

萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

中國算學之特色

三上義夫著

林科棠譯

商務印書館發行





中國算學之特色

三上義夫著
林科棠譯

國學小叢書

編主五第王

庫

種千一集一第

色特之學算國中

著夫義上三

譯棠科林

路山寶海上
館書印務商 者刷印兼行發

埠各及海上
館書印務商 所行發

版初月十年八十國民華中

究必印翻權作著有書此

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

SOME SPECIAL FEATURES OF CHINESE
MATHEMATICS

By
MIKAMI
Translated by
LIN KE TANG
THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1929
All Rights Reserved

中國算學之特色

目次

一 緒論·····	一
二 中國算學上之時代區分·····	三
三 中國算學者與算學之進步·····	六
四 中國之古算書·····	十
五 古算書之著作年代·····	十四
六 古算書之內容——九章算術·····	二十三
七 古算書之內容——九章以外之書·····	三十
八 圓之算法·····	三十五
九 九九歌訣·····	三十九

十	算器算籌·····	四十三
十一	算籌排列法之變遷·····	四十七
十二	算器(續) 數術記遺·····	五十三
十三	宋元之算學·····	六十
十四	算籌與中國之代數學·····	六十四
十五	大衍求一術及招差與曆術·····	六十九
十六	律度量衡各種分配·····	七十一
十七	清代之算學·····	七十七
十八	中國算學之價值·····	八十一

中國算學之特色

第一章 緒論

中國之算學，其發達已有二三千年之歷史。以算學之發達，包含於如此之大文明中而有如此久長之歷史，世界諸國未嘗有也。就此點言之，印度或可與中國比較；然其他各國之算學史，在希臘則自紀元前六世紀至紀元後四世紀，不過有一千年之期；阿剌伯則僅限於自八世紀至十二世紀；日本之算學發達，係在德川時代；歐洲現在諸國，亦自十世紀時始有算學之歷史。然則中國之算學史，其有長期之發展，不能不謂爲世界中稀有之例也。此點中國與印度相同，所謂中國，所謂印度，於算學均有可觀，自不待言。然有如此久長之歷史，其造詣則不十分豐富。印度今姑舍而不論；中國之算書，其失傳不存者極多，因之，創發之妙術，亡失者亦不少，今日欲窺其全豹，則頗覺困難。故中國之算學，其實質不能謂爲貧弱，而就現所知者而言，亦不能謂爲豐富。雖然，有二千年或三千年歷史

之中國算學，爲何等形式而暗然無光，甚至不留其片影乎？原來算學之發達，泛言之，非僅舍舊法而新是謀，得所謂新陳代謝之進步，實則於古法上得新法，次第集積其智識而後得有發達。故傳統之繼承，若無阻礙，至少主要之部分必能留傳於後世。惟中國之算學，其傳統不能順調斷承，因之屢失其傳。如劉宋何承天之調日法，祖沖之之綴術，僅有零碎之記載，究爲如何之算法，惟有屬之推定而已。又宋末元初發達之天元術，明代已失其理解，及清初與西洋之算學比較，始再明瞭其意義。蓋中國之歷史，雖有長期之年月，然其間治亂興廢，不能一定。算學殆亦與政治相同，時而興隆，時而衰亡，其間傳統或多中絕也。然以現存之算書及由其他片斷的史料所傳者觀之，則於量雖極少，而於質則不能謂爲不足。一觀中國算學之大體，或至中國發達之算學，其主要者，至少亦能知其大半也。夫中國算學，成自何人，如何發達，此等微妙之處，殆難輕下論斷，然主要部分之大體，恐不能悉數用何等之形式留於記錄。是則由此等材料所得之算法，必不甚多。此蓋明告吾儕：中國算學，由其長期歷史之比例言之，則不能謂爲十分發達也。然則所謂中國人是否乏算學能力之疑問，豈無因而起哉？惟此問題，若未充分研究，實不能有所論斷。至於中國算學究爲如何，如何人以如何態度修學之，今

後向如何方向進行等問題，吾人實有考察之之必要。

鄙意如此云云，故以中國算學之實質不甚豐富，即謂中國之算學受外來之影響，實有所不能。蓋闡明中國之算學有何等特色，乃算學史研究上最重要之點。予之所研究者，即在斯焉。

第二章 中國算學之時代區分

中國古算書，現存者甚少。唐代所云古算書，不過十部，如近代刊行稱爲算經十書者即是。此外無遺留者。十書大概爲前漢末或後漢初至唐代之著作，大體上可以代表漢唐時代之算學。然算經十書之著作之前，亦不能謂算學不發達。以前之算學，雖無算書傳世，而其發達之狀態，尙不能謂爲不可知。如根據斷片史料之散見於各書者，其發達之狀態，不難想像得之。故古代算學發達之順序，今雖不能明瞭，然根據現存之材料，便宜上可以算經十書以前之時代爲第一期，則十書成立之時期，即屬第二期。此種區分，原屬不得已而爲之，蓋全爲人爲的假定，無精密之歷史的意味也。唐初十世中最後之一部出世以後，通唐代長期間，即無著述傳於後世。及宋末元初，始有幾許算書出而問

世，且傳之於現代，又唐宋長期間之算學發達，雖有一二事實不得宜明白，然此期中亦無甚大變化。及宋元之際，算學發達上，乃發生一大變化，構成前代未聞之新算學。若干人物與宋元新算學組織有關係者，其姓名可屈指而數，而其著書之傳於現在者，不過數人，如宋之秦九韶、楊輝、元之李冶、郭守敬、朱世傑等即是。彼等之算書，其著作年代，乃自紀元一二四七年至一三〇三年，即僅有五十七年之成績。元代以後，雖有一二算書，然云其主要者，則不外上述數種。在此極短期間，中國算學，別開新面最爲發達，乃一極顯著之現象也。蓋當時與西域交涉甚多，諸般事物，受西域影響者實不少，故算學之發達，與阿剌伯有多大關係，亦不難推知。然此時發達之算學，其實質如何，不能明確，因之其影響之程度如何，亦不能決定。據予所見，中國算學與阿剌伯之算學異趣，其影響如何，實爲一問題也。

宋元之際，算學頗發達，歷學上亦作有授時曆，其後算學與曆學均衰敗不振。明代曆術，僅根據授時曆作大統曆，而不能有改曆頒發，此或限於算學之實力之故。明代之算書，亦有以年代不遠而得傳於現代者，然不足觀者頗多。唐順之顧應祥等，乃明代算家中錚錚者，其著作在明代算書中，實

稱佳作，然不能完全傳授宋元之算學，甚至湮滅其真意義。蓋明代全爲算學衰退之時代，恐不能爲之特立一時期也。

中國算學發達之第四期，卽自明末以來繼續至現代爲止；至清末以來，則視爲形成第五期，亦無不可。如考察此期，則中國算學已採用西洋算學之研究法，步入世界一般之算學的生活中矣。中國算學者，在此期內，其態度比之前代，已大有變化；惟此時代爲日甚淺，猶在其過程中，故不能多論。

第五期之直前，卽在明末清初之第四期，乃古來算學受西洋之影響而復與西洋對立之時代；細別之亦得分爲數時期：初以西洋之曆算輸入而翻譯之；次則古來算學之探究，亦孳孳不倦。其後西洋算學之傳來，一旦中絕；關於古算書與西洋譯本之研究與解釋，一時盛行，亦有幾許可認爲創意者，出示於世。及十九世紀之中葉，西洋之微積分學者，翻譯已成，更進一步而研究之者，亦有之。斯時學者輩出，著作頗多，比之前代，其局面之新開，自不待言也。

中國算學之發達，大體上如上所述，然其間興隆衰亡，交互發現，則爲顯著之事矣。往古不可考矣，惟唐初則爲整頓算學之時代，惜自其後至宋，則與之相反，多無可觀者。宋之中葉，有沈括衛朴等

出，算學始稍稍進步，惜一旦衰沈，竟無後繼。及宋元交接之時代，算學大興，中國算學上之黃金時代，乃於此時出現焉。蓋斯時爲與西域有交涉之時，而後來清朝之算學，亦得西洋之曆算而始興隆；又以前古算書之著作時代，佛教已傳入中土，印度或西域之文化，已盛行輸入。由此言之，是算學之發達，僅在與外國關係交通之繁盛之時代。故中國之算學，古時卽以西域之關係而構成，不僅宋元之際爲然也。某論者疑外來之關係，不能成立中國算學之大部分。此說亦有相當理由，不能一概抹殺。予之所承認者，或其某部分傳得西方之知識歟？雖然，中國之算學，欲斷爲悉受外來之影響，亦不易；蓋中國之算學，其固有之色彩，固甚濃厚也。予之所欲論者，乃指摘其特色，明其歷史上之進步耳。

第三章 中國算學者與算學之進步

中國之算學家，非僅僅研究算學，同時又爲曆學家，且往往爲高官顯者。如漢之張蒼及耿壽昌，皆爲算學史上之要人；張蒼則精律曆，而又長財政，十五年間居相位；耿壽昌則精於月行之研究，而又長於經濟，立常平倉，爲大司農中丞。

漢書藝文志，有許商算術二十六卷，而許商則四至九卿，著五行論曆，有功於塞河。

前漢末之劉歆，曾試作圓周率之推定，然又作三統曆，受詔校祕書，研究數術方技。

後漢之張衡（七八——一三九）爲有功算學之人，然又通天文陰陽曆算，善機巧；其所作之地動儀及激水而轉之渾天儀，甚有名。云其履歷，則爲河間相，又拜尙書。

劉宋之祖沖之（四二九——五〇〇），算學功績甚偉大，然又爲曆術大家，造自動船自動器械，研究指南車，爲有發明才之人；且著安邊論，說屯田農殖，注易老莊論語等書。

唐初之王孝通，有算學著作而又爲曆官。李淳風爲太史令，曆術大家，精於天文星占。僧一行（六八三——七二七）爲知名之高僧，以造大衍曆有名，善算學。

宋末元初算學勃興時，有秦九韶，其傳記不見於宋史，然據癸辛雜識及其著書之序文觀之，知其少學於太史，是雖算學家，亦必以曆爲主。

與秦九韶同時之元李冶，初爲金進士，供職知州；州城陷後淪落民間；後受元世祖召，論時弊，爲翰林學士。

秦李二人之前，有宋之沈括（十一世紀後半）其所著夢溪筆談中，有記算學者，在其時代，甚足珍貴。然據是書觀之，知括博學多識；據宋史，則括誠多藝多能，殆可謂中國算學者之模範的人物也。括進士出身，善文章，亦爲土木技師，及太史令。其爲太史令時，登用達算術，能改曆，製刻漏新制。其爲地方官，頗有治績，精戰術，爲築城術大家，且能實際築城。又括手腕力甚強，堪爲武將，善能鼓舞士氣；又長於音樂，自作曲，明醫藥。曾出使外國，往返時察其地理，作立體之模型圖。蓋括爲如此人物，而又兼學算學者也。

中國之算學者，如沈括之多藝多能，殆不多觀，然中國之算學者，概非僅以算學爲唯一能事，據其傳記觀之，多爲官吏、曆術家、經學家，非如此人物，則傳記不載。蓋惟如此人物始習算學，否則必不知加以研究也。

日本之算學者，實無堪與沈括相較之人物。中根元圭，醫家出身，富於思考，精音樂度量，以曆術見知將軍吉宗，然無沈括之經世才。本多利明（一八二〇年歿，年七十七），精航海術，長於經世才，然不能如沈括之多藝多能。若欲於他國求可敵比沈括之算學者，則德國之來本之（Leibniz）及

法國革命時之卡羅 (Lazare Carnot) 在某點或可與沈括比較，然如一面遠勝沈括，同時又多藝多能，則不能如沈括也。惟希臘之 Archytas 其閱歷等，最可與沈括相比。蓋如沈括之人物，全世界算學史上多無之，惟中國產此人而已。予以沈括爲中國算學者之模範的人物或理想的人物，誠克當也。

中國之算學者，不見載於傳記者，亦有若干人：如三國時魏之劉徽，六朝時之張邱建及夏侯陽，年代不詳之孫子，宋末之楊輝皆是。彼等或爲算學專門，或有無地位皆不明瞭。如元之朱世傑，據其算書序文觀之，云周遊四方而爲教授，其殆算學專門家歟？就宋元之算書考之，則與曆有關之算學者與專門算學家，其間，不無多少相異之痕迹。故欲斷謂中國無算學專門家，僅有兼治算學之人，恐亦有所不能也。然事實上，算學者多非僅以算學爲職業，而有朱世傑等爲算學專門家，洵可異哉！

中國之算學，歷史甚長，且生於偉大文明系統中，然不能比較的豐富發達者，其主因蓋在中國算學家，多不以算學爲專業，此種意見，或亦非過言。然因何而至斯乎？其理由更有考究之之必要，今姑省之。

