漢譯世界名著

統計學原理

上册

Arthur L. Bowley 著

李植泉譯

商務印書館發行

劉　序

記得二十餘年以前，我在美國學統計學的時候，教科書很少。現在許多有名的統計學者彼時還未著書，甚或也尚在求學時代。在那時所有的教科書中，鮑萊教授的一本要算數一數二的了。記得當時此書只有一册，以後歷次增補，現在乃成爲兩册。數十年久，新書出版雖多，統計學也有很大的發展，而此書價值始終維不墜，箸者在統計學界的聲望上日益增高，足見他精益求精，鍥而不舍的毅力。一九三〇及一九三一年國際統計學會開會，我兩次代表我國政府前往參加，皆曾與這位老先生晤談。他鬚眉雖已皓白，而討論學術，及參加學會的一切工作，全不後人，足表示他的精神。李君現將此書譯成中文，對於我國研究統計學的人貢獻不少。我希望學者不獨學鮑萊先生的學術，更要景仰他們老前輩的求學精神，眞像荀子所說『學至於死而後已』，如只讀此書，稍能應用統計方法，便自以爲滿足，那就是不善讀書了。

劉大鈞二六年一月五日

原著者序

本書初版於一九〇一年，彼時係根據在倫敦大學經濟學院自一八九五年該院成立之日起五年中所用之講義作成者。其後曾再版兩次，原文雖有修正，然無重要改纂，並增附錄一，討論求差誤常態曲線之第二次近似值，於是數頁附錄遂得流行。現此一版，本質上與一九〇一年舊版無殊；惟第三章第三節，易以一新例解，論平均數之一章，重新加以整理，舊版之第五章，另以一論度量離散度之章代替之，第九章零售物價指數之論述，又重新加以考量，至第十章第二節則已重行改作，同時，文中凡不合時之部分，均易以近代之材料，而整個加以修正，但以對於原文儘可能不加纂改為準，蓋修正本若於細節過於注意，每或破壞原文之均衡也。然在第二編，則係完全重作，並大加擴充，蓋一方對於理論之檢討愈形詳盡，復又加以擴張，一方又增加若干實例，以解釋公式在算術上之應用，而示知理論應用之範圍。為便於手中存有舊版之人士計，此修正版之第一編，既甚少新穎之處，故第二編乃單獨印行。而為謀彼數學知識尚淺未能瞭解是新形式之第二編者之便利計，第一編乃亦另行出版。但此二編根本乃為一書，故二編共用一索引，彼此並互有參證之處。

全書之主旨，在對於統計學之理論及實踐，作一般之介紹，以供彼在業務上必須運用統計，或對於統計結果之利用及統計調查之限制不能不有普遍之瞭解者之用。本書意旨決非欲成爲若干事實之一部概論，而所插入各表，不過供解明方法之用耳，內容並非僅包羅何種業經發表之統計材料已也。但願讀者對於官方或其他方面所發表關於任何題材（凡其中事實之數字知識及其相互關係甚爲重要者）之表格及得數，能自瞭解，尤盼能加以評價並給予批評。關於統計學之歷史及書目，本書並無述及之動機。蓋在英文，法文及德文統計學中，特闢極大篇幅，以論統計學方法與實踐之史的發展，並附有參考書目者甚多；故在本書與其加以疏略之論述，似不若完全省略之之爲愈。除此種種限制而外，吾人希望在第一編中之論述，能以儘量包括通常統計工作中所需之方法及技術之大部，而此則只以應用最淺顯之數學者爲限。插補法一章，所用符號，初視之對於非數學家似覺可怕，固矣；但事實上，有限相差及牛頓插補公式之運用，極爲簡單，所包括之算術，亦極簡易，而全章之大部，應爲在學校對於圖解代數學受有訓練者所易於瞭解也。

第二編，則對於預先之初步訓練，及略含抽象推理之理解力，有強烈之需要。所假定之實際知識，可由研究院微積分課程而得，至普通不爲此種學科所包括之定理，則在附錄中（以簡略式）

證明之。在第一版中，曾謀力避應用微積分而求出主要之得數；但以過去二十年中，統計學已有長足發展之故，現已有放棄此種企圖之必要矣。僅用代數方能求出之得數，其為重要而有用，自無疑義可言。但若在開始對數理統計作深刻研究之前，先行熟知微積分學之原理，乃有極多至少亦為相等之效用，蓋學生可以節省光陰也；惟此種效用須在研究較深之數學後始能領略之耳。此一見解，已為一種非常鬆懈之推理所證實。此種推理即往往為彼過於輕用標準差，頻數曲線，尤其相關係數之著作家所運用者即是。在第二編第六章，曾予以絕大之注意，期能對於以此係數度量相關之意義及此係數之含義，加以儘量精確之說明。而在此學科經過十分深刻研究之前，本可多加論述。蓋吾人除非在精密研究其中原理之後，絕不可企圖度量相關也。

雖本書第二編論述之主旨，一則在對於數理作一般之概論，而不論統計所施用之主體為何，二則對於普通常用之名詞及度量，加以定義與解釋，使之足為各科（凡含有羣類度量之科學）學生之一助，然於論述之次序，特別是試驗之實例，在選擇時，主要均以與社會學及經濟學調查中所生之問題有關者為主。而許多例證，實際上乃均係取給於余個人所作之研究，至此種研究中所引用之數學論述，則一以研究項目所需要，始行加入也。職是之故，本書讀者，凡熟知皮爾生（Karl Pearson）教授，艾得頓

(Elderton) 先生，哈地(Hardy)先生，及格林吳得 (Greenwood 博士之著述者，必將見及本書對於生物學上問題，或保險精算學上問題之應用，並不注重，而於爲人向少注意之公式及方法，則重視有加焉。

惟關於論述之最佳方法，及以數學機率原理應用於統計觀察之基本概念，已引起甚多之爭論。余不克希望已將有爭論之問題，力避而不談（蓋誠如將此種問題一律屏除，則所餘已無幾矣，但余已盡力之所能，在前景中收納爲一般所公認之方法及原則，而凡爲爭論題材且不重要者則均捨棄之。雖然，在某一方面，有一定之路綫雖未必得普遍之公認，但仍遵行不輟。依余所見，標準差一者，設非與機率表連用，其效用至爲有限，蓋此種機率表，可用以計算超過此標準差若干倍數之機率也。故余對於由樣本而來之平均數及其他函數之分配之常態性，甚爲注重。關於此點，吾人必須由正機率，進而至於所謂逆機率，而此則余遠勝於其他若干著作家者也。吾人若用樣本，以判定一範圍，則吾人得不到任何確定之結果，直至吾人能作出下述陳述：

『範圍中最或然之平均數（或任何所論及之數量）爲A，此平均數與A相差有 $d_1, d_2 \cdots\cdots$ 之多之機率，爲 p_1, $p_2 \cdots\cdots$。』

此卽包含逆機率及機率表之確定用途也。而僅僅陳說標準

差，則所昭告吾人者極鮮。

本書之定理及公式，絕少完全由余創作者。對於愛基華斯(Edgeworth)教授，皮爾生教授，薛伯(Shoppard)博士，余當表示特別歉意，而於猶爾(Yule)先生，余當再三感謝不置者也。然余雖不欲將余所叨於此等著作者之一切，一一明白列舉，蓋論述之次序，有時須將彼等著作，加以修改及整理，而其修改及整理之法，當非為彼著作者所同意。但余已盡力承認所取得材料之來源，並註明參考書籍，庶使讀者能得讀原本。

克萊特華基(J. P. Clatworthy, of University College, Reading)先生，可文(H. Curwen)先生，及郝格女士(M. Hogg, 經濟學院)，與門茲樂爾(Menzler)先生，對於第二編證解之校正，與若干部分算術之證明，均予以極大之助力。而於余最先名舉者，且更感惠非淺，蓋彼對於數理研究之細節，曾賜以有價值之批評也。

A. L. Bowley.

倫敦大學經濟政治學院

一九二〇年九月

第四版附言

『統計原理』一書之第二編，乃爲對於統計數理之概述，而以在經濟學社會學之研究上有特殊用途之方法，作爲特別之補充。在第一編，除對於敍述統計作一概略而不含數學之論述外，復以一章論初級之內插補法，並竊於指數作一代數的分析，故在本質上與以前各版並無差別。至第二編，已前各版所有者既幾全部包括在內，實則係完全重作並加擴充，實際上乃係一部新書，故兩編固可分別出版，亦可以兩編合爲一部而印行之。

一九二〇年九月，著者識

第一編

目錄

插表目錄

插圖目錄

統計學原理

第一編　基本統計方法

第一章　統計學之意義及其範圍

統計學之定義　統計學一詞，各方所下定義甚多，對於統計學之範圍，統計學著作家，復各有不同之見解。依本書之主旨，雖無區文別字之必要，但顧其名而思其義，理應加以解釋，統計學研究之範圍如何，亦應討論及之。茲爲便於研究計，請就常見之定義討論始。

計數學　舉例言之，統計學亦可名之爲『計數學』(Science of Counting)。吾人初聞此言，必以爲計數者，本爲輕而易舉之事，任人皆優爲之，即用機械之力，亦能自動算出，何待乎學？詎知事實上，使遇極大之數，如一國之人口者，則計數初非易易，個人力量絕難應付裕如；時間也，空間也，無往不爲計數之障礙，且數目過大，逾某種限度時，欲求絕對之確實，勢乃有所不能矣。

算學與統計學之分野　極大之數，枚計之時，欲求每一單位

各個均確實無誤，乃不可能，實則只有大略估計一途。由此一點，吾人可知算術與統計學之分野：用算術得來者，鑿確無疑，統計則僅事估計而已，統計雖有時，亦頗確實，足供其用途之需，然確實程度，去數學遠甚。

統計乃合作之計數 統計所涉及之數目，大都甚巨，即用估計方法，亦斷非一人之力，所能勝任，必也憑藉有組織之團體，集多數人之合作，始克有功。數字之搜集，加入工作者，雖有多人，得來數字之計算，雖僅爲算術問題，然實際進行之時，必遭遇兩種困難。第一，調查事項之定義，不易解說明白，使調查員在訪問之時，何者應加詢問，何者應行放棄，有一定之原則，可資遵循也。蓋單簡之調查對象，如房間數，如年齡數，甚或以個人爲對象，其定義若何，均不免有疑問發生，調查表上雖有寥寥數語關於類別之說明，但一類之內，究包括何等項目(item)，殊難解釋明白也。第二，工作人員衆多，數字上之錯誤，必所難免也；蓋人數一多，則疏忽者有之，愚魯者有之，謄錄之筆誤，列表之誤謬，在所不免也。由此觀之，經多數人之合作，得出之總數，欲求其精確無疵，是誠難矣。雖然，如上所述之估計，固有時亦併入統計學一詞之內，然如謂估計即爲統計學之定義，實亦無乃失之過濫，且此一定義，並未將統計方法之特殊性質說明也。

統計學乃一種方法 實際上，統計學之定義，不妨用歸納法

(aposteriori) 規定之。在遇有大量數字，描寫羣類之大數，以及關於異時異地之總計數或平均數之數列時，均不得不用特殊之方法——此種方法，一則須以大數之特別性質爲依據，一則須能論敍複雜之羣類，以便使人領會，三則須能分析結論之確度(accuracy)，四則須能測量相差之重要性 (significance of difference)，五則須能將估計之數，彼此互作比較。適用此種方法之估計，乃卽屬於統計學之範圍；本書之主旨，卽在硏究此等方法也。

統計方法應用之普遍性　在此定義之下，須知統計學，旣非經濟學之分支，更非任何學科之附屬物。統計學一科，其地位恰似外國語或代數學：在任何時間任何環境之下，均有其效用。

在自然科學上之應用　論及統計方法與各科學術之聯繫，乃至有興趣之問題。試先就自然科學方面論之：統計方法與天文學有接觸者兩點。第一，天文學家爲測量某星位，從若干微有差異之觀察中，急於求得其最優值，因而採用最小二乘法(the least square method)。蓋物體測量，每一數量必須觀察若干次數，然各個觀察不論如何謹愼，終不能使其絕對相合。物體測量如此，社會學上之觀察亦然，雖數字來源相同，而各統計家所求得之平均數，彼此一律甚難。對於此類之數量，必須就其最或然値歸納之；惟其如此，乃不得不應用差誤律 (Law of error)，而此則又

非精重最小二乘法不可者也。

逐步改進之確度　第二，統計方法與天文學方法之相似點，及其與地質學及與其他實用科學所用方法相似之點，大致相同。科學測量之研究，須先就一數量，作草率之觀察，如地球與太陽之距離也，地質層之厚度也，元素之原子量也，物體之比重也，莫不皆然。既有多次關於數量之觀察，更進而求工具之精確，方法之改良，於是觀察之數量，乃逐漸達於確實。如此由粗而細，由細而精，逐步進展之過程，甚為重要，蓋以吾人今日之知識階段，許多統計測量，往往因資料缺乏，以致不能精確作成，故批評者因此而否認先事估計之價值；惟自科學觀點論之，此種批評不無相當錯誤，蓋測量既依據論理原則，與其一無所有也，何妨有錯誤之測量？況且測量之差誤，果有限度可尋，仍不難逐步改進也。

統計學與生物學　統計調查與一切之科學實驗，相似情形，上已略述一二，現請更進而考查統計在生物學上之應用。在皮爾生(Karl Pearson)教授，未發表其所作之調查（註一）以前，進化與遺傳之全部理論，謂其有統計基礎之實在性，尚未為人所公認。但自彼之調查發表以後，數理統計方面極重要之新貢獻，乃相繼出現於此途矣。然此問題之性質如何？茲請略一言之。設有許多觀察於此，譬如以人體之身長為喻，從此觀察數字得出一代表形態，即平均數，以此平均數為中心，將所有數量，依一定之法則，

組成羣類。然則吾人現在之問題，卽在考察平均數，或依平均數組成之羣類，二者何一發生變動耶？其變動爲何如耶？例如生物界之變化，歷經若干年代之考查，始知差異之所在，由此差異之點，乃構成進化論所根據之資料。此乃應用統計方法之效果，如動植物之化石，如動物之種族，以及其他多種之羣類，亦莫不恃此以研究之。設無此種工具，許多已成立之論辯，大部之力量，必將爲之失去，然則所謂學理者，將僅以個人對現象之印象爲基礎矣，尙有何科學測量可言哉！故在此方面應用之方法，可轉爲研究社會問題之一助。平均工資，依平均工資組成之羣類，以及此種數量之變動，亦成完全相似之問題矣；各種因素之效果，彼此所成之相關，亦可用一數學公式計算之矣；實際上，除此之外，欲測量複雜羣類之數字變動，恐更無其他確實之方法矣。關於人體測量學之試驗，幾多有價值之資料，均恃統計方法，爲之搜集，於是統計學家對事實之知識多有增加，若干重要之原理乃因是而出現矣。

統計學與氣象學　氣象學與統計學相似之處甚多。所有關於氣象學之測量，不外溫度、氣壓、空氣溼度、及風力數種。研究此問題，必須集多量之觀察，查其代表形態——平均數，並測量其變動之情況。夫用以記載各年平均溫度之表格，與英國人事登記總監(Registrar-General)發表之出生、死亡、結婚數字，本多

相同。設無統計方法可資應用，各種數列之平均數雖可求出，然亦不過仍爲數字而已，焉能引出合理之結論乎？今有統計學，各年數字之變動，其爲偶然，抑甚重要，其爲繼長增高，抑或週期變化，以及是否合乎何種法則，均不難應刃而解矣。然則由此推而論之，欲進而用以預測將來之人口數變動，及其他類似之問題，甚爲重要，誠昭然若揭矣。

統計學與人口學 即以統計學與人口學（demography）而論，設人口學之內容，不僅限於人口數、出生率、結婚率、死亡率，以及依年齡、性別、地域分之分配——即人口普查及人事登記總監之報告數字——且包括所有產業及社會調查，即依業別分之人口分配，與依所得，工資、物價、生產、國外貿易，以及運輸等等之分配數字而言，則所謂人口學者，凡治社會學經濟學者有直接關係之大部統計調查，均將包括在內。人口學之正確範圍如何，姑置不論，於此可另得一統計學之定義曰：統計學者，乃測量整個社會有機體而從各方表明之之科學也。

統計學對於整個社會有機體之關係 嘗閱一論文，文中依勒布雷（Le Play）之方式，曾作一家庭之調查，記載家中每人之職業及收入，消費之方式，此一家庭之經濟地位，但此項研究，實不合統計原則。人口學之研究，乃集多種之家庭，作一種數量之觀察，從事某一產業之家庭，共有若干？其平均進款，消費、儲蓄、

幾何？此統計學之所事也。論文所用方法，以個體爲萬物，而統計方法，視個體若無物，性質所限也。當吾人測量羣類之時，個體之特質如何，概不過問，然若特質爲多人所同具，斯乃變爲重要矣。統計學直可謂之平均數學。測量繁雜之羣類，例如收入與工資，藝術家以一夕之工作，能得百鎊之金，而拙笨之勞工，一日之所得，僅爲六便士，然對一般平均數，影響甚微，彼等屬於一組類也；惟在一九一四年之前，有技能之工匠，大部每星期能得四十先令之收入，而大部無技能之勞動者，每星期所得尙不足十五先令，此二種收入之統計，必須作各別之觀察。至於確切之分類，乃爲一程度問題。二者之不同，乃所作特種調査之性質有異也。總之，遇有繁雜之羣類，欲以統計方法，而加以估計時，其目的乃在舉示其概略，期以一隅而概其全體意義而已。其表示之法，切忌細述情節，只須如畫家之繪一樹木，用烘托方法已足，無須分淸枝葉也。用概略舉示方法，固每有含糊不淸及稍欠準確之弊，然詳細情形，有成竹在胸，或一目可以瞭然，所得印象，必無錯誤之虞。蓋此種方法，其中含有重要原理：羣類之各個分子，變化者漸，全類變化者亦必緩。各個原子之運動，測驗固甚困難，一固體之運動法則，判明當較易易。多量數字，以及由數字得來之平均數，例如社會現象之量數，均有極大之惰性，存乎其中。人口總數，收入總數，出生及死亡率，平均工資等等之變化，莫不甚微，而關於

一家一戶之類似數量，則更動甚劇。統計測量之所以有效者，即恃此大量數字之惰性，而統計測量之應用，亦唯對於大量數字，統計方法始能有所發揮也。

統計學與經濟學 統計學與經濟學之關係，至爲單純，誠如馬夏爾(Marshall)教授所云，『統計資料爲經濟學家之根據』。統計學家供給事實，而經濟學家乃以之爲學說之測驗，或竟以之爲基礎。蓋經濟學家從事者，爲關於羣類之現象，個體事實乃羣類之一分子，欲得其研究之材料，非藉重平均數學——統計學——不可也。討論國家經濟之時，凡貿易量，貨幣購買力等問題，欲充實純粹之理論，又非大數科學——統計學——供給事實不可也。化學之實驗，類乎統計，化學原理之研究，猶之經濟學。故統計家負搜集排列整理分析之責，而不當歸納之任；即在調查關於因果現象之時，亦只舉出證據而已，結論無須求也。然若以統計學家而兼經濟學家，則舉行實驗，配合學理，二者集於一人之身，設非徹底明瞭實驗方法，及其難點所在，或本人缺乏機巧，不能卒底於成，則只研究理論，必難期以成功，故研究經濟學者，一則非精通統計方法；二則須洞悉難點爲何；三則可決定數字何處方可正確；四則能以批評統計證據；五則鑑別估計之信度不爲功。

統計學與個人經驗 統計之功能，即在擴大個人之經驗，蓋個人所見至爲有限，僅爲社會有機體某一部門之一小部；聽聞尚

能增長知識，然所聞亦不外於友朋談話間，閱報章雜誌，或專家著作幾途。卽使依判斷力，亦能就人羣或物類，得知數字之重要；然欲其不受環境之支配，而免其偏頗之見，乃絕不可能，且其所得資料，欲求分析正當，而期確實，亦大爲不易也。故苟欲就之而加以詳盡之考查，乃卽入於統計調查之範圍，卽進行中間所不可免之難題，則亦非統計學不能解救。統計學之用途，否認者固多，於此大可打破其固執。統計之估計，或善或劣，或確或僞，固不敢必，然勿論如何，統計數字必較之觀察之偶然印象，確實多多，而事實之性質，亦惟用統計方法，始能發抉眞象也。

統計學爲比較的　統計學主要實際用途之一，卽在示事實之相對重要性，而個人則只能妄加臆斷者也。統計學之特質，卽在便於比較。某一數量之絕對數値，本無意義可言，必有數種相似之數量，然後乃可加以比較，於是乃有意義發生矣。例如英國之乞丐若干，並無陳說之價值，今若知英國全人口數，乃大不相同矣。又如倫敦東區每人飲水供給加侖數一言，設無其他市鎭之給水量，殊無些須之意義。卽以工資調查之平均工資而言，亦須另有空間不同或時間不同之其他工資數，全部意義始能釋然；可見統計數字，無往不需其他之比較；非然者，雖有一種數量，其作用如何，殊難領略也。

公務統計　設欲測量之物件，羣類甚廣，非吾人獨力，或某

一機關，所可舉辦。固然，私人團體，舉辦之調查，昭著成效者，所在多有——例如布斯(Booth)氏之『人民之生活及勞動』(Life and Labour of the People)，里昂萊維(Leone Levi)氏之『工資與收入』，朗垂(Rowntree)氏之『貧乏』(Poverty)，即本書著者及倍乃提赫斯特(Burnett-Hurst)，亦曾用抽樣方法（例如在『生計與貧乏』(Livelihood and Poverty)），研究可以控制之數量——然就一般而論，測量一部社會或工業團體，苟欲求結果完好，必須由中央政府或地方政府舉行之，而此亦即統計事業之龐雜與不全所由起也。蓋數字資料之收集，乃政府本身職責所關，人口幾何，土地面積總數若干，細數若干，各級政府，為其本身目的計，不可不知；多量之數字羣類，由官廳登記即可得之。故政府之數字，均另有其主要之目的，至於用作統計之研究，乃其副作用耳；政府經手事項，均須分別記載之，以為管理備查之需，產業之登記，亦有其特別管理之用，凡此種種數字，大部多須公布也。於是用此公布之數字，吾人乃得個人收入統計、教育統計、進口貿易統計、鐵路統計、礦產統計、工廠統計等等。雖有少數數字，純為科學研究，而搜集得來，然多有為行政目的而頒布之表册，同時亦可為他種研究之用，研究社會學者尤不可少，即人口普查之材料，亦多由此項得來。如就英國而論，試一翻閱各年「英國統計一覽」(Statistical Abstract for the United Kingdom)，

「勞工統計年報」(Annual Abstract of Labor Statistics),及人事登記總監 (Registrar-General) 之常年報告;各種刊物,非由公務統計撮要而成,即係以公務統計作參考也。

公務統計之不完善　爲行政目的而搜集之數字,不若研究社會學與經濟學者所用資料之精確,事乃至爲顯然。即使政府與學者之願望,大致相同,其分類與列表,依然未必適合科學之條件。近年以來,非純爲行政目的而調查之資料,確已進步多多,例如商業部之勞工局(現已併歸勞工部)之統計,即屬此類。然尙待改進之處,猶有孔多,因如此雖不免多所耗費,而以與全國收入相比,實微末不足道也。第一應改進者,人口普查 (Census)——至少一部工作——應改爲五年舉行一次;第二,工作人員,已往均十年組織一次,統計整理就緒,發表報告以後,即行解散,今後應改爲常設機關,使承辦大規模之全國他種調查。如是,多種主要商品之批發價格與零售價格,不難列表加以分析而發表矣;國內陸路運輸,亦可與國外水路貿易,同樣列成表格;不致只知國外貿易而不知國內貿易矣;國內生產統計,亦不致僅拘拘於農業、礦業、鋼鐵業,而擴張及於一九〇七年生產統計所列之全部,於是全國重要產業之每年出產量,均不難得知矣。

中央統計機關　總而言之,欲求調整所有現行統計,或直接舉行調查,或指派相當機關執行,以期完成全國連續統計記載,

非設立中央統計機關不爲功。其實，經調整之調查，必須使其精益求精，並推廣其範圍，此種迫切之需要，不待深通經濟學與統計學而後知，中央調整機關之有無，利害昭彰，例證甚多，俯拾卽是。當研究國民所得之時，吾人可得者，只有工資統計，應納稅之所得統計；但屬於免稅之薪金，以及在國外投資所得之一部，則無從探悉，有之，只得藉助於估計方法而已。對於貨幣購買力之變動，固可由「經濟雜誌」(Economist) 及商業新聞，得知批發價格之情況，但因零售價格記錄不全，許多有趣之研究，只得付之闕如。關於工資狀況，尙可推算實際標準及平均工資，但因產業普查之缺乏，旣未能曉其某級工資共有若干人數，復難得知僱傭階級與被僱傭階級之相對人數。設將來有公衆需要此種資料之一日，必須有極開明之政府，犧牲時間，不避煩難，提供爲數並不爲多之金錢，以便以有計劃之嘗試，以補今日之不足；但所謂開明，並不全賴政府，任何人均有其應盡之職責，而欲促進此需要，又非借鏡他國之成規，並建立統計學識不可也。

統計之不能使人盡信 現今需要之所以未爲大衆所感覺者，夷考其故，未嘗非由於統計之已失人信仰之結果，此種情形，雖甚普遍，但未見其盡不合理，由俗諺『萬事萬物，統計皆能證之』一語可見一斑。惟此乃一般批評者之本身錯誤：蓋大衆所根據之資料，供給者爲新聞紙。

不可信之原因　但新聞紙上之統計，並非完善之統計；報告者既恃不正確之估計，大衆又無辨別之能力，既不知其是否用恰當之資料而估計得來，亦不知何者確可用統計估量方法。且也，報紙有時斷章取義，以工資調査平均數，及「勞工公報」（Labour Gazette）失業人數等等資料之一部，作全體事實看待；殊不知估計之數字，本有其用途，必須適合其目的，乃可謂之正確而完全；若以此不可靠之前提，雖於選擇資料時，已盡精審機敏之能事，然亦不宜任意用爲發表主張之根據。總之，統計學家所得之結果雖被人用爲發表主張之基礎，但因此而認爲統計學家之過失，無乃失之過當。蓋以統計爲論據之錯誤主張，普通多由於：（一）忽略數字之上下文，不顧材料之是否完全，竟然斷章取義，或取某一羣類之數字，強用於現象完全不同之另一羣類；（二）以對於羣類一部之估計，視爲全部之數字；（三）僅採用合乎主張之片面數字，而忽略其餘；（四）自效果立即論及原因，不問事實，此項差誤，統計學上最常發生。綜觀以上四種，均爲論理上之基本錯誤，統計學亦應加注意者也。

統計上之限制　統計工作上有若干限制，恐統計學家未必常能深切認識。一現象，最多只能就現象之數字部分，加以度量；至度量事實之時，更不應以將所欲度量者加以度量爲滿足，其相聯之數量，亦須度量之。例如，欲度量貧乏現象之緩急伸縮，因貧

乏二字,無從下以定義,更無從加以度量,而貧民之人數,又不能計數,吾人所能爲力者,只能就官方所認定之貧民人數,加以私人方面之估計,從事說明之;然貧民人數之密度,仍不得而知也。又如欲從事健康統計;所能着手之主要數量,僅有死亡率,平均壽長,及最流行之數種疾病,數項均爲互不相連之問題。統計學家對社會學之貢獻,即爲客觀之度量,而此又係資料中較不重要之部分,然此較不重要之部分,對於解決社會問題,其功用恰與建築房屋所用之度量,同爲確實之度量也。

(註一) 參閱科學綱要(The Grammar of Science)一九〇〇年版,自第十章起,參考書目,亦見該書。

第二章　統計調查方法

統計調查，驟觀之似無共同之方法，而實際上各種程序又相差甚遠，欲舉出一致之綱領，概括一切，自非易易，下列所舉(註一)，僅爲一般所用，但至少尙能將各種方法，通盤加以研究也：

(一)材料之搜集，

(二)材料之列表，

(三)提要，

(四)結果之評判。

前三項，容俟以下分章詳細討論之。

應具之預備智識　現請先論學習統計方法者，應有之要件。搜集材料與製列表格之時，常識量爲緊要，而經驗尤爲主要之導師；簡單之算術，實際應用之時，熟練最爲緊要；但調查之各個部分，彼此因有連繫，在進行一部之時，應對整體了解爲宜。提要之時，各項算法，雖無須代數符號，但代數平均數，仍以善於利用爲便，且爲解說曲線計，對幾何亦應有充分之認識。估計數字之評判，與整理結果之解說，必須應用較高深數學之公式，於是公式之來源及應用，自以明瞭爲宜。此種公式，於(1)比較複雜羣類，(2)估量對平均數差度之重要性，或時間數列之離中差量時，需

用特多，而研究相關時，尤爲緊要。

(一)搜集材料：空白表格　搜集材料，普通多用散發空格調查票辦法，空白票或由調查員代填，或由被調查者自填，而空白票內容之適當籌劃，乃即一完善調查中主要難題之一。在未發出調查票之先，必須釐定全部之工作計劃，且調查結果將得何等數字，事先亦應熟加籌慮，以期規定編制細節，可以正確適用，並調整應用工具，庶免臨時有誤。前已論及，吾人所欲度量之物體，未必全可施以度量，必也求出其關係最切近，而可以度量之數量，例如欲問勞動階級之每年平均收入，其每週平均工資，乃不可不首先度量之。次在研究某一特別問題，其要件須具有相當之專門知識；不然，爲測驗調查方法以增經驗計，必須事先舉行小規模調查。所欲調查之人物，務須窮極搜索，巨細靡遺，並事先即加詢問。詢問之問題，以能使得來之答案，立即可供列表之用爲宜，故列表計劃，事先亦應規定妥貼。問話之決定，以明瞭易答不致誤解爲主，答案必使十分確定，庶答者可以『然』『否』作答，而免含混之弊。又問時不可觸人之所忌，以免引起反感，不可有窮究查問語氣，以免引人猜疑，問話務能斬釘截鐵，以免答非所問，必須包羅周詳，以免掛一漏萬。票上須附必要之說明，以爲問答之標準，而免發生錯誤，但又不可過繁；俾免不便遵循。確切之程度如何，尤須先事定奪，時日之問題，答案以至月數爲止幾乎，

抑日數爲止境乎，工資收入等問題，答案以至元爲止境耶？抑以角分爲止境耶？此外，甚至空白票上之文字及空間大小，雖一小至每方寸之地位，或一字之微，亦須煞費考量，蓋不慮於始，鮮克有成，與其事後無法補救，無寧籌議於事先，故調查表格事先妥爲制定，乃一勞永逸之計也。

（二）列表法　列表方法，不一而足，須視問題之性質而定。並在各欄塡列相當之總計數，以針對問題之要領。所調查之問題，人數若干，工資幾何，價格多寡，性質不一，列表方法，乃不得不隨之而異。人口普查，製表多藉機械之力；工資調查，重在各業對平均工資之散佈情況，故須用特別方法；貿易統計，採用組類極多，各類又均有煩雜之問題，不可一概而論。總而言之，調查之計劃，各類各有其特點，不可不知；而列表結果所示之總計數，必須表示各項之數目，蓋唯有藉重表列法，乃可將備極混雜之變動事件，以簡馭繁，條分縷析，於是全類現象，乃可瞭如指掌也。

（三）平均及扼要　原始資料，整理至此，即可從事分析工作。分析之時，第一須從所得數中，提出有效數字；第二求出其總數及平均數，以便得其全部概念；第三以簡短語句，總扼資料之精華；第四一則須用全部資料歸納得出幾個平均數，二則須將所得少數平均數之含義，以簡要明達之文字一表而出之，此總括之結論，即爲一般所引用者也。以上分析工作，欲期其精巧，必須熟知

平均法則,並利用圖式。第五,欲補充數字之缺陷,插補中間年份之估計數字,必須應用內插補法,惟此法危險性大,用時不可不愼。第六,最後即用文字敍明其過程——發端及結局,並估計其確度,然後調查工作,乃告完全矣。

(四)結果之評判 實習統計者,請勿以旣得調查結果爲滿足,務須洞悉方法之種種步驟。在未評判一調查結果之前,一則須備悉數字之來源,是否包括全部數字;再則須知表列之資料,究自何處得來;三則須知調查之時,是否有偏見之存在;四則須知各個答案正確至何種程度;五則須知被調查者有關之事實,其本人是否確知無疑,且即使所知確實,能否據實以告。故調查結果作成報告發表之時,應將蒐集資料全部計劃,逐步敍明,尤須附列原始空白調查票樣張,以便據以評判,而斷定列表結果,是否確由原始答案而來。蓋極爲有用之評判,常以內在證據(internal evidence)爲有效。各類實得之數,是否與其他位之重要性成比例,特別重要之數字,是否並無充分之證據,均不難探知;數字之連續性,可以檢查,驟然中斷之原由,亦可察出;已塡妥之調查表格,可以依樣本分爲數類,然後考查各類與整個結論適應程度,則調查表格是否代表甚爲普遍之數字,從是可知矣;精審研究詳細之表格,最末數字之正確至何程度,可以揭曉。故以評判態度爲此等檢查,則所得資料,是否足以求出精確之結果,吾人

不難得知,於是省略數字之影響,資料之不足,欲行估計其效果之重輕,吾人不可不加之意矣。

統計之最重要功能,在舉表明各類現象相互關係之證據;蓋所得之消息,可謂爲行動之指南針,欲知行動必如何而後可產生期望之後果,不能不用此指南針,而欲用此指南針,則唯有探討旣往所生效果之緣由也。因此之故,一量數之變動,是否引起其他數量之變動,此乃必須決定之問題,此問題雖不必易於解答,但自應用數學卽機率數學(mathematics of probability)方法,以研究統計學以來,此問題之解決,並非絕無辦法,實際言之,近年統計學之進步,主要實受此門數學之賜也。

此種問題,重要固重要矣,然深奧難解,普通學生無相當專門學識者,曷克勝解決之任。故本書編訂計劃,擬將需用專門或數學學識之各種問題,留待第二編討論,本編所研究者,乃無需特別高深訓練者也。

（註一）　例如白狄雍博士 (Bertillon) 著『統計學初級教本』(Cours élémentaire de Statistque),卽係如此,本書下文所論採用之處頗多。

第三章　單位之定義與資料之搜集

第一節　單位之定義

調查伊始，第一問題，『將計數者何』，迨列表旣成，最後又有一問題『已計數者何』。前一問題之答案，卽開端之定義，後一問題之答案，示定義應用時必有之變更。立一定義，其事甚難，基本困難，一則由於需要將尋常用語所含（分明或不分明）概念，解釋爲可以枚舉之實體；二則由於擇定可以計數之事物，何者與實體最爲接近，而可得吾人所欲知之消息也。

問題焦點所在與所得資料　例如，吾人欲調查失業現象中之麕聚雜居及工作損失問題。麕聚雜居現象，以數字表示之，惟有查房間數或空間對人數之關係，而此問題，又往往因家屬之性別及年齡而異，且因房間之通風及光線而有不同。實際上，可以計數者僅有（與其需要並無密切關係）人數，至房間（房間定義只能武斷規定之）數，或其立體容間，尙能筆之於記錄。工作損失，現之於數字，須查現未作工之尋常工作日數。實際上，所計數之失業人數，乃指在工團或勞工交易所完成某種手續——如定在每日某時簽名於簽名簿　　者而言。『失業人數』之定義，視

登記之規章而定，且在失業羣中加入登記者，亦僅該團體所轄範圍內之一部失業者而已。人口普查報告所用之『麕聚雜居』，意指一住宅內人數超過房間數兩倍以上之人數而言，至所謂房間也者，乃已將浴室，洗濯室等等除外也。

講述統計上總數及平均數之字眼，如人口、進口貨、進口船噸數、平均價格、生活費用、有業人數、工資、所得、資本等，均為專門術語，較之言談或文字中所指，意義確定多多，即用法亦與普通應用者有基本之區別。此等名詞，均可給以確定之定義，而其定義只於已列有總計數字之原始報告中始能確定之，然即在此種報告中意義仍有極為曖昧之事也。茲為示明如何可以確定所得總計數字之意義起見，特將調查原始資料之檢查方法，於下節分述之。

報告之明確要件 陳述總計數及平均數之時，務須儘量求其清晰明確，切忌冗長之語句，表格上之簡要標題，內容過於複雜者，則應列以定義。例如考察英國煤礦生產時，吾人不可以『每人生產量』一詞為了事，而應書如『大不列顛全部煤礦，一九二〇年，一月二十五日起，一週之出煤噸數，而以該週掘煤工人平均人數除之』；如嫌此言過於贅累，則或於前後文中，或於小標題，抑於底註內，列舉上述要點，並將僱工平均人數之計算，加以說明。

欲用百分數，必須表明計算之根據，不然則絕不可用。例如某種商品，前些日之價格，爲八十鎊，今日忽高至一百鎊，則其增價爲『前日價格』之百分之二十五，爲『現在價格』之百分之二十。今如降低『現在價格』之百分之二十五，則必成爲七十五鎊；但如降低前日價格之百分之二十五，則必復原爲八十鎊矣。執此以言工資，如工資對『一定標準』按四次各提升百分之十，則該標準百分之一〇〇，一一〇，一二〇，一三〇，一四〇，即爲各種之工資；但如以各該期起始日工資之百分數計算，則各期中之增價，不過分別爲一〇，九・一，八・三，七・七而已。

複雜之定義，保持明晰之有效方法，在設計製表程序中，尤有特別之重要性，茲特例釋如下。

屬性及特質　茲取英國所得稅委員會表格之一爲例，在此表中，應課稅之所得總數，達一十九億七千萬鎊，其意義，見於該會之編制則例中。茲特將此總數之定義列下：

A．所得

B．據所得稅委員會之所知

C．合乎課稅法令之規定

D．減除折舊準備及其他

E．爲英國私人或公司所有，不住於管轄區內而有納稅義務之人所有亦同

F. 在一九一八至一九一九會計年度應課稅者。

以上六則：各示一特質，總數中每一單位，無不畢具之；由此等性質之確切定義，所謂總計數之命義，乃得表明，且『所計數者何』一問題之答案，亦在其中矣。

記錄之事實（B），時間（F），及空間（E）數項特性，任何一者均萬不能少者也。

第二節 資料之搜集

第一目 人口普查

人口普查　前章所論之原則，最佳之例證，莫過於人口普查，蓋一則其計劃、宗旨及細目，人所共知；二則用以搜集原始資料之調查表格，可以顯示詳密調查上之困難也。

人口普查之目的　第一請論舉行人口普查之正確目的：人口普查之目的，乃供人口學之研究，惟有人口普查，乃可得知人口之總數及地域上之分布情況，惟有人口普查，乃可得知兩性及各級年齡之人數，以及關於獨身、已婚、寡居等等之人事情況(civil condition)，亦惟有人口普查，乃可得知人民之國籍，此乃行政上所需消息之最少限度也。除此之外，尚有政治家及經濟學家，諸多欲知關於每一人民之事實，而欲蒐集普遍之資料，就英國而論，惟人口普查實優爲之。

問題之選擇　然欲知之事項旣夥，所必調查之問題，亦因之而繁，各項問題，何取何捨？此宜以便利為主，不可斤斤於理論。欲問之事項雖多，大要不外下列數則：（一）家庭之組織及人數，家庭在社會上之地位，家長經濟上之能力；（二）家中各人之就業性質，各人及全家之工資或收入，房屋之規模及租金，各人所受教育之程度，開始或就業退休之年齡，遷徙之情形，加入宗教或他種團體否，家中各人有何殘疾。如此種種之訪問，如欲免除調查表格項目之煩瑣，並期於適當期間內可將表列整理就緒，若干事項殊有删略之必要，至於究應如何選擇之法，則非將欲行調查之問題，逐一考查其大概性質不可也。

回答問題之能力　選擇標準，第一須以被訪問者能以答復之問題為限。蓋此項問題，如用以調查受過教育而謹謹守法之人士，自可訪得家庭遷移情形，及何年齡開始工作等等之全部消息；不知人口普查之特點，乃即在其範圍之普遍化，故所訂問語，務求知識程度最低之貧苦民衆，能以了解而能答復為要；然惜此多為人所遺忘而忽略之耳。

確定　第二，問語性質務須能以完全確定，庶答者不致有答話是否對題之懷疑。統計家認為最有價值之答案，莫過於『是』『否』二字或一單簡之數目，確定之時間與空間，或用有確實意義之字句。諸如『許多』，『時常』，及『一部分』等等形容詞

及副詞，所含之數目意義，各人感覺不同；且用此等字義，描寫一人物情狀，雖亦頗能表示清楚，但製表時乃全歸無用，而人口普查中徵求答案之用途，乃惟在用以製表也。例如，問及教育程度，則所問者非『曾受良好教育乎，抑受中常教育，或毫無教育乎』？吾人所希望者，惟求其『報明停止求學時之年齡，讀書幾年』而已。但此項含糊之問題，有時由於首次嘗試之缺乏經驗，或由於被調查者之疏忽，於是所得之文句，全失其實用之價值，反或引起重大之錯誤。調查工資及收入之時，問題若不具有一定之意義，結果必難期十分確實，例如工資調查，即需要精審之定義，並須有若干附帶問題，方可查得適當之估計數字；蓋問題之簡單如『君之每週或每年工資若干』者，答法亦有若干種，然答數之毫無價值，則無可疑義矣（註一）。

忠實　第三，規定問題尚有一要件，一則必須能得忠實之答復；二則必須能以避免偏頗之答復。此一準則，如欲嚴格恪遵，則對人口調查票之款式中，『何者勿得遺漏』之懷疑，幾已無須乎此。關於此點，問案之最難者莫過於問『君爲僱主抑爲被僱傭者』？固然，身兼僱主而同時又有被僱傭者之身分者，所在多有，故在第一次發現之後，以後如再舉行調查，應將此項問案捐除，蓋卽使有此問案，然一般心理，多欲自擡身價，因而調查所得答復，未必足以信賴；反之，無中生有，錯誤必多，是以在求『忠實』之原

則下，此關於社會階級之問案，應行剔出也。

樂於答復　第四原則，設問須使人樂於答復；反之，有究查語氣之問話，或使人易慮及有變更法律及徵課新稅之可能者，均宜力圖諱避。關於工會，幫團等會員身分，或關於保險之問題，均足使人認爲有查究性質。多數之人，以爲進款若干，純爲個人私事，與外人無干，因而不肯說出。問及房租時，被問者則以爲此或乃加稅之先聲，因而引起彼等之疑懼。關於宗教之問題，彼等答案殊難引爲滿意，此觀一八九〇年戶口普查委員會所得結果(註二)可知，故在英國而舉行調查，依以上四條定則，應以不問宗教問題爲是，蓋若干人所奉宗教，作何名稱，一過詰問，瞠然莫對之事，屢見不鮮，有者以爲問題太大，茫然莫知所措，此事旣所在多有，而有人故弄玄虛，與事實恰相反對，或全然不肯回答者，尤比比皆是也。

次頁所附人口普查表，其問題一，二，三，四，十四及十五，依上述理由，皆不屏除，因問題均頗確定，一般戶主，大都能以答復，且均樂於答復，而答復乃可無誤。惟第五問題，遇有離婚，分居，或不合法之結合，則不免有欠確實之答復。至問題第六，七，八，九，在一九一一年，始行加入，雖亦多欠確實，但許多重要之新穎消息於此而得。至於第十及十一兩問題，對於職務分類（例如書記或木匠）及職業分類（例如紡織業所用之書記及木匠），區別

一九一一年英格蘭及威爾士人口普查

<table>
<tr><td></td><td>姓名</td><td>對戶主之關係</td><td colspan="2">年齡（歲至最近生日為止）及性別</td><td colspan="5">結婚情況</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="3">不論自家人，來訪親友，寄膳者，或僕役，凡（一）於一九一一年四月二日（星期日）夜宿於本宅，而在半夜生存者，或（二）於四月三日（星期一）早晨到達此宅而未經別處查過者均須填報，除此以外之人則不得計算在內</td><td rowspan="3">註明是否為「戶主」「妻」「兒」「女」或係其他親屬，抑為「戚友」「寄膳者」或「僕役」</td><td colspan="2" rowspan="2">一歲以下之嬰兒年齡，以月計，如「一月以下」，「一月」……等</td><td rowspan="3">凡在十五歲或十五歲以上之人口，在名下宜註明「未婚」，「已婚」，「鰥夫」，「寡居」</td><td colspan="4">在本表所填現有已婚婦女名下，請填明下列所舉之人數</td></tr>
<tr><td></td><td rowspan="2">現有已婚者，已結婚若干過年如結婚不滿一年者請註明「一年以下」</td><td colspan="3">現有已婚者所生兒童人數（如並未生育或生產時並無生存之兒童請在第七欄內答一無字）</td></tr>
<tr><td></td><td>男性年齡</td><td>女性年齡</td><td>出生時生存之兒童總人數</td><td>現尚生存之兒童人數</td><td>業已死亡之兒童人數</td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

（第一表）

一九一一年英格蘭及威爾士人口普查（續）

十歲以上者之職業				出生地	生於外國者之國籍	殘疾
個人職業	所在機關	役人者或役於人者，抑係自役者	是否在家工作			
填答務須依所服役之商業，製造業，自由職業，……細別門類詳確填註。如在工商業服役者，工作種類及職務名稱亦須詳細填明	此條須填答工作之機關，但如第十條已填註明白者，此條可勿須再填。私人所用僕役，此條可無須填。惟在公共團體（如政府，市政廳……等）工作之僕役仍須說明所在團體機關名稱	凡在工商業工作者，在其名下，請註明（1）僱主（卽除僕役外，尚僱用他人工作者）（2）工作者（卽爲僱主工作者）（3）自役（卽既非爲他人工作亦不役使他人者）	從事工商業而在家中工作者，於名下，請填「在家」二字	（1）如在英國聯合王國落生者請註明出生郡名鎮名或教區名（2）如生於英帝國其他各部者，請註明屬地，殖民地，……以及邦名或省名（3）如生於外國，請書其國名（4）如在航程中出生者，請書明『生在海中』附註：——凡非生於英格蘭及威爾士者，請報名『常住』或『暫居』	請照下列各項擇一填報：（1）『世爲英國臣民』，（2）『歸化之英國臣民』並註歸化年月（3）如屬外國國籍，應書屬『法』『德』『俄』或其他	本表所填之人如有下列殘疾者，須在各該名下填註明白，並記發生殘疾之年歲：（1）『全聾』或『聾啞』，（2）『全瞎』（3）『瘋狂』（4）『白癡』或『意志薄弱』
10	11	12	13	14	15	16

須由，或代，戶主，或住所之主持人填寫之項：

本住所（包括家宅，共同住屋，或分租房舍）之房間數請填註於下。廚房作爲一間，但洗滌間，梯頂室，接待室，藏衣室，浴室，以及貨棧，寫字間，店房，等均不得作爲間數計算	填表人保證，填答時確盡所知，正確報告，並無虛僞 簽字蓋章： 通信處：

（續第一表）

不無困難，惟自一九一一年以來，此兩問題，業已加以改訂，以便製定二項表格，然第十二問，對於有工作者之情形，並不能完全訪明，而十三問復多欠確實。兼任兩個同等重要職務之人，迄無釐定條文。此外，尙有第十六問題，尙不完全確定，而答案亦無大用。至若其他各項之優點，人口普查委員會之報告書，曾有詳盡議論（註三）可以參閱，此時所論不過在表明問題取捨之理由而已。

填表人員 關於填寫表格之人員，乃爲一重要問題，而爲前此所未暇論及者。表格由戶主填報者，英國人口普查即行之，此須設問性質簡單，文字淺鮮，與用指派調查員查詢代填者不同。但後者一法，表格可較複雜，設問不妨詳盡，且問題爲一部無知人民有答非所問之可能者，亦無妨礙，蓋調查員可以儘量研詰，必能得一答復，答復之顯有錯誤者，乃可隨時排除，且爲製表便利計，更可反復詢問，至答復對題而後已也。規模宏大，問題複雜之調查，如人口普查之類，必須集合衆多之調查員，加以短期之訓練，指導事項及通盤計劃，必須儘量單純；至調查範圍縮小時，訓練則不厭求詳，問題則不妨稍繁，此在第十，十一，十二及十三等項，尤關重要者也。

空白表格之款式 調查表格之一般形式，頗有加以注意之必要。目的如在欲知家庭之結構，答案以能在一張上填答爲最佳，

故表格之地位，應充分寬裕，庶足以爲最大家庭之用，以免黏合多張表格之煩，而製表尤爲便利。又表格必須預備充分之空間，以便不善寫字者填答問題之用，但紙張仍不可過大，以能以展鋪寫字臺上爲宜。至於說明，務應清楚，不可模糊，並須貼近填答案之處；爲達此目的，不妨善用大寫字，斜體字，各種不同字體。第一表所舉人口普查表，所用者即其概略之縮影也。

調查目的之宣示　調查表格上，須將舉行調查之目的，及搜得數字之應用，加以說明，以期邀得被調查者之贊助，而消除一般之誤解。至於說明之範圍，程度不一，大部繫於調查之是否強迫，如人口普查，抑爲情願，如工資調查。上文所舉之人口普查，因人民已知其一般形態，而樂於完成其任務，故無須再加序文，但調查之已爲國會批准，人民有服從之義務一節，仍有宣布之必要。宣示之法，須印於表格摺疊之後面，庶表格不必展開，即可入覽，此外一方面固須將不肯填繳表格或虛僞謊報者之罪名，以及前次違犯規則者之處罰，印揭背面，以資恐嚇，一方復須聲明，準代填答者保守祕密，以免他人之利用或加害。但訪問如非屬強迫性質，必須附印信函，隨表格遞送，請求填答者熱心贊助，以底於成。

附帶訪問　表格之主要部分歸戶主填報，其餘部分，可由調查員填寫，如此則費事不多，而若干之附帶消息，可以搜集得來。

在表格之外角，註明人事登記區、分支區、調查區、及通信處等，以便依號次製列成表，各區域之材料，隨手可以翻出也。調查員攜帶空白表格，親往各家訪問，此乃爲英國人口普查所不能，然用此辦法，關於房屋式樣及街道情形，乃一覽而知，若在嚴重調查之時，更可僱用專門助手，每至一家，瀏覽一過，該戶之詳細種切，即能書成若干有趣味之記載矣。

縱橫行列 現依上述準則，進而批評表格之細節。第一點，表格之行列，安排上有時竟不能完善。蓋勞動者，既根本不能執筆，甚至雖一點一劃之微，亦須經人指教，調查表格行列縱橫，自難期其領悟，故若非有人從旁協助，即將有失措之虞也。下列問題：——

請告知君之姓名＿＿＿＿＿＿

請告知君之年齡＿＿＿＿＿＿

請告知君之性別＿＿＿＿＿＿

未婚，已婚或喪偶＿＿＿＿＿＿

等等。

答語緊隨問題之後，填註自較容易，然如此則調查表格，不論成人或兒童，必須人一各張，如法國所行者即是。

問題之評判 表中第一問題，本爲人口普查之一般目的，應如何確切實定爲宜，然若略一考察，乃不容不有所懷疑，蓋所謂

夜宿云者。設有一在晨四時，始行回家之打更人，或晨二時始歸之印刷工人，將何以置之耶？戶主又何能盡知什所內有何人故宿於別處耶？關於此點，若一一加以說明，將不勝其煩，而填答者尤感頭緒紛亂，莫明所以，故究竟如何答法，必須對調查員講授明白。

人口之意義　再就『某區之人口』一詞而論，其意義何如，亦不無可疑。蓋在法國，有所謂『事實人口』(la population de fait)，即某一瞬間某一地域所發現之人口，與『法律人口』(la population de droit)，即某一地域之常住人口，加上臨時他往減去臨時來住之人口；事實人口與法律人口，二者迥不相同。例如市區人口，乃即法律人口減去監獄囚犯，醫院病人，住校學生，寺院僧尼，以及軍人等（註四），而美國人口普查，所查則僅為『事實人口』也。又在美國，一八九〇年，有所謂『憲法人口』(constitutional population)，乃將印地安人保留地(Indian Reservation)特區(territory)，及哥倫比亞區之居民除外；有所謂『普通人口』，即將特區包括在內（印地安人保留地，印地安特別區，及阿拉斯加仍除外）；更有所謂『總人口』(Total population)，即除印地安人保留地外，其餘各地一概包括在內（註五）。在一九一〇年時，普通所指之美國人口，即僅就美國大陸而言，即四十八州（向為特區之亞里綜那 (Arizona) 及新墨西哥(New Mexico) 包括在

內）及哥倫比亞區也。若再加上阿拉斯加、夏威夷、及波特里哥(Porto Rico),海外之陸海軍人,可謂之總人口,但此外尙有一總人口數,卽尙須包括菲律濱、幾亞穆 (Guam)、沙謨亞(Samoa)、及巴拿馬運河區域等地之人口估計數字在內。因哥倫比亞區及印地安保留地之人口,不在攤派稅捐範圍之內,故尙須從大陸人口中減去。須知錢奈爾島(Channel Island) 曼島羣島 (Isle of Man) 之人口,本在英國人口普查挨戶淸查之列,但普通所提之英國總人口,此兩處之人口不與也。又海上或海外之陸海軍人人數,亦係單列一表,亦不在總人口之內也。

年齡 表中第三第四兩行塡錯之原因有二:一則因年歲較大之人,有時並不知其確實之年歲爲幾何,乃隨手塡爲相近之槪略數,於是塡完送回之表格,年齡多爲四十,五十,或六十。欲免此中差誤,製表時應按 35-45,45-55……等歲分組,如欲製更詳之表,最好依 3-7,8-12,13-17……等歲分組;二則多數婦女慣於低報年齡,在此情形之下,補救之法,可對照人事登記簿册,以求較近之總計數也。

尙有須加注意者,報告年齡,旣以『上次生辰』爲準,則年齡平均必較實在年齡,低六個月,而在事實上,如有報十七歲者,則其實在年齡,確亦較十七歲多數月不等其分配均勻一致,最多至十八歲爲止也。

職業　表中第十，十一，十二，及十三等四欄，有極重要而應加批評之點，但人口普查委員會關於產業調查上所有一切問題，一時不便討論；惟可得而言者，一職業調查，欲求其完善，最好單獨舉行並與人口普查稍異其原則。此蓋無可疑，但在改弦更張之意見未一致前，則與其因不能得到確實答案而放棄之，反不若於現有人口普查表格中添加適當關於職業問題之為愈。總而言之，職業調查理應與人口普查，合併舉行，非然者，解釋之巨大困難，將層出不窮矣。困難之點何在，此則觀於『生產調查報告』中之服役人數統計，與人口普查有業人數統計，對照鈎稽時可知之。

吾人批評特殊問題時，必須將目的物，常存於心目中，茲所

紡　織　業

	絲織業	毛織業	蔴織業	總計
僱主				
經理				
書記				
監工員				
紡工				
織工				
勞動者				
童				
總計				

（第二表）

討論者，目的物有二：一查各工業各部門服務人數，卽縱的區分也；二查各級職務（如勞動者、工頭、僱主……等，或鐵匠、木匠、織工……等）上分類之人數，卽橫的區分也，於是列成表格，結果如上。

訪問之最低限度，必須能得下列回答：

法律業——律師業——司事員

礦　業——煤炭業——挖煤工人

金屬業——鐵　業——打鐵匠

執此以論，僅一『請告知君之職業』問題，必不能得到此類消息。挖煤工人，僅云礦工而已；打鐵匠，亦不過提一鐵匠而已，而爲書記者，則將云爲司事員而已，挖煤工人，僅言礦工而已矣。故欲將所需要者，加以解釋，錯誤之事，欲求避免，必須在空白表格背面印成填表須知，以便填答者有所遵循。而填表須知必須標列特別字體，以期清楚明瞭，尤須簡短切題。如回答者有正確填註之心，並有相當教育程度，足以瞭解簡單之說明，塡寫錯誤之事，每不易有，惟恐塡答者多未之見，或閱而不行耳，此乃與研究空白調查表格，大有關係者也。表格發交被調查人，令其自塡，人力時間，節省甚多。故塡報之法，可有兩種途徑，一將表格盡力化至最簡而結果可期最良，否則，不必令被調查人塡寫，僅由其報告所知而由調查員代塡，蓋調查員深諳塡表須知，調查之法律強迫

效力，亦所熟知也。然後者一途，時間費用兩不經濟耳。

現在之調查制度，加以製表之方法錯誤（或亦爲事實所不可免），均足爲英國迄未有可靠職業調查之原因。現存之數字，一則由於資料之不確實，二則由於製表之不良，已大失其價值，而吾人若干重要計算，尚以之爲根據，夫人皆知其不可也。

新問題之結果　在一八九一年，曾有一番努力，企圖分清有無技能工人，僱主與被僱者之相對數字，即現在第十二欄之問題也。第十二欄之標題，本不足爲清晰之規範，文字既無『請告知』，『請填寫』等平常字眼，而填答方法，究係用『是』『非』，抑在相當欄內填註記號，在表格前面，亦無說明，至三個項目，界限亦復有欠明確；然則在一八九一年之企圖，由下列報告書中（註六）看來，始終未能作到也：

『填回之表格，內有極多，根本並無記號；更有甚多，二欄乃至三欄，同時均有十字號，即其中只有一欄記十字號者，亦有充分之理由，是以判定十字號已錯置欄數也。誤置他欄之事，除填答者有意點錯外，似幾難有他種原因，蓋性質愚魯，頭腦庸俗之人，往往以據高職務地位爲榮，且據以教唆他人。因此之故，填表之時，一人之見如此，有聯帶關係之多數人，亦由僱員地位，而填入僱主階級矣。蓋收回之表格，內中若干項目下，填僱主者較填爲僱員者爲多，填店主者，比填店員者爲多……也。此種令人不

解之情形，若非特此僅有之假設，必難得有解說。故此項答案，吾人認爲大不可靠，無論何張表格，均不便有所利用也』。

雖然如此，此種問題仍行列入如故，製表亦如故，而統計家居然予以相當信仰，竟行採用之矣。

此種企圖，及其結果，對於設計調查表格者，關係何等重要，不言可喻，此吾人所以一再提及，不憚詞費者也。

在未結束本題之先，尙有一事，不容忽略者，即在英國欲由英國人口普查中，將依賴某一產業生活之人數，換言之，某業之僱主人數，及其家中人數（如尙未調查得來）與所用僕役人數，以及僱員及其依賴者之總人數，直接歸納起來，斯時尙不可能。但此乃在考查一國中各種產業之比較重要性時所必需，在其他各國雖已不無適當辦法，而在英國迄無可用之表格，故只得靠統計家之估計，始能求得總計數字也（註七）。

欲知人口普查表格答覆所給之消息，如何可以作成詳細分類數字，只須查閱布斯氏編『人民之生活及勞動』(Life and labor of the people) 一書中，第五編第四十六頁所列者即是。

就一般論之，統計家之工作，必須利用既得之資料，故先決問題，必須了解蒐集資料時所用之定義，以及已發表表格所受之限制。蓋極荒謬之編製，一經妙手整理，亦常能得出有價值而正確之結果也。

第二目　工資調查

工資調查（如於一八八六及一九〇六兩年所舉行者是），與一般人口普查，不同之點甚多，舉其重要者，約有二端：（一）工資調查表格之塡答，屬於自由性質，而人口普查，則有強迫效力；（二）工資調查，塡答須具有較高之知識程度。

工資調查之主旨　與前相同，欲舉行工資調查，必須先研究其主旨何在。其主旨云何？一則表明英國人民之收入；二則比較各業之工資率；三則調查各級工資率上之比較人數。

時間單位　為達此目的，計算之數量，以何者為最佳？就先決問題而論，時間單位將用一日乎？一週抑一年乎？如所得之資料，為每日之工資，則一週之間，各種職業，日數自四天至七天不等，必難據以核算每週之工資。至每週工資可謂為較確定之日數矣，然因各業多受季節影響，一季工作異常忙碌，而他季則不然，更有若干之產業，各季節工作相差甚大者，故在某一星期，恰為一業營業最盛之季，而為另一業生意最淡之時，二者用相比較，其間相去，豈可以道里計耶？為今之計，一則為避免此種差誤，二則因一年工作若干全星期(full week)，除在少數向不停工之產業外，多甚難以計算，最佳莫過於用一年為時間單位，惟惜直接推算個人之每年收入，實際上又不可能耳。蓋在大工業中，人員更換，時日靡常，一人所領工資，一年恆三易其僱主，各人工資總

數若干，雖僱主亦不得而知；即就常年不更動人員之廠家而論，每週發放工資總額，一般並無表格之製列，似難期收綜計便利之效；若重新加算，則卷帙浩繁，計算人工又將大至驚人矣。至若工人方面，一年中收入數字，大多數並無詳確之記載，所能爲力者，只有藉重個人之精審研究，加以估計，然謂其欠有確實性，則無可疑；在最多情形下，欲使工人自述其過去十二個月間有關收入數字，如其不願，固無待言，即使情願，恐亦有所不能也。

由此觀之，舉行工資調查，必須採用較短時間之單位也，昭然明甚，惟大多數之工資既按星期發放，則最自然之單位，莫過於用一星期矣。用星期計算，其每週工資，用以估計常年收入所引起之附帶問題，可暫置勿論，惟對於第一問題，即調查之最優數量，乃只得一間接之答復；唯一之直接的個個數量，乃爲每週工資，而此只可用大量估計方法，加以補充也。

調查僱主與僱員 先決問題，討論既如上述，現又有一第二問題：需向之訪問者爲何人？供給資料者，乃爲僱主與僱員，而在一理想之調查中，二方面之消息同須求得答復，固矣；然爲求手續之簡簡，費用之節省，資料之確實，唯有訪問僱主時，方能收效，訪問僱員時，則有所不能也。

