MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME X.

DÉPOTS :

LONDRES,
chez WILLAMS et NORGATE,
Henrietta Str., 14.

PARIS,
chez RORET, libraire,
rue Hautefeuille, 10 bis.

BERLIN,
chez FRIEDLÄNDER et Sohn,
Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE,
rue de Louvain, 108.

MAI 1883.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

MÉMOIRES

DE LA

SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES

DE LIÈGE.

Nec temere, nec timide.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME X.

DÉPOTS :

LONDRES,	PARIS,	BERLIN,
chez Willams et Norgate,	chez Roret, libraire,	chez Friedländer et Sohn,
Henrietta Str., 14.	rue Hautefeuille, 10 *bis*.	Carlstrasse, 11.

BRUXELLES,

F. HAYEZ, IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE,

rue de Louvain, 108.

MAI 1883.

TABLE

DES

MÉMOIRES CONTENUS DANS LE TOME X.

LISTE

DES

MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

AU 31 MAI 1883.

Bureau.

Président,	M. DEWALQUE.
Vice-Président,	» W. SPRING.
Secrétaire général,	» CANDÈZE.
Trésorier,	» DE KONINCK.
Bibliothécaire,	» LE PAIGE.

Membres effectifs.

1842 DE KONINCK, L. G., professeur émérite à l'université de Liège.

CHANDELON, J. T. P., professeur de chimie à l'université de Liège.

SELYS LONGCHAMPS (baron E. DE), membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

TRASENSTER, L., recteur de l'université de Liège.

1844 KUPFFERSCHLÄGER, Is., professeur émérite à l'université de Liège.
1845 DELVAUX DE FENFFE, Ad., ingénieur honoraire des mines, à Liège.
1847 DE CUYPER, A. C., professeur émérite à l'université de Liège.
1853 CANDÈZE, E., membre de l'Académie des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, à Glain.
PÂQUE, A., ancien professeur de mathématiques à l'athénée de Liège.
1855 DEWALQUE, G., professeur de minéralogie, de géologie et de paléontologie à l'université de Liège.
BOURDON, J., docteur en sciences naturelles, à Liège.
1856 CATALAN, C. E., professeur d'analyse à l'université de Liège.
1860 GILLON, A., professeur de métallurgie à l'université de Liège.
1861 PERARD, L., professeur de physique à l'université de Liège.
MORREN, Éd., professeur de botanique à l'université de Liège.
1865 FOLIE, F., administrateur-inspecteur de l'université de Liège.
1868 GRAINDORGE, L. A. J., professeur à l'université de Liège.
1869 HABETS, A., professeur à l'université de Liège.
1870 MASIUS, V., professeur de pathologie et de clinique à l'université de Liège.
VANLAIR, C., professeur de pathologie et de thérapeutique à l'université de Liège.
1871 VAN BENEDEN, Éd., professeur de zoologie, de physiologie et d'anatomie comparées à l'université de Liège.
LE BOULENGÉ, P., colonel d'artillerie, à Liège.
1874 MALHERBE, R., ingénieur des mines, à Liège.
FIRKET, Ad., chargé de cours à l'université de Liège.
1875 SPRING, W., professeur de chimie à l'université de Liège.
SWAEN, A., professeur d'anatomie à l'université de Liège.
1876 DE KONINCK, Lucien, professeur de chimie analytique et de docimasie à l'université de Liège.

1878 LE PAIGE, professeur de géométrie supérieure à l'université de Liège.
1879 JORISSEN, docteur en sciences, à Liège.
1880 NEUBERG, J., professeur de mathématiques à l'athénée de Liège et chargé de cours à l'École des mines.
1881 FRAIPONT, J., docteur en sciences, à Liège.
GILKINET, docteur en sciences, professeur à l'université de Liège.

Membres correspondants.

1842 VAN BENEDEN, J. P., professeur à l'université de Louvain.
LAGUESSE, ingénieur en chef des mines, à Mons.
NEUENS, général d'artillerie, à Anvers.
1843 STAS, J. S., membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique, à Bruxelles.
KEYSERLING (comte A. DE), membre de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg.
REICHERT, professeur à l'université de Berlin.
STEICHEN, professeur à l'École militaire, à Bruxelles.
BRÉGUET, A., membre de l'Institut, à Paris.
SIMONOFF, directeur de l'Observatoire de Kasan (Russie).
CHEFFKINE, général, aide de camp de S. M. l'Empereur de Russie, à Saint-Pétersbourg.
1844 LECOINTE, professeur de mathématiques supérieures, à Anvers.
1845 MAUS, inspecteur général des ponts et chaussées, à Bruxelles.
NAVEZ, lieutenant-colonel d'artillerie en retraite, à Schaerbeek.
COQUILHAT, général d'artillerie, à Anvers.
HAGEN, professeur à l'université de Cambridge (États-Unis).
1848 KLIPSTEIN (VON), professeur à l'université de Giessen.
1850 SCHLEGEL, directeur du Muséum d'histoire naturelle, à Leyde (Néerlande).

1852 Le Conte, J. L., docteur en médecine, à Philadelphie (États-Unis).

Davidson, Th., membre de la Société royale de Londres.

Ettingshausen (von), professeur de physique à l'université de Vienne.

Dana, J. D., professeur de géologie et d'histoire naturelle, à New-Haven (États-Unis).

Ettingshausen (baron Constantin von), membre de l'Académie des sciences de Vienne, à Graz.

1853 Westwood, professeur de zoologie à l'université d'Oxford (Angleterre).

Parry (major F. J. Sidney), à Londres.

Waterhouse, conservateur au Musée Britannique, à Londres.

Bède, Em., industriel, à Bruxelles.

1854 Petrina, professeur de physique, à Prague (Bohême).

Kölliker (von), professeur à l'université de Wurzbourg (Bavière).

Dutreux, receveur général, à Luxembourg.

Drouet, H., naturaliste, à Charleville (France).

Weber, professeur de physique à l'université de Gottingue (Prusse).

Stammer, docteur en médecine, à Dusseldorf (Prusse).

Erlenmeyer, docteur en médecine, à Neuwied (Prusse).

Lucas, H., aide-naturaliste au Muséum d'histoire naturelle, à Paris.

Blanchard, E., membre de l'Institut, à Paris.

1855 Geinitz, H. B., professeur à l'École polytechnique, à Dresde.

Liais, directeur de l'Observatoire impérial de Rio de Janeiro.

1855 Du Moncel (comte Th.), membre de l'Institut, à Paris.

Tchébycheff, P., membre de l'Académie des sciences, à Saint-Pétersbourg.

Michot (abbé), botaniste, à Mons.

1857 Jamin, J. C., membre de l'Institut, à Paris.

1857 Ray, J., trésorier de la Société d'agriculture de Troyes (France).

Wright (Dr Th.), membre de la Société royale de Londres, à Cheltenham (Angleterre).

1858 Caligny (marquis de), correspondant de l'Institut, à Versailles (France).

1859 Marseul (abbé de), entomologiste, à Paris.

Beyrich, professeur à l'université de Berlin.

Marcou, J., géologue, États-Unis.

1860 Du Bois-Reymond, professeur à l'université de Berlin.

Brücke, professeur à l'université de Vienne.

Studer, B., professeur émérite à l'université de Berne (Suisse).

Chevrolat, membre de la Société entomolog. de France, à Paris.

1862 Caspary, professeur de botanique à l'université de Königsberg (Prusse).

Wartmann, É., professeur de physique, à Genève (Suisse).

1863 Gossage, membre de la Société chimique, à Londres.

1864 Thomson, J., membre de la Société entomologique de France, à Paris.

Brüner de Watteville, directeur général des télégraphes, à Vienne.

Durieu de Maisonneuve, directeur du Jardin Botanique, à Bordeaux (France).

1865 Hugueny, professeur, à Strasbourg.

Terssen, général d'artillerie, à Anvers.

De Colnet d'Huart, conseiller d'État, à Luxembourg.

Zeis, conservateur au Muséum royal d'histoire naturelle, à Dresde.

Milne Edwards, membre de l'Institut, à Paris.

Dausse, ingénieur en chef des ponts et chaussées, à Paris.

Le Joly, archiviste perpétuel de la Société des sciences naturelles de Cherbourg (France).

Varley Cromwell, ingénieur en chef de la Compagnie des télégraphes électriques, à Londres.

1865 Godwin Austen, R. A. C., membre de la Société royale de Londres, Chilworth Manor, Guilford (Angleterre).

Hamilton, membre de la Société géologique de Londres.

De Borre, A., conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Bruxelles.

1866 Rodriguez, directeur du Musée zoologique de Guatémala.

Ledent, professeur au collége communal de Verviers.

Desains, membre de l'Institut, à Paris.

1867 Gosselet, J., professeur à la faculté des sciences de Lille (France).

Barnard, président de l'École des mines, à New-York (États-Unis).

Radoszkoffski, président de la Société entomologique de Saint-Pétersbourg.

Boncompagni (prince Balthasar), à Rome.

1868 Renard (S. Ex. le chevalier), conseiller d'État, secrétaire de la Société impériale des naturalistes de Moscou.

Clausius, R., professeur de physique à l'université de Bonn (Prusse).

Helmholtz, professeur de physique, à Berlin.

Cailletet, pharmacien et chimiste, à Charleville (France).

1869 Marié Davy, directeur de l'Observatoire météorologique de Montsouris.

1869 Schlömilch, professeur d'analyse à l'École polytechnique de Dresde.

Simon, E., naturaliste, à Paris.

Pisco, professeur à l'École industrielle de Vienne.

1870 Daguin, professeur à la faculté des sciences de Toulouse (France).

Trautschold, professeur à l'École d'agriculture à Pétrovskoï, près Moscou (Russie).

Malaise, C., professeur à l'Institut agronomique de Gembloux.

Bertrand, J. L. F., membre de l'Institut, à Paris.

1870 Serret, J. A., membre de l'Institut, à Paris.

1871 Van Hooren, docteur en sciences, à Tongres.

Imschenetski, professeur à l'université de Karkoff (Russie).

Müller (baron von), botaniste du gouvernement, à Melbourne (Australie).

Henry, L., professeur à l'université de Louvain.

Durége, professeur à l'université de Prague (Bohème).

Maxwell T. Masters, membre de la Société royale, à Londres.

Thomson, James, vice-président de la Société géologique de Glasgow.

Capellini (commandeur G.), professeur de géologie à l'université de Bologne.

1872 Vallès, inspecteur honoraire des ponts et chaussées, à Paris.

Garibaldi, professeur à l'université de Gênes (Italie).

Fradesso da Silveira, directeur de l'Observatoire, à Lisbonne.

Kanitz, Dr Aug., professeur à l'université de Klausenbourg (Hongrie).

1873 Clos, directeur du Jardin des Plantes, à Toulouse.

1873 Martins, directeur du Jardin Botanique de Montpellier.

Bates, H., membre de la Société royale de Londres.

Melsens, membre de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

Hermite, membre de l'Institut, à Paris.

Darboux, professeur à la Sorbonne, à Paris.

Fournier, Dr Eug., membre de la Société botanique de France, à Paris.

Hall, James, paléontologiste de l'État, à Albany (États-Unis).

Worthen, A. H., directeur du *Geological Survey* de l'Illinois (États-Unis).

Whitney, J. D., géologue de l'État, directeur du *Geological Survey* de Californie (États-Unis).

Glaziou, botaniste, directeur du *Passeio publico,* à Rio de Janeiro.

1873 Ladislaõ Netto, botaniste, directeur du Musée impérial de Rio de Janeiro.

De Carvalho (Pedro Alphonso), docteur en médecine, directeur de l'Hôpital de la Miséricorde, à Rio de Janeiro.

Burmeister, H., directeur du Musée national de Buenos-Ayres.

Moreno, F. P., paléontologiste, à Buenos-Ayres.

Areschoug, professeur adjoint à l'université de Lund (Suède).

1874 Winkler, D. C. J., conservateur du Musée de Harlem (Néerlande).

Hayden, géologue de l'État, à Washington.

Van Rysselberghe, aide à l'Observatoire royal, à Bruxelles.

Gegenbauer, professeur à l'université de Heidelberg.

Häckel, professeur à l'université de Iéna.

Waldeyer, professeur à l'université de Strasbourg.

Huxley, professeur à l'école des mines, à Londres.

1875 Mansion, professeur à l'université de Gand.

Michaelis, O., captain, chief of Ordnance, à Saint-Paul, Minn., département de Dakota (États-Unis).

Dewalque, Fr., professeur à l'université de Louvain.

Marie, M., examinateur à l'École polytechnique, à Paris.

Despeyrous, membre de l'Académie des sciences (Toulouse).

Hoüel, membre de l'Académie des sciences (Bordeaux).

Mathieu, Em., membre de l'Académie des sciences (Nancy).

Eymer, professeur à l'université de Tubingue.

De la Valette Saint-George, professeur à l'université de Bonn.

Ray-Lankester, professeur à l'université de Londres.

Packard, professeur à l'université de Salem (États-Unis).

Flemming, W., professeur à l'université de Prague.

Plateau, F., professeur à l'université de Gand.

Römer, F., professeur à l'université de Breslau.

Saporta (Gaston marquis de), correspondant de l'Institut de France, à Aix (France).

1876 Balfour, J. H., professeur de botanique à l'université d'Édimbourg.

Balfour, Th. G. H., membre de la Société royale, à Londres.

1877 Mac Lachlan, Rob., membre de la Société entomologique, à Londres.

Tissandier, Gaston, rédacteur du journal *la Nature,* à Paris.

1878 Hertwig, B., professeur à l'université de Königsberg.

Strasburger, professeur à l'université de Iéna.

Bluntschli, professeur à l'université de Heidelberg.

Brongniart, Charles, à Paris.

1879 Wetterby, professeur à l'université de Cincinnati.

Sylvester, professeur à l'université de Baltimore.

Czuber, professeur, à Prague.

1880 Cremona, directeur de l'École d'application, à Rome.

Weyr, Ém., professeur à l'université de Vienne (Autriche).

Ibanez, général, directeur de l'Institut cartographique, à Madrid.

Bolivar, I., professeur, à Madrid.

Ritsema, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Leyde.

Renard, conservateur au Musée royal d'histoire naturelle, à Bruxelles.

Studnička, F., professeur de mathématiques à l'université de Prague.

Genocchi, membre de l'Académie de Turin.

Van der Mensbrugge, professeur à l'université de Gand.

Liagre, général, secrétaire perpétuel de l'Académie royale des sciences, etc., de Bruxelles.

De Tilly, J., major, membre de l'Académie de Belgique.

Villarceaux, membre de l'Institut, à Paris.

Puiseux, membre de l'Institut, à Paris.

Bonnet, membre de l'Institut, à Paris.

1881 Sébert, colonel d'artillerie de la marine française, à Paris.

Angot, A., attaché au bureau central météorologique de France, à Paris.

1881 Wiedemann, G., professeur à l'université de Leipzig.
Planté, G., à Paris.
Kohlrausch, directeur de l'Institut physique de Wurzbourg.
Quincke, professeur de physique, à Heidelberg.
Rey Axel, professeur à l'École de médecine de Stockholm.
Retzius, G., professeur à l'École de médecine de Stockholm.
Giordano, inspecteur du corps des mines, à Rome.
Meneghini, professeur à l'université de Pise.
Guiscardi, professeur à l'université de Naples.
Taramelli, professeur à l'université de Pavie.
Laisant, député, à Paris.
Beltrami, professeur à l'université de Pavie.
Gestro, Dr R., conservateur au Musée d'histoire naturelle de Gênes.
Salvadori (comte Th.), professeur à l'université de Turin.
1882 Mascart, professeur au Collège de France.
Bouniakowski, membre de l'Académie des sciences, à Saint-Pétersbourg.
1883 Hull, Eduard, directeur du *Geological Survey* d'Irlande.
Sandberger, Fridolin, professeur à l'université de Wurzbourg.
Breithof, N., professeur à l'université de Louvain.
Mittag-Leffler, G., professeur à l'université de Stockholm.
Gomès Teixeira, F., professeur à l'université de Coïmbre.

LISTE

DES

SOCIÉTÉS SAVANTES, REVUES, ETC.,

AVEC LESQUELLES

LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES DE LIÈGE

échange ses publications.

BELGIQUE.

Bruxelles. — *Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.*
Observatoire royal.
Société entomologique de Belgique.
Société malacologique de Belgique.
Société royale belge de géographie.
Société belge de microscopie.

Liège. — *Société géologique.*

Mons. — *Société des sciences, des lettres et des beaux-arts du Hainaut.*

ALLEMAGNE.

Berlin. — *Königliche Akademie der Wissenschaften.*
Deutsche Geologische Gesellschaft.
Entomologischer Verein.
Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.

Bonn. — *Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westphalens.*

Breslau. — *Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.*

Colmar. — *Société d'histoire naturelle.*

Erlangen. — *Physikalisch-medicinische Societät.*

Francfort. — *Senckenbergische naturwissenschaftliche Gesellschaft.*

Fribourg. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Giessen. — *Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.*

Görlitz. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften.

Göttingue. — *Königliche Gesellschaft der Wissenschaften und Georg-August-Universität.*

Halle. — *Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen.*
Naturforschende Gesellschaft.
Kaiserliche Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.

Kiel. — *Naturwissenschaftlicher Verein.*

Königsberg. — *Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.*

Landshut. — *Botanischer Verein.*

Leipzig. — *Naturforschende Gesellschaft.*

Metz. — *Académie des lettres, sciences, arts et agriculture.*

Munich. — *Königlich Bayerische Akademie der Wissenschaften.*
Königliche Sternwarte.

Munster. — *Westfälischer Provincial-Verein für Wissenschaften und Kunst.*

Offenbach. — *Offenbacher Verein für Naturkunde.*

Stettin. — *Entomologischer Verein.*

Stuttgart. — *Verein für vaterländische Naturkunde in Würtemberg.*

Wiesbaden. — *Nassauischer Verein für Naturkunde.*

Wurzbourg. — *Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.*

Zwickau. — *Verein für Naturkunde.*

AUTRICHE-HONGRIE.

Hermannstadt. — *Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften.*

Innspruck. — *Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein.*

Prague. — *Königlich böhmische Gesellschaft der Wissenschaften*
Kaiserlich-Königliche Sternwarte.

Vienne. — *Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.*
Kaiserlich-Königliche zoologisch-botanische Gesellschaft.
Kaiserlich-Königliche geologische Reichsanstalt.

ESPAGNE.

Madrid. — *Real Academiu de Ciencias.*

FRANCE.

Béziers. — *Société d'étude des sciences naturelles.*

Bordeaux. — *Académie des sciences, belles-lettres et arts.*
Société linnéenne.
Société des sciences physiques et naturelles.

Caen. — *Société linnéenne de Normandie.*

Cherbourg. — *Société des sciences naturelles.*

Dijon. — *Académie des sciences.*

Lille. — *Société des sciences, de l'agriculture et des arts.*

Lyon. — *Académie des sciences.*
Société d'agriculture.
Société linnéenne.

Montpellier. — *Académie des sciences et lettres.*

Nancy. — *Société des sciences (ancienne Société des sciences naturelles de Strasbourg).*

Paris. — *Société géologique de France.*
Société Philomatique.
Muséum d'histoire naturelle.

Rouen. — *Société des amis des sciences naturelles.*
Académie des sciences.

Toulouse. — *Académie des sciences.*
Societé des sciences physiques et naturelles.

Troyes. — *Société académique de l'Aube.*

Agen. — *Société d'agriculture, sciences et arts.*

GRANDE-BRETAGNE ET IRLANDE.

Dublin. — *Royal Irish Academy.*
Natural history Society.

Édimbourg. — *Geological Society.*

Londres. — *Geological Society.*
Linnean Society.
Royal Society.

Glasgow. — *Geological Society.*
Natural history Society.
Philosophical Society.

Manchester. — *Litterary and philosophical Society.*

ITALIE.

Bologne. — *Accademia delle Scienze.*

Catane. — *Accademia gioenia di scienze naturali.*

Gênes. — *Osservatorio della R. Universita.*

Modène. — *Societa dei naturalisti.*

Naples. — *Societa Reale.*

Palerme. — *Istituto tecnico.*
Societa di scienze naturali e economiche.

Pise. — *Societa di scienze naturali.*

Rome. — *Bullettino di bibliografia delle scienze matematiche,* publié par le prince B. Boncompagni.
Reale Accademia dei Lincei.
Accademia pontificia de' Nuovi Lincei.
R. Comitato geologico d'Italia.

LUXEMBOURG.

Luxembourg. — *Institut royal grand-ducal, section des sciences naturelles et mathématiques.*

NÉERLANDE.

Amsterdam. — *Koninklijke Academie van wetenschappen.*

Harlem. — *Société hollandaise des sciences.*

Musée Teyler.

Rotterdam. — *Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke wijsbegeerte.*

PORTUGAL.

Coïmbre. — *Journal des sciences mathématiques et astronomiques,* rédacteur : M. Gomès Teixeira.

Lisbonne. — *Académie des sciences.*

RUSSIE.

Helsingfors. — *Société des sciences de Finlande.*

Moscou. — *Société impériale des naturalistes.*

Saint-Pétersbourg. — *Académie impériale des sciences.*

Société d'archéologie et de numismatique.

Société entomologique.

Société impériale de minéralogie.

SUÈDE ET NORWÈGE.

Bergen. — *Museum.*

Christiania. — *Kongelige Frederiks Universitet.*

Stockholm. — *Académie royale des sciences.*

Nordist medicinskt Arkiv, directeur : Dr Axel Key.

Entomologiska föreningen.

Acta mathematica, rédacteur : M. Mittag-Leffler.

SUISSE.

—

Berne. — *Naturforschende Gesellschaft.*
Société helvétique des sciences naturelles.

Neuchâtel. — *Societé des sciences naturelles.*

Schafhouse. — *Naturforschende Gesellschaft.*

AMÉRIQUE.

—

ÉTATS-UNIS.

American Association for advancement of sciences.

Baltimore. — *American Journal of mathematics.*
Johns Hopkins University : Circulars.

Boston. — *American Academy of arts and sciences.*
Society of natural History.

Cambridge. — *Museum of comparative zoology.*

Columbus. — *Ohio State agricultural Society.*

Madison. — *Wisconsin Academy of sciences, letters and arts.*

New-Haven. — *Connecticut Academy of arts and sciences.*

Newport. — *Orleans County Society of natural sciences.*

New-York. — *Academy of sciences.*

Philadelphie. — *Academy of natural sciences.*
American philosophical Society.
Wagner Free Institute of sciences.

Portland. — *Natural History Society.*

Salem. — *The American Naturalist.*
Essex Institute.
Peabody Academy of sciences.

San-Francisco. — *Californian Academy of sciences.*

Washington. — *Smithsonian Institution.*

GUATEMALA.

Guatemala. — *Sociedad economica.*

RÉPUBLIQUE ARGENTINE.

Buenos-Ayres. — *Universidad.*

ASIE.

INDES ANGLAISES.

Calcutta. — *Asiatic Society of Bengal.*

INDES HOLLANDAISES.

Batavia. — *Koninklijke natuurkundige vereeniging in Nederlandsch Indië.*

AUSTRALIE.

Hobart-Town. — *Tasmanian Society of natural sciences.*

Melbourne. — *Observatoire.*

Sydney. — *Linnean Society.*

PROBLÈMES

ET

THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE;

PAR

Eugène CATALAN.

PROBLÈMES

ET

THÉORÈMES D'ARITHMÉTIQUE.

1. Problème I. *De* 1 *à* n (inclusivement), *combien y a-t-il de nombres non divisibles par des nombres premiers donnés,* $\beta, \gamma, \ldots \pi$?

Soit N le nombre cherché. On sait * que

$$N = n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right) + \cdots \quad . \quad . \quad (1)$$

Dans cette formule, le symbole $\left(\frac{n}{a}\right)$ représente *le plus grand nombre entier contenu dans* $\frac{n}{a}$ **.

2. Théorème I. *Soit* n *un nombre entier, compris entre* 2^k *et*

* *Mélanges mathématiques*, p. 133. — *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales,* juillet 1882; etc.

** Il a la même signification que celui de Legendre : $E\left(\frac{n}{a}\right)$.

$2^{k+1}-1$ (inclusivement); *soient* $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ *les nombres premiers, supérieurs à* 2. *On a*

$$n-\sum\left(\frac{n}{\beta}\right)+\sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right)-\sum\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right)+\cdots=k+1\,.\quad .\ (2)^{*}$$

Dans la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots n,$$

les seuls nombres premiers avec

$$\beta=3,\quad \gamma=5,\quad \delta=7,\ldots$$

sont

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ldots 2^k.$$

Ainsi, $N=k+1$.

3. *Remarque*. De $n=4$ à $n=14$, le premier membre se réduit à $n-\sum\left(\frac{n}{\beta}\right)$;

De $n=15$ à $n=104$ **, ce premier membre se réduit à

$$n-\sum\left(\frac{n}{\beta}\right)+\sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right);$$

et ainsi de suite.

4. Problème II. *Connaissant les nombres premiers qui ne surpassent pas* n; *trouver combien il y a de nombres premiers, compris entre* n + 1 *et* $2n$.

Soit π le plus grand nombre premier, non supérieur à n. De 1 à $2n$, les nombres non divisibles par

$$\beta=3,\quad \gamma=5,\quad \delta=7,\ldots \pi,$$

sont, d'une part,

$$1,\ 2,\ 2^2,\ldots 2^{k+1};$$

* L'égalité (2), à peu près évidente, est une simple variante de celle-ci :

$$n-\Sigma\left(\frac{\alpha}{n}\right)+\Sigma\left(\frac{n}{\alpha\beta}\right)-\Sigma\left(\frac{n}{\alpha\beta\gamma}\right)+\cdots=1,$$

qu'on trouve à la page 134 des *Mélanges*.

** $15=3.5,\quad 104=3.5.7-1$.

et, en second lieu, les nombres premiers compris entre $n+1$ et $2n$. Soit x la *quotité* * de ceux-ci. Nous avons, en vertu de l'égalité (2) :

$$k+2+x=2n-\sum\left(\frac{2n}{\beta}\right)+\sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)-\sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma\delta}\right)+\cdots \quad (3)$$

5. Application. *Entre 25 et 50, combien y a-t-il de nombres premiers?*

Dans cet exemple,

$$n=25,\quad 2n=50,\quad k=4.$$

En outre, les diviseurs *simples* sont :

$$3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23;$$

et les diviseurs *composés :*

$$15,\ 21,\ 33,\ 39,\ 35.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}6+x=50&-[16+10+7+4+3+2+2+2]\\&+[3+2+1+1+1];\end{aligned}$$

d'où

$$x=6.$$

En effet, entre 25 et 50, il y a *six* nombres premiers; savoir :

$$29,\ 31,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47.$$

6. *Remarque.* La combinaison des égalités (2), (3) donne celle-ci :

$$\left.\begin{aligned}k-x=\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta}\right)-2\left(\frac{n}{\beta}\right)\right]-\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)-2\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right)\right]\\+\sum\left[\left(\frac{2n}{\beta\gamma\delta}\right)-2\left(\frac{n}{\beta\gamma\delta}\right)\right]-\cdots\end{aligned}\right\}\quad (4)$$

Pour simplifier le second membre, on peut s'appuyer sur la proposition suivante.

* J'emploie ce mot pour éviter l'expression : *nombre des nombres.*

7. LEMME. *Selon que* $\left(\frac{2n}{a}\right)$ *est* PAIR *ou* IMPAIR,

$$\left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right)$$

égale zéro ou un.

1° De

$$2n = a.2\mu + r,$$

on déduit

$$n = a\mu + \frac{2}{r}.$$

Donc, à cause de $r < a$, μ *est le quotient entier de* n *par* a *. Autrement dit :

$$\left(\frac{2n}{a}\right) = 2\mu = 2\left(\frac{n}{a}\right), \quad \left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right) = 0.$$

2° Soit

$$2n = a(2\mu + 1) + r;$$

et, par conséquent,

$$n = a\mu + \frac{a + r}{2}.$$

De $r < a$, on conclut $\frac{a+r}{2} < a$: μ *est le quotient entier de* n *par* a. Nous avons donc, simultanément :

$$\left(\frac{2n}{a}\right) = 2\mu + 1, \quad \left(\frac{n}{a}\right) = \mu, \quad \left(\frac{2n}{a}\right) - 2\left(\frac{n}{a}\right) = 1.$$

8. Revenons à la formule (4). En vertu du Lemme, *chacun des binômes* soumis au signe Σ *égale* 0 *ou* 1, *selon que son premier terme est pair ou impair.*

D'après cela, si l'on appelle :

I_1, *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta}\right)$, *qui sont impairs ;*

I_2, *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)$, *qui sont impairs ;*

. . . .

l'égalité (4) peut être énoncée ainsi :

* Ce petit théorème se trouve dans tous les Traités d'arithmétique.

THÉORÈME II. *En conservant les hypothèses et les dénominations précédentes, on a*

$$x = k - l_1 + l_2 - l_3 + \cdots \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (A)$$

9. Application. *Entre* 25 *et* 50, *combien y a-t-il de nombres premiers?*

Je divise

$$50$$

par

$$\begin{array}{cccccccc} 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23; \\ & & + & & + & & & \end{array}$$

puis par

$$\begin{array}{ccccc} 15, & 21, & 33, & 39, & 35, \\ + & & + & + & + \end{array}$$

en négligeant les quotients pairs.

Je trouve $l_1 = 2$, $l_2 = 4$; donc

$$x = 4 - 2 + 4 = 6;$$

comme ci-dessus.

10. Autre application. *De* 61 *à* 120, *combien y a-t-il de nombres premiers?*

$$n = 60, \quad k = 5.$$

Dividende :

$$120.$$

Premiers diviseurs :

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23, & 29, & 31, & 37, & 41, & 43, & 47, & 53, & 59 \\ & & + & & + & + & & + & & + & + & & & & & \end{array} \qquad l_1 = 6.$$

Deuxièmes diviseurs :

$$\begin{array}{cccccccccccccc} 15, & 21, & 33, & 39, & 51, & 57, & 69, & 87, & 93, & 111, & 35, & 55, & 65, & 85, \\ & + & + & + & & & + & + & + & + & + & & + & + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 95, & 115, & 77, & 91, & 119 \\ + & + & + & + & + \end{array} \qquad l_2 = 15.$$

Troisièmes diviseurs :

$$\begin{array}{c} 105 \\ + \end{array} \qquad l_3 = 1.$$

$$x = 5 - 6 + 16 - 1 = 13.$$

Les *treize* nombres premiers, compris entre 61 et 120 (inclusivement), sont

61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.

11. *Remarque.* Si l'on admet qu'*entre* n + 1 *et* 2n, *il y a, au moins, un nombre premier* *, l'égalité (A) donne

$$k - l_1 + l_2 - l_3 + \cdots \geqq 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Inversement, si l'on pouvait, *a priori*, établir la relation (B), le *postulatum* serait démontré **.

12. Théorème III. n *étant toujours un nombre entier, compris entre* 2^k *et* $2^{k+1} - 1$*, soient* $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ *les nombres premiers, supérieurs à* 2. *Soient, en outre :*

λ_1 *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta}\right)$, *qui sont impairs ;*

λ_2 *le nombre de ceux, des quotients* $\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right)$, *qui sont impairs ;*

. . . .

On a

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \cdots = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

Ce théorème, conséquence des égalités

$$n - \sum\left(\frac{n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{n}{\beta\gamma}\right) - \cdots = k + 1, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$2n - \sum\left(\frac{2n}{\beta}\right) + \sum\left(\frac{2n}{\beta\gamma}\right) - \cdots = k + 2, \quad . \quad . \quad (2') \text{***}$$

résulte aussi du Théorème II.

* Cette proposition ne diffère pas, au fond, du *postulatum* de M. Bertrand, démontré par M. Tchebychev (*Journal de Liouville,* t. XVII, p. 381).

** *Nouvelle Correspondance mathématique,* t. VI, p. 263.

*** Voyez les paragraphes 6 et 8.

Soient, en effet, $\rho, \sigma, \theta, \ldots \omega$ les x nombres premiers, compris entre $n+1$ et $2n$.

Chacun des quotients $\left(\frac{2n}{\rho}\right), \left(\frac{2n}{\sigma}\right), \left(\frac{2n}{\theta}\right), \cdots$ égale 1; et chacun des quotients $\left(\frac{2n}{\beta\rho}\right), \left(\frac{2n}{\rho\sigma}\right), \cdots$ *est nul* *. Donc

$$\lambda_1 = l_1 + x, \quad \lambda_2 = l_2, \quad \lambda_3 = l_3, \ldots$$

Par suite, l'égalité (A) devient

$$x = k - (\lambda_1 - x) + \lambda_2 - \lambda_3 + \cdots,$$

ou

$$\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \cdots = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

13. Application. $n = 25$, $k = 4$.

Dividende :

50.

Premiers diviseurs :

3,	5,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29,	31,	37,	41,	43,	47	
		+		+				+	+	+	+	+	+	$\lambda_1 = 8.$

Deuxièmes diviseurs :

15,	21,	33,	39,	35.	
+		+	+	+	$\lambda_2 = 4$

$$8 - 4 = 4.$$

14. *Remarque.* La fonction qui constitue le premier membre de l'égalité (C) dépend, *uniquement*, de n : appelons-la F (n). *Cette fonction conserve la même valeur quand* n *varie entre* 2^k *et* $2^{k+1} - 1$ (inclusivement). En outre, *chaque fois que* n *dépasse une nouvelle puissance de* 2, F (n) *augmente d'une unité.* Cet exemple de discontinuité, analogue à celui que présente la fonction E (x), nous paraît remarquable.

15. *Sur une équation indéterminée.* L'identité

$$(\alpha+\beta)^2(\alpha-2\beta)^2(\beta-2\alpha)^2 + 27\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^2 = 4(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^3, \quad (D)$$

* A cause de $\beta > 2$, $\rho > n$.

facile à vérifier, donne une infinité de solutions, en nombres entiers, de

$$x^2 + 3y^2 = z^3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (5)$$

En effet, on peut prendre

$$x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)(\beta-2\alpha), \quad y = \frac{3}{2}\alpha\beta(\alpha-\beta), \quad z = \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2. \ (6)$$

Ces valeurs seront entières, si α, β sont de *même parité*.

16. *Remarque.* Ces formules ne donnent pas toutes les solutions. Par exemple, on n'en saurait déduire

$$x = y = z = 4.$$

17. *Autres identités.*

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)^4 &= (a^4 - 6a^2b^2 + b^4)^2 + \left[4(a^2 - b^2)ab\right]^2 \\ &= (a^4 + b^4)^2 + (2a^3b)^2 + (2a^2b^2)^2 + (2ab^3)^2. \quad . \quad . \quad (E)\end{aligned}$$

Ainsi, $(a^2 + b^2)^4$ *est : un carré; une somme de deux carrés; une somme de quatre carrés.* Généralement, ce nombre n'est pas la somme de trois carrés.

Liège, 14 janvier 1882.

M. Realis, à qui j'avais communiqué les identités (D), (E), m'a répondu par l'intéressante Note suivante :

La résolution de l'équation

$$x^2 + 3y^2 = z^3,$$

en nombres entiers, se rattache directement à la théorie générale développée par Lagrange dans le § IX des *Additions à l'Analyse indéterminée d'Euler.*

Le nombre z, diviseur du premier membre, ne peut être que de la forme $\alpha^2 + 3\beta^2$; on a donc l'identité

$$\alpha^2(\alpha^2 - 9\beta^2)^2 + 3\beta^2(3\alpha^2 - 3\beta^2)^2 = (\alpha^2 + 3\beta^2)^3,$$

renfermant toutes les solutions entières de l'équation. En effet, à toute valeur de z de la forme indiquée, c'est-à-dire à tout système de valeurs de α et β, correspondra un système de valeurs de x et y; comme α et β peuvent toujours être supposés premiers entre eux, autant il y aura de manières de représenter z par la forme susdite, autant il y aura (pour le z considéré) de solutions distinctes de l'équation. On s'assure sans peine, d'ailleurs, que l'identité ci-dessus, où α et β restent indéterminés, ne saurait être remplacée par aucune autre formule donnant l'expression de $(\alpha^2+3\beta^2)^3$ sous la forme requise.

Quant à l'égalité $4^2+3.4^2=4^3$, où 4^2 est facteur commun à tous les termes, elle ne conduit pas à une solution, car en écrivant, comme on doit le faire $1^2+3.1^2=4.1^3$, on n'a pas un cube dans le second membre.

Quant, enfin, à l'identité

$$(\alpha+\beta)^2(\alpha-2\beta)^2(\beta-2\alpha)^3+27\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^2=4(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)^3,$$

rapportée par M. Catalan, elle n'est manifestement qu'une transformée de celle qui précède.

II. L'expression $(a^2+b^2)^4$ est assurément : un carré, — une somme de deux carrés, — une somme de quatre carrés. On ne peut pas affirmer qu'elle est généralement une somme de trois carrés effectifs, puisque $(1^2+1^2)^4=16$, par exemple, ne l'est pas. Cependant, pour des nombres a, b premiers entre eux (ou simplement inégaux), on peut mettre en évidence, par des formules, que l'expression considérée est toujours une somme de trois carrés.

1° Si a et b sont premiers avec 3, posons l'identité

$$a^2+(a+3h)^2=(a+h)^2+(a+2h)^2+(2h)^2, \text{ *}$$

* Lettre de M. Catalan à D. B. Boncompagni, en date de « Liége, 14 novembre 1880 ».

dans laquelle on prendra a premier avec h; il s'en déduit, par l'emploi répété de la formule connue

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 + (2\alpha\gamma)^2 + (2\beta\gamma)^2,$$

le théorème général exprimé par la relation

$$\left[a^2 + (a + 3h)^2\right]^m = A^2 + B^2 + C^2,$$

où A, B, C sont des entiers dont aucun n'est nul, et m est une puissance de 2.

Il s'ensuit, comme corollaire, que : a et b étant deux entiers, dont un seul est divisible par 3, et m désignant une puissance de 2, l'expression $\left[2(a^2 + b^2)\right]^m$ est la somme de trois carrés.

2° Si l'un des nombres a, b, premiers entre eux, est un multiple de 3, par exemple, $a = 3a'$, on pose l'identité

$$(9a'^2 + b^2)^2 = (7a'^2 - b^2)^2 + 16a'^2(a' + b)^2 + 16a'^2(a' - b)^2,$$

et l'on en déduit, comme ci-dessus, la relation

$$(9a'^2 + b^2)^m = A^2 + B^2 + C^2,$$

en nombres entiers, m étant une puissance de 2.

Observation. Tout ce qui précède est entièrement indépendant de la *Théorie des nombres* proprement dite; on n'y fait usage que de formules directes, exprimant les propositions, et indiquant en même temps les calculs à effectuer. Mais si l'on sort des éléments, et que l'on s'appuie sur les théorèmes de l'arithmétique supérieure, toutes les propositions énoncées, et bien d'autres, se présentent comme des conséquences immédiates de ce principe, que : *tout bicarré impair, autre que l'unité, est la somme de trois carrés*. D'après ce principe (qui ne se démontre pas à l'aide de simples identités algébriques), *un nombre de la forme* $(a^2 + b^2)^4$ *est toujours décomposable en trois carrés, s'il ne se réduit pas à une puissance de* 2.

Turin, 6 mars 1882.

ESSAIS

DE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE DU TROISIÈME ORDRE;

PAR

M. C. LE PAIGE,

MEMBRE DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES.

INTRODUCTION.

Nous avons essayé, dans le travail actuel, de résumer et de présenter, dans un ordre logique, les recherches que nous avons entreprises, depuis plusieurs années déjà, sur les théories fondamentales de la Géométrie supérieure. Nous croyons utile de dire quelques mots des différents points qui sont développés dans notre mémoire.

Steiner, dans son immortel ouvrage, a fondé toute la Géométrie supérieure sur la notion de la projectivité ou des séries homographiques; il en a déduit la théorie de l'involution et du rapport anharmonique. Nous avons cru que cet ordre est le véritable et nous nous sommes efforcé de le suivre, en étendant l'objet sur lequel nos recherches ont porté.

Le fondement de la théorie des séries homographiques est la conception des séries d'éléments dont chaque groupe est déterminé par un, deux, ... éléments des différentes séries. Ce sont les figures fondamentales, ou les groupes que les géomètres allemands appellent parfois (α, β, γ,...) *deutig*.

Nous pensons avoir fait faire quelques progrès à cette théorie.

Au point de vue de l'algèbre moderne, les points développés jusqu'ici sont peu nombreux.

En effet, à part la théorie générale, et, par cela même, un peu vague, des formes à plusieurs séries de variables, les seules parties, traitées dans tous leurs détails, sont la théorie des formes bilinéaires, à un nombre quelconque de variables, qui ont fait l'objet des travaux profonds de MM. Weierstrass, Kronecker, Christoffel, Frobenius, etc., et la théorie des formes doublement quadratiques, étudiées par Clebsch, d'une manière sommaire, et plus complètement, depuis lors, par MM. Capelli, Zeuthen, etc. M. Schubert s'est, de son côté, occupé des séries linéo-quadratiques (*ein-zweideutig*) et trilinéaires, mais par des considérations plus géométriques.

Nous avons traité des formes trilinéaires, du système de deux formes trilinéaires, des formes quadrilinéaires. Les deux premiers sujets d'étude offrent une application directe dans le travail que nous avons l'honneur de présenter à la Société, puisqu'ils correspondent aux homographies du troisième ordre; le troisième s'y rattache intimement à cause de l'analogie qu'il présente avec la théorie de deux formes trilinéaires (*).

En particularisant les formes algébriques, ou en considérant des éléments situés sur un même support et symétriques, on est conduit aux involutions d'ordre n et de rang k.

Nous nous sommes borné aux involutions cubiques afin de pouvoir les traiter d'une manière plus complète.

Au surplus, nous pensons qu'il est avantageux de procéder graduellement, puisque les résultats obtenus pour le troisième ordre, doivent servir pour les ordres supérieurs.

D'ailleurs, on verra facilement que les méthodes employées

(*) Nos recherches sur les formes à plusieurs séries de variables ont été publiées dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3me série, t. II, p. 40; *C. R.*, t. XCII, pp. 1048 et 1103; t. XCIII, pp. 264 et 309; t. XCIV, pp. 31, 69 et 424; *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei*, t. XXXIV et XXXV; *Atti della R. Accademia di Torino*, t. XVII.

sont, la plupart du temps, applicables aux formes d'ordres quelconques, ou, tout au moins, d'ordres impairs.

Ces involutions ont été conçues par Poncelet, mais à part l'involution du premier rang, cet illustre géomètre s'est borné, sur ce sujet, à des vues générales.

Après lui, M. de Jonquières a publié un mémoire sur le même sujet, restreint toujours au premier rang; M. Cremona, auquel la géométrie est redevable de si beaux travaux, l'a traité également dans son *Introduction à une théorie géométrique des courbes planes.*

Notre savant confrère, M. Folie, en retrouvant, de son côté, les théories de Poncelet, les a appliquées aux courbes et aux surfaces supérieures et en a tiré de remarquables résultats (1872).

Presque vers la même époque, M. Em. Weyr publiait divers travaux sur l'involution (*).

Jusque-là tous les efforts s'étaient bornés aux involutions du premier rang.

Nous croyons avoir été l'un des premiers à aborder l'étude des involutions des rangs supérieurs.

M. Em. Weyr, dans ses travaux de géométrie, avait d'ailleurs été amené à étudier ces involutions à peu près à la même époque, et son remarquable travail sur cette question (**) a suivi de peu de temps la publication de notre *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie.*

(*) Comme nous n'avons pas la prétention d'écrire une histoire de l'involution, on nous pardonnera de ne point citer tous les géomètres, comme Hesse, Clebsch, MM. Appel, Battaglini, Cayley, Darboux, Laguerre, Rosanes, P. Serret, etc., qui ont traité des sujets particuliers se rapportant à cette théorie.

(**) *Ueber Involutionen n^{ter} Grades und k^{ter} Stufe*, Sitzb. der Kais. Akad. in Wien, avril 1879.

Pour ne pas multiplier les synonymes, si fâcheux dans toutes les branches des sciences, nous avons, en général, adopté la terminologie de M. Weyr et abandonné les dénominations différentes que nous avons employées avant la publication de ses travaux.

Préoccupé avant tout, comme nous l'étions, de découvrir les extensions analytiques des théories si connues et si fécondes, employées pour le second ordre, nous avions recherché l'analogue du rapport anharmonique. Les invariants élémentaires, qui lui correspondent, s'étaient présentés à nous, au moins pour le troisième ordre, dès 1877. Néanmoins, nous n'en avions fait aucune application purement géométrique, de quelque importance, à l'époque où M. Folie nous communiqua ses travaux sur ce sujet (octobre 1877).

Cette découverte complétait l'analogie entre les ordres supérieurs et le second ordre.

Depuis lors nous avons traité cette question, d'une manière plus approfondie au point de vue analytique: nos recherches ont été consignées dans le travail que nous avons publié en commun avec M. Folie, et que l'Académie a bien voulu faire imprimer dans ses *Mémoires*.

Nous y montrons, de plus, comment cette notion découle, en quelque sorte forcément, de la théorie de l'involution, et cette démonstration justifie l'ordre que nous avons adopté dans le présent travail et dans le mémoire que nous venons de citer, puisque, parti de la conception fondamentale des homographies, nous sommes conduit, pas à pas, à l'involution et au rapport anharmonique.

Pour compléter cet ensemble de recherches, nous avons rattaché, à l'involution, la théorie des points conjugués harmoniques et des groupes polaires.

De cette façon, il n'est pas un point fondamental des théories du second ordre qui n'ait son analogue pour les ordres supérieurs.

Dans cette introduction, nous avons été amené à parler, peut-être plus qu'il ne conviendrait, de nos propres travaux; peut-être y avons-nous attaché une importance trop grande : ce qui nous rassure un peu, c'est l'accueil bienveillant qu'un illustre géomètre, l'auteur de tant de découvertes profondes sur la théorie des formes, sur celle des fonctions et notamment des fonctions elliptiques et abéliennes, a bien voulu faire à nos travaux sur les formes à plusieurs séries de variables, fondement des applications que nous venons d'esquisser rapidement.

Une considération encore nous a engagé à faire cet exposé succinct, c'est le désir de montrer ce qui revient à la Belgique dans le développement de cette partie de la Géométrie. L'Université de Liège, notamment, peut revendiquer, à bon droit, une partie de ces progrès. Il nous suffira de mentionner les travaux si remarquables de Brasseur, pour ne parler que des maîtres qui ne sont plus. L'influence de ce géomètre éminent n'a pas cessé de se faire sentir parmi nous; nous serions heureux, pour notre part, si nous pouvions espérer de continuer, dans la mesure de nos forces, à conserver cette tradition et à faire progresser, si peu que ce soit, l'étude de la Géométrie supérieure.

Liège, le 18 avril 1882.

ESSAIS

DE

GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE DU TROISIÈME ORDRE.

CHAPITRE PREMIER.

HOMOGRAPHIES DU TROISIÈME ORDRE.

§ 1.

Définition. — *Si sur trois droites (ou sur trois supports unicursaux), nous prenons des points tels que deux d'entre eux étant donnés sur deux droites, il ne corresponde, à ces deux points, qu'un seul point sur la troisième, nous dirons que ces trois séries de points appartiennent à une homographie du troisième ordre et du second rang* (*).

Nous représenterons une telle homographie par la notation H_2^3.

Trois points appartenant à un même groupe seront dit *homologues*.

Si nous convenons que chaque point soit représenté par les

(*) A. F. A., p. 17. Nous désignerons, dans ce qui va suivre, par cette abréviation, notre *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie.*

coordonnées homogènes x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2, il est visible que l'homographie H_2^3 peut être définie par l'équation

$$f = a_x a'_y a''_z = b_x b'_y b''_z = \cdots = 0, \tag{1}$$

où nous posons

$$a_i a'_k a''_l = b_i b'_k b''_l = \cdots = a_{ikl};$$

de façon que, sous forme explicite, l'équation (1) devient :

$$f \equiv a_{111}x_1y_1z_1 + a_{112}x_1y_1z_2 + a_{121}x_1y_2z_1 + a_{211}x_2y_1z_1 + a_{122}x_1y_2z_2 + a_{212}x_2y_1z_2 + a_{221}x_2y_2z_1 + a_{222}x_2y_2z_2 = 0. \tag{2}$$

De la forme même de cette équation, il résulte :

THÉORÈME I. — *Une homographie du troisième ordre et du second rang est définie par sept ternes de points homologues.*

Le théorème énoncé est, en quelque sorte, évident, car la connaissance de sept ternes de points homologues donnera sept équations linéaires qui permettront de déterminer les sept rapports $\frac{a_{ikl}}{a_{111}}$.

On en déduit qu'il existe une relation entre huit ternes de points homologues.

Pour arriver à l'expression de cette relation, représentons par x_{i1}, x_{i2}; y_{i1}, y_{i2}; z_{i1}, z_{i2}, les coordonnées des points d'un groupe.

Alors d'après (2), nous aurons

$$\sum_{p=1}^{p=2} \sum_{q=1}^{q=2} \sum_{r=1}^{r=2} a_{pqr} x_{ip} y_{iq} z_{ir} = 0, \; i = 1, 2, \cdots 8.$$

Ces huit équations linéaires étant vérifiées en même temps, par rapport aux inconnues a_{pqr}, on a

$$D = \Sigma \pm [x_{11}y_{11}z_{11} \cdot x_{21}y_{21}z_{22} \cdot x_{31}y_{32}z_{31} \cdots x_{82}y_{82}z_{82}] = 0.$$

Donc

Théorème II. — *Lorsque huit ternes de points appartiennent à une homographie du troisième ordre et du second rang, il existe entre leurs coordonnées la relation* $D = 0$.

La multiplication du déterminant D, par un autre déterminant de même forme, va nous conduire à une seconde expression, excessivement simple, de cette relation.

Soit

$$D' = \Sigma \pm [(X_{12}Y_{12}Z_{12})(-X_{22}Y_{22}Z_{21})(-X_{32}Y_{31}Z_{32}) \cdots (-X_{81}Y_{81}Z_{81})],$$

les quantités X_{i1}, X_{i2}; Y_{i1}, Y_{i2}; Z_{i1}, Z_{i2}, étant absolument quelconques, de telle sorte que D′ est, en général, différent de zéro.

D'après cette forme de D′, il est visible que le terme général du produit DD′ pourra s'écrire

$$(X_{k1}x_{i2} - X_{k2}x_{i1})(Y_{k1}y_{i2} - Y_{k2}y_{i1})(Z_{k1}z_{i2} - Z_{k2}z_{i1}).$$

Représentant ce produit par u_{ki}, on aura

$$DD' = \Sigma \pm [u_{11}u_{22}u_{33} \cdots u_{88}] = 0 \tag{3}$$

Cette égalité entraîne la suivante :

$$\lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{12} + \lambda_3 u_{13} + \lambda_{11} u_{14} + - + \lambda_8 u_{18} \equiv 0,$$

ou bien, sous forme plus explicite :

$$\sum_{i=1}^{i=8} p_i (X_1x_{i2} - X_2x_{i1})(Y_1y_{i2} - Y_2y_{i1})(Z_1z_{i2} - Z_2z_{i1}) \equiv 0 \tag{4}$$

Nous avons supprimé les premiers indices des X, Y, Z, puisque ces quantités sont arbitraires.

Il est facile de voir que, réciproquement, l'identité (4) conduit à l'égalité $D = 0$.

En effet, si l'on développe le premier membre de (4), les coefficients des quantités $X_pY_qZ_r$, où p, q, r peuvent prendre les valeurs 1 et 2, sont nuls séparément.

Cette condition nous donne huit équations linéaires, par rapport aux paramètres p_i, équations qui sont vérifiées et dont le déterminant est, par suite, égal à zéro : or ce déterminant n'est autre que D.

Par suite

THÉORÈME III. — *L'homographie du troisième ordre et du second rang peut être caractérisée par l'identité*

$$\sum_1^8 p_i\,(X_1x_{i2} - X_2x_{i1})\,(Y_1y_{i2} - Y_2y_{i1})\,(Z_1z_{i2} - Z_2z_{i1}) \equiv 0,$$

où les quantités X_1, X_2; Y_1, Y_2; Z_1, Z_2 *sont arbitraires.*

De cette identité, on peut déduire un grand nombre de formes de la relation qui existe entre huit ternes de points appartenant à une H_2^3.

Il suffit, en effet, de donner aux X, Y et Z des valeurs particulières qui annulent un certain nombre de termes du premier membre, puis d'écrire que le déterminant des équations en p_i, obtenues de cette façon, est égal à zéro.

L'égalité $f = 0$ peut s'écrire

$$x_1y_1\,[a_{111}z_1 + a_{112}z_2] + x_1y_2\,[a_{121}z_1 + a_{122}z_2] + x_2y_1\,[a_{211}z_1 + a_{212}z_2] + x_2y_2\,[a_{221}z_1 + a_{222}z_2] = 0,$$

et de deux autres manières analogues.

Il en résulte immédiatement :

THÉORÈME IV. — *Dans une homographie* H_2^3, *à un point donné correspond une homographie quadratique.*

Cette même relation peut encore s'écrire

$$x_1\frac{df}{dx_1} + x_2\frac{df}{dx_2} = 0.$$

Par suite, comme nous l'avons dit dans la définition, à un groupe de deux points $\eta\,(y_1, y_2,)$, $\zeta\,(z_1, z_2,)$, il ne correspond, en général, qu'un seul point $\xi\,(x_1, x_2)$.

Cependant, ce point ξ est indéterminé si l'on a, à la fois,

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \frac{df}{dx_2} = 0.$$

Ces deux équations définissent deux homographies quadratiques.

Or, nous savons que deux homographies possèdent, en général, deux couples communs.

Nous avons

$$\frac{df}{dx_1} = y_1 \frac{d^2f}{dx_1dy_1} + y_2 \frac{d^2f}{dx_1dy_2},$$

$$\frac{df}{dx_2} = y_1 \frac{d^2f}{dx_2dy_1} + y_2 \frac{d^2f}{dx_2dy_2}.$$

Par suite, les deux points ζ seront représentés par l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2f}{dx_1dy_1} & \dfrac{d^2f}{dx_1dy_2} \\ \dfrac{d^2f}{dx_2dy_1} & \dfrac{d^2f}{dx_2dy_2} \end{vmatrix} = 0.$$

Comme $f = a_x a'_y a''_z = b_x b'_y b''_z$,

cette équation pourra s'écrire

$$\sigma_2 = (ab)\,(a'b')\,a''_z b''_z = 0.$$

Les deux points η, que l'on doit associer à ces points ζ, seront représentés par

$$\sigma_1 = (ab)\,(a''b'')\,a'_y b'_y = 0.$$

Si l'on veut que le point η soit indéterminé, on trouvera de même que les points ζ et ξ seront représentés par

$$\sigma_2 = (ab)\,(a'b')\,a''_z b''_z = 0,$$

$$\sigma_0 = (a'b')\,(a''b'')\,a_x b_x = 0,$$

ces points devant être convenablement associés.

Ces éléments seront appelés les *éléments neutres* de l'homographie; on voit qu'il en existe deux dans chaque série.

En conséquence :

Théorème V. — *L'homographie du troisième ordre et du second rang possède trois couples d'éléments neutres.*

Nous nous occuperons tantôt des trois formes quadratiques σ_0, σ_1, σ_2.

Si les trois séries homographiques sont distribuées sur une droite, nous pourrons supposer qu'elles soient rapportées aux mêmes origines.

Alors, si dans l'équation $f = 0$, nous posons

$$x_1 = y_1 = z_1,\ x_2 = y_2 = z_2,$$

nous obtenons une équation du troisième degré

$$\varphi_x^3 = 0,$$

qui définit les groupes unis de l'homographie.

Nous arrivons ainsi à la propriété suivante :

Théorème VI. — *Dans trois séries homographiques superposées, il existe trois points triples.*

Il sera utile de développer maintenant la théorie de la forme trilinéaire

$$f = a_x a'_y a''_z = b_x b'_y b''_z = \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

afin d'arriver à d'autres propriétés de l'homographie H_2^3.

Nous venons de signaler les trois covariants (*)

$$\sigma_0 = \sigma_{00} x_1^2 + 2\sigma_{01} x_1 x_2 + \sigma_{02} x_2^2,$$

$$\sigma_1 = \sigma_{10} y_1^2 + 2\sigma_{11} y_1 y_2 + \sigma_{12} y_2^2,$$

$$\sigma_2 = \sigma_{20} z_1^2 + 2\sigma_{21} z_1 z_2 + \sigma_{22} z_2^2.$$

En développant, on trouve

$$\sigma_0 = 2\left[(a_{111}a_{122} - a_{112}a_{121})x_1^2 + (a_{111}a_{222} + a_{211}a_{122} - a_{112}a_{221} - a_{121}a_{212})x_1x_2 \right.$$
$$\left. + (a_{222}a_{211} - a_{221}a_{212})x_2^2\right],$$

$$\sigma_1 = 2\left[(a_{111}a_{212} - a_{112}a_{211})y_1^2 + (a_{111}a_{222} + a_{121}a_{212} - a_{112}a_{221} - a_{211}a_{122})y_1y_2 \right.$$
$$\left. + (a_{222}a_{121} - a_{221}a_{122})y_2^2\right],$$

$$\sigma_2 = 2\left[(a_{111}a_{211} - a_{121}a_{211})z_1^2 + (a_{111}a_{222} + a_{112}a_{221} - a_{121}a_{212} - a_{211}a_{122})z_1z_2 \right.$$
$$\left. + (a_{222}a_{112} - a_{212}a_{122})z_2^2\right].$$

Écrivons, pour abréger,

$$\sigma_0 = 2[px_1^2 + (t + t' - t'' - t''')x_1x_2 + qx_2^2],$$

$$\sigma_1 = 2[p'y_1^2 + (t + t'' - t' - t''')y_1y_2 + q'y_2^2],$$

$$\sigma_2 = 2[p''z_1^2 + (t + t''' - t' - t'')z_1z_2 + q''z_2^2].$$

Si nous représentons par $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$, les discriminants de ces trois formes quadratiques, une vérification facile nous montre que l'on a

$$\Delta_0 = 2[2p'q' + 2p''q'' - (t - t')^2 - (t'' - t''')^2],$$

$$\Delta_1 = 2[2pq + 2p''q'' - (t - t'')^2 - (t' - t''')^2],$$

$$\Delta_2 = 2[2pq + 2p'q' - (t - t''')^2 - (t' - t'')^2].$$

(*) La théorie analytique des formes trilinéaires a été exposée par nous, dans les travaux suivants : *C. R.*, t. XCII et XCIII; *Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei*, t. XXXIV; *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 3me série, t. II, p. 40.

De ces expressions, on déduit les égalités suivantes :

$$\Delta_0 - 2\Delta_1 + \Delta_2 = 0,$$
$$\Delta_1 - 2\Delta_2 + \Delta_0 = 0,$$
$$\Delta_2 - 2\Delta_0 + \Delta_1 = 0;$$

On peut, au surplus, faire usage des notations symboliques pour arriver à ces égalités.

Soit

$$\sigma_0 = (a'b')(a''b'')\,a_x b_x.$$

$$4\Delta_0 = \begin{vmatrix} 2(a'b')(a''b'')a_1b_1 & (a'b')(a''b'')(a_1b_2 + a_2b_1) \\ (c'd')(c''d'')(c_1d_2 + c_2d_1) & 2(c'd')(c''d'')c_2d_2 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 2(c'd')(c''d'')c_1d_1 & (c'd')(c''d'')(c_1d_2 + c_2d_1) \\ (a'b')(a''b'')(a_1b_2 + a_2b_1) & 2(a'b'(a''b'')a_2b_2 \end{vmatrix}$$
$$= 2\,(a'b')(c'd')(a''b'')(c''d'')\,[(ad)(bc) + (ac)(bd)].$$

Les deux termes entre parenthèses sont égaux, comme on s'en aperçoit en intervertissant les c et les d.

Donc

$$\Delta_0 = (a'b')(c'd')(a''b'')(c''d'')(ad)(bc).$$

De même

$$\Delta_1 = (a''b'')(c''d'')(ab)(cd)(a'd')(b'c')$$
$$\Delta_2 = (ab)(cd)(a'b')(c'd')(a''d'')(b''c'').$$

Des deux premières, on déduit, en intervertissant les b et les d :

$$\Delta_0 + \Delta_1 = (a''d'')(c''b'')\,[(a'd')(c'b')(ab)(dc) + (ad)(cb)(a'b')(d'c')].$$

En ajoutant

$$-2\Delta_2 = (a''d'')(c''b'')\,[(ab)(cd)(a'b')(c'd') + (a'b')(c'd')(ab)(cd)],$$

on trouve

$$\Delta_0 - 2\Delta_2 + \Delta_1 = (a''d'')(b'c'')\,[(ab)(cd)(a'c')(b'd') + (a'b')(c'd')(ac)(bd)].$$

Le second membre changeant de signe quand on y intervertit les b et les c, on a

$$\Delta_0 - 2\Delta_2 + \Delta_1 = 0.$$

d'où l'on déduit

$$\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2.$$

Ainsi

Les trois covariants σ_0, σ_1, σ_2, ont même discriminant.

Nous représenterons cette fonction par la lettre Δ, et nous l'appellerons le *discriminant* de f.

En combinant un des covariants σ avec f, on obtient une nouvelle forme trilinéaire importante.

Soit K cette forme, définie par l'égalité

$$K = \tfrac{1}{2}(\sigma_0 a)\,\sigma_{0x} a'_y a''_z.$$

$$\sigma_0 = (a'b')(a''b'')\,a_x b_x;\ f = b_x b'_y b''_z = c_x c'_y c''_z = \cdots$$

Par suite

$$K = \tfrac{1}{2}\left[(a'b')(a''b'')(ac)\,b_x c'_y c''_z + (a'b')(a''b'')(bc)\,a_x c'_y c''_z\right].$$

Comme nous pouvons intervertir les a et les b, nous aurons

$$K = (a'b')(a''b'')(ac)\,b_x c'_y c''_z.$$

En combinant σ_1 avec f, on trouverait

$$K' = (a''b'')(ab)(a'c')\,b'_y c_x c''_z.$$

En conséquence

$$K - K' = (a''b'')c''_z\left[(a'b')(ac)\,b_x c'_y - (ab)(a'c')\,b'_y c_x\right].$$

Cette expression montre que

$$K - K' = 0.$$

Donc:

La première transvection des trois covariants σ_0, σ_1, σ_2 sur la forme trilinéaire f *donne naissance à une seule forme trilinéaire* K.

En posant

$$K = k_x k'_y k''_z,$$

et en développant l'expression symbolique précédente, on trouve:

$$\begin{aligned}
-K = {} & [a_{111}^2 a_{222} + 2a_{112}a_{121}a_{211} - a_{111}(a_{112}a_{221} + a_{121}a_{212} + a_{211}a_{122})]x_1y_1z_1 \\
& - [a_{112}^2 a_{221} + 2a_{111}a_{122}a_{212} - a_{112}(a_{111}a_{222} + a_{121}a_{212} + a_{211}a_{122})]x_1y_1z_2 \\
& - [a_{121}^2 a_{212} + 2a_{111}a_{122}a_{221} - a_{121}(a_{111}a_{222} + a_{211}a_{122} + a_{112}a_{221})]x_1y_2z_1 \\
& - [a_{211}^2 a_{122} + 2a_{111}a_{221}a_{212} - a_{211}(a_{111}a_{222} + a_{112}a_{221} + a_{121}a_{212})]x_2y_1z_1 \\
& + [a_{122}^2 a_{211} + 2a_{222}a_{112}a_{121} - a_{122}(a_{222}a_{111} + a_{221}a_{112} + a_{212}a_{121})]x_1y_2z_2 \\
& + [a_{212}^2 a_{121} + 2a_{222}a_{211}a_{112} - a_{212}(a_{222}a_{111} + a_{122}a_{211} + a_{221}a_{112})]x_2y_1z_2 \\
& + [a_{221}^2 a_{112} + 2a_{222}a_{211}a_{121} - a_{221}(a_{222}a_{111} + a_{212}a_{121} + a_{122}a_{211})]x_2y_2z_1 \\
& - [a_{222}^2 a_{111} + 2a_{221}a_{212}a_{122} - a_{222}(a_{221}a_{112} + a_{212}a_{121} + a_{122}a_{211})]x_2y_2z_2.
\end{aligned}$$

Les expressions précédentes de σ_0, σ_1, σ_2, f, Δ et K permettent de vérifier la relation suivante entre ces six fonctions

$$\tfrac{1}{2}\sigma_0\sigma_1\sigma_2 + \tfrac{1}{2}\Delta f^2 = -K^2. \tag{5}$$

Elle peut d'ailleurs se déduire d'un théorème plus général.

Soient

$$f = a_x^n b_y^m c_z^p;\ \varphi = \alpha_x^{n'}\beta_y^{m'}\gamma_z^{p'},$$

deux formes à trois séries de variables.

Désignons par $(f, \varphi)_x$ le covariant

$$(a\alpha)\, a_x^{n-1}\alpha_x^{n'-1} b_y^m \beta_y^{m'} c_z^p \gamma_z^{p'},$$

par $(f, \varphi)_{xy}$, le covariant

$$(a\alpha)(b\beta)\, a_x^{n-1}\alpha_x^{n'-1} b_y^{m-1}\beta_y^{m'-1} c_z^p\gamma_z^{p'}, \text{ etc.},$$

nous aurons

$$(f, \varphi)_x \cdot (f, \varphi)_y = -\tfrac{1}{2}[f^2(\varphi, \varphi')_{xy} - 2f\varphi(f, \varphi)_{xy} + \varphi^2(f, f')_{xy}]. \tag{6}$$

Si nous posons, dans cette relation générale,

$$\varphi = \sigma_0\sigma_1,\ f = a_x a'_y a''_z,$$

nous serons conduit à l'équation (5).

Supposons que Δ soit différent de zéro.

L'équation (5) peut s'écrire

$$\tfrac{1}{2}\Delta f^2 + K^2 = -\tfrac{1}{2}\sigma_0\sigma_1\sigma_2,$$

ou

$$\left(K + \sqrt{\frac{-\Delta}{2}}f\right)\left(K - \sqrt{\frac{-\Delta}{2}}f\right) = -\tfrac{1}{2}\sigma_0\sigma_1\sigma_2.$$

Appelons u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2, les facteurs linéaires de σ_0, σ_1, σ_2, convenablement groupés.

L'équation précédente donnera évidemment lieu aux deux égalités

$$K + \sqrt{\frac{-\Delta}{2}}f = \alpha u_1 v_1 w_1, \tag{7}$$

$$K - \sqrt{\frac{-\Delta}{2}}f = -\beta u_2 v_2 w_2, \tag{8}$$

α et β étant choisis de telle sorte que l'équation (5) soit vérifiée.

Il en résulte

$$2\sqrt{\frac{-\Delta}{2}}f = \alpha u_1 v_1 w_1 + \beta u_2 v_2 w_2, \tag{9}$$

$$2K = \alpha u_1 v_1 w_1 - \beta u_2 v_2 w_2. \tag{10}$$

Ces relations peuvent encore se démontrer bien simplement de la manière suivante.

Considérons la forme trilinéaire

$$\lambda f + \mu K.$$

Il est facile de voir que ses covariants quadratiques sont

$$\left(\lambda^2 + \frac{\Delta}{2}\mu^2\right)\sigma_i.$$

Ces covariants s'annulent pour

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm \sqrt{\frac{-\Delta}{2}}.$$

Mais, quand une forme trilinéaire a ses trois covariants nuls, elle se décompose en trois facteurs linéaires (voir p. 25).

On pourra donc poser

$$\sqrt{\frac{-\Delta}{2}} f + K = \alpha . u_1 v_1 w_1,$$

$$-\sqrt{\frac{-\Delta}{2}} f + K = \beta . u_2 v_2 w_2,$$

d'où la forme indiquée pour f.

Par un changement convenable d'origines, c'est-à-dire par une triple substitution linéaire, on peut donc, lorsque Δ est différent de zéro, donner à f la forme canonique

$$f \equiv a_{111}\xi_1\eta_1\zeta_1 + a_{222}\xi_2\eta_2\zeta_2. \qquad (11)$$

Il est aisé de se rendre compte de la raison pour laquelle la substitution linéaire n'est plus applicable lorsque Δ est nul.

Nous avons

$$u_1 = ax_1 + bx_2;\ u_2 = a'x_1 + b'x_2;$$

$$v_1 = my_1 + ny_2;\ v_2 = m'y_1 + n'y_2;$$

$$w_1 = lz_1 + pz_2;\ w_2 = l'z_1 + p'z_2.$$

Si $\Delta = 0$, les deux facteurs u_1, u_2 étant identiques, on a $ab' - ba' = 0$.

On ne pourra donc point résoudre ces équations par rapport aux anciennes variables et passer à la forme (9) ou (11).

Si nous écrivons l'équation (11) sous la forme plus explicite :

$$f \equiv a_{111}(ax_1 + a'x_2)(by_1 + b'y_2)(cz_1 + c'z_2)$$
$$+ a_{222}(\alpha x_1 + \alpha' x_2)(\beta y_1 + \beta' y_2)(\gamma z_1 + \gamma' z_2),$$

nous aurons

$$\sigma_0 = (b\beta)(c\gamma)u_1u_2; \quad \sigma_1 = (c\gamma)(a\alpha)v_1v_2; \quad \sigma_2 = (a\alpha)(b\beta)w_1w_2;$$
$$\Delta = (a\alpha)^2(b\beta)^2(c\gamma)^2,$$

ou, symboliquement, en se servant des covariants linéaires u_1, u_2; v_1, v_2; w_1, w_2;

$$\sigma_0 = (v_1v_2)(w_1w_2)u_1u_2; \quad \sigma_1 = (w_1w_2)(u_1u_2)v_1v_2; \quad \sigma_2 = (u_1u_2)(v_1v_2)w_1w_2;$$
$$\Delta = (u_1u_2)^2(v_1v_2)^2(w_1w_2)^2.$$

Si nous employons la forme canonique (11), nous aurons

$$f \equiv a_{111}\xi_1\eta_1\zeta_1 + a_{222}\xi_2\eta_2\zeta_2;$$

$$\sigma_0 = 2a_{111}a_{222}\xi_1\xi_2; \quad \sigma_1 = 2a_{111}a_{222}\eta_1\eta_2; \quad \sigma_2 = 2a_{111}a_{222}\zeta_1\zeta_2;$$

$$\Delta = -2a_{111}^2a_{222}^2; \quad k = a_{111}^2a_{222}\xi_1\eta_1\zeta_1 - a_{111}a_{222}^2\xi_2\eta_2\zeta_2.$$

Posons, pour abréger,

$$f_{\lambda\mu} = \lambda f + \mu \mathrm{K}$$

$$= (\lambda a_{111} + \mu a_{111}^2 a_{222})\xi_1\eta_1\zeta_1 + (\lambda a_{222} - \mu a_{111}a_{222}^2)\xi_2\eta_2\zeta_2;$$

puis

$$\theta_{\lambda\mu} = \lambda^2 + \frac{\Delta}{2}\mu^2. \tag{12}$$

Nous vérifierons aisément les relations suivantes :

$$(\sigma_i)_{\lambda\mu} = \theta\sigma_i \tag{13}$$

$$\Delta_{\lambda\mu} = \theta^2\Delta \tag{14}$$

$$\mathrm{K}_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}\theta\left(k\frac{d\theta}{d\lambda} - f\frac{d\theta}{d\mu}\right) \tag{15}$$

La formule (15) nous fait voir que

$$\mathrm{K}_{01} = -\tfrac{1}{4}\Delta^2 f.$$

Les deux fonctions f et k jouissent ainsi d'une véritable réciprocité.

Il est facile de voir, par exemple, que l'on a les relations analogues

$$\tfrac{1}{2}(\sigma_0 a)\,\sigma_{0x} a'_y a''_z = \mathrm{K};$$

$$\tfrac{1}{2}(\sigma_0 k)\,\sigma_{0x} k'_y k''_z = \frac{\Delta}{2} f.$$

Les autres combinaisons de K et f ne donnent lieu à aucun covariant nouveau.

Ainsi

$$(ak)(a'k')(a''k'') = \Delta,$$

$$(ak)\,a'_y a''_z k'_y k''_z = -\tfrac{1}{2}\sigma_1\sigma_2;$$

$$(a'k')\,a''_z a_x k''_z k_x = -\tfrac{1}{2}\sigma_2\sigma_0,$$

$$(a''k'')\,a_x a'_y k_x k'_y = -\tfrac{1}{2}\sigma_0\sigma_1.$$

$$(ak)(a'k')\,a''_z k''_z = (a'k')(a''k'')\,a_x k_x = (a''k'')(ak)\,a'_y k'_y \equiv 0.$$

Le système des covariants de f se compose exclusivement des six formes que nous avons rencontrées jusqu'ici.

Nous devons maintenant étudier le cas où $\Delta = 0$.

Il résulte, de ce que nous avons dit, que la forme (11) est impossible, au moins en général.

Tout d'abord les trois covariants σ sont des carrés; le covariant k est décomposable en trois facteurs linéaires qui sont les racines carrées des σ.

Supposons, pour un instant, que la forme canonique (11) soit possible, en même temps que la condition $\Delta = 0$.

Il résulte des expressions symboliques, que nous avons données, des σ et de Δ, que, dans ce cas, deux des covariants σ sont identiquement nuls et que la forme f devient, par exemple

$$f = u_1[a_{111} v_1 w_1 + a_{222} v_2 w_2],$$

c'est-à-dire est décomposable en une forme linéaire et une forme bilinéaire.

Nous voyons encore que si l'un des covariants σ est nul, il y en a un second qui le devient et que la forme trilinéaire est divisible par la racine carrée du troisième.

Ces conséquences doivent être démontrées directement, puisque nous les avons déduites de l'existence de la forme (11), forme dont la réalité n'est pas démontrée.

Supposons que σ_0 soit identiquement nul.

Il en résulte les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} a_{111}a_{122}-a_{121}a_{112}&=0,\\ a_{111}a_{222}+a_{211}a_{122}-a_{121}a_{212}-a_{112}a_{221}&=0,\\ a_{222}a_{211}-a_{212}a_{221}&=0. \end{aligned}\right\}\quad(16)$$

Δ est naturellement égal à zéro.

En tirant parti de la première et de la dernière des équations (16), on met la seconde sous la forme

$$(a_{112}a_{221}-a_{122}a_{211})\,(a_{121}a_{212}-a_{122}a_{211})=0.$$

On a donc un des deux systèmes suivants :

$$\left.\begin{aligned} a_{111}a_{122}-a_{112}a_{121}&=0,\\ a_{121}a_{212}-a_{122}a_{211}&=0,\\ a_{222}a_{211}-a_{221}a_{212}&=0; \end{aligned}\right\}\quad(17)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{111}a_{122}-a_{112}a_{121}&=0,\\ a_{112}a_{221}-a_{122}a_{211}&=0,\\ a_{222}a_{211}-a_{221}a_{212}&=0. \end{aligned}\right\}\quad(18)$$

Nous ne nous supposerons pas, d'abord, que les deux systèmes soient vérifiés en même temps, c'est-à-dire qu'au système (17), nous ajouterons l'équation

$$a_{112}a_{221}-a_{122}a_{211}=\lambda; \qquad (19)$$

et au système (18), l'équation

$$a_{121}a_{212}-a_{122}a_{211}=\lambda'. \qquad (20)$$

De (17), on conclut

$$\frac{a_{111}}{a_{112}} = \frac{a_{121}}{a_{122}} = \frac{a_{211}}{a_{212}} = \frac{a_{221}}{a_{222}} = p.$$

Ces équations donnent :

$$a_{111}a_{212} - a_{112}a_{211} = 0,$$

$$a_{111}a_{222} - a_{112}a_{221} = 0, \quad a_{121}a_{212} - a_{122}a_{211} = 0;$$

$$a_{222}a_{121} - a_{221}a_{122} = 0.$$

En conséquence $\sigma_1 \equiv 0$.

De plus

$$\frac{a_{112}}{a_{111}} = \frac{1}{p}, \quad \frac{a_{122}}{a_{121}} = \frac{1}{p}.$$

Donc

$$a_{111}a_{221} - a_{121}a_{211} = p\lambda.$$

$$a_{221} = pa_{222}; \; a_{211} = pa_{212}.$$

Par suite

$$a_{111}a_{222} - a_{121}a_{212} = \lambda,$$

et

$$a_{111}a_{222} + a_{112}a_{221} - a_{121}a_{212} - a_{211}a_{122} = 2\lambda.$$

En outre

$$a_{112}a_{222} - a_{122}a_{212} = \frac{\lambda}{p}.$$

En conséquence

$$\sigma_2 = p\lambda z_1^2 + 2\lambda z_1 z_2 + \frac{\lambda}{p} z_2^2 = \frac{\lambda}{p}[pz_1 + z_2]^2.$$

Les mêmes équations donnent

$$f \equiv a_{111}x_1y_1z_1 + a_{121}x_1y_2z_1 + a_{211}x_2y_1z_1 + a_{221}x_2y_2z_1 + a_{112}x_1y_1z_2 + a_{122}x_1y_2z_2 + a_{212}x_2y_1z_2 + a_{222}x_2y_2z_2,$$

$$\equiv (pz_1 + z_2)\,(a_{112}x_1y_1 + a_{122}x_1y_2 + a_{212}x_2y_1 + a_{222}x_2y_2).$$

Le facteur bilinéaire n'est pas décomposable, puisque l'on a

$$a_{112}a_{222} - a_{122}a_{212} = \frac{\lambda}{p}.$$

Lorsque le système (18) est vérifié, on a :

$$\frac{a_{111}}{a_{121}} = \frac{a_{112}}{a_{122}} = \frac{a_{211}}{a_{221}} = \frac{a_{212}}{a_{222}} = q.$$

On en déduit

$$\sigma_2 \equiv 0;\ \sigma_1 = \frac{\lambda'}{q}[qy_1 + y_2]^2;$$

$$f = (qy_1 + y_2)\left[a_{121}x_1z_1 + a_{122}x_1z_2 + a_{221}x_2z_1 + a_{222}x_2z_2\right].$$

Toutes les conséquences que nous avions annoncées sont, par suite, vérifiées.

Si les deux systèmes (17) et (18) sont vérifiés en même temps, on a à la fois,

$$\sigma_0 \equiv 0,\ \sigma_1 \equiv 0,\ \sigma_2 \equiv 0,$$

et la forme trilinéaire est décomposable en trois facteurs linéaires.

On voit bien que la forme canonique est possible, et même d'une infinité de manières, puisque le facteur bilinéaire peut toujours s'écrire

$$n\rho_1\rho_1' + m\rho_2\rho_2'.$$

Alors

$$f \equiv nu_1\rho_1\rho_1' + mu_1\rho_2\rho_2',$$

ou prend d'autres formes analogues.

Il résulte, de ce qui précède, que dans le faisceau $f_{\lambda\mu}$, il existe deux formes trilinéaires décomposables en trois facteurs linéaires.

Ce sont celles pour lesquelles le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ est donné par l'équation

$$\theta = \lambda^2 + \tfrac{1}{2}\mu^2\Delta = 0.$$

En effet, dans ce cas, les trois covariants $(\sigma_i)_{\lambda\mu}$ sont identiquement nuls à la fois.

Lorsque $\Delta = 0$, sans qu'aucun des covariants σ s'annule, on peut chercher une forme simple de f.

Or, on peut, par une transformation linéaire, faire passer à l'infini les points doubles donnés par $\sigma_0 = 0$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$.

Alors, on aura

$$\sigma_{00} = \sigma_{01} = 0; \ \sigma_{10} = \sigma_{11} = 0; \ \sigma_{20} = \sigma_{21} = 0.$$

Ces conditions seront vérifiées en même temps si l'on pose

$$a_{111} = a_{112} = a_{121} = a_{211} = 0,$$

de telle sorte que f pourra s'écrire

$$a_{122}x_1y_2z_2 + a_{212}x_2y_1z_2 + a_{221}x_2y_2z_1 + a_{222}x_1y_2z_2.$$

On aurait pu arriver à la forme analogue

$$a_{111}x_1y_1z_1 + a_{121}x_1y_2z_1 + a_{112}x_1y_1z_2 + a_{211}x_2y_1z_1.$$

Mais on peut arriver à une expression canonique, applicable dans tous les cas, et qui sera utile dans la suite.

Pour cela, soient :

$$\begin{matrix} \delta_1, & \delta'_1, & \delta''_1, \\ \delta_2, & \delta'_2, & \delta''_2, \\ \delta_3, & \delta'_3, & \delta''_3, \end{matrix}$$

neuf points tels que les ternes obtenus en prenant un terne quelconque du déterminant formé avec ces neuf éléments, constituent des groupes de points homologues de l'homographie

$$f = 0.$$

Alors f pourra s'écrire

$$\begin{aligned} f \equiv\, & p(x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta_2 y_2)(z_1 - \delta_3 z_2) + p'(x_1 - \delta'_1 x_2)(y_1 - \delta'_2 y_2)(z_1 - \delta'_3 z_2) \\ & + p''(x_1 - \delta''_1 x_2)(y_1 - \delta''_2 y_2)(z_1 - \delta''_3 z_2). \qquad (21) \end{aligned}$$

Cette forme sera évidemment possible si la condition énoncée est vérifiée.

Choisissons d'une manière arbitraire les points δ_1, δ_2', δ_2'', par exemple.

Ils détermineront, sans ambiguïté, δ_3', δ_3''.

Il suffira maintenant de choisir δ_1'' de telle sorte que δ_1'', δ_2, δ_3', δ_1'', δ_2', δ_3 faisant partie de l'homographie, il ne corresponde à $\delta_2\,\delta_3''$; $\delta_2''\,\delta_3$ qu'un seul point δ_1'.

Le point δ_1'' n'est donc astreint qu'à vérifier une seule condition.

Par suite, la forme (21) est toujours possible.

La forme (11) nous permet de trouver des relations où entrent les rapports anharmoniques du second ordre.

Soient δ_1, δ_1'; δ_2, δ_2'; δ_3, δ_3' les six éléments neutres et représentons par ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2, les rapports $\frac{x_1}{x_2}$, etc., caractérisant deux ternes de l'homographie

De l'équation citée, on déduit

$$a_{111}(\xi_1-\delta_1)(\eta_1-\delta_2)(\zeta_1-\delta_3)+a_{222}(\xi_1-\delta_1')(\eta_1-\delta_2')(\zeta_1-\delta_3')=0,$$

$$a_{111}(\xi_2-\delta_1)(\eta_2-\delta_2)(\zeta_2-\delta_3)+a_{222}(\xi_2-\delta_1')(\eta_2-\delta_2')(\zeta_2-\delta_3')=0,$$

La combinaison de ces deux équations donne

$$(\xi_1, \xi_2, \delta_1, \delta_1')(\eta_1, \eta_2, \delta_2, \delta_2')(\zeta_1, \zeta_2, \delta_3, \delta_3')=1, \tag{22}$$

où nous employons la notation habituelle des rapports anharmoniques. Cette relation est due à M. Schubert.

Soient, de même, $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \Xi_1, H_1, Z_1$, deux groupes de points appartenant aux homographies.

$$f=0,\ k=0.$$

Par un procédé analogue à celui que nous venons d'employer, on trouve :

$$(\xi_1, \Xi_1, \delta_1, \delta_1')(\eta_1, H_1, \delta_2, \delta_2')(\zeta_1, Z_1, \delta_3, \delta_3')=-1. \tag{23}$$

Si donc l'on considère

$$\sigma_0=0,\ \sigma_1=0,\ \sigma_2=0,$$

comme définissant les points doubles de trois involutions quadratiques et que l'on se donne un groupe ξ_1, η_1, ζ_1, de l'homographie $f=0$, les trois points Ξ_1, H_1, Z_1, homologues de ξ_1, η_1, ζ_1, dans ces trois involutions, constitueront un groupe de l'homographie $K=0$.

Il en sera de même des groupes

$$\xi_1, \eta_1, Z_1; \xi_1, H_1, \zeta_1; \Xi_1, \eta_1, \zeta_1;$$
$$\Xi_1, H_1, \zeta_1; \Xi_1, \eta_1, Z_1; \xi_1, H_1, Z_1.$$

En se servant de la relation (22), il est facile de construire des ternes de points homologues.

Cette relation devient d'ailleurs illusoire dès que $\Delta=0$.

Nous pouvons représenter une homographie $f=0$, pour laquelle Δ est différent de zéro, de la manière suivante (*).

Soit un triangle ABC sur les côtés duquel nous prenons trois points c, a, b.

Toutes les coniques qui passent par c, a, b déterminent sur les mêmes côtés des points c', a', b'.

Il est visible que ces points représentent, sur les côtés du triangle, une forme trilinéaire, dont le discriminant n'est pas nul.

En effet, par le théorème de Carnot, on a

$$Ac\ Ba.Cb.Ac'.Ba'.Cb' - Ab'.Bc'.Ca'.Ab.Bc.Ca = 0.$$

D'après cela, il est évident que les couples AB, BC, CA représentent les éléments neutres de l'homographie.

On peut encore la figurer autrement.

Soient, dans l'espace, trois droites arbitraires X, Y, Z, et un point P.

Tous les plans qui passent par P déterminent, sur X, Y et Z, trois séries homographiques, car chaque couple de points, pris sur X et Y, par exemple, détermine sur Z, le troisième point.

(*) V. *C. R.*, t. XCIII, p. 509.

Les trois plans PX, PY, PZ déterminent respectivement sur X, Y et Z des couples de points δ_1, δ'_1; δ_2, δ'_2; δ_3, δ'_3 qui sont les éléments neutres de l'homographie.

En effet, supposons que ces points soient déterminés comme l'indique le tableau suivant :

PX	δ_2, δ_3
PY	δ_1, δ'_3
PZ	δ'_1, δ'_2

Les points δ_2, δ_3, P, déterminant un plan passant par X, le point x, qui correspond à δ_2, δ_3, est indéterminé.

De plus $P\delta'_2\delta'_3$ sont en ligne droite.

En effet, les deux plans PY, PZ se coupent suivant une droite, passant par P et s'appuyant sur Y et Z.

Dans ce cas encore, les deux points δ'_2, δ'_3 ne déterminent pas un plan unique et, par suite, le point x qui leur correspond est indéterminé.

Si les trois droites X, Y, Z concourent, nous aurons une homographie où $\Delta = 0$.

Si le point P est sur l'une des trois droites données, nous avons la représentation d'une H_2^3 décomposable.

§ 2.

DÉFINITION. — *Les groupes de trois points qui appartiennent à la fois aux deux homographies du second rang, définies par les relations*

$$f \equiv a_x a'_y a''_z = 0 ; \quad \varphi \equiv \alpha_x \alpha'_y \alpha''_z = 0,$$

constituent une homographie du troisième ordre et du premier rang.

Nous représenterons une telle homographie par la notation H_1^3.

Le système des covariants des deux formes f et φ étant fort compliqué, nous nous bornerons à mentionner ceux d'entre eux qui nous seront utiles dans la suite (*).

Il est d'abord visible qu'une homographie, définie comme nous venons de le faire, existe réellement. En effet, à un point ξ, correspondent dans f et φ, deux séries homographiques H_1^2, $H_1'^2$, homographies qui possèdent deux groupes communs η_1, ζ_1; η_2, ζ_2.

Par suite $\xi\,\eta_1\,\zeta_1$, $\xi\,\eta_2\,\zeta_2$ constituent deux ternes de H_1^3.

Pour exprimer les relations entre les ξ et les η, les ξ et les ζ, etc., on a les équations

$$\left.\begin{aligned}
(a\alpha)\, a'_y\alpha'_y a''_z\alpha''_z &= p_y^2\varpi_z^2 = 0,\\
(a'\alpha')\, a_x\alpha_x a''_z\alpha''_z &= t_x^2\theta_z^2 = 0,\\
(a''\alpha'')\, a_x\alpha_x a'_y\alpha'_y &= r_x^2\rho_y^2 = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (24).$$

D'après cela, à chaque point η, par exemple, correspondent deux points ξ et deux points ζ qui, convenablement associés, constituent les deux couples communs aux homographies H_1^2, $H_1'^2$ que nous avons mentionnées plus haut.

Mais si nous regardons la première des formes (24) comme une fonction quadratique des z, le discriminant de cette forme, égalé à zéro, représente quatre points y, pour lesquels les deux points z coïncideront.

Ces groupes de quatre points seront appelés les *points de ramification* de l'homographie.

Ils sont représentés par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&(\rho\rho')^2 r_x^2 r_x'^2 = 0;\ (\theta\theta')^2 t_x^2 t_x'^2 = 0;\\
&(rr')^2 \rho_y^2\rho_y'^2 = 0;\ (\varpi\varpi')^2 p_y^2 p_y'^2 = 0;\\
&(pp')^2 \varpi_z^2\varpi_z'^2 = 0;\ (tt')^2 \theta_z^2\theta_z'^2 = 0.
\end{aligned}$$

Nous allons démontrer d'abord que ces six covariants sont égaux deux à deux.

(*) V. C. Le Paige, *Sur le système de deux formes trilinéaires*, Atti dell' Accademia de' Nuovi Lincei, t. XXXV, 1882.

Pour arriver à leurs expressions, il sera nécessaire d'introduire de nouveaux covariants que nous allons faire connaître.

Considérons le faisceau de formes trilinéaires

$$f_{\lambda\mu} = \lambda f + \mu\varphi.$$

Nous pouvons former les covariants quadratiques de cette expression.

Nous trouvons ainsi

$$(\sigma_i)_{\lambda\mu} = \lambda^2 S_i + 2\lambda\mu s_i + \mu_2\sigma_i.$$

Les expressions symboliques des covariants compris dans cette forme générale seront

$$S_x^2 = (a'b')(a''b'')a_x b_x; \quad s_x^2 = (a'\alpha')(a''\alpha'')a_x\alpha_x; \quad \sigma_x^2 = (\alpha'\beta')(\alpha''\beta'')\alpha_x\beta_x;$$
$$S_y^2 = (a''b'')(ab)a'_y b'_y; \quad s_y^2 = (a''\alpha'')(a\alpha)a'_y\alpha'_y; \quad \sigma_y^2 = (\alpha''\beta'')(\alpha\beta)\alpha'_y\beta'_y;$$
$$S_z^2 = (ab)(a'b')a''_z b''_z; \quad s_z^2 = (a\alpha)(a'\alpha')a''_z\alpha''_z; \quad \sigma_z^2 = (\alpha\beta)(\alpha'\beta')\alpha''_z\beta''_z.$$

Formons maintenant le covariant $(pp')^2\varpi_z^2\varpi_z'^2$.

Un léger calcul montre que l'on a

$$\frac{1}{2}(pp')^2\varpi_z^2\varpi_z'^2 = (a\alpha)(b\beta)\left[(a'b')(\alpha'\beta') + (a'\beta')(\alpha'b')\right]a''_z\alpha''_z b''_z\beta''_z.$$

Mais

$$(a\alpha)(b\beta) = (a\beta)(b\alpha) + (ab)(\alpha\beta).$$

D'où

$$\frac{1}{2}(pp')^2\varpi_z\varpi_z'^2 = [(ab)(\alpha\beta) - (a\beta)(\alpha b)][(a'b')(\alpha'\beta') + (a'\beta')(\alpha'b')]a''_z\alpha''_z b''_z\beta''_z$$
$$= (ab)(a'b')a''_z b''_z \,.\, (\alpha\beta)(\alpha'\beta')\alpha''_z\beta''_z - (a\beta)(a'\beta')a''_z\beta''_z \,.\, (\alpha b)(\alpha'b')\alpha''_z b''_z$$
$$+ [(ab)(\alpha\beta)(a'\beta')(\alpha'b')a''_z b''_z\alpha''_z\beta''_z - (a\beta)(\alpha b)(a'b')(\alpha'\beta')a''_z\alpha''_z b''_z\beta''_z].$$

La seconde ligne s'annule identiquement.

Il vient, par suite,

$$(pp'')^2\varpi_z^2\varpi_z'^2 = 2\,[S_z^2\sigma_z^2 - (s_z^2)^2].$$

D'après cela, il est visible que

$$(pp')^2\varpi_z^2\varpi_z'^2 = (tt')^2\theta_z^2\theta_z'^2.$$

On obtient de cette manière les trois groupes de points de ramification :

$$l_x^4 = 2\,(S^2\sigma_x^2 - [s_x^2]^2) = 0;$$
$$m_y^4 = 2\,[S_y^2\sigma_y^2 - (s_y^2)^2] = 0,$$
$$n_z^4 = 2\,[S_z^2\sigma_z^2 - (s_z^2)^2] = 0.$$

Nous avons ce

THÉORÈME VII. — *L'homographie du troisième ordre et du premier rang possède trois groupes de quatre points de ramification.*

D'un autre côté, nous pouvons regarder la forme

$$\lambda f + \mu\varphi$$

comme quadrilinéaire, λ, μ jouant le rôle d'une nouvelle série de variables.

Cette forme a quatre covariants quartiques fondamentaux. Trois d'entre eux sont les expressions l_x^4, m_y^4, n_z^4 que nous venons de donner : le quatrième est le discriminant de $\lambda f + \mu\varphi$, regardée comme forme trilinéaire.

On trouve ainsi

$$\Delta_{\lambda\mu} = \lambda^4 D + 4\lambda^3\mu D' + 6\lambda^2\mu^2 D'' + 4\lambda\mu^3\Delta' + \mu^4\Delta.$$

D et Δ sont les discriminants de f et φ; D′, D″, Δ' sont des invariants qu'il est facile de définir et de calculer.

Comme nous l'avons fait observer (*), les quatre covariants précédents ont les mêmes invariants; en les désignant par i et j nous aurons

$$i = 2\,(D\Delta - 4D'\Delta' + 3D''^2);$$

$$j = 6\begin{vmatrix} D & D' & D'' \\ D' & D'' & \Delta' \\ D'' & \Delta' & \Delta \end{vmatrix}$$

(*) *C. R.*, t. XCIV, p. 69.

Nous pouvons, par suite, énoncer le théorème suivant :

Théorème VIII. — *Les trois groupes de quatre points de ramification ont même rapport anharmonique.*

Aux points de ramification correspondent des groupes de points doubles. Nous allons maintenant rechercher les covariants qui représentent ces groupes.

Or, il est facile de les obtenir.

Soit une forme doublement quadratique

$$f = a_x^2 a_y'^2.$$

Formons le covariant

$$\psi_x^4 = (a'\alpha')^2 a_x^2 \alpha_x^2,$$

puis

$$h_x^4 = (\psi\psi')^2 \psi_x^2 \psi_x'^2, \quad \text{et} \quad U = (a\alpha)^2 (a'\alpha')^2.$$

Les points doubles, de la série des x, sont représentés par

$$h_x^4 + 4U\psi_x^4 = 0.$$

Cette expression se démontre fort simplement si l'on fait usage de la forme canonique

$$f = x_1^2 (a_{00}y_1^2 + a_{02}y_2^2) + 2x_1x_2 \cdot 2a_{11}y_1y_2 + x_2^2 (a_{20}y_1^2 + a_{22}y_2^2),$$

que nous avons fait connaître naguère (*).

Il ne reste qu'à l'appliquer au cas qui nous occupe.

Il faudra faire ici

$$\psi_x^4 = 2[S_x^2\sigma_x^2 - (s_x^2)^2].$$

On trouve ainsi

$$h_x^4 = \frac{2}{3} \psi_x^4 [(S_0, \sigma_0)_2 - (s_0, s_0)_2] - \lambda_x^4,$$

en posant

$$\lambda_x^4 = (S_0, \sigma_0)_1^2 + 4 (s_0, S_0)_1 (s_0, \sigma_0)_1$$

(*) *C. R.*, t. XCIV, p. 424. Cf. Capelli, *Sopra la Corrispondenza* (2,2), p. 19.

Il faudra encore calculer U pour la forme

$$f = (a''\alpha'')\, a_x \alpha_x a'_y \alpha'_y.$$

Mais, en employant la remarque faite plus haut, relativement à

$$\lambda f + \mu \varphi$$

considérée comme une forme quadrilinéaire, on peut observer que les deux formes biquadriques

$$(a''\alpha'')\, a_x \alpha_x a'_y \alpha'_y \quad \text{et} \quad \lambda^2 S_z^2 + 2\lambda\mu s_z^2 + \mu^2 \sigma_z^2$$

ont les mêmes invariants.

On trouve ainsi

$$4U = \frac{2}{3}\left[(s_2, s_2)_2 - (S_2, \sigma_2)_2\right].$$

Nous obtiendrons, par suite, pour l'équation d'un des groupes de points doubles

$$\frac{2}{3}\psi_x^4\left[(S_0, \sigma_0)_2 - (S_2, \sigma_2) + (s_2, s_2)_2 - (s_0, s_0)_2\right] - \lambda_x^4.$$

Or on a (*)

$$2\left[(s_2, s_2)_2 - (s_0, s_0)_2\right] = \left[(S_0, \sigma_0)_2 - (S_2, \sigma_2)_2\right].$$

L'équation précédente deviendra finalement

$$\psi_x^4\left[(S_0, \sigma_0)_2 - (S_2, \sigma_2)_2\right] - \lambda_x^4 = 0.$$

Pour abréger, nous ferons usage des notations suivantes

$$(S_0, \sigma_0)_2 = I_0; \quad (S_1, \sigma_1)_2 = I_1; \quad (S_2, \sigma_2)_2 = I_2$$

et nous reprendrons, au lieu de ψ_x^4, les symboles

$$l_x^4, \quad m_y^4, \quad n_z^4.$$

(*) Pour la démonstration de cette proposition, voir notre mémoire cité *Sur le système de deux formes trilinéaires.*

D'après le mode de formation de l'équation des points doubles, il résultera que, aux points donnés par

$$l_x^4 = 0,$$

correspondent les points donnés par

$$m_y^4 (\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2) - \mu_y^4 = 0,$$
$$n_z^4 (\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_1) - \nu_z^4 = 0,$$

et de même aux groupes de ramification

$$m_y^4 = 0, \quad n_z^4 = 0,$$

les couples de groupes de points doubles :

$$l_x^4 (\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_2) - \lambda_x^4 = 0; \quad n_z^4 (\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_0) - \nu_z^4 = 0;$$
$$l_x^4 (\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_1) - \lambda_x^4 = 0; \quad m_y^4 (\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_0) - \mu_y^4 = 0.$$

D'après une propriété des formes biquadriques, les groupes de points doubles, associés à chaque groupe biquadrique, ont même rapport anharmonique.

Représentons, dans l'ordre où nous les avons écrits, les six covariants quartiques par

$$\mathrm{B}_y^4, \quad \mathrm{C}_z'^4; \quad \mathrm{A}_x^4, \quad \mathrm{C}_z^4; \quad \mathrm{A}_x'^4; \quad \mathrm{B}_y'^4;$$

les covariants

$$\mathrm{B}_y^4, \quad \mathrm{A}_x^4; \quad \mathrm{C}_z'^4, \quad \mathrm{A}_x'^4; \quad \mathrm{C}_z^4. \quad \mathrm{B}_g'^4$$

ont, deux à deux, les mêmes invariants.

On peut aussi, comme l'on voit, énoncer la propriété suivante:

Théorème IX. — *Les deux groupes de points doubles, appartenant à chaque série, sont en involution* I_1^4 *avec les points de ramification correspondants.*

Si l'on a le système d'équations

$$f = 0, \quad \varphi = 0,$$

il est facile d'exprimer les paramètres $\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}, \frac{z_1}{z_2}$, à l'aide d'un seul d'entre eux.

En effet, à

$$f = 0, \quad \varphi = 0,$$

on peut substituer

$$f = 0,$$

$$(a'\alpha')\, a_x \alpha_x a''_z \alpha''_z = 0.$$

La seconde équation, résolue par rapport à $\frac{x_1}{x_2}$, donnera

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\mu_z^2 + \sqrt{-n_z^4}}{q_z^2}.$$

Il en résultera, pour $\frac{y_1}{y_2}$, une expression de même forme

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{\mu_z^2 - \sqrt{-n_z^4}}{q_z'^2}.$$

En conséquence, on pourra exprimer à l'aide d'un seul paramètre et d'un radical portant sur une expression du quatrième degré, les fonctions $\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}, \frac{z_1}{z_2}$ et les quantités qu'on en pourrait déduire linéairement.

Nous ferons encore observer que dans le faisceau

$$\lambda f + \mu\varphi,$$

il existe quatre formes qui ont leur discriminant nul, formes qui sont données par les valeurs de $\lambda : \mu$ tirées de l'équation

$$\Delta_{\lambda\mu} = 0.$$

Les covariants quadratiques de ces formes particulières sont des carrés.

Nous ne reviendrons pas sur le système trilinéaire particulier

$$\lambda f + \mu k$$

dont nous avons parlé précédemment.

Nous ne nous occuperons pas non plus des représentations géométriques d'un système tel que

$$f = 0, \quad \varphi = 0.$$

Une pareille représentation, pour être complète, exigerait, semble-t-il, la théorie des cubiques : or nous avons en vue, précisément, de développer ce qui est nécessaire pour établir cette théorie (*).

Il nous a donc paru préférable de nous borner à ces quelques notions fondamentales.

Avant d'abandonner ce paragraphe, nous rechercherons encore les groupes communs à trois homographies

$$f = a_x a'_y a''_z = 0, \quad \varphi = b_x b'_y b''_z = 0, \quad \psi = c_x c'_y c''_z = 0.$$

A un point z_1, z_2, par exemple, correspondent trois homographies quadratiques (*théorème IV*) :

$$x_1y_1(a_{111}z_1 + a_{112}z_2) + x_1y_2(a_{121}z_1 + a_{122}z_2) + x_2y_1(a_{211}z_1 + a_{212}z_2) + x_2y_2(a_{221}z_1 + a_{222}z_2) = 0,$$

$$x_1y_1(b_{111}z_1 + b_{112}z_2) + x_1y_2(b_{121}z_1 + b_{122}z_2) + x_2y_1(b_{211}z_2) + b_{212}z_2) + x_2y_2(b_{221}z_1 + b_{222}z_2) = 0,$$

$$x_1y_1(c_{111}z_1 + c_{112}z_2) + x_1y_2(c_{121}z_1 + c_{122}z_2) + x_2y_1(c_{211}z_1 + c_{212}z_2) + x_2y_2(c_{221}z_1 + c_{222}z_2) = 0.$$

Nous devons exprimer que ces trois homographies ont un couple commun.

Si nous représentons les douze coefficients, linéaires par rapport aux z, par

$$A_0, A_1, A_2, A_3; \quad B_0, B_1, B_2, B_3; \quad C_0, C_1, C_2, C_3,$$

(*) On pourrait employer des systèmes de coniques, mais l'interprétation perd beaucoup de sa simplicité et de son élégance et cesse, par là même, de présenter quelque utilité.

cette condition s'exprime par

$$\begin{vmatrix} A_2 & A_0 & A_3 \\ B_2 & B_0 & B_3 \\ C_2 & C_0 & C_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_0 & A_3 & A_1 \\ B_0 & B_3 & B_1 \\ C_0 & C_3 & C_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_3 & A_1 & A_2 \\ B_3 & B_1 & B_2 \\ C_3 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_0 \\ B_1 & B_2 & B_0 \\ C_1 & C_2 & C_0 \end{vmatrix} = 0$$

On en peut déduire qu'il existe six groupes communs aux trois homographies données.

CHAPITRE II.

INVOLUTIONS DU TROISIÈME ORDRE.

§ 1.

Définition. — *Lorsque trois séries homographiques du second rang, situées sur une droite (ou sur un support unicursal), sont telles que trois points homologues soient les mêmes, dans quelque série qu'on les considère, ces séries homographiques forment une involution du troisième ordre et du second rang* (*).

Pour qu'il en soit ainsi, il suffit évidemment que la relation entre les x, les y et les z soit symétrique par rapport aux trois séries de variables.

La relation d'homographie doit donc avoir la forme

$$\begin{aligned} f = a_0 x_1 y_1 z_1 + a_1 (x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) \\ + a_2 (x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + a_3 x_2 y_2 z_2 = 0. \end{aligned}$$

Il suffit que les fonctions suivantes de la forme générale,

(*) Un grand nombre des propositions, contenues dans ce chapitre, étendues aux ordres supérieurs, ont été données dans notre *Mémoire sur quelques applications de la théorie des formes algébriques à la géométrie* (Mém. de l'Acad. roy. de Belg., t. XLII).

covariants lorsque les trois séries de variables sont soumises à une même substitution linéaire, soient identiquement nulles :

$$X_1 = (a'a'')\, a_x \equiv 0; \quad X_2 = (a''a)\, a'_y \equiv 0; \quad X_3 = (aa')\, a''_z \equiv 0.$$

A cause de l'identité

$$X_1 + X_2 + X_3 \equiv 0,$$

ces conditions se réduisent à deux, ce qui exige, comme c'était évident, quatre relations entre les coefficients.

THÉORÈME I. — *Lorsque dans trois divisions homographiques supperposées, il existe trois points qui peuvent être considérés comme appartenant aux trois divisions, ces séries homographiques forment une involution du troisième ordre et du second rang.*

Soient $\xi_1, \xi_2; \eta_1, \eta_2; \zeta_1, \zeta_2; \xi'_1, \xi'_2; \eta'_1, \eta'_2; \zeta'_1, \zeta'_2; \xi''_1, \xi''_2; \eta''_1, \eta''_2; \zeta''_1, \zeta''_2$; $x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2$, quatre ternes de points homologues de l'homographie, et supposons qu'en rangeant ce dernier terne, successivement dans l'ordre y, z, x; z, x, y, x, z, y; z, y, x, on ait encore quatre ternes de l'homographie.

Il en résulte que

$$\Delta = \begin{vmatrix}
\xi_1\eta_1\zeta_1 & \xi_1\eta_1\zeta_2 & \xi_1\eta_2\zeta_1 & \xi_2\eta_1\zeta_1 & \xi_1\eta_2\zeta_2 & \xi_2\eta_1\zeta_2 & \xi_2\eta_2\zeta_1 & \xi_2\eta_2\zeta_2 \\
\xi'_1\eta'_1\zeta'_1 & \xi'_1\eta'_1\zeta'_2 & \xi'_1\eta'_2\zeta'_1 & \xi'_2\eta'_1\zeta'_1 & \xi'_1\eta'_2\zeta'_2 & \xi'_2\eta'_1\zeta'_2 & \xi'_2\eta'_2\zeta'_1 & \xi'_2\eta'_2\zeta'_2 \\
\xi''_1\eta''_1\zeta''_1 & \xi''_1\eta''_1\zeta''_2 & \xi''_1\eta''_2\zeta''_1 & \xi''_2\eta''_1\zeta''_1 & \xi''_1\eta''_2\zeta''_2 & \xi''_2\eta''_1\zeta''_2 & \xi''_2\eta''_2\zeta''_1 & \xi''_2\eta''_2\zeta''_2 \\
x_1y_1z_1 & x_1y_1z_2 & x_1y_2z_1 & x_2y_1z_1 & x_1y_2z_2 & x_2y_1z_2 & x_2y_2z_1 & x_2y_2z_2 \\
y_1z_1x_1 & y_1z_1x_2 & y_1z_2x_1 & y_2z_1x_1 & y_1z_2x_2 & y_2z_1x_2 & y_2z_2x_1 & y_2z_2x_2 \\
z_1x_1y_1 & z_1x_1y_2 & z_1x_2y_1 & z_2x_1y_1 & z_1x_2y_2 & z_2x_1y_2 & z_2x_2y_1 & z_2x_2y_2 \\
x_1z_1y_1 & x_1z_1y_2 & x_1z_2y_1 & x_2z_1y_1 & x_1z_2y_2 & x_2z_1y_2 & x_2z_2y_1 & x_2z_2y_2 \\
z_1y_1x_1 & z_1y_1x_2 & z_1y_2x_1 & z_2y_1x_1 & z_1y_2x_2 & z_2y_1x_2 & z_2y_2x_1 & z_2y_2x_2
\end{vmatrix} = 0.$$

Désignons les rangées par 1, 2, 3, ... 8; les colonnes par 1′, 2′, ... 8′.

Si de 4, 5, 6, 7, nous retranchons 8, ces rangées deviennent:

$$\begin{matrix} 0 & y_1(xz) & 0 & y_1(zx) & y_2(xz) & 0 & y_2(zx) & 0 \\ 0 & 0 & x_1(yz) & x_1(zy) & x_2(yz) & x_2(zy) & 0 & 0 \\ 0 & z_1(xy) & z_1(yx) & 0 & 0 & z_2(xy) & z_2(yx) & 0 \\ 0 & z_1(xy) & x_1(yz) & y_1(zx) & z_2(xy) & y_2(zx) & x_2(yz) & 0 \end{matrix}$$

Le déterminant est donc divisible par $(xz)\,(yz)\,(xy)$.

Après cette simplification le déterminant devient:

$$\begin{vmatrix} \xi_1\eta\zeta_1 & \xi_1\eta_2\zeta_2 & \xi_1\eta_2\zeta_1 & \xi_2\eta_1\zeta_1 & \xi_1\eta_2\zeta_2 & \xi_2\eta_1\zeta_2 & \xi_2\eta_2\zeta_1 & \xi_2\eta_2\zeta_2 \\ \xi'_1\eta'_1\zeta'_1 & \cdot\ \cdot & \cdot & & \cdot\ \cdot & & & \xi'_2\eta'_2\zeta'_2 \\ \xi''_1\eta''_1\zeta''_1\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \xi''_1\eta''_1\zeta''_1 \\ 0 & y_1 & 0 & -y_1 & y_2 & 0 & -y_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & -x_1 & x_2 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & -z_1 & 0 & 0 & z_2 & -z_2 & 0 \\ 0 & z_1(xy) & x_1(yz) & y_1(zx) & z_1(xy) & y_2(zx) & x_2(yz) & 0 \\ z_1y_1x_1 & z_1x_1y_2 & z_1x_2y_1 & z_2x_1y_1 & z_1x_2y_2 & z_2x_1y_2 & z_2x_2y_1 & z_2x_2y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Si maintenant, aux colonnes $2'$ et $5'$ on ajoute respectivement $3' + 4'$; $6' + 7'$, et qu'on fasse passer 8 au rang 4, les quatre dernières rangées deviennent

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -y_1 & 0 & 0 & -y_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & -x_1 & 0 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_1 & 0 & 0 & z_2 & -z_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_1(yz) & y_1(zx) & 0 & y_2(zx) & x_2(yz) & 0 \end{matrix}$$

En développant le déterminant, on trouve

$$\Delta=(xy)^2(yz)^2(zx)^2 \begin{vmatrix} \xi_1\eta_1\zeta_1 & (\xi_1\eta_1\zeta_2+\xi_1\eta_2\zeta_1+\xi_2\eta_1\zeta_1) & (\xi_1\eta_2\zeta_2+\xi_2\eta_1\zeta_2+\xi_2\eta_2\zeta_1) & \xi_2\eta_2\zeta_2 \\ \xi'_1\eta'_1\zeta'_1 & (\xi'_1\eta'_1\zeta'_2+\xi'_1\eta'_2\zeta'_1+\xi'_2\eta'_1\zeta'_1) & (\xi'_1\eta'_2\zeta'_2+\xi'_2\eta'_1\zeta'_2+\xi'_1\eta'_2\zeta'_2) & \xi'_2\eta'_2\zeta'_2 \\ \xi''_1\eta''_1\zeta''_1 & (\xi''_1\eta''_1\zeta''_2+\xi''_1\eta''_2\zeta''_1+\xi''_2\eta''_1\zeta''_1) & (\xi''_1\eta''_2\zeta''_2+\xi''_2\eta''_1\zeta''_2+\xi''_2\eta''_2\zeta''_1) & \xi''_2\eta''_2\zeta''_2 \\ x_1y_1z_1 & (x_1y_1z_2+x_1y_2z_1+x_2y_1z_1) & (x_1y_2z_2+x_2y_1z_2+x_2y_2z_1) & x_2y_2z_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier facteur de ce produit n'étant pas nul, le second doit l'être.

Par suite les quatre ternes de points satisfont à une relation de la forme

$$f = a_0 x_1 y_1 z_1 + a_1 (x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) \\ + a_2 (x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + a_3 x_2 y_2 z_2 = 0.$$

Ils sont donc en involution.

De la forme même de la relation d'involution, on déduit :

Théorème II. — *Une involution du troisième ordre et du second rang est caractérisée par trois groupes de points homologues.*

Nous voyons, en même temps, quelle est la relation qui existe entre quatre ternes de points appartenant à l'involution.

Soient x_{i1}, x_{i2}; y_{i1}, y_{i2}; z_{i1}, z_{i2}, les coordonnées des trois points d'un groupe.

Supposons que i prenne les valeurs 1, 2, 3, 4, et soit

$$D = \Sigma \pm [(x_{11} y_{11} z_{11})(x_{21} y_{21} z_{22} + x_{21} y_{22} z_{21} + x_{22} y_{21} z_{21}) \\ (x_{31} y_{32} z_{32} + x_{32} y_{31} z_{32} + x_{32} y_{32} z_{31})(x_{42} y_{42} z_{42})]$$

Théorème III. — *Lorsque quatre ternes de points appartiennent à une involution du troisième ordre et du second rang, il existe entre leurs coordonnées la relation* $D = 0$.

De ce théorème découle un corollaire important.

Supposons que les quatre ternes de rapports $\dfrac{x_{i1}}{x_{i2}}$; $\dfrac{y_{i1}}{y_{i2}}$, $\dfrac{z_{i1}}{z_{i2}}$, soient racines des équations

$$a_x^3 = 0, \qquad b_x^3 = 0, \qquad c_x^3 = 0, \qquad d_x^3 = 0.$$

La condition $D = 0$ pourra aussi s'écrire :

$$\begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 \\ c_0 & 3c_1 & 3c_2 & c_3 \\ d_0 & 3d_1 & 3d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

D'après cela, on aura

$$p_1 a_x^3 + p_2 b_x^3 + p_3 c_x^3 + p_4 d_x^3 \equiv 0.$$

Donc

Corollaire. — *Les groupes de trois points représentés par des équations de la forme*

$$p_1 a_x^3 + p_2 b_x^3 + p_3 c_x^3 \equiv 0,$$

appartiennent à une involution du troisième ordre et du second rang.

En suivant une marche analogue à celle que nous avons employée pour l'homographie, ou en écrivant simplement d'une autre façon l'identité

$$p_1 a_x^3 + p_2 b_x^3 + p^3 c_x^3 + p_4 d_x^3 \equiv 0,$$

on peut énoncer ce

Théorème IV. — *L'involution du troisième ordre et du second rang peut être caractérisée par l'identité*

$$\sum_{i=1}^{i=4} p_i (X_1 x_{i2} - X_2 x_{i1}) (X_1 y_{i2} - X_2 y_{i1}) (X_1 z_{i2} - X_2 z_{i1}) \equiv 0.$$

Cette identité va vous permettre de trouver les différentes formes de la relation qui existe entre quatre ternes de l'involution.

Nous pourrons faire successivement

$$X_1 = x_{11},\ X_2 = x_{12};\ X_1 = x_{21},\ X_2 = x_{22};\ X_1 = x_{31},\ X_2 = x_{31};\ X_1 = x_{41},\ X_2 = x_{42}.$$

Ces quatre hypothèses nous conduisent aux égalités suivantes :

$$p_2(x_{11}x_{22})(x_{11}y_{22})(x_{11}z_{22}) + p_3(x_{11}x_{32})(x_{11}y_{32})(x_{11}z_{32}) + p_4(x_{11}x_{42})(x_{11}y_{42})(x_{11}z_{42}) = 0,$$

$$p_1(x_{21}x_{12})(x_{21}y_{12})(x_{21}z_{12}) + p_3(x_{21}x_{32})(x_{21}y_{32})(x_{21}z_{32}) + p_4(x_{21}x_{42})(x_{21}y_{42})(x_{21}z_{42}) = 0,$$

$$p_1(x_{31}x_{12})(x_{31}y_{12})(x_{31}z_{12}) + p_2(x_{31}x_{22})(x_{31}y_{22})(x_{31}z_{22}) + p_4(x_{31}x_{42})(x_{31}y_{42})(x_{31}z_{42}) = 0,$$

$$p_1(x_{41}x_{12})(x_{41}y_{12})(x_{41}z_{12}) + p_2(x_{41}x_{22})(x_{41}y_{22})(x_{41}z_{22}) + p_3(x_{41}x_{32})(x_{41}y_{32})(x_{41}z_{32}) = 0.$$

Ce système d'équations linéaires par rapport à p_1, p_2, p_3, p_4 étant vérifié, son déterminant est nul.

Il en résulte

$$\begin{vmatrix} 0 & P(x_{11}v_{22}) & P(x_{11}v_{32}) & P(x_{11}v_{42}) \\ P(x_{21}v_{12}) & 0 & P(x_{21}v_{32}) & P(x_{21}v_{42}) \\ P(x_{31}v_{12}) & P(x_{31}v_{22}) & 0 & P(x_{31}v_{42}) \\ P(x_{41}v_{12}) & P(x_{41}v_{22}) & P(x_{41}v_{32}) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Par la notation $P(x_{11}v_{22})$, par exemple, nous indiquons qu'il faut prendre le produit des trois déterminants binaires, où l'on remplace le symbole v successivement par x, y, z.

On s'aperçoit aisément que cette forme de la relation d'involution n'est pas unique, puisqu'on aurait pu faire disparaître le coefficient de p_1 de trois manières distinctes; il en serait de même des coefficients de p_2, p_3, p_4.

On peut donner à la relation entre quatre ternes de points, une forme toute différente.

Supposons que l'on fasse successivement

$$X_1 = x_{11},\ X_2 = x_{12};\quad X_1 = y_{11},\ X_1 = y_{12};\quad X_1 = z_{11},\ X_2 = z_{12}.$$

Nous aurons les trois équations

$$p_2(x_{11}x_{22})(x_{11}y_{22})(x_{11}z_{22}) + p_3(x_{11}x_{32})(x_{11}y_{32})(x_{11}z_{32}) + p_4(x_{11}x_{42})(x_{11}y_{42})(x_{11}z_{42}) = 0,$$

$$p_2(y_{11}x_{22})(y_{11}y_{22})(y_{11}z_{22}) + p_3(y_{11}x_{32})(y_{11}y_{32})(y_{11}z_{32}) + p_4(y_{11}x_{42})(y_{11}y_{42})(y_{11}z_{42}) = 0,$$

$$p_2(z_{11}x_{22})(z_{11}y_{22})(z_{11}z_{22}) + p_3(z_{11}x_{32})(z_{11}y_{32})(z_{11}z_{32}) + p_4(z_{11}x_{42})(z_{11}y_{42})(z_{11}z_{42}) = 0.$$

Il en résulte

$$\begin{vmatrix} (x_{11}x_{22})(x_{11}y_{22})(x_{11}z_{22})(x_{11}x_{32})(x_{11}y_{32})(x_{11}z_{32})(x_{11}x_{42})(x_{11}y_{42})(x_{11}z_{42}) \\ (y_{11}x_{22})(y_{11}y_{22})(y_{11}z_{22})(y_{11}x_{32})(y_{11}y_{32})(y_{11}z_{32})(y_{11}x_{42})(y_{11}y_{42})(y_{11}z_{42}) \\ (z_{11}x_{22})(z_{11}y_{22})(z_{11}z_{22})(z_{11}x_{32})(z_{11}y_{32})(z_{11}z_{32})(z_{11}x_{42})(z_{11}y_{42})(z_{11}z_{42}) \end{vmatrix} = 0.$$

Si nous développons ce déterminant, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &(x_{11}x_{22})(x_{11}y_{22})(x_{11}z_{22})(y_{11}x_{32})(y_{11}y_{32})(y_{11}z_{32})(z_{11}x_{42})(z_{11}y_{42})(z_{11}z_{42}) \\ -&(x_{11}x_{22})(x_{11}y_{22})(x_{11}z_{22})(y_{11}x_{42})(y_{11}y_{42})(y_{11}z_{42})(z_{11}x_{32})(z_{11}y_{32})(z_{11}z_{32}) \\ +&(x_{11}x_{32})(x_{11}y_{32})(x_{11}z_{32})(y_{11}x_{42})(y_{11}y_{42})(y_{11}z_{42})(z_{11}x_{22})(z_{11}y_{22})(z_{11}z_{22}) \\ -&(x_{11}x_{32})(x_{11}y_{32})(x_{11}z_{32})(y_{11}x_{22})(y_{11}y_{22})(y_{11}z_{22})(z_{11}x_{42})(z_{11}y_{42})(z_{11}z_{42}) \\ +&(x_{11}x_{42})(x_{11}y_{42})(x_{11}z_{42})(y_{11}x_{22})(y_{11}y_{22})(y_{11}z_{22})(z_{11}x_{32})(z_{11}y_{32})(z_{11}z_{32}) \\ -&(x_{11}x_{42})(x_{11}y_{42})(x_{11}z_{42})(y_{11}x_{32})(y_{11}y_{32})(y_{11}z_{32})(z_{11}x_{22})(z_{11}y_{22})(z_{11}z_{22}) = 0. \end{aligned}$$

Si maintenant nous divisons tous les termes du premier membre par

$$(x_{11}x_{22})(x_{11}x_{32})(x_{11}x_{42})(y_{11}y_{22})(y_{11}y_{32})(y_{11}y_{42})(z_{11}z_{22})(z_{11}z_{32})(z_{11}z_{42}),$$

nous aurons finalement :

$$\begin{aligned} &\frac{(x_{11}y_{22})(y_{11}z_{42})(z_{11}x_{32})}{(x_{11}x_{32})(y_{11}y_{22})(z_{11}z_{42})}\cdot\frac{(x_{11}z_{22})(y_{11}x_{42})(z_{11}y_{32})}{(x_{11}x_{42})(y_{11}y_{32})(z_{11}z_{22})} \\ -&\frac{(x_{11}y_{22})(y_{11}z_{32})(z_{11}x_{42})}{(x_{11}x_{42})(y_{11}y_{22})(z_{11}z_{32})}\cdot\frac{(x_{11}z_{22})(y_{11}x_{32})(z_{11}y_{42})}{(x_{11}x_{32})(y_{11}y_{42})(z_{11}z_{22})} \\ +&\frac{(x_{11}y_{42})(y_{11}z_{32})(z_{11}x_{22})}{(x_{11}x_{22})(y_{11}y_{42})(z_{11}z_{32})}\cdot\frac{(x_{11}z_{42})(y_{11}x_{32})(z_{11}y_{22})}{(x_{11}x_{32})(y_{11}y_{22})(z_{11}z_{42})} \end{aligned}$$

$$-\frac{(x_{11}y_{42})(y_{11}z_{22})(z_{11}x_{32})}{(x_{11}y_{32})(y_{11}y_{42})(z_{11}z_{22})}\cdot\frac{(x_{11}z_{42})(y_{11}x_{22})(z_{11}y_{32})}{(x_{11}x_{22})(y_{11}y_{32})(z_{11}z_{42})}$$

$$+\frac{(x_{11}y_{32})(y_{11}z_{22})(z_{11}x_{42})}{(x_{11}y_{42})(y_{11}z_{32})(z_{11}z_{22})}\cdot\frac{(x_{11}z_{32})(y_{11}x_{22})(z_{11}y_{42})}{(x_{11}x_{22})(y_{11}y_{42})(z_{11}z_{32})}$$

$$-\frac{(x_{11}y_{32})(y_{11}z_{42})(z_{11}x_{22})}{(x_{11}x_{22})(y_{11}y_{32})(z_{11}z_{42})}\cdot\frac{(x_{11}z_{32})(y_{11}x_{42})(z_{11}y_{22})}{(x_{11}x_{42})(y_{11}y_{22})(z_{11}z_{32})}=0.$$

Chaque facteur des termes du premier membre est, comme on le voit, une fonction des paramètres de six points. De plus chaque déterminant binaire est proportionnel à la distance de deux points.

Si nous représentons les douze points en involution par

$$\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \qquad \xi_2, \eta_2, \zeta_2; \qquad \xi_3, \eta_3, \zeta_3; \qquad \xi_4, \eta_4, \zeta_4;$$

nous pourrons indiquer une de ces fonctions, la première par exemple, au moyen de la notation

$$\begin{pmatrix} \xi_1, \eta_1, \zeta_1, \\ \eta_2, \zeta_4, \xi_3 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons même employer la notation plus abrégée

$$(\eta\zeta\xi)_{243}.$$

Avec cette notation, la formule précédente devient :

$$(\eta\zeta\xi)_{234}\quad(\zeta\xi\eta)_{234}+(\eta\zeta\xi)_{342}\quad(\zeta\xi\eta)_{342}+(\eta\zeta\xi)_{423}\quad(\zeta\xi\eta)_{423}$$
$$-(\eta\zeta\xi)_{243}\quad(\zeta\xi\eta)_{243}-(\eta\zeta\xi)_{432}\quad(\zeta\xi\eta)_{432}-(\eta\zeta\xi)_{324}\quad(\zeta\xi\eta)_{324}=0.$$

Cette relation se forme, on le voit, d'une manière fort simple. Les indices, au numérateur, étant toujours 1, 1, 1, les indices des dénominateurs forment toutes les permutations possibles de 2, 3, 4.

Le signe du produit est positif ou négatif selon que la permutation de l'indice est de classe paire ou de classe impaire.

Quant aux lettres, en y comprenant la première série, elles donnent les trois permutations circulaires de ξ, η, ζ.

Nous appellerons les fonctions $(\eta\zeta\xi)_{pqr}$, etc., des *rapports anharmoniques du troisième ordre.*

Et nous pourrons dire :

THÉORÈME V. — *L'involution du troisième ordre et du second rang peut s'exprimer par la réduction à zéro d'une somme algébrique de produits deux à deux de rapports anharmoniques du troisième ordre.*

Sous cette forme, on reconnaît immédiatement la généralisation de la relation anharmonique de six points appartenant à une involution quadratique.

En effet, appliquons à six points de celle-ci le théorème que nous venons d'énoncer : nous aurons

$$\begin{pmatrix} \xi\eta \\ \eta\xi \end{pmatrix}_{23} - \begin{pmatrix} \xi\eta \\ \eta\xi \end{pmatrix}_{32} = 0,$$

ou, en développant :

$$\frac{(\xi_1 - \eta_2)(\eta_1 - \xi_3)}{(\xi_1 - \xi_3)(\eta_1 - \eta_2)} = \frac{(\xi_1 - \eta_3)(\eta_1 - \xi_2)}{(\xi_1 - \xi_2)(\eta_1 - \xi_3)},$$

ou bien, avec les notations habituelles

$$(\xi_1\,\eta_1\,\eta_2\,\xi_3) = (\eta_1, \xi_1, \xi_2, \eta_3).$$

Nous nous occuperons, dans un chapitre spécial, du rapport anharmonique de six points. Il nous suffit d'avoir montré, pour le moment, comment cette notion s'introduit, nécessairement, dans la théorie de l'involution.

D'après la forme de l'équation d'involution, nous voyons que :

Théorème VI. — *Dans une involution du troisième ordre et du second rang, à un point quelconque, correspond une involution du second ordre.*

En général, un couple de points y_1, y_2; z_1, z_2, étant donné, à cause de la relation

$$x_1 \frac{df}{dx_1} + x_2 \frac{df}{dx_2} = 0,$$

il ne correspond, à ce couple, qu'un seul point x_1, x_2.

Mais si l'on a, à la fois,

$$\frac{df}{dx_1} = 0, \quad \frac{df}{dx_2} = 0,$$

le point x est indéterminé.

Ces deux relations peuvent être vérifiées par un couple de valeurs, car deux involutions quadratiques ne possèdent que deux points communs.

Pour obtenir l'équation qui définit ces points, il suffit de faire, dans les covariants σ_i (chapitre I, § 1)

$$a_{111} = a_0; \; a_{112} = a_{121} = a_{211} = a_1; \; a_{122} = a_{212} = a_{221} = a_2; \; a_{222} = a_3.$$

On obtient ainsi l'équation unique

$$(ab)^2 a_x b_x \equiv 2\left[(a_0a_2 - a_1^2)\,x_1^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)\,x_1x_2 + (a_1a_3 - a_2^2)\,x_2^2\right] = 0.$$

Par suite

Théorème VII. — *Dans une involution du troisième ordre et du second rang, il existe un couple d'éléments neutres* (*).

Ce couple est unique, puisque, dans le cas de l'involution, les trois covariants σ_i sont identiques.

(*) L'existenee du couple d'éléments neutres a été signalée d'abord, pensons-nous, par M. Appell, *Ann. de l'École normale,* t. V, p. 348; on peut voir aussi Garbieri, *Nuovo teorema algebrico, etc.*, p. 35. Extr. du Journal de Battaglini, 1878. La Théorie générale a été donnée par M. Em. Weyr, *Sitz. der k. Akad. der Wiss.*, t. LXXIX, avril 1879.

D'ailleurs on peut démontrer que :

Théorème VIII. — *Si, dans une involution du troisième ordre et du second rang, il existe un couple de points auquel correspondent deux points distincts, ce couple de points est représenté par l'équation*

$$(ab)^2 a_x b_x = 0.$$

Soient x_1, x_2; y_1, y_2, les points auxquels correspondent les éléments distincts z_1, z_2; z'_1, z'_2.

On aura les deux équations

$$\begin{aligned} a_0x_1y_1z_1 + a_1(x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1) + a_2(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1) \\ + a_3x_2y_2z_2 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0x_1y_1z'_1 + a_1(x_1y_1z'_2 + x_1y_2z'_1 + x_2y_1z'_1) + a_2(x_1y_2z'_2 + x_2y_1z'_2 + x_2y_2z'_1) \\ + a_3x_2y_2z'_2 = 0, \end{aligned}$$

équations qui peuvent aussi s'écrire :

$$x_1y_1(a_0z_1 + a_1z_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)(a_1z_1 + a_2z_2) + x_2y_2(a_2z_1 + a_3z_2) = 0,$$
$$x_1y_1(a_0z'_1 + a_1z'_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)(a_1z'_1 + a_2z'_2) + x_2y_2(a_2z'_1 + a_3z'_2) = 0.$$

Il en résulte immédiatement

$$\frac{x_1y_1}{x_2y_2} = -\frac{\begin{vmatrix} a_2z_1 + a_3z_2 & a_1z_1 + a_2z_2 \\ a_2z'_1 + a_3z'_2 & a_1z_1 + a_2z'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0z_1 + a_1z_2 & a_1z_1 + a_2z_2 \\ a_0z'_1 + a_1z'_2 & a_1z'_1 + a_2z'_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}},$$

$$\frac{x_1y_2 + x_2y_1}{x_2y_2} = -\frac{\begin{vmatrix} a_0z_1 + a_1z_2 & a_2z_1 + a_3z_2 \\ a_0z'_1 + a_1z'_2 & a_2z'_1 + a_3z'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0z_1 + a_1z_2 & a_1z_1 + a_2z_2 \\ a_0z'_1 + a_1z'_2 & a_1z'_1 + a_2z'_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}}.$$

Par suite les deux points x_1, x_2; y_1, y_2, sont représentés par l'équation

$$(a_0a_2 - a_1^2)x_1^2 + (a_0a_3 - a_1a_2)x_1x_2 + (a_1a_3 - a_2^2)x_2^2 = 0.$$

Le premier membre de cette équation est un covariant de a_x^3; nous le représenterons par h_x^2.

Les deux points donnés par $h_x^2 = 0$, font partie de toutes les involutions quadratiques qui correspondent, en vertu du théorème VI, à tous les points de la ponctuelle.

On peut en conclure

Théorème IX. — *Si l'on représente par* $C_x^2 = 0$, *un couple de points, à un groupe donné par*

$$\lambda C_x^2 + \mu h_x^2 = 0,$$

correspondra un point unique, quel que soit μ.

Ce théorème nous sera utile dans les constructions.

On peut d'ailleurs le vérifier directement.

En effet, on a, par exemple,

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{\dfrac{df}{dz_2}}{\dfrac{df}{dz_1}} = -\frac{a_1x_1y_1 + a_2(x_1y_2 + x_2y_1) + a_3x_2y_2}{a_0x_1y_1 + a_1(x_1y_2 + x_2y_1) + a_2x_2y_2},$$

Si le groupe x, y est déterminé par

$$\lambda c_x^2 + \mu h_x^2,$$

on a :

$$\begin{aligned} x_1y_1 &= \lambda c_2 + \mu(a_1a_3 - a_2^2), \\ -(x_1y_2 + x_2y_1) &= 2\lambda c_1 + \mu(a_0a_3 - a_1a_2), \\ x_2y_2 &= \lambda c_0 + \mu(a_0a_2 - a_1^2). \end{aligned}$$

Si l'on substitue, dans $\frac{z_1}{z_2}$, on trouve

$$\frac{z_1}{z_2} = -\frac{a_1c_2 - 2a_2c_1 + a_3c_0}{a_0c_2 - 2a_1c_1 + a_2c_0}.$$

On peut, en introduisant les éléments neutres, donner à f une forme canonique analogue à (11), chapitre Ier.