就如右判斷，則中國之算學，或宜與希臘算學發達一比較。希臘亦無專業算學者，與中國同。蓋希臘之算學者，皆爲哲學者；而哲學者無不兼治算學。因爲哲學者，故多長於文章。蓋希臘算學者之文章甚美，其中選爲希臘文學之模範而亦無所愧者，亦有之。而希臘之算學，實爲天才的，他國亦不能如其偉大。

第四章 中國之古算書

中國之古算書，屬於漢唐時代者，僅有十部，以算經十書之名刊行於世，卽周髀算經、九章算術、孫子算經、五曹算經、海島算經、夏侯陽算經、張邱建算經、五經算術、數術記遺、緝古算經等。漢唐時代所著之書，因非限於十書；據歷代正史之藝文志或經籍志觀之，尚有若干算書存在，惟均失其傳，今所存者，不過此十書而已。夫欲以此十部之算書，窺漢唐時代之算學，自屬不甚滿足。然在某意味上，必疑及此十部是否爲代表的著作；蓋作此種思想，於討論上極有便利也。

所謂便利者，非他，卽上述十書，爲唐時選舉中明算科之用書，在當時可視爲代表的著作是也。

明算科之用書固非僅此十部，然其他算書亦不過綴術與三等數而已。是明算科之用書，不外此十二部耳。十二部之中，其現存者，惟有十部，其他算書悉失其傳。蓋十部所以能傳存者，其原因即在於爲明算科之用書，而唐之明算科之用書，宋亦用之，因此乃得傳於今日焉。

如斯言之，現在之算經十書，是唐明算科用書十二部之十部。既爲明算科之用書，在當時，自可視爲代表的著作，且其在唐初定爲明算科之用書，視爲代表唐初之算學，亦無不可。如十二部完全存在，固屬美事，然十二部猶存十部，則當時之算學，究爲如何，大體上亦足以想見矣。

十二部中所失之二部，究爲如何之書，此吾人所欲知之者。其一名三等數者，據云爲董泉作，由其書名觀之，雖分二三種解釋，大概其中所論者，爲整數性質；或爲不定解析術，亦未可知。使所料非謬，則失一甚足珍貴之書矣。其他一書爲綴術，不知中記何事。據隋書律曆志，祖沖之之綴術，爲算定圓周率者，其文云：

「指要精密，算氏之最者也。所著之書，名爲綴術，學官莫能究其深奧，是故廢而不理……」

是綴術爲一甚美之算書，乃失而不傳，誠可惜哉！幸隋書記其事，雖極簡單，然亦足資參照矣。惟

隋書記事，明云綴術爲圓周率之算定，而後世學者，無論中國日本，多不以綴術爲算定圓周率之算法，亦不以爲記其法之算書，實一疑問也。

所謂綴術之名稱，在唐代與祖沖之之著作，當時尙無何等端緒，及宋乃有二說：一爲沈括之夢溪筆談，一爲秦九韶之數書九章。兩書均以曆術事項，記所謂綴術之名稱。沈括既言其曆術關係，又言祖亘有綴術二卷。祖亘者，卽祖沖之之子祖暅之，或有以暅之爲暅者。父子共有綴術之書，則據沈括記事言之，祖暅之之綴術，殆爲曆書。如使所料非謬，則祖沖之之綴術，或亦爲曆書。蓋曆術書中記算學之事，殆屬當然之事，不足怪也。

予以綴術視爲曆書者，卽在上述之理由，然另有一理由在。明算科用書之十二部中，如周髀算經爲曆書，五經算術中，亦記與曆有關之事。周髀持蓋天說，與渾天說。長相抗爭，惟在曆家間，則渾天說較蓋天說爲有勢力。但周髀雖爲曆書，而在唐代言之，則失之過略。故如採用此書，則必需他種稍優之曆術書。綴術既爲曆書，以補周髀之缺，實甚適切。著者祖沖之既爲曆術大家，則其著曆術書之綴術，實至適當也。

根據如斯理由言之，則綴術或爲曆術書，記載曆術上使用之種種算法。據南史七十二傳觀之，綴術造有數十篇，是必大部之書。又唐之明算科，對於用書十二部各各規定學習年限，如一觀之，則吾人亦必以爲大部之書。唐書選舉志云：

「孫子、五曹共限一歲；九章、海島共三歲；張邱建、夏侯陽共一歲；周髀、五經算術共一歲；綴術四歲；緝古三歲；記遺三等數皆兼習之。」

諸書中綴術四歲，年限最長。在現存十部中，九章算術爲最重要，又最大部，故加以海島算經，共學習三年。至緝古算經，現存本雖爲短篇，然甚難，宜學習三年。獨有綴術，須學習四年。現存諸書中最大部之九章算術，成自九卷；綴術既云有數十篇，則其爲大部而又甚難，殆可知矣。

明算科用書十二部，可分爲二通觀之，卽記遺與三等數，無年限之規定，僅兼習之。選舉志又云：「試之日，九章三條，海島等七部各一條，十通六；記遺三等數帖讀十得九爲第。綴術七條，緝古三條十通六；記遺三等數帖讀十得九爲第。落經者，雖通六不第。」

唐六典於綴術七條，則云六條；於緝古四條，則以爲三條。據此觀之，記遺與三等數，與用他十書

之意味，稍稍不同。此姑不論，即在其他十書，綴術、緝古二書與他八書，試驗時亦分爲二起辦理，蓋以綴術、緝古二書，爲較高等也。是則綴術爲最重要之算書，不難想像而知；而除此書外，僅由現存十部，或難窺唐初算學之全豹。然祖沖之之子暉之所使用之算法，其一部分見於九章注；如一觀之，對於綴術，亦得多少之推測。故綴術之書雖失，而唐初之算學究爲如何，大體上亦能考察也。

第五章 古算書之著作年代

唐明算科所使用之算書十二部，其在唐初已有之，明甚，然其著作年代，有明瞭者，亦有不明瞭者。十二部中其最新者，爲緝古算經，唐初王孝通作，卷首有上天子表，惟不記年歲。其表文云：

「臣今更作新術，於此附伸。臣長自閭閻，少小習算，鑄磨愚鈍，迄將皓首；鑽尋祕奧，曲盡無遺，代伏知音，終成寡和。伏蒙聖朝收拾，用臣爲太史令；比年以來，奉勅校勘傅仁均曆……」

觀此，緝古算經，殆著者老後之作。蓋王孝通之校傅仁均、戊寅曆，在武德九年，其著緝古算經，自必在武德之後，或即太宗貞觀中事也。王孝通於其上表中，述前代諸算家不備之點，且言費苦心之

結果始能作此書，云：

「臣晝思夜想，臨書浩歎，恐一旦瞑目，將來莫觀；遂於平地之餘，續狹斜之法，凡二十術，名曰緝古。請訪能算之人，考論得失；如有排其一字，臣欲謝以千金……」

觀此，是王孝通以本書之算法爲自己創意，且確信之者。卽吾人認其算法，爲王孝通所創，亦無不可。蓋其注解，亦王孝通自作也。

綴術爲祖沖之所作。沖之雖沒於南齊永元二年（五〇〇），然其著作，或在劉宋時代。隋書律曆志記圓周率云：

「宋末南徐州從事祖沖之，更開密法……所著之書，名爲綴術。」

是綴術正可視爲宋末之作而齊，高帝之廢宋主自立在西曆四七九年則綴術之作必在，四七九年以前也。

祖沖之子暉之有作綴術二卷。王孝通上緝古算經表云：

「祖暉之之綴術，時人稱精妙。」

蓋作於父冲之之後也。據暉之之曆術司蹟觀之，綴術之作，在梁天監中，當於西曆五〇三年至五一〇年。

五經算術，北周甄鸞撰。數術記遺，漢徐岳撰，有甄鸞注本，又有甄鸞重述之本。其徐岳本文極短，甄鸞托徐岳名而偽造者。徐岳爲漢末人，其學得自乾象曆作者劉洪。書中有「刹那」等語，可見佛教傳入之關係，其甄鸞重述本，且明引用佛典。據佛祖歷代通載，甄鸞爲擁護佛教盡力之人。北周年代，在西曆五五七年至五八一年，則甄鸞重述本，殆爲此期間之作。或有以數術記遺爲偽書者，然卽爲偽書，爲稍後之作，終不失中國算學史上好資料也。

夏侯陽算經序又云：

「五曹孫子，述作滋多，甄鸞劉徽，爲之詳釋。」

其上卷言解法不同云：

「……至宋元嘉二年，徐受重鑄，用二尺三寸九分；至大同元年甄鸞校之，用二尺九寸二分。然異時事變，斗斛不同。」

由此言之，是夏侯陽算經，必後於五曹算經及孫子算經，且後於劉徽及甄鸞，至少或與甄鸞同時；其云大同元年，則其作於斯年以後，亦必無疑矣。

張邱建算經有署名清河張邱建之序文，中有云：

「其夏侯陽之方倉，孫子之蕩杯，此等之術，皆未得其妙，故更造新術，推盡其理，附之於此。」

是又在孫子夏侯陽之後也。若夏侯陽與甄鸞同時或較後，則張邱建算經，必爲甄鸞以後之作。然是書有署爲甄鸞注經者，是甄鸞加以注解也。由此言之，夏侯陽張邱建與甄鸞爲同時代之人，其三人前後如何，或無關於著作之年代也。總之，此書尙有多少可疑者，然無論如何，視爲西曆六世紀中葉之作，或無不可也。

五曹算經及孫子算經在夏侯陽算經以前，觀於夏侯陽之序文即明。又其序文中有云：「五曹孫子，述作滋多，甄鸞劉徽爲之詳釋。」如信其說，以爲有甄鸞劉徽之注，則除甄鸞存而不論外，而劉徽爲三國時魏人，於三國末注九章算術，五曹孫子兩書，亦可視爲三國末已有之矣。兩書事蹟，所知者僅此，其他無所聞焉。

五曹算經，或亦爲古書，然其算法，多無可觀者，不能如古算書富於價值。孫子算經，有視爲卽作兵書之孫子所作，蓋以爲先秦之古書也。抱此見解者，始於清之朱彝尊，輒近往往亦有主張之者。清阮元（一七六四——一八四九）著疇人傳（一七九九）卷一云：

『朱竹垞以孫子算經爲孫武作；戴東原以長安洛陽相去，及佛書二十九章語，斷爲漢明帝以後人。余攷韋曜博奕論，枯基三事注，引邯鄲淳藝經，謂：「碁局十七道，而孫子乃云。碁局十九道，」則其人當更在漢以後矣。』

其言誠足以博吾人之首肯也。然其中有後添加者，亦未可知，故有視爲古而又別持他說者。然孫子之名，不見漢書藝文志，或漢代無此書也。

周髀算經，始於周公與商高之問答，更附加以後人之問答。如周公之問答爲實話，亦一頗古之書也。然此書不見於藝文志，疑漢代亦無此書。飯島忠夫氏支那古代史論有云：「所謂周髀之稱，屢現於蓋天與渾天爭論中，或作於前漢末至後漢初之時。」此言，吾人當亦與以首肯也。

九章算術，爲中國古算書中最切要者，又甚古者。普通以此書爲六藝之一，信爲周公時之書。遠

藤利貞之日本數學史（一九一八年刊）云：

「九章有二：一名黃帝九章，一名周公九章。黃帝九章，乃中國上古所傳之算法，有熊氏命隸首作者。周公九章，乃周公旦撰定，爲六藝之一，用以教於國子，卽九數是也。」

然實際上，此書不能認爲有如斯之古。漢書藝文志既不載，前漢時代恐亦無此書。現在之九章算術，有魏劉徽注，唐李淳風注解。魏劉徽，西洋人以爲後魏之人，實則非後魏，乃三國之魏也。劉徽注之序，未紀年月；晉書律曆志云：

「魏陳留王景元四年，劉徽注九章。」

可知徽爲三國末之人，卽當於西曆二六三年。是書現雖有之，然亦宜再溯若干年數而考察之。劉徽注之序，言「徽幼習九章」，是劉徽幼時已有此書。再上溯之，則後漢末之鄭玄，漢序列傳中，云其通九章算術。又觀周禮注疏，其言六藝時所記之術名，與現存九章算術之章名略略一致。是鄭玄時已有其書可知矣。

劉徽序文云：

「按：周公制禮而有九數；九數之流，則九章是矣。往者暴秦焚書，經術散壞。自時厥後，漢北平侯張蒼，大司農中丞耿壽昌，皆以善算命世。蒼等因舊文之遺殘，各稱刪補，故校其目，則與古或異，而所論者，多近語也。」