訪問僱員時，程序有如下列：（一）籌擬一類似人口普查表格之調查票，一面將調查之目的，作一簡短之敍述，一面擬列若

干簡要清晰,單簡適當之問題,每一問題之後,各留適宜之空白,以足以填答最少限度之報告爲合格;(二)表格發交調查員取用,填畢交回集齊之後,預備相當時間,使調查員有審查改正機會。此法所需之組織廣大,費用浩繁,較之人口普查,有過之無不及,事乃至屬明顯,然其舉行結果,所可求得之確實消息之最高量,能否足供應用之最小量,尙在可疑之列。雖然,調查之一部分工作,藉用工會之力舉辦之,亦無不可也。

訪問僱主之方法列下:就所欲調查之範圍,抽選若干產業,分別查得各僱主之住址,將適當之空白表格,備具解釋函件,逕行寄交所有僱主,請其填畢寄回。用此方法,較之前論調查工人之計劃,簡易多多,省費多多,且所用表格,大爲減少,整理人員,數亦至少,蓋在商人方面,表格填畢寄還,較留存待人走取,反覺簡便。惟調查之時,旣無當面之接洽,表中設問,尤須特別清楚,因事後改正錯誤,往返通信,雙方均感煩擾也。一八八六年,所用之表格,茲節錄一部分分列於下。

工　資　調　查

絲廠工資率報告
廠名或店名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿
地　　址＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

注意——經理及職員之薪金,可請勿庸塡列,本表所調查者,僅爲工人工資。
一八八六年——所僱之人數……………………人數＿＿＿＿＿＿
一八八五年全年所付之工資……………………金鎊＿＿＿＿＿＿
一八八五年所付最高之每週工資　　　　金鎊＿＿＿＿日期＿＿＿＿
該一星期領工資之人數……………………人數＿＿＿＿＿＿
一八八五年全年所付最低之每週工資　　金鎊＿＿＿＿日期＿＿＿＿
該一星期領工資之人數……………………人數＿＿＿＿＿＿
請示現時加工時間之平均工資率:換言之,加工時間,按一時一刻計算,抑按一小時半計算……等,或用其他方法,請書明其方法＿＿＿＿＿＿
請示知,現時有否加工之工作,如有,有若干;或現時有無少於規定時間之工作,如有,少多少＿＿＿＿＿＿

一八八六年一月一日各家絲廠所僱工人,

現行每週工資率及工作時間

職務分類 注意——下列職務分類表，如不適用，必要時，可請斟酌改動。	工作全星期時，現行每週工資率及工作時間數，但加工時間不在此限 注意——請告知每星期工作時間數，工資按時計算，抑按件計算，如以件計，請說明每星期所得工資之總額，加工不計。											
	男性						女性					
	男子			幼童			婦女 十八歲以上者			幼童 十八歲以下者		
	工人人數	工資率	工作時間	工人人數	工資率	工作時間	工人人數	工資率	工作時間	工人人數	工資率	工作時間
絲經部												
分絲工 時工												
件工												
捲絲工 時工												
件工												
洗絲工 時工												
件工												
紡絲工 時工												
件工												
雙絲工 時工												
件工												
其他												
紡絲部												
選絲工 時工												
件工												
鍋爐工 時工												
件工												
修整工 時工												
件工												
梳刷工 時工												
件工												
其他												
織綢部												
捲絲工 時工												
件工												
排經工 時工												
件工												
揀經工 時工												
件工												
摺疊工 時工												
件工												
裝填工 時工												
件工												
其他												

（第三表）

全年工資　計量工人階級之全年工資，爲調查最終目的之一。全年工資，包括之項目頗多，重要事項，不外如下所列：尋常每週工資，加工工資，特別工作（例如派赴遠地工作之建築工人），或特別季節（例如農場收穫期）所給之特別償付；與非現金之付款，例如房屋之免租或減租，免費或廉價之煤炭，以及以批發價格或廉價優待售與之特種貨物（如紡織工廠之布疋，農場工人所買之番薯）等是也。

如用實物償付工資之事實，果爲普遍之現象，或佔重要之部份，則進行調查，必須以勞工委員會附屬之農業委員爲前例，另用一徹底不同之方法。但如所關僅爲一單純之科目，例如房租免付，則無須改弦更張，只於前列之調查表格上塡一項問題已足。此種情形，纔絲工業，尙屬少見。總之，以上數點，指示吾人，在未擬定妥善調查表格時，主持調查人員，對於實際情形，必須有充分瞭解，方能擬定恰當之表式也。

上文曾提及每週工資，加工工資及特別償付等問題，茲以加工工資與特別償付二者與每週工資合併討論之。平常每週工資，在大多數產業中，大多數部門內，乃爲普遍而意義確定之數量。任何工頭一人，手下管轄工人若干，每人在平常全週工資幾何，大概均能報告。在許多方面，工團（如建築業是）均曾對於每小時或每星期之工資，有所規定。在另外若干方面，如在紡紗業，件

工工資數額，亦曾加以規定，庶因工作之難易，使每週工作之工資，可以得到確定數額；就一般情形而論，苟取工資薄，略加涉獵，即可知每部門之工人，所得工資，均有傾向平均數之趨勢。由此進行，平常整個星期之平均每週工資，必可從而求得，並可具有頗大之確度。然行程並非止此而已，此乃爲計算全年收入之一部工作，此外尚非求得一年共工作若干全週不可。關於此層，前列表式中所用之方法，尚有研究之餘地。所欲探問之問題，已見於前列工資調查表格上，由此諸項問題，可以查考問題焦點所在與所得資料之差別。

問題焦點所在及資料 問題焦點之所在：全年工資減去停頓之星期工資並加上加工之期間工資，等於若干全週工資？於此，第一待決之問題爲：吾人將一律減去因病假而損失之工作時間兩個星期耶？抑按實在不能作工之時間據實計算耶？患病原爲個人之不幸，並非一般之損失，在可能範圍之內，自以屏除不計爲宜。至某一季節之加工，雖在一年間未必有多過於常態星期之工資，加入平均計算，但與其他季節之停頓期間，終有立趨平衡之趨勢，而以在採取一小時作一點十五分，或一小時半計算之基礎時爲尤甚。故估計一年之收入，以如是之多之常態星期工資爲準，不唯得手續之便利，抑且有論理之根據。舉例言之，如一方病假日期爲二星期，工廠停閉之日期爲三星期，另一方面，某一忙迫

之月份中，加工之工資，恰等於常態星期兩星期之所得，結果一年即有四十九個全週之工資。由此得來之數字，即為一年工廠以工資形式而付出之總額，再用恃工廠為生者（假設全行加入工作）之常態星期工資總額除之。譬如，在常態星期，一千二百工人（男工、女工及童工），如全行加入工作，可賺工資一千鎊，此數即為依賴某一紗廠生存之平均人數，又如全年以工資形式付出之數額為四萬八千鎊，則全年工資即等於四十八個常態星期之工資，而工資平均，必為四十鎊矣。然工廠所付工資之總數，多有帳簿可稽，依賴工廠作工為生之人數，常不能確實查出；蓋一大規模之產業中，人員不斷變動，設有工人離此他去，彼究已入他廠工作，抑從此即告失業，雖身為經理者，亦難得知。故如以一年中曾在廠工作之總人數為基準，既失之誇大，但如以常態星期之工作人數，又未免失之過小。唯一可用者，似只有一年中工作最忙之星期，所有作工之人數而已；蓋工廠工作忙碌之時，除因病缺席者外，其他未能到廠工作之人，絕不能謂之賴工廠而生存，反之，如其同時並未在他廠工作，則彼加入永久失業羣中，乃可斷言矣；夫工廠生意繁忙之時，請假遊玩者，實乃絕無此人，且同業工廠，生意閒忙，大都一致，此廠忙時，彼廠未必閒，而彼廠閒時，此廠亦未必忙也。印就之問題——全年共計工資若干；工作最忙之星期，共用工人若干——既得答覆，假設答覆適當，則吾人所

欲得知之消息,即可全然明瞭;因全年付出工資總數,用工作最忙之星期所僱工人人數之最高額除之,即可得出平均全年工資也。如欲求常態星期之等量週數(equivalent mumber of normal weeks),即用賺平均工資之工人人數最高量(可由調查表格第二面得之)乘之,則所得乘積乃表示每週工資之總量(假設全體工人全行被僱加入工作),然後用此乘積,除全年所付工資總數即可矣。

為例釋上項手續起見,不妨用最近所舉行工資調查之資料,與一九〇六年所得者比較,蓋最近所得消息,較一九〇六年之調查,詳備甚多也。

全年工資與每週工資 一九〇六年工資調查,所得之種切,如下所列。惟須聲明者,此處所舉,乃僅就英國之紗廠為例,且下列數字,又僅指有答復寄回之廠家而言。

T=一九〇六年之工資總計=£10,195,229。

W=工資總額之每週報告十二個星期(註八)之平均數
=£204,173。

N=工人總人數之每週報告,十二個星期之平均數=212,503。

M=十二個星期中工人總人數最高額=2.3,472。

A_e=某一星期所僱工人之平均工資=19.43先令。

A_f=某一星期工人未曾加工亦未停工者之平均工資

$=19$先令7便士。

由此可得結果如下:——

$A=\frac{W}{N}$＝十二個標準星期每星期平均工資＝19.21先令

$E_a=\frac{T}{N}$＝平均人數之平均全年工資＝£47.98

$n_1=\frac{E_a}{A}$＝一年中實得平均工資時之星期數＝49.95星期。

一年共有五十二個星期,茲實得四九・九五個星期,相差有二・〇五個星期;以意度之,此數乃卽放假之日數,約合工作日數八日至十五日,惟此中未必全爲假期,此外工廠因故停工之日數,亦當包括在內也。

$E_m=\frac{T}{M}$＝£47.79＝總人數最高額之平均全年工資,所謂最高額卽恃工廠爲生之人數,至相差數額,乃由於失業關係也。

$n_2=\frac{E_m}{A}$＝49.73＝總人數最高額賺平均工資之星期數。

n_1-n_2＝0.21＝一九〇六年因失業而損失之星期估計數。此外,尙須加上在工作最忙之星期中,仍係未找得工作之失業者,所損失之星期估計數。

$\frac{A_t}{A_c}$＝1.008,在此情形之下,就全般情形而論,加工之時間乃較停工之時間爲多,故工資較之純爲全時工作 (full-time work) 所得者尙多得千分之八。

以此千分之八,加於 n_2 上,則所僱工人人數最高量,在一年

中，能賺全時工資之星期數，為五〇·一。

在一八八六年，查得記錄上一八八五年工資總數為T＝£3,146,566。

一八八六年常態星期之平常工資，為A_f＝一五·二先令。一八八五年記錄上最高之總人數，為M＝87.887。故最高總人數之平均全年工資，為$E_m = \frac{T}{M}$ = £35.8；又如A_f等於A（一年中平均每週工資），則 $n_2 = E_m \div A_f - 47.1$，此即最高總人數賺平均工資之星期數。至$A_f$與$A_e$二者，以缺乏資料之故，此時殊不能加以比較也。

總而言之，無論恃如何觀點，此種方法均不無堪以批評之餘地，事實昭然若揭，無待繁舉，上文所論，與其謂為常態工資對全年工資相互關係之通盤記述，毋寧視同一種例釋，目的僅在舉示中心問題及資料之性質也。

關於工作時間之損失，除因放假日及在工作最忙時仍係失業者外，尚有因病請假對於工作時間之犧牲一項，據人估計結果（註九）此項損失，平均每年有一·七個星期云。

法國方法 法國之工資調查，據一八九八年（註一〇）所發表之調查結果報告觀之，其所用工作日數估計方法，與英國迥不相同。查法國蒐集之資料，有下列數項：

（一）各門工業每月人員之更動，查得平均在一年中佔有

百分之四。換言之，每一廠家，在所僱一百人中，繼續工作經過十二個月之久者，只有九十六人。

（二）在一年行程中，每一廠家，各月所僱人數之最高額最低額之相差，查得佔平均人數中之百分之一九。由此可見，按平均計算，陷於失業者，至少當得此數之半。

（三）在一年中，每一廠家隨時僱用之工人人數，據查在長期僱用人數一百人中，爲一百四十，由此得一當然之結論：失業者之平均人數，至多不過一百四十分之四十，換言之，卽百分之二十八。然則所謂百分之九，所謂百分之二十八，乃卽平均工作之缺乏(Lack of work)之上下限 (limit)。是以如用此方法，所得之資料，較之用英國式方法，多爲詳盡，或且較爲可靠，亦未可知。又由法國工會團體得來之資料，得知平均工作之缺乏，數爲百分之二十，至英國應用前述方法所得之數字，據一八八六年之全部工資調查所示，則爲百分之十二也。

僅一工資調查表格之第一頁，設問問題雖不甚多，而必須之考慮，上文已作冗長之討論，足見在空白調查表格，尙未籌擬妥貼之前，先決事項之智識，誠乃必不可少，於此已有良好之證明矣。關於表格上其他各點，現爲篇幅所限，不克多所評論，惟不容已於言者，卽一八八六年關於工人個人工資之問題，頗有欠於詳盡之感也。舉在各工廠『紡絲工，件工』（見前第三表工資調查

表格）之例言之，所填答之工資，乃爲僱用工人之平均工資，因而各個工人之工資，並無記錄可尋。而工資之一般分配情形，亦僅一概略之報告而已也。至一九〇六年之時，填表須知，曾有『賺同額工資者，可以歸併填答；如非屬同額工資者，每一行只得填列一人』之規定，於是每一種工業每一種職業（occupation）之實際變動情形，乃得完全表現矣。

兩年份所用之表格，頗可作比較之研究，蓋非如此，不足以體驗擬定設問問題時之困難也。

第三目　私人舉辦之調查

非公家主辦之調查，與官方舉行者，苟後者並無強迫填答性質（如工資調查是），二者在本質上並無可以區別之點；惟私人所作調查，以缺乏組織或基金之故，調查之範圍，大多受若干之限制，然惟其如此，於是乃有施行抽樣方法（method of samples）（見本書第二編第二章）之自由，故爾在適當地域之內，儘可充分利用之也。

勞動階級概況　爲舉例起見，茲就某某數城鎮之工人階級經濟概況調查討論之，此項調查結果，在『生計與貧乏』(Livelihood and poverty)（註一一）中，所發表者即是。惟現所討論者，並非前文所予確切定義之問題；此時之目的，簡括言之，在討論關於工人人數，工人家庭中依賴生存者之人數，及其工作收入與生活所

賃銀勞動者				工作時數		工資	
對戶主之關係	年齡	職業	僱主	上一星期	全時工作	上一星期	全時工作

歸檔號碼

非賃銀勞動者	性別				
	年齡				
	對戶主之關係				

住房情形	房租					
	房屋種類					
	人數					
	房間數					
	花園					

調査號碼

請閱後面

（第四表）

需，種種資料，如何可以求得而在實際上並不致發生困難之問題；並在將各部資料付諸審查之後，如果恃為可信，即用以製表之問題也。

在舉行此項調查之時，因被調查者，若無任何強烈之引誘力（例如被調查者，可得糖果），必不願填寫表格，答覆問題，故一般只得用派員訪詢之法。是以所用表格，只須有簡略之說明，以調查員已經過選擇與訓練故也。至於應用薄紙表格，不如用卡片之便利，卡片之式樣，如上面附列者即是。

空白卡片 次須考慮者，戶主或戶主之妻，實在所知之事實為何，且當調查員反覆詰問時，答者將用何詞以對之。苟能得與主婦接談，則關於家中人等之消息，未滿二十歲者之真實年齡，在外工作者之職業等等項，均不難誘出答覆；房屋之租金及形式，自亦易載之記錄（必要時且須加以核對）。由此項消息，直接即可製成有價值之表格，表示各家庭之結構及收入能力，並可由此得出絕大之變動，不受標準型式之拘束，而為人口普查及其他官方調查所不及也。

無如在徵課家庭所得稅時，竟發現諸多之困難。各家主婦，對於丈夫或年長兒童之工資，常多茫然不知，故在極多情形之下，不能即時訪得。如能得有答覆，必要時可向僱主方面復查，以證明之，庶免有多報少報之弊。如所報職業屬實（一般亦確係如此），

卽可依各該城鎮之已知標準，估計常態星期之工資，則結果必能十分準確。卡片上所謂『上一星期工資』及『全時工作時間之工資』二者必須分清，因前者乃可詢得確定之答覆，而後者時常僅爲一種估計而已。調查人員，既有兩項之報告，務設法尋求二項相差之理由，然後據以核正後者一項（因製表所用唯此一項），使得確定之數字。用以製表者，僅爲有全週工作下之情形，關於病假及失業之情形，概非所問。在『其他收入』一問題下，答案鮮有完全者；惟若干家庭工資收入顯有不足者，生活既已維持至今，必能指明其維持生計之進款，且因塡答者所以致誤之處，僅屬漏塡一種情形，故答案已示正面消息。勞動階級之家庭，大多數均有微末收入之生利財產，此項收入之主要來源，據一般之報告，卽住房餘屋或他處房屋出租也。

與最低生活程度之關係　工作收入之估計數字，固不能用以準確列成表示因全年收入不同而分級之各級人數表，然就其主要用途而論，亦尚足以完成其原來之使命。主要之用途爲何？曰在查明工人家庭中收入（慈善機關之賑給除外），足以維持某一生活水準之比例，究有若干，所謂某一水準，如郎特利(Rowntree)氏在『生計與貧乏』中所計算之最低生活程度者卽是。關於各家依賴生活者之性別與年齡及人數，與在外作工者之工作性質，全家人口所處之水平地位如何，在大多數情形之下，並無

可以置疑之點。遇有可疑之情形(列表時不用之),可藉重調查員之附註(在調查卡片之背面,留有空餘地位,即備調查員填註解說之用),而爲合理之判斷。

調查片並不交與被調查之人,須由調查員於詢問之後隨時填註。如恐各家調查片有混淆雜亂之弊,應在各片上排訂調查號碼。在分類之初步手續完成後,並應訂定歸檔號碼。然後將各卡片,付諸審查,其列表應用之數字,復須作精密之核算。登記所用之表格究應預備幾許行數,此須將卡片分爲數札,然後分別枚計之;此步手續,甚爲簡捷,然亦需繼續不斷而謹愼精密之核對。

調查範圍之指定 每作一種調查(如某一城鎮之勞動階級),其範圍如何,務須有精審之限定。由經濟觀點上之分區,是否與行政目的上之區域相合?如其不然,遠在郊外之人家,究竟包括在內與否?均應加以確切之指定。範圍既定,次須覓得全區內之確實戶數名單,並按此名單用抽樣方法,選擧若干戶數;擧行調查之時,卽以名單所載者爲準,而名單所列亦卽爲『範圍』之定義。至於所謂『勞動階級』,尙無公認之定義,而實際應用者,必須有待於辦理卡片時之決定。故在選擇戶數之先,凡各家租金在某一定數額之上,或住宅載在主要居留人名簿上者,均須屏除於調查範圍之外。卽在被選而前往調查之時,如發覺戶主爲職員,教員或經理人者,卽應放棄之。至於其他如商店助理員、佣金經

紀人、旅店店主、小商店主，在發現之時，卽須有所決定，並須特別註明。由此論之，所謂勞動階級家庭之最終定義，乃由劃定界限方法得知，苟如予以整個文字上之定義，則有如下列所示：凡各戶房租每週不超過十二先令，而戶主非為職員、教員……等等者，均為勞動階級之家庭。如此規定限界之方法，在製成表列時，必須極為一致；在寫作報告時，事先已有規定之事項，必須明白敍及，在處理邊際情形下之取捨問題，尤須特別重視也。

第四目　英國國外貿易統計

由原始表格，可做成其他極多之統計，研究此等原始表格，極有興趣，惟以限於篇幅，不能逐一討論，現在只得就較為特異之調查研究之．此卽用作國外貿易統計之調查也。

人口普查之時，答覆表格具有強迫性質，並由戶主自行塡答；在舉行工資調查之時，答覆一隨各人情願，僱主卽允塡答，亦只塡答一次卽足；勞工局 (Department of Labour) 主持之調查，被調查者雖有答覆與否之自由，惟調查次數多屬按期性質，因有變為『準官式』(quasi-official) 之傾向。至出入口貿易統計資料之蒐集，則將此三種調查之性質洽合於一爐。

供給消息者　國外貿易統計，所欲調查之事項，可以供給消息者，可以分為三種：一為貨物出售商；二為經手放行貨物之海關官吏；三為貨物收受者或其代理商。以英國之出口貿易而論，

因環境之許可，出口商或出口代理人，在發出貨物之時，例須將貨物之數量、價值、與售往之地點，報告於海關之統計科；在進口貿易方面，領貨代理商，須將行將登陸之貨物擬具報告文件，呈交海關官吏，然後海關官吏，視其貨載之性質，而分別決定辦理，如屬免稅類者，大略檢查通過，必行課稅者，即須詳細檢查；至遇有轉口情形，則在登陸之口岸，一如進口之貨物手續辦理，並在必要時，上船之口岸，亦須加以檢查也。

此項空白表格，旣由海關官吏視爲主管責任之一部而查核之，同時又爲代理商人專爲此事而填者，故無須附具信函，復隨事實之需要，可使內容儘量複雜；表上並無任何問話，僅爲空白表格而已。取得此項表格之後，卽加以審查，以便得出商業部之出入口貨物總計數，並擇其可用之資料，列成表格也(註一二)。

問題主旨所在與資料 此種調查中，吾人所欲測量之數量，爲凡有交換價值，自本國輸出，或由國外輸入，依商品品目及輸往地與來源地而分類之貨物容量或重量；在裝船或卸貨時之當時價值。惟當實際調查之時，吾人所能測量者；與此迥不相同，而爲商業部所收得之價值與容量記錄數字也。故吾人須將表格，加以審查，以便決定（一）出入口貨何部曾有登記；（二）所填價值是否正確；（三）所載數量是否確實；（四）商品名目是否確

是帆船
抑汽輪　　汽　輪　　官定號數

第一號
某港口　　第九八〇號報告（註一三）　　登記號數
登記日期

船名	噸數	英國船或外國船。如爲英國船，註明註册港口；如爲外國船，註明屬於何國。	海員人數		船主姓名是英國人抑係外國人	自何處來
			英籍海員	外籍海員		
馬利安尼	七〇〇	英　國	12	——	亨德 (H. Hind)	法國阿維爾 (Havre)

載貨情形

一 裝貨之地點名稱以時間先後列下	二 符號	三 數目	四 貨物之包裝情形，散包貨物之情形，與意欲在本港口輸入煙葉，雪茄烟，或鼻煙每包內容大概單位。	五 輸往英國其他港口之貨物及包裝情形（如無此種貨物，此項免填）	六 將轉往他口，或存艙預備出口之貨物（如無此項則免填）	七 受託寄售貨物者之姓名
法國阿維爾	自	巴黎	至倫敦——包裹六	〇〇件，鮮貨 包裹六八	水果 件，貨物	斯密士
	COK	1392				
	AE	495/6				
	KG	340/9				
	IOT	1/50				
	AJ	3/6				
	CK	1	七〇箱酒			
	KC	40				”
	ACD	20				
	WD	166	五箱毛織品轉運利	物浦港		”
	O&D	1	一箱白蘭地酒			”

庫藏貨物

輸上餘存之物品，有 {三磅雪茄烟 / 四磅烟葉

外籍旅客　　無
航師姓名
泊船碼頭　　南奎 (South Quay)
代理人姓名及住址………C. J. C.

余保證以上所填，確爲本輪及載貨之實在情形，余已盡余之所知，報告詳情如上，並保證並無打破包裹情事，且自離開最後外國裝載口岸阿維爾後，並無中途卸貨情事。

船主亨德具結一八九六年十月十三日

海關外收發________會簽

（第五表）

貨；（五）表格上所塡輸往地點與來源地點是否確實分清。

填表舉例 貨船靠岸之時，船主必須送呈一紙報告，茲爲舉例計，特將縮小之樣品，摘錄於上。

課稅貨物 急於轉運之貨物，一經按照類似上列之特別款式，塡報交與海關，可以立卽開行。其餘貨物，一概分按徵稅及免稅辦理。在上列第五表中，設有十箱之酒，係備家中自用，只須繕具報告送去卽可；下餘六十箱，乃送儲倉庫者，必須另作報告，說明品質，數量及價值；但七十箱全部則均視作進口貨。又設儲存於倉庫之酒，有二十箱，將轉運往他口，然後復行出口；是須繕呈報告，乃歸入復出口之外國貨一類矣。在駛進之海口靠岸之輪船上，艙中尙自存有酒二十箱，其中十箱，尙須留存至轉往他口時應用，則亦須作一報告呈上；餘下之十箱，提出移存別家倉庫，仍屬保稅倉庫性質，並無須作報告，但若提貨時則應依其情形如何，照上述四種手續辦理。此雖指酒類而言，然其他課稅之物品，手續亦不外此，換言之，仍當遵循同一程序也。

貨物之檢查 貨物報告情形不明，或與報告文字不符者，須開包檢視，內中何物逐一開列檢驗單（bill of sight）中，並作一報告送進。私人所有物，亦須分別加以檢查，記錄於特許證（sufferance form）上；此種私人用品，如果眞實屬於個人所有品，可無須作何登記，但若有應行徵課關稅者，則一視爲普通進口貨

辦理矣。至如應課稅之物品，不論藏在所有品或商品中，一經查出，卽行沒收，並不視爲進口貨也。

免稅貨物報告(註一四)

港口＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

船塲或碼頭＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

進口商店名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿（第　　　號）

檢查情形	船名	船主姓名	進口船號數	報告日期	自何處來
	馬利安尼	享德	九八〇	一八九六年十月十三日	法國阿維爾

符號及號碼	包件數貨物情形，按照官定進口貨單名目分類	數量	價值金鎊
COK 1392	一件機製貨物N.O.E.彈子棒尖頭		28
AF 495/6	二件皮鞋……………………	十打	58
KG 340/9	十件機製棉製品，裝飾物		140
	花邊		280
	布疋，並非洋紗……………………	三百碼	8
FOT 1/10	十件皮手套……………………	一萬一千二百四十打	12,316
,, 11/5	五件寬面綵織品		10,400
,, 16/20	五件美術作品		
	石膏模型		380
	雕像		1,280
	繪畫……………………	三張	10,200
,, 21/5	五件成包書籍……………………	四百磅	300
,, 26/30	五件青銅裝飾物……………………	三百磅	38
,, 31/5	五件機製五金作裝飾用黃銅頭洋釘	四百磅	
,, 36/40	五件機製絲織衣服，斗篷，裝飾品		34
,, 41/50	十件機製貨物 N.O.E.		1,816
	零星裝飾品		110
	不帶馬之馬車		160
	毛刷		78
	膠		110
	彈子棒粉		12
	鐵器		116
AJ 3/6	四件文房用墨水		48
CK 1	一件機鋼鐵機器退回英貨……………	三百磅	24

謹填報免稅貨物如上，並宣誓所陳各節，並無虛僞。

具結人（進口商或代理商）瓊士(J. Jones)

（第六表）

生金銀須另用一特別表單填報，與普通報告情形不同，須單獨辦理之。

免稅貨物，如欲轉運其他口岸，即用原包封印輸送，普通罕加檢查，但統計方面，在海關中央機關，對於此種貨物，則視同應課稅之貨物，如法辦理也。

免稅貨物 課稅貨物之統計資料，取得之程序，既如上述；至免稅貨物就一般情形而論，乃佔貨物之大部，其報告之款式，既爲英國國外貿易數値之原始資料，頗有加以注意之必要，茲覓得資料樣本如上。

資料之核譯 如此得來之資料，平時即由主持統計事務之中央機關收下，並不再行詢問。惟代理商填寫表格，往往多有不當，價値常有遺漏之事。遇有此種情形時，乃須責成輪船駛進之港口海關職員，飭令代理商人補填完全，如所填仍欠妥當，並須以其所備現行行市單核正之。至在表格中發現有顯著之錯誤，或內容有脫落，或價格迴異常度時，須由中央機關發出詢問書，交與當地海關：例如就上列之表格，可以引起下列之通訊：

（1）繪畫，價値十萬零二百鎊，價値過昂。請解釋。答：查對無誤；曾見其發票，圖畫爲米萊(Millet)所繪。

（2）成包書籍；重量與價値有誤否？答：兩項均無錯誤；曾見其通知書(advice)；均爲古本珍貴書籍。

(3)列爲『機製貨物,木片辮』之貨物:性質如何?請解釋,填寫有誤否,請說明。答:無誤;成辮之木片,有時摻雜馬尾及其他等物。

(4)番薯,四千磅,價六十二鎊。重量與價值有誤否?答:價值無誤。重量應爲四萬磅。

於是任何異常之項目,均可核對而加以核證矣。

差誤之可能性　遇有不易估價之貨物,或不易列表之雜項貨物,種種錯誤,必從中層出不窮矣;除此之外,差誤發生之本源,尙有一種情形,係當塡寫表格之代理商人或海關職員,爲避免中央機關詢問之煩起見,以特別價値之貨物,塡爲平常之價碼;然涉及主要商品及大量貨物時,凡接頭之人員,均熟知其價値之何若,塡寫必不致有極大之出入,因此在重要之事項,卽有錯誤,亦可減至最小限度。由此論之,進口總價値,爲確實程度不同之極多數量之總和,凡稍一檢閱統計年報之項目者,卽可査出何項特別有陷於錯誤之可能。計此種貨物,有古書、有美術作品、有因時尙不同而變動之貨品、有賽馬用之跑馬等等,因其價値隨日俱變,輸出入差額中,甚難確定其確實價値也。

以寄售之貨物而論,寄售之羊毛佔進口羊毛之大部,代理商人並不能報出其價値。此種貨物,乃隨流動之市價而定,如就羊毛而言,其價格若干,卽全視下次售毛開價幾何。因寄售之貨品,

每批未必確能定妥應時價格，於是常有發生錯誤之可能；且因售賣之羊毛，乃以登陸及存入倉庫後之價值爲準，而登記爲進口貨值之價值，乃須不計卸貨及搬運費，是以恆有高估羊毛價值之事。

出口貿易資料 出口貨物之數量與價值，或由代理商人塡妥，或由承運輪船公司代塡，表格塡畢後，在開船離岸後六日內，送呈海關職員代轉或直接送呈中央統計機關。玆覓得現行格式樣本，節錄如下：

英國貨物列舉表(註一五)

某港　　船名——『馬利安尼』船主亨德，開往阿維爾

（注意） 依海關法，出口貨列舉表，須於開船之日起，六日內送交海關主管人員。

符號	號碼	包裝情形及件數	英國貨物之數量及說明，遵照公布出口貨物單之規定	價值
KCL	641/2	二捆	羢原呢一，四〇〇碼	£340
CKD	140/1	二箱	機製鋼刀片三〇〇磅	24
RMO	10/12	三板條箱	機製鋼鐵打稻機一架	380
CL	140	一箱	棉織印花布疋一，八〇〇碼	50
				£794

謹填列如上並無虛言。

塡報人（出口商或代理商）＿＿＿＿＿＿＿＿

地　址＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

會簽者（海關職員）＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

一八九六年，十月十三日。

（第七表）

爲英國貨物所用表格，與爲外國——包括課稅及免稅——貨物所用者不同；轉運他口（transhipment）之出口貨物，因曾登記爲進口貨，斯時所用表格，亦有區別。在此情形之下，貨物之列舉及數量，大致可以無誤，惟價值之虛報，依然有其存在之動因。蓋貨物之須納從價稅者，價值每多低估；貨物之摻雜他物者，每多冒爲眞貨，因而價值高估。此種差誤之計算，大爲不易也。

進口貨出口貨在統計上之定義　討論至此，更請就商業部報告（Board of Trade Returns）上出入口貨物之意義，給以確切之定義。例如在一九一三年之統計表上，進口貨價值達七萬六千九百萬金鎊，出口貨價值達六萬三千五百萬金鎊，就中有一萬一千萬鎊爲外國或殖民地之復出口貨。茲將定義條舉於下：

在進口貨之下，包括所有經過海關登陸之貨物，並包括甫經運到而留存艙上備用之物品，或買主未曾用過之退貨；但以下乃爲例外：

（a）本國人所捕之魚，用本國船隻，自漁場直接運到者；外國派駐本國之大使或公使直接攜來之貨物；自外人手中購來之舊船。又

（b）箱，袋及其他等等用爲包裹，行李包，船中存儲品，壓船重物，國有船隻上海陸軍用儲備品之用者；在保稅倉庫範圍之內，轉移之貨物；輸送之貨物，經過一國而有直達貨物提單（through bill of lading)者(但仍須分作報告);及貨物不下船而事先有聲明者。

在出口貨之下,包括所有在船貨提單上載明之貨物,但上段(b)項所列之各類,則不在此項範圍之內;自一八九九年起,自本國開出售與外國之新船,亦謂之出口貨。

貨物到達港口之後,即在本港口或他港口立即重新載回,或存入保稅倉庫而又運出者,仍謂之進口貨,但在出口貨方面,則別立名目而謂之『外國與殖民地產品之出口貨』(Exports of Foreign and colonial produce)。

生金銀與錢幣之輸出與輸入,不列為出口貨或進口貨總值之內,須另作一表登記之。至私人攜帶之錢幣,以及進口或出口之大部金剛石(乃一極重要之項目),均未嘗有何記錄也。

關於煤炭,處理方法,可為上文所論各節說明之一助。預備作為航程上應用之煤,只予以登記,並不記為出口貨之列;但如作為載貨之一種,則應包括於出口貨之內矣。

價值 進口貨之價值,乃以未及登岸之時之書面交換價值為準,故凡付與外國商人之底價,付與輪船公司之水脚,付與保險公司之保險費等等費用,均包括在內,但貨物搬卸脚夫費並不計及也。出口貨物之價值,即為『在船上交貨』(free on board)之價值。此項價值之正確定義,乃為任何國家研究貿易差額上,

極端重要者。

經驗告知吾人,依貨物之輸往國家(country of destination)作出口貨之分類,與以輸自國(country of origin)作進口貨物之分類,均有莫大之困難。自一九〇四年以來,因不斷之努力,關於此等問題,確實程度,已有增進。在貿易報告中,自一九〇四年後,已用兩組表格,其中較新之一種,卽關於委託寄售貨物之國別表,現時猶佔較大之重要性。

應用戰爭時之國外貿易記錄,務須持以極大之謹愼。蓋上文所謂『國有船隻上海陸軍用儲備品』之一類,在戰時雖佔浩大之數量,而記錄上則付闕如也。

以上所論已多,而公家舉行之調査,尙未加以討論,一九〇七年之『生產調査』,可以作爲良好之例證,此項調査之結果,於一九一二年發表者卽是。總而言之,調査最後之目的,確可搜得之資料,與夫設問問題之調整,期使各業之僱主樂於確實填答,三者乃有連鎖之關係,此吾人不可不特別加以注意者也。

（註一）請參閱第二十六表。
（註二）見美國人口普查委員會一八九〇年報告書。
（註三）並請參閱統計學報(Statistical Journal),一九〇八年號,第四百九十六頁,及一九二〇年號,第一百三十四頁。
（註四）參閱自狄羅著統計學初級教本第一百四十六頁。
（註五）參閱威爾考克斯(Willcox)著『第十一次人口普查下之美國人口與

土地面積』(Area and Population of the United States at the XI. Census)

(註六) 英國一八九一年人口普查總報告。

(註七) 參閱統計學報第四十九卷,布斯氏(Booth)一文。

(註八) 每月最末而鄰於常態之一星期。

(註九) 參閱本書原著者所著之『工業生產品之分配』(Division of the Product of Industry)第三十頁,及斯歐(Snow)博士,在統計學報(Statistical Journal),一九一二及一九一三年,第四百七十七頁,所載一文。

(註一〇) 一八九七年工資及工作時間(Salaires et durée du Travail)第十五,十六頁。

(註一一) 辣且達達(Ratan Tata)基金會所發表,一九一五年版。

(註一二) 以下數節,係就一九一四年以前之情形而言,厥後有何變動,姑不論之。

(註一三) 即自當年一月一日起,在某港口進口第九百八十艘船隻。

(註一四) 於一九〇四年,爲區別『裝載貨物之地點』(即上表末行『自何處來』之代替標目,及『委託寄售貨物之地點』(place whence goods consigned)起見,特將表格改變,以後者一項,另添設一欄,作爲新標目。

(註一五) 自一九〇四年,新添一欄,標目定爲『貨物之最終目的地』。

第四章　表列法

空白調查表格，既已討論如上，現請進而研究用表格上所貯積之資料，列成表式之方法。在驟觀之下，以無數萬張之人口普查表格，以如是之多之工資調查表，以若干張數之進口貨物單，製列表格，似僅為可用機械之力，只須求其準確，而無待於作科學研究之內部工作。確然，製表應用自動力量之處甚多；然以言擬定正確表格形式，選擇足與總計相符之標目（heading），則為統計主腦人員，煞費心思之工作，亦頗有深密研究之價值者也。

第一節　總論

表列之功能　表列在一統計調查之全盤計劃上，原有頗為確定之功能；其目的在將調查所得之答案，列成便於利用之表式。例如，今欲查明全國各區之性別及年齡別之人數，則表列之數字，必須示明此等之人數。又如就一較為籠統之問題而論，設吾人意欲儘力之所能，調查關於工人全年收入之資料。試取工資調查之調查表而研究之，卽知所能得來之資料，未必恰應吾人之所需。然則吾人當前之問題，卽須用既得之資料，製成適當之表格，以

期表中所得之總數，雖不能完全合乎吾人之要求，確已盡竭力適應之能事，然達此目的之途徑，並非顯明之途徑，稍經試驗者，即可知其困難也。

所得之數字，不特須彙總歸類，以應原定計劃之所需，而於所得之材料，牽涉甚廣，性質多有不同時（一切調查莫不皆然）且須將資料作多方面之研究，並使列成之表，足為一切學科之學者採用；彼等所需要者雖各有不同，而吾人之表，則皆足以應付之。例如，人口普查，既為理財家、立法家、商人及商業旅行家所習用；政治經濟學者，以之持為發展工業之見地，並為各種商業數目變動之說明；彼對社會問題有興趣者，以之為研究各區域各職業之年齡與性別分配之根據；社會學家與生物學家，又將視為準確之資料，因而在人口發展趨勢與年齡分配之變化上，有所發現矣。

茲就特殊方面而言，國外貿易統計表册，可以用查本國與各國貿易發展之情狀：在國外市場，本國尙能保持原有地位耶？抑別有進展耶？本國之原料供給已有窮竭之象耶？抑另有新商品起佔重要地位耶？惟吾人須知，一則原始資料不便於一般人士之需用，必須由原始資料中，理出適於彼等之消息，二則由所有調查表中，雖可提供特殊之資料，然因此所需之工作，乃至極為繁重，同時若製列表格稍形瑣碎，即足以隱蔽有用之消息也。

表列與特質　表列如何製法，須就前述（見第三章第一節屬性及特質一段）特質之概念論之。某一羣類（group）之各個人物，均具有充分限定之特質，譬如A，B，C，D是。有時各個分子，不只具有一種特質，一方旣有E_1，E_2，E_3，……等等特質中之一，二，同時復具有F_1，F_2，F_3……幾種特質中之若干。單項表(a table in single tabulation)，用以分別表現E_1，E_2，……等等特質，各該項之總計，已克盡厥職。然有時一表之標目，用直接方法或用備考方法，陳明A，B，C及D四種特質之定義，而另以E表示諸如『地域別』(in each locality)之詞字(假如E爲地域)。於是在第一縱行(column)之各列均謂之E。雙項表式(double tabulation)之作用，在表示E之分類，同時又表示F之分類，每一縱行之標目，卽指明F之定義，於是每項(entry)卽所以表示具有A，B，C，D，E_2及F_3特質者之人數。橫行之合計表示具有E_1，E_2，……等特質者之總數，縱行之總數，卽表示具有F_1，F_2，……等特質者之總數也。

三種表列法　爲簡便起見，列表方法，可分爲三種：甲、僅對於適合某種條件之人或物，爲單簡之陳述者，如一城鎭居住之人數，或由法國進口貨值之總數量；乙、將公具同種性質之若干單位，歸併爲一類，其目的不在回答指定之問題，而實在將資料列爲表格，便於進一步之調查時應用也。例如，依年齡分類之人口

數，依工資高低分類之賃銀勞動者人數；丙、為鋪敍整個狀態，將非屬於數字之答覆，依適當之羣類，而列成之表格。例如，罷工之起因，及服役狀態等是也。以上三類，甲乙二種並非絕對之區分，分界常時難於確定。

製列表格，應力求讀者之便利。表上之排列，應以醒目為要，任何總計數字，一望即知。論及此點，實乃屬於排版問題，數字及標目所用活字之號數大小，如何配置適宜，紙張形式及篇幅，如何適得其當，均視排版之技術若何。凡此種種，苟能精當無比，則在一定篇幅之內，可以容納最大量之材料。

表列之分類 第一類：單項表式，只能答一個或數個各自獨立之事，例如：——

職工組合數及其會員數

歲次	截至年底止之職工組合數	截至年底止之職工組合會員總數
1896	1,317	1,493,375
1897	1,307	1,611,384
1898	1,267	1,644,591

雙項表式，將一總計數再按兩類細分之，茲舉例如下：——

愛爾蘭貧民之分類：一八九二年，至婦女節日止

所賑濟之總數

受賑濟之人數	男	女	總計
十六歲以下者…………………………	44,391	43,648	88,039
滿十六歲及以上與六十五歲以下者	132,370	79,045	211,415
滿六十五歲及在六十五歲以上者	35,121	45,668	80,789
總計	211,882	168,361	380,243

如欲將更多之消息,包括於表內,則應如下式:——

英格蘭及威爾士貧民之分類——一八九二年截至婦女節止

受賑濟之總人數

受賑濟之人數	在室內者	室外流浪者	總計	在大都會者	在英格蘭及威爾士其他各地者
不滿十六歲者	111,782	441,805	553,587	100,671	452,916
滿十六歲及以上而不滿六十五歲者………	232,284	385,299	617,583	148,066	469,517
滿六十五歲及以上者………	114,144	287,760	410,904	64,779	337,125
總計	458,210	1,114,864	1,573,074	313,516	1,259,558

三項表(treble tabulation) 之用途,在將總數分列爲三類,而計每類之總數。例如下列一表,除依年齡、性別及地域各分爲一類外,更介紹一特別之形式,將各類之百分數,一併列入:——

依年齡，性別及地域之貧民分類——一八九二年截至婦女節止，在英格蘭及威爾士受賑濟之總人數

受賑濟之人數	在大都會者				在英格蘭及威爾士其他各地者				在英格蘭及威爾士總人數			
	男	女	總計	各年齡所佔總數百分比	男	女	總計	各年齡所佔總數百分比	男	女	總計	各年齡所佔總數百分比
不滿十六歲者	…	…	100,671	32.1	…	…	462,916	35.9	…	…	563,587	35.2
滿十六歲逾以上而不滿六十五歲者……	74,207	73,859	148,066	47.2	202,180	267,337	469,517	37.3	276,387	341,196	617,583	39.3
滿六十五歲及以上者……	27,238	37,541	64,779	20.7	136,392	200,733	337,125	26.8	163,630	238,274	401,904	25.5
性別百分數	42.0	58,0	100	…	40,4	59.6	100	…	40.7	59.3	100	…
總計	…	…	313,516	100	…	…	1,259,558	100	…	…	1,573,074	100

（第八表）

依此方法，更進一步擴張之，可成爲下例依地區、日期、性別、業別、分類排列，並附以附帶消息之四項表式（Quadruple tabulation）；但此並非妥善之辦法，除必須將數類貼近以顯示關係之密切外，與其不斷增長其繁雜性，實不如單用數個以上之表格之爲愈。然形式之變換，苟能運用得當，在一極複雜之表式內，確亦多易收比較之效也。

第二節　布斯氏對於人口普查資料之應用

人口普查所得資料之製法表　現請翻閱前於第三章第二節第一目所舉之人口普查表（第一表），可知表中調查每人之消息，有十三項之多：區域、對戶主之關係、結婚情況、所生兒女、及性別、年齡、職業、所在機關、工業情況、殘疾、出生地點、所屬國籍、房間數。項目如此之多，製表時可以製成七十八個雙項表，二百八十六個三項表，或七百一十五個四項表，是以範圍大小不同者種類甚多，足供選擇之用。

布斯氏製表法　爲求選擇意旨之決定，即以職業爲主體而分類，並就布斯(Booth)先生對於人口普查結果之利用研究之；茲爲單簡起見，只舉其於『人民之生活與勞動』(Life and Labour of the People) 第六卷第一百八十九頁之倫敦印刷工人爲例如下。

第一，布斯先生利用相當於一九一一年人口普查表之，第三、

四及十縱行之資料，作成三項分類——職業，性別及年齡——表：——

一八九一年人口普查分類	女性	男性			總數
	所有各級年齡	−19	20−54	55−	
1. 印刷工人	1,316	9,988	21,784	1,921	35 009
2. 石版工人	809	757	3,037	437	5,040
總計	2,125	10,745	24,821	2,358	40,049

·復用人口普查表背面之消息，列成單項表，以示區域與人數：

東區	北區	西區與中區	南區	總計
5,884	9,835	7,577	16,753	40,049

更就第二、三、及第四縱行（性別），第二及第十四縱行（出生地），與第二及第十二縱行（工業情況）等項，製列三種關於戶主之單項表式。茲將其第二種，即用第二及第十兩欄作成者，錄之於下：

	所有有關之人口				
	戶主	其他有職業者	無職業者	僕役	總數
總計	18,048	16,060	47,257	854	82,219
平均每家	1	.89	2.62	.05	4.56

復次所製之表（此處未曾附列），係按房間數與僕役人數，作一簡單之分類，斯乃爲調查表資料最爲膽大之間接用法。最後一表，爲四項表式——職業、工業情況、年齡、性別——之合法應用，玆附列於后：

僱用狀況（根據人口普查）

一八九一年人口普查分類	僱主		僱員 男性		僱員 女性	非僱主亦非僱員者		總計
	男性	女性	未滿二十歲者	滿二十歲者	所有各級年齡	男性	女性	
1. 印刷工人	827	39	9,988	22,565	1,266	313	11	35,009
2 石印，銅印及鋼版印刷工人，	177	2	506	2,571	88	153	6	3,503
2 地圖印製工人，印刷勞工及售賣者	17	…	49	175	72	62	12	387
2 票券及簽條編寫人	36	3	202	169	619	114	7	1,150
總計	1057	44	10,745	25,480	2,045	642	36	40,049
	1,101		38,270			678		
			僱主對僱員之比：			1比35		

（第十表）

人口普查資料之製表　欲將無量數之詳細節目，均製列成表，以供特別用途之需者，覓得較佳之例，事乃至難。人口普查當局，在許多之情形下，均未將必需之細節，製出表列，吾人如有所

需，不得不翻查原始表格，始能得出事實。對於此種工作，製表之功用，僅在解答限定之問題。例如人口普查報告，即表示某地方某門工業依性別與年齡分類之人數各有若干，列入接連許多頁數之四項表中（每頁敍一區域）。此表可以適用於若干不同之用途，每一項目已有一立可採用之總數。人口普查之調查表上，所有各項之記述，欲逐項製列表格，即爲事實所需要，然爲時間及篇幅所限，乃亦勢所不能；一良好之表式，只供給實際有用之事項而已。僅爲敍述性質之總數，已有若干——如英國各教區依性別及年齡分類之人數是——其主要用途，即爲供行政目的之需；又有許多堪供經濟學家及社會學家考查工業進步情況，研究各種職業工作人員之年齡，觀察一國各級年齡之變化；更有其他表格，可爲對於特別問題研究之一助者。總之，每一度舉行人口普查，必有新表格發現也。

次要之細目 試展開任何此種數字表之一，任意抽出一數，然後查問：『此一數字，何爲而印出之？所解答者，爲何問題？可供給何人之用？』舉例言之，在『職工組合第八次報告』（第二百五十七頁），可查出聯合造磚工人會，及運磚碼頭勞動者組合，在一八九四年之時，葬喪費一項，耗金二十鎊，平均每一會員，須費三先令七又四分之一便士。此一數字，單獨陳述，引起注意者必少，然此少數之人，即可據以促成將關於工會之數字，製成表

格，列之普通公家刊物中；如在同一頁上，查得鍋爐製造工人所耗之五千四百八十一鎊，則二十鎊雖小，亦同樣能引人之注意矣。由此觀之，諸如此類之微末節目，是否一併搜羅加入，純爲篇幅之問題。如篇幅有限，只得就所關人數較衆之較大數量，斟酌選定之。

原始資料之重要性 然此亦不可一概而論，諸如此類之細目。在另一性質上，又殊有加入付印之理由。蓋此種表格之總計數，均係根據原始資料而來，而原始資料，初學之人，設非藉助該項報告 (Report)，難期瞭解應用。今編製此種統計者，並不知用資料作研究者，究竟持何觀點。吾人固可將各工會加以分析，並按其各項費用，彙分類別，然後考察其歷史，分爲鬬爭組織與互助會性質等類別。一般所需要之表式，事先並不能完全明瞭，故對於資料只能供給其概略，以便有何需要者，各自製列其適當之表格。同時，足供參考之總計數，於此製表法中，即可出現；並於報告之總綱中，將各項重爲製表，原始資料，即行取銷，至究應如何整理，則一視編輯人之思索，擇其最爲有用者決定之可也。

原始資料之選擇 當發表時，篇幅過狹，不能容納所有各項時，何者當付印，何者不當付印，必須愼爲選擇；而選擇之當否，即背通最易引人批評之所在也。

一九一一年，英國人口普查之科文垂（Coventry）郡邑County Borough)，可作一良好之例證，該邑一百一十五人之事實，詳細情形如下：——

磚、三合土、陶器及玻璃業，男性人數

年齡	10.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	25.	35.	45.	55.	65.	總計
製造工人	—	—	2	3	2	3	1	4	12	36	23	17	4	—	107
售賣員	—	—	—	—	—	—	—	—	1	4	—	1	1	1	8

至在腳踏車及汽車業服務之男性——廠主、工頭、有技能工人，粗工工人及僮僕 — 所敍細目除下列一表外，恐無有再細於此者：

車輛

年歲	10.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	25.	35.	45.	55.	65.	總計
腳踏車及汽車製造工人及機械工人	—	1	912	271	303	325	371	372	2,003	3,872	2,488	1,122	379	76	11,775
汽車製造工人及機械工人	—	—	*70*	*108*	*143*	*160*	*219*	*208*	*1,299*	*2,524*	*1,376*	*537*	*158*	*36*	*6,858*
其他	—	—	—	2	1	4	8	7	31	62	49	24	21	4	213

據該書序言第三頁所述，每區較爲重要之職業人數，全部節目，均用斜體字標出云。

地位之節省　在此情形之下，有二條極有效之準則，可以實施：第一，將不滿五百之數略去，可以少印一橫行，第二，數在一萬以上者，取至百位爲止，其他數字以比例類推，如此則排印之時，各縱行寬度可以縮小。例如，如取至百位爲止，各區域及各職業之確實數，受僱用者有一千人，則吾人所得之消息，亦頗滿足吾人之需要，且如此製成之表，所佔地位，是否較業已全行包括者爲多，事乃頗堪懷疑。雖然，在許多情形下，原始材料務須保持原狀，不必任意變動。各種表列固各有其優劣也。

第三節　農村工資統計之表列法

一八三三年恤貧律調查結果之表列　吾人講求有效之程序，必須提出某類問題，然後考慮表式之何者，換言之，必何如列表，對於有關之問題，可收明瞭之效果。一八三三年之恤貧律委員會(the Poor Law Commissioners)，自英格蘭及威爾士一千個農村中，收集之消息，主要之問題，只有六點；每一農村勞動者在冬日夏日之工資，麥酒作爲一部工資與否，其全年收入若干，及其妻與兒女之補助工作收入。可以斷言者，該委員會之主旨，在調查勞動者家庭之收入，是否足供其生活之所需，及妻子兒女之工作收入，佔何等比例也。

各郡(County)之貧窮勞動者，可由下列表樣示明之：——

郡名	平均全年收入		
	男子	家屬	共計

各郡郡名，不妨按字母（指西文字——譯者註）次序排列，以便參考，或按地理順序排列，以便將一組各予一平均數（例如，東區：臘富克、沙富克、愛塞克斯；否則可按收入總數多寡次序排列，以便表示最爲窮困之勞動者係在何郡。

如按各郡之次序，宜示工作收入低於某一最低限度，或未超過某種範圍之各農村數，可用下列一表：——

男子與家屬之全年工作收入

	全年收入已加平均之農村數							各郡平均全年收入			家屬工人收入佔總數之百分比
	金二十五鎊	已超過二十五而未滿三十金鎊	已超過三十而未及三十五鎊	超過三十五而未及四十鎊	超過四十而未及四十五鎊	超過四十五而未及五十鎊	五十鎊以上	男子	家屬	總計	
臘富克	0	1	3	6	4	3	2	£30	£11	41	27
對全部農村之百分比	0	5	16	$31\frac{1}{2}$	21	16	$10\frac{1}{2}$	...	...	...	...
沙富克	0	3	4	5	3	2	£2	£28	£11	£39	28
對全部農村之百分比	0	16	21	26	16	$10\frac{1}{2}$	$10\frac{1}{2}$	...	...	...	...

