Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 9

Aufgaben

Aufgabe 9.1. In einer Wand befinden sich zwei Nägel, an denen eine Halskette aufgehängt werden soll. Wie kann man die Kette aufhängen, dass, sobald man nur einen der Nägel herauszieht, die Kette herrunterfällt?

Aufgabe 9.2. Es sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Zeige, dass die Homotopie von Wegen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Wege von x nach y ist.

Aufgabe 9.3. Es sei X ein topologischer Raum. Zeige, dass die Verknüpfung von stetigen Wegen

$$\gamma, \delta \colon [0,1] \longrightarrow X$$

durch Hintereinanderausführung zu einer wohldefinierten Verknüpfung auf den Homotopieklassen von Wegen führt.

Aufgabe 9.4. Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Zeige, dass die Verknüpfung eines stetigen geschlossenen Weges γ mit Aufpunkt x mit dem konstanten Weg x homotop zu γ ist.

Aufgabe 9.5. Es sei X ein topologischer Raum und $x, y \in X$. Es sei

$$\gamma \colon [0,1] \longrightarrow X$$

ein stetiger Weg von x nach y und sei γ^{-1} der umgekehrt durchlaufene Weg, also $\gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$. Zeige, dass die Verknüpfung $\gamma\gamma^{-1}$ homotop zum konstanten Weg x ist.

Aufgabe 9.6. Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Zeige, dass die Verknüpfung von Homotopieklassen geschlossener Wege mit Aufpunkt x assoziativ ist.

AUFGABE 9.7. Es sei X ein topologischer Raum und

$$\gamma\colon\ S^1 \longrightarrow X$$

ein stetiger geschlossener Weg. Zeige, dass γ genau dann nullhomotop ist, wenn es eine stetige Fortsetzung von γ auf die abgeschlossene Kreisscheibe gibt.

AUFGABE 9.8. Zeige, dass der $\mathbb{R}^n$ kontrahierbar ist.

AUFGABE 9.9. Es sei $\varphi\colon\ X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$. Zeige, dass die Zuordnung

$$\gamma \mapsto \varphi \circ \gamma$$

eine wohldefinierte Abbildung auf der Menge der Homotopieklassen geschlossener Wege (mit Aufpunkt x bzw. y) induziert.

AUFGABE 9.10. Es sei $\varphi\colon\ X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen und $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$. Zeige, dass die Zuordnung

$$\gamma \mapsto \varphi \circ \gamma$$

zu einem Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, y)$$

führt.

AUFGABE 9.11. Zeige, dass bei $n \geq 3$ der $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ einfach zusammenhängend ist.

AUFGABE 9.12. Zeige explizit, dass der stetige Weg

$$[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\},\ s \longmapsto \left(e^{\mathrm{i}s},\ 1\right),$$

nullhomotop ist.

AUFGABE 9.13. Bestimme die Fundamentalgruppe des reell-projektiven Raumes $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$.

AUFGABE 9.14. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow S^1,\ t \longmapsto (\cos t, \sin t),$$

eine Überlagerung ist.

Aufgabe 9.15. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \longmapsto \exp z,$$

eine Überlagerung ist.

Aufgabe 9.16. Sei $n \geq 2$ und ξ eine n-te primitive komplexe Einheitswurzel. Wir betrachten die Operation der Matrizen $\varphi_j = \begin{pmatrix} \xi^j & 0 \\ 0 & \xi^{-j} \end{pmatrix}$ auf dem $\mathbb{C}^2$. Es sei $P = (u,v) \neq (0,0)$. Bestimme einen Radius $r > 0$ derart, dass die Bälle $U(\varphi_j(P), r)$ zu $j \neq 0$ zueinander disjunkt sind.

Aufgabe 9.17. Es sei

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus und

$$\varphi\colon\ \mathbb{C}^\times \cong \left(\operatorname{Spek}\left(\mathbb{C}[T,T^{-1}]\right)\right)_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}^\times \cong \left(\operatorname{Spek}\left(\mathbb{C}[T,T^{-1}]\right)\right)_{\mathbb{C}}$$

die zugehörige Spektrumsabbildung zwischen den Spektra der Monoidringe. Wie sieht die zugehörige Abbildung der Fundamentalgruppen aus?

Aufgabe 9.18. Bestimme die lokale Fundamentalgruppe der Kurven

$$V\left(X^a - Y^b\right) \subset \mathbb{C}^2$$

zu a, b teilerfremd.

Aufgabe 9.19. Es sei $R = \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}$ eine endlich erzeugte positiv-graduierte $\mathbb{C}$-Algebra und $X = \mathbb{C} - \operatorname{Spek}(R) \subseteq \mathbb{C}^n$ das $\mathbb{C}$-Spektrum von R. Es sei $S = \{z \in X \mid \ || z || = 1\}$ die „Sphäre“ von X (bezüglich der gegebenen Einbettung). Zeige, dass es eine Homotopie zwischen $X \setminus \{0\}$ und S gibt. Man folgere, dass die punktierte Fundamentalgruppe von R gleich der Fundamentalgruppe von S ist.

Aufgabe 9.20. Bestimme die Kontraktion des $\mathbb{C}^n$, die von der Standardgraduierung auf dem Polynomring im Sinne von Lemma 9.5 herrührt.

Aufgabe 9.21. Bestimme die Kontraktion des $\mathbb{C}^n$, die von einer positiven Graduierung auf dem Polynomring im Sinne von Lemma 9.5 herrührt.

Aufgabe 9.22. Es sei G eine endliche Gruppe, die auf dem $\mathbb{C}^n$ linear operiere. Es sei $S = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]^G$ der zugehörige Invariantenring. Zeige, dass der Bahnenraum $\mathbb{C}^n \backslash G$, versehen mit der Bildtopologie des (euklidischen) $\mathbb{C}^n$, mit dem $\mathbb{C}$-Spektrum $\mathbb{C}-\operatorname{Spek}(S)$, versehen mit der natürlichen Topologie, übereinstimmt.

Aufgabe 9.23. Es sei k ein Teiler von ℓ. Definiere eine Abbildung

$$\varphi \colon V\left(XY - Z^k\right) \longrightarrow V\left(XY - Z^\ell\right)$$

die mit den Quotientenabbildungen des $\mathbb{C}^2$ verträglich ist. Beschreibe die Abbildung der lokalen Fundamentalgruppen unter dieser Abbildung.

Aufgabe 9.24. Zeige, dass es zwischen verschiedenen ADE-Singularitäten keine Homöomorphien geben kann.

Folgere daraus, dass es auch keinen $\mathbb{C}$-Algebraisomorphismus zwischen den entsprechenden $\mathbb{C}$-Algebren geben kann.

Zur folgenden Aufgabe siehe auch Aufgabe 7.28.

Aufgabe 9.25. Es sei $G \subseteq \mathrm{SU}_2$ eine endliche Untergruppe mit der zugehörigen Operation auf einem offenen Ball $U(0,r) \subseteq \mathbb{C}^2$ und dem Quotienten

$$W = U/G \subseteq V = \mathbb{C}^2/G.$$

Zeige dass die Fundamentalgruppe von $W \setminus \{P\}$ (wobei P den singulären Punkt des Quotienten bezeichnet) gleich G ist.

Abbildungsverzeichnis