則九章算術之由來，亦得推測矣。此事可分三步論之：第一步，六藝中之數解爲九數之意，以九數與九章同視，而斷定九章爲六藝之一；鄭玄殆亦抱此見解。然此但逞連想，其根據何在，實不明瞭也。

第二步，以爲古九章遭秦火之害，張蒼及耿壽昌等求舊文之遺殘而添削之者。夫算學書亦受秦火之害，實一疑問。然秦末喪亂，算學書當然亦大受打擊。惟此，可存而不論；而張蒼及耿壽昌，必爲算學有造詣之人，其喜舊來算書而研究之，自屬當然之事。故九章算術或其前身，由張蒼等手中整頓一事，不能謂全然烏有也。

第三步，如此成立之九章算術，一觀其目次，則與古來之九章之名目，有多少不同。又書中多近語，不能以劉徽時之九章，認爲古書也。此或由較諸鄭玄所說名目有多少不同而言，亦未可知。然無

論如何，由其時見之，其內容包有近代之性質。故如以爲雖爲古書而非古書本來面目，乃適當之見解也。如斯言之，則第二步所謂張耿等之刪補，殆已查出矣。雖然，如其刪補爲實際上有根據，則亦有考慮之之必要。蓋以藝文志不見九章書者，卽以爲漢代無此書，殆不免有多少勉強。據藝文志所載算書，有許商算術二十六卷及杜忠算術十六卷。然不能謂通漢一代僅有此二部書也。且藝文志不立算術部類，兩書均見於曆譜項中，此乃吾人所宜注意者。或以此兩書雖有算術之名，實則記曆術之事，故不收錄於此部類中歟？若然，則以九章算術中，纖毫不記曆術，故無列入曆譜之性質，亦未可知。由是言之，則劉徽之所說，必不能排去；而九章算術，則不得不云：其前身至少在前漢時代已有之，而由張耿等手次第整理者矣。由曆術上觀之，後漢時代比前漢時代大加精細。故算學雖依舊相同，而九章算術之大整理，則非一朝一夕所能出，至少其內容之大半，必存立於前漢時代。吾人能確實言之者：九章算術在後漢末已有之，然如以爲以前已有此書，恐亦非架空之想像也。

海島算經，魏劉徽撰，本稱重差，因開卷卽言海島測量之問題，故唐時稱海島算經。其撰述之事，見劉徽九章注之序中。蓋此書與九章之注，於觀察三國末之算學的知識上極爲重要也。

周髀算經之趙君卿注與劉徽之九章注，皆甚重要。疇人傳卷四列趙爽傳於後漢，且云：

「今本周髀算經，題云漢趙君卿注，故系於漢代云。」

雖然，算經十書中之周髀算經本，單云趙君卿注，無漢字。宋李籍之周髀算經音義云：

「君卿，趙爽字也，不詳何代人。」

此殆至當之見解也。然趙君卿序文云：

「渾天有靈憲之文，蓋天有周髀之法，累代存之，官司是掌。」

可知其注乃作於靈憲及周髀累代之後也。靈憲爲後漢張衡作。張衡永和四年（一三九）歿，是其注至少可視爲張衡歿後一二代。又趙注中有九章云云，自又在九章以後。因此，後漢末之較前，尙無斯注。此蓋趙注年代上溯之界限也。至其下推之界限，有署爲趙君卿注甄鸞重述者，是不後於北周甄鸞之時代也。宋之鮑濟之言，君卿爲晉魏間人，似得之，然亦稍縮少年代之界限矣。要之，趙注與劉徽之九章注，雖不知其孰先孰後，然亦與劉注相呼應，於古代算法有所發明者也。

上述諸算書之注，有全不傳於世者，亦有甚錯亂者。如九章注，劉徽序文用圖說明，而注中文

章，雖有圖解，然有幾處無一圖者，其中錯亂乃至殆不能讀。清李潢綿密研究九章算術之本文及注章，著九章算術細草圖說，然注中最要之部分，其說明有不穩當者，亦有全未着手者。而難解之部分，且時有更改文字，或變換而解釋之者；其李潢未着手之部分，予施以此同樣之方法，亦有居然可讀者。殆因不解意義，重複傳寫，乃至如此之不可解也。然本來有意義之文字，經多少之改竄，亦得還原於優美意義也。

古算書傳來之由來，茲姑略而不敘。

第六章 古算書之內容 九章算術

中國古算書中，其最整齊者，爲九章算術。以其著作年代較古，故先說此書之內容。然其中未說明加減乘除之算法，以此等法人多知之也。

九章算術成自九章，含問題二百四十六，分爲下列九章記之。

第一方田章，列舉矩形、二等邊三角形、梯形、圓、圓弧、環等之面積，記分類之加減乘除、通分、約分、

最大公約數之求法。劉徽注之圓之算法，古書中記載此種事者，惟此書而已。

第二粟米章，乃百分算及比例之算法；其術文云：

「術曰，以所有乘所求率爲實，以所有率爲法，實如法而一。」

此蓋比例之算法，已明解而使用之。由劉徽注觀之，則比例之算法，甚足珍貴也。

本章中最後之九問題，乃相當於不定方程式

$$x + y = 78, \quad x^2 + y^2 = 578$$

$$x + y = 2100, \quad \frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 620$$

之問題，非比例之問題也。方程爲不定時，有求整數解之一例；孫子算經及張邱建算經等之不定解析關係之問題，均爲整數術之起源。

第三衰分章，相當於後之所謂差分。據其說明，云「以御貴賤稟稅」，乃關於設差等行分配者。據所云稟稅觀之，在相當分派租稅之賦課，殆亦必要也。此章之終，有僅爲比例之問題，恐粟米章末之不定解析問題，可與之交換。粟米章之末，雖無差分之問題，然有據物件之數目與價值，分爲貴賤

二種之算法，宜入於衰分中。此蓋錯簡之一適例也。

又，其他錯簡之適例，如宋楊輝算法之朝鮮版，在某部分之上下二卷中者，換入記事，遂至全無意味。惟日本寬文元年關孝和鈔本，無此錯簡，蓋中國無此書之完本也。

第四少廣章，乃知田之面積及一邊而求他一邊之算法，以及關於開平方開立方之算法。其一問題：

今有田，廣一步半，三分步之一，四分步之一，五分步之一，六分步之一，求田一畝，問從幾何？

即表田之廣（田之橫長）者，爲

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

之分子也。然以一爲分數之和，乃埃及之風習，希臘則甚後之時代始用之。埃及無適當言語表普通之分數，故如斯之單位分數，施用甚盛；中國表分數之法，雖甚簡單，不必使用何等單位分數，然僅在少廣章有此等單位分數，殆吾人所宜注意者也。

開平方開立方之算法，其方法亦說明，然據劉徽注，則由圖形而求出其原則。開平方之算法，又

見於孫子算經、夏侯陽算經、五曹算術及張邱建算經之唐劉孝孫之算草；將各書所言者，比較而研究之，其算法之性質，即可顯然釋明。

就開立方而言，少廣章單說明其原則，未說明實地適用之處，惟張邱建算經之劉孝孫草說明之。

劉徽注中，言及張衡之球之體積，有嚴厲批評以爲劉徽附會者，然在後漢中葉之張衡，其算學上有如何學力，由此亦可窺見一斑，實不失爲貴重之史料也。

又，唐之李淳風注中，說及祖暅之之球之體積算法，原則上雖套襲張衡以來之研究方法，然亦不滿張衡劉徽之算法，而自立新法者。如所云：

「等數既密，心亦照晰。張衡放舊，貽暅於後；劉徽循故，未暇較新。夫豈難哉？抑未之思也！」

其算法成功時之得意形狀，不啻見之於眼前也。祖暅之之算法，雖不完全，然亦可視爲使用一種積分方法者；雖未說明其詳細，然所云「以析微」所云「疊棊成立積」亦足以察其一斑。棊字，清李璜以爲冪字之誤，實爲吾人所贊成。

今就球之體積言之，九章之本文及張衡之算法，劉徽已指摘其不當之處，是已進一步；祖暅之完成劉徽所謀之算法，是又更進一步。約言之，則張衡以爲

外接圓壙之積：球之體積 = 正方形之面積：圓面積。

然劉徽則改圓壙爲合蓋，以爲

合蓋之積：球之體積 = 正方形之面積：圓面積。

是卽示張衡所得之結果爲不正也。然劉徽亦不能算出合蓋之體積，惟稱「以俟能言者」，蓋希望有人完成此算法也。祖暅之研究合蓋體積之算法，使用劉徽之比例而得圓體積，其能成功，不外追得劉徽之先蹤耳。

此一事，可謂中國算學上幾何學之處理方法之最高發達；苟與希臘亞奇默德(Archimedes)之積分方法及其所言球與外接圓壙之關係，一比較研究之，亦一趣事也。

第五商功章，謂商其功，卽以「御功程積實」求城、垣、堤、溝、塹、渠等之體積，亦可視爲築造之工程。現中國於築城、河渠、治水等，早已費大努力，則中國之古算學上，合應九章中有商功章也。蓋築城

等事功，爲原因，因其必要，算學上乃有此種發達也。

本文中僅示關於體積之術文，劉徽注中有得其術之解義，欲知當時之算學的處理方法，此亦一貴重資料。蓋此種算法，乃造棊卽模型而加以考察者；其論究中，以代數言之，有相當於使用無窮級數之總和者，然亦恐不能卽認爲如斯之算法。蓋九章中，卽其他古算書之本文中，均無如斯之等比級數也。然圓之算法等，已使用之，是劉徽時已知此法，恐亦不能否認。少廣章注中，已述及球之體積，蓋爲本章之算法作豫備知識也。

第六均輸章，其名稱乃由關於租稅徵收而來，與前項商功之名稱，因根據築城等事功而得者相同；故卽用「以御遠近勞費」說明其名稱。劉徽注云：

「按此均輸，猶均運也。令戶率出車，以行道日數爲均，發粟爲輸。」

又就其問題觀之，乃粟之賦課，比例戶數出之，由道程日數而取其平均，卽決定賦課多寡之算法也。其算法由數學的意義言之，乃合用差分與比例者。

第七盈不足章，後世稱爲盈朒，其解答問題，不用普通之算法，假定與以二值，由之見出真價之

算法也。以普通言語表之，即欲解 $f(x) = 0$ 之方程式，假定 x 之值爲 x_1 及 x_2 ，而得

$$x = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}。$$

此算法，與印度之 *Regula Folsa* 相應，埃及亦行之頗古。劉徽注中，亦有關於等差級數之論究。

第八方程章，乃關於一次之聯立方程式者；正負之術語，已見於此章中，甚至大膽試用，列負算於式前。其解法，比之他國，與十八世紀法蘭西 *Bézout* 研究者相同，已大有成功。蓋聯立方程式，在希臘，雖見之於比中國稍後之丟番都 (*Diophantos*) 書中，然終不及中國之整齊；在印度，亦無相當於聯立方程式之法。故方程式之成立，乃中國算學上一大矜驕也。

劉徽注中，有方程新術，與九章本文中試用之解法不同。九章之本術，由頭位次第消去，劉徽不用此法，即豫消去在等號一方之價值，以求諸物件之連比，由此以計算之。其法中連比一項，使用甚巧。惟劉徽之新術，文章多脫誤，不易索解，幸清之戴金溪、李銳等補訂之，已得正當了解矣。

第九句股章，論關於句股弦之問題，其中已使用二次方程式。句股即以御高深廣遠，故應用於

測量，乃其本來之目的。劉徽九章序中，言作圖說明，註中亦有所謂朱方青方，是其使用圖也明甚。惟現存本中，圖形均失去矣。然由劉徽注觀之，則句股章均爲幾何學的算法，由二次方程式之問題及其方法，以得其一般解法之術文或公式。以此點言之，乃使人連想歐几里得 (Euclid) 之幾何學焉。又，其中亦有使用帶從開平方之例。其一問題中，可視爲句股弦之整數解法之萌芽者，亦見於注中。此或九章之作者所注意者。此種整數，在印度之算學上，嘗惹起深深之注意。

就句股而言，周髀算經之趙君卿注，所記載者與劉徽注頗有出入。合兩者考之，即得明瞭中國關於句股之知識。趙君卿之年代，雖不明白。然其注中有「術在九章」一語，是明爲九章著作以後之人。趙注蓋知九章之句股章而作者，然在九章之諸術中者，趙注皆總括記之。因此，九章以外別無附加者。使用帶從開平方之事，亦見於趙注中。其注中有附甄鸞之意者，其說明頗勉強，唐李淳風亦以甄注爲無理云。