愛塞克斯	1	3	6	7	10	3	1	£28	£10	£38	26
對全部農村之百分比	3	10	19	23	32	10	3	…	…	…	…
全部各郡	1	7	13	18	17	8	5	£28 10	£10 10	£39	27
對全部農村之百分比	1	10	19	26	25	12	7	…	…	…	…

（第十一表）

此表列爲如上之複雜形式，固無不可，但如使變爲簡單化，亦屬可能。關於錢數之分組，初無一定標準，一方須視地位之大小，一方又須視各組所包含之農村數。設列成之表，多數行列，內容只有一或○，最易引人批評。即以上表而論，農村數亦已過少，在百分比上，難期準確也。

表示相關之表列法　此一表格，令人一見，即可信其對全年收入總數所能引起之任何問題，此表幾全可解答之。例如，設吾人欲考查收入總數對家屬補助收入之關係，即須檢閱上表倒數，第二縱行之最小總計數，視其是否與家屬收入所佔之最大百分數相合。如其然也，吾人即將諸郡依此補助收入之多寡次序重新排列，然後查視其能否與以收入總數爲次序而排列者略相符合。此爲用表列法表示相關（correlation）——兩組現象出現之相應性——之一例也。

每週工資與全年工作收入　此種表式論述至此，另外一組之重要問題，必因之引起：每週工資與全年工作收入之關係若何？

就一般情形而論，以實物償付工資，佔工資若干成？至關於家屬補助收入，姑置不論。查農村工資之記錄，最普遍之記述，為『本區工資每週自十先令至十二先令不等』。然因日光不足之時，所需之工作量較少，而工資亦不得不隨之減低，故農村勞動者在冬日勞動之所得，一般均不若在夏日所得之多；職是之故，如每週工資以五十二乘之，得數必較全年收入為多。惟在收穫之時，除額定工資外，多可獲得特別賞錢，即在平時亦有實物償付之事，諸如每日之麥酒，減收租金之房屋場院及其他特別權益等等。是以最善之法，莫過於將此等價值估計於內，而計算其全收入如下：——

	鎊	先令	便士
每週十先令共三十八週……	九	〇	〇
每週十二先令，共九週（夏季）……	五	八	〇
割禾一星期……	〇	一五	〇
割麥四星期……	五	〇	〇
麥酒每週一先令……	二	一二	〇
茅舍及場院……	五	〇	〇
其他犒賞……	一	五	
	三九	〇	〇＝每週十五先令。

由此觀之，全年收入較之普通每週工資，增多百分之五十。類此性質之估計，已故立特路(Little)先生，曾為各郡自一八六

七年起至一八七〇年止，及一八九二年，完全算出。

冬日工資與夏日工資　尚有一問題：冬日工資一般均較夏日工資爲低乎?低幾何耶? 可由下列表式 —— 所用資料，乃爲前列諸表所未有 —— 解答之：

郡　別	平均每週工資				夏季工資較冬季爲多之農村數					
	夏　季		冬　季		並不多	多六便士	多一先令	多一先令半	多二先令	多二先令以上
腦富克	先令 11	便士 2	先令 10	便士 3	13	2	3	2	5	3
所包括村數之百分數					46	7	11	7	18	11
沙富克	10	2	9	8	24	0	6	1	2	1
所包括村數之百分數					70	0	18	3	6	3
愛塞克斯	10	9	9	10	22	0	11	0	5	4
所包括村數之百分數					52	0	26	0	12	10
東部各郡	10	6	9	11	59	2	20	3	12	8
所包括村數之百分數					57	2	19	3	12	8

（第十二表）

以上所舉各例，未足以盡表列此等數字之妙用，因未曾對於工資之分佈 —— 按高低不等之定率，給付工資之比較人數 —— 加以分析也。然此乃缺乏個人工資率之調查而僅有各村通行工

資率之故，可見此項調查結果，用作例證，以明表列之功用，實有未見完善之感。

第四節　美國工資統計之表列法

第二類表列　茲以工資分組，作爲第二種表列法之例證。現時吾人並無需要解答之特定疑問，與已討論甚多之方法相同，僅一較爲普遍之問題而已：已有一批資料，吾人須用之列成表式，以期表現有用消息之最高量。原始資料既有萬千，各自不相關涉，故須使之集中，表示特定之意義，並加以整理以爲將來比較之用。

用途不定之統計資料　有數種調查，舉行之目的，既不爲解答任何特定之疑問，亦非用爲研究某項問題之一助，僅爲收集消息而已，此項消息，雖無迫切之需用，然遇有懷有諸多疑難欲舉行調查者，則此項資料，恰能滿足其所需。工資調查，即屬此類。當吾人未能求得充分工資記載之時，工資調查雖爲社會團體測量最重要者之一，而所得消息，不堪應用，於是經濟學家與統計學家，覺以缺乏重要資料之故，工作常受阻撓，然工資調查，並無急切之實際用途，蓋既知其工資之高下，亦無助於吾人對工資數額有所管理也。故對於此種調查，吾人之目的，即在將數字加以分析，並將其分組與平均，以求任何用途皆可適用；吾人之工作

如此，則在進行之時，無形中將渡入一類完全不同之調查事業中矣；種類萬千之詳細節目下，吾人將查出其結構之何若矣；數字在驟觀之下，所呈之混亂，將亦發覺其並不背乎定律矣；此時吾人可以作成現諸文字之綱領，並對於顯然並無特定色彩之大批資料，亦查出其確定之形式矣。

關於此一問題之整個研究，乃屬下章範圍之內，惟表列法無須專門之技術，此時不妨開始討論之。以下所舉之例，概以關於工資者為主，惟列表方法，仍極為普通也。

組距之選擇　在美國『一八九一年批發價格，工資及運輸之報告』一文中，曾敍有數約千人之工資詳細情節。茲假設其為同質之羣類，而討論表列之方法。其表式如下：——

工資表式——美國數字，一八九一年

1. 每日工資 自此數起	不滿此數	2. 人數	3. 自此數起	不滿此數	4. 人數	5. 自此數起	不滿此數	6. 人數	7. 百分數	8. 各組平均工資	9.
	元			元			元				
.25	.35	1	.25	.45	16	.25	.75	317	6.2	.26非	.50
.35	.45	15									
.45	.55	59	.45	.65	144						
.55	.65	85									
.65	.75	157	.65	.85	270						
.75	.85	113				.75	1.25	1,472	28.7	1.09	1.00
.85	.95	169	.85	1.05	370						
.95	1.05	201									
1.05	1.15	304	1.05	1.25	989						
1.15	1.25	685									

1.25 1.35	99	1.25 1.45	557					
1.35 1.45	458							
1.45 1.55	466	1.45 1.65	538	1.25 1.75	1,297	25.3	1.49	1.50
1.55 1.65	72							
1.65 1.75	202	1.65 1.85	531					
1.75 1.85	329							
1.85 1.95	58	1.85 2.05	331	1.75 2.25	970	18.9	1.99	2.00
1.95 2.05	273							
2.05 2.15	45	2.05 2.25	310					
2.15 2.25	265							
2.25 2.35	33	2.25 2.45	134					
2.35 2.45	101							
2.45 2.55	196	2.45 2.65	209	2.25 2.75	506	9.9	2.53	2.50
2.55 2.65	13							
2.65 2.75	163	2.65 2.85	165					
2.75 2.85	2							
2.85 2.95	15	2.85 3.05	144	2.75 3.25	198	3.9	3.04	3.00
2.95 3.05	129							
3.05 3.15	5	3.05 3.25	52					
3.15 3.25	47							
3.25 3.35	12	3.25 3.45	12					
3.35 3.45	0							
3.45 3.55	221	3.45 3.65	226	3.25 3.75	254	5.0	3.51	3.50
3.55 3.65	5							
3.65 3.75	16	3.65 3.85	27					
3.75 3.85	11							
3.85 3.95	0	3.85 4.05	82	3.75 4.25	96	1.9	4.00	4.00
3.95 4.05	82							
1.05 4.15	0	4.05 4.25	3					
4.15 4.25	3							
4.25 4.35	0	4.25 4.45	0					
4.35 4.45	0							
4.45 4.55	3	4.45 4.65	4	4.25 4.75	4	0	4.50	4.50
4.55 4.65	1							
4.65 4.75	0	4.65 4.85	0					
4.75 4.85	0							
4.85 4.95	0	4.85 5.05	8	4.75 5.25	8	.2	5.00	5.00
4.95 5.05	8							
5.05 5.15	0	5.05 5.25	0					
5.15 5.25	0							
5.25 5.35	1	5.25 5.35	1	在5.35	1		5.35	5.25
總 計	5,123		5,123		5,123	100		
平均工資	$1.731					平均	工資	$1.70

（第十三表）

原來發表之件，工資尾數至五釐爲止；在上表之第二欄，賃

銀勞動者之人數，按一角爲一組，即自二角五分至三角四分，三角五分至四角四分，餘類推，至所賺工資恰在分界騎縫中間者，即視作下一組之數。惟須注意，二元一角五分至二元二角四分一組之平均工資，如賺工資者之人數，以分爲單位分組，必非爲二元二角，而爲二元一角五分，二元一角六……二元二角四分之平均數——即二元一角九分五釐。

試閱第二欄，數字並無次序，亦無一定之準則；結構如何，未能查出，可知分組過狹，資料不甚適用也。

現請將組距放寬，重將工人分組，即如第六欄所定，將人數按半元爲一組，乃可見人數順序似尚整齊，且隨第二欄之最高量而出現。返觀較小組距之分組，究竟用何等分組時，最初發現此種整齊性，則於第四欄以二角爲一組者，即已顯示，雖非絕對，卻亦甚爲可觀之有規則性矣。以三角爲一組者之人數，依次爲75，355，674，1242，740，660，343，310，180，181，233，32，82，3，4，8，1，除三元二角五分至三元五角五分一大組外，幾已全部呈現有規則形態矣。

至於擇用何種分組問題，須視各項項數可以一目瞭然爲定。一角爲一組之五十一組，或二角一組之二十六組，驟觀之下，只有數字一堆，意義已全失去（一切細目固可用圖式正當表明）；就中只有五角一組之十一組，頗易使人領會也。

上表第七欄之結果，以文字述之，乃為賃銀勞動者，工資自二角五分至七角四分，佔百分之六，自七角五分至一元二角四分，佔百分之二十九，其他以此類推。

實際製表法 由原始數字製成表格之實際工作，須用方格紙，順序於各欄之首，分列工資之組距，然後以每項工資之大小，於各該分欄內，劃一直線，隨手以五線或十線為一束以代加法。

依上文各節所論，可知由二角五分起至五元三角五分止，無須以一分為一組，而分列一欄記錄之，然為求得正確平均數起見，組距應分至何種細密程度，仍有略加考慮之必要。

設以一分為一組之各項如下

$1.70	$1.71	$1.72	$1.73	$1.74
11111 1	11111 11111 11111 11	11111 11111 111	11111 11111	11111

如此列入之工資，平均數可立時算出，乃為一元七角一分八釐。

然若吾人將此五十一項，定為『一元七角至一元七角四分』，或用較確實之語句言之『自一元七角而不及一元七角五分』，所有各項均為此組之中心點，換言之，即一元七角二分也。

如有項數甚多，則假設之平均數，與各組所算出之平均數，

二者必相差甚微。此於第十三表可以見之；第八欄所列爲一角一組各項算出之平均數，而第九欄爲基於一假定——爲平均計，半元各組之數，均作爲在各該組之中點——之平均數。第一及最末之相差爲最大。由第九欄所得之總平均數爲一元七角，卽爲對眞實平均一元七角三分之最近似整略數(round number)。故爲總分組及平均計，僅取半元爲一組之欄十一項卽可。

爲其他目的，不妨作更詳盡之分組；蓋於最低之一組，吾人欲知賺二角五分者有幾人，賺三角者有幾人，三角五分者有幾人，而五分對二角五分而言，其差甚顯而易見也。至在上端，用此法，亦可求知確切工資爲若干也。

高爾頓式(Galtonic)法　表列第二法，對於較詳細之項目，亦有其需要之處。設吾人將工人依其工資之數額排列之，一端爲二角五分，一端爲五元七角五分。則請注意橫行各點之工資，工資最低者爲二角五分；自此以往，十分之一處，第五百一十二個工人之工資，爲自八角五分至九角九分，……進至中途工資爲一元五角。每至十分之一之數字，列表於下。由此吾人對於依工資之分配，可以思過半矣。

此等數字，在按半元分組時，必難確實相合，惟在一角一組時乃可實現，故以一角爲分組之法，殊有採用之價值。吾人於此必須首先決定在何一小組中爲十分之一工人，十分之二工人……

十分之一工人之工資		平均工資	一千工人之同等數
工人工資	最低工資………………$.25	最低之十分之一…$.70	.79
	往上第十分之一組…… .89	第二之十分之一…1.03	1.00
	往上第十分之二組……1.12	第三之十分之一…1.18	1.24
	往上第十分之三組……1.22	第四之十分之一…1.28	1.50
	往上第十分之四組……1.39	第五之十分之一…1.44	1.50
	往上第十分之五組……1.49	第六之十分之一…1.59	1.86
	往上第十分之六組……1.75	第七之十分之一…1.86	2.00
	往上第十分之七組……1.99	第八之十分之一…2.14	2.22
	往上第十分之八組……2.36	第九之十分之一…2.59	2.58
	往上第十分之九組……2.98	最高之十分之一…3.51	3.55
	最高工資………………5.35	總平均數 1,731	1.82

(第十四表)

…所在，然後計算其在更小組之位置。例如設吾人欲求較『八角五分至九角五分』尙爲準確之數字，其程序如下：——自底端之第五百一十二人，爲八角五分至九角五分一組之第八十二人，因工資低於八角五分者，已有四百三十人，而本組共有一百六十九人，如人數分配果甚整齊，每一分各佔十七人，則第八十二人，卽在八角九分至九角一小組之中間。均勻分配之假定，在若干用途之下，頗有充分之正確性，而此法用於以十分之一地位決定工資，亦足供爲確實之工具。算出之結果數字，已列表於上。雖然，設吾人欲確知中間一人之工資，則由一元二角五分至一元七角五分

之半元一組中，可知其乃或在一元四角五分至一元五角五分之內，然後即速查原始之資料，將工資分隔爲一元四角六分，一元四角七分……乃至一元五角五分。(註一)

此法若略加變動，亦甚便利。取最低之五百一十二(或十分之一)，其平均數爲七角零五釐；次一十分之一，則爲一元零三分；其他以此類推(見第十四表)。觀此數字，亦頗足予吾人以深刻之印象，且用之以與他類相比較，亦極爲便利也。

以上所提之數字，只爲原來報告材料之一半。適纔所列之表，即係各級十分之一之平均工資。將如此得出之兩組加以比較，可以看出前半部足爲全部之代表。

第五節　工資調查之表列法

一八八六年之工資調查，以如下之款式，搜集得來之資料而列成之表格，可以用爲解釋各種困難之例證。

工　資　率(註二)

絲　織　業

一八八六年十月一日各區絲織業傭工平均工資率

第一區：——且舍爾，斯塔夫，腦次，戴爾具，及窩維克

一八八六年十月一日傭工總人數　一八八五年所付工資總數

見附表，　五，二七九人　　　　見附表，　一二九，五八八鎊

職位	僱工人數另詳報告	各職位上有報告之人數對全體有報告之人數之百分比	平均每週工資率		工資在平均上下不出十分之一之有報告人數	每週工資率之平均最高數		平均最高工資率所根據之人數	每週工資率之平均最低數		平均最低工資率所根據之人數
	男工 總數一〇八五					每週工作時間五六又二分之一					
絲線部			先令	便士		先令	便士		先令	便士	
監工員及執事員……時工	79	1.5	23	3	35	31	3	4	20	0	29
監工助理員……時工	9	.2	17	3	6	19	0	…	15	0	…
紡絲工人…時工	24	.5	11	9	15	13	0	5	9	3	4
搓絲工人 時工	109	2.1	17	7	68	20	11	18	14	0	3
搓絲工人 件工	9	.2	18	8	7	…		…	…		…

（第十五表）

此表格之大部，即在表明下列事象：

　　　　　　　　　　　人數　平均工資

紡絲工人——時工：　六　　十二先令　五十六小時半

工資調查所用之表列法　如此得來之報告，並非完全確定，因如同一職位同時僱用多人，則工人工資率有多寡不同之可能。即以六人之項而論，所列之十二先令，則有下列兩種途徑之可能：一為六人每人各賺十二先令，一為賺十先令者二人，十二先令者二人，十四先令者二人（平均恰為十二先令）；如不用平均數，而言一般工資率，則或為賺十二先令者四人，賺十五先令者一人，

賺十一先令者一人；或爲賺十二先令者五人，十八先令者一人。工資調查之目的，既在對工資爲綜合之研討，以備一切調查之採用，故各業之人數，僱工依年齡性別與區域之分組，各組工資之一般工資率及平均工資率，在在均須示明，且關於各組對平均數之分配，亦須詳細爲充分之敍述，否則僅一平均數，對於特高或特低工資之眞象，往往蒙蔽不見也。

關於原始資料是否較上述形式詳備，又特異之處是否可以遮蔽，經著者向勞工局查詢，查知職位之分組，實際計算上，在一標目之下，工人之工資，已有甚大之變動，故不如將標目分裂爲數個，將各組分別登列，否則即須在一標目之下，各組應行分列使易辨別；但由其他調查報告觀之，此層並未作到，幸尚有補充之調查，以補其不足，故原始資料，已甚爲詳盡，勿論列成何種精細之表式，均能措置裕如。

然則現在之問題，即須將一區域內各工廠之調查報告，列簡而明之表式，表示各組與全體之工資分配情形。由此觀之，第十五表例舉工資率調查表式樣，所用方法，謂之盡美盡善，實難令人置信也。

吾人爲求切實明瞭起見，玆假設關於搓絲工人（時工），所根據之詳細內容，係如下所列：

三人賺　十四先令…………『平均最低工資率』

十四人賺	十五先令	
六人賺	十五先令六便士	六十八人在全體平均數，即十七先令七便士，百分之十以內。
二十人賺	十六先令	
一十人賺	十七先令六便士	
二十人賺	十八先令	
八人賺	十八先令	
十人賺	十九先令	
十人賺	二十先令六便士	十八人平均賺二十先令十一便士
八人賺	二十一先令五便士	

各種應有之處置 列表時所用之程序，假設已將一小部賺工資遠較平均數爲低之老弱工人，由全部調查表中剔出，另列爲最低工資一類，同時並將特別優異之有技能工人提列爲最高工資一類。此種辦法，較之僅將各個工資之最高最低額標明，自爲佳妙，蓋最低最高二者，均可有特別之情形，以致付與他人之工資，相差甚遠也。至此等極端項之大小，仍以原來報告爲準。經此移提單列之後，所餘之工資，仍未必卽能密接成爲一類，如上例工資自十五先令起，至十九先令止，散佈仍甚廣。關於此種分配情況，可爲解決疑難之線索者，幸以工資在平均數十分之一以內者之人數尙有標明也；僅用一欄卽可標列，尙不失爲一最佳妙之途徑，惟十分之一，範圍仍嫌甚廣耳。此外尙有一法，亦可圈定一

範圍，在此範圍之內，凡工人人數十分之一之工資在平均數之上，及人數之十分之一在平均數以下者均包括之：即爲十六先令及十八先令是也。

雖然，設每一羣類佔用不及八欄，下列七則，即足供給較多之消息，且即用既得材料，已足應付一切，雖用途有所不同，亦可隨其需要，適當取材也。

所僱人數	一〇九
每週平均工資	一七先令七便士
工人十分之一人數所賺不過一五先令	
工人四分之一人數不過一六先令	
工人二分之一人數不過一八先令	
工人四分之一人數所得在一九先令以上	
工人十分之一人數所得在二十先令六便士以上	

此即爲一九〇六年工資調查結果發表之報告中所用之法，惟內中並無十分之幾之項而已。

一經讀畢本書第五章及第六章，讀者自然可以不用上文所用之詞句，而用中位數(median)四分位數(quartile)及百分位數(decile)等名詞，然後可以對於用一測量離散度方法，是否較之頃已提及之細節，較爲適用一問題，加以討論矣。

提要 以上所論之表列法，只爲其中之一種，舍此而外，並

非無他法可尋，例如一八八六年（註三）全般工業之工資，亦曾列製成表；該種所用之格式最適於比較用途，茲將原式列下：----

各級工資之僱工人數及百分數

下表示一八八六年十月各業僱工之每週平均工資，及各級工資上之人數及百分數。

		十先令以下	自十先令起在十五先令以下	十五先令起在二十先令以下	二十先令起在二十五先令以下	二十五先令起在三十先令以下	三十先令起在三十五先令以下	三十五先令起在四十先令以下	四十先令以上	總計	平均每人工資
棉織工業	人數	2	370	8,793	8,822	4,525	7,283	1,582	812	32,189	25 3
	百分數	...	1.2	27,3	27.4	14.1	22.6	4.9	2.5	100	
織呢工業	人數	...	146	3,377	5,559	1,725	705	392	344	12,248	23 2
	百分數	...	1.2	27.6	45.4	14.1	5.7	3.2	2.8	100	
織線及織品工業	人數	...	835	1,705	909	2,635	879	28	14	7,005	23 4
	百分數	...	11.9	24.3	13.0	37.6	12.6	0.4	0.2	100	
葛布工業	人數	192	780	2,952	2,070	416	290	39	68	6,807	19 9
	百分數	2.8	11.4	43.4	30.4	6.1	4.3	0.6	1.0	100	
黃蔴工業	人數	...	565	1,038	964	127	53	52	...	2,799	19 4
	百分數	...	20.2	37.1	34.4	4.5	1.9	1.9	...	100	
大蔴工業	人數	...	25	300	581	168	39	94	25	1,232	23 6
	百分數	...	2.0	24.4	47.2	13.6	3.2	7.6	2.0	100	
絲織工業	人數	...	324	881	367	278	121	273	4	2,248	22 3
	百分數	...	14.4	39.2	16.3	12.4	5.4	12.1	0.2	100	
毛毯工業	人數	...	...	130	183	834	100	15	30	1,292	26 7
	百分數	...	...	10.1	14.2	64.5	7.7	1.2	2.3	100	
織襪工業	人數	...	...	296	458	51	190	75	...	1,070	24 5
	百分數	...	...	27.7	42.8	4.8	17.7	7.0	...	100	

（第十六表）

列百分數之各行，應用之處極多。各種工業之工資水準如何，一望而知。例如，棉織工業之平均工資，較毛織工業，高出二先令；且棉織業中，程度甚高之有技能工人，賺工資自三十先令至三十五先令者極多，而毛織業工資接近平均數者幾佔全數之半，大約多在二十至二十五先令之間也。黃蔴及葛布工業中，其平均數大致相同，然前者則有賺十五先令以下者甚多。絲織業中，與棉織業同有其特殊階級，惟絲織業之高級工人人數既少，報酬又無棉織業之高，計工資在三十五先令以上者，只有百分之十二。由此觀之，此一表式，何等緊湊，何等清晰，謂之爲集中及明顯之傑作，誠非過言。

第六節　工資變動統計之表列法

工資變動數字之列表法　現請就英國勞工局所搜集與工資率之變動有關數字，討論其表列之方法。下舉一例係用舊日之報告，嗣後表式業已經過多番改革，吾人將其加以研究比較，然後查閱歷年報告案卷，必能獲益不少。據查，舊日之空白表格，所搜集之情節，包括有關工人之職位，及人數，發生變動之日期，及變動前後全時工作星期中之每週工資與工作時間，惟加工時間及工資（加工之意義，與工資調查所用相同）不計之。

——八九四年英國各區普通農村勞動者之工作時

間及工資率變動情形表（根據商業部所收到之報告製成者）摘錄（註四）

區域	夏日工資變動情形（一八九四與一八九三比較）		冬日工資變動情形（一八九四與一八九三比較）		一八九一年，農村勞動者，田莊常工，牧畜人，馬夫，騎士，御夫，駕車夫之人數
	增	減	增	減	
		每週	每週	每週	
林肯協爾					
根茲伯婁	…	…	…	1/6(15/至13/6)	2,466
老斯	…	…	…	1/6(13/6至12/)	3,932
斯皮爾斯拜	…	…	…	1/6(13/6至12/)	3,288
膦富克					
阿爾山姆	…	1/(12/至11/)	…	…	2,576
夫萊哥東區	…	6d.(12/6至12/)	1/(10/-11/)	…	2,487
西區	…	1/(12/至11/)	…	1/(11/至10/)	1,108
佛爾候	…	…	…	1/(11/至10/)	1,448

（第十七表甲）

根據英國商業部所收到報告製成之一八九五年夏英國各區普通農村勞動者工資率變動情形表摘錄（註五）

郡名	一八九一年農村勞動者，田莊常工，牧畜人，馬夫，騎士，御夫，駕車夫之人數	夏日工資變動情形（一八九五年與一八九四年比）	夏日每週工資率				
			一八九四		一八九五		
		每週	先令	便士	先令	便士	
得由漢姆							
斯他克頓	437	減六便士	17	6	17	0	

提斯得爾（把拿山寨鄉村區）	669	增六便士	17	6	18	0
牛津						
亥丁頓	1,118	減一先令	12	0	11	0
亨累	1,587	減一先令	12	0至	11	0至
（漢布爾頓鄉村區）			14	0	13	0
臘富克						
夫萊哥東西兩區	1,108	減一先令	11	0	10	0
佛爾候	1,448	減一先令	11	0	10	0
亨斯台得	1,504	減一先令	11	0	10	0
密堤佛與郎第斥	3,622	減一先令	11	0	10	0
斯毛爾白爾夫	2,264	減一先令	11	0	10	0
斯溫夫漢姆	1,942	減一先令	11	0	10	0
醜爾	1,535	減一先令	11	0	10	0
卡那文協爾 卡那文（歸賢鄉村區）	1,124＋	不供膳者增一先令	10	0	20	0
		供膳者增一先令	11	0	12	0

（第十七表乙）

農村工資變動之表列法　以上兩表，指示吾人第二及第三次工資率變動及工作時間報告中，對於農村工資之變更，製表方法之不同。第十六表甲中，爲『增』『減』各設專欄，以資識別，因而所佔地位甚多，用意原爲甚善，然『所謂一八九四年冬』，究竟係以冬季起耶，抑至冬季止耶，並未明白指示。

第十六表乙，僅言夏日工資一端，各欄排列亦大不相同；增減列於一欄，可以不同字體排印以別之。然至第五次報告中，內容愈形清楚矣，例如：

冬日工資（註六）

區域別	人數	每週工資率				一八九七年每週之增減			
		一八九六年正月		一八九七年正月		增		減	
		先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士
春道令	3,113	10	0	11	0	1	0	…	…

（第十七表丙）

此表係表示冬日之工資,至夏日工資之表列亦同。

所關人數 是項農村表格中之人數欄內,尙有缺點,殊爲美中不足。蓋所調査者如爲其他產業,則報告上之人數,必均爲確實有關者,而此處所報之數,欲求其正確無誤,勢乃有所不能;且在一八九一年之人數,乃指『農村勞動者』而言,然如上表所列,該欄包括各色人等甚雜,非全爲農村勞動者也。夫鄕村之工資一有變動,雖在減低工資時,遇有善良之僱主,未必一律施行,但吾人假定其必爲普遍現象,似並無不可,且在一星期內,工資之變動,雖未必普及於全區,但在此方面大半似不致有甚大之出入。蓋工資更動之時,多在冬季工資改爲夏季工資,或夏季工資改爲冬季工資之際;工資之增減,不必有形式之舉動,應減爲冬季工資,或增爲夏季工資之時,略行拖延數日,則事實上工資已有輕微之增減矣。就一般而言,如認爲每一變動卽足影響全區內所有之成年農村勞動者,自不免產生少許之錯誤,且除工資較普通爲低之老弱工人,情形容有不同外,其他若馬夫若牧人等等之工資,只有依比例之變動,亦大有可能。(註七)調査表格上有『本區強壯勞工之約略數』一問題,惟答案既無所用,所報告之數,謂其不甚確正,似可爲斷言也。

資料之缺乏 全部表式之目的,在示明全國每週工資之變動,惟以缺乏若干詳細事項之故,致不能作全部之計算。卽以農

村勞動者而論，吾人所需要之資料，除上文所論等項外，尙有額外收入，特別報酬及實物償付數端之變動報告。就全般情形而言，全部工資及變動情形之報告，均應不厭求詳。至關於農村勞動者之資料，英國勞工局年有發表；四季工資，有無變動情形，工會團體六百家中，按年多有報告呈交該局也。

各郡工資率之變動　關於人數一項，調查表格塡答雖欠精確，但此於各郡各鄉工資率變動之計算，並無妨礙，蓋每一區域受工資變動影響之人數，其對於人口普查所報告之人數，所成之比例，必與全郡或全鄉同類農業勞工之人數，對於人口普查所報告之人數比例同。故吾人可藉下章所論加權平均數之原則以解決之。

玆計算第十七表乙得由漢姆一郡一八九四至九五年，夏季工資之變動情形，如下所列：

	變動前之平均數	變　動	受影響者之比例數	工資單上變動之總金額
	先令　便士			先令一　便士
斯他克頓	一七　六	減六便士	四	共減二
提斯得爾	一七　六	增六便士	七	共增三　六

（第十七表丁）

全郡變動總計，增一先令六便士

佔全郡之比例數，73.

$$對於全郡平均數之影響，\frac{1/6}{73}=\frac{1}{4}便士。$$

茲爲計算簡便起見，受影響之人數，以百人爲準，如此計算，對平均數，不致發生顯而易見之影響。此一簡略方法，只能就原始資料之可能，得出相當確實之得數。將此方法，適當加以修改，即可用以計算其他產業之工資變動。現先將各郡農村工資變動調查結果，總括列表於下：

英格蘭及威爾士數區，一八九六及一八九五年

所付每週現金工資變動純淨效果之比較（註八）

區域別	一八九六年工資與一八九五年者之比較				一八九五年工資與一八九四年者之比較		
	* 總數	工資變動對每週工資之純淨效果 增(十) 減(—)			總數	工資變動對每週工資之純淨效果 增(十) 減(—)	
		總額	每人			總額	每人
英格蘭		金鎊	先令	便士		金鎊	便士
北部各郡	5,662	−43	−0	$1\frac{3}{4}$	3,766	+44	$+2\frac{3}{4}$
約克協爾，蘭加協爾及奇協爾	2,897	+100	+0	$8\frac{1}{4}$	3,942	−126	$-7\frac{3}{4}$
東部中部各郡	69,869	+666	+0	$8\frac{1}{4}$	89,576	−2,045	$-5\frac{1}{2}$
南部西部各郡	20,901	−340	−0	4	20,441	−575	$-6\frac{3}{4}$
威爾士	…	…		…	2,165	+73	$+8\frac{1}{4}$
總計	99,329	+383	+0	1	119,890	−2,629	$-5\frac{1}{4}$

* 此數即在一八九一年，各恤貧聯合區（Poor-Law-Union）之男性農村勞動者，田莊常工、牧人、馬夫之總數。

（第十七表戊）

〔對總括表之批評〕上列之總括表，其價値若何，並不顯然。用之可以查知，在一八九六年，增加工資者有五萬八千五百七十八人，減少工資者有四萬零七百五十一人，固不無些須價値，然受工資變動者之總數，並無從表現之必要。表中，恆列有受影響者之總數；設有一人在某一月中增加工資一先令，而在下月又被減去，則此人卽作爲二人計算，惟其對於下一欄（工資變動之純粹效果）之影響則爲零。此一『減四十五鎊』所含意義，可謂爲每人各減一先令者二千人，每人各增三又四分之三便士者三千六百六十二人（同屬一人或不同屬一人），亦可謂爲其他任何之數字，凡足以拼成同一總數者，均有成立之可能。第二欄之每人之變動量，僅爲一算術商數，並無可以形諸文字之具體意義，絕無重要價値可言。但如另以別一商數 $\frac{£43}{n}$ —— n 爲北部各郡農村勞動者之人數——取而代之，則吾人可以查見對於平均工資之效果矣。故在實際上，欲求表列用途較大，應從下式：——

區　名	增		減		變動淨數	僱工總人數	變動平均量
	有關之人數	增加總額	有關之人數	減少總額			

（第十七表已）

如用前表所列之數字，乃又蹈原以錯誤數目作成之計算而又加詳細推算之通常覆轍，玆者，僱工總人數，即爲本已有誤之一端，故如據以演算，必致通盤謬誤也。但在未用平均數前，僱工總人數雖有差誤，尙不致發生有害之後果。如上所述，此處所舉之平均數，可以其他有用之數相代，而此另一數如在限定範圍之內尙可不致錯誤，且足供大多數用途之需也。

抑有進者，有關人數一欄，旣有謬誤，則人數當以千人爲準，不能以一單位論，故與其謂『一八九一年五千六百六十二人屬於一類，而與一八九六年之人數，有鬆弛之連帶關係』，無寧僅言『有關人數五千至六千』之爲有用而正確也。

自英國農村施行最低工資制以來，全部問題已大經修改而單簡多多矣。雖然，上文之研究，仍用表列方法，以適應難辦且不全之資料，兼以敍述約二十年來，英國一般工資變動之記錄，官方辦理之情形也。

以上表列之第一類及第二類均已論及，至第三類非爲數字之答案製表方法，此時尙難討論，須俟將平均數之用途及性質加以研究之後，方能着手也。

（註一） 關於此法，參閱第五章第五節中位數。

（註二） 見『小紡織工業之工資』。

（註三） 詳見一九〇六年工資調查報告。

（註四）　節錄於第二次『工資變動年報』。

（註五）　節錄第三次『工資變動年報』。

（註六）　節錄第五次『工資變動年報』。

（註七）　關於此點，請參閱發克斯(Wilson Fox)氏『農村勞動者之工資報告』一九〇〇年出版。

（註八）　見英國第四次『工資變動年報』。

第五章　平均數

本書為專研究統計學之書，對於平均數 (average)，自當予以充分之地位。蓋惟用平均數，複雜之羣類(group) 及極大之數目，用一二有效文字或數字即可表現之；且惟有平均數也，統計學之二種定義——平均數學(Science of Averages) 及大數學 (Science of Large Numbers)——乃可符合一致矣。

平均數與均數　有若干著作家企圖劃清平均數 (average) 與均數(mean)之限界，惟二名詞分途應用之確切意義，迄未得有共同之結論(註一)。依吾人之意，最善之區別，莫過於將平均數定為純為算術上之概念，例如言變動人口中之平均壽長(average length of life) 並非指某一特定羣類，不過為一算術得數之簡便表明方法而已；至於均數，則於解釋物體數量 (objective quantity)時用之，例如言英國人之身長均數，乃表示一種數量，一切關於身長之量數，均將以之為確定之分類標準也。如援用此種術語，則下文所論之第一節第二節第三節，大半均屬平均數一類，而第四第五第六等節則為均數也。

第一節　算術平均數

平均數一詞通俗之用法，本可勿須多論，惟通常用語中，亦有統計學中常用者，茲擇要討論之。第一、平均數有僅為避免極大數目而用之者。例如，一校之學生平均體重，據云為一百七十五磅，所以不言十人之體重，共為一千七百五十磅者，以前者較為習用，且易使人聯想及於一般之人體重量也。同理，設吾人欲比較十年一期兩期中數種出口商品之價值，必須言在一八七〇至一八七九年一期中，每年平均數為一千萬金鎊，一八八〇至一八八九一期中。每年平均數為一千一百萬金鎊，而不云總額為一萬萬金鎊對一萬一千萬金鎊也。

公分母 由此所論，乃引起普通之第二種用法。設吾人欲比較一八七〇至一八七九之十年，與一八八〇至一八九〇之十一年。並設前者一期總數為一萬萬金鎊，後者一期總數為一萬三千二百萬金鎊，在此情形之下，苟非用年數除之，化為公分母，並求出二期之平均數，一為一千一百萬金鎊，一為一千二百萬金鎊，則二期之差別，必不得而知。此種之平均數，在板球戲 (cricket) 中應用最廣，盤數 (run) 及輪值數 (wicket) 之總數，雖有時亦有記錄，惟此乃統計上之奇玩，(curiosity) 對於球員之技巧及運氣，並無作用也。至各季舉行比賽時，用以評判優劣者，為進門數 (inning) 除盤數之商數，盤數除輪值數之商數，以及其他等等；如是則所有數量均化為公分母矣，如此含義之平均數，在機械學

上應用之處極多。例如每方吋之平均壓力，一引擎每分鐘所作平均工作量，一列火車之平均速度，均爲常見之數量。至所謂平均利率(average rate of interest)之用法，與此則完全相同也。

平均數與百分率　百分數者即平均數之一特别用法也。比較人口或貿易之發展時，僅列其全數，毫無用處可言。以倫敦之人口而有五萬人之增加，實不如以一叢爾哈羅(Harrow)小村，增加一千爲有意義；欲求其命意令人能以領會，則非以增加之百分數說明，謂一則增加百分之一，一則增加百分之六十不可，如此說明意卽表示每百人中平均增加若干也。基於此種理由，出生數，死亡數，及結婚數，均以百分率或千分率表示之，意卽每千人中各有若干也；且在此種情形之下，乃有雙重平均計算之情形，如言每年每千人中之若干是也。

將此用法，擴而充之，又有人口中每人各有若干之說，是則將數量變爲每人之比率也。此乃完全爲比較之用，其所依據之原理，與公分母相同。如論英國飲酒每年消耗金額，在一八六〇年爲一萬萬金鎊，在一八九〇年爲一萬一千萬金鎊，出言何等乏味；今言一八六〇年每人耗金三鎊半，至一八九〇年時，則每人耗金二鎊又十五先令，於是可以作比較觀矣。但用此類平均數，不可失之於濫，在預備總結比較數字時，是否有採用此種平均之必要，必須有充分之考慮也。

定義 由此觀之，平均數乃純屬算術性質，其定義如何，可由下式表示之：——

平均數×個數＝所關數量總數，

例如，平均體重×人數＝全體人數之總體重

定義之不能適用 雖然，此定義未必即可完全適用，試解下一問題，可知其詳。一八九二年，英國西南部威爾次、道塞特、戴温、康恩華爾、及梭梅塞特五地方之平均每週工資，分別爲十先令，十先令，十三先令六便士，十四先令，十一先令。然則英國西南部之平均數如何？

最簡單之答覆，平均數爲

$$\frac{10\text{先令}+10\text{先令}+13\text{先令}6\text{便士}+14\text{先令}+11\text{先令}}{}$$

$$=\frac{58\text{先令}6\text{便士}}{5}=11\text{先令}8.4\text{便士}。$$

此一答數，已足爲許多用途之需，惟與上列定義，則不能適合耳。何則？蓋『十一先令八.四便士被何數乘？將得何數？』之問題，只有以『十一先令八.四便士用項數乘之，即等於各項數目之和』一語答復之一途也。

請更進而研究『一部之平均工資』，及『五郡平均工資』之意義。

假設威爾次之平均工資，係由各鄉村之報告編製而成，今各村之工資，爲十二先令，十一先令，九先令，九先令六便士，九先

令，九先令，如將各數相加，然後以村數除之，固可得平均工資矣。然如仍不能適合上列之定義何？且也每村之平均工資爲何？使其能滿足定義上之條件，則所謂各村平均工資者，必爲各該村所付工資之總數，而被工人數除之也。惟事實上，舉行調查時，此一總數，根本無從覓得，有之，乃由觀察或藉猜想而得，非由計算而來也。

每村之平均工資之正確與否，姑置不論，即使其爲正確無誤，且各村報告之人數，亦已查明，則一郡之平均工資，當如下式所列：

$$\frac{12\text{先令}\times200+11\text{先令}\times150+9\text{先令}\times300+9.5\text{先令}\times150}{200+150+300+}$$

$$\frac{+10.5\text{先令}\times400+9\text{先令}\times200+9\text{先令}\times200}{150+400+200+200}=9\text{先令}11.8$$

便士

式中，分母各數爲各村之勞動者人數。如此演算，與假設已知全郡所有工人之工資，一一相加，然後以全人數除之，所得之結果完全相同，且所求得之平均數，與上文之定義，亦能適合也。

此中算術工作，可以化簡，理至顯然，蓋如將人數各以 50 除之，得數仍不變；猶之各村勞動者，分別有四，三，六……人不等，不必言其有200，150，……也。斯時，只取各村人數對總數之比例即可，不用實在人數，而得數可相同。此一計劃之優點有二：第一

吾人欲查知勞動者之人數雖不可能，惟欲求其近似之比例數則未爲不可，直言之，人口普查報告關於農業之標目下，可供給之也；第二，查數字原亦無須絕對之準確；例如上文所提之各村工人數，無妨視爲替代213，145，320……之整略數(round numbers)；諸數雖小有相差，然與平均數並無妨礙，理至淺顯，不待言也。總而言之，將各村之人數，權作爲整略數；然後爲求數字計算上簡便起見，各以與此整略數成比例之簡單數字代之。

依此方法得出之平均數，與所舉之定義，未能絕對適合，惟與能滿足條件者之相差，實爲無幾。由此觀之，根據同一原理，英國西南各郡之平均數，不難求得矣。

分組之資料 有一極普通之情形，資料分成若干組(grade)，每組各有若干次數（instances），如下列之表，第一，第三兩欄即是。在此情形之下，欲求其算術平均數，必須對於各組內次數之分配情形，設立某種之假定。在平常情形下——尤以兩極端(extremity)之數漸趨減少之時爲甚——假設各組之數目，均集中於各該組之中心，以便計算平均數，頗能求得極高之確度(degree of accuracy)；就實際言之，各組之平均數，與其謂之接近各該組之中點，毋寧謂之更接近於全類之中心，惟全類中心上下兩邊，各有相當之差誤(error)，恰可互相對銷。爲求工作手續簡便起見，可以組距(breadth of the grade)——下表之組距爲五

年——作單位，然後擇項數最繁之一組（40–45年一組，中心點為 $42\frac{1}{2}$，見下表）中心為原點以測量之。由此原點（以總件數除第四欄之總數即得）之平均距離，即以單位表示平均數距原點之距離，由此單位，平均數可立即用原來單位算出也。

一九一一年英格蘭威爾士已婚男子之年齡

年齡分組	以 $42\frac{1}{2}$ 歲為原點起算之各組中心點，單位為5歲	一千人中之已婚男子數	(2)與(3)之乘積	累計數	
				年齡組限	第五欄人數累計
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
15–20	–5	0	0	15	1,000
20–25	–4	33	–132	20	1,000
25–30	–3	112	–336	25	967
30–35	–2	152	–304	30	855
35–40	–1	154	–154	35	703
40–45	0	136	0	40	549
45–50	1	118	118	45	413
50–55	2	96	192	50	295
55–60	3	74	222	55	199
60–65	4	54	216	60	125
65–70	5	37	185	65	71
70–75	6	21	126	70	34
75–80	7	9	63	75	13
80–85	8	3	24	80	4
85–90	9	1	9	85	1
90–95	10	0	0	90	0
		1,000	+1,155 –926		
			229		

（第十八表）

$$平均數:42\tfrac{1}{2}+\frac{229}{1000}\times 5=43.645歲。$$

第二節 加權平均數

此項討論,已例示一極爲重要之統計方法,此卽所謂『加權平均』(weighting the average) 者是。玆請更進一步,仍用例釋方法,藉用原來數字,討論英國西南各郡之平均數,應加以何等之權數。旣知各郡之農村勞動者人數,乃可求出其平均數如下

$\frac{10\text{先令}\times 20,000+10\text{先令}\times 30,000+\cdots}{20,000+30,000+\cdots}$;然吾人旣無從得知勞動者之確數,只有根據某種觀點,依照各郡地位之輕重,妥爲規定權數 (weight),如 20,000,30,000……是。至代表此種數量之數,作爲小麥收穫量可,作爲面積亦可,卽作爲人口增加率亦無不可。在此特別情形之下,方法或有謬誤,但其他問題所用,權數之意義,尙無如此明顯。例如,設吾人討論倫敦對四鄉居民之引誘力一問題,並設已知自愛塞克斯,臘富克,沙富克,移居倫敦者有若干,自斯他福特及華塞斯特移來者有若干,於是卽根據此種數字,比較對於農業區與對於工業區,以査引誘力究對何處爲大。然則吾人將用何者爲權數;以有關各郡之居民總數耶,用各該郡距倫敦之距離耶,抑用另由此種數量推出之其他數字耶?

機械學上之例釋 欲求明瞭,宜自研究『權衡』(weight) 字義始。設有一無重 (weig' tless) 之直桿,桿上分爲一百等分,

自一端起依次分在第四十，第五十，第六十，第七十，及第八十等分上，懸一等重之物；則此桿將在相當於不加權平均數（unweighted average）之點上，現平衡之象，此點即爲第六十等距（interval）。復次，設不用等重之物，而分用七，一，三，四磅之重量，則此桿呈現平衡之點，乃爲加權平均數（weighted average）即第五七•一等距之處也。該項物體移置愈遠，或位置不變，而物體重量變多，則重心（center of gravity）亦必隨之推遠；此即統計問題上各級工資應行加權之理由，乃昭然若揭，不待贅述者也。至靜力學（Statics）上所用之公式，$\bar{x}=\frac{Smx}{Sm}$，與上文所述之算術問題相同，統計學上亦多應用之處焉。

加權之效果並非甚巨　無論上文所論之平均數，抑或其他各種平均數，其所用之加權，在已往之統計論著中，已有極多之討論，實則其所佔篇幅與其重要極不相稱，蓋權數之選擇，並無若何之重要性。統計原理上有一極簡便之事實，即：苟合於某種條件，則不論所採權數爲何，所得結果，必能大致相同。故此假設之數理的研究，可姑置不論，惟對數項代數公式及演算步驟，則頗可論列於下也。

設以$W_1, W_2 \cdots\cdots W_n$爲$M_1, M_2 \cdots\cdots M_n$共有$n$個數量之權數。

則加權平均數爲 $M_w=\frac{W_1M_1+W_2M_2+\cdots}{W_1+W_2+\cdots}$

以$\bar{m}$爲M各數量之平均數，並以 $M_1=\bar{m}+m_1 M_2=\bar{m}+m_2$，

則 $n\bar{m}=M_1+M_2+\cdots\cdots=n\bar{m}+m_1+m_2+\cdots\cdots$，故$m_1+m_2+\cdots\cdots=0$

同理，如以w爲W各數量之平均數，又$W_1=\bar{w}+w_1$，……餘類推，$n\bar{w}=W_1+W_2+\cdots\cdots$且$w_1+w_2+\cdots\cdots=0$

於是 $(W_1+W_2+\cdots\cdots)M_w=(\bar{w}+w_1)(\bar{m}+m_1)+(\bar{w}+w_2)(\bar{m}+m_2)+\cdots\cdots$,

$\therefore n\bar{w}\cdot M_w=n\bar{w}\bar{m}+\bar{m}(w_1+w_2+\cdots\cdots)+\bar{w}(m_1+m_2+\cdots\cdots)+w_1m_1+w_2m_2+\cdots\cdots$,

$$\therefore M_w-\bar{m}=\frac{1}{n}\left\{\frac{w_1}{\bar{w}}m_1+\frac{w_2}{\bar{w}}m_2+\cdots\cdots\right\}。$$

故加權平均數 (M_w)，與不加權平均數 ($\bar{m}$) 之差額，乃視諸如$\frac{w_1}{\bar{w}}\cdot m_1$等各項之平均數而定。$w$各數量之和爲零，$m$各數量之和亦爲零，$w$ 各數之中若干爲正數，若干爲負數，m 各數亦然。m及 w 兩種數量，同號較異號出現多時，則 M_w與 $\bar{m}$之差額必甚大。

次頁所列關於工資調查之表格中，$\bar{m}$爲二四先令二便士，M_w＝二四先令七便士，$n=38$，$\bar{w}=96^{00}$，茲將權數取至一百爲準，工資至便士爲準，則求得各數值如下，各業仍依次頁表格之次序排列之：

w.	m.	wm.	w.	m.	wm.
+226	+13	+2,938	+431	+ 41	+17,671
+26	−12	− 312	+147	− 41	− 6,027
−26	−10	+ 260	+184	+ 36	+ 6,624
−28	−53	+1,484	− 44	+ 7	− 308
−68	−58	+3,944	− 34	+ 4	− 136
−84	− 8	+ 672	+321	+ 19	+ 6,099
−74	−23	+1,702	+ 11	+ 61	+ 671
−83	+29	−2,407	+ 19	+ 11	+ 2,109
−85	+ 3	− 255	− 75	+ 1	− 75
−90	+37	−3,330	− 78	+ 65	− 5,070
−69	−48	+3,312	− 91	+ 50	− 4,550
−93	−36	+3,348	− 93	+ 75	− 6,975
+578	−15	−8,670	− 79	+ 28	− 2,212
−46	−90	+4,140	− 67	+ 1	− 67
−66	−10	− 660	− 12	+ 1	− 12
−27	−25	+ 675	− 78	− 46	+ 3,588
−73	−27	+1,971	− 64	− 16	+ 1,024
−56	− 4	+ 224	− 85	− 14	+ 1,190
−91	−66	+6,006	− 74	+ 12	− 888

二十一個正號乘積之和：+69,652。

十七個負號乘積之和：−41,954。

三十八個乘積之和：17,698 $= w_1m_1 + \cdots\cdots$

$$M_w = \bar{m} + \frac{1}{n\bar{w}} \times 17,698$$

$= 24$先令2便士$+ \dfrac{17,698}{38 \times 96}$便士

$= 24$先令6.8便士

$= 24$先令7便士（依上表之例，工資取至便士爲準）

工資調查上之例證　次頁所列之表格，可用爲解釋上述原

加權方法不同而平均數變動甚小之例證

根據一八八六年工資調查之資料 業別	平均工資（男工） 先令	 便士	調查得來之人數	人口普查所示各業僱用之人數	武斷規定之權數	均等權數
紡織業	25	3	32,189	142	144	1
織呢業	23	2	12,248	54	172	1
毛綫業	23	4	7,005	58	210	1
製葛業	19	9	6,807	22	96	1
黃蔴製品業	19	4	2,799	9	23	1
大蔴製品業	23	6	1,232	3	78	1
絲織業	22	3	2,248	10	189	1
毛毯業	26	7	1,292	0	215	1
織襪業	24	5	1,070	8	287	1
花邊業	27	3	593	8	51	1
帑屋用品業	20	2	2,734	0	225	1
鬃毛業	21	2	330	2	200	1
煤鐵礦	22	11	67,429	57	142	1
金屬礦	16	6	5,046	0	190	1
泥板石礦及石蠟油業	25	0	3,021	0	267	1
石板礦	22	1	6,933	} 12	232	1
花崗石礦及製造業	21	11	2,315		206	1
石版業	23	10	3,956		34	1
瓷器業	18	8	499	0	39	1
警察	27	7	52,682	58	224	1
築路及溝渠	20	9	24,276	0	29	1
煤氣事業	27	2	27,965	0	40	1
自來水業	24	9	5,187	0	151	1
銑鐵（冶鐵廠）	24	6	6,234	0	128	1
鋼鐵鑄造及機器工程業	25	9	41,658	200	173	1
鋼鐵造船業	29	3	10,661	80	228	1
錫器製造業	33	5	11,514	0	178	1
木板業	24	3	2,088	0	174	1
銅器五金業	29	7	1,838	0	222	1
木質造船業	28	4	454	0	79	1
木桶製造業	30	5	327	0	165	1
車輛製造業	26	6	1,664	0	28	1
靴鞋製造業	24	3	2,902	0	142	1
釀酒業	24	3	8,366	0	46	1
蒸餾業	20	4	1,795	0	129	1
磚瓦製造業	22	10	3,188	0	55	1
化學肥料業	23	0	1,054	0	210	1
火車車輛製造業	25	2	2,230	0	233	1
平均數	先令便士		先令便士	先令便士	先令便士	先令便士
	…		24　7	25　3	24　5¼	24　2

（第十九表）

理之例證（註二），頗有詳細研究之價值。着手舉行工資調查之時，先須散發調查表格，凡位址適中之大廠家，均向之作關於工資詳細情節之調查。發出之表格，未必全能收回，故最後作成之報告上，所列之廠數，並非全國各業實有之全數，反之，不過僅爲有表格寄回之數家而已。是以所得之平均數，並非依據前述之平均數定義，而得出之全國各業之算術平均數，反之，乃爲有表格塡畢寄回之各業平均工資以各該業人數爲權數之平均數而已；然則假如各業塡報表格如數寄回，茲以不完全之資料所算出之平均數，必與所有各業之實在工資平均數，多少有所不同。然就以往之經驗論之，二者相差，並非大相懸殊。下列之表，採用數種加權方法；第一欄爲用調查表格上所列之數作爲權數，得平均數爲二十四先令七便士；第二欄爲根據人口普查用超過某種最低限度以上所求得之各業之數爲權數，其平均數爲二十五先令三便士；第三欄之權數，乃用武斷方法規定者，數字之來源，與工資並無關聯可言，其平均數爲二十四先令五又四分之一便士；最末一欄，爲不加權之平均數，亦即權數相同之平均數，其平均數得二十四先令二便士。凡此種種明示吾人，雖原來數字，低自十六先令六便士，高至三十先令五便士，變動甚大，而平均數則結果甚近，眞實權數如何，此處雖未指明，惟因此故，吾人置之不問可也。

各種加權制度下平均數始終一致　下列一表，所討論之問

題，在以英格蘭及威爾士於一八六九年九月二十九日密凱爾(Michael)聖誕節，及一八七〇年婦女節所舉行之調查，求出農村平均每週工資，此二年之數字，分列於第一二欄者卽是。此項平均數得出之方法甚多，茲擇要述之於下：先求出各郡之夏秋兩季之平均數，列於第三欄，然後計算四十五個數之平均數，而得十二先令七便士。次須假設付出夏季工資之時間，當秋季工資施行日期之二倍，列於第四欄。然後依上項程序求其平均數，得知爲十二先令五又二分之一便士；二數有少許之差額，乃因密凱爾聖誕節日之調查，已包括秋收犒賞在內，故全數較夏日工資爲高也。再次，將各郡依地理順序分爲數組，求各組之簡單平均數(Simple average) ——第三欄之數字標註 a 字，第四欄標 b 字——然後用第五欄標有 c 字之數，卽各組之農村勞動者人數，將其加權；乃知 a 列數字用 c 列爲權數時平均數爲十二先令五便士，b 列數字用 c 列爲權數時平均數爲十二先令四先令。復次，用第五欄爲權數，乘第四欄之各郡工資數。乃爲最淺近之方法，得平均數爲十二先令四便士。更次求各區平均數（a 與 b）之簡單平均數，換言之，卽將此八區各加以均等之權數，則得平均數 a 爲十二先令四又四分之三便士，b 爲十二先令三又四分之一便士。否則以約克協爾及威爾士各作一郡論，計算第三欄之簡單平均數，卽十二先令八便士是也。

一八六九至一八七〇年之農村工資——各種加權方法及其結果之例證

	1. 一八六九年密凱爾聖誕節		2. 一八七〇年婦女節		3. 第一，二兩欄之平均		4. 以第二欄作第一欄之兩倍，然後平均之		5. 各郡農村勞動者人數以千人爲單位	6. 各組地方之人口全數以千萬人爲單位
	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令便士	先令便士
蘇塞克斯	12	3	12	0	12	1½	12	1	34	…
四瑞	14	0	13	6	13	9	13	8	16	…
肯特	14	6	14	0	14	3	14	2	44	…
韓次	11	0	10	6	10	9	10	8	32	…
布爾克斯	12	0	10	0	11	0	10	8	22	…
平均數	…		…		a 12	4½	b 12	3	c 148	d 22
何爾次	14	7	11	10	13	2½	12	9	20	…
臘贊次	12	6	11	6	12	0	11	10	23	…
亨次	16	0	11	0	13	6	12	8	9	…
拜得福特	13	0	12	0	12	6	12	4	17	…
劍橋	11	0	12	0	11	6	11	8	24	…
平均數	…		…		a 12	6	b 12	3	c 93	d 14
愛塞克斯	12	6	11	0	11	9	11	6	45	…
蘇富克	10	6	11	0	10	9	10	10	41	…
臘富克	11	6	11	6	11	6	11	6	44	…
平均數	…		…		a 11	4	b 11	3	c 130	d 12
威爾次	11	0	10	3	10	7½	10	6	26	…
道塞特	9	6	10	3	9	10½	10	0	17	…
得旺	10	0	10	3	10	1½	10	2	34	…
考恩華爾	11	0	11	0	11	0	11	0	17	…
索模塞特	11	0	10	6	10	0	10	8	31	…
平均數	…		…		a 10	6	b 10	6	c 125	d 19
斯他福特	13	0	13	0	13	0	13	0	19	…
哥老色斯特	11	9	10	9	11	3	11	1	22	…
西爾福特	10	3	10	0	10	1½	11	1	12	…
沙拉堡	11	0	11	6	11	3	11	4	21	…
華而色斯特	13	6	11	0	12	3	11	6	15	…
華維克	15	6	12	0	12	9	12	6	20	…
平均數	…		…		a 11	9	b 11	7	c 109	d 27

雷色斯特	14	0	13	0	13	6	13	4	15	…
如特蘭	12	6	12	0	12	3	12	2	3	…
林肯	14	0	13	6	13	9	13	8	49	…
腦次	13	6	13	0	13	3	13	2	16	…
得爾拜	13	6	14	0	13	9	13	10	8	…
平均數	…		…		*a* 13	3½	*b* 13	3	*c* 91	*d* 14
茄協爾	13	6	13	6	13	6	13	6	18	…
蘭斯	15	0	15	0	15	0	15	0	30	…
約克北區	19	0	15	3	17	1½	16	6	30	…
約克西區	17	4	13	6	15	5	14	9½	16	…
得由漢姆	16	6	16	0	16	3	16	2	8	…
腦贊倍蘭	19	6	16	6	18	0	17	6	12	…
可倍蘭	15	0	15	0	15	0	15	0	10	…
外斯他摩閩	16	3	15	6	15	10½	15	9	3	…
平均數	…		…		*a* 15	9	*b* 15	6	*c* 127	*d* 72
邱毛斯	12	6	13	9	13	1½	13	4	6	…
哥拉摩根	14	6	14	6	14	6	14	6	5	…
可兒馬賛	12	4	11	6	11	11	11	9½	4	…
排姆布老克	11	0	10	0	10	6	10	4	4	…
加地幹	9	0	8	6	8	9	8	8	5	…
布來克腦克	12	0	12	0	12	0	12	0	4	…
來得腦爾	10	0	10	0	10	0	10	0	2	…
加那文	12	0	12	0	12	0	12	0	5	…
平均數	…		…		*a* 11	7	*b* 11	7	*c* 35	*d* 14

（第二十表）

除此之外，如欲另組成新羣類，可不用農村勞動者之人數，而用各區之總人口——即標有d字之數——作權數。但倫敦人口數字龐大且與農村無關，應除去之。惟討論至此，乃又有一新因素發生，緣工業區之人口最大，而內中之農村勞動者，雖不佔重要之地位，但工資則甚高；有此高度之工資，以最多之人口加權，於是以d數爲權數之b數平均數，乃達十三先令一又四分之三便士之多，可見此項加權，頗有不當之處。次將第四欄之數改正近至

一先令爲準,而將第五欄之數,以一萬人爲單位,則加權平均數,必爲十二先令五便士。復次,假如將第三欄之數,以任意抽來與本題無關之數作權數,質言之,即用對數表中,自二起至四十六止,第三位小數加權,則加權平均數,乃得十二先令十又四分之三便士。讀者亦可試用任何權數,勿論合理與背理,除非選擇權數時先有偏見,或對於少數之郡區,特別加重,否則所得之平均數,並無甚大之影響也。

然則眞實權數,凡得出之平均數,能適合前述之定義者,必與前此所採用者,相去無幾,且用其所得之平均數,即使與十二先令四便士相差,亦不致比現時所用者爲更遠,故眞實平均數(true average),與此數相差,不致超出三便士之外,必無可疑。原始各項之全距,既低自八先令六便士起,高至十九先令止,雖用極端離奇之方法,平均數亦必不致出乎十二先令至十三先令一又四分之三便士限界之外。

權數尙難取消,惟計算權數時之差誤,則可不計　上文討論雖感過繁,然若無如此之論辯,因加權乖錯而生之差誤,大小若何,必無從注意及之。雖然,關於加權問題,基於以上之觀察,未及考查羣項之性質,但經用各種加權方法之後,算得之平均數,視之並無變動,因而即謂權數可以取消,竟採用不加權之平均數,斯亦未免失之過當。蓋此種情形,僅於數量之巨細,與權數之眞

正大小度(magnitude),並無關聯時,始有之。例如研究城市之工資,將所有各城市合併計算,求出其平均數,如吾人取消權數,各城市以均等視之,則結果之影響,確爲無幾,其故無他,乃因較高之工資,乃出之於大城市也。試觀第六章第二節,工程聯合會一百一十七處分會之認可工資平均數,如將各分會一律看待,則在一八九一年爲三十二先令四便士;但如以各該分會之會員人數爲權數,將各分會之工資施行加權,則同年之工資平均數,乃高達三十三先令四便士矣。雖然,在此種情形之下,權數不得完全取消固矣,惟在內中少數地方,並無特著關係時,則仍不妨爲粗率之計算。以倫敦一城而論,其他之工資,除達蒂福特及恩費爾德滂克二處外,較他區均高,且該會會員幾有全數六分之一,均受此種影響。玆按倫敦所佔之恰當重要性計算之,以各分會會員人數(百人爲單位卽取其最近於一百之數爲準)爲權數,則得平均數爲三十三先令六便士,事實上與前所求得之數,乃甚相同也。總而言之,每一羣類,苟欲計算其平均數,須按其本身之情狀,爲決定之標準;在多數情形之下,權數竟可不用;至當羣類所包括之項數甚多時,卽使施行加權,其因加權而起之差誤,雖大至相當程度,在一切之情形下,幾全可置諸不問。若欲查視此種差誤之重要,則須檢閱資料也。

此一原則,至爲重要。在若干情形下,眞實權數,乃竟無從計

算，甚且不能加以解釋；然據吾人所知，在某種條件之下，並無計算或釋明之必要；又有時雖有權數，而不能得其確數，然亦無須求其確切也。雖然，如各項原有共同之偏性（bias），無論用何種方法，均非加權所能免除。例如工資，實在工資數全部均較調查得來者少一先令，則平均數雖然得出，亦必較實在情形高出一先令。由是吾人可得要訣如下：計算平均數之時，應儘量防範各項之偏性，惟對於加權程序上，則無須斤斤較量確度之何若也。

第三節　統計係數

統計係數（statistical coefficient）者，乃一整數或一分數，以之乘一總數（例如人口數），可得另一有關之數（如嬰兒出生數）者也。如言出生率為千分之二十八，則統計係數乃為 .028。統計係數，在普通統計學領域中，應用之處極多，較之差誤律（Law of error）在人口學（demography）上之應用，尤佔極重要之地位。人口有增有減，而關於某某數種數目之係數，變動終屬甚小，必也經過長久之期間，且無非常之因素，足以發生特別之影響時，統計係數乃呈現顯著之變動。欲比較若干國家之統計數字，尤非用統計係數不為功，又為推測將來之數字，用此係數，有時亦頗能具有驚人之確實性（accuracy），然在有特殊之意外事變時，固在例外也。統計係數施用之處甚繁，出生率（各區域中）也，死

亡率（依年齡，職業或死因分類）也，結婚率（分各年齡）也，其他若自殺案件也，犯罪案件也，意外災害也，各種商品之消費也，莫不用之；推而廣之，如能覓得原始資料，則每年經過西敏大橋（West Minster Bridge）者人數若干，紀念塔前臨弔先賢者年有若干人，遺忘車上之傘，以及其他等等，無不可以應用之也。凡文明國家，大多均有重要係數之計算，並發表於統計報告中。至欲舉行統計調查者，此等之係數尤須有成竹在胸也。

雖然，所謂統計係數，無非某種算術平均數之另一說法，事實甚爲顯然。茲請以此爲參考，再將本章第一節所舉之平均數定義，重作概括之討論如下：——

平均數（A）×個數（N）＝所關數量總數（Q），換言之

$$A=\frac{Q}{N},\quad Q=N\times A。$$

以出生數爲例，A爲統計係數，N即人口，Q乃出生嬰兒數也。

Q一數在事實可能範圍之內，必受一因素變動之影響而隨之發生變動。例如人口數爲N，苟人口之性別及年齡分配有變化，Q亦必受其影響，至結婚數及結婚年齡，以及多產（fecundity）等，自同爲重要之因素也。關於出生率，結婚率及死生率之分母，爲求便於嚴格比較起見，已訂有一致之方法（用修正因素 correcting factors）（註三）。在未能應用此種方法之前，可請遵用白狄雍（統計學初級教本第九十四頁以下）之準則：效果（Q）

必須與其產生之近因（N）比較；如就結婚數言，吾人可舉間『何人可以結婚?』回答必為成年未婚者，或已失配偶者，然則凡此人等之總數，卽為N矣。將此準則推而廣之，包羅所有間接有關之人或物；例如論及產煤量，其直接之有關係人數為掘煤工人，次為所有煤礦之工人，論及家用煤炭之出產量，則與用煤家數有關（註四）。各個因素，只須保留一個，其餘概行屏除淨盡，分子分母中之各項，必須具有同一性質，同時分子所指人或物，對於分母中人物之潛在關係，必須協和一致。例如，全人口平均每人所攤之出口貨值一言，卽與上舉種種條件不合；出口貨所包內容龐雜，而人口又有性別及年齡之不同，所表示者只對國外市場上本國生產力之一部而已。

惟其如此，粗略之係數及平均數，自亦有其相當之用途；如係數或平均數有變，必由於一或數因素業已有變動也，苟能知衆因素之中，除一因素外，其餘幾為不變之數量，則係數必隨此常變之因素同變。例如人口數為N，可以結婚之人數為n，結婚數為M，則粗率之係數，卽為$C=\frac{M}{N}=\frac{M}{n}\times\frac{n}{N}$；如$\frac{n}{N}$為常數，則C將隨$\frac{M}{n}$而變動，$\frac{M}{n}$卽為較為合乎論理之係數也。

第四節　衆數

現所討論之其他二種均數（mean），均為統計學家常用者，

惟普通言談之間，尙少爲有意識之採用，殊爲可惜。然一般常用之習語中，頗有若干字眼（如其有確定之意義），與吾人所謂平均數之意義，頗相近似。

平均人　一般常有『平均職員』(average clerk)，『平均工人』之習語，意何所指，解釋大有不同。有時，乃表示各該門類之典型。所謂中常職員者，意或指其所得，與一切職員之平均收入略同，對於必需品及奢侈品之開支，與彼同一階級之平均數相近，如彼之能力平平，年齡中常，則彼之工作任務，亦必極爲普通。須知此一職員，乃爲理想之人物，在任意選來之六人中。求能如此人者，未必得其一；蓋六人必各有其特點，且有數種個性，必與一般有所不同也；『平常之新聞記者』，不能謂之爲生存而生活，實亦爲一合乎理想之人物，必有某種特性存乎其人也。

哥得雷氏之『中常人』　哥得雷(Quetelet)氏所稱之『平均人』(average man)（註五），已爲一般所習知矣；所謂『平均人』者乃一具有平均身長，體重，體力，肺量，而有正常視距及中等色質之眼睛之人也。此一『平均人』，較之『報章上之平均數』，乃爲更爲滿意之模範，其他一般人均與之有不同之點；如將所有之障礙原因排除，出生者將全爲此標準之人物矣。然現有之人類，欲求其與此種種標準吻合，乃絕不可能之事也。

葛得雷氏所指者，既非算術平均數，亦非中位數 (median)

求衆數法

美國一八九三年參議院報告中之工人人數

		以二角爲組距之分組		以三角爲組距之分組		以五角爲組距之分組		
自 $.25 至 .34	1	16	74					
〃 .35 〃 .44	15			75				
〃 .45 〃 .54	59	144	242					
〃 .55 〃 .64	85				159	301	317	
〃 .65 〃 .74	157	270	282	355				
〃 .75 〃 .84	113							725
〃 .85 〃 .94	169	370	505		439	483		
〃 .95 〃 1.04	201			674				
〃 1.05 〃 1.14	304	989	784				1,472	
〃 1.15 〃 1.24	685				1,190	1,088		
〃 1.25 〃 1.34	99	557	924	1,242				2,012
〃 1.35 〃 1.44	458							
〃 1.45 〃 1.54	466	538	274		1,023	996		
〃 1.55 〃 1.64	72			740			1,297	
〃 1.65 〃 1.74	202	531	387					
〃 1.75 〃 1.84	329				603	589		934
〃 1.85 〃 1.94	58	331	418	660				
〃 1.95 〃 2.04	273							
〃 2.05 〃 2.14	45	310	298		376	583	970	
〃 2.15 〃 2.24	265			343				
〃 2.25 〃 2.34	33	134	297					640
〃 2.35 〃 2.44	101				399	330		
〃 2.45 〃 2.54	196	209	176	310			506	
〃 2.55 〃 2.64	13							
〃 2.65 〃 2.74	163	165	17		372	178		
〃 2.75 〃 2.84	2			1,20				322
〃 2.85 〃 2.94	15	144	134					
〃 2.95 〃 3.04	129				146	149	198	
〃 3.05 〃 3.14	5	52	59	181				
〃 3.15 〃 3.24	47							
〃 3.25 〃 3.34	12	12	221		64	59		285
〃 3.35 〃 3.44	0			233				
〃 3.45 〃 3.54	221	226	21				254	
〃 3.55 〃 3.64	5				226	242		
〃 3.65 〃 3.74	16	27	11	32				
〃 3.75 〃 3.84	11				27			114
〃 3.85 〃 3.94	0	82	82			93		
〃 3.95 〃 4.04	82			82			96	
〃 4.05 〃 4.14	0	3	3		85	3		
〃 4.15 〃 4.24	3							6
〃 4.25 〃 4.34	0	0	3	3				
〃 4.35 〃 4.44	0				3	4		
〃 4.45 〃 4.54	3	4	1				4	
〃 4.55 〃 4.64	1			4				
〃 4.65 〃 4.74	0	0	0		1	0		9
〃 4.75 〃 4.84	0							
〃 4.85 〃 4.94	0	8	8	8			8	
〃 4.95 〃 5.04	8				8	8		
〃 5.05 〃 5.14	0	0	1					
〃 5.15 〃 5.24	0			1				
〃 5.25 〃 5.34	1	1						

