Теоремы сложения и разности двух аргументов или геометрия в алгебре

Общая постановка задачи: замена одного тригонометрического выражения тождественно ему равным, то есть совершить тождественное преобразование.

Таким образом, мы хотим вывести так называемые **формулы преобразований тригонометрических выражений (или функций)**.

Стратегия решения задачи: ставим частные задачи, т. е. частные постановки задач; решаем их, выводим следствия и получаем методы на фоне доказанных теорем.

§1. Теорема сложения для косинуса

Постановка задачи: выразить $\cos(\alpha + \beta)$ в зависимости от $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, где α и β — совершенно произвольные дуги (или углы).

Вспомним этапы работы над задачей и будем демонстративно «проходить» по ним.

Этап I. Выделение структуры задачи

Дано:

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$
$\sin\alpha$, $\cos\alpha$
$\sin\beta$, $\cos\beta$

Найти $\cos(\alpha + \beta)$.

Содержание этапа:

оформляется условие (*что дано?*) и требование задачи (*что необходимо выполнить/сделать?*).

Этап II. Поиск решения

Содержание этапа: преобразование, или переформулировка, условия и требования задачи.

Напомним, методы поиска решения задачи.

Синтез (условие → требование)	Приёмы синтеза:	замена терминов определением
		получение следствий из условия
		применение дедукции
Анализ (условие ← требование)	Формы анализа:	восходящий анализ
		нисходящий анализ
		разбиение («расчленение»)
Аналогия	Установление сходства требования исходной задачи с ранее решёнными задачами.	

Решить алгебраически сложно, попробуем подойти с геометрической точки зрения [**синтез: вывод о невозможности из условия «вычленить» метод решения**].

Тригонометрия рассматривает синусы и косинусы от данных углов как ординаты и соответственно абсциссы точек на единичной окружности, повёрнутых от начальной точки (1; 0) на данные углы в любом направлении: либо по часовой стрелке, либо против часовой стрелки [**синтез: замена используемых в условии терминов их тригонометрическим определением**].

Сумму углов α и β искать неудобно, так как это требует знания их разности в силу геометрического их представления на тригонометрической окружности [**синтез: выведение следствия из условия; восходящий анализ**].

Следовательно, сперва-наперво решим подзадачу — выразим $\cos(\alpha-\beta)$ от тех же значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ и $\cos\beta$ [**анализ: разбиение требования на подзадачи**].

Таким образом, сама задача сводится к отысканию косинуса угла между радиус-векторами точек, характеризующих углы α и β [**синтез: дедуктивные рассуждения**].

Этап III. Выбор метода решения задачи

Излагаются признаки выбора теории и теоретическая база метода.

Признаки выбора теории по геометрии:

- задана система координат, поскольку рассматривается тригонометрическая плоскость;
- координаты радиус-векторов точек известны по условию и определению синусов и косинусов произвольных углов;
- косинус угла между двумя векторами можем отыскать, используя определение скалярного произведения этих векторов.

Таким образом, мы подобрали необходимую теорию для решения поставленной задачи:

- *координатно-векторный метод*;
- тема: «Векторы на плоскости»

Объективная сторона (или теория) метода подразделяется на 2 части.

1. Теоретическая основа координатного метода:

- ✓ координатная ось: начало координат, единичная точка и направление (положительное/отрицательное оси координат);
- ✓ координата точки, единичный отрезок, длина отрезка;
- ✓ формула расстояния между двумя точками на координатной оси;
- ✓ система координат на плоскости, её элементы (начало координат, ось абсцисс, ось ординат, квадранты) и разновидности: прямоугольная (= декартовая) и полярная;
- ✓ координатная плоскость;
- ✓ координаты точки;
- ✓ формула расстояния между двумя точками на координатной плоскости.