第七章 古算書之內容——九章以外之書

九章算術，已稍說其內容；然是書不僅爲中國算學史上最緊要之書，即從其著作年代觀之，亦不失爲世界算書中甚貴重者。九章以外之古算書，多屬九章後之著作，與九章重複之部分亦甚多，故僅就九章所無者言之。

海島算經，魏劉徽撰。據劉之九章序，則劉注九章時，深憾九章無重差之法，故作一章以附九章之後。其算法之性質，已記於其序文中。重差者即重其差之意；其所謂差，有相似句股者，即作二組之相似句股，由此立算法者。然相似句股，亦不限於二組，使用三組四組者，亦無不可，如序文中所言三望四望即是也。據此序文，劉徽自身已加注解，然其注不傳。唐李淳風注雖在，然僅如術文敷衍之，無甚意義也。隋之唐書等目錄，有九章重差圖一卷，是亦一有圖解之書，然現今不傳。故僅據術文解釋之，不能確定其算法也。唯宋揚輝之著書中，言有海島小圖，且記載之，若其爲古來傳授者，於參考上亦有多少價值也。

要之，海島算經之算法，即使用各組之相似句股，而行測量之算法也。其處理測望之結果，及試用代數，亦一趣事，然不知是否可行代數耳。九章注中句股之算法，大概屬於幾何學，故重差亦必用

幾何學之解釋。總之，海島算經中測量之方法，較之九章之句股章，已進一步。古算書中所言之測量法，舍此外他無所見；即使用角度，依賴三角法者，亦無其痕迹焉。

劉徽雖記述右之重差之算法，然此種算法以前已有之矣。如

周官大司徒職：「夏至日中，立八尺之表，其量尺有五寸，謂之地中。註云，南戴日下，萬五千里，夫云爾者，以術推之。」

此不知使用如何之術，殆當於說重差而言。重差之名稱前已有之，能加以考察，則知重差即所以解決如此問題者；蓋於地平說之假定上，由南北二處之景差，算出日高及日下之距離也。

劉徽由此見解以解釋周禮，其當否可作別論；惟天文之算定，則於重差算法之發達，大有關係，自不待言也。

周髀算經，爲古算書中唯一之曆書，與他書稍稍異趣。若據飯島忠夫氏之說，以其爲前漢末至後漢時之著作，則比之擬爲後漢末存在之九章算術，其年代自較古。惟趙君卿注作於九章以後，又在乾象曆之後，故雖比九章之劉徽注較古，然亦不甚古，或在其後，亦未可知。雖然，趙注與劉注，均足

發明古算法，亦有可供周髀本文參照者。

周髀之本文中，雖不記開平方之算法，然陳子之說中，言日中之距離，用開平方算出，且其中亦有可施開平方之數，故周髀之著者，其能知開平方之算法，而使用之，實無疑者。

又周髀書中，亦見分數之除法。其由景表言日高及日下之距離一條，即海島算經條所述之重差法，或謂之重矩。然其使用算法之事，不見趙注亦能明瞭。趙注之重矩測量法與海島算經，均爲此種事項上有益之史料。又其法即根據地平說算定日下之距離者，蓋即後來以極下之地視爲隆起者；然亦不能修正前得之結果。此在吾人，一見即知其不合理，不足注意，唐李淳風注已指摘之矣。

孫子算經，署李淳風等奉敕注釋，然李注亡失不傳，其現存本，出於宋元豐七年（一〇八四）京監本。孫子有乘除法之解說，足補九章之缺。

孫子之方程之算法，與九章之算法及劉徽之新術稍稍異趣。其中有等差級數之問題，然不過器械數之而已。又有相當於不定方程式

$$1x + 2y + 4z = 1000$$

之問題，用某條件解決之。又有一問題，以三、五、七均分之，已知其剩數，而求其數，卽

今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？

乃此種問題之最初出現者，深予吾人以注意，卽在後世中國算學上留有甚大之關係也。

張邱建算經，有關於等差級數之問題，其所使用之公式，與見於劉徽注者不同。其百雞術極有名，記此種問題，且比印度阿剌伯較古。然此卽

$$x + y + z = 100, \quad 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100$$

之不定方程式；而其整數解有一組以上，亦足注意也。與此類似之問題，亦見於數術記遺中。

唐王孝通之緝古算經，使用三次方程式以解各種問題。其方程式之作製與解法，均無說明，然觀其術文中之術語，是與開平方開立方之算法，同樣處理而解之者。三次方程式，在阿剌伯算學上，乃甚顯著之事，然中國成立三次方程式，乃在阿剌伯之前；而由術文推得之方程式解法，亦與發達於阿剌伯者全不同也。

第八章 圓之算法

圓周率，在九章周髀以及其他古算書中，皆用徑一周三之率，然漢唐算家，均不對之滿意。夫圓周率或圓周率之算定，希臘印度亦有之，蓋算學既發達後必有之問題也。中國則前漢以來，多有研究之者。隋書律歷志，舉與此問題有關係之人不少，然其人使用之算法，無知之者。

此問題，殆起於前漢末之劉歆，雖無記載歆之圓周率者，然從度量衡原器之事得推定之。

後漢之張衡使用相當於 $\pi \approx 3.14159$ 之率，已見於九章之劉徽注中。

魏劉徽載此問題於九章注中，其法先作六邊形於圓內，次第倍其邊數，爲十二邊形，爲二十四邊形，爲四十八邊形，爲九十六邊形，然後一一算出此等內接多角形之面積；且其算法亦顧及外接形之處；由此得周百五十七徑五十卽 $\pi \approx 3.14$ 之率。

後，劉徽更進一步，求出一種之處理方法，得徑一千二百五十周三千九百二十七之率。

唐李淳風注云：

「祖沖之以其（卽劉徽之術）不精，就中更推其數。今修撰攬撫諸家，考其最非，沖之爲密，故

顯之徽術之下，冀學者之所裁焉。」

然未記祖沖之之算法。又，隋書律歷志中之祖沖之之圓周率，亦不見於李注中。若以律歷志爲李淳風等編纂，則李注中所云祖沖之之部分殆失傳矣。雖然，清李潢以爲續記劉徽得算法之後者，乃示李淳風等所追加之祖沖之算法（見九章算術細草圖說之圓周率條，其言亦有相當之理由也。惟上述之圓周率，較之隋書律歷志所記載者，雖複雜，而精密度則不及，由其誇爲甚精密之處觀之，殆非祖沖之之法也。此點姑存疑不論。

劉宋之祖沖之（五〇〇年卒，年七十二），著有綴術數十篇。此書今雖失傳不見，幸隋書律歷志，有簡單之記載，卽：

「古之九數，圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒，各設新率，未臻折衷。宋末南徐州從事史祖沖之，更開密法，以圓徑一億爲一丈，圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間；密率圓徑一百一十三，圓周三百五十五；約率圓徑七，周二十二。又設開差羈，開差立，兼以正圓參之，指要精

密，算氏之最著也。所著之書，名爲綴術，學官莫能究其深奧，是故廢而不理。」

據此，則祖沖之在劉宋之末，已於其綴術中記載圓周率算定之事，即先求圓周率之小數值，定上下之界限，由此得

$$\pi = \frac{22}{7}, \quad \pi = \frac{355}{113}$$

之二值。前者雖已爲希臘亞奇默德 (Archimedes) 所使用，後者則至一五二七年，荷蘭 Ant_onisson, Father of Meius 始得之。

因此，予在拙著中日算學發達史 (Development of Mathematics in China and Japan, Leipzig, 1912.) 中，言此率稱祖率爲適當，故科學雜誌第二卷第四期所載茅以昇氏「中國圓周率略史」中，乃云：

「按沖之之密率，千載以後，西洋始有發見。其時彼都，猶引爲最精，則中國圓率，爲世界之先，何有疑義？惜國學不振，此率已爲西人剽竊；即近代學子，亦幾忘其所自，古人心血，逝等流水，爲可慨已！日疇三上義夫，以此率源於中國，嘗有建議，擬命祖率，他日舉世景從，亦所以副先民之苦心者矣。」

吾國篤學君子，亦有聞風興起者乎？」

祖沖之不僅得此率，於圓弧之算法上，亦立極可注意之算法。其事亦見於隋書之右之記事，因其過於簡單，苦難捉其真意。然有開差羃開差立之術語，乃極佳之線索；清朝之學者視之爲無窮級數展開法，其見解殆非勉強，即謂之如斯，亦無不可；或者以之爲算定級數之初二三項之方法，殆較適當也。蓋開差羃者，可視爲二次之項之意味；開差立者，可視爲三次之項之意味。羃在劉徽九章注中，用於面積之意味，亦言及差羃之事；差羃者，即面積之差也。開差立與此同意味，即體積之意味也。故開差羃開差立即二次三次項之意味；惟吾人與其視爲有二次三次項而立一種算法，毋寧云適用後世之招差之爲愈。上記九章注之圓周率算定之第二段中，吾人得見一種形迹，即由多角形之值試行修正，用順序之差，比之於等比級數，由此以立算法者。因有此種試行，自得招差法之算法。無論如何解釋，殆必如斯也。

隋書中之簡單記事，及九章注之圓周率算定，予即如斯解釋之；其詳論則屬之算學史專書，今茲僅舉其結論而已。

第九章 九九歌訣

中國古算書中無九九表。九九表之出，乃在宋元以後之算書。雖然，漢唐時代，乘除等算法，已使用九九表及相當於九九表者，實已明甚。史記淮南子及其他古書中，有「四四十六」之句，是即有九九之表，殆以其便利，喜而以表中之句插入文章中也。敦煌發掘物中，有九九表之斷簡，殆漢代之物歟？

古算書中無九九之表，惟孫子算經中，用問題之形式，以示九九表。謂之爲表，恐有語病，宋元以後云九九歌訣，較諸云九九之表者，更爲妥當。孫子算經之記事，必以其時有歌訣，故用之作問題。然其順序則始於九九八十一終於一一如一。因有此種順序之九九歌訣，故孫子算經即如其順序而記之。敦煌斷簡，亦爲此種逆序。又，日本天祿元年（九七〇）源爲憲作之口遊中，亦有同樣逆序之歌訣，可知逆序歌訣，不僅行於中國，且傳於日本也。惟此在日本，後代猶用之，足利時代所作之拾芥抄，亦有此種歌訣。

然中國不用逆序歌訣，較早於日本，宋元時代算書中之九九歌訣，皆始於一一如一，終於九九八十一，逆序歌訣已不見矣。其變遷在何時代，雖無何等可據之史料，然必爲宋元以前之事。又，以如何理由而變更其順序，亦全不明白，惟下列二種推定，或屬可能。

第一，逆序不自然，既覺其不自然，必變爲順序者。

第二，因印度、阿剌伯算學傳來之故，亦未可知。

此二種理由中，何方爲是，今實不能決定。然自唐至宋元之間，中國與印度、阿剌伯已生關係，實爲不能否認者。唐開元六年（七一八）詔太史監瞿曇悉達譯西域之九執曆，此曆中所用之算法，不待言而知其爲印度風行之筆算。唐書律曆志記其事云：

「其算皆以字書，不用籌策。」

蓋印度此時之筆算，零之記號爲一點，猶未用九形。瞿曇悉達撰之開元占經中，有九執曆一章，大概記九執曆之事，亦記元來九個數字之形狀。然其字形今失傳，已記爲一字二字……而於其橫記□形，因書數而表之，故於無數字處，則加以一點。此蓋八世紀時印度之紀數法也。其後宋元之

際，中國代數學最發達之時，已使用九形以表零。或云司馬光已先用之，殊不辨其真僞。總之，無論司馬光之十一世紀時，無論宋元交涉之十三世紀時，皆在印度、阿剌伯盛行九形之後。惟其九形，印度、阿剌伯有長形者，與中國所用之真九不同。要之，中國與印度、阿剌伯使用九形既相同，而零之記號與九形，本質上並無從屬關係，則兩者一致用九形，自不能謂其出於偶然。況中國用九形年代較後，由此觀察，則必謂傳自印度、阿剌伯。後世更有一事：即明末之算書算法統宗（一六三九）等，言及寫算，又記印度、阿剌伯式之筆算。何時傳入此種算法，吾人雖不知，然至少得知明末時已用之。夫印度、阿剌伯之筆算既傳來，則兩國所行之九九表，恐亦必傳入。因此，乃舍古來之逆序九九歌訣，而改用自然順序之歌訣。如此觀察，並無何等不宜之處，乃一極自然之推想也。

宋元時代，於乘算之九九歌訣外，除算歌訣，亦極發達，即除算之九九也。何時有之，雖不明白，然宋元以後之算書，始記之。大約有算盤之算法始使用之，故清之梅文鼎，即以此為理由，斷為初用算盤之時代，已有除算歌訣。此論近年猶有信者，即予亦肯從然一熟考之，恐不能如斯斷定也。

