БИБЛИОТЕКА СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ
Под редакцией акад. Я. В. УСПЕНСКОГО

ДАВИД ГИЛЬБЕРТ,
профессор Геттингенского университета

ОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

ПЕРЕВОД С ПЯТОГО НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
заслуженн. проф. А. В. ВАСИЛЬЕВА

С приложением статьи редактора:
„От Евклида до Гильберта"

и статьи А. ПУАНКАРЕ:
„Отчет о работах Гильберта, представленных для соискания международной премии имени Лобачевского"

КНИГОИЗДАТЕЛЬСТВО
„СЕЯТЕЛЬ"
Е. В. ВЫСОЦКОГО
ПЕТРОГРАД
1923

ТИПОГРАФИЯ
„КРАСНЫЙ ПЕЧАТНИК"
ПЕТРОГРАД
Международный, 75

Главлит № 4343.
3000 экз.

И. Гордон

СОДЕРЖАНИЕ.

Глава V. Теорема Дезарга.

Глава VI. Теорема Паскаля.

Глава VII. Геометрические построения на основе аксиом I—IV.

От редактора.

Книга Д. Гильберта, одного из самых выдающихся современных математиков, „Grundlagen der Geometrie“, перевод которой сейчас предлагается русским читателям, представляет собой выдающееся явление в мировой литературе. Первое издание ее, вышедшее в 1899 г., было восторженно встречено математическим миром и дало ни с чем несравнимый могучий толчок исследованиям об основах геометрии *). Не будет преувеличенно, если мы скажем, что едва ли после 1899 года вышла хотя бы одна работа по этому вопросу, которая в той или иной степени не опиралась бы на работы Гильберта.

Кроме этой основной работы Гильберт написал еще несколько статей об основах геометрии, арифметики и логики, которые собраны в качестве приложений в немецком издании. Мы не даем перевода этих приложений, так как они по большей части слишком трудны для неспециалистов и не имеют, разумеется, того широкого интереса, как его Festschrift **). С содержанием главнейших из этих статей читатель познакомится по отчету А. Пуанкаре, написанному им для Казанского Физико-Математического Общества по поводу представления работ Гильберта на соискание международной премии имени Лобачевского ***). Этот отчет,

*) Последующие издания вышли в 1903, 1909, 1913 и в 1922 гг. В 1900 и 1902 гг. появились переводы на французском и английском языках.

**) Вот перечень этих работ: I. Прямая линия, как кратчайшее расстояние между двумя точками. II. Теорема о равенстве углов при основании в равнобедренном треугольнике. III. Новое обоснование геометрии Болиан-Лобачевского. IV. Об основаниях геометрии. V. О поверхностях постоянной Гауссовой кривизны. VI. Понятие о числе (русский перевод этого приложения, сделанный мною, помещен в сборнике „Об основаниях арифметики“, изданном Казанским студенческим физико-математическим кружком). VII. Об основаниях логики и арифметики.

***) Как известно, премия была присуждена Гильберту в 1903 г.

который может служить блестящим комментарием к Гильберту, мы приложили к предлагаемому переводу Grundlagen.

Выяснению места работы Гильберта среди других работ об обоснованиях геометрии мы посвятили нашу вступительную статью—„От Евклида до Гильберта“.

За почти четверть века, которая прошла с момента выхода в свет первого издания Grundlagen появилось, большое количество статей, посвященных вопросам, затронутым в работе Гильберта. Эти критические исследования внесли некоторые частичные поправки и дополнения к работе Гильберта. Большинство из них приняты были Гильбертом во внимание в последующих изданиях. Тем не менее многие из таких поправок и дополнений только указаны в подлиннике, а некоторые и вовсе не отразились даже на последнем 5-ом немецком издании (1922-го года).

Поэтому мы сочли полезным дать примечания, в которых эти поправки рассмотрены более подробно. В этих же примечаниях читатель найдет пояснения к более трудным местам Grundlagen. Примечания к русскому изданию составленны О. А. Вольбергом.

Все примечания подлинника помещены в качестве подстрочных и отмечены звездочками [*), **)]. Примечания к русскому переводу отмечены цифрами [1), 2)], и помещены в конце книги.

Разумеется перевод сделан без всяких отступлений от подлинника, если не считать исправления нескольких явных описок, оговоренных, впрочем, в примечаниях.

Пользуюсь случаем принести благодарность О. А. Вольбергу и А. А. Чебышеву-Дмитриеву за ценную помощь, оказанную ими при издании книги.

А. В.

От Евклида до Гильберта.

(Вступительная статья).

А. В. Васильева.

В течение двух тысячелетий „Начала“ Евклида считались неподражаемым образцом научного изложения. Из небольшого числа первоначальных понятий и основных положений (аксиом и постулатов) развивается путем логической дедукции ряд теорем, выражающих собою свойства и отношения геометрических фигур и тел.

Для основоположников современного математического естествознания, для Леонарда-да-Винчи, для Кеплера, для Галилея изложение Евклида являлось недосягаемым образцом точности (certezza), математические символы и фигуры, изучаемые в „Началах“,—иероглифами, которыми написаны законы природы. По образцу „Начал“ не только Спиноза писал Этику more geometrico, но и великий основатель классической и небесной механики изложил в „Математических началах естественной философии“ на подобие теорем синтетической геометрии результаты, выведенные им с помощью метода флюксий. Для Канта аксиомы Евклидовой геометрии суть синтетические априорные суждения, и так как мы не можем представить себе пространства, в котором эти аксиомы не имели бы места, то не только пространство есть трансцедентная, независящая от опыта форма чистого воззрения, но и аксиомы геометрии Евклида имеют такое же трансцедентное происхождение. Таков исходный пункт „Критики чистого разума“, имевшей такое влияние на философию XIX века.

До сих пор изучение Евклида является, по нашему мнению, необходимым для всякого преподавателя геометрии, который желает сделать из изучения этой науки школу логического мышления. В Англии, в Италии до последнего времени первые книги Евклида с небольшими изменениями являются учебниками геометрии.

Такое громадное значение творения одного из великих греческих геометров Александрийского периода объясняется тем, что Евклид построил здание геометрии на основаниях, заложенных трудами нескольких поколений греческих мыслителей, математиков и философов. Восточные цивилизации (Египетская, Вавилонская, Индийская, Эгейская) накопили для целей землемерия и архитектуры, для измерения полей в долине Нила, для постройки алтарей и дворцов в долинах Ганга и Евфрата многочисленные геометрические факты и правила, но только греческому гению удалось создать из них науку геометрии.

Едва ли когда-нибудь из разрозненных сведений, дошедших до нас в греческой математической и философской литературе, удастся воссоздать историю греческой геометрии до Евклида *). Достоверным можно считать, однако, то значение, которое имела в этой истории та философская греческая школа, которая искала гармонию мира и в свойствах целых чисел и в свойствах правильных многогранников. Французский историк математики Поль Таннери считает несомненным, что в Пифагорейской школе уже была сделана и первая попытка создать систему геометрии в сочинении, носившем название „Предание по Пифагору". Несомненно такое влияние Пифагорейской школы и на творца атомистической гипотезы Демокрита, которого можно считать изобретателем метода неделимых, и на Платона, диалоги которого придают такое значение геометрии („геометрия есть учение о вечном") и в школе которого была разработана теория конических сечений.

---

*) В настоящее время наилучшими источниками для истории геометрии до Евклида могут служить следующие книги: C. A. Bretschneider,— Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipz. Teubner 1870 г.;— M. Cantor.—Geschichte der Mathematik. Leipzig, Teubner, 3-te Auflage, Bd. I. 1907 г.;—P. Tannery,—Mèmoires Scientifiques. Vol. I et II. Paris 1912. G. Loria.—Le Scienze esatte nell'antica Grecia. II ed. Milano. Hoepli 1914.

Диалектическая борьба теорий единого и многого, возникшая, повидимому, в Пифагорейской школе, направила философскую мысль греков уже в пятом веке на те вопросы об отношении между прерывным и непрерывным, конечным и бесконечным, которые возникли снова в XVII и XVIII веках, в связи с открытием анализа бесконечно-малых, и в последнее время приобрели такое значение в философии математики, благодаря гениальным идеям Георга Кантора. Доказательством той глубины мысли, которою отличались воззрения греков на эти вопросы, служат знаменитые апории Зенона. Но в то же время та же диалектическая борьба не могла не повести и к тому критицизму по отношению ко всем отвлечениям, представителем которого явился Протагор. Апории Зенона, нападки на математиков Протагора и способствовали той строгости и точности понятий и выводов, которая отличает и Начала Евклида, и сочинения других великих геометров Александрийского периода, Архимеда и Аполлония.

О жизни Евклида дошли до нас только скудные сведения. В историческом отрывке, сохранившемся в сочинении одного из коментаторов Евклида- Прокла (410—485 по Р. Х.), мы узнаем об Евклиде, что он был моложе учеников Платона, но старше и Архимеда и Эратосфена. (Отсюда можно заключить, что „акме“—расцвет деятельности Евклида—относится к 305—283 г. до Р. Х., к времени царствования Птоломея I). Из того же отрывка мы узнаем, что Евклид по своим философским воззрениям принадлежал к школе Платона, что он составил „Начала“, собрал в одно целое многое, принадлежащее Евдоксу Книдскому, закончил начатое Феэтетом и дал „неоспоримые доказательства тому, что было недостаточно точно доказано его предшественниками“.

Если в общем Начала Евклида представляют образец глубоко продуманного и выдержанного сочинения, то изучение их обнаружило в них и крупные недостатки. Одним из них является то, что Евклид во многих доказательствах обращается к интуиции или пользуется понятиями, неформулированными в основных определениях и положениях. Так, например, уже в первом предложении первой книги Евклид допускает почерпнутое из интуиции предположение.

что две окружности пересекаются всегда в точке, — предположение, как мы теперь знаем, связанное с вопросом о непрерывности линий. В четвертом предложении той же книги он прибегает к движению для доказательства равенства треугольников. К интуиции он обращается и тогда, когда вводит понятие о точке, лежащей между двумя точками на прямой, и не считает нужным давать какие-либо указания относительно расположения фигур в плоскости. Другим недостатком является формулировка определений и основных положений *). Так, напр., формулировки определения точки, прямой, плоскости, положения о равенстве совмещающихся фигур не отличаются ни ясностью, ни определенностью.

Таковы некоторые „пятна“ в бессмертном творении Александрийского ученого. Многие из „пятен“ открылись критическому уму математиков только в XIX столетии. Но некоторые из них обратили на себя внимание и великих греческих геометров, работавших непосредственно после Евклида (Архимеда, Аполлония, Эратосфена, Птолемея), и первых его комментаторов.

Так, Архимед в своем сочинении „О сфере и цилиндре“ считает нужным для теории измерения площадей и объемов определить прямую линию, как кратчайшее расстояние между двумя точками, и выставить новый постулат, существенное значение которого уяснено только в XIX столетии. Этот постулат Архимеда формулирован им в следующих словах **): „из двух неравных линий, двух неравных поверхностей или двух неравных тел бо̀льшая величина может оказаться меньше той величины, которую мы получим, если повторим меньшую надлежащее число раз“.

---

*) Необходимо, впрочем, отметить, что многие из недостатков объясняются, может быть, неточностью дошедших до нас переводов и копий греческого первоначального текста. Наилучшие издания Евклида в настоящее время суть: I. L. Heiberg,—Euclidis Opera omnia, Leipzig, Teubner 1883—1888 (7 томов) и английское издание Heath'а (Cambridge. University Press. 1908) в трех томах, снабженное комментариями. На русский язык „Начала“ Евклида были переведены в 1739, 1769 и 1789 гг. и затем в 1819 и 1835 гг. Петрушевским. Новейший перевод принадлежит проф. Ващенко-Захарченко в 1880 г. (в нем отсутствуют 7, 8 и 9 книги).

**) Постулат этот был, повидимому, употребляем еще Евдоксом Книдским.

Знаменитый астроном Птолемей основывал свое доказательство постулата о параллельных прямых, заменяя его другим, по которому если две прямые параллельны в одном направлении, то они параллельны и в другом.

Сочинения, посвященные истолкованию „Начал“ Евклида, появились чрезвычайно рано. Так, уже во втором столетии до Р. Х. появились комментарии Геминуса Родосского. К сожалению, ни комментарии Геминуса, ни комментарии Герона Александрийского, Паппуса, Теона, Симплиция или вовсе не дошли до нас, или дошли в виде отрывков в передаче Прокла и Анариция *). В сочинении Прокла, жившего в пятом столетии по Р. Х., изложены попытки греческих геометров или доказать постулат о параллельных линиях на основании других аксиом или заменить его иным более очевидным. Попытки строгого обоснования теории параллельных линий продолжались и далее. Важнейшие и наиболее интересные из них принадлежат арабскому геометру Насир-Эддину, английскому ученому Валлису, занимавшему в Оксфордском университете кафедру „Евклида“, иезуиту Саккери, который в замечательном сочинении „Евклид, очищенный от всякого пятна“ указал на возможность трех допущений, названных им гипотезами острого, прямого и тупого угла, французскому математику Лежандру — автору первого сочинения, в котором основы геометрии изложены по плану, отличному от Начал Евклида **). Но ко всем

*) Лучшее издание Прокла принадлежит Фридлейну (G. Friedlein— Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii Leipzig. 1873). Анариций — арабский геометр Абуль Аббас an Nairizi. Латинский перевод его комментариев найден лишь в 1896 г. в библиотеке Краковского университета профессором Курце и издан в виде дополнения к изданию „Начал“ Гейберга. (Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii edidit M. Curtze. Leipzig. 1899).

**) Знакомство с различными построениями теории параллельных линий чрезвычайно полезно и даже необходимо для преподавателей геометрии в средней школе. Как источники для этого знакомства можно указать: сочинение академика В. Я. Буняковского „Параллельные линии“ (1853 г.), статью Зонке о параллельных линиях в „Allgemeine Encyclopedie der Wissenschaften und Künste“, Ersch'a и Gruber'a (Dritte sektion elfter Teil, s. 368. Leipzig 1838) и, наконец, прекрасное сочинение Штеккеля и Энгеля „Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss“. Leipzig, 1895.

попыткам обоснования теории параллельных линий, известным Лобачевскому, он приложил слова: „из всех этих доказательств можно некоторые назвать остроумными, но все вообще ложными, недостаточными в своих основаниях и без должной строгости в суждении“. Он и сам, как можно заключить из записи лекций по геометрии, читанных им в период от 1815 до 1817 г., пытался дать различные способы для ее обоснования; но уже в 1823 году в учебнике геометрии, представленном им для напечатания на казенный счет в виде „классической книги“, он становится на другую точку зрения и заявляет, что „все до сих пор данные доказательства не заслуживают быть почтены в полном смысле математическими“ *). Через три года в заседании Физико-математического отделения 12 февраля 1826 года Лобачевский дал уже ту систему, построенную на положении, противоречащем постулату Евклида, которая обессмертила его имя.

Славу открытия неевклидовой геометрии с Лобачевским разделяют Гаусс, который еще в 1799 году (письмо к Вольфгангу Больаи) усомнился в истинности Евклидовой геометрии, нашел некоторые результаты неевклидовой геометрии, но не опубликовал своих открытий „крика ради беотийцев“, и Иоганн Больаи, венгерский офицер, который к сочинению своего отца в 1833 г. присоединил „Приложение, содержащее абсолютно истинное учение о пространстве“.

Построение геометрии, независимой от постулату Евклида, имело прежде всего тот результат, что вызвало критическое отношение к тем основаниям, на которых была построена геометрия Евклида. Попытки такой критики мы находим и ранее Гаусса и Лобачевского **), но с открытием

*) Подробнее см. мою статью: Отношение Лобачевского к теории параллельных линий (приложение к переводу книги Бонола „не евклидова Геометрия“, перевод проф. А. Р. Кулишера). Учебник Лобачевского издан Казанским Физико-математическим Обществом в 1910 г. В приложении помещены относящиеся к теории параллельных линий выдержки из лекций 1815—1817 гг. См. также мою биографию Лобачевского (Русский биографический словарь).

**) Так еще в XVI веке философ Петр Рамус, энергичный враг схоластики, жертва Варфоломеевской ночи, выступил с резкою критикою неевклидовой геометрии они получили бо́льшее значение и привели к тем новым взглядам на геометрию, выражением которых являются „Основания геометрии“ Гильберта. Сам Лобачевский в своих „Новых началах“ изложил геометрию по системе, резко отличающейся от системы Евклида. Исходя из своих общих философских воззрений, сближающих его с сенсуализмом Кондильяка и английской эмпирической школы, он считает первым понятием геометрии— представление о соприкосновении: „это представление, получаемое прямо в природе чувствами, не происходит из других, а потому и не подлежит уже толкованию“. Прикосновение двух тел „назначает“ относительное положение двух точек, которое называется расстоянием. Понятие о расстоянии позволяет дать определение шара и круга и только после выяснения этих понятий вводятся плоскость и прямая.

Исследования в области неевклидовой геометрии имели громадное значение и в другом отношении. Они впервые определенно выдвинули вопросы аксиоматического характера, вопросы о независимости и совместимости аксиом. Если бы постулат Евклида был логическим следствием прочих аксиом (и постулатов) его геометрии, то построение геометрии на основе этих аксиом и противоположного постулату Евклида постулата Лобачевского („через всякую точку вне прямой можно провести пучек прямых с нею не пересекающихся“) должно было бы привести к противоречию и было бы логически невозможно.

Между тем Лобачевский и Болиаи вывели, правда, путем весьма искусственных заключений, тригонометрические формулы „воображаемой“ или „абсолютной“ геометрии, получающиеся из формул сферической геометрии путем умножения всех сторон на $\sqrt{-1}$. Отсутствие противоречий в сферической тригонометрии доказывало отсутствие противоречия в формулах новой геометрии и вместе с тем доказывало и

Евклида в своих: Scholae mathematicae (1569 г.). Лейбниц исходил из определений плоскости и прямой, отличных от определений Евклида. Многочисленные издания „Начал геометрии“ Лежандра (1-ое издание 1794 г., последнее (14-ое) при жизни Лежандра (1833 г.) дают уже новую систему изложения геометрии, менее искусственную, но в некоторых пунктах и менее строгую, чем изложение Евклида.

независимость постулата Евклида от других аксиом и совместимость постулата Лобачевского с этими аксиомами. Позже доказательство независимости постулата Евклида могло быть проведено значительно проще. В знаменитом мемуаре: „Опыт истолкования неевклидовой геометрии“ (1868 г.) *). Бельтрами показал, что планиметрия Лобачевского в известных пределах совпадает с геометрией поверхностей с постоянною отрицательною кривизною и таким образом, получает реальное истолкование. В 1871 г. Феликс Клейн, пользуясь исследованиями Кэли (1859 г.) о связи метрической геометрии с проективною геометриею, вывел из общего мероопределения, данного английским ученым, новую интерпретацию не только геометрии Лобачевского, но и геометрии Риманна, в которой из точки лежащей вне прямой нельзя провести ни одной прямой параллельной данной, и дал этим новое доказательство, приложимое и к планиметрии и к стереометрии, независимости теории параллельных линий от других аксиом Евклидовой геометрии **). Но работы Кэли и Клейна стали возможными только после того, как была почти закончена работа над созданием проективной геометрии, историю которой мы считаем полезным напомнить в нескольких словах.

В то время когда Лобачевский в Казани приступал к своим исследованиям, приведшим его к построению геометрической дисциплины, основанной на утверждении, противоположном постулату Евклида о параллельных линиях, пленный французский офицер в Саратове систематизировал другую геометрическую дисциплину, которая,

*) Русский перевод этого мемуара помещен в сборнике „Основания геометрии“, изданном Казанским Физико-математическим Обществом к празднованию столетней годовщины дня рождения Н. И. Лобачевского.

**) В прекрасной книге Вебера-Вельштейна—Энциклопедия элементарной геометрии, т. II (русский перевод издан проф. Каганом в Одессе в 1902 г.) читатель может познакомиться с интерпретацией трех геометрий с помощью сетей сфер Евклидовой геометрии. Изучение этой интерпретации и вообще всего сочинения Вельштейна может чрезвычайно облегчить усвоение идей Гильберта, но и обратно, предварительное изучение „Оснований геометрии“ может помочь при чтении книги Вельштейна, значительная часть которой посвящена философским вопросам, связанным с основаниями геометрии.

как мы теперь знаем, может быть построена независимо от аксиом конгруэнтности и постулата о параллельных линиях. Начала проективной геометрии, из которой Понселе (1788 — 1867) создал важную отрасль математики, были заложены еще греческими геометрами Александрийского периода. Тогда Аполлоний Пергийский изучал свойства конических сечений, рассматривая их как проекции круга, и в его сочинении можно найти даже образование конического сечения путем пересечения лучей двух проективных пучков. Позже Паппус Александрийский около 290 г. по Р. Х. дал доказательство своей знаменитой теоремы, которая под названием Паскалевой играет такую важную роль в издаваемом нами сочинении Гильберта.

В эпоху Возрождения Альберти, А. Дюрер и гениальный Леонардо да Винчи создали теорию перспективного изображения – частного случая проективного изображения. В 1639 г. Дезарг дал свою знаменитую теорему, теорему плоской геометрии, но доказанную с помощью проективного рассмотрения пространственных образов, и около того же времени Паскаль нашел теорему о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, частный случай которой найден был еще Паппусом. (Эта теорема Паппуса (под названием теоремы Паскаля) и теорема Дезарга изучаются в сочинении Гильберта). В XVIII столетии Монж в своей „Начертательной геометрии“ и Карно в „Геометрии положения“ находили также частные результаты проективной геометрии.

Но все добытые до Понселе важные результаты представляют несвязанные части великого целого и только в его „Traité des propriétés projectives des figures“ (1822) они были приведены в стройную систему. Но истинный характер проективной геометрии — ее отношение к различным группам аксиом выяснялся только шаг за шагом. И сам Понселе и его школа (Штейнер, Шаль, Лагерр) строили проективную геометрию, исходя из понятия о расстоянии, т. е. с помощью аксиом о конгруэнтности и пользуясь постулатом о параллельных линиях. В их изложении метрические свойства фигур были поэтому смешаны с проективными (дескриптивными, как их называл Понселе) свойствами. Впервые Штаудт в своем классическом сочинении „Geometrie der Lage“ (1847) выяснил один из основных вопросов проективной геометрии, показавши, что ее основной характер лежит в изучении взаимного расположения (des Ineinanderliegens) точек, прямых и плоскостей, т. е. в пользовании только теми аксиомами, которые Гильберт называет аксиомами сочетания и аксиомами порядка. Таким образом его изложение показывает независимость проективной геометрии, которую он назвал геометрией положения, от аксиом конгруэнтности, без которых невозможно изучение метрических свойств фигур. Но и после его работ оставался невыясненным вопрос об отношении проективной геометрии к аксиоме о параллельных линиях и к аксиоме о непрерывности. Полное выяснение первого вопроса есть заслуга Феликса Клейна. Как мы уже указали выше, Клейн обратил внимание на то, что проективное мероопределение Кэли дает в зависимости от положенного в основание мероопределения абсолюта (плоская кривая или поверхность второго порядка) для расстояний и углов формулы той или другой из трех возможных теорий параллельных: Евклида (параболическая геометрия, гипотеза прямого угла Саккери), Риманна (эллиптическая геометрия, гипотеза тупого угла) и Лобачевского-Болиаи (гиперболическая геометрия, гипотеза острого угла) *). Проективная геометрия может быть таким образом построена и без аксиомы о параллельных линиях.

Клейн обратил также внимание и на другой важный вопрос,—на пробел в доказательстве основной теоремы проективной геометрии, данном Штаудтом. Этот пробел, замеченный также Вейерштрассом в его лекциях, связан с вопросом о непрерывности геометрических образов и с учением о вещественных (рациональных и иррациональных) числах. Первые начатки анализа понятия о непре-

*) В интересных автобиографических сведениях, которыми Клейн снабдил первый том издания своих мемуаров (Берлин, 1921 г.), он сообщает, что, когда в математическом семинарии Вейерштрасса в марте 1870 г. он закончил свое сообщение о мероопределении Кэли предположением о его связи с неевклидовою геометриею, то Вейерштрасс отрицал такую связь на том основании, что обычное определение расстояния между двумя точками есть необходимый исходный пункт для обоснования геометрии и что поэтому прямая линия должна быть определяема, как линия кратчайшего расстояния.

рывности даны были греческими геометрами в приеме доказательства от обратного для построения строгой теории пропорций между геометрическими величинами и в методе исчерпания. И в том и в другом случае в основе доказательства лежит постулат Евдокса-Архимеда. Но в „Началах“ Евклида возможность пересечения прямых и окружностей не обосновывается аксиоматически (см. теорему 1-ую I книги), но является фактом, почерпаемым из интуиции. Только в начале XIX столетия Больцано и Лобачевский *) старались внести строгость в вопросы, связанные с непрерывностью. Окончательно это удалось Вейерштрассу, Георгу Кантору **) и Дедекинду ***).

В связи с данными ими теориями иррациональных чисел они формулировали постулат непрерывности прямой (и вообще геометрических образов) и дали таким образом возможность установить одно-однозначное соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек, т.-е. возможность построить Декартову геометрию ****). В сочинении Гильберта место этих постулатов занимает аксиома полноты *****), которая вместе с аксиомою Архимеда определяет обыкновенную или Архимедову непрерывность (континуум 2-го порядка или математический континуум, как его называет Пуанкаре в начале своего сочинения „Наука и гипотеза“). О возможности континуума высшего порядка (актуально бесконечные числа Веронезе) мы скажем несколько слов дальше.

---

*) В своих работах о сходимости строк он первый вводит различие между непрерывностью и дифференцируемостью функций.

**) Работы Кантора в русском переводе см. „Новые идеи в математике“, вып. 6.

***) Основной мемуар Дедекинда „Непрерывность и иррациональные числа“ в русском переводе напечатан в сборнике „Об основаниях арифметики“, изданном Казанским студенческим физико-математическим кружком, а также отдельной брошюрой (Одесса, 1909).

****) На этом подробно останавливается Клейн в отчете, представленном им Казанскому физико-математическому Обществу по поводу присуждения первой премии Лобачевского, на который ссылается Гильберт в введении к своему сочинению (См. Извест. Каз. Физико-математ. Общ., т. 8. 1898). Отзыв вошел также в 1 том сочинений Клейна (Berlin. 1921).

*****) Об ее отношении к постулату Дедекинда см. примечание 1 к главе III.

В связи с развитием неевклидовой и проективной геометрии находится также и новое более глубокое отношение к вопросу о равенстве или конгруэнтности геометрических образов. По поводу этого вопроса мы встречаемся также с одним из „пятен“ Евклидовой геометрии. В числе основных положений „Начал“ мы находим положение: „совмещающиеся величины равны между собою“. При доказательстве первого случая равенства треугольников—треугольники, в которых две стороны и угол между ними заключающийся соответственно равны (теор. 4 книги 1-ой)—Евклид пользуется этим положением, неявно предполагая возможность передвижения фигуры из одного положения в другое и вводя таким образом в геометрию понятие движения. Уже комментатор XVI столетия Пелетарий считал, что теорема 4-ая не нуждается в доказательстве, но должна быть взята как определение *). В своем классическом мемуаре: „О гипотезах, лежащих в основах геометрии“ **), представляющем в настоящее время большой интерес, благодаря гениальной теории относительности Эйнштейна, Риманн выяснил значение скрытого у Евклида постулата о возможности движения геометрических образов, показав, что он сводится к предположению, что рассматриваемое многообразие (поверхность или пространство) есть многообразие постоянной кривизны. Риманн исходил в своих исследованиях из общего понятия о многообразии многих измерений, и геометрия, как частный случай учения о многообразиях, является в его мемуаре впервые частью чистой математики. Напротив Гельмгольц (и в этом отношении он имел предшественника в Ибервеге: Беркли и Лобачевский высказывали подобные же взгляды) рассматривает в мемуаре: „О фактах лежащих в основе геометрии“ ***) геометрию как физическую науку и выводит ее основные понятия из

---

*) В системе Гильберта за аксиому принята часть теоремы 4-ой (равенство углов), другая же часть ее (равенство третьих сторон) составляет теорему 11-ую.

**) Перевод этого мемуара, принадлежащий проф. Д. М. Синцову, помещен в вышеупомянутом сборнике — „Об основаниях геометрии“ (Казань, 1896).

***) Перевод, сделанный мною, напечатан в том же сборнике: „Об основаниях геометрии“.

свойств движений. Важным шагом в развитии понимания сущности геометрии явилась „Эрлангенская программа“ *) (1872) Клейна, в которой различные геометрические дисциплины (Евклидова и неевклидова геометрии, проективная геометрия, анализ положения) рассматривались как частные случаи общего учения о группах преобразований, и вопрос об основаниях геометрии ставился в связь с теориею непрерывных групп, созданною знаменитым норвежским математиком Софусом Ли, который и дал позже, исходя из этой теории, систему аксиом, достаточную для построения геометрии. Тесная связь образования наших пространственных представлений со свойствами групп движений была выражена Пуанкаре в фразе: „пространство есть группа“.

Необходимо отметить в Эрлангенской программе Клейна и то место ее, в котором Клейн подчеркивает важное значение данного неевклидовой геометрией доказательства независимости аксиомы о параллельных линиях от других аксиом геометрии и указывает на необходимость проведения подобных же исследований по отношению к каждой аксиоме и не только геометрии. „Этим путем могло бы быть достигнуто решение вопроса о взаимном отношении аксиом“.

К началу восьмидесятых годов прошлого столетия была поставлена таким образом снова задача построения геометрии как дедуктивной науки, которая из небольшого числа основных положений выводит исключительно логическим путем совокупность геометрических истин, из этих положений вытекающих. Первое решение этой задачи было за двадцать веков тому назад дано в „Началах“ Евклида, но это решение, гениальное для своей эпохи, не могло уже удовлетворять критическую математическую мысль XIX столетия. Вместе с постановкою этой задачи было подготовлено и многое для ее решения, были выделены группы аксиом (аксиомы проективной геометрии, аксиомы конгруэнтности, аксиома параллелизма, аксиома непрерывности) и подвергнуто частичному рассмотрению отношение между этими группами аксиом.

*) „Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований“. (Вошло в I том полного собрания сочинений Клейна, изданного в 1921 г.). Русский перевод, принадлежащий проф. Д. М. Синцову, издан в Казани в 1895 г.

Первою выдающеюся работою в направлении решения задачи об основаниях геометрии было сочинение Паша: „Vorlesungen über neuere Geometrie“ (1882 г.). Паш формулировал поставленную задачу в словах: „основные положения геометрии должны охватить весь эмпирический материал, нужный математику для того, чтобы, установив их, ему уже не приходилось возвращаться к чувственному восприятию“. Крупною заслугою книги Паша является прежде всего выделение из общей группы аксиом проективной геометрии тех аксиом, которые могут служить для определения понятий „между“ и „внутри“ (аксиомы порядка). На соответветствующий недостаток Евклида впервые обратил внимание Гаусс. Паш определяет эти понятия рядом аксиом. Та из них, которая относится к расположению фигур на плоскости и позволяет установить деление плоскости на две полуплоскости, внесена Гильбертом в его систему аксиом (аксиома II 4).

Паш дал также логически безупречную систему аксиом конгруэнтности, основанную на введении первоначального понятия конгруэнтности между двумя фигурами.

Ту же строгость в определении основных понятий и формулировке основных положений, которою отличается сочинение Паша, внесли в свои работы по обоснованию геометрии математики итальянской школы Пеано.

Пеано в своих „I principii di Geometria logicamente esposti“ (Torino, 1889) дал систему аксиом, весьма схожую с системою Паша, но кроме того ввел в свое изложение развитый им специальный логический символизм. Из многочисленных работ геометров школы Пеано (Пиери, Падоа, Вайлати, Вакка и др.) необходимо отметить работу Пиери, имеющую большое значение в вопросах, связанных с порядком. Итальянская школа обратила также особенное внимание на вопросы о полноте и независимости аксиом и первоначальных понятий и о совместимости аксиом между собою, причем преследовала особенно цель ограничить число первоначальных понятий, принимаемых без определения при логическом построении геометрии *).

*) Изложению работ Пеано, Пиери и др. между прочим посвящена та часть „Principles of Mathematics“ Бертрана Ресселя, которая трактует вопросы геометрии. См. также Кутюра „Философские принципы математики“.

В 1891 г. появилось сочинение Веронезе „Fondamenti di Geometria“— обширное сочинение в 700 страниц, посвященное в значительной степени обоснованию трансфинитной арифметики. В этом сочинении впервые построена система не-архимедовых чисел и на этом основании введен в геометрию континуум высшего порядка сравнительно с континуумом всех вещественных чисел *).

Таковы были главнейшие работы по вопросу об основаниях геометрии, появившиеся в свет до 1899 г., когда Гильберт в небольшом сочинении дал свою систему аксиом, свое построение теории пропорций и теории измерения и выяснил многие другие основные вопросы геометрии.

Давид Гильберт родился 22 января 1862 г. в Кенигсберге. Подобно большинству других немецких ученых, он не ограничился курсом одного Кенигсбергского университета, но слушал также лекции Фукса в Гейдельберге, Клейна в Лейпциге, Эрмита в Париже. С 1886 до 1895 г. он занимал кафедру в Кенигсберге одновременно с Германом Минковским, с которым его связывала тесная дружба. С 1895 г. он профессор Геттингенского университета. Его первые работы относятся к высшей алгебре (теория инвариантов системы форм) и высшей арифметике (теория алгебраических тел). Результатом работ по высшей арифметике явился, между прочим, классический „Отчет о теории алгебраических тел“ (1897), имевший большое значение для развития современной теории чисел.

Гаусс назвал арифметику царицею математики, как бы противопоставляя ее анализу, основанному на понятии о непрерывности, почерпнутому из интуиции. Кронекер, увлеченный успехами своих работ в теории чисел, связавший с теориею чисел высшую алгебру, развивал с оживлением идею Гаусса, настаивая на необходимости „арифметизации“ всей математики, т.-е. на сведении всех математических понятий к целому числу и отказывая до тех пор анализу той строгости выводов, которая присуща только арифметике. В дружеской переписке Вейерштрасса с его русскою

*) Желающие более подробно ознакомиться с идеями Паша, Пеано, Веронезе и др. могут обратиться к сочинению проф. В. Ф. Кагана „Основания геометрии“ т. II (Одесса, 1907).

ученицею С. В. Ковалевскою находится письмо (1885 г.), в котором творец современной теории функций горячо жалуется на Кронекера, отрицательно относящегося к теориям иррационального числа, мечтающего о том, „что скоро арифметика покажет настоящие точные пути анализу и убедит в неверности всех тех умозаключений, с которыми работает современный, так называемый, анализ“. Этот спор между выдающимися берлинскими математиками не мог не интересовать и талантливого молодого ученого. Гильберт, несмотря на свои выдающиеся успехи в области высшей арифметики, не встал на сторону Кронекера. Он решил, что и другие области математики могут и должны быть построены столь же строго, как высшая арифметика, которая, исходя из понятия о целом числе и основных аксиом, строит дедуктивным путем грандиозное здание теории алгебраических числовых тел. Естественно было прежде всего приложить это убеждение к геометрии, которая так долго считалась неподражаемым образцом дедуктивной науки, но в которой критика XIX века открыла так много „пятен“.

Ближайшим поводом для изучения оснований геометрии послужила, с одной стороны, работа Винера (1891), показавшего в статье „Grundlagen und Aufbau der Geometrie“ *), что все теоремы плоской проективной геометрии могут быть доказаны с помощью элементарных плоскостных аксиом сопряжения и порядка, если вместе с тем считать доказанными теоремы Дезарга и Паскаля. Так как, с другой стороны, теорема Дезарга есть следствие всех (плоскостных и пространственных) аксиом сопряжения и порядка, то доклад Винера возбуждал особый интерес к теореме Паскаля.

С другой стороны, внимание Гильберта не могло не быть привлечено к основным вопросам геометрии теми замечательными работами его друга Минковского, которые показали, какое значение для теории целых чисел имеет систематическое приложение геометрии. Решение вопросов, поставленных Эрмитом **), было сведено Минковским к теории выпуклых тел, т.е. тел—имеющих то свойство, что отре-

---

*) Jahresbericht der D. Math. Vereinigung Bd. I. Berlin, 1892.

**) О них смотри мое „Целое число“, стр. 218.

зок, соединяющий две точки тела, всеми своими точками принадлежит телу; теория же этих тел была построена Минковским на основе особой геометрии, сохраняющей аксиому о параллельности, но заменяющей аксиому о конгруэнтности треугольников аксиомою, по которой сумма двух сторон треугольника больше третьей. Этой геометрии Минковского и был посвящен первый геометрический мемуар Гильберта (1894).

В 1899 г. в „Festschrift", изданной к торжеству открытия памятника Гауссу и Веберу в Геттингене, появилось то сочинение Гильберта, которое делается теперь доступным для всех русских читателей. После отзыва, данного А. Пуанкаре о работе Гильберта, и приложенного к нашему изданию, делается излишним прибавлять что-либо к оценке, сделанной знаменитым французским математиком-философом; но мы считаем нужным в этом предисловии остановить внимание читателя на той постановке вопроса, которую Гильберт, в отличие от предшественников, придал задаче обоснования Евклидовой геометрии. Эта постановка и дала ему возможность перейти от аксиом геометрии к аксиомам других наук и к общему вопросу об аксиоматическом мышлении.

Основные понятия, „вещи", которым Гильберт придает название точек, прямых, плоскостей, не суть какие-либо специально определенные вещи и тем менее те геометрические образы, которые мы соединяем с этими названиями. Они определяются исключительно аксиомами, устанавливающими отношения между ними и производными из них понятиями. Только совокупность всех девятнадцати аксиом определяет геометрические образы Евклидовой геометрии и позволяет вместе с тем построить геометрию Декарта.

Отдельным аксиомам могут удовлетворять самые разнообразные вещи. Так, напр., аксиома I 1 будет удовлетворена, если „точками" мы будем считать целые числа, а прямою, определяемою двумя точками (числами p_1 и p_2),—наибольшее целое число, заключающееся в половине произведения двух чисел p_1 и p_2 т. е. $E\left(\frac{p_1 p_2}{2}\right)$. Двум аксиомам I 1 и I 2 удовлетворяют не только точки и прямые элементарной геометрии, но также точки и круги этой геометрии, ортогональные к одной определенной прямой.

Такая постановка вопроса, при которой аксиомы являются условными соглашениями, связывающими между собою „вещи“, и эти вещи, т.-е. первоначальные понятия, определяются исключительно аксиомами, резко отличает систему Гильберта от других систем, первоначальные понятия которых имеют эмпирическое происхождение. Система Гильберта должна быть рассматриваема как часть общего учения об отношениях. Новая постановка вопроса приобретает вместе с тем большое значение, т. к. дает новый метод для решения вопроса о совместности и независимости аксиом геометрии. Этот метод заключается в пользовании системами вещей, взятыми из арифметики. Простой и особенно интересный по своей простоте пример этого метода представляет доказательство независимости аксиомы I 2 от аксиом I 1, которое дает Гильберт в своих лекциях. Для этого доказательства достаточно только рассматривать вышеупомянутую систему, в которой „точки“ суть целые числа $p_1, p_2, \dots$, а „прямые“—целые числа вида $E\left(\frac{p_1p_2}{2}\right)$. Эта система, очевидно, удовлетворяет аксиоме I 1 и не удовлетворяет аксиоме I 2 (для этого достаточно взять $p_1=1$, $p_2=2$, $p_3=3$). Во всем сочинении Гильберта этот метод сведения вопросов геометрии на вопросы учения о числах играет весьма большую роль и имеет одинаково важное значение и для учения о числах и для геометрии.

В течение двух десятилетий, протекших со времени появления „Оснований геометрии“, с помощью методов, данных впервые в этом сочинении, решены многие важные вопросы. Недостаток места не позволяет нам остановиться на связанной с этими вопросами литературе *). Упомянем, напр., подробное рассмотрение вопроса об отношении аксиомы Архимеда к теории параллельных линий (Ден, Шур), исследования Дена о равенстве многогранников, работы Валена, Шура, Веблена, Гентингтона, Мура и др. по вопросу об аксиомах геометрии вообще.

Но значение „Основ. геометрии“ не ограничивается одною геометриею.

---

*) Некоторые указания на литературу даны в примечаниях, составленных О. А. Вольбергом и помещенных в конце книги.

Мы говорили, что наиболее важный для аксиоматического построения геометрии вопрос об отсутствии противоречия между аксиомами Гильбертом сведен на вопрос об отсутствии противоречия в аксиомах арифметики. В докладе, прочитанном на втором Международном Парижском Конгрессе 1900 г. под заглавием „Математические проблемы", Гильберт поставил эту задачу об аксиомах арифметики в число важнейших задач, на которые должно быть обращено внимание математиков. Позже эта задача была обобщена в задачу об отсутствии противоречия в системе аксиом анализа, т. е. учения о числах в более общем смысле этого слова *). Эта задача представляет новые трудности так как те заключения, которые применяются в теории вещественных чисел и функций от вещественной переменной, далеко не имеют того характера непосредственной верности, которая присуща заключениям теории целых чисел.

Тем не менее Гильберт приступил к решению этой задачи. Основные идеи, которые руководили им, были изложены им на третьем Международном Конгрессе в Гейдельберге (1904 г.). Этот Гейдельбергский доклад под заглавием „об основаниях Логики и Арифметики" помещен в приложениях к немецким изданиям „Оснований геометрии", начиная с третьего. Но понимание этого доклада представляет большие трудности **), и в последнее время (в 1921 г.) в ряде лекций, прочитанных в Гамбурге, Гильберт придал своим идеям более понятную форму ***).

Ход мыслей, который приводит Гильберта к обоснованию арифметики и анализа, состоит в следующем: методические трудности анализа происходят от той роли, которую в нем играют непрерывность и бесконечность. Доказательство отсутствия противоречия было бы неодолимо, если бы мы

---

*) Аксиомы учения о числах даны Гильбертом в начале третьей главы „Оснований". См. также его доклад: „Понятие о числе" (русский перевод в Казанском сборнике: „Об основаниях арифметики").

**) По этой причине мы отказались от мысли дать в нашем издании перевод этого доклада.

***) Мы не имели возможности познакомиться с этими лекциями и в дальнейшем пользуемся изложением, данным Бернайсом в номере журнала „Naturwissenschaften", посвященном Гильберту по поводу празднования шестидесятилетия дня его рождения (22 января 1922 г.)

поставили себе целью показать, что система вещей, введенная анализом—которую можно определить как систему всех конечных или бесконечных множеств целых чисел—логически мыслима. Вместо этого Гильберт заменяет утверждение об отсутствии противоречий утверждением, что невозможно из аксиом анализа и с помощью его методов рассуждения и доказательства вывести отношение $1 \neq 1$ (единица не равна единице). „Никаким конечным применением законов числа нельзя вывести из утверждения А противоположное заключение: не А". Таким образом дело идет не о возможности непрерывного, бесконечного многообразия, обладающего известными свойствами, но о невозможности некоторого математического доказательства.

От исследований аксиом геометрии и анализа (учения о вещественных числах) Гильберт естественно перешел к исследованию аксиом других наук. В курсе лекций, читанных им в Геттингенском университете в начале десятых годов, он последовательно рассматривал аксиомы учения о числах, геометрии, механики (векториального анализа), физики и теории вероятностей *) и в конце останавливался на вопросах об аксиомах логики и учения о целом числе.

Из числа разнообразных, обнимающих почти все области человеческой мысли, вопросов, поставленных в этих лекциях два вопроса, повидимому, особенно привлекали внимание знаменитого ученого в последнее десятилетие: 1) вопрос об аксиомах физики, 2) общий вопрос об аксиоматическом мышлении, тесно связанный с вопросом об аксиомах логики.

Вопрос об аксиомах физики был поставлен Гильбертом еще в 1900 г. в его „Математических проблемах". Еще тогда он ставил целью аксиоматики физики дать такой комплекс основных явлений, из которых все наблюдаемые физические факты выводились бы исключительно путем математической дедукции. В этом он видел единственный

*) В 1904 г. Казанское Физико-математическое Общество, по инициативе Гильберта, предложило как тему для соискания международной премии имени Н. И. Лобачевского: „изучение аксиом, лежащих в основании теории вероятностей". Но работ, написанных на эту тему в Общество представлено не было.

путь, идя которым мы можем построить гармоничную физическую картину мира вместо того хаоса несогласованных и часто противоречащих друг другу теорий, которые представляет современная теоретическая физика.