2. Теоретическая основа векторного метода:

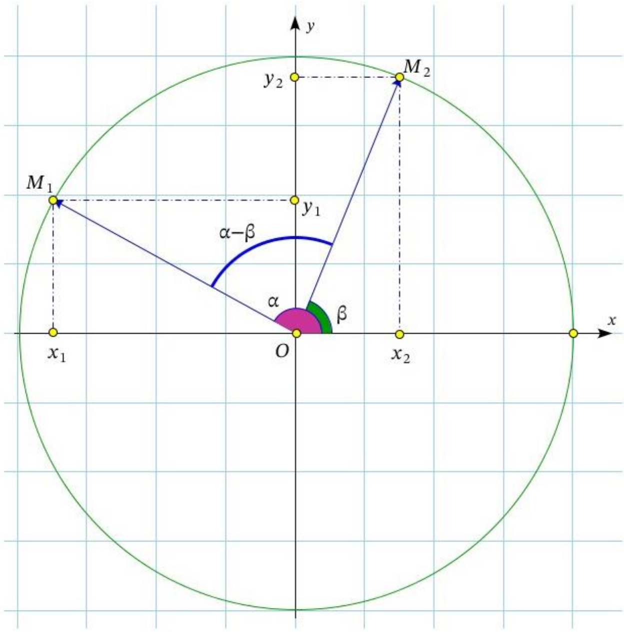
- вектор, модуль (= длина) вектора и общая классификация векторов;
- свойства векторов на плоскости: сложение и разность векторов, умножение вектора на число;

- координаты вектора, радиус-вектор точки;
- свойства векторов, заданных координатами: равенство векторов, умножение на действительное число, сумма/разность векторов и длина вектора;
- критерий коллинеарности векторов;
- угол между векторами и частная классификация векторов (по виду угла между векторами): ортогональные (= перпендикулярные) и не ортогональные;
- скалярное произведение векторов: в векторной и координатной форме записи;
- свойства скалярного произведения;
- критерий ортогональности векторов.

Этап IV. Оформление плана решения задачи

На этом этапе собираем всё вышесказанное воедино и пытаемся построить рассуждения так, чтобы можно было применить координатно-векторный метод к частной задаче.

Внимание!!! Данный этап **НЕ** является строгим решением задачи, а лишь кратко освещает логику решения, то есть рассматривается как черновой вариант, а не итоговый.



План:

1. Вводим систему координат $\mathcal{xOy}$ и изображаем числовую окружность окр.$(\mathcal{O};\ \mathcal{R})$ в ней, причём радиус $\mathcal{R} = 1$.
2. Указываем два каких-нибудь угла с помощью радиус-векторов $\overrightarrow{\mathcal{OM}_1}$ и $\overrightarrow{\mathcal{OM}_2}$, подписываем эти углы как α и β (для определённости пускай $\alpha > \beta$).
3. Делаем вывод о том, что угол $\left(\widehat{\overrightarrow{\mathcal{OM}_1}, \overrightarrow{\mathcal{OM}_2}}\right)$ между построенными векторами равен разности $\alpha - \beta$.
4. Пишем скалярное произведение векторов:
$$\overrightarrow{\mathcal{OM}_1} \cdot \overrightarrow{\mathcal{OM}_2} = \left|\overrightarrow{\mathcal{OM}_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathcal{OM}_2}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{\mathcal{OM}_1}, \overrightarrow{\mathcal{OM}_2}}\right).$$
5. Используя свойство длины вектора и $\mathcal{R} = 1$, можем упростить равенство:
$$\overrightarrow{\mathcal{OM}_1} \cdot \overrightarrow{\mathcal{OM}_2} = \cos(\alpha - \beta).$$
6. Расписываем координаты этих векторов: $\overrightarrow{\mathcal{OM}_1}\{\cos\alpha\,;\sin\alpha\}$ и $\overrightarrow{\mathcal{OM}_2}\{\cos\beta\,;\sin\beta\}$.
7. Тогда косинус разности будет равен сумме произведений одноимённых координат:
$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$
Подзадача тем самым будет решена.
8. Наконец, по свойствам чётности косинуса и нечётности синуса получим, что
$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

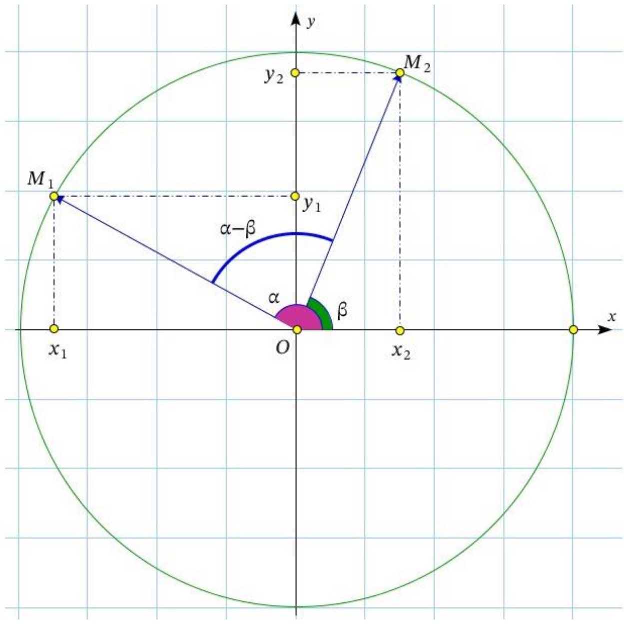
Дано:

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$
$\sin\alpha, \cos\alpha$
$\sin\beta, \cos\beta$

Найти $\cos(\alpha + \beta)$.

Решение.

Для того чтобы найти $\cos(\alpha + \beta)$, выразим сначала $\cos(\alpha - \beta)$ через данные в условии задачи.



Решим поставленную задачу геометрически, а точнее координатно-векторным методом.

Изобразим на координатной плоскости тригонометрическую окружность и точки на ней, соответствующие углам α и β.

№	Утверждение	Обоснование
	Зададим систему координат и единичную окружность с центром в начале координат.	
1	$(\cdot)\mathcal{O}$ — начало координат, $\mathcal{O}x$ — ось абсцисс, $\mathcal{O}y$ — ось ординат, $x\mathcal{O}y$ — декартова система координат ($\mathcal{O}x \perp \mathcal{O}y$)	**введение системы координат**, определение прямоугольной системы координат
2	$x\mathcal{O}y$: окр.$(\mathcal{O};\ \mathcal{R})$ — числовая окружность, где $\mathcal{R} = 1$	**пункт 1**, определение и построение тригонометрической окружности
	Укажем точки, принадлежащие окружности и повёрнутые на углы, равные $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$.	
3	окр.$(\mathcal{O};\ \mathcal{R})$: $(\cdot)\mathcal{M}_1 \mid \left(\widehat{\mathcal{O}\mathcal{M}_1, \mathcal{O}x}\right) = \alpha;$ $(\cdot)\mathcal{M}_2 \mid \left(\widehat{\mathcal{O}\mathcal{M}_2, \mathcal{O}x}\right) = \beta.$	**условие**, **пункт 2**, построение и обозначение, аксиома об измерении мер углов
	Установим координаты трёх точек: $\boldsymbol{\mathcal{O}}$, $\boldsymbol{\mathcal{M}_1}$ и $\boldsymbol{\mathcal{M}_2}$.	
4	$x\mathcal{O}y$: $\left.\begin{array}{c}\mathcal{O}(0,0)\\ \mathcal{M}_1(x_1, y_1)\\ \mathcal{M}_2(x_2, y_2)\end{array}\right\vert \begin{array}{l} x_1, x_2 \in \mathcal{O}x \\ y_1, y_2 \in \mathcal{O}y\end{array}$	**пункты 1 и 3**, определение и обозначение координат точек на координатной плоскости
	Теперь можем векторы на координатной плоскости с указанием их координат.	
5	$x\mathcal{O}y$: $\left.\begin{array}{c}\mathcal{O}(0,0)\\ \mathcal{M}_1(x_1, y_1)\\ \mathcal{M}_2(x_2, y_2)\end{array}\right\vert \Rightarrow \begin{array}{l} \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{M}_1}\{x_1; y_1\} \\ \overrightarrow{\mathcal{O}\mathcal{M}_2}\{x_2; y_2\}\end{array}$	**пункт 4**, введение векторов на плоскости, определение радиус-вектора точки, свойство координат радиус-вектора точки