或衆數（mode）——乃爲另一之均數，用之將所有同樣數量依一定之規律彙分類別者；該定律爲何？乃謂宜遵從人體測量(anthropometrical)之數量，卽氏之精彩論文之所論也。

〔衆數〕然則報章上之平均數似爲衆數之意矣。然衆數者密度最大之地位也，其意究何所指？茲請解釋於下；試閱上列之第二十一表；或翻閱前於第四章第四節所列之美國工資統計表（第十三表），可知在第二欄自上而下，數目漸增，至六百八十五（在1.15至1.24一組）之數後，數乃參差不齊漸至於消滅。此六八五在組距爲一角之各組中爲最大數。

一統計羣類（不論爲工資，或身長，或爲其他之可量之數）中，分組之數值，而有最多之次數者，謂之衆數，換言之，亦卽密度最高之地位，或佔最多數之數值。如就以連續曲線代表之羣類言之，則此一數值卽爲最高縱坐標(ordinate)下之橫坐標(abscissa)也。

〔求衆數法〕依修正後之字義，上表第二欄最大數有十四個之多，各數之起伏無定，但在此十四枚衆數之中，一元一角五分至一元二角四分一組之數，最稱顯著。至分組較寬時，在第六欄之五角分組下，衆數只餘三枚，惟如略去五元處數僅爲八之小羣，則所餘僅二枚。具有一四七二者乃爲最大之羣，但此羣之位置，不能確實指定僅可謂之介乎七角五分與一元二角五分之間。

此外，求衆數之近似值，尙有一法，茲舉例釋之如下：一如第二十一表所列美國工資統計中，在一角分組之下，所列之數，何者爲衆數，不能立時決定。在二角分組之下，自.25－.44一組起，其頻數順序爲十六，一百四十四，二百七十，三百七十，九百八十九，五百五十七，五百三十八，五百三十一……等等，則九八九（在$1.05－$1.24一組）之爲衆數，事乃彰然自明；如在二角分組中，自.35-.54一組順數之，則有七四，二四二，二八二，五〇五，七八四，九二四，二七四……等，在1.35-1.54一組之九二四，乃爲衆數；用此複式表列法，可見二角分組不能決定衆數。在三角分組中，自$.55-$.84一組起，數爲三五五，六七四，一二四二（在$1.15-$1.44組內），及七四〇……等；自$.65-$.94一組起，數爲四三九，一一九〇（在$.95-$1.24一組中）及一〇二三……等；如自$.75-$1.04一組起，則有四八三，一〇八八（在$1.05-$1.34一組），及九九六……等數：凡此種種分組，衆數終在$1.15-1.24一組中；反之，此一小組必含有衆數，而衆數果亦即在一一或臨近一一一元二角也。此例所用數字，極不整齊，惟其如此，乃可特別舉示困難之所在。茲復將全部程序，擇要概述如下：

（1）將分組組距漸次擴展，重行排列數字，一而再，再而三，至數字排列齊整時爲止；

（2）然後再察視組距業已放寬之羣類，並查核在分組之低

限(lower limit)移動時，衆數是否亦隨之轉移；如其移動也，則組距尚須再行放寬；否則，衆數乃在最狹組，如將組距放大，則較寬之組凡包括該狹小之組者，亦必同時爲衆數之所在。至求衆數之圖示法，當在第七章第一節（見第七圖求衆數及中位數圖示法）敍及之。

衆數位置之無定 求衆數之程序，至爲繁難，卽使初步數字，原已呈現整齊狀態，欲確切求得衆數，亦非甚易之事。玆爲指示困難之情形計，特舉一例如下；假設業經測驗多人之身體，得其身長爲

67 吋	455
$67\frac{1}{4}$吋	475
$67\frac{1}{2}$吋	490
$67\frac{3}{4}$吋	500
68 吋	485
$68\frac{1}{4}$吋	467
$68\frac{1}{2}$吋	445

驟視之，衆數似確在六十七又四分之三吋；惟吾人須知，雖極精確之測量，如單位以至一吋之四分之一爲準時，身長六七又四分之三吋零八分之一吋，卽當作六十又四分之三吋論，必至測量更形精確時，乃能用六七又八分之七吋表示之。故就現在而論，

所謂六七又四分之三者，乃實指自六七又八分之五起至六七又八分之七吋也。設上列五〇〇人之身長，在該組中成均勻之分配，則以六七又四分之三爲衆數，已盡確實之能事；惟就數字情形觀之，衆數當尙在此數之下方也。設上列數字，實際測量時，分配情形如下：

自$67\frac{1}{4}$至$67\frac{3}{8}$吋	238	483（身長$67\frac{3}{8}$吋）
自$67\frac{3}{8}$至$67\frac{1}{2}$吋	245	
自$67\frac{1}{2}$至$67\frac{5}{8}$吋	245	495（身長$67\frac{5}{8}$吋）
自$67\frac{5}{8}$至$67\frac{3}{4}$吋	250	
自$67\frac{3}{4}$至$67\frac{7}{8}$吋	250	493（身長$67\frac{7}{8}$吋）
自$67\frac{7}{8}$至68　吋	243	
自68　至$68\frac{1}{8}$吋	242	

並設諸數已列如上行之式，則衆數必在六七又八分之五吋；而上行之排列，衆數乃爲六七又四分之三吋。此種移動之或然性，於原來分類中，已可見之，蓋在六七又二分之一吋者人數較在六八吋者爲多也。總之，就以上所論，可知衆數頗有欠於確定之弊，確定性之深淺，尙須視分組之寬狹，及各組距之確實位置而定。在各組項數甚多之時，如將分組縮小，卽可現露其有規則之形狀，於是求得之衆數，確度必較大也。

用數學方法，求算衆數（見第十章第二節第五款），以上列

身長數字言之,須依照含有衆數之組($67\frac{5}{8}$至$67\frac{7}{8}$吋)之項數,對其上下各組項數相差之比例,將此含有衆數之組加以配分。例如相差之比例爲:500−490;500−485＝10:15,衆數乃爲($67\frac{5}{8}+\frac{10}{10+15}\times\frac{1}{4}$)吋＝$67\frac{29}{40}$吋。用此方法,設如最大者有兩組,其項數完全相同,則衆數卽在二者之中間;又如一最多之組,臨近之上下兩方各一組,項數亦係相等,(假如分配爲對稱形式),則衆數必在中間一組之中心。凡此兩者皆如演繹法(a priori)之所指示。

所謂『平均人』 討論至此,然則所謂『平均工人』者究何所指:意爲每日賺工資一元七角三分(第四章第四節第十三表所列美國工人工資之簡單平均數)之工人乎,抑爲賺衆數一元二角工資之工人乎?普通之語法,乃指後者而言。所謂『平均職員』一詞,其意並非指一身具有可以測量之性質恰爲同類性質之算術平均數之人,而指具有性質而爲同等人物大多數所同有之職員也。職員之階級中,喜讀消閒報紙,較讀荷馬(Homer)史詩者爲夥焉,涉身游藝場者,較往聆聖樂(oratorios)者爲多焉,月進百元者較月有五百元收入者爲衆焉,住於郊外四里,較住於郊外一里或二十里者爲多焉。解釋雖然如此,但『平均人』並非實有其人,蓋秉性各有不同也。平均數爲純粹抽象之名詞,吾人實際應用統計時,不可不知;前言之美國工人大衆,不能卽

視全賺一元二角之工資，即使賺相同之工資，亦不能認爲其他方面無以異；反之，即得同等之工資，而工作量數乃大有出入也。

衆數之重要性 爲完全表明一羣工人之經濟狀況，無單獨勝任之一數，有之，即衆數是也。吾人所意像之最大幸福之最大多數人可於衆數中求之。算術平均數與中位數(median)——定義見下——所表示者，並非實在，不過數字上之概念而已，而精確表白最常發見之數目者，惟有衆數一端。衆數爲最常得到之普通結果，且有極普通之用途。某段間之火車或公共汽車，求出意欲搭乘者之平均人數，不如得知其最常見人數之爲愈。成件出售之衣服店，與其量得多人胸寬尺寸之平均數，無寧得出衆數爲適宜。一郵局之成立，一商店之開設，應以求得購買匯票金額或茶葉價格之衆數，爲當務之急，其他平均數，需用甚少也。即在集藏之泉幣中，其中受人賞鑒者，每每表示整羣之風氣，勝於各個特色之算術平均數，且就此最後一項事例而論，其衆數頗爲確定焉。

衆數之優點 衆數之一特點，即在完全不受極端項之影響。收解款項，每因發現一千金鎊之一支票，而動搖算術平均數，但衆數乃不因之而受波及。少數之百萬富豪及極大多數貧無立錐之人民，二者收入之算術平均數，或許與一發展平均全爲家裕戶足之國家中所得之數相同，然衆數則二者將迥有不同也。吾人論

及一類數字，如極多工人之工資者之歷年變動情形，設以算術平均數爲判別之標準，則工資增加情形，由於工資低者提至水平線耶？抑係由於已有甚高待遇者又急劇增薪耶？吾人竟無從答覆，然衆數則可表明大部人數地位之變動，因而可以答覆之也。布斯(Booth)氏之『倫敦(London)』一書，應用衆數之處甚繁。每一年齡圖，必有一分業別之年齡之衆數；每一工資表，必有各級工資之衆數，固不待言；即彼對於第五類——現代城市之標準工人——之論述，亦係根據同一原則。至彼對於社會情况之測量，既以住房間數及僕役人數爲基準，則用衆數（每戶住房四間，並無僕役），當較用其他平均數爲利便。

衆數之劣點　雖然，衆數受人反對之所在，乃因其不能施用於多種之羣類。設有一極不規則之數字羣類，並無一定之典型，例如英國各城市之人口，其衆數極不穩定，對於人口數之重要性，則不能給予吾人以重要之消息。蓋衆數之爲用，主要乃在其能指示一典型之數字，其他數字均與之分歧也。例如在上列第二十一表之工資數字，典型之工資爲一元二角，其他在兩方之工資，則爲技能或機會以或種原由，較正常程度爲高或較低之人所得。如葛得雷氏之著作所示，凡有一種典型之數字，必有衆數能表示之。衆數告吾人者，乃對於每一典型之一事實，故他種平均數，亦不可不恃爲補充之用也。

第五節　中位數

設有一羣人或物於此，其中各有可以測量之屬性，例如身長或工資，吾人為謀論述全羣類之簡捷起見，頗可擇用某一數量扼要說明之。茲設此種屬性之數量，依數值之大小，由小而大，排為漸升之序列；由此序列向上察其恰在中途一項之所在，當此中間項目之數量，即謂之中位數 (median)（註六）。譬如有一羣賃銀勞動者，工資不及二十先令三便士為二百人，恰為二十先令三便士者一人，超過二十先令三便士以上有二百人，則二十先令三便士即為工資之中位數。蓋在此假設之例中，不及二十先令三便士者，與超過該數者，人數完全相等也。中位數如此，其他以此類推，在序列上四分之一及四分之三處之數量，謂之四分位數 (quartile)（註七）；在序列上十分之一，十分之二，乃至十分之九之數量，謂之十分位數 (decile)；在百分之一，二乃至九十九之數量，謂之百分位數(percentile)。

中位數之位置，較衆數為穩定。欲求確切之計算，則在項數為奇數時，中間之數即為中位數，在項數為偶數時，中位數即在兩中間數之中間，此兩中間數一般多連接甚近，如二數相等時，則二數均為中位數矣。但若序列中數量不甚準確，而分為小組時，則以本章末節圖示法（第一圖）對其確實數值，可作一良好之

推算。

中位數之優點，在絕對不受特異項目之牽動；勿論若干人數之百萬富翁之收入，對於全類序列之收入中位數，所給予之影響若何，絕不致較收入在中位數以上之其他相等人數爲重。對於此種極端項，在許多目的下，固有較之近於平均數之項目，有特別加以重視之必要；無如算術平均數，對於特別項目，重視已超出正當範圍之外，蓋當此民治之時代，以一百萬之富翁，而與萬千之普通工人，等量齊觀，殊不若中位數較爲適當也。除此而外，中位數尙有一易於計算之特長，故不需甚多之算術工作，以吾人對於距平均數甚遠之數，無須逐一檢算之勞，只將臨近平均數之項目，精密查核即可也。

無全部訪查之必要 中位數之應用，尙有頗爲重要之優點；蓋對於諸項事物之訪問，若不確實並欠完全時，仍不難將中位數求出也。玆舉一二實例以明之。在舉行工資調查時，或許有工資距平均數甚遠之十萬工人，並未及調查，然則欲查問如此多數工人之工資，對於算術平均數之影響如何，必因缺乏關於彼等收入之消息之故，感受極大之困難；但如求中位數則不然，吾人所需知曉者，只爲彼等之人數，不問彼等工資確數爲幾何，亦能確定人數之最高額，仍能將中位數查出，不過有極微之出入耳。試取英國『一八八六年工資調查總報告』第四百七十頁之總數，三

十五萬六千人，加上工資在十五先令以下者十萬人，則中位數仍在二十先令至二十五先令一組，此原來之中位數也。惟在最低十分位數及下四分位數，變動則極顯著，然算術平均數，因此降低至少有二先令一便士之多。如就所得問題而論，此說亦有成立之理由；蓋消息既極貧乏，有極多之人，其確實所得數，無從得知，然在多數情形之下，不難斷言其所得乃在某一數額之上，或在某兩限度之間，而此如在低限之下方，即吾人對於其所有人數所需探知而據以決定中位數之數也。

復次，溯觀十九世紀以來之工資發展史，欲求一正確之平均數而不可得；但吾人既知一大類工人，每週工資在十五先令之下，另有工資在三十先令以上而確實不得而知者極多人，並知工資在十五至二十先令，及自二十五至三十先令者，各有確數若干，則不難求其中位數；爲求中位數，如測知中位數乃在二十至二十五先令一組，應將該組人數加以確實調查；即使手中缺乏完備之資料，吾人仍不妨發言，謂中位數必不出某兩狹小限度之外焉。

不可量之數量 (incommensurable quantities)　中位數之另一優點，亦即其較重要之一用途，乃在其對於完全不可測量之數量之應用。此種應用，以賴高爾頓 (Galton) 氏（註八）倡導之力者爲多。玆爲舉例起見，設吾人欲求多數兒童之平均智力。智力並不可以測量，事乃至爲顯然，即使用精妙之號碼，亦難求

得其算術平均數。然在另一方面，設將一羣二十名之兒童，依其智力之高下，排成序列，不必謂甲童之智力，比乙童高二十分，惟云第十或第十一名兒童，乃為全組之典型人物，至低限度亦較其他各種之平均數為佳也。

中位數之劣點 中位數既具有上述之優點，然其所以不能普遍採用之故何在？此無他，一組數量之中位數，或可全然與典型不符，且在事實上或可不近於實在觀察得來之事物中也。例如，設有兩類工資數字，每類各包括一千人之工資，一類之工資為十五先令至二十五先令，一類在三十五先令至四十五先令，今吾人求得之中位數，竟在二十五至三十五先令之間，而該類中事實上並無一人。由是觀之，中位數之主要，用途只能限於主體之若干事物連接甚為密切之情形下；至於少數之極端項，尚不致有何影響也。

如以m代表x_1，$x_2\cdots\cdots x_n$共有n個數量之中位數，a代表同數量之算術平均數，以x_1-z，$x_2-z\cdots\cdots$為x各數量與任一數量z之離中差 (deviation)，則m即為能使離中差量（全作正數計算）之和成為最小之z值，而a即為使離中差之平方之和成最小之數值。

欲明離中差（全作正數計算）之和成為最小值一語，請比喻如下：設有 $2n+1$ 處地方，在一條直線上，各處各由某盡端數起之第n處地方之接線機，單獨各通一條電話線；電話線之長度，即相當於上言之離中差；今設接線機自第n處，移至 $\overline{n+1}$ 處（或中心點），則必有$\overline{n+1}$條線，因之以相等之距離而縮短，有n條線因之以相等之距離而加長，然則電線之總和，必為之消減；如地方之數為偶數，則自任一端數起，凡地位在，或介乎，第n處及第$n+1$處之間者，均可達到使成為最小數之目的。

關於第二段。相差數之平方和為最小數，只觀：$\Sigma x=na$，及 $\Sigma(x-z)^2=\Sigma x^2-na^2+n(a-z)^2$ 便知，蓋當$z=a$時，$\Sigma x^2-na^2+n(a-z)^2$，即成為最小也。

茲有七十二項數量，特用各種平均數論述之如下：

十三歲至十五歲兒童之體格測量

號次	年齡	身長	體重	號次	年齡	身長	體重	體重表之分析
	歲　月	呎　吋	唔　磅		歲　月	呎　吋	唔　磅	
1	14.1	$4.11\frac{1}{2}$	$6.0\frac{3}{4}$	39	14.7	$4.11\frac{1}{2}$	$6.3\frac{1}{2}$	算術平均數：六唔(註)一又二分之一磅。 算術平均數，當原來重量以唔爲準時；六唔一又五分之一磅。 中位數：六唔一又八分之一磅。 四分位數：六唔九又八分之七磅。五唔六又八分之一磅。 四分位數之平均：六唔一磅。 全部數字之半在中位數九磅距離之內； 衆數：在六唔至六又四分之一唔之間。 十三歲至十三歲半之平均體重：五唔九又二分之一磅。 十三歲半至十四歲之平均體重：五唔十三又八分之一磅。 十四歲至十四歲半之平均體重：六唔三又八分之一磅。 十四歲半至十五歲之平均體重：六唔八又三分之二磅。 身長表之分析從略。
2	14.9	4.10	5.7	40	13.1	$4.11\frac{1}{2}$	5.7	
3	14.7	$5.5\frac{1}{4}$	7.5	41	14.3	4.11	$6.4\frac{1}{4}$	
4	13.11	5.0	$6.3\frac{3}{4}$	42	13.3	$4.4\frac{1}{2}$	$4.11\frac{1}{2}$	
5	14.11	$5.3\frac{3}{4}$	$8.0\frac{1}{2}$	43	14.3	5.3	$6.7\frac{1}{2}$	
6	14.7	4.10	5.0	44	13.6	$5.1\frac{1}{2}$	$6.13\frac{1}{4}$	
7	14.3	4.10	6.7	45	14.2	$4.8\frac{3}{4}$	$6.0\frac{3}{4}$	
8	14.9	5.5	$8.5\frac{1}{4}$	46	13.5	5.2	7.4	
9	14.11	$4.9\frac{1}{2}$	$5.12\frac{1}{4}$	47	13.8	$5.2\frac{1}{2}$	6.11	
10	14.3	$4.11\frac{3}{4}$	$6.11\frac{3}{4}$	48	14.6	5.4	$7.4\frac{1}{2}$	
11	13.4	4.7	$5.1\frac{1}{2}$	49	14.8	$5.1\frac{1}{2}$	6.10	
12	14.7	$5.3\frac{3}{4}$	$7.8\frac{3}{4}$	50	13.3	$4.8\frac{1}{4}$	5.0	
13	13 8	$4.7\frac{3}{4}$	5.3	51	13.0	$5.1\frac{1}{4}$	6.7	
14	14.5	$5.2\frac{1}{2}$	$7.8\frac{3}{4}$	52	13.10	$4.11\frac{1}{2}$	$7.3\frac{1}{4}$	
15	14.4	5.0	6.0	53	14.8	$4.11\frac{1}{2}$	$6.9\frac{3}{4}$	
16	13.6	4.9	5.6	54	13.8	$4.5\frac{3}{4}$	$4.9\frac{1}{2}$	
17	14.0	$5.2\frac{1}{2}$	$7.7\frac{1}{2}$	55	14.8	$5.4\frac{1}{2}$	7.0	
18	13.0	$4.8\frac{1}{4}$	5.3	56	14.0	4.10	$6.2\frac{1}{2}$	
19	14.7	4.11	$6.12\frac{3}{4}$	57	13.10	4.9	5.5	
20	14.10	5.1	6.9	58	13.2	$5.0\frac{1}{2}$	6.4	
21	13.9	4.11	5.11	59	13.6	4.7	$5.2\frac{1}{2}$	
22	14.10	$4.8\frac{3}{4}$	5.11	60	13.0	4.9	$5.9\frac{3}{4}$	
23	13.4	$4.9\frac{1}{2}$	$5.8\frac{3}{8}$	61	13.3	$4.8\frac{3}{4}$	$5.5\frac{1}{4}$	
24	13.1	$5.2\frac{1}{4}$	6.1	62	13.5	$4.8\frac{1}{2}$	$6.5\frac{3}{8}$	
25	14.0	$4.6\frac{1}{4}$	$5.6\frac{1}{2}$	63	13.10	$5.5\frac{1}{2}$	$7.10\frac{1}{2}$	
26	14.6	$5.3\frac{1}{2}$	$7.6\frac{1}{2}$	64	13.1	$4.8\frac{3}{4}$	$6.2\frac{1}{4}$	
27	14.3	$5.0\frac{1}{4}$	$5.11\frac{1}{4}$	65	13.10	5.4	7.2	
28	13.9	4.9	5.11	66	14.0	4.9	$5.0\frac{1}{2}$	
29	13.4	$5.1\frac{1}{4}$	5.9	67	13.3	4.7	5.0	
30	14.4	5.1	$6.8\frac{1}{2}$	68	13.8	4.11	$6.1\frac{1}{4}$	
31	14.10	4.9	$4.7\frac{1}{4}$	69	13.7	$4.41\frac{3}{4}$	$6.4\frac{1}{4}$	
32	13.2	$4.9\frac{1}{2}$	$5.13\frac{1}{4}$	70	13.11	4.8	$4.4\frac{1}{2}$	
33	14.1	$4.8\frac{3}{4}$	$5.8\frac{1}{2}$	71	13.11	4.8	$4.4\frac{1}{2}$	
34	13.10	$5.2\frac{1}{4}$	$6.8\frac{1}{2}$	72	13.2	$4.7\frac{3}{4}$	4.10	
35	14.0	$4.11\frac{1}{2}$	5.7	73	14.0	4.11	6.5	
36	14.4	4.11	6.5	74	13.3	$4.3\frac{1}{2}$	$4.1\frac{1}{4}$	
37	14.8	4.11	$6.0\frac{3}{4}$	75	13.3	5.0	$7.2\frac{3}{4}$	
38	13.7	$5.0\frac{3}{4}$	6.2	76	13.7	$4.8\frac{1}{4}$	5.6	

（第二十二表）

身長之數量（以吋爲單位）依次排列如下：——

$51\frac{1}{2}, 52\frac{1}{2}, 53\frac{3}{4}, 54\frac{1}{4}, 55, 55, 55, 55\frac{3}{4}, 55\frac{3}{4}, 56,$

$56, 56\frac{1}{4}, 56\frac{1}{4}, 56\frac{1}{4}, 56\frac{1}{2}, 56\frac{3}{4}, 56\frac{3}{4}, 56\frac{3}{4}, 56\frac{3}{4};$

$56\frac{3}{4}, 57, 57, 57, 57, 57, 57\frac{1}{2}, 57\frac{1}{2}, 57\frac{1}{2}, 57\frac{1}{2},$

$58, 58, 58, 58, 59, 59, 59, 59, 59;$

$59, 59, 59\frac{1}{2}, 59\frac{1}{2}, 59\frac{1}{2}, 59\frac{1}{2}, 59\frac{1}{2}, 59\frac{3}{4}, 59\frac{3}{4},$

$60, 60, 60, 60\frac{1}{4}, 60\frac{1}{2}, 60\frac{3}{4}, 61, 61, 61\frac{1}{4},$

$61\frac{1}{4}, 61\frac{1}{2}, 61\frac{1}{2}, 62, 62\frac{1}{4}, 62\frac{1}{4}, 62\frac{1}{2}, 62\frac{1}{2}, 62\frac{1}{2}, 63,$

$63\frac{1}{2}, 63\frac{3}{4}, 63\frac{3}{4}, 64, 64, 64\frac{1}{2}, 65, 65\frac{1}{4}, 65\frac{1}{2}$。

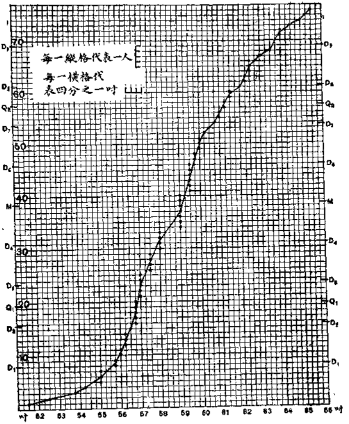
中位數之圖示法　高爾頓氏在一八八一年英國協會之人體測量委員會 (The Anthropometic Committee of the British Association) 報告中第二百四十七頁，曾用圖示法，求身長數量之中位數，結果頗稱精密，玆爲舉例起見，用將圖式列於第143頁。

在下圖之橫標尺上，劃分爲均等之距離，每一距離代表一單位，此處之單位卽爲一吋。於縱標尺上，亦分爲等距，每一等距代表一項，此處之一項卽爲所量之一人。自底線最低之五一又二分之一吋起，對橫行之身長尺寸，依在該尺寸上之人數，在格上記一點，有若干人卽記若干點（本圖每處只有一人），使每一點卽代表一人。由此記成之點最前一個止，想像中假設劃一直線平行於底邊，直至第二個點所在之縱線上，卽爲五十二又二分之一吋，

求算中位數,四分位數,十分位數之圖示法。

（根據英　協會人體測量委員會高爾頓氏之法）

年齡在十三至十五歲之兒童七十六人之身長



（第　一　圖）

中位數:$59\frac{1}{8}$吋

四分位數: 56.8 / 61.2

四分位差(half inter-quartile distance)2.2,

十分位數:55.6,56.6,57,57.9,63.6.62,60.7,59.7。

算術平均數:59.095

最深密度:57或59.

修勻曲線上之最深密度:約為58.

幾何平均數:58.98.

然後復自第二點起，仍照前法，依次進行，以尋在五十二又二分之一吋上面之點。次卽連結成爲一線，自上下成貫各點之中間一點經過，在一數量上同時有數人時，如人數爲奇數，則中間一人卽作爲中心，如爲偶數時，則以中間二數之中間爲中心。

欲求中位數，四分位數及其他等等，卽須將縱行依代表項數之距離，分爲二等分，四等分及其他等分，並劃一平行線經過各該分割點，與已劃成之連結線交叉。各線之交叉點，向下直看，在橫標尺上，卽爲所求之身長數量。

終於此必須有一假定：假定某數量，譬如五十八又四分之三吋上，所量得之人數，實係自五十八又八分之五至五十八又八分之七止成均勻之分配；上列之作圖，所示中位數，四分位數，十分位數……等等之位置，卽係依此假定而成也。

如項數過少，四分位數，及十分位數……等之位置不甚顯明時，應作如後之分析：於此有兩種情形，第一種情形，觀察所得之數量，卽各項確實之數字，第二種情形，觀察所得之數量，作分組表示，或按組距中點計算。

(1) 茲根據火車時間表，將四十五次車，經過某一距離所耗之分數(minutes)，列之如下：

45,46,47,48,48,51,53,54,55,58;61,61,62,65,65,69,69,69,71,76;76,76 77,77,78,80,81,81,82,82;83,83,84,85,85,85,85,87,88,89;90,92,94,101,103。

中位數在第二十三項，即爲七十七分鐘。

欲求四分位數，須將四十五項，均分爲四等分。假設將前圖以二分之一起，經一又二分之一……以至四十四又二分之一，分爲尺度，縱長之全部分爲四十五個等分，則四分位數分別爲十一又二分之一，及三十三又四分之三。十一又二分之一，乃介乎在十又二分之一之第十一項（六十一），及在十一又二分之一之第十二項（亦爲六十一）之間。故下四分位數，乃爲六十一。三十三又四分之三，乃在第三十四與三十五項之間，二者均爲八十五。如各不相等，可取較近之項（第三十四項）之四分之三，加第三十五項之四分之一卽成。

同理，十分位數乃在縱標尺上之四又二分之一，九，十三又二分之一……等處。最低一數，乃在第五項（四十八分鐘），次一數乃在第九與第十（五十六又二分之一分鐘）之中間，其他以此類推。

上圖之D，Q，M各數之位置，卽係此原理而指出者。

茲將中位數及四分位數之求法，列之如下：

項數	中位數	下四分位數	上四分位數
$4n$	$\frac{1}{2}$(第$2n$項＋第$\overline{2n+1}$項)	$\frac{1}{2}(n^{\mathrm{th}}+\overline{n+1}^{\mathrm{th}})$	$\frac{1}{2}(3n^{\mathrm{th}}+\overline{3n+1}^{\mathrm{th}})$
$4n+1$	$\overline{2n+1}^{\mathrm{th}}$	$\frac{1}{4}n^{\mathrm{th}}+\frac{3}{4}\overline{n+1}^{\mathrm{th}}$	$\frac{3}{4}\overline{3n+1}^{\mathrm{th}}+\frac{1}{4}\overline{3n+2}^{\mathrm{nd}}$
$4n+2$	$\frac{1}{2}(\overline{2n+1}^{\mathrm{th}}+\overline{2n+2}^{\mathrm{nd}})$	$\overline{n+1}^{\mathrm{th}}$	$\overline{3n+2}^{\mathrm{nd}}$
$4n+3$	$\overline{2n+2}^{\mathrm{nd}}$	$\frac{3}{4}\overline{n+1}^{\mathrm{th}}+\frac{1}{4}\overline{n+2}^{\mathrm{nd}}$	$\frac{1}{4}\overline{3n+2}^{\mathrm{nd}}+\frac{3}{4}\overline{3n+3}^{\mathrm{rd}}$

（第二十三表）

至計算十分位數之方法，理與上同，茲從略。

（2）各數分組排列（或自五十三至五十四時，或五十三而以四分之一爲組距，

卽自五二又八分之七至五十三又八分之一），則可假定各組之數分配甚爲均勻，而照第一種情形辦理。

玆以本章第一節所列之已婚男子年齡（第十八表）爲例，釋明此法。該表中，年齡在四十歲以上者五百四十九人，四十五歲以上者四百一十三人，第五百人當屬於四十至五十歲一組中一百三十六人之一，事實上乃爲該組之第四十八或第四十九人也。如該組之分配情形，果係甚爲均勻，則五歲組距，可分爲一百三十六等分，所謂第四十九人，卽在該組之第四十九等分。故中位數卽爲$40+5\times\frac{549-500}{136}=41.80$歲。此數已盡確實之能事。若欲再求進一步之精確，似已無此必要。同理，下四分位數卽爲第七百五十人之年齡，約在三十歲至三十五歲一組內，故可作爲$30+5\times\frac{855-750}{152}=33.45$歲，而上四分位數爲$50+5\times\frac{295-250}{96}=52.34$歲也。

以此等數量，用圖示法，對於上舉二種情形，甚易求出。

第六節 幾何平均數

如有$a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$共$n$個數量，G，幾何平均數(geometric mean)，或名對數平均數(logaritmic mean)，可用下式求之：

$$G=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}$$

$$\text{及}\log G=\frac{1}{n}(\log a_1+\log a_2+\cdots\cdots+\log a_n)。$$

同一之若干數量，其幾何平均數，必比算術平均數爲小。若吾人重在兩數量間之比率，而不重視其絕對差數，自以用幾何平均數爲宜。如八與十三之差，與十三與十八之差，有同等之重要

性，則八與十八之平均，即爲十三，於是十三距八與十八，距離乃相等；但八對十二之比率，與十二對十八之比率，若同其重要，則八與十八之平均，乃等於$12=\sqrt{8\times18}$。

茲爲明瞭起見，更作比喩如下：設有a_1,a_2,a_3,a_4,a_5五數，就中a_1，及a_2比A（五數之算術平均數）及G爲小；a_3,a_4，及a_5則比A及G爲大。

則　$$5A=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

$$(A-a_1)+(A-a^2)=(a_3-A)+(a_4-A)+(a_5-A)$$

$$G^5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$$

$$\frac{G}{a_1}\times\frac{G}{a_2}=\frac{a_3}{G}\times\frac{a_4}{G}\times\frac{a_5}{G}$$

由此觀之，一方，多過平均數之部分之和，等於缺少部分之和；一方，平均數對少於平均數之數之比率之積，等於平均數對多於平均數者之比率之乘積。

此平均數之重要用途，乃對於物價之計算。物價自100升至120，其意義與自120升至144之情形相同，但較自120升至140之高漲程度爲大。翟翁士(Jevons)在其指數（金價之跌落）之第一步論述中所以施用幾何平均數者，或即以此之故。

最後一點，吾人不可不注意者，幾何平均數，較之算術平均數，常將小數之重要性稍擡高，將大數稍抑低。

第七節 總論

平均數之功能 平均數之功能如何,吾人不可不知,其功用在以簡短之單純數字,表明甚繁之羣類。萬千之項目當前,欲吾人立時領會若是其多之數量,勢乃有所不能,必也彙成組類,化爲簡單,然後施以平均。各種平均數,以選用何者爲適宜?此須視其是否能揭示醒目之形態,及顯露該類之主要特質而定。羣類有種種之不同,方法自亦隨之而異,此宜就各個之所長,而善爲利用之者也。凡一良好而適宜之平均數,須具下述之特質:如羣類有一型態存乎其間,平均數須能表明之;對於極端之項目,應給予公平之待遇;應不致輕易受差誤之影響,或因計算方法稍變,而地位移動甚烈之情事,應不易發生;且須易於計算。

各種平均數,不妨同時算出,以比較其位置,而藉以明瞭羣類之全部性質。在對稱之羣類中,算術平均數,中位數及衆數,必相合於一處。如羣類甚小而數目甚大時,算術平均數大多在中位數之上方。如數並不大,則算術平均數,必在中位數之下方,但項數集中時,則算術平均數,仍將位於中位數之下首。應用衆數之要件,必須羣類係爲同一體質之物所組成,否則雖求出衆數,則斯衆數乃亦毫無意義。如羣類甚小,但每項之數目甚大時,衆數多位於算術平均數之下。如羣類之分配,甚爲均勻時,衆數之位

置,甚爲顯明　凡此種種定則,乃就一般之羣類分配而言,如遇有特殊情形,只能用之作爲試驗,但大多均易失其效用也。

（註一）請參閱醫學百科詞典(Dictionaire encyclopédique des Sciences Médicales)白狄雍(Bertillon)傳上之平均數(Moyenne)一章。

（註二）原文見統計學報(Statistical Journal)之一八九七年十二月份,茲已加修改。

（註三）參閱本書原著者所作『統計學概要』(Elementary Manual of Statistics)第一百零五至一百零七頁,及統計學報一九〇六年號第三十四至一百四十七頁。

（註四）參閱統計學報一九〇八年號第四百六十三至四百六十八頁,關於討論同質性(homogeneity),可比較性(comparability)及相對性(relativity)一文。

（註五）見葛得雷氏著社會物理學(Physique Social)及愛基華斯氏(Edgeworth)在統計學報一八九三年號所發表一文。

（註六）此等數量,前於第四章第四節論表列法業已論及,請參考(見第十四表)。

（註七）見高爾頓氏之『自然遺傳性』(Natural Inheritance)第四十七頁。

（譯者註）石(stone)等於一百一十二磅。

第六章 離散度與偏斜度之測量及平均數之應用

統計羣類 前於第五章討論平均數時，時以考查統計羣類(statistical group)之中心位置爲言，所謂統計羣類者，乃指一羣人或物，各具有某種一定之性質(一九一一年英格蘭及威爾士挨戶調查之男子人數)，依另一變動之性質(年齡)，彙分類別也。關於此一羣類，表白之法不一，用分組表列法固可，用他種之表列法（如第四章第四節之美國工資表（第十三表））亦可，即用圖示法（如第七章第一節第二圖工資統計圖）亦無不可，惟爲簡捷，或便於與其他羣類比較起見，頗有將關於該羣類之數量，加以限定並計算之，以表現羣類特質之必要。爲達到此目的，最簡便之法，莫過於選擇（一）足以代表中心位置之平均數(mean)，（二）離散度(dispersion)，即觀察項數之分散情形，並（三）偏斜度(skewness)，茲請就離散度及偏斜度二者討論之。

第一節 離散度

離中差 一羣類中各項數量與平均數或其他固定點之相差，謂之離中差(deviation)。在下列第二十四表中，所列羣類，內容

包括英格蘭及威爾士各大城市一九〇二年中五十二個星期按週之死亡率合計數。第一欄由上而下，第二欄由下而上，依數值之

英格蘭及威爾士各大城市一九〇二年

中五十二個星期每週之死亡率合計數

每萬人中每週死亡率		求對中位數之平均差		求標準差		求均互差		
a	b	a列少於173者	b列多於173者	與173差額之平方		a與b之差數	乘數	乘積
(一)	(二)	(三)	(四)	(五)	(六)	(七)	(八)	(九)
244	136	71	37	5,041	1,369	108	51	5,508
233	139	60	34	3,600	1,156	94	49	4,606
226	141	53	32	2,809	1,024	85	47	3,995
209	143	36	30	1,296	900	66	45	2,970
206	144	33	29	1,089	841	62	43	2,666
201	145	28	28	784	784	56	41	2,296
196	149	23	24	529	576	47	39	1,833
196	150	23	23	529	529	46	37	1,702
196	151	23	22	529	484	45	35	1,575
191	152	18	21	324	441	39	33	1,287
183	154	10	19	100	361	29	31	899
182	155	9	18	81	324	27	29	783
182	159	9	14	81	196	23	27	621
181	160	8	13	64	169	21	25	525
179	164	6	9	36	81	15	23	345
177	165	4	8	16	64	12	21	252
177	166	4	7	16	49	11	19	209
177	166	4	7	16	49	11	17	187
176	167	3	6	9	36	9	15	135
176	169	3	4	9	16	7	13	91
176	169	3	4	9	16	7	11	77
174	169	1	4	1	16	5	9	45
174	170	1	3	1	9	4	7	28
174	170	1	3	1	9	4	5	20
173	172	0	1	0	1	1	3	3
173	172	0	1	0	1	1	1	1
9,029		434	401	26,491				32,659
		+13	−13					
		835						

（第二十四表）

算術平均數：$9029 \div 52 = 173.63$

中　位　數：$172\frac{1}{2}$

四分位數：$159\frac{1}{2}, 181\frac{1}{2}$

對於中位數之平均差(mean deviation)：$\eta = 835 \div 52 = 16.06$。

對於算術平均數之平均差：$\eta = 16.11$。

四分位差(quartile deviation)或機誤(probable error)，$r = \frac{1}{2}(181\frac{1}{2} - 159\frac{1}{2}) = 11$。

全部羣類項數之半，在 $170\frac{1}{2} \pm 11$ 以內。

標準差(standard deviation)：$\sigma = \sqrt{\left\{\frac{1}{52} \times 26,491 - (0.63)^2\right\}} = 22.56$。

離中係數(coefficient of variation) $= \frac{100\sigma}{173.63} = 13.0$。

均互差(mean difference)：$g = 32.659 \div \frac{1}{2} \times 52 \times 51 = 24.63$。

大小度，順序排列。中位數爲 $172\frac{1}{2}$，玆取近於此數之 173 爲中心而計算離中差，分列於三，四兩欄。據第五章第五節之論述，如以中位數爲中心點，而計算離中差，則各離中差（均作正數計算）之總合與平均，必成爲最小數；玆爲求得若是之離中差，必須將第三欄各項各加 $\frac{1}{2}$，而自第四欄各項各減去 $\frac{1}{2}$，換言之，即將第三欄之總計數加上 13，而由第四欄之總計數內減去 13 也。由此觀之，對於中位數之正離中差之總數爲447，負離中差之總數爲388，全部五十二個離中差之總合爲 885。離中差之平均爲 $835 \div 52 = 16.06$，又羣類之算術平均數爲 173.63。欲求由算術平均數計算之離中差之總合，須將小於 174 之二十八個數量對假定中位數 173 之各離中差，各加上 0.63，並由其餘二十四個離中差，各減去 0.63；於是對於算術平均數之離中差之總合，爲 837.52，平

均為 16.11。

平均差 各數量與其算術平均數相差之平均數(此處為16.11),謂之該羣類之『平均差』(mean deviation);普通多以希臘字母 η 表示之;『對中位數之平均差』(此處為 16.06)一詞,亦多有應用之者。平均差用以測量一羣類之離散度,意義甚為明顯,手續亦極簡便,當數量各自獨立不成組時,算之尤易。

由上表之第三四兩欄,欲求算術平均數,只須作如下之計算:多於 173 者之平均數=第三欄之總數 (434) 減第四欄之總數 (401)被 52 除=33÷52=0.63,即可求得算術平均數=173.63。

標準差 然諸如此類之絕對差,如欲用數學方法,研究統計羣類時,因在代數程序中有須成為正數者,有須成為負數者,用之至感不便,且如應用機率(probability)原理,則離中差之所以成為重要者,乃在於離中差之平方,而不在其第一次方,故吾人乃用對於算術平均數之離中差之平方之平均,即均方差,而不用上述之平均差。此均方差(average of the squares of the deviation)之平方根,即名之曰該羣類之『標準差』(standard deviation),即一般所習用而用希臘字母 σ 代表之者也。計算標準差之方法,必須逐一計算各數之離中差,但如照下述之程序,則頗收簡單化之效:

設 x_1,x_2……x_n 代表各數量,x_0 代表最便於計算離中差之

中心數量。以 $d_1=x_1-x_0, d_2=x_2-x_0\cdots\cdots$，此卽爲上表所列之離中差。並設 $\bar{x}$ 爲該羣類之算術平均數，於是 $n\bar{x}=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$；又以 $d_0=\bar{x}+x_0$，則 $nd_0=(x_1-x_0)+(x_2-x_0)+\cdots\cdots=d_1+d_2+\cdots\cdots d_n$。

但標準差之定義，則爲

$$=\{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\bar{x})^2\}\div n$$

$$=\{(d_1-d_0)^2+(d_2-d_0)^2+\cdots\cdots\}\div n$$

$$=\{d_1^2+d_2^2+\cdots\cdots-2d_0(d_1+d_2+\cdots\cdots)+nd_0^2\}\div n$$

$$=\{d_1^2+d_2^2+\cdots\cdots-nd_0^2\}\div n$$，因爲 $d_1+d_2+\cdots\cdots=nd_0$。

於是 $\sigma=\sqrt{\left\{\frac{Sd^2}{n}-d_0^2\right\}}$，至 Sd^2 則代表 $d_1^2+d_2^2+\cdots\cdots+d_n^2$ 也。

上表中，$\bar{x}=173.63$，$x_0=173$，$d_0=0.63$。

$d_1^2, d_2^2\cdots\cdots$ 等數分列於第五六兩欄，其 $Sd^2=26.491$。

$\therefore\sigma=\sqrt{\{26.491\div52-0.63^2\}}=22.56$。

標準差之計算，均以算術平均數爲基準，與中位數不生關係。

四分位差 測量離散度之法，除此之外，尙有更爲簡單者，卽採用四分位數。上下兩四分位數之相差，與離散度之大小，關係至爲顯然。但如彼一羣類之四分位數，與此一羣類之四分位數相同時，則不論上下兩四分位數之間，數量之分配情形如何，亦不論極端數量距四分位數之遠近，而所得之四分位相差數，終屬

相同，此乃四分位相差數之缺點。故就對於適應資料離散情形之感覺一點而言，四分位相差數遠不若平均差或標準差之靈敏。茲爲補救此一缺憾起見，特用上下兩四分位數間距離之一半，而不用其全部距離，卽以距離之一半名之爲四分位差（quartile deviation），普通多以 r 表示之者是也。r 之數値約略與所有離中差之中位數相等，但就一般情形而論，並非完全相等。在上表中，下四分位數爲 $159\frac{1}{2}$，上四分位數爲 $181\frac{1}{2}$，二者相距爲 22，於是 $r=11$。

中位數之位置，未必卽在上下兩四分位數之中點。卽以上列一表而言，上下兩四分位數之中間，爲$\frac{1}{2}(159\frac{1}{2}+181\frac{1}{2})=170\frac{1}{2}$，而上下兩四分位數，則爲$170\frac{1}{2}\pm11$。討論至此，請以極簡單之語句，敍述該一羣類之情形如次：其算術平均數爲 173.6（或云中位數爲 173），全部觀察數量之半，乃在 $170\frac{1}{2}\pm11$ 範圍之內。

在成對稱（symmetry）形式之羣類，算術平均數與衆數相合於一點時，r 又名爲機誤（probable error）；機誤一詞，有時應用之，頗收簡便之效，惟有時往往有令人誤解之虞也。

分組之資料 資料分組排列時，求離散度之方法，與不分組之資料，略有不同，且所求出之離散度，又不能十分準確。例如第五章第一節所舉之第十八表英格蘭及威爾士已婚男子之年齡，其中位數及四分位數，經在同章第五節之計算，得知中位數爲

41.80歲，下四分位數爲 33.45 歲，上四分位數爲 52.24 歲。然則其四分位差，必爲 $\frac{1}{2}(52.24-33.45)=9.45$ 歲，可知全部項數之半，均不出 42.90 ± 9.45 歲範圍之外。在同表之第二欄，已將各項對於 $42\frac{1}{2}$ 之離中差算出。假定每組之所有各項，均集聚於各該組之中心點，則同表第四欄所列，即爲各該組離中差與項數相乘之總合離中差，此列總合離中差，如不計其符號之正負，則其總和爲 $1155+926=2081$，亦即爲全部離中差之總數。於是各項對 $42\frac{1}{2}$ 歲之平均差，大約將等於 $\frac{2081}{1000}\times5$ 歲，即等於 10.40 歲。茲如計算對於中位數或對於算術平均數 (43.645) 之平均差，須加以少許之修正。惟頗感煩難者，即假定爲中心而作爲零點之組有一百三十六項，須將其離中差算出合併於離中差總數之內，同時各組之項數，既已假定均集聚於各組之中心，則斯時亦須將此假定加以修正。在各組分組甚狹（如就同表而論，苟年齡分組以一年爲組距，則可謂之甚狹）時，此項修正，可以作罷，惟在此情形之下，如欲計算分組資料之離散度，則不可不用平均差。在計算平均差之時，須以包含中位數或算術平均數之一組中心爲原點，然後計算對於中位數或算術平均數之離中差，至究以中位數抑以算術平均數爲出發點，則仍須視吾人之決定如何也。

關於上述種種理論，如計算標準差，只須分組甚狹，則原理亦全相同。例證見第二編第一章。

吉尼教授(Corrado Gini)對於差度(variatiation),曾介紹一新穎之方法(見 Variabilità e Mutabilità)。彼之主張,以爲在人口統計學上、人類學上、生物學上、或經濟學上對於變量之研究,所引起之問題,乃爲『各個量數彼此差異之程度如何』?並非求其『各個量數對於算術平均數之相差若干』?也。第二問題,對於自然科學方面,頗有其存在之理由,但對於論述羣類時,則又非盡然如此。

均互差 吉尼氏依彼之見地,提出一種測量離散度之方法,在此方法之下,第一須先求出 n 個數量相互間之 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個相差量;第二計算相差量之算術平均數,然後卽以此算術平均數,表示離散度。此一離散度,吾人可名之曰均互差 (mean difference),而以字母 g 代表之。均互差一詞,迄未爲一般所採用,此或因計算方法乃爲間接且極繁重之故(極爲單簡之羣類中,自爲例外),然吾人殊不能因此而否認其存在之價値,謂其過於單純且不合論理也。

設有 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 共有 n 個之數量,由小而大依次上升排列之,則

$$g\times\frac{1}{2}n(n-1)=(a_n-a_1)+(a_n-a_2)+\cdots\cdots+(a_n-a_{n-2})$$
$$+(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_1)+(a_{n-1}-a_2)+\cdots\cdots+$$
$$(a_{n-1}-a_{n-2})$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$+(a_3-a_1)+(a_3-a_2)$

$+(a_2-a_1)$

$=(n-1)a_n+(n-3)a_{n-1}+(n-5)a_{n-2}+\cdots\cdots$

$+(1-n)a_1+(3-n)a_2+(5-n)a_3+\cdots\cdots$

$=(n-1)(a_n-a_1)+(n-3)(a_{n-1}-a_2)$

$+(n-5)(a_{n-2}-a_3)+\cdots\cdots$

此種計算，已見於本章本節之每週死亡率即第二十四表之第七，第八，第九三欄；但此爲當 n 爲偶數之例，在 n 爲奇數時，則將中心之數以零乘之。

至於 g（均互差）與 η（平均差）之關係，可示之如次：

設 $a_1, a_2\cdots\cdots a_n$ 各個與中位數之差量，爲 $d_1, d_2, \cdots\cdots d_n$，負號均作正號計，則

$a_n-a_1=d_1+d_n$；$a_{n-1}-a_2=d_2+d_{n-1}$；其他依此類推，

又　$$g=\frac{1}{n}\left\{2(d_1+d_n)+2\cdot\frac{n-3}{n-1}(d_2+d_{n-1})\right.$$
$$\left.+2\cdot\frac{n-5}{n-1}(d_3+d_{n-2})+\cdots\cdots\right\}$$

$$\eta=\frac{1}{n}\left\{d_1+d_n+d_2+d_{n-2}+d_3+d_{n-3}+\cdots\cdots\right\}。$$

g 對於極端之差度，均予以均等之重視，而 g 又永大於 η。例如，設觀察數量，均分爲均等之間距(interval)，並以 k 代表間距，

則可示明 g 約略等於 $\eta\times\frac{4}{3}$；蓋在此情形之下，苟如 $n=2m+1$，則 $g=\frac{2}{3}(m+1)k$，$\eta=\frac{m(m+1)}{2m+1}k$，$g\div\eta=\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2m}\right)$；同理，$g-\eta$ 亦約略等於 $\frac{1}{6}mk$。

又各數量之次數，如每一數量不只有一個，但在 a_1 處有 y_1 個，在 a_2 處有 y_2 個，……在 a_t 處有 y_t 個，而 $y_1+y_2+y_3+\cdots\cdots y_t$ 相加之和等於 N，則計算手續，必將愈加煩瑣。茲示明之如下：

$$
\begin{aligned}
&g\times\tfrac{1}{2}\mathrm{N}(\mathrm{N}-1)=\\
&y_t d_t(\mathrm{N}-y_t)+y_{t-1}d_{t-1}(\mathrm{N}-2y_t-y_{t-1})\\
&+y_{t-2}d_{t-1}(\mathrm{N}-2y_t-2y_{t-1}-y_{t-2})+\cdots\cdots\\
&+y_1d_1(\mathrm{N}-y_1)+y_2d_2(\mathrm{N}-2y_1-y_2)+y_3d_3(\mathrm{N}-2y_1-2y_2\\
&\qquad -y_3)+\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

式中，第一及第二行之 d，乃分別為位在中位數之上之數量，與在中位數下之數量，相減之差量。各因子之計算，依照上式，頗為易易，然後列成表格（註一）。

又如各數量之分配，成為差誤常態曲線（normal curve of error 見第二編第二章）形式時，則可得下述之關係：$\eta=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}=\sigma\times\cdot798\cdots\cdots$，$r=\sigma\times\cdot6745$，$g=\eta\sqrt{2}=\eta\times1.414\cdots\cdots$。此種關係，即在非常態之分配中，亦時常得出約略相近之數。例如在

本章本節第二十四表每週死亡率下，$\eta=\cdot7\sigma$，$g=\eta\times1.41$，但 r 則僅等於 0.5σ。

如遵照吉尼教授原意，採用所有相互差量平方之平均數之二次方根，則不論分配所現之形式是否合於常態，仍可得 $\sigma\sqrt{2\left(\frac{n}{n-1}\right)}$，即作為 $\sigma\sqrt{2}$，亦極相近。

離散度之數量，既如上述，但離散度數量，如成為名數，而言若干先令，幾歲，或標尺之若干格時，吾人須以之表示對於平均數之關係。例如，在一工資羣類，中位數為四十先令，下四分位數為三十先令，上四分位數為五十先令，四分位差為中位數之四分之一，但在另一羣類，中位數為四十五先令，下四分位數為三十五先令，上四分位數為五十五先令，則四分位差乃為中位數之九分之二；由此可作一合理之論斷：二羣類之四分位差雖相同，但仍可認為第二羣類之離散程度，較之第一羣類為輕。

離中係數 為達到比較目的計，可用下列三種算法：

$$(a)\ \frac{\text{四分位差}}{\text{上下四分位數之平均數}}\ (\text{註二})；$$

$$(b)\ \frac{\text{平均差}}{\text{中位數}}；$$

$$(c)\ \frac{\text{標準差}}{\text{算術平均數}}；$$

但一般所應用者，乃用標準差作為算術平均數之百分比，換言之，即用 $\frac{\text{標準差}}{\text{算術平均數}}\times100$，此即名為離中係數(coefficient of variation) 者是也。如用第二十四表每週死亡率表之數字,算出之離中係數,為$(22.56\div173.63)\times100=13.0$。

第二節 偏斜度

一個分配曲線之偏斜度(skewness),或名為不對稱(asymmetry),可在衆數,中位數與算術平均數三者不能相合於一點時,判定之。但以此為判斷之標準,尚嫌不能十分準確,欲求更為確定之表現,則須視對於中位數計算之正號離中差之和,是否與負號之離中差之和,數值完全相等,如其不相等也,則知羣類有偏斜之形狀,而可以作計算偏斜度之根據矣;又當上四分位數與下四分位數,或十分位數與十分位數,與中位數之距離不相等,則亦可視為羣類有偏斜之表示。所謂偏斜度者,乃指一曲線之形式,非言曲線之大小也,但用一絕對之數量(absolute quantity)—— 類似一橢圓形之離心率 (eccentricity)—— 測算之,結果亦頗切合,故求用作測量之用,必須覓得一種由兩個具體數量而成之比率。計算之法為簡單者,乃如下述:

設以q_2代表上四分位數超出中位數之部分,以q_1代表中位數超出下四分位數之部分,則$s=\frac{q_2-q_1}{q_2+q_1}$即為求得之偏斜度(註三)。

曲線如為對稱形式,則$q_2=q_1$,而$s=0$;如q_2大於q_1,則s為正數,如q_2小於q_1,則s為負數。又如q_1等於零,則s變為$+1$,

如 q_2 等於零，則 s 變爲 -1；換言之，如中位數與下四分位數相合於一點，則 s 爲正一，如中位數與上四分位數相合於一點，則 s 爲負一。故 s 一數量，永無大於一之可能，且於等於 $+1$，-1 或等於零時，其意義均有一定也。返觀本章第一節之每週死亡率表，其 $q_2=9$，$q_1=13$，則 $s=\frac{-4}{22}=-0.19$。又查第五章第一節之已婚男子年齡表，其 $q_2=10.54$，$q_1=8.35$，則 $s=0.12$。至 s 之值大小，所含意義若何，非集成經驗，不易領會，惟在 $s=.1$ 時，不妨謂其偏斜度甚微，$s=0.3$ 時，則其偏斜度較大也。

最後吾人須加注意者，一羣類之中心地位，離散度及偏斜度，三種表徵數(characteristics)，只須用中位數及四分位數即可求出；中位數代表中心之位置，四分位差表示離散度，而上述之數量，即表明偏斜度者也。

第三節　平均數之應用舉例

平均數之應用　平均數之性質及用途，前已討論及之，如前所研究者倘不完全則已，如其果爲透徹，而平均數之應用範圍果爲甚廣也，玆請應用慎爲選擇具有確定意義之少數數目，進而表明任何之數字羣類。

對於行車時刻之應用　請先作一嚴重之試驗，舉一日常生活事項爲例，即就郊外商人之觀點，考察兩條火車路綫之優劣，

以便決定在買季票時,究以購買何綫者爲宜。

玆將一八九八年英國自萊仔亥德 (Leatherhead) 至倫敦之火車行車時刻,列表於下:

萊仔亥德至倫敦火車行車時刻
行車所用之分數

華鐵盧站

下行車——60,50,52,48,47,61,50,44,48,53,45,42,45,49,43,48,42,43。

星期日——50,50,47,49,50。

上行車——51,46,51,48,43,44,48,48,64,45,48,47,45,47,46,47。

星期日——48,48,51,51,51。

倫敦橋站

下行車——67,65,65,61,74,51,56,66,65,53,59,41,49,44,58,57,56,67,80。

星期日——67,52,66,68,88,65,65,68,65。

上行車——69,57,53,58,54,41,58,52,42,40,55,67,79,98,60,66,68,64,71。

星期日——72,71,69,70,62,81,73,73。

維多利亞站

下行車——77,65,55,76,77,88,48,53,46,69,89,54,82,71,90。

星期日——92,45,81,84,78,61,85,83,85。

上行車——87,65,69,69,47,48,51,83,101,58,62,61,76,103,

星期日——81,76,80,85,87,82,94。

各站間之必要數量，列表於後：- - -

	倫敦橋站（分鐘數）	維多里亞站（分鐘數）	華鐵盧站（分鐘數）
四次特別快車之平均數	41	$46\frac{1}{2}$	$42\frac{1}{2}$
最低十分位數	$47\frac{1}{2}$	48	43
中位數	65	77	48
衆數	65	…	48
星期一至六，開車次數	38	29	34
總平均數	63	73	48

（第二十五表）

於此須加聲明者，統計方法之施用，一般只限於一問題之一面，準時行車之問題，固可作統計之研究，但車上設備是否舒適，及沿路風景等問題，均不在吾人研究範圍之內也。

下舉一例，示明一關於社會學之資料，所組成標準羣類之表徵數。

工資調查表列　下表所列，為一八六二年及一八九一年，英國工程人員聯合會認可之工資數。

英國工程人員聯合會若干分會一八六二年及一八九一年之每週工資（加工不計）（第一）

	一八六二 先令	一八六二 便士	一八九一 先令	一八九一 便士		一八六二 先令	一八六二 便士	一八九一 先令	一八九一 便士
亞克令頓	27	0	31	0	布來克倍兒恩	27	6	32	0
阿石福特	33	6	30	0	波爾頓	27	6	28 / 32	0
阿石頓恩得爾林	29	3	34	0					
拔可稷	26	1	28	0	布里治華德	24	6	24	0
拜柔音份爾奈斯	31	0	34	0	布來頓	24	$8\frac{1}{2}$	29	0
巴斯	29	0	31	0	布里斯他爾	31	0	32	0
白得福特	27	0	29	0	伯爾恩累	27	0	30	0
必爾斯頓	28	0	30	0	伯爾吞局春特	25	0	30	0
賓累	24	0	29	0	伯瑞	28	3	30	0
倍兒京亥得	29	0	35	6				32	0
伯明漢	32	0	36	0	卡地夫	31	0	34	0

英國工程人員聯合會若干分會一八六二年及一八九一年之每週工資（加工不計）（第二）

	一八六二		一八九一	
	先令	便士	先令	便士
卡里斯羅	24	6	30	0
卡布斯頤	30	0	34	0
卡斯特	30	0	32	0
抽奔特	26	0	32	0
寇恩	25	0	31	0
康里頓	24	0	28	0
寇文特利	28	0	34	0
克里由	29	4	30	0
達林頓	25	0	31	6
達特福特	34	0	38	0
達爾文	27	0	32	0
得爾拜	26	0	29	0
當卡斯特	28	6	31	6
費維爾	35	6	36	0
鼎費爾得洛克	36	0	40	6
愛塞斯特爾	23	0	28 32	0 0
費維山	34	0	33	0
佛克斯東	34	0	32	0
佛蘭木	24	0	27 30	0 0
根斯巴羅	27	6	28	0
哥老摟波	27	2	32	0
哥呑塞斯特	28	0	32	0
哥藍仔不	28	6	30	4
哥里木斯白	28	0	32	0
哈里發克斯	23	1	31	0
漢累	28	3	32	0
哈特爾浦	26	0	34	10
里物得	27	0	30 34	0 0
侯里亥得	32	0	28	0
赫得斯費爾得	26	0	26	0
赫爾	27	6	34	0
亥得	30 28	0 0	30 28	0 0
伊布斯維治	28	6	28	0
克爾鳳累	23	0	27	0
可以得敏士得	28	0	30	0
藍加斯得	25	0	32	0
里茲	25	0	30	0
雷塞斯特	26	0	31	6
雷	27	9	31	6
林肯	26	7	28	6
利物浦	29	0	34	0

	一八六二		一八九一	
	先令	便士	先令	便士
倫累	22	0	26	0
麥克爾費爾德	24	0	29	6
曼塞斯特	29	7	35	0
麥克斯巴羅	25	0	34	0
密得爾頓	29	5	33	0
密爾頓及愛爾斯加	28	0	34	0
尼斯	32	0	30	0
紐阿爾克	25	0	29	0
紐卡斯爾	25	0	35 37	0 0
紐荷蘭	30	8	34	0
紐浦特	30	0	32	0
紐唐（斯他科浦特）	29	0	32	0
牛頓阿巴特	33	0	33	0
腦贊布頓	26	0	32	0
腦絲夫里特	36	0	36	0
南北歐爾夾	26	0	35	0
腦爾維支	32	0	29	0
腦廷漢	27	5	34	0
奧爾得拜瑞	28	0	34	0
奧爾得漢木	29	0	33	0
彼得巴羅	28	6	33	0
浦來毛斯	32	0	33	0
滂堤浦來得	24	0	30	0
浦爾特毛斯	35	0	34	0
浦來斯頓	27	0	32	0
拉得克里夫布里治	27	0	30 32	0 0
里丁	28	0	32 34	0 0
里浦累	26	0	26	6
拉則漢木	27	6	32	0
拉哥白	32	0	28 32	0 0
拉治累	24	11	30	0
聖海倫斯	28	0	34 36	0 0
晒費爾得	28	0	36	0
西浦累	25	9	28 30	0 0
市盧白瑞	30	6	32	0
斯麥斯維克	28	0	35	0
擋贊頓	32	0	34	6
擋爾拜布里治	24	6	30	0
斯塔里布里治	38	3	32	0