En effet, nous avons eu, dans ce cas,

$$f \equiv a_{111}\xi_1\eta_1\zeta_1 + a_{222}\xi_2\eta_2\zeta_2,$$

ou, en appelant $\delta_1, \delta'_1; \delta_2, \delta'_2; \delta_3, \delta'_3$, les valeurs des rapports $\frac{x_1}{x_2}, \frac{y_1}{y_2}, \frac{z_1}{z_2}$, donnés par les équations

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 0,$$

$$\begin{aligned} f \equiv\, & a_{111}(x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta_2 y_2)(z_1 - \delta_3 z_2) \\ & + a_{222}(x_1 - \delta'_1 x_2)(y_1 - \delta'_2 y_2)(z_1 - \delta'_3 z_2). \end{aligned}$$

Dans le cas actuel

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3; \quad \delta'_1 = \delta'_2 = \delta'_3;$$

la forme canonique de la relation d'involution sera

$$\begin{aligned} f \equiv\, & a_{111}(x_1 - \delta_1 x_2)(y_1 - \delta_1 y_2)(z_1 - \delta_1 z_2) \\ & + a_{222}(x_1 - \delta'_1 x_2)(y_1 - \delta'_1 y_2)(z_1 - \delta'_1 z_2). \end{aligned} \tag{25}$$

Puisque, dans l'involution, les trois séries de points sont toujours distribuées sur un support unique, nous pouvons faire, dans la relation caractéristique

$$x_1 = y_1 = z_1; \quad x_2 = y_2 = z_2.$$

En conséquence

Théorème X. — *Dans l'involution du troisième ordre et du second rang, il existe trois points triples.*

Ces points sont représentés par l'équation

$$a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 = 0.$$

Si nous nous rappelons l'équation qui représente les éléments neutres, nous pourrons dire que

Corollaire. — *Les éléments neutres représentent le hessien des points triples.*

Supposons que

$$b_x^3 = 0,$$

caractérise un terne de points de l'involution

$$f = a_x a_y a_z = 0.$$

Il faudra évidemment, pour que cette condition soit vérifiée, que l'on ait

$$(a_0 b_3 - 3a_1 b_2 + 3a_2 b_1 - a_3 b_0) = (ab)^3 = 0.$$

Les points triples de l'involution et un terne de points qui appartiennent à cette involution, sont donc tels que l'invariant linéo-linéaire des deux formes qui les représentent est égal à zéro.

Lorsque cette condition est remplie, nous dirons que les deux séries de trois points sont *conjuguées harmoniques du troisième ordre.*

Donc

Théorème XI. — *Les points triples d'une involution du troisième ordre et du second rang sont conjugués harmoniques d'un terne de points appartenant à l'involution.*

Réciproquement

Théorème XII. — *Les ternes de points, conjugués harmoniques d'un terne de points, appartiennent à une involution du troisième ordre et du second rang.*

Supposons que t_x^3 soit la forme donnée et que les quatre ternes représentés par

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0, \quad c_x^3 = 0, \quad d_x^3 = 0,$$

soient tels que

$$(at)^3 = (bt)^3 = (ct)^3 = (dt)^3 = 0.$$

En développant ces dernières égalités, on trouve, évidemment,

$$\begin{vmatrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 \\ c_0 & 3c_1 & 3c_2 & c_3 \\ d_0 & 3d_1 & 3d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Soit encore $(ab)^3$ l'invariant linéo-linéaire de deux formes cubiques, et soient x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2; ξ_1, ξ_2; η_1, η_2; ζ_1, ζ_2 les deux groupes de trois points représentés par ces formes.

La condition $(ab)^3 = 0$ pourra aussi s'écrire

$$\Big[x_2y_2z_2 \cdot \xi_1\eta_1\zeta_1 - \frac{1}{3}(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1)(\xi_1\eta_1\zeta_2 + \xi_1\eta_2\zeta_1 + \xi_2\eta_1\zeta_1)$$
$$+ \frac{1}{3}(x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1)(\xi_1\eta_2\zeta_2 + \xi_2\eta_1\zeta_2 + \xi_2\eta_2\zeta_1)$$
$$- x_1y_1z_1 \cdot \xi_2\eta_2\zeta_2\Big] = 0.$$

Mais cette égalité deviendra, par une légère transformation,

$$(\xi x)(\eta y)(\zeta z) + (\xi y)(\eta z)(\zeta x) + (\xi z)(\eta x)(\zeta y) = 0.$$

En employant la notation dont nous avons déjà fait usage tantôt, on peut l'écrire

$$\begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ y & z & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ z & x & y \end{pmatrix} = -1.$$

Soit, de nouveau,

$$a_x^3 = 0,$$

l'équation des points triples de l'involution

$$a_x a_y a_z = 0.$$

Comme on a

$$(aa')^3 = 0,$$

on arrive à la propriété suivante :

Théorème XIII. — *Les points triples d'une involution du troisième ordre et du second rang font partie de l'involution.*

Nous allons d'ailleurs le faire voir directement.

Les points de l'involution peuvent être définis par l'équation

$$f_x^3 \equiv \lambda b_x^3 + \mu c_x^3 + \nu d_x^3 = 0.$$

Pour que le polynôme f_x^3 devienne un cube, il faut et il suffit que

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx_1 dx_2} = 0, \quad \frac{d^2 f}{dx_1^2} = 0,$$

ou

$$\lambda \frac{d^2 b}{dx_1^2} + \mu \frac{d^2 c}{dx_1^2} + \nu \frac{d_2 d}{dx_1^2} = 0,$$
$$\lambda \frac{d^2 b}{dx_1 dx_2} + \mu \frac{d^2 c}{dx_1 dx_2} + \nu \frac{d^2 d}{dx_1 dx_2} = 0,$$
$$\lambda \frac{d^2 b}{dx_2^2} + \mu \frac{d^2 c}{dx_1 dx_2} + \nu \frac{d^2 d}{dx_2^2} = 0.$$

Par suite les points triples seront racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 b}{dx_1^2} & \frac{d^2 c}{dx_1^2} & \frac{d^2 d}{dx_1^2} \\ \frac{d^2 b}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2 c}{dx_1 dx_2} & \frac{d^2 d}{dx_1 dx_2} \\ \frac{d^2 b}{dx_2^2} & \frac{d^2 c}{dx_2^2} & \frac{d^2 d}{dx_2^2} \end{vmatrix} = (bc)(cd)(db)\, b_x c_x d_x = 0.$$

Il résulte d'un théorème général sur le déterminant fonctionnel d'un nombre quelconque de formes binaires que l'on a

$$3\,(bc)\,(cd)\,(db)\, b_x c_x d_x \equiv (bc)^3\, d_x^3 + (cd)^3\, b_x^3 + (db)^3\, c_x^3,$$

ce qui démontre le théorème énoncé (*).

Nous ne nous occuperons pas, pour le moment, des constructions relatives à l'involution du second rang, constructions que nous donnerons après l'exposition complète des théories de l'involution.

(*) Nous avons fait connaître ces relations générales dans une Note insérée aux *C. R.*, t. XCII, p. 688.

§ 2.

Définition. — *Les ternes de points qui appartiennent à la fois aux deux involutions du second rang définies par les équations*

$$f = a_x a_y a_z = 0, \quad \varphi = \alpha_x \alpha_y \alpha_z = 0,$$

constituent une involution du troisième ordre et du premier rang (*).

Nous représenterons une telle involution par la notation I_1^3. Il est visible qu'une telle involution existe. En effet, soit un point ξ, d'une série quelconque. A ce point correspondent, dans les deux involutions données, des involutions quadratiques, qui, on le sait, ont toujours un groupe commun η, ζ. Les trois points ξ, η, ζ constituent donc un terne de l'involution I_1^3.

De cette remarque, on déduit immédiatement que

Théorème XIV. — *Dans une involution du troisième ordre et du premier rang, un terne de points est déterminé par un de ses points.*

Supposons que x_1, x_2; y_1, y_2; z_1, z_2 soient les paramètres d'un terne de points appartenant à une involution du troisième ordre et du premier rang : d'après la définition, nous aurons

$$a_0 x_1 y_1 z_1 + a_1 (x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) \\ + a_2 (x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + a_3 x_2 y_2 z_2 = 0,$$

$$\alpha_0 x_1 y_1 z_1 + \alpha_1 (x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 + x_2 y_1 z_1) \\ + \alpha_2 (x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1) + \alpha_3 x_2 y_2 z_2 = 0.$$

(*) Cette définition diffère de celle que l'on emploie d'habitude pour les involutions du premier rang : elle a l'avantage, comme nous l'avons montré plus haut, de s'appliquer aux homographies supérieures.

Par conséquent, ces paramètres satisfont à des relations

$$(\alpha_0 a_1)(x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1) + (\alpha_0 a_2)(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1) \\ + (\alpha_0 a_3)\, x_2y_2z_2 = 0,$$

$$(\alpha_1 a_0)\, x_1y_1z_1 + (\alpha_1 a_2)(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1) + (\alpha_1 a_3)\, x_2y_2z_2 = 0,$$

etc.

Il en résulte qu'entre trois ternes,

$$x_{11}, x_{12};\ y_{11}, y_{12};\ z_{11}, z_{12};\ x_{21}, x_{22};\ y_{21}, y_{22};\ z_{21}, z_{22};\ x_{31}, x_{32};\ y_{31}, y_{32};\ z_{31}, z_{32},$$

on a les relations

$$D = \left\| \begin{matrix} x_{11}y_{11}z_{11} & x_{11}y_{11}z_{12}+x_{11}y_{12}z_{11}+x_{12}y_{11}z_{11} & x_{11}y_{12}z_{12}+x_{12}y_{11}z_{12}+x_{12}y_{12}z_{11} & x_{12}y_{12}z_{12} \\ x_{21}y_{21}z_{21} & x_{21}y_{21}y_{22}+x_{21}y_{22}z_{21}+x_{22}y_{21}z_{21} & x_{21}y_{22}z_{22}+x_{22}y_{21}z_{22}+x_{22}y_{22}z_{21} & x_{22}y_{22}z_{22} \\ x_{31}y_{31}z_{31} & x_{31}y_{31}z_{32}+x_{31}y_{32}z_{31}+x_{32}y_{31}z_{31} & x_{31}y_{32}z_{32}+x_{32}y_{31}z_{32}+x_{32}y_{32}z_{31} & x_{32}y_{32}z_{32} \end{matrix} \right\| \equiv 0.$$

Nous indiquons, par cette notation, que tous les déterminants du troisième ordre, formés avec ce déterminant rectangulaire, sont nuls.

THÉORÈME XV. — *Lorsque trois ternes de points appartiennent à une involution du troisième ordre et du premier rang, il existe, entre leurs coordonnées, une relation* $D \equiv 0$.

Supposons que les rapports $\dfrac{x_{i1}}{x_{i2}}, \dfrac{y_{i1}}{y_{i2}}, \dfrac{z_{i1}}{z_{i2}}$, soient racines des équations

$$a_x^3 = 0, \quad b_x^3 = 0, \quad c_x^3 = 0.$$

La condition précédente pourra s'écrire

$$\left\| \begin{matrix} a_0 & 3a_1 & 3a_2 & a_3 \\ b_0 & 3b_1 & 3b_2 & b_3 \\ c_0 & 3c_1 & 3c_2 & c_3 \end{matrix} \right\| \equiv 0$$

En vertu d'une propriété des déterminants multiples, ceci revient à

$$\lambda a_x^3 + \mu b_x^3 + \nu c_x^3 \equiv 0.$$

Corollaire I. — *Les groupes de trois points représentés par une équation de la forme*

$$a_x^3 + \lambda b_x^3 = 0,$$

appartiennent à une involution du troisième ordre et du premier rang (*).

Corollaire II. — *L'involution cubique du premier rang est caractérisée par deux ternes de points.*

L'identité précédente peut encore s'écrire d'une autre manière, qui ne diffère pas, au fond, de la première. On a ainsi :

Théorème XVI. — *L'involution du troisième ordre et du premier rang peut être caractérisée par l'identité :*

$$\sum_{i=1}^{i=3} p_i (X_1 x_{i2} - X_2 x_{i1})(X_1 y_{i2} - X_2 y_{i1})(X_1 z_{i2} - X_2 z_{i1}) \equiv 0. \qquad (26)$$

On voit d'ailleurs que si cette identité est vérifiée, il en est de même de la condition $D \equiv 0$, et réciproquement.

De (26) découlent les diverses formes de l'involution I_1^3.

Si nous y faisons successivement, par exemple, $X_1 = x_{11}$, $X_2 = x_{12}$, $X_1 = x_{21}$, $X_2 = x_{22}$; $X_1 = x_{31}$, $X_2 = x_{32}$, nous aurons :

$$\begin{array}{lr} \qquad\qquad p_2(x_{11}x_{22})(x_{11}y_{22})(x_{11}z_{22}) + p_3(x_{11}x_{32})(x_{11}y_{32})(x_{11}z_{32}) & = 0, \\ p_1(x_{21}x_{12})(x_{21}y_{12})(x_{21}z_{12}) \qquad\qquad + p_3(x_{21}x_{32})(x_{21}y_{32})(x_{21}z_{32}) & = 0, \\ p_1(x_{31}x_{12})(x_{31}y_{12})(x_{31}z_{12}) + p_2(x_{31}x_{22})(x_{31}y_{22})(x_{31}z_{22}) \qquad\qquad & = 0. \end{array}$$

Il en résulte

$$\begin{vmatrix} 0 & P(x_{11}v_{22}) & P(x_{11}v_{32}) \\ P(x_{21}v_{12}) & 0 & P(x_{12}v_{32}) \\ P(x_{31}v_{12}) & P(x_{31}v_{22}) & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (27)$$

$$P(x_{i1}v_{k2}) = (x_{ii}x_{k2})(x_{i1}y_{k2})(x_{i1}z_{k2}).$$

Cette relation n'est pas unique, naturellement; on peut trouver les formules analogues par un choix convenable des valeurs

(*) C'est la définition ordinaire de l'involution du premier rang.

données à X_1, X_2; de plus, elle ne suffirait pas, à elle seule, pour caractériser l'involution.

Dans l'identité (26), faisons successivement $X_1 = x_{11}$, $X_1 = x_{12}$; $X_1 = y_{11}$, $X_2 = y_{12}$; $X_1 = z_{11}$, $X_2 = z_{12}$, nous aurons

$$p_2 (x_{11}x_{22}) (x_{11}y_{22}) (x_{11}z_{22}) + p_3 (x_{11}x_{32}) (x_{11}y_{32}) (x_{11}z_{32}) = 0,$$
$$p_2 (y_{11}x_{22}) (y_{11}y_{22}) (y_{11}z_{22}) + p_3 (y_{11}x_{32}) (y_{11}y_{32}) (y_{11}z_{32}) = 0,$$
$$p_2 (z_{11}x_{22}) (z_{11}y_{22}) (z_{11}z_{22}) + p_3 (z_{11}x_{32}) (z_{11}y_{32}) (z_{11}z_{32}) = 0.$$

On en déduit

$$\frac{(x_{11}x_{22})(x_{11}y_{22})(x_{11}z_{22})}{(x_{11}x_{32})(x_{11}y_{32})(x_{11}z_{32})} = \frac{(y_{11}x_{22})(y_{11}y_{22})(y_{11}z_{22})}{(y_{11}x_{32})(y_{11}y_{32})(y_{11}z_{32})} = \frac{(z_{11}x_{22})(z_{11}y_{22})(z_{11}z_{22})}{(z_{11}x_{32})(z_{11}y_{32})(z_{11}z_{32})}, \quad (28)$$

et d'autres formules analogues.

Ces équations sont dues à Poncelet.

Si, dans (27), nous remplaçons les rapports $\frac{x_{i1}}{x_{i2}}$, $\frac{y_{i1}}{y_{i2}}$, $\frac{z_{i1}}{z_{i2}}$, par ξ_i, η_i, ζ_i et que nous développions, nous aurons

$$(\xi_1 - \eta_2)(\xi_1 - \zeta_1)(\xi_2 - \eta_3)(\xi_2 - \zeta_3)(\xi_3 - \eta_1)(\xi_3 - \zeta_1)$$
$$= (\xi_1 - \eta_3)(\xi_1 - \zeta_3)(\xi_2 - \eta_1)(\xi_2 - \zeta_1)(\xi_3 - \eta_2)(\xi_3 - \zeta_2),$$

équation que nous pourions écrire

$$\frac{(\xi_1 - \eta_2)(\xi_2 - \eta_3)(\xi_3 - \eta_1)}{(\xi_1 - \eta_3)(\xi_2 - \eta_1)(\xi_3 - \eta_2)} = \frac{(\xi_1 - \zeta_3)(\xi_2 - \zeta_1)(\xi_3 - \zeta_2)}{(\xi_1 - \zeta_2)(\xi_2 - \zeta_3)(\xi_3 - \zeta_1)}$$

Les deux membres de cette égalité sont des rapports anharmoniques du troisième ordre. Par suite

Théorème XVII. — *L'involution du troisième ordre et du premier rang peut s'exprimer par des égalités de rapports anharmoniques du troisième ordre.*

D'après le théorème XIV, au point à l'infini correspond un couple de points.

Supposons que dans (28), le point ξ_1 (x_1, x_2) soit le point situé à l'infini. Les deux points correspondants η_1, ζ_1, seront les *points centraux.*

Les relations (28) prennent alors la forme

$$(\eta_1 - \xi_2)(\eta_1 - \eta_2)(\eta_1 - \zeta_1) = (\eta_1 - \xi_3)(\eta_1 - \eta_3)(\eta_1 - \zeta_3).$$

L'équation (25), rapprochée des relations (28), nous conduit à ce théorème :

THÉORÈME XVIII. — *Dans une involution cubique du second rang, les éléments neutres font partie de toutes les involutions du premier rang définies par deux ternes de points.*

L'involution du premier rang peut être définie par une relation unique.

On a

$$f = a_x a_y a_z = \varphi; \qquad \varphi = \alpha_x \alpha_y \alpha_z = 0.$$

Si l'on élimine x entre f et φ, on obtient un covariant

$$(f, \varphi)_x = (a\alpha)\, a_y \alpha_y a_z \alpha_z = p_y^2 \varpi_z^2.$$

A un point y correspondent deux points z, z' : y, z, z', constitue un terne de l'involution I_1^3, caractérisée par les deux équations

$$f = 0, \quad \varphi = 0.$$

Soient, en effet, deux involutions quadratiques

$$p_x p_y = p_0 x_1 y_1 + p_1 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + p_2 x_2 y_2 = 0,$$

$$q_x q_y = q_0 x_1 y_1 + q_1 (x_1 y_2 + x_2 y_1) + q_2 x_2 y_2 = 0;$$

leur couple commun est donné par l'équation

$$(pq)\, p_x q_x = 0.$$

Or, d'après la remarque du commencement de ce paragraphe, à un point y correspondent, dans $f=0$, et $\varphi=0$, deux involutions quadratiques

$$x_1z_1(a_0y_1+a_1y_2)+(x_1z_2+x_2z_1)(a_1y_1+a_2y_2)+x_2z_2(a_2y_1+a_3y_2)=0,$$

$$x_1z_1(\alpha_0y_1+\alpha_1y_2)+(x_1z_2+x_2z_1)(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)+x_2z_2(\alpha_2y_1+\alpha_3y_2)=0,$$

dont le couple commun constitue, avec y, le terne de I_1^3, déterminé par y.

Le covariant $(pq)p_xq_x$, formé pour ces deux involutions, est précisément la forme $(f, \varphi)_x$.

En développant cette expression, on trouve

$$\begin{aligned}
&y_1^2\left[(a_0\alpha_1-a_1\alpha_0)z_1^2+(a_0\alpha_2-a_2\alpha_0)z_1z_2+(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)z_2^2\right]\\
+\ &y_1y_2\left[(a_0\alpha_2-a_2\alpha_0)z_1^2+\left\{(a_0\alpha_3-a_3\alpha_0)+(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)\right\}z_1z_2\right.\\
&\qquad\left.+(a_1\alpha_3-a_3\alpha_1)z_2^2\right]\\
+\ &y_2^2\left[(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)z_1^2+(a_1\alpha_3-a_3\alpha_1)z_1z_2+(a_2\alpha_3-a_3\alpha_2)z_2^2\right]=0 \qquad (29)
\end{aligned}$$

Si l'on calcule le discriminant de cette forme, considéré comme une fonction quadratique de y, on trouve une expression biquadratique en z.

Cette forme biquadratique, égalée à zéro, représente quatre points pour lesquels les deux points correspondants se confondent. Ce sont les points de ramification.

Par suite

Théorème XIX. — *L'involution cubique du premier rang possède quatre points de ramification.*

L'équation de ces quatre points est

$$z_1^4\left[(a_0\alpha_2-a_2\alpha_0)^2-4(a_0\alpha_1-a_1\alpha_0)(a_1\alpha_2-a_2\alpha_1)\right]+\ldots=0 \qquad (30)$$

Comme c'est un covariant du système des deux formes trilinéaires, covariant que l'on peut représenter par

$$(pp')^2\varpi_z^2\varpi_z'^2,$$

il suffit de connaître son premier terme, pour calculer tous les autres.

A chaque point de ramification correspond un couple d'éléments confondus. Nous en pouvons donc conclure

Théorème XX. — *L'involution du troisième ordre et du premier rang possède quatre éléments doubles.*

A cause de la symétrie qui existe entre les trois séries en involution, il suffit, pour obtenir l'équation des points doubles, de faire, dans (29), $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2$.

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}(a_0\alpha_1 - a_1\alpha_0)\, y_1^4 + 2\,(a_0\alpha_2 - a_2\alpha_0)\, y_1^3 y_2 + [(a_0\alpha_3 - a_3\alpha_0) \\ + 3\,(a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)]\, y_1^2 y_2^2 + 2\,(a_1\alpha_3 - a_3\alpha_1)\, y_1 y_2^3 \\ + (a_2\alpha_3 - a_3\alpha_2)\, y_2^4 = 0. \qquad (31)\end{aligned}$$

Si nous calculons directement l'équation des points doubles par la méthode indiquée à propos de l'homographie, ou si, dans les équations relatives à ce cas général, nous introduisons les particularisations nécessaires, nous trouvons, par l'expression de ce covariant

$$\Omega \cdot (ab)\, a_x^2 b_x^2,$$

Ω étant, comme on sait, l'invariant qui s'annule si l'involution possède un point triple (v. plus bas, p. 63).

Nous ne pensons pas que l'on ait encore démontré de cette façon la propriété du Jacobien de représenter les points doubles: on se borne d'habitude, ce qui est légitime dans la théorie de l'involution, à poser $x_1 = y_1$; $x_2 = y_2$, dans l'équation de relation (*Verwandschaftsgleichung*) entre x et y (*).

D'après la définition de l'involution du premier rang, nous pouvons dire

Théorème XXI. — *Les ternes de points appartenant à une*

(*) Sur la théorie de l'involution cubique du premier rang, voir Em. Weyr, *Theorie der cubischen Involutionen,* Mém. de la Soc. roy. de Bohême, 6me série, t. VII.

involution du troisième ordre et du premier rang sont conjugués harmoniques de deux ternes fixes.

On peut encore définir d'une autre manière l'involution du premier rang.

Théorème XXII. — *Lorsque trois formes* a_x^3, b_x^3, c_x^3 *sont telles que les covariants* $(a\rho)^3\rho_x$, $(b\rho)^3\rho_x$, $(c\rho)^3\rho_x$, ρ_x^4 *étant une forme biquadratique, soient nuls, ces trois formes égalées à zéro représentent trois ternes d'une involution* I_1^3.

En effet, si nous développons l'un de ces covariants, $(a\rho)^3\rho_x$, par exemple, nous avons

$$(a_0\rho_3 - 3a_1\rho_2 + 3a_2\rho_1 - a_3\rho_0)\,x_1 + (a_0\rho_4 - 3a_1\rho_3 + 3a_2\rho_2 - a_3\rho_1)\,x_2 \equiv 0.$$

Par conséquent les trois points $a_x^3 = 0$, appartiennent à deux involutions cubiques du second rang.

Nous avons vu qu'une I_1^3 peut aussi être définie par l'équation

$$\lambda a_x^3 + \mu b_x^3 = 0.$$

Il est utile de rechercher, dans ce cas, les formules analogues à (29), (30) et (31).

Soient x_1, x_2; y_1, y_2, deux points appartenant au même terne; on aura

$$\lambda a_x^3 + \mu b_x^3 = 0,$$

$$\lambda a_y^3 + \mu b_y^3 = 0.$$

Par suite

$$\begin{vmatrix} a_x^3 & b_x^3 \\ a_y^3 & b_y^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce déterminant est divisible par (xy), et l'on a

$$\frac{a_x^3 b_y^3 - a_y^3 b_x^3}{(xy)} = \Sigma c_{ik}\, x_1^i x_2^{2-i} y_1^k y_2^{2-k} \qquad (i, k = 0, 1, 2).$$

Les coefficients c_{ik} sont les éléments du résultant des deux formes a_x^3, b_x^3.

En conséquence, la relation devient :

$$y_1^2[3(a_0b_1)x_1^2+3(a_0b_2)x_1x_2+(a_0b_3)x_2^2]$$
$$+y_1y_2[3(a_0b_2)x_1^2+\{(a_0b_3)+9(a_1b_2)\}x_1x_2+3(a_1b_3)x_2^2]$$
$$+\quad y_2^2[(a_0b_3)x_2^2+3(a_1b_3)x_1x_2+3(a_2b_3)x_2^2]=0. \qquad (29')$$

L'équation des points de ramification s'obtiendra en égalant à zéro le discriminant de cette forme, regardée comme expression quadratique de y.

On trouve ainsi

$$[9(a_0b_2)^2-12(a_0b_1)(a_0b_3)]x_1^4+\cdots=0. \qquad (30')$$

Quant aux points doubles, leur équation est

$$(a_0b_1)y_1^4+2(a_0b_2)y_1^3y_2+\{(a_0b_3)+3(a_1b_2)\}y_1y_2+2(a_1b_3)y_1y_3^2$$
$$+(a_2b_3)y_2^4=0. \qquad (31')$$

Nous observons d'abord que les points doubles sont donnés par l'équation

$$\mathrm{J}\equiv(ab)\,a_x^2b_x^2=0,$$

où J représente le Jacobien des deux formes a_x^3, b_x^3.

Le discriminant de J est, comme on sait, égal à R Ω, R désignant le résultant des deux formes cubiques; Ω, l'invariant qui, égalé à zéro, exprime la condition nécessaire et suffisante pour que

$$\lambda a_x^3+\mu b_x^3,$$

puisse, par un choix convenable de $\frac{\lambda}{\mu}$, se réduire à un cube.

Ce discriminant s'annule dans deux cas : d'abord si $\mathrm{R}=0$.

Alors les deux formes ont un facteur commun. Par suite si l'on pose

$$a_x^3=\alpha_x\cdot a_x^2; \qquad b_x^3=\alpha_x\cdot b_x^2,$$

l'équation d'involution devient

$$\alpha_x(a_x^2+\lambda b_x^2)=0,$$

c'est-à-dire qu'elle se décompose en un point fixe et une involution quadratique.

Si l'on se rapporte à l'équation (29'), on voit que, à cause de $R = 0$, les coefficients de y_1^2, $y_1 y_2$, y_2^2, peuvent s'annuler en même temps. On en déduit cette propriété :

THÉORÈME XXIII. — *Lorsque, dans une involution du troisième ordre et du premier rang, il existe un point tel qu'à ce point correspondent deux groupes distincts de deux points, l'involution se décompose en un point fixe (le point donné) et une involution quadratique.*

Dans ce cas l'involution ne possède que trois points doubles.

Si $\Omega = 0$, l'involution possède un point triple.

Le Jacobien a de nouveau une racine double.

Donc

THÉORÈME XXIV. — *Le nombre des points doubles se réduit à trois lorsque l'involution est décomposable ou possède un élément triple.*

Les deux invariants i et j du Jacobien sont

$$i = 3[(ab)^3]^2; \qquad j = 54\Omega - [(ab)^3]^3.$$

Pour qu'ils soient tous les deux nuls en même temps, il faut que $(ab)^3 = 0$, $\Omega = 0$.

Dans ce cas trois points doubles coïncident.

Si l'involution I_1^3 possède deux éléments triples, l'équation pourra prendre la forme

$$\lambda a_0 x_1^3 + \mu b_3 x_2^3 = 0.$$

Alors

$$J = a_0 b_3 \cdot y_1^2 y_2^2 = 0.$$

Donc

THÉORÈME XXV. — *Si l'involution cubique du premier rang* *possède deux éléments triples, ces deux éléments coïncident avec les points doubles qui, dans ce cas, se réduisent à deux.*

Nous pouvons observer que les points triples représentent, dans ce cas, le hessien d'un terne quelconque de l'involution.

Cette dernière peut donc toujours être représentée par l'équation

$$\lambda a_x^3 + \mu Q_x^3 = 0,$$

Q_x^3 représentant le covariant cubique de a_x^3.

En appliquant la formule (15), qui donne $K_{\lambda\mu}$, on a, comme on le sait d'ailleurs,

$$Q_{\lambda\mu} = \tfrac{1}{2}\theta\left[Q\frac{d\theta}{d\lambda} - f\frac{d\theta}{d\mu}\right],$$

ce qui montre que les groupes de points

$$Q_{\lambda\mu} = 0,$$

font eux-mêmes partie de cette involution.

Si nous rapprochons les équations (31) et (31'), nous voyons qu'elles sont identiques.

Par suite les deux involutions du premier rang, définies, l'une par les groupes communs aux deux involutions du second rang

$$a_x a_y a_z = 0, \qquad b_x b_y b_z = 0,$$

l'autre par l'équation

$$\lambda a_x^3 + \mu b_x^3 = 0,$$

possèdent les mêmes points doubles.

Nous les appellerons des *involutions conjuguées*, et nous verrons, par la suite, qu'il n'en peut exister que deux.

L'involution conjuguée de

$$\lambda a_x^3 + \mu b_x^3 = 0 \qquad (a)$$

peut encore être considérée d'une autre manière.

Chacun des groupes de (a) définit une droite hessienne, caractérisée par les points que représente l'équation

$$\lambda^2\Delta_x^2 + 2\lambda\mu\Theta_x^2 + \mu^2\nabla_x^2 = 0.$$

Cherchons la relation qui existe entre deux points de ces couples.

Nous devrons éliminer λ, μ entre les deux égalités

$$\lambda^2\Delta_x^2 + 2\lambda\mu\Theta_x^2 + \mu^2\nabla_x^2 = 0,$$

$$\lambda^2\Delta_y^2 + 2\lambda\mu\Theta_y^2 + \mu^2\nabla_y^2 = 0.$$

Nous trouvons ainsi

$$\begin{vmatrix} \Delta_x^2 & 2\Theta_x^2 & \nabla_x^2 & 0 \\ 0 & \Delta_x^2 & 2\Theta_x^2 & \nabla_x^2 \\ \Delta_y^2 & 2\Theta_y^2 & \nabla_y^2 & 0 \\ 0 & \Delta_y^2 & 2\Theta_y^2 & \nabla_y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il est visible que ce déterminant est divisible par $(xy)^2$.

La relation entre x et y devient, par suite,

$$\begin{aligned} 4\,[2\,(\Delta_{00}\Theta_{01})\,x_1y_1 + (\Delta_{00}\Theta_{02})\,(x_1y_2+x_2y_1) + 2\,(\Delta_{01}\Theta_{02})\,x_2y_2]\,[2\,(\nabla_{00}\Theta_{01})\,x_1y_1 \\ + (\nabla_{00}\Theta_{02})\,(x_1y_2+x_2y_1) + 2\,(\nabla_{01}\Theta_{02})\,x_2y_2] \\ + [2\,(\Delta_{00}\nabla_{01})\,x_1y_1 + (\Delta_{00}\nabla_{02})\,(x_1y_2+x_2y_1) \\ + 2\,(\Delta_{01}\nabla_{02})\,x_2y_2]^2 = 0. \end{aligned}$$

Or, un léger calcul montre que, abstraction faite du facteur Ω, le premier membre ne diffère pas du premier membre de (29).

Appelons hessienne d'un triangle inscrit à une conique, la droite qui, par ses intersections avec la conique, représente le hessien des trois sommets, nous pourrons dire :

Si sur une conique C_2, *on représente une involution*

$$\lambda a_x^3 + \mu b_x^3 = 0,$$

les hessiennes des différents ternes de points marquent, sur cette conique, l'involution cubique conjuguée.

On peut encore énoncer ce théorème autrement :

Soient C_2 *et* K *deux coniques telles qu'il existe une infinité de triangles inscrits à* C_2 *et circonscrits à* K, *les hessiennes de tous ces triangles enveloppent une autre conique* K', *inscrite au même quadrilatère que* C_2 *et* K; *de plus, elles forment une infinité de triangles inscrits à* C_2.

Il est assez facile de représenter la première par une équation analogue à celle que nous venons d'écrire.

En effet, une telle involution étant définie par deux ternes, il suffira de chercher les couples correspondant aux points

$$x_1 = 0, \text{ et } x_2 = 0,$$

on trouve ainsi

$$\lambda_1 [(a_0b_1)\, x_1^2x_2 + (a_0b_2)\, x_1x_2^2 + (a_1b_2)\, x_2^3] \\ + \mu_1 [(a_1b_2)\, x_1^3 + (a_1b_3)\, x_1^2x_2 + (a_2b_3)x_1x_2^2] = 0.$$

Représentons par α_x^3, β_x^3, les deux formes cubiques qui entrent dans cette nouvelle équation, et affectons de l'indice *un* les covariants et invariants relatifs à ces formes.

Si nous posons

$$(a_1b_2) = \Theta, \quad P = (ab)^3,$$

nous trouvons aisément (*)

$$P_1 = 3\Theta.P, \quad \Omega_1 = \Theta^3R, \quad R_1 = 27^2\Theta.^3\Omega.$$

Par suite, on peut énoncer ce théorème :

THÉORÈME XXVI. — *Si une involution possède un point triple, l'involution conjuguée est décomposable, et réciproquement.*

Les équations (30) et (30') peuvent se mettre sous une forme remarquable.

Appelons φ le premier membre de (30'), φ_1, le premier membre

(*) V. C. LE PAIGE, *Ueber conjugirte Involutionen,* SITZ. DER K. AKAD. DER WISS, t. LXXXIV, p. 234.

de (30) et désignons par H_J le hessien du Jacobien, nous aurons :

$$\varphi \equiv 3H_J + P.J,$$

$$\varphi_1 \equiv 3H_J - P.J.$$

D'où

$$\varphi - \varphi_1 \equiv 2P.J.$$

Donc

THÉORÈME XXVII. — *Les points de ramification de deux involutions cubiques conjuguées et leurs points doubles appartiennent à une même involution biquadratique du premier rang* (*).

Nous avons fait remarquer, à propos de l'homographie H_1^3, que les formes biquadratiques qui représentent les points de ramification, ont les mêmes invariants que le discriminant de

$$\lambda a_x a'_y a''_z + \mu \alpha_x \alpha'_y \alpha''_z,$$

considéré comme forme biquadratique de λ, μ.

Cette remarque est naturellement applicable ici.

Par suite, en désignant par S_1, T_1 les invariants de φ_1, nous aurons

$$S_1 = 3P_1(P_1^3 - 24\Omega_1); \quad T_1 = -(P_1^6 - 36P_1^3\Omega_1 + 216\Omega_1^2).$$

Le discriminant est

$$D_1 = \Omega_1^3 R_1.$$

On peut d'ailleurs vérifier directement ces relations en se servant de l'expression précédente de φ_1.

Des relations que nous avons données plus haut entre les invariants des deux involutions conjuguées, il résulte que le discriminant de φ est égal à $R^3\Omega$, abstraction faite d'un facteur numérique.

Nous nous bornerons à énoncer les deux théorèmes suivants dont la démonstration est, pour ainsi dire, inutile.

(*) C. LE PAIGE, *Ueber eine Relation zwischen den singulären Elementen cubischer Involutionen*, SITZ. DER KAIS. AKAD. ZU WIEN, Bd LXXXI, s. 159.

THÉORÈME XXVIII. — *Lorsque deux involutions* I_1^3 *ont un groupe commun, deux groupes non communs, pris dans chaque involution, sont en involution* I_2^3.

THÉORÈME XXIX. — *Si quatre ternes de points appartiennent à une* I_2^3, *on peut toujours trouver un terne de points, en involution* I_1^3, *avec deux couples de ternes de points, pris parmi les quatre groupes donnés.*

Les formules (11) et (21) du chapitre I[er] nous permettent de démontrer certaines relations d'involution entre des points appartenant à trois séries homographiques H_2^3, situées sur un même support.

La formule (21) peut se traduire ainsi :

THÉORÈME XXX. — *Si dans trois séries homographiques* H_2^3 *superposées, les neuf points*

$$\begin{matrix} \delta_1 & \delta_1' & \delta_1'' \\ \delta_2 & \delta_2' & \delta_2'' \\ \delta_3 & \delta_3' & \delta_3'' \end{matrix}$$

sont tels que les six ternes de points obtenus, en prenant les termes du déterminant formé de ces éléments, appartiennent à l'homographie, les ternes obtenus, en prenant les colonnes de ce déterminant, sont en involution I_2^3 *avec les points triples de l'homographie.*

De la relation (11), on déduit :

THÉORÈME XXXI. — *Les points triples de trois séries homographiques* H_2^3 *superposées sont en involution* I_1^3, *avec les éléments neutres de cette homographie, convenablement associés.*

Nous nous sommes occupé, jusqu'ici, des groupes appartenant à une I_2^3, ou à deux I_2^3. Il nous reste à dire quelques mots du groupe commun à trois I_2^3.

Soient trois involutions

$$a_x a_y a_z = 0, \quad b_x b_y b_z = 0, \quad c_x c_y c_z = 0.$$

Ces trois équations peuvent s'écrire

$$y_1z_1(a_0x_1+a_1x_2)+(y_1z_2+y_2z_1)(a_1x_1+a_2x_2)+y_2z_2(a_2x_1+a_3x_2)=0,$$
$$y_1z_1(b_0x_1+b_1x_2)+(y_1z_2+y_2z_1)(b_1x_1+b_2x_2)+y_2z_2(b_2x_1+b_3x_2)=0,$$
$$y_1z_1(c_0x_1+c_1x_2)+(y_1z_2+y_2z_1)(c_1x_1+c_2x_2)+y_2z_2(c_2x_1+c_3x_2)=0.$$

En regardant (x_1, x_2) comme donné, nous avons trois involutions quadratiques qui ont un groupe commun si

$$\begin{vmatrix} a_0x_1+a_1x_2 & a_1x_1+a_2x_2 & a_2x_1+a_3x_2 \\ b_0x_1+b_1x_2 & b_1x_1+b_2x_2 & b_2x_1+b_3x_2 \\ c_0x_1+c_1x_2 & c_1x_1+c_2x_2 & c_2x_1+c_3x_2 \end{vmatrix}=0.$$

On obtient ainsi une équation du troisième degré qui représente le groupe commun.

Comme on s'en aperçoit immédiatement, elle ne diffère pas de

$$(ab)(bc)(ca)\,a_xb_xc_x=0.$$

Donc

Théorème XXXII. — *Le groupe commun à trois involutions* I_2^3 *représente les points triples de l'involution* I_2^3 *caractérisée par les trois groupes de points triples des trois involutions données.*

§ 3.

CONSTRUCTIONS RELATIVES AUX INVOLUTIONS CUBIQUES.

Il nous faut aborder maintenant, à l'aide des propriétés énoncées dans les deux paragraphes précédents, la solution des divers problèmes que présente la théorie des involutions du troisième ordre.

Nous avons jusqu'ici suivi la marche qui nous paraissait indiquée par l'ordre logique, c'est-à-dire, nous avons étudié l'homographie et l'involution du second rang avant celles du premier.

Cette marche, nous l'abandonnerons dans le paragraphe actuel, afin de simplifier autant que possible les constructions.

Dans tout ce qui va suivre, nous prendrons, pour support des séries en involution, une conique; ce qui nous permettra d'éviter la longueur et la complication des solutions.

Il est toujours facile, d'ailleurs, de passer à ce mode de représentation, les points étant donnés sur une droite.

En effet, deux cas peuvent se présenter.

1° Les points seront réels sur le support-droite Δ. Alors, il suffit de joindre ces points à un point fixe O, pris sur le support conique K. Les secondes intersections de ces droites avec K représenteront les points de Δ.

2° On se donne un couple de points imaginaires de Δ, par exemple, les intersections imaginaires de Δ avec une conique réelle K'.

Si l'on joint les points de K' à deux points fixes de cette courbe, on obtient deux faisceaux homographiques qui marquent, sur Δ, une H_1^2. Les points doubles de cette H_1^2 seront les intersections de Δ avec K'.

Il suffira donc de transporter sur K, comme en 1°, trois couples de H_1^2, et de construire les points doubles de cette homographie. On obtient ainsi une droite dont les intersections imaginaires, avec K, représentent les intersections de Δ et K'.

Modes de représentation d'une I_1^3 *sur une conique* (*). — On sait que si deux triangles sont inscrits à une conique, leurs six côtés forment un hexagone circonscrit à une nouvelle conique.

De plus, il existe une infinité d'autres triangles inscrits à la première conique et circonscrits à la seconde.

Nous représenterons toujours la conique support par C_2, et la seconde, que nous appellerons *conique d'involution,* par K.

(*) On peut voir, dans le mémoire cité de M. Em. Weyr, la solution de plusieurs des problèmes, relatifs à l'involution du premier rang, que nous donnons ici. Cependant les constructions que nous employons diffèrent généralement de celles qui sont contenues dans son travail.

Étant donnés, sur C_2, deux ternes $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$, réels, ces deux ternes déterminent K.

Tous les autres triangles, inscrits à C_2 et circonscrits à K, marquent sur C_2, des ternes d'une involution définie par x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; car, ainsi qu'on le voit, chaque terne est déterminé par un de ses points.

Second mode de représentation. — Toutes les coniques qui passent par quatre points fixes, dont un situé sur C_2 et les trois autres en dehors, marquent, sur C_2 des séries de trois points appartenant à une I_1^3.

En effet, on voit aisément que deux ternes suffisent pour déterminer le groupe de quatre points fixes, dont deux pourront être pris d'une manière arbitraire, l'un étant nécessairement sur C_2. Alors chaque point d'un terne caractérisera complètement ce terne.

Nous emploierons, indifféremment, ces deux modes de représentation.

Problème I. — *Compléter un terne de points d'une involution du premier rang, définie par un nombre suffisant de conditions.*

A). On se donne deux ternes $x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$, et un point x_3; construire y_3, z_3.

Supposons que les deux ternes de points soient réels. Aux deux triangles $x_1y_1z_1$; $x_2y_2z_2$, on peut inscrire une conique.

Si par le point x_3, on mène à cette conique K les deux tangentes, elles coupent C_2 en deux nouveaux points y_3, z_3 qui complètent le terne. En effet $x_3y_3z_3$ constitue un nouveau triangle inscrit à C_2 et circonscrit à K.

Autrement. — Menons les droites y_1z_1; y_2z_2 qui joignent deux points réels d'un terne ou deux points imaginaires conjugués. Ces deux droites se coupent en un point A.

Menons Ax_3. Cette droite rencontre la conique en un point B. Joignons x_1B; y_1B. Ces deux droites rencontrent respectivement y_2z_2; y_1z_1 en deux points A′, B′.

La droite A'B' détermine, par ses intersections avec C_2, les deux points y_3 z_3.

En effet les trois couples de droites A'B', ABx_3; y_1z_1AB', x_1BA'; y_2z_2AA', x_2BB', constituent trois coniques passant par les quatre points fixes ABA'B', dont l'un, B, est sur C_2.

Nous pouvons observer que les points A'B' marquent sur les droites y_2z_2; y_1z_1, deux séries homographiques.

En effet, si l'on prend A', par exemple, la droite A'x_1 détermine B, et Bx_2 détermine B'.

Par conséquent, la droite A'B' enveloppera une conique tangente aux deux droites y_1z_1, y_2z_2.

Cette remarque nous sera utile tantôt.

B). On se donne un terne de points et un groupe composé d'un point double et d'un point de ramification.

Soient $x_1y_1z_1$ les trois points du terne; $x_2\,(y_2z_2)$ le second groupe.

Il n'y a rien à modifier à la construction précédente.

La droite y_2z_2 devient la tangente à la conique, au point double ($_2z_2$).

C). On donne deux groupes composés chacun d'un point double et du point de ramification correspondant.

Soient $x_1(y_1z_1)$; $x_2(y_2z_2)$ ces deux groupes.

Les droites y_1z_1, y_2z_2 de la seconde solution *A*) deviennent les tangentes aux points doubles donnés.

Si nous remarquons que le point A, intersection des deux tangentes (y_1z_1), (y_2z_2), est le pôle de la corde qui unit les points de contact, nous voyons que la solution est encore possible lorsque les points doubles donnés sont imaginaires conjugués.

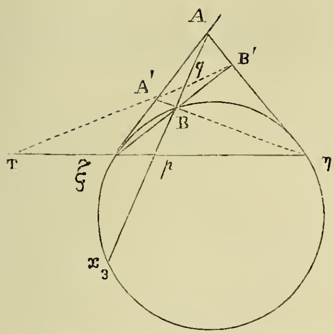
D). L'involution possède un point triple.

On se donne ce point triple et un terne quelconque.

La solution n'exige aucune modification.

E). L'involution possède deux points triples qui sont donnés.

Supposons d'abord que les deux points triples soient réels, et soient ξ, η ces deux points.



Menons les tangentes en ξ et η. Elles se coupent en A. La droite Ax_3 détermine le point B. ξB, ηB déterminent de même B′ et A′; cette droite A′B′ rencontre C_2 en deux points imaginaires qui complètent le terne de l'involution.

On peut observer que, les deux points ξ, η étant réels, les groupes de points de l'involution sont composés d'un point réel, et de deux points imaginaires conjugués.

Il reste à voir ce que devient cette construction quand les points ξ et η sont imaginaires conjugués.

Nous voyons que A est le pôle de $\xi\eta$; par suite ce point peut toujours être construit et il en est de même de p et B.

De plus T est conjugué harmonique de p par rapport à $\xi\eta$. Donc AT est la polaire du point p, toujours réel, q est conjugué harmonique de p par rapport à BA. Il est donc facile de le construire. On obtient ainsi, dans tous les cas, la droite Tq, et, par suite, les points homologues de x_3.

La droite Tx_3 est tangente à la conique en x_3.

En effet, TA étant la polaire de p et $\xi\eta$ la polaire de A, Ap est la polaire du point T.

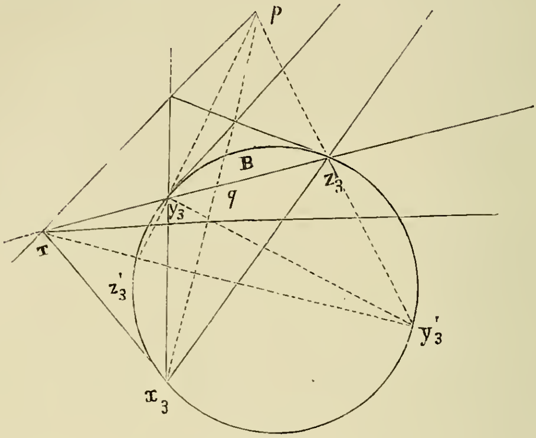
En conséquence, la tangente en un sommet du triangle rencontre le côté opposé en un point de la droite $\xi\eta$.

Cette propriété permet de considérer d'une autre manière l'involution du premier rang qui possède deux points triples.

Soit $x_3y_3z_3$, un terne de points appartenant à cette involution. Les côtés du triangle rencontrent respectivement les tangentes aux sommets opposés en trois points situés sur la droite des points triples.

Mais si nous regardons x_3y_3, y_3z_3, z_3x_3 comme trois couples d'une homographie, cette droite $\xi\eta$ sera précisément la droite qui, par ses intersections avec C_2, donne les points doubles de l'homographie.

Donc les points triples de cette involution particulière sont les points doubles de l'homographie cyclique caractérisée par chaque terne de points.



La droite TB est également tangente à C_2.

Menons py_3, pz_3 qui déterminent sur C_2 les points z'_3, y'_3.

p étant le pôle de TA les droites y_3z_3, $y'_3\ z'_3$ se coupent sur TA, c'est-à-dire $z'_3y'_3$ passe par T.

De même, les deux droites $z_3z'_3$, $y_3y'_3$ doivent se couper en un point appartenant à la fois à TA et à pA : c'est donc le point A.

Comme on le voit, z'_3 By'_3 constitue un nouveau terne de l'involution. Pour obtenir ces points, il suffit de joindre $x_3y_3z_3$ au pôle de $\xi\eta$.

Mais d'après le mode de représentation x_3B sont conjugués harmoniques par rapport à y_3z_3, et de même pour les autres groupes.

Donc si un terne de l'involution est caractérisé par l'équation

$$a_x^3 = 0,$$

il existe un second groupe donné par

$$Q_x^3 = 0.$$

Tous les ternes de l'involution seront donc bien, comme nous l'avons dit (p. 64), représentés par

$$\lambda a_x^3 + \mu Q_x^3 = 0.$$

F). On se donne quatre couples de points de l'involution : compléter un terne.

Pour cela, il suffirait évidemment de trouver les points qui complètent deux des couples donnés, car on serait ramené au problème *A*).

Supposons que les couples donnés soient $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4$.

Appelons z_1, z_2, z_3, z_4, les points cherchés.

$x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2$ constituant deux ternes de points et x_3, y_3, deux points d'un troisième terne, on a

$$\begin{vmatrix} (x_3 - x_1)(x_3 - y_1)(x_3 - z_1) & (y_3 - x_1)(y_3 - y_1)(y_3 - z_1) \\ (x_3 - x_2)(x_3 - y_2)(x_3 - z_2) & (y_3 - x_2)(y_3 - y_2)(y_3 - z_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation indique déjà que les deux points z_1, z_2 appartiennent à une homographie quadratique dont il faudra déterminer trois couples.

Si l'on fait $z_1 = z_2$, on a

$$\begin{vmatrix} (x_3 - x_1)(x_3 - y_1) & (y_3 - x_1)(y_3 - y_1) \\ (x_3 - x_2)(x_3 - y_2) & (y_3 - x_2)(y_3 - y_2) \end{vmatrix} (x_3 - z_1)(y_3 - z_1) = 0.$$

L'homographie dont il s'agit a donc pour points doubles x_3 et y_3, car le déterminant du premier membre ne s'annule pas, en général.

Si dans la première équation nous faisons $z_1 = x_2$, elle devient :

$$(x_3 - x_2)(y_3 - x_2) \begin{vmatrix} (x_3 - x_1)(x_3 - y_1) & (y_3 - x_1)(y_3 - y_1) \\ (x_3 - y_2)(x_3 - z_2) & (y_3 - y_2)(y_3 - z_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Il en résulte que le point z_2, correspondant à $z_1 = x_2$, est l'homologie de y_2 dans l'involution caractérisée par les deux couples $x_1 y_1$, $x_3 y_3$.

Nous aurions pu faire le même raisonnement en prenant x_4, y_4 au lieu de x_3, y_3.

Par suite z_1, z_2 fait partie de deux homographies, dont chacune est caractérisée par ses points doubles et un couple de points.

Ces deux homographies quadratiques ont deux couples communs : z_1, z_2, z'_1, z'_2.

A chacune de ces déterminations correspondent, sans ambiguïté, des points z_3, z_4; z'_3, z'_4.

Par conséquent, il existe deux involutions du premier rang, possédant quatre couples donnés.

C'est, au surplus, la réciproque de cette propriété :

Deux involutions cubiques du premier rang, situées sur un même support, ont quatre couples communs.

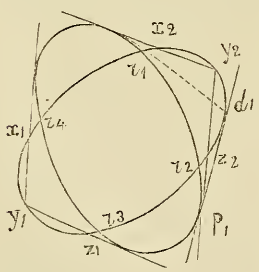
En effet, supposons que ces deux involutions soient marquées sur une même conique C_2. Chacune d'elles est caractérisée par sa conique d'involution.

Soient K et K′ ces deux coniques : leurs quatre tangentes communes marquent, sur C_2, les quatre couples communs aux deux involutions.

Problème II. — *Étant donnés deux ternes de points d'une involution cubique du premier rang, construire ses points doubles et ses points de ramification.*

Soient $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$ les deux ternes donnés que nous supposerons d'abord composés d'éléments réels : ces deux ternes déterminent deux triangles circonscrits à une conique K.

C'est la conique d'involution.



En général, par un point de C_2, on peut mener à K deux tangentes, qui, par leurs secondes intersections avec C_2, complètent le terne.

Ces deux tangentes à K se confondent pour les points de C_2 situés sur K.

Par suite les quatre points de ramification de l'involution sont les points d'intersection r_1, r_2, r_3, r_4, de K avec C_2.

La tangente en r_1 à K rencontre C_2 en d_1 qui est le point double correspondant.

Si nous observons que $r_1d_1d_1$ constitue un terne de l'involution, la droite $r_1 d_1$ avec la tangente à C_2 en d_1 forme un triangle inscrit à C_2 et circonscrit à K. Par suite la tangente à C_2 en d_1 est tangente à K.

Les quatre tangentes communes à K et C_2 marquent donc, par leurs points de contact avec C_2, les quatre points doubles de l'involution.

Si les groupes donnés $x_1 y_1 z_1$; $x_2 y_2 z_2$ sont composés, chacun, d'un point réel et d'un couple de points imaginaires, on peut faire usage de la seconde partie de la solution *A*).

Si nous nous rapportons à cette solution (p. 71), nous verrons que les droites A′B′ qui, par leurs intersections avec C_2, donnent des couples de l'involution enveloppent une conique.

Cette conique, qui peut toujours se construire, est la conique K et l'on remarque immédiatement que les quatre tangentes communes à C_2 et à K marquent, sur la première, les quatre points doubles de l'involution.

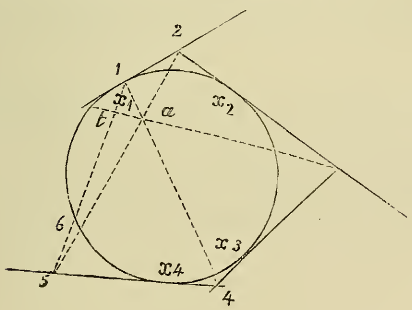
Suivant que la conique d'involution est tangente ou doublement tangente à C_2, l'involution possède un ou deux points triples.

On peut demander de compléter une involution, connaissant les quatre points doubles.

D'après le problème 1, *F*), on voit que la question est susceptible de deux solutions.

On peut d'ailleurs s'en assurer de la manière suivante :

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les quatre points doubles. En ces points menons des tangentes à la conique, tangentes qui se coupent en trois points consécutifs 2, 3, 4.



Si nous prenons sur $4x_4$ un point 5, nous déterminons un pentagone 12345.

Menons les droites 25, 14, $3at$, a étant l'intersection de 14, 25.

Le point t décrit une conique.

t est point de contact de 15 avec la conique inscrite au pentagone. La conique C_2', lieu du point t, est tangente à C_2 au point x_1. Par suite, elle coupe C_2 en deux points r_1, r_1'.

Les coniques K, K′, inscrites aux pentagones $\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{45}, \overline{r_1 1}$ et $\overline{12}, \overline{23}, \overline{34}, \overline{45}, \overline{r_1' 1}$ sont les coniques des deux involutions conjuguées.

Considérons par exemple K : elle est tangente aux quatre tangentes à C_2, menées par x_1, x_2, x_3, x_4.

De plus, d'après la remarque précédente, elle est tangente à $1r_1$ au point r_1 où elle coupe C_2.

Elle jouit donc bien des propriétés de la conique d'involution

On voit par là qu'il n'existe que deux involutions cubiques ayant les mêmes points doubles.

Il nous sera facile, à l'aide des constructions que nous venons de faire connaître, de résoudre les problèmes relatifs à l'involution du second rang.

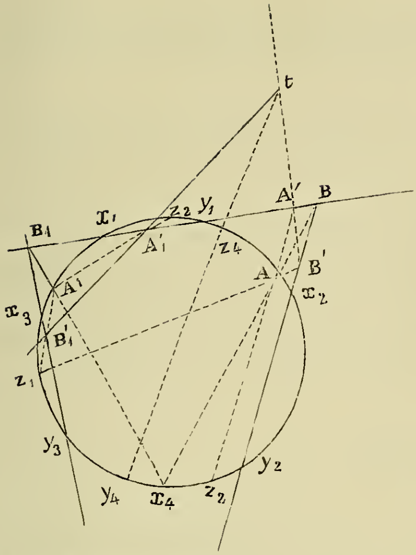
Problème III. — *On donne trois ternes* $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$, *d'une involution cubique du second rang : compléter le terne dont on connaît deux points* x_4, y_4.

Au moyen du problème I, complétons les involutions I_1^3: $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, x_4; $x_1y_1z_1$, $x_3y_3z_3$, x_4. Nous obtenons ainsi des ternes $y_4'z_4'$; $y_4''z_4''$.

Les groupes $x_4y_4'z_4'$; $x_4y_4''z_4''$ font évidemment partie de l'involution proposée.

Mais, dans une involution I_2^3, à un point fixe, correspondent des couples de points appartenant à une involution quadratique.

Il suffira donc de construire l'homologue de y_4 dans l'involution quadratique caractérisée par les deux couples y_4', z_4'; y_4'', z_4''.



Menons les droites x_1y_1, x_2y_2 qui se coupent en B.

La droite x_4B détermine, sur C_2, le point A.

Les deux droites z_1A, z_2A coupent x_2y_2, x_1y_1 en B'A'.

La droite B'A' coupe C_2 aux deux points réels ou imaginaires $y'_4z'_4$.

Si nous faisons les mêmes constructions à l'égard de x_1y_1, x_3y_3, nous obtenons $A'_1B'_1$, qui marque sur C_2, $y''_4z''_4$.

Les deux droites $A'_1B'_1$, A'B' se coupent en t.

ty_4 déterminera le point z_4.

Nous pouvons faire observer d'abord que si nous déterminions le point t_1 relatif à un autre point x_5, la droite tt_1 rencontrerait C_2, aux deux éléments neutres de l'involution.

En effet, ce couple d'éléments neutres faisant partie de toutes les involutions quadratiques, correspondant à des points x_4, x_5, ..., il suffit de construire le couple commun à deux pareilles involutions, pour obtenir le couple neutre. C'est ce que nous avons fait en menant tt_1.

Ainsi qu'on peut le remarquer ici, les couples x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, peuvent être imaginaires sans que la solution précédente cesse d'être applicable.

Il peut se faire que le couple x_4y_4 soit également imaginaire.

Dans ce cas, déterminons la droite des éléments neutres — ou, d'après une propriété que nous avons vue, la hessienne des points triples —, cette droite, toujours réelle, coupera la droite réelle $y_4\,x_4$, en un point ϖ. Il suffira d'après le théorème IX, de mener une droite, passant par ϖ, et rencontrant C_2 en deux points réels x_4, y_4. Ces points pourront être substitués à x_4, y_4, pour la détermination de z_4 (*).

Autrement. — D'après le théorème XVIII, les éléments neutres font partie de toutes les involutions du premier rang, définies par deux de ses ternes de points.

Par suite les trois coniques inscrites respectivement à deux des trois triangles $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$, ont une tangente commune — théorème connu d'ailleurs. Cette tangente commune peut se construire linéairement, puisque, prenant deux de ces trois coniques, on connaît déjà trois de leurs tangentes communes.

On a ainsi les éléments neutres.

Nous arrivons, de cette façon, au mode suivant de représentation d'une I_2^3 :

Toutes les coniques K, *inscrites à un triangle* $x_1 y_1 z_1$, *inscrit lui-même à* C_2, *et tangentes à une droite* h, *déterminent des systèmes de triangles, inscrits à* C_2, *et circonscrits aux* K, *dont les sommets marquent, sur* C_2, *une* I_2^3.

Dans le cas actuel, les cinq tangentes $x_1 y_1$, $y_1 z_1$, $z_1 x_1$, h et $x_4 y_4$, déterminent une conique particulière K.

La seconde tangente issue de x_4 et menée à K, détermine, par son intersection avec C_2, le point z_4, car $x_4 y_4 z_4$ est circonscrit à K, d'après un théorème connu.

Nous pouvons observer que la solution qui vient d'être développée contient la suivante :

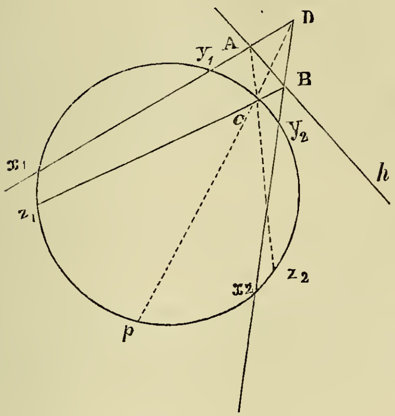
Compléter une involution cubique du second rang, définie par ses élements neutres et un terne de points.

Cependant cette solution ne serait plus immédiatement applicable, si les trois points du terne donné n'étaient pas réels.

En s'appuyant sur le même théorème XVIII, on peut employer la solution suivante.

(*) On peut aussi achever la solution en employant le problème IV.

Soient x_1, y_1, z_1, les points donnés, h, la hessienne des points triples; y_2, x_2 les deux points donnés du terme à compléter.



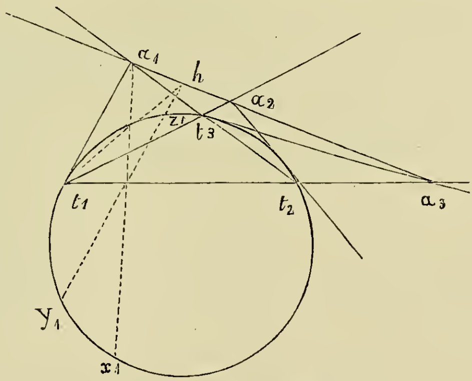
Menons x_1y_1, x_2y_2 qui se coupent en D.

La droite h coupe x_1y_1 en A, x_2y_2 en B.

z_1B détermine C et AC le point z_2.

Comme on le voit, en se rappelant la seconde solution de *A*) prob. I, le groupe d'éléments neutres fait partie de l'involution I_1^3, caractérisée par les groupes $x_1y_1z_1, x_2y_2z_2$. Son point correspondant, dans cette I_1^3, est p.

Problème IV. — *Connaissant les points triples d'une involution* I_2^3, *et deux points d'un terne, compléter ce terne.*



Soient $t_1t_2t_3$, les trois points triples donnés.

Si par ces points, nous menons des tangentes à C_2, elles coupent les côtés opposés du triangle $t_1t_2t_3$, en trois points α_1, α_2, α_3, situés en ligne droite.

Cette droite est la hessienne des points triples.

6

Pour le faire voir, il suffit de se rappeler ce que nous avons dit, pages 64 et 73, relativement à une involution cubique du premier rang, possédant deux points triples.

On peut d'ailleurs le démontrer directement.

Toutes les coniques qui passent par $\alpha_1\alpha_2 t_3$ coupent C_2 en des groupes de trois points qui appartiennent à une I_2^3; en effet, chacun de ces groupes de trois points est déterminé par deux de ses points.

$t_1 t_2 t_3$ est un de ces groupes. Mais les coniques $\overline{\alpha_1 t_2 t_3}$, $\overline{\alpha_2 t_2}$, $\overline{\alpha_2 t_3 t_1}$, $\overline{\alpha_1 t_1}$ déterminent deux points triples t_1, t_2. Donc, par le théorème XIII, t_3 est le troisième.

On peut d'ailleurs vérifier que la conique passant par α_1, α_2 et osculatrice à C_2 en t_2, est surosculatrice en ce point, les deux droites homologues $\alpha_1\alpha_2$, t_1t_2, se coupant en α_3 sur l'axe d'homologie $t_3\alpha_3$ (*).

Mais une droite quelconque passant par t_3, constitue avec $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ une conique. Par suite les deux points d'intersection, réels ou imaginaires, de $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ avec C_2 sont bien les éléments neutres de l'involution.

Soient maintenant x_1y_1 les points donnés.

Menons $x_1\alpha_1$ qui coupe C_2 en p. t_1p coupe h en k, et ky_1 rencontre C_2 en un nouveau point z_1 qui est le point cherché.

En effet, appelons h_1h_2 les éléments neutres et z_1 le point qu'il s'agit de construire : $x_1h_1h_2$, x_1pt_1, $x_1y_1z_1$ font partie de l'involution I_2^3.

Donc h_1h_2, pt_1, y_1z_1 appartiennent à une même involution quadratique : z_1 doit bien, par suite, être l'homologue de y_1, dans l'involution I_1^2, caractérisée par les deux couples h_1h_2, pt_1.

Si le groupe x_1y_1 est imaginaire, nous savons comment la solution doit être modifiée pour construire z_1 (prob. III).

La construction qui précède exige la connaissance de h.

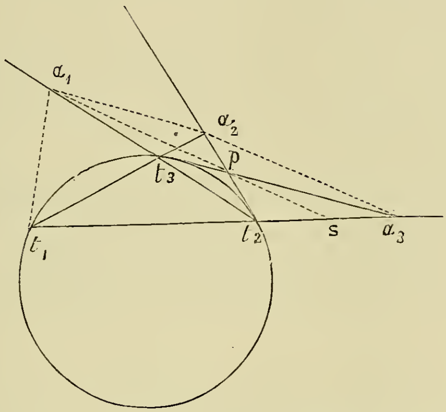
Or la détermination de h, que nous venons d'employer, n'est plus applicable dès que deux des trois points triples sont imaginaires.

(*) Poncelet, *Traité des prop. proj.*, t. I, p. 167.

Il est facile de déduire de la solution précédente l'existence de certains éléments qui ne dépendent point de la réalité des points triples.

Soit p le point d'intersection des deux tangentes en t_2, t_3, c'est-à-dire le pôle de $t_2 t_3$.

Si le groupe $t_2 t_3$ est imaginaire, on peut toujours construire α_1 et p.



$\overline{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ est conjuguée harmonique de $\overline{\alpha_1 t_3 t_2}$ par rapport à $\alpha_1 p$, $\alpha_1 t_1$, car les quatre points $t_1 s$, $t_2 \alpha_3$ sont conjugués harmoniques.

La solution précédente est donc toujours applicable.

Problème V. — *Construire les points triples d'une involution déterminée par trois ternes* $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$.

Soient t_1, t_2, t_3, les points triples.

D'après le théorème XI, les points triples $t_1 t_2 t_3$ sont conjugués harmoniques du troisième ordre des points $x_1 y_1 z_1$; $x_2 y_2 z_2$; $x_3 y_3 z_3$.

En conséquence $t_1 t_2 t_3$ peut être regardé comme un terne appartenant à la fois aux trois involutions du second rang qui ont pour points triples $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$. On est donc ramené au problème suivant :

Problème VI. — *Construire le groupe commun aux trois invo-*

lutions qui ont pour points triples les groupes $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$.

Appelons I_2^3, $I_2'^3$, $I_2''^3$, ces trois involutions.

Les groupes communs à I_2^3, $I_2'^3$ constituent une involution $I_1''^3$, dont il est facile de construire des ternes de points et, par suite, la conique d'involution K''. Il en est de même des deux involutions $I_2'^3$, $I_2''^3$, qui conduisent à une involution I_1^3 et, par suite, à une seconde conique K.

Les points triples, faisant partie des trois involutions du second rang, feront partie des deux involutions du premier rang $I_1''^3$, I_1^3. Par suite $t_1t_2t_3$ sera un triangle circonscrit aux deux coniques K'' et K, et inscrit à C_2.

Ce triangle sera facile à construire puisque les deux coniques ont quatre tangentes communes dont l'une est la hessienne des points $x_2y_2z_2$, hessienne que l'on peut déterminer.

On peut, au surplus, démontrer bien simplement ce qui précède.

Soient $a_x^3 = 0$, $b_x^3 = 0$, $c_x^3 = 0$, les équations qui représentent les trois groupes $x_1y_1z_1$, $x_2y_2z_2$, $x_3y_3z_3$.

Les trois involutions I_2^3, $I_2'^3$, $I_2''^3$, sont alors définies par les équations

$$a_0x_1y_1z_1 + a_1(x_1y_1z_2 + x_2y_1z_1 + x_1y_2z_1) + a_2(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1) + a_3x_2y_2z_2 = 0, \qquad (a)$$

$$b_0x_1y_1z_1 + b_1(x_1y_1z_2 + x_2y_1z_1 + x_1y_2z_1) + b_2(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1) + b_3x_2y_2z_2 = 0, \qquad (b)$$

$$c_0x_1y_1z_1 + c_1(x_1y_1z_2 + x_2y_1z_1 + x_1y_2z_1) + c_2(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1) + c_3x_2y_2z_2 = 0. \qquad (c)$$

En éliminant x entre (a) et (b), puis entre (b) et (c), puis y entre les deux équations obtenues, on trouve finalement l'équation

$$(bb')^2 b_z b'_z \left[(ab)(bc)(ca)\, a_z b_z c_z\right]^2 = 0.$$

Cette équation représente les quatre couples communs, aux involutions $I_1''^3$, I_1^3.

Il serait également facile, à l'aide des méthodes qui précèdent, de trouver le groupe commun à trois involutions du second rang, définies par un nombre suffisant de conditions; en effet, ce groupe fait toujours partie des involutions du premier rang caractérisées par les groupes communs à deux des trois involutions données.

Pour obtenir un terne d'une de ces involutions, il suffira de déterminer dans deux des involutions I_2^3, les involutions quadratiques correspondant à un point x et de construire le groupe commun à ces deux involutions.

On pourra, de cette façon, construire deux des coniques d'involution. Ces deux coniques seront inscrites à un même triangle, inscrit lui-même à C_2.

Les problèmes que nous avons résolus sont ceux qui nous paraissent les plus importants dans la théorie de l'involution cubique : ils permettent de résoudre, en général, toutes les autres questions analogues qui se présentent.

CHAPITRE III.

RAPPORT ANHARMONIQUE.

Soient six paramètres $x_1, x_2, \dots x_6$, caractérisant six points d'une ponctuelle ou six rayons d'un faisceau.

Dans la théorie de l'involution, nous avons été amené à considérer des fonctions telles que

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_6)}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_6)(x_5 - x_2)}, \text{ etc.,}$$

auxquelles nous avons donné le nom de *rapports anharmoniques du troisième ordre.*

Nous allons étudier maintenant ces fonctions d'une manière plus spéciale.

Nous écrirons encore, comme tantôt, (ik) au lieu de $(x_i - x_k)$.

Sans changer l'ordre des indices au numérateur, il sera possible de former les deux rapports

$$\frac{(12)(34)(56)}{(14)(36)(52)}, \quad \frac{(12)(34)(56)}{(16)(32)(54)}.$$

Nous pourrions, au lieu de cette notation, employer la suivante, plus simple,

$$(462), \qquad (624).$$

Il est aisé de s'apercevoir que l'on ne pourrait employer d'autre permutation de (246) sans obtenir un rapport anharmonique du second ordre.

Par suite, chaque permutation des six figures 1, 2, 3, 4, 5, 6, nous donnera deux rapports anharmoniques.

Les sept cent vingt permutations nous conduiront à mille quatre cent quarante de ces fonctions.

Mais nous pouvons observer que si l'on permute entre elles les trois figures binaires (12), (34), (56), on ne change pas la valeur de l'expression.

En effet

$$\frac{(12)(56)(34)}{(16)(54)(32)} = \frac{(12)(34)(56)}{(16)(32)(54)};$$

$$\frac{(12)(56)(34)}{(14)(52)(36)} = \frac{(12)(34)(56)}{(14)(36)(52)}.$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned}(12)\,(34)\,(56) &= (12)\,(56)\,(34) = (34)\,(12)\,(56) = (34)\,(56)\,(12)\\ &= (56)\,(12)\,(34) = (56)\,(34)\,(12).\end{aligned}$$

Nous réduirons déjà, par là, le nombre des rapports à deux cent quarante.

Examinons encore les rapports provenant de l'arrangement (654321).

Nous avons

$$\frac{(65)(43)(21)}{(63)(41)(25)} = \frac{(12)(34)(56)}{(14)(36)(52)};$$

$$\frac{(65)(43)(21)}{(61)(45)(23)} = \frac{(12)(34)(56)}{(16)(32)(54)}.$$

Nous trouvons, par suite, douze permutations qui conduisent aux mêmes rapports.

Nous aurons, en conséquence, cent vingt rapports anharmoniques.

Il est visible, d'ailleurs, que les rapports anharmoniques seront les inverses l'un de l'autre, deux à deux.

Ainsi la permutation (163254) conduit à la fonction

$$\frac{(16)\,(32)\,(54)}{(12)\,(34)\,(56)}.$$

Nous aurons, de la sorte, soixante rapports et leurs inverses.

Nous allons retrouver ce résultat par un autre procédé plus complet, qui nous montrera, en même temps, que nous avons bien épuisé, de cette manière, toutes les combinaisons pouvant nous conduire à des rapports anharmoniques du troisième ordre.

Considérons les expressions telles que

$$(12)\,(34)\,(56)$$

et voyons combien nous pouvons en former.

Il en existe quinze

$$\begin{array}{lll}
(12)(35)(46), & (12)(34)(65), & (12)(36)(54), \\
(13)(24)(56), & (13)(25)(64), & (13)(26)(45), \\
(14)(25)(36), & (14)(23)(65), & (14)(26)(53), \\
(15)(26)(34), & (15)(23)(46), & (15)(24)(63), \\
(16)(23)(54), & (16)(25)(43), & (16)(24)(35),
\end{array}$$

Pour abréger les écritures nous les désignerons par

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5;\quad \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5;\quad \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5.$$

En divisant deux de ces expressions l'une par l'autre nous obtenons un rapport anharmonique : nous aurions ainsi deux cent dix rapports, inverses deux à deux.

Mais il est visible que le quotient de deux expressions qui contiennent la même figure binaire (ik) est un rapport du second ordre.

De cette manière, au lieu de pouvoir combiner chaque expression avec les quatorze autres nous ne pourrons le faire qu'avec huit, puisqu'il existe toujours trois de ces produits contenant le même facteur binaire.

Nous retrouvons, de cette façon, nos cent vingt rapports distincts.

Pour exprimer ces cent vingt rapports en fonction de quelques-uns d'entre eux, nous allons rechercher les expressions qui relient les fonctions α, β, γ.

Nous pouvons observer d'abord que la somme de trois des quantités α, β, γ qui contiennent le même facteur binaire est égale à zéro.

Nous trouvons, par exemple,

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0, \qquad \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0, \ldots$$
$$\alpha_2 + \gamma_4 + \gamma_5 = 0, \text{ etc.}$$

Néanmoins ces quinze relations linéaires ne sont pas indépendantes : elles se réduisent à dix équations linéaires. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
2\beta_1 &= -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5,\\
2\beta_2 &= -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5,\\
2\beta_3 &= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5,\\
2\beta_4 &= -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5,\\
2\beta_5 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5;\\
2\gamma_1 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5,\\
2\gamma_2 &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5,\\
2\gamma_3 &= -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5,\\
2\gamma_4 &= \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5,\\
2\gamma_5 &= -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5.
\end{aligned}$$

Par suite, dix de ces fonctions s'expriment linéairement au moyen des cinq autres.

Nous pouvons encore rechercher les relations qui existent entre ces cinq dernières.

Pour cela, imaginons que les six quantités $x_1, x_2 \ldots x_6$ soient racines d'une équation

$$a_x^6 = 0.$$

Nous pouvons supposer que cette forme ait été transformée, par une substitution unimodulaire, de manière à avoir une racine nulle, et une racine infinie.

Nous calculerons, dans cette hypothèse, les fonctions α, et les relations qui pourraient exister entre les fonctions transformées ne cesseront pas d'avoir lieu pour les fonctions dans leur état primitif.

En faisant $x_1 = \infty$, $x_2 = 0$, nous trouvons

$$\begin{aligned} x_3x_4 - x_3x_6 - x_4x_5 + x_5x_6 &= \alpha_1 & (a)\\ - x_4x_5 + x_4x_6 &= \alpha_2 & (b)\\ - x_3x_5 + x_5x_6 &= \alpha_3 & (c)\\ - x_3x_6 + x_4x_6 &= \alpha_4 & (d)\\ - x_3x_5 + x_3x_4 &= \alpha_5 & (e). \end{aligned}$$

La combinaison de (b) et (d) donne

$$(x_4x_6)^2 - (\alpha_2 + \alpha_4)(x_4x_6) + \alpha_2\alpha_4 = x_3x_5 \cdot x_4x_6. \qquad (f)$$

De même (c) et (e) conduisent à

$$(x_3x_5)^2 + (\alpha_3 + \alpha_5)(x_3x_5) + \alpha_3\alpha_5 = x_3x_5 \cdot x_4x_6. \qquad (g)$$

L'ensemble des égalités (a) $(b) \ldots (g)$ nous mène à la relation

$$2x_4x_6 - 2x_3x_5 = \Sigma\alpha - 2\alpha_1. \qquad (h)$$

Posons, pour abréger,

$$x_4x_6 = y; \quad x_3x_5 = x; \quad \alpha_2\alpha_4 = A', \quad \alpha_2 + \alpha_4 = B';$$

$$\alpha_3\alpha_5 = A, \alpha_3 + \alpha_5 = B; \quad \frac{\Sigma\alpha - 2\alpha_1}{2} = S.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} x^2 + Bx + A &= xy\\ y^2 - B'y + A' &= xy,\\ y - x &= S, \end{aligned}$$

équations entre lesquelles il faut éliminer x et y.

Ces trois égalités peuvent s'écrire

$$(B - S)x + A = 0,$$
$$(S - B')y + A' = 0,$$
$$y - x - S = 0.$$

Nous trouvons ainsi, comme résultant de ces trois équations

$$(B - S)(B'S - S^2 - A') + A(S - B') = 0.$$

Si nous remplaçons A, B, A', B', S par leurs valeurs en fonction de α, nous trouvons finalement

$$2\,\Sigma\alpha_3 - \Sigma\alpha^2\Sigma\alpha + 2\,\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Nous pourrons, en conséquence, exprimer les cent vingt rapports anharmoniqnes au moyen de fractions dont le numérateur et le dénominateur seront des fonctions linéaires des quatre rapports

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ \frac{\alpha_3}{\alpha_1},\ \frac{\alpha_4}{\alpha_1},\ \frac{\alpha_5}{\alpha_1}.$$

Mais, de plus, si nous tenons compte de la relation entre les α, les cent vingt rapports seront des fonctions des trois rapports

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ \frac{\alpha_3}{\alpha_1},\ \frac{\alpha_4}{\alpha_1}.$$

Par suite

Il existe quatre rapports anharmoniques linéairement indépendants et trois rapports complètement indépendants.

Ce résultat est conforme à ce qui aurait pu se déduire de la théorie des sextiques binaires.

Si l'on a égard aux valeurs des β et des γ au moyen des α, la relation entre les α peut encore s'écrire sous la forme symétrique

$$\Sigma\alpha^3 + \Sigma\beta^3 + \Sigma\gamma^3 \equiv 0.$$

Nous pouvons nous proposer de former l'équation qui a pour racines les quinze fonctions α, β, γ, en supposant que les six quantités x_1, x_2,.. x_6 soient les racines d'une équation

$$\alpha_x^6 = 0.$$

Il est visible que toute fonction symétrique Θ des quantités α, β, γ reste invariable par les substitutions opérées sur les racines de la sextique, qui laissent invariable la racine carrée du discriminant de cette forme.

En conséquence, d'après un théorème dû à Lagrange, ces fonctions s'exprimeront rationnellement au moyen des coefficients de la sextique, en s'adjoignant la racine carrée du discriminant.

De plus, il est visible, par la forme même des α, β, γ, que ces fonctions symétriques seront des invariants de la forme.

Par suite si Δ représente le discriminant de a_x^6, l'équation qui aura pour racines les quinze expressions que nous venons de définir aura la forme

$$z^{15} + a_2 z^{13} + a_4 z^{11} + a_0 \sqrt{\Delta}\, z^{10} + a_6 z^9 + \ldots a_{15} = 0,$$

les coefficients a_2, a_4, etc. étant des invariants de l'ordre indiqué par leur indice.

L'absence des termes en z^{14} et en z^{12} provient de ce que l'on a

$$\Sigma\alpha + \Sigma\beta + \Sigma\gamma = 0,$$
$$\Sigma\alpha^3 + \Sigma\beta^3 + \Sigma\gamma^3 = 0,$$

et ces équations auraient pu d'ailleurs se conclure de ce fait que la forme du sixième degré n'a pas d'invariant linéaire ni d'invariant cubique.

En se servant de la forme canonique

$$\xi\,(p_0\xi^4 + 4p_1\xi^3\eta + 6p_2\xi^2\eta^2 + 4p_3\xi\eta^3 + p_4\eta_4)\,\eta$$

de a_x^6, on pourrait calculer les coefficients a_i.

Ce calcul serait assez long : c'est pourquoi nous avons cru plus rapide de nous servir des résultats obtenus par le P. Joubert dans une question analogue (*).

(*) Comptes rendus, 1867, *Sur l'équation du sixième degré.*

En appelant

$$A = (ab)^6; \quad B = (ii')^4, \quad C = (ii')^2 (i'i'')^2 (i''i)^2, \quad i = (ab)^4 a_x^2 b_x^2$$

trois invariants et un des covariants fondamentaux de la sextique, ce savant géomètre est arrivé à l'équation

$$\begin{aligned} &U^6 + 2.3.5\, AU^4 + 2^2.3^2.5\,(3A^2 - 25B)\,U^2 + \sqrt{\Delta}.U \\ &+ 2^3.3^3.5\,(250c + 25AB - A^3) = 0. \end{aligned}$$

Or, si nous désignons par U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6 les racines de cette équation, nous arrivons aisément aux expressions suivantes

$$\begin{aligned} 8U_1 &= 2\Sigma\alpha, \\ 8U_2 &= 8\alpha_1 - 2\Sigma\alpha, \\ 8U_3 &= 8\alpha_2 - 2\Sigma\alpha. \\ 8U_4 &= 8\alpha_3 - 2\Sigma\alpha, \\ 8U_5 &= 8\alpha_4 - 2\Sigma\alpha, \\ 8U_6 &= 8\alpha_5 - 2\Sigma\alpha. \end{aligned}$$

Ces relations, jointes à celles qui donnent les β et les γ en fonction des α font voir immédiatement que les sommes, prises deux à deux, des U, reproduisent les quinze fonctions α, β, γ, multipliées par huit.

Pour former l'équation aux fonctions α, β, γ, il suffira donc de calculer l'équation aux sommes des racines, prises deux à deux, de l'équation en U.

La méthode de Lagrange nous conduira, par un calcul qui n'offre de difficulté que sa longueur, au résultat cherché.

Nous ne reproduisons ici que les coefficients de l'équation en z, écrite plus haut (*).

En posant

$$\begin{aligned} 2.3.5.A = A', \quad 2^2.3^2.5\,(3A^2 - 25B) = B', \\ 2^3.3^3.5\,(250C + 25AB - A^3) = C', \end{aligned}$$

(*) Voir, pour plus de détails, *Mémoire sur les courbes du troisième ordre*, 1re partie, pp. 35 et suivantes.

nous aurons

$$a_2 = 4A', \quad a_4 = 6A'^2 - 2B', \quad a_0 = 10, \quad a_6 = 4A'^3 - 2A'B' - 26C',$$
$$a_7 = 12A'\sqrt{\Delta}, \quad a_8 = A'^4 + 2A'^2B' - 24A'C' - 7B'^2,$$
$$a_9 = (-2A'^2 - 10B')\sqrt{\Delta}, \; a_{10} = 2A'^3B' - 6A'B'^2 - 18A'^2C' + 54B'C' - 12\Delta,$$
$$a_{11} = (-2A'B' + 2558C')\sqrt{\Delta},$$
$$a_{12} = -294A'^4B' + A'^2B'^2 + 48A'^3C' - 218A'B'C' - 5A'\Delta - 4B'^3 - 27C'^2,$$
$$a_{13} = (-13.99A'^4 + 2376A'^2B' + 2654A'C' - 1089B'^2)\sqrt{\Delta},$$
$$a_{14} = (-A'^2 - 712B')\Delta; \quad a_{15} = -411\Delta\sqrt{\Delta}.$$

Soit

$$F(z) = 0,$$

l'équation en z et désignons ses racines par $z_1, z_2, .. z_{15}$.

L'équation

$$F(z_1x) = 0,$$

aura pour racines $\frac{z_1}{z_1}, \frac{z_2}{z_2}, .. \frac{z_{15}}{z_1}$.

Il en résulte que l'équation

$$\frac{F(z_1x)(F z_2x) \ldots F(z_{15}x)}{(x-1)^{15}} = 0,$$

aura pour racines les rapports anharmoniques formés à l'aide des α, β, γ.

Le numérateur de l'équation que nous venons d'écrire est le résultant des deux formes.

$$F(zx), \quad F(z).$$

Soit

$$\Phi(x) = 0,$$

l'équation du deux cent dixième ordre qui a pour racines ces rapports anharmoniques. Il est visible qu'elle est réciproque et décomposable en deux facteurs l'un du cent vingtième ordre et l'autre du quatre-vingt-dixième.

Le premier, égalé à zéro, aura pour racines les rapports du troisième ordre proprement dits.

Reprenons l'équation

$$F(z) = 0,$$

que nous pouvons écrire

$$V_1(z) = f(z) + \sqrt{\Delta}\varphi(z) = 0.$$

Nous pourrions chercher la signification géométrique des invariants de cette forme : nous nous bornerons à examiner son discriminant.

Pour cela, il faudra former les différences des quantités α, β, γ posées deux à deux.

On peut remarquer que ces différences seront bien distinctes selon que nous prendrons deux fonctions ayant un même facteur binaire ou non.

Les premières seront au nombre de quarante-cinq, les autres au nombre de soixante.

Examinons d'abord ces dernières.

Soit, par exemple

$$\alpha_1 - \beta_3.$$

Si nous avions $\alpha_1 - \beta_3 = 0$, cette condition peut s'écrire

$$(12)(35)(64) = (14)(32)(65),$$

ou

$$\frac{(12)}{(14)} : \frac{(32)}{(34)} = \frac{(56)}{(55)} : \frac{(46)}{(45)}.$$

Les six points 1, 5; 3, 4; 2, 6, seraient en involution.

Ces différences seraient, par suite, les facteurs de l'invariant gauche E, de la sextique.

Ces facteurs sont au nombre de quinze, tandis que nous avons soixante différences analogues à celles que nous venons de rencontrer.

Or, on vérifie sans peine que ces différences sont égales, quatre à quatre.

Nous trouvons ainsi

$$\gamma_4 - \alpha_5 = \beta_5 - \alpha_2 = \gamma_2 - \alpha_3 = \beta_3 - \alpha_4,$$

$$\gamma_2 - \beta_4 = \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_3 - \gamma_1 = \gamma_4 - \gamma_3, \text{ etc.}$$

Ces relations peuvent se démontrer à l'aide des expressions des β et des γ que nous avons données plus haut.

De tout ceci résulte que chaque facteur de E entre huit fois dans le discriminant de V_1.

Les autres différences telles que

$$\alpha_1 - \beta_1$$

sont faciles à interpréter.

En effet si

$$\alpha_1 - \beta_1 = (12)\left[(35)(46) - (34)(65)\right] = 0,$$

les quatre points 3, 6, 5, 4 sont conjugués harmoniques.

Dans les quarante-cinq différences ainsi formées, chaque figure binaire (ik) entre trois fois comme facteur.

Le discriminant de $V_1(z)$ sera donc

$$E^8 \Delta^3 P',$$

P′ étant un invariant de la sextique dont la réduction à zéro indique que parmi les six points représentés par la forme, il y en a quatre conjugués harmoniques.

Nous ne poursuivrons pas plus loin cette étude et nous allons nous occuper de quelques questions relatives aux points conjugués harmoniques du troisième ordre.

Nous avons défini plus haut (p. 51) ce que l'on entend par deux groupes de trois points conjugués harmoniques du troisième ordre.

Comme nous le montrions au commencement de ce chapitre, chaque permutation des six figures $x_1 x_2 x_3 \,..\, x_6$ donne naissance à deux rapports anharmoniques.

Ainsi (12)(34)(56) conduit aux deux rapports

$$\frac{(12)(34)(56)}{(14)(36)(52)}, \quad \frac{(12)(34)(56)}{(16)(32)(54)}.$$

Lorsque la somme des inverses de ces deux rapports est égale à -1, nous avons

$$\frac{(14)(36)(52)}{(12)(34)(56)} + \frac{(16)(32)(54)}{(12)(34)(56)} + 1 = 0,$$

ou

$$(12)(34)(56)+(14)(36)(52)+(16)(32)(54)=0.$$

Dans ce cas les deux groupes

$$1, 3, 5; \quad 2, 4, 6$$

sont conjugués harmoniques du troisième ordre.

Cette théorie, comme on le voit, présente une analogie complète avec celle qui lui correspond pour le second ordre.

On peut se proposer de rechercher dans quels cas six points représentés par une sextique

$$a_x^6=0,$$

se décomposent en deux groupes de trois points conjugués harmoniques.

Considérons une décomposition, par exemple, la suivante 1, 2, 3; 4, 5, 6, qui conduit à la condition d'harmonie

$$(14)(25)(36)+(15)(26)(34)+(16)(24)(35)=0.$$

Appelons d_1 le premier membre : en développant nous aurons

$$\begin{aligned} d_1 = 3\Big[& x_1x_2x_3 - \frac{1}{3}(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)(x_4+x_5+x_6) \\ & + \frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)(x_4x_5+x_5x_6+x_6x_4) - x_4x_5x_6\Big]. \end{aligned}$$

On s'aperçoit aisément qu'il est possible de faire dix décompositions semblables. Le produit des facteurs d sera un invariant de la sextique.

Observons, en effet, que si dans d_1 on échange les deux groupes 1, 2, 3; 4, 5, 6, on ne change que le signe de d_1. D'ailleurs, on peut permuter, comme on le veut, tous les éléments d'un groupe.

Chaque expression, telle que d_1, conduit, par suite, à soixante-douze permutations des racines.

Nous avons donc en tout sept cent vingt permutations, ce qui représente bien toutes celles qui sont possibles.

Le produit des dix facteurs d ne pourra donc que changer de signe par une substitution effectuée sur les racines.

Voyons quel sera l'effet d'une substitution telle que $(x_1 x_2)$. Cette substitution laisse invariables les quatre groupes où $x_1 x_2$ sont associés et change les signes des six autres en les permutant entre eux.

Il en résulte que ce produit est une fonction symétrique des racines de $a_x^6 = 0$, et par la forme même de ses facteurs, on voit que c'est un invariant de cette expression.

Posons

$$\mathfrak{D} = a_0^{10} \,.\, d_1 d_2 \ldots d_{10}.$$

La réduction à zéro de cet invariant exprime que les six points sont conjugués harmoniques du troisième ordre.

Nous avons effectué ailleurs (*) les calculs qui conduisent à l'expression de $\mathfrak{D}$ au moyen des autres invariants de la sextique : nous ne les reproduirons pas ici.

Nous nous bornerons à indiquer que les fonctions d sont les sommes des racines de l'équation en U, écrite plus haut.

Il faudra donc former le produit des sommes prises trois à trois des racines de cette équation. Ces sommes, au nombre de vingt, sont égales deux à deux, au signe près. Nous devrons donc prendre la racine carrée de ce produit.

Nous trouvons ainsi :

$$\mathfrak{D} = \Delta + (250C + 25AB - A^3)\{5^3 \quad 6^5 A^2 - 4 \,.\, 5^2 6^5 (5A^2 - 25B)\}.$$

CHAPITRE IV.

GROUPES POLAIRES.

Nous nous bornerons, sur ce sujet, à quelques indications rapides, car, ainsi qu'on le verra sans peine, les remarques que nous aurons l'occasion de faire sont, en quelque sorte, contenues implicitement dans la théorie de l'involution.

(*) *Mém. de la Soc. roy. des Sciences de Liège*, t. IX, 2me série.

Soit

$$a_0x_1y_1z_1 + a_1(x_1y_1z_2 + x_1y_2z_1 + x_2y_1z_1) + a_2(x_1y_2z_2 + x_2y_1z_2 + x_2y_2z_1) + a_3x_2y_2z_2 = 0, \tag{1}$$

l'équation caractéristique d'une involution I_2^3, qui a pour points triples les points donnés par l'équation

$$a_0x_1^3 + 3a_1x_1^2x_2 + 3a_2x_1x_2^2 + a_3x_2^3 = 0.$$

A chaque point x, correspondent, dans l'involution I_2^3, des couples de points formant une involution I_1^2, définie par l'équation

$$y_1z_1(a_0x_1 + a_1x_2) + (y_1z_2 + y_2z_1)(a_1x_1 + a_2x_2) + y_2z_2(a_2x_1 + a_3x_3) = 0.$$

Les points doubles de cette involution sont donnés par l'équation

$$y_1^2(a_0x_1 + a_1x_2) + 2y_1y_2(a_1x_1 + a_2x_2) + y_2^2(a_2x_1 + a_3x_2) = 0,$$

ou, sous une autre forme,

$$x_1(a_0y_1^2 + 2a_1y_1y_2 + a_2y_2^2) + x_2(a_1y_1^2 + 2a_2y_1y_2 + a_2y_2^2) = 0.$$

Les deux points doubles constituent la première polaire, ou le premier groupe polaire de x, *par rapport aux points triples de l'involution* I_2^3.

Nous avons démontré (p. 51) que chaque terne de l'involution (1) est conjugué harmonique du troisième ordre des points triples de l'involution.

Représentons par y, y' les deux points du groupe polaire : x, y, y constituent un terne conjugué harmonique des trois points donnés.

La même chose peut se dire de x, y', y'.

On peut énoncer ce théorème :

Si l'on détermine le premier groupe polaire b_1, c_1, *d'un point* a_1, *par rapport à trois points* a, b, c, *chacun des points* b_1, c_1, *regardé comme double, forme avec* a_1 *un terne de points conjugués harmoniques de* a, b, c.

Si, au contraire, dans l'involution (1) nous considérons deux points x, y coïncidant, il leur correspond un point unique z, donné par l'équation

$$y_1^2(a_0z_1 + a_1z_2) + 2y_1y_2(a_1z_1 + a_2z_2) + y_2^2(a_2z_1 + a_3z_2) = 0,$$

ou

$$z_1(a_0y_1^2 + 2a_1y_1y_2 + a_2y_2^2) + z_2(a_1y_1^2 + 2a_2y_1y_2 + a_3y_2^2) = 0.$$

Le point z forme la seconde polaire de y.

Ceci pourrait donner lieu à des remarques analogues à celles que nous avons faites dans le cas précédent.

Reprenons l'équation

$$y_1^2(a_0x_1 + a_2x_2) + 2y_1y_2(a_1x_1 + a_2x_2) + y_2^2(a_2x_1 + a_3x_2) = 0,$$

du premier groupe polaire des trois points représentés par l'équation

$$a_x^3 = 0,$$

par rapport au point x_1, x_2.

Nous pourrons, de même, chercher la polaire d'un point z, à l'égard de ces deux points y'.

Soit u_1, u_2, ce point, nous trouverons

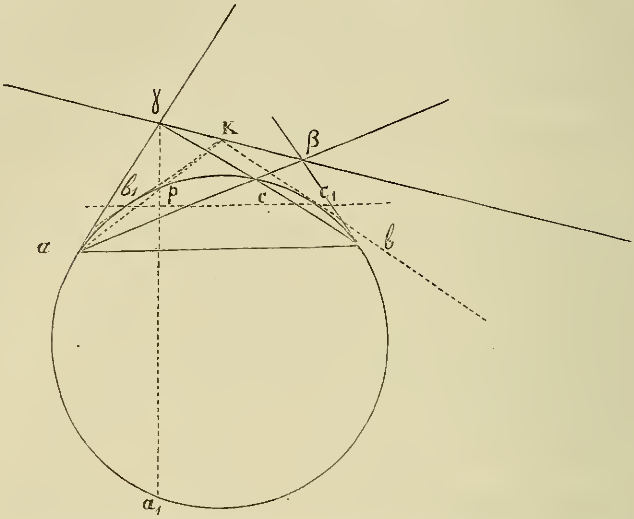
$$u_1\left[a_0y_1x_1 + a_1(y_1x_2 + y_2x_1) + a_2y_2x_2\right] + u_2\left[a_1y_1x_1 + a_2(y_1x_2 + y_2x_1) + a_3y_2x_2\right] = 0.$$

Le point u est la polaire mêlée des deux points x, y par rapport aux trois points

$$a_x^3 = 0.$$

Il en résulte immédiatement que *deux points* a_1, b_1 *et leur polaire mêlée* c_1, *forment un terne de points de l'involution* I_2^3 *qui a pour points triples les trois points* a, b, c.

De ces considérations résultent immédiatement les constructions relatives aux groupes polaires.



Soit à construire le premier groupe polaire de a_1 par rapport à abc.

Construisons la droite hessienne $\gamma\beta$ des trois points a, b, c.

La droite $a_1\gamma$ rencontre le cercle en un point p. ap coupe $\gamma\beta$ en k et les deux tangentes, issues de k, touchent le cercle aux deux points b_1c_1.

Les constructions ne cessent pas d'être possibles si deux des points, b, c, par exemple, sont imaginaires. Nous avons vu plus haut comment l'on peut déterminer la hessienne, toujours réelle.

La droite b_1c_1 est la polaire du point réel k.

La seconde polaire de a_1 s'obtiendra en menant ka_1 qui rencontre le cercle au point cherché.

Quant à la polaire mixte de deux points A_1, B_1, il suffira, pour la construire, d'employer le problème IV (p. 81).

Soient a, b, c trois points donnés, et b_1, c_1 le premier groupe polaire de a_1, par rapport à a, b, c. On peut se demander quelle doit être la position de a_1 pour que les deux points b_1, c_1 coïncident.

Si l'on exprime cette condition, en partant de l'équation

$$y_1^2(a_0x_1 + a_1x_2) + 2y_1y_2(a_1x_1 + a_2x_2) + y_2^2(a_2x_1 + a_3x_2) = 0,$$

on trouve que le point a_1 doit être l'un des deux points donnés par l'équation

$$(a_0x_1 + a_1x_2)(a_2x_1 + a_3x_2) - (a_1x_1 + a_2x_2)^2 = 0,$$

c'est-à-dire un des deux points où la hessienne de a, b, c rencontre la conique.

Cette conséquence résultait d'ailleurs immédiatement de la construction que nous venons de donner.

On voit encore tout de suite que si a_1 coïncide avec a, par exemple, un des deux points polaires b_1 coïncide aussi avec a, et que l'autre c_1 est le conjugué harmonique de a par rapport à b, c.

Si a_1 ne coïncide avec aucun des points a, b, c et que l'un des points de son groupe polaire coïncide avec l'un de ces trois points, il est visible que deux de ces points sont nécessairement confondus.

Supposons, par exemple, que c_1 soit en b. Il est évident que k doit se trouver sur la tangente à la conique en b : ceci ne pourra avoir lieu que si cette tangente est la hessienne, c'est-à-dire si c et b coïncident.

Nous aurons encore à faire usage des propriétés suivantes, dont nous donnerons la démonstration pour un ordre quelconque.

Soient $\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots \mathrm{a}_n$; $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots \mathrm{b}_n$, *deux groupes de* n *points : les* $(\mathrm{n} - \mathrm{k})^{\text{mes}}$ *polaires d'un point* P *par rapport à ces deux groupes coïncident lorsque* P *est un point* $(\mathrm{k}+1)^{\text{ple}}$ *de l'involution* I_1^n *caractérisée par eux.*

Soient

$$f = \alpha_0x^n + n_1\alpha_1x^{n-1}y + n_2\alpha_2x^{n-2}y^2 + \ldots + \alpha_ny^n = 0,$$

$$\varphi = \beta_0x^n + n_1\beta_1x^{n-1}y + n_2\beta_2x^{n-2}y^2 + \ldots + \beta_ny^n = 0,$$

les équations dont les racines donnent les deux groupes de points.

Les $(n - k)^{mes}$ polaires du point P (u, v) par rapport à chacun de ces groupes seront représentés par

$$x^k \left[(\alpha_0 u^{n-k} + \binom{n-k}{1} \alpha_1 u^{n-k-1} v + \ldots + \alpha_{n-k} v^{n-k}\right]$$

$$+ \binom{k}{1} x^{k-1} y \left[\alpha_1 u^{n-k} + \binom{n-k}{1} \alpha_2 u^{n-k-1} v + \ldots + \alpha_{n-k-1} v^{n-k}\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ y^k \left[\alpha_k u^{n-k} + \binom{n-k}{1} \alpha_{k+1} u^{n-k-1} v + \ldots + \alpha_n v^{n-k}\right] = 0;$$

$$x_k \left[\beta_0 u^{n-k} + \binom{n-k}{1} \beta_1 u^{n-k-1} + \ldots + \beta_{n-k} v^{n-k}\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ y^k \left[\beta_k u^{n-k} + \binom{n-k}{1} \beta_{k+1} u^{n-k-1} v + \ldots + \beta_n v^{n-k}\right] = 0.$$

Ces deux équations seront évidemment identiques entre elles si l'on a

$$\frac{d^k f}{dx^k} - \lambda \frac{d^k \varphi}{dx^k} = 0, \quad \frac{d^k f}{dx^{k-1} dy} - \lambda \frac{d^k \varphi}{dx^{k-1} dy} = 0; \ldots \quad \frac{d^k f}{dy^k} - \lambda \frac{d^k \varphi}{dy^k} = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'involution

$$f - \lambda\varphi = 0$$

possède un point $(k + 1)^{ple}$ (*).

Si l'on a un groupe de n *points* $a_1, a_2, \ldots a_n$ *sur un support unicursal, la première polaire* $b_1, b_2, \ldots b_{n-1}$, *d'un point* P *par rapport à ce groupe;* a_n *et le groupe* $c_1, c_2, \ldots c_{n-2}$, *polaire de* P,

(*) Le cas où $k = 1$ a été signalé par Poncelet, *Analyse des transversales*, nos 191-192.

Nous avons énoncé ce théorème et le suivant, sous leur forme générale dans une note insérée au *Casopis pro pestovani Mathematiky à Fysiky*, t. X, p. 212.

par rapport à $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{n-1}$; *enfin ce dernier groupe, appartiennent à une même* $\mathfrak{l}_1^{n-1}$.

Bornons-nous à $n = 3$.

On a

$$\alpha_0 x^3 + 3\alpha_1 x^2 y + 3\alpha_2 x y^2 + \alpha_3 y^3 = \alpha_0 (x - a_1 y)(x - a_2 y)(x - a_3 y).$$

Soient encore u, v les paramètres de P.

b_1, b_2, sont donnés par l'équation :

$$f = x^2 (\alpha_0 u + \alpha_1 v) + 2xy (\alpha_1 u + \alpha_2 v) + y^2 (\alpha_2 u + \alpha_3 v) = 0.$$

Posons

$$\varphi = \alpha_0 (x - a_1 y)(x - a_2 y) = A_0 x^2 + 2A_1 xy + A_2 y^2.$$

c_1 est représenté par

$$x (A_0 u + A_1 v) + y (A_1 u + A_2 v) = 0.$$

Posant

$$\psi = [\, x (A_0 u + A_1 v) + y (A_1 u + A_2 v)] (x - a_3 y) = 0,$$

on vérifie immédiatement l'identité

$$3 f - (u - a_3 v) \varphi - 2\psi \equiv 0,$$

ce qui démontre le théorème.

Les propriétés des groupes polaires, que nous venons d'exposer, contenant à peu près tous les points essentiels dont on ait à faire usage dans l'étude des cubiques planes, nous ne nous étendrons pas davantage sur cette théorie et nous terminerons ici ces *Essais de Géométrie du troisième ordre :* nous espérons pouvoir les compléter un jour en les appliquant aux courbes du troisième ordre.

SUR

LES INVOLUTIONS SUPÉRIEURES,

REPRÉSENTÉES SUR UN MÊME SUPPORT;

PAR

M. Em. WEYR,

Professeur a l'Université de Vienne.

SUR

LES INVOLUTIONS SUPÉRIEURES,

REPRÉSENTÉES SUR UN MÊME SUPPORT.

1. Soit donnée une involution du n^{me} ordre et du second rang, I^2_n, et sur le même support, une involution, de même espèce, du m^{me} ordre et du premier rang, I^1_m. Chaque groupe de I^1_m est formé de m éléments et est complètement déterminé par un de ces éléments; deux éléments déterminent *un* groupe de I^2_n. Maintenant se présente la question suivante, qui n'est pas sans importance : « Combien existe-t-il de groupes de I^2_n dont trois éléments font partie d'un même groupe de I^1_m, » ou, en d'autres termes : « Combien I^2_n et I^1_m ont-elles de ternes communs ? »

Supposons que l'involution I^2_n soit représentée par les groupes de points en ligne droite, ou pour abréger, les groupes linéaires d'une courbe rationnelle du n^{me} ordre E_n, et que cette courbe soit aussi support de I^1_m.

Soient maintenant $x'x''$ deux éléments d'un groupe de I^1_m et soient y les $(m-2)$ autres éléments de ce groupe. Désignons encore par z les $(n-2)$ autres intersections de la droite $x'x''$ avec E_n. Il s'agit de savoir combien de fois un y coïncide avec un z.

Un point quelconque y fait partie d'un groupe unique de I^1_m; à l'aide des $(m-1)$ éléments restants de ce groupe, on peut former $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$ couples. Chaque droite déterminée par un de ces couples donne naissance à $(n-2)$ points z; de façon qu'à un point y correspondent $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(n-2)$ points z.

Si maintenant on choisit arbitrairement z sur E_n, toutes les droites passant par z déterminent, sur E_n, une I^1_{n-1} qui a, comme on sait, avec I^1_m $(m-1)(m-2)$ couples communs $x'x''$; chacun de ces couples donne $(n-2)$ y, de telle sorte qu'à chaque z correspondent $(m-1)$ $(n-2)$ $(m-2)$ points y. Le nombre des coïncidences de y avec z est donc égal à

$$\frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}(n-2) + (m-1)(n-2)(m-2)$$
$$= \frac{3 \cdot (m-1)(m-2)(n-2)}{1 \cdot 2}.$$

Comme chaque terne linéaire $x'x''y$ absorbe trois coïncidences, il existe $\frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}(n-2)$ ternes linéaires sur E_n qui appartiennent à I^1_m, c'est-à-dire :

Une I^2_n *a* $\frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}(n-2)$ *ternes communs avec une* I^1_m, *située sur le même support.*

2. Si l'on joint, par une droite, deux points appartenant à un même groupe de I^1_m, sur E_n, toutes ces droites enveloppent une courbe de la $(n-1)(m-1)^{me}$ classe, courbe d'involution de I^1_m. Les droites qui joignent les $\frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}(n-2)$ ternes communs à I^2_n et à I^1_m sont autant de tangentes triples de cette courbe, qui possède, en outre, $\frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2}(m-1)^2$ tangentes doubles.

3. Supposons que l'on se donne sur une courbe rationnelle gauche du n^{me} ordre, R_n, une involution ponctuelle du m^{me} ordre et du premier rang, I^1_m.

Par trois points quelconques d'un groupe, faisons passer un plan et recherchons la classe de la développable enveloppée par ce plan, c'est-à-dire, cherchons combien de pareils plans on peut mener par un point arbitraire p de l'espace.

Les plans passant par p déterminent, sur R_n, une I^2_n qui a, d'après le théorème précédent, $\frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}(n-2)$ ternes communs avec I^1_m.

En conséquence :

Les plans déterminés par trois points d'un groupe d'une I^1_m, *représentée sur une courbe gauche rationnelle* R_n, *enveloppent une développable de la* $\left[\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(n-2)\right]^{me}$ *classe.*

Pour $m=3$, $n=3$, on trouve un faisceau de plans; pour $m=3$, $n=4$, un cône de la seconde classe (*); pour $m=3$, en général une développable de la $(n-2)^{me}$ classe; pour $n=3$, en général une développable de la $\left[\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\right]^{me}$ classe.

La surface qui contient les droites joignant deux points d'un même groupe d'une I^1_m, représentée sur R_n, est, comme on le sait, d'ordre et de classe $(m-1)(n-1)$ et possède R_n comme courbe $(m-1)^{ple}$.

4. Soit, sur R_n, une involution du m^{me} ordre et du second rang, I^2_m.

Par trois points quelconques d'un groupe de cette involution, menons un plan et déterminons la classe de l'enveloppe de ce plan, c'est-à-dire le nombre des plans, menés par une droite arbitraire P, qui contiennent un terne de I^2_m.

Les plans menés par P marquent, sur R_n, une involution I^1_n qui a, d'après le théorème énoncé tantôt, avec I^2_m, $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(m-2)$ ternes communs. Par suite :

La surface d'involution d'une involution ponctuelle du m^{me} *ordre et du second rang,* I^2_m, *représentée sur une courbe rationnelle gauche du* n^{me} *ordre,* R_n, *est de la* $\left[\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}(m-2)\right]^{me}$ *classe.*

I^2_m, sur R_n, possède $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$ couples d'éléments neutres; les droites, passant par ces couples, appartiennent à la surface d'involution.

Pour $n=3, m=3$, on obtient un point (gerbe de plans); pour $n=3$, $m=4$, une surface du second ordre qui passe par trois bisécantes de R_3; pour $n=3$, $m=5$, une surface de la troisième classe qui contient six bisécantes de R_3; pour $n=3$,

(*) Tout point de l'espace est sommet d'une infinité de tels cônes quadratiques d'involution que touchent quatre fois R_4.

$m = 6$, une surface de la quatrième classe qui passe par dix bisécantes de R_3.

Pour $n = 4$, $m = 3$, la surface est de la troisième classe et, en général, pour $n = 4$, de la $3(m-2)^{me}$ classe; elle contient les $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ bisécantes de R_4 correspondant aux couples d'éléments neutres de I^2_m et, en outre, $(m-2)$ trisécantes de R_4.

3. Soient, sur un même support, une I^1_m et une I^3_n; quel est le nombre de leurs quaternes communs? Supposons que l'involution I^3_n soit constituée par les groupes de points situés dans un plan, ou groupes plans, d'une courbe gauche rationnelle du n^{me} ordre R_n, et soit I^1_m une seconde involution ponctuelle située sur R_n.

Désignons par $x'x''x'''$ trois points appartenant à un groupe unique de I^1_m, z les autres $(n-3)$ intersections du plan $x'x''x'''$ avec R_n et y les $(m-3)$ points qui, avec $x'x''x'''$, complètent un groupe de I^1_m. Il s'agit de nouveau de savoir le nombre des coïncidences de y avec z, dont quatre font partie d'un des quaternes cherchés.

Chaque point y forme avec $(m-1)$ points un groupe de I^1_m; ces points donnent $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$ ternes $x'x''x'''$, dont chacun conduit à $(n-3)$ points z. Par suite, à chaque point y, correspondent $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}(n-3)$ points z.

Supposons maintenant que z soit fixe. Tous les plans qui passent par z marquent, sur R_n, une I^2_{n-1}, laquelle, d'après le théorème précédemment énoncé, possède, en commun avec I^1_m, $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(n-3)$ ternes $x'x''x'''$. Chacun de ces ternes appartient à un groupe *unique* de I^1_m qui est complété par $(m-3)$ points y. Donc, au point z correspond un système de $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(n-3)(m-3)$ points y.

Par suite le nombre des coïncidences est

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}(n-3) + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2}(n-3),$$

et le nombre des quaternes

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}(n-3).$$

En conséquence :

Une I^1_m *et une* I^3_n, *situées sur le même support, ont* $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$ $(n-3)$ *quaternes communs.*

Si l'on a, sur une courbe rationnelle gauche R_n, une involution ponctuelle I^1_m, la surface d'involution (lieu des bisécantes de R_n qui joignent les couples d'éléments de I^1_m) contient $\frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}$ $(n-3)$ quadrangles complets inscrits à R_n.

6. Pour trouver le nombre des groupes de $(k+1)$ points communs à une I^1_m et à une I^k_n situées sur le même support, on peut procéder de la manière suivante.

Désignons le nombre cherché par $\mu_{n,k}$.

Soient x, k éléments d'un groupe de I^1_m; y, les $(m-k)$ éléments restants de ce groupe et z les $(n-k)$ éléments qui, avec x, forment un groupe de I^k_n. Il faut trouver le nombre des coïncidences de y avec z, nombre qui, divisé par $(k+1)$, est égal à $\mu_{n,k}$. Un point y donne un groupe de I^1_m, dont les $(m-1)$ autres éléments forment $\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-k)}{1.2.3\dots k}$ groupes de k points. Chacun de ces groupes conduit à $(n-k)$ points z; de façon qu'à tout point y correspondent $\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-k)}{1.2.3\dots k}(n-k)$ points z.

Si z reste fixe, les éléments qui lui correspondent, dans I^k_n, constituent une I^{k-1}_{n-1}, qui a, avec I^1_m, $\mu_{n-1,k-1}$ groupes de k points communs; à chacun de ces groupes correspondent $(m-k)$ points y. Par suite, à chaque point z, correspond un système de $(m-k)\ \mu_{n-1,k-1}$ éléments y. Le nombre des coïncidences est donc

$$\left[(m-k)\,\mu_{n-1,k-1} + \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-k)}{1\,.\,2\,.\,3\dots k}(n-k)\right].$$

Il en résulte la formule récurrente qui suit :

$$(k+1)\mu_{n,k} = \left[(m-k)\mu_{n-1,k-1} + \frac{(m-1)(m-2)\dots(m-k)}{1\,.\,2\,.\,3\dots k}(n-k)\right].$$

Mais pour $\mu_{n,1}$ c'est-à-dire pour le nombre des couples communs à I^1_m, I^1_n, on a, comme on sait,

$$\mu_{n,1} = (m-1)(n-1).$$

on en déduit

$$\mu_{n,2} = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}(n-2),$$

$$\mu_{n,3} = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}(n-3),$$

$$\mu_{n,4} = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}(n-4),$$

et, en général,

$$\mu_{n,k} = \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-k)}{1.2.3\ldots k}(n-k).$$

SUR

CERTAINES SOMMES DE DÉTERMINANTS;

PAR

J. DERUYTS.

SUR CERTAINES SOMMES DE DÉTERMINANTS.

LEMME. *Soient* D *et* D′ *deux déterminants d'ordre* n, *la somme des* $\binom{n}{p}$ *déterminants du même ordre composés de* n — p *rangées de* D *et de* p *rangées de* D′, *est égale à celle des* $\binom{n}{p}$ *déterminants, obtenus en faisant la même opération sur les colonnes.*

Cette propriété se démontre aisément comme suit :

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Posons :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}x + b_{11}y & a_{12}x + b_{12}y & \dots & a_{1n}x + b_{1n}y \\ a_{21}x + b_{21}y & a_{22}x + b_{22}y & \dots & a_{2n}x + b_{2n}y \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{n1}x + b_{n1}y & a_{n2}x + b_{n2}y & \dots & a_{nn}x + b_{nn}y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}x + b_{11}y & a_{21}x + b_{21}y & \dots & a_{n1}x + b_{n1}y \\ a_{12}x + b_{12}y & a_{22}x + b_{22}y & \dots & a_{n2}x + b_{n2}y \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{1n}x + b_{1n}y & a_{2n}x + b_{2n}y & \dots & a_{nn}x + b_{nn}y \end{vmatrix}.$$

Dans les deux développements de Δ_1, les coefficients de $x^{n-p}y^p$ sont évidemment égaux.

Considérons le tableau rectangulaire

$$\Delta = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & a_{2n+1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} & a_{nn+1} \end{matrix} \right\|,$$

et désignons par D_i le déterminant obtenu en supprimant dans Δ la colonne de rang i.

Cela posé, le lemme précédemment énoncé conduit tout d'abord à la proposition suivante que nous avons obtenue (*) comme généralisation d'un théorème de M. Le Paige :

On forme les n *déterminants d'ordre* n *composés de* n — 1 *rangées de* D_{n+1} *et d'une rangée de*

$$\delta_k = \left| \begin{matrix} a_{1k} & a_{1k+1} \dots a_{1n} & a_{1n+1} & a_{11} \dots a_{1k-2} \\ a_{2k} & a_{2k+1} \dots a_{2n} & a_{2n+1} & a_{21} \dots a_{2k-2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{nk} & a_{nk+1} \dots a_{nn} & a_{nn+1} & a_{n1} \dots a_{nk-2} \end{matrix} \right| :$$

la somme de ces déterminants est égale à $(-1)^k D_{n+2-k}$.

Cette proposition est susceptible de généralisation.

Posons pour abréger,

$$S_{k_1 k_2 \dots k_p} = \sum \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{gk_1} & a_{gk_1+1} & \dots a_{gk_1-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{hk_2} & a_{hk_2+1} & \dots a_{hk_2-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{fk_p} & a_{fk_p+1} & \dots a_{fk_p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n.2} & \dots a_{n.n} \end{matrix} \right|,$$

(*) *Mémoires de la Société royale des sciences*, 2me série, t. IX.

le signe sommatoire se rapportant à tous les arrangements p à p des indices 1, 2, 3, ..., n, analogues à g, h, ..., t.

Le théorème que nous nous proposons de démontrer, est exprimé par l'égalité :

$$S_{k_1k_2\dots k_p} = 1\,.\,2\dots\overline{p-1}\,.\,p\,(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_p} \times D_{n+1+p-k_1-\dots-k},$$

où nous supposerons

$$n+1+p-k_1\dots-k_p > 0.$$

Remarquons tout d'abord que cette égalité a lieu pour $p=1$, d'après ce qui précède. Démontrons donc que le théorème est vrai pour le cas de $S_{k_1k_2\dots k_p}$, quand il l'est pour le cas de $S_{k_1k_2\dots k_{p-1}}$.

A cet effet, considérons les n tableaux rectangulaires

$$\Delta^j = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{jk_p} & a_{jk_p+1} & \dots & a_{jk_p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn+1} \end{matrix} \right\|,$$

correspondant à $j=1, 2, 3, \dots n$ et appliquons à ces tableaux rectangulaires le théorème démontré pour Δ dans le cas de $S_{k_1k_2\dots k_{p-1}}$, c'est-à-dire :

$$S_{k_1k_2\dots k_{p-1}} = 1\,.\,2\dots\overline{p-1}\,(-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{p-1}} \times D_{n+p-k_1-k_2-\dots-k_{p-1}} \quad \text{(A)}.$$

Faisons la somme des quantités analogues à $S_{k_1k_2\dots k_{p-1}}$ relativement aux Δ^j; nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} & S_{k_1\dots k_p} + \sum_{i=1}^{i=p-1} S_{k_1,\dots k_i+k_p-1,\dots k_{p-1}} \\ & = 1\;2\dots\overline{p-1}\,(-1)^{k_1+\dots+k_{p-1}} \times \sum_{j=1}^{j=n} D^j_{n+p-k_1-\dots-k_{p-1}}. \end{aligned}\right\} \text{(B)}$$

D'après l'équation (A), on a :

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{i=p-1} S_{k_1,\ldots,k_i+k_p-1,\ldots k_{p-1}}\\ &=(p-1).1.2\ldots\overline{p-1}\,(-1)^{k_1+\cdots+k_p-1}D_{n+p+1-k_1-\ldots-k_n}\end{aligned}\right\}\ (C)$$

Cherchons maintenant la valeur de la somme

$$\sum_{j=1}^{j=n} D^j_{n+p-k_1-\ldots-k_{p-1}},$$

qui devient en posant $n+p-k_1-\cdots-k_{p-1}=\alpha$:

$$\sum_{j=1}^{j=n}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\alpha-1} & a_{1\alpha+1} & \ldots & a_{1n+1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{jk_p} & \ldots & a_{j\alpha+k_n-2} & a_{j\alpha+k_p} & \ldots & a_{jk_p-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & \ldots & a_{n\alpha-1} & a_{n\alpha+1} & \ldots & a_{nn+1}\end{vmatrix}$$

ou bien :

$$(-1)^{(\alpha-1)(n+1-\alpha)}\sum_{j=1}^{j=n}\begin{vmatrix} a_{1\alpha+1} & \ldots & a_{1n+1} & a_{11} & \ldots & a_{1\alpha-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{j\alpha+k_p} & \cdot & \cdot & a_{jk_p} & \ldots & a_{j\alpha+k_p-2}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n\alpha+1} & \cdot & \cdot & a_{n1} & \ldots & a_{n\alpha-1}\end{vmatrix}$$

D'après la propriété rappelée plus haut, c'est-à-dire

$$S_{k_p}=(-1)^{k_p}D_{n+2-k_p},$$

la somme contenue dans la dernière expression est égale, au signe près, au déterminant obtenu en supprimant dans Δ la colonne d'ordre $\alpha+n+2-k_p$ ou $n+2+n+p-k_1-\cdots-k_p$. Mais, comme on l'a supposé, on a $n+1+p-k_1-\cdots-k_p>0$: par suite, la colonne à supprimer dans Δ est de rang $n+p+1-k_1-k_2-\cdots-k_p$.

On trouve de cette manière :

$$\sum_{j=1}^{j=n} D^j_{n+p-k_1-\cdots-k_p-1} = (-1)^{k_p} D_{n+p+1-k_1-\ldots-k_p} \cdots \text{(D)}.$$

Tenant compte de (C) et de (D), on transforme l'équation (B) en :

$$S_{k_1k_2\ldots k_p} + (-1)^{k_1+\cdots+k_p-1}(p-1)\,1.2\ldots\overline{p-1}.\,D_{n+p+1-k_1-\ldots-k_p}$$
$$= (-1)^{k_1+\ldots+k_p}\,1.2\ldots\overline{p-1}\,D_{n+p+1-k_1-\ldots-k_p}.$$

De là, l'expression du théorème que nous voulions démontrer :

$$S_{k_1k_2\ldots k_p} = 1.2.3\ldots p\,(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_p} \times D_{n+p+1-k_1-\ldots-k_p}.$$

Cette égalité établit donc qu'une somme de déterminants, dont le nombre de termes est le nombre d'arrangements de n lettres p à p, se réduit au produit d'un seul déterminant par un facteur numérique.

Par exemple, soient $n = 4$, $p = 2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, on aura :

$$\begin{vmatrix} b & c & d & e \\ c_1 & d_1 & e_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d & e \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d & e \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 & e_3 & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d & e & a \\ b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} + \cdots + \cdots + \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 & e_2 & a_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a & c & d & e \\ a_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 & e_3 \end{vmatrix}.$$

Remarque I. Si $k_1 = k_2 = \cdots = k_p$, nous retrouvons la propriété suivante, que nous avons obtenue d'une autre manière :

On forme les $\binom{n}{p}$ déterminants d'ordre n composés de $n-p$ rangées de D_{n+1} et de p rangées de δ_k, leur somme est égale à $(-1)^{kp}D_{n+p+1-pk}$.

Remarque II. Si on donne à k_1, k_2, ..., k_p toutes les valeurs qui satisfont à l'équation

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_p = l \; (l < n + p + 1),$$

nous aurons en ajoutant les différentes sommes analogues à $S_{k_1 k_2 \cdots k_p}$:

$$\sum S_{k_1 k_2 \dots k_p} = p \frac{\Gamma(l-p)}{\Gamma(l-2p+1)} (-1)^l D_{n+p+1-l};$$

ce qui exprime qu'une somme de déterminants, dont le nombre est $\binom{l-p-1}{p-1} n(n-1)\dots(n-p+1)$, se réduit à un seul déterminant.

II. Formons les n déterminants d'ordre n obtenus en remplaçant successivement chacune des rangées de D_{n+1} par une rangée composée des p premiers éléments de la rangée correspondante de δ_k, des p_1 éléments suivants pris dans δ_{k_1} et ainsi de suite, de p_m éléments pris dans δ_{k_m}, enfin des $n - p - p_1 \dots - p_m$ derniers éléments de la rangée de D_{n+1}.

Considérons la somme de ces n déterminants. Pour abréger, convenons de remplacer le symbole $\left(\begin{smallmatrix}\gamma\\ \alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)$ par l'unité ou par zéro, suivant que les inégalités

$$\beta \overline{\overline{<}} \alpha \overline{\overline{<}} \gamma$$

sont vérifiées ou non.

Il est facile de voir que la somme dont il s'agit est égale à

$$(-1)^k \begin{pmatrix} p \\ n+2-k \\ 1 \end{pmatrix} D_{n+2-k} + (-1)^{k_1} \begin{pmatrix} p+p_1 \\ n+2-k_1 \\ p+1 \end{pmatrix} D_{n+2-k_1} + \cdots$$

$$+ (-1)^{k_m} \begin{pmatrix} p+p_1+\cdots+p_m \\ n+2-k_m \\ p+\cdots+p_{m-1}+1 \end{pmatrix} D_{n+2-k_m} + (n - p - p_1 - \cdots p_m) D_{n+1};$$

donnons successivement à k, k_1, ..., k_m les valeurs 2, 3, ..., $n+1$; nous aurons, en faisant la somme des expressions analogues à celle qui vient d'être écrite et en tenant compte de la signification du symbole $\left(\frac{\gamma}{\alpha\atop\beta}\right)$,

$$n^m\{(-1)^{n+1}D_1 + (-1)^n D_2 + \cdots + D_n\}$$
$$+ n^{m+1}(n - \textstyle\sum p)\, D_{n+1},$$

ou bien, en prenant pour plus de simplicité

$$n - \sum p = 0,$$

$$n^m(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{vmatrix}.$$

Donnons maintenant à p, p_1, ..., p_m toutes les valeurs satisfaisant à l'équation

$$p + p_1 + p_2 + \cdots + p_m = n,$$

en y supposant successivement $m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Le nombre des déterminants ainsi obtenus sera :

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} n^{m+2} C_{n-1,m}, \text{ c'est-à-dire } n^2(n+1)^{n-1};$$

leur somme est égale au produit du déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{vmatrix}$$

par le facteur numérique $\sum_{m=0}^{m=n-1} C_{n-1.m}\, n^m(-1)^{n+1}$ ou $(-1)^{n+1}(n+1)^{n-1}$; par conséquent :

On peut égaler à un seul déterminant la somme de tous les déterminants formés de n — 1 *rangées de* D_{n+1} *et d'une rangée composée d'une manière quelconque au moyen des* δ_k *pourvu que l'on ait* $k > 1$.

III. Le même genre de démonstration conduit aux propositions suivantes qu'il suffit d'énoncer :

1° La somme représentée par :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ik} & a_{ik-1} & \cdots & a_{i1} & a_{in} & \cdots & a_{ik+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & a_{nk+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est égale à D_{n+1} ou à $2D_{n+1}$, suivant que l'un des nombres $k+1$, $n+k+1$ ou tous deux sont pairs; si tous deux sont impairs, la somme est nulle. Comme cas particulier, la somme

$$\sum_{i=1}^{i=n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{in} & a_{in-1} & \cdots & a_{i1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est égale à D_{n+1} si n est impair; elle est nulle dans le cas contraire.

2° La double somme

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ik} & a_{ik-1} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{ik+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

est égale à $n.D_{n+1}$.

3° On forme la somme de tous les déterminants composés de $n-1$ rangées du déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et d'une rangée formée des éléments de la rangée restante de D, disposés d'une façon quelconque. Cette somme est égale au déterminant D multiplié par un facteur numérique.

REMARQUES

SUR

QUELQUES POINTS DE LA DYNAMIQUE;

PAR

J. DERUYTS.

REMARQUES

SUR

QUELQUES POINTS DE LA DYNAMIQUE.

Dans une note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris* (septembre 1882), M. Boussinesq a signalé une définition bien simple du paramètre ΔV de la fonction potentielle. Des considérations analogues à celles qu'il a employées, conduisent à une interprétation du même genre pour la constante des aires dans le plan invariable.

Considérons un corps en mouvement auquel le théorème des aires est applicable relativement aux axes fixes OX, OY, OZ.

Soient OR et OR′ deux droites faisant entre elles un angle φ et dont les cosinus directifs sont a, b, c et a', b', c'.

Soient encore x, y, z, r, r' les coordonnées par rapport à OX, OY, OZ, OR, OR′ d'un point quelconque μ du corps en mouvement; m la masse de ce point. On aura :

$$m\left(r\frac{dr'}{dt}-r'\frac{dr}{dt}\right)=m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)(bc'-cb')$$
$$+m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)(ca'-ac')+m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)(ab'-ba').$$

Si donc $\alpha, \alpha', \alpha''$ désignent les constantes des aires dans les plans XOY, ZOX, XOY, on aura

$$\sum m\left(r\frac{dr'}{dt}-r'\frac{dr}{dt}\right)=(bc'-cb')\alpha+(ca'-ac')\alpha'+(ab'-ba')\alpha'',$$

ou bien

$$\sum m\left(r\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dr}{dt}\right) = \sin\varphi\left\{\alpha\cos\lambda + \alpha'\cos\mu + \alpha''\cos\nu\right\},$$

λ, μ, ν étant les angles que fait avec les axes la perpendiculaire au plan ROR′.

De l'égalité précédente, on conclut

$$\left[\sum m\left(r\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dr}{dt}\right)\right]^2 = \sin^2\varphi\begin{bmatrix}\alpha^2\cos^2\lambda + \alpha'^2\cos^2\mu + \alpha''^2\cos^2\nu \\ + 2\alpha\alpha'\cos\lambda\cos\mu + 2\alpha\alpha''\cos\lambda\cos\nu \\ + 2\alpha'\alpha''\cos\mu\cos\nu\end{bmatrix}.$$

Prenons la moyenne correspondante à toutes les directions OR et OR′ faisant entre elles l'angle φ. Les équations

$$\text{Moyen.}\cos^2\lambda = \text{Moy.}\cos^2\mu = \text{Moy.}\cos^2\nu = \tfrac{1}{3}$$
$$\text{Moyen.}\cos\lambda\cos\mu = \text{Moy.}\cos\lambda\cos\nu = \text{Moy.}\cos\mu\cos\nu = 0,$$

nous donneront :

$$\text{Moyenne}\left[\sum m\left(r\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dr}{dt}\right)\right]^2 = \frac{\sin^2\varphi}{3}(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2).$$

Si ε est la constante des aires dans le plan invariable, on aura

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = \varepsilon^2,$$

et

$$\text{Moyenne}\left[\sum m\left(r\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dr}{dt}\right)\right]^2 = \frac{\varepsilon^2}{3}\sin^2\varphi. \qquad (1)$$

Supposons maintenant l'angle φ variable : OR et OR′ représenteront alors deux directions quelconques. Prenons la moyenne générale de $\left[\sum m\left(r\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dr}{dt}\right)\right]^2$, nous aurons en tenant compte de ce que la moyenne de $\sin^2\varphi$ est $\frac{1}{2}$.

$$\text{Moyenne}\left[\sum m\left(r\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dr}{dt}\right)^2\right] = \frac{\varepsilon^2}{6}\cdot \qquad (2)$$

Si les équations des aires n'avaient pas lieu, il faudrait remplacer ε par $\sum mR^2\frac{d\alpha}{dt}$, R étant le rayon vecteur $O\mu$ et $d\alpha$ l'angle sous lequel on voit de l'origine l'élément d'arc de la trajectoire du point μ.

Pour $\varphi = 90°$, l'équation (1) donne

$$\text{Moyenne}\left[\sum m\left(r\frac{dr'}{dt} - r'\frac{dr}{dt}\right)\right]^2 = \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

Par conséquent,

Si l'on forme la somme des produits des masses de tous les points du corps par les aires que leurs rayons vecteurs décrivent sur un même plan, et si l'on prend la moyenne des carrés de ces expressions relatives à tous les plans de l'espace, cette moyenne est, à un facteur numérique près, égale au carré de la constante des aires dans le plan invariable.