6	$\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}}\right) = \alpha - \beta$	**пункты 3 и 5**, инвариантность и аддитивность угловой меры, определение угла между векторами
7	$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = \lvert\overrightarrow{OM_1}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{OM_2}\rvert \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}}\right)$	**пункты 5–6**, определение скалярного произведения векторов в векторной форме
8	$\overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}}\right);$ $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}}\right) = \overrightarrow{OM_1} \cdot \overrightarrow{OM_2}$	**пункты 2, 5 и 7**, определения окружности и модуля вектора, подстановка в формулу, симметричность отношения равенства
Далее преобразуем последнюю формулу на «языке» координат.		
9	$\left.\begin{array}{c}\left(\widehat{\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OM_2}}\right) = \alpha - \beta \\ \overrightarrow{OM_1}\{x_1; y_1\} \\ \overrightarrow{OM_2}\{x_2; y_2\}\end{array}\right\vert \Rightarrow$ $\Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$	**пункты 6 и 8**, определение скалярного произведения векторов в координатной форме, подстановка в формулу
10	окр.$(O;\ R)$: $x_1 = \cos\alpha, \quad y_1 = \sin\alpha$ $x_2 = \cos\beta, \quad y_2 = \sin\beta$	**пункт 3**, **условие**, определение синуса и косинуса произвольного угла
11	$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta}$	**пункты 9–10**, подстановка в формулу
Подзадача решена целиком и полностью. Теперь рассмотрим косинус суммы этих же углов.		
12	$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)];$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin\alpha \cdot \sin(-\beta);$	**условие**, **рефлексивность отношения равенства**, свойство алгебраического выражения, пункт 11
13	$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta}$	**пункт 12**, свойство синуса и косинуса угла, ассоциативность умножения

Ответ: $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$

Итак, нами доказана следующая теорема.

***Теорема сложения для косинуса*:**

косинус суммы двух аргументов равен произведению косинусов этих аргументов без произведения синусов тех же аргументов.

Попутно также мы доказали справедливость теоремы о косинусе разности двух аргументов: *косинус разности двух аргументов равен сумме произведений косинусов этих аргументов и синусов тех же углов*.

Упражнение 1.1. Объединить формулы для косинуса суммы и разности аргументов в одну.

Задача 1.1 {ЕГЭ: **560137**}. Найти все корни уравнения $\sin\frac{7x}{2}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2} = \cos^2 3x$, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

§2. Теорема сложения для синуса

Постановка задачи: выразить $\sin(\alpha+\beta)$ в зависимости от $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\beta$, где α и β — совершенно произвольные дуги (или углы).

На дом: решить задачу. Какая теория по геометрии необходима? Какой метод применим?

Упражнение 2.1. Сформулировать словесно теорему для синуса суммы и разности аргументов.

Упражнение 2.2. Объединить формулы для синуса суммы и разности аргументов в одну.

Задача 2.1 {ЕГЭ, А. Ларин: **641605**}.

§3. Теоремы сложения для тангенса и котангенса

Упражнение 3.1. Получить формулы для остальных тригонометрических функций суммы или разности.

§4. Следствия из теорем сложения

На основании доказанных теорем о сложении (вычитании) аргументов тригонометрических функций выводятся свойства чётности (нечётности), знаков в четвертях, периодичности, а также формулы приведения к дуге I четверти окружности.

*Следствие 1. **Свойства чётности/нечётности***

*Следствие 2. **Свойства знаков в четвертях***

*Следствие 3. **Свойства периодичности***

*Следствие 4. **Формулы приведения***

Более того, можно рассмотреть и другие частные случаи теорем сложения, порождая взаимодвойственные формулы.

§4.1. Принцип двойственности. Взаимодвойственные формулы

Для простого запоминания дальнейших теорем объединим классы формул по *принципу двойственности.*

Точного определения ***нет*** для данного принципа, но постараемся сформулировать его коротко и ясно на базе личного опыта.

Теорему-свойство тригонометрических функций, выраженную формулой, будем для краткости «обзывать» теоремой-формулой (или просто формулой).

Договор. *Принципом двойственности* назовём правило, согласно которому любой исходной теореме-формуле соответствует теорема-формула, сопряжённая по отношению к исходной. Другими совами, двум различным *целям* задачи преобразования (упрощения) одного тригонометрического выражения на другое соответствует пара формул.

Образно говоря, если я хочу от исходного тригонометрического выражения $\mathcal{A}$ перейти к другому — выражению $\mathcal{B}$, — и, наоборот, из $\mathcal{B}$ к $\mathcal{A}$, тогда я найду и докажу одну-единственную теорему-формулу и буду пользоваться ею сразу в двух направлениях: прямом ($\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$) и соответственно обратном ($\mathcal{A} \Leftarrow \mathcal{B}$).

Определение. Задача перехода от выражения $\mathcal{A}$ перейти к выражению $\mathcal{B}$ называется **исходной** задачей ($\mathcal{A} \Rrightarrow \mathcal{B}$). Если потребность также состоит в переходе из $\mathcal{B}$ к $\mathcal{A}$, то такую задачу будем называть **двойственной к исходной** ($\mathcal{A} \Lleftarrow \mathcal{B}$). Объединяя обе задачи, будем говорить о наличии **взаимодвойственных задач** ($\mathcal{A} \Lleftarrow\Rrightarrow \mathcal{B}$).