英國工程人員聯合會若干分會一八六二年及一八九一年之每週工資（加工不計）（第三）

	一八六二 先令	一八六二 便士	一八九一 先令	一八九一 便士
斯塔克浦爾特	28	0	32 34	0 0
斯塔福特	28	0	32	0
斯他克吞昂布里治	24	0	36	0
斯頓克昂春特	29	0	32	0
斯特拉德及斯拉浦	26	0	30	0
孫頓	31	6	31	0
桃得毛爾頓	26	0	28	0
維克發爾德	25	0	30	0
瓦林吞	28	0	24	0
瓦特福特	35	0	36	0
溫斯布瑞	26	0	31	0
儒得黑文	25	0	28 36	0 0
維甘	28	0	34	0
維爾發漢普吞	28	0	33	0
維爾發吞	29	2	29	0

	一八六二 先令	一八六二 便士	一八九一 先令	一八九一 便士
華爾塞斯特	31	0	30	0
倍爾索得賽	35	4		
布來克華爾	34	0		
鲍	36	0		
哥林維之	34	0		
京斯克拉斯	36	0		
藍白斯	35	8		
倫敦東區	35	0		
倫敦北區	35	10	38	0
倫敦南區	35	0		
倫敦西區	35	6		
馬利爾崩	33	0		
斯特拉得福特	35 33	0 6		
桃爾漢木來夾	36	6		
吳爾維治	36	0		

由此可得簡括之表徵數如下：

	一八六二年（一分會作一計）先令（一）	便士	一八九一年（一分會作一計）先令（二）	便士	一八九一年（按各分會會員計算）先令（三）	便士
最高工資	36	6	40	6	…	
最高十分位數	35	0	38	0	38	0
上四分位數	31	4	34	0	36	0
中位數	28	0	32	0	34	3
算術平均數	28	10	32	4	33	4
衆數	28	0	30 32	0 0	…	
下四分位數	26	0	30	0	31	6
最低十分位數	24	6	28	6	30	0
最低工資	22	0	24	0	…	
四分位差	2	8	2	0	2	3
偏斜度（用四分位數計算）	.25		0		－.22	

上表第三欄之計算，乃以會員實在所得之工資爲基準，假若各分會會員之工資，並非實在之數，而爲會員實在工資平均數，雖實在工資與其平均數相差不遠，但表中第三欄之數字，必因之而有變動。

以第二欄與第三欄比較，可知不惟所有各種平均數，均有增加，而且因最低十分位數及下四分位數之增加，較最高十分位數及上四分位數之增加爲尤速，可知下半部有逼近上半部之勢。再者，第二欄之工資，較第一欄者爲緊湊。

第四節　第三類表列法

文字答語之表列法　非數字或文字敍述性質之答語，表列之方法，在未將平均數討論完竣之前，不得不暫行從緩。茲既討論至此，特舉例如下，以示用形容詞之答語，所組成之羣類，如用中位數四分位數等論述之，亦頗能收簡捷之效。

一八九一年，英國工程人員聯合會，經向各分會調查『加工工作幾許』？一問案，茲將各分會書記之答語，列表於下：

表格之解釋　將下表加以檢查，即足示明列表之方法。答語之大部，用想像之尺度，審定其位次，可謂已有十分確定，惟惜數字之答案，如何安插，反覺不甚明顯而已；然此則須視內證(internal evidence)決定之，否則即須熟知該業之情形也。各分會之答覆，既由各該分會之書記所塡報，然則各人所用之形容詞，

（第二十六表）

答語	分會數	會員數
絕無	4	110
未有	1	78
極少	23	4,836
微有少許	1	63
偶爾有之，但極少	1	350
對於修繕工作有一點	1	500
有一點	2	73
必要時有二小時	1	80
少有	1	59
有少許	1	16
除修繕工作外少有之	1	66
僅修繕工作有之	2	216
不多	6	1,125
修繕工作有之	1	600
並不多	3	644
並不甚多	2	162
不大有	1	7
不一定何時有	2	43
有損壞或緊急之時	7	606
例爲二小時	1	136
主要爲修繕工作	1	20
偶爾有之	2	90
必要時	1	348
臨時加工	2	142
修繕工作上甚多	1	23
四星期至多十八小時	1	1,000
中常	3	262
生意盛者習以爲常	1	200
平均一星期五小時	1	96
海洋船上頗夥	1	400
船塢工作習以爲常	1	650
大都有之	2	146
習以爲常	1	693
多量	1	263
甚多	1	72
極多	1	550
一星期九小時	1	39
一星期十小時	1	106
一星期十二小時（最高量）	1	700
一星期十四小時（忙時）	1	106
一星期十至十八小時	1	5,000
	88	20,676
未分類者：		
未答	36	5,114
少極	1	250
近來已不多	1	160
機械工廠中每年有六個月	1	60
鋼鐵工廠有之	1	48

在各人心目中，對於數目之意義，未必盡人皆同，然上表所列，所表示之情形，已盡清晰之能事，故應用中位數及四分位數，亦頗適宜也。茲如以各分會之會員為單位，除未曾分類者可以不計外，其中位數乃為『四星期至多十八小時』，或『中常』，下四分位數乃為『極少』，上四分位數乃為『忙時每星期十四小時』。如以分會為單位，中位數為『不多』，下四分位數為『極少』，上四分位數為『必要時』，或『偶爾有之』。

此法結果之精度 (precision)，雖大有出入，但應用者極廣，蓋遇文字答語組成之兩種羣類，非用此法，不足以言比較也。然所謂精度，測量之法何如？此則須在列表時，將序列加以合理之變更，再求出其中位數；然後以此中位數與未變更前之中位數相比。而查二次中位數之位置有無移動，如有移動也，則移動之距離，卽為精度之測算根據矣。

總括敍述 現既有平均數方法，供吾人任意之應用，則請卽用之將一數字羣類列成表格並為總括之敍述。

試舉一例，請就一八八六年英國工商業蕭條問題調查委員所發問題之答案討論之。問題甚多，茲擇四則列下：

(1)入會工人人數；

(2)一八八五年失業者之人數；

(3)一八八五年之每週工資；

區　名（一）	一八八五年各區人數（二）	一八八五年失業人數（三）	一八八五年現行工資（四）	一八六五與一八八五年間工資之變動（五）
白爾發斯特	1,100	130	二八先令至三六先令	略有增加
寇文特利	2,500	230	三一先令六便士	定合同之工作，減百分之五十
杜京費爾德	170+	20+	三一先令	略有增加
高第	1,400	45%	有技能工人二五先令 無技能工人一五先令	計時工資——一八六五年二二先令；一八七二年，二四先令；一八八〇年，二六先令；一八八三年，二四先令；一八八五年，二五先令；
哥拉斯告	28,000	4,000	二六先令	計時工資，比一八六四年高百分之五；
哥拉斯告（聖裴拉克斯）	1,600	250	××	一八七二至一八七三年增加百分之十五，一八八五年與一八六五年相同。
哈特爾浦	1,200	400	三一先令六便士	增三先令
哥老提波	135	10	三二先令	×　×　×　×　×
利牧浦	280	38	××	在一八七二至一八七三年，升起百分之七又二分之一，一八八五年與一八六五年相同。
蒙尼賓斯	114	18	二一先令	有技能工人——一八六五年二四先令；一八七六年二七先令；一八七八年二五先令；一八八三年，二八先令；一八八五年，二五先令。
騰廷漢	4,000	600	最低三四先令	一八六五年，二八先令；一八八五年三四先令。
奧爾得漢木	1,600	96	平均三三先令	增百分之五。
牛津	45	××	三三先令	×　×　×　×　×
賠斯累	800	××	二八先令六便士	一八六五年二六先令；一八八五年二八先令六便士。
甫來斯頓	630	40	二八先令	無變動
甫來斯頓	900	120	二八先令	無變動
西浦累	201		二八先令六便士非會員工人，二四先令	一八六五年二六便士；一八六九至一八七三年三二先令；一八八五年；二八先令六便士。
普爾拜布里治	1,120	43	二八先令	一八六五至一八七五年二五先令六便士；一八七五至一八八五年二八先令。
桑得蘭	3,200	400	三三先令	一八六四年二七先令；一八七四年，三四先令；一八七五年至一八八五年，自三一至三七先令不等。
采頓	6,050	2	三一先令六便士	×　×　×　×　×
成爾維爾頓	45	××	三一先令	一八六五年二六先令；一八七五年三一先令。
署斯布瑞	400	30	三〇先令	增二先令。
韋京頓	170	70	二八至三六先令不等	增百分之三十。

（第二十七表）

(4)一八六五年與一八八五年間工資之變動。

次將英國工程人員聯合會各分會之書記所給之答覆，列如上表。

將表格整理就緒擬成報告之時，須併入下列之提綱表。茲爲舉例起見，下列之表，只列一分會之數字，其餘從略。

第一表　僱傭情形提要

分會會名	調查所得之各分會會員人數	失業人數	失業人數之百分數	各分會失業人數百分數之中位數
A.S.E.	55,170	7,142	13	12
O.S.B.				
其他從略				

(第二十八表)

第二表　現行工資

分會會名	各分會之平均工資				各分會工資之四分位數				離散度
	不加價		加價						
	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	
A.S.E.	30	0	29	7	28	0	32	0	$\frac{1}{15}$
O.S.B.									
其他從略									

(第二十九表)

第三表(甲)

一八六五至一八八五年間之工資變動

分會會名	各分會數				增加之百分數之中位數	各分會會員所佔之百分數			
	無答覆者	減低者	無變動者	增加者		無答覆者	減低者	無變動者	增加者
A.S.E.	4	1	5	13	10	11	4	6	79
O.S.B.									
其他從略									

（第三十表）

文字提綱——『就全部情形考察，絕大部分均在一八六五至一八八五年間有顯著之增加，約等於全部增高百分之十。因數字不完全確定，故不能求得確實之平均數』。

第三表乙，一八六五與在一八七三年左右最高額之工資變動情形。

第三表丙，一八七三年左右之最高額與一八八五年之工資變動情形。

（註一）　上列公式之計算，與吉尼氏原用之法，微有不同，請參閱吉尼氏同書第三十頁及二十九頁底註。

（註二）　本書原著者，於本書之前數版中，名此數量爲離散度（dispersion），以該數有永不大於1之便利在也。

（註三）　並請參閱第二編第一章第三節

第七章　圖示法

第一節　總論

平均數與圖式　在初級統計學中，有重要方法兩種，爲一般學生或辦理統計事務之官員，所不可不知，且無數學知識亦易瞭解；但竟爲一般所誤解，或被對統計無興趣或向不通統計之人士所忽略者，厥爲平均法與圖示法。此兩種方法所以相提並論者，乃以平均數及圖式之用途，有幾不可分之連繫在也。設遇有極大極繁之數字羣類當前，雖用表列法已爲明晰之表示，但吾人對於許多數字之整個情形，仍不能完全領略。任何一列數字——各城市之人口，各級年齡上之死亡率，許多工人之工資，若干年數之進口貨值——數列愈長，愈難令人索解。十個數目組成之序列，吾人或可一望而知，二十個數目之序列，雖稍費力，亦不難明瞭；但如一列印就之一百年數字，則欲其予吾人以何等之印象也殊難。一樹易見，成林之樹木則不易辨清矣。關於平均數用途上所有問題之試金石，即視所選用之平均數，是否能給予全部羣類以最佳之總結，使此一總結數字令人可以一目瞭然。在平均數一名詞意義大爲擴張時，即可知同時選用三，四乃至十個適當之數字，

悉能充分表現任一羣類之主要形態。平均數如此，圖示法亦然，圖示法之主要用途，乃在表現大羣類之數字，以便瞭解全部之情形，至一切圖式之是否完善，其試金石乃視所繪之圖，能否托出一組數字之最佳觀感，令人一望即可領會。惟圖式尙有一用途，爲平均數所不及者，即欲表現時間數列，唯圖式實優爲之。然就實質言之，圖式又不如平均數之重要；蓋平均數雖由若干數字推出，但離開數字亦能獨立存在，而代表所測量之數量之眞正形態。唯用平均數，乃可以此一羣類，與其他之羣類相比較，而圖式則不然，蓋圖式乃立於輔助之地位，非主要之元素，即完全取消之，亦無不可，因用之乃在助目力之所不及，且爲閱者節省時間計也。

圖式法及平均數 爲使本章與前一章關係銜接起見，茲請同時用兩種方法，表示同一之數字羣類，即以多數工人之工資爲例以討論之，資料如下：

工人之工資及人數

工資	人數	
自十五先令至十六先令	200	1000
自十六先令至十七先令	400	
自十七先令至十八先令	100	
自十八先令至十九先令	100	
自十九先令至二十先令	200	

自二十先令至二十一先令	200	
自二十一先令至二十二先令	300	
自二十二先令至二十三先令	200	2,200
自二十三先令至二十四先令	500	
自二十四先令至二十五先令	900	
自二十五先令至二十六先令	1,200	
自二十六先令至二十七先令	800	
自二十七先令至二十八先令	700	3,500
自二十八先令至二十九先令	500	
自二十九先令至三十先令	300	
自三十先令至三十一先令	300	
自三十一先令至三十二先令	400	
自三十二先令至三十三先令	400	2,100
自三十三先令至三十四先令	500	
自三十四先令至三十五先令	500	
自三十五先令至三十六先令	600	
自三十六先令至三十七先令	400	
自三十七先令至三十八先令	100	1,200
自三十八先令至三十九先令	80	
自三十九先令至四十先令	20	

如用平均法，上列羣類可以下列數字代之：

全部之平均數　　二十七先令六便士

最低1000人之平均數一十七先令

最高1000人之平均數三十六先令六便士

中等4000人之平均數二十七先令

或

中位數	二十六先令九便士
四分位數	二十四先令二便士
	三十二先令
十分位數	二十先令
	二十三先令六便士
	二十四先令九便士
	二十五先令八便士
	二十六先令九便士
	二十八先令二便士
	三十一先令
	三十三先令四便士
	三十五先令四便士
衆數	二十五先令三便士
次要衆數	十六先令六便士
	三十六先令

或

工 資	人數對全部之百分數
自十五先令至二十先令	10

自二十先令至二十五先令	22
自二十五先令至三十先令	35
自三十先令至三十五先令	21
自三十五先令至四十先令	12

簡單圖式之構造法　此一羣類，以圖式表列之，如第二圖。此為用圖表示兩變數相互關係之一例。與此相類之圖式，可用以表示各級年齡中之結婚率或死亡率，表示身長各異之人數，在各種價格上之需要，或用以表示其他任何同質數量之羣類。即以此同一之構圖法，表示若干年中任何數值之變動，亦無不可。構圖之法，須在紙之底邊，畫一平行線，在此線上分成相等之距離，以代表依次增加之若干數量，諸如年齡，所得，身長，價格，時間以及其他等等。此線名曰橫軸 (axis of abscissa)，線上某一點至零點之距離，謂之該點之橫坐標 (abscissa)。在紙之側邊，經過零點再畫一線，與橫軸成為直角，則此垂直之線，即名縱軸 (axis of ordinate)。在此縱軸上，亦分成等距，依次代表含有橫軸上所代表數量之人數或件數。又於橫軸上分別在各點各畫一垂直之線，標明在該一點上有若干人數或件數，此線即為縱坐標 (ordinate)。請閱下列一圖，橫坐標所表示者，為工資數，縱坐標代表賺各級工資之人數。橫坐標縱坐標既已判明，然後即在各縱坐標之上端，各連一直線，於是圖式乃告完成。實際上，如用方格

紙，則可不用畫縱坐標，而縱坐標之頂端，亦可標出。

工資圖之解釋 由此一圖，令人一望即知，賃銀勞動者依所賺工資分配之情形。工資在十五至十六先令者人數甚少，在十六至十七先令者則漸多，但在十七至十九先令者人數又大爲減少。自十九先令起，人數依次連續上升；至二十四先令與二十七先令之間，人數乃登峯而造極，其中尤以在二十五先令至二十六先令者爲最多。但自是而後，則每況愈下，直至三十先令一組而後已。此三十先令以前一組人數雖過少，而與十七至十九先令之間者相較，尚非過低。降至三十先令之後，復又以有規則之進展，漸次上升，至三十六先令後，乃又急轉直下，而達於三十九先令一組之最低數。由此觀之，在二十五先令左右集合之大部，乃爲全類之主體，而三十六先令之一組則屬其次，但在十六先令之處，則爲極小而幾別成一部。凡此種種，示與吾人，在三十至四十先令間，有高度技能之工人甚多，至有平常技能之工人大衆，則其工資乃在二十先令至三十先令之間，但有極少之粗笨無技能工人，工資均在十六先令左右。用一圖式形態畢現，如用表列豈可得哉！

於此吾人須加注意者，表上在十五先令至十六先令間之人數，正由在十五先令六便士（該組之中點）之縱坐標表示之。如表列所根據之原來數字，能取至最近之一便士爲止，則縱坐標應畫在十五先令五又二分之一便士處。各組之中點位置，畫時須準

確安置，此一要事也。

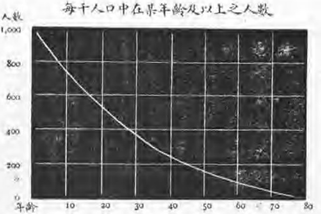
連續性　連結各縱坐標頂端之線，用途有二。第一為便於判斷各相對高度 (relative height)；第二可表示連續性 (continuity)。第一點姑不具論，茲就第二點作圖舉例解明於下：

每千人口中之年齡分配

（根據一八九一年之人口普查）

年齡	人數	年齡	人數
自零歲以上	1000	自十七歲以上	607
自一歲以上	973	自十八歲以上	587
自二歲以上	949	自十九歲以上	567
自三歲以上	925	自二十歲以上	547
自四歲以上	901	自二十一歲以上	528
自五歲以上	877	自二十二歲以上	510
自六歲以上	854	自二十三歲以上	491
自七歲以上	830	自二十四歲以上	474
自八歲以上	807	自二十五歲以上	456
自九歲以上	783	自二十六歲以上	439
自十歲以上	760	自二十七歲以上	423
自十一歲以上	738	自二十八歲以上	407
自十二歲以上	715	自二十九歲以上	391
自十三歲以上	693	自三十歲以上	376
自十四歲以上	671	自三十一歲以上	361
自十五歲以上	649	自三十二歲以上	346
自十六歲以上	628	自三十三歲以上	332

年齡	人數
自三十四歲以上	318
自三十五歲以上	305
自三十六歲以上	292
自三十七歲以上	280
自三十八歲以上	268
自三十九歲以上	256
自四十歲以上	244
自四十一歲以上	233
自四十二歲以上	222
自四十三歲以上	211
自四十四歲以上	201
自四十五歲以上	191
自四十六歲以上	180
自四十七歲以上	171
自四十八歲以上	161
自四十九歲以上	152
自五十歲以上	143
自五十一歲以上	135
自五十二歲以上	127
自五十三歲以上	119
自五十四歲以上	112
自五十五歲以上	104
自五十六歲以上	98
自五十七歲以上	91
自五十八歲以上	85
自五十九歲以上	79
自六十歲以上	73
自六十一歲以上	67
自六十二歲以上	62
自六十三歲以上	57
自六十四歲以上	52
自六十五歲以上	47
自六十六歲以上	43
自六十七歲以上	38
自六十八歲以上	34
自六十九歲以上	31
自七十歲以上	27
自七十一歲以上	24
自七十二歲以上	21
自七十三歲以上	18
自七十四歲以上	15
自七十五歲以上	13
自七十六歲以上	11
自七十七歲以上	9
自七十八歲以上	8
自七十九歲以上	6
自八十歲以上	5



（第　三　圖）

上圖，橫軸代表年齡，縱軸代表一八九一年夏末英格蘭及威爾士人口每千人中尚存在及在各級年齡以上之人數估計數。縱坐標乃由代表每歲年齡之中點之橫軸量起；但壽命之長短，不能照幾年幾月幾日計算也。此圖之本意，即爲表明每一整歲尚存人口之比例，爲達此目的計，縱坐標之頂點所連成之線，必須不致出現破斷及折角，而應有絕對之連續性也。

實際上，不滿一整歲之較小年齡組距，無標出其縱坐標之必要，恐令人一見不能領會其詳細情節也。然上圖所畫之線，亦確與人口數爲無限大而年齡分組無限小者所呈現之線之形式相同。

就此所論各點，請考察前繪之工資統計圖（第二圖）。某一年之平均工資收入，計數時未必每一先令，甚至每一便士，均無

錯誤，此乃觀察件數不足之故，苟如件數充足，吾人自可將工資分爲整齊之順序，而以微至一法尋(farthing)爲準，則表示工資之線，必不致有尖銳之折角，而成爲連續之曲線。圖式所給予吾人之印象，卽爲連續性之存在。又吾人於下列第六圖中，可得一印象，出口貨値之線，亦確爲日接一日連續不斷也。

面積 經過一顯然之階段，吾人頗可假定，由橫軸相接兩區分點畫成之兩條垂直線，與由縱軸相接兩點畫成之兩條水平線，四條線交叉所成之中間方格面積之單位，乃代表一個工人；由此假定，可知上以曲線爲界，下以基線爲止，以左右兩條經過代表任何兩種工資額之兩點所成之垂直線爲範圍，所畫成之面積，卽爲工資介乎底線上所代表之該兩種數額之工人總數。

故在第二圖中，經過中位數，M，四分位數，Q_1，Q_3，十分位數，D_1，D_2，D_3，D_4，D_5，D_6，D_7，D_8，D_9，等點所繪成之線，卽將面積 $ABm_1m_2m_3CD$，分別分爲二，四，及十個等面積。該圖之重心，乃在於經過平均工資，V所畫成之垂直線上；至經過最高位置m_1，m_2，m_3 三點之縱坐標，在基線上之基點，卽爲三個衆數之所在。

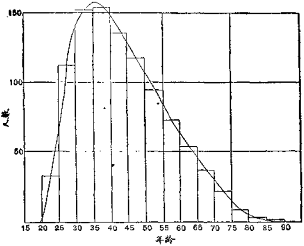
分組資料 在資料之分組甚寬時，吾人以用下列方柱圖(block diagram)之法爲宜。

一九一一年英格蘭及威爾士已婚男子之年齡分配

甲　方柱圖——每千人中每五歲一組之人數

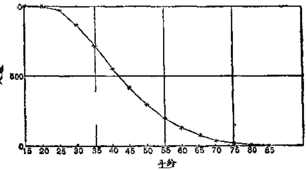
第四圖　一九一一年英格蘭及威爾士已婚男子之年齡分配

甲、方柱圖—每千人中每五歲一組之人數



（第四圖甲）

乙、累積圖—每一千人中各級年齡以上之累積人數



（第四圖乙）

上列之甲，乙，二圖，乃爲前表第十八表已婚男子人數依年齡分配之例釋。在第十八表中，吾人除只知其年在二十歲而不滿二十五歲之比例外，並無別項消息可得。但今用圖式，以代表五歲之組距爲底，以與該組記錄上人數成比例之數爲高，乃成一長方形，所有前表未能宣示之事實，玆均已有精確之表示。根據前第二圖之指示，各組人數乃均在各該組之中心。如就年齡之圖式而論，各歲人數理應連續不斷，於是如完全表示之，卽爲連續曲線，吾人已熟知之矣，然則以五歲組距爲底之面積，必與各該長方形之面積相等。此種曲線雖爲用隨手畫法，在圖上繪成，但若全線之位置，並無動搖不定之處所，則此曲線必足爲事實之代表。

資料亦可用圖乙代表之，在圖乙中，十字號卽爲表上記錄之資料。將此若干十字號各連成直線，若事實現象果爲連續的，則結果所得之線，與曲線乃無二致，卽在本圖之曲線，亦殊難與各點所連成之直線辨別也。

必需之確度 繪圖之詳細技術，標尺尺度之位置，使圖式明晰之辦法，等項可於本章所舉各圖示明之。至於數字究以萬爲單位，以千爲單位，或以一個爲單位，其確實之程度，乃純以目力能以領會爲決定之標準。在本章所舉之圖例，所表示之數字，設在一十個中，有一易其位置，卽判然可見，此乃平常之限度也。若進

而欲求更高之確度，誠亦非事實所需要，蓋圖式不能離表列而獨立，其功能亦僅爲補目力之所不及，特別顯示數列之重要形態而已。

目力　在未討論選擇代表數字之尺度前，圖式必如何乃可予吾人以明顯之印象，應有加以研究之必要。夫吾人之肉眼，所能判斷者有三：一，距離；二，比率；三，角度是也。茲以第六圖之虛線爲例，討論距離，比率及角度三端。

（一）肉眼對於距離之長短，可予以頗爲安全之判斷；兩點對於基線之距離，何者較遠，何者爲近，一見即知，幾無可疑之點；若用方格紙，則雖有千分之一之差，亦能明察無遺。且眼目對於差額之判斷，最爲神速；例如圖中一八八三年出口貨值超過一八八五年出口貨值之數，較之一八九〇年出口超過一八八三年者爲尤巨，一望可知也。

（二）一八八九年之出口貨值，幾爲一八六二年之兩倍，或一八七八年之出口貨值，約當一八九〇年之四分之三；均不難一望而知。但只恃目力，其測量所得之確度，並不甚高；一八七三年出口貨值與一八七一年出口貨值之比(1.095:1)，較一八八二年出口貨值與一八八〇年出口貨值之比(1.073:1)爲大，實難用目力覺察之；然此並非目力不能判斷之證明，反之，該圖所給予吾人之印象，一部乃由此種性質無意識之計算而完成也。至如欲

得確實之觀察,須用本章第五節所述之方法。於此,吾人須注意,爲表現此等觀察,必須插進基線;且因目力之計算,本爲無意識者,若以一圖表示若干年之運動形勢,而無基線,則其將給予吾人以錯誤之印象也無疑。

(三)設吾人質問:一八八六至一八八七年增加之量大耶?抑一八八七至一八八八年之增額大耶?則欲得迅速之答覆,與其査視二年度之差額,無寧觀察二者上升之角度。後一年度之變動,上升之線,較前一年度上升之線爲峻峭(與水平線成一較大之角);故後一年之變動,必較前一年度者爲大,實際上,後一年度增加有一千二百六十萬鎊之多,而前一年度只增加九百二十萬鎊也。此種目力觀察最有效之練習,莫過於判斷增加率發生變動之年度;例如,一八六二至一八六三年,出口貨值既有增進,一八六三至一八六四年,增加漸緩,一八六四至一八六五年漲勢仍輕,在一八六五至一八六六年,則驟然上騰;自一八六六至一八六七年,漸漸下降後,復又以加速度接續上升,直至一八七一年而後已,其他年度依此類推,姑不多述。一八七二年至一八七六年之線,與基線成凹面 (concave),乃爲急轉直下之形勢;一八七九至一八八二年之凹形,又緩緩上升。總之,如此所示之增加,乃絕對或實際之高漲,並非與各該年度之最初數量成比率而計算也。

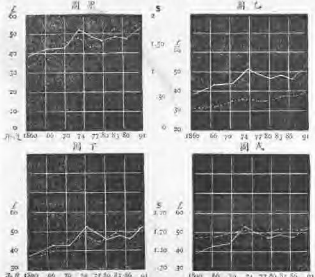
尺度之選擇　尺度爲定數字位置所必需,究應如何選擇之,殊難規定準則。吾人所欲研究者,只縱橫尺度之相對比率一問題。全圖不可過大,以一望可窺及其全豹爲宜;如圖式複雜,所述者爲極多年代,及極多之變動數字,則纖細之確度,乃不得不付之犧牲。設橫標尺尺度,業已定妥,選擇縱標尺尺度之法,必須使一代表增加率最大之線段,能表現對縱軸十分傾斜之形勢爲度,而欲其如此,唯有將縱標尺尺度定爲極小之一度。但若欲使所有數字重要之異動,顯然可見,則縱標尺尺度不必加大。唯能適合此兩種條件之尺度,乃可謂之適得其當。下列之第五圖,例示由故意操縱尺度之大小,及取消基線,所能給予吾人之錯誤印象。

正當底線之必要　此組粗略之圖式,均表示同一之數字:一八六〇至一八九一年英美兩國工資估計數。圖甲之各線,尙爲正當。圖乙,英國工資數之尺度,基線並非自零點起算,而美國數字亦大爲縮減;其結果乃成英國工資變動甚大,而美國數字略有增加之情形。圖丙,丁,戊三圖,尺度大加改竄,基線亦行更易,故圖丙之美國工資,有超出英國數字而上升之勢,而圖戊情形又恰形相反,同時圖丁,兩國之工資,乃成等速運動之情狀。試就以下各圖,加以分析,足見只憑目力決定基線,基線必難正當無誤,若取消基線,又必不能據以估計變動之重要性。又除少數之例外容當提

第五圖　各種尺度及錯誤之基線表示同一數字

（下列各圖左方尺度代表英國工資，右方表示美國工資）

—— 英國工資
…… 美國工資



工資平均

	英國 每年	美國 每日
年度 1860	£38.8	$1.10
1866	43.2	1.22
1870	43.0	1.50
1874	52.4	1.60
1877	49.8	1.48
1880	47.6	1.57
1883	48.8	1.73
1886	48.0	1.74
1891	53.2	1.85

及者（註一）外，凡數字圖式因取消基線關係而縮小空間者，其所代表之情形，實難令人信任。

修勻曲線 論及修勻曲線(smoothing curve)，不能不以吉芬爵士(Sir R. Giffen)在英國皇家統計學會，宣讀論文中，所提出之『英國出口貿易之靜止狀態』一問題，爲最妙之例證。

下列第六圖之輕虛線，表示各年出口之貨值，由此線吾人得來之印象，可知最近數年，出口貨值並未增長。但吉芬爵士則提出如下數字：

平均每年出口貨值

1855-57	134,000,000鎊
1865-67	228,000,000鎊
1875—77	264,000,000鎊
1885—87	274,000,000鎊
1895—97	292,000,000鎊

於是彼乃依據此列數字，發生結論謂：各年數字均有增加，惟唯一足爲表示其靜止狀態者，厥爲後半期中增加率，較前半期之增加爲低一點。

英國『星期六評論』(Saturday Review)，因見其所選之數字只爲每十年選出三年之平均數，僅爲一種情形之巧合，乃著文論之曰：『(此一結論實爲極大之誤解)；否則，何以不將一八九八年計入耶？』吾人見此評語，若查閱數字，殊覺無從答覆，但試閱

第六圖，則全部情狀，一覽無餘矣。第六圖上自一八六五年之後，曲線呈現三大波浪式。一八七二年，因物價膨脹，致該年出口價值之最高點極高，但一八九〇年之最高點尤大，前此各年無與匹敵者，而一八八二年之最高額，相形之下，則反較甚低。至於各年之最低點，從圖式觀之，則全部均有增加之勢；一八六八，一八七九及一八八六年之最低點，三年形成有規則之增進，迨一八九一年，忽又一瀉而下。一八九四至一八九六年間，似有另一每十年一循環之現象出現，不期至一八九七年中途又生變化。自此以後，以至一九〇六年，各年累有增加，是又超過一八七二年以前而愈趨上昇矣。

『星期六評論』復進而質問，何以吉芬爵士，不用有如下列每五年一平均之數字：

平均每年出口貨值

1870—74	235,000,000鎊
1880—84	234,000,000鎊
1890—94	234,000,000鎊
1898	233,000,000鎊

而此列數字，恰與吉芬氏所提出之數，大相反對也。

由此觀之，吾人必須採用某種通行方法，使表示數字之形式，不致因擇用特別年度而受影響。茲將全部數字及圖式列下：

據公布英國國產貨物出口眞實值

以一百萬鎊爲單位

		平均數					平均數		
		三年一平均	五年一平均	十年一平均			三年一平均	五年一平均	十年一平均
1855	95.7	…	…	…	1881	234.0	216.2	208.2	221.6
1856	115.8	…	…	…	1882	241.5	232.9	216.7	220.1
1857	122.0	111.2	…	…	1883	239.8	238.4	226.0	218.6
1858	116.6	118.1	…	…	1884	233.0	238.1	234.3	217.9
1859	130.4	123.0	116.1	…	1885	213.1	228.6	232.3	216.9
1860	135.9	127.6	124.1	…	1886	212.7	219.6	228.0	218.1
1861	125.1	130.5	126.0	…	1887	221.9	215.6	224.1	220.4
1862	124.0	128.3	126.4	…	1888	234.5	223.0	223.0	224.5
1863	146.5	131.9	132.4	…	1889	248.9	235.1	226.2	230.2
1864	160.4	143.7	138.4	127.2	1890	263.5	249.0	236.3	234.2
1865	165.8	157.6	144.4	134.3	1891	247.2	253.2	243.2	235.5
1866	188.9	171.7	157.2	141.6	1892	227.1	245.9	244.2	234.1
1867	181.0	178.6	168.7	147.5	1893	218.1	230.8	240.9	231.9
1868	179.7	183.2	175.1	153.8	1894	215.8	220.3	234.3	230.2
1869	190.0	183.6	181.0	159.8	1895	225.9	219.9	226.8	231.4
1870	199.6	189.8	187.8	165.9	1896	240.1	227.3	225.4	234.1
1871	223.1	204.2	194.6	175.7	1897	234.3	233.4	226.8	235.4
1872	256.3	226.3	209.7	188.9	1898	233.4	235.9	229.8	235.3
1873	255.2	244.9	224.8	200.0	1899	255.3*	241.0	237.8	236.1
1874	239.6	250.4	234.7	207.9	1900	283.6*	257.4	249.3	238.1
1875	223.5	239.4	239.6	213.7	1901	270.9*	269.9	255.5	240.5
1876	200.6	221.0	235.1	214.9	1902	277.7*	277.4	264.2	245.5
1877	198.9	207.7	223.7	216.7	1903	286.5*	278.4	274.8	252.3
1878	192.8	197.4	210.9	218.0	1904	296.3*	286.8	283.0	260.4
1879	191.5	194.4	201.4	218.1	1905	324.4*	302.4	291.2	270.2
1880	223.1	202.5	201.3	220.5	1906	367.0*	329.2	310.4	282.9

（註二）　　（第三十一表）

上圖之輕連續線，表示每三年一平均之各年數字，換言之，即每年與其前後二年數字之平均，其位置幾與每年數值之虛線相合；此線僅將虛線之折角修勻，對於全部形態，並未波及。十字之線代表每五年一平均之每年數值，即以其前兩年與後兩年之數值合併加以平均也。圓圈之線，表示每十年一平均之每年數值，每一圓圈所在，卽爲一期間之中心，代表該期間之平均數，例如代表一八七五至一八八四年十年間平均數之圓圈，卽在一八七五與一八八〇之縱分界線上。（註三）

期間之選擇 試觀每五年平均數之曲線，可知『星期六評論』駁論吉芬爵士之點，不爲無見，蓋吉芬氏亦確僅就利於彼之論辯之年份，而取作資料也。何則？所取用之每五年之平均數，恰與一八九八年相反，盡在波形之上半部，代表此種平均數之各符號，均與每五年一平均之線之最高値相近，但一八九八年之數，則非爲最高數也。茲請以或多或少之確度，選用年份如下：

出口貨值每五年之平均數

1865—69	181,000,000鎊
1875—79	201,000,000鎊
1885—89	226,000,000鎊
1898	233,000,000鎊

由此數字從而發言，謂一八九八年之出口貨值，較之所選以前之任何平均數均高。無須用武斷方法選擇相當期間，亦能得事實之證明矣。由此觀之，若欲作一論斷，必須注意商業循環，否則

任何理論，均無成立之餘地。此種週期循環，必至用每十年之平均數後，方能剔除。

圖上特別符號，乃為每十年之平均數，由此數點，可見在一八七〇年以前，增加之勢甚速，自一八七〇年以後，則增進甚緩，但後又繼以飛躍之擴張。全線所表示之全部情態，與每十年平均數之線所示者相同。

最後，設吾人在可能範圍內，用隨手畫法，儘量將全線修勻，而對於曲折過甚之線段，並不厲行纂改，則修勻後之曲線，仍可代表同一之情況，如上圖之重線，即此是也。修勻時，事先有一假定，認商業循環乃為十年一期；今在此假定之下，發見在同一之十年期中，竟有兩個最高值者，故圖中此期之平均數，本應為該期之最低點，現則呈現最高值之地位如一八八七年矣。此一現象，若欲消除之，只有變換平均期間之法，以適應此變動之週期長度(wave length)，而所謂變動之週期長度者，乃一頗為武斷之前提也。然此一困難，解決之法，本不甚難，只須隨吾人之所見加以修正而已，如圖中最後已修勻之重線，即足傳示此正當之印象也。

自一八九九年之五年，去一八九八年曾幾何時，而高下相去懸殊，殊出人意料之外；惟嗣後之又一五年數字，未能先事判斷，故不知次一週期之波形，當吾人將此又一五年之數字加入計算時，可知每十年（如1890-1899，1891-1900……）之平均數，又

達最高之記錄，而自一九〇〇年起至一九〇六年止，各年之數字均較以往之最高值爲大，亦從可知矣。然則，吉芬爵士所言『各年數字均有增加，惟唯一足爲表示其靜止狀態者，厥爲後半期增加率，較前半期之增加爲低一點』一言，業已完全實現矣。

修勻曲線之意義及趨勢 上圖之修勻曲線，在將偶然及暫時變動(accidental and temporary variations)剔除之後，則所表示者，即爲歷年出口貨值之一般趨勢。從長期運動中，完全剔出短期之變化，即從繼長增高之商業大流中，將商業上潮水之漲落，另行剔出，是否可能，現尚不得而知，如其果爲可能也，則吾人必可求得用此一修勻曲線代表之趨勢矣。蓋較小數字歷年之升降，乃現出變化不規則之曲線，今若將此曲線修勻，則在修勻之線中，即無突然之變動，即增加率亦將以穩健之步驟上升也。

討論至此，試添加以下各年之數字：

	各年平均數			三年一平均	五年一平均	十年一平均	
一九〇七	–	–	–	416.0*	369.1	338.0	301.1
一九〇八	–	–	–	366.5*	383.2	354.0	314.4
一九〇九	–	–	–	372.3*	384.9	369.2	326.1
一九一〇	–	–	–	421.6*	386.8	388.7	339.9
一九一一	–	–	–	448.5*	414 1	405.0	356.7
一九一二	–	–	–	480.2*	450.1	417.8	377.9
一九一三	–	–	–	514.2*	481.0	427.4	400.7

（註四）

至歐戰時之記錄，不便與其他平時之數值相比，故自一九一四後之數字，付之闕如。讀者在查閱上列一九〇七至一九一三年

之數字前，可請先就前列之圖式（第六圖），加以預測，察其數值，變化及一般趨勢若何，然後再參看實在數值。

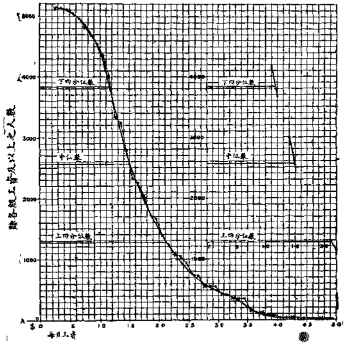
修勻曲線在某一期日行進之方向，謂之數列(series)在該期日之趨勢(trend)。當修勻曲線經過若干年份而仍大概成爲直線形式時，則該曲線行進之方向，卽表示在彼一期間中之趨勢。

對於趨勢之求法，近年來穆爾(Moore)教授，曾創用一特別方法（見一九一九年號統計學報第三七五頁）。彼之方法，乃假定若干年份之一般趨勢，可表之爲下述之方程式：$y=a+bx+cx^2+dx^3$，並以『如某一期日(x_t)之觀察值爲y_t，則$\Sigma(y_t-a-bx_t-cx_t^2-dx_t^3)^2$應爲最小』爲條件，而求$a,b,c$及$d$之值。但貝孫斯(Persons)教授之假定（見美國哈佛大學經濟統計評論創刊號），則以爲甚爲確實而能使$\Sigma(y_t-a-bx_t)^2$成爲最小者，乃爲一條直線。二人方法有別，何一可供一般之應用，尙成疑問。惟貝孫斯氏之假定，應用時務須酌量情形，不可普遍實施。實則上文所用之移動平均(moving averages)法，設所論年份甚長，而支配現象之總原因，又屢有顯著之變化時，則此法對於趨勢方向變動之表現，確較他法爲敏銳。

同質羣類之修勻　『修勻』數列之詳細研究，乃屬於第十章內插補法之範圍，不在本章討論之列，惟另有一羣類此時不妨加以考慮者，卽用圖示法從不規則之原始資料中，求出有規則之

形態也。試就前列第十三表之美國工資統計而論，吾人頗可將此五千人之工資，用圖表示之如下：

第七圖　決定中位數與眾數之圖示法



圖中之縱坐標，代表在賺某定額工資或以上之人數。成有尖角之輕線，亦代表工人人數，惟係按一角分組之各組人數登入者。此種圖示法，對於類似此一工資彙類之不規則數列，頗有特殊之效用，因工資自最高額起至最低額止，人數由少而多，工資在某定額以上人數之曲線，自亦由低而高。於是第五章第五節所論求

中位數之圖示法,亦可由上圖實施之矣。

求中位數之圖示法　上圖輕線所呈現之不規則狀態，並非因工資分類之任何法則而起,而係出乎觀察之意外事故而來。設所得之資料,乃認為係由極大之羣類中抽樣而成,則吾人可以假定:如作挨戶調查,則完全之資料,作成之形式,必與此修勻曲線相去不遠。修勻之法,可用隨手畫法,畫一條距各點愈近愈佳之線,不可現出特別破裂曲折之角,則形式卽如上圖所示。基於上述理由,可用修勻曲線求中位數,四分位數，十分位數乃至百分位數之近似值,求算之法，須在縱軸代表人數二分之一,四分之一,四分之三,……等處,各畫一條水平線，以達於修勻曲線,然後再由各水平線與修勻曲線交叉之各點,向下各畫一條垂直線,以至橫軸為止，則在橫軸所代表之尺度上,卽得工資中位數,四分位數,以及十,百分位數之工資。

茲將得數列下:

	中位數	下分位數	上四分位數
第十四表(第四章等四節)求得者	$1.49		
用第五章第五節之圖示法,經在上圖求得者	$1.49	$1.16	$2.12
由上圖之修勻曲線求得者	$1.51	$1 15	$2.13
用第十章第二節代數內插補法求得者	$1.536		

雖然，此法所得之結果，精度並不甚大；修勻曲線微有彎曲，則其所得數之差額，必較上表之第二與第三行相差爲尤大。

求乘數之圖示法 用此法求乘數，亦能求出其近似值。惟此法有兩種困難，前已提及，吾人當能記憶，一、乘數之兩邊分配不均，二、表列變更則總數位置亦移。第一種困難，如用圖示法，卽可完全消滅，第二種困難，因乘數位置之移動，全視修勻線之彎曲是否有輕微之變動爲斷，故困難亦可減少。夫乘數之位置，乃爲最大人數之所在，其理至明，吾人已知之，惟今用圖示方法，則乘數者卽波折——或修勻 — 線最峻峭之處也。在修勻曲線上，最峻峭之處所，卽爲切線 (tangent) 經過曲線之點，在數學上所謂轉向點(point of inflexion) 者卽是。用機械求此點，可用一尺置於圖上與曲線接觸，然後將尺繞曲線轉動，至尺與曲線相交時，則相交之點，卽爲乘數所在。如上圖之一元一角至一元四角一組所出現者卽是。除此以外，尙有較爲繁複之求中位數與乘數法，容當於第十章第二節討論之。

求中位數與乘數而用圖示法，最大之優點有二：一、用於不整齊之人數（例如，工資在三十先令六便士者三十人，三十先令八便士又二分之一者四十人，四十先令一便士者三十五人……等）時，與用於整齊之資料，其造圖之難易相同，而確度亦相同；且如修勻曲線造圖精密，則乘數之個數，一望卽知，並可估計各

個乘數之相對重要性也。卽如上圖，某線上自三角起至一元二角止，曲線成凹形；一元二角至三元一角五分，曲線成凸形，其後至三元四角爲止，又現凹形，復又繼以凸形，以至於終端而後已。轉向點——或云乘數——卽凹形轉爲凸形之點。故此處有乘數二，而其中之一，臨近三元四角處者，乃次要之乘數也。

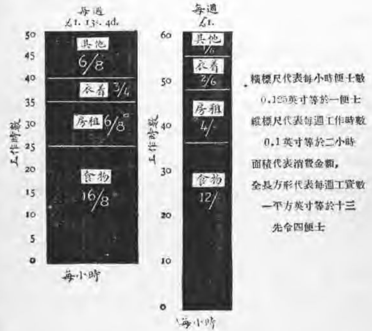
象形圖 圖式之種類甚多，但中有極大部份，並無詳細討論之必要。著作家及講演家，有時爲表現數目之大小起見，採用大小不同之點，線，三角形，四方形，圓形，以及圖畫等。此種圖式，對於演說及手册，本各有其用途，但對於數字意義，則無價值可言。此種圖式，哥巴戈理歐(Gabaglio)氏之統計學原理(Teoria Generale della Statistica)第二部，及勒瓦舍(Levasseur)氏之圖式統計學(La Statistique Graphique 見於英國皇家統計學會之五十週年紀念刊)一書中，討論甚多，可以參閱也。

此種圖式之中，有一類足爲實際上應用者，厥爲長方形圖。長方形可用以代表三種數量，茲分列於下：

	側邊	底邊	面積
	代表	代表	代表
1.	物價	物量	物值
2.	房間數	每間住人數	人口總數
3.	每週工作時間	每小時平均產量 每小時工資	總產量 每週工資

茲舉一例，以示此法應用之範圍：

用長方形代表三件事實　下圖爲一技師與一勞工之家庭預算，分別表示每週各種消費所用之金額，與每一消費金額所需之工作時間。



（第　八　圖）

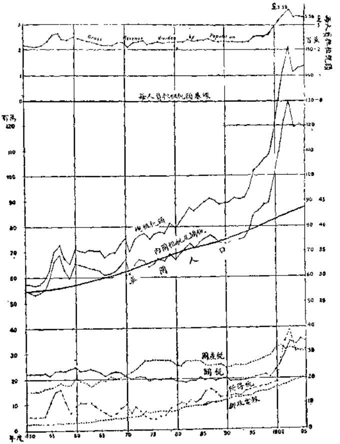
英國之圖示法標準聯席委員會(Joint Committee on Standard for Graphic Representation)，自一九一六年後，曾議決

爲準,但所欲表示之現象,則殊與此無關。玆舉例以明之。假如一九一一年,英格蘭之各部,用染色方法,標明人口之密度,則可伯蘭(Cumberland) 之色度,應大略等於每百英畝二十七人,而腦贊伯蘭(Northumberland), 爲每百英畝五十三人。但若遇有荒漠之處,人烟稀少,則人口密度,用彩色表示之,則若干英里之內必將一片荒涼。故補救之法,須用下列二種途徑:一、略分區域,可以一教區作一單位,各教區均僅用黑色煊染之,色之深淺一隨人口之多寡。二、用點標記,視資料之許可,儘量求其準確,各點大小應完全相等,一點代表一百人,但遇人口稠密之區域,則應加以變更,此類之統計地圖,在塞可利斯特 (Secrist) 教授所著之統計方法(Statistical Method) 一書中(一九一七年版,第一八九頁),曾加複述。

第二節 歷史圖

數字之比較 圖式之主要用途,大致不外供人瀏覽兩序列事項之相互關係。此中情節,以舉例釋明之爲最佳。最簡單之一種,厥爲比較同以一單位(例如金鎊)表示之兩列數字,而就中尤爲簡單者,莫過於以全體與一部數字作比較。

以租稅爲例 下圖中部第一條線表示英國各年總租稅額(見統計輯要 Statistical Abstract 一九〇六號);(註五)第二



（第　九　圖）

條線為內國租稅及關稅，此項與總租稅額相差之數，主要卽為郵政收入。租稅之內，以關稅，國產稅(excise)，所得稅，及郵政收入為大宗。玆各以曲線將其各年之數字，分別列如上圖之下部，各

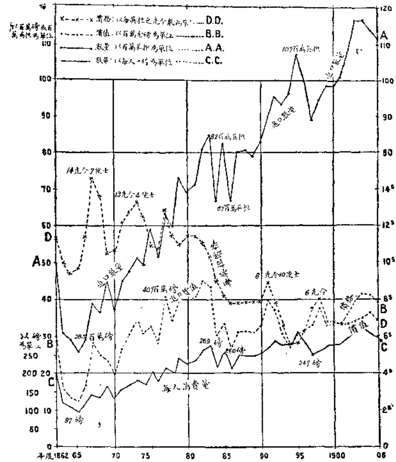
線各自獨立，不相連繫，但標尺尺度及基線均相同。如此畫法，較之繪一線代表總租稅額減去關稅，再繪一線代表總租稅額減去關稅及國產稅，依次減少之畫法，強似多多，因如彼不能令人一望即可判斷各項之相對變動情況也。就圖觀之，所有關於租稅趨向之主要情勢，歷歷在目：增加雖速，但不規則。一八五四至一八五七年之進展甚急，隨後即生變化，但一八六〇至一八七〇十年間之數字，終比一八五〇至一八六〇年間之數字為高。自一八七〇年之後，變化甚大，增進之勢，亦較為整齊，直至一八八七年，幾始終未生頓挫；但自一八八七年以後，中經一短期之靜止狀態，至一八九五年，突飛猛晉，一八九八至一九〇三年之漲勢亦然。總租稅額之曲線如此，內國稅及關稅之線，大致相同。更就各項租稅而論，其有增加及變動情形者，在一九〇〇年以前，國產稅收入增加最多，郵政收入次之，所得稅又次之，而關稅則漸減。各條曲線各有其各別之形式。郵政收入之增長，大致甚有規則。所得稅變化最劇，總租稅之激烈變動，幾全受此項之影響。尤以一八五六年一八七〇年及一九〇〇至一九〇二年為甚。國產稅之線，在一八七〇年之前，有緩和之增加趨勢，其後繼以猛烈之突進，至一八七四年而後，後又現遲緩上漲之情勢。然在關稅方面，情形恰與國產稅之線相反，故二者之總數，在一九〇〇年以前，並無急劇之變化。上圖之上部，另有一新基線，所表示者乃為各年

度之全人口每人負擔總租稅額金鎊數;由圖中可以看出,各年之增加,以一八五三至一八五七年及一八九八至一九〇三年爲最顯著。

第二尺度之選擇　由此觀之,尺度之決定,已不若先時僅有一條線者之難,蓋如上列之大圖,以百萬金鎊作單位,至用一鎊作單位時,則另定一新基線。然如欲將人口之變動,在大圖表現之,則仍可用同一之基線,以供兩種數量之比較。所不同者,第二種數量之尺度,可任以何處爲起點,卽如上圖之縱軸尺度,人口曲線所在之處,乃求其使人便於考察與租稅數成比例之變動情狀也。此一起點,決定之法,最佳莫過於視問題之性質,以求便於比較。例如欲比較一八五〇年以後,租稅之增長及人口之增加,則後者一數之線,應以前者起始之一八五〇年處爲起點,惟其如此,二條曲線之犬牙交錯,乃可顯然示明。雖然,一八五〇年乃假設之年份,並非問題所指定,故仍以使二線在資料中之最近年份相合爲宜,以便與以前各年比較也。試觀上圖,第二條線之位置,適足與內國租稅大部路線相密接也。

數量與價值之比較　尺度之決定,尙有其他困難,下列一圖,可爲例釋。本圖之目的,在說明人口與輸入小麥(數量,價值,及價格)之關係。A線所用之尺度,以求其能將曲線之變化曲折,完全托出爲標準,由此一線,將各人每年負擔之數額算出,則小

第十圖 一八六二年至一九〇六年輸入英國之小麥及麪粉



麥與人口之關係，卽可顯然。如C線乃卽代表每人消費量者，此線之尺度，與他線所用迥異，以免與其他各線交相錯雜，致混淆

一八六二至一九〇六年英國之小麥及麪粉
麪粉已折成小麥計算

年　度	A. 進口總數量（單位十萬英擔）	B. 進口總價值（單位十萬金鎊）	C. 英國人口每人消費量（單位鎊）	D. 每英擔麥及麪粉之平均價值（單位先令）
1862	500	286	191 lbs.	11.44
1863	309	155	118 ,,	10.03
1864	288	135	109 ,,	9.37
1865	258	124	97 ,,	9.61
1866	294	163	110 ,,	11.43
1867	391	285	144 ,,	14.58
1868	365	249	134 ,,	13.64
1869	444	233	166 ,,	10.50
1870	369	196	132 ,,	10.62
1871	444	268	158 ,,	12.07
1872	476	303	168 ,,	12.73
1873	516	344	180 ,,	13.33
1874	493	309	170 ,,	12.53
1875	595	324	203 ,,	10.89
1876	519	279	176 ,,	10.75
1877	635	407	212 ,,	12.82
1878	597	342	197 ,,	11.46
1879	730	400	239 ,,	10.95
1880	685	393	222 ,,	11.47
1881	713	407	229 ,,	11.42
1882	808	449	257 ,,	11.11
1583	851	438	269 ,,	10.30
1884	669	301	210 ,,	9.00
1885	823	337	256 ,,	8.19
1886	670	261	207 ,,	7.79
1887	802	314	245 ,,	7.82
1888	804	315	244 ,,	7.82
1889	789	311	238 ,,	7.88
1890	824	327	246 ,,	7.94
1891	895	396	265 ,,	8.85
1892	956	371	281 ,,	7.76
1893	938	308	273 ,,	6.57
1894	967	268	277 ,,	5.54
1895	,073	302	305 ,,	5.63
1896	996	309	279 ,,	6.21
1897	887	330	247 ,,	7.44
1898	944	377	259 ,,	7.99
1899	985	330	267 ,,	6.71
1900	986	334	266 ,,	6.78
1901	1,011	334	270 ,,	6.60
1902	1,079	360	288 ,,	6.67
1903	1,167	397	309 ,,	6.80
1904	1,182	415	310 ,,	7.02
1905	1,142	413	296 ,,	7.23

（第三十三表）

不清也。如圖式內容過於複雜，不妨援照前第九圖表現每人負擔租稅額之例，如法辦理。

構圖詳解　年度之尺度，必須一致不變，且為計算簡捷，表示便利起見，每人消費一百鎊，應與一千萬英擔(hundredweight)，在縱尺度上佔同一之距離。A 線與C 線所表示者均為數量，故以同線代表之。B線表示價值，茲以斷續線為代表，此線之尺度，較難決定。以後繪列圖式，有時參用特殊方法，以供某項比較之用。但本圖則無用此之必要；茲用一尺度，使A，B，二線發生密切關係，而將B之變動現於圖上；縱尺度定每二十金鎊與二十英擔(cwt)，同一距離，故圖式簡單而明瞭。

D線乃由第三十三表A，B兩欄算出之小麥變動價格。此線之尺度，已決定如上圖，其所以如此者，以恰能與A，B兩線相交也；試觀上圖，該線之曲折變化，瞭如指掌，各數判然可見，蓋每英擔二先令，恰與千萬英擔同隸一縱尺度也。上圖繪製尚非甚精，不然，A與D兩線，在一八七六至一八七七年間，必互相貼合；可見現在已向上下互離，然本圖所示已甚明晰，吾人頗可得一大概印象也。

運動情況需加解釋　上圖各線，已有第三十三表為之說明，但由此表現之特點及變化，必須請由研究經濟史者加以解釋。輸入英國之小麥，英國每人之消費量，在一八九五年以前三十年間，

歷年均有增加，迨至一八九五年而後，數年之中，乃又漸趨下遊。再輸入數量之線，有猛烈之短期變化，甚爲顯然。至代表價格之線，自一八六二年起至一八七八年左右止，經過劇烈之升降變化後，以後十七年間，竟有每況愈下之勢。現象如此，追原其故，原因極爲複雜：一則由英國人口之增加，二則進口小麥之多寡，須視英國農產之豐歉，而農產之豐歉，須受天時之支配，三則由於全世界收穫量之變動，四則由於政局之變遷，五則由於銀價之低落，六則由於交通運輸之發展，以及其他等等，不一而足。此圖之功能，只在標明各種運動之一般趨勢及發生變動之時期，惟運動之背後原因，則非圖式所能爲力者矣。

各個曲線之符號，究應如何規定？論及此問題，其準則雖夥，但主要者不外將相互交叉各線（除相交成爲銳角者外）均分別標誌清晰一端。至於凡相近數量者以相近符號表之：此乃第二之準則。如遇可用多種顏色時，此一原則，頗易實施也。（註六）

玆爲補充第三十三表廣續完成第十圖起見，又覓得以後各年之數字列下：

年　度	A	B	C（鎊）	D
1906	1.127	395	290	7.01
1907	1.156	440	295	7.61
1908	1.091	450	275	8.32
1909	1.132	516	284	9.12
1910	1.191	497	296	8.35
1911	1.120	442	276	7.89
1912	1.237	520	301	8.41
1913	1.225	502	296	8.20

趨勢與變動 欲檢察時間上數列之一般性質，其途徑有二；一爲檢視數列運動之趨勢，一爲考察數字變動之性質，玆將時間數列分成以下五種：

一、有方向穩定，或方向逐漸轉變之趨勢，而無忽高忽低之變動者。一國之人口統計數字即屬此類。（註七）

二、變動無定者；換言之，即一種運動，其多年記錄上之數字運動（或上或下）情形，不能據以推測下年度之爲上升或下降。例如各年雨量統計即是。

三、具有補償的變動情形者；換言之，即變動情況，在一年成上升運動者，下年一般必有一下降運動以補償之。出生率，死亡率，及結婚率時或呈現此種補償情形。

四、成擺動式者；換言之，在達到最高或恐慌點後，必發生下降運動，如此一年復一年，經過數年之後，乃降低至最低點，其後復繼以上升運動，與年上升，乃又達於最高點。一般物價統計，及所有關於商業循環之極多記錄，均屬於此類也。

五、成循環性者；換言之，即每十年，或十二月，或他種定期間，上升與下降發生之順序，每期乃全相同，且（在數種情形之下）變動之大小度，亦各期相一致。季節變動之例，容在本章第四節討論之。

上舉二，三，四及五四種中，其趨勢可與變動同時存在。且有

一無定形式之變動，或一補償式之變動，發現於擺動式運動及一趨勢之上；所謂昇潮中大浪之微波，卽此意也。故如有一時期數列當前，極重要之事項，厥爲考察數列所形成之趨勢及變動，大概性質若何，性質決定之後，乃可推斷最近將來之情形。如變動之情狀爲無定形式或變化出入甚爲驟烈，則設遇有極低之數字，吾人似可無須爲之擾亂，因而相信有亟圖補救之必要也。在補償變動中，如在一高價之後，必隨之出低價，此則可爲預斷者。如變動成擺動現象，則數字在一經高價跌落之後，回復之日必須有待，乃可在吾人意料之中也。

第三節　數列之比較

一、在未研究次一圖式之前，似應先請就用數字作比較研究之目的，加以分析，並考慮作比較研究而堪供應用之方法。

比較之主旨所在　在研究兩組類似數量（例如兩國之各該國貿易或二國人口之各別趨勢）時，吾人欲知者有二端：一則爲一般進展率(rate of progress)（此可用修勻曲線法求得之），二則爲特殊增進之年份，卽最高或最低點所在之時期。一言以蔽之，卽欲就吾人目所能見者，用增加量，增加率，及增加率發生變動之時期三者，以作比較研究也。爲達此目的，最顯而易見之方法，不外將兩國用同一尺度，同一基線，以表示之。至數量之單位，

兩國亦使成一致；然此法應用之途有時而窮，不能到處皆通也。何則？蓋吾人用此方法，可以判斷兩國各年中之增加及減退，可以考查最高點，最低點，及增加率發生變動之日期，固矣，其奈不能比較增加率何？夫作一大略之臆斷；固屬可能，但比率究非易於判斷之事。例如：設兩國之貿易數量，大小迥然不同，雖二國之絕對增值 (absolute increment) 完全相等，而相對增值 (relative increment) 則大有區別，且此乃又不易使人時時覺察者也。

百分數尺度 此爲美中不足，宜如何補救之，唯有變更尺度之排列一途。故除上文所言之圖式之外，應另作一圖，在此第二圖中，尺度之單位必用百分數，而不言貨幣數額：例如，玆以一八五〇年英國國外貿易之百分之一，爲英國貿易尺度之單位；而以同年德國貿易之百分之一，爲德國貿易尺度之單位。易言之，即以某年兩國貿易總值之百分數，代表兩國之貿易，而各以一線，分別代表此兩組百分數。此外，在圖旁不妨分列兩個或兩個以上之尺度，以示各國貿易之絕對量。如是，則增加率乃可從事比較，如在一八五〇年，所謂增值相等者，卽表示各國貿易百分數相等；而且，此一國較之彼一國，稍佔優勢之日期，圖上已瞭如指掌。

絕對進展與相對進展 絕對增加率與相對增加率二者，究應以何者爲研究之對象？此一問題，乃統計學上極普通之問題。

有時必須求得絕對數量，此尤以吾人如欲估計促進特殊階級福利之社會政策，實行後之影響，或計算某某數國之貿易時爲然；但有時必須求得相對數量，例如考察各種產業之增進量，或探尋將來之繼起競爭者時卽是。絕對進展與相對進展，二種研究，雖或代表同一數字，但仍非用兩個不同之圖式表示之不可也。