II. Désignons par μ_i un point particulier du corps, par m_i, x_i, y_i, z_i sa masse et ses coordonnées. Prenons la somme des moments des quantités de mouvement du système, par rapport à un axe parallèle à OZ mené par μ_i. Soient $\mathfrak{M}_z^i$ cette somme et $\mathfrak{M}_z$ la somme correspondante pour l'origine O. Nous aurons

$$\mathfrak{M}_i^z = \sum m\left[(x - x_i)\frac{d(y - y_i)}{dt} - (y - y_i)\frac{d(x - x_i)}{dt}\right]$$
$$= \sum m\frac{xdy - ydx}{dt} - \mathrm{M}\frac{d\mathrm{B}}{dt}x_i + \mathrm{M}\frac{d\mathrm{A}}{dt}y_i + \mathrm{M}\frac{x_idy_i - y_idx_i}{dt}.$$

M étant la masse totale du système, A et B les coordonnées du centre de gravité pour les axes OX, OY.

De la dernière équation on conclut en multipliant par m_i et faisant la somme relativement à i :

$$\sum_i m_i\mathfrak{M}_i^z = \sum_i m_i\sum m\frac{xdy - ydx}{dt} - \mathrm{M}\frac{d\mathrm{B}}{dt}\sum_i m_ix_i$$
$$+ \mathrm{M}\frac{d\mathrm{A}}{dt}\sum_i m_iy_i + \mathrm{M}\sum_i m_i\frac{x_idy_i - y_idx_i}{dt},$$

ce que l'on peut écrire :

$$\sum_i m_i\mathfrak{M}_z^i = 2\mathfrak{M}_z . \mathrm{M} - \mathrm{M}^2\left(\mathrm{A}\frac{d\mathrm{B}}{dt} - \mathrm{B}\frac{d\mathrm{A}}{dt}\right).$$

Supposons maintenant que le centre de gravité soit animé d'un mouvement uniforme suivant une droite passant par l'origine ; nous aurons :

$$\sum_i m_i \mathfrak{M}_z^i = 2M\mathfrak{M}_z,$$

et pour une direction quelconque OR

$$\sum_i m_i \mathfrak{M}_r^i = 2M\mathfrak{M}_r.$$

Dans le cas actuel le moment $\mathfrak{M}_r$ est égal au moment analogue pour le centre de gravité, que nous désignerons par $\mathfrak{M}_r^g$; on a donc :

$$\sum_i m_i \mathfrak{M}_r^i = 2M\mathfrak{M}_r^g, \tag{3}$$

ce que l'on peut exprimer ainsi :

Dans le cas d'un système dont le centre de gravité est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, si on multiplie la masse de chaque point du système par la somme des moments des quantités de mouvement relatives à ce point et à un même axe, la somme de ces produits est égale au double de la masse totale du système multiplié par la somme des mêmes moments par rapport au centre de gravité.

D'après ce qu'on a vu précédemment, on déduit de l'équation (3) :

$$\text{Moyenne}\left[\sum_i m_i \mathfrak{M}_r^i\right]^2 = \frac{4}{5} M^2 \varepsilon^2, \tag{4}$$

si le principe des aires est applicable, sinon on aura :

$$\text{Moyenne}\left[\sum_i m_i \mathfrak{M}_r^i\right]^2 = \frac{4M^2}{5}\left[\mathfrak{M}_x^{2g} + \mathfrak{M}_y^{2g} + \mathfrak{M}_z^{2g}\right].$$

III. La théorie des moments d'inertie conduit à des résultats du même genre. Prenons le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe $\mu_i Z_i$ parallèles à OZ : désignons le par G_z^i, soit de même G_z le moment relatif à OZ ; nous aurons

$$G_z^i = \sum m(x^2 + y^2) + (x_i^2 + y_i^2)M - 2x_i \sum mx - 2y_i \sum my$$

d'où

$$\sum_i m_i G_z^i = 2MG_z - 2M^2(A^2 + B^2).$$

Mais si G_z^g est le moment d'inertie pour le centre de gravité, on a :

$$G_z^g = G_z - M(A^2 + B^2), \qquad (5)$$

d'où

$$\sum_i m_i G_z^i = 2MG_z^g. \qquad (6)$$

Par conséquent,

La somme des produits que l'on obtient en multipliant la masse de chaque point d'un corps par le moment d'inertie relatif à ce point et à un axe de direction donnée est égale au double de la masse totale du système multiplié par le moment d'inertie par rapport au centre de gravité.

On voit que si dans une direction OR on prend une longueur Or inversement proportionnelle à la racine carrée de $\sum_i m_i G_r^i$; le le lieu du point r sera un ellipsoïde. Si en particulier, l'ellipsoïde central se réduit à une sphère, on aura :

$$\sum_i m_i G_r^i = \text{const.},$$

quelle que soit la direction r.

Il est facile de trouver la moyenne des moments d'inertie relatifs à un même point O. En effet de ce que $\sum m \overline{O\mu}^2$ est indépendant du système d'axes coordonnés, on conclut que la somme des moments d'inertie d'un corps pour trois axes rectangulaires passant par un même point est une constante (*); donc on a

$$\text{Moyenne } G_r = \frac{k^4}{3}\left(\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2}\right),$$

k étant la constante qui a servi à construire l'ellipsoïde d'inertie, A, B, C les axes de cet ellipsoïde.

(*) De cette remarque on conclut que dans un ellipsoïde, la somme des carrés des inverses de trois rayons vecteurs issus du centre et perpendiculaires entre eux, est une constante.

La formule (5), interprétée géométriquement, peut s'énoncer ainsi :

Si m est un point d'un ellipsoïde de centre O et si l'on prend sur la direction Om un point m' tel que

$$\frac{1}{\overline{Om'}^2} = \frac{1}{\overline{Om}^2} + \text{const.},$$

le lieu du point m' sera un ellipsoïde concentrique au premier.

De là résulte aussi que

$$\text{Moyenne} \sum_i m_i G_r^i = \frac{2Mk^4}{3}\left(\frac{1}{A_g^2} + \frac{1}{B_g^2} + \frac{1}{C_g^2}\right),$$

l'indice g se rapportant au centre de gravité. Si la constante k est la même pour tous les points du corps on aura

$$\sum_i m_i \left\{\frac{1}{A_i^2} + \frac{1}{B_i^2} + \frac{1}{C_i^2}\right\} = 2M \left\{\frac{1}{A_g^2} + \frac{1}{B_g^2} + \frac{1}{C_g^2}\right\}.$$

IV. Ce qui vient d'être dit des moments d'inertie s'applique également aux expressions $\sum m \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$, que nous désignerons par f_r. En continuant le système de notations employé précédemment, nous aurons en désignant par R la coordonnée du centre de gravité suivant la direction r :

$$f_r = f_r^g + M\left(\frac{dR}{dt}\right)^2,$$

$$\sum m_i f_r^i = 2M f_r^g.$$

La somme des valeurs de f_r pour trois directions perpendiculaires d'un même point est constante : c'est la force vive du système relative à ce point ; nous la désignerons par F et nous aurons

$$F = F_g + M\nu^2, \tag{7}$$

ν étant la vitesse du centre de gravité, on aura de même

$$\sum m_i F_i = 2MF_g. \tag{8}$$

La première de ces équations donne le théorème de König, la seconde peut s'exprimer ainsi :

Si l'on multiplie la masse de chaque point d'un corps par la force vive du corps relativement à ce point, la somme de ces produits est égale à la force vive relative au centre de gravité multipliée par le double de la masse totale du corps.

SUR
DIVERSES QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE;

PAR

Ernest CESÁRO,

ÉLÈVE-INGÉNIEUR DES MINES.

PREMIER MÉMOIRE.

A MON ILLUSTRE ET VÉNÉRÉ MAITRE,

EUGÈNE CATALAN,

J'OFFRE

CE FAIBLE TÉMOIGNAGE DE MA RECONNAISSANCE.

E. CESÁRO.

LIÈGE, 1er AVRIL 1882.

AVANT-PROPOS.

Lorsque nous avons entrepris ces recherches, nous ignorions qu'elles ont été l'objet des études des plus grands géomètres. Si, aujourd'hui, nous persistons à les publier, c'est afin de faire connaître la simplicité de nos procédés, qui sont tout à fait élémentaires, sans être cependant dépourvus de la rigueur désirable. — L'insuffisance de nos connaissances mathématiques ne nous a pas permis d'approfondir le sujet comme il mérite de l'être, et d'y apporter les lumières de la moderne Théorie des Nombres; mais nous comptons y revenir dès que nous nous serons rendu maître des moyens de recherche qu'offre cette théorie. — Nos travaux d'élève-ingénieur nous ont à peine laissé le temps de consulter ce qui a été fait, avant nous, sur le même sujet, et de compléter nos recherches par celles de nos illustres devanciers. — On trouvera d'abord, dans ces Notes, une foule de relations entre les diviseurs d'un nombre. Nous avons appris, depuis peu, que M. Liouville a déjà donné la plupart de ces relations dans son *Journal* (premiers tomes de la 2e série), mais sans la moindre démonstration. Nous avons, d'ailleurs, obtenu ces relations comme corollaires d'une identité unique, à laquelle nous sommes parvenu sans nous baser sur l'expression des diviseurs d'un nombre, en fonction de ses facteurs premiers, tandis que M. Liouville semble avoir découvert ces formules une à une, en faisant, pour chacune d'elles, une espèce de vérification. C'est ce que le célèbre géomètre laisse comprendre dans son *Journal* (2e série, tome II, page 427), lorsqu'il déclare que la démonstration de toutes les formules du même genre se réduit à la vérification d'identités algébriques, plus ou moins compliquées. — Quant à la *Théorie des Moyennes,* qui termine ces Notes, nous y avons été conduit en cherchant à généraliser quelques propositions de M. Berger, annoncées dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (décembre 1880), et une proposition de M. Perott, publiée dans le *Bulletin des sciences* (janvier 1881). Mais nous avons reconnu, dans la suite, que les propositions de ces géomètres avaient été énoncées et démontrées, longtemps auparavant, et beaucoup plus simplement, par Lejeune-Dirichlet, qui doit être considéré comme le véritable créateur de la théorie des moyennes, ou, suivant sa propre dénomination, du *Calcul des expressions asymptotiques.* Il a même appliqué cette théorie à la démonstration de la formule approchée de Legendre, qui donne la totalité des nombres premiers, non supérieurs à un nombre donné. Mais cette démonstration, annoncée par l'illustre auteur à l'Académie de Berlin, en 1838, n'a paru nulle part. Récemment, un géomètre allemand, M. Mertens, a repris les méthodes de Dirichlet, et a publié, dans le *Journal de Crelle* (1873), un article *über einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie.* Dans le tome suivant, M. Mertens a essayé d'appliquer le calcul asymptotique à la démonstration des formules empiriques de Legendre, et a voulu substituer sa démonstration à celle que M. Tchebycheff a donnée dans le *Journal de Liouville* (1re série, tome XVII). L'analyse de M. Mertens, qualifiée de *subtile* dans le *Bulletin de Darboux* (tome VII, page 249), ne présente qu'un inconvénient : elle contient une faute de calcul, qui fait crouler toute la démonstration. On peut consulter, à ce sujet, dans le tome LXXVIII du *Journal de Crelle,* l'article intitulé : *Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie,* dont on trouvera, d'ailleurs, une courte analyse dans la dernière Note de ce Mémoire. Malgré cette faute, nous avons pu utiliser les idées de M. Mertens, notamment pour la démonstration simple des formules empiriques de Legendre. Dans notre deuxième Mémoire, nous donnerons cette démonstration, et nous appliquerons le calcul asymptotique à diverses théories de la haute Arithmétique. — Le présent travail peut donc, malgré toutes ses imperfections, être utile à la Science des Nombres, puisqu'il remet, pour ainsi dire, sur le tapis, des questions oubliées, éparses çà et là, et auxquelles on n'a pas accordé toute l'attention qu'elles méritent. Aussi, souhaitons-nous vivement que ces pages tombent sous le regard de quelque géomètre qui veuille les lire avec intérêt, et donner, aux idées qu'elles renferment, un plus large développement.

SUR

DIVERSES QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE.

NOTE I.

I. « THÉORÈME. *Soient* n *un nombre entier, et* q_p *le plus grand nombre entier contenu dans* $\frac{n}{p}$. *Si l'on pose*

$$F(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x),$$

on a

$$F(q_1) + F(q_2) + F(q_3) + \cdots + F(q_n) =$$
$$= q_1 f(1) + q_2 f(2) + q_3 f(3) + \cdots + q_n f(n). \text{ »}$$

1° Soit

$$s_n = F(q_1) + F(q_2) + F(q_3) + \cdots + F(q_n).$$

On a aussi

$$s_{n-1} = F(q'_1) + F(q'_2) + F(q'_3) + \cdots + F(q'_n),$$

q'_p désignant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n-1}{p}$. Il est visible que $q'_p = q_p$, sauf quand p divise n. Dans ce cas $q'_p = q_p - 1$. Donc, si a, b, c, ... sont tous les diviseurs de n,

$$s_{n-1} = F(q_1) + F(q_2) + F(q_3) + \cdots + F(q_n) - \left[F(q_a) + F(q_b) + \cdots\right] +$$
$$+ \left[F(q_a - 1) + F(q_b - 1) + \cdots\right].$$

Mais, par hypothèse, $F(x) - F(x-1) = f(x)$, relation générale si l'on suppose $F(o) = 0$. On peut donc écrire

$$s_{n-1} = s_n - \left[f(q_a) + f(q_b) + f(q_c) + \cdots\right];$$

ou bien, en observant que les nombres q_a, q_b, q_c, ... sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres a, b, c, ...,

$$s_{n-1} = s_n - \left[f(a) + f(b) + f(c) + \cdots\right].$$

Changeant n en $n-1$, $n-2$, ... 3, 2, 1, et ajoutant, on trouve

$$s_n = \sum f(a). \tag{1}$$

Dans cette formule, a doit être successivement remplacé par tous les diviseurs des nombres 1, 2, 3, ..., n.

2° D'autre part, soit

$$\sigma_n = q_1 f(1) + q_2 f(2) + q_3 f(3) + \cdots + q_n f(n),$$

et soit aussi

$$\sigma_{n-1} = q'_1 f(1) + q'_2 f(2) + q'_3 f(3) + \cdots + q'_{n-1} f(n-1).$$

On trouve, en opérant comme précédemment,

$$\sigma_{n-1} = \sigma_n - \left[f(a) + f(b) + f(c) + \cdots\right];$$

puis, par addition,

$$\sigma_n = \sum f(a). \tag{2}$$

Cette formule est, d'ailleurs, presque évidente. Il est clair, en effet, que $\Sigma f(a)$ contient $f(p)$ autant de fois qu'il y a de multiples de p, non supérieurs à n, c'est-à-dire q_p fois.

3° Cela posé, la comparaison des formules (1) et (2) donne $S_n = \sigma_n$, c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} &F(q_1) + F(q_2) + F(q_3) + \cdots + F(q_n) = \\ &= q_1 f(1) + q_2 f(2) + q_3 f(3) + \cdots + q_n f(n), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

relation que l'on peut écrire sous cette autre forme :

$$\left.\begin{aligned} &F(q_1) + F(q_2) + F(q_3) + \cdots + F(q_n) = \\ &= (q_1 - q_2) F(1) + (q_2 - q_3) F(2) + (q_3 - q_4) F(3) + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

II. Les formules (1) et (2), considérées isolément, peuvent fournir quelques corollaires intéressants. Parmi les conséquences de la formule (2), signalons les suivantes :

1° $f(x) = x$. Le second membre représente la somme des diviseurs des n premiers nombres naturels. Si, d'après Euler, on désigne par $\int n$ la somme des diviseurs de n, on a donc

$$\int 1 + \int 2 + \int 3 + \cdots + \int n = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots + nq_n. \quad (5)$$

Si l'on observe que pq_p n'est autre chose que le plus grand des multiples de p, non supérieurs à n, on pourra énoncer la proposition suivante : « *La somme des diviseurs des* n *premiers nombres naturels est égale à la somme des plus grands multiples de ces nombres, non supérieurs à* n. »

On peut mettre la relation (5) sous une autre forme.

Soit R_p le reste de la division de n par p. On a $n = pq_p + R_p$. Substituant $n - R_p$ à pq_p, dans (5), on trouve

$$\left(\int 1 + \int 2 + \int 3 + \cdots + \int n\right) + (R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n) = n^2. \quad (6)$$

Donc : « *la somme des diviseurs des* n *premiers nombres naturels, augmentée de la somme des restes que l'on obtient en divisant* n *par tous les entiers qui le précèdent, est égale au carré de* n. »

2° $f(x) = 1$. On déduit, de la formule (2), que : « *le nombre des diviseurs des* n *premiers nombres naturels est égal à la somme des plus grands entiers contenus dans* $\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \ldots$ »

III. La relation (3) en renferme une infinité d'autres, dont quelques-unes sont assez curieuses. Voici des exemples :

1° Faisons $f(x) = 2x - 1$, et, par suite, $F(x) = x^2$. La relation (3) devient

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + \cdots = q_1 + 3q_2 + 5q_3 + 7q_4 + \cdots$$

Pour $n = 7$, les nombres q sont 7, 3, 2, 1, 1, 1, 1, et l'on a bien

$$7^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 7 + 3.3 + 5.2 + 7 + 9 + 11 + 13,$$

car les deux membres sont égaux à 66.

De même, pour $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$, on obtient

$$q_1^3 + q_2^3 + q_3^3 + q_4^3 + \cdots = q_1 + 7q_2 + 19q_3 + 37q_4 + \cdots$$

Par exemple,

$$7^3+3^3+2^3+1^3+1^3+1^3+1^3=7+7.3+19.2+37+61+91+127=382.$$

Plus généralement, si $F(x)=x^m$, on trouve

$$q_1^m+q_2^m+q_3^m+q_4^m+\cdots=q_1+(2^m-1)q_2+(3^m-2^m)q_3+(4^m-3^m)q_4+\cdots$$

2° Pour $F(x)=\log x$, on trouve d'abord

$$\log(q_1q_2q_3\ldots q_n)=q_2\log\frac{2}{1}+q_3\log\frac{3}{2}+q_4\log\frac{4}{3}+\cdots,$$

puis

$$q_1q_2q_3\ldots q_n=\left(\frac{2}{1}\right)^{q_2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{q_3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{q_4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{q_5}\cdots;$$

ou, sous une forme un peu différente,

$$q_1q_2q_3\ldots q_n=2^{q_2-q_3}.3^{q_3-q_4}.4^{q_4-q_5}.5^{q_5-q_6}\ldots$$

De même, si $F(x)=\log(1+x)$, on trouve

$$(q_1+1)(q_2+1)(q_3+1)(q_4+1)\ldots=2^{q_1-q_2}.3^{q_2-q_3}.4^{q_3-q_4}.5^{q_4-q_5}\ldots$$

etc., etc...

3° Lorsque $F(x)=\frac{1}{x}$, on a

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\cdots+\frac{1}{q_n}=n-\left[\frac{q_2}{1.2}+\frac{q_3}{2.3}+\frac{q_4}{3.4}+\cdots\right].$$

Par exemple :

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+1+1+1=7-\left[\frac{3}{1.2}+\frac{2}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}\right].$$

On trouve, de même :

$$\frac{1}{q_1+1}+\frac{1}{q_2+1}+\frac{1}{q_3+1}+\cdots+\frac{1}{q_n+1}=n-\left[\frac{q_1}{2}+\frac{q_2}{6}+\frac{q_3}{12}+\frac{q_4}{20}+\cdots\right],$$

etc., etc...

4° Pour $F(x)=k^x$,

$$k^{q_1}+k^{q_2}+k^{q_3}+\cdots+k^{q_n}=n+(k-1)(q_1+kq_2+k^2q_3+k^3q_4+\cdots).$$

En particulier

$$2^{q_1}+2^{q_2}+2^{q_3}+\cdots+2^{q_n}=n+(q_1+2q_2+4q_3+8q_4+\cdots).$$

Par exemple :

$$2^7+2^3+2^2+2+2+2+2=7+(7+2.3+4.2+8+16+32+64)=148.$$

5° $F(x)=\sqrt{x}$. On a, approximativement,

$$\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}+\sqrt{q_3}+\sqrt{q_4}+\cdots=q_1+0{,}41\,.\,q_2+0{,}32\,.\,q_3+ \\ +0{,}27\,.\,q_4+0{,}24\,.\,q_5+\cdots$$

Nous avons remplacé $\sqrt{2}-1, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{4}-\sqrt{3}, \ldots$ par leurs valeurs approchées, pour bien montrer tout ce qu'il y a de curieux dans ces formules. C'est au même titre de curiosité que nous citons la formule suivante, obtenue en faisant $F(x)=\sin \alpha x$, dans (4) :

$$\sin\alpha q_1+\sin\alpha q_2+\sin\alpha q_3+\cdots= \\ =2\left[q_1\cos\frac{\alpha}{2}+q_2\cos\frac{3\alpha}{2}+q_3\cos\frac{5\alpha}{2}+\cdots\right]\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Par exemple, pour $n=7$, on trouve

$$\sin 7\alpha+\sin 3\alpha+\sin 2\alpha+4\sin\alpha=2\left[7\cos\frac{\alpha}{2}+\right. \\ \left.+3\cos\frac{3\alpha}{2}+2\cos\frac{5\alpha}{2}+\cos\frac{7\alpha}{2}+\cos\frac{9\alpha}{2}+\cos\frac{11\alpha}{2}+\cos\frac{13\alpha}{2}\right]\sin\frac{\alpha}{2}.$$

IV. Voici une autre démonstration de la formule (3), qui nous permettra de généraliser cette formule.

Soient α, β deux diviseurs de n, tels que $\alpha\beta=n$. Nous dirons, avec M. Liouville, que ces deux diviseurs sont *conjugués*. Posons

$$S_\alpha=F(q_1)+F(q_2)+F(q_3)+\cdots+F(q_{q_\alpha}),$$
$$S_\beta=F(q_1)+F(q_2)+F(q_3)+\cdots+F(q_{q_\beta});$$

d'où, en supposant $\alpha<\beta$,

$$S_\alpha-S_\beta=F(q_{q_\beta+1})+F(q_{q_\beta+2})+F(q_{q_\beta+3})+\cdots+F(q_{q_\alpha}).$$

Les valeurs des quantités placées entre parenthèses s'étendent depuis α jusqu'à $\beta - 1$, inclusivement; car $q_{q_\alpha} = \alpha$, $q_{q_\beta} = \beta$. Cela étant, il est visible que $F(\beta - 1)$ est pris autant de fois qu'il y a de termes dans la suite

$$q_{q_\beta+1},\quad q_{q_\beta+2},\quad q_{q_\beta+3},\ \ldots,\ q_{q_{\beta-1}};$$

c'est-à-dire $q_{\beta-1} - q_\beta$ fois. De même, $F(\beta - 2)$ est écrit $q_{\beta-2} - q_{\beta-1}$ fois; et ainsi de suite. Donc

$$\begin{aligned} S_\alpha - S_\beta = {} & (q_{\beta-1} - q_\beta) F(\beta - 1) + (q_{\beta-2} - q_{\beta-1}) F(\beta - 2) + \\ & + (q_{\beta-3} - q_{\beta-2}) F(\beta - 3) + \cdots + (q_\alpha - q_{\alpha+1}) F(\alpha), \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{gathered} S_\alpha - S_\beta = q_\alpha F(\alpha) - q_\beta F(\beta) + \\ + \left[f(\alpha+1) \cdot q_{\alpha+1} + f(\alpha+2) \cdot q_{\alpha+2} + f(\alpha+3) \cdot q_{\alpha+3} + \cdots + f(\beta) \cdot q_\beta\right]. \end{gathered}$$

Cette égalité montre que l'on peut poser

$$S_\alpha = q_\alpha F(\alpha) - \left[q_1 f(1) + q_2 f(2) + q_3 f(3) + \cdots + q_\alpha f(\alpha)\right] + C. \quad (7)$$

La lettre C désigne une quantité qui ne dépend pas de α. Si l'on fait $\alpha = 1$, en observant que $q_1 = n$, on trouve

$$C = F(q_1) + F(q_2) + F(q_3) + \cdots + F(q_n).$$

Si l'on fait $\alpha = n$, en observant que $q_n = 1$, on trouve

$$C = q_1 f(1) + q_2 f(2) + q_3 f(3) + \cdots + q_n f(n).$$

En égalant ces deux valeurs de C, on obtient la formule (3).

V. La dernière démonstration permet de généraliser la formule (3). Il suffit de remplacer C, par l'une de ses valeurs, dans l'égalité (7), en observant que $q_\alpha = \beta$, $q_\beta = \alpha$. On trouve

$$\left.\begin{aligned} F(q_1) + F(q_2) + F(q_3) + \cdots + F(q_\beta) = \beta F(\alpha) + f(\alpha+1) q_{\alpha+1} + \\ + f(\alpha+2) q_{\alpha+2} + f(\alpha+3) q_{\alpha+3} + \cdots + f(n) q_n. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

La formule (3) est un cas particulier de celle-ci : c'est celui où $\alpha = 1, \beta = n$. Pour en montrer une application, faisons $f(x) = 1$, et, par suite, $F(x) = x$. Nous obtenons

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_\beta = n + q_{\alpha+1} + q_{\alpha+2} + q_{\alpha+3} + \cdots + q_n,$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{r}(q_1+q_2+q_3+\cdots+q_\alpha)+(q_1+q_2+q_3+\cdots+q_\beta)=\\ =n+(q_1+q_2+q_3+\cdots+q_n),\end{array}\right\}\quad(9)$$

égalité curieuse, qui nous sera fort utile dans la Théorie des Moyennes. On peut l'écrire sous cette autre forme :

$$(q_2+q_3+\cdots+q_n)=(q_{\alpha+1}+q_{\alpha+2}+\cdots+q_n)+(q_{\beta+1}+q_{\beta+2}+\cdots+q_n),$$

et alors elle donne lieu à la proposition suivante :

« *Si* α, β *sont deux diviseurs de* n, *conjugués, la somme des plus grands nombres entiers contenus dans les termes de la suite*

$$\frac{n}{2},\quad \frac{n}{3},\quad \frac{n}{4},\quad \frac{n}{5},\cdots$$

est égale à la somme de tous ceux qui sont moindres que α, *augmentée de la somme de tous ceux qui sont moindres que* β. »

On peut dire aussi que :

« *la somme de tous ceux qui sont inférieurs à* α, *est égale à la somme de tous ceux qui ne sont pas inférieurs à* β. »

Par exemple, pour $n=21=3.7$, les nombres en question sont

$$10,\ 7,\ 5,\ 4,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1;$$

et l'on a bien

$$10+7=2+2+2+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1.$$

Les nombres du premier membre ne sont pas inférieurs à 7, et ceux du second membre sont inférieurs à 3. En particulier, si l'on considère un carré n^2, décomposé en $n.n$, on a

$$2(q_1+q_2+q_3+\cdots+q_n)=n^2+(q_1+q_2+q_3+\cdots+q_{n^2}),$$

ou bien

$$q_2+q_3+q_4+\cdots+q_n=q_{n+1}+q_{n+2}+q_{n+3}+\cdots$$

Donc :

« *Si l'on considère les plus grands nombres entiers contenus* *dans les termes de la suite* $\frac{n^2}{2}, \frac{n^2}{3}, \frac{n^2}{4}, \frac{n^2}{5}, \ldots$, *la somme des* $n-1$ *premiers est égale à la somme de tous les autres.* »

Par exemple, les plus grands nombres entiers contenus dans les termes de la suite

$$\frac{9}{2}, \quad \frac{9}{3}, \quad \frac{9}{4}, \quad \frac{9}{5}, \quad \frac{9}{6}, \quad \frac{9}{7}, \quad \frac{9}{8}, \quad \frac{9}{9}$$

sont, respectivement :

$$4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1;$$

et l'on a

$$4+3=2+1+1+1+1+1.$$

VI. Observons que l'égalité (4) n'est qu'une identité, en ce sens que si, pour une valeur déterminée de n, on remplace $q_1, q_2, q_3, \ldots$ par leurs valeurs numériques, le premier membre deviendra identique avec le second, quelle que soit la forme de $F(x)$. Toutes réductions faites, les coefficients de $F(x)$, dans les deux membres, sont donc les mêmes, pour une même valeur de x. Il en résulte que, dans la formule (4), on peut attribuer à $F(x)$ des formes différentes, suivant les différentes formes de x. Nous allons montrer quelques applications de cette remarque.

VII. Faisons $F(x)=0$, pour x *pair*. La formule (4) devient

$$\sum F(q \text{ impairs}) = (q_1-q_2)F(1)+(q_3-q_4)F(3)+(q_5-q_6)F(5)+\cdots$$

Si, au contraire, on fait $F(x)=0$, pour x *impair*, on trouve

$$\sum F(q \text{ pairs}) = (q_2-q_3)F(2)+(q_4-q_5)F(4)+(q_6-q_7)F(6)+\cdots$$

1° Pour $F(x)=1$, on arrive aux conclusions suivantes :

« *Le nombre des quantités* q, *impaires, est égal à* $q_1-q_2+q_3-q_4+q_5-q_6+\ldots$ *Le nombre des quantités* q, *paires, est égal à* $q_2-q_3+q_4-q_5+q_6-q_7+\ldots$ »

Par exemple, pour $n = 12$, on obtient les 12 nombres suivants, dont 7 impairs et 5 pairs :

$$q_1 = 12,\quad q_2 = 6,\quad q_3 = 4,\quad q_4 = 3,\quad q_5 = q_6 = 2,$$
$$q_7 = q_8 = q_9 = q_{10} = q_{11} = q_{12} = 1.$$

On voit que

$$12 - 6 + 4 - 3 + 2 - 2 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 7;$$
$$6 - 4 + 3 - 2 + 2 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 5.$$

2° Pour $F(x) = x$:

« *La différence entre la somme des quantités* q, *impaires, et la somme des quantités* q, *paires, est*

$$q_1 - 3q_2 + 5q_3 - 7q_4 + \cdots \text{ »}$$

Observons que, d'après une formule précédente,

$$q_1 + 3q_2 + 5q_3 + 7q_4 + \cdots$$

représente la somme des carrés de toutes les quantités q. Par exemple, pour $n = 12$:

$$12 - 3.6 + 5.4 - 7.3 + 9.2 - 11.2 + 13 - 15 + 17 - 19 + 21 - 23 = -17,$$
$$12 + 3.6 + 5.4 + 7.3 + 9.2 + 11.2 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 = 219.$$

D'autre part,

$$(3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) - (12 + 6 + 4 + 2 + 2) = -17,$$
$$(3^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) + (12^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2) = 219.$$

VIII. On peut, de même, faire $F(x) = 0$ toutes les fois que x n'est pas premier. Soient q_α, q_β, q_γ, ... ceux des nombres q_1, q_2, q_3, ... qui sont premiers. On a

$$F(q_\alpha) + F(q_\beta) + F(q_\gamma) + \cdots = \sum (q_p - q_{p+1}) F(p),$$

p devant être successivement remplacé par tous les nombres premiers, non supérieurs à n. Par exemple, pour $F(x) = 1$, le nombre des entiers q, qui sont premiers, est

$$(q_1 + q_2 + q_3 + q_5 + q_7 + q_{11} + \cdots) - (q_2 + q_3 + q_4 + q_6 + q_8 + q_{12} + \cdots).$$

Ainsi, parmi les 12 nombres q, indiqués ci-dessus, qui se rapportent à $n = 12$, 9 sont premiers. Or, on a bien

$$(12 + 6 + 4 + 2 + 7 + 1 + 1) - (6 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1) = 9.$$

IX. Si l'on pose $F(x) = G(q_x)$, la formule (4) devient

$$G(q_{q_1}) + G(q_{q_2}) + G(q_{q_3}) + \cdots + G(q_{q_n}) =$$
$$= (q_1 - q_2) G(q_1) + (q_2 - q_3) G(q_2) + (q_3 - q_4) G(q_3) + \cdots$$

Par exemple, pour $G(x) = x$:

$$q_{q_1} + q_{q_2} + q_{q_3} + \cdots + q_{q_n} = q_1(q_1 - q_2) + q_2(q_2 - q_3) + q_3(q_3 - q_4) + \cdots,$$

ou

$$q_{q_1} + q_{q_2} + q_{q_3} + \cdots + q_{q_n} = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + \cdots) - (q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_4 + \cdots).$$

Pour $G(x) = \log x$:

$$q_{q_1} q_{q_2} q_{q_3} q_{q_4} \cdots q_{q_n} = q_1^{q_1 - q_2} \cdot q_2^{q_2 - q_3} \cdot q_3^{q_3 - q_4} \cdots q_n^{q_n - q_{n+1}}.$$

Pour $G(x) = \frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{q_{q_1}} + \frac{1}{q_{q_2}} + \frac{1}{q_{q_3}} + \cdots + \frac{1}{q_{q_n}} = n - \left[\frac{q_2}{q_1} + \frac{q_3}{q_2} + \frac{q_4}{q_3} + \cdots + \frac{q_n}{q_{n-1}}\right];$$

etc., etc...

X. On peut généraliser la formule (4), en suivant la marche indiquée dans le paragraphe IV. A cet effet, considérons la somme

$$S_\alpha = g(1) F(q_1) + g(2) F(q_2) + g(3) F(q_3) + \cdots + g(q_\alpha) F(q_{q_\alpha}),$$

$g(x)$, $f(x)$ étant des fonctions quelconques; mais $G(x)$, $F(x)$ étant définies par

$$G(x) = g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(x),$$
$$F(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x).$$

Cela posé,

$$S_\alpha - S_\beta = g(q_\beta + 1) F(q_{q_\beta + 1}) + g(q_\beta + 2) F(q_{q_\beta + 2}) +$$
$$+ g(q_\beta + 3) F(q_{q_\beta + 3}) + \cdots + g(q_\alpha) F(q_{q_\alpha}).$$

Dans cette expression, $F(\beta - 1)$ a pour coefficient la somme

$$g(q_\beta + 1) + g(q_\beta + 2) + g(q_\beta + 3) + \cdots + g(q_{\beta-1}),$$

laquelle, d'après nos notations, ne diffère pas de $G(q_{\beta-1}) - G(q_\beta)$. De même, le coefficient de $F(\beta - 2)$ est $G(q_{\beta-2}) - G(q_{\beta-1})$; et ainsi de suite. En tenant compte de ces observations, on trouve facilement,

$$\begin{aligned} S_\alpha - S_\beta &= G(q_\alpha)F(\alpha) - G(q_\beta)F(\beta) + \\ &+ \left[f(\alpha+1)G(q_{\alpha+1}) + f(\alpha+2)G(q_{\alpha+2}) + \cdots + f(\beta)G(q_\beta)\right]. \end{aligned}$$

Cette égalité permet de poser

$$\begin{aligned} S_\alpha &= G(q_\alpha)F(\alpha) + C - \\ &- \left\{f(1)G(q_1) + f(2)G(q_2) + f(3)G(q_3) + \cdots + f(\alpha)G(q_\alpha)\right\}, \end{aligned}$$

C étant indépendant de α. Si l'on attribue à α les valeurs 1 et n, on obtient deux valeurs de C, qui, égalées, conduisent à la formule suivante :

$$\left.\begin{aligned} & g(1)F(q_1) + g(2)F(q_2) + g(3)F(q_3) + \cdots + g(n)F(q_n) = \\ & = f(1)G(q_1) + f(2)G(q_2) + f(3)G(q_3) + \cdots + f(n)G(q_n). \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

XI. Pour $g(x) = 1$, on a $G(x) = x$, et l'on retrouve ainsi la formule (3). Lorsqu'on attribue à $g(x)$ d'autres formes, on obtient d'autres relations générales, analogues à l'identité (3). En voici quelques-unes :

1° $g(x) = 2x - 1$, et, par suite, $G(x) = x^2$:

$$\begin{aligned} F(q_1) + 3F(q_2) + 5F(q_3) + \cdots + (2n-1)F(q_n) &= \\ = q_1^2 f(1) + q_2^2 f(2) + q_3^2 f(3) + q_4^2 f(4) + \cdots \end{aligned}$$

Par exemple, pour $f(x) = 3x^2 - 3x + 1$, on trouve

$$q_1^3 + 3q_2^3 + 5q_3^3 + 7q_4^3 + \cdots = q_1^2 + 7q_2^2 + 19q_3^2 + 37q_4^2 + \cdots$$

2° Pour $G(x) = \frac{1}{x}$, on a

$$\frac{f(1)}{q_1} + \frac{f(2)}{q_2} + \cdots + \frac{f(n)}{q_n} + \left[F(q_1) + \frac{1}{1.2}F(q_2) + \frac{1}{2.3}F(q_3) + \cdots\right] = 2F(n).$$

En particulier, $f(x) = 2x - 1$ donne

$$\frac{1}{q_1} + \frac{3}{q_2} + \frac{5}{q_3} + \cdots + \frac{2n-1}{q_n} + \left[\frac{q_2^2}{1.2} + \frac{q_3^2}{2.3} + \frac{q_4^2}{3.4} + \cdots\right] = n^2.$$

3° On a aussi :

$$q_1^{f(1)} . q_2^{f(2)} . q_3^{f(3)} \ldots q_n^{f(n)} = \left(\frac{2}{1}\right)^{F(q_2)} . \left(\frac{3}{2}\right)^{F(q_3)} . \left(\frac{4}{3}\right)^{F(q_4)} \cdots,$$

$$(q_1 + 1)^{f(1)} . (q_2 + 1)^{f(2)} . (q_3 + 1)^{f(3)} \ldots = \left(\frac{2}{1}\right)^{F(q_1)} . \left(\frac{3}{2}\right)^{F(q_2)} . \left(\frac{4}{3}\right)^{F(q_3)} \cdots,$$

$$\left(1 + \frac{1}{q_1}\right)^{f(1)} . \left(1 + \frac{1}{q_2}\right)^{f(2)} . \left(1 + \frac{1}{q_3}\right)^{f(3)} \cdots \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{f(n)} =$$
$$= 2^{F(q_1)} . \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{F(q_2)} . \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{F(q_3)} \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{F(q_n)} .$$

4° Enfin, pour $g(x) = 2^{x-1}$:

$$2^{q_1} . f(1) + 2^{q_2} . f(2) + 2^{q_3} . f(3) + \cdots + 2^{q_n} . f(n) =$$
$$= F(q_1) + 2F(q_2) + 4F(q_3) + 8F(q_4) + \cdots + 2^{n-1}F(q_n) + F(n);$$

etc., etc...

XII. On peut encore généraliser la formule (10). A cet effet, il suffit de remplacer C par l'une de ses valeurs, dans l'expression de S_α. En supposant $n = \alpha\beta$, et en observant que $q_\alpha = \beta$, $q_\beta = \alpha$, on trouve la relation remarquable

$$A(\alpha) + B(\beta) = F(\alpha) G(\beta) + S, \tag{11}$$

dans laquelle

$$A(x) = f(1) G(q_1) + f(2) G(q_2) + f(3) G(q_3) + \cdots + f(x) G(q_x),$$
$$B(x) = g(1) F(q_1) + g(2) F(q_2) + g(3) F(q_3) + \cdots + g(x) F(q_x).$$

La lettre S désigne, indifféremment, $A(n)$ ou $B(n)$. La formule (10) consiste en ce que $A(n) = B(n)$. Si l'on suppose, par exemple, $g(x) = f(x)$, et si l'on considère un carré n^2, décomposé en $n.n$, on trouve

$$2\left[f(1) F(q_1) + f(2) F(q_2) + \cdots + f(n) F(q_n)\right] =$$
$$= F^2(n) + f(1) F(q_1) + f(2) F(q_2) + \cdots + f(n^2) F(q_{n^2}),$$

ou

$$\left.\begin{array}{l}[f(1)F(q_1)+f(2)F(q_2)+\cdots+f(n)F(q_n)]- \\ -[f(n+1)F(q_{n+1})+f(n+2)F(q_{n+2})+\cdots+f(n^2)F(q_{n^2})]=F^2(n).\end{array}\right\} \quad (12)$$

Pour abréger, nous représentons par $F^2(x)$ le carré d'une fonction quelconque $F(x)$. La relation (12) est la généralisation d'une des formules précédentes. En particulier, si $f(x)=2x-1$, on a le théorème suivant :

« *Soit* [x] *le plus grand nombre entier contenu dans* x. *Si l'on considère les termes de la suite*

$$3\left[\frac{n^2}{2}\right]^2,\quad 5\left[\frac{n^2}{3}\right]^2,\quad 7\left[\frac{n^2}{4}\right]^2,\quad 9\left[\frac{n^2}{5}\right]^2,\quad 11\left[\frac{n^2}{6}\right]^2,\ldots,$$

la somme des n — 1 *premiers est égale à la somme de tous le autres.* »

Par exemple, pour $n=3$, la suite ci-dessus devient

$$3.4^2,\ 5.3^2,\ 7.2^2,\ 9.11^2.\ 11.1^2,\ 13.1^2,\ 15.1^2,\ 17.1^2,$$

c'est-à-dire

$$48,\ 45,\ 28,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17.$$

On doit avoir

$$48+45=28+9+11+13+15+17;$$

ce qui est exact.

NOTE II.

I. Soient n un nombre entier donné, et $r_1, r_2, r_3, \ldots$ les plus grands nombres entiers contenus dans $\sqrt{n-1}$, $\sqrt{n-4}$, $\sqrt{n-9}$, ... Il est sous-entendu que l'on doit s'arrêter au dernier radical qui n'est pas imaginaire. Ces nombres r jouissent des mêmes propriétés que les nombres q, étudiés précédemment. Inutile de nous arrêter aux démonstrations : on n'a qu'à suivre, pas à pas, celles qui ont été employées dans la Note I, en substituant la lettre r à la lettre q, et en désignant par α, β deux nombres entiers, tels que $\alpha^2 + \beta^2 = n$. On introduit ces nombres pour les besoins de la démonstration; mais les résultats subsistent dans le cas où le nombre n n'est pas décomposable en une somme de deux carrés. Nous donnerons, d'ailleurs, une autre démonstration de ces formules.

II. On a donc, d'après cette remarque préliminaire,

$$g(1)\,F(r_1) + g(2)\,F(r_2) + g(3)\,F(r_3) + \cdots =$$
$$= f(1)\,G(r_1) + f(2)\,G(r_2) + f(3)\,G(r_3) + \cdots$$

En particulier, pour $g(x) = 1$, $f(x) = 2x - 1$, on a $G(x) = x$, $F(x) = x^2$; puis

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + \cdots = r_1 + 3r_2 + 5r_3 + 7r_4 + \cdots$$

Par exemple, pour $n = 29$, on trouve d'abord que les plus grands entiers contenus dans

$$\sqrt{28},\quad \sqrt{25},\quad \sqrt{20},\quad \sqrt{13},\quad \sqrt{4},$$

sont, respectivement :

$$5,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2;$$

et l'on a bien

$$5 + 3.5 + 5.4 + 7.3 + 9.2 = 5^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2;$$

car les deux membres sont égaux à 79.

On trouverait, de même :

$$r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + r_4^3 + \cdots = r_1 + 7r_2 + 19r_3 + 37r_4 + \cdots,$$

$$r_1^3 + 3r_2^3 + 5r_3^3 + 7r_4^3 + \cdots = r_1^2 + 7r_2^2 + 19r_3^2 + 37r_4^2 + \cdots,$$

$$r_1r_2r_3r_4\ldots = 2^{r_2-r_3}.\,3^{r_3-r_4}.\,4^{r_4-r_5}\ldots,$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \cdots = n - \left[\frac{r_2}{1.2} + \frac{r_3}{2.3} + \frac{r_4}{3.4} + \cdots\right],$$

$$2^{r_1} + 2^{r_2} + 2^{r_3} + \cdots = n + (r_1 + 2r_2 + 4r_3 + 8r_4 + \cdots);$$

etc., etc...

III. On a aussi

$$A(\alpha) + B(\beta) = F(\alpha)G(\beta) + S, \tag{13}$$

en supposant

$$A(x) = f(1)G(r_1) + f(2)G(r_2) + \cdots + f(x)G(r_x),$$
$$B(x) = g(1)F(r_1) + g(2)F(r_2) + \cdots + g(x)F(r_x),$$
$$S = A(n) = B(n).$$

En particulier, si $g(x) = f(x) = 1$, l'identité (13) devient

$$(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_\alpha) + (r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_\beta) =$$
$$= \alpha\beta + (r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n).$$

Par exemple, pour $n = 13$, on peut prendre $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Les nombres r sont

$$[\sqrt{12}],\ [\sqrt{9}],\ [\sqrt{4}],$$

c'est-à-dire

$$3,\ 3,\ 2;$$

et l'on a bien

$$(3 + 3) + (3 + 3 + 2) = 2.3 + (3 + 3 + 2).$$

Si l'on considère un nombre $2n^2$, décomposé en $n^2 + n^2$, et si l'on prend $g(x) = f(x)$, on obtient

$$\left.\begin{array}{l}[f(1)F(r_1) + f(2)F(r_2) + \cdots + f(n)F(r_n)] - \\ -[f(n+1)F(r_{n+1}) + f(n+2)F(r_{n+2}) + \cdots] = F^2(n).\end{array}\right\} \quad (14)$$

Soit, par exemple, $f(x) = 1$. On trouve

$$(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_n) - (r_{n+1} + r_{n+2} + r_{n+3} + \cdots) = n^2;$$

de manière que :

« *Si l'on considère les plus grands nombres entiers contenus dans les termes de la suite* $\sqrt{2n^2-1}, \sqrt{2n^2-4}, \sqrt{2n^2-9}, \ldots$ *la somme des* n *premiers surpasse, de* n^2, *la somme de tous les autres.* »

Soit, par exemple, $n = 3$. Les plus grands nombres entiers contenus dans les termes de la suite

$$\sqrt{17}, \quad \sqrt{14}, \quad \sqrt{9}, \quad \sqrt{2},$$

sont, respectivement :

$$4, 3, 3, 1;$$

et l'on a bien

$$(4 + 3 + 3) - 1 = 9.$$

Soit encore $f(x) = 2x - 1$. L'identité (14) devient

$$\begin{array}{l}[r_1^2 + 3r_2^2 + 5r_3^2 + \cdots + (2n-1)r_n^2] - \\ -[(2n+1)r_{n+1}^2 + (2n+3)r_{n+2}^2 + \cdots] = n^4.\end{array}$$

Dans l'exemple précédent,

$$r_1 = 4, \quad r_2 = 3, \quad r_3 = 3, \quad r_4 = 1.$$

Donc

$$(4^2 + 3 . 3^2 + 5 . 3^2) - 7 . 1^2 = 3^4,$$

c'est-à-dire

$$88 - 7 = 81;$$

ce qui est exact.

IV. Ce que nous avons dit pour les nombres

$$[\sqrt{n-1}], \ [\sqrt{n-4}], \ [\sqrt{n-9}], \ [\sqrt{n-16}], \ldots$$

subsiste pour les nombres

$$[\sqrt[3]{n-1}],\ [\sqrt[3]{n-8}],\ [\sqrt[3]{n-27}],\ [\sqrt[3]{n-64}],\ \ldots,$$

α, β étant tels que $\alpha^3+\beta^3=n$.

Plus généralement, si $\alpha^k+\beta^k=n$, et si r_p représente le plus grand nombre entier contenu dans $\sqrt[k]{n-p^k}$, la relation (13) est vérifiée. La démonstration est toujours la même. En particulier,

$$\begin{aligned}&\left\{[\sqrt[k]{n-1^k}]+[\sqrt[k]{n-2^k}]+[\sqrt[k]{n-3^k}]+\cdots+[\sqrt[k]{n-\alpha^k}]\right\}+\\&+\left\{[\sqrt[k]{n-1^k}]+[\sqrt[k]{n-2^k}]+[\sqrt[k]{n-3^k}]+\cdots+[\sqrt[k]{n-\beta^k}]\right\}=\\&=\alpha\beta+\left\{[\sqrt[k]{n-1^k}]+[\sqrt[k]{n-2^k}]+[\sqrt[k]{n-3^k}]+\cdots\right\}.\end{aligned}$$

Plus particulièrement encore :

« *Si l'on considère les plus grands nombres entiers contenus dans les termes de la suite* $\sqrt[k]{2n^k-1^k}$, $\sqrt[k]{2n^k-2^k}$, $\sqrt[k]{2n^k-3^k}$, $\sqrt[k]{2n^k-4^k}$, ... *la somme des* n *premiers surpasse, de* n^2, *la somme de tous les autres.* »

Par exemple, pour $k=3$ et $n=5$, les plus grands nombres entiers contenus dans les termes de la suite

$$\sqrt[3]{249},\ \sqrt[3]{242},\ \sqrt[3]{225},\ \sqrt[3]{186},\ \sqrt[3]{125},\ \sqrt[3]{54},$$

sont, respectivement :

$$6,\ 6,\ 6,\ 5,\ 5,\ 3.$$

Or,

$$(6+6+6+5+5)-3=25.$$

NOTE III.

I. Soient $a, b, c, \ldots$ tous les diviseurs de n. Les nombres $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}, \ldots$ sont aussi, dans un autre ordre, tous les diviseurs de n. On a donc, identiquement

$$f(a)+f(b)+f(c)+\cdots=f\left(\frac{n}{a}\right)+f\left(\frac{n}{b}\right)+f\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots, \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &g(a)f\left(\frac{n}{a}\right)+g(b)f\left(\frac{n}{b}\right)+g(c)f\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots= \\ &=f(a)g\left(\frac{n}{a}\right)+f(b)g\left(\frac{n}{b}\right)+f(c)g\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

La première de ces identités se déduit, d'ailleurs, de la seconde, si l'on fait, dans celle-ci, $g(x)=1$. Ces deux identités nous seront fort utiles dans la suite.

II. Soient $a', b', c', \ldots$ tous les diviseurs de x, et soient

$$F(x)=f(a')+f(b')+f(c')+\cdots,$$
$$G(x)=g(a')+g(b')+g(c')+\cdots;$$

nous allons démontrer l'identité remarquable

$$\left.\begin{aligned} &G(a)f\left(\frac{n}{a}\right)+G(b)f\left(\frac{n}{b}\right)+G(c)f\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots= \\ &=g(a)F\left(\frac{n}{a}\right)+g(b)F\left(\frac{n}{b}\right)+g(c)F\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Dans ce but, concevons que l'on remplace, dans le premier membre, $G(x)$ par $g(a')+g(b')+g(c')+\ldots$ Si, comme on le suppose, x est un diviseur de n, les nombres $a', b', c', \ldots$ sont aussi des diviseurs de n, et ils ont, par conséquent, dans un certain ordre, les valeurs $a, b, c, \ldots$; une quelconque de ces valeurs pouvant, d'ailleurs, être omise. Nous pouvons donc ordonner la somme

$$G(a)f\left(\frac{n}{a}\right) + G(b)f\left(\frac{n}{b}\right) + G(c)f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

par rapport à $g(a)$, $g(b)$, $g(c)$, ..., en cherchant, à cet effet, quel est le coefficient de chacune de ces quantités.

Or, si λa, μa, νa, ... sont tous les multiples de a, diviseurs de n, il est clair que $g(a)$ se trouve seulement dans $G(\lambda a)$, $G(\mu a)$, $G(\nu a)$, ..., et que, par suite, son coefficient est

$$f\left(\frac{n}{\lambda a}\right) + f\left(\frac{n}{\mu a}\right) + f\left(\frac{n}{\nu a}\right) + \cdots$$

Mais, pour que λa divise n, il faut et il suffit que λ divise $\frac{n}{a}$; d'où il résulte que les nombres λ, μ, ν, ... sont tous les diviseurs de $\frac{n}{a}$. Par conséquent, d'après l'identité (15),

$$f\left(\frac{n}{\lambda a}\right) + f\left(\frac{n}{\mu a}\right) + f\left(\frac{n}{\nu a}\right) + \cdots = f(\lambda) + f(\mu) + f(\nu) + \cdots = F\left(\frac{n}{a}\right).$$

Ainsi, le coefficient de $g(a)$ est $F\left(\frac{n}{a}\right)$. On prouverait de même que le coefficient de $g(b)$ est $F\left(\frac{n}{b}\right)$; et ainsi de suite. Par cette transformation, l'identité entre les deux membres de l'égalité (17) est rendue manifeste.

III. Si l'on fait $g(x) = 1$, $G(x)$ devient égal au nombre des diviseurs de x, nombre que nous désignerons dorénavant par $\theta(x)$.

L'identité (17) se transforme en

$$\left.\begin{aligned} &\theta(a)f\left(\frac{n}{a}\right) + \theta(b)f\left(\frac{n}{b}\right) + \theta(c)f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \\ &\quad = F\left(\frac{n}{a}\right) + F\left(\frac{n}{b}\right) + F\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots; \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

ou bien, d'après (15) et 16), en

$$\left.\begin{aligned} &\theta\left(\frac{n}{a}\right)f(a) + \theta\left(\frac{n}{b}\right)f(b) + \theta\left(\frac{n}{c}\right)f(c) + \cdots = \\ &\quad = F(a) + F(b) + F(c) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Nous emploierons indifféremment l'une ou l'autre de ces formes.

1° Pour $f(x) = x$, on a $F(x) = a' + b' + c' + \ldots = \int x$. Si l'on remplace $f(x)$ et $F(x)$, par leurs expressions, dans l'identité (18), celle-ci devient

$$n\left[\frac{\theta(a)}{a} + \frac{\theta(b)}{b} + \frac{\theta(c)}{c} + \cdots\right] = \int a + \int b + \int c + \cdots$$

ou

$$a\theta\left(\frac{n}{a}\right) + b\theta\left(\frac{n}{b}\right) + c\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \int a + \int b + \int c + \cdots$$

On a donc ce théorème :

« *La somme des diviseurs de tous les diviseurs d'un nombre* n, *égale la somme des resultats que l'on obtient en multipliant chaque diviseur* a, *de* n, *par le nombre des diviseurs de* $\frac{n}{a}$. »

Par exemple, pour $n = 6$:

$$\theta(6) + 2\theta(3) + 3\theta(2) + 6\theta(1) = \int 1 + \int 2 + \int 3 + \int 6;$$

c'est-à-dire

$$4 + 2.2 + 3.2 + 6 = 1 + 3 + 4 + 12;$$

ce qui est exact.

2° Pour $f(x) = \frac{1}{x}$, on obtient d'abord

$$F(x) = \frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} + \frac{1}{c'} + \cdots = \frac{1}{x}\left[\frac{x}{a'} + \frac{x}{b'} + \frac{x}{c'} + \cdots\right];$$

puis, d'après (15),

$$F(x) = \frac{1}{x}(a' + b' + c' + \cdots) = \frac{1}{x}\int x.$$

Donc, en remplaçant dans (18),

$$a\theta(a) + b\theta(b) + c\theta(c) + \cdots = n\left[\frac{\int a}{a} + \frac{\int b}{b} + \frac{\int c}{c} + \cdots\right];$$

ou

$$a\theta(a) + b\theta(b) + c\theta(c) + \cdots = a\int\frac{n}{a} + b\int\frac{n}{b} + c\int\frac{n}{c} + \cdots$$

Par exemple,

$$\theta(1) + 2\theta(2) + 3\theta(3) + 6\theta(6) = \int 6 + 2\int 3 + 3\int 2 + 6\int 1;$$

c'est-à-dire

$$1 + 2.2 + 3.2 + 6.4 = 12 + 2.4 + 3.3 + 6.$$

3° Pour $f(x) = \log x$, on obtient d'abord $F(x) = \log(a'b'c'\ldots)$. Or, d'après (15), on a

$$a'b'c'\ldots = \frac{x}{a'} \cdot \frac{x}{b'} \cdot \frac{x}{c'} \cdots = \frac{x^{\theta(x)}}{a'b'c'\ldots};$$

d'où l'on déduit

$$a'b'c'\cdots = x^{\frac{\theta(x)}{2}}, \quad F(x) = \log x^{\frac{\theta(x)}{2}}.$$

D'après cela, l'identité (18) donne,

$$a^{\theta(a)}.\, b^{\theta(b)}.\, c^{\theta(c)}\ldots = n^{\frac{2}{3}[\theta(a)+\theta(b)+\theta(c)+\cdots]},$$

ou

$$a^{\theta\left(\frac{n}{a}\right)}.\, b^{\theta\left(\frac{n}{b}\right)}.\, c^{\theta\left(\frac{n}{c}\right)}\ldots = n^{\frac{1}{3}[\theta(a)+\theta(b)+\theta(c)+\cdots]};$$

et, par conséquent,

$$\left[a^{\theta\left(\frac{n}{a}\right)}.\, b^{\theta\left(\frac{n}{b}\right)}.\, c^{\theta\left(\frac{n}{c}\right)}\ldots\right]^2 = a^{\theta(a)}.\, b^{\theta(b)}.\, c^{\theta(c)}\ldots$$

L'exposant de n doit être entier; donc, *si* n *n'est pas un cube,* $\theta(a) + \theta(b) + \theta(c) + \ldots$ *est divisible par* 3.

4° Soit, d'après Gauss, $\varphi(x)$ le nombre des entiers premiers avec x, et non supérieurs à ce nombre.

Si l'on fait $f(x) = \varphi(x)$, on a d'abord, en vertu d'un théorème connu [Serret, *Arithm.*, 6ᵉ éd., p. 303],

$$F(x) = \varphi(a') + \varphi(b') + \varphi(c') + \cdots = x.$$

Par suite,

$$\varphi(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \int n. \qquad (19)$$

Par exemple,

$$\varphi(1)\,\theta(6) + \varphi(2)\,\theta(3) + \varphi(3)\,\theta(2) + \varphi(6)\,\theta(1) = \int 6;$$

c'est-à-dire

$$1.4 + 1.2 + 2.2 + 2.1 = 1 + 2 + 3 + 6.$$

IV. Soit fait $g(x) = x$, dans l'identité (17). Celle-ci devient, en observant que $G(x) = \int x$:

$$\left.\begin{aligned} & f(a)\int\frac{n}{a} + f(b)\int\frac{n}{b} + f(c)\int\frac{n}{c} + \cdots = \\ & = aF\left(\frac{n}{a}\right) + bF\left(\frac{n}{b}\right) + cF\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots; \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

ou

$$\left.\begin{aligned} & f\left(\frac{n}{a}\right)\int a + f\left(\frac{n}{b}\right)\int b + f\left(\frac{n}{c}\right)\int c + \cdots = \\ & = n\left[\frac{F(a)}{a} + \frac{F(b)}{b} + \frac{F(c)}{c} + \cdots\right]. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

1° $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \frac{1}{x}\int x$, l'identité (20) donne

$$a\int a + b\int b + c\int c + \cdots = n^2\left[\frac{\int a}{a^2} + \frac{\int b}{b^2} + \frac{\int c}{c^2} + \cdots\right],$$

ou

$$a\int a + b\int b + c\int c + \cdots = a^2\int\frac{n}{a} + b^2\int\frac{n}{b} + c^2\int\frac{n}{c} + \cdots$$

On doit avoir, par exemple,

$$\int 1 + 2\int 2 + 3\int 3 + 6\int 6 = \int 6 + 4\int 3 + 9\int 2 + 36\int 1,$$

c'est-à-dire

$$1 + 2.3 + 3.4 + 6.12 = 12 + 4.4 + 9.3 + 36.$$

En effet, chaque membre égale 91.

2° $f(x) = \log x$, $F(x) = \log x^{\frac{\theta(x)}{2}}$,

$$a^{\int \frac{n}{a}} \cdot b^{\int \frac{n}{b}} \cdot c^{\int \frac{n}{c}} \ldots = \left[a^{\frac{\theta(a)}{a}} \cdot b^{\frac{\theta(b)}{b}} \cdot c^{\frac{\theta(c)}{c}} \ldots\right]^{\frac{n}{2}}.$$

3° $f(x) = \varphi(x)$, $F(x) = x$. Nous obtenons cette autre relation, analogue à (19) :

$$\varphi(a)\int \frac{n}{a} + \varphi(b)\int \frac{n}{b} + \varphi(c)\int \frac{n}{c} + \cdots = n\theta(n). \qquad (21)$$

Par exemple,

$$\varphi(1)\int 6 + \varphi(2)\int 3 + \varphi(3)\int 2 + \varphi(6)\int 1 = 6\theta(6);$$

c'est-à-dire

$$1.12 + 1.4 + 2.3 + 2.1 = 6.4.$$

V. Pour $g(x) = \frac{1}{x}$, $G(x) = \frac{1}{x}\int x$, l'identité (17) devient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{a} f\left(\frac{n}{a}\right)\int a + \frac{1}{b} f\left(\frac{n}{b}\right)\int b + \frac{1}{c} f\left(\frac{n}{c}\right)\int c + \cdots = \\ &= \frac{1}{a} F\left(\frac{n}{a}\right) + \frac{1}{b} F\left(\frac{n}{b}\right) + \frac{1}{c} F\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &af(a)\int \frac{n}{a} + bf(b)\int \frac{n}{b} + cf(c)\int \frac{n}{c} + \cdots = \\ &= aF(a) + bF(b) + cF(c) + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

1° Pour $f(x) = \log x$, $F(x) = \log x^{\frac{\theta(x)}{2}}$, on obtient

$$\left[a^{a\int \frac{n}{a}} \cdot b^{b\int \frac{n}{b}} \cdot c^{c\int \frac{n}{c}} \ldots\right]^2 = a^{a\,\theta(a)} \cdot b^{b\,\theta(b)} \cdot c^{c\,\theta(c)} \ldots$$

2° Pour $f(x) = \varphi(x)$, $F(x) = x$:

$$a\varphi(a)\int \frac{n}{a} + b\varphi(b)\int \frac{n}{b} + c\varphi(c)\int \frac{n}{c} + \cdots = a^2 + b^2 + c^2 + \cdots$$

Par exemple,

$$\varphi(1)\int 6 + 2\varphi(2)\int 3 + 3\varphi(3)\int 2 + 6\varphi(6)\int 1 = 1 + 4 + 9 + 36,$$

ou

$$1.12 + 2.1.4 + 3.2.3 + 6.2.1 = 50.$$

VI. $g(x) = \log x$, $\mathrm{G}(x) = \log x^{\frac{\theta(x)}{2}}$. L'identité (17) donne

$$a^{\theta(a) f\left(\frac{n}{a}\right)} . b^{\theta(b) f\left(\frac{n}{b}\right)} . c^{\theta(c) f\left(\frac{n}{c}\right)} \ldots = \left[a^{\mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right)}\, b^{\mathrm{F}\left(\frac{n}{b}\right)} . c^{\mathrm{F}\left(\frac{n}{c}\right)} \ldots\right]^2. \qquad (23)$$

En particulier, pour $f(x) = \varphi(x)$, $\mathrm{F}(x) = x$:

$$a^{\theta(a) \varphi\left(\frac{n}{a}\right)} . b^{\theta(b) \varphi\left(\frac{n}{b}\right)} . c^{\theta(c) \varphi\left(\frac{n}{c}\right)} \ldots = \left[a^{\frac{1}{a}} . b^{\frac{1}{b}} . c^{\frac{1}{c}} . \ .\right]^{2n}$$

ou bien, après quelques transformations simples,

$$a^{2a - \varphi(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right)} . b^{2b - \varphi(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right)} . c^{2c - \varphi(c)\theta\left(\frac{n}{c}\right)} \ldots = n^{\int n}.$$

VII. Enfin, en faisant $g(x) = \varphi(x)$, $\mathrm{G}(x) = x$, dans l'identité (17), on obtient

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(a)\,\mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)\,\mathrm{F}\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)\,\mathrm{F}\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \\ &= af\left(\frac{n}{a}\right) + bf\left(\frac{n}{b}\right) + cf\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Pour $f(x) = 1$, et $f(x) = x$, on retrouve les deux élégantes formules

$$\varphi(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \int n, \qquad (19)$$

$$\varphi(a) \int \frac{n}{a} + \varphi(b) \int \frac{n}{b} + \varphi(c) \int \frac{n}{c} + \cdots = n\theta(n), \qquad (21)$$

signalées, bien avant nous, par M. Liouville. Plus généralement, si l'on désigne par $\theta_k(x)$ la somme des $k^{\text{èmes}}$ puissances des diviseurs de x, l'identité (24) donne

$$\varphi(a)\,\theta_k\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)\,\theta_k\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)\,\theta_k\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = n\theta_{k-1}(n).$$

On peut attribuer à k des valeurs négatives, en observant que $\theta_{-k}(x) = \frac{1}{x^k}\theta_k(x)$, d'après (15). L'introduction de cette nouvelle fonction permet de généraliser un grand nombre des formules démontrées dans les paragraphes précédents. Pour ne donner qu'un seul exemple, prenons l'identité générale (17), et faisons-y :

$$g(x) = x^r, \quad f(x) = x^s.$$

On a d'abord

$$G(x) = \theta_r(x), \quad F(x) = \theta_s(x);$$

puis

$$a^r\theta_s\left(\frac{n}{a}\right) + b^r\theta_s\left(\frac{n}{b}\right) + c^r\theta_s\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = a^s\theta_r\left(\frac{n}{a}\right) + b^s\theta_r\left(\frac{n}{b}\right) + c^s\theta_r\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

En particulier, si l'on fait $r = k$, $s = -k$, on trouve, après quelques transformations :

$$a^k\theta_k(a) + b^k\theta_k(b) + c^k\theta_k(c) + \cdots = a^{2k}\theta_k\left(\frac{n}{a}\right) + b^{2k}\theta_k\left(\frac{n}{b}\right) + c^{2k}\theta_k\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

Par exemple :

$$a\,\theta_1(a) + b\,\theta_1(b) + c\,\theta_1(c) + \cdots = a^2\theta_1\left(\frac{n}{a}\right) + b^2\theta_1\left(\frac{n}{b}\right) + c^2\theta_1\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots,$$

$$a^2\theta_2(a) + b^2\theta_2(b) + c^2\theta_2(c) + \cdots = a^4\theta_2\left(\frac{n}{a}\right) + b^4\theta_2\left(\frac{n}{b}\right) + c^4\theta_2\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots,$$

$$a^3\theta_3(a) + b^3\theta_3(b) + c^3\theta_3(c) + \cdots = a^6\theta_3\left(\frac{n}{a}\right) + b^6\theta_3\left(\frac{n}{b}\right) + c^6\theta_3\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots,$$

etc., etc...

VIII. Nous démontrerons, plus loin, la formule :

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2} + \frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2} + \frac{\pi(c)\varphi(c)}{c^2} + \cdots = \frac{1}{n}, \tag{25}$$

dans laquelle $\pi(x)$ exprime le produit des facteurs premiers de x, différents de l'unité, chacun de ces facteurs étant pris négativement. En particulier, on suppose $\pi(1) = 1$. La relation (25), appliquée à l'identité (17), donne cette autre identité générale :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2}F\left(\frac{n}{a}\right) + \frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2}F\left(\frac{n}{b}\right) + \frac{\pi(c)\varphi(c)}{c^2}F\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \\ &\qquad = \frac{1}{a}f\left(\frac{n}{a}\right) + \frac{1}{b}f\left(\frac{n}{b}\right) + \frac{1}{c}f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

ou

$$\left.\begin{aligned}a^2\pi\left(\frac{n}{a}\right)\varphi\left(\frac{n}{a}\right)\mathrm{F}(a)+b^2\pi\left(\frac{n}{b}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right)\mathrm{F}(b)+c^2\pi\left(\frac{n}{c}\right)\varphi\left(\frac{n}{c}\right)\mathrm{F}(c)+\cdots\\ =n\left[af(a)+bf(b)+cf(c)+\cdots\right].\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

1° $f(x)=1$, $\mathrm{F}(x)=\theta(x)$:

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2}\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2}\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\frac{\pi(c)\varphi(c)}{c^2}\theta\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=\frac{1}{n}\int n,$$

ou

$$a^2\pi\left(\frac{n}{a}\right)\varphi\left(\frac{n}{a}\right)\theta(a)+b^2\pi\left(\frac{n}{b}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right)\theta(b)+c^2\pi\left(\frac{n}{c}\right)\varphi\left(\frac{n}{c}\right)\theta(c)+\cdots=n\int n.$$

2° $f(x)=x$, $\mathrm{F}(x)=\int x$:

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2}\int\frac{n}{a}+\frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2}\int\frac{n}{b}+\frac{\pi(c)\varphi(c)}{c^2}\int\frac{n}{c}+\cdots$$
$$=\frac{1}{n}(a^2+b^2+c^2+\cdots),$$

ou

$$a^2\pi\left(\frac{n}{a}\right)\varphi\left(\frac{n}{a}\right)\int a+b^2\pi\left(\frac{n}{b}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right)\int b+c^2\pi\left(\frac{n}{c}\right)\varphi\left(\frac{n}{c}\right)\int c+\cdots$$
$$=n(a^2+b^2+c^2+\cdots).$$

3° $f(x)=\frac{1}{x}$, $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{x}\int x$:

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a}\int\frac{n}{a}+\frac{\pi(b)\varphi(b)}{b}\int\frac{n}{b}+\frac{\pi(c)\varphi(c)}{c}\int\frac{n}{c}+\cdots=\theta(n),$$

ou

$$a\pi\left(\frac{n}{a}\right)\varphi\left(\frac{n}{a}\right)\int a+b\pi\left(\frac{n}{b}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right)\int b+c\pi\left(\frac{n}{c}\right)\varphi\left(\frac{n}{c}\right)\int c+\cdots=n\theta(n).$$

4° $f(x)=\varphi(x)$, $\mathrm{F}(x)=x$:

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^3}+\frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^3}+\frac{\pi(c)\varphi(c)}{c^3}+\cdots$$
$$=\frac{1}{n^2}\left[a\varphi(a)+b\varphi(b)+c\varphi(c)+\cdots\right],$$

ou

$$a^3\pi\left(\frac{n}{a}\right)\varphi\left(\frac{n}{a}\right)+b^3\pi\left(\frac{n}{b}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right)+c^3\pi\left(\frac{n}{c}\right)\varphi\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots$$
$$=n\left[a\varphi(a)+b\varphi(b)+c\varphi(c)+\cdots\right];$$

etc., etc... On le voit : l'identité (17) est une véritable mine de formules. Citons, pour finir, cette nouvelle relation, assez curieuse, que nous avons obtenue par d'autres considérations, dont le principe sera exposé dans un deuxième Mémoire :

$$\frac{\dfrac{a}{\varphi(a)}+\dfrac{b}{\varphi(b)}+\dfrac{c}{\varphi(c)}+\cdots}{\dfrac{\varphi(a)}{a}+\dfrac{\varphi(b)}{b}+\dfrac{\varphi(c)}{c}+\cdots}=\frac{1}{\varphi(a)}+\frac{1}{\varphi(b)}+\frac{1}{\varphi(c)}+\cdots$$

Ainsi, pour $n=12$, on a

$$\frac{\dfrac{1}{1}+\dfrac{2}{1}+\dfrac{3}{2}+\dfrac{4}{2}+\dfrac{6}{2}+\dfrac{12}{4}}{\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{2}{6}+\dfrac{4}{12}}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\dfrac{25}{2}}{\dfrac{10}{3}}=\frac{15}{4};$$

ce qui est exact.

NOTE IV.

I. Nous allons maintenant introduire une nouvelle fonction arithmétique, que M. Liouville a désignée par $\lambda(n)$.

En supposant n décomposé en ses facteurs premiers, de manière que $n = u^{\alpha} v^{\beta} w^{\gamma} \ldots$, on a

$$\lambda(n) = (-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots};$$

ainsi, $\lambda(n) = \pm 1$, suivant que le nombre total des facteurs premiers de n, égaux ou inégaux, et différents de 1, est pair ou impair : on suppose $\lambda(1) = 1$. On démontre facilement que la somme $\lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c) + \cdots$ est nulle, excepté si n est carré. Dans ce cas, elle se réduit à 1. Remarquons, en effet, que les nombres $a, b, c, \ldots$ sont les termes du développement de

$$(1 + u + u^2 + \cdots + u^{\alpha})(1 + v + v^2 + \cdots + v^{\beta})(1 + w + w^2 + \cdots + w^{\gamma})\ldots$$

Il en résulte que la somme $\lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c) + \cdots$ est égale à

$$(1 - 1 + 1 - \cdots \pm 1)(1 - 1 + 1 - \cdots \pm 1)(1 - 1 + 1 - \cdots \pm 1)\ldots$$

La première parenthèse, contenant $\alpha + 1$ termes, est nulle ou égale à l'unité, suivant que α est impair ou pair. Il en est de même des autres, contenant $\beta + 1$, $\gamma + 1$, ... termes. Donc, pour que le produit total ne soit pas nul, il faut et il suffit que $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ soient tous pairs, c'est-à-dire que n soit un carré. Nous pouvons donc écrire

$$\lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c) + \cdots = \left| \begin{array}{ll} 1, & (n \text{ carré}) \\ 0. & (n \text{ non carré}) \end{array} \right\} \quad (27)$$

II. Désignons, en outre, par $\tau(n)$ le nombre des diviseurs premiers de n, autres que 1, et par $\omega(n)$ le nombre de manières dont on peut décomposer n en un produit de deux facteurs, premiers entre eux.

On sait que $\omega(n) = 2^{\tau(n)}$: en particulier, $\tau(1) = 0$, $\omega(1) = 1$.

Nous ferons usage de quelques autres relations, données par M. Liouville, et dont la démonstration directe est presque aussi aisée. Voici ces relations :

$$\omega(a) + \omega(b) + \omega(c) + \cdots = \theta(n^2), \tag{28}$$

$$\lambda(a)\,\omega(a) + \lambda(b)\,\omega(b) + \lambda(c)\,\omega(c) + \cdots = \lambda(n), \tag{29}$$

$$\theta(a^{2k}) + \theta(b^{2k}) + \theta(c^{2k}) + \cdots = \theta(n)\,\theta(n^k). \tag{30}$$

En particulier, pour $k = 1$, la dernière formule devient

$$\theta(a^2) + \theta(b^2) + \theta(c^2) + \cdots = \theta^2(n).$$

Enfin, nous ferons observer que

$$\lambda(x)\,\lambda(y) = \lambda(xy).$$

Par conséquent

$$\lambda(a)\,\lambda\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\lambda\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\lambda\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \theta(n)\,\lambda(n). \tag{31}$$

D'après la dernière remarque, on peut toujours remplacer $\lambda(a)$ par $\lambda(n)\,\lambda\left(\frac{n}{a}\right)$. En opérant de la sorte sur (29), on trouve

$$\lambda(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\omega\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = 1. \tag{32}$$

Ces quelques formules nous serviront à en trouver beaucoup d'autres.

III. Reprenons l'identité :

$$\left.\begin{aligned} &g(a)\,F\left(\frac{n}{a}\right) + g(b)\,F\left(\frac{n}{b}\right) + g(c)\,F\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \\ &= G(a)\,f\left(\frac{n}{a}\right) + G(b)\,f\left(\frac{n}{b}\right) + G(c)\,f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

et faisons-y $g(x) = \lambda(x)$. On a d'abord, en vertu de (27),

$$G(x) = \left|\begin{array}{ll} 1, & (x \text{ carré}) \\ 0. & (x \text{ non carré}) \end{array}\right.$$

Si l'on désigne par A, B, C, ... les diviseurs carrés de n, l'identité (17) devient

$$\left.\begin{aligned}&\lambda(a)\,\mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right)+\lambda(b)\,\mathrm{F}\left(\frac{n}{b}\right)+\lambda(c)\,\mathrm{F}\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots\\&\qquad=f\left(\frac{n}{\mathrm{A}}\right)+f\left(\frac{n}{\mathrm{B}}\right)+f\left(\frac{n}{\mathrm{C}}\right)+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

On peut aussi écrire

$$\left.\begin{aligned}&\lambda(a)\,\mathrm{F}(a)+\lambda(b)\,\mathrm{F}(b)+\lambda(c)\,\mathrm{F}(c)+\cdots\\&=\lambda(n)\left[f\left(\frac{n}{\mathrm{A}}\right)+f\left(\frac{n}{\mathrm{B}}\right)+f\left(\frac{n}{\mathrm{C}}\right)+\cdots\right].\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

1° Pour $f(x)=1$, le second membre devient égal au nombre des diviseurs carrés de n, nombre que nous représentons par $\mathrm{T}(n)$. On a donc

$$\lambda(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\lambda(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\lambda(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=\mathrm{T}(n).\quad(35)$$

Par exemple, pour $n=12$,

$$\theta(12)-\theta(6)-\theta(4)+\theta(3)+\theta(2)-\theta(1)=\mathrm{T}(12),$$

c'est-à-dire

$$6-4-3+2+2-1=2.$$

L'égalité (35) peut être écrite ainsi :

$$\lambda(a)\,\theta(a)+\lambda(b)\,\theta(b)+\lambda(c)\,\theta(c)+\cdots=\lambda(n)\,\mathrm{T}(n).\quad(36)$$

2° $f(x)=x$, $\mathrm{F}(x)=\int x$:

$$\lambda(a)\int\frac{n}{a}+\lambda(b)\int\frac{n}{b}+\lambda(c)\int\frac{n}{c}+\cdots=n\left[\frac{1}{\mathrm{A}}+\frac{1}{\mathrm{B}}+\frac{1}{\mathrm{C}}+\cdots\right].$$

Par exemple :

$$\int 12-\int 6-\int 4+\int 3+\int 2-\int 1=12\left(1+\tfrac{1}{4}\right),$$

c'est-à-dire

$$28-12-7+4+3-1=15;$$

ce qui est exact.

3° $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \frac{1}{x}\int x$,

$$a\lambda(a)\int\frac{n}{a} + b\lambda(b)\int\frac{n}{b} + c\lambda(c)\int\frac{n}{c} + \cdots = A + B + C + \cdots$$

4° $f(x) = \log x$, $F(x) = \log x^{\frac{\theta(x)}{2}}$:

$$a^{\theta(a)\lambda\left(\frac{n}{a}\right)} . b^{\theta(b)\lambda\left(\frac{n}{b}\right)} . c^{\theta(c)\lambda\left(\frac{n}{c}\right)} \ldots = \frac{n^{2T(n)}}{(A.B.C\ldots)^2}.$$

5° $f(x) = \varphi(x)$, $F(x) = x$:

$$a\lambda\left(\frac{n}{a}\right) + b\lambda\left(\frac{n}{b}\right) + c\lambda\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \varphi\left(\frac{n}{A}\right) + \varphi\left(\frac{n}{B}\right) + \varphi\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots$$

Par exemple, pour $n = 12$,

$$-1 + 2 + 3 - 4 - 6 + 12 = \varphi(12) + \varphi(3);$$

ce qui est exact, car le second membre égale $4 + 2 = 6$.

6° $f(x) = \frac{\pi(x)\varphi(x)}{x^2}$, $F(x) = \frac{1}{x}$:

$$n\left[a\lambda(a) + b\lambda(b) + c\lambda(c) + \cdot\ \cdot\right]$$
$$= A^2\pi\left(\frac{n}{A}\right)\varphi\left(\frac{n}{A}\right) + B^2\pi\left(\frac{n}{B}\right)\varphi\left(\frac{n}{B}\right) + C^2\pi\left(\frac{n}{C}\right)\varphi\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots$$

7° Soit $f(x) = \omega(x)$. D'après (28), on a $F(x) = \theta(x^2)$. Donc

$$\theta(a^2)\lambda\left(\frac{n}{a}\right) + \theta(b^2)\lambda\left(\frac{n}{b}\right) + \theta(c^2)\lambda\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \omega\left(\frac{n}{A}\right) + \omega\left(\frac{n}{B}\right) + \omega\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots$$

Par exemple, pour $n = 12$:

$$-\theta(1) + \theta(4) + \theta(9) - \theta(16) - \theta(36) + \theta(144) = \omega(12) + \omega(3);$$

c'est-à-dire

$$-1 + 3 + 3 - 5 - 9 + 15 = 4 + 2.$$

8° Soit $f(x) = \theta(x^{2k})$. D'après (30), on a $F(x) = \theta(x)\,\theta(x^k)$. Donc

$$\theta(a)\,\theta(a^k)\,\lambda\left(\frac{n}{a}\right) + \theta(b)\,\theta(b^k)\,\lambda\left(\frac{n}{b}\right) + \theta(c)\,\theta(c^k)\,\lambda\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \theta\left(\frac{n^{2k}}{A^{2k}}\right) + \theta\left(\frac{n^{2k}}{B^{2k}}\right) + \theta\left(\frac{n^{2k}}{C^{2k}}\right) + \cdots$$

En particulier, pour $k = 1$:

$$\theta^2(a)\,\lambda\left(\frac{n}{a}\right) + \theta^2(b)\,\lambda\left(\frac{n}{b}\right) + \theta^2(c)\,\lambda\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \theta\left(\frac{n^2}{A^2}\right) + \theta\left(\frac{n^2}{B^2}\right) + \theta\left(\frac{n^2}{C^2}\right) + \cdots$$

9° $f(x) = \lambda(x)\,\omega(x)$. D'après (29), on a $F(x) = \lambda(x)$. En remplaçant dans (33), et en ayant égard à la relation (31), on trouve

$$\lambda\left(\frac{n}{A}\right)\omega\left(\frac{n}{A}\right) + \lambda\left(\frac{n}{B}\right)\omega\left(\frac{n}{B}\right) + \lambda\left(\frac{n}{C}\right)\omega\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots = \theta(n)\,\lambda(n). \quad (37)$$

IV. Pour $g(x) = \omega(x)$, $G(x) = \theta(x^2)$, l'identité (17) devient

$$\left.\begin{aligned} &f\left(\frac{n}{a}\right)\theta(a^2) + f\left(\frac{n}{b}\right)\theta(b^2) + f\left(\frac{n}{c}\right)\theta(c^2) + \cdots \\ &= \omega(a)\,F\left(\frac{n}{a}\right) + \omega(b)\,F\left(\frac{n}{b}\right) + \omega(c)\,F\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

1° $f(x) = 1$, $F(x) = \theta(x)$. Si l'on a égard à la relation (30), on trouve

$$\omega(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \omega(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \omega(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \theta^2(n). \quad (39)$$

2° $f(x) = x$, $F(x) = \int x$:

$$a\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right) + b\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right) + c\theta\left(\frac{n^2}{c^2}\right) + \cdots = \omega(a)\int\frac{n}{a} + \omega(b)\int\frac{n}{b} + \omega(c)\int\frac{n}{c} + \cdots$$

3° $f(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \frac{1}{x}\int x$:

$$a\theta(a^2) + b\theta(b^2) + c\theta(c^2) + \cdots = a\omega(a)\int\frac{n}{a} + b\omega(b)\int\frac{n}{b} + c\omega(c)\int\frac{n}{c} + \cdots$$

4° $f(x) = \log x$, $\mathrm{F}(x) = \log x^{\frac{\theta(x)}{2}}$:

$$a^{2\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right) - \theta(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right)} \,.\, b^{2\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right) - \theta(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right)} \,.\, c^{2\theta\left(\frac{n^2}{c^2}\right) - \theta(c)\,\omega\left(\frac{n}{c}\right)} \ldots = 1.$$

5° $f(x) = \varphi(x)$, $\mathrm{F}(x) = x$:

$$\theta(a^2)\varphi\left(\frac{n}{a}\right) + \theta(b^2)\varphi\left(\frac{n}{b}\right) + \theta(c^2)\varphi\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = a\omega\left(\frac{n}{a}\right) + b\omega\left(\frac{n}{b}\right) + c\omega\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

6° $f(x) = \frac{\pi(x)\,\varphi(x)}{x^2}$, $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}$:

$$a^2\pi\left(\frac{n}{a}\right)\varphi\left(\frac{n}{a}\right)\theta(a^2) + b^2\pi\left(\frac{n}{b}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right)\theta(b^2) + c^2\pi\left(\frac{n}{c}\right)\varphi\left(\frac{n}{c}\right)\theta(c^2) + \cdots$$
$$= n\left[a\omega(a) + b\omega(b) + c\omega(c) + \cdots\right].$$

7° $f(x) = \theta(x^{2k})$, $\mathrm{F}(x) = \theta(x)\,\theta(x^k)$:

$$\theta(a^{2k})\,\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right) + \theta(b^{2k})\,\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right) + \theta(c^{2k})\,\theta\left(\frac{n^2}{c^2}\right) + \cdots$$
$$= \omega\left(\frac{n}{a}\right)\theta(a)\,\theta(a^k) + \omega(b)\,\theta(b)\,\theta(b^k) + \omega(c)\,\theta(c)\,\theta(c^k) + \cdots$$

En particulier,

$$\theta(a^2)\,\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right) + \theta(b^2)\,\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right) + \theta(c^2)\,\theta\left(\frac{n^2}{c^2}\right) + \cdots$$
$$= \theta^2(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right) + \theta^2(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right) + \theta^2(c)\,\omega\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

8° $f(x) = \lambda(x)\,\omega(x)$, $\mathrm{F}(x) = \lambda(x)$. Si l'on tient compte de la relation (32), on trouve

$$\lambda(a)\,\omega(a)\,\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right) + \lambda(b)\,\omega(b)\,\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right) + \lambda(c)\,\omega(c)\,\theta\left(\frac{n^2}{c^2}\right) + \cdots = 1. \quad (40)$$

Par exemple :

$$\omega(1)\theta(144) - \omega(2)\theta(36) - \omega(3)\theta(16) + \omega(4)\theta(9) + \omega(6)\theta(4) - \omega(12)\theta(1) = 1;$$

c'est-à-dire

$$15 - 2.9 - 2.5 + 2.3 + 4.3 - 4 = 1;$$

ce qui est exact.

On peut écrire la relation (40) sous cette autre forme :

$$\omega\left(\frac{n}{a}\right)\lambda(a)\theta(a^2)+\omega\left(\frac{n}{b}\right)\lambda(b)\theta(b^2)+\omega\left(\frac{n}{c}\right)\lambda(c)\theta(c^2)+\cdots=\lambda(n).\quad(40^{bis})$$

V. Si l'on fait $g(x)=\theta(x^{2k})$, et, par suite, $G(x)=\theta(x).\theta(x^k)$, dans l'identité (17), celle-ci devient

$$\left.\begin{aligned}&\theta(a)\theta(a^k)f\left(\frac{n}{a}\right)+\theta(b)\theta(b^k)f\left(\frac{n}{b}\right)+\theta(c)\theta(c^k)f\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots\\&=\theta(a^{2k})\mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right)+\theta(b^{2k})\mathrm{F}\left(\frac{n}{b}\right)+\theta(c^{2k})\mathrm{F}\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(41)$$

1° $f(x)=1$, $\mathrm{F}(x)=\theta(x)$:

$$\begin{aligned}&\theta(a)\theta(a^k)+\theta(b)\theta(b^k)+\theta(c)\theta(c^k)+\cdots\\&=\theta(a^{2k})\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\theta(b^{2k})\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\theta(c^{2k})\theta\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots\end{aligned}$$

En particulier, pour $k=1$:

$$\theta^2(a)+\theta^2(b)+\theta^2(c)+\cdots=\theta(a^2)\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\theta(b^2)\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\theta(c^2)\theta\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots$$

2° $f(x)=x$, $\mathrm{F}(x)=\int x$:

$$n\left[\frac{1}{a}\theta(a)\theta(a^k)+\frac{1}{b}\theta(b)\theta(b^k)+\cdots\right]=\theta(a^{2k})\int\frac{n}{a}+\theta(b^{2k})\int\frac{n}{b}+\cdots$$

En particulier :

$$a\theta^2\left(\frac{n}{a}\right)+b\theta^2\left(\frac{n}{b}\right)+c\theta^2\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=\theta(a^2)\int\frac{n}{a}+\theta(b^2)\int\frac{n}{b}+\theta(c^2)\int\frac{n}{c}+\cdots$$

3° $f(x)=\frac{1}{x}$, $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{x}\int x$:

$$a\theta(a)\theta(a^k)+b\theta(b)\theta(b^k)+\cdots=a\theta(a^{2k})\int\frac{n}{a}+b\theta(b^{2k})\int\frac{n}{b}+\cdots;$$

et, comme cas particulier,

$$\begin{aligned}&a\theta^2(a)+b\theta^2(b)+c\theta^2(c)+\cdots\\&=a\theta(a^2)\int\frac{n}{a}+b\theta(b^2)\int\frac{n}{b}+c\theta(c^2)\int\frac{n}{c}+\cdots\end{aligned}$$

4° $f(x) = \log x$, $F(x) = \log x^{\frac{\theta(x)}{2}}$:

$$a^{2\theta\left(\frac{n}{a}\right)\theta\left(\frac{n^k}{a^k}\right)-\theta(a)\theta\left(\frac{n^{2k}}{a^{2k}}\right)} . b^{2\theta\left(\frac{n}{b}\right)\theta\left(\frac{n^k}{b^k}\right)-\theta(b)\theta\left(\frac{n^{2k}}{b^{2k}}\right)} . c^{2\theta\left(\frac{n}{c}\right)\theta\left(\frac{n^k}{ck}\right)-\theta(c)\theta\left(\frac{n^{2k}}{c^{2k}}\right)} \ldots = 1.$$

En particulier,

$$a^{2\theta^2\left(\frac{n}{a}\right)-\theta(a)\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right)} . b^{2\theta^2\left(\frac{n}{b}\right)-\theta(b)\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right)} . c^{2\theta^2\left(\frac{n}{c}\right)-\theta(c)\theta\left(\frac{n^2}{c^2}\right)} \ldots = 1.$$

5° $f(x) = \varphi(x)$, $F(x) = x$:

$$\theta(a)\,\theta(a^k)\,\varphi\left(\frac{n}{a}\right) + \theta(b)\,\theta(b^k)\,\varphi\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots = a\theta\left(\frac{n^{2k}}{a^{2k}}\right) + b\theta\left(\frac{n^{2k}}{b^{2k}}\right) + \cdots$$

En particulier :

$$\theta^2(a)\,\varphi\left(\frac{n}{a}\right) + \theta^2(b)\,\varphi\left(\frac{n}{b}\right) + \theta^2(c)\,\varphi\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= a\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right) + b\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right) + c\theta\left(\frac{n^2}{c^2}\right) + \cdots$$

6° $f(x) = \frac{\pi(x)\,\varphi(x)}{x^2}$, $F(x) = \frac{1}{x}$:

$$a^2\pi\left(\frac{n}{a}\right)\varphi\left(\frac{n}{a}\right)\theta(a)\,\theta(a^k) + b^2\pi\left(\frac{n}{b}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right)\theta(b)\,\theta(b^k) + \cdots$$
$$= \left[a\theta(a^{2k}) + b\theta(b^{2k}) + \cdots\right];$$

et, comme cas particulier,

$$a^2\pi\left(\frac{n}{a}\right)\varphi\left(\frac{n}{a}\right)\theta^2(a) + b^2\pi\left(\frac{n}{b}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right)\theta^2(b) + \cdots$$
$$= n\left[a\theta(a^2) + b\theta(b^2) + \cdots\right].$$

7° $f(x) = \lambda(x)\,\omega(x)$, $F(x) = \lambda(x)$:

$$\theta(a)\,\theta(a^k)\,\lambda\left(\frac{n}{a}\right)\omega\left(\frac{n}{a}\right) + \theta(b)\,\theta(b^k)\,\lambda\left(\frac{n}{b}\right)\omega\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots$$
$$= \theta(a^{2k})\,\lambda\left(\frac{n}{a}\right) + \theta(b^{2k})\,\lambda\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots$$

En particulier,

$$\lambda(a)\,\theta^2(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\theta^2(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots = \lambda(a)\,\theta(a^2) + \lambda(b)\,\theta(b^2) + \cdots$$

8° Faisons encore $f(x) = \lambda(x)\,\theta(x)$. D'après (36), nous aurons $F(x) = \lambda(x)\,T(x)$; puis, en prenant $k = 1$:

$$\lambda(a)\,\theta^2(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\theta^2(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\theta^2(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \lambda(a)\,\theta(a^2)\,T\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\theta(b^2)\,T\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots$$

VI. Enfin, soit fait, dans (17), $g(x) = \lambda(x)\,\omega(x)$; et, par suite, $G(x) = \lambda(x)$. On trouve

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(a)\,\omega(a)\,F\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\omega(b)\,F\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots \\ &= f(a)\,\lambda\left(\frac{n}{a}\right) + f(b)\,\lambda\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

1° $f(x) = 1$, $F(x) = \theta(x)$:

$$\lambda(a)\,\omega(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\omega(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\omega(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c) + \cdots$$

Donc, d'après (27),

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(a)\,\omega(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\omega(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\omega(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \\ &= \left| \begin{array}{ll} 1, & (n \text{ carré}) \\ 0, & (n \text{ non carré}) \end{array}\right. \end{aligned}\right\} \quad (42')$$

ou

$$\lambda(a)\,\theta(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\theta(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\theta(c)\,\omega\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \left| \begin{array}{ll} 1, & (n \text{ carré}) \\ 0. & (n \text{ non carré}) \end{array}\right.$$

2° $f(x) = x$, $F(x) = \int x$:

$$\lambda(a)\,\omega(a)\int\frac{n}{a} + \lambda(b)\,\omega(b)\int\frac{n}{b} + \lambda(c)\,\omega(c)\int\frac{n}{c} + \cdots$$
$$= a\lambda\left(\frac{n}{a}\right) + b\lambda\left(\frac{n}{b}\right) + c\lambda\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots,$$

ou

$$\lambda(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right)\int a + \lambda(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right)\int b + \lambda(c)\,\omega\left(\frac{n}{c}\right)\int c + \cdots$$
$$= a\lambda(a) + b\lambda(b) + c\lambda(c) + \cdots$$

3° $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\int x$:

$$a\lambda(a)\,\omega(a)\int\frac{n}{a} + b\lambda(b)\,\omega(b)\int\frac{n}{b} + c\lambda(c)\,\omega(c)\int\frac{n}{c} + \cdots$$
$$= a\lambda(a) + b\lambda(b) + c\lambda(c) + \cdots$$

4° $f(x) = \log x$, $\mathrm{F}(x) = \log x^{\frac{\theta(x)}{2}}$:

$$a^{\left[2-\theta(a)\omega\left(\frac{n}{a}\right)\right]\lambda\left(\frac{n}{a}\right)} \cdot b^{\left[2-\theta(b)\omega\left(\frac{n}{b}\right)\right]\lambda\left(\frac{n}{b}\right)} \cdot c^{\left[2-\theta(c)\omega\left(\frac{n}{c}\right)\right]\lambda\left(\frac{n}{c}\right)} \cdots = 1.$$

ou

$$a^{\left[2-\omega(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right)\right]\lambda(a)} \cdot b^{\left[2-\omega(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right)\right]\lambda(b)} \cdot c^{\left[2-\omega(c)\theta\left(\frac{n}{c}\right)\right]\lambda(c)} \cdots$$
$$= \left| \begin{array}{ll} n, & (n \text{ carré}) \\ 1. & (n \text{ non carré}) \end{array} \right.$$

5° $f(x) = \varphi(x)$, $\mathrm{F}(x) = x$:

$$\frac{\lambda(a)\,\omega(a)}{a} + \frac{\lambda(b)\,\omega(b)}{b} + \frac{\lambda(c)\,\omega(c)}{c} + \cdots$$
$$= \frac{1}{n}\left[\varphi(a)\,\lambda\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)\,\lambda\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)\,\lambda\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots\right],$$

ou

$$a\lambda(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right) + b\lambda(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right) + c\lambda(c)\,\omega\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \lambda(a)\,\varphi(a) + \lambda(b)\,\varphi(b) + \lambda(c)\,\varphi(c) + \cdots$$

6° $f(x) = \frac{\pi(x)\varphi(x)}{x^2}$, $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}$:

$$a^2\lambda(a)\,\pi\left(\frac{n}{a}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right) + b^2\lambda(b)\,\pi\left(\frac{n}{b}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots$$
$$= n\left[a\lambda(a)\,\omega(a) + b\lambda(b)\,\omega(b) + \cdots\right].$$

7° $f(x) = \lambda(x)\theta(x)$, $F(x) = \lambda(x)T(x)$:

$$\omega(a)T\left(\frac{n}{a}\right) + \omega(b)T\left(\frac{n}{b}\right) + \omega(c)T\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \theta(a) + \theta(b) + \theta(c) + \cdots$$

VII. On peut supposer, dans (17),

$$g(x) = \lambda(x)\theta(x), \quad G(x) = \lambda(x)T(x).$$

On a

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(a)f(a)T\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)f(b)T\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)f(c)T\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \\ &\qquad = \lambda(a)F(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)F(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Ainsi, pour $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x}$, on trouve

$$\lambda(a)T\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)T\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)T\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \lambda(a)\theta(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\theta(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\theta(c)\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots,$$

ou

$$\lambda(a)T(a) + \lambda(b)T(b) + \lambda(c)T(c) + \cdots$$
$$= \lambda(a)\theta(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\theta(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\theta(c)\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

Puis

$$a\lambda(a)T\left(\frac{n}{a}\right) + b\lambda(b)T\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots = \lambda(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right)\int a + \lambda(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right)\int b + \cdots,$$

$$a\lambda(a)T(a) + b\lambda(b)T(b) + \cdots = a\lambda(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right)\int\frac{n}{a} + b\lambda(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right)\int\frac{n}{b} + \cdots,$$

etc., etc...

NOTE V.

I. Voici comment on peut généraliser l'identité (17). Soient

$$F(x) = \psi(a')f\left(\frac{x}{a'}\right) + \psi(b')f\left(\frac{x}{b'}\right) + \psi(c')f\left(\frac{x}{c'}\right) + \cdots,$$

$$G(x) = \psi(a')g\left(\frac{x}{a'}\right) + \psi(b')g\left(\frac{x}{b'}\right) + \psi(c')g\left(\frac{x}{c'}\right) + \cdots,$$

a', b', c', ... étant tous les diviseurs de x. On a, identiquement,

$$\left.\begin{aligned} &G(a)f\left(\frac{n}{a}\right) + G(b)f\left(\frac{n}{b}\right) + G(c)f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \\ &= F(a)g\left(\frac{n}{a}\right) + F(b)g\left(\frac{n}{b}\right) + F(c)g\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (44)$$

Pour le démontrer, ordonnons les deux membres par rapport à $\psi(a)$, $\psi(b)$, $\psi(c)$, ... Il suffit de prouver que les coefficients de $\psi(a)$, dans les deux membres, sont égaux. Or, $\psi(a)$ entre exclusivement dans $G(\lambda a)$, $G(\mu a)$, $G(\nu a)$, ..., si l'on désigne par λ, μ, ν, ... tous les diviseurs de $\frac{n}{a}$. En outre, dans $G(\lambda a)$, $\psi(a)$ a pour coefficient $g\left(\frac{\lambda a}{a}\right)$, c'est-à-dire $g(\lambda)$; de même, dans $G(\mu a)$, $\psi(a)$ a pour coefficient $g(\mu)$; et ainsi de suite. Mais ces coefficients doivent être multipliés, respectivement, par les coefficients de $G(\lambda a)$, $G(\mu a)$, $G(\nu a)$, ... qui sont $f\left(\frac{n}{\lambda a}\right)$, $f\left(\frac{n}{\mu a}\right)$, $f\left(\frac{n}{\nu a}\right)$, ... Il en résulte que le coefficient de $\psi(a)$, dans le premier membre, est

$$g(\lambda)f\left(\frac{n}{\lambda a}\right) + g(\mu)f\left(\frac{n}{\mu a}\right) + g(\nu)f\left(\frac{n}{\nu a}\right) + \cdots$$

De même, le coefficient de $\psi(a)$, dans le second membre, est

$$f(\lambda)g\left(\frac{n}{\lambda a}\right) + f(\mu)g\left(\frac{n}{\mu a}\right) + f(\nu)g\left(\frac{n}{\nu a}\right) + \cdots$$

Or, ces coefficients sont égaux, à cause de l'identité (16), c'est-à-dire parce que les nombres λ, μ, ν, ... sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres $\frac{n}{\lambda a}$, $\frac{n}{\mu a}$, $\frac{n}{\nu a}$, ... L'identité (44) est donc démontrée. On en déduit l'identité (17), en faisant $\psi(x) = 1$.

II. Supposons $g(x) = 1$. Nous aurons

$$F(x) = \psi(a')f\left(\frac{x}{a'}\right) + \psi(b')f\left(\frac{x}{b'}\right) + \psi(c')f\left(\frac{x}{c'}\right) + \cdots,$$

$$G(x) = \psi(a') + \psi(b') + \psi(c') + \cdots,$$

puis

$$G(a)f\left(\frac{n}{a}\right) + G(b)f\left(\frac{n}{b}\right) + G(c)f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = F(a) + F(b) + F(c) + \cdots \tag{45}$$

1° Pour $\psi(x) = \lambda(x)$, on a d'abord

$$G(x) = \left| \begin{array}{ll} 1, & (x \text{ carré}) \\ 0. & (x \text{ non carré}) \end{array} \right.$$

L'identité (45) devient

$$f\left(\frac{n}{A}\right) + f\left(\frac{n}{B}\right) + f\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots = F(a) + F(b) + F(c) + \cdots$$

Si, dans celle-ci, l'on fait $f(x) = \lambda(x)$, on a, en vertu de (31), $F(x) = \lambda(x)\theta(x)$; puis

$$\lambda\left(\frac{n}{A}\right) + \lambda\left(\frac{n}{B}\right) + \lambda\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots = \lambda(a)\theta(a) + \lambda(b)\theta(b) + \lambda(c)\theta(c) + \cdots$$

Pour $f(x) = \omega(x)$, on obtient, en vertu de (32), $F(x) = 1$; puis

$$\omega\left(\frac{n}{A}\right) + \omega\left(\frac{n}{B}\right) + \omega\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots = \theta(n). \tag{46}$$

Les deux dernières relations ne diffèrent pas de (36) et (37); pour s'en convaincre, il suffit d'observer que, à cause de $\lambda(A) = 1$, on peut remplacer $\lambda\left(\frac{n}{A}\right)$ par $\lambda(n)$. La relation (46) est due à Dirichlet, qui l'a démontrée, très simplement, dans le *Journal de Crelle* (t. XXI).

Enfin, pour $f(x)=\theta(x)$, on a, d'après (35), $F(x)=T(x)$. Donc

$$\theta\left(\frac{n}{A}\right)+\theta\left(\frac{n}{B}\right)+\theta\left(\frac{n}{C}\right)+\cdots=T(a)+T(b)+T(c)+\cdots$$

Par exemple, pour $n=12$:

$$\theta(12)+\theta(3)=T(1)+T(2)+T(3)+T(4)+T(6)+T(12);$$

c'est-à-dire

$$6+2=1+1+1+2+1+2.$$

2° Soient $\psi(x)=\omega(x)$, $f(x)=\lambda(x)$; et, par suite, $G(x)=\theta(x^2)$, $F(x)=1$. L'identité (45) devient

$$\theta(a^2)\lambda\left(\frac{n}{a}\right)+\theta(b^2)\lambda\left(\frac{n}{b}\right)+\theta(c^2)\lambda\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=\theta(n). \quad (47)$$

Il y a donc égalité entre les premiers membres de (46) et de (47). Ce résultat s'accorde avec une relation démontrée dans la Note précédente (III, 7°).

3° Soient $\psi(x)=\lambda(x)\omega(x)$, $f(x)=\theta^2(x)$. En vertu de (29), on a $G(x)=\lambda(x)$. D'autre part

$$F(x)=\lambda(a')\omega(a')\theta^2\left(\frac{x}{a'}\right)+\lambda(b')\omega(b')\theta^2\left(\frac{x}{b'}\right)+\lambda(c')\omega(c')\theta^2\left(\frac{x}{c'}\right)+\cdots$$

Mais, d'après une formule démontrée dans la Note IV (V, 7°), on a

$$\lambda(a)\omega(a)\theta^2\left(\frac{n}{a}\right)+\lambda(b)\omega(b)\theta^2\left(\frac{n}{b}\right)+\lambda(c)\omega(c)\theta^2\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots$$
$$=\theta(a^2)\lambda\left(\frac{n}{a}\right)+\theta(b^2)\lambda\left(\frac{n}{b}\right)+\theta(c^2)\lambda\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots;$$

ou bien, en vertu de (47),

$$\lambda(a)\omega(a)\theta^2\left(\frac{n}{a}\right)+\lambda(b)\omega(b)\theta^2\left(\frac{n}{b}\right)+\lambda(c)\omega(c)\theta^2\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=\theta(n). \quad (48)$$

Donc $F(x)=\theta(x)$. D'après cela, l'identité (45) devient

$$\lambda(a)\theta^2\left(\frac{n}{a}\right)+\lambda(b)\theta^2\left(\frac{n}{b}\right)+\lambda(c)\theta^2\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=\theta(a)+\theta(b)+\theta(c)+\cdots$$

4° Soient $\psi(x) = \theta(x^2)$, $f(x) = \lambda(x)\omega(x)$. On obtient d'abord, en vertu des égalités (30) et (40) :

$$G(x) = \theta^2(x), \quad F(x) = 1;$$

puis

$$\lambda(a)\omega(a)\theta^2\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\omega(b)\theta^2\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\omega(c)\theta^2\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \theta(n), \quad (48)$$

ou la relation (48), que nous venons de retrouver par une voie différente de la première.

Elle donne, pour $n = 12$,

$$\omega(1)\theta^2(12) - \omega(2)\theta^2(6) - \omega(3)\theta^2(4) + \omega(4)\theta^2(3) + \omega(6)\theta^2(2) - \omega(12)\theta^2(1) = \theta(12),$$

c'est-à-dire

$$36 - 2.16 - 2.9 + 2.4 + 4.4 - 4 = 6.$$

III. 1° Si l'on suppose $\psi(x) = \varphi(x)$, $g(x) = \theta(x)$, $f(x) = \int x$, on obtient

$$F(x) = \varphi(a')\int\frac{x}{a'} + \varphi(b')\int\frac{x}{b'} + \varphi(c')\int\frac{x}{c'} + \cdots = x\theta(x),$$

$$G(x) = \varphi(a')\,\theta\left(\frac{x}{a'}\right) + \varphi(b')\,\theta\left(\frac{x}{b'}\right) + \varphi(c')\,\theta\left(\frac{x}{c'}\right) + \cdots = \int x.$$

Ensuite, par substitution dans l'identité (44),

$$\int a\int\frac{n}{a} + \int b\int\frac{n}{b} + \int c\int\frac{n}{c} + \cdots$$
$$= a\theta(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + b\theta(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + c\theta(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

Par exemple, pour $n = 6$, on doit avoir

$$\int 1 . \int 6 + \int 2 . \int 3 + \int 3 . \int 2 + \int 6 . \int 1$$
$$= \theta(1)\theta(6) + 2\theta(2)\theta(3) + 3\theta(3)\theta(2) + 6\theta(6)\theta(1);$$

c'est-à-dire

$$1 . 12 + 3 . 4 + 4 . 3 + 12 . 1 = 1 . 4 + 2 . 2 . 2 + 3 . 2 . 2 + 6 . 4 . 1;$$

ce qui est exact, car les deux membres sont égaux à 48.

2° Soient $\psi(x) = \theta(x)$, $g(x) = \varphi(x)$. On a d'abord

$$F(x) = \theta(a')\, f\left(\frac{x}{a'}\right) + \theta(b')\, f\left(\frac{x}{b'}\right) + \theta(c')\, f\left(\frac{x}{c'}\right) + \cdots$$

$$G(x) = \theta(a')\, \varphi\left(\frac{x}{a'}\right) + \theta(b')\, \varphi\left(\frac{x}{b'}\right) + \theta(c')\, \varphi\left(\frac{x}{c'}\right) + \cdots = \int x;$$

puis

$$f(a)\int\frac{n}{a} + f(b)\int\frac{n}{b} + f(c)\int\frac{n}{c} + \cdots$$
$$= \varphi(a)\, F\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)\, F\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)\, F\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

Faisant successivement $f(x) = \lambda(x)$, $f(x) = \omega(x)$, $f(x) = \lambda(x)\omega(x)$, on trouve :

$$F(x) = T(x), \quad F(x) = \theta^2(x), \quad F(x) = \left|\begin{array}{ll} 1, & (x \text{ carré}) \\ 0. & (x \text{ non carré}) \end{array}\right.$$

Donc

$$\lambda(a)\int\frac{n}{a} + \lambda(b)\int\frac{n}{b} + \lambda(c)\int\frac{n}{c} + \cdots$$
$$= \varphi(a)\, T\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)\, T\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)\, T\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

$$\omega(a)\int\frac{n}{a} + \omega(b)\int\frac{n}{b} + \omega(c)\int\frac{n}{c} + \cdots$$
$$= \varphi(a)\, \theta^2\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)\, \theta^2\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)\, \theta^2\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

$$\lambda(a)\,\omega(a)\int\frac{n}{a} + \lambda(b)\,\omega(b)\int\frac{n}{b} + \lambda(c)\,\omega(c)\int\frac{n}{c} + \cdot$$
$$= \varphi\left(\frac{n}{A}\right) + \varphi\left(\frac{n}{B}\right) + \varphi\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots$$

Il y a concordance entre la dernière égalité et deux autres relations, démontrées dans la Note précédente [III, 5°; VI, 2°].

3° $\psi(x) = \theta(x)$, $g(x) = \lambda(x)$, $f(x) = \omega(x)$; et, par suite, $G(x) = T(x)$, $F(x) = \theta^2(x)$. On trouve

$$\lambda(a)\, \theta^2\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\, \theta^2\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\, \theta^2\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \omega(a)\, T\left(\frac{n}{a}\right) + \omega(b)\, T\left(\frac{n}{b}\right) + \omega(c)\, T\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

4° $\psi(x) = \theta(x)$, $g(x) = \lambda(x)$, $f(x) = \lambda(x)\,\omega(x)$; et, par suite

$$G(x) = T(x), \quad F(x) = \left| \begin{array}{ll} 1, & (x \text{ carré}) \\ 0. & (x \text{ non carré}) \end{array} \right.$$

On obtient, en observant que $\lambda\left(\frac{n}{A}\right) = \lambda(n)$:

$$\lambda(a)\,\omega(a)\,T\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\omega(b)T\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\omega(c)\,T\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \lambda(n)\,T(n), \quad (49)$$

ou

$$\lambda(a)T(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)T(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)T(c)\,\omega\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = T(n). \quad (50)$$

5° $\psi(x) = \lambda(x)$, $g(x) = \lambda(x)$, $f(x) = \theta(x)$; et, par conséquent, $F(x) = T(x)$, $G(x) = \theta(x)\lambda(x)$; puis

$$\lambda(a)T\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,T\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,T\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \lambda(a)\,\theta(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\theta(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\theta(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots,$$

égalité démontrée, par une autre voie, dans la Note précédente (VII).

6° $\psi(x) = \lambda(x)$, $g(x) = \omega(x)$, $f(x) = \theta(x)$; et, par suite, $F(x) = T(x)$, $G(x) = 1$:

$$\omega(a)\,T\left(\frac{n}{a}\right) + \omega(b)T\left(\frac{n}{b}\right) + \omega(c)\,T\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \theta(a) + \theta(b) + \theta(c) + \cdots$$

Il y a concordance entre cette relation et deux autres relations, démontrées ci-dessus [II, 3°; III, 3°].

IV. Soient $\psi(x) = \lambda(x)$, $g(x) = \theta(x^2)$. D'après (47), on a $G(x) = \theta(x)$. Donc

$$f(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + f(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + f(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$
$$= \theta(a^2)\,F\left(\frac{n}{a}\right) + \theta(b^2)\,F\left(\frac{n}{b}\right) + \theta(c^2)\,F\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

1° Pour $f(x)=1$, $F(x)=\left|\begin{array}{ll}1, & (x \text{ carré}) \\ 0. & (n \text{ non carré})\end{array}\right.$

$$\theta(a)+\theta(b)+\theta(c)+\cdots=\theta\left(\frac{n^2}{A^2}\right)+\theta\left(\frac{n^2}{B^2}\right)+\theta\left(\frac{n^2}{C^2}\right)+\cdots$$

Par exemple, si l'on fait $n=12$, on a

$$\theta(1)+\theta(2)+\theta(3)+\theta(4)+\theta(6)+\theta(12)=\theta(144)+\theta(9);$$

c'est-à-dire

$$1+2+2+3+4+6=15+3.$$

2° Pour $f(x)=\lambda(x)$, $F(x)=\theta(x)\lambda(x)$:

$$\lambda(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\lambda(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots=\lambda(a)\theta(a)\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right)+\lambda(b)\theta(b)\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right)+\cdots;$$

ou, d'après (35),

$$\lambda(a)\theta(a)\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right)+\lambda(b)\theta(b)\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right)+\lambda(c)\theta(c)\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right)+\cdots=T(n). \qquad (51)$$

3° Pour $f(x)=\theta(x)$, $F(x)=T(x)$:

$$\theta(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\theta(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\theta(c)\theta\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots$$
$$=\theta(a^2)T\left(\frac{n}{a}\right)+\theta(b^2)T\left(\frac{n}{b}\right)+\theta(c^2)T\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots$$

V. 1° Soient $\psi(x)=\lambda(x)\,\omega(x)$, $g(x)=\theta^2(x)$, $f(x)=\theta(x)$. D'après (48) et (42'), on a

$$G(x)=\theta(x), \quad F(x)=\left|\begin{array}{ll}1, & (x \text{ carré}) \\ 0. & (x \text{ non carré})\end{array}\right.$$

Donc

$$\theta(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\theta(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\theta(c)\theta\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=\theta^2\left(\frac{n}{A}\right)+\theta^2\left(\frac{n}{B}\right)+\theta^2\left(\frac{n}{C}\right)+\cdots$$

Par exemple, pour $n=8$,

$$\theta(1)\theta(8)+\theta(2)\theta(4)+\theta(4)\theta(2)+\theta(8)\theta(1)=\theta^2(8)+\theta^2(2);$$

c'est-à-dire

$$4+2.3+3.2+4=16+4$$

2° Soit $\psi(x) = \theta(x^2)$, $g(x) = \theta(x)\lambda(x)$, $f(x) = 1$.

D'après (51), on a $G(x) = T(x)$. On a aussi $F(x) = \theta^2(x)$. Donc

$$\lambda(a)\,\theta(a)\,\theta^2\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\theta(b)\,\theta^2\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots = T(a) + T(b) + T(c) + \cdots$$

VI. Nous voilà donc en possession d'une source de formules, et d'une source intarissable; car, à mesure que l'on avance, on rencontre de nouvelles formules, qui peuvent, à leur tour, être utilisées. C'est ainsi que, dans le dernier exemple, nous avons employé la relation (51), que nous venions d'obtenir. Prenons encore la relation

$$\lambda(a)\,\theta(a^2)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\theta(b^2)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\theta(c^2)\,\omega\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \lambda(n).$$

Elle donne lieu à deux identités générales : en voici une :

$$\lambda(a) f\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b) f\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c) f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

$$= \lambda(a)\,\theta(a^2)\,F\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\theta(b^2)F\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\theta(c^2)\,F\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

Dans cette identité,

$$F(x) = \omega(a')f\left(\frac{x}{a'}\right) + \omega(b')f\left(\frac{x}{b'}\right) + \omega(c')f\left(\frac{x}{c'}\right) + \cdots$$

Par exemple, pour $f(x) = 1$, $F(x) = \theta(x^2)$; puis

$$\lambda(a)\,\theta(a^2)\,\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right) + \lambda(b)\,\theta(b^2)\,\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right) + \lambda(c)\,\theta(c^2)\,\theta\left(\frac{n^2}{c^2}\right) + \cdots$$

$$= \left| \begin{array}{ll} 1, & (n \text{ carré}) \\ 0. & (n \text{ non carré}) \end{array} \right.$$

A son tour, cette égalité peut servir. Elle donne lieu à l'identité générale

$$f\left(\frac{n}{A}\right) + f\left(\frac{n}{B}\right) + f\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots = \lambda(a)\theta(a^2)F\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\theta(b^2)F\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots,$$

dans laquelle

$$F(x) = \theta(a'^2) f\left(\frac{x}{a'}\right) + \theta(b'^2) f\left(\frac{x}{b'}\right) + \theta(c'^2) f\left(\frac{x}{c'}\right) + \cdots$$

Par exemple, pour $f(x) = 1$, on a $F(x) = \theta^2(x)$. Puis

$$\lambda(a)\,\theta(a^2)\,\theta^2\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\theta(b^2)\,\theta^2\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\theta(c^2)\,\theta^2\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = T(n),$$

égalité qui engendre encore deux identités générales, suivant que l'on fait $\psi(x) = \lambda(x)\,\theta(x^2)$, ou bien $\psi(x) = \theta^2(x)$, dans l'identité (44). Et ainsi de suite.

NOTE VI.

I. Les Notes précédentes montrent que, pour chaque nouvelle fonction arithmétique imaginée, on peut trouver une infinité d'identités générales. Par exemple, dans le *Journal de Crelle* (t. LXXVII), M. Mertens considère une fonction $\mu(n)$, égale à $+1$ ou à -1, suivant que n est composé d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers inégaux, autres que 1. Dans tous les autres cas, c'est-à-dire, suivant la définition de M. Mertens, quand n admet des diviseurs carrés, différents de 1, on a $\mu(n)=0$. On suppose $\mu(1)=1$. Cela étant,

$$\mu(a)+\mu(b)+\mu(c)+\cdots=0. \tag{52}$$

En effet, $\tau(n)$ étant le nombre des diviseurs premiers de n, autres que 1, il est clair que le premier membre de l'égalité (52) est égal à

$$1-C_{\tau,1}+C_{\tau,2}-C_{\tau,3}+\cdots\pm C_{\tau,\tau}=0.$$

Il y a exception, si $n=1$. Dans ce cas, le premier membre de (52) se réduit à $\mu(1)=1$. L'identité (52) va nous en procurer beaucoup d'autres.

II. Prenons l'identité (17), et faisons-y $g(x)=\mu(x)$. Nous aurons d'abord $G(x)=0$, excepté pour $x=1$. Dans ce cas, $G(x)=1$. L'identité (17) devient donc

$$f(n)=\mu(a)F\left(\frac{n}{a}\right)+\mu(b)F\left(\frac{n}{b}\right)+\mu(c)F\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots \tag{53}$$

Si $u, v, w, \ldots$ sont tous les facteurs premiers de n, différents de 1, la dernière égalité peut être écrite ainsi :

$$f(n)=F(n)-\sum F\left(\frac{n}{u}\right)+\sum F\left(\frac{n}{uv}\right)-\sum F\left(\frac{n}{uvw}\right)+\cdots$$

1° Pour $f(x) = \varphi(x)$, $\mathrm{F}(x) = x$, on a

$$\varphi(n) = a\mu\left(\frac{n}{a}\right) + b\mu\left(\frac{n}{b}\right) + c\mu\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots; \tag{54}$$

ou, sous une autre forme,

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{u}\right)\left(1 - \frac{1}{v}\right)\left(1 - \frac{1}{w}\right)\ldots;$$

formule connue.

2° Si l'on fait successivement $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x}$, on a $\mathrm{F}(x) = \theta(x)$, $\mathrm{F}(x) = \int x$, $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}\int x$. Puis

$$\mu(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \mu(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \mu(c)\,\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = 1, \tag{55}$$

$$\mu(a)\int\frac{n}{a} + \mu(b)\int\frac{n}{b} + \mu(c)\int\frac{n}{c} + \cdots = n,$$

$$a\mu(a)\int\frac{n}{a} + b\mu(b)\int\frac{n}{b} + c\mu(c)\int\frac{n}{c} + \cdots = 1.$$

3° $f(x) = \log x$, $\mathrm{F}(x) = \log x^{\frac{\theta(x)}{2}}$:

$$a^{\theta(a)\mu\left(\frac{n}{a}\right)} \cdot b^{\theta(b)\mu\left(\frac{n}{b}\right)} \cdot c^{\theta(c)\mu\left(\frac{n}{c}\right)} \ldots = n^2.$$

4° $f(x) = \frac{\pi(x)\varphi(x)}{x^2}$, $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{x}$:

$$a\mu(a) + b\mu(b) + c\mu(c) + \cdots = \frac{\pi(n)\,\varphi(n)}{n};$$

ou, sous une autre forme,

$$\frac{\pi(n)\,\varphi(n)}{n} = (1 - u)(1 - v)(1 - w)\ldots$$

Si l'on tient compte de l'expression de $\varphi(n)$, trouvée plus haut, on obtient

$$\pi(n) = (-u)(-v)(-w)\ldots;$$

ce qui est la définition même de $\pi(n)$.

5° $f(x) = \lambda(x)$, $\mathrm{F}(x) = \left|\begin{array}{ll} 1, & (x \text{ carré}) \\ 0. & (x \text{ non carré}) \end{array}\right.$

L'identité (53) devient

$$\mu\left(\frac{n}{\mathrm{A}}\right) + \mu\left(\frac{n}{\mathrm{B}}\right) + \mu\left(\frac{n}{\mathrm{C}}\right) + \cdots = \lambda(n).$$

6° $f(x) = \omega(x)$, $\mathrm{F}(x) = \theta(x^2)$:

$$\mu(a)\,\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right) + \mu(b)\,\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right) + \mu(c)\,\theta\left(\frac{n^2}{c^2}\right) + \cdots = \omega(n). \quad (56)$$

Cette relation est due à M. Mertens, qui en a fait une application à la Théorie des Moyennes.

7° $f(x) = \theta(x^2)$, $\mathrm{F}(x) = \theta^2(x)$:

$$\mu(a)\,\theta^2\left(\frac{n}{a}\right) + \mu(b)\,\theta^2\left(\frac{n}{b}\right) + \mu(c)\,\theta^2\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \theta(n^2).$$

8° $f(x) = \lambda(x)\,\omega(x)$, $\mathrm{F}(x) = \lambda(x)$:

$$\mu(a)\,\lambda\left(\frac{n}{a}\right) + \mu(b)\,\lambda\left(\frac{n}{b}\right) + \mu(c)\,\lambda\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \lambda(n)\,\omega(n),$$

ou

$$\mu(a)\,\lambda(a) + \mu(b)\,\lambda(b) + \mu(c)\,\lambda(c) + \cdots = \omega(n);$$

relation presque évidente; car le premier membre est égal à

$$\lambda(1) - \sum\lambda(u) + \sum\lambda(uv) - \sum\lambda(uvw) + \cdots;$$

c'est-à-dire, à

$$1 + \mathrm{C}_{\tau,1} + \mathrm{C}_{\tau,2} + \mathrm{C}_{\tau,3} + \cdots + \mathrm{C}_{\tau,\tau} = 2^{\tau(n)} = \omega(n).$$

III. Prenons l'identité (44), et faisons-y $g(x) = \mu(x)$, $\psi(x) = \mathrm{H}(x)$, $\mathrm{G}(x) = h(x)$. Nous trouvons

$$\left.\begin{aligned} &h(a)\,f\left(\frac{n}{a}\right) + h(b)\,f\left(\frac{n}{b}\right) + h(c)\,f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \\ &= \mu(a)\,\mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) + \mu(b)\,\mathrm{F}\left(\frac{n}{b}\right) + \mu(c)\,\mathrm{F}\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

Dans cette identité, les fonctions $f(x)$ et $h(x)$ sont quelconques, mais

$$\mathrm{H}(x) = h(a') + h(b') + h(c') + \cdots,$$

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{H}(a')\,f\left(\frac{x}{a'}\right) + \mathrm{H}(b')\,f\left(\frac{x}{b'}\right) + \mathrm{H}(c')\,f\left(\frac{x}{c'}\right) + \cdots$$

Voici quelques cas particuliers de l'identité (57) :

1° Soit $h(x) = \lambda(x)$. On aura d'abord $H(x) = \left| \begin{array}{ll} 1, & (x \text{ carré}) \\ 0. & (x \text{ non carré}) \end{array} \right.$

En outre,

$$F(x) = f\left(\frac{x}{A'}\right) + f\left(\frac{x}{B'}\right) + f\left(\frac{x}{C'}\right) + \cdots$$

En particulier, pour $f(x) = \lambda(x)\,\omega(x)$, on a $F(x) = \theta(x)$. Donc

$$\mu(a)\,\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \mu(b)\,\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots = \lambda(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots;$$

résultat qui s'accorde avec les relations (55) et (32).

2° Pour $h(x) = \omega(x)$, $f(x) = \lambda(x)\omega(x)$, on a $H(x) = \theta(x^2)$, $F(x) = 1$; puis

$$\lambda(a)\,\omega(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right) + \lambda(b)\,\omega(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right) + \lambda(c)\,\omega(c)\,\omega\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = 0,$$

sauf si $n = 1$. Dans ce cas, le second membre est 1. Cette relation est due à M. Liouville.

3° $h(x) = \lambda(x)\omega(x)$, $f(x) = \theta(x)$, $H(x) = \lambda(x)$, $F(x) = T(x)$. On trouve

$$\mu(a)\,T\left(\frac{n}{a}\right) + \mu(b)\,T\left(\frac{n}{b}\right) + \mu(c)\,T\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \left| \begin{array}{ll} 1. & (n \text{ carré}) \\ 0. & (n \text{ non carré}) \end{array} \right.$$

On peut, à son tour, utiliser cette relation, en faisant $\psi(x) = \mu(x)$, $g(x) = T(x)$, dans l'identité générale (44). On a d'abord $G(x) = \left| \begin{array}{ll} 1, & (x \text{ carré}) \\ 0. & (x \text{ non carré}) \end{array} \right.$

Puis

$$f\left(\frac{n}{A}\right) + f\left(\frac{n}{B}\right) + f\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots = T(a)\,F\left(\frac{n}{a}\right) + T(b)\,F\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots$$

Par exemple,

$$\int\frac{n}{A} + \int\frac{n}{B} + \int\frac{n}{C} + \cdots = a\,T\left(\frac{n}{a}\right) + b\,T\left(\frac{n}{b}\right) + c\,T\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots,$$

etc., etc...

IV. Voici quelques autres égalités, fort simples, presque évidentes, qui peuvent servir à en trouver une infinité d'autres :

$$\frac{\mu(a)\,\pi(a)}{a}+\frac{\mu(b)\,\pi(b)}{b}+\frac{\mu(c)\,\pi(c)}{c}+\cdots=\omega(n),$$

$$\frac{\mu(a)\,\pi(a)}{a^2}+\frac{\mu(b)\,\pi(b)}{b^2}+\frac{\mu(c)\,\pi(c)}{c^2}+\cdots=\frac{\varphi(n)}{n},$$

$$\mu(a)\int a+\mu(b)\int b+\mu(c)\int c+\cdots=\pi(n).$$

Pour ne pas trop nous étendre sur le même sujet, nous nous bornons à citer quelques-unes des égalités dérivées de celles-ci. On a d'abord, en général,

$$\frac{\pi(a)\,\mu(a)}{a}\,F\left(\frac{n}{a}\right)+\frac{\pi(b)\,\mu(b)}{b}\,F\left(\frac{n}{b}\right)+\frac{\pi(c)\,\mu(c)}{c}\,F\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots$$
$$=\omega(a)f\left(\frac{n}{a}\right)+\omega(b)f\left(\frac{n}{b}\right)+\omega(c)f\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots;$$

et, en particulier :

$$A\mu\left(\frac{n}{A}\right)\pi\left(\frac{n}{A}\right)+B\mu\left(\frac{n}{B}\right)\pi\left(\frac{n}{B}\right)+C\mu\left(\frac{n}{C}\right)\pi\left(\frac{n}{C}\right)+\cdots=n,$$

$$\pi(a)\,\mu(a)+\pi(b)\,\mu(b)+\pi(c)\,\mu(c)+\cdots$$
$$=n\left[\frac{\pi(a)\,\varphi(a)}{a^2}\,\omega\left(\frac{n}{a}\right)+\frac{\pi(b)\,\varphi(b)}{b^2}\,\omega\left(\frac{n}{b}\right)+\frac{\pi(c)\,\varphi(c)}{c^2}\,\omega\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots\right],$$

$$\pi(a)\,\mu(a)\,\varphi\left(\frac{n}{a}\right)+\pi(b)\,\mu(b)\,\varphi\left(\frac{n}{b}\right)+\pi(c)\,\mu(c)\,\varphi\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots$$
$$=n\left[\frac{\pi(a)\,\mu(a)}{a^2}\,\omega\left(\frac{n}{a}\right)+\frac{\pi(b)\,\mu(b)}{b^2}\,\omega\left(\frac{n}{b}\right)+\frac{\pi(c)\,\mu(c)}{c^2}\,\omega\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots\right],$$

$$\frac{\mu(a)}{a}\,\pi(a)\,\pi\left(\frac{n}{a}\right)+\frac{\mu(b)}{b}\,\pi(b)\,\pi\left(\frac{n}{b}\right)+\frac{\mu(c)}{c}\,\pi(c)\,\pi\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots$$
$$=\mu(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right)\int a+\mu(b)\,\omega\left(\frac{n}{b}\right)\int b+\mu(c)\,\omega\left(\frac{n}{c}\right)\int c+\cdots,$$

etc., etc...

On a aussi

$$\frac{\pi(a)\,\mu(a)}{a^2}\,F\left(\frac{n}{a}\right)+\frac{\pi(b)\,\mu(b)}{b^2}\,F\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots$$
$$=\frac{\varphi(a)}{a}f\left(\frac{n}{a}\right)+\frac{\varphi(b)}{b}f\left(\frac{n}{b}\right)+\frac{\varphi(c)}{c}f\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots$$

En particulier :

$$\frac{\pi(a)\,\mu(a)}{a}\int\frac{n}{a}+\frac{\pi(b)\,\mu(b)}{b}\int\frac{n}{b}+\frac{\pi(c)\,\mu(c)}{c}\int\frac{n}{c}+\cdots=n.$$

On a, enfin,

$$\mu(a)\int a.\mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right)+\mu(b)\int b.\,\mathrm{F}\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots=\pi(a)f\left(\frac{n}{a}\right)+\pi(b)f\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots;$$

et, comme cas particuliers :

$$\mu(a)\int a.\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\mu(b)\int b.\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots=\pi(a)+\pi(b)+\pi(c)+\cdots,$$

$$a\,\mu(a)\int a\int\frac{n}{a}+b\,\mu(b)\int b\int\frac{n}{b}+\cdots=a\,\pi(a)+b\,\pi(b)+c\,\pi(c)+\cdots,$$

$$a^2\pi(a)\,\pi\left(\frac{n}{a}\right)\varphi\left(\frac{n}{a}\right)+b^2\pi(b)\,\pi\left(\frac{n}{b}\right)\varphi\left(\frac{n}{b}\right)+c^2\pi(c)\,\pi\left(\frac{n}{c}\right)\varphi\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots$$
$$=n\left[a\,\mu(a)\int a+b\,\mu(b)\int b+c\,\mu(c)\int c+\cdots\right],$$

$$\pi(a)\,\mu\left(\frac{n}{a}\right)+\pi(b)\,\mu\left(\frac{n}{b}\right)+\pi(c)\,\mu\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=\mu(n)\int n,$$

etc., etc...

Ne pouvant pas entrer dans de plus longs détails, nous laissons, au lecteur, le soin de faire les développements ultérieurs.

NOTE VII.

I. M. Liouville a donné, dans son *Journal* (2e série, t. II, p. 440), la relation

$$\frac{\varphi(1)}{1^m}+\frac{\varphi(2)}{2^m}+\frac{\varphi(3)}{3^m}+\frac{\varphi(4)}{4^m}+\cdots=\frac{S_{m-1}}{S_m}, \qquad (58)$$

dans laquelle

$$S_m=1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\cdots$$

On a, par exemple,

$$\varphi(1)+\frac{1}{8}\varphi(2)+\frac{1}{27}\varphi(3)+\frac{1}{64}\varphi(4)+\cdots=\frac{S_2}{S_3}.$$

Or, $S_2=\frac{\pi^2}{6}$, $S_3=1,202056...$ (d'après Lacroix). Le second membre est donc à peu près égal à 1,37. M. Liouville dit qu'il serait aisé de trouver les sommes des séries convergentes analogues, en suivant la marche qu'il a suivie pour démontrer la relation (58); mais il n'est jamais revenu sur ce sujet. Aussi, nous allons le reprendre, en utilisant les idées de M. Liouville. La méthode de cet illustre Géomètre n'est certainement pas rigoureuse : il serait facile, mais trop long, de la rendre telle.