Определение. **Взаимодвойственные формулы** — это две формулы, реализующие по-отдельности взаимодвойственные задачи.

Примеры.

А. Основному тригонометрическому тождеству (ОТТ) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ соответствует формула, симметричная относительно знака равенства «=», т. е. $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$. В данном примере исходная цель задачи заключается в применении определения тригонометрической единицы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, а ей двойственная — замене числового выражения 1 на тригонометрическую единицу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

Б. Следствию из ОТТ для синуса $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ сопоставляется другое следствие — для косинуса $cos\,\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Цели прямо «противоположные»: выразить либо синус, либо косинус.

В. *Контрпример 1*: к формуле $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ НЕ сопряжена формула $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$, т. е. вторая не будет двойственной к исходной, так как цели их «отождествить с 1» совпадают (а по определению они различны).

Г. Закон отражения в символьном виде $\varphi_{\text{отр}} = \varphi_{\text{пад}}$ «угол отражения равен углу падения» также имеет обратную формулировку утверждения $\varphi_{\text{пад}} = \varphi_{\text{отр}}$ «угол падения равен углу отражения».
P. S. Отличие первого прочтения от второго кажется несущественным и зачастую в учебниках физики пишут именно вторую, а не первую. Посмотрим внимательнее на этот вопрос с позиции *принципа двойственности*. Исходная задача (цель) состоит как раз в том, чтобы доказать, чему равен ***угол отражения***, а не ~~угол падения~~ [угол падения и так сам себе равен! чего его искать лишний раз!?]. Значит, правильнее писать $\varphi_{\text{отр}} = \varphi_{\text{пад}}$ и произносить как по написанному, дабы не терять смысл постановки исходной задачи. А что же тогда означает равенство $\varphi_{\text{пад}} = \varphi_{\text{отр}}$ ведь оно истинно в силу свойств равных выражений? На самом деле, равенство $\varphi_{\text{пад}} = \varphi_{\text{отр}}$ по тому и верно, что является *НЕ* законом (т. е. теоремой), а **следствием его** [по свойству симметричности равенства]. Вывод прост: даже если формулы очень-очень похожи, однако смысл в них вкладываемый может сильно разиться, поэтому необходимо помнить о прямой/исходной и обратной/двойственной задачах.

Д. *Контрпример 2*: формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ *НЕ* являются взаимодвойственными, поскольку вторая не содержит информацию о первой, и наоборот. Следовательно, невозможно совершить переход из одной в другую.

Е. *Контрпример 3*: формула $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ *НЕ* будет двойственной к $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, так как описывает не все возможные случаи для исходной.

Некоторые (простые) свойства взаимодвойственных формул:

i. Если существует для исходной задачи $\mathcal{A} \Rrightarrow \mathcal{B}$ формула, реализующая её, то найдётся также и формула, реализующая двойственную задачу $\mathcal{A} \Lleftarrow \mathcal{B}$.
ii. Если двойственная к исходной формуле существует, то она единственна.
iii. Взаимодвойственных формул не больше двух (0, 1 или 2).

iv. Формулы, удовлетворяющие принципу двойственности, есть взаимодвойственные ($\mathcal{A} \Longleftarrow\!\!\!\Longrightarrow \mathcal{B}$).
v. Необходимое условие взаимодвойственности: функции над переменными у обеих формул совпадают.
vi. Достаточное условие взаимодвойственности: обе формулы представляют собой взаимообратные функции от некоторой переменной по множеству.
vii. Формулы тогда и только тогда взаимодвойственные, когда любая их *суперпозиция* ‘подстановка одна в другую’ даёт **тождество**;
viii. ООФ[1] в исходной формуле либо равна, либо совпадает с МЗФ в двойственной.

Определение. Если взаимодвойственные формулы отличаются лишь симметрией относительно знака равенства «=», то мы их будем называть *вырожденными*. В противном случае будем говорить о *невырожденности*.

Вырожденность иллюстрирует тривиальную ситуацию, а невырожденность — «чистую», самую «настоящую» взаимодвойственность.

Примеры.

