

設 TP 及 TQ 爲二切線。求證 $S\hat{T}P$,$S'\hat{T}Q$ 二角相等或相補，視 P,Q 之在同段或異段上而定。

作 SY,S′Y′ 垂於 TP;SZ,S′Z′ 垂於 TQ。

則 $$SY\cdot S'Y'=BC^2=SZ\cdot S'Z'。$$

$$\therefore\qquad SY:SZ=S'Y':S'Z'。$$

又因 $Y\hat{S}Z=Z'\hat{S'}Y$。(於第一圖中，二角各與等角 $Z\hat{T}Y$ 及 $Z'\hat{T}Y'$ 相補;於第二圖中則皆與 $Y\hat{T}Z$ 相補)。

故 △SYZ 與△S′Z′Y′ 相似。

$$\therefore\qquad S\hat{T}P=S\hat{Z}Y=S'\hat{Y'}Z'=S'\hat{T}Z'$$

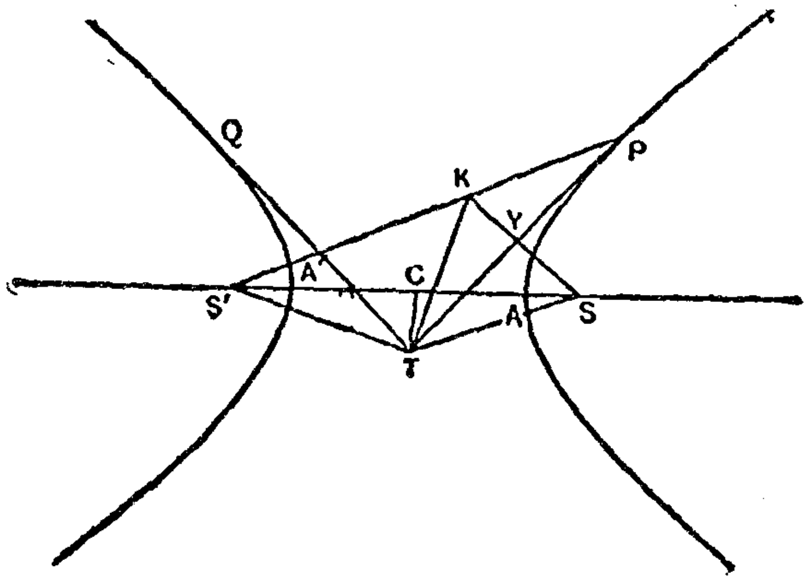
$$=S'\hat{T}Q\text{ 之補角};\cdots\cdots\text{第一圖}$$

$$=S'\hat{T}Q。\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{第二圖}$$

163. 準圓 Director circle

定理 雙曲線上二切線常切於一雙曲線而移動，則交點之軌跡爲一圓，稱雙曲線之準圓。

設 TP,TQ 爲正交之二直線，與雙曲線切於 P 及 Q。



作 SY 垂於 TP 與 S'P 交於 K。

則　$SY = YK$;　$S'K = AA'$。§ 159

又有　$\triangle SYT \equiv \triangle KYT$。

故　$ST = KT$。$K\hat{T}Y = S\hat{T}Y = Q\hat{T}S'$(§ 162)

$\therefore$　$K\hat{T}S' = P\hat{T}Q =$ 直角。

今有　$2CT^2 + 2CS^2 = ST^2 + S'T^2$(§ 10)

$$= KT^2 + S'T^2$$

$$= KS'^2 = AA'^2 = 4CA^2$$

$\therefore$　$CT^2 = 2CA^2 - (CS^2 - CA^2)$

$$= CA^2 - CB^2。$$

故T之軌跡爲一圓；以C爲圓心，$\sqrt{CA^2-CB^2}$爲半徑。

系 1. 若$CA=CB$，則$CT=0$，卽自C所作之二切線(爲正交漸近線)成正交。

系 2. 若$CA<CB$。則CT之值爲虛數，故不能有正交之切線對。

164. 雙曲線之對應雙曲線

若已知雙曲線二軸之長，并知其位置，卽可畫此曲線。以焦點S, S'可由$CS^2=CS'^2=CA^2+CB^2$等式定之。離心率e爲$CS:CA$，而準線乃垂於AA'之二直線，其與AA'之交點X, X'，可由下式得之：

$$CA:CX=e=CA':CX'。$$

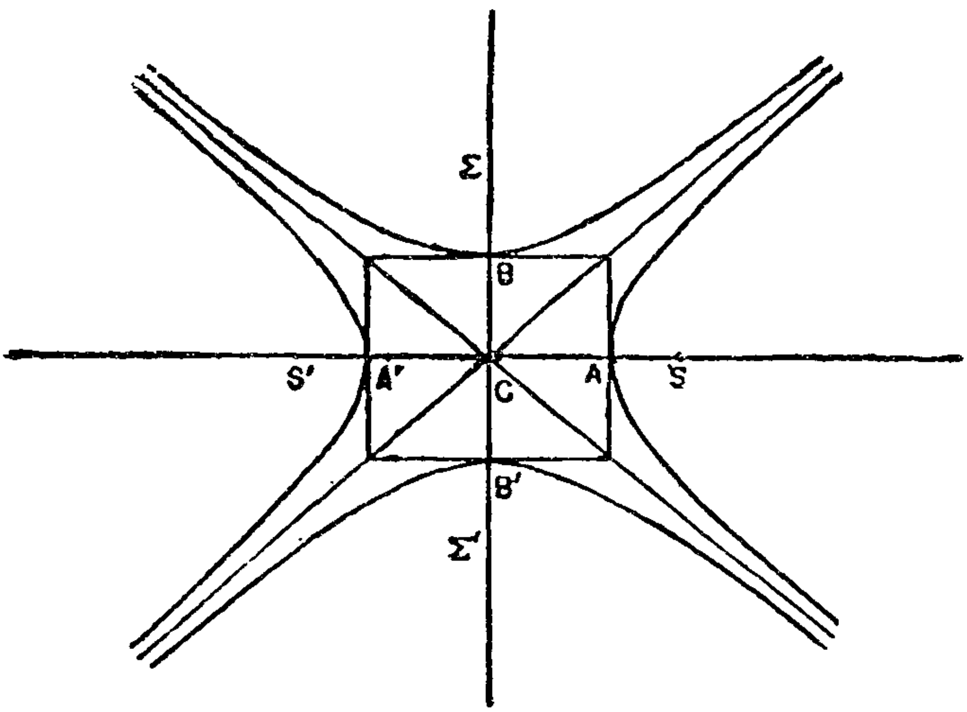
165. 今若以原雙曲線之貫配軸各爲貫，配軸．則另得一雙曲線。此雙曲線與原雙曲線共有一對漸近線，其所佔地位爲二漸近線夾角之外角。此新雙曲線稱爲原雙曲線之對應雙曲線，或稱後者爲前者之對應亦可Conjugate hyperbola。

雙曲線與其對應爲兩曲線，故各自有焦點及準線，且

其離心率亦不必相同。

原雙曲線之焦點在 AA′軸上，其與軸之關係爲$CS^2=CA^2+CB^2$；離心率爲 CS : CA；其對應雙曲線之焦點 Σ，Σ′ 在 BB′ 軸上；其與軸之關係爲 $C\Sigma^2=CA^2+CB^2$。

由是 CS＝CΣ；然其離心率則爲 CΣ : CB，故 CB 不等於 CA 時，不與原離心率同。

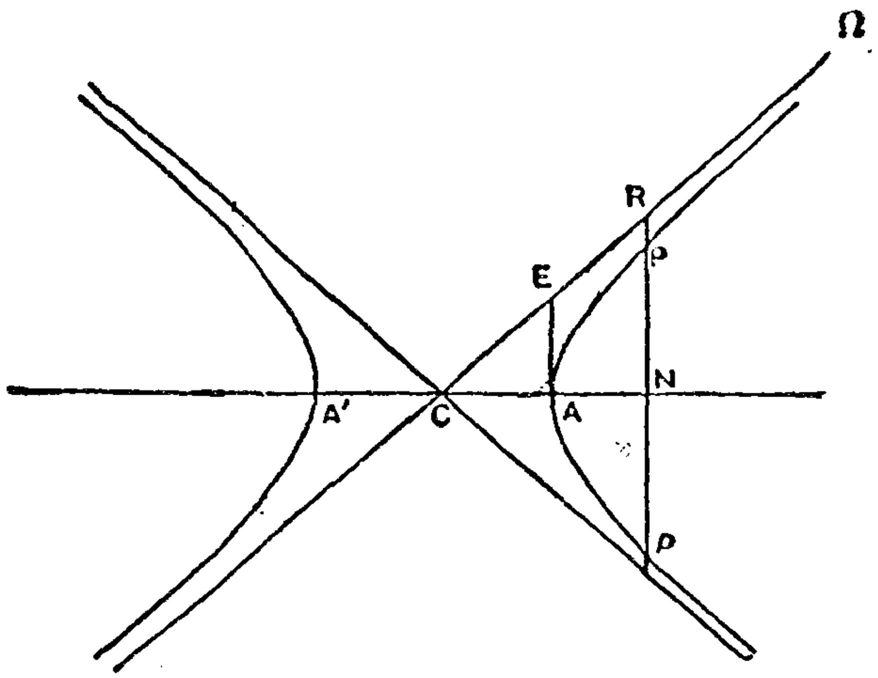


若 CB＝CA，則二漸近線爲一正方形之對角線，故成正交。此雙曲線及其對應雙曲線，皆稱爲等腰雙曲線

Rectangular hyperbola。於次章中將詳論之。

166. 漸近線之性質

定理 設 R 為漸近線上一點，RN 為貫軸之垂線與雙曲線交於 P 及 p；則$RP \cdot Rp = BC^2$。



作頂點 A 之切線與漸近線 CΩ 交於 E。

漸近線與雙曲線之切點 Ω 在無窮遠。

今若應用牛頓定理，則

$$RP \cdot Rp : R\Omega^2 = EA^2 : E\Omega^2。$$

$$\therefore \qquad RP \cdot Rp = EA^2 = BC^2。$$

以上之等式可書之如下式:

$$RN^2-PN^2=BC^2$$

〔註〕 本定理乃 § 174 定理之特例。

167. 定理 設PN爲雙曲線上對於貫軸之縱坐標,則

$$PN^2:AN\cdot A'N=BC^2:AC^2。$$

仍用前節之圖。

$\because$ $$RN^2-PN^2=BC^2。$$

$\therefore$ $$PN^2=RN^2-BC^2。$$

但 $RN^2:BC^2=RN^2:EA^2=CN^2:CA^2$。

$\therefore$ $RN^2-BC^2:BC^2=CN^2-CA^2:CA^2$。

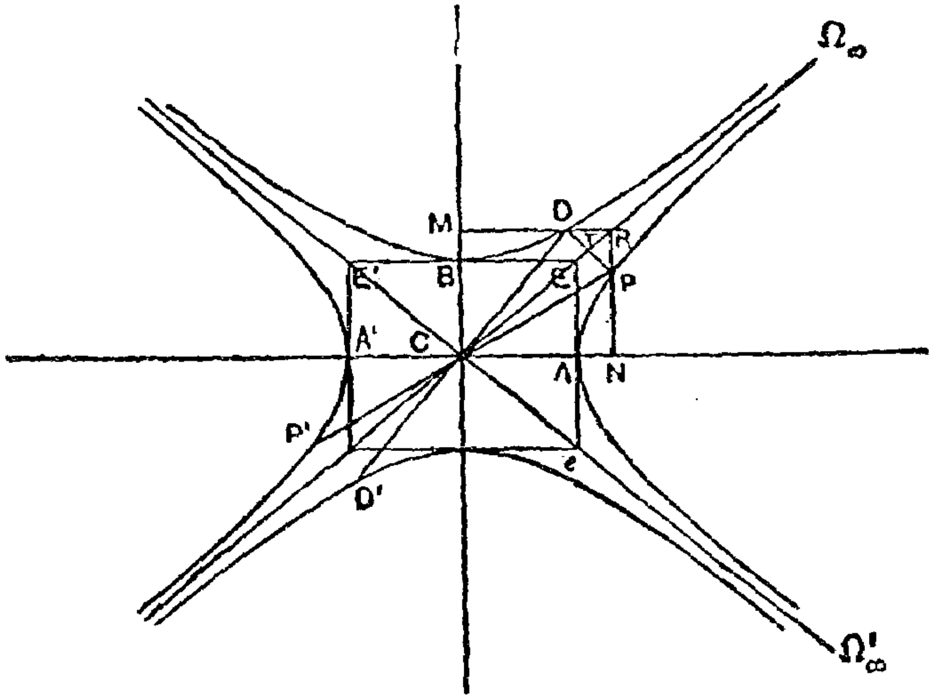
$\therefore$ $$PN^2:BC^2=AN\cdot A'N:CA^2。$$

$\therefore$ $$PN^2:AN\cdot A'N=BC^2:AC^2。$$

此等式亦可書爲 $PN^2:CN^2\cdot CAA^2=BC^2:AC^2$

〔註〕 本定理乃 § 174 定理之特例。

168. 定理 設自雙曲線上R點作線上一點R, 作橫軸及配軸之垂線 RN 及 RM;前者與雙曲線交於 P,後者與對應雙曲線交於 D, 則 PD 平行於第二漸近線; 且 CP 與 CD 對於兩雙曲線均成半徑對。



設雙曲線與二漸速線之切點爲 Ω, Ω'(在無窮遠)

作 A 及 B 二點之切線。交漸近線於 E 及 E', 如圖。

於是 $$EB : BE' = EA : Ae。$$

故 AB 平行於 $C\Omega'$。

又因 $CA : CB = CA : AE = CN : RN = CN : CM$。

$$\therefore \quad CA : CN = CB : CM$$

故 MN 亦平行於 AB。

再自 $RN^2 - PN^2 = BC$; $RM^2 - DM^2 = AC^2$ 二等式

(§ 166), 可得

$$RN^2-PN^2 : RM^2-DM^2=BC^2 : AC^2$$

$$=CM^2 : CN^2$$

$$=RN^2 : RM^2。$$

$$\therefore \quad RN^2 : RM^2=PN^2 : PM^2。$$

$\therefore$ DP 平行於 MN，故亦平行於 $C\Omega'$

故 PD 與 $C\Omega$ 之交點 T，為 PD 之中點。

因 DP 平行於 $C\Omega'$，即 DP，$C\Omega'$ 之交點為無窮遠點 Ω'。

故 $$(DP,T\Omega')=-1。$$

$\therefore$ CP 與 CD 屬於以 $C\Omega$ 及 $C\Omega'$ 為兩重線之對合線。

但對於雙曲線及其對應雙曲線之各對直徑對所成之對合束線以 $C\Omega$ 及 $C\Omega'$ 為其兩重線。

$\therefore$ CP 與 CD 為對於此雙曲線并其對應雙曲線之直徑對。

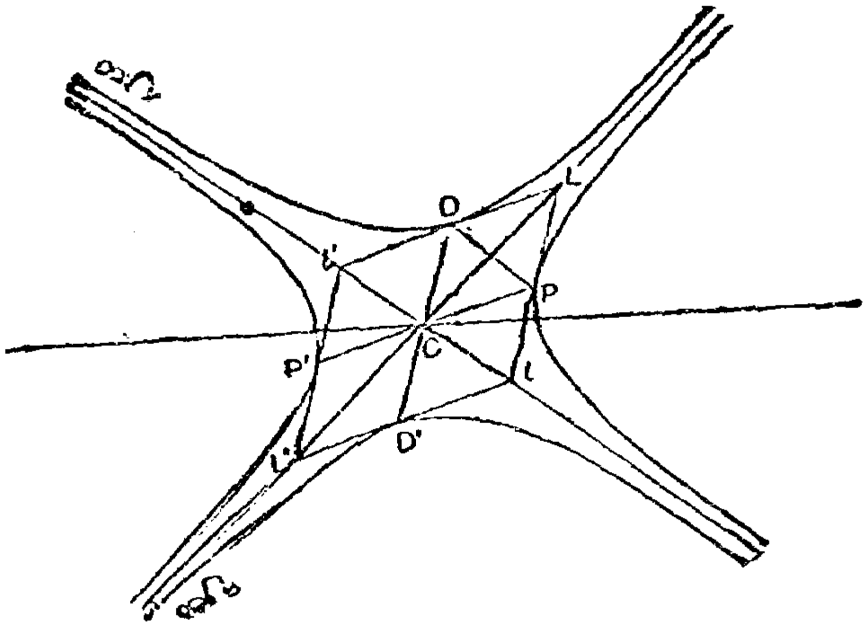
由是可證明 P 點之切線平行於 CD，D 點之切線平行於 CP。

169. 若於 § 168 之圖中，引長 PC 及 DC，使與曲線

或其對應曲線再交於 P', D', 則 PCP' 與 DCD' 對於二曲線均為直徑對，然二直徑中，僅一與曲線相遇，其他則與對應曲線遇。於幾何學中，對應直徑 DCD' 亦謂為原曲線之直徑，其義非謂有定長，以 D, D' 不在此曲線之上。

於解析幾何學中，則以虛數(卽含$\sqrt{-1}$之數量)表此直徑與雙曲線交點之坐標。

170. 定理 於一對直徑對與雙曲線及其對應雙曲線之兩對交點上，作切線，成一平行四邊形，其對角線卽漸近線。



設 PCP′ 與 DCD′ 爲一對綫對，如下圖。

於 § 168 中，已證明 CΩ 平分 DP。

P 點及 D 點之切線各平行於 CD 及 CP。

故此二切線與 CP 及 CD 成一平行四邊形；以 CΩ 爲一對角線，即 P，D 二點之切線交於 CΩ 上。

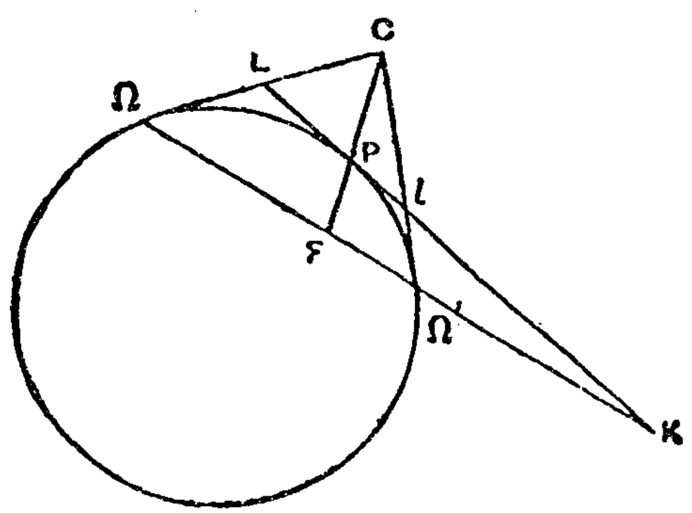
同理　P′，D′ 二點之切線交於 CΩ 上。P，D′ 二點之切線及 P′，D 二點之切線皆交於 CΩ′ 上。

系　切線在二漸近線間之一段，平分於切點。

因　　　　LP＝DC＝CD′＝Pl。

171. 前定理之系亦可以射影法證之如下：

射影上之雙曲線成圓以同字母表各點。



設 P 點之切線與遠射線 $\Omega\Omega'$ 交於 K。

因 C 之極線 $\Omega\Omega'$ 及 P 之極線(即 P 點之切線)皆過 K。

故 K 之極線過 C 及 P。即 CP 爲 K 之極線。

設 CP 與 $\Omega\Omega'$ 交於 F。

則 $$(KF,\Omega\Omega')=-1。$$

$$\therefore\quad C(KF,\Omega\Omega')=-1。$$

$$(KP,Ll)=-1。$$

於雙曲線上，P 點及無窮遠點調和分離 Ll。

$$\therefore\quad LP=Pl。$$

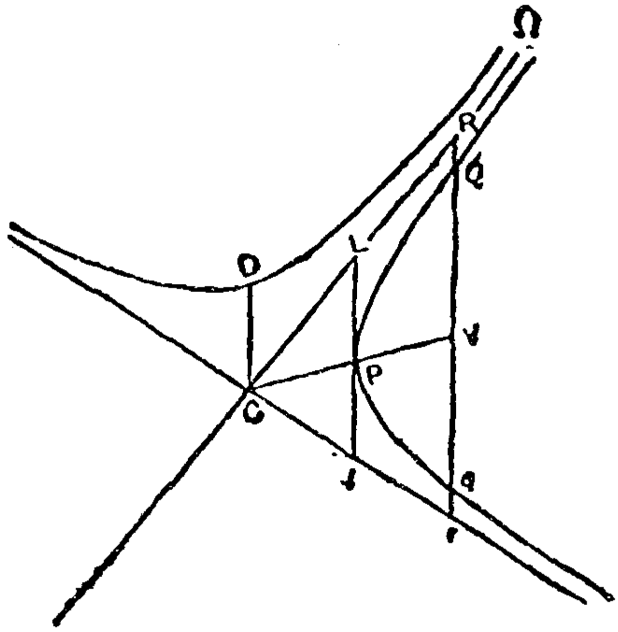
172. **定理** 過雙曲線之一漸近線上一點 R，作直線與雙曲線之一段交於 Q 及 q；設 CD 爲對應雙曲線上平行於 QCq 之直徑，則 $RQ\cdot Rq=CD^2$

設 V 爲 Qq 之中點。

CV 與雙曲線交於 P。

則 P 點之切線平行於 Qq。設此切線與二漸近線交於 L 及 l。

應用牛頓定理，則 $RQ\cdot Rq : R\Omega^2=LP^2 : L\Omega^2$。



$$\therefore \qquad RQ \cdot Rq = LP^2 = CD^2$$

以上關係亦可書之如下式：　$RV^2 - QV^2 = CD^2$。

若 RQq 與第二漸近線交於 r。

則　　　$rV^2 - qV^2 = CD^2$。

$$\therefore \qquad rV^2 - qV^2 = RV^2 - QV^2。$$

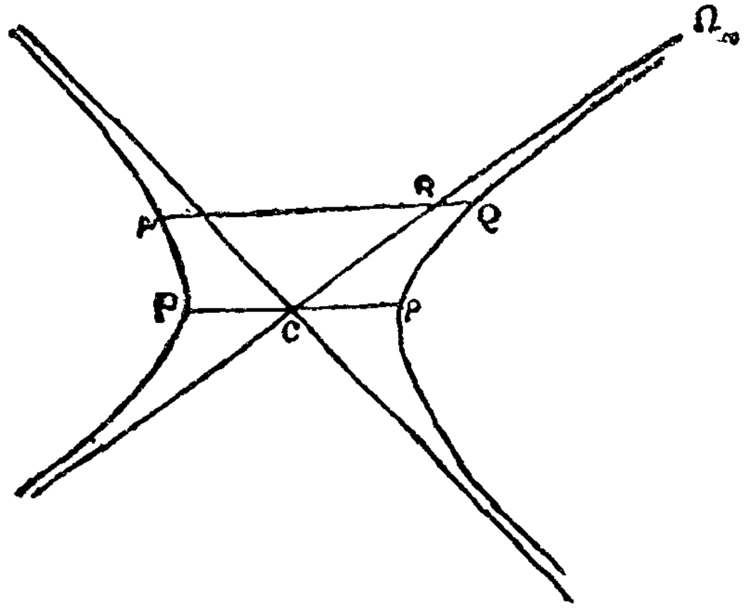
$$\therefore \qquad RQ = qr。$$

故任一直線在兩漸近線間之一段，與在雙曲線間一段，同以一點爲中點，自此關係，遂有以下：

定理　設 R，r 爲漸近點上兩點。Rr 與雙曲線交於 Q 及 q。則　$RQ = rq$。

173. 定理 過漸近線上 R點,作直線與雙曲線之二段各交於 Q 及 q。設 Cp 爲平行於 Qq 之半徑,則

$$qR \cdot RQ = CP^2。$$



應用牛頓定理:

$$RQ \cdot Rq : R\Omega^2 = CP \cdot CP' : C\Omega^2。$$

$$\therefore \quad RQ \cdot Rq = -CP^2。$$

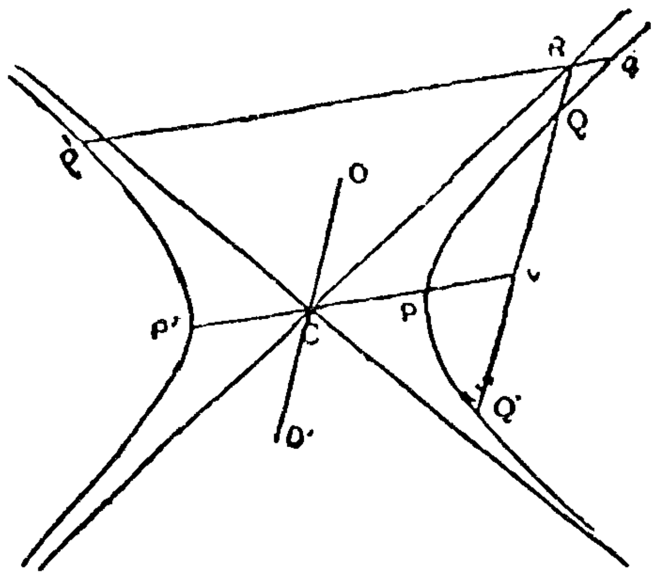
$$\therefore \quad qR \cdot Rq = CP^2。$$

設 Qq 與第二漸近線交於 r,則 $RQ = qr$。

174. 定理 設 PCP′ 及 DCD′爲對於一雙曲線之直

徑對，QV 爲對於 PCP′直徑之縱坐標。則

$$QV^2 : PV \cdot P'V = CD^2 : CP^2。$$



設 QV 與雙曲線再交於 Q′，且與一漸近線交於 R；過 R 作此曲線之弦 qq′，平行於 PCP′。

應用牛頓定理：

$$VQ \cdot VQ' : VP \cdot VP' = RQ \cdot RQ' : Rq \cdot Rq'。$$

$$\therefore \quad -QV^2 : VP \cdot VP' = CD^2 : -CP^2。$$

即 $$QV^2 : PV \cdot P'V = CD^2 : CP^2。$$

以上關係可書爲 $QV^2 : CV^2 - CP^2 = CD^2 : CP^2$。

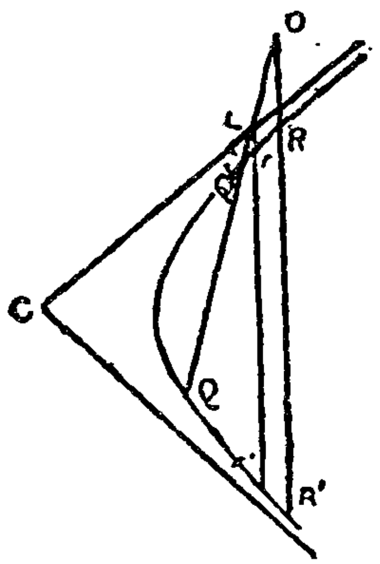
175. 自 § 167 及 § 174，可知若一點動於二平行直

線 l' 及 l''之一旁，且其至二平行線之距離之積，與至另一定直線 l 之距離之平方成比例時，則此動點之軌跡爲一雙曲線。

若 l 垂於 l' 及 l''，則 l 爲貫軸。l'及 l'' 爲雙曲線頂點之切線。

若 l 不垂於 l' 及 l''。則 l 爲一直徑。l' 及 l''爲 l 與曲線交點之切線。

176. 定理 設雙曲線二弦 QQ' 及 RR' 交於 O，則 $OQ \cdot OQ' : OR \cdot OR'$ 等於平行於二弦之直徑之平方之比。



設 OQQ' 與一漸近線交於 L。

過 L 并平行於 ORR' 作 Lrr' 與曲線交於 r, r'。

應用牛頓定理：

$OQ \cdot OQ' : OR \cdot OR' = LQ \cdot LQ' : Lr \cdot Lr'$

$=($平行於 QQ'之直徑$)^2 : ($平行於 RR'之直徑$)$。

若二弦或其中一弦之兩端不在同段上，本定理亦眞。

177. 於 § 116 中已證明有心圓錐曲線上任二半徑之平方之比，等於平行於此二半徑之焦弦之比。然應用於雙曲線上，則須稍加變更，以雙曲線之直徑不皆與曲線相遇故也。於次節中將證明若直徑不與雙曲線相交，則可以對應雙曲線之直徑代之。