Аксиоматический путь построения физики должен быть строго математический („Физика может оказаться слишком трудною для физиков"—выражается по этому поводу Гильберт), но этот путь есть единственный, который, вскрывая противоречия, существующие между теориями, приводя их основания к возможно меньшему числу основных аксиом, может привести вместе с тем и к новым открытиям.

Поставив такие идеалы теоретической физике, Гильберт в ряде лекций, посвященных молекулярной теории, статической механике, теореме Нернста, теории квант, и в математическом семинарии, посвященном преимущественно вопросам теоретической физики, разрабатывал частные вопросы с общей аксиоматической точки зрения. Эти лекции остались до сих пор не напечатанными. О их характере можно судить по тем напечатанным мемуарам Гильберта, которые имеют целью обоснование кинетической теории газов и элементарной теории лучеиспускания (1912—1914).

Понятен тот интерес, с которым Гильберт отнесся к созданной Эйнштейном теории относительности, которая в первой фазе своего развития (специальная теория относительности) связала две до тех пор обособленные области классической механики и электродинамики, введя в первую, чуждую для нее до тех пор, универсальную постоянную (скорость света в пустоте), а во второй фазе (общая теория относительности) отождествив поле тяготения и поле инерции в общем понятии „направляющего поля", объяснила загадку тяготения метрическими свойствами пространственно-временного континуума четырех измерений и таким образом проложила путь к геометрии мира.

Понятен также и интерес Гильберта к теории Ми, в которой материя рассматривается, как электрический феномен. В своих мемуарах „Grundlagen der Physik" (1915 и 1917) Гильберт связал теорию Эйнштейна и идеи Ми, выведя из одного общего начала (принцип Гамильтона) не только дифференциальные уравнения тяготения, данные Эйнштейном, но и более общие уравнения, связующие явления тяготения и электромагнитизма. Идеал Гильберта—гармоничная физическая картина мира—еще не создана, но, благодаря гениальным идеям Эйнштейна и работам Гильберта, Вейля и Эддингтона, мы видим уже путь к ее созданию.

Но плодотворные исследования Гильберта в области основных вопросов математического естествознания не отвлекли внимание Гильберта от общего вопроса о сущности и методах научного мышления. В лекции, прочитанной в Цюрихе под заглавием „Аксиоматическое мышление" *), Гильберт рассматривает аксиоматическую методу, как общий прием научного мышления. „Все, что может быть предметом научного мышления, подлежит, если только оно созрело для образования теории, аксиоматической методе и вместе с тем математике". Для возможности аксиоматического обоснования и логического построения теории необходимы в виде аксиом некоторые немногие положения, которые сначала носят, как это было в старой аксиоматике, теоретико-познавательный характер. Но потом, как это имело место в геометрии Гильберта, можно отвлечься от этого характера аксиом и рассматривать исключительно внутреннюю структуру системы понятий, как возможную форму связи между ними, причем как понятия, так и связи между ними лишены познавательного, почерпнутого из опыта характера. Но таким образом теория делается объектом чисто математического исследования, которое и называется аксиоматическим.

Во всех теориях возникают те же самые основные вопросы, которые мы встретили в аксиоматике геометрии. Прежде всего система аксиом должна, для того, чтобы она представляла возможную связь, удовлетворять условию отсутствия противоречий. При старом понимании аксиоматики, когда каждая аксиома считалась выражением некоторой познавательной истины, аксиоматика не знала и не

*) Лекция напечатана в 78-ом томе одного из лучших математических журналов — „Mathematische Annalen". К сожалению, все томы этого журнала, вышедшие за последние годы, не дошли ни до одной научной библиотеки Петрограда и, если не ошибаюсь, также и Москвы. Поэтому я знаком с этою работою Гильберта только по краткому очерку ее содержания.

ставила себе задачи показать отсутствие противоречий между аксиомами. Затем является необходимость изучить логические связи между различными предложениями теории: в особенности важно исследовать, независимы ли аксиомы логически друг от друга или некоторые из них могут быть доказаны на основании прочих и поэтому излишни как аксиомы. Сверх того является задача исследования „фундамента“ теории для того, чтобы убедиться, что принятые теориею аксиомы не могут быть сведены на предложения более основного характера, которые могут тогда быть приняты за „более глубокий слой“ аксиом.

Так как такое исследование, носящее сплошь математический характер, приложимо ко всякой области знания, допускающей теоретическую обработку, то, благодаря идее аксиоматики, математическое мышление приобретает универсальное значение для научного познания.

Но этим самым приобретает значение и задача более точного изучения математического мышления и форм математических доказательств. „Мы должны, говорит Гильберт, сделать предметом изучения самое понятие специфического математического доказательства совершенно так же, как астроном должен принимать во внимание движение места наблюдения, физик должен знать теорию своего прибора и философ подвергнуть критике разум“.

Но для структуры математических доказательств имеют значение прежде всего законы логики; Гильберт уже в Гейдельбергском докладе 1904 г. указал, что необходимо „одновременное развитие законов логики и арифметики“.

Тесная связь между математикою и логикою была усмотрена уже математиками конца XVII столетия. Автор „Закона больших чисел“ Яков Бернулли посвятил в 1684 г. отдельный мемуар параллелизму между рассуждением логическим и рассуждением алгебраическим. Лейбниц еще в ранней юности пришел к мысли о необходимости создать такую науку, которая позволила бы решать все вопросы и споры путем вычислений, и мысль о ней занимала его всю жизнь. В 1854 г. Буль создал алгебру логики. Позже Пеано и его школа, Фреге, Рессель и Уайтгед разработали логическое исчисление и дали возможность изображать операциями над символами умозаключения математических доказательств. Такое развитие логического исчисления дополняет методу аксиоматического обоснования науки; оно делает возможным точно проследить те умозаключения, с помощью которых от оснований науки переходят к их следствиям. Гильберт и в методу математической логики внес изменение, аналогичное с тем, которое он внес в аксиоматическую методу. Подобно тому как он последовательно устранил из основных отношений и аксиом геометрии их наглядное содержание, так и доказательства анализа в его изложении заменяются чисто формальными операциями с определенными знаками, по определенным правилам. Подобно тому как в „Основаниях геометрии“ Гильберта основные факты пространственного представления—отношения, получаемые интуициею между точками, прямыми и плоскостями, заменяются формальными отношениями между тремя классами вещей, так рассуждения, основанные на применении законов логики, заменяются формальными операциями над известными символами.

Математика есть общее учение о формах—таков главный вывод, к которому приводят Гильберта его исследования. Такое определение математики не ново *), но в то время как до Гильберта формальному отношению, и следовательно возможности обобщения, подвергались только связи между классами вещей, в исследованиях об аксиоматическом мышлении Гильберт применяет тот же формализм и к ходу умозаключений в математических доказательствах. Понятен поэтому тот интерес, который и вне математических кругов должен быть вызван новыми работами Гильберта, в которых давно уже высказанная им мысль о необходимости одновременного развития законов логики и математики находит, повидимому, свое полное осуществление.

А. Васильев.

22 Августа
1922 г.

---

*) В моей статье „Математика“ (Казань, 1916 г.) читатель найдет те определения математики, данные Грассманом, Христалем, Кемпе,Ресселем, Пирсом и др., которые выражают ту же самую идею.

Так всякое человеческое познание начинается представлениями, переходит к понятиям и кончается идеями.

Кант. Критика чистого разума. Элементарное учение, 2-ая часть, 2-ой отдел.

ВВЕДЕНИЕ.

Геометрия — также как и арифметика — нуждается для своего последовательного построения в немногих и простых основных положениях. Эти основные положения называются **аксиомами** геометрии. Постановка аксиом геометрии и исследование их взаимной связи есть задача, которая со времени **Евклида** была предметом исследований в многочисленных прекрасных произведениях математической литературы *). Эта задача сводится к логическому анализу нашего пространственного воззрения.

Настоящее исследование есть новая попытка выставить для геометрии **полную и возможно более простую** систему аксиом и вывести из них важнейшие геометрические теоремы так, чтобы при этом возможно ярче выяснилось значение различных групп аксиом и объем следствий выводимых из отдельных аксиом.

---

*) Ср. резюмирующие и поясняющие работы G. Veronese,—„Grundzüge der Geometrie", deutsch von A. Schepp, Leipzig, 1894 (приложение) и F. Klein,—„Zur ersten Verteilung des Lobatschefsky-Preises", Math. Ann. Bd. 50.

Глава I.

Пять групп аксиом.

§ 1.

Элементы геометрии и пять групп аксиом.

Пояснение. Мы мыслим три различные системы вещей: вещи первой системы мы называем *точками* и обозначаем их $A, B, C \ldots$; вещи второй системы мы называем *прямыми* и обозначаем их $a, b, c \ldots$: вещи третьей системы мы называем *плоскостями* и обозначаем их $\alpha, \beta, \gamma \ldots$; точки называются также *элементами линейной геометрии*, точки и прямые называются *элементами плоской геометрии* и наконец точки, прямые и плоскости называются *элементами пространственной геометрии* или *элементами пространства*.

Мы мыслим точки, прямые, плоскости находящимися в известных взаимных отношениях и обозначаем эти отношения словами „лежат", „между", „параллельный", "конгруэнтный" и „непрерывный"; точное и для математических целей полное описание этих отношений дается *аксиомами геометрии* [1]).

Аксиомы геометрии мы можем распределить в пять групп; каждая отдельная из этих групп выражает известные, связанные между собою основные факты нашего представления. Мы обозначаем эти группы следующим образом:

I 1—8. Аксиомы *сочетания* (Axiome der *Verknüpfung*),
II 1—4. Аксиомы *порядка* (Axiome der *Anordnung*),
III 1—5. Аксиомы *конгруэнтности* (Axiome der *Kongruenz*),
IV. Аксиома *параллельности* (Axiom der *Parallelen*),
V 1—2. Аксиомы *непрерывности* (Axiome der *Stetigkeit*).

§ 2.

Группа аксиом I: аксиомы сочетания.

Аксиомы этой группы устанавливают *сочетание* между введенными выше понятиями — точки, прямые и плоскости — и выражаются следующим образом:

I 1. *Две различные точки A и B всегда определяют прямую a.*

Вместо термина „определяют“ мы будем употреблять и другие, напр.— a „проходит через“ A „и через“ B, a „соединяет“ A „и“ B или a „соединяет“ A „с“ B. Если A есть точка, которая вместе с другою точкою, определяет прямую a, то мы употребляем также выражения: A „лежит на“ a, A „есть точка“ a, „на“ a „существует точка“ A и т. д. Если A лежит на прямой a и сверх того на другой прямой b, то мы говорим: „прямые“ a „и“ b „имеют общую точку A“ и т. д.

I 2. *Любые две различные точки прямой определяют эту прямую.*

I 3. *На прямой всегда существуют по меньшей мере две точки; в каждой плоскости существуют всегда по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой* *).

I 4. *Три не лежащие на одной и той же прямой точки A, B, C всегда определяют плоскость α.*

Мы будем употреблять также выражения: A, B, C „лежат на“ α; A, B, C „суть точки“ α, и т. д.

I 5. *Любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, определяют эту плоскость.*

I 6. *Если две точки A, B прямой a лежат в плоскости α то и всякая точка прямой a лежит в плоскости α.*

В этом случае мы говорим: прямая a „лежит в“ плоскости α, и т. д.

---

*) A. Rosenthal показал (Math Ann. 69), что, присовокупив пространственные аксиомы этой группы, достаточно постулировать, что в плоскости существует всегда по меньшей мере одна точка. Ограничиваясь элементами одной плоскости, можно, если присовокупить плоскостные аксиомы группы II, первую часть I 3 ограничить требованием, что на прямой существует по меньшей мере одна точка.

I 7. *Если две плоскости α и β имеют общую точку A, то они имеют по меньшей мере еще одну общую точку B.*

I 8. *Существуют по меньшей мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Аксиомы I 1—3 могут быть названы *плоскостными аксиомами группы* I, в отличие от аксиом I 4—8, которые я называю *пространственными аксиомами группы* I.

Из теорем, вытекающих из аксиом I 1—8, я упомяну только следующие две:

Теорема 1. Две прямые какой-либо плоскости или имеют одну общую точку или не имеют ни одной; две плоскости или не имеют ни одной общей точки или имеют общую прямую; плоскость и не лежащая на ней прямая или имеют одну общую точку или не имеют ни одной.

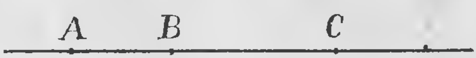
Теорема 2. Через прямую и не лежащую на ней точку, также как и через две различные прямые с одной общей точкой, проходит всегда одна и только одна плоскость.

§ 3.

Группа аксиом II: аксиомы порядка *).

Аксиомы этой группы определяют понятие „между“ и дают возможность на основании этого понятия установить *порядок* точек на прямой, в плоскости и в пространстве.

Пояснение. Точки прямой находятся друг с другом в известных соотношениях, для описания которых нам служит преимущественно слово „*между*“.



Черт. 1.

II 1. *Если A, B, C — точки одной прямой, и B лежит между A и C, то B лежит также между C и A* (черт. 1).

II 2. *Если A и C — точки одной прямой, то существует по меньшей мере одна точка B, лежащая между A и C, и по*

*) Эти аксиомы впервые обстоятельно исследовал M. Pasch в своих лекциях о новой геометрии (Vorlesungen über neuere Geometrie. Leipzig 1882). В частности аксиома II 4 принадлежит M. Pasch'y.

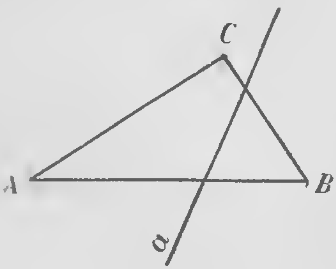
меньшей мере одна точка D такая, что C лежит между A и D (черт. 2).

II 3. *Из трех точек прямой всегда одна и только одна лежит между двумя другими.*

Пояснение. Мы рассматриваем на прямой a две точки A и B; систему этих обеих точек мы называем *отрезком* и обозначаем его через AB или BA. Точки между A и B называются точками отрезка AB или лежащими *внутри* отрезка AB; точки A, B называются *конечными точками* отрезка AB. Все прочие точки прямой a называются лежащими *вне* отрезка AB.

Черт. 2.

II 4. *Пусть A, B, C—три не лежащие на одной прямой точки и a прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через точку отрезка AB, то она непременно проходит или через точку отрезка AC или через точку отрезка BC* (черт. 3).



Черт. 3.

Аксиомы II 1—3 содержат только положения, касающиеся точек на одной и той же прямой, и могут быть поэтому названы *линейными аксиомами группы* II. Аксиома II 4 заключает в себе положение об элементах плоской геометрии и поэтому называется *плоскостной аксиомой группы* II.

§ 4.

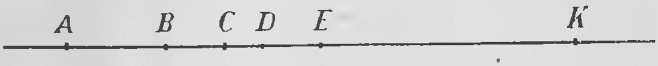
Следствия из аксиом сочетания и порядка.

Из аксиом I и II вытекают следующие теоремы:

Теорема 3. Между любыми двумя точками прямой существует всегда беспредельное множество точек.

Теорема 4. Если даны четыре точки прямой, то они могут быть всегда так обозначены буквами A, B, C, D, что точка B лежит, как между A и C, так и между A и D; а точка C—, как между A и D, так и между B и D *).

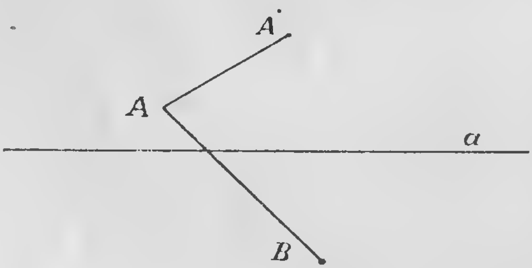
Теорема 5. (Обобщение теоремы 4). Если дано конечное число точек прямой, то они всегда могут быть обозначены буквами A, B, C, D, E, . . ., K так, что точка B лежит между A с одной стороны и C, D, E, . . ., K с другой; точка C — между A, B с одной стороны и точками D, E, . . ., K с другой; далее, D между A, B и C с одной стороны и E, . . ., K с другой и т. д. (черт. 4). Кроме



Черт. 4.

этого способа обозначения существует еще только обратный способ обозначения K, . . ., E, D, C, B, A, имеющий то же самое свойство.

Теорема 6. Каждая прямая a (черт. 5), лежащая в плоскости α, разделяет не лежащие на ней точки этой плоскости на две области, имеющие следующее свойство: каждая точка A одной области определяет вместе с каждою точкою B другой области отрезок AB, внутри которого лежит одна точка прямой a; напротив, две любые точки A и A' одной и той же области определяют отрезок AA', внутри которого не лежит ни одна точка прямой a **).



Черт. 5.

*) Это предложение, отнесенное в первом издании к аксиомам, выведено E. H. Moore'ом, как следствие выставленных плоскостных аксиом сочетания и порядка (Transactions of the American Mathematical Society, 1902) [2]). Ср. также относящиеся сюда работы Veblen'a. [Trans. Math. Soc., 1904] и Schweitzer'a [American Journ., 1909].—Желательно дать такую систему независимых аксиом, чтобы аксиомы, относящиеся к порядку точек прямой, вполне определяли этот порядок, т. е. чтобы из них одних следовала теорема 5.

**) Ср. доказательство у M. Pasch'a, ibid., стр. 25.

Пояснение. Пусть A, A', O, B—четыре точки одной прямой a такие, что O лежит между A и B, но не между A и A' (черт. 6); мы говорим тогда, что точки A и A' лежат *на прямой a с одной и той же стороны от точки O*, а точки A, B лежат *на прямой a по разные стороны от точки O*. Все точки прямой a, лежащие по одну и ту же сторону от точки O называются также *лучем*, исходящим из точки O; таким образом каждая точка прямой делит ее на два луча.

Черт. 6.

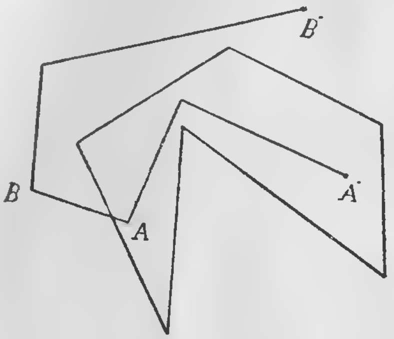
Пояснение. Употребляя обозначения теоремы 6-ой, мы говорим, что точки A, A' лежат *в плоскости по одну и ту же сторону от прямой a*, а точки A, B лежат *в плоскости a по разные стороны от прямой a*.

Пояснение. Система отрезков AB, BC, CD, . . ., KL называется *ломанной линией* [Streckenzug—собственно цепь отрезков], соединяющей точки A и L. Эта ломанная будет обозначаться также просто $ABCD \ldots KL$. Внутренние точки отрезков AB, BC, CD, . . ., KL, равно, как и точки A, B, C, D, . . ., K,L, называются все вместе точками ломанной линии. Если при этом точка L совпадает с точкою A, то ломанная называется *многоугольником* и обозначается так—многоугольник $ABCD \ldots K$. Отрезки AB, BC, CD, . . ., KA называются также *сторонами многоугольника*; точки A, B, C, D, . . ., K—*вершинами многоугольника*. Многоугольники с 3, 4, . . ., n вершинами называются соответственно *треугольниками, четыреугольниками, n-угольниками*.

Пояснение. Если вершины многоугольника все различны между собою, ни одна вершина не лежит на стороне многоугольника, и никакие две стороны многоугольника не имеют общей точки, то многоугольник называется *простым*.

С помощью теоремы 6 мы без особых трудностей приходим к следующим теоремам:

Теорема 7. Всякий простой многоугольник, вершины которого лежат в одной плоскости a, разделяет точки этой плоскости, не принадлежащие к ломанной, образующей этот многоугольник, на две области — внутреннюю и внешнюю, имеющие следующие свойства: если A (черт. 7) есть точка внутренней области (внутренняя точка), а B — точка внешней (внешняя точка), то всякая ломанная линия соединяющая A с B имеет по меньшей мере одну точку общую с многоугольником; если, напротив, A, A' суть две точки внутренней области и B, B'—две точки внешней, то всегда существуют ломанные линии, соединяющие A с A' и B с B' и не имеющие ни одной общей точки с многоугольником. Существуют прямые в плоскости α, целиком расположенные во внешней области многоугольника; напротив, не существует такой прямой, которая была бы целиком расположена во внутренней области многоугольника [3].



Черт. 7.

Теорема 8. Каждая плоскость α разделяет прочие точки пространства на две области, имеющие следующие свойства: каждая точка A одной области определяет с каждою точкою B другой области отрезок AB, внутри которого лежит точка плоскости α; напротив, каждые две точки A и A' одной и той же области определяют всегда отрезок AA', не содержащий никакой точки плоскости α [4].

Пояснение. Употребляя обозначения теоремы 8, мы говорим: точки A и A' лежат в пространстве *по одну и ту же сторону от плоскости* α, а точки A и B лежат в пространстве *по разные стороны от плоскости* α.

Теорема 8 выражает важнейшие факты, касающиеся порядка элементов в пространстве; эти факты суть поэтому исключительно следствия из до сих пор рассмотренных аксиом; в группе II нет надобности ни в одной новой пространственной аксиоме.

§ 5.

Группа аксиом III: аксиомы конгруэнтности.

Аксиомы этой группы определяют понятие **конгруэнтности** и вместе с тем понятие **движения**.

Пояснение. Отрезки находятся друг к другу в известных отношениях, для описания которых нам служат слова *„конгруэнтный“* или *„равный“*.

III 1. *Если A, B две точки на прямой a, а A' — точка на той же прямой или на другой прямой a', то всегда можно найти по данную от точки A' сторону прямой a' одну и только одну такую точку B', что отрезок AB конгруэнтен, или равен отрезку $A'B'$; это отношение между отрезками AB и $A'B'$ обозначается так:*

$$AB \equiv A'B'.$$

Каждый отрезок конгруэнтен самому себе, т. е. всегда

$$AB \equiv AB \text{ и } AB \equiv BA.$$

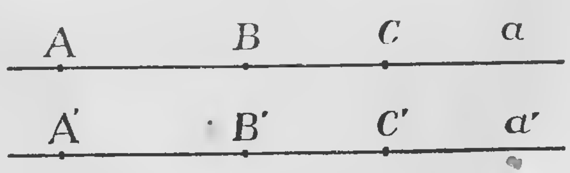
Мы говорим также короче: каждый отрезок может быть однозначно определенным образом *отложен* по данную сторону на данной прямой от данной точки.

III 2. *Если отрезок AB конгруэнтен, как отрезку $A'B'$, так и отрезку $A''B''$, то и $A'B'$ конгруэнтен отрезку $A''B''$; т. е., если*

$$AB \equiv A'B' \text{ и } AB \equiv A''B'',$$

то также

$$A'B' \equiv A''B''.$$



Черт. 8.

III 3. *Пусть AB и BC два отрезка на прямой a* (черт. 8) *без общих точек; далее, пусть $A'B'$ и $B'C'$ два отрезка* *на той же или на другой прямой a' тоже без общих точек. Если при этом*

$$AB \equiv A'B' \text{ и } BC \equiv B'C',$$

то всегда также

$$AC \equiv A'C'.$$

Пояснение. Пусть α есть произвольная плоскость, а h, k какие-либо два различные исходящие из точки O луча в плоскости α, принадлежащие различным прямым.

Систему этих двух лучей h, k мы называем углом и обозначаем $\angle (h, k)$ или $\angle (k, h)$. Из аксиом II 1—4 можно легко заключить, что лучи h и k, взятые вместе с точкою O, делят все прочие точки плоскости на две области, имеющие следующие свойства: если A есть точка одной и B точка другой области, то всякая ломанная, соединяющая A с B, либо проходит через O, либо имеет с h или k по меньшей мере одну общую точку; если, напротив, A, A'—точки одной и той же области, то всегда существует ломанная, соединяющая A с A' и не проходящая ни через точку O, ни через какую-либо точку лучей h и k. Одна из этих двух областей отличается от другой тем, что каждый отрезок, соединяющий какие-либо две точки этой особой области, лежит в этой области целиком; эту область мы назовем *внутренней* областью угла $\angle (h, k)$ в отличие от другой области которую можно назвать *внешней* областью угла $\angle (h, k)$. Лучи h, k называются *сторонами* угла, а точка O — его *вершиною*.

Пояснение. Углы находятся друг к другу в известных отношениях, для описания которых мы будем пользоваться, как и для отрезков, словами „*конгруэнтный*“ или „*равный*“ [5]).

III 4. *Пусть даны — угол $\angle (h, k)$ в плоскости α и прямая a' в плоскости α', а также определенная относительно a' сторона плоскости α'. Пусть h' означает луч прямой a', исходящий из точки O'; тогда в плоскости α' существует один и только один луч k' такой, что угол $\angle (h, k)$ конгруэнтен или равен углу $\angle (h', k')$, и вместе с тем все внутренние точки угла $\angle (h', k')$ лежат по данную сторону от a'; это отношение между углами обозначается так:*

$$\angle (h, k) \equiv \angle (h', k').$$

Каждый угол конгруэнтен самому себе, т. е. всегда

$$\angle (h, k) \equiv \angle (h, k) \text{ и } \angle (h, k) \equiv \angle (k, h).$$

Мы говорим также короче: каждый угол может быть однозначно определенным образом *отложен* в данной плоскости по данную сторону при данном луче.

Пояснение. Пусть дан треугольник ABC; обозначаем оба луча, выходящие из точки A и проходящие через точки B и C, буквами h и k. Угол $\angle (h, k)$ называется тогда углом треугольника, заключенным между сторонами AB и AC или противолежащим стороне BC; он заключает в своей внутренней области все внутренние точки треугольника ABC и обозначается $\angle BAC$ или $\angle A$.

III 5. *Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнции:*

$$AB \equiv A'B', \; AC \equiv A'C', \; \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

то всегда имеют место и конгруэнции:

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \; \angle ACB \equiv \angle A'C'B'.$$

Аксиомы III 1—3 содержат положения, касающиеся лишь конгруэнтности отрезков; они могут быть поэтому названы *линейными* аксиомами группы III. Аксиома III 4 содержит положения, касающиеся конгруэнтности углов. Аксиома III 5 связывает понятия о конгруэнтности отрезков и углов. Аксиомы III 4—5 содержат положения, касающиеся элементов плоской геометрии, и могут быть поэтому названы *плоскостными* аксиомами группы III.

§ 6.

Следствия из аксиом конгруэнтности.

Пояснение. Пусть отрезок AB конгруэнтен отрезку $A'B'$; так как по аксиоме III 1 и отрезок AB конгруэнтен AB, то по аксиоме III 2 $A'B'$ тоже конгруэнтен AB; мы называем оба отрезка AB и $A'B'$ *взаимно конгруэнтными*.

Пояснение. Если $A, B, C, D, \ldots, K, L$ на плоскости α и $A', B', C', D', \ldots, K', L'$ на плоскости α' суть два ряда таких точек, что все соответственные отрезки AB и $A'B'$, AC и $A'C'$, BC

и $B'C'$, ..., KL и $K'L'$ конгруэнтны между собой, оба эти ряда точек называются *взаимно конгруэнтными*; A и A', B и B', ..., L и L' называются *соответственными точками* конгруэнтных точечных рядов.

Из линейных аксиом III 1—3 мы легко выводим следующие теоремы:

Теорема 9. Если в двух конгруэнтных рядах точек A, B, ..., K, L и A', B', ..., K', L' точки первого расположены так, что B лежит между A с одной стороны и C, D, ..., K, L с другой, C между A, B с одной стороны и D, ..., K, L с другой и т. д., то и точки A', B', ..., K', L' расположены таким же образом, т. е. B' лежит между A' с одной стороны и C', D', ..., K', L' с другой, C' лежит между A', B' с одной стороны и D', ..., K', L' с другой и т. д.

Теорема 10 [6]). Если угол $\angle(h, k)$ конгруэнтен как углу $\angle(h', k')$, так и углу $\angle(h'', k'')$, то угол $\angle(h', k')$ конгруэнтен углу $\angle(h'', k'')$, т. е. если

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k') \text{ и } \angle(h, k) \quad (h'', k''),$$

то также всегда

$$\angle(h', k') \equiv \angle(h'', k'') \text{ *)}.$$

Пояснение. Пусть угол $\angle(h, k)$ конгруэнтен углу $\angle(h', k')$. Так как по аксиоме III 4 угол $\angle(h, k)$ конгруэнтен углу $\angle(h, k)$, то из теоремы 10 следует, что и угол $\angle(h', k')$ конгруэнтен углу $\angle(h, k)$; мы называем углы $\angle(h, k)$ и $\angle(h', k')$ *взаимно конгруэнтными*.

Пояснение. Два угла, имеющие общую вершину и одну общую сторону, не общие стороны которых составляют прямую линию, называются *смежными углами*. Два угла с общею вершиною, стороны которых попарно составляют прямые линии, называются *вертикальными углами*. Угол конгруэнтный с своим смежным углом называется *прямым углом*.

---

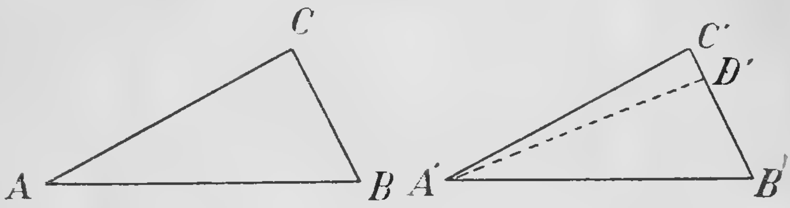
*) Это предложение в прежних изданиях было выставлено как аксиома и было выведено A. Rosenthal'ем (Math. Ann. 71) из остальных аксиом конгруэнтности при помощи аксиом групп I и II. Одновременно он показал, как можно III 1 и 4 заменить аксиомами с меньшими требованиями [7]).

Существование прямых углов известным образом вытекает из III 1, III 4, III 5. Именно, если произвольный угол отложить от его вершины при одной из его сторон и затем сделать равными наружные стороны, то прямая, соединяющая эти конечные точки, перпендикулярна к общей стороне.

Два треугольника ABC и $A'B'C'$ называются взаимно конгруэнтными, если удовлетворены совместно все конгруэнции:

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ BC \equiv B'C'$$

$$\angle A \equiv \angle A',\ \angle B \equiv \angle B',\ \angle C \equiv \angle C'.$$



Черт. 9.

Теорема 11. (Первая теорема о конгруэнтности треугольников). Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ (черт. 9) удовлетворены конгруэнции:

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C',\ \angle A \equiv \angle A',$$

то оба треугольника взаимно конгруэнтны.

Доказательство. По аксиоме III 5 удовлетворены конгруэнции

$$\angle B \equiv \angle B' \text{ и } \angle C \equiv \angle C',$$

и поэтому остается только доказать, что стороны BC и $B'C'$ взаимно конгруэнтны.

Действительно, если мы примем напротив, что BC не конгруэнтна $B'C'$ и определим на $B'C'$ точку D' так, что $BC \equiv B'D'$, то два треугольника ABC и $A'B'D'$ совпадают своими двумя сторонами и заключающимся между ними углом; следовательно, по аксиоме III 5 оба угла $\angle BAC$ и $\angle B'A'D'$ между собою конгруэнтны. В этом случае угол $\angle BAC$ был бы конгруэнтен, как углу $\angle B'A'D'$, так и углу $\angle B'A'C'$. Но это невозможно, ибо по аксиоме III 4 каждый угол может быть только единственным способом отложен при данном луче в данную сторону на плоскости. Этим вполне доказана теорема 11.

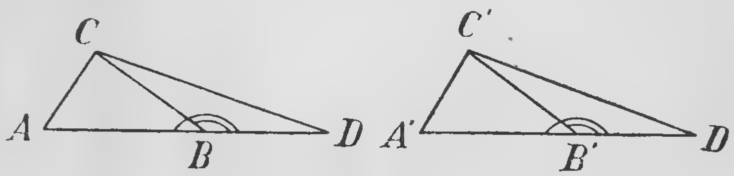
Так же легко доказываем мы и следующее положение:

Теорема 12. (Вторая теорема о конгруэнтности треугольников).

Если в двух треугольниках соответственно конгруэнтны между собою одна сторона и оба прилежащие к ней угла, то треугольники конгруэнтны.

Мы в состоянии теперь доказать следующие важные положения.

Теорема 13. *Если два угла* $\angle ABC$ и $\angle A'B'C'$ (черт: 10) *взаимно конгруэнтны, то и смежные им углы* $\angle CBD$ *и* $\angle C'B'D'$ *тоже взаимно конгруэнтны.*



Черт. 10.

Доказательство. Выберем точки $A'C'D'$ на сторонах, проходящих через точку B', так, чтобы $A'B' \equiv AB$, $C'B' \equiv CB$, $D'B' \equiv DB$. Тогда в треугольниках ABC и $A'B'C'$ стороны AB и CB конгруэнтны, соответственно, сторонам $A'B'$ и $C'B'$; кроме того по предположению конгруэнтны и углы, заключающиеся между этими сторонами; на основании теоремы 11 треугольники конгруэнтны, т. е.

$$AC \equiv A'C' \text{ и } \angle BAC \equiv \angle B'A'C'.$$

Так как с другой стороны по аксиоме III 3 отрезки AD и $A'D'$ взаимно конгруэнтны, то из теоремы 11 отсюда следует конгруэнтность треугольников CAD и $C'A'D'$, т. е.

$$CD \equiv C'D' \text{ и } \angle ADC \equiv \angle A'D'C';$$

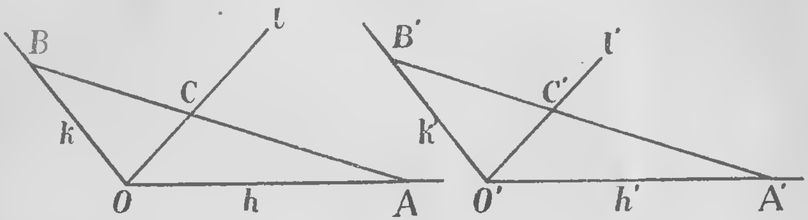
отсюда по аксиоме III 5, из рассмотрения треугольников BCD и $B'C'D'$, заключаем о конгруэнтности углов $\angle CBD$ и $\angle C'B'D'$.

Непосредственным следствием теоремы 13 является теорема о равенстве вертикальных углов.

Теорема 14. Пусть угол $\angle(h, k)$ в плоскости α конгруэнтен углу $\angle(h', k')$ в плоскости α', и пусть кроме того l есть луч плоскости α, исходящий из вершины угла $\angle(h, k)$ и расположенный во внутренней области этого угла: тогда существует всегда луч l' в плоскости α', выходящий из вершины угла $\angle(h', k')$ и расположенный во внутренней области этого угла $\angle(h', k')$ так, что:

$$\angle(h, l) \equiv \angle(h', l') \text{ и } \angle(k, l) \equiv \angle(k', l').$$

Доказательство. Обозначаем вершины углов $\angle(h, k)$ и $\angle(h', k')$ (черт. 11) буквами O и O' и затем определяем на сторонах h, k, h', k' точки A, B, A', B' так, чтобы были удовлетворены конгруэнции $OA \equiv O'A'$ и $OB \equiv O'B'$.



Черт. 11

Вследствие конгруэнтности треугольников OAB и $O'A'B'$ имеем

$$AB \equiv A'B', \angle OAB \equiv \angle O'A'B', \angle OBA \equiv \angle O'B'A'.$$

Прямая AB пересекает l в точке C; определим тогда на отрезке $A'B'$ точку C' так, чтобы $A'C' \equiv AC$; $O'C'$ и есть искомый луч l'. Действительно из $AC \equiv A'C'$ и $AB \equiv A'B'$ на основании аксиомы III 3 легко выводится конгруэнция $BC \equiv B'C'$; теперь оказывается, что треугольники OAC и $O'A'C'$, равно как и треугольники OBC и $O'B'C'$, взаимно конгруэнтны, а отсюда вытекают утверждения теоремы 14.

Подобным же образом мы выводим следующее положение:

Теорема 15. Пусть h, k, l с одной стороны и h', k', l' с другой—лучи, исходящие, соответственно по три, из одной точки и расположенные в одной плоскости; тогда, если имеют место конгруэнции

$$\angle(h, l) \equiv \angle(h', l') \text{ и } \angle(k, l) \equiv \angle(k', l')^{8)},$$

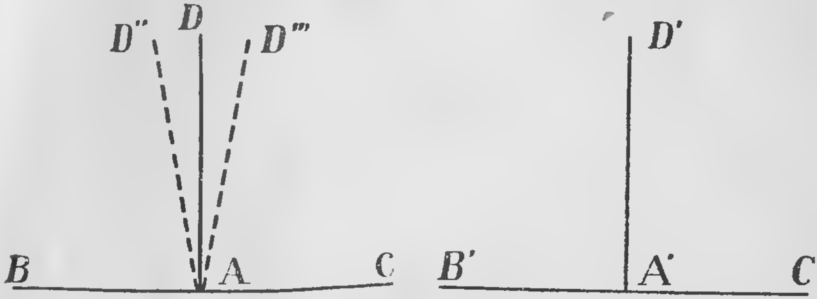
то всегда имеет место и конгруэнция

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k').$$

На основании теорем 13 и 14 является возможным доказать следующую простую теорему, которую *Евклид*—по моему мнению неправильно—поместил в число аксиом.

Теорема 16. *Все прямые углы равны между собою* *).

Доказательство. Пусть (черт. 12) угол $\angle BAD$ конгруэнтен своему смежному углу $\angle CAD$, и подобным же образом угол



Черт. 12.

$\angle B'A'D'$ конгруэнтен своему смежному углу $\angle C'A'D'$; тогда все углы $\angle BAD$, $\angle CAD$, $\angle B'A'D'$, $\angle C'A'D'$ суть прямые. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что прямой угол $\angle B'A'D'$ не конгруэнтен прямому углу $\angle BAD$, и отложим тогда $\angle B'A'D'$ от луча AB так, что другая сторона AD'' упадет или во внутренней области угла $\angle BAD$, или во внутренней области угла $\angle CAD$. Предположим первое. Из конгруэнтности углов $\angle B'A'D'$ и $\angle BAD''$ на основании теоремы 13 вытекает, что и угол $\angle C'A'D'$ конгруэнтен углу $\angle CAD''$, а так как углы $\angle B'A'D'$ и $\angle C'A'D'$ конгруэнтны между собою, то по теореме 10 и угол $\angle BAD''$ должен быть конгруэнтен углу $\angle CAD''$. Далее, так как $\angle BAD$ конгруэнтен $\angle CAD$, то мы можем по теореме 14 найти внутри угла $\angle CAD$ выходящий из точки A

*) Th. Vahlen отметил в своей книге „Abstrakte Geometrie“ (Leipzig, 1905, стр. 242), что уже Лежандр доказал это предложение. Лежандр однако делает предположение, что углы образуют систему непрерывных величин. Вместе с тем Th. Vahlen показал там, что обратно из принятия теоремы 16 следует однозначность отложения углов, т. е. одна часть аксиомы III 4 вытекает при этом из другой части аксиомы III 4,—именно из возможности отложения углов,—и других аксиом конгруэнтности.

луч AD''' так, что угол $\angle BAD''$ будет конгруэнтен углу $\angle CAD'''$ и в то же время $\angle DAD''$ конгруэнтен $\angle DAD'''$. Но угол $\angle BAD''$ конгруэнтен углу $\angle CAD''$, и поэтому по теореме 10 угол $\angle CAD''$ должен быть конгруэнтен углу $\angle CAD'''$; но это невозможно, потому что по аксиоме III 4 каждый угол может быть отложен только одним способом при данном луче в данную сторону на плоскости; таким образом теорема 16 доказана.

Мы можем теперь ввести обозначения *„острый угол“* и *„тупой угол“*, как это делается обыкновенно.

Теорема о конгруэнтности в равнобедренном треугольнике ABC углов при основании $\angle A$ и $\angle B$ следует непосредственно из применения аксиомы III 5 к треугольникам ABC и BAC. С помощью этой теоремы и пользуясь теоремою 15, мы легко доказываем известным способом следующее положение:

Теорема 17. (Третья теорема о конгруэнтности треугольников). Если в двух треугольниках три стороны одного соответственно конгруэнтны трем сторонам другого, то треугольники конгруэнтны[9]).

Пояснение. Совокупность конечного числа точек называется *фигурою*; если все точки фигуры лежат в одной плоскости, то фигура называется *плоскою*.

Две фигуры называются *конгруэнтными*, если их точки могут быть попарно сопряжены друг с другом так, чтобы сопряженные при этом отрезки и углы были все взаимно конгруэнтны.

Конгруэнтные фигуры имеют по теоремам 9 и 13 [10]) следующие свойства: три точки одной прямой лежат во всех конгруэнтных фигурах также на одной прямой. Расположение точек в соответственных плоскостях относительно соответственных прямых в конгруэнтных фигурах одно и тоже; тоже самое имеет место относительно ряда соответственных точек на соответственных прямых.

Наиболее общая теорема о конгруэнтности для плоскости и для пространства выражается следующим образом:

Теорема 18. Если $(A, B, C, \ldots)$ и $(A', B', C', \ldots)$ — плоские конгруэнтные фигуры, и P обозначает точку плоскости первой фигуры, то в плоскости второй фигуры можно всегда найти такую точку P', что $(A, B, C, \ldots, P)$ и $(A', B', C', \ldots, P')$ — также конгруэнтные фигуры.

Если фигура $(A, B, C, \ldots)$ содержит по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой, то построение точки P' возможно только одним единственным образом[11]).

Теорема 19. Если $(A, B, C, \ldots)$ и $(A', B', C', \ldots)$ суть две конгруэнтные фигуры, и P обозначает произвольную точку, то всегда можно найти точку P' так, что фигуры $(A, B, C, \ldots, P)$ и $(A', B', C', \ldots, P')$ будут конгруэнтны между собою. Если фигура $(A, B, C, \ldots)$ содержит по меньшей мере четыре не лежащие в одной плоскости точки, то построение точки P' возможно только одним единственным образом.

Теорема 19 выражает тот важный результат, что все пространственные предложения о конгруэнтности, а, следовательно, и о движении в пространстве, суть следствия пяти выставленных выше линейных и плоскостных аксиом конгруэнтности, если присовокупить сюда I и II группы аксиом.

§ 7.

Группа аксиом IV: аксиома параллельности

Из всех до сих пор данных аксиом, как известно, вытекает теорема Евклида, по которой внешний угол треугольника всегда больше каждого из внутренних его углов не смежных с ним.

Пусть α есть произвольная плоскость, a произвольная прямая в α и A точка в α и вне a. Если мы проведем в α прямую c, проходящую через A и пересекающую a, и затем в той же плоскости α и через ту же точку A прямую b так, что прямая c пересекает прямые a и b под равными накрестлежащими углами, то из упомянутой теоремы о внешнем угле вытекает, что прямые a и b не имеют общей точки, т. е. в плоскости α всегда можно через точку A, лежащую вне прямой a, провести прямую не пересекающую прямую a.

Аксиома параллельности утверждает:

IV (Аксиома Евклида): *Пусть a есть произвольная прямая и A точка вне ее; тогда в плоскости, определенной точкою A и прямою a, можно провести не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей a*[12]).

Пояснение. Согласно предыдущего и на основании аксиомы параллельности мы узнаем, что в плоскости, определенной прямою a и точкою A, существует одна и только одна прямая, которая проходит через A и не пересекает a; мы называем ее *параллельною к a через A.*

Аксиома параллельности IV равносильна следующему утверждению:

если две прямые a, b в одной плоскости не встречают третью прямую той же плоскости, то они не встречают и друг друга.

Действительно, если бы a и b имели общую точку A, то через точку A проходили бы в одной и той же плоскости две прямые, не встречающиеся с c, что противоречило бы аксиоме IV. Точно также и, наоборот, аксиома IV легко вытекает из приведенного требования.

Аксиома параллельности IV есть *плоскостная аксиома.*

Введение этой аксиомы значительно упрощает основания геометрии и облегчает построение геометрии.

Присоединяя к аксиомам конгруэнтности аксиому параллельности, мы легко приходим к известным предложениям:

Теорема 20. Если две параллельные пересечены третьей прямой, то накрестлежащие соответственные углы равны, и обратно: конгруэнтность накрестлежащих или соответственных углов имеет следствием параллельность прямых.

Теорема 21. Сумма углов треугольника равна двум прямым*).

Пояснение. Если M есть произвольная точка в плоскости α, то совокупность всех точек A, для которых отрезки MA взаимно конгруэнтны, называется *окружностью*, M называется *центром окружности.*

Из этого пояснения с помощью аксиом групп III—IV легко вытекают известные теоремы об окружности, в частности возможность проведения окружности через любые три точки, не лежащие на одной прямой, равно как теорема о равенстве всех вписанных углов, опирающихся на одну и ту же дугу, и теорема об углах вписанного в окружность четыреугольника.