II. Considérons les sommes

$$\frac{g(1)}{1^m}+\frac{g(2)}{2^m}+\frac{g(3)}{3^m}+\frac{g(4)}{4^m}+\cdots,$$

$$\frac{F(1)}{1^m}+\frac{F(2)}{2^m}+\frac{F(3)}{3^m}+\frac{F(4)}{4^m}+\cdots$$

Multiplions ces sommes entre elles, et réunissons tous les termes du produit, ayant même dénominateur n^m. Nous trouvons que la somme de ces termes est

$$\frac{g(a)}{a^m}\cdot\frac{F\left(\frac{n}{a}\right)}{\left(\frac{n}{a}\right)^m}+\frac{g(b)}{b^m}\cdot\frac{F\left(\frac{n}{b}\right)}{\left(\frac{n}{b}\right)^m}+\cdots=\frac{g(a)\,F\left(\frac{n}{a}\right)+g(b)\,F\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots}{n^m};$$

a, b, c, ... étant tous les diviseurs de n. Si l'on avait multiplié entre elles les séries

$$\frac{f(1)}{1^m}+\frac{f(2)}{2^m}+\frac{f(3)}{3^m}+\frac{f(4)}{4^m}+\cdots,$$

$$\frac{G(1)}{1^m}+\frac{G(2)}{2^m}+\frac{G(3)}{3^m}+\frac{G(4)}{4^m}+\cdots,$$

on aurait trouvé, comme terme général du produit,

$$\frac{f(a)\,G\left(\frac{n}{a}\right)+f(b)\,G\left(\frac{n}{b}\right)+f(c)\,G\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots}{n^m}.$$

Or, d'après les identités (17) et (44), ces deux résultats ne diffèrent pas, si les fonctions $F(x)$ et $G(x)$ dépendent convenablement de $f(x)$ et $g(x)$. On a donc :

$$\left[\frac{g(1)}{1^m}+\frac{g(2)}{2^m}+\frac{g(3)}{3^m}+\cdots\right]\left[\frac{F(1)}{1^m}+\frac{F(2)}{2^m}+\frac{F(3)}{3^m}+\cdots\right]$$
$$=\left[\frac{f(1)}{1^m}+\frac{f(2)}{2^m}+\frac{f(3)}{3^m}+\cdots\right]\left[\frac{G(1)}{1^m}+\frac{G(2)}{2^m}+\frac{G(3)}{3^m}+\cdots\right];$$

ou, sous forme abrégée,

$$\sum\frac{g(n)}{n^m}\cdot\sum\frac{F(n)}{n^m}=\sum\frac{f(n)}{n^m}\cdot\sum\frac{G(n)}{n^m}. \qquad (59)$$

D'après la démonstration précédente, si l'on a

$$\sum f(a)\,G\left(\frac{n}{a}\right)=H(n),$$

on a aussi

$$\sum \frac{f(n)}{n^m} \cdot \sum \frac{G(n)}{n^m} = \sum \frac{H(n)}{n^m}. \tag{60}$$

Plus particulièrement, on peut écrire :

$$S_m \sum \frac{f(n)}{n^m} = \sum \frac{F(n)}{n^m}. \tag{61}$$

III. Considérons d'abord la dernière relation.

1° Pour $f(n) = \varphi(n)$, $F(n) = n$, elle donne

$$S_m \sum \frac{\varphi(n)}{n^m} = \sum \frac{1}{n^{m-1}};$$

d'où

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^m} = \frac{S_{m-1}}{S_m}:$$

c'est la relation trouvée par M. Liouville.

2° Faisant $f(n) = 1$, $F(n) = \theta(n)$, on obtient

$$\sum \frac{\theta(n)}{n^m} = S_m^2, \tag{62}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\theta(1)}{1^m} + \frac{\theta(2)}{2^m} + \frac{\theta(3)}{3^m} + \frac{\theta(4)}{4^m} + \cdots = \left[1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \cdots\right]^2.$$

Par exemple, pour $m = 2$,

$$\theta(1) + \frac{1}{4}\theta(2) + \frac{1}{9}\theta(3) + \frac{1}{16}\theta(4) + \cdots = \frac{\pi^4}{36}. \quad \text{(à peu près 2,71)}$$

3° Soit $f(n) = n$, $F(n) = \int n$. Il vient

$$\sum \frac{\int n}{n^m} = S_m S_{m-1}$$

Par exemple,

$$\int 1 + \frac{1}{8}\int 2 + \frac{1}{27}\int 3 + \frac{1}{64}\int 4 + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.\ 1{,}202056.. \quad \text{(à peu près 1,98)}$$

4° Plus généralement, si $\theta_k(n)$ est la somme des puissances $k^{\text{èmes}}$ des diviseurs de n :

$$\frac{\theta_k(1)}{1^m}+\frac{\theta_k(2)}{2^m}+\frac{\theta_k(3)}{3^m}+\frac{\theta_k(4)}{4^m}+\cdots=S_mS_{m-k},$$

pourvu que $m>k+1$.

Exemple :

$$\theta_2(1)+\frac{\theta_2(2)}{16}+\frac{\theta_2(3)}{81}+\frac{\theta_2(4)}{256}+\cdots=\frac{\pi^6}{540}. \quad \text{(à peu près 1,78)}$$

5° Pour $f(n)=\log n$, $F(n)=\frac{\theta(n)}{2}\log n$, on trouve

$$\frac{\theta(1)\log 1}{1^m}+\frac{\theta(2)\log 2}{2^m}+\frac{\theta(3)\log 3}{3^m}+\frac{\theta(4)\log 4}{4^m}+\cdots$$
$$=2S_m\left(\frac{\log 1}{1^m}+\frac{\log 2}{2^m}+\frac{\log 3}{3^m}+\frac{\log 4}{4^m}+\cdots\right),$$

relation que l'on peut aussi obtenir en prenant les dérivées, par rapport à m, des deux membres de (62).

Par exemple, pour $m=2$,

$$\theta(1)\log 1+\frac{\theta(2)}{4}\log 2+\frac{\theta(3)}{9}\log 3+\frac{\theta(4)}{16}\log 4+\cdots$$
$$=\frac{\pi^2}{3}.\,0{,}937\,548\,254\,3\ldots \quad \text{(à peu près 3,08)}$$

6° $f(n)=\frac{\pi(n)\varphi(n)}{n^2}$, $F(n)=\frac{1}{n}$:

$$\frac{\pi(1)\varphi(1)}{1^m}+\frac{\pi(2)\varphi(2)}{2^m}+\frac{\pi(3)\varphi(3)}{3^m}+\cdots=\frac{S_{m-1}}{S_{m-2}}. \tag{63}$$

En particulier :

$$\pi(1)\varphi(1)+\frac{1}{16}\pi(2)\varphi(2)+\frac{1}{81}\pi(3)\varphi(3)+\frac{1}{256}\pi(4)\varphi(4)+\cdots$$
$$=\frac{6}{\pi^2}.\,1{,}202\,056\ldots \quad \text{(à peu près 0,73)}$$

La formule (63) peut aussi se déduire de la relation

$$a\varphi(a)\,\varphi\left(\frac{n}{a}\right)\pi\left(\frac{n}{a}\right)+b\varphi(b)\,\varphi\left(\frac{n}{b}\right)\pi\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots=0,$$

dans laquelle n surpasse 1 : pour $n=1$, le second membre est 1. Cette relation donne, d'après (60),

$$\sum \frac{n\varphi(n)}{n^m} \cdot \sum \frac{\pi(n)\,\varphi(n)}{n^m} = 1;$$

d'où l'on tire (63), en tenant compte de (58).

7° $f(n) = \lambda(n)$, $F(n) = \left| \begin{array}{ll} 1, & (n \text{ carré}) \\ 0. & (n \text{ non carré}) \end{array} \right.$

$$S_m \sum \frac{\lambda(n)}{n^m} = \sum \frac{1}{n^{2m}}; \tag{64}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1^m} - \frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} - \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} - \frac{1}{7^m} - \frac{1}{8^m} + \frac{1}{9^m} + \cdots = \frac{S_{2m}}{S_m}.$$

En particulier :

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \cdots$$
$$= \frac{\pi^2}{15}; \quad (\text{à peu près } 0{,}66)$$

résultat qu'il peut être intéressant de comparer à

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \cdots$$
$$= \frac{\pi^2}{6}. \quad (\text{à peu près } 1{,}64)$$

8° $f(n) = \omega(n)$, $F(n) = \theta(n^2)$:

$$S_m \sum \frac{\omega(n)}{n^m} = \sum \frac{\theta(n^2)}{n^m}. \tag{65}$$

9° $f(n) = \theta(n^2)$, $F(n) = \theta^2(n)$:

$$S_m \sum \frac{\theta(n^2)}{n^m} = \sum \frac{\theta^2(n)}{n^m}.$$

ou bien, d'après l'égalité précédente :

$$S_m^2 \sum \frac{\omega(n)}{n^m} = \sum \frac{\theta^2(n)}{n^m}. \tag{66}$$

10° $f(n) = \lambda(n)\omega(n)$, $F(n) = \lambda(n)$:

$$S_m \sum \frac{\lambda(n)\,\omega(n)}{n^m} = \sum \frac{\lambda(n)}{n^m};$$

ou bien, en tenant compte de (64):

$$\sum \frac{\lambda(n)\,\omega(n)}{n^m} = \frac{S_{2m}}{S_m^2}. \tag{67}$$

Par exemple, pour $m = 2$,

$$\frac{\omega(1)}{1} - \frac{\omega(2)}{4} - \frac{\omega(3)}{9} + \frac{\omega(4)}{16} - \frac{\omega(5)}{25} + \frac{\omega(6)}{36} - \frac{\omega(7)}{49} - \frac{\omega(8)}{64} + \frac{\omega(9)}{81} + \cdots = \frac{2}{5}.$$

Ce résultat est curieux, le second membre étant commensurable. On a, d'ailleurs, en général,

$$\frac{\omega(1)}{1^m} - \frac{\omega(2)}{2^m} - \frac{\omega(3)}{3^m} + \frac{\omega(4)}{4^m} - \cdots = 2\,\frac{\beta_{2m}}{\beta_m^2} \cdot \frac{(1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m)^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots 2m},$$

si m est pair. β_m est la valeur absolue du $m^{\text{ème}}$ des *nombres de Bernoulli,* définis par l'égalité symbolique

$$(B + 1)^p - B^p = p.$$

Pour vérifier le résultat ci-dessus, il suffit de se rappeler que, si m est pair, on a

$$S_m = \frac{\beta_m}{2} \cdot \frac{(2\pi)^m}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m}.$$

11° $f(n) = \lambda(n)\,\theta(n)$, $F(n) = \lambda(n)\,T(n)$. On trouve

$$S_m \sum \frac{\lambda(n)\,\theta(n)}{n^m} = \sum \frac{\lambda(n)\,T(n)}{n^m}.$$

Par exemple, pour $m = 2$,

$$\frac{\theta(1) - \frac{1}{4}\theta(2) - \frac{1}{9}\theta(3) + \frac{1}{16}\theta(4) - \cdots}{T(1) - \frac{1}{4}T(2) - \frac{1}{9}T(3) + \frac{1}{16}T(4) - \cdots} = \frac{6}{\pi^2}. \tag{67 bis}$$

12° Soit encore $f(n)=\mu(n)$. On a $F(n)=0$, excepté si $n=1$: dans ce cas, $F(1)=1$. L'égalité (61) devient

$$S_m \sum \frac{\mu(n)}{n^m} = 1;$$

d'où

$$\sum \frac{\mu(n)}{n^m} = \frac{1}{S_m}. \tag{68}$$

Si l'on désigne par u, v, w, ... tous les nombres premiers, autres que 1, l'égalité (68) se transforme en

$$\left(1-\frac{1}{u^m}\right)\left(1-\frac{1}{v^m}\right)\left(1-\frac{1}{w^m}\right)\cdots = \frac{1}{S_m}, \tag{69}$$

formule connue. En particulier,

$$\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\left(1-\frac{1}{v^2}\right)\left(1-\frac{1}{w^2}\right)\cdots = \frac{6}{\pi^2}. \tag{70}$$

13° Soit enfin $f(n)=\mu(n)\lambda(n)$, $F(n)=\omega(n)$. On trouve

$$S_m \sum \frac{\mu(n)\,\lambda(n)}{n^m} = \sum \frac{\omega(n)}{n^m}.$$

Cette relation équivaut à

$$\left(1+\frac{1}{u^m}\right)\left(1+\frac{1}{v^m}\right)\left(1+\frac{1}{w^m}\right)\cdots = \frac{1}{S_m}\sum \frac{\omega(n)}{n^m}. \tag{71}$$

IV. Prenons, maintenant, l'identité (60) :

$$\sum \frac{f(n)}{n^m} \cdot \sum \frac{G(n)}{n^m} = \sum \frac{H(n)}{n^m},$$

dans laquelle

$$H(n) = \sum f(a)\,G\left(\frac{n}{a}\right).$$

1° Soient $f(n)=\lambda(n)$, $G(n)=\omega(n)$. On a d'abord $H(n)=1$; puis

$$\sum \frac{\lambda(n)}{n^m} \cdot \sum \frac{\omega(n)}{n^m} = \sum \frac{1}{n^m};$$

d'où, en tenant compte de (64) :

$$\sum \frac{\omega(n)}{n^m} = \frac{S_m^2}{S_{2m}}. \tag{72}$$

Par exemple :

$$\omega(1) + \frac{1}{4}\,\omega(2) + \frac{1}{9}\,\omega(3) + \frac{1}{16}\,\omega(4) + \cdots = \frac{5}{2},$$

$$\omega(1) + \frac{1}{16}\,\omega(2) + \frac{1}{81}\,\omega(3) + \frac{1}{256}\,\omega(4) + \cdots = \frac{7}{6},$$

etc., etc...

Par la comparaison de (72) et (67), on trouve que

$$\left[\frac{\omega(1)}{1^m} + \frac{\omega(2)}{2^m} + \frac{\omega(3)}{3^m} + \cdots\right]\left[\frac{\omega(1)}{1^m} - \frac{\omega(2)}{2^m} - \frac{\omega(3)}{3^m} + \cdots\right] = 1,$$

relation que l'on peut, aussi, déduire de l'identité

$$\sum \lambda(a)\,\omega(a)\,\omega\left(\frac{n}{a}\right) = 0. \quad (n > 1)$$

En effet, au moyen de celle-ci, l'égalité (60) devient

$$\sum \frac{\lambda(n)\,\omega(n)}{n^m} \cdot \sum \frac{\omega(n)}{n^m} = 1.$$

2° Reprenons les égalités (65) et (66) :

$$\sum \frac{\theta(n^2)}{n^m} = S_m \sum \frac{\omega(n)}{n^m},$$

$$\sum \frac{\theta^2(n)}{n^m} = S_m^2 \sum \frac{\omega(n)}{n^m}.$$

Au moyen de (72), elles deviennent

$$\sum \frac{\theta(n^2)}{n^m} = \frac{S_m^3}{S_{2m}}, \tag{73}$$

$$\sum \frac{\theta^2(n)}{n^m} = \frac{S_m^4}{S_{2m}}. \tag{74}$$

Par exemple, pour $m = 2$:

$$\theta(1) + \frac{1}{4}\theta(4) + \frac{1}{9}\theta(9) + \frac{1}{16}\theta(16) + \cdots = \frac{5\pi^2}{12}, \quad \text{(à peu près 4,11)}$$

$$\theta^2(1) + \frac{1}{4}\theta^2(2) + \frac{1}{9}\theta^2(3) + \frac{1}{16}\theta^2(4) + \cdots = \frac{5\pi^4}{72}. \quad \text{(à peu près 6,76)}$$

3° Reprenant aussi l'égalité (71), on trouve, au moyen de (72),

$$\left(1 + \frac{1}{u^m}\right)\left(1 + \frac{1}{v^m}\right)\left(1 + \frac{1}{w^m}\right)\cdots = \frac{S_m}{S_{2m}}.$$

En particulier,

$$\left(1 + \frac{1}{u^2}\right)\left(1 + \frac{1}{v^2}\right)\left(1 + \frac{1}{w^2}\right)\cdots = \frac{15}{\pi^2}. \quad \text{(à peu près 1,52)}$$

4° $f(n) = \lambda(n)$, $G(n) = \theta(n)$, $H(n) = T(n)$:

$$\sum\frac{\lambda(n)}{n^m}\cdot\sum\frac{\theta(n)}{n^m} = \sum\frac{T(n)}{n^m};$$

ou bien, d'après (64) et (62)

$$\sum\frac{T(n)}{n^m} = S_m S_{2m}.$$

Lorsque $m = 2$:

$$T(1) + \frac{1}{4}T(2) + \frac{1}{9}T(3) + \frac{1}{16}T(4) + \cdots = \frac{\pi^6}{540}. \quad \text{(à peu près 1,78)}$$

V. Observons que, si l'on a

$$\sum f(a) = F(n),$$

on peut aussi écrire

$$\sum \lambda(a)\,\lambda\left(\frac{n}{a}\right) f(a) = \lambda(n)\,F(n);$$

puis, en vertu de (60),

$$\sum\frac{\lambda(n)}{n^m}\cdot\sum\frac{\lambda(n)\,f(n)}{n^m} = \sum\frac{\lambda(n)\,F(n)}{n^m},$$

ou

$$\frac{S_{2m}}{S_m}\sum\frac{\lambda(n)\,f(n)}{n^m}=\sum\frac{\lambda(n)\,F(n)}{n^m}.$$

1° Pour $f(n)=1$, $F(n)=\theta(n)$:

$$\sum\frac{\lambda(n)\,\theta(n)}{n^m}=\left(\frac{S_{2m}}{S_m}\right)^2. \qquad (75)$$

Exemple :

$$\theta(1)-\frac{1}{4}\theta(2)-\frac{1}{9}\theta(3)+\frac{1}{16}\theta(4)-\frac{1}{25}\theta(5)+\cdots=\frac{\pi^4}{225}. \quad \text{(à peu près 0,43)}$$

En comparant (75) avec (64), on voit que

$$\frac{\theta(1)}{1^m}-\frac{\theta(2)}{2^m}-\frac{\theta(3)}{3^m}+\frac{\theta(4)}{4^m}-\cdots=\left[\frac{1}{1^m}-\frac{1}{2^m}-\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}-\frac{1}{5^m}+\cdots\right]^2.$$

En comparant (75) avec (67^{bis}), on trouve

$$\sum\frac{\lambda(n)\,T(n)}{n^m}=\frac{S_{2m}^2}{S_m}.$$

Par exemple,

$$T(1)-\frac{1}{4}T(2)-\frac{1}{9}T(3)+\frac{1}{16}T(4)-\frac{1}{25}T(5)+\cdots=\frac{\pi^6}{1350}. \quad \text{(à peu près 0,71)}$$

2° $f(n)=n$, $F(n)=\int n$:

$$\sum\frac{\lambda(n)\int n}{n^m}=\frac{S_{2m}S_{2m-2}}{S_mS_{m-1}}.$$

En particulier,

$$\int 1-\frac{1}{8}\int 2-\frac{1}{27}\int 3+\frac{1}{64}\int 4-\frac{1}{125}\int 5+\cdots$$

$$=\frac{\pi^8}{14\,175\,.\,1{,}202\,056\ldots}. \quad \text{(à peu près 0,56)}$$

3° Plus généralement,

$$\sum\frac{\lambda(n)\,\theta_k(n)}{n^m}=\frac{S_{2m}S_{2m-2k}}{S_mS_{m-k}}. \qquad (m>k+1)$$

4° $f(n) = \varphi(n)$, $\mathrm{F}(n) = n$:

$$\sum \frac{\lambda(n)\varphi(n)}{n^m} = \frac{\mathrm{S}_{2m-2}\mathrm{S}_m}{\mathrm{S}_{2m}\mathrm{S}_{m-1}}.$$

Si $m = 3$:

$$\varphi(1) - \frac{1}{8}\varphi(2) - \frac{1}{27}\varphi(3) + \frac{1}{64}\varphi(4) - \frac{1}{125}\varphi(5) + \cdots$$

$$= \frac{63\,.\,1{,}202\,056\ldots}{\pi^4}. \quad \text{(à peu près 0,78)}$$

5° $f(n) = \omega(n)$, $\mathrm{F}(n) = \theta(n^2)$:

$$\frac{\mathrm{S}_{2m}}{\mathrm{S}_m}\sum \frac{\lambda(n)\omega(n)}{n^m} = \sum \frac{\lambda(n)\theta(n^2)}{n^m};$$

d'où, en tenant compte de (67),

$$\sum \frac{\lambda(n)\theta(n^2)}{n^m} = \frac{\mathrm{S}_{2m}^2}{\mathrm{S}_m^3}.$$

Par exemple :

$$\theta(1) - \frac{1}{4}\theta(4) - \frac{1}{9}\theta(9) + \frac{1}{16}\theta(16) - \frac{1}{25}\theta(25) + \cdots = \frac{2\pi^2}{75}. \quad \text{(à peu près 0,26)}$$

6° $f(n) = \theta(n^2)$, $\mathrm{F}(n) = \theta^2(n)$:

$$\frac{\mathrm{S}_{2m}}{\mathrm{S}_m}\sum \frac{\lambda(n)\theta(n^2)}{n^m} = \sum \frac{\lambda(n)\theta^2(n)}{n^m},$$

ou, d'après la dernière relation,

$$\sum \frac{\lambda(n)\theta^2(n)}{n^m} = \frac{\mathrm{S}_{2m}^3}{\mathrm{S}_m^4}.$$

En particulier, pour $m = 2$:

$$\theta^2(1) - \frac{1}{4}\theta^2(2) - \frac{1}{9}\theta^2(3) + \frac{1}{16}\theta^2(4) - \frac{1}{25}\theta^2(5) + \cdots = \frac{2\pi^4}{1125}. \quad \text{(à peu près 0,17)}$$

VI. Pour finir, nous ferons observer que l'on peut trouver autant de relations que l'on veut, en imaginant de nouvelles fonctions arithmétiques.

1° Soit, par exemple, $\gamma(x) = 1$, si x est premier, différent de 1, et $\gamma(x) = 0$, pour les autres valeurs de x.

On a

$$\gamma(a) + \gamma(b) + \gamma(c) + \cdots = \tau(n);$$

puis

$$S_m \sum \frac{\gamma(n)}{n^m} = \sum \frac{\tau(n)}{n^m};$$

c'est-à-dire

$$\sum \frac{1}{p^m} = \frac{1}{S_m} \sum \frac{\tau(n)}{n^m},$$

p devant être successivement remplacé par tous les nombres premiers, différents de 1. Par exemple

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{121} + \cdots = 1 + \frac{6}{\pi^2}\left[\frac{\tau(1)}{1} + \frac{\tau(2)}{4} + \frac{\tau(3)}{9} + \frac{\tau(4)}{16} + \cdots\right].$$

2° Soit encore $\gamma(x) = 1$, si x est une puissance $k^{\text{ème}}$ parfaite, et $\gamma(x) = 0$, dans les autres cas.

On a, en désignant par $T_k(n)$ le nombre des diviseurs de n, qui sont des puissances $k^{\text{èmes}}$ parfaites,

$$\gamma(a) + \gamma(b) + \gamma(c) + \cdots = T_k(n);$$

puis

$$S_m \sum \frac{\gamma(n)}{n^m} = \sum \frac{T_k(n)}{n^m};$$

d'où résulte

$$\sum \frac{T_k(n)}{n^m} = S_m S_{mk}.$$

Par exemple, pour $m = 2$:

$$T_k(1) + \frac{1}{4} T_k(2) + \frac{1}{9} T_k(3) + \frac{1}{16} T_k(4) + \cdots = \frac{4^{k-1}}{3} \beta_{2k} \cdot \frac{\pi^{2k+2}}{1.2.3 \ldots 2k};$$

etc., etc...

VII. M. Liouville démontre, à l'endroit cité, la formule

$$\frac{x\varphi(1)}{1-x}+\frac{x^2\varphi(2)}{1-x^2}+\frac{x^3\varphi(3)}{1-x^3}+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Considérons, en général, la somme

$$\frac{xf(1)}{1-x}+\frac{x^2f(2)}{1-x^2}+\frac{x^3f(3)}{1-x^3}+\cdots$$

En supposant x moindre que 1, en valeur absolue, on peut écrire

$$\frac{x^pf(p)}{1-x^p}=x^pf(p)+x^{2p}f(p)+x^{3p}f(p)+\cdots$$

Donnons à p les valeurs 1, 2, 3, 4, ..., et ajoutons toutes les égalités ainsi obtenues. Pour que x^n se trouve dans le développement de $\frac{x^pf(p)}{1-x^p}$, il faut et il suffit que p divise n. Ainsi, x^n se trouve dans les développements de

$$\frac{x^af(a)}{1-x^a},\quad\frac{x^bf(b)}{1-x^b},\quad\frac{x^cf(c)}{1-x^c},\ \ldots;$$

et, par conséquent, son coefficient est

$$f(a)+f(b)+f(c)+\cdots=\mathrm{F}(n).$$

On a donc

$$\frac{xf(1)}{1-x}+\frac{x^2f(2)}{1-x^2}+\frac{x^3f(3)}{1-x^3}+\cdots=x\mathrm{F}(1)+x^2\mathrm{F}(2)+x^3\mathrm{F}(3)+\cdots\quad(76)$$

Pour $f(x)=\varphi(x)$, on a $\mathrm{F}(x)=x$: l'identité (76) devient

$$\frac{x\varphi(1)}{1-x}+\frac{x^2\varphi(2)}{1-x^2}+\frac{x^3\varphi(3)}{1-x^3}+\cdots=x+2x^2+3x^3+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Pour $f(x)=\frac{\pi(x)\varphi(x)}{x^2}$, $\mathrm{F}(x)=\frac{1}{x}$:

$$\frac{\pi(1)\varphi(1)}{1}\cdot\frac{x}{1-x}+\frac{\pi(2)\varphi(2)}{4}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{\pi(3)\varphi(3)}{9}\cdot\frac{x^3}{1-x^3}+\cdots$$
$$=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{x}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3}{1-x^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{1-x^4}-\frac{4}{5}\cdot\frac{x^5}{1-x^5}$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{1-x^6}-\frac{6}{7}\cdot\frac{x^7}{1-x^7}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^8}{1-x^8}-\cdots=\log\frac{1}{1-x}.$$

Si l'on fait $f(x)=1$, on trouve la *série de Lambert :*

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\cdots=x\theta(1)+x^2\theta(2)+x^3\theta(3)+\cdots$$

Pour $f(x)=\lambda(x)$, $F(x)=\left|\begin{matrix}1 \text{ (}x\text{ carré)}\\ 0 \text{ (}x\text{ non carré)}\end{matrix}\right.$, l'identité (76) donne

$$\frac{x}{1-x}-\frac{x^2}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}-\frac{x^5}{1-x^5}+\cdots=x+x^4+x^9+x^{16}+\cdots$$

Pour $f(x)=\mu(x)$, on a simplement

$$\frac{x\mu(1)}{1-x}+\frac{x^2\mu(2)}{1-x^2}+\frac{x^3\mu(3)}{1-x^3}+\cdots=x,$$

ou bien, en désignant par $u, v, w, \ldots$ tous les nombres premiers, autres que 1,

$$\frac{x}{1-x}-\sum\frac{x^u}{1-x^u}+\sum\frac{x^{uv}}{1-x^{uv}}-\sum\frac{x^{uvw}}{1-x^{uvw}}+\cdots=x.$$

On trouve, de même :

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^4}{1-x^4}+\frac{x^9}{1-x^9}+\cdots=x\mathrm{T}(1)+x^2\mathrm{T}(2)+x^3\mathrm{T}(3)+\cdots,$$
$$\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^5}{1-x^5}+\frac{x^7}{1-x^7}+\frac{x^{11}}{1-x^{11}}+\cdots=x\tau(1)+x^2\tau(2)+x^3\tau(3)+\cdots,$$

etc., etc...

NOTE VIII.

I. Nous désignerons par (x, y) le plus grand commun diviseur de x, y, et par $f(x, y)$ une fonction quelconque du nombre (x, y). Cela posé, considérons la somme

$$\psi(1)f(n, 1) + \psi(2)f(n, 2) + \psi(3)f(n, 3) + \cdots + \psi(n)f(n, n).$$

Soient $a, b, c, \ldots$ tous les diviseurs de n : les nombres $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}, \ldots$ sont aussi ces diviseurs. Cherchons quels sont, parmi les nombres $(n, 1), (n, 2), (n, 3), \ldots, (n, n)$, ceux qui ont la valeur $\frac{n}{a}$. Pour que l'on ait $(n, p) = \frac{n}{a}$, il faut d'abord que p soit divisible par $\frac{n}{a}$. Donc $p = m . \frac{n}{a}$. Mais, d'après un théorème connu, les quotients de n et p par leur plus grand commun diviseur $\frac{n}{a}$, c'est-à-dire a et m, doivent être premiers entre eux. En outre, on doit avoir $p \leqq n$, d'où $m \leqq a$. Donc m doit être un quelconque des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ premiers avec a, et non supérieurs à ce nombre. Conséquemment,

$$\left(n, \frac{n\alpha}{a}\right) = \left(n, \frac{n\beta}{a}\right) = \left(n, \frac{n\gamma}{a}\right) = \cdots = \frac{n}{a}.$$

De là résulte que, dans la somme ci-dessus, le coefficient de $f\left(\frac{n}{a}\right)$ est

$$F(a) = \psi\left(\frac{n\alpha}{a}\right) + \psi\left(\frac{n\beta}{a}\right) + \psi\left(\frac{n\gamma}{a}\right) + \cdots \tag{77}$$

Par conséquent

$$\left.\begin{aligned}&\psi(1)f(n, 1) + \psi(2)f(n, 2) + \psi(3)f(n, 3) + \cdots + \psi(n)f(n, n)\\ &\qquad = F(a)f\left(\frac{n}{a}\right) + F(b)f\left(\frac{n}{b}\right) + F(c)f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

II. Si l'on fait $\psi(x) = 1$, l'égalité (77) montre que, dans ce cas, $F(a)$ est égal à la somme d'autant d'unités qu'il y a de nombres premiers avec a, et non supérieurs à ce nombre. Donc $F(a) = \varphi(a)$. L'identité (78) devient

$$\left.\begin{aligned} & f(n,1) + f(n,2) + f(n,3) + \cdots + f(n,n) \\ & = \varphi(a) f\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b) f\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c) f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

Si, au contraire, on suppose $f(x) = 1$, dans la même identité, celle-ci devient

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n) = F(a) + F(b) + F(c) + \cdots \quad (80)$$

Enfin, si l'on fait, à la fois, $\psi(x) = 1$, $f(x) = 1$, on trouve cette identité bien connue

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + \cdots = n.$$

III. Reprenons l'identité (79) et donnons-y à $f(x)$ différentes formes.

1° Pour $f(x) = x$, on trouve

$$(n,1) + (n,2) + (n,3) + \cdots + (n,n) = n\left[\frac{\varphi(a)}{a} + \frac{\varphi(b)}{b} + \frac{\varphi(c)}{c} + \cdots\right],$$

ou

$$(n,1) + (n,2) + (n,3) + \cdots + (n,n) = a\varphi\left(\frac{n}{a}\right) + b\varphi\left(\frac{n}{b}\right) + c\varphi\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

2° Pour $f(x) = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\frac{1}{(n,1)} + \frac{1}{(n,2)} + \frac{1}{(n,3)} + \cdots + \frac{1}{(n,n)} = \frac{1}{n}\left[a\varphi(a) + b\varphi(b) + c\varphi(c) + \cdots\right].$$

Si l'on désigne par $\sigma(a)$ la somme des nombres premiers avec a, et non supérieurs à ce nombre, on sait que $\sigma(a) = \frac{a\varphi(a)}{2}$, sauf pour $a = 1$. Dans ce cas, il faut encore ajouter $\frac{1}{2}$ au second membre. On a donc, en général, $a\varphi(a) = 2\sigma(a)$; et, en particulier, $1 . \varphi(1) = 2\sigma(1) - 1$. D'après cela, si l'on observe que l'un des nombres $a, b, c, \ldots$ doit nécessairement être égal à l'unité, la formule ci-dessus devient :

$$\frac{n}{(n,1)} + \frac{n}{(n,2)} + \frac{n}{(n,3)} + \cdots + \frac{n}{(n,n)} = 2\left[\sigma(a) + \sigma(b) + \sigma(c) + \cdots\right] - 1.$$

On peut encore l'écrire autrement, si l'on désigne par μ_p le plus petit multiple de n et de p. Un théorème connu donne $\mu_p = \frac{np}{(n, p)}$; d'où $\frac{n}{(n, p)} = \frac{1}{p}\mu_p$. Donc

$$1 + \mu_1 + \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{1}{3}\mu_3 + \cdots + \frac{1}{n}\mu_n = 2\left[\sigma(a) + \sigma(b) + \sigma(c) + \cdots\right].$$

Par conséquent :

« *Le double de la somme des entiers premiers avec les diviseurs de* n, *et non supérieurs à ces diviseurs, surpasse d'une unité la somme des plus petits nombres par lesquels il faut multiplier les nombres* 1, 2, 3, ..., n, *pour que les produits soient divisibles par* n. »

Par exemple, les plus petits nombres par lesquels il faut multiplier les nombres

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

pour que les produits soient divisibles par 6, sont, respectivement :

$$6, 3, 2, 3, 6, 1$$

dont la somme est 21. D'autre part, la somme des entiers premiers avec les diviseurs de 6, et non supérieurs à ces diviseurs, est

$$1 + 1 + (1 + 2) + (1 + 5) = 11,$$

dont le double est $21 + 1$.

3° $f(x) = \log x$. L'identité (79) donne

$$(n, 1).(n, 2).(n, 3)\ldots(n, n) = a^{\varphi\left(\frac{n}{a}\right)}.b^{\varphi\left(\frac{n}{b}\right)}.c^{\varphi\left(\frac{n}{c}\right)}\ldots,$$

formule que l'on peut aussi écrire ainsi :

$$\mu_1 . \frac{1}{2}\mu_2 . \frac{1}{3}\mu_3 \ldots \frac{1}{n}\mu_n = a^{\varphi(a)}.b^{\varphi(b)}.c^{\varphi(c)}\ldots \tag{81}$$

4° $f(x) = \int x$. Si l'on a égard à la relation

$$\varphi(a)\int\frac{n}{a} + \varphi(b)\int\frac{n}{b} + \varphi(c)\int\frac{n}{c} + \cdots = n\theta(n),$$

on trouve

$$\int(n,1)+\int(n,2)+\int(n,3)+\cdots+\int(n,n)=n\theta(n).$$

Or, $\int(n, p)$, somme des diviseurs de (n, p), est égale, d'après une propriété connue, à la somme de tous les diviseurs communs à n et à p. Donc

« *La somme de tous les diviseurs communs à* n, *et à chacun des nombres* 1, 2, 3, ..., n, *est égale à autant de fois* n, *que ce nombre admet de diviseurs.* »

Par exemple, la somme des diviseurs communs à 6, et à chacun des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, est

$$1+(1+2)+(1+3)+(1+2)+1+(1+2+3+6)=4.6.$$

5° $f(x)=\theta(x)$. En ayant égard à la relation

$$\varphi(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\varphi(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\varphi(c)\theta\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=\int n,$$

on trouve

$$\theta(n,1)+\theta(n,2)+\theta(n,3)+\cdots+\theta(n,n)=\int n.$$

Pour interpréter cette relation, observons que $\theta(n, p)$ étant le nombre des diviseurs de (n, p), représente aussi le nombre de tous les diviseurs communs à n et à p. Ceci nous permet d'énoncer la proposition suivante :

« *Le nombre de tous les diviseurs communs à* n *et à chacun des nombres* 1, 2, 3, ..., n, *est égal à la somme des diviseurs de* n. »

Par exemple, 4 admet avec 1 un seul diviseur commun; avec 2, deux diviseurs communs; avec 3, un diviseur commun; avec 4, trois diviseurs En tout, 4 admet, avec les nombres 1, 2, 3, 4, un nombre de diviseurs communs, égal à $1+2+1+3=7$; et ce nombre 7 est la somme $1+2+4$ des diviseurs de 4.

6° Les propositions précédentes peuvent être généralisées. Soit $\theta_k(x)$ la somme des puissances $k^{\text{èmes}}$ des diviseurs de x : on sait que

$$\varphi(a)\theta_k\left(\frac{n}{a}\right)+\varphi(b)\theta_k\left(\frac{n}{b}\right)+\varphi(c)\theta_k\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=n\theta_{k-1}(n).$$

Si l'on a égard à cette relation, l'identité (79) donne

$$\theta_k(n, 1) + \theta_k(n, 2) + \theta_k(n, 3) + \cdots + \theta_k(n, n) = n\theta_{k-1}(n).$$

Donc :

« *La somme des* k$^{\text{èmes}}$ *puissances des diviseurs communs à* n, *et à chacun des nombres* 1, 2, 3, ..., n, *est égale à* n *fois la somme des* (k — 1)$^{\text{èmes}}$ *puissances des diviseurs de* n. »

7° Pour $f(x) = \varphi(x)$, on a

$$\varphi(n, 1) + \varphi(n, 2) + \varphi(n, 3) + \cdots + \varphi(n, n)$$
$$= \varphi(a)\varphi\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)\varphi\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)\varphi\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots$$

8° $f(x) = \varphi\left(\frac{n}{x}\right)$:

$$\varphi(\mu_1) + \varphi\left(\frac{\mu_2}{2}\right) + \varphi\left(\frac{\mu_3}{3}\right) + \cdots + \varphi\left(\frac{\mu_n}{n}\right) = \varphi^2(a) + \varphi^2(b) + \varphi^2(c) + \cdots$$

9° $f(x) = \dfrac{1}{\varphi\left(\frac{n}{x}\right)}$:

$$\frac{1}{\varphi(\mu_1)} + \frac{1}{\varphi\left(\frac{\mu_2}{2}\right)} + \frac{1}{\varphi\left(\frac{\mu_3}{3}\right)} + \cdots + \frac{1}{\varphi\left(\frac{\mu_n}{n}\right)} = \theta(n).$$

10° Plus généralement, si l'on pose $f(x) = \dfrac{g\left(\frac{n}{x}\right)}{\varphi\left(\frac{n}{x}\right)}$, on obtient

$$\frac{g(\mu_1)}{\varphi(\mu_1)} + \frac{g\left(\frac{\mu_2}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{\mu_2}{2}\right)} + \frac{g\left(\frac{\mu_3}{3}\right)}{\varphi\left(\frac{\mu_3}{3}\right)} + \cdots + \frac{g\left(\frac{\mu_n}{n}\right)}{\varphi\left(\frac{\mu_n}{n}\right)} = g(a) + g(b) + g(c) + \cdots,$$

relation qui en donne beaucoup d'autres.

IV. Considérons, maintenant, l'identité (80).

1° $\psi(x) = \log x$. L'égalité (77) donne d'abord

$$\mathrm{F}(x) = \log\left(\frac{n}{x}\right)^{\varphi(x)} . \alpha\beta\gamma \ldots = \log\left(\frac{n}{x}\right)^{\varphi(x)} p(x),$$

si l'on désigne par $p(x)$ le produit des entiers premiers avec x, et non supérieurs à ce nombre. Cela posé, l'identité (80) donne

$$p(a).p(b).p(c)... = \frac{1.2.3...n}{n^n}.a^{\varphi(a)}.b^{\varphi(b)}.c^{\varphi(c)}...$$

Si l'on compare cette relation à la relation (81), on obtient

$$p(a).p(b).p(c)... = \frac{1}{n^n}.\mu_1\mu_2\mu_3...\mu_n.$$

2° $\psi(x) = x^2$. On a d'abord

$$F(x) = \frac{n^2}{x^2}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots).$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant les nombres premiers avec x, et non supérieurs à x. Or, on sait que

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \cdots = \frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{1}{2}\pi(x)\right]\varphi(x),$$

$\pi(x)$ étant le produit de tous les facteurs premiers de x, différents de l'unité, ce produit étant pris positivement ou négativement, suivant que le nombre des facteurs est pair ou impair. [Thacker, *Journal de Crelle*, t. XL, p. 89.] La dernière formule est en défaut pour $x = 1$. Dans ce cas, si l'on convient de supposer $\pi(1) = 1$, il faut encore ajouter $\frac{1}{2}$ au second membre. Donc, en général,

$$F(x) = \frac{1}{3}n^2\varphi(x) + \frac{1}{6}n^2.\frac{\pi(x)\varphi(x)}{x^2};$$

mais, en particulier,

$$F(1) = \frac{1}{3}n^2\varphi(1) + \frac{1}{6}n^2.\frac{\pi(1)\varphi(1)}{1^2} + \frac{1}{2}n^2.$$

Si l'on substitue dans l'égalité (80), celle-ci devient

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{6}n^2\left[\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2} + \frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2} + \frac{\pi(c)\varphi(c)}{c^2} + \cdots\right] + \frac{1}{2}n^2$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

ou bien, après toutes simplifications,

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2}+\frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2}+\frac{\pi(c)\varphi(c)}{c^2}+\cdots=\frac{1}{n}; \tag{24}$$

relation dont nous nous sommes déjà servi. Soit, par exemple, $n=18$. On doit avoir

$$\frac{\pi(1)\varphi(1)}{1}+\frac{\pi(2)\varphi(2)}{4}+\frac{\pi(3)\varphi(3)}{9}+\frac{\pi(6)\varphi(6)}{36}+\frac{\pi(9)\varphi(9)}{81}+\frac{\pi(18)\varphi(18)}{324}=\frac{1}{18}.$$

Or :

$$\pi(1)=1,\ \pi(2)=-2,\ \pi(3)=-3,\ \pi(6)=6,\ \pi(9)=-3,\ \pi(18)=6,$$
$$\varphi(1)=1,\ \varphi(2)=1,\quad \varphi(3)=2,\quad \varphi(6)=2,\ \varphi(9)=6,\quad \varphi(18)=6.$$

L'identité à vérifier se réduit donc à

$$1-\frac{2}{4}-\frac{6}{9}+\frac{12}{36}-\frac{18}{81}+\frac{36}{324}=\frac{1}{18}.$$

3° On arriverait au même résultat, en faisant $\psi(x)=x^3$, et en se servant de cette autre formule de M. Thacker :

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\cdots=\frac{1}{4}x\left[x^2+\pi(x)\right]\varphi(x).\quad (x>1)$$

Faisons, plus généralement, $\psi(x)=x^m$; et désignons par $\varphi_m(x)$ la somme des $m^{\text{èmes}}$ puissances des nombres non supérieurs à x, et premiers avec x. L'égalité (77) donne d'abord

$$\mathrm{F}(x)=\frac{n^m}{x^m}(\alpha^m+\beta^m+\gamma^m+\cdots)=\frac{n^m}{x^m}\varphi_m(x).$$

Puis, par substitution dans (80),

$$\left(\frac{n}{a}\right)^m\varphi_m(a)+\left(\frac{n}{b}\right)^m\varphi_m(b)+\left(\frac{n}{c}\right)^m\varphi_m(c)+\cdots=1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m, \tag{82}$$

ou

$$a^m\varphi_m\left(\frac{n}{a}\right)+b^m\varphi_m\left(\frac{n}{b}\right)+c^m\varphi_m\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=1^m+2^m+3^m+\cdots+n^m. \tag{83}$$

Cette élégante relation a été découverte, avant nous, par M. Liouville, qui l'a communiquée à l'*Académie des sciences de Paris*. [COMPTES RENDUS, t. XLIV.]

4° On sait que l'on peut écrire

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{m+1}\left[x^m + \frac{m-1}{2}\pi_m(x)\right]\varphi(x),$$

$\pi_m(x)$ désignant une fonction qui dépend des facteurs premiers de x, autres que 1. La formule est en défaut pour $x=1$. Dans ce cas, il faut ajouter $\frac{1}{2}$ au second membre, si l'on convient que $\pi_m(1)=1$. Cela posé, par substitution dans l'identité (82), on obtient, après quelques simplifications,

$$\frac{\pi_m(a)\varphi(a)}{a^m} + \frac{\pi_m(b)\varphi(b)}{b^m} + \frac{\pi_m(c)\varphi(c)}{c^m} + \cdots$$
$$= 2\frac{m+1}{m-1}\left[\frac{1+2^m+3^m+\cdots+n^m}{n^m} - \frac{n}{m+1} - \frac{1}{2}\right]$$

Si n augmente indéfiniment, le second membre tend vers zéro, mais son produit par n tend vers $\frac{m(m+1)}{6(m-1)}$. On a, en effet,

$$1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{m}{12}n^{m-1} + \cdots$$

V. On peut aussi considérer, comme corollaire de (80), l'identité (79) elle-même. Faisons, en effet, $\psi(x) = f(n, x)$. Nous aurons d'abord

$$F(x) = f\left(n, \frac{n\alpha}{x}\right) + f\left(n, \frac{n\beta}{x}\right) + f\left(n, \frac{n\gamma}{x}\right) + \cdots$$

Or,

$$\left(n, \frac{n\alpha}{x}\right) = \left(\frac{n}{x}\cdot x, \frac{n}{x}\cdot\alpha\right) = \frac{n}{x}(x, \alpha) = \frac{n}{x}; \tag{84}$$

car α étant premier avec x, on a $(x, \alpha) = 1$. Donc

$$F(x) = f\left(\frac{n}{x}\right) + f\left(\frac{n}{x}\right) + f\left(\frac{n}{x}\right) + \cdots = \varphi(x)f\left(\frac{n}{x}\right).$$

Par substitution dans l'identité (80), on obtient (79). Réciproquement, on pourrait, par la même voie, déduire (80) de (79). Mais nous allons faire un calcul plus général, pour montrer comment on peut, de l'une de ces identités, remonter à l'identité générale (78). A cet effet, posons $\psi(x)=\psi'(x)f(x)$, dans l'identité (80). Celle-ci devient

$$\left.\begin{aligned}&\psi'(1)f(1)+\psi'(2)f(2)+\psi'(3)f(3)+\cdots+\psi'(n)f(n)\\&\quad=\mathrm{F}(a)+\mathrm{F}(b)+\mathrm{F}(c)+\cdots,\end{aligned}\right\}\quad(85)$$

$\mathrm{F}(x)$ étant définie par l'égalité

$$\mathrm{F}(x)=\psi'\left(\frac{n\alpha}{x}\right)f\left(\frac{n\alpha}{x}\right)+\psi'\left(\frac{n\beta}{x}\right)f\left(\frac{n\beta}{x}\right)+\psi'\left(\frac{n\gamma}{x}\right)f\left(\frac{n\gamma}{x}\right)+\cdots$$

Si l'on pose $f(x)=f'(n,x)$, on aura, en vertu de (84),

$$\mathrm{F}(x)=\left[\psi'\left(\frac{n\alpha}{x}\right)+\psi'\left(\frac{n\beta}{x}\right)+\psi'\left(\frac{n\gamma}{x}\right)+\cdots\right]f'\left(\frac{n}{x}\right);$$

ou

$$\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}'(x)f'\left(\frac{n}{x}\right),$$

pourvu que l'on fasse

$$\mathrm{F}'(x)=\psi'\left(\frac{n\alpha}{x}\right)+\psi'\left(\frac{n\beta}{x}\right)+\psi'\left(\frac{n\gamma}{x}\right)+\cdots$$

L'identité (85) devient donc

$$\begin{aligned}&\psi'(1)f'(n,1)+\psi'(2)f'(n,2)+\psi'(3)f'(n,3)+\cdots+\psi'(n)f'(n,n)\\&\quad=\mathrm{F}'(a)f'\left(\frac{n}{a}\right)+\mathrm{F}'(b)f'\left(\frac{n}{b}\right)+\mathrm{F}'(c)f'\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots;\end{aligned}$$

et celle-ci ne diffère pas de l'identité générale (78).

VI. Les identités (79) et (80) sont des cas particuliers de (78), obtenus en attribuant, à l'une des fonctions $\psi(x)$, $f(x)$, une valeur constante. Mais on peut donner à ces fonctions une infinité d'autres formes, et les combiner entre elles d'une infinité de manières, ce qui donne naissance à un nombre infini de relations. Voici quelques exemples :

1° Soit $\psi(x) = x$. L'égalité (77) donne d'abord

$$F(x) = \frac{n}{x}(\alpha + \beta + \gamma + \cdots) = \frac{n}{x}\sigma(x).$$

Puis, substituant dans (78),

$$\begin{aligned} & f(n, 1) + 2f(n, 2) + 3f(n, 3) + \cdots + nf(n, n) \\ & \quad = n\left[\frac{\sigma(a)}{a} f\left(\frac{n}{a}\right) + \frac{\sigma(b)}{b} f\left(\frac{n}{b}\right) + \frac{\sigma(c)}{c} f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots\right], \end{aligned}$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned} & f(n, 1) + 2f(n, 2) + 3f(n, 3) + \cdots + nf(n, n) \\ & = \frac{n}{2}\left[\varphi(a) f\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b) f\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c) f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots\right] + \frac{n}{2} f(n). \end{aligned}\right\} \quad (86)$$

Par la comparaison de cette relation avec (79), on obtient celle-ci, assez remarquable :

$$\begin{aligned} & f(n, 1) + 2f(n, 2) + 3f(n, 3) + \cdots + nf(n, n) \\ & = \frac{n}{2}\left[f(n, 1) + f(n, 2) + f(n, 3) + \cdots + f(n, n)\right] + \frac{n}{2} f(n). \end{aligned}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} & (n, 1) + 2(n, 2) + 3(n, 3) + \cdots + n(n, n) \\ & = \frac{n}{2}\left[(n, 1) + (n, 2) + (n, 3) + \cdots + (n, n)\right] + \frac{n^2}{2}, \end{aligned}$$

$$(n, 1) \cdot (n, 2)^2 \cdot (n, 3)^3 \ldots (n, n)^n = \left[(n, 1) \cdot (n, 2) \cdot (n, 3) \ldots (n, n)\right]^{\frac{n}{2}} \cdot n^{\frac{n}{2}},$$

ou

$$\mu_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\mu_2\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\mu_3\right)^3 \cdots \left(\frac{1}{n}\mu_n\right)^n = \left[\mu_1 \cdot \frac{1}{2}\mu_2 \cdot \frac{1}{3}\mu_3 \cdots \frac{1}{n}\mu_n\right]^{\frac{n}{2}},$$

etc., etc...

2° Soit fait, dans (86), $f(x) = \frac{1}{x}$. On trouve

$$\frac{1}{(n, 1)} + \frac{2}{(n, 2)} + \frac{3}{(n, 3)} + \cdots + \frac{n}{(n, n)} = \frac{1}{2}\left[a\varphi(a) + b\varphi(b) + c\varphi(c) + \cdots\right] + \frac{1}{2},$$

ou

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_n = n\left[\sigma(a) + \sigma(b) + \sigma(c) + \cdots\right].$$

3° Pour $f(x) = \int x$, on a

$$\int(n,1) + 2\int(n,2) + 3\int(n,3) + \cdots + n\int(n,n) = \frac{n}{2}\left[n\theta(n) + \int n\right].$$

4° $f(x) = \theta(x)$:

$$\theta(n,1) + 2\theta(n,2) + 3\theta(n,3) + \cdots + n\theta(n,n) = \frac{n}{2}\left[\int n + \theta(n)\right].$$

5° $f(x) = \dfrac{1}{\varphi\left(\frac{n}{x}\right)}$:

$$\frac{1}{\varphi(\mu_1)} + \frac{2}{\varphi\left(\frac{1}{2}\mu_2\right)} + \frac{3}{\varphi\left(\frac{1}{3}\mu_3\right)} + \cdots + \frac{n}{\varphi\left(\frac{1}{n}\mu_n\right)} = \frac{n}{2}\left[\theta(n) + 1\right].$$

VII. Pour $\psi(x) = x^2$, l'identité (78) devient

$$\left.\begin{aligned}
&f(n,1) + 4f(n,2) + 9f(n,3) + \cdots + n^2 f(n,n)\\
&= \frac{1}{3}n^2\left[\varphi(a)f\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)f\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots\right]\\
&+ \frac{1}{6}n^2\left[\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2}f\left(\frac{n}{a}\right) + \frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2}f\left(\frac{n}{b}\right) + \frac{\pi(c)\varphi(c)}{c^2}f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots\right]\\
&+ \frac{1}{2}n^2 f(n).
\end{aligned}\right\} \quad (87)$$

Par exemple, pour $f(x) = \theta(x)$:

$$\theta(n,1) + 4\theta(n,2) + 9\theta(n,3) + \cdots + n^2\theta(n,n) = \frac{n^2}{2}\left[\int n + \theta(n)\right] - \frac{n(n-1)}{6}\int n.$$

Pour $f(x) = \int x$:

$$\begin{aligned}
&\int(n,1) + 4\int(n,2) + 9\int(n,3) + \cdots + n^2\int(n,n)\\
&= \frac{n^2}{2}\left[n\theta(n) + \int n\right] - \frac{n}{6}\left[n^2\theta(n) - (a^2 + b^2 + c^2 + \cdots)\right].
\end{aligned}$$

Si l'on fait $\psi(x) = x^3$, en observant que, dans ce cas, on a généralement,

$$F(x) = \frac{1}{4}n^3\varphi(x) + \frac{1}{4}n^3\cdot\frac{\pi(x)\varphi(x)}{x^2},$$

mais, en particulier,

$$F(1) = \frac{1}{4} n^3 \varphi(1) + \frac{1}{4} n^3 \cdot \frac{\pi(1)\varphi(1)}{1^2} + \frac{1}{2} n^3,$$

on trouve :

$$\left.\begin{aligned} & f(n, 1) + 8f(n, 2) + 27f(n, 3) + \cdots + n^3 f(n, n) \\ & = \frac{1}{4} n^3 \left[\varphi(a) f\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b) f\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c) f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots \right] \\ & + \frac{1}{4} n^3 \left[\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2} f\left(\frac{n}{a}\right) + \frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2} f\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots \right] + \frac{1}{2} n^3 f(n). \end{aligned}\right\} \quad (88)$$

Par exemple, pour $f(x) = \theta(x)$:

$$\begin{aligned} & \theta(n, 1) + 8\theta(n, 2) + 27\theta(n, 3) + \cdots + n^3 \theta(n, n) \\ & = \frac{n^3}{2} \left[\int n + \theta(n) \right] - \frac{n^2(n-1)}{4} \int n. \end{aligned}$$

Pour $f(x) = \int x$:

$$\begin{aligned} & \int(n, 1) + 8 \int(n, 2) + 27 \int(n, 3) + \cdots + n^3 \int(n, n) \\ & = \frac{n^3}{2} \left[n\theta(n) + \int n \right] - \frac{n^2}{4} \left[n^2 \theta(n) - (a^2 + b^2 + c^2 + \cdots) \right], \end{aligned}$$

etc., etc...

VIII. De la comparaison des formules (86), (87), (88), résulte

$$\left.\begin{aligned} & n\left[f(n, 1) + 2f(n, 2) + 3f(n, 3) + \cdots + nf(n, n) \right] \\ & + \frac{2}{n} \left[f(n, 1) + 8f(n, 2) + 27f(n, 3) + \cdots + n^3 f(n, n) \right] \\ & = 3\left[f(n, 1) + 4f(n, 2) + 9f(n, 3) + \cdots + n^2 f(n, n) \right]. \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

Par exemple, pour $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} & n\left[\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots + \mu_n \right] + \frac{2}{n} \left[\mu_1 + 4\mu_2 + 9\mu_3 + \cdots + n^2 \mu_n \right] \\ & = 3\left[\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots + n\mu_n \right]. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\mathrm{S}_m = \frac{1}{n^m}\left[f(n, 1) + 2^m f(n, 2) + 3^m f(n, 3) + \cdots + n^m f(n, n)\right],$$

on peut écrire ainsi la relation (89) :

$$\mathrm{S}_1 - 3\mathrm{S}_2 + 2\mathrm{S}_3 = 0.$$

Pour des formes particulières de $f(x)$, les identités (87) et (88) donnent lieu à ces autres relations :

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^3} + \frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^3} + \frac{\pi(c)\varphi(c)}{c^3} + \cdots$$
$$= \frac{6}{n^3}\left[(n, 1) + 4(n, 2) + 9(n, 3) + \cdots\right] - \frac{4}{n^2}\left[(n, 1) + 2(n, 2) + 3(n, 3) + \cdots\right] - 1,$$

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a} + \frac{\pi(b)\varphi(b)}{b} + \frac{\pi(c)\varphi(c)}{c} + \cdots$$
$$= \frac{6}{n^2}\left[\mu_1 + 2\mu_2 + 3\mu_3 + \cdots\right] - \frac{4}{n}\left[\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \cdots\right] - 1,$$

$$\mu_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\mu_2\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\mu_3\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{4}\mu_4\right)^{16} \cdots = \left[a^{\varphi(a) + \frac{\pi(a)\varphi(a)}{2a^2}} \cdot b^{\varphi(b) + \frac{\pi(b)\varphi(b)}{2b^2}} \cdot c^{\varphi(c) + \frac{\pi(c)\varphi(c)}{2c^2}} \cdots\right]^{\frac{1}{3}n^2},$$

etc., etc...

IX. Les relations précédentes ont lieu entre les plus grands communs diviseurs de n et de chacun des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. On peut transformer ces identités en y introduisant, au lieu des nombres $(n, 1), (n, 2), (n, 3), \ldots, (n, n)$, les nombres $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$, qui sont les plus petits multiples de n et de chacun des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$. A cet effet, considérons la somme

$$\psi(1)f(\mu_1) + \psi(2)f(\mu_2) + \psi(3)f(\mu_3) + \cdots + \psi(n)f(\mu_n).$$

On sait que $\mu_p = \frac{np}{(n, p)}$. On sait, en outre, que, si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont les nombres premiers avec x, et non supérieurs à x, on a $(n, p) = \frac{n}{x}$, pour les valeurs suivantes de p :

$$\frac{n\alpha}{x}, \quad \frac{n\beta}{x}, \quad \frac{n\gamma}{x}, \ldots$$

Les valeurs correspondantes de μ_p sont donc

$$n\alpha, \quad n\beta, \quad n\gamma, \ \ldots$$

Par conséquent, si l'on pose

$$F(x) = \psi\left(\frac{n\alpha}{x}\right)f(n\alpha) + \psi\left(\frac{n\beta}{x}\right)f(n\beta) + \psi\left(\frac{n\gamma}{x}\right)f(n\gamma) + \cdots,$$

on a

$$\psi(1)f(\mu_1)+\psi(2)f(\mu_2)+\psi(3)f(\mu_3)+\cdots+\psi(n)f(\mu_n)=F(a)+F(b)+F(c)+\cdots \quad (90)$$

a, b, c, ... étant tous les diviseurs de n.

Pour $f(x)=1$, on retrouve l'identité (80). Pour $\psi(x)=1$, on obtient cette nouvelle identité :

$$f(\mu_1) + f(\mu_2) + f(\mu_3) + \cdots + f(\mu_n) = F(a) + F(b) + F(c) + \cdots, \quad (91)$$

$F(x)$ étant définie par l'égalité

$$F(x) = f(n\alpha) + f(n\beta) + f(n\gamma) + \cdots$$

Par exemple, si $f(x) = x^2$:

$$\frac{6}{n^2}\left[\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \cdots + \mu_n^2\right] = 2\left[a^2\varphi(a) + b^2\varphi(b) + c^2\varphi(c) + \cdots\right]$$
$$+ \left[\pi(a)\varphi(a) + \pi(b)\varphi(b) + \cdots\right] + 3.$$

La relation (91) devient évidente, si l'on observe que les nombres premiers avec les diviseurs de n, et non supérieurs à ces diviseurs, sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres $\frac{\mu_1}{n}$, $\frac{\mu_2}{n}$, $\frac{\mu_3}{n}$, ... $\frac{\mu_n}{n}$, c'est-à-dire égaux aux plus petits nombres par lesquels il faut multiplier n, pour que les produits soient respectivement divisibles par 1, 2, 3, ..., n.

X. Parmi les nombreuses transformations des identités qui précèdent, signalons seulement la suivante. Reprenons la relation

$$\left.\begin{aligned} &f(n,1) + f(n,2) + f(n,3) + \cdots + f(n,n) \\ &\quad = \varphi(a)f\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)f\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)f\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (79)$$

et appliquons-la au nombre kn, dont nous désignerons par A, B, C, ... les diviseurs. Nous aurons

$$f(kn, 1) + f(kn, 2) + f(kn, 3) + \cdots + f(kn, kn)$$
$$= \varphi(A) f\left(\frac{kn}{A}\right) + \varphi(B) f\left(\frac{kn}{B}\right) + \varphi(C) f\left(\frac{kn}{C}\right) + \cdots$$

Si l'on change $f(x)$ en $f(n, x)$, cette identité devient

$$f[n, (kn, 1)] + f[n, (kn, 2)] + \cdots + f[n, (kn, kn)]$$
$$= \varphi(A) f\left(n, \frac{kn}{A}\right) + \varphi(B) f\left(n, \frac{kn}{B}\right) + \varphi(C) f\left(n, \frac{kn}{C}\right) + \cdots$$

Mais, premièrement,

$$[n, (kn, p)] = (n, kn, p) = [(n, kn), p] = (n, p);$$

et, en second lieu,

$$\left(n, \frac{kn}{A}\right) = \frac{1}{A}(An, kn) = \frac{n}{A}(A, k) = \frac{kn}{A'};$$

A′, B′, C′, ... étant les plus petits multiples de k et de chacun des nombres A, B, C, ... Au moyen de ces deux remarques, la dernière identité devient

$$f(n, 1) + f(n, 2) + f(n, 3) + \cdots + f(n, kn)$$
$$= \varphi(A) f\left(\frac{kn}{A'}\right) + \varphi(B) f\left(\frac{kn}{B'}\right) + \varphi(C) f\left(\frac{kn}{C'}\right) + \cdots$$

D'autre part, on sait que

$$(n, p) = (n, n + p) = (n, 2n + p) = \cdots = [n, (k - 1)n + p].$$

D'après cela, si l'on tient compte aussi de l'identité (79), la dernière identité se transforme en

$$\frac{1}{kn}\left[\varphi(A) f\left(\frac{kn}{A'}\right) + \varphi(B) f\left(\frac{kn}{B'}\right) + \cdots\right] = \frac{1}{n}\left[\varphi(a) f\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b) f\left(\frac{n}{b}\right) + \cdots\right]. \quad (92)$$

Dans celle-ci, les deux membres ont une forme analogue. Il suffit, pour passer du second au premier, de remplacer le nombre n par le nombre kn, et les diviseurs a, b, c, ... du premier de ces nombres, par les diviseurs A, B, C, ... du second. Seulement, dans le premier membre, il faut substituer, sous le signe f, aux nombres A, B, C, ..., certains multiples A′, B′, C′, ... de ces nombres, et ces multiples sont les plus petits qui soient divisibles par k.

On déduit de là que l'expression

$$\frac{1}{n}\left[\varphi(a)f\left(\frac{n}{a}\right)+\varphi(b)f\left(\frac{n}{b}\right)+\varphi(c)f\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots\right]$$

ne saurait être constante si $f(x)$ n'est elle-même constante. On sait, en effet, que, pour $f(x)=1$, cette expression est égale à l'unité.

Si $f(x)$ est une fonction décroissante, depuis $x=1$ jusqu'à $x=\infty$, on a

$$f\left(\frac{kn}{A'}\right)>f\left(\frac{kn}{A}\right);$$

et, par conséquent, la fonction

$$\frac{1}{n}\left[\varphi(a)f\left(\frac{n}{a}\right)+\varphi(b)f\left(\frac{n}{b}\right)+\varphi(c)f\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots\right]$$

est aussi décroissante; mais il n'est pas dit qu'elle le soit constamment; car sa variation est soumise aux irrégularités ordinaires des fonctions arithmétiques. On peut affirmer, par exemple, que la fonction dont nous parlons est constamment décroissante quand on attribue, à n, des valeurs en progression géométrique croissante, telles que 1, 2, 4, 8, 16, ... De tout cela résulte que, si $f(x)$ est une fonction décroissante, la fonction

$$\frac{1}{n}\left[\varphi(a)f\left(\frac{n}{a}\right)+\varphi(b)f\left(\frac{n}{b}\right)+\varphi(c)f\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots\right]$$

tend vers zéro ou vers une limite finie, lorsque n augmente indéfiniment. Par exemple, pour $f(x)=\frac{1}{x}$, on trouve que la fonction

$$\frac{1}{n^2}\left[a\varphi(a)+b\varphi(b)+c\varphi(c)+\cdots\right]$$

doit tendre vers une limite finie : on prouve aisément que cette limite est inférieure à 1. Si, au contraire, $f(x)$ croît depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \infty$, la fonction

$$\frac{1}{n}\sum \varphi(a) f\left(\frac{n}{a}\right)$$

croît aussi. Il en est ainsi, par exemple, de la fonction

$$\frac{\varphi(a)}{a} + \frac{\varphi(b)}{b} + \frac{\varphi(c)}{c} + \cdots$$

dont le rapport à $\log n$ tend vers $\frac{6}{\pi^2}$. Il en est de même, encore, de la fonction

$$\frac{1}{n}\left[\varphi(a)\int \frac{n}{a} + \varphi(b)\int \frac{n}{b} + \varphi(c)\int \frac{n}{c} + \cdots\right],$$

dont le rapport à $\log n$ tend vers l'unité, et aussi de la fonction

$$\frac{1}{n}\left[\varphi(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right) + \varphi(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right) + \varphi(c)\theta\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots\right],$$

qui augmente, mais non constamment, depuis 1 jusqu'à $\frac{\pi^2}{6}$.

Dans tous les cas, on voit que l'identité (92) peut servir à observer la variation de certaines fonctions arithmétiques.

Si, dans cette identité (92), on donne à $f(x)$ différentes formes, on trouve plusieurs relations, telles que les suivantes :

$$\frac{\varphi(a)}{a} + \frac{\varphi(b)}{b} + \frac{\varphi(c)}{c} + \cdots = \frac{\varphi(A)}{A'} + \frac{\varphi(B)}{B'} + \frac{\varphi(C)}{C'} + \cdots,$$

$$A'\varphi(A) + B'\varphi(B) + C'\varphi(C) + \cdots = k^2\left[a\varphi(a) + b\varphi(b) + c\varphi(c) + \cdots\right],$$

$$\varphi(A)\theta\left(\frac{kn}{A'}\right) + \varphi(B)\theta\left(\frac{kn}{B'}\right) + \varphi(C)\theta\left(\frac{kn}{C'}\right) + \cdots = k\int n,$$

$$\varphi(A)\int \frac{kn}{A'} + \varphi(B)\int \frac{kn}{B'} + \varphi(C)\int \frac{kn}{C'} + \cdots = kn\theta(n).$$

On a aussi

$$\frac{\varphi(\mathrm{A})\int\frac{kn}{\mathrm{A}}+\varphi(\mathrm{B})\int\frac{kn}{\mathrm{B}}+\varphi(\mathrm{C})\int\frac{kn}{\mathrm{C}}+\cdots}{\varphi(\mathrm{A})\int\frac{kn}{\mathrm{A}'}+\varphi(\mathrm{B})\int\frac{kn}{\mathrm{B}'}+\varphi(\mathrm{C})\int\frac{kn}{\mathrm{C}'}+\cdots}=\frac{\theta(kn)}{\theta(n)},$$

etc., etc...

NOTE IX.

I. Considérons la somme

$$g(\alpha)F(\alpha) + g(\beta)F(\beta) + g(\gamma)F(\gamma) + \cdots,$$

dans laquelle $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont tous les nombres premiers avec n, et non supérieurs à ce nombre. $g(x)$ est une fonction quelconque, et $F(x)$ est définie par l'égalité

$$F(x) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots. \tag{93}$$

$a, b, c, \ldots$ étant tous les diviseurs de x. Si x est premier avec n, il en est de même de ses diviseurs; d'où il résulte que les nombres $a, b, c, \ldots$ ne peuvent avoir des valeurs différentes de α, $\beta, \gamma, \ldots$ Cela posé, ordonnons la somme ci-dessus par rapport à $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), \ldots$ A cet effet, cherchons quel est, en général, le coefficient de $f(p)$, p étant égal à l'un quelconque des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Or, $f(p)$ se trouve dans $F(x)$, seulement si x est un multiple de p, premier avec n, et non supérieur à n. Mais, pour que mp soit premier avec n, il faut et il suffit que m soit premier avec n, vu que, par hypothèse, p est premier avec n. Donc $f(p)$ se trouve, dans $F(x)$, pour les valeurs suivantes de x:

$$p\alpha, p\beta, p\gamma, \ldots;$$

pourvu, toutefois, que l'on supprime, parmi ces valeurs, celles qui surpassent n. Le coefficient de $f(p)$ est donc

$$G(p) = g(p\alpha) + g(p\beta) + g(p\gamma) + \cdots \tag{94}$$

Ainsi

$$\left.\begin{aligned} &g(\alpha)F(\alpha) + g(\beta)F(\beta) + g(\gamma)F(\gamma) + \cdots \\ =\ &G(\alpha)f(\alpha) + G(\beta)f(\beta) + G(\gamma)f(\gamma) + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

En particulier, pour $f(x) = 1$, on a d'abord, en vertu de (93), $F(x) = \theta(x)$.

Puis, en tenant compte de (94), on trouve

$$\begin{aligned} g(\alpha)\theta(\alpha) + g(\beta)\theta(\beta) + g(\gamma)\theta(\gamma) + \cdots = {} & g(\alpha^2) + g(\alpha\beta) + g(\alpha\gamma) + \cdots + \\ & + g(\alpha\beta) + g(\beta^2) + g(\beta\gamma) + \cdots + \\ & + g(\alpha\gamma) + g(\beta\gamma) + g(\gamma^2) + \cdots + \\ & + \cdots \end{aligned}$$

Si l'on fait $g(x)=1$, $g(x)=x$, on peut énoncer la proposition suivante :

« *Si, après avoir effectué le produit*

$$(\alpha + \beta + \gamma + \cdots)(\alpha + \beta + \gamma + \cdots),$$

on y supprime tous les termes qui surpassent n, *le résultat égale* $\alpha\theta(\alpha) + \beta\theta(\beta) + \gamma\theta(\gamma) + \cdots$, *et le nombre des termes du résultat est* $\theta(\alpha) + \theta(\beta) + \theta(\gamma) + \cdots$ »

Par exemple, les nombres premiers avec 6, et non supérieurs à 6, sont 1 et 5. Le développement complet du produit

$$(1 + 5)(1 + 5)$$

est

$$1 + 5 + 5 + 25.$$

En effaçant 25, qui est le seul terme supérieur à 6, il reste trois termes, dont la somme est 11. Or :

$$\theta(1) + \theta(5) = 3,$$
$$\theta(1) + 5\theta(5) = 11.$$

Plus généralement, si u, v, w, ... sont les termes du développement du produit

$$(\alpha + \beta + \gamma + \cdots)(\alpha + \beta + \gamma + \cdots),$$

qui ne surpassent pas n, on a

$$g(u) + g(v) + g(w) + \cdots = g(\alpha)\theta(\alpha) + g(\beta)\theta(\beta) + g(\gamma)\theta(\gamma) + \cdots$$

Par exemple :

$$u^2 + v^2 + w^2 + \cdots = \alpha^2\theta(\alpha) + \beta^2\theta(\beta) + \gamma^2\theta(\gamma) + \cdots,$$

$$\frac{1}{\theta(u)} + \frac{1}{\theta(v)} + \frac{1}{\theta(w)} + \cdots = \varphi(n),$$

etc., etc...

II. Soit $\varphi(n, x)$ le nombre des entiers premiers avec n, et non supérieurs à x. Pour éviter toute confusion, nous rappellerons que $\varphi(n, x)$ avait, dans la Note précédente, une tout autre acception.

Parmi les entiers $p\alpha$, $p\beta$, $p\gamma$, ..., le nombre de ceux qui ne surpassent pas n, est évidemment $\varphi\left(n, \frac{n}{p}\right)$. Par suite, si l'on suppose $g(x) = 1$, l'égalité (94) donne $G(p) = \varphi\left(n, \frac{n}{p}\right)$, et l'identité (95) devient

$$f(\alpha)\varphi\left(n, \frac{n}{\alpha}\right) + f(\beta)\varphi\left(n, \frac{n}{\beta}\right) + f(\gamma)\varphi\left(n, \frac{n}{\gamma}\right) + \cdots$$
$$= F(\alpha) + F(\beta) + F(\gamma) + \cdots$$

Par exemple, pour $f(x) = 1$:

$$\varphi\left(n, \frac{n}{\alpha}\right) + \varphi\left(n, \frac{n}{\beta}\right) + \varphi\left(n, \frac{n}{\gamma}\right) + \cdots = \theta(\alpha) + \theta(\beta) + \theta(\gamma) + \cdots$$

Pour $f(x) = x$:

$$\alpha\varphi\left(n, \frac{n}{\alpha}\right) + \beta\varphi\left(n, \frac{n}{\beta}\right) + \gamma\varphi\left(n, \frac{n}{\gamma}\right) + \cdots = \int\alpha + \int\beta + \int\gamma + \cdots$$

Pour $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\frac{1}{\alpha}\varphi\left(n, \frac{n}{\alpha}\right) + \frac{1}{\beta}\varphi\left(n, \frac{n}{\beta}\right) + \frac{1}{\gamma}\varphi\left(n, \frac{n}{\gamma}\right) + \cdots$$
$$= \frac{1}{\alpha}\int\alpha + \frac{1}{\beta}\int\beta + \frac{1}{\gamma}\int\gamma + \cdots$$

Pour $f(x) = \varphi(x)$:

$$\varphi(\alpha)\varphi\left(n, \frac{n}{\alpha}\right) + \varphi(\beta)\varphi\left(n, \frac{n}{\beta}\right) + \varphi(\gamma)\varphi\left(n, \frac{n}{\gamma}\right) + \cdots = \frac{n\varphi(n)}{2},$$

etc., etc...

Ces relations ne sont pas bien intéressantes; mais elles prouvent que nos moyens de calcul peuvent être généralisés et étendus à des nombres quelconques, ayant, avec un nombre donné n, des liaisons déterminées.

NOTE X.

I. Soient a, b, c, ... tous les diviseurs de x. On a, identiquement,

$$f\left(\frac{x}{a}\right)+f\left(\frac{x}{b}\right)+f\left(\frac{x}{c}\right)+\cdots=f(a)+f(b)+f(c)+\cdots \tag{13}$$

Écrivons pour chacun des nombres 1, 2, 3, ..., n une égalité semblable, et ajoutons, membre à membre, toutes les égalités ainsi obtenues. Dans le second membre, $f(p)$ se trouve autant de fois que p admet de multiples non supérieurs à n, c'est-à-dire q_p fois. En d'autres termes, $f(p)$ se trouve, dans le second membre, chaque fois que x prend une des valeurs

$$p, 2p, 3p, \ldots, q_p p.$$

Le nombre p produira donc, dans le second membre, une somme égale à $q_p f(p)$; et, dans le premier, une somme

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{p}{p}\right)+f\left(\frac{2p}{p}\right)+f\left(\frac{3p}{p}\right)+\cdots+f\left(\frac{q_p p}{p}\right) \\ & \quad = f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(q_p). \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$F(x)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(x),$$

la dernière expression est $F(q_p)$. En donnant successivement à p les valeurs 1, 2, 3, ... n, on trouve donc la formule connue :

$$\left.\begin{aligned} & F(q_1)+F(q_2)+F(q_3)+\cdots+F(q_n) \\ & = q_1 f(1)+q_2 f(2)+q_3 f(3)+\cdots+q_n f(n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

II. Prenons, de même, l'identité plus générale

$$\left.\begin{aligned} &g(a)f\left(\frac{x}{a}\right)+g(b)f\left(\frac{x}{b}\right)+g(c)f\left(\frac{x}{c}\right)+\cdots\\ &=f(a)g\left(\frac{x}{a}\right)+f(b)g\left(\frac{x}{b}\right)+f(c)g\left(\frac{x}{c}\right)+\cdots \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Si l'on fait successivement $x=1, 2, 3, \ldots, n$, et si l'on ajoute toutes les égalités obtenues, on ne trouve $g(p)$, dans le premier membre, que pour les valeurs suivantes de x :

$$p, 2p, 3p, \ldots, q_p p.$$

Le coefficient de $g(p)$, dans le premier membre, est donc

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(q_p),$$

c'est-à-dire $F(q_p)$, si l'on pose

$$F(x)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(x).$$

On prouverait de même que, dans le second membre, le coefficient de $f(p)$ est $G(q_p)$, si l'on pose

$$G(x)=g(1)+g(2)+g(3)+\cdots+g(x).$$

Donc

$$\left.\begin{aligned} &g(1)F(q_1)+g(2)F(q_2)+g(3)F(q_3)+\cdots+g(n)F(q_n)\\ &=f(1)G(q_1)+f(2)G(q_2)+f(3)G(q_3)+\cdots+f(n)G(q_n). \end{aligned}\right\} (10)$$

III. Ce procédé est applicable à toute relation entre un nombre n et ses diviseurs a, b, c, ... Ainsi, la relation

$$\varphi(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\varphi(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\varphi(c)\theta\left(\frac{n}{c}\right)+\cdots=\int n$$

donne

$$\varphi(1)\,t(q_1)+\varphi(2)\,t(q_2)+\varphi(3)\,t(q_3)+\cdots+\varphi(n)\,t(q_n)=S(n),$$

si l'on désigne par $t(x)$ le nombre des diviseurs des x premiers nombres naturels, et par $S(x)$ la somme de ces mêmes diviseurs. De même, l'identité

$$\varphi(a)\int\frac{n}{a}+\varphi(b)\int\frac{n}{b}+\varphi(c)\int\frac{n}{c}+\cdots=n\theta(n)$$

donne

$$\begin{aligned}\varphi(1)\,S(q_1)+\varphi(2)\,S(q_2)+\varphi(3)\,S(q_3)+\cdots+\varphi(n)\,S(q_n)&\\=\theta(1)+2\theta(2)+3\theta(3)+\cdots+n\theta(n).&\end{aligned}$$

Remarquons, d'ailleurs, que l'on a

$$\begin{gathered}t(n)=q_1+q_2+q_3+\cdots+q_n,\\ S(n)=q_1+2q_2+3q_3+\cdots+nq_n,\\ \theta(1)+2\theta(2)+3\theta(3)+\cdots+n\theta(n)\\ =\frac{1}{2}\left[q_1(q_1+1)+2q_2(q_2+1)+3q_3(q_3+1)+\cdots\right].\end{gathered}$$

Les identités

$$a\theta(a)+b\theta(b)+c\theta(c)+\cdots=a\int\frac{n}{a}+b\int\frac{n}{b}+c\int\frac{n}{c}+\cdots,$$

$$a\int a+b\int b+c\int c+\cdots=a^2\int\frac{n}{a}+b^2\int\frac{n}{b}+c^2\int\frac{n}{c}+\cdots,$$

donnent, respectivement :

$$q_1\theta(1)+2q_2\theta(2)+3q_3\theta(3)+\cdots=S(q_1)+2S(q_2)+3S(q_3)+\cdots,$$

$$q_1\int 1+2q_2\int 2+3q_3\int 3+\cdots=S(q_1)+4S(q_2)+9S(q_3)+\cdots,$$

ou

$$\begin{gathered}q_1\theta(1)+2q_2\theta(2)+3q_3\theta(3)+\cdots\\ =\frac{1}{2}\left[q_1(q_1+1)\int 1+q_2(q_2+1)\int 2+q_3(q_3+1)\int 3+\cdots\right],\\ q_1\int 2+2q_2\int 2+3q_3\int 3+\cdots\\ =\frac{1}{6}\left[q_1(q_1+1)(2q_1+1)\int 1+q_2(q_2+1)(2q_2+1)\int 2+\cdots\right];\end{gathered}$$

etc., etc...

IV. Reprenons l'identité (13), et ne considérons, dans le premier membre, que les diviseurs a de x, satisfaisant à la condition

$$na^{\alpha} - a^{\alpha+\beta} \geqq x^{\alpha}. \tag{96}$$

Nous appellerons *limitation* toute relation analogue à la précédente. Cela posé, pour que l'identité (13) subsiste, il faut et il suffit que les diviseurs $\frac{x}{a}$, du second membre, satisfassent à la même condition. Ainsi

$$n \cdot \frac{x^{\alpha}}{a^{\alpha}} - \frac{x^{\alpha+\beta}}{a^{\alpha+\beta}} \geqq x^{\alpha},$$

ou

$$na^{\beta} - a^{\alpha+\beta} \geqq x^{\beta}. \tag{97}$$

Faisons successivement $x = 1, 2, 3, \ldots, n$, dans (13), et ajoutons toutes les égalités obtenues. $f(p)$ ne se trouve, dans le premier membre, que pour les valeurs de x, multiples de p, c'est-à-dire pour

$$x = p,\ 2p,\ 3p,\ \ldots,\ mp,\ \ldots$$

Mais p doit satisfaire à la limitation (96) : on doit donc avoir

$$np^{\alpha} - p^{\alpha+\beta} \geqq m^{\alpha} p^{\alpha},$$

c'est-à-dire

$$m \leqq \sqrt[\alpha]{n - p^{\beta}}.$$

Il en résulte que $f(p)$ est pris un nombre de fois indiqué par $\left[\sqrt[\alpha]{n - p^{\beta}}\right]$, si l'on convient de désigner par $[z]$ le plus grand entier contenu dans z. Dans le second membre, $f\left(\frac{x}{p}\right)$ donnera lieu à la somme

$$f\left(\frac{p}{p}\right) + \left(\frac{2p}{p}\right) + f\left(\frac{3p}{p}\right) + \cdots + f\left(\frac{mp}{p}\right)$$
$$= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(m) = \mathrm{F}(m),$$

dans laquelle m est le plus grand entier satisfaisant à la limitation

$$np^{\beta} - p^{\alpha+\beta} \leqq m^{\beta} p^{\beta},$$

d'où l'on tire

$$m \leqq \sqrt[\beta]{n - p^{\alpha}}.$$

On a donc

$$\sum \left[\sqrt[\alpha]{n-p^\beta}\right] f(p) = \sum \mathrm{F}\left[\sqrt[\beta]{n-p^\alpha}\right]. \tag{98}$$

En particulier, pour $f(x)=1$, $\mathrm{F}(x)=x$:

$$\begin{aligned}&\left[\sqrt[\alpha]{n-1^\beta}\right]+\left[\sqrt[\alpha]{n-2^\beta}\right]+\left[\sqrt[\alpha]{n-3^\beta}\right]+\cdots\\ =&\left[\sqrt[\beta]{n-1^\alpha}\right]+\left[\sqrt[\beta]{n-2^\alpha}\right]+\left[\sqrt[\beta]{n-3^\alpha}\right]+\cdots\end{aligned}$$

Prenons $\alpha=\beta=k$, et désignons par r_p le plus grand nombre entier contenu dans $\sqrt[k]{n-p^k}$. L'identité (98) devient

$$\mathrm{F}(r_1)+\mathrm{F}(r_2)+\mathrm{F}(r_3)+\cdots=r_1 f(1)+r_2 f(2)+r_3 f(3)+\cdots,$$

formule démontrée précédemment. Si, au lieu de prendre l'identité (15), on prend l'identité plus générale

$$\left.\begin{aligned}&g(a)f\left(\frac{x}{a}\right)+g(b)f\left(\frac{x}{b}\right)+g(c)f\left(\frac{x}{c}\right)+\cdots\\ =&f(a)g\left(\frac{x}{a}\right)+f(b)g\left(\frac{x}{b}\right)+f(c)g\left(\frac{x}{c}\right)+\cdots,\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

on arrive, de la même manière, à la relation

$$\sum g(p)\,\mathrm{F}\left[\sqrt[\alpha]{n-p^\beta}\right]=\sum f(p)\,\mathrm{G}\left[\sqrt[\beta]{n-p^\alpha}\right].$$

En particulier, si $\alpha=\beta=k$, et $r_p=\left[\sqrt[k]{n-p^k}\right]$, on retrouve la formule

$$\sum g(p)\,\mathrm{F}(r_p)=\sum f(p)\,\mathrm{G}(r_p).$$

V. On obtient une foule d'autres relations, quand on assujettit les diviseurs a, b, c, ..., de x, à satisfaire à des limitations analogues à (96). Soit, par exemple, la limitation

$$na^{\alpha-\beta} \overline{\overline{>}}\, x^\alpha,$$

et la limitation corrélative, obtenue en changeant a en $\frac{x}{a}$:

$$na^{\beta-\alpha} \overline{\overline{>}}\, x^\beta.$$

La première donne, en faisant $a = p$, $x = mp$:

$$m \overline{\overline{<}} \sqrt[\alpha]{\frac{n}{p^\beta}}.$$

La seconde :

$$m \overline{\overline{<}} \sqrt[\beta]{\frac{n}{p^\alpha}}.$$

On a donc

$$\sum g(p) \mathrm{F}\left[\sqrt[\alpha]{\frac{n}{p^\beta}}\right] = \sum f(p) \mathrm{G}\left[\sqrt[\beta]{\frac{n}{p^\alpha}}\right].$$

Par exemple, pour $g(x) = f(x) = 1$:

$$\left[\sqrt[\alpha]{\frac{n}{1^\beta}}\right] + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{n}{2^\beta}}\right] + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{n}{3^\beta}}\right] + \cdots$$
$$= \left[\sqrt[\beta]{\frac{n}{1^\alpha}}\right] + \left[\sqrt[\beta]{\frac{n}{2^\alpha}}\right] + \left[\sqrt[\beta]{\frac{n}{3^\alpha}}\right] + \cdots$$

VI. Considérons la limitation

$$a \overline{\overline{>}} \alpha x - \beta n,$$

et la limitation corrélative

$$x \overline{\overline{>}} a(\alpha x - \beta n).$$

Après avoir remplacé a par p, x par mp, on tire, de ces limitations :

$$m \overline{\overline{<}} \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{n}{p} + \frac{1}{\alpha},$$

$$m \overline{\overline{<}} \frac{\beta n}{\alpha p - 1}.$$

Donc

$$\sum g(p) \mathrm{F}\left[\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{n}{p} + \frac{1}{\alpha}\right] = \sum f(p) \mathrm{G}\left[\frac{\beta n}{\alpha p - 1}\right].$$

En particulier, pour $g(x) = f(x) = 1$, on a

$$\left.\begin{array}{l}\left[\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{n}{1}+\frac{1}{\alpha}\right]+\left[\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{n}{2}+\frac{1}{\alpha}\right]+\left[\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{n}{3}+\frac{1}{\alpha}\right]+\cdots\\ \qquad=\left[\frac{\beta n}{\alpha-1}\right]+\left[\frac{\beta n}{2\alpha-1}\right]+\left[\frac{\beta n}{3\alpha-1}\right]+\cdots\end{array}\right\}\quad(99)$$

Par exemple, si $\alpha = \beta = 2$:

$$\left[\frac{n}{1}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}+\frac{1}{2}\right]+\cdots=\left[\frac{2n}{1}\right]+\left[\frac{2n}{3}\right]+\left[\frac{2n}{5}\right]+\cdots$$

Ainsi, pour $n = 3$, on doit avoir

$$\left[\frac{7}{2}\right]+[2]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{5}{4}\right]+\left[\frac{11}{6}\right]+[1]=\left[\frac{6}{1}\right]+\left[\frac{6}{3}\right]+\left[\frac{6}{5}\right],$$

c'est-à-dire

$$3+2+1+1+1+1=6+2+1;$$

ce qui est exact.

Faisons encore, dans l'identité (99), $\alpha = \beta = -\frac{1}{k}$. Celle-ci devient

$$\left.\begin{array}{l}n-[k]+\left[\frac{n}{2}-k\right]+\left[\frac{n}{3}-k\right]+\cdots\\ \qquad=\left[\frac{n}{1+k}\right]+\left[\frac{n}{2+k}\right]+\left[\frac{n}{3+k}\right]+\cdots\end{array}\right\}\quad(100)$$

Nous utiliserons cette dernière identité.

VII. Soient les limitations corrélatives :

$$na^{\alpha-\beta}-a^{\alpha}\overline{\overline{>}}\,x^{\alpha},$$
$$na^{\beta}\,\overline{\overline{>}}\,(a^{\alpha}+1)\,x^{\beta}.$$

On en déduit :

$$m\,\overline{\overline{<}}\,\sqrt[\alpha]{\frac{n-p^{\beta}}{p^{\beta}}},$$

$$m\,\overline{\overline{<}}\,\sqrt[\beta]{\frac{n}{p^{\alpha}-1}}.$$

Donc

$$\sum g(p)\mathrm{F}\left[\sqrt[\alpha]{\frac{n}{p^\beta}-1}\right]=\sum f(p)\mathrm{G}\left[\sqrt[\beta]{\frac{n}{p^\alpha+1}}\right].$$

En particulier, pour $g(x)=f(x)=1$:

$$\left[\sqrt[\alpha]{\frac{n}{1^\beta}-1}\right]+\left[\sqrt[\alpha]{\frac{n}{2^\beta}-1}\right]+\left[\sqrt[\alpha]{\frac{n}{3^\beta}-1}\right]+\cdots$$
$$=\left[\sqrt[\beta]{\frac{n}{1^\alpha+1}}\right]+\left[\sqrt[\beta]{\frac{n}{2^\alpha+1}}\right]+\left[\sqrt[\beta]{\frac{n}{3^\alpha+1}}\right]+\cdots$$

Par exemple, si $\beta=1$, on trouve, en donnant successivement à α les valeurs 2, 3, 4, ... :

$$\left[\sqrt{\frac{n-1}{1}}\right]+\left[\sqrt{\frac{n-2}{2}}\right]+\left[\sqrt{\frac{n-3}{3}}\right]+\cdots$$
$$=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{10}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]+\cdots,$$
$$\left[\sqrt[3]{\frac{n-1}{1}}\right]+\left[\sqrt[3]{\frac{n-2}{2}}\right]+\left[\sqrt[3]{\frac{n-3}{3}}\right]+\cdots$$
$$=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{28}\right]+\left[\frac{n}{65}\right]+\cdots,$$
$$\left[\sqrt[4]{\frac{n-1}{1}}\right]+\left[\sqrt[4]{\frac{n-2}{2}}\right]+\left[\sqrt[4]{\frac{n-3}{3}}\right]+\cdots$$
$$=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]+\left[\frac{n}{82}\right]+\left[\frac{n}{257}\right]+\cdots;$$

etc., etc...

VIII. Soit

$$a \geqq \alpha x^2-\beta n x.$$

En suivant toujours la même marche, on trouve, d'une part,

$$m \leqq \frac{\beta n+\sqrt{\beta^2 n^2+4\alpha p}}{2\alpha p};$$

et, d'autre part,

$$m \overline{\gtrless} \frac{\beta np + 1}{\alpha p^2}.$$

Donc, en ne considérant que le cas particulier de $g(x) = f(x) = 1$:

$$\left[\frac{\beta n + \sqrt{\beta^2 n^2 + 4\alpha}}{2\alpha}\right] + \left[\frac{\beta n + \sqrt{\beta^2 n^2 + 8\alpha}}{4\alpha}\right] + \left[\frac{\beta n + \sqrt{\beta^2 n^2 + 12\alpha}}{6\alpha}\right] + \cdots$$
$$= \left[\frac{\beta n + 1}{\alpha}\right] + \left[\frac{2\beta n + 1}{4\alpha}\right] + \left[\frac{3\beta n + 1}{9a}\right] + \cdots$$

Par exemple, pour $\alpha = \beta = 1$:

$$\left[\frac{n + \sqrt{n^2 + 4}}{2}\right] + \left[\frac{n + \sqrt{n^2 + 8}}{4}\right] + \left[\frac{n + \sqrt{n^2 + 12}}{6}\right] + \cdots$$
$$= \left[\frac{n}{1} + \frac{1}{1}\right] + \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{n}{3} + \frac{1}{9}\right] + \cdots$$

Pour $\alpha = \beta = 4$:

$$\left[\frac{n + \sqrt{n^2 + 1}}{2}\right] + \left[\frac{n + \sqrt{n^2 + 2}}{4}\right] + \left[\frac{n + \sqrt{n^2 + 3}}{6}\right] + \cdots$$
$$= \left[\frac{n}{1} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{16}\right] + \left[\frac{n}{3} + \frac{1}{36}\right] + \cdots$$

etc., etc...

IX. En partant de la limitation

$$x^2 \overline{\gtrless} na^2 - (2a - 1)^2 a^2,$$

on arrive à l'identité

$$\left[\frac{1 + \sqrt{n - 1}}{2}\right] + \left[\frac{1 + \sqrt{n - 4}}{2}\right] + \left[\frac{1 + \sqrt{n - 9}}{2}\right] + \cdots$$
$$= \left[\sqrt{n - 1}\right] + \left[\sqrt{n - 9}\right] + \left[\sqrt{n - 25}\right] + \cdots$$

En partant de la limitation

$$x^2 \overline{\gtrless} na^2 - ka^4,$$

on obtient

$$[\sqrt{n-k}] + [\sqrt{n-4k}] + [\sqrt{n-9k}] + \cdots$$
$$= \left[\sqrt{\frac{n-1}{k}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n-4}{k}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n-9}{k}}\right] + \cdots$$

Ainsi, pour $k=2$:

$$[\sqrt{n-2}] + [\sqrt{n-8}] + [\sqrt{n-18}] + \cdots$$
$$= \left[\sqrt{\frac{n-1}{2}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n-4}{2}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n-9}{2}}\right] + \cdots$$

Par exemple, pour $n=20$, on doit avoir

$$[\sqrt{18}]+[\sqrt{12}]+[\sqrt{2}]=\left[\sqrt{\frac{19}{1}}\right]+[\sqrt{8}]+\left[\sqrt{\frac{11}{2}}\right]+[\sqrt{2}],$$

c'est-à-dire

$$4+3+1=3+2+2+1;$$

ce qui est exact.

X. Nous allons généraliser toutes ces identités, en partant de la limitation générale

$$x \overline{\overline{<}}\, a\psi(a),$$

à laquelle correspond, par le changement de a en $\frac{x}{a}$,

$$a \overline{\overline{<}}\, \psi\left(\frac{x}{a}\right).$$

Si l'on remplace a par p, x par mp, ces limitations deviennent

$$m \overline{\overline{<}}\, \psi(p), \quad p \overline{\overline{<}}\, \psi(m).$$

Supposons la fonction $\psi(x)$ telle que, de la dernière limitation, on puisse tirer

$$m \overline{\overline{<}}\, \psi'(p).$$

Alors, si l'on désigne par q_p, q'_p les plus grands entiers contenus dans $\psi(p)$, $\psi'(p)$, on peut évidemment écrire

$$\left.\begin{aligned} &g(1)F(q_1) + g(2)F(q_2) + g(3)F(q_3) + \cdots \\ = &f(1)G(q'_1) + f(2)G(q'_2) + f(3)G(q'_3) + \cdots, \end{aligned}\right\} \quad (101)$$

identité qui comprend toutes les précédentes.

XI. On peut donc transformer une somme telle que $\Sigma g(p)F(q_p)$, en une autre somme de forme analogue.

Étant donné $q_p = [\psi(p)]$, il s'agit de chercher $q'_p = [\psi'(p)]$; ce qui ne présente pas de difficultés. D'après ce qui précède, on doit poser $p \overline{\overline{<}} \psi(m)$, d'où l'on tire $m \overline{\overline{<}} \psi'(p)$; et la fonction ψ' est ainsi connue.

De là résulte que les fonctions ψ et ψ' sont inverses l'une de l'autre, c'est-à-dire que l'on a, simultanément :

$$y = \psi(z), \quad z = \psi'(y).$$

Par exemple, de $\psi(x) = \frac{n}{x}$, on tire $\psi'(x) = \frac{n}{x}$; de $\psi(x) = \sqrt{n - x^2}$, on tire $\psi'(x) = \sqrt{n - x^2}$; de $\psi(x) = \frac{n}{x+k}$, on tire $\psi'(x) = \frac{n}{x} - k$; et ainsi de suite. D'après cela, il est clair que si, de la limitation générale

$$\Psi(m, p) \overline{\overline{<}} 0,$$

on tire

$$m \overline{\overline{<}} \rho(p), \quad p \overline{\overline{<}} \rho'(m),$$

on peut prendre $\psi(x) = \rho(x)$, $\psi'(x) = \rho'(x)$.

Soit, par exemple, la limitation

$$Am^2 + Bmp + Cp^2 \overline{\overline{<}} n,$$

dans laquelle on suppose A et C positifs, et $4AC - B^2 = \delta^2$. En résolvant la limitation, successivement par rapport à p et par rapport à m, on trouve

$$p \overline{\overline{<}} \frac{-Bm + \sqrt{4Cn - p^2\delta^2}}{2C},$$

$$m \overline{\overline{<}} \frac{-Bp + \sqrt{4An - p^2\delta^2}}{2A}.$$

On peut donc prendre

$$\psi(x) = \frac{-Bx + \sqrt{4Cn - \delta^2 x^2}}{2C}, \quad \psi'(x) = \frac{-Bx + \sqrt{4An - \delta^2 x^2}}{2A}.$$

Pour considérer un cas particulier, supposons $g(x) = f(x) = 1$. L'identité générale (101) donne

$$\left[\frac{-B+\sqrt{4An-\delta^2}}{2A}\right] + \left[\frac{-2B+\sqrt{4An-4\delta^2}}{2A}\right] + \left[\frac{-3B+\sqrt{4An-9\delta^2}}{2A}\right] + \cdots$$
$$= \left[\frac{-B+\sqrt{4Cn-\delta^2}}{2C}\right] + \left[\frac{-2B+\sqrt{4Cn-4\delta^2}}{2C}\right] + \left[\frac{-3B+\sqrt{4Cn-9\delta^2}}{2C}\right] + \cdots$$

Par exemple, pour $B = 0$:

$$\left[\sqrt{\frac{n-C}{A}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n-4C}{A}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n-9C}{A}}\right] + \cdots$$
$$= \left[\sqrt{\frac{n-A}{C}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n-4A}{C}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n-9A}{C}}\right] + \cdots$$

Pour $\delta = 0$, on trouve, après un petit changement de notations,

$$\left[\sqrt{n\alpha - \alpha}\right] + \left[\sqrt{n\alpha - 2\alpha}\right] + \left[\sqrt{n\alpha - 3\alpha}\right] + \cdots$$
$$= \left[\sqrt{n\beta - \beta}\right] + \left[\sqrt{n\beta - 2\beta}\right] + \left[\sqrt{n\beta - 3\beta}\right] + \cdots$$

pourvu que $\alpha\beta = 1$.

Ainsi, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$:

$$\left[\sqrt{\frac{n}{2} - \frac{1}{2}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n}{2} - \frac{2}{2}}\right] + \left[\sqrt{\frac{n}{3} - \frac{3}{2}}\right] + \cdots$$
$$= \left[\sqrt{2n - 2}\right] + \left[\sqrt{2n - 4}\right] + \left[\sqrt{2n - 6}\right] + \cdots$$

NOTE XI.

I. Les moyens de calcul, exposés précédemment, pourraient être étendus à des nombres ayant, avec un nombre déterminé, des liaisons quelconques. Ainsi, au lieu de considérer tous les diviseurs de x, on peut considérer tous les nombres premiers avec x, et non supérieurs à ce nombre ; ou bien tous les nombres premiers, inférieurs à x. Si l'on parvenait à appliquer ces méthodes au dernier cas, on pourrait être très-utile à la Science des Nombres. Le problème n'est pas impossible; car Dirichlet paraît l'avoir abordé en démontrant la formule de Legendre, ainsi que nous l'avons dit dans notre Avant-Propos, et M. Mertens a tenté un essai dans le même sens. Ajoutons que nous avons profité de cet essai pour rédiger une démonstration, à peu près irréprochable, des trois formules empiriques de Legendre. Si nous en ajournons la publication, c'est parce que nous avons l'espoir de pouvoir rendre nos raisonnements tout à fait inattaquables.

II. Supposons, par exemple, que $a, b, c, \ldots$ désignent tous les nombres, tels que $x - a^2$, $x - b^2$, $x - c^2$, ... soient des carrés. En d'autres termes, si l'on décompose x, de toutes les manières possibles, en une somme de deux carrés $\alpha^2 + \beta^2$, les nombres $a, b, c, \ldots$ représentent toutes les valeurs que peuvent prendre α et β. On a l'identité

$$f(a)+f(b)+f(c)+\cdots = f\left(\sqrt{x-a^2}\right)+f\left(\sqrt{x-b^2}\right)+f\left(\sqrt{x-c^2}\right)+\cdots;$$

ou, plus généralement,

$$\left.\begin{aligned} &g(a)f\left(\sqrt{x-a^2}\right)+g(b)f\left(\sqrt{x-b^2}\right)+g(c)f\left(\sqrt{x-c^2}\right)+\cdots \\ &=f(a)g\left(\sqrt{x-a^2}\right)+f(b)g\left(\sqrt{x-b^2}\right)+f(c)g\left(\sqrt{x-c^2}\right)+\cdots \end{aligned}\right\}(102)$$

Écrivons une telle identité pour chaque valeur de x, non supérieure à n, et ajoutons toutes ces égalités membre à membre. $g(p)$ ne peut se trouver, dans le premier membre, que pour les valeurs de x, telles que $x - p^2$ soit un carré ; donc pour

$$x = p^2 + 1,\ p^2 + 4,\ p^2 + 9,\ \ldots,\ p^2 + m^2;$$

la dernière de ces valeurs satisfaisant aux conditions

$$p^2 + m^2 \leqq n \leqq p^2 + (m+1)^2,$$

d'où résultent celles-ci :

$$m \geqq \sqrt{n - p^2} \geqq m + 1.$$

Conséquemment, m est égal au plus grand entier, r_p, contenu dans $\sqrt{n - p^2}$. Le coefficient de $g(p)$ est donc

$$f\left(\sqrt{(p^2+1)-p^2}\right) + f\left(\sqrt{(p^2+4)-p^2}\right) + \cdots + f\left(\sqrt{(p^2+r_p^2)-p^2}\right)$$
$$= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(r_p) = \mathrm{F}(r_p).$$

On prouverait de même que, dans le second membre, le coefficient de $f(p)$ est $\mathrm{G}(r_p)$. L'identité

$$\sum g(p)\mathrm{F}(r_p) = \sum f(p)\mathrm{G}(r_p)$$

se trouve ainsi établie.

III. On peut aussi, au moyen de limitations convenablement choisies, passer de cette identité à toutes celles qui ont été démontrées précédemment. Supposons, par exemple, que l'on ne veuille considérer, dans le premier membre de (102), sous le signe de la fonction g, que les nombres a satisfaisant à la limitation

$$a^2x - a^4 \leqq n^2. \tag{103}$$

Comme ces nombres a, b, c, ... sont identiquement les mêmes que les nombres $\sqrt{x - a^2}$, $\sqrt{x - b^2}$, $\sqrt{x - c^2}$, ..., du second membre, il faut que ces derniers, aussi, vérifient la même limitation. Donc

$$x\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^4 \leqq n^2;$$

c'est-à-dire

$$a^2x - a^4 \overline{\overline{<}} n^2. \tag{104}$$

Dans ce cas particulier, les limitations (103) et (104) ne diffèrent pas. En faisant $a = p$, $x = p^2 + m^2$, on en tire

$$m \overline{\overline{<}} \frac{n}{p}, \quad m = \left[\frac{n}{p}\right] = q_p;$$

donc

$$\sum g(p) \mathrm{F}(q_p) = \sum f(p) \mathrm{G}(q_p).$$

Voici encore un exemple très simple. Soit la limitation

$$(x - a^2)(2a - 1)^2 \overline{\overline{<}} n^2,$$

laquelle, par le changement de a en $\sqrt{x - a^2}$, se transforme en

$$2a\sqrt{x - a^2} \overline{\overline{<}} n + a.$$

De la première on tire, après avoir remplacé a par p, et x par $p^2 + m^2$:

$$m \overline{\overline{<}} \frac{n}{2p - 1}.$$

De la seconde :

$$m \overline{\overline{<}} \frac{n + p}{2p}.$$

Donc

$$\sum g(p) \mathrm{F}\left[\frac{n}{2p - 1}\right] = \sum f(p) \mathrm{G}\left[\frac{n + p}{2p}\right].$$

Par exemple, pour $g(x) = f(x) = 1$:

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{8}\right] + \cdots = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{5}\right] + \left[\frac{n}{7}\right] + \cdots$$

etc., etc...

IV. Après la démonstration de l'identité générale (101), les développements qu'on vient de lire sont inutiles. On retombe, d'ailleurs, sur cette identité, quand on veut considérer la limitation générale

$$\sqrt{x - a^2} \overline{\overline{<}} \psi(a),$$

laquelle, par le changement de a en $\sqrt{x - a^2}$, se transforme en

$$a \overline{\overline{<}} \psi\left(\sqrt{x - a^2}\right).$$

Si l'on remplace a par p, et x par $p^2 + m^2$, on trouve

$$m \overline{\overline{<}} \psi(p), \quad p \overline{\overline{<}} \psi(m).$$

De cette dernière limitation, on peut tirer

$$m \overline{\overline{>}} \psi'(p),$$

$\psi'(x)$ étant la fonction inverse de $\psi(x)$.

Si, malgré l'inutilité de ces développements, nous ne les supprimons pas, c'est pour faire voir, une fois de plus, que les procédés élémentaires que nous employons sont tout à fait généraux, et s'appliquent à des nombres ayant, avec un nombre donné, des liaisons quelconques. Nous avons voulu, en outre, mettre en évidence le moyen par lequel on peut arriver à l'identité générale (101), en partant de l'une quelconque des identités particulières, comprises dans cette identité générale. Ce sujet mérite, d'ailleurs, d'être étudié avec beaucoup plus d'attention qu'il ne nous a été permis de lui en donner; car, si l'on connaît plusieurs moyens pour arriver à un même but, on peut toujours affirmer qu'il existe une méthode générale, qui résume tous ces moyens, les coordonne et les explique.

NOTE XII.

I. Le 23 avril 1880, M. Alexandre Berger a présenté, à la *Société des sciences d'Upsal,* un Mémoire *Sur quelques applications de la fonction gamma à la Théorie des nombres.* M. Catalan a extrait, de ce Mémoire, quelques propositions qu'il a fait connaître, aux lecteurs de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* dans la livraison de décembre 1880, sous le titre de *Théorèmes extraordinaires.* Voici ces théorèmes :

1° *La somme des inverses des diviseurs d'un nombre entier est égale, en moyenne, à* $\frac{\pi^2}{6}$.

2° *La somme des diviseurs d'un nombre entier* N *est, en moyenne,* $N\,.\,\frac{\pi^2}{6}$.

3° *Si* a, b, c, ... *sont tous les diviseurs d'un nombre entier, la somme*

$$\frac{a}{2^a}+\frac{b}{2^b}+\frac{c}{2^c}+\cdots$$

est, en moyenne, égale à l'unité.

4° *Les nombres entiers de* 5 *chiffres ont, en moyenne, chacun*

$$5\,\mathcal{L}.10+\frac{1}{9}\mathcal{L}.10+2C-1$$

diviseurs.

5° *Les entiers environnant* N *ont, en moyenne, autant de diviseurs que les entiers compris entre* 1 *et* Ne.

Nous ignorons de quelle manière M. Berger s'est servi de la fonction *gamma* pour trouver ces propositions; mais nous allons montrer une source abondante de propositions analogues, que nous établirons au moyen de considérations tout à fait élémentaires.

II. Soient a, b, c, ... tous les diviseurs de N. Soit à chercher la valeur moyenne de la somme

$$\psi(N) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots$$

Si l'expression

$$\frac{\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n)}{n}$$

tend vers une limite finie, lorsque n augmente indéfiniment, cette limite est ce que nous appelons *valeur moyenne* de $\psi(N)$. Plus généralement, si les expressions

$$\frac{\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n)}{\Psi(n)},$$
$$\frac{\psi'(1) + \psi'(2) + \psi'(3) + \cdots + \psi'(n)}{\Psi(n)}$$

tendent vers une même limite finie, lorsque n augmente indéfiniment, nous disons que la fonction $\psi(N)$ est égale, en moyenne, à $\psi'(N)$; et, pour exprimer cela, nous écrivons

$$\psi(N) \equiv \psi'(N).$$

Dirichlet, se plaçant à un point de vue un peu différent, mais moins rigoureux, dit que $\psi'(N)$ est *l'expression asymptotique* de $\psi(N)$.

En effet, si l'on pose

$$\psi(N) = \psi'(N) + \psi''(N),$$

il est visible, d'après notre définition, que $\psi''(N)$ est d'un ordre inférieur à celui de $\psi'(N)$, c'est-à-dire que, pour des valeurs infiniment grandes de N, $\psi''(N)$ est négligeable par rapport à $\psi'(N)$. Aussi, la méthode générale employée par Dirichlet, pour déterminer les valeurs moyennes des fonctions arithmétiques, consiste-t-elle, principalement, à déterminer l'ordre de la fonction considérée, et à négliger ensuite, dans cette fonction, toute quantité d'un ordre inférieur. Plus loin nous exposerons cette méthode.

III. Cela posé, dans

$$\psi(1)+\psi(2)+\psi(3)+\cdots+\psi(n),$$

$f(p)$ entre autant de fois qu'il y a de multiples de p, non supérieurs à n, c'est-à-dire q_p fois. On a donc

$$\left.\begin{aligned}&\psi(1)+\psi(2)+\psi(3)+\cdots+\psi(n)\\ &=q_1f(1)+q_2f(2)+q_3f(3)+\cdots+q_nf(n).\end{aligned}\right\}\quad(105)$$

Si l'on observe que q_p est compris entre $\frac{n}{p}-1$ et $\frac{n}{p}$, on peut écrire

$$\left.\begin{aligned}&f(1)+\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{3}f(3)+\cdots+\frac{1}{n}f(n)-\frac{1}{n}\Big[f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\Big]\\ &<\frac{\sum\psi(p)}{n}<f(1)+\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{3}f(3)+\cdots+\frac{1}{n}f(n).\end{aligned}\right\}\quad(106)$$

Si la série

$$f(1)+\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{3}f(3)+\cdots,$$

est convergente, et si

$$\lim\frac{1}{n}\Big[f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)\Big]=0,$$

lorsque n augmente indéfiniment, on aura aussi

$$\lim\frac{\sum\psi(p)}{n}=f(1)+\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{3}f(3)+\cdots,$$

et l'on pourra écrire

$$\psi(\mathrm{N})\equiv f(1)+\frac{1}{2}f(2)+\frac{1}{3}f(3)+\cdots$$

Dans d'autres cas, on peut se servir de procédés spéciaux, dont nous parlerons en traitant divers exemples particuliers.

IV. Soit $f(x)=\frac{1}{x^m}$. La double inégalité (106) devient

$$\left(1+\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{n^{m+1}}\right)-\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2^m}+\cdots+\frac{1}{n^m}\right)$$
$$<\frac{\sum\psi(p)}{n}<1+\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+1}}+\cdots+\frac{1}{n^{m+1}}$$

Or, si m surpasse 1,

$$\lim \frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots+\frac{1}{n^m}\right]=0;$$

car la quantité entre crochets tend vers une limite finie. Mais la propriété subsiste pour $m=1$, car

$$\mathcal{L}.n+\frac{1}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\overline{\overline{<}}\,\mathcal{L}.n+1; \tag{107}$$

d'où

$$\lim \frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right]=0.$$

Par conséquent, si m égale ou surpasse 1 :

$$\lim \frac{\sum\psi(p)}{n}=1+\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+1}}+\frac{1}{4^{m+1}}+\cdots;$$

c'est-à-dire, en moyenne,

$$\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}+\cdots\equiv 1+\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+1}}+\frac{1}{4^{m+1}}+\cdots \tag{108}$$

En particulier :

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\cdots\equiv 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}, \text{(à peu près 1,64)}$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\cdots\equiv 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\cdots=1{,}202\,056\ldots,$$

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\cdots\equiv 1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}, \text{(à peu près 1,08)}$$

etc., etc...

En résumé :

« *La somme des inverses des* m$^{\text{èmes}}$ *puissances des diviseurs d'un nombre est égale, en moyenne, à la somme de la série* $1+\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+1}}+\ldots$ *En particulier, la somme des inverses des diviseurs d'un nombre est égale, en moyenne, à* $\frac{\pi^2}{6}$. »

V. Soit $f(x) = x^m$. Ici, il n'est plus possible de suivre la même marche; mais voici comment on peut éviter les inconvénients qui se présentent. On a trouvé

$$\left.\begin{array}{l}\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n) \\ = q_1 f(1) + q_2 f(2) + q_3 f(3) + \cdots + q_n f(n).\end{array}\right\} \quad (105)$$

Par conséquent, d'après l'identité (3), démontrée dans la Note I, on a aussi

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n) = \mathrm{F}(q_1) + \mathrm{F}(q_2) + \mathrm{F}(q_3) + \cdots + \mathrm{F}(q_n);$$

$\mathrm{F}(x)$ étant définie par l'égalité

$$\mathrm{F}(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x).$$

Dans le cas actuel,

$$\mathrm{F}(x) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2}x^m + \frac{m}{12}x^{m-1} + \ldots$$

On trouve ainsi, en observant que q_p est compris entre $\frac{n}{p} - 1$ et $\frac{n}{p}$:

$$\frac{1}{m+1}\cdot\left(\frac{n}{p}\right)^{m+1} + \mathrm{K}\cdot\left(\frac{n}{p}\right)^m + \cdots < \mathrm{F}(q_p) < \frac{1}{m+1}\cdot\left(\frac{n}{p}\right)^{m+1} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{n}{p}\right)^m + \cdots,$$

K étant un coefficient numérique. Si l'on pose

$$\mathrm{S}_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{n^m},$$

on a donc

$$\frac{n^{m+1}}{m+1}\cdot \mathrm{S}_{m+1} + \mathrm{K}n^m\mathrm{S}_m + \cdots < \sum\psi(p) < \frac{n^{m+1}}{m+1}\mathrm{S}_{m+1} + \frac{1}{2}n^m\mathrm{S}_m + \cdots;$$

d'où l'on tire

$$\lim \frac{\psi(1)+\psi(2)+\psi(3)+\cdots+\psi(n)}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots\right).$$

D'autre part, si

$$\psi'(\mathrm{N}) = \mathrm{N}^m\left[1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots\right],$$

on a

$$\psi'(1) + \psi'(2) + \psi'(3) + \cdots + \psi'(n)$$
$$= (1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m)\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{m+1}}\right);$$

et, par suite,

$$\lim \frac{\psi'(1) + \psi'(2) + \psi'(3) + \cdots + \psi'(n)}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots\right).$$

Donc

$$\psi(\mathrm{N}) \equiv \psi'(\mathrm{N}),$$

c'est-à-dire

$$a^m + b^m + c^m + \cdots \equiv \mathrm{N}^m\left[1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots\right]. \tag{109}$$

Pour mieux montrer l'efficacité de ce procédé, nous allons l'appliquer au cas de $m = 1$. Soit donc

$$\psi(\mathrm{N}) = a + b + c + \cdots = \int \mathrm{N}.$$

En opérant comme précédemment, on trouve d'abord

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n)$$
$$= \frac{1}{2}\left[q_1(q_1 + 1) + q_2(q_2 + 1) + q_3(q_3 + 1 + \cdots + q_n(q_n + 1)\right].$$

Posons

$$\mathrm{H}_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

$$\mathrm{S}_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

En observant que q_p est compris entre $\frac{n}{p} - 1$ et $\frac{n}{p}$, on a

$$n^2\mathrm{S}_n - 2n\mathrm{H}_n + n < q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \cdots + q_n^2 < n^2\mathrm{S}_n,$$
$$n\mathrm{H}_n - n < q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n < n\mathrm{H}_n;$$

d'où, par addition,

$$n^2\mathrm{S}_n - n\mathrm{H}_n < q_1(q_1 + 1) + q_2(q_2 + 1) + \cdots + q_n(q_n + 1) < n^2\mathrm{S}_n + n\mathrm{H}_n;$$

puis

$$\frac{1}{2}\left(S_n - \frac{H_n}{n}\right) < \frac{\psi(1)+\psi(2)+\psi(3)+\cdots+\psi(n)}{n^2} < \frac{1}{2}\left(S_n + \frac{H_n}{n}\right).$$

On a vu que $\lim \frac{H_n}{n} = 0$. Donc

$$\lim \frac{\psi(1)+\psi(2)+\psi(2)+\cdots+\psi(n)}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right) = \frac{\pi^2}{12}.$$

D'autre part, si l'on pose

$$\psi'(N) = N\,.\,\frac{\pi^2}{6},$$

on a

$$\psi'(1)+\psi'(2)+\psi'(3)+\cdots+\psi'(n) = \frac{n(n+1)}{2}\,.\,\frac{\pi^2}{6},$$

$$\lim \frac{\psi'(1)+\psi'(2)+\psi'(3)+\cdots+\psi'(n)}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Donc

$$\psi(N) \equiv \psi'(N),$$

c'est-à-dire

$$\int N \equiv N\,.\,\frac{\pi^2}{6}.$$

En résumé :

« *La somme des* $m^{\text{èmes}}$ *puissances des diviseurs d'un nombre* N, *est égale, en moyenne, à la* $m^{\text{ème}}$ *puissance de ce nombre, multipliée par la somme de la série* $1+\frac{1}{2^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+1}}+\ldots$ *En particulier, la somme des diviseurs de* N *est égale, en moyenne, à* $N\,.\,\frac{\pi^2}{6}$. »

VI. Voici un autre procédé. Posons

$$\psi(N) = \frac{1}{N^m}\left[f(a)+f(b)+f(c)+\cdots\right],$$

et considérons la somme

$$\psi(1)+\psi(2)+\psi(3)\cdots+\psi(n).$$

Il est clair que $f(p)$ entre seulement dans

$$\psi(p),\ \psi(2p),\ \psi(3p),\ \ldots,\ \psi(q_p p),$$

avec les coefficients

$$\frac{1}{p^m},\quad \frac{1}{2^m p^m},\quad \frac{1}{3^m p^m},\quad \ldots,\quad \frac{1}{q_p^m p^m};$$

donc, si l'on pose

$$F(x) = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots + \frac{1}{x^m},$$

le coefficient de $f(p)$ est $\frac{1}{p^m}F(q_p)$. Par conséquent

$$\sum\psi(p) = f(1)F(q_1) + \frac{f(2)}{2^m}F(q_2) + \frac{f(3)}{3^m}F(q_3) + \cdots + \frac{f(n)}{n^m}F(q_n).$$

En particulier, pour $f(x) = x^m$:

$$\sum\psi(p) = F(q_1) + F(q_2) + F(q_3) + \cdots + F(q_n);$$

ou bien, d'après l'identité (3),

$$\sum\psi(p) = q_1 + \frac{1}{2^m}q_2 + \frac{1}{3^m}q_3 + \cdots + \frac{1}{n^m}q_n.$$

Observant que q_p est compris entre $\frac{n}{p} - 1$ et $\frac{n}{p}$, on a

$$n\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{m+1}}\right) - \left(1 + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n^m}\right)$$
$$< \sum\psi(p) < n\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{n^{m+1}}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\lim \frac{\sum\psi(p)}{n} = 1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots$$

Donc, en moyenne,

$$\psi(N) \equiv 1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots,$$

c'est-à-dire

$$a^m + b^m + c^m + \cdots \equiv N^m\left[1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots\right] \qquad (109)$$

VII. Si le premier procédé a toute la rigueur désirable, il n'en est pas de même du second, qui est basé sur ce que l'on peut écrire $N^m\psi(N) \equiv N^m\psi'(N)$, quand on a $\psi(N) \equiv \psi'(N)$.

Si l'on admet ce principe, la recherche de la valeur moyenne de $a^m + b^m + c^m + \cdots$ ne présente plus de difficulté, car on peut écrire, en vertu de (15) :

$$a^m + b^m + c^m + \cdots = \left(\frac{N}{a}\right)^m + \left(\frac{N}{b}\right)^m + \left(\frac{N}{c}\right)^m + \cdots$$

$$= N^m\left(\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m} + \cdots\right);$$

et, par conséquent, en tenant compte de (108), on trouve (109).

VIII. D'après ce qui précède, on a

$$\lim \frac{\int 1 + \int 2 + \int 3 + \cdots + \int n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \qquad \text{(à peu près 0,82)}$$

Si R_p est le reste de la division de n par p, on a donc aussi, en vertu de (6),

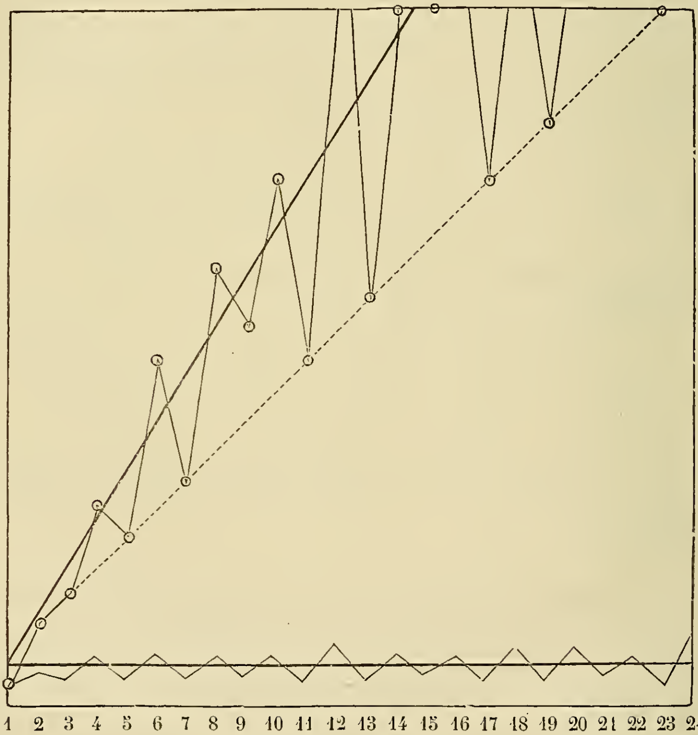
$$\lim \frac{R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n}{n^2} = 1 - \frac{\pi^2}{12}. \qquad \text{(à peu près 0,18)}$$

Voici comment varient les fonctions $\int 1 + \int 2 + \int 3 + \cdots + \int n$ et $R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n$, divisées par n^2, pour les premières valeurs de n :

$n =$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...	∞
$\frac{1}{n^2}\Sigma\int p$..	0,89	0,94	0,84	0,92	0,84	0,88	0,85	0,87	0,82	0,88	0,83	0,84	0,84	...	0,82
$\frac{1}{n^2}\Sigma R_p$.	0,11	0,06	0,16	0,08	0,16	0,12	0,15	0,13	0,18	0,12	0,17	0,16	0,16	...	0,18

On peut observer que $\frac{1}{n^2}\Sigma\int p$ passe par un minimum chaque fois que n est premier.

Pour mieux se représenter, dans toute son irrégularité, la variation d'une fonction arithmétique $\psi(n)$, et la comparer à la variation de son expression asymptotique $\psi'(n)$, on peut construire un diagramme, constitué par la ligne dont l'équation est $y = \psi'(x)$, et la suite de points, représentée par $y = \psi(x)$, x ne pouvant prendre, dans ce dernier cas, que des valeurs entières. Voici, par exemple, quels sont à peu près les diagrammes des fonctions $\int n$ et $\frac{1}{n}\int n$, qui expriment, respectivement, la somme des diviseurs de n, et la somme des inverses des mêmes diviseurs.



Des diagrammes construits avec soin (ce n'est pas le cas du nôtre) peuvent servir aux personnes qui s'occupent de recherches empiriques, dans la Théorie des Nombres : pour faire découvrir une loi, les diagrammes sont bien plus utiles que les tables numériques, auxquelles on a habituellement recours.

IX. L'égalité moyenne

$$\int 1 + \int 2 + \int 3 + \cdots + \int n = \frac{\pi^2}{12} n^2$$

est assez approchée lorsque n est un grand nombre. On en peut tirer quelques propositions curieuses, qui, bien entendu, ne sont aussi qu'approchées.

Si l'on considère, par exemple, une suite de nombres en progression arithmétique, de grande raison, et si u_m est la somme des diviseurs des nombres compris entre le $m^{\text{ème}}$ terme et le suivant, les nombres u_1, u_2, u_3, .. *forment aussi une progression arithmétique.*

Si la raison n'est pas très grande, cette proposition est loin d'être vraie. Par exemple, pour les nombres 1, 5, 9, 13, 17, ... on trouve 20, 48, 72, 97, ... et l'on peut observer que 20, 46, 72, 98, sont en progression arithmétique.

De même, si l'on considère une suite de nombres, dont les carrés sont en progression arithmétique, de grande raison, *la somme des diviseurs de tous les nombres compris entre deux termes consécutifs est à peu près constante.*

En particulier, si n est un très grand nombre, *la somme des diviseurs des* n *premiers nombres naturels est, à peu près, la même que la somme des diviseurs des nombres compris entre* n *et* n$\sqrt{2}$, *ou entre* n$\sqrt{2}$ *et* n$\sqrt{3}$, *ou entre* n$\sqrt{3}$ *et* n$\sqrt{4}$; etc., etc...

Ces remarques peuvent donner une idée de la manière dont varie la fonction $\int n$, pour les grandes valeurs de n.

X. Soit $f(x) = 1$. La fonction $\psi(N)$ exprime, dans ce cas, le nombre des diviseurs de N, ou $\theta(N)$. La double inégalité (106) devient

$$n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - n < \sum \psi(p) < n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right),$$

ou

$$\frac{H_n}{\mathcal{L}.n} - \frac{1}{\mathcal{L}.n} < \frac{\sum \psi(p)}{n\,\mathcal{L}.n} < \frac{H_n}{\mathcal{L}.n}$$

Mais, d'après la double inégalité (107),

$$\lim \frac{\mathrm{H}_n}{\mathcal{L}.\, n} = 1.$$

Donc

$$\lim \frac{\sum \psi(p)}{n\, \mathcal{L}.\, n} = 1.$$

D'autre part, soit

$$\psi'(\mathrm{N}) = \mathcal{L}.\, \mathrm{N}:$$

on aura

$$\sum \psi'(p) = \mathcal{L}.\, (1\,.\,2\,.\,3 \ldots n);$$

ou d'après la *Formule de Stirling* :

$$\sum \psi'(p) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}.\, n - n + \mathcal{L}.\, \sqrt{2\pi} + \frac{\varepsilon}{12n},$$

ε étant une fraction proprement dite. De là résulte

$$\lim \frac{\sum \psi'(p)}{n\, \mathcal{L}.\, n} = 1.$$

Par conséquent

$$\psi(\mathrm{N}) \equiv \psi'(\mathrm{N}),$$

c'est-à-dire

$$\theta(\mathrm{N}) \equiv \mathcal{L}.\, \mathrm{N}.$$

Donc :

« *Le nombre des diviseurs d'un nombre entier est égal, en moyenne, au logarithme népérien de ce nombre.* »

XI. Dirichlet a cherché les valeurs moyennes des quatre fonctions arithmétiques :

$$\int \mathrm{N},\ \ \varpi(\mathrm{N}),\ \ \varphi(\mathrm{N}),\ \ \theta(\mathrm{N}).$$

Pour les trois premières, on peut consulter le tome I de la 2e série du *Journal de Liouville*. Quant à la dernière, Dirichlet n'a fait qu'énoncer le résultat, dans le *Journal de Crelle*. Gauss s'est aussi occupé de questions analogues; et, dans ses *Disquisitiones*, il énonce, à propos du nombre moyen des genres d'un déterminant donné, un théorème, démontré aussi par Dirichlet, et qui dépend, tout simplement, de la valeur moyenne de $\omega(N)$.

Enfin, on peut dire que les formules approchées, de Legendre, Tchébychef et d'autres Géomètres, sur le nombre des entiers premiers et inférieurs à un nombre donné, rentrent dans le domaine de la Théorie des Moyennes. Malgré cela, le véritable inventeur de cette théorie, certainement destinée à jeter beaucoup de lumière dans la Science des Nombres, est, nous le répétons, le grand Dirichlet. Nous avons déjà dit en quoi consiste la méthode employée par ce Géomètre, pour déterminer la valeur moyenne d'une fonction arithmétique. Cependant, cette méthode n'est pas appliquée avec uniformité. Tantôt, le célèbre Arithmologue, après avoir calculé, en fonction des nombres q, l'expression considérée, la transforme de manière à pouvoir remplacer q_p par $\frac{n}{p}$; tantôt il en cherche, à peu près par tâtonnement, une expression approchée, en négligeant toute quantité d'un ordre inférieur. Mais ses procédés sont bien souvent d'une application difficile, et les calculs deviennent d'une complication extrême dès qu'on veut les rendre inattaquables. Cependant, quand cela pourra nous être utile, nous nous servirons des procédés et du langage de Dirichlet. Et nous allons, en premier lieu, déterminer la valeur moyenne de $\theta(N)$, avec une plus grande approximation, en faisant entrer dans cette valeur les quantités de l'ordre des constantes. A cet effet, reprenons l'identité (105), qui, pour $f(x) = 1$, donne

$$\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \cdots + \theta(n) = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n,$$

et cherchons l'expression asymptotique de

$$Q_n = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n.$$

On sait que, si l'on suppose $\alpha\beta = n$,

$$\left.\begin{aligned}&(q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_\alpha) + (q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_\beta)\\&= n + (q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n),\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

égalité d'où l'on tire, en faisant $\alpha = \beta = \sqrt{n}$, ce qui est permis, si n est un grand nombre:

$$Q_n = -n + 2(q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_\alpha),$$

puis

$$2nH_\alpha - n - 2\sqrt{n} < Q_n < 2nH_\alpha - n.$$

Donc, en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n:

$$Q_n \equiv 2nH_\alpha - n.$$

Pour que le second membre soit de l'ordre de n, nous ne devons négliger, dans H_α, que les quantités d'un ordre inférieur à celui des constantes. Or,

$$H_\alpha = \mathcal{L}.\alpha + C + \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{12\alpha^2} + \cdots$$

Donc

$$H_\alpha \equiv \frac{1}{2}\mathcal{L}.n + C.$$

Substituant dans l'expression de Q_n, on trouve enfin :

$$Q_n \equiv n\,\mathcal{L}.n + (2C - 1)n, \tag{110}$$

valeur asymptotique remarquable, qui nous sera souvent utile dans la suite. C est la *constante d'Euler;* elle a pour valeur 0,577 215 664 ... Cela étant, on a aussi

$$\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \cdots + \theta(n) = n\,\mathcal{L}.n + (2C - 1)n. \tag{111}$$

Si l'on pose

$$\psi(N) = \mathcal{L}.N + K,$$

on trouve, en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n,

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n) \equiv n\,\mathcal{L}.n + (K - 1)n.$$

Donc, si $K = 2C$,

$$\theta(N) \equiv \psi(N),$$

c'est-à-dire

$$\theta(N) \equiv \mathcal{L}\,N + 2C. \tag{112}$$

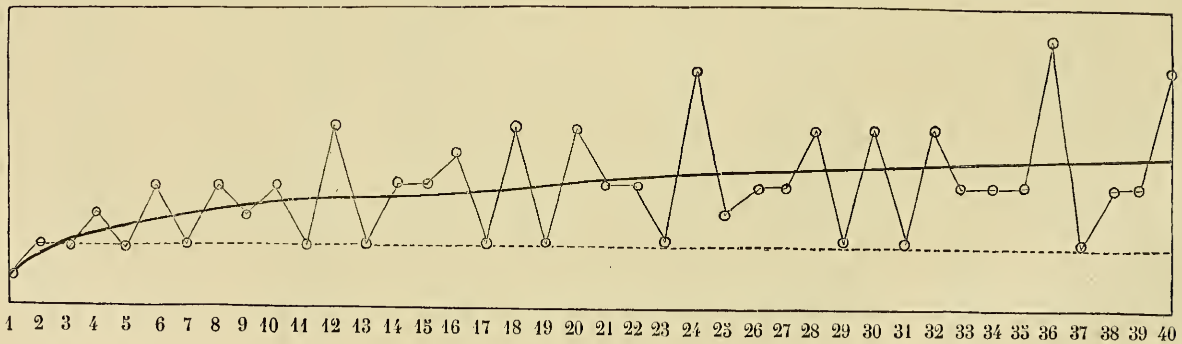
Telle est l'expression asymptotique du nombre des diviseurs d'un nombre entier N. Voici, à peu près, comment varie la fonction

$$\sum_1^n [\theta(p) - \mathcal{L}\cdot p],$$

divisée par n, pour les premières valeurs de n :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...	∞
$\frac{1}{n}\sum[\theta(p) - \mathcal{L}\cdot p]$	1	1,15	1,07	1,20	1,04	1,24	1,07	1,18	1,15	1,19	1,05	1,25	1,11	1,15	1,14	...	1,15

Voici encore le diagramme de la fonction $\theta(n)$:



XII. Reprenons l'égelité moyenne :

$$\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \cdots + \theta(n) = n\,\mathcal{L}.\,n + (2C - 1)n. \quad (111)$$

Si l'on change n en ne, on trouve

$$\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \cdots + \theta(ne) = ne\,(\mathcal{L}.\,n + 2C),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \cdots + \theta(ne)}{ne} = \theta(n).$$

Cette égalité démontre la cinquième des propositions de M. Berger. Il est sous-entendu que l'on doit prendre le plus grand nombre entier contenu dans ne.

