師範教科

平面幾何 附 算術

理學士
吉田好九郎 編

東京
明治圖書株式會社

序

本書編纂ノ主意ハ「代數及算術」之部ノ序ニ於テ已ニ之ヲ述ベオキタリ.

抑々推理力ヲ養成スルト共ニ實地ノ應用ニ熟練セシムルコトヲ目的トスル,普通敎育ニ於ケル幾何學ヲ敎授スルニ方リテハ特ニ算術トノ聯絡ヲ圖ラザルベカラズトハ之レ著者ノ宿論ナリキ. 今回發布ノ文部省ノ敎授要目中ニ「幾何附算術」ト明示シアルモ亦此主意ニ出デタル者ナラント信ズ.

著者ノ私見トシテハ「代數及算術」之部ニ於テ對數ノ一般的說明ヲナスヲ至當ナリト信ズレドモ,已ニ根本ニ於テ著者ノ宿論ト一致シタル以上ハ小異ヲ捨テテ斷然文部省ノ要目ヲ遵守シ本書ニ於テ對數ヲ述ブルコトトセリ.

本書ハ「代數及算術」之部ト相聯關スル敎科書ナルコト勿論ナリト雖モ,本書ノミヲ用フルモ毫モ差支ナシ,是レ著者ガ特ニ意ヲ用ヒタル所ナリ.

明治四十三年十二月

理學士　吉田好九郎識

目　次

第一編　緒論……1
第二編　直線……6
角……6
平行線……16
第三編　直線形……22
三角形……22
平行四邊形……46
求積……57
第四編　圓……82
弧……86
弦……91
弓形……101
切線……109
第五編　軌跡……115
第六編　圓ノ續キ……128
內接及外接多角形……128

二ツノ圓……134
第七編 作圖題……141
第八編 比及比例……176
總論……176
比例線……187
相似形……208
求積……223
第九編 三角函數……254
直角三角形ノ解法……270
第十編 對數……275
常用對數……279
對數表ノ用法……284
三角函數ノ對數……295
對數ヲ用ヒテ直角三角形ヲ解クコト……301
直角三角形ノ解法ノ應用……306
答
對數表

師範教科

平面幾何附算術

第一編 緒論

1. 體,面,線,點 茲ニ一ツノ物體アリトセンニ此物體ヲ組成スル物質ノ如何ヲ問ハズ單ニ其形チ大サ及位置ノミニ就テ考フルトキハ之ヲ**立體**或ハ略シテ**體**トイフ.

面トハ廣ガリノミアリテ厚サナキモノナリ.

立體ノ境界ハ卽チ面ナリ,例ヘバ机ノ表面卽チ机ト空氣トノ境ハ廣ガリノミアリテ厚サナキガユヱニ面ナリ.

線トハ長サノミアリテ厚サモ幅モナキモノナリ.

面ノ一部ヲ限ルトキハ其境界ハ線ナリ. 又面ト面トノ交リハ線ナリ.

點トハ位置ノミアリテ大サナキモノナリ.

線ノ一部ヲ限ルトキハ其端ハ點ナリ．又線ト線トノ交リハ點ナリ．

點ヲ表スニハ●ヲ以テシ其傍ニ一ツノ大羅馬字ヲ書キテ之ヲ呼ブ，例ヘバ右ニ示セル點ヲ點**A**ト呼ブガ如シ．

・A

2. 直線，曲線 直線トハ眞直なる線トイフコトナリ，例ヘバ緊張シタル絲ナドニヨリテ容易ニ其觀念ヲ得ベシ．

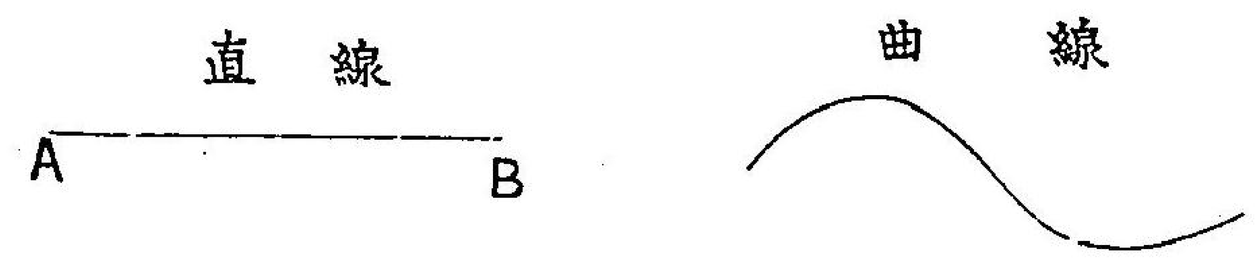
直線ハ双方ヘ限リナキモノトス．其一部分ヲ限ルトキハ之ヲ**有限直線**トイヒ，其殘リノ部分ヲ其**延長**トイフ．

有限直線ヲ表スニハ通例其兩端ノ點ノ名ヲ並ベ書キテ之ヲ呼ブ，例ヘバ**有限直線 AB** ト呼ブガ如シ．

無限直線ヲ表スニハ通例其上ニアル任意ノ二點ノ名ヲ並ベ書キテ之ヲ呼ブ，例ヘバ**直線 XY** ト呼ブガ如シ．

或場合ニハ有限直線，無限直線ニ拘ラズ其傍ニ一ツノ羅馬字ヲ書キテ之ヲ呼ブヿアリ，例ヘバ**直線** a トイフガ如シ．

直線ニアラザル線ヲ**曲線**トイフ．



3. 圖形 體，面，線，點若クハ其集合ヲ稱シテ**圖形**トイフ．

幾何學ハ圖形ノ性質ヲ研究スル學科ナリ．

4. 公理，定理，系 **公理**トハ吾人ノ常識ニヨリテ認メ得ベキ簡單ナル事實ニシテ之ガ證據ヲ求ムルモ得ベカラザルモノナリ．就中幾何學ニ限リテ用ヒラルルモノヲ**幾何學公理**トイヒ，普通ニ用ヒラルルモノヲ**普通公理**トイフ．本書ニハ普通公理ヲ揭ゲズ，但シ之ヲ用フルコト勿論ナリ．

定理ハ一ツノ事實ニシテ公理或ハ其他ノ既知ノ事實ニ基キテ其眞ナルコトヲ證明シ得ベキ者ナリ．

系ハ定理或ハ公理等ニ附隨シテ起ル簡單ナル事實ナリ．

5. 公理 一 圖形ハ其大サ及形チヲ變ズルコトナクシテ其位置ヲ變ズルヲ得．

公理二 二點ヲ通ル直線ハ必ズ唯一ツアリ.

系 1. 二點ヲ共有スル直線ハ全ク相合ス.

系 2. 一點ニ於テ出會フ二直線ハ全ク相合スルニ非レバ再ビ出會フコトナシ.

系 3. 一ツノ直線上ノ定點ガ他ノ直線上ノ定點ニ合シ且ツ此二直線ガ全ク相合スル様ニ置クコトヲ得.

定義* 唯一點ヲ共有スル二直線ハ**相交る**トイフ.

6. 二點間の距離 二點ヲ夫々兩端トスル有限直線ヲ作ルコトヲ此二點ヲ**結び付くる**トイヒ,其長サヲ此二點間ノ**距離**トイフ.

7. 平面,曲面 **平面**トハ面ノ一種ニシテ其上ニ

*或語ノ意義ヲ定ムルモノヲ其語ノ**定義**トイフ.

アル任意ノ二點ヲ結ビ付クル直線ガ全ク此面上ニ在ルモノナリ.

平面ニアラザル面ヲ**曲面**トイフ.

面ガ平ラカナルカ否カヲ見ルニハ良ク作リタル定規ノ線ヲ其面ノ上ニ種々ノ位置ニ置キ之ガ常ニ全ク其面ニ合スルヤ否ヤヲ見レバヨシ.

8. 總テノ部分ガ同一平面上ニアル圖形ヲ**平面圖形**或ハ略シテ**平面形**トイフ.

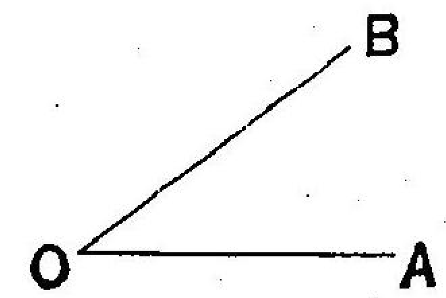
一ツノ圖形ヲ他ノ圖形ノ上ニ相一致スル様ニ(即チ其各部分ガ少シモ隙間ナク合スル様ニ)重ネ得ルトキハ此二ツノ圖形ハ**相等し**或ハ**全く相等し**トイフ.

第二編　直線

角

9. 角　一點ヨリ引キタル二直線ハ**角をなす**又ハ**角を夾む**トイフ.

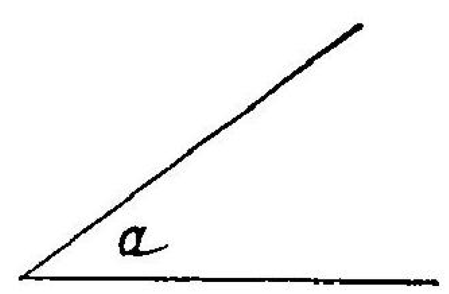
其點ヲ角ノ頂點,其二直線ヲ角ノ邊トイフ.



圖ニ於テハOハ角ノ頂點,OA, OBハ角ノ邊ナリ.

此角ヲ呼ブニハ頂點ノ文字Oヲ以テシ之ヲ**角O**ト呼ブカ若クハ此文字ヲ各邊上ノ一點ヲ示ス文字ノ間ニ挾ミテ之ヲ**角AOB**或ハ**角BOA**ト呼ブ.

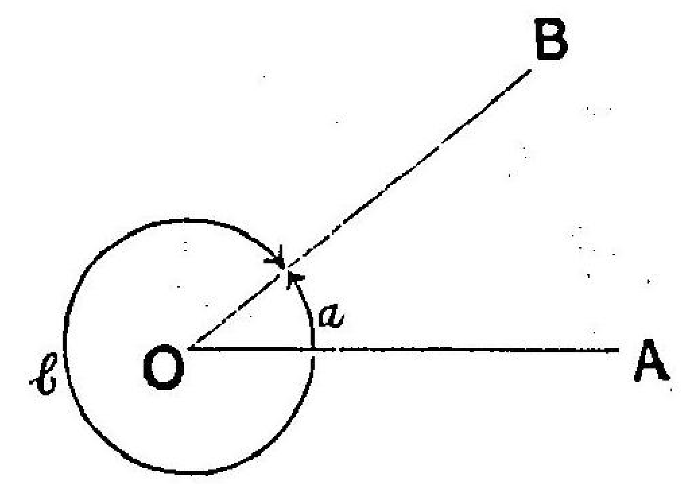
又或場合ニハ角ノ內ニ一ツノ小羅馬字ヲ書キ其文字ニテ角ノ名ヲ呼ブコトアリ,例ヘバ右ニ示セル角ヲ**角**aト呼ブガ如シ.



角トイフ文字ノ代リニ符號∠ヲ用フルコトアリ,例ヘバ∠O,∠AOB,∠aノ如シ.

10. 角の大小,共軛角　一ツノ角AOBノ頂點Oヨリ引ケル直線ガ最初其一邊OAノ上ニ重サナリ居リ,夫ヨリ其角ノ平面上ニ於テOノ周リヲ同ジ向キニ廻轉シ他ノ邊OBト合スル位置ニ來リタルトキハ此直線ハ**∠AOBだけ廻轉したり**トイフ. 角ノ大小ハ此廻轉ノ多少ニヨリテ測ルモノトス,從テ角ノ大小ハ其邊ノ長短ニ關係ナシ.

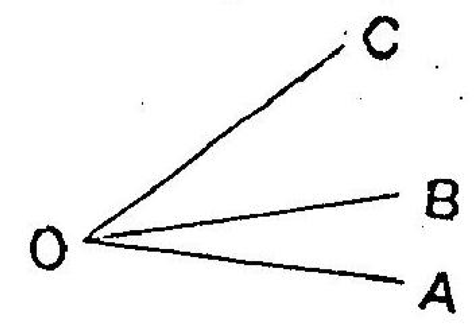
此直線ガ初ノ位置ヨリ後ノ位置マデ廻轉スル方法ハ右圖ニ於テ矢ノ向キニテ示セル如ク二樣アルヲ以テ二直線OA,OBノナス角モ亦二ツアリ. 此二角ヲ**互に共軛なり**トイフ,卽チ∠aハ∠bノ共軛角ニシテ∠bハ∠aノ共軛角ナリ.



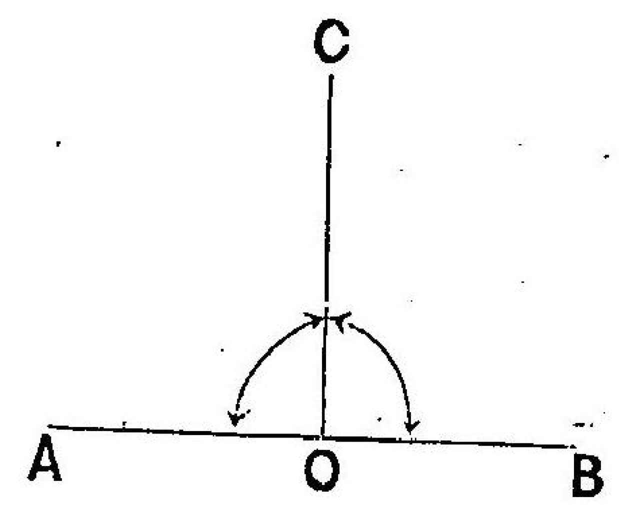
二ツノ共軛角ノ中,大ナル方ヲ**優角**トイヒ,小ナル方ヲ**劣角**トイフ. 以下單ニ角トイヘバ劣角ノコトナリト知ルベシ.

11. 接角　平面上ノ一點Oヨリ此ノ平面上ニ三直線OA,OB,OCヲ引キOBガ∠AOCノ內ニアルトキハ

$\angle AOB$ ト $\angle BOC$ トヲ**接角**トイフ.



12. 直角 直線AB上ノ一點Oヨリ直線OCヲ引キタルトキ接角AOC, BOCガ相等シケレバ此各ノ角ヲ**直角**トイフ.

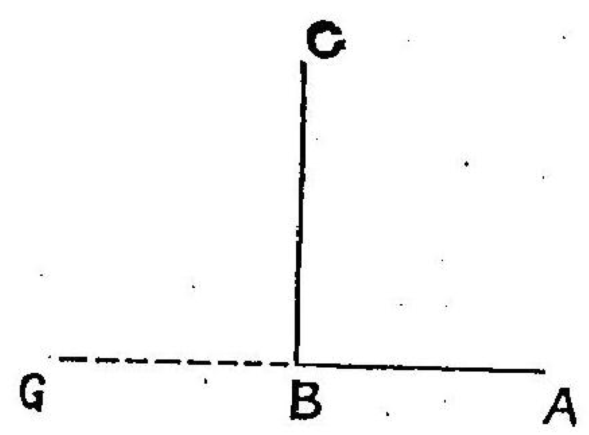


直角ヲ表スニ符號 $\angle \mathbf{R}$ ヲ用フルコトアリ.

13. 定理 凡テ直角ハ相等シ.

題意 $\angle ABC$ 及 $\angle DEF$ ガ何レモ直角ナルトキハ $\angle ABC$ ト $\angle DEF$ トハ互ニ相等シカルベシ.

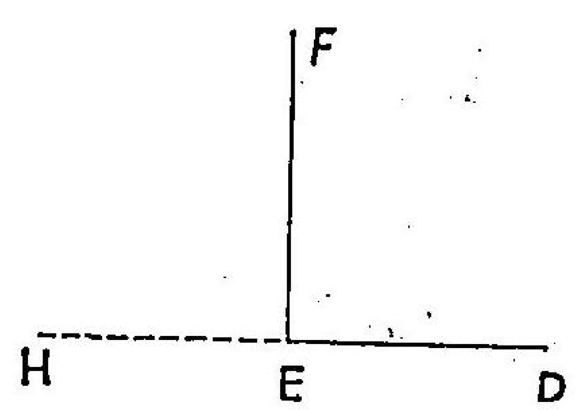
證明 $\angle ABC$ ノ一邊ABヲ延長シテBGヲ作レバ假定ニヨリ $\angle ABC$ ハ直角ナルヲ以テ



$$\angle ABC = \angle GBC \quad (\text{前節})$$

$$\therefore^{*} \quad \angle ABC = \frac{1}{2}\angle ABG$$

同樣ニ $\angle DEF$ ノ一邊DEヲ延長シテEHヲ作レバ



* ∴ハ故ニトイフ語ノ符號ナリ

$$\angle DEF = \frac{1}{2}\angle DEH$$

サテ直線DEHヲ直線ABGノ上ニ重ネ, EガBニ合スル樣ニ置クコトヲ得(5節公理二系3).

$$\therefore \quad \angle ABG = \angle DEH \quad (8\text{節})$$

然ルニ $\angle ABC$, $\angle DEF$ ハ夫々相等シキ角 $\angle ABG$, $\angle DEH$ ノ半分ナルヲ以テ

$$\angle ABC = \angle DEF$$

ナルコト明カナリ.

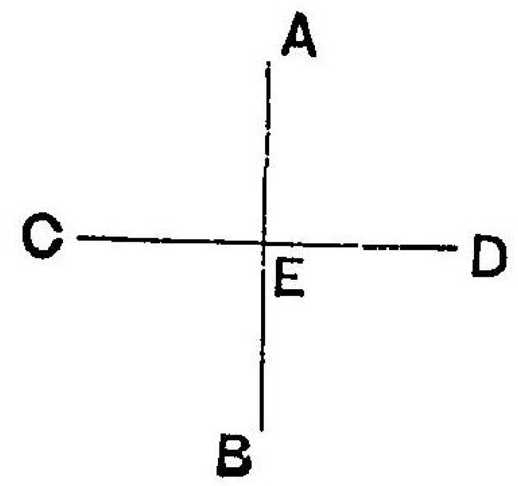
系 1. 直線上ノ一點ヨリ此直線ノ同ジ側ニ數多ノ直線ヲ引クトキニ出來ル次ギ次ギノ接角ノ和ハ二直角ニ等シ.

系 2. 一點ヨリ數多ノ直線ヲ引クトキニ出來ル次ギ次ギノ接角ノ和ハ四直角ニ等シ.

系 3. 二ツノ接角AOC, BOCノ和ガ二直角ニ等シキトキハ其共通ナラザル邊OA, OBハ同一直線ヲナス.

問題1. 二ツノ共軛角相等シキトキハ各角ハ幾直角ナリヤ.

14. 垂線 二直線AB,CDガEニ於テ相交リ,ソノナス所ノ一角例ヘバ∠AEDガ直角ナルトキハ他ノ三ツノ角モ皆直角ナリ.(前節系1)



此ノ如キ二直線ハ**互に垂直なり**トイフ,即チABハCDニ垂直ニシテCDハABニ垂直ナリ.

ABトCDトガ垂直ナルコトヲ表スニ**AB⊥CD**ト書ク. 甲乙二直線ガ互ニ垂直ナルトキハ甲ハ乙ノ**垂線**ナリトイヒ,又乙ハ甲ノ垂線ナリトイフ.

二直線ガ互ニ垂直ナルコトヲ此二直線ガ**直角に交る**或ハ略シテ**直交す**トイフコトアリ.

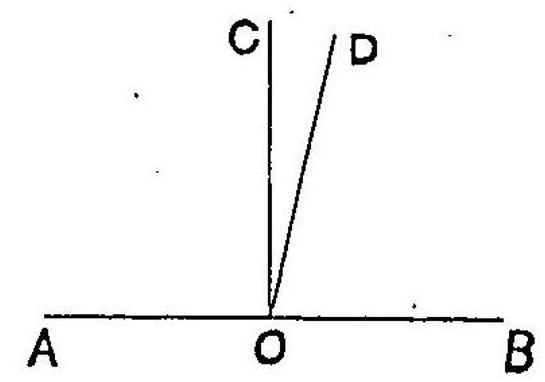
15. 定理 定直線上ノ定點ヨリ此直線ニ必ズ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得.

題意 定直線AB上ノ定點Oヲ通リABニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズアリ,又二ツハ決シテナシ.

證明 ∠AOBヲ二等分スル直線OCヲ引ケバ∠AOC

ハ直角ナリ(12節).

∴ CC⊥AB (前節)



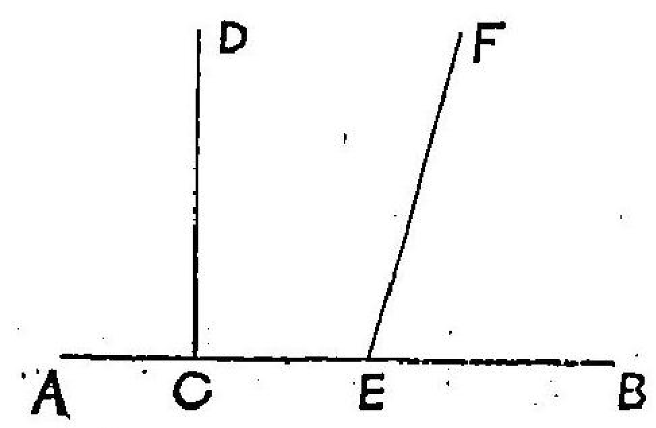
故ニOヲ通リABニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズアリ.

又Oヲ通リテOCニアラザル任意ノ直線ODヲ引ケバ∠AODハ直角ニ等シカラズ,故ニODハABニ垂直ナラズ.

故ニOヲ通リABニ垂直ナル直線ハOCノ外ニハナシ.

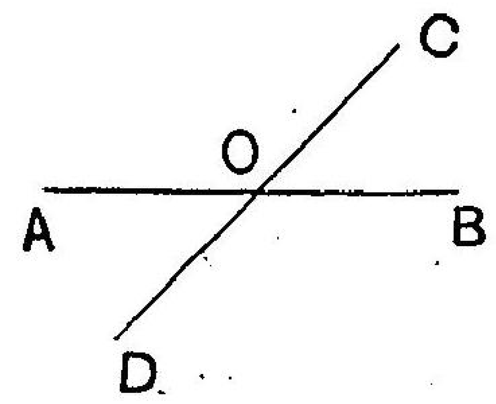
16. 斜線 一ツノ直線ニ交リテ之ニ垂直ナラザル直線ヲ初ノ直線ノ**斜線**トイフ.

一ツノ直線ノ垂線若クハ斜線ガ初ノ直線ト交ル點ヲ此垂線若クハ斜線ノ**足**トイフ. 右圖ニ於テCDハABノ垂線ニシテCハ其足ナリ. 又EFハABノ斜線ニシテEハ其足ナリ.



17. 對頂角 相交ル二直線ノナス四ツノ角ノ中接角ナラザル二ツノ角ヲ**對頂角**トイフ.

例ヘバ右圖ニ於テ∠AOCト∠BODトハ對頂角,又∠AODト∠BOCトハ對頂角ナリ.



18. 定理　對頂角ハ相等シ.

題意　二直線AB,CDガ交リテナス二組ノ對頂角ヲ$\angle a$, $\angle b$及$\angle c$, $\angle d$トスレバ$\angle a=\angle b$ニシテ$\angle c=\angle d$ナルベシ.

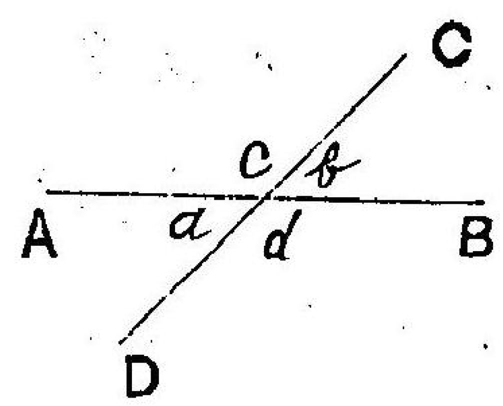
證明　$\angle a+\angle c=2\angle \mathrm{R}$　(13節系1)

又　$\angle b+\angle c=2\angle \mathrm{R}$　(同上)

$\therefore\quad \angle a+\angle c=\angle b+\angle c$

$\therefore\quad \angle a=\angle b$

同理ニテ　$\angle c=\angle d$



19. 實用上に於ける角の單位　實用上ニ於テ角ヲ測ルニハ通例直角ノ$\frac{1}{90}$ヲ基本單位ニ取リ之ヲ**1度**ト名ヅク,即チ

$$1\text{直角}=90\text{度}$$

ナリ. 其補助單位ハ**分**,**秒**ニシテ此等ノ間ノ關係ハ次ノ如シ.

$$1\text{度}=60\text{分}$$

$$1\text{分}=60\text{秒}$$

度,分,秒ヲ表スニハ之ヲ示ス數ノ右肩ニ夫々符號°,′,″ヲ附ス. 例ヘバ23度39分17秒ヲ23°39′17″ト記スガ如シ.

問題 2.　直線OAニ重ナレル直線ガOヲ固定シ,常ニ同ジ平面上ニ在リテ同ジ向キニ廻轉シ再ビOAノ位置ニ來レバ其直線ガ廻轉セシ角ハ何度ナルカ.

問題 3.　互ニ共軛ナル二角ノ中劣角ガ125°ナラバ優角ハ何度ナルカ.

問題 4.　2直角,$\frac{3}{4}$直角,1.32直角ヲ夫々度,分,秒ニテ表セ.

20. 鋭角,鈍角,餘角,補角　直角ヨリ小ナル角ヲ**鋭角**トイフ,例ヘバ30°,50°等ノ角ハ鋭角ナリ.

直角ヨリ大ニシテ二直角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**トイフ,例ヘバ120°, 165°等ノ角ハ鈍角ナリ.

二ツ加ヘテ直角トナル角ヲ**互に餘角なり**トイフ,例ヘバ40°ノ餘角ハ50°ニシテ50°ノ餘角ハ40°ナリ.

二ツ加ヘテ二直角トナル角ヲ**互に補角なり**トイフ,例ヘバ30°ノ補角ハ150°ニシテ150°ノ補角ハ30°

ナリ,

問題 5. 30°, 45°, 75°24′ ノ餘角ハ夫々何程ナルカ.

問題 6. 5°; 135°14′, 24°49′50″ ノ補角ハ夫々何程ナルカ.

練習

問題 7. 有限直線ABノ中點ヲCトシAB上ノ他ノ任意ノ點ヲDトスレバAD, BDノ差ハCDノ二倍ニ等シ.

問題 8. 有限直線ABノ中點ヲCトシABノ延長ノ上ノ任意ノ點ヲDトスレバAD, BDノ和ハCDノ二倍ニ等シ.

問題 9. 角ノ二等分線ノ延長ハ其共軛角ヲ二等分ス.

問題 10. 一分時間ニ時計ノ長針ハドレダケノ角度ヲ廻ルカ. 短針ハ如何.

問題 11. 時計ガ十時ヲ打ツトキ長針ト短針トノ夾ム角ハ何度ナルカ.

問題 12. 時計ガ九時三十五分ヲ指ストキ長針ト短針トノ夾ム角ヲ計算セヨ.

***問題 13.** 一ツノ直線ガ他ノ直線ニ交リテナス二ツノ接角ヲ二等分スル二直線ハ互ニ垂直ナリ.

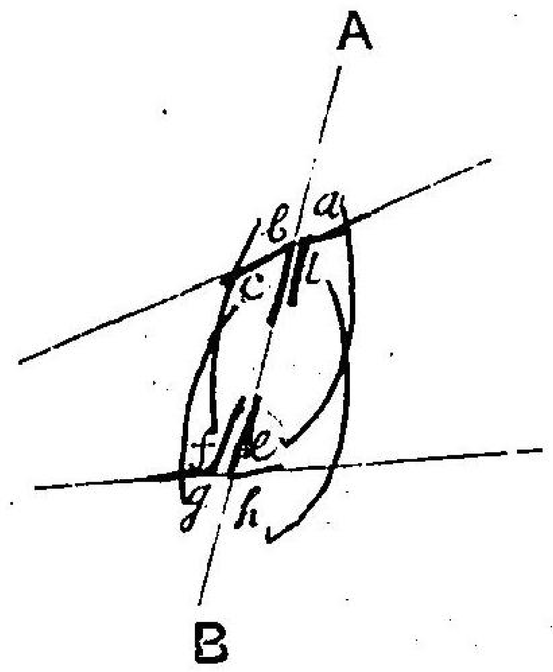
注意 星 * ヲ附ケタル問題ハ重要ナリ,後ニ至リテ之ヲ用フルコトアルベシ.

***問題 14.** 直線AB上ノ一點Oヨリ二直線OC, ODヲ一ツ宛反對ノ側ニ引キ∠BOD=∠AOCナラシムレバOCトODトハ一直線ヲナス.

***問題 15.** 對頂角ヲ二等分スル二直線ハ同一ノ直線ヲナス.

平　行　線

21. 定義　一直線ABガ他ノ二直線ト交ルトキハ八ツノ角 a, b, c, d, e, f, g, h ヲ生ズ,而シテ此等ノ位置ノ相互ノ關係ニヨリテ次ノ如キ名稱ヲ附ス.



(1)　$\angle c, \angle d, \angle e, \angle f$ ノ各ヲ**内角**トイヒ,$\angle a, \angle b, \angle g, \angle h$ ノ各ヲ**外角**トイフ.

(2)　$\angle c$ ト $\angle e$ 及 $\angle d$ ト $\angle f$ ノ各組ヲ**錯角**トイフ.

(3)　$\angle a$ ト $\angle e$, $\angle b$ ト $\angle f$, $\angle d$ ト $\angle h$, $\angle c$ ト $\angle g$ ノ各組ヲ**同位角**トイフ.

22. 平行線　同一平面上ニアル二直線ガ之ヲ双方ヘ何程延長スルモ相交ラザルトキハ此二直線ハ**互に平行なり**トイフ.

二直線 AB, CD ガ平行ナルコトヲ表スニ **AB//CD** ト書ク.

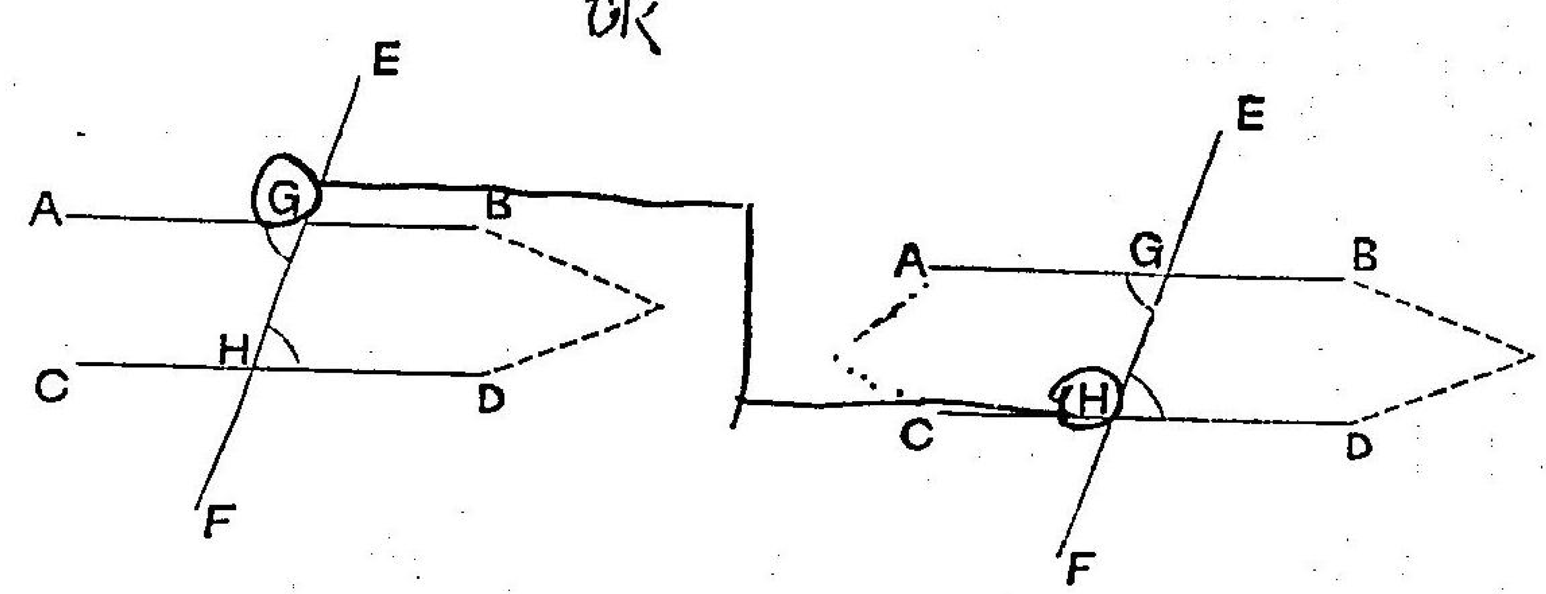
23. 定理　一直線ガ他ノ二直線ト交リテナス一組ノ錯角ガ相等シケレバ其二直線ハ互ニ平行ナリ.

題意　二直線AB, CDガ直線EFト夫々G, Hニ於テ交リテナス一組ノ錯角例ヘバ∠AGHト∠DHGトガ相等シキトキハ AB//CD ナルベシ.

證明　甲圖ヲ此平面上ニ於テグルリト廻轉シ乙

平行線

(甲　圖)　　　(乙　圖)



圖ノ位置ニ至ラシメ,次ニ乙圖ヲ甲圖ノ上ニ重ネ乙ノFHGEガ甲ノEGHFノ上ニ重ナリ且ツ乙ノHガ甲ノGニ合スル樣ニ置ケ(5節公理二系3). サスレバ乙ノGハ甲ノHニ合スルコト明カナリ.

又乙ノ∠DHGハ甲ノ∠AGHニ等シキユヱ(假定), 乙ノHDハ甲ノGAノ上ニ重ナル.

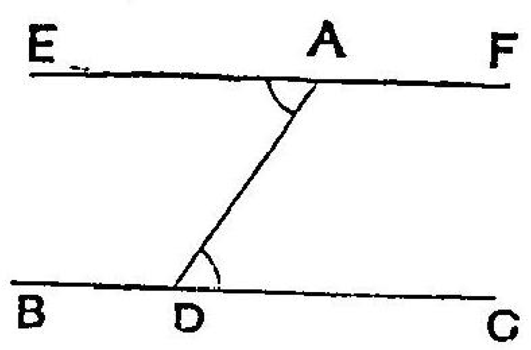
同理ニテ乙ノGBハ甲ノHCノ上ニ重ナル.

即チ乙ノDC, BAハ夫々全ク甲ノAB, CDニ重ナル. 故ニ若シAB, CDヲ右方へ延長シテ交ルトセバ同ジ直線ヲ左方へ延長スルモ亦交ルコトトナル,之レ不合理ナリ(5節公理二).

故ニAB, CDハ何レノ方へ延長スルモ相交ラズ.

即チ $AB /\!/ CD$

系 1. 定點ヲ通リテ定直線ニ平行ナル直線ハ一ツハ必ズ存在ス.



如何ニモ,定點ヲA,定直線ヲBCトセン.BCノ上ニ任意ノ一點Dヲ取リADヲ結ビ付ケAヲ通リテ直線AEヲ,ADニ對シテCト反對ノ側ニ$\angle DAE$ガ$\angle ADC$ニ等シキ樣ニ引ケバ本定理ニヨリテ此直線AEハBCニ平行ナレバナリ.

系 2. 一直線ガ他ノ二直線ト交リテナス一組ノ同位角ガ相等シケレバ其二直線ハ互ニ平行ナリ.

系 3. 同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ互ニ平行ナリ.

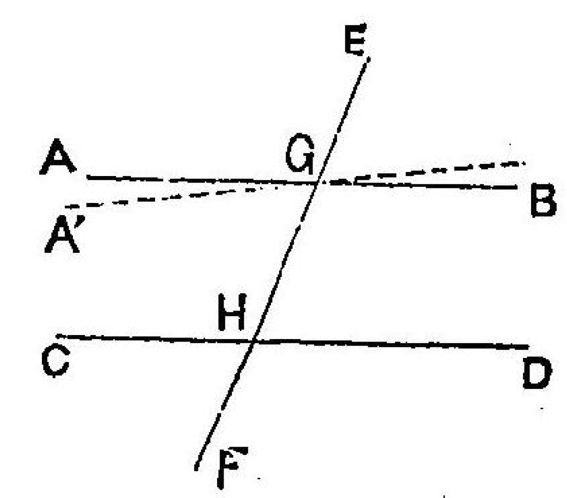
24. 公理三 定點ヲ通リテ定直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル.

系 同ジ直線ニ平行ナル二直線ハ又互ニ平行ナリ.

何トナレバ,若シ此二直線ガ交レバ其交點ヨリ初ノ直線ニ平行ナル直線ヲ二ツ引キ得ルコトトナレバナリ.

25. 定理 一直線ガ二ツノ平行線ニ交リテナス錯角ハ相等シ.

題意 直線EFガ二ツノ平行線AB, CDト夫々G, Hニ於テ交レバ,ソノナス所ノ錯角例ヘバ$\angle AGH$ト$\angle DHG$トハ相等シカルベシ.



證明 若シ$\angle AGH$ト$\angle DHG$トガ相等シカラズトスレバGヲ通リテGHト$\angle DHG$ニ等シキ角ヲナ

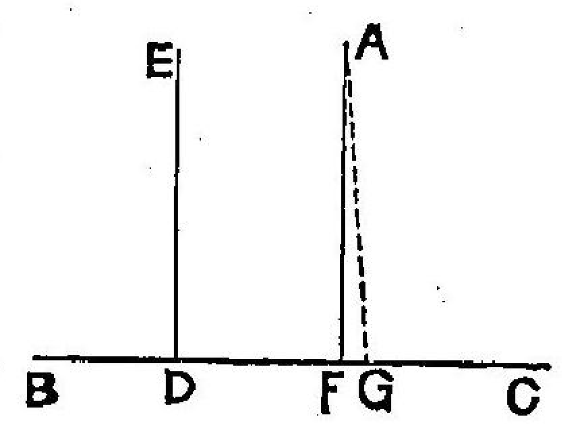
ス直線 A'G ヲ圖ノ如ク引クコトヲ得ベシ. サスレバ A'G モ亦 CD ニ平行トナリ (23節), 一點 G ヲ通リ CD ニ平行ナル直線ヲ二ツ引キ得ルコトトナル, 之レ不合理ナリ(前節).

$$\therefore \quad \angle AGH = \angle DHG$$

系 1. 一直線ガ二ツノ平行線ニ交リテナス同位角ハ相等シ.

系 2. 一直線ガ他ノ一直線ニ垂直ナレバ前ノ直線ニ平行ナル直線ハ總テ後ノ直線ニ垂直ナリ.

系 3. 定直線外ノ定點ヨリ此直線ヘ必ズ唯一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得.



如何ニモ, 定點ヲ A, 定直線ヲ BC トセンニ BC 上ノ任意ノ點 D ヨリ BC ニ垂線 DE ヲ引キ (15節), A ヲ通リ DE ニ平行線 AF ヲ引ケバ系 2 ニヨリ $AF \perp BC$

故ニ A ヲ通リ BC ニ垂直ナル直線ハ一ツハ必ズア

リ. 又 A ヲ通リテ AF ノ外ニ尚 BC ニ垂線 AG ヲ引キ得タリトスレバ $AF /\!/ AG$ トナル(23節系3), 之レ明カニ不合理ナリ

故ニ A ヲ通リ AC ニ垂直ナル直線ハ AF ノ外ニハナシ.

練習

*問題16. 一直線ガ他ノ二直線ト交リテナス所ノ同ジ側ニアル內角ガ互ニ補角ナレバ其二直線ハ互ニ平行ナリ.

*問題17. 一直線ガ二ツノ平行線ニ交リテナス所ノ同ジ側ニアル內角ハ互ニ補角ナリ.

*問題18. 相交ル二直線ニ夫々垂直ナル二直線ハ平行ナラズ.

*問題19. 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ平行ナレバ此二角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ナリ.

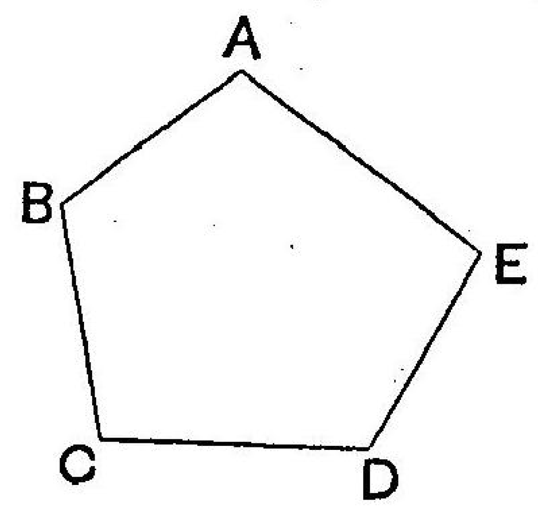
第三編　直線形

三角形

26. 直線形 幾ツカノ有限直線ニテ圍マレタル平面ノ部分ヲ**直線形**トイフ.

直線形ハ通例**多角形**トイフ.

多角形ヲ組ミ立ツル所ノ各ノ有限直線ヲ其邊トイフ. 相隣レル二邊ノナス形内ノ角ヲ**多角形の角**トイヒ,其頂點ヲ**多角形の頂點**トイフ.



右圖ハ有限直線AB, BC, CD, DE, EAニテ圍マレタル多角形ナリ.

AB, BC, CD, DE, EAハ其邊, ∠ABC, ∠BCD, ∠CDE, ∠DEA, ∠EABハ其角,A, B, C, D, Eハ其頂點ナリ.

多角形ノ一邊ト其隣ノ邊ノ延長トガナス角ヲ**多角形の外角**トイヒ,外角ニ對シテ多角形ノ角ヲ特ニ**内角**ト稱スルコトアリ.

多角形ヲ呼ブニハ其各頂點ノ名ヲ順ニ續ケテ唱フルモノトス,例ヘバ前圖ノ多角形ヲABCDEト呼ブガ如シ.

注意 多角形ノ邊ノ數ト角ノ數(卽チ頂點ノ數)トハ常ニ相等シ.

27. 定義 多角形ハ其角ノ數卽チ邊ノ數ニヨリテ之ヲ**三角形**,**四邊形**(又ハ四角形),**五邊形**(又ハ五角形)等ニ別ツ.

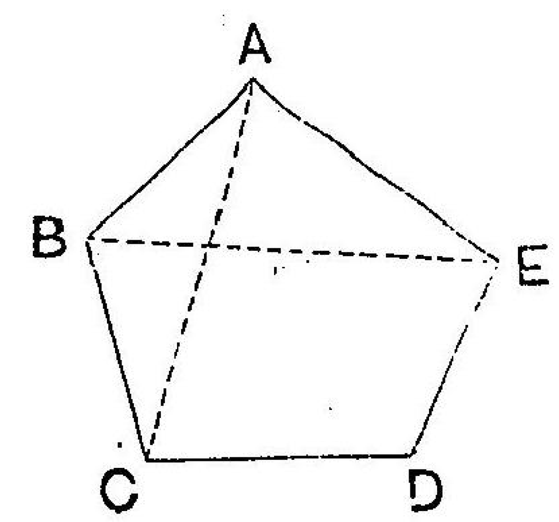
三角形ハ多角形ノ中ノ最簡單ナルモノナリ.

