Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2015**

Elemente der Algebra

Arbeitsblatt 23

Übungsaufgaben

Aufgabe 23.1.*

Bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $2 + 5i$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 23.2. Bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $\sqrt{2} - \sqrt{5}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 23.3. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad 1. Zeige, dass $L = K$ ist.

Aufgabe 23.4. Es sei $\mathbb{C} \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige

$$\mathbb{C} = L.$$

Aufgabe 23.5. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige: P besitzt genau dann eine Nullstelle in L, wenn es einen K-Algebra-Homomorphismus $K[X]/(P) \to L$ gibt.

Aufgabe 23.6. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und sei $f \in L$ ein Element. Zeige: f ist genau dann algebraisch über K, wenn $K[f] = K(f)$ ist.

Aufgabe 23.7. Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung und $K \subseteq K' \subseteq L$ ein Zwischenkörper. Es sei $f \in L$ algebraisch über K. Zeige, dass dann f auch algebraisch über K' ist.

Aufgabe 23.8.*

Es sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, eine algebraische Zahl. Zeige, dass auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z} = a - bi$ sowie der Real- und der Imaginärteil von z algebraisch sind. Man bestimme den Grad der Körpererweiterung

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}\,.$$

Aufgabe 23.9. Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ keine endliche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 23.10. a) Man gebe eine Gerade G in der Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ an, die keine algebraische Zahl enthält.

b) Man gebe einen Kreis K in der Ebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ an, der keine algebraische Zahl enthält.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 23.11. (3 Punkte)

Bestimme das Inverse von $2x^2+3x-1$ im Körper $\mathbb{Q}[X]/(X^3-5)$ (x bezeichnet die Restklasse von X).

Aufgabe 23.12. (5 Punkte)

Sei K ein Körper und sei $L = K(X)$ der rationale Funktionenkörper über K. Zeige, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}_+$ einen Ringhomomorphismus $\varphi\colon L \to L$ gibt derart, dass $L \cong \varphi(L) \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad n ist.

Aufgabe 23.13. (4 Punkte)

Bestimme das Minimalpolynom der komplexen Zahl $2i - 3\sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 23.14. (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl und $q = p^n$, $n \geq 2$. Zeige, dass $\mathbb{Z}/(p^n)$ kein Vektorraum über $\mathbb{Z}/(p)$ sein kann.