XIII. La formule (111) donne, avec une grande approximation, le nombre des diviseurs des n premiers nombres naturels. En y faisant successivement $n = 10^m$, $n = 10^{m-1}$, on obtient :

$$\theta(1)+\theta(2)+\theta(3)+\cdots+\theta(10^m) = 10^m.\,m\,\mathcal{L}.\,10 + (2C - 1).\,10^m,$$

$$\theta(1)+\theta(2)+\theta(3)+\cdots+\theta(10)^{m-1}.=10^{m-1}(m-1)\,\mathcal{L}.\,10+(2C-1).10^{m-1};$$

d'où l'on déduit, par soustraction, en désignant par ν_m le nombre des diviseurs de tous les nombres de m chiffres,

$$\nu_m = (9m + 1).\,10^{m-1}.\,\mathcal{L}\,10 + (2C - 1)(10^m - 10^{m-1}). \quad (112)$$

Si l'on cherche la moyenne arithmétique du nombre des diviseurs des nombres de m chiffres, on trouve

$$\frac{\nu_m}{10^m - 10^{m-1}} = m\,\mathcal{L}.\,10 + \left(2C + \frac{1}{9}\,\mathcal{L}.\,10 - 1\right).$$

Donc :

« *Les nombres entiers de* m *chiffres ont, en moyenne, chacun* Am + B *diviseurs;* A *et* B *étant des constantes, dont voici les valeurs :*

A = 2,302 585..

B = 0,410 274... »

En particulier, pour $m = 5$, on trouve la cinquième des propositions de M. Berger. La formule (112) est d'autant plus approchée que m est plus grand. Elle permet de résoudre des problèmes inaccessibles, pour ainsi dire. On trouve, par exemple, que les nombres de cinq chiffres possèdent, en moyenne, chacun 12 diviseurs, et qu'ils en possèdent, en tout, environ 1060 733. Si l'on se borne aux nombres d'un seul chiffre, la formule donne, en moyenne, 3 diviseurs pour chacun, et 24 pour tous. Le calcul direct en donne 23.

Pour les nombres de deux chiffres, la formule indique une totalité de 452 diviseurs : le calcul direct montre qu'il y en a 448. L'écart, déjà très faible, est dû en partie à ce que l'on a compté 10^m parmi les nombres de m chiffres, et que l'on a exclu 10^{m-1}. Pour rétablir les choses, il faudra retrancher $\theta(10^m) - \theta(10^{m-1})$ de la valeur de N_m trouvée ci-dessus Si l'on observe que $\theta(10^m) = (m+1)^2$, on voit que la formule (112) doit être rectifiée ainsi :

$$N_m = (9m+1)10^{m-1}.\,\wp.\,10 + (2C-1)(10^m - 10^{m-1}) - (2m+1).$$

Déjà, pour $m = 2$, elle donne 447 diviseurs, au lieu de 448, indiqués par le calcul direct.

XIV. Soit $f(x) = \frac{x}{k^x}$. La double inégalité (106) devient

$$n\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \cdots + \frac{1}{k^n}\right] - \left[\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{3}{k^3} + \cdots + \frac{n}{k^n}\right]$$
$$< \sum\psi(p) < n\left[\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \cdots + \frac{1}{k^n}\right].$$

Donc, à la limite, si k surpasse 1,

$$\lim \frac{\Sigma\psi(p)}{n} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^3} + \cdots = \frac{1}{k-1}.$$

Par conséquent

$$\frac{a}{k^a} + \frac{b}{k^b} + \frac{c}{k^c} + \cdots = \frac{1}{k-1}.$$

En particulier, pour $k=2$, on a la troisième des propositions de M. Berger, c'est-à-dire que :

$$\frac{a}{2^a}+\frac{b}{2^b}+\frac{c}{2^c}+\cdots=1.$$

On trouverait, de la même manière, en faisant $f(x)=\frac{1}{k^x}$, $(k>1)$

$$\frac{1}{k^a}+\frac{1}{k^b}+\frac{1}{k^c}+\cdots=\mathcal{L}.\frac{k}{k-1}.$$

En particulier :

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}+\frac{1}{2^c}+\cdots=\mathcal{L}.\,2,\qquad \text{(à peu près 0,69)}$$

$$\frac{1}{3^a}+\frac{1}{3^b}+\frac{1}{3^c}+\cdots=\mathcal{L}.\frac{3}{2},\qquad \text{(à peu près 0,41)}$$

etc., etc...

XV. Soit $f(x)=\frac{1}{x+k}$. La double inégalité (106) devient

$$n\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}+\frac{1}{3(k+3)}+\cdots+\frac{1}{n(k+n)}\right]$$
$$-\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{k+n}\right]$$
$$<\sum\psi(p)<n\left[\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}+\cdots+\frac{1}{n(k+n)}\right].$$

Donc

$$\lim\frac{\Sigma\psi(p)}{n}=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}+\frac{1}{3(k+3)}+\cdots$$

1° Si k est entier et positif, le second membre égale

$$\frac{1}{k}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots\right)\right]$$
$$=\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right).$$

Par conséquent, on a, en moyenne,

$$\frac{1}{a+k}+\frac{1}{b+k}+\frac{1}{c+k}+\cdots\equiv\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right).$$

Par exemple, pour $k=1, 2, 3, \ldots$:

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\cdots\equiv 1,$$

$$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\cdots\equiv\frac{3}{4},\qquad\text{(ou bien 0,75)}$$

$$\frac{1}{a+3}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+3}+\cdots\equiv\frac{11}{18},\qquad\text{(à peu près 0,61)}$$

etc., etc...

2° Voici quelques exemples particuliers, où k est fractionnaire :

$$\frac{1}{a+\frac{1}{2}}+\frac{1}{b+\frac{1}{2}}+\frac{1}{c+\frac{1}{2}}+\cdots\equiv\frac{4}{2.3}+\frac{4}{4.5}+\frac{4}{6.7}+\cdots$$

$$=4(1-\mathfrak{L}.2),\qquad\text{(à peu près 1,23)}$$

$$\frac{1}{a-\frac{1}{2}}+\frac{1}{b-\frac{1}{2}}+\frac{1}{c-\frac{1}{2}}+\cdots\equiv\frac{4}{1.2}+\frac{4}{3.4}+\frac{4}{5.6}+\cdots$$

$$=4\,\mathfrak{L}.2.\qquad\text{(à peu près 2,77)}$$

3° On vérifie aisément que

$$\frac{k}{k+1}+\frac{k}{2(k+2)}+\frac{k}{3(k+3)}+\cdots=\int_0^1\frac{1-x^k}{1-x}\,dx.$$

Donc, pour une valeur quelconque de k :

$$\frac{1}{a+k}+\frac{1}{b+k}+\frac{1}{c+k}+\cdots\equiv\frac{1}{k}\int_0^1\frac{1-x^k}{1-x}\,dx.\qquad(113)$$

XVI. Si $f(x) = \frac{1}{k-x}$, k étant un nombre entier, supérieur à 1, et si a, b, c, ... sont tous les diviseurs de N, on trouve, en opérant toujours de la même manière :

$$\frac{1}{k-a} + \frac{1}{k-b} + \frac{1}{k-c} + \cdots \equiv \frac{1}{k}\left[2^{k-1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right)\right].$$

Par exemple,

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} + \cdots \equiv \frac{1}{4}.$$

Pour $f(x) = \frac{\mathcal{L}.x}{x}$, on trouve

$$\frac{\mathcal{L}.a}{a} + \frac{\mathcal{L}.b}{b} + \frac{\mathcal{L}.c}{c} + \cdots \equiv \frac{\mathcal{L}.1}{1} + \frac{\mathcal{L}.2}{4} + \frac{\mathcal{L}.3}{9} + \cdots$$
$$= 0{,}937\ 548\ 254\ 3 \ldots$$

etc., etc...

NOTE XIII.

I. D'après une remarque faite précédemment, il est permis, dans tous ces calculs, de supprimer $f(x)$ toutes les fois que x n'a pas une forme déterminée, et d'attribuer à $f(x)$ des expressions différentes, suivant les différentes formes de x. Pour utiliser cette remarque, supposons d'abord que, dans

$$\psi(\mathrm{N}) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots,$$

on fasse $f(x) = \pm 1$, suivant que x est impair ou pair. Alors $\psi(\mathrm{N})$ exprime la différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs de N.

Or, on a

$$\lim \frac{\Sigma\psi(p)}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \mathcal{L}. 2. \quad \text{(à peu près 0,69)}$$

Donc :

« *La différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs d'un nombre entier, est égale, en moyenne, au logarithme népérien de* 2. »

Plus généralement, soit $f(x) = 1$, si x n'est pas multiple de k, et $f(x) = -(k-1)$, pour les valeurs de x, divisibles par k. On trouve aisément

$$\lim \frac{\sum \psi(p)}{n} = \mathcal{L}. k.$$

Donc :

« *La différence entre le nombre des diviseurs de* N, *et* k *fois le nombre des diviseurs de* N, *multiples de* k, *est égale, en moyenne, au logarithme népérien de* k. »

On peut, d'ailleurs, facilement évaluer la valeur moyenne du nombre $\theta_k(N)$, des diviseurs de N, multiples de k. On a d'abord, d'après (105),

$$\theta_k(1) + \theta_k(2) + \theta_k(3) + \cdots + \theta_k(n) = q_k + q_{2k} + q_{3k} + \cdots + q_{q_k k}.$$

Prenons l'identité

$$\{q_1 f(1) + q_2 f(2) + \cdots + q_\alpha f(\alpha)\} + \{F(q_1) + F(q_2) + \cdots + F(q_\alpha)\}$$
$$= \alpha F(\alpha) + q_1 f(1) + q_2 f(2) + \cdots + q_n f(n),$$

dans laquelle $\alpha = \sqrt{n}$; et supposons $f(x) = 1$, si x est un multiple de k; $f(x) = 0$ pour toute autre valeur de x.

On trouve d'abord que $F(x)$ est égale à la somme d'autant d'unités qu'il y a de multiples de k, non supérieurs à x. Donc $F(x) = \left[\frac{x}{k}\right]$. Par conséquent

$$q_k + q_{2k} + q_{3k} + \cdots + q_{q_k k} = -\alpha\left[\frac{\alpha}{k}\right]$$
$$+ \left\{q_k + q_{2k} + \cdots + q_{\left[\frac{\alpha}{k}\right]k}\right\} + \left\{\left[\frac{q_1}{k}\right] + \left[\frac{q_2}{k}\right] + \cdots + \left[\frac{q_\alpha}{k}\right]\right\};$$

c'est-à-dire, en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n,

$$q_k + q_{2k} + q_{3k} + \cdots + q_{q_k k} \equiv -\frac{\alpha^2}{k}$$
$$+ \frac{n}{k}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\left[\frac{\alpha}{k}\right]}\right\} + \frac{n}{k}\left\{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\alpha}\right\},$$

ou bien

$$\theta_k(1) + \theta_k(2) + \theta_k(3) + \cdots + \theta_k(n) \equiv -\frac{n}{k} + \frac{n}{k}\left(H_{\frac{\alpha}{k}} + H_\alpha\right);$$

et, en remplaçant H_x par $\mathcal{L}.\, x + C$:

$$\theta_k(1) + \theta_k(2) + \theta_k(3) + \cdots + \theta_k(n) \equiv \frac{n}{k}\mathcal{L}.\, n + \frac{n}{k}(2C - \mathcal{L}.\, k - 1).$$

De cette égalité, on déduit, comme d'ordinaire, l'expression asymptotique :

$$\theta_k(N) \equiv \frac{1}{k}\mathcal{L}.\, N + \frac{1}{k}(2C - \mathcal{L}.\, k).$$

On trouve, ainsi, que les nombres des diviseurs de N, divisibles par 2, par 3, par 4, etc..., ont pour valeurs moyennes, respectivement :

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}.\,N + \frac{1}{2}(2C - \mathcal{L}.\,2), \qquad \text{(la constante est à peu près 0,23)}$$

$$\frac{1}{3}\mathcal{L}.\,N + \frac{1}{3}(2C - \mathcal{L}.\,3), \qquad (\quad \text{»} \qquad\qquad \text{»} \quad 0{,}02)$$

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}.\,N + \frac{1}{4}(2C - \mathcal{L}.\,4), \qquad (\quad \text{»} \qquad\qquad \text{»} \quad -0{,}06)$$

. . . .

etc., etc...

II. Soit $f(x) = 0$, pour x pair, et $f(x) = \pm 1$, suivant que x a la forme $4\mu + 1$, ou la forme $4\mu + 3$.

On trouve

$$\lim \frac{\sum \psi(p)}{n} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}. \qquad \text{(à peu près 0,79)}$$

Donc :

« *L'excès du nombre des diviseurs de* n, *ayant la forme* $4\mu + 1$, *sur le nombre des diviseurs ayant la forme* $4\mu + 3$, *est, en moyenne,* $\frac{\pi}{4}$. »

Si l'on fait $f(x) = 0$ pour x impair, et $f(x) = \pm 1$, suivant que x a la forme $4\mu + 2$, ou la forme 4μ, on trouve

$$\lim \frac{\sum \psi(p)}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2}\mathcal{L}.\,2. \quad \text{(à peu près 0,35)}$$

Donc :

« *L'excès du nombre des diviseurs de* N, *ayant la forme* $4\mu + 2$, *sur le nombre des diviseurs ayant la forme* 4μ, *est, en moyenne,* $\frac{1}{2}\mathcal{L}.\,2$. »

Soit $\theta_r(\mathrm{N})$ le nombre des diviseurs de N, ayant la forme $4\mu + r$. On a trouvé

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \mathcal{L}.\,\mathrm{N} + 2\mathrm{C},\\ &\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 = \mathcal{L}.\,2,\\ &\theta_1 - \theta_3 = \frac{\pi}{4},\\ &\theta_2 - \theta_4 = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}.\,2. \end{aligned}\right.$$

En résolvant ce système, on obtient, approximativement :

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1(\mathrm{N}) = \frac{1}{4}\,\mathcal{L}.\,\mathrm{N} + 0{,}85,\\ &\theta_2(\mathrm{N}) = \frac{1}{4}\,\mathcal{L}.\,\mathrm{N} + 0{,}29,\\ &\theta_3(\mathrm{N}) = \frac{1}{4}\,\mathcal{L}.\,\mathrm{N} + 0{,}07,\\ &\theta_4(\mathrm{N}) = \frac{1}{4}\,\mathcal{L}.\,\mathrm{N} - 0{,}05. \end{aligned}\right.$$

En suivant pas à pas la même marche que dans la Note précédente, pour un sujet analogue, on arrive à cette proposition :

« *Les nombres de* m *chiffres ont, en moyenne, chacun* $\mathrm{Am} + \mathrm{B}_r$ *diviseurs de la forme* $4\mu + \mathrm{r}$. *On a posé*

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \frac{1}{4}\,\mathcal{L}.\,10 && = +\,0{,}575\,64\ldots,\\ \mathrm{B}_1 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{C} + \frac{1}{4}\,\mathcal{L}.\,2 + \frac{1}{56}\,\mathcal{L}.\,10 - \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} && = +\,0{,}668\,55\ldots,\\ \mathrm{B}_2 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{C} + \frac{1}{56}\,\mathcal{L}.\,10 - \frac{1}{4} && = +\,0{,}102\,50\ldots,\\ \mathrm{B}_3 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{C} + \frac{1}{4}\,\mathcal{L}.\,2 + \frac{1}{56}\,\mathcal{L}.\,10 - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8} && = -\,0{,}116\,84\ldots,\\ \mathrm{B}_4 &= \frac{1}{2}\,\mathrm{C} - \frac{1}{2}\,\mathcal{L}.\,2 + \frac{1}{56}\,\mathcal{L}.\,10 - \frac{1}{4} && = -\,0{,}244\,00\ldots \text{»} \end{aligned}$$

On trouve, par exemple, que les nombres de deux chiffres possèdent, en tout,

$$164 + 113 + 93 + 82 = 452 \text{ diviseurs},$$

ayant les formes $4\mu + 1$, $4\mu + 2$, $4\mu + 3$, 4μ. Le calcul direct donne

$$164 + 111 + 92 + 81 = 448 \text{ diviseurs.}$$

III. Soient, pour un instant, $\theta_1(N)$, $\theta_2(N)$, $\theta_3(N)$ les nombres des diviseurs de N, ayant, respectivement, les formes $3\mu + 1$, $3\mu + 2$, 3μ. On obtient

$$\theta_1 - \theta_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

En joignant cette égalité à d'autres égalités, déjà obtenues, on a le système

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \mathcal{L}.\,N + 2C, \\ &\theta_3 = \frac{1}{3}\mathcal{L}.\,N + \frac{1}{3}(2C - \mathcal{L}.\,3), \\ &\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire, approximativement :

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1(N) = \frac{1}{3}\mathcal{L}.\,N + 0{,}868, \\ &\theta_2(N) = \frac{1}{3}\mathcal{L}.\,N + 0{,}264, \\ &\theta_3(N) = \frac{1}{3}\mathcal{L}.\,N + 0{,}018. \end{aligned}\right.$$

Soient, de même, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ les nombres des diviseurs de N, ayant les formes $6\mu + 1$, $6\mu + 2$, $6\mu + 3$, $6\mu + 4$, $6\mu + 5$, 6μ. On vient de trouver :

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1 + \theta_4 = \frac{1}{3}\mathcal{L}.\,N + \frac{2}{3}C + \frac{1}{6}\mathcal{L}.\,3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \\ &\theta_2 + \theta_5 = \frac{1}{3}\mathcal{L}.\,N + \frac{2}{3}C + \frac{1}{6}\mathcal{L}.\,3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}, \\ &\theta_3 + \theta_6 = \frac{1}{3}\mathcal{L}.\,N + \frac{2}{3}C - \frac{1}{3}\mathcal{L}.\,3. \end{aligned}\right.$$

En outre :

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1 - \theta_5 = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},\\ &\theta_1 + \theta_3 + \theta_5 = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}.\,N + C + \frac{1}{2}\,\mathcal{L}.\,2,\\ &\theta_6 = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}.\,N + \frac{1}{3}\,C - \frac{1}{6}\,\mathcal{L}.\,6. \end{aligned}\right.$$

On tire aisément, du système de ces six équations :

$$\left\{\begin{aligned} &\theta_1(N) = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}.\,N + 0{,}852,\\ &\theta_2(N) = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}.\,N + 0{,}318,\\ &\theta_3(N) = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}.\,N + 0{,}125,\\ &\theta_4(N) = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}.\,N + 0{,}016,\\ &\theta_5(N) = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}.\,N - 0{,}054,\\ &\theta_6(N) = \frac{1}{6}\,\mathcal{L}.\,N - 0{,}107. \end{aligned}\right.$$

D'après ces valeurs, il serait facile d'énoncer, par rapport au module 6, un théorème analogue à celui qui a été énoncé, dans le paragraphe précédent, pour le module 4.

IV. Soit $f(x) = \frac{1}{x^m}$, pour les valeurs de x, divisibles par k. Soit $f(x) = 0$ pour toute autre valeur de x. On a

$$\lim \frac{\sum \varphi(p)}{n} = \frac{1}{k^{m+1}}\left[1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{4^{m+1}} + \ldots\right]. \quad (114)$$

En particulier, pour $m = 1$, on trouve que :

« *La somme des inverses des diviseurs de* N, *multiples de* k, *est égale, en moyenne, à* $\frac{1}{k^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}$. »

Soient u, v, w, ... tous les nombres premiers, non supérieurs à N, autres que 1. En suivant un raisonnement connu, pour avoir tous les diviseurs de N, autres que 1, il suffit de prendre tous ceux qui sont divisibles par les nombres u, v, w, ..., de retrancher ceux qui sont divisibles par les produits deux à deux de ces mêmes nombres, d'ajouter ceux qui sont divisibles par les produits trois à trois; et ainsi de suite.

Donc, si l'on considère la somme des inverses des $m^{\text{èmes}}$ puissances des diviseurs de N, et si l'on fait

$$S_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots,$$

on peut écrire, en ayant égard à la valeur moyenne (114),

$$\frac{1}{a^m} + \frac{1}{b^m} + \frac{1}{c^m} + \cdots = 1 + S_{m+1} \sum \frac{1}{u^{m+1}} - S_{m+1} \sum \frac{1}{(uv)^{m+1}} + \cdots;$$

ou bien, en remplaçant le premier membre par sa valeur moyenne S_{m+1}:

$$S_{m+1} \left[1 - \sum \frac{1}{u^{m+1}} + \sum \frac{1}{(uv)^{m+1}} - \sum \frac{1}{(uvw)^{m+1}} + \cdots \right] = 1;$$

ce qui est exact, car, d'après la relation (69), la quantité entre crochets égale $\frac{1}{S_{m+1}}$.

Reprenons la valeur moyenne $\frac{1}{k^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}$, de la somme des inverses des diviseurs de N, divisibles par k. Pour $k = 2$, cette valeur devient $\frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6}$, et elle se rapporte aux diviseurs pairs de N. Il reste, pour les diviseurs impairs, $\frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6}$. Donc :

« *La somme des inverses des diviseurs pairs d'un nombre entier est égale, en moyenne, à* $\frac{\pi^2}{24}$ (à peu près, 0,41). *La somme des inverses des diviseurs impairs est, en moyenne, trois fois aussi grande* (à peu près 1,23). »

Soit $f(x) = 0$, si x est impair, et $f(x) = \pm \frac{1}{x^m}$, suivant que x a la forme $4\mu + 2$ ou la forme 4μ. On a

$$\lim \frac{\sum \psi(p)}{n} = \frac{1}{2^{m+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} - \frac{1}{4^{m+1}} + \cdots \right).$$

En particulier, pour $m = 1$,

$$\lim \frac{\sum \psi(p)}{n} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots \right) = \frac{\pi^2}{48}. \quad \text{(à peu près 0,21)}$$

Ici, $\psi(\mathrm{N})$ représente la différence entre la somme des inverses des diviseurs de N, de la forme $4\mu + 2$, et la somme des inverses des diviseurs de N, de la forme 4μ. On a trouvé $\frac{\pi^2}{24}$ comme valeur moyenne de la somme totale. De là, on déduit aisément la proposition suivante :

« *La somme des inverses des diviseurs de* N, *ayant la forme* $4\mu + 2$, *est égale, en moyenne, à* $\frac{\pi^2}{32}$. *La somme des inverses des diviseurs de* N, *ayant la forme* 4μ, *est égale, en moyenne, à* $\frac{\pi^2}{96}$. »

Soit $f(x) = 0$, si x est pair, et $f(x) = \pm \frac{1}{x^m}$, suivant que x a la forme $4\mu + 1$ ou la forme $4\mu + 3$. On a

$$\lim \frac{\sum \psi(p)}{n} = 1 - \frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{5^{m+1}} - \frac{1}{7^{m+1}} + \cdots$$

En particulier, pour $m = 1$,

$$\lim \frac{\sum \psi(p)}{n} = 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \cdots = \mathrm{G}.$$

D'après M. Catalan,

$$\mathrm{G} = 0{,}915\ 965\ 594\ 177\ 21 \ldots$$

Ainsi, la différence entre la somme des inverses des diviseurs de N, de la forme $4\mu + 2$, et la somme des inverses des diviseurs de N, de la forme 4μ, est égale, en moyenne, à G. Et comme la somme totale est $\frac{\pi^2}{8}$, on a cet autre théorème :

« *La somme des inverses des diviseurs de* N, *ayant la forme* $4\mu + 1$, *est égale, en moyenne, à* $\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\mathrm{G}$. *La somme des inverses des diviseurs de* N, *ayant la forme* $4\mu + 3$, *est égale, en moyenne, à* $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\mathrm{G}$. »

Pour résumer ce qui précède, soit σ_r la somme des inverses des diviseurs de N, de la forme $4\mu + r$. On a, en moyenne :

$$\sigma_1 = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\mathrm{G}, \quad (\text{à peu près } 1{,}07)$$

$$\sigma_2 = \frac{\pi^2}{32}, \quad (\text{»} \quad 0{,}31)$$

$$\sigma_3 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\mathrm{G}, \quad (\text{»} \quad 0{,}16)$$

$$\sigma_4 = \frac{\pi^2}{96}. \quad (\text{»} \quad 0{,}10)$$

V. Voici une série d'autres propositions, très faciles à démontrer :

1° « *La somme des inverses des diviseurs d'un nombre pair est égale, en moyenne, à* $\frac{5\pi^2}{24}$ (à peu près 2,05). *La somme des inverses des diviseurs d'un nombre impair est égale, en moyenne, à* $\frac{\pi^2}{8}$ (à peu près 1,25). »

2° *Si* a', b', c', ... *sont tous les diviseurs impairs de* N, *et* a'', b'', c'', ... *tous les diviseurs pairs, on a, en moyenne,*

$$\frac{1}{a'+1}+\frac{1}{b'+1}+\frac{1}{c'+1}+\cdots = \mathcal{L}.2, \qquad \text{(à peu près 0,69)},$$

$$\frac{1}{a''+1}+\frac{1}{b''+1}+\frac{1}{c''+1}+\cdots = 1-\mathcal{L}.2. \qquad (\quad \text{»} \quad 0{,}51).$$

3° *Si* a, b, c, ... *sont tous les diviseurs d'un nombre impair, on a, en moyenne,*

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\cdots = \mathcal{L}.2.$$

Si a, b, c, ... *sont tous les diviseurs d'un nombre pair, on a, en moyenne,*

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}+\cdots = 2-\mathcal{L}.2 \qquad \text{(à peu près 1,31)}$$

4° *On a, en moyenne,*

$$\frac{1}{2^{a'}}+\frac{1}{2^{b'}}+\frac{1}{2^{c'}}+\cdots = \mathcal{L}.\sqrt{3}, \qquad \text{(à peu près 0,55)}$$

$$\frac{1}{2^{a''}}+\frac{1}{2^{b''}}+\frac{1}{2^{c''}}+\cdots = \mathcal{L}.\frac{2}{\sqrt{3}}. \qquad (\quad \text{»} \quad 0{,}14)$$

5° *On a aussi, en moyenne,*

$$\frac{a'}{2^{a'}}+\frac{b'}{2^{b'}}+\frac{c'}{2^{c'}}+\cdots = \frac{2}{3},$$

$$\frac{a''}{2^{a''}}+\frac{b''}{2^{b''}}+\frac{c''}{2^{c''}}+\cdots = \frac{1}{3}.$$

6° *On a, en moyenne :*

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}+\frac{1}{2^c}+\cdots=\mathcal{L}.\sqrt{3}, \quad \text{(à peu près 0,55)}\\ &\frac{a}{2^a}+\frac{b}{2^b}+\frac{c}{2^c}+\cdots=\frac{2}{3},\end{aligned}\right\}\text{si N est impair,}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}+\frac{1}{2^c}+\cdots=\mathcal{L}.\frac{4}{\sqrt{3}}, \quad \text{(à peu près 0,83)}\\ &\frac{a}{2^a}+\frac{b}{2^b}+\frac{c}{2^c}+\cdots=\frac{4}{3},\end{aligned}\right\}\text{si N est pair.}$$

7° *En général, si α est une moyenne constante, obtenue en considérant les* diviseurs impairs *d'un nombre quelconque, et β la moyenne obtenue en considérant les* diviseurs pairs *d'un nombre quelconque, la moyenne que l'on obtiendra, en considérant tous les diviseurs d'un* nombre impair, *sera α, et la moyenne, relative à tous les diviseurs d'un* nombre pair, *sera* $\alpha + 2\beta$.

8° *Si* a, b, c, ... *sont tous les diviseurs d'un nombre entier, autres que l'unité, on a, en moyenne :*

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(a-1)}+\frac{1}{1.2.3\ldots(b-1)}+\frac{1}{1.2.3\ldots(c-1)}+\cdots$$
$$= e-2. \quad \text{(à peu près 0,72)}$$

9° *Si l'on désigne par σ_r la somme analogue, ne renfermant que les diviseurs ayant la forme* $4\mu + r$, *on a, en moyenne :*

$$\sigma_1=\frac{e^2-1}{4e}+\frac{1}{2}\sin\varphi, \qquad \sigma_2=\left(\frac{e-1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{e}-\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

$$\sigma_3=\frac{e^2-1}{4e}-\frac{1}{2}\sin\varphi, \qquad \sigma_4=\left(\frac{e-1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{e}+\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

φ *étant un angle de* $\frac{180°}{\pi}$ (à peu près 57° 17′ 45″). On trouve, approximativement :

$$\sigma_1 = 0{,}01, \quad \sigma_2 = 0{,}04. \quad \sigma_3 = 0{,}17, \quad \sigma_4 = 0{,}50.$$

10° *Soient encore* a, b, c, . . *tous les diviseurs de* N, *autres que* 1. *Si l'on fait* $f(x) = x\mathcal{L}.\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$, *on obtient, en moyenne :*

$$\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)^a \left(1 - \frac{1}{b^2}\right)^b \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)^c \cdots = \frac{1}{2}.$$

11° *Si* a, b, c, ... *sont les diviseurs impairs de* N, *autres que* 1, *on a*

$$\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)^a \left(1 - \frac{1}{b^2}\right)^b \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)^c \cdots = \frac{\pi}{4}, \quad \text{(à peu près 0,78)}$$

pourvu que l'on ait égard à la formule de Wallis.

12° *Si* a, b, c, ... *sont tous les diviseurs pairs d'un nombre entier :*

$$\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)^a \left(1 - \frac{1}{b^2}\right)^b \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)^c \cdots = \frac{2}{\pi}. \quad \text{(à peu près 0,63)}$$

VI. Comme dernier exemple, faisons

$$f(x) = x\mathcal{L}.\left(1 - \frac{1}{x^2}\right),$$

si x est premier, et $f(x) = 0$, dans les autres cas. Si l'on désigne par a, b, c, ... tous les diviseurs premiers de N, autres que 1, on trouve, en moyenne,

$$\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)^a \left(1 - \frac{1}{b^2}\right)^b \left(1 - \frac{1}{c^2}\right)^c \cdots = \frac{6}{\pi^2}, \quad \text{(à peu près 0,61)}$$

pourvu que l'on ait égard à la relation (70). Pour les diviseurs composés, on trouve $\frac{\pi^2}{12}$, c'est-à-dire, à peu près, 0,82.

NOTE XIV.

1. Les idées qui précèdent peuvent être étendues à tout système de nombres ayant, avec le nombre N, des liaisons déterminées. Ainsi, nous avons considéré les diviseurs $a, b, c, \ldots$ de N; mais l'on peut aussi considérer les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ premiers avec N, et non supérieurs à ce nombre, et se proposer de chercher des formules analogues à celles qui ont été démontrées dans les deux Notes précédentes.

Nous commencerons cette étude en discutant un essai, fort restreint, tenté par M. Joseph Perott. M. Perott a démontré, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, au moyen de considérations compliquées, et en se servant de la relation (70), la proposition suivante :

« *Soit* $\varphi(\mathrm{N})$ *le nombre des entiers premiers avec* N, *et non supérieurs à ce nombre. On a*

$$\lim \frac{\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)}{n^2}=\frac{3}{\pi^2}, \quad \text{(à peu près 0,30)} \tag{115}$$

lorsque n *augmente indéfiniment.* »

Examinons d'abord cette proposition en elle-même :

1° Il est à prévoir que la limite cherchée ne surpasse pas 0,50. En effet, on a

$$\varphi(\mathrm{N}) < \mathrm{N};$$

d'où

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n) < \frac{n(n+1)}{2};$$

puis

$$\lim \frac{1}{n^2}\left[\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)\right] < \frac{1}{2}.$$

2° Soit

$$\varphi(\mathrm{N}) = \frac{6}{\pi^2}\mathrm{N}$$

On a aussi

$$\psi(1)+\psi(2)+\psi(3)+\cdots+\psi(n)=\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2},$$

puis

$$\lim\frac{\psi(1)+\psi(2)+\psi(3)+\cdots+\psi(n)}{n^2}=\frac{3}{\pi^2}.$$

Donc, en moyenne,

$$\varphi(\mathrm{N})\equiv\psi(\mathrm{N});$$

c'est-à-dire que :

« *le nombre des entiers premiers avec* N, *et non supérieurs à ce nombre, est égal, en moyenne, à* $\frac{6}{\pi^2}$. N. »

C'est sous cette forme que M. Berger aurait énoncé le théorème de M. Perott. Nous pouvons ajouter : C'est sous cette même forme que Dirichlet l'a donné, bien avant M. Perott.

3° « *La probabilité que deux nombres quelconques soient premiers entre eux, est égale à* $\frac{6}{\pi^2}$. »

Parmi les nombres, 1, 2, 3, ..., n, on peut en prendre deux, de $\frac{n(n-1)}{2}$ manières différentes. Mais, de toutes ces combinaisons, combien en est-il qui renferment des nombres premiers entre eux?

Pour former celles-ci, il suffit de combiner chaque nombre p avec les $\varphi(p)$ nombres premiers avec lui, qui lui sont inférieurs. Le nombre des cas favorables est donc

$$\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\cdots+\varphi(n).$$

Par conséquent, la probabilité que deux nombres quelconques, pris au hasard parmi les n premiers nombres naturels, soient premiers entre eux, est

$$\mathrm{P}_n=\frac{2}{n(n-1)}\left[\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)\right]$$

Par exemple, pour les premières valeurs de n, on trouve

$n=$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...	∞
$\varphi(n)=$	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	...	∞
$\mathrm{P}_n=$	1	1	0,83	0,90	0,73	0,81	0,75	0,75	0,69	0,75	0,68	0,73	0,69	0,68	0,66	0,70	0,66	...	0,61

Si n augmente indéfiniment,

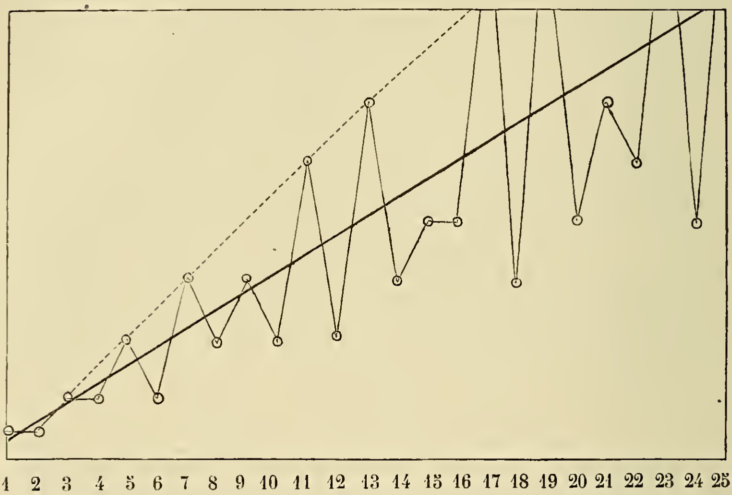
$$P_\infty = \lim \frac{2}{n^2}\left[\varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)\right] = \frac{6}{\pi^2}. \quad \text{(à peu près 0,61)}$$

En d'autres termes :

« *Il y a environ* 61 *à parier contre* 39 *que deux nombres quelconques sont premiers entre eux.* »

4° Voici le diagramme approximatif de la fonction

$$\varphi(N) = \frac{6}{\pi^2} \cdot N. \tag{116}$$



II. Voici l'exposé succinct de la démonstration du théorème (115), donnée, par M. Perott, dans le *Bulletin des Sciences* (janvier 1881, p. 37). Nous indiquons seulement le fond de la démonstration, en supprimant les détails qui pourraient la rendre obscure.

1° Soient α, β, γ, ... tous les nombres premiers avec N, et non supérieurs à N. Soit

$$\psi(N) = f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + \cdots$$

Dans la somme

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n),$$

$f(p)$ est pris autant de fois qu'il y a de nombres premiers avec p, supérieurs à p, et non supérieurs à n. Par conséquent, si l'on désigne par $\varphi(p,n)$ le nombre des entiers premiers avec p, et non supérieurs à n, $f(p)$ est pris $\varphi(p,n) - \varphi(p)$ fois. Il y a exception pour $f(1)$, qui est pris $\varphi(1,n)$ fois. Donc

$$\left.\begin{array}{c}\psi(1)+\psi(2)+\cdots+\psi(n)= \\ \left[f(1)\varphi(1,n)+\cdots+f(n)\varphi(n,n)\right]-\left[f(1)\varphi(1)+\cdots+f(n)\varphi(n)\right]+f(1)\end{array}\right\} \quad (117)$$

En particulier, si l'on fait $f(x)=1$, on a $\psi(N)=\varphi(N)$; et la relation (117) devient

$$\begin{array}{c}\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)= \\ \left[\varphi(1,n)+\cdots+\varphi(n,n)\right]-\left[\varphi(1)+\cdots+\varphi(n)\right]+1;\end{array}$$

d'où l'on tire

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\varphi(1,n)+\varphi(2,n)+\cdots+\varphi(n,n)\right]. \quad (118)$$

M. Perott n'emploie pas la relation (117), mais il démontre la relation (118) par des considérations moins faciles que les nôtres, bien qu'elles n'en diffèrent pas au fond. D'ailleurs, on peut établir d'un seul coup la relation (118). Observons, à cet effet, que

$$\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)$$

représente le nombre des couples de nombres premiers entre eux, et non supérieurs à n, tandis que la quantité

$$\varphi(2,n)+\varphi(3,n)+\cdots+\varphi(n,n)$$

exprime le double du même nombre. En effet, une combinaison (a, b) de deux nombres premiers entre eux est comptée, soit dans $\varphi(a, n)$, soit dans $\varphi(b, n)$; ce qui fait que chacune de ces combinaisons est comptée deux fois. On a donc

$$\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)=\frac{1}{2}\left[\varphi(2,n)+\varphi(3,n)+\cdots+\varphi(n,n)\right];$$

d'où l'on déduit (118), en ajoutant

$$\varphi(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varphi(1,n)$$

aux deux membres.

Remarquons, en passant, que la relation (117) en renferme une infinité d'autres, analogues à (118). Par exemple, pour $f(x)=x$, on trouve la relation

$$\varphi(1)+2\varphi(2)+\cdots+n\varphi(n)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left[\varphi(1,n)+2\varphi(2,n)+\cdots+n\varphi(n,n)\right],$$

due à M. Lucas.

2° Cela posé, on a

$$\varphi(p,n)=n-\sum\left[\frac{n}{u}\right]+\sum\left[\frac{n}{uv}\right]-\sum\left[\frac{n}{uvw}\right]+\cdots,$$

u, v, w, ... étant tous les diviseurs premiers de p, autres que 1, et le symbole $[x]$ exprimant le plus grand nombre entier contenu dans x. Évaluons la somme

$$\varphi(1,n)+\varphi(2,n)+\varphi(3,n)+\cdots+\varphi(n,n).$$

Il est clair que, dans cette somme, $\left[\frac{n}{k}\right]$ est pris autant de fois qu'il y a de multiples de k, parmi les nombres 1, 2, 3, ..., n, c'est-à-dire $\left[\frac{n}{k}\right]$ fois. Donc

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(1,n)+\varphi(2,n)+\varphi(3,n)+\cdots+\varphi(n,n)\\&\quad=n^2-\sum\left[\frac{n}{u}\right]^2+\sum\left[\frac{n}{uv}\right]^2-\sum\left[\frac{n}{uvw}\right]^2+\cdots\end{aligned}\right\}\quad(119)$$

Dans cette égalité, u, v, w, ... sont tous les nombres premiers, non supérieurs à n, différents de 1.

3° C'est ici que la démonstration de M. Perott nous semble défectueuse. En définitive, M. Perott tâche de prouver que l'on peut remplacer $\left[\frac{n}{k}\right]$ par $\frac{n}{k}$, dans la dernière égalité, lorsque n est infiniment grand. A cet effet, il remplace $\left[\frac{n}{k}\right]$ par $\frac{n}{k}-\lambda_k$, λ_k étant une fraction proprement dite, et, après une suite de calculs dépourvus de clarté et de rigueur, il arrive à la relation

$$\lim\frac{\varphi(1,n)+\varphi(2,n)+\cdots+\varphi(n,n)}{n^2}=1-\sum\frac{1}{u^2}+\sum\frac{1}{u^2v^2}-\cdots$$

$$=\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\left(1-\frac{1}{v^2}\right)\left(1-\frac{1}{w^2}\right)\cdots;$$

ou bien, d'après (70),

$$\lim \frac{\varphi(1,n)+\varphi(2,n)+\cdots+\varphi(n,n)}{n^2}=\frac{6}{\pi^2};$$

puis, à cause de (118),

$$\lim \frac{\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)}{n^2}=\frac{3}{\pi^2}. \tag{115}$$

III. Si l'on veut adopter la démonstration de M. Perott, en la rendant rigoureuse, il est à remarquer, en premier lieu, qu'il est inutile de passer par la notion des nombres $\varphi(p,n)$. En effet, on a immédiatement

$$\varphi(n)=n-\sum\frac{n}{u}+\sum\frac{n}{uv}-\sum\frac{n}{uvw}+\cdots,$$

$u, v, w, \ldots$ étant tous les diviseurs premiers de n, autres que 1. Puis, par addition, on voit que les fractions contenues dans le second membre, qui admettent le dénominateur k, ont pour numérateurs, k, $2k$, $3k$, ... $\left[\frac{n}{k}\right] k$; en sorte que le coefficient de $\frac{1}{k}$ est

$$k\left\{1+2+3+\cdots+\left[\frac{n}{k}\right]\right\}=\frac{k}{2}\left\{\left[\frac{n}{k}\right]^2+\left[\frac{n}{k}\right]\right\}.$$

Donc

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)\\ =\frac{1}{2}&\left\{\left(n^2-\sum\left[\frac{n}{u}\right]^2+\sum\left[\frac{n}{uv}\right]^2-\cdots\right)+\left(n-\sum\left[\frac{n}{u}\right]+\sum\left[\frac{n}{uv}\right]-\cdots\right)\right\},\end{aligned}\right\} \tag{120}$$

$u, v, w, \ldots$ désignant, ici, tous les nombres premiers, non supérieurs à n, et différents de 1.

Remarquons, encore, que la comparaison des formules (119) et (120), donne, eu égard à la relation (118),

$$n-\sum\left[\frac{n}{u}\right]+\sum\left[\frac{n}{uv}\right]-\sum\left[\frac{n}{uvw}\right]+\cdots=1.$$

Par exemple, pour $n = 20$, on a d'abord

$$\left[\frac{20}{2}\right] = 10,\quad \left[\frac{20}{3}\right] = 6,\quad \left[\frac{20}{5}\right] = 4,\quad \left[\frac{20}{7}\right] = 2,$$

$$\left[\frac{20}{11}\right] = \left[\frac{20}{13}\right] = \left[\frac{20}{17}\right] = \left[\frac{20}{19}\right] = 1,\quad \sum\left[\frac{20}{u}\right] = 26;$$

$$\left[\frac{20}{6}\right] = 3,\quad \left[\frac{20}{10}\right] = 2,\quad \left[\frac{20}{14}\right] = \left[\frac{20}{15}\right] = 1,\quad \sum\left[\frac{20}{uv}\right] = 7.$$

Puis

$$20 - 26 + 7 = 1;$$

ce qui est exact.

Reprenant notre démonstration, observons que, $\left[\frac{n}{k}\right]$ étant compris entre $\frac{n}{k} - 1$ et $\frac{n}{k}$, on a

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{n^2}{k^2} - 2\dfrac{n}{k} + 1 < \left[\dfrac{n}{k}\right]^2 \overline{\overline{<}} \dfrac{n^2}{k^2}, \\ \dfrac{n}{k} - 1 < \left[\dfrac{n}{k}\right] \overline{\overline{<}} \dfrac{n}{k}; \end{array}\right.$$

et, en ajoutant,

$$\frac{n^2}{k^2} - \frac{n}{k} < \left[\frac{n}{k}\right]^2 + \left[\frac{n}{k}\right] \overline{\overline{<}} \frac{n^2}{k^2} + \frac{n}{k}.$$

Après substitution convenable, dans (120), on trouve

$$\frac{n^2}{2}\left[1 - \sum\frac{1}{u^2} + \sum\frac{1}{u^2v^2} - \cdots\right] - \frac{n}{2}\left[1 + \sum\frac{1}{u} + \sum\frac{1}{uv} + \cdots\right] < \sum_1^n \varphi(p)$$
$$< \frac{n^2}{2}\left[1 - \sum\frac{1}{u^2} + \sum\frac{1}{u^2v^2} - \cdots\right] + \frac{n}{2}\left[1 + \sum\frac{1}{u} + \sum\frac{1}{uv} + \cdots\right],$$

ou bien

$$\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)\left(1 - \frac{1}{v^2}\right)\cdots - \frac{n}{2}\left(1 + \frac{1}{u}\right)\left(1 + \frac{1}{v}\right)\cdots < \sum_1^n \varphi(p)$$
$$< \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{u^2}\right)\left(1 - \frac{1}{v^2}\right)\cdots + \frac{n}{2}\left(1 + \frac{1}{u}\right)\left(1 + \frac{1}{v}\right)\cdots$$

Or, on sait que

$$\lim \frac{\left(1+\frac{1}{u}\right)\left(1+\frac{1}{v}\right)\left(1+\frac{1}{w}\right)\cdots}{\text{ℓ}.n}\cdots = \text{constante}.$$

De là, résulte

$$\lim \frac{\left(1+\frac{1}{u}\right)\left(1+\frac{1}{v}\right)\left(1+\frac{1}{w}\right)\cdots}{n}\cdots = 0;$$

et enfin,

$$\lim \frac{\sum_1^n \varphi(p)}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{u^2}\right)\left(1-\frac{1}{v^2}\right)\left(1-\frac{1}{w^2}\right)\cdots = \frac{3}{\pi^2}. \quad (115)$$

IV. Celui qui voudrait analyser la démonstration de M. Perott finirait par se convaincre que l'idée fondamentale de cette démonstration est simple et féconde. C'est ce que nous allons faire voir, en laissant au lecteur le soin de reconnaître l'identité entre cette idée et les développements qui vont suivre.

Soit λ la limite, inconnue, de l'expression

$$\frac{\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)}{n^2}.$$

Imaginons un tableau renfermant les n^2 fractions dont les termes ne surpassent pas n, et représentons par $\mu_1(n)$ le nombre de celles qui sont irréductibles. On a

$$\mu_1(n) = \varphi(1,n)+\varphi(2,n)+\varphi(3,n)+\cdots+\varphi(n,n);$$

ou bien, d'après (118),

$$\mu_1(n) = 2\left[\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)\right]-1,$$

puis

$$\lim \frac{\mu_1(n)}{n^2} = 2\lambda. \quad (121)$$

Soit, maintenant, $\mu_p(n)$ le nombre des fractions dont les termes admettent p pour plus grand commun diviseur. Si $\frac{x}{y}$ est une de ces fractions, on peut poser $x = px'$, $y = py'$, x' et y' étant premiers entre eux. A cause de $x \overline{\gtrless} n$, $y \overline{\gtrless} n$, on doit avoir

$$x' \overline{\gtrless} \frac{n}{p}, \quad y' \overline{\gtrless} \frac{n}{p};$$

d'où il résulte que le nombre des fractions dont les termes ne surpassent pas n, et admettent p pour plus grand commun diviseur, est égal au nombre des fractions irréductibles dont les termes ne surpassent pas $\frac{n}{p}$. Autrement dit :

$$\mu_p(n) = \mu_1\left(\frac{n}{p}\right).$$

Or, d'après (121), on a

$$\lim \frac{\mu_1\left(\frac{n}{p}\right)}{\frac{n^2}{p^2}} = 2\lambda$$

Donc

$$\lim \frac{\mu_p(n)}{n^2} = \frac{2\lambda}{p^2}.$$

On déduit, de là,

$$\lim \frac{\mu_1(n) + \mu_2(n) + \mu_3(n) + \cdots}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right) . 2\lambda = \frac{\lambda}{3}\pi^2.$$

Mais, évidemment, le numérateur de la dernière fraction exprime le nombre de toutes les fractions contenues dans notre tableau, c'est-à-dire n^2. Donc

$$\frac{\lambda}{3}\pi^2 = 1,$$

ou

$$\lambda = \frac{3}{\pi^2}.$$

D'après ces considérations, la proposition trouvée plus haut peut encore s'énoncer ainsi :

« *Il y a environ 69 à parier contre 31 qu'une fraction quelconque est irréductible.* »

Nous pouvons même ajouter ceci :

« *La probabilité que deux nombres quelconques admettent* p *pour plus grand commun diviseur, est* $\frac{1}{p^2} \cdot \frac{6}{\pi^2}$. »

Ainsi, pour $p = 2, 3, 4, \ldots$ on trouve respectivement

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\pi^2}, \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\pi^2}, \quad \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{\pi^2}, \ldots$$

Nous avons dit que les idées précédentes sont fécondes. En effet, si l'on désigne par $\sigma(n)$ la somme de fonctions quelconques des fractions considérées, et par $\sigma_p(n)$ la même somme, dans laquelle on ne conserve que les fractions dont les termes admettent p pour plus grand commun diviseur, on peut toujours écrire, pour n infiniment grand :

$$\left\{ \begin{aligned} &\sigma_p(n) = \sigma_1\left(\frac{n}{p}\right), \\ &\sigma(n) = \sigma_1(n) + \sigma_1\left(\frac{n}{2}\right) + \sigma_1\left(\frac{n}{3}\right) + \sigma_1\left(\frac{n}{4}\right) + \cdots \end{aligned} \right.$$

C'est sur ces deux égalités qu'est basée la démonstration précédente, laquelle, on le voit, est susceptible de conduire à une large généralisation du théorème de M. Perott.

V. Voici maintenant la démonstration très simple que fournit la Théorie des Moyennes (*).

D'après l'identité

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \varphi(c) + \cdots = \mathrm{N}, \tag{122}$$

si $\psi(\mathrm{N})$ est la valeur moyenne de $\varphi(\mathrm{N})$, on a, en moyenne,

$$\psi(a) + \psi(b) + \psi(c) + \cdots \equiv \mathrm{N}. \tag{123}$$

(*) Nous sommes convaincu que les égalités moyennes sont appelées à rendre de véritables services à la Science des Nombres. Il y aurait à établir une *Théorie des égalités moyennes*, en réunissant les règles qui permettent, dans certains cas, de se servir de ces égalités comme on se sert des égalités véritables.

D'autre part, d'après un théorème précédent, on a aussi, en moyenne,

$$a + b + c + \cdots \equiv \frac{\pi^2}{6} N,$$

ou

$$\frac{6}{\pi^2} a + \frac{6}{\pi^2} b + \frac{6}{\pi^2} c + \cdots \equiv N. \tag{124}$$

En comparant (123) et (124), on voit que l'on peut prendre

$$\psi(x) = \frac{6}{\pi^2} x.$$

Donc, en moyenne,

$$\varphi(N) \equiv \frac{6}{\pi^2} . N.$$

VI. Voici encore la démonstration donnée par Dirichlet. D'après l'identité (3), si l'on pose

$$F(x) = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(x),$$

on a

$$F(q_1) + F(q_2) + F(q_3) + \cdots + F(q_n) = q_1\varphi(1) + q_2\varphi(2) + q_3\varphi(3) + \cdots + q_n\varphi(n).$$

Mais si, dans (122), on donne à N les valeurs 1, 2, 3, ..., n, et si l'on ajoute toutes les égalités ainsi obtenues, on trouve

$$q_1\varphi(1) + q_2\varphi(2) + q_3\varphi(3) + \cdots + q_n\varphi(n) = \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n.$$

On a donc aussi

$$F(q_1) + F(q_2) + F(q_3) + \cdots + F(q_n) \equiv \frac{1}{2} n^2,$$

en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^2. On peut tâcher de satisfaire à l'égalité précédente, en prenant $F(x) = kx^2$. On doit avoir

$$k(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \cdots + q_n^2) \equiv \frac{1}{2} n^2.$$

Mais l'expression asymptotique de la quantité entre parenthèses est, évidemment,

$$n^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right)\equiv\frac{\pi^2}{6}n^2.$$

Donc

$$k=\frac{3}{\pi^2}.$$

Il suit de là que l'on peut écrire, asymptotiquement,

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(x)\equiv\frac{3}{\pi^2}x^2,$$

et l'on satisfait à cette égalité moyenne, en prenant

$$\varphi(\mathrm{N})\equiv\frac{6}{\pi^2}\,.\,\mathrm{N}.$$

VII. Enfin, M. Mertens part de la relation

$$\varphi(\mathrm{N})=a\mu\left(\frac{\mathrm{N}}{a}\right)+b\mu\left(\frac{\mathrm{N}}{b}\right)+c\mu\left(\frac{\mathrm{N}}{c}\right)+\cdots, \tag{125}$$

démontrée précédemment. On peut aussi écrire

$$\varphi(\mathrm{N})=\frac{\mathrm{N}}{a}\,.\,\mu(a)+\frac{\mathrm{N}}{b}\,.\,\mu(b)+\frac{\mathrm{N}}{c}\,.\,\mu(c)+\cdots$$

En écrivant n relations analogues, pour les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, de N, et ajoutant, on trouve

$$\begin{gathered}\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)\\ =\frac{q_1(q_1+1)}{2}\mu(1)+\frac{q_2(q_2+1)}{2}\mu(2)+\cdots+\frac{q_n(q_n+1)}{2}\mu(n).\end{gathered}$$

Précédemment, nous avons fait observer que l'on a

$$\frac{1}{2}\left[\frac{n^2}{p^2}-\frac{n}{p}\right]<\frac{q_p(q_p+1)}{2}\overline{\gtrless}\,\frac{1}{2}\left[\frac{n^2}{p^2}+\frac{n}{p}\right].$$

De là, résulte

$$\frac{n^2}{2}\left[\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{4}+\cdots+\frac{\mu(n)}{n^2}\right]-\frac{n}{2}\left[\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{2}+\cdots+\frac{\mu(n)}{n}\right]$$
$$<\sum_1^n \varphi(p)<\frac{n^2}{2}\left[\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{4}+\cdots+\frac{\mu(n)}{n^2}\right]+\frac{n}{2}\left[\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{2}+\cdots+\frac{\mu(n)}{n}\right].$$

Puisque les valeurs extrêmes de $\mu(n)$ sont -1 et $+1$, la quantité

$$\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{2}+\frac{\mu(3)}{3}+\cdots+\frac{\mu(n)}{n},$$

est comprise entre $-H_n$ et H_n. Si on la néglige, l'erreur n'atteindra donc pas l'ordre de n^2, et l'on pourra écrire

$$\sum_1^n \varphi(p)=\frac{n^2}{2}\left[\frac{\mu(1)}{1}+\frac{\mu(2)}{4}+\frac{\mu(3)}{9}+\cdots\right];$$

ou bien, d'après (68),

$$\sum_1^n \varphi(p)=\frac{n^2}{2}\cdot\frac{6}{\pi^2},$$

puis

$$\varphi(N)=\frac{6}{\pi^2}\cdot N$$

M. Mertens donne cette démonstration, parce qu'il la trouve plus directe que celle de Dirichlet. Quoi qu'il en soit, faisons observer que les démonstrations de MM. Mertens et Perott sont identiques au fond, et ne diffèrent que par la forme, très nette et très concise chez M. Mertens, grâce à la pensée que ce Géomètre a eue d'introduire, dans ses calculs, la fonction $\mu(n)$.

VIII. Si l'on était parti de l'égalité (125), en la prenant telle quelle, on aurait trouvé

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\cdots+\varphi(n)=\psi(q_1)+2\psi(q_2)+3\psi(q_3)+\cdots+n\psi(q_n),$$

en posant

$$\psi(x)=\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\cdots+\mu(x).$$

Par conséquent, d'après ce qui précède, on a, asymptotiquement,

$$\psi(q_1) + 2\psi(q_2) + 3\psi(q_3) + \cdots + n\psi(q_n) \equiv \frac{3}{\pi^2} n^2.$$

On peut tâcher de satisfaire à cette égalité, en prenant $\psi(x) = kx$. On doit avoir

$$k(q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots + nq_n) \equiv \frac{3}{\pi^2} n^2.$$

Or, on sait que la quantité entre parenthèses a pour valeur moyenne $\frac{\pi^2}{12} n^2$. Donc

$$k \cdot \frac{\pi^2}{12} = \frac{3}{\pi^2},$$

ou

$$k = \frac{36}{\pi^4}.$$

Par conséquent, on peut écrire, en moyenne,

$$\mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \cdots + \mu(x) \equiv \frac{36}{\pi^4} x;$$

relation d'où l'on déduit, finalement,

$$\mu(\mathrm{N}) \equiv \frac{36}{\pi^4}. \qquad \text{(à peu près 0,37)}$$

Telle est la valeur moyenne de cette fonction $\mu(\mathrm{N})$, qui, comme on sait, ne peut prendre d'autres valeurs que $-1, 0, +1$.

NOTE XV.

I. Si α est premier avec N, $N-\alpha$ est aussi premier avec N; d'où il résulte que, si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont tous les nombres premiers avec N, et non supérieurs à N, les nombres $N-\alpha$, $N-\beta$, $N-\gamma, \ldots$ sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Cette remarque permet d'écrire l'identité générale

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \cdots) = f(N-\alpha, N-\beta, N-\gamma, \cdots), \tag{126}$$

f étant une fonction symétrique par rapport aux variables qu'elle renferme. Par exemple

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = (N-\alpha) + (N-\beta) + (N-\gamma) + \cdots;$$

d'où

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = \frac{N\varphi(N)}{2},$$

formule connue.

En faisant varier la forme de f, on obtient différents théorèmes. Nous utiliserons cette remarque, dans deux cas particuliers.

II. « *Soit* A_m *la moyenne arithmétique des* $m^{\text{èmes}}$ *puissances des nombres* $\frac{\alpha}{N}, \frac{\beta}{N}, \frac{\gamma}{N}, \ldots$ *On a*

$$A^m = (1-A)^m, \tag{127}$$

pourvu que l'on considère les exposants de A *comme des indices.* »

En effet, soit $\varphi_m(N)$, ou, pour abréger, φ_m, la somme des $m^{\text{èmes}}$ puissances des nombres, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ D'après l'identité (126) on a

$$\varphi_m = \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \cdots = (N-\alpha)^m + (N-\beta)^m + (N-\gamma)^m + \cdots;$$

et, en développant,

$$\varphi_m = \varphi . N^m - C_{m,1}\varphi_1 . N^{m-1} + C_{m,2}\varphi_2 . N^{m-2} - \cdots \pm \varphi_m \quad (128)$$

Par la définition de A_m,

$$A_m = \frac{\varphi_m}{\varphi} \cdot \frac{1}{N^m}.$$

Si, dans la formule précédente, on remplace φ_m par $\varphi . A_m N^m$, on obtient

$$A_m = 1 - C_{m,1} A_1 + C_{m,2} A_2 - C_{m,3} A_3 + \cdots \pm A_m;$$

ou, symboliquement,

$$A^m = (1 - A)^m.$$

Remarques. — 1° Si m est impair, la relation (128) donne

$$\varphi_m = \frac{N}{2}\left[\varphi . N^{m-1} - C_{m,1}\varphi_1 . N^{m-2} + \cdots + C_{m,m-1} . \varphi_{m-1}\right].$$

Si N *est impair,* la quantité entre crochets est nécessairement paire. *Si* N *est pair,* les nombres α, β, γ, ... sont tous impairs; et, comme leur nombre est généralement pair, les sommes φ_1, φ_2, φ_3, ... sont toutes paires, d'où il résulte que la quantité entre crochets est encore paire. Par conséquent, *quel que soit* N, φ_m est divisible par N. En d'autres termes :

« *La somme des* m^èmes *puissances des nombres non supérieurs à* N, *et premiers avec ce nombre, est divisible par* N, *si* m *est impair.* »

Ainsi, on peut écrire :

$$\varphi_m = \mathfrak{M} . N. \qquad (m \text{ impair}).$$

Il est assez remarquable que ce théorème ait lieu, seulement, pour les valeurs impaires de m.

Il est facile de prouver qu'il n'est pas vrai, par exemple, pour $m = \varphi(N)$.

En effet, pour cette valeur de m, on a

$$\alpha^m = \mathfrak{M} . N + 1,$$

d'après la généralisation du *théorème de Fermat.* De même,

$$\beta^m = \mathfrak{M} . N + 1, \gamma^m = \mathfrak{M} . N + 1, \ldots$$

Donc, en ajoutant,

$$\varphi_m = \mathfrak{M}.\mathrm{N} + \varphi(\mathrm{N}), \quad [m = \varphi(\mathrm{N})].$$

Il en est de même pour $m = 2\varphi, 3\varphi, 4\varphi, \ldots$; car les nombres $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \ldots$, sont premiers avec N.

2° L'égalité (127) ne permet pas de calculer les nombres A. Cela s'explique, vu que ces nombres sont nécessairement variables avec N. Ainsi, en faisant successivement $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_1 &= 1 - \mathrm{A}_1, \\
\mathrm{A}_2 &= 1 - 2\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2, \\
\mathrm{A}_3 &= 1 - 3\mathrm{A}_1 + 3\mathrm{A}_2 - \mathrm{A}_3, \\
\mathrm{A}_4 &= 1 - 4\mathrm{A}_1 + 6\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \mathrm{N}\varphi - \varphi_1, \\
\varphi_2 &= \mathrm{N}^2\varphi - 2\mathrm{N}\varphi_1 + \varphi_2, \\
\varphi_3 &= \mathrm{N}^3\varphi - 3\mathrm{N}^2\varphi_1 + 3\mathrm{N}\varphi_2 - \varphi_3, \\
\varphi_4 &= \mathrm{N}^4\varphi - 4\mathrm{N}^3\varphi_1 + 6\mathrm{N}^2\varphi_2 - 4\mathrm{N}\varphi_3 + \varphi_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nous voyons que chaque égalité de rang pair ne diffère pas de l'égalité précédente. La première égalité donne $\mathrm{A}_1 = \frac{1}{2}$, ou $\varphi_1 = \frac{1}{2}\mathrm{N}\varphi$. La deuxième ne peut pas donner A_2, mais la troisième fournit une relation entre A_2 et A_3. Cette relation est

$$6\mathrm{A}_2 - 4\mathrm{A}_3 = 1,$$

ou

$$3\mathrm{N}\varphi_2 - 2\varphi_3 = \frac{1}{2}\mathrm{N}^3\varphi. \qquad (129)$$

Ainsi, bien que A_2 et A_3 dépendent de N, la fonction $6\mathrm{A}_2 - 4\mathrm{A}_3$ est constante. Et, en effet, d'après les *formules de Thacker*, citées dans la Note VIII, on a

$$\mathrm{A}_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi(\mathrm{N})}{\mathrm{N}^2},$$

$$\mathrm{A}_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi(\mathrm{N})}{\mathrm{N}^2}.$$

L'élimination de $\frac{\pi(N)}{N^2}$ conduit à la relation (129). Remarquons aussi que, si N augmente indéfiniment, les nombres A_2, A_3 tendent, respectivement, vers $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

III. D'après leur définition, les nombres A_1, A_2, A_3, ... sont des fractions proprement dites. Il en résulte que leursva leurs moyennes sont des constantes, moindres que 1. Dorénavant, nous désignerons par A_1, A_2, A_3, ..., ces valeurs moyennes. Cela posé, nous avons vu que l'on a, en moyenne,

$$\varphi(N) \equiv \frac{6}{\pi^2} N.$$

Or, $\varphi_m(N) = A_m \varphi(N) . N^m$. Donc, en moyenne aussi,

$$\varphi_m(N) \equiv \frac{6}{\pi^2} A_m N^{m+1}.$$

Pour $m = 1$,

$$\varphi_1(N) \equiv \frac{6}{\pi^2} A_1 N^2 = \frac{3}{\pi^2} N^2.$$

Autrement dit :

« *La somme des entiers non supérieurs à* N, *et premiers avec ce nombre, égale, en moyenne,* $\frac{3}{\pi^2} N^2$ (à peu près $0{,}30 . N^2$). »

Pour $m = 2$ et $m = 3$:

$$\varphi_2(N) \equiv \frac{6}{\pi^2} A_2 N^3 = \frac{x}{\pi^2} N^3,$$

$$\varphi_3(N) \equiv \frac{6}{\pi^2} A_3 N^4 = \frac{y}{\pi^2} N^4.$$

On ne connaît ni x ni y, mais l'on sait que $3x - 2y = 3$, d'après (129).

IV. Un calcul analogue peut s'appliquer aux produits m à m des nombres α, β, γ, ... Nous commencerons par démontrer la proposition suivante :

« *Soit* B_m *la moyenne arithmétique des produits* m *à* m *des nombres*

$$\frac{\alpha}{N}, \quad \frac{\beta}{N}, \quad \frac{\gamma}{N}, \ldots$$

On a, symboliquement,

$$B^m = (1 - B)^m. \quad »$$

Soit $\psi_m(N)$, ou simplement ψ_m, la somme des produits m à m des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ On a

$$\begin{aligned}\psi_m &= \alpha\beta\gamma \cdots + \beta\delta\varepsilon \cdots + \cdots \\ &= (N-\alpha)(N-\beta)(N-\gamma)\cdots + (N-\beta)(N-\delta)(N-\varepsilon)\cdots + \cdots;\end{aligned}$$

et, en développant,

$$\left.\begin{aligned}\psi_m = C_{\psi,m}.N^m - C_{\psi-1,m-1}.\psi_1.N^{m-1} + C_{\psi-2,m-2}.\psi_2.N^{m-2} - \cdots \\ \pm C_{\psi-m+1,1}.\psi_{m-1}.N \pm \psi_m.\end{aligned}\right\} \quad (130)$$

Or, d'après la définition de B_m,

$$B_m = \frac{\psi_m}{C_{\psi,m}} \cdot \frac{1}{N^m},$$

$\psi(N)$ ne différant pas de $\varphi(N)$. Si l'on remplace ψ_m par $C_{\psi,m}B_mN^m$, dans l'égalité (130), celle-ci devient

$$B_m = 1 - C_{m,1}B_1 + C_{m,2}B_2 - C_{m,3}B_3 + \cdots \pm B_m,$$

c'est-à-dire, symboliquement,

$$B^m = (1 - B)^m.$$

Remarques. 1° Ces nombres B ne sont pas les mêmes que les nombres A, bien que les uns et les autres satisfassent à la même relation symbolique. Cela tient à ce que cette relation ne définit pas les nombres qui y entrent. Nous avons vu, en effet, qu'elle ne permet pas de calculer A_2, et qu'elle ne peut donner qu'une relation entre A_2 et A_3. Il doit exister, outre la relation symbolique qui nous occupe, et qui s'applique à tout système de nombres, capables d'être groupés deux à deux, de manière que la somme des nombres de chaque groupe soit N; il doit exister, disons-nous, une autre relation, capable de combler les lacunes laissées par la relation symbolique, et propre à fixer les valeurs des nombres A. Il est clair qu'on ne peut parvenir à cette relation qu'en faisant intervenir, dans le calcul, la nature même des nombres α, β, γ, ...; c'est-à-dire en exprimant que ces nombres sont premiers avec N. Cela a déjà été fait par Thacker. Au moyen de la formule découverte par ce Géomètre, on trouve aisément

$$\psi_2(N) = \frac{\varphi}{24}\left[(3\varphi - 2)N^2 - 4\pi(N)\right],$$

$$\psi_3(N) = \frac{\varphi(\varphi - 2)}{48}\left[(\varphi - 2)N^2 - 2\pi(N)\right].N;$$

d'où l'on déduit

$$B_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{12(\varphi - 1)}\left[1 + 2\frac{\pi(N)}{N^2}\right],$$

$$B_3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{8(\varphi - 1)}\left[1 + 2\frac{\pi(N)}{N^2}\right].$$

L'élimination de la quantité entre crochets donne bien

$$6B_2 - 4B_3 = 1.$$

Les nombres B_2 et B_3 tendent, respectivement, vers $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$, lorsque N augmente indéfiniment.

2° Si m est impair, la relation (130) devient

$$\psi_m = \frac{N}{2}\left[C_{\varphi,m}.N^{m-1} - C_{\varphi-1,m-1}\cdot\psi_1\,.\,N^{m-2} + \cdots + C_{\varphi-m+1,1}\cdot\psi_{m-1}\right].$$

Les $m - 1$ premiers termes sont divisibles par N. Quant au dernier :

$$\frac{N(\varphi - m + 1)}{2}\cdot\psi_{m-1};$$

on peut observer que $\varphi - m + 1$ est pair. Le dernier terme est donc aussi divisible par N. Par conséquent :

« *La somme des produits* m *à* m *des nombres premiers avec* N, *et non supérieurs à ce nombre, est divisible par* N, *si* m *est impair.* »

En d'autres termes :

$$\psi_m = \mathfrak{M}\,.\,\mathrm{N}. \quad (m \text{ impair})$$

Le théorème ne subsiste pas dans le cas de m pair. Ainsi, par exemple, pour $m = \varphi(\mathrm{N})$, ψ_m représente le produit des nombres α, β, γ, ... Or, on sait que

$$\varphi_m = \mathfrak{M}\mathrm{N} \pm 1 \quad [m = \varphi(\mathrm{N})],$$

d'après la généralisation du *théorème de Wilson*.

V. En moyenne,

$$\psi(\mathrm{N}) \equiv \frac{6}{\pi^2}\,\mathrm{N}.$$

Or, $\psi_m(\mathrm{N}) = \mathrm{C}_{\psi,m}\mathrm{B}_m\mathrm{N}^m$. Donc, si l'on ne considère que les valeurs moyennes, évidemment constantes, des nombres B_1, B_2, B_3, ..., on trouve

$$\psi_m(\mathrm{N}) \equiv \frac{\mathrm{B}_m}{1.2.3\ldots m}\cdot\left(6\cdot\frac{\mathrm{N}^2}{\pi^2}\right)^m.$$

En particulier, pour $m = 1$,

$$\psi_1(\mathrm{N}) \equiv \mathrm{B}_1\cdot\frac{6}{\pi^2}\mathrm{N}^2 = \frac{3}{\pi^2}\mathrm{N}^2;$$

valeur déjà trouvée, car $\psi_1(\mathrm{N})$ ne diffère pas de $\varphi_1(\mathrm{N})$.

Pour $m = 2$ et $m = 3$,

$$\psi_2(\mathrm{N}) \equiv \frac{\mathrm{B}_2}{1.2}\cdot\left(6\frac{\mathrm{N}^2}{\pi^2}\right)^2 = x\cdot\left(\frac{\mathrm{N}}{\pi}\right)^4,$$

$$\psi_3(\mathrm{N}) \equiv \frac{\mathrm{B}_3}{1.2.3}\cdot\left(6\frac{\mathrm{N}}{\pi^2}\right)^3 = y\cdot\left(\frac{\mathrm{N}}{\pi}\right)^6.$$

On ne connaît ni x ni y; mais l'on sait qu'il existe, entre ces coefficients, la relation $3x - y = 9$.

VI. La méthode de Dirichlet va, cette fois, nous rendre des services. D'après un théorème de M. Liouville, démontré dans la Note VIII, on a

$$a^m\varphi_m\left(\frac{\mathrm{N}}{a}\right) + b^m\varphi_m\left(\frac{\mathrm{N}}{b}\right) + c^m\varphi_m\left(\frac{\mathrm{N}}{c}\right) + \cdots = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + \mathrm{N}^m. \quad (83)$$

Faisons $N = 1, 2, 3 \ldots n$; et ajoutons. On trouve

$$F(q_1) + 2^m F(q_2) + 3^m F(q_3) + \cdots + n^m F(q_n) = \frac{n^{m+2}}{(m+1)(m+2)}, \quad (131)$$

si l'on pose

$$F(x) = \varphi_m(1) + \varphi_m(2) + \varphi_m(3) + \cdots + \varphi_m(x),$$

et si l'on néglige les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^{m+2}.

On peut tâcher de satisfaire à l'égalité (131), au moyen de $F(x) = kx^{m+2}$. L'égalité en question devient, par cette substitution,

$$k\left[q_1^{m+2} + 2^m q_2^{m+2} + 3^m q_3^{m+2} + \cdots + n^m q_n^{m+2}\right] = \frac{n^{m+2}}{(m+1)(m+2)}.$$

Il est aisé de s'assurer que la quantité entre crochets a pour valeur asymptotique

$$n^{m+2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots\right) = \frac{\pi^2}{6} n^{m+2}.$$

Donc

$$k = \frac{1}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{6}{\pi^2}.$$

Par suite,

$$\varphi_m(1) + \varphi_m(2) + \varphi_m(3) + \cdots + \varphi_m(x) = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{6}{\pi^2};$$

et, en moyenne,

$$\varphi_m(N) = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{N^{m+1}}{m+1}.$$

On trouverait, tout aussi facilement,

$$\psi_m(N) = \frac{1}{1.2.3 \cdots m} \cdot \left(3\frac{N^2}{\pi^2}\right)^m.$$

En nous reportant aux notations des précédents paragraphes, nous avons donc

$$A_m = \frac{1}{m+1}, \quad B_m = \frac{1}{2^m}.$$

Il en résulte que les deux séries

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{1}{6},\ldots,$$

$$1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{1}{16},\quad \frac{1}{32},\ldots$$

doivent obéir à la loi exprimée symboliquement par $A^m = (1 - A)^m$. En effet, cette égalité devient, pour chacune des séries considérées,

$$(1-1)^m = 0,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right)^m = \frac{1}{2^m}.$$

VII. Sous une autre forme, on peut dire que

$$\lim \frac{\varphi_m(1) + \varphi_m(2) + \varphi_m(3) + \cdots + \varphi_m(n)}{n^{m+2}} = \frac{1}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{6}{\pi^2},$$

$$\lim \frac{\psi_m(1) + \psi_m(2) + \psi_m(3) + \cdots + \psi_m(n)}{n^{2m+1}} = \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{1}{1.2.3\cdots m} \cdot \left(\frac{3}{\pi^2}\right)^m.$$

En particulier :

$$\lim \frac{\sum \varphi_1(p)}{n^3} = \lim \frac{\sum \psi_1(p)}{n^3} = \frac{1}{\pi^2} \quad \text{(à peu près 0,1013)},$$

$$\lim \frac{\sum \varphi_2(p)}{n^4} = \frac{1}{2\pi^2}, \quad \text{(à peu près 0,0507)};$$

$$\lim \frac{\sum \psi_2(p)}{n^5} = \frac{9}{10\pi^4}, \quad \text{(à peu près 0,0092)},$$

$$\lim \frac{\sum \varphi_3(p)}{n^5} = \frac{3}{10\pi^2}, \quad \text{(à peu près 0,0304)};$$

$$\lim \frac{\sum \psi_3(p)}{n^7} = \frac{9}{14\pi^6}, \quad \text{(à peu près 0,0007)}.$$

NOTE XVI.

I. Reprenons la formule

$$\left.\begin{array}{l}\psi(1)+\psi(2)+\cdots+\psi(n)=\left[f(1)\varphi(1,n)+\cdots+f(n)\varphi(n,n)\right]\\ \quad-\left[f(1)\varphi(1)+f(2)\varphi(2)+\cdots+f(n)\varphi(n)\right]+f(1)\end{array}\right\} \quad (117)$$

Si l'on observe que, α étant premier avec p, il en est de même de

$$\alpha+p,\quad \alpha+2p,\quad \alpha+3p,\ldots,$$

on peut écrire

$$\varphi(p,n)=q_p\varphi(p)+\varphi(p,\mathrm{R}_p),$$

R_p étant le reste de la division de n par p.

Si l'on remplace $\varphi(p, n)$ par sa valeur, dans l'identité (117), celle-ci devient

$$\left.\begin{array}{l}\sum_1^n\psi(p)=\left[q_1\varphi(1)f(1)+q_2\varphi(2)f(2)+\cdots+q_n\varphi(n)f(n)\right]\\ -\left[\varphi(1)f(1)+\varphi(2)f(2)+\cdots+\varphi(n)f(n)\right]\\ +\left[\varphi(1,\mathrm{R}_1)f(1)+\varphi(2,\mathrm{R}_2)f(2)+\cdots+\varphi(n,\mathrm{R}_n)f(n)\right]\\ +f(1)\end{array}\right\} (132)$$

Pour montrer une première application de cette identité, faisons $f(x)=1$. On a d'abord $\psi(\mathrm{N})=\varphi(\mathrm{N})$, à cause de l'égalité de définition

$$\psi(\mathrm{N})=f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+\cdots$$

Puis, l'identité (132) donne

$$\begin{array}{c}2\left[\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)\right]\\ =\left[q_1\varphi(1)+\cdots+q_n\varphi(n)\right]+\left[\varphi(1,\mathrm{R}_1)+\cdots+\varphi(n,\mathrm{R}_n)\right]+1.\end{array}$$

Mais on a vu que, asymptotiquement :

$$\begin{cases} \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n) \equiv \dfrac{3}{\pi^2} n^2, \\ q_1\varphi(1) + q_2\varphi(2) + q_3\varphi(3) + \cdots + q_n\varphi(n) \equiv \dfrac{1}{2} n^2. \end{cases}$$

On a donc aussi, asymptotiquement,

$$\varphi(1, R_1) + \varphi(2, R_2) + \varphi(3, R_3) + \cdots + \varphi(n, R_n) \equiv \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{2}\right) n^2.$$

Par conséquent :

« *Si l'on désigne par* $\varphi'(x)$ *le nombre des entiers premiers avec* x, *et non supérieurs au reste de la division de* n *par* x,

$$\lim \frac{\varphi'(1) + \varphi'(2) + \varphi'(3) + \cdots + \varphi'(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{2}, \quad \text{(à peu près 0,11).} »$$

Si l'on compare la dernière valeur asymptotique avec cette autre valeur, facile à établir,

$$\varphi\left(1, \frac{1}{2}\right) + \varphi\left(2, \frac{2}{2}\right) + \varphi\left(3, \frac{3}{2}\right) + \cdots + \varphi\left(n, \frac{n}{2}\right) \equiv \frac{3}{2\pi^2} n^2;$$

on voit que, à cause de

$$\frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{2} < \frac{3}{2\pi^2},$$

il y a comme une tendance des restes à être inférieurs à la moitié des diviseurs correspondants. Ceci n'est, bien entendu, qu'une simple induction; mais elle sera confirmée plus loin.

II. Soit $f(x) = \frac{1}{x^m}$. La première partie du second membre de (132) devient

$$q_1 \frac{\varphi(1)}{1^m} + q_2 \frac{\varphi(2)}{2^m} + q_3 \frac{\varphi(3)}{3^m} + \cdots + q_n \frac{\varphi(n)}{n^m},$$

expression dont la valeur asymptotique est

$$n \left[\frac{\varphi(1)}{1^{m+1}} + \frac{\varphi(2)}{2^{m+1}} + \frac{\varphi(3)}{3^{m+1}} + \cdots + \frac{\varphi(n)}{n^{m+1}}\right],$$

pourvu que m surpasse 1, sans quoi la série entre crochets serait divergente. M. Liouville a démontré que la somme de cette série est $\frac{S_m}{S_{m+1}}$, si l'on désigne par S_m la limite de la série

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\cdots$$

D'après cela, les deux dernières parties du second membre de (132) sont négligeables vis-à-vis de n. On a donc

$$\lim\frac{\sum\psi(p)}{n}=\frac{\varphi(1)}{1^{m+1}}+\frac{\varphi(2)}{2^{m+1}}+\frac{\varphi(3)}{3^{m+1}}+\cdots;$$

c'est-à-dire, en moyenne,

$$\frac{1}{\alpha^m}+\frac{1}{\beta^m}+\frac{1}{\gamma^m}+\cdots\equiv\frac{S_m}{S_{m+1}}.$$

Par exemple,

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\cdots\equiv\frac{\pi^2}{6.1,202\,056\ldots},\quad \text{(à peu près 1,37)},$$

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\gamma^3}+\cdots\equiv\frac{90.1,202\,056\ldots}{\pi^4};\quad \text{(à peu près 1,11)},$$

etc., etc...

On démontre, tout aussi facilement, que l'on a, en moyenne,

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\cdots\equiv\frac{6}{\pi^2}\mathfrak{L}.\,N.$$

III. Si l'on fait

$$f(x)=\frac{1}{x^m\varphi(x)},$$

on trouve l'égalité moyenne :

$$\frac{1}{\alpha^m\varphi(\alpha)}+\frac{1}{\beta^m\varphi(\beta)}+\frac{1}{\gamma^m\varphi(\gamma)}+\cdots\equiv S_{m+1}.$$

En particulier,

$$\frac{1}{\alpha\varphi(\alpha)} + \frac{1}{\beta\varphi(\beta)} + \frac{1}{\gamma\varphi(\gamma)} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}. \qquad (133)$$

On peut aussi démontrer que

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} + \frac{1}{\varphi(\beta)} + \frac{1}{\varphi(\gamma)} + \cdots = \mathcal{L}.N.$$

Si l'on désigne par $\sigma(x)$ le nombre des entiers premiers avec x, et non supérieurs à ce nombre, l'égalité (133) peut encore se mettre sous la forme

$$\frac{1}{\sigma(a)} + \frac{1}{\sigma(b)} + \frac{1}{\sigma(c)} + \cdots = \frac{\pi^2}{3} - 1.$$

IV. On trouve une infinité d'autres égalités moyennes, en faisant varier la forme de $f(x)$. Par exemple :

$$\frac{\pi(\alpha)}{\alpha^m} + \frac{\pi(\beta)}{\beta^m} + \frac{\pi(\gamma)}{\gamma^m} + \cdots = \frac{S_m}{S_{m-1}}, \qquad (m \overline{\overline{>}} 3),$$

$$\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha^m} + \frac{\lambda(\beta)}{\beta^m} + \frac{\lambda(\gamma)}{\gamma^m} + \cdots = \frac{S_{2m}\,S_{m+1}}{S_{2m+2}\,S_m}; \quad (m \overline{\overline{>}} 2).$$

En particulier :

$$\frac{\pi(\alpha)}{\alpha^3} + \frac{\pi(\beta)}{\beta^3} + \frac{\pi(\gamma)}{\gamma^3} + \cdots = \frac{6}{\pi^2}.\ 1{,}202\,056\ldots \qquad \text{(à peu près 0,73)},$$

$$\frac{\lambda(\alpha)}{\alpha^2} + \frac{\lambda(\beta)}{\beta^2} + \frac{\lambda(\gamma)}{\gamma^2} + \cdots = \frac{65}{\pi^4}.\ 1{,}202\,056\ldots \qquad \text{(à peu près 0,78)},$$

etc., etc.

NOTE XVII.

I. Soient A, B, C, ... les diviseurs carrés de N.

Si l'on pose

$$\psi(N) = f(A) + f(B) + f(C) + \cdots,$$

on a

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n) = q_1 f(1) + q_4 f(4) + q_9 f(9) + \cdots$$

Par exemple, pour $f(x) = 1$, on a d'abord $\psi(N) = T(N)$; puis

$$T(1) + T(2) + T(3) + \cdots + T(n) = q_1 + q_4 + q_9 + \cdots \equiv n \cdot \frac{\pi^2}{6};$$

d'où

$$T(N) \equiv \frac{\pi^2}{6}.$$

Donc :

« *Le nombre des diviseurs carrés d'un nombre entier est, en moyenne,* $\frac{\pi^2}{6}$. »

Si l'on fait

$$f(x) = \frac{1}{x^m},$$

on trouve, en moyenne,

$$\frac{1}{A^m} + \frac{1}{B^m} + \frac{1}{C^m} + \cdots \equiv 1 + \frac{1}{2^{2m+2}} + \frac{1}{3^{2m+2}} + \cdots$$

En particulier :

$$\frac{1}{\sqrt{A}} + \frac{1}{\sqrt{B}} + \frac{1}{\sqrt{C}} + \cdots \equiv 1{,}202\,056\ldots$$

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \cdots \equiv \frac{\pi^4}{90};$$

etc., etc...

On peut observer que, si a, b, c, ... sont tous les diviseurs de N, on a, en moyenne,

$$\frac{1}{A^m} + \frac{1}{B^m} + \frac{1}{C^m} + \cdots = \frac{1}{a^{2m+1}} + \frac{1}{b^{2m+1}} + \frac{1}{c^{2m+1}} + \cdots$$

On pourrait, de même, étudier les diviseurs cubes, bicarrés, etc. Soit, par exemple, $T_m(N)$ le nombre des diviseurs de N qui sont des puissances $m^{\text{èmes}}$ parfaites. On trouve,

$$T_m(N) = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots$$

En particulier :

$$T_2(N) = \frac{\pi^2}{6},$$

$$T_3(N) = 1{,}202\,056\ldots,$$

$$T_4(N) = \frac{\pi^4}{90};$$

etc., etc...

II. Considérons deux diviseurs de n, conjugués, c'est-à-dire tels que $\alpha\beta = n$. Soit p le plus grand commun diviseur de α et β. On peut poser $\alpha = p\alpha'$, $\beta = p\beta'$, α' et β' étant premiers entre eux. En outre, on doit avoir $\alpha'\beta' = \frac{n}{p^2}$; ce qui exige que p^2 soit égal à l'un quelconque des nombres A, B, C, ..., diviseurs carrés de n. Donc, si l'on veut avoir tous les diviseurs de n, tels que $(\alpha, \beta) = \sqrt{A}$, on devra prendre tous les diviseurs de $\frac{n}{A}$, tels que $(\alpha', \beta') = 1$, et multiplier ces diviseurs par $\sqrt{A}$. De là résulte que

$$\psi(n) = \psi_1\left(\frac{n}{A}\right) + \psi_1\left(\frac{n}{B}\right) + \psi_1\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots, \tag{134}$$

si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} &\psi(x) = f(a) + f(b) + f(c) + \ldots \\ &\psi_1(x) = f\left(a_1\sqrt{\frac{n}{x}}\right) + f\left(b_1\sqrt{\frac{n}{x}}\right) + f\left(c_1\sqrt{\frac{n}{x}}\right) + \cdots; \end{aligned}\right.$$

$a, b, c, \ldots$ étant les diviseurs de x, et $a_1, b_1, c_1, \ldots$ les diviseurs de x, respectivement premiers avec leurs conjugués.

Par exemple, pour $f(x) = 1$, on a $\psi(x) = \theta(x)$, $\psi_1(x) = \omega(x)$. Donc

$$\theta(n) = \omega\left(\frac{n}{\mathrm{A}}\right) + \omega\left(\frac{n}{\mathrm{B}}\right) + \omega\left(\frac{n}{\mathrm{C}}\right) + \cdots,$$

formule démontrée précédemment.

III. Si, dans la relation (134), on change n en

$$n-1, \quad n-2, \quad n-3, \ldots, 3, 2, 1,$$

on obtient une série d'égalités. Ajoutées membre à membre, elles donnent

$$\mathrm{F}(n) = \mathrm{F}_1(q_1) + \mathrm{F}_1(q_4) + \mathrm{F}_1(q_9) + \ldots,$$

pourvu que l'on pose

$$\mathrm{F}(x) = \psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(x),$$
$$\mathrm{F}_1(x) = \psi_1(1) + \psi_1(2) + \psi_1(3) + \cdots + \psi_1(x).$$

Par exemple, pour

$$f(x) = 1, \quad \psi(x) = \theta(x), \quad \psi_1(x) = \omega(x),$$

nous trouvons

$$\mathrm{F}_1(q_1) + \mathrm{F}_1(q_4) + \mathrm{F}_1(q_9) + \cdots = \theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \cdots + \theta(n);$$

on bien, asymptotiquement,

$$\mathrm{F}_1(q_1) + \mathrm{F}_1(q_4) + \mathrm{F}_1(q_9) + \cdots \equiv n\,\mathcal{L}.\,n.$$

Tâchons de satisfaire à cette égalité par $\mathrm{F}(x) = kx\,\mathcal{L}.\,x$. Le premier membre devient

$$k\frac{\pi^2}{6}n\,\mathcal{L}.\,n,$$

si l'on néglige les quantités d'un ordre inférieur à celui de $n\,\mathcal{L}.\,n$. Donc

$$k = \frac{6}{\pi^2}.$$

Par conséquent,

$$\psi_1(1) + \psi_1(2) + \psi_1(3) + \cdots + \psi_1(x) = \frac{6}{\pi^2} \cdot x \mathcal{L}\, x;$$

relation d'où l'on tire, en moyenne,

$$\omega(N) = \frac{6}{\pi^2} \mathcal{L} . N.$$

C'est l'une des trois expressions asymptotiques démontrées par Dirichlet. Elle donne le nombre moyen des décompositions de N en deux facteurs premiers entre eux. On démontrerait facilement que :

« *Le nombre moyen des décompositions de* N *en deux facteurs, qui admettent* p *pour plus grand commun diviseur, est*

$$\frac{1}{p^2} \cdot \frac{6}{\pi^2} \mathcal{L} . N. \text{ »}$$

M. Mertens a aussi cherché la valeur moyenne de $\omega(N)$. Il définit cette fonction en disant qu'elle exprime le nombre des diviseurs de N, qui n'admettent pas de diviseurs carrés. M. Mertens part de la relation

$$\omega(n) = \mu(a)\theta\left(\frac{n^2}{a^2}\right) + \mu(b)\theta\left(\frac{n^2}{b^2}\right) + \mu(c)\theta\left(\frac{n^2}{c^2}\right) + \cdots$$

mais sa démonstration est certainement plus compliquée que celle de Dirichlet.

NOTE XVIII.

I. *Soient* R_1, R_2, R_3, ..., R_n *les restes de la division de* n *par chacun des nombres* 1, 2, 3, ... n. *Quelle est la valeur moyenne du nombre des restes, moindres que la moitié du diviseur correspondant?*

Telle est la question que nous allons résoudre, en suivant, à peu près, la méthode de Dirichlet.

On a

$$\frac{n}{p}=\left[\frac{n}{p}\right]+\varepsilon_p,$$

si l'on désigne par ε_p le rapport $\frac{R_p}{p}$, inférieur à 1. Si l'on multiplie par 2, on obtient

$$\frac{2n}{p}=2\left[\frac{n}{p}\right]+2\varepsilon_p.$$

Si $2\varepsilon_p$ est inférieur à 1, il est clair que

$$\left[\frac{2n}{p}\right]=2\left[\frac{n}{p}\right].$$

Mais, dans le cas de $2\varepsilon_p \geqq 1$, on a

$$\left[\frac{2n}{p}\right]=2\left[\frac{n}{p}\right]+1.$$

On peut donc écrire

$$\left[\frac{2n}{p}\right]-2\left[\frac{n}{p}\right]=\left|\begin{array}{l}\varepsilon_p \geqq \frac{1}{2}\\[2ex] \varepsilon_p < \frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Par conséquent, si N′ est le nombre des fractions $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_n$, qui ne sont pas inférieures à $\frac{1}{2}$:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{N}' = \left[\frac{2n}{1}\right] + \left[\frac{2n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{2n}{n}\right] \\ - 2\left\{\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

D'après nos anciennes notations, soit

$$\mathrm{Q}_n = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right].$$

En supposant $\alpha\beta = x$, nous avons démontré, dans la Note I, la formule :

$$\left.\begin{aligned} \left\{\left[\frac{x}{1}\right] + \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{\alpha}\right]\right\} \\ + \left\{\left[\frac{x}{1}\right] + \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{\beta}\right]\right\} = x + \mathrm{Q}_x. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

En particulier, pour $\alpha = n$, $\beta = 2$, cette formule donne

$$\left\{\left[\frac{2n}{1}\right] + \left[\frac{2n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{2n}{n}\right]\right\} + \left\{\left[\frac{2n}{1}\right] + \left[\frac{2n}{2}\right]\right\} = 2n + \mathrm{Q}_{2n};$$

égalité d'où l'on tire

$$\left[\frac{2n}{1}\right] + \left[\frac{2n}{2}\right] + \left[\frac{2n}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{2n}{n}\right] = -n + \mathrm{Q}_{2n}.$$

La formule (135) devient donc

$$\mathrm{N}' = \mathrm{Q}_{2n} - 2\mathrm{Q}_n - n.$$

Mais on a trouvé, précédemment, la valeur asymptotique

$$\mathrm{Q}_n \equiv n\,\mathcal{L}.\,n + (2\mathrm{C} - 1)\,n,$$

et, en changeant n en $2n$:

$$\mathrm{Q}_{2n} \equiv 2n\,\mathcal{L}.\,n + 2(2\mathrm{C} - 1 + \mathcal{L}.\,2)\,n.$$

D'après cela, on a, en moyenne,

$$N' = (\mathcal{L}.\,4 - 1)n;$$

c'est-à-dire, à peu près,

$$N' = 0{,}38.\,n.$$

Le nombre N des quantités ε, moindres que $\frac{1}{2}$, est donc, en moyenne,

$$N = (2 - \mathcal{L}.\,4)n;$$

ou, à peu près,

$$N = 0{,}62.\,n.$$

Remarque. Si l'on divise un nombre n par tous ceux qui ne le surpassent pas, le nombre des cas où le reste est inférieur à la moitié du diviseur étant $(2 - \mathcal{L}.\,4)n$, et le nombre total des cas étant n, on en déduit que la probabilité de l'événement indiqué est $2 - \mathcal{L}.\,4$. Donc :

« *Il y a environ* 62 *à parier contre* 38 *que le reste obtenu en divisant un nombre donné, par un nombre plus petit, est inférieur à la moitié du diviseur.* »

II. Plus généralement, on peut écrire

$$\left[\frac{2n}{p}\right] f(p) - 2\left[\frac{n}{p}\right] f(p) = \left|\begin{array}{ll} f(p), & \left(\varepsilon_p \geqq \frac{1}{2}\right) \\ 0. & \left(\varepsilon_p < \frac{1}{2}\right) \end{array}\right.$$

Soient $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ les valeurs de p qui donnent $\varepsilon_p < \frac{1}{2}$, et $\lambda', \mu', \nu', \ldots$ les autres valeurs de p. Si l'on écrit la relation ci-dessus, pour les valeurs $1, 2, 3, \ldots n$, de p, on obtient, par addition,

$$\left.\begin{array}{c} f(\lambda') + f(\mu') + f(\nu') + \cdots \\ = \left[\frac{2n}{1}\right] f(1) + \cdots + \left[\frac{2n}{n}\right] f(n) - 2\left\{\left[\frac{n}{1}\right] f(1) + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right] f(n)\right\}. \end{array}\right\} \quad (156)$$

Désignons par Q_n la quantité placée entre accolades. D'après une formule démontrée dans la Note I, si l'on pose

$$F(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x),$$

on peut écrire

$$\left[\frac{2n}{1}\right]f(1)+\left[\frac{2n}{2}\right]f(2)+\cdots+\left[\frac{2n}{n}\right]f(n)+F\left[\frac{2n}{1}\right]+F\left[\frac{2n}{2}\right]=2F(n)+Q_{2n},$$

relation d'où l'on tire

$$\left[\frac{2n}{1}\right]f(1) + \left[\frac{2n}{2}\right]f(2) + \cdots + \left[\frac{2n}{n}\right]f(n) = Q_{2n} + F(n) - F(2n).$$

Par substitution dans (136), on obtient

$$\sum f(\lambda') = Q_{2n} - 2Q_n + F(n) - F(2n).$$

Pour trouver

$$f(\lambda) + f(\mu) + f(\nu) + \ldots,$$

il suffit d'observer que

$$\sum f(\lambda) + \sum f(\lambda') = F(n).$$

Donc

$$\sum f(\lambda) = F(2n) - [Q_{2n} - 2Q_n].$$

Pour appliquer ces formules, il faut avoir soin d'évaluer Q_n, en quantités du même ordre que $F(n)$.

Voici quelques exemples :

1° Pour $f(x) = x$, on a, asymptotiquement :

$$Q_n = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots + nq_n \equiv \frac{\pi^2}{12}.n^2,$$

$$F(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \equiv \tfrac{1}{2}n^2;$$

puis

$$\lambda + \mu + \nu + \cdots \equiv 2\left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right)n^2, \quad \text{(à peu près} 0{,}36.\,n^2)$$

$$\lambda' + \mu' + \nu' + \cdots \equiv 2\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{3}{4}\right)n^2. \quad (\quad \text{»} \quad 0{,}14.\,n^2)$$

Ainsi :

« *La somme des nombres λ est, à peu près, et en moyenne, les* 0,72 *de la somme totale.* »

2° Plus généralement, soit $f(x) = x^m$. On a d'abord les égalités asymptotiques :

$$\left\{\begin{aligned} Q_n &= q_1 + 2^m q_2 + 3^m q_3 + \cdots + n^m q_n \equiv \frac{n^{m+1}}{m+1}\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots\right), \\ F(n) &= 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m \equiv \frac{n^{m+1}}{m+1}. \end{aligned}\right.$$

Par suite :

$$\left\{\begin{aligned} \sum \lambda^m &\equiv \frac{2n^{m+1}}{m+1}\left[2^m - (2^m - 1)\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots\right)\right], \\ \sum \lambda'^m &\equiv \frac{n^{m+1}}{m+1}\left[2(2^m - 1)\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots\right) - (2^{m+1} - 1)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (137)$$

Par exemple, pour $m = 2$, on trouve, à peu près :

$$\left\{\begin{aligned} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \cdots &\equiv 0{,}26.\, n^3, \\ \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 + \cdots &\equiv 0{,}07.\, n^3. \end{aligned}\right.$$

Ainsi :

« *La somme des carrés des nombres λ est, à peu près, et en moyenne, les* 0,79 *de la somme totale.* »

3° Soit encore $f(x) = \varphi(x)$. On trouve

$$\varphi(\lambda) + \varphi(\mu) + \varphi(\nu) + \cdots \equiv \left(\frac{12}{\pi^2} - 1\right) n^2, \quad (\text{à peu près } 0{,}22.\, n^2)$$

$$\varphi(\lambda') + \varphi(\mu') + \varphi(\nu') + \cdots \equiv \left(1 - \frac{9}{\pi^2}\right) n^2; \quad (\quad \text{»} \quad 0{,}19.\, n^2)$$

etc., etc...

Il serait peut-être intéressant de faire une étude plus approfondie de ces nombres λ et λ′, que l'on peut définir par les égalités :

$$\left[\frac{2n}{\lambda}\right] - 2\left[\frac{n}{\lambda}\right] = 0,$$

$$\left[\frac{2n}{\lambda'}\right] - 2\left[\frac{n}{\lambda'}\right] = 1.$$

Notre étude asymptotique est évidemment insuffisante (*). Voici les valeurs des nombres λ′, relatives aux premières valeurs de n :

n	λ'	n	λ'	n	λ'
5	2, 3	14	3, 4, 5. 8, 9	23	2, 3, 4, 5, 6, 9, 12, 13, 14, 15
6	4	15	2, 4, 6, 8, 9, 10	24	5, 9, 13, 14, 15, 16
7	2, 4	16	6, 9, 10	25	2, 7, 9, 10, 13, 14, 15, 16
8	3, 5	17	2, 3. 6, 9, 10, 11	26	3, 4, 7, 9, 10, 14, 15, 16, 17
9	2, 5. 6	18	4, 5, 7, 10, 11, 12	27	2, 4, 6, 7. 10, 14, 15, 16, 17, 18
10	4, 6	19	2, 4, 5, 7, 10, 11, 12	28	5. 6, 10, 11, 15, 16, 17, 18
11	2, 3, 4, 6, 7	20	3, 7, 11, 12, 13	29	2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 19
12	7, 8	21	2, 6, 11, 12, 13, 14	30	4. 11, 12, 16, 17, 18, 19, 20
13	2, 5, 7, 8	22	4, 6, 12, 13, 14	31	2, 4, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 20, 21

III. *Remarques*. 1° Les formules (137) peuvent s'écrire ainsi :

$$\left\{\begin{aligned} &\sum \lambda^{m-1} \equiv \frac{n^m}{m}\left[2^m - (2^m - 2)S_m\right] \\ &\sum \lambda'^{m-1} \equiv \frac{n^m}{m}\left[(2^m - 2)S_m - (2^m - 1)\right] \end{aligned}\right\} \tag{158}$$

si l'on pose

$$S_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \cdots$$

Les premiers membres étant essentiellement positifs, on peut écrire

$$S_m = 1 + \frac{1 + \theta}{2^m - 2}, \tag{159}$$

θ étant une fraction proprement dite.

(*) Voir, plus loin, les *Nouveaux corollaires d'une proposition de M. Catalan.*

2° Soit β_m la valeur absolue du $m^{ème}$ des nombres de Bernoulli, définis par l'égalité symbolique

$$(B+1)^p - B^p = p.$$

On sait que, si m est pair, on a

$$S_m = \frac{\beta_m}{2} \cdot \frac{(2\pi)^m}{1.2.3\ldots m}.$$

En substituant dans (139), et en ayant égard à la formule de Stirling, on obtient

$$\beta_m = 2\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{2\pi e}\right)^m \left(1 + \frac{1+\theta}{2^m - 2}\right) e^{\frac{\theta'}{12m}}.$$

θ' étant, comme θ, une fraction proprement dite.

On en déduit

$$\lim \frac{1}{m} \sqrt[m]{\beta_m} = \frac{1}{2\pi e}, \quad \text{(à peu près 0,05855)}$$

lorsque m augmente indéfiniment.

3° On sait que la série

$$S_{1+\varphi} = 1 + \frac{1}{2^{1+\varphi}} + \frac{1}{3^{1+\varphi}} + \frac{1}{4^{1+\varphi}} + \cdots$$

est convergente, tant que φ est positif. Pour $\varphi = 0$, $S_{1+\varphi}$ devient infinie, mais le produit $\varphi S_{1+\varphi}$ tend vers une certaine limite L. Quelle est cette limite?

Nous avons lu, quelque part, que la question a été proposée et résolue par Dirichlet. Voici comment on peut la résoudre au moyen des formules précédentes.

Si l'on fait $m = 1 + \varphi$, la première des formules (138) donne

$$\sum \lambda^\varphi \equiv \frac{n^{1+\varphi}}{1+\varphi}\left[2^{1+\varphi} - 2(2^\varphi - 1) S_{1+\varphi}\right].$$

Or, on sait que

$$2^\varphi = 1 + \varphi \mathcal{L}.2 + \frac{(\varphi \mathcal{L}.2)^2}{1.2} + \frac{(\varphi \mathcal{L}.2)^3}{1.2.3} + \cdots$$

Donc, si φ est infiniment petit, on peut écrire

$$2^{\varphi} - 1 = \varphi \mathcal{L}.2.$$

Par conséquent :

$$\sum \lambda^{\varphi} = \frac{n^{1+\varphi}}{1+\varphi}\left[2^{1+\varphi} - 2\varphi S_{1+\varphi} \cdot \mathcal{L}.2\right];$$

et, lorsque φ tend vers 0 :

$$\sum \lambda^{0} = n\left[2 - L \cdot \mathcal{L}.4\right].$$

Mais $\sum \lambda^0$ ne diffère pas de la quantité précédemment désignée par N, dont l'expression asymptotique est

$$N = n\left[2 - \mathcal{L}.4\right].$$

On a donc $L = 1$, c'est-à-dire

$$\lim(\varphi S_{1+\varphi}) = 1.$$

IV. 1° Nous avons trouvé

$$\varepsilon_p = \frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right].$$

Par conséquent,

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n = nH_n - Q_n.$$

Mais, asymptotiquement,

$$H_n = \mathcal{L}.n + C,$$

$$Q_n = n\mathcal{L}.n + (2C - 1)n.$$

Donc

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \cdots + \varepsilon_n = (1 - C)n. \tag{140}$$

Ainsi :

« *Lorsqu'on divise un nombre par tous ceux qui le précèdent, la valeur moyenne du rapport de chaque reste, au diviseur correspondant, est* 1 — C, (à peu près 0,42). »

La dernière égalité revient à celle-ci :

$$\lim \frac{1}{n}\left[R_1 + \frac{1}{2}R_2 + \frac{1}{3}R_3 + \cdots + \frac{1}{n}R_n\right] = 1 - C,$$

n croissant indéfiniment.

2° On a, de même,

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \cdots + n\varepsilon_n = n^2 - (q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots + nq_n).$$

Nous avons trouvé, en moyenne,

$$q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots + nq_n \equiv \frac{\pi^2}{12} n^2.$$

Donc

$$\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 + \cdots + n\varepsilon_n \equiv \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) n^2;$$

c'est-à-dire

$$\lim \frac{1}{n^2}\left[R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n\right] = 1 - \frac{\pi^2}{12},$$

égalité déjà démontrée.

3° En général,

$$\varepsilon_p f(p) = \frac{n}{p} f(p) - q_p f(p),$$

puis

$$\varepsilon_1 f(1) + \varepsilon_2 f(2) + \varepsilon_3 f(3) + \cdots + \varepsilon_n f(n) =$$
$$n\left[f(1) + \frac{1}{2}f(2) + \cdots + \frac{1}{n}f(n)\right] - \left[q_1 f(1) + q_2 f(2) + \cdots + q_n f(n)\right].$$

Faisons $f(x) = x^m$. Il vient

$$\varepsilon_1 + 2^m\varepsilon_2 + 3^m\varepsilon_3 + \cdots + n^m\varepsilon_n =$$
$$n(1 + 2^{m-1} + 3^{m-1} + \cdots + n^{m-1}) - (q_1 + 2^m q_2 + 3^m q_3 + \cdots + n^m q_n).$$

Donc, en moyenne,

$$\varepsilon_1 + 2^m\varepsilon_2 + 3^m\varepsilon_3 + \cdots + n^m\varepsilon_n \equiv \frac{n^{m+1}}{m} - \frac{n^{m+1}}{m+1}\left(1 + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon_1 + 2^m\varepsilon_2 + 3^m\varepsilon_3 + \cdots + n^m\varepsilon_n \equiv n^{m+1}\left[\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}S_{m+1}\right];$$

ou, sous une autre forme,

$$\lim \frac{R_1 + 2^{m-1}R_2 + 3^{m-1}R_3 + \cdots + n^{m-1}R_n}{n^{m+1}} = \frac{1}{m} - \frac{S_{m+1}}{m+1}, \quad (141)$$

lorsque n augmente indéfiniment.

Par exemple :

$$\lim \frac{R_1 + 2R_2 + 3R_3 + \cdots + nR_n}{n^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot 1{,}202056\ldots, \text{(à peu près 0,10)}$$

$$\lim \frac{R_1 + 4R_2 + 9R_3 + \cdots + n^2R_n}{n^4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^4}{90}; \qquad (\quad \text{»} \quad 0{,}04)$$

etc., etc...

Remarque. Soit $m = \varphi$, dans (141). Si l'on observe que, pour $m = 0$, le second membre de (141) doit être égal à $1 - C$, on trouve que, *pour* φ *infiniment petit,* on peut écrire

$$S_{1+\varphi} = C + \frac{1}{\varphi}.$$

4° Soit encore $f(x) = \varphi(x)$. On trouve aisément que les valeurs asymptotiques des deux quantités entre parenthèses sont, respectivement, $\frac{6}{\pi^2}n$ et $\frac{1}{2}n^2$. Donc

$$\varepsilon_1\varphi(1) + \varepsilon_2\varphi(2) + \varepsilon_3\varphi(3) + \cdots + \varepsilon_n\varphi(n) \equiv \left(\frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{2}\right) n^2;$$

ou, sous une autre forme :

$$\lim \frac{1}{n^2}\left[R_1\varphi(1) + \frac{1}{2}R_2\varphi(2) + \frac{1}{3}R_3\varphi(3) + \cdots + \frac{1}{n}R_n\varphi(n)\right]$$
$$= \frac{6}{\pi^2} - \frac{1}{2}. \quad \text{(à peu près 0,11)}$$

V. Évaluons, asymptotiquement, la somme

$$S = q_1^2 + 2q_2^2 + 3q_3^2 + \cdots + nq_n^2.$$

On a trouvé, précédemment,

$$\left[g(1)F(q_1) + \cdots + g(\alpha)F(q_\alpha)\right] + \left[f(1)G(q_1) + \cdots + f(\alpha)G(q_\alpha)\right] = F(\alpha)G(\alpha) + S,$$

α représentant $\sqrt{n}$, et les fonctions $g(x)$ et $f(x)$ étant, respectivement, x et $2x - 1$; ce qui donne $G(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$, et $F(x) = x^2$.

La dernière formule devient

$$[q_1^2+2q_2^2+3q_3^2+\cdots+\alpha q_\alpha^2]+\frac{1}{2}[q_1^2+3q_2^2+5q_3^2+\cdots+(2\alpha-1)q_\alpha]$$

$$+\frac{1}{2}[q_1+3q_2+5q_3+\cdots+(2\alpha-1)q_\alpha]=\frac{\alpha^3(\alpha+1)}{2}+\mathrm{S};$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{S}=2(q_1^2+2q_2^2+\cdots+\alpha q_\alpha^2)-\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2+\cdots+q_\alpha^2)$$

$$+\frac{1}{2}[q_1+3q_2+\cdots+(2\alpha-1)q_\alpha]-\frac{\alpha^3(\alpha+1)}{2};$$

ou bien, asymptotiquement,

$$\mathrm{S}\equiv 2n^2\mathrm{H}_\alpha-\frac{n^2}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}-\frac{n^2}{2},$$

en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^2. Remplaçant, enfin, H_α par $\frac{1}{2}\mathcal{L}.\,n+\mathrm{C}$, on trouve

$$q_1^2+2q_2^2+3q_3^2+\cdots+nq_n^2\equiv n^2\mathcal{L}.\,n+\left(2\mathrm{C}-\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}\right)n^2. \quad (142)$$

Cela posé, élevons au carré les deux membres de l'égalité

$$q_p=\frac{n}{p}-\varepsilon_p,$$

et multiplions, par p, les deux membres de la nouvelle égalité. On a

$$pq_p^2=\frac{n^2}{p}-2n\varepsilon_p+p\varepsilon_p^2,$$

d'où l'on déduit, en faisant successivement $p=1, 2, 3, \ldots, n$, et en ajoutant,

$$\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+3\varepsilon_3^2+\cdots+n\varepsilon_n^2$$
$$=(q_1^2+2q_2^2+\cdots+nq_n^2)-n^2\mathrm{H}_n+2n(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_n);$$

ou, d'après (140) et (142),

$$\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+3\varepsilon_3^2+\cdots+n\varepsilon_n^2\equiv\left(\frac{3}{2}-\mathrm{C}-\frac{\pi^2}{12}\right)n^2. \quad (143)$$

Sous une autre forme, on peut écrire

$$\lim \frac{1}{n^2}\left[R_1^2+\frac{1}{2}R_2^2+\frac{1}{3}R_3^2+\cdots+\frac{1}{n}R_n^2\right]=\frac{3}{2}-C-\frac{\pi^2}{12}\cdot \text{ (à peu près 0,1003...)}$$

VI. Imaginons un tableau contenant toutes les fractions dont les termes ne surpassent pas un nombre donné n. Soit f une quelconque de ces fractions, et $[f]$ le plus grand entier qu'elle contient. Nous allons évaluer $\sum f$ et $\sum [f]$.

La somme de toutes les fractions à dénominateur p, est $\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{p}\cdot$ Par conséquent, en faisant varier p depuis 1 jusqu'à n,

$$\sum f = \frac{n(n+1)}{2} H_n;$$

ou, asymptotiquement,

$$\sum f \equiv \frac{1}{2} n^2 \mathcal{L}. n + \frac{1}{2} C n^2. \tag{144}$$

Cela posé, considérons les plus grands nombres entiers contenus dans toutes les fractions à dénominateur p, et rangeons-les dans l'ordre suivant :

$$\left[\frac{1}{p}\right],\quad \left[\frac{2}{p}\right],\quad \left[\frac{3}{p}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{p-1}{p}\right],$$

$$\left[\frac{p}{p}\right],\quad \left[\frac{p+1}{p}\right],\quad \left[\frac{p+2}{p}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{2p-1}{p}\right],$$

$$\left[\frac{2p}{p}\right],\quad \left[\frac{2p+1}{p}\right],\quad \left[\frac{2p+2}{p}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{3p-1}{p}\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left[\frac{(q_p-1)p}{p}\right],\quad \left[\frac{(q_p-1)p+1}{p}\right],\quad \left[\frac{(q_p-1)p+2}{p}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{q_p p-1}{p}\right],$$

$$\left[\frac{q_p p}{p}\right],\quad \left[\frac{q_p p+1}{p}\right],\ \ldots,\ \left[\frac{q_p p+R_p}{p}\right].$$

Il y a, dans chaque ligne horizontale, p nombres, sauf dans la dernière, où il y en a $R_p + 1$. En outre, les nombres de la $m^{ème}$ ligne horizontale sont égaux à $m - 1$. De là résulte que la somme de tous les nombres contenus dans le tableau est

$$p\left[1 + 2 + 3 + \cdots + (q_p - 1)\right] + (R_p + 1)q_p.$$

Si l'on remplace R_p par $n - pq_p$, cette expression devient

$$nq_p - \frac{1}{2}pq_p - \frac{1}{2}pq_p^2 + q_p.$$

Par conséquent, en faisant varier p de 1 à n, et en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n^2, on a

$$\sum [f] = n \sum q_p - \frac{1}{2}\sum pq_p - \frac{1}{2}\sum pq_p^2.$$

Or, on a trouvé :

$$\sum q_p = n\,\ell.\,n + (2C - 1)n,$$

$$\sum pq_p = \frac{\pi^2}{12}n^2,$$

$$\sum pq_p^2 = n^2\,\ell.\,n + \left(2C - \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\right)n^2. \qquad (142)$$

Donc, après substitution,

$$\sum [f] = \frac{1}{2}n^2\,\ell.\,n + \left(C - \frac{3}{4}\right)n^2. \qquad (143)$$

Si l'on combine, par soustraction, (143) et (144), on obtient

$$\sum \{f - [f]\} = \left(\frac{3}{4} - \frac{C}{2}\right)n^2,$$

d'où

$$\lim \frac{\sum \{f - [f]\}}{n^2} = \frac{3}{4} - \frac{C}{2}. \quad \text{(à peu près 0,46)}$$

Si l'on observe que n^2 est le nombre de toutes les fractions dont les termes ne surpassent pas n, on peut dire que :

« *La différence entre une fraction quelconque et le plus* *grand nombre entier qu'elle renferme, est égale, en moyenne, à* $\frac{3}{4}-\frac{C}{2}$, *c'est-à-dire, à peu près, à* 0,46. »

En d'autres termes : « *dans une division quelconque, le rapport du reste au diviseur est égal, en moyenne, à* 0,46. »

Si l'on ne veut pas considérer les divisions dans lesquelles le dividende est plus petit que le diviseur, il faudra modifier la valeur asymptotique de $\sum f$, en y supprimant toutes les fractions proprement dites, dont la somme a pour valeur moyenne $\frac{n^2}{4}$. On a donc, au lieu de (144),

$$\sum f = \frac{1}{2} n^2 \mathcal{L}.n + \left(\frac{C}{2} - \frac{1}{4}\right) n^2.$$

La valeur asymptotique de $\sum[f]$ est évidemment la même, vu que $[f]=0$, si f est une fraction proprement dite. On a donc toujours

$$\sum [f] = \frac{1}{2} n^2 \mathcal{L}.n + \left(C - \frac{3}{4}\right) n^2. \quad . \quad . \quad . \quad (145)$$

Retranchant membre à membre, on trouve

$$\sum \{[f - f]\} = \left(\frac{1}{2} - \frac{C}{2}\right) n^2.$$

Mais le nombre total des fractions considérées est

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2} n^2.$$

Donc

$$\lim \frac{\sum\{f - [f]\}}{1 + 2 + 3 + \cdots + n} = 1 - C.$$

Ainsi : « *dans la division d'un nombre quelconque, par un nombre plus petit, le rapport du reste au diviseur est égal, en moyenne, à* 1 — C, *c'est-à-dire à* 0,42 *environ.* » C'est la même limite que nous avons trouvée, dans un précédent paragraphe, pour le cas où le dividende était un nombre donné. On peut encore énoncer la proposition suivante :

« *Il y a environ* 62 *à parier contre* 38 *que, si l'on prend deux* *nombres quelconques, et si l'on divise le plus grand par le plus petit, le reste de la division est inférieur à la moitié du diviseur.* »

VII. Ayant divisé n par les n premiers nombres naturels, cherchons, d'après Dirichlet, quel est le nombre moyen des restes inférieurs à une certaine fraction k du diviseur. Soit

$$\frac{n}{p} = \left[\frac{n}{p}\right] + \varepsilon_p,$$

ou

$$\frac{n}{p} - k = \left[\frac{n}{p}\right] + \varepsilon_p - k.$$

Pour $\varepsilon_p \overline{\gtrless} k$, il est clair que $\left[\frac{n}{p} - k\right] = \left[\frac{n}{p}\right]$.
Mais, si k surpasse ε_p, on a

$$\left[\frac{n}{p} - k\right] = \left[\frac{n}{p}\right] - 1.$$

On peut donc écrire

$$\left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p} - k\right] = \left| \begin{array}{ll} 1, & (\varepsilon_p < k) \\ 0. & (\varepsilon_p \overline{\gtrless} k) \end{array} \right.$$

Soit N_k le nombre des divisions pour lesquelles k surpasse ε_p. D'après ce qui précède,

$$N_k = \left\{\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right]\right\}$$
$$- \left\{\left[\frac{n}{1} - k\right] + \left[\frac{n}{2} - k\right] + \left[\frac{n}{3} - k\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n} - k\right]\right\}$$

Mais, dans la Note X, nous avons démontré la relation

$$\left.\begin{array}{l} \left[\frac{n}{1} - k\right] + \left[\frac{n}{2} - k\right] + \left[\frac{n}{3} - k\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n} - k\right] \\ = \left[\frac{n}{1+k}\right] + \left[\frac{n}{2+k}\right] + \left[\frac{n}{3+k}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n+k}\right]. \end{array}\right\} \quad (100)$$

On a donc, en moyenne, en négligeant les quantités d'un ordre inférieur à celui de n,

$$N_k = n\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{1+k}+\frac{1}{2+k}+\cdots+\frac{1}{n+k}\right)\right];$$

ou, d'après une formule de la Note XII,

$$N_k = n\int_0^1 \frac{1-x^k}{1-x}\,dx.$$

En particulier :

$$N_{\frac{1}{2}} = 2n\left[x - \text{L}.(1+x)\right]_0^1 = 2(1-\text{L}.2)\,n = 0{,}62\,.\,n,$$

$$N_{\frac{1}{3}} = 3n\left[x-\frac{1}{2}\text{L}.(x^2+x+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1$$

$$= n\left(3-\frac{3}{2}\text{L}.3-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) = 0{,}44\,.\,n;$$

etc., etc.

Observons que, d'après la formule (113) de la Note XII, on peut écrire, en moyenne,

$$N_k = \frac{kn}{a+k}+\frac{kn}{b+k}+\frac{kn}{c+k}+\cdots;$$

a, b, c, ... étant tous les diviseurs de n.

Si λ, μ, ν, ... sont les valeurs de p, pour lesquelles k surpasse ε_p, on a, en général,

$$\lambda^m+\mu^m+\nu^m+\cdots = \frac{n^{m+1}}{m+1}\sum_{p=1}^{p=\infty}\left[\frac{1}{p^{m+1}}-\frac{1}{(p+k)^{m+1}}\right].$$

VIII. D'après ce qui précède, le nombre des fractions ε, comprises entre k et $k+dk$, est

$$N_{k+dk}-N_k = \frac{dN_k}{dk}\,dk.$$

Si dN_k était constant, c'est-à-dire si les fractions ε, rangées par ordre de grandeur, étaient également espacées dans l'intervalle compris entre 0 et 1, comme elles le sont dans l'intervalle compris entre k et $k+dk$, le nombre total de ces fractions serait

$$\frac{dN_k}{dk}=n\left[\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\frac{1}{(k+3)^2}+\cdots\right],$$

au lieu de n. Le rapport de ce nombre, au nombre n, est ce que nous appelons, avec M. Berger, *densité* des quantités ε, aux environs de k. L'expression de cette densité est donc

$$D_k=\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{(k+2)^2}+\frac{1}{(k+3)^2}+\cdots$$

On voit qu'elle décroît constamment, à mesure que k augmente. En particulier :

$$D_0=\frac{\pi^2}{6}=1,6449\ldots,\ D_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi^2}{2}-4=0,9348\ldots,\ D_1=\frac{\pi^2}{6}-1=0,6449\ldots$$

NOTE XIX.

I. Soient a, b, c, ... tous les nombres entiers tels, que $n - a^2$, $n - b^2$, $n - c^2$, ... soient des carrés parfaits.

En d'autres termes $a, b, c, \ldots$ sont toutes les valeurs entières et positives que peuvent prendre x et y, pour satisfaire à l'équation indéterminée

$$x^2 + y^2 = n.$$

Soit

$$\psi(n) = f(a) + f(b) + f(c) + \ldots \tag{146}$$

On a

$$\left.\begin{aligned} &\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n) \\ &= r_1 f(1) + r_2 f(2) + r_3 f(3) + \cdots + r_\mu f(\mu); \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

r_p étant le plus grand nombre entier contenu dans $\sqrt{n - p^2}$, et μ étant la racine du plus grand carré contenu dans n.

En effet, si, dans l'égalité (146), on donne successivement à n les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, et si l'on ajoute toutes les égalités ainsi obtenues, $f(p)$ sera, dans le second membre, pour les valeurs suivantes de n :

$$p^2 + 1, \quad p^2 + 4, \quad p^2 + 9, \cdots, \quad p^2 + m^2;$$

la dernière valeur étant telle que l'on ait

$$p^2 + m^2 \overline{\overline{<}} n < p^2 + (m + 1)^2,$$

ou

$$\sqrt{n - p^2} - 1 < m \overline{\overline{<}} \sqrt{n - p^2};$$

et, par suite,

$$m = \left[\sqrt{n - p^2}\right] = r_p.$$

En outre, il est clair que l'on doit s'arrêter au moment où la quantité placée sous le radical va devenir négative, c'est-à-dire lorsque $p = \mu$.

II. Pour $f(x) = 1$, $\psi(n)$ exprime le nombre total des solutions entières et positives de l'équation indéterminée. L'identité (147) devient, dans cette hypothèse,

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdot \cdot + \psi(n) = r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_\mu.$$

Si l'on néglige les quantités d'un ordre inférieur à celui de n, on peut écrire

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n) \equiv \sqrt{n-1} + \sqrt{n-4} + \sqrt{n-9} + \cdots;$$

car la quantité négligée dans chaque terme étant inférieure à 1, l'erreur totale est moindre que μ, et, par conséquent, de même ordre que $\sqrt{n}$.

Or,

$$\lim \frac{F\left(\frac{1}{\mu}\right) + F\left(\frac{2}{\mu}\right) + F\left(\frac{3}{\mu}\right) + \cdots + F\left(\frac{\mu}{\mu}\right)}{\mu} = \int_0^1 F(x)\,dx,$$

lorsque μ augmente indéfiniment.

En particulier, pour $F(x) = \sqrt{1-x^2}$:

$$\lim \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}} + \sqrt{1-\frac{4}{\mu^2}} + \sqrt{1-\frac{9}{\mu^2}} + \cdots + \sqrt{1-\frac{\mu^2}{\mu^2}}}{\mu}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,.\,dx = \frac{\pi}{4};$$

ou bien, en supposant $\mu = \sqrt{n}$:

$$\lim \frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n-4} + \sqrt{n-9} + \cdots}{n} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc, asymptotiquement,

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n) \equiv \frac{\pi}{4} \cdot n;$$

d'où, en moyenne,

$$\psi(n) = \frac{\pi}{4}.$$

Par conséquent :

« *Le nombre de manières dont on peut décomposer un nombre entier en une somme de deux carrés, est égal, en moyenne, à* $\frac{\pi}{4}$. »

Cette proposition concorde avec ce théorème de Jacobi : « Le nombre des solutions dont il s'agit égale la différence entre le nombre des diviseurs de n, de la forme $4\mu+1$, et le nombre des diviseurs de la forme $4\mu+3$. »

En effet,

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

Si l'on cherche le nombre des solutions de l'équation $x^k+y^k=n$, on trouve, en suivant pas à pas la même marche,

$$\psi(n) = \frac{2}{k}\, n^{\frac{2}{k}-1} . \int^{1} \sqrt[k]{1-x^k}\,.\,dx.$$

III. Plus généralement, si l'on considère l'équation

$$x^\alpha + y^\beta = n,$$

et si l'on répète les mêmes calculs, on trouve que :

« *Le nombre de manières dont on peut décomposer* n *en une somme d'une puissance* $\alpha^{\text{ème}}$ *et une puissance* $\beta^{\text{ème}}$ *parfaites, est égal, en moyenne, à*

$$Cn^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-1}; \tag{148}$$

expression dans laquelle

$$C = \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\int_0^1 \sqrt[\alpha]{1-x^\beta}\,.\,dx. \text{ »}$$

La valeur de C ne doit pas changer par une permutation de valeurs entre α et β. Par conséquent,

$$\int_0^1 \sqrt[\alpha]{1-x^\beta}\,.\,dx = \int_0^1 \sqrt[\beta]{1-x^\alpha}\,.\,dx.$$

C'est ce qu'il est facile de vérifier par une simple substitution. On peut, d'ailleurs, mettre C sous une forme symétrique par rapport à α et β. Cette forme, donnée par la théorie des intégrales eulériennes, est :

$$C = \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}.$$

En particulier, pour $\alpha = \beta = k$:

$$C = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)}.$$

Par exemple, si $k = 2$:

$$C = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{4}.$$

IV. On peut encore généraliser, en considérant l'équation

$$Ax^\alpha + By^\beta = n,$$

A et B étant positifs. Si $\psi(n)$ est le nombre des solutions de cette équation, on peut facilement évaluer la somme

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n).$$

A cet effet, ayant attribué à y une valeur déterminée p, l'on peut donner à x toutes les valeurs entières et positives, telles que

$$Ax^\alpha + Bp^\beta \overline{\overline{<}}\, n,$$

c'est-à-dire telles que

$$x \overline{\overline{<}} \sqrt[\alpha]{\frac{n - Bp^\beta}{A}}.$$

Donc

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n)$$
$$= \left[\sqrt[\alpha]{\frac{n - \mathrm{B}}{\mathrm{A}}}\right] + \sqrt[\alpha]{\frac{n - \mathrm{B}.2^\beta}{\mathrm{A}}}\Bigg] + \left[\sqrt[\alpha]{\frac{n - \mathrm{B}.3^\beta}{\mathrm{A}}}\right] + \cdots;$$

ou, asymptotiquement,

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n)$$
$$= \left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left[\sqrt[\alpha]{\frac{n}{\mathrm{B}} - 1^\beta} + \sqrt[\alpha]{\frac{n}{\mathrm{B}} - 2^\beta} + \sqrt[\alpha]{\frac{n}{\mathrm{B}} - 3^\beta} + \cdots\right].$$

Or, on sait, par le paragraphe précédent, que la quantité entre crochets a pour expression asymptotique

$$\left(\frac{n}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} \int_0^1 \sqrt[\alpha]{1 - x^\beta}\, dx.$$

Donc, asymptotiquement,

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(n) = \frac{n^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{\alpha}} \mathrm{B}^{\frac{1}{\beta}}} \int_0^1 \sqrt[\alpha]{1 - x^\beta}.\, dx,$$

et, en moyenne,

$$\psi(n) = \frac{n^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 1}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{\alpha}} \mathrm{B}^{\frac{1}{\beta}}} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \int_0^1 \sqrt[\alpha]{1 - x^\beta}.\, dx.$$

Par comparaison avec (148), on voit que, *si* N *et* N′ *sont respectivement les nombres des solutions des équations*

$$x^\alpha + y^\beta = n,$$
$$\mathrm{A}x^\alpha + \mathrm{B}y^\beta = n,$$

on a, en moyenne,

$$\mathrm{N}' = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^{\frac{1}{\alpha}} \mathrm{B}^{\frac{1}{\beta}}}.$$

En particulier, pour $\alpha = \beta = 1$, on a d'abord $\mathrm{N} = n$, puis $\mathrm{N}' = \frac{n}{\mathrm{AB}}$, formule connue.

De même, pour $\alpha = \beta = 2$, on trouve que *le nombre des solutions, entières et positives, de l'équation*

$$Ax^2 + By^2 = n,$$

est, en moyenne,

$$\frac{\pi}{4\sqrt{AB}}.$$

Par exemple, le nombre des solutions de l'équation $x^2 + 2y^2 = n$, égale, en moyenne, $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$. Ce résultat concorde avec un théorème de Dirichlet, d'après lequel le nombre de solutions est égal à la moitié de la différence entre le nombre des diviseurs de n, de la forme $8\mu + 1$, ou $8\mu + 3$, et le nombre des diviseurs de la forme $8\mu + 5$ ou $8\mu + 7$. On a, en effet,

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

V. Soit encore l'équation

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = n, \qquad [A > 0, C > 0, 4AC - B^2 = \delta^2]$$

admettant $\psi(n)$ solutions entières et positives. Évaluons la somme

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \dots + \psi(n).$$

Pour une valeur déterminée p de y, x doit être tel que l'on ait

$$Ax^2 + Bpx + Cp^2 \overline{\gtrless} n;$$

relation d'où l'on tire, en vertu des hypothèses ci-dessus,

$$x \overline{\gtrless} \frac{-Bp + \sqrt{4An - p^2\delta^2}}{2A}.$$

Donc

$$\psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \dots + \psi(n) = \left[\frac{-B + \sqrt{4An - \delta^2}}{2A}\right]$$
$$+ \left[\frac{-2B + \sqrt{4An - 4\delta^2}}{2A}\right] + \left[\frac{-3B + \sqrt{4An - 9\delta^2}}{2A}\right] + \dots$$

Si l'on néglige les quantités d'un ordre inférieur à celui de n, on peut écrire

$$\psi(1)+\psi(2)+\psi(3)+\cdots+\psi(n)=\frac{-B+\sqrt{4An-\delta^2}}{2A}$$
$$+\frac{-2B+\sqrt{4An-4\delta^2}}{2A}+\frac{-3B+\sqrt{4An-9\delta^2}}{2A}+\cdots;$$

car la quantité négligée est de même ordre que $\sqrt{n}$. En effet, on doit avoir

$$4An-p^2\delta^2 \overline{\gtrless} 0,$$

d'où

$$p \overline{\lessgtr} \frac{2\sqrt{A}}{\delta}\cdot\sqrt{n}=\mu.$$

Donc

$$\psi(1)+\psi(2)+\psi(3)+\cdots+\psi(n)=-\frac{B}{2A}\cdot\frac{\mu(\mu+1)}{2}$$
$$+\sqrt{\frac{n}{A}}\left[\sqrt{1-\frac{1}{\mu^2}}+\sqrt{1-\frac{4}{\mu^2}}+\sqrt{1-\frac{9}{\mu^2}}+\cdots+\sqrt{1-\frac{\mu^2}{\mu^2}}\right],$$

ou

$$\psi(1)+\psi(2)+\psi(3)+\cdots+\psi(n)=$$
$$-\frac{B}{4A}\mu^2+\sqrt{\frac{n}{A}}\cdot\mu\cdot\frac{\pi}{4}=\left(\frac{\pi}{2\delta}-\frac{B}{\delta^2}\right)n.$$

Donc, en moyenne,

$$\psi(n)=\frac{\pi}{2\delta}-\frac{B}{\delta^2}.$$

En résumé :

« *Le nombre des solutions, entières et positives, de l'équation*

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=n,$$

dans laquelle on suppose A *et* C *positifs, et* $4AC-B^2=\delta^2$, *est égal, en moyenne, à* $\frac{\pi}{2\delta}-\frac{B}{\delta^2}$. »

Par exemple, les nombres des solutions des équations

$$x^2+xy+y^2=n,\quad x^2+y^2=n,\quad x^2-xy+y^2=n,$$

sont respectivement égaux, en moyenne, à

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{3},\quad \frac{\pi}{4},\quad \frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3};$$

c'est-à-dire, à peu près, à

$$0{,}57,\qquad 0{,}79,\qquad 1{,}24.$$

De même, les nombres des solutions des équations

$$x^2+2xy+2y^2=n,\quad x^2+xy+2y^2=n,\quad x^2+2y^2=n,$$
$$x^2-xy+2y^2=n,\quad x^2-2xy+2y^2=n$$

sont respectivement égaux, en moyenne, à

$$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2},\quad \frac{\pi}{2\sqrt{7}}-\frac{1}{7},\quad \frac{\pi}{4\sqrt{2}},\quad \frac{\pi}{2\sqrt{7}}+\frac{1}{7},\quad \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2};$$

c'est-à-dire, à peu près, à

$$0{,}29,\quad 0{,}45,\quad 0{,}56,\quad 0{,}74,\quad 1{,}29,$$

etc., etc....