若於 § 176 中，$OQ \cdot OQ'$ 與 $OR \cdot OR'$ 爲異號，則平行於 QQ' 及 RR' 之直徑，僅一與曲線遇，其他則與對應雙曲線遇。

178. 讀者此時當能明瞭若 DCD' 爲對應雙曲線之一直徑，則不與原雙曲線相交，然可謂與原雙曲線交於二虛點 δ 及 δ'。於是 $C\delta^2 = C\delta^2 = -CD^2$。

於解析幾何學中，雙曲線及其對應雙曲線之方程式爲：

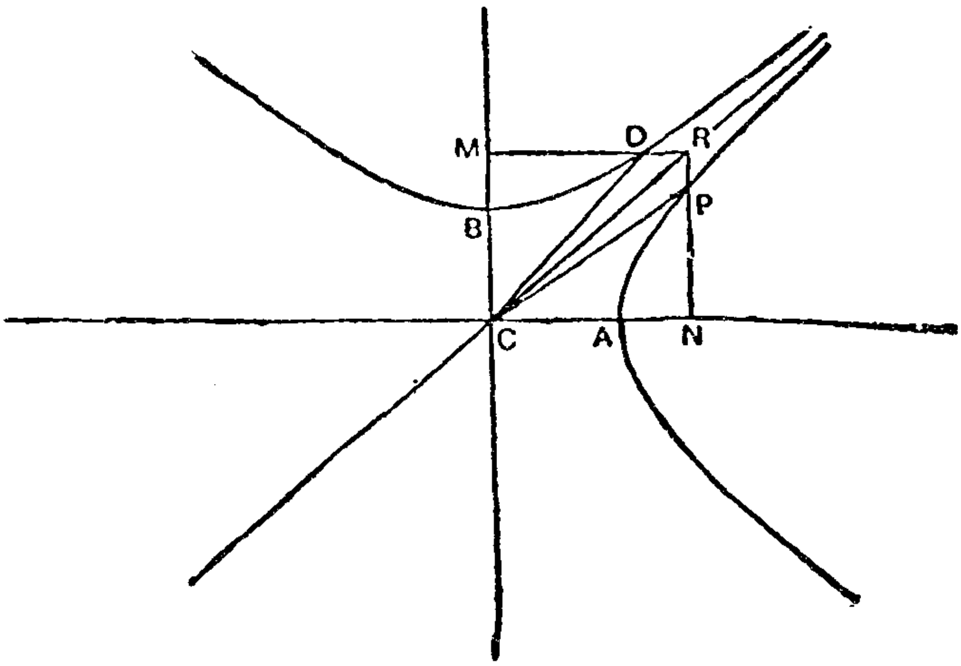
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{。} \cdots\cdots\cdots\cdots 1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1。\cdots\cdots\cdots 2$$

故一式中之一點若以(x,y)代之,於他式中則以(ix,iy)代之。

由是若一直徑與對應雙曲線之交點爲(x,y),則與原雙曲線之交點爲(ix,iy)也。

179. 定理 設QP與CD爲對於雙曲線之一對半徑對,則$CP^2-CD^2=CA^2-CB^2$。



設CD不與曲線相交,則必與對應雙曲線交於D。作貫軸之縱坐標PN,配軸之縱坐標DM。

則 PN, DM 交於一漸近線上；設交點爲 R，則有

$$CP^2=CN^2+PN^2=CR^2-(RN^2-PN^2)$$

$$=CR^2-BC^2。\qquad \S\ 166$$

及　$$CD^2=CM^2+DM^2=CR^2-(RM^2-DM^2)$$

$$=CR^2-CA^2$$

$$\therefore\quad CP^2-CD^2=CA^2-CB^2。$$

系　若$CA=CB$，(卽雙曲線爲等腰時)則 $CP=CD$。

180. 定理　設CP，CD爲對於雙曲線之一對半徑對。

則　$$SP\cdot S'P=CD^2。$$

因 C 爲 S，S′ 之中點。

$$\therefore\quad SP^2+S'P^2=2CS^2+2CP^2 \qquad \S\ 10$$

$$\therefore\quad (S'P-SP)^2+2SP\cdot S'P=2CS^2+2CP^2。$$

卽　$$4CA^2+2SP\cdot S'P=2CS^2+2CP^2,$$

$$\therefore\quad 4SP\cdot S'P=CP^2+CS^2-2CA^2$$

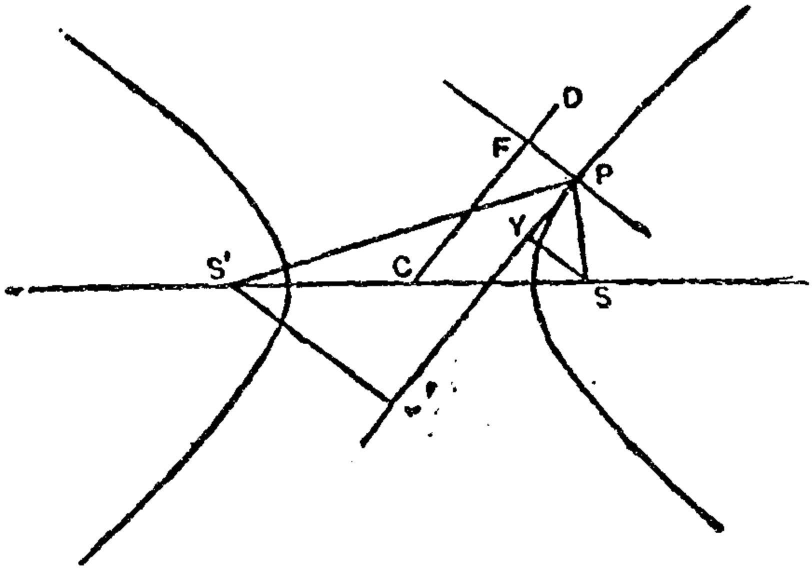
$$=CP^2+CB^2+CA^2-2CA^2$$

$$=CP^2-(CA^2-CB^2)$$

$$=CD^2 \qquad \S\ 179$$

181. 定理　設 CP 及 CD 爲對於雙曲線之一對半徑

對；P點之法線與CD交於F，則PF·CD＝AC·BC。



自焦點作P點切線之垂線，SY及S'Y'。

$\because$ $\triangle SPY$ 與 $\triangle S'PY'$ 相似。

$$\frac{SY}{SP}=\frac{S'Y'}{S'P}=\frac{S'Y'-SY}{S'P-SP}=\frac{2PF}{2AC}=\frac{PF}{AC}。$$

$$\therefore \frac{SY\cdot S'Y'}{SP\cdot S'P}=\frac{PF^2}{AC^2}。\text{即}\frac{BC^2}{CD^2}=\frac{PF^2}{AC^2}。$$

$$\therefore \qquad PF\cdot CD=AC\cdot BC。$$

系 雙曲線任一對直徑對之端，所作之四切線成一平行四邊形，其面積等於AC·BC。

182. 定理 雙曲線任一切線與二漸近線所成之三角形之面積爲常數。

設 P 點之切線與二漸近線交於 L 及 l。(§ 170 之圖)

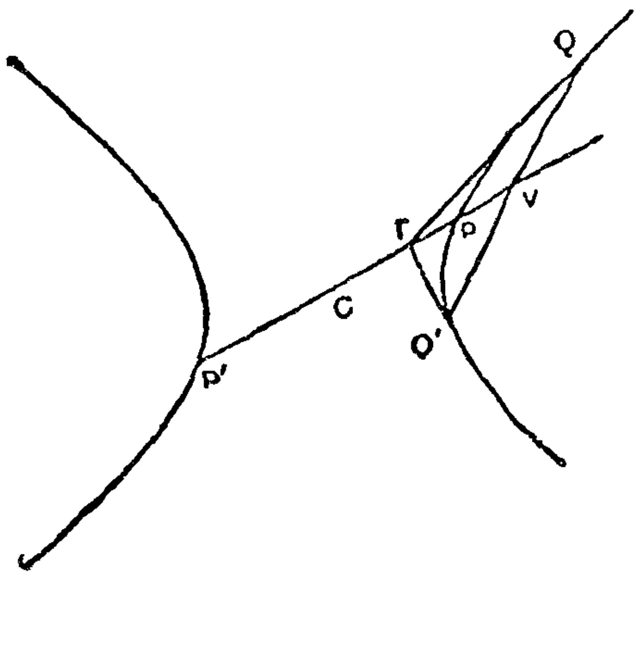
又設過 P 之直徑再與曲線交於 P′，直徑 DCD′ 與 PCP′為直徑對，則 P，P′，D，D′ 之切線所成之平行四邊形以 L 及 l 為其二角。 § 170

且△CLl 為此平行四邊面積之四分之一。

故　　△CLl＝AA·CB＝常數。

系　一直線與二定直線相交，若其所成之三角形之面積有定值時，則直線之曲線包為一雙曲線；二定直線為其漸近線，而動直線在二定直線間之一段之中點，為與曲線之切點。

183. 定理　設 TQ 及 TQ′ 為雙曲線上同段之二切



線。P'T 與此曲線交於 P，與 QQ' 交於 V。則 $CV\cdot CT = CP^2$。

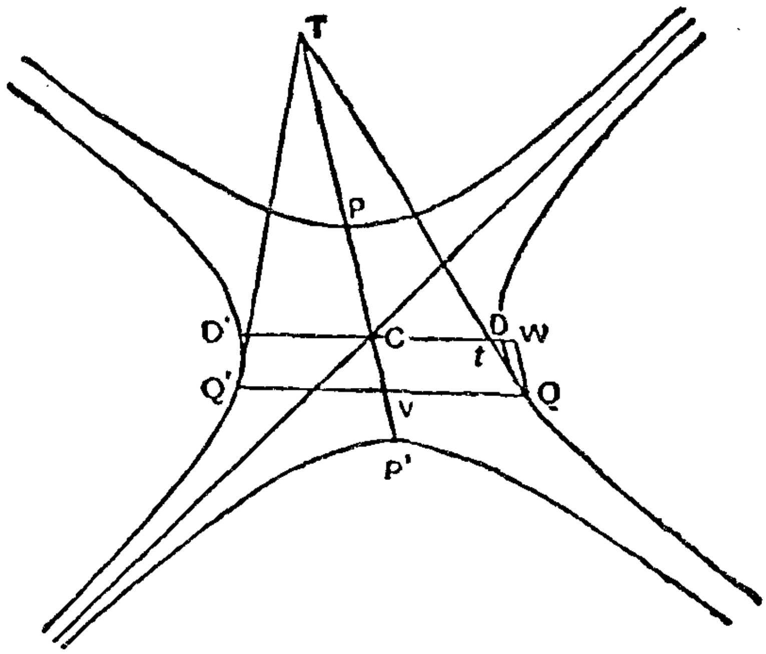
因 T 爲 QQ' 之極點。

故　　$(PP', TV) = -1$。

∴　　$CV\cdot CT = CP^2$。

184. 定理 設 TQ 及 TQ' 爲雙曲線異段上之二切線；CT 與對應雙曲線交於 P，與 QQ' 交於 V，則

$$VC\cdot CT = CP^2。$$



本定理之證，可自前定理變通而得。

CT 與對應雙曲線之交點 P，卽爲原雙曲線上一虛點

p。其關係爲 $Cp^2=-CP^2$。 § 170

$$\therefore \quad CV\cdot CT=Cp^2=\cdot CPP^2.$$

$$\therefore \quad VC\cdot CT=CP^2.$$

若不用虛因子,本定理亦可證之如下:

作直徑 DCD' 使與 PCP' 成直徑對,與 TQ 交於 t。

自 Q 作對於直徑 DD'之縱坐標 QW, 則 QW 必平行 PP'。

因 △ tWQ 與 △ tCT 相似。

$$\therefore \quad TC : WQ=Ct : tW.$$

$$\therefore \quad TC\cdot WQ : WQ^2=Ct\cdot CW : CW\cdot tW,$$

$$=Ct\cdot CW : CW^2-Ct\cdot CW.$$

但 $Ct\cdot CW=CD^2$。 § 183

$$\therefore \quad TC\cdot WQ : WQ^2=CD^2 : CW^2-CD^2.$$

但 $CP^2 : WQ^2=CD^2 : CW^2-CD^2$(§ 174)

$$\therefore \quad TC\cdot WQ=CP^2.$$

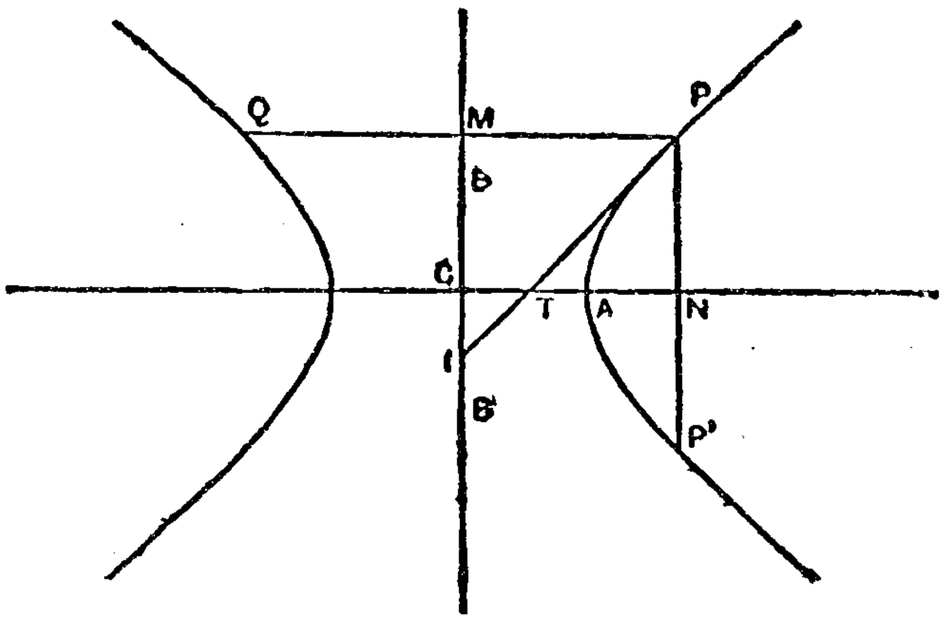
$$VC\cdot CT=CP^2.$$

185. 以下定理乃 § 183, § 184 之特例。

定理 設 P 點之切線與貫,配軸各交於 T 及 t; PN,

PM 為對於此二軸之縱坐標,則

$$CT \cdot CN = CA^2; \quad Ct \cdot MC = CB^2。$$



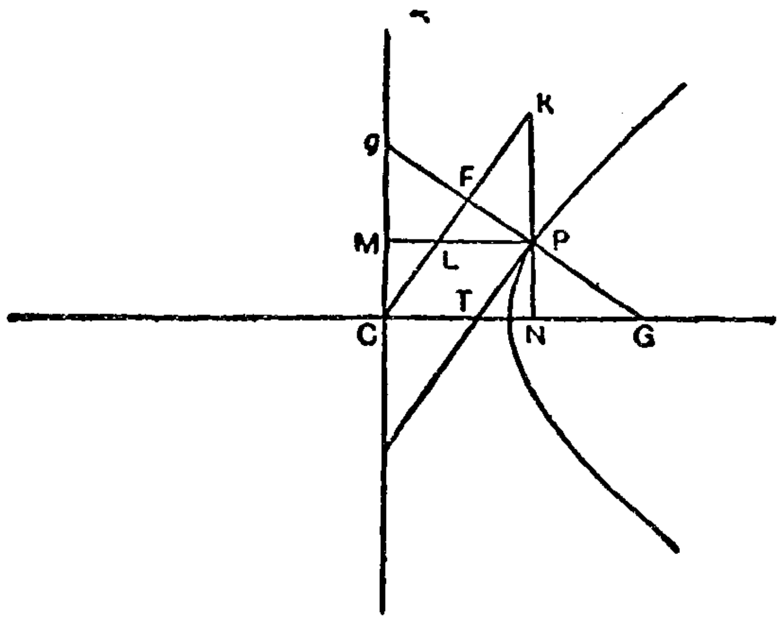
因若引長 PN 與曲線再交於 P′, 則 P′ 為自 T 所作第二切線之切點。自 § 183, 得 $CT \cdot CN = CA^2$;

同理可證 $Ct \cdot MC = BC^2$。

186. 定理 設雙曲線上 P 點之法線與貫,配二軸各交於 g 及 G;幷與平行於 P 點切線之直徑交於 F。則

$$FP \cdot PG = BC^2; \quad PF \cdot Pg = AC^2。$$

本定理與 § 141 橢圓之同一定理之證法同。



187. 定理 設雙曲線 P 點之法線與貫軸交於 G，PN 爲對於貫軸之縱坐標，則

$CG = e^2 \cdot CN$。且 $NG : CN = BC^2 : AC^2$。

本定理可與 § 142 同法證之。

188. 曲率圓

雙曲線上任一點 P 之曲率圓，過 P 幷過雙曲線心之弦之長等於 $2CD^2/CP$；直徑則等於 $2CD^2/PF$。CP，CD 爲對於此雙曲線之一對半徑對。F 爲 P 點法線與 CD 之交點。

本定理與 § 154 同法證之。

習　題

1. 過雙曲線之一焦點 S，作一直線平行於一漸近線；自他焦點 S′ 作此直線之垂線 S′K，則 SK＝AA′。〔應用 § 157，而設 P 在無窮遠。〕

2. 設一圓外切於二定圓而移動，求其圓心之軌跡。

3. 設雙曲線上 P 點之切線及 SP 與一漸近線交於 T 及 Q，則 SQ＝QT。

4. 設 PH，PK 爲二直線，各平行於雙曲線之二漸近線，CΩ，CΩ′，且各與 CΩ′，CΩ 交於 H 及 K，則

$$PH\cdot PK=\frac{1}{4}CS^2。\quad〔應用\ \S\ 182〕$$

5. 設自漸近線上一點 R 作 RPN 垂於貫軸，與雙曲線交於 P，聯 CR 與貫軸交於 K；求證 PK 爲 P 點之法線。〔$CN=e^2\cdot CK$　§ 187〕

6. 有心圓錐曲線 P 點之法線與二軸交於 G 及 g，則 $PG\cdot Pg=CD^2$。CP，CP 對於曲線成線對。

7. 一組橢圓共以一點爲一焦點，則第二焦點同在一雙曲線上。

8. 有心圓錐曲線上 P 點之切線，對於長軸，或貫軸

圓之極點，在 P 點之縱坐標上。

9. 自雙曲線上 P 點作一漸近線之平行線 PK，與準線交於 K，設 S 爲對此準線之焦點，則 PK＝SP。

10. 以一定點爲焦點，并切於一定直線，且以一定之離心率之圓錐曲線之心之軌跡爲一圓。

11. 設 P 爲有心圓錐曲線上一點，而聯 P 及二焦點之直線爲正交，則 $CD^2=2BC^2$。

12. 自一點作一組同焦點之雙曲線之切線，則切點在一圓周上，而切點之法線交於一點。

13. 同焦點之橢圓及雙曲線交於 P；則 P 點之縱坐標與橢圓之輔圓交於雙曲線之一漸近線上。

14. RPR′，TQT′爲雙曲線之二切線，與一漸近線交於 R，T。與他漸近線交於 R′，T′。則以 RT′ 及 R′T 爲直徑之二圓與準圓爲同軸。

15. 自雙曲線一定直徑上任意一點 P，作平行於二漸近線之直線，與曲線交於 Q，Q′。則 PQ：PQ′爲常數。

16. 已知二漸近線及雙曲線上一點；求一定直線與雙曲線之交點。

17. 設P爲雙曲線上之一點；S, S′爲其焦點，則SS′P三角形之內切圓心，在此曲線一頂之切線上。

18. 雙曲線上任二點，與焦點所聯之四直線，可作一圓同切之。

19. 自漸近線上R點作雙曲線之切線RE，過E作ET及EV，各平行於一漸近線。與一直徑交於T及V，聯RV。與雙曲線交於P及p。求證TP及Tp爲雙曲線之切線。[射影雙曲線成圓，使V射成圓心。]

20. 同軸圓組中任二圓 S_1, S_2 上各有一點 P, Q，L爲一極限點，而 $P\hat{L}Q$ 爲直角。求證自L至PQ之垂線足在此組中另一圓周上，并證PQ之曲線包爲一雙曲線。

第十四章

等腰雙曲線

189. 雙曲線有一對正交之漸近線時，稱爲等腰雙曲線，已於前章中言之矣；茲將進而論此曲線之性質。

等腰雙曲線之離心率爲$\sqrt{2}$。因 $e=CS:CA$。而 $CS^2=CA^2+CB^2=2CA^2$ 也故。

190. 定理 對於等腰雙曲線之直徑對相等。又設 QV 爲對一直徑 PCP′ 之縱坐標，則 $QV^2=PV\cdot P'V$。

因自 §179，$CP^2-CD^2=CA^2-CB^2=0$。

又因自 §174，$QV^2:PV\cdot P'V=CD^2:CP^2=1$。

191. 定理 對於等腰雙曲線之直徑對，與任一漸近線成等角。

因雙曲線之各對直徑對所成之對合線束；以二漸近線爲其二重線。(§ 100)故任一對直徑對，與二漸近線成調和束線，故其內，外夾角必爲二漸近線所平分。(§ 72)

系 1. 等腰雙曲線上任一直徑，及其一端之切線，

與任一漸近線成等角。

系 2. 等腰雙曲線上任一弦，及平分此弦之直徑，與任一漸近線成等角。

192. 定理 等腰雙曲線上任一直徑，等於對應雙曲線上，垂於此徑之直徑。

等腰雙曲線，與其對應雙曲線之離心率相等，已於§ 164 言之矣。於是二雙曲線同以二直線爲漸近線，各焦點距曲線心之距離等，而離心率又等，故二雙曲線必完全相等。故若以一等腰雙曲線繞曲線心轉 $90°$，卽得其對應雙曲線；觀 § 165，則本定理不證自明。

193. 定理 設一雙曲線有二相等并正交之直徑，其一屬於原雙曲線，其他屬於對應雙曲線，則此雙曲線爲等腰。

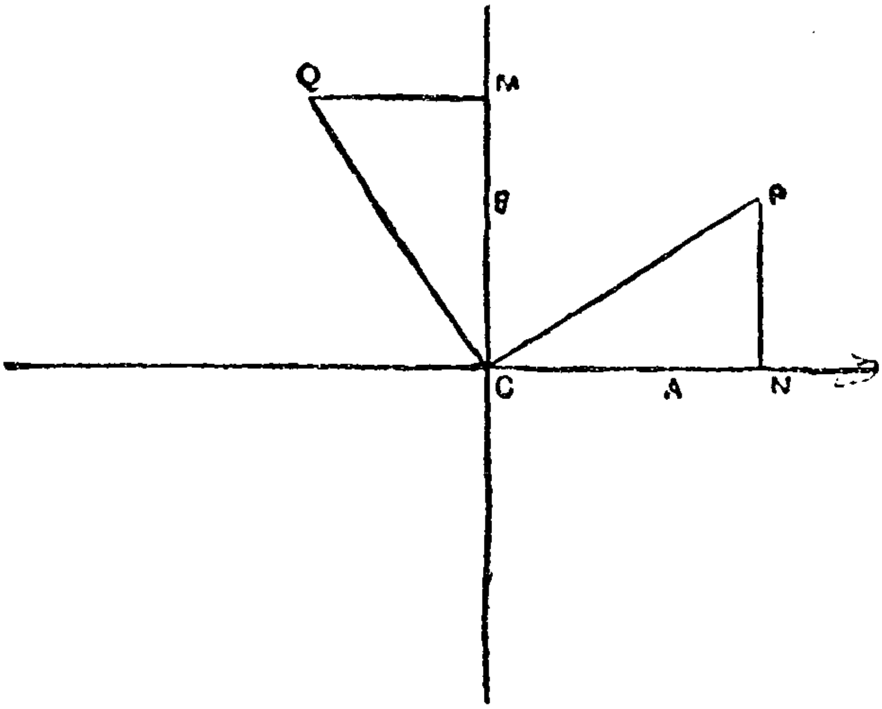
設 CP 及 CQ 爲雙曲線上相等并正交之二直徑，P 在此雙曲線上，Q 在其對應雙曲線上。

作 PN 及 QM 各垂於貫，配軸。

則 $\triangle CNP \equiv \triangle CMQ$。

因 $PN^2 : CN^2 - CA^2 = BC^2 : CA^2$。 § 167

及　$QM : CM^2 - BC^2 = AC^2 : BC^2$。



由上得　$\dfrac{CN^2}{AC^2} - \dfrac{PN^2}{BC^2} = 1$；　及　$\dfrac{CM^2}{BC^2} - \dfrac{QM^2}{AC^2} = 1$。

二式相減得：

$$CN^2\left(\frac{1}{AC^2} - \frac{1}{BC^2}\right) - PN^2\left(\frac{1}{BC^2} - \frac{1}{AC^2}\right) = 0。$$

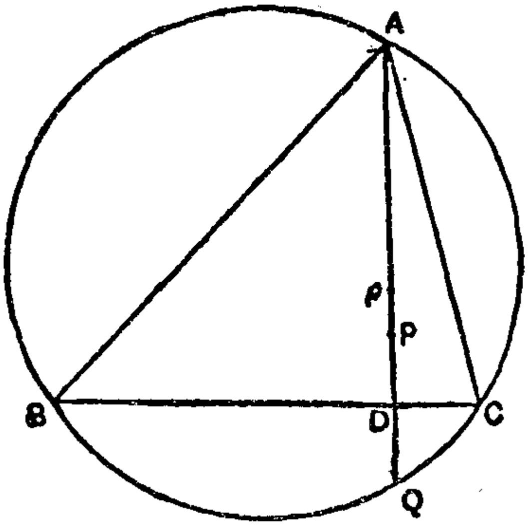
(因 $CN = CM, PN = QM$)