三角形ヲ表スニ符號△ヲ用フルコトアリ.

28. 正多角形 多角形ノ總テノ邊ガ相等シク且ツ總テノ角ガ相等シキモノヲ**正多角形**トイフ.

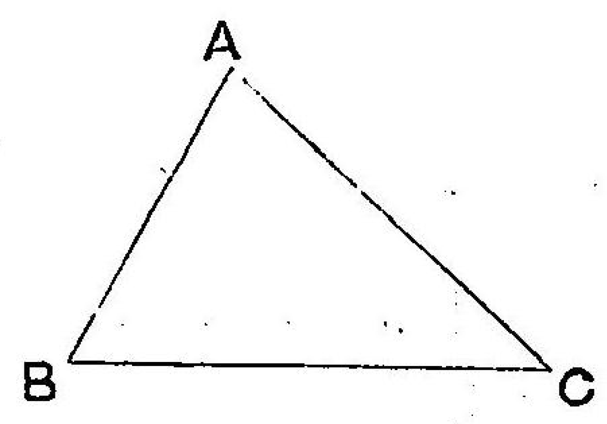
正四角形卽チ正四邊形ヲ特ニ**正方形**ト稱ス.

29. 對角線 多角形ノ相隣ラザル二頂點ヲ結ビ付クル直線ヲ**對角線**トイフ. 右圖ニ於ケルAC, BEハ何レモ對角線ナリ.



三角形ニハ對角線ナシ.

30. 三角形の底邊及頂角　三角形ノ任意ノ一邊ヲ取リ之ヲ特ニ三角形ノ**底邊**ト稱スルコトアリ.此場合ニハ底邊ノ兩端ニアル角ヲ特ニ**底角**トイヒ,殘リノ角ヲ**頂角**トイヒ,頂角ノ頂點ヲ特ニ**三角形の頂點**トイフ.

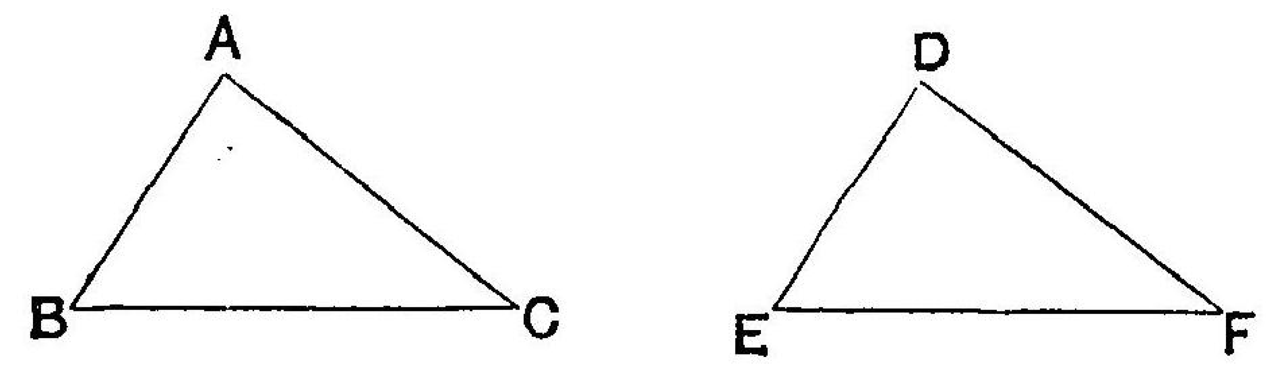


圖ニ於テBCヲ底邊トスレバ∠B, ∠C ハ底角, ∠A ハ頂角ニシテ A ハ三角形ノ頂點ナリ. 又 AB ヲ底邊トスレバ∠C ハ頂角ニシテ C ハ三角形ノ頂點ナリ.

三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノナス角トハ**相對す**トイフ. 卽チ邊 BC ニ對スル角ハ∠Aナリ,又∠B ニ對スル邊ハ AC ナリ.

31. 定理　二邊ト其夾角トガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ,而シテ相等シキ邊ニ對スル角ハ相等シ.

題意　△ABC 及 △DEF ニ於テ AB=DE, AC=DF 及 ∠A=∠D ナルトキハ此兩三角形ハ全ク相等シクシテ ∠C=∠F, ∠B=∠E ナルベシ.



證明　先ヅ AB=DE ナルヲ以テ (假定), △DEF ヲ △ABC ノ上ニ重ネ, DE ガ AB ニ合シ(卽チ D ハ A ニ, E ハ B ニ合シ)而シテ兩三角形ガ何レモ AB ノ一方ニアル樣ニ置クコトヲ得.

サスレバ∠A=∠D ナルヲ以テ(假定),邊 DF ハ邊 AC ノ上ニ重ナルベク,尙 AC=DF ナルヲ以テ(假定),點 F ハ點 C ニ重ナルベシ.

因テ邊 EF ハ邊 BC ニ合ス(5節公理二系1).

卽チ △DEF ト △ABC トハ相一致ス.

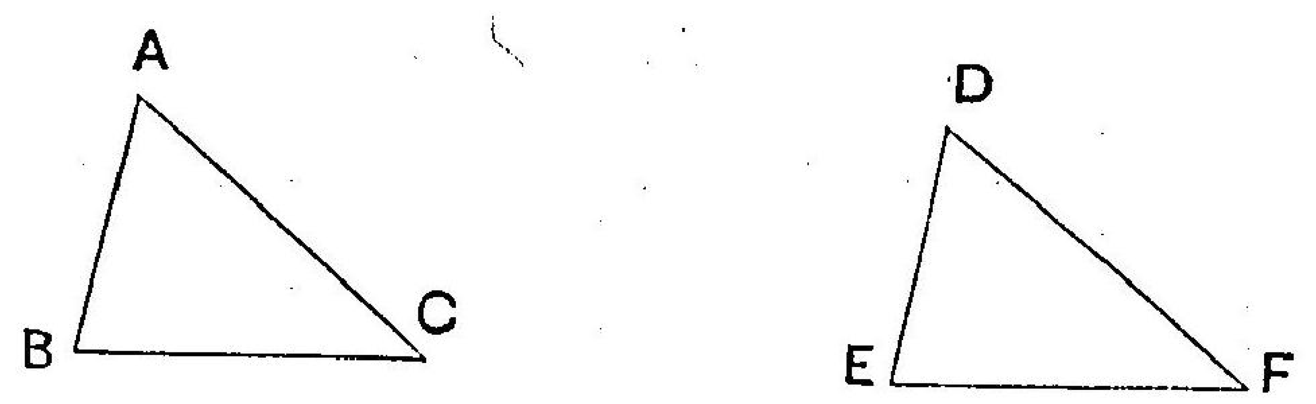
$$\therefore \quad \triangle ABC = \triangle DEF$$

而シテ　$\angle C = \angle F, \quad \angle B = \angle E$

***問題20.** 二點ヲ結ビ付クル直線ヲ直角ニ二等分スル(直線ノ中點ヲ通リ且ツ之ニ垂直ナル)直線上ノ任意ノ點ハ其二點ヨリ等距離ニアリ.

32. 定理 二角ト其夾邊トガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ,而シテ相等シキ角ニ對スル邊ハ相等シ.

題意 $\triangle ABC$及$\triangle DEF$ニ於テ$\angle B=\angle E$, $\angle C=\angle F$及$BC=EF$ナルトキハ此兩三角形ハ全ク相等シクシテ$AC=DF$, $AB=DE$ナルベシ.



證明 先ヅ$BC=EF$ナルヲ以テ(假定), $\triangle DEF$ヲ$\triangle ABC$ノ上ニ重ネ, EFガBCニ合シ,兩三角形ガ何レモBCノ一方ニアル樣ニ置クコトヲ得.

サスレバ$\angle B=\angle E$ナルヲ以テ(假定)邊EDハ邊BAノ上ニ重ナルベク,又$\angle C=\angle F$ナルヲ以テ(假定)邊FDハ邊CAノ上ニ重ナルベシ.

因テ點Cハ點Aニ合ス.

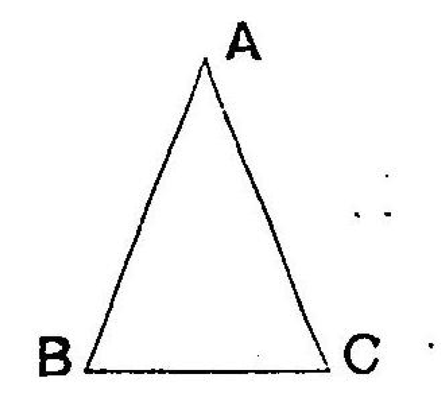
卽チ$\triangle DEF$ト$\triangle ABC$トハ相一致ス.

$$\therefore \quad \triangle ABC=\triangle DEF$$

而シテ　$AC=DF$, $AB=DE$

33. 二等邊三角形 二邊ガ相等シキ三角形ヲ**二等邊三角形**トイフ.

二等邊三角形ニ於テハ其相等シキ二邊ガナス角ヲ特ニ其**頂角**トイヒ,頂角ニ對スル邊ヲ特ニ其**底邊**トイフ.

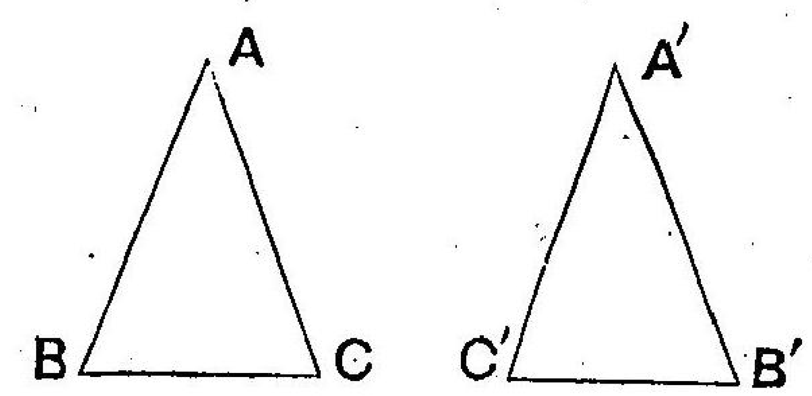


圖ニ於テ$AB=AC$ナリトスレバ$\triangle ABC$ハ二等邊三角形ニシテ$\angle A$ハ頂角, BCハ底邊, $\angle B$, $\angle C$ハ底角, Aハ頂點ナリ.

34. 定理 二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シ.

題意 $\triangle ABC$ニ於テ$AB=AC$ナルトキハ$\angle C=\angle B$ナルベシ.

證明 $\triangle ABC$ヲ裏返シニシタル者ニ等シキ$\triangle A'B'C'$ヲ作リAトA'ト, BトB'ト, CトC'トガ夫



々相對應スルトセヨ．サスレバ$\triangle ABC$ト$\triangle A'C'B'$トニ於テ

$$AB=AC \quad \text{(假定)}$$

$$AC=A'C' \quad \text{(作圖)}$$

$$\therefore \quad AB=A'C'$$

同様ニ $\quad AC=A'B'$

又勿論 $\quad \angle A=\angle A'$

$$\therefore \quad \triangle ABC=\triangle A'C'B' \quad \text{(31 節)}$$

$$\therefore \quad \angle C=\angle B'$$

卽チ $\quad \angle C=\angle B \quad$ (作圖)

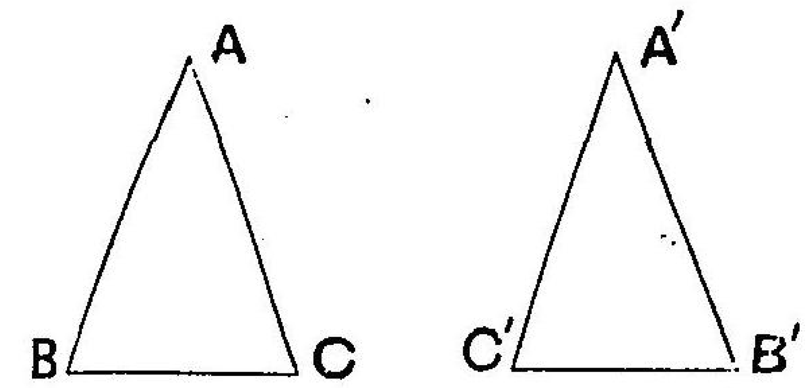
系 三邊ガ相等シキ三角形ノ三ツノ角ハ相等シ．卽チ三邊ガ相等シキ三角形ハ正三角形ナリ．

***問題21.** 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底邊ヲ直角ニ二等分ス．

問題22. 頂角ノ二等分線ガ底邊ニ垂直ナル三角形ハ二等邊三角形ナリ．

35. 定理 二角ガ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ナリ．

題意 $\triangle ABC$ニ於テ$\angle B=\angle C$ナルトキハ$AC=AB$ナルベシ．



證明 $\triangle ABC$ヲ裏返シニシタル者ニ等シキ$\triangle A'B'C'$ヲ作リAトA′ト，BトB′ト，CトC′トガ夫々相對應スルトセヨ．サスレバ$\triangle ABC$ト$\triangle A'C'B'$トニ於テ

$$\angle B=\angle C \quad \text{(假定)}$$

$$\angle C=\angle C' \quad \text{(作圖)}$$

$$\therefore \quad \angle B=\angle C'$$

同様ニ $\quad \angle C=\angle B'$

又勿論 $\quad BC=C'B'$

$$\therefore \quad \triangle ABC=\triangle A'C'B' \quad \text{(32 節)}$$

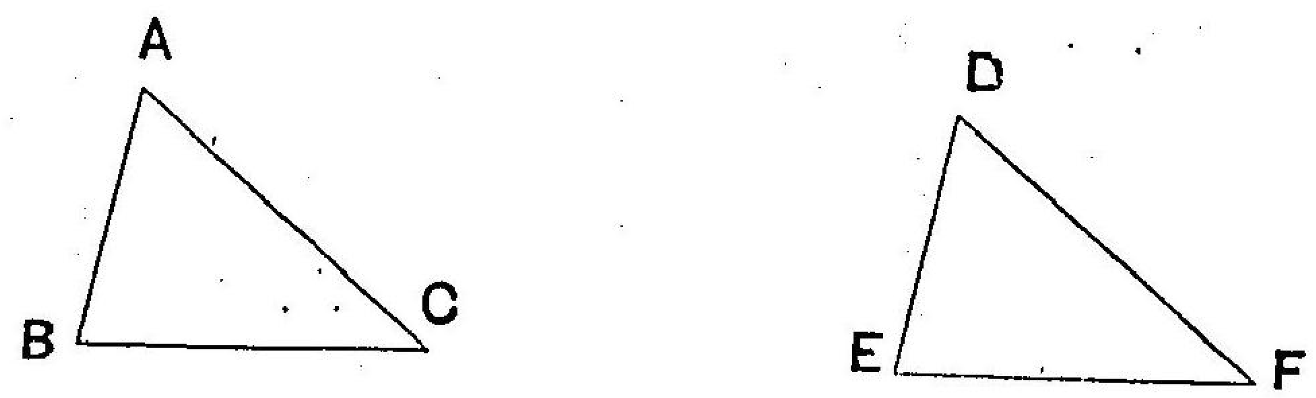
$$\therefore \quad AC=A'B'$$

卽チ $\quad AC=AB \quad$ (作圖)

系 三ツノ角ガ相等シキ三角形ノ三邊ハ相等シ．卽チ三ツノ角ガ相等シキ三角形ハ正三角形ナリ．

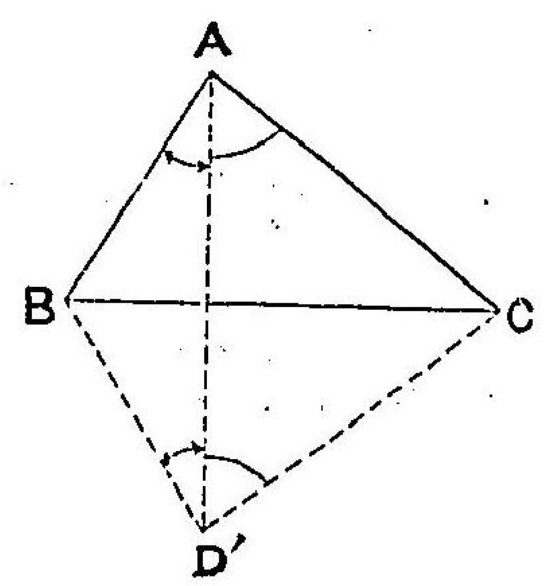
36. 定理　三邊ガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ,而シテ相等シキ邊ニ對スル角ハ相等シ.

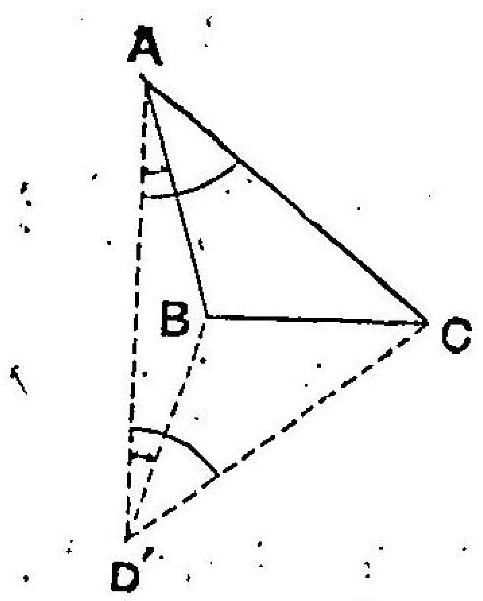
題意　$\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ ニ於テ $AB=DE$, $BC=EF$, $CA=FD$ ナルトキハ此兩三角形ハ全ク相等シクシテ $\angle C=\angle F$, $\angle A=\angle D$, $\angle B=\angle E$ ナルベシ.

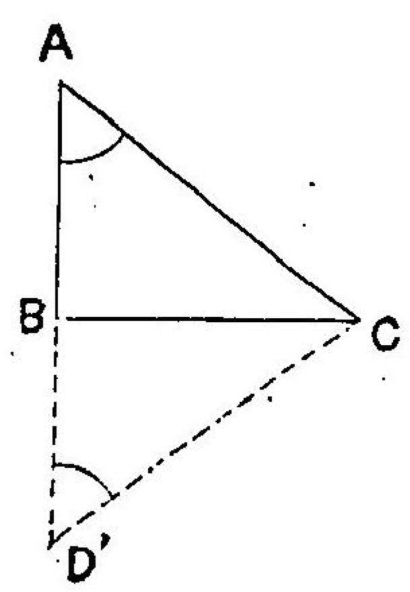


證明　先ヅ $BC=EF$ ナルヲ以テ(假定)此兩三角形ヲ,EF ガ BC ニ合シ $\triangle DEF$ ガ BC ニ對シテ $\triangle ABC$ ノ反對ノ側ニアル樣ニ置クコトヲ得.

(甲圖)　(乙圖)　(丙圖)







此時 D ガ D′ ノ位置ニ來リタリトシ AD′ ヲ結ビ付クレバ $\triangle ABD'$ ニ於テ(甲圖及乙圖)

$$BA=BD' \qquad \text{(假定)}$$

$$\therefore \quad \angle BAD'=\angle BD'A \qquad \text{(34 節)}$$

又 $\triangle CAD'$ ニ於テ(甲圖,乙圖及丙圖)

$$CA=CD' \qquad \text{(假定)}$$

$$\therefore \quad \angle CAD'=\angle CD'A \qquad \text{(34 節)}$$

故ニ(甲,乙,丙圖ノ何レニスルモ)

$$\angle BAC=\angle BD'C$$

卽チ　$\angle BAC=\angle EDF$　(作圖)

故ニ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$$\begin{cases} AB=DE & \text{(假定)} \\ AC=DF & \text{(同上)} \\ \angle BAC=\angle EDF & \end{cases}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC=\triangle DEF \qquad \text{(31 節)}$$

從テ　$\angle B=\angle E$,　$\angle C=\angle F$

***問題 23.**　二定點ヨリ等距離ニアル點ハ其二點ヲ結ビ付クル直線ヲ直角ニ二等分スル直線上ニ在リ.

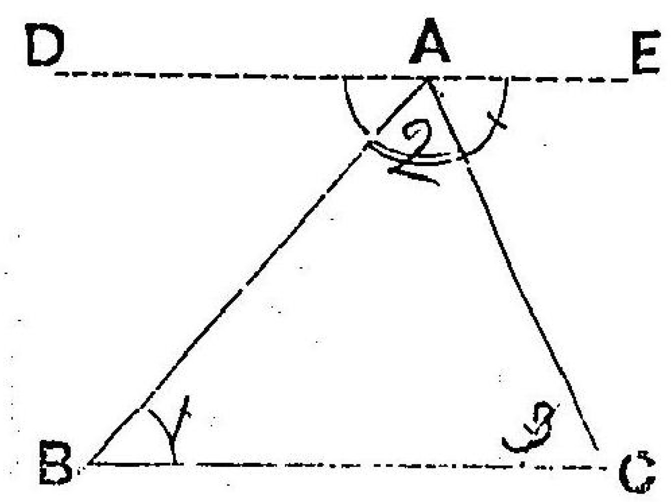
***問題 24.**　同ジ底邊ノ上ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ通ル直線ハ各ノ頂角ヲ二等分シ,且ツ底

邊ヲ直角ニ二等分ス.

37. 定理 三角形ノ三ツノ内角ノ和ハ二直角ニ等シ.

題意 $\triangle ABC$ ニ於テ$\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$ナルベシ.

證明 頂點 A ヲ通リ, BC ニ平行ナル直線 DE ヲ引ケ. サスレバ



$\angle BAD=\angle ABC$ (25節)

$\angle CAE=\angle ACB$ (同上)

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C$

$=\angle BAC+\angle BAD+\angle CAE=2\angle R$ (13節系1)

定義 三角形ニ於テ一ツノ外角ニ接セザル二ツノ内角ノ各ヲ其外角ノ**内對角**トイフ.

系 1. 三角形ノ外角ハ其内對角ノ和ニ等シ. 從テ三角形ノ外角ハ其内對角ノ何レヨリモ大ナリ.

系 2. 三角形ノ一角ガ鈍角ナレバ他ノ二角ハ各鋭角ナリ.

系 3. 三角形ノ一角ガ直角ナレバ他ノ二角ハ各鋭角ニシテ且ツ互ニ餘角ナリ.

定義 一角ガ直角ナル三角形ヲ**直角三角形**トイヒ,直角ニ對スル邊ヲ其直角三角形ノ**斜邊**トイフ.

一角ガ鈍角ナル三角形ヲ**鈍角三角形**トイフ.

三ツノ角ガ鋭角ナル三角形ヲ**鋭角三角形**トイフ.

系 4. 二角ガ夫々相等シキ二ツノ三角形ノ第三ノ角ハマタ相等シ.

系 5. 二角ガ夫々相等シク且ツ一組ノ相等シキ角ニ對スル邊ガ相等シキ二ツノ三角形ハ全ク相等シ.

系 6. 斜邊ト一鋭角トガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形ハ全ク相等シ.

問題25. 三角形ノ二角ガ夫々30°及80°ナレバ殘リノ角ノ大サハ何度ナルカ.

***問題26.** 正三角形ノ一角ノ大サハ何度ナルカ.

問題27. 直角二等邊三角形ノ兩底角ハ各何度ナ

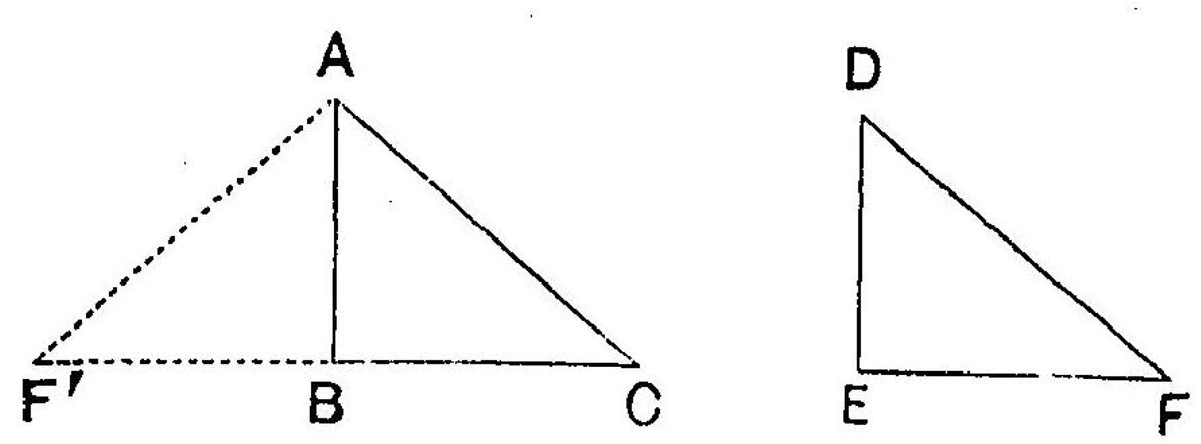
ルカ.

*問題28. 角ノ二等分線上ノ任意ノ點ヨリ此角ノ二邊ニ引ケル垂線ハ相等シ.

38. 定理 斜邊ト他ノ一邊トガ夫々相等シキ二ツノ直角三角形ハ全ク相等シ,而シテ相等シキ邊ニ對スル角ハ相等シ.

題意 二ツノ直角三角形 ABC ト DEF トニ於テ $\angle B$ 及 $\angle E$ ガ直角ニシテ $AC=DF$, $AB=DE$ ナルキハ此兩三角形ハ全ク相等シクシテ $\angle A=\angle D$, $\angle C=\angle F$ ナルベシ.

證明 先ヅ $AB=DE$ ナルヲ以テ此兩三角形ヲ, DE ガ AB ニ合シ且ツ $\triangle DEF$ ガ AB ニ對シテ $\triangle ABC$ ノ反對ノ側ニアル樣ニ置クコトヲ得.



此時 F ガ F′ ノ位置ニ來リタリトスレバ

$$\angle ABC=\angle DEF=\angle ABF'=\angle R \qquad (假定)$$

ナルヲ以テ F′B ト BC トハ一直線ヲナス(13節系3).

故ニ全圖形ハ一ツノ三角形トナリ,且ツ

$$AC=DF=AF' \qquad (假定)$$

ナルヲ以テ此三角形ハ二等邊三角形ナリ.

$$\therefore \quad \angle C=\angle F' \qquad (34節)$$

卽チ $\angle C=\angle F$ (作圖)

因テ $\triangle ABC$ ト $\triangle DEF$ トニ於テ

$$\begin{cases} \angle B=\angle E=\angle R & (假定). \\ AC=DF & (同上) \\ \angle C=\angle F & \end{cases}$$

$$\therefore \quad \triangle ABC=\triangle DEF \qquad (前節系6)$$

而シテ $\angle A=\angle D$, $\angle C=\angle F$

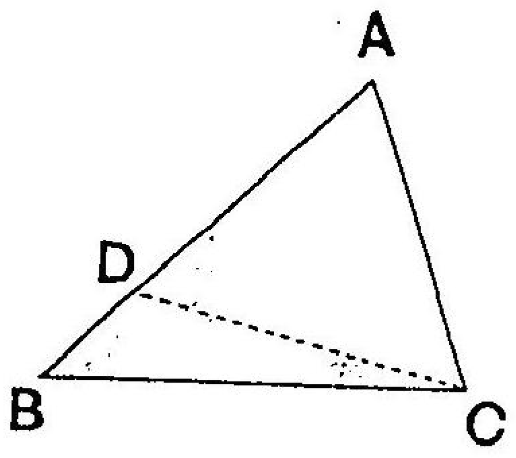
*問題29. 一點ヨリ或角ノ二邊ニ引ケル垂線ガ相等シケレバ此點ハ其角ノ二等分線上ニ在リ.

39. 定理 二邊ガ相等シカラザル三角形ニ於テ大ナル邊ニ對スル角ハ小ナル邊ニ對スル角ヨリ大ナリ.

題意 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB>AC$ ナルトキハ $\angle C>\angle B$

ナルベシ.

證明　ABノ上ニACニ等シクADヲ取リ,DCヲ結ビ付クレバ



$\angle ADC = \angle ACD$ (**34節**)

然ルニ$\angle ADC$ハ$\triangle BDC$ノ外角ナルニヨリ

$$\angle ADC > \angle ABC \quad \textbf{(37節系1)}$$

$$\therefore \quad \angle ACD > \angle ABC$$

然ルニ勿論　$\angle ACB > \angle ACD$

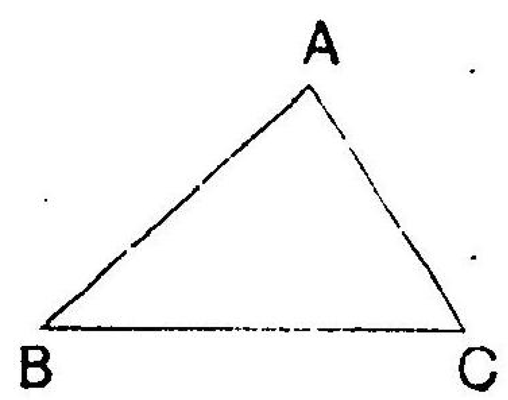
$$\therefore \quad \angle ACB > \angle ABC$$

問題30. 上圖ニ於テ　$\angle BCD = \frac{1}{2}(\angle C - \angle B)$ ナリ.

40. 定理　二ツノ角ガ相等シカラザル三角形ニ於テ大ナル角ニ對スル邊ハ小ナル角ニ對スル邊ヨリ大ナリ.

題意　$\triangle ABC$ニ於テ$\angle C > \angle B$ナルトキハ$AB > AC$ナルベシ.

證明　若シ$AB < AC$ナリトスレバ$\angle C < \angle B$ナルコトトナリ(前節)假定ニ背ク.



故ニABハACヨリ小ナラズ.

又若シ$AB = AC$ナリトスレバ$\angle C = \angle B$ナルコトトナリ(**34節**)コレ亦假定ニ背ク.

故ニABハACニ等シカラズ.

從テ　$AB > AC$

系 1.　直角三角形ノ斜邊ハ他ノ邊ヨリ大ナリ.

系 2.　直線外ノ一定點ヲ此直線上ノ任意ノ點ニ結ビ付クル總テノ直線ノ中之ニ垂直ナル直線ハ最モ短カシ.

定義　直線外ノ一點ヨリ之ニ引ケル垂線ノ長サヲ**其點と其直線との距離**トイフ.

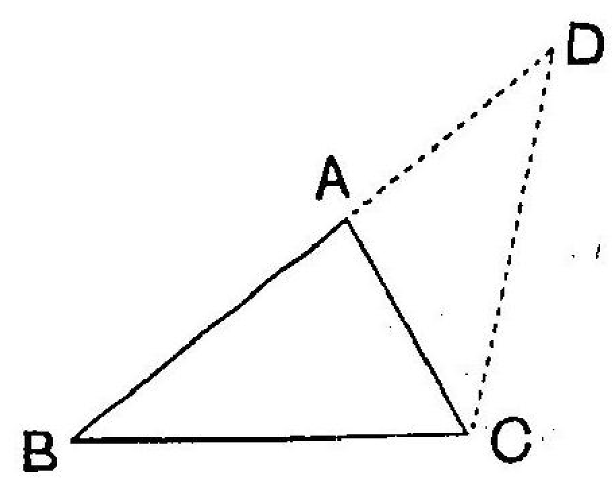
問題31. 鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ハ他ノ邊ヨリ大ナリ.

***問題32.** 直線外ノ一點ヨリ之ニ引ケル斜線ノ中,其足ガ垂線ノ足ヨリ等距離ニアルモノハ相等シク,垂線ノ足ヲ去ル距離ノ大ナルモノハ其距離ノ小ナルモノヨリ大ナリ.

41. 定理 三角形ノ二邊ノ和ハ殘リノ邊ヨリ大ナリ.

題意 $\triangle ABC$ ニ於テ $AB+AC>BC$ ナルベシ.

證明 邊 BA ヲ A ノ方ヘ延長シ其上ニ AC ニ等シク AD ヲ取リ DC ヲ結ビ付クレバ



$\angle ADC=\angle ACD$ (34節)

然ルニ $\angle BCD>\angle ACD$

$\therefore\ \angle BCD>\angle ADC$

$\therefore\ BD>BC$ (前節)

即チ $AB+AC>BC$

系 三角形ノ二邊ノ差ハ殘リノ邊ヨリ小ナリ.

問題33. 多角形ノ一邊ハ其他ノ總テノ邊ノ和ヨリ小ナリ.

問題34. 四邊形ノ周ハ其兩對角線ノ和ヨリ大ニシテ和ノ二倍ヨリ小ナリ.

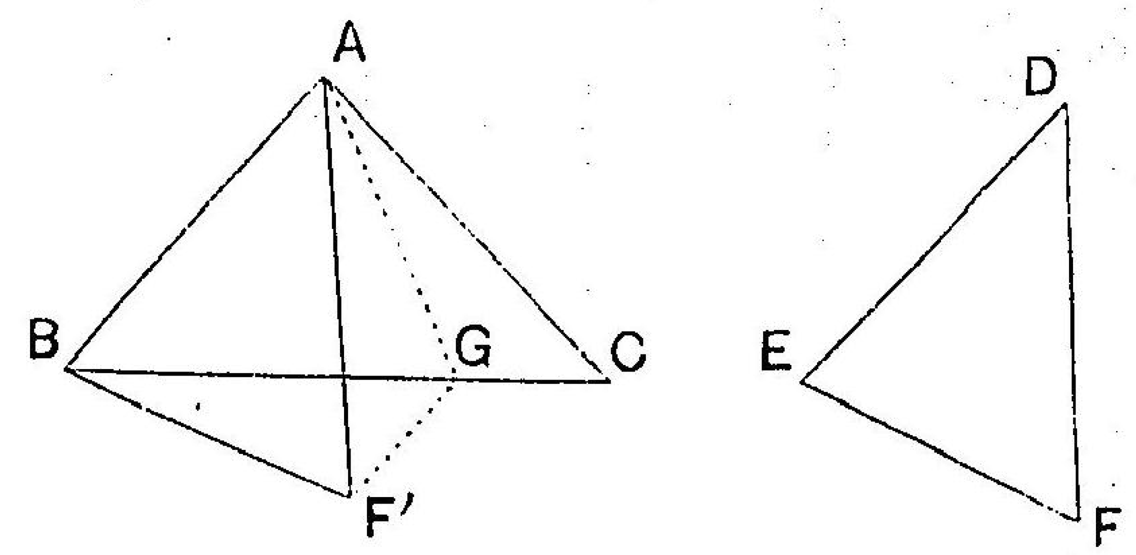
問題35 三角形ノ一ツノ頂點ト對邊ノ中點トヲ

結ビ付クル直線ハ他ノ二邊ノ和ノ半分ヨリ小ナリ.

42. 定理 二邊ガ夫々相等シク其夾角ガ相等シカラザル二ツノ三角形ニ於テ其夾角ノ大ナル方ノ三角形ノ第三邊ガ其小ナル方ノ第三邊ヨリ大ナリ.

題意 $\triangle ABC$ 及 $\triangle DEF$ ニ於テ $AB=DE$, $AC=DF$, $\angle A>\angle D$ ナルトキハ $BC>EF$ ナルベシ.

證明 先ヅ $AB=DE$ ナルヲ以テ(假定)此兩三角形ヲ, DE ガ AB ニ合シ且ツ $\triangle DEF$ ガ AB ニ對シテ $\triangle ABC$ ト同ジ側ニアル樣ニ置クコトヲ得.



サスレバ $\angle BAC>\angle EDF$ ナルユヱ(假定) DF ハ $\angle BAC$ ノ内ニ落チ AF' ノ位置ヲ取ル.

此時 F ガ F' ノ位置ニ來リタリトセン.

今若シ F' ガ BC ノ上ニアレバ BC ハ勿論 BF' ヨリ大ニシテ從テ $BC>EF$ ナリ.

又若シ圖ノ如クF′ガBCノ上ニアラザレバ∠F′ACノ二等分線ヲ引キ邊BCトノ交點ヲGトシGF′ヲ結ビ付クレバ△GAF′ト△GACトニ於テ

$$\begin{cases} AF'=AC & \text{(假定)} \\ AG\ \text{ハ共通} & \\ \angle GAF'=\angle GAC & \text{(作圖)} \end{cases}$$

$$\therefore\quad \triangle GAF'=\triangle GAC \qquad \text{(31節)}$$

$$\therefore\quad GF'=GC$$

$$\therefore\quad BG+GF'=BG+GC=BC$$

然ルニ $BG+GF'>BF'$ (前節)

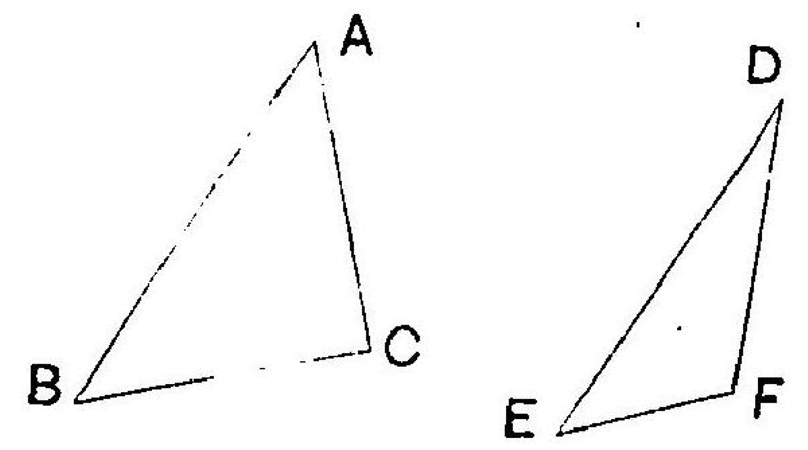
$$\therefore\quad BC>BF'$$

卽チ $BC>EF$

43. 定理 二邊ガ夫々相等シク第三邊ガ相等シカラザル二ツノ三角形ニ於テ大ナル第三邊ニ對スル角ガ小ナル第三邊ニ對スル角ヨリ大ナリ.

題意 △ABC及△DEFニ於テAB=DE, AC=DF且ツBC>EFナルトキハ∠A>∠Dナルベシ.

證明 若シ∠A<∠DナリトスレバBC<EFナルコトトナリ(前節)假定ニ背ク.



故ニ∠Aハ∠Dヨリ小ナラズ.

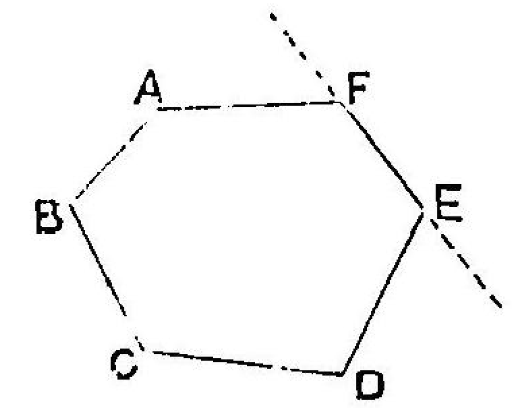
又若シ∠A=∠Dナリトスレバ兩三角形ハ全ク相等シク從テBC=EFナルコトトナリ(31節)コレ亦假定ニ背ク.

故ニ∠Aハ∠Dニ等シカラズ.

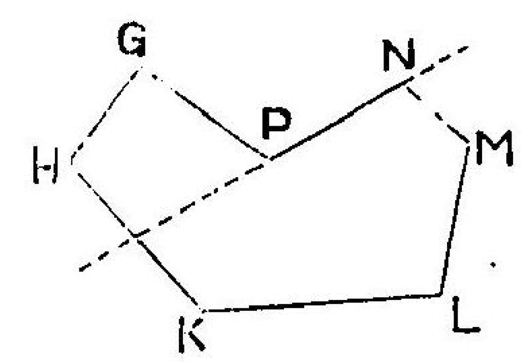
從テ $\angle A>\angle D$

44. 定義 次ニ示ス甲圖ノ如ク多角形ガ其何レノ邊ヲ延長スルモ其一方ニ在ルトキハ之ヲ**凸多角形**トイヒ,乙圖ノ如ク其何レカ一ツノ邊ヲ延長スルトキ夫レガタメニ多角形ガ二ツノ部分ニ分タルルトキハ之ヲ**凹多角形**トイフ.

(甲圖)



(乙圖)



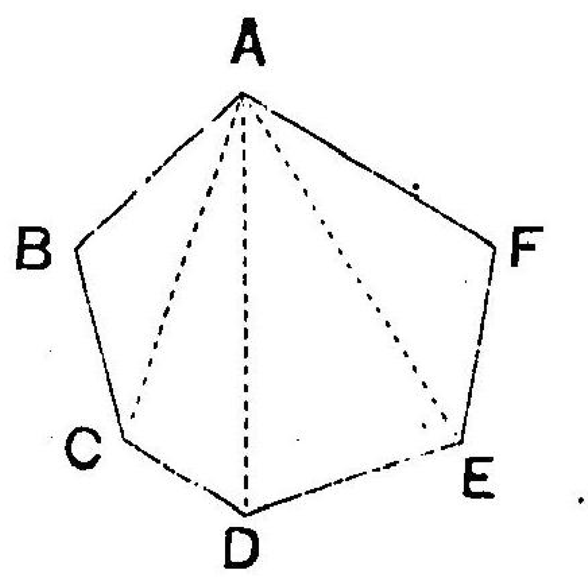
注意 凸多角形ノ各內角ハ二直角ヨリ小ナリ.

三角形ハ必ズ凸ナリ.

45. 定理 凸多角形ノ內角ノ和ハ邊數ノ二倍ヨリ4少ナキダケノ直角ニ等シ.

題意 邊數ガnナル凸多角形ノ內角ノ和ハ$(2n-4)$直角ニ等シカルベシ.

證明 多角形ノ一ツノ頂點ヲ通ル總テノ對角線ヲ引ケバ此多角形ハ$(n-2)$箇ノ三角形ニ分タルルコト明カナリ,而シテ此等ノ三角形ノ總テノ內角ノ和ハ明カニ此多角形ノ各內角ノ和ニ等シ.



サテ三角形ノ內角ノ和ハ$2\angle R$ニ等シキユヱ(37節),$(n-2)$箇ノ三角形ノ內角ノ和ハ$2\angle R$ノ$(n-2)$倍,卽チ

$$2(n-2)\angle R=(2n-4)\angle R$$

ナリ. 因テn邊形ノ內角ノ和ハ$(2n-4)$直角ニ等シ.

系 四邊形ノ內角ノ和ハ四直角ニ等シ.

***問題36.** 正方形,正五邊形,正六邊形,正八邊形,及正十邊形ノ各一ツノ內角ノ大サヲ求メヨ.

練　習

問題37. 二組ノ對邊ガ各々相等シキ四邊形ノ對角ハ相等シ.

問題38. $\triangle ABC$ノ$\angle B$及$\angle C$ノ二等分線ノ交點Oヲ通リBCニ平行ナル直線ヲ作リAB, ACト夫々D, Eニ於テ交ラシムレバ$DE=DB+EC$ナリ.

✓ ***問題39.** 一ツノ角ノ二邊ガ夫々他ノ角ノ二邊ニ垂直ナレバ此二角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ナリ.

