Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 36

Die Pausenaufgabe

AUFGABE 36.1. Zeige, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind. Wie sehen zu den Elementarmatrizen die inversen Matrizen aus?

Übungsaufgaben

AUFGABE 36.2. Es sei M eine $n \times n$-Matrix derart, dass es $n \times n$-Matrizen A, B mit $M \circ A = E_n$ und mit $B \circ M = E_n$ gibt. Zeige $A = B$ und dass M invertierbar ist.

AUFGABE 36.3. Zeige, dass eine invertierbare Matrix M weder eine Nullzeile noch eine Nullspalte besitzt.

AUFGABE 36.4. Es seien M und N invertierbare $n \times n$-Matrizen. Zeige, dass auch $M \circ N$ invertierbar ist, und dass

$$(M \circ N)^{-1} = N^{-1} \circ M^{-1}$$

gilt.

AUFGABE 36.5. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge $\mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren Matrizen eine Gruppe ist. Zeige ferner, dass diese Gruppe bei $n \geq 2$ nicht kommutativ ist.

AUFGABE 36.6.*

Es seien $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ Matrizen über einem Körper K mit

$$A \circ M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass dann auch

$$M \circ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt.

AUFGABE 36.7. Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Zeige, dass die Multiplikation mit $m \times m$-Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung haben.

(1) $V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.
(2) $(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.
(3) $(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile ($i \neq j$).

AUFGABE 36.8. Beschreibe die Wirkungsweise, wenn man eine Matrix mit einer Elementarmatrix von rechts multipliziert.

AUFGABE 36.9. Zeige, dass man eine Scherungsmatrix

$$A_{ij}(a) = E_n + aB_{ij}$$

als Matrizenprodukt $M \circ N \circ L$ schreiben kann, wobei M und L Diagonalmatrizen sind und N eine Scherungsmatrix der Form $A_{ij}(1)$ ist.

AUFGABE 36.10. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

AUFGABE 36.11. Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

AUFGABE 36.12. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

AUFGABE 36.13.*

Bestimme die inverse Matrix zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.14. Führe für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & -4 \\ 9 & 17 & -2 \end{pmatrix}$$

das Invertierungsverfahren durch bis sich herausstellt, dass die Matrix nicht invertierbar ist.

Aufgabe 36.15.*

(1) Überführe die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in ein lineares Gleichungssystem.

(2) Löse dieses lineare Gleichungssystem.

Aufgabe 36.16. Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.17.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 11 & -20 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

a) Zeige

$$M^2 = E_2.$$

b) Bestimme die inverse Matrix zu M.

c) Löse die Gleichung

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.18. Löse die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

simultan.

Aufgabe 36.19. Beschreibe die Umkehrabbildungen zu den elementargeometrischen Abbildungen Achsenspiegelung, Punktspiegelung, Drehung, Streckung, Verschiebung.

Aufgabe 36.20. Es sei M eine $m \times n$-Matrix und $\varphi\colon K^n \to K^m$ die zugehörige lineare Abbildung. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn es eine $n \times m$-Matrix A mit $M \circ A = E_m$ gibt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 36.21. (3 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k+2 & k+1 \\ 0 & 0 & k+1 & k \\ -k & k+1 & 0 & 0 \\ k+1 & -(k+2) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für jedes $k \in K$ zu sich selbst invers ist.

Aufgabe 36.22. (4 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 2 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Finde Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass $E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 36.23. (4 (1+3) Punkte)

(1) Überführe die Matrixgleichung
$$\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
in ein lineares Gleichungssystem.

(2) Löse dieses lineare Gleichungssystem.

Aufgabe 36.24. (3 Punkte)

Bestimme die inverse Matrix zu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 36.25. (3 Punkte)

Führe das Invertierungsverfahren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

unter der Voraussetzung $ad - bc \neq 0$ durch.