因　$CN^2 + PN^2 \neq 0$。

∴　$AC = BC$。

故此雙曲線為等腰。 § 165

194. 定理 一三角形之三頂在一等腰雙曲線上，則其垂心亦在此曲線上。



設 ABC 爲一三角形，P 爲其垂心，AD 爲 BC 之垂線。

又設 AD 再與等腰雙曲線交於 p。

因 Ap 與 BC 爲正交之二弦，故平行於此二弦之直徑，一與此曲線相交。一與對應雙曲線相交。

於是 DB·DC 與 Dp·DA 爲異號。 § 177

今平行於此二弦之直徑爲正交，故相等。

故DB·DC : Dp·DA = −1。

$$\therefore \quad DB \cdot DC = Dp \cdot DA$$

但 $\quad BD \cdot DC = AD \cdot DQ$

(Q 爲 AD 與 $\triangle ABC$ 之外接圓之交點)

$$= -AD \cdot DP。$$

$$\therefore \quad Dp \cdot DA = DA \cdot DP$$

$$\therefore \quad Dp = DP。$$ 故 p 與 P 相合。

系　上述之定理中，若三角形之三頂皆在等腰雙曲線之一段上，則垂心在他段上；若二頂在一段上，餘一在他段上，則垂心在含二頂之段上。

195. 定理　外接於一三角形幷過其垂心之圓錐曲線，必爲等腰雙曲線。

設 AD,BE,CF 爲 $\triangle ABC$ 之三垂線，交於垂心 P。

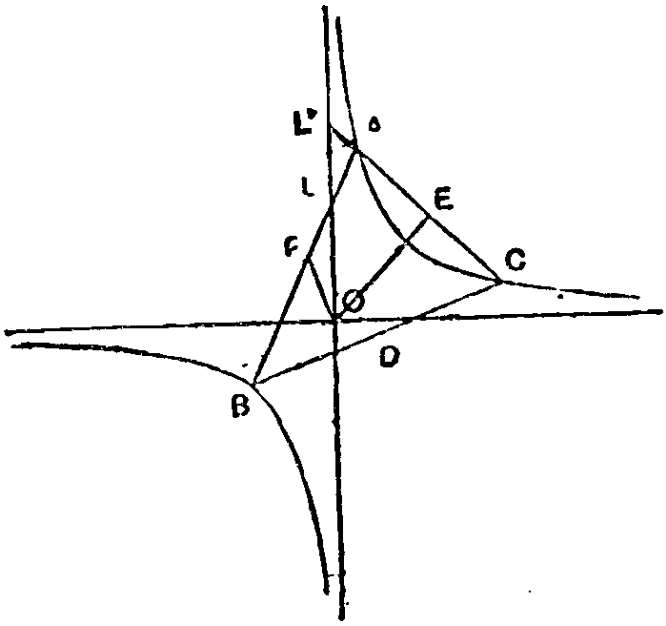
則 BC,AP 爲二弦，其交點 D 在 B,C 之間；且在 AP 之引長線上。故此二弦必不能爲圓，或橢圓，或拋物線之弦，故此圓錐曲線爲雙曲線無疑。

今又因 $BD \cdot DC = AD \cdot PD$，故平行於 BC 之直徑等於平行於 AP 之直徑。

因 $DB \cdot DC$ 與 $DP \cdot DA$ 爲異號，故二直徑一爲原雙曲線之直徑，一爲對應雙曲線之直徑，故此雙曲線爲等腰。

196. 定理　設一等腰雙曲線外接於一三角形，則其

心在此三角形之九點圓周上。



設 D, E, F 爲 $\triangle$ABC 三邊之中點, O 爲等腰雙曲線之心, OLL' 爲一漸近線, 與 AB 及 AC 交於 L 及 L'。

因直徑 OF 平分 AB 弦, 故 OF 及 AB 與 OLL' 成等角。(§ 192, 系 2)

$$\therefore \qquad F\hat{O}L = F\hat{L}O。$$

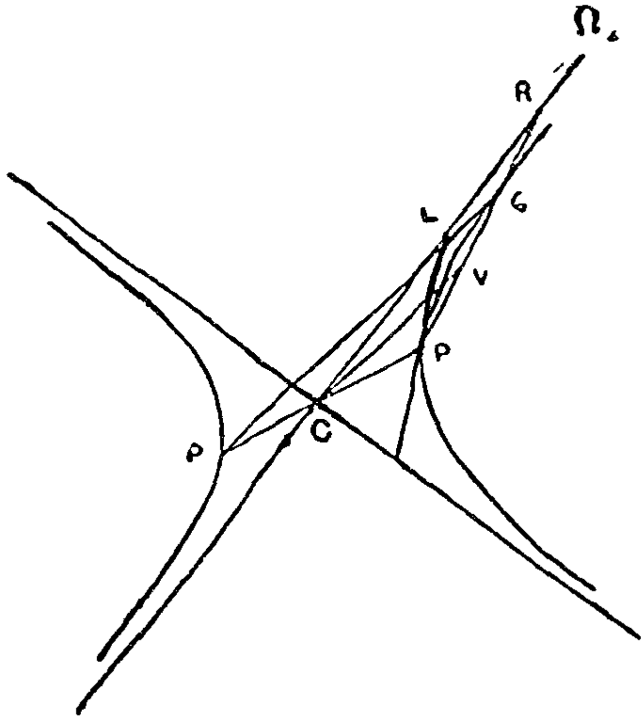
同理 $$E\hat{O}L' = E\hat{L}'O。$$

$$\therefore \quad F\hat{O}E = A\hat{L}L' + A\hat{L}'L = B\hat{A}C = F\hat{D}E。$$

$\therefore$ O 在 $\triangle$DEF 之外接圓周上, 此圓卽九點圓也。

197. 定理 設 PQ 爲等腰雙曲線之一弦, 過 P 之直

徑與曲線再交於 P′，則 P 點之切線與 PQ 之夾角，等於 $\hat{P}P'Q$。



設 P 點之切線及 PQ 與漸近線 CΩ 交於 L 及 R。

V 爲 PQ 之中點。

則　　$V\hat{R}C = V\hat{C}R$。§ 191，系 2

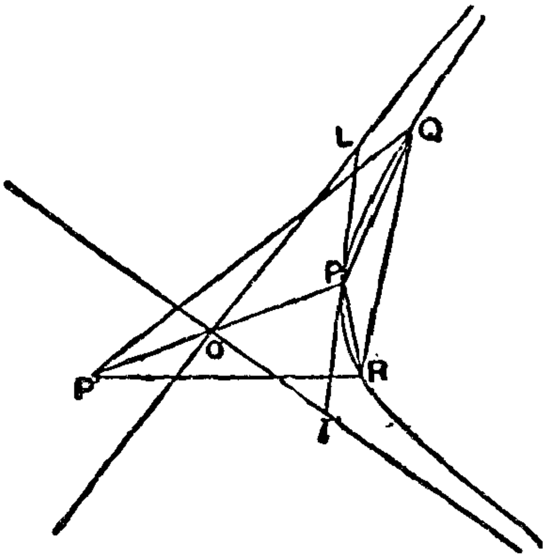
又　　$P\hat{L}C = P\hat{C}L$。§ 191，系 1

$\therefore$　$L\hat{P}R = C\hat{L}P - C\hat{R}V = P\hat{C}L - V\hat{C}R$

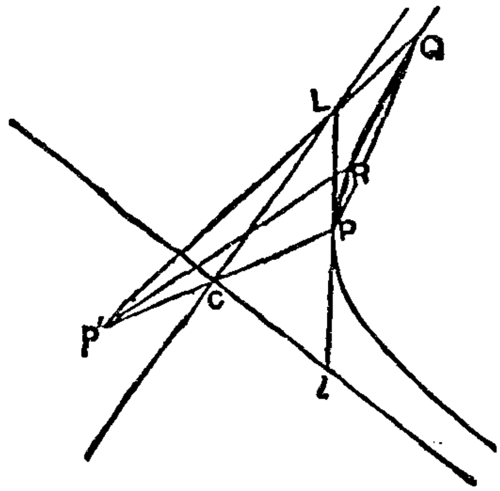
$= V\hat{C}P = Q\hat{P}'P$。(因 $CV \parallel QP'$)

198. 定理　等腰雙曲線上任一弦之二端，與任一直

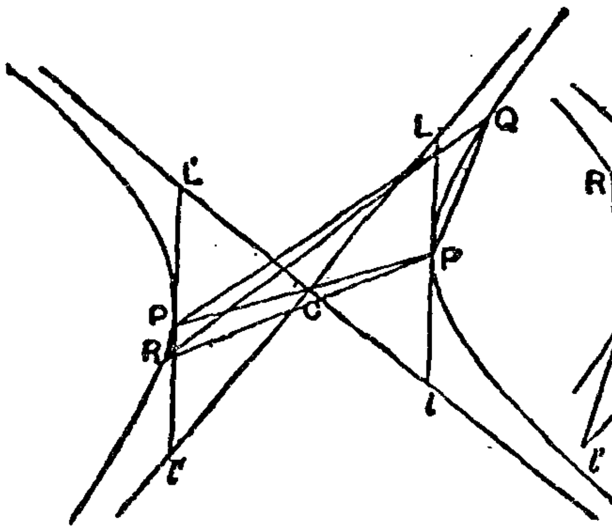
徑之一端，聯線之夾角，等於或補於與他端聯線之夾角。



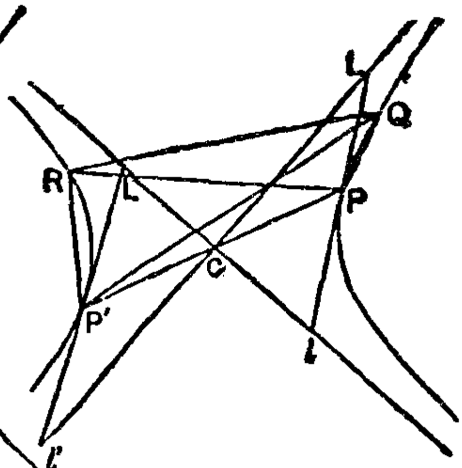
（第一圖）



（第二圖）



（第三圖）



（第四圖）

設 QR 爲一弦。PCP' 爲一直徑。

又設 P 及 P' 之切線與二漸近線交於 L, l 及 L', l'。

於第一圖：Q，R在一段上，PP′截QR。

$$Q\hat{P}L=Q\hat{P}'P。\ \S\,197$$

及 $$R\hat{P}L=R\hat{P}'P。$$

$$\therefore\quad Q\hat{P}R=\pi-(Q\hat{P}L+R\hat{P}l)=\pi-Q\hat{P}'R。$$

於第二圖：Q，R在一段上。PP′截QR之引長線。

$$L\hat{P}R=R\hat{P}'P;\ L\hat{P}Q=Q\hat{P}'P。$$

$$\therefore\quad R\hat{P}Q=Q\hat{P}'P-R\hat{P}'P=Q\hat{P}'R。$$

於第三圖：Q，R在異段上，PP′截QR。

$$\begin{aligned}Q\hat{P}R&=Q\hat{P}L+L\hat{P}P'+P'\hat{P}R\\&=Q\hat{P}'P+P\hat{P}'l'+R\hat{P}'l'\\&=Q\hat{P}'R。\end{aligned}$$

於第四圖：Q，R在異段上，PP′截QR之引長線。

$$Q\hat{P}R=Q\hat{P}L+L\hat{P}R=Q\hat{P}'P+L\hat{P}R。$$

$$Q\hat{P}'R=Q\hat{P}'L'+L'\hat{P}'R=Q\hat{P}'L'+R\hat{P}P'。$$

$$\therefore\quad Q\hat{P}'R+Q\hat{P}'R=L'\hat{P}'P+L\hat{P}P'=2R\measuredangle。$$

習　題

1.　等腰雙曲線任一切線爲二漸近線所截得之部分，

等於切點至曲線心之距離之二倍。

2. 設 PQR 爲等腰雙曲線之內接三角形；$\hat{P}$ 爲直角。求證 P 點之切線垂於 QR。

3. PP′ 爲等腰雙曲線上一弦，垂於 PP′ 之直徑，與曲線交於 Q，則△PQP′ 之外接圓與曲線切於 Q。

4. 等腰雙曲線中，互相垂直之焦弦相等。(參看 §116，§117)

5. 等腰雙曲線上任一點與心之距離，爲與焦點兩距離之等比級數中項。

6. 設 PP′ 爲等腰雙曲線上對於貫軸之雙縱坐標，C爲曲線心，則 CP′ 垂於 P 點之切線。

7. 一圓與一等腰雙曲線交於四點，而一公弦爲雙曲線之直徑；求證他公弦之一爲圓之直徑。

8. 內切於一平行四邊形之橢圓之焦點之軌跡，爲一等腰雙曲線。

9. 一三角形內接於一等腰雙曲線，則此三角形之垂足三角形(第一章習題 1)爲一自極三角形。

10. 自一定直線兩端作二直線，若此二直線與定直

線之夾角之差爲常數時，則其交點之軌跡爲一等腰雙曲線。

11. 等腰雙曲線上 P 點，曲率半徑與 CP^3 成正比；且此曲線上過 P 之直徑，等於過曲線心之曲率弦。

12. 等腰雙曲線 P 點之法線，與曲線再交於 Q。則 PQ 爲曲率圓之直徑。

第十五章

直角射影

199. 以p平面上一圖形，自面外一點V射影於第二平面π，則p平面及π平面各相當點之聯線皆過V；此種射影，吾人命爲圓錐射影，前已詳論之矣。今V若背p，π二平面而移動。則諸聯線漸近於平行。至其極限，V在無窮遠，諸聯線皆平行，此等射影名爲圓柱射影 Cylindrical projection。

於圓柱射影中，若聯p，π二平面相當點之直線，皆垂於π平面，則π平面上之圖形，稱p平面上圖形之直角射影 Orthogoral prajection。

於本章中，將應用直角射影法，以證明關於橢圓之數定理，以橢圓皆爲圓之直角射影也。

於以下數節中，先立直角射影之基本定理數則。

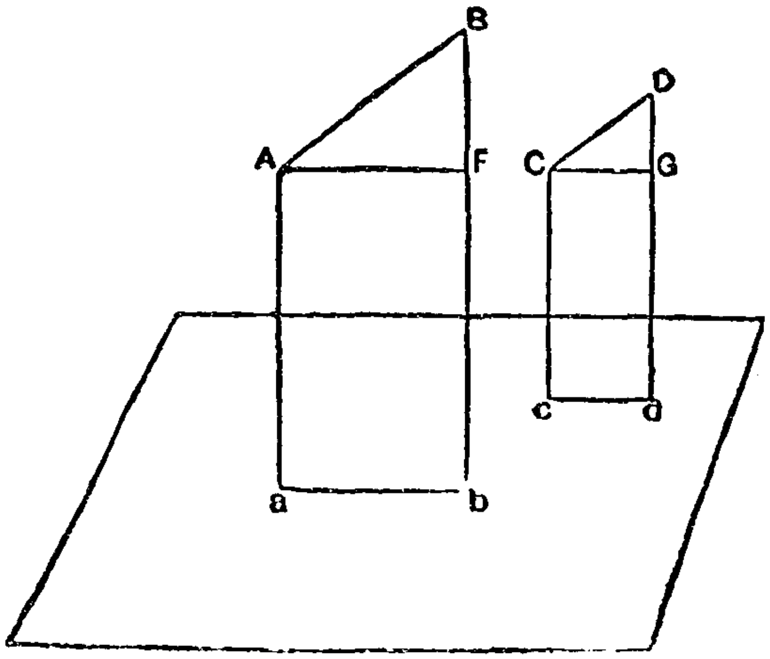
200. 於直角射影中無遠射線，以p平面之無窮遠線射影於π成無窮遠線也。

由是可知抛物線之直角射影仍為抛物線，雙曲線仍為雙曲線，而橢圓則或為橢圓或為圓。

201. 定理 一直線之直角射影仍為一直線。

於圓錐射影中，直線射成直線，而直角射影乃頂點在無窮遠之圓錐射影也，故直線亦必射成直線。設 p 平面上一直線 l。其於π平面之直角射影乃過 l 幷垂於 π 之平面與 π 之交線也。

202. 定理 平行之直線射影成平行之直線，其長度之比不變。



設 AB，CD 為空間二平行線，其直角射影 ab，cd 在

π 平面上。

假設 ab,cd 不平行,則必相交,其交點必爲 AB,CD 之交點之射影,是與原設不合,故 ab,cd 必爲平行線。

作 AF,CD 各平行於 ab,cd。各與 Bb,Dd 交於 F 及 G。則 AabF 爲一矩形。故 $AF=ab$。

同理得 $CG=cd$。

今因 $AB \parallel CD$;$AF \parallel CG$。(因各平行於 ab, cd 而 $ab \parallel cd$ 故)

故 $$F\hat{A}B=G\hat{C}D。$$

又因 $\hat{F}$ 及 $\hat{G}$ 皆爲直角。

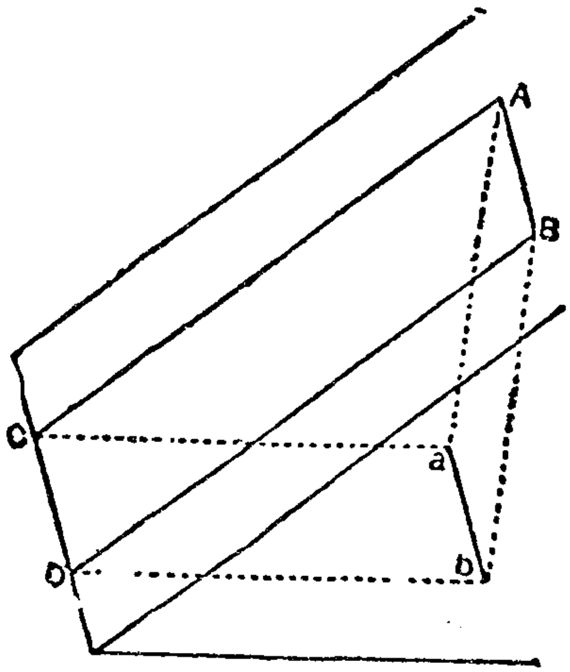
因$\triangle AFB$與$\triangle CGD$相似。

$$\therefore \quad AF:CG=AB:CD。$$

$$\therefore \quad ab:cd=AB:CD。$$

系 一直線若用直角射影於他平面，則此直線上諸段長度之比,等於射影直線上各段長度之比。

203. 定理 設 p 平面上一直線 l。直角射影於 π 平面上，若 p 及 π 之交線平行於 l,則 l 之射影平行且等於 l。



以 AB 代直線 l。ab 為其在 π 平面上之直角射影。

作 AC 及 BD 垂於 p,π 二平面之交線。

則 ACBD 為一矩形。

又因 Aa,Bb 皆垂於 π 平面，故 Ca,Db 垂於 CD。

$\therefore \qquad Ca \parallel Db$。

且 $\triangle ACa \equiv \triangle BDb$($\because AC=BD$, $A\hat{a}C=B\hat{b}D$,及 $A\hat{C}a=B\hat{D}b$。)

$\therefore \qquad Ca=Db$。

今 Ca,Db 既平行又相等。

$\therefore$ CDba 爲一平行四邊形。

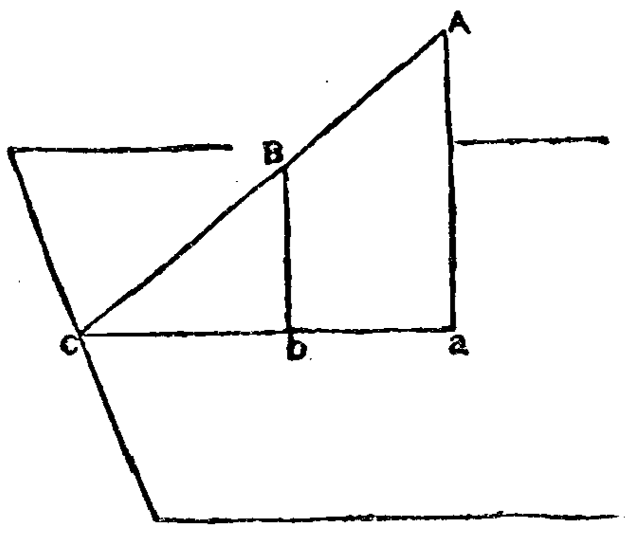
故 ab 平行且等於 CD，卽平行且等於 AB。

204. 定理 p 平面上一直線，垂於 p，π 二平面之交線；則其在 π 之直角射影爲一直線。其長度與原直線長度之比，等於 p，π 夾角之餘弦。

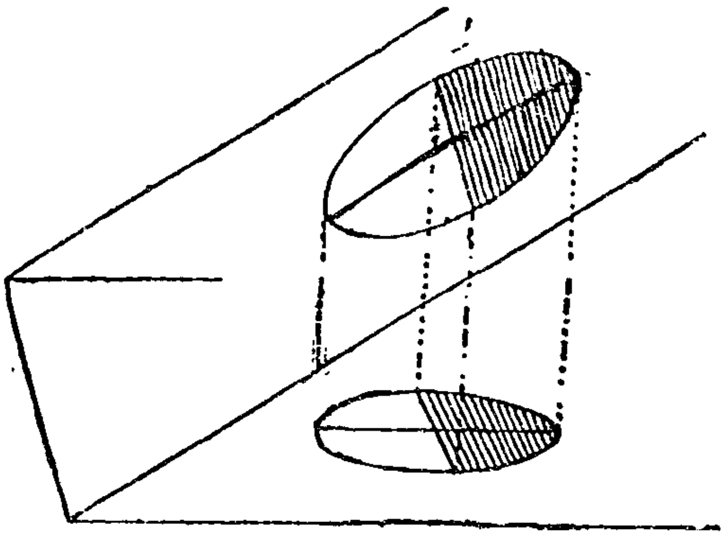
設 ab 爲 AB 之直角射影。

則 AB 與 ab 交於 p，π 之交線上，設交點爲 C。

$ab : AB = aC : AC = \cos a\hat{C}A = \cos(p, \pi$ 之夾角)。



205. 定理 直角射影中，圍有面積之圖形，射影成一圍有面積之圖形，後者面積與前者之比，等於含圖形之於二平面夾角之餘弦。

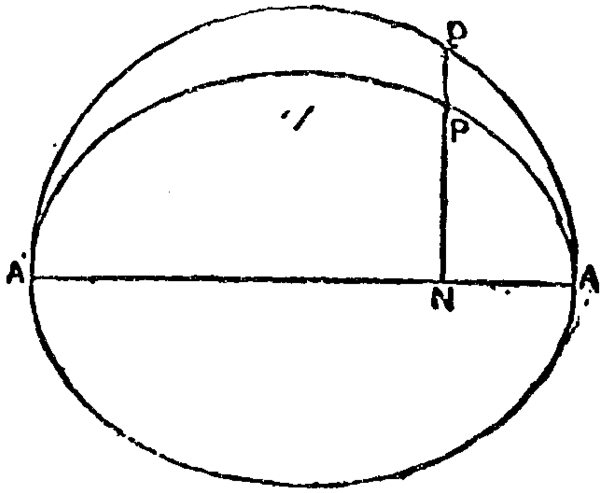


今試將原圖形分爲無數細條，平行於 p,π 之交線，則各細條之射影，其長不變，其寬與原細條之寬之比，爲 p,π 夾角之餘弦。而各細條，因甚細狹，可視爲長，寬之積。故射影所得各細條面積與原細條之比，爲 p,π 夾角之餘弦，即射影圖形之面積(各細條之和)與原者之比，爲 p,π 夾角之餘弦。

206. 橢圓爲圓之直角射影

於 §148，已證明若橢圓之縱坐標 PN，與輔圓交於 p，則 $PN : pN = BC : AC =$ 常數。

今若將輔圓以長軸爲軸而旋轉，使與橢圓平面之夾角爲 $\cos^{-1}\dfrac{BC}{AC}$，則橢圓上一點，及此圓上對應點之聯線必



垂於楕圓平面。

由是可知楕圓乃圓之直角射影。

楕圓中有甚多定理可以圓之直角射影解之。

207. 定理　楕圓上 CP 與 CD 爲一對直徑對　CP 與 CD′ 爲另一對直徑對。設 P′M 及 D′N 爲對於直徑 CP 之縱坐標，則 P′M : CN = D′N : CM = CD : CP。

先於輔圓上取 P′, D′, D 之對應點 p′, d′, d。然後以長軸爲軸旋轉之，使與原平面之夾角爲 $\cos^{-1}\frac{BC}{AC}$，則楕圓爲此新圓之直角射影矣。

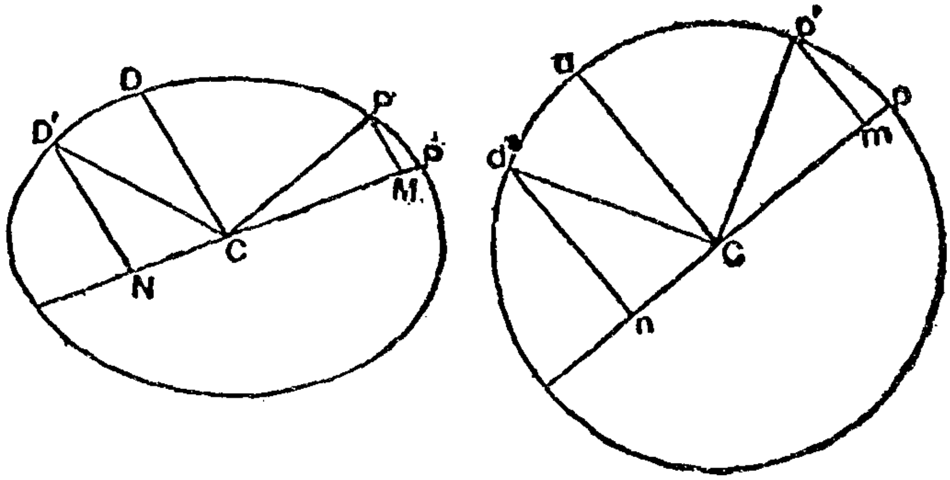
Cp 與 Cd 正交，Cp′, Cd′ 亦然。§ 149

過 p′ 及 d′ 作 p′m 及 p′n 垂於 Cp。則 M 及 N 各爲 m, n 之射影。

$\because \quad \triangle Cmp' \equiv \triangle d'nC$。

$\therefore \quad p'm : Cd = Cn : Cp$。

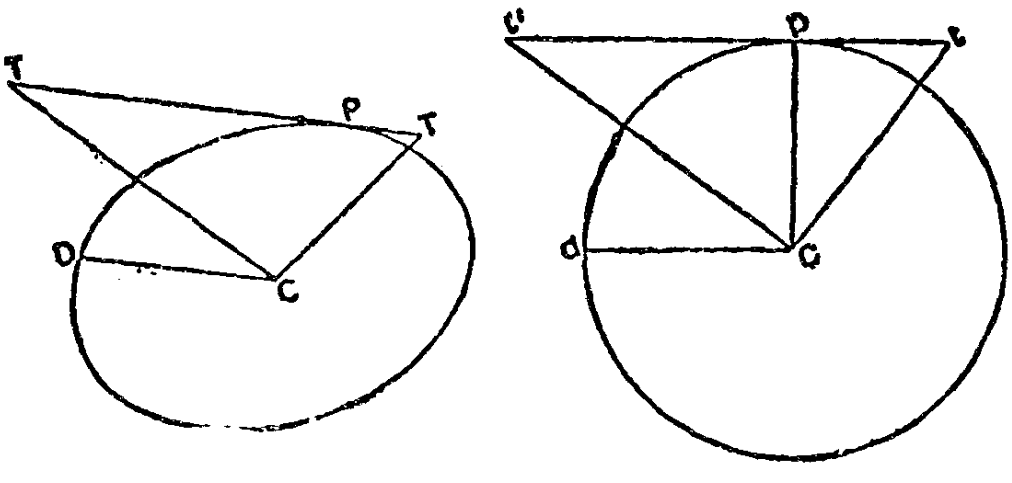
及 $\quad d'n : Cd = CM : Cp$。



$\therefore P'M : CD = CN : CP;\ D'N : CD = CM : CP$。

$\therefore P'M : CN = CD : CP = D'N : CM$。 § 202

208. 定理　橢圓上 P 點之切線與一對直徑對交於



T 及 T′。設CP及 CD 爲另一對半徑對，則$TP \cdot PT' = CD^2$。

因於輔圓上有 Ct 及 Ct′ 成直角。Cp 垂於 tt′。

$\therefore \quad tp \cdot pt' = Cp^2 = Cd^2$。

$\therefore \quad tp : Cd = Cd : pt'$。

$\therefore \quad TP : CD = CD : PT'$。

$\therefore \quad TP \cdot PT' = CD^2$。

209. 定理 設橢圓之二軸爲 AA′ 及 BB′，則其面積等於$\frac{1}{4}\pi \cdot AA' \cdot BB'$。

因橢圓乃其輔圓旋轉與原平面成 $\cos^{-1}\frac{BC}{AC}$ 角度時之射影。

$\therefore$橢圓之面積：輔圓之面積$= BC : AC$。§ 205

$\therefore$橢圓之面積$= \frac{1}{4}\pi \cdot AA' \cdot BB'$。

210. 定理 圓之直角射影爲橢圓，其長軸平行於 p，π 二平面之交線，且等於圓之直徑。

設 AA′ 爲圓上平行於 p，π 二平面交線之直徑。

則 AA′ 之直角射影 aa′ 必與之相等。§ 203

又設 PN 爲圓上對於直徑 AA′ 之縱坐標，pn 爲其

射影。設 p,π 平面之夾角爲 α。

則 $pn = PN\cos\alpha$,且 pn 垂 p,π 之交線。§ 204

今有 $pn^2 : an\cdot na' = PN^2\cos^2\alpha : AN\cdot NA'$

$$= \cos^2\alpha : 1。$$

故 p 點之軌跡爲一橢圓。aa' 爲其長軸。其短軸之長度則爲 $aa'\times\cos\alpha$。

離心率爲 $\sin\alpha$。

系 1. 一平面上二圓之直角射影,爲相似之二橢圓;且其方向亦同。(稱同位相似,第二十章)