***問題40.** 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ノ長サハ相等シ.

註 **三角形の角の二等分線の長さ**トハ二等分線ノ形內ニ在ル部分ノ長サノコトナリ.

問題41. 二等邊三角形ノ兩底角ノ頂點ヲ通ル二ツノ中線ハ相等シ.

註 三角形ノ**中線**トハ一ツノ頂點ト其對邊ノ中點トヲ結ビ付クル直線ノコトナリ.

***問題42.** 一ツノ角ガ60°ナル二等邊三角形ハ正三角形ナリ.

問題43. 三角形ノ外角ハ其內對角ノ何レヨリモ大ナルコトヲ平行線ニ關スル定理ニヨラズシテ證明セヨ.

問題44. 二等邊三角形ノ底邊上ノ一點ト頂點トヲ結ビ付クル直線ハ相等シキ邊ヨリ小ナリ.

問題45. 三角形內ノ一點ヲ底邊ノ兩端ニ結ビ付クル二直線ノ和ハ三角形ノ他ノ二邊ノ和ヨリ小ナリ.

問題46. 三角形內ノ一點ヨリ各頂點ニ至ル距離ノ和ハ三角形ノ周ヨリ小ニシテ周ノ半分ヨリ大ナリ.

問題47. 三角形ノ二ツノ頂點ニ於ケル外角ノ二等分線ノナス角ハ第三ノ頂點ニ於ケル外角ノ半分ニ等シ.

問題48. 凸四角形ニ於テ,(1)相隣レル二角ノ二等分線ノナス角ハ他ノ二角ノ和ノ半分ニ等シ. (2)相對スル二角ノ二等分線ノナス角ハ他ノ二角ノ差ノ半分ニ等シ.

*__問題49.__ 凸多角形ノ各邊ヲ順次ニ延長シテ生ズル外角ノ和ハ四直角ニ等シ.

問題50. 凸多角形ノ內角ハ三ツヨリ多クノ銳角ヲ有スルコト能ハズ.

平行四邊形

46. 定義　四邊形ノ二組ノ相對スル邊ガ各々互ニ平行ナルモノヲ**平行四邊形**トイフ.

47. 定理　平行四邊形ニ於テ

(第一)　各對角線ハ之ヲ全ク相等シキ二ツノ三角形ニ分ツ.

(第二)　相對スル邊ハ相等シ.

(第三)　相對スル角ハ相等シ.

(第四)　對角線ノ交點ハ其各ノ中點ナリ.

題意　平行四邊形ABCDニ於テ

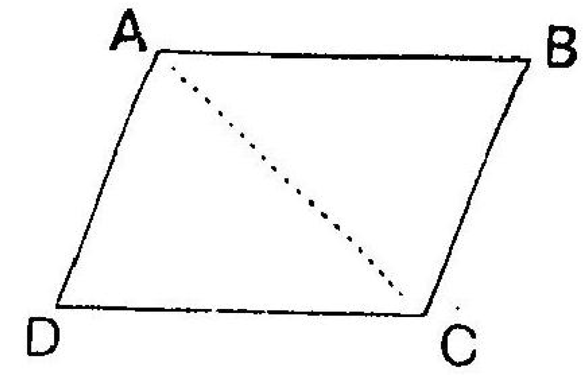
(第一)　對角線AC, BDヲ引ケバ $\triangle ABC=\triangle CDA$ 及 $\triangle ABD=\triangle CDB$ ナルベシ.

(第二)　$AB=CD$, $BC=DA$ ナルベシ.

(第三)　$\angle A=\angle C$, $\angle B=\angle D$ ナルベシ.

(第四)　對角線AC, BDノ交點ヲOトスレバ $AO=CO$, $BO=DO$ ナルベシ.

第一の證明　對角線ACヲ引ケバ△ABCト△CDAトニ於テ



$$\left\{\begin{array}{ll} \angle BAC=\angle DCA & (25節) \\ \angle ACB=\angle CAD & (同上) \\ AC\text{ハ共通} & \end{array}\right.$$

$\therefore$　$\triangle ABC=\triangle CDA$　(32節)

同理ニテ　$\triangle ABD=\triangle CDB$.

第二の證明　$\triangle ABC=\triangle CDA$

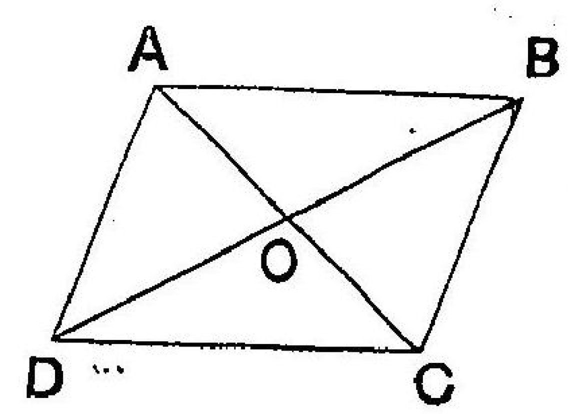
$\therefore$　$AB=CD$,　$BC=DA$

第三の證明　$\triangle ABC=\triangle CDA$

$\therefore$　$\angle ABC=\angle CDA$

同理ニテ　$\angle BAD=\angle DCB$

第四の證明　對角線ノ交點ヲOトスレバ△AOBト△CODトニ於テ



$$\left\{\begin{array}{ll} \angle OAB=\angle OCD & (25節) \\ \angle OBA=\angle ODC & (同上) \\ AB=CD & (第二) \end{array}\right.$$

$\therefore$　$\triangle AOB=\triangle COD$　(32節)

$\therefore$　$AO=CO$,　$BO=DO$

系 1. 平行四邊形ノ一角ガ直角ナレバ他ノ角モ皆直角ナリ.

系 2. 平行四邊形ノ相隣レル二邊ガ相等シケレバ各邊ハ皆相等シ.

系 3. 二ツノ平行線ノ一ツノ上ニアル任意ノ點ヨリ他ノ直線ニ引ケル垂線ハ常ニ相等シ.

定義 此垂線ノ長サヲ此**平行線間の距離**トイフ.

48. 定理 四邊形ハ次ノ場合ノ何レカニ適スルトキハ平行四邊形ナリ.

(第一) 二組ノ對邊ガ各相等シキトキ.

(第二) 一組ノ對邊ガ相等シク且ツ平行ナルトキ.

(第三) 兩對角線ガ互ニ二等分スルトキ.

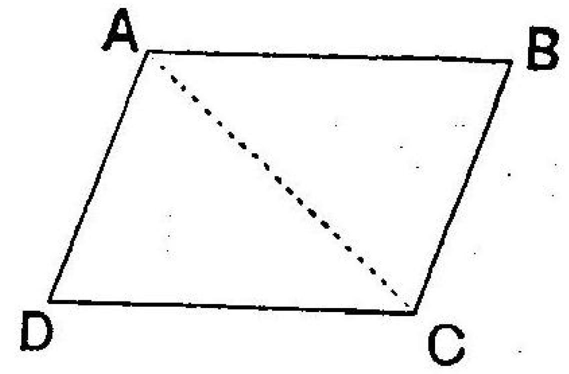
題意 四邊形ABCDニ於テ

(第一) $AB=CD$, $BC=DA$ ナルカ,又ハ

(第二) $AB=CD$, $AB/\!/DC$ ナルカ,又ハ

(第三) 兩對角線ノ交點ヲOトスルトキ $AO=CO$, $BO=DO$ ナレバ ABCD ハ平行四邊形ナルベシ.

第一の證明 對角線ACヲ引ケバ$\triangle ABC$ト$\triangle CDA$トニ於テ.



$$\begin{cases} AB=CD & (\text{假定}) \\ BC=DA & (\text{同上}) \\ AC\ \text{ハ共通} & \end{cases}$$

$\therefore\ \triangle ABC=\triangle CDA$ (36節)

$\therefore\ \angle BAC=\angle DCA$ $\therefore\ AB/\!/DC$ (23節)

又 $\angle ACB=\angle CAD$ $\therefore\ BC/\!/AD$ (同上)

卽チABCDハ平行四邊形ナリ.

第二の證明 $\triangle ABC$ト$\triangle CDA$トニ於テ

$AB/\!/DC$ (假定)

$$\begin{cases} \therefore\ \angle BAC=\angle DCA & (25\text{節}) \\ AB=CD & (\text{假定}) \\ AC\ \text{ハ共通} & \end{cases}$$

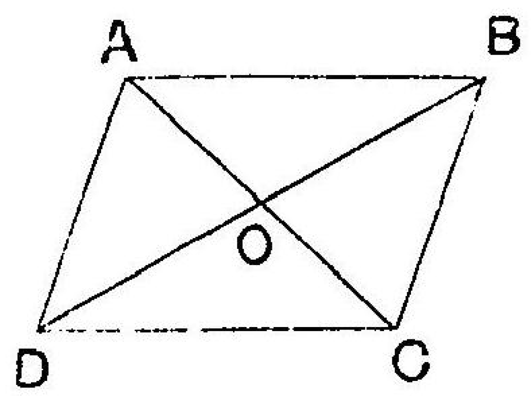
$\therefore\ \triangle ABC=\triangle CDA$ (31節)

$\therefore\ \angle ACB=\angle CAD$

∴　BC // AD　(23節)

卽チ ABCD ハ平行四邊形ナリ.

第三の證明　對角線ノ交點ヲ O トスレバ △AOB ト △COD トニ於テ



$\left\{\begin{array}{ll} AO=CO & (\text{假定}) \\ BO=DO & (\text{同上}) \\ \angle AOB=\angle COD & (18\text{節}) \end{array}\right.$

∴　△AOB=△COD　(31節)

∴　AB=CD

又　∠OAB=∠OCD

∴　AB // DC　(23節)

因テ第二ノ證明ニヨリ ABCD ハ平行四邊形ナリ.

49. 矩形, 菱形　四ツノ角ガ皆直角ナル四邊形ヲ**矩形**トイフ.

矩形ハ平行四邊形ナリ.

四ツノ邊ガ相等シキ四邊形ヲ**菱形**トイフ.

菱形ハ平行四邊形ナリ.

正方形ハ矩形ニシテ且ツ菱形ナリ.

***問題 51.**　矩形ノ對角線ハ相等シ.

***問題 52.**　菱形ノ對角線ハ互ニ垂直ナリ.

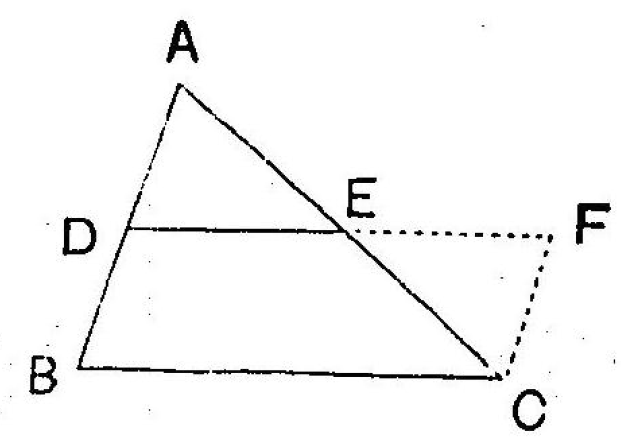
***問題 53.**　對角線ノ相等シキ平行四邊形ハ矩形ナリ.

***問題 54.**　對角線ガ互ニ垂直ナル平行四邊形ハ菱形ナリ.

50. 定理　三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ第三邊ニ平行ニシテ且ツ其半分ニ等シ.

題意　△ABC ニ於テ AB, AC ノ中點ヲ夫々 D, E トスレバ DE // BC ニシテ且ツ $DE=\frac{1}{2}BC$ ナルベシ.

證明　DE ヲ延長シ其上ニ DE ニ等シク EF ヲ取リ FC ヲ結ビ付クレバ △ADE ト △CFE トニ於テ



$\left\{\begin{array}{ll} AE=CE & (\text{假定}) \\ DE=FE & (\text{作圖}) \\ \angle AED=\angle CEF & (18\text{節}) \end{array}\right.$

∴　△ADE=△CFE　(31節)

∴　∠ADE=∠CFE

$\therefore \quad AD \parallel FC$ 卽チ $DB \parallel FC$

又 $\quad AD = CF$

然ルニ $\quad AD = DB$ (假定)

$\therefore \quad DB = FC$

故ニ四邊形BDFCハ平行四邊形ナリ(**48**節第二).

$\therefore \quad DE \parallel BC$

且ツ $\quad DF = BC$ (**47**節第二)

然ルニ $\quad DE = \frac{1}{2}DF$ (作圖)

$\therefore \quad DE = \frac{1}{2}BC$

系 三角形ノ一邊ノ中點ヨリ第二ノ邊ニ平行ニ引ケル直線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル.

問題55. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ結ビ付クル三直線ハ之ヲ全ク相等シキ四ツノ三角形ニ分ツ.

51. 假設と終結 凡テ定理ハ二ツノ部分ヨリ成ル. 第一ハ始メヨリ假定シテアル事柄ニシテ之ヲ**假設**トイヒ,第二ハ此假定ノ結果トシテ必ズ起リ來ルベシト主張スル事柄ニシテ之ヲ**終結**トイフ. 例ヘバ

二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シ(**34**節)

トイフ定理ハ之ヲ十分ニ述ブレバ若シ三角形ノ二邊ガ相等シケレバ必ズ其對角モ亦相等シカルベシトイフ意ニシテ「三角形ノ二邊ガ相等シケレバ」ハ假設,「其對角モ亦相等シカルベシ」ハ終結ナリ,又例ヘバ

凡テ直角ハ相等シ(**13**節)

トイフ定理ハ若シ比較スル角ガ直角ナラバ此等ノ角ハ必ズ相等シカルベシトイフ意ニシテ「比較スル角ガ直角ナラバ」ハ假設,「此等ノ角ハ必ズ相等シカルベシ」ハ終結ナリ.

52. 逆定理 一ツノ定理ノ假設ト終結トヲ入レ換ヘタルモノヲ此定理ノ**逆**トイフ. 例ヘバ

二等邊三角形ノ兩底角ハ相等シ(**34**節)

トイフ定理ノ逆ハ

二角ガ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ナリ

ニシテ,又

凡テ直角ハ相等シ(**13**節)

トイフ定理ノ逆ハ

相等シキ角ハ凡テ直角ナリ

ナリ

一つの定理の逆は必ずしも眞ならず. 例ヘバ上ニ述ベタル二例ノ中初ノ定理ノ逆ハ又一ツノ定理(35節)ニシテ眞ナレドモ後ノ定理ノ逆ハ眞ナラズ,ソハ直角ニアラズトモ相等シキ角ハ在リ得ベケレバナリ.

二ツノ定理ガ互ニ逆ナルトキハ其一ツヲ他ノ定理ノ**逆定理**トイフ. 逆定理ニ對シテ原ノ定理ヲ**本定理**トイフコトアリ.

逆ハ必ズシモ眞ナラザルガユヱニ或定理ノ逆ノ眞ナルコトヲ主張セント欲セバ必ズ本定理ト全ク別ニ之ヲ證明スルコトヲ要ス.

問題56. 第23節ノ定理ト第25節ノ定理ト,第39節ノ定理ト第40節ノ定理ト,第42節ノ定理ト第43節ノ定理ト,第50節ノ定理ト其系トハ互ニ逆ナリヤ否ヤ.

練習

問題57. 二組ノ對角ガ夫々相等シキ四邊形ハ平行四邊形ナリ.

問題58. 二等邊三角形ノ底邊上ノ任意ノ點ヨリ

他ノ二邊ニ平行ニ引キタル直線ガ他ノ邊ト交リテ出來ル有限直線ノ和ハ常ニ相等シ.

若シ底邊ノ延長ノ上ノ點ヨリナラバ如何ナル關係アリヤ.

問題59. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付クル四直線ニヨリテ成ル四邊形ハ平行四邊形ニシテ其周圍ハ元ノ四邊形ノ對角線ノ和ニ等シ.

問題60. 四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ビ付クル二直線ト對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線トハ一點ニ會ス.

問題61. 平行四邊形 ABCD ノ對邊 AD, BC ノ中點ヲ E, F トスレバ BE, DF ハ對角線 AC ヲ三等分ス.

問題62. 有限直線ノ兩端及中點ヨリ他ノ任意ノ直線ニ垂線ヲ引ケバ中點ヨリ引ケルモノハ兩端ヨリ引ケルモノノ和若クハ差ノ半分ニ等シ.

定義 一點ヨリ一ツノ無限直線ニ引ケル垂線ノ足ヲ此無限直線上ニ於ケル初ノ點ノ**正射影**トイフ.

一ツノ有限直線ノ兩端ノ他ノ一ツノ無限直線上ニ於ケル正射影ノ間ニ挾マルル有限直線ヲ此無限直線上ニ於ケル初ノ有限直線ノ**正射影**トイフ.

問題63 相等シク且ツ平行ナル二ツノ有限直線ノ一ツノ無限直線上ニ於ケル正射影ハ相等シ.

***問題64.** 三角形ノ三ツノ中線ハ一點ニ會ス,而シテ其點ト各頂點トノ距離ハ其頂點ヲ通ル中線ノ長サノ$\frac{2}{3}$ニ等シ.

定義 此點ヲ三角形ノ**重心**トイフ.

問題65. 二ツノ中線ガ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ナリ.

問題66. 三角形ノ一ツノ角ノ頂點ヨリ引キタル中線ガ其角ノ二邊ノ各トナス角ノ中,小ナル邊トナス角ハ大ナル邊トナス角ヨリ大ナリ.

問題67. 三角形ノ三中線ノ和ハ三角形ノ周ヨリ小ニシテ周ノ$\frac{3}{4}$ヨリ大ナリ.

求積

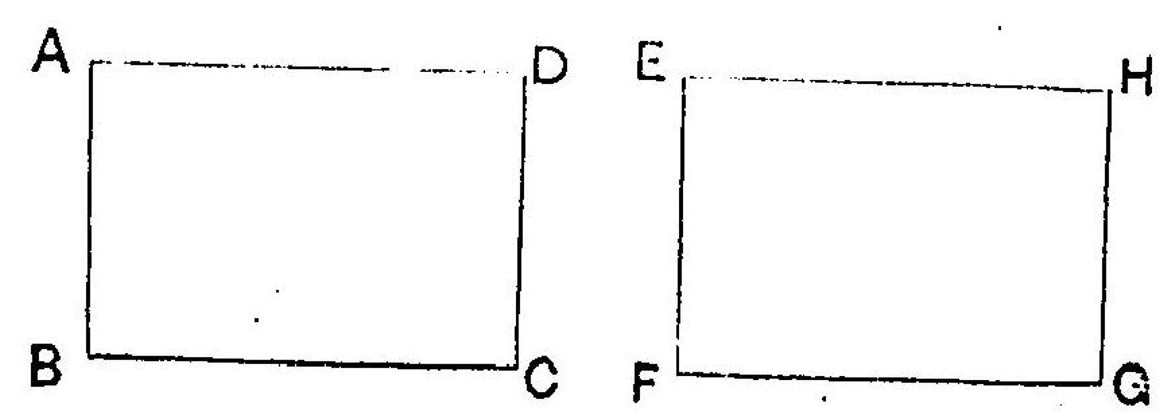
53. 相等シキ面積ヲ有スル二ツノ圖形ハ**等積なり**トイフ.

全ク相等シキ圖形ハ必ズ等積ナリ,サレド等積ナル二ツノ圖形ハ必ズシモ全ク相等シカラズ.

二ツノ圖形例ヘバ$\triangle ABC$ト$\triangle DEF$トガ等積ナルコトヲ表スニ$\triangle \mathbf{ABC} = \triangle \mathbf{DEF}$ト書ク. 但シ二ツノ圖形ガ全ク相等シキコトト紛ルル恐レアルトキハ後者ヲ示スニ符號$\equiv$ヲ用フ,例ヘバ$\triangle ABC$ト$\triangle DEF$トガ全ク相等シキコトヲ$\triangle \mathbf{ABC} \equiv \triangle \mathbf{DEF}$ト記スガ如シ.

54. 定理 相隣レル二邊ガ夫々相等シキ二ツノ矩形ハ全ク相等シ.

題意 矩形ABCDト矩形EFGHトニ於テAB=EF,



BC=FG ナレバ 矩形ABCD≡矩形EFGH ナルベシ.

證明 FG ヲ BC ニ重ネ其同ジ側ニ二ツノ矩形ヲ

置ケバ　　$\angle ABC=\angle EFG=\angle R$　　(假定)

及　　$AB=EF$　　(同上)

ナルユヱ EF ハ AB ニ重ナリ點 E ハ點 A ニ合ス.

同理ニテ GH ハ CD ニ重ナリ點 H ハ點 D ニ合ス.

故ニ又 EH ハ全ク AD ニ合ス.

即チ　　矩形ABCD≡矩形EFGH

系 1. 一邊ノ長サガ相等シキ二ツノ正方形ハ全ク相等シ.

系 2. 一邊ガ相等シクシテ之ニ隣レル邊ガ相等シカラザル二ツノ矩形ハ等積ナラズ,隣邊ノ大ナル方ノ面積ガ其小ナル方ノ面積ヨリ大ナリ.

系 3. 等積ニシテ其一邊ガ相等シキ二ツノ矩形ハ全ク相等シ.

系 4. 等積ナル二ツノ正方形ノ邊ハ相等シ.

55. 「相隣レル二邊ガ夫々二ツノ有限直線AB,CDニ等シキ矩形ノ面積」トイフベキヲ略シテ**二つの有限直線AB, CDの積**トイヒ,之ヲ簡單ニ表スタメ**AB.CD**ト書ク.

又一邊ガ二ツノ有限直線ABトCDノ和ニ等シク之ニ隣レル邊ガ他ノ有限直線EFニ等シキ矩形ノ面積ヲ表スタメ**(AB+CD).EF**ト書ク. 其他ノ場合モ之ニ準ジテ知ルベシ.

又「一邊ガ一ツノ有限直線ABニ等シキ正方形ノ面積」トイフベキヲ略シテ**有限直線ABの平方**トイヒ,之ヲ簡單ニ表スタメ**AB^2**ト書ク.

注意 玆ニ用ヒタル**積**及**平方**トイフ語ハ算術ニ於テ用フル掛ケ算ノ積及平方(即チ二乘)トイフ意味ニハアラズ. 算術ニ於ケル積トイフ語ハ數ト數トヲ掛ケ合セタルモノ又ハ量ニ數ヲ掛ケタルモノヲ表セドモ爰ニイフ積ハ然ラズ(直線ト直線トヲ掛ケ合セルトイフハ無意味ナレバナリ),又或數ノ平方ハ其數ノ二乘ナレドモ爰ニイフ平方ハ然ラザルナリ(直線ヲ二乘スルトイフコトハ有リ得ベカラザルコトナレバナリ).

56. 前節ニ述タル記號ヲ用ヒテ第54節ノ定理及系ノ意味ヲ書キ表セバ次ノ如シ. 但シ全ク相等シキコトヲ表ス代リニ其結果トシテ等積ナルコトヲ書キ表ス.

定理　有限直線A,B,C,Dアリテ$A=B$, $C=D$ナルトキハ$A.C=B.D$ナリ.

系 1.　$A=B$ナルトキハ　$A^2=B^2$　ナリ.

系 2.　$B>C$ナルトキハ$A.B>A.C$ナリ.

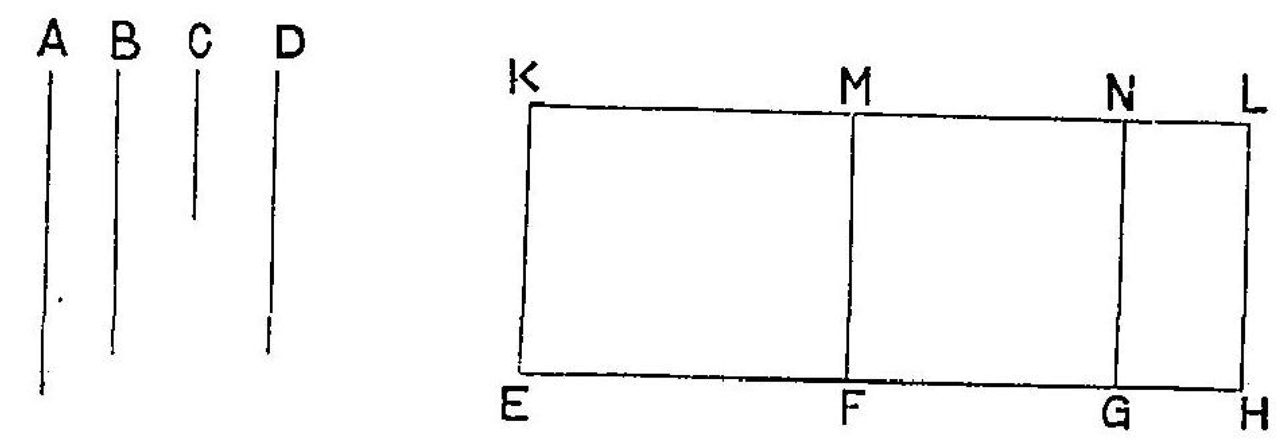
系 3.　$A.B=A.C$ナルトキハ$B=C$ナリ.

系 4.　$A^2=B^2$　ナルトキハ$A=B$ナリ.

注意　此等ノ式ハ外觀上代數學ノ公式ト全ク同シ形ナルヲ以テ記憶ニ便ナリ,但シA,B等ハ數ニアラザルガユヱニ此式ノ表ス意味ハ代數學ノモノト何等ノ關係アルコトナシ.

57. 定理　**若干ノ有限直線ノ和ト他ノ一ツノ有限直線トノ積ハ其各ノ有限直線ト後ノ有限直線トノ積ノ和ニ等シ.**

題意　例ヘバ三ツノ有限直線A,B,C及他ノ有限直線Dアルトキ$(A+B+C).D=A.D+B.D+C.D$ナルベシ.



證明　Aニ等シキ有限直線EFヲ取リEFヲ延長シ其上ニBニ等シクFGヲ取リ尚之ヲ延長シ其上ニCニ等シクGHヲ取リ,次ニEヨリEHニ垂線ヲ引キ其上ニDニ等シクEKヲ取リ,EH,EKヲ相隣レル二邊トスル矩形EKLHヲ作レバ其面積ハ記號

$$(A+B+C).D$$

ニテ表サル(55節).

次ニF及GヨリEKニ平行ナル直線ヲ引キKLト夫々M及Nニテ出會ハシムレバEKMF, FMNG, GNLHハ何レモ明カニ矩形ニシテ其面積ハ夫々A.D, B.D, C.Dニテ表サル(55節).

而シテ矩形EKLHノ面積ハ後ノ三ツノ矩形ノ面積ノ和ニ等シ.

$$\therefore\quad (A+B+C).D=A.D+B.D+C.D$$

系 1.　**或有限直線ノm倍ニ等シキ有

限直線ト他ノ有限直線トヲ二隣邊トスル矩形ノ面積ハ前ノ有限直線ト後ノ有限直線トヲ二隣邊トスル矩形ノ面積ノm倍ニ等シ．但シmハ整數トス．

卽チ二ツノ有限直線ヲA, Bトスレバ

$(mA).B=m(A.B)$ ナリ．

系 2. 二ツノ有限直線ノ差ト他ノ一ツノ有限直線トノ積ハ其各ノ有限直線ト後ノ有限直線トノ積ノ差ニ等シ．

卽チ三ツノ有限直線A, B, Cアリテ

$A>B$ナルトキハ $(A-B).C=A.C-B.C$ ナリ．

58. 定理 二ツノ有限直線ノ和ノ平方ハ各有限直線ノ平方ノ和ニ此二ツノ有限直線ノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ．

題意 二ツノ有限直線ヲA, Bトスレバ

$(A+B)^2=A^2+B^2+2A.B$ ナルベシ．

證明 $(A+B)^2=(A+B).(A+B)$

$=(A+B).A+(A+B).B$ (前節)

$=A.A+B.A+A.B+B.B$ (同上)

サテA.AハA²ニ等シクB.AハA.Bニ等シキコト明カナリ．

$\therefore\ (A+B)^2=A^2+B^2+2A.B$

59. 定理 二ツノ有限直線ノ差ノ平方ハ各有限直線ノ平方ノ和ヨリ此二ツノ有限直線ノ積ノ二倍ヲ減ジタルモノニ等シ．

題意 二ツノ有限直線A, Bアリテ$A>B$ナレバ

$(A-B)^2=A^2+B^2-2A.B$ ナルベシ．

證明 $(A-B)^2=(A-B).(A-B)$

$=(A-B).A-(A-B).B$ (57節系2)

$=(A^2-B.A)-(A.B-B^2)$ (同上)

$=(A^2-B.A+B^2)-(A.B-B^2+B^2)$

$=A^2-B.A+B^2-A.B$

$=A^2+B^2-2A.B$

60. 定理 二ツノ有限直線ノ和ト差トノ積ハ各有限直線ノ平方ノ差ニ等シ.

題意 二ツノ有限直線A,Bアリテ $A>B$ ナレバ

$(A+B).(A-B)=A^2-B^2$ ナルベシ.

證明 $(A+B).(A-B)=(A+B).A-(A+B).B$ (57節系2)

$=A^2+B.A-(A.B+B^2)$ (57節)

$=A^2+B.A-A.B-B^2$

$=A^2-B^2$

注意 第57節ヨリ本節マデノ定理ヲ記號ニテ書キ表シタルモノハ外觀上代數學ノ配分ノ法則ト全ク同ジ形ナリ. 但シ其意味ノ全ク異ナルコト前ニ言ヘルガ如シ.

*問題68. 本節及前二節ノ定理ヲ直接ニ圖形ニ就キテ證明セヨ.

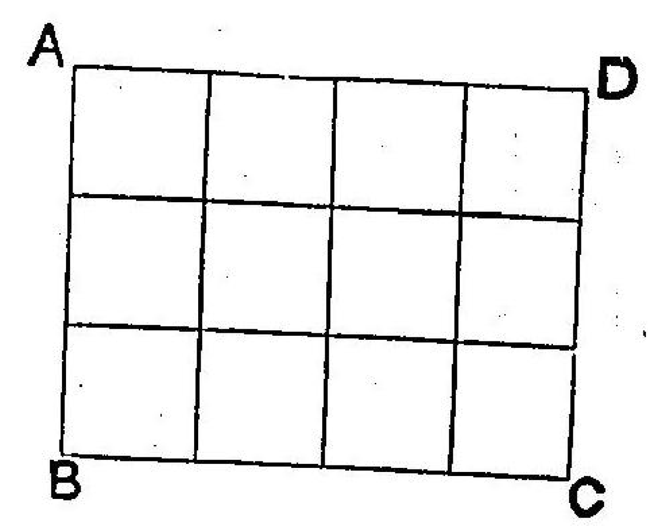
61. 面積の單位 實用上ニ於テ面積ヲ測ルトキノ單位ニハ一邊ノ長サガ長サノ單位ニ等シキ正方形ノ面積ヲ用フルモノトス. 例ヘバ長サノ單位ヲ1寸トスレバ一邊ガ1寸ナル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位トシ之ヲ**1平方寸**トイフ. 若シ長サノ單

位ヲ1尺トスレバ一邊ガ1尺ナル正方形ノ面積ヲ面積ノ單位トシ之ヲ**1平方尺**トイフ. 其他ノ場合モ亦之ニ準ズ.

62. 定理 矩形ノ面積ヲ表ス數ハ其相隣レル二邊ヲ表ス數ノ相乘積ニ等シ.

題意 矩形ノ二隣邊ヲ同ジ單位ニテ測リテ得タル數ノ相乘積ハ此矩形ノ面積ヲ,邊ヲ測ルニ用ヒタル長サノ單位ニ應ズル面積ノ單位ニテ測リテ得タル數ニ等シカルベシ.

證明 (第一) 二邊ヲ表ス數ガ何レモ整數ナル𪜈. 例ヘバ矩形ABCDノ邊AB, BCヲ表ス數ガ何レモ整數ニシテ例ヘバAB=3寸, BC=4寸ナリトセン.



ABヲ三等分シBCヲ四等分シ各分點ヲ通リ夫々相隣レル邊ニ平行ナル直線ヲ引ケバ此矩形ハ三ツ宛四列卽チ12箇ノ全ク相等シキ正方形ニ分タルルコト明カナリ,而シテ此正方形ハ其邊ノ長サ1寸ナルヲ以テ其面積ハ1平方寸

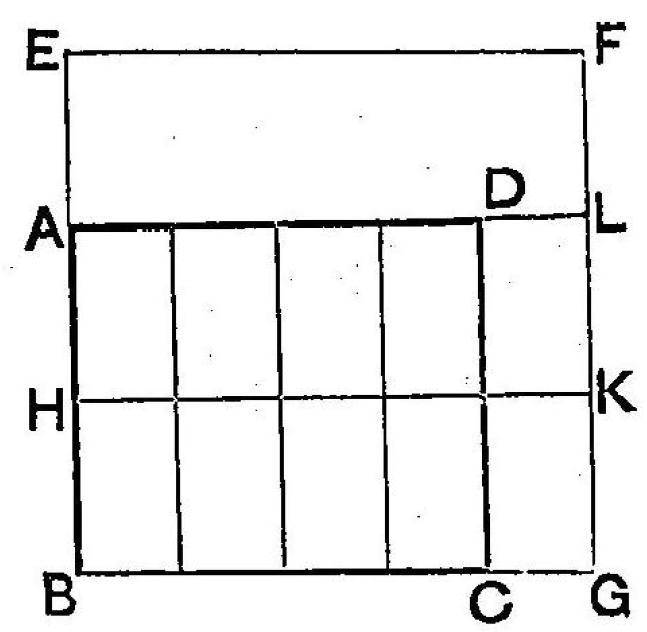
ナリ. 從テ矩形ABCDノ面積ハ12平方寸ナリ.

卽チ此場合ニハ矩形ノ面積ヲ表ス數12ハ二邊ノ長サヲ表ス數3ト4トノ相乘積ニ等シ.

AB, BCヲ表ス數ガ他ノ整數ナルトキニモ之ト同樣ニシテ證明スルコトヲ得.

（第二） 二邊ヲ表ス數ガ何レモ分數ナルトキ.

例ヘバ矩形ABCDノ邊AB, BCヲ表ス數ガ何レモ分數ニシテ例ヘバ$AB=\frac{2}{3}$寸, $BC=\frac{4}{5}$寸ナリトセン.



BA及BCヲ延長シBE及BGヲ各1寸ニ等シク取リテ正方形BEFGヲ作リ, ABヲ二等分シ其分點ヲHトシ, Hヲ通リBGニ平行ナル直線ヲ引キFGトKニ於テ交ラシメ, 又ADノ延長トFGトノ交點ヲLトスレバ正方形BEFGハAL及HKニヨリテ全ク相等シキ三ツノ矩形ニ分タル(**54**節), 故ニ矩形ABGLノ面積ハ正方形BEFGノ面積ノ$\frac{2}{3}$ニ等シ.

次ニBCヲ四等分シ各分點ヲ通リABニ平行ナル直線ヲ引ケバ矩形ABGLハ此等ノ平行線及CDノタメニ全ク相等シキ五ツノ矩形ニ分タル(**54**節), 故ニ矩形ABCDハ矩形ABGLノ$\frac{4}{5}$ニ等シ.

故ニ矩形ABCDハ正方形BEFGノ$\frac{2}{3}$ノ$\frac{4}{5}$卽チ$\frac{8}{15}$ニ等シ, 而シテ正方形BEFGハ邊ノ長サ1寸ナルヲ以テ其面積ハ1平方寸ナリ. 從テ矩形ABCDノ面積ハ1平方寸ノ$\frac{8}{15}$卽チ$\frac{8}{15}$平方寸ナリ.

卽チ此場合ニモ矩形ノ面積ヲ表ス數$\frac{8}{15}$ハ二邊ヲ表ス數$\frac{2}{3}$ト$\frac{4}{5}$トノ相乘積ニ等シ.

AB, BCヲ表ス數ガ他ノ分數ナルトキニモ之ト同樣ニシテ證明スルコトヲ得.

AB, BCヲ表ス數ガ帶分數ナルトキ, 又一ツガ整數一ツガ分數ナルトキニハ帶分數若クハ整數ヲ假分數ニ化スレバ此場合ト同樣ニシテ證明スルコトヲ得.

注意 上ノ證明ニ於テハ長サノ單位ヲ**寸**トシタリ, サレド長サノ單位ヲ**尺**トスルモ**里**トスルモ**めーとる**トスルモ其他如何ナルモノトスルモ上ト同樣ニシテ證明スルヲ得ルコト明カナリ. 卽チ本定理ハ長サノ單位ノ選ビ方ニ關セズ成リ立ツモノナリ.

系 1.　正方形ノ面積ヲ表ス數ハ其一邊ヲ表ス數ノ平方(二乘)ニ等シ.

系 2.　矩形ノ一邊ヲ表ス數ハ其面積ヲ表ス數ヲ之ニ隣レル邊ヲ表ス數ニテ除シタル商ニ等シ.

系 3.　正方形ノ一邊ヲ表ス數ハ其面積ヲ表ス數ノ平方根ニ等シ.

問題69. 相隣レル二邊ガ夫々20間,35間ナル矩形ノ地面アリ,其地積ヲ求ム.

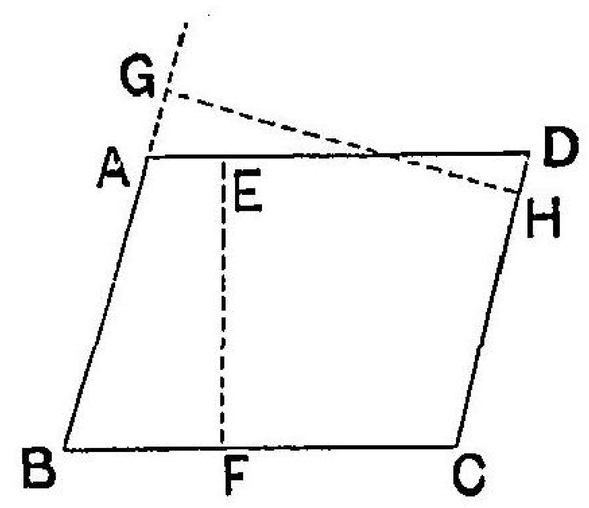
問題70. 相隣レル二邊ガ夫々 $3\frac{1}{2}$尺, $4\frac{1}{7}$ 尺ナル矩形ノ面積ヲ求ム.

問題71. 一邊ノ長サガ2.5尺ナル正方形ノ面積ヲ求ム.

問題72. 面積60平方寸ナル矩形ノ一邊ノ長サガ1尺5寸ナレバ之ニ隣レル一邊ノ長サ如何.

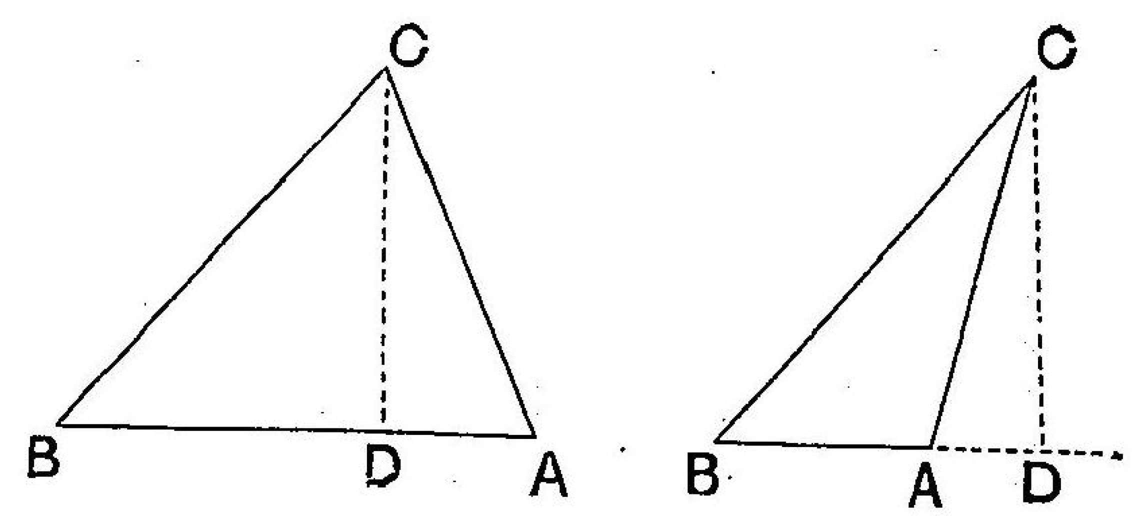
問題73. 面積5平方尺ナル正方形ノ一邊ノ長サヲ厘位マデ計算セヨ.

63. 定義　平行四邊形ノ任意ノ一邊ヲ取リ之ヲ特ニ**平行四邊形の底邊**ト稱スルコトアリ,此場合ニハ底邊ト之ニ對スル邊トノ間ノ距離ヲ此**平行四邊形の高さ**トイフ.



圖ニ於テBCヲ底邊トスレバEFハ其高サナリ,又ABヲ底邊トスレバGHハ其高サナリ.

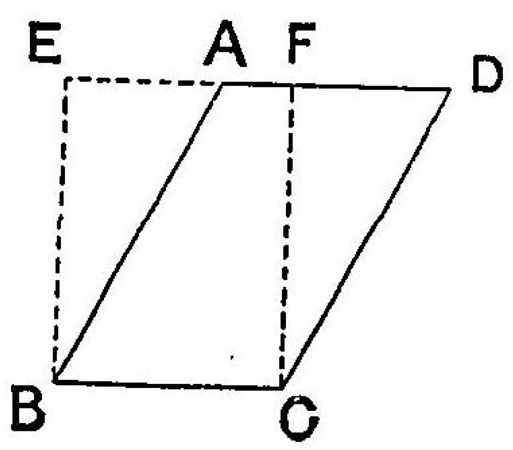
三角形ノ底邊ト之ニ對スル頂點トノ距離ヲ此**三角形の高さ**トイフ. 下圖ニ於テ AB ヲ底邊トスレバ CD ハ其高サナリ.

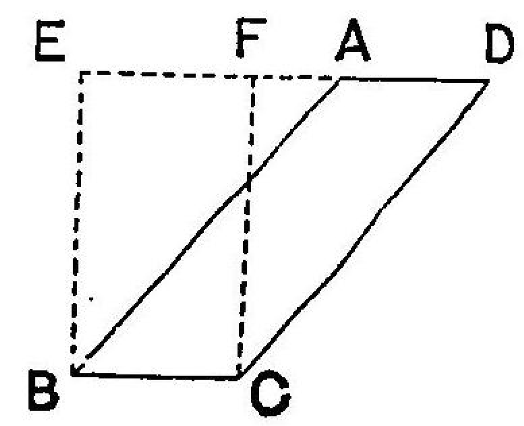


64. 定理　平行四邊形ハ其底邊ト高サトヲ二隣邊トスル矩形ト等積ナリ.

題意　平行四邊形ABCDノ底邊ヲBC,高サヲBEトスレバ此平行四邊形ノ面積ハBC, BEヲ二隣邊トス

ル矩形ノ面積卽チBC.BEニ等シカルベシ.