Observons que les nombres moyens des solutions des équations

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=n,$$
$$Ax^2-Bxy+Cy^2=n,$$

ont, pour somme, le double du nombre moyen des solutions de l'équation

$$Ax^2+Cy^2=n.$$

De même le nombre moyen des solutions de

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=n$$

ne change pas lorsque AC est constant.

VI. Voici encore un théorème qui se démontre facilement par les mêmes procédés :

« *Le nombre de manières dont on peut décomposer* n *en une somme de* p *carrés est égal, en moyenne, à*

$$C\,n^{\frac{p}{2}-1}.$$

Si q *est le plus grand nombre entier contenu dans* $\frac{p}{2}$, *la valeur de la constante est*

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p-2)(p-4)(p-6)\ldots\ldots} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^q \cdot \text{»}$$

Ainsi, pour $p = 3$, on trouve $C = \frac{\pi}{4}$. Donc :

« *Le nombre de manières dont on peut décomposer* n *en une somme de trois carrés est, en moyenne,* $\frac{\pi}{4}\sqrt{n}$. »

Pour $p = 4$, on trouve $C = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$. Donc :

« *Le nombre de manières dont on peut décomposer* n *en une somme de quatre carrés est, en moyenne,* $\frac{\pi^2}{16}$ n. »

Etc., etc...

NOTE XX.

I. Nous avons déjà annoncé, pour notre prochain Mémoire, la résolution de certaines questions dont le lecteur pourra trouver utile de s'occuper dès maintenant. Nous allons lui livrer, en partie, les matériaux de notre travail, en faisant une courte analyse de l'article de M. Mertens : *Ueber Vertheilung der Primzahlen* (Crelle, 1878), qui renferme certainement des idées précieuses, faciles à exploiter, et pouvant conduire à des résultats différents de ceux que M. Mertens s'était proposé d'obtenir.

II. 1er Lemme.— « *Soit* $\sigma(\mathrm{n})$ *la somme des logarithmes népériens de tous les nombres premiers, non supérieurs à* n. *On a* $\sigma(\mathrm{n}) < 2\mathrm{n}$. » En effet, si l'on pose

$$\chi(n) = \sigma(n) + \sigma\left(n^{\frac{1}{2}}\right) + \sigma\left(n^{\frac{1}{3}}\right) + \sigma\left(n^{\frac{1}{4}}\right) + \cdots,$$

on peut écrire, d'après M. Tchebycheff (*Journal de Liouville*, 1re série, t. XVII),

$$\mathfrak{L}.(1.2.3...n) = \chi(n) + \chi\left(\frac{n}{2}\right) + \chi\left(\frac{n}{3}\right) + \chi\left(\frac{n}{4}\right) + \cdots;$$

relation d'où l'on déduit aisément

$$\mathfrak{L}.(1.2.3...n) - 2\mathfrak{L}.\left(1.2.3...\frac{n}{2}\right) = \chi(n) - \chi\left(\frac{n}{2}\right) + \chi\left(\frac{n}{3}\right) - \chi\left(\frac{n}{4}\right) + \cdots$$

Mais il est clair que

$$\chi\left(\frac{n}{3}\right) \overline{\overline{>}} \chi\left(\frac{n}{4}\right), \quad \chi\left(\frac{n}{5}\right) \overline{\overline{>}} \chi\left(\frac{n}{6}\right), \quad \chi\left(\frac{n}{7}\right) \overline{\overline{>}} \chi\left(\frac{n}{8}\right), \quad \cdots$$

Donc

$$\chi(n) - \chi\left(\frac{n}{2}\right) < \mathfrak{L}.(1.2.3\ldots n) - 2\mathfrak{L}.\left(1.2.3\ldots\frac{n}{2}\right).$$

D'après la formule de Stirling, on a

$$\mathfrak{L}.(1.2.3\ldots n) = \mathfrak{L}.\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\mathfrak{L}.n - n + \frac{\theta}{12n};$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{L}.(1.2.3\ldots n) - 2\,\mathfrak{L}.\left(1.2.3\ldots\frac{n}{2}\right) = n\,\mathfrak{L}.2$$

$$-\frac{1}{2}\mathfrak{L}.n - \mathfrak{L}.\sqrt{\frac{\pi}{2}} + \frac{\theta - 4\theta'}{12n},$$

θ et θ' étant des fractions proprement dites. Par conséquent, si l'on remplace θ par 1, et θ' par 0,

$$\chi(n) - \chi\left(\frac{n}{2}\right) < n\mathfrak{L}.2 - \frac{1}{2}\mathfrak{L}.n + \mathfrak{L}.\sqrt{\frac{2}{\pi}} + \frac{1}{12n}.$$

Si n est suffisamment grand, on peut donc écrire

$$\chi(n) - \chi\left(\frac{n}{2}\right) < n\mathfrak{L}.2 < n.$$

De même, par le changement de n en $\frac{n}{2}$:

$$\chi\left(\frac{n}{2}\right) - \chi\left(\frac{n}{4}\right) < \frac{n}{2},$$

$$\chi\left(\frac{n}{4}\right) - \chi\left(\frac{n}{8}\right) < \frac{n}{4}.$$

. . . .

Il résulte de ces inégalités :

$$\chi(n) < n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right),$$

c'est-à-dire

$$\chi(n) < 2n.$$

Donc, à plus forte raison,

$$\sigma(n) < 2n. \tag{149}$$

III. 2e Lemme. — « *La somme* $\sum \frac{\mathcal{L}.p}{p}$, *dans laquelle* p *doit être successivement remplacé par tous les nombres premiers non supérieurs à* n, *ne peut différer, du logarithme népérien de* n, *par une quantité supérieure à* 2. »

On sait que, si l'on décompose le produit $1.2.3...n$ en facteurs premiers, le facteur p entre avec un exposant

$$e_p = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

On a donc

$$\mathcal{L}.(1.2.3...n) = \sum e_p \mathcal{L}.p.$$

Cela posé, si l'on désigne par m l'exposant de la plus haute puissance de p, contenue dans n, il est clair que l'on a

$$n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots\right) - m < e_p < n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots\right).$$

Or, observons que, à cause de

$$p^m \overline{\overline{<}}\, n < p^{m+1},$$

on a aussi

$$m \overline{\overline{<}} \frac{\mathcal{L}.n}{\mathcal{L}.p} < m + 1;$$

et, par suite,

$$m = \left[\frac{\mathcal{L}.n}{\mathcal{L}.p}\right].$$

Donc

$$n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots\right) - \frac{\mathcal{L}.n}{\mathcal{L}.p} < e_p < n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots\right),$$

puis

$$n\left(\frac{\mathcal{L}.p}{p} + \frac{\mathcal{L}.p}{p^2} + \frac{\mathcal{L}.p}{p^3} + \cdots\right) - \mathcal{L}.n < e_p \mathcal{L}.p < n\left(\frac{\mathcal{L}.p}{p} + \frac{\mathcal{L}.p}{p^2} + \frac{\mathcal{L}.p}{p^3} + \cdots\right).$$

Si l'on écrit une égalité semblable pour tous les nombres premiers, non supérieurs à n, et si l'on désigne par $\vartheta(n)$ la totalité de ces nombres, on obtient, par addition,

$$n\left[\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p}+\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p^2}+\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p^3}+\cdots\right]-\vartheta(n)\,\mathcal{L}.n$$
$$<\mathcal{L}.(1.2.3\ldots n)<n\left[\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p}+\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p^2}+\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p^3}+\cdots\right],$$

ou bien

$$\mathcal{L}.\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}.n-n+\frac{\theta}{12n}$$
$$=n\left[\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p}+\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p^2}+\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p^3}+\cdots\right]-\theta'.\vartheta(n)\,\mathcal{L}.n,$$

θ et θ' étant des fractions proprement dites.

On tire de là

$$\mathcal{L}.n-\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p}=1+\left[\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p^2}+\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p^3}+\sum\frac{\mathcal{L}.p}{p^4}+\cdots\right]$$
$$-\theta'\frac{\vartheta(n)\,\mathcal{L}.n}{n}-\frac{\mathcal{L}.\sqrt{2\pi n}}{n}-\frac{\theta}{12n^2}.$$

Si l'on examine le calcul de M. Mertens, on y reconnaît aisément une inexactitude, dans le passage de la page 48 à la page 49. Elle fait disparaître la fonction $\vartheta(n)$, qui, naturellement, gêne les développements ultérieurs. En effet, pour se servir de la dernière égalité, il faudrait admettre la formule empirique de Legendre

$$\vartheta(n)=\frac{n}{\mathcal{L}.n-1,08366},$$

qui donne

$$\lim\frac{\vartheta(n)\,\mathcal{L}.n}{n}=1,$$

lorsque n augmente indéfiniment.

M. Mertens prouve, en outre, très simplement, que la quantité entre crochets est inférieure à 1.

Il en résulte

$$1 - \theta' < \lim \left[\mathcal{L}. n - \sum \frac{\mathcal{L}. p}{p} \right] < 2 - \theta',$$

ou

$$0 < \lim \left[\mathcal{L}. n - \sum \frac{\mathcal{L}. p}{p} \right] < 2.$$

D'après ce résultat, on peut écrire, pour les grandes valeurs de n, l'expression asymptotique

$$\sum \frac{\mathcal{L} p}{p} = \mathcal{L}. n - 2\theta, \tag{150}$$

θ étant une fraction proprement dite.

IV. M. Mertens applique ensuite les égalités (149) et (150) à la démonstration des formules empiriques de Legendre, qu'il met sous la forme suivante :

$$\sum_2^n \frac{1}{p} = \mathcal{L}. \mathcal{L}. n + \mathrm{C} - \mathrm{C}' = \mathcal{L}. \mathcal{L}. n + 0{,}261 \ldots$$

$$\prod_2^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = e^{\mathrm{C}} \mathcal{L}. n = 1{,}781 \ldots \mathcal{L}. n.$$

Dans ces formules

$$\mathrm{C} = 0{,}5772156649 \ldots$$
$$\mathrm{C}' = 0{,}3157184520 \ldots$$

On le voit, ces résultats appartiennent essentiellement à la Théorie des Moyennes, et il doit être possible d'y arriver sans avoir recours à tous les artifices de calcul que M. Mertens met en œuvre depuis la page 49 jusqu'à la page 54. Nous n'insisterons donc pas davantage sur ce sujet, ayant promis d'y revenir dans notre deuxième Mémoire, que nous avons l'espoir de faire paraître bientôt.

EXTRAITS

D'UNE PREMIÈRE LETTRE A M. CATALAN.

. . . .

. . En passant à Paris, il y a plus d'un mois, j'ai eu l'honneur de vous parler de quelques additions que je désirais faire à mon petit travail sur l'Arithmétique. Une maladie, dont je me relève à peine, m'a empêché de mettre un peu d'ordre dans mes idées. Ayant appris, d'autre part, que, par votre bonté, mon travail est sur le point d'être imprimé, je me hâte de vous envoyer un aperçu très succinct de ces idées, que je me promets de développer, le plus tôt que je pourrai, dans un deuxième Mémoire, qui comprendra, en outre, l'exposition d'autres sujets, déjà annoncés dans le premier. Je vous dirai, en passant, que mes recherches sur les nombres m'ont peu à peu ramené à l'étude de certaines questions d'analyse, qui m'ont beaucoup occupé dans le temps : je traite, en ce moment, par le calcul symbolique, certains produits indéfinis, fort intéressants. Cela dit, permettez-moi de procéder par ordre :

I. J'ai eu l'idée d'une *représentation symbolique* des nombres, mais je ne suis parvenu à rien dans cette voie.

Imaginons que tout nombre entier n soit représenté par une puissance η^x d'une base invariable η, les nombres η et x étant considérés comme *entiers*, et η étant, en outre, considéré comme *premier*. Le nombre des diviseurs de n sera $x+1$, ou, asymptotiquement, x, c'est-à-dire $\frac{\mathcal{L}.n}{\mathcal{L}.\eta}$. Ce résultat coïncide avec celui qui a été obtenu dans la Théorie des Moyennes, si $\eta = e$.

On peut donc dire que, en moyenne et symboliquement, tout nombre est une puissance *entière* du nombre e=2,7218281828..., celui-ci étant considéré comme *premier*. Malheureusement, cela n'est vrai que relativement à la fonction $\theta(n)$. Si l'on change de fonction, la valeur du *nombre fondamental* η change aussi. Par exemple, pour la somme des diviseurs de n, on a

$$\int n = \frac{\eta^{x+1} - 1}{\eta - 1},$$

ou, asymptotiquement,

$$\int n = \frac{\eta}{\eta - 1} \cdot n.$$

Si l'on compare ce résultat à cet autre

$$\int n = \frac{\pi^2}{6} \cdot n,$$

obtenu dans la Théorie des Moyennes, on trouve, pour valeur du nombre fondamental,

$$\eta = \frac{\pi^2}{\pi^2 - 6} \cdot \quad \text{(à peu près 2,55)}$$

Le nombre fondamental correspondant à la fonction $\varphi(n)$ a la même valeur : en effet,

$$\varphi(n) = \left(1 - \frac{1}{\eta}\right) n = \frac{6}{\pi^2} n;$$

égalité d'où l'on tire

$$\eta = \frac{\pi^2}{\pi^2 - 6},$$

et ainsi de suite.

Il est déjà remarquable que la valeur de η soit, pour chaque fonction, indépendante de n. Mais, pour qu'une représentation symbolique des nombres soit efficace, il faut, évidemment, que la valeur du nombre fondamental soit aussi indépendante de la forme de la fonction. Voilà pourquoi la discordance signalée plus haut a fait crouler toutes mes idées. J'ai pensé d'abord qu'en prenant *plusieurs* nombres fondamentaux, au lieu d'*un* seul, c'est-à-dire en concevant tout nombre représenté ainsi :

$$n = \eta_1^{x_1}\eta_2^{x_2}\eta_3^{x_3}\cdots\eta_k^{x_k},$$

les nombres η étant considérés comme *premiers,* et les nombres x comme *entiers;* on pourrait, à cause de la plus grande latitude de détermination dont on dispose, obtenir, pour les nombres fondamentaux, des valeurs variant, avec la forme des fonctions, entre des limites d'autant plus resserrées que k est plus grand. J'ai été enfin conduit à penser que, si k était une fonction de n, convenablement choisie, et si les nombres η étaient, non plus constants, mais dépendant de n par des relations générales, indépendantes de la forme des fonctions, on pourrait arriver à la représentation demandée.

Le problème ainsi posé se trouve dans des conditions de généralité, qui font bien augurer de la possibilité d'une solution. Cependant, dès le commencement, je me suis heurté à des difficultés telles que je désespère de la réussite. Ce qui m'encourage à poursuivre, malgré tout, c'est la conviction qu'une représentation symbolique, moyenne, générale, de tous les nombres, est possible, et qu'elle peut être utile à l'Arithmétique analytique.

II. J'ai eu souvent l'occasion de rencontrer, dans mes recherches arithmétiques, l'intégrale définie

$$\mathrm{H}(x) = \int_0^1 \frac{1-\varphi^x}{1-\varphi}\,d\varphi,$$

dont vous me permettrez de dire quelques mots de plus, car j'en aurai encore besoin dans la suite.

1° Je ferai d'abord remarquer la relation

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{H}(x-1) + \frac{1}{x}, \tag{1}$$

facile à établir.

2° L'égalité évidente

$$\frac{1-\varphi^x}{1-\varphi} = (1-\varphi^x) + (\varphi - \varphi^{x+1}) + (\varphi^2 - \varphi^{x+2}) + \cdots$$

donne, par l'intégration,

$$\mathrm{H}(x) = 1 - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3+x} + \cdots \qquad (2)$$

D'après cette expression, $\mathrm{H}(x)$ est une fraction proprement dite, pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1.

3° Par une transformation simple, la relation (2) donne le développement de $\mathrm{H}(x)$, suivant les puissances croissantes de x. Ce développement est

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{S}_2 x - \mathrm{S}_3 x^2 + \mathrm{S}_4 x^3 - \mathrm{S}_5 x^4 + \cdots, \qquad (3)$$

en supposant

$$\mathrm{S}_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \cdots$$

Le changement de φ en $1-\varphi$, dans l'égalité de définition, donne cette autre formule :

$$\mathrm{H}(x) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x-1)}{1\,.\,2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3} - \cdots$$

qu'il est bon de comparer à la formule (3).

4° La relation (2) donne encore

$$\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(-x) = 2x\left[\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{4-x^2} + \frac{1}{9-x^2} + \cdots\right] \qquad (4)$$

Évaluons la somme de la série entre crochets. On a d'abord

$$\frac{1}{p^2-x^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{x^2}{p^4} + \frac{x^4}{p^6} + \cdots$$

Puis

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\cdots=S_2+S_4x^2+S_6x^4+\cdots \qquad (5)$$

Considérons, d'autre part, les nombres de Bernoulli, définis par l'égalité symbolique

$$(B+1)^p - B^p = p.$$

De cette égalité, on en déduit beaucoup d'autres, parmi lesquelles je choisirai celle-ci :

$$(2B+1)^p - (2B-1)^p = 2p,$$

qui donne

$$\sin\left[(2B+1)\,x\right] - \sin\left[(2B-1)\,x\right] = 2x\cos x.$$

D'ailleurs,

$$\sin\left[(2B+1)\,x\right] - \sin\left[(2B-1)\,x\right] = 2\sin x \,.\, \cos(2Bx).$$

En égalant ces résultats, on trouve

$$x\cot x = \cos(2Bx).$$

Développant le second membre, remplaçant x par πx, et observant que

$$S_m = -(-1)^{\frac{m}{2}}\cdot\frac{B_m}{2}\cdot\frac{(2\pi)^m}{1.2.3\ldots m}, \quad (m \textit{ pair}) \qquad (6)$$

on obtient

$$\pi x\cot(\pi x) = 1 - 2\left[S_2x^2 + S_4x^4 + S_6x^6 + \cdots\right].$$

La comparaison avec l'égalité (5) donne enfin la formule connue :

$$\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{4-x^2}+\frac{1}{9-x^2}+\cdots=\frac{1}{2x^2}\left[1-\pi x\cot(\pi x)\right] \qquad (7)$$

Puis, substituant dans (4), et en ayant égard à la relation (1),

$$H(1-x) - H(x) = \pi\cot(\pi x) + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x}. \qquad (8)$$

Dans mes recherches j'ai besoin de calculer $H(x)$ pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1 : la formule (8) permet de calculer $H(1-x)$ quand on connaît $H(x)$.

5° Avant d'aller plus loin, je ferai observer que l'égalité (7) en donne beaucoup d'autres, parmi lesquelles je signalerai les formules connues :

$$\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \tag{9}$$

$$\left(1+\frac{x^2}{1}\right)\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\left(1+\frac{x^2}{9}\right)\cdots=\frac{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}{2\pi x}. \tag{10}$$

La première s'obtient en multipliant les deux membres de l'égalité (7) par $2x$, et en intégrant entre les limites 0 et x. La formule (10) se déduit de (9) par le changement de x en $x\sqrt{-1}$.

On en déduit aisément que *la somme des carrés des produits* m *à* m *des inverses des nombres naturels est égale à*

$$\frac{\pi^{2m}}{1.2.3\ldots(2m+1)}.$$

Cette proposition me guide actuellement dans la recherche d'une expression nouvelle des nombres de Bernoulli; pour cela, je me sers aussi de la formule (6)

6° Au moyen de la formule (2), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}\left[H\left(\frac{1}{\alpha}\right)+H\left(\frac{2}{\alpha}\right)+\cdots+H\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)\right]=1&-\left(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\alpha+2}+\cdots+\frac{1}{2\alpha}\right)\\&+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2\alpha+1}+\frac{1}{2\alpha+2}+\cdots+\frac{1}{3\alpha}\right)\\&+\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3\alpha+1}+\frac{1}{3\alpha+2}+\cdots+\frac{1}{4\alpha}\right)+\cdots\end{aligned}$$

Or, en observant que, si α est un nombre entier, on a

$$H(\alpha)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\alpha},$$

on peut mettre le second membre de l'égalité ci-dessus sous la forme $H(\alpha) - \sum$, $\sum$ étant la somme de la série

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\alpha - 1}\right) - \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$
$$+ \left(\frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 2} + \cdots + \frac{1}{2\alpha - 1}\right) - \frac{\alpha - 1}{2\alpha}$$
$$+ \left(\frac{1}{2\alpha + 1} + \frac{1}{2\alpha + 2} + \cdots + \frac{1}{3\alpha - 1}\right) - \frac{\alpha - 1}{3\alpha} + \cdots$$

Cette somme peut être évaluée de différentes manières (*), parmi lesquelles je ferai remarquer la suivante :

Soit $\sum_{1+\varphi}$ la somme de la même série, dans laquelle tous les dénominateurs ont été élevés à la puissance $1 + \varphi$. On a

$$\sum\nolimits_{1+\varphi} = \left(1 - \frac{1}{\alpha^{\varphi}}\right) S_{1+\varphi}.$$

Si φ est infiniment petit, on peut remplacer $\frac{1}{\alpha^{\varphi}}$ par $1 - \varphi\, \ell.\alpha$, et l'on peut écrire

$$\sum\nolimits_{1+\varphi} = \varphi S_{1+\varphi} . \ell . \alpha.$$

Faisant tendre φ vers zéro, et observant que $\lim (\varphi S_{1+\varphi}) = 1$, on trouve enfin

$$\sum = \ell . \alpha.$$

On peut dire aussi que la somme de la série proposée est la limite vers laquelle tend

$$H(n\alpha) - H(n),$$

quand n augmente indéfiniment. Or, on sait que

$$\lim [H(n) - \ell . n] = C,$$

C étant la constante d'Euler... Donc

$$\sum = \lim [\ell . (n\alpha) - \ell . n] = \ell . \alpha.$$

(*) Voir, plus loin, la *Note analytique sur les fonctions* H *et* Γ.

Par exemple :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \mathcal{L}.\,2,$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \cdots = \mathcal{L}.\,3.$$

etc., etc.

En revenant à notre sujet, et en utilisant les derniers résultats, nous voyons que l'on peut écrire

$$\mathrm{H}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \mathrm{H}\left(\frac{2}{\alpha}\right) + \mathrm{H}\left(\frac{3}{\alpha}\right) + \cdots + \mathrm{H}\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) = \alpha\left[\mathrm{H}(\alpha) - \mathcal{L}.\,\alpha\right]. \quad (11)$$

Si l'on fait augmenter α indéfiniment, on obtient

$$\int_0^1 \mathrm{H}(x)\,dx = \mathrm{C}. \qquad (12)$$

7° Pour finir, je vais montrer la relation qui existe entre les fonctions H et Γ. Soit, suivant la notation habituelle,

$$\Gamma(1 + x) = \int_0^\infty e^{-\varphi} \varphi^x \, d\varphi.$$

J'ai reconnu que l'on peut écrire

$$\Gamma(1 + x) = \prod_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{p}\right)^x}{1 + \frac{x}{p}}.$$

Par conséquent, si l'on désigne par $\gamma(x)$ le logarithme népérien de la fonction $\Gamma(1 + x)$, on a

$$\gamma(x) = \sum_1^\infty \left[x\,\mathcal{L}.\left(1 + \frac{1}{p}\right) - \mathcal{L}.\left(1 + \frac{x}{p}\right)\right]. \qquad (13)$$

Puis, en prenant les dérivées des deux membres

$$\gamma'(x) = \sum_1^\infty \left[\mathcal{L}.\left(1 + \frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p + x}\right].$$

D'autre part, d'après (2) :

$$\mathrm{H}(x) = \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+x}\right].$$

Donc, par soustraction

$$\mathrm{H}(x) - \gamma'(x) = \sum_1^{\infty} \left[\frac{1}{p} - \mathcal{L}.\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right] = \text{constante.}$$

En intégrant entre les limites 0 et 1, et en ayant égard à l'égalité (12), on trouve que cette constante est précisément la constante d'Euler, ce qui, d'ailleurs, est évident. Donc, enfin,

$$\mathrm{H}(x) = \gamma'(x) + \mathrm{C}. \tag{14}$$

8° Au moyen de cette relation, la formule (11) devient :

$$\gamma'\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \gamma'\left(\frac{2}{\alpha}\right) + \gamma'\left(\frac{3}{\alpha}\right) + \cdots + \gamma'\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) = \alpha\left[\mathrm{H}(\alpha) - \mathcal{L}\,\alpha - \mathrm{C}\right] \tag{15}$$

Remarquons, incidemment, que le second membre de cette nouvelle égalité tend vers $\frac{1}{2}$, quand α augmente indéfiniment.

Il est bon de comparer la formule (15) avec cette autre formule

$$\gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right) + \cdots + \gamma\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) = \gamma(\alpha) - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\,\alpha + (\alpha - 1)\,\mathcal{L}.\sqrt{2\pi}, \tag{16}$$

très facile à trouver, en partant de la relation (13). D'après la formule de Stirling, le second membre peut se mettre sous la forme

$$\alpha\left[-\mathcal{L}.\frac{e}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\theta}{12\alpha^2}\right],$$

θ étant une fraction proprement dite. Il en résulte que si l'on fait indéfiniment croître α, dans la formule (16), celle-ci se réduit à

$$\int_0^1 \gamma(x)\,dx = -\mathcal{L}.\frac{e}{\sqrt{2\pi}} = -0{,}9221\ldots$$

Si, dans l'égalité (13), on intègre entre 0 et 1, on trouve que la dernière relation équivaut à celle-ci :

$$\sum_1^\infty \left[1 - \left(p + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L} \cdot \left(1 + \frac{1}{p}\right)\right] = \mathcal{L} \cdot \frac{e}{\sqrt{2\pi}},$$

que vous avez fait remarquer, sous une autre forme, dans l'une de vos observations sur la démonstration élémentaire de la formule de Stirling, par MM. Glaisher et Mansion (*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. V, p. 52).

9° J'arrête ici ces notes sur la fonction H, parce qu'elles pourraient me conduire trop loin du sujet. Je me permettrai seulement d'ajouter que, des formules (14) et (3), on déduit aisément le développement de la fonction γ suivant les puissances croissantes de x. On trouve

$$\gamma(x) = -Cx + \tfrac{1}{2} S_2 x^2 - \tfrac{1}{3} S_3 x^3 + \tfrac{1}{4} S_4 x^4 - \cdots$$

Voici encore une égalité, très facile à démontrer, et que j'ai trouvée au moyen de la fonction H, tout en écrivant cette lettre :

$$\frac{1}{1.2} \cdot \frac{C_{2,1}}{4} + \frac{1}{3.4} \cdot \frac{C_{4,2}}{4^2} + \frac{1}{5.6} \cdot \frac{C_{6,3}}{4^3} + \frac{1}{7.8} \cdot \frac{C_{8,4}}{4^4} + \cdots = 1 - \mathcal{L}.2,$$

$C_{m,p}$ désigne, comme d'ordinaire, le nombre des combinaisons de m objets, pris p à p.

III. 1° J'ai cherché, dans mon Mémoire, la valeur moyenne du nombre des diviseurs de n, et j'ai trouvé

$$\theta(n) = \mathcal{L}.n + 2C.$$

On peut classer ces diviseurs par rapport à un même module α, suivant le reste qu'ils donnent, étant divisés par ce module. Si $\theta_r(n)$ est le nombre des diviseurs de n, qui, divisés par α, donnent le reste r, on peut se demander quelle est la valeur moyenne de $\theta_r(n)$. On suppose $r > 0$, ce qui n'exclut pas les multiples de α, car ceux-ci correspondent au cas de $r = \alpha$. Cela posé, il est clair que l'on a, en moyenne,

$$\theta_r(n) - \theta_\alpha(n) = \frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + r} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha + r} - \frac{1}{3\alpha} + \cdots,$$

ou

$$\theta_r(n)-\theta_\alpha(n)=\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}\left[1-\frac{1}{1+\frac{r}{\alpha}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+\frac{r}{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3+\frac{r}{\alpha}}+\cdots\right];$$

puis, en ayant égard à (2),

$$\theta_r(n)=\theta_\alpha(n)+\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{H}\left(\frac{r}{\alpha}\right). \tag{17}$$

Faisant $r=1, 2, 3, \ldots., \alpha$, et ajoutant, on trouve

$$\theta(n)=\alpha\theta_\alpha(n)+\mathrm{H}(\alpha)-\frac{1}{\alpha}\left[\mathrm{H}\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\mathrm{H}\left(\frac{2}{\alpha}\right)+\cdots+\mathrm{H}\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)\right];$$

ou, en vertu de (11),

$$\theta(n)=\alpha\theta_\alpha(n)+\mathcal{L}.\,\alpha.$$

Remplaçant $\theta(n)$ par sa valeur moyenne, on trouve d'abord que *l'expression moyenne du nombre des diviseurs de* n, *divisibles par* α, *est*

$$\theta_\alpha(n)=\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}.\,n+\frac{1}{\alpha}(2\mathrm{C}-\mathcal{L}.\,\alpha), \tag{18}$$

résultat connu. Reportant cette valeur dans (17), on trouve que: *le nombre des diviseurs de* n, *de la forme* $\alpha\mu+\mathrm{r}$, *a pour expression moyenne :*

$$\theta_r(n)=\frac{1}{\alpha}\mathcal{L}.\,n+\frac{1}{\alpha}(2\mathrm{C}-\mathcal{L}.\,\alpha)+\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}\int_0^1\frac{1-x^{\frac{r}{\alpha}}}{1-x}dx. \tag{19}$$

2° La relation (18) peut se démontrer autrement. Il est clair que

$$\sum_1^{n\alpha}\theta_\alpha(p)=\left[\frac{n\alpha}{\alpha}\right]+\left[\frac{n\alpha}{2\alpha}\right]+\left[\frac{n\alpha}{3\alpha}\right]+\cdots+\left[\frac{n\alpha}{n\alpha}\right].$$

D'autre part

$$\sum_1^{n}\theta(p)=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right].$$

Donc

$$\frac{1}{n\alpha}\sum_1^{nx}\theta_\alpha(p)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{n}\sum_1^{n}\theta(p).$$

Par conséquent, en moyenne,

$$\theta_\alpha(n\alpha)=\frac{1}{\alpha}\,\theta(n);$$

ou, par le changement de n en $\frac{n}{\alpha}$:

$$\theta_\alpha(n)=\frac{1}{\alpha}\,\theta\left(\frac{n}{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}\left(\mathcal{L}.\frac{n}{\alpha}+2C\right);$$

ce qui ne diffère pas de la formule (18).

3° Observons que, d'après (2), la fonction $H(x)$ croît constamment avec x. Il en résulte que $\theta_r(n)$ va en diminuant à mesure que r augmente, c'est-à-dire que :

Parmi les diviseurs de n, *le nombre moyen de ceux qui, divisés par* α, *donnent le reste* r, *est d'autant plus grand que* r *est plus petit.*

Il y a donc une tendance des nombres entiers à donner de petits restes, quand on les divise par des nombres plus petits : c'est ce que nous savions déjà.

4° Remarquons aussi que, d'après les égalités (19) et (8):

La différence entre le nombre des diviseurs d'un nombre entier qui, divisés par α, *donnent, par défaut, le reste* r, *et le nombre de ceux qui donnent, par excès, le même reste, a pour expression moyenne*

$$\frac{\pi}{\alpha}\cot\frac{\pi r}{\alpha}.$$

Pour montrer un exemple, soit $\alpha=12$. On a, en moyenne:

$$\theta_1-\theta_{11}=\frac{\pi}{12}\cot 15^\circ=\frac{\pi}{12}(2+\sqrt{3}),$$

$$\theta_3-\theta_9=\frac{\pi}{12}\cot 45^\circ=\frac{\pi}{12},$$

$$\theta_5-\theta_7=\frac{\pi}{12}\cot 75^\circ=\frac{\pi}{12}(2-\sqrt{3});$$

donc, par addition,

$$\theta_1 + \theta_3 + \theta_5 - \theta_7 - \theta_9 - \theta_{11} = \frac{5\pi}{12}.$$

Ainsi :

La différence entre le nombre des diviseurs de n, *ayant une des formes* $12\mu + 1, 3, 5$, *et le nombre des diviseurs ayant une des formes* $12\mu + 7, 9, 11$, *est égale, en moyenne, à* $\frac{5\pi}{12}$.

Cela revient à écrire la formule :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots = \frac{5\pi}{12};$$

etc., etc...

IV. 1° Ayant divisé n par $1, 2, 3 \ldots, n$, soit N_k le nombre des cas où le rapport du reste au diviseur est moindre qu'une certaine fraction k. J'ai trouvé

$$N_k = \left\{\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \cdots\right\} - \left\{\left[\frac{n}{1+k}\right] + \left[\frac{n}{2+k}\right] + \cdots\right\}.$$

Soit $k = \frac{r}{\alpha}$, r et α étant deux nombres entiers, premiers entre eux. La première parenthèse peut s'écrire sous la forme

$$\left[\frac{n\alpha}{\alpha}\right] + \left[\frac{n\alpha}{2\alpha}\right] + \left[\frac{n\alpha}{3\alpha}\right] + \cdots = \sum_1^{n\alpha} \theta_\alpha(p),$$

et la seconde, sous la forme

$$\left[\frac{n\alpha}{\alpha + r}\right] + \left[\frac{n\alpha}{2\alpha + r}\right] + \left[\frac{n\alpha}{3\alpha + r}\right] + \cdots = \sum_1^{n\alpha} \theta_r(p) - \left[\frac{n\alpha}{r}\right].$$

Par conséquent,

$$N_k = \left[\frac{n\alpha}{r}\right] - \sum_1^{n\alpha} [\theta_r(p) - \theta_\alpha(p)].$$

Donc :

Si l'on considère les diviseurs des nα *premiers nombres naturels, la différence entre le nombre de ceux qui sont divisibles par* α, *et le nombre de ceux qui, divisés par* α, *donnent le reste* r, *sauf* r, *est égale au nombre des cas où la division de* n *par un nombre non supérieur à* n, *donne un reste, dont le rapport au diviseur est moindre que* $\frac{r}{\alpha}$.

Par exemple :

Ayant divisé n *par les nombres* 1, 2, 3..., n, *le nombre des cas où le reste est inférieur à la moitié du diviseur est égal à la différence entre le nombre des diviseurs pairs et le nombre des diviseurs impairs, autres que* 1, *des* 2n *premiers nombres naturels.*

De même :

Le nombre des cas où le rapport du reste au diviseur est moindre que $\frac{2}{3}$, *est égal au nombre des diviseurs des* 3n *premiers nombres naturels, qui ont la forme* 3μ, *moins le nombre des diviseurs, autres que* 2, *qui ont la forme* $3\mu + 2$.

Ainsi, soit $n = 7$. Les 21 premiers nombres naturels admettent 16 diviseurs, de la forme 3μ, et 10 diviseurs, autres que 2, de la forme $3\mu + 2$. D'autre part, 7, divisé par 1, 2, 3, 5, 6, 7, donne des restes dont les rapports aux diviseurs correspondants sont moindres que $\frac{2}{3}$. Or, $16 - 10 = 6$.

2° La racine de l'équation

$$H(x) = \tfrac{1}{2},$$

est à peu près $\frac{5}{13}$: l'erreur est moindre que $\frac{1}{10\,000}$. On a trouvé, en moyenne,

$$N_k = n H(k).$$

Donc :

Si l'on divise un grand nombre par tous ceux qui le précèdent, le nombre des restes moindres que les $\frac{5}{13}$ *des diviseurs correspondants, est presque égal au nombre des autres restes.*

3° La formule (8) peut être mise sous la forme suivante :

$$H\left(\frac{1}{2} + \delta\right) - H\left(\frac{1}{2} - \delta\right) = \pi \operatorname{tg}(\pi\delta) - \frac{8\delta}{1 - 4\delta^2}$$

On en déduit que : « *Quand on divise un nombre* n, *par un nombre plus petit, pris au hasard, la probabilité que le rapport* *du reste au diviseur soit compris entre* $\frac{1}{2} - \delta$ et $\frac{1}{2} + \delta$, *se rapproche indéfiniment de*

$$\pi \operatorname{tg}(\pi\delta) - \frac{8\delta}{1 - 4\delta^2},$$

à mesure que n *augmente.* »

Soit, par exemple, $\delta = \frac{1}{4}$. La probabilité que le rapport considéré soit compris entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$ est

$$\pi - \frac{8}{3} = 0{,}47492..$$

4° Si l'on différentie, par rapport à δ, l'égalité obtenue en dernier lieu, on trouve que la *moyenne arithmétique des densités* (*), *aux environs de* $\frac{1}{2} - \delta$ *et* $\frac{1}{2} + \delta$ *est exprimée par*

$$\frac{1}{2}\left[D_{\frac{1}{2}-\delta} + D_{\frac{1}{2}+\delta}\right] = \frac{\pi^2}{2\cos^2(\pi\delta)} - 4 \cdot \frac{1 + 4\delta^2}{(1 - 4\delta^2)^2}$$

Par exemple :

$$\frac{1}{2}\left[D_0 + D_1\right] = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} = 1{,}1449, \quad \frac{1}{2}\left[D_{\frac{1}{4}} + D_{\frac{3}{4}}\right] = \pi^2 - \frac{80}{9} = 0{,}9807$$

$$\frac{1}{2}\left[D_{\frac{1}{6}} + D_{\frac{5}{6}}\right] = \frac{2\pi^2}{3} - \frac{45}{8} = 0{,}9547, \quad \frac{1}{2}\left[D_{\frac{1}{3}} + D_{\frac{2}{3}}\right] = 2\pi^2 - \frac{468}{25} = 1{,}0192$$

$$\frac{1}{2}\left[D_{\frac{1}{2}} + D_{\frac{1}{2}}\right] = \frac{\pi^2}{2} - 4 = 0{,}9548.$$

V. 1° Dans mon Mémoire, je n'ai pas assez insisté sur la dernière partie, dans laquelle j'ai commencé à étudier les solutions entières et positives des équations. Plus tard je reviendrai sur ce sujet, parce qu'il peut, à lui seul, embrasser toute l'Arithmétique. Ainsi, l'étude des diviseurs de n revient à l'étude des solutions entières et positives de l'équation $xy = n$. J'ai étudié aussi les solutions entières, positives et premières entre elles, de la même équation. Les nombres premiers avec n et inférieurs à n, ne sont autres que les solutions entières, positives et premières entre elles, de l'équation $x + y = n$; etc...

(*) Voir la fin de la *Note XVIII.*

Si j'ai assez parlé de ces équations, il n'en a pas été de même des autres équations, telles que

$$x^2 + y^2 = n,$$
$$ax^2 + bxy + cy^2 = n;$$

etc., etc..., dont je n'ai cherché que les nombres moyens de solutions, au lieu d'étudier des fonctions quelconques de ces solutions. Et même, dans la dernière équation, j'ai supposé $b^2 - 4ac < 0$. Or, il est intéressant d'étudier le cas de $b^2 - 4ac \gtreqless 0$, parce qu'il comprend aussi l'équation $xy = n$. Je l'ai aisément ramené à l'étude des diviseurs de n, ayant une forme linéaire déterminée.

2° Certaines identités, démontrées avec assez de peine dans mon Mémoire, au moyen de limitations, trouvent une démonstration facile et nette par les équations. Ainsi, soit $N(n)$ le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$x(y + \tfrac{1}{2}) = n.$$

On peut évaluer, de deux manières différentes, la somme $\sum_1^n N(p)$: elle est toujours égale au nombre des couples de valeurs, entières et positives, de x et y, satisfaisant à la condition

$$x(y + \tfrac{1}{2}) \overline{\overline{<}}\, n.$$

Or, pour une valeur p de x, on trouve

$$y \overline{\overline{<}} \frac{n}{p} - \frac{1}{2}.$$

Donc, pour $x = p$, y peut recevoir $\left[\frac{n}{p} - \frac{1}{2}\right]$ valeurs entières et positives, donnant lieu à un nombre égal de solutions. En faisant varier p depuis 1, on obtient

$$\sum_1^n N(p) = \left[\frac{n}{1} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{n}{3} - \frac{1}{2}\right] + \cdots$$

Si, au contraire, on fait $y = p$, on trouve

$$x \overline{\overline{<}} \frac{n}{p + \frac{1}{2}};$$

puis

$$\sum_1^n N(p) = \left[\frac{n}{1+\frac{1}{2}}\right] + \left[\frac{n}{2+\frac{1}{2}}\right] + \left[\frac{n}{3+\frac{1}{2}}\right] + \cdots;$$

et enfin, par la comparaison des résultats :

$$\left[\frac{2n-1}{2}\right]+\left[\frac{2n-2}{4}\right]+\left[\frac{2n-3}{6}\right]+\cdots=\left[\frac{2n}{3}\right]+\left[\frac{2n}{5}\right]+\left[\frac{2n}{7}\right]+\cdots$$

Plus généralement, soit l'équation

$$f(x, y) = n,$$

admettant $N(n)$ solutions entières et positives. Supposons que de

$$f(x, y) \overline{\overline{<}}\, n,$$

on puisse tirer

$$y \overline{\overline{<}}\, \varphi(x), \quad x \overline{\overline{<}}\, \psi(y).$$

Il est clair que

$$[\varphi(1)] + [\varphi(2)] + [\varphi(3)] + \cdots = [\psi(1)] + [\psi(2)] + [\psi(3)] + \cdots;$$

car les deux membres sont deux expressions différentes de $\sum_1^n N(p)$.

Pour généraliser entièrement, au lieu de considérer le nombre des solutions, on doit prendre des fonctions quelconques de ces solutions : on arrive ainsi à l'identité générale, contenue dans mon Mémoire.

3° L'étude des équations offre aussi de l'intérêt au point de vue du Calcul intégral, car il y a certains résultats, obtenus sous forme d'intégrales, et que l'on peut obtenir directement par l'Arithmétique. De la comparaison peuvent naître des formules intéressantes. Ainsi, soit l'équation

$$x^2 + y^2 = n.$$

Si $x = \alpha, y = \beta$, est une des N solutions entières et positives de cette équation, on a

$$\sum \alpha^2 + \sum \beta^2 = Nn.$$

Or, on a trouvé, en moyenne,

$$N = \frac{\pi}{4} \cdot \tag{20}$$

D'autre part, il est clair que les nombres β sont égaux, dans un certain ordre, aux nombres α.

Donc, en moyenne aussi :

$$\sum \alpha^2 = \frac{\pi}{8} n.$$

Mais le procédé employé dans mon Mémoire pour trouver l'égalité (20) donne

$$\sum \alpha^2 = 2n \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} . dx.$$

Il en résulte

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\pi}{16} \cdot$$

Plus généralement, si N est le nombre des solutions entières et positives de l'équation

$$x^k + y^k = n,$$

on a trouvé, en moyenne,

$$N = \frac{2}{k} n^{\frac{2}{k} - 1} \int_0^1 \sqrt[k]{1 - x^k} . dx.$$

Par conséquent

$$\sum \alpha^k = \frac{1}{2} Nn = \frac{1}{k} n^{\frac{2}{k}} \int_0^1 \sqrt[k]{1 - x^k} . dx.$$

D'autre part, en suivant le procédé ordinaire, on trouve

$$\sum \alpha^k = \frac{k + 2}{k} n^{\frac{2}{k}} \int_0^1 x^k \sqrt[k]{1 - x^k} . dx.$$

Enfin, par comparaison

$$\int_0^1 x^k \sqrt[k]{1 - x^k} . dx = \frac{1}{k + 2} \int_0^1 \sqrt[k]{1 - x^k} . dx.$$

Certes, ces résultats n'ont rien de bien étonnant. Mais veuillez observer qu'ils ont été obtenus sans le secours du Calcul intégral, par la seule force des propriétés des nombres. Ces résultats, insignifiants par eux-mêmes, décèlent donc, pour ainsi dire, une voie secrète, inconnue, conduisant de l'Arithmétique au Calcul intégral, et pouvant, par conséquent, être utile aux deux sciences. Elle peut surtout être utile à l'arithmétique, car nul ne méconnaîtra que, si cette science n'a pas fait de grands progrès jusqu'aujourd'hui, c'est surtout à cause de la discontinuité que l'on observe dans la variation des quantités dont elle s'occupe. Il s'agit d'écarter cet obstacle, soit en employant un calcul symbolique, basé sur une représentation symbolique de tous les nombres, au moyen de nombres premiers fictifs, de forme invariable; soit en donnant une plus large acception, réelle ou fictive, d'abord à l'idée de diviseurs, nombres premiers, premiers entre eux, etc., etc., puis à la signification même des différentes fonctions arithmétiques, de manière à pouvoir étendre les calculs arithmétiques aux nombres fractionnaires, aux incommensurables, et même aux imaginaires; soit en cherchant cette liaison, de nature inconnue, par laquelle nous voyons l'Arithmétique, la science des quantités à variation discontinue, se rattacher au Calcul intégral, qui possède, au contraire, au plus haut degré, ces qualités, dont nous déplorons l'absence dans l'Arithmétique. Quoi qu'il en soit, je me vois forcé d'abandonner à des intelligences mieux douées la résolution de ce grand problème, que je viens de poser en principe, bien désespéré de ne pouvoir le résoudre. Mais je crois qu'il faut, dans ces sortes de questions, laisser d'abord au temps le soin de les mûrir.

VI. Un autre fait, digne d'attention, est cette persistance des intégrales euleriennes à se présenter dans les calculs arithmétiques. Dans la dernière égalité encore, les deux intégrales définies pouvaient être ramenées à

$$\frac{\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)}.$$

. . . .

Voici les valeurs de deux intégrales définies, trouvées par l'Arithmétique :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{(e^x + e^{-x})(e^{2x} - e^{-2x})} = \frac{\pi(\pi - 2)}{32}.$$

Je vous ai déjà présenté le dernier résultat, et je crois me rappeler que vous ne l'avez pas trouvé dans le répertoire de Bierens de Haan . . . .

. . . .

A propos d'intégrales, j'ai oublié de vous parler de la manière dont je me sers de la fonction H, pour trouver les valeurs de quelques intégrales définies. J'avais d'abord posé

$$\mathrm{H}(x\sqrt{-1}) = \mathrm{H}_1(x) + \sqrt{-1}\,.\,\mathrm{H}_2(x),$$

en me proposant d'étudier les fonctions H_1 et H_2. De l'égalité de définition

$$\mathrm{H}(x) = \int_0^1 \frac{1 - \varphi^x}{1 - \varphi}\, d\varphi,$$

on déduit aisément

$$\mathrm{H}_2(x) = -\int_0^1 \frac{\sin(x\,\mathrm{l}.\,\varphi)}{1 - \varphi}\, d\varphi,$$

D'autre part, au moyen de (3), on trouve

$$\mathrm{H}_2(x) = \frac{1}{2x}\left[1 - \pi x\,\frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\right].$$

En comparant ces résultats, on obtient, après quelques transformations simples :

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varphi}{1 - e^{\frac{\varphi}{x}}}\, dx = \frac{1}{2}\left[1 - \pi x\,\frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}}\right]$$

J'ai entrepris une étude analogue sur l'intégrale

$$\mathrm{K}(x) = \int_0^1 \frac{\varphi^x}{1 + \varphi^2}\, d\varphi,$$

laquelle peut se développer sous les deux formes suivantes :

$$K(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3+x} + \frac{1}{5+x} - \frac{1}{7+x} \cdots,$$

$$K(x) = s_1 - s_2 x + s_3 x^2 - s_4 x^3 + \cdots;$$

pourvu que l'on pose

$$s_m = 1 - \frac{1}{3^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{7^m} + \cdots$$

On peut aussi écrire

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}\,\varphi)^x d\varphi.$$

Cette fonction jouit de propriétés analogues à celles de la fonction H. D'abord,

$$K(x+1) + K(x-1) = \frac{1}{x};$$

puis

$$K(x) + K(-x) = \frac{\pi}{2} \,\text{séc}\, \frac{\pi x}{2},$$

etc., etc.

Pour établir la dernière relation, il suffit de démontrer que

$$s_1 + s_3 x^2 + s_5 x^4 + s_7 x^6 + \cdots = \frac{\pi}{4} \,\text{séc}\, \frac{\pi x}{2},$$

et l'on y arrive très aisément au moyen des relations symboliques

$$\text{séc}\, x = \cos(\mathrm{E}x),$$

$$s_m = \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{1.2.3\ldots(m-1)} \cdot \left(\frac{\pi \mathrm{E}}{2}\right)^{m-1} \cdot \frac{\pi}{4}, \quad (m \textit{ impair})$$

dans lesquelles les nombres E sont les *Nombres d'Euler,* définis par l'égalité symbolique

$$(\mathrm{E}+1)^p + (\mathrm{E}-1)^p = 0.$$

Si l'on pose

$$K(x\sqrt{-1}) = K_1(x) + \sqrt{-1}\,.\,K_2(x),$$

l'égalité de définition donne

$$K_1(x) = \int_0^1 \frac{\cos(x\,\mathcal{L}.\,\varphi)}{1+\varphi^2}\, d\varphi,$$

tandis que, par le développement de $K(x)$ suivant les puissances croissantes de x, on obtient

$$K_1(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}}.$$

La comparaison donne, après quelques changements :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\varphi}{e^{\frac{\varphi}{2x}} + e^{-\frac{\varphi}{2x}}} d\varphi = \frac{\pi x}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}};$$

et ainsi de suite.

L'intégration de $K(x)$ donne lieu à une nouvelle fonction, qui possède des propriétés analogues à celles de la fonction γ. Je ne vous en dirai pas davantage sur un sujet que je viens seulement d'entamer. D'ailleurs, mon intention était seulement de vous faire une rapide esquisse des idées que je compte développer plus tard, si j'en ai le temps et la force. Je finis donc; mais avant de fermer cette lettre, permettez-moi d'énoncer encore quelques propositions, très faciles à démontrer, et que je vous prie de joindre aux autres de la théorie des moyennes :

1° *Si* a, b, c..., *sont tous les diviseurs d'un nombre entier, on a, en moyenne :*

$$\sin ka + \sin kb + \sin kc + \cdots = \frac{1}{2}(\pi - k).$$

2° *On a aussi, en moyenne :*

$$\frac{a}{a^2 - k^2} + \frac{b}{b^2 - k^2} + \frac{c}{c^2 - k^2} + \cdots = \frac{1}{2k^2}\left[1 - \pi k \cot(\pi k)\right],$$

$$\frac{a}{a^2 + k^2} + \frac{b}{b^2 + k^2} + \frac{c}{c^2 + k^2} + \cdots = \frac{1}{2k^2}\left[\pi k \frac{e^{\pi k} + e^{-\pi k}}{e^{\pi k} - e^{-\pi k}} - 1\right]$$

3° *Soient* a′, b′, c′..., *et* a″, b″, c″..., *les diviseurs de* n, *ayant respectivement les formes* $4\mu + 1$ *et* $4\mu + 3$. *On a, en moyenne :*

$$\sum \frac{1}{1 - \left(\frac{k}{a'}\right)^2} - \sum \frac{1}{1 - \left(\frac{k}{a''}\right)^2} = \frac{\pi}{4} \operatorname{séc} \cdot \frac{\pi k}{2},$$

$$\sum \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{a'}\right)^2} - \sum \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{a''}\right)^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\pi k}{2}} - e^{-\frac{\pi k}{2}}}.$$

4° *Le nombre des solutions, entières et positives, de l'équation*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_kx_k = n,$$

est égal, en moyenne, à

$$\frac{1}{a_1a_2a_3 \dots a_k} \cdot \frac{n^{k-1}}{1.2.3\dots(k-1)}.$$

5° *Soit* $\mathrm{N}_p(\mathrm{k})$ *la somme moyenne des puissances* $\mathrm{p}^{\text{èmes}}$ *de toutes les valeurs, entières et positives, que peut prendre* x, *dans l'équation*

$$x^k + y^k = n.$$

On a :

$$\mathrm{N}_p(k) = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+2}{k}\right)} n^{\frac{p+2}{k}-1}.$$

Corollaires. *a*)

$$\mathrm{N}_{k-2}(k) = \frac{\pi}{k^2 \sin\frac{\pi}{k}}.$$

Par exemple :

$$\mathrm{N}_0(2) = \frac{\pi}{4} = 0{,}785\dots, \qquad \mathrm{N}_2(4) = \frac{\pi\sqrt{2}}{16} = 0{,}277\dots$$

$$\mathrm{N}_1(3) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} = 0{,}403\dots, \qquad \mathrm{N}_4(6) = \frac{\pi}{18} = 0{,}174\dots$$

b) Si l'on considère l'équation

$$x^2 + y^2 = n,$$

on a

$$\mathrm{N}_{2p}(2) = \frac{1.3.5\dots(2p-1)}{2.4.6\dots2p} \cdot \frac{\pi n^p}{4}, \quad \mathrm{N}_{2p-1}(2) = \frac{2.4.6\dots2p}{1.3.5\dots(2p-1)} \cdot \frac{n^{p-\frac{1}{2}}}{4p}.$$

Par exemple :

$$\mathrm{N}_0(2) = \frac{\pi}{4} = 0{,}785\dots, \qquad \mathrm{N}_1(2) = \frac{1}{2}\sqrt{n} = \sqrt{n}\,.\,0{,}500\dots$$

$$\mathrm{N}_2(2) = \frac{\pi}{8}n = n\,.\,0{,}392\dots, \qquad \mathrm{N}_3(2) = \frac{1}{3}n\sqrt{n} = n\sqrt{n}\,.\,0{,}333\dots$$

$$\mathrm{N}_4(2) = \frac{3\pi}{32}n^2 = n^2\,.\,0{,}294\dots, \qquad \mathrm{N}_5(2) = \frac{4}{15}n^2\sqrt{n} = n^2\sqrt{n}\,.\,0{,}266\dots$$

$$\mathrm{N}_6(2) = \frac{5\pi}{64}n^3 = n^3\,.\,0{,}245\dots, \qquad \mathrm{N}_7(2) = \frac{8}{35}n^3\sqrt{n} = n^3\sqrt{n}\,.\,0{,}228\dots$$

c) Pour les grandes valeurs de p, on peut écrire

$$N_p(2) = \frac{n^{\frac{p}{2}}}{4}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

6° *Deux nombres entiers quelconques possèdent, en moyenne,* $\frac{\pi^2}{6}$ *diviseurs communs.*

7° *La somme moyenne des diviseurs communs, de deux nombres entiers quelconques, est égale au demi-logarithme népérien du produit de ces nombres, augmenté de* $2C - \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}$.

Si l'on représente par (a, b) le plus grand commun diviseur de a et b, les deux dernières propositions peuvent s'exprimer par les égalités *moyennes*

$$\theta(a, b) = 1{,}6449; \quad \int(a, b) = \mathfrak{L}\sqrt{ab} + 0{,}8320.$$

8° L'avant-dernière proposition peut être ainsi généralisée : *La somme des inverses des* m^èmes^ *puissances des diviseurs communs, de deux nombres entiers quelconques, est égale, en moyenne, à*

$$1 + \frac{1}{2^{m+2}} + \frac{1}{3^{m+2}} + \frac{1}{4^{m+2}} + \cdots$$

On trouve une foule de propositions analogues, en faisant usage des identités de la *Note VIII*. . . . .
. . . .

Torre Annunziata, 20 mai 1882.

Ernest CESÁRO.

EXTRAITS

D'UNE SECONDE LETTRE A M. CATALAN.

. . . .

... Je profite de ce que mon Mémoire n'est pas encore publié, pour ajouter d'autres remarques sur quelques-unes des questions qu'il contient.

J'ai démontré que :

Si l'on désigne par A_p *la moyenne arithmétique des puissances* $p^{\text{èmes}}$ *de toutes les fractions irréductibles, à dénominateur* n, *inférieures à l'unité, on a, symboliquement :*

$$A^p = (1 - A)^p. \tag{1}$$

Il est facile d'interpréter cette égalité. A cet effet, observons que, si l'on prend les différences successives des termes de la série :

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad A_4, \ldots \tag{2}$$

en retranchant chaque terme de celui qui le précède, on peut écrire, symboliquement,

$$\Delta^p (A_0) = (1 - A)^p.$$

Par suite, d'après (1),

$$\Delta^p (A_0) = A_p. \tag{3}$$

Donc :

« *Les termes de la série* (2) *sont les différences successives du premier d'entre eux.* »

On démontre facilement que l'égalité (1) entraîne l'égalité symbolique, plus générale :

$$f(\mathrm{A}) = f(1 - \mathrm{A}).$$

En particulier, pour

$$f(x) = x^p (1 - x)^q,$$

on obtient

$$\mathrm{A}^p (1 - \mathrm{A})^q = \mathrm{A}^q (1 - \mathrm{A})^p.$$

Or, d'après les formules du Calcul des différences, on a, symboliquement :

$$\Delta^p (\mathrm{A}_q) = \mathrm{A}^q (1 - \mathrm{A})^p, \quad \Delta^q (\mathrm{A}_p) = \mathrm{A}^p (1 - \mathrm{A})^q\,;$$

donc

$$\Delta^p (\mathrm{A}_q) = \Delta^q (\mathrm{A}_p).$$

Pour $q = 0$, on retrouve (3). Ainsi :

« *Dans la série* (2), *la* p$^{\text{ème}}$ *différence du* (q + 1)$^{\text{ème}}$ *terme égale la* q$^{\text{ème}}$ *différence du* (p + 1)$^{\text{ème}}$ *terme* ».

Comme exemple, considérons les fractions irréductibles :

$$\frac{1}{10}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{7}{10}, \quad \frac{9}{10}.$$

On a :

$$1 + 1 + 1 + 1 = 4, \qquad \mathrm{A}_0 = 1,$$

$$\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{7}{10} + \frac{9}{10} = 2, \qquad \mathrm{A}_1 = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{100} + \frac{9}{100} + \frac{49}{100} + \frac{81}{100} = \frac{7}{5}, \qquad \mathrm{A}_2 = \frac{7}{20},$$

$$\frac{1}{1000} + \frac{27}{1000} + \frac{343}{1000} + \frac{729}{1000} = \frac{11}{10}, \qquad \mathrm{A}_3 = \frac{11}{40},$$

$$\frac{1}{10000} + \frac{81}{10000} + \frac{2401}{10000} + \frac{6561}{10000} = \frac{2261}{2500}, \qquad \mathrm{A}_4 = \frac{2261}{10000}.$$

. . . .

Or, en prenant les différences successives des nombres A, *dans le sens indiqué plus haut*, on forme le tableau suivant :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{7}{20} & & \frac{11}{40} & & \frac{2261}{10\,000} & & \cdots \\
& \frac{1}{2} & & \frac{3}{20} & & \frac{3}{40} & & \frac{489}{10\,000} & & \cdots & \\
& & \frac{7}{20} & & \frac{3}{40} & & \frac{261}{10\,000} & & \cdots & & \\
& & & \frac{11}{40} & & \frac{489}{10\,000} & & \cdots & & & \\
& & & & \frac{2261}{10\,000} & & \cdots & & & & \\
& & & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

par lequel il est aisé de vérifier les propriétés énoncées ci-dessus.

. . . .

Les propriétés précédentes, ayant été déduites de l'égalité (1), appartiennent à toute série de nombres, obéissant à la loi exprimée par cette égalité. J'ai déjà eu l'occasion de faire observer que l'égalité (1) représente une infinité de séries, parmi lesquelles on peut citer, en premier lieu, la série harmonique

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ldots$$

laquelle est la *série-asymptote* de toutes les séries (2), quand n augmente indéfiniment.

Voici le tableau des différences, correspondant à cette série :

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \cdots \\
& \frac{1}{2} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{20} & & \cdots & \\
& & \frac{1}{3} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{30} & & \cdots & & \\
& & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{20} & & \cdots & & & \\
& & & & \frac{1}{5} & & \cdots & & & & \\
& & & & & \cdots & & & & &
\end{array}
$$

Il en est de même de la progression géométrique

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$$

Le tableau relatif à cette série est bien simple :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{16} & & \cdots \\
& \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{16} & & \cdots & \\
& & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{16} & & \cdots & & \\
& & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{16} & & \cdots & & & \\
& & & & \frac{1}{16} & & \cdots & & & & \\
& & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

. . . .

... 1° Si l'on cherche quelles sont, parmi les séries représentées par (1), celles qui satisfont aux conditions

$$A_3 = A_5 = A_7 = A_9 = \cdots = 0,$$

on trouve

$$A_p = B_p \alpha,$$

α étant la valeur, arbitraire, de A_0; et les quantités B étant les *nombres de Bernoulli,* définis par l'égalité symbolique

$$(B + 1)^p - B^p = p.$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, on voit que les *nombres de Bernoulli* eux-mêmes obéissent à la loi (1), comme l'indique le tableau suivant :

$$\begin{array}{c}
1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad 0 \quad -\frac{1}{30} \quad 0 \quad \frac{1}{42} \quad 0 \quad \cdots \\
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{30} \quad -\frac{1}{30} \quad -\frac{1}{42} \quad \frac{1}{42} \quad \cdots \\
\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{2}{15} \quad \frac{1}{15} \quad -\frac{1}{105} \quad -\frac{1}{21} \quad \cdots \\
0 \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{8}{105} \quad \frac{4}{105} \quad \cdots \\
-\frac{1}{30} \quad -\frac{1}{30} \quad -\frac{1}{105} \quad \frac{4}{105} \quad \cdots \\
0 \quad -\frac{1}{42} \quad -\frac{1}{21} \quad \cdots \\
\frac{1}{42} \quad \frac{1}{42} \quad \cdots \\
0 \quad \cdots \\
\cdots
\end{array}$$

2° Si l'on se demande, au contraire, quelles sont, parmi les séries représentées par (1), celles qui satisfont aux conditions

$$A_2 = A_4 = A_6 = A_8 = \cdots = 0,$$

on trouve l'expression générale, symbolique,

$$A_p = \left(\frac{E+1}{2}\right)^p \alpha;$$

α étant la valeur, arbitraire, de A_0, et les quantités E étant les *nombres d'Euler*, définis par l'égalité symbolique

$$(E+1)^p + (E-1)^p = 0.$$

En particulier, pour $\alpha = 1$, on obtient

$$A_p = \left(\frac{E+1}{2}\right)^p:$$

relation d'où l'on tire :

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_3 = -\frac{1}{4}, \quad A_5 = \frac{1}{2}, \quad A_7 = -\frac{17}{8}, \quad \ldots$$

Ces nombres ne sont autres que ceux qui sont définis par l'égalité symbolique

$$(A - 1)^p + A^p = 0,$$

avec la condition initiale $A_0 = 1$. Leurs valeurs absolues sont celles que prennent les dérivées successives de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, pour $x = 0$, car on démontre facilement la relation symbolique

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sin (Ax). \tag{4}$$

On a aussi

$$A_p = \frac{2(2^{p+1} - 1)}{p + 1} B_{p+1},$$

formule qui se prête mieux au calcul des nombres A, du moment que l'on connaît les valeurs des nombres de Bernoulli.

Enfin, voici le tableau des différences successives des nombres A :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & 0 & & -\frac{1}{4} & & 0 & & \frac{1}{2} & & 0 & & -\frac{17}{8} & & \ldots \\
& \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \frac{17}{8} & & \ldots & \\
& & 0 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & -1 & & -\frac{13}{8} & & \ldots & & \\
& & & -\frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} & & \frac{1}{4} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{8} & & \ldots & & & \\
& & & & 0 & & -\frac{1}{2} & & -1 & & \frac{5}{8} & & \ldots & & & & \\
& & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & -\frac{13}{8} & & \ldots & & & & & \\
& & & & & & 0 & & \frac{17}{8} & & \ldots & & & & & & \\
& & & & & & & -\frac{17}{8} & & \ldots & & & & & & & \\
& & & & & & & & \ldots & & & & & & & &
\end{array}$$

. . . .

Il est nécessaire que je donne quelques éclaircissements sur la manière de trouver, parmi les séries représentées par (1), celles qui satisfont à certaines conditions. L'égalité (1) donne

$$\sin [Ax] - \sin \left[(1 - A)\, x\right] = 0,$$

d'où

$$\sin \frac{x}{2} \cos (Ax) = \cos \frac{x}{2} \sin (Ax).$$

Si l'on veut que

$$A_1 = \tfrac{1}{2}, \quad A_3 = A_5 = A_7 = \cdots = 0,$$

on voit d'abord que ces conditions se résument en celle-ci :

$$\sin (Ax) = \frac{x}{2};$$

puis, la relation trouvée plus haut devient

$$\frac{x}{2} \cot \frac{x}{2} = \cos (Ax).$$

Ces nombres sont donc les *Nombres de Bernoulli.*

Si, au contraire, on veut que

$$A_2 = A_4 = A_6 = \cdots = 0,$$

on a d'abord

$$\cos (Ax) = 1;$$

puis :

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sin (Ax)$$

. . . .

... J'attache de l'importance aux nombres A, définis en dernier lieu, à cause de la formule *conventionnelle*

$$1^p - 2^p + 3^p - 4^p + \cdots = \frac{1}{2} A_p, \tag{5}$$

qui comprend, comme cas particuliers, les célèbres égalités *absurdes* :

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}, \quad \text{(Lacroix)}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + \cdots = \frac{1}{4}, \quad \text{(Id.)}$$

$$1 - 4 + 9 - 16 + \cdots = 0, \quad \text{(Simonof)}$$

etc., etc.

Vous ne voudriez plus reconnaître, en moi, un de vos élèves, si je soutenais de pareilles absurdités; et vous auriez raison.

Mais, pour moi, la formule (5) n'est qu'une *formule de convention* : c'est un pur algorithme, elle n'est qu'un outil, dont je me sers, avec assez de succès, dans l'étude de certaines séries. A ce titre, les formules analogues à (5), pourvu qu'on en use avec circonspection, et en respectant certaines règles, préalablement établies ; ces formules, dis-je, quoique fausses, peuvent servir de base à une théorie, qui ne serait pas plus absurde que la théorie des Imaginaires.

Il est bien remarquable que les théories les plus fécondes sont précisément celles où, pour abréger le chemin de la pensée, on fait usage de ces idées de convention, en ayant soin d'écarter, dans le cours des recherches, tout ce qui peut donner lieu à une fausse interprétation des mêmes idées. Il en est ainsi de la théorie des imaginaires et du calcul symbolique, lesquels, mal interprétés, peuvent conduire à des résultats faux, et, quelquefois, aux paradoxes les plus étonnants; tandis que, si l'on a soin de tenir toujours présent le caractère purement conventionnel du point de départ, en ne faisant point un pas de plus, qui ne soit consenti par les conventions initiales, on arrive aux résultats les plus inattendus, par des moyens admirables de simplicité et d'élégance.

J'espère pouvoir bientôt soumettre, à votre appréciation, quelques formules *exactes*, obtenues au moyen de l'égalité *absurde* (5) Mais ce que je me propose surtout de faire, c'est de réunir, en un corps de théorie, les conditions moyennant lesquelles on peut se servir, en toute rigueur, de l'égalité (5), et des autres égalités conventionnelles qui s'en déduisent.

Parmi ces dernières, je citerai d'abord la relation de Poisson :

$$\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi + \cdots = \tfrac{1}{2},$$

que l'on obtient immédiatement, si l'on observe que le premier membre peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2}\left[A_0 - A_2\frac{\varphi^2}{1.2} + A_4\frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - A_6\frac{\varphi^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots\right],$$

et que l'on a

$$A_0 = 1, \quad A_2 = A_4 = A_6 = \cdots = 0.$$

On a aussi, toujours au même titre,

$$\sin\varphi - \sin 2\varphi + \sin 3\varphi - \sin 4\varphi + \cdots = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2},$$

ce que l'on vérifie immédiatement, au moyen de la relation (4).

Toutes ces absurdités sont contenues dans la relation générale

$$f(x) - f(2x) + f(3x) - f(4x) + \cdots = \tfrac{1}{2} f(Ax).$$

Voici une autre source d'absurdités :

$$f(x) - f(3x) + f(5x) - f(7x) + \cdots = \tfrac{1}{2} f(Ex);$$

d'où découlent les relations :

$$1^p - 3^p + 5^p - 7^p + \cdots = \tfrac{1}{2} E_p,$$

$$\sin\varphi - \sin 3\varphi + \sin 5\varphi - \sin 7\varphi + \cdots = 0,$$

$$\cos\varphi - \cos 3\varphi + \cos 5\varphi - \cos 7\varphi + \cdots = \tfrac{1}{2}\operatorname{séc}\varphi.$$

etc., etc...

Je laisse, à ces égalités, le nom d'*absurdités :*

1° Pour qu'on ne méconnaisse pas mes idées ;

2° Pour que les personnes qui se serviront de ces relations soient averties, et ne leur attribuent pas une signification qu'elles n'ont pas, qu'elles ne peuvent avoir . . . .

... Enfin, quand on parle des séries représentées par (1), il ne convient pas d'oublier la série des nombres définis par l'égalité

$$(p+1)\,A_{p+1} = \frac{1}{2}A_p + \frac{2}{3}A_{p-1} + \frac{3}{4}A_{p-2} + \cdots + \frac{p+1}{p+2}A_0,$$

avec la condition initiale $A_0 = 1$. On trouve :

$$A_1 = \frac{1}{2}, \quad A_2 = \frac{11}{24}, \quad A_3 = \frac{7}{16}, \quad A_4 = \frac{2\,447}{5\,760}, \ldots$$

Ces nombres entrent dans l'égalité symbolique remarquable

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{e}{1+Ax}. \tag{6}$$

Ainsi :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left[1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2\,447}{5\,760}x^4 - \cdots\right].$$

Voici quelques remarques, relatives à ces nombres :

1° Si, dans (6), on change x en $-\frac{x}{1+x}$, on trouve

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \frac{e}{1+(1-A)\,x}.$$

Comparant ce résultat à l'égalité (6), on a la preuve que la relation (1) est vérifiée, comme on le voit, d'ailleurs, dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{11}{24} & & \frac{7}{16} & & \frac{2447}{5760} & & \cdots \\
& \frac{1}{2} & & \frac{1}{24} & & \frac{1}{48} & & \frac{73}{5760} & & \cdots & \\
& & \frac{11}{24} & & \frac{1}{48} & & \frac{47}{5760} & & \cdots & & \\
& & & \frac{7}{16} & & \frac{73}{5760} & & \cdots & & & \\
& & & & \frac{2447}{5760} & & \cdots & & & & \\
& & & & & \cdots & & & & &
\end{array}$$

2° Ces nombres A sont surtout importants parce qu'ils se présentent dans l'évaluation de la somme $S_{n,p}$, des produits p à p des n premiers nombres naturels.

Le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 2, & & 3 & & & & \\
 & & & 6, & & 20, & & 15 & & & \\
 & & 24, & & 130, & & 210, & & 105 & & \\
 & 120, & & 924, & & 2\,380, & & 2\,520, & & 945 & \\
720, & & 7\,308, & & 26\,432, & & 44\,100, & & 34\,650, & & 10\,395
\end{array}$$

. . . .

est construit ainsi :

Ayant les p nombres

$$a, b, c, \ldots, r, s,$$

de la $p^{\text{ème}}$ horizontale, je forme d'abord les nombres

$$a, a + b, b + c, \ldots, r + s, s,$$

et je les multiplie, respectivement, par

$$p + 1, p + 2, p + 3, \ldots, 2p, 2p + 1;$$

ce qui me donne les $p + 1$ nombres de l'horizontale suivante.

En d'autres termes :

Si $\lambda_{m,p}$ est le $m^{\text{ème}}$ terme de la $p^{\text{ème}}$ horizontale, la *loi de formation* est

$$\lambda_{m,p+1} = (m + p)\left[\lambda_{m,p} + \lambda_{m-1,p}\right] \tag{7}$$

pourvu que l'on suppose $\lambda_{m,p} = 0$, si m est inférieur à 1, ou supérieur à p.

En particulier :

$$\lambda_{1,p} = 1 . 2 . 3 \ldots p$$

$$\lambda_{2,p} = 1 . 2 . 3 \ldots (p + 1)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{p}\right],$$

. . . .

$$\lambda_{p,p} = 1 . 3 . 5 \ldots (2p - 1).$$

Cela posé, on a :

$$A_p = \frac{\lambda_{1,p}}{1.2.3.\ldots(p+1)} + \frac{\lambda_{2,p}}{1.2.3.\ldots(p+2)} + \cdots + \frac{\lambda_{p,p}}{1.2.3.\ldots 2p}.$$

Par exemple :

$$A_3 = \frac{6}{1.2.3.4} + \frac{20}{1.2.3.4.5} + \frac{15}{1.2.3.4.5.6} = \frac{7}{16}.$$

3° Les nombres λ jouissent de plusieurs propriétés remarquables, telles que les suivantes :

$$\lambda_{1,p} - \lambda_{2,p} + \lambda_{3,p} - \lambda_{4,p} + \cdots \pm \lambda_{p,p} = \pm 1,$$

$$\lambda_{1,p} - 2\lambda_{2,p} + 3\lambda_{3,p} - 4\lambda_{4,p} + \cdots \pm p\lambda_{p,p} = \pm \left[2^{p+1} - (p+2)\right];$$

$$\lambda_{1,p} - \lambda_{2,p-1} + \lambda_{3,p-2} - \lambda_{4,p-3} + \cdots = p$$

$$\lambda_{1,p} + \lambda_{2,p-1} + \lambda_{3,p-2} + \lambda_{4,p-3} + \cdots = \Delta^{p+1}[\Gamma(1)]$$

$$= 1.2.3.4\ldots(p+1)\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} - \cdots \pm \frac{1}{2.3.4\ldots p}\right],$$

etc., etc...

Il est probable que l'on aurait une explication simple de toutes ces propriétés, si l'on étudiait la question par le Calcul des différences.

A ce propos, il est bon de remarquer l'analogie existant entre la loi de formation (7), et la relation connue

$$\Delta^m(0^{p+1}) = m\left[\Delta^m(0^p) + \Delta^{m-1}(0^p)\right];$$

mais c'est plutôt aux différences successives des nombres $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(3)$, $\Gamma(4)$, ..., qu'il faut avoir recours. On a, en effet :

$$\Delta^m\left[\Gamma(p+1)\right] = (m+p)\Delta^m\left[\Gamma(p)\right] + m\,\Delta^{m-1}\left[\Gamma(p)\right].$$

Enfin, la relation symbolique

$$B\left(1 + \frac{B}{1}\right)\left(1 + \frac{B}{2}\right)\left(1 + \frac{B}{3}\right)\cdots\left(1 + \frac{B}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n+2},$$

peut, croyons-nous, rendre beaucoup de services.

4° On a

$$S_{n,p} = \lambda_{1,p} C_{n+1,p+1} + \lambda_{2,p} C_{n+1,p+2} + \lambda_{3,p} C_{n+1,p+3} + \cdots + \lambda_{p,p} C_{n+1,2p}, \quad (8)$$

formule facile à obtenir, au moyen de l'égalité évidente :

$$S_{n,p} = S_{n-1,p} + nS_{n-1,p-1}.$$

On doit supposer $C_{n,p} = 0$, pour $p > n$. Au lieu de (8), on peut écrire, symboliquement :

$$S_{n,p} = \lambda^{-p}[1 + \lambda]^{n+1},$$

à condition de remplacer, après développement, λ^r par $\lambda_{r,p}$.

En particulier :

$$S_{n,1} = C_{n+1,2},$$
$$S_{n,2} = 2C_{n+1,3} + 3C_{n+1,4},$$
$$S_{n,3} = 6C_{n+1,4} + 20C_{n+1,5} + 15C_{n+1,6},$$
$$S_{n,4} = 24C_{n+1,5} + 130C_{n+1,6} + 210C_{n+1,7} + 105C_{n+1,8},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

5° D'après la formule (8), on peut poser

$$S_{n,p} = M_0 n^{2p} + M_1 n^{2p-1} + M_2 n^{2p-2} + \cdots + M_{2p-2} n^2 + \omega_p n.$$

La formule (8) permet de trouver les valeurs des coefficients M. En particulier,

$$M_0 = \frac{1}{2 . 4 . 6 \ldots 2p}.$$

Les expressions de $M_1, M_2, M_3, \ldots$ sont de plus en plus compliquées. J'ai désigné, par une lettre spéciale, le coefficient de n, parce que ce coefficient est particulièrement intéressant. Les nombres ω jouent, dans cette théorie, le même rôle que les nombres de Bernoulli dans la sommation des puissances semblables des n premiers nombres naturels. On peut les définir par l'égalité symbolique

$$\omega(\omega + 1)^{p-1} - \omega^p = \frac{1}{p},$$

d'où l'on déduit

$$\omega_p = (-1)^{p+1} \frac{B_p}{p}.$$

6° On peut aussi exprimer les nombres ω, au moyen des nombres λ, par la relation

$$\omega_p = \frac{\lambda_{1,p}}{p+1} - \frac{\lambda_{2,p}}{p+2} + \frac{\lambda_{3,p}}{p+3} - \cdots \pm \frac{\lambda_{p,p}}{2p}$$

Elle donne, successivement :

$$\omega_1 = \tfrac{1}{2}, \quad \omega_3 = \omega_5 = \omega_7 = \omega_9 = \cdots = 0,$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{12}, \quad \omega_4 = \frac{1}{120}, \quad \omega_6 = -\frac{1}{252}, \quad \omega_8 = \frac{1}{240}, \cdots$$

7° *Si* p *surpasse* 1, on a la formule

$$\omega_p = (-1)^{p+r} \sum_{i=1}^{i=p-r} \left[\pm \lambda_{i,p-r} \sum_{i'=1}^{i'=r} \pm \frac{\lambda_{i',r}}{(p+i+i'-1)(p+i+i')} \right], \quad (9)$$

dans laquelle r peut prendre les valeurs $1, 2, 3, \ldots\ p - i$.

Pour $r = 1$:

$$\omega_p = (-1)^{p+1} \left[\frac{\lambda_{1,p-1}}{(p+1)(p+2)} - \frac{\lambda_{2,p-1}}{(p+2)(p+3)} + \cdots \pm \frac{\lambda_{p-1,p-1}}{(2p-1).2p} \right].$$

Pour $r = p - 1$:

$$\omega_p = (-1)^{2p-1} \left[\frac{\lambda_{1,p-1}}{(p+1)(p+2)} - \frac{\lambda_{2,p-1}}{(p+2)(p+3)} + \cdots \pm \frac{\lambda_{p-1,p-1}}{(2p-1).2p} \right].$$

Donc :

$$\omega_p = (-1)^p \omega_p.$$

Conséquemment, *si* p *est impair, différent de* 1, on a $\omega_p = 0$.

8° Dans ce qui précède, mon intention a été principalement de réunir les éléments nécessaires pour entreprendre une étude, plus approfondie, de la somme $S_{n,p}$. Mais je ne me livrerai pas à cette étude avant d'avoir pris connaissance de ce qui a été fait sur le même sujet, notamment par MM. Laguerre et Le Paige, dont vous avez bien voulu m'indiquer les travaux. J'ajouterai seulement que ces recherches m'ont conduit à quelques expressions nouvelles des nombres de Bernoulli, indépendamment de celle qui résulte de la formule (9). Ainsi, supposant $2p$ décomposé en p nombres entiers, de toutes les manières possibles, soit

$$a + b + c + \cdots + l = 2p$$

une des solutions, et désignons par $(a, b, c, \ldots l)$ le nombre des permutations de $2p$ objets, parmi lesquels il y en a a identiques entre eux, b identiques entre eux, etc., etc... En d'autres termes, posons, pour abréger :

$$(a, b, c, \ldots, l) = \frac{1 . 2 . 3 \ldots 2p}{1 . 2 . 3 \ldots a . 1 . 2 . 3 \ldots b \ldots 1 . 2 . 3 \ldots l}.$$

La somme de tous les nombres tels que (a, b, c, ... l), *chacun d'eux étant multiplié par un nombre entier convenable, affecté du signe + ou du signe —, suivant que le nombre des objets non répétés est pair ou impair, égale* $(p + 1)(p + 2)(p + 3) \ldots 2p . B_p$.

La somme des multiplicateurs des quantités $(a, b, c, \ldots l)$, qui renferment m fois l'unité, est égale à $C_{p-1, m}$, comme on peut le voir ci-après :

$$2 B_1 = (2),$$
$$3 . 4 B_2 = (2, 2) - (1, 3),$$
$$4 . 5 . 6 B_3 = (2, 2, 2) - 2(1, 2, 3) + (1, 1, 4),$$
$$5 . 6 . 7 . 8 B_4 = (2, 2, 2, 2) - 3(1, 2, 2, 3) + \left\{\begin{matrix} 2(1, 1, 2, 4) \\ (1, 1, 3, 3) \end{matrix}\right\} - (1, 1, 1, 5),$$
$$6 . 7 . 8 . 9 . 10 B_5 = (2, 2, 2, 2, 2,) - 4(1, 2, 2, 2, 3) + \left\{\begin{matrix} 3(1, 1, 2, 2, 4) \\ 3(1, 1, 2, 3, 3) \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} 2(1, 1, 1, 2, 5) \\ 2(1, 1, 1, 3, 4) \end{matrix}\right\} + (1, 1, 1, 1, 6)$$

etc., etc...

Cette propriété montre que $(p + 1)(p + 2)(p + 3) \ldots 2p . B_p$ *est un nombre entier;* ce qui résulte d'ailleurs immédiatement du Théorème de Staudt et Clausen.

Le coefficient de (a, b, c, ..., l) *est égal au nombre des permutations des nombres* a, b, c, ..., l, *différents de l'unité.*

Ainsi, dans l'expression de B_5, le coefficient de (1, 1, 2, 2, 4) est égal au nombre des permutations des nombres 2, 2, 4, c'est-à-dire

$$\frac{1.2.3}{1.2.1} = 3.$$

On peut énoncer ces propriétés un peu différemment, en résolvant l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_p = 2p,$$

d'une manière particulière.

On a toujours la solution

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_p = 2,$$

la seule qui ne contienne pas, pour les inconnues, de valeurs égales à l'unité. On pose ensuite $x_1 = 1$, et l'on doit résoudre l'équation

$$x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_p = 2p - 1,$$

en nombres entiers, supérieurs à 1, de toutes les manières possibles, ce qui donne $C_{p-1,1}$ solutions.

Puis, ayant posé $x_1 = x_2 = 1$, on doit résoudre, de la même manière, l'équation

$$x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_p = 2p - 2,$$

donnant $C_{p-1,2}$ solutions.

En général, ayant posé

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_k = 1,$$

on doit résoudre l'équation

$$x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3} + \cdots + x_p = 2p - k$$

en nombres entiers, supérieurs à 1, de toutes les manières possibles; ce qui donne $C_{p-1,k}$ solutions.

En opérant de la sorte, on trouve donc un nombre total de solutions, exprimé par

$$1 + C_{p-1,1} + C_{p-1,2} + C_{p-1,3} + \cdots + C_{p-1,p-1} = 2^{p-1}.$$

Soit

$$x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = c, \dots x_p = l,$$

une quelconque de ces solutions. *On a*

$$(p+1)(p+2)(p+3)\dots 2p \,.\, B_p = \sum \pm (a, b, c, \dots, l):$$

on doit prendre le signe +, ou le signe —, suivant que le nombre des quantités a, b, c, ..., l, *égales à l'unité, est pair ou impair*. Par exemple :

$$\begin{array}{ll} 8 = 2+2+2+2, & (2,2,2,2) = 2\,520, \\ \left.\begin{array}{ll} 8 = 1+2+2+3, & (1,2,2,3) = 1\,680 \\ 8 = 1+2+3+2, & (1,2,3,2) = 1\,680 \\ 8 = 1+3+2+2, & (1,3,2,2) = 1\,680 \end{array}\right\} & = 5\,040, \\ \left.\begin{array}{ll} 8 = 1+1+2+4, & (1,1,2,4) = 840 \\ 8 = 1+1+3+3, & (1,1,3,3) = 1\,120 \\ 8 = 1+1+4+2, & (1,1,4,2) = 840 \end{array}\right\} & = 2\,800, \\ 8 = 1+1+1+5, & (1,1,1,5) = 336. \end{array}$$

Puis

$$5.6.7.8\,B_4 = 2\,520 - 5\,040 + 2\,800 - 336 = -56,$$

d'où

$$B_4 = -\frac{1}{30};$$

ce qui est exact.

On peut encore transformer l'énoncé précédent. Dans le développement de

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p)^{2p}}{1.2.3\dots 2p},$$

considérons les coefficients des termes qui contiennent, à la fois, toutes les lettres a. Soit m le nombre des lettres qui entrent à la première puissance dans un de ces termes, et multiplions le coefficient correspondant par $\frac{(-1)^m}{C_{p,m}}$. *La somme de tous les produits analogues est*

$$\frac{B_p}{1.2.3\dots p}.$$

Ainsi, pour trouver la valeur de B_2, prenons le développement

$$\frac{(a+b)^4}{1.2.3.4}=\frac{a^4}{24}+\frac{a^3b}{6}+\frac{a^2b^2}{4}+\frac{ab^3}{6}+\frac{b^4}{24},$$

et considérons seulement les coefficients

$$\frac{1}{6},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{6},$$

que nous multiplions respectivement par

$$-\frac{1}{C_{2,1}},\quad +\frac{1}{C_{2,0}},\quad -\frac{1}{C_{2,1}},$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{12},\quad +\frac{1}{4},\quad -\frac{1}{12}.$$

On doit avoir

$$\frac{B_2}{1.2}=-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$

d'où

$$B_2=\frac{1}{6};$$

ce qui est exact . . . .

. . . .

... A propos des mêmes recherches, je trouve que, *si*

$$x_1=a_1,\ x_2=a_2,\ x_3=a_3,\ \ldots,\ x_n=a_n,$$

est une quelconque des solutions entières et positives de l'équation

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=p,$$

et si l'on pose

$$f_n(p)=\sum\frac{1}{a_1a_2a_3\ldots a_n},$$

on a :

$$\frac{f_n(n)}{n}+\frac{f_n(n+1)}{n+1}+\frac{f_n(n+2)}{n+2}+\cdots=1.2.3\ldots n\left[1+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}+\cdots\right].$$

Par exemple, pour $n=2$, on trouve d'abord

$$f_2(p)=\frac{1}{1.(p-1)}+\frac{1}{2(p-2)}+\frac{1}{3(p-3)}+\cdots+\frac{1}{(p-1).1}=\frac{2}{p}\mathrm{H}(p)-\frac{2}{p^2},$$

puis

$$\frac{\mathrm{H}(1)}{1}+\frac{\mathrm{H}(2)}{4}+\frac{\mathrm{H}(3)}{9}+\cdots=2\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots\right)=2,40411\ldots$$

On a aussi :

$$\frac{f_n(n)}{n+1}+\frac{f_n(n+1)}{n+2}+\frac{f_n(n+2)}{n+3}+\cdots=1.2.3..n,$$

Ces fonctions f se rattachent à la recherche de la somme des produits, p à p, des n premiers nombres naturels. On a, en effet :

$$\mathrm{S}_{n+p-1,p}=(n+1)(n+2)\ldots(n+p)f_n(n+p),$$

$$\mathrm{A}_p=\frac{f_1(p+1)}{1}+\frac{f_2(p+2)}{1.2}+\frac{f_3(p+3)}{1.2.3}+\cdots$$

etc., etc...

Ces formules, et beaucoup d'autres, se déduisent facilement de la proposition suivante :

« *Si*

$$x_1=a_1,\qquad x_2=a_2,\qquad x_3=a_3,\cdots x_n=a_n,$$

est une quelconque des solutions entières, supérieures à 1, *de l'équation*

$$x_1+x_2+x_3+\cdots x_n=n+p,$$

on a :

$$\lambda_{n,p}=(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+p)\sum\frac{1}{a_1a_2a_3\ldots a_n}\text{ »}$$

. . . .

... Si A_p est la moyenne arithmétique des puissances $p^{\text{èmes}}$ des nombres

$$\frac{n-u_1}{2n},\quad\frac{n-u_2}{2n},\quad\frac{n-u_3}{2n},\ldots,\frac{n-u_n}{2n},$$

$$\frac{n+u_1}{2n},\quad\frac{n+u_2}{2n},\quad\frac{n+u_3}{2n},\ldots,\frac{n+u_n}{2n},$$

il est clair que les nombres A satisfont à la relation (1), quelle que soit la série

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n.$$

Si n augmente indéfiniment, on voit qu'une certaine série, illimitée, de nombres u, donne naissance à une certaine série de nombres A. C'est ainsi que les séries

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots$$

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots$$

$$\sqrt{-1},\ 2\sqrt{-1},\ 3\sqrt{-1},\ 4\sqrt{-1},\ 5\sqrt{-1},\ 6\sqrt{-1}, \ldots$$

donnent, respectivement, naissance aux séries

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32}, \ldots$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{6}, \ldots$$

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ 0,\ -\frac{1}{20},\ -\frac{1}{24}, \ldots$$

Une question qui semble présenter beaucoup d'intérêt est celle de savoir si toute série de nombres A possède une *série-mère* de nombres u. Et, si la réponse est affirmative, quelle est la série-mère des nombres de Bernoulli et des autres nombres étudiés précédemment? . . . .

. . . .

... Je ne sais si vous avez déjà remarqué ce corollaire du Théorème de M. Mansion, généralisation d'un théorème de M. Smith, que vous avez démontré dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (tome IV, page 103) :

« *On forme un déterminant de* n^2 *éléments : chaque élément est égal à* 1 *ou à* 0, *suivant que le plus grand commun diviseur entre ses deux indices est ou n'est pas un carré parfait. Soit, d'autre part,* $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ *la valeur du produit* 2.3.4...n, *décomposé en ses facteurs premiers. Le déterminant proposé égale* $(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots}$ »

Par exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

. . . .

... M. Laisant avait proposé, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique,* la question suivante :

« *Démontrer que le chiffre des dizaines de mille d'une puissance quelconque de* 5, *ne peut être ni un* 3, *ni un* 8. »

En la résolvant, je suis parvenu à la généralisation suivante :

« *Si* k *a la forme* $4\mu + 1$, *parmi les chiffres de rang* k, *des puissances successives de* 5, *les chiffres* 3 *et* 8 *se trouvent en plus petit nombre que les autres.* »

Par exemple, parmi les 640 chiffres de rang 9 (centaines de millions), de 640 puissances successives de 5, chacun des chiffres 3 et 8, se trouve 60 fois, tandis que chacun des huit autres chiffres s'y trouve 65 fois. « *La probabilité que le chiffre occupant le rang* k, *dans* 5^p, *soit* 3, *est*

$$P_k = \frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{2^{k-5}}\right),$$

pourvu que k *ait la forme* $4\mu + 1$. *La probabilité est la même pour le chiffre* 8. »

En particulier :

$$P_5 = 0,$$

conformément au théorème de M. Laisant.

Ces propositions découlent d'une proposition plus détaillée et plus générale, publiée dans le même journal :

« *Les chiffres de rang* k, *dans les puissances successives d'un nombre quelconque, se reproduisent périodiquement. Pour les puissances de* 5, *si* k *surpasse* 2, *la période se compose de* 2^{k-2} *termes, dont la somme est le double de* $9 . 2^{k-4} - 1$. *Dans cette période, un même chiffre se trouve* $\frac{1}{2}(2^{k-3} + \varphi)$ *fois,* φ *ayant,* *pour chaque chiffre, des valeurs différentes, suivant la forme de* k, *comme l'indique le tableau suivant :*

CHIFFRES.	$K = 4\mu$.	$K = 4\mu + 1$	$K = 4\mu + 2$	$K = 4\mu + 3$
0 et 5	3	1	2	-1
1 » 6	-2	1	-3	4
2 » 7	-2	1	2	-1
3 » 8	3	-4	2	-1
4 » 9	-2	1	-3	-1

Par ce tableau on voit que 0 et 5 sont les chiffres les *plus fréquents*, 4 et 9 les *moins fréquents* . . . .
. . . .

Torre Annunziata, 1er juin 1882.

Ernest CESÁRO.

SUR UNE IDENTITÉ GÉNÉRALE.

I. n étant un nombre entier *donné*, soit

$$s_m = \left(\frac{0}{n}\right)^m + \left(\frac{1}{n}\right)^m + \left(\frac{2}{n}\right)^m + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^m.$$

Si l'on observe que les quantités

$$\frac{0}{n}, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n},$$

peuvent être groupées deux à deux, de manière que la somme des termes de chaque groupe soit 1, on voit immédiatement que la suite s_0, s_1, s_2, s_3, ... appartient à cette classe de séries dont nous avons passé en revue les exemples les plus remarquables dans notre *Seconde Lettre*. En d'autres termes, on peut écrire symboliquement

$$f(s) = f(1 - s). \tag{1}$$

En particulier, pour $f(x) = x^\alpha (1 - x)^{\alpha+1}$, on a,

$$s^\alpha (1 - s)^{\alpha+1} = s^{\alpha+1} (1 - s)^\alpha,$$

ou bien

$$s^\alpha (1 - s)^\alpha (1 - 2s) = 0. \tag{2}$$

II. Pour $\alpha = 1$, la relation (2) devient

$$s_1 - 3s_2 + 2s_3 = 0.$$

Or, nous avons démontré, dans la *Note X*, que cette relation subsiste quand on adopte, pour s_m, la signification que lui donne l'égalité suivante :

$$s_m = \left(\frac{1}{n}\right)^m F(\delta_1) + \left(\frac{2}{n}\right)^m F(\delta_2) + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^m F(\delta_n), \tag{3}$$

δ_p étant le plus grand diviseur commun à n et à p. D'après cela, on peut écrire

$$\sum_{p=1}^{p=n} p(n - p)(n - 2p) F(\delta_p) = 0.$$

III. Pour $\alpha = 2, 3, 4, \ldots$, la relation (2) donne

$$s_2 - 4s_3 + 5s_4 - 2s_5 = 0$$
$$s_3 - 5s_4 + 9s_5 - 7s_6 + 2s_7 = 0$$
$$s_4 - 6s_5 + 14s_6 - 16s_7 + 9s_8 - 2s_9 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On peut continuer à conserver, aux quantités s, la signification qui leur est donnée par (3). On peut donc écrire, en général,

$$\sum_{p=1}^{p=n} p^{\alpha}(n-p)^{\alpha}(n-2p)\,\mathrm{F}(\delta_p) = 0.$$

IV. Plus généralement encore, d'après (1),

$$\sum_{p=1}^{p=n} \left[f(p) - f(n-p)\right] \mathrm{F}(\delta_p) = 0,$$

pourvu que $f(n) = f(0)$. Mais cette identité, bien évidente, vient détruire tout ce qu'il paraissait y avoir de curieux dans certaines formules de la *Note* X. On voit, en effet, que ces formules ne sont, pour ainsi dire, que des travestissements de l'identité $\delta_p = \delta_{n-p}$. Cependant, pour être évidentes, il n'est pas dit qu'elles soient inutiles, surtout au point de vue de la théorie des moyennes. C'est pourquoi nous croyons pouvoir les laisser dans nos notes.

V. Il est bien simple de démontrer l'égalité (1), dans le cas général où

$$s_m = u_0^m + u_1^m + u_2^m + \cdots + u_n^m,$$

les nombres u étant tels que $u_p + u_{n-p} = 1$, pour les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n$, de p.

On peut écrire

$$\sum_{p=0}^{p=n} u_p^m = \sum_{p=0}^{p=n} (1 - u_p)^m,$$

ou bien, symboliquement,

$$s^m = (1 - s)^m,$$

d'où l'on déduit (1) par le théorème de Taylor.

FORMULE DE THACKER.

I. 1. α, β, γ,... étant les nombres premiers avec N, et non supérieurs à ce nombre, posons

$$\varphi_m(\mathrm{N}) = \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \cdots,$$
$$\mathrm{F}_m(x) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + x^m.$$

D'après un raisonnement connu, si u, v, w,... sont les *diviseurs premiers* de N, autres que 1, on peut écrire

$$\varphi_m(\mathrm{N}) = \mathrm{F}_m(\mathrm{N}) - \sum u^m \mathrm{F}_m\left(\frac{\mathrm{N}}{u}\right) + \sum u^m v^m \mathrm{F}_m\left(\frac{\mathrm{N}}{uv}\right) - \cdots,$$

ou bien, sous une forme plus concise,

$$\varphi_m(\mathrm{N}) = a^m\mu(a)\mathrm{F}_m\left(\frac{\mathrm{N}}{a}\right) + b^m\mu(b)\mathrm{F}_m\left(\frac{\mathrm{N}}{b}\right) + c^m\mu(c)\mathrm{F}_m\left(\frac{\mathrm{N}}{c}\right) + \cdots \quad (1)$$

Dans cette égalité, a, b, c,..., sont *tous les diviseurs* de N; et $\mu(x)$ est une fonction de x, égale à $+1$, où à -1, suivant que x est composé d'un nombre *pair* ou d'un nombre *impair* de facteurs premiers, *inégaux*. Dans les autres cas, $\mu(x) = 0$. En outre, par *convention*, $\mu(1) = 1$.

2. Cherchons d'abord l'expression de $\mathrm{F}_m(x)$. Si l'on considère les nombres de Bernoulli, *définis* par l'égalité symbolique

$$(\mathrm{B} + 1)^p - \mathrm{B}^p = p.$$

le théorème de Taylor permet de déduire immédiatement, de cette égalité, la relation symbolique, plus générale,

$$f(x + \mathrm{B}) - f(x + \mathrm{B} - 1) = f'(x),$$

qui donne

$$f'(1) + f'(2) + f'(3) + \cdots + f'(x) = f(x + \mathrm{B}) - f(\mathrm{B}).$$

En particulier, si l'on fait $f(x) = x^{m+1}$, on trouve la formule connue

$$F_m(x) = \frac{(x + B)^{m+1} - B^{m+1}}{m + 1},$$

c'est-à-dire :

$$F_m(x) = \frac{1}{m + 1} \sum_{p=0}^{p=m} C_{m+1,p} B_p x^{m-p+1}. \tag{2}$$

3. Cela posé, la formule (2) donne :

$$a^m \mu(a) F_m \left(\frac{N}{a}\right) = \frac{1}{m + 1} \sum_{p=0}^{p=m} C_{m+1,p} B_p N^{m-p+1} . a^{p-1} \mu(a),$$

$$b^m \mu(b) F_m \left(\frac{N}{b}\right) = \frac{1}{m + 1} \sum_{p=0}^{p=m} C_{m+1,p} B_p N^{m-p+1} . b^{p-1} \mu(b),$$

. . . .

Puis, par addition, en ayant égard à (1) :

$$\varphi_m(N) = \frac{1}{m + 1} \sum_{p=0}^{p=m} C_{m+1,p} B_p N^{m-p+1} . \zeta_p, \tag{3}$$

pourvu que l'on pose

$$\zeta_p(N) = a^{p-1} \mu(a) + b^{p-1} \mu(b) + c^{p-1} \mu(c) + \cdots \tag{4}$$

$\zeta_p(N)$ étant, d'ailleurs, simplement désigné par ζ_p, lorsqu'il ne peut y avoir de confusion.

4. La relation (3) peut être mise sous la forme *symbolique*.

$$\varphi_m(N) = \frac{(N + B\zeta)^{m+1} - (B\zeta)^{m+1}}{m + 1}, \tag{5}$$

C'est la *formule de Tacker*.

5. La fonction ζ est *définie* par l'égalité (4), que l'on peut écrire ainsi :

$$\zeta_p(N) = (1 - u^{p-1})(1 - v^{-1})(1 - w^{p-1}) \ldots$$

Par exemple :

$$\zeta_0(N) = \left(1 - \frac{1}{u}\right)\left(1 - \frac{1}{v}\right)\left(1 - \frac{1}{w}\right)\cdots = \frac{\varphi(N)}{N},$$

$$\zeta_1(N) = 0,$$

$$\zeta_2(N) = (1 - u)(1 - v)(1 - w)\cdots = \frac{\pi(N)\varphi(N)}{N},$$

. . . .

Les dernières formules ne sont pas applicables au cas de $N = 1$. D'après (4), $\zeta_p(1) = 1$, quel que soit p.

6. Pour montrer des applications de la formule (5), faisons successivement $m = 4$, $m = 5$. Nous obtenons

$$\varphi_4(N) = \frac{1}{5}\left[N^5\zeta_0 + \frac{5}{3}N^3\zeta_2 - \frac{1}{6}N\zeta_4\right],$$

$$\varphi_5(N) = \frac{1}{6}\left[N^6\zeta_0 + \frac{5}{2}N^4\zeta_2 - \frac{1}{2}N^2\zeta_4\right];$$

c'est-à-dire :

$$\varphi_4(N) = \frac{1}{5}N^5\left(1 - \frac{1}{u}\right)\left(1 - \frac{1}{v}\right)\cdots + \frac{1}{3}N^3(1 - u)(1 - v)\cdots$$
$$- \frac{1}{30}N(1 - u^3)(1 - v^3)\cdots$$

$$\varphi_5(N) = \frac{1}{6}N^6\left(1 - \frac{1}{u}\right)\left(1 - \frac{1}{v}\right)\cdots + \frac{5}{12}N^4(1 - u)(1 - v)\cdots$$
$$- \frac{1}{12}N^2(1 - u^3)(1 - v^3)\cdots$$

7. *Remarque.* Dans la *Note XV*, nous avons fait observer que

$$\varphi_m(N) = \mathfrak{M}\,N, \qquad (m \text{ impair}).$$

Cela se démontre immédiatement en remarquant que la somme $\alpha^m + (N - \alpha)^m$ est divisible par $\alpha + (N - \alpha) = N$, si m est impair.

II. *Propriétés de la fonction* ζ. — 1. La formule (3) donne

$$\frac{\varphi_m(a)}{a^m}=\frac{1}{m+1}\sum_{p=0}^{p=m}C_{m+1,p}B_p\cdot\frac{\zeta_p(a)}{a^{p-1}}.$$

Donc, si l'on pose

$$\frac{\zeta_p(a)}{a^{p-1}}+\frac{\zeta_p(b)}{b^{p-1}}+\frac{\zeta_p(c)}{c^{p-1}}+\cdots=Z_p(N),$$

on peut écrire

$$\frac{\varphi_m(a)}{a^m}+\frac{\varphi_m(b)}{b^m}+\frac{\varphi_m(c)}{c^m}+\cdots=\frac{1}{m+1}\sum_{p=0}^{p=m}C_{m+1,p}B_pZ_p(N).$$

D'autre part, d'après (2),

$$\frac{F_m(N)}{N^m}=\frac{1}{m+1}\sum_{p=0}^{p=m}C_{m+1,p}B_p\cdot\frac{1}{N^{p-1}}.$$

Conséquemment :

$$Z_p(N)=\frac{1}{N^{p-1}}; \tag{6}$$

car, dans la *Note VIII*, nous avons démontré la formule

$$\frac{\varphi_m(a)}{a^m}+\frac{\varphi_m(b)}{b^m}+\frac{\varphi_m(c)}{c^m}+\cdots=\frac{F_m(N)}{N^m}. \tag{7}$$

2. La relation (6) peut s'écrire ainsi :

$$a^{p-1}\zeta_p\left(\frac{N}{a}\right)+b^{p-1}\zeta_p\left(\frac{N}{b}\right)+c^{p-1}\zeta_p\left(\frac{N}{c}\right)+\cdots=1 \tag{8}$$

Pour $p=0$, elle devient

$$\varphi(a)+\varphi(b)+\varphi(c)+\cdots=N.$$

Pour $p=2$:

$$\frac{\pi(a)\varphi(a)}{a^2}+\frac{\pi(b)\varphi(b)}{b^2}+\frac{\pi(c)\varphi(c)}{c^2}+\cdots=\frac{1}{N};$$

etc., etc...

3. Dans la *Note VI*, nous avons établi la coexistence des identités

$$\begin{cases} g(\mathrm{N}) = \mu(a)\mathrm{G}\left(\dfrac{\mathrm{N}}{a}\right) + \mu(b)\mathrm{G}\left(\dfrac{\mathrm{N}}{b}\right) + \mu(c)\mathrm{G}\left(\dfrac{\mathrm{N}}{c}\right) + \cdots & (9) \\ \mathrm{G}(\mathrm{N}) = g(a) + g(b) + g(c) + \cdots & (10) \end{cases}$$

Si l'on fait $\mathrm{G}(x) = \frac{1}{x^{p-1}}$, dans (9), on obtient

$$g(x) = \frac{\zeta_p(x)}{x^{p-1}},$$

d'après la définition de la fonction ζ. Par substitution dans (10) on retrouve la formule (8). Inversement, pour $g(x) = \frac{\zeta_p(x)}{x^{p-1}}$, l'identité (10) donne d'abord, *en vertu de* (8),

$$\mathrm{G}(x) = \frac{1}{x^{p-1}};$$

puis, l'identité (9) devient

$$\zeta_p(\mathrm{N}) = a^{p-1}\mu(a) + b^{p-1}\mu(b) + c^{p-1}\mu(c) + \cdots,$$

ce qui est la définition même de la fonction ζ. Il en résulte que cette fonction est parfaitement *caractérisée* par la relation (8).

4. La relation (8), introduite dans les identités générales, que nous avons considérées au commencement de ce Mémoire, donne lieu à une infinité d'autres identités. On trouve, par exemple :

$$\sum a^k\zeta_s\left(\frac{\mathrm{N}}{a}\right) = \sum a^k\zeta_{s-k}(a).$$

En particulier :

$$\frac{\zeta_k(a)}{a^k} + \frac{\zeta_k(b)}{b^k} + \frac{\zeta_k(c)}{c^k} + \cdots = \frac{1}{\mathrm{N}^k}\left[\frac{\varphi(a)}{a^{k-1}} + \frac{\varphi(b)}{b^{k-1}} + \frac{\varphi(c)}{c^{k-1}} + \cdots\right],$$

$$a^k\zeta_{2k}\left(\frac{\mathrm{N}}{a}\right) + b^k\zeta_{2k}\left(\frac{\mathrm{N}}{b}\right) + \cdots = a^k\zeta_k(a) + b^k\zeta_k(b) + c^k\zeta_k(c) + \cdots,$$

etc., etc...

5. On a aussi, d'après les formules de la *Note VII*,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_p(n)}{n^{m+p}} = \frac{\mathrm{S}_{m+p}}{\mathrm{S}_{m+1}}, \qquad (11)$$

si l'on désigne par S_m la somme

$$1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}+\cdots$$

Par exemple :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\zeta_p(n)}{n^{p+1}}=\frac{6}{\pi^2}\left[1+\frac{1}{2^{p+1}}+\frac{1}{3^{p+1}}+\cdots\right]$$

D'après les mêmes formules, on peut affirmer que, *si, dans le premier membre de* (11), *on n'attribue à* n *que les valeurs décomposables en un produit de facteurs premiers, égaux ou inégaux, en nombre* PAIR, *telles que*

$$4,\ 6,\ 9,\ 10,\ 14,\ 15,\ 16,\ 21,\ 22,\ \ldots,$$

le second membre devient

$$\frac{1}{2}\left[\frac{S_{m+p}}{S_{m+1}}+\frac{S_{m+1}}{S_{m+p}}\cdot\frac{S_{2m+2p}}{S_{2m+2}}\right]-1\,.$$

De même, *si, dans le premier membre de* (11), *on n'attribue à* n *que les valeurs décomposables en un nombre* IMPAIR *de facteurs premiers, égaux ou inégaux, telles que*

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 11,\ 12,\ 13,\ 17,\ \ldots,$$

le second membre devient

$$\frac{1}{2}\left[\frac{S_{m+p}}{S_{m+1}}-\frac{S_{m+1}}{S_{m+p}}\cdot\frac{S_{2m+2p}}{S_{2m+2}}\right] \tag{12}$$

Par exemple :

$$\frac{\zeta_p(2)}{2^{p+1}}+\frac{\zeta_p(3)}{3^{p+1}}+\frac{\zeta_p(5)}{5^{p+1}}+\frac{\zeta_p(7)}{7^{p+1}}+\cdots=\frac{3}{2\pi^2}\left[2S_{p+1}-5\frac{S_{2p+2}}{S_{p+1}}\right]. \tag{13}$$

etc., etc...

Observons que, pour la première série de nombres, la fonction ζ est toujours *positive* : le contraire a lieu pour la seconde série. Il en résulte que la quantité (12) est essentiellement *négative.* Ainsi, par exemple, pour $p=3$, la formule (13) devient

$$\frac{\zeta_3(2)}{2^4}+\frac{\zeta_3(3)}{3^4}+\frac{\zeta_3(5)}{5^4}+\frac{\zeta_3(7)}{7^4}+\cdots=-\frac{4\pi^2}{105}.$$

6. *Remarque.* Les identités (9) et (10) permettent de déduire, l'une de l'autre, les relations (1) et (7). En effet, pour $g(x) = \frac{\varphi_m(x)}{x^m}$, l'identité (10) donne d'abord, *en vertu de* (7),

$$G(x) = \frac{F_m(x)}{x^m};$$

puis, par substitution dans (9), on trouve (2). Inversement pour $G(x) = \frac{F_m(x)}{x^m}$, l'identité (9) donne d'abord, *en vertu de* (1),

$$g(x) = \frac{\varphi_m(x)}{x^m}.$$

Par substitution dans (10), on obtient (7).

III. L'emploi de la fonction μ, qui donne tant de netteté aux calculs, permet encore de chercher l'expression moyenne de $\varphi_m(N)$, par un procédé qui n'est, pour ainsi dire, que la généralisation du procédé employé par M. Mertens, dans le cas de $m = 0$. Dans l'égalité (1), donnons à N les valeurs $1, 2, 3, \ldots, n$, et ajoutons toutes les égalités ainsi obtenues. Nous trouvons

$$\sum_{p=1}^{p=n} \varphi_m(p) = \mu(1)\Phi(q_1) + 2^m\mu(2)\Phi(q_2) + \cdots + n^m\mu(n)\Phi(q_n), \qquad (14)$$

en posant

$$\Phi(x) = F_m(1) + F_m(2) + F_m(3) + \cdots + F_m(x),$$

et en désignant par q_p le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{p}$. D'après (2), on a

$$F_m(x) = \frac{1}{m+1}x^{m+1} + \frac{1}{2}x^m + \frac{m}{12}x^{m-1} - \cdots + B_m x.$$

Or, il est aisé de voir que

$$\Phi(x) = (x+1)F_m(x) - F_{m+1}(x).$$

Par conséquent

$$\Phi(x) = \frac{1}{(m+1)(m+2)}x^{m+2} + \frac{1}{m+1}x^{m+1} + \frac{5}{12}x^m + \cdots$$

Substituant dans (14), on obtient

$$\sum_{p=1}^{p=n} \varphi_m(p) = \frac{1}{(m+1)(m+2)} \sum_{p=1}^{p=n} p^m q_p^{m+2} \mu(p) + \frac{1}{m+1} \sum_{p=1}^{p=n} p^m q_p^{m+1} \mu(p) + \frac{5}{12} \sum_{p=1}^{p=n} p^m q_p^m \mu(p) + \cdots$$

Si l'on observe que les valeurs absolues de $\mu(p)$ ne surpassent jamais l'unité, on peut immédiatement en conclure que les ordres des différentes sommes, qui figurent dans l'expression ci-dessus, sont respectivement égaux à ceux de n^{m+2}, n^{m+1}, n^m, ... Il en résulte que, pour n indéfiniment grand, toutes ces sommes sont négligeables par rapport à la première. Conséquemment :

$$\lim \frac{1}{n^{m+2}} \sum_{p=1}^{p=n} \varphi_m(p) = \frac{1}{(m+1)(m+2)} \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\mu(p)}{p^2},$$

c'est-à-dire :

$$\lim \frac{\varphi_m(1) + \varphi_m(2) + \varphi_m(3) + \cdots + \varphi_m(n)}{n^{m+2}} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(m+1)(m+2)}.$$

On en déduit, comme d'habitude, l'expression moyenne

$$\varphi_m(N) \equiv \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{N^{m+2}}{m+1}.$$

SUR UN THÉORÈME DE M. CATALAN.

I. Nous allons démontrer un théorème de M. Catalan (*Mathesis*, t. II, p. 158), après quoi nous donnerons quelques propositions nouvelles, du même genre.

II. Théorème. *Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations*

$$x+2y=n-1,\ 2x+3y=n-2,\ 3x+4y=n-3,\ ..,nx+(n+1)y=0,$$

est égal à n.

1° Si l'on met la $p^{\text{ème}}$ de ces équations sous la forme

$$p(x+y+1)+y=n, \tag{1}$$

et si l'on cherche ses solutions *entières*, on voit d'abord qu'il faut poser

$$y=n-pt,$$

t étant un entier quelconque. Substituant dans (1), on trouve

$$x=(p+1)t-(n+1).$$

2° Si l'on veut que x et y *ne soient pas négatifs*, on doit attribuer à t des valeurs telles que l'on ait, simultanément :

$$\begin{cases} n-pt>0, \\ (p+1)t-(n+1)\overline{\gtrless}0; \end{cases}$$

d'où

$$\frac{n+1}{p+1}\overline{\lessgtr}\, t \overline{\lessgtr}\frac{n}{p},$$

ou bien

$$\left[\frac{n}{p+1}\right]<t\overline{\lessgtr}\left[\frac{n}{p}\right].$$

D'après cela, on ne peut attribuer à t d'autres valeurs que les suivantes :

$$\left[\frac{n}{p+1}\right]+1,\quad \left[\frac{n}{p+1}\right]+2,\quad \left[\frac{n}{p+1}\right]+3, \ldots \left[\frac{n}{p}\right].$$

Il en résulte que le nombre des solutions *entières*, *non négatives*, de l'équation (1), est

$$N_p = \left[\frac{n}{p}\right] - \left[\frac{n}{p+1}\right]. \tag{2}$$

3° Si, dans la dernière formule, on remplace successivement p par 1, 2, 3, ..., n, on obtient, par addition :

$$N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_n = \left[\frac{n}{1}\right] - \left[\frac{n}{n+1}\right] = n.$$

III. Plus généralement, *soit* f(x) *une fonction quelconque*, F(x) *et* ψ(x) *deux autres fonctions, définies par les égalités*

$$F(x) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(x),$$
$$\psi(x) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots;$$

a, b, c,..., *étant tous les diviseurs de* x. On a

$$N_1F(1) + N_2F(2) + \cdots + N_nF(n) = \psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(n). \tag{3}$$

Par exemple, faisant $f(x) = 1$, et désignant par $\theta(x)$ le *nombre des diviseurs de* x, on a d'abord

$$F(x) = x, \quad \psi(x) = \theta(x);$$

puis

$$N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots + nN_n = \theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \cdots + \theta(n).$$

IV. Soit, dans la même identité générale, $f(x) = 1$, pour $x = p$, et $f(x) = 0$, pour toute autre valeur de x.

On aura $F(x) = 0$, pour $x < p$, et $F(x) = 1$, pour $x \geqslant p$ En outre, $\psi(x) = 1$, si x est divisible par p, et $\psi(x) = 0$, dans le cas contraire.

D'après cela, on obtient

$$N_p + N_{p+1} + N_{p+2} + \cdots + N_n = \left[\frac{n}{p}\right].$$

En particulier, pour $p=1$, on a le théorème de M. Catalan. Si l'on change p en $p+1$, on retrouve, par soustraction, l'égalité (2). Ceci prouve que l'identité générale (3) est *caractéristique* pour les nombres N.

V. Remarquons encore les égalités

$$N_1+N_3+N_5+\cdots=\Delta,$$
$$N_2+N_4+N_6+\cdots=n-\Delta:$$

Δ représente la *différence entre le nombre des diviseurs impairs et le nombre des diviseurs pairs des* n *premiers nombres naturels.*

VI. Posons

$$\nu_x=N_1+2N_2+3N_3+\cdots+xN_x.$$

Si $\alpha\beta=n$,

$$\nu_{\alpha-1}+\nu_{\beta-1}=\nu_{n-1},$$

relation générale, pourvu que l'on suppose $\nu_0=0$.

Corollaire. — *Si* a, b, c,... *sont tous les diviseurs de* n,

$$\nu_{a-1}+\nu_{b-1}+\nu_{c-1}+\cdots=\frac{\theta(n)}{2}\nu_{n-1}.$$

Par exemple, pour $n=6$, on doit avoir

$$\nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_5=2\nu_5.$$

En effet, on trouve aisément :

$$\nu_0=0,\quad \nu_1=3,\quad \nu_2=5,\quad \nu_5=8.$$

Remarque. Si n $+1$ *est un carré,* ν_n *est un nombre pair.*

VII. *Si* $n=\alpha^2$, *dans l'expression*

$$N_1+2N_2+3N_3+\cdots+(n-1)N_{n-1},$$

la somme des $\alpha-1$ *premiers termes est égale à la somme de tous les autres.*

Soit, par exemple, $n=25$. On a d'abord

$$N_1=13,\quad N_2=4,\quad N_3=2,$$
$$N_4=N_5=N_6=N_8=N_{12}=1,$$
$$N_7=N_9=N_{10}=N_{11}=N_{13}=N_{14}=\cdots=N_{24}=0.$$

L'expression ci-dessus devient donc

$$13+8+6+4+5+6+0+8+0+0+0+12+0+0+\cdots+0,$$

ou

$$13+8+6+4=5+6+8+12=31.$$

VIII. *Remarque.* Toutes les propositions qui précèdent se démontrent aisément au moyen de l'égalité (2), et des formules de la *Note I.*

IX. *Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations*

$$x+2y=2(n-1),\ 2x+3y=2(n-2),\ 3x+4y=2(n-3),\ldots,nx+(n+1)y=0,$$

est égal au nombre des non-diviseurs de $2n+1$, *inférieurs à* $2n+1$.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème de M. Catalan. On trouve d'abord

$$N_p=\left[\frac{2n}{p}\right]-\left[\frac{2n+1}{p+1}\right],$$

égalité au moyen de laquelle on peut démontrer la proposition énoncée, et une foule d'autres, que nous omettons. Ainsi, on a

$$\sum_1^n N_p=\left\{\left[\frac{2n}{1}\right]+\left[\frac{2n}{2}\right]+\left[\frac{2n}{3}\right]\cdots+\left[\frac{2n}{n}\right]\right\}$$
$$-\left\{\left[\frac{2n+1}{2}\right]+\left[\frac{2n+1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2n+1}{n+1}\right]\right\}.$$

Or, si l'on pose

$$Q_x=\left[\frac{x}{1}\right]+\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{x}{x}\right],$$

on trouve aisément

$$\left[\frac{2n}{1}\right]+\left[\frac{2n}{2}\right]+\left[\frac{2n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2n}{n}\right]=Q_{2n}-n,$$

$$\left[\frac{2n+1}{2}\right]+\left[\frac{2n+1}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2n+1}{n+1}\right]=Q_{2n+1}-(3n+1).$$

Conséquemment

$$\sum_1^n N_p = 2n + 1 - [Q_{2n+1} - Q_{2n}].$$

Mais on sait que

$$Q_x = \theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \cdots + \theta(x).$$

Donc, enfin,

$$\sum_1^n N_p = 2n + 1 - \theta(2n + 1).$$

Exemple. Soit $n = 10$. On obtient d'abord

$$\begin{gathered} N_1 = 10, \quad N_2 = 3, \\ N_3 = N_4 = N_5 = N_{10} = 1, \\ N_6 = N_7 = N_8 = N_9 = 0. \end{gathered}$$

On doit avoir

$$0 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 21 - \theta(21);$$

ce qui est exact, car les deux membres sont égaux à 17.

Remarques. 1° *Si* 2n + 1 *est premier, on a :*

$$N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_n = 2n - 1.$$

2° *Si* 2n + 1 *est le carré d'un nombre premier, on a :*

$$N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_n = 2(n - 1),$$

etc., etc...

3° $\sum_1^n N_p$ *est un nombre impair, sauf quand* n *est le quadruple d'un nombre triangulaire, c'est-à-dire pour* n = 4, 12, 24, 40, 60, ...

X. Soient plus généralement, les équations

$$x+2y=k(n-1),\ 2x+3y=k(n-2),\ 3x+4y=k(n-3), \ldots nx+(n+1)y=0.$$

On trouve la formule

$$N_p = \left[\frac{kn}{p}\right] - \left[\frac{kn+k-1}{p+1}\right],$$

au moyen de laquelle on peut déterminer $\sum_1^n N_p$, que nous représentons par σ_k. Ainsi, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1 = n,\\
&\sigma_2 = 2n + 1 - \theta(2n + 1),\\
&\sigma_3 = 3n + 3 - \left[\theta(3n + 1) + \theta(3n + 2)\right],\\
&\sigma_4 = 4n + 5 - \left[\iota(4n + 1) + \theta(4n + 2) + \theta(4n + 3)\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

XI. Le théorème de M. Catalan peut être ainsi généralisé : *Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations*

$$
x + (1 + k)y = k(n - 1),\quad (1 + k)x + (1 + 2k)y = k(n - 2),
$$
$$
(1 + 2k)x + (1 + 3k)y = k(n - 3), \ldots
$$

est égal à n.

En effet, si l'on cherche les solutions *entières* de la $p^{\text{ème}}$ de ces équations, on trouve :

$$
\left\{
\begin{aligned}
x &= (kp + 1)\,t - (n - p),\\
y &= n - p - \left\{k(p - 1) + 1\right\} t.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour que ces valeurs *ne soient pas négatives*, il faut que l'on ait

$$
\frac{n - p}{kp + 1} \leqq t \leqq \frac{n - p}{k(p - 1) + 1};
$$

conditions d'où résulte

$$
N_p = \left[\frac{n - p}{k(p - 1) + 1}\right] - \left[\frac{n - (p + 1)}{kp + 1}\right].
$$

Si l'on observe que la seconde partie de cette expression se déduit de la première par le changement de p en $p + 1$, on obtient immédiatement

$$
N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_n = \left[\frac{n - 1}{1}\right] - \left[\frac{-1}{kn + 1}\right] = n.
$$

On voit donc que la propriété, signalée par M. Catalan, pour les équations

$$
x + 2y = n - 1,\quad 2x + 3y = n - 2,\quad 3x + 4y = n - 3, \ldots
$$

subsiste pour les équations

$$x + 3y = 2(n-1),\quad 3x + 5y = 2(n-2),\quad 5x + 7y = 2(n-3), \ldots$$

aussi bien que pour les équations

$$x + 4y = 3(n-1),\quad 4x + 7y = 3(n-2),\quad 7x + 10y = 3(n-3), \ldots$$

etc., etc...

Ainsi, le nombre total des solutions *entières, non négatives*, est toujours le même, quel que soit k.

XII. Nous ne croyons pas inutile de revenir, avec plus de détails, sur une formule, dont nous nous sommes servi, plus d'une fois, dans le cours de cette Note. Il s'agit de la recherche du nombre N des solutions *entières, non négatives*, de l'équation $ax + by = n$, quand on en connaît une solution *entière*, $x = -\alpha$, $y = \beta$. On sait que toutes les autres solutions *entières* sont données par les formules

$$\begin{cases} x = bt - \alpha, \\ y = \beta - at. \end{cases}$$

Si l'on veut que x et y *ne soient pas négatifs*, t doit satisfaire aux conditions

$$\frac{\alpha}{b} \overline{\overline{<}}\, t \,\overline{\overline{<}} \frac{\beta}{a}.$$

En conséquence, *si* b *ne divise pas* α, les seules valeurs possibles de t sont :

$$\left[\frac{\alpha}{b}\right] + 1,\quad \left[\frac{\alpha}{b}\right] + 2,\quad \left[\frac{\alpha}{b}\right] + 3, \ldots\ldots \left[\frac{\beta}{a}\right].$$

Si b *divise* α, on peut encore attribuer à t la valeur $\left[\frac{\alpha}{b}\right] = \frac{\alpha}{b}$. Par suite :

$$\mathrm{N} = \left[\frac{\beta}{a}\right] - \left[\frac{\alpha}{b}\right] + \left| \begin{array}{l} 1, \text{(si } b \text{ divise } \alpha) \\ 0, \text{(si } b \text{ ne divise pas } \alpha.) \end{array} \right.$$

Mais il est clair que

$$\left[\frac{\alpha}{b}\right] - \left[\frac{\alpha - 1}{b}\right] = \left| \begin{array}{l} 1, \text{(si } b \text{ divise } \alpha) \\ 0, \text{(si } b \text{ ne divise pas } \alpha.) \end{array} \right.$$

Donc, *dans tous les cas*,

$$N = \left[\frac{\beta}{a}\right] - \left[\frac{\alpha - 1}{b}\right]. \qquad (4)$$

XIII. La dernière formule permet de *chercher* une large généralisation du théorème de M. Catalan. Soient

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots;$$
$$v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots$$

deux séries, arbitraires, de quantités *entières*, chaque terme de la première série étant *positif*, et *premier avec le terme suivant*. On forme une troisième série

$$w_1, w_2, w_3, w_4, \ldots$$

d'après la relation

$$w_p = v_p u_{p+1} - (1 + v_{p+1}) u_p.$$

Si w_r est le *premier terme négatif*, on peut affirmer que :

Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations

$$u_1 x + u_2 y = w_1,\quad u_2 x + u_3 y = w_2,\quad u_3 x + u_4 y = w_3, \ldots,\quad u_{r-1} x + u_r y = w_{r-1},$$

est

$$\left[\frac{v_1}{u_1}\right] - \left[\frac{v_r}{u_r}\right].$$

En effet, d'après l'expression de w_p, l'équation

$$u_p x + u_{p+1} y = w_p,$$

admet la solution entière

$$\begin{cases} x = -(1 + v_{p+1}) = -\alpha, \\ y = v_p = \beta. \end{cases}$$

Donc, d'après (4),

$$N_p = \left[\frac{v_p}{u_p}\right] - \left[\frac{v_{p+1}}{u_{p+1}}\right].$$

On achève facilement.

Applications. 1° Pour $v_p = n - p$, on a $w_p = (u_{p+1} - u_p)(n - p)$.

a). $u_p = 1 + k(p-1)$, $w_p = k(n-p)$. On retrouve la généralisation indiquée dans le paragraphe XI.

b). $u_p = p^2$, $w_p = (2p+1)(n-p)$:

Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations

$$x + 4y = 3(n-1), \quad 4x + 9y = 5(n-2), \quad 9x + 16y = 7(n-3), \ldots$$

est n.

2° Pour $v_p = n$, $u_p = p^2$, on a d'abord $w_p = (2p+1)n - p^2$; puis :

Le nombre total des solutions entières, non négatives, des équations

$$x + 4y = 3n - 1, \quad 4x + 9y = 5n - 4, \quad 9x + 16y = 7n - 9, \ldots$$

est n. (Mathesis, t. II, p. 208).

SUR L'ÉQUATION $ax + by = n$

(EXTRAITS D'UNE LETTRE A M. HERMITE)

. . . .

... Dans votre lettre du 8 août, vous me faites l'honneur de me communiquer l'élégante relation

$$\left.\begin{aligned}&\left[\frac{n-b}{a}\right]+\left[\frac{n-2b}{a}\right]+\left[\frac{n-3b}{a}\right]+\cdots\\ =&\left[\frac{n-a}{b}\right]+\left[\frac{n-2a}{b}\right]+\left[\frac{n-3a}{b}\right]+\cdots\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

dans laquelle a, b, n, désignent trois nombres entiers quelconques. Cette relation n'est qu'une égalité entre deux expressions différentes du nombre μ des couples de valeurs, *entières et positives*, de x et y, satisfaisant à la condition $ax + by \overline{\overline{<}} n$. En effet, si l'on prend $y = p$, il faut que l'on ait $x \overline{\overline{<}} \frac{n - bp}{a}$. Donc, parmi les μ couples, le nombre de ceux qui renferment, pour y, la valeur p, est égal à $\left[\frac{n-pb}{a}\right]$.

Conséquemment, si l'on fait $p = 1, 2, 3, \ldots$, on trouve que le nombre total des couples est

$$\mu = \left[\frac{n-b}{a}\right]+\left[\frac{n-2b}{a}\right]+\left[\frac{n-3b}{a}\right]+\cdots$$

On trouverait, de même,

$$\mu = \left[\frac{n-a}{b}\right]+\left[\frac{n-2a}{b}\right]+\left[\frac{n-3a}{b}\right]+\cdots$$

En égalant ces deux expressions de μ, on obtient (1)...

... En d'autres termes, si M_n est le nombre des solutions, *entières* et *positives*, de l'équation

$$ax + by = n, \tag{2}$$

chacun des membres de la relation (1) est

$$\mu = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n.$$

... Il est facile d'évaluer μ, quand n est divisible par ab. Ainsi, soit $n = qab$. Il est clair que

$$\left[\frac{qab \quad pb}{a}\right] = qb - \left[\frac{pb}{a}\right] - 1,$$

quand pb n'est pas divisible par a. Dans le cas contraire, il faut ajouter 1 au second membre. Conséquemment, si δ est le plus grand commun diviseur de a et b,

$$\left[\frac{qab - pb}{a}\right] + \left[\frac{pb}{a}\right] = qb - 1 + \left|\begin{array}{l} 1, \text{ pour } p = \frac{a}{\delta},\quad 2\frac{a}{\delta},\quad 3\frac{a}{\delta}, \ldots \\ 0, \text{ pour les autres valeurs de } p. \end{array}\right.$$

Il en résulte que, si l'on écrit

$$\mu = \left[\frac{qab - b}{a}\right] + \left[\frac{qab - 2b}{a}\right] + \left[\frac{qab - 3b}{a}\right] + \cdots + \left[\frac{qab - (qa-1)b}{a}\right];$$

puis, en sens inverse,

$$\mu = \left[\frac{b}{a}\right] + \left[\frac{2b}{a}\right] + \left[\frac{3b}{a}\right] + \cdots + \left[\frac{(qa-1)b}{a}\right],$$

on obtient, en ajoutant terme à terme,

$$2\mu = (qa - 1)(qb - 1) + q\delta - 1,$$

d'où

$$\mu = \frac{q}{2}\left[n - a - b + \delta\right]. \tag{3}$$

Ce résultat, symétrique par rapport à a et b, prouve, encore une fois, la vérité de la relation (1), dans le cas particulier considéré . . . .

. . . .

... Je donne, dans mes Notes d'Arithmétique, une relation générale, qui comprend (1), comme cas très particulier.

Supposons que, de $y \overline{\overline{<}} \psi(x)$, on tire $x \overline{\overline{<}} \psi'(y)$, et posons, pour abréger,

$$q_p = [\psi(p)], \quad q'_p = [\psi'(p)].$$

On a

$$g(1)F(q_1) + g(2)F(q_2) + \cdots = f(1)G(q'_1) + f(2)G(q'_2) + \ldots \tag{4}$$

Les fonctions g, f, sont arbitraires; mais les fonctions G, F, dépendent des premières par les relations

$$G(x) = \sum_1^x g(x), \quad F(x) = \sum_1^x f(x).$$

Par exemple, de

$$y \overline{\overline{<}} \frac{n - bx}{a} = \psi(x),$$

on tire

$$x \overline{\overline{<}} \frac{n - ay}{b} = \psi'(y).$$

Donc, si l'on pose

$$q_p = \left[\frac{n - pb}{a}\right], \quad q'_p = \left[\frac{n - pa}{b}\right],$$

la relation (4) est vérifiée.

En particulier, pour $g(x) = 1$, on a d'abord $G(x) = x$, $F(x) = x$; puis

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots = q'_1 + q'_2 + q'_3 + \cdots,$$

ce qui est précisément votre relation. Pour $g(x) = 1$, $f(x) = 2x - 1$, on a d'abord $G(x) = x$, $F(x) = x^2$; puis :

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + \cdots = q'_1 + 3q'_2 + 5q'_3 + \cdots,$$

etc., etc.

. . . .

. . . . Je supposerai, dorénavant, que, dans l'équation (2),

a et b soient *premiers entre eux*, et je désignerai par N_n, ou simplement par N, le nombre des solutions *entières, non négatives*, de la même équation. On sait que

$$N = \left[\frac{n}{ab}\right] + r,$$

r étant 0 ou 1. *Comment distinguer ces deux cas, au moyen des seules données* a, b, n ? Telle est la question que vous daignez me poser dans votre Lettre du 22 août, et que je vais tâcher de résoudre.