1. Формулы $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$ и $\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta = \cos(\alpha+\beta)$ представляют собой вырожденный случай взаимодвойственности.
2. *Контрпример*: $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ и $cos\,\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ — невырожденная взаимодвойственность.

Таким образом, вырожденную взаимодвойственность легко «узреть» из задания обеих формул, а также запросто можно построить двойственную формулу по исходной. Однако всё не так просто с невырожденной взаимодвойственность…

Дело в том, что не всегда можно построить — увидеть как оно есть на бумаге, двойственную по исходной формулу. Свойства взаимодвойственных формул говорят только о существовании обеих друг друга, но не задают алгоритм нахождения.

Во-первых, это зависит от набора аргументов. Чем их больше, тем труднее представить двойственную, зависящую от всего этого «добра».

Во-вторых, зависит напрямую от используемых в формуле функций. Больше степеней, корней, коэффициентов и т. д. и т. п. — больше трудностей у нас будут.

В-третьих, от свойств этих функций. Есть безобидные, пускай и «страшные», функции типа «тангенс», «котангенс». НО: их произведение от одного аргумента даст 1, т. е. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$!!! Либо же квадрат суммы/разности двух выражений «сворачиваем» по известной формуле.

Основная теорема взаимодвойственных формул.

Следующие формулировки эквивалентны на одном множестве допустимых значений аргументов функций и всех ООФ:

а) две взаимодвойственные формулы либо одновременно истинны, либо ложны;
б) пара взаимодвойственных формул не может иметь разные истинные/ложные формулировки своих утверждений;

[1] ООФ — аббревиатура к словосочетанию «область определения функции».

в) если существует доказательство исходной формулы, то найдётся доказательство для её двойственной, и наоборот;

Простая истина вытекает непосредственно из основной теоремы, а именно — **метод, состоящий в применении *принципа двойственности*.**

Суть метода: хотим решить задачу (доказать теорему-формулу); тогда строим двойственную задачу (теорему) и решаем (доказываем) её; если двойственная задача решена (формула доказана), тогда из свойств взаимодвойственности непременно следует и само решение (доказательство); по смыслу задачи (теоремы) возвращаемся к исходной позиции с найденным решением (доказательством).

Замечание. Данный метод не указывает, как именно нам следует строить двойственную задачу. В этом основное «коварство» принципа двойственности, однако правильно подобрав **признаки выбора применения метода**, мы будем *«вознаграждены» интересным и быстрым решением*. Таким образом, произвол в выборе построения двойственной задачи может быть только в начале, а дальше дело наших «рук».

Так, например, решая задачу по нахождению $\cos(\alpha+\beta)$, мы решали (сами того не зная) двойственную $\cos(\alpha-\beta)$, а потом легко вышли на финишную прямую.

Теперь рассмотрим принцип двойственности на примере следствий из теорем сложения.

К ним относят следующие формулы: кратных аргументов, понижения степени функций, деления аргумента, разложения на множители (произведения) и суммы/разности функций.

Следствие 5. ***Формулы кратных аргументов***

Определение. Дуги (или углы) $2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \ldots$ называются дугами (углами), кра́тными α.

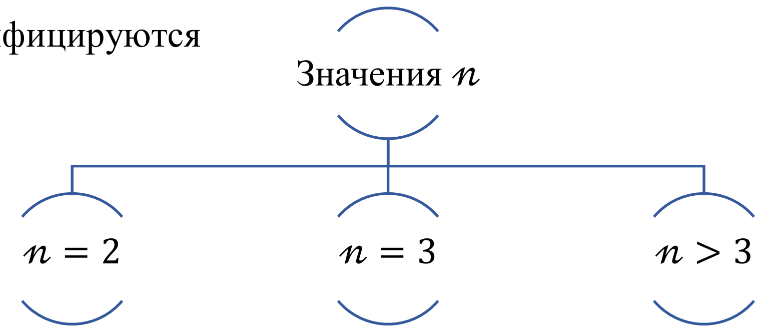
Постановка задачи: вывести формулы, выражающие тригонометрические функции кратных аргументов через функции аргумента α.

Для начала найдём $\sin n\alpha$ и $\cos n\alpha$ в зависимости от $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, для любого натурального числа n.

Формулы кратных аргументов классифицируются

на 3 групповых семейства:

А. формулы двойных аргументов;
Б. формулы тройных аргументов;
В. формулы для аргументов более высокой степени.