作圖比較時，須以某一年之數量爲基準，但所謂某一年，究以採用何年爲宜，此乃主要困難之所在；決定之法，必須視論辯之性質，蓋此論辯，卽圖式所欲例證者也。

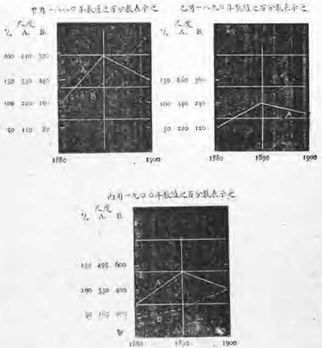
例如吾人欲就下列數量：

年 度	一八八〇	一八九〇	一九〇〇
甲	220	440	330
乙	160	240	400

加以比較，則比較之法，可有三種不同之途徑，玆分作圖式如下：

下列圖丙中，曲線之變動，以最後一年數值之百分數表示之，各年之進展比例，表現情形，較圖甲所示者爲佳。一般情形，多係以最近年度之數量爲基準，故以前各年度之數字雖小，但以現代觀點考察之，則各年變化之比例，必能適當其分。吾人如言一八八〇年數值甲，當近今數值甲百分之四十，一八八〇年數值乙，當一八八〇年數值乙百分之一百五十，必使人易於理解；但此亦

第十一圖



宜隨情形而決定，何年最爲適當，卽以何年之數値爲基準，未可一概而論也。

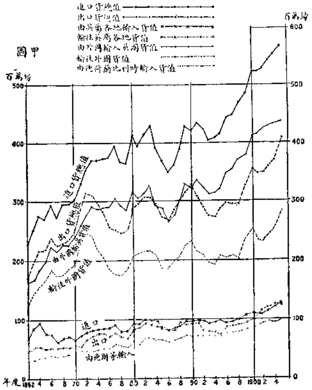
用英德貿易爲例證 上文所論幾點，玆可更以一圖式表明之，下列第十二圖之目的，在分析英國與其屬地及外國間貿易之進展，英德貿易情形，尤當重視焉。

一八六二至一九〇年英國之出入口貨值
以十萬金鎊爲單位

	進口總貨值	出口及復出口總貨值	英國輸往英屬各地之貨值	英國輸往外國之貨值	由英屬各地輸入之貨值	由外國輸入之貨值	由德國，荷蘭，比利時輸入之貨值
1862	2,257	1,662	454	1,207	653	1,604	279
1863	2,489	1,969	550	1,419	847	1,642	283
1864	2,749	2,126	557	1,569	937	1,812	332
1865	2,711	2,188	515	1,673	728	1,982	364
1866	2,953	2,389	572	1,817	722	2,231	388
1867	2,752	2,258	534	1,724	607	2,144	373
1868	2,947	2,278	537	1,741	670	2,277	379
1869	2,955	2,370	519	1,851	704	2,250	405
1870	3,033	2,441	554	1,887	648	2,384	409
1871	3,310	2,836	556	2,280	729	2,581	469
1872	3,547	3,146	656	2,490	794	2,753	455
1873	3,713	3,110	711	2,399	810	2,903	463
1874	3,701	2,977	779	2,197	822	2,879	494
1875	3,739	2,816	767	2,050	844	2,895	515
1876	3,752	2,568	701	1,866	843	2,908	516
1877	3,944	2,523	758	1,766	896	3,049	590
1878	3,688	2,455	720	1,735	779	2,908	575
1879	3,630	2,488	665	1,823	789	2,840	543
1880	4,112	2,864	815	2,049	925	3,187	616
1881	3,970	2,971	867	2,104	915	3,055	582
1882	4,130	3,067	923	2,143	994	3,136	658
1883	4,269	3,054	904	2,150	987	3,282	692
1884	3,900	2,960	883	2,077	958	2,942	646
1885	3,710	2,715	885	1,860	844	2,866	638
1886	3,499	2,690	822	1,867	819	2,680	609
1887	3,622	2,813	823	1,990	838	2,784	646
1888	3,876	2,986	917	2,068	869	3,007	684
1889	4,276	3,156	908	2,248	973	3,304	715
1890	4,207	3,283	945	2,337	962	3,245	694
1891	4,354	3,091	933	2,158	995	3,360	716
1892	4,238	2,916	812	2,104	979	3,259	715
1893	4,047	2,771	786	1,986	919	3,128	720
1894	4,083	2,738	786	1,952	940	3,143	716
1895	4,167	2,858	761	2,098	957	3,210	729
1896	4,418	2,964	907	2,057	933	3,485	761
1897	4,510	2,941	871	2,071	941	3,569	760
1898	4,705	2,9[illegible]0	901	2,038	998	3,708	786
1899	4,850	3,295	943	2,352	1,069	3,781	834
1900	5,231	3,544	1,021	2,523	1,096	4,134	861
1901	5,220	3,479	1,132	2,347	1,057	4,163	897
1902	5,284	3,492	1,176	2,317	1,069	4,215	950
1903	5,426	3,604	1,195	2,409	1,137	4,289	973
1904	5,510	3,710	1,208	2,502	1,200	4,310	962
1905	5,650	4,076	1,227	2,849	1,279	4,372	990

（第三十四表）

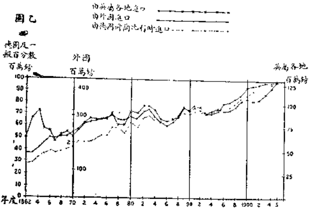
英國與其屬地及外國間之貿易價值



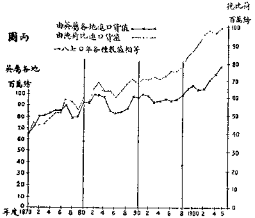
（第十二圖）

進口貨值對一九〇五年進口總值之百分數

圖乙



圖丙



（續第十二圖）

第十二圖圖甲所表示者,爲英國之出入口貨總值,及分別與英屬各地及外國之出入口貨值,各線之尺度,均以百萬金鎊爲單位,由德國,荷蘭,比利時輸入英國之進口貨值,另以一線表示之;此三國之數值,乃合併計算而得,蓋截至一九〇四年止,德國之製品,運輸之時,未能與荷,比二國之貨分清,故統計數字,亦無從單列也。觀察圖甲,英國由外國或屬地進口,試問何者進展最速,並無明白表示。故在圖乙,另將三條線重新造圖,而用百分數爲尺度,意即以一九〇五年各該數值之百分數,分別代表三種數值也。於是在圖乙中,自其他外國及英屬各地與印度輸入英國之貨物,除在棉產荒歉期間外,餘時均有並駕齊驅之勢,惟自德荷比三國入口,則進展甚急,遠非其他外國及英屬各地與印度所能及耳。吾人苟以一八六二年爲基準,而使此年各數量全然相等;則代表德荷比三國進口之曲線,至一九〇五年,必超越其他曲線甚多;但由此所得之印象,如就絕對數量觀之,則不免陷於錯誤,蓋由德荷比三國入口增加七千一百一十萬金鎊,其餘外國輸入英國,則增加二萬七千七百萬金鎊也。

圖內表示德荷比三國及英屬各地,自一八七〇年以來,輸英貨值之相對增加率。

國際統計局(International Institute of Statistics)爲求作比較用之歷史圖標準化起見,經多番考慮,結果於一九一一年

開會時議決以一九〇一至一九一〇年間數字之平均數爲標準，並議決此十年數字之平均數，須以縱長尺度代表之，此縱長之高度，應與代表三十年之橫尺度相等，用此標準化之尺度，作成之圖，乃可任與代表何種數量之圖，相互比較。此種議案之意，並非不可作別種之比較（例如本章第二節第十圖，一八六二至一九〇六年輸入英國之小麥及麪粉），更非不能作以同一單位（金鎊或噸數）表示並以同一自然單位作圖而代表之時間數列之圖式。反之，本議決案之用意，乃以此標準作無他法可用時之唯一標準形式，如有理由必不能用此標準時，則此標準只供參考云耳，非不用不可也。總而言之，凡作一比較——尤以國際統計爲尤甚——如遵循上述準則；便利甚大焉。

因果關係　二、關於數列之比較，爲探討或例證其因果之關係(casual relation)，時常採用地圖表示法。在地圖顯示法之下，吾人不惟研究增長率，如上列第十二圖圖丙所示，且更須就全部期間中，考察增加率有無任何相似之徵象，出現最高量及最低量之日期，或研求發生變動時同時發生之事象。然用此種種方法以作比較，其事甚難，非經精謹審愼之分析不爲功。例如，設吾人欲考慮室外貧民救濟費之增加，是否與貧民加多有關：則須以一線代表款額，一線代表人數，二者並無共同單位；吾人於此無須計算百分數，但款額之尺度，既經加以規定，則人數之尺度，卽可以

最簡單之方法排定，於是二種尺度可以任一年度爲基準，二種數量在基準之年乃彼此相等。然後吾人所欲知者有二事，一查款額或增或減，是否與人數增減同時發生，或款額之增減，恰在人數增減之前；二查款額增加多者人數是否亦隨之俱多。爲求顯示直接關聯起見，構圖之時，二線應使相愈距近爲愈佳。

構圖法 構圖之法，第一步先作一粗略圖，二線之尺度，任意規定之；由此粗略圖式，卽可作一試驗，而查明二線相似之情況。請注意，在何期間所生變動爲最大；此一變動最大之期間，卽一般用作比較之日期，蓋惟在此期間，因果關係乃最爲顯露也。反之，如因特殊理由，採用其他期間，亦須明瞭此點，否則必引人批評，否認所採期間爲唯一之關係明顯之期間也。如此，吾人從任何兩條曲線中，查出同時發生變化之短短期間，事必不致甚難。爲達此目的，可求所採用期間之款額平均數及人數平均數，並重新再作一圖，在此第二圖中，人數尺度之決定，以使人數平均數與款額平均數相等爲標準。如此，兩條曲線苟有任何適應性，卽可一望而知矣。

負相關 在許多情形之下，常有一種數量，爲吾人視爲原因者，其變動乃與另一種數量而爲吾人視爲結果者之變動，成相反之方向。例如，設吾人以貿易進展與失業人數作比較觀察，而按上文所言之構圖法顯示之，則第一條曲線之最高點，必與第

二曲線之最低點，同時出現。但如此尚非十分明顯，如欲求更大之明晰，可以一線倒置之；換言之，即用一線代表就業之人數，而不使表示失業之人數，則二條曲線之變動必亦步亦趨完全一致矣。

較複雜之關係　依照上文所論之構圖，設一種數量之變動，恰與他一數量之變動恰成比例，詳言之，如以室外貧民救濟費爲例，代表款額之線，超出平均數百分之十，貧民人數亦必增多百分之十，則在所有期間中，無論兩線之變動如何，一線必始終在另一線之上，此種關係，乃爲極罕見之簡單關係；吾人一般所見者，大多最高點最低點在同時出現，兩組數量之變動，自始至終大多同一方向，且一線變動較大者，他線變動亦較烈也。

圖式表示相關之用途　圖式常用以表現兩組數字之相關(correlation)，而表示兩數字之相關，亦確爲圖式之主要優點之一也。又圖式可在論辯某問題時作爲例證之用，惟圖式之效用，如就此點而論，誠亦甚微，蓋圖式所表示者，只足爲簡略之例釋，非極詳備之證明也。夫因果關係之建立，事本甚難，在理論付諸試驗之際，採用之原始數字，非經過極嚴密之考量不可也。

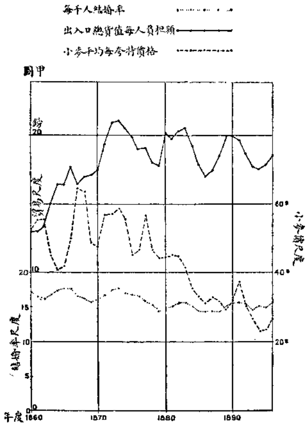
更爲確切之方法 爲作比較而用之圖式，其用途並非止此而已，尙有較爲確切者在焉。然下文所論方法，採用之時，須特別謹慎。設吾人意欲確定一金鎊多買一布舍爾(bushel)小麥，是否與結婚率增加千分之一•五，或其他任何之嚴格數字比例相適應，必須繪一圖代表小麥數量，將已擇定實行比較之期間中之數量加以平均，然後以平均數爲零點，由平均數向上，分成一，二，三……布舍爾，或自平均數而下，亦分成一，二，三……布舍爾等尺度。如此並無基線。現請更繪一曲線，代表結婚率，在擇定期間中，超過結婚率平均數之部分，或低於平均數之部分，此一條線之尺度，必須每超過平均數有千分之一•五，其距離即與一布舍爾小麥數量所佔之縱標尺距離相同。然則此兩條線，接近之程度，即可測驗理論是否可以成立，如能成立，即可測驗成立之限度爲何如矣。惟此一方法，用時每有危險，蓋旣無基線之設，自不能以總計數爲比較，而鑑定變動之總額也。雖然，如畫兩條基線，固屬合乎需要，然一有基線，裨益雖非甚大，而因之反有易致紛擾之虞也。

執此而論，吾人苟能善自採用尺度及基線，則兩日期中之各點，必能與若干代表數列精確畫成之曲線相合。茲舉一圖爲例以釋明之。

〔例釋〕 英國之結婚率，出入口總貨值平均每人負擔額，與小麥每夸特(quarter)平均價格

年份	結婚率	出入口總貨值平均每人負擔額 金鎊	先令	便士	小麥每夸特平均價格 先令	便士
1860	17.1	13	0	8	53	3
1861	16.3	13	0	3	55	4
1862	16.1	13	8	0	55	5
1863	16.8	15	2	7	44	9
1864	17.2	16	8	7	40	2
1865	17.5	16	7	5	41	10
1866	17.5	17	14	5	49	11
1867	16.5	16	9	6	64	5
1868	16.1	17	0	6	63	9
1869	15.9	17	3	9	48	2
1870	16.1	17	10	3	46	10
1871	16.7	19	9	6	56	8
1872	17.4	21	0	0	57	0
1873	17.6	21	4	2	58	8
1874	17.0	20	11	0	55	8
1875	16.7	19	19	4	45	2
1876	16.5	19	0	10	46	2
1877	15.7	19	5	5	56	9
1878	15.2	18	2	1	46	5
1879	14.4	17	16	10	43	10
1880	14.9	20	3	3	44	4
1881	15.1	19	17	5	45	4
1882	15.5	20	8	10	45	1
1883	15.5	20	13	2	41	7
1884	15.1	19	4	1	35	8
1885	14.5	17	16	9	32	10
1886	14.2	17	0	10	31	0
1887	14.4	18	11	7	32	6
1888	14.4	18	12	1	37	10
1889	15.0	19	19	9	29	9
1890	15.5	19	19	7	31	11
1891	15.6	19	14	0	37	0
1892	15.4	18	15	6	30	3
1893	14.7	17	14	9	26	4
1894	15.1	17	11	9	22	10
1895	15.0	17	19	3	23	1
1896	15.8	18	14	1	26	2

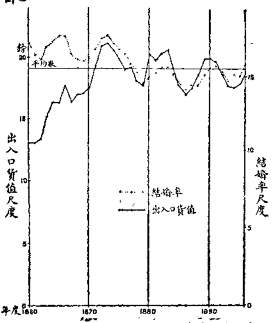
（第三十五表）



（第 十 三 圖 ）

在上列第十三圖甲圖中，有代表小麥每夸特價格先令數之線，有代表出入口總貨值除以英國人口之線，並有代表每千人中結婚率之線。尺度之擇定，有二簡單之原則，一則最便於應用，二

圖乙

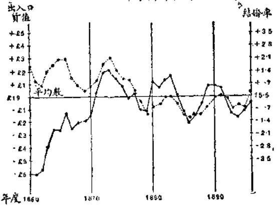


英國人口平均每人負担出入口總貨值與結婚率

圖丙

一八六九至一八九六年平均數均在同一線上

一八六九至一八九六年間對平均數之平均差均相等



（續第十三圖）

則將各曲線刻書盡致，起伏狀況明顯。各個標尺尺度上諸點，凡屬於同一年份者，必相互重疊，但各點各有其尺度，所代表之單位，彼此並不相同。至基線則無相合之必要也。

貿易額與結婚率 試觀上圖，各種數字之進行曲折，是否有類似之情狀，此則不問可知。先就貿易額與結婚率二者言之，自一八七〇年以來——稍前數年或亦同然——貿易額之變動，與結婚率之起浮，大概有相應之狀態，此乃可爲斷言者。又圖上，小麥價格及貿易總值，相似之點甚多；一八七〇至一八七三年，二者相率上昇，一八七三至一八七五年，又相繼下游；一八七六至一八七七年，復同時俱起，其後兩年又同時俱落，至一八七九年後，乃復同趨上昇；自一八八一年，二線又偕以俱降，直至一八八六年爲止，迨一八八七年，乃又齊趨上昇矣。雖然，相同之點固多，行動相左之點，亦所在多有，例如一八六二至一八六四年，及一八八七至一八八九年，乃特別顯著者也。

結婚率與小麥價格 現請再檢視小麥價格與結婚率之線，可見在該世紀前數十年中，關係甚爲密切，此漲彼落，似頗顯然，惟細加考察，二條曲線，既不甚爲相似，復非恰相反對。在一八六〇至一八六二年，小麥價格上漲，結婚率則降低，在一八六二至一八六四年，小麥價格下落，而結婚率則上漲；一八六五至一八六七年，小麥價格騰起，而結婚率初則堅挺不動，繼則微形頹弱；

一八六八至一八七〇年，小麥價格雖日趨低下，結婚率亦每況愈低；一八七〇至一八八〇年，結婚率出現一極大之變動，而小麥價格，則有兩個短促之變動，迨至一八八〇年以後，小麥價格連年低降時，結婚率一般形勢亦始終衰弱不振，小麥價格上昇之日，結婚率亦趨上昇。

二者之聯環關係　此二現象，或有聯環之關係，吾人不妨略一討論之。小麥爲勞動階級生活費用中之主要項目，故小麥價格之漲落，實爲勞動羣衆最爲關心之主要事項，然則小麥價漲，而結婚率降，非無故矣。如就另一方面言之，當麥價廉，工資高之時，麵包價格偶有變動，則重視之者，僅爲少數人而已；而此乃國家一般興盛之象，由對外貿易情況可知，是結婚率擡高，有由來矣。

在出口入口貨值增加之時，貿易大形發達，預備結婚者，雖當此物價高昂之際，猶充滿樂觀空氣，以爲繁榮可常留，物價終當降落也；但物價一落，利潤大減，國民所得自亦降低，於是預備結婚者，乃不得不稍持穩重。然則吾人基於此種理由，而謂結婚率與國外貿易二曲線，彼此有一致之趨向，要非過言矣

結婚率之增加，乃隨貿易發達以俱來，而貿易發達，又出現於一般物價上漲之際，故僅就小麥價格一項而論，麥價與一般物價有連帶關係，國外貿易發達，則麥價漲，對外貿易衰落，則麥價亦隨之俱低；於是麥價漲，結婚率亦隨之而昇，麥價落，結婚率亦

隨之俱降。然麥價之漲落,原因非止一端,除對外貿易一因素外,尚有其他特殊之原因在,故麥價並非永隨貿易狀況而變動,與結婚率尤少相關,此十九世紀中前期麥價之趨勢,所以恰與結婚率成相反之變動也。

由此而論,結婚率與出入口貿易二曲線,有相應之趨勢,麥價與貿易二曲線,略爲一致,但並非有甚密切之傾向,麥價與結婚率有雙重之趨勢,本不足爲奇。試觀上列第十三圖,結婚率與出入口貿易相應之情形,已躍然紙上。小麥價格與貿易相應情狀,仍不難用同一方法釋明。至結婚率與麥價之關係,應另作比較。比較之法,須以不同之計劃,重作二次之比較:第一先求其正相應(direct correspondence),次則以上端作麥價曲線之基線,另構一圖,以求二者之負相應(inverse correspondence)。

圖式之構造 比較貿易及結婚率二曲線之程序,有如下述:吾人檢查上列第十三圖圖甲,知二條曲線,在一八六九年以前,並無任何相似之關係,故自一八六九年起之各部曲線,應使之顯露密切之相應。一八六九至一八九六年,結婚率平均數爲一五·五,平均每人負擔出入口貨值額爲一九金鎊。茲以平常方法將結婚率曲線繪成,次藉用滑動尺度(sliding scale),將貿易曲線畫上,如此則二者之基線相同,一九鎊與一五·五兩平均數同在一條線上,詳見第十三圖圖乙。

經此構圖結果，吾人由圖中可以看出，二條曲線之升降，均發現於同一日期，惟變動程度不同耳；蓋自一八七三至一八七九年，二曲線幾成平行，二線達到最高點之後，下落之程度，約略相等，但至一八七九年而後，貿易及結婚率二條曲線，在平均數線上下擺動，貿易線尤較結婚率線為甚焉。

最終之比較 一切程序至此，即須用作圖測驗法，考察各次變動，是否互成比例。此時，可令出入口貨值對一八六九至一八九六年平均數之平均差(1.04鎊)，與結婚率對同期平均數之平均差(0.72)相等，而成一尺度方程式；不然即用粗略方法，以等距離之縱尺度，一方代表一鎊入口貨值，一方又代表結婚率千分之〇·七，如此乃成立一假定；凡出入口總貨值每人負擔額，有一鎊之變動，則每千人中結婚率必同時有〇·七之變動。上列第十三圖圖丙之尺度，即依此辦法而決定者，已在圖中公共平均數線之上下標明矣。

在丙圖中，吾人一望即知自一八七〇年以後，二曲線之變動，合攏甚為密切，但此一密切關係，惟犧牲一八七〇年以前之部分，始能得之。在一八七九至一八九三年一短促之期間中，二條曲線愈形貼合；然此既經用特殊之選擇而繪成，則以此作為一般論辯之基礎，必將有誤入歧途之危險。

吾人根據構圖之結果，可得一結論：自一八七〇年以後，支

配英國國外貿易之原因，亦同樣爲支配結婚率之因素，使二者發生變動旣在同一時期，變動方向亦相互一致；且一者受影響之程度愈大，他一曲線受牽動之程度亦愈甚；惟二者之間，並無成簡單比例之一定法則耳。

在比較曲線之時，可不必比較對一期間平均數之離中差，正當而有利之方法，莫過於計算對修勻曲線之離中差，至計算對修勻曲線之離中差，由移動平均數求之固可，否則卽用其他方法求之亦無不可也。總之，算出對修勻曲線之離中差後，吾人可忽略有逐漸而永久效果之原因，從事比較短期之變動矣。此節容以後再申論之（見第二編第六章）。

附註——上列第十三圖圖乙，所欲測驗之關係，可以一方程式$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$表示之，丙圖所欲測驗者，可以方程式$\frac{x-a}{y-b}=c$（c爲常數）代表之。式中之x爲出入口貨值，y爲結婚率，a爲出入口貨值在某一期間中之平均數，b爲結婚率在一期間中之平均數，選擇c值之法，須能使兩組數量之平均變動相等。如用最小二乘法，則擇定之c，必能使二條曲線之相應性，較用本書算出之數值所求得者爲密切也。

第四節 循環數字

循環數字 現當論及循環數字（periodic figures）矣。所謂

循環數字者何？乃即在某一週期（例如數字報告爲每月一次時週期即爲一年）中，依一定之時間，達到最高點及最低點，並表示連續期間中呈有規律之變動之數字也。此種數字之例證甚多，在自然現象中，有如日之升起，每日之記錄相同，均可代表現象，年復一年，幾無變化。舉潮汐之例而論，季節現象之較爲呆板之各年曲線，與社會統計中稍欠明顯之週期，二者之間，乃確有其相連之關係；惟潮汐往往受諸種不同之影響，因其週期乃有二十四小時一循環，及其他長短不同之週期循環，且因素旣衆，影響力量復有強弱之異，一因素之效果，往往爲他因素之效果所掩蔽耳。即在英格蘭銀行之每週記錄中，翟翁士(Jevons)氏，（註八）亦曾發現有按月，按季，按年，種種不同之循環焉。

在社會及產業統計中，吾人慣常發現有按年之循環，同時有遲滯之向上向下之一般運動，摻雜其間，另外復因有循環之商業繁盛及蕭條關係，呈現大約每十年一循環之不規則週期。此三種運動對於數字之影響，吾人不難考察而得，茲就英國鑄鐵工人協進會失業人數之每月調查數字爲例，作一完全之討論，以謀徹底明瞭研究循環數字之一般方法。翟翁士氏論文『秋收對貨幣市場之頻繁壓力』（註九）可請讀者參考作爲第二例釋之用；如欲作爲練習之用，可請採用英國統計月報中之小麥價格，在此數字中，各年數字圖，形式有逐漸變化之象，此種變化之經過，可參照

全球各處秋收影響日愈強烈之情形察視之。

循環數字之一般形態 此種循環數字，如用圖示法，表明兩重之循環，有特別適用之效，考察每年急促變動及較長時期之一般運動，相互發生之影響，尤爲適宜。請閱下列第三十六表：

循環數字

鑄鐵工人失業人數，以英國鑄鐵工人協進會會員總數估計數之百分數按月份分別表示之：計算所根據之數字，爲鑄鐵工人協進會一八九四年之常年報告。

年份	一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	一年平均
一八五五	11.1	14.1	14.0	12.5	10.0	9.9	8.7	8.7	6.8	7.7	8.8	12.0	10.4
一八五六	10.9	12.6	12.2	10.0	9.4	7.5	6.9	7.3	6.9	8.1	8.7	9.9	9.2
一八五七	10.1	9.5	8.7	8.7	8.1	7.3	6.8	6.9	6.2	8.0	14.0	17.7	9.8
一八五八	20.2	20.6	20.9	19.8	20.3	17.8	15.9	14.3	13.1	11.9	11.5	11.2	16.5
一八五九	10.6	8.8	6.5	5.2	4.0	4.4	3.2	3.6	3.4	3.8	4.6	5.1	5.3
一八六〇	4.0	3.2	2.6	2.2	1.6	1.7	2.3	2.6	2.6	2.9	3.7	5.6	2.9
一八六一	6.0	6.9	6.5	7.9	7.8	8.4	6.9	7.9	9.5	10.7	12.4	13.8	8.7
一八六二	14.5	14.0	14.0	14.6	14.4	13.7	13.3	12.9	12.2	13.5	14.9	16.0	14.0
一八六三	15.5	13.9	13.6	11.6	10.4	9.3	8.1	7.8	7.4	6.6	5.3	5.0	9.5
一八六四	6.0	7.1	6.6	5.1	4.4	3.3	2.8	2.8	2.6	3.3	4.2	8.1	4.7
一八六五	5.4	5.3	5.3	4.6	3.4	2.9	2.6	3.1	2.7	2.6	2.3	4.9	3.8
一八六六	4.2	5.4	5.1	3.6	5.1	6.5	5.9	6.5	6.9	7.4	9.3	13.8	6.7
一八六七	12.4	13.2	15.4	16.7	14.9	14.6	14.2	13.9	15.7	16.3	18.9	22.6	15.7
一八六八	22.1	20.9	19.8	18.6	16.7	15.8	14.9	14.7	14.2	14.1	15.6	17.4	17.1
一八六九	17.3	17.1	16.8	15.6	15.2	13.0	13.3	11.8	13.1	13.6	14.8	15.3	14.8
一八七〇	14.5	10.9	8.7	7.2	5.0	4.5	3.7	4.5	4.9	5.0	5.6	8.3	6.9
一八七一	7.2	5.6	3.6	2.8	1.6	1.5	1.6	1.2	.9	1.4	1.1	2.2	2.6
一八七二	1.1	1.1	.9	.8	1.2	.7	.9	1.0	1.3	1.8	2.6	4.1	1.5
一八七三	3.3	2.8	2.7	2.5	2.1	2.0	3.0	4.9	4.3	3.3	3.3	5.1	3.3

平均數 一八五五至七三	16.3	13.2	9.7	8.9	8.2	7.7	7.1	7.2	7.1	7.5	8.5	10.4	8.6
一八七四	4.9	3.9	3.9	3.5	4.9	3.9	3.8	3.4	3.5	3.7	3.9	5.0	4.0
一八七五	4.6	3.4	3.5	2.8	2.8	2.8	3.3	3.4	3.6	4.1	4.1	5.0	3.6
一八七六	4.9	4.9	4.9	5.4	4.8	5.2	5.7	5.8	6.4	6.4	6.2	10.3	5.9
一八七七	7.7	7.4	7.0	6.9	8.4	7.6	7.4	7.8	9.6	10.9	12.3	16.3	9.1
一八七八	14.0	14.3	13.5	15.3	13.3	14.6	13.6	13.2	13.3	14.0	15.7	21.0	14.7
一八七九	23.2	23.8	24.7	25.5	22.3	23.4	21.5	22.6	22.5	21.1	18.0	16.6	22.1
一八八〇	15.2	12.9	11.1	10.0	10.0	9.7	9.8	10.0	10.0	9.2	9.2	10.2	10.6
一八八一	11.5	10.8	10.1	10.1	7.6	7.5	6.5	5.8	5.6	5.4	5.0	6.6	7.7
一八八二	5.5	5.2	5.3	4.5	3.6	3.8	3.2	3.4	3.6	4.1	4.4	6.0	4.4
一八八三	3.6	4.8	5.2	4.3	4.2	3.6	3.9	4.3	4.3	4.2	4.0	6.6	4.4
一八八四	6.1	6.2	5.9	6.5	6.5	6.9	6.5	7.6	8.1	7.8	9.8	10.9	7.4
一八八五	10.2	11.1	10.0	10.1	9.8	9.1	9.8	10.7	11.8	11.6	12.7	13.6	10.9
一八八六	14.1	15.0	15.2	15.5	13.4	13.1	12.1	12.7	13.6	13.9	12.7	12.9	13.7
一八八七	12.4	11.6	10.2	9.1	9.2	10.6	9.2	8.8	9.6	9.4	9.4	9.1	9.9
一八八八	7.8	7.5	6.4	6.4	5.9	5.2	5.7	5.0	5.1	4.8	3.2	3.5	5.5
一八八九	3.1	3.3	2.4	2.1	1.7	1.6	1.7	1.7	1.6	1.5	1.2	1.4	1.9
一八九〇	1.3	1.3	3.2	3.1	2.8	2.4	2.4	2.7	2.7	2.7	2.7	2.7	2.5
一八九一	3.9	3.5	4.2	4.2	4.6	4.0	4.5	4.8	5.4	5.6	5.7	6.3	4.7
一八九二	7.0	7.2	7.9	8.1	7.9	7.9	7.7	7.6	9.3	11.4	10.9	12.0	8.7
一八九三	11.5	11.2	10.1	7.7	9.6	8.3	8.3	9.2	11.7	11.9	11.5	11.5	10.2
平均數 一八七四至九三	8.6	8.5	8.2	8.1	7.7	7.6	7.3	7.5	8.1	8.2	8.1	9.4	8.1
平均數 一八五五至九三	9.4	9.3	8.9	8.5	7.9	7.6	7.2	7.4	7.6	7.9	8.3	9.9	8.3

第三十六表

於諸年各橫列中，可見在每年中間，必有降低之現象。再查縱行每月份之下，各年增減並無通盤顯著之趨勢，因前數年與末數年，均見高低不同之數字也，惟最引人注意者，此種數字之主要

形態，即爲成組之低數字年份與成組之高數字年份，有循環返復之趨勢。每月失業人數佔會員總數之百分數，在百分之十以上者，有一八五七至一八五八年，一八六一至一八八一年，一八八四至一八八七年及一八九二至一八九三年數組。玆僅就一八六六至一八七〇年一期研究之。一八六六年一月份之數字，比以前各年同月份之數字均低；一八六六年二月，三月，及四月份之數字亦然；惟自五月起至九月止，此五個月份之數字，則比一八六五或一八六四年同期之五個月份數字爲高；一八六六年自十月至十二月之數字，則比一八六三，一八六四或一八六五年之數爲高；至一八六七年十二月乃愈大，以前各年之數字無與倫比者。一八六八年之數字，多半均比以前九年爲高；惟自一八六八年九月以來，各年同月數字每況愈下，必較上一十二個月份之數字爲低，此種情形，直至一八七二年九月爲止，始形緩和。由此可見，此一失業狂瀾，波濤澎湃，自一八六六年五月起，延至一八七二年九月，有六年餘之久焉。

季節影響 現請再考察季節之影響。一八六六年，除在四月一月外，夏季並無低落之現象，至十二月反有急速之昇進。一八六七年，自五月至八月一落之後，自九月至十二月，即繼以猛烈之擡高。一八六七年十二月起，又形式微，直至一八六八年九月，始告一段落，而同年十月十一月及十二月，反甚高漲；由此

觀之，失業數字之擡高，在一般情形之下，非至八月後，不能出現，可知一般低落現象，並未使季節影響延長甚多也。復查次年，即一八六九年，在八月數字降落甚低，打破以往最低點之記錄，惟在十二月，數字升起程度甚微，再次一年，數字降低迅速，至八月而極，然因季節而應有之上昇，仍及時而至，並未稍見延擱也。於斯可見，除在開始一年即一八六六年尚未見有低落現象外，其餘各年，在全局之變動過程中，均受季節之影響，且各年之擡起，均見於秋季，似有一致之情形；此種情形，在一八七五年八月起至一八八一年五月止一期中均相同。然吾人試問：一八六七至一八七〇年，就業情狀，以何月最爲最惡劣？則一八六七年十二月之百分之二二·六，乃爲最大之數字，似爲十二月矣，然十二月之失業，向來比其他各月爲甚，而一月至六月共六個月中，任何一月之數字，頗有較爲反常之可能，反不若十二月情形之一致，故欲查就業狀況最惡劣之確定日期，非用圖示法，必不能得出最優良之表明。下列圖式爲英國鑄鐵工人協進會前任書記海君（Mr. Hey）所繪，上文所言各點，即多爲海君所提示，吾人於此不妨一併聲明。

圖式說明　上列第十四圖，內中包含之事實，如下所述。重線之作用，在表示每年之平均百分數，吾人試察該線，必見一八五七年以前之步步趨跌趨勢，至一八五七年，驟然上騰，一八五八至一八六〇年，又突然下降，嗣後復經過兩年之上昇，乃達於原來

之水準,至一八六五年,竟又回復至最低點;次一波浪形,自一八六五年起至一八七二年止,經過七年之久,在此一波浪形中,最令人注意者,爲一八六七年之異常挺進,及一八七二年之重現極低新記錄。一八七二年之特異貿易狀態,並未保持甚久,卽行漸漸擡起,直至一八七六年爲止,於是另有一個六年期之波浪形開始,而成另一商業循環矣。此波浪形之升進,已非如前一波形運動之峻峭,惟經過時間之長久,昇進最高點之高度,則有過之無不及。反之,在降落之時,下降角度,幾與上昇所成角度相同,且在一八八二年所現之最低點,亦與在一八六五年之最低點大致相同。次一波浪形,本尙未至理應開始之年,乃竟提前實現,且波浪形之經過,有七年之久,亦非復爲六年,惟上升下降情形,均極緩和,特上昇尙較下降爲陡峭耳。一八八九年所呈現之最低點,並未維持甚久,卽行逐漸上昇,其後圖雖中止,但吾人得知其最高點,將見於一八九四年,惟高度尙爲緩和而已,又如支配以前各商業蕭條時期之原因依然存在,則下一最低點可望於一八九八或一八九九年實現也。實際上,據英國商業部之調查,就有報告寄還之各職工組合綜合觀之,最高月份爲一八九二年之十二月,最高年份爲一八九三年;嗣後卽逐步降落,至一八九七年而達於最低點,一八九八年一度輕微漲起之後,又於一八九九年重現極低之數字焉。(註一〇)

圖戊所表示者爲就業人數所佔之百分數，故此圖式恰爲以上各圖之倒置，而篇幅則大爲縮小。在一八七六至一八八二年一期之間，如以兩條縱線劃開，則依圖所示，在此數年中，英國全國損失之工作量，何等之大，鑄鐵工人協進會會員損失之工資，爲數何等之鉅，讀者必可一目瞭然。由此數字，指示吾人在鑄鐵工人協進會中，因特殊原因而失業之百分數，猶大於其他職工組合（只就有同期數字可資比較者而言）失業人數百分數之兩倍。

圖戊中，每年平均數用本章第一節所論修勻曲線法將之修勻，而以每七年一平均之平均數，(註一一) 適應一般之波長(wave length)。由此可知，在此三十九年中，運動或上或下，並無顯著之趨勢可言，且已修勻之曲線，與就業人數之總平均數，即91.7，相距尚不甚遠也。

此一圖式，最妙莫過於與前列第六圖（英國國產貨物出口總值）作比較觀。茲將二圖比較之結果，擇要揭露如下：

日期		日期	
出口貨值最低點	失業人數最高點	出口貨值最高點	失業人數最低點
1862	1858及1862	1866	1865
1868	1868	1872	1872
1879	1879	1882	1882或1883
1886	1886	1890	1889
1894	1893		

此外，此兩種數字，如用前節或下節所述方法，用圖比較之亦可。

季節影響之測算 在一八五五至一八七三年中十九個一月十九個二月，十九個三月……等月份之平均數，在一八七四至一八九三年二十個一月，二十個二月……等月份之平均數，以及自一八五五至一八九三年全期中同月份之平均數，均已見於前列第三十六表，並列於第十四圖之乙，丙，丁。當吾人計算前論之各年平均數時，既已用上述方法，將季節變動剔除；今用各月之平均數，吾人乃又剔除特定年份之影響。例如，設吾人從一數列完全不受季節影響之數字（假如果有此種數字）中，將所有十一月份之數字提出，而以此十一月份之數字，與所有各月之總平均數作比較，如就通盤計算，則在此平均數之上者，與在此平均數之下者，二者出現之次數，必完全相同。然各月數字，果已受季節之影響，則非在在平均數上之數字，較在平均數下之數字甚多，必在平均數上者，較在平均數下者過少。此過多過少之數，卽視季節影響而定，凡季節影響愈大者，則相差之數亦愈大。今用此方法，將數字施以平均，必可剔除非屬於季節之影響。設非用平均方法，勢必難以剔除，否則必須從根本就實際計算而來。季節原因之影響如使十一月超出總平均數之數，較使十月份超出總平均數之數爲大，則各年十一月份數字之平均數，超出總平均數之

數，亦必比十月份超出總平均數者爲多，且表示各年某一月份之平均數之曲線，必與因非屬於季節之影響已失其存在而得出之平均數曲線相似。何則？二者相似之理由有二端，第一，因在比較短期而爲吾人認爲足够應用之數年中，必有一極有力之非屬於季節之影響，對此一平均數發生永遠顯著之作用，如在前列第三十六表所表示者卽是；第二，因爲季節原因以及非屬於季節之原因，時常互有影響，並非各自獨立；例如，商業蕭條時期，每因酷寒之冬日，而加強其深刻之程度；又如商業不振之年，復遇生意清淡之月，則失業人數必驟然大增，反之在繁榮之年，加臨生氣蓬勃之夏季，失業人必大爲減少，甚可幾至於零。故在一方面，各種不同原因之相互作用，可以擡高季節之最高度，復可壓低季節之最低度，但在另一方面，二者相互爲用，因生補償作用，反可緩和尖銳之程度也。

在前列第十四圖乙，丙，丁三圖中，代表後半年之曲線，置於歷年後半年曲線之前，此乃因每年波浪形之特性，必由最低而最高，始最爲顯明之故。試觀圖丙之波浪形，形式稍欠穩定，而漲落則較圖乙所示前一期中之漲落爲衰弱；此無他，季節已失其影響故也。

每年之波浪形　每年一度之波浪形，如甚穩定，如圖丁所示者，則類似下圖形式：

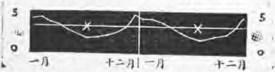
（第十五圖）

之數字，每年必與第十四圖甲相同；一八六四年，一八八二年及其他數年，即其最顯著者也。就所有各年觀察，絕大部份，每年最高度，非現於十二月，即在一月；在一八五八年之末，並無最高點出現，但因下降過速，致現折斷之象；一八六〇年之末，曲線居然上升，但一升之後，又發生春季之瀉落，終以一般上升趨勢甚強，瀉落未久，即行轉而向上邁進；自一八六一年以後，尙有劇烈變動甚多，可依此類推，姑不一一敍述。總之，沿線之突出點，恰在平均數線之上，而各點相距大致相等，則無可疑。

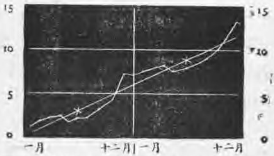
各最低點，尙欠十分明顯，此係因各點連結而成之形式不明之故，是以每以些須原因，各點即趨近修勻曲線，且各最低點每隨一般降落趨勢而被遮蔽，或因一般上昇趨勢而致消失。雖然，在一八六一年，雖同時有強烈之上升趨勢，而最低點仍甚鮮明；在一八六五至一八七〇年變動行程中，各最低點亦頗顯著；至於自一八五九至一八八八年間，除一八七六，一八八〇，及一八八一年三年為例外外，其餘各年，遇有最低點出現時，亦尙易於辨認也。

茲為示明每年平均數之靜止，上升，及下落等傾向，對於季節波浪形之影響，分作三圖於下：

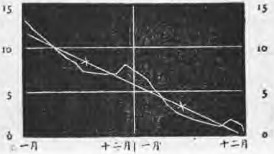
甲、平均數線在靜止狀態下之季節波浪形



乙、平均數線在上升狀態下之季節波浪形



丙、平均數線在下降狀態下之季節波浪形

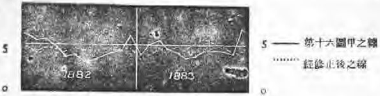


（第十六圖）

此三圖式,係用每月對總平均數之平均差額(詳言之,卽一月 +1.1 二月 +1.0 三月 +.6 四月 +.2 五月 −.4 六月 −.7 七月 −1.1 八月 −.9 九月 −.[illegible] 十月 −.4 十一月 0 十二月 +1.6)按月加上連結每年平均數之直線上之距離,或由該直線上之距離減去之。圖乙之上升曲線上,春季之降勢,有趨向平行之意,而秋季上升之勢,則有更趨陡峭之意;圖丙下降曲線上,春季之降勢,有急轉直下之勢,而秋季之升勢,則未能暢行上昇。

此一季節波動,連遲滯之長期變動在內,是否卽爲數字變動之完全解釋,尙難確定,如其果爲數字變動之唯一原因,則第十四圖甲,必完全爲第十六圖甲,乙,丙三圖所合成。第十六圖甲之例,最佳莫過於一八五五至一八五七年,一八六四至一八六五年,及一八七一至一八七三年;圖乙之例,爲一八六〇至一八六一年,一八六六至一八六七年,一八七七至一八七八年,及一八八三至一八八五年;圖丙之例,則爲一八五九年,一八六三年,一八八〇至一八八二年,及一八八六至一八八九年。

變動之剔除 依上文所述,變動之原因有兩組,彼此並非獨立,而上列圖式之再繪製,又非十分準確;然由此所表示之相合形態,已甚密切,故以下所論之剔除季節變動方法,有一部份頗可付諸實施。將以上所得之各月對總平均數之超出數及缺少數,與原始數字合併計算,卽將超出數減去,並加上缺少數;如此則可產生一直線如下圖:

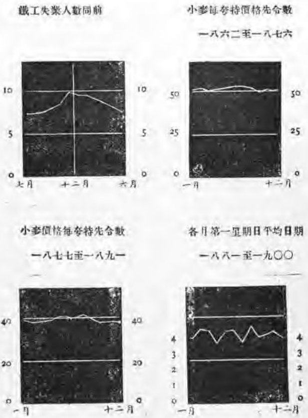


（第十七圖）

但經此程序之後，結果除求得一趨勢之外，其餘並無所有，此乃由於一八八三年一月曾有非常降落之故，然除此一期之外，如欲尋得一完全之例，其事甚難。以此法施於第十四圖之己，庚辛三圖，以謀由一八七二年之商業恐慌，一八七九年之商業蕭條，以及一八八三年之潮流轉向中之效果，各將其季節之影響解除。在第十四圖之己圖中，吾人可見一八七二年六月以前，尚未達到絕對最低點，但該年之一月乃爲比較最佳之月份。由此可知一八七二年一月，乃爲商業全盛時代之轉向點，惟此月份爲期則較其他一般轉向期爲早。但一八七九年最高點之日期，經此法修正之後，並未有何改變，至一八八九年最高點之日期，亦不過移過一月而已。

週期存在之判準 討論至此，關於週期存在之判別標準，不得不加以考慮。在第十四圖甲圖中，即憑吾人目力，已足判明每年一度之週期，然用一代表小麥價格之圖式，是否可以引起每年一度之變動，則不無可疑。總而言之，任何調查材料之每月數字，

凡就若干年將同月份之數施以平均者，則即使並無季節影響，一月，二月……以及其他各月之平均數，必不能準確相等。下列第十八圖各式，即表示各種平均數者也：



（第十八圖）

原书缺页

原书缺页

原

书

缺

页

原

书

缺

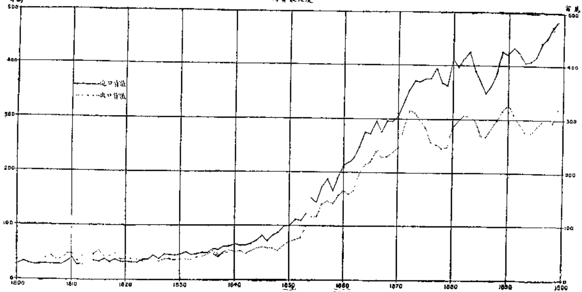
页

題下列第十九

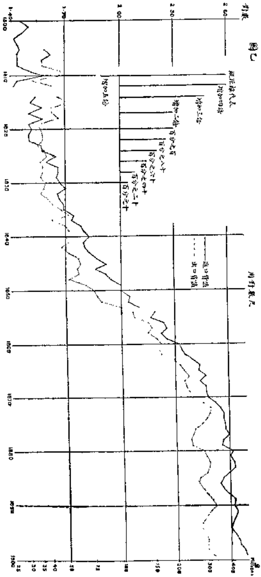
甲圖

英國十九世紀間進出口貿易之進展

用普通尺度



(第十九圖)



（續第十九圖）

所表示之數字，卽爲英國之出入口貨値，而用對數尺度作成者。第十九圖乙圖之右方，列有絕對數字；左方卽爲相當於絕對數字之對數。某一縱距離，例如一英寸，爲對數尺度0.301之距離；吾人如以此數加在任一數之對數上，則得該數之兩倍之對數，因爲 $\log a+.301=\log a+\log 2=\log 2a$；，舉例言之，設吾人欲將代表三十鎊之距離，增加長度一英寸，則結果位置必在代表六十鎊之距離。反之，設吾人將一英寸之1.59（在對數尺度上代表0.477亦卽 $\log 3$）加在$2a$之對數上，則必得$6a$，故

$$\log 6a=.477+\log 2a=.477+.301+\log a，\text{理由如上述}$$

$$=.778+\log a=\log 6+\log a；$$

換言之，吾人在此尺度上求得同一之位置，其途徑有二，一爲用兩個分立之比率，一爲僅一複比率。依此原則繪成之圖式，必能滿足兩種必需之條件；一則相等之縱距離，不論所用爲何一部尺度，均須代表同一之比率，二則不論點數若干，均可記錄於圖上，而不致發生矛盾。本章本節之末，附有修正至小數點三位止自一至一千之對數表，此表對於上述之用途，已足應付裕如。

對數圖之應用舉例　試觀上列第十九圖，可見英國之進口貨値，自一八一一年，至一八三六年，貨値已變爲兩倍，至一八五三年，復變爲一八三九年之兩倍，至一八六六年又變爲一八五五年之兩倍，而在一八九九年之進口貨値，則較之一八八六年已增

加百分之四十。由此圖上，同時可加注意者，尙有兩點，一則在一八五〇及一八八〇年，英國進口貨值超出出口貨值之數，恰爲出口貨值之百分之四十，二則一八九九年之進口貨值，當一八六〇年出口貨值之三倍。

假如吾人目力果已經過精密之訓練，能以了解諸如此類之圖式，又假如吾人深知此一圖式乃爲一比率圖而非數量圖，而將此事實深印心中，則此圖必完全適合圖示法之宗旨；換言之，即使吾人對於繁複事件，立可產生眞實之印象。反之，設幷此眞實印象而不可得，此係由於不能使心理成正當狀態，則只能採用實數尺度之圖式，然吾人不可不知，此種僅用實數尺度之圖式，每予吾人以背謬之比率印象也。(註一二)

速度及加速度 尙有一點，吾人務須注意者，即在此類圖式中，不須再畫基線，否則必予人以一錯誤之印象。此外，尤須注意者，在相等之縱距離，代表圖上任何部分彼此相互之相等比率，而非代表在實數尺度上之相等增加量時，相等之斜度(degree of slope) 實即代表相等之增加率（相等加速度），而非代表在實數尺度上相等時間之相等增加量（相等速度）。在用對數尺度時，一上升之線，如與橫線成凸形，乃表示增加率之擴展，如一八三〇至一八五三年之進口貨值（設此曲線已修勻過）。反之，如一線與橫線成凹形，即表示增加率之遲滯，如一八五四至一八七

三年之進口貨值是。但若在實數尺度圖上，則在一八三〇至一八五三年，及一八五四至一八七三年兩期中，曲線幾全呈凸形，此表示實在增加量無時不在增加也。

{對數尺度對於指數應用之有利} 如果篇幅許可，頗可多列數圖，兼用兩種尺度；蓋在極多之數列中，用此兩種方法後，顯示出極大之差異，而惟此差異，乃可爲吾人之教訓。今有一種情形，可以明白指示，即對數尺度所以須特別重視者，即在原始數字所表示者爲比率而非實在數字之時。例如孫巴克(Sauerbeck)氏有名之圖式，乃用實數尺度繪成，該圖之作用，乃在表示彼之物價指數，在此圖式中，所列之數字，乃爲某若干年中之物價百分數。茲設三年之指數，爲一〇〇，八〇，六〇，如用實數尺度，則逐年之減少量，必將以相等之距離表示之，因而似有相等之情勢。然金價之變動，在兩時期絕無完全相等之理。第一期，由一〇〇落至八〇，乃降落百分之二十；在前年價值一金鎊之貨物，去年乃以十六先令購得之。第二期，由八〇落至六〇，降落達百分之二十五；在去年價值一金鎊之貨物，今年竟以十五先令購得之。故就對於物價指數之應用而論，比率最爲重要，作圖所應表示者，亦唯比率一端也。

{用對數尺度作比較} 對數尺度對於數列之比較，有其特別之用途，專論對數尺度之節目中，所討論之方法，可以立即採用

之。在比較性質不同之數量，以擇定單位爲最困難，但此困難，唯在以比率相比較時，乃可消滅；故從此對於百分數方法，不致再感煩難矣。夫在調查因果關係之時，在比率中所發見之密切關聯，遠比在實在數量中所見者爲多。蓋一組現象，與另一組現象，如無關聯則已，如有關聯，則二者之關係，大半以比例關係（例如，某一現象可量性質每增加百分之十，另一現象之可量性質，則增加百分之八）時爲多，而爲絕對數量之關係（例如，一種物價，不論原來位置如何，凡每增加二先令，則買主必減少一百人）時則較少。今用對數尺度，設兩曲線如有類似狀態，則其意義卽足表示兩曲線，以比例的變動相適應，但如用實數尺度，則兩曲線之類似狀態，不過表示絕對的變動相應和而已。

不特此也，在此新方法之下，如欲令兩平均數相等，亦不若前此之煩難。蓋一經取用兩組數列之對數，此兩數列在對數尺度上之地位，高度幾何，並不重要；高度之變換，不過意卽以一常數，乘所有各項(item) 而已，並未變換各項之形態，或變動之比例也。用此方法，其程序可列之如下：（一）在對數尺度上，將代表兩組數列之曲線畫出；（二）然後將下面之一曲線，縱直向上移動，使接近上面之曲線，使二曲線相疊至二曲線可能之相應狀態，最爲接近爲止；（三）卽在此地位，將此下一曲線繪成，於是兩組數列，可以從事比較矣。

〔變動方程式〕 玆爲明瞭此一方法起見，特以英國職工組合有業人數之百分數，與結婚率比較爲例，列如第三十八，三十九兩表，及第二十圖。

結婚率與有業人數

每千人中結婚率					有業人數所佔之百分數				
年度	最高點	最低點	差額	對最高額之百分數	年度	最高點	最低點	差額	對最高額之百分數
一八六九	…	15.9	1.7	10	一八六八	…	91.5	7.4	7.5
一八七三	17.6	…	3.2	18	一八七二	98.9	…	11.4	11.5
一八七九	…	14.4	1.1	7	一八七九	…	87.5	10.6	10.8
一八八二至八三	15.5	…	1.3	8	一八八二	98.1	…	7.6	7.8
一八八六	…	14.2	1.4	9	一八八六	…	90.5	7.4	7.6
一八九一	15.6	…	.9	6	一八八九至九〇	97.9	…	5.4	5.5
一八九三	…	14.7			一八九三	…	92.5		
				9.7					8.4

有業人數在總人數中所佔之平均百分數在一八六五至一八九三年，爲百分之九十五·一；九五·一之百分之八·四，卽爲八二·四之百分之九·七。

（第三十八表）

下列圖甲，數字用實數尺度表示；圖乙，二十九年間之各平均數，均令其完全相等，數字則用對數尺度表示之。此時可依照本章第十三節所論之構圖法辦理，惟方法不妨別加改良，如第三十八表，列有各時期中之最高及最低點，並將由最高點降爲最低點時之

年 度	結婚率	對 數	有業人數百分數	減去12.7	對 數
一八六五	17.5	1.243	98.0	85.3	1.931
一八六六	17.5	1.243	96.9	84.1	1.925
一八六七	16.5	1.217	92.7	80.0	1.903
一八六八	16.1	1.207	91.5	78.8	1.896
一八六九	15.9	1.201	92.6	79.9	1.902
一八七〇	16.1	1.207	95.7	83.0	1.919
一八七一	16.7	1.223	98.2	85.5	1.932
一八七二	17.4	1.240	98.9	86.2	1.935
一八七三	17.6	1.245	98.7	86.0	1.934
一八七四	17.0	1.230	98.2	85.5	1.932
一八七五	16.7	1.223	97.5	84.8	1.928
一八七六	16.5	1.217	96.4	83.7	1.923
一八七七	15.7	1.196	95.6	82.9	1.919
一八七八	15.2	1.182	93.7	81.0	1.908
一八七九	14.4	1.158	87.5	74.8	1·874
一八八〇	14.9	1.173	94.1	81.4	1.911
一八八一	15.1	1.179	96.5	83.8	1.923
一八八二	15.5	1·190	98.1	85.4	1.931
一八八三	15.5	1.190	97.8	85.1	1.930
一八八四	15.1	1.179	92.6	79.9	1.902
一八八五	14.5	1.161	91.0	78.3	1.894
一八八六	14.2	1.152	90.45	77.7	1.890
一八八七	14.4	1.158	92.6	79.9	1.902
一八八八	14.4	1.158	95.2	82.5	1.916
一八八九	15.0	1.176	97.9	85.2	1.930
一八九〇	15.5	1.190	97.9	85.2	1.930
一八九一	15.6	1.193	96.5	83.8	1.923
一八九二	15.4	1.187	93.7	81.0	1.908
一八九三	14.7	1.167	92.5	79.8	1.902
		平均數 1.196			平均數 1·916

（第三十九表）

變動之平均數(表上列有對最高額之百分數，意即指此)算出。據查在有調查表可稽之職工組合中，有業人數之變動，爲百分之八·四，恰與結婚率百分之九·七之變動相當。(註一三) 如欲求更密切

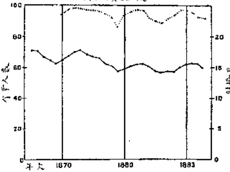
一八六五至一八九三年之比較

圖甲 用實數尺度

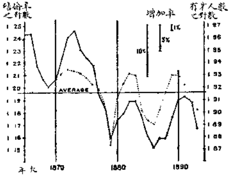
結婚率與有業人數

一八六五一九三年之比較

圖甲用實數尺度

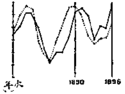


圖乙用對數尺度



圖丙一八八○——一八九六年之比較

尺度與圖乙同



————— 結婚率　　　· · · · · · 有業人數

（第二十圖）

之相應，可假定有業人數之一部，並不致影響結婚率，並求出在此總數之百分之八·四，成爲餘額之百分之九·七以前，究應扣除幾何；在擇定之期間，職工組合會員有業人數之平均百分數，爲九五·一，此九五·一之百分之八·四，爲七·九九，而此七·九九卽爲八二·四之百分之九·七。例如，九五·一與八二·四之差爲一二·七，此一二·七可視爲與本問題無關之數，故在未查出對數以前，卽從各數中將此一二·七扣除。用實數尺度時，此種程序可令兩組數列之平均數相等以代替之，並在一基線之下，另畫一基線，使與上一基線，距相當之距離，以便兩數列之同一縱距離，乃可代表平均之變動；此一程序純與前在本章第三節末段所述者完全相同。如以代數表示之，可得下列方程式：

$$\log(y-c)-\log x=k, k\text{爲一常數},$$

在此式中，c 及 k 爲常數，此二常數，如何擇定，完全視能否使配合最爲密切爲斷，至 x 及 y，乃卽欲作比較之二數量也。

在上列第二十圖甲，數字用實數尺度表示之，圖乙則用對數尺度表示之，並已令兩組變動平均百分數相等矣；圖丙，自一八八〇至一八九六年，期間較短，方法恰與圖乙所用者相同。至實在數字及其對數，則列於上列第三十九表。

費許 (Irving Fisher) 教授，於一九一七年六月，在美國統計學會之季刊中，曾發表一文，論述對數曲線，極稱對數曲線之妙用。茲特列恰足供吾人應用之三位小數對數表於下：

對數表

數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數
1	0	34	1.531	67	1.826	101	2.004	134	2.127	167	2.223	201	2.303
2	.301	35	1.544	68	1.833	102	2.009	135	2.130	168	2.225	202	2.305
3	.477	36	1.556	69	1.839	103	2.013	136	2.134	169	2.228	203	2.307
4	.602	37	1.568	70	1.845	104	2.017	137	2.137	170	2.230	204	2.310
5	.699	38	1.580	71	1.851	105	2.021	138	2.140	171	2.233	205	2.312
6	.778	39	1.591	72	1.857	106	2.025	139	2.143	172	2.236	206	2.314
7	.845	40	1.602	73	1.863	107	2.029	140	2.146	173	2.238	207	2.316
8	.903	41	1.613	74	1.869	108	2.033	141	2.149	174	2.241	208	2.318
9	.954	42	1.623	75	1.875	109	2.037	142	2.152	175	2.243	209	2.320
10	1.	43	1.633	76	1.881	110	2.041	143	2.155	176	2.246	210	2.322
11	1.041	44	1.643	77	1.886	111	2.045	144	2.158	177	2.248	211	2.324
12	1.079	45	1.653	78	1.892	112	2.049	145	2.161	178	2.250	212	2.326
13	1.114	46	1.663	79	1.898	113	2.053	146	2.164	179	2.253	213	2.328
14	1.146	47	1.672	80	1.903	114	2.057	147	2.167	180	2.255	214	2.330
15	1.176	48	1.681	81	1.908	115	2.061	148	2.170	181	2.258	215	2.332
16	1.204	49	1.690	82	1.914	116	2.064	149	2.173	182	2.260	216	2.334
17	1.230	50	1.699	83	1.919	117	2.068	150	2.176	183	2.262	217	2.336
18	1.255	51	1.708	84	1.924	118	2.072	151	2.179	184	2.265	218	2.338
19	1.279	52	1.716	85	1.929	119	2.076	152	2.182	185	2.267	219	2.340
20	1.301	53	1.724	86	1.934	120	2.079	153	2.185	186	2.270	220	2.342
21	1.322	54	1.732	87	1.940	121	2.083	154	2.188	187	2.272	221	2.344
22	1.342	55	1.740	88	1.944	122	2.086	155	2.190	188	2.274	222	2.346
23	1.362	56	1.748	89	1.949	123	2.090	156	2.193	189	2.276	223	2.348
24	1.380	57	1.756	90	1.954	124	2.093	157	2.196	190	2.279	224	2.350
25	1.398	58	1.763	91	1.959	125	2.097	158	2.199	191	2.281	225	2.352
26	1.415	59	1.771	92	1.964	126	2.100	159	2.201	192	2.283	226	2.354
27	1.431	60	1.778	93	1.968	127	2.104	160	2.204	193	2.286	227	2.356
28	1.447	61	1.785	94	1.973	128	2.107	161	2.207	194	2.288	228	2.358
29	1.462	62	1.792	95	1.978	129	2.111	162	2.210	195	2.290	229	2.360
30	1.477	63	1.799	96	1.982	130	2.114	163	2.212	196	2.292	230	2.362
31	1.491	64	1.806	97	1.987	131	2.117	164	2.215	197	9.294	231	2.364
32	1.505	65	1.813	98	1.991	132	2.121	165	2.217	198	2.297	232	2.365
33	1.519	66	1.820	99	1.996	133	2.124	166	2.220	199	2.299	233	2.367
				100	2.000					200	2.301		