*) Относительно вопроса насколько, в свою очередь, это предложение может заменить аксиому параллельности, сравн. замечания в конце главы II § 12.

§ 8.

Группа аксиом V: аксиомы непрерывности.

V 1. (Аксиома измерения или аксиома Архимеда). *Пусть* (черт. 13) A_1 *есть произвольная точка на прямой между произвольно данными точками* A *и* B; *строим затем точки*

Черт. 13.

A_2, A_3, A_4, ... *так, что точка* A_1 *лежит между* A *и* A_2, A_2 *между* A_1 *и* A_3, A_3 *между* A_2 *и* A_4 *и т. д., и сверх того отрезки:*

$$AA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_4,\ \ldots\ldots$$

равны между собою: тогда в ряду точек A_2, A_3, A_4, ... *всегда существует такая точка* A_n, *что точка* B *лежит между* A *и* A_n.

V 2. (Аксиома полноты). *Элементы (точки, прямые, плоскости) геометрии образуют систему вещей, которая, при условии сохранения всех указанных выше аксиом, не допускает никакого расширения*, т. е. к системе точек, прямых, плоскостей невозможно присоединить другую систему вещей так, чтоб в новой расширенной системе были попрежнему удовлетворены вместе все аксиомы I—IV, V 1 [13]).

Аксиома Архимеда V 1 есть *линейная* аксиома.

Относительно аксиомы полноты V 2, я присоединяю следующие замечания.

Сохранение всех аксиом, о котором идет речь в этой аксиоме, нужно понимать так, что после расширения все предыдущие аксиомы удовлетворяются как и раньше, т. е. существующие между элементами отношения, именно существующий порядок их и конгруэнтность отрезков и углов, нисколько не нарушаются; так, напр., точка, которая до расширения лежит между двумя точками, лежит между ними и после расширения; отрезки и углы взаимно конгруэнтные раньше, остаются таковыми и после расширения.

Выполнимость аксиомы полноты существенно обусловливается предварительным установлением аксиомы Архимеда; действительно можно показать, что к системе точек, прямых и плоскостей, удовлетворяющих аксиомам I—IV, можно всегда разнообразными способами присоединить новые элементы таким образом, что в расширенной системе все же останутся в силе все аксиомы I—IV; это значит—аксиома полноты привела бы к противоречию, если бы к аксиомам I—IV не была еще присоединена аксиома Архимеда[14]).

Аксиома полноты не есть следствие аксиомы Архимеда. Действительно, аксиома Архимеда одна не достаточна для того, чтобы с помощью аксиом I—IV доказать тождество нашей геометрии с обыкновенною аналитическою „Декартовою" геометриею (ср. § 9 и § 12). Напротив, присоединение аксиомы полноты,—хотя она и не содержит непосредственно никакого утверждения, касающегося понятия сходимости,—дает возможность доказать существование предела, соответствующего сечению Дедекинда, и теорему Больцано о существовании точек уплотнения, чем и доказывается тождественность нашей геометрии с геометриею Декарта.

Мы видим таким образом, что требование непрерывности разлагается на две существенно различные составные части, а именно—на аксиому Архимеда, которая подготовляет требование непрерывности, и на аксиому полноты, которая составляет завершение всей системы аксиом*).

В нижеследующих исследованиях мы опираемся, по существу, только на аксиому Архимеда и в общем не предполагаем аксиомы полноты.

---

*) Ср. также замечания в конце § 17, равно как и мой доклад относительно понятия числа [Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1900; перепечатан как VI прибавление к немецкому изданию настоящего сочинения]. — При исследовании теоремы о равенстве углов при основании в равнобедренном треугольнике я ввел другую аксиому непрерывности, которую назвал аксиомою соседства; смотри мою статью „Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck" [Proceedings of the London Mathematical Society, Bd. XXXV, 1903, ср. стр. 92 и стр. 107; перепечатана как II прибавление к немецкому изданию настоящего сочинеиия].

Глава II.

Взаимная непротиворечивость и независимость аксиом.

§ 9.

Взаимная непротиворечивость аксиом.

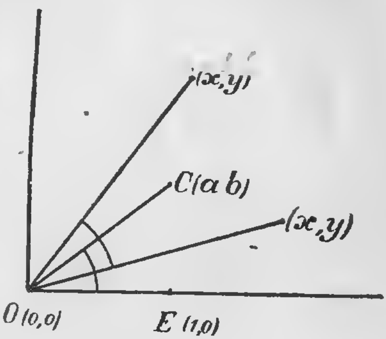
Аксиомы пяти групп, выставленных в главе I, не находятся в противоречии между собою, т. е. невозможно вывести из них путем логических умозаключений такое положение, которое противоречило бы одной из выставленных аксиом. Чтобы убедиться в этом, мы образуем из вещественных чисел систему вещей, по отношению к которой выполняются одновременно все аксиомы пяти групп.

Рассмотрим прежде всего область Ω всех алгебраических чисел, получающихся, если мы исходим из 1 и применяем конечное число раз четыре операции счета—сложение, вычитание, умножение, деление и пятую операцию $\sqrt{1+\omega^2}$, причем ω всегда обозначает число, полученное уже с помощью этих пяти операций.

Будем рассматривать пару чисел (x, y) области Ω как точку, и отношение каких-либо трех чисел $(u:v:w)$ из области Ω, если u, v не нули одновременно, как прямую; далее пусть существование уравнения

$$ux + vy + w = 0$$

выражает, что точка (x, y) лежит на прямой $(u:v:w)$; тогда, как легко видеть, удовлетворяются аксиомы I 1—3 и IV. Все числа области Ω суть числа вещественные; так как они могут быть расположены в порядке по своей величине, то мы можем легко найти такие условия для наших точек и прямых, что и аксиомы II будут все иметь место. Действительно, пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),... будут какие-либо точки на одной прямой; предположим, что они следуют именно в этом порядке на прямой, если числа x_1, x_2, x_3,... или y_1, y_2, y_3, ..., взятые в этом порядке, постоянно или убывают или возрастают: далее, для того, чтобы удовлетворить требованию аксиомы II 4, мы только должны установить, что все точки (x, y), для которых $ux+vy+w$ больше или меньше 0, лежат соответственно по одну или по другую сторону от прямой $(u:v:w)$. Легко убедиться, что это условие находится в согласии с предыдущим условием, которым порядок точек на прямой уже определен.



Черт. 14.

Откладывание отрезков и углов выполняется по известным методам аналитической геометрии. Преобразование вида

$$x' = x + a,$$
$$y' = y + b$$

выражает параллельное перенесение отрезков и углов. Если далее обозначить точку (0, 0) буквою O, точку (1, 0) буквою E и произвольную точку (a, b) буквою C, то вращение на угол $\angle\ COE$ если O есть неподвижный центр вращения, переводит произвольную точку (x, y) в точку (x', y'), при чем должно быть положено

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y,$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y.$$

Так как число

$$\sqrt{a^2+b^2} = b\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$$

принадлежит также к области Ω, то при наших условиях удовлетворены как аксиомы конгруэнтности III, так, очевидно, и аксиома Архимеда V 1 [1]). Не имеет места аксиома полноты V 2.

Вследствие этого каждое противоречие в следствиях из наших геометрических аксиом I—IV, V 1 должно проявиться также в арифметике области Ω*).

Вводя вместо области Ω в предыдущее изложение область всех вещественных чисел, мы получаем геометрию, в которой имеют место все аксиомы I — V; эта геометрия есть обыкновенная Декартова геометрия.

Каждое противоречие в следствиях из аксиом I — V должно было бы проявиться поэтому и в арифметике системы вещественных чисел.

Соответствующие соображения по отношению к геометрии пространства не представляют никакой трудности[2]).

Как видно, существует бесконечное множество геометрий, которые удовлетворяют аксиомам I—IV, V 1; напротив, — только одна, а именно Декартова геометрия, в которой имеет место также и аксиома полноты V 2.

§ 10.

Независимость аксиомы параллельности (не-евклидова геометрия).

После того как мы доказали отсутствие противоречий в аксиомах, является интересным исследовать, независимы ли все аксиомы друг от друга. Действительно оказывается, что никакие существенные основные части приведенных выше групп аксиом не могут быть выведены путем логических умозаключений из предшествующих им каждый раз групп аксиом.

Прежде всего, что касается до отдельных аксиом групп I, II и III, то легко показать, что аксиомы одной и той же группы между собою независимы.

---

*) По вопросу об отсутствии противоречия между арифметическими аксиомами ср. мои доклады относительно понятия числа: помещенный в „Berichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung", 1900 (VI прибавление к немецкому изданию настоящего сочинения) и также—„Mathematische Probleme", сделанный на международиом математическом конгрессе 1900 г. [Göttinger Nachr., 1900], в частности проблему № 2.

Аксиомы групп I и II лежат в нашем изложении в основе прочих аксиом: так что речь идет только о том, чтобы доказать для каждой из групп III, IV и V их независимость от прочих [3]).

Аксиома параллельности IV независима от прочих аксиом; это всего проще доказывается, как известно, следующим образом: примем точки, прямые и плоскости обыкновенной, построенной в § 9 (Декартовой) геометрии, поскольку они расположены внутри некоторого определенного шара, за соответствующие элементы пространственной геометрии и выразим конгруэнтность в этой геометрии посредством таких линейных преобразований обыкновенной геометрии, которые преобразуют упомянутый шар в самого себя. При подходящих соглашениях можно убедиться в том, что в этой *„не-евклидовой“ геометрии* удовлетворяются все аксиомы, кроме аксиомы Евклида IV, и так как в § 9 доказана возможность обыкновенной геометрии, то отсюда вытекает и возможность не-евклидовой геометрии [4]).

§ 11.

Независимость аксиом конгруэнтности.

Из фактов, касающихся независимости аксиом конгруэнтности, мы докажем, как особо важный, следующий: аксиома III 5 или, что сводится к тому же, первая теорема о конгруэнтности треугольников, т. е. теорема 11, не может быть выведена логическими умозаключениями из прочих аксиом I, II, III 1—4, IV, V.

Мы считаем точки, прямые, плоскости обыкновенной геометрии также и элементами новой пространственной геометрии и определяем откладывание углов совершенно так же, как и в обыкновенной геометрии, напр., так, как это было указано в § 9. Напротив, откладывание отрезков определяем иначе. Если две точки A_1, A_2 имеют в обыкновенной геометрии координаты соответственно x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2, то длиною отрезка $A_1 A_2$ назовем положительное значение

$$\sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

и два произвольных отрезка A_1A_2 и $A'_1A'_2$ будем теперь называть взаимно конгруэнтными, если их длины, в установленном только что смысле, равны.

Непосредственно ясно, что в построенной таким образом пространственной геометрии имеют место аксиомы I, II, III 1—2, 4, IV, V (равно как и теоремы 10, 13, 14, 15, 16, которые могут быть выведены с помощью III 5).

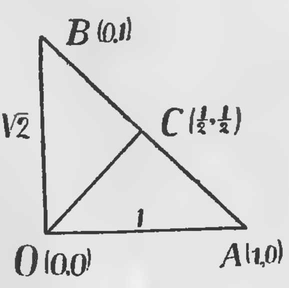
Чтобы показать, что и аксиома III 3 имеет место, берем произвольную прямую a и на ней три точки A_1, A_2, A_3 так, что точка A_2 лежит между A_1 и A_3. Пусть точки x, y, z прямой a даны уравнениями

$$x = \lambda t + \lambda',$$
$$y = \mu t + \mu',$$
$$z = \nu t + \nu',$$

где $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ обозначают определенные постоянные, а t некоторый параметр. Если t_1, t_2 $(< t_1)$, t_3 $(< t_2)$ суть значения параметра, соответствующие точкам A_1, A_2, A_3, то находим для длины отрезков A_1A_2, A_2A_3 и A_1A_3 соответственно выражения:

$$(t_1 - t_2)\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2},$$
$$(t_2 - t_3)\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2},$$
$$(t_1 - t_3)\sqrt{(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2},$$

и поэтому сумма длин отрезков A_1A_2 и A_2A_3 равна длине отрезка A_1A_3; это обстоятельство обусловливает наличность аксиомы III 3.



Черт. 15.

Однако, аксиома III 5, или лучше сказать первая теорема о конгруэнтности треугольников, не всегда выполнена в нашей геометрии. Если мы рассмотрим, напр., в плоскости $z = 0$ четыре точки

O с координатами $x = 0,\ y = 0$,
A „ „ $x = 1,\ y = 0$,
B „ „ $x = 0,\ y = 1$,
C „ „ $x = \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{2}$,

то в обоих (прямоугольных) треугольниках OAC и OBC (черт. 15) углы при C и прилежащие стороны взаимно конгруэнтны, именно—

сторона OC общая у обоих треугольников, и отрезки AC и BC имеют равные длины — $\frac{1}{2}$. Напротив, третьи стороны OA и OB, имеющие соответственно длины 1 и $\sqrt{2}$, не конгруэнтны между собою.

Не трудно также в этой геометрии найти два треугольника, для которых не удовлетворена самая аксиома III 5.

§ 12.

Независимость аксиом непрерывности V (не-архимедова геометрия).

Для доказательства независимости аксиомы Архимеда V 1 мы должны построить геометрию, в которой были бы удовлетворены все аксиомы за исключением аксиом V, эти же последние, напротив, не имели бы места *).

Для этой цели построим область $\Omega(t)$ всех тех алгебраических функций от t, которые получаются из t посредством четырех операций счета — сложения, вычитания, умножения, деления и пятой операции $\left|\sqrt{1+\omega^2}\right|$, при этом ω должна означать какую-либо алгебраическую функцию, полученную уже посредством этих пяти операций. Множество элементов $\Omega(t)$ — подобно тому как и множество элементов области Ω в § 9 — есть множество исчислимое. Все пять операций однозначны и дают вещественные значения; область $\Omega(t)$ содержит поэтому только однозначные и вещественные функции от t.

Пусть c есть какая-либо функция области $\Omega(t)$; так как функция c есть алгебраическая функция от t, то она может обратиться в нуль во всяком случае только для конечного числа значений t, и поэтому функция c для достаточно больших положительных значений t будет оставаться или всегда положительною или всегда отрицательною.

Будем рассматривать теперь функции области $\Omega(t)$, как род комплексных чисел; очевидно, в определенной таким образом комп-

*) G. Veronese в своем глубокомысленном трактате: „Основания геометрии" („Grundzüge der Geometrie", deutsch von A. Schepp, Leipzig, 1894) также сделал попытку построения геометрии, которая была бы независима от аксиомы Архимеда.

лексной числовой системе имеют место все обыкновенные правила счисления. Далее пусть, если a, b суть два различные числа этой комплексной системы чисел, число a называется бо̀льшим или мѐньшим числа b—в символах $a > b$ или $a < b$,—смотря по тому будет ли разность $c = a - b$, как функция от t, для достаточно больших положительных значений t всегда положительною или всегда отрицательною. При таком условии является возможным установить для чисел нашей комплексной системы порядок, аналогичный с порядком вещественных чисел; легко видеть также, что для наших комплексных чисел имеют место теоремы, по которым неравенства остаются справедливыми, если мы к обеим сторонам прибавим по равному числу или умножим обе стороны неравенства на равные числа > 0.

Если n означает произвольное целое положительное число, то для чисел n и t области Ω (t) наверное имеет место неравенство $n < t$, т. к. разность $n - t$, рассматриваемая как функция от t, очевидно остается неизменно отрицательною для достаточно больших значений t. Мы выражаем это положение следующим образом: два числа 1 и t области Ω (t), оба > 0, имеют то свойство, что произвольное кратное первого остается постоянно менее второго.

Мы строим теперь из комплексных чисел области Ω (t) некоторую геометрию совершенно так же, как это выполнено в § 9, где положена в основу область Ω алгебраических чисел: мы мыслим систему трех чисел (x, y, z) области Ω (t), как точку, а отношения каких-либо четырех чисел $(u : v : w : r)$ области Ω (t), при условии, что u, v, w одновременно не нули,—как плоскость; пусть далее существование уравнения

$$ux + vy + wz + r = 0$$

выражает, что точка (x, y, z) лежит в плоскости $(u : v : w : r)$, и пусть прямая есть совокупность всех точек, лежащих в двух плоскостях с различными $u : v : w$. Принимая затем соответствующие условия относительно порядка элементов и отложения отрезков и углов, как в § 9, мы строим *„не-архимедову“ геометрию*, в которой, как это вытекает из изложенных выше свойств комплексной системы чисел Ω (t), имеют место все аксиомы за исключением аксиом непрерывности. Действительно, мы можем сколько угодно раз отложить отрезок 1 на отрезке t, не переходя через конечную точку отрезка t; это противоречит требованию аксиомы Архимеда.

Что и аксиома полноты V 2 независима от всех предшествующих аксиом I—IV, V 1 показывает первая—данная в § 9—геометрия, в которой имеет место аксиома Архимеда.

Геометрии одновременно не-архимедовы и не-евклидовы, имеют также принципиальное значение, и в особенности мне казался представляющим большой интерес вопрос о зависимости теоремы о сумме углов в треугольнике от аксиомы Архимеда.

Исследование, которое по моей инициативе было предпринято по этому вопросу M. Dehn'ом *), привело к полному его разъяснению. В основе исследований M. Dehn'a лежат аксиомы I—III. Только в конце работы M. Dehn'a—чтобы и Риманнова (эллиптическая) геометрия могла быть введена в область исследования—аксиомы порядка II представлены в несколько более общем виде, чем в настоящем мемуаре, а именно, примерно, так: четыре точки A, B, C, D прямой всегда разбиваются на две пары A, C и B, D так, что точки A, C разделяются точками B, D и обратно. Пять точек на прямой могут быть всегда обозначены буквами A, B, C, D, E так, что точки A, C разделяются точками B, D и B, E, далее, точки A, D разделяются точками B, E и C, E и т. д.

Важнейшие теоремы, доказанные M. Dehn'ом на основании аксиом I—III, т. е. без пользования непрерывностью, суть следующие:

Если в каком-либо *одном* треугольнике сумма углов больше или равна или меньше двух прямых, то такова она соответственно и в каждом треугольнике **).

Из предположения о существовании бесконечно-большого числа параллельных к прямой через одну точку *не* следует, если отбросить аксиому Архимеда, что сумма углов в треугольнике меньше двух прямых, так как, напротив, существует геометрия (не-лежан-

*) „Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. [Math Ann., Bd. 53, 1900].

**) Доказательство для этой теоремы было дано позднее и F. Schur'ом [Math. Ann. Bd. 55] и потом Hjelmslev'ом [Math. Ann. 64]; в последней работе приведен очень короткий вывод, который ведет к доказательству средней части этой теоремы.

дрова геометрия), в которой можно провести через одну точку бесконечно много параллельных к одной прямой и, в которой, несмотря на это, имеют место теоремы Римановой (эллиптической) геометрии. С другой стороны, существует геометрия (полу-евклидова геометрия), в которой существует бесконечное множество параллельных через точку к прямой, и в которой тем не менее имеют место теоремы Евклидовой геометрии.

Из предположения, что не существует параллельных следует неизменно, что сумма углов в треугольнике больше двух прямых.

Замечу наконец, что, если принять аксиому Архимеда, то аксиома параллельности может быть заменена требованием, чтобы сумма углов в треугольнике была равна двум прямым.

Глава III.

Учение о пропорциях.

§ 13.

Комплексные системы чисел *).

Мы начнем эту главу несколькими краткими объяснениями, относящимися к комплексным системам чисел, которые будут нам особенно полезны в дальнейшем для упрощения изложения.

Вещественные числа составляют в своей совокупности систему вещей, обладающую следующими свойствами:

Предложение о сочетании (1—6).

1. Из числа a и числа b получается посредством „сложения" определенное число c, в символах:

$$a + b = c \text{ или } c = a + b.$$

2. Если a и b суть данные числа, то всегда существует одно и только одно число x и одно и только одно число y такие, что

$$a + x = b \text{ и соответственно } y + a = b.$$

3. Существует определенное число—оно называется 0—такое, что для всякого a одновременно:

$$a + 0 = a \text{ и } 0 + a = a.$$

4. Из числа a и числа b получается еще другим способом—посредством „умножения"—определенное число c, в символах:

$$ab = c \text{ или } c = ab.$$

---

*) Ср. мой доклад—„Über den Zahlbegriff" [Jahresbericht der Deutshen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 8, 1900; VI прибавление к немецкому изданию настоящего сочинения].

5. Если a и b произвольные данные числа, и a не есть 0, то всегда существует одно и только одно число x и одно и только одно число y такие, что

$$ax = b \text{ и соответственно } ya = b.$$

6. Существует определенное число—оно называется 1—такое, что для всякого a одновременно:

$$a \,.\, 1 = a \text{ и } 1 \,.\, a = a.$$

Правила счета (7—12):

Если a, b, c—произвольные числа, то всегда имеют место следующие законы счета:

7.	$a + (b + c) = (a + b) + c$
8.	$a + b = b + a$
9.	$a (bc) = (ab) c$
10.	$a (b + c) = ab + ac$
11.	$(a + b) c = ac + bc$
12.	$ab = ba.$

Предложения порядка (13—16):

13. Если a, b суть какие-либо два различные числа, то всегда одно из них (напр. a) больше ($>$) чем другое; тогда последнее называется меньшим, в символах:

$$a > b \text{ и } b < a.$$

14. Если $a > b$ и $b > c$, то и $a > c$.

15. Если $a > b$, то всегда также

$$a + c > b + c$$

16. Если $a > b$ и $c > 0$, то всегда также

$$ac > bc.$$

Предложения непрерывности (17—18):

17. (Предложение Архимеда). Если $a > 0$ и $b > 0$ два произвольные числа, то всегда возможно сложить a столько раз с самим собою, что полученная сумма будет иметь свойство

$$a + a + \;.\;\;.\;\;. + a > b.$$

18. (Предложение полноты). Невозможно присоединить к системе чисел другую систему вещей так, чтобы и в расширен-

ной системе при сохранении отношений между числами имели место все предложения 1—17; или, короче: числа составляют систему вещей, которая при сохранении всех отношений и всех вышеприведенных предложений не допускает более никакого расширения [1]).

Система вещей, обладающая только частью свойств 1 — 18, называется *комплексною системою чисел.* Комплексная система чисел называется *архимедовою* или *не-архимедовою*, смотря по тому, удовлетворяет ли она требованию 17 или нет.

Из перечисленных свойств 1—18 некоторые суть следствия прочих. Является задача исследовать логическую зависимость этих свойств *). В §§ 32 и 33 главы VI мы рассмотрим два определенных вопроса этого рода в виду их геометрического значения и ограничимся теперь только указанием на то, что во всяком случае требование 17 не есть ни в коем случае логическое следствие предшествующих свойств, так как, например, рассмотренная в § 12 комплексная числовая система $\Omega(t)$, обладая всеми свойствами 1—16, не удовлетворяет требованию 17.

Впрочем по отношению к предложениям непрерывности (17—18) имеют место те же замечания, которые в § 8 были сделаны по отношению к геометрическим аксиомам непрерывности.

§ 14.

Доказательство теоремы Паскаля.

В этой главе и в следующей мы кладем в основу нашего исследования плоскостные аксиомы всех групп, за исключением аксиом непрерывности, т. е. аксиомы I 1—3 и II—IV.

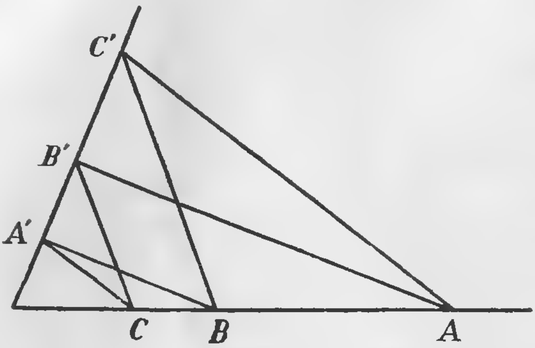
В настоящей III главе мы ставим себе целью обосновать учение Евклида о пропорциях с помощью названных аксиом, т. е. *в плоскости и независимо от аксиомы Архимеда.*

С этою целью мы прежде всего доказываем положение, которое представляет частный случай известной теоремы Паскаля из учения о конических сечениях, и которое я буду далее кратко называть теоремою Паскаля. Эта теорема гласит:

---

*) См. мой уже упомянутый доклад относительно понятия числа.

Теорема 22 *) (теорема Паскаля). Пусть A, B, C и соответственно A', B', C' (черт. 16) суть точки, расположенные по три на двух пересекающихся прямых, и отличные от точки пересечения этих прямых; тогда, если CB' параллельна BC' и CA' параллельна AC', то и BA' параллельна AB'.

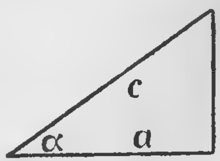


Черт. 16.

Для доказательства этого предложения введем прежде всего следующие обозначения: в каждом прямоугольном треугольнике (черт. 17) катет a, очевидно, однозначно определен гипотенузою c и углом при основании α, заключенным между a и c; мы изображаем это кратко

$$a = \alpha c,$$

так что символ αc всегда обозначает определенный отрезок, коль скоро c есть произвольно данный отрезок и α - произвольно данный острый угол.



Черт. 17.

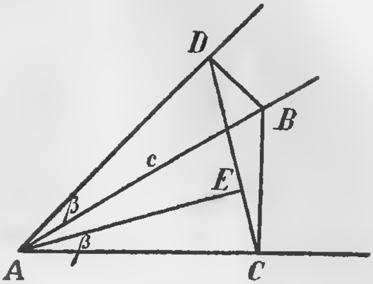
Пусть теперь c обозначает произвольный отрезок и α, β — два произвольных острых угла: мы утверждаем, что всегда существует конгруэнтность отрезков

$$\alpha\beta c \equiv \beta\alpha c,$$

так что символы α, β допускают перестановку [2]).

*) F. Schur в Math. Ann. Bd. 51 дал интересчое доказательство теоремы Паскаля, основанное на плоскостных и пространственных аксиомах I — III. J. Hjelmslev'у удалось потом—так как он опирался на результаты, добытые G. Hessenberg'ом (Math. Ann. Bd. 61)—доказать теорему Паскаля только на основании плоскостных аксиом I — III („Neue Begründung der ebenen Geometrie", Math. Ann. Bd. 64). Ср. III прибавление к немецкому изданию настоящего сочинения.

Чтобы доказать это утверждение возьмем отрезок $c = AB$ (черт. 18) и отложим по обеим его сторонам от точки A соответственно углы α и β. Затем, опустив из B на другие стороны этих углов перпендикуляры BC и BD, соединим C с D и, наконец, опустим из точки A перпендикуляр AE на CD.



Черт. 18.

Так как $\angle ACB$ и $\angle ADB$ прямые, то четыре точки A, B, C, D лежат на одной окружности, и поэтому оба угла $\angle ACD$ и $\angle ABD$, как вписанные и опирающиеся на одну и ту же хорду AD, взаимно конгруэнтны. Теперь, с одной стороны $\angle ACD$ вместе с углом $\angle CAE$, с другой стороны $\angle ABD$ вместе с углом $\angle BAD$, — составляют соответственно прямые углы, и, следовательно, углы $\angle CAE$ и $\angle BAD$ взаимно конгруэнтны, т. е.

$$\angle CAE \equiv \beta$$

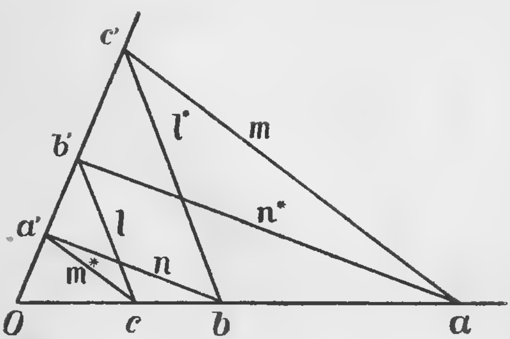
и потому

$$\angle DAE \equiv \alpha.$$

Мы получаем теперь непосредственно конгруэнции между отрезками

$$\beta c \equiv AD \qquad\qquad \alpha c \equiv AC$$
$$\alpha\beta c \equiv \alpha(AD) \equiv AB \qquad\qquad \beta\alpha c \equiv \beta(AC) \equiv AE,$$

откуда вытекает правильность вышеустановленной конгруэнции.



Черт. 19.

Вернемся теперь к чертежу для теоремы Паскаля. Обозначим точку пересечения обеих прямых буквою O, отрезки OA, OB, OC, OA', OB', OC', CB', BC', AC', CA', BA', AB' — соответственно через a, b, c, a', b', c', l, l^*, m, m^*, n, n^*. Опустим затем из точки O перпендикуляры на l, m^*, n; пусть перпендикуляр, опущенный на l составляет с обоими прямыми OA, OA' острые углы λ', λ, а перпендикуляры соответственно на m и n пусть составляют с прямыми OA и OA' острые углы μ', μ и соответственно ν', ν. Выражая теперь данным выше приемом каждый из этих трех перпендикуляров двояким образом с помощью гипотенуз и углов при основании в соответствующих прямоугольных треугольниках, получим следующие три конгруэнции между отрезками:

(1) $$\lambda b' \equiv \lambda' c,$$

(2) $$\mu a' \equiv \mu' c,$$

(3) $$\nu a' \equiv \nu' b.$$

Так как по предположению l параллельна l^* и m параллельна m^*, то перпендикуляры, опущенные из O на l^* и m, совпадают соответственно с перпендикулярами, опущенными на l и m^*, и мы получаем таким образом:

(4) $$\lambda c' \equiv \lambda' b$$

(5) $$\mu c' \equiv \mu' a.$$

Применяя к обоим сторонам конгруэнции (3) символ $\lambda' \mu$ [3]) и, принимая во внимание выше доказанное переместительное свойство указанных символов, получаем

$$\nu \lambda' \mu a' \equiv \nu' \mu \lambda' b.$$

Из этой конгруэнции, пользуясь для левой части конгруэнцией (2) и для правой части конгруэнциею (4), получаем

$$\nu \lambda' \mu' c \equiv \nu' \mu \lambda c'$$

или

$$\nu \mu' \lambda' c \equiv \nu' \lambda \mu c'.$$

Принимая затем во внимание для левой части конгруэнцию (1) и для правой части конгруэнцию (5), получаем

$$\nu \mu' \lambda b' \equiv \nu' \lambda \mu' a$$

или

$$\lambda \mu' \nu b' \equiv \lambda \mu' \nu' a.$$

Из последней конгруэнции, принимая во внимание значение наших символов, заключаем сразу

$$\mu' \nu b' \equiv \mu' \nu' a$$

и затем

(6) $$\nu b' \equiv \nu' a.$$

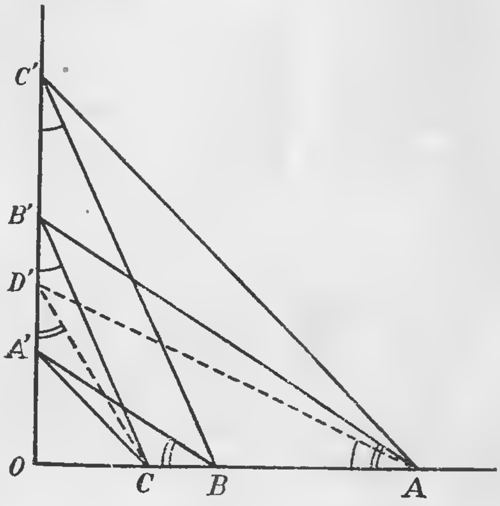
Если обратимся теперь к перпендикуляру, опущенному из O на n, и опустим на него перпендикуляры из точек A и B', то конгруэнция (6) покажет, что основания обоих последних перпендикуляров совпадают, т. е. прямая $n^* = AB'$ перпендикулярна к прямой, перпендикулярной к n, и, следовательно, параллельна n. Этим доказана теорема Паскаля

В последующем, для обоснования геометрии, нам понадобится исключительно тот частный случай теоремы Паскаля, в котором имеет место конгруэнция отрезков

$$OC \equiv OA',$$

а, следовательно, также

$$OA \equiv OC'.$$



Черт. 20.

В этом частном случае доказательство особенно просто, а именно ведется следующимо бразом (черт. 20):

Откладываем на OA' от точки O отрезок OB до точки D', так что соединяющая прямая BD' будет параллельна прямым CA' и AC'. Вследствие конгруэнтности треугольников $OC'B$ и OAD' будем иметь

$$(1\dagger) \qquad \angle OC'B \equiv \angle OAD'.$$

Так как по предположению CB' и BC' взаимно параллельны, то

$$(2\dagger) \qquad \angle OC'B \equiv \angle OB'C;$$

из (1†) и (2†) получаем

$$\angle OAD' \equiv \angle OB'C;$$

но тогда, согласно учению об окружности, $ACD'B'$ есть четыреугольник, вписанный в окружность, и, на основании известной теоремы об углах в четыреугольнике, вписанном в окружность, имеет место конгруэнция

$$(3\div)\qquad \angle OD'C \equiv \angle OAB';$$

с другой стороны, вследствие конгруэнтности треугольников $OD'C$ и OBA', также

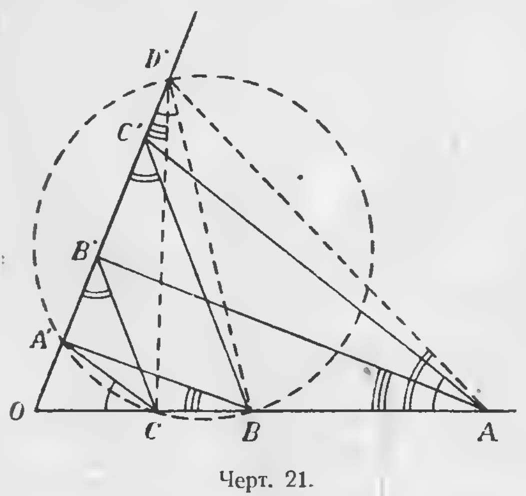
$$(4\div)\qquad \angle OD'C \equiv \angle OBA';$$

из $(3\div)$ и $(4\div)$ получаем

$$\angle OAB' \equiv \angle OBA',$$

и эта конгруэнция показывает, что AB' и BA' взаимно параллельны, как этого требует теорема Паскаля.

Если даны какая-либо прямая, точка вне этой прямой и какой-либо угол, то, очевидно, можно отложением этого угла и проведением параллельной найти прямую, которая проходит через данную точку и пересекает данную прямую под данным углом. Основываясь на этом, мы можем, наконец, применить к доказательству общей теоремы Паскаля следующий простой прием, которым я обязан одному стороннему сообщению (черт. 21).



Черт. 21.

Проводим через точку B прямую, пересекающую OA' в точке D' под углом OCA' так, что имеет место конгруэнция

$$(1^*)\qquad \angle OCA' \equiv \angle OD'B;$$

тогда, на основании известной теоремы из учения об окружности, $CBD'A'$ есть четыреугольник, вписанный в окружность, и поэтому, на основании теоремы о конгруэнтности вписанных углов, опирающихся на одну и ту же хорду, имеет место конгруэнция

$$(2^*) \qquad \angle OBA' \equiv \angle OD'C.$$

Так как CA' и AC' по предположению параллельны, то

$$(3^*) \qquad \angle OCA' \equiv \angle OAC'.$$

Из (1^*) и (3^*) вытекает конгруэнция

$$\angle OD'B \equiv \angle OAC';$$

но тогда и $BAD'C'$ есть четыреугольник, вписанный в окружность, и поэтому, на основании теоремы об углах четыреугольника, вписанного в окружность, имеет место конгруэнция

$$(4^*) \qquad \angle OAD' \equiv \angle OC'B.$$

Так как далее по предположению CB' параллельна BC', то имеем также

$$(5^*) \qquad \angle OB'C \equiv \angle OC'B;$$

из (4^*) и (5^*) следует конгруэнция

$$\angle OAD' \equiv \angle OB'C,$$

которая показывает, что $CAD'B'$ есть четыреугольник, вписанный в окружность, и отсюда получается конгруэнция

$$(6^*) \qquad \angle OAB' \equiv \angle OD'C.$$

Из (2^*) и (6^*) следует

$$\angle OBA' \equiv \angle OAB',$$

а эта конгруэнция показывает, что прямые BA' и AB' взаимно параллельны, как этого требует теорема Паскаля.

Если точка D' совпадает с одною из точек A', B', C', то необходимо изменение этого приема, которое однако легко усмотреть*).

---

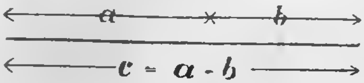
*) Интересно также приложение теоремы об общей точке пересечения высот треугольника к обоснованию теоремы Паскаля и соответственно к учению о пропорциях; сравни на этот счет F. Schur, Math. Ann. Bd. 57 и J. Mollerup, „Studier over den plane geometris aksiomer", Kopenhagen, 1903.

§ 15.

Исчисление отрезков, основанное на теореме Паскаля.

Доказанная в предыдущем параграфе теорема Паскаля позволяет нам ввести в геометрию исчисление отрезков, при котором остаются без изменения все правила счета, имеющие место для вещественных чисел.

Вместо слова „конгруэнтный“ и знака $\equiv$ мы будем употреблять в исчислении отрезков слово „равный“ и знак $=$.



Черт. 22.

Если A, B, C суть три точки прямой, и B лежит между A и C, то отрезок $c = AC$ называем *суммою* обоих отрезков $a = AB$ и $b = BC$ (черт. 22) и полагаем

$$c = a + b.$$

Отрезки a и b называются м е н ь ш и м и чем c, в символах:

$$a < c, \ b < c,$$

а отрезок c называется бо́льшим чем a и b, в символах:

$$c > a, \ c > b.$$

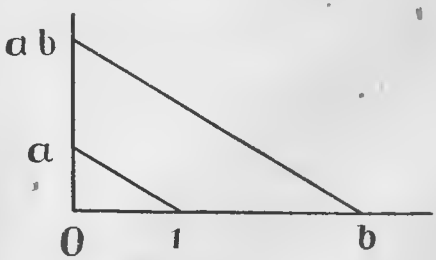
Из линейных аксиом конгруэнтности III 1—3 легко выводим, что для сложения отрезков, определенных таким образом, имеет место а с с о ц и а т и в н ы й закон

$$a + (b + c) = (a + b) + c,$$

так же, как к о м м у т а т и в н ы й закон

$$a + b = b + a.$$

Чтобы определить геометрически произведение отрезка a на отрезок b, воспользуемся следующим построением (черт. 23): избираем прежде всего некоторый произвольный отрезок, остающийся неизменным в течение всего исследования, и обозначаем его через 1. Откладываем теперь на одной стороне прямого угла от вер-



Черт. 23.

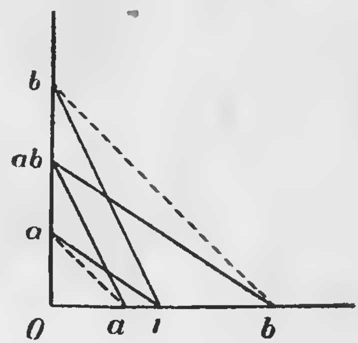
шины O отрезок 1 и на ней же от вершины O отрезок b; затем на другой стороне откладываем отрезок a. Соединяем конечные точки отрезков 1 и a прямою и проводим через конечную точку отрезка b параллельную к этой прямой; отрезок c, отсеченный таким образом на другой стороне, мы называем *произведением* отрезка a на отрезок b и обозначаем его так

$$c = ab.$$

Прежде всего докажем, что для определенного таким образом умножения отрезков имеет место коммутативный закон

$$ab = ba.$$

С этой целью строим прежде всего вышеуказанным способом отрезок ab (черт. 24). Далее откладываем на первой стороне прямого угла отрезок a и на второй стороне отрезок b, соединяем конечную точку отрезка 1 с конечной точкой отрезка b на другой стороне прямой линией и проводим параллельную к этой прямой через конечную точку a на первой стороне: эта параллельная отсекает на второй стороне отрезок ba; и этот отрезок ba, вследствие параллельности вспомогательных пунктирных линий, по теореме Паскаля, совпадает, как видно из чертежа, с отрезком ab. И обратно, как сразу видно, из допущения коммутативного закона в нашем исчислении отрезков вытекает частный случай (ст. 37) теоремы Паскаля.



Черт. 24.

Для того, чтобы доказать для нашего умножения отрезков ассоциативный закон

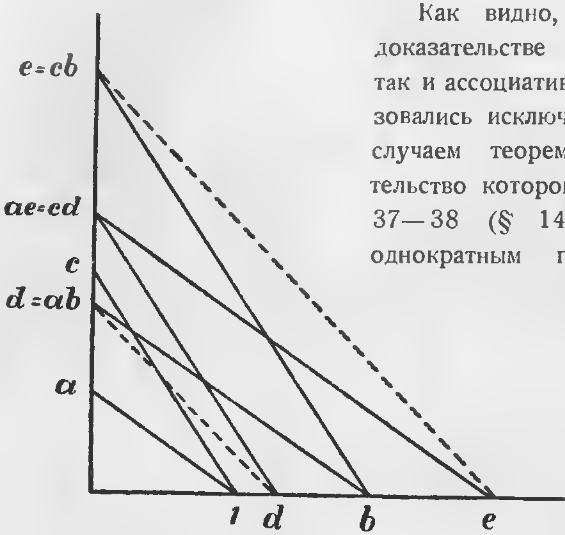
$$a(bc) = (ab)c$$

откладываем на одной стороне прямого угла от вершины O отрезки 1 и b (черт. 25) и на второй стороне, также от O, отрезки a и c. Затем строим отрезки $d = ab$ и $e = cb$ и откладываем эти отрезки d и e на первой стороне от точки O. Если далее мы построим отрезки ac и cd, то, на основании теоремы Паскаля, как видно из чертежа, конечные точки этих отрезков совпадают, т. е.

$$ae = cd \text{ или } a(cb) = c(ab),$$

и, применяя коммутативный закон, находим

$$a(bc) = (ab)c^{*}).$$



Черт. 25.

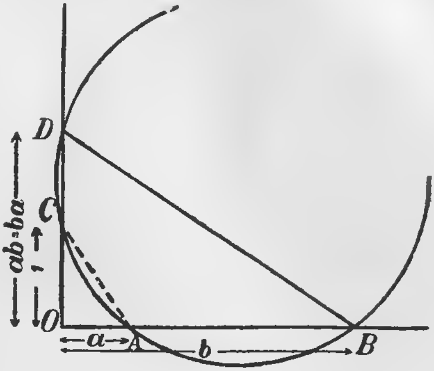
Как видно, в предыдущем при доказательстве как коммутативного, так и ассоциативного закона мы пользовались исключительно тем частным случаем теоремы Паскаля, доказательство которого получается на стр. 37—38 (§ 14) особенно просто однократным применением теоремы о четыреугольнике, вписанном в окружность.

Сопоставляя вышеприведенные соображения, мы приходим к следующему обоснованию законов умножения в исчислении отрезков, которое представляется мне самым простым из всех доселе известных способов такого обоснования:

---

*) Сравни при этом и методы для обоснования учения о пропорциях, которые были недавно даны A. Kneser'ом [Archiv für Math. und Phys. R. III, Bd. 2] и J. Mollerup'ом [Math. Ann., Bd. 56, а также „Studier over den plane geometris aksiomer", Kopenhagen, 1903]. F. Schur [„Zur Proportionenlehre", Math. Ann., Bd. 57] замечает, что уже Kupffer [Sitzungsber. der Naturforschergesellschaft zu Dorpat, 1893] правильно доказал коммутативный закон умножения. Однако дальнейшее обоснование учения о пропорциях, данное Kupffer'ом, является недостаточным.

На одной стороне прямого угла отложим от вершины O отрезки $a = OA$ и $b = OB$ (черт. 26) и, сверх того, на другой стороне отрезок-единицу $1 = OC$. Окружность, проходящая через A, B, C, пересечет вторую сторону еще в точке D. Точку D легко получить без применения циркуля, только на основании аксиом конгруэнтности, опуская перпендикуляр из центра круга на прямую OC и находя точку симметричную точке C по отношению к этому перпендикуляру.



Черт. 26.