Рассмотрим только семейство формул группы **А**, то есть для случая $n = 2$.

Синус двойного аргумента

Задание 4.1 Продолжите фразу: «Для того чтобы найти $\sin 2\alpha$, зная $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, достаточно … ».

Задание 4.2 Оформить вывод *первой* формулы двойного аргумента для синуса по схеме «Утверждение-обоснование».

Задача 4.1 {ЕГЭ: 500111}. Найти все корни уравнения $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ \frac{7\pi}{2}\right]$.

Упражнение 4.1. Доказать *вторую* формулу синуса двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1.$$

Пример. Пусть $\alpha = 30°$. Проверим для данного значения две предыдущие формулы.

С одной стороны,

$$\sin(2\cdot 30°) = (\sin 30° + \cos 30°)^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2;$$

$$\frac{\sqrt{3}+2}{2} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{4} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} + 4 = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 \Leftrightarrow \mathbf{1 + 2\sqrt{3} + 3 = 1 + 2\sqrt{3} + 3.}$$

С другой стороны, $\sin(2\cdot 30°) = 2\cdot\sin 30°\cdot\cos 30° \xLeftrightarrow{\sin 60° = \cos 30°} 1 = 2\cdot\sin 30°$.

В обоих случаях получили истинные равенства.

Задача 4.2 {ЕГЭ: 509501}. Найти все корни уравнения $\sin 2x + 2\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}$, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

Задание 4.3 Сделать умозаключение о способах и необходимом условии, зная который можно вычислить $\sin 2\alpha$.

Задача 4.3 {ЕГЭ: 507638}. Найти все корни уравнения $\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x = \sin x$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Косинус двойного аргумента

Задание 4.4 Доказать *первую* формулу двойного аргумента для косинуса, а именно

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Задача 4.4 {ЕГЭ: 511337}. Найти все корни уравнения $\cos 2x + \sin^2 x = 0{,}75$, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Задание 4.5 Получить ещё две формулы, каждая из которых не содержит $\sin\alpha$ либо $\cos\alpha$.

Задача 4.5 {ЕГЭ: 513071}. Найти все корни уравнения $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 1 = 0$, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Теперь выведем формулу для тангенса двойного аргумента.

Дано: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \ (k \in \mathbb{Z}), \operatorname{tg}\alpha$

Решение.

Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$.

№	Утверждение	Обоснование
1	$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad \begin{cases} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi l \\ \alpha+\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi t \end{cases} \mid k, l, t \in \mathbb{Z}$	**свойство тангенса суммы двух аргументов**, условие {в формуле используем $\operatorname{tg}\alpha$}
2	$\left. \begin{array}{c} \beta := \alpha \\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \end{array} \right\vert \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha}$	**пункт 1**, отождествление переменных (α и β)
3	$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \begin{cases} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} t \end{cases} \mid k, t \in \mathbb{Z}}$	**пункт 2**, приведение подобных слагаемых, определение квадрата алгебраического выражения

Ответ: $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \begin{cases} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} t \end{cases} \mid k, t \in \mathbb{Z}.$

Упражнение 4.2. Вывести формулу для котангенса двойного аргумента.

Задание 4.6 Получить также следующие формулы:

$$1)\ \sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \ \Big| \ k \in \mathbb{Z}$$

$$2)\ \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \ \Big| \ k \in \mathbb{Z}$$

$$3)\ \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha} \quad \left. \begin{cases} \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k \\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} p \end{cases} \right| k, p \in \mathbb{Z}$$

Задание 4.7 Самостоятельно изучить: метод вспомогательного угла.

Следствие 6. ***Формулы понижения степени тригонометрической функции***

Задание 4.8 Найти эти формулы в справочных материалах.

Формулы кратных аргументов служат для *понижения кратности*, то есть выражают $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\sin 2\alpha$ и $\cos \alpha$ и пр., но зато приводят к *повышению степени* в правых частях равенства. И наоборот, *выражая* $\sin^2 \alpha$ и $\cos^2 \alpha$ и пр. через первые их степени, мы обязательно *повышаем кратность* аргументов у этих функций.

Таким образом, перед нами открывается возможность вести преобразования в двух противоположных направлениях: *понижать кратность, повышая степень, или, наоборот, понижать степень, повышая кратность*.

Следовательно, **все эти формулы представляются нами взаимодвойственными**.