I. Je fais, pour brièveté, $\left[\frac{n}{ab}\right] = q$, et je désigne par R le reste de la division de n par ab, de manière que

$$n = qab + R. \tag{5}$$

II. 1° On sait que, parmi les nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ b-1,$$

il y a toujours un nombre β, et un seul qui, substitué à x, dans l'équation (2), donne, pour y, une valeur entière. Ce nombre β est évidemment *la plus petite valeur entière, non négative*, de x. Pour avoir les autres valeurs, il faut ajouter à β successivement b, $2b$, $3b$......; de manière que, si N est le nombre des solutions *entières, non négatives*, de l'équation (2), les valeurs de x sont :

$$\beta,\ \beta+b,\ \beta+2b,\ \ldots,\ \beta+(N-1)b. \tag{6}$$

De même, α étant égal à l'un des nombres

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ a-1,$$

les seules valeurs *entières, non négatives,* que l'on peut attribuer à y sont :

$$\alpha,\ \alpha+a,\ \alpha+2a,\ \ldots,\ \alpha+(N-1)a. \tag{7}$$

Puisque y *diminue*, quand x *augmente*, il faut associer le $t^{\text{ème}}$ des termes de la série (6), rangés par ordre *croissant*, avec le $t^{\text{ème}}$ des termes de la série (7), rangés par ordre *décroissant*, si l'on veut avoir une des solutions *entières, non négatives*, de l'équation (2). Par conséquent, toutes ces solutions sont données par les formules

$$\begin{cases} x = \beta + (t-1)b, \\ y = \alpha + (N-t)a, \end{cases}$$

dans lesquelles t est une indéterminée, qui doit successivement recevoir les valeurs 1, 2, 3,...., N. Par substitution dans (2), on obtient :

$$n = (N-1)ab + a\beta + b\alpha. \tag{8}$$

2° *Remarque.* Pour $N = 0$, on a $n = a\beta + b\alpha - ab$. Donc, *pour cette forme de* n, on peut affirmer que *l'équation* $ax + by = n$ *n'a pas de solutions entières, non négatives.*

3° De l'égalité (8) on tire

$$N = \frac{n}{ab} + 1 - \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}\right).$$

Or, à cause de

$$0 \overline{\gtrless} \alpha < a, \quad 0 \overline{\gtrless} \beta < b,$$

on a aussi

$$0 \overline{\gtrless} \frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} < 2;$$

puis

$$\frac{n}{ab} - 1 < N \overline{\gtrless} \frac{n}{ab} + 1,$$

ou bien

$$\left[\frac{n}{ab}\right] \overline{\gtrless} N \overline{\gtrless} \left[\frac{n}{ab}\right] + 1;$$

c'est-à-dire que, *si l'on pose*

$$N = \left[\frac{n}{ab}\right] + r,$$

r *ne peut être que* 0 *ou* 1. La démonstration que l'on donne, de ce théorème, dans tous les Cours d'algèbre, est certainement plus simple, peut-être plus claire que la nôtre, mais elle ne permet pas de distinguer dans quel cas il faut employer l'une ou l'autre des valeurs de r.

III. Substituant, dans (8), la valeur de n, donnée par (5), on trouve

$$R = a\beta + b\alpha + [N - (q+1)]ab.$$

1° *Si* $N = q+1$, on voit que R *a la forme* $a\beta + b\alpha$.

2° *Si* $N = q$, on a $R = a\beta + b\alpha - ab$. Or, d'après la remarque du paragraphe précédent, on peut affirmer que, *pour cette forme de* R, *l'équation* $ax + by = R$ *n'admet pas de solutions entières, non négatives*. En d'autres termes, *si* $N = q$, R *n'a pas la forme* $a\beta + b\alpha$.

3° De tout cela résulte que $r = 1$, *ou* $r = 0$, *suivant que* R *a ou n'a pas la forme* $a\beta + b\alpha$.

IV. Pour résumer, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Théorème. *Le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation* $ax + by = n$, *est* $\left[\frac{n}{ab}\right] + 1$, *si le reste de la division de* n *par* ab *est égal à l'un des nombres*

$$\begin{array}{lllll} 0, & b, & 2b, & 3b, & \ldots, \\ a, & a+b, & a+2b, & a+3b, & \ldots, \\ 2a, & 2a+b, & 2a+2b, & 2a+3b, & \ldots, \\ 3a, & 3a+b, & 3a+2b, & 3a+3b, & \ldots, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Dans les autres cas, le nombre considéré est $\left[\frac{n}{ab}\right]$.

V. Applications. 1° *Le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation* $2x + 3y = n$, *est* $\left[\frac{n}{6}\right] + 1$, *sauf quand* n *a la forme* $6q + 1$. *Dans ce cas, le nombre considéré est* $\left[\frac{n}{6}\right]$.

2° Soit $a = 3$, $b = 5$. Après avoir formé les nombres

$$\begin{array}{l} 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \ldots, \\ 5,\ 3+5,\ 6+5,\ 9+5,\ \ldots, \\ 10,\ 3+10,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

on voit que *le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation* $3x + 5y = n$, *est* $\left[\frac{n}{15}\right] + 1$, *sauf quand le reste de la division de* n *par* 15 *est un des nombres* 1, 2, 4, 7. *Dans ce cas, le nombre considéré est* $\left[\frac{n}{15}\right]$.

VI. *Parmi les* ab *valeurs que peut prendre* R, *combien donnent* r $= 0$, *combien donnent* r $= 1$?

Désignant respectivement par λ_0, λ_1, ces nombres, il est clair que

$$\nu = N_1 + N_2 + N_3 + \cdots + N_{ab} = \lambda_1 + 1.$$

D'autre part, faisant $\delta = 1$, $q = 1$, dans la formule (3), on obtient

$$\mu = M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_{ab} = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

Mais la différence $\nu - \mu$ représente le nombre total des *solutions nulles* des équations

$$ax + by = 1, 2, 3, \ldots, ab.$$

Or, pour $x = 0$, on peut avoir $y = 1, 2, 3, \ldots, a$; pour $y = 0$, on peut avoir $x = 1, 2, 3, \ldots, b$.

Donc

$$\nu - \mu = a + b.$$

Remplaçant ν et μ par leurs valeurs, on peut calculer les nombres λ. On trouve :

$$\left.\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{(a-1)(b-1)}{2}, \\ \lambda_1 &= \frac{(a+1)(b+1)}{2} - 1. \end{aligned}\right\} (\lambda_0 + \lambda_1 = ab.)$$

VII. Les derniers résultats permettent d'énoncer la proposition suivante :

Théorème. « *Si* P_r *est la probabilité que le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation* ax + by = n, *soit* $\left[\frac{n}{ab}\right] + r$, *on a :*

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right), \\ P_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right) - \frac{1}{ab}. \end{aligned}\right\} (P_0 + P_1 = 1.) »$$

On suppose que a et b soient deux nombres entiers *donnés*, premiers entre eux, et que n soit un nombre entier, *pris au hasard*. Par exemple : « *La probabilité que le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation* $20x + 63y = n$, *soit égal au plus grand nombre entier, contenu dans* $\frac{n}{1260}$ *est*

$$\frac{589}{1260} = 0,46\ldots \text{»}$$

. . . .

... Le théorème du paragraphe IV peut être renfermé dans la formule

$$N_n - N_R = \left[\frac{n}{ab}\right]. \tag{9}$$

C'est à peu près sous cette forme qu'il a été découvert et énoncé, pour la première fois, par M. Catalan ; [*Mélanges mathématiques*]. Pour démontrer la formule (9), considérons les équations

$$ax + by = R + kab, \tag{10}$$
$$ax + by = n + kab, \tag{11}$$

dans lesquelles k est un entier arbitraire. Soit $x = A$, $y = -B$, une quelconque des solutions *entières* de l'équation (10). Toutes les autres solutions *entières* seront données par les formules générales

$$\begin{cases} x = A - bt, \\ y = -B + at, \end{cases}$$

t étant un entier quelconque. Si l'on veut que x et y *ne soient pas négatifs*, on doit poser

$$\frac{B}{a} \leqq t \leqq \frac{A}{b}. \tag{12}$$

Cela étant, si l'on fait

$$x = A + x', \quad y = -B + y',$$

dans l'équation (11), celle-ci devient

$$ax' + by' = qab,$$

et l'on reconnaît immédiatement que

$$x' = bx'', \quad y' = ay'';$$

ce qui réduit l'équation (11) à $x'' + y'' = q$. Donc, si l'on pose

$$x'' = q - \theta, \quad y'' = \theta,$$

θ étant un entier quelconque, les formules générales, qui donnent toutes les solutions *entières* de l'équation (11), sont :

$$\begin{cases} x = \mathrm{A} + b\,(q - \theta), \\ y = -\mathrm{B} + a\theta. \end{cases}$$

Si l'on veut que x et y *ne soient pas négatifs*, on doit attribuer à θ des valeurs telles que l'on ait

$$\frac{\mathrm{B}}{a} \overline{\overline{<}} \theta \overline{\overline{<}} \frac{\mathrm{A}}{b} + q. \tag{13}$$

Par la comparaison des doubles inégalités (12) et (13), on voit que le nombre des valeurs possibles de θ surpasse, de q, le nombre des valeurs possibles de t. Donc

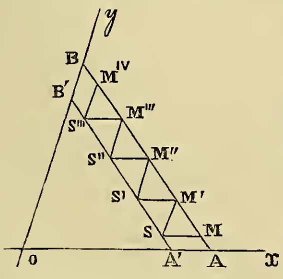
$$\mathrm{N}_{n+kab} - \mathrm{N}_{\mathrm{R}+kab} = q.$$

Faisant $k = 0$, on trouve (9). . . . .

. . . .

... Je viens d'apprendre, par M. Lucas, un procédé fort ingénieux, au moyen duquel on peut facilement établir les propositions qui précèdent. Permettez que j'expose ce procédé, et que je le complète, afin qu'il puisse me servir pour répondre à votre question :

I. Par rapport à deux axes, d'origine O, l'équation (2) représente une droite, interceptant sur les axes, des segments $\mathrm{OA} = \frac{n}{a}$, $\mathrm{OB} = \frac{n}{b}$. Il est facile de déterminer les points M, M′, M″, ... dont les coordonnées sont *entières*, *non négatives*, quand on connaît un seul d'entre eux. Si M est celui dont l'abscisse est la plus grande, on aura un autre point M′, en retranchant, de l'abscisse de M, une longueur $\mathrm{MS} = b$, et en ajoutant, à l'ordonnée du même



point, une longueur $SM' = a$. On obtiendra, de même, les autres points M'', M''' ...

Le nombre de tous ces points est précisément N_n, et le nombre des intervalles *égaux* MM', $M'M''$, $M''M'''$, ..., est $N_n - 1$.

Chacun des intervalles extrêmes MA, $M^{\text{IV}}B$, étant moindre que MM', leur somme peut être représentée par $\theta \,.\, MM'$, pourvu que l'on ait

$$0 \overline{\overline{<}} \theta < 2.$$

Cela posé, on a :

$$AB = (N_n - 1)\, MM' + \theta \,.\, MM';$$

d'où

$$N_n = \frac{AB}{MM'} + 1 - \theta.$$

Les triangles semblables OAB, SMM', donnent

$$\frac{AB}{MM'} = \frac{OA}{SM} = \frac{n}{ab}.$$

Donc

$$N_n = \frac{n}{ab} + 1 - \theta.$$

Si l'on désigne par q le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{ab}$, et si l'on observe que

$$q \overline{\overline{<}} \frac{n}{ab} < q + 1, \quad 0 \overline{\overline{<}} \theta < 2,$$

on obtient

$$q - 1 < N_n < q + 2.$$

Par conséquent, $N_n = q$, ou $N_n = q + 1$.

II. Il est évident que le lieu des points S, S', S'', ... est une droite, déterminant, sur les axes, des segments

$$OA' = \frac{n}{a} - b = \frac{n - ab}{a}, \quad OB' = \frac{n}{b} - a = \frac{n - ab}{b}.$$

L'équation de A'B' est donc

$$ax + by = n - ab.$$

Les solutions *entières, non négatives*, de cette équation, sont représentées par les coordonnées des points S, S',S'', ... Le nombre N_{n-ab} de ces solutions égale donc celui des points S, S', S'', ..., ou celui des intervalles MM', M'M'', M''M''', ..., c'est-à-dire $N_n - 1$.

Conséquemment

$$N_n - N_{n-ab} = 1.$$

On a, de même :

$$N_{n-ab} - N_{n-2ab} = 1,$$
$$N_{n-2ab} - N_{n-3ab} = 1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$N_{n-(q-1)ab} - N_{n-qab} = 1.$$

Puis, par addition,

$$N_n - N_R = q:$$

c'est la formule (9). . . . .

... *Le premier procédé est la traduction algébrique du procédé géométrique, exposé en dernier lieu* . . . .

. . . .

... Pour tous les couples de valeurs *entières, non négatives*, de x et y, satisfaisant à l'équation (2), je trouve l'égalité moyenne

$$\sum x^{r-1} y^{s-1} = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} \cdot \frac{n^{r+s-1}}{a^r b^s}.$$

Par exemple :

$$\sum \frac{1}{\sqrt{xy}} = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}.$$

De même, pour $r = s = 1$, on obtient

$$N = \frac{n}{ab};$$

mais on peut écrire, avec une plus grande approximation,

$$N = \frac{n}{ab} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Par exemple

« *Le nombre des solutions entières, non négatives, de l'équation* $2x + 3y = n$, *est égal, en moyenne, à* $\frac{n}{6} + \frac{5}{12}$ »,
etc., etc. . . . .
. . . .
. . . .

Torre Annunziata, 29 août 1882.

ERNEST CESÀRO.

GÉNÉRALISATION

DE QUELQUES THÉORÈMES DE M. CATALAN.

1. Si, dans les propositions qui suivent, on fait $q = 2$, on retrouve les théorèmes de M. Catalan, publiés par la *Société des Sciences de Liège* (Mémoires, 2[me] série, t. X).

2. 1[er] Lemme. — *Si, parmi les* n *premiers nombres naturels,* N *est la quotité* (*) *de ceux qui ne sont pas divisibles par des nombres premiers donnés* $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots \varpi_\nu$, *on a* (**)

$$N = n - \sum \left[\frac{n}{\varpi_1}\right] + \sum \left[\frac{n}{\varpi_1 \varpi_2}\right] - \sum \left[\frac{n}{\varpi_1 \varpi_2 \varpi_3}\right] + \cdots \qquad (1)$$

Dans cette formule, $[a]$ représente le plus grand nombre entier contenu dans a.

3. 2[me] Lemme. — ρ *étant le reste de la division de* $\left[\frac{qn}{p}\right]$ *par* q, *on a*

$$\left[\frac{qn}{p}\right] - q\left[\frac{n}{p}\right] = \rho. \qquad (2)$$

α). Soit

$$n = pqm + r; \quad (r < pq)$$

de sorte que

$$m = \left[\frac{n}{pq}\right].$$

On a aussi :

$$\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{q}\right] = m + \left[\frac{\left[\frac{r}{p}\right]}{q}\right].$$

(*) Nous adoptons le mot *quotité*, que M. Catalan a proposé, pour éviter l'expression *nombre des nombres*.

(**) Voir Catalan, *Mélanges mathématiques*, p. 155, et *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales*, juillet, 1882.

Or, de $r < pq$, on déduit :

$$\left[\frac{r}{p}\right] < q, \quad \left[\frac{\left[\frac{r}{p}\right]}{q}\right] = 0.$$

Donc

$$\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{q}\right] = \left[\frac{\left[\frac{n}{q}\right]}{p}\right] = \left[\frac{n}{pq}\right];$$

propriété connue.

β). Soit

$$\left[\frac{n}{p}\right] = q\mu + \rho; \quad (\rho < q),$$

de sorte que

$$\mu = \left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{q}\right] = \left[\frac{n}{pq}\right].$$

Éliminant μ, on obtient

$$\left[\frac{n}{p}\right] - q\left[\frac{n}{pq}\right] = \rho.$$

γ). En particulier, si l'on change n en qn, on trouve la relation (2).

4. Exemple. *La quantité* $\left[\frac{3n}{p}\right] - 3\left[\frac{n}{p}\right]$ *est égale à* 0, 1, 2, *suivant que* $\left[\frac{3n}{p}\right]$ *a l'une des formes* 3μ, $3\mu+1$, $3\mu+2$.

5. *Remarque.* Dirichlet a donné, du premier membre de cette égalité (2), une autre interprétation. Si R est le reste de la division de n par p, on a

$$\frac{n}{p} - \left[\frac{n}{p}\right] = \frac{R}{p}.$$

En conséquence, si l'on suppose

$$\frac{\rho}{q} \overline{\overline{<}} \frac{R}{p} < \frac{\rho+1}{q},$$

on voit que

$$\left[\frac{qn}{p}\right] - q\left[\frac{n}{p}\right] = \left[\frac{qR}{p}\right] = \rho.$$

Par exemple, pour $q = 2$:

La quantité $\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]$ *égale* 0 *ou* 1, *suivant que le reste de la division de* n *par* p *est ou n'est pas inférieur à la moitié du diviseur.*

La comparaison des deux interprétations fait voir que : *dans la division de* n *par* p, *le reste de la division est ou n'est pas inférieur à la moitié du diviseur, suivant que le quotient de la division de* 2n *par* p *est pair ou impair*; proposition presque évidente.

6. Théorème I. *Soient* q *un nombre premier, et* n *un nombre entier, tels que l'on ait*

$$q^k \overline{\gtrless} n < q^{k+1}. \tag{3}$$

Si ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ..., *sont tous les nombres premiers, supérieurs à l'unité, autres que* q, *on a*

$$k + 1 = n - \sum\left[\frac{n}{\varpi_1}\right] + \sum\left[\frac{n}{\varpi_1\varpi_2}\right] - \sum\left[\frac{n}{\varpi_1\varpi_2\varpi_3}\right] + \cdots \tag{4}$$

En effet, dans la suite des n premiers nombres naturels, les seuls qui ne soient pas divisibles par ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ..., sont 1, q, q^2, q^3, ..., q^k. Donc, dans le cas actuel, le premier membre de (1) est $N = k + 1$.

7. Théorème II. *Soient* ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ..., ϖ_ν, *les nombres premiers, supérieurs à l'unité, autres que* q, *et ne surpassant pas* n. *Si* x *est la quotité des nombres premiers, supérieurs à* n, *non supérieurs à* qn, *on a*

$$k + 2 + x = qn - \sum\left[\frac{qn}{\varpi_1}\right] + \sum\left[\frac{qn}{\varpi_1\varpi_2}\right] - \sum\left[\frac{qn}{\varpi_1\varpi_2\varpi_3}\right] + \cdots \tag{5}$$

De 1 à n, les seuls nombres non divisibles par ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ..., ϖ_ν, sont 1, q, q^2, q^3, ..., q^k. De $n + 1$ à qn, il y a d'abord q^{k+1}, et il n'y a que cette puissance de q ; car, d'après (3),

$$q^{k+1} \overline{\gtrless} qn < q^{k+2}.$$

Il y a, ensuite, tous les nombres premiers supérieurs à n, non supérieurs à qn, et il n'y en a pas d'autres; car, tout nombre non supérieur à qn ne surpasse pas n^2, et, par conséquent, s'il est composé, il admet nécessairement un facteur premier, non supérieur à n.

En résumé, on voit que, de 1 à qn, il y a seulement $(k+1)+1+x$ nombres, non divisibles par $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots, \varpi_\nu$. Conséquemment, dans le cas actuel, le premier membre de la relation (1) devient $N = k + 2 + x$.

8. Théorème III. *Parmi les quotients* $\left[\frac{qn}{\varpi_1\varpi_2\varpi_3\ldots\varpi_s}\right]$, *soit* $l_{r,s}$ *le nombre de ceux qui, divisés par* q, *donnent le reste* r. *Posons*

$$t_s = l_{1,s} + 2l_{2,s} + 3l_{3,s} + 4l_{4,s} + \cdots$$

On a :

$$x = (k+1)q - (k+2) - t_1 + t_2 - t_3 + t_4 - \cdots \qquad (6)$$

Si l'on multiplie par q les deux membres de l'égalité (4), et si l'on en retranche (5), on obtient

$$(k+1)q - (k+2) - x$$
$$= \sum\left\{\left[\frac{qn}{\varpi_1}\right] - q\left[\frac{n}{\varpi_1}\right]\right\} - \sum\left\{\left[\frac{qn}{\varpi_1\varpi_2}\right] - q\left[\frac{n}{\varpi_1\varpi_2}\right]\right\} + \cdots$$

Or, d'après le 2me *Lemme*,

$$\sum\left\{\left[\frac{qn}{\varpi_1\varpi_2\cdots\varpi_s}\right] - q\left[\frac{n}{\varpi_1\varpi_2\cdots\varpi_s}\right]\right\} = l_{1,s} + 2l_{2,s} + 3l_{3,s} + 4l_{4,s} + \cdots$$

Donc

$$(k+1)q - (k+2) - x = t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + \cdots,$$

d'où l'on déduit (6).

9. Exemple. $3^k \overline{\gtrless} n < 3^{k+1}$. *La quotité des nombres premiers, supérieurs à* n, *non supérieurs à* 3n, *a pour expression*

$$x = 2k + 1 - (l_{1,1} + 2l_{2,1}) + (l_{1,2} + 2l_{2,2}) - (l_{1,3} + 2l_{2,3}) + \cdots$$

Dans cette formule, $l_{1,s}$, $l_{2,s}$ sont les nombres des quotients $\left[\frac{3n}{\varpi_1\varpi_2\ldots\varpi_s}\right]$, qui ont, respectivement, les formes $3\mu+1$, $3\mu-1$.

En outre, $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots, \varpi_\nu$, sont les nombres premiers supérieurs à l'unité, autres que 3, et non supérieurs à n.

10. Application. *Entre* 17 *et* 51, *combien y a-t-il de nombres premiers?*

Ici $n = 17$, $q = 3$, $k = 2$. Il faut diviser 51 par les nombres

$$2, 3, 7, 11, 13, 17;$$
$$10, 14, 22, 26, 34; 35.$$

Nous obtenons ainsi les quotients suivants, que nous marquons du signe +, ou du signe —, suivant qu'ils ont l'une ou l'autre des formes $3\mu + 1$, $3\mu - 1$:

25, 10, 7, 4, 3, 3; + + + +	$l_{1,1} = 4, \quad l_{2,1} = 0; \quad l_{1,1} + 2l_{2,1} = 4;$
5, 3, 2, 1, 1; 1. — — + + +	$l_{1,2} = 5, \quad l_{2,2} = 2; \quad l_{1,2} + 2l_{2,2} = 7.$

Donc

$$x = 2.2 + 1 - 4 + 7 = 8.$$

En effet, les seuls nombres premiers, supérieurs à 17, non supérieurs à 51, sont 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

11. Théorème IV. *Soient* $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \ldots$, *tous les nombres premiers autres que* q. *Soit* $\lambda_{r,s}$ *le nombre des quotients* $\left[\frac{qn}{\varpi_1\varpi_2\varpi_3 \ldots \varpi_s}\right]$, *qui, divisés par* q, *donnent le reste de* r. *Si l'on pose*

$$\tau_s = \lambda_{1,s} + 2\lambda_{2,s} + 3\lambda_{3,s} + 4\lambda_{4,s} + \cdots,$$

on a :

$$\tau_1 - \tau_2 + \tau_3 - \tau_4 + \cdots = (k+1)q - (k+2) \qquad (7)$$

Appliquons la formule (4) au nombre qn. A cause de $q^{k+1} \overline{\overline{<}}\, qn < q^{k+2}$, nous trouvons

$$k + 2 = qn - \sum\left[\frac{qn}{\varpi_1}\right] + \sum\left[\frac{qn}{\varpi_1\varpi_2}\right] - \sum\left[\frac{qn}{\varpi_1\varpi_2\varpi_3}\right] + \cdots$$

En multipliant (4) par q, et en en retranchant la dernière égalité, on trouve (7). Mais cette formule peut aussi se déduire de (6).

12. *Exemple.* Pour $q = 3$, on doit avoir

$$(\lambda_{1,1} + 2\lambda_{2,1}) - (\lambda_{1,2} + 2\lambda_{2,2}) + (\lambda_{1,3} + 2\lambda_{2,3}) - \cdots = 2k + 1.$$

13. Application. Soit $n = 30$, et, par suite, $k = 3$. Divisons 90 par

2, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89;
10, 14, 22, 26, 34, 38, 46, 58, 62, 74, 82, 86; 35, 55, 65, 85; 77;
70.

Nous obtenons les quotients :

45, 18, 12, 8, 6, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; — — + — — — — + + + + + + + + + +	$\lambda_{1,1} = 11, \quad \lambda_{2,1} = 6; \quad \lambda_{1,1} + 2\lambda_{2,1} = 23;$
9, 6, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1; 2, 1, 1, 1; 1; + — — + + + + + + — + + + +	$\lambda_{1,2} = 11, \quad \lambda_{2,2} = 3; \quad \lambda_{1,2} + 2\lambda_{2,2} = 17;$
1. +	$\lambda_{1,3} = 1, \quad \lambda_{2,3} = 0; \quad \lambda_{1,3} + 2\lambda_{2,3} = 1.$

On a

$$23 - 17 + 1 = 2.3 + 1 = 7.$$

Torre Annunziata, 1er juillet 1882.

Ernest CESÀRO.

NOUVEAUX COROLLAIRES

D'UNE PROPOSITION DE M. CATALAN.

I. 1. Cette proposition, renfermée dans le Lemme II de la Note précédente, consiste en ce que

$$\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = \left|\begin{array}{l} 1\ ,\ \text{si } \left[\frac{2n}{p}\right] \text{ est } \textit{impair}, \\ 0\ ,\ \text{si } \left[\frac{2n}{p}\right] \text{ est } \textit{pair}. \end{array}\right. \tag{1}$$

2. Soient a, b, c, ... tous les diviseurs de x. Posons

$$F(x) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots \tag{2}$$

On sait que

$$\sum_{p=1}^{p=n} F(p) = \sum_{p=1}^{p=n} \left[\frac{n}{p}\right] f(p).$$

De même, par le changement de n en $2n$:

$$\sum_{p=1}^{p=2n} F(p) = \sum_{p=1}^{p=2n} \left[\frac{2n}{p}\right] f(p).$$

Combinant ces deux égalités, on obtient

$$\sum_{p=1}^{p=n} \Big[F(n+p) - F(p)\Big] = \sum_{p=1}^{p=2n} \left\{\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right\} f(p), \tag{3}$$

car $\left[\frac{n}{p}\right] = 0$, dès que p surpasse n.

3. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ tous les nombres entiers qui entrent un nombre *impair* de fois dans $2n$.

D'après (1), la relation (3) devient

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + \cdots = \sum_{p=1}^{p=n} \Big[F(n+p) - F(p)\Big]. \tag{4}$$

II. 1. Pour $f(x) = 1$, on a d'abord, d'après (2), $F(x) = \theta(x)$. Puis, l'égalité (4) permet d'affirmer que :

La quotité des nombres entiers, qui entrent un nombre impair *de fois dans* 2n, *est égale au nombre dont la totalité des diviseurs des* n *premiers nombres naturels est excédée par la totalité des diviseurs des* n *nombres suivants.*

2. D'après cela, si l'on fait usage de l'égalité moyenne

$$\theta(1) + \theta(2) + \theta(3) + \cdots + \theta(n) = n\mathcal{L}n + (2C - 1)n,$$

on trouve que *le nombre des quantités* α *est égal, en moyenne, à* n$\mathcal{L}4$.

3. En se reportant à ce qui a été dit dans la *Note XVIII*, on reconnaît immédiatement que ces nombres α sont

$$\lambda', \mu', \nu', \ldots; n + 1, n + 2, \ldots 2n.$$

Or, nous savons que le nombre des quantités λ' est, en moyenne, $\left(\mathcal{L}4 - 1\right)n$. Il en résulte, encore une fois, que la quotité moyenne des nombres α est $n\mathcal{L}4$.

III. 1. Pour $f(x) = x$, on trouve que :

La somme des nombres α *est égale à la quantité dont la somme des diviseurs des* n *premiers nombres naturels est excédée par la somme des diviseurs des* n *nombres suivants.* En moyenne :

$$\alpha + \beta + \gamma + \cdots = \frac{\pi^2}{6} n^2.$$

Cela représente, à peu près, les 0,82 de la somme de tous les nombres naturels, non supérieurs à $2n$.

2. Pour $f(x) = \lambda(x)$, on a

$$F(x) = \left|\begin{array}{l} 1\,,\ (x \text{ carré}) \\ 0\,,\ (x \text{ non carré}); \end{array}\right.$$

puis :

$$\lambda(\alpha) + \lambda(\beta) + \lambda(\gamma) + \cdots = \left[\sqrt{2n}\right] - 2\left[\sqrt{n}\right].$$

On en déduit que :

« *Parmi tous les entiers, qui entrent un nombre* IMPAIR *de fois dans* n, *l'excès du nombre de ceux qui sont composés de facteurs premiers, égaux ou inégaux, en nombre* IMPAIR, *sur le nombre de ceux qui sont composés de facteurs premiers, égaux ou inégaux, en nombre* PAIR, *est égal au plus grand nombre entier contenu dans*

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)\sqrt{n} - 1. \text{ »}$$

3. Pour $f(x) = \mu(x)$, on a $F(x) = 0$, sauf pour $x = 1$. Donc

$$\mu(\alpha) + \mu(\beta) + \mu(\gamma) + \cdots = -1.$$

4. Pour $f(x) = \varphi(x)$, on a d'abord $F(x) = x$; puis, on peut énoncer ce théorème curieux :

« *Si $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont tous les nombres entiers qui entrent un nombre impair de fois dans* 2n

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) + \cdots = n^2. \text{ »}$$

Exemple. $n = 5$. Les nombres α sont

$$2, 5, 6, 7, 8, 9, 10.$$

On doit avoir

$$1 + 2 + 2 + 6 + 4 + 6 + 4 = 25;$$

ce qui est exact.

Remarque. On a donc :

$$\sum \varphi(\lambda') + \sum_{p=1}^{p=n} \varphi(n + p) = n^2;$$

(Voir : II, 3.) Or, asymptotiquement :

$$\sum_{p=1}^{p=n} \varphi(n + p) = \frac{3}{\pi^2}\left[(2n)^2 - n^2\right] = \frac{9}{\pi^2} n^2.$$

Par suite :

$$\sum \varphi(\lambda') = \left(1 - \frac{9}{\pi^2}\right) n^2, \qquad \sum \varphi(\lambda) = \left(\frac{12}{\pi^2} - 1\right) n^2.$$

Ces égalités ont été démontrées, par une autre voie, dans la *Note XVIII* (page 179).

5. On peut encore faire $f(x) = \frac{\varphi_m(x)}{x^m}$. Dans ce cas :

$$F(x) = \frac{1}{x^m}\left[1^m + 2^m + 3^m + \cdots + x^m\right].$$

(Voir *Note VIII.*) En particulier, si Δ_n est l'excès de la somme des inverses des n premiers nombres naturels sur la somme des inverses des n nombres suivants :

$$\frac{\varphi_2(\alpha)}{\alpha^2} + \frac{\varphi_2(\beta)}{\beta^2} + \frac{\varphi_2(\gamma)}{\gamma^2} + \cdots = \frac{1}{5} n^2 - \frac{1}{6} \Delta_n$$

$$\frac{\varphi_3(\alpha)}{\alpha^3} + \frac{\varphi_3(\beta)}{\beta^3} + \frac{\varphi_3(\gamma)}{\gamma^3} + \cdots = \frac{1}{4} n^2 - \frac{1}{4} \Delta_n.$$

En général, mais *asymptotiquement* dès que m surpasse 3 :

$$\frac{\varphi_m(\alpha)}{\alpha^m} + \frac{\varphi_m(\beta)}{\beta^m} + \frac{\varphi_m(\gamma)}{\gamma^m} + \cdots = \frac{1}{m+1} n^2 - \frac{m}{12} \Delta_n .$$

6. $f(x) = \frac{\pi(x)\,\varphi(x)}{x^2}$, $F(x) = \frac{1}{x}$:

$$\frac{\pi(\alpha)\varphi(\alpha)}{\alpha^2} + \frac{\pi(\beta)\varphi(\beta)}{\beta^2} + \frac{\pi(\gamma)\varphi(\gamma)}{\gamma^2} + \cdots = -\Delta_n .$$

IV. 1. Au lieu de (1), on peut écrire, un peu plus généralement :

$$\left[\frac{n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{2p}\right] = \left| \begin{array}{l} 1\text{, si } \left[\frac{n}{p}\right] \text{ est } \textit{impair}, \\ 0\text{, si } \left[\frac{n}{p}\right] \text{ est } \textit{pair}. \end{array} \right. \tag{5}$$

Multipliant cette égalité par $f(p)$, et désignant par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ tous les nombres entiers qui entrent un nombre *impair* de fois dans n, on obtient, par addition :

$$f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + \cdots = \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ \left[\frac{n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{2p}\right] \right\} f(p). \tag{6}$$

2 Par exemple, pour $f(x) = 1$, on trouve que *la quotité des nombres α est*

$$\left[\frac{n}{1}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots;$$

c'est-à-dire qu'*elle est égale à l'excès du nombre des diviseurs impairs, sur le nombre des diviseurs pairs, des* n *premiers nombres naturels.* En moyenne, l'expression qui précède devient

$$n\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right] = n\,\ell.2.$$

Telle est la quotité moyenne des nombres qui entrent un nombre *impair* de fois dans n. Il reste $(1 - \ell 2)\,n$ comme expression moyenne de la quotité des nombres qui entrent un nombre *pair* de fois dans n.

3. Voici le tableau des nombres α qui correspondent aux premières valeurs de n. La construction de ce tableau est fort aisée. Il suffit d'observer que p est un des nombres α, du nombre n, pour les valeurs suivantes de n :

$$p,\quad p+1,\quad p+2,\ \ldots,\ 2p-1,$$
$$3p,\ 3p+1,\ 3p+2,\ \ldots,\ 4p-1,$$
$$5p,\ 5p+1,\ 5p+2,\ \ldots,\ 6p-1,$$
$$\ldots\ldots\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pour abréger, nous désignerons par a, b la série des nombres $a, a+1, a+2, \ldots, b$.

n	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$	n	$\alpha, \beta, \gamma, \ldots,$
1	1.	26	2; 5; 7, 8; 14, 26.
2	2.	27	1, 3; 5; 7, 9; 14, 27.
3	1, 3.	28	3, 5; 8, 9; 15, 28.
4	3, 4.	29	1; 3, 5; 8, 9; 15, 29.
5	1; 3, 5.	30	2; 4; 6; 8, 10; 16, 30.
6	2; 4, 6.	31	1, 2; 4; 6; 8, 10; 16, 31.
7	1, 2; 4, 7.	32	6; 9, 10; 17, 32.
8	5, 8.	33	1; 3; 6; 9, 11; 17, 33.
9	1; 3; 5, 9.	34	2, 3; 6; 9, 11; 18, 34.
10	2, 3; 6, 10.	35	1, 3; 5, 7; 9, 11; 18, 35.
11	1, 3; 6. 11.	36	4, 5; 7; 10, 12; 19, 36.
12	4; 7, 12.	37	1; 4, 5; 7; 10, 12; 19, 37.
13	1; 4; 7, 13.	38	2; 4, 5; 7; 10, 12; 20, 38.
14	2; 4; 8, 14.	39	1, 5; 7; 10, 13; 20, 39.
15	1, 5; 8, 15.	40	3; 7, 8; 11, 13; 21, 40.
16	3; 5; 9, 16.	41	1; 3; 7, 8; 11, 13; 21, 41.
17	1; 3; 5; 9, 17.	42	2; 6; 8; 11, 14; 22, 42.
18	2; 5, 6; 10, 18.	43	1, 2; 6; 8; 11, 14; 22, 43.
19	1, 2; 5, 6; 10, 19.	44	4; 6; 8; 12, 14; 23, 44.
20	4; 6; 11, 20.	45	1; 3, 6; 8, 9; 12, 15; 23, 45.
21	1; 3, 4; 6, 7; 11, 21.	46	2, 6; 8, 9; 12, 15; 24, 46.
22	2, 4; 6, 7; 12, 22.	47	1, 6; 8, 9; 12, 15; 24, 47.
23	1, 4; 6, 7; 12, 23.	48	5; 9; 13, 16; 25, 48.
24	7, 8; 13, 24.	49	1; 5; 7; 9; 13, 16; 25, 49.
25	1; 5; 7, 8; 13, 25.	50	2; 7; 9, 10; 13, 16; 26, 50.

V. 1 L'idée de M. Catalan consiste en une interprétation particulière du premier membre de l'équation (1). Dirichlet ayant donné, à la même quantité, une signification différente, nous en avons tiré quelques conséquences dans la *Note XVIII*. On pourrait, en suivant la même marche, tirer des conséquences analogues de la première interprétation. Cependant, pour abréger, nous nous bornerons à énoncer quelques propositions, qui résultent immédiatement de ce qui a été dit dans le dernier paragraphe. D'abord :

« n *étant un nombre donné, la probabilité que le plus grand nombre entier contenu dans* $\frac{n}{p}$ *soit impair, tend vers le logarithme népérien de* 2, *lorsque* n *augmente indéfiniment.* »

En d'autres termes :

« *Il y a environ* 69 *à parier, contre* 31, *qu'un nombre entier quelconque entre un nombre impair de fois dans un nombre donné, très grand.* »

2. On peut rechercher la valeur de la probabilité analogue, quand le nombre n n'est pas donné.

Dans ce cas, si l'on considère toutes les fractions dont les termes ne surpassent pas n, on trouve, d'après (6), que, si σ_p est la somme des plus grands nombres entiers contenus dans les fractions à dénominateur p, la quotité des cas où ces nombres sont *impairs* est représentée par

$$\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 + \cdots \pm \sigma_n.$$

Puis, en opérant comme dans la *Note XVIII*, on trouve que la valeur moyenne de la dernière expression est $\frac{1}{2} n^2 \mathcal{L}2$. D'autre part, le nombre total des fractions, non inférieures à l'unité, est

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{1}{2} n^2.$$

On retrouve donc $\mathcal{L}2$ comme valeur asymptotique de la probabilité cherchée. Ainsi :

« *Ayant pris, au hasard, deux nombres entiers, si l'on divise le plus grand par le plus petit, il y a environ* 69 *à parier, contre* 31, *que le quotient entier, pris par défaut, est impair.* »

3. Si l'on ne s'impose pas la condition que le dividende surpasse le diviseur, le nombre total des cas est n^2, et la probabilité est moitié moindre. Il est sous-entendu que l'on doit considérer 0 comme un nombre *pair*. Conséquemment, en variant un peu l'énoncé :

Théorème. « *Ayant pris, au hasard, une quantité commensurable, positive, il y a environ* 13 *à parier, contre* 7, *que le plus grand nombre entier qu'elle renferme est pair.* »

Exactement, c'est $1 - l\sqrt{2}$, contre $l\sqrt{2}$, qu'il faut parier.

VI. 1. Pour $f(x) = (-1)^x$, l'égalité (6) devient

$$(-1)^{\alpha} + (-1)^{\beta} + (-1)^{\gamma} + \cdots = \sum_{p=1}^{p=n} \left[\theta(p) - 4\theta_{4\mu+2}(p)\right].$$

On trouve que le second membre est d'un ordre inférieur à celui des constantes. Il en résulte que :

Parmi les quantités α, β, γ, ... il y en a, en moyenne, autant de paires que d'impaires.

2. Pour $f(x) = x$, on trouve que :

La somme des nombres α est égale à la somme des diviseurs impairs des n *premiers nombres naturels.* Ainsi, soit $n = 10$. Les nombres α sont

2, 3, 6, 7, 8, 9, 10.

Leur somme est 45. D'autre part, la somme des diviseurs impairs des 10 premiers nombres naturels est

$$1 + 1 + 4 + 1 + 6 + 4 + 8 + 1 + 13 + 6 = 45.$$

3. De même, pour $f(x) = x^2$, on voit que :

La somme des carrés des nombres α est égale à la somme des carrés des diviseurs impairs des n *premiers nombres naturels, augmentée de la demi-somme des carrés des diviseurs pairs des mêmes nombres.*

Ainsi, pour $n = 5$, les nombres α sont

1, 3, 4, 5.

On a :

$$1 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 51.$$

D'autre part, les sommes des carrés des diviseurs *impairs* et des diviseurs *pairs* des 5 premiers nombres naturels sont, respectivement, 39 et 24. Or :

$$39 + 12 = 51.$$

etc., etc...

VII. On a pu observer que l'identité (1) se prête mieux, aux recherches, que l'identité (5). Il est donc utile de mettre la relation (6) sous une forme analogue à celle de la relation (4). Dans ce but, ayant désigné par q le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n+1}{2}$, nous distinguerons deux cas :

1° n *pair*. On a $n = 2q$. La formule (4) est applicable, et l'on peut écrire

$$\sum f(\alpha) = \psi(2q) - 2\psi(q), \tag{7}$$

pourvu que l'on pose

$$\psi(x) = F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(x).$$

2° n *impair*. Dans ce cas, $n = 2q - 1$. Il est visible que

$$\left[\frac{2q}{p}\right] - \left[\frac{2q-1}{p}\right] = \left| \begin{array}{l} 1, \text{ (si } p \text{ divise } 2q), \\ 0, \text{ (dans les autres cas)}, \end{array}\right.$$

$$2\left[\frac{q}{p}\right] - 2\left[\frac{q-\frac{1}{2}}{p}\right] = \left| \begin{array}{l} 2, \text{ (si } p \text{ divise } q), \\ 0, \text{ (dans les autres cas)}. \end{array}\right.$$

Retranchant, on obtient

$$\left[\frac{n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{2p}\right] = \left[\frac{2q}{p}\right] - 2\left[\frac{q}{p}\right] + \left| \begin{array}{l} +1, \text{ (si } p \text{ divise } q), \\ -1, \text{ (si } p \text{ ne divise pas } q, \text{ mais divise } 2q), \\ 0, \text{ (si } p \text{ ne divise ni } q, \text{ ni } 2q). \end{array}\right.$$

Par substitution dans (6), on trouve

$$\sum f(\alpha) = \sum_{p=1}^{p=2q-1} \left\{\left[\frac{2q}{p}\right] - 2\left[\frac{q}{p}\right]\right\} f(p) + \sum f(a) - \sum f(a'),$$

$a, b, c, \ldots$ étant tous les diviseurs de q ; et $a', b', c', \ldots$ tous les diviseurs de $2q$, autres que $2q$, qui ne divisent pas q. D'après cela,

$$\sum f(a) = \mathrm{F}(q), \quad \sum f(a') = \mathrm{F}(2q) - \mathrm{F}(q) - f(2q);$$

puis :

$$\sum f(\alpha) = \sum_{p=1}^{p=2q} \left\{ \left[\frac{2q}{p}\right] - 2 \left[\frac{q}{p}\right] \right\} f(p) + 2\mathrm{F}(q) - \mathrm{F}(2q).$$

Or, nous avons démontré que

$$\sum_{p=1}^{p=2q} \left\{ \left[\frac{2q}{p}\right] - 2 \left[\frac{q}{p}\right] \right\} f(p) = \psi(2q) - 2\psi(q).$$

Donc, enfin :

$$\sum f(\alpha) = \psi(2q-1) - 2\psi(q-1). \tag{8}$$

Application. Si l'on fait $f(x) = \varphi(x)$, on trouve d'abord

$$\mathrm{F}(x) = x, \quad \psi(x) = \frac{x(x+1)}{2};$$

puis les relations (7) et (8) donnent la formule unique

$$\sum \varphi(\alpha) = q^2.$$

En conséquence :

Théorème. « *Si, α, β, γ, ... sont tous les nombres entiers qui entrent un nombre impair de fois dans* n, *la somme*

$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) + \cdots$$

est égale au carré du plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n+1}{2}$ ».

Il semble assez curieux que la somme $\Sigma\varphi(\alpha)$ reste la même, quand on passe d'un nombre impair quelconque au nombre suivant, bien que les valeurs des nombres α soient différentes.

VIII. 1. Au lieu de (1), on peut écrire, plus généralement,

$$\left[\frac{kn}{p}\right] - k\left[\frac{n}{p}\right] = r,$$

r étant le reste de la division de $\left[\frac{kn}{p}\right]$ par k. Par conséquent, toutes les propositions qui précèdent peuvent être généralisées. Par exemple, si $\alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \ldots$, sont tous les nombres tels que les plus grands nombres entiers contenus dans

$$\frac{kn}{\alpha_r}, \quad \frac{kn}{\beta_r}, \quad \frac{kn}{\gamma_r},$$

soient de la forme $k\mu + r$, on a

$$\sum\varphi(\alpha_1) + 2\sum\varphi(\alpha_2) + 3\sum\varphi(\alpha_3) + \cdots + (k-1)\sum\varphi(\alpha_{k-1}) = \frac{k(k-1)}{2}n^2.$$

Ainsi, pour $k = 3$,

$$\sum\varphi(\alpha_1) + 2\sum\varphi(\alpha_2) = 3n^2;$$

les nombres α_1 et les nombres α_2 étant tels que les quantités $\left[\frac{3n}{\alpha_1}\right]$, $\left[\frac{3n}{\alpha_2}\right]$, aient respectivement les formes $3\mu + 1$, $3\mu - 1$.

Par exemple, pour $n = 7$, on doit prendre les nombres :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
+	+	−	+			−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

On a marqué du signe $+$ ceux qui entrent dans 21 un nombre de fois, ayant la forme $3\mu + 1$, et du signe $-$ les autres. Cela posé, on trouve

$$\sum\varphi(\alpha_1) = 1 + 2 + 4 + 10 + 4 + 12 + 6 + 8 + 8 + 16$$
$$+ 6 + 18 + 8 + 12 = 115.$$
$$\sum\varphi(\alpha_2) = 2 + 4 + 6 + 4 = 16.$$

On doit avoir

$$115 + 2.16 = 3.49.$$

2. De même, l'identité (5) se généralise ainsi :

$$\left[\frac{n}{p}\right] - k\left[\frac{n}{kp}\right] = r,$$

r étant le reste de la division de $\left[\frac{n}{p}\right]$ par r. Cette égalité donne lieu à beaucoup de propositions, parmi lesquelles nous énoncerons celle-ci :

« *Soit* N_r *le nombre moyen des fractions à numérateur* n, *telles* *que le plus grand nombre entier qu'elles renferment ait la forme* $k\mu + \mathrm{r}$, *On a*

$$N_1 + 2N_2 + 3N_3 + \cdots + (k-1)N_{k-1} = n\, \mathcal{E}.\, k.$$

IX. Les propriétés des nombres α, étudiées plus haut, deviennent évidentes, dès que l'on connaît la nature de ces nombres.

En effet, il est facile d'établir que,

Si q *est le plus grand nombre entier contenu dans* $\frac{\mathrm{n}}{2}$, *les nombres* α, *relatifs à* n, *s'obtiennent en supprimant, parmi les diviseurs des nombres*

$$q+1, \quad q+2, \quad q+3, \ldots, n,$$

les diviseurs des q *premiers nombres naturels.*

Exemple. $n = 7$, $q = 3$. Les diviseurs des nombres, 4, 5, 6, 7, sont

$$1, 2, 4, 1, 5, 1, 2, 3, 6, 1, 7.$$

Les diviseurs des trois premiers nombres naturels sont

$$1, 1, 2, 1, 3.$$

Si nous supprimons, parmi les nombres de la première ligne, ceux qui se trouvent aussi dans la seconde, il nous reste les nombres

$$1, 2, 4, 5, 6, 7,$$

les seuls qui entrent un nombre *impair* de fois dans 7.

D'après cela, on obtient immédiatement la formule générale

$$\sum f(\alpha) = \psi(n) - 2\psi\left[\frac{n}{2}\right].$$

Pour arriver à ces résultats, il suffit d'observer que l'identité (5) peut être écrite ainsi :

$$\left[\frac{n}{p}\right] - 2\left[\frac{q}{p}\right] = \left|\begin{array}{lll} 1, \text{ si } p & \textit{est} & \text{un des nombres } \alpha, \text{ relatifs à } n, \\ 0, \quad \text{»} & \textit{n'est pas} & \text{»} \qquad\qquad \text{»} \end{array}\right.$$

Il faut remarquer, en outre, que $\left[\frac{x}{p}\right]$ représente la quotité des x premiers nombres naturels qui admettent le diviseur p.

X. 1. Ces procédés sont souvent applicables. Ainsi, le nombre des entiers premiers avec x et non supérieurs à n a pour expression

$$\varphi(x,n) = \left[\frac{n}{a}\right]\mu(a) + \left[\frac{n}{b}\right]\mu(b) + \left[\frac{n}{c}\right]\mu(c) + \cdots, \tag{9}$$

$a, b, c, \ldots$ désignant tous les diviseurs de x. On peut écrire

$$\varphi(x,2n) = \left[\frac{2n}{a}\right]\mu(a) + \left[\frac{2n}{b}\right]\mu(b) + \left[\frac{2n}{c}\right]\mu(c) + \cdots;$$

puis, par combinaison avec (9),

$$\varphi(x,2n) - 2\varphi(x,n) = \sum\left\{\left[\frac{2n}{a}\right] - 2\left[\frac{n}{a}\right]\right\}\mu(a).$$

De là résulte la proposition suivante :

« *On considère les diviseurs de* x, *qui entrent un nombre impair de fois dans* 2n. *L'excès du nombre de ceux qui sont composés d'un nombre pair de facteurs premiers, inégaux, sur le nombre de ceux qui sont composés d'un nombre impair de facteurs premiers, inégaux, est égal à l'excès du nombre des entiers, premiers avec* x, *compris entre* n + 1 *et* 2n (*inclusivement*), *sur le nombre des entiers, premiers avec* x, *compris entre* 1 *et* n (*inclusivement*). »

2. Voici une autre application. Ayant décomposé le nombre

$$C_{2n,n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}$$

en facteurs premiers, soit p un de ces facteurs, et s son exposant. On sait que, dans le produit des n premiers nombres naturels, p entre comme facteur un nombre de fois marqué par

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

En conséquence

$$s = \left\{\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right\} + \left\{\left[\frac{2n}{p^2}\right] - 2\left[\frac{n}{p^2}\right]\right\} + \left\{\left[\frac{2n}{p^3}\right] - 2\left[\frac{n}{p^3}\right]\right\} + \cdots$$

Il en résulte que *parmi les quantités*

$$\left[\frac{2n}{p}\right], \quad \left[\frac{2n}{p^2}\right], \quad \left[\frac{2n}{p^3}\right], \ldots$$

il y en a s *impaires.* Cette proposition a de nombreux corollaires. Nous y reviendrons quand nous reprendrons les calculs de la *Note XX.*

3. Faisons encore remarquer ce corollaire du Théorème de Clausen et Standt :

« *Si* α, β, γ, ... *sont les nombres premiers, qui, diminués de l'unité, entrent un nombre impair de fois dans* 2n, *l'excès de la somme des* n *premiers nombres de Bernoulli, sur la somme des* n *nombres suivants, est égal à un nombre entier, augmenté de*

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \ldots$$

Il faut encore ajouter $\frac{1}{2}$, *lorsque* n *est pair.* »

Exemple :

$$\sum_1^3 B_p - \sum_4^6 B_p = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$$

Or, 3, 5, 7, sont les seuls nombres premiers, qui, diminués de l'unité, entrent un nombre *impair* de fois dans 6. En effet :

$$\left[\frac{6}{2}\right] = 3, \quad \left[\frac{6}{4}\right] = 1, \quad \left[\frac{6}{6}\right] = 1.$$

DÉMONSTRATION

D'UN THÉORÈME DE M. PEROTT (*).

1. Nous nous servirons de la fonction $\mu(x)$, égale à ± 1, suivant que x est composé d'un nombre *pair* ou d'un nombre *impair* de facteurs premiers inégaux; et égale à 0, dans les autres cas. A part les notations et la rigueur, la démonstration qu'on va lire est, mot par mot, ou plutôt idée par idée, celle qui a été donnée par M. Perott, dans le *Bulletin de Darboux*.

2. M. Perott part de la relation

$$\varphi(x,n) = \left[\frac{n}{a}\right]\mu(a) + \left[\frac{n}{b}\right]\mu(b) + \left[\frac{n}{c}\right]\mu(c) + \cdots,$$

dans laquelle a, b, c,.... représentent tous les diviseurs de x. Si l'on forme la somme

$$\varphi(1,n) + \varphi(2,n) + \varphi(3,n) + \cdots + \varphi(n,n),$$

on reconnaît que le terme $\left[\frac{n}{p}\right]\mu(p)$ s'y trouve pour les valeurs

$$p,\quad 2p,\quad 3p,\ \ldots,\left[\frac{n}{p}\right]p$$

de x, c'est-à-dire $\left[\frac{n}{p}\right]$ fois. Donc

$$\sum_{p=1}^{p=n}\varphi(p,n) = \sum_{p=1}^{p=n}\left[\frac{n}{p}\right]^2\mu(p). \tag{1}$$

3. On peut écrire

$$\left[\frac{n}{p}\right] = \frac{n}{p} - \varepsilon_p,$$

(*) Ou, plutôt, d'un théorème de Dirichlet, retrouvé par MM. Mertens, Perott, Sylvester. Voir la *Note XIV*.

ε_p étant une fraction proprement dite. La formule (1) devient

$$\sum_{p=1}^{p=n}\varphi(p,n) = n^2\sum_{p=1}^{p=n}\frac{\mu(p)}{p^2} - 2n\sum_{p=1}^{p=n}\varepsilon_p\frac{\mu(p)}{p} + \sum_{p=1}^{p=n}\varepsilon_p^2\mu(p). \qquad (2)$$

4. Il est clair que l'on a

$$-\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{p} < \sum_{p=1}^{p=n}\varepsilon_p\frac{\mu(p)}{p} < \sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{p}.$$

De même,

$$-n < \sum_{p=1}^{p=n}\varepsilon_p^2\mu(p) < n.$$

De ces doubles inégalités résulte :

$$\lim\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n}\varepsilon_p\frac{\mu(p)}{p} = 0, \quad \lim\frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{p=n}\varepsilon_p^2\mu(p) = 0,$$

pour n infini.

5. D'après cela, si l'on divise les deux membres de l'égalité (2) par n^2, on obtient

$$\lim\frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{p=n}\varphi(p,n) = \lim\sum_{p=1}^{p=n}\frac{\mu(p)}{p^2} = \frac{6}{\pi^2}. \quad (*)$$

6. D'autre part,

$$\sum_{p=1}^{p=n}\varphi(p) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=n}\varphi(p,n).$$

Donc

$$\lim\frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{p=n}\varphi(p) = \frac{3}{\pi^2}.$$

7. *Remarque.* On voit que les démonstrations de MM. Perott et Mertens sont identiques, et ne diffèrent que par la forme, ainsi que nous avons déjà eu l'occasion de le faire remarquer dans la *Note XIV* (page 156). Une nouvelle démonstration vient de paraître dans les *Comptes-Rendus* de l'Académie des Sciences, de Paris (12 février 1883). Elle est due à M. Sylvester (**).

(*) Voir la *Note VII* [formule (68)].

(**) Après sa Note du 12 février, M. Sylvester en a fait paraître une autre (19 février), sur la fonction $\varphi_1(x)$. Il y a plus de deux ans, nous sommes arrivé à un résultat plus général, concernant la fonction $\varphi_m(x)$. (*Voir* page 166.) *Mars* 1883 (E. C.).

SUR LES FONCTIONS λ ET μ

I. 1. A la fin de la *Note XIV*, nous avons cherché la valeur moyenne de la fonction $\mu\,(n)$, égale à $\pm\,1$, suivant que n est composé d'un nombre *pair* ou d'un nombre *impair* de facteurs premiers, *inégaux;* et égale à 0, dans les autres cas. Nous avons trouvé

$$\mu(n) \equiv \frac{36}{\pi^4} = 0{,}3696\,.$$

En nous servant de l'égalité asymptotique

$$\mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \cdots + \mu(n) \equiv \frac{36}{\pi^4}\,n\,, \tag{1}$$

nous pouvons chercher la valeur moyenne de la fonction $\lambda(n)$, égale à $\pm\,1$, suivant que x est composé d'un nombre *pair* ou d'un nombre *impair* de facteurs premiers, *égaux* ou *inégaux*. Pour atteindre ce but, nous partons de la relation

$$\lambda(n) = \mu\left(\frac{n}{A}\right) + \mu\left(\frac{n}{B}\right) + \mu\left(\frac{n}{C}\right) + \cdots, \tag{2}$$

dans laquelle A, B, C, ... sont tous les *diviseurs carrés* de n. Si l'on pose

$$M(x) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \cdots + \mu(x),$$

la formule (2) donne

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \cdots + \lambda(n) = M(q_1) + M(q_4) + M(q_9) + \cdots; \tag{3}$$

q_p étant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{p}$. Asymptotiquement, la relation (3) devient

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \cdots + \lambda(n) \equiv \frac{36}{\pi^4}(q_1 + q_4 + q_9 + \cdots);$$

ou, en négligeant des quantités de l'ordre de $\sqrt{n}$,

$$\lambda(1) + \lambda(2) + \lambda(3) + \cdots + \lambda(n) \equiv \frac{6}{\pi^2} n; \tag{4}$$

d'où l'on déduit la valeur moyenne

$$\lambda(n) \equiv \frac{6}{\pi^2} = 0{,}6079.$$

2. n étant indéfiniment grand, considérons, parmi les n premiers nombres naturels, les N_1 nombres $r_1, s_1, t_1, \ldots$, pour lesquels $\lambda = 1$; et les N_{-1} nombres $r_{-1}, s_{-1}, t_{-1}, \ldots$, pour lesquels $\lambda = -1$. L'égalité moyenne (4) montre que

$$N_1 - N_{-1} = \frac{6}{\pi^2} n.$$

D'autre part,

$$N_1 + N_{-1} = n.$$

Par conséquent :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{N_1}{n} &= \frac{1}{2} + \frac{3}{\pi^2} = 0{,}8039, \\ \frac{N_{-1}}{n} &= \frac{1}{2} - \frac{3}{\pi^2} = 0{,}1961. \end{aligned} \right.$$

Ce sont là les probabilités que la fonction λ a la valeur $+1$, ou la valeur -1. Ainsi :

« *Il y a environ 4 à parier, contre 1, qu'un nombre quelconque est composé d'un nombre pair, plutôt que d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux.* »

3. Si l'on cherche à vérifier, par le calcul direct, le dernier résultat, on trouve que, pour les premières valeurs de n, les nombres r_{-1} sont plus fréquents que les nombres r_1. Ainsi, pour $n = 50$, on a $N_1 = 22$, $N_{-1} = 28$. Pour $n = 100$, on a $N_1 = 49$, $N_{-1} = 51$; etc. ... Cela tient à ce que les nombres r_1 deviennent de plus en plus fréquents, à mesure que l'on avance dans la série des nombres naturels. On peut se rendre compte de ce fait au moyen de la relation

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n)}{n^m} = \frac{S_{2m}}{S_m}, \tag{5}$$

dans laquelle

$$S_m = 1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \cdots$$

La formule (5) peut être écrite ainsi :

$$\sum \frac{1}{r_1^m} - \sum \frac{1}{r_{-1}^m} = \frac{S_{2m}}{S_m}. \qquad (6)$$

Bien qu'il ne soit pas permis de faire $m = 1$, on peut donner à m des valeurs surpassant l'unité de quantités assez petites pour que le second membre de l'égalité (6) devienne aussi petit qu'on le veut. Donc, sensiblement :

$$\sum \frac{1}{r_1} = \sum \frac{1}{r_{-1}}. \qquad (7)$$

Puisque les quantités r_1 sont plus nombreuses que les autres, il faut, par compensation, qu'elles surpassent celles-ci, *en moyenne*.

4. L'égalité (6) donne encore :

$$\sum \frac{1}{r_1^m} = \frac{1}{2}\left[S_m + \frac{S_{2m}}{S_m}\right], \quad \sum \frac{1}{r_{-1}^m} = \frac{1}{2}\left[S_m - \frac{S_{2m}}{S_m}\right].$$

Par exemple :

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{t_1^2} + \cdots = \frac{7}{60}\pi^2 = 1,15,$$

$$\frac{1}{r_{-1}^2} + \frac{1}{s_{-1}^2} + \frac{1}{t_{-1}^2} + \cdots = \frac{1}{20}\pi^2 = 0,49,$$

etc., etc...

II. 1. La distribution, dans la série des nombres naturels, des nombres r_1, et des nombres r_{-1}, est extrêmement capricieuse. Pour l'étudier, il est utile de chercher les valeurs moyennes de $\lambda(x)f(x)$, pour différentes formes de la fonction f. Cette étude semble présenter beaucoup d'intérêt, mais nous ne pouvons pas, pour le moment, nous y arrêter. Nous ferons seulement observer que les identités démontrées dans les premières Notes de ce Mémoire, peuvent rendre beaucoup de services dans ces sortes de questions. Ainsi, pour ne montrer qu'un exemple, l'identité

$$\omega(n) = \lambda(a)\mu(a) + \lambda(b)\mu(b) + \lambda(c)\mu(c) + \cdots,$$

dans laquelle a, b, c, ... sont *tous les diviseurs* de n, donne

$$\omega(1) + \omega(2) + \omega(3) + \cdots + \omega(n) = \mathrm{L}(q_1) + \mathrm{L}(q_2) + \mathrm{L}(q_3) + \cdots + \mathrm{L}(q_n),$$

pourvu que l'on pose

$$\mathrm{L}(x) = \lambda(1)\mu(1) + \lambda(2)\mu(2) + \lambda(3)\mu(3) + \cdots + \lambda(x)\mu(x).$$

En ayant égard à une égalité moyenne connue, on peut écrire

$$\mathrm{L}(q_1) + \mathrm{L}(q_2) + \mathrm{L}(q_3) + \cdots + \mathrm{L}(q_n) \equiv \frac{6}{\pi^2} n \,\mathcal{L}.\, n.$$

Si l'on tâche de satisfaire à cette égalité, au moyen de $\mathrm{L}(x) \equiv kx$, on trouve $k = \frac{6}{\pi^2}$. Par suite :

$$\lambda(1)\mu(1) + \lambda(2)\mu(2) + \lambda(3)\mu(3) + \cdots + \lambda(n)\mu(n) \equiv \frac{6}{\pi^2} n; \qquad (8)$$

puis :

$$\lambda(n)\mu(n) \equiv \frac{6}{\pi^2}.$$

On voit que la valeur moyenne du produit des fonctions λ, μ, n'est nullement égale au produit de leurs valeurs moyennes.

2. Soient ρ_k, σ_k, τ_k, ... les n_k nombres, non supérieurs à n, pour lesquels la fonction μ est égale à k. Les n premiers nombres naturels se trouvent ainsi distribués en *trois* groupes, *définis* par les égalités

$$\mu(\rho_1) = 1, \qquad \mu(\rho_{-1}) = -1, \qquad \mu(\rho_0) = 0. \qquad (9)$$

Observons que, si la fonction μ n'est pas nulle, elle a même valeur que la fonction λ. De là résulte

$$\lambda(\rho_1) = 1, \qquad \lambda(\rho_{-1}) = -1, \qquad \lambda(\rho_0) = \pm 1;$$

puis :

$$\lambda(\rho_1)\mu(\rho_1) = 1, \qquad \lambda(\rho_{-1})\mu(\rho_{-1}) = 1, \qquad \lambda(\rho_0)\mu(\rho_0) = 0. \qquad (10)$$

Cela posé, les égalités moyennes (1) et (8) peuvent s'écrire ainsi :

$$\sum \mu(\rho_1) + \sum \mu(\rho_{-1}) + \sum \mu(\rho_0) \equiv \frac{36}{\pi^4} n,$$

$$\sum \lambda(\rho_1)\mu(\rho_1) + \sum \lambda(\rho_{-1})\mu(\rho_{-1}) + \sum \lambda(\rho_0)\mu(\rho_0) \equiv \frac{6}{\pi^2} n;$$

ou bien, en vertu de (9) et de (10) :

$$n_1 - n_{-1} = \frac{36}{\pi^4} n,$$

$$n_1 + n_{-1} = \frac{6}{\pi^2} n.$$

En outre,

$$n_1 + n_{-1} + n_0 = n.$$

Ces trois équations donnent, pour n indéfiniment grand,

$$\frac{n_1}{n} = \frac{3}{\pi^2} + \frac{18}{\pi^4} = 0{,}4888,$$

$$\frac{n_{-1}}{n} = \frac{3}{\pi^2} - \frac{18}{\pi^4} = 0{,}1191,$$

$$\frac{n_0}{n} = 1 - \frac{6}{\pi^2} = 0{,}5921\ldots$$

Donc :

1° « *Il y a environ 51 à parier, contre 49, qu'un nombre quelconque n'est pas le produit d'un nombre* PAIR *de facteurs premiers, inégaux.* »

2° « *Il y a environ 22 à parier, contre 3, qu'un nombre quelconque n'est pas le produit d'un nombre* IMPAIR *de facteurs premiers, inégaux.* »

3° « *Il y a environ 61 à parier, contre 39, qu'un nombre quelconque n'admet pas de diviseurs carrés.* »

La dernière proposition revient à l'égalité

$$\frac{n_1 + n_{-1}}{n} = \frac{6}{\pi^2},$$

à laquelle on peut substituer celles-ci :

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_{-1}}{N_{-1}} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Par conséquent :

« *Il y a environ 61 à parier, contre 39, qu'un nombre quelconque, composé d'un nombre pair de facteurs premiers, égaux ou inégaux, n'admet pas de diviseurs carrés.* » La probabilité est la même quand le nombre est composé d'un nombre *impair* de facteurs premiers, égaux ou inégaux.

On peut encore écrire

$$\frac{n_1}{n_1 + n_{-1}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{\pi^2}, \quad \frac{n_{-1}}{n_1 + n_{-1}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{\pi^2}.$$

Donc :

« *Ayant pris, au hasard, un nombre composé de facteurs premiers, inégaux, il y a environ 4 à parier, contre 1, que ces facteurs sont en nombre pair, plutôt qu'en nombre impair.* »

3. Voici le tableau des valeurs des fonctions λ, μ, pour $n \overline{\gtrless} 100$. Nous y désignons simplement, par $+$ ou par $-$, l'unité positive ou négative.

n	λ	μ	n	λ	μ	n	λ	μ	n	λ	μ	n	λ	μ
1	+	+	21	+	+	41	—	—	61	—	—	81	+	0
2	—	—	22	+	+	42	—	—	62	+	+	82	+	+
3	—	—	23	—	—	43	—	—	63	—	0	83	—	—
4	+	0	24	+	0	44	—	0	64	+	0	84	+	0
5	—	—	25	+	0	45	—	0	65	+	+	85	+	+
6	+	+	26	+	+	46	+	+	66	—	—	86	+	+
7	—	—	27	—	0	47	—	—	67	—	—	87	+	+
8	—	0	28	—	0	48	—	0	68	—	0	88	+	0
9	+	0	29	—	—	49	+	0	69	+	+	89	—	—
10	+	+	30	—	—	50	—	0	70	—	—	90	+	0
11	—	—	31	—	—	51	+	+	71	—	—	91	+	+
12	—	0	32	—	0	52	—	0	72	—	0	92	—	0
13	—	—	33	+	+	53	—	—	73	—	—	93	+	+
14	+	+	34	+	+	54	+	0	74	+	+	94	+	+
15	+	+	35	+	+	55	+	+	75	—	0	95	+	+
16	+	0	36	+	0	56	+	0	76	—	0	96	—	0
17	—	—	37	—	—	57	+	+	77	+	+	97	—	—
18	—	0	38	+	+	58	+	+	78	—	—	98	—	0
19	—	—	39	+	+	59	—	—	79	—	—	99	—	0
20	—	0	40	+	0	60	+	0	80	—	0	100	+	0

On remarquera que la valeur 0 est assez uniformément fréquente. Aussi le rapport $\frac{n_0}{n}$ se tient-il toujours près de sa limite

0,3921. Il n'en est pas de même de $+1$, beaucoup plus fréquente pour les grandes valeurs de n, que pour les autres, tandis que le contraire a lieu pour -1. Aussi, les rapports $\frac{n_1}{n}$ et $\frac{n_{-1}}{n}$ ne se rapprochent que très lentement de leurs limites respectives, le premier en augmentant, et l'autre en diminuant. Ces circonstances sont consignées, pour un petit nombre de cas, dans le tableau suivant :

$n =$	20	25	50	100	. . .	∞
$\frac{n_1}{n} =$	0,25	0,28	0,28	0,31	. . .	0,4888
$\frac{n_{-1}}{n} =$	0,40	0,36	0.34	0,30	. . .	0,1191
$\frac{n_0}{n} =$	0,35	0,36	0,38	0,39	. . .	0,3921

4. Les formules

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mu(n)}{n^m} = \frac{1}{S_m}, \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda(n)\mu(n)}{n^m} = \frac{S_m}{S_{2m}},$$

donnent facilement :

$$\sum \frac{1}{\rho_1^m} = \frac{1}{2}\left[\frac{S_m}{S_{2m}} + \frac{1}{S_m}\right],$$

$$\sum \frac{1}{\rho_{-1}^m} = \frac{1}{2}\left[\frac{S_m}{S_{2m}} - \frac{1}{S_m}\right],$$

$$\sum \frac{1}{\rho_0^m} = S_m\left[1 - \frac{1}{S_{2m}}\right].$$

Par exemple :

$$\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\tau_1^2} + \cdots = \frac{21}{2\pi^2} = 1,06,$$

$$\frac{1}{\rho_{-1}^2} + \frac{1}{\sigma_{-1}^2} + \frac{1}{\tau_{-1}^2} + \cdots = \frac{9}{2\pi^2} = 0,46,$$

$$\frac{1}{\rho_0^2} + \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\tau_0^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} - \frac{15}{\pi^2} = 0,12.$$

D'après le tableau ci-dessus, les premiers nombres ρ_1 sont :

1, 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, ... ;

et les nombres ρ_{-1} :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 30, 31, 37, ...

Cette série renferme tous les nombres premiers, hors l'unité.

Enfin, les nombres ρ_0 :

4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28, 32, 36, ...

Ces derniers sont *les seuls nombres qui admettent des diviseurs carrés.*

SUR UNE FONCTION ν.

I. 1. Nous avons imaginé une fonction $\nu(x)$, laquelle, si x est une puissance d'un nombre premier, est égale au logarithme de ce nombre; dans les autres cas, $\nu(x) = 0$. De cette définition on déduit immédiatement l'identité fondamentale

$$\nu(a) + \nu(b) + \nu(c) + \cdots = \mathcal{L}.n, \tag{1}$$

a, b, c, ... étant *tous les diviseurs* de n.

En effet, si u, v, w, ... sont les *diviseurs premiers* de n, autres que 1, et si $n = u^\alpha v^\beta w^\gamma \ldots$, les seuls diviseurs, pour lesquels $\nu = \mathcal{L}u$, sont u, u^2, u^3, ... u^α.

De même, les seuls diviseurs, pour lesquels $\nu = \mathcal{L}v$, sont v, v^2, v^3, ..., v^β; et ainsi de suite. Il en résulte que

$$\sum \nu(a) = \alpha\,\mathcal{L}.\,u + \beta\,\mathcal{L}.\,v + \gamma\,\mathcal{L}.\,w + \cdots = \mathcal{L}.\,n.$$

2. q_p étant le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{p}$, la relation (1) donne facilement

$$q_1\nu(1) + q_2\nu(2) + q_3\nu(3) + \cdots + q_n\nu(n) = \mathcal{L}.(1.2.3\ldots n), \tag{2}$$

ou bien, d'après une formule de la *Note I*,

$$\chi(q_1) + \chi(q_2) + \chi(q_3) + \cdots + \chi(q_n) = \mathcal{L}.(1.2.3\ldots n), \tag{3}$$

pourvu que l'on pose

$$\chi(x) = \nu(1) + \nu(2) + \nu(3) + \cdots + \nu(x). \tag{4}$$

3. *Remarques.* *a*) La relation (3) est l'*identité de Tchébychef*, dont M. Mertens fait usage pour établir son 1[er] *Lemme*. Pour nous en convaincre, distinguons, parmi les x premiers nombres naturels: 1° tous ceux qui sont premiers; 2° tous ceux

qui sont des carrés de nombres premiers, et dont les racines carrées sont, par conséquent, tous les nombres premiers, non supérieurs à $x^{\frac{1}{2}}$; 3° tous ceux qui sont des cubes de nombres premiers, et dont les racines cubiques sont, par conséquent, tous les nombres premiers, non supérieurs à $x^{\frac{1}{3}}$; 4° etc., etc...

On voit que, si l'on représente par $\sigma(x)$ la somme des logarithmes de tous les nombres premiers, non supérieurs à x, on peut écrire, au lieu de (4),

$$\chi(x) = \sigma(x) + \sigma\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \sigma\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \sigma\left(x^{\frac{1}{4}}\right) + \cdots$$

b) De même, la formule (2) ne diffère pas de la relation connue

$$\sum\left[q_p + q_{p^2} + q_{p^3} + \cdots\right] \mathfrak{L}.p = \mathfrak{L}.(1.2.3 \ldots n), \tag{5}$$

dans laquelle on doit remplacer p, successivement, par tous les nombres premiers, non supérieurs à n. On passe de (1) à (5) en réunissant tous les termes pour lesquels $\nu = \mathfrak{L}.\,p$.

4. Asymptotiquement, la formule (3) s'écrit ainsi :

$$\chi(q_1) + \chi(q_2) + \chi(q_3) + \cdots + \chi(q_n) \equiv n\,\mathfrak{L}.\,n - n;$$

d'où, en ayant égard à l'égalité moyenne

$$q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n \equiv n\,\mathfrak{L}.\,n + (2C - 1)n,$$

on tire

$$\chi(n) \equiv n - 2C. \tag{6}$$

Telle est la valeur moyenne de la fonction χ. Il est bon de la comparer au résultat du 1er *Lemme* de M. Mertens.

5. D'après (4), on a donc

$$\nu(1) + \nu(2) + \nu(3) + \cdots + \nu(n) \equiv n, \tag{7}$$

d'où l'on tire

$$\nu(n) \equiv 1.$$

II. 1. Soit $\psi(x)$ une fonction telle que l'on ait toujours

$$\psi(x)\psi(y) = \psi(xy). \tag{8}$$

Au lieu de (1), on peut écrire

$$\nu(a)\psi(a)\psi\left(\frac{n}{a}\right) + \nu(b)\psi(b)\psi\left(\frac{n}{b}\right) + \nu(c)\psi(c)\psi\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \psi(n)\,\mathfrak{L}.\,n.$$

Par conséquent, d'après les formules de la *Note VII*,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\nu(n)\psi(n)}{n^m} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi(n)}{n^m} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi(n)\,\mathcal{L}.\,n}{n^m}. \tag{9}$$

Si, dans le premier facteur, on réunit tous les termes pour lesquels la fonction ν est égale au logarithme du nombre *premier* p, on trouve

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\nu(n)\psi(n)}{n^m} = \sum \left[\frac{\psi(p)}{p^m} + \frac{\psi(p^2)}{p^{2m}} + \frac{\psi(p^3)}{p^{3m}} + \cdots\right] \mathcal{L}.\,p,$$

p ne pouvant recevoir que des valeurs *premières*.

D'après (8) :

$$\psi(p^2) = \psi^2(p), \quad \psi(p^3) = \psi^3(p), \quad \psi(p^4) = \psi^4(p), \cdots$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\nu(n)\psi(n)}{n^m} = \sum \frac{\psi(p)}{p^m - \psi(p)} \mathcal{L}.\,p.$$

D'autre part, si l'on pose

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi(n)}{n^m} = S_m,$$

on trouve, en différentiant,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\psi(n)\,\mathcal{L}.\,n}{n^m} = -\frac{dS_m}{dm}.$$

Par suite, la relation (9) devient

$$\sum \frac{\psi(p)\,\mathcal{L}.\,p}{p^m - \psi(p)}\,dm = -\frac{dS_m}{S_m}.$$

Intégrant depuis m jusqu'à l'infini, on trouve la formule connue

$$\Pi \frac{1}{1 - \dfrac{\psi(p)}{p^m}} = \frac{\psi(1)}{1^m} + \frac{\psi(2)}{2^m} + \frac{\psi(3)}{3^m} + \frac{\psi(4)}{4^m} + \cdots,$$

laquelle, d'ailleurs, est évidente.

2. Le même calcul, appliqué à la relation (1), donne

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\nu(n)}{n^m} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \dfrac{\mathcal{L}.\, n}{n^m}}{\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \dfrac{1}{n^m}}.$$

Par exemple :

$$\nu(1) + \frac{\nu(2)}{4} + \frac{\nu(3)}{9} + \frac{\nu(4)}{16} + \cdots = \frac{6}{\pi^2} \cdot 0{,}9375 \ldots = 0{,}5699 \ldots \qquad (10)$$

III. 1. Au moyen des identités démontrées au commencement de ce Mémoire, la relation (1) en engendre une infinité d'autres. On trouve d'abord l'identité générale

$$\sum \nu(a) \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) = \sum f\left(\frac{n}{a}\right) \mathcal{L}.\, a, \qquad (11)$$

dans laquelle

$$\mathrm{F}(n) = f(a) + f(b) + f(c) + \cdots;$$

ou, sous une autre forme :

$$\sum \left[\mathrm{F}(n) - \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right)\right] \nu(a) = \mathcal{L}. \left[a^{f(a)} b^{f(b)} c^{f(c)} \ldots\right]$$

Pour $f(x) = \mu(x)$, l'identité (11) devient

$$\mu\left(\frac{n}{a}\right) \mathcal{L}.\, a + \mu\left(\frac{n}{b}\right) \mathcal{L}.\, b + \mu\left(\frac{n}{c}\right) \mathcal{L}.\, c + \cdots = \nu(n), \qquad (12)$$

ou

$$a^{\mu(a)} . b^{\mu(b)} . c^{\mu(c)} \ldots = e^{-\nu(n)}. \qquad (13)$$

Pour $f(x) = 1$:

$$\theta(a) \nu\left(\frac{n}{a}\right) + \theta(b) \nu\left(\frac{n}{b}\right) + \theta(c) \nu\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \frac{1}{2} \theta(n) \mathcal{L}.\, n, \qquad (14)$$

ou

$$\sum \left[\theta(n) - 2\theta\left(\frac{n}{a}\right)\right] \nu(a) = 0;$$

etc., etc.....

2. A son tour, l'identité (13) donne lieu à l'identité générale

$$\sum f\left(\frac{n}{a}\right)\nu(a) + \sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right)\mu(a)\,\mathcal{L}.\,a = 0,$$

laquelle, pour $f(x) = \nu(x)$, devient

$$\nu(a)\nu\left(\frac{n}{a}\right) + \nu(b)\nu\left(\frac{n}{b}\right) + \nu(c)\nu\left(\frac{n}{c}\right) + \cdots = \nu(n) + \sum \mu(a)\,\mathcal{L}^2.\,a.$$

Pour $f(x) = 1$, elle donne

$$a^{\theta(a)\mu\left(\frac{n}{a}\right)}.\,b^{\theta(b)\mu\left(\frac{n}{b}\right)}.\,c^{\theta(c)\mu\left(\frac{n}{c}\right)}\,.. = n^2; \tag{15}$$

etc., etc...

On peut, de même, considérer l'identité (14) ou l'identité (12), ou, enfin, toute identité simple qui en résulte; par exemple, l'identité (15). Il n'y a pas de raison de s'arrêter, puisque chaque identité obtenue en engendre une infinité d'autres.

IV. 1. Si l'on remplace q_p par $\frac{n}{p}$, dans la relation (2), l'égalité (7) montre que la quantité négligée est de même ordre que n. Si l'on ne veut pas négliger les quantités de cet ordre, on doit avoir recours à la formule

$$\begin{aligned}\left[q_1 f(1) + q_2 f(2) + q_3 f(3) + \cdots + q_\mu f(\mu)\right] + \left[\mathrm{F}(q_1) + \mathrm{F}(q_2) + \cdots + \mathrm{F}(q_\mu)\right]\\ = \mu \mathrm{F}(\mu) + \left[q_1 f(1) + q_2 f(2) + q_3 f(3) + \cdots + q_n f(n)\right],\end{aligned}$$

dans laquelle μ est la racine carrée du nombre n, supposé indéfiniment grand.

En particulier, pour $f(x) = \nu(x)$, on a

$$\left.\begin{aligned}\left[q_1\nu(1) + q_2\nu(2) + \cdots + q_\mu\nu(\mu)\right] + \left[\chi(q_1) + \chi(q_2) + \cdots + \chi(q_\mu)\right]\\ = \mu\chi(\mu) + \mathcal{L}.\,(1.2.3\ldots n).\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Or, en moyenne,

$$q_1\nu(1) + q_2\nu(2) + \cdots + q_\mu\nu(\mu) \equiv n\left[\frac{\nu(1)}{1} + \frac{\nu(2)}{2} + \cdots + \frac{\nu(\mu)}{\mu}\right], \tag{17}$$

en négligeant une quantité, qui, d'après (7), ne dépasse pas l'ordre de $\sqrt{n}$.

De même, en vertu de l'égalité moyenne (6), on peut écrire

$$\chi(q_1) + \chi(q_2) + \cdots + \chi(q_\mu) \equiv q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_\mu,$$

en négligeant des quantités de même ordre que $\sqrt{n}$. Le second membre de la dernière égalité peut encore s'écrire ainsi :

$$n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{\mu}\right) = n\left(\mathfrak{L}.\mu + C + \frac{1}{2\mu} + \cdots\right).$$

Conséquemment :

$$\chi(q_1) + \chi(q_2) + \cdots + \chi(q_\mu) \equiv \tfrac{1}{2} n \,\mathfrak{L}.n + Cn, \tag{18}$$

les quantités négligées étant toujours de même ordre que $\sqrt{n}$.

L'égalité (6) permet encore d'écrire

$$\mu\chi(\mu) \equiv n. \tag{19}$$

Enfin,

$$\mathfrak{L}.(1.\,2.\,3 \ldots n) \equiv n\,\mathfrak{L}.n - n. \tag{20}$$

Substituant, dans (16), les valeurs (17), (18), (19), (20), et changeant n en n^2, on trouve

$$\frac{\nu(1)}{1} + \frac{\nu(2)}{2} + \frac{\nu(3)}{3} + \cdots + \frac{\nu(n)}{n} \equiv \mathfrak{L}.n - C. \tag{21}$$

2. L'égalité moyenne (21) est très remarquable : elle permet, en particulier, de démontrer le 2^{me} *Lemme* de M. Mertens.

En effet, si, dans le premier membre de (21), on réunit tous les termes pour lesquels $\nu = \mathfrak{L}.p$, et si l'on pose

$$s_m = \sum \frac{\mathfrak{L}.p}{p^m}, \qquad (p \textit{ premier})$$

l'égalité considérée devient :

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \cdots \equiv \mathfrak{L}.n - C.$$

On en déduit

$$\mathfrak{L}.n - \sum \frac{\mathfrak{L}.p}{p} \equiv A,$$

en posant

$$A - C = s_2 + s_3 + s_4 + \cdots$$

Il est évident que

$$A - C < 2(s_2 + s_4 + s_6 + \cdots),$$

et que, d'autre part,

$$A - C > - s_2 + 2(s_2 + s_4 + s_6 + \cdots).$$

Or,

$$s_2 + s_4 + s_6 + \cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\nu(n)}{n^2} = 0{,}5699\ldots, \qquad (10)$$

$$s_2 = \sum \frac{\mathfrak{L}.\, p}{p^2} < \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{L}.\, n}{n^2} = 0{,}9375\ldots, \quad C = 0{,}5772\ldots,$$

Donc :

$$0{,}7796 < A < 1{,}7172.$$

M. Mertens trouve

$$0 < A < 2.$$

On peut obtenir des limites encore plus resserrées, en observant que, à cause de

$$\frac{1}{p^m} < \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p^{m-1}} + \frac{1}{p^{m+1}}\right],$$

on a aussi

$$s_m < \tfrac{1}{2}\left[s_{m-1} + s_{m+1}\right].$$

D'après cette remarque :

$$2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\nu(n)}{n^2} - \left(s_2 - \frac{1}{2}s_3\right) < A - C < 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\nu(n)}{n^2} - \frac{1}{2}s_2;$$

puis, si l'on se borne au calcul de quelques termes, dans s_2 et s_3, on obtient

$$0{,}9 < A < 1{,}5.$$

Naturellement, si l'on calculait, avec plus d'exactitude, s_2 et s_3, on aurait des limites plus rapprochées. Nous sommes arrivé, d'ailleurs, à des résultats beaucoup plus précis, que nous ferons connaître ultérieurement, en étudiant les nombres premiers, non pas dans la série des nombres naturels, mais bien dans la série des nombres ρ_{-1}, considérés dans la Note précédente. On sait, en effet, que la série des nombres ρ_{-1} contient l'entière série des nombres premiers, hors l'unité. Le premier nombre ρ_{-1} qui soit composé est 30. Au moyen de ces nombres, on trouve, pour s_2, une limite supérieure assez approchée :

$$s_2 < \sum \frac{\mathcal{L}.\rho_{-1}}{\rho_{-1}^2} = \frac{63}{\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathcal{L}.n}{n^2} - \frac{1350}{\pi^6} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathcal{L}.n}{n^4}.$$

3. L'égalité (21) peut encore être mise sous la forme suivante :

$$\mathcal{L}.n - \sum \frac{\mathcal{L}.p}{p-1} = \mathrm{C}.$$

V. *Remarques.* 1. Il est curieux que l'on puisse parvenir à l'égalité moyenne (21), en partant directement de l'égalité (2), à la condition de remplacer q_p par sa valeur moyenne $\frac{n}{p} - (1 - \mathrm{C})$. On trouve d'abord

$$n\left[\frac{\nu(1)}{1} + \frac{\nu(2)}{2} + \frac{\nu(3)}{3} + \cdots + \frac{\nu(n)}{n}\right] - (1 - \mathrm{C})n = n\,\mathcal{L}.n - n;$$

puis, divisant par n et transposant, on obtient (21).

2. De même, si l'on représente par $n - k$ la valeur moyenne de $\varkappa(n)$, l'égalité (3) devient d'abord

$$n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - (1 - \mathrm{C})n - kn = n\,\mathcal{L}.n - n;$$

puis, en observant que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \mathcal{L}.n + \mathrm{C},$$

on trouve $k = 2\mathrm{C}$, conformément à l'égalité (6).

3. Il n'est pas établi que ces substitutions soient légitimes : il est même facile de démontrer qu'elle ne le sont pas, dans bien des cas. Mais, d'autre part, il existe assez de cas, où, comme dans les deux exemples qui précèdent, on arrive à des résultats exacts ; et c'est précisément de la recherche, de la détermination et de l'examen de ces cas que doit s'occuper, d'une manière toute spéciale, la Théorie des Moyennes.

Voici encore un exemple assez curieux :

Considérons, dans l'égalité (5), la quantité placée entre crochets :

$$q_p + q_{p^2} + q_{p^3} + \cdots + q_{p^m}.$$

On sait que

$$m = \frac{\mathcal{L}.n}{\mathcal{L}.p}.$$

Par conséquent :

$$\left[q_p + q_{p^2} + q_{p^3} + \cdots\right] \mathcal{L}.p$$
$$= n\left[\frac{\mathcal{L}.p}{p} + \frac{\mathcal{L}.p}{p^2} + \frac{\mathcal{L}.p}{p^3} + \cdots\right] - (1 - C)\,\mathcal{L}.n.$$

Si $\vartheta(n)$ est la totalité des nombres premiers, non supérieurs à n, on a donc, d'après (5) :

$$n(s_1 + s_2 + s_3 + \cdots) - (1 - C)\vartheta(n)\,\mathcal{L}.n = n\,\mathcal{L}.n - n,$$

d'où, en ayant égard à (21),

$$\vartheta(n)\,\mathcal{L}.n = n.$$

Si l'on pousse plus loin l'approximation, il doit être possible d'arriver à l'égalité moyenne

$$\vartheta(n)\,\mathcal{L}.n = n + \vartheta(n),$$

laquelle ne diffère pas de la célèbre *formule de Tchébychef*

$$\vartheta(n) = \frac{n}{\mathcal{L}.n - 1}.$$

A tort, suivant nous, plusieurs géomètres s'étonnent de ce que la formule de Tchébychef, *démontrée*, soit moins approximative que la *formule de Legendre*

$$\vartheta(n) = \frac{n}{\mathcal{L}.n - 1,08366}.$$

A toute loi arithmétique correspond une *loi moyenne*, algébrique, qui s'en écarte plus ou moins, et une infinité de *lois empiriques*, représentant, avec une approximation plus ou moins grande, la loi considérée.

La formule de Tchébychef est l'expression de la loi moyenne, ou *asymptotique*, à laquelle doit obéir, dans le cours de ses variations, la fonction $\vartheta(n)$, tandis que la formule de Legendre est, tout simplement, une formule empirique. L'illustre géomètre russe ayant trouvé sa formule, devait la faire connaître, quand même elle aurait donné des écarts dix, cent, mille fois plus considérables qu'ils ne le sont en réalité. Nous ne pouvons pas dire la même chose de la formule de Legendre, qui, pour de trop grands écarts, n'aurait plus eu de raison d'être.

Cette simple remarque établit suffisamment toute la différence qui existe entre les deux formules, entre lesquelles il n'y a donc pas de comparaison possible.

D'ailleurs, la formule de Tchébychef donne

$$\vartheta(2n) < 2\vartheta(n).$$

Il en résulte que, dans la série des nombres naturels, les nombres premiers, si capricieuse que soit leur distribution, deviennent, *en moyenne*, de moins en moins fréquents, à mesure que l'on avance dans la série. Donc, parmi les nombres dont nous nous servons, ou nombres *accessibles*, qui sont fort petits, et en fort petit nombre par rapport à ceux que nous ne considérons pas, ou nombres *inaccessibles*, les nombres premiers sont beaucoup plus fréquents, et la *formule moyenne* doit donner des résultats trop faibles. Si les nombres premiers étaient *uniformément fréquents*, il n'y aurait pas de formule plus approximative que la formule moyenne. Puisqu'il n'en est pas ainsi, il faut corriger la formule *théorique*, en lui faisant donner des résultats plus grands. On y arrive en remplaçant la constante 1 par 1,08366, et l'on obtient ainsi la formule *pratique*.

4. En terminant, nous prions le lecteur de ne considérer cette dernière Note que comme une simple préparation à l'emploi de la Théorie des Moyennes dans l'étude des nombres premiers. Notre but était de montrer la précision et la rapidité qu'introduit, dans le calcul, l'usage des égalités moyennes et des fonctions arithmétiques.

Pour nous, l'avenir de l'Arithmétique est dans une habile combinaison de fonctions, habilement choisies.

NOTE ANALYTIQUE

SUR LES FONCTIONS H ET Γ.

I. *Préliminaires.* 1. Nous allons profiter des pages qui nous restent, pour démontrer quelques formules d'analyse dont il a été souvent fait usage dans les recherches précédentes, et qui se présenteront encore dans nos recherches ultérieures. Ces formules sont relatives aux fonctions Γ et H.

2. Il convient peut-être que nous rappelions notre *définition* de la fonction Γ, donnée par l'égalité

$$\Gamma(1+x) = \prod_{p=1}^{p=\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{p}\right)^x}{1+\frac{x}{p}}, \tag{1}$$

qui ne diffère pas, au fond, de la célèbre *formule de Gauss.* Hâtons-nous de dire que la formule (1) se trouve aussi à la première page du beau Mémoire de M. Berger, qu'il nous a été impossible de consulter en temps utile.

3. Nous supposons la formule

$$\Gamma(1+x) = \int_0^\infty e^{-\varphi}\varphi^x d\varphi$$

démontrée, au moyen de l'égalité (1), admise comme *définition.* Dans ce but, on peut employer, par exemple, le calcul qui se trouve dans le *Cours* professé à la Sorbonne par M. Hermite [1881-82, second semestre, p. 97].

4. Au moyen de l'égalité (1), et de la *formule d'Euler :*

$$\prod_{d=1}^{p=\infty}\left(1-\frac{x^2}{p^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, \tag{2}$$

démontrée dans notre *Première Lettre*, on obtient la relation connue

$$\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)=\prod_{p=1}^{p=\infty}\frac{1}{1-\frac{x^2}{p^2}}=\frac{\pi x}{\sin(\pi x)},$$

qui donne, en particulier, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$. En employant cette valeur, on trouve très facilement la *formule de Legendre :*

$$\frac{\Gamma(x+\frac{1}{2})\Gamma(x+1)}{\Gamma(2x+1)}=\frac{\sqrt{\pi}}{4^x}. \tag{3}$$

Enfin, si l'on fait $x=\frac{1}{2}$, dans la formule (2), celle-ci peut être mise sous la forme.

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

C'est la *formule de Wallis,* dont nous aurons besoin dans la suite.

5. Au sujet de la fonction H, ou *fonction harmonique,* nous rappellerons les formules

$$\mathrm{H}(x)=\sum_1^\infty\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+x}\right], \tag{5}$$

$$\mathrm{H}(x)=\gamma'(x)+\mathrm{C}. \tag{6}$$

La première peut servir à *définir* la fonction H. Dans la seconde, $\gamma(x)$ représente le *logarithme népérien* de la fonction $\Gamma(1+x)$.

II. Soient

$$\mathrm{B}_1=\tfrac{1}{2},\ \mathrm{B}_3=\mathrm{B}_5=\mathrm{B}_7=\cdots=0,$$

$$\mathrm{B}_2=\frac{1}{6},\ \mathrm{B}_4=-\frac{1}{30},\ \mathrm{B}_6=\frac{1}{42},\ \mathrm{B}_8=-\frac{1}{30},\ \ldots,$$

les *Nombres de Bernoulli, définis* par l'égalité *symbolique*

$$(\mathrm{B}+1)^p-\mathrm{B}^p=p.\qquad(p=1,2,3,4,\cdots)$$

Au moyen de cette égalité, et de la *formule de Taylor*, on trouve facilement la *relation symbolique générale*

$$f(x + \mathrm{B}) - f(x - 1 + \mathrm{B}) = f'(x), \tag{7}$$

due à M. Lucas. Dans une *Note sur le Calcul symbolique*, nous avons donné une démonstration rigoureuse de cette féconde relation. [*Mathesis*, t. III.]

III. *Calcul approché de la fonction harmonique.* 1. La propriété fondamentale de cette fonction est exprimée par l'égalité

$$\mathrm{H}(x) - \mathrm{H}(x - 1) = \frac{1}{x}\cdot \tag{8}$$

D'autre part, si l'on fait $f(x) = \mathcal{L}.\, x$, dans l'égalité (7), celle-ci devient

$$\mathcal{L}.(x + \mathrm{B}) - \mathcal{L}.(x - 1 + \mathrm{B}) = \frac{1}{x}\cdot$$

Comparant avec (8), on obtient

$$\mathrm{H}(x) - \mathcal{L}.(x + \mathrm{B}) = \mathrm{H}(x - 1) - \mathcal{L}.(x - 1 + \mathrm{B}). \tag{9}$$

2. Soit ε une quantité *donnée*, telle que l'on ait

$$0 \leqq \varepsilon < 1.$$

Si l'on fait $x = \varepsilon + n$, n étant un *nombre entier variable*, l'égalité (9) montre que l'on peut poser

$$\mathrm{H}(x) - \mathcal{L}.(x + \mathrm{B}) = \mathrm{C}_\varepsilon, \quad [x = \varepsilon + n]$$

d'où

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{C}_\varepsilon + \mathcal{L}.x + \frac{\mathrm{B}_1}{x} - \frac{\mathrm{B}_2}{2x^2} + \frac{\mathrm{B}_3}{3x^3} - \frac{\mathrm{B}_4}{4x^4} + \cdots, \tag{10}$$

C_ε étant une constante, *par rapport à* n.

3. Nous allons faire voir que C_ε est aussi constante *par rapport à* ε. Pour cela, faisons indéfiniment croître n. La formule (10) montre que l'on a

$$\lim\left[\mathrm{H}(\varepsilon + n) - \mathcal{L}.(\varepsilon + n)\right] = \mathrm{C}_\varepsilon.$$

D'autre part, d'après la formule (5), $\mathrm{H}(x)$ est une fonction de x, continuellement croissante avec x. Il en est de même de $\mathcal{L}.x$. Donc

$$\mathrm{H}(n) - \mathcal{L}.(n+1) < \mathrm{H}(\varepsilon + n) - \mathcal{L}.(\varepsilon + n) < \mathrm{H}(n+1) - \mathcal{L}.n,$$

ou bien

$$\left[\mathrm{H}(n) - \mathcal{L}.n\right] - \mathcal{L}.\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \mathrm{H}(\varepsilon + n) - \mathcal{L}.(\varepsilon + n) < \left[\mathrm{H}(n) - \mathcal{L}.n\right] + \frac{1}{n+1},$$

d'où l'on déduit

$$\lim \left[\mathrm{H}(\varepsilon + n) - \mathcal{L}.(\varepsilon + n)\right] = \lim \left[\mathrm{H}(n) - \mathcal{L}.n\right],$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{C}_\varepsilon = \mathrm{C}_0.$$

Ainsi, C_ε *est aussi indépendant de* ε. C'est une *constante* que l'on désigne par C, et que l'on appelle *constante d'Euler*. On peut la définir par l'égalité

$$\mathrm{C} = \sum_1^\infty \left[\frac{1}{p} - \mathcal{L}.\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right] = 0{,}577\ 215\ 664\ 901\ 532\ 86\cdots$$

4. *Remarque.* Le but des derniers développements est de démontrer que $\mathrm{H}(x) - \mathcal{L}.x$ tend vers une limite finie et *déterminée*, quand x augmente indéfiniment.

5. D'après tout ce qui précède, la formule (10) peut définitivement s'écrire :

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{C} + \mathcal{L}.x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{12x^2} + \frac{1}{120x^4} - \frac{1}{252x^6} + \cdots \qquad (11)$$

En s'arrêtant aux premiers termes, on peut calculer les valeurs de la fonction harmonique, avec une approximation d'autant plus grande que x est plus grand.

IV. 1. Si x est un *nombre entier* n, la dernière formule donne la somme des n premiers termes de la *série harmonique*. Bien des formules spéciales ont été présentées sur ce sujet. Nous citerons, en particulier, celle-ci :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \mathrm{C} + \mathcal{L}.\sqrt{n(n+1)} + \frac{\varepsilon}{6n(n+1)}, \qquad (12)$$

ε étant une fraction proprement dite. [*Mathesis,* t. I, p. 143.]

2. Pour démontrer cette formule, nous avons employé un procédé assez singulier, dont l'idée première est due à M. Glaisher (*Nouv. Correspondance mathématique,* t. V, p. 47). Ce procédé est souvent applicable, et il pourrait être exposé dans les Cours *élémentaires* d'Analyse. (*Voir* 4, 5. *Voir aussi* IX, 2, 3.)

3. Nous partons de l'égalité connue

$$\mathcal{L}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}} = \frac{1}{n} + \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{n^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{n^7} + \cdots\right]$$

Si l'on désigne par u_{n-1} la quantité entre crochets, et si l'on change successivement n en $n-1$, $n-2$, $n-3$, ..., 4, 3, 2, on obtient, par addition,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \mathcal{L}\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} + 1 - S_{n-1}, \quad (13)$$

pourvu que l'on pose

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1}.$$

4. Pour calculer S_{n-1}, observons d'abord que l'on a

$$0 < u_{n-1} < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5} + \frac{1}{n^7} + \cdots\right] = \frac{1}{6}\left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n}\right]; \quad (14)$$

puis, par addition,

$$0 < S_{n-1} < \frac{1}{12} - \frac{1}{6n(n+1)}.$$

Ainsi, quand n augmente indéfiniment, S_{n-1} tend vers une limite S, comprise entre 0 et $\frac{1}{12}$.

5. Cela posé, on a

$$S - S_{n-1} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

Donc, d'après (14),

$$0 < S - S_{n-1} < \frac{1}{6n(n+1)};$$

ce qui permet de poser

$$S - S_{n-1} = \frac{\varepsilon}{6n(n+1)}$$

6. Substituant, dans (13), la valeur de S_{n-1}, donnée par la dernière égalité, et désignant par C la quantité *constante*

$$1 - S - \frac{1}{2}\mathcal{L}.2,$$

on obtient la formule (12)

V. *Sur une fonction* h. 1. D'après (11), on peut poser

$$H(x) = C + \mathcal{L}.x + \frac{1}{2x} - h(x),$$

$h(x)$ étant une fonction de x, qui tend vers zéro, quand x augmente sans limite. Il est intéressant d'étudier cette nouvelle fonction, dont chaque propriété correspond à une propriété de la fonction H. Par exemple, à la relation (8) correspond celle-ci :

$$h(x) - h(x+1) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right] - \mathcal{L}.\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

laquelle, si l'on a égard à la double inégalité

$$\frac{2}{2x+1} < \mathcal{L}.\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+2} + \frac{4}{2x+1}\right],$$

facile à trouver, donne

$$\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+2} - \frac{2}{2x+1}\right] < h(x) - h(x+1)$$
$$< \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+2} - \frac{2}{2x+1}\right].$$

La différence entre les deux limites est moindre que $\frac{1}{12x^3}$.

2. On trouve aisément :

$$h(1) = 0{,}0772\ldots,\quad h(2) = 0{,}0203\ldots,\quad h(3) = 0{,}0091\ldots,$$
$$h(4) = 0{,}0051\ldots,\quad h(5) = 0{,}0033\ldots;$$

puis

$$h(1) + h(2) + h(3) + \cdots = \mathcal{L}.\sqrt{2\pi} - \frac{1+C}{2} = 0{,}1303\ldots$$

3. On trouve aussi

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=0{,}2703\ldots;\quad h\left(\frac{3}{2}\right)=0{,}0356\ldots,\quad h\left(\frac{5}{2}\right)=0{,}0131\ldots,$$

$$h\left(\frac{7}{2}\right)=0{,}0067\ldots,\quad h\left(\frac{9}{2}\right)=0{,}0040\ldots;$$

puis

$$h\left(\frac{1}{2}\right)+h\left(\frac{3}{2}\right)+h\left(\frac{5}{2}\right)+\cdots=\frac{1}{2}\mathcal{L}.2=0{,}3465\ldots$$

4. Les dernières égalités sont contenues dans la relation générale

$$h(x+1)+h(x+2)+h(x+3)+\cdots$$
$$=\mathcal{L}.\sqrt{2\pi}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left[\gamma'(x)-1\right]-\gamma(x).$$

5. La fonction $h(x)$ n'est autre chose que le double de l'intégrale définie

$$\mathrm{R}(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi}{e^{2\pi x\operatorname{tg}\varphi}-1}.$$

VI. *Calcul approché de la fonction* Γ. 1. D'après (6) et (11), on a

$$\gamma'(x)=\mathcal{L}.x+\frac{B_1}{x}-\frac{B_2}{2x^2}+\frac{B_3}{3x^3}-\frac{B_4}{4x^4}+\cdots$$

Intégrant, on trouve

$$\gamma(x)=\mathrm{M}+x\mathcal{L}.x-x+B_1\mathcal{L}.x+\frac{B_2}{1.2x}-\frac{B_3}{2.3x^2}+\frac{B_4}{3.4x^3}-\cdots,$$

ou

$$\gamma(x)=\mathrm{M}+\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}.x-x+g(x),\tag{15}$$

pourvu que l'on pose

$$g(x)=\frac{B_2}{2x}-\frac{B_3}{6x^2}+\frac{B_4}{12x^3}-\frac{B_5}{20x^4}+\cdots\tag{16}$$

2. Si l'on appelle N la *constante* e^{M}, la formule (15) donne

$$\Gamma(1+x)=\mathrm{N}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+g(x)}.\tag{17}$$

Il nous reste à déterminer N.

3. A cet effet, dans la formule (3), substituons, à $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$, $\Gamma(n+1)$, $\Gamma(2n+1)$, leurs valeurs, données par (17). On trouve

$$\mathrm{N}e^{\frac{1}{2}+g(n)+g\left(n-\frac{1}{2}\right)-g(2n)}=\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n.$$

En conséquence, si n augmente sans limite, $\mathrm{N}=\sqrt{2\pi}$, car $g(\infty)=0$, d'après (16), et $\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n$ tend vers $e^{\frac{1}{2}}$.

4. Donc, enfin,

$$\Gamma(1+x)=\sqrt{2\pi x}\,.\,x^x e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}-\frac{1}{1680x^7}+\cdots}. \tag{18}$$

Telle est la *formule de Stirling*.

VII. *Sur la fonction* g. 1. Si, dans l'égalité

$$\gamma(x+1)-\gamma(x)=\mathcal{L}.(x+1),$$

on substitue à $\gamma(x+1)$ et $\gamma(x)$, leurs valeurs, données par la formule (15), on trouve d'abord

$$g(x)-g(x+1)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}.\left(1+\frac{1}{x}\right)-1;$$

puis, en développant,

$$g(x)-g(x+1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2x+1)^4}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{(2x+1)^6}+\cdots;$$

d'où

$$0<g(x)-g(x+1)<\frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^4}+\frac{1}{(2x+1)^6}+\cdots\right],$$

ou bien

$$0<g(x)-g(x+1)<\frac{1}{12}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right].$$

On voit que la fonction $g(x)$ va en décroissant, quand x augmente.

2. Changeant x en $x+1$, $x+2$, $x+3$, ..., et ajoutant, on obtient

$$0<g(x)<\frac{1}{12x},$$

ce qui permet de poser

$$g(x) = \frac{\varepsilon}{12x},$$

ε étant une fraction proprement dite.

3. Donc, enfin, la formule (18) peut être écrite ainsi :

$$\Gamma(1+x) = \sqrt{2\pi x}\,.\,x^x e^{-x+\frac{\varepsilon}{12x}}. \tag{19}$$

VIII. *Remarques*. 1. On peut arriver directement à la formule (18), sans passer par la fonction H, en posant

$$f(x) = x \wp . x - x,$$

dans la relation symbolique (7). Observons, d'ailleurs, que la relation (7) peut servir, de la même manière, au calcul approché de toute fonction, satisfaisant à certaines conditions, qu'il est facile d'établir.

2. Dans le *Cours* de M. Hermite [1881-82, second semestre, p. 106], on trouve une démonstration de la formule (18), ayant pour point de départ la fonction

$$\gamma''(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+3)^2} + \cdots$$

dont la propriété fondamentale est exprimée par la relation

$$\gamma''(x) - \gamma''(x-1) = -\frac{1}{x^2}.$$

Pour $f(x) = \frac{1}{x}$, la relation (7) devient

$$\frac{1}{x+B} - \frac{1}{x-1+B} = -\frac{1}{x^2}.$$

Donc, en donnant à x les valeurs ε, $\varepsilon+1$, $\varepsilon+2$, $\varepsilon+3$, ..., nous avons

$$\gamma''(x) - \frac{1}{x+B} = A,$$

c'est-à-dire

$$\gamma''(x) = A + \frac{1}{x} - \frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x^3} - \frac{B_3}{x^4} + \cdots$$

Mais $\gamma''(\infty) = 0$; puis $A = 0$, *quel que soit* ε. Il en résulte que l'on peut écrire, définitivement,

$$\gamma''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{30x^5} + \frac{1}{42x^7} - \frac{1}{30x^9} + \cdots$$

Intégrant deux fois, on trouve (18).

3. Il y a plusieurs moyens de déterminer la constante N. On peut, d'après M. Serret, employer la *formule de Wallis*, ainsi qu'on le verra plus loin.

4. Pour $x = n$, la formule (19) devient

$$1.2.3 \ldots n = \sqrt{2\pi n} \,.\, n^n e^{-n+\frac{\varepsilon}{12n}}.$$

C'est la *formule de Stirling*, telle que plusieurs géomètres ont tâché de la démontrer *élémentairement*. Dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. V, p. 44), on trouve une *démonstration élémentaire*, publiée par M. Mansion, d'après M. Glaisher. En lisant attentivement cet article, nous y avons reconnu une idée très ingénieuse, laquelle, appliquée différemment, nous a permis de simplifier considérablement la démonstration du géomètre anglais, au point que M. Catalan jugeait notre démonstration apte à faire enseigner la formule de Stirling dans les Cours élémentaires d'analyse. [*Nouvelle Correspondance mathématique*, t. VI, p. 354.] C'est la même idée que nous avons appliquée précédemment au calcul approché de H(n). [*Voir* IV, 4, 5.]

5. Les principes du calcul symbolique n'ont, en eux, rien de bien *transcendant;* de sorte que la démonstration, donnée plus haut, peut être considérée comme *élémentaire*. Mais l'état de l'enseignement n'étant pas encore tel que nous le désirons, nous croyons devoir transcrire ici notre démonstration, en attendant que le calcul symbolique soit admis dans l'enseignement élémentaire.

IX. *Démonstration élémentaire de la formule de Stirling.*

1. Nous partons de la formule connue

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) \mathcal{L} \frac{n}{n-1}$$
$$= 1 + \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{(2n-1)^6} + \cdots\right].$$

Après avoir désigné par u_{n-1} la quantité entre crochets, et par S_{n-1} la somme

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1},$$

changeons successivement n en $n-1, n-2, n-3, \ldots, 4, 3, 2$; et ajoutons. Nous trouvons

$$\left(n+\frac{1}{2}\right) \mathcal{L}. n - \mathcal{L}.(1.2.3 \ldots n) = n - 1 + S_{n-1};$$

d'où

$$1.2.3 \ldots n = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} . e^{1-S_{n-1}}. \tag{20}$$

2. On a

$$0 < u_{n-1} < \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{1}{(2n-1)^6} + \cdots\right],$$

ou

$$0 < u_{n-1} < \frac{1}{12}\left[\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right]; \tag{21}$$

puis, par addition,

$$0 < S_{n-1} < \frac{1}{12} - \frac{1}{12n}.$$

Par conséquent, si n augmente indéfiniment, S_{n-1} tend vers une limite S, comprise entre 0 et $\frac{1}{12}$.

3. Cela posé, on a

$$S - S_{n-1} = u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

Donc, d'après (21),

$$0 < S - S_{n-1} < \frac{1}{12n},$$

ou

$$S - S_{n-1} = \frac{\varepsilon}{12n},$$

ε étant une fraction proprement dite.

4. Substituant, dans (20), S_{n-1} par sa valeur, donnée par la dernière égalité, et désignant par N la *constante* e^{1-S}, on obtient

$$1.2.3 \ldots n = N n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\varepsilon}{12n}}. \tag{22}$$

5. Pour déterminer N, considérons l'expression

$$f(n)=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot$$

Une transformation visible donne

$$f(n)=\frac{2^{4n-1}}{n}\left[\frac{(1.2.3\ldots n)^2}{1.2.3\ldots 2n}\right]^2,$$

ou bien, d'après (22),

$$f(n)=\frac{N^2}{4}e^{\frac{4\varepsilon-\varepsilon'}{12n}},$$

ε' étant, comme ε, une fraction proprement dite. Si n augmente indéfiniment, $f(\infty)=\frac{N^2}{4}$. D'après (4), on a $f(\infty)=\frac{\pi}{2}$. Donc $N=\sqrt{2\pi}$.

6. En conséquence, la formule (22) devient, finalement,

$$1.2.3\ldots n=\sqrt{2\pi n}\,.\,n^n e^{-n+\frac{\varepsilon}{12n}}.$$

X. *Autres propriétés de la fonction harmonique.* 1. Aux nombreuses propriétés de cette fonction, nous ajouterons celle qui est exprimée par la relation

$$\left.\begin{aligned}&\mathrm{H}\left(\frac{x+1}{n}\right)+\mathrm{H}\left(\frac{x+2}{n}\right)+\mathrm{H}\left(\frac{x+3}{n}\right)+\cdots+\mathrm{H}\left(\frac{x+n}{n}\right)\\&\qquad=n\left[\mathrm{H}(x+n)-\mathcal{L}.n\right],\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

dont nous avons signalé précédemment un cas particulier, $(x=0)$. Pour $n=2$, on a la formule

$$\mathrm{H}(2x)-\frac{1}{2}\left[\mathrm{H}(x)+\mathrm{H}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]=\mathcal{L}.2,$$

analogue à la *formule de Legendre.*

2. Pour $x=(\alpha-1)\,n$, la formule (23) devient

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n}\mathrm{H}\left(\alpha-1+\frac{p}{n}\right)=\mathrm{H}(\alpha n)-\mathcal{L}.n;$$

puis, si l'on fait tendre n vers l'infini :

$$\int_{\alpha-1}^{\alpha} \mathrm{H}(x)dx = \mathrm{C} + \mathcal{L}.\alpha. \tag{24}$$

3. Donnant à α les valeurs $1, 2, 3, \ldots x$, et ajoutant, on trouve encore

$$\int_{0}^{x} \mathrm{H}(x)dx = \mathrm{C}x + \gamma(x), \tag{25}$$

ce qui nous ramène à la formule (6). Ainsi, la relation (23) est *caractéristique* de la fonction H.

4. L'égalité (24) revient à celle-ci :

$$\int_0^1 \frac{d\varphi}{1-\varphi} \int_{\alpha-1}^{\alpha} (1-\varphi^x)dx = \mathrm{C} + \mathcal{L}.\alpha\,;$$

et cette dernière donne

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{e^z - 1} - \frac{e^{-\alpha z}}{z}\right] dz = \mathrm{C} + \mathcal{L}.\alpha,$$

si l'on prend $\varphi = e^{-z}$. En particulier :

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{1}{e^z - 1} - \frac{e^{-z}}{z}\right] dz = \mathrm{C}.$$

Il en résulte la formule connue

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-\alpha z}}{z} dz = \mathcal{L}.\alpha.$$

5. Les mêmes calculs s'appliquent à la fonction R. Nous avons vu que

$$\mathrm{H}(x) + 2\mathrm{R}(x) = \mathrm{C} + \mathcal{L}x + \frac{1}{2x}.$$

L'intégration, entre les limites $\alpha - 1$ et α, donne

$$\int_{\alpha-1}^{\alpha} \mathrm{H}(x)dx + 2\int_{\alpha-1}^{\alpha} \mathrm{R}(x)dx = \mathrm{C} - \left[g(\alpha-1) - g(\alpha)\right];$$

d'où, si l'on emploie la relation (24) :

$$\int_{\alpha-1}^{\alpha} \mathrm{R}(x)dx = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \mathcal{L} \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \frac{1}{2}. \tag{26}$$

6. Si l'on donne à α les valeurs 2, 3, 4, ... x, on obtient, par addition :

$$\int_1^x \mathrm{R}(x)dx = \frac{1}{2}\left(1-\mathcal{L}.\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2}g(x),$$

d'où l'on déduit facilement que la fonction h est, au signe près, la dérivée de la fonction g : résultat évident. Pour x infini :

$$\int_1^\infty \mathrm{R}(x)dx = \frac{1}{2}\left(1-\mathcal{L}.\sqrt{2\pi}\right) = 0,0405\ldots \tag{27}$$

7. L'égalité (26) revient à celle-ci :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}\varphi\, d\varphi \int_{\alpha-1}^{\alpha} \frac{dx}{e^{2\pi x \operatorname{tg}\varphi}-1} = \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \frac{1}{2}.$$

D'après cela,

$$\int_0^\infty \mathcal{L}\frac{1-e^{-(\alpha-1)x}}{1-e^{-\alpha x}} \cdot \frac{dx}{x^2+4\pi^2} = \left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - \frac{1}{2}.$$

On a aussi, d'après (27) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathcal{L}.\left(1-e^{-2\pi \operatorname{tg}\varphi}\right)d\varphi = \pi\left(1-\mathcal{L}.\sqrt{2\pi}\right) = 0,2546\ldots$$

Cette intégrale donne lieu à des développements intéressants.

8. Le même procédé, appliqué à l'équation (25), donne

$$\gamma(x) = \int_0^1 \left[\frac{1-\varphi^x}{1-\varphi} - x\right]\frac{d\varphi}{\mathcal{L}\varphi}. \tag{28}$$

Telle est, sous forme d'intégrale définie, l'expression du logarithme népérien de la fonction $\Gamma(1+x)$.

9. L'intégration de l'égalité (23) donne la *formule de Gauss :*

$$\gamma\left(\frac{x+1}{n}\right) + \gamma\left(\frac{x+2}{n}\right) + \gamma\left(\frac{x+3}{n}\right) + \cdots + \gamma\left(\frac{x+n}{n}\right)$$
$$= \gamma(x+n) + (n-1)\mathcal{L}.\sqrt{2\pi} - \left(n+x+\frac{1}{2}\right)\mathcal{L}\,n.$$

Celle-ci, pour $x = (\alpha-1)\,n$, devient

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{p=n}\gamma\left(\alpha-1+\frac{p}{n}\right) = \mathcal{L}.\sqrt{2\pi} + \alpha\mathcal{L}.\alpha - \alpha + \frac{1}{n}\mathcal{L}.\sqrt{\alpha} + \frac{\varepsilon}{12\alpha n^2},$$

ε étant une fraction proprement dite. Si n augmente indéfiniment,

$$\int_{\alpha-1}^{\alpha} \gamma(x)\,dx = \mathcal{L}.\sqrt{2n} + \alpha\,\mathcal{L}.\,\alpha - \alpha;$$

ou bien, d'après (28),

$$\int_0^1 \frac{d\varphi}{\mathcal{L}.\varphi} \int_{\alpha-1}^{\alpha} \left[\frac{1-\varphi^x}{1-\varphi} - x\right] dx = \mathcal{L}.\sqrt{2\pi} + \alpha\,\mathcal{L}.\,\alpha - \alpha;$$

ou encore :

$$\int_0^1 \left[\frac{\varphi^{\alpha-1}}{\mathcal{L}.\varphi} + \frac{1}{1-\varphi} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\right] \frac{d\varphi}{\mathcal{L}.\varphi} = \mathcal{L}.\sqrt{2\pi} + \alpha\,\mathcal{L}.\,\alpha - \alpha.$$

En particulier :

$$\int_1^{\infty} \left[\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{\mathcal{L}.x}\right] \frac{dx}{\mathcal{L}.x} = 2\left(1 - \mathcal{L}.\sqrt{2\pi}\right) = 0{,}1621\ldots$$

10. L'emploi répété des imaginaires permet de déduire, de chacune des intégrales qui précèdent, les valeurs d'une infinité d'autres intégrales définies. C'est ce que nous nous proposons de montrer, dans une prochaine Note d'analyse, qui aura pour objet l'*étude de la fonction harmonique*, dans ses relations avec la théorie des nombres.

Nous justifierons, en même temps, pour les intégrales doubles considérées, l'intervertissement de l'ordre des intégrations, qui, comme on sait, n'est pas toujours légitime.

XI. *Démonstration de la formule* (23). — 1. Soit

$$S(x) = H\left(\frac{x+1}{n}\right) + H\left(\frac{x+2}{n}\right) + H\left(\frac{x+3}{n}\right) + \cdots + H\left(\frac{x+n}{n}\right)$$

On a

$$S(x) - S(x-1) = H\left(1 + \frac{x}{n}\right) - H\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{n}{x+n}\cdot$$

D'autre part,

$$H(x+n) - H(x-1+n) = \frac{1}{x+n}\cdot$$

Donc

$$nH(x+n) - S(x) = nH(x-1+n) - S(x-1) \qquad (29)$$

2. ε étant une quantité *donnée*, telle que l'on ait

$$0 \leqq \varepsilon < 1,$$

et p un *nombre entier variable*, si l'on fait $x = \varepsilon + p$, l'égalité (29) permet de poser

$$nH(x+n) - S(x) = A_\varepsilon, \quad [x = \varepsilon, \varepsilon+1, \varepsilon+2, \varepsilon+3, \ldots]$$

A_ε étant une *constante, par rapport à* p.

3. Nous allons prouver que A_ε est aussi *constante par rapport à* ε. A cet effet, observons que, d'après (3), la fonction H, et, par suite, la fonction S, sont constamment croissantes avec x. Il en résulte que l'on peut écrire

$$\left\{\begin{array}{l} nH(p+n) - S(p+1) < nH(\varepsilon+p+n) - S(\varepsilon+p), \\ nH(\varepsilon+p+n) - S(\varepsilon+p) < nH(p+n+1) - S(p), \end{array}\right.$$

ou bien

$$A_0 - \frac{n}{p+n+1} < A_\varepsilon < A_0 + \frac{n}{p+n+1}.$$

Si p augmente indéfiniment, $\frac{n}{p+n+1}$ tend vers zéro, et l'on a

$$A_\varepsilon = A_0.$$

4. Ainsi, la quantité A_ε, *indépendante de* p, est aussi *indépendante de* ε. Elle ne peut être fonction que de n. Conséquemment, on peut écrire

$$nH(x+n) - S(x) = f(n), \tag{30}$$

quel que soit x.

5. Pour déterminer la fonction f, faisons croître x indéfiniment. La formule (11) montre que le premier membre de (30) a même limite que l'expression

$$\ell.\frac{(x+n)^n}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+n)} + n\ell.n.$$

Donc

$$f(n) = nln.$$

6. Remplaçant, dans (30), les fonctions f et S par leurs expressions, on obtient la formule (23).

Torre Annunziata, 13 août 1882.

Ernest CESÁRO.

ADDITIONS ET RECTIFICATIONS.

A. — I. Dans les *Comptes-Rendus* de l'Académie des Sciences, de Paris (19 mars 1883), M. Stieltjes démontre que l'on a :

$$\lim\left[\frac{\theta(1)+\theta(2)+\cdots+\theta(n)}{n}-\mathcal{L}.\,n\right]=0{,}154\,431\,3\ldots, \qquad (1)$$

lorsque n augmente indéfiniment. Cette proposition est due à Dirichlet. Elle a été retrouvée par MM. Berger et Stieltjes, et par nous. (*Voir* page 126.) Nous remarquons, comme M. Stieltjes, que, si l'on pose

$$Q_p=\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p}\right],$$

on a

$$\theta(1)+\theta(2)+\theta(3)+\cdots+\theta(n=Q_n.$$

Notre démonstration repose sur l'égalité remarquable

$$Q_\alpha+Q_\beta-Q_n=n, \qquad (2)$$

à laquelle satisfait la fonction Q, lorsque $\alpha\beta=n$. Pour $\alpha=\beta=\sqrt{n}$, elle donne

$$Q_n=2Q_{\sqrt{n}}-n.$$

Or, en négligeant des quantités de l'ordre de $\sqrt{n}$,

$$Q_{\sqrt{n}}=n\mathrm{H}(\sqrt{n})=n\,(\mathcal{L}.\,\sqrt{n}+C).$$

Donc

$$Q_n=n\,\mathcal{L}.\,n+(2C-1)\,n,$$

relation d'où l'on tire

$$\lim\left[\frac{Q_n}{n}-\mathcal{L}.\,n\right]=2C-1,$$

pour n infini. C'est la formule (1).

II. Plus généralement, si $\theta_r(n)$ est le nombre des diviseurs de n, qui, divisés par s, donnent le reste r, on a

$$\lim\left[s\,\frac{\theta_r(1)+\theta_r(2)+\cdots+\theta_r(n)}{n}-\mathcal{L}.n\right]=2C-1-\mathcal{L}.s-\int_0^1\frac{1-x^{\frac{r}{s}-1}}{1-x}\,dx,$$

r ne pouvant être nul. Pour $r=s=1$, on trouve la formule de M. Stieltjes. Pour $s=2$, $\theta_1(n)$ représente le nombre des diviseurs *impairs* de n, et $\theta_2(n)$ le nombre des diviseurs *pairs*. On trouve :

$$\lim\left[2\,\frac{\theta_1(1)+\theta_1(2)+\cdots+\theta_1(n)}{n}-\mathcal{L}.n\right]=\mathcal{L}.2+(2C-1)=0,847\,578\,5\ldots$$

$$\lim\left[\mathcal{L}.n-2\,\frac{\theta_2(1)+\theta_2(2)+\cdots+\theta_2(n)}{n}\right]=\mathcal{L}.2-(2C-1)=0,538\,715\,8\ldots$$

III. Quant à l'égalité (2), on peut la démontrer, très simplement, en considérant les couples de valeurs, entières et positives, de x et y, satisfaisant à la condition $xy \leqq n$. Pour $x=p$, on a $y \leqq \frac{n}{p}$, et l'on ne peut attribuer, à y, que $\left[\frac{n}{p}\right]$ valeurs entières et positives. Faisant varier p de 1 à n, on trouve que le nombre total des couples est

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]=Q_n$$

On peut partager ces couples en trois classes, suivant que l'on a :

$$\begin{aligned}&(a)\ldots\ x\leqq\alpha, &&y\leqq\beta;\\ &(b)\ldots\ x>\alpha, &&y\leqq\beta;\\ &(c)\ldots\ x\leqq\alpha, &&y>\beta.\end{aligned}$$

Le nombre des couples (a) est, évidemment, $\alpha\beta=n$. Le nombre des couples (b) est :

$$\left[\frac{n}{\alpha+1}\right]+\left[\frac{n}{\alpha+2}\right]+\left[\frac{n}{\alpha+3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]=Q_n-Q_\alpha.$$

De même, le nombre des couples (c) est Q_n-Q_β. Conséquemment :

$$Q_n=n+(Q_n-Q_\alpha)+(Q_n-Q_\beta).$$

Réduisant, on trouve (2).

5. — Dans les théorèmes des pages 177, 188, au lieu de 62 *contre* 38, on doit lire 61 *contre* 39; car la valeur exacte de $\ell.\,4 - 1$ est 0,386 294 36... D'ailleurs, dans toutes les propositions analogues, si l'on veut exprimer les probabilités en nombres simples, avec la plus grande approximation possible, on doit recourir, comme l'on sait, à la théorie des fractions continues. Ainsi, pour $\ell.\,2$, on peut prendre la valeur très approchée $\frac{61}{88}$, ou la valeur plus simple $\frac{9}{13}$. On trouve $\frac{5}{13}$ pour valeur de $\ell.\,4 - 1$, et les théorèmes cités peuvent s'énoncer ainsi :

« *Il y a environ* 8 *à parier, contre* 5, *que le reste obtenu en divisant un nombre donné, très grand, par un nombre plus petit, pris au hasard, est inférieur à la moitié du diviseur.* »

« *Il y a environ* 8 *à parier, contre* 5, *que, si l'on prend, au hasard, deux nombres entiers, et que l'on divise le plus grand par le plus petit, le reste de la division est inférieur à la moitié du diviseur.* »

Le théorème de la page 297 sera plus exactement énoncé de la manière suivante :

« *Ayant pris, au hasard, une quantité positive, commensurable, il y a environ* 17 *à parier, contre* 9, *que le plus grand nombre entier qu'elle renferme est pair* » (*).

Si l'on prend $\frac{6}{\pi^2} = \frac{31}{51}$, le théorème de la page 146 pourra s'énoncer ainsi :

« *Il y a environ* 31 *à parier, contre* 20, *que deux nombres quelconques sont premiers entre eux.* »

De même :

« *Il y a environ* 41 *à parier, contre* 10, *qu'un nombre entier, pris au hasard, est composé d'un nombre pair, plutôt que d'un nombre impair de facteurs premiers, égaux ou inégaux.* »

(*) Voici comment il faut entendre ce théorème : « *Soit* P_n *la probabilité que le plus grand nombre entier contenu dans une fraction, dont les termes ne dépassent pas* n, *est pair. On a* $P_\infty = \frac{1}{2}\,\ell.\,2$. » Actuellement, nous cherchons à résoudre la question suivante : « *Soit* $P_{a,b}$ *la probabilité que le plus grand nombre entier contenu dans une quantité commensurable, comprise entre* a *et* b, *est pair. Trouver* $P_{0,\infty}$ ».

« *Il y a environ 25 à parier, contre 22, qu'un nombre entier, pris au hasard, n'est pas le produit d'un nombre pair de facteurs premiers, inégaux.* »

« *Il y a environ 37 à parier, contre 5, qu'un nombre entier, pris au hasard, n'est pas le produit d'un nombre impair de facteurs premiers, inégaux.* »

etc., etc...

C. — I. Si P_δ est la probabilité que m nombres quelconques admettent δ pour plus grand commun diviseur, la probabilité est δ^m fois plus grande si les m nombres sont pris parmi les multiples de δ. Or, la probabilité que m multiples de δ admettent δ pour plus grand commun diviseur est égale à la probabilité que m nombres quelconques soient premiers entre eux; car, pour que δ soit le plus grand commun diviseur de $\lambda\delta$, $\mu\delta$, $\nu\delta$, ..., il faut et il suffit que λ, μ, ν, ..., soient premiers entre eux. Donc

$$P_\delta \delta^m = P_1;$$

puis :

$$P_1 + P_2 + P_3 + \cdots = P_1\left(1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \cdots\right) = P_1 S_m.$$

Le premier membre est égal à l'unité. En conséquence :

$$P_1 = \frac{1}{S_m}.$$

Plus généralement :

$$P_\delta = \frac{1}{S_m \delta^m}.$$

Par exemple :

« *La probabilité que quatre nombres quelconques soient premiers entre eux est* $\frac{90}{\pi^4}$. »

En d'autres termes :

« *Ayant pris, au hasard, quatre nombres entiers, il y a environ 12 à parier, contre 1, qu'ils n'ont pas de facteurs communs.* »

etc., etc...

II. Ces considérations nous ont conduit à imaginer une nouvelle fonction $\Phi_k(x)$, dont il sera question ultérieurement, et qui représente la *quotité des groupes de* k *nombres, non supérieurs a* x, *et constituant, avec* x, *des groupes de nombres premiers entre eux.* La propriété fondamentale de cette fonction est exprimée par la relation

$$\Phi_k(a) + \Phi_k(b) + \Phi_k(c) + \cdots = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k},$$

dans laquelle $a, b, c, \ldots$ sont tous les diviseurs de n.

Si $u, v, w, \ldots$ sont les facteurs premiers de n, autres que l'unité, et si l'on pose

$$\varpi_k(n) = n^k\left(1 - \frac{1}{u^k}\right)\left(1 - \frac{1}{v^k}\right)\left(1 - \frac{1}{w^k}\right)\cdots,$$

on peut écrire, *symboliquement*,

$$\Phi_k(n) = \frac{\varpi(\varpi+1)(\varpi+2)\cdots(\varpi+k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}.$$

Cette fonction jouit de propriétés nombreuses, qui seront développées dans un *second Mémoire.*

D. — Aux démonstrations de Dirichlet, Mertens, Perott, Sylvester, relatives à la valeur moyenne de la fonction φ, il faut joindre celle que M. Halphen vient de publier dans les *Comptes-Rendus* de l'Académie des Sciences, de Paris (5 mars 1883).

M. Halphen ajoute : « *Je prouverai que la fonction de M. Tchébychef, somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à* x, *est asymptotique à* x, *ce qu'on n'avait pu établir jusqu'à présent.* »

En attendant la démonstration annoncée, nous ferons observer que, dans notre Note *sur une fonction* ν, nous avons établi l'égalité moyenne

$$\sigma(x) + \sigma\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \sigma\left(x^{\frac{1}{3}}\right) + \cdots \equiv x - 2C,$$

dans laquelle $\sigma(x)$ est la *fonction de Tchébychef,* somme des logarithmes népériens de tous les nombres premiers, non supérieurs à x. On en déduit immédiatement que cette fonction est asymptotique à x.

Faisons remarquer aussi que le premier membre de l'égalité citée peut être mis sous la forme

$$\sum \left[\frac{\mathcal{L}\cdot x}{\mathcal{L}\cdot p}\right] \mathcal{L}\cdot p,$$

p devant être successivement remplacé par tous les nombres premiers, non supérieurs à x.

E. — I. La valeur moyenne de la fonction $\lambda(x)\mu(x)$ peut être évaluée très simplement, si l'on part de la relation

$$\lambda\left(\frac{n}{A}\right)\mu\left(\frac{n}{A}\right)+\lambda\left(\frac{n}{B}\right)\mu\left(\frac{n}{B}\right)+\lambda\left(\frac{n}{C}\right)\mu\left(\frac{n}{C}\right)+\cdots=1, \qquad (3)$$

dans laquelle A, B, C, ... sont tous les *diviseurs carrés* de n.

Observons d'abord que :

$$\lambda(x)\,\mu(x) = \left|\begin{array}{l} 1, \text{ si } x \textit{ n'admet pas} \text{ de diviseurs carrés, autres que } 1\,; \\ 0, \text{ si } x \textit{ admet} \text{ des diviseurs carrés, autres que } 1. \end{array}\right.$$

Or, si $d(x)$ est le *plus grand diviseur carré* de x, parmi les nombres $\frac{n}{A}, \frac{n}{B}, \frac{n}{C}, \cdots$, le seul qui n'admette pas de diviseurs carrés, autres que 1, est $\frac{n}{d(n)}\cdot$ La relation (3) est donc démontrée. Cela posé, si, dans la même relation, on attribue à n les valeurs 1, 2, 3, ..., n, on obtient, par addition,

$$F(q_1)+F(q_4)+F(q_9)+\cdots=n, \qquad (4)$$

pourvu que l'on pose

$$F(x)=\lambda(1)\mu(1)+\lambda(2)\mu(2)+\cdots+\lambda(x)\mu(x),$$

et que l'on désigne par q_p le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{n}{p}\cdot$ On peut tâcher de satisfaire à l'égalité (4), en posant $F(x)\equiv kx$, ce qui donne, en négligeant des quantités de l'ordre de $\sqrt{n}$,

$$kn\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots\right)=n;$$

d'où $k=\frac{6}{\pi^2}$, c'est-à-dire :

$$\lambda(x)\mu(x)\equiv\frac{6}{\pi^2}\cdot$$

II. Observons que $F(x)$ est le nombre des entiers, non supérieurs à x, qui n'admettent pas de diviseurs carrés, autres que 1. $F(x)$ est donc le nombre des termes de la série

$$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots,$$

qui ne surpassent pas x. Ainsi, en dessous de 100, on trouve 61 termes. Or, le nombre entier qui se rapproche le plus de $\frac{6}{\pi^2} \cdot 100$ est précisément 61.