В виду равенства $\angle OCA$ и $\angle OBD$, по определению произведения двух отрезков (стр. 41),

$$OD = ab$$

и в виду равенства $\angle ODA$ и $\angle OBC$, согласно тому же определению,

$$OD = ba.$$

Вытекающий отсюда коммутативный закон умножения

$$ab = ba,$$

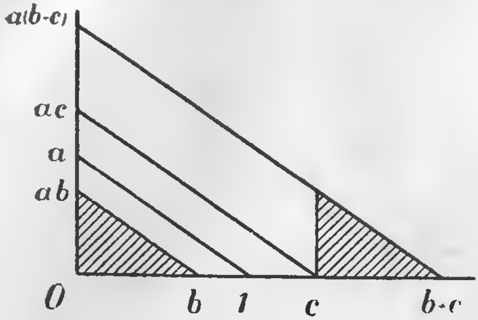
доказывает теперь, согласно замечанию на стр. 41, особый случай теоремы Паскаля (стр. 37), и из него, в свою очередь, согласно стр. 41—42, следует ассоциативный закон умножения

$$a(bc) = (ab)c.$$

Наконец, в нашем исчислении имеет место и д и с т р и б у т и в н ы й закон

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Для доказательства строим отрезки ab, ac и $a(b+c)$ и проводим через конечную точку отрезка c (черт. 27) параллельную ко второй стороне прямого угла. Конгруэнтность обоих заштрихованных на чертеже прямоугольных треугольников и применение теоремы о равенстве противоположных сторон параллелограмма дает желанное доказательство.



Черт. 27.

Если b и c — два произвольные отрезка, то всегда существует отрезок a такой, что $c=ab$: этот отрезок a обозначается как $\frac{c}{b}$ и называется *частным* от деления c на b.

§ 16.

Пропорции и теоремы о подобии.

С помощью изложенного исчисления отрезков учение Евклида о пропорциях может быть строго обосновано без аксиомы Архимеда следующим образом:

Пояснение. Если a, b, a', b' суть какие-либо четыре отрезка, то *пропорция*

$$a:b=a':b'$$

не должна означать ничего другого, кроме равенства отрезков

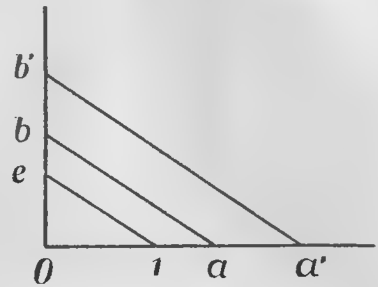
$$ab'=ba'.$$

Пояснение. Два треугольника называются *подобными*, если соответственные углы в них конгруэнтны.

Теорема 23. Если a, b и a', b' — соответственные стороны в двух подобных треугольниках, то имеет место пропорция

$$a:b=a':b'.$$

Доказательство. Рассматриваем сначала тот частный случай, когда в обоих треугольниках углы, заключенные между a, b и a', b'.— прямые и воображаем, что оба треугольника включены в один и тот же прямой угол (черт. 28). Откладываем тогда от вершины на одной стороне отрезок 1 и проводим через конечную точку этого отрезка 1 параллельную к обеим гипотенузам; на второй стороне эта параллельная отсекает отрезок e; тогда по нашему определению произведения отрезков



Черт. 28.

$$b = ea,\ b' = ea';$$

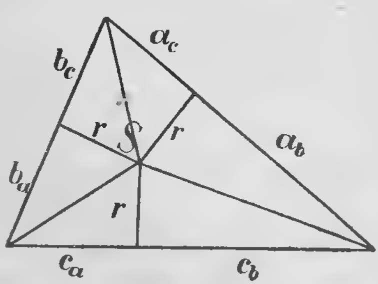
следовательно

$$ab' = ba',$$

т. е.

$$a : b = a' : b'.$$

Возвращаемся теперь к общему случаю. Строим (черт. 29) в каждом из подобных треугольников точку пересечения S и, соответственно, S' трех биссектрис, существование которых выводится легко из теоремы о равнобедренном треугольнике, и опускаем из этих точек три перпендикуляра r и, соответственно, r' на стороны треугольника; образующиеся таким образом на этих сторонах отрезки обозначим



Черт. 29.

$$a_b,\ a_c,\ b_c,\ b_a,\ c_a,\ c_b$$

и соответственно

$$a_b',\ a_c',\ b_c',\ b_a',\ c_a',\ c_b'.$$

Ранее доказанный специальный случай нашей теоремы дает нам пропорции

$$a_b : r = a_b' : r' \mid b_c : r = b_c' : r'$$
$$a_c : r = a_c' : r' \mid b_a : r = b_a' : r';$$

из коих, с помощью дистрибутивного закона, получаем

$$a : r = a' : r',\ b : r = b' : r'$$

и, следовательно, на основании коммутативного закона умножения, имеем

$$a : b = a' : b'.$$

Из только что доказанной теоремы 23 легко выводим основную теорему учения о пропорциях, которая гласит:

Теорема 24. *Если две параллельные прямые отсекают на сторонах произвольного угла отрезки a, b и, соотв., a', b', то имеет место пропорция*

$$a : b = a' : b'.$$

Обратно, если четыре отрезка a, b, a', b' удовлетворяют этой пропорции и a, a' и b, b' отложены соответственно на сторонах произвольного угла, то прямые, соединяющие конечные точки отрезков a, b и, соответственно, a', b', взаимно параллельны.

§ 17.

Уравнения прямых и плоскостей.

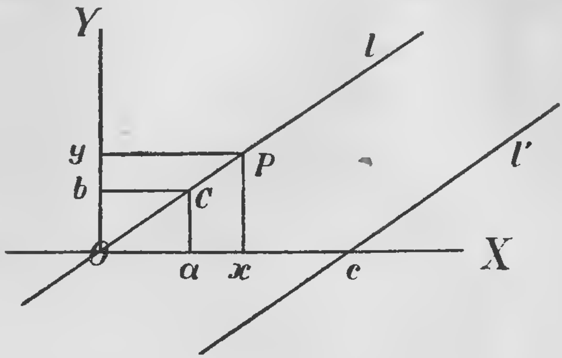
Присоединим к рассматриваемой нами до сих пор системе отрезков другую подобную же систему отрезков; отрезки новой системы отличим какою-либо меткою и назовем их „*отрицательными*“, в отличие от рассматривавшихся раньше „*положительных*“ отрезков. Если введем кроме того отрезок 0, то при надлежащих условиях в этом расширенном исчислении отрезков будут иметь место все правила счета для вещественных чисел, которые были даны в сводке в § 13. В особенности отметим следующие положения:

Всегда $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Если $ab = 0$, то или $a = 0$ или $b = 0$.

Если $a > b$ и $c > 0$, то всегда $ac > bc$.

Проведем теперь в плоскости α через некоторую точку O две взаимно перпендикулярные прямые (черт. 30), которые будут составлять неподвижную прямоугольную систему координатных осей, и отложим затем от точки O на обеих прямых произвольные отрезки x, y и при том по ту или по другую сторону, смотря



Черт. 30.

по тому положителен или отрицателен соответственно откладываемый отрезок x или y; затем восставляем в конечных точках отрезков x, y перпендикуляры и определяем точку P пересечения этих перпендикуляров: отрезки x, y называются *координатами* точки P; каждая точка плоскости α однозначно определяется координатами x, y, которые могут быть положительными или отрицательными отрезками или 0.

Пусть l есть какая-либо прямая в плоскости α, проходящая через O и через точку C с координатами a, b. Если тогда x и y координаты какой-либо точки прямой l, то легко находим, по теореме 23,

$$a : b = x : y$$

или

$$bx - ay = 0$$

как уравнение прямой l.

Если l' есть прямая параллельная l, отсекающая на оси x-ов отрезок c, то мы получаем уравнение прямой l', заменяя в уравнении прямой l отрезок x отрезком $x - c$; искомое уравнение выразится тогда так

$$bx - ay - bc = 0.$$

Таким образом, независимо от аксиомы Архимеда, мы легко приходим к заключению, что каждая прямая в плоскости может быть представлена линейным уравнением в координатах x, y, и обратно, каждое такое линейное уравнение представляет прямую, при чем коэффициенты уравнения суть отрезки, принадлежащие соответствующей геометрии.

Соответствующие результаты для пространственной геометрии доказываются столь же просто.

Дальнейшее построение геометрии может совершаться отныне по методам, которые вообще применяются в аналитической геометрии.

До сих пор мы совсем не пользовались в этой III главе аксиомой Архимеда; предполагая же, что она имеет место, мы можем каждой точке произвольной прямой в пространстве отнести соответствующие вещественные числа, и именно следующим образом:

Избираем на прямой две произвольные точки и относим им числа 0 и 1; затем разделяем пополам отрезок 0 1 и обозначаем соответствующую среднюю точку числом $^1/_2$, далее средину отрезка $0 ^1/_2$ числом $^1/_4$ и т. д. При n-кратном применении этого приема мы приходим к точке, которой должно быть отнесено число $\frac{1}{2^n}$: Откладываем затем отрезок $0 \frac{1}{2^n}$ от точки 0, как в сторону точки 1, так и в противоположную, последовательно m раз и приписываем получаемым таким образом точкам численные значения $\frac{m}{2^n}$ и, соответственно, $-\frac{m}{2^n}$. Из аксиомы Архимеда легко заключить, что на основе такого соотнесения каждой произвольной точке прямой можно однозначно отнести вещественное число и притом так, что это соответствие будет иметь следующее свойство: если A, B, C суть какие-либо три точки прямой и α, β, γ — соответствующие вещественные числа, и A лежит между B и C, то числа α, β, γ удовлетворяют всегда или неравенству $\alpha < \beta < \gamma$, или $\alpha > \beta > \gamma$.

Из соображений, изложенных в главе II § 9, ясно, что для каждого числа, принадлежащего к алгебраическому числовому корпусу Ω, существует необходимо некоторая точка прямой, которая соответствует этому числу. Соответствует ли также всякому другому вещественному числу некоторая точка, зависит от того, имеет ли в данной геометрии место аксиома полноты V 2 или нет.

Напротив того, если только принять и наличность аксиомы Архимеда, всегда возможно так расширить систему точек, прямых и плоскостей „иррациональными" элементами, что в рассматриваемой геометрии каждой системе трех вещественных чисел без исключения будет соответствовать некоторая точка [5]). При помощи подходящего условия вместе с тем возможно достигнуть того, что в расширенной геометрии будут иметь место все аксиомы I—V. Эта расширенная (присоединением иррациональных элементов) геометрия есть не что иное, как обыкновенная аналитическая Декартова геометрия пространства, в которой имеет место и аксиома полноты V 2 *).

---

*) Ср. замечания в конце § 8.

Глава IV.

Учение о площадях в плоскости.

§ 18.

Равносоставленость и равновеликость многоугольников.

Мы кладем в основание исследований настоящей IV главы те же аксиомы, что и в главе III, а именно линейные и плоскостные аксиомы всех групп, за исключением аксиом непрерывности, т. е аксиомы I 1—3 и II—IV.

Изложенное в главе III учение о пропорциях и введенное там исчисление отрезков дает нам возможность обосновать учение Евклида о площадях с помощью этих аксиом, т. е. *в плоскости и независимо от аксиом непрерывности.*

Так как, согласно исследованиям главы III, учение о пропорциях существенно основывается на теореме Паскаля (теорема 22), то то же самое относится и к учению о площадях; обоснование учения о площадях кажется мне одним из наиболее замечательных приложений теоремы Паскаля в элементарной геометрии.

Пояснение. Если соединить две точки многоугольника P ломанною линиею, целиком расположенною внутри многоугольника, то получаются два новых многоугольника P_1 и P_2, внутренние точки которых все лежат внутри P; мы говорим: P распадается на P_1 и P_2 или P_1 и P_2 составляют вместе P.

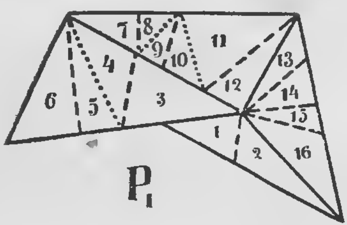
Пояснение. Два многоугольника называются *равносоставлеными* (*zerlegungsgleich*), если они могут быть разложены на конечное число треугольников, которые попарно взаимно конгруэнтны между собою.

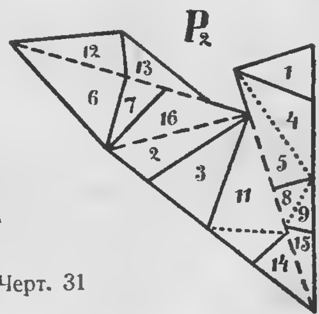
Пояснение. Два многоугольника называются *равновеликими* (*inchaltsgleich*) или *равными по величине*, если возможно присоединить к ним равносоставленные многоугольники так, чтобы оба составные многоугольника были равносоставленными [1]).

Из последних пояснений немедленно следует: от соединения равносоставленных многоугольников образуются снова равносоставленные многоугольники; если же от равносогавленных многоугольников отнять равносоставленные многоугольники, то остающиеся многоугольники будут равновелики.

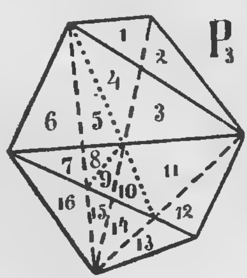
Далее имеют место следующие теоремы:

Теорема 25. Если два многоугольника P_1 и P_2 равносоставлены с третьим многоугольннком P_3, то они равносоставлены между собою. Если два многоугольника равновелики с третьим, то они равновелики между собою.





Черт. 31



Доказательство. По предположению как для P_1, так и для P_2 можно дать такое разложение на треугольники (черт. 31), что каждому из этих двух разложений в отдельности отвечает разложение многоугольника P_3 на конгруэнтные треугольники.

Рассматривая одновременно эти разложения P_3, мы увидим, что вообще каждый треугольник одного разложения разлагается отрезками, принадлежащими второму разложению, на многоугольники. Мы прибавляем затем еще столько отрезков, чтобы каждый из этих многоугольников снова разложился на треугольники, и производим затем два соответствующие разложения на треугольники в P_1 и в P_2, тогда, очевидно, оба многоугольника P_1 и P_2 разлагаются на равное число попарно взаимно конгруэнтных треугольников и являются, таким образом, согласно пояснению, взаимно равносоставленными.

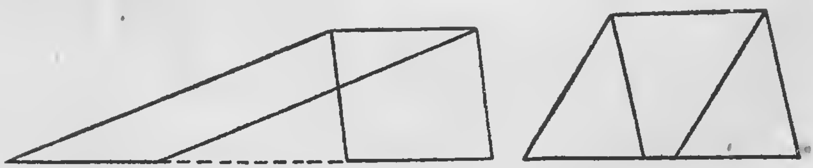
Доказательство второго положения теоремы 25 получается теперь без труда.

Обычным образом определяем понятия: *прямоугольник*, *основание* и *высота параллелограмма*, *основание* и *высота треугольника*.

§ 19.

Параллелограммы и треугольники с равными основаниями и высотами.

Известное доказательство *Евклида*, иллюстрируемое данными чертежами (черт. 32), дает теорему:



Черт. 32.

Теорема 26. Два параллелограмма с равными основаниями и высотами взаимно равновелики.

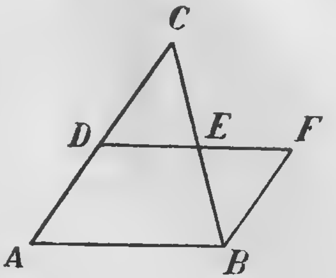
Далее имеет место известное положение:

Теорема 27. Каждый треугольник ABC всегда равносоставлен с некоторым параллелограммом равного с ним основания и половинной высоты.

Доказательство. Если мы разделим пополам (черт. 33) AC в точке D и BC в точке E и затем продолжим DE на равный ему отрезок до точки F, то треугольники DEC и FBE будут взаимно конгруэнтны, и, следовательно, треугольник ABC и параллелограмм $ABFD$ будут взаимно равносоставлены.

Из теорем 26 и 27 следует, с помощью теоремы 25, непосредственно:

Теорема 28. Два треугольиика с равными основаниями и высотами— равновелики.



Черт. 33.

Как известно, легко показать, что два треугольника с равными основаниями и высотами всегда также и равносоставлены. Заметим однако, что *это доказательство невозможно без пользования аксиомой Архимеда:* действительно, в нашей не-архимедовой геометрии (ср. гл. II § 12) можно без труда указать два такие треугольника, которые имеют равные основания и высоты и следовательно по теореме 27, соответственно равновелики, но, однако, не равносоставлены. Примером могут служить два треугольника ABC и ABD с общим основанием $AB=1$ и с равными высотами 1, если вершина C первого треугольника расположена вертикально над точкою A, а во втором треугольнике основание F высоты, опущенной из вершины D, расположено так, что $AF=t$ [2]).

Мы упомянем еще легко доказываемую теорему:

Теорема 29. Для произвольного треугольника, и следовательно также для произвольного многоугольника, всегда можно построить прямоугольный треугольник, который имеет один катет 1 и равновелик соответственно этому произвольному треугольнику или многоугольнику.

Остальные теоремы элементарной геометрии о равновеликости многоугольников, в частности теорема Пифагора, также легко выводятся из приведенных теорем. Но при дальнейшем проведении теории площадей мы встречаем, однако, одну существенную трудность. А именно, наши предыдущие исследования оставляют нерешенным вопрос, не равновелики ли между собою все многоугольники. В этом случае все приведенные теоремы ничего бы не выражали и не имели бы никакого значения. С этим связан вопрос, сливаются ли непременно два равновеликих прямоугольника, с одной общей стороной, также и другими сторонами, т. е. определяется ли прямоугольник однозначно одною стороной и величиною площади?

Для ответа на поставленные вопросы, как показывает ближайшее рассмотрение, необходима теорема, обратная теореме 28, которая читается следующим образом:

Теорема 30. *Если два равновеликих треугольника имеют равные основания, то они имеют и равные высоты.*

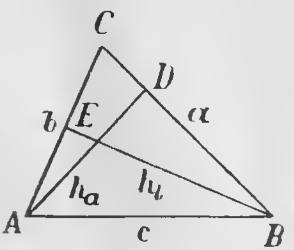
Эта основная теорема 30 значится в первой книге „Начал“ *Евклида* как теорема 39-я; при ее доказательстве *Евклид* основывается однако на общем положении учения о величинах: „*Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστίν*“—целое больше части—прием, который сводится к введению новой геометрической аксиомы о площадях [3]).

Теорема 30 и вместе с тем учение о площадях могут быть однако обоснованы без такой новой аксиомы, тем путем, который мы здесь наметили, т. е. исключительно с помощью плоскостных аксиом и не пользуясь аксиомой Архимеда. Чтобы в этом убедиться необходимо ввести понятие о мере площади (Inhaltsmass).

§ 20.

Мера площади для треугольников и многоугольников.

Пояснение. Если в треугольнике ABC (черт. 34) со сторонами a, b, c проведем две высоты $h_a = AD$, $h_b = BE$, то из подобия треугольников BCE и ACD по теореме 23 вытекает пропорция



Черт. 34.

$$a : h_b = b : h_a,$$

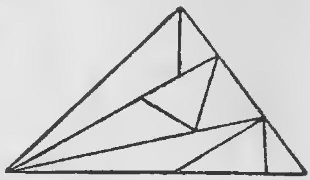
т. е.

$$ah_a = bh_b;$$

таким образом, в каждом треугольнике произведение основания и соответствующей высоты не зависит от того, которую сторону треугольника избрать за основание. Половина произведения основания и высоты треугольника есть поэтому отрезок характерный для треугольника $\triangle$; он называется *мерою площади треугольника* $\triangle$ и будет обозначаться $J(\triangle)$.

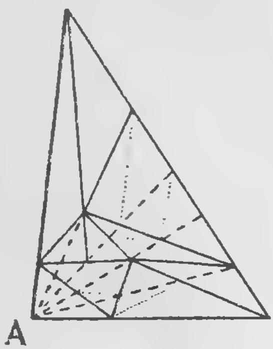
Пояснение. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с какой-либо точкой противолежащей стороны, называется *трансверсалью треугольника:* он разбивает треугольник на два треугольника с общей высотой, основания которых лежат на одной и той же прямой; такое разложение называется *трансверсальным разложением треугольника.*

Теорема 31. Если треугольник $\triangle$ разложен как-нибудь (черт. 35) произвольными прямыми на некоторое конечное число треугольников $\triangle_k$, то всегда мера площади треугольника $\triangle$ равна сумме мер площадей всех треугольников $\triangle_k$.



Четр. 35.

Доказательство. Из дистрибутивного закона в нашем исчислении отрезков непосредственно вытекает, что мера площади произвольного треугольника равна сумме мер площадей двух таких треугольников, которые получаются из этого треугольника путем какого-либо трансверсального разложения. Повторное применение этого положения показывает, что мера площади любого треугольника равна также сумме мер площадей всех тех треугольников, которые получаются из данного треугольника, если произвести последовательно произвольное число трансверсальных разложений.



Черт. 36.

Чтобы теперь вывести соответствующее доказательство для произвольного разложения треугольника $\triangle$ на треугольники $\triangle_k$, проведем из одной из вершин A треугольника $\triangle$ (черт. 36) через каждую узловую точку разложения, т. е. через каждую вершину треугольников $\triangle_k$, трансверсаль; всеми этими трансверсалями треугольник $\triangle$ разбивается на некоторые треуголь ники $\triangle_l$. Каждый из этих треугольников $\triangle_l$ разбивается разделяющими отрезками данного разложения на некоторые треугольники и четыреугольники. Если мы еще и в четыреугольниках проведем по одной диагонали, то каждый треугольник Δ_t разобьется на некоторые треугольники Δ_{ts}. Мы хотим теперь показать, что разложение на треугольники Δ_{ts}, как для треугольников Δ_t, так и для треугольников Δ_k, есть не что иное, как цепь трансверсальных разложений.

Действительно, прежде всего ясно, что всякое разложение треугольника на частные треугольники может быть достигнуто всегда рядом трансверсальных разложений, если при разложении внутри треугольника не лежит ни одной узловой точки и, сверх того, по меньшей мере одна сторона треугольника остается свободной от узловых точек.

Теперь для треугольников Δ_t наше утверждение вытекает из того, что для каждого из них, как внутренняя область, так и одна сторона, а именно сторона, противолежащая точке A, свободны от новых узловых точек.

Но и для всякого треугольника Δ_k разложение на Δ_{ts} может быть сведено к трансверсальным разложениям. Действительно, рассматривая какой-либо треугольник Δ_k, мы видим, что между трансверсалями треугольника Δ_t, выходящими из точки A, окажется некоторая определенная трансверсаль, которая или совпадает с одной из сторон треугольника Δ_k или разделяет сама треугольник Δ_k на два треугольника. В первом случае соответствующая сторона треугольника Δ_k остается вообще без новых узловых точек при разложении на треугольники Δ_{ts}: в последнем же случае отрезок этой трансверсали, проходящий внутри треугольника Δ_k, есть для обоих соответственных треугольников сторона, которая при делении на треугольники Δ_{ts} во всяком случае остается свободною от новых узловых точек.

На основании соображения, приведенного в начале этого доказательства, мера площади $J(\Delta)$ треугольника Δ равна сумме всех мер площадей $J(\Delta_t)$ треугольников Δ_t, а эта сумма равна сумме всех мер площадей $J(\Delta_{ts})$. С другой стороны и сумма мер площадей $J(\Delta_k)$ всех треугольников Δ_k равна сумме всех мер площадей $J(\Delta_{ts})$, и отсюда следует, наконец, что и мера площади $J(\Delta)$ равна сумме всех мер площадей $J(\Delta_k)$. Таким образом дано полное доказательство теоремы.

Пояснение. Определяя меру площади многоугольника $J(P)$, как сумму мер площадей всех треугольников, на которые он распадается при некотором разложении, мы можем на основании теоремы 31 убедиться—подобно тому, как это было сделано в § 18 при доказательстве теоремы 25,—что мера площади многоугольника не зависит от способа разложения на треугольники и, таким образом, однозначно определяется самим многоугольником. Из этого пояснения с помощью теоремы 31 заключаем, что равносоставленные многоугольники имеют одинаковые меры площадей.

Кроме того, если P и Q—равновеликие многоугольники, то на основании данного пояснения должны существовать два равносоставленные многоугольника P' и Q' такие, что многоугольник $(P+P')$, составленный из P и P', окажется равносоставленным с многоугольником $(Q+Q')$, составленным из Q и Q'. Из двух уравнений

$$J(P+P') = J(Q+Q')$$
$$J(P') = J(Q')$$

легко заключаем

$$J(P) = J(Q),$$

т. е. равновеликие многоугольники имеют равные меры площадей.

§ 21.

Равновеликость и мера площади.

В § 20 мы нашли, что равновеликие многоугольники имеют всегда равные меры площадей. Из этого положения мы получаем непосредственно доказательство теоремы 30. Действительно, обозначая равные основания обоих треугольников буквою g, соответствующие высоты буквами h и h', мы заключаем из принятой равновеликости обоих треугольников, что должны быть равны и их меры площадей, т. е., следовательно,

$$\frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}gh'$$

и, значит, после деления на $\frac{1}{2}g$,

$$h = h';$$

что и составляет содержание теоремы 30.

Теперь можно также доказать положение, обратное установленному в конце § 20. Действительно, пусть P и Q будут два многоугольника с равными мерами площадей; построим, согласно теореме 29, два прямоугольных треугольника Δ и E, из которых каждый имеет один катет 1, и такие, что треугольник Δ равновелик с многоугольником P, а треугольник E — с многоугольником Q. Тогда из теоремы, доказанной в конце § 20, следует, что Δ с P, равно как E с Q, имеют равные меры площадей. Из равенства мер площадей P и Q следует, что и Δ и E имеют равные меры площадей. Так как при том эти оба прямоугольных треугольника имеют по одному катету равному 1, то необходимо равны и другие катеты, т. е. оба треугольника Δ и E взаимно конгруэнтны, и, следовательно, по теореме 25, оба многоугольника P и Q взаимно равновелики.

Оба положения, доказанные в этом и в предыдущем параграфе, мы соединяем в следующей теореме:

Теорема 32. *Два равновеликих многоугольника имеют всегда равные меры площадей и два многоугольника с равными мерами площадей всегда взаимно равновелики.*

В частности два равновеликих прямоугольника с общей стороной должны совпадать и другими сторонами. Также имеет место теорема:

Теорема 33. Если мы разобьем прямоугольник прямыми на много треугольников и выкинем затем только один из этих треугольников, то остальными треугольниками прямоугольник уже не может быть заполнен *).

Эта теорема была выставлена de Zolt'ом **) и O. Stolz'ом ***) как аксиома и затем доказана F. Schur'ом ****) и W. Killing'ом *****) с помощью аксиомы Архимеда. Выше показано, что она имеет место совершенно независимо от аксиомы Архимеда.

---

*) Относительно замечательной роли, которую эта теорема 33 играет для дополнения, так называемых, „теорем о конгруэнтности в узком смысле“ ср. конец прибавления II в немецком издании настоящего сочинения.

**) Principii della eguaglianza di poligoni preceduti da alcuni critici sulla teoria della equivalenza geometrica. Milano. Briola. 1881. См. также — Principii della eguaglianza di poliedri e di poligoni sferici. Milano, Briola, 1883.

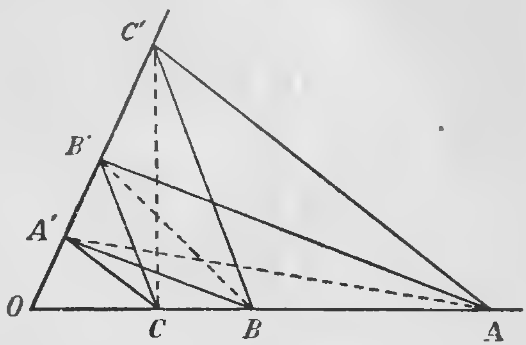
***) Manatshefte für Math. und Phys., Jahrgang 5, 1894.

****) Sitzungsberichte der Dorpater Naturf. Ges., 1892.

*****) Grundlagen der Geometrie, Bd. 2, Abschnitt 5, § 5, 1898.

Для доказательства теорем 30, 31, 32 мы основывались существенным образом на исчислении отрезков, введеном в главе III § 15, а так как это исчисление в главном само основано на теореме Паскаля (теорема 22) или скорее на ее частном случае (стр. 37), то теорема Паскаля оказывается важнейшим краеугольным камнем для учения о площадях.

Легко убедиться, что и обратно теорема Паскаля может быть в свою очередь выведена из теорем 28 и 30. Действительно, из параллельности прямых CB' и $C'B$ (черт. 37) следует по теореме 28 равновеликость треугольников OBB' и OCC'; точно также из параллельности прямых CA' и AC' следует равновеликость треугольников OAA' и OCC'. Так как, следовательно, и треугольники OAA' OBB' взаимно равновелики, то, на основании теоремы 30, и BA' должна быть параллельна с AB'.



Черт. 37.

Из двух неравновеликих многоугольников P и Q мы называем P соответственно *меньшим по площади* или *бóльшим по площади,* чем Q, смотря по тому, окажется ли мера площади $J(P)$ меньше или больше, чем $J(Q)$. Из предыдущего ясно, что понятия равновеликий, меньший по площади и больший по площади взаимно исключают друг друга. Далее легко усмотреть, что многоугольник, лежащий целиком внутри другого многоугольника, всегда должен быть меньше по площади, чем этот последний.

Этим мы обосновали существенные теоремы учения о площадях в плоскости.

Уже Гаусс обратил внимание математиков на соответственный вопрос для пространства. Я высказал предположение о невозможности аналогичного обоснования учения об объемах и поставил определенную задачу *),—найти два тетраэдра с равными основаниями и равными высотами, которые бы не допускали никакого разложения на конгруэнтные тетраэдры и которые не допускали бы также обращения их, присоединением конгруэнтных тетраэдров, в такие многогранники, для которых было бы возможно в свою очередь разложение на конгруэнтные тетраэдры.

M. Dehn'y **) действительно удалось это доказать; он доказал тем самым вполне строго невозможность обосновать учение об объемах так, как это в предыдущем было сделано для площадей.

Отсюда следует, что при решении аналогичных вопросов для пространства следовало бы привлечь другие вспомогательные средства. напр., принцип Кавальери ***) ****) [4]).

---

*) См. мой доклад „Mathematische Probleme“ Nr. 3.

**) „Über raumgleiche Polyeder“, Göttinger Nachr., 1900, также „Über den Rauminhalt“ (Math. Ann. Bd. 55, 1902). См. кроме того—Каган, Math. Ann. Bd. 57.

***) Только первая часть теоремы 32, равно как и теорема 30 и теорема 32 справедливы и для пространства; см. напр., Шатуновский, „Über den Rauminhalt der Polyeder“ (Math. Ann. Bd. 57). M. Dehn в статье: „Über den Inhalt sphärischer Dreiecke“ (Math. Ann. Bd. 60) показал, что учение о площадях в плоскости может быть также обосновано без аксиомы о параллельности, при помощи одних только предложений о конгруэнтности. См. кроме того—Finzel, „Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie“ (Math. Ann. Bd. 72).

****) В этом смысле W. Süß обосновал учение об объемах (Math. Ann. Bd. 82). W. Süß называет два тетраэдра с равными высотами и равновеликими основаниями Кавальеровски равными, кроме того два многогранника, которые допускают разложение на конечное число попарно Кавальеровски равных тетраэдров, — Кавальеровски равносоставленными и, наконец, два многогранника, которые могут быть представлены в виде разности Кавальеровски равносоставленных многогранников,—Кавальеровски равнодополнимыми (ergänsungsgleich). Можно доказать, не применяя аксиом непрерывности, что равенство мер объемов и Кавальеровская равнодополнимость — эквивалентные понятия, в то время как Кавальеровская равносоставленность для многогранников с равными мерами объемов может быть доказана только с помощью аксиомы Архимеда.

Глава V.

Теорема Дезарга.

§ 22.

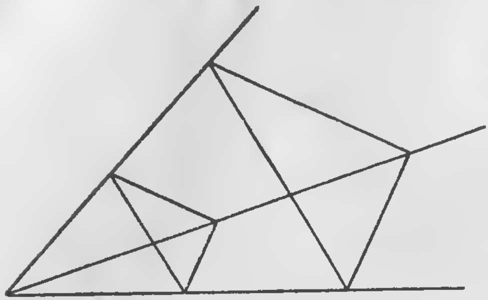
Теорема Дезарга и ее доказательство для плоскости с помощью аксиом конгруэнтности.

Из аксиом, выставленных в главе I, аксиомы групп II — V все частью линейные, частью плоскостные; аксиомы 4—8 группы I суть единственные пространственные аксиомы. Чтобы ясно понять значение этих пространственных аксиом, представим себе, что дана некоторая плоская геометрия и исследуем в общем виде условия, при которых эта плоская геометрия могла бы быть рассматриваема, как часть пространственной геометрии, в которой выполнены все аксиомы групп I—II.

На основании аксиом групп I—II, IV, как известно, легко доказать, так называемую, теорему Дезарга; эта последняя есть плоскостная теорема о точках пересечения (Schnittpunktsatz). Берем частный случай, когда прямая, на которой должны лежать точки пересечения соответствующих сторон обоих треугольников, есть, как говорят, „бесконечно удаленная" прямая, и получающуюся таким образом теорему, вместе с обратной ей, назовем просто теоремой Дезарга; эта теорема читается следующим образом:

Теорема 34 (Теорема Дезарга). Если два треугольника расположены в одной плоскости так, что каждые две соответствующие стороны взаимно параллельны (черт. 38), то прямые, соединяющие соответствующие вершины, или проходят через одну и ту же точку или взаимно параллельны, и обратно:

Если два треугольника так расположены в одной плоскости, что прямые, соединяющие соответствующие вершины, проходят через одну точку или взаимно параллельны, и если сверх того две пары соответствующих сторон треугольников параллельны, то и третьи стороны обоих треугольников взаимно параллельны.



Черт. 38.

Как уже упомянуто, теорема 34 есть следствие аксиом I, II, IV; согласно этому законность теоремы Дезарга в плоскости есть во всяком случае необходимое условие для того, чтобы геометрия этой плоскости могла быть рассматриваема, как часть некоторой пространственной геометрии, в которой имеют место все аксиомы групп I, II, IV.

Мы будем рассматривать теперь, как и в главах III и IV, плоскую геометрию, в которой имеют место аксиомы I 1—3 и II—IV, и представим себе, что в ней введено исчисление отрезков согласно § 15; тогда, как это было доказано в § 17, каждой точке плоскости может быть так соотнесена пара отрезков (x, y) и каждой прямой — отношение трех отрезков $(u : v : w)$, при чем u и v — оба одновременно не нули, что линейное уравнение

$$ux + vy + w = 0$$

является условием для нахождения точки на прямой. Система всех отрезков в нашей геометрии образует, согласно § 17, область чисел, для которой имеют место перечисленные в § 13 свойства, и мы можем поэтому с помощью этой области чисел построить пространственную геометрию, подобно тому, как это сделано в § 9 или § 12, с помощью системы чисел Ω или, соответственно, $\Omega(t)$; установим с этою целью, что система трех отрезков (x, y, z) может представлять точку, отношения четырех отрезков $(u : v : w : r)$ — плоскость, между тем, как прямые определяются как сечения двух плоскостей; при том линейное уравнение

$$ux + vy + wz + r = 0$$

выражает, что точка (x, y, z) лежит на плоскости $(u : v : w : r)$. Что касается, наконец, порядка точек на прямой, или — точек плоскости по отношению к прямой на этой плоскости, или, наконец, порядка точек по отношению к плоскости в пространстве, то таковой определится неравенствами между отрезками, аналогично с тем, как это имело место в § 9 для плоскости.

Так как, полагая значение $z = 0$, мы получаем снова первоначальную плоскую геометрию, то мы видим, что наша плоская геометрия может быть рассматриваема как часть некоторой пространственной геометрии. Но на основании предыдущего необходимым условием для этого является наличность теоремы Дезарга, и отсюда следует, что в этой плоской геометрии должна иметь место и теорема Дезарга.

Заметим, что только что найденный факт может быть выведен без труда и непосредственно из теоремы 24 учения о пропорциях.

§ 23.

Недоказуемость теоремы Дезарга в плоскости без помощи аксиом конгруэнтности.

Исследуем теперь вопрос может ли теорема Дезарга быть доказана в плоской геометрии без помощи аксиом конгруэнтности; в результате мы получим следующую теорему:

Теорема 35. *Существует плоская геометрия, в которой имеют место аксиомы* I 1 — 3, II, III 1 — 4, IV, V, *т. е. все линейные и плоскостные аксиомы, за исключением аксиомы конгруэнтности* III 5, *между тем, как теорема Дезарга.* (теорема 34) *не имеет места. Теорема Дезарга не может быть таким образом выведена только из перечисленных аксиом: для ее доказательства необходимы или пространственные аксиомы или аксиома* III 5[1]) *о конгруэнтности треугольников.*

Доказательство. Мы выбираем в обыкновенной плоской геометрии, возможность которой выяснена уже в главе II § 9, какие-либо две взаимно перпендикулярные прямые за оси координат X, Y и представляем себе построенный около нулевой точки O этой координатной системы, как около центра, эллипс с полуосями рав.

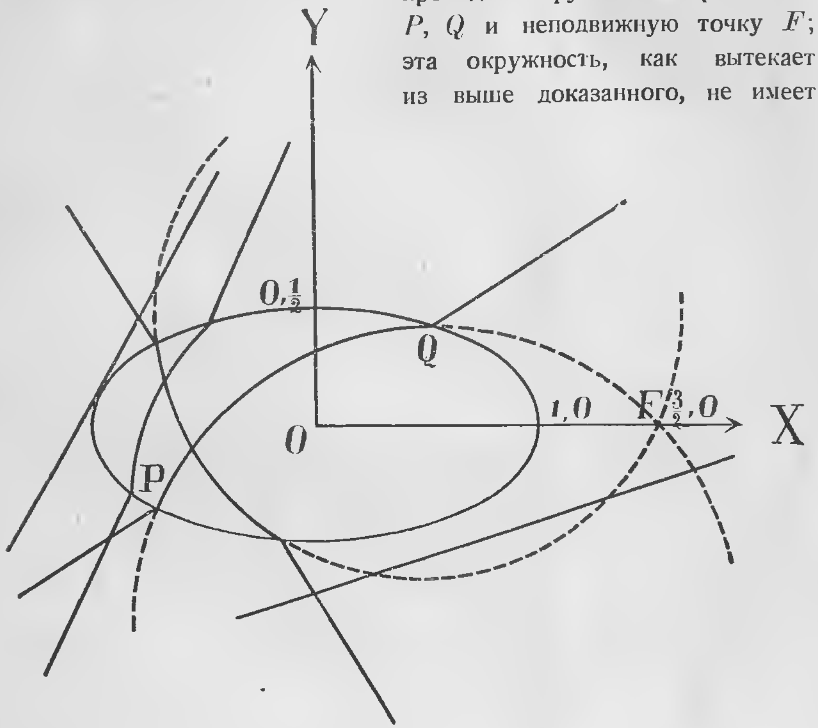
ными, напр., 1 и $\frac{1}{2}$; обозначаем, наконец, буквою F точку, лежащую на положительной оси X на расстоянии $\frac{3}{2}$ от точки O.

Представим себе теперь совокупность всех окружностей, пересекающих эллипс в четырех вещественных—раздельных или хотя бы и совпадающих—точках, и постараемся найти между всеми точками, лежащими на этих окружностях, ту точку, которая на положительной оси X отстоит всего дальше от нулевой точки. Для этой цели мы исходим из произвольной окружности, пересекающей эллипс в четырех точках и встречающей положительную ось X в точке C. Вообразим себе потом эту окружность вращающейся около точки C так, что две из четырех точек пересечения, или больше, сливаются в одну единственную точку A, между тем как остальные остаются вещественными. Полученная таким образом соприкасающаяся окружность пусть будет потом увеличиваема так, чтобы точка A оставалась точкою касания с эллипсом; этим путем мы придем непременно к окружности, которая или касается эллипса еще в одной точке B или имеет в точке A двойное касание с эллипсом и которая, кроме того, встречает положительную ось X в точке более отдаленной, чем C. Искомая наиболее отдаленная точка найдется поэтому между теми точками, в которых окружности двойного касания, проходящие вне эллипса, пересекают положительную ось X. Но окружности двойного касания, проходящие вне эллипса, как легко видеть, все симметрично расположены по отношению к оси Y. Пусть a, b суть координаты какой-либо точки эллипса; легкое вычисление показывает тогда, что касающаяся в этой точке симметричная по отношению к оси Y окружность отсекает на положительной оси X отрезок

$$x = \sqrt{1 + 3b^2}\,|$$

Наибольшее возможное для этого выражения значение получается для $b = \frac{1}{2}$ и равно, следовательно, $\frac{1}{2}\,|\sqrt{7}\,|$. Так как точка, обозначенная выше буквою F, имеет на оси X абсциссу $\frac{3}{2} > \frac{1}{2}\,|\sqrt{7}$, то отсюда следует, что между всеми окружностями, встречающими эллипс в четырех точках, нет наверно ни одной, которая проходила бы через точку F.

Создадим теперь новую плоскую геометрию следующим образом: точками новой геометрии будем считать точки плоскости XY (черт. 39); прямыми новой геометрии будем прежде всего считать те прямые плоскости XY, которые касаются основного эллипса или совсем не встречают его; если же, напротив, G есть прямая плоскости XY, которая встречает эллипс в двух точках P и Q, то мы проводим окружность через точки P, Q и неподвижную точку F; эта окружность, как вытекает из выше доказанного, не имеет

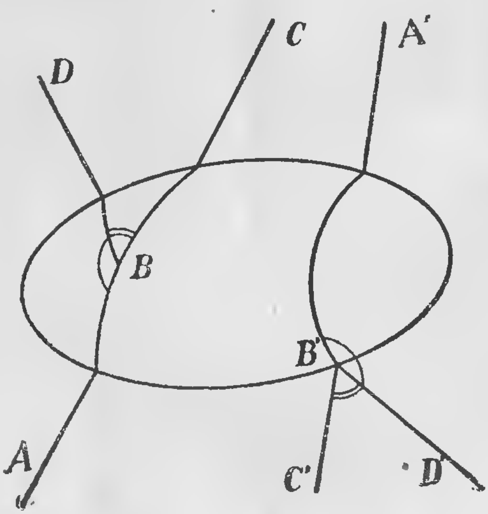


Черт. 39.

с эллипсом больше ни одной общей точки. Теперь вообразим себе часть прямой G, лежащую внутри эллипса между точками P и Q, замененною тою дугою только что построенной окружности, которая проходит внутри эллипса между точками P и Q. Смешанную линию (Linienzug — собственно цепь линий), которая состоит из обеих исходящих из точек P и Q бесконечных частей прямой G и из только что построенной дуги окружности PQ, примем за прямую вновь устанавливаемой геометрии. Если вообразим для всех прямых плоскости XY соответствующие смешанные линии, то образуется система смешанных линий, которые, будучи рассматриваемы как прямые некоторой геометрии, очевидно, удовлетворяют аксиомам I 1—3 и IV [2]). Установив в нашей новой геометрии естественный порядок расположения для точек и прямых, мы убеждаемся непосредственно в том, что и аксиомы II имеют место.

Далее назовем два отрезка AB и $A'B'$ конгруэнтными в нашей новой геометрии, если смешанная линия, проходящая между A и B, имеет такую же естественную длину, как и проходящая между A' и B' смешанная линия.

Наконец, нам необходимо определение относительно конгруэнтности углов. Коль скоро ни одна из вершин сравниваемых углов не лежит на эллипсе, мы называем два угла взаимно конгруэнтными, если они равны между собою в обычном смысле [3]). В противном случае мы введем следующее определение: пусть (черт. 40) точки A, B, C в этом порядке лежат на одной из прямых нашей новой геометрии, и точки A', B', C' в этом порядке на другой; пусть D есть точка вне прямой ABC и D'—точка вне прямой $A'B'C'$: пусть тогда в нашей новой геометрии имеют место конгруэнции



Черт. 40.