中國至少自漢以來，喜用九九歌訣者，與漢字便於作歌訣大有關係。所謂九九八十一，即簡單

表明之，不必如西洋之九九表作器械的表以供記憶。故歌訣極爲發達。逆序歌訣雖受外國之影響而改爲順序歌訣，然仍不用九九表而用九九歌訣，且別用除算歌訣。

漢時之九九歌訣，逆序而不自然，然所以用之者，其中必有理由在。據上野清氏之研究。（見東北數學雜誌第二十一卷中中國九九表）則中國之九九與易之六十四卦之排列，大有關係。劉徽之九章算術序云：

「若在包犧氏，始畫八卦，以通神明之德，以類萬物之情；作九九之術，以合六爻之義。暨於黃帝，神而化之，引而伸之。」

此蓋言九九合於六爻之變之理由，卽示九九起原於易也。劉徽以八卦與九九歸之於庖犧，可暫置不言，其起原亦姑置之不論，惟九九與易之關係，吾人實不能否認。大概漢代以後，易與他事物多有牽合，九九或牽合於易，亦未可知。然九九而爲逆序者，無論如何，必謂出於易之關係。蓋易尊九之數，始於九九八十一之歌訣，或由此而生。此種解釋，乃屬最自然之推想也。

九九起原之年代不明。漢書梅福傳言以九九之術見齊桓公，其語之真僞，姑置而不論，然九九

必在與漢魏相當時代始有之。

第十章 算器 算籌

中國古算書中之方程，即聯立一次方程式之解法，其發達之可珍，爲他國所未見；即開平方開立方之算法，亦得可珍之整齊；不僅能開單之數，且帶從開平方帶從開立方（即二次三次之方程式）亦與開平方開立方之算法，同樣解決之；其成功不得不謂大也。夫此等算法而有如此成功，必非出於偶然，即其計算上使用算籌，且能自由運用之之故。中國之算學上，其計算及代數算法，所以有顯著進步者，謂悉由算籌之便利運用法而來，恐亦非過言也。

若然，則算籌之起原，有慎重研究之之必要。然除云起自極古時代以外，無他端緒可尋。古代有結繩之政，其真否如何，實難以確定，然不能謂無此事也。如琉球現猶通行之藁算，其來歷雖全然不明，然豈不能認爲中國結繩之遺物乎？日本亦有與此類似者，常通行於民間，惟今不用耳。若古之結繩，即爲琉球之藁算，則算籌視爲由結繩而出，亦無不可也……

算籌，日算家用算木名稱……蓋日算家所使用者，竹製者少，多用小木片作成，故宜用算木之名稱。然在中國，則爲竹製而非木製，故有種種名稱，如算、策、籌等即是。現其名稱有異同，或其形狀，大小用法等亦有異同，惟吾人不甚明白耳。不過算、策、籌等皆用竹頭，則無論何種，皆爲竹製，自可無疑。由其字形推之，筭从竹从弄，則必爲玩弄竹製卽運算之義；策从竹从束，出於束而置之之義；籌，有壽字之意味，必與占筮有關係。此種解釋，如屬可行，則作此等文字時之算籌，其性質能大體推得。日算家間，有區別算木，以爲策長籌短者，恐非其本義也。大約策相當於易之筮竹，籌相當於八卦排列時所用之陰陽竹籌，惟不知其然否。所謂算，卽兼策與籌而算之。易用筮竹又用竹籌者，與籌策之用於計算大有關係，實爲明甚。惟何者在先，何者後出，則不能確定耳。雖然，計算之算籌，如爲來自古之結繩，則其起原認爲甚古，亦屬至當。計算已甚古，則必使用何等之手段，故與其謂由易而出計算用之籌策，不如謂由計算之用器而占筮方法始發達。卽謂計算用之籌策，由先使用於記數而發達，亦無不可。以此言之，禮記中之所謂算及琉球之藁算，從實際使用之例證推考之，或有深長之意義也。

算之古文爲「禡」，由字形觀之，有束之象；以琉球之實例言之，殆與結繩有關係也。

表數之文字，在有算籌時已早使用。一、二、三，卽算籌橫排之形。四字古書爲「二二」卽重二之意，仍爲算籌橫排之形；卽謂四字由算籌重疊而來，亦無不可。十百千萬之字，皆橫用一畫，其十字千字，縱用一豎，此或與算籌亦有關係。且二十、三十、四十等，可書爲卅、卌、卍，是仍由使用算籌而來也。此等文字，雖皆出於一時，然無論如何，可證有此等文字之時代，已有算籌。故算籌之使用，其起原必甚古也。

由是言之，算籌之使用，殆在書契以前歟。其有長短之別者，或因算法進步，布列複雜，長算籌似覺不便利，乃改爲短算籌歟？夫欲行複雜之計算，其使用之籌必短。若由其字形現察，斷爲本供占筮之用，則必在八卦六十四卦成立之後，根據卦上所用之算籌，然後作計算用之短算籌，用之以行複雜之計算。然則籌之用於計算，豈非來自易乎？此固有深遠之根據，毋庸多議也。

中國古算書所載之算法，乘除用長算籌亦無妨礙；惟開平方開立方，以及解方程等，長者必不便利，殆有用短者之必要也。

算籌之排列法，孫子算經中曾載之，其上卷云：

此種排列法，不知始於何時。左傳襄公三十年，絳縣老人言亥二首六身，即亥之古字，爲算籌排列之形，表示二萬六千六百六十之數。右列之紀數，雖難於亥字形中完全表示，然無論如何，左傳已有此說，則著作左傳時，必行右列之紀數法矣。

據飯島氏之所說，左傳爲前漢末劉歆僞作，是前漢末已行此種排列法。據新城新藏博士之說，左傳爲戰國時代中期之著作，是此種排列法，亦得溯至戰國時代。夫右述之亥爲二首六身，其時代決定，由算學史觀之，乃一緊要之問題；然除曆術之關係以外，實無他種方法，可從算學史上論其時代。此問題如舊保留，不能決定，實一憾事也。

第十一章 算籌排列法之變遷

算籌之如右排列法，有宜深加注意者：數字一、二、三及十、卅、卅卅等，如爲根據算籌排列法而作，則上述之排列法中，個位與十位完全顛倒，其不一致，頗覺可異。然如斯之不一致，實爲事實，不能別生他議，惟因何而致此，則有說明之之必要。若數字與算籌排列法，各自發生，其間並無何等關係，則

此不一致，或起於偶然。然由數字之構造觀之，其根據算籌排列法而作，實爲無疑；即個位十位，有縱橫不同，其原則亦與算籌排列法一致。又就一、十、百、千、萬、億六字考察之：萬字雖亦用萬，然萬字本爲蟲名，在數字原用万字，故即就万字之形言之。此六字之構造，個位十位縱橫不同，算籌排列法之原則，殆仍表現於字形之上。惟六字中前五字皆有橫之一畫，獨十字千字有縱之一豎。故必依縱豎之有無分別觀察之。茲先言一、百、萬三字：百从一从白，白爲音標，惟橫之一畫有真意義。万字亦然。故個位百位万位，均爲以橫排爲原則而構成之文字。然十千二字，有橫畫，又有縱豎。若此縱豎含有意義，則其與前後中間三個位數所表示之數學，自有區別，且有縱排之數之意味。至億字，其所表之數，有十萬與万万二種，其造字時之意味，今無從明白。如以十萬爲原始之意義，則億字之作，亦與十千同意趣，不過億字从人从意，與十千構造不同耳。雖然，意爲音標，如以人旁爲有意味，爲千字除橫畫之形，則與人旁之字形不同，且其實非人旁，縱之一豎仍含有真意義。如斯，一十百千萬億六字，其爲根據算籌縱橫排列法而成之文字，亦得以推測矣。

兆字之構造稍不同，然橫畫與縱豎之使用，已稍爲紛亂，或有非常大，不能數之意。此其構造所

以與他六字不同歟？

兆以上之大數數字，皆未用右述之原則構成。此或因根據原則作數字之事已忘卻，而造於後代者歟？

據如右解釋，則卅卅卅各字，亦當合於同原則，造爲卅、卅、卅之形。然事不出此，殊不可解也。

由是言之，算籌之排列法，以每隔一行交互縱橫爲原則；數字之製作，即根據此原則；然漢代所行及後來繼承之算籌排列法，乃顛倒其個位與十位。蓋中國之算籌，在製作數字時，其排列法與現於數字者相同，自後在戰國時代乃至漢代，其排列法始有變遷。惟變遷之時代，不能推定耳。

此問題甚爲重要，又甚難解。幸而有一二着眼點。其一爲四字之形。若此字因表示 ⅢⅢ 而造爲「𠄎」或「𠄎」之形，則作此字之時，個位之數，謂用縱排之法，或無不可。由是言之，則調查此字始於何時代，即可知其以前已有變遷。但鼎銘古器中，早已有四字之古字，是其變遷亦頗古也。雖然，鼎銘不能如斯之古，非無反證之理由，不過吾人對於此種事項，如平素無研究，不能有確然之論據。蓋僅以一文字爲論據，未免甚薄弱也。

次有墨子之一節，亦爲一有力之論點，即：

「一少於二，而多於五，說在建。」

之一節。此本詭辯，不易解。墨子閒詁云：

「張云，建一爲端，則一爲十，是多於五。賈讓按：說無建義，疑當作進，卽算位之二五進一十也。」蓋建字不通，故宜以建爲進，而解釋之也。如此，則其義易明，卽一之位進一行，成十，自大於五也。雖然，建字無進義，若能如建字解釋，則可活動而觀之。據予見解，卽爲建字，亦能得一善解焉。

一少於二，卽如其本文所言。一多於五，如本文解之，不成立，則此一非表十位之一不可。如斯解釋，予亦承認墨子閒詁之說。雖然，建不能解爲進，亦不能以爲進之誤。若不明知古本爲進字後誤爲建字，則以意改訂爲進字，予以爲斷乎不可。觀墨子閒詁之著者，雖以建解爲進而又不改建字，是歷來卽爲建字。然建字較諸進字，意味更深長。蓋進字，意頗平凡，大減少詭辯之價值。故欲如建字解釋之：個位之一爲橫，建而縱豎之，則成十位之一，故有大於個之一之意味。照此種解釋，建字無奇義，乃立字豎字之義，其解釋自能明白。管子中亦有建旗之語。若云建橫之一成縱之一卽十，以建字作動

詞，則建字之意味，充分可通矣。予以算籌排列法置於眼中，故得如右之解釋，且確信並非勉強。北斗之柄所指之方向，云建子建丑，其建字之義，亦與此同也。

右之解釋，如果足憑信，則墨子所云，即根據算籌排列法（爲數字成立之條件者）而得，而與數字構成時相同之算籌排列法，或亦行於當時。故算籌排列法之變遷，可云在墨子以後。

雖然，四字見於鼎銘等，乃在墨子之前，實不能再得解釋。大約此變遷，或不能一時卽了，如以爲變遷現於墨子以前，而在墨子時仍行舊法，如此解釋，亦屬可能。斯則左傳之本文，雖爲春秋時代之實話，然如以爲此變遷須年月甚長，亦非不合理。就此事而言，予未積確實之研究，今不能得如何之結論，惟主張墨子時亦行算籌之排列古法而已。

中國自書契以前，卽用算籌計算，其算籌之排列法，中途發生變遷，乃一顯著之事矣。夫不採用別種之計算器及計算法，對於算器之算籌，使用之而不變，但變更其排列法，必大感不便。然中國之古代，竟實行之。其理由何在？大約必甚顯著，惟恨今無闡明之之端緒耳。

言及此，易中筮竹與八卦之配列，自呈於眼前。八卦橫排；筮竹用在手中時，亦可視爲縱排。八卦

出於算籌之橫布，其根據之原則與構成數字者同；筮竹所根據之原則，則與後代之算籌排列法相同。筮竹與八卦，何者先，何者後，不能容易決定，然筮竹單純，八卦則不然，其構成含有深意。由此事考察之，則必筮竹在先，八卦在後。若八卦出於筮竹，則八卦照筮竹之位置而為縱排，豈非自然乎？乃實際不出此而為橫排。此可謂模倣數字之橫排，亦可謂與數字同樣，根據於有排列算籌之風。雖然，另有一種妥當見解，即八卦乃算籌個位未縱排以前之物，故為橫排也。

筮竹由計算之算籌而來。算籌用在手中時，雖取縱之位置，然排列在盤上或席上計算時，則必如製作書契時，橫排計算，蓋在手中計算，僅限於簡單之時，殆非重要者也。然用之占筮，則附有重大之意義。筮竹既甚貴重，則八卦或由之而生。如斯，竹筮既被重視，同時，其意味轉駕於計算之算籌上，而算籌之排列法乃生變遷。惟算籌之方法雖已變遷，然數字及八卦，一仍其舊，不加變更，遂至如後世所見之狀。易在中國思想上極重大，不能謂無此種事情也。此為大膽之臆測，如屬可行，則由算籌排列法之有變遷，直至易之成立年代之上，亦得一種推測。此僅為一計畫，恐無意義，今後擬更提出之以為研究之問題。