證明 平行四邊形ノ底邊BCノ兩端B及CヨリADニ垂線BE, CFヲ引ケバ△ABEト△DCFトニ於テ

$$\begin{cases} AB = DC & (47\text{節第二}) \\ BE = CF & (47\text{節系}3) \\ \angle AEB = \angle DFC = \angle R & (\text{作圖}) \end{cases}$$

$$\therefore \quad \triangle ABE \equiv \triangle DCF \qquad (38\text{節})$$

此各ヲ四邊形EBCDヨリ取リ去リタル殘リヲ考フレバ

平行四邊形ABCD＝矩形BEFC

＝BC.BE

系 1. 平行四邊形ノ面積ヲ表ス數(a)ハ其底邊及高サヲ表ス數(b, h)ノ相乘積ニ等シ.

卽チ $a=bh$

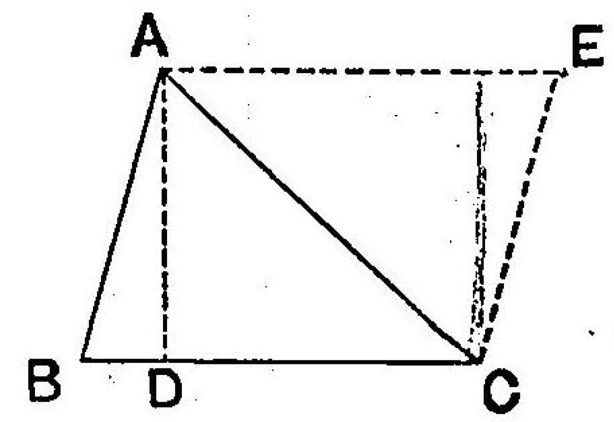
系 2. 底邊及高サガ夫々相等シキ二ツノ平行四邊形ハ等積ナリ.

問題74. 底邊1.5尺,高サ5.8尺ナル平行四邊形ノ面積ハ幾平方尺ナルカ.

65. 定理 三角形ノ面積ハ其底邊ト高サトヲ二隣邊トスル矩形ノ面積ノ半分ニ等シ.

題意 △ABCノ底邊ヲBC,高サヲADトスレバ此三角形ノ面積ハBC, ADヲ二隣邊トスル矩形ノ面積ノ半分卽チ$\frac{1}{2}$BC.ADニ等シカルベシ.

證明 AB, BCヲ二邊トスル平行四邊形ABCEヲ作レバ



△ABC≡△CEA (47節第一)

故ニ $\triangle ABC = \frac{1}{2}$(平行四邊形ABCE)

$= \frac{1}{2}$BC.AD (前節)

系 1. 三角形ノ面積ヲ表ス數(a)ハ其底邊及高サヲ表ス數(b, h)ノ相乘積ノ半分ニ等シ.

即チ $$a=\frac{1}{2}bh$$

系 2. 直角三角形ノ面積ヲ表ス數ハ直角ヲ夾ム二邊ヲ表ス數ノ相乘積ノ半分ニ等シ.

系 3. 底邊及高サガ夫々相等シキ二ツノ三角形ハ等積ナリ.

系 4. 等積ナル二ツノ三角形ノ底邊(或ハ高サ)ガ相等シケレバ其高サ(或ハ底邊)モ亦相等シ.

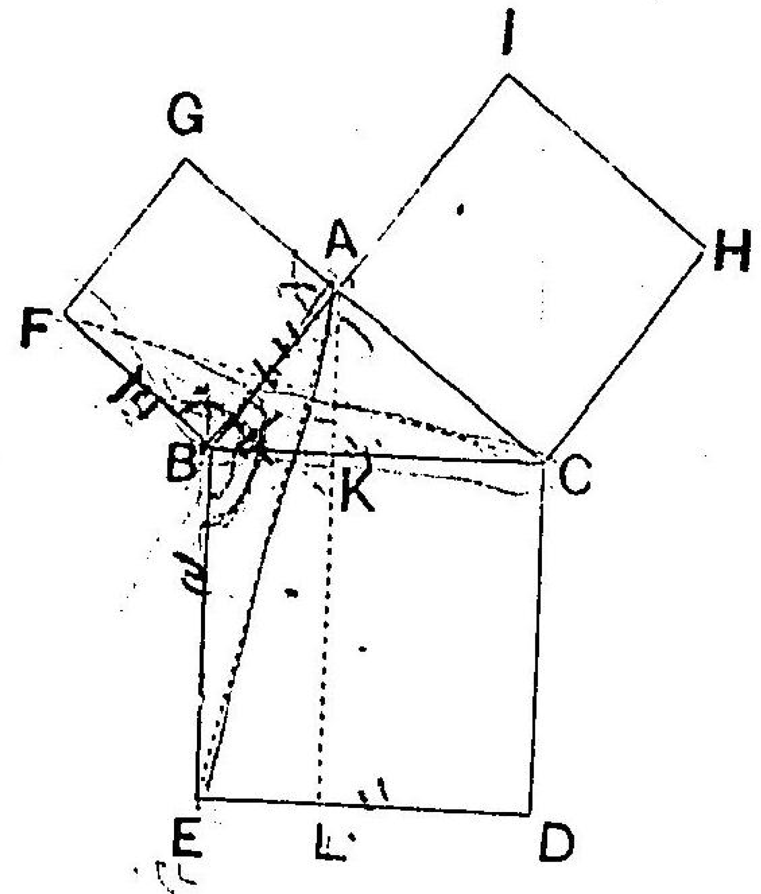
系 5. 同一直線上ニ同ジ底邊若クハ相等シキ底邊ヲ有シ且ツ此直線ノ同ジ側ニアリテ等積ナル二ツノ三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル直線ハ底邊ニ平行ナリ.

***問題75.** 三角線ノ中線ハ此三角形ヲ等積ナル二ツノ三角形ニ分ツ.

問題76. 二ツノ平行線中ノ一ツノ上ニ任意ノ二點A, Bヲ取リ,他ノ直線上ニ任意ノ二點C, Dヲ取リAD, BCノ交點ヲOトスレバ△AOCト△BODトハ等積ナリ.

***問題77.** 等積ナル二ツノ三角形ガ同ジ底邊ノ上ニ一ツ宛其反對ノ側ニアレバ其頂點ヲ結ビ付クル直線ハ底邊若クハ其延長ニヨリテ二等分セラル.

66. 定理 直角三角形ノ斜邊ノ平方ハ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シ.



題意 △ABCニ於テ∠Aガ直角ナリトスレバ $BC^2=AB^2+AC^2$ ナルベシ.

證明 △ABCノ外側ニアル樣ニ,各邊ノ上ニ正方形BCDE, ABFG, ACHIヲ畫キ,頂點Aヨリ斜邊BCニ垂線AKヲ引キ,之ヲ延

長シテEDトLニ於テ交ラシメ,FC,AEヲ結ビ付クレバ$\triangle ABE$ト$\triangle FBC$トニ於テ

$$\begin{cases} BE = BC & \text{(作圖)} \\ AB = FB & \text{(同上)} \\ \angle ABE = \angle FBC & \end{cases}$$

$\therefore$ $\triangle ABE \equiv \triangle FBC$ (31節)

然ルニ $\triangle ABE = \frac{1}{2}$(矩形BELK) (前節)

$\triangle FBC = \frac{1}{2}$(正方形ABFG) (同上)

$\therefore$ 矩形BELK＝正方形ABFG

同理ニテ 矩形CDLK＝正方形ACHI

$\therefore$ (矩形BELK)＋(矩形CDLK)

＝(正方形ABFG)＋(正方形ACHI)

即チ 正方形BCDE＝(正方形ABFG)＋(正方形ACHI)

即チ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

系 1. 直角三角形ノ斜邊ヲ表ス數ノ平方ハ他ノ二邊ヲ表ス數ノ平方ノ和ニ等シ.

系 2. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム一ツ

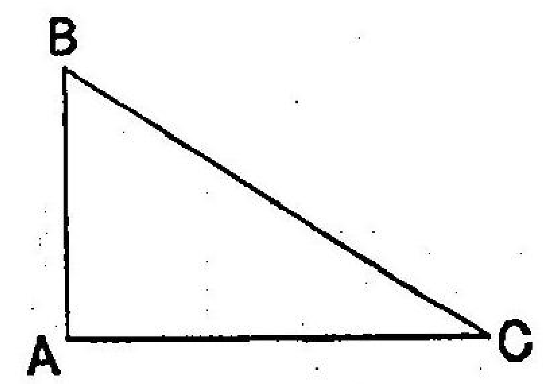
ノ邊ノ平方ハ斜邊ノ平方ヨリ他ノ邊ノ平方ヲ引キタルモノニ等シ.

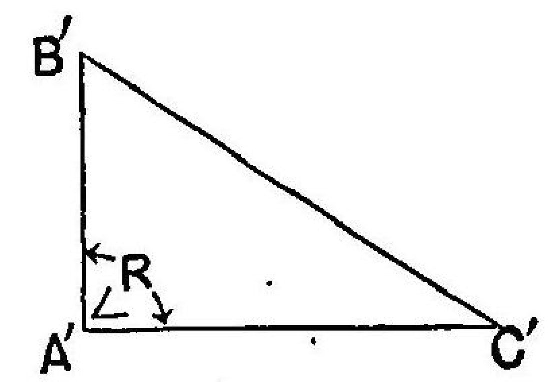
系 3. 一ツノ邊ノ平方ガ他ノ二邊ノ平方ノ和ニ等シキ三角形ハ直角三角形ナリ.

如何ニモ,$\triangle ABC$ニ於テ

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

ナリトシ,二邊$A'B'$及$A'C'$ガ夫々AB及ACニ等シク其夾ム角$B'A'C'$ガ$\angle R$ニ等シキ直角三角形$A'B'C'$ヲ作レバ本定理ニヨリ





$B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$

$= AB^2 + AC^2$ (作圖)

$= BC^2$ (假定)

$\therefore$ $B'C' = BC$ (54節系4)

$\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ (36節)

$\therefore$ $\angle A = \angle A'$

然ルニ $\angle A' = \angle R$ (作圖)

$$\therefore \quad \angle A = \angle R$$

卽チ△ABCハ直角三角形ナリ.

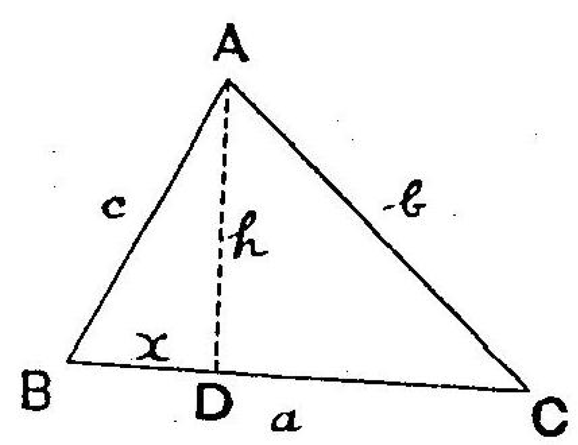
問題78. 二邊ガ5寸及1尺2寸ナル直角三角形ノ斜邊ノ長サ如何.

***問題79.** 二邊ガ夫々18間,26間ナル矩形ノ地面ノ對角線ノ長サハ幾間幾尺ナルカ.

問題80. 一邊ノ長サガaナル正方形ノ對角線ノ長サハ$\sqrt{2}a$ナリ.

67. 定理 三角形ノ三邊ヲ表ス數ヲa, b, cトシ周ノ半分ヲ表ス數卽チ$\frac{1}{2}(a+b+c)$ヲsトスレバ三角形ノ面積ヲ表ス數ハ$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ナリ.

證明† △ABCニ於テ三邊BC, CA, ABノ長サヲ表ス數ヲ夫々a, b, cトシAヨリBCニ引ケル垂線ヲADトシ, AD, BDノ長サヲ表ス數ヲ夫々h, xトスレバ



† 代數ノ方ガ因數分解ノ處マデ進マザレバ此證明ヲ後廻シニスベシ.

$$CD = BC - BD = a - x$$

$$c^2 - x^2 = h^2 \qquad b^2 - (a-x)^2 = h^2$$

$$\therefore \quad c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$$

之ヨリ
$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$\therefore \quad h^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 = \frac{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$\therefore \quad 4a^2h^2 = (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)$$

$$= [(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2]$$

$$= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$$

$$= 16s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\therefore \quad h^2 = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

$$\therefore \quad h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

然ルニ△ABCノ面積ヲ表ス數

$$= \frac{ah}{2} \qquad \text{(65節系1)}$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

問題81. 三邊ノ長サガ夫々13寸,14寸,15寸ナル三角形ノ面積ヲ計算セヨ.

練習

問題82. 二邊ガ相等シク其夾角ガ互ニ補角ナル二ツノ三角形ハ等積ナリ.

問題83. 菱形ノ面積ハ其兩對角線ノ積ノ半分ニ等シキコトヲ證明セヨ.

次ニ對角線ノ長サガ2.5寸及3.2寸ナルトキノ面積ヲ計算セヨ.

問題84. 直角三角形ノ直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ引ケル垂線ノ長サヲ表ス數ハ直角ヲ夾ム二邊ノ長サヲ表ス數ノ相乘積ヲ斜邊ノ長サヲ表ス數ニテ割リタルモノニ等シキコトヲ證明セヨ.

次ニ直角ヲ夾ム二邊ノ長サガ3寸及4寸ナルトキ直角ノ頂點ヨリ斜邊ニ引ケル垂線ノ長サヲ計算セヨ.

問題85. 一邊ノ長サガaナル正三角形ノ高サハ$\frac{\sqrt{3}}{2}a$ナリ.

問題86. 一邊ノ長サガaナル正三角形ノ面積ヲ求ム.

問題87. 對角線ノ長サガ1尺ナル正方形ノ一邊ノ長サヲ計算セヨ.

問題88. 四邊形ハ其兩對角線及其夾ム角ヲ夫々二邊及其夾角トスル三角形ト等積ナリ.

問題89. 四邊形ノ兩對角線ノ長サガ5尺及8尺,其夾角ガ60°ナル四邊形ノ面積ヲ計算セヨ.

問題90. 四邊形ABCDニ於テAB=13間,BC=13間,CD=4間,DA=14間,BD=15間ナルトキ其面積ヲ計算セヨ.

問題91. 周圍1米ナル正三角形及正方形ノ面積ヲ計算セヨ.

問題92. 二邊ガ與ヘラレタル三角形ノ中面積ノ最大ナルモノハ直角三角形ナリ.

問題93. 定マレル周ヲ有スル矩形ノ中面積ノ最大ナルモノハ正方形ナリ.

問題94. 三角形ノ重心ヲ各頂點ニ結ビ付ケテ得ル所ノ三ツノ三角形ハ皆等積ナリ.

問題95. △ABCニ於テ$\angle B=45°$ナルトキABノ中點ヲDトシ頂點CヨリABニ引ケル垂線ノ足ヲEトスレバ$AC^2=2(AD^2+DE^2)$ナリ.

問題96. 三角形ノ二邊ノ平方ノ和ハ第三邊ノ半分ノ平方ト第三邊ヘ引ケル中線ノ平方トノ和ノ二倍ナリ.

定義 一双ノ相對スル邊ダケガ互ニ平行ナル四邊形ヲ**梯形**トイヒ,其平行ナル二邊ヲ梯形ノ**底邊**,平行ナル二邊間ノ距離ヲ其**高さ**トイフ.

問題97. 梯形ノ面積ハ兩底邊ノ和ト其高サトノ積ノ半分ニ等シキコトヲ證明セヨ.

次ニ兩底邊ノ長サガ夫々3.5尺及4.3尺ニシテ高サガ2.8尺ナル梯形ノ面積ヲ計算セヨ.

問題98. 次ノ甲圖ニ於テハEHハADニ垂直ニシテAF及CGハ何レモBDニ垂直ナリ.又乙圖ニ於テハAF, EK, CGハ皆BDニ垂直ナリ. 且ツ

甲圖ニ於テハ

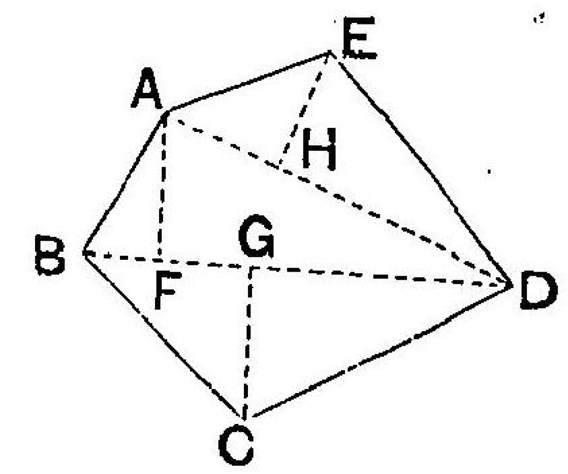
BD=26尺	AD=23.5尺	AF=8.8尺
CG=8.7尺	EH=7.4尺	

乙圖ニ於テハ

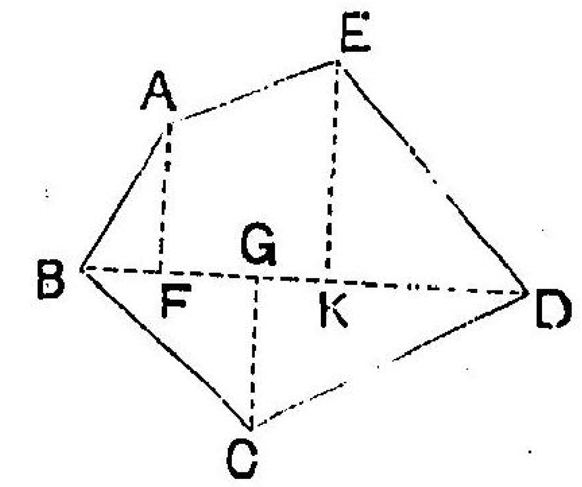
BF=4.5尺	BK=14尺	BD=26尺
AF=8.8尺	CG=8.7尺	EK=13尺

此二ツノ圖形ノ面積ヲ計算セヨ.

(甲 圖)

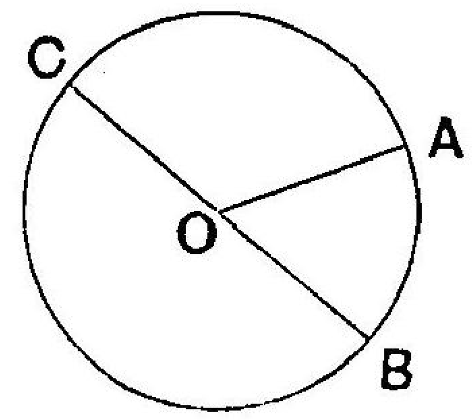


(乙 圖)



第四編　圓

68. 定義　一ツノ有限直線ヲ其一端ヲ固定シオキ一平面上ニ於テ其固定シタル端ノ周リヲ始終同ジ向キニ廻轉シテ再ビ元ノ位置ニ來ラシムルトキ他ノ端ガ畫ク所ノ線ヲ**圓周**トイヒ,圓周ニテ圍マレタル平面ノ部分ヲ**圓**トイフ.



始メ固定シオキタル端ヲ圓ノ**中心**トイフ. 中心ヨリ圓周マデ引キタル有限直線ヲ**半徑**トイヒ,中心ヲ通リ其兩端ガ圓周上ニアル有限直線ヲ**直徑**トイフ.　圖ニ於テOハ中心,OA, OB, OCハ半徑,BCハ直徑ナリ.

圓ヲ呼ブニハ通例其中心ノ名又ハ圓周上ノ三點ノ名ヲ以テス,例ヘバ上ノ圓ヲ**圓O**又ハ**圓ABC**ト呼ブガ如シ.

注意　圓周ハ線ニシテ圓ハ面ナレドモ時トシテハ圓ナル語ヲ圓周ノ意ニ用フルコトアリ.

69. 上ノ定義ニヨリテ容易ニ次ノ事實ヲ知ルコトヲ得.

(第一)　圓ノ中心ハ圓内ニアリ.

(第二)　圓ノ半徑ノ長サハ一定ナリ.

(第三)　圓ノ直徑ノ長サモ亦一定ニシテ半徑ノ長サノ二倍ニ等シ.　從テ圓ノ中心ハ直徑ノ中點ナリ.

(第四)　圓ノ中心ヲ通ル直線ハ圓周ト必ズ唯二點ニテ出會フ.

(第五)　圓ノ中心ハ唯一ツアルノミ.

(第六)　圓内ノ一點ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ小ニシテ圓外ノ一點ト中心トノ距離ハ半徑ヨリ大ナリ.

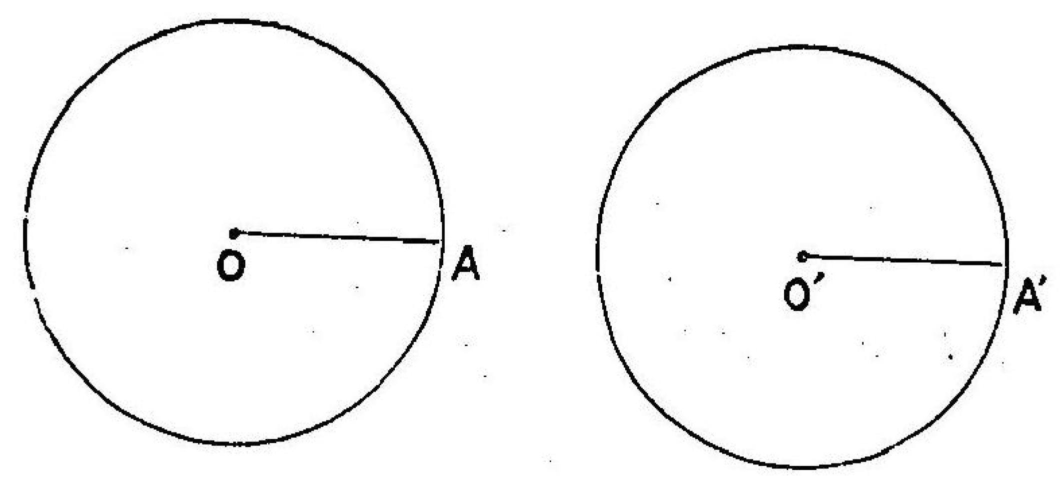
又逆ニ中心ヨリノ距離ガ半徑ヨリ小ナル點ハ圓内ニアリ,半徑ニ等シキ點ハ圓周上ニアリ,半徑ヨリ大ナル點ハ圓外ニアリ.

70. 定理　半徑ガ相等シキ圓ハ全ク相等シ.

題意　二ツノ圓OトO′トノ半徑OA, O′A′ガ相等シケレバ圓O≡圓O′ナルベシ.

證明 圓O′ヲ圓Oノ上ニ重ネ半徑O′A′ガ半徑OAノ上ニ合スル樣ニ置ケ．サスレバ此二ツノ圓周ハ同一ノ有限直線ノ一端ヲ點Oニ置キテ之ヲOノ周リニ廻ストキ他ノ端ガ生ズル線ナルユヱ全ク相一致ス．

故ニ　　圓O ≡ 圓O′



系 1. 相等シキ圓ノ半徑ハ相等シ．

系 2. 圓ヲ其中心ノ周リニ廻スモ常ニ元ノ位置ニ一致ス．

系 3. 半徑ガ相等シカラザル同心圓ノ周ハ決シテ出會ハズ．

註 **同心圓**トハ同ジ中心ノ圓ノコトナリ．

系 4. 周ガ出會フ所ノ二ツノ圓ハ全ク相合スルニ非レバ同心ナルコト能ハズ．

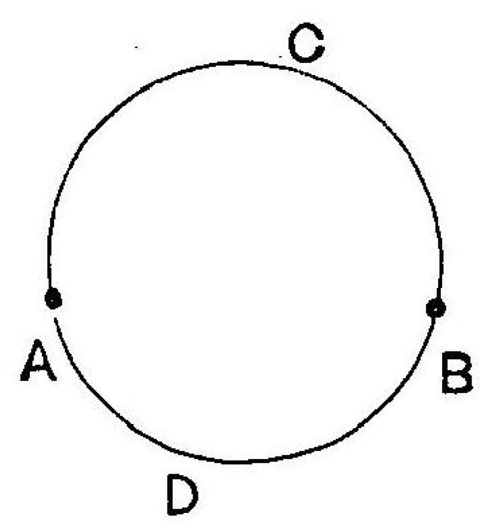
問題99. 正方形ノ對角線上ノ一點ヲ通リ邊ニ平行ナル二直線ヲ引ケバ此二直線ガ四ツノ邊ニ出會フ點ハ對角線ノ交點ヲ中心トスル一ツノ圓周上ニ在リ．

弧

71. 定義 圓周ノ一部分ヲ**圓弧**或ハ略シテ**弧**トイフ.

弧ヲ呼ブニハ其兩端ヲ表ス文字ヲ以テス,例ヘバ**弧AB**トイフガ如シ. 弧トイフ文字ノ代リニ符號⌒ヲ其名ノ上ニ冠ラスコトアリ,例ヘバ $\overset{\frown}{AB}$ ト記スガ如シ.

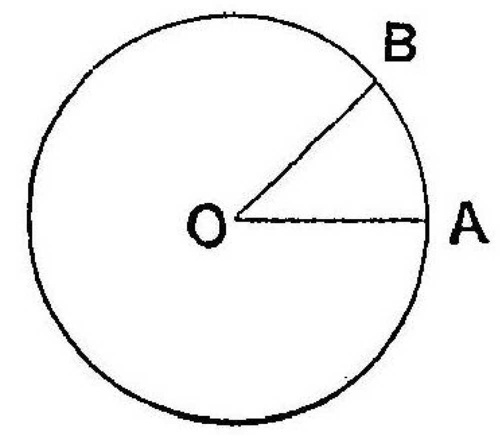
二ツ加ヘテ全圓周トナルベキ弧ヲ**互に共軛なり**トイフ. 互ニ共軛ナル弧ガ相等シカラザルトキハ其中ノ大ナル方ヲ**優弧**小ナル方ヲ**劣弧**トイヒ,相等シキトキハ其各ヲ**半圓周**トイフ.



同ジ兩端A,Bヲ有スル互ニ共軛ナル二ツノ弧ヲ區別シテ呼ブニハ AB ノ前ニ優弧又ハ劣弧トイフ語ヲ添フルカ又ハ考フル所ノ弧ノ上ニ任意ノ一點ヲ取リ其名ヲAトBトノ間ニ夾ミテ之ヲ呼ブ,例ヘバ優弧**AB**又ハ**弧ACB**,劣

弧**AB**又ハ**弧ADB**ノ如シ. 以下單ニ弧トイヘバ劣弧ノコトナリト知ルベシ.

72. 中心角 弧ノ兩端ヲ中心ニ結ビ付クル二ツノ半徑ノナス角ヲ**此弧の上に立つ中心角**トイフ.



又此中心角ト此弧トハ**相對す**トイフ. 圖ニ於テ劣弧 AB ニ對スル中心角ハ劣角AOBニシテ優弧ABニ對スル中心角ハ優角AOBナリ.

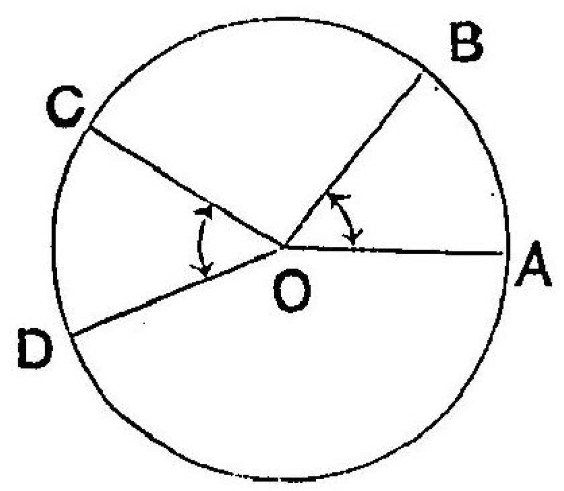
73. 扇形 弧ト其兩端ニ引ケル半徑トニテ圍マレタル圓ノ部分ヲ**扇形**トイヒ,其弧ニ對スル中心角ヲ**扇形の角**トイフ.

74. 定理 同ジ圓或ハ相等シキ二ツノ圓ニ於テ相等シキ中心角ニ對スル弧ハ相等シク,相等シカラザル中心角ニ對スル弧ノ中,大ナル中心角ニ對スル弧ハ小ナル中心角ニ對スル弧ヨリ大ナリ.

題意 例ヘバ一ツノ圓Oニ於テ,(第一)∠AOB=∠CODナレバ$\widehat{AB}=\widehat{CD}$ナルベク,(第二)∠AOB>∠CODナレバ$\widehat{AB}>\widehat{CD}$ナルベシ.

第一の證明 扇形AOBヲ中心Oノ周リニ廻セバ假定ニヨリ

∠AOB=∠COD



ナルユヱ∠AOBノ兩邊OA, OBガ夫々∠CODノ兩邊OC, ODニ一致スル樣ニナスコトヲ得.

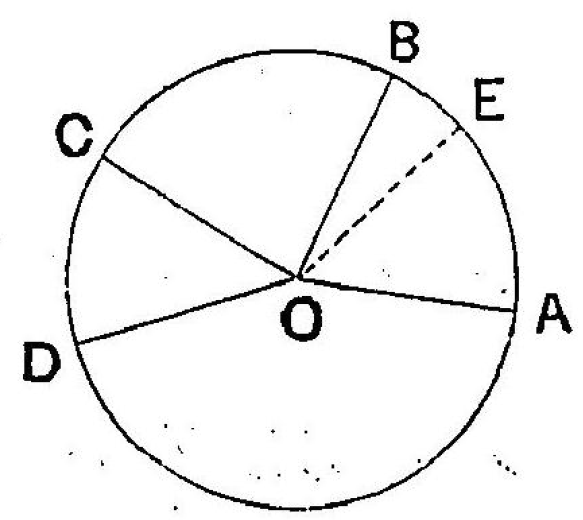
サスレバA, Bハ夫々C, Dニ合シ,從テ$\widehat{AB}$ハ全ク$\widehat{CD}$ニ合ス(70節系2).

∴ $\widehat{AB}=\widehat{CD}$

第二の證明 Oヲ通リテOAト∠CODニ等シキ角ヲナス半徑OEヲ,OAニ對シOBト同ジ側ニアル樣ニ引ケバ假定ニヨリ

∠AOB>∠COD

ナルユヱOEハ∠AOBノ内ニ落ツ.



因テ $\widehat{AE}=\widehat{CD}$

∴ $\widehat{AB}>\widehat{CD}$

系 1. 角及半徑ガ相等シキ扇形ハ全ク相等シ.

系 2. 圓ノ直徑ハ圓周及圓ヲ二等分ス. 從テ直徑ヲ折リ目トシテ圓ヲ折リ返セバ二ツノ部分ハ全ク相合ス.

定義 直徑ト半圓周トニテ圍マレタル圓ノ部分ヲ半圓トイフ.

系 3. 互ニ垂直ナル二ツノ直徑ハ圓周及圓ヲ四等分ス.

系 4. 同ジ圓或ハ相等シキ二ツノ圓ニ於テ相等シキ弧ニ對スル中心角ハ相等シク,相等シカラザル弧ニ對スル中心角ノ中,大ナル弧ニ對スル中心角ハ小ナル弧ニ對スル中心角ヨリ大ナリ.

系 5. 劣弧ノ上ニ立ツ中心角ハ劣角,優弧ノ上ニ立ツ中心角ハ優角,半圓周ノ

上ニ立ツ中心角ハ二直角ナリ.

問題100. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ一ツノ中心角ガ他ノ中心角ノ二倍ナレバ前ノ中心角ニ對スル弧モ亦後ノ中心角ニ對スル弧ノ二倍ナリ.

弦

75. 定義 圓周上ノ任意ノ二點ヲ結ビ付クル有限直線ヲ**弦**トイフ.

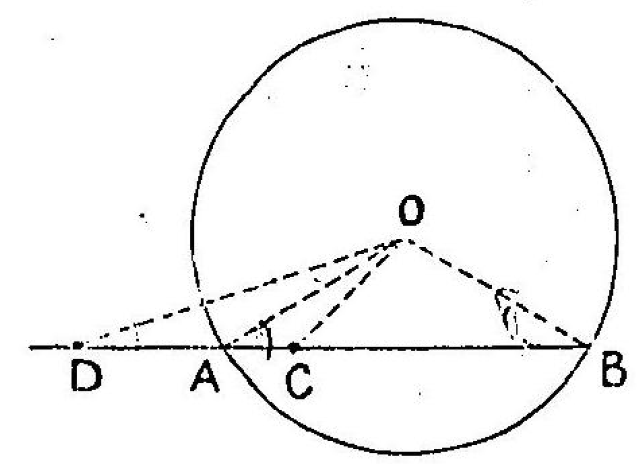
弦ト其端ヲ同ジクスル弧トハ**相對す**トイフ.

***問題101.** 直徑ハ圓ノ最大ナル弦ナリ.

76. 定理 弦ノ上ノ點ハ皆圓ノ内ニ在リ,弦ノ延長ノ上ノ點ハ皆圓ノ外ニ在リ.

題意 圓Oノ一ツノ弦ヲABトスレバ(第一)AB上ノ任意ノ點ハ圓内ニアルベク,(第二)ABノ延長ノ上ニアル任意ノ點ハ圓外ニアルベシ.

第一の證明 AB上ノ任意ノ點ヲCトシOA, OB, OCヲ結ビ付クレバ



OA＝OB (**69**節(第二))

∴ ∠OAB＝∠OBA (**34**節)

然ルニ ∠OCA＞∠OBC (**37**節 系 1)

$\therefore \quad \angle OCA > \angle OAC$

$\therefore \quad OA > OC$ (40節)

故ニCハ圓內ニ在リ〔69節(第六)〕.

第二の證明 ABノ延長ノ上ノ一點ヲDトシ,ODヲ結ビ付クレバ先ヅ上ト同樣ニシテ

$\angle OAB = \angle OBA$

然ルニ $\angle OAB > \angle ODA$ (37節系1)

$\therefore \quad \angle OBD > \angle ODB$

$\therefore \quad OD > OB$ (40節)

故ニDハ圓外ニ在リ〔69節(第六)〕

系 1. 直線ト圓周トハ二ツヨリ多クノ點ニ於テ出會フコトナシ.

定義 圓周ト二點ニ於テ出會フ直線ヲ此圓ニ**交ル直線**,又ハ此圓ノ**割線**トイフ.

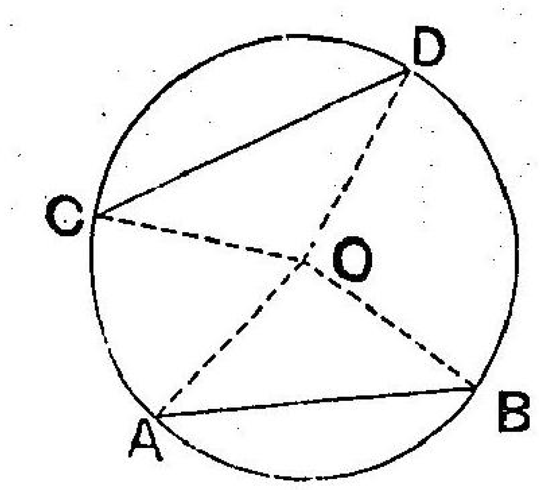
系 2. 一直線上ニアル三點ヲ通ル圓ヲ畫クコト能ハズ.

77. 定理 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弧ニ對スル弦ハ相等シク,相

等シカラザル劣弧ニ對スル弦ノ中,大ナル劣弧ニ對スル弦ハ小ナル劣弧ニ對スル弦ヨリ大ナリ.

題意 例ヘバ一ツノ圓Oニ於テ,(第一) $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ ナルトキハ $AB=CD$ ナルベク,(第二)劣弧AB > 劣弧CDナルトキハ $AB>CD$ ナルベシ.

第一の證明 OA, OB, OC, ODヲ結ビ付クレバ



$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ (假定)

$\therefore \quad \angle AOB = \angle COD$ (74節系4)

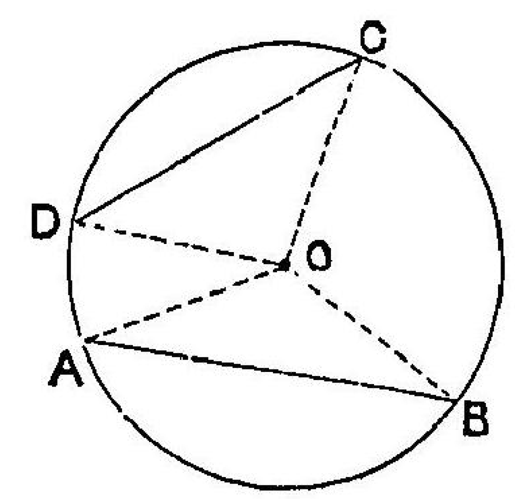
故ニ△AOBト△CODトニ於テ

$$\begin{cases} \angle AOB = \angle COD \\ OA = OB = OC = OD \end{cases}$$

$\therefore \quad \triangle AOB \equiv \triangle COD$ (31節)

$\therefore \quad AB = CD$

第二の證明 上ト同樣ノ作圖ヲナセバ



$\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$ (假定)

$\therefore \quad \angle AOB > \angle COD$ (74節系4)

故ニ△AOB ト△COD トニ於テ

$$\begin{cases} OA=OB=OC=OD \\ \angle AOB>\angle COD \end{cases}$$

$\therefore$　　AB>CD　　(**42** 節)

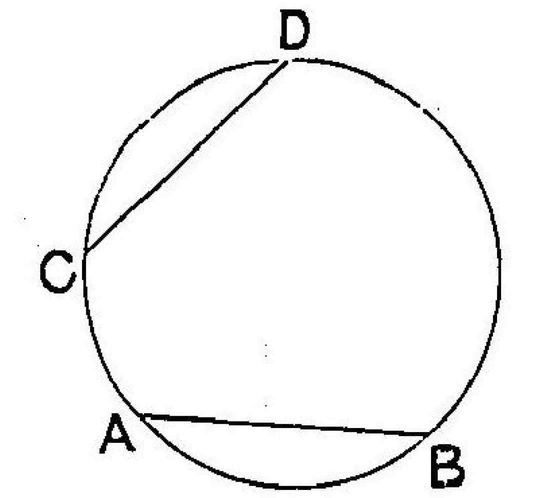
系　同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ中心角ニ對スル弦ハ相等シク,相等シカラザル中心角(劣角)ニ對スル弦ノ中,大ナル中心角ニ對スル弦ハ小ナル中心角ニ對スル弦ヨリ大ナリ.

如何ニモ中心角ノ大小ト之ニ對スル弧ノ大小トハ相伴ヘバナリ(**74** 節).

問題102. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ一ツノ弧ガ他ノ弧ノ二倍ナレバ前ノ弧ニ對スル弦ハマタ後ノ弧ニ對スル弦ノ二倍トナルヤ否ヤ.

78. 定理　同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弦ニ對スル劣弧(若クハ優弧)ハ相等シク,相等シカラザル弦ニ對スル劣弧ノ中,大ナル弦ニ對スル劣弧ハ小ナル弦ニ對スル劣弧ヨリ大ナリ.

題意　例ヘバ一ツノ圓Oニ於テ,(第一) AB=CD ナルトキハ劣弧AB=劣弧 CD ナルベク,(第二) AB>CD ナルトキハ劣弧AB>劣弧CD ナルベシ.



第一の證明　若シ劣弧AB ガ劣弧CD ヨリ大ナリトスレバAB>CD ナルコトトナリ(前節)假定ニ背ク.

故ニ劣弧AB ハ劣弧CD ヨリ大ナラズ.

同理ニテ劣弧AB ハ劣弧CD ヨリ小ナラズ.

故ニ　　劣弧 AB ＝劣弧 CD

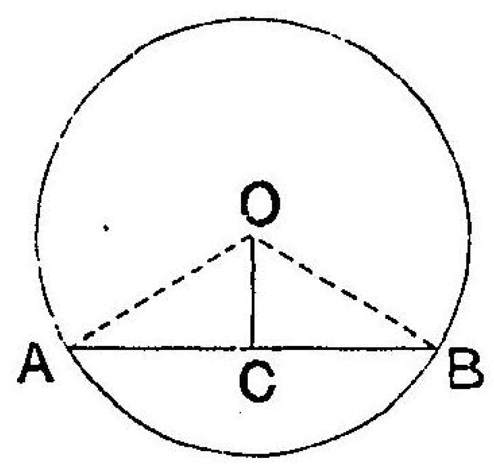
(第二)モ全ク同様ニシテ證明シ得ベシ.

系　同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弦(ニ對スル弧)ノ上ニ立ツ中心角ハ相等シク,相等シカラザル弦ノ上ニ立ツ中心角ノ中,大ナル弦ノ上ニ立ツ中心角ハ小ナル弦ノ上ニ立ツ中心角ヨリ大ナ

リ.

79. 定理 圓ノ中心ヨリ弦ヘ引ケル垂線ハ其弦ヲ二等分ス.

題意 圓Oノ中心ヨリ弦ABヘ垂線OCヲ引ケバ$AC=BC$ナルベシ.



證明 OA, OBヲ結ビ付クレバ△AOCト△BOCトニ於テ

$$\left\{\begin{array}{l} OA=OB \\ OC\text{ハ共通} \\ \angle OCA=\angle OCB=\angle R \end{array}\right.$$

$$\therefore \quad \triangle AOC \equiv \triangle BOC \qquad (38節)$$

$$\therefore \quad AC=BC$$

系 1. 圓ノ中心ト弦ノ中點トヲ結ビ付クル直線ハ其弦ニ垂直ナリ.

系 2. 弦ヲ直角ニ二等分スル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

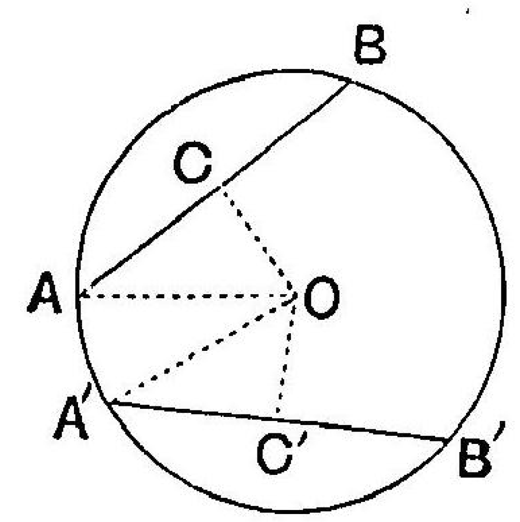
系 3. 中心ヨリ弦ヘ引ケル垂線ノ延長ハ此弦ニ對スル二ツノ共軛弧ヲ二等分ス.

問題103. 一直線ガ二ツノ同心圓ニ交レバ此直線ノ兩圓周間ニ夾マレタル部分ハ相等シ.

80. 定理 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弦ハ中心ヨリ等距離ニ在リ.

逆ニ中心ヨリ等距離ニ在ル弦ハ相等シ.

題意 圓Oノ中心ヨリ二弦AB, A′B′ニ夫々垂線OC, OC′ヲ引クトキハ(第一) $AB=A'B'$ナレバ$OC=OC'$ナルベク,(第二) $OC=OC'$ナレバ$AB=A'B'$ナルベシ.