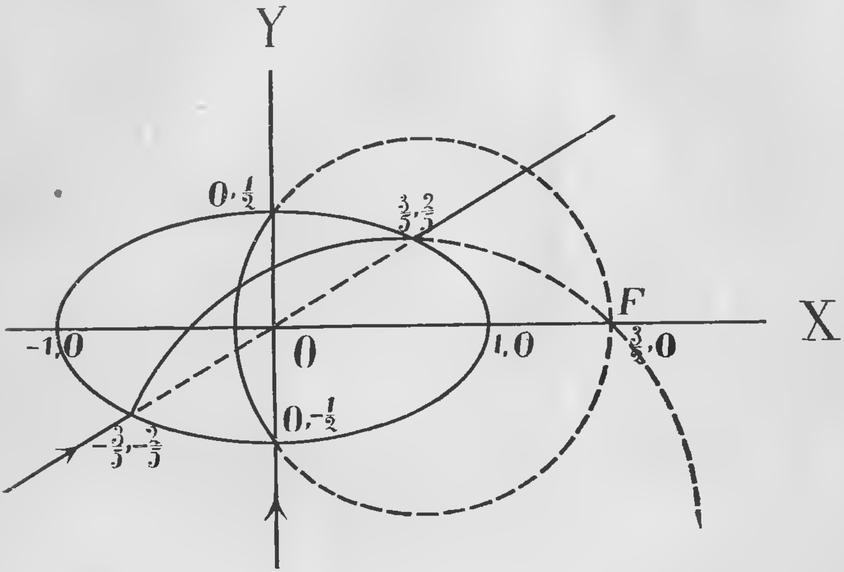
$$\angle ABD \equiv \angle A'B'D' \text{ и } \angle CBD \equiv \angle C'B'D',$$

коль скоро для обыкновенных углов между соответствующими смешанными линиями в обычной геометрии выполнена пропорция

$$\angle ABD : \angle CBD = \angle A'B'D' : \angle C'B'D'.$$

При этих определениях имеют место также и аксиомы III 1—4 и V

Чтобы убедиться, что во вновь установленной нами геометрии не имеет места теорема Дезарга, рассмотрим (черт. 41) следующие три обыкновенные прямые линии в плоскости XY: ось X, ось Y и прямую, соединяющую друг с другом две точки эллипса $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{2}{5}$ и $x = -\frac{3}{5}$, $y = -\frac{2}{5}$. Так как эти три обыкновенные прямые линии проходят через нулевую точку O, то мы можем легко ука-



Черт. 41.

зать два таких треугольника, вершины которых лежат соответственно на этих трех прямых, соответственные стороны которых попарно параллельны друг другу и которые целиком расположены вне эллипса. Так как смешанные линии, которые происходят из упомянутых трех прямых линий, не встречаются в одной точке, как показывает черт. 41, и что легко подтвердить путем вычисления, то, следовательно, теорема Дезарга наверно не имеет места в новой плоской геометрии для двух построенных выше треугольников [4].

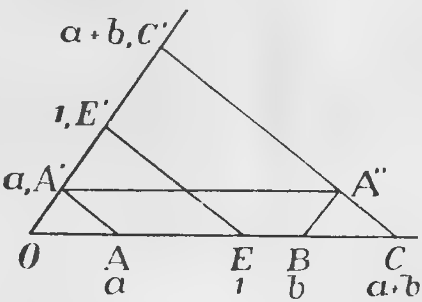
Установленная нами плоская геометрия служит в то же время примером плоской геометрии, в которой выполняются аксиомы I 1—3, II, III 1—4, IV, V и которую, однако, нельзя рассматривать как часть некоторой пространственной геометрии.

§ 24.

Введение исчисления отрезков без помощи аксиом конгруэнтности на основе теоремы Дезарга*) [4]).

Для полного выяснения значения теоремы Дезарга (теоремы 34) мы положим в основу некоторую плоскую геометрию, в которой имеют место аксиомы I 1—3, II, IV **), т. е. все линейные и плоскостные аксиомы, за исключением аксиом конгруэнтности и непрерывности, и в эту геометрию введем, независимо от аксиом конгруэнтности, новое исчисление отрезков следующим образом:

Берем на плоскости две определенные прямые, пересекающиеся в точке O, и ведем в последующем исчисление только такими отрезками, начальная точка которых есть O и конечные точки которых лежат по усмотрению на одной из этих двух фиксированных прямых. Самую же точку O мы рассматриваем как отрезок 0, в символах:



Черт. 42.

$$OO = 0 \text{ или } 0 = OO.$$

Пусть (черт. 42) E и E' будут каждая некоторою определенною точкою на этих фиксированных, проходящих через O прямых; отрезки OE и OE' будем рассматривать как отрезки 1, в символах:

$$OE = OE' = 1 \text{ или } 1 = OE = OE'.$$

*) Вывод исчисления отрезков, примыкающий к строю идей геометрии положения, дает G. Hessenberg в своей работе „Über einen geometrischen Kalkül" (Acta math. Bd. 29, 1904). Многие части вывода получаются легче, если сперва развить учение о сложении векторов на плоскости на основе теоремы Дезарга. Ср. Hölder „Streckenrechnung und projektive Geometrie". Leipz. Ber., 1911.

**) Аксиома параллельности (IV) для вывода нового исчисления отрезков должна быть изменена. Она должна быть положена в основу в следующей форме: пусть в рассматриваемой плоскости a — произвольная прямая и A — точка вне a, тогда в плоскости имеется одна, и только одна, прямая, которая проходит через A и не пересекает a.

Прямую EE' будем называть кратко **единичною прямою**. Далее если A и A' суть точки соответственно на прямых OE и OE' и соединяющая эти точки прямая AA' параллельна EE', то отрезки OA и OA' будем называть равными друг другу, в символах:

$$OA = OA' \quad \text{или} \quad OA' = OA.$$

Чтобы определить прежде всего сумму отрезков $a = OA$ и $b = OB$, построим прямую AA', параллельную единичной прямой EE', и проведем далее через A параллельную к OE и через B параллельную к OE'. Пусть обе эти параллельные пересекаются в A''. Наконец, проведем через A'' параллельную к единичной прямой EE'; если она встречает фиксированные прямые OE и OE' в C и C', тогда $c = OC = OC'$ называется *суммою* отрезка $a = OA$ с отрезком $b = OB$, в символах:

$$c = a + b \quad \text{или} \quad a + b = c.$$

Чтобы определить произведение отрезка $a = OA$ на отрезок $b = OB$, мы будем строго придерживаться данного в § 15 построения с тою только разницею, что на место сторон прямого угла здесь станут обе фиксированные прямые OE и OE'. Построение будет, таким образом, следующее: Пусть на OE' (черт. 43)

Черт. 43.

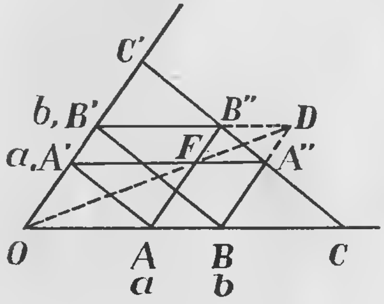
точка A' определяется так, чтобы AA' была параллельна единичной прямой EE'; пусть E соединена с A' и через B проведена параллельная к EA'; если эта параллельная встречает фиксированную прямую OE' в точке C', то $c = OC'$ называется произведением отрезка $a = OA$ на отрезок $b = OB$, в символах:

$$c = ab \quad \text{или} \quad ab = c.$$

§ 25.

Коммутативный и ассоциативный закон сложения в новом исчислении отрезков.

Мы исследуем теперь, какие из выставленных в § 13 законов счета имеют место для нашего нового исчисления отрезков, если мы положим в основу некоторую плоскую геометрию, в которой выполнены аксиомы I 1—3, II—IV, и сверх того имеет место теорема Дезарга.



$a+b=b+a$

Черт. 41.

Прежде всего докажем, что для определенного в § 24 сложения отрезков имеет место коммутативный закон

$$a+b=b+a.$$

Пусть (черт. 44)

$$a=OA=OA',$$

$$b=OB=OB',$$

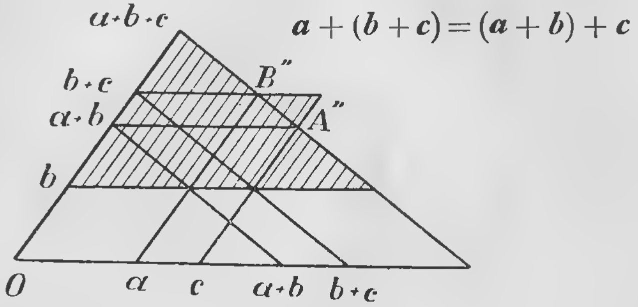
при чем по нашему определению AA' и BB' параллельны единичной прямой. Строим теперь точки A'' и B'', проведя $A'A''$, также, как $B'B''$, параллельно OA и потом AB'' и BA'' параллельно OA'; наше утверждение, как немедленно усматривается, выражает, что соединяющая прямая $A''B''$ проходит параллельно AA'. Правильность этого утверждения устанавливаем на основе теоремы Дезарга (теорема 34) следующим образом: обозначаем точку пересечения AB'' и $A'A''$ буквою F, а точку пересечения BA'' и $B'B''$ буквою D; тогда в треугольниках $AA'F$ и $BB'D$ соответствующие стороны взаимно параллельны. С помощью теоремы Дезарга отсюда заключаем, что три точки O, F, D лежат на одной прямой. Оба треугольника OAA' и $DB''A''$ расположены, следовательно, так, что прямые, соединяющие соответствующие вершины, проходят через одну и ту же точку F, и так как, сверх того, две пары соответствующих сторон OA и DB'', равно как OA' и DA'', взаимно параллельны, то на основании второй формулировки теоремы Дезарга (теорема 34), и третьи стороны AA' и $B''A''$ взаимно параллельны.

Для доказательства ассоциативного закона сложения

$$a+(b+c)=(a+b)+c$$

служит прилагаемый чертеж (черт. 45).

В связи с только что доказанным законом коммутативности сложения высказанное утверждение сводится, как легко усмотреть,



Черт. 45.

к тому, что прямая $A''B''$ должна итти параллельно единичной прямой. Правильность этого утверждения очевидна, так как заштрихованная часть этого чертежа в точности совпадает с предыдущим чертежом.

§ 26.

Ассоциативный закон умножения и оба дистрибутивных закона в новом исчислении отрезков.

При наших допущениях и для умножения отрезков имеет место ассоциативный закон

$$a\,(bc)=(ab)\,c.$$

Пусть (черт. 46) на первой из обеих фиксированных прямых, проходящих через O, даны отрезки

$$1=OA,\; b=OC,\; c=OA'$$

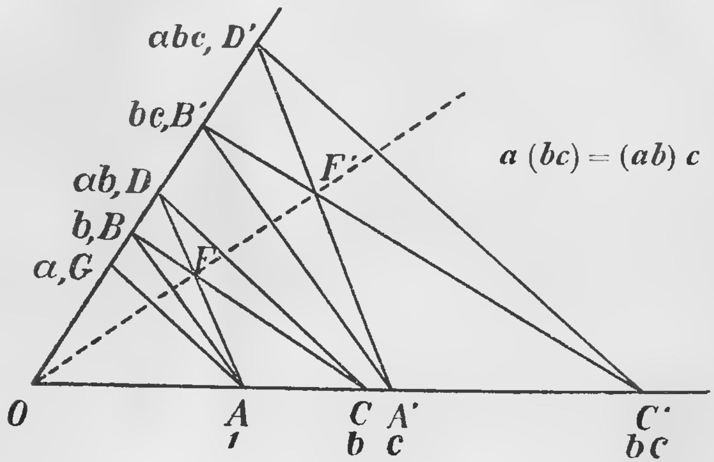
и на второй прямой отрезки

$$a=OG \text{ и } b=OB.$$

чтобы построить на основании правила § 24 последовательно отрезки

$$bc = OB' \text{ и } bc = OC',$$
$$ab = OD$$
$$(ab)c = OD',$$

проводим $A'B'$ параллельно AB, $B'C'$ параллельно BC, CD параллельно AG и $A'D'$ параллельно AD; как сразу видно, наше утверждение сводится к тому, что и CD должна быть параллельна $C'D'$.



Черт. 46.

Если мы обозначим теперь точку пересечения прямых AD и BC буквою F и точку пересечения прямых $A'D'$ и $B'C'$ буквою F', то соответствующие стороны в треугольниках ABF и $A'B'F'$ будут параллельны; по теореме Дезарга три точки O, F, F' лежат следовательно на одной прямой. Вследствие этого мы можем распространить вторую формулировку теоремы Дезарга на оба треугольника CDF и $C'D'F'$ и убеждаемся тогда, что действительно CD параллельна $C'D'$.

Наконец, на основе теоремы Дезарга мы доказываем для нашего исчисления отрезков и оба дистрибутивные закона:

$$a(b+c) = ab + ac$$

и

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Для доказательства **первого** закона служит черт. 47 *). На нем

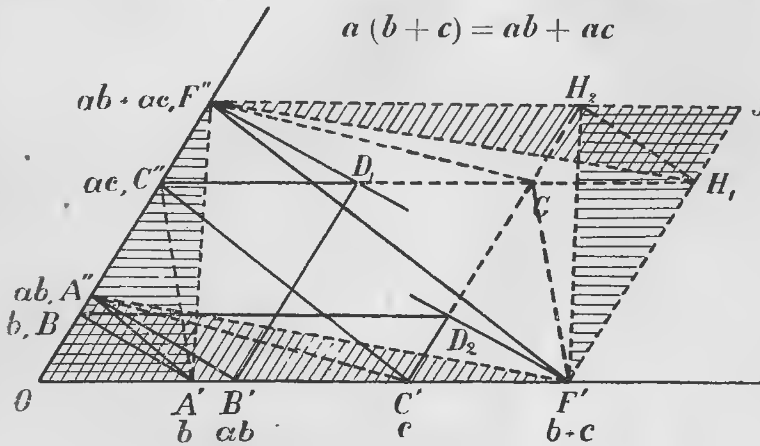
$$b = OA', \quad c = OC''$$

$$ab = OB', \; ab = OA'', \; ac = OC''' \text{ и т. д.,}$$

и проходит

$B''D_2$ параллельно, $C''D_1$ параллельно фиксированной прямой OA'.
$B'D_1$ „ $C'D_2$ „ „ „ OA'';

$$a\,(b + c) = ab + ac$$



Черт. 47.

далее

$$A'A'' \text{ параллельна } C''C'''$$

и

$A'B''$ параллельна $B'A''$, параллельна $F'D_2$, параллельна $F'''D_1$.
Наше утверждение сводится к тому, что тогда должна быть и

$$F'F''' \text{ параллельна } A'A'' \text{ и } C''C'''.$$

Мы строим следующие вспомогательные прямые:

$F'''J$ параллельно фиксированной прямой OA',
$F'J$ „ „ „ OA'';

точки пересечения прямых $C'''D_1$ и $C''D_2$, $C''D_1$ и $F'J$ и $C'D_2$ и $F'''J$ называем G, H_1, H_2; наконец, мы получаем еще дальнейшие, обозначенные на чертеже пунктиром, вспомогательные линии соединением уже построенных точек.

---

*) Чертежи 46, 47 и 48 составил и соответствующие доказательства дал Dr. von Schaper.

В обоих треугольниках $A'B''C''$ и $F'D_2G$ прямые, соединяющие соответствующие вершины, параллельны друг другу; из второй формулировки теоремы Дезарга следует поэтому, что должна быть

$$A'C'' \text{ параллельна } F'G.$$

В обоих треугольниках $A'C''F''$ и $F'GH_2$ прямые, соединяющие соответствующие вершины, также параллельны; из второй формулировки теоремы Дезарга, согласно ранее найденному, следует, что должна быть

$$A'F'' \text{ параллельна } F'H_2.$$

Так как таким образом в обоих горизонтально заштрихованнных треугольниках $OA'F''$ и JH_2F' соответственные стороны параллельны, то по теореме Дезарга три соединительные прямые

$$OJ,\ A'H_2,\ F''F'$$

встречаются в одной и той же точке, напр., в точке P.
Таким же образом мы находим, что должна быть и

$$A''F' \text{ параллельна } F''H_1,$$

и так как поэтому в обоих наискось заштрихованных треугольниках $OA''F'$ и JH_1F'' соответственные стороны параллельны, то по теореме Дезарга три соединительные прямые

$$OJ,\ A''H_1,\ F'F''$$

также встречаются в одной точке—точке P.

С другой стороны прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников $OA'A''$ и JH_2H_1, проходят через одну и ту же точку P, и отсюда следует, что должна быть

$$H_1H_2 \text{ параллельна } A'A'';$$

поэтому и

$$H_1H_2 \text{ параллельна } C'C''.$$

Рассмотрим, наконец, фигуру $F''H_2C'C''H_1F'F''$. Так как в ней

$F''H_2$	параллельна	$C'F'$	параллельна	$C''H_1$,
H_2C'	„	$F''C''$	„	H_1F',
$C'C''$	„	H_1H_2,		

то мы узнаем здесь снова фигуру чертежа 44 ($B'B''AA'A''BB'$), которою мы пользовались в § 25 для доказательства коммутативного закона сложения. Соответствующие заключения показывают тогда, как и там, что должна быть

$$FF''' \text{ параллельна } H_1H_2,$$

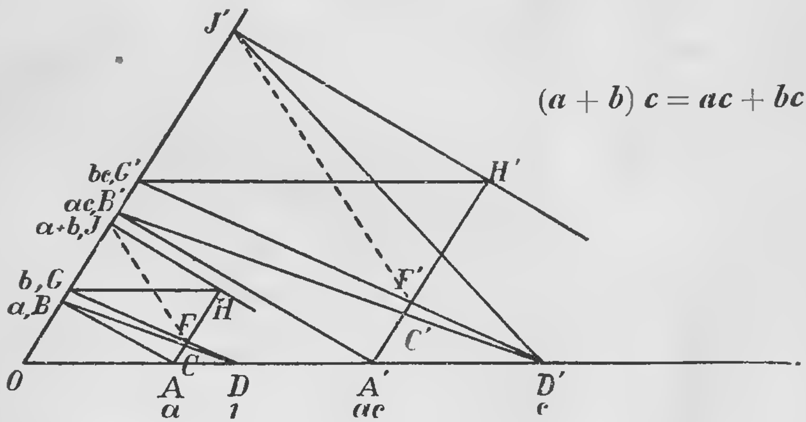
и так как вместе с тем и

$$F'F'' \text{ параллельна } A'A'',$$

то мы имеем полное доказательство нашего утверждения.

Для доказательства в т о р о й формулы дистрибутивного закона служит совершенно иное построение (черт. 48). В нем

$$1=OD; \ a=OA, \ a=OB, \ b=OG, \ c=OD',$$
$$ac=OA', \ ac=OB', \ bc=OG' \text{ и т. д.,}$$



Черт. 48.

и проходят

GH параллельно $G'H'$, параллельно фиксированной прям. OA,
AH „ $A'H'$ „ „ „ OB

и затем

AB параллельна $A'B'$
BD „ $B'D'$
DG „ $D'G'$
HJ „ $H'J'$.

Наше утверждение сводится к тому, чтобы доказать, что тогда должна быть и

$$DJ \text{ параллельна } D'J.$$

Обозначаем точки, в которых BD и GD встречают прямую AH соответственно буквами C и F, и затем точки, в которых $B'D'$ и $G'D'$ встречают прямую $A'H'$, соответственно буквами C' и F'; наконец, проводим еще вспомогательные прямые FJ и $F'J'$, означенные на чертеже пунктиром.

В треугольниках ABC и $A'B'C'$ соответственные стороны параллельны; поэтому по теореме Дезарга три точки O, C, C' лежат на одной прямой. Подобным же образом из рассмотрения треугольников CDF и $C'D'F'$ вытекает тогда, что O, F, F' лежат на одной прямой, и из рассмотрения треугольников FGH и $F'G'H'$ видно, что O, H, H' суть точки одной прямой. Теперь в треугольниках FHJ и $F'H'J'$ прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через одну и ту же точку O, и поэтому, на основании второй формулировки теоремы Дезарга, прямые FJ и $F'J'$ между собою параллельны. Наконец, рассмотрение треугольников DFJ и $D'F'J'$ показывает, что прямые DJ и $D'J'$ взаимно параллельны, и этим дано полное доказательство нашего утверждения.

§ 27.

Уравнение прямой на основе нового исчисления отрезков.

В §§ с 24 по 26 с помощью аксиом, приведенных в § 24, и в предположении, что теорема Дезарга имеет место для плоскости, мы ввели исчисление отрезков, в котором имеют место коммутативный закон сложения, ассоциативные законы сложения и умножения, равно как оба дистрибутивные закона. Мы хотим показать в этом параграфе, каким образом на основе этого исчисления отрезков возможно аналитическое изображение точек и прямых на плоскости.

Пояснение. Мы называем на плоскости обе намеченные фиксированные прямые, проходящие через O, осями X и Y, и мыслим каждую точку P плоскости определенною отрезками x, y, которые получаются соответственно на осях X и Y, если провести через P параллельные к этим осям. Эти отрезки x, y называются *координа-*

тами точки P. На основании нового исчисления отрезков и с помощью теоремы Дезарга, мы получаем следующее предложение:

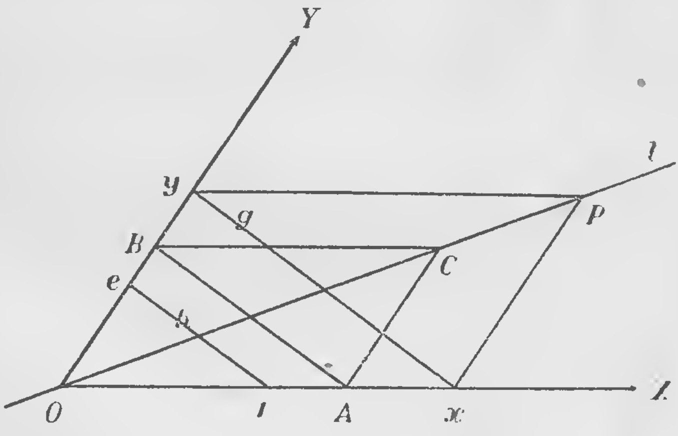
Теорема 36. *Координаты x, y точек на произвольной прямой всегда удовлетворяют уравнению в отрезках вида*

$$ax+by+c=0;$$

в этом уравнении отрезки a, b стоят непременно по левую сторону от координат x, y; отрезки a, b одновременно оба ни в коем случае не нули и c есть произвольный отрезок.

Обратно: *Каждое уравнение в отрезках указанного вида всегда представляет прямую в положенной в основу плоской геометрии.*

Доказательство. Мы предполагаем прежде всего, что прямая l (черт. 49) проходит через O и отлична от осей. Далее пусть C есть опре-

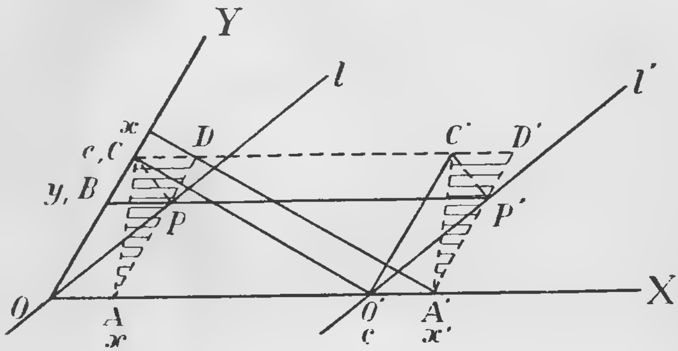


Черт. 49.

деленная отличная от O точка на l, и P произвольная точка на l; пусть координаты C суть OA, OB и координаты P—x, y; обозначаем прямую, соединяющую конечные точки x и y, буквою g. Наконец, проводим через конечную точку отрезка 1 на оси X параллельную к ABh; пусть эта параллельная отрезает на оси Y отрезок e. На основании второй формулировки теоремы Дезарга легко вывести, что прямая g всегда идет параллельно AB. Так как вместе с тем и g непременно параллельна h, то, следовательно, для координат x, y произвольной точки P на l имеем уравнение в отрезках

$$ex = y.$$

Пусть теперь l' (черт. 50) есть произвольная не параллельная осям прямая на нашей плоскости; пусть она отсекает на оси x отрезок $c = OO'$. Проводим далее через точку O прямую l, параллельную l'. Пусть P' есть произвольная точка на l'; и пусть прямая параллельная



Черт. 50.

к оси X, проходящая через P', встречает прямую l в точке P и отсекает на оси Y отрезок $y = OB$; далее пусть параллельные к оси Y, проходящие через точки P и P', отсекают на оси X отрезки $x = OA$ и $x' = OA'$.

Мы докажем теперь, что имеет место уравнение в отрезках

$$x' = x + c.$$

С этою целью проведем $O'C$ параллельно единичной прямой, далее CD параллельно оси X и AD параллельно оси Y; тогда наше утверждение сводится к тому, что должна быть

$$A'D \text{ параллельна } O'C.$$

Построим еще D' как точку пересечения прямых CD и $A'P'$ и проведем $O'C'$ параллельно оси Y.

Так как в треугольниках OCP а $O'C'P'$ прямые, соединяющие соответственные вершины, параллельны, то на основании второй формулировки теоремы Дезарга следует, что должна быть

$$CP \text{ параллельна } C'P';$$

подобным же образом рассмотрение треугольников ACP и $A'C'P'$ показывает, что

$$AC \text{ параллельна } A'C'.$$

Так как таким образом в треугольниках ACD и $C'A'O'$ соответственные стороны взаимно параллельны, то прямые AC', CA', DO' встречаются в одной точке, и рассмотрение обоих треугольников $C'A'D'$ и ACO' показывает тогда, что $A'D$ и CO' параллельны друг другу.

Из двух найденных доселе уравнений в отрезках

$$ex = y \text{ и } x' = x + c$$

тотчас же получается уравнение

$$ex' = y + ec.$$

Если, наконец, мы обозначим буквою n отрезок, который будучи сложен с отрезком 1 дает отрезок 0, то, как легко доказать, из последнего уравнения вытекает

$$ex' + ny + nec = 0,$$

и это уравнение того вида, который указан теоремою 36.

Без труда убедимся теперь в справедливости второго утверждения теоремы 36; ибо каждое данное уравнение в отрезках вида

$$ax + by + c = 0,$$

где $b \neq 0$, очевидно, путем умножения слева на подходящий отрезок, может быть приведено к выше найденному виду

$$ex + ny + nec = 0.$$

Следует подчеркнуть, что при наших предположениях уравнение в отрезках вида

$$xa + yb + c = 0,$$

в котором отрезки a, b стоят справа от координат x, y, вообще не представляет прямую.

В § 30 будет дано важное применение теоремы 36.

§ 28.

Совокупность отрезков, рассматриваемая как комплексная числовая система

Мы непосредственно видим, что для нашего нового, обоснованного в § 24, исчисления отрезков имеют место предложения 1—6 § 13.

Далее в § 25 и § 26 с помощью теоремы Дезарга мы выяснили, что для этого исчисления отрезков имеют место правила счета 7—11 § 13; таким образом сохраняются все предложения сочетания за исключением коммутативного закона умножения.

Наконец, чтобы сделать возможным установление порядка между отрезками, мы устанавливаем следующее условие. Пусть A, B будут какие-либо две различные точки прямой OE, тогда сообразно теореме 4 мы располагаем четыре точки O, E, A, B в ряд. Если это возможно одним из следующих шести способов:

$$ABOE,\ AOBE,\ AOEB,\ OABE,\ OAEB,\ OEAB,$$

то отрезок $a = OA$ мы называем меньшим, чем отрезок $b = OB$, в символах:

$$a < b.$$

Если же напротив имеет место одно из шести расположений

$$BAOE,\ BOAE,\ BOEA,\ OBAE,\ OBEA,\ OEBA,$$

то отрезок $a = OA$ мы называем бо̀льшим, чем отрезок $b = OB$, в символах:

$$a > b.$$

Это условие остается в силе и в том случае, если A или B совпадают с O или E; только тогда совпадающие точки нужно рассматривать как одну точку, и, следовательно, вопрос шел бы о порядке только трех точек.

Легко убеждаемся, что теперь в нашем исчислении отрезков на основании аксиом II будут выполняться и правила счета 13—16 из § 13; таким образом совокупность всех различных отрезков образует комплексную числовую систему, для которой наверно имеют место предложения 1—11, 13—16 § 13, т. е. все законы, кроме коммутативного закона умножения и предложений непрерывности, мы будем в дальнейшем кратко называть такую числовую систему *Дезарговою числовою системою.*

§ 29.

Построение пространственной геометрии с помощью Дезарговой числовой системы.

Пусть дана некоторая Дезаргова числовая система D; она делает для нас возможным построение некоторой пространственной геометрии, в которой выполняются все аксиомы I, II, IV.

Чтобы убедиться в этом, примем систему каких-либо трех чисел (x, y, z) Дезарговой числовой системы D за точку, а систему каких-либо четырех чисел $(u : v : w : r)$ из D, из коих первые три не равны одновременно 0, за плоскость; при чем системы $(u : v : w : r)$ и $(au : av : aw : ar)$, где a означает какое-либо отличное от 0 число из D, должны представлять одну и ту же плоскость. Существование равенства

$$ux + vy + wz + r = 0$$

пусть выражает, что точка (x, y, z) лежит на плоскости $(u : v : w : r)$. Наконец, прямую определяем с помощью системы двух плоскостей $(u' : v' : w' : r')$ и $(u'' : v'' : w'' : r'')$, если нельзя найти двух отличных от 0 чисел из D a' и a'' таких, что одновременно

$$a' u' = a'' u''; a' v' = a'' v''; a' w' = a'' w''.$$

Точка (x, y, z) признается лежащей на этой прямой

$$[(u' : v' : w' : r', (u'' : v'' : w'' : r'')],$$

если она общая для обеих плоскостей $(u' : v' : w' : r')$ и $(u'' : v'' : w'' : r'')$. Две прямые, содержащие одни и те же точки, считаются не различными.

Применяя правила счета 1—11 § 13, которые по предположению должны иметь место для чисел из D, мы без труда приходим к результату, что в построенной таким образом пространственной геометрии выполнены все аксиомы I и IV.

Чтобы удовлетворить и аксиомам порядка II, мы устанавливаем следующие условия. Пусть

$$(x_1,\ y_1,\ z_1),\ (x_2,\ y_2,\ z_2),\ (x_3,\ y_3,\ z_3)$$

три точки прямой

$$[(u':\ v':\ w':\ r'),\ (u'':\ v'':\ w'':\ r'')];$$

тогда пусть точка $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ признается лежащею между обеими другими точками, если удовлетворена по меньшей мере одна из шести пар неравенств

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad x_1 > x_2 > x_3 \tag{1}$$
$$y_1 < y_2 < y_3, \quad y_1 > y_2 > y_3 \tag{2}$$
$$z_1 < z_2 < z_3, \quad z_1 > z_2 > z_3. \tag{3}$$

В случае, если выполнено хоть одно из двух двойных неравенств (1), легко заключить, что или $y_1 = y_2 = y_3$, или необходимо должно иметь место одно из двух двойных неравенств (2) и точно также, что или $z_1 = z_2 = z_3$, или должно иметь место одно из двойных неравенств (3). В самом деле, из уравнений

$$u'x_i + v'y_i + w'z_i + r' = 0$$
$$u''x_i + v''y_i + w''z_i + r'' = 0$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3),$$

с помощью левостороннего умножения их на подходящие числа из D, которые $\neq 0$, и последующего сложения полученных уравнений, образуем систему уравнений вида

$$u'''x_i + v'''y_i + r''' = 0 \tag{4}$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3).$$

При этом коэффициент v''' наверно не 0, ибо иначе следовало бы равенство трех чисел — $x_1,\ x_2,\ x_3$. Из

$$x_1 \lesseqqgtr x_2 \lesseqqgtr x_3$$

заключаем

$$u'''x_1 \lesseqqgtr u'''x_2 \lesseqqgtr u'''x_3$$

и поэтому, на основании (4),

$$v'''y_1 + r''' \gtreqless v'''y_2 + r''' \gtreqless v'''y_3 + r'''$$

и, следовательно,

$$v'''y_1 \gtreqless v'''y_2 \gtreqless v'''y_3,$$

и так как v''' не 0, то имеем

$$y_1 \gtreqless y_2 \gtreqless y_3;$$

в каждом из этих двойных неравенств всегда должен быть взят или сплошь верхний, или сплошь средний, или сплошь нижний знак.

Предыдущие соображения показывают, что в нашей геометрии имеют место линейные аксиомы порядка II 1—3. Остается еще показать последнее, что в нашей геометрии имеет место и плоскостная аксиома II 4.

Пусть с этой целью дана плоскость $(u: v: w: r)$ и на ней прямая $[(u: v: w: r), (u': v': w': r')]$. Мы полагаем, что все лежащие в плоскости $(u: v: w: r)$ точки (x, y, z), для которых выражение $u'x + v'y + w'z + r'$ меньше или больше чем 0, лежат по одну или соответственно по другую сторону этой прямой, и должны при этом доказать, что это утверждение согласуется с сделанным прежде, что легко может быть исполнено.

Таким образом мы нашли, что все аксиомы I, II, IV выполнены в той пространственной геометрии, которая строится вышеуказанным способом из Дезарговой числовой системы D. Принимая во внимание, что теорема Дезарга есть следствие аксиом I, II, IV, мы видим, что только что найденный результат устанавливает положение, в точности обратное тому выводу, к которому мы пришли в § 28.

§ 30.

Значение теоремы Дезарга.

Если в некоторой плоской геометрии имеют место аксиомы I 1—3, II, IV и сверх того теорема Дезарга, то, на основании § 24—§ 28, всегда возможно ввести в эту геометрию исчисление отрезков, для которого применимы правила 1—11, 13—16 § 13. Мы рассматриваем затем совокупность этих отрезков, как комплексную числовую систему, и строим из нее, на основании рассуждений § 29, пространственную геометрию, в которой выполняются все аксиомы I, II, IV.

Если мы будем рассматривать в этой пространственной геометрии исключительно точки (x, y, 0) и те прямые, на которых лежат только такие точки, то получается некоторая плоская геометрия, и если мы примем в соображение выведенную в § 27 теорему 36, то станет ясно, что эта плоская геометрия должна точно совпадать с предложенной в начале плоскою геометриею, т. е. обе геометрии имеют дело с теми же самыми, одинаковым образом сочетаемыми и располагаемыми в порядке, элементами. Мы получаем, таким образом, следующую теорему, которая может быть рассматриваема как конечная цель всех исследований настоящей главы:

Если в некоторой плоской геометрии имеют место аксиомы I_{1-3}, *II, IV, то наличность теоремы Дезарга составляет необходимое и достаточное условие для того, чтобы эта плоская геометрия могла быть рассматриваема, как часть некоторой пространственной геометрии, в которой имеют место все аксиомы I, II, IV* [6]).

Теорема Дезарга, некоторым образом, характеризуется для плоской геометрии, как результат исключения пространственных аксиом [7]).

Найденные результаты позволяют нам также выяснить, что всякую пространственную геометрию, в которой имеют место все аксиомы I, II, IV, можно рассматривать всегда, как часть некоторой „геометрии какого угодно числа измерений“; при этом под геометрией сколь угодно многих измерений необходимо понимать совокупность точек, прямых, плоскостей и еще новых элементов, для которых имеют место соответствующие расширенные аксиомы сочетания, аксиомы порядка, равно как и аксиома параллельности.

Глава VI.

Теорема Паскаля.

§ 31.

Две теоремы о доказуемости теоремы Паскаля.

Теорема Дезарга (теорема 34) может быть доказана, как уже замечено, на основании аксиом I, II, IV, т. е. с существенным применением пространственных аксиом, но без привлечения аксиом конгруэнтности; в § 23 я показал, что ее доказательство невозможно без пространственных аксиом группы I и без аксиом конгруэнтности III даже, если будет допущено пользование аксиомами непрерывности.

В § 14 теорема Паскаля (теорема 22) и вместе с тем по § 22 и теорема Дезарга выведены из аксиом I 1—3, II—IV, т. е. при исключении пространственных аксиом и при существенном пользовании аксиомами конгруэнтности. Является вопрос, может ли и теорема Паскаля быть доказана без привлечения аксиом конгруэнтности. Наше исследование покажет, что в этом отношении теорема Паскаля существенно отличается от теоремы Дезарга, так как при доказательстве теоремы Паскаля решающее значение для ее наличности имеет допущение или исключение аксиомы Архимеда. Существенные результаты нашего исследования объединяем мы в двух следующих теоремах:

Теорема 37. *Теорема Паскаля* (теорема 22) *доказуема на основе аксиом I, II, III, IV, V, т. е. при исключении аксиом конгруэнтности с привлечением на помощь аксиомы Архимеда.*

Теорема 38. *Теорема Паскаля* (теорема 22) *не доказуема на основе аксиом I, II, IV; т. е. при исключении аксиом конгруэнтности, равно как и аксиомы Архимеда.*

В формулировке этих обеих теорем пространственные аксиомы I 4—8 могут быть также, на основании общей теоремы 36, заменены требованием, чтобы в плоской геометрии имела место теорема Дезарга (теорема 34).

§ 32.

Коммутативный закон умножения в архимедовой числовой системе.

Доказательства теорем 37 и 38 существенно основываются на некоторых взаимных соотношениях, которые существуют между правилами счета и основными положениями арифметики, знакомство с которыми представляет интерес и само по себе.

Мы устанавливаем следующие две теоремы:

Теорема 39. *Для любой архимедовой числовой системы коммутативный закон умножения есть необходимое следствие прочих правил счета; т. е. из того, что некоторая числовая система обладает перечисленными в § 13 свойствами 1—11, 13—17, следует необходимо, что она удовлетворяет и формуле 12.*

Доказательство. Прежде всего заметим, если a есть произвольное число числовой системы и

$$n = 1 + 1 + \ldots + 1$$

есть целое положительное рациональное число, то для a и n всегда имеет место коммутативный закон умножения; действительно

$$an = a\,(1 + 1 + \ldots + 1) = a \,.\, 1 + a \,.\, 1 + \ldots + a \,.\, 1 =$$
$$= a + a + \ldots + a$$

и также

$$na = (1 + 1 + \ldots + 1)\,a = 1 \,.\, a + 1 \,.\, a + \ldots + 1 \,.\, a =$$
$$= a + a + \ldots + a.$$

Пусть теперь, вопреки нашему утверждению, a и b такие два числа числовой системы, для которых не имеет места коммутативный закон умножения. Мы имеем право тогда, как легко видеть, сделать предположения:

$$a > 0,\ b > 0,\ ab - ba > 0.$$

На основании требования 5 § 13 существует число c (> 0) такое, что

$$(a + b + 1)\,c = ab - ba.$$

Наконец, выбираем число d, удовлетворяющее зараз неравенствам

$$d > 0,\ d < 1,\ d < c,$$

и обозначаем буквами m и n два таких целых рациональных числа $\geqq 0$, для которых

$$md < a \leqq (m + 1)\,d$$

и соответственно

$$nd < b \leqq (n + 1)\,d.$$

Существование таких чисел m, n есть непосредственное следствие предложения Архимеда (предложение 17 в § 13). На основании замечания, сделанного в начале доказательства, мы получаем из последних неравенств, перемножая их,

$$ab \leqq mnd^2 + (m + n + 1)\,d^2$$
$$ba > mnd^2,$$

следовательно, вычитая

$$ab - ba \leqq (m + n + 1)\,d^2.$$

Но

$$md < a,\ nd < b,\ d < 1$$

и, следовательно,

$$(m + n + 1)\,d < a + b + 1,$$

то есть

$$ab - ba < (a + b + 1)\,d$$

или, на основании того, что $d < c$,

$$ab - ba < (a + b + 1)\,c.$$

Это неравенство противоречит определению числа c и этим теорема 39 доказана.

§ 33.

Коммутативный закон умножения в не-архимедовой числовой системе.

Теорема 40. *Для не-архимедовой числовой системы коммутативный закон умножения не есть необходимое следствие прочих правил счета; т. е. существует некоторая числовая система, которая имеет перечисленные в § 13 свойства 1—11, 13—16,—Дезаргова числовая система согласно § 28—, в которой не имеет места коммутативный закон (12) умножения.*

Доказательство. Пусть t есть некоторый параметр, а T некоторое выражение с конечным или бесконечно большим числом членов вида

$$T = r_0 t^n + r_1 t^{n+1} + r_2 t^{n+2} + r_3 t^{n+3} + \dots;$$

в нем r_0 $(\neq 0)$, r_1, $r_2 \dots$ могут означать любые рациональные числа, и n пусть будет любым целым числом $\gtreqless 0$. Пусть далее s другой параметр и S некоторое выражение с конечным или бесконечно большим числом членов вида

$$S = s^m T_0 + s^{m+1} T_1 + s^{m+2} T_2 + \dots;$$

в нем $T_0 (\neq 0)$, T_1, $T_2 \dots$ могут означать произвольные выражения вида T, и m пусть будет снова произвольным целым числом $\gtreqless 0$. Совокупность всех выражений вида S рассматриваем, как комплексную числовую систему Ω (s, t), в которой мы устанавливаем следующие правила счета: вычислять с s и t, как с параметрами, должно по правилам 7—11 § 13, но вместо правила 12 должно применять всегда формулу

$$ts = 2\,st. \tag{1}$$

Если теперь S' и S'' будут какие-либо два выражения вида S:

$$S' = s^{m'} T_0' + s^{m'+1} T_1' + s^{m'+2} T'_2 + \dots\dots,$$
$$S'' = s^{m''} T_0'' + s^{m''+1} T''_1 + s^{m''+2} T''_2 + \dots,$$

то, очевидно, соединением можно составить новое выражение $S' + S''$, которое опять имеет вид S и в то же время однозначно определено: это выражение $S' + S''$ называется суммою чисел, представленных посредством S', S''.

Почленным умножением обоих выражений S', S'' мы получаем прежде всего выражение вида

$$S'S'' = s^{m'}T_0's^{m''}T_0'' + (s^{m'}T_0's^{m''+1}T_1'' + s^{m'+1}T_1's^{m''}T_0'') + \\ + (s^{m}T_0's^{m''+2}T_2'' + s^{m'+1}T_1's^{m''+1}T_1'' + s^{m'+2}T_2's^{m''}T_0'') + \\ + \ldots\ldots$$

Это выражение при применении формулы (1) очевидно обратится в однозначно определенное выражение вида S; это последнее будет называться произведением числа, представленного посредством S', на число, представленное посредством S''.

При установлении такого способа исчисления непосредственно очевидна применимость предложений 1—4 и 6 из § 13. Не трудно усмотреть также и применимость положения 5 из § 13 [1]). Для этой цели предположим, что, напр.,

$$S' = s^{m'}T_0' + s^{m'+1}T_1 + s^{m'+2}T_2' + \ldots\ldots$$

и

$$S''' = s^{m'''}T_0''' + s^{m'''+1}T_1''' + s^{m'''+2}T_2''' + \ldots$$

два данные выражения вида S. и обратим внимание на то, что, согласно нашим положениям, первый коэффициент r_0' в T_0' должен быть отличен от 0. Сравнивая одинаковые степени S в обеих частях уравнения

(2) $$S'S'' = S''',$$

находим однозначно определенным образом сначала некоторое целое число m'', как показатель степени, и затем последовательно выражения

$$T_0'',\ T_1'',\ T_2''\ \ldots\ldots$$

так, что выражение

$$S'' = s^{m''}T_0'' + s^{m''+1}T_1'' + s^{m''+2}T_2'' + \ldots\ldots$$

будет при употреблении формулы (1) удовлетворять уравнению (2); таким образом желаемое доказано.

Наконец, для того, чтобы сделать возможным расположение по порядку чисел нашей числовой системы $\Omega(s, t)$, мы введем следующие определения: число системы будет называться $<$ или >0, смотря по тому $<$ или >0 первый коэффициент r_0 при T_0 в выражении S, представляющем это число. Если даны два какие-либо числа комплексной числовой системы a и b, то будем называть соответственно $a<b$ или $a>b$, смотря по тому будет ли $a-b<0$ или >0, непосредственно видно, что при этих определениях имеют место правила 13—16 § 13, т. е. $\Omega(s, t)$ есть Дезаргова числовая система (ср. § 28).

Правило 12 из § 13, как показывает уравнение (1), не выполняется в нашей числовой системе Ω (s, t), и тем самым справедливость теоремы 40 вполне выяснена.

В согласии с теоремой 39 предложение Архимеда (предложение 17 в § 13) не имеет места для образованной таким образом числовой системы Ω (s, t).

Необходимо отметить еще, что числовая система Ω (s, t) — подобно числовым системам Ω и Ω (t), которыми мы пользовались в § 9 и § 12, — заключает только исчислимое множество чисел.

§ 34.

Доказательство обеих теорем о теореме Паскаля. (Не-паскалева геометрия).

Если в некоторой пространственной геометрии выполнены все аксиомы I, II, IV, то имеет место и теорема Дезарга (теорема 34), и поэтому на основании §§ 24—26 главы V в этой геометрии возможно введение исчисления отрезков, для которого имеют место правила 1—11, 13—16 из § 13. Если мы введем в нашу геометрию и аксиому Архимеда V_1, то, очевидно, для исчисления отрезков будет иметь место предложение Архимеда (предложение 17 в § 13), и следовательно, на основании теоремы 39, также и коммутативный закон умножения. Но так как рассматриваемое здесь, введенное в § 24 (черт. 43), определение произведения отрезков совпадает с определением, данным в § 15 (черт. 24), то, согласно построению выполненному в § 15, коммутативный закон умножения двух отрезков выражает и здесь не что иное, как теорему Паскаля.