數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數
234	2.369	267	2.427	301	2.479	335	2.525	401	2.603	467	2.669
235	2.371	268	2.428	302	2.480	337	2.528	403	2.605	469	2.671
236	2.373	269	2.430	303	2.481	339	2.530	405	2.607	471	2.673
237	2.375	270	2.431	304	2.483	341	2.533	407	2.610	473	2.675
238	2.377	271	2.433	305	2.484	343	2.535	409	2.612	475	2.677
239	2.378	272	2.435	306	2.486	345	2.538	411	2.614	477	2.679
240	2.380	273	2.436	307	2.487	347	2.540	413	2.616	479	2.680
241	2.382	274	2.438	308	2.489	349	2.543	415	2.618	481	2.682
242	2.384	275	2.439	309	2.490	351	2.545	417	2.620	483	2.684
243	2.386	276	2.441	310	2.491	353	2.548	419	2.622	485	2.686
244	2.387	277	2.442	311	2.493	355	2.550	421	2.624	487	2.688
245	2.389	278	2.444	312	2.494	357	2.553	423	2.626	489	2.689
246	2.391	279	2.446	313	2.495	359	2.555	425	2.628	491	2.691
247	2.393	280	2.447	314	2.497	361	2.558	427	2.630	493	2.693
248	2.394	281	2.449	315	2.498	363	2.560	429	2.632	495	2.695
249	2.396	282	2.450	316	2.500	365	2.562	431	2.634	497	2.696
250	2.398	283	2.452	317	2.501	367	2.565	433	2.636	499	2.698
251	2.400	284	2.453	318	2.502	369	2.567	435	2.638	501	2.700
252	2.401	285	2.455	319	2.504	371	2.569	437	2.640	503	2.702
253	2.403	286	2.456	320	2.505	373	2.572	439	2.642	505	2.703
254	2.405	287	2.458	321	2.507	375	2.574	441	2.644	507	2.705
255	2.407	288	2.459	322	2.508	377	2.576	443	2.646	509	2.707
256	2.408	289	2.461	323	2.509	379	2.579	445	2.648	511	2.708
257	2.410	290	2.462	324	2.511	381	2.581	447	2.650	513	2.710
258	2.412	291	2.464	325	2.512	383	2.583	449	2.652	515	2.712
259	2.413	292	2.465	326	2.513	385	2.585	451	2.654	517	2.713
260	2.415	293	2.467	327	2.515	387	2.588	453	2.656	519	2.715
261	2.417	294	2.468	328	2.516	389	2.590	455	2.658	521	2.717
262	2.418	295	2.470	329	2.517	391	2.592	457	2.660	523	2.719
263	2.420	296	2.471	330	2.519	393	2.594	459	2.662	525	2.720
264	2.422	297	2.473	331	2.520	395	2.597	461	2.664	527	2.722
265	2.423	298	2.474	332	2.521	397	2.599	463	2.666	529	2.723
266	2.425	299	2.476	333	2.522	399	2.601	465	2.667	531	2.725
		300	2.477							533	2.727

數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數	數字	對數
535	2.728	601	2.779	667	2.824	735	2.866	801	2.904	900	2.954
537	2.730	603	2.780	669	2.825	737	2.867	804	2.905	903	2.956
539	2.732	605	2.282	671	2.827	739	2.869	807	2.907	906	2.957
541	2.733	607	2.783	673	2.828	741	2.870	810	2.908	909	2.959
543	2.735	609	2.785	675	2.829	743	2.871	813	2.910	912	2.960
545	2.736	611	2.786	677	2.831	745	2.872	816	2.912	915	2.961
547	2.738	613	2.787	679	2.832	747	2.873	819	2.913	918	2.963
549	2.740	615	2.789	681	2.833	749	2.874	822	2.915	921	2.964
551	2.741	617	2.790	683	2.834	751	2.876	825	2.916	924	2.966
553	2.743	619	2.792	685	2.836	753	2.877	828	2.918	927	2.967
555	2.744	621	2.793	687	2.837	755	2.878	831	2.920	930	2.968
557	2.746	623	2.794	689	2.838	757	2.879	834	2.921	933	2.970
559	2.747	625	2.796	691	2.839	759	2.880	837	2.923	936	2.971
561	2.749	627	2.797	693	2.841	761	2.881	840	2.924	939	2.973
563	2.751	629	2.799	695	2.842	763	2.883	843	2.926	942	2.974
565	2.752	631	2.800	697	2.843	765	2.884	846	2.927	945	2.975
567	2.754	633	2.801	699	2.844	767	2.885	849	2.929	948	2.977
569	2.755	635	2.803	701	2.846	769	2.886	852	2.930	951	2.978
571	2.757	637	2.804	703	2.847	771	2.887	855	2.932	954	2.980
573	2.758	639	2.806	705	2.848	773	2.888	858	2.933	957	2.981
575	2.760	641	2.807	707	2.849	775	2.889	861	2.935	960	2.982
577	2.761	643	2.808	709	2.851	777	2.890	864	2.937	963	2.984
579	2.763	645	2.810	711	2.852	779	2.892	867	2.938	966	2.985
581	2.764	647	2.811	713	2.853	781	2.893	870	2.940	969	2.986
583	2.766	649	2.812	715	2.854	783	2.894	873	2.941	972	2.988
585	2.767	651	2.814	717	2.856	785	2.895	876	2.942	975	2.989
587	2.769	653	2.815	719	2.857	787	2.896	879	2.944	978	2.990
589	2.770	655	2.816	721	2.858	789	2.897	882	2.945	981	2.992
591	2.772	657	2.818	723	2.859	791	2.898	885	2.947	984	2.993
593	2.773	659	2.819	725	2.860	793	2.899	888	2.948	987	2.994
595	2.775	661	2.820	727	2.862	795	2.900	891	2.950	990	2.996
597	2.776	663	2.821	729	2.863	797	2.901	894	2.951	993	2.997
599	2.777	665	2.823	731	2.864	799	2.903	897	2.953	996	2.998
				733	2.865					1,000	3.000

（註一） 見本章第三節及第五節

（註二） 表中有符號表示數不包括出口船隻價值

（註三） 在各種平均數曲線中，表示平均數之符號，位在表示所平均之三，五，或十五年數字之數符號之重心。

（註四） 表中有＊號者表示該數並未將船隻出口貨值包括在內。

（註五） 因英帝國及地方租稅記載變更，後此各年度之圖式，不能繼續畫出。

（註六） 請參閱本書原著者之『十九世紀之工資』(Wages in the Nineteenth century)一書第九十頁附圖。

（註七） 此外尚有一種數列，其數字經數年始一變，在此數年中，數字完全相等，經過數年之後，忽一躍而至另一水準，既至另一水準之後，又保持不動者許久。此種數列之例證，爲標準計時工資率 (Standard time-rates)即是。

（註八） 見霍蘭士氏著對於通貨及金融之調查(Investigation in Currency and Finance)。

（註九） 見霍蘭士氏著對於通貨及金融之調查。

（註一〇） 請參閱英國一八九五年勞工統計簡報第七十三頁，該處對於類似上文所論各種數字之處置方法，列舉甚多。

（註一一） 關於曲線修勻方法及週期曲線之研究，請參閱一八八四年布安廷教授(Poynting)及一九一九年摩爾教授 (Moore) 兩在統計學報所發表之文。

（註一二） 馬夏爾(Marshall)教授)在彼『統計圖示法』(On the Graphic Method of Statistics) 一文中，建議糾正此一錯誤印象之簡單方法。該文刊於英國皇家統計學會學報五十週年紀念特刊，第二百五十七頁。

（註一三） 在第三十九表第二，四兩欄之數字，乃自務德 (G. H. Wood)先生在一九〇〇年英國統計學報發表之『一八六〇年關於工人階級發展之幾種統計』一文，並有一極有價值之對數表，可爲本節若干點之例證。

第八章　確度

第一節　引論

度量之性質　無論在物體上，或在經濟上，均無完全準確度量之存在，正與無完全直線或完全流體之存在同。經濟度量之性質，最好可由物體度量性質考察而解明之。權衡物質而不致有一公分之差，其事甚易。若有精確之天平，吾人即可因器械進步之故，在權衡上不致有一公毫，一公絲，乃至一公絲之十分之一之差。但欲獲得超過此等程限之確度，則無此天平矣。於角度之度量亦然。肉眼能辨別對角一度之三十分之一之物體。藉六分儀之助，則度量可精確至弧之十五秒。格林尼治(Greenwich)天文學家所作觀察，可精確至一秒之百分之一，逾此則不復可得。

在此等情形下，度量結果謂已精確至不致有一公絲之差，或多高程度。同樣，於錢財之計算上，吾人可以一鎊不差之錢幣估計數稱之。

物體與統計度量　太陽視差之度量，與某種統計的估計之工作，頗有相似之處。此種度量，係決定太陽與地球之距離者。十八世紀天文學家，估計此距離爲十秒，即等於九千六百萬英里。

以觀察方法及工具改良之故，觀察者遂開始公認秒之整數爲八，但對於第一位小數之計算則異其詞。自一八六五年以來，計算上不以 8 爲此數(8.8″)之最近似値者爲數極少。而較爲晚近之觀察，則咸認此種視差爲八秒七六至八秒七八之間。故吾人可認爲此一距離，吾人所能知者，現精確至四百分之一。討論及此，吾人須加注意者，第一，早日之觀察須時加改正；第二，歷時愈久，愈能得出較佳之一致意見；第三，時至今日，絕對一致之意見，及絕對不移之確度，尙未獲得。物體度量如此，於統計度量亦然。例如代表平均壽命曲線之逐漸穩定，物價跌落之度量，與工資統計之發展是也。

精確之可能度　復次，在物體度量中，有時固可達到極高之確度，例如一立方尺水之重量，吾人可確知其一百萬分之一而無疑，但在其他情形下，吾人如能量至十分之一卽已引爲滿意，例如離吾人最近之恆星距離，據測量所得，大約卽爲三百四十至三百七十億英里之間也。故在統計上，如知一八八五年英國之資本總額爲七十五億至一百億金鎊之間，或知一八八六年全時工作工人之平均每週工資，爲二十一至二十七先令之間，於願足矣。此種言論之缺點卽在，往往一估計作成之後，雖知其並不確實，但吾人不能估計差誤之限度。於此吾人殊不若『近代旅行家』之堅確，彼

『……絲毫不差的，

知道天氣，

知道經度和緯度。』

而吾人則不敢具言『吾人之估計數，爲二十四先令五便士；此一估計數，大概不致有三便士之相差，但差誤而達六便士乃不可能』；惟在物體之度量中，吾人往往可精確至所用工具之一最小分度也。

一般所需要之確度　就另一方面論之，吾人雖不能獲得絲毫之確度，但在許多情形下，吾人所估計之數字，可達到一種確度，已足供實際應用之所需。在普通用途上，僅須有合乎慣例之確度卽足。試舉雜例數則，例如一田產之面積，係以英畝，路得（rood 面積度量名，等於一千二百一十平方碼——譯者註），及波爾（pole，面積度量名，等於三〇七又四分之一平方碼——譯者）計算之，非精確至一方碼不差也。股票之市場價格，變動至少以十六分之一爲起碼。吾人之生辰，記其日而不記其時。鐵路時刻表，並不註明秒數。海洋船隻，規定在某點鐘起碇，乃不言某點之某分鐘。身長之度量，求其精確到一吋之十分之一而已。百碼競走以十分之一秒而計時。物體度量如此，統計度量又何獨不然，吾人所得之答數，鮮有求精確至千分之一者，甚至精確至百分之一者，亦罕見之。一工作星期之千分之一，不及三分鐘；一週

工資之百分之一爲六便士。倫敦一城之人口，一百以內者，吾人鮮注意之，英國財政部之支出，不及一千鎊者，吾人殊不注意之，平均壽長不滿一日者，吾人亦不注意及之。總之，惟在此種限度以內，求達到實用之確度，乃往往可能。

差誤之定義——爲實施度量計，吾人可採用下述定義：——一估計數中之相對差誤者，即估計數與眞值相差對估計數之比率也。當眞值超過估計數時，則其差誤即爲正差誤 (positive error)。

例如，若農村勞動者之平均每週工資，實在爲十四先令，而吾人之估計數，僅爲十三先令，則吾人差誤，卽爲$\frac{14-13}{13}=\frac{1}{13}$，或百分之七・七。設吾人之估計數，爲十五先令，則差誤乃爲$\frac{14-15}{15}=-\frac{1}{15}$，或百分之—6.6。

用代數記號述之，設某一數量之度量爲 u，其眞值爲 u^1，則$\frac{u^1-u}{u}$即爲估計數中之差誤。$\frac{u^1-u}{u}$吾人可稱之爲 e，故 $e=\frac{u^1-u}{u}$ 而 $u^1=u(1+e)$（註一）。所謂 e，即爲相對差誤，至 ue 則係絕對差誤。

差誤之說明 就事理言之，當吾人計算差誤之時，差誤之量無從得知；吾人所能知者，最多不過差誤大概及或有之限度耳。例如，吾人可估計某一年內之失業百分數爲四・五，吾人由所有

之報告(由工資單據之研究,或救濟機關之報告得來)觀之,吾人認爲此一差誤,乃在失業百分數之二分之一以內。於是吾人應書爲 4.5±.5,意即估計數中之差誤(定義已如上述),大概不致超過$\frac{.5}{4.5}=\frac{1}{9}$,或百分之十一,而相當之絕對差誤,乃爲二分之一。在此種場合,吾人亦能指明確定之限度。失業百分數必須在零與一百之間。設吾人實際上能列舉百分之一之勞工階級爲失業工人,百分之九十二爲有業工人,則可知所求之數,即在百分之一,與百分之八之間,而吾人估計四·五中之差誤最大限,卽爲$\frac{3.5}{4.5}=\frac{7}{9}$,或百分之七十八。此種差誤雖大,然較之原來說明『失業百分數爲四·五,差誤巨細則非所知』,猶爲精確也。吾人如再加研究,或可使各差誤之限度愈益接近,然後斷定所求之百分數實際上確爲三·五與四·五之間。於是應謂失業數係勞工階級之〇·〇四…,此一估計數,精確至所舉之最後一位數字。此一說明,與下一說明,係屬同一性質:『某實體之重量爲十五磅三盎斯——正確至一盎斯爲止』。

雖然,在一方面,甚爲明顯者,吾人對於差誤往往不能求得狹小之一定限度,在另一方面,吾人卻常知一總數中有若干數字幾乎一定無誤,而其他數字則幾乎一定有誤。例如,由英國人事登記總監之報告,吾人可知一八九五年英國人口爲三九,一二四,四九六,此一估計數字乃依一八九一年之戶口普查作成,而

自一八九一年至一八九五年之增加數，乃係根據一八八一年起之增加數計算而得。故其最後兩位或三位數字，一定僅為一種猜測；而前二位或三位數字則正確無誤。因此之故，此一說明應為：人口三千九百一十萬，或三九，一二四，〇〇〇±五，〇〇〇。此後一數，究為何數，應視吾人對於人口之變動增加率之分析而決定。如此說法，較之前項說明，實際上較為精確。

細數之删略 在許多種估計中，習常須將數字舉至極端細微之數。此在官方發表之文告上，可謂正則；因有司之責任，即係收集答案而列為表格，示明此種答案之如何得來，及由何處得來；而此種報告之確度如何，則為經濟學家或統計學家之工作。但在總綱之敍述與記載上，以及在科學的估計上，則非特不需要列舉最後數字（一則因其並非準確，二則因其對於議論上不關重要，或對於讀者亦無意義可言），且其本身又純屬不正確。避免不確實，最易之法，即將總數以千為單位而說明之（例如地球直徑為八千英里）；反之，如以某種理由，而需要較確切之度量（如當吾人欲比較赤道直徑與經過兩極之較短直徑時），則依科學方法，必須將數字舉至業已計算明確之處，並指陳其精確之程度。

第二節 計算相對差誤之效果之定則

吾人現請舉出若干定則，以說明一繁複之估計數之差誤，與

作成此估計數各成分中差誤之關係。

總和中之差誤　一、當每一部分數字之差誤，乘以該部分對總和之比率時，則某一總估計數中之差誤，即等於各部分差誤之總和。

設吾人估計n數量為u_1，u_2……u_n，而其總和為u，則$u=u_1+u_2+$……u_n，而各數量之差誤，為e_1，e_2……e_n，總和中之差誤為e：於是此總和之眞值，為$u(1+e)$，而各部分之眞值，為$u_1(1+e_1)$，$u_2(1+e_2)$……，故

$$u(1+e)=u_1(1+e_1)+u_2(1+e_2)++$$

但　$$u=u_1\qquad+u_2\qquad++$$

二式相減，則$$ue=u_1e_1\qquad+u_2e_2\qquad++$$

且　$$e=e_1\times\frac{u_1}{u}\qquad+e_2\frac{u_2}{u}\qquad++$$

各部分之中，如有若干可以減去時，則此公式易於施用。

試取一算術實例以說明之。假如勞工階級之平均食物費在一九一四年為二十五先令，衣着費用為五先令六便士，房租費用為六先令六便士，而眞實平均數，食物費為二十七先令，衣着費為四先令六便士，房租為六先令；則差誤為$-\frac{2}{25}$，$+\frac{2}{11}$，$+\frac{1}{13}$，於是三數總和中之差誤為

$$-\left(\frac{2}{25}\right)\times\left(\frac{25}{37}\right)+\left(\frac{2}{11}\right)\times\left(\frac{5.5}{37}\right)+\left(\frac{1}{13}\right)\times\left(\frac{6.5}{37}\right)=-.054+.027$$
$$+.0133=-.0135\text{或}-1\tfrac{1}{3}\%。$$

在一重要事例，當吾人能以頗高之確度估計某一總和之大部分，而其一小部分爲吾人所不知時，即可應用此一定理。例如，吾人可自若干職工組合中搜集若干報告，得悉失業者有三萬三千六百五十人，則雖有較小組合未作報告，吾人亦有理由相信此中差誤，不致超過百分之一。吾人可爲此較小之職工組合，作一估計，姑謂其會員中失業者有一千人，並且假設此中差誤甚大，姑謂有三分之二或百分之六十七之多；於是此一總數中之差誤，乃小於

$$\frac{33650}{34650}之\frac{1}{100}+\frac{1000}{34650}之\tfrac{2}{3}=.029$$

或小於百分之三。此一差誤，以大組合報告之差誤，與小組合報告之差誤相比，則與前者相近遠較後者爲大。在前言，吾人謂『小於』者，以吾人假定已爲該一小部分之差誤，設置一最高限度也。

平均數中之差誤 二、當各個估計數之差誤，乘以各該項估計數對所有估計數總和之比率時，則各項估計數之算術平均數中之差誤，即爲此等估計數之諸差誤之總和。

因設以 m_1，m_2，……m_n 爲某某等數量之估計數，而此等數量之眞值，則爲 $m_1(1+e_1)$，$m_2(1+e_2)$，……則各估計之算術平均數爲 $\frac{m_1+m_2+\cdots\cdots m_n}{n}$，而各眞值之算術平均數，爲 $\frac{m_1(1+e_1)+m_2(1+e_2)+\cdots\cdots+m_n(1+e_n)}{n}$，於是算術平均數中

之差誤，乃爲

$$\frac{\dfrac{m_1(1+e_1)+m_2(1+e_2)++}{n}-\dfrac{m_1+m_2++}{n}}{\dfrac{m_1+m_2++}{n}}=\frac{e_1m_1+e_2m_2++}{m_1+m_2++}$$

$$=e_1\times\frac{m_1}{\mathrm{S}.m}+e_2\times\frac{m_2}{\mathrm{S}.m}+\cdots\cdots$$

此處之 S，表示 m 各數之總和。

吾人甚易見到，一則個別之差誤，對於得數不能發生極大影響，二則假如各別差誤，若非甚不相等，並若非全爲正數，或全爲負數，則算術平均數中之差誤，必幾可與各別差誤中之一數同其大小；三則如依一般情形所實現，假如各別差誤中，有若干爲正數，有若干爲負數（此點吾人卽將討論及之），則差誤必大形削減。

加權平均數中之差誤 三、一加權平均數中之差誤，爲以下兩種差誤之總和：（一）爲由於諸數量中諸差誤之差誤，此種差誤與一不加權平均數中之差誤相同；（二）爲由於諸權數中乘差誤之差誤，當原來數量幾全相等時，此種差誤必變爲甚小。

令W_1，W_2……W_n 爲權數，加於 n 個估計數M_1，M_2……M_n上；設權數之眞值，爲$W_1(1+\epsilon_1)$，$W_2(1+\epsilon_2)$……1數量之眞値爲$M_1(1+e_1)$，$M_2(1+e_2)$……。

以$M_w=\dfrac{\mathrm{SWM}}{\mathrm{SW}}$，於是則 M_w 卽爲估計得來之加權平均數，今令$M_w(1+E)$爲此加權平均數之眞値。

然則 $M_w.E=\frac{SW(1+\epsilon)M(1+\epsilon)}{SW(1+\epsilon)}-\frac{SWM}{SW}$

$=[SW.S\{W_tM_t(1+\epsilon_t)(1+e_t)\}-SWM.S\{W_t(1+\epsilon_t)\}]$

$\div SW.SW(1+\epsilon),$

此處之附數 t，表示任一選來之數量，等等。

於是

$$E.SWM.SW(1+\epsilon)=SW.SW_tM_te_t+SW.SW_tM_t(\epsilon_t+e_t\epsilon_t)$$
$$-SWM.SW_t\epsilon_t。$$

現在假設 E,e_t,ϵ_t 甚小，等於.1；乘積之等於.01者，略去之。

$$E.SWM.SW=SW.SW_tM_te_t+S\{W_t(M_tSW-SWM)\epsilon_t\}$$

$$\therefore E=\frac{SW_tM_te_t}{SWM}+\frac{S\{W_t(M_t.SW-SWM)\epsilon_t}{SWM.SW}$$

如以 W_1M_1 代 m_1，……其他依此類推，則包含 e_t 之項，即與定則二之項相同，至 e_t 乃即一數量中之差誤。

ϵ_t 之係數，尚須進一步加以研究。

但因 $SWM=M_w.SW$，$M_tSW-SWM=SW(M_t-M_w)=m^1{}_tSW$，（此處之 $m^1{}_t$，係一數量超出加權平均數之數）。

$$\therefore E=S\frac{W_tM_t}{SWM}.e_t+S\frac{W_tm^1{}_t}{SWM}\epsilon_t。$$

由此觀之，起於各數量諸差誤之差誤，包括 M_1，M_2……等數量，而起於各權數諸差誤之差誤，則僅包括此等數量對其加權平均數之離中差。此等數量對其平均數之離散度，如與該平均數相

較爲小，則此等離中差各個亦甚小。復次，係數$W_{t}m^{1}_{t}$之總和，等於$SW_{t}M_{t}-M_{u}SW=0$。各權數中之差誤，如完全相等，則所得之平均數中差誤必爲零，此可演繹知之。又如正差誤一般並非與正離中差(m^{1}_{t})並存，負差誤非與負離中差相存，且如巨大差誤一般非與大權數並存（反之亦然），則$W_{t}m^{1}_{t}e_{t}$諸項之總和，漸趨於零。

故權數中之差誤，有一種效果，此種效果減小之原因，與使數量中差誤減小者相同。且此種效果，使各係數有互相消除之強烈傾向；惟若諸差誤，諸數量，及諸權數，以特殊形式相結合，則不致有此傾向矣。設數量甚多時，若欲在平均數中有甚大之差誤，則權數中必須有巨大之差誤不可。總之，事實上當權數一經合理估定，而諸數量並非甚不相等時，則數量中之差誤，必有一種影響，遠比權數中差誤之影響爲大，故權數中之差誤，吾人可間或忽略之。關於此一原則之數字實例，已見於前第五章第二節（加權平均數）內矣。

{乘積中之差誤}　四、一乘積中之差誤，約等於各因數中各差誤之總和，但正負號務須加以充分注意。

因如估計得來之各因數爲$f_1, f_2, \cdots\cdots f_n$，而眞值爲$f_1(1+e_1)$，$f_2(1+e_2)$，……，則乘積中之差誤，等於

$$\frac{f_1(1+e_1)f_2(1+e_2)\cdots\cdots f_1f_1\cdots\cdots}{f_1f_2\cdots\cdots}=(1+e_1).(1+e_2)\cdots\cdots-1$$

如吾人删略二個或二個以上之e之乘積，則等於$e_1+e_2+e_3++$

之各値之爲正或爲負，原各有均等之機會。如兩個 e 値之正負號各異，則有相互對銷之傾向。設各因數之所有差誤符號相同，則即使諸因數之差誤，各個均爲甚小，而乘積中之差誤，亦可爲甚大。

舉例言之，設吾人估計結果，平均各賺二十五先令者有一百人，但實際上乃有一百零五人各賺二十六先令，則依公式之規定，估計之所賺總數中之差誤，應爲：$\frac{5}{100}+\frac{1}{25}=.09$。

如仍用此同一估計數，設眞實人數爲一百零五，工作收入爲二十四先令，則乘積中之差誤，應爲$\frac{5}{100}-\frac{1}{25}=.01$。

比率中之差誤　五、一比率中之差誤，約等於其二項差誤之相差，但正負號務予以充分注意。

蓋若估計得來之二項爲 u_1u_2，而其眞値乃爲 $u_1(1+e_1)$ 及 $u_2(1+e_2)$，則此比率中之差誤，必爲——

$$\frac{\frac{u_1(1+e_1)}{u_2(1+e_2)}-\frac{u_1}{u_2}}{\frac{u_1}{u_2}}=\frac{1+e_1}{1+e_2}-1=\frac{e_1-e_2}{1+e_2}$$

$$=(e_1-e_1)(1-e_2+e_2^2-e_2^3+-)$$

吾人如將 e 有二次方之各項删略，則等於 e_1-e_2。

如二項中之差誤，均爲正或均爲負，則有相互抵消之傾向。若二差誤亦幾乎相等，則比率中差誤必變爲甚小。

在不同日估計得來類似數量之兩個平均數相比中之差誤，吾人可應用定則五以計算之。

仍依用定則二及定則三下之符號，以 m_1, e_1, ϵ 指一日期所估計之數量，以 m^1, e^1, ϵ^1，指另一日期所估計之數量，則 $m_1{}^1$, $m_2{}^1$, ……之簡單平均數，對 m_1, m_2, ……之簡單平均數之比率中之差誤，爲

$$\mathrm{S}\left\{e^1\left(\frac{m^1}{\mathrm{S}m^1}\right)\right\}-\mathrm{S}\left\{e\left(\frac{m}{\mathrm{S}m}\right)\right\}$$

$$=\left(e_1{}^1\cdot\frac{m_1{}^1}{\mathrm{S}m^1}-e_1\cdot\frac{m^1}{\mathrm{S}m}\right)+\left(e_2{}^1\cdot\frac{m_2{}^1}{\mathrm{S}m^1}-e_2\frac{m_2}{\mathrm{S}m}\right)++$$

設在二次觀察間之期內，各數量無大變遷，則 $\frac{m^1}{\mathrm{S}m^1}$ 一分數與 $\frac{m}{\mathrm{S}m}$ 相差無幾，餘類推。

此等相差數，與數量本身相比，吾人殊可將相差數删略不計，此爲吾人計算差誤之約略影響時所不可少之正當手續，惟如此則

兩簡單平均數比率之差誤 $=\mathrm{S}\left\{\frac{m_1{}^1}{\mathrm{S}m^1}(e_1{}^1-e_1)\right\}$。

設兩估計數，乃在幾乎相同之環境下作成，因而招致差誤之機會亦相同，則 $e_1{}^1$ 及 e_1 多半非特具有同一符號，而且幾乎相等。

試以 d_1 代替 $(e_1{}^1-e_1)$，以 d_2 代替 $(e_2{}^1-e_2)$，……餘類推，則

$$差誤=\mathrm{S}.\left\{d_1\cdot\left(\frac{m_1{}^1}{\mathrm{S}m^1}\right)\right\}$$

（此處 d 之各值，可爲甚小）。

兩簡單平均數相比比率之差誤，已討論如上，如更對於兩加

權平均數比率之差誤，亦加以相當分析，則因其過於複雜，此處不便予以檢討（註二）。但若遵用『權數之差誤，不若數量中差誤之重要』一原則，而於應用時酌加修改，則吾人不妨採用上述在求算對兩加權平均數比率中差誤之第一近似值時所舉之公式。茲將此一公式用文字述之如下文。

平均數相比之差誤 六、在不同期間所估計之兩類似數列之平均數之比率中之差誤，約等於此兩數列各相當項中差誤諸差數之總和，但每一相差數，務須各乘以其相當項之後項，對於後期所有各項總和之比率。

此一定則異常重要，故殊有舉一實例以解明之之價值，在此實例中將更介紹一新數量。

設在兩年中每一年吾人均可估計一總數之一部，而較另一部分之估計爲確實，如在定則一下所舉實例所云然，則吾人可採用下列公式：

	第一年		第二年	
估計數或估計權數	w;	差誤e;	w^1;	差誤e^1
平均收入估計數	m_1;	差誤e_1;	m_1^1;	差誤e_1^1
估計數，確度較低	rw;r之差誤，p;		r^1w^1;r^1之差誤，p^1	
收入估計數	m_2;	差誤e_2;	m_2^1;	差誤e_2^1

依假定，e_1及e_1^1小於e_2及e_2^1。

第一年平均數之差課

$$\frac{\dfrac{w(1+\epsilon)m_1(1+e_1)+r(1+\rho)w(1+\epsilon)m_2(1+e_2)}{w(1+\epsilon)+r(1+\rho)w(1+\epsilon)}-\dfrac{wm_1+rwm_2}{w+rw}}{\dfrac{wm_1+rwm_2}{w+rw}}$$

$$=e_1\frac{m_1}{m_1+rm_2}+e_2\frac{rm_2}{m_1+rm_2}+\rho\frac{r}{1+r}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_1+rm_2}$$

設吾人略去 e 及 ρ 之各乘積時。

由此觀之，與確度較低之部分有關之差課，e_2 及 ρ，各乘以 r(r 爲確度較低部之權數，對確度較高部分權數之比率)，ρ 亦乘以 m_2-m_1，m_2-m_1 在多數情況下，値均爲甚小，至於其餘之差課，卽爲 e_1，依假定亦爲甚小。

爲討論簡便計，吾人假設未知部分對全部之比率(並非估計時之差課)不變，並設兩部分之平均收入估計數之比率，亦未變更，則相比中之差課爲：

$$(e_1^1-e_1)\cdot\frac{m_1}{m_1+rm_2}+(e_2^1-e_2)\cdot\frac{rm_2}{m_1+rm_2}+(\rho^1-\rho)\frac{r}{1-r}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_1+rm_2}。$$

例如，在估計蘇格蘭農村勞動者平均工資之變動時，吾人得有與下列類似之數字：

	一八六七年			一八九二年		
	已婚農夫					
估計數	1,000	平均收入	36鎊	1,200	平均收入	49鎊
假定眞正數	1,010	平均收入	35鎊	1,220	平均收入	48鎊
	農場傭工					
估計數	200	平均收入		240	平均收入	
		貨幣	21鎊		貨幣	2 鎊5先令
		膳費估計值	28鎊		膳費估計值	24鎊
		合計	34鎊		合計	41鎊5先令
假定眞正數	200	收入總數	37鎊	240	收入總數	4,鎊

由此所見 $w=1000$，$m_1=36$，$r=\frac{1}{5}$，$m_2=34$，$w^1=1200$，$m_1{}^1=49$，$r^1=\frac{1}{5}$，$m_2{}^1=41\frac{1}{4}$，$\epsilon=\frac{1}{100}$，$e_1=-\frac{1}{36}$，$\rho=\frac{9}{101}$，$e_2=\frac{3}{34}$，$\epsilon^1=\frac{1}{60}$，$e_1{}^1=-\frac{1}{49}$，$\rho^1=-\frac{1}{61}$，$e_2{}^1=\frac{23}{165}$。

以上二例吾人對於已婚農夫之收入估計過高，而對於農場僱工之收入估計則過低。茲假設（事實亦確如此）農場僱工之膳宿及其他賞賜之價值，估計難以精確；又此兩階級之比例數，亦不能確知。

代入上列公式，則可知在二年中二階級平均收入總數之估計數比率中之差誤，爲

$+\cdot0062$，屬於農夫收入估計數之差誤。

$+\cdot0081$，屬於農場僱工收入估計數之差誤。

$-\cdot0008$，屬於二階級中人數比率估計數中之差誤。

此最末一差誤，卽屬於權數之差誤，其值甚小；第二差誤，乃因吾人對於膳宿所知不詳之故，現以僱工人數甚少，故此一差誤亦減至與第一差誤相去無幾。

職是之故，經用公式求得，整個差誤爲$+\cdot0135$。試查實際數字，可知第二差誤對第一差誤之估計數比率；爲一・三三七六對一之比，而假定之眞正數比率，爲一・三五二九與一之比；換言之，差誤乃爲$\frac{\cdot153}{1\cdot3376}=+.011$ 也。

此兩種計算方法之差別，卽在删略次要各項之不同。

所須注意者，二個數量相比之差誤，與吾人所或欲計算之差誤（卽百分率增加量中之差誤）不同。例如在上述之例中，估計之百分率增加量爲三三・八，眞正之百分率增加量爲三五・三，而百分率增加量中之相對差誤，則僅爲 .〇四五。故在此種計算中如求確實，則依定則六之公式，所算出之差誤，非爲甚小不可也。

如就一工人家庭預算，而計算其衣着費之相對重要性，實有人所共知之困難，玆更舉一例以明之。

下列估計數，卽一九一八年英國生活費委員會報告中所採用之數字（總號八九八〇，第七，第十八及第二十三頁）。

有技能工人，平均每週費用

	一九一四年	一九一八年	比率
食物	27先令	49先令10便士	1·84
衣着	7先令	13先令 9便士	1·96
總計	34先令	63先令 7便士	1·864

玆以 $w=27$，$r=\frac{7}{27}$，$m_1=1.84$，$m_2=1.96$。

假設 r 應作爲 $\frac{1}{3}$，m_1 應作爲 1.90；而 m_2 應作爲 2.10。

則 $e_1=\frac{3}{92}=\cdot0326$，$e_2=\frac{1}{14}=.0714$，而 $\rho=\frac{2}{7}=.286$。

依公式得差誤爲

$+.0256$，屬於兩期食物費相比之差誤。

+.0155,屬於兩期衣着費相比之差誤。

+.0030,屬於衣着費與食物費兩期相比之差誤。

至整個之相對差誤,則爲 .044。

各差誤之影響,與差誤之大小,成反比例。衣着費比率之巨大差誤,僅僅影響得數中之第二位小數而已。

雖然,若 m_2-m_1 較大,換言之,卽若衣着費之估計增加數,遠比食物費之估計增加數爲大,則此一差誤之效力,必亦依比例而增大。

討論至此,吾人現又提及相對差誤之整個問題,而此卽本書第二編第四章之機率原理所解明者也。

第三節 偏誤及非偏誤

偏誤及非偏誤 在平均或比較時,提及所有差誤,有兩類差誤,不可不加以區別,一類卽偏誤 (biassed error),一類卽非偏誤 (unbiassed error) 也。此中差別可設例以闡明之。設派遣多人,分往各地,調查各種工業狀況,以證明工資之果然爲高,工作條件之果甚無損於健康,以及其他等等,則彼輩多半將僅就經營最完善之工廠,而加以考察,並僅就技能較高工作有定之工人,而記錄其工資,於是所產生每一城市之平均數,無乃過高。反之,

如各人心中並無成見，僅事公正不偏之調查，則調查人員在某某城市所得之平均數，即屬過高，而在他數城市所得者，反乃過低，此一隨調查員之個人特性及環境情勢而定者也。然則在前一情節之下，差誤係屬偏誤，各差誤均在同一方向，均有使平均數增長之傾向，故此平均數之差誤，乃即等於各城市之平均差誤。在後一情節下，差誤乃爲非偏誤，超過平均數或較平均數爲低，二者各有均等之機會，是以所作估計數愈多，而結果之差誤亦愈微。茲以下列數解明之：

	事實	有偏誤之估計數	有非偏誤之估計數
	先令	先令	先令
甲地之平均工資	24	25	24
乙地之平均工資	23	25	25
丙地之平均工資	26	27	25
丁地之平均工資	27	28	28
戊地之平均工資	28	30	27
平均數	25.6	27	25.8
差誤		5.2%	1%

沿一具有哩程碑之道路，度量脚踏車騎行之距離，吾人可知連續各哩程碑間之距離，並不準確，乃或有五十碼至百碼之相差。但超過一里或少於一哩之差誤，二者各幾有均等之機會，故騎行經過之距離愈長，差誤亦愈少，此點上文業已闡明之。此差誤卽

非偏誤也。反之，若乘腳踏車者信任彼之迴輪計，則將不免於偏誤，蓋彼之迴輪計，未必準確貼合彼之車輪，車每行一哩，迴輪計輒指一千八百碼也。在此情形之下，偏誤(bias) 可加以度量而以結果中減去之，至於非偏誤則任其自行抵消。總而言之，偏誤往往由於工具級度劃分錯誤，非偏誤則往往由於各別度量有錯也。

偏誤及非偏誤之相對重要性 在人口普查報告表中，有一事實，即許多婦女報告之年齡，較其出生報告書所載者爲小，惟有此事實，乃致引起人口平均年齡之一種偏誤。又有一事實，即人民往往將其年齡報爲最相近之整略數，而惟此一事實，乃致引起非偏誤，但大體上對於平均數並無甚影響。即在一九〇六年之工資調查中，亦未嘗無僅由某種工業中經營方法較爲寬大之工廠採取材料之傾向，故對於所得之平均數中，乃招致一種偏誤。由此種種例證，吾人現可提出另一極一極爲重要之原則。非偏誤與簡單估計數中之偏誤相比，非偏誤實不甚重要；但如取用二個類似估計數之比率時，則偏誤亦減小。

蓋在數個數量之平均數中，而此數個數量具有偏誤 (η_1, η_2 ……)及非偏誤(e_1, e_2……)時，吾人依據定則二之規定，即知結果所得之差誤，可寫成：

$$S\left(e_1\cdot\frac{m_1}{S.m}\right)+S\left(\eta\cdot\frac{m_1}{Sm}\right)。$$

第一項中之差誤，爲非偏誤，此等差誤之中，有許多爲正，有

許多爲負，二者有相互銷除之傾向。實際上，E若爲$e_1, e_2 \cdots\cdots e_n$諸差誤之代表，則求平均數中諸差誤所發生之差誤之近似値，其第一近似値必爲$\frac{2E^*}{3\sqrt{n}}$。（*註三）

偏誤之巨大效果　例如，玆有數量百個，每一數量之非偏誤大約爲$\frac{1}{10}$，則此一百數量之平均數中，所得之差誤未必大於$\frac{2}{3}\times\frac{1}{10}\div\sqrt{100}$，即未必大於$\frac{1}{150}$。反之，則無互趨平衡之趨勢。假如每一數量，各超過百分之十，則平均數亦超出百分之十。爲求確實計，吾人之原則，僅注意於鎊，而未兼及便士。當吾人之數量爲巨大之偏誤所貫穿時，則減少非偏誤以增進吾人數量之確度，實爲徒勞。吾人苟不知實際上彼充滿吾人估計數之偏誤之存在，則無可挽救。設吾人熟知之，如欲獲得較高之確度，則與其完全删略之，實不若加以最差誤之修正之爲愈。蓋當吾人爲多數偏誤，加以不偏不倚之修正時，是吾人即已將其化爲非偏誤矣。於是在吾人之平均數中，包括之項數愈多，則結果之差誤亦愈小矣。例如，設吾人得知英國全國農村勞動者之平均每週工資，爲十三先令，並假設得出此一平均數之調查報告共有一千份，玆就此一千份報告之情況而考慮之結果，吾人有理由假設一先令之差誤，當爲調查報告中非偏誤之代表，則結果在平均數中之差誤，吾人以意料之，當爲$\frac{1}{\sqrt{1000}}$之$\frac{2}{3}$，換言之，即僅四分之一便士之差誤也。但此處吾人乃有一完全虛假之確度。蓋農村勞動之收入，吾人未曾計入

者,尚有甚多,如割禾時及收穫時之償付,計件工作之利益,便宜之房租及地租,以及零星賞金;此一部分收入,吾人殊不能加以準確計算。吾人如將此等收入完全棄之不顧,則在平均數中之差,將有二先令左右之差誤。反之,吾人就此一千份之全數報告中,將此等增加數,作成個別之估計數,如其中並無偏性,則每一估計數中,雖或有二先令之出入,而結果在平均數中之差誤,可望為$\frac{2}{\sqrt{1000}}$之$\frac{2}{3}$先令,卽僅二分之一便士:於是吾人整個差誤,現可少於一便士,而非一先令矣。在計算已發表之平均數之確度時,務應將此等原則牢記心中,而偏誤之可能性,尤須常常加以考慮也。

相比之確度 當吾人計算一比率中之差誤時,情形卽有不同。一比率之差誤,約等於該比率各項差誤間之差額。設 n, n^1 為各項中之偏誤,e, e^1 為各項中之非偏誤,則依定則五之規定,$(n^1-n)+(e^1-e)$ 卽為此比率中之差誤。至非偏誤 (e^1-e) 之大小度,大致幾與 e 或 e^1 之大小度相同(註四)。又如上例所述,設e及 e^1 不致遠大於 $\frac{2}{3}$,則(e^1-e)不致遠大於 $\frac{2}{3}$。但此比率中各項之偏性,意味如為相同(全為正,或全為負),則偏誤結果之(n^1-n),將小於原來之差誤。設吾人以恰為相同方法,為兩項各作一估計數,設吾人曾對同類人發同一之問題,而在兩處取捨之細節亦全相同,則在兩估計數中,吾人將已造成幾乎相同之偏性差,試就

以前所舉之例證言之，設吾人在兩期間調查一農村勞動者之收入，除其平均每週工資外，其餘各節竟顯然置之不顧，則此比率中所生之唯一差誤，必由於此等特別收益對通常工資之比例之變遷；而此種變遷在短期間內大致必甚輕微也。不然，設吾人乃以兩期之夏季工資作爲該年之平均工資，則比率中之差誤，將僅隨夏季工資對該平均數關係之變遷而定。是故對於一變遷遲緩之數量，在不同日期所作兩估計數，如估計數作成之方法相同，則此兩估計數之比率之差誤，往往小於任一單獨估計數中之差誤；蓋非偏誤並未增大，而更重要之偏誤，則大爲減小也。此時，偏誤之是否存在，吾人無須求知，偏誤卽將自行消失。如吾人果知有偏誤之存在，並有爲彼作成甚爲精確之估計數之任何方法，則有加以估計之價值；但若僅改正其一年之偏性，而另一年之偏性，又不予改正，則實爲大錯。爲供比較之用，而使後期之估計數，較前期之估計數爲精確，往往遇巨大困難，非止常無大用而已也。總之，由非偏誤而生之差誤，固能略形減消，但由更重要之偏誤，而生之差誤，則只有增大之一途。

定期報告結構上對於統一性之需要　一切編纂每年報告之政府官員及其他人士，在此均有進退兩難之苦。苟欲使每年報告表册本身精確無疵，則永須努力精益求精，且恆須察視所量數量之變動，而使所用方法及列表法，與此等變動相適合。但爲求各

年報告，可相互比較，則必須絕對保守成法，前人即有錯誤亦應一仍其舊，惟須注意，無使錯誤加多，或另有新遺漏也。雖然，此種進退兩難之苦，並非絕不可免。蓋引用一改進方法之時，有時可爲新舊兩法各作數年之表格；於是經此改動而起之區別可見，而早日數字，不難使其達到後期數字之較大精確程度矣。例如，英國商業部，自一八九八年起，始於出口貨值表中，添列裝載貨物駛離英國海口而運貨物一併售與外人之船隻。茲列一表於下：

	一八九九	一八九八
國產品出口貨值（售與外人之船隻除外）	255,465,000鎊	233,359,000鎊
國產及殖民地商品之復出口貨值	65,020,000鎊	60,655,000鎊
總 計	320,485,000鎊	294,014,000鎊
出口之新船隻貨值	9,195,000鎊	未 詳
新 總 計	329,680,000鎊	

由此足見在材料之搜集及列表時，微細更動之忽略，實爲統計上許多錯誤之原因。

結論 茲將本章之主要結論，摘要述之如下：

增進確度之方法有二，一爲平均法，平均法可減少非偏誤；一爲相比法，相比法可減少偏誤。權數中之差誤，往往不若估計數中其他差誤之重要。一答數中之差誤，固然不能算出，但能以該答數所自出之各項中之差誤說明之。吾人不能達到定而不可

移之程度，但吾人可指出減小差誤之方法，而藉數學之助，吾人並能度量此減縮之範圍。當吾人計算類似及估計方法相同之數量之加權平均數之比率時，原起之差誤，即能減去大部。吾人在下章所討論之指數，卽爲此類之例證。

由抽樣方法而得之確度，必需多加以數理之討論，容當於本書第二編第二章及第四章論及之。

（註一）　有時書如 $u=u^1(1+e)$，與眞値相對而計算錯誤，則更爲便利。如此則 ϵ 約等於 $-e+e^2$；當 e 不及百分之十時，則可令 $\epsilon=-e$。

（註二）　見統計學報，一九一一年，自第八十五頁起，及本書第二編附錄七，但算式已略變動。

（註三）　能否得到如是其大之差誤，尙在兩可之間。請參閱本書第二編第四章。

（註四）　設 E 爲 e 或 e^1 之機誤，則 $E.\sqrt{2}$ 爲二者相差之機誤；見本書第二編第三章。

第九章 指數

指數(Index number)之討論,可作爲上章所述原理異常良好之解明,而指數之本身,又異常重要,故吾人本意,雖欲避免特殊問題而不談,但究值特闢一章以研究之。

指數之功能 指數者,用以測量吾人不能直接觀察之某種數量之變動者也。蓋此種數量,吾人不能直接觀察之,但知其對於能以直接觀察之其他數量,乃有其確定之影響,若上漲即有全部上漲之傾向,若下落即有全部下落之趨向,然此一影響反爲對於各個數量發生種種不同影響之多宗原因之作用所隱蔽,因而並不可見也。例如,就三種應用指數之數量而論,一、貴金屬與其購買力之關係之變動,即足波及所有各種商品之價格;但同時尚有其他無數原因亦在發生作用,足以影響各類商品之價格;二、有平常技能工人之每週工資,即有促其上漲之一般原因,但此一般之增加,已爲無數對於上下各級勞動有大小不同之影響之原因所遮蔽矣;三、勞動及其他階級消費量之變動,乃爲十分穩定之數量,但此一數量,只能用間接方法,就各個物品消費量之變動,觀察而測量之。

雖然,指數之功用,並非止此而已,實則指數之用途,乃幾與

統計學之領域,同其廣被焉;蓋統計學一詞,吾人旣只限於對繁複羣類及其變動之測量,統計學之目的,旣在測量支配一異質羣類(heterogeneous group)之一般定律之作用,且一般勢力所產生之變動,依例只能就其對於各個事件之效力而測量之;是則指數方法,自可立卽用以自專對於各別物件有特殊影響之變動原因中,分解對於全體羣類均有公共影響之力量也。

指數之性質 更嚴格論之,一列指數,實卽一列加權平均數,而此加權平均數,乃按期算出,所平均之數量,又彼此相似(如價格或工資),至所用之權數,必須以能將每一次測量所涉及之全部羣類施以實在之平均者爲限。如就其廣義論之,一列指數,乃卽一組數列,而能將所論及之某種數量之運動,在其趨勢及變動中反映出來者也。如諸數量及其權數,均能確切得知,則指數方法,乃卽直捷表現純粹算學得數之簡便方法,此一單簡性,於編製出口貨價指數時,庶幾可以顯現。如諸數量乃爲自一範圍甚寬之羣類中抽選得來之樣本,而又無決定各數量相對重要性之顯明方法者,則此指數對於有一定之意義及可量之性質之現象之運動,必不能有十分直接之關係;此乃大多數之物價指數之性質,亦卽幾種工資指數之性質也。至如諸數量,並非由吾人所欲研究之現象中,得來樣本之直接度量,而爲相聯現象之抽樣數量時,則此列指數與現象之關係,必爲間接者;事實上大多數工資指數

及就業狀況指數,均屬於此類也(註一)。

最普通之編製指數法,乃介乎極正確與間接關係兩極端之間。例如英國商業部勞工局之工資率變動指數,其對象乃即照例定之計劃按年查算指數,而此指數之比率,卽與英國一定工廠中,工人平均每週工資率之比率相同;最低限度,一般所用之指數之意義,乃不外如此,至英國勞工統計輯要 (Abstract of Labour Statistics) 中標題所云,乃爲『英國工資之一般動向』(如第十六期輯要,總號第七一三一號,第八十二頁)也。此一指數之算法,須先擇出經承認之計時或計件工資率數百個,作爲一九〇〇年工資額之百分數以表示之,然後將此得數按年平均之。此平均數中之權數,採用之法乃爲間接者;凡建築業,煤礦業,工程業,紡織業,及農業五類,每類均以同等重要視之,雖建築業一類,包含七十四件,農業包含一百一十五件,其他各類件數,亦多寡不同云。孫巴克 (Sauerbeck) 氏之物價指數,求得之法,選擇若干代表商品之價格,對於較重要商品則用雙重價碼 (duplicating quotations) 方法以加權之。然則在此處以及其他各處,凡論及指數時,吾人須擇用一種『數量』(quantity),此種數量或籌而後用之,或偶然用及之,並須決定一種『權數』(weight),此種權數或爲直接或爲間接求得之。故不論吾人之對象,爲平均工資,抑爲平均物價平準,凡吾人擬加以測量者,則此指數之運動,

必期望其能與現象成正比例也。

在此種情形之下，須加考慮者有三點：一，此羣類之性質與範圍，以及此羣類所具特質（此特質之一般變動，卽吾人欲行研究者）之本性；二，抽選樣本之方法；三，權數之效果。

（一）就孫巴克氏之物價指數而論，其羣類乃爲英國之躉售物價；就其他物價指數而言，所謂羣類乃卽出口貨物之價格，進口貨物之價格，以及其他種種之價格。英國勞工局之工資指數中，其羣類爲雙重，乃包括（甲）每週計時工資率，（乙）計件工資率，而其結果自爲混合物。羣類之範圍，及將施以度量之本質或屬性，規定二者之定義，甚爲重要。夫本質之意義，有時甚爲費解，如『貨幣之購買力』，或『失業之總量』是，在此情形之下，吾人只得就有關之屬性，給以定義，而度量之，如一般物價平準，或依照失業之某種定義，而計算之失業人數是。

（二）在抽樣之時，依一般遵循之準則，必須就有適合定義而度量可以確實者抽選之，卽在最佳之有名指數中，選擇之標準，異常嚴苛，所有之價格，必須適合準則乃能採納之。當此之時，吾人往往須將羣類之定義重行考慮並限制其範圍。例如吾人進行度量一般物價，必爲定義中之要件所限制，因而只能就市價甚有規則之躉售物價度量之；至於工資方面，英國勞工局亦只有採用合於標準之工資率（農業工資爲例外）之一途。但爲求製成之

指數，適於差誤律之分析，吾人所抽之樣本，務須隨機而得，且其變動必須與一般運動無涉；苟求此獨立性而不可得，則樣本之數，必須加多，以期達到某種確度。隨機性(randomness)，或可因不期而遇之事件，能以保持，蓋惟有不期而遇之事件，乃使所取之樣本可以被選用也；但此大多以在躉售物價爲然，至於工資，則不可能。抽選時，如發生偏性(bias)，吾人有時可將羣類之定義，重行加以限制，卽可期於安全。

（三）關於權數之效果，如互爲獨立之數量，個數甚多，則任何合理之加權辦法，多能得到良好之結果，與爲該問題之條件所許可而得者相同也。

假設支配一羣類數量之變動者，有一般勢力一，有其他勢力若干；此一般勢力，以同一意味而活動，換言之，卽如漲則全部漲，落則全部落；其他數種勢力，各對於一數量或多數量發生作用，且其中有使數量趨於上升者，同時亦有使數量減退者；故總計諸項特殊勢力，使平均數趨於增加者有之，使趨於降落者亦有之，而此一般勢力，則始終保持一種累積效力，使各數量全部增加，或全部漸減。然如此諸端特殊勢力爲數甚多，而其效力則甚輕微，則此諸勢力對於平均數之影響；必有趨於中和之傾向；如此則平均數之變動，必將僅顯現此一般原因之影響矣。如用上章之用語言之，此諸種特殊勢力雖產生多數偏性(biassed)變動，但此種

偏性變動,對於平均數之影響,乃甚輕微,較之一般勢力所產生之偏性變動,殊可略去不計也。

吾人經將多數之普通應用指數加以檢討以後,可知實際上施以度量之數量,並非吾人意欲知其一般運動之數量。夫躉售之物價,絕不依照任何簡單定律——不論定差(constant difference)或定比(constant ratio)——而與零售物價,同其運動;標準工資與平均工資,大不相同,但何以不同,人皆不知;計件工資率與工作收入之關係,變化靡常,且不可知。可加度量之數量,與實在欲加調查之本質,二者之間,並無有如 $y=x$,或 $y=kx$,或 $y=a+bx$ 之簡單關係,實則乃為$y=f(x)$之關係,而此函數之形式如何,吾人又非所知也。如求作成之指數,令人易於瞭解,$y=a+bx$ 在 x 之普通全距(range)中必須為一良好之近似值,因具有高級乘冪之 x 項之極端值,有變為甚大之可能,致結果作成之指數,反不可靠也。在編製指數之過程中,a 即行消滅,但 b 所度量者,為 y 之變動對 x 之變動之比率,決定 b 時,往往甚難。

製成某一年之指數,其定義可述之如下:設有 n 個數量,吾人欲研究其一般運動,茲以 x_1, $x_2\cdots\cdots x_n$ 代表此種數量。設另有一種已加度量之數量,與前一數量用一方程式聯繫之,此另一種數量,以 y_1, $y_2\cdots\cdots y_n$ 代表之,聯繫 x 與 y 之方程式,以 $y_r-100=b_r(x_r-100)$ 為其良好近似值(註二)。設已規定一種適當之權

數，如 w_1，w_2……等，並以 J 代表$\frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots\cdots}{w_1+w_2+\cdots\cdots}$，以 I 代表$\frac{w_1y_1+w_2y_2+\cdots\cdots}{w_1+w_2+\cdots\cdots}$。此 J 即爲一指數，此指數之變動，即足表示運動，但此指數乃理論上之指數，無從加以計算，至實際可以計算而且付諸應用之指數，乃爲 I。

$$\mathrm{I}-100=\frac{\Sigma w(y-100)}{\Sigma w}=\frac{\Sigma wb(x-100)}{\Sigma w}。$$

設 $b_1=k+d_1, b_2=k+d_2, \cdots\cdots, k$ 乃選來（如可能時）作爲 b 各値之平均數，而此平均數能在 x 各値之普通全距間使

$$\frac{\Sigma wd(x-100)}{\Sigma w}(=\mathrm{F})$$

變小者。

$$於是\ \mathrm{I}-100=k\frac{\Sigma w(x-100)}{\Sigma w}+\frac{\Sigma wd(x-100)}{\Sigma w}=k(\mathrm{J}-100)+\mathrm{F}.$$

僅就一般情形言之，如 x 各値數値之範圍並不甚寬，如 b 各値幾爲相等，而 b 之極端値，並不與 w 之極端値相合爲一時，則 F 之値必甚小，而其各年間之變量必甚微，乃可以略去不計之。

在此情形之下，I 與 J 之關係：在標準年 (standard year) 當 J（及各個 x 與 y）爲 100 時，I 亦等於 100，且 I 値之變動，乃幾爲 J 値變數之 k 倍，至 k 乃爲 b 各値之平均數，而各 b 値則爲度量各個 y 値之變動對相當之各 x 値變動之比率者也。

吾人如企圖藉由躉售物價作成零售物價指數，b 之各値，並

不可知，且各個 b 值，由一商品至另一商品，原卽大不相同，由此時至彼時，亦迥然有異，又當物價特高或特低時，b各值變化靡常，人甚難測定。故一般零售物價與躉售物價之關聯，並非異常密切，吾人殊不能發言，謂此之變動，與彼之變動，成正比例也。試就英國勞工局之工資指數而論，計時工資之變動，與計件工資之變動，對於工作收入之關係，彼此並不相同，且二者對於工作收入之關係，亦無從得知；換言之，b 之各值，乃爲未知且不相等也。僅就計件工資率而論，當工資率上漲時，工作收入往往上升較速（b小於 1），而工資率下落時，工作收入下降亦往往較緩（b 大於 1）；換言之，b 之各值並非一定，而上列公式中之 F，乃爲未知且不能刪略也。

如 b 之各值果爲相等，則 F 必爲零，k 之值乃可在將兩年間之數值，加以特別研究後，而求得之。如然，則 I 之運動，必將緊隨 J 之運動，而在一已知尺度上現明顯之反應。

無如實際之關係，並非顯然，設有一 x 值超出其平均數百分之四，吾人不能卽謂 y 亦大於其平均數百分之四，只能謂 y 之離中差爲百分之四 $\times b$，而 b 幾爲常數也。b 之各值，與某種（加權）平均值（k）相差，而此等相差數之影響，在取用此平均數時，幾可全然消滅，且此平均值 k，在各年幾皆一定不變，此亦可加以假定者也。總之，對於 b 之各值，及結果所得之 k 值，無不可以設立

各種之假定,於是指數之變動,乃可解明矣。

於此有一重要之條件,卽當 x 經過一變動後復回至一數值時,則相當之 y 值,亦必還歸其原來數值,否則,卽有任何相差數額,至少,必為極微且無偏性。但如用躉售物價以度量零售物價之變動,此一條件必為之破壞,蓋躉售物價與零售物價之關係,已逐漸變更,果如吾人所預料也。執此而論,英國勞工局之工資一般動向指數,因標準工資或計件工資之變動,對於平均工資之變動,關係時在變更,則此一條件自必為之破壞矣。

英國商業部之指數　英國現存之躉售物價指數甚多,吾人可擇要略一檢閱之。商業部按年有出入口貨值貨量記載發表,則出入口貨之平均價格,必可加以計算。所舉之商品,乃自一定之整個期間之簷案中均曾出現者選擇而來。商品選定之後,卽擇定某一年作為基年 (base year);然後依基年之物價,分別估量其他所有各年之各種價格;任何一年估得價格之總數,卽為該年貨物價格未曾變更之總價值;此一數值對於記錄上實在所有價值之比率,卽為在基年之平均物價對其他某一年之平均價格(假如平均一詞乃用其廣義之意義)之比率;又如此一比率之前項使與 100 相等,則比率之後項,卽為所求之某一年之指數,而所謂指數,乃卽對基年之指數之百分數。然則,吾人現所論者,顯已論及加權平均數矣。

權數方式 設 p_1, p_2, p_3…… 爲基年中選定各單位貨物之價格,以 r_1p_1, r_2p_2, r_3p_3……爲吾人欲求算指數之某年物價:則 r_1, r_2, r_3……即爲各個商品價格變動之度量,而此種所有之 r 值,即爲吾人抽來欲從中查出物價一般變動之樣本也。以上所述之方法中,所用之權數,求得之法,不外:設 b_1, b_2, b_3……爲某一年貨物單位數,但該年貨物總價值,以當年之物價計之,爲 $(b_1r_1p_1+b_2r_2p_2+\cdots\cdots)$,以基年之物價計之,則爲 $(b_1p_1+b_2p_2+\cdots\cdots)$;二者之比率,爲 $\Sigma brp:\ \Sigma bp$,於是該年之指數,必爲

$$100\times\frac{\Sigma brp}{\Sigma bp}=100\times\Sigma\left(r\cdot\frac{bp}{\Sigma bp}\right)。$$

由此觀之,加於 r 各值上之權數,即爲該年相當貨物按基年價格計算之價值。吾人於此可見標準年份之選擇,對於權數甚有影響,因以物價甚高之年爲基年,竟對於某一商品加以特別之權數,而爲尋覓一『正常』年份,業已煞費周折矣;然各別商品之權數,雖受其影響,但平均數未必即隨之變更,且依上文所述之原則,即有變更,亦必極爲輕微也。實際上茲有下列之數字(註三):

一八八六年指數與一八八三年指數之比較

年份＼指數	進口貨				出口貨			
	以一八七三年價格計算之價值	以一八八三年價格計算之價值	以一八六一年價格計算之價值	以一八八一年價格計算之價值	以一八七三年價格計算之價值	以一八八三年價格計算之價值	以一八六 年價格計算之價值	以一八八一年價格計算之價值
1883	100	100	100	100	100	100	100	100
1886	81.7	82.1	82.9	82.3	$88\frac{1}{2}$	88	87	89

吾人本可作成一種數字，以示因掉換基年而生之參差，但此種工作，已有人用抽選利於特別論辯之樣本而完成之矣。

然觀乎上表，權數變換如彼之大，結果相差如此之微，是以吾人甚至是否需要以進口貨數量（即上列公式中之 b 值）爲權數，實頗有考慮之價值。茲列一表於下，（註四）以示無甚影響之權數：

以一八八一年指數爲100，用各種加權方式求得之一八九五年指數

	物價之比率（r_1，r_2……）					$\frac{1}{r_1}$，$\frac{1}{r_2}$，…等算術平均數之倒數	英國經濟雜誌之數字
	以一八八一年物價，一八九五年物量之物值加權	以一八八一年公佈物值加權	算術平均數	中位數	幾何平均數		
進口貨	$67\frac{1}{2}$	69	$73\frac{1}{2}$	$72\frac{1}{2}$	$72\frac{1}{2}$	69	71
出口貨	83	87	82	81	$78\frac{1}{2}$	75	

設 b_1，b_2……爲一八八一年之物量

p_1，p_2……爲一八八一年之物價

c_1，c_2……爲一八九五年之物量

r_1p_1，r_2p_2…爲一八九五年之物價

由第一欄，可得

$$100\times\frac{\text{以一八九五年物價與一八九五年物量計算之各種物值總和}}{\text{以一八八一年物價與一八九五年物量計算之各種物值總和}}$$