第一の證明 OA, OA′ヲ結ビ付クレバ△OAC, △OA′C′ニ於テ

$$AB=A'B' \qquad (假定)$$

$$\therefore\ \left\{\begin{array}{ll} AC = A'C' & \text{(前節)} \\ OA = OA' & \\ \angle OCA = \angle OC'A' = \angle R & \end{array}\right.$$
又

$$\therefore\ \triangle OAC \equiv \triangle OA'C' \qquad \text{(38節)}$$

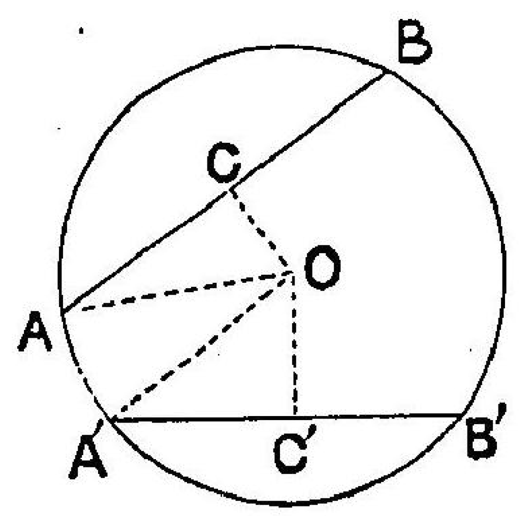
$$\therefore\ OC = OC'$$

第二モ同樣ニシテ證明シ得ベシ.

81. 定理

81. 定理 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ大ナル弦ハ小ナル弦ヨリモ中心ニ近シ. 逆ニ中心ニ近キ弦ハ中心ニ遠キ弦ヨリ大ナリ.

題意 圓Oノ中心ヨリ二弦 AB, A′B′ ニ夫々垂線 OC, OC′ ヲ引クトキ(第一) $AB > A'B'$ ナレバ $OC < OC'$ ナルベク,(第二) $OC < OC'$ ナレバ $AB > A'B'$ ナルベシ.



第一の證明 OA, OA′ ヲ結ビ付クレバ

$$OC^2 = OA^2 - AC^2 \qquad \text{(66節 系2)}$$

$$OC'^2 = OA'^2 - A'C'^2 \qquad \text{(同上)}$$

然ルニ $OA = OA'$

又 $AC > A'C'$ (假定及79節)

$$\therefore\ OC^2 < OC'^2$$

$$\therefore\ OC < OC'$$

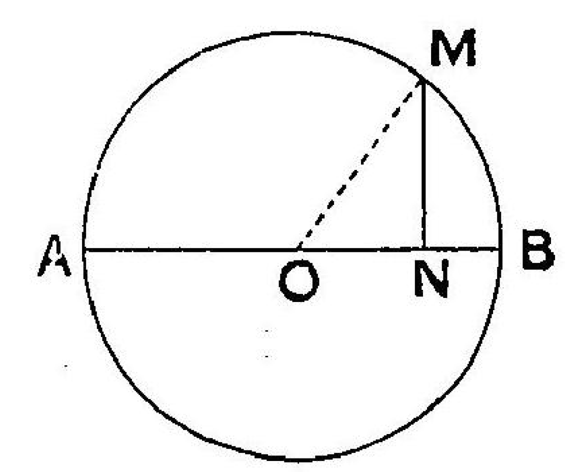
第二モ同樣ニシテ證明シ得ベシ.

問題104. 圓內ノ一定點ヲ通ル弦ノ中,其點ヲ通ル直徑ニ垂直ナル弦ガ最小ナリ.

82. 定理

82. 定理 圓周上ノ一點ヨリ直徑ニ引ケル垂線ノ平方ハ此垂線ガ分ツ所ノ直徑ノ二ツノ部分ノ積ニ等シ.

題意 圓Oノ周上ノ任意ノ一點Mヨリ任意ノ直徑ABニ垂線MNヲ引ケバ $MN^2 = AN.BN$ ナルベシ.



證明 OMヲ結ビ付クレバ直角三角形OMNニ於テ

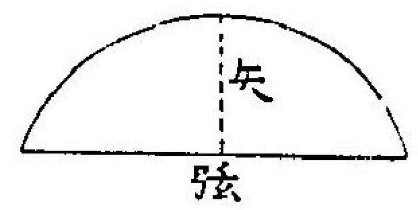
$$MN^2 = OM^2 - ON^2 \qquad \text{(66節 系2)}$$

$$= (OM + ON).(OM - ON) \qquad \text{(60節)}$$

$$= (OA + ON).(OB - ON)$$

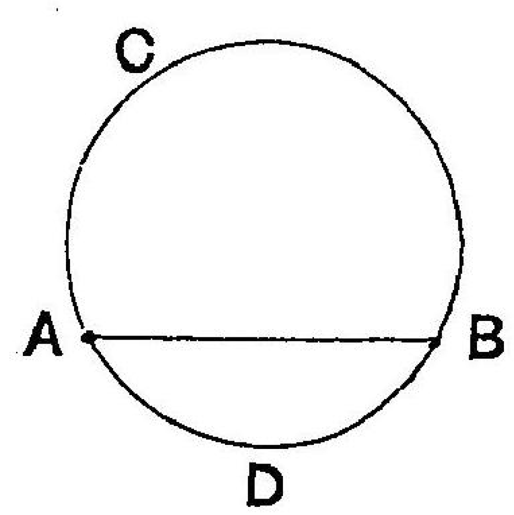
$$= AN.BN$$

問題105. 弦ノ長サ 8 寸,矢ノ長サ 2 寸ナル圓弧ガ屬スル圓ノ半徑ヲ計算セヨ.



弓形

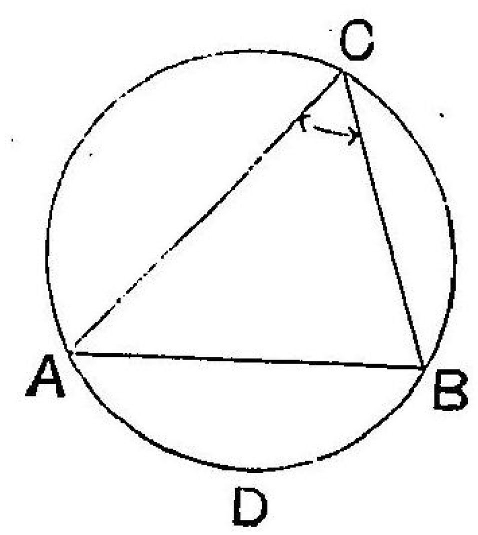
83. 定義 弧ト其兩端ヲ結ビ付クル弦トニテ圍マルル圓ノ部分ヲ**弓形**トイフ.



半圓ヨリ大ナル弓形ヲ**優弓形**トイヒ,半圓ヨリ小ナル弓形ヲ**劣弓形**トイフ. 圖ニ於テ AB ハ弦, ACB ハ優弓形ナリ.

84. 圓周角,弓形に於ける角 圓周上ノ一點ヨリ引キタル二弦ガナス角ヲ**圓周角**トイフ.

圓周角ハ其二邊ノ間ニ夾マルル**弧の上に立つ**トイフ.



弓形ノ弧ノ上ノ一點ヲ其弧ノ兩端ニ結ビ付クル二弦ノナス角ヲ**弓形に於ける角**或ハ**弓形が含む角**トイフ. 卽チ弓形ニ於ケル角トハ此弓形ノ弧

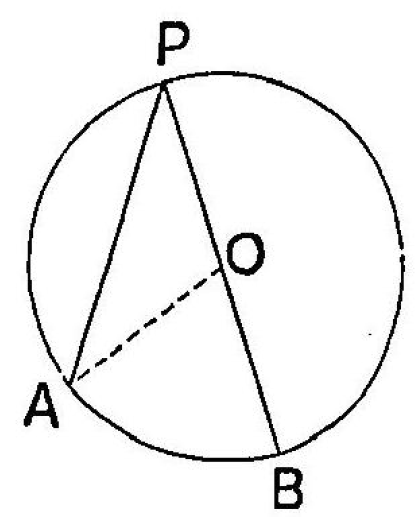
ノ共軛弧ノ上ニ立ツ圓周角ノコトナリ.

圖ニ於テ $\angle C$ ハ $\overset{\frown}{ADB}$ ノ上ニ立ツ圓周角,或ハ弓形 AOB ニ於ケル角ナリ.

85. 定理 一ツノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ半分ニ等シ.

題意 圓 O ノ弧 AB ノ上ニ立ツ圓周角及中心角ヲ夫々 $\angle APB$ 及 $\angle AOB$ トスレバ $\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$ ナルベシ.

證明 (第一) 中心 O ガ圓周角ノ一邊例ヘバ BP ノ上ニアル場合.



此場合ニハ $\angle AOB$ ハ $\triangle AOP$ ノ外角ナリ.

$\therefore\quad \angle AOB=\angle APO+\angle PAO$

(37 節系 1)

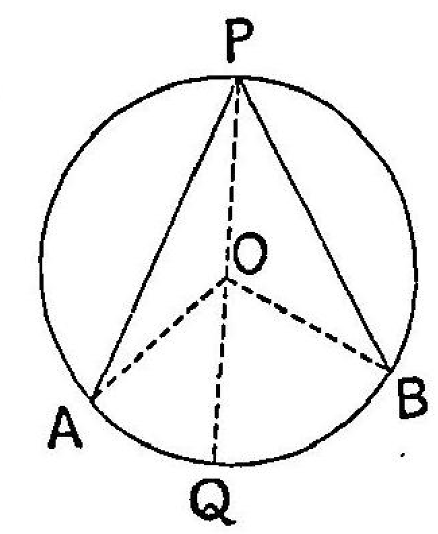
然ルニ $\quad \angle APO=\angle PAO \quad$ (34 節)

$\therefore\quad \angle AOB=2\angle APB$

$\therefore\quad \angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$

(第二) O ガ圓周角ノ內ニアル場合.

P ヲ通ル直徑 PQ ヲ引ケバ(第一)ノ場合ノ證明ニヨリ



$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ$

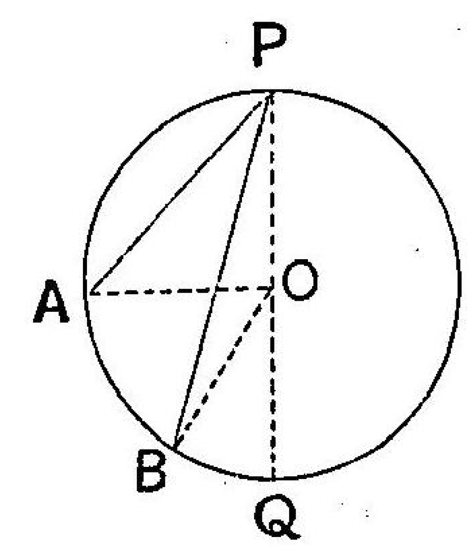
$\angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ$

$\therefore\quad \angle APQ+\angle BPQ=\frac{1}{2}(\angle AOQ+\angle BOQ)$

即チ $\quad \angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$

(第三) O ガ圓周角ノ外ニアル場合.

直徑 PQ ヲ引ケバ上ト同樣ニ



$\angle APQ=\frac{1}{2}\angle AOQ$

$\angle BPQ=\frac{1}{2}\angle BOQ$

$\therefore\quad \angle APQ-\angle BPQ$

$=\frac{1}{2}(\angle AOQ-BOQ)$

即チ $\quad \angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$

系 1. 同ジ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ.

如何ニモ此等ノ角ハ皆同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角

ノ半分ニ等シキヲ以テナリ.

系 2. 同ジ弓形ニ於ケル角ハ相等シ.

系 3. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ.

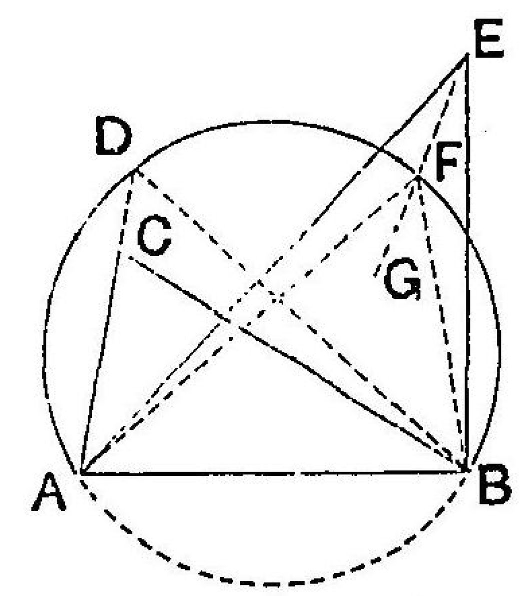
系 4. 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ相等シキ圓周角ガ立ツ弧ハ相等シ.

問題106. 四分圓周ノ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ何度ナルカ.

問題107. 18°ノ圓周角ガ立ツ弧ハ圓周ノ幾分ノ幾ツナルカ.

86. 定義 一點ニ於テ或有限直線ヲ**見込む角**トハ其點ヲ其有限直線ノ兩端ニ結ビ付クル二直線ガナス角ヲイフ.

87. 定理 弓形內ノ一點ニ於テ其弦ヲ見込ム角ハ弓形ニ於ケル角ヨリ大ナリ, 又弦ニ對シテ弓形ト同ジ側ニ其外ニアル點ニ於テ其弦ヲ見込ム角ハ弓形ニ於ケル角ヨリ小ナリ.



題意 弓形ノ弦ヲ AB, 弓形內ノ一點ヲ C, 弓形外ノ一點ヲ E (AB ニ對シテ弓形ト同ジ側ニアル點) トスレバ (第一) ∠ACB ハ弓形ノ角ヨリ大ナルベク, (第二) ∠AEB ハ弓形ノ角ヨリ小ナルベシ.

第一の證明 AC ノ延長ト圓周トノ交點ヲ D トスレバ ∠ACB ハ △BCD ノ外角ナルユヱ

$$\angle ACB > \angle BDC \qquad \text{(37 節系 1)}$$

即チ ∠ACB ハ弓形ノ角ヨリ大ナリ.

第二の證明 ∠AEB ノ二邊ノ間ニ挾マルル圓弧ノ上ニ任意ノ一點 F ヲ取リ EF ヲ結ビ付ケ之ヲ圖ノ如ク G マデ延長スレバ ∠AFG 及 ∠BFG ハ夫々 △AEF 及 △BEF ノ外角ナルヲ以テ

$$\angle AEF < \angle AFG \qquad \text{(37 節系 1)}$$

$$\angle BEF < \angle BFG \qquad \text{(同上)}$$

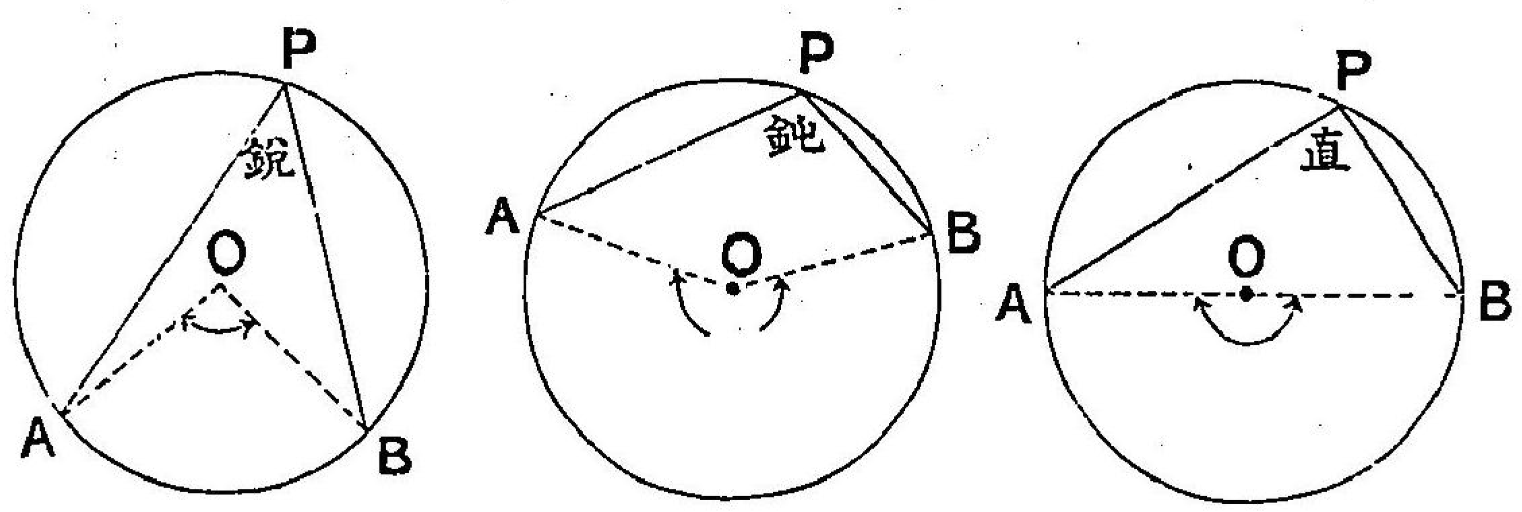
$$\therefore \quad \angle AEF + \angle BEF < \angle AFG + \angle BFG$$

即チ $\angle AEB < \angle AFB$

即チ ∠AEB ハ弓形ノ角ヨリ小ナリ.

88. 定理 劣弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ銳角,優弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ鈍角ニシテ半圓周ノ上ニ立ツ圓周角ハ直角ナリ.

題意 圓 O ノ一ツノ弧ヲ AB トシ其上ニ立ツ圓周角ヲ ∠APB トスレバ $\overset{\frown}{AB}$ ガ半圓周ヨリ小ナルカ又ハ大ナルカニヨリテ ∠APB ハ銳角又ハ鈍角ナルベク,$\overset{\frown}{AB}$ ガ半圓周ナレバ ∠APB ハ直角ナルベシ.



證明 $\overset{\frown}{AB}$ ガ劣弧ナルカ優弧ナルカニヨリテ中心角 AOB ハ 2∠R ヨリ小或ハ大ニシテ,$\overset{\frown}{AB}$ ガ半圓周ナルトキハ ∠AOB ハ 2∠R ナリ (74節系5).

然ルニ何レノ場合ニ於テモ ∠APB ハ ∠AOB ノ半分ナリ (85節).

故ニ $\overset{\frown}{AB}$ ガ劣弧ナルトキハ圓周角 APB ハ直角ヨリ小ナリ,即チ銳角ナリ.

$\overset{\frown}{AB}$ ガ優弧ナルトキハ圓周角 APB ハ直角ヨリ大ナリ,即チ鈍角ナリ.

$\overset{\frown}{AB}$ ガ半圓周ナルトキハ圓周角 APB ハ直角ニ等シ.

系 弓形ニ於ケル角ガ直角ナルトキハ此弓形ノ弦ハ直徑ナリ.

練習

問題108. 一ツノ圓ノ二ツノ平行弦ノ間ニ夾マルル弧ハ相等シ.

問題109. 圓ノ二弦 AB, CD ガ圓內ノ點 E ニ於テ交レバ ∠AEC ハ $\overset{\frown}{AC}$ 及 $\overset{\frown}{BD}$ ノ上ニ立ツ中心角ノ和ノ半分ニ等シ.

問題110. 圓ノ二弦 AB, CD ノ延長ガ圓外ノ點 E ニ於テ交レバ ∠AEC ハ $\overset{\frown}{AC}$ 及 $\overset{\frown}{BD}$ ノ上ニ立ツ中心角ノ差ノ半分ニ等シ.

問題111. 圓 O ノ周上ノ任意ノ點 P ヨリ定マレル直徑 AB ニ垂線 PN ヲ引ケバ ∠OPN ヲ二等分スル直線ハ常ニ AB ニ垂直ナル直徑ノ端ヲ通ル.

問題112. 圓ノ二弦AB, CDガ圓内ニ於テ直角ニ交レバ$\overset{\frown}{AC}$ト$\overset{\frown}{BD}$トノ和ハ半圓周ニ等シ.

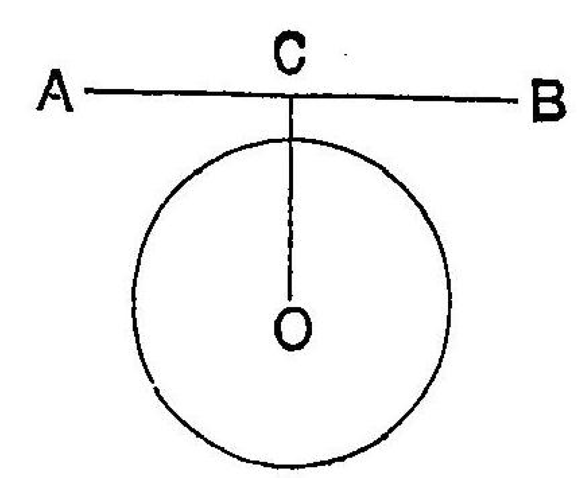
***問題113.** 直角三角形ノ斜邊ヲ直徑トスル圓周ハ直角ノ頂點ヲ通ル.

問題114. 三角形ノ二邊ヲ直徑トシテ畫ケル二ツノ圓ハ第三邊若クハ其延長ノ上ニ於テ出會フ.

切線

89. 定理 圓ノ中心ト直線トノ距離ガ半徑ヨリ大ナルカ或ハ之ニ等シキカ或ハ之ヨリ小ナルカニ從テ此直線ハ圓周ト出會ハズ,或ハ唯一點ニ於テ出會フ,或ハ之ト交ル.

題意 圓ノ中心Oヨリ直線ABニ引ケル垂線ノ足ヲCトスレバ(第一)OCガ半徑ヨリ大ナレバABハ圓周ト出會ハザルベク,(第二)OCガ半徑ニ等シケレバABハ圓周ト唯一點ニ於テ出會フベク,(第三) OCガ半徑ヨリ小ナレバABハ圓周ト二點ニ於テ出會フ,即チ相交ルベシ.



第一の證明 直線AB上ノ任意ノ點トOトノ距離ノ中OCハ最モ短カシ(**40**節系**2**).

然ルニOCハ半徑ヨリ

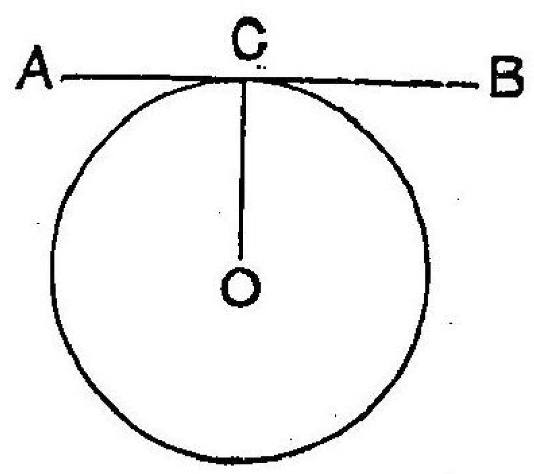
大ナリ(假定).

故ニ直線 AB 上ノ任意ノ點トOトノ距離ハ常ニ半徑ヨリ大ナリ.

因テ AB 上ノ點ハ皆圓外ニアリ〔69節(第六)〕.

卽チ AB ハ圓周ト出會ハズ.

第二の證明 先ヅ假定ニヨリ OC ハ半徑ニ等シキユヱCハ圓周上ニ在リ〔69節(第六)〕.

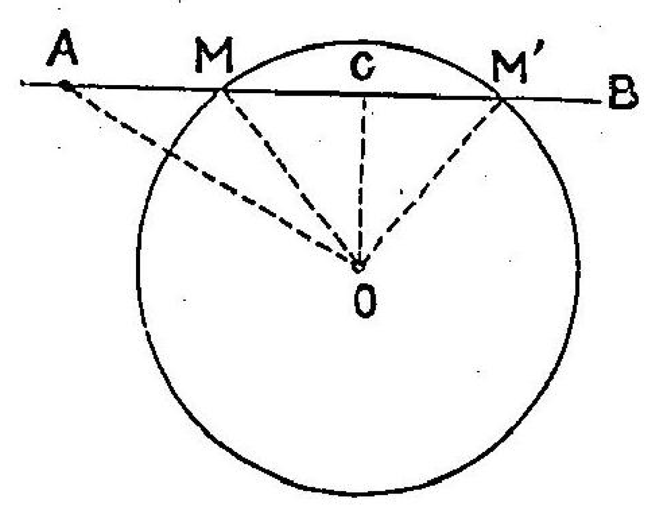


而シテ AB 上ノ他ノ點トOトノ距離ハOCヨリ大ナリ(40節系2).

故ニAB上ノ他ノ點ハ皆圓外ニ在リ〔69節(第六)〕.

因テABハ圓周ト唯一點Cニ於テ出會フ.

第三の證明 OC ハ半徑ヨリ小ナルヲ以テ(假定)Cハ圓內ニ在リ〔69節(第六)〕.



次ニ此直線上ニ半徑ヨリ大ナル任意ノ長サCAヲ取レバOAハCAヨリ大ナルユヱ(40節系1)尙更半徑ヨリ大ナリ.

故ニAハ圓外ニ在リ〔69節(第六)〕.

故ニAトCトノ間ニ圓周上ノ點ハ少ナクトモ一ツアルベシ. 其點ヲMトス.

MCノ延長ノ上ニMCニ等シクM′Cヲ取リOM′ヲ結ビ付クレバ△OMC及△OM′Cニ於テ

$$\begin{cases} MC=M'C & (\text{作圖}) \\ OC\text{ハ共通} & \\ \angle OCM=\angle OCM'=\angle R & \end{cases}$$

$$\therefore \quad \triangle OMC \equiv \triangle OM'C \qquad (31\text{節})$$

$$\therefore \quad OM=OM'$$

サテMハ圓周上ノ點ナルユヱ OM ハ半徑ニ等シ.

因テOM′モ亦半徑ニ等シク從テM′ハマタ圓周上ノ點ナリ.

卽チ AB ハ圓周ト二點M, M′ニ於テ出會フ,卽チ相交ル.

定義 圓ト唯一點ニ於テ出會フ直線ヲ此圓ノ**切線**トイヒ,其直線ハ其點ニ於テ此圓ニ**切ス**トイフ.

其點ヲ**切點**ト稱ス.

系 1. 圓周上ノ一點ヲ通リ其點ヘノ

半徑ニ垂直ナル直線ハ圓ノ切線ナリ.

系 2. 圓ノ切線ハ切點ヲ通ル半徑ニ垂直ナリ.

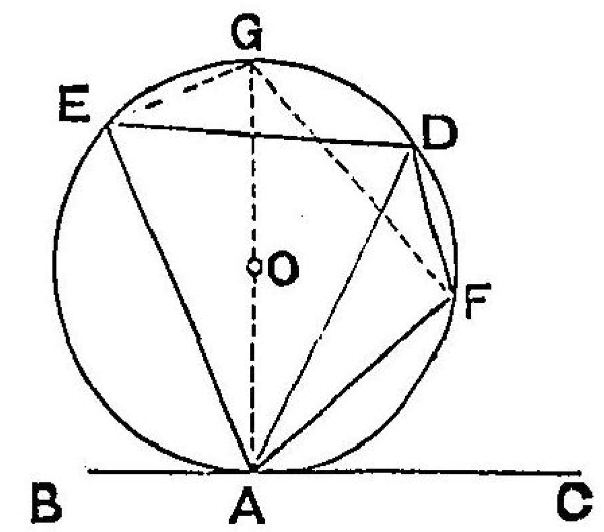
系 3. 圓周上ノ一點ヲ通リ此圓ニ必ズ唯一ツノ切線ヲ引クコトヲ得.

系 4. 切點ヲ通リ切線ニ垂直ナル直線ハ圓ノ中心ヲ通ル.

問題115. 一ツノ圓ニ於テ相等シキ弦ハ皆之ト同心ナル他ノ一ツノ圓ニ切ス.

90. 定理 切線ト切點ヲ通ル弦トノ夾ム角ハ其角內ニアラザル弓形ガ含ム角ニ等シ.

題意 圓 O ノ周上ノ一點 A ニ於ケル切線ヲ BC トシ A ヲ通ル弦ヲ AD トスレバ(第一) $\angle DAC$ ハ此角內ニアラザル弓形ガ含ム角 AED ニ等シカルベク, (第二) $\angle DAB$ ハ此角內ニアラザル弓形ガ含ム角 AFD ニ等シカルベシ.



第一の證明 A ヲ通ル直徑 AOG ヲ引キ GE ヲ結ビ付クレバ

$\angle AEG = \angle R$ (88節)

$\angle GAC = \angle R$ (前節系2)

$\therefore \quad \angle GAC = \angle AEG$

然ルニ $\angle DAG = \angle DEG$ (85節系1)

$\therefore \quad \angle GAC - \angle DAG = \angle AEG - \angle DEG$

卽チ $\angle DAC = \angle AED$

第二の證明 GF ヲ結ビ付クレバ

$\angle AFG = \angle R$ (88節)

$\angle BAG = \angle R$ (前節系2)

$\therefore \quad \angle BAG = \angle AFG$

而シテ $\angle GAD = \angle GFD$ (85節系1)

$\therefore \quad \angle BAG + \angle GAD = \angle AFG + \angle GFD$

卽チ $\angle DAB = \angle AFD$

注意 上ノ證明ニ於テハ切線ガ弦トナス二ツノ角ガ相等シカラズシテ一ツガ鋭角一ツガ鈍角ナリトセリ. 若シ各ガ直角ナル場合ニハ此定理ノ眞ナルコト明カナリ(前節系4及88節).

系 一ツノ弦ノ一端ヲ通リ之ト其弦ノ上ニ立ツ圓周角ニ等シキ角ヲナス直線ヲ其反對ノ側ニ作レバ其直線ハ此圓ノ切線ナリ.

問題116. 弦ノ兩端ニ於ケル切線ガ弦トナス角ハ相等シキカ或ハ互ニ補角ナリ.

問題117. 圓ノ弦ABノ一端Aヲ通リテ直徑ACヲ引キ又Bニ於ケル切線ニAヨリ垂線ADヲ引ケバABハ∠CADヲ二等分ス.

問題118. 圓周上ノ一點Aヲ通リ此圓ニ弦AB及切線ACヲ引ケバ$\overparen{AB}$ノ中點ヨリAB及ACニ至ル距離ハ相等シ.

第五編 軌跡

91. 定義 或線アリテ(第一)其線上ノ總テノ點ハ皆或條件ニ適シ,(第二)其線外ノ點ハ決シテ其條件ニ適セザルトキハ此線ヲ名ケテ**其條件に適する點の軌跡**トイフ.

注意 軌跡トイフ文字ハ或物ガ動ケル軌道(卽チ路)ノ跡トイフ義ナリ. 或條件ニ適スル點ガ動ケバ通例或一定ノ軌道ヲ書ク,其書ケル軌道ヲ名ケテ**此條件に適する點の軌跡**トイフ.

軌跡トイフ語ヲ用ヒテ圓周ノ定義ヲ述ブレバ次ノ如シ.

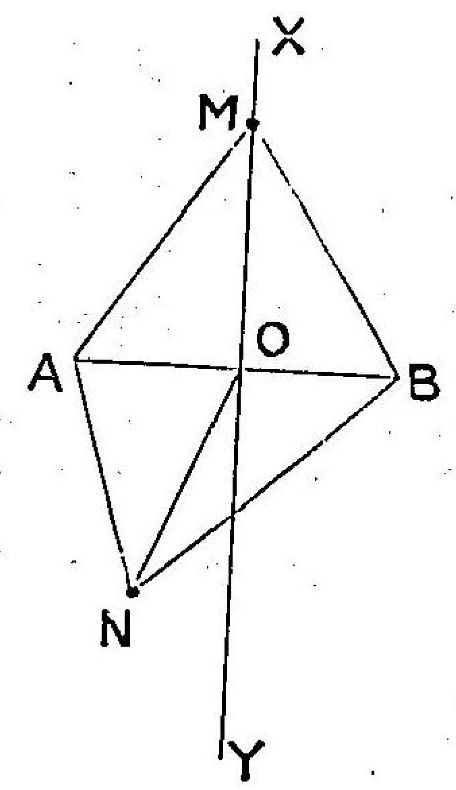
圓周ハ平面上ニ於テ定點(卽チ中心)ヨリ一定ノ距離(卽チ半徑ニ等シキ距離)ニ在ル點ノ軌跡ナリ.

92. 定理 二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ此二定點ヲ結ビ付クル有限直線

ヲ直角ニ二等分スル無限直線ナリ.

題意　二定點A,Bヲ結ビ付クル有限直線ABノ中點Oヲ通リABニ垂直ナル直線ヲXYトスレバ(第一)XY上ノ點ハA,Bヨリ等距離ニ在ルベク,(第二)XY上ニ在ラザル點ハA,Bヨリ相等シキ距離ニアラザルベシ.

證明　XY上ニ任意ノ一點Mヲ取リMA,MBヲ結ビ付クレバ



$\triangle OAM \equiv \triangle OBM$　(31節)

$\therefore\ AM = BM$

故ニXY上ノ總テノ點ハ皆二定點A,Bヨリ等距離ナリ.

次ニXYノ外ニ任意ノ一點Nヲ取リテNA,NB,NOヲ結ビ付クレバ先ヅNOハABニ垂直ナラズ(15節).

$\therefore\ \angle AON \neq \angle BON$

サテ$\triangle OAN$ト$\triangle OBN$トニ於テ

$OA = OB$　(假定)

$\neq$ハ相等しからずトイフ符號ナリ.

ONハ共通

$\angle AON \neq \angle BON$

$\therefore\ AN \neq BN$　(42節)

故ニXY外ノ點ハ決シテ二定點A,Bヨリ等距離ナラズ.

因テ二定點A,Bヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ無限直線XYナリ.

93. 軌跡の證明法　軌跡ノ定義ニヨリ,或線ガ或條件ニ適スル點ノ軌跡ナルコトヲ證明スルニハ是非トモ次ノ二定理ヲ證明セザルベカラズ.

(1)　此線上ニアル點ハ必ズ此條件ニ適ス.

(2)　此線上ニアラザル點ハ決シテ此條件ニ適セズ.

サリナガラ(1)ハツマリ

(3)　此條件ニ適セザル點ハ此線上ニアルコトナシ.

ト同一ニシテ,(2)ハツマリ

(4)　此條件ニ適スル點ハ必ズ此線上ニ在リ.

ト同一ナルヲ以テ便宜上(1)ノ代リニ(3)ヲ證明スルモヨク,又(2)ノ代リニ(4)ヲ證明スルモヨシ.

卽チ軌跡ヲ證明スルニハ次ノ組合セノ中何レカ一組ヲ證明スルヲ要シ又ソレニテ十分ナリ.

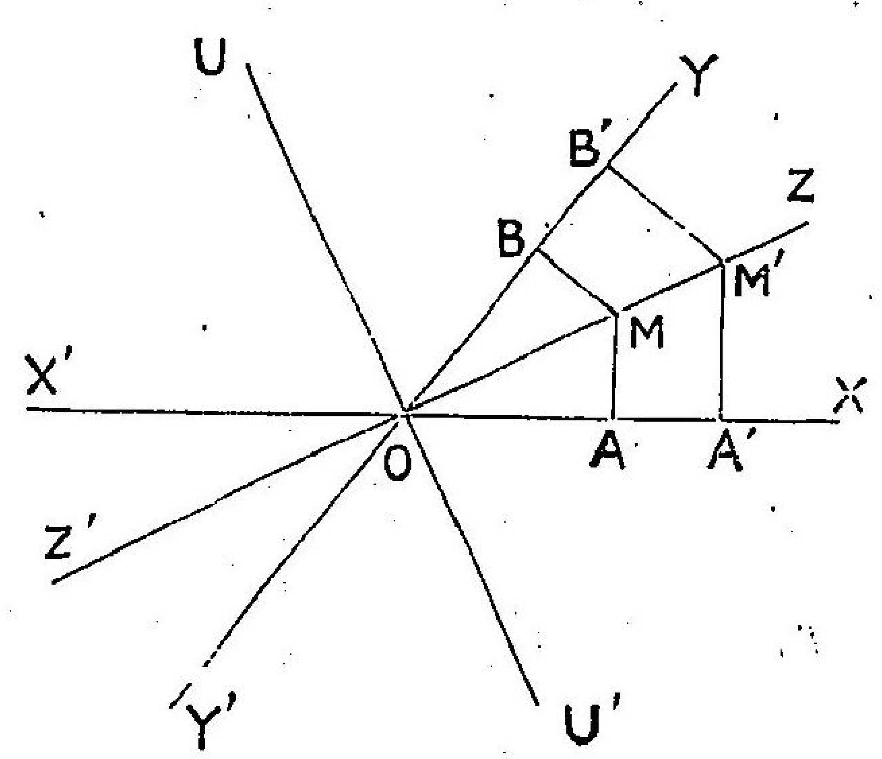
(1) ト (2),　(1) ト (4),　(2) ト (3),　(3) ト (4)

前節ノ定理ノ證明ハ (1) ト (2) トヲ證明セルナリ.

94. 軌跡題　相交ル二定直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求ムルコト.

題意 O ニ於テ相交ル二定直線 XX′, YY′ ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メントス.

先ヅ∠XOY 内ニ XX′, YY′ヨリ等距離ナル一點 M ヲ取リ, M ヨリ XX′, YY′ ニ夫々垂線 MA, MB ヲ引キ又 MO ヲ結ビ付クレバ



$\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (**38** 節)

$\therefore \quad \angle AOM = \angle BOM$

故ニ OM ハ∠XOY ノ二等分線ナリ.

卽チ M ハ∠XOY ノ二等分線上ニ在リ[之レ前節(4)ノ證明ニ當ル].

次ニ∠XOY ノ二等分線ヲ OZ トシ OZ ノ上ニ任意ノ點 M′ ヲ取リ M′ ヨリ XX′, YY′ ニ夫々垂線 M′A′, M′B′ ヲ引ケバ

$\triangle OA'M' \equiv \triangle OB'M'$　　(**37** 節系 **6**)

$\therefore \quad M'A' = M'B'$

卽チ∠XOY ノ二等分線上ノ總テノ點ハ XX′ 及 YY′ ヨリ等距離ナリ[之レ前節(1)ノ證明ニ當ル].

故ニ∠XOY 内ニ於ケル所要ノ軌跡ハ直線 OZ ナリ.

同樣ニ∠X′OY′ 内ニ於ケル所要ノ軌跡ハ此角ノ二等分線 OZ′ ナリ.

又∠X′OY 内ニ於テハ此角ノ二等分線 OU, ∠XOY′ 内ニ於テハ此角ノ二等分線 OU′ ガ所要ノ軌跡ナリ.

而シテ OZ, OZ′ 及 OU, OU′ ハ夫々一直線ヲナスヲ以テ全平面上ニ於ケル所要ノ軌跡ハ二ツノ無限直線 ZZ′, UU′ ナリ.

問題 119. 平行ナル二直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求ム.

***問題 120.** 定直線ヨリノ距離ガ與ヘラレタル長サニ等シキ點ノ軌跡ハ之ニ平行ナル一双ノ直線ナリ.

問題 121. 一ツノ圓ニ於テ平行ナル弦ノ中點ノ軌

跡ハ此弦ニ垂直ナル直徑ナリ.

問題122. 二定點ヲ通ル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

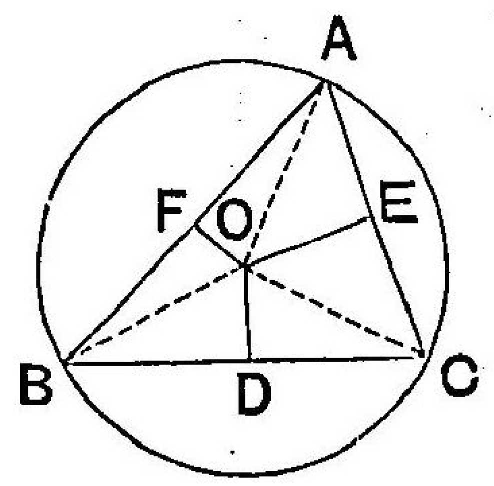
問題123. 二定直線ニ切スル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求ム.

問題124. 一ツノ圓ニ於テ相等シキ弦ノ中點ノ軌跡ヲ求ム.

95. 定理 三角形ノ三邊ヲ直角ニ二等分スル直線ハ一點ニ會シ,此點ヨリ三角形ノ各頂點ニ至ル距離ハ皆相等シ.

題意 △ABCノ三邊BC, CA, ABノ中點ヲ夫々D, E, FトシD, E, Fヲ通リテ夫々BC, CA, ABニ垂線ヲ引ケバ此三ツノ垂線ハ一點ニ會スベク,此點ヲOトスレバOA=OB=OCナルベシ.

證明 D, Eヲ通リBC, CAニ夫々垂線ヲ引ケバ此二直線ハ相交ル(問題18),其交點ヲOトシOA,OB, OCヲ結ビ付ケヨ.



ODハ二定點B, Cヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナルユ

ヱ(92節) OB=OC

同樣ニOEハ二定點C, Aヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナルユヱ OC=OA

∴ OA=OB

卽チOハ二定點A, Bヨリ等距離ナリ.

故ニ有限直線ABヲ直角ニ二等分スル直線ハ必ズOヲ通ル(92節).

因テ△ABCノ三邊ヲ直角ニ二等分スル直線ハ一點ニ會シ,且ツ此點ハ各頂點ヨリ等距離ニ在リ.

定義 多角形ノ總テノ頂點ガ一ツノ圓周上ニアルトキハ此多角形ハ**圓に內接す**トイヒ,其圓ヲ多角形ノ**外接圓**トイフ.

系 1. 三角形ノ外接圓ハ必ズ唯一ツアリ.

如何ニモ,上ノ圖ニ於テ中心O,半徑OAナル圓ヲ畫ケバOA=OB=OCナルヲ以テ此圓周ハA, B, Cヲ通ル. 故ニ△ABCノ外接圓ハ一ツハ確カニ存在ス. 而シテA, B, Cヨリ等距離ナル點ハ唯Oニ限ルコト明カナルヲ以テ此外ニ△ABCノ外接圓ハナシ.

定義 三角形ノ外接圓ノ中心ヲ此三角形ノ**外心**トイフ.

系 2. 一直線上ニ在ラザル三點ヲ通ル圓周ハ必ズ唯一ツアリ.

系 3. 三點ヲ共有スル圓周ハ全ク相合ス.

系 4. 相合セザル二ツノ圓周ハ二ツヨリ多クノ點ニ於テ出會フコトナシ.

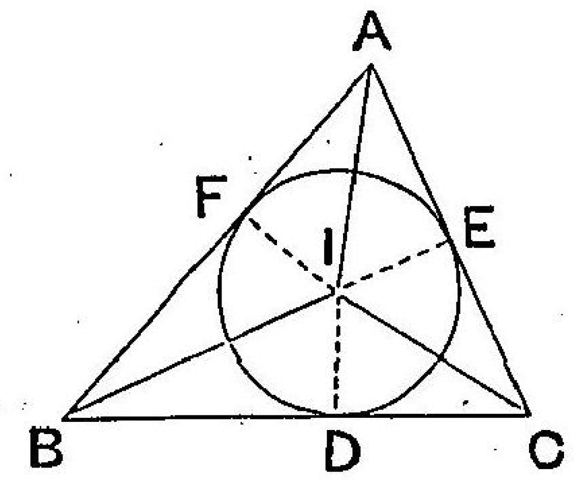
定義 二點ヲ共有スル圓周ハ**相交る**トイフ.