系 2. 二相似之橢圓,若爲同位相似,則爲他平面上二圓之直角射影。

習 題

1. 設一平行四邊形內接於一橢圓,則其各邊平行於一對直徑對,且其面積最大不過 BC·AC。

2. 設 CP,CP' 爲橢圓之半徑對,過 P 之弦 PQ 與 CP' 交於 T,CR 爲平行於 PQ 之半徑,則 $PQ\cdot PT = 2CR^2$。

3. 設一直線與二同心，并同位相似之二橢圓相交；則其在二曲線間之兩段相等。

4. 設 CP 與 CD 為橢圓之半徑對；聯 BP 及 BD；AD 與 A'P 交於 O，則 BDOP 為一平行四邊形。

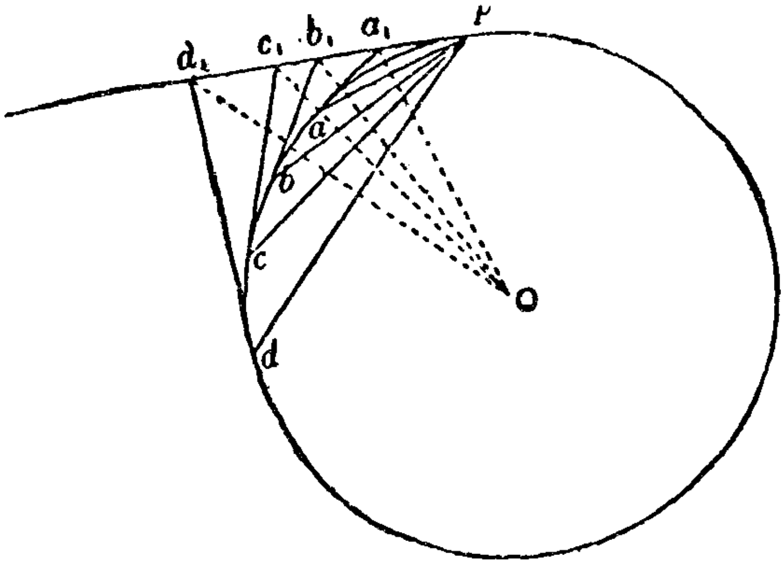
5. 二橢圓之長軸互相垂直，且相交；則任一對聯交，點之直線與軸成等角。

6. 求證一橢圓及其一點之曲率圓，得以直角射影成另一橢圓及其上一點之曲率圓。

第十六章

圓錐曲線之交比性質

211. 定理　設 A, B, C, D 為圓錐曲線上之四點，P 為其上另一點；則不論 P 在此曲線上任何位置，P(ABCD)之值不變，其值等於 A,B,C,D 上之四切線，與 P 點之切線交點所成之列點之交比。



射影此圓錐曲線成圓，以小字母代各大字母，

則　　　　$P(ABCD)=p(abcd)$。

但 p 在圓之任何位置，$a\hat{p}b, b\hat{p}c, c\hat{p}d$ 諸角度皆不變，

故 p(abcd) 之值亦不變。於是可知 P(ABCD) 爲常數。

設 a,b,c,b 四點之切線與 p 之切線交於 a_1,b_1,c_1,d_1，則 Oa_1,Ob_1,Oc_1,Od_1 各垂於 pa,pb,pc,pd。(O 爲圓心。)

$$\therefore \quad p(abcd)=O(a_1b_1c_1d_1)=(a_1b_1c_1d_1)。$$

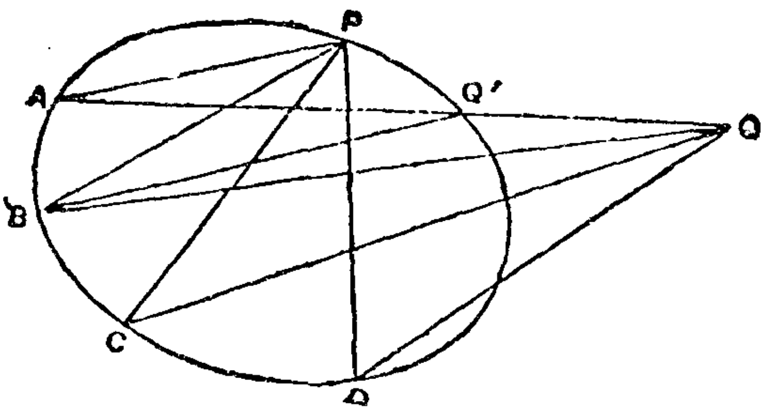
$$\therefore \quad P(ABCD)=A_1B_1C_1D_1)。$$

系 若 A′ 爲近於 A 之一點，則 A′(ABCD) =P(ABCD)。

故若 AT 爲 A 點之切線時，A(TBCD)=P(ABCD)。

〔註〕 設 P(ABCD)=−1，則 A,B,C,D 稱爲圓錐曲線上之調和點。

212. 定理 設 A,B,C,D 爲同平面，而不在一直線



上之四點,P 爲此平面上之一動點;若 P(ABCD)爲一常數時,則 P 之軌跡爲一圓錐曲線。

設 Q 爲此平面上另一點,而

$$Q(ABCD)=P(ABCD)。$$

假設 Q 不在 P,A,B,C,D 五點所定之圓錐曲線上則 AQ 必與曲線交於另一點 Q'。

於是　$Q'(ABCD)=P(ABCD)$。§ 211

$\therefore$　$Q'(ABCD)=Q(ABCD)$。

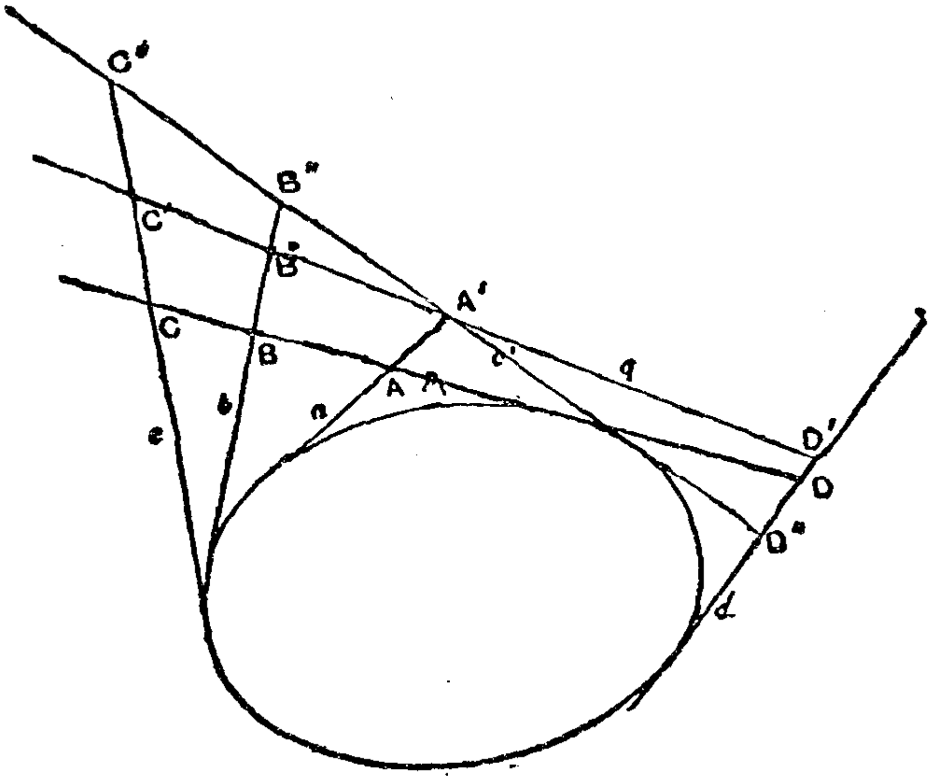
於是 Q(ABCD)與 Q'(ABCD)爲相似束線，且有一公線,故二線束爲同軸透視。(§ 64) 卽 A,B,C,D 在一直線上,是與原設不同。

故 Q 必在 P,A,B,C,D 圓錐曲線上。

213. 定理　設 a,b,c,d 爲同平面而不交於一點之四定直線,p 爲此平面上一動直線；若 p 與 a,b,c,d 之交點所成之列點之値，爲常數時，則 p 之曲線包爲一切於 a,b,c,d 之圓錐曲線。

本定理乃前節之對極定理，於次章中將證明本定理乃由前定理而來,且可以前節證之。

然此時先證之如下:



設 p 與 a,b,c,d 交於 A,B,C,D;而 (ABCD) 爲常數,q 爲此平面上另一直線,與 a,b,c,d 交於 A′,B′,C′,D′。

而 $(A'B'C'D')=(ABCB)$。

假設 q 不爲此曲線之切線,自 A′ 作切線 q′,與 b,c,d,交於 B″,C″,D″。

∴ $(A'B''C''D'')=(ABCD)$ §211

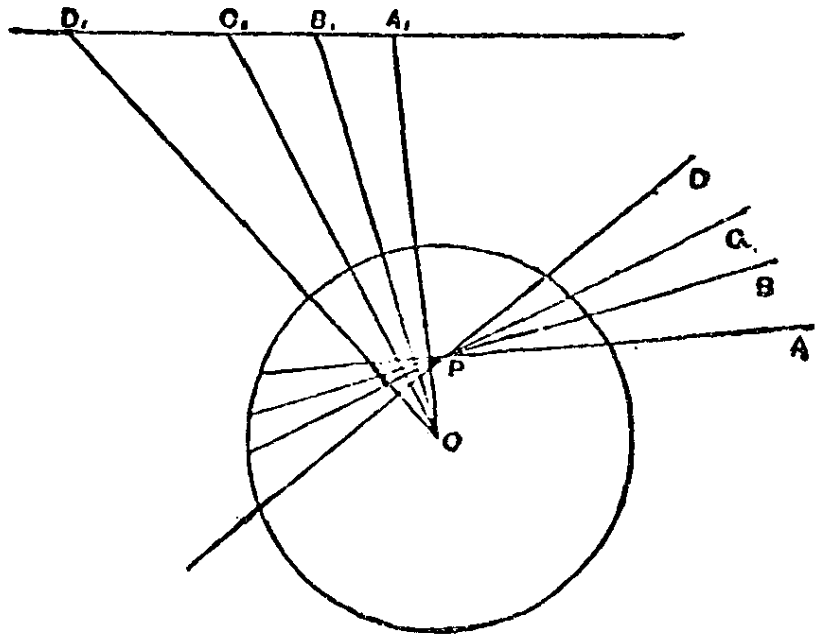
$$=(A'B'C'D')。$$

故列點$(A'B''C''D'')$與$(A'B'C'D')$相似，且有一公點之相當點；故二列點互相透視，(§60) 卽 a,b,c,d 交於一點，是與原設不合。

故 q 必與切於 a,b,c,d,p 諸直線之圓錐曲線相切。

214. 定理　設 $P(ABCD)$ 爲一束線，與一圓錐曲線同平面，A_1,B_1,C_1,D_1 各爲對於曲線 PA,PB,PC,PD 之極點，則

$$P(ABCD)=(A_1B_1C_1D_1)。$$



先證本定理對於圓爲眞，則對於圓錐曲線亦眞，因後

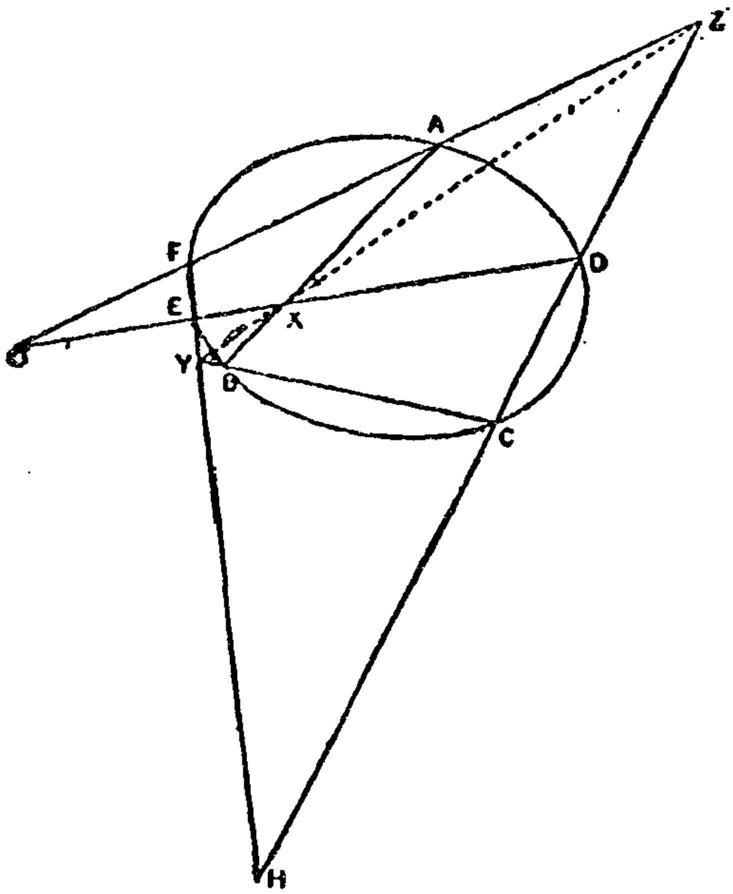
者乃前者之射影也。

設 O 為圓心,

則 OA_1, OB_1, OC_1, OD_1 各垂於 PA, PB, PC, PD。

$\therefore \quad P(ABCD) = O(A_1B_1C_1D_1) = (A_1B_1C_1D_1)$。

215. 巴斯格爾定理 Pascal's theorem 設 A, B, C, D, E, F 為圓錐曲線上之六點,則以六點為頂之六邊形有六十個,而各六邊形之三對對邊之交點在一直線上。



本定理中所謂六邊形者，非謂圍有面積之圖形也，乃以六直線聯六定點所得之圖形；因其聯法之不同，故圖形亦異，讀者當能以組合法，推得其數爲六十也。

本定理之證，亦可用圓之射影解之（第十章習題 15）。

設一六邊形爲 AB，BC，CD，DE，EF，FA 六邊所成，則其三對對邊爲 AB，DE；BC，EF；CD，FA；各交於 X，Y，Z。

設 CD 交 EF 於 H，DE 交 FA 於 G，則

因 $$A(BDEF)=C(BDEF)。$$

$$\therefore \quad (XDEG)=(YHEF)。$$

故二列點 XDEG 與 YHEF 相似，且有一公點 E。

$\therefore$ XY，DH，及 FG 三直線交於一點。

即 CD 與 FA 之交點在 XY 上，

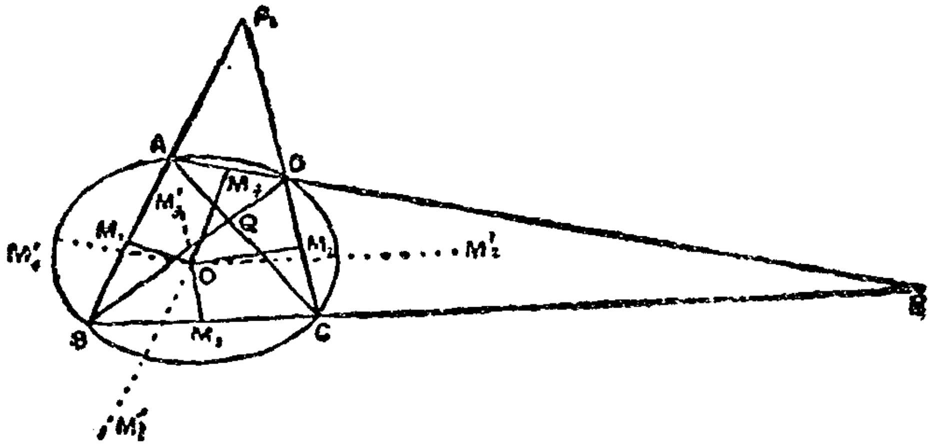
XYZ 稱巴斯格爾線。

216. 布利安桑定理（Brianchon's theorem）設一六邊形外切於一圓錐曲線，則聯三對對頂之直線交於一點。

本定理證法與前節相彷，讀者可以此爲一習題，於次

章中將證明本定理乃前節之對極。

217. 定理　於平面上有四定點，一圓錐曲線動於其上，常過此四點，則曲線心之軌跡為一圓錐曲線。



設 O 為過 A，B，C，D 四點之一圓錐曲線之心。

M_1, M_2, M_3, M_4 各為 AB，BC，CD，DA 之中點。

作 OM_1'，OM_2'，OM_3'，OM_4'，各平行於AB，BC，CD，DA。

則 OM_1, OM_1'；OM_2, OM_2'；OM_3, OM_3'；OM_4, OM_4' 為對於此曲線之四對半徑對，故成一對合束線。

$$\therefore \qquad O(M_1M_2M_3M_4) = O(M_1'M_2'M_3'M_4')。$$

但右式之值為常數。因 OM_1'，OM_2'，……諸直線之方向為固定。

$\therefore O(M_1M_2M_3M_4)$之值爲常數。

$\therefore O$之軌跡爲過 M_1, M_2, M_3, M_4 之一圓錐曲線。

系 1　若 M_5及 M_6 爲四角形他二邊(如 AC, BD)之中點,則M_8 ,M_g 皆在 O 之軌跡上。

設 O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 爲過 A, B, C, D 之圓錐曲線五種位置之心,則此五心必在過 M_1, M_2, M_3, M_4 之圓錐曲線上,而又在過 M_1, M_2, M_5, M_6 之圓錐曲線上;但僅一圓錐曲線得同時過五點,故 $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ 皆在一圓錐曲線上,卽 O 之軌跡。

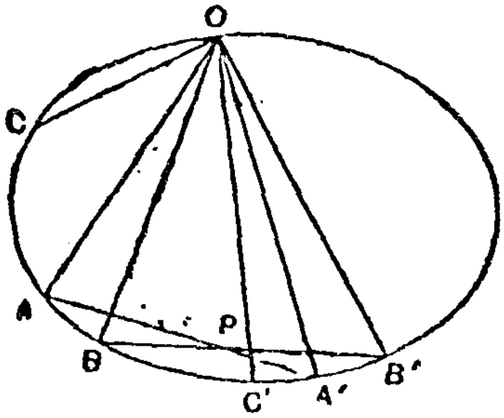
系 2　三對對邊之交點 P, Q, R 亦在 O 之軌跡上。

因過 A, B, C, D, 諸圓錐曲線中有一爲一對直線(解析幾何中稱爲可約雙曲線 Degenerate hyperbola, 以 P 爲曲線心,故 O 之軌跡過 P; 同理證 O 之軌跡過 Q 及 R。

218. 定理　設$O(AA', BB', CC')$爲一對合束線,作一圓錐曲線,截 OA, OA'……諸直線於 A, A', B, B', C, C'。則 AA', BB', CC'三弦交於一點。

設 AA' 與 BB' 交於 P。

射影圓錐曲線使成圓,以 P 射成圓心。



於射影上以小字母代各大字母，則 $a\hat{o}a$, $b\hat{o}b'$ 皆在半圓內，故爲直角。

故 oa, oa'; ob, ob' 定一正交束線。

但 oc, oc' 爲對合束線之一對線對，故亦爲正交，即 cc' 過 p。

∴ CC' 過 P。

若 O' 爲此圓錐曲線上另一點，則 O'{AA', BB', CC'} 爲一對合束線。 § 211

於圓錐曲線 A, A', B, B', C, C' 等點稱爲圓錐曲線之對合列點，P 點爲此對合點列之極點。

習 題

1. 設(P,P'), (Q,Q') 爲圓錐曲線上之四調和點, PT 爲 P 點之切線,則 $P(TP',QQ')=-1$。又若 PP' 爲 P 點之法線,則 $Q\hat{P}Q'$ 爲 PP' 所平分。

2. 設 PP' 爲圓錐曲線 P 點之法線,與曲線再交於 P',二弦 PQ 及 PQ' 與 PP' 成等角,則 $P'(QQ',PT)=-1$。PT 爲 P 點之切線。

3. 以巴斯格爾定理證明以下:設一三角形內接於一圓錐曲線,則各頂之切線與其對邊之交點在一直線上。

4. 過圓錐曲線上一點,作直線與曲線再交於 P,R 與一內接三角形三邊交於 A,B,C, 則$(PA'B'C')$爲常數。

5. 設 A,B,C,D 爲雙曲線上四點, CK 平行於一漸近線, 與 AD 交於 K; DL 平行於他漸近線,與 CB 交於 L。求證 KL 平行於 AB。

6. 設 D,E 爲雙曲線上二點。CA,CB 爲其漸近線。過 D 及 E, 各作 CA,CB 之平行線,交於 Q。D 點之切線與 CB 交於 R。E 點之切線與 CA 交於 T。求證 T,Q,R 同在平行於 DE 之直線上。

7. 過圓錐曲線一定點A,作二定直線AI及AI'。S,S'為另二定點,P為曲線上一動點,PS,PS'各截AI,AI'於Q,Q',則不論P在曲線之任何位置,QQ'必過一定點。

8. 圓錐曲線上之六點有六十根巴斯格爾線,每三線交於一點。

9. 設二三角形互相透視,則不相當之邊之交點有六,皆在一圓錐曲線上;而二三角形之透視軸為此六點之巴斯格爾線之一。

10. 設A,B為圓上兩點,CD為一直徑,於圓周上求一點P,使PA,PB與CD之交點與圓心為等距離。

第十七章

對極法

219. 於一平面上有一圓錐曲線 T,及任意三點P,Q,R。設對於 T,P,Q,R 之極線各爲 p,q,r,則聯 P,Q之直線必爲二極線 p,q 之交點之極線。此理前已論之詳矣。

爲便利起見,p,q 二直線之交點以(p,q)表之,而 P,Q 之聯線以(P,Q)代之。

P 點爲 p 之極點,稱爲 p 之對應。同法稱 Q 爲 q 之對應,R 爲 r 之對應,而(p,q)亦爲(P,Q)之對應,或反稱之。

於是若於一平面上有一圖形 F,爲一組點及直線所組成。於此平面上另有一圖形 F′,爲一組直線及點所組成;其各直線及各點,對應於 F 圖形中之各點及各直線。此二圖形互稱爲對極圖形 Reciprocal figures。以 Γ 爲對極底 Medium of Reciprocation。

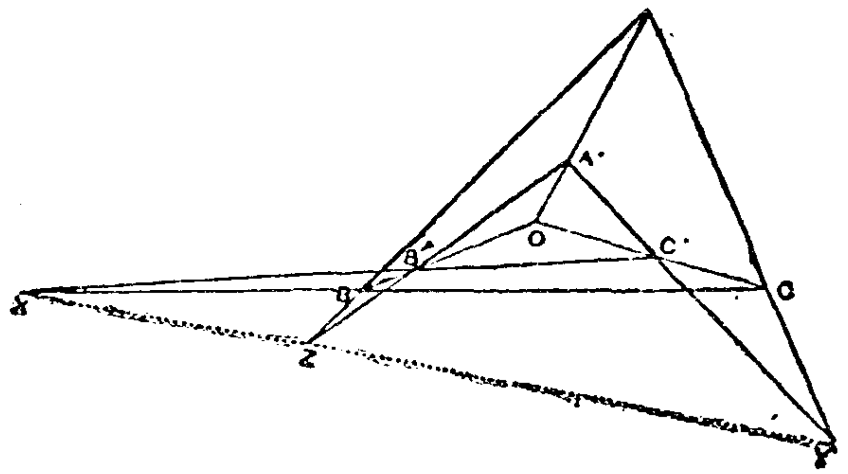
設 F 圖形中有一列點,其對應爲 F′上之一束線,且

與原列點相似。

220. 設一圖形為一組點及直線所組成，已知其各種性質及互有之關係，應用上節所述，可得另一圖形。其各種性質及點，線之關係，可由原圖形推而得之。

後者之性質稱為前者之對極，而所得關於後圖形之定理，稱為前者之定理之對極定理 Reciprocal theorem。應用此法以證題者，則稱為對極法 Reciprocation。

221. 前此已證明：若二三角形 ABC, A'B'C' 互相透視，則各相當邊 (BC), (B'C'), (CA)(C'A'), (AB)(A'B')之交點 X, Y, Z 在一直線上。



今試求其對極定理：

對應於 △ABC 之三頂角者為三直線 a, b, c, 此三直

線成一三邊形，頂角爲(bc)，(ca)，(ab)。同樣，對應於$\triangle A'B'C'$之三邊形之各邊爲 a,b,c，三頂角爲(b'c')，(c'a')，(a'b')。

對應於(AA')，(BB')，(CC')三直線爲(aa')，(bb')，(cc')三點。

因前者交於一點，後者在一直線上。

對應於(BC)(B'C')，(CA)(C'A')，(AB)(A'B')三對直線之交點爲三直線。聯(bc)(b'c')，(ca)(c'a')，(ab)(a'b')三對交點。