III. Au lieu de (4), on peut écrire, plus généralement,

$$g(1)F(q_1) + g(4)F(q_4) + g(9)F(q_9) + \cdots = G(1) + G(2) + \cdots + G(n), \qquad (5)$$

en posant

$$G(x) = g\big(d(x)\big).$$

En effet, parmi les valeurs $1, 2, 3, \cdots, n$, de x, les seules qui donnent $d(x) = p^2$ sont celles pour lesquelles $\frac{x}{p^2}$ est un des nombres entiers, non supérieurs à q_{p^2}, qui n'admettent pas de diviseurs carrés, autres que 1. En particulier :

$$F(q_1) + 4F(q_4) + 9F(q_9) + \cdots = d(1) + d(2) + \cdots + d(n).$$

De même, pour $g(x) = \theta\big([\sqrt{x}]\big)$, $G(x)$ devient égal au nombre $T(x)$ des diviseurs carrés de x, et l'on a

$$\theta(1)F(q_1) + \theta(2)F(q_4) + \theta(3)F(q_9) + \cdots = T(1) + T(2) + \cdots + T(n);$$

etc., etc....

IV. La relation (5) peut être écrite ainsi :

$$\sum_{p=1}^{p=n} r(p)g(p)F(q_p) = \sum_{p=1}^{p=n} G(p),$$

$r(x)$ étant 1 ou 0, suivant que x est ou n'est pas un carré parfait. D'après les transformations d'identités, indiquées dans les premières Notes de ce Mémoire, on peut, après avoir posé

$$R(x) = g(1) + g(4) + g(9) + \cdots + g\big([\sqrt{x}]^2\big),$$

écrire

$$\sum_{p=1}^{p=n} \lambda(p)\mu(p)R(q_p) = \sum_{p=1}^{p=n} G(p).$$

Faisons, par exemple,

$$g(x) = 1, \quad G(x) = 1, \quad R(x) = [\sqrt{x}].$$

Nous trouvons que :

« *Si, α, β, γ, ... sont les entiers, non supérieurs à* n, *qui n'admettent pas de diviseurs carrés, autres que* 1, *et si $\rho(x)$ est la racine du plus grand carré contenu dans $\frac{n}{x}$, on a :*

$$\rho(\alpha) + \rho(\beta) + \rho(\gamma) + \cdots = n \text{ ».}$$

V. De même, pour $g(x) = x$, on trouve

$$d(x) \equiv k\sqrt{x},$$

k étant une constante, ayant la valeur

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots}{1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots}.$$

Pour évaluer cette constante, on peut calculer directement la valeur moyenne de $d(x)$, en prenant des valeurs de x suffisamment grandes. Ainsi, en se bornant à $x \overline{\gtrless} 100$, on trouve que k est, à peu près, 1,15.

On voit qu'il y a, dans ces égalités moyennes, une source de procédés, fort curieux, pouvant servir à l'évaluation approchée de certaines constantes. C'est par un procédé de ce genre que M. Berger est parvenu à calculer π, avec différents degrés d'approximation.

La fonction $d(x)$ entre dans l'identité remarquable

$$\lambda(a)\nu(a) + \lambda(b)\nu(b) + \lambda(c)\nu(c) + \cdots = \mathcal{L}.\frac{d(n)}{n},$$

que nous utiliserons dans la suite.

F. — I. $\vartheta(n)$ étant la totalité des nombres premiers, non supérieurs à n, la densité moyenne de ces nombres, entre 1 et n, est

$$\delta(n) = \frac{\vartheta(n)}{n}.$$

D'après la formule de Tchébychef, la densité des nombres premiers, aux environs de n, évidemment représentée par $\vartheta'(n)$, est

$$D(n) = \delta(n) - \delta^2(n).$$

A cause de $D(n) < \delta(n)$, on voit que les nombres premiers deviennent de moins en moins fréquents, à mesure que l'on avance dans la série des nombres naturels.

II. D'après la dernière remarque, l'emploi de la *formule asymptotique* donne, pour les valeurs accessibles de n, des résultats moyens trop faibles. On peut chercher à remplacer cette formule par une *formule empirique,* en exprimant que la densité réelle des nombres premiers, autour de n, égale la densité indiquée par la formule moyenne, pour les environs de εn, et en choisissant convenablement la quantité ε, qui doit être une fraction proprement dite, différant peu de l'unité. On doit donc poser

$$\Theta'(n) = \vartheta'(\varepsilon n),$$

c'est-à-dire

$$\Theta(n) = \frac{1}{\varepsilon}\,\vartheta(\varepsilon n),$$

d'où

$$\Theta(n) = \frac{n}{\mathcal{L}\cdot n - \left(1 + \mathcal{L}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\right)}$$

Legendre prend $\varepsilon = 0{,}9197\ldots$. En effet, la formule du célèbre Géomètre revient à écrire, à peu près,

$$\Theta(n) = \frac{162}{149}\,\vartheta\left(\frac{149}{162}\,n\right).$$

En d'autres termes, on peut établir la formule de Legendre en exprimant que la densité réelle des nombres premiers, autour de $162m$, égale la densité indiquée, par la formule moyenne, dans les environs de $149m$.

III. La densité des nombres premiers, aux environs de n, est asymptotique à l'inverse du logarithme népérien de n. En d'autres termes :

$$D(n) = \frac{1}{\mathcal{L}n}.$$

D'autre part, d'après la formule de Tchébychef,

$$\frac{\vartheta(ne)}{ne} = \frac{1}{\mathcal{L} \cdot n}.$$

Donc :

« *La densité des nombres premiers, aux environs de* n, *est asymptotiquement égale à la densité moyenne des mêmes nombres, entre* 1 *et* ne. »

Par exemple, la densité moyenne, entre 1 et 10000, est 0,1246. Elle est à peu près la même aux environs de 5678. En effet, la densité moyenne, entre 5678 — 100 et 5678 + 100 est 0,1250.

G. — L'égalité qui termine la *Note III* a été trouvée par une application, trop hardie, de la Théorie des moyennes. Elle ne subsiste que pour certaines formes de n, par exemple lorsque n est le produit de facteurs premiers, inégaux. D'une manière générale, elle ne peut être considérée que comme une *égalité moyenne*. On peut en déduire l'expression asymptotique de la fonction φ.

Liège, 13 avril 1883.

(Ernest CESÁRO.)

RAPPORT

SUR UN MÉMOIRE DE M. ERNEST CESÁRO

(2 MAI 1882).

Dans la dernière séance, j'ai présenté les deux premières parties d'un *Mémoire sur l'Arithmétique supérieure*, par M. E. Cesáro, élève de notre Université. Aujourd'hui je dépose sur le bureau la troisième partie de ce travail.

Les recherches du jeune Géomètre ont pour origine un Mémoire de M. Berger (*), mémoire dont un court extrait a paru dans le 6e volume de la *Nouvelle Correspondance mathématique,* sous la rubrique : *Quelques théorèmes extraordinaires.*

M. Cesáro, sans connaître les méthodes employées par M. Berger, a essayé de démontrer les *théorèmes extraordinaires,* par des procédés tout à fait élémentaires. Cette tentative a été heureuse; car, indépendamment des propositions dues au géomètre d'Upsal, indépendamment de nombreux théorèmes portant les noms de Gauss, Dirichlet, Liouville..., M. Cesáro en trouve, chemin faisant, une foule d'autres, la plupart très curieux. Que l'on en juge :

« *Si l'on considère la suite*

$$\mathrm{E}\left(\frac{n^2}{2}\right),\quad \mathrm{E}\left(\frac{n^2}{3}\right),\quad \mathrm{E}\left(\frac{n^2}{4}\right),\dots$$

» *la somme des* n — 1 *premiers termes est égale à la somme de*
» *tous les autres.* »

(*) *Sur quelques applications de la fonction gamma à la théorie des nombres.* Upsal, 1880.

« *Si l'on considère la suite*

$$3\left\{E\left(\frac{n^2}{2}\right)\right\}^2,\quad 5\left\{E\left(\frac{n^2}{3}\right)\right\}^2,\quad 7\left\{E\left(\frac{n^2}{4}\right)\right\}^2,\dots$$

» *la somme des* n — 1 *premiers termes est égale à la somme de*
» *tous les autres.* »

« *Soient* a, b, c, ... *les diviseurs d'un nombre* n. *Soit* θ(x) *le*
» *nombre des diviseurs de* x. *On a, en employant les notations*
» *de Gauss et d'Euler :*

$$\varphi(a)\theta\left(\frac{n}{a}\right)+\varphi(b)\theta\left(\frac{n}{b}\right)+\cdots=\int n,$$

$$\varphi(a)\int\frac{n}{a}+\varphi(b)\int\frac{n}{b}+\cdots=n\theta(n) \text{ »}$$

$$\text{« }\theta(1)+\frac{1}{4}\theta(2)+\frac{1}{9}\theta(3)+\cdots=\frac{\pi^4}{36}\cdot\text{ »}$$

Inutile, je pense, de multiplier les citations. Je ferai seulement observer que bien des Géomètres seraient embarrassés s'il leur fallait démontrer, directement, les trois ou quatre dernières propositions.

En résumé, le travail de M. Cesáro me paraît, de tout point, fort remarquable; et j'en propose l'impression dans les *Mémoires* de la Société.

Liége, 30 avril 1882.

E. CATALAN.

P. S. (8 avril 1883.) Il y a un an, les *Notes d'Arithmétique* se composaient d'une centaine de pages; aujourd'hui, elles en contiennent plus de trois cents. J'espère que personne ne se plaindra de cette prodigieuse accumulation de formules et de théorèmes, dus au jeune Géomètre italien.

ERRATA.

Page 20, ligne 4, *au lieu de* $F(q3)$, *lire* $F(q_3)$.

— 43, — 4, *remplacer, partout,* $\theta 2$ *par* θ^2.

— 43, — 12, *lisez :* $= n\left[a\theta(a^{2k}) + b\theta(b^{2k}) + c\theta(c^{2k}) + \cdots\right]$.

— 103, — 13, *au lieu de* $n - [k]$, *lire* $[n - k]$.

— 108, lignes 5 et 6, en remontant. *Lisez :*

$$\left[\sqrt{n\alpha} - \alpha\right] + \left[\sqrt{n\alpha} - 2\alpha\right] + \left[\sqrt{n\alpha} - 3\alpha\right] + \cdots$$
$$= \left[\sqrt{n\beta} - \beta\right] + \left[\sqrt{n\beta} - 2\beta\right] + \left[\sqrt{n\beta} - 3\beta\right] + \cdots$$

— 110, ligne 9, *remplacer les* $>$ *par des* $<$.

— 112, — 9, *au lieu de* $m \geqq \psi'(p)$, *lire* $m \leqq \psi'(p)$.

— 126, — 10, en remontant, *au lieu de* $=$, *lire* $\equiv$.

— 129, lignes 13 et 18, *au lieu de* N_m, *lire* ν_m.

— 155, ligne 3, *au lieu de* $\equiv$, *lire* $=$.

— 160, — 12, — $+ A_3$, *lire* $- 4A_3$.

— 161, — 5, — leursva leurs, *lire* leurs valeurs.

— 163, — 7, — $(3\varphi - 2)N^2 - 4\pi(N)$, *lire* $(3\varphi - 4)N^2 - 2\pi(N)$.

— 170, — 5, — le nombre, *lire* la somme.

— 175, dernière ligne. *Lisez :*

$$\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right] = \left|\begin{array}{ll} 1, & \text{si } \varepsilon_p \geqq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } \varepsilon_p < \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

— 188, ligne 16, *au lieu de* $[f - f]$, *lire* $f - [f]$.

— 204, — 11, *sous le second signe* Σ, *lisez :* $\frac{\mathcal{L}\cdot p}{p^2}$.

— 249, — 10, *au lieu de* A_p, *lire* $A_p e$.

— 256, dernière ligne, *au lieu de* v^{-1}, *lire* v^{p-1}

— 256, ligne 4, en remontant, *au lieu de* Tacker, *lire* Thacker.

— 256, — 5, — *remplacer la* virgule *par un* point.

— 256, — 6, — *supprimer le* point *final.*

— 263, — 6, — *au lieu de* $n - pt > 0$, *lire* $n - pt \geqq 0$.

— 303, — 7, *au lieu de* Standt, *lire* Staudt.

— 323, dernière ligne, *au lieu de* $d = 1$, *lire* $p = 1$.

TABLE DES MATIÈRES.

SUR

LES FAISCEAUX DE SURFACES

DU SECOND ORDRE;

PAR

J. S. VANĚČEK,

Professeur à Jičín (Bohême-Autriche).

SUR

LES FAISCEAUX DE SURFACES

DU SECOND ORDRE.

M. Chasles engendrait les cubiques gauches en employant la manière de Mac-Laurin (*).

Cependant ce principe de la description des courbes et des surfaces n'était pas employé avec toute la simplicité dont il est susceptible. Dans des notes présentées à l'*Académie des sciences* (**), je me suis servi d'un triangle polaire par rapport à une conique, pour la description des courbes planes, et d'un tétraèdre polaire par rapport à une surface du second ordre, pour la description des courbes gauches et des surfaces.

Les théorèmes suivants indiquent la transformation des figures dans l'espace :

Quand un tétraèdre polaire par rapport à une surface du second ordre se meut de telle manière que ses trois sommets l_1, l_2, l_3 *parcourent respectivement une courbe* L *d'ordre* l, *une courbe* M *d'ordre* m *et une surface* P *d'ordre* p, *son quatrième sommet* l_4 *décrit une courbe* (l_4) *d'ordre* 4lmp.

Quand un tétraèdre polaire par rapport à une surface du second ordre se meut de telle manière que ses trois sommets l_1, l_2, l_3 *parcourent respectivement une surface* L *d'ordre* l, *une courbe* M *d'ordre* m *et une surface* P *d'ordre* p, *son quatrième sommet* l_4 *engendre une surface* (l_4) *d'ordre* 4lmp.

Dans la note présente je vais montrer ce qui concerne les surfaces du second ordre.

(*) Chasles, *Aperçu historique*, p. 405.

(**) *Comptes rendus*, t. XCIV.

I

1. Supposons que la courbe L du théorème précédent soit une droite et que M soit une droite située dans un plan P qui coupe la surface fondamentale F en une conique P. La droite M rencontre P en deux points réels c, d.

Les plans tangents γ, δ en ces points à la surface F rencontrent la droite L respectivement aux points c', d'. Ces points se transforment en deux droites C, D des plans γ, δ, qui passent par c, d et qui sont les droites conjuguées des droites cc', dd'.

Les droites C, D font une partie de la courbe (l_4) dérivée de la ligne L. La deuxième partie est par conséquent une conique (l_4). Le plan de cette conique passe par le pôle p du plan P et par la droite L qui perce la surface fondamentale aux points l^1, l^2. Le plan (p, L) coupe la conique P en deux points l^3, l^4. La conique (l_4) passe par les points l^1, l^2, l^3, l^4, p; elle est donc déterminée.

Quand la droite primitive L passe par un point l^1 de la courbe fondamentale P, sa conique dérivée se décompose en deux droites : la droite l^1p et la droite l^3l^4. Si L passe par p, elle se transforme en elle-même et en le plan P.

2. La surface dérivée (l_4) d'un plan L est du quatrième ordre. La droite M étant située dans le plan P, la surface (l_4) se décompose en deux parties, savoir : en deux plans tangents γ, δ aux points c, d à la surface fondamentale et en une surface (l_4) du second ordre.

Les plans γ, δ proviennent de leurs droites d'intersection avec le plan donné L.

La surface (l_4) passe par les coniques L, P qui sont les lignes de rencontre des plans L, P avec la surface F et par les pôles l, p de ces plans.

Un plan L qui passe par le pôle p du plan P se transforme en lui-même et en P.

Dans nos recherches nous n'aurons pas égard aux droites C, D et aux plans γ, δ.

3. Le plan de l'infini I se transforme en une surface du second ordre (i_4) qui passe par les coniques L, P. Parce que la ligne L est située à l'infini, la surface (i_4) est semblable et semblablement placée à la surface fondamentale et passe par son centre qui est le pôle du plan I.

Chaque point de (i_4) se transforme en un point de l'infini.

Cette propriété peut nous servir à déterminer l'espèce de la conique ou de la surface du second ordre dérivée.

4. Quand la droite primitive L perce la surface (i_4) en deux points réels, coïncidents ou imaginaires, la courbe dérivée (l_4) a deux, un ou aucun point à l'infini et elle est respectivement une *hyperbole,* une *parabole* ou une *ellipse.*

Un plan L ne rencontrant pas la surface (i_4) se transforme en une surface (l_4) qui coupe le plan de l'infini I suivant une conique imaginaire; cette surface est donc un *ellipsoïde.*

Si la surface (i_4) n'est pas gauche et si le plan L la touche, la surface transformée (l_4) est un *paraboloïde elliptique.*

Quand L coupe la surface (i_4) en une courbe réelle et la conique P en des points imaginaires, la surface (l_4) est un *hyperboloïde à deux nappes.*

L coupe la courbe P en deux points a, b. Toutes les droites du plan L qui passent par ces deux points se transforment en deux systèmes des droites de la surface dérivée (l_4); celle-ci est donc un *hyperboloïde à une nappe.*

Si les points d'intersection du plan L avec la courbe P se réunissent, la surface (l_4) devient une *surface conique* (*).

Supposons que la surface fondamentale F soit une surface gauche et que le plan P la coupe en une hyperbole. La surface auxiliaire (i_4) est de la même espèce que F.

Quand le plan L touche la surface (i_4) en un point, il la coupe en deux droites A, B qui rencontrent la courbe P en deux points

(*) Cette classification des surfaces dérivées est contenue dans une note lue à l'Académie de Saint-Pétersbourg (23 novembre 1882).

Je répète ici cette classification avec quelques additions, parce que la suite de la présente note l'exige.

réels a, b. Les droites A, B se transforment en des droites de l'infini, qui se trouvent sur la surface dérivée (l_4). Aux deux faisceaux des droites (a), (b) du plan L correspondent deux systèmes de droites sur (l_4). Cette surface est par conséquent un *paraboloïde hyperbolique.*

5. A l'aide de la surface (i_4) nous pouvons déterminer directement la forme et la position du cône directeur de la surface dérivée (l_4).

Transformons un point a_1 de la courbe d'intersection L′ du plan L avec la surface (i_4). Son plan polaire α_1 rencontre la droite M en un point a_2 dont le plan polaire α_2 coupe α_1 suivant une droite a_3a_4.

Le troisième sommet a_3 du tétraèdre polaire se trouve dans le plan P. L'arête a_1a_4 de ce tétraèdre est la polaire de l'arête opposée a_2a_3 qui est située dans le plan P. Par conséquent la droite a_1a_4 passe par le pôle p de ce plan et par le point choisi a_1 sur (i_4). Le sommet a_4 du tétraèdre s'éloigne à l'infini sur a_1p.

De là résulte que le cône qui a le point p pour centre et la conique L′ pour directrice est parallèle au cône directeur de (l_4).

Dans le cas où le plan L touche la surface (i_4), qui est une surface gauche, en un point a, le cône dont nous avons parlé tout à l'heure se décompose en deux plans, les plans directeurs du paraboloïde hyperbolique correspondant.

Dans ce cas et dans celui où les deux droites qui passent par le point de contact sur la surface (i_4) sont imaginaires, la droite ap indique la direction de l'axe du paraboloïde.

Quand le plan L touche la conique P en rencontrant la surface (i_4) en une courbe L′, le cône (p, L') est parallèle au cône dérivé (l_4). Si le plan L touche encore la surface (i_4), le cône directeur devient une droite ap et la surface (l_4) est un cylindre dont les génératrices ont la direction ap. Cette remarquable propriété de la courbe L′ nous rend donc compte de la forme de la surface dérivée et montre la facilité avec laquelle nous pouvons transformer les figures plus compliquées, comme nous le ferons voir dans la deuxième partie de cette note.

6. Il nous reste encore à examiner le cas où la surface transformée devient un *hyperboloïde équilatère.*

Quand les génératrices du cône directeur doivent être à angle droit, il faut que la courbe L′ soit un cercle et que la droite cp, qui joint le centre c de cette circonférence au point p, soit perpendiculaire au plan L.

Il faudra donc que le plan L rencontre la surface (i_4) suivant un cercle, ce qui se présente dans un cas très particulier puisque le point p se trouve sur (i_4).

Si la surface fondamentale est une sphère, le plan L dont la surface correspondante est un hyperboloïde équilatère passe par le centre c de la surface (i_4) et il est perpendiculaire au rayon cp. Cet hyperboloïde équilatère peut être à une nappe ou à deux nappes. Au milieu de ces deux espèces se trouve le cône asymptotique.

II

7. Considérons un faisceau de plans (A). Son axe A se transforme sous les conditions précédentes en une conique (a_4) et chacun de ses plans en une surface du second ordre qui passe par la conique (a_4) et par P.

Par un point x arbitrairement pris dans l'espace et par la conique P est déterminé un seul plan du faisceau (A). Comme à ce point x correspond un seul point x_4, par lequel passe une seule surface du second ordre déterminée par (a_4), P, et dérivée du plan (x, A), il s'ensuit que :

Un faisceau (A) *de plans se transforme par rapport à un plan* P *et à une droite* M *située dans ce plan, en un faisceau de surfaces du second ordre.*

La courbe d'intersection des deux surfaces ou la courbe fondamentale du faisceau se décomposant en deux coniques, nous voyons que c'est un cas particulier que nous obtenons par cette transformation.

8. Examinons le caractère des différentes surfaces du faisceau.

La nature de ces surfaces dépend de la forme de la base F et de la position réciproque des figures (a_4), P, F.

Dans les numéros suivants nous combinerons lesdites relations.

9. Supposons que la surface fondamentale soit un hyperboloïde à une nappe et que le plan P le coupe suivant une ellipse. La surface auxiliaire (i_4) est par suite un hyperboloïde à deux nappes. La droite A rencontre cette surface en des points imaginaires.

Nous obtiendrons un faisceau de surfaces de même espèce, quand la base est un ellipsoïde, la droite A ne rencontrant pas la surface (i_4).

Un groupe de plans du faisceau (A) rencontre la surface (i_4) en des coniques réelles et un groupe en des coniques imaginaires. Parmi les plans du premier groupe il y a un système qui coupe la courbe P.

Deux plans, les limites de ces groupes, touchent (i_4) et deux autres plans touchent la conique P. Un plan passe par le pôle p du plan P. Les coniques (a_4), P sont des ellipses.

D'après les résultats de la première partie de cette note nous pouvons énoncer ce théorème :

Dans un faisceau de surfaces du second ordre, déterminé par deux ellipses qui se coupent en deux points, il y a un groupe d'ellipsoïdes, deux groupes d'hyperboloïdes à deux nappes et à une nappe, séparés par deux cônes; puis deux paraboloïdes elliptiques qui séparent les ellipsoïdes et les hyperboloïdes et enfin les deux plans des coniques données.

10. Le plan P rencontre la surface fondamentale F qui est un hyperboloïde à une nappe et une parabole P. La surface (i_4) est une surface conique parallèle au cône asymptotique de F; la droite A touche (i_4) en un point.

Les coniques (a_4), P sont des paraboles. Un groupe de plans (A) rencontre la conique P en des points réels et un autre en des points imaginaires; deux plans touchent P et un plan passe par p.

Par deux paraboles qui se coupent en deux points passent un groupe d'hyperboloïdes à une nappe et un autre à deux nappes, un cône et un cylindre et enfin les plans des coniques données.

Si la droite A passe par le centre du cône (i_4), le plan de la parabole (a_4) contient une droite parallèle à l'axe de la parabole P et les surfaces du faisceau changent leur forme.

Par deux paraboles qui se rencontrent en deux points et dont une se trouve dans un plan qui contient une droite parallèle à l'axe de l'autre, on peut faire passer un groupe de paraboloïdes hyperboliques, un groupe de paraboloïdes elliptiques, ces deux groupes étant séparés par deux cylindres et deux plans.

11. Le plan P rencontre l'hyperboloïde fondamental à une nappe F en une hyperbole P. L'axe A du faisceau perce la surface (i_4) qui est de même un hyperboloïde à une nappe en deux points réels. Les courbes (a_4), P sont des hyperboles.

Un groupe de plans (A) rencontre la conique P en deux points réels et un autre groupe en des points imaginaires; deux plans touchent la courbe P, deux autres touchent la surface (i_4) et un plan passe par le point p.

Deux hyperboles qui se rencontrent en deux points déterminent un groupe d'hyperboloïdes à une nappe séparé d'un groupe d'hyperboloïdes à deux nappes par deux cônes, puis deux paraboloïdes hyperboliques et deux plans.

12. Les conditions du n° 11 restent les mêmes à l'exception de la droite A qui touche la surface (i_4). Les courbes P, (a_4) sont respectivement une hyperbole et une parabole.

Nous obtenons les mêmes espèces de courbes fondamentales ou de surfaces du faisceau quand nous supposons que F étant un hyperboloïde gauche est coupé par le plan P suivant une parabole et que la droite A rencontre une ou deux nappes du cône (i_4). La courbe P est une parabole et (a_4) une hyperbole.

Un groupe de plans rencontre la conique P en deux points réels, un groupe en des points imaginaires, deux plans la touchent, un plan touche la surface (i_4) ou, dans le deuxième cas, il passe par le sommet du cône (i_4) en le coupant suivant deux droites; un plan contient le point p.

Donc :

Par une hyperbole et par une parabole qui se rencontrent en deux points on peut faire passer un groupe d'hyperboloïdes à une nappe, deux cônes qui séparent ce groupe d'un autre groupe d'hyperboloïdes à deux nappes, un paraboloïde hyperbolique et deux plans.

13. Le plan P rencontre l'hyperboloïde à une nappe F en une hyperbole P et la droite A perce la surface (i_4) en des points imaginaires; (a_4) est une ellipse.

Le plan P rencontre l'hyperboloïde à une nappe F en une ellipse P et la droite A perce (i_4) qui est une hyperboloïde à deux nappes en deux points réels; (a_4) est une hyperbole.

Si la surface F est un ellipsoïde et si la droite A rencontre (i_4), les courbes P, (a_4) sont respectivement une ellipse et une hyperbole.

Un faisceau de surfaces du second ordre, dont la courbe fondamentale est composée d'une hyperbole et d'une ellipse, contient un groupe d'hyperboloïdes à deux nappes, un groupe d'hyperboloïdes à une nappe, deux cônes qui séparent ces deux groupes, et deux plans.

14. P rencontre l'hyperboloïde à une nappe F en une parabole P; la droite A rencontre le cône (i_4) en des points imaginaires; (a_4) est une ellipse.

Le plan P coupe l'hyperboloïde à une nappe F en une ellipse; A touche la surface (i_4); (a_4) est une parabole.

La surface F est un ellipsoïde et la courbe P est une ellipse; la droite A touche l'ellipsoïde (i_4).

Un système de plans rencontre P en deux points réels, un système en des points imaginaires, deux plans touchent cette conique, un plan touche (i_4) ou coupe le cône (i_4) en deux droites et un passe par p.

Par une parabole et par une ellipse qui se rencontrent en deux points on peut faire passer un groupe d'hyperboloïdes à une nappe, un groupe d'hyperboloïdes à deux nappes séparé du précédent par deux cônes, un paraboloïde elliptique et deux plans.

15. La surface fondamentale est un hyperboloïde à une nappe coupé par le plan P en une hyperbole P; la droite A se trouve dans ce plan et rencontre P en deux points réels; elle se transforme en deux droites qui ne sont pas à l'infini.

Un groupe des plans (A) rencontre la conique P en deux points réels, deux plans touchent la surface (i_4), un plan se confond avec P et un plan passe par p.

Un faisceau de surfaces passant par une hyperbole P *et par deux droites dont aucune n'est à l'infini consiste en un groupe d'hyperboloïdes à une nappe, en deux paraboloïdes hyperboliques, en un cône et en deux plans dont un passe par* P *et l'autre par les deux droites données qui rencontrent* P *en deux points.*

16. Si le plan P coupe l'hyperboloïde à une nappe F en une parabole P et si la droite A se trouve dans ce plan et rencontre P en deux points c, d, cette droite se transforme en deux droites cp, dp.

Les surfaces du faisceau sont de même espèce comme dans le cas précédent, seulement au lieu des deux paraboloïdes nous obtenons un seul paraboloïde hyperbolique.

17. Le plan P rencontre la surface fondamentale qui est un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe en une ellipse P, et la droite A étant située dans le plan P coupe la conique P en deux points réels.

Un plan du faisceau (A) passe par p, un plan se confond avec P et tous les autres plans rencontrent la surface (i_4). Il suit de là que :

Dans un faisceau de surfaces du second ordre déterminé par une ellipse et par deux droites qui la coupent en deux points réels il y a un groupe d'hyperboloïdes à une nappe, un cône et deux plans.

18. Supposons que le plan P rencontre la surface fondamentale F qui est un hyperboloïde à une nappe (ou surface gauche) en une hyperbole P et que la droite A soit une génératrice de la surface (i_4) qui est de même un hyperboloïde à une nappe. La droite A se transforme en deux droites dont une se trouve à l'infini.

Si la courbe d'intersection du plan P avec la même surface fondamentale est une parabole, nous obtenons un faisceau contenant des surfaces de même espèce.

Un plan du faisceau (A) passe par p, un plan touche la surface (i_4) et tous les autres plans coupent encore cette surface suivant une droite.

Nous voyons que :

Par une hyperbole ou par une parabole et par deux droites qui coupent cette conique dont une est à l'infini ou peut faire passer un groupe de paraboloïdes hyperboliques, un cylindre et deux plans.

19. Considérons un hyperboloïde fondamental à une nappe et supposons que le plan P le coupe en une hyperbole P ou en une parabole ou en une ellipse. Puis supposons que le plan P rencontre un ellipsoïde F en une ellipse. Dans tous ces cas la droite A touche la courbe d'intersection P en un point b; (a_4) est une droite double bp.

Tous les plans du faisceau (A) coupent la surface (i_4) et touchent la courbe P; un plan touche la surface (i_4) et un plan passe par p.

De là suit ce théorème :

Par une conique quelconque P *et par une droite double qui rencontre cette conique passent une infinité de cônes, un cylindre et deux plans, dont un passe par la conique* P *et l'autre passe par la droite donnée et touche la courbe* P.

20. Le plan P rencontre l'hyperboloïde à une nappe F en une hyperbole ou en une parabole P et la droite A coupe cette conique en deux points imaginaires; cette droite se transforme en deux droites imaginaires qui sont situées dans le plan (p, A) et se coupent au point p.

Les plans du faisceau (A) dont un passe par le point p rencontrent la surface (i_4).

Quand la courbe fondamentale d'un faisceau de surfaces du second ordre se décompose en deux parties dont l'une est une hyperbole ou une parabole et l'autre consiste en deux droites imaginaires qui passent par un point réel p *et par des points d'intersection imaginaires d'une droite* A *avec la conique* P, *les surfaces de ce faisceau sont des hyperboloïdes à deux nappes et deux plans; un de ces plans passe par la conique* P *et l'autre par le point* p *et par la droite* A.

21. Supposons que le plan P rencontre la surface F qui est un hyperboloïde à une nappe ou un ellipsoïde en une ellipse P et que la droite A qui se trouve dans ce plan rencontre la conique P en deux points imaginaires. Elle se transforme en deux droites imaginaires comme précédemment.

Une partie des plans (A) rencontre la surface (i_4) en des coniques réelles, une autre partie en des coniques imaginaires, deux plans la touchent et un plan passe par le point p.

Par une ellipse P *et par deux droites imaginaires qui sont déterminées par une droite* A *située dans le plan de la conique* P *et par un point* p *en lequel elles se croisent, on peut faire passer un groupe d'ellipsoïdes, un groupe d'hyperboloïdes à deux nappes, deux paraboloïdes elliptiques qui séparent ces deux groupes, et deux plans, dont un passe par* P *et l'autre par* p, A.

22. Quand un faisceau de surfaces du second ordre contient un groupe de surfaces gauches, deux droites génératrices de chaque surface de ce groupe passent par le point p et rencontrent la courbe fondamentale du faisceau, qui ne passe pas par le point p.

Il suit de là que toutes ces droites génératrices engendrent un cône du second degré.

23. Considérons une surface fondamentale gauche. Supposons que le plan P rencontre cette surface en deux droites C, D. La surface (i_4) est de même une surface gauche.

Le pôle p du plan P par rapport à la surface fondamentale est le point de rencontre des droites C, D.

Les plans du faisceau (A) rencontrent le plan P en général en un faisceau de droites. Le plan passant par la trace L d'un plan L du faisceau sur P et par le point p est le plan tangent à la surface dérivée (l_4) du plan L au point p.

De ce que le point p se trouve dans le plan P, il s'ensuit que ce plan touche toutes surfaces dérivées du faisceau (A) au point p.

24. La droite A rencontre la surface (i_4) en deux points réels. Elle se transforme en une hyperbole (a_4) qui touche le plan P au point p. Deux plans du faisceau (A) touchent la surface (i_4), un plan passe par p et tous les autres plans coupent (i_4).

De là résulte ce théorème :

Le faisceau de surfaces du second ordre déterminé par deux droites C, D *qui se croisent en un point* p *et par une hyperbole qui touche le plan* P *des droites* C, D *au point* p, *consiste en un groupe d'hyperboloïdes à une nappe, en deux paraboloïdes hyperboliques et en deux plans; toutes ces surfaces se touchent au point* p.

25. Quand la conique (a_4) est une parabole, le théorème précédent change un peu :

Par deux droites C, D *d'un plan* P *qui se croisent au point* p *et par une parabole qui touche le plan* P *au point* p *passent une infinité d'hyperboloïdes à une nappe, un paraboloïde hyperbolique et deux plans; toutes ces surfaces touchent le plan* P *au point* p.

26. Pour une ellipse (a_4) nous parviendrons à ce théorème :

Par deux droites C, D *d'un plan* P *qui se coupent en un point* p *et par une ellipse qui touche le plan* P *au point* p *passent une infinité d'hyperboloïdes à une nappe et deux plans; toutes ces surfaces touchent le plan* P *au point* p.

27. Supposons que le plan P touche la surface fondamentale gauche en un point p et que la droite A soit située dans ce plan.

La courbe correspondante (a_4) se décompose en deux droites qui se confondent avec les droites C, D, en lesquelles le plan P rencontre la surface gauche.

Toutes les surfaces dérivées du faisceau (A) ayant communes les droites doubles C, D se touchent le long de ces droites.

Un plan du faisceau (A) passe par le point p et tous les autres rencontrent la surface (i_4).

Nous avons donc ce théorème :

Les surfaces qui passent par deux droites doubles C, D *situées dans un plan* P *sont des hyperboloïdes à une nappe et le plan* P *est considéré comme plan double. Toutes ces surfaces se touchent le long des droites* C, D, *ayant une surosculation au point de rencontre des lignes* C, D.

28. Ce théorème nous apprend une construction d'un hyperboloïde surosculateur à une surface gauche du second ordre en un de ses points p.

Considérons la surface gauche F comme la surface fondamentale de la transformation et transformons un plan quelconque L par rapport au plan tangent P à la surface F au point p. Nous obtenons l'hyperboloïde surosculateur demandé.

Pour un autre plan L, cet hyperboloïde change de forme.

29. Supposons que la surface fondamentale ne soit pas gauche et que le plan P la touche au point p. La conique P se réduit en ce point. Quand la droite A ne rencontre pas la surface (i_4), elle se transforme en une ellipse qui touche le plan P au point p.

Un système de plans (A) rencontre la surface (i_4) en des coniques réelles et un autre système en des coniques imaginaires; deux plans touchent (i_4) et un plan passe par p.

Les surfaces d'un faisceau que l'on peut faire passer par une ellipse tangente à un plan P *au point* p *font un groupe d'ellipsoïdes, un groupe d'hyperboloïdes à deux nappes; ces groupes sont séparés par deux paraboloïdes elliptiques. Toutes ces surfaces touchent le plan* P *au point* p. *Enfin il y a deux plans en ce faisceau de surfaces.*

30. Pour une parabole (a_4) nous avons ce théorème :

Par une parabole qui touche un plan P *au point* p *passent une infinité d'hyperboloïdes à deux nappes, un paraboloïde elliptique et deux plans. Toutes ces surfaces touchent le plan* P *au point* p.

31. Quand la droite A rencontre (i_4) en deux points réels, elle se transforme en une hyperbole. Tous les plans (A) rencontrent (i_4) en des coniques réelles et un plan passe par p.

Donc :

Par une hyperbole qui touche un plan P *au point* p *passent une infinité d'hyperboloïdes à deux nappes qui touchent le plan* P *au point* p, *et deux plans.*

32. Quand la droite A se trouve dans le plan P, la conique (a_4) se décompose en deux droites imaginaires qui passent par le point p et se trouvent dans le plan P.

Un système de plans (A) rencontre la surface (i_4) en des coniques réelles, un autre système en des coniques imaginaires, un plan touche (i_4) et un plan se confond avec le plan P.

De là résulte ce théorème :

Les surfaces du second ordre qui surosculent réciproquement en un point p, *en lequel se croisent deux droites imaginaires* C, D *d'un plan* P, *font un groupe d'ellipsoïdes et un groupe d'hyperboloïdes à deux nappes; ces deux groupes sont séparés par un paraboloïde elliptique et par un plan double, sur lequel se trouvent les droites* C, D.

33. Dans le cas où le plan P coupe la surface fondamentale en une conique imaginaire, la courbe fondamentale du faisceau de surfaces consiste en une conique réelle et en une conique imaginaire, ce qui ne présente aucune singularité remarquable.

34. Quand la conique P est une conique quelconque et que l'axe A du faisceau de plans passe par le pôle p du plan P, ce faisceau se transforme en lui-même et en le plan P.

MATÉRIAUX

POUR LA

FAUNE ENTOMOLOGIQUE DE LA PROVINCE DE LIÉGE.

COLÉOPTÈRES

TROISIÈME CENTURIE

PAR

ALFRED PREUDHOMME DE BORRE.

COLÉOPTÈRES DE LA PROVINCE DE LIÉGE.

CENTURIE III.

FAMILLE DES CARABIQUES (*suite*).

1. *Bembidium adustum*, Schaum (*fumigatum*, Dejean). — Taille ne dépassant pas 4 millimètres. Court et un peu large. Tête et corselet d'un vert métallique assez clair. Élytres testacées, marquées de trois bandes sinueuses transversales, d'un bronzé noirâtre, composées de taches interstriales contiguës. Épipleures testacées. Pattes et 5 $^1/_2$ premiers articles des antennes testacés. Corselet moins rétréci en arrière et stries des élytres plus fortement ponctuées que chez les deux espèces voisines (*B. flammulatum* et *varium*, n^{os} 99 et 100 de la Centurie II). — RD : Angleur, vallées de l'Ourthe et de la Vesdre (Putzeys, *Liste des Carabiques de la région entre l'Ourthe et la Vesdre*). RG : Liége, Jemeppe.

2. *B. ruficorne*, Sturm (*brunnipes*, Dejean). — Taille de 5 à 6 millimètres. Assez allongé ; bleu-verdâtre métallique médiocrement brillant, avec les pattes et les antennes testacées. Corselet assez allongé, convexe, cordiforme, très-ponctué sur sa base et faiblement impressionné sur les côtés. Stries des élytres à ponctuation forte, s'effaçant graduellement vers les côtés. — Très-rare. RD : Hockay (M. Miedel).

3. *B. elongatum*, Dej. — Plus petit, ayant la même forme allongée. Vert-bronzé, médiocrement brillant, avec les pattes et la base des antennes d'un testacé clair; une tache rouge arrondie, un peu avant le sommet de chaque élytre, mais sujette à disparaître. Corselet allongé, moins rétréci en arrière et à peine subcordiforme; impressions basilaires faibles; toute la base ponctuée. Élytres à stries grossièrement ponctuées, s'effaçant en arrière et latéralement. — Rare. RD : Froidmont (M. Miedel), Colonster (*id.*), Halleux (*id.*), Aywaille (*id.*), Comblain-au-Pont (M. Roffiaen), vallées de l'Ourthe et de la Vesdre (Putzeys, *op. cit.*).

4. *B. fluviatile*, Dej. — Taille d'environ 5 millimètres. Fort voisin de l'espèce suivante, dont il se distingue par les caractères ci-après. Corselet plus cordiforme et plus allongé, avec des angles postérieurs très-proéminents. Élytres d'une forme un peu plus parallèle ou allongée. Ponctuation des stries des élytres moins effacée latéralement et septième strie beaucoup plus marquée. Les taches des élytres sont généralement d'une nuance plus claire que chez *B. littorale*. — Rare. RD : Vallée de l'Ourthe (Putzeys, *op. cit.*).

5. *B. littorale*, Ol. (*rupestre*, Dej.). — Même taille. Tête et corselet vert-métallique; élytres brunes ayant chacune deux grandes taches testacées à contours arrondis, l'antérieure ne commençant qu'en dehors du troisième interstrie, la seconde oblique, vers le bout de l'élytre. Pattes d'un testacé jaunâtre assez clair, ainsi que les trois premiers articles des antennes et la base de quelques-uns des suivants. Corselet cordiforme, très-rétréci en arrière; base assez fortement ponctuée. Stries des élytres fortement ponctuées, les externes plus faiblement et effacées en arrière; la septième surtout très-peu distincte. — Très-commun. RD : Angleur, Embourg, Tilff, Méry, Quarreux, Coo, Trois-Ponts, Hockay, Solwaster, Baraque-Michel, environs de Visé. RG : Liége, Herstal, Jemeppe, Flémalle-Grande, Hollogne-aux-Pierres, Engis, Longchamps-sur-Geer.

6. *B. bruxellense,* Wesmael. — Taille inférieure à 5 millimètres. Vert-métallique, avec les élytres très-peu différentes par la couleur de celles du précédent. Pattes testacé-jaunâtre, avec les cuisses à peu près entièrement d'un brun noirâtre. Premier article des antennes seul rougeâtre. Corselet cordiforme, à base ponctuée. Élytres assez fortement striées-ponctuées sur le disque, mais les stries plus effacées latéralement et vers le sommet. — RD : Les Aguesses, Tilff, Hodbomont, Sart, Baronheid, environ de Stavelot, Hockay, Baraque-Michel.

7. *B. femoratum,* Sturm. — Même taille. Taches des élytres plus étendues et d'un jaune sale très-clair. Pattes testacées, à cuisses brunes. Antennes à premier article seul entièrement rouge. Corselet cordiforme, à angles postérieurs presque aigus; base presque lisse. Stries des élytres moins fortes et à points plus petits, très-effacés vers le bout et vers les côtés. — RD : Tilff, Louvegnez (coll. Chapuis), Heusy (*id.*), région entre l'Ourthe et la Vesdre, sauf les sommets des Fagnes (Putzeys, *op. cit*). RG : Liége, Jemeppe, Flémalle-Grande, Hollogne-aux-Pierres.

8. *B. obsoletum,* Dej. — Taille d'au plus 5 millimètres Tête et corselet vert-métallique. Élytres rougeâtres et où la croix séparant les taches chez les espèces précédentes s'est à peu près tout à fait effacée, de sorte que la suture et une bande transversale postérieure rembrunies, mais se détachant à peine sur le fond, en sont les seules traces. Pattes et $3\ ^1/_2$ articles aux antennes rougeâtres. Élytres à stries assez fortement ponctuées, également très-effacées en arrière et sur les côtés. — RD : Vallées de l'Ourthe et de la Vesdre (Putzeys, *op. cit.*). RG : Liége, Jemeppe, Amay.

9. *B. fasciolatum,* Duft. — Grand et allant jusqu'à présenter une taille de 7 millimètres, à la fois allongé et notablement déprimé. D'un vert brunâtre très-foncé, avec les tibias, la base et le sommet des cuisses et le premier article des antennes rougeâtres; le reste des antennes, ainsi que les tarses, noirâtres.

Corselet peu rétréci en arrière, avec les côtés fortement rebordés et les angles de la base obtus et peu saillants. Élytres quelquefois marquées vers le bord d'une bande longitudinale rougeâtre très-vaguement limitée ; six stries ponctuées, les externes beaucoup moins marquées que les internes. — RD : Les Aguesses (M. Miedel), Tilff (*id.*), Comblain-au-Pont (*id.*), Aywaille (*id.*), Dolhain (Putzeys), Coo, Trois-Ponts (Cam. Van Volxem). RG : Coronmeuse.

10. *B. cœruleum*, Dej. — Plus petit, bleu et différant à peine autrement du précédent, dont il n'est pour beaucoup d'auteurs qu'une variété méridionale. Les stries sont plus faiblement ponctuées; il n'y a jamais de bande rougeâtre près du bord de l'élytre; les tarses sont rougeâtres comme les tibias, mais les uns et les autres un peu foncés. — Très-rare. RD : Je l'ai pris une fois à Pepinster, et feu Cam. Van Volxem à Trois-Ponts, Coo (coll. Putzeys).

11. *B. atrocœruleum,* Steph. (*cyanescens,* Wesmael). — Également d'une taille inférieure au *B. fasciolatum*, dont plusieurs auteurs ne le regardent que comme une variété. Il s'en rapproche plus par la couleur générale, mais sans avoir non plus de bande rougeâtre submarginale aux élytres. Pattes et antennes colorées comme chez la susdite espèce. Corselet subcordiforme, avec des angles postérieurs droits. Élytres déprimées, avec des stries très-faiblement ponctuées, mais pas aussi effacées vers les côtés. — RD : Les Aguesses (M. Miedel), Polleur (coll. Chapuis), Verviers, Dolhain, Hockay. RG : Je l'ai pris à Sclessin.

12. *B. tibiale,* Duft. — Taille d'environ 5 millimètres. D'un bleu plus ou moins verdâtre et médiocrement brillant. Cuisses noires; tibias et tarses rougeâtres. Premier article des antennes rougeâtre. Corselet assez rétréci en arrière, avec les angles postérieurs un peu aigus; impressions latérales de la base profondes et lisses. Stries des élytres fortes et assez for-

tement ponctuées sur leur première moitié, non effacées en arrière. — RD : Liége, Les Aguesses, Tilff, Remouchamps (M. Sauveur), Comblain-au-Pont, Coo, Trois-Ponts, Hestreux, Verviers (coll. Chapuis), Grandry (*id.*), Hockay (M. Miedel).

13. *B. nitidulum,* Marsham. — Taille d'environ 4 à 5 millimètres. Vert ou bleu-verdâtre, métallique et brillant. Pattes testacées, avec la base des cuisses rembrunie. Premier article des antennes et base des trois suivants d'un testacé clair. Corselet fortement arrondi sur les côtés et très-rétréci en arrière, avec les angles postérieurs droits et un petit pli saillant près de chacun d'eux; base ponctuée, surtout dans les fossettes basilaires, qui sont profondes. Stries des élytres fortement ponctuées sur le disque, mais fort effacées en arrière, les externes surtout. — RD : Kinkampoix, Ehein, Neuville-en-Condroz, Ramioul, Méry, Esneux, Martinrive, Jalhay, Baraque-Michel, Sart (coll. Chapuis), Maison-Bois (*id.*), Hertogenwald (coll. Putzeys). RG : Bois-St-Gilles (M. Miedel), Rocour (*id.*).

14. *B. monticulum,* Sturm. — Extrêmement voisin du précédent, dont il diffère par des pattes entièrement testacées, ainsi que les deux premiers articles des antennes. Aux élytres, la septième strie est effacée ou très-peu distincte. — Rare. RD : Vallée de l'Ourthe (Putzeys, *op. cit.*), Halleux (M. Miedel).

15. *B. decorum,* Panzer. — Taille d'environ 5 millimètres. D'un bleu un peu verdâtre, moins brillant que chez les deux espèces précédentes. Pattes testacées, ainsi que le premier article des antennes et la base des suivants. Corselet de la même forme, mais un peu moins rétréci en arrière; point de petit pli contigu aux angles postérieurs; base ponctuée, avec des impressions basilaires moins profondes. Élytres plus déprimées, avec des stries fortement ponctuées, qui s'effacent vers le bout et les côtés. — Commun dans le gravier du bord des rivières. RD : Grivegnée, Angleur, Embourg, Seraing, Ramet, Martinrive, Sprimont (M. Sauveur), Remouchamps (*id.*), Coo, Trois-Ponts. RG : Liége, Jemeppe.

16. *B. bipunctatum*, L. — Taille d'environ 4 millimètres. D'un bronzé assez brillant ; le dessous, les pattes et les antennes noirâtres. Corselet arrondi sur les côtés et rétréci vers les angles postérieurs, qui sont saillants, ponctué en avant et en arrière. Élytres à stries ponctuées, s'effaçant en arrière ; sur le troisième interstrie, deux très-forts points enfoncés. — Très-rare. RD : Coo (Putzeys).

17. *B. nigricorne*, Gyll. — Taille d'environ 3 $^1/_2$ millimètres. Bronzé assez brillant, avec les antennes noires ; leur premier article un peu métallescent. Pattes d'un testacé brunâtre, avec les cuisses aussi un peu métallescentes. Dessous noir. Corselet large et court, peu rétréci en arrière ; les côtés assez fortement arrondis et ayant leur plus grande largeur tout à fait au milieu. Élytres présentant chacune six stries ponctuées, effacées vers le sommet. — Très-rare. RD : Melen.

18. *B. lampros*, Herbst (*celere*, Dej.). — Taille de 3 à 3 $^1/_2$ millimètres. Bronzé assez brillant, quelque peu variable dans les nuances. Antennes brunes, avec la moitié inférieure du premier article rougeâtre. Pattes rougeâtres, avec les cuisses et les tarses un peu rembrunis. Corselet arrondi sur les côtés en avant, puis rétréci, avec des angles droits un peu saillants. Élytres avec des stries ponctuées le plus souvent d'assez gros points, mais il y a aussi des variétés au point de vue de la force de la ponctuation ; toutes s'effacent vers le bout, sauf la première et la huitième ; la septième est tantôt effacée et tantôt distincte (variété *velox*). — Très-commun et probablement même le plus abondant et le plus répandu de tous les Carabiques du pays. RD : Grivegnée, Retinne, Melen, Angleur, Embourg, Tilff, Méry, Esneux, Strivay, Martinrive, Seraing, Ramet, Ramioul, Engihoul, Tihange, Theux, Heusy, Grand-Rechain, Quarreux, bassin de la Gileppe, Hestreux, Baraque-Michel, Hockay, Trois-Ponts, Coo. RG : Liége, Ans, Glons, Lixhe, Milmort, Awans, Hollogne-aux-Pierres, Horion-Hozémont, Jemeppe, Flémalle-Grande, Flémalle-Haute, Chokier, Engis, Fallais.

19. *B. Doris,* Panzer. — De la taille des petits exemplaires de l'espèce précédente. Noir un peu métallique, avec des pattes rougeâtres, ainsi que le premier article des antennes et la base des deux suivants. De chaque côté du front, on voit deux sillons très-profonds, les externes courts et ne dépassant pas le niveau des yeux, les internes plus longs et venant converger en avant, au-dessus de la bouche. Corselet presque cordiforme, faiblement arrondi sur les côtés, fortement et subitement rétréci vers la base, dont les angles postérieurs font saillie. Élytres à six stries finement ponctuées et effacées en arrière, plus une septième à peine distincte. Une petite tache ronde rougeâtre près du bord externe de chaque élytre aux deux tiers de leur longueur; le sommet aussi vaguement rougeâtre. — Rare. RD : Angleur, vallée de l'Ourthe (Putzeys, *op. cit*).

20. *B. Sturmi,* Panzer. — Taille un peu inférieure à 3 millimètres. Tête et corselet noirâtres, un peu bronzés; élytres brun-foncé, avec leur moitié antérieure portant quelques petites taches linéaires allongées, d'un testacé clair; une tache ronde submarginale près du sommet, et le sommet lui-même également testacés. Les pattes sont de la même couleur, ainsi que le premier article des antennes et la base des deux suivants. Sillons frontaux comme chez l'espèce précédente. Corselet également arrondi sur les côtés en avant, puis rétréci, avec des angles postérieurs droits, non saillants; impressions basilaires très-grandes et profondes; entre elles et l'angle postérieur voisin, on remarque de chaque côté deux forts points enfoncés. Stries des élytres fortement ponctuées, s'effaçant vers le sommet. — Rare. RD : Vallée de l'Ourthe (Putzeys, *op. cit.*), Angleur (coll. Chapuis). RG : Ile Monsin à Herstal (M. Miedel).

21. *B. articulatum,* Panzer. — Taille d'environ 3 millimètres. Tête et corselet vert métallique; élytres jaune-brun sur presque toute leur moitié antérieure, brun-foncé en arrière, avec une tache jaune. Dessous du corps noir. Pattes d'un testacé

brunâtre, ainsi que la base des antennes. Sillons frontaux comme chez les deux espèces précédentes. Corselet aussi cordiforme; entre l'impression basilaire de chaque côte et l'angle postérieur, une petite fossette. Stries des élytres très-fortement ponctuées, s'effaçant avant le sommet. — RD : Angleur, vallées de l'Ourthe et de la Vesdre (Putzeys, *op. cit.*), Wegnez (coll. Chapuis), Grand-Rechain (*id.*), Sart (*id.*), Baraque-Michel, Trois-Ponts. RG : Jemeppe, Horion-Hozémont.

22. *B. quadriguttatum*, Fabr. — Taille d'environ 4 millimètres. D'un noir un peu verdâtre et très-faiblement métallique. Pattes d'un jaune pâle, avec les genoux bruns. Antennes noirâtres, avec le premier article et la base des suivants testacés. Corselet assez long, cordiforme, à angles postérieurs presque droits. Élytres très-lisses et n'ayant que des commencements de séries de petits points sur leur premier tiers; chaque élytre est marquée de deux taches d'un blanc assez pur : la première humérale, triangulaire ; la seconde, ronde, vers le bout de l'élytre. — RD : Angleur, Embourg, vallées de l'Ourthe et de la Vesdre (Putzeys, *op. cit.*), Grand-Rechain (coll. Chapuis), Baraque-Michel. RG : Jemeppe.

23. *B. quadripustulatum*, Dej. — Taille d'environ 3 $^1/_2$ millimètres. D'un noir bronzé, ayant sur chaque élytre deux taches arrondies, plus petites que celles de l'espèce précédente et d'une nuance jaunâtre. Cuisses noires, tibias testacés, tarses bruns. Antennes également noires, avec le premier article vert-métallique. Corselet de même forme, mais plus large que long. Stries des élytres ponctuées sur une plus grande étendue. — Assez rare. RD : Vallée de l'Ourthe (M. Weyers), vallées de l'Ourthe et de la Vesdre (Putzeys, *op. cit.*), Les Aguesses (M. Miedel).

24. *B. quadrimaculatum*, L. — Taille ne dépassant pas 3 millimètres. De la même couleur noire un peu métallique, mais avec la tête et le corselet vert-bronzé. Chaque élytre est aussi

marquée de deux petites taches jaunâtres arrondies, la première humérale plus grande, la seconde subapicale plus petite. Pattes et quatre premiers articles des antennes testacés. Corselet subcordiforme, plus large que long; angles postérieurs terminés en denticules. Élytres striées-ponctuées sur leur moitié antérieure. — RD : Fetinne, Les Aguesses, Tilff, Méry, Saive, Rouhez (coll. Chapuis), Baraque-Michel. RG : Liége, Ile Monsin à Herstal, Jemeppe, Hollogne-aux-Pierres.

25. *B. humerale*, Sturm (*pulchrum*, Dej.). — Même taille. Noir métallique un peu verdâtre. Cuisses de la même couleur, tibias testacés, tarses rembrunis, de même que les antennes. Une seule tache jaunâtre sur l'épaule de chaque élytre. Corselet fortement cordiforme, plus large que long. Stries des élytres ponctuées jusqu'au delà du milieu. — Très-rare. RD : Hockay (M. Michel), Fonds de Quarreux et Baraque-Michel (Putzeys, *op. cit.*).

26. *B. assimile*, Gyll. — Même taille. D'un vert bleuâtre un peu bronzé, mais point brillant, avec les pattes, la base des antennes, une tache subapicale et le bout de l'élytre, testacés. Front présentant entre l'œil et le sillon voisin deux petites carènes. Corselet subcordiforme. Élytres fortement striées-ponctuées sur le disque, lisses vers le bout. — Rare. RD : Vallée de l'Ourthe (Putzeys, *op. cit.*).

27. *B. Clarki*, Dawson. — Même taille. Noirâtre-bronzé foncé, mais un peu luisant, avec la base des antennes et les pattes rougeâtres; élytres sans taches, mais quelque peu rougeâtres à leur sommet. Front ayant aussi deux carènes entre l'œil et le sillon. Corselet large, nullement cordiforme, mais arrondi latéralement et également rétréci en avant et en arrière. Élytres striées-ponctuées; les stries s'effaçant latéralement et au sommet. — Très-rare. RD : Un exemplaire a été pris à Angleur par M. Miedel.

28. *B. biguttatum*, Fabr. (*vulneratum*, Dej.). — Taille de 3 à 4 millimètres. Vert-bleuâtre métallique, médiocrement bril-

lant, avec le premier article des antennes, les pattes, une tache marginale vers le bout de chaque élytre et le bout lui-même testacés. Corselet court et large, avec des angles postérieurs obtus, à côté desquels la base forme un petit sinus. Élytres marquées de sept stries ponctuées, s'affaiblissant vers le bout et les côtés. — RD : Vallées de l'Ourthe et de la Vesdre (Putzeys, *op. cit.*), Quarreux (coll. Chapuis). RG : Liége, Lixhe, Longchamps-sur-Geer.

Une variété de cette espèce (*biguttatum*, Dej.) n'a que six stries distinctes sur chaque élytre. Les antennes, les pattes et les taches des élytres sont d'une teinte plus brunâtre. — RD : Angleur, Quarreux (coll. Chapuis).

29. *B. guttula,* Fabr. — Plus petit. Noir brillant, avec le premier article des antennes et les pattes rougeâtres; cuisses un peu rembrunies. Vers le bout de chaque élytre et presque contre le bord, une petite tache ronde rougeâtre. Corselet de la même forme que l'espèce précédente. Stries des élytres assez fortement ponctuées et seulement un peu plus courtes et plus fines vers l'extérieur; la cinquième subitement creusée en arrière en un petit sillon. — RD : Vallées de l'Ourthe et de la Vesdre (Putzeys, *op. cit.*), Baraque-Michel.

30. *B. Mannerheimi,* Sahlb. — Même taille. Noir, mais n'ayant pas le même brillant que l'espèce précédente; n'ayant pas, comme elle, une tache rouge vers le sommet de l'élytre, qui est seulement un peu rougeâtre au bout. Premier article des antennes et pattes également testacés. Corselet de même forme, mais un peu plus large. Stries des élytres comme chez l'espèce précédente. — Très-rare. RD : Aywaille (M. Miedel), Halleux (*id.*), Quarreux (coll. Chapuis), Sart (*id.*), Hockay, Baraque-Michel

31. *B. obtusum,* Sturm. — Taille de 2 $^1/_2$ à 3 millimètres. Noir brillant un peu bronzé ou un peu brunâtre. Premier article des antennes et base des suivants rougeâtres. Pattes testacées, avec les cuisses brunes. Corselet transversal, plus large en

avant qu'en arrière, à angles postérieurs obtus, sans sinus basilaire en arrière d'eux. Élytres sans taches, n'ayant que cinq stries finement ponctuées et s'effaçant à leurs extrémités; comme chez les espèces précédentes, la cinquième strie se marque au bout en un petit sillon, dont le bord externe s'élève en petit pli. — RD : Angleur, Embourg, Tilff, Esneux, Baraque-Michel, Hockay, Surister, Rouhez, Wegnez, Louvegnez. RG : Liége, Herstal, Jemeppe.

32. *B. rufescens*, Dej. — Taille de 4 à 5 millimètres. Ferrugineux clair, avec un très-léger reflet irisé sur les élytres. Antennes et pattes jaune-pâle. Corselet de forme transversale, subquadrangulaire, non rétréci en arrière; angles postérieurs droits et pointus; bords latéraux un peu retroussés. Élytres finement striées-ponctuées sur le disque, lisses en arrière et latéralement. — Rare. RD : Comblain-au-Pont, Verviers (coll. Chapuis), Halleux (M. Miedel).

33. *B. quinquestriatum*, Gyll. (*pumilio*, Dej.). — Un peu plus petit. Tantôt d'une nuance semblable, mais plus rembruni, plus bronzé et avec le reflet irisé encore plus distinct, tantôt, et c'est la forme typique, d'un bleu verdâtre. Pattes et antennes d'un jaune clair. Corselet de même forme transversale, mais à angles postérieurs droits et émoussés, suivis, comme chez le *guttula,* d'une échancrure latérale de la base, mais bien moins prononcée. Stries des élytres plus fortement ponctuées, mais encore plus effacées en arrière et sur les côtés que chez le *B. rufescens.* — RD : Froidmont (M. Miedel), vallée de l'Ourthe (Putzeys, *op. cit.*). RG : Liége, Jemeppe.

FAMILLE DES CICINDÉLIDES (*addition*).

34. (Après *C. germanica,* Centurie 1, nº 1). — *Cicindela hybrida,* L. — Plus grande. Tantôt un peu cuivrée, tantôt plus verdâtre. Une bande blanche, fortement flexueuse au milieu, partage transversalement chaque élytre sans atteindre la suture; deux lunules blanches, l'une à l'épaule, l'autre au sommet

de l'élytre. Labre blanc. — Peu commune. RD : Verviers (M. Mors), entre Herve et Henri-Chapelle (*id.*), entre Herve et Chaineux (*id.*), Nessonvaux (M. Miedel). RG : Le long du canal de Liége à Maestricht, au delà de Coronmeuse (M. Miedel).

FAMILLE DES CARABIQUES (*additions*).

35. (Après *Notiophilus punctulatus*, Centurie I, n° 8).—*Elaphrus uliginosus*, Fabr. — Bronzé. Corselet un peu plus large que chez l'espèce précédente. Élytres avec quatre séries de taches violettes imprimées. Jambes et tarses bleus. — RD : Wegnez (coll. Chapuis).

36. (Après *L. spinibarbis*, Centurie I, n° 11). — *Leistus ferrugineus*, L. — D'un ferrugineux rougeâtre. Angles postérieurs du corselet droits. Stries des élytres fortement ponctuées sur le disque. — RD : Carrière du Prince à Embourg (M. Miedel), Heusy (coll. Chapuis), Fouir (*id.*), Grandry (*id.*), Jehanster (*id.*).

37. (Après *Dr. angustus*, Centurie I, n° 57). — *Dromius agilis*, Fabr. — Plus petit. Même forme allongée, mais moins parallèle. Élytres brun-rouge, faiblement striées, avec deux séries de points enfoncés. — RD. Kinkampoix (M. Miedel), Colonster (*id.*), Sartilman (*id.*), Beaufays (*id.*), Cheratte (*id.*), Visé (*id.*). RG : Liége (coll. Putzeys), Longchamps-sur-Geer (Putzeys).

38. (Après le précédent). — *Dr. fenestratus*, Fabr. — Taille un peu plus forte. Tête noire. Corselet plus large que long, à angles postérieurs presque droits, brun de poix, avec les côtés et la base d'un brun ferrugineux. Élytres à stries fines, dont la sixième seule est ponctuée vers le bout; elles sont noir de poix, avec une tache rougeâtre vers le milieu de chacune. — Rare. RD : Hestreux (M. Miedel). RG : Liége (coll. Putzeys).

39. (Après *Dr. quadrinotatus*, Centurie I, n° 59). — *Dr. melanocephalus*, Dej. — Un peu plus petit. Testacé, avec la tête noire et le corselet rougeâtre. Élytres sans taches, mais avec

des stries un peu noirâtres. Pattes jaunes. Corselet à angles postérieurs droits et à ligne médiane bien marquée. — RD : Carrière du Prince à Embourg (M. Miedel), Fond-de-Forêt (coll. Chapuis), Surister (*id.*), Heusy (*id.*).

40. (Après *D. globosus*, Centurie I, n° 51). — *Dyschirius thoracicus*, Illig. — Chaperon céphalique tridenté. Strie marginale de l'élytre contournant l'épaule et longeant la base jusqu'à l'écusson. Stries des élytres légères et faiblement ponctuées. Jambes antérieures n'ayant qu'une forte dent externe suivie d'un faible denticule. — RD : Angleur (M. Miedel)

41. (Après le précédent). — *D. politus*, Dej. — Plus petit. Strie marginale de l'élytre commençant à l'épaule. Jambes antérieures obtusément denticulées au bord externe. Stries des élytres s'effaçant vers le bout. — RD : Angleur (M. Miedel).

42. (Après *P. crux major*, Centurie I, n° 56). — *Panagæus quadripustulatus*, Sturm — Un peu plus petit et coloré comme le précédent, mais avec les taches rouges postérieures des élytres isolées du bord externe. — Rare. RD : Heusy (coll. Chapuis). RG : Rocour (M. Miedel).

43. (Après *Callistus lunatus*, Centurie I, n° 61). — *Chlænius holosericeus*, Fabr. — D'un noir mat, un peu bronzé, pubescent. Élytres à fond granuleux, fortement striées. — Très-rare. RG : Ile Monsin à Herstal (M. Miedel).

44. (Après *O. gracilis*, Centurie II, n° 3). — *Omaseus minor*, Gyll. — Encore plus petit. Noir de poix ou même tout à fait noir, avec les pattes brunâtres. Corselet faiblement arrondi sur les côtés et manifestement rétréci en arrière; deux stries près des angles de la base. Élytres à stries finement ponctuées. Point de rebord autour de la pointe du prosternum. Dernier segment abdominal du mâle pourvu d'une petite carène longitudinale. — Rare. RD : Baraque-Michel (Putzeys).

45. (Après *A. aulica,* Centurie II, n° 20). — *Amara striatopunctata,* Dej. — Assez grande. D'un noir bronzé foncé, avec les trois premiers articles des antennes, les tibias et les tarses rougeâtres. Corselet fortement rétréci en avant, avec les angles antérieurs effacés et retombants; base bisinuée, avec des angles droits; de chaque côté, une fossette large et ponctuée vers la base. Éperon terminal des jambes antérieures trifide. — Rare. Liége (coll. Putzeys).

46. (Après *A. communis,* Centurie II, n° 27). — *A. curta,* Dej. — En ovale encore plus court; d'un noir bronzé assez obscur; les deux premiers articles des antennes seuls rougeâtres, parfois avec la base du troisième; parfois aussi le deuxième n'est qu'à moitié rougeâtre; tibias aussi rougeâtres. Corselet court, avec les angles antérieurs saillants, mais arrondis au sommet; angles postérieurs un peu aigus, la base étant presque droite; deux faibles stries de chaque côté. Stries des élytres s'approfondissant vers le sommet. Le segment anal porte un point pilifère chez le mâle, deux chez la femelle. — Très-rare. RD : Verviers (coll. Chapuis). RG : Chokier (Putzeys).

47. (Après *O. sabulicola,* Centurie II, n° 51). — *Ophonus punctatulus,* Duft. — Notablement plus petit. Vert-bleuâtre en dessus, brun de poix en dessous; antennes et pattes rouges. Corselet à angles postérieurs droits; entièrement ponctué, de même que les élytres. — Très-rare. RD : Carrière du Prince à Embourg (M. Miedel).

48. (Après *H. æneus,* Centurie II, n° 66). — *Harpalus discoideus,* Fabr. (*perplexus,* Dej.). — De très-peu plus grand que *H. æneus.* Le mâle a une coloration brillante, vert-bronzé ou bleuâtre, comparable à celle des deux espèces précédentes, mais la femelle est noire ou brun de poix et mate. Dessous du corps noir. Pattes et antennes rouges. Corselet à angles postérieurs droits; les impressions basilaires sont très-faibles et toute la base est ponctuée; bords latéraux assez souvent rou-

geâtres, comme par transparence. Élytres à stries fines; intervalles externes sans ponctuation; le sinus du bord, près du sommet, peu marqué. — Rare. RD : Sprimont (coll. Chapuis).

49. (Après *H. tardus*, Centurie II, n° 72). — *H. serripes*, Quensel. — Plus grand. Noir, un peu mat chez la femelle. Antennes brunes, avec le premier article rouge et la base des trois suivants noire; pattes brun de poix, avec les tarses un peu plus clairs. Corselet rétréci en avant, avec les angles antérieurs arrondis et les postérieurs droits à sommet émoussé; une ligne médiane fine, terminée en avant et en arrière par des stries transverses; impressions postérieures courtes et ridées. — Très-rare. RG : Glons (M. Miedel).

50. (Après *A. brunnipes*, Centurie II, n° 80). — *Acupalpus exiguus*, Dej. — Un peu plus petit. Entièrement d'un noir de poix, avec le premier article des antennes et les pattes d'un testacé brunâtre. Corselet à angles postérieurs arrondis. Une variété (*luridus*) a une coloration beaucoup plus claire, avec un corselet rougeâtre, ainsi que le pourtour des élytres et leur suture. — Rare. RD : La Reid (coll. Chapuis), Hockay (*id.*), Cheratte (M. Miedel), Wandre (*id.*), Souverain-Wandre (*id.*). RG : Ile Monsin à Herstal (*id.*).

51. (Après *T. bistriatus*, Centurie II, n° 92). — *Tachys nanus*, Gyll. — Double de taille. Déprimé. Noir assez terne, avec la base des antennes testacée, de même que les tibias et les tarses. Corselet subquadrangulaire, à angles postérieurs droits. Aux élytres, quatre stries lisses, dont la première seule se prolonge jusqu'au bout et se recourbe ensuite en crochet assez long. Deux petits points enfoncés, l'un sur le premier interstrie, l'autre sur la troisième strie. — Rare. RD : Angleur (M. Miedel), Tilff (*id.*).

FAMILLE DES HALIPLIDES.

52. *Brychius elevatus*, Panzer. — Taille d'environ 4 millimètres, jaunâtre, avec les stries des élytres partiellement noires. Corselet trapézoïdal, avec les côtés fortement arrondis en avant. Élytres à stries ponctuées ; le troisième interstrie formant une carène très-marquée. — RD : Berwinne (coll. Chapuis).

53. *Haliplus variegatus*, Sturm. — Taille d'environ 3 millimètres. En ovale assez régulier, quoique un peu acuminé en avant et aussi en arrière. Corselet sans strioles basilaires, avec une large zone ponctuée en avant et, à la base, une rangée de points plus gros; le disque lisse. Aux épaules des élytres, la courbe latérale continue bien celle du corselet. Élytres à stries assez fortement ponctuées, les interstries ayant quelques petits points à peine perceptibles. D'un testacé souvent assez rougeâtre, avec quelques taches allongées brunes sur les élytres, les unes discoïdales immédiatement après le milieu, les autres un peu en éventail près le sommet, taches qui ne sont bien marquées que chez les exemplaires les plus pâles, et un peu effacées chez les plus foncés. — RD : Sprimont (coll. Chapuis).

54. *H. flavicollis*, Sturm. — Mesurant presque 4 millimètres de longueur. Ovale, assez large, quelque peu acuminé en arrière. Testacé-jaunâtre clair, avec les points des stries élytrales et de la base du corselet noirâtres. Corselet assez fortement ponctué en arrière, plus légèrement, mais densément en avant, à disque plus lisse; point de strioles basilaires. Stries des élytres fortement ponctuées; une série de très-petits points sur chaque interstrie. — RD : Sprimont (coll. Chapuis).

55. *H. cinereus*, Aubé. — Taille de 2 $^1/_2$ à 3 millimètres. Tête et corselet un peu rougeâtres; élytres testacé-jaunâtre, avec les points des stries noirâtres et le fond se rembrunissant souvent par places. Ponctuation assez dense, mais fine, en avant et en

arrière du corselet; point de strioles basilaires. Élytres striées-ponctuées, avec le premier point des cinq premières stries très-fort; interstries ne présentant que des points isolés. — RD : Sprimont (coll. Chapuis). RG : Longchamps près Waremme.

56. *H. ruficollis*, de Geer (*impressus*, Aubé). — Taille d'environ 2 $^1/_2$ millimètres. En ovale court, jaune un peu rougeâtre, surtout sur la tête et le corselet. Points des stries élytrales noirâtres; cette couleur se poursuivant en lignes striales noires, non interrompues et débordant en général sur les interstries, de manière à produire une maculature vague et plus ou moins forte sur certains points du fond. Corselet densément et très-finement ponctué sur son pourtour. De chaque côté, la base, à quelque distance de l'angle, porte une très-petite striole droite et parallèle à l'axe du corps. Points des stries des élytres assez et uniformément forts ; ceux qui longent la base pas plus forts que les autres. — RD : Sprimont, Séroule, Baraque-Michel. RG : Statte.

57. *H. lineatocollis*, Marsham. — Même taille. Tête noire ou d'un brun très-foncé. Corselet jaune-rougeâtre, marqué au milieu d'une linéole ou tache longitudinale brun-noirâtre, de forme un peu variable. Élytres testacées et présentant en général quelques mouchetures brunes. Strioles de la base du corselet longues, fortes, courbées en dedans. Stries des élytres à points assez forts; trois points plus forts à la naissance des troisième, quatrième et cinquième stries. Interstries ponctués. — RD : Baraque-Michel (coll. Chapuis). RG : Jemeppe, Lixhe.

FAMILLE DES DYTISCIDES.

58. *Noterus clavicornis*, de Geer (*crassicornis*, Aubé, Kiesenwetter). — Taille de 4 millimètres. D'un brun marron clair et luisant, un peu plus foncé sur les élytres, qui sont marquées de quelques points assez fins formant sur chacune trois séries longitudinales. Prosternum non caréné. — RD : Séroule (coll. Chapuis).

59. *N. capricornis*, Herbst (*sparsus*, Aubé). — Taille supérieure à 4 millimètres. Brun-marron clair et luisant. Élytres marquées de gros points épars, assez abondants sur le bout, ne formant pas des séries vers la base. Prosternum caréné au milieu. Antennes du mâle ayant leurs articles fort dilatés à partir du cinquième. — RG : Liége, dans l'étang du Jardin botanique.

60. *Laccophilus interruptus*, Panzer. — Taille d'environ 4 $^1/_2$ millimètres. Couleur testacé-olivâtre, assez brillante, avec la tête, le corselet et le bord externe des élytres d'un blanc jaunâtre; des taches de la même couleur, assez vaguement limitées, les unes arrondies, conniventes avec le bord extérieur, les autres linéaires, sur le disque, surtout en avant. Base du corselet un peu saillante au milieu, mais non anguleuse. — RG : Liége.

61. *L. obscurus*, Panzer (*minutus*, Aubé). — Taille généralement quelque peu inférieure à celle de l'espèce précédente. Couleur et maculature semblables, mais avec une nuance plus verdâtre dans les taches. Base du corselet saillant au milieu vers la suture des élytres, en formant un angle pointu. — RD : Quarreux (coll. Chapuis), Baraque-Michel (*id.*). — RG : Liége, Jemeppe.

62. *Bidessus unistriatus*, Schrank. — Taille d'environ 2 millimètres. Ovale. Brun-noirâtre, avec le corselet transversalement ferrugineux. Élytres finement ponctuées et presque lisses chez les femelles. Une strie suturale assez faiblement imprimée. A la base du corselet, deux courtes strioles droites très-marquées, ayant un prolongement sur le milieu de la base de chaque élytre. — Rare. RD : Sprimont (coll. Chapuis).

63. *B. geminus*, Fabr. — Taille de 2 $^1/_2$ millimètres. Ovale. Brun-bistré assez clair, avec le devant de la tête rougeâtre, de même que le centre et les côtés du corselet. Élytres ayant un dessin blanc-sale qui, normalement, peut se ramener à une fascie déchiquetée et élargie sur les bords, suivant de près la

base, puis une très-petite tache arrondie près du bord, aux deux tiers, enfin sur le sommet de chaque élytre, une tache plus grande, triangulaire; ces taches, sujettes soit à se restreindre, soit à s'étendre et se rejoindre. Une strie suturale et deux strioles basilaires, ayant un prolongement sur la base du corselet. — RD : La Boverie, à Liége.

64. *Hyphydrus ovatus*, L (*ferrugineus*, Thomson, Bedel). — Taille d'environ 4 $^1/_2$ millimètres. Ovoïde très-bombé, en dessous surtout. Ferrugineux, généralement rembruni sur les élytres, sauf la base et quelques taches irrégulières sur le bord externe. Ponctuation abondante, forte chez le mâle, fine chez la femelle, qui est plus luisante et comme satinée. — RD : Visé, Angleur, Sprimont (coll. Chapuis), Séroule (*id.*).

65. *Cœlambus versicolor*, Schaller (*reticulatus*, Fabr., Aubé, Kies.). — Taille d'environ 3 millimètres. Ovoïde, très-bombé en dessous. Tête finement rebordée en avant. Ponctuation abondante et fine, entremêlée de quelques points plus gros. Tête, corselet et élytres d'un testacé jaunâtre; la tête et le corselet sont bordés de brun en arrière; aux élytres, la base et la suture sont noires, ainsi que trois assez longues bandes longitudinales, parfois plus ou moins continues et anastomosées; mais le plus souvent la première et la troisième sont interrompues au milieu, et la deuxième est réduite à sa moitié postérieure; en outre une petite tache plus extérieure vers les deux tiers de l'élytre. Antennes et pattes testacées. Saillie prosternale aiguë en avant. — RD : Sprimont (coll. Chapuis), Séroule (*id.*).

66. *Deronectes latus*, Stephens (*ovatus*, Aubé). — Taille de 4 $^1/_2$ millimètres. Largement ovale, avec les élytres un peu acuminées au sommet. Corselet court, ne présentant pas vers sa base une dépression transversale. Couleur brun-marron très-foncé, avec la tête et la région humérale des élytres rougeâtres. Ponctuation générale extrêmement fine, avec mélange de quelques gros points. — Rare. RD : Baraque-Michel (coll. Chapuis).

67. *Hydroporus halensis*, Fabr. — Taille de 4 millimètres environ. Ovale, avec un très-faible angle rentrant entre le corselet et l'élytre. Testacé très-pâle, un peu rougeâtre sur la tête et le corselet. Pattes rougeâtres, ainsi que les antennes, dont les derniers articles se rembrunissent au sommet. Deux taches noires triangulaires sur le disque du corselet. Six lignes noirâtres sur chaque élytre, n'atteignant ni la base, ni le sommet; les internes réunies en certains endroits par des taches; les externes non confluentes, mais offrant des lacunes. Dessous du corps brun. — RD : Beaufays (M. Miedel, d'après la collection Chapuis).

68. *H. lineatus*, Fabr. (*quadrilineatus*, Drapiez, Bedel). — Taille d'environ 3 millimètres. Ovale, très-acuminé en arrière; ferrugineux-jaunâtre; les élytres brun clair avec un large bord jaunâtre et, sur le disque de chacune, quatre petites lignes de la même couleur, souvent assez effacées et se prolongeant de la base plus ou moins en arrière. — RD : Sprimont (coll. Chapuis). RG : Liége.

69. *H. pictus*, Fabr. — Taille de 2 $^1/_2$ millimètres environ. Brièvement ovale et convexe. Tête rougeâtre; corselet brun-rougeâtre, avec une fine striole basilaire de chaque côté. Élytres d'un noir assez brillant, avec un dessin jaune, consistant généralement en une grande tache humérale réniforme et une tache triangulaire sur le dernier tiers de l'élytre, prolongée par une linéole postérieure et réunie par un arc fin à la tache humérale; parfois le dessin reste réduit aux deux taches. Dessous et pattes ferrugineux. — RD : Sprimont (coll. Chapuis), Séroule (*id.*). RG : Liége.

70. *H. nigrita*, Fabr. — Taille de 3 millimètres. En ovale assez régulier. Ponctuation générale, mais médiocrement dense; celle du corselet très-fine sur le disque. Noir ou brun de poix très-foncé, avec les pattes et les premiers articles des antennes testacé-rougeâtre, le vertex également étroitement rougeâtre. — RD : Tilff, Sart.

71. *H. obscurus,* Sturm. — Taille un peu inférieure à 3 millimètres. Forme étroite et assez parallèle, mais acuminée en arrière. Corselet court et fort rétréci en avant. Ponctuation dense et forte sur les élytres, comme au pourtour du corselet, dont le disque est lisse. Couleur d'un brun rougeâtre un peu luisant, avec la tête d'un rougeâtre très-clair, surtout en avant. Dessous brun de poix. — RD : Hockay.

72. *H. pubescens,* Gyll. — Taille de 3 $^1/_2$ millimètres environ, quelque peu variable. Ovale, avec l'extrémité des élytres faiblement acuminée. Ponctuation médiocrement forte, mais dense ; une pubescence grise très-apparente et assez dense au bout des élytres. Noir, avec les pattes et la base des antennes d'un rougeâtre foncé ; les élytres brun de poix, devenant plus claires sur la base, à l'épaule, le long du bord externe et sur l'épipleure. — RD : Baraque-Michel (coll. Chapuis).

73. *H. planus,* Fabr. — Taille de 4 $^1/_2$ millimètres. En ovale très-régulier ; assez peu convexe, pubescent, densément, mais très-finement ponctué. D'un noir de poix, avec les pattes et la base des antennes rougeâtres. Les élytres s'éclaircissent à la base, et surtout dans la région humérale. — RD : Angleur, Sprimont (coll. Chapuis), environs de Visé. RG : Glain, Loën, Statte.

74. *H. tristis,* Payk. — Taille de 3 millimètres. Même forme, avec les élytres tant soit peu élargies immédiatement après la base, ce qui rompt la courbe générale du côté en cet endroit. Ponctuation plus faible. Brun-noirâtre, avec la tête, les pattes et les élytres, surtout à la base, rougeâtres. — RD : Baraque-Michel (coll. Chapuis).

75. *H. neglectus,* Schaum. — Taille de 2 à 2 $^1/_2$ millimètres. Même forme que le précédent, un peu plus étroit proportionnellement. Tête rougeâtre en avant ; corselet brun-marron clair ; élytres brun-rougeâtre. Ponctuation beaucoup plus fine. — RD : Baraque-Michel (coll. Chapuis).

76. *H. umbrosus*, Gyll. — Taille de 2 $^1/_2$ millimètres. Ovale. Noirâtre, avec la tête rougeâtre, surtout en avant, ainsi que les pattes. Élytres d'un brun bistré assez clair, pubescentes. Corselet avec les côtés de la base un peu arqués. — RD : Baraque-Michel (coll. Chapuis).

77. *H. palustris*, L. (*sexpustulatus*, Fabr., Aubé). — Taille de 5 $^3/_4$ millimètres. Ovale, avec la courbe générale des côtés présentant un très-léger rétrécissement vis-à-vis la jonction du corselet et des élytres. D'un noir de poix clair, quelquefois très-clair, avec la tête rouge, un peu rembrunie au milieu; le corselet brun de poix, avec les côtés rougeâtres, les pattes et la base des antennes aussi rougeâtres; enfin un dessin testacé sur chaque élytre, consistant en une grande tache basilaire ne s'étendant pas à la région scutellaire, mais un peu prolongée en arrière sur le disque, le bord externe, et deux taches postérieures, dont l'une subapicale, rejointes par un trait et confluentes aussi avec le bord; ces taches peuvent être très-réduites et même en partie effacées. Hanches postérieures faiblement ponctuées. — Commun. RD : Environs de Visé, Sprimont (coll. Chapuis), Séroule (*id.*), Baraque-Michel (*id.*), Hockay. RG : Liége, Loën, Statte.

78. *H. erythrocephalus*, L. — Taille de 4 millimètres. Ovale; pubescent. Ponctuation du corselet très-forte. Noir de poix, avec les élytres brun de poix, souvent un peu rougeâtres à la base, surtout vers l'épaule et sur le bord externe. Tête rougeâtre. — RD : Baraque-Michel (coll. Chapuis).

79. *H. dorsalis*, Fabr. — Taille d'environ 5 millimètres. Ovale, avec sa plus grande largeur un peu en arrière. Corselet à côtés bien arrondis en avant, redressés vers la base; celle-ci avec une longue dépression transverse, très-fortement ponctuée. Élytres densément ponctuées, pubescentes. Couleur tantôt noirâtre, tantôt brun-marron luisant, avec la tête, la base des antennes et les côtés du corselet rougeâtres; sur les élytres, un

dessin testacé, sujet à s'effacer, consistant en une vague et assez grande tache discoïdale, une autre grande tache humérale allongée, le bord externe à la suite de cette tache et un arc transversal aux deux tiers de l'élytre. — Rare. RD : Boncelles (M. Miedel).

80. *Agabus guttatus,* Payk. — Taille d'au plus 8 millimètres. Noir brillant, avec les antennes et palpes, le labre et deux taches sur le vertex rougeâtres; tibias et tarses antérieurs et intermédiaires rougeâtres, le reste des pattes noir de poix. Côtés du corselet finement rougeâtres; sa base sensiblement droite, les angles se trouvant presque au même niveau transverse que le centre. Élytres très-finement réticulées, marquées chacune de deux petites macules testacées, l'une près du bord un peu en arrière du milieu, l'autre près du sommet, souvent très-peu distinctes. — RD : Rotheux, Hermalle-sous-Huy, Verviers (coll. Chapuis), Surister (*id*), Goé (M. Miedel), Baraque-Michel.

81. *A. biguttatus,* Olivier. — Taille d'environ 9 millimètres. Noir très-brillant; deux taches rougeâtres sur le vertex; antennes, genoux et tarses couleur de poix rougeâtre. Base du corselet se courbant un peu en avant de chaque côté, vu que l'angle postérieur est plus avancé que le milieu de la base. Sur chaque élytre, dont le fond est subtilement réticulé, deux macules testacées, généralement plus distinctes que chez l'espèce précédente et placées de même. — Rare. RD : Kinkampoix (M. Miedel), Sartilman (*id.*), Beaufays (*id.*), Tilff (M. Maréchal).

82. *A. paludosus,* Fabr. — Taille d'au plus 7 millimètres. D'un brun-noisette très-brillant; noir en dessous; la tête et le corselet plus foncés; les élytres plus claires, surtout à la base, qui est souvent tout à fait blanchâtre, ainsi que l'épipleure. Antennes et pattes rougeâtres; cuisses rembrunies au milieu. Labre, épistome et deux taches sur le vertex rougeâtres. — RD : Tilff, Neuville-en-Condroz, Berwinne (coll. Chapuis).

83. *A. affinis,* Payk. — Taille de 6 $^1/_2$ millimètres. Ovale un peu étroit. Noir assez brillant, avec l'épistome, les palpes et antennes, deux taches sur le vertex et les pattes rougeâtres; les cuisses plus foncées. Aux élytres, une tache après le milieu et une autre apicale rougeâtres, mais très-peu apparentes et souvent même effacées. Les élytres ont une ponctuation extrêmement fine, indépendamment de gros points formant sur chacune trois séries et de quelques autres épars entre les séries. — RD : Baraque-Michel (coll. Chapuis).

84. *A. didymus,* Olivier. — Taille de 8 millimètres. Noir brillant, bronzé et souvent un peu irisé en dessus; les côtés du corselet, les épipleures des élytres et les antennes testacés; pattes antérieures et intermédiaires rougeâtres; pattes postérieures brunes. Sur chaque élytre, deux taches testacées, l'une au sommet, l'autre sur le côté un peu après le milieu, se composant de deux taches irrégulières juxtaposées. — RG : Liége.

85. *A. congener,* Payk. — Taille d'environ 8 millimètres. Élytres un peu déprimées et quelque peu acuminées au sommet. Noir-brunâtre, luisant et un peu métallescent. Épipleures et épaules des élytres rougeâtres, de même que les antennes, les tibias et les tarses; cuisses rembrunies, surtout aux pattes postérieures. — Très-rare; espèce boréale et subalpine. RD : Un exemplaire a été pris, en 1882, au Hockay, par M. H. Donckier de Donceel.

86. *A. nebulosus,* Foerster (*bipunctatus,* Fabr., Aubé, Kiesenw.). — Taille de 8 millimètres et plus. Tête noire, avec le labre, tout l'épistome et deux taches sur le vertex, testacés. Corselet testacé, ayant sur le disque deux taches d'un noir brunâtre, quelquefois presque effacées. Élytres testacées, couvertes d'une grande quantité de très-petites mouchetures noires. Dessous du corps noir en avant, testacé en arrière. Antennes et pattes jaunâtres; cuisses postérieures rembrunies. — RD : Les Aguesses à Angleur (M. Miedel).

87. *A. femoralis*, Payk. — Taille de 6 millimètres. Régulièrement ovalaire. Brunâtre très-luisant et même un peu métallescent; noir en dessous, avec le bord postérieur des segments abdominaux rougeâtre. Antennes et pattes rougeâtres. Ailes ou prolongements latéraux du métasternum étroits. Cuisses antérieures du mâle densément ciliées au bord inférieur. — RD : Beaufays (M. Miedel), Theux (*id.*), Heusy (*id.*), Hockay (*id.*).

88. *A. Sturmi*, Gyll. — Taille d'environ 8 à 9 millimètres. Ovale assez large. Brun-marron, avec les côtés du corselet et des élytres rougeâtres; tête et disque du corselet plus rembrunis. Dessous noir. Pattes et antennes testacées. Saillie prosternale déprimée. — RD : Sprimont (coll. Chapuis), Baraque-Michel (*id.*). RG : Étangs du château de Longchamps à Waremme.

89. *A. chalconotus*, Panzer. — Taille de 8 millimètres. Noir brillant, bien bronzé en dessus et offrant souvent de l'irisation. Antennes, labre, bord de l'épistome et deux taches sur le vertex un peu rougeâtres. Pattes rougeâtres, sauf les cuisses et la totalité des pattes postérieures, qui sont brun de poix. — RD : Angleur, Sartilman, Beaufays, Verviers, Bilstain, Sart, Hockay, Baraque-Michel. RG : Lixhe.

90. *A. bipustulatus*, L. — Taille de 10 à 11 millimètres. Ovale allongé et quelque peu rétréci en arrière, où les élytres se dépriment aussi un peu. Noir brillant et généralement un peu bronzé. Corselet avec les angles postérieurs un peu aigus, précédant une sinuosité de la base. Celle-ci de même étendue que celle des élytres (dans la variété *Solieri,* propre aux pays de montagnes, elle est plus courte). Corselet, élytres, hanches postérieures et premiers segments abdominaux densément couverts de petites strioles longitudinales un peu onduleuses. Antennes, palpes, labre et deux taches sur le vertex rougeâtres. Pattes d'un brun de poix rougeâtre. — Commun et abondant. RD : Visé, Angleur, Comblain-la-Tour, Berwinne, Spa, Sart, Baraque-Michel, Hockay, Quarreux. RG : Jemeppe, Chokier, Statte, Loën.

91. *Platambus maculatus,* L. — Taille de 8 millimètres environ. Ovale assez convexe. Brun-noir luisant en dessus, avec les antennes et palpes, tout le devant de la tête, deux taches sur le vertex, les côtés du corselet et une bande médiane qui les réunit, jaunâtres. Aux élytres, la couleur jaunâtre forme le dessin suivant : deux taches quadrangulaires, juxta-suturales, se prolongeant parfois chacune en deux raies longitudinales parallèles, et d'autre part en une fascie transverse allant à l'épaule rejoindre une bande latérale assez large; sur le disque, deux autres raies longitudinales, en général rejointes par un ou deux points à la bande latérale; ceci est un maximum de la coloration jaunâtre, qui est souvent beaucoup plus réduite, par la disparition d'une partie des bandes, taches et raccordements. Dessous et pattes testacé-rougeâtre. Saillie prosternale déprimée en spatule. — RD : Ehein, Berwinne (coll. Chapuis), Séroule (*id.*), Quarreux (*id.*).

92. *Ilybius ater,* de Geer. — Taille de 14 millimètres. Oblong et d'une forme naviculaire très-bombée. Noir en dessus; brun de poix en dessous, ainsi que les pattes, les antennes, le labre, une très-fine bordure au corselet et aux épaules des élytres et les épipleures. Sur chaque élytre, une linéole rougeâtre un peu au delà du milieu et une petite tache peu apparente près du sommet. — RD : Sprimont (coll. Chapuis). RG : Ile Monsin à Herstal (M. Miedel).

93. *I. obscurus,* Marsham (*quadriguttatus,* Aubé). — Taille de 11 $^1/_2$ millimètres. Même forme. Noir en dessous aussi bien qu'en dessus, avec les antennes, le labre et les quatre pattes antérieures rougeâtres, les postérieures brun de poix. Mêmes taches aux élytres que le précédent. — RD : Baraque-Michel. RG : Waremme, dans les étangs du château de Longchamps, Ile Monsin à Herstal (M. Miedel).

94. *I. guttiger,* Gyll. — Taille de 9 $^1/_2$ millimètres. Ovale, médiocrement convexe. Noir brillant, non métallique. Antennes, pattes et bord postérieur des segments abdominaux rougeâtres.

Sur chaque élytre, une linéole courte après le milieu et une petite tache apicale rougeâtres, sujettes à s'effacer. On voit aussi sur chaque élytre deux séries longitudinales de petits points. — Très-rare. RD : Baraque-Michel (coll. Chapuis).

95. *I. œnescens,* Thomson. — Taille d'au plus 9 millimètres. Ovale un peu allongé, médiocrement bombé. Noir-bronzé en dessus. Élytres à taches presque toujours effacées; séries longitudinales de points rarement apparentes. Dessous noir de poix. Pattes et antennes rougeâtres. — RD : Beaufays (M. Miedel).

96. *I. fuliginosus,* Fabr. — Taille de 10 millimètres. En ovale très-allongé, naviculaire, presque acuminé en arrière. Brun un peu métallique en dessus, testacé-rougeâtre en dessous. Antennes, bouche, tout l'épistome, les côtés du corselet et une très-large bande latérale aux élytres, ferrugineux; cette dernière bande est partagée par une raie oblique naissant un peu plus bas que l'épaule et divisée transversalement par une quantité de petites strioles jaunâtres. — Commun. RD : Séroule (coll. Chapuis), Rouhez près Heusy (*id.*). RG : Ile Monsin à Herstal (M. Miedel), Waremme.

97. *I. fenestratus,* Fabr. — Taille de 11 $^1/_2$ millimètres. Ovale un peu plus large et surtout plus bombé. Bronzé assez brillant en dessus, rougeâtre en dessous, ainsi que les pattes, les antennes, tout le devant de la tête, les côtés du corselet, les épipleures et une bande latérale mal limitée au bord de l'élytre, s'oblitérant vers les trois quarts de la longueur. Une petite linéole aux deux tiers et une petite tache apicale rougeâtres, peu distinctes. Le meilleur caractère se trouve dans les ailes du métasternum qui, au lieu de se rétrécir graduellement comme chez les autres *Ilybius,* le font brusquement de manière à avoir une forme de faucille étroite. — RD : Neuville-en-Condroz, Sprimont. RG : Herstal.

98. *Rhantus bistriatus,* Bergsträsser. — Taille de 10 à 11 millimètres. Ovale un peu court. Testacé en dessus. Tête noire,

avec tout le devant largement jaunâtre, de même que deux taches sur le vertex. Corselet bordé de brun en avant et en arrière, où cette bordure prend au centre une épaisseur triple; point de tache discoïdale. Élytres, à part la suture, la base et les bords latéraux, densément couvertes d'une agglomération de mouchetures noirâtres. Dessous noir, avec le prosternum, le bout des hanches postérieures et une mince bordure aux segments abdominaux, rougeâtres, ainsi que les antennes et les pattes. — RG : Liége, Ile Monsin à Herstal (M. Miedel).

99. *Rh. exoletus*, Foerster (*collaris*, Aubé, Kies.). — Même taille. Ovale assez court. Testacé en dessus; la tête n'a de noir que le vertex et deux lunules frontales partant des yeux. Corselet avec une très-faible bordure brune au milieu du bord antérieur et de la base. Élytres très-densément couvertes d'une accumulation de mouchetures d'un noir brun, sauf sur la suture, la base et le bord latéral. Dessous du corps d'un testacé luisant, ainsi que les antennes et les pattes. — RD : Sprimont. RG : Liége, Herstal.

100. *Rh. adspersus*, Fabr. — Taille de 9 $^1/_2$ millimètres. Brièvement ovale. Testacé en dessus. Derrière de la tête noir, embrassant deux macules testacées. Corselet au plus un peu rembruni au milieu de la base. Aux élytres, la couleur testacée disparaît sous une agglomération de mouchetures brun-noirâtre, sauf sur les bords latéraux et à la suture. Dessous du corps d'un noir brun, sauf la poitrine, le premier segment de l'abdomen presque entier, le dernier segment et une large bordure aux autres, rougeâtres. Pattes et antennes testacées. — RD : Sprimont (coll. Chapuis), Baraque-Michel (*id.*).

Note pour le classement des Carabiques.

Dans ces Centuries, j'avais adopté comme ordre de classement des Carabiques, en n'y introduisant que de faibles modifications, celui qui a été établi, en 1860, par Schaum (*Naturgeschichte der Insekten Deutschlands,* 1). C'était effectivement celui qu'on pouvait encore regarder comme le plus satisfaisant, ayant constitué, lors de son apparition, un progrès considérable sur les auteurs qui avaient essayé le même travail. Mais la science marche et use les œuvres imparfaites dans lesquelles nous tentons de saisir et d'établir de notre mieux des relations naturelles, où l'ordre d'une série linéaire, comme on l'a dit cent fois, reste toujours défectueux, quoique le seul que nous puissions employer.

Depuis Schaum, de nombreux entomologistes d'un grand mérite, parmi lesquels il faut citer MM. de Chaudoir, J.-L. Le Conte, Dohrn, H.-W. Bates, G. Kraatz, Piochard de la Brûlerie, C.-G. Thomson, Géhin, notre regretté Putzeys, etc., etc., ont travaillé la famille nombreuse et intéressante des Carabiques, faisant surgir de leur étude la révélation de rapports nouveaux entre ces êtres. Des modifications aux classifications en sont le résultat nécessaire et plus d'un essai en avait été fait. Mais tantôt nous rencontrions des classifications basées sur les groupes limités d'une faune locale, tantôt des bouleversements trop hardis et trop complets des méthodes précédentes, innovations qu'il faut toujours tenir en suspicion, car s'il n'y a jamais rien d'absolument parfait en ces sortes de travaux, il n'y a jamais non plus à condamner sans restriction ce qui a été reconnu bon et quelquefois cru parfait par une des générations de naturalistes qui nous précédèrent. Je n'avais donc, au moment où je commençai ces Centuries, rien trouvé dans la littérature entomologique qui me parût suffisamment autorisé pour détrôner la classification de Schaum, à laquelle je ne m'étais permis d'apporter que les quelques modifications les plus indispensables, n'osant pas y joindre de mon propre chef nombre d'autres dont j'avais cependant conscience et qui n'auraient laissé subsister que fort peu de cette classification.

Dans le courant de l'année 1881, un entomologiste américain d'un profond savoir, M. le Dr Horn, a fait paraître une classification des Carabiques (*Transact. Amer. Entom. Soc.*, IX) qui m'a paru réaliser enfin un tableau aussi fidèle que possible des résultats présentement acquis dans la taxonomie des Carabiques; je me suis empressé de l'analyser et d'en traduire les parties essentielles (*Comptes rendus de la Société entomologique de Belgique*, séance du 4 mars 1882), et je ne puis mieux faire que d'en conseiller l'adoption à tous ceux qui veulent avoir leurs collections disposées dans l'ordre le plus conforme à l'état actuel de la science.

Je reprendrai donc les 248 espèces jusqu'ici énumérées dans ces trois premières Centuries et les placerai dans les cadres de la classification Horn :

SOUS-FAMILLE DES CARABINÆ.

Tribu I. — OMOPHRONINI.

1. *Omophron limbatum* . Centurie I, 3

Tribu III. — CYCHRINI.

2. *Cychrus rostratus* . . . Cent. I, 31

Tribu IV. — CARABINI.

3. *Procrustes coriaceus* . . Cent. I, 16
4. *Carabus intricatus* 17
5. *C. auratus* 18
6. *C. auronitens* 19
7. *C. nitens* 20
8. *C. clathratus* 21
9. *C. granulatus* 22
10. *C. cancellatus* 23
11. *C. monilis* 24
12. *C. arvensis* 25
13. *C. catenulatus*. 26
14. *C. purpurascens* 27
15. *C. convexus*. 28
16. *C. nemoralis* 29
17. *C. irregularis* 30
18. *Calosoma inquisitor*. 14
19. *C. sycophanta* 15

Tribu VII. — ELAPHRINI.

20. *Elaphrus uliginosus*. . Cent. III, 35
21. *E. cupreus* . . . . I, 9
22. *E. riparius* 10

Tribu VIII. — LORICERINI.

23. *Loricera pilicornis* . . . Cent. I, 55

Tribu IX. — NEBRIINI.

24. *Notiophilus aquaticus* . . Cent. I, 4
25. *N. rufipes* 5
26. *N. palustris*. 6
27. *N. biguttatus* 7
28. *N. punctulatus*. 8
29. *Leistus spinibarbis* 11
30. *L. ferrugineus*. . . . . . III, 36
31. *L. rufescens* . . . . I, 12
32. *Nebria brevicollis*. 13

Tribu XV. — SCARITINI.

33. *Dyschirius globosus*. . . Cent. I, 51
34. *D. thoracicus* . . . . . . III, 40
35. *D. politus*. 41
36. *D. æneus*. . . . . I, 52
37. *Clivina fossor* 53
38. *Cl. collaris* 54

SOUS-FAMILLE DES HARPALINÆ BISETOSÆ.

Tribu XVI. — Panagæini.

39. *Panagæus crux-major.* . Cent. I, 56
40. *P. quadripustulatus.* . . . III, 42

Tribu XXII. — Bembidiini.

41. *Tachypus pallipes* . . . Cent. II, 90
42. *T. flavipes* 91
43. *Bembidium paludosum.* 96
44. *B. punctulatum* 97
45. *B. prasinum.* 98
46. *B. flammulatum* 99
47. *B. varium* 100
48. *B. adustum.* . . . . III, 1
49. *B. ruficorne* 2
50. *B. elongatum* 3
51. *B. fluviatile.* 4
52. *B. littorale* 5
53. *B. bruxellense.* 6
54. *B. femoratum* 7
55. *B. obsoletum* 8
56. *B. fasciolatum.* 9
57. *B. cœruleum* 10
58. *B. atrocœruleum* 11
59. *B. tibiale.* 12
60. *B. nitidulum* 13
61. *B. monticulum.* 14
62. *B. decorum.* 15
63. *B. bipunctatum* 16
64. *B. nigricorne* 17
65. *B. lampros* 18
66. *B. Doris* 19
67. *B. Sturmi* 20
68. *B. articulatum.* 21
69. *B. quadriguttatum* 22
70. *B. quadripustulatum* 23
71. *B. quadrimaculatum* 24
72. *B. humerale.* 25
73. *B. assimile* 26
74. *B. Clarki.* 27
75. *B. biguttatum* 28
76. *B. guttula* . . . . . Cent. III, 29
77. *B. Mannerheimi* 30
78. *B. obtusum.* 31
79. *B. rufescens* 32
80. *B. quinquestriatum* 33
81. *Tachys bistriatus.* . . . . . II, 92
82. *T. nanus.* . . . . III, 51
83. *T. quadrisignatus* . . . . . II, 93
84. *T. sextriatus* 94
85. *T. Focki* 95

Tribu XXIII. — Pogonini.

86. *Patrobus excavatus.* . Cent. II, 41
87. *Trechus discus* 83
88. *Tr. micros* 84
89. *Tr. longicornis* 85
90. *Tr. rubens* 86
91. *Tr. minutus.* 87
92. *Tr. secalis* 88
93. *Perileptus areolatus* 89

Tribu XXIV. — Pterostichini.

94. *Pœcilus punctulatus* . . Cent. I, 93
95. *P. cupreus.* 94
96. *P. lepidus* 95
97. *P dimidiatus.* 96
98. *Lagarus vernalis* 97
99. *Lyperus aterrimus.* 98
100. *Omaseus niger* 99
101. *O. vulgaris.* 100
102. *O. nigrita* . . . . II, 1
103. *O anthracinus* 2
104. *O. gracilis.* 3
105. *O. minor* . . . . III, 44
106. *Argutor strenuus* . . . . . II, 4
107. *A. diligens.* 5
108. *Platysma oblongopunctatum* . . 6
109. *Pl. angustatum* 7
110. *Steropus madidus* 8
111. *St. æthiops.* 9
112. *Pterostichus parumpunctatus* . . 10

TRIBU XXV. — LICININI.

TRIBU XXVI. — PLATYNINI.

TRIBU XXXIV. — LEBIINI.

SOUS-FAMILLE DES HARPALINÆ UNISETOSÆ.

TRIBU XL. — BRACHYNINI.

193. *Brachynus crepitans* . . Cent. I, 32
194. *Br. explodens* 33
195. *Br. sclopeta* 34

TRIBU XLII. — BROSCINI.

196. *Broscus cephalotes* . . . Cent. I, 67

TRIBU XLV. — CHLÆNIINI.

197. *Callistus lunatus* . . . Cent. I, 61
198. *Chlœnius holosericeus* . . III, 43
199. *Chl. variegatus* . . . . . . I, 62
200. *Chl. nigricornis* 63
201. *Chl. Schranki*. 64
202. *Chl. vestitus* 65
203. *Oodes helopioides* 66

TRIBU XLVI. — ZABRINI.

204. *Zabrus gibbus* . . . . Cent. II, 40

TRIBU XLVII. — HARPALINI.

205. *Ophonus sabulicola* . . Cent. II, 51
206. *O. punctatulus*. . . . . III, 47
207. *O. azureus* . . . . II, 52
208. *O. cordatus* 53
209. *O. rupicola* 54
210. *O. puncticollis* 55
211 *O. rufibarbis*. 56
212. *O. parallelus* 57
213. *O. maculicornis* 58
214. *Harpalus ruficornis* 59
215. *H. griseus* . . . . . Cent. II, 60
216. *H. calceatus*. 61
217. *H. hottentota* 62
218. *H. lævicollis*. 63
219. *H. ignavus* 64
220. *H. distinguendus* 65
221. *H. æneus* 66
222. *H. discoideus* . . . . . . III, 48
223. *H. rubripes* . . . . II, 67
224. *H. latus* 68
225. *H. luteicornis* 69
226. *H. fuliginosus* 70
227. *H. tenebrosus* 71
228. *H. tardus*. 72
229. *H. serripes* . . . . III, 49
230. *H. caspius* . . . . II, 73
231. *H. anxius* 74
232. *H. picipennis* 75
233. *Stenolophus teutonus*. 76
234. *St. vespertinus* 77
235. *Acupalpus flavicollis*. 78
236. *A. dorsalis* 79
237. *A. brunnipes* 80
238. *A. exiguus* . . . . III, 50
239. *A. meridianus* . . . . II, 81
240. *A. consputus*. 82
241. *Bradycellus cognatus* 47
242. *Br. harpalinus*. 48
243. *Br. collaris* 49
244. *Br. similis* 50
245. *Diachromus germanus* 43
246. *Anisodactylus signatus* 44
247. *A. binotatus*. 45
248. *A. nemorivagus* 46

SUR

LA CYCLIDE DE DUPIN;

PAR

J. NEUBERG,

Chargé de cours à l'École des Mines.

SUR

LA CYCLIDE DE DUPIN.

On sait que la cyclide est l'enveloppe d'une sphère B qui touche trois sphères fixes A_1, A_2, A_3. En partant de cette définition, nous sommes parvenu à une équation remarquable de la surface. Notre solution, dont les calculs sont symétriques et assez simples, met en évidence le double mode de génération de la cyclide, et se prête aisément à la généralisation.

1. Rapportons la figure à trois axes rectangulaires quelconques. Soient

$$S_n \equiv (x-x_n)^2+(y-y_n)^2+(z-z_n)^2-R_n^2=0,\ (n=1,\,2,\,3), \qquad (1)$$

$$S \equiv (x-X)^2+(y-Y)^2+(z-Z)^2-R^2=0, \qquad (2)$$

les équations des sphères A_1, A_2, A_3, B. Les conditions de contact donnent les égalités

$$(X-x_n)^2+(Y-y_n)^2+(Z-z_n)^2-(R+R_n)^2=0, \qquad (3)$$

dans lesquelles nous supposerons R positif, et R_n positif ou négatif, suivant que les sphères A_n et B se touchent extérieurement ou intérieurement.

Pour trouver l'équation de l'enveloppe de B, nous différentions d'abord (2) et (3) par rapport aux paramètres variables X, Y, Z, R, et nous éliminons les différentielles entre les équations ainsi obtenues; ce qui donne la relation

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z & R \\ X-x_1 & Y-y_1 & Z-z_1 & R+R_1 \\ X-x_2 & Y-y_2 & Z-z_2 & R+R_2 \\ X-x_3 & Y-y_3 & Z-z_3 & R+R_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Il reste à éliminer X, Y, Z, R entre (2), (3) et (4). A cet effet, multiplions le déterminant (4) par le suivant :

$$\begin{vmatrix} -2(X-x) & -2(Y-y) & -2(Z-z) & 2R \\ -2(X-x_1) & -2(Y-y_1) & -2(Z-z_1) & 2(R+R_1) \\ -2(X-x_2) & -2(Y-y_2) & -2(Z-z_2) & 2(R+R_2) \\ -2(X-x_3) & -2(Y-y_3) & -2(Z-z_3) & 2(R+R_3) \end{vmatrix},$$

qui n'en diffère que par un facteur constant. Les éléments diagonaux du produit sont nuls en vertu de (2) et (3). Un élément de la première ligne ou de la première colonne est

$$-2(X-x)(X-x_n)-2(Y-y)(Y-y_n)-2(Z-z)(Z-z_n)+2R(R+R_n);$$

si l'on y additionne les premiers membres de (2) et (3), il se réduit à S_n.

Un calcul analogue fait voir que les autres éléments du produit sont les quantités

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-(R_1-R_2)^2,$$
$$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2-(R_2-R_3)^2,$$
$$(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2-(R_3-R_1)^2,$$

que nous désignons par t_3, t_1, t_2. Par conséquent, l'équation de la cyclide est

$$\begin{vmatrix} 0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & 0 & t_3 & t_1 \\ S_2 & t_3 & 0 & t_1 \\ S_3 & t_2 & t_1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \tag{5}$$

ou

$$t_1^2S_1^2 + t_2^2S_2^2 + t_3^2S_3^2 - 2t_2t_3S_2S_3 - 2t_3t_1S_3S_1 - 2t_1t_2S_1S_2 = 0,$$

ou encore

$$\sqrt{t_1S_1} \pm \sqrt{t_2S_2} \pm \sqrt{t_3S_3} = 0 \ (*). \qquad (6)$$

S_1, S_2, S_3 sont ici les puissances d'un point (x, y, z) par rapport aux sphères données A_1, A_2, A_3; nous les appellerons coordonnées *trisphériques*. Les quantités t_1, t_2, t_3 sont les carrés des tangentes communes à deux des sphères données, ces tangentes étant limitées à leurs points de contact, et extérieures ou intérieures suivant que B touche les sphères correspondantes de la même manière ou de manières différentes.

L'intersection de la cyclide et de la sphère A_1 est représentée par les équations

$$S_1 = 0, \quad t_2S_2 = t_3S_3;$$

on conclut de là ce théorème remarquable, dû à Dupuis :

Quand une sphère variable B *touche constamment de la même manière trois sphères fixes* A_1, A_2, A_3, *chacun des trois points de contact décrit un petit cercle de la sphère fixe correspondante.*

2. Les équations (5) peuvent être écrites ainsi :

$$\begin{aligned} S_1 - 2RR_1 - R^2 &= 0, \\ S_2 - 2RR_2 - R^2 &= 0, \\ S_3 - 2RR_3 - R^2 &= 0, \end{aligned} \qquad (7)$$

S_1, S_2, S_3 étant les coordonnées trisphériques du centre (X, Y, Z) de B. On en déduit, par l'élimination de R,

$$\begin{vmatrix} S_1 & R_1 & 1 \\ S_2 & R_2 & 1 \\ S_3 & R_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (8)$$

$$(S_1 - S_2)^2 + 4(R_1S_2 - R_2S_1)(R_1 - R_2) = 0. \qquad (9)$$

(*) Cette équation de la cyclide peut se déduire d'un théorème important, dû à M. Casey. Voir, par exemple, Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, 4e édition, § 410, 2°.

Comparer également : Ed. Lucas, *Sur un principe fondamental de Géométrie et de Trigonométrie* (*Nouvelle Correspondance*, t. IV, p. 175).

L'équation (8), qu'on peut mettre sous la forme

$$R_1(S_2 - S_3) + R_2(S_3 - S_1) + R_3(S_1 - S_2) = 0,$$

représente un plan passant par l'axe radical L des sphères données, et perpendiculaire à leur axe de similitude L'; l'équation (9) est celle d'une surface du second ordre. Donc le centre de B décrit une conique. Des considérations géométriques très simples montrent aussi que la sphère mobile, dans toutes ses positions, est de puissance constante par rapport aux centres de similitude de A_1, A_2, A_3; autrement dit, elle passe par deux points fixes (réels ou imaginaires) de L' (*).

3. L'analogie entre (5) et l'équation, en coordonnées tangentielles, d'une conique, conduit aisément au second mode de génération de la cyclide.

L'équation du premier degré, en coordonnées trisphériques,

$$\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + \mu_3 S_3 = 0, \tag{10}$$

qui revient à

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\frac{\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} x \cdots = 0,$$

représente une sphère A passant par les points (réels ou imaginaires) P, P', communs aux sphères A_1, A_2, A_3; le centre de A est le centre de gravité des masses μ_1, μ_2, μ_3, attachées aux centres de A_1, A_2, A_3. Ces masses sont les *coordonnées barycentriques* du centre de A; nous supposerons leur somme égale à l'unité, à moins qu'elle ne soit nulle, auquel cas l'équation (10) représente un plan passant par P, P'.

Pour exprimer que la sphère A touche la cyclide, il faut égaler à 0 la forme adjointe de (5), c'est-à-dire poser

$$t_1\mu_2\mu_3 + t_2\mu_3\mu_1 + t_3\mu_1\mu_2 = 0. \tag{11}$$

(*) Ces propriétés sont aussi exprimées par l'équation (4), qui représente le plan radical de deux positions consécutives de la sphère B. Le premier membre de cette équation, si l'on remplace x, y, z, successivement par (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), prend des valeurs proportionnelles à R_1, R_2, R_3; donc le plan radical passe par les centres de similitude de A_1, A_2, A_3.

L'équation (11) représente une conique. Donc *la cyclide est aussi l'enveloppe d'une suite de sphères* A, *dont les centres se trouvent sur la conique* (11), *et qui ont un axe radical commun* L.

Les sphères A_1, A_2, A_3 sont trois positions particulières de la sphère A, que rien ne distingue des autres. Par conséquent, chacune des sphères B touche chacune des sphères A.

4. On peut, de la même manière, trouver l'enveloppe d'une sphère B qui coupe les sphères A_1, A_2, A_3 sous des angles donnés λ_1, λ_2, λ_3.

Les équations (3) seront remplacées par

$$(X-x_n)^2+(Y-y_n)^2+(Z-z_n)^2-(R^2+R_n^2+2RR_n\cos\lambda_n)=0, \quad (3')$$

et l'équation (4) par

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z & R \\ X-x_1 & Y-y_1 & Z-z_1 & R+R_1\cos\lambda_1 \\ X-x_2 & Y-y_2 & Z-z_2 & R+R_2\cos\lambda_2 \\ X-x_3 & Y-y_3 & Z-z_3 & R+R_3\cos\lambda_3 \end{vmatrix}=0. \quad (4')$$

Formons le produit du déterminant (4′) par celui que l'on obtient en multipliant les colonnes de (4′) respectivement par -2, -2, -2, 2. En posant

$$t_{11}=-2R_1^2\sin^2\lambda_1,\ \text{etc.},$$

$$t_{12}=t_{21}=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2-(R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\lambda_1\cos\lambda_2),\ \text{etc.},$$

nous aurons, pour l'équation de l'enveloppe de B,

$$\begin{vmatrix} 0 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ S_2 & t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ S_3 & t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix}=0. \quad (12)$$

On peut donner aux équations (3′) la forme

$$\begin{aligned} S_1-2RR_1\cos\lambda_1-R^2&=0,\\ S_2-2RR_2\cos\lambda_2-R^2&=0, \quad (13)\\ S_3-2RR_3\cos\lambda_3-R^2&=0, \end{aligned}$$

S_1, S_2, S_3 étant les coordonnées trisphériques du centre de B. Si l'on élimine R, on aura les équations du lieu décrit par le centre de B; ce lieu est une conique située dans un plan passant par l'axe radical de A_1, A_2, A_3.

La surface (12) est aussi l'enveloppe d'une sphère A passant par les points d'intersection P, P′ des sphères A_1, A_2, A_3 et dont le centre parcourt la conique représentée par l'équation

$$t_{11}\mu_1^2 + t_{22}\mu_2^2 + t_{33}\mu_3^2 + 2t_{12}\mu_1\mu_2 + 2t_{23}\mu_2\mu_3 + 2t_{31}\mu_3\mu_1 = 0. \quad (11')$$

5. Les résultats que nous venons de trouver peuvent être établis et complétés au moyen d'autres considérations.

Les équations (13), qui expriment que la sphère B coupe les sphères A_1, A_2, A_3 sous les angles λ_1, λ_2, λ_3, entraînent la suivante :

$$\Sigma\mu_1 S_1 - 2R\Sigma\mu_1 R_1 \cos\lambda_1 - R^2 = 0, \quad (14)$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant trois quantités quelconques ayant pour somme l'unité. La relation (14) exprime que B coupe la sphère A dont l'équation est

$$\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + \mu_3 S_3 = 0, \quad (10)$$

sous l'angle λ déterminé par

$$\rho\cos\lambda = \mu_1 R_1 \cos\lambda_1 + \mu_2 R_2 \cos\lambda_2 + \mu_3 R_3 \cos\lambda_3, \quad (15)$$

ρ étant le rayon de A. Donc : *Si une sphère variable* B *coupe sous des angles constants trois sphères fixes* A_1, A_2, A_3, *elle coupe aussi sous un angle constant toute sphère* A *passant par les points d'intersection de* A_1, A_2, A_3.

ρ est donné par la formule

$$\rho^2 = \Sigma^2\mu_1 x_1 + \Sigma^2\mu_1 y_1 + \Sigma^2\mu_1 z_1 - \Sigma\mu_1\Sigma\mu_1(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - R_1^2),$$

que l'on peut écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned}\rho^2 &= \Sigma\mu_1\Sigma\mu_1 R_1^2 - \Sigma\mu_1\mu_2 \,.\, d_3^2.\\ \rho^2 &= \Sigma^2\mu_1 R_1 - \Sigma\mu_1\mu_2 t_3,\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

d_1, d_2, d_3 étant les lignes des centres de A_1, A_2, A_3; t_1, t_2, t_3 sont les longueurs des tangentes communes.

Les sphères A_1, A_2, A_3 sont coupées par le plan de leurs centres suivant trois circonférences α_1, α_2, α_3, dont nous désignerons la circonférence orthogonale par ω. La ligne ω (*) est le lieu des centres des sphères A dont le rayon est nul ; son équation est donc

$$\Sigma\mu_1\Sigma\mu_1 R_1^2 - \Sigma\mu_1\mu_2 a_3'^2 = 0 \quad (^{**}),$$

ou

$$\Sigma^2\mu_1 R_1 - \Sigma\mu_1\mu_2 t_3 = 0. \tag{17}$$

Revenons maintenant à l'enveloppe de la sphère B qui coupe sous des angles constants λ_1, λ_2, λ_3 trois sphères fixes A_1, A_2, A_3. Le mouvement de la sphère B peut encore être défini par la condition qu'elle coupe sous des angles constants trois quelconques des sphères passant par P, P'. En particulier, on peut choisir pour les dernières sphères trois sphères tangentes à B ; on voit alors que les surfaces traitées aux n^os 1 et 4 sont de même nature.

Désignons par A une sphère quelconque passant par P, P' et tangente aux sphères B; son centre et son rayon vérifient les équations (15) et (16), λ étant égal à 0 ou à π. Si l'on élimine ρ, on trouve l'équation représentant le lieu du centre de A :

$$\Sigma^2\mu_1 R_1 \cos\lambda_1 = \Sigma^2\mu_1 R_1 - \Sigma\mu_1\mu_2 t_3; \tag{18}$$

elle est identique à (11'), ce que l'on pouvait prévoir.

Prenons pour A_1, A_2, A_3 trois quelconques des sphères A, de sorte que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. L'équation (18) se réduit à (11), et l'on voit de nouveau que la cyclide est l'enveloppe des sphères A passant par P, P' et dont le centre parcourt la conique représentée par (11). D'après la signification de (17), cette conique est doublement tangente à la circonférence ω, la corde de contact

(*) Si les points P, P' sont réels, le milieu de leur distance est intérieur aux cercles α_1, α_2, α_3, et le cercle ω est imaginaire.

(**) Cette équation démontre le théorème suivant : *Étant donnés trois cercles α_1, α_2, α_3, la circonférence qui les coupe orthogonalement, et celle qui passe par leurs centres, ont pour axe radical la droite divisant les lignes des centres de α_1, α_2, α_3 en segments proportionnels aux carrés des rayons correspondants.*

étant l'axe de similitude L′ de A_1, A_2, A_3; l'un de ses axes de symétrie est donc la perpendiculaire abaissée du centre de ω sur L′. La formule (15) devient maintenant

$$\rho = \mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 + \mu_3 R_3;$$

on en conclut que le rayon d'une sphère A est proportionnel à la distance du centre à la droite L′.

Les points d'intersection Q, Q′ de la conique (11) par la circonférence ω (ou par la droite L′) sont les centres de deux sphères A dont le rayon est nul; ils appartiennent évidemment à toutes les sphères B.

Il existe aussi des sphères passant par P, P′ et coupant orthogonalement les sphères B; leurs centres sont sur L′, c'est ce qui résulte de l'égalité (15), si l'on fait $\lambda = \frac{\pi}{2}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Enfin, comme on peut intervertir les rôles des sphères A et B, les centres des sphères B sont sur une conique (B) dont le plan est perpendiculaire à L′ et passe par L. Cette courbe est la focale du lieu (A) des centres des sphères A; en effet, le plan de (B) coupe une sphère quelconque B et les sphères A qui ont leurs centres aux deux sommets de (A) situés sur la perpendiculaire commune à L et L′, suivant trois grands cercles dont le premier touche les deux autres.

SUR

UNE FORMULE D'INTERPOLATION

PAR

M. F. GOMÈS TEIXEIRA,

Professeur à l'Université de Coïmbre.

SUR

UNE FORMULE D'INTERPOLATION.

Le but de cette Note est de démontrer une formule qui permette de déterminer une fonction de x, quand on connaît les valeurs qu'elle prend, ainsi que ses dérivées, pour des valeurs particulières données à la variable.

Si nous désignons par $a_1, a_2, \ldots a_n$ les valeurs attribuées à x, les valeurs de la fonction et de ses dérivées seront représentées par le tableau suivant :

$$\begin{array}{l} x = a_1,\ y_1,\ y'_1,\ y''_1, \ldots y_1^{(\alpha-1)}, \\ x = a_2,\ y_2,\ y'_2,\ y''_2, \ldots y_2^{(\beta-1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x = a_n,\ y_n,\ y'_n,\ y''_n, \ldots y_n^{(\lambda-1)}. \end{array}$$

A ce problème correspond, en géométrie, la détermination d'une courbe qui passe par les points $(a_1, y_1), (a_2, y_2), \ldots (a_n, y_n)$ et qui, en ces points, ait des contacts d'ordres $\alpha - 1, \beta - 1, \ldots \lambda - 1$ avec des courbes données.

Appelons $f(x)$ la fonction cherchée et soit

$$F(x) = (x - a_1)^\alpha (x - a_2)^\beta \dots (x - a_n)^\lambda.$$

Posons

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M_1}{(x-a_1)} + \frac{M_2}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{M_\alpha}{(x-a_1)^\alpha} \\ + \frac{N_1}{(x-a_2)} + \frac{N_2}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{N_\beta}{(x-a_2)^\beta} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{K_1}{(x-a_n)} + \frac{K_2}{(x-a_n)^2} + \cdots + \frac{K_\lambda}{(x-a_n)^\lambda},\end{aligned}$$

et déterminons les numérateurs de ces fractions.

Si nous donnons à x la valeur $x = a_1 + h$, dans

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{M_1}{(x-a_1)} + \frac{M_2}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{M_\alpha}{(x-a_1)^\alpha} + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)},$$

où

$$\varphi(x) = (x - a_2)^\beta (x - a_3)^\gamma \dots (x - a_n)^\lambda,$$

il vient

$$\frac{f(a_1+h)}{F(a_1+h)} = \frac{M_1}{h} + \frac{M_2}{h^2} + \cdots + \frac{M_\alpha}{h^\alpha} + \frac{\varphi_1(a_1+h)}{\varphi(a_1+h)}.$$

Le quotient de $\varphi_1(a_1 + h)$ par $\varphi(a_1 + h)$ ne peut contenir que des puissances entières de h parce que $\frac{\varphi_1(a_1)}{\varphi(a_1)}$ ne peut devenir infini pour $h = 0$; il en résulte que M_1, M_2, ... M_α sont les coefficients de $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h^2}$, $\cdots$ $\frac{1}{h^\alpha}$ dans le développement de $\frac{f(a_1+h)}{F(a_1+h)}$ suivant les puissances de h.

D'autre part, en appelant A_1, A_2, ... A_α; B_1, B_2, ... B_β, ...; P_1, P_2, ... P_λ les numérateurs des fractions simples que l'on obtient en décomposant $\frac{1}{F(x)}$, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1 f(x)}{(x-a_1)} + \frac{A_2 f(x)}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha f(x)}{(x-a_1)^\alpha} \\ + \frac{B_1 f(x)}{(x-a_2)} + \frac{B_2 f(x)}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{B_\beta f(x)}{(x-a_2)^\beta} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ + \frac{P_1 f(x)}{(x-a_n)} + \frac{P_2 f(x)}{(x-a_n)^2} + \cdots + \frac{P_\lambda f(x)}{(x-a_n)^\lambda}.\end{aligned}$$

En faisant $x = a_1 + h$ dans le premier terme de cette somme, il vient

$$A_1 \frac{f(a_1 + h)}{h} = A_1 \frac{f(a_1) + hf'(a_1) + \frac{1}{2} h^2 f''(a_1) + \cdots}{h}$$

$$= A_1 h^{-1} f(a_1) + A_1 f'(a_1) + \frac{1}{2} hf''(a_1) + \cdots$$

De même, le second terme donne

$$\frac{A_2 f(a_1 + h)}{h^2} = A_2 h^{-2} f(a_1) + A_2 h^{-1} f'(a_1) + \frac{1}{2} A_2 f''(a_1) + \cdots,$$

le troisième,

$$\frac{A_3 f(a_1 + h)}{h^3} = A_3 h^{-3} f(a_1) + A_3 h^{-2} f'(a_1) + \frac{1}{2} A_3 h^{-1} f''(a_1) + \cdots$$

et ainsi de suite.

En faisant $x = a_1 + h$, dans les autres lignes, on n'obtiendra pas de puissances négatives de h, comme nous l'avons dit tantôt.

Les coefficients de $\frac{1}{h}$ seront donc

$$A_1 f(a_1),\ A_2 f'(a_1), \ldots \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha - 1)} f^{(\alpha-1)}(a_1).$$

En écrivant

$$M_1 = A_1 f(a_1) + A_2 f'(a_1) + \cdots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-1)} f^{(\alpha-1)}(a_1),$$

et en sommant séparément les coefficients des différentes puissances de $\frac{1}{h}$, nous trouvons les valeurs de M_2, M_3, M_4, etc., à savoir :

$$M_2 = A_2 f(a_1) + A_3 f'(a_1) + \frac{1}{2} A_4 f''(a_1) + \cdots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-2)} f^{(\alpha-2)}(a_1),$$

$$M_3 = A_3 f(a_1) + A_4 f'(a_1) + \frac{1}{2} A_5 f''(a_1) + \cdots + \frac{A_\alpha}{1.2\ldots(\alpha-3)} f^{(\alpha-3)}(a_1),$$

. . . .

$$M_\alpha = A_\alpha f(a_1).$$

Pour obtenir les numérateurs P_1, P_2, P_3, etc., il suffit de changer, dans les formules précédentes, a_1 en a_2, α en β et $A_1, A_2, \ldots A_\alpha$ en $B_1, B_2, \ldots B_\beta$.

On obtient les autres numérateurs des fractions simples en faisant des changements analogues.

Nous serons conduit finalement à la formule suivante :

$$
\begin{aligned}
f(x) = F(x) \Bigg\{ & \left[\frac{A_1}{(x-a_1)} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \frac{A_3}{(x-a_1)^3} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^\alpha}\right] y_1 \\
& + \left[\frac{A_2}{(x-a_1)} + \frac{A_3}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a_1)^{\alpha-1}}\right] y_1' \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)} \, \frac{A_\alpha}{(x-a_1)} \, y_1^{\alpha-1} \\
& + \left[\frac{B_1}{(x-a_2)} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-a_2)^\beta}\right] y_2 \\
& + \left[\frac{B_2}{(x-a_2)} + \frac{B_3}{(x-a_2)^2} + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-a_2)^{\beta-1}}\right] y_2' \\
& + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots(\beta-1)} \cdot \frac{B_\beta}{(x-a_2)} \, y_2^{(\beta-1)} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \left[\frac{P_1}{(x-a_n)} + \frac{P_2}{(x-a_n)^2} + \frac{P_3}{(x-a_n)^3} + \cdots + \frac{P_\lambda}{(x-a_n)^\lambda}\right] y_n \\
& + \left[\frac{P_2}{(x-a_n)} + \frac{P_3}{(x-a_n)^2} + \cdots + \frac{P_\lambda}{(x-a_n)^{\lambda-1}}\right] y_n' \\
& + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots(\lambda-1)} \, \frac{P_\lambda}{(x-a_n)} \, y_n^{(\lambda-1)} \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

La fonction ainsi déterminée résout la question proposée. On voit que pour l'appliquer, il est nécessaire de décomposer en fractions simples une fraction rationnelle $\frac{1}{F(x)}$, ce qui se peut faire en employant une des méthodes connues.

On peut faire usage, par exemple, des formules que nous avons fait connaître dans notre mémoire *Sur la décomposition des fractions rationnelles* (*), à savoir

$$A_i=(-1)^{\alpha-1}\sum\frac{\left[(\beta+\delta'-1)C\delta'\right]\left[(\gamma+\delta''-1)C\delta''\right]\ldots\left[(\lambda+\delta^{(n-1)}-1)C\delta^{(n-1)}\right]}{(a_1-a_2)^{\beta+\delta'}(a_1-a_3)^{\gamma+\delta''}\ldots(a_1-a_n)^{\delta(n-1)}},$$

où l'on doit donner à δ', δ'', ... $\delta^{(n-1)}$ toutes les valeurs entières et positives qui satisfont à l'équation

$$\delta'+\delta''+\cdots+\delta^{(n-1)}=\alpha-1.$$

Pour déterminer les numérateurs B_i, il suffit de changer, dans la formule précédente, α en β et a_1 en a_2.

Les autres numérateurs s'obtiennent d'une manière analogue.

Si, dans les relations précédentes, nous faisons

$$\alpha-1=1,\quad \beta-1=1,\quad \lambda-1=1,$$

il vient

$$\begin{aligned}f(x)=&\frac{(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}y_1\\&+\frac{(x-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}y_2\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+\frac{(x-a_1)\,x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}y_n,\end{aligned}$$

ce qui est la formule d'interpolation de Lagrange.

(*) *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, t. I. Coïmbra, 1877.