第十一章 算器(續) 數術記遺

算籌之事，在中國算學上甚重要；其排列法之有變遷，乃予最近想到者，其事亦大體言之矣。茲以算籌以外之算器或表數之法，記載於此而觀察之。

二事均見於數術記遺。是書有偽作之說，實際上何時代有之，亦不能確斷，故不能作為史料，發揮其充分之價值。雖然，唐之明算科用書中，已有此書，乃一事實。且現存本乃宋鮑澣之得於道觀中，其時代亦較確實（鮑澣之數術記遺，嘉定五年，一二二二）即假定為鮑氏時之本，亦不失為貴重之珍本也。此書言表數有種種方法，極有趣味。

數術記遺之徐岳本文中，有徐岳師劉洪之說：

〔天目〕先生曰：隸首注術，乃有多種。及余遺忘，記憶數字而已。〕

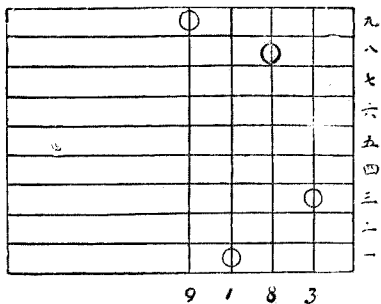
其數事即：

「積算、太一、兩儀、三才、五行、八卦、九宮、運算、了知、成數、把頭、龜算、珠算、計算又計數。」

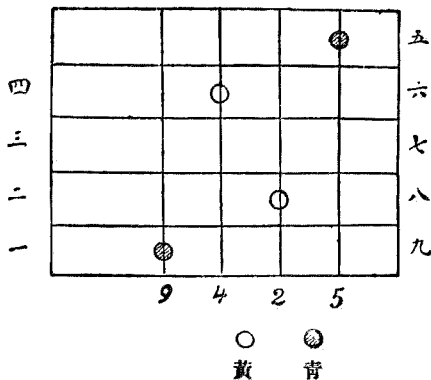
之十四種。其中除積算外，其他悉用四言二句簡單說明之，其意味之不能了解，自不待言。北周甄鸞重述之部，更詳細說明之，但仍不易解。然綿密思考之，亦得明瞭。予嘗試行委細之解釋，今以其結果述之：

第一、積算，即普通所行用算籌之算法。

太 一 算



兩 儀 算

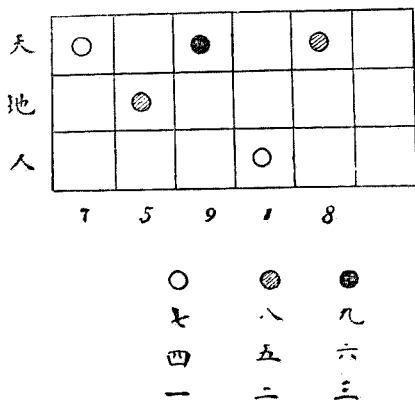


第二、太一算，如圖所示，一軸貫一珠，以一珠置盤上九道中之任何一道，即表示一至九之數。因僅有九道，不能表空位，然珠有不入九道內時，空位亦能表出也。

第三、兩儀算，一軸各備青黃二珠，盤上如圖所示設五道，黃珠表一二三四，青珠表五六七八九。

第四、三才算，如圖所示，橫設三道，三道中置青珠表九六三，置黃珠表八五二，置白珠表七四一。

三才算



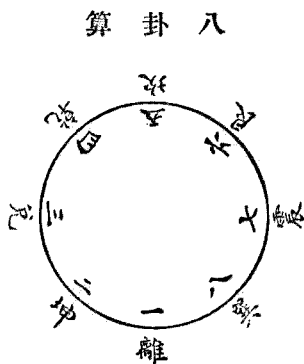
五行算



即用三道與三種珠以表數也。

第五、五行算，用五色珠，玄表一，赤表二，青表三，白表四，黃表五；如用黃玄二珠即表六，餘可類推。

第六、八卦算，如圖所示，以八卦配於圓周上，順次表一二三四五六七八，以中央為九。用一針指其中任何一位置，即指定其數。此種法若多用之，雖幾行之數，亦能表之。



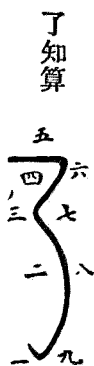
算 宮 九

四	九	二
三	五	七
八	一	六

數。

第七、九宮算，如圖所示，以自一至九之數排之於方陣內，指定其中任何一格，即表相當此格之

第八、運籌算，取算籌一枚，依籌上之位，置表一至九之數，挾之於手指間用之。
第九、了知算，如圖所示，在了字各位置上表一至九之數。



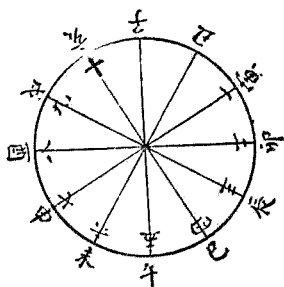
第十、成數算，玄表一與六，赤表二與七，青表三與八，白表四與九，黃表五，以一至五爲生數，六至九爲成數。算首向東及南，爲生數，向西及北爲成數，由此以表一至九之數。

第十一、把頭數，四面刻一二三四；而其出面示各數，配之表五者，以表六至九之數，如斯乃能表數。

第十二、龜算，如圖所示，配十二支於圓形，自寅至戌爲一二三……八九，用之以表數。
第十三、珠算，殆卽後來算盤之起原，甚爲重要，因詳說而觀察之。徐岳之原文云：

「珠算，控帶四時，經緯三才。」

算 龜



寥寥兩語，自難索解。甄鸞重述之云：

「刻板爲三分，其上下二分。以停游珠，中間一分以定算位。位各五珠，上一珠與下四珠色別。其上別色之珠，當其下四珠，珠各當一。至下四珠所領，故云控帶四時；其珠遊於三方之中，故云經緯三才也。」

此文甚難解，疑有脫文。取幾種別本驗之，皆如此，無誤刻者。仍此不改，雖如何施以句讀，其意義終不通。予以爲當字之下脫落一五字，卽：

其上別色之珠當五，其下四珠，珠各當一。

如此解釋之，則此種珠算之構造大約如次：

板上分刻爲上中下三段，其上下二段置游珠，中間一段記一十百千等位。此與現今算盤中所見之原則，不稍異同。然位各五珠云云，卽每行置五珠，此點與今日算盤不同。而上段之一珠，與下段之四珠，顏色各異，上段一珠表五，下段一珠表一。其上下段之珠，顏色不同，及下段有四珠，皆與現今算盤不同。然上段一珠表五，下段一珠表一，又與現今算盤完全相同者。

據右之記載中，當時之珠算，是否如今日算盤有軸貫珠，抑無軸而可旋轉各珠，全不明白。然無論有軸無軸，於原則均不改變，故有之可，無之亦可。且軸之有無，無言及者，恐爲無軸之意味。其面盤云刻板爲三分，若如其文字解釋之，刻板而分爲三段，則謂爲無軸，殆亦適當也。

第十四、計算又計數，亦名心算，「不用算籌，宜以心計之，」無表數之方法。

數術記遺中上述之表數方法，有種種不同之說，然皆爲理論，有裨於實用者少。觀於除普通之算籌及珠算外，一般皆不通行，其實際可知矣。此與中國之樂律論，云有三百六十律，但有理論上之

研究，不能施於實用者相同。

中國通行珠算，殆數術記遺以後之事；其年代雖不明白，或出於宋代。元明之算書中，有除算之九九歌訣，清之梅文鼎以爲其時已行珠算（古算器考中有其說），其說頗能博得吾人首肯。然算籌亦能使用除算之九九，用除算九九說明除法，或非珠算而爲算籌。是梅文鼎之說，僅爲理論，不能謂爲有所依據。不過他處亦有多少之證據，謂宋、元時代已行珠算，實不能動搖之論也。

中國之算書中，載算盤之圖者，始於明末。普通以爲見於程大位之算法統宗（一五九三），然萬曆六年柯尙遷集成之算學通軌，出於算法統宗之前者，亦已載此圖……兩書中所言之算盤，皆梁上二珠，梁下五珠，現今所用者，卽爲此狀。

此種算盤，或出於算術記遺之珠算，然梁上改一珠爲二珠，梁下改四珠爲五珠，與前者不同。數述記遺之珠算，與行於希臘、羅馬者同原則，殆由西方傳來歟？

第十三章 宋元之算學

古代之算學，尙有應論者，姑讓之於後篇，今僅述宋末至元代之算學大興一事。唐時王孝通李淳風僧一行等，已使算學發達，然其後曆術上出有諸大家，算學上則無知名之人。宋之中葉其可舉爲算學家者，僅有沈括一人。沈括之事，前已述之，其關於算學事項，記於其所著夢溪筆談中，惟不甚多。蓋沈括出於宋儒勃興時，身雖爲儒者，而與其他諸儒色彩稍稍不同也。惟宋代之算學界，僅出一沈括，直至宋末元初，算學始振，其間五六十年，中國之算學有顯著之發展云。

現於宋元之際之算學者，固有幾多之人物，然其著書傳於今日者，僅有數人，如宋之秦九韶，於淳佑七年（一二四七）作數書九章，元之李冶於淳佑八年（一二四八）作測圓海鏡，後又作益古演段（一二五九）。

較秦、李稍後之宋之楊輝，作數書九章。朝鮮有宋楊輝算法翻刻本，中國已失傳，現日本有其書。元郭守敬之授時歷，在研究當時之算學上，亦甚貴重。

較各家稍後之元之朱世傑，著算學啓蒙（一二九九）及四元玉鑑（一三〇三）二書。其他亦有一二算家。

今通覽此等算書，其代數學之發達，爲古算書所未見，乃一顯著之特色。至幾何學之算法，則不能加於漢唐時代，如魏之劉徽、劉宋之祖冲之及其子暉之等，所得之圓之算法及球之求法等，宋元學者，多無力發展。惟關於代數學，則甚出色，如立天元一術（或略稱天元一術及天元術）之出現。用大衍求一術（即不定方程式 $ax+by=1$ ）解決他種問題，招差法之使用，以及四元術之成立等，皆此時代之主要成績也。

天元術及四元術之代數學，見於上記諸算家之著作中，據其序文及本文觀之，尙有種種研究其事之人，其發達想有來歷。四元術僅見於朱世傑之四元玉鑑，然二元三元，當別有論述之人，朱氏承其後乃有四元術。惟此等算家之著述，無一存者，僅在玉鑑序文中記其事而已。故其發達之事情，今不能明也。

右之諸算家輩出，其著書之成立，先爲秦九韶著書之一二四七年，後爲朱氏著玉鑑之一三〇三年，其間不過五六十年而已。秦氏著書之前，必有準備時代，然極短之歲月間，乃有前代未見之新算學發生焉。

然宋末元初，乃中國與西域交涉頻繁之時代。元置回回天文臺，使回人主其事，西域之天文器械，亦多傳入。授時曆即作於如斯事情之中，採用新方法，而與歷代之曆法不同。故授時曆可謂承受阿剌伯之曆法而後成。如授時曆中使用類似球而三角法，恐視爲傳阿剌伯之知識，亦無不可。蓋古算書中無其痕迹，古曆法中亦無其法，至是乃忽然使用，謂爲根據外來知識，原無不合也。故授時曆之受阿剌伯影響，必然無疑，惟其影響至如何程度，實一疑問也。

宋元代數發達之事，如漫然考察之，殆可視爲來自阿剌伯之關係。蓋阿剌伯乃算學進步之國，其代數學之發達，甚爲顯著。中國如受其影響而代數學得特別之進步，則必已立整齊之定理。雖然，阿剌伯之代數學與中國宋元之代數，大異其趣。若知宋元代數學之本質，則必以爲乃中國本來之發達，而非外來之知識。此實毫無可疑者也。

然中國之算學，自古算書作注之時代，經唐宋之長期年月，多無進步，及至宋末元初之半世紀間，乃有顯著之發達，其中當然有特別之原因在。不過其原因，今不能明瞭耳。考其時與金元醫學發達同時代，且在宋儒之哲學組織完成之後，疑與此等事或有關係。在曆法上，見於授時曆之改革，非