Для доказательства теоремы 38 обратим внимание на установленную в § 33 Дезаргову числовую систему Ω (s, t), и с ее помощью построим, путем, указанным в § 29, пространственную геометрию, в которой имеют место все аксиомы I, II, IV. Однако, теорема Паскаля не выполняется в этой геометрии, так как коммутативный закон умножения не имеет места в Дезарговой числовой системе Ω (s, t). Построенная таким образом *„не-паскалева“ гео-*

метрия есть, в согласии с выше доказанной теоремой 37, в то же время необходимо и „*не-архимедова геометрия*".

Очевидно, что теорема Паскаля при наших предположениях не может быть доказана и в том случае, если мы будем рассматривать пространственную геометрию как часть некоторой геометрии сколь угодно многих измерений, в которой кроме точек, прямых и плоскостей существуют еще и другие элементы и для которой в основу положена соответствующая система аксиом сочетания и порядка, также как и аксиома параллельности [2]).

§ 35.

Доказательство любой теоремы о точках пересечения с помощью теорем Дезарга и Паскаля.

Каждая плоскостная теорема о точках пересечения (Schnittpunktsatz) имеет такую форму: выберем прежде всего систему точек и прямых произвольно, но с тем условием, однако, что некоторые из этих точек и прямых инцидентны; если затем определенным образом построить соединяющие прямые и точки пересечения, то в конце концов получается определенная система прямых, о которых теорема утверждает, что они проходят через одну и ту же точку.

Пусть теперь дана некоторая плоская геометрия, в которой имеют место все аксиомы I 1—3, II—V; согласно гл. III § 17, мы можем тогда с помощью прямоугольного креста осей отнести каждой точке пару чисел (x, y) и каждой прямой отношение трех чисел $(u: v: w)$; при этом x, y, и u, v, w суть непременно в е щ е с т в е н н ы е числа, из которых u, v не могут обратиться в нуль одновременно, и условие инцидентности точки и прямой

$$ux + vy + w = 0$$

представляет уравнение в обычном смысле.

С другой стороны в случае, если x, y, u, v, w суть в частности числа построенной в § 9 алгебраической области Ω, и u, v не обращаются одновременно в нуль, можно предположить, что и обратно пара чисел (x, y) и тройка чисел (u, v, w) дают соответственно некоторую точку и некоторую прямую в предложенной геометрии.

Если мы таким образом для всех точек и прямых, появляющихся в произвольной плоскостной теореме о точках пересечения, введем соответствующие пары и тройки чисел, то эта теорема о точках пересечения будет означать, что некоторое определенное, рационально зависящее от некоторых параметров $p_1, \ldots, p_r$, выражение $A(p_1, \ldots, p_r)$ с вещественными коэффициентами всегда обращается в нуль, как только вместо этих параметров подставим в частности какие-либо числа рассмотренной в § 9 области Ω. Мы заключаем отсюда, что выражение $A(p_1, \ldots, p_r)$ должно тождественно обращаться в нуль на основании правил счета 7—12 из § 13.

Так как в рассматриваемой геометрии, на основании § 22, имеет место теорема Дезарга, то мы можем, конечно, воспользоваться и введенным в § 24 исчислением, и, вследствие применимости теоремы Паскаля, для этого исчисления отрезков имеет место и коммутативный закон умножения, так что в этом исчислении отрезков выполняются все правила счета 7—12 из § 13.

Выбирая оси употреблявшегося доселе осевого креста, как оси нового исчисления отрезков, и намечая подходящим образом единичные точки E и E', мы убедимся в совпадении нового исчисления отрезков с ранее данным исчислением координат.

Для того, чтобы показать в новом исчислении отрезков тождественное обращение в нуль выражения $A(p_1, \ldots, p_r)$, достаточно применить только теоремы Дезарга и Паскаля, и таким образом мы убеждаемся в том, что каждую теорему о точках пересечения, имеющую место в рассматриваемой геометрии, с помощью построения подходящих вспомогательных точек и вспомогательных прямых, всегда должно представить как некоторую комбинацию теорем Дезарга и Паскаля. Для доказательства справедливости теоремы о точках пересечения нет поэтому необходимости прибегать к помощи предложений о конгруэнтности *).

*) G. Hessenberg [„Beweis des Desarguesschen Satzes aus d. Paskalschen“ Mat. An. Bd. 61] [3]) выяснил, что теорема Дезарга может быть выведена из теоремы Паскаля и без употребления аксиом конгруэнтности и непрерывности. С помощью этого результата, из доказанного в тексте можно вывести, как на это указывает G. Hessenberg [см. там стр. 162], замечательное предложение, что каждая теорема о точках пересечения может быть доказана исключительно на основании теоремы Паскаля, без обращения к аксиомам конгруэнтности и непрерывности.

Глава VII.

Геометрические построения на основе аксиом I—IV.

§ 36.

Геометрические построения с помощью линейки и эталона длины.

Пусть дана некоторая пространственная геометрия, в которой имеют место все аксиомы I — IV; для простоты мы будем рассматривать в этой главе только некоторую плоскую геометрию, заключающуюся в этой пространственной геометрии, и остановимся на исследовании вопроса, какие элементарные задачи на построение наверно выполнимы в такой геометрии [предположив подходящие практические вспомогательные средства].

На основании аксиом I всегда возможно решение следующей задачи:

Задача 1. Соединить две точки прямою и найти точку пересечения двух прямых в случае, если эти прямые непараллельны.

На основе аксиом группы II не разрешимы никакие новые задачи. На основании аксиом конгруэнтности III возможно отложение отрезков и углов, т. е. в рассматриваемой геометрии возможно решение следующих задач:

Задача 2. Отложить данный отрезок на данной прямой от некоторой точки.

Задача 3. Данный угол отложить при данной прямой или построить прямую, пересекающую данную прямую под данным углом.

Аксиома IV делает возможным решение следующей задачи:

Задача 4. Через данную точку провести параллельную к данной прямой [1]).

Вместе с тем мы видим, что, если положить в основу аксиомы I — IV, разрешимы все те и только те задачи на построение, которые могут быть сведены к вышеприведенным задачам 1 — 4.

Мы присоединяем к основным задачам 1 — 4 еще следующую:

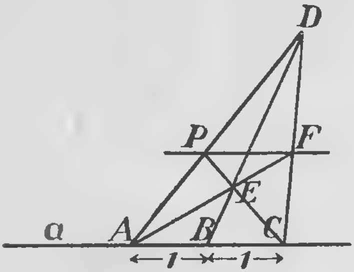
Задача 5. К данной прямой провести перпендикуляр.

Усматриваем непосредственно, что эта задача 5 может быть различными способами решена с помощью задач 1 — 4.

Для решения задачи 1 мы нуждаемся в линейке. Для решения задач 2 — 5 достаточно, как дальше будет показано, кроме линейки пользоваться эталоном длины (Eichmass), инструментом, который позволяет откладывать один единственный *) определенный отрезок, например, отрезок-единицу.

Мы приходим таким образом к следующему результату:

Теорема 41. Те геометрические задачи на построение, которые разрешимы если положить в основу аксиомы I — IV, могут быть выполнены наверно с помощью линейки и эталона длины.



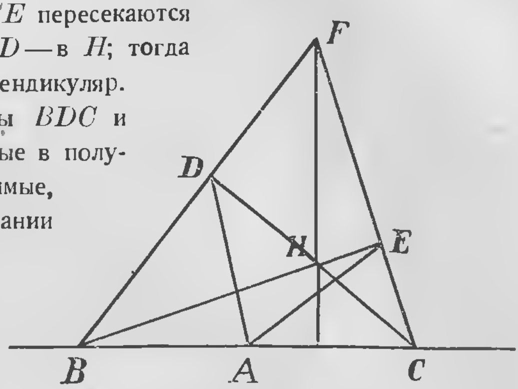
Черт. 51.

Доказательство. Чтобы решить задачу 4, соединяем данную точку P (черт. 51) с произвольной точкой A данной прямой a и откладываем от A на a с помощью эталона длины два раза один за другим единичный отрезок, например, до B и C. Пусть теперь D есть какая-нибудь точка на AP, далее E точка встречи CP и BD, и, наконец, F точка встречи AE и CD; тогда по Штейнеру PF есть искомая параллельная к a.

Задача 5-ая решается следующим образом: пусть A (черт. 52) некоторая произвольная точка данной прямой; откладываем тогда на этой прямой по обе стороны от точки A с помощью эталона длины единичные отрезки AB и AC и определим потом на двух других произвольных прямых, проходящих через A, точки E и D

*) Что здесь достаточно требования возможности отложения лишь для одного единственного отрезка замечено J. Kürschak'ом; ср. его статью „Das Streckenabtragen" [Math. Ann. Bd. 55, 1902].

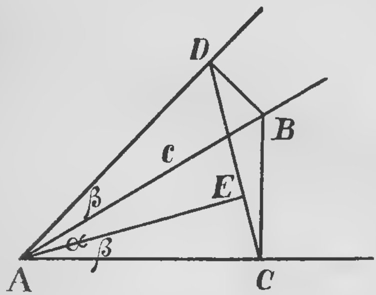
так, чтобы и отрезки AD и AE равнялись единичному отрезку. Пусть прямые BD и CE пересекаются в F, прямые BE и CD — в H; тогда FH есть искомый перпендикуляр.



Черт. 52.

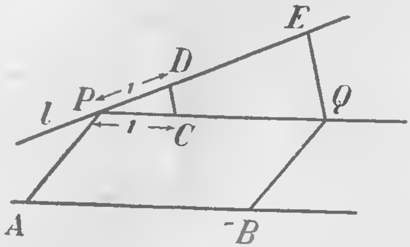
Действительно: углы BDC и BEC, как углы вписанные в полуокружность на BC, прямые, и поэтому — на основании теоремы о пересечении высот треугольника, примененной к треугольнику BCF, — FH перпендикулярна к BC.

Мы можем теперь легко решить и задачу 3 с помощью только одной линейки и эталона длины; изберем, напр., следующий прием, который требует только проведения параллельных и опускания перпендикуляров. Пусть β (черт. 53) есть откладываемый угол и A вершина этого угла. Мы проводим прямую $l\,(AC)$ через A параллельно к данной прямой, при которой должен быть отложен данный угол β. Из произвольной точки B одной из сторон угла β опускаем перпендикуляры на другую сторону угла β и на l. Пусть основания этих перпендикуляров будут D и C. Опускание перпендикуляров совершается в силу задач 2 и 5. Затем из точки A опускаем перпендикуляр на CD, и пусть его основание будет E. На основании доказательства, приведенного в § 14 стр. 35, $\angle CAE = \beta$; следовательно, задача 3 решена.



Черт. 53.

Наконец, для решения задачи 2, пользуемся простым построением, предложенным J. Kürschák'ом: пусть AB (черт. 54) отрезок, который следует отложить, и точка P — данная точка на данной прямой l. Проводим через P параллельную к AB и откладываем на ней с помощью эталона длины от точки P единичный отрезок, примерно до C; далее на прямой l откладываем от P единичный отрезок до точки D. Пусть параллельная к AP, проведенная через B, встречает PC в Q, и пусть параллельная к CD, проведенная через Q, встречает прямую l в E; тогда $PE = AB$.



Черт. 54.

Этим показано, что задачи 1 — 5 разрешимы все с помощью линейки и эталона длины, и теорема 41, следовательно, вполне доказана.

§ 37.

Аналитическое представление координат точек, которые могут быть построены.

Сверх элементарных геометрических задач, рассмотренных в § 36, существует еще длинный ряд других задач, для решения которых необходимо только проведение прямых и откладывание отрезков. Чтобы быть в состоянии обозреть область всех разрешимых подобным образом задач, мы в дальнейшем исследовании кладем в основу некоторую прямоугольную координатную систему и координаты точек представляем себе обыкновенным приемом или как вещественные числа, или как функции некоторых произвольных параметров. Чтобы ответить на вопрос о совокупности всех построимых точек мы прибегнем к следующему рассуждению:

Пусть дана система некоторых определенных точек; из координат этих точек мы составляем область R; она содержит некоторые вещественные числа и некоторые произвольные параметры p. Вообразим себе теперь совокупность всех тех точек, которые могут быть построены из данной системы точек проведением прямых и откладыванием отрезков. Пусть область, которая будет образована координатами этих точек, называется $\Omega(R)$; она будет заключать некоторые вещественные числа и функции произвольных параметров p.

Наши рассуждения в § 17 показывают, что проведение прямых и параллельных сводится аналитически к применению сложения, умножения, вычитания, деления отрезков; далее известная, данная в § 9, формула для вращения показывает, что откладывание отрезков на произвольной прямой не требует никакой другой аналитической операции, кроме извлечения квадратного корня из суммы двух квадратов, основания которых уже построены. Обратно, на основании теоремы Пифагора всегда можно с помощью прямоугольного треугольника путем откладывания отрезков построить квадратный корень из суммы квадратов двух отрезков.

Из этих рассуждений вытекает, что область Ω (R) содержит все те и только те вещественные числа и функции параметров p, которые образуются из чисел и параметров в R конечным числом приложений пяти операций счета: именно—четырех элементарных операций счета и некоторой пятой операции, за которую принимается извлечение квадратного корня из суммы двух квадратов. Мы формулируем этот результат следующим образом:

Теорема 42. Геометрическая задача на построение тогда и только тогда разрешима проведением прямых и откладыванием отрезков, т. е. с помощью линейки и эталона длины, если при аналитической трактовке задачи координаты искомых точек суть такие функции координат данных точек, для изображения которых требуются только рациональные операции и операция извлечения квадратного корня из суммы двух квадратов, при чем эти пять операций требуются в конечном числе.

Из этой теоремы можно тотчас усмотреть, что не всякая задача, разрешимая с помощью циркуля, может быть также решена с помощью одной только линейки и эталона длины.

С этой целью мы кладем в основу ту геометрию, которая в § 9 была построена с помощью алгебраической числовой области Ω; в этой геометрии существуют исключительно только такие отрезки, которые могут быть построены с помощью линейки и эталона длины, именно отрезки, определяемые с помощью чисел области Ω.

Если теперь ω есть какое-либо число области Ω, то из определения области Ω легко усматривается, что и каждое сопряженное с ω алгебраическое число должно принадлежать к области Ω, и так как числа области Ω очевидно суть все числа вещественные, то отсюда следует, что область Ω может заключать только такие вещественные алгебраические числа, сопряженные которых также вещественны.

Поставим теперь задачу—построить прямоугольный треугольник, с гипотенузой 1 и одним катетом $\sqrt{2}-1$. В этом случае алгебраическое число $\sqrt{2\sqrt{2}-2}$, выражающее численное значение второго катета, не принадлежит к числовой области Ω, так как сопряженное с ним число $\sqrt{-2\sqrt{2}-2}$ оказывается числом мнимым. Поставленная задача таким образом не разрешима в положенной в основу геометрии и не может быть поэтому вообще разрешима с помощью линейки и эталона длины, хотя с помощью циркуля построение выполнимо немедленно.

§ 38.

Представление алгебраических чисел и целых рациональных функций в виде суммы квадратов.

Вопрос о выполнимости геометрических построений с помощью линейки и эталона длины для своего дальнейшего исследования требует некоторых теорем, относящихся к области теории чисел и алгебры, которые, как мне кажется, и сами по себе представляют интерес.

Согласно Фермату, как известно, каждое целое рациональное положительное число может быть представлено в виде суммы четырех квадратов. Эта теорема Фермата допускает замечательное обобщение следующего вида:

Пояснение. Пусть k есть произвольное числовое тело (Zahlkörper); пусть степень этого тела k есть m и пусть $m-1$ числовых тел, сопряженных с k, обозначены $k', k'', \ldots, k^{(m-1)}$. Если случится, что одно или больше из m тел $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ составлены исключительно из вещественных чисел, то мы называем самые эти тела вещественными; пусть эти телабудут, напр., $k, k', \ldots, k^{(s-1)}$. Некоторое число a тела k называется в этом случае *вполне положительным в* k, если s чисел, сопряженных с a и соответственно принадлежащих к $k, k', \ldots, k^{(s-1)}$, все положительны. Если, напротив, в каждое из m тел $k, k', \ldots, k^{(m-1)}$ входят также и мнимые числа, то каждое число α в k называется всегда *вполне положительным*.

Теорема 43. *Каждое вполне положительное в k число может быть представлено в виде суммы четырех квадратов, основания которых суть целые или дробные числа тела k.*

Доказательство этой теоремы представляет большие трудности; оно существенно основано на теории относительно - квадратных („relativquadratischen") числовых тел, которая была развита мною во многих работах *). Должно указать здесь только на ту теорему этой теории, которая дает условия разрешимости трехчленного Диофантова уравнения вида

$$\alpha\xi^2+\beta\eta^2+\gamma\zeta^2=0,$$

где коэффициенты α, β, γ означают данные числа в k и ξ, η, ζ искомые числа в k. Теорема 43 доказывается повторным применением только что указанной теоремы.

Из теоремы 43 вытекает ряд теорем о представлении таких рациональных функций одной переменной с рациональными коэффициентами, которые никогда не имеют отрицательных значений.

Упомянем также следующую теорему, которая будет нам полезна в следующем параграфе.

Теорема 44. Пусть $f(x)$ означает такую целую рациональную функцию от x с рациональными числовыми коэффициентами, которая не принимает никогда отрицательных значений, если для x даются любые вещественные значения: тогда $f(x)$ всегда может быть представлена в виде суммы квадратов так, что все основаиия этих квадратов суть целые рациональные функции от x с рациональными коэффициентами **).

---

*) „Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper" [Jahresbericht. d. Deutschen Math.-Vereinigung Bd. 6, 1899 и Math. Ann. Bd. 51]; кроме того: „Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkörper" [Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1898 и Acta mathematica Bd. 26].

**) В первом издании мною, на основании теоремы 43, была доказана возможность представить $f(x)$ как частное двух сумм квадратов. Между тем E. Landau удалось дать доказательство возможности представить $f(x)$ просто как сумму квадратов, как указано выше, при том исключительио при помощи очень простых и элементарных вспомогательных средств [Math. Ann. Bd. 57, 1903]. См., наконец, работы: Fleck „Zur Darstellung definiter

Вероятно окажется очень трудным формулировать и доказать соответствующие положения для целых рациональных функций от двух или более переменных; однако, нельзя не указать на то, что мною совершенно другим путем доказана возможность представить произвольную целую рациональную функцию двух переменных под видом частного сумм квадратов целых функций—в предположении, что для рассматриваемых функций допустимы не только рациональные, но и произвольные вещественные коэффициенты *).

§ 39.

Критерий выполнимости геометрических построений с помощью линейки и эталона длины.

Пусть дана геометрическая задача на построение, выполнимая с помощью циркуля; мы хотим попытаться установить тогда критерий, позволяющий судить непосредственно по аналитической природе задачи и ее решений, выполнимо ли построение также с помощью только линейки и эталона длины.

При этом исследовании мы придем к следующей теореме:

Теорема 45. *Пусть предложена геометрическая задача на построение такого рода, что при аналитической ее обработке координаты искомых точек можно получить из координат данных точек исключительно посредством рациональных операций и извлечений квадратного корня; пусть n есть наименьшее число квадратных корней, которое достаточно при этом для вычисления координат точек; тогда для того, чтобы предложенная задача на построение решалась исключительно с помощью проведения прямых и отложения отрезков, необходимо*

---

binärer Formen als Summen von Quadraten ganzer rationalzahliger Formen" [„Arch. d. Math. u. Phys. R. III Bd. 10, 1906] и E. Landau „Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate" [Arch. d. Math. u. Phys. R. III Bd. 7, 1904] и „Über die Darstellung definiter Funktionen durch Quadrate" [Math. Ann. Bd. 62, 1906], в которых разбирается вопрос относительно наименьшего числа квадратов необходимого, чтобы представить $f(x)$ как сумму: в частности в последней работе E. Landau выясняет, что для такого изображения во всяком случае достаточно восьми квадратов, какова бы ни была степень $f(x)$.

*) „Über ternäre definite Formen", Acta Mathematica Bd. 17.

и достаточно, чтобы геометрическая задача имела ровно 2^n вещественных решений и притом для всех положений данных точек, т. е. для всех значений произвольных параметров, входящих в координаты данных точек.

Доказательство. Мы доказываем эту теорему 45 исключительно для случая, когда координаты данных точек суть рациональные функции одного параметра p с рациональными коэффициентами.

Необходимость выставленного критерия явствует из § 37. Чтобы показать, что он и достаточен, предположим, что этот критерий удовлетворен, и рассмотрим прежде всего тот из n квадратных корней, который должен быть определен прежде всего при вычислении координат искомых точек. Выражение под этим квадратным корнем есть некоторая рациональная функция $f_1(p)$ параметра p с рациональными коэффициентами; эта рациональная функция не может никогда ни для каких произвольных вещественных значений параметра p принять отрицательного значения, так как в противном случае, вопреки предположению, предложенная задача допускала бы для некоторых значений p мнимые решения. Из теоремы 44 мы заключаем поэтому, что $f_1(p)$ представима как частное сумм квадратов целых рациональных функций.

Теперь формулы

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2+c^2},$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=\sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2+d^2},$$

. . . .

показывают, что вообще извлечение квадратного корня из суммы произвольного числа квадратов может быть сведено всегда к повторному извлечению квадратного корня из суммы двух квадратов.

Сопоставляя это замечание с предыдущим результатом, мы усматриваем, что выражение $\sqrt{f_1(p)}$ несомненно может быть построено с помощью линейки и эталона длины.

Рассматриваем далее тот из n квадратных корней, который должен быть извлечен во вторую очередь при вычислении координат искомых точек. Выражение под этим квадратным корнем есть рациональная функция $f_2(p\sqrt{f_1})$ параметра p и уже рассмотренного квадратного корня: и эта функция f_2 также не может никогда получить отрицательного значения ни при каких произвольных вещественных значениях параметра p и ни для какого знака при корне $\sqrt{f_1}$, т. к. иначе, вопреки предположению, предложенная задача должна была бы иметь при некоторых значениях p в числе своих 2^n решений также и мнимые решения. Из этого обстоятельства следует, что f_2 должно удовлетворить квадратному уравнению вида

$$f_2^2 - \varphi_1(p) f_2 + \psi_1(p) = 0,$$

где $\varphi_1(p)$ и $\psi_1(p)$ должны быть необходимо такими рациональными функциями от p с рациональными коэффициентами, которые для вещественных значений p никогда не имеют отрицательного значения. Из последнего квадратного уравнения мы получаем

$$f_2 = \frac{f_2^2 + \psi_1(p)}{\varphi_1(p)}.$$

Теперь по теореме 44 функции $\varphi_1(p)$ и $\psi_1(p)$ снова должны быть частными сумм квадратов рациональных функций, и с другой стороны, согласно предыдущему, выражение f_2 допускает построение с помощью линейки и эталона длины; найденное для f_2 выражение показывает, следовательно, что f_2 есть частное сумм квадратов функций, допускающих построение. Следовательно, и выражение $\sqrt{f_2}$ тоже допускает построение с помощью линейки и эталона длины.

Так же как выражение f_2 и каждая другая рациональная функция $\varphi_2(p, \sqrt{f_1})$ от p и $\sqrt{f_1}$ тоже оказывается частным двух сумм квадратов функций, допускающих построение, коль скоро эта рациональная функция φ_2 обладает свойством никогда не принимать отрицательных значений, при вещественном параметре p и для двоякого знака при $\sqrt{f_1}$.

Это замечание позволяет нам продолжать только что начатые рассуждения следующим образом:

Пусть $f_3(p, \sqrt{f_1}, \sqrt{f_2})$ есть такое выражение, которое зависит рационально от трех аргументов $p\sqrt{f_1}$, $\sqrt{f_2}$, и из которого мы должны извлечь квадратный корень в третью очередь при аналитическом вычислении координат искомых точек. Как и прежде мы заключаем, что f_3 при любых вещественных значениях p и для обоих знаков у $\sqrt{f_1}$ и у $\sqrt{f_2}$ никогда не может принять отрицательного значения; это обстоятельство снова показывает, что f_3 должно удовлетворять квадратному уравнению вида:

$$f_3^2-\varphi_2(p, \sqrt{f_1})\, f_3+\psi_2(p, \sqrt{f_1})=0,$$

где φ_2 и ψ_2 означают такие рациональные функции от p и $\sqrt{f_1}$, которые не способны принять отрицательных значений для вещественных значений p и для любого из двух знаков у $\sqrt{f_1}$. Так как вместе с тем φ_2 и ψ_2, по сделанному раньше замечанию, суть частные двух сумм квадратов, допускающих построение выражений, то тоже самое имеет место и для выражения

$$f_3=\frac{f_3^2+\psi_2(p_1, \sqrt{f_1})}{\varphi_2(p_1, \sqrt{f_1})},$$

а, следовательно, и $\sqrt{f_3}$ тоже допускает построение с помощью линейки и эталона длины.

Продолжение этих рассуждений приводит к доказательству теоремы 45 в рассматриваемом случае о д н о г о параметра p.

Имеет ли место теорема 45 в общем случае зависит от того, может ли теорема 44 быть обобщена соответствующим образом на случай многих переменных.

Как пример на приложение теоремы 45 могут служить правильные многоугольники, допускающие построение с помощью циркуля: в этом случае не входит произвольный параметр p, но все долженствующие быть построенными выражения представляют алгебраические числа. Легко усмотреть, что критерий теоремы 45 выполнен в этом случае, и поэтому оказывается, что эти правильные многоугольники могут быть также построены исключительно с помощью проведения прямых и откладывания отрезков—результат, который может быть получен и непосредственно из теории деления окружности.

Что касается других задач на построение, известных из элементарной геометрии, то упомянем здесь только, что задача Мальфатти—но не задача Аполлония о касании—может быть решена с помощью одной только линейки и эталона длины *) [2]).

*) Относительно дальнейших геометрических построений с помощью линейки и эталона длины см. M. F e l d b l u m—„Über elementärgeometrische Konstruktionen, Inauguraldissertation, Göttingen, 1899.

Заключение.

Настоящая работа есть критическое, исследование начал геометрии; в этом исследовании нами руководил принцип разобрать каждый являющийся вопрос таким образом, чтобы при этом исследовать возможен ли ответ на него на некотором указанном пути с определенными ограниченными вспомогательными средствами. Этот принцип кажется мне содержащим вполне общее и естественное правило; действительно, если в математическом исследовании встречаем какую-либо задачу или предполагаем справедливость некоторой теоремы, наше стремление к познанию удовлетворено только тогда, если нам удается полное решение задачи и строгое доказательство этой теоремы, или если нами ясно осознана причина невозможности удачи и, следовательно, вместе с тем необходимость неудачи.

Поэтому-то в новой математике вопрос о невозможности известных решений или задач играет выдающуюся роль, и стремление ответить на некоторый вопрос такого рода было часто причиной открытия новых и плодотворных областей исследования. Мы напомним только данное Абелем доказательство невозможности решения уравнения пятой степени в радикалах, далее выяснение недоказуемости аксиомы параллельности и еще теоремы Эрмита и Линдеманна о невозможности построения чисел e и π алгебраическим путем.

Принцип, по которому мы должны всегда исследовать основания возможности доказательства, теснейшим образом связан с требованием „чистоты“ методов доказательств, каковое энергично выдвигается многими математиками. Это требование есть в сущности не что иное как субъективное выражение соблюдавшегося нами принципа. Действительно настоящее геометрическое исследование стремится дать общее разъяснение того, какие аксиомы, предположения или вспомогательные средства необходимы для доказательства некоторой истины элементарной геометрии, и затем в каждом данном случае остается взвесить, какой метод доказательства с только что принятой точки зрения должен быть предпочтен.

Отчет о работах Д. Гильберта, представленных в 1903 г. Казанскому Физико-Математическому обществу для соискания международной премии имени Н. И. Лобачевского.

Наши идеи о происхождении и значении геометрических истин претерпели очень быструю эволюцию в течение последнего столетия. Открытия Лобаченского, Болиаи и Риманна открыли новую эру; правда, они не повлияли на тех лиц, слишком многочисленных, которые ищут доказательства постулата Евклида; на них, увы, ничто не могло повлиять; но они убедили всех истинных ученых в тщетности этих попыток. Таков был первый результат открытия неевклидовых геометрий. Но истинный смысл этого открытия не был выяснен сразу. Гельмгольц показал сперва, что предложения евклидовой геометрии не что иное, как законы движения твердых тел, тогда как предложения других геометрий суть законы, которым могли бы быть подчинены другие аналогичные тела, которые без сомнения не существуют, но существование коих можно допустить без того, чтобы это повело к малейшему противоречию; такие тела можно было бы даже изготовить при желании. Законы эти не могут быть, однако, рассматриваемы как экспериментальные, так как естественные твердые тела следуют им только с грубым приближением; с другой же стороны воображаемые тела неевклидовой геометрии, как не существующие, не доступны опыту. Гельмгольц, однако, не высказался по этому поводу с полной ясностью.

Ли подвинул анализ значительно дальше. Он изучал, каким путем могут комбинироваться различные возможные движения некоторой системы или, говоря общее, различные возможные преобразования фигуры. Если рассматривать известное число преобразований и затем комбинировать их всеми возможными способами, то совокупность всех этих комбинаций составит то, что он называет *группой*. Каждой группе соответствует некоторая геометрия, и наша геометрия, соответствующая группе перемещений твердого тела, есть только весьма частный случай. Но все группы, которые можно вообразить, будут обладать некоторыми общими свойствами, и именно эти общие свойства ограничивают произвол изобретателей различных геометрий; их то Ли и изучал втечение всей своей жизни.

Он. однако, не был вполне удовлетворен своим трудом. Он рассматривал всегда пространство, как он сам говорит, как некоторое *Zahlenmannigfaltigkeit* (числовое многообразие). Он ограничился изучением непрерывных групп в собственном смысле этого слова, групп, к которым прилагаются правила обыкновенного анализа бесконечно-малых. Таким образом не ограничил ли он себя искусственно?

Не пренебрег ли он при этом одною из необходимых аксиом геометрии (дело идет в конце концов об аксиоме Архимеда)? Не знаю, найдутся ли в его печатных трудах следы его работы мысли по этому поводу, но в своей переписке, в своих беседах он не раз выражал сожаление об этом.

Предстояло сделать еще шаг вперед и эта честь выпала на долю Гильберта. Необходимо, однако, сказать несколько слов о работах, которые подготовили и сделали возможным этот шаг. Со времени Лобачевского математическая мысль подверглась глубокой эволюции не только в геометрии, но и в арифметике, и в анализе. Понятие числа сделалось более ясным и точным; в то же время оно подверглось разнообразным обобщениям. Наиболее ценным из этих обобщений для анализа является введение *мнимых чисел*, без которых современные математики не могли бы обойтись; но на этом уже не остановились и в науку введены другие обобщения числа или, как говорят, другие категории комплексных чисел.

Операции арифметики с своей стороны были подвергнуты критике, и кватернионы Гамильтона дали нам пример операции, представляющей почти полную аналогию с умножением, которую можно назвать тем же именем и которая, однако, не коммутативна: произведение изменяется при перестановке множителей. Здесь в арифметике мы имеем революцию, совершенно подобную той, которую Лобачевский произвел в геометрии.

Наше воззрение на бесконечность тоже изменилось. *Г. Кантор* научил нас различать степени в самой бесконечности (что, однако, не имеет ничего общего с бесконечно-малыми различных порядков, созданными Лейбницем в обыкновенном анализе бесконечно-малых). Понятие континуума, на которое издавна смотрели как на первичное, было анализировано и сведено к своим элементам.

Упоминать ли также о работах итальянских ученых, которые поставили себе целью создать всеобщий логический символизм и свести математическое рассуждение к чисто механическим правилам. Так, например, многие итальянские математики, в том числе Пеано и Падоа создали *пазиграфию*, т. е. род всеобщей алгебры, в которой все рассуждения заменяются символами или формулами.

Наконец, я должен упомянуть книгу Веронезе об основаниях геометрии, в которой автор впервые прилагает к геометрии трансфинитные числа Кантора; я буду еще иметь случай говорить об этом сочинении.

В 1899 г., по случаю юбилея Гаусса и Вебера, Гильберт опубликовал мемуар, под названием *Grundlagen der Geometrie*, наполненный оригинальнейшими идеями. Впрочем, это не впервые он занимался аналогичными вопросами, о чем свидетельствует его письмо к Клейну в 1894 г. *Üeber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte.* С тех пор он опубликовал в различных журналах ряд статей под заглавием:

Üeber den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.

Neue Begründung der Bolyai - Lobatscheffskyschen Geometrie.

Üeber die Grundlagen der Geometrie.

Üeber Flächen von konstanter Gaussischer Krümmung.

Все эти статьи соединены во втором издании юбилейного мемуара; и я должен заметить, что это второе издание заключает ряд добавлений и усовершенствований, значительно увеличивающих его ценность.

Мы будем следовать в нашем анализе этому второму изданию [1]), сближая его с одной стороны с другими работами Гильберта. как например, с его мемуаром *Ueber den Zahlbegriff* и парижской речью о математических задачах будущего, а с другой стороны со многими диссертациями, написанными его учениками под его непосредственным влиянием и поэтому помогающими нам понять его мысль.

Важнейшие из них:

Ueber die Geometrien in denen die Geraden die kürzesten sind — *Hamel*'я.

Die Legendre'scher Sätze ueber die Winkelsumme in Dreieck — *Dehn*'а.

Перечень аксиом. Гильберт начинает с установления полного перечня аксиом, стараясь не позабыть ни одной; это не так легко, как можно было бы думать, и даже Евклид применяет аксиомы, им не формулированные. Геометрическая интуиция настолько привычна нам, что мы пользуемся интуитивными истинами, так сказать, сами того не замечая. Поэтому-то для того, чтобы достигнуть цели, которую себе поставил Гильберт, необходимо не оставлять интуиции ни малейшего места.

Окончателен ли перечень Гильберта? Позволительно думать, что это так, потому, что он составлен, повидимому, весьма тщательно. Ученый профессор распределяет аксиомы в пять групп:

I. Аксиомы *der Verknüpfung* (предпочитаю буквальному переводу,—напр., *аксиомы связи*, который не мог бы быть удовлетворительным,—называть эти аксиомы—*проективными*).

II. Аксиомы *der Anordnung* (аксиомы порядка)

III. Аксиомы конгруэнтности или метрические аксиомы.

IV. Аксиома Евклида.

V. Аксиома Архимеда.

Между проективными аксиомами мы будем различать аксиомы плоскости и аксиомы пространства; первыми будут те, которые вытекают из весьма известного предложения: *черeз две точки проходит прямая и только одна*; но я предпочитаю перевести буквально текст Гильберта для того, чтобы дать возможность ясиее понять его мысль.

„Вообразим три системы вещей, которые мы назовем *точками*, *прямыми* и *плоскостями*. Вообразим, что эти точки, прямые и плоскости связаны известными отношениями, которые мы будем выражать словами *лежать на*, *между*, и т. д.“.

„I 1. Две различные точки A и B определяют всегда прямую a; что изобразим так:

$$AB = a \text{ или } BA = a.$$

„Вместо слова *определяют* будем употреблять равным образом другие обороты, которые будем считать равнозначащими; будем говорить: A лежит на a, A есть точка a, a проходит через A, a соединяет A и B, и т. д.

„I 2. Две любые точки прямой определяют эту прямую. это значит, что если $AB = a$ и $AC = a$, и если B отлична от C, то имеем также $BC = a$“.

Вот замечания, которые необходимо сделать по поводу этой формулировки: выражения *лежать на, проходить через* не должны вызывать в нашем сознании какие-либо образы; эти выражения суть только синонимы слова *определять*. Точно также и слова *точка, прямая, плоскость* не должны возбуждать в уме никакого чувственного представления. Они могли бы безразлично обозначать предметы какой угодно природы, если только можно установить между этими предметами такое соответствие, при котором всякой системе двух предметов, называемых *точками*, соответствовал один из предметов, называемых *прямыми*, и только один. И вот почему необходимо прибавить (I 2), что—если прямая, соответствующая системе двух точек A и B, та же самая, которая соответствует системе двух точек B и C, то она же соответствует и системе двух точек A и C.

Таким образом Гильберт старался, так сказать, представить аксиомы в такой форме, чтобы они могли быть прилагаемы лицом, которое не понимало бы их смысла, потому что никогда не видело ни точки, ни прямой, ни плоскости. Рассуждения должны по его мнению приводиться к чисто механическим правилам, и для того, чтобы строить геометрию, достаточно рабски прилагать эти правила к аксиомам не зная, что они собственно выражают. Таким образом, можно было бы построить всю геометрию, я не скажу, ничего в ней не понимая, потому что будет понятно логическое сцепление предложений, но по крайней мере ничего в ней не видя. Можно было бы вставить аксиомы в логическую машину, например, в *логическое пианино* Стенли Джевонса, и из нее вышла бы вся геометрия.

Эта забота может казаться искусственной и детской, и бесполезно указывать, насколько бы это было гибельно в преподавании и вредно развитию ума; насколько бы оно действовало иссушающе на исследователей, у которых оно быстро убивало бы оригинальность. Но у Гильберта она объясняется и оправдывается, если мы припомним, какая цель преследуется. Полон ли список аксиом, или мы пропустили некоторые из них, которые мы, однако. бессознательно прилагаем? Вот, что нам нужно знать. Для этого у нас есть критерий, и такой критерий у нас только один. Нужно узнать есть ли геометрия логическое следствие явно выраженных аксиом, т. е. могут ли эти аксиомы, вставленные в логическую машину. заставить выйти из нее весь ряд предложений.

Если да, то мы можем быть убеждены, что мы ничего не забыли. Ибо наша машина может работать только сообразно с правилами логики, для которых она построена; она не знает того смутного инстинкта, который мы называем *интуицией.*

Я не буду распространяться о проективных аксиомах пространства, обозначаемых автором I 4, 5, 6, 7, 8. Здесь не сделано никакого изменения в обычной формулировке.

Впрочем одно только слово об аксиомах I 3, 8. которые формулированы следующим образом:

„на всякой прямой существуют по меньшей мере две точки; на всякой плоскости — по меньшей мере три точки, не лежащие на одной прямой линии; в пространстве—по меньшей мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости“.

Эта формулировка характеристична. Тот, кто оставил бы хоть какое-нибудь место интуиции, как бы мало оно ни было, не подумал бы говорить, что на всякой прямой есть по меньшей мере две точки, или он тотчас бы прибавил, что их бесконечное множество; ибо интуиция прямой немедленно и одновременно открыла бы ему обе эти истины.

Переходим ко второй группе—группе аксиом порядка. Вот как формулированы две первые:

„Если три точки находятся на одной и той же прямой, то между ними существует некоторое отношение, которое мы выражаем, говоря, что одна из этих точек. и только одна. лежит *между* двумя другими. Если C лежит между A и B, а D — между A и C, то D лежит также и между A и B, и т. д.“.

Здесь мы также не прибегаем к интуиции; мы не стараемся уяснить, что обозначает слово *между*; всякое отношение, удовлетворяющее аксиомам, может быть обозначено этим словом. Это опять очень пригодно, чтобы выяснить нам чисто формальную природу математических определений; но я не буду настаивать на этом, ибо мне пришлось бы повторять сказанное по поводу первой группы.

Но является настоятельным остановиться на другом соображении. Аксиомы порядка представлены Гильбертом, как зависящие от проективных аксиом, и они не имели бы никакого смысла, если бы мы не допустили этих последних, потому что мы не знали бы, что такое три точки, расположенные по прямой линии. И однако, существует особая геометрия, чисто качественная, абсолютно независимая от проективной геометрии, которая не предполагает известными ни понятие прямой, ни понятие плоскости, но только понятия линии и поверхности; это то, что называют *Analysis situs*. Не предпочтительнее ли было бы дать аксиомам второй группы такую формулировку, которая бы освободила их от этой зависимости и вполне обособила их от первой группы? Но вопрос в том, возможно ли это при сохранении за этими аксиомами их чисто логического характера, т. е. отказываясь вполне от всякой интуиции.

Третья группа содержит метрические аксиомы, и мы различим в ней три подгруппы. Предположения III 1, 2, 3 суть метрические аксиомы отрезков; эти аксиомы служат для определения длин. Условливаемся говорить, что отрезок, взятый на одной прямой, может быть конгруэнтен (равен) отрезку, взятому на другой прямой; это — аксиома III 1, но это условие не вполне произвольно, оно должно быть таково, чтобы два отрезка, конгруэнтные одному и тому же третьему, были конгруэнтны между собою (III 2), затем новым условием определяется сложение отрезков, и это условие, в свою очередь, должно быть таково, чтобы складывая равные отрезки, мы получали равные суммы; в этом состоит аксиома III 3.

Аксиома III 4 и теорема 10 суть соответствующие предложения для углов. Но этого еще недостаточно: к двум подгруппам метрических аксиом для отрезков и углов нужно присоединить метрическую аксиому для треугольников (у Гильберта III 5): если два треугольника имеют по равному углу, заключенному между равными сторонами, то другие углы этих двух треугольников будут также соответственно равны.

Мы встречаем в данном случае один из известных случаев равенства треугольников, который обыкновенно доказывается наложением и который нужно рассматривать как постулат, если мы хотим избегнуть помощи интуиции. Притом когда пользуются интуициею, т. е. наложением, то сразу видят, что третьи стороны также равны в обоих треугольниках, и два предложения связываются, так сказать, в одном восприятии; здесь, напротив, мы их разделяем; из одного мы делаем постулат, другого таковым не делаем, потому что он может логически быть выведен из первого.

Один важный вопрос здесь не затронут; нужно было бы пополнить список аксиом указанием, что отрезок AB конгруэнтен обратному отрезку BA[2]): эта аксиома влечет как следствие симметрию пространства и равенство углов при основании в равнобедренном треугольнике. Гильберт не останавливается здесь на этом вопросе, но он сделал из него предмет особого мемуара, о котором мы будем говорить далее.

Я не могу также не выразить сожаления, что в этом изложении метрических аксиом не осталось никакого следа от понятия, важность которого впервые была понята Гельмгольцем,—я говорю о перемещении неизменяющейся фигуры. Можно было бы сохранить за этим понятием его естественную роль, не жертвуя логическим характером аксиом. Таким образом было бы избегнуто искусственное введение аксиомы III 5 и постулаты были бы связаны с их истинным психологическим происхождением. В другом мемуаре, о котором будет речь дальше, Гильберт стал на эту точку зрения, которая нам кажется более удовлетворительной.

Четвертая группа содержит только постулат Евклида.

Пятая группа заключает две аксиомы; первая и наиболее важная есть аксиома Архимеда.

Пусть даны две произвольные точки A и B на прямой D; пусть a есть некоторый отрезок; построим на D, начиная от точки A и в направлени AB, ряд отрезков равных между собою и равных a: AA_1, $A_1A_2, \ldots,$ $A_{n-1}A_n$; всегда можно n взять настолько большим, чтобы точка B пришлась на один из этих отрезков.

Это значит, что, если даны две произвольные длины l и L, всегда можно найти целое число n настолько большое, чтобы, складывая n раз длину l самое с собою, получить в сумме длину большую чем L.

Вторая—есть аксиома der Vollständigkeit (аксиома полноты), смысл которой я выясню далее.

Независимость аксиом. После того как список аксиом составлен, нужно убедиться в том, свободен ли он от противоречий. Мы знаем, что это так, потому что геометрия существует: и Гильберт сначала ответил утвердительно построением геометрии. Но—странная вещь—эта геометрия не совсем наша, ее пространство не наше или, по крайней мере, оно только часть нашего. В пространстве Гильберта нет всех точек, которые имеются в нашем, но только те, которые можно, исходя из двух данных точек, построить с помощью линейки и циркуля. В этом пространстве, например, не было бы угла, вообще говоря, равного трети данного угла.

Я думаю, что такая концепция показалась бы Евклиду более разумной, чем наша. Во всяком случае, однако, она—не наша. Чтобы снова получить нашу геометрию, нужно было бы прибавить одну аксиому.

„Если на прямой существуют два бесконечных множества точек A_1, $A_2, \ldots, A_n, \ldots$ B_1, $B_2 \ldots B_n \ldots$ таких, что B_q заключается между A_p и B_{q-1}, и A_p заключается между B_q и A_{p-1} каковы бы ни были p и q, то на этой прямой существует, по крайней мере, одна точка C, которая лежит между A_p и B_q, каковы бы ни были p и q".