問題125. 圓內ノ一點ヨリ此圓周ニ引ケル三ツノ有限直線ガ相等シケレバ此點ハ此圓ノ中心ナリ.

96. 定理 三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ一點ニ會シ,此點ハ三角形ノ各邊ヨリ等距離ニ在リ.

題意 △ABC ノ各角ノ二等分線ハ一點ニ會スベク,此點ヲ I トシ I ヨリ BC, CA, AB ニ夫々垂線 ID, IE IF ヲ引ケバ ID=IE=IF ナルベシ.

證明 ∠B及∠C ノ二等分線ハ三角形內ニテ相交ルコト明カナリ,其交點ヲ I トシ I ヨリ BC, CA, AB ニ夫々垂線 ID, IE, IF ヲ引ケバ IB ハ ∠B ノ二等分線ナルユヱ



ID=IF (**94** 節)

同樣ニ IC ハ ∠C ノ二等分線ナルユヱ

ID=IE (**94** 節)

∴ IE=IF

卽チ點 I ハ相交ル二定直線 AC, AB ヨリ等距離ナリ,而シテ明カニ∠BAC ノ內ニアリ.

故ニ∠BAC ノ二等分線ハ必ズ I ヲ通ル(**94** 節).

因テ △ABC ノ各角ノ二等分線ハ一點ニ會シ且ツ此點ハ各邊ヨリ等距離ニ在リ.

定義 多角形ノ邊ガ總テ其內ニアル一ツノ圓ニ切スルトキハ此多角形ハ**圓に外接す**トイヒ,其圓ヲ其多角形ノ**內接圓**トイフ.

系 三角形ノ內接圓ハ必ズ唯一ツア

リ.

如何ニモ,前ノ圖ニ於テ中心I,半徑IDナル圓ヲ書ケバ此圓ハ△ABCノ各邊ニ切ス(**89**節系**1**),故ニ△ABCノ內接圓ハ一ツハ存在ス. 又三角形內ニアリテ三邊ヨリ等距離ナル點ハ唯Iニ限ルコト明カナルヲ以テ此外ニ△ABCノ內接圓ハナシ.

定義 三角形ノ內接圓ノ中心ヲ此三角形ノ**內心**トイフ.

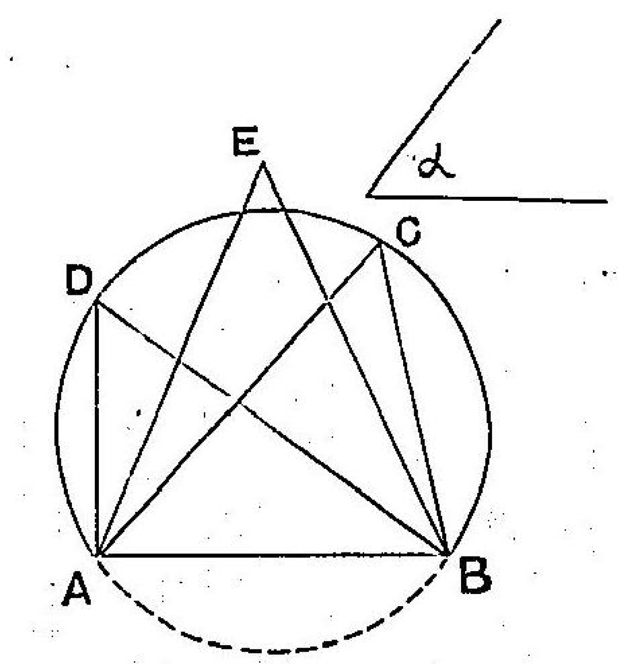
***問題126.** 三角形ノ一ツノ頂點ニ於ケル內角ノ二等分線ト他ノ二頂點ニ於ケル外角ノ二等分線トハ一點ニ會シ此點ハ三角形ノ各邊ヨリ等距離ニ在リ.

注意 此點ヲ中心トシ三角形ノ一邊ト他ノ二邊ノ延長トニ切スル圓ヲ書キ得ベシ,此圓ヲ三角形ノ**傍接圓**トイヒ其中心ヲ三角形ノ**傍心**トイフ.

三角形ニハ三ツノ傍接圓アルコト明カナリ.

97. 定理 與ヘラレタル有限直線ノ同ジ側ニアリテ其有限直線ヲ見込ム角ガ常ニ一定ノ角ニ等シキ點ノ軌跡ハ此有限直線ヲ弦トスル一ツノ圓弧ナリ.

題意 定マレル有限直線ABノ一方ノ側ニ在リテ∠ACBガ定マレル角αニ等シキ點ヲCトスレバCノ軌跡ハABヲ弦トスル一ツノ圓弧ナルベシ.



證明 △ABCノ外接圓周ノ弧ACBノ上ノ點ヨリABヲ見込ム角ハ皆∠ACBニ等シ(**85**節系).

又ABニ對シテCト同ジ側ニ在リテ$\overset{\frown}{ACB}$ノ上ニアラザル點ヨリABヲ見込ム角ハ皆∠ACBニ等シカラズ(**87**節).

故ニABニ對シテCト同ジ側ニ在リテABヲ見込ム角ガ∠ACB(=α)ニ等シキ點ノ軌跡ハ$\overset{\frown}{ACB}$ナリ.

系 同ジ底邊ノ上ニ其一方ニ相等シキ頂角ヲ有スル若干ノ三角形ガ立ツトキハ其一ツノ三角形ノ外接圓ノ周ハ他ノ總テノ三角形ノ頂點ヲ通ル.

***問題127.** 定マレル有限直線ヲ斜邊トスル直角三

角形ノ頂點ノ軌跡ハ此有限直線ヲ直徑トスル圓周ナリ.

練習

問題128. 多角形ノ各邊ヲ直角ニ二等分スル直線ガ皆一點ニ會スレバ此多角形ニ外接スル圓ヲ書クコトヲ得.

問題129. 多角形ノ各角ノ二等分線ガ皆一點ニ會スレバ此多角形ニ內接スル圓ヲ書クコトヲ得.

***問題130.** 三角形ノ各頂點ヨリ其對邊ヘ引ケル三ツノ垂線又ハ其延長ハ一點ニ會ス.

定義 此點ヲ三角形ノ**垂心**トイフ.

問題131. 三角形ノ內心ハ三ツノ傍心ヲ頂點トスル三角形ノ垂心ナリ.

問題132. 定マレル長サノ直線ガ常ニ始メノ位置ニ平行シ,其一端ガ定圓周上ニアル樣ニ動クトキ他ノ端ノ軌跡ヲ求ム.

問題133. 定圓內ノ一定點ヲ通ル弦ノ中點ノ軌跡ハ其點ト圓ノ中心トヲ結ビ付クル有限直線ヲ直徑トスル圓周ナリ.

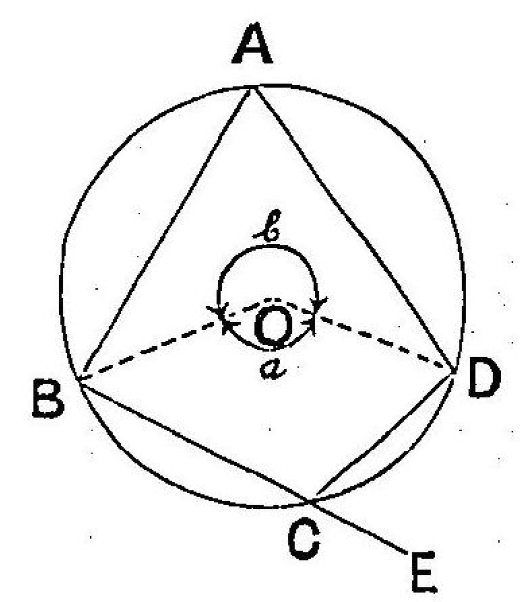
定點ガ定圓外ニアル場合ハ如何.

問題134. 定マレル圓弧APB上ノ任意ノ點ヲPトシAPノ延長ノ上ニPBニ等シクPQヲ取レバQノ軌跡如何.

第六編　圓ノ續キ

內接及外接多角形

98. 定理　圓ニ內接スル四邊形ノ對角ハ互ニ補角ナリ.



題意　圓Oニ內接スル四邊形ヲABCDトスレバ$\angle A+\angle C=2\angle R$, $\angle B+\angle D=2\angle R$ナルベシ.

證明　OB, ODヲ結ビ付クレバ

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle a \qquad (85節)$$

$$\angle C=\frac{1}{2}\angle b \qquad (同上)$$

$$\therefore \quad \angle A+\angle C=\frac{1}{2}(\angle a+\angle b)$$

然ルニ　$\angle a+\angle b=4\angle R$

$$\therefore \quad \angle A+\angle C=2\angle R$$

同理ニテ　$\angle B+\angle D=2\angle R$

定義　四邊形ノ一ツノ外角ニ隣レル內角ニ對スル內角ヲ其外角ノ**內對角**トイフ.

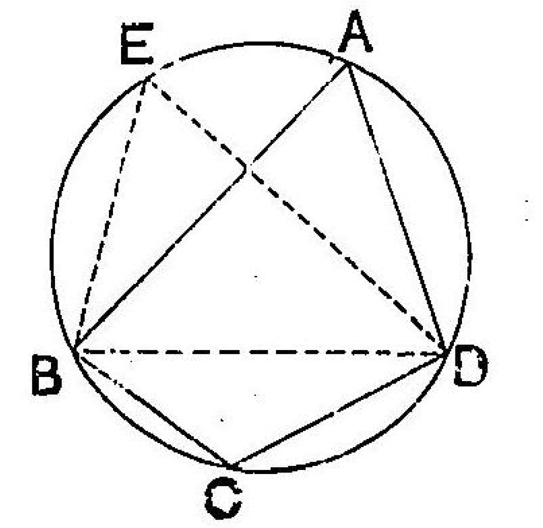
上ノ圖ニ於テ$\angle A$ハ$\angle DCE$ノ內對角ナリ.

系　圓ニ內接スル四邊形ノ外角ハ其內對角ニ等シ.

問題135.　圓ニ內接スル平行四邊形ハ矩形ナリ.

99. 定理　對角ガ互ニ補角ナル四邊形ニハ外接圓ヲ畫クコトヲ得.

題意　四邊形ABCDニ於テ$\angle A+\angle C=2\angle R$ナルトキハ此四邊形ニ外接圓ヲ畫クコトヲ得ベシ.



證明　$\triangle BCD$ノ外接圓ヲ畫キ$\overset{\frown}{BCD}$ノ共軛弧ノ上ニ任意ノ點Eヲ取ルトキハ四邊形EBCDハ圓ニ內接スルヲ以テ

$$\angle E+\angle C=2\angle R \qquad (前節)$$

然ルニ　$\angle A+\angle C=2\angle R$　(假定)

$$\therefore \quad \angle A=\angle E$$

故ニ此圓周ハAヲ通ル(97節系).

即チABCDニ外接圓ヲ畫クコトヲ得.

系 四邊形ノ外角ガ其內對角ニ等シケレバ此四邊形ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得.

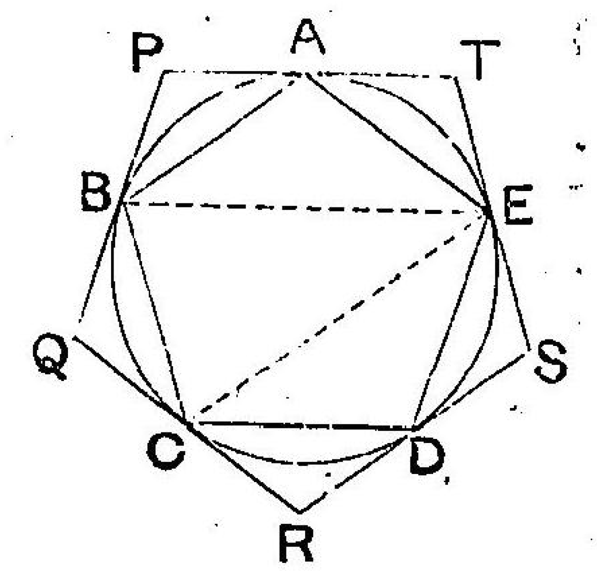
問題136. 三角形ノ二ツノ傍心及二ツノ頂點ヲ通リ一ツノ圓ヲ畫クコトヲ得.

100. 定理 圓周ヲ任意ノ數ノ相等シキ弧ニ分テバ此等ノ弧ノ弦ハ圓ニ內接スル正多角形ヲ成ス. 又各分點ニ於テ切線ヲ引ケバ此等ノ切線ハ邊數ノ同一ナル外接正多角形ヲ成ス.

題意 (第一)例ヘバ圓周ヲA, B, C, D, Eニ於テ五等分スレバ多角形ABCDEハ正五邊形ナルベク,(第二)又A, B, C, D, Eニ於テ切線ヲ引ケバ此等ノ切線ガナス所ノ外接五邊形PQRSTモ亦正五邊形ナルベシ.

第一の證明 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$ (假定)

$\therefore\ AB=BC$ (77節)



同理ニテ $BC=CD$ 等

即チABCDEノ各邊ハ皆相等シ.

又∠Aハ全圓周ノ$\frac{3}{5}$ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ナリ, ∠Bモ亦然リ.

$\therefore\ \angle A=\angle B$ (85節系3)

同理ニテ $\angle B=\angle C$ 等

即チABCDEノ各角ハ皆相等シ.

因テABCDEハ正五邊形ナリ.

第二の證明 BE, CEヲ結ビ付クレバ△APB及△BQCニ於テ

$AB=BC$

$\angle PAB=\angle AEB=\angle PBA$ (90節)

$\angle QBC=\angle BEC=\angle QCB$ (同上)

然ルニ $\angle AEB=\angle BEC$ (85節系3)

$\therefore\ \angle PAB=\angle PBA=\angle QBC=\angle QCB$

$\therefore\ \triangle APB\equiv\triangle BQC$ (32節)

同理ニテ $\triangle BQC\equiv\triangle CRD$ 等

$\therefore\ \angle P=\angle Q=\angle R=\angle S=\angle T$

卽チ PQRST ノ各角ハ皆相等シ.

又 $PA=PB$ (35 節)

同理ニテ $QB=QC$ 等

然ルニ $\triangle APB \equiv \triangle BQC \equiv \triangle CRD \equiv \cdots\cdots$

$\therefore \quad PA=PB=QB=QC=\cdots\cdots\cdots$

$\therefore \quad PQ=QR=RS=\cdots\cdots\cdots$

卽チ PQRST ノ各邊ハ皆相等シ.

因テ PQRST ハ正五邊形ナリ.

*問題137. 圓ニ內接スル正六邊形ノ一邊ハ圓ノ半徑ニ等シ.

練　習

問題138. 圓ニ內接スル四邊形 ABCD ノ各邊ヲ延長シ AB, DC ノ交點ヲ P トシ BC, AD ノ交點ヲ Q トス, △PBC 及 △QCD ノ外接圓ガ再ビ R ニ於テ出會ヘバ P, R, Q ハ一直線上ニ在リ.

問題139. △ABC ノ頂點 A ニ於ケル內角及外角ノ二等分線ハ夫々外接圓ノ弧 BC ノ中點ヲ通ル.

問題140. 正三角形 ABC ノ外接圓ノ弧 BC 上ノ一

點ヲ P トスレバ $AP=BP+CP$ ナリ.

問題141. 圓ニ內接スル等邊多角形ハ必ズ正多角形ナリ.

問題142. 圓ニ內接スル等角多角形ノ邊ハ一ツオキニ必ズ相等シ,從テ邊數ガ奇數ナルトキハ此多角形ハ正多角形ナリ.

問題143. 圓周上ノ任意ノ點 P ヨリ定マレル二ツノ直徑ニ垂線 PA, PB ヲ引ケバ有限直線 AB ノ大サハ常ニ一定ナリ.

***問題144.** 三角形ノ外接圓周上ノ一點ヨリ其三角形ノ三邊若クハ其延長ニ引ケル垂線ノ足ハ一直線上ニ在リ.

註 此定理ヲ **Simson の定理**ト稱ス. 此直線ヲ其點ニ關スル三角形ノ **しむそん線**トイフ.

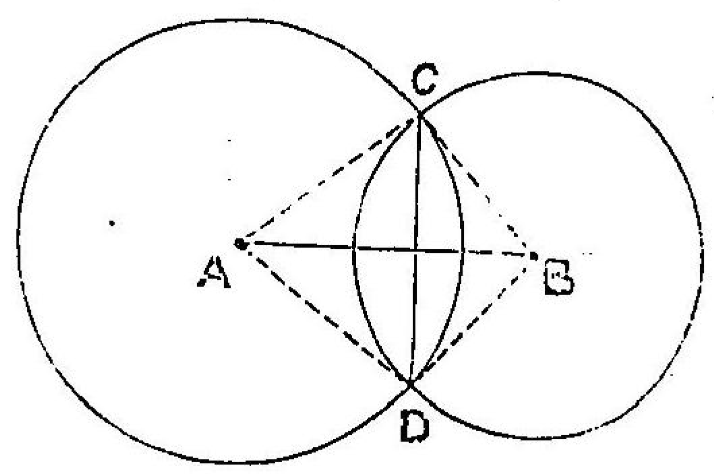
問題145. シムソン定理ノ逆ノ眞ナルコトヲ證明セヨ.

二ツノ圓

101. 定理 二ツノ圓ガ相交レバ中心ヲ結ビ付クル直線ハ二ツノ交點ヲ結ビ付クル有限直線ヲ直角ニ二等分ス,而シテ中心間ノ距離ハ半徑ノ和ヨリ小ニシテ其差ヨリ大ナリ.

題意 二ツノ圓A,Bノ交點ヲC,Dトスレバ(第一)ABハCDヲ直角ニ二等分スベク,(第二)$AC+BC>AB>AC\sim BC$ナルベシ.

第一の證明 先ヅ$AC=AD$ナルヲ以テAハ有限直線CDヲ直角ニ二等分スル直線ノ上ニ在リ(92節).



同理ニテBモ亦有限直線CDヲ直角ニ二等分スル直線ノ上ニ在リ.

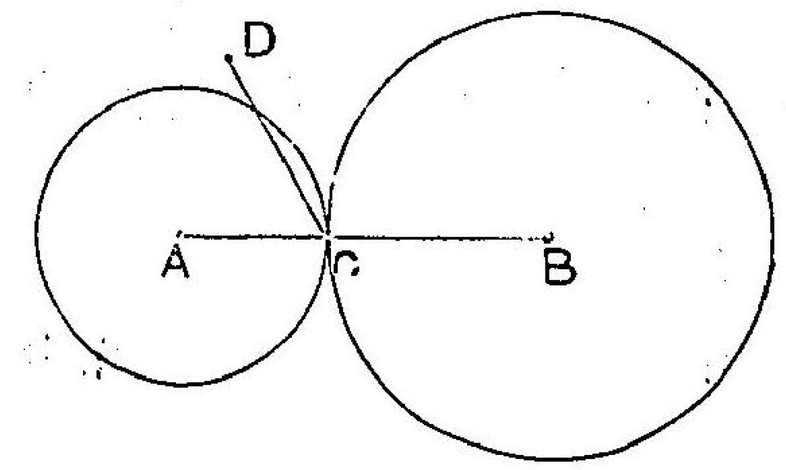
故ニ直線ABハ有限直線CDヲ直角ニ二等分スル

直線ナラザルベカラズ.

第二の證明 第41節及其系ニヨリテ明カナリ.

系 二ツノ圓周ガ其中心ヲ結ビ付クル直線上ノ一點ニ於テ出會フトキハ此二ツノ圓周ハ全ク相合スルニアラザレバ再ビ出會フコトナシ.

如何ニモ,二ツノ圓A,BガAB上ノ一點Cト尚他ノ一點Dニテ出會ヒタリトスレバ本定理ニヨリABガ有限直線CDヲ直角ニ二等分スルコトトナリ,明カニ不合理ナレバナリ.

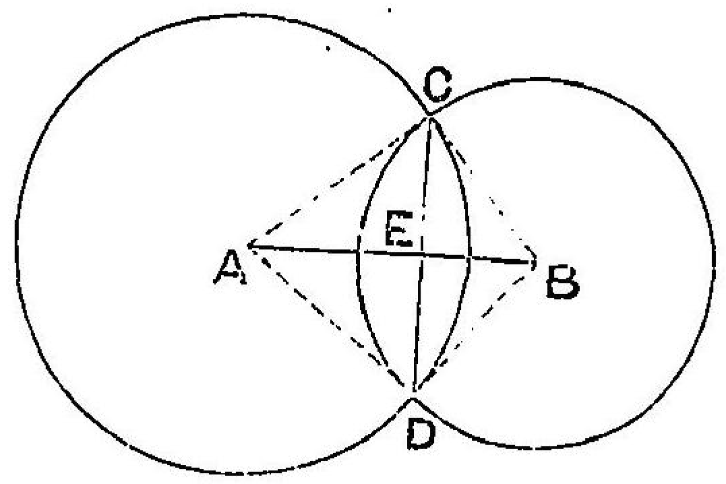


102. 定理 二ツノ圓周ガ其中心ヲ結ビ付クル直線上ニアラザル一點ニ於テ出會フトキハ尚他ノ一點ニ於テ出會フ,卽チ二ツノ圓ハ相交ル.

題意 二ツノ圓A,BガAB外ノ一點Cニ於テ出會

フトキハ兩圓ハ尙他ノ一點ニ於テ出會フベシ.

證明 CヨリAB ニ垂線CEヲ引キ之ヲ延長シテCEニ等シクEDヲ取リAC, BC, AD, BDヲ結ビ付クレバ



$\triangle ACE \equiv \triangle ADE$ (31節)

$\therefore$ AC=AD

然ルニACハ圓ノ半徑ナリ,故ニDハ圓Aノ周上ニ在リ.

同理ニテDハマタ圓Bノ周上ニ在リ.

因テ二ツノ圓周ハCノ外ニ尙Dニ於テ出會フ,卽チ相交ル.

系 1. 二ツノ圓ガ唯一點ニ於テ出會ヘバ其點ハ中心ヲ結ビ付クル直線上ニ在リ.

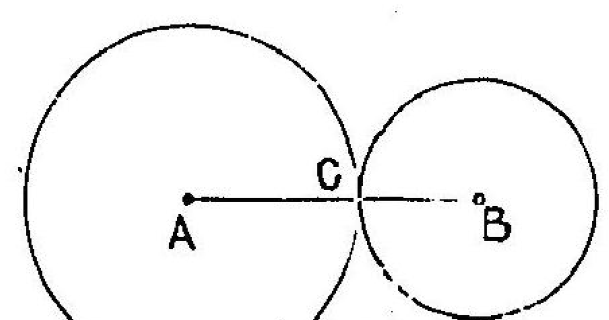
如何ニモ,若シ中心ヲ結ビ付クル直線上ニ在ラザレバ本定理ニヨリ尙他ノ一點ニ於テ出會フベケレバナリ.

系 2. 二ツノ圓ガ唯一點ニ於テ出會ヘバ其點ニ於テ兩圓ニ共通ナル切線ヲ引クコトヲ得.

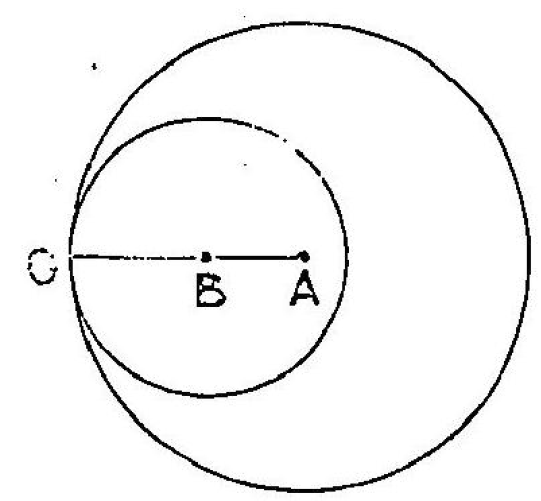
如何ニモ,其點ハ兩圓ノ中心ヲ結ビ付クル直線上ニアルヲ以テ(系1)此點ヲ通リ中心ヲ結ビ付クル直線ニ垂線ヲ引ケバコハ何レノ圓ニモ切スベケレバナリ89節系1).

103. **定義** 二ツノ圓ガ唯一點ニ於テ出會フトキハ此二ツノ圓ハ互ニ**相切す**トイヒ,其點ヲ此二ツノ圓ノ**切點**トイフ. 此際各ノ圓ガ他ノ圓ノ外ニ在レバ此二ツノ圓ハ**外切す**トイヒ,一ツノ圓ガ他ノ內ニ在レバ此二ツノ圓ハ**內切す**トイフ.

(甲 圖)



(乙 圖)



第101節ノ系及第102節ノ系1, 系2ハ次ノ如ク言

ヒ換フルコトヲ得.

二ツノ圓ガ其中心ヲ結ビ付クル直線上ノ一點ニ於テ出會フトキハ相切ス.

二ツノ圓ガ相切スレバ中心ヲ結ビ付クル直線ハ切點ヲ通ル.

二ツノ圓ガ相切スレバ切點ニ於テ共通ノ切線ヲ有ス.

注意 二ツノ圓ガ外切スルトキハ其中心間ノ距離ハ半徑ノ和ニ等シク,内切スルトキハ其中心間ノ距離ハ半徑ノ差ニ等シキコト明カナリ.

問題146. 二ツノ圓ガ相交レバ一ツノ圓ハ一部分他ノ圓ノ内ニ在リテ一部分ハ其外ニ在リ.

***問題147.** 二ツノ圓ガ出會ハズシテ各ノ圓ガ他ノ圓ノ外ニ在レバ其中心間ノ距離ハ半徑ノ和ヨリ大ナリ. 若シ其一ツガ全ク他ノ内ニ在レバ距離ハ半徑ノ差ヨリ小ナリ.

***問題148.** 二ツノ圓ノ中心間ノ距離ガ(a)半徑ノ和ヨリ大ナレバ此二ツノ圓ハ出會ハズシテ各ノ圓ハ他ノ圓ノ外ニ在リ,(b)半徑ノ和ニ等シケレバ此二ツノ圓ハ外切ス,(c)半徑ノ和ヨリ小ニシテ其差ヨリ大ナレバ此二ツノ圓ハ相交ル,(d)半徑ノ差ニ等シケレバ此二ツノ圓ハ内切ス,(e)半徑ノ差ヨリ小ナレバ此二ツノ圓ハ出會ハズシテ一ツノ圓ハ全ク他ノ圓ノ内ニ在リ.

問題149. 二ツノ圓ガ一ツノ點ニ於テ出會ヒ其點ニ於テ共通ノ切線ヲ有スレバ此二ツノ圓ハ相切ス.

練習

問題150. 相交ル二圓ノ一ツノ交點ヲ通リ各ノ圓ノ直徑ヲ引ケバ此直徑ノ他ノ端ヲ結ビ付クル直線ハ他ノ交點ヲ通ル.

問題151. 二ツノ圓ノ交點A, Bヲ通リテ夫々直線PQ, RSヲ引キ一ツノ圓トノ交點ヲP, R他ノ圓トノ交點ヲQ, SトスレバPR//QSナリ.

問題152. 二ツノ圓ガ相切スレバ切點ヲ通ル任意ノ二直線ガ其二ツノ圓周ヨリ截リ取ル所ノ弧ノ弦ハ平行ナリ.

問題153. 定圓ト定直線トニ切スル任意ノ圓ヲ畫ケバ二ツノ切點ヲ結ビ付クル直線ハ常ニ定直線ニ

垂直ナル定圓ノ直徑ノ端ヲ通ル.

問題154. 二ツノ圓O, O′ノ交點ヲA, Bトシ, Aヲ通リテ定マレル直線CDヲ引キ圓O, O′ト夫々C, Dニ於テ交ラシム, 次ニAヲ通リテ任意ノ直線PQヲ引キ圓O, O′ト夫々P, Qニ於テ交ラシメCP, DQノ交點ヲRトスレバRノ軌跡ハ△BCDノ外接圓周ナリ.

第七編 作圖題

104. 實際ノ平面アリトシ其平面上ニ或條件ニ適スル圖形ヲ書ク問題ヲ平面幾何學ノ**作圖題**トイフ.

初等幾何學ニ於テ最初ヨリ爲シ得ルト認ムル所ノ作圖ハ次ノ三ツニ限ル.

(第一) 二定點ヲ結ビ付クル有限直線ヲ引クコト.

(第二) 有限直線ヲ任意ニ延長スルコト.

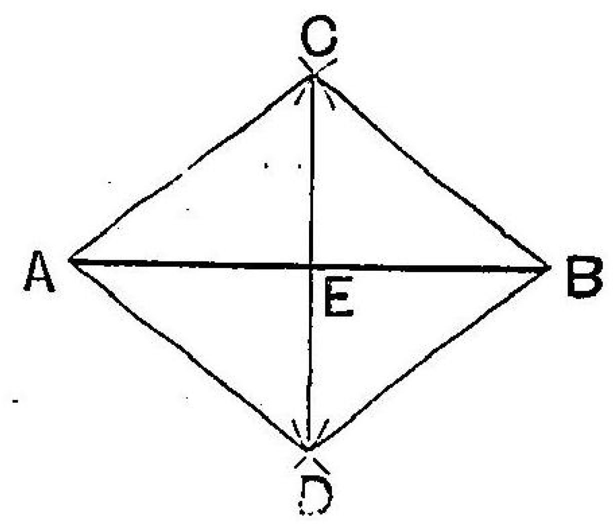
(第三) 任意ノ點ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ書クコト.

紙上ニ於テ此等ノ作圖ヲナスニハ通例**定規及兩脚規**ヲ用フルモノトス.

105. 作圖題 定マレル有限直線ヲ二等分スルコト.

題意 有限直線ABガ與ヘラレタリトシ其中點ヲ求ム.

作圖法 A及Bヲ中心トシABノ半分ヨリ大ナル



任意ノ相等シキ半徑ニテ二ツノ圓弧ヲ書キ其交點ヲC及Dトス. CDヲ結ビ付ケ,ソレトABトノ交點ヲEトスレバEハABノ中點ナリ.

證明 此二ツノ圓ハ相交ル(問題148c).

ソコデAC, AD, BC, BDヲ結ビ付クレバ

$$\triangle ACD \equiv \triangle BCD \qquad \text{(36節)}$$

$$\therefore \quad \angle ACD = \angle BCD$$

$$\therefore \quad \triangle ACE = \triangle BCE \qquad \text{(31節)}$$

$$\therefore \quad AE = BE$$

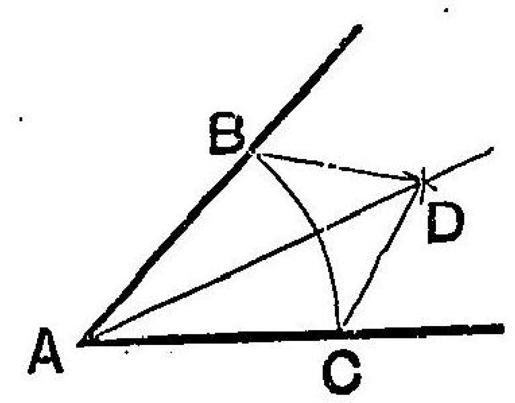
卽チEハABノ中點ナリ.

注意 CDハABヲ二等分スルノミナラズ又ABニ垂直ナリ,卽チCDハABヲ直角ニ二等分スル直線ナリ.

106. 作圖題 定マレル角ヲ二等分スルコト.

題意 ∠Aヲ與ヘタリトシ此角ノ二等分線ヲ引

クコトヲ求ム.



作圖法 頂點Aヲ中心トシ任意ノ半徑ニテ圓弧ヲ書キ角ノ二邊ト夫々B, Cニテ交ラシメ,次ニB及Cヲ中心トシ今書キタル圓ノ弦BCノ半ヨリ大ナル任意ノ相等シキ半徑ニテ二ツノ圓弧ヲ書キBCニ對シテAト反對ノ側ニアル交點ヲDトス. ADヲ結ビ付クレバ之ガ求ムル所ノ二等分線ナリ.

證明 BD, CDヲ結ビ付クレバ

$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD \qquad \text{(36節)}$$

$$\therefore \quad \angle BAD = \angle CAD$$

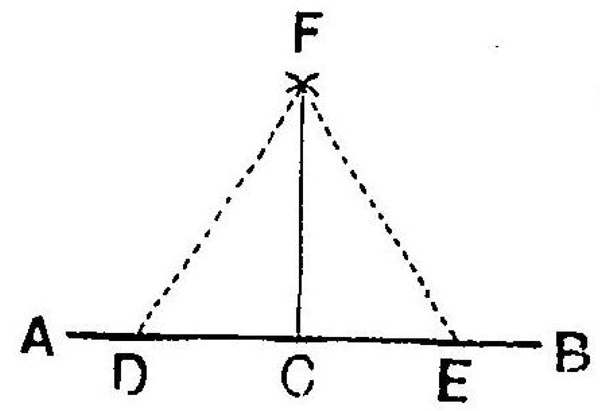
問題155. 定マレル角ヲ四等分スルコト.

107. 作圖題 定直線上ノ一定點ヨリ此直線ニ垂線ヲ引クコト.

題意 定直線AB上ノ一定點CヨリABニ垂線ヲ引クコトヲ求ム.

作圖法 Cヲ中心トシ任意ノ半徑ニテ圓弧ヲ書

キABトD及Eニテ交ラシメ,次ニD及Eヲ中心トシ今畫キタル圓ノ半徑ヨリ大ナル任意ノ相等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ其一ツノ交點ヲFトス. CFヲ結ビ付クレバ之ガ求ムル所ノ垂線ナリ.



證明 DF, EFヲ結ビ付クレバ

$$\triangle DCF \equiv \triangle ECF \qquad \text{(36節)}$$

$$\therefore \quad \angle DCF = \angle ECF$$

$$\therefore \quad \angle DCF = \angle R$$

即チ $CF \perp AB$

注意 本題ハ前節ノ作圖題ニ於テ定マレル角ガ二直角ナルトキ之ヲ二等分スル方法ニ外ナラズ.

*問題156. 相隣レル二邊ヲ與ヘテ矩形ヲ作ルコト.

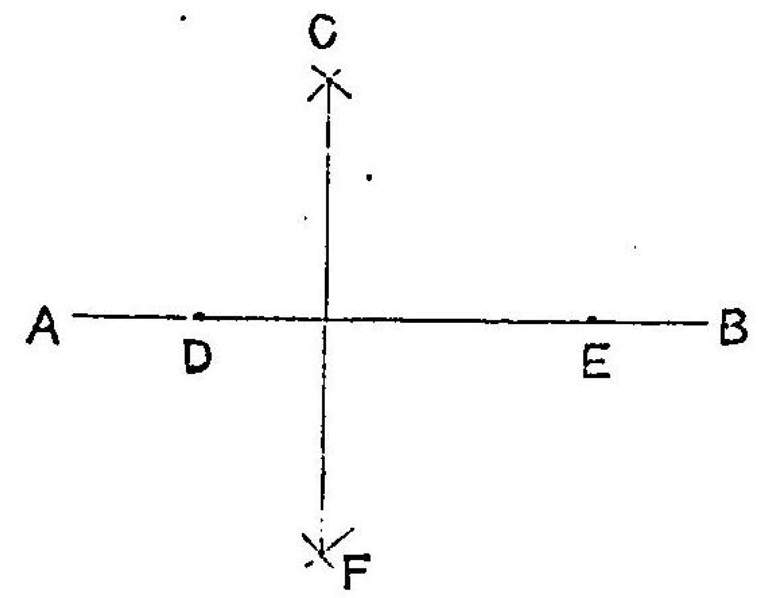
*問題157. 一邊ヲ與ヘテ正方形ヲ作ルコト.

108. 作圖題 定直線外ノ一定點ヨリ此直線ニ垂線ヲ引クコト.

題意 定直線AB外ノ一定點CヨリABニ垂線ヲ引

クコトヲ求ム.

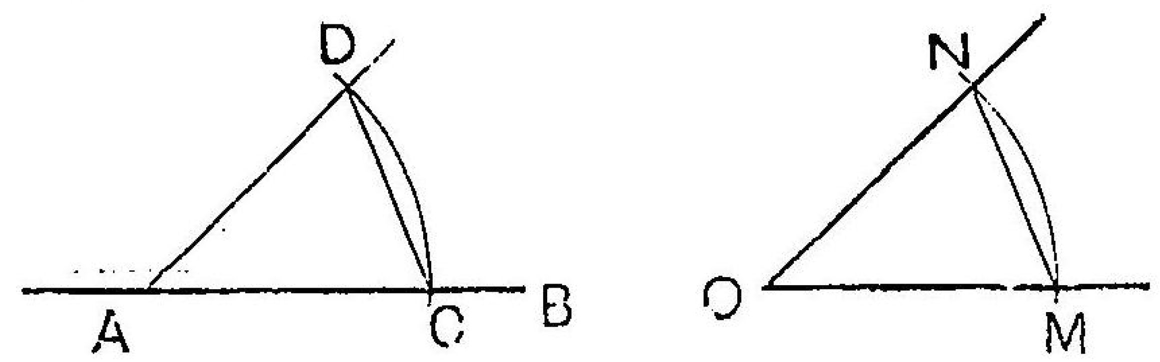
作圖法 ABノ上ニ任意ノ二點D,Eヲ取リD及Eヲ中心トシ夫々CD及CEニ等シキ半徑ヲ以テ圓弧ヲ畫キ他ノ交點ヲFトス. CFヲ結ビ付クレバ之ガ求ムル所ノ垂線ナリ.



證明 第101節及第102節ニヨリテ明カナリ.

109. 作圖題 定直線上ノ一定點ニ於テ之ト與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引クコト.

題意 定直線AB上ノ一定點Aヲ通リテABト∠Oニ等シキ角ヲナス直線ヲ引クコトヲ求ム.



作圖法　Oヲ中心トシ任意ノ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ其二邊トM,Nニテ交ラシム. 次ニAヲ中心トシ前ト等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キABト點Cニテ交ラシム. 次ニCヲ中心トシMNニ等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ前ノ圓弧ト點Dニテ交ラシム. ADヲ結ビ付クレバ之ガ求ムル所ノ直線ナリ.

證明　MN, CDヲ結ビ付クレバ

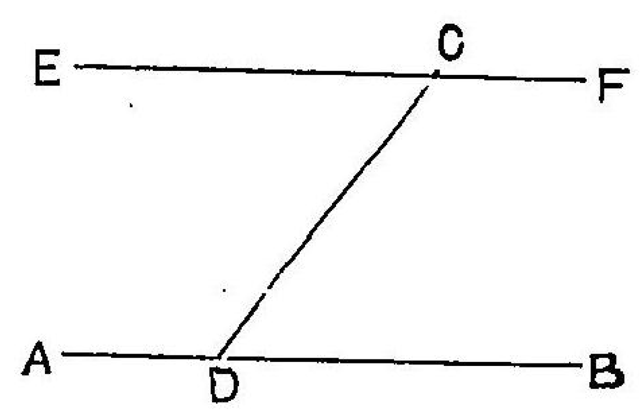
$$\triangle ACD \equiv \triangle OMN \qquad (36節)$$

$$\therefore \quad \angle A = \angle O$$

注意　上ノ圖ニ於テハ∠DACヲABノ上方ニ作リタレドモ之ト同樣ニシテABノ下方ニモ作リ得ルコト明カナリ.

110. 作圖題　定直線外ノ一定點ヲ通リ此直線ニ平行ナル直線ヲ引クコト.

題意　定直線AB外ノ一定點Cヲ通リABニ平行ナル直線ヲ引クコトヲ求ム.



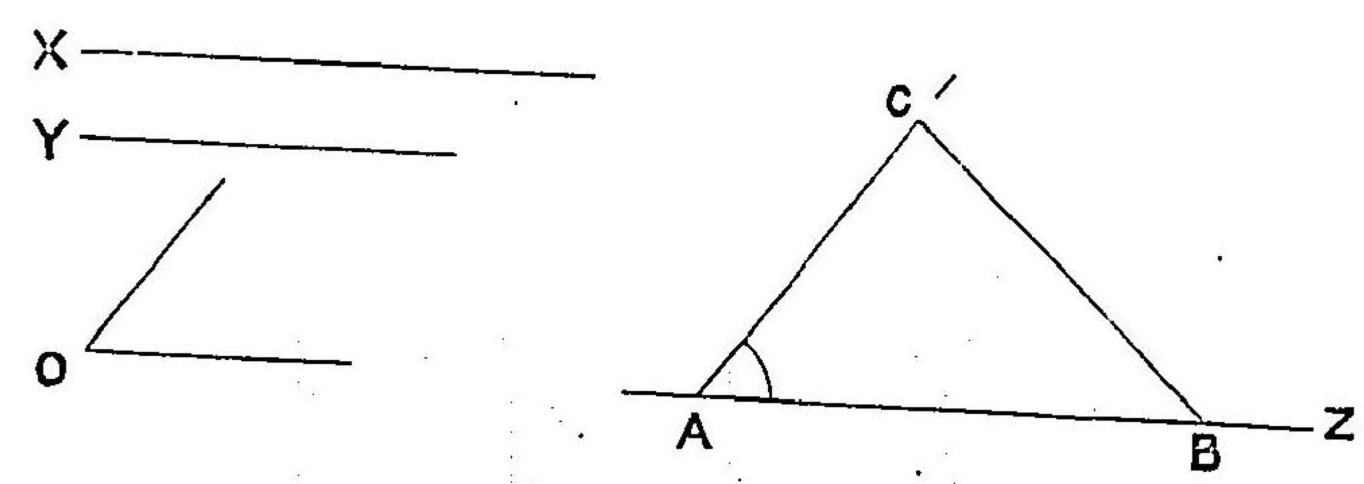
作圖法　AB上ニ任

意ノ一點Dヲ取リCDヲ結ビ付ケ,次ニ錯角∠CDB, ∠DCEガ相等シキ樣ニ直線CEヲ引ケバ(前節)之ガ求ムル所ノ直線ナリ.

證明　作圖ニヨリテ明カナリ(23節)

111. 作圖題　二邊及其夾角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

題意　X, Yヲ與ヘラレタル二ツノ有限直線, ∠Oヲ與ヘラレタル角トシ,二邊ガ夫々X及Yニ等シク夾角ガ∠Oニ等シキ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.



作圖法　任意ノ直線Z上ニ任意ノ一點Aヲ取リAヲ中心トシXニ等シキ半徑ヲ以テ圓弧ヲ畫キ此直線トBニ於テ交ラシム(箇樣ニスルコトヲZ上ニXニ等シク有限直線ABヲ取ルトイフ). 次ニAヨリABト∠Oニ等シキ角ヲナス直線ヲ引キ(109節)其

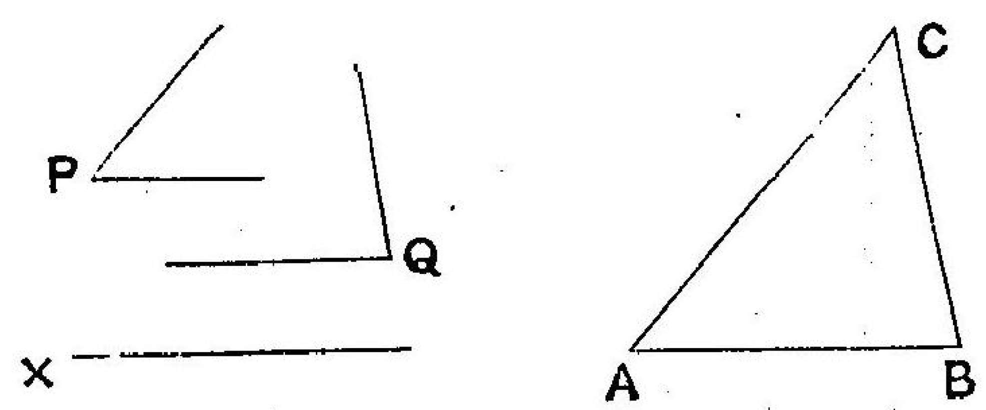
上ニYニ等シクACヲ取リBCヲ結ビ付クレバ△ABCガ求ムル所ノ三角形ナリ.