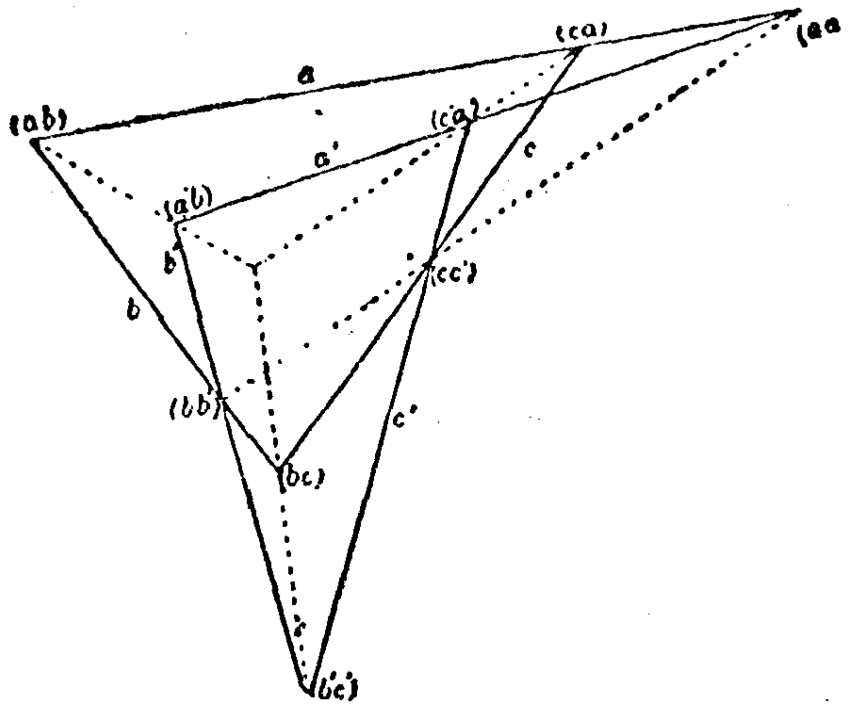
因前者在一直線上，後者交於一點。

於是上述定理之對極爲：

定理　二個三邊形各邊爲 a,b,c，及 a',b',c'，若各對相當邊之交點在一直線上，則聯相當頂點之直線〔即(ab)(a'b')，(bc)(b'c')，(ca)(c'a')〕交於一點。

於幾何學中，一定理與其對極恆並列，故前述之二對極定理，可列之如下：

互相透視之二個三角形爲同軸。	同軸之二個三邊形互相透視。



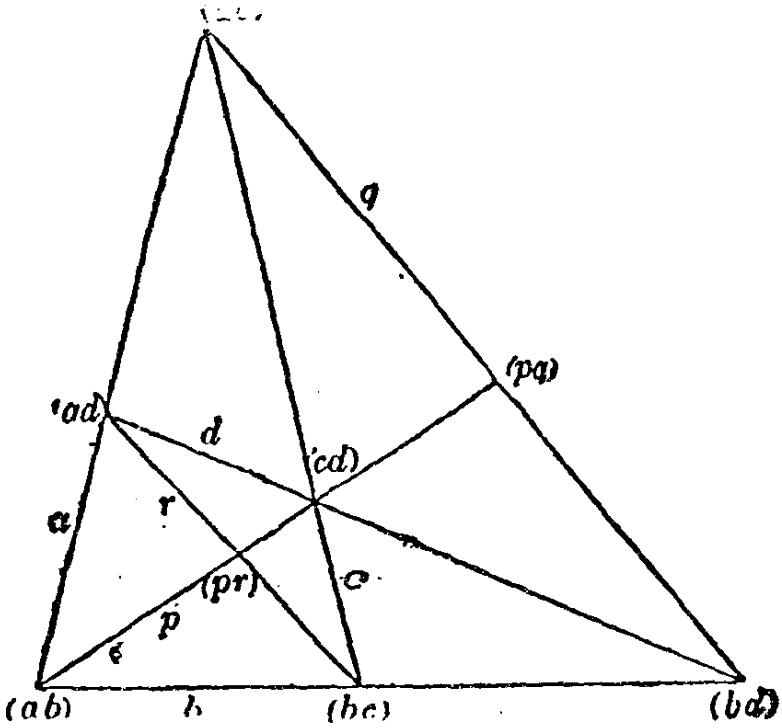
222. 於第七章之末，吾人已論及四邊形及四角形之調和性質，然其一乃其他之對極。

設 a,b,c,d 爲四邊形之四邊，其對應爲四點A,B,C,D 成一四角形。

再設聯(ab)與(cd)二點之直線爲 p。

再設聯(ac)與(bd)二點之直線爲 q。

再設聯(ad)與(bc)二點之直線爲 r。



於 F′圖中 P,Q,R,各爲 p,q,r 之對應,

則 P 爲(AB)與(CD)之交點。

　Q 爲(AC)與(BD)之交點。

　R 爲(AD)與(BC)之交點。

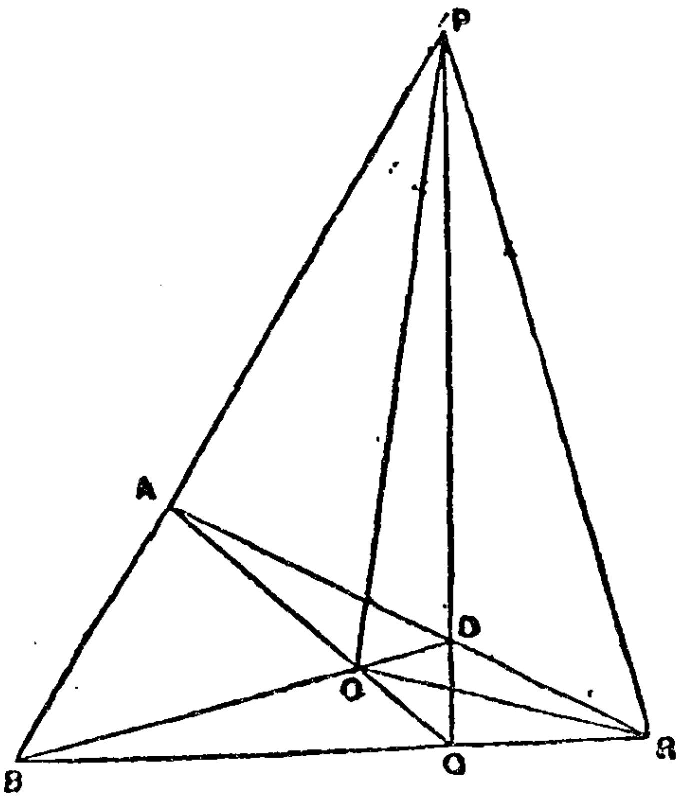
四邊形之調和性質可以下數式表之:

$$[(ab)(cd),(pr)(pq)]=-1。$$

$$[(ad)(bc),(pr)(qr)]=-1。$$

$$[(ac)(bd),(pq)(qr)]=-1。$$

於 F′圖中,上式之對極爲:



$$[(AB)(CD),(PR)(PQ)]=-1。$$

$$[(AD)(BC),(PR)(QR)]=-1。$$

$$[(AC)(BD),(PQ)(QR)]=-1。$$

223. 定理 一對合列點之對極爲一對合束線。

設此對合列點爲 $A,A_1;B,B_1;C,C_1;\cdots\cdots$ 各對點所組成，在一直線 p 上。

則此列點之對極圖形爲交於一點 P 之束線。各線 $a,a_1;b,b_1;c,c_1;\cdots\cdots$，且 $(abca_1)=(ABCA_1)$。

$$(abca_1)=(ABCA_1)。$$

及　$(a_1b_1c_1a\ )=A_1B_1C_1A)$。　§ 214

但　$(ABCA_1)=(A_1B_1C_1A)$。　§ 78

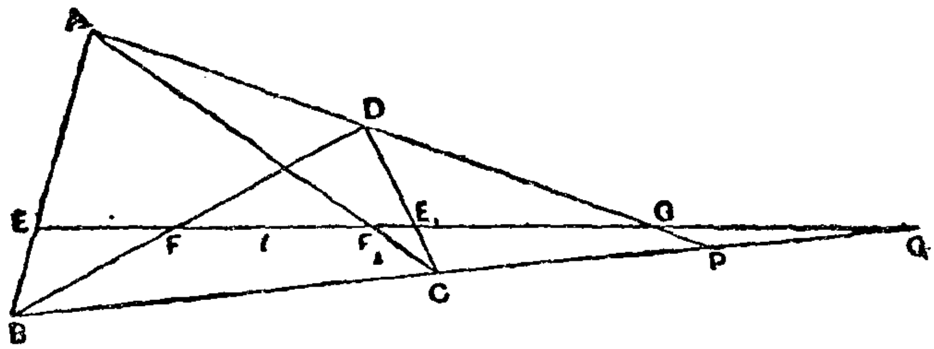
∴　$(a\ b\ c\ a_1)=(a_1b_1c_1a)$。

故此束線爲對合束線。

224. 四邊形及四角形之對合性質。

定理　一橫線與一四角形之三對對邊交於六點．屬於一對合點列。

設 ABCD 爲一四角形，



t 爲一橫線，截

一對對邊 AB，CD 於 E，E_1；

一對對邊 AC，BD 於 F，F_1；

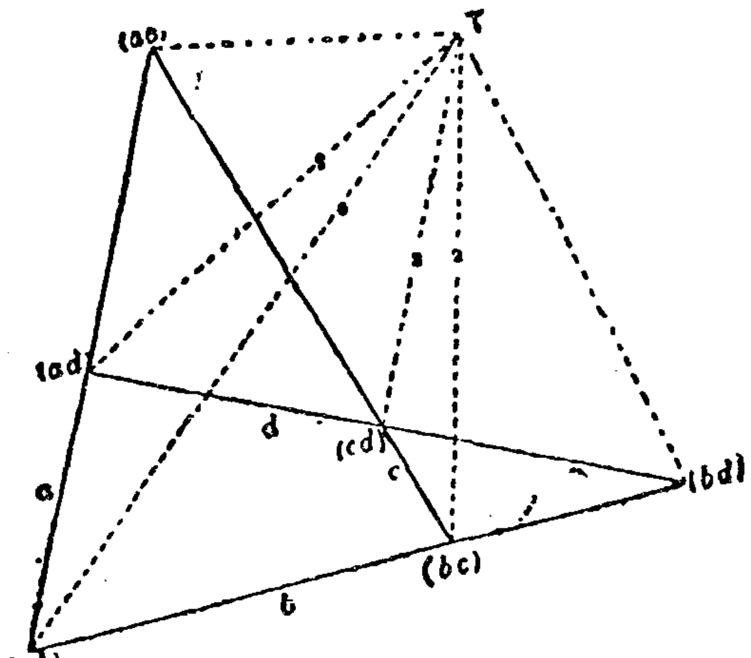
一對對邊 AD，BC 於 G，G_1。

又設 AD,BC 交於 P。

則 $$(GEFG_1)=A(GEFG_1)$$
$$=(PBCG_1)$$
$$=D(PBCG_1)$$
$$=(GF_1E_1G_1)$$
$$=(G_1E_1F_1G)。$$

[交比之兩對字母同時交換,其值不變。]

故 $E,E_1;F,F_1;G,G_1$,屬於一對合列點。



以上定理之對極如下:

定理　自一點聯四邊形之三對對頂之六直線，屬於一對合束線。

於第二圖中，T 對應於第一圖之 t 線。

T 與一對對頂(ab),(cd)之二聯線對應於 E, E_1;

T 與一對對頂(ac),(bd)之二聯線對應於 F, F_1;

T 與一對對頂(ad),(bc)之二聯線對應於 G, G_1。

$\because$ $E, E_1; F, F_1; G, G_1$ 屬於一對合列點，故此三對直線成一對合束線。

225. 定理　以四邊形之對角線爲直徑之三圓爲同軸。

設 AB, BC, CD, DA 爲一四邊形之四邊。

三對角線爲 AC, BD, EF

設以 AC, BD 爲直徑之二圓交於 P。

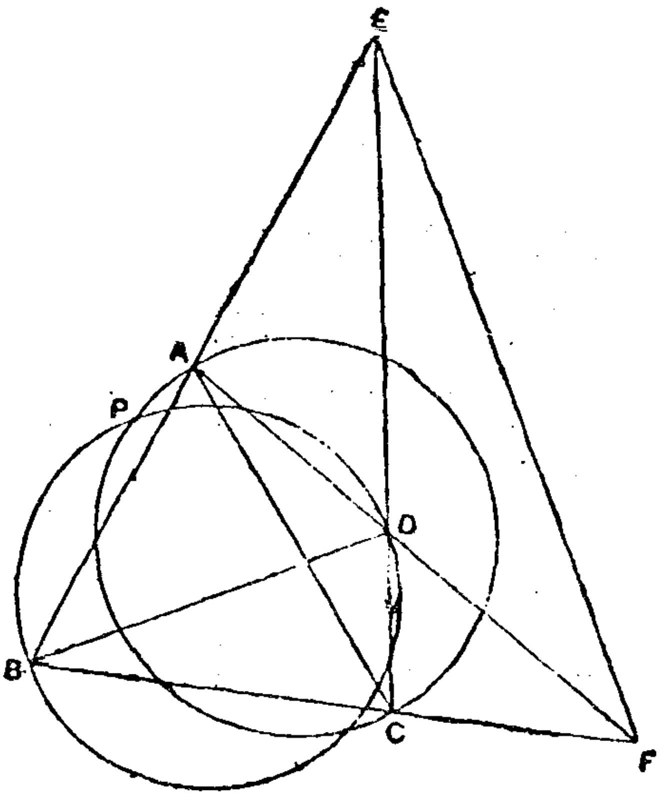
$\because$ $A\hat{P}C$ 及 $B\hat{P}D$ 皆爲直角。

但 PA, PC; PB, PD; PE, PF 爲一對合束線，§ 224

此對合束線旣有兩對線爲正交，故爲正交束線。

$\therefore$ $E\hat{P}F$ 爲直角。

故以 EF 爲直徑之圓必過 P。

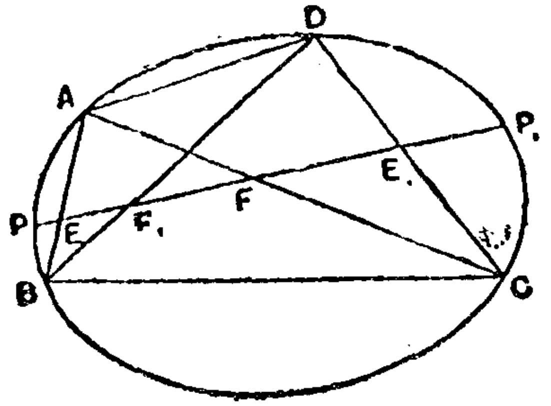


同理可證此圓亦過他二圓之第二交點，卽此三圓爲同軸。

系　四邊形各對角線之中點在一直線上。(稱此四邊形之對徑 Diameter of Quadrilateral)。

226. 笛沙兒定理 Desargues theorem

同過四定點之一組圓錐曲線與一定直線之各對交點，屬於一對合列點。



設 A,B,C,D, 爲四定點,直線 t 與過 A,B,C,D 之一圓錐曲線交於 P 及 P_1, 且與四角形 ABCD 之兩對對邊 AB,CD;AC,BD 交於 E,E_1;F,F_1。

則
$$\begin{aligned}(PEFP_1)&=A(PEFP_1)\\&=A(PBCP_1)\\&=D(PBCP_1)\qquad \S\ 211\\&=(PF_1E_1P_1)\\&=(P_1E_1F_1P)。\end{aligned}$$

故 P,P_1 屬於 E,E_1;F,F_1所定之列點上。

於是過 A,B,C,D 之各圓錐曲線與 t 之各對交點,皆屬於此對合列點。

〔註〕 此組圓錐曲線中,其三各爲一對直線。(卽解

析幾何中所謂變形雙曲線者是也)今若視 AD, BC 爲一圓錐曲線,則其與 t 之交點屬於 $E, E_1; F, F_1$ 所定之對合列點,此卽 § 224 之第一定理也,故 § 224 之第一定理可視爲本定理之特例。

227. 笛沙兒定理之對極

自一定點至同切於四定直線之一組圓錐曲線作切線,則切於任一曲線之一對切線,屬於一對合束線。此對合束線爲聯四定直線所成之四邊形之一對對頂與定點之兩對直線所定。

228. 圓錐曲線之對極圖形

設一曲線 S 與 T 同平面,一動點 P 沿 S 而移動,則對於 T, P 點之極線 p 亦在此平面上移動,常切於一曲線 S′。今試求此曲線與 S 之關係。

S′ 之切線對應於 S 上之點,同時 S′ 之各點亦對應於 S 上之切線,今證之如下:

設 S 上二點 P, P′, S′ 上二切線 p, p′ 各對應於 P, P′,則 (pp′) 交點對應於 (PP′) 直線。

今若 P′ 向 P 移動而與之合, 則直線 PP′ 成爲 P 點

之切線，同時 p,p′ 亦相合，而成為 p 與曲線之切點。

故 S 之切線對應於 S′ 之點。

229. 定理 於前節中，設 S 為圓錐曲線，則 S′ 亦為圓錐曲線。

設 A,B,C,D 為S上之四定點，P 為其上任一點。

則　　P(ABCD) 為一常數。

又設 a,b,c,d 四直線各對應於 A,B,C,D，p對應於 p。

則　　P(ABCD)=[(pa)(pb)(pc)(pd)]。§ 214

∴　　[(pa)(pb)(pc)(pd)]為一常數，

∴ p 之曲線包為一圓錐曲線切於 a,b,c,d。 § 213

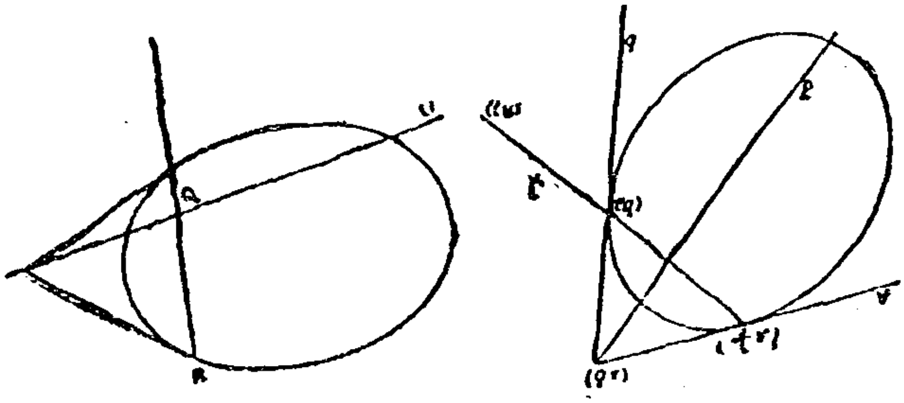
故 S′ 亦為一圓錐曲線。

本定理亦可證之如下：

S 為圓錐曲線，故為二次曲線，即任一直線必與之交於二點。(此二點或為實點，或為虛點)

故S′為一種曲線，自其平面上任一點，能作二切線。(此二直線或為實，或為虛) 故 S′ 亦為一二次曲線，即為一圓錐曲線。

230. 定理 設S,S'對於T互為對極形。則S上之極點與極線對應於S'上之極線與極點。



設P與TU為對於S之極點,極線。

[讀者須注意,TU為P之極線乃對於S而言,並非對於Γ;若對於Γ,則P之極線為另一直線,吾人恆以ρ代之。]

過P作S之一弦QR,則Q,R二點之切線交於TU上。設交點為T,

於對極圖形中S',p對應於P,tu對應於TU;於p上取一點(qr)對應於(QR)。自(qr)作S'之二切線q,r,其二切點(tq),(tr)各對應於(TQ),(TR)。

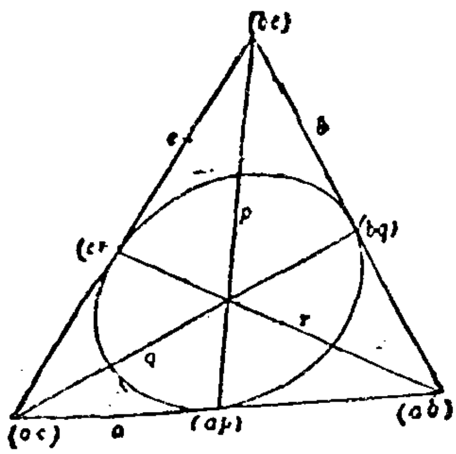
因TQ,TR,TU交於一點。故直線(tq)(tr)必過(tu),於是ρ與(tu)為對於S'之極線與極點。

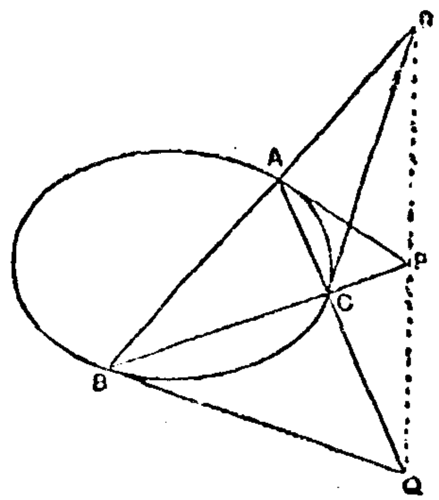
系 1. S 上之點對對應於 S′ 上之線對，反之亦然。

系 2. S 上之自極三角形對應 S′ 上之自極三角形，反之亦然。

231. 今將數定理及其對應並列於下：

(1) 設一圓錐曲線內切於一三邊形，則聯各頂與其對邊與曲線之切點之三直線交於一點。	設一圓錐曲線外接於一三角形，則各邊與其對頂上所作之切線之交點在一直線上。





(2) 自二定點至一三角形之三頂聯直線，與各對邊之六交點，在一圓錐曲線上。	聯二定直線與一三角形各邊之交點與頂之六直線，同切於一圓錐曲線。

(3) 聯圓錐曲線上六點所成之一六邊形之三對對邊交點在一直線上。——巴斯格爾定理	切於圓錐曲線六直線所成之六角形，三對對邊與曲線之切點之聯線交於一點。——布利安桑定理。
(4) 設四角形內接於一圓錐曲線，則其對角線之三交點所成之三角形對於曲線成自極三角形。	設一四邊形外切於一圓錐曲線，則其三對角線所成之三邊形對於圓錐曲線成自極三邊形。

232. 定理 S′ 爲一橢圓，拋物線，或雙曲線。視 T′ 之曲線心在 S 內，在 S 上，或在 S 外而定。

因 T′ 之心之對應爲一直線在無窮遠，過心之直線之對應爲無窮遠線上之一點。

故自 T′ 之心所作 S 之二切線對應於 S′ 上之二無窮遠點，而其切點對應於與曲線切於無窮遠點之切線，卽漸近線也。

故若 T′ 之心在 S 之外，則 S′ 有二漸近線，卽 S′ 爲雙曲線。

若 T′ 之心在 S 之上，則 S′ 僅有一漸近線，（卽在無

窮遠之直線)故 S′ 爲一拋物線。

若 F′ 之心在 S 之內，則 S′ 無漸近線，故爲一橢圓，

233. 以圓爲底之對極圖形

於對極圖形中，若對極底爲一圓時，[在此情形之下，對極底恆以 C 代之，而圓心則以 O 代。] 則二對極圖形 F 及 F′ 更有一種特殊之關係，玆述之如下：

對於 C，P 點之極線垂於 OP，故 F 圖形中任何一直線，皆垂於聯 F′ 中各對應點與 O 之直線。

於是一圖形上二直線之夾角等於對極圖形上二對應點與 O 所成之角。

又設 S 爲一圓錐曲線，S′ 爲其對極，(亦爲一圓錐曲線)若自 O 所作 S 之二切線爲正交，則 S′ 爲一等腰雙曲線。

因 O 在 S 之外，故 S′ 爲一雙曲線。

設 OP，OQ 爲 S 之二切線，則 S′ 之二漸近線爲 P，Q 對於 C 之二極線，此二漸近線爲正交。因 $P\hat{O}Q$ 爲直角，故 S′ 爲一等腰雙曲線。

又若拋物線之準線，或有心圓錐曲線之準圓過 O 時，

則三種曲線之對極皆爲等腰雙曲線。

此外尚有一種關係，卽若一三角形之重心爲 O，則其對極之重心亦在 O，以上二題讀者當能自證之。

於以後定理中其對極底皆爲圓。

234. 以下二定理，可以對極法連之。

(1)　外切於一拋物線之三角形之垂心在準線上。

(2)　內接於等腰雙曲線之三邊形之垂心在曲線上。

此二定理已於 §§ 95 及 130 中分別證明。茲設第一定理爲眞，而以對極法證第二定理。

於第一圖形中，設 C 之圓心 O，卽爲三角形之垂心。今拋物線與無窮線相切，故對於 C，無窮遠線之極點(卽 O)在拋物線之對極曲線上。

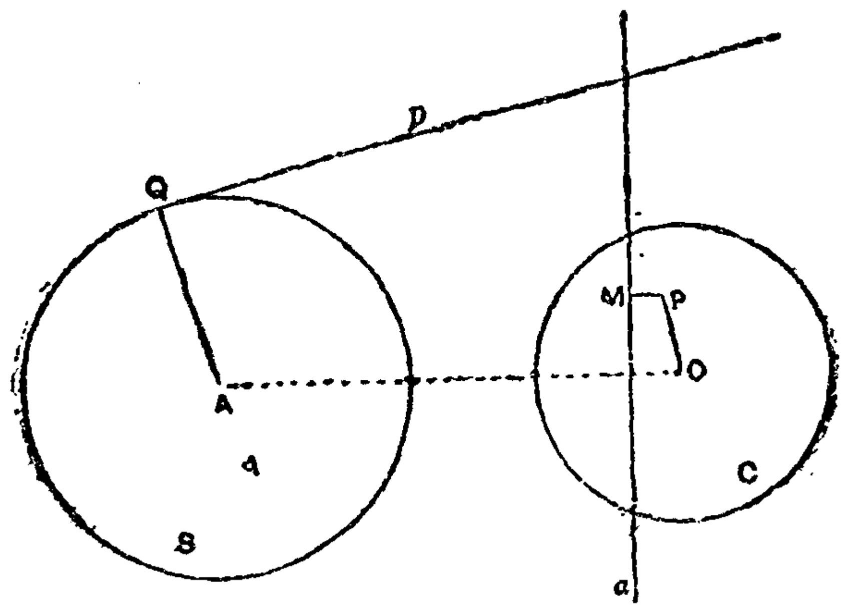
然對極曲線爲一等腰雙曲線。因 O 在拋物線之準線上。(§ 233)