Во втором издании Гильберт пожелал пополнить свой список так, чтобы притти к нашей геометрии и именно к ней, а не к какой-либо другой. Но вместо аксиомы, которую мы только что привели, он предпочел ввести аксиому der Vollständigkeit (аксиому полноты), которую он формулировал следующим образом:

„К системе точек, прямых и плоскостей невозможно присоединить другую систему вещей так, чтобы полная система удовлетворяла бы всем прочим аксиомам".

Тогда ясно, что пространство, о котором я только что говорил, и которое не содержит всех точек нашего пространства, не удовлетворяет этой новой аксиоме, потому что к нему можно присоединить все те точки нашего пространства, которые в нем не заключались, и оно не перестанет удовлетворять всем аксиомам.

Существует, таким образом, бесконечное множество геометрий, которые удовлетворяют всем аксиомам, кроме аксиомы полноты, но только одна из них, а именно наша, удовлетворяет сверх прочих и этой последней аксиоме.

Должно спросить себя затем, независимы ли аксиомы, то есть можно ли пожертвовать одною из пяти групп, сохранив четыре остальных, и получить, несмотря на то, логически связанную геометрию. Так, отбрасывая группу IV (постулат Евклида), получаем неевклидову геометрию Лобачевского.

Можно равным образом отбросить группу III. Гильберту удалось сохранить группы I, II, IV и V также, как две подгруппы метрических аксиом для отрезков и углов, отказавшись от метрической аксиомы для треугольников, т. е. от предложения III 5.

Вот как он этого достигает: для простоты будем рассматривать плоскую геометрию, и пусть P есть плоскость, в которой мы оперируем: мы сохраним за словами *точки* и *прямые* их обычное значение; точно также сохраним и для углов их обычное измерение, но поступим иначе с длинами. Длины, *по определению*, будут измеряться своею проекциею на плоскость Q, отличную от P, сохраняя для проекции ее обычное измерение. Ясно, что все аксиомы, за исключением метрических аксиом, остаются в силе. Метрические аксиомы для углов равным образом сохраняются без изменения, ибо мы ничего не изменяем в измерении углов; остаются верными и аксиомы для отрезков, потому что каждый отрезок плоскости P измеряется другим отрезком — его проекциею на плоскость Q, а этот последний отрезок измеряется обычным образом. Напротив, предложения о равенстве треугольников, напр., аксиома III 5, уже оказываются неверными. Это решение удовлетворяет меня только наполовину; углы были определены независимо от длин, при чем не было обращено внимания на то, чтобы согласовать эти два определения (вернее их намеренно сделали несогласованными). Достаточно изменить *одно* из двух определений для того, чтобы притти снова к классической геометрии. Я предпочел бы дать длинам такое определение, при котором было бы невозможно найти определение углов, удовлетворяющее метрическим аксиомам для углов и треугольников. Это к тому же не трудно было бы сделать.

Гильберту было бы легко построить геометрию, в которой были бы опущены аксиомы порядка, между тем, как все другие были бы сохранены. Или, вернее, такая геометрия уже существует или, еще вернее, существуют уже две таких геометрии. Есть, во-первых, геометрия Риманна, в которой, правда, отброшен и постулат Евклида (группа IV), так как в ней сумма углов треугольника более двух прямых. Чтобы яснее дать понять мою мысль, я ограничусь рассмотрением геометрии двух измерений. Геометрия Риманна для двух измерений есть не что иное. как сферическая геометрия, при одном, однако, условии: две точки сферы, диаметрально противоположные, не должны быть рассматриваемы, как различные. Элементами этой геометрии будут различные диаметры сферы. Но ведь, если мы рассматриваем три диаметра одной и той же сферы, расположенные в одной диаметральной плоскости, то ни про один из них нет никаких оснований сказать, что он находится *между* двумя другими. Слово *между* не имеет больше смысла, и аксиомы порядка исчезают сами собой.

Если мы хотим теперь иметь геометрию, в которой аксиомы порядка не имеют места, но в которой сохранен постулат Евклида и другие аксиомы, то нам стоит только взять за элементы *мнимые точки* и прямые обыкновенного пространства. Ясно, что мнимые точки пространства не даны нам, как *размещенные* в определенном порядке. Но более того: можно спросить—способны ли они быть размещенными таким образом; это, без сомнения, было бы возможно, как показал Г. Кантор (само собой, при условии не всегда помещать в соседстве одну с другой точки, которые мы рассматриваем как бесконечно-близкие, следовательно, при условии нарушения непрерывности пространства). Их, правда, можно было бы разместить, говорю я, но нельзя сделать этого так, чтобы этот порядок не нарушался различными операциями геометрии (перспектива, параллельное перенесение, вращение и т. п.). Аксиомы порядка, следовательно, не применимы к этой геометрии.

Не-архимедова геометрия. Но наиболее оригинальная из концепций Гильберта—это, бесспорно, не-архимедова геометрия, где все аксиомы верны, за исключением аксиомы Архимеда. Для этого

8*

нужно было построить сперва *систему не-архимедовых чисел*, т. е. систему элементов, между которыми можно было бы представить отношения равенства и неравенства, и к которым можно было бы применять операции, соответствующие арифметическому сложению и арифметическому умножению, при чем должно удовлетворить следующим условиям:

1°. Арифметические правила сложения и умножения (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и т. д., *Arithmetische Axiome der Verknüpfung*) остаются без изменения.

2°. Правила исчисления и преобразования неравенств (*Arithmetische Axiome der Anordnung*) равным образом остаются в силе.

3°. Аксиома Архимеда не верна.

К такой системе можно притти, избирая за элемент — строки следующей формы:

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + A_2 t^{m-2} + \dots \dots ,$$

где m есть целое положительное или отрицательное число, и где коэффициенты A суть вещественные числа, и условливаясь применять к этим строкам обычные правила сложения и умножения. Необходимо затем определить условия неравенства этих строк для того, чтобы иметь возможность *разместить* их в определенном порядке. Мы достигнем этого следующим условием: мы будем приписывать нашей строке знак числа A_0 и мы будем говорить, — что одна строка меньше другой, если вычитая ее из этой последней мы получаем разность положительную.

Ясно, что при таком условии правила исчисления неравенств остаются в силе, но аксиома Архимеда уже не верна; в самом деле, если мы возьмем два элемента I и t, то первый, сколько бы раз мы его ни складывали с самим собою останется всегда меньше второго. Всегда будем иметь $t > n$, каково бы не было число n, так как разность $t - n$ будет всегда положительна, ибо коэффициент первого члена t, который, по условию, определяет знак всего выражения, остается всегда равным I.

Наши обыкновенные числа входят в виде частных случаев в систему *не-архимедовых чисел*. Новые числа как бы вставляются в ряд наших обыкновенных чисел, так что, напр., существует бесконечно-большое число новых чисел, меньших, чем данное обыкновенное число A и больших, чем все обыкновенные числа, меньшие, чем A.

Представим теперь себе пространство трех измерений, где координаты точки измерялись бы не обыкновенными числами, а не-архимедовыми числами, но где обычные уравнения прямой и плоскости, равно как и аналитические выражения углов и длин, продолжали бы иметь место. Ясно, что в этом пространстве все аксиомы остались бы верными, за исключением аксиомы Архимеда.

На произвольной прямой, между нашими обыкновенными числами, оказались бы вставленными новые точки. Если, напр., D_0 есть обыкновенная прямая, D_1 — соответствующая прямая не-архимедова пространства, если P есть какая-либо обычная точка линии D_0 и если эта точка разделяет D_0 на две полу-прямые S и S' (прибавлю, для большой точности, что я рассматриваю P как не принадлежащую ни к S, ни к S'), то на D_1 будет бесконечное множество новых точек, как между P и S, так и между P и S'. На D_1 будет равным образом бесконечно большое число новых точек, которые все будут лежать вправо от всех обыкновенных точек линии D_0. Резюмируя сказанное, наше обычное пространство есть только часть не-архимедова пространства.

Понятно, как велико значение этого изобретения и в каком отношении оно составляет в развитии наших идей шаг почти столь же смелый, как и тот, который мы сделали, благодаря Лобачевскому; неевклидова геометрия, можно сказать, относилась с уважением к качественной стороне концепции геометрического континуума, хотя в то же время потрясает до основания наши идеи о его измерении. Не-архимедова геометрия эту концепцию разрушает, она рассекает континуум, вводя в него новые элементы.

В этой столь смелой концепции у Гильберта был предшественник. При обосновании геометрии, Веронезе ввел аналогичную идею. Глава VI его введения есть развитие арифметики и геометрии, несомненно, не-архимедовых, где первенствующую роль играют трансфинитные числа Кантора. Тем не менее изяществом и простотой изложения, и глубиной своих философских взглядов, теми следствиями, которые он извлек из основной идеи, Гильберт, надо признать, сделал новую геометрию своим созданием.

Как бы там ни было, Гильберт до конца разрабатывает следствия своих предпосылок и ищет, как можно было бы переделать геометрию, не пользуясь аксиомою Архимеда. По отношению к тем главам, которые школьники называют *первой* и *второй* книгою, трудностей нет. Там эта аксиома нигде не встречается.

Третья глава сочинения Гильберта говорит о пропорциях и о подобии. Вот в его сущности ход, которого держался Гильберт, чтобы установить учение о них независимо от аксиомы Архимеда. Он принимает за определение пропорции обычное построение четвертой пропорциональной, но подобное определение должно быть оправдано; нужно показать, во-первых, что результат остается без изменения, каковы бы ни были вспомогательные линии, употребляемые в построении, и, во-вторых, что обычные правила исчисления применяются к пропорциям и при новом их определении. И то, и другое изложено у Гильберта удовлетворительно.

Четвертая глава говорит об измерении плоских площадей; если это измерение может быть легко установлено без помощи начала Архимеда, то потому, что два равновеликие многоугольника или могут быть разложены на треугольники, так, что элементарные треугольники того и другого равны—каждый каждому соответствующему (другими словами, один может быть превращен в другой приемом китайской головоломки), или напротив, могут быть рассматриваемы, как разности многоугольников, допускающих подобный способ разложения (это все тот же прием, но в котором допускаются не только треугольники прикладываемые, но и треугольники вычитаемые). Но мы должны заметить, что аналогичное обстоятельство уже не имеет, повидимому, места для двух равновеликих многогранников, так что можно задать себе вопрос,—можно ли, например, определить объем пирамиды, не прибегая более или менее скрыто к помощи исчисления бесконечно-малых. Итак, не несомненно, что можно так же легко обойтись без аксиомы Архимеда при измерении объемов, как и при измерении плоских площадей. Гильберт, впрочем, этого и не пробовал. Но уже после выпуска первого издания один из его учеников доказал, что приемы китайской головоломки не приложимы к объемам.

Во всяком случае оставался еще один вопрос; если дан многоугольник, то возможно ли разложить его на треугольники и затем удалить один из них так, чтобы оставшийся многоугольник был равновелик данному, то есть так, чтобы, преобразуя этот оставшийся многоугольник по способу китайской головоломки, получить первоначальный многоугольник. Обыкновенно, ограничиваются тем, что говорят, что это невозможно, так как целое больше части. Но это значит вводить новую аксиому и, какою бы очевидною она нам ни казалась, логический ум был бы более удовлетворен, если бы он мог обойтись без нее. Шур, правда, нашел доказательство, но, опираясь на аксиому Архимеда; Гильберт желал притти к этому без пользования этою аксиомою. Вот какой прием ему приходится применить; он допускает, что *площадь* треугольника есть *по определению* полу-произведение основания на высоту, и он оправдывает это определение, показывая, что два треугольника равновеликие (с точки зрения китайской головоломки) имеют одну и ту же *площадь* (понимая этот термин в смысле нового определения), и что площадь треугольника, разложимого на многие другие, равна сумме *площадей* составляющих треугольников. Как только оправдание закончено, все остальное получается без труда. Это, значит, все тот же прием, чтобы избегнуть постоянных обращений к интуиции, которая доставляла бы нам постоянно все новые аксиомы, эти аксиомы преобразуют в определения, и уже после того эти определения оправдывают тем, что они оказываются ивободными от противоречий.

Не-дезаргова геометрия. Основная теорема проективной геометрии есть теорема Дезарга. Два треугольника называются *гомологичными*, если прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной и той же точке. Дезарг показал, что точки пересечения соответствующих сторон двух гомологичных треугольников, лежат на одной и той же прямой линии; обратная теорема также справедлива.

Теорема Дезарга может быть установлена двумя путями:

1. Пользуясь проективными аксиомами плоскости и метрическими аксиомами плоскости.

2. Пользуясь проективными аксиомами не только плоскости, но и пространства.

Таким образом, теорема могла бы быть открыта животным двух измерений, которому третье измерение казалось бы столь же не-понятным, как нам четвертое, которое, поэтому, не знало бы проективных аксиом пространства, но которое видело бы как в обитаемой им плоскости перемещаются неизменные фигуры, аналогичные нашим твердым телам, и которым, таким образом, были бы известны метрические аксиомы. Теорема могла бы быть открыта также и животным трех измерений, которое знало бы проективные аксиомы пространства, но, никогда не видя перемещений твердых тел, не знало бы метрических аксиом.

Но можно ли было бы доказать теорему Дезарга, не прибегая ни к проективным аксиомам пространства, ни к метрическим аксиомам, пользуясь исключительно проективными аксиомами плоскости? Думали, что нет, но не были в этом уверены. Гильберт решил этот вопрос, построив *не-дезаргову геометрию*,—геометрию, разумеется, плоскую. Возьмем эллипс E. Вне этого эллипса слово *прямая* сохраняет свой обычный смысл; внутри — слово *прямая* принимает другой смысл и обозначает уже дугу круга, которая, при продолжении, проходит через неподвижную точку P, лежащую вне эллипса. Прямая, пересекающая эллипс E, составится таким образом из двух прямолинейных—в обычном смысле этого слова—частей, соединенных внутри эллипса дугою круга; таков луч света, который, проходя через преломляющее тело, отклоняется от своей прямолинейной траектории.

Проективные аксиомы плоскости будут верны, если мы предположим, что точка P достаточно удалена от эллипса.

Поместим теперь два гомологичные треугольника вне эллипса E так, чтобы их стороны не встречали E, три прямые, которые соединяют попарно соответствующие вершины, *если под ними подразумевать прямые* в обычном смысле слова, по теореме Дезарга пересекутся в одной и той же точке Q: предположим, что эта точка Q лежит внутри E. *Если теперь мы будем понимать слово* прямая *в новом смысле*, то три прямые, соединяющие соответствующие вершины, отклонятся, войдя внутрь эллипса. Следовательно, они не пройдут больше через точку Q, они не встретятся больше. Теорема Дезарга не имеет места в нашей новой геометрии; это геометрия—не-дезаргова.

Не-паскалева геометрия. Гильберт не останавливается на сказанном и вводит еще новую концепцию. Чтобы лучше понять ее, необходимо на время вернуться в область арифметики. Мы видели выше как понятие числа было расширено введением *не-архимедовых чисел.* Нам нужна классификация этих новых чисел и, чтобы добиться ее, мы распределим аксиомы арифметики по следующим четырем группам:

1. Законы ассоциативности и коммутативности сложения, закон ассоциативности умножения, оба закона дистрибутивности умножения; или, короче говоря, все правила сложения и умножения, за исключением закона коммутативности умножения.

2. Аксиомы порядка, т. е. правила исчисления неравенств.

3. Закон коммутативности умножения, на основании которого можно изменить порядок сомножителей, не изменяя произведения.

4. Аксиома Архимеда.

Числа, которые удовлетворяют аксиомам первых двух групп, называются *дезарговыми*; они могут быть *паскалевыми* или *не-паскалевыми*; смотря по тому, удовлетворяют они или нет аксиоме третьей группы; и они будут *архимедовыми* или *не-архимедовыми*, смотря по тому, удовлетворяют они или нет аксиоме четвертой группы. Мы скоро увидим основание для этих названий.

Обыкновенные числа суть в одно и то же время и дезарговы, и паскалевы, и архимедовы. Исходя из аксиом первых двух групп и из аксиомы Архимеда, можно доказать закон коммутативности; не существует, следовательно, чисел одновременно дезарговых, архимедовых и не-паскалевых.

Зато мы уже приводили пример чисел одновременно дезарговых, паскалевых и не-архимедовых; я буду называть эти числа *числами системы* T; я напоминаю, что каждому из этих чисел соответствует строка вида

$$A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \ldots ,$$

где все A суть обыкновенные вещественные числа.

Нетрудно аналогичным путем составить систему чисел дезарговых, не-паскалевых и не-архимедовых. Элементами этой системы будут строки вида

$$S = T_0 s^n + T_1 s^{n-1} + \ldots ,$$

где s есть символ, аналогичный t, n — целое положительное или отрицательное число, и T_0, $T_1 \ldots$ суть числа системы T; заменяя, таким образом, коэффициенты T_0, T_1 . . . . соответствующими строками от t, мы имели бы строку, одновременно зависящую от t и от s. Строки S складываются по обыкновенным правилам; равным образом при умножении этих строк мы допустим правила дистрибутивности и ассоциативности, но вместе с тем предположим, что закон коммутативности не имеет места и что напротив $st = -ts$ [3]).

Остается только *разместить* строки в определенном порядке для того, чтобы удовлетворить аксиомам порядка. Для этого присвоим строке S знак первого коэффициента T_0; одна строка будет считаться меньше другой, если, будучи вычтена из этой последней, даст положительную разность. Это, значит, все то же самое правило: t рассматривается, как чрезвычайно большое по отношению к произвольному обыкновенному вещественному числу; а s рассматривается, как чрезвычайно большое по отношению ко всякому числу системы T.

Так как закон коммутативности не имеет места, то эти числа наверно суть не-паскалевы числа.

Прежде, чем итти дальше, напоминаю, что Гамильтон давно ввел уже систему комплексных чисел, где умножение не коммутативно; это—*кватернионы*, которые англичане так часто употребляют в математической физике. Но для кватернионов аксиомы порядка не имеют места; в концепции Гильберта оригинально именно то, что новые числа удовлетворяют аксиомам порядка, не удовлетворяя правилу коммутативности.

Возвратимся к Геометрии. Допустим аксиомы трех первых групп, т. е. проективные аксиомы плоскости и пространства, аксиомы порядка и постулат Евклида; теорема Дезарга может быть выведена из них потому, что она есть следствие проективных аксиом пространства.

Мы хотим создать нашу геометрию, *не пользуясь метрическими аксиомами*; слово *длина* еще не имеет, значит, для нас никакого смысла, мы не имеем права пользоваться циркулем; но зато мы можем пользоваться линейкою, потому что мы допустили, что через две точки можно провести прямую, в силу одной из проективных аксиом; мы умеем равным образом проводить через точку параллельную к данной прямой, потому что мы допускаем постулат Евклида. Посмотрим, что из всего этого мы можем вывести.

Мы можем определить гомотетию двух фигур; два треугольника будут называться *гомотетичными*, если их стороны попарно параллельны, и мы выводим отсюда (на основании допущенной нами теоремы Дезарга), что прямые, соединяющие соответствующие вершины, сходятся в одной точке. Мы воспользуемся затем гомотетиею для того, чтобы определить пропорцию. В известной мере мы можем также определить равенство.

Две противоположные стороны параллелограмма будут равны *по определению*; мы умеем таким образом определять, равны ли два отрезка, лишь бы только они были параллельны.

Благодаря этим условиям, мы можем теперь сравнивать длины двух отрезков: *лишь бы только эти отрезки были* ***параллельны.*** Сравнение двух длин, которых направление различно, не имеет никакого смысла и нужны были бы, так сказать, различные единицы длины для каждого направления. Бесполезно прибавлять, что слово *угол* не имеет никакого смысла.

Таким образом, длины будут выражаться числами; но это будут поневоле не обычные числа. Все, что мы можем сказать—это то, что, если теорема Дезарга верна, как мы это допустили, то эти числа принадлежат к системе, удовлетворяющей арифметическим аксиомам первых двух групп, т. е. к *дезарговой системе*. Обратно, если дана какая-нибудь система S дезарговых чисел, то можно построить такую геометрию, чтобы длины отрезков прямой точно выражались этими числами.

Вот, как можно осуществить это построение: точка этого нового пространства будет *определяться* тремя числами x, y, z системы S, которые будут называться *координатами* этой точки. Если мы прибавим к трем координатам различных точек какой-нибудь фигуры три постоянные (которые, само собою разумеется, суть дезарговы числа системы S), мы получаем другую фигуру, преобразованную из первой; при этом так, что каждому отрезку одной из фигур соответствует в другой отрезок равный и параллельный (в том значении, которое выше придано этому слову). Это преобразование есть, следовательно, параллельное перенесение, так что эти три постоянные определяют перенесение. Если теперь мы умножим три координаты всех точек одной и той же фигуры на одну и ту же постоянную, мы получим вторую фигуру, гомотетичную первой.

Уравнением плоскости будет известное линейное уравнение обыкновенной аналитической геометрии; но так как в системе S умножение, вообще говоря, будет не коммутативно, то весьма важно обратить внимание на то, что в каждом члене этого линейного уравнения координата играет роль множимого, а постоянный коэффициент—роль множителя.

Таким образом, каждой системе дезарговых чисел будет соответствовать новая геометрия, удовлетворяющая проективным аксиомам, аксиомам порядка, теореме Дезарга и постулату Евклида. В чем же теперь заключается геометрическое значение арифметической аксиомы третьей группы, т. е. правило коммутативности умножения? *Геометрический перевод этого правила — теорема Паскаля*, т. е. теорема о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, предполагая, что это коническое сечение сводится к двум прямым.

Таким образом, теорема Паскаля будет верна или ложна, смотря по тому, будет ли система S паскалевой или не-паскалевой; и так как существуют не паскалевы системы, *то будут равным образом и не-паскалевы геометрии.*

Теорему Паскаля можно доказать исходя из метрических аксиом, она будет, следовательно, верна, если мы допустим, что фигуры могут преобразовываться не только с помощью гомотетии и параллельного перенесения, как это мы только что допустили, но и с помощью вращения.

Теорема Паскаля может быть равным образом выведена из аксиомы Архимеда, потому что мы только что видели, что каждая система чисел дезарговых и архимедовых есть в то же самое время и паскалева система; *всякая не-паскалева геометрия есть, значит, в то же время геометрия не-архимедова.*

Streckenüberträger (переноситель отрезков). Перейдем к другой концепции Гильберта. Он изучает построения, которые можно было бы сделать не с помощью линейки и циркуля, а с помощью линейки и особого инструмента, который он называет *Streckenüberträger*'ом и который позволяет отложить на одной прямой отрезок, равный другому отрезку, взятому на другой прямой. *Streckenüberträger* не эквивалентен циркулю; циркуль позволяет построить пересечение двух окружностей или окружности и произвольной прямой; *Streckenüberträger* дает нам только пересечение окружности и прямой, *проходящей через центр этого круга.* Гильберт ищет, какие построения возможны с помощью этих двух инструментов и приходит к весьма замечательному результату.

Построения, которые могут быть сделаны с помощью линейки и циркуля могут быть произведены и с помощью линейки и *Streckenüberträger*'а, *но только в том случае, если эти построения таковы, что они приводят всегда к вещественным точкам.* Ясно, в самом деле, что это условие необходимо; ибо окружность всегда пересекается в двух вещественных точках прямою, проведенною через ее центр. Но трудно было предвидеть, что это условие будет в то же время достаточным.

Но это не все; во всех этих построениях можно было бы заменить *Streckenüberträger* другим инструментом *Eichmass*'ом, позволяющим отложить на какой-либо прямой от какой-либо точки уж не произвольную длину, но длину, равную единице.

Замечание это, сделанное одним из учеников Гильберта, значительно увеличивает значение предыдущего результата.

Мемуар, который мы только что анализировали, сделал очевидною важность новой не-архимедовой геометрии; он исследовал роль аксиомы Архимеда в геометрических рассуждениях; главный результат этого исследования может быть резюмирован следующим образом: если мы откажемся от этой аксиомы и сохраним только аксиомы первых четырех групп, то существенные результаты евклидовой геометрии не потерпят ущерба: но иное получится, если мы сохраним только проективные аксиомы и аксиомы порядка, равно как и постулат Евклида, но откажемся зараз и от аксиомы Архимеда и от метрических аксиом: мы можем получить тогда не-паскалеву геометрию.

Является тогда вопрос: то, что мы только что сказали об евклидовой геометрии, верно ли и по отношению к геометрии Лобачевского? Другими словами, если мы сохраним только аксиомы первых трех групп (проективные, порядка и метрические) и заменим постулат Евклида постулатом Лобачевского, то получим ли мы основные теоремы Лобачевского, *не пользуясь аксиомою Архимеда?* Вот вопрос, который Гильберт решил в своей статье *Ueber eine neue Begründung der Bolyai - Lobatschefskyschen Geometrie.* Он отвечает на этот вопрос утвердительно и, в частности, показывает, что всегда существует общий перпендикуляр для двух прямых плоскости. которые не пересекаются между собою, и вместе с тем не параллельны. Я обращу внимание на формулировку постулат Лобачевского: „Если b есть произвольная прямая плоскости и A — точка, не лежащая на этой прямой, то через точку A всегда проходят две полу-прямые a_1 и a_2, не составляющие одна продолжение другой и не пересекающие прямую b, между тем, как всякая полу-прямая, проходящая через A и расположенная в угле, образованном двумя полу-прямыми a_1 и a_2, встречает b“.

Вот эти-то две полу-прямые a_1 и a_2 и получили название *параллельных*. Они не встречают прямую b, но они служат *пределом*, как тому углу, в котором находятся все прямые, встречающие b, так и тому углу, в котором находятся все прямые, не встречающие b.

Я укажу также на изящную теорию некоторых преобразований, относящихся к тому, что можно было бы назвать точками на бесконечности в плоскости Лобачевского, и законы которых те же, что и законы сложения и умножения вещественных чисел. Отсюда может быть получено чрезвычайно простое и очень плодотворное изложение неевкидовой геометрии.

Наши знания о теории параллельных ведут свое начало от теорем Лежандра, которые установили необходимую связь между суммою углов треугольника и выбором между тремя геометриями — Евклида, Лобачевского и Риманна. Какую роль играет аксиома Архимеда в этих теоремах?

Этот вопрос занимал Гильберта, и, под его влиянием, Dehn сделал этот вопрос предметом своей диссертации, которую я не могу обойти здесь молчанием. Результаты, полученные Dehn'ом, показывают, что без аксиомы Архимеда теоремы Лежандра уже не могут быть верными. Остается верным еще, что, если один треугольник имеет сумму углов, равную (или бо́льшую или меньшую) двум прямым, то то же самое имеет место и для всех других. Остается верным также, что если эта сумма меньше двух прямых, то к прямой можно провести несколько параллельных через одну точку. Верно, что если эта сумма больше двух прямых, то постулат Евклида ложен, и что если она равна двум прямым, то невозможно, чтобы две прямые всегда встречались, но *прочие теоремы Лежандра уже не верны.*

Существует плоская геометрия, в которой сумма углов более двух прямых, и в которой тем не менее можно провести к прямой через одну точку бесконечное множество параллельных (я называю так прямые, ее не встречающие); эта геометрия *лежандрова.*

Существует геометрия, в которой сумма углов равна двум прямым и в которой можно через одну точку провести к прямой бесконечное число параллелей; это *геометрия полу-евклидова.*

Мне достаточно объяснить, что́ такое эта последняя, так как первая вполне ей аналогична. Для этого нужно сослаться на сказанное выше относительно не-архимедовой геометрии. Я объяснил как не-архимедова плоскость выводится из обыкновенной плоскости присоединением новых точек; как, для того, чтобы вывести не-архимедову прямую D_1 из обыкновенной прямой D_0, нужно присоединить—1°) с одной стороны, бесконечность новых точек между двумя произвольными полу-прямыми S' и S'', которые вместе составляют D_0, 2°) с другой стороны, бесконечность новых точек справа от всех обыкновенных точек D_0 и бесконечность новых точек слева от всех обыкновенных точек прямой D_0.

Теперь, сохраним новые точки первого сорта, т. е. те, которые находятся на конечном расстоянии, и исключим новые точки второго сорта, т. е. находящиеся на бесконечном расстоянии. Тогда пусть D будет некоторая прямая и A некоторая точка; тогда будет бесконечное множество прямых, проходящих через A, которые не встречаются с D: это те, которые встретили бы ее в одной из новых точек второго сорта, если бы эти точки не были исключены; однако, все теоремы Евклида продолжают иметь место и всякое вращение или параллельное перенесение преобразует в самое себя не-архимедову плоскость, изуродованную таким образом.

Может показаться, что в этом имеется противоречие с только что упомянутым мемуаром: *Ueber eine neue Begründung...* Если, как показал Гильберт, геометрия Лобачевского может быть выведена из его постулата без помощи аксиомы Архимеда,—как может быть построена полу-евклидова геометрия, т. е. геометрия, в которой теоремы Евклида уживаются рядом с постулатом Лобачевского?

Эта трудность происходит, повидимому, от того, что формулировка постулата не совпадает в обоих случаях. Dehn предполагает, что через точку можно провести бесконечное число прямых, не встречающих данную прямую, и бесконечное число прямых, ее встречающих. Первые составляют ансамбль E_1, вторые—ансамбль E_2. Гильберт предполагает сверх того, что существует предельная прямая, принадлежащая ансамблю E_1, и притом такая, что всякая прямая, заключающаяся между этою предельною прямою и прямою из E_2, принадлежит равным образом к ансамблю E_1. Именно эту предельную прямую Гильберт и рассматривает, собственно говоря, как параллельную. В геометрии Dehn'а такой параллельной не существует. Здесь кроется, вероятно, интересный для ближайшего исследования вопрос. Можно ли создать не-архимедову геометрию, в которой параллельная, понимаемая в указанном смысле, существует и для которой имеют место выводы Гильберта?

Аналогичный вопрос рассматривается в другом мемуаре Гильберта: *Ueber die Gleichheit des Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.*

В обыкновенной плоской геометрии плоскость симметрична, что и выражается равенством углов при основании равнобедренного треугольника.

Эта *симметричность плоскости* должна фигурировать в списке метрических аксиом. Во всех более или менее странных геометриях, о которых мы до сих пор говорили, по крайней мере в тех, в которых допускаются метрические аксиомы, в не-архимедовой метрической геометрии, в новых геометриях Dehn'а, в тех геометриях, о которых идет речь в мемуаре *Ueber eine neue Begründung...*: эта симметричность плоскости постоянно предполагается. Есть ли она следствие других метрических аксиом? Да, как показывает Гильберт, если допустить аксиому Архимеда. Нет, в противоположном случае. Существуют не-архимедовы геометрии, в которых все метрические аксиомы верны, за исключением аксиомы о симметричности плоскости. Вот пример этого.

Числа не-архимедовы, определенные выше, могут быть или бесконечно-большими, или конечными, или бесконечно-малыми; но угол будет всегда конечным или бесконечно-малым, вследствие соотношения

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Следовательно, угол может быть всегда представлен под формою $\Theta + \tau$, где Θ есть обыкновенное вещественное число, а τ не-архимедово бесконечно-малое число. Дадим теперь для прямоугольных координат точки, для прямых и параллельных перенесений обычные определения, вращение же определим следующим образом: пусть α, β суть координаты центра вращения; $\Theta + \tau$ — угол вращения; x, y — координаты произвольной точки до вращения; x', y' — координаты ее после вращения; мы будем иметь

$$(x' - \alpha) + i(y' - \beta) = e^{i\Theta + \tau + i\tau}.$$

Рассмотрим группу, составленную из вращений вокруг начала координат, эта группа не будет способна к перестановке ни с преобразованием, изменяющим y в $-y$, ни с каким-либо другим преобразованием, сохраняющим начало, изменяющим прямые в прямые и квадрат которых приводится к тождественному преобразованию. *Плоскость, значит, не симметрична.*

Все прочие метрические аксиомы, однако, сохраняются, равно как и постулат Евклида, и даже имеется новая аксиома, которую Гильберт называет *Axiom der Nachbarschaft* (аксиомою соседства) и которую он формулирует следующим образом:

„Если дан произвольный отрезок S, то можно найти треугольник, внутри которого нельзя поместить никакого отрезка, конгруэнтного с S".

Это легко вытекает из уравнения круга. Уравнение круга радиуса ϱ, имеющего центр в точке α, β, есть действительно

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \varrho^2 e^{2\tau}; \quad \frac{x - \beta}{y - \alpha} = tg\,(\Theta + \tau).$$

Но за то: не верно, что углы при основании равнобедренного треугольника равны; не верно, что в треугольнике одна сторона меньше суммы двух других; наконец, не верна теорема Пифагора о квадрате гипотенузы. По этой-то причине эта геометрия называется *не-пифагоровой.*

Я перехожу теперь к мемуару, озаглавленному *Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte*, который я не могу отделить от диссертации на тот же предмет, написанной Hamel'ем под влиянием Гильберта. Здесь мы не так выбиты из обычной колеи; не только нет необходимости отказаться от аксиомы Архимеда, но мы не встречаем никаких иных функций, кроме аналитических, которые могут быть и дифференцируемы и интегрируемы.

Предположим, что прямые определены обычным способом и что допускаются проективные аксиомы, аксиомы порядка и теоремы Дезарга и Паскаля. Дадим теперь определение длины дуги какой-либо кривой; не необходимо выбрать это определение так, чтобы можно было удовлетворить метрическим аксиомам, то есть так, чтобы сделать возможным движение неизменной фигуры.

Возможно ли это сделать так, чтобы прямая линия оставалась кратчайшим путем от одной точки до другой? Определение прямой не изменяется, но определение круга остается произвольным в очень широких границах; необходимо только, чтобы все круги, имеющие центр на одной прямой линии и проходящие через некоторую точку этой прямой, имели в этой точке одну и ту же касательную. Эта задача допускает бесконечное множество решений. Минковский, преследуя арифметическую цель, развил такое решение, в котором все круги суть кривые, подобные друг другу в обычном смысле этого слова. Гильберт уже в 1894 г. дал другое решение, которое можно характеризовать следующим образом: рассмотрим замкнутую связную кривую, которая будет служить основною кривою. Пусть D есть некоторая прямая, M — точка этой прямой; все круги, центр которых лежит на D и которые проходят через точку M, имеют одну и ту же касательную T и эта касательная, когда точка M описывает прямую D, поворачивается около неподвижной точки, а именно точки пересечения двух линий, касательных к C в тех точках, в которых эта кривая пересекается прямой D. Наконец, Гамель в своей диссертации дал общее решение вопроса, но его решение слишком сложно, чтобы могло быть изложено в немногих словах.

Я перехожу к важному мемуару Гильберта, озаглавленному *Üeber die Grundlagen der Geometrie*, который имеет, значит, тот же заголовок, что и его Festschrift (основное сочинение), но в котором он становится на совершенно иную точку зрения. Действительно, в своей Festschrift, как мы видели в предыдущем анализе этой работы, отношения понятий пространства и группы, в том виде, в каком они получаются из работ Ли, или оставлены совершенно без внимания, или отодвинуты на второй план. Общие свойства групп не фигурируют в списке основных аксиом. Совсем иное отношение к ним в мемуаре, о котором мы будем теперь говорить.

Гильберт предполагает плоскость, относительно которой он устанавливает следующие условия.

1°. Точки этой плоскости соответствуют однозначно точкам обыкновенной плоскости или части этих точек. Таким образом каждая точка новой плоскости имеет себе соответствующую в обыкновенной плоскости; но на обыкновенной плоскости могут быть и точки, не имеющие соответствующих на новой плоскости. Таким образом новая плоскость имеет, так сказать, меньше точек, чем обыкновенная плоскость; в противоположность тому, что имело место для не-архимедовой плоскости. Точки обыкновенной плоскости, имеющие соответствующие на новой плоскости, называются Bildpunkte. Совокупность этих Billdpunkte образует на обыкновенной плоскости область, которую Гильберт предполагает непрерывною и связною так, что вокруг каждой точки этой области можно описать круг радиуса достаточно малого для того, чтобы весь круг находился в этой области и чтобы можно было перейти от одной точки области к другой по непрерывной кривой, не выходя из области.

2°. Точки этой новой плоскости могут подвергаться преобразованиям, которые называются *движением* и которые составляют *группу*.

3°. Между этими движениями существует бесконечное множество движений, оставляющих неподвижною некоторую точку M; эти движения называются вращением около M. Ансамбль всех точек, которые получаются из одной точки A всеми этими вращениями, называется окружностью. Всякая окружность имеет бесконечное множество точек.

4°. Группа движений образует *замкнутую систему*; вот, что это значит: если мы имеем бесконечное множество движений, изменяющих точки A_0 и B_0, первое — в A_1 и B_1, второе — в A_2 и B_2, n^{oe} — в A_n и B_n, если точка A_n стремится к A, а точка B_n к B, когда n возрастает неопределенно, то в группе будет и такое движение, которое точно изменит A_0 и B_0 в A и B; то же самое имеет место и в том случае, если вместо двух точек мы будем рассматривать их или три или только одну.

Я сократил несколько положения Гильберта немного, правда, в ущерб точности, но не жертвуя ничем существенным. Мне придется в дальнейшем сделать по их поводу несколько замечаний.

В сущности дело в том, чтобы найти все группы преобразований плоскости или части плоскости самое в себя, при чем эти группы подчинены только условиям, повидимому, очень мало ограничительным. Как можно при этом притти к столь точным выводам? Это находится в зависимости от того определения, которое Гильберт дает для движения. Преобразование должно удовлетворять многим условиям для того, чтобы быть движением; во-первых оно должно быть непрерывным и преобразовать две бесконечно-близкие точки в две другие также бесконечно-близкие точки; далее, оно должно быть одно-однозначно, т. е. каждая точка плоскости должна иметь одну преобразованную точку и только одну, — и быть преобразованной одной и только одной точки.

Этими ограничениями исключаются очень многие группы; например, группа проективных преобразований и группа гомотетий, т. е. преобразований, изменяющих всякую плоскую фигуру в фигуру гомотетичную. Почему? Возьмем, напр., группу гомотетий и увидим, что она содержит и вырождающиеся преобразования, т. е. такие, для которых, при произвольном центре гомотетии, отношение гомотетии равно нулю или бесконечности. В этих преобразованиях центр гомотетии имеет бесконечное множество преобразованных или есть преобразованная для бесконечного числа точек. Эти вырождающиеся преобразования нельзя исключить, потому что иначе группа не была бы *системою замкнутою*, но нельзя их и сохранить, потому что они не соответствуют определению движения.

Подобным же образом видно, что окружность не может заключать все точки плоскости; иначе между вращениями вокруг центра этой окружности, было бы и такое, которое привело бы к центру точку плоскости, отличную от центра, так что центр был бы точкой, преобразованной из двух точек — из этой точки и из себя самого. Это подразумевает существование инварианта аналогичного расстоянию. Мы видим, таким образом, что условия в действительности гораздо более ограничительны, чем это кажется с первого раза.

По отношению к идеям Ли, прогресс, достигнутый Гильбертом, значителен. Ли предполагал, что его группы определяются аналитическими уравнениями. Гипотезы Гильберта значительно более общи. Без сомнения, и они еще не вполне удовлетворяют, потому что, если *форма* группы стала произвольною, то материал, т. е. плоскость, подвергающаяся преобразованиям, попрежнему принуждена оставаться неким *Zahlenmannigfaltigkeit* в смысле Ли. Но тем не менее сделан уже шаг вперед, и притом Гильберт анализирует лучше, чем это делалось до него, понятие о *Zahlenmannigfaltigkeit* и дает такие перспективы, которые могут сделаться зародышем аксиоматической теории *Analysis situs* (анализа положения).

Я могу только резюмировать здесь общий ход идей Гильберта. Он показывает сначала, что точки окружности могут быть размещены в определенном круговом порядке и что этот порядок не нарушается вращениями; он показывает затем, что этот порядок входит в тот же *тип порядка*, как и соответствующий порядок обыкновенной окружности, т. е. в тип континуума. Он выводит отсюда то следствие, что окружность есть замкнутая непрерывная кривая, так как она должна точкой за точку соответствовать обыкновенной окружности.

Далее видно, что, если вращение не перемещает одну из точек круга, то оно не переместит и никакой другой точки этого круга. Отсюда можно вывести, что если вращение не перемещает ни одной точки, кроме центра, то оно не переместит ни одной точки плоскости и, следовательно, сводится к тождеству. Наконец, отсюда вытекает, что группа вращений вокруг некоторой точки M имеет ту же структуру, как и группа обыкновенных вращений.

В то же время видно, что нет движения, которое оставляло бы неподвижными две точки плоскости, и что можно вращениями перейти от одной точки плоскости к другой произвольной точке той же плоскости.

Все эти доказательства крайне деликатны; они нуждаются в многократном пользовании теоремами Кантора, это значит, что по необходимости они очень длинны и что цель, которая видна сразу и которой, кажется, касаешься, может быть достигнута только после долгих усилий.

Но главное уже достигнуто; мы знаем, что наша группа есть группа производная от некоторых подгрупп, подгрупп вращений, структуру которых мы знаем; и эта структура вводит их в категорию непрерывных групп Ли.

Нам остается победить еще немногие трудности, но Гильберт хочет определить сначала прямую, и он делает это чрезвычайно оригинально. Он отбрасывает сначала проективные определения прямой, которые потребовали бы соображений, чуждых его предпосылкам. С другой стороны, его геометрия есть *геометрия плоская*. Если бы мы могли располагать пространством трех измерений, то теория групп естественно привела бы нас к очень простому определению прямой, рассматриваемой, как ось вращения; но здесь мы не можем этим пользоваться, потому что мы не можем выйти из плоскости.

Гильберт идет по совершенно иному пути. Пусть имеются две точки A и B; определим середину M этих двух точек, т. е. центр вращения, переводящего A в B и B в A. Гильберт начинает с доказательства того, что две точки всегда имеют середину и притом — только одну. Здесь то и является на помощь то условие, которое раньше должно было удивить читателя; было предположено, что последняя аксиома (та, которая вкратце формулируется словами, что группа движений есть замкнутая система) применяется не только к двум точкам, но и к трем точкам. Потому-то и введена была гипотеза более ограничительная, чем та, которая имела бы место в случае, если бы ограничились рассмотрением только двух точек A_0 и B_0. Очень ли необходимо было это ограничение?

В этой-то части теории оно и сыгрывает свою роль. Мы имеем бесконечность точек $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и середины $M_1, M_2, \ldots, M_n$, отрезков $AB_1, AB_2, \ldots, AB_n$; когда n растет неопределенно, B_n стремится к B и M_n к M, и условием, о котором идет речь, пользуются, чтобы показать, что M есть середина отрезка AB. Было ли невозможно обойтись без него, в этом можно убедиться только построив специальную псевдо-геометрию.

Как бы то ни было, когда даны две точки A и B, Гильберт строит середину отрезка AB, потом середины отрезков MA и MB и так далее. Он получает таким образом бесконечное множество точек, составляющих ансамбль E; он рассматривает производную этого ансамбля E, т. е. ансамбль точек, в соседстве которых имеется бесконечность точек ансамбля E. Он показывает, что эта производная есть непрерывная линия, и вот эту-то линию он называет прямою

Основные начала геометрии евклидовой или не-евклидовой обыкновенной и, в частности, метрические аксиомы могут быть тогда легко установлены.

Нельзя не быть пораженным контрастом между точкою зрения Гильберта в этом мемуаре и тою, которую он предпочел в своей Festschrift. В этой последней аксиомы непрерывности занимают последнее место, и громадное значение имел вопрос, что делается с геометриею, если мы от них отказываемся. Здесь, наоборот, исходною точкою является непрерывность, и Гильберт занят преимущественно вопросом, что можно извлечь из одной непрерывности, связанной с понятием о группе.

Нам остается еще говорить о мемуаре: Üeber Flächen von Konstanter Gausscher Krümmung. Бельтрами, как известно, показал, что в обыкновенном пространстве имеются поверхности, которые являются изображением плоскости Лобачевского; таковы поверхности с постоянною отрицательною кривизною; известно, какой толчок дало это открытие не-евклидовой геометрии. Но возможно ли представить всю плоскость Лобачевского целиком на некоторой поверхности Бельтрами без особенных точек?

Гильберт доказывает, что это невозможно; он опирается при этом на следующие теоремы, относящиеся к поверхностям Бельтрами:

В четырехстороннике, составленном ассимптотическими линиями, противоположные стороны равны.

Поверхность многоугольника, составленного ассимптотическими линиями, пропорциональна сферическому избытку; то же самое имеет место и по отношению к многоугольнику, составленному геодезическими линиями; только в первом случае сферический избыток положителен, во втором он отрицателен.