證明 作圖ニヨリテ明カナリ.

問題158. 二邊及其夾角ヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作ルコト.

112. 作圖題 二角及其頂點ノ間ノ邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

題意 ∠P, ∠Qヲ與ヘラレタル二角, Xヲ與ヘラレタル有限直線トシ,二角ガ夫々∠P, ∠Qニ等シク,其角ノ頂點ノ間ノ邊ガXニ等シキ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.



作圖法 任意ノ直線上ニXニ等シクABヲ取リAヲ通リテABト∠Pニ等シキ角ヲナス直線ヲ引キ,次ニBヲ通リテBAト∠Qニ等シキ角ヲナス直線ヲABニ對シテACト同ジ側ニ引キ,此二直線ノ交點ヲ

CトスレバΔABCガ求ムル所ノ三角形ナリ.

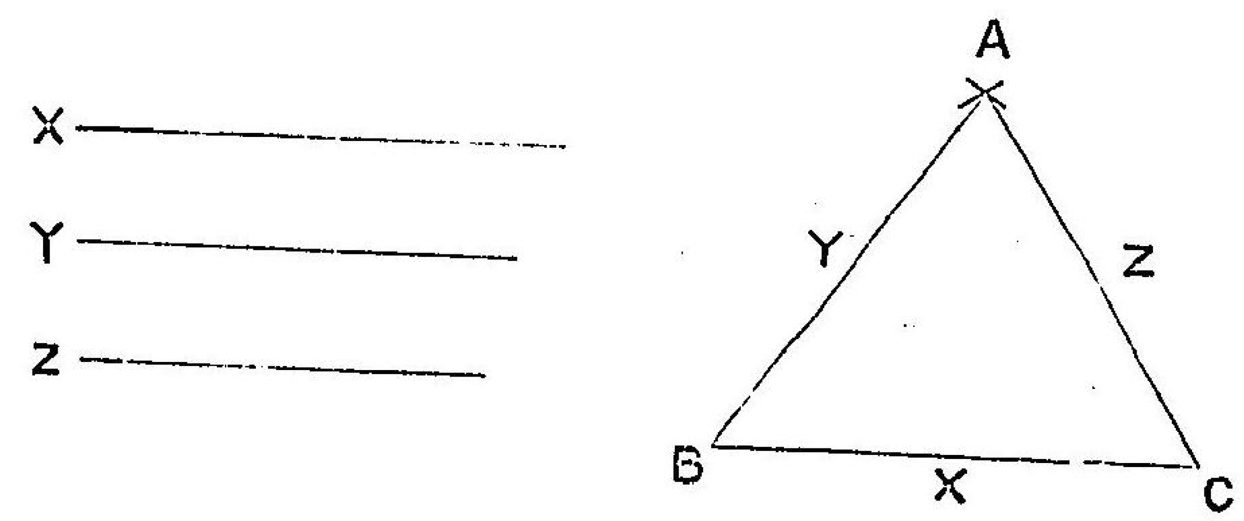
證明 作圖ニヨリテ明カナリ.

吟味 ∠Pト∠Qトノ和ガ二直角ヨリ小ナルトキハ常ニ一ツノ解アリ,然ラザルトキハ解ナシ(**37**節).

註 **作圖題の吟味**トハ與ヘラレタル條件ニ適スル圖形ガ作圖シ得ルヤ否ヤ,又作圖シ得ル場合ニハ何程ノ相異ナル圖形ヲ作リ得ルカナドイフコトヲ與ヘラレタル條件ノ所有ル場合ニツキテ研究スルコトナリ.

113. 作圖題 三邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

題意 X, Y, Zヲ與ヘラレタル三ツノ有限直線トシ,三邊ガ夫々X, Y, Zニ等シキ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.



作圖法 任意ノ直線上ニXニ等シクBCヲ取リ,

Bヲ中心トシYニ等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ,次ニCヲ中心トシZニ等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ此二ツノ圓弧ノ一ツノ交點ヲAトスレバ△ABCハ求ムル所ノ三角形ナリ.

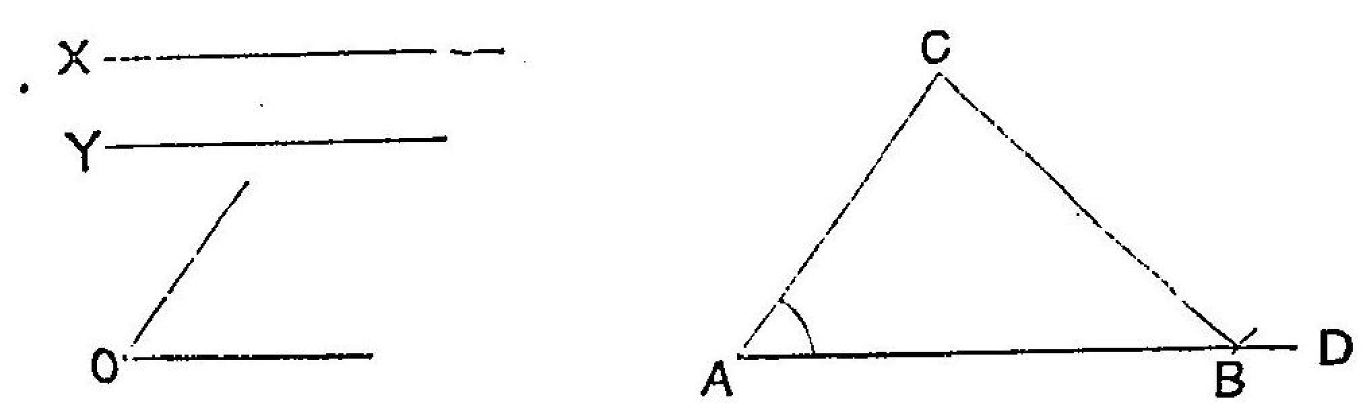
證明 作圖ニヨリテ明カナリ.

吟味 $Y+Z>X>Y\sim Z$ ナルトキハ一ツノ解アリ,然ラザレバ解ナシ.

*問題159. 一邊ヲ與ヘテ正三角形ヲ作ルコト.

114. 作圖題 二邊及其一ツニ對スル角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

題意 X,Yヲ與ヘラレタル二ツノ有限直線,∠Oヲ與ヘラレタル角トシ,二邊ガ夫々X,Yニ等シク其一邊例ヘバXニ等シキ邊ニ對スル角ガ∠Oニ等シキ三角形ヲ作ルコトヲ求ム.



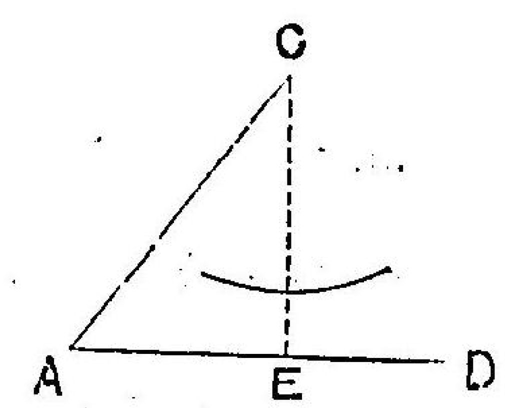
作圖法 任意ノ直線上ニYニ等シクACヲ取リAヲ通リテACト∠Oニ等シキ角ヲナス直線ADヲ引キCヲ中心トシXニ等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キADトBニ於テ出會ハシムレバ△ABCハ求ムル所ノ三角形ナリ.

證明 作圖ニヨリテ明カナリ.

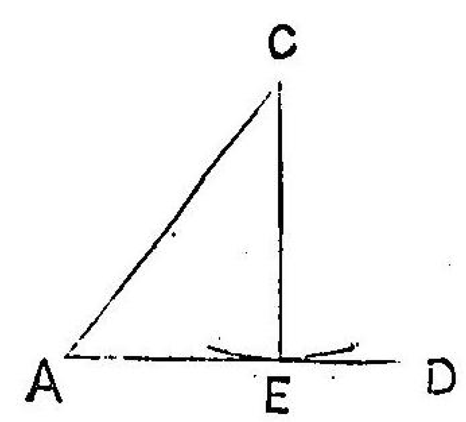
吟味 三角形ガ出來得ベキタメニハ今畫キタル圓ガ∠CADノ邊ADト出會ハザルベカラズ. 因テ與ヘラレタル邊ト角トノ關係ニヨリテ種々ノ場合ヲ生ズ.

(第一) ∠Oガ鋭角ナルトキ

(a) XガCヨリADニ引ケル垂線CEヨリ小ナレバ圓ハADト出會ハズ. 從テ問題ハ不可能ナリ.

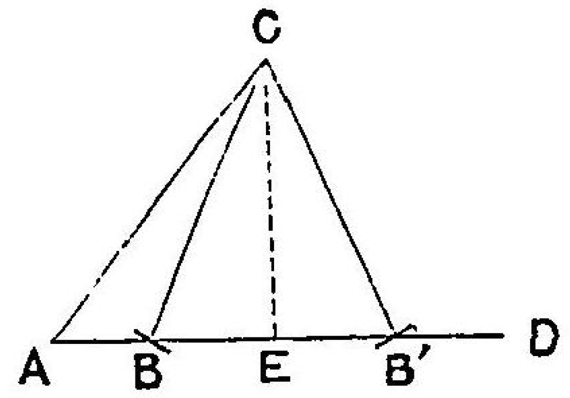


(b) XガCEニ等シケレバ圓ハEニ於テADニ切ス. 此直角三角形ACEガ求ムル所ノ三角形ナリ.

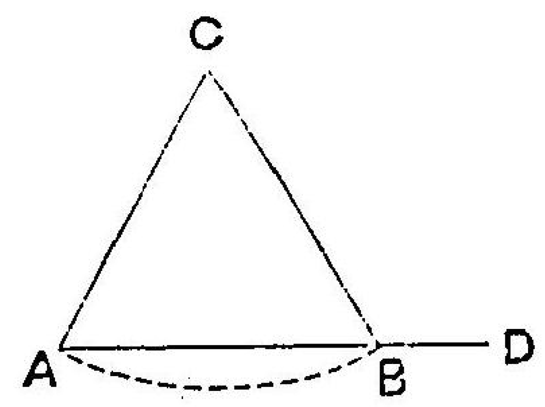


(c) XガCEヨリ大ニシテ

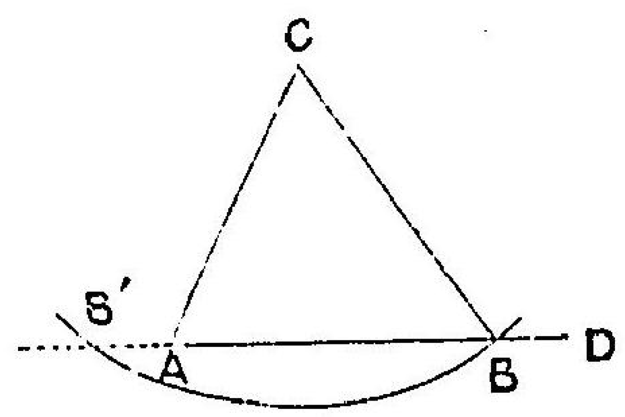
Yヨリ小ナレバ圓ハADト二點B,B′ニ於テ交ル. 此$\triangle ABC$及$\triangle AB'C$ハ何レモ求ムル所ノ三角形ナリ.



(d) XガYニ等シケレバ圓ハADトA及他ノ一點Bトニ於テ交ル. 此$\triangle ABC$ガ求ムル所ノ三角形ナリ.

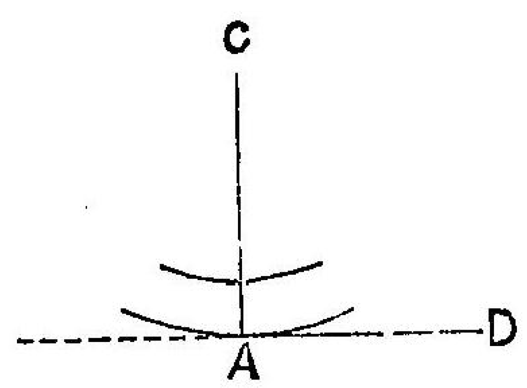


(e) XガYヨリ大ナレバ圓ハ$\angle CAD$ノ邊ADト一點Bニ於テ出會ヒ, ADヲAノ方ヘ延長シタル部分ト其上ノ一點B′ニ於テ出會フ. 此$\triangle ABC$ガ求ムル所ノ三角形ナリ($\triangle AB'C$ハ所要ノ三角形ニアラズ).



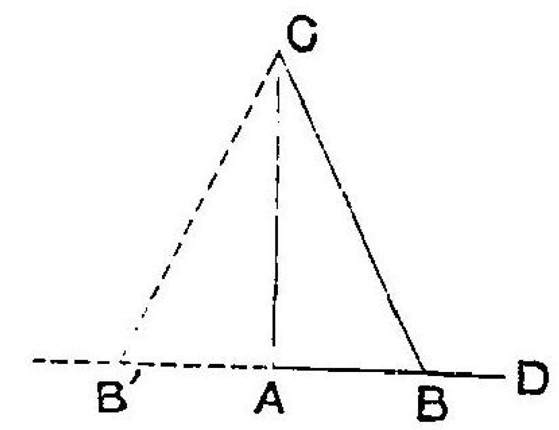
(第二) $\angle O$ガ直角ナルトキ.

(a) XガYヨリ大ナラザレバ圓ハADトAヨリ他ノ點ニ



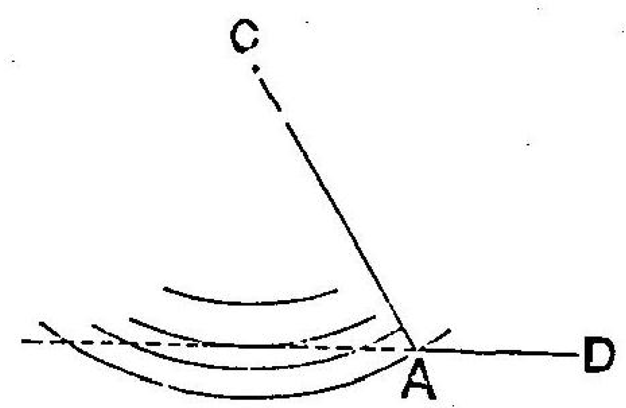
於テ出會フコトヲ得ズ. 從テ作圖題ハ不可能ナリ.

(b) XガYヨリ大ナレバ圓ハADト一點Bニ於テ出會ヒ, ADヲAノ方ヘ延長シタル部分ト其上ノ一點B′ニ於テ出會フ. 此$\triangle ABC$ガ求ムル所ノ三角形ナリ($\triangle AB'C$モ亦所要ノ三角形ナレドモコハ$\triangle ABC$ト全ク相等シキモノナルユヱ,ツマリ唯一ツノ解アルノミ).

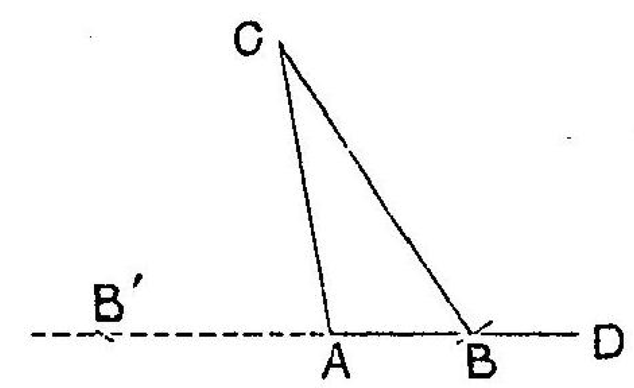


(第三) $\angle O$ガ鈍角ナルトキ.

(a) XガYヨリ大ナラザレバ圓ハADトAヨリ他ノ點ニテ出會フコトヲ得ズ. 從テ作圖題ハ不可能ナリ.



(b) XガYヨリ大ナレバ圓ハADト一點Bニ於テ出會ヒ, ADヲAノ方ヘ延長シタル部分ト其上ノ一點B′ニ於テ出會フ. 此$\triangle ABC$ガ求ムル所ノ三角形ナリ($\triangle AB'C$ハ所要ノ三角形ニアラズ).



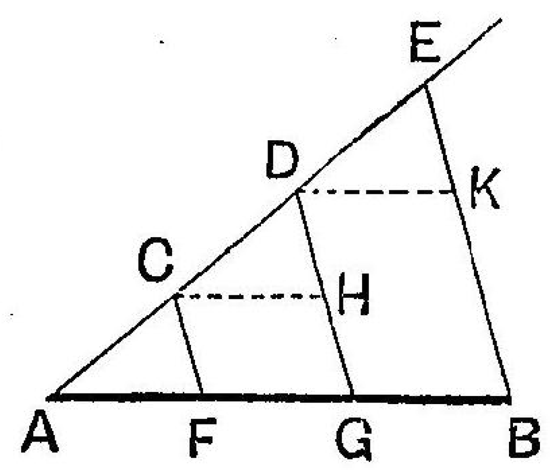
以上ノ結果ヲ表ニシテ記セバ次ノ如シ.

$\angle O <$ 直角	$X < CE$	解ナシ
	$X = CE$	解 1
	$Y > X > CE$	解 2
	$X \geqq Y$	解 1
$\angle O \geqq$ 直角	$X \leqq Y$	解ナシ
	$X > Y$	解 1

115. 作圖題　定マレル有限直線ヲ任意ノ數ニ等分スルコト.

題意　有限直線ABガ與ヘラレタリトシ之ヲ任意ノ數ニ等分(例ヘバ三等分)スルコトヲ求ム.

作圖法　ABノ一端例ヘバAヲ通リテABト同一直線ナラザル任意ノ直線ヲ引キ其上ニAヨリ任意ノ相等シキ三ツノ長サAC, CD, DEヲ取リEBヲ結ビ付ケC及Dヲ通リEBニ平行ナル直線ヲ引キABト夫々F, Gニ於テ交ラシムレバ此等ノ點ガ求ムル所ノ分



點ナリ.

證明　C, Dヲ通リABニ平行ナル直線ヲ引キDG, EBト夫々H, Kニ於テ交ラシムレバ

$$\triangle ACF \equiv \triangle CDH \equiv \triangle DEK \quad (32節)$$

$$\therefore \quad AF = CH = DK$$

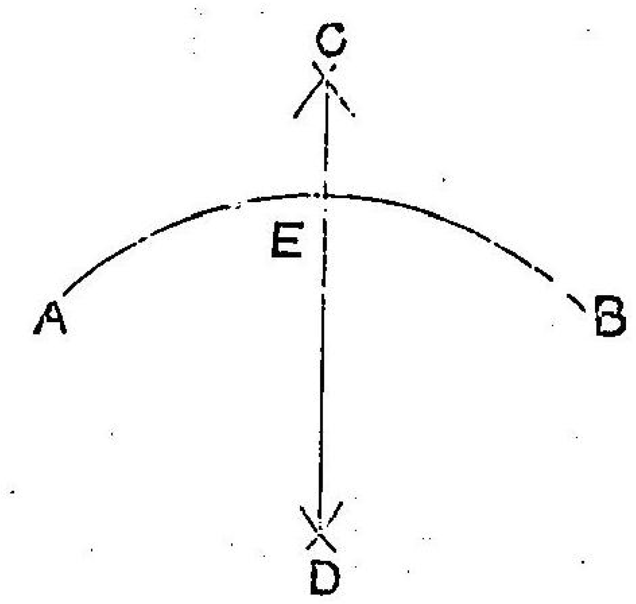
然ルニ　$CH = FG, \quad DK = GB$　〔47節(第二)〕

$$\therefore \quad AF = FG = GB$$

卽チABハF及Gニ於テ三等分セラル.

116. 作圖題　定マレル圓弧ヲ二等分スルコト.

題意　$\overset{\frown}{AB}$ガ與ヘラレタリトシ其中點ヲ求ム.



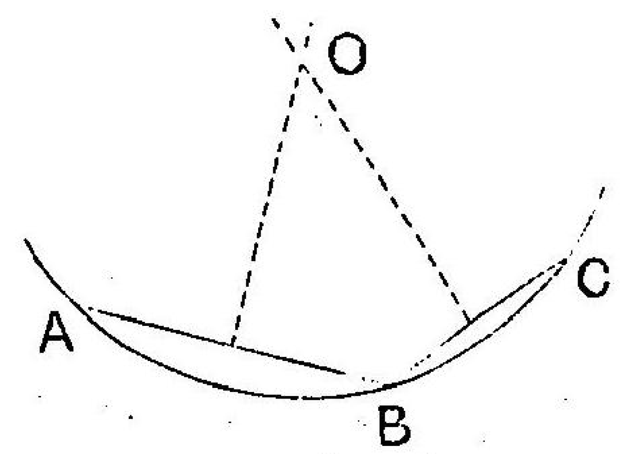
作圖法　A及Bヲ中心トシ弦ABノ半分ヨリ大ナル任意ノ相等シキ半徑ニテ二ツノ圓弧ヲ畫キ其交點ヲC, Dトス. CDヲ結ビ付ケ,ソレト$\overset{\frown}{AB}$トノ交點ヲEトスレバEハ$\overset{\frown}{AB}$ノ中點ナリ.

證明　CDハ弦ABヲ直角ニ二等分ス(105節注意).

從テマタ$\overparen{AB}$ヲ二等分ス(79節系3).

117. 作圖題 定マレル圓弧ノ中心(卽チ圓弧ガ屬スル圓ノ中心)ヲ求ムルコト.

題意 一ツノ圓弧ガ與ヘラレタリトシ其中心ヲ求ム.



作圖法 圓弧ノ上ニ任意ノ三點A, B, C ヲ取リ弦AB, BC ヲ引キ此二弦ヲ直角ニ二等分スル直線ヲ引キ其交點ヲOトスレバOガ求ムル所ノ中心ナリ.

證明 AB及BC ヲ直角ニ二等分スル直線ハ何レモ圓ノ中心ヲ通ル(79節系2).

故ニ此二直線ハ中心ニ於テ相交ラザルベカラズ.

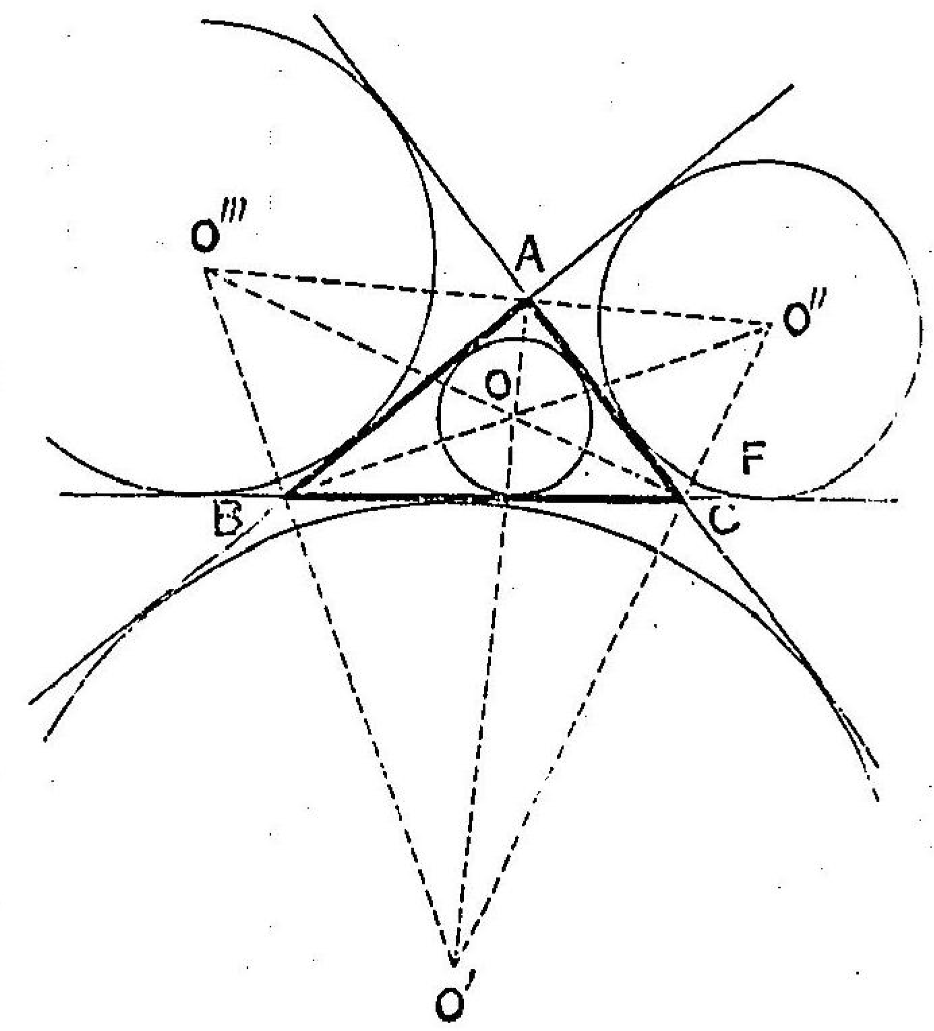
118. 作圖題 一直線上ニ在ラザル三點ヲ通ル圓ヲ畫クコト.

作圖法,**證明**共ニ第95節ニヨリテ明カナリ.

119. 作圖題 同一ノ點ヲ通ラズ又何レノ二ツヲ取ルモ互ニ平行ナラザル三直線ニ切スル圓ヲ畫クコト.

作圖法,**證明**共ニ第96節及問題126ニヨリテ明カナリ.

求ムル所ノ圓ハ四ツアリテ一ツハ此三直線ニテ出來ル三角形ノ內接圓,他ハ傍接圓ナリ.



120. 作圖題 定圓周上ノ定點ニ於テ其圓ニ切線ヲ引クコト.

作圖法,**證明**共ニ第89節系1ニヨリテ明カナリ.

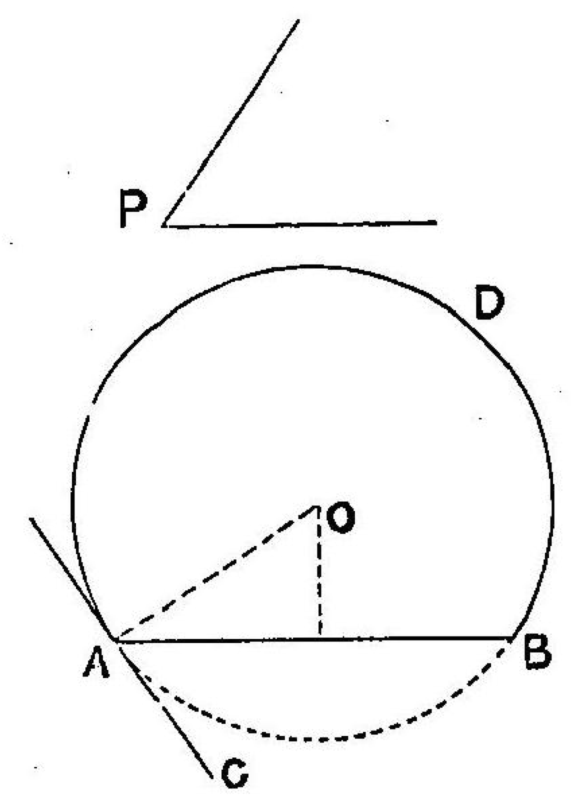
問題160. 定直線ニ平行シ且ツ定圓ニ切スル直線

ヲ引クコト.

121. 作圖題 定マレル有限直線ノ上ニ定マレル角ヲ含ム弓形ヲ畫クコト.

題意 有限直線AB及∠Pガ與ヘラレタリトシABノ上ニ∠Pニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ畫クコトヲ求ム.

作圖法 ABノ一端例ヘバAヨリABト∠Pニ等シキ角ヲナス直線ACヲ引キ,次ニAヨリACニ垂線ヲ引キ又ABヲ直角ニ二等分スル直線ヲ引ケバ此二直線ハ必ズ相交ル(問題18),其交點ヲOトス. Oヲ中心,OAヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケバ此圓ハマタBヲ通ル(92節). ソコデ此圓ガABニヨリテ分タレタル二ツノ弓形ノ中∠BAC内ニアラザル弓形ADBガ求ムル所ノ弓形ナリ.



證明 ACハ此圓ノ切線ナリ(89節系1).

故ニ弓形ADBガ含ム角ハ∠BACニ等シ,卽チ∠P

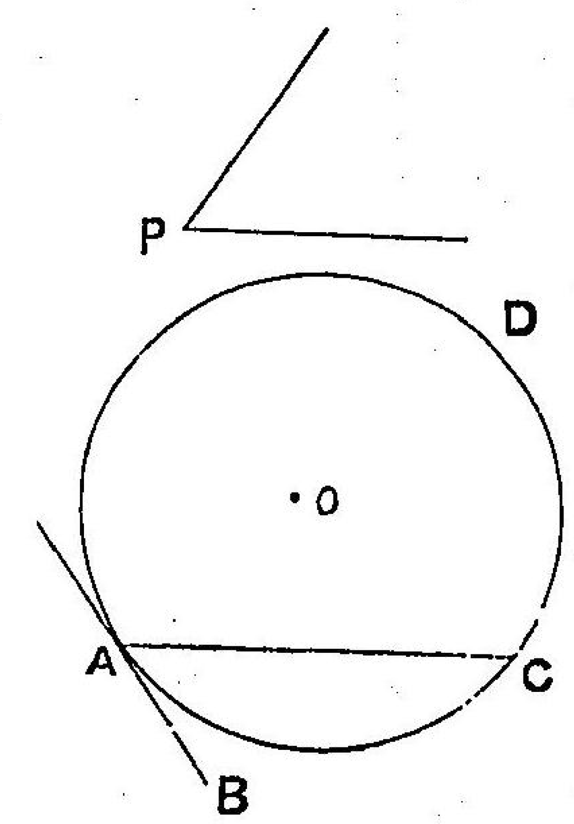
ニ等シ(90節).

問題161. 本題ニ於テ與ヘラレタル角ガ直角ナルトキノ簡單ナル作圖法ヲ求メヨ.

122. 作圖題 定マレル圓ヨリ定マレル角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ルコト.

題意 圓Oト∠Pトガ與ヘラレタリトシ,圓Oヨリ∠Pニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ截リ取ルコトヲ求ム.

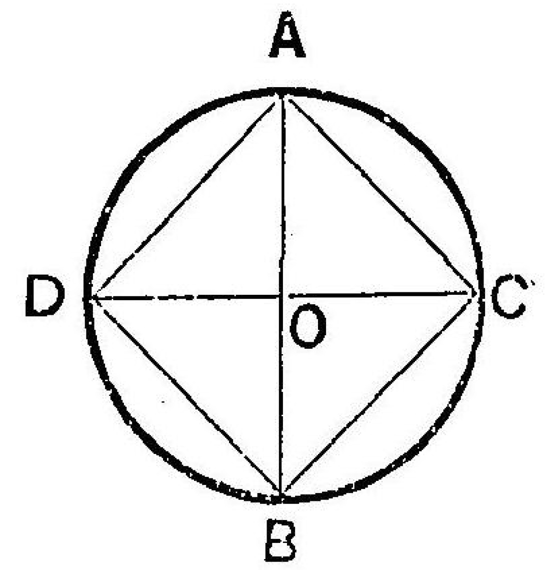
作圖法 圓Oノ周上ノ任意ノ一點Aニ於テ切線ABヲ引キ,次ニAヲ通リテABト∠Pニ等シキ角ヲナス弦ACヲ引ケバ,圓ガACニヨリテ分タレタル二ツノ弓形ノ中∠BAC内ニアラザル弓形ADCガ求ムル所ノ弓形ナリ.



證明 作圖ニヨリテ明カナリ(90節).

123. 作圖題 定圓ニ內接スル正方形ヲ作ルコト.

題意 圓Oガ與ヘラレタリトシ之ニ內接スル正方形ヲ作ルコトヲ求ム.



作圖法 互ニ垂直ナル任意ノ二直徑 AB, CD ヲ引キ其端ヲ順次ニ結ビ付ケテ出來ル四邊形 ADBC ガ求ムル正方形ナリ.

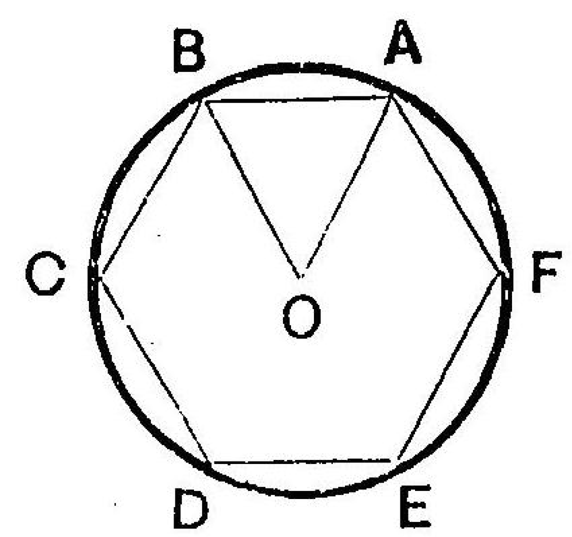
證明 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{DA}$ (**74**節系**3**)

故ニ ADBC ハ正方形ナリ(**100**節).

***問題162.** 定圓ニ外接スル正方形ヲ作ルコト.

問題163. 定圓ニ內接及外接スル正八邊形,正十六邊形ヲ作ルコト.

124. 作圖題 定圓ニ內接スル正六邊形ヲ作ルコト.



題意 圓Oガ與ヘラレタリトシ之ニ內接スル正六邊形ヲ作ルコトヲ求ム.

作圖法 圓周上ノ任意ノ點Aヲ中心トシ定圓ノ

半徑ニ等シキ半徑ヲ以テ圓弧ヲ畫キ定圓周ト交ルーツノ點ヲBトス. 次ニBヲ中心トシ前ト等シキ半徑ニテ圓弧ヲ畫キ定圓周ト他ノ點Cニ於テ交ラシム. 以下次第ニ此ノ如クシテ D, E, F ヲ求メ AB, BC, CD, DE, EF, FA ヲ結ビ付クレバ ABCDEF ハ求ムル所ノ正六邊形ナリ.

證明 OA, OB ヲ結ビ付クレバ

$$OA=OB=AB \qquad \text{(作圖)}$$

故ニ$\triangle OAB$ハ正三角形ナリ(**34**節系).

$$\therefore \quad \angle AOB=60^\circ$$

卽チ$\angle AOB$ハ四直角(卽チ中心ノ周リニ出來ル總テノ角ノ和)ノ$\frac{1}{6}$ナリ.

故ニ$\overset{\frown}{AB}$ハ全圓周ノ$\frac{1}{6}$ナリ(**74**節).

同理ニテ$\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EF}$モ亦皆全圓周ノ$\frac{1}{6}$ナリ,

從テ$\overset{\frown}{AF}$モ亦然リ.

故ニ此六ツノ弧ハ皆相等シ.

故ニ ABCDEF ハ正六邊形ナリ(**100**節).

問題164. 定圓ニ外接スル正六邊形ヲ作ルコト.

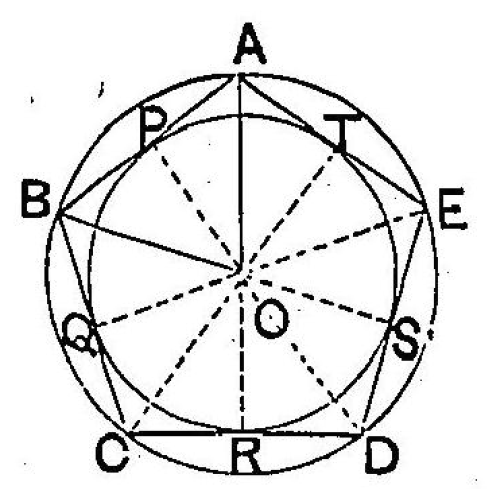
***問題165.** 定圓ニ內接及外接スル正三角形及正十

二邊形ヲ作ルコト.

125. 作圖題 定マレル正多角形ノ外接圓及內接圓ヲ作ルコト.

題意 例ヘバ正五邊形ABCDEガ與ヘラレタリトシ其外接圓及內接圓ヲ畫クコトヲ求ム.

作圖法 相隣レル二角例ヘバ∠Aト∠Bトノ二等分線ヲ引キ其交點ヲOトスレバOヲ中心,OAヲ半徑トスル圓ハ求ムル所ノ外接圓ナリ.



又Oヨリ一邊例ヘバABニ垂線OPヲ引キ,Oヲ中心,OPヲ半徑トスル圓ハ求ムル所ノ內接圓ナリ.

證明 OC, OD, OEヲ結ビ付クレバ

$$\angle OAB=\frac{1}{2}\angle A \qquad \text{(作圖)}$$

$$\angle OBA=\frac{1}{2}\angle B \qquad \text{(同上)}$$

然ルニ $$\angle A=\angle B \qquad \text{(假定)}$$

$$\therefore \quad \angle OAB=\angle OBA$$

$$\therefore \quad OA=OB \qquad \text{(35節)}$$

又 $$\triangle OBA\equiv\triangle OBC \qquad \text{(31節)}$$

$$\therefore \quad OA=OC$$

因テ $$OA=OB=OC$$

又 $$\angle OCB=\angle OAB$$

然ルニ $$\angle OAB=\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle C \qquad \text{(作圖及假定)}$$

$$\therefore \quad \angle OCB=\frac{1}{2}\angle C$$

卽チOCハ∠Cノ二等分線ナリ.

以下同理ニテ $OA=OB=OC=OD=OE$

故ニOヲ中心,OAヲ半徑トシテ畫ケル圓ハ正多角形ノ總テノ頂點ヲ通ル,卽チ此圓ハ求ムル所ノ外接圓ナリ.

次ニOヨリBC,CD等ニ垂線OQ, OR等ヲ引ケバ上ノ證明ニヨリ

$$\triangle OAB\equiv\triangle OBC\equiv\triangle OCD \quad \text{等}$$

ナルユヱ其對應スル頂點ヨリ底邊ニ引キタル垂線モ亦皆相等シキコト明カナリ.

故ニ $$OP=OQ=OR=OS=OT$$

故ニOヲ中心,OPヲ半徑トスル圓ハ正多角形ノ總テノ邊ニ切ス,卽チ此圓ハ求ムル所ノ內接圓ナリ.

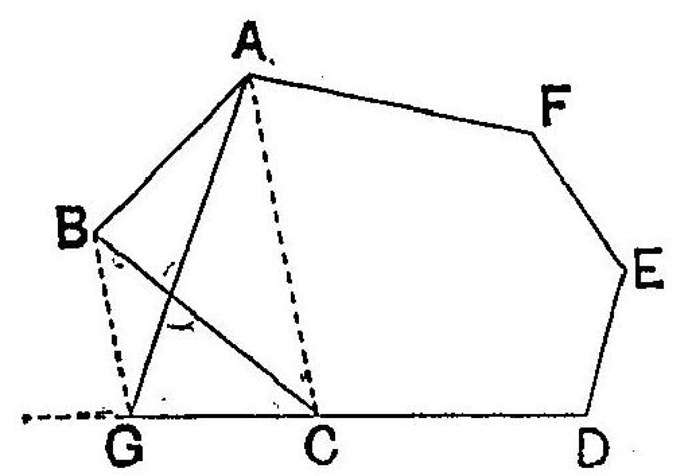
注意 正多角形ノ總テノ角ノ二等分線及總テノ邊ヲ直角ニ二等分スル直線ハ皆一點ニ會ス.

定義 此點ヲ此**正多角形の中心**トイフ.

126. 作圖題 定マレル多角形ト等積ニシテ邊ノ數ガ元ノヨリモ一ツダケ少ナキ多角形ヲ作ルコト.

題意 例ヘバ六邊形ABCDEFガ與ヘラレタリトシ之ト等積ナル一ツノ五邊形ヲ作ルコトヲ求ム.

作圖法 對角線ACヲ引キBヲ通リACニ平行ナル直線ヲ引キCDノ延長トGニ於テ交ラシメAGヲ結ビ付クレバ五邊形AGDEFハ與ヘラレタル六邊形ABCDEFト等積ナル一ツノ五邊形ナリ.



證明 BG//AC (作圖)

∴ △ABC=△AGC (65節系3)

∴ ACDEF+△ABC=ACDEF+△AGC

即チ 六邊形ABCDEF=五邊形AGDEF

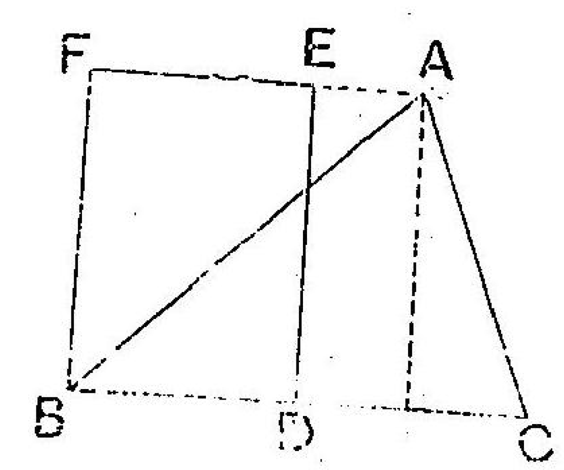
注意 1. 此作圖法ヲ續ケ行ヘバ遂ニ定マレル多角形ト等積ナル一ツノ三角形ヲ作ルコトヲ得.

注意 2. 與ヘラレタル六邊形ト等積ナル五邊形ハ幾ツモアリ,上ノ作圖法ニヨリテ得タルモノハ其中ノ一ツナリ.

127. 作圖題 定マレル三角形ト等積ナル矩形ヲ作ルコト.

題意 △ABCガ與ヘラレタリトシ,之ト等積ナル一ツノ矩形ヲ作ルコトヲ求ム.

作圖法 B及BCノ中點Dヲ通リBCニ垂直ナル直線ヲ引キ,Aヲ通リテBCニ平行ニ引ケル直線ト夫々F,Eニ於テ交ラシムレバ矩形BDEFハ△ABCト等積ナル一ツノ矩形ナリ.



證明 矩形BDEF=BD.DE

$=\frac{1}{2}$BC.DE (作圖)

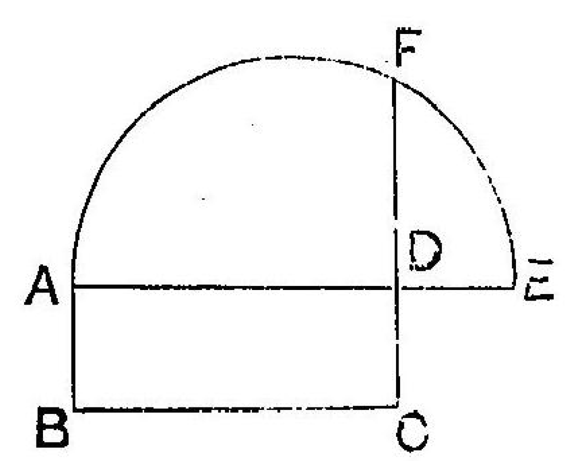
然ルニDEハ△ABCノ高サニ等シ.