有授時曆而後企謀之，乃由前代以來，其準備漸漸而進者。如取曆元於近距，唐之漢譯九執曆已試行之，五代曹士薦亦曾企謀之，宋沈括亦有希望採用太陽曆之事。此等事如見於九執曆者，殆根據西域之影響。而授時曆極重觀測，或可推定爲阿剌伯學風之影響。蓋阿剌伯學術史上之真功績，與其言爲各個之研究，各個之學說，毋寧謂在其重視實驗探究之精神。授時曆之製作，想亦受此學風之影響。由是言之，西域影響之多大，不必否定，蓋早已徐徐來也。然授時曆中，何者受西域之學問，何者據中國之研究，不能明白；且其中所使用之代數學，爲天元術，乃中國所固有者，非阿剌伯之代數學也。

然則就宋元算學之發達而言，曆法上既徐徐受西域之影響，而重視觀測之學風又開，其學業上所受之刺激，或能多大。然阿剌伯之代數學，不能照樣傳來，而古來之算學，不改其形式亦有發達進步。蓋中國之算學，長於使用算籌，更發揮其長處，而宋元之代數，乃得成立云。

第十四章 算籌與中國之代數學

見於古算書中聯立一次方程式之解法，及開平方開立方，帶從開平方立方方法（即二次三次之數字方程解法）等，所以能整頓者，即由於使用算籌，前已述之。

宋元之際，天元術及四元術之成立，爲中國代數學最高之發達，此非傳阿剌伯之代數學，乃遂固有之發達，其所以致此，亦由於使用算籌也。是則算籌在中國算學上所盡之職務，不可不謂爲極大也。

中國漢時，佛教傳入，印度之文物，亦相偕而來，如天文曆術，從印度傳來者有之，算學亦有之。隋書經籍志有婆羅門算經書名。然印度之算學，不知是否勝於中國。據印度算學史專門家之所說，則印度之算學發達，在古代者姑置而不論，在後代者，則爲西曆紀元四百年以來之事，較諸九章算術之著作，更在其後。又中國算法之發達，與印度不同，不獨此也，印度之算學，究如何傳入中國，亦頗可疑。觀察印度學術發達之跡，醫學與曆算，其中心地各不同；醫學以巴達立婆特拉爲中心，曆算則以烏加尼爲中心。蓋醫學自阿育王以來，信奉佛教之王侯，均獎勵保護之；曆算則在婆羅門手中，故其中心地乃至不同也。佛教至後代採原始的幼稚談如須彌山說等，對於曆算則頗冷淡。故漢譯經文

中，關於醫事者多，關於曆算者少，與算學有關係者，亦不他見。故中國之算學，其與印度算學之關係，不如印度文物影響之多且大也。

印度之算術，筆算特別發達。唐開元中漢譯九執曆，使用筆算，唐書中已明言之。後明末之算法，統宗（一五九三），亦傳阿剌伯式之筆算，稱寫算。然中國無行筆算之痕迹。此雖因中國人有尚古傾向，然亦因已有算籌之算法，故無採用筆算之必要。是算籌之算法，就中國言之，實非常緊要也。

算籌便利於日用之算法，稍進爲開平方開立方及聯立方程式，亦可使用之。籌有赤黑二種，各表正負，能用之排列方程式。因此，可計算聯立方程式，亦可計算帶從開平方帶從開立方。且如此排列之式，亦能以算籌分解之而得其答數。如斯代數演算，如二次三次之方程式，唐初已成立，因使用正負之算木也。然若進一步言之，如高次方程，則唐代尙不能及此。及宋元時，天元術四元術成立，始得實現其演算。蓋天元四元原則上，與唐代之代數學無別，惟二次三次方程，較簡單，且易算，而高次方程，則錯亂過甚，難以演算。乃宋元之算家，打開其難點而能成功，是宋元之代數學，其使用算籌而排列之，實有重大意義在也。

天元術爲宋元代數學之根柢，秦、李、揚、朱書中始有之，授時曆亦使用之。天元一術一語，始於李治書中。秦九韶亦用其方法，然所謂天元一，乃關於不定方程式之解法，而後來之所謂天元術，不能言爲天元。又李治所著之兩書中，天元術之式之排列法，上下顛倒。由此等事觀察之，是秦、李二人著書時，天元術尚在發達初期；其前雖有與其術有關係之人，而其術猶未即行也。天元之術語，有如何之意義，又何以作此種之用語，吾人均不明白。唐王孝通之三次方程式，已用與天元術相同之方法。故所謂天元術，其形式上雖新，而在傳統上，則謂爲承繼古式，亦無不可也。

用天元術處決問題，其結果有爲二次三次之方程式者，亦有高次方程式者。其解高次方程式，即用算籌，蓋以古之開平方開立方之方法，照樣擴充之於高次方程式也。其解法，與英 Horner 之數字方程式近似解法同原則，然 Horner 於一八一九年，始公布其論文於世。意大利亦有先 Horner 得相同解法之人，比之 Horner 不過年數較先而已。惟中國則算法完善，先於西洋五六百年。且古之開平方開立方，亦根據同樣之原則，誠足誇也。

朱世傑之四元術，導源於天元術。天元術立一元（即一個未知數）而求其算式，四元術則能

立四元卽四個未知數，其中央列已知數，上下左右列四元。用此算法解決問題，於所求之未知數外，使用三個補助數，其四元間作四方程式，由其中消去三個補助數，卽得一元方程式。此法實際上甚煩雜，然在理論上言之，則頗有興味。因其用算籌排列於盤之四方，故四元以下之方程式，卽不適用。

四元術在中國算學史上極緊要，四元玉鑑之序文，抄出可資參照。大德癸卯上元日臨川前進士莫若序云：

「燕山松庭朱先生，以淑後學，爲書三卷，名曰四元玉鑑。其法以元氣居中，立天元一於下，地元一於左，人元一於右，物元一於上；陰陽升降，進退左右，互通左右，錯綜無窮。」

又天德登科二月甲子，漳納心齊祖頤季賢父序云：

「按天地人物四元，以元氣居中；立天句地股人弦物黃方，按圖明之，上升下降，左右進退，互通變化，乘除往來；用假象真，以虛問實，錯綜正負，分成四式，必以寄之剔之；餘籌易位，橫衝直撞，精而不雜，自然而然，消而和會，以成開方之式也。」

序中餘籌云云，是充分表示四元術用算籌演算也。

天元術四元術，如右所述，用算籌排列代數式，其位置有代數之意味。如斯器械的代數學，他國無其類例。此中國之器械的代數學之成立，所以於算學史上有深意義；而如斯之代數學，亦可視為因使用算籌而後發達也。

第十五章 大衍求一術及招差與曆術

秦九韶之書（一二四七），已說大衍求一術。其術乃關於不定方程式之算法，可用以解種種問題，然此術見於數書中，雖以秦書為始，實則唐大衍曆已使用之，而曆術家之間，亦早已通行也。

此算法發生於何時代，乃一重大之問題，然今不能容易斷定。算學書中最早發現者，即所謂孫子之問題，前已照原文載之。其術文中未言及使用求一術，然有用以解決之性質，而其術中所用之數，亦全為適用求一術之結果，故視為已知求一術，亦無不可也。

雖然，求一術元從曆法而來。中國之曆法中，用求一術之問題甚多，秦書亦與之相關連，多記曆術上之問題。新城博士曾立與古曆術有關係之算式，加以說明；飯島氏亦引用其說。若關於此點之

所說，可與以贊成，實際上亦使用如此算法，則於算法之起原，大可以參照也。

自曆術上起者，不僅此問題，尙有其他問題在。古算書中有速度不同之三物，互追逐於圓周上，之問題，即最小公倍數之問題，記載頗有興味。然此等問題，在曆術上爲實際問題，且甚多。惟在曆術之問題上，其數複雜，故必求最大公約數，且須試用規則。九章算術等中述其規則，而例示之問題，則簡單不必適用其規則，蓋爲算學之教科書，問題之作製甚貧弱也。然曆術上實際必要時亦有之，故由其必要所得之規則，記之於算學書中，亦當然之事也。

授時曆中有招差法之三差，此亦算學方法由曆術發達之一例。二差即唐邊岡之崇元曆中所使用之相減乘法（見唐書律曆志），自後多用之於曆術上。關於圓之算法，如前所述，招差法，已見用於祖冲之等，然祖冲之爲曆術大家，招差法或與曆術有關連也。

祖冲之之前，何承天用強弱二法於調日法，因乏紀錄，不知其詳細，然亦可視爲在曆術上創算學之方法也。

更溯年代論之重差即見於海島算經之算法，本使用於曆術上之測定方法，即周禮中所謂使

用表影之事，故重差法亦可謂由曆術上之必要而發達云。

如斯言之，中國之算學，因曆術之關係而發達者甚多。以算家見稱之人，大概精於曆術；其所謂算學專門家者，如魏之劉徽，及古算書之著者孫子，張邱建，夏侯陽等，其履歷多不明白；其人之事，亦不能有所論斷；然曆術家即算學大家，其人物之多，亦決不能否認。由是言之，曆術上之事，其供給算學之問題，及爲算學方法之創意者，必多也。

此等算法，有在中國成立者，有本屬外來者，然無論其固有與外來，欲謂其非起於曆術上之關係，則有所不能也。

第十六章 律度量衡各種分配

中國之算學，與曆術關係甚深；即土木治水之事，由古算書中問題觀之，亦知其與算學有關係。律、度、量、衡亦然，在算學發達上皆有關係。

九章算術注中，有王莽銅斛之事。就其記事研究之，可推定王莽時制銅斛所使用之圓周率，然

其率似稍精密。後漢張衡所傳之率，或可視爲一種精密者，即與相當於十之平方根者略同。據隋書所記，劉歆已研究圓周率，含於銅斛制中之圓周率，殆由劉歆之研究而來。蓋關於度量衡之原器製作，其認研究圓周率爲必要，殆當然之事。而度量衡之制度，在研究算學史上，亦供給幾多之材料也。

關於王莽時之原器律度量衡皆以相同者表之。此雖覺甚奇，然其制度殆甚古。書經言「同律度量衡」是書經著作時，或已有此制度也。

音律與算學深有關係。所謂三分損益法，亦由算學算出音律。其事初見於呂氏春秋音律篇，詳於淮南子天文訓、鄭玄周禮春官注、褚少孫補史記律書、漢書律歷志、管子等，恐起於戰國時，至漢代始完備。三分損益之法，其爲分數之使用也明甚。三百六十律，亦由三分損益法算出；然無實用，僅推算學上之理論而已。然論理上較希臘大進步，此亦捉得數之處理之結果。蓋捉得數之處理，乃中國之思想上極顯著之事。其弊害雖極多，然使用算籌，能得上述之算法，且能立如此之代數學者，殆即此性能之賜物也。

希臘有三分損益法，與中國同，然希臘用弦試之，中國則用管試之。弦比管大爲簡單；且中國自

古有琴瑟之絃樂器，何故不採用弦而採管乎？此亦不可思議者。然律、度、量、衡，欲以同一原器表之，舍用管外無他法。若絃則斷不能貫徹此目的。此殆其主要之理由歟？蓋畢竟由長於連想之處而來也。

三分損益法，希臘亦有之，疑由希臘傳來，應考慮之。若最簡單分之，可採二分之一，然音律上，二分之一不成意味，故二分外最簡單之分法，非三分法不可。既採最簡單者以定音律，自然想及三分法，不必視爲出於外國之關係也。

關於音律，有所謂納音，算學書中往往有其問題。納音者即關於諸數之配列，在中國之數理思想上，其發現極適當也。

中國不僅同一律、度、量、衡，方位時刻季節干支等，亦互相分配之，蓋長於連想之中國，廣行此種分配，殆當然之事也。然此於天文上之測定方法，想亦深有關係。因漢字爲記號，便於測定之記載，由此行種種分配，此種關係，吾人亦能想得。予對此種關係，無充分之研究，不能多論，然以爲其分配，不僅爲思想上之產物，且其作製上亦含有算學上之深長意義。此種分配起自何時代，又其分配中根據如何之要素而始行，予亦不能一論，然以爲可視爲記於周髀算經中，且似以方位爲根據。以方位

爲根據，或現於後來，亦未可知。要之，關於天文曆法，種種事情，皆各行分配。不知如此多樣之分配，果否行於他民族之間，竊以爲此亦重要問題也。然無論如何，中國之律、度、量、衡，以同一原器定標準，則其有此種種分配，決不謂其無理由也。

書經言：「在璿璣玉衡，以齊七政。」其意義古來各說不同，不易推斷。有以爲璿璣玉衡卽渾天儀，七政卽日月五星者，恐屬勉強。其解璿璣玉衡爲渾天儀者爲漢之落下閎，乃造渾天儀以後之事；以前各書，並無所謂渾天儀，而史記且解爲星座之意。其解七政爲日月五星，不知果有政字之意否？予擬以稍異之意味解釋之：璿璣玉衡，卽從天官所云，解爲星座之意味。左傳昭公七年：