且 O 亦爲外切於拋物線之三角之對應三角形之垂心。

故若一三角形內接於一等腰雙曲線，則其垂心在曲線上，此卽本節之第二定理也。

〔註〕 圓錐曲線中，僅等腰雙曲線能同時過一三角形之三頂及其垂心。

235. 定理 設 S 爲一圓，則其對於 C 之對極爲一圓錐曲線，以 O 爲一焦點。



設 A 爲 S 之圓心，p 爲 S 上 Q 點之切線。

又設 P 對應於 p，a 對應於 A。

作 PM 垂於 a。

則 $\frac{OP}{OA}=\frac{PM}{AQ}$。沙耳門定理 § 18

∴ $\frac{OP}{PM}=\frac{OA}{AQ}=$常數。

故P點之軌跡爲一圓錐曲線，O爲其一焦點，a爲對焦點O之準線。

此曲線之離心率爲OA/AQ。故S′爲一拋物線，爲一橢圓，或爲一雙曲線，視O在S圓周上，圓內，或圓外而定，是與§232所言相符。

系1. 一同軸圓組之焦點O爲圓心之圓爲對極底時，此圓錐曲線之對極爲一圓，其圓心爲對O之準線之對應。

236. 吾人已稔半圓內之角爲正角，今試求其對極定理。

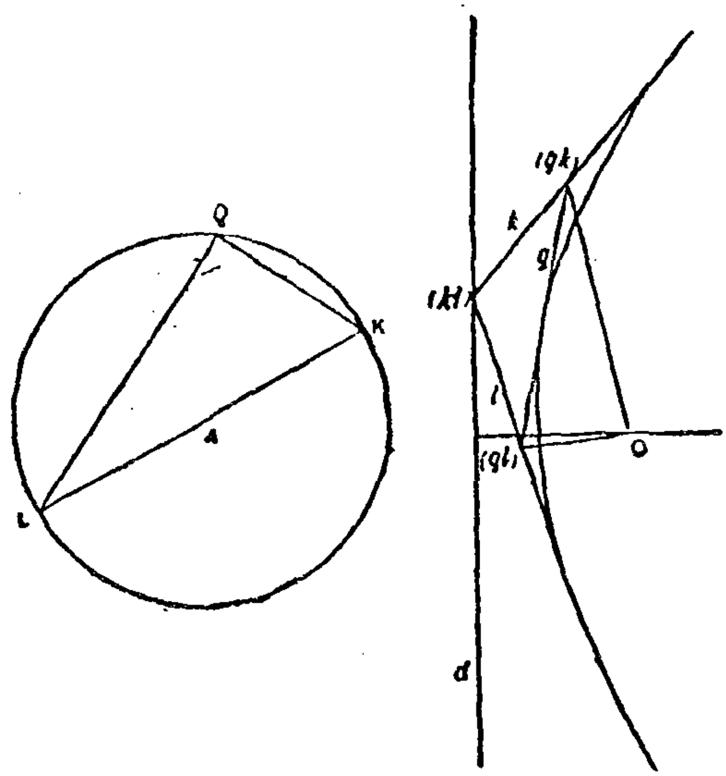
設A爲S圓之心，LK爲一直徑，Q爲圓周上一點。

於對極圖形中，則有一圓錐曲線S′，對應於S，其準線a對應於A，及a上一點(kl)對應於KL。

k及l爲S′之二切線，各對應於K及L，S圓周上Q之對應爲S′之切線q。

今因(QK)與(QL)爲正交。

故(qk)及(ql)與O成直角，O爲C圓心，卽S之一焦點也，於是得一對極定理如下：



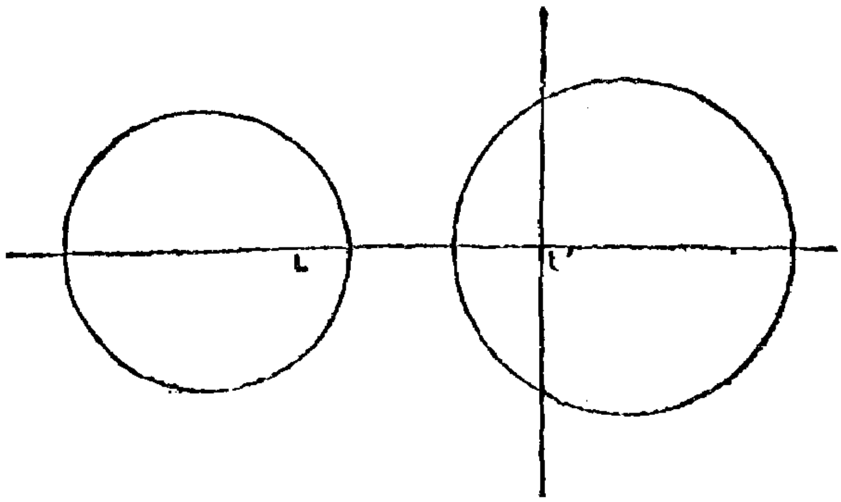
定理　設圓錐曲線之一切線與一焦弦兩端之切線相交，則二交點與在此焦弦之焦點成直角。

237. 定理　不相交之一組同軸圓之對極得爲一組同焦點之圓錐曲線。

設 L 及 L′ 爲此組圓之極限點。

又設 L 爲 C 圓之圓心。

則此組同軸圓對於 C 之對極爲一組錐曲線，同以 L 爲一焦點。



且此組中任一圓之對應圓錐曲線之心，為對於此圓L之極線之對應點。(參看第二章習題 15)

但對於組中任何圓，L之極線為過 L 並垂於 LL′ 之直線，故此極線為定直線，其對應為定點。

故此組同軸圓之對極為一組圓錐曲線，公有一焦點及心，故亦公有第二焦點，即為同焦點也。

238. 設 t 為同軸圓組中二圓之公切線，與二圓切於 P 及 Q，L 為一極限點，則 $P\hat{L}Q$ 為直角。(§ 23) 今試求其對極定理。

設 C 以 L 為圓心。

則同軸圓組中二圓對於 C 之對應為二同焦點之圓

錐曲線,公切線之對應爲二曲線公點(卽交點),P,Q之對應則爲二曲線交點之二切線。

因 $P\hat{L}Q$ 爲直角,故此二切線正交,卽二曲線正交。

於是得對極定理如下:

定理　同焦點之圓錐曲線正交。

此定理亦可以他法證之,此時不過舉此爲例,欲使讀者明對極定理之意義耳。

239. 設二圓 S_1,S_2 上各有一點 P 及 Q, L 爲二圓之一極限點, $P\hat{L}Q$ 爲直角, 則 PQ 之曲線包爲一圓錐曲線,以 L 爲一焦點。(第十三章習題 20)

今試求其對極定理。

設 C 以 L 爲圓心。

S_1S_2 之對應爲二同焦點之圓錐曲線; P,Q 之對應各爲切於二曲線之直線 p,q。

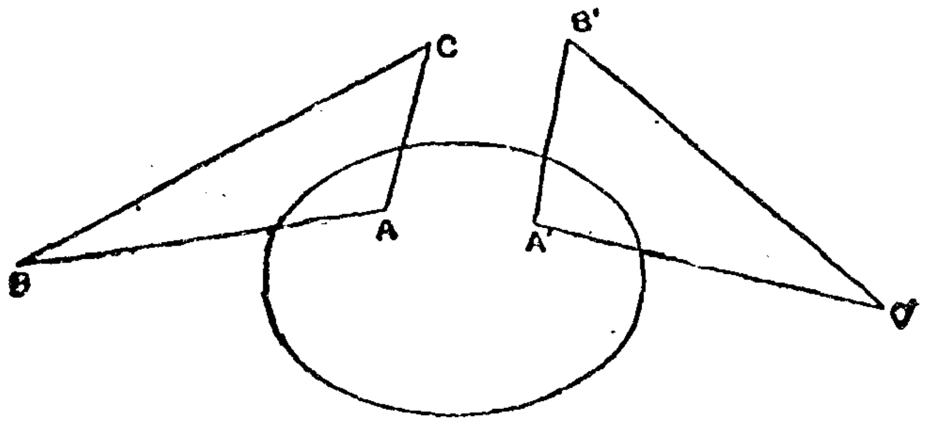
因 $P\hat{L}Q$ 爲直角,故 p 與 q 爲正交。

因 PQ 之曲線包爲以 L 爲一焦點之圓錐曲線, 故 (pq)之軌跡爲一圓。

於是得以下:

定理 自一點 T 至二同焦點之圓錐曲線,各作一切線,設此二切線爲正交,則 T 之軌跡爲一圓。

240. 定理 設二三角形對於一圓錐曲線各成自極三角形,則其六頂點同在另一圓錐曲線上,其六邊爲另一圓錐曲線之切線。

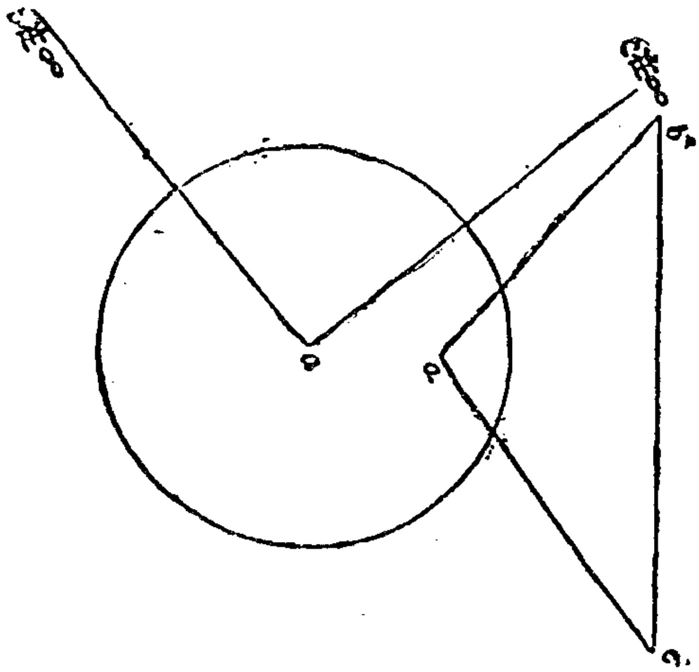


設 ABC 及 A'B'C' 爲對於圓錐曲線 S 之兩自極三角形;射影 S 使成圓,以 A 射成圓心,則 (以小字母代各大字母)ab,ac 半徑對,故爲正交,bc 皆在無窮遠線上。

因 a'b'c' 爲對於圓成自極三角形,

故圓心 a 爲△a'b'c' 之垂心。

作一圓錐曲線過 a',b',c',a,b,五點,此線必爲等腰雙曲線。§ 195



於是 c 亦在此曲線上，以等腰雙曲線上在無窮遠之二點，與任一點之聯線皆爲正交故也。

故六點 a,b,c,a′,b′,c′ 同在一圓錐曲線上。

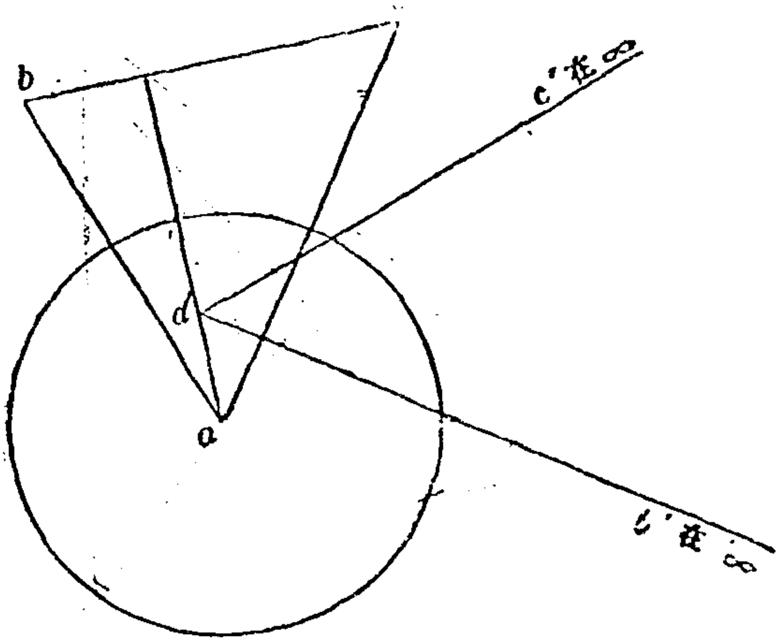
∴　六點 A,B,C,A′,B′,C′ 同在一圓錐曲線上。

本定理之第二部乃第一部之對極定理，今已證明第一部，則後者可以對極法證之。

241. 定理　一三角形與其對於一圓錐曲線之對極三邊形互相透視。

設△ABC對於圓錐曲線 S 之對極爲一三邊形 A′B′C′

各邊爲 B'C',C'A',A'B', 此三邊各爲 A, B ,C 三點之



極線。

射影 S 使成圓，以 A 射成圓心，則 B',C' 射於無窮遠。

於射影圖形中，以小字母表各點，則因 a 爲 bc 之極點，aa' 必垂於 bc。

而 b' 爲 ac 之極點，故 ab' 垂於 ac。

今因 bb' 平行於 ab'，故 bb' 垂於 ac'。

同理 cc' 垂於 ab。

∴ aa',bb',cc' 交於△abc 之垂心上。

$\therefore$　AA', BB', CC' 交於一點。

故$\triangle ABC$與$\triangle A'B'C'$互相透視。

習　題

1.　設 S 與 S′爲對於 T 之二對極圓錐曲線，則 S′之曲線心，爲 T 之曲線心對於 S 之極線之對應。

2.　一組平行線對於 T 之對極爲一列點，過 T 之曲線心。

3.　求以下定理之對極，以任何圓錐曲線爲底。

一定直線對於一組過四定點之圓錐曲線之極點之軌跡爲一圓錐曲線。

求以下 4 至 9 之對極定理，以圓爲對極底。

4.　自三角形之頂至其對邊之垂線交於一點。

5.　一圓之切線垂於過切點之半徑。

6.　同立於一弧之二圓周角相等。

7.　圓內接四邊形之二對角之和爲二直角。

8.　設一圓之二切線之交角爲定角時，則交點之軌跡爲一圓。

9. 一圓上二點與圓心成定角時，則聯此二點之直線之曲線包爲另一圓。

10. 同以一定點爲一焦點並同外接於一定三角形之圓錐曲線有四，其一之正焦弦爲餘三者之和。

11. 以對極法證下題：設 ABC 爲一拋物線之外切三角形，S 爲焦點，則過 A，B，C，並各垂於 SA，SB，SC 之三直線交於一點[以 S 爲心作圓，以此圓爲對極底。]

12. 設 O 爲二同焦點之拋物線之公切線上之一點。自 O 作二切線各與二拋物線相切，則此二切線之交角等於二曲線軸之夾角。

13. 一圓錐曲線外接於一三角形 ABC，其垂心 O 卽爲曲線之一焦點，則對此焦點之準線必垂於 OI 上，I 乃 △ABC 之外接圓心。又設此準線與 OI 交於 X，AD 爲 BC 之垂線時，則 IO·OX＝AO·OD。

14. 以三角形之外接圓心 O 任作一圓，則此三角形對於此圓之對極三邊之外接圓過 O。

15. 設 O 爲一定點，AB 爲一圓之任一直徑，OA，OB 與圓再交於 P，Q。求證 P，Q 二點之切線交於一定直

線上；此直線平行於 O 之極線。

16. 設二三角形對於一圓錐曲線成對極，則其透視心與透視軸對於此圓錐曲線爲極點與極線。

第十八章

虛圓點 焦點

242. 對於一圓錐曲線之各對線對所成之束線，爲對合束線。其二重線乃自交點所作曲線之兩切線，此於前數章已屢屢論及，若此交點爲曲線之心時，則線對皆爲直徑對而對合束線之二重線爲二漸近線。

今設上述之曲線爲一圓，則各對直徑對成一正交束線，而兩重線爲二虛線。

故圓之漸近線乃二虛線。

但交於一點之正交束線，與交於他點之正交束線，其各相當線對之方向相同，卽其重線爲同方向。

故一圓之二漸近線(虛線)各平行於他圓之二漸近線。

設 a, b 爲 c 圓之二漸近線。a′, b′ 爲 c′ 圓之二漸近線。則 a, a′ 之交點與 b, b′ 之交點皆在無窮遠線上。

但 a, a′ 各爲 c, c′ 之漸近線，故各與 c, c′ 遇於無窮遠。b, b′ 各爲 c, c′ 之漸近線，故各與 c, c′ 遇於無窮遠。

故 c 及 c′ 必同過無窮遠線上二虛點。卽 a 與 a′ 及 b 與 b′ 之二交點也。

依上所述，得一結論：任何圓皆過在無窮遠線上之二虛點，此二點稱爲虛圓點(Circular points)，

含圓之平面上任一點之虛圓線 Circular lines，乃聯此點與二虛圓點之二虛線，此二虛線卽爲過此點各對線對所成之正交束線之重線也。

243. 以上所言，亦可以解析方法明之：

設縱，橫坐標交於一圓之心，則此圓之方程式爲：

$$x^2+y^2=a^2。$$

二漸近線之方程式爲 $x^2+y^2=0$。卽一對虛線

$$y=ix \text{ 及 } y=-ix。$$

此兩虛線又爲圓心之二虛圓線，與圓遇於虛圓點。

今若另畫一新坐標仍交於圓心，則對於新坐標圓之方程式不變，且二漸近線與新橫坐標之夾角亦不變，卽仍爲 $\tan^{-1}(i)$ 及 $\tan^{-1}(-i)$ 也。今證之如下：

設新，舊坐標之夾角爲 $\tan^{-1}(m)$。

則虛線 $y=ix$ 與新坐標之夾角爲

$$\tan^{-1}\left(\frac{i-m}{1+im}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{i(1+im)}{1+im}\right)=\tan^{-1}(i)。$$

244. 定理 設 $A\hat{O}B$ 之角度爲常數，Ω 及 Ω' 爲二虛圓點，則線束 $O(\Omega\Omega'AB)$ 之交比值爲常數。

因 $$O(\Omega\Omega'AB)=\frac{\sin\Omega O\Omega'\cdot\sin AOB}{\sin\Omega OB\cdot\sin AO\Omega'}$$

但 $\Omega\hat{O}\Omega'$，$\Omega\hat{O}B$，及 $A\hat{O}\Omega'$ 三角度爲常數，以虛圓線與平面上任何線成等角，又自原設 $A\hat{O}B$ 爲常數。

故 $O(\Omega\Omega'AB)$ 之值爲常數。

245. 定理 過虛圓點之圓錐曲線皆爲圓。

設 C 爲曲線 S 之心。Ω 及 Ω' 爲其上之二虛圓點。

則 $C\Omega$ 及 $C\Omega'$ 爲 S 之二漸近線。

但漸近線爲各對直徑對所成之對合束線之重線。

今已知兩重線皆爲虛線，故此束線爲正交束線。

卽 S 之各對直徑對爲正交。

故 S 爲一圓。

相交於二點或二點以上之諸圓錐曲線之性質，可應用虛圓點以證明之。

因同過二點之諸圓錐曲線，得同時射影成一組圓。

得欲此結果，僅須將二交點射影成虛圓點，則於射影平面上，各圓錐曲線各過二虛圓點，故皆爲圓。

讀者當知此種射影乃虛射影。

246. 虛圓點常應用於證題，玆舉數例以明之。

前此已證明一直線截一組同軸圓於諸點，屬於一對合列點。自此定理可得笛沙兒定理（§ 226），即一直線截一組同過四點之圓錐曲線於諸點，屬於一對合點列。

因若將四點中之二點射影成虛圓點，則此組曲線成一組同過二點之圓，即爲一組同軸圓也。於是可知同軸圓之對合性質乃笛沙兒定理之特例也。因同軸圓有四公點，二點爲虛圓點，二點爲與軸之交點。

247. 用虛圓點以證下題。

設一三角形爲對於一等腰雙曲線成自極三角形，則其外接圓過曲線之心。

設 O 爲曲線心，$\triangle ABC$ 對於曲線成自極三角形，Ω 及 Ω' 爲虛圓點。

則 $O\Omega$ 及 $O\Omega'$ 爲交於 O 之正交束線之兩重線。等腰雙曲線之兩漸近線屬於此正交束線，故 $O\Omega$ 及 $O\Omega'$ 屬

於以二漸近線爲二重線之對合束線。(§ 82) 故 OΩ 與 OΩ'爲對於雙曲線之直徑對。

又因 O 爲無窮遠線, $\Omega\Omega'$之極點。

$\therefore$ $\triangle O\Omega\Omega'$ 亦爲一自極三角形。

故六點 A,B,C,O, Ω, 及 Ω'在一圓周上。(§ 240)

但此圓錐曲線爲一圓,因其過二虛圓點 Ω 及 Ω'故。

故 A,B,C,O 同在一圓周上。

系 設一等腰雙曲線外接於一三角形。則其曲線心在三角形之九點圓上。

以此三角形之垂足三角形對於雙曲線成自極三角形,(第十四章習題 8)。

248. 定理 同心之諸圓相切於無窮遠點。

設 O 爲圓心。Ω, Ω'爲虛圓點, 則諸圓皆與 OΩ 及 OΩ'切於無窮遠點。即諸圓相切於 Ω 及 Ω'二點。

249. 圓錐曲線之焦點 Foci of Conics。

任何圓錐曲線有四焦點: 其二爲實點,在一軸上;其二爲虛點,在他軸上。

因過焦點之諸線對成一正交束線。又因交於任何點

之諸線對所成之對合束線，以自交點所作之二切線爲二重線；於是可知過焦點之虛圓線爲圓錐曲線之切線。

但虛圓線乃過虛圓點Ω及Ω′之直線。

故圓錐曲線之焦點爲自二虛圓點Ω及Ω′所作四切線之交點，故其數有四。

爲使讀者明瞭起見，假設二虛點Ω及Ω′能以圖表之，如實點然。

自Ω及Ω′所作四切線交於S，S′及F，F′。S，S′及F，F′各爲四邊形FSF′S′之對頂。

設FF′與SS′交於O。

今因FF′，SS′，及ΩΩ′三邊所成之三角形爲自極三角形。(§ 120之對極)

∴ O爲ΩΩ′之極點，即無窮遠線之極點。

∴ O爲曲線心。

更有進者，△OΩΩ′爲四角形SS′FF′之對角三角形。

∴　　$O(\Omega\Omega',FS)=-1$。§ 76

∴ OF與OS屬於以OΩ及OΩ′爲二重線之對合

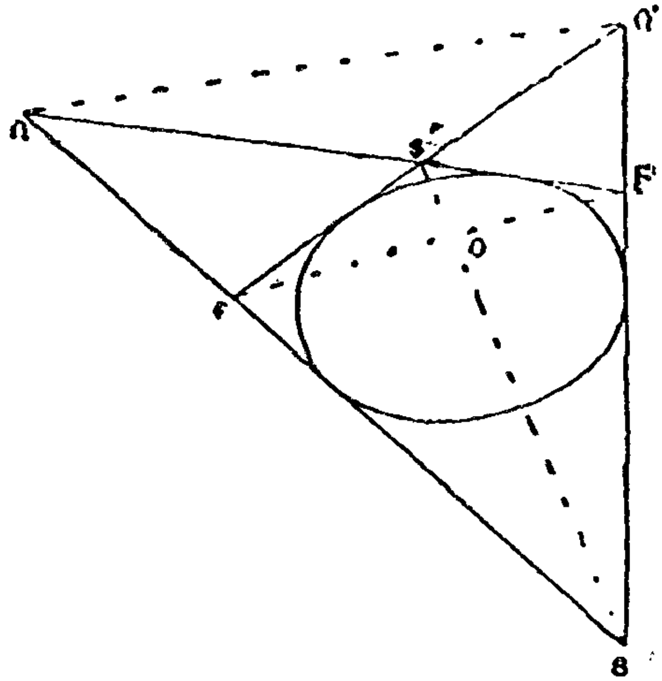
束線。

$\therefore$ OF 與 OS 正交。

又因 OS 與 OF 對於此曲線成線對，

故 OS 及 OF 爲二軸。

於是有兩對焦點，一對在一軸上，他對在第二軸上。



今已知一對 S 及 S′ 爲實焦點，則其餘一對 F 及 F′ 必爲虛點。因如 F 爲一實點，則 FS 與無窮遠線交於實點，是與理不合。

故 F 及 F′ 必爲二虛點。

系　聯不相對之焦點之四直線，皆爲曲線之切線，而此四直線與曲線之切點，同在一圓周上。

250. 定理　同切於一四邊形之一組圓錐曲線，得射影成一組同焦點之圓錐曲線。

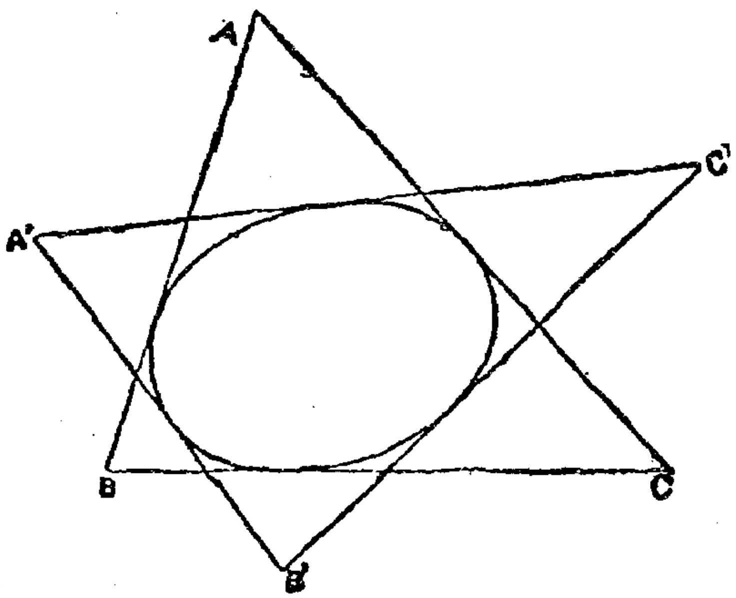
設 A,C;B,D;E,F 爲四邊形 ABCD 之三對對頂。

射影 E,F 於無窮遠使成虛圓點。

則　A,C;B,D 爲四焦點。

系　同焦點之一組圓錐曲線同切於四直線。

251. 定理　二三角形同切於一圓錐曲線，則其六頂點在另一圓錐曲線上。



設 ABC 及 A'B'C' 二三角形同切於一圓錐曲線 S。

射影此圖形於 π，使 B，C 射成虛圓點 ω 及 ω'。

則 S 之射影爲一拋物線，因 S 之射影爲切於無窮遠線之圓錐曲線也。

又因自虛圓點所作之切線必過焦點，故 A 之射影爲拋物線之焦點。

於射影上以小字母代各大字母。

因拋物線之外切三角形之頂點及拋物線之焦點同在一圓上。

$\therefore$ a，a'，b'，c'，ω，ω' 同在一圓上。

$\therefore$ A，A'，B，B'，C，C' 同在一圓錐曲線上。

本定理之逆可以對極法證之。

252. 於 ρ 平面上，Ω 及 Ω' 爲二虛圓點，射影之 π 平面上得二點 ω 及 ω'，則 ω 及 ω' 不必爲 π 平面上之虛圓點。ω 及 ω' 於 π 上之位置，無論爲實爲虛，一任吾人之意。因若欲射影 ρ 上二虛圓點 Ω，Ω' 於 π 上之 ω，ω' 二點時，僅須以 $\Omega\omega$ 與 $\Omega'\omega'$ 之交點爲射影之頂而已。

於是可得以下之數條：

(1)　ρ 平面上諸圓得射影於 π 平面成同過二點 ω 及 ω' 之一組圓錐曲線。

(2)　ρ 平面上諸拋物線，得射影成一組同切於一直線 $\omega\omega'$ 之圓錐曲線。

(3)　於 ρ 平面上諸等腰雙曲線以二虛圓點 Ω 及 Ω' 爲一對點對，故得射影成一組圓錐曲線，同有一點 ω,ω'。

(4)　對於 ρ 平面上諸圓錐曲線，其曲線心爲 $\Omega\ \Omega'$ 之極點，故曲線心得射影成一定直線之極點。

(5)　同心諸圓得射影成一組圓錐曲線，同切於二點 ω,ω'。

(6)　ρ 平面上一對正交之直線 OA，OB 得射影成一對直線 Oa，Ob，與 $O\omega$ 及 $O\omega'$ 成調和束線。因 OA 及 OB 屬於以 $O\Omega$ 及 $O\Omega'$ 爲二重線之正交束線中。故 $O(AB,\ \Omega\ \Omega')=-1$；所以 $O(ab,\omega\omega')=-1$。

(7)　ρ 平面上以 S 爲一焦點之圓錐曲線得射影成另一圓錐曲線切於二直線 $s\omega$ 及 $s\omega'$。s 爲 S 之射影。ω，ω' 爲任二定點。