∴ 矩形BDEF=△ABC

注意 與ヘラレタル三角形ト等積ナル矩形ハ幾ツモアリ,此作圖法ニヨリテ得タルモノハ其中ノ一ツナリ.

128. 作圖題 定マレル矩形ト等積ナル正方形ヲ作ルコト.

題意 矩形 ABCD ガ與ヘラレタリトシ之ト等積ナル正方形ヲ作ラントス.



作圖法 一邊 AD ヲ延長シ其上ニDCニ等シクDEヲ取リ,AEヲ直徑トシテ圓ヲ書キ CD ヲ延長シテ圓周トFニ於テ交ラシムレバ DF ハ求ムル所ノ正方形ノ一邊ニシテ,從テ DF ヲ一邊トスル正方形ヲ作レバ(問題157)所要ノ正方形ヲ得.

證明 $DF \perp AE$ (假定)

∴ $DF^2 = AD.DE$ (**82**節)

$= AD.DC$ (作圖)

卽チDFヲ一邊トスル正方形ハ矩形ABCDト等積

ナリ.

注意 1. 與ヘラレタル圖形ト等積ナル正方形ハ唯一ツニ限ルコト明カナリ.

注意 2. 本節及前二節ノ作圖題ヲ併セ用ヒテ任意ノ多角形ト等積ナル唯一ノ正方形ヲ作ルコトヲ得.

作圖題ノ解法

129. 逐次代用法 作圖題ヲ解カントスルニ當リ容易ニ其解法ヲ案出シ得ザルトキハ先ヅ所要ノ作圖題ガ或方法ニヨリテ解カレタルモノト假定シテ適宜ニ其圖ヲ書キ,然ル後此圖ニ就テ圖形中ノ既知ノ部分卽チ初ニ與ヘラレタル線,角等ト未知ノ部分トノ間ニ如何ナル關係アルカヲ考ヘ,其關係ニヨリテ元ノ作圖題ヲ他ノ比較的容易ナル作圖題ニ代ヘ逐次此ノ如クシテ終ニ既知ノ作圖題ニ歸セシムベシ. 之ヲ作圖題ノ**解析**トイフ. 例ヘバ一點ヲ通リテ一直線ニ平行ナル直線ヲ作ルコトハ與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ作ルコトニ歸セシムルガ如シ.

次ニ解析ニヨリテ得タル結果ヲ基トシ之ヨリ其順序ヲ逆ニ辿リテ所要ノ作圖法ヲ得ベシ. 之ヲ作圖題ノ**總合**トイフ.

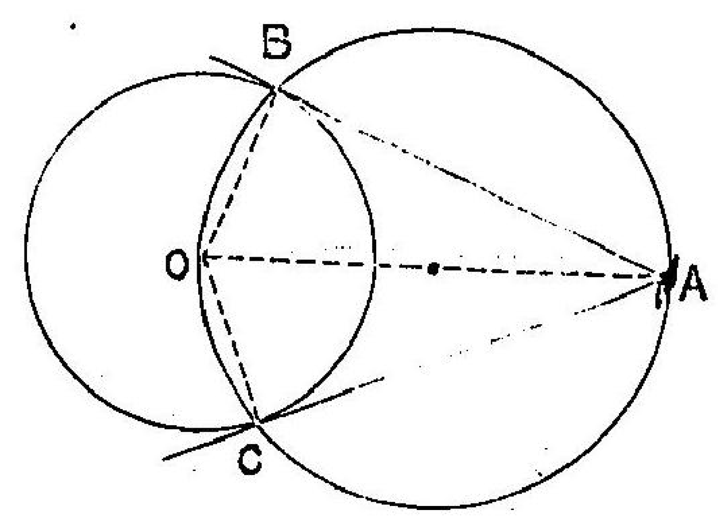
次ニ此作圖法ノ正シキコトヲ**證明**シ終リニ之ヲ**吟味**スベシ.

次節ニ此方法ニヨル一例ヲ示サン.

130. 作圖題 定圓外ノ定點ヲ通リ此圓ニ切線ヲ引クコト.

題意 圓Oト其外ノ一點Aトガ與ヘラレタリトシ, Aヲ通リテ圓Oニ切スル直線ヲ引クコトヲ求ム.

解析 本題ヲ解キ得タリト假定シABヲ所要ノ切線トシBヲ其切點トセヨ.



OA, OBヲ結ビ付クレバ

$\angle OBA = \angle R$ (89節系2)

故ニ點BハOAヲ直徑トスル圓周上ニ在リ.

因テ次ノ作圖法ヲ得.

作圖法 OAヲ結ビ付ケ之ヲ直徑トスル圓ヲ畫

キ此圓ト定圓トノ交點ヲB, CトシAB, ACヲ結ビ付クレバ之ガ求ムル所ノ切線ナリ.

證明 $\angle OBA = \angle R$ (88節)

$\angle OCA = \angle R$ (同上)

故ニAB, ACハ何レモ圓Oノ切線ナリ(89節系1).

吟味 OAヲ直徑トスル圓ハ必ズ元ノ圓Oト交ルヲ以テ(問題148c)所要ノ切線ハ常ニ二ツアリ. 又二ツノ圓ハ二點ヨリ多クノ點ニ於テ出會フコトヲ得ザルヲ以テ所要ノ切線ハ二ツヨリ多クハナシ.

注意 1. 定圓外ノ定點ヨリ之ニ必ズ唯二ツノ切線ヲ引クコトヲ得.

定義 上ノ圖ニ於テ有限直線AB, ACノ長サヲ「Aヨリ此圓ニ引ケル**切線の長さ**」トイフ.

注意 2. 圓外ノ點ヨリ圓ニ引ケル二ツノ切線ノ長サハ相等シ.

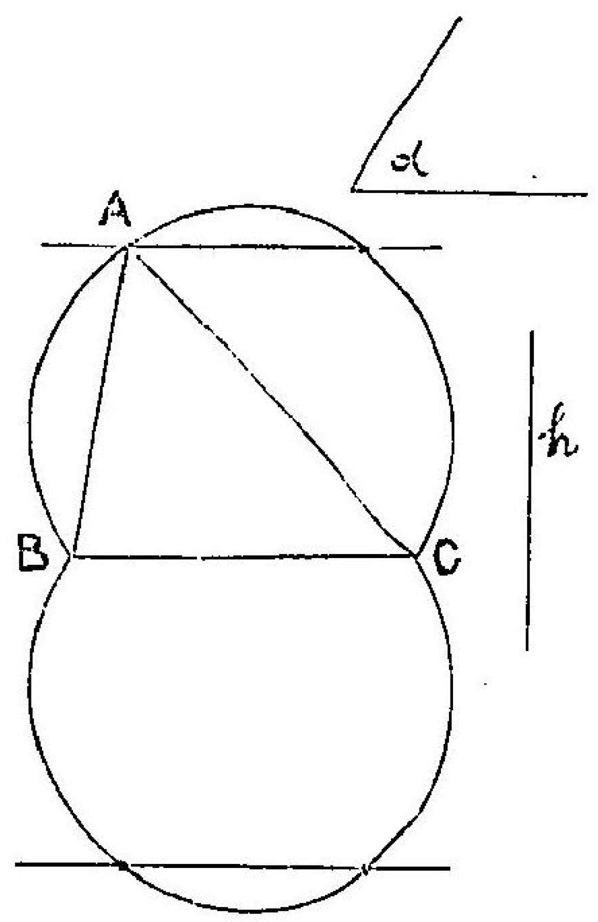
131. 軌跡交截法 作圖題ノ解法ハ結局或條件ニ適スル點ヲ求ムルコトニ歸着ス. 例ヘバ三點ヲ通ル圓周ヲ畫クコトハ其中心ヲ求ムルコトニ歸シ, 又圓外ノ點ヨリ此圓ニ切線ヲ引クコトハ圓周上ニ其切線ノ切點ヲ求ムルコトニ歸スルガ如シ. 此ノ

如キ場合ニ若シ與ヘラレタル條件中ノ一ツヲ取リ去ルトキハ殘リノ條件ノミニ適スル點ハ通例無數ニ存在シ其點ノ軌跡トシテ一ツノ線ヲ得ベシ.

ソコデ先ニ省略シタル條件ヲ回復シ他ノ一ツノ條件ヲ省略スルトキハ又新タナル軌跡ヲ得ベシ.

此兩軌跡ノ交リガ皆所要ノ條件ニ適スル點ナリ.又若シ兩軌跡ガ出會ハザレバ其作圖題ハ不可能ナルナリ.

例　底邊,頂角及高サヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.



題意　與ヘラレタル有限直線 BC ヲ底邊トシ其上ニ頂角ガ與ヘラレタル角 α ニ等シク,高サガ與ヘラレタル有限直線 h ニ等シキ三角形ヲ書クコトヲ求ム.

解法　底邊ハ與ヘラレタルヲ以テ所要ノ三角形ヲ書クニハ其頂點ヲ定ムレバヨシ.　ソコデ先ヅ底邊ト高サトダケガ與ヘラレタリトスレバ頂點ノ軌跡ハ BC ヨリ h ノ距離ニアル一双ノ平行線ナリ(問題**120**).

次ニ底邊ト頂角トダケガ與ヘラレタリトスレバ頂點ノ軌跡ハ BC ノ上ニ $\angle\alpha$ ニ等シキ角ヲ含ム弓形ノ弧ナリ(**97**節).

故ニ此二ツノ軌跡ノ交點ノ一ツヲ A トスレバ $\triangle ABC$ ハ所要ノ三角形ナリ.

吟味　他ノ交點ヲ B, C ニ結ビ付クルトキモ所要ノ三角形ヲ得,サレドコハ前ノ三角形ト全ク相等シキユヱ結局所要ノ三角形ハ唯一ツヨリナシ.

若シ此兩軌跡ガ出會ハザレバ問題ハ不可能ナリ.

練　　習

問題166. 對角線ヲ與ヘテ正方形ヲ作ルコト.

問題167. 直角ヲ三等分スルコト.

問題168. 定點ヨリ定圓周ニ至ル最モ長キ直線及最モ短キ直線ヲ引クコト.

問題169. 定マレル角內ノ定點 O ヲ通リテ一ツノ

直線ヲ引キ此直線ノ角ノ二邊ノ間ニ夾マルル部分ガOニ於テ二等分セラルル樣ニスルコト.

問題170. 二定點ヲ通リ定半徑ノ圓ヲ畫クコト.

問題171. 外接圓ノ半徑,底邊及高サヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

問題172. 底邊,一ツノ底角及他ノ二邊ノ和ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

問題173. 二定圓ニ切スル與ヘラレタル半徑ノ圓ヲ畫クコト.

問題174. 底邊,頂角及他ノ二邊ノ和ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

問題175. 底邊,兩底角ノ差及他ノ二邊ノ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

問題176. 二邊及第三邊ヘノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

問題177. 三ツノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト.

問題178. 定マレル圓ニ於テ定マレル長サニ等シキ弦ヲ定點ヲ通ル樣ニ引クコト.

問題179. 定直線上ノ定點ニ於テ之ニ切シ且ツ定圓ニ切スル圓ヲ畫クコト.

問題180. 定直線ノ同ジ側ニアル二定點ヨリノ距離ノ和ガ最小ナルベキ點ヲ此定直線上ニ求ムルコト.

問題181. 鋭角Oノ內ニ與ヘラレタル二點P,Qアリ. PヨリA此角ノ一邊上ノ點Aニ至リAヨリ他ノ邊上ノ點BニBヨリQニ至ル路PABQヲ最短ナラシメントス,A及Bノ位置ヲ求ム.

問題182. 定マレル二ツノ平行線ノ一ツノ上ニ定點Bアリ,平行線外ノ定點Aヲ通リ二ツノ平行線トM, Nニ於テ交ル直線ヲ引キBM=BNナラシメヨ. 又此直線ハ幾ツ引キ得ルカ.

***問題183.** 二定圓ニ共通ナル切線ヲ引クコト.

問題184. 定マレル二ツノ正方形ノ面積ノ和ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ畫クコト.

問題185. 定マレル二ツノ正方形ノ面積ノ差ニ等シキ面積ヲ有スル正方形ヲ畫クコト.

問題186. 三角形ノ邊ノ上ニ在ル一定點ヲ通リテ直線ヲ引キ此三角形ノ面積ヲ二等分スルコト.

問題187. 圓ニ外接スル四邊形ノ對邊ノ和ハ相等シ.

問題188. 前題ノ逆ヲ證明セヨ.

問題189. 圓ニ外接スル平行四邊形ハ菱形ナリ.

問題190. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノ二邊ノ和ヨリ內接圓ノ直徑ヲ引キタルモノニ等シ.

問題191. △ABCノ二頂點B及Cヲ通ル圓周ト二邊AB, ACトノ交點D, Eヲ結ビ付クル直線ハ常ニ一定ノ直線ニ平行ナリ.

問題192. 或點ヨリ定圓ニ引キタル切線ノ長サガ圓ノ直徑ニ等シトイフ.此點ノ軌跡ヲ求ム.

問題193. 圓ニ內接スル四邊形ノ對角線ガ互ニ垂直ナルトキハ其交點ヨリ一邊ニ引ケル垂線ノ延長ハ之ニ對スル邊ノ中點ヲ通ル.

問題194. 三角形ノ各邊ノ上ニ其外側ニ正三角形ヲ書ケバ此三ツノ正三角形ノ外接圓周ハ一點ニ會ス.

問題195. 直角三角形ABCノ一邊ABヲ直徑トスル圓周ガ斜邊BCト交ル點ヲDトスレバDニ於ケル切線ハ邊ACノ中點ヲ通ル.

問題196. 圓ノ切線ガ直交スル二ツノ直徑ノ延長ト交ル點ヨリ其圓ニ引ケル二ツノ切線ハ互ニ平行ナリ.

問題197. 底邊及頂角ガ與ヘラレタル三角形ノ中面積ノ最大ナルモノハ二等邊三角形ナリ.

問題198. 定圓ニ內接スル矩形ノ中,面積ノ最大ナルモノハ正方形ナリ.

問題199. 四ツノ直線ガ何レノ二ツヲ取ルモ互ニ平行ナラズ又何レノ三ツヲ取ルモ一點ニ會セザルトキハ此等ノ直線ガ相交リテ出來ル四ツノ三角形ノ外接圓ノ周ハ皆一點ニ會ス.

問題200. 三角形ノ各邊ノ中點,各頂點ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ足,及垂心ト各頂點トヲ結ビ付クル有限直線ノ中點ヲ通リテ一ツノ圓ヲ書クコトヲ得.

定義 此圓ヲ三角形ノ**九點圓**トイフ.

第八編　比及比例

總　論

132. 比　一ツノ量Aノ之ト同ジ種類ノ他ノ量Bニ對スル比(又ハAトBトノ比)トハBヲ**單位**トシテAヲ測リテ得ル數ナリ.

故ニAノBニ對スル比ハ,ツマリAヲ得ルタメニBニ乘ズベキ數ナリ.

量Aノ量Bニ對スル比ヲ表スニ $\mathbf{A:B}$ 又ハ $\dfrac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}$ ト書ク. 卽チ $A:B=m$ 又ハ $\dfrac{A}{B}=m$ ト $A=mB$ トハ同一ノ事實ヲ表ス.

二量A,Bヲ通稱シテ比ノ**項**トイヒ,Aヲ比ノ**前項**,Bヲ**後項**トイフ.

注意 1.　同種類ノ量ニアラザレバ比ヲ有セズ.

注意 2.　比ハ不名數ナリ.

注意 3.　本節以下總テ量ヲ表スニハ大羅馬字A,B,C等ヲ用ヒ,數ヲ表スニハ小羅馬字 a, b, c 等ヲ用フ.

133. 比ハ整數,分數又ハ無理數ナリ.

(1)　例ヘバAガ丁度Bヲ整數倍含ムコトアリ,此場合ニハAノBニ對スル比ハ整數ナリ.

又此場合ニハAハBノ**倍量**,BハAノ**約量**ナリトイフ.

(2)　又例ヘバAガBヲ若干等分(例ヘバ五等分)シタルモノヲ丁度整數倍(例ヘバ七倍)含ムコトアリ,此場合ニハAノBニ對スル比ハ一般ニ分數$\left(\text{ココニテハ}\dfrac{7}{5}\right)$ナリ.

二量A,Bノ双方ノ約量ヲA,Bノ**公約量**又ハ**公度**トイフ.

AノBニ對スル比ガ整數若クハ分數ナルトキハAトBトハ**公度**ヲ有ス,例ヘバ $\dfrac{A}{B}$ ガ $\dfrac{7}{5}$ ナルトキハBヲ五等分シタルモノ(之ヲCトス)ハA,Bノ公度ナリ,如何ニモ $B=5C$, $A=7C$ ナレバナリ.

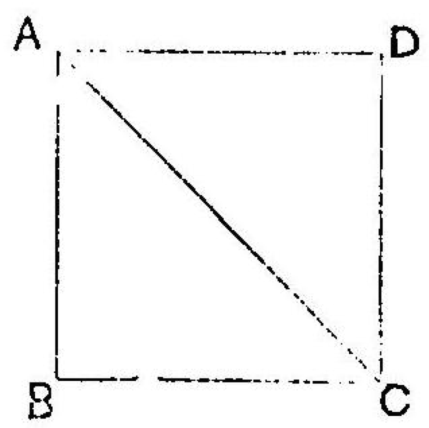
此場合ニハCノ $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$ 等モ亦A,Bノ公度ナリ.

逆ニ二量A,Bガ公度Cヲ有スルトキハ其二量ノ比ハ整數若クハ分數ナリ. 如何ニモ $A=mC$, $B=nC$ (m, n ハ整數)トスレバAハBノ $\dfrac{m}{n}$ 卽チ $\dfrac{A}{B}=\dfrac{m}{n}$ ナレバナリ.

(3) 二量ガ公度ヲ有セザル(卽チ二量ノ比ガ整數又ハ分數ナラザル)コトアリ,此場合ニハ二量ノ比ハ無理數ナリ.

例ヘバ正方形ノ對角線ト邊トノ比ハ無理數ナリ.

如何ニモ,正方形ABCDニ於テ對角線ACト一邊ABトノ比(卽チABヲ單位トスルトキACヲ表ス數)ガ分數$\frac{m}{n}$ニ等シトスレバ



$$\left(\frac{m}{n}\right)^2=1^2+1^2 \qquad \text{(66節系1)}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{m}{n}\right)^2=2$$

サテ如何ナル整數ノ平方モ分數ノ平方モ決シテ2ニ等シカラザルユヱ此式ハ不合理ナリ.

故ニ$\frac{AC}{AB}$ハ整數ニモ分數ニモアラズ卽チ無理數ナリ.

134. 定理 二量ノ比ハ之ヲ同單位ニテ測リテ得タル二數ノ比ニ等シ.

題意 同種類ノ二量A,Bヲ同ジ單位Cニテ計リテ得ル數ヲ夫々a,bトスレバ$\frac{A}{B}=\frac{a}{b}$ナルベシ.

證明

$$A=aC \qquad \text{(假定)}$$

$$B=bC \qquad \text{(同上)}$$

$$\therefore \quad C=\frac{1}{b}B$$

$$\therefore \quad A=a\left(\frac{1}{b}B\right)=\frac{a}{b}B$$

$$\therefore \quad \frac{A}{B}=\frac{a}{b}$$

注意 本定理ニヨレバ量ノ比ハ之ヲ同ジ單位ニテ測リテ得タル數ノ比ニ等シ. 又逆ニ二數ノ比ハ,同ジ單位ニテ測リタルトキノ數値ガ夫々其數ノ比ノ前項及後項ナル同種類ノ二量ノ比ト考フルコトヲ得. 故ニ數ノ比ハ量ニ關スル意義ニ障リナキ限リ直ニ量ノ比トナル.

系 比ノ兩項ニ同數ヲ掛ケ又ハ比ノ兩項ヲ同數ニテ割ルモ比ハ變ラズ.

卽チ $\frac{A}{B}=\frac{mA}{mB}$ 又 $\frac{A}{B}=\frac{A\div n}{B\div n}$ ナルベシ.

135. 比例 AノBニ對スル比ガCノDニ對スル比ニ等シキトキハ此等ノ四量ハ**比例をなす**トイフ.

之ヲ式ニテ表シタルモノ,卽チ

$$\mathbf{A:B=C:D} \quad \text{又ハ} \quad \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}=\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}}$$

ヲ**比例式**又ハ**比例**トイフ.

A,B,C,D ヲ通稱シテ比例ノ**項**トイヒ,A ト D トヲ其**外項**,B ト C トヲ其**内項**,D ヲ A,B,C ノ**第四比例項**トイフ.

又此比例ニ於テ A ト C トハ**對應**シ,B ト D トモ對應ストイフ.

注意 A ト B トハ勿論同種類ノ量ナラザルベカラズ,C ト D トモ亦然リ,サレド前ノ二量ト後ノ二量トハ異種類ノ量タルモ妨ゲナシ.

同種類ノ三ツノ量 A,B,C アリテ其間ニ次ノ比例

$$\mathbf{A:B=B:C} \quad \text{卽チ} \quad \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}}=\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}}$$

ガ成リ立ツトキハ此等ノ三量ハ比例ヲナストイヒ,C ヲ A,B ノ**第三比例項**トイヒ,B ヲ A ト C トノ**比例中項**トイフ.

136. 定理 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ナルトキハ $A \gtreqless B$ ニ從テ $C \gtreqless D$ ナリ.

證明 略ス.

137. 定理 $A:B=m:n$ ナレバ $nA=mB$ ナリ.

證明 A 及 B ヲ同ジ單位 U ニテ測リテ得ル數ヲ夫々 a, b トスレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b} \qquad (134\text{節})$$

然ルニ
$$\frac{A}{B}=\frac{m}{n} \qquad (\text{假定})$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{m}{n}$$

分母ヲ拂ヘバ $na=mb$

$$\therefore \quad (na)U=(mb)U$$

卽チ $n(aU)=m(bU)$

而シテ $aU=A, \quad bU=B$ (假定)

$$\therefore \quad nA=mB$$

系 $nA=mB$ ナレバ $\frac{A}{B}=\frac{m}{n}$ ナリ.

138. 定理 比例式ノ各項ガ皆同種類ノ量ナルトキハ其内項ヲ交換スルモ比例式ハ成リ立ツ.

題意 A,B,C,D ガ同種類ノ量ニシテ且ツ $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$

ナレバ $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$ ナルベシ.

證明 A, B, C, D ヲ同ジ單位 U ニテ測リテ得ル數ヲ夫々 a, b, c, d トスレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},\quad \frac{C}{D}=\frac{c}{d} \qquad (134\text{節})$$

然ルニ $$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \qquad (\text{假定})$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

此式ノ兩邊ニ $\frac{b}{c}$ ヲ掛クレバ

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

然ルニ $$\frac{a}{c}=\frac{A}{C},\quad \frac{b}{d}=\frac{B}{D} \qquad (134\text{節})$$

$$\therefore \quad \frac{A}{C}=\frac{B}{D}$$

系 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ニシテ A, B, C, D ガ同種類ノ量ナルトキハ $\frac{D}{B}=\frac{C}{A}$ ナリ.

139. 定理 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ナレバ $\frac{B}{A}=\frac{D}{C}$ ナリ.

證明 略ス.

140. 定理 $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ナルトキハ $\frac{A\pm B}{B}=\frac{C\pm D}{D}$ ナリ.

證明 A, B ヲ同ジ單位 U ニテ測リテ得ル數ヲ夫々 a, b トシ, C, D ヲ同ジ單位 U′ ニテ測リテ得ル數ヲ夫々 c, d トスレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},\quad \frac{C}{D}=\frac{c}{d} \qquad (134\text{節})$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

卽チ $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

サテ $$a\mathrm{U}=\mathrm{A},\quad b\mathrm{U}=\mathrm{B}$$

$$\therefore \quad (a+b)\mathrm{U}=\mathrm{A}+\mathrm{B}$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{A+B}{B} \qquad (134\text{節})$$

同理ニテ $$\frac{c+d}{d}=\frac{C+D}{D}$$

$$\therefore \quad \frac{A+B}{B}=\frac{C+D}{D}$$

同樣ニシテ $$\frac{A\sim B}{B}=\frac{C\sim D}{D}$$

ヲ證明スルコトヲ得.

*問題201. $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ ナレバ $\frac{A+B}{A\sim B}=\frac{C+D}{C\sim D}$ ナリ.

141. 定理 $A, A', A'', \cdots\cdots$ 及 $B, B', B'', \cdots\cdots$ ガ皆同種類ノ量ニシテ且ツ

$$\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}=\frac{A''}{B''}=\cdots\cdots \quad \text{ナルトキハ}$$

$$\frac{A}{B}=\frac{A+A'+A''+\cdots\cdots}{B+B'+B''+\cdots\cdots} \quad \text{ナリ.}$$

證明 $A, A', A'', \cdots\cdots$ 及 $B, B', B'', \cdots\cdots$ ヲ同ジ單位Uニテ測リテ得ル數ヲ夫々 $a, a', a'', \cdots\cdots$ 及 $b, b', b'' \cdots\cdots$ トスレバ

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\cdots\cdots \qquad (134\text{節})$$

今 $\frac{a}{b}=r$ トスレバ $\frac{a'}{b'}=r,\quad \frac{a''}{b''}=r, \cdots\cdots$

$\therefore\quad a=br,\quad a'=b'r,\quad a''=b''r, \cdots\cdots$

$\therefore\quad a+a'+a''+\cdots\cdots=(b+b'+b''+\cdots\cdots)r$

$$\therefore\quad \frac{a+a'+a''+\cdots\cdots}{b+b'+b''+\cdots\cdots}=r=\frac{a}{b}$$

$$\therefore\quad \frac{A+A'+A''+\cdots\cdots}{B+B'+B''+\cdots\cdots}=\frac{A}{B}$$

系 A, A', B, B' ガ同種類ノ量ニシテ且ツ $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B}$ ナルトキハ $\frac{A\sim A'}{B\sim B'}=\frac{A}{B}$ ナリ.

142. 定義 幾ツカノ比ノ相乘積(卽チ前項ノ數値ノ積ヲ前項トシ後項ノ數値ノ積ヲ後項トスル比)ヲ此等ノ比ノ**複比**又ハ**相乘比**トイフ.

例ヘバ $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}$ ハ $\frac{A}{B}$ 及 $\frac{C}{D}$ ノ複比ナリ.

143. 定理 同種類ノ若干ノ量アルトキ第一ノ量ト第二ノ量トノ比,第二ノ量ト第三ノ量トノ比,……ノ複比ハ最初ノ量ト最後ノ量トノ比ニ等シ.

題意 例ヘバ同種類ノ四ツノ量 A, B, C, D アレバ $\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A}{D}$ ナルベシ.

證明 A, B, C, D ヲ共通ノ單位Uニテ測リテ得ル數ヲ夫々 a, b, c, d トスレバ

$$\frac{A}{B}=\frac{a}{b},\quad \frac{B}{C}=\frac{b}{c},\quad \frac{C}{D}=\frac{c}{d} \qquad (134\text{節})$$

然ルニ $\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{d}$

$$\therefore\quad \frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}\cdot\frac{C}{D}=\frac{a}{d}$$

$$=\frac{A}{D} \qquad (134\text{節})$$

144. 反比 一つの量Aの他の量Bに對する反比トハBノAニ對スル比ノコトナリ.

反比ニ對シテ只ノ比ヲ**正比**トイフコトアリ.

145. 定理 二ツノ量ノ正比ト反比トノ相乘積ハ1ニ等シ.

題意 $\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{A}=1$ ナルベシ.

證明 $\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{A}=\frac{A}{A}$ (143節)

$=1$

系 二量ノ反比ハ其正比ノ逆數ニ等シ.

問題202. 二ツノ比 $\frac{A}{B}$ 及 $\frac{C}{D}$ ノ複比ガ1ニ等シケレバA,Bノ比ハC,Dノ反比ニ等シ.

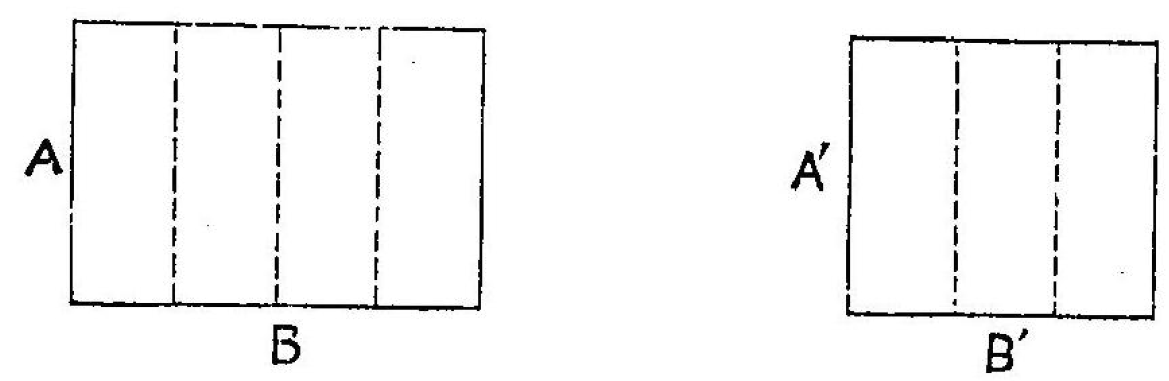
比例線

146. 定理 高サガ相等シキ二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ其底邊ノ比ニ等シ.

題意 高サガA, A′,底邊ガ夫々B, B′ナル二ツノ矩形ニ於テ $A=A'$ ナレバ $\frac{A.B}{A'.B'}=\frac{B}{B'}$ ナルベシ.

證明 先ヅBトB′トガ公度ヲ有ストシ例ヘバBハ其公度ノ四倍,B′ハ其公度ノ三倍ナリトスレバ

$$\frac{B}{B'}=\frac{4}{3}$$

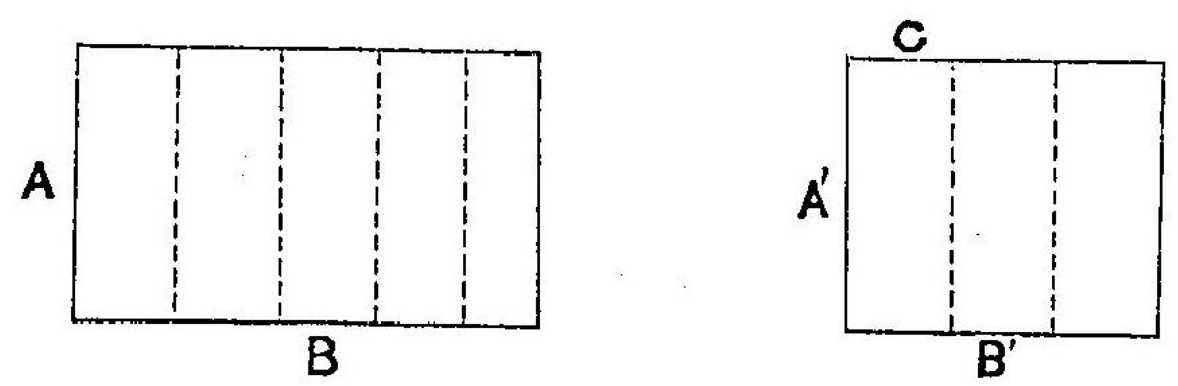


今Bヲ四等分シB′ヲ三等分シ各分點ヲ通リ底邊ニ垂線ヲ引ケバ第一ノ矩形ハ四等分セラレ,第二ノ矩形ハ三等分セラレ且ツ其各部分ハ相等シ.

$$\therefore \quad \frac{A.B}{A'.B'}=\frac{4}{3}$$

∴ $$\frac{A.B}{A'.B'}=\frac{B}{B'}$$

次ニBトB'トガ公度ヲ有セズトシ,例ヘバB'ヲn等分シ其各部分ヲCトスレバBハCヲ丁度整數倍含マザルヲ以テBノ一端ヨリ順ニCニ等シキ分ヲ取レバ遂ニハCヨリ小サキ殘リヲ得ベシ. 今其Cニ等シキ部分ガmダケアリトスレバ



$$mC<B<(m+1)C$$

$$\frac{mC}{nC}<\frac{B}{B'}<\frac{(m+1)C}{nC}$$

即チ $$\frac{m}{n}<\frac{B}{B'}<\frac{m+1}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今B及B'ノ各分點ヲ通リ底邊ニ垂線ヲ引ケバ第二ノ矩形ハn等分セラル,其一部分ヲUトスレバ第一ノ矩形ハUノm倍ヨリハ大キク,$m+1$倍ヨリハ小サシ.

即チ $$mU<A.B<(m+1)U$$

∴ $$\frac{mU}{nU}<\frac{A.B}{A'.B'}<\frac{(m+1)U}{nU}$$

$$\frac{m}{n}<\frac{A.B}{A'.B'}<\frac{m+1}{n} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)及(2)ニヨリテnヲ如何ナル數トスルモ面積ノ比$\frac{A.B}{A'.B'}$ト底邊ノ比$\frac{B}{B'}$トハ常ニ同ジ二數$\frac{m}{n}$ト$\frac{m+1}{n}$トノ間ニ在ルコトヲ知ル.

サテ$\frac{A.B}{A'.B'}$ト$\frac{B}{B'}$トガ相等シカラズシテ,例ヘバ$\frac{A.B}{A'.B'}<\frac{B}{B'}$ナリトシ,其差ヲ$d$トスレバ

$$\frac{m}{n}<\frac{A.B}{A'.B'}<\frac{B}{B'}<\frac{m+1}{n}$$

故ニ此式ノ兩端ニアル二數ノ差$\frac{1}{n}$ハ中央ニアル二數ノ差dヨリ大ナラザルベカラズ,然ルニ$\frac{1}{n}$ハnヲ十分大キクスレバ如何程ニテモ小サク,因テdヨリモ小サクスルコトヲ得,コレ不合理ナリ.

故ニ$\frac{A.B}{A'.B'}$ハ$\frac{B}{B'}$ヨリ小ナラズ

同理ニテ$\frac{A.B}{A'.B'}$ハ$\frac{B}{B'}$ヨリ大ナラズ.

故ニ $$\frac{A.B}{A'.B'}=\frac{B}{B'}$$

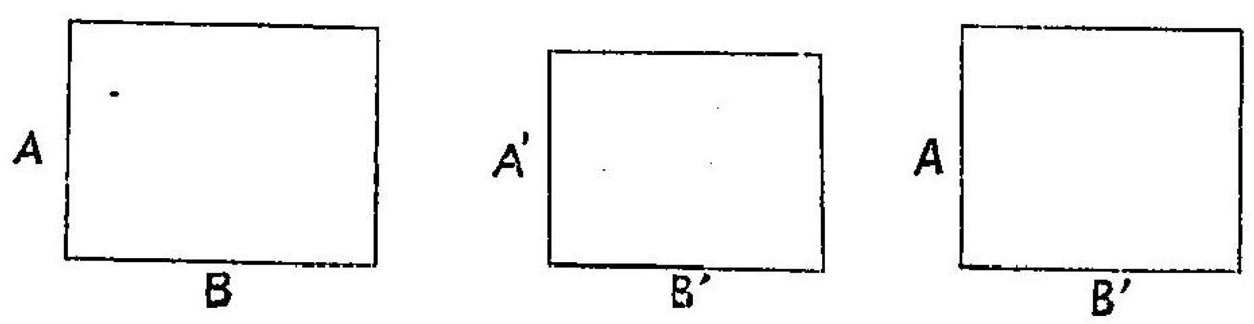
系 1. 底邊ガ相等シキ二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ其高サノ比ニ等シ.

系 2. 高サ(又ハ底邊)ガ相等シキ二ツノ三角形或ハ平行四邊形ノ面積ノ比ハ其底邊(又ハ高サ)ノ比ニ等シ.

147. 定理 二ツノ矩形ノ面積ノ比ハ其底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シ.

題意 二ツノ矩形ノ底邊ヲB, B′,高サヲ夫々A, A′トスレバ $\frac{A.B}{A'.B'}=\frac{A}{A'}\times\frac{B}{B'}$ ナルベシ.

證明 今高サガAニ等シク底邊ガB′ニ等シキ第三ノ矩形ヲ取レバ



$$\frac{A.B}{A.B'}=\frac{B}{B'} \qquad \text{(前節)}$$

$$\frac{A.B'}{A'.B'}=\frac{A}{A'} \qquad \text{(同上系1)}$$

$$\therefore \quad \frac{A.B}{A.B'}\times\frac{A.B'}{A'.B'}=\frac{B}{B'}\times\frac{A}{A'}$$

$$\therefore \quad \frac{A.B}{A'.B'}=\frac{A}{A'}\times\frac{B}{B'} \qquad \text{(143節)}$$

系 1. 矩形ノ面積ヲ表ス數ハ底邊及高サヲ表ス數ノ相乘積ニ等シ.

如何ニモ,本定理ニ於テA′及B′ヲ何レモ長サノ單位ニ等シク取レバA′.B′ハ面積ノ單位トナル(61節) 從テ $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$ ハ夫々矩形ノ高サ及底邊ヲ表ス數ニシテ $\frac{A.B}{A'.B'}$ ハ其矩形ノ面積ヲ表ス數トナレバナリ.

注意 第62節ニ示セル證明ハ矩形ノ二邊ヲ表ス數ガ整數又ハ分數ナル場合ニ限レルモノニシテ無理數ナル場合ニハ當テ嵌ラズ,サレバ此系ノ證明ハ邊ノ長サヲ表ス數ノ種類ニ拘ラズ眞ナルモノニシテ卽チ矩形ノ面積ヲ表ス數ヲ求ムル完全ナル證明ナリ.

系 2. 二ツノ有限直線ノ平方ノ比ハ其有限直線ノ比ノ二乘ニ等シ.

卽チ二ツノ有限直線ヲA, Bトスレバ $\frac{A^2}{B^2}=\left(\frac{A}{B}\right)^2$ ナルベシ.

系 3. 二ツノ三角形又ハ平行四邊形

ノ面積ノ比ハ其底邊ノ比ト高サノ比トノ複比ニ等シ.

問題203. △ABC内ニ一點Oヲ取リAOノ延長トBCトノ交點ヲDトスレバ $\frac{\triangle AOB}{\triangle AOC}=\frac{BD}{CD}$ ナリ.

148. 定義 有限直線ABノ上ニ任意ノ一點Cヲ取レバ點Cハ此有限直線ABヲ二ツノ分ニ**内分**シタリトイヒ,Cヲ**内分**點トイフ.

有限直線ABノ延長ノ上ニ任意ノ一點Cヲ取レバ點Cハ此有限直線ABヲ二ツノ分ニ**外分**シタリトイヒ,Cヲ**外分**點トイフ.

何レノ場合ニ於テモ**分**點Cヨリ有限直線ABノ兩端ニ至ル二ツノ有限直線CA及CBヲ其**分**トイフ.

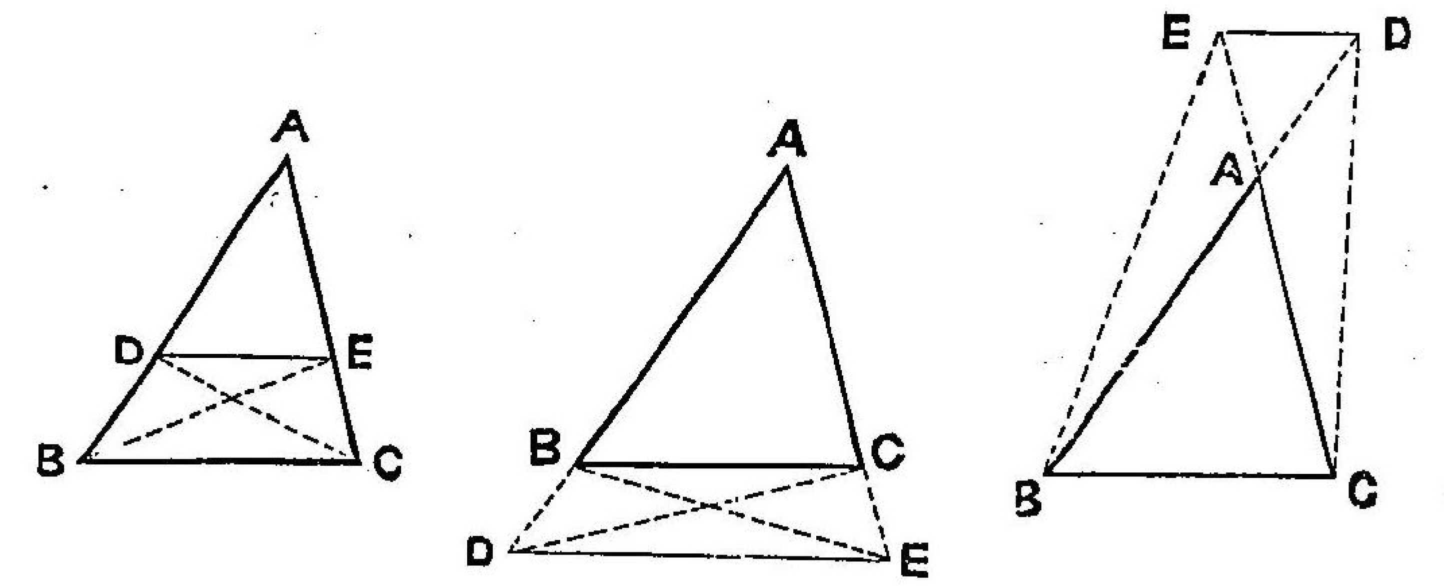
注意 内分ノ場合ニハ與ヘラレタル有限直線ハ二ツノ分ノ和ニ等シク,外分ノ場合ニハ其差ニ等シ.

149. 定義 有限直線AB又ハ其延長ノ上ニ一點ヲ取リタルトキ $\frac{CA}{CB}$ ガ與ヘラレタル比 $\frac{H}{K}$ ニ等シケレバ此有限直線ABハ**其比に分たれたり**トイフ.

150. 定理 三角形ノ邊ニ平行ナル直線ハ他ノ二邊ヲ相等シキ比ニ内分若クハ外分ス.

題意 △ABCノ一邊BCニ平行ナル直線ガ他ノ二邊AB,AC又ハ其延長ト交ル點ヲ夫々D,Eトスレバ $\frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$ ナルベシ.

(甲圖)　(乙圖)　(丙圖)



證明 BE及CDヲ結ビ付クレバ

$$\frac{\triangle DAE}{\triangle DBE}=\frac{DA}{DB}$$ (**146節系2**)

$$\frac{\triangle EAD}{\triangle ECD}=\frac{EA}{EC}$$ (**同上**)

然ルニ $\triangle DBE=\triangle ECD$ (**65節系3**)

$$\therefore\ \frac{\triangle DAE}{\triangle DBE}=\frac{\triangle EAD}{\triangle ECD}$$

$$\therefore\ \frac{DA}{DB}=\frac{EA}{EC}$$

系 △ABCノ一邊BCニ平行ナル直線