何謂六物對曰，歲時日月星辰之謂也。

予卽擬之爲七政。六物擬七政，雖少一物，然六物之中尙未加方位，如加以方位，則成七物，可用以當於所謂七政。此雖覺可異，然較之指日月五星，更多含人類作爲，且用政字亦較適切也。故所謂「在璿璣玉衡，以齊七政。」其文意，卽謂：由星座之運行——進一步言之，卽當大宇宙之運轉——此七物，亦適當分配，而此七物亦各自分配。

予如此解釋之，不可拘泥文句，宜視爲大體上如此云云；竊以爲較之用渾天儀觀測日月五星之說，且更穩妥。如斯觀察之，則所云在字齊字，亦活現紙上。以此齊七政之齊，與同律度量衡之同，帶稍同之意味。而齊與同分用之，亦實有興味。律度量衡，用同一原器，故同字適當。七政乃在同一圖式內各自分配，不能云以同一者表七物，故不能用同字。其使用齊字，意味稍同而又各異，誠巧於用字也。如是律、度、量、衡之用同一原器，天文曆法上之行各種分配，兩兩相需而成立。其所以然者，全出於以連想爲生命之思想體系，實同一精神之分出。然則各種分配之事，視爲相當有起原，亦無妨礙也。此固予一家之言，實不能言爲主張，然如斯解釋，亦屬可行也。

中國有以干支紀日紀年之習慣，惟其起原不明。據新城博士所說，春秋以干支數日，全屬當時之事，非後人加入；是則至少在春秋時代已有干支組織矣。據飯島氏所說，西曆紀元前三百年間，希臘巴比倫之曆法及星占傳來，干支記年法及干支紀日法，始得成立；是戰國時代有干支組織，不能上溯至春秋時代也。然兩者均以爲由春秋以前或戰國時代，則其非起於後世，明甚。希臘巴比倫及印度，均無與此相同或類似之紀年法、紀日法，是無論何人，不能不視爲中國特有之事也。若然，則其

中有重大意義，亦可見出矣。

干支之組織，以十干之循環與十二支之循環，照其進行之順序組織，作成別一循環系統。在此系統內，十干別成一循環系統，十二支亦然。如斯組織，不知其何以作成，然十干十二支，如確爲十日十二辰，殆構成十日與十二辰之輪迴者。此卽措而不論，然在行種種分配之國，其用此種組織，恐決非偶然也。

八卦以及六十四卦之配列，起於何時代，又在如何意味上發達，吾人如無易之知識，卽不明白；卽易中所說之意義，何以附以此等配列，吾人亦不能明白。然亦不能以爲一考察易之體系，卽爲了事，如哲學與卜占上之意義，及其算學的配列，亦當分別觀察之。就八卦之配列觀之，竊以爲有陰陽與三才之思想，其構成亦由陰陽與三才。蓋排列八卦六十四卦之算法，僅有陰與陽二種。如以「一」與「--」表陰陽，卽一與二，亦卽奇與偶。是可言其中有陰陽奇偶之思想也。

欲以如斯之陰陽算籌組織之，可成種種之方法，然每組有三行，無論如何，殆爲三才之思想。蓋陰陽與三才，其根本上，思想實相同。所謂天地人三才，卽天地交配而生人之意味，而陰陽亦卽男女

之意味。若然，則以男女之關係，使天地成人格化，於其處生三才之思想，即由實感的精神而出焉。

八卦之配列，出於如斯之精神，即用陰陽奇偶之竹籌以構成，各各賦之以意義，且由筮竹之處置，組成六十四卦，而易之占筮，乃得成立。然如斯之易之成立，至今日猶盛行，因此種竹籌已使用於計算上，而見於數術記遺之表數方法，（時代可暫置不論）已有種種構成也。且以用算籌之故，而計算大發達，其相互之間，恐不能無關係也。

在此等八卦筮竹算籌種種並行之國，其計算專用算籌，且以用算籌而算術及代數之方法發達，殆屬當然之事也。

第十七章 清代之算學

明末時西洋之曆算傳入，由此至清時，西洋算學與古來算法並行，成立幾多之創意的研究，此前已述之矣。

天元術爲宋元算學上之一種代數學，明代不甚注意。清初雖有天元術之書，然因西洋之代數

學已傳入。亦無暇重視代數術或代數學之名，後來譯書中始用之，當時則稱爲借根方。借根方者，與以已知數求未知數相同，借來而立之算法，蓋以代數之算法，巧爲表明之者也。既學此借根方，與昔日之天元術比較，乃知天元術之意義與借根方相同。其實借根以西方之言語稱爲 Algebra。據 Algebra 字義，有東來法之意。傳說西洋人律義堅以算法傳自東方之中國，乃以東來法名其術。此在考察當時中國算學之發達的歷史上，非常珍貴，因述其出處如下。

梅穀成著赤水遺珍云：

嘗讀授時歷草，求弦矢之法，先立天元一爲矢；而元學士李冶所著測圓海鏡，亦用天元一立算，傳寫魯魚，算式訛舛，殊不易讀。前明唐荆川顧箬溪兩公，互相推重，自謂得此中三昧。荆川之說曰：「藝士著書，往往以祕其機爲奇，所謂立天元一云爾，如積求之云爾，漫不省其爲何語。」而箬溪則言：「細考測圓海鏡，如求城徑，卽以二百四十爲天元，半徑卽以一百二十爲天元；既知其數，何用稱爲，似不必立可也。」二公之言如此，予於顧說頗不爲然而無以解也。後供奉內廷，蒙聖祖仁皇帝授以借根方法，且諭曰：「西洋人名此書爲阿爾熱八達，譯言東來法也。」敬授而讀之，其

法神妙，誠算法之指南；而竊疑天元一之術，頗與相似。復取授時曆草觀之，乃渙如冰解，殆名異而實同，非徒曰似之已也。夫元時著書，臺官治曆，莫非此物，不知何故遂失其傳。猶幸遠人募化，復得故物，東來之名，彼尙不能忘所自，而明人獨視爲贅疣而欲棄之。噫！好學深思如顧唐二公，猶不能知其意，而淺見寡聞者，又何足道哉！何足道哉！

梅穀成（一七六三年卒，年八十三）之赤水遺珍，於乾隆辛巳（一七六一）刊行，爲梅氏叢書輯要之附錄第一，其附錄第二中，有甲子（一六四四）春分識之跋語。梅穀成之供奉內庭，爲康熙五十一年（一七一二）（見李儼著梅文鼎年譜，及清華學報卷二），則其赤水遺珍中所云，乃康熙末年之事也。

秦九韶有大衍求一術（見其所作之數書九章），後來其法利用甚廣。清時論大衍求一術者，如焦循之天元一釋（一八〇〇）、張敦仁之求一算術（一八〇三）、駱騰鳳之藝遊錄（一八四三）、時日醇（道光中人）之求一術指、黃宗憲之求一術通解（一八七四）等，皆於此術有所發明。（欲知其詳，可觀畏友李儼君所作之「大衍求一術之過去與未來」一文，卽載於學藝雜誌第

七卷第二號者)

招差法，根據元之授時曆，清之梅文鼎（一六三三——一七二一）著有解說。應用之而有垛術，即求種種有限級數之總和之算法，已收優良之效果矣。

圓理發達爲最緊要之事件，可比西洋之定積分，其算法則始於所謂杜氏九術。考杜氏爲杜美德，即法人Pierre Jartoux；於康熙三十九年來華，五十九年（一七二〇）歿，年五十一；惟其傳九術之年代，則不明瞭。然雖云九術，實僅三術，梅穀成收之於赤水遺珍中，三術用無限級數，表三角函數，雖有相當於公式者，而解析之方法不備。及蒙古人欽天監監正明安圖，積三十餘年之辛勞，始考出解析方法，且別附以六術。明安圖又著有割圓密率捷法，未終稿而歿；其少子明新與門人陳際新續成之。

明安圖以後，學者輩出，此種算法，乃大爲進步；研究之者，有董祐誠（一七九一——一八二三）項名達（一七八九——一八五〇）戴煦（一八〇五——一八六〇）李善蘭（一八〇二——一八八二）夏鸞翔（一八二三——一八六四）徐有壬（一八六〇年卒）等。

第十八章 中國算學之價值

以上云云，卽就中國算學之種種觀察也。約言之，則中國行種種分配，又行易，又用數以律一切之思想亦極盛。與易用竹籌類似之籌，於計算，其結果，代數學上，乃實現其特殊之發達，適成爲中國之算學。雖然，算籌之算法，其初實立適當之方法，乃無阻礙的發展，成爲二三千年長期之產物，未免過於貧弱也。如出於河圖洛書之方陣，亦先他國而想得，然方陣之布列，其後多無進步。宋末揚輝書中，亦現別種方陣；然揚輝之前，蔡沈（一一六六）自易之研究，於方陣上已有多少之提議，揚輝之方陣，或爲蔡沈所誘起者也。然阿剌伯之算學，亦有方陣，揚輝想必受其影響。其後清之方中通（數度衍）關於方陣，亦有多少之研究云。

上野清之九九論文云：

占筮家用一至九之數，以代人世之禍福吉凶，構成八卦或九疇。是中國之易學者，與用文字以代數之西洋代數學，適取全反對之方向。故西洋算學與時俱進，中國從來不再進一步，其一原

因，即在斯也。

換言之，即中國用數以爲他物記號，與使用他種記號，以表數之西洋代數學，其進行之方向，完全相反，故算學進步緩慢也。此事或亦有之。中國雖用算籌得組成一種之代數學，然用筆記述其算法時，記載上之記號，亦多少留有其痕迹；進一步言之，亦嘗以文字爲記號。惟爲算籌之算法所困，且後人不繼續努力，故未能登峯造極。蓋中國之器械的代數學，以表數之算籌爲記號，與易之以數表物，同出一轍。未能打破此種拘束，甚可惜也。

中國人以曆術上之觀測，巧爲構成種種分配，且由其分配之數，以律一切萬物，而大受其拘束；曆法上有許多甚無爲之附會，乃至消費其能力之大部分云。

因此，上野之觀察，予以爲亦有理由。雖然，中國之算學，幾何學方面何以不能發展，其理由殊不能說明。夫中國象形文字發達，都邑之構造，有整齊之街衢；所云鑑鏡鐘鼎，喜整齊之形體；如繪圖亦頗發達。由此等事觀之，中國人關於形體之感，不能謂爲薄弱。算學上，前則墨子中記載斷片的幾何學的關係事項，後則九章注中，亦有長於幾何學之論究，乃降及宋元代數學發達之時代，幾何學方

面，反不及於前時。至清代，則幾何學之研究，多無可觀者。明末雖譯有幾何原本，然其後之數理精蘊，反記載疎於證明之幾何學，與羅馬歐几里得 (Euclid) 之幾何學一對照，竟至不成意味。此與其謂爲缺乏形體之感覺，毋寧謂基於論理思想之如何也。

中國先秦時代，名家者流，論理思想已有相當之發達。若其傾向連續而進，則論理學之成立，或能期待，亦未可知。然其傾向不能繼續。後雖傳入印度之因明，但僅止於傳入，不能更有發展。因此，中國之思想上，無所謂三段論法。常用之文句，多以連想爲基礎，用連鎖的敘述。因此種論理法之結果，——實則盛行此種論理法之精神發現——不便於幾何學之成立，之一理由，或即在此。觀史記漢書以及歷代正史皆有律曆志等，其重視曆法自不待言。然雖有其事，而中國曆術家終局之努力，乃在安排曆日，並未以幾何學整理天文體系。中國之算學於此有一缺陷，實吾人不能不承認者也。

又，中國之文明，爲文物藝術之文明，非科學之文明，其算學所以不能較進步者，此即其理由之一。雅典爲希臘文學、哲學、藝術之中心地，極點處，其算學科學，反不及四周殖民地；觀此，則中國算學不發達之原因，思過半矣。或以爲雅典如此情形，殆爲時代之風潮，然其與四周殖民地之對照，則甚

顯著也。若然，則中國在算學方面，原非其長處，通如是長之歷史，無不如斯也。

言至此，遇一問題，即中國算學之將來如何乎？事實上，今日一切事情已大變更，所謂算學專門家之學習態度，以及其修養，已非從來可比。若能察其缺陷，舍短用長，努力不已，則或有相當之轉變。予以清朝時代之算學與和算比較，覺中國算學並不劣於日本。中國人算學之能力，即其使用算籌而造出特殊之代數學者，將來亦必能發揮之也。

蓋予以此種論究，以為中國算學，受外國之影響，而其有特色之處，並不別行多變，不如因外國影響如何之問題而多多變更也。