且 ρ 平面上一圓錐曲線之二焦點 S，S′ 得射影於 π

平面之二點 s, s'。與二定點 ω 及 ω' 成一曲線之外切四邊形。

253. 於 § 251 中，以 ω 及 ω' 代 π 平面上之兩虛圓點，然 ω 及 ω' 並非 ρ 平面上之虛圓點之射影也。

本書每用小字母於射影圖形上，以代各大字母，故 Ω 之射影以 ω 代之。然須注意者：若 Ω 爲 ρ 平面上之虛圓點時，則 ω 不爲 π 上之虛圓點，若 ω 爲 π 上之虛圓點，則 Ω 不爲 ρ 上之虛圓點，蓋虛圓點不能射影於虛圓點故也。

254. 如以上數節中所述，則由一種已知之關係，可求得另一種關係。

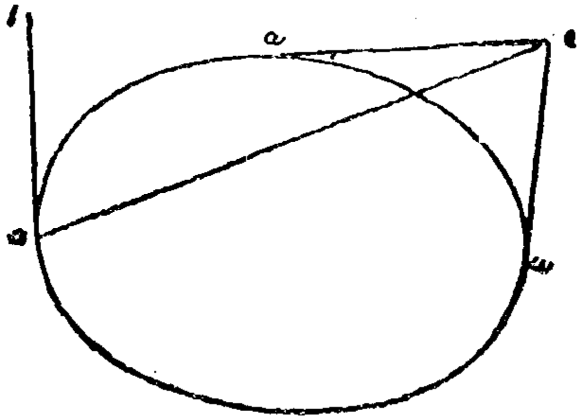
吾人已知一圓上之切線垂直於半徑。

今欲自此定理推得一新定理。

射影此圓成一圓錐曲線，則此曲線必過二定點 ω 及 ω'；圓心 C 之射影 c 必爲 ω, ω' 之切線之交點。

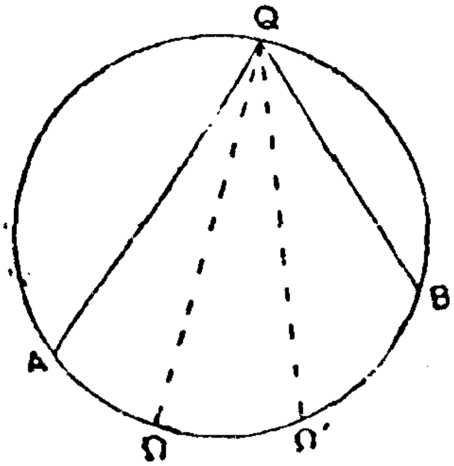
於是推得一新定理如下：

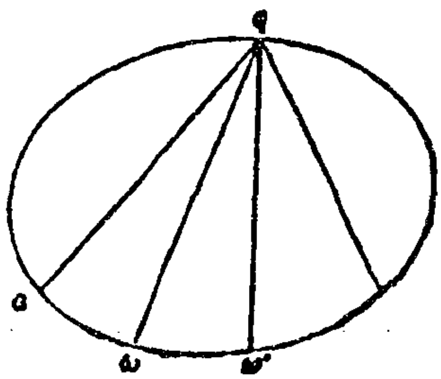
定理 圓錐曲線上二點 ω 及 ω' 之切線交於 c，而 a t 爲曲線上 a 點之切線，則 $a(t\,c, \omega\,\omega') = -1$。



255. 同立於一弧上之諸圓周角相等。

今試由此定理求一新定理。





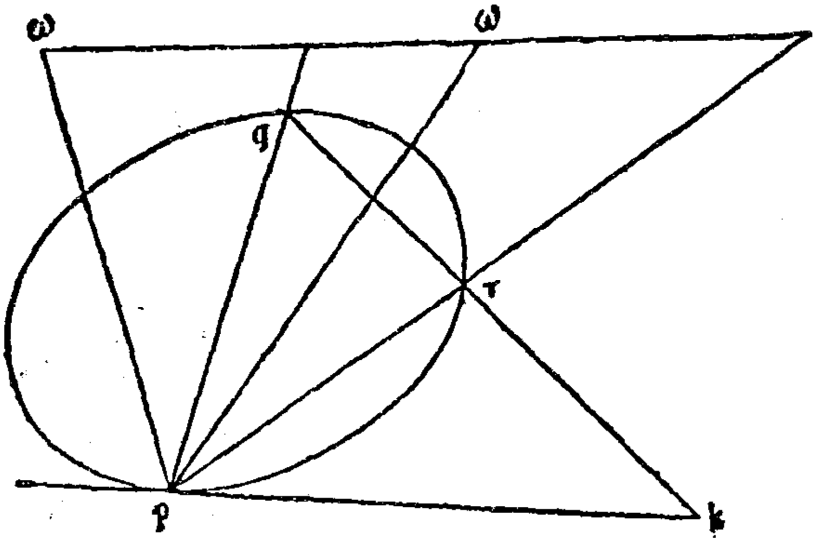
設 $A\hat{O}Q$ 爲立於 $\widehat{AB}$ 之一圓周角。$Q\Omega$ 及 $Q\Omega'$ 爲 Q 點之二虛圓線。

射影此圖形成圓錐曲線，則 ω 及 ω' 爲曲線上兩點。

於是知無論 q 在此曲線上任何位置 $q\,(ab,\omega\omega')$ 爲一

常數，此卽 § 244 定理也。

256. 若 PQR 爲一等腰雙曲線之內接三角形，P 角爲直角，則 P 點之切線垂直於 QR。此定理前已證明，今據此以求新定理。

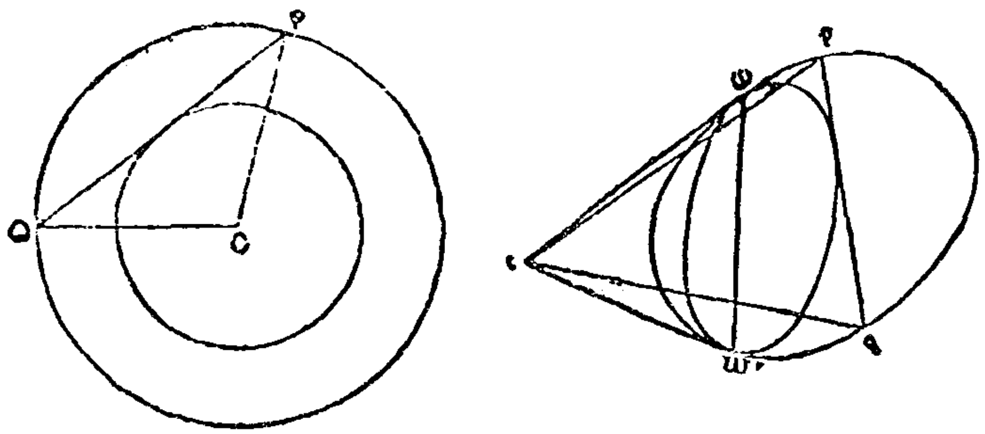


射影此雙曲線成另一圓錐曲線，以二實點 ω 及 ω′ 爲點對，則得

定理 設 p 爲一圓錐曲線上之一點，ω 與 ω′ 對於此曲線成對點，於此曲線另取二點 q 及 r。使 $p(qr,\omega\omega')=-1$。

又若 qr 與 p 之切線交於 K，則 $k(pq,\omega\omega')=-1$。

257. 設一圓之諸弦切於與此圓同心之一圓，則各弦兩端與圓心成等角，此乃初等幾何中最淺易之定理也。今自此定理求一新定理。



設 PQ 爲一弦，C 爲圓心，切於 PQ 之圓與大圓切於兩虛圓點 Ω 及 Ω'，故二圓之射影爲二圓錐曲線切於兩點 ω 及 ω'。

因 C 爲 Ω Ω'之極點，故 C 之射影 c 爲 ωω' 之極點。

於是得：

定理　設二圓錐曲線切於 ω 及 ω' 二點，二點上之公切線交於 c；pq 爲外曲線之一弦與內切線相切，則 C(pq ωω')之值爲常數。

習題

1. 設一圓錐曲線常過二定點 P 及 P′，且常切於二定直線，則其與二定直線之切點之聯線與 PP′ 交於一定點。

2. 設 Ω，Ω′ 爲二虛圓點，則一拋物線之二虛圓點與 Ω 及 Ω′ 相重，其曲線心及另一實焦點，與 Ω Ω′ 與曲線之切點重。

3. 設三圓錐曲線同過四點，任二曲線之切線與餘一相交於二點；則此二交點及二切點成一調和列點。

4. 求上題之對極定理。

5. 外接於一三角形之等腰雙曲線心之軌跡，爲此三角形之九點圓。

應用虛圓點之射影法，求以下二定理之新定理：

6. 三角形各邊中點之垂線交於一點。

7. 同焦點之圓錐曲線爲正交。

求證下二定理，幷應用虛圓點之射影，以求新定理。

8. 一三角形對於一拋物線成自極三角形，則其外接圓心在此曲線之準線上。

9. 設 P 及 P′ 爲 $\triangle ABC$ 平面上二點，於一邊 BC 上，取一點 D，使 $D(CA,PP')=-1$。同樣於 CA 上取 E，AB 上取 F，則 AD，BE，CF 交於一點。

10. 二圓錐曲線切於 A，B 二點，設一曲線上 R 點之切線與他曲線交於 P 及 Q，且與 AB 交於 T，則 $(PQ,RT)=-1$。

第十九章

反圓變換

258. 於第二章 § 12 中,曾有逆點之定義,卽於一圓之半徑上,有二點 P 及 P',O 爲圓心,設 OP·OP'=半徑之平方時,則 P 與 P' 互稱爲逆點。若此圓半徑之值爲實數時,則 P 與 P' 同在 O 之一旁;因若在異旁,則OP·OP'之值爲一負數,而半徑之值爲一虛數矣。

今 P 若沿一曲線 S 而移動,則 P' 畫一曲線 S',稱 S 之反圓變形(Inverse curve),O 稱爲反圓變換心(Centre of Inversion),圓之半徑稱反圓變換徑(Radius of Inversion)。

若 P 移動於空間,則 P'亦動於此空間,於是OP·OP' 等於以 O 爲心之圓球之半徑之平方。故反圓變換 Inversion 中之逆點,吾人可除去平圓或球體之觀念。

設 O 爲空間之一定點, P 爲任意一點: P' 爲 OP 上或其引長線上之一點,若 OP·OP' 爲一常數 K^2 時,則 P

與 P′ 卽互稱爲逆點。故有時常稱 P′ 爲對於 O 點 P 之逆點，實則 P′ 爲對於此 O 爲心，以 k 爲半徑之圓，P 點之逆點也。

259. 定理　一圓對於同平面上之點之反圓變換或爲一圓，或爲一直線。

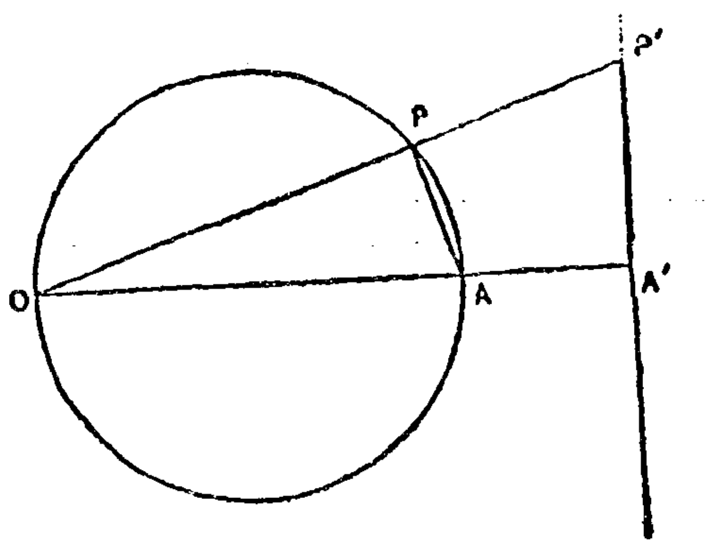
先設反圓變換心 O 在此圓周上，k 爲變換徑。

作直徑 OA，設 A′ 爲對於 O，A 之逆點。

P 爲圓周上任一點，p′ 爲其逆點。

則 $OP \cdot OP' = k^2 = OA \cdot OA'$。

∴ P，A，A′，P′ 在一圓周上。



$\therefore$ $A\hat{A'}P'$ 爲 $A\hat{P}P'$ 之補角，故爲直角。

$\therefore$ $A'P'$ 垂於 AA'。

故 P' 之軌跡爲一直線垂直於直徑 OA，並過 A 之逆點。

次設 O 不在圓周上，A 爲圓心。

P 爲圓周上任一點，P' 爲其逆點，OP 與圓再交於 Q，

則 $OP \cdot OP' = k^2$；且

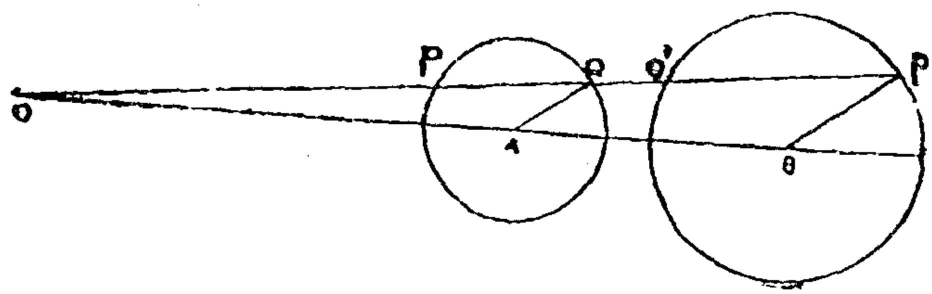
$OP \cdot OQ =$（自 O 所作圓之切線）$^2 = t^2$。（假設）

$$\therefore \qquad \frac{OP'}{OQ} = \frac{k^2}{t^2}。$$

於 OA 上取一點 B，使 $OB : OA = k^2 : t^2$。

則 B 爲一定點，而 BP 平行於 AQ。

且 $BP : AQ = OB : OA = k^2 : t^2$。（常數）



故 P' 軌跡爲一圓，

系 1. 一直線之反圓變形爲過度換心之一圓。

系 2. 設二圓互爲反圓變形，則其變換心卽爲相似心，而二圓半徑之比等於二圓心與變換心之距離之比。

〔註〕 二圓之公切線必過 O，其兩切點互爲逆點。

260. 定理　一球體之反圓變形爲一平面，或爲一球體。

本定理之證可由前定理得之。

先將第一圖以 OA 爲軸而旋轉，則得一球體及一平面，故若變換心 O 在一球面上，則此球體之反圓變形爲一平面。

次將第二圖以 OA 爲軸旋轉，則得二球體。故 O 若不在球面上，則此球體之反圓變形爲另一球體。

261. 一圓對於不在其平面上一點之反圓變形爲圓，因此圓可視爲兩球體相交之曲線。

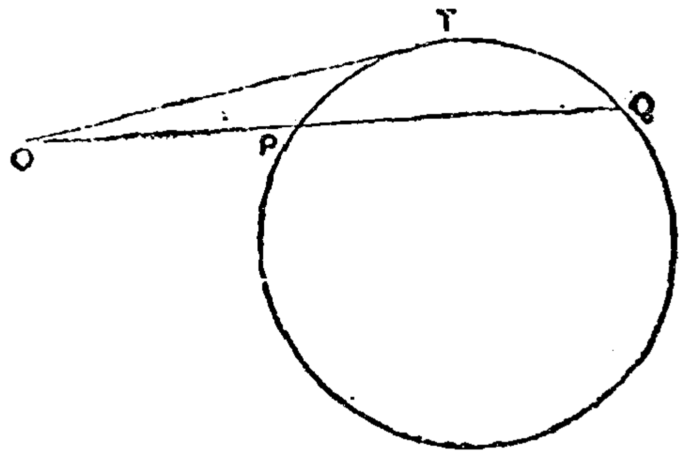
而此兩球體若皆不徑過變換心 O 時，其反圓變換亦爲相交之二球體，其交界之平圓乃原二球體交界之圓之反圓變形也，故一圓對於不在其平面上一點之反圓變形亦爲一圓。

262. 定理　一圓與變換心 O 同一在平面上，且自

O 所作此圓之切線之長度等於變換徑時，則其反圓變形仍為此圓。

設 OT 為切線,作直線 OPQ 與圓交於 P,Q。

則 $OP \cdot OQ = CT^2 =$ (反圓變換徑)^2。任 P 與 Q 對於 O 互為逆點。



故此圓之一部分為他一部分之反圓變形,或反之。

系 1. 一組同軸圓之反圓變形，若其變換心在其公共根軸上,仍為此組同軸圓。

系 2. 同平面任意三圓之反圓變形，若其變換心為三軸幕之交點時,仍為此三圓。

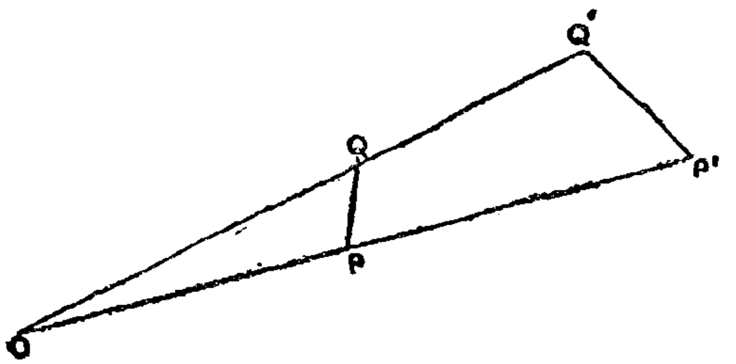
263. 定理 二曲線之交角等於其反圓變形曲線之交角。

設 P 及 Q 爲曲線 S 上之兩點，P′及 Q′ 各爲 P 及 Q 之逆點，在 S 之反圓變形上，反圓變換心爲 O。

則因　　$OP\cdot OP'=k^2=OQ\cdot OQ'$。

∴ QPP′Q′ 爲圓內接四邊形。

∴　　$O\hat{P}Q=O\hat{Q'}P'$。

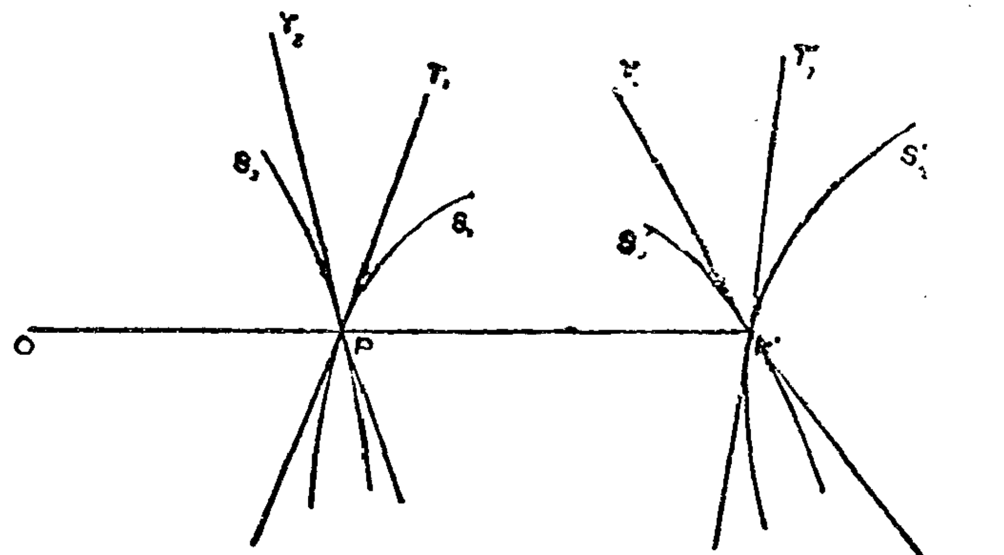


今若 Q 向 P 移動，而與之重，PQ 成爲 S 曲線 P 點之切線。同時於反圓變形上，Q′ 向 P′ 移動，而與之重，P′Q′ 成爲 S′ 曲線 P′ 點之切線。

∴ P 點及 P′ 點之切線與 OPP′ 成等角。

此二切線乃反平行。

設 S_1 及 S_2 爲同平面二曲線，相交於 P，二曲線之交角乃切於 P 之二切線之交角也。反圓變形 S'_1 及 S'_2 之交點 P′ 乃 P 之逆點（對於 O），P′ 點之切線 $P'T_1$ 及 $P'T_2$



各爲 PT_1，PT_2 之反圓變形。自本節之前半可知 $T_2\hat{P}T_1 = T'_1\hat{P}'T'_2$。

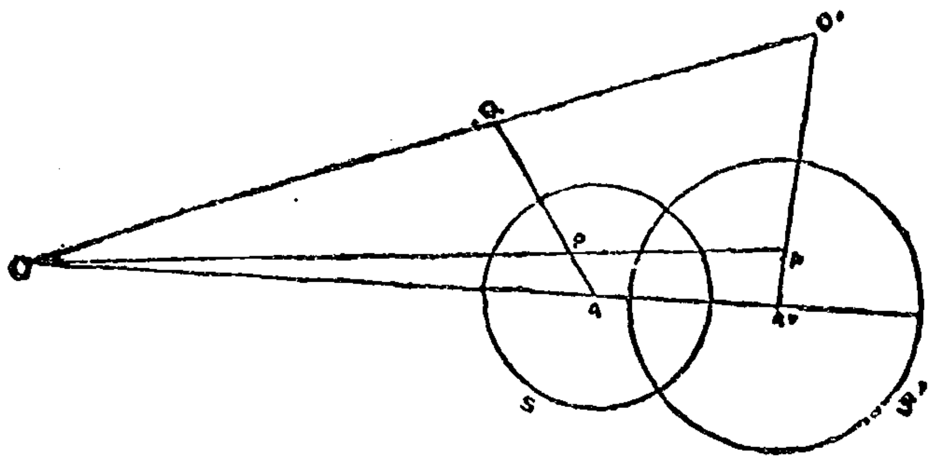
故 S_1 與 S_2 之交點等於其反圓變形曲線之交角。

系 設二曲線切於一點 P，則其反圓變形曲線切於 P 之逆點。

264. 定理 設 S 圓對於一點 O 之反圓變形爲 S′ 圓，P 與 Q 爲對於 S 圓互爲逆點。其對於 O 之逆點各爲 P′ 及 Q′，則 P′ 與 Q′ 爲對於 S′ 互爲逆點。

因 P 與 Q 對於 S 互爲逆點，故過 P，Q 之任何圓與 S 正交，以是 PQO 圓與 S 正交。

故 PQO 圓之反圓變形必與 S′ 正交。



但 PQO 圓之反圓變形爲一直線，因變換心 O 在圓周上故也。

故 P'Q' 爲 OPQ 圓之反圓變形。

故 P'Q' 與 S' 圓正交，即爲過 S' 圓心之直線也。

又因過 P, Q 之任何圓與 S 正交，故過 P'Q' 之任何圓與 S' 正交。(§ 263)

故若 A_1 爲 S' 之圓心。

$$A_1P' \cdot A_1Q' = S' \text{ 半徑之平方。}$$

故 P 與 P' 對於 S' 互爲逆點。

265. 定理　一組不相交之同軸圓得爲一組同心之圓。

一組同軸圓不相交,故其二極限點爲實點,設爲 L 及 L′。

今 L 及 L′ 對於此組中任一圓互爲逆點,故其對於變換心之二逆點,對於反圓變換中各圓亦互爲逆點。(§264)

以 L 爲變換心,則其反圓變形爲無窮遠點,故 L′ 之反圓變形,爲同軸圓組之反圓變形之圓心。

266. 伏愛爾巴定理 Feuerbach's theorem

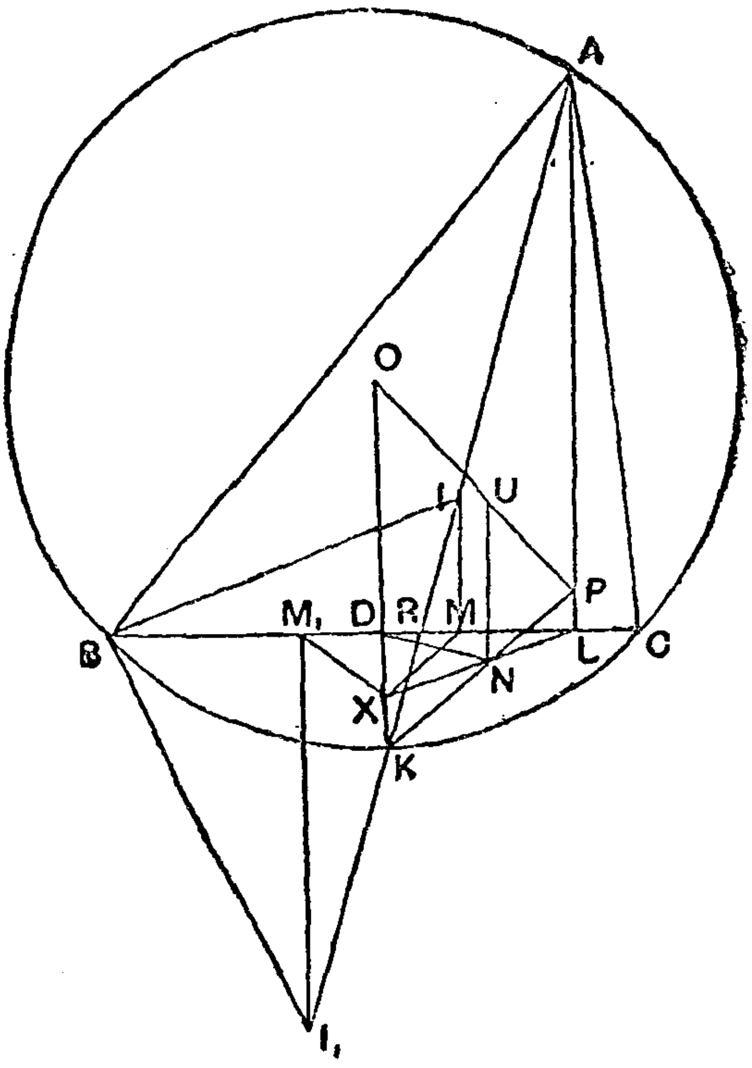
反圓變換法常應用以證題,伏愛爾巴定理亦得用此法證之。

定理　一三角形之九點圓與此三角形之內切及三旁切圓相切。

設 ABC 爲一三角形。I 爲其內切圓心,I_1 爲對 A 角之旁切圓心,內切圓及對 A 角之旁切圓各與 BC 切於 M, M_1。

又設直線 AII_1(A 之分角線)與 BC 交於 R,與外接圓交於 K。

作 AL 垂於 BC,設 P, O, 及 U 各爲△ABC 之垂心,外接圓心,及九點圓心,則 U 爲 PO 之中點。



聯 OK，與 BC 交於 D，則 OK 垂於 BC。(因 AK 爲 $\hat{A}$ 之分角線)