Автор показывает затем, что на поверхности Бельтрами без особенной точки нельзя начертить замкнутую ассимптотическую линию, что ассимптотическая линия не может ни пересекаться сама с собою, ни пересекать другую ассимптотическую линию более, чем в одной точке. Всякая другая гипотеза привела бы к многоугольникам, которых сферический избыток равен нулю. Отсюда вытекает то следствие, что если подобная поверхность соответствует точкой за точку не евклидовой плоскости, то соответствие должно быть одно-однозначно.

Но тогда, определяя величину площади всей поверхности, исходя один раз из площади многоугольника, образованного ассимптотическими линиями, другой раз из площади геодезического многоугольника, находим, что в первом случае эта площадь конечна, во втором случае—бесконечна. Это-то противоречие и доказывает теорему.

Что касается до поверхностей с постоянною положительною кривизною, к которым применима геометрия Риманна, то Гильберт доказывает, что кроме сферы нет других замкнутых поверхностей такого рода. В самом деле, если мы будем рассматривать часть поверхности с постоянною положительною кривизною, то максимум большого радиуса кривизны не может быть достигнут *внутри* этой части, но только на контуре. Мы имеем в этом предложение, совершенно аналогичное известной теореме, касающейся потенциала.

Отсюда непосредственно следует, что если поверхность есть поверхность замкнутая, то максимум не может быть нигде достигнут и что, следовательно, радиус кривизны имеет постоянную величину. Таким образом мы без труда приходим к сфере.

После сделанного анализа нет необходимости в каком-либо комментарии. Мы видим, как разнообразны точки зрения, исходя из которых ведет свои исследования Гильберт, какова глубина его анализа. Его работы знаменуют эпоху, и он кажется вполне достойным премии имени Лобачевского.

Г. Пуанкаре.

ПРИМЕЧАНИЯ.

К главе I.

[1]) Первой группой аксиом Гильберт устанавливает правила применения терминов: „*точка*", „*прямая*", „*плоскость*" и „*определяют*" (как отношение между точками и прямой и между точками и плоскостью). Эти термины, вместе с двумя новыми—„*между*" и „*конгруэнтный*" (как отношение между двумя отрезками или углами), которые вводятся соответственно II и III группами аксиом, — составляют систему основных понятий геометрии в изложении Гильберта.

Кроме этих основных понятий, Гильберт употребляет несколько производных: „проходит через", „лежит на", в дальнейшем — „отрезок", „треугольник", „ломанная" и др. Производные понятия представляют собой условные сокращенные обозначения для более или менее сложных комбинаций основных понятий. Правила применения их, вообще говоря, называются определенными. Гильберт дает эти определения в пояснениях.

Количество основных понятий геометрии может быть уменьшено. У Паша [1]) основными являются понятия „точка", „отрезок прямой", „плоская поверхность" (ограниченная часть плоскости) и „конгруэнтный". У Шура [2]) — „точка", „отрезок", „движение". У Пиери [3]) — „точка" и „движение". У Веблена [4]) — „точка" и „порядок".

Если положить в основу геометрии понятия „*точка*" и „*лежит между*", то „отрезок" AB определяется как совокупность точек, *лежащих между* двумя точками A и B, а „прямая" как совокупность точек отрезка AB и таких точек X, что B *лежит между* A и X, либо A — *между* B и X. „Плоскость" OAB при этом может быть определена как совокупность точек, принадлежащих прямым, соединяющим точку O с точками прямой AB (если O не принадлежит AB).

---

[1]) M. Pasch.—Vorlesungen über neuere Geometrie. 1-e Auf. Leipzig, 1882 2-e Auf. Leipzig, 1912.

[2]) S. Schur.—Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1909.

[3]) M. Pieri.—Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttiva. Memorie d. R. Accademia di Torino. 1899.

[4]) O. Veblen.—A system of axsioms for geometry. Transactions of the American Mathem. Society. V. 5, 1904.

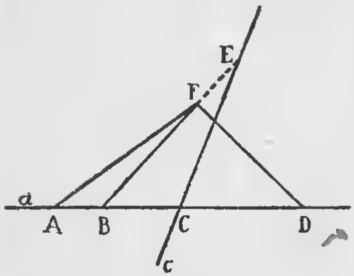
Так как, при такой постановке дела, прямая и плоскость определяются как системы (классы) точек, то отношение между точками и прямыми (или плоскостями), которое у Гильберта характеризуется понятием *„определяют“* или *„лежат на“*, заменяется логическим понятием *„принадлежности элемента классу“*.

Естественно, что уменьшение количества основных понятий может привести к уменьшению количества аксиом, необходимых для обоснования геометрии, т. к. при этом некоторые аксиомы, характеризующие какое-либо основное понятие, заменяются определением этого понятия (см. прим. 3 к главе II).

[2]) Приведем доказательство теоремы 4, данное E. Moore'ом в упомянутой автором статье. Мы будем при этом руководствоваться изложением Halsted'a, помещенном в прибавлении к его книге Rational geometry — New-Iork, 1907 (которая представляет собой учебник элементарной геометрии, построенный по системе Гильберта).

Докажем сперва три леммы.

Лемма I—Если на некоторой прямой a точка B лежит между A и C, а C—между A и D, то точка C лежит также между B и D.



Черт. 55.

Доказательство. Проведем через C произвольную прямую c, отличную от a, и возьмем на ней точку E, отличную от C. Затем на прямой BE возьмем точку F между B и E (черт. 55). Точка E, таким образом, не лежит между B и F, и значит прямая c не имеет общей точки с отрезком BF.

С другой стороны точка C не лежит между A и B по условию. Следовательно (II 4), прямая c не имеет общей точки с отрезком AF.

Но точка C по условию лежит между A и D. Поэтому (по II 4) прямая c пересекает отрезок FD. Рассматривая три точки B, F, D, видим, что прямая c пересекает отрезок FD, но не пересекает отрезка BF. Следовательно (согласно II 4), она пересекает отрезок BD, т. е. точка C принадлежит отрезку BD, что и тр. док.

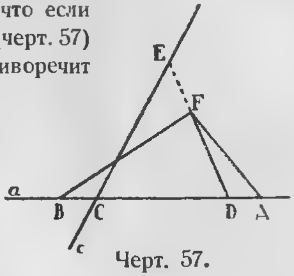
Лемма II—Если B лежит между A и C, и C—между A и D, то B лежит также и между A и D.

Доказательство подобно предыдущему (см. черт. 56).

Черт. 56.

Лемма III—Если A лежит между B и D, и C — между B и D, то D не лежит между A и C.

Ведя доказательство от противного найдем, что если D лежит между A и C, то C лежит между B и A (черт. 57) и, след., D — между A и B (лемма II), что противоречит условию.



Черт. 57.

Теперь можно доказать теорему 4 Гильберта.

Рассмотрим какие-либо три из четырех точек, лежащих на одной прямой. Назовем ту из них, которая лежит между двумя другими, через C, а остальные две соответственно через B и D. Четвертую точку назовем A. Сопоставим точки B, D и A. Возможны следующие три случая:

1.° B лежит между A и D. 2.° D лежит между A и B. Простой перестановкой букв легко свести оба случая к условию лемм I и II.

3.° A лежит между B и D. В этом случае C может оказаться между D и A, тогда условие лемм I и II соблюдено,—либо A между C и D,— условие лемм I и II снова соблюдено. Но не может случиться, чтобы D оказалось между A и C (лемма III).

Итак, во всех случаях условие лемм I и II соблюдено. Отсюда немедленно вытекает справедливость теоремы 4.

[3]) Вопрос о разложении плоскости прямыми очень обстоятельно разобран в труде проф. Кагана „Основания геометрии“ т. I, где ему уделено около 80 страниц (главы XXXII — XXXVIII). Читатель найдет там доказательство теоремы 7, а равным образом и других теорем, часть которых понадобится для обоснования учения о площадях.

См. также весьма краткое изложение у H. Thieme—Die Elemente der Geometrie. Leipzig, 1909 (§§ 2 и 4).

[4]) См., например, В. Каган. — Основания геометрии. Т. I, стр. 515.

[5]) Конгруэнтность, как отношение между углами, является у Гильберта таким же первоначальным понятием, как в отношении между отрезками. Можно, однако, построить евклидову геометрию вовсе не прибегая к аксиомам конгруэнтности для углов. В этом случае необходимо заменить их аксиомами конгруэнтности для фигур вообще (Паш, Веронезе) или хотя бы только для треугольников (Моллеруп).

За основное понятие можно при этом принять конгруэнтность либо как отношение между двумя фигурами (Паш), либо как отношение между отрезками (Веронезе, Моллеруп). См., кроме упомянутых ранее работ Паша и Веронезе, статью А. Гвардуччи, — Конгруэнтность и движение—в сборнике Энриквеса—Вопросы элементарной геометрии, а также J. Mollerup, — Studier oven den plane geometris aksiomer. Kopenhagen, 1903, и статью того же автора в Math. Annal. Bd. 58.

[6]) Эту теорему (10), собственно говоря, следовало бы поместить после теоремы 17, так как все теоремы 11 — 15 и 17 доказываются по Rosental'ю

независимо от нее. Теорема 16 должна быть перенесена дальше, так как ее доказательство опирается на теор. 10. Сама же теор. 10 доказывается (по Розенталю) на основании теоремы 17. (См. примеч. 9).

7) Упрощение аксиом конгруэнтности, предложенное, A. Rosental'ем, заключается в следующем:

1°. В аксиоме III 1 нет нужды постулировать, что точка B' может быть только одна — достаточно постулировать, что существует по меньшей мере одна точка B'; иначе говоря нет нужды постулировать однозначность построения отрезка, конгруэнтного данному.

2°. В той же аксиоме нет нужды постулировать $AB \equiv AB$ (однако постулируется по прежнему $AB \equiv BA$).

3°. Точно также в аксиоме III 4 опускается требование $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h, k)$ (однако сохраняется требование $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(k, h)$; равным образом сохраняется требование однозначности построения угла конгруэнтного данному).

Чтобы оправдать такое сокращение содержания аксиом необходимо доказать, что опущенные части их могут быть выведены из аксиом I и II и сокращенных аксиом III [1]). Мы приводим здесь в сжатом виде доказательство, данное А. Розенталем:

1°. Пусть $AB \equiv A'B'$ и $AB \equiv A'B''$, при чем B' и B'' разные точки прямой a', лежащие в одном и том же направлении от точки A'. Произвольную точку C (вне прямой a) соединим с A и B. Затем построим угол $B'A'X$, конгруэнтный углу BAC, и на $A'X$ найдем точку C' такую, чтобы $AC \equiv A'C'$. Соединим C' с B' и B''. По III 5 из тр-ков ABC и $A'B'C'$ имеем, что $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$; точно также из тр-ков ABC и $A'B''C'$ имеем $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B''$. Но лучи $C'B'$ и $C'B''$ лежат по одну сторону от $A'C'$. Таким образом в плоскости $A'B'C'$ по одну и ту же сторону от прямой $A'C'$ отложены два угла — $\sphericalangle A'C'B'$ и $\sphericalangle A'C'B''$ таких, что $\sphericalangle ACB$ конгруэнтен каждому из них, что противоречит III* 4.

2°. Пусть — вопреки опущенной части аксиомы III 1, которую мы хотим доказать, — $AB \equiv AB'$, при чем B' — точка на луче AB, не совпадающая с B. По III* 1

$$BA \equiv AB.$$

Так как $AB \equiv AB'$, то по III* 2,

$$BA \equiv AB',$$

что по только что доказанному противоречит конгруэнции $BA \equiv AB$, если B не совпадает с B'. Отсюда заключаем, что $AB \equiv AB$.

3°. Опущенной частью аксиомы III 4 не придется пользоваться при доказательстве теорем о конгруэнтности тр-ков. Поэтому мы докажем ее после теоремы 10. (См. примеч. 9).

---

[1]) Аксиомы III с указанными сокращениями мы будем обозначать так: III*.

[8]) . . . и если углы $\sphericalangle (h, l)$ и $\sphericalangle (k, l)$ одновременно с углами $\sphericalangle (h', l')$ и $\sphericalangle (k', l')$ имеют или не имеют общих внутренних точек.

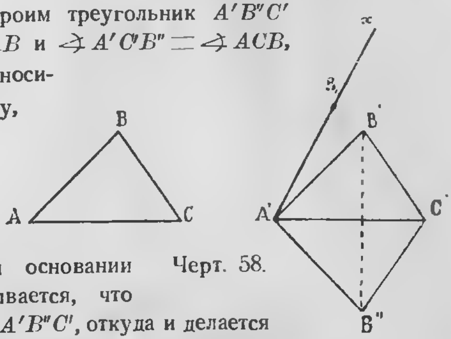
Это поправка указана Розенталем (Math. Ann. Bd. 71).

[9]) Обычное доказательство этой теоремы, как известно, заключается в следующем:

В плоскости тр-ка $A'B'C'$ строим треугольник $A'B''C'$ такой, чтобы $\sphericalangle C'A'B'' \equiv \sphericalangle CAB$ и $\sphericalangle A'C'B'' \equiv \sphericalangle ACB$, и чтобы точка B'' лежала относительно $A'C'$ по другую сторону, нежели B'.

Согласно теореме 12

$\triangle ABC \equiv \triangle A'B''C'$.



Черт. 58.

Затем, с помощью теоремы о равенстве углов при основании в равнобедренном тр-ке, доказывается, что тр-к $A'B'C'$ конгруэнтен тр-ку $A'B''C'$, откуда и делается вывод, что $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. Последнее заключение очевидно предполагает, что конгруэнтность треугольников есть отношение переходное (транзитивное), что может быть доказано только с помощью теоремы 10, которая утверждает, что конгруэнтность углов есть переходное отношение. Но теорема 10 еще не доказана. Укажем поэтому, как, согласно А. Розенталю, следует изменить обычное доказательство теоремы 17, чтобы избежать ссылки на теорему 10.

Допустим, что $\sphericalangle CAB$ не конгруэнтен $\sphericalangle C'A'B'$. Построим на $A'C'$ от вершины A' с той стороны, с которой лежит точка B', угол $C'A'X$ так, чтобы $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'X$, и на луче $A'X$ выберем точку B_1 так, чтобы $AB_1 \equiv A'B_1$. Соединяя B_1 с C' получим, по теор. 11, что $B_1C' \equiv BC$ и значит $B_1C' \equiv B''C'$ и точно также $A'B_1 \equiv A'B''$. Совершенно обычным путем отсюда заключаем, как и раньше, что тр-к $A'B''C'$ конгруэнтен тр-ку $A'B_1C'$ и, следовательно,

$$\sphericalangle C'A'B'' \equiv \sphericalangle C'A'B_1,$$

что, в силу аксиомы III 4, противоречит конгруэнции

$$\sphericalangle C'A'B'' \equiv \sphericalangle C'A'B',$$

которую мы имели раньше. Следовательно,

$$\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B',$$

что и доказывает теорему 17.

После этого без всякого труда может быть доказана теорема 10.

Пусть $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h', k')$ и $\sphericalangle (h, k) \equiv \sphericalangle (h'', k'')$. Вершины этих углов обозначим соответственно через A, A' и A''. На лучах h, h' и h'' выберем соответственно точки B, B' и B'' так, чтобы $AB \equiv A'B'$ и $AB \equiv A''B''$, и на лучах k, k' и k'' — сответственно точки C, C' и C'' так, чтобы $AC \equiv A'C'$ и $AC \equiv A''C''$.

Тогда тр-к $ABC \equiv$ тр-ку $A'B'C'$ и тр-к $ABC \equiv$ тр-ку $A''B''C''$, откуда

$$BC \equiv B'C' \text{ и } BC \equiv B''C''.$$

В силу аксиомы III 2, отсюда находим

$$B'C' \equiv B''C'',$$

и, в силу той же аксиомы,

$$A'C' \equiv A''C'' \text{ и } A'B' \equiv A''B''.$$

Отсюда, в силу только что доказанной теоремы

$$\text{тр-к } A'B'C' \equiv \text{тр-ку } A''B''C'',$$

и, значит,

$$\measuredangle(h', k') \equiv \measuredangle(h'', k''),$$

что и доказывает теорему 10.

Теперь очень легко доказать опущенную по указанию Розенталя и недоказанную еще часть аксиомы III 4, а именно, что $\measuredangle(h, k) \equiv \measuredangle(h, k)$. Доказательство совершенно аналогично такому же доказательству для отрезков. (См. примечание 7).

[10]) В подлиннике ошибочно сказано „по теоремам 10 и 13".

[11]) Если все точки ABC...., а, следовательно, и $A'B'C'$...., лежат на одной прямой, то возможно двояким образом найти точку P', о которой идет речь в условии теоремы, а именно — по одну и по другую сторону от прямой $A'B'C'$. Эти точки симметричны относительно прямой $A'B'C'$. В системе Гильберта симметричные фигуры считаются конгруэнтными, т. е. аксиомы Гильберта не дают возможности отличить симметрию от конгруэнтности. Некоторые видят в этом неполноту системы (см. Каган,—Осн. геом., т. II). Действительно по Гильберту правый сапог конгруэнтен левому. Впрочем добавочным соглашением без новых аксиом можно выделить симметрию, как частный случай конгруэнтности, и подразделить конгруэнтность на прямую и обратную. См., например, Halstad—Ration. geom., глава IV.

[12]) Мюнц показал, что, чтобы пространство, в котором имеют место аксиомы Гильберта I—II, было евклидовым, необходимо и достаточно постулировать: к каждой из трех данных прямых одной связки, не лежащих в одной плоскости, через некоторую — хотя бы одну единственную—точку пространства можно провести только одну параллельную прямую.

См. Math. Annalen, Bd. 73.

Отсюда следует, что аксиому IV можно заменить менее требовательной аксиомой.

[13]) В первом издании „Оснований геометрии" группа аксиом непрерывности была представлена только одной аксиомой Архимеда (V 1). Некоторые рецензенты (в том числе А. Пуанкаре) указали, что геометрия Гильберта не тождественна с обычной геометрией: ей недоставало непрерывности.

В самом деле, всем аксиомам Гильберта I—V 1 можно удовлетворить, если принять, что в пространстве существуют только точки с такими координатами, которые выражаются числами некоторой области, получающимися из 1 путем операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения квадратного корня из чисел той же области. В этой геометрии нет точек, координаты которых являются корнями неприводимого уравнения 3-й степени (даже если они вещественны). Тем же аксиомам можно удовлетворить, если принять, что в пространстве существуют только точки, координаты которых могут быть выражены в радикалах. В этой геометрии нет, например, точек, координаты которых являются корнями неприводимого уравнения 5 степени. Можно также удовлетворить тем же аксиомам в геометрии, в которой имеются только точки с координатами, принадлежащими к области алгебраических чисел. В ней нет точек с транцендентными координатами. Наконец можно удовлетворить этим аксиомам и в нашей обычной декартовой геометрии, где координатами точек могут быть любые вещественные числа (ср. § 9).

Таким образом аксиомы I—V 1, не определяют однозначно некоторую систему геометрии: возможны разные геометрии, в которых имеют место эти аксиомы, при чем в одной из них могут еще иметь место предложения, которые не имеют места в другой. Такую систему аксиом можно назвать „неполной" „не категорической" (non categorical—термин принадлежит Veblen'y; см. „A Syst. of Axioms for Geometry",—Trans. of Amer. Math. Soc. V. 5). Для того, чтобы сделать свою систему аксиом „полной", „категорической", Гильберт должен был дать некоторую аксиому, которая не оправдывалась бы ни в одной из указанных выше геометрий, кроме последней—декартовой. Это можно было сделать, введя аксиому непрерывности Дедекинда или Кантора, или какую-либо аналогичную им. Но Гильберт избрал другой путь: он присовокупил к аксиомам I—V 1 аксиому полноты. Очевидно, он достиг цели, так как все геометрии, о которых шла речь выше, действительно устранены: все они допускают расширение за счет отсутствующих в них точек с координатами из вещественной области. И только в последней декартовой геометрии аксиома полноты удовлетворена.

Как формально провести вывод аксиомы Дедекинда из аксиом I—V 2 будет показано ниже (см. примеч. 1 к главе III).

Следует заметить, что хотя геометрия, основанная на аксиомах I—V 1, не тождественна с геометрией Декарта, тем не менее она может быть отождествленна с нею без всяких новых постулатов, путем введения посредством определения точек с иррациональными координатами. См., например, Schur,—Grundlagen der Geometrie, § 8, S. 183.

Таким образом геометрия, основанная на постулатах I—V 1, есть часть декартовой геометрии, подобно тому, как геометрия, в которой имеют место плоскостные аксиомы I, II и IV и теорема Дезарга, есть часть пространственной геометрии (см. главу III).

[14]) Эти слова Гильберта, как указывает В. Каган, могут показаться парадоксальными. Обычно всякая новая аксиома вносит новое ограничение в систему вещей—точек, прямых. плоскостей, а потому исключение какой-либо аксиомы не может создать противоречия. Но в данном случае суть дела заключается в своеобразном характере аксиомы полноты: устранение какого-либо ограничения может повести к тому, что система точек, прямых и плоскостей будет допускать расширение, и таким образом аксиома полноты не сможет быть удовлетворена. В самом деле, коль скоро аксиома Архимеда не имеет места, система точек допускает расширение за счет точек с трансфинитными координатами, а так как в трансфинитной арифметике аксиома полноты, вообще говоря, не имеет места, то замечание Гильберта делается совершенно понятным.

Но не значит ли это. что приняв аксиомы I—IV и V 2, мы тем самым. во избежание противоречия, должны принять аксиому Архимеда? Не является ли. иными словами, аксиома Архимеда следствием аксиом I—IV и V2?

Если бы принятие аксиомы Архимеда в системе аксиом I—IV и V 2 было единственным исходом из противоречия, о котором говорит Гильберт, то это было бы так. Однако, не исключена возможность существования такой не-архимедовой геометрии. в которой аксиома полноты, тем не менее, имеет место.

Чтобы вполне уяснить этот вопрос заметим. что аксиома I 7 играет в отношении аксиомы полноты весьма сходную с аксиомою Архимеда роль. Аксиома I 7 равносильна утверждению, что вне трехмерного пространства нет точек. Если исключить эту аксиому, то пространство может быть расширено за счет точек, прямых и плоскостей четырехмерных, пятимерных и т. д. пространств. Таким образом система аксиом I 1—6, 8, II, III, IV, V 1—2 приводит к противоречию. Между тем нельзя сказать, что аксиома I 7 является следствием прочих аксиом Гильберта. так как всем прочим аксиомам, включая и аксиому полноты, можно удовлетворить в четырехмерном пространстве, где аксиома I 7 не имеет места.

К главе II.

[1]) Подробное изложение см. Вельштейн,—Основания геометрии, § 12. Одесса, 1913.

[2]) Предыдущим доказано отсутствие противоречий в системе плоскостных аксиом. Чтобы доказать отсутствие противоречий в системе всех аксиом, необходимо построить геометрию в численном многообразии трех измерений по образцу построенной выше в многообразии двух измерений.

См., напр., Вельштейн,—Основан. геометр., § 12.

[3]) Вопрос о взаимной независимости аксиом—самый сложный вопрос учения об основаниях геометрии. Следует различать абсолютную независимость аксиом от упорядоченной независимости. Мы

называем систему аксиом абсолютно независимой, если любая аксиома этой системы не может быть доказана на основании всех остальных аксиом системы при любом их расположении; если же никакая аксиома не может быть выведена из предшествующих ей аксиом, то имеет место упорядоченная независимость. Упорядоченно-независимая система может и не быть абсолютно независимой, но, разумеется, абсолютно-независимая система аксиом является в то же время упорядоченно-независимой.

Гильберт не ставит даже вопроса об абсолютной независимости своей системы. Он даже не пытается показать, что его система обладает упорядоченной независимостью, а ограничивается доказательством абсолютной независимости аксиом IV, III 5 от всех остальных и V 1 от всех аксиом I—IV.

Несколько вводных фраз относительно независимости аксиом, которыми Гильберт начинает § 10 наст. соч., не отличаются ни ясностью, ни точностью, как на это справедливо указывает Каган (см. Осн. геом., т. II).

Мы не будем входить в подробности по этому поводу, т. к. в указанном труде В. Кагана читатель найдет достаточно подробную и обоснованную критику этих положений. Остановимся только на двух пунктах, где мы должны внести некоторые поправки к рассуждениям В. Кагана.

Гильберт говорит, что „аксиомы групп I и II лежат в нашем изложении в основе прочих аксиом, так что речь идет только о том, чтобы доказать для каждой из групп III, IV и V их независимость от остальных". Это выражение—если даже оставить в стороне неясность слов „независимость групп аксиом"—можно понять как утверждение, что независимость аксиом I и II-й групп от остальных не может быть доказана.

Между тем это вовсе не верно.

Доказать независимость какой-либо аксиомы от прочих аксиом некоторой системы вовсе не значит обосновать некоторую геометрию на прочих аксиомах системы без испытываемой аксиомы так, чтобы ее место осталось пустым. Для доказательства независимости некоторой аксиомы от остальных достаточно построить геометрию на *каких угодно* аксиомах, лишь бы все аксиомы рассматриваемой системы имели в ней место, хотя бы в качестве теорем, а испытуемая аксиома не имела места, т. е. противоречила бы некоторым теоремам этой геометрии.

Например, аксиома I 1 независима от всех остальных, и это можно доказать довольно просто.

Представим себе евклидову плоскость и на бесконечно-удаленной прямой x этой плоскости фиксируем некоторую точку X; назовем ее *особой* точкой. Прямые соединяющие любую точку плоскости с „особой" точкой назовем „особыми" прямыми. Согласимся „*точками*" новой геометрии называть обыкновенные точки, за исключением точек бесконечно удаленной прямой, а „*прямыми*"—все прямые нашей плоскости, кроме „*особых*". Гомологии с осью x и центром на x будем называть „*прямолинейными перенесениями*", а гомологии с центром X и осью, проходящей через X, — „*вращениями*".

„В р а щ е н и я“, „п р я м о л и н е й н ы е   п е р е н е с е н и я“ и их произведения будем называть *„движениями“*. Далее условимся считать *„конгруэнтными“* две такие фигуры, которые можно преобразовать одна в другую посредством „д в и ж е н и я“. Нетрудно убедиться, что в нашей новой геометрии (ее можно назвать *параболо-параболической)* будут иметь место все плоскостные аксиомы Гильберта, кроме I 1. В самом деле, легко убедиться, что аксиомы I 2—3 и II все имеют здесь место. Далее, аксиома IV имеет место, если условиться параллельными прямыми называть прямые, пересекающиеся на бесконечно-удаленной прямой. Аксиомы конгруэтности имеют место, так как „прямолинейное перенесение“ в этой геометрии есть обычное прямолинейное перенесение, а „вращение“ есть преобразование двойственное (взаимное) „прямолинейному перенесению“. Но аксиома I 1 не имеет места, так как если „т о ч к и“ A и B лежат на „о с о б о й“ прямой, то, согласно принятой терминологии, они не определяют никакой „п р я м о й“.

Распространить эту интерпретацию на пространство 3-х измерений не представляет никаких затруднений.

Система аксиом Гильберта неоднократно подвергалась критическому разбору. Ш у р пытался доказать, что аксиомы I 4, 5, 6, могут быть выведены из остальных аксиом Гильберта I и II групп (см. Math. Annalen, B. 55, 1902).

Мур подверг тщательному разбору соображения Шура в статье „On the projective axioms of geometry“ (Trans. of Am. Math. Soc. v. 3. 1902) и показал необоснованность упреков Шура в части, касающейся аксиом I 4 и I 6. Ошибка Шура заключается в следующем: он рассматривает „п л о с к о с т ь“ не как основное понятие, а как совокупность точек, лежащих на прямых, соединяющих некоторую точку O с точками прямой AB (не проходящей через O (см. примечание 1 к. гл. I). При таком изменении в системе основных понятий, аксиомы I 4, 5, 6 действительно легко выводятся из остальных аксиом групп I и II. Тем не менее это отнюдь не доказывает их зависимости от других аксиом в *системе Гильберта.*

Мур дает такую интерпретацию геометрии: будем называть точками и прямыми обыкновенные точки и прямые евклидова пространства, а плоскостями будем считать пересекающиеся сферы. В этой геометрии имеют место все аксиомы группы I и II, кроме I 4, 5, 6. Таким образом эти три аксиомы не могут быть выведены из прочих аксиом группы I и II. Далее Мур доказывает, что аксиомы I 4 и I 6 независимы от остальных аксиом группы I и II.

Относительно аксиомы I 5 Мур приходит к такому же выводу, что и Шур. С этим выводом вполне соглашается и В. Каган. Однако, нам он представляется недостаточно убедительным. Шур действительно показал, что если две плоскости x и x' имеют 3 общие точки, не расположенные на одной прямой, то все точки x принадлежат x' и наоборот. (Доказательство этого положения — весьма простое — заимствовано Шуром у Паша — Vorlesungen über neuere Geometrie, S. 21-22).

Отсюда можно сделать вывод о тождестве плоскостей x' и x только в том случае, если плоскость представляет собой совокупность (класс) точек, т.-е. если то основное отношение между точками и плоскостью, которое Гильберт выражает терминами *„определяют“* или *„лежат на“* и т. д., является логическим отношением *„принадлежности элемента классу“*. Если же этого нет, то нет никаких оснований для такого заключения. Вообще, коль скоро „плоскость“ есть неопределимое понятие, нет смысла говорить о тождестве двух плоскостей, пока критерий тождества не установлен особым соглашением. Таким именно соглашением является аксиома I 5.

Как бы то ни было Гильберт, не доказал независимости своих аксиом. Систему абсолютно независимых аксиом построили впервые: *O. Veblen. — A system of axioms for geometry (Trans of Amer. Math. Soc., v. V, 1904)* и *В. Каган—Основания геометрии, т. I. Одесса, 1905.* См. также *E. Huntigton.—A set of postulates for abstract geometry.* (Math. Ann. Bd. 73, 1913).

[8]) Развитые здесь идеи принадлежат Клейну; см. подробнее В. Каган, — Основан. геометрии, т. II, главу о Клейне, или Р. Бонола,—Неевклидова геометрия. Ст. 142—152. Петроград, 1910.

К главе III.

[1]) Покажем сейчас, как формально вывести предложение Дедекинда из аксиомы полноты для системы вещей, удовлетворяющих предложениям 1—17.

Предложение Дедекинда, как известно, гласит: „если все числа (т.-е. система вещей, удовлетворяющих предложениям 1 — 17) разбиты на два класса таким образом, что 1) каждое число принадлежит к одному из этих классов и 2) каждое число одного класса (нижнего) меньше каждого числа другого класса (верхнего), — то либо в нижнем классе существует наибольшее число, либо в верхнем — наименьшее“. Допустим, что это предложение не имеет места в системе вещей, удовлетворяющих предложениям 1—17 и 18 (предлож. полноты). Пусть, следовательно, существует некоторое разделение чисел на два класса (будем называть его *сечением*), удовлетворяющее условиям 1 и 2, при чем ни в нижнем классе нет наибольшего числа, ни в верхнем — наименьшего. Отнесем такому сечению некоторую вещь α, которую будем считать меньшей всякого числа верхнего класса и большей всякого числа нижнего класса. Если каждому такому сечению отнести некоторую вещь $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, то подходящими условиями относительно равенства и неравенств между этими новыми вещами и числами, а также относительно сложения и умножения этих вещей с числами и между собой, можно достичь, как известно из дедекиндовой теории иррациональных чисел, того, чтобы система чисел и новых вещей $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ удовлетворяла всем предложениям 1 — 17 § 13. Но вещь α не есть число: она не принадлежит к нижнему классу, так как она больше всякого числа нижнего класса; она не принадлежит и к верхнему классу, так как она меньше всякого числа верхнего класса. Таким образом оказалось возможным расширить систему чисел новыми вещами так, что в расширенной системе имеют место все предложения 1 – 17 § 13. Но это противоречит аксиоме полноты: т.-е. отрицание предложения Дедекинда противоречит предложению полноты. Этим предложение Дедекинда доказано.

Заметим, что в не-архимедовой геометрии расширение области чисел путем сечений не всегда возможно. Если числа удовлетворяют только предложениям 1 — 16 и не удовлетворяют предложению 17, то, относя каждому сечению некоторые вещи $\alpha, \beta \ldots$, мы не всегда можем подходящими соглашениями добиться того, чтобы в области чисел и этих новых вещей имели место все предложения 1 — 16.

В самом деле, если предложение 17 не имеет места, то существуют два таких числа a и b, что

$$na < b$$

при любом целом n.

Мы можем установить сечение, отнеся к нижнему классу его такие числа $a_1, a_2, \ldots a_i \ldots$, для которых всегда

$$na_i < b,$$

а к верхнему классу такие числа $a'_1, a'_2 \ldots a'_i \ldots$, что при некотором n

$$na'_i \geqslant b,$$

Отнесем этому сечению вещь α и допустим, что подходящими соглашениями мы добились того, что все числа и эта вещь удовлетворяют предложениям 1 — 16.

Выберем некоторое число y такое, что

$$2\alpha > y > \alpha.$$

Очевидно, y принадлежит к верхнему классу нашего сечения. Следовательно существует такое n, что

$$ny \geqslant b.$$

$\frac{y}{2} < \alpha$, т.-е. принадлежит к нижнему классу; следовательно, каково бы ни было m, всегда

$$m\frac{y}{2} < b.$$

Полагая, однако, $m = 2n$, мы получим

$$ny < b,$$

что противоречит предыдущему [1]).

Таким образом вывод предложения Дедекинда из аксиомы полноты, который мы выше привели, теряет свою силу в не-архимедовой геометрии.

[2]) $\alpha\beta c$ означает то же, что $\alpha(\beta c)$, т.-е. катет в прямоугольном тр-ке с прилегающим острым углом α и гипотенузой βc.

[3]) Иначе говоря — составляем символы $\lambda' [\mu (\nu a')]$ и $\lambda' [\mu (\nu' b)]$. Так как $\nu a' = \nu' b$ . . . (3), то и $[\mu (\nu a') = \mu (\nu' b)$ (гипотенуза и острый угол однозначно определяют прилежащий катет) и следовательно $\lambda' [\mu (\nu a')] = \lambda' [\mu (\nu' b)]$. Пов-

[1]) Ср. Stolz. Math. Ann. Bd. 22 и 39.

торным применением переместительного свойства легко доказать приводимую в тексте конгруэнцию.

[4]) Учение о конгруэнтности фигур и бóльшая часть учения об окружности (кроме, например, теоремы о пересечении окружности и прямой) в обычном изложении опираются на аксиомы I 1—3, II, III и IV. Но в учении о подобии обычно пользуются еще аксиомами непрерывности (вспомним несоизмеримые отрезки). Обоснование, данное Гильбертом, позволяет исключить аксиомы непрерывности и из этой главы. Само собой разумеется, что этим аксиомы непрерывности вовсе не изгоняются из элементарной геометрии. Без них невозможно построить теорию измерения, невозможно также доказать упомянутую теорему о пересечении окружности и прямой. Из настоящей главы следует возможность обосновать большую часть плоской геометрии на основе плоскостных аксиом I, II, III, IV. Однако, мы уже указывали (см. пр. 11 к главе I), что аксиомы группы III подводят понятие симметрии под понятие конгруэнтности. Если ограничить аксиому III 5 таким образом, чтобы понятие конгруэнтности охватывало только прямую конгруэнтность, то — как показал Гильберт в другом месте — (Über den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck — приложение II к немец. изданию „Оснований геометрии") — обоснование учения о конгруэнтности тр-ков на основании плоскостных аксиом невозможно без аксиом непрерывности.

[5]) В подлиннике ошибочно сказано: „на каждой прямой в рассматриваемой геометрии каждой системе трех вещественных чисел . . . "

К главе IV.

[1]) В статье У. Амальди — „Учение об эквивалентности" (Энриквес — Вопросы элементарной геометрии) термин Гильберта „Zerlegungsgleichheit" переведен equivalenza pèr somma — эквивалентность через сумму, а „Inchaltsgleichcheit"—equivalenza pèr differenza — эквивалентность через разность (см. стр. 209 русского издания, прим. 19). Этот перевод, хотя и неточный, прекрасно соответствует тому содержанию, которое Гильберт вкладывает в названные понятия.

[2]) Координаты вершины D второго тр-ка суть t и 1 (если началом координат считать точку A). Координаты всех вершин любых тр-ков, на которые может быть разложен тр-ник ABC, суть конечные числа. Поэтому, как бы мы ни составляли из них новые тр-ки, вершинами последних всегда будут точки с конечными координатами; значит, тр-к ABD не может быть составлен таким образом.

[3]) А именно—постулируется, что площади имеют свойства величин.

[4]) Тем не менее, можно дать такое определение равновеликости двух многогранников, при котором обоснование учения об объемах возможно и без аксиом непрерывности. См., напр., ст. У. Амальди,—„Учение об эквивалентности" (в сборнике Энриквеса) и В. Каган,—Основания геометрии, т. II, глава о Гильберте. Там же указана дальнейшая литература.

К главе V.

[1]) В подлиннике ошибочно сказано—„аксиома III 6".

[2]) В подлиннике ошибочно сказано—„удовлетворяют аксиомам I 1—2 и III.

[3]) Когда вершина одного угла лежит на эллипсе, это определение конгруэнтности углов не может быть сохранено, если хотят, чтобы аксиома III 4 имела место. В самом деле, если понимать величину угла в обычном евклидовом смысле, то наибольший угол, который может быть построен при луче $B'C'$, с вершиной в B', с той стороны плоскости, с которой лежит точка A (см. черт. на стр. 66) — есть угол между лучем $B'C'$ и дугой, заменяющей часть прямой $A'C'$, лежащую внутри эллипса. Таким образом угол меньший двух прямых, но бо́льший этого предельного угла не может быть отложен в указанном направлении от луча $B'C'$, и значит аксиома III 4 не имеет места. Поэтому Гильберг дает более общее определение конгруэнтности углов, которое сводится к тому, что два угла считаются конгруэнтными в новой геометрии, если равны отношения каждого из них (в обычном смысле) к своему смежному.

То затруднение, которого автор хотел избежать, при этом действительно устранено, однако появляется другое: каждый угол имеет два смежных. Для углов, вершины которых лежат внутри или вне эллипса, это не имеет значения, так как для них оба смежных угла конгруэнтны. Но коль скоро вершина угла лежит на эллипсе, оба смежных угла, вообще говоря, не конгруэнтны. Поэтому необходимо для определенности указать, какой из смежных углов должен войти в пропорцию, определяющую не-дезаргову конгруэнтность углов. Будем, например, считать, что для угла $\sphericalangle (h, k)$ таковым должен быть угол, составленный продолжением луча h за вершину, и стороной k. Но в этом случае окажется, что угол $\sphericalangle (h, k)$ не конгруэнтен углу $\sphericalangle (k, h)$. Таким образом вторая часть аксиомы III 4 не имеет места. Мультон, который указал на это затруднение, дал очень простую интерпретацию не-дезарговой геометрии, в которой имеют место аксиомы I 1—3, II, III 1—4 и V, и подтвердил таким образом вывод Гильберта. (См. F. Moulton.—A simple non-desarguesian plane geometry. Transactions of American Mathemat. Society, v. 3, 1902).

[4]) В проективной геометрии (которая после Штаудта обосновывается без аксиом конгруэнтности) теорема Дезарга доказывается всегда на основании пространственных соображений. Исследования Гильберта показывают, что иначе и быть не может даже и при пользовании аксиомами непрерывности Этот результат имеет большое значение для проективной геометрии.

[5]) Необходимо заметить, что исчисление отрезков без аксиом конгруэнтности введено было уже Штаудтом в Beiträge zur Geometrie der Lage (Nürenberg, 1856—60). Все последующие исчисления такого рода представляют собой видоизменения исчисления Штаудта. Приводимое в тексте исчисление отрезков Гильберта может быть проведено без аксиомы о параллельности—в проективном виде.

[6]) Иначе говоря, в геометрии, в которой имеют место аксиомы I 1—3, II, IV и теорема Дезарга, всегда можно без новых постулатов, с помощью определений, так расширить понятия „точка", „прямая" и ввести понятие „плоскость", чтобы удовлетворить всем аксиомам I, II, IV.

Шоор дал чисто геометрическое доказательство этого предложения. Он рассматривает плоскую геометрию, в которой имеют место аксиомы I 1—3, II, IV и теорема Дезарга, и интерпретирует в ней пространственную геометрию. См. Math. Ann. Bd. 58.

[7]) Гильберт, очевидно, имел в виду сказать, что теорема Дезарга в плоской геометрии некоторым образом замещает исключенные пространственные аксиомы.

К главе VI.

[1]) В подлиннике ошибочно сказано: „применимость предложений 1—5 § 13" и далее—„нетрудно усмотреть также применимость предложения 6 § 13".

[2]) Существование не-паскалевой геометрии, в которой удовлетворены аксиомы сопряжения, порядка и параллельности, имеет громадное значение для проективной геометрии, благодаря связи между теоремой Паскаля и, т. н. основной теоремой, которая является краеугольным камнем всей проективной геометрии. Основная теорема проективной геометрии, как известно, гласит: проективность между двумя рядами точек однозначно определена, если трем точкам одного ряда отвечают заданные три точки другого ряда. При этом два ряда точек называют проективными либо в том случае, если один может быть получен из другого путем конечного числа проектирований и сечений (определение Понселэ), либо в том, если 4 гармоническим точкам одного ряда отвечают 4 гармонические точки другого (определение Штаудта—Geometrie der Lage. Nürenberg, 1847).

Доказательство основной теоремы, данное Штаудтом без помощи аксиом конгруэнтности, оказалось неполным, как на это указал Клейн („Über die sogennante Niechteuklidische Geometrie". Math. An. VI). При этом Клейн указал, что для доказательства основной теоремы без аксиом конгруэнтности необходимо постулировать непрерывность прямой.

Это замечание Клейна вызвало работы Цейтена, Люрота (Mat. Ann. VII) и Дарбу (Mat. An. 17), которые дополнили доказательство Штаудта, опираясь однако скрытым образом еще на аксиому Архимеда (первые два) и на предложение, что существует пара точек, делящая гармонически две пары не разделяющих друг друга точек (Дарбу). Последнее не может быть доказано без аксиомы Архимеда.

Wiener (Jahresbericht d. Deut Math. Vereinig. Bd. I, 1891) указал, что основная теорема, если понимать проективность в смысле Понселэ, может быть доказана без аксиом конгруэнтности и непрерывности, с помощью теоремы Паскаля.

Впрочем, еще за 10 лет до Wiener'а в 1880 г. на это указал профессор К. Андреев в докладе Математическому Обществу при Харьковском университете. Профессор Андреев сделал отсюда вывод, что теорема Паскаля равноценна (в системе проективных аксиом) основной теореме проективной геометрии (в концепции Понселэ) и, следовательно, не может быть доказана без аксиом непрерывности, если не прибегать к метрическим аксиомам. (Доклад К. Андреева „Об изложении начал проективной геометрии" вышел отдельным оттиском в 1881 г.).

Wiener и Андреев не привели доказательства равноценности теоремы Паскаля и основ. теор. проект. геом., и оно было дано впоследствии Шуром (Math. Ann. 51).

Между тем, несмотря на работы Клейна и др., попытки доказать основную теорему, опираясь на одни только аксиомы сопряжения и порядка продолжались, безуспешно конечно, вплоть до появления работы Гильберта.

Работа Гильберта внесла, наконец, полную ясность в этот вопрос: если возможна не-паскалева геометрия, в которой имеют место аксиомы связи, порядка и параллельности, то, очевидно, доказать основную теорему проективной геометрии без аксиом конгруэнтности или без аксиомы Архимеда невозможно.

Связь между аксиомой Архимеда и теоремой Паскаля, раскрытая Гильбертом, делает совершенно понятным возможность доказать основную теорему проективной геометрии с помощью проективных аксиом и аксиомы Архимеда.

Заметим, что в концепции Штаудта основная теорема проективной геометрии не равносильна теореме Паскаля.

³) В подлиннике, очевидно ошибочно, сделана ссылка на другую статью того же автора („Begründung der elliptischen Geometrie"), помещенную в том же томе, Math. Ann.

К главе VII.

¹) Эта задача решается на основании аксиом I—III. Аксиома IV утверждает, что решение однозначно.

²) О построениях с ограниченными средствами см. прекрасную книжку Адлера: — Теория геометрических построений. Одесса, 1909.

К отчету о работах Гильберта.

¹) Для удобства читателей все ссылки в этой статье согласованы с последним изданием Grundlagen.

²) Как известно, в последующих изданиях Grundlagen Гильберт принял во внимание это замечание.

³) Если положить $st = -ts$, то аксиомы порядка в новой геометрии не будут удовлетворены; поэтому в последующих изданиях Гильберт полагает что $st = 2\,ts$.