今因 BI 及 BI_1 爲 $A\hat{B}C$ 之內，外分角線。

$\therefore \qquad (AR, II_1) = -1$。

$$L(AR, II_1) = -1。$$

因 $R\hat{L}A$ 為直角，故 LI 及 LI_1 與 BC 成等角。§ 27 系 2。

∴對於內切圓及旁切圓，L 之極線與 BC 成等角。

對於內切圓 L 之極線必過 M；對於旁切圓 L 之極線必過 M_1。

設 MX 為 L，對於內切圓之極線截 OD 於 X。

則因 D 為 MM_1 之中點。§ 12 系

$$\therefore \qquad \triangle XM_1D \equiv \triangle XMD。$$

$$\therefore \qquad X\hat{M}_1D = X\hat{M}D。$$

故 M_1X 為對於旁切圓 L 之極線，卽 L 與 X 對於二圓皆成點對。

設 N 為 XL 之中點，則自 N 所作二圓中任一圓之切線之平方 $= NX^2 = ND^2$。

故 N 在二圓之根軸上，而 D 亦在此根軸上，因 $DM_1 = DM$。

∴ ND 為二圓之根軸，故垂直於 II_1。

K 點之垂足線過 D，且 K 在 $\hat{A}$ 之平分線上，故此垂

足線垂直於 AK。

∴ DN 爲 K 點之垂足線。

但 K 點之垂足線平分 KP。

∴ KNP 爲一直線，N 爲其中點。

又因 U 爲 OP之中點，

∴ $UN=\frac{1}{2}OK$。

∴ N 爲九點圓上之一點。

今以 N 爲反圓變換心，ND 變換徑，求九點圓，內切圓及對 A 之旁切圓之反圓變換。

則內切圓及旁切圓之反圓變形仍爲此二圓。

因變換心 N 在九點圓上，而 D 及 L 之反圓變形仍爲 D 及 L，故九點之反圓變形爲直線 BC。

但 BC 與內切圓及旁切圓之反圓變形相切。

∴ 九點圓與內切圓及對 $\hat{A}$ 旁切圓相切。

同理　九點圓亦與對 $\hat{B}$ 及對 $\hat{C}$ 之旁切圓相切。

系　九點圓與內切圓之切點爲 M 之逆點，與對 $\hat{A}$ 之旁切圓之切點爲 M_1 之逆點。

習題

1. 設 A, B, C, D 四點在一直線上，A′, B′, C′, D′各爲其逆點。則

$$\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'B' \cdot C'D'}。$$

2. 設 P 爲一組同軸圓之平面上一點，則其對於此組中各圓之逆點 $P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots$ 在一圓周上。

3. 設 P 爲一組同軸圓之平面上一點，P′ 爲對於此組中一圓之逆點，P″ 爲對於另一圓 P′ 點之逆點，P‴ 爲對於第三圓 P″ 之逆點，⋯⋯。求證 P′, P″, P‴, ⋯⋯，等點在一圓周上。

4. 設一三角形之一頂爲定點，其九點圓亦爲定圓，則其垂心之軌跡爲一圓。

5. 一圖形對於二圓 C_1 及 C_2 之反圓變形各爲 S_1 及 S_2。設 C_1 與 C_2 爲正交，則對於 C_2, S_1 之反圓變形卽爲對於 C_1, S_2 之反圓變形。

6. 設過 P, A, B, 三點之圓與過 P, C, D 三點之圓爲正交，過 P, A, C 之圓與過 P, B, D 之圓又正交，則過 P, A, D 之圓與過 P, B, C 之圓亦爲正交。

7. 自△ABC之A角作平分線截BC於H，自H作△ABC之內切圓之另一切線HY。聯切點Y與BC之中點D，與內切圓再交於R，求證R即爲九點圓與內切圓之切點。

8. 一三角形ABC之三垂線AL，BM，CN交於垂心K。則同時切於KMAN，KNAL，KLCM三圓之圓必與△ABC之外切圓相切。[以K爲變換心，則三圓之反圓變形爲△ABC之三邊，而外接圓則成爲九點圓。]

9. 設A，P，Q爲一直線上三點，P′及Q′爲P及Q對於O之逆點，而P′Q′與OA交於A_1，則

$$\frac{AP\cdot AQ}{A_1P'\cdot A_1Q'}=\frac{OA^2}{OA_1^2}。$$

10. 設一圓切於△ABC之二邊AB及AC，幷與三角形之外接圓切於E；又設對A頂之旁切圓與BC切於F。求證AE，AF與$B\hat{A}C$之分角形成等角，[以A爲反圓變換心，求反圓變形，使C之反圓變形仍爲C。]

第二十章

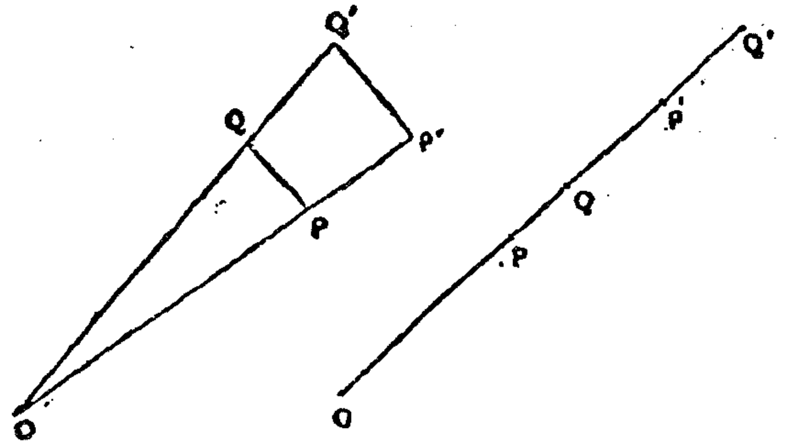
相似之圖形

267. 同位相似之圖形 Homothetic figures

設 F 爲一平面圖形，P 爲其上一點，若 O 爲同平面上之一點，於帶徑 OP (或 OP 之引長) 上取一點 P′，使 OP : OP′ 等於常數 K，今 P 若沿 F 圖形而移動，P′另畫一圖形 F′，F 與 F′ 互稱爲同位相似之圖形，O 爲同位相似心Homothetic centre。

二同位同似之圖形互相透視，因聯二圖形相當點之直線交於一點。

268. 定理 設 F 與 F′ 爲同位相似之二圖形，則 F



上任二點之聯線必平行於 F′ 上二相當點之聯線，此二線長度之比爲定比。

設 P, Q 爲 F 上之二點，與 F′ 上之 P′, Q′ 二點相當。

$\therefore \quad OP : OP' = OQ : OQ'$，　故 $PQ \parallel P'Q'$。

且　$PQ : P'Q' = OP : OP' =$ 常數。

若 Q 在 OP 上，則證之如下：

$\because \quad OP : OQ = OP' : OQ'$

$\therefore \quad OP : OQ - OP = OP' : OQ' - OP'$。

$\therefore \quad OP : PQ = OP' : PQ'$。

$\therefore \quad PQ : P'Q' = OP : OP'$。

系　設 F 及 F′ 乃爲二曲線 S 及 S′，則 S 上 P 點之切線必平行於 S′ 上相當點 P′ 之切線，因 S 上 P 點之切線可視作一截線 PQ，當 Q 向 P 移動之極限，而 P′ 點之切線則爲 S′ 上相當截線 P′Q′，Q′ 向 P′ 移動之極限，因 PQ 平行於 P′Q′，故 P 點之切線平行於 P′ 點之切線。

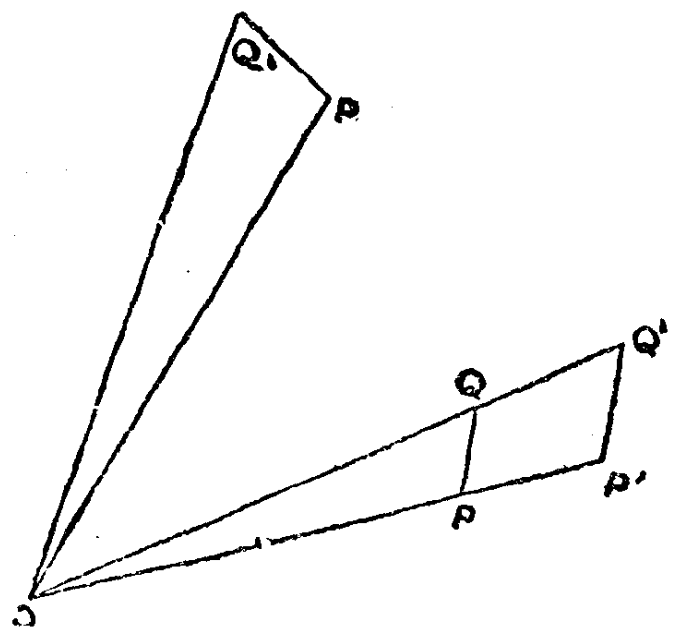
269. 已知二同位相似圖形之兩對相當點，則可定其相似心，因若已知兩對相當點 P, P′; Q, Q′，則相似心爲 PP′ 與 QQ′ 之交點。

若 Q 在 PP′ 直線上，則 O 亦在 PP′ 上，其位置依下式定之：　　OP : OP′ = PQ : P′Q′。

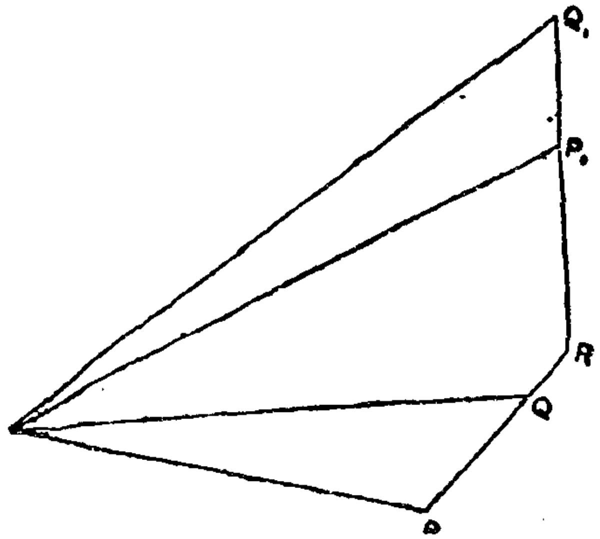
270. **正相似之圖形** Figures directly similar

設 F 與 F′ 為二同位相似之圖形，O 為相似心，今若以 F′ 繞 O 而旋轉與原位置成一角度。則 F 與 F′ 仍為相似，然不為同位矣。此二圖形稱為正相似，O 為正相似心。

於二正相似圖形 F 及 F′ 中，F 上任一點 P 及 F′ 上相當點 P′ 與 O 所成之角 $(P\hat{O}P')$ 為定角。且 OP : OP′ = PQ : P′Q′。(Q 及 Q′ 亦為一對相當點) 二三角形 OPQ 與 OP_1Q_1 相似。



271. 定理　設 $P,P_1;Q,Q_1$ 爲二正相似圖形中之兩對相當點，$PQ,P'Q'$ 交於 R，則二相似圖形之相似心爲二圓 PRP_1 與 QRQ_1 之第二交點。



設 O 爲二圓形之正相似心。

$\because$　　　　$O\hat{P}Q=O\hat{P}_1Q_1$。

故 $O\hat{P}R$ 與 $O\hat{P}_1R$ 相補。

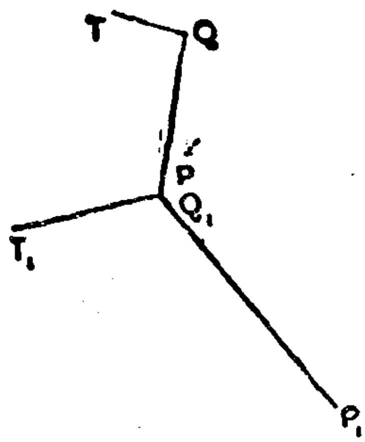
$\therefore P,O,P_1,R$ 同在一圓周上。

同理證　Q,O,P_1,R 同在一圓周上。

系　於正相似之二圓形中，若已知其兩對相當點，可定其相似心。

〔註〕　以上定理乃假定 P 不與 P_1 或 Q_1 相合。

若 P 與 P_1 相合，則 P 即爲正相似心，此理甚明。



若 P 與 Q_1 相合，則可以下法求其相似心。

作 QT 及 Q_1T_1，使 $P_1\hat{Q}_1T_1 = P\hat{Q}T$，且使

$$Q_1T : QT = P_1Q_1 : PQ。$$

於是 T 與 T_1 亦爲二圖形中之一對相當點。

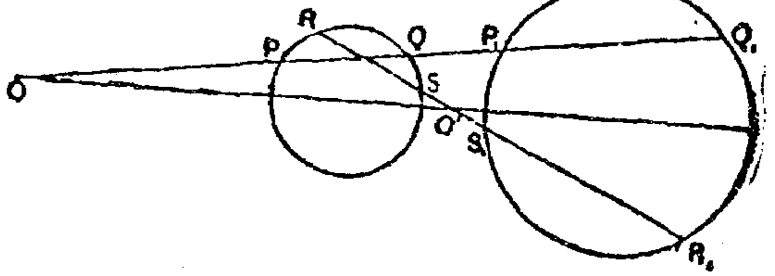
故相似心而依本定理求之。

272. 於 § 270 中已知正相似圖形之定義，今 F′ 若繞 O 而旋轉 180° 之角，則聯 F 及 F′ 上相當點之直線皆過 O，二圖形 F 與 F′ 稱爲反相似位 Antihomothetic，O 爲反位相似心，Antihomothetic centre。

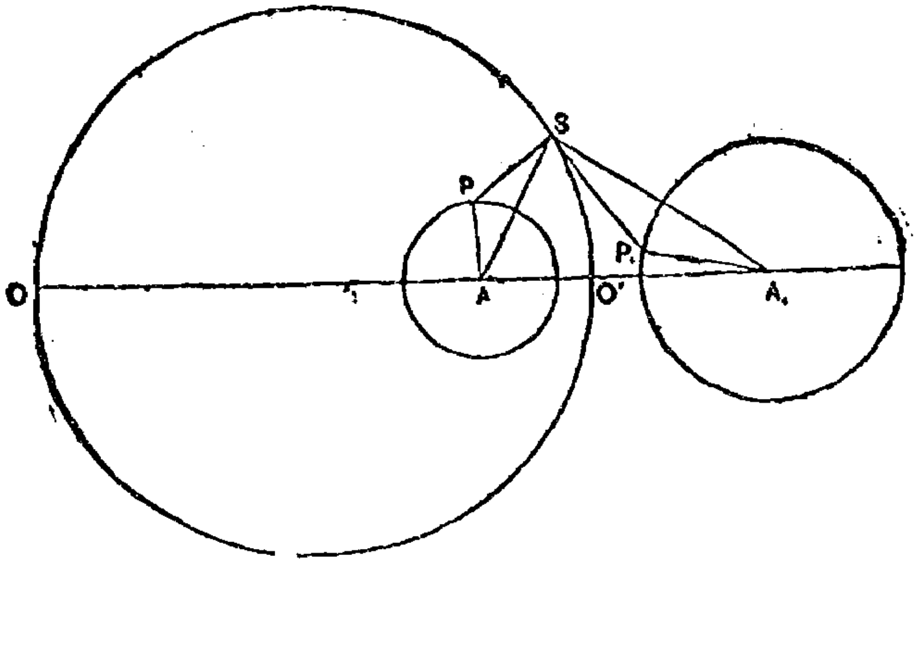
若 P 及 Q 爲 F 上之二點，P′ 及 Q′ 爲 F′ 上之相當點，則 PQ 必平行於 P′Q′，但其方向相反。

273. 應用於同平面之圓。

內，外分二圓之圓心聯線於 O 及 O'，使成二圓半徑之比，則自 § 25 及同位，反位相似之定義，可知 O 及 O' 各為二圓之同位及反位相似心。



前此稱 O 及 O' 為二圓之相似心，然二圓之相似心不必在圓心線上。若二圓之圓心各為 A 及 A_1，S 為不在 AA_1 上之相似心，P 與 P_1 為 A 圓及 A_1 圓上之一對當點，



則二三角形 PSA 與 P_1SA_1 相似。

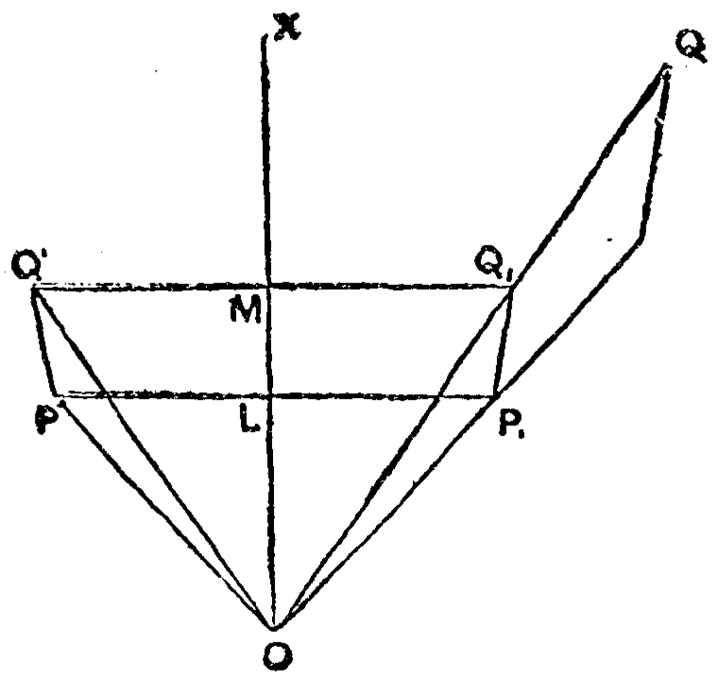
故 $SA : SA_1 = AP : AP_1 =$ 半徑之比

於是 S 在以 OO' 爲直徑之圓周。§ 27

故二圓之相似心之軌跡爲以其同位及反位相似心之聯線爲直徑之圓。

274. 反相似圖形 Figures inversely similar。

設 F 爲一圖形，O 爲同平面上之一定點，P 爲 F 上任一點，於此平面上取 P' 使 OP : OP' 爲定比，且使 OP' 與一定直線 OX 之夾角等於 OP 與 OX 之夾角，則 P 若



沿 F 圖形移動，P' 畫一新圖形 F'，F 與 F' 稱反相似，O 爲反相似心，OX 爲反相似軸。

作 $P'L$ 垂於 OX 與 OP 交於 P_1。

則因 OX 爲 $P'\hat{O}P$ 之分角線。

故 $$\triangle OLP' \equiv \triangle OLP_1。$$

$$\therefore \qquad OP_1 = OP'。$$

於是 $OP_1 : OP$ 等於定比。

則 P_1 所畫之圖形 F_1 與 F 爲同位相似。

自上所述可知若二同位相似之圖形，其一若以一定直線 OX（O爲同位相似心）爲軸而旋轉 $180°$ 時，則二圖形即爲反相似。

若過 O 任作一直線 OY，自 P' 作 K 垂於 OY，引長 $P'K$ 於 P_2 使 $P'K = KP_2$，則 P_2 所畫之圖形與 F 相似；然 OY 若不與 OX 相重時，不與 F 同位。

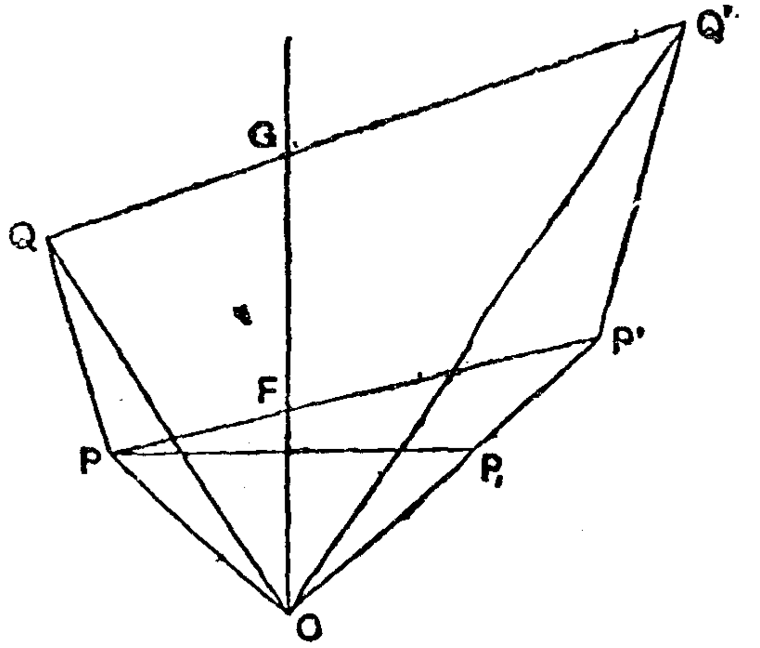
275. 設 F 與 F' 爲二反相似之圖形，P，Q 爲 F 上之二點，P'，Q' 爲 F' 之二相當點，則 $P'Q' : PQ = OP : OP' =$ 定比。

而 $P\hat{O}Q$ 等於 $Q'\hat{O}P'$，非等於 $P'\hat{O}Q'$，此乃異於正相

似圖形者。

276. 已知二反相似圖形之兩對相當點，求其反相似心，及反相似軸。

本題可分析之如下：



設 PP' 與軸交於 F，則 PF : FP' = OP : OP'。因軸成爲 $P\hat{O}P'$ 之分角線也。

∴　　　　PF : PF' = PQ : P'Q'。

故若 P，P'；Q，Q' 爲兩對已知之相當點。

聯 PP' 及 QQ'，分此兩直線於 F 及 G，使

$$PF : FP' = QG : GQ' = PQ : P'Q'。$$

則 FG 卽爲反相似軸。

再取一點 P_1 使與爲對於 FG 成對稱，聯 $P'P_1$，且引長之，使與FG交於 O，則 O 爲反相似心。

習　題

1. 二同位相似之圖形之直角射影仍爲二同位相似之圖形。

2. 設 $P,P';Q,Q'$; 及 R,R' 爲正相似或反相似之二圖形之三對相當點，則$\triangle PQR$ 與$\triangle P'Q'R'$ 相似，然其位置不必同。

3. 設 S 與 S′ 爲二正相似之曲線，今 S 若繞同平面之一點而轉，S 及 S′ 之相似心之軌跡爲一圓。

4. 設二正相似之三角形同內接於一圓，求證圓心卽爲正相似心。

並證以三角形之相當邊之三交點之頂點之三角形，亦與二三角形爲正相似。

5. 設反相似之二三角形同內接於一圓，求證此二三角形互相透視，且其透視軸過圓心。

6. 二定圓之相似圓屬於二定圓之圓心為極限點之同軸圓組。

近世幾何學勘誤表

頁	行	誤	正
4	4	故遇 D, E,……	故過 D, E,……
6	圖二	ρ	Q
8	1	$\because$ Q B R T	$\because$ QBRT
10	5	B^2C^2	BC^2
11	13	M′ 之距各…	M′ 之距離各……
16	3	定理	定義
17	1	再自此弦……。此定直線……	自此弦兩端所作切線之交點之軌跡爲一直線。此直線…
17	2	Pelar	Polar
17	14	則聯此點……	則聯切點……
21	7	P F 二圓……	FF 爲二圓……
22	4	2OL·AB＝兩圓半徑……	2OL·AB = (AL-LB) (AL+LB)＝兩圓半徑……
25	1	則自至各圓……	則自此所作各圓……
25	8	自 P…線長	$(\text{自 P……線長})^2$
25	15	虛點	切線
35	2	但線段既線……	O 爲線……
35	3	然除非面分正負,	然線段既分正負,
39	5	作三直線	作相交於一點之三直線
41	4	假設 CF……	假設 CQ……
43	6	三直角	三直線……
44	3	稱爲線對	稱爲等角線對
45	9	使 AD·$\hat{ADE}$	使 ADE
45	11	D,E, 使凡反平行…	凡反平行……
50	6	射影在無…	射影亦在無
	8	平面上有一直線	平面上必有一直線
52	1	於 EF……	於通過 AB 并平行 於 π 之平面上, 在 EF……
52	4	則如以 AB…..	則如以 V 爲 ……
58	5	故有一列點有四點, 則此列點之交比有……	故列點上四之交比亦有……
64	14	$P(P_1P_2P_3P_4)$	$V(P_1P_2P_3P_4)$
64	2	於其上附一點……	於其上取一點……
68	4	O (PQRS)……	K(PQRsS……)
72	7	Perspective	Perspectively
76	7	Coaxally in Perspective	Coaxally perspection
78	5	上之 P……	上之 p……
79	14	讀者注此……	讀者以後
81	8	故不交於…..	故必交於……

頁	行	誤	改正
83	6	△A′B′C′ 相透視,	△A′B′C′ 三相當邊之交點在一直線上。
	10	之交點,	邊之交點,
	17	因 BC, B′C′……	設 BC, B′C′,……
85	1	$\frac{AB_1\cdot CX\cdot BC_2}{AC_2\cdot B\text{-}X\cdot CB}=1$	$\frac{AB_1\cdot CX\cdot BC_2}{AC_2\cdot BX\cdot CB_1}=1$
	6	$AB_1\ldots BC_2AX\cdot CX\cdot BZ$	$AB_1\ldots\ldots BC_2\cdot AY\cdot CX\cdot BZ$
95	1	當四邊形……	爲四邊形……
	5	則三對角線,……	設三對角線……
	7	$\frac{pp\cdot dq}{bq\cdot dp}$	$\frac{bp\cdot dq}{bq\cdot dp}$
96	9	設 AB, C, D,……	設 A, B, C, D,……
101	9	K 稱……。若 K…	k 稱……。若k……
117	15	焦點, 準線卽爲極點, 極線。	焦點, 準線有極點極線之關係。
119	8	準爲無窮遠線。	準線爲無窮遠線。
121	1	設 F 爲其……	設 r 爲其……
122	5	(……與相切時,…)	(……與圓相切時,)
125	1	爲 PX……	爲 MX……
	15	故 S 及其準線,	故 S 及極線,
129	5	軸稱……	稱軸……
130	2	$(AA', CX)=-1$,	$(AA,' SX)=-1$
132	1	(……ω,′ ω′ 之射影)	(……ω, ω′ 射影)
	14	asymtotes	Asymptotie
141	13	…之切交於…	之切線交於……
142	圖	直線 SRF	直線 SRT
146	7	首通徑	正焦弦
152	10	qq′。S 爲	q q′。s 爲
153	17	P, Q′, P′, Q′	P, Q, P′, Q′
161	11	$PN:4AS^2=$……	$PN^2:4AS^2=$……
164	10	又因二角餘 SPG……	又因二餘角 SPG……
173	7	……此焦弦拋物點……	此與焦弦之直徑與拋物線……
176	9	本章將……	本節將……
182	14	$SP=e\cdot MM'$	$SP=e\cdot MP$
186	4	且動點……	且定點……
190	11	$STY=S'TY'$	$ST'Y=S'T'Z'$
	13	楕圓上二切線, 常……	設正交二直線, 常……
211	1	故 $AO^2=SK^2=CS^2-CA^2=CS^2-CA^2=BC^2$。	故 $AO^2=SK^2=CS^2-AC^2=BC^2$。
212	16	雙曲線上二切線……	雙曲線上二正交線……
213	9	$CT^2=2CA^2-(CS^2-CA^2)$	$CT^2=2CA^2-(CB^2+CA^2)$
217	13	$PN^2:CN^2\cdot CAA^2=$ ……	$PN^2:CN^2-CA^2=$……
	15	設自雙曲線上 R 點作線…	設自雙曲線之漸近線上……
218	1	……與二漸速線……	……與二漸近線……
	8	$RN^2-PN^2=BC$;	$RN^2-PN^2=BC^2$;

中華民國二十二年二月初版
中華民國二十二年六月再版

（二一〇〇九四）

近世幾何學一册

A Course of Pure Geometry

每册定價大洋貳元
外埠酌加運費匯費

原著者 E. A. Askwith
譯述者 方俊
發行人 王雲五 上海河南路
印刷者 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

（本書校對者胡達聰）