$=\frac{100Sc_1p_1r_1}{Sc_1p_1}$，至加於 r 各值之權數，乃爲一八八一年公佈之物值。

第三欄爲 r 各值之算術平均數，第四欄爲 r 各值之中位數，第五欄爲 r 各值之幾何平均數。倒數第二欄，爲 $\frac{1}{r_1}$，$\frac{1}{r_2}$……各值之算術平均數，换言之，卽一八八一年物價對一八九五年物價之比率之算術平均數；此算術平均數對 100 之比率，卽等於 100 對另一新指數之比率，至於此新指數，乃卽相當於前一算術平均數而將一八八一年與一八九五年互爲更代者也。最末一欄之數，乃根據倫敦經濟雜誌(Economist)所登載之資料而算出；每年之出口入口貨，均以其前一年之價格計算其物值，是以所得之每年比率，與同表第一欄之比率相同；一八八一年之指數 100，須用此每年比率按年乘之，至一八九五年爲止，則得數乃爲 71。［如用代數表示之，此一指數爲 $100\times\Sigma\left(r\cdot\frac{bp}{\Sigma bp}\right)\times\Sigma\left(r^1\cdot\frac{b^1p^1}{\Sigma b^1p^1}\right)\times\times$］

試將上表所列數字，加以較完全之分析，並就出口貨價指數最低75與最高87之歧異考察其原因，卽可證明種種方法究以採用何者爲宜矣。然僅就上表而論，不加權平均數爲 82，第一個加權平均數爲 83，二者相去無幾，吾人大可滿意矣。

處理此種權數之其他方法，容當在本章零售物價指數一節『加權方法』一段內討論之。

客觀度量 以英國商業部基礎而編製之指數，最大之優點，卽在能約略度量一客觀數量，而度量之結果，又能以可訴諸非統計學家之平常人士之用語陳述之，例如『一八九五年之進口貨，

僅值一八八一年價格之一半』;雖然如此,此一指數對於意義欠確定之數量如『進口貨價之跌落』者,未必卽爲一最佳之度量,蓋所謂『進口貨價之跌落』,其中必有一般原因支配此類商品,但此種商品之行動,乃已被其他部分原因所左右矣。

基年之選擇　選擇一正常年份或一期間之平均數爲基年,其事甚爲重要,蓋年份之選擇,足以影響嗣後作比較之有效權數也。茲採用下列之符號:

所選權數	基年中之價格	第二年之價格	第三年之價格	第三年價格與第二年價格之比
w_1	100	$100r_1$	$100r_1{}^1$	$R_1=r_1{}^1:r_1$
w_2	100	$100r_2$	$100r_2{}^1$	$R_2=r_2{}^1:r_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

並以 100, I_1, I_2 分別代表此三年之指數,則得

$$\frac{Sw100}{Sw}:\frac{Sw100r}{Sw}:\frac{Sw100r^1}{Sw}=100:I_1:I_2$$

$$\therefore I_2=I_1\times\frac{Swr^1}{Swr}=I_1\times\frac{S(wr\cdot R)}{Swr}。$$

但吾人如以第二年所有之價格均作爲 100,則 $I_2=I_1\times\frac{SwR}{Sw}$。

假如此平均數爲未加權之平均數,吾人必仍不能免此困難,蓋如此則一者之值爲$\frac{SrR}{Sr}$,而他者之值乃爲$\frac{1}{n}Sr$也。

但因權數中之差誤,在平常情形之下,影響僅爲甚微,故若非所擇之基年,果爲極端反常之年份,或物價之運動,極不規則,

則此點並無顧慮之必要。

幾何平均數 據愛某華斯教授之指示，吾人如用幾何平均數，則在不加權平均數中所遇之困難，卽可完全避免。試用同一符號：

$$100:I_1:I_2=100:100\sqrt[n]{r_1r_2\cdots\cdots r_n}:100\sqrt[n]{r_1^1r_2^1\cdots\cdots r_n^1}$$

$$\therefore I_2=I_1\times\sqrt[n]{\frac{r_1^1r_2^1\cdots\cdots r_n^1}{r_1r_2\cdots\cdots r_n}}=I_1\times\sqrt[n]{R_1R_2\cdots\cdots R_n},$$

於是不論用何年爲基年，若欲比較兩年之指數，得數均爲相同矣（註五）。

其他指數 孫巴克先生及倫敦經濟雜誌(Economist)，爲求在商品之消費相對重要性將各別比率加權時，避免其一部分之困難起見，特自價格最準確之商品中，多用消費廣遍之物品，如小麥，而少用次要之商品，如亞麻仁。孫巴克先生在其一年一度發表於英國皇家統計學會學報(Journal of the Royal Statistical Society)之文中，曾對於彼四十五個比率之不加權平均數，與已用各種原則加權之同一比率之平均數，證明其相合之點（註六）。

選樣正當之重要 如所得比率爲數甚多，而所用特別權數之選擇無關重要時，則欲加研究之數量之選擇，對於得數必有極大之影響。例如外國之原料及製品輸入我國之數字，據上列一表所示，勿論權數如何，而所受影響雖然甚微，但與英國製品之出口價格，未必卽得同一之指數；且此兩種指數無 可與孫巴克氏

指數或經濟雜誌之指數切合，實則卽孫巴克氏與經濟雜誌二者之指數，亦並非完全融和也。此四種指數所根據之樣本，乃由羣類不同之商品選來，且據此等指數所示，同一之勢力，對於此等各羣類之影響，亦各不相同也。總之，吾人對於選來之樣本，無論用何數乘之，但如再用某數除之之時，對於所得到之指數，並不發生影響，則吾人可以期望吾人之得數，必能代表所需之度量矣（註七）。

中位數之絕大優點　試就一八六〇至一八七〇年一期中，以經濟雜誌之指數，與孫巴克氏指數作一比較，吾人可見前者在棉花歉收期中，表現之增加度，較後者強烈多多。一種指數，凡因在一羣商品中之變動，以致出入甚大者，此必係缺乏物價平準之一般度量應有之數種主要原質無疑。此一難點，亦卽加權上所有困難之所在，有一簡單之辦法，可以避免之，此一方法，乃以某年所有物價比率之中位數，作為該年之指數，如包括項目果然甚多，則理論上示明其他各種平均數，對於必需條件之滿足，較中位數為佳，乃為不可能之事，且中位數在實際上為最便於計算之平均數，則無可疑。

經人提議之標準　在另一方面，資料如甚稀少，採用權數乃為必需，且公衆感覺需要一種具體度量，以便對加權之便利，明白表示時，最好之標準，恐無過於英國協會之委員會所提議之編

製指數標準，蓋此一製作指數之標準，可作爲商業上關於將來償付交易之基礎也。茲將此標準，述之於下：

一八八八年英國協會經濟組所組委員會介紹之指數基礎

品　　名	每種物品每年耗用金額（單位百萬金鎊）	故指定之權數爲		價格之根據
小麥	60	5		勞工公報之平均數，英國小麥
大麥	30	5	20	勞工公報之平均數，英國大麥
雀麥	50	5		勞工公報之平均數，英國雀麥
番薯，稻米及其他	50	5		進口價格平均數，番薯
肉	100	10		市價，牛肉
魚	20	$2\frac{1}{2}$	20	商業部調查表；上陸每英擔(Cwt)平均價格
乳酪，黃油，牛奶	60	$7\frac{1}{2}$		乳酪及牛奶，進口平均價格
糖	30	$2\frac{1}{2}$		平均進口價格，粗製糖
茶	20	$2\frac{1}{2}$		平均進口價格，茶
啤酒	100	9	20	平均出口價格，啤酒
酒精	40	$2\frac{1}{2}$		平均進口價格，酒精
酒	10	1		平均進口價格，酒
煙草	10	$2\frac{1}{2}$		平均進口價格，煙草
棉花	20	$2\frac{1}{2}$		平均進口價格，棉花
羊毛	30	$2\frac{1}{2}$	10	平均進口價格，羊毛
絲	20	$2\frac{1}{2}$		平均進口價格，生絲
皮	10	$2\frac{1}{2}$		平均進口價格，獸皮
煤	100	10		平均出口價格，煤
鐵	50	5	20	市價，蘇格蘭銑鐵
紫銅	25	$2\frac{1}{2}$		平均進口價格，紫銅礦砂
鉛，鋅，錫	25	$2\frac{1}{2}$		平均進口價格，鉛礦砂
木料	30	3		平均進口價格
煤油	5	1		平均進口價格
靛青	5	1	10	平均進口價格
亞麻及亞麻仁	10	3		平均進口價格
棕櫚油	5	1		平均進口價格
硬橡皮	5	1		平均進口價格

（第四十一表）

美國之統計學家，爲製成指數，曾採用一總數比較法(method of comparing totals)，而不用加權或不加權之價格比率(price ratio)。『如此作法,可以克服兩點困難:第一點爲選擇基年問題,因如此則實在物價可以不必化成價比(relative),第二點爲依價比之適宜平均數而決定之問題』(註八)。實則此法固有令人明瞭與作法簡單之優點,但其中並無新原理。玆請述之如下:某年,即如一九一四年,每一物品之價格,須以在上一舉行調查之年,如一九〇九之成交數量乘之;另一年即如一九一二年之物價,亦以同數量乘之。以一九一四年之綜合數(aggregate)爲基數(base),即爲 100,然後以一九一二年之綜合數與一九一四年之綜合數相比,即得一九一二年之指數。假如一九一四年之物量爲 w_1,w_2……,物價爲 P_1,P_2……,一九一二年之物價爲 p_1, p_2……,則一九一四年之綜合數,卽爲 SwP,而一九一二年之綜合數爲 SwP,於是得指數爲 $100\frac{SwP}{SwP}=100\frac{S(wP.R)}{SwP}$式中,$R_1$,$R_2$……卽一九一四對一九一二年之價格比率也。此種指數與上述之英國商業部指數相同,而未敢云有特別確度者也。

零售物價指數 對於躉售物價,吾人所得者,旣僅爲粗略之相應性,則度量零售物價,自不能希望有極大之精確。蓋據上章所述,一平均數中之差誤,與在作成此平均數之各個項目中,所出現之差誤,有其一定之關係;如各項中之差誤,通盤均有雙倍,則在平均數中,及在兩平均數之比率中之差誤,大半亦必有兩倍之多,於是吾人不得不更需要四倍之樣本(註九),以期恢復精確

度。然計算零售物價指數，資料之不完全，較計算躉售物價指數所用，有過之無不及，且因包括之物品種類更少，而種種項目如麵包及房租等，實佔極重要之地位，故加權問題，乃愈形重要。

特別困難點 吾人在以一指數表明特殊階級之人士之貨幣購買力時，有若干點，爲計算躉售物價指數時在所不計者，此時亦不得不注意及之。在同一時期之不同階級，與在不同時期之同一階級，對於彼之所得，開銷之比例不同，對象亦復有異。吾人果能蒐集若干充分之確實樣本，此一事實即無十分關係，無如一般對於減價之商品旣有多購之趨勢，此事仍有某種之重要性。旣然如此，吾人似有爲每一階級每一區域各作一指數之必要矣。資料不充分與不確實之困難，迄今猶未能克服；惟吾人旣有於將來覓得一定之零售物價記錄甚多足以完成其確實性之可能，則吾人不妨略一討論其他各點矣。

加權法 如爲某一階級，作一指數，必須有該階級人民在所論及之所有日期中，對於所得開支方法之記錄，記錄並須甚多，足以得到些須之確度，以應加權之所需。在吾人旣得尙爲良好之零售物價記錄後，乃有數種加權法當前(註一〇)，而此所有各法，大致多能得出同一之得數。至於加權之必要，及其方法，最佳須以數字例證解明之(註一一)。

不論生活費之定義若何，對於生活費變動之度量，所用之資

料，性質均係相同，內容包括有各層社會階級之代表，在兩期間或兩地方，所購各種商品之數量，及付出物價之記錄。例如，茲有資料如下：

商品	地方或日期（甲）							（乙）						
	數量		價格		費用			數量		價格		費用		
1	Q_1	×	P_1	=	E_1			q_1	×	p_1	=	e_1		
2	Q_2	×	P_2	=	E_2			q_2	×	p_2	=	e_2		
3	Q_3	×	P_3	=	E_3			q_3	×	p_3	=	e_3		
⋮	⋮		⋮		⋮			⋮	⋮	⋮		⋮		
n	Q_n	×	P_n	=	E_n			q_n	×	p_n	=	e_n		

在下列第四十二表，即依此式，表明一九一九年英國生活費委員會報告所用之家庭預算。

如以第一年之物價，計算第二年之預算，則得生活費爲二二五・五便士，而非四五五・五便士。以此爲基礎，而計算零售物價指數，乃爲 $100\times\frac{455.5}{225.5}$，或爲 $100\frac{\mathrm{S}qp}{\mathrm{S}q\mathrm{P}}=202.0$。加於價格比率 p: P 之權數，爲 qP。指數等於 $100\frac{\mathrm{S}e}{\mathrm{S}e\frac{\mathrm{P}}{p}}$……$(a)$

用第二年物價計算第一年預算，則生活費必爲五二一・六便士，而非二四六・五便士。以此基礎得指數爲

$$100\times\frac{521.6}{246.5}\text{，或爲}100\frac{\mathrm{SQ}p}{\mathrm{SQP}}=211.6\text{……}(b)$$

加於價格比率 p: P 之權數，乃爲 Q P，或 E。此即勞工公報(Labour Gazette)用以度量『零售物價之平均增加量』所用

之法也。

城市勞動階級家庭預算

標準家庭之生活費

		一九一四年			一九一八年，六月			p/P
		Q 數量	P 價格 (便士)	E 費用 (便士)	q 數量	p 價格 (便士)	e 費用 (便士)	價比
(1)麵包及麵粉	磅	33.5	1.51	50.5	34.5	2.36	81.5	1.56
(2)肉	磅	6.8	8.6	58.5	4.4	18.6	82.0	2.15
(3)鹹肉	磅	1.2	11.7	14.0	2.55	26.1	66.5	2.24
(4)豬油，牛羊油及其他	磅	1.0	7.5	7.5	.78	17.9	14.0	2.29
(5)雞蛋	枚	13	1.0	13.0	9.1	4.0	36.5	4.00
(6)鮮牛奶	瓶	9.2	1.8	16.5	11.7	3.0	35.5	1.69
(7)煉乳	罐頭	.25	6.0	1.5	.59	14.5	8.5	1.42
(8)乳酪	磅	.84	8.9	7.5	.41	20.7	8.5	2.32
(9)黃油	磅	1.70	14.4	24.5	.79	29.7	23.5	2.07
(10)人造牛奶油	磅	.42	6.0	2.5	.91	12.1	11.0	2.01
(11)番薯	磅	15.6	.7	11.0	20	1.25	25.0	1.78
(12)稻米及太皮歐加 (tapioca)	磅	1.4	3.2	4.5	1.3	5.8	7.5	1.82
(13)雀麥粉	磅	1.3	1.9	2.5	1.4	4.3	6.0	2.24
(14)茶	磅	.68	21.3	14.5	.57	33.3	19.0	1.56
(15)咖啡茶	磅	.09	16.7	1.5	.12	25.0	3.0	1.50
(16)可可茶	磅	.18	19.4	3.5	.23	32.6	7.5	1.69
(17)糖	磅	5.9	2.2	13.0	2.83	7.07	20.0	3.21
合計				246.5			455.5	
其他食物				52.5			111.5	
總計				299.0			567.0	

S.QP=246.5　S qp=455.5　S.Qp=521.6　S.qP=225.5

S.e÷S.E=1.90　S.Qp÷S.QP=2.12　S.qp÷S.qP=2.02

（第四十二表）

在若干種情形之下，上述二式，或用(a)，或用(b)，均各有其理由。如其不然，吾人卽採用二者之平均數，於理亦無不合；算術平均數爲 206.8，幾何平均數爲 206.74，倒數平均數爲 206.69，各數相差無幾，吾人究用何數，並無關係。否則不妨介紹一含義淺顯之法，卽依次計算各數量之平均數（$\frac{1}{2}(Q_1+q_1)$，$\frac{1}{2}(Q_2+q_2)$，……），並求各年之費用，而比較各年費用之總數。於是得出 $\frac{S(Q+q)\,p}{S(Q+q)\,P}\times 100=203.7$。至加於價格比率之權數，則爲

$$(Q+q)\,P \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (c)$$

另有一法，乃以每項物品兩期中費用之平均數，作爲該項價格比率之權數，乃得 $\frac{S(E+e)\frac{p}{P}}{S(E+e)}=198.6$ ……………… (d)
雖然，此式在分子中，含有 p^2/P 一數量，因此乃對於某一商品價格之異常運動，給以不正當之加重。

如不知數量之多寡時，價格比率之簡單平均數

$$\frac{1}{n}S\frac{p}{P}\times 100=209.1 \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (e)$$

有時亦可用之；但在此問題而忽略權數，雖不必求得極大之精度，究非妥當之辦法。

最後一法，手續繁複多多，蓋在此法之下，必須假設第二年之費用總數，其中各項概依第一年之比例而耗用，且第二年所購各項物品之數量，須以第一年之價格而計算其價值。第一年實在全部費用（以 100 乘之），對依上法算出之費用之比率，等於

$$\frac{100\mathrm{S}e}{\mathrm{S}\left\{\mathrm{E}_1\frac{\mathrm{S}e}{\mathrm{SE}}\times\frac{\mathrm{P}_1}{p_1}+\cdots\cdots\right\}}=100\frac{\mathrm{SE}}{\mathrm{SE}\frac{\mathrm{P}}{p}}=196.4\cdots\cdots\cdots\cdots(f)$$

此處加於價格比率$\frac{p}{\mathrm{P}}$之權數，乃爲 $\mathrm{QP}^2\div p$，此一權數，與第(d)例同，對於特別價格，亦給與以不當之權數。並且吾人殊無理由可以假設各年費用中各項物品始終保持定比也。

以上所述度量零售物價六法，究以何法爲最佳？此一問題迄今尙無一致公認之結論；但對於(d)，(e)，及(f)三者，則有基於理論之嚴重反對論。(a)與(b)之間，一般無甚差別，但爲達到此目的，此一年既有併入計算之必要，彼一年又何獨不然，故吾人不若用二得數之平均數之爲愈。在此各種辦法中，平均諸數量之方法，以(c)爲最敏捷，計算極簡易，亦即基於一切理由堪以介紹於吾人之前者也(註一二)。

度量零售物價之運動一問題，一般多與用兩期間之同一項目以度量一標準(此標準代表最低生計(minimum subsistence)或代表有效生計(efficiency subsistence)之費用之變動一問題，混爲一談。本書對於此項度量法之細節，本不預備多所討論，惟吾人不可不知者，各種商品之供給上及價格上之變動，乃爲連續不斷者。對於每一份家庭預算，吾人必須假定在每一日期以最經濟的購買，各得到同一之滋養物（以更廣泛之語言之，各得同一之滿足），如是則價格上漲最少，下落最多之各種食物數量必增

加，而價漲多落少之食物數量則減少，故上升運動必較用 (a) 法所量得者為小，而下降運動必較用 (a) 法所量得為大也(註一三)。

其他之難點　此外尚有妨礙本問題不能作完全解決之困難兩點，不能不加以考慮。在所有之家庭預算中，房租乃一重要之項目，而增加房租與設備改良（連同與房租一併繳納之捐稅而享受公共支出所給予之利益在內）之關係，現似無有良好估計之期望。再者，假如吾人考慮者，非問錢如何用去，而為應如何用法，則吾人不得不提出一較為普通之因子；蓋在必需業已滿足後尚留之邊際，其購買力增漲必甚速，以機製產品種類日繁，而價格日低也；在躉售物價中已算出之降落，或可即足作為此一增長之優秀度量焉。

消費指數　姑置此一極難問題而不論，吾人可請仍就對於較為特色之指數之數量度量法，略一探討之(註一四)。吾人如須度量一一原因之作用，而此原因所支配之數量，並無公同之度量，則仍可用指數以度量之。進口貨物之消費量，已有一般之增加，故如能對此種消費量之增加，加以度量，但並不使其因物價之變動，而受何影響，則吾人即可用此消費增加量，以批評實際工資之運動之任一度量法矣。麵包，葡萄乾，牛奶酪，肉，以及其他等物品之實在價值，唯一之普通度量，厥為各該物品之價格，至其重量在此處乃毫無用處可言；故不得不另用其他方法。如將此種物

品若干按年消費之數量一一記下,而以任一年(不必均用一年)消費量之百分數表示之,乃卽得一列僅須加權卽成所求指數之數字。在此情形之下,吾人可以證明:關於權數任何合理之採擇方法,只須以物品之價值或各項物品假定之重要性爲根據,甚或卽用隨機權數方式,其所得之指數,無不與用簡單算術平均數所得者相同。實際上,吾人如有十分良好之一組樣本,吾人幾可完全脫離權數而獨立運用之也。如事實果然如此,則吾人可具有把握而謂所求之數卽在由各種權數方式而來之一羣附近,於是卽擇其似最合理之方式,以作爲吾人所採用之估計數可矣。在務德(Wood)先生一八九九年英國統計學報所載之『勞工階級進步之數種統計』一文中,僅有十四項商品,所用權數有五種不同之方式,而所得答數,在一八七三至一八九六年期間中,消費之增加,均在百分之一三・八,與百分之二〇・一之間。

工資指數 指數在工資統計上之應用,其中並不含有任何新原則。惟在編製工資指數之時,對於權數之變動,不可置之不顧;非然者,工資上漲者人數增加之一般傾向,必無從得知。在各別平均數之中,極有陷於偏誤之危險;蓋加工之工資,特高之計件工資,人類極多而無聯絡之低技能或待遇惡劣工人之工資,往往不見於工資記錄中也。雖然,此等偏誤在比較時乃有趨於消滅之傾向;故由此足見吾人頗有製成具有頗佳確度之工資指數之

可能(註一五)。

(註一)　本文一部分乃係由一九一二年統計學報第七百九十一至七百九十五頁摘錄而來。

(註二)　如重新排列之後，此一方程式可即由 $y=a+bx$ 得之。

(註三)　見一八九七年六月份之英國經濟學報(Economic Journal)及統計學報。

(註四)　見經濟學報，但對於權數之說明，則已加修正。

(註五)　關於此點，以及本章其他各處，請參閱帕爾格拉夫(Palgrave)之經濟學辭典(Dictionary)中「指數」一條。

(註六)　讀者可參閱一九〇〇年統計學報第九十七及九十八頁。

(註七)　孫巴克氏之指數，見彼在統計學報中每年發表一次之文；另外並有一表示自一八二〇年以來各年指數之圖式，係 P. S. King and Son 書店所印行。

(註八)　請參閱塞可利斯特(Secrist)著，統計方法概論 (An Introduction to Statistical Methods)，一九一七年版，第三百二十九頁三百三十九頁，及三百四十頁。並參閱美國勞工局統計公報 (Bulletin of the U. S. Bureau of Labour) 總號一八一，一九一五年十月號。

(註九)　見本書第二編第四章。

(註一〇)　請參閱帕爾格拉夫氏編經濟學辭典第六百四十至六百四十一頁「名義工資與實際工資」一條。

(註一一)　此處及上下文之一部，均摘錄於統計學報一九一九年第三百四十三頁起之「對於生活費變動之度量」一文。

(註一二)　此意見已異乎本書以前各版所持之論調。為求更進一步之參考，可閱帕爾格拉夫氏編經濟學辭典，關於工人家庭預算(Workingmen's Budget)之參考書目。

(註一三)　關於此種問題之討論，請參閱一九一九年五月份統計學報，「生活費」一文。

(註一四)　下舉例解，乃以務德(G. H. Wood)先生載於一八九九年英國統計學報「勞工階級進步之數種統計」一文為根據。

(註一五)　關於此種方法及各項因子，若欲求完全之例解，請參閱「英國工資統

計，第十四編，工程及造船』，見於一九〇六年三月份統計學報，第一百五十四頁起，尤以一百六十六，一百六十八，及一百八十五諸頁爲重要。

第十章　插補法

第一節　總論

插補之必要　在實用統計中，吾人對於時間數字往往不能隨將來進一步研究之需要，作成頻繁之時間數列，或將羣類作一極詳盡之鋪敍。例如一國之人口，只能每十年舉行一次；但吾人需要以按月或按年之記錄——如出生率、死亡率、貿易報告……等等——與現有人口數，聯成密切之關係，又如國家之概算，賦稅之收入，尤須以當年納稅人數之估計數爲基準：故在不舉行人口普查年間而估計人口數，誠有插補(interpolate)之必要也。再者，作依年齡分配之人口數報告，乃爲保險精算工作及社會學研究所必需，而此亦非用插補法推算不可。英國人事登記舉辦之戶主報告表，在名義上原確爲當年之年齡報告，無如實際上任人皆知其並不確實，以其每有填報接近之整路年齡之情勢也；比較言之，填報年齡在三十五至四十五歲之間者，尙屬較爲正確，蓋報告年齡爲四十歲之人，其年齡或許不致超出四十歲上下五歲之外也。實則英國在一九一一年以前之原始報告，錯誤之處尙不止此，故歷次登記，迄未實行發表，其發表者亦不過以十歲爲一組

之分類人數而已。[3] 然則由此分類之人數，自非對各歲年齡之人數，加以估計不可矣。且也，英國一八八六至一八九一年舉辦之工資調查，編製人員計算賺各級工資之人數，乃按『十五先令以上而不滿二十先令者』，『二十先令以上而不滿二十五先令者』……等組分類，並非以一先令爲工資組距之人數也。然在與工資有關之問題中，常時有須詳加推算之必要；且在吾人欲以英國工資，而與法國工資羣類作比較時，必須釐定一種計劃，使二法郎之分組，可與五先令之分組相比較，而此則非用一適當之插補法不可者也。

插補法之需要，當吾人欲比較性質相同而排列方式不同之羣類時，尤極常見。例如，兩國舉行人口普查之日期不同者卽是。一國之人口數，年齡以十五歲爲一組，而另一國則以十歲爲一組；一國以不滿二十一歲者爲未成年人，而另一國則以十八歲以下者爲未成年。至於不定期之估計數，兩國之日期，鮮有能適合者；例如法國之工資統計已舉辦者，有一八四〇，一八五〇，及一八九二年，而英國則爲一八六六，一八八五，一八八六，及一八九一年。在以甲國與乙國比較時，必可求出相同之差度；在此情形之下，決定平均數之方法，必須加以討論，而此一討論，卽將爲幾個初步插補法問題之例釋焉。

初級例證 下列一表，假設表中之正體數字，爲某三區域每

週工資之確實調査數字，茲請就三區中求其整個之平均變動。

	一八六〇		一八六二		一八六四		一八六六		一八七〇		一八七一		一八七五		一八七八		一八八〇		一八八一	
	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士	先令	便士
甲區	12	6	15	0	*15*	*0*	15	0	*15*	*0*	14	6	18	0	18	0	17	6	17	0
乙區	18	0	*19*	*0*	19	0	*20*	*0*	20	0	*19*	*6*	*21*	*0*	21	0	*20*	*6*	20	0
丙區	10	0	*11*	*0*	11	0	12	0	*12*	*0*	*12*	*0*	15	0	*16*	*0*	15	0	*14*	*6*
平均數	*13*	*6*	*15*	*0*	*15*	*0*	*15*	*8*	*15*	*8*	*15*	*4*	*18*	*0*	*18*	*0*	*17*	*8*	*17*	*2*

試觀此表，可知吾人必須由此資料中，求出關於工資一般行程之事實，惟此表所示與吾人者，並不明鮮。上列表中之斜體數字，乃有其自然之成立理由，甲區在一八六二至一八六六年間，並無何種變動，故一八六四年之工資，必為十五先令無疑。再由乙區判斷，甲區一八七〇年之數字，似不致比一八六四年之數字為低，故甲區一八七〇年之數字，可寫為十五先令。甲區既告完全，然後吾人觀察甲區中之初度上升，終止於一八六二年，假定乙區情形與甲區同，則乙區一八六二年之數，必為十九先令。丙區中之數字，自一八六四年上升，至一八六六年停止，而在甲區，一八六六至一八七〇年間，並無任何變動；假設吾人以乙區一八六六年之數字為二十先令，則乙區必與甲丙兩區相呼應。設乙區中之數字，一八七一年為十九先令六便士，一八七五年為二十一先令，一八八〇年為二十先令六便士，則一八六六至一八八一年

間，甲乙兩區必成密切之相應。基於同一理由，吾人可將丙區之數字補插而得。於是逐年之不加權平均數，吾人乃可求得，但若用當時日期則不能直接算出也。此一平均數對於原始數字之變動，均能發生反應，惟對任何部分，則並無特殊之加重。由此觀之，此插補完成之數列，可視爲以所有資料爲基礎之最或然之數列也。

事先之假定　在施用此法之前，不言而喻，必有數種假定，玆就此種假定檢討之。第一項假定，假設各數字間並無猛烈之升降，假設一八六四年甲區，絕不許有二十先令之存在；此一假定，必須有兩個先決條件，能滿足此二條件，假定乃可認爲正當而無誤，第一條件，必須熟知支配工資率之一般原因，第二條件，兩期之間，數字必須確知並無激烈之波動。由此論之，當美國南北戰役時，吾人對於棉織工業之工資，即不能施用此一假定，對年代甚長之數列亦然。

第二假定，假設如果同時並無反面的證據，則數字之上升與下降，必係協和運動。例如，乙區中一八七八至一八八一年間，一八八〇之工資，乃即吾人假定爲在一八七八至一八八一年間者；假如在甲區各工資分點之間，並無恰在中途之證明，則可謂其乃在時間行程上之三分之二，故如不用整略數，則一八七九年之數，必須以二十先令八便士插補之，而在一八八〇年，則須以二十先

令四便士插補之。

第三，假定三個區域之工資運動行程，彼此相同。例如甲區在一八六〇至一八六二年間，有上升之趨勢，但在一八六六年以前，迄無任何之進展；故吾人假定乙丙兩區記錄上在一八六四年以前之上升運動，確於一八六二年以前實現。又在一八七〇至一八七五年間，甲區工資一直瀉落以至一八七一年爲止，乃又儘情上升而達一八七五年之高度，其後直至一八七八年爲止，竟無任何變動；故乙區工資率之運動，吾人假定在一八七五年之工資，乃與一八七八年者相等，並且一八七八年之下降，乃爲事實所許可，因此一降落，乃愈促成一八七一至一八七五年上升之尖銳也。至在丙區中，一八七一年之十二先令，是否不應爲十一先令六便士，則頗堪致疑。反對此一判斷之理由無他，乃以一則低工資上之增加，不若在高度工資上之增加之易於消滅也；由十二先令中減落六便士，其降落程度，就比例言之，必比由十五先令中減去六便士者爲大；二則在一八七一至一八七五年顯現之三先令六便士之增加，較之甲區或乙區中之上升，比例較大多多；三則一八七〇至一八七一年之降落之存在，乃純由在一八六六至一八七一年間有下降趨勢之證據之故。

數字僅有數個時，必須依上所述詳加分析而求出其最或然之數字；且如此辦理往往頗易補塡對於現存證據適合十分密切

之數字。然於此乃立時發生一疑問：此種數量依假定既爲未知數，則謂此種數量在實際上無論遠近終必近於在表面上爲最或然之數字，吾人究有何種把握耶？

測驗法　在數種插補問題如現在所論者之下，此一問題，吾人可以一數學機率用語答覆之。所謂數學機率用語，例如，與某一數字相差六便士之機率，以二對一而失敗，與某一數字相差一先令之機率，以三〇對一而失敗，與一數字相差二先令六便士之機率，以一〇〇〇對一而失敗……等等卽是。惟在調查時最常偶然出現之數字中，求得確然如此之機率，乃不可能。玆有一簡略但甚有效之方法，可用以測驗上舉一例中插補結果之確度，仍請舉例以明之。現欲測驗者，爲吾人所算出之一八七〇年平均數，在不致十分防害吾人對於本問題之常識範圍內，究爲多少。將甲丙二區在此數十年間儘量擴大；因乙區在一八六四至一八七〇年間，曾有一上升現象，吾人或可由此假設在一八六六年之上，有一先令之上升。如熟知決定此數十年間工資率之原因，則吾人幾不能假設，一八七〇年之數字，與一八七五至一八七八年同其高度，亦不能假設在此一年中工資大爲降落，計有二先令之多。假設甲區之最高工資，爲十六先令六便士，丙區之最高工資，爲十三先令六便士，則吾人所得之平均數，乃爲十六先令八便士，而非十五先令八便士。依此同理，吾人或可以十四先令爲一八七

〇年甲區之最低工資，以十一先令爲一八七〇年丙區之最低工資；如是，則平均數必爲十五先令。假設吾人對於在此數十年間事象之一般趨勢，所知甚詳，足以依此方法決定數字大小之範圍，則吾人可以斷定：一八七〇年之平均工資，最小少於十五先令，最大多於十六先令八便士之事，或不易見，而且依證據所示，平均工資爲十五先令八便士一語，勢乃有所難能。

由此觀之，吾人所行插補結果之確度，乃視下列兩件而決定：（一）爲吾人對於數字之可能變動之知識，此種知識之取得，必須就數字所出現之期間，觀察數字之一般變動；（二）爲吾人對於事象（此種事象，卽與數字關聯）運動過程之知識。

數字計算舉例　茲爲例釋數字計算方法起見，特取用同類資料（註一），作爲第二例如下：

英國北部各郡	農村每週工資			
	一八六七至一八六九		一八六九至一八七〇	
	先令	便士	先令	便士
且協爾	*13*	*1*	13	6
耶加協爾	15	0	15	0
約克協爾西區	14	6	16	5
東區	14	6	*14*	*11*
北區	14	6	15	4
得由漢姆	16	6	16	0
腦贊伯蘭	16	6	16	7
可伯蘭	*14*	*4*	14	9
外斯特摩蘭	*15*	*7*	16	1

上表資料就兩期原有數字之五區而論，一八六七至一八六九年一期之五區工資平均數，爲一五先令四·八便士，一八六九至一八七〇年之平均工資，爲一五先令一〇·四便士，換言之，卽爲三三與三四之比。吾人如假定，除此五郡之外，其他各郡之工資，乃受同一原因之支配，並依同一之比率增加，則吾人得列如上表之插補數字。經此補插之後，於是英國北部各郡工資之不加權平均數，在一八六七至一八六九年，爲一四先令一一便士，在一八六九至一八七〇年，爲一五先令五便士，而非原來僅有五區數字之平均數，前期一五先令三便士，後期一五先令五便士矣如就英國全國以前期與後期作一般比較，吾人只得删略前後兩期中無數字可查之各郡，以免無端掣低一般之平均數，蓋近年來此等各郡之工資，雖較北部各郡平均工資爲低，但終比英國全國總平均數爲高也。在同時，吾人必將北部各郡顯然可見之平均數，作不公正之擡高，且吾人必已失去特別數郡在前期（唯前期乃爲較安全之基礎）之或然數字；蓋北部各郡在最後五十年中，幾全維持於同一狀態之下。由此觀之，可見此類工資，並不若非由補插而來之工資之確實，故吾人務宜留心以此等數字爲基礎之論辯，察其應用之插補數字，究有幾何也。

此種方法，與用以爲在一校中上課時缺席學生判分所用者，頗相近似；給分時一方固須注意該生在同班中之一般地位，一方

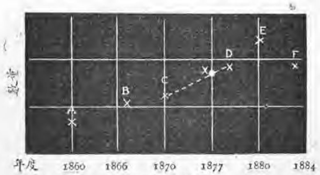
尤須注意缺席學生中除該生外班中其餘之缺席學生所得分數之平均值。

辨別插補數字之必要　此法雖已甚爲完全，但插補數字之證據，與用直接證據結果而得之數字，大不相同，此點吾人務須認清。在某種情形之下，此種插補數字，有時乃代表並不存在之數量（如上述之學校分數），而此數量之用途，亦不過爲計算便利而已。在他種情形之下，此種插補數字，僅爲一種因認識不足而謨作最或然之數字。故此種數字，務須明白註明乃爲插補數字；最佳更須敍明求得之方法，如有任何附帶資料（此種資料有時可視爲證明確度之直接證據），亦須敍及，並且如實際上爲可能時，此種數字，不妨作爲並不確切之資料，而視爲有某種範圍中之伸縮性；如且協爾郡之插補數字，可以寫作一二先令六便士至一三先令六便士，不必竟謂爲一三先令一便士也。

論及插補法，其問題有種種不同，其中有須以代數解決者，容在下節討論之，其他數種可以數字例題解釋之如下。

用圖插補法　用圖插補法——設已知各別位置上之數值，如年齡二五至三五歲，三五至四五歲……之人口數；如一八七一年，一八八一年，一八九一年……之人口數；如一八六〇年，一八七〇年，一八七三年……之工資；如工資在一五先令至二〇先令，二〇先令至二五先令……之人數，則吾人可用如下圖式表示事

實:



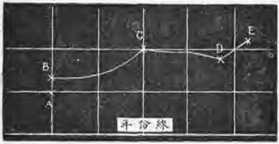
(第二十一圖甲)

設吾人需要一八七五年之數值。如圖上僅有C,D兩點,則一最簡單亦即無反而證明始生效之假定,乃為C與D間之數量,乃依同樣的步調逐漸增加;於是CD一條直線,即代表此種增加趨勢,則x點之高度,必代表一八七五年之數量。

如另外已有一個E點,則CD,DE兩條直線所代表之假定,必不能成立,蓋此假定乃假設在一致趨勢中間,忽於一八七七年之D點,驟然折斷,而所謂一八七七年D點之折斷,並無證據存在也。然則吾人不可不就所有各已知點通盤計議,即經過此等所有各點,畫一條線,此畫成應之線,應儘量使其均勻,曲折力求減少,蓋若無反對方面之證據時,吾人即假定在此種數量中間,並無猛烈變動也。此一曲線之構成,可以用數學原理為基礎,不然即用隨手畫法(freehand method),亦無不可;如果採用隨手畫

法，則所畫之線，必時常隨所持論辯之許可，十分接近事實。

此一方法，只可用於連續之數量，如各級年齡之人數，各年份之人口數，一極大工資羣類中，各級工資上之人數均是。例如，英國全國之平均工資，變動必甚遲緩，但倫敦一市建築工人之工資，乃竟因某日罷工議和之結果，驟起猛烈之變動。在此情形之下，繪曲線必須盡力之所能以求切合證據；例如下列第二十一圖乙：



（第二十一圖乙）

圖中 AB 線代表驟然之昇進；BC 線代表因商業發達之逐漸加速度的增加，CD 線爲工資到達 C 點後之遲緩下降勢，至 DE 線，則爲一堅挺而蒸蒸向上以謀恢復已往頹勢之力量。

循環數字　吾人如知每一年爲一週期之數字之每年平均數，並設有若干每月平均數，足以用第七章第四節所述方法，推測此種數字之循環變動，則任何月份，苟有關調查材料，雖甚確

實可信，但惜殘缺不全時，吾人均可插補之。例如就英國勞工公報所載之失業人數而論，在所有各月份中，週期雖不甚顯著，但吾人仍能查出其週期，蓋在春季必有普遍之降勢，晚秋必有一般之升勢，而六月份則大概均爲最低之月份。於是吾人頗可應用前在第七章第四節所列之第十七圖甲、乙、丙三圖，先將所用之資料，在圖上標示各點，然後隨平均數線之或爲上升，或爲靜止不動，抑或下降，畫出波浪曲線，則各變動之曲線，必經過已有標記之各點。次再檢察原有數字之大概性質，則結果所得之數字，確實程度何若，吾人即可知之；並由該公報查得：一則失業人數百分數，一月中變動向無有過於兩單位者，二則變動向無延時在三四月以下者；三則失業人數百分數，向無有在一以下或在一〇以上者。最後吾人可察視某日之商業盛衰史，並由此所得之結果，可拒斥任何不可能之數字。

補助曲線之利用　如吾人採用第七章第三節所述之構圖法，及同章第五節所述之變動方程式，而能查出兩組數列間之密切關聯，則可擇其較完全之一組，以便補插另一組缺失之數字。當此之時，第一必先詳細檢閱兩組數列在均有完全數字時之相應密切度及相應性質。次復依照類似前在第七章第三節所列第十三圖之形式，另行作圖，而圖上各線之中，留有一不完全之線。然後完成此一殘缺之線，使其隨原有各點之地位，儘量與已完成

之線相切合，於是吾人對於缺失之數字，卽得最或然之數值矣。至於由此所得之結果，確度如何，測驗之法，與前論相同。此一方法用以插補數字，用途甚多：如用一財源之收入，以插補另一財源之收入；如用進口貨値以插補出口貨値；如用對外貿易數値以插補結婚率；如用一區域之工資，以插補另一區域之工資；如用食物消費量之變動，以插補失業之人數；如當吾人知全部人口之變動情形時，以插補一部人口之變動狀況，以及其他甚多之數列等均是。

第二節　代數方法

插補問題，最値得吾人注意者，可述之如下：當有一數量呈現連續性之有規則變動，另有一數量，其變動與前一數量發生聯結關係，且吾人已知此第二數量之某某僅有數個之不連續數值，或能直接推算出來時，則吾人之任務，卽在爲此第二數量與第一數量相當之某項數値，求出其或然値。例如，已有至一五歲，二〇歲，二五歲……等等年齡後之壽長平均數，吾人須求出中間年齡之壽長平均數；或如已有某國在一八七一，一八八一，一八九一，及一九〇一年之人口數，須求其在中間年份之人口數。於此有唯一爲情理所許之假設數則：其一，假設數量必連續變動，換言之，卽任何中間數，絕無破裂之處；其二，假設數量之變動率，亦爲連

續不斷，換言之，即代表變動之線乃爲平滑均勻者，而非爲多角形。

研究插補法，有系統之探討，只能用代數上之有限相差(finite difference) 一法，惟欲應用此法，不可不自符號之定義，及若干基本公式之導來始。

(一)設 y 爲 x 之連續函數，並設 y_0, y_1, y_2, ……爲 y 之各值，同時 x 之各値則爲 x_0, x_1, x_2……。

於是吾人排成一表如下：

x之值	y之值	第一相差	第二相差	第三相差
x_0	y_0			
x_1	y_1	Δ_0^1	Δ_0^2	
x_2	y_2	Δ_1^1	Δ_1^2	Δ_0^3
x_3	y_3	Δ_2^1	Δ_2^2	Δ_1^3
x_4	y_4	Δ_3^1	Δ_2^3	Δ_2^3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

此處每一 Δ，乃由前一欄恰在其下之項，減去前欄恰在其上之項；例如，$\Delta_0^1=y_1-y_0$，$\Delta_1^1=y_2-y_1$，……。$\Delta_0^2=\Delta_1^1-\Delta_0^1$，……。$\Delta_0^3=\Delta_1^2-\Delta_0^2$……。此表假設之可以向下並向右無限繼續。

於是吾人可得

$$\Delta_0^2=\Delta_1^1-\Delta_0^1=(y_2-y_1)-(y_1-y_0)=y_2-2y_1+y_0$$

$\Delta_t^2=y_{2+t}-2y_{1+t}+y_t$，式中 t 爲任何整數。

$$\Delta_0^3=(y_3-2y_2+y_1)-(y_2-2y_1+y_0)=y_3-3y_2+3y_1-y_0$$

$$\Delta_t^3=y_{3+t}-3y_{2+t}+3y_{1+t}-y_t$$

且就一般情形論之，如用普通證明二項定理常用之歸納法，並均含同一係數，則

$$\Delta_0{}^r = y_r - r.y_{r-1} + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}y_{r-2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{1\cdot 2\cdot 3}y_{r-3} + \cdots\cdots$$

直至 $r+1$ 項爲止………(α)

$$\Delta_t{}^r = y_{r+t} - r\cdot y_{r+t-1} + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}y_{r+t-2} + \cdots\cdots$$ 直至 $r+1$ 項爲止………(β)

式中，r 爲任何整數。

又得

$y_1 = y_0 + \Delta_0{}^1$，及 $y_2 = y_1 + \Delta_1{}^1 = (y_0 + \Delta_0{}^1) + (\Delta_0{}^1 + \Delta_0{}^2) = y_0 + 2\Delta_0{}^1 + \Delta_0{}^2$，

同理，　$\Delta_1{}^1 = \Delta_0{}^1 + \Delta_0{}^2$，

且　$\Delta_2{}^1 = \Delta_1{}^1 + \Delta_1{}^2 = (\Delta_0{}^1 + \Delta_0{}^2) + (\Delta_0{}^2 + \Delta_0{}^3) = \Delta_0{}^1 + 2\Delta_0{}^2 + \Delta_0{}^3$。

$$\therefore\quad y_3 = y_2 + \Delta_2{}^1 = y_0 + 3\Delta_0{}^1 + 3\Delta_0{}^2 + \Delta_0{}^3,$$

且依同理　$\Delta_3{}^1 = \Delta_0{}^1 + 3\Delta_0{}^2 + 3\Delta_0{}^3 + \Delta_0{}^4$。

依此程序，繼續向下推演，吾人可重得兩項係數(the Binomial Coefficients)，則

$$y_r = y_0 + r\cdot\Delta_0{}^1 + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}\Delta_0{}^2 + \cdots\cdots$$ 直至 $r+1$ 項爲止…………(γ)

$$\Delta_r{}^t = \Delta_0{}^t + r\cdot\Delta_0{}^{t+1} + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}\Delta_0{}^{t+2} + \cdots$$ 直至 $r+1$ 項爲止…(δ)

更往下推演之，則

$$y_{r+s} = y_s + r\cdot\Delta_s{}^1 + \frac{r(r-1)}{1\cdot 2}\Delta_s{}^2 + \cdots\cdots$$ 直至 $r+1$ 項爲止………(ϵ)

式中 s 爲任一整數。

例如，設 $y = x^4$，並設 x 之各值爲 $0, h, 2h, 3h, \cdots\cdots$ 則

x之值	y之值	相差 第一級	第二級	第三級	第四級	第五級
0	0	h^4	$14h^4$	$36h^4$	$24h^4$	0
h	h^4	$15h^4$	$50h^4$	$60h^4$	$24h^4$	0
$2h$	$16h^4$	$65h^4$	$110h^4$	$84h^4$	$24h^4$	
$3h$	$81h^4$	$175h^4$	$194h^4$	$108h^4$		
$4h$	$256h^4$	$369h^4$	$302h^4$			
$5h$	$625h^4$	$671h^4$				
$6h$	$1296h^4$					

由公式(α)得

$$\Delta_0{}^4=(256-4\times 81+6\times 16-4\times 1+0)h^4=24h^4,$$ 此處r等於4。

由公式(β)得

$$\Delta_0{}^5=(7^4-5\times 6^4+10\times 5^4-10\times 4^4+5\times 3^4-2^4)h^4=0,$$

式中 $r=5,t=2$。

由公式(γ)得

$$(5h)^4=(0+5+10\times 14+10\times 36+5\times 24+0)h^4=625h^4,$$

式中 $r=5$。

由公式(δ)得

$$\Delta_2{}^3=(36+2\times 24+0)h^4=84h^4,$$ 式中$r=2,t=3$,

又由公式(ϵ)得

$$(5h)^4=(16+3\times 65+3\times 110+84)h^4=625h^4,$$ 式中$r=3$,

$s=2$。

（二）如 y 與 x 之關係,成爲下列形式:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots a_nx^n,$$

x之值又係成爲算術級數,卽依次爲$x_0,x_0+h,\cdots\cdots x_0+(n-1)h$,

則由此可知$\Delta_0{}^n=a_n.h^n\underline{n}$，且除此之外，更無較高級之相差。

因為$\Delta_0{}^1=a_0-a_0+a_1(x_0+h-x_0)+\cdots\cdots+a_n\{(x_0+h)^n-x_0{}^n\}$

$=ha_1+\cdots+a_n\{nhx_0{}^{n-1}+x_0$ 之次級乘方$\}$

$\Delta_1{}^1=ha_1+\cdots+a_n\{nh(x_0+h)^{n-1}+(x_0+h)$之次級乘方$\}$

$\Delta_0{}^2=2h^2a_2+\cdots+a_n\{n(n-1)h^2x_0{}^{n-2}+x_0$ 之次級乘方$\}$

由此可知 $\Delta_0{}^1$ 之乘方，最高無過於 $x_0{}^{n-1}$；$\Delta_0{}^2$ 之乘方，最高無過於 $x_0{}^{n-2}$。

繼續向下推演——

$$\Delta_0{}^n=a_nn(n-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1h^n=a_nh^nn!\cdots\cdots(\zeta)$$

於是$\Delta_0{}^{n+1}$及更高級相差，乃完全消滅。

在上一例中，$y=x^4$，$a_n=1$，$n=4$，故

$\Delta_0{}^4=1\cdot h^4\cdot4!=24h^4$，又$\Delta_0{}^5=0$。

反之，假設相差至第n級為最高，其上更無相差，則如下列附註所證明，y 與 x 之方程式，乃為下一形式：$y=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n$。

附註 一 相差 (Difference) 與引申函數 (Derived Functions) 或各微係數 (Differential Coefficients) 之關係，在相差原理上，佔有極重要之地位，茲可以運練微分法 (Method of Operators)簡括表明之。

援用微積分常用符號，依照台洛爾氏定理 (Taylor's Theorem)，得公式如下：

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2!}h^2f''(x)+\cdots\cdots=e^{hD}\cdot f(x),$$

式中 D代表連續微分，至e^{hD}則須展開爲$1+hD+\frac{1}{2!}h^2D^2+\cdots\cdots$，然後用之將$f(x)$各項依次展開。D之所以用爲一代數符號，純因有$D\{Df(x)\}=D^2f(x)$，$D^m\{D^nf(x)\}=D^{m+n}f(x)$，$aD(f(x))=D(af(x))$，……之關係。

但 $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)=(e^{hD}-1)f(x)$。

$\Delta\{af(x)\}=a\Delta f(x)$， $\Delta\{\Delta f(x)\}=\Delta^2 f(x)$，

$\Delta^m(\Delta^n f(x))=\Delta^{m+n}f(x)$，Δ亦作一代數符號用之。

故 $\Delta\equiv e^{hD}-1$

$$\Delta^n\equiv(e^{hD}-1)^n=(hD+\frac{1}{2!}h^2D^2+\cdots\cdots)^n=h^nD^n(1+\frac{1}{2}hD+\frac{1}{6}h^2D^2+\cdots\cdots)^n=h^nD^n(1+\frac{n}{2}hD+\frac{n(n+1)}{24}h^2D^2+\cdots\cdots)\cdots\cdots(1)$$

且 $hD\equiv\log(1+\Delta)$

$$h^nD^n\equiv\{\log(1+\Delta)\}^n=(\Delta-\frac{1}{2}\Delta^2+\frac{1}{3}\Delta^3\cdots\cdots)^n$$

$$=\Delta^n(1-\frac{n}{2}\Delta+n\frac{(3n+5)}{24}\Delta^2+\cdots\cdots)\cdots\cdots(2)$$

但如 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_nx^n$，

$D^nf(x)=a_n\cdot n!$，

及 $D^{n+1}f(x)=0=D^{n+2}f(x)\cdots\cdots$

∴ $\Delta^nf(x)=h^na_nn!$，又依公式(1)，則

$\Delta^{n+1}f(x)=h^{n+1}D^{n+1}(1+\cdots\cdots)f(x)=0$，如上正文。

反之，如$\Delta^{n+1}f(x)=0=\Delta^{n+2}f(x)=\cdots\cdots$

則由公式(2)，$D^{n+1}f(x)=0\cdots\cdots D^nf(x)=$常數$=c_n$，

$D^{n-1}f(x)=c_nx+c_{n-1}$，

$$D^{n-2}f(x)=\frac{1}{2}c_nx^2+c_{n-1}x+c_{n-2},$$

及
$$f(x)=\frac{1}{n!}c_nx^n+\cdots\cdots+c_1x+c_0。$$

故第 n 級相差如爲常數，則此函數爲有理的，整數的，並爲第 n 次方。

牛頓（Newton）氏插補公式，如下(K)所述，用連續微分法，可簡捷求得如下：

$$y=f(x_0+k)=e^{kD}f(x_0)=(1+\Delta)^{\frac{k}{h}}f(x_0)，惟因\ e^{hD}=1+\Delta，故$$
$$=f(x_0)+\frac{k}{h}\Delta f(x_0)+\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{h}\left(\frac{k}{h}-1\right)\cdot\Delta^2f(x_0)+\cdots\cdots$$
$$=y_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta_0^1+\frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{x-x_0-h}{2h}\Delta_0^2+\cdots\cdots$$

在此式中，$x=x_0+k$。

當第 n 級相差（或曰第 n 次引申函數）爲零時，依公式(β)所示，應

$$y_{n+t}-ny_{n-1+t}+\frac{n(n-1)}{2}y_{n-2+t}\cdots\cdots\pm y_t=0\cdots\cdots(\eta)$$

不論 t 之值爲何。

（三）普通之插補公式，全以一假定爲基礎，在此假定之下，假設對於所求值所在地之鄰近地段之觀察數，可以一連續函數，$y=f(x)$代表之。

據假定，此函數可以展開爲 x 之一個冪級數，如一般對於連續函數（註二）然，則吾人可得下式

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n\cdots\cdots(\theta)$$

式中 n 爲 x 之最高乘冪之指數，其值如何，尚待加以決定。如a_0，

a_1,……a_n 各值選用得當，則此方程式可以若干$(n+1)$對之 x 及 y 值滿足之。例如，對於 $y=a_0+a_1x$ 一條直線，可以選定兩點(或云兩對數值)，對於 $y=a_0+a_1x+a_2x^2$ 一條拋物線，可以選出三點，其他以此類推。

最簡單之形式，厥爲 $y=a_0+a_1x$；吾人採用此式，必須假定用成比例之部分(此法在用對數表，三角函數表及其他數學表時多施用之)，以作插補，其結果尙爲確實。在此情形之下，此第一級相差，與第一次引申函數(或名線之斜度)，必爲常數。

拋物線有三個數值，用此拋物線，必須假定斜度之變動，爲均勻一致，其第二級相差及其第二次引申函數，乃爲常數。

因更高級相差之差量，必須將項數加多，而函數之展開，至第 n 項卽行截止，必能與第 n 級相差之惰性相適應。

設吾人之問題，爲於一已知數學函數中之插補問題，則刪略第 n 級相差之差量，對於計算上發生何等之影響，吾人可以測驗之。例如在一七位數對數表中，作下列之數字：

自然數	對數	相差				
		第一級	第二級	第三級	第四級	第五級
20	1.3010300	.0211893	−.0009859	+.0000876	−.0000110	+.0000015
21	1.3222193	.0202034	−.0008983	+.0000766	−.0000095	+.0000015
22	1.3424227	.0193051	−.0008217	+.0000671	−.0000080	+.0000016
23	1.3617278	.0184834	−.0007546	+.0000591	−.0000064	
24	1.3802112	.0177288	−.0006955	+.0000527		
25	1.3979400	.0170333	−.0006428			
26	1.4149733	.0163905				
27	1.4313638					

由此觀之,連續各次相差,依次漸減,甚有規則,至第六級,相差已經不過.0000001矣。

此中原理,在統計上應用時,一般並不知有函數之存在,吾人只得假定,確有此函數存在,並可展開成為一種收斂甚速之級數,惟其收斂甚速,吾人頗可删略第五項(譬如說)後所有之各項;否則,如以稍欠準確之語言之,吾人假定此產生總計數之原因,乃有由此一點至彼一點依次逐漸變動之效果,故此種變動之差量,僅在一小部分間,甚屬輕微。

(四)設y之各值為 $y_0, y_1 \cdots\cdots y_n$,與此等數值相當者,則有$x$之距離均等各數值,如 x_0, x_0+h, x_0+2h, $\cdots\cdots x_0+nh$。由此吾人可求得公式(θ)之係數,特其中經過需用算術工作極其煩難,而較便應用之算式,尚有用相差法解算之一途也。

試請就下列一方程式而考慮之

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{h}\Delta_0{}^1+\frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{x-x_0-h}{2h}\Delta_0{}^2+\frac{x-x_0}{h}\cdot\frac{x-x_0-h}{2h}\cdot$$

$$\frac{x-x_0-2h}{3h}+\cdots\cdots+\text{直至 } n+1 \text{ 項為止}\cdots\cdots(\kappa)$$

(牛頓公式)。

如 $x=x_0$,則 $y=y_0$。

如 $x=x_0+h$,則 $y=y_0+2\Delta_0{}^1=y_1$。

如 $x=x_0+2h$,則 $y=y_0+2\Delta_0{}^1+\Delta_0{}^2=y_2$。

如 $x=x_0+rh$，則 $y=y_0+r\Delta_0^1+\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}\Delta_0^2+$ 至 $r+1$ 項止，後面數項已消失，故依公式(γ)之規定，$y=y_r$。

然則(κ)顯而易見必為 n 次方，而且可以上述 n 對數值滿足之。

例如，用上列一表，求 $y=\log 20.5$。

$x_0=20, h=1, x=x_0+\cdot 5, y_0=1.3010300, \Delta_0^1=.0211893$，餘從略。

$$y_0=1.3010300+.0211893\times.5+\tfrac{1}{2}(.5)(-.5)(-.0009859)+\tfrac{1}{6}(.5)(-.5)(-1.5)(.0000876)+\tfrac{1}{24}(.5)(-.5)(-1.5)(-2.5)(-.0000110)+\tfrac{1}{120}(.5)(-.5)(-1.5)(-2.5)(-3.5)(.0000015)。$$

取用為首二項，可得 $y=1.3116247$

取用為首三項，可得 $y=1.3117479$

取用為首四項，可得 $y=1.3117534$

取用為首五項，可得 $y=1.3117538$

取用全數各項，可得 $y=1.3117538$

至真值則為 1.3117539。

此點對於統計上之應用，容在第十目討論之。

（五）反之，吾人如已知 y，即可得一求 x 之方程式，而此乃可以亨納(Horner)氏方法或他法解決之。

例如，吾人僅有四個觀察值，而欲求其中位數，則解算程序

如下。設有 y_0 人工資在 x_0 以下，y_1 人工資在 x_0+h 以下，y_2 人工資在 x_0+2h 以下，並有 y_3 人工資在 x_0+3h 以下，並設總數共有$(2y_m-1)$人，則 x_m（為 x 各值之一，與 y_m 相當）即為中位數。

$$於是\ y_m=y_0+\frac{x_m-x_0}{h}\Delta_0{}^1+\frac{x_m-x_0}{h}\cdot\frac{x_m-x_0-h}{2h}\Delta_0{}^2$$
$$+\frac{x_m-x_0}{h}\cdot\frac{x_m-x_0-h}{2h}\cdot\frac{x_m-x_0-2h}{3h}\Delta_0{}^3,$$

此為求 x_m 之三次方程式。

吾人有隨意以 x_0 為任何一組開始之自由固矣，惟分組之決定，應以中位數恰在插補之中間組為宜。例如，吾人如用上述三次方程式，則包含中位數在內者，厥為 x_0+h 至 x_0+2h 一組。

前在第五章第五節所述求中位數公式之計算，即刪略其第二級以上之相差，並以 x_0 至 x_0+h 一組為含有中位數之組。然則 $y_m=y_0+\frac{x_m-x_0}{h}(y_1-y_0)$，故

$$x_m=x_0+\frac{y_m-y_0}{y_1-y_0}\cdot h.$$

如求衆數，吾人仍當以 y 為達於 x 值之累積數。據吾人所知，衆數乃為最簡單之一種，且就一般而論，只用四個觀察值即足，如此則衆數恰在第二與第三組之間。然後吾人只用公式(κ)之前四項，並求曲線最陡峭時，亦即橫坐標每一單位所佔次數為最多時，x 之值為何。然 D_xy 即為最大，則 $D_x{}^2y$ 必為零無疑。

$$0=D_x{}^2y=\frac{1}{h^2}\Delta_0{}^2+\frac{x-x_0-h}{h^3}\Delta_0{}^3。$$

故　$x=x_0+h-\dfrac{h\Delta_0^2}{\Delta_0^3}=x_0+h+\dfrac{(u_2-u_1)h}{(u_2-u_1)+(u_2-u_3)}$,

在此式中，u_1 代表 y_1-y_0，u_2 代表 y_2-y_1，u_3 代表 y_3-y_2，而 u_1 卽爲 x_0 至 x_0+h 之間之次數，u_2 爲 x_0+h 至 x_0+2h 間之次數，u_3 爲 x_0+2h 至 x_0+3h 間之次數。如乘數在第二組，則 $u_2>u_1$，而 $u_2>u_3$。該一公式，指示吾人，x_0+h 至 x_0+2h 間之組距，必須如何除之，以便求得乘數所在之位置。(請參閱第五章第四節『求乘數法』末段)。

（六）中間相差數——在插補法中，吾人往往只能應用 y 之若干值，而在此若干 y 值中，吾人欲以確定之某項數值之部位，乃在全部之中央，於是僅用公式 (θ) 以求之，有時必不能順利達到吾人之目的。當此之時，於是乃有同等公式產生，以避免偏態情形，此公式卽應用所謂『中間相差數』(central differences) 者也。但此公式並不含有新的原理，實乃由公式(θ)轉變而成。至此爲止所用之相差數，爲別於其他之相差起見，可名之曰『升級相差』(ascending differences)。

其適當之符號，乃如下列：

$x_{-2}=x_0-2h$	y_{-2}				
		$\delta_{-\frac{3}{2}}$			
$x_{-1}=x_0-h$	y_{-1}		δ^2_{-1}		
		$\delta_{-\frac{1}{2}}$		$\delta^3_{-\frac{1}{2}}$	
x_0	y_0		δ^2_0		δ^4_0
		$\delta_{\frac{1}{2}}$		$\delta^3_{+\frac{1}{2}}$	
$x_1=x_0+h$	y_1		δ^2_1		δ^4_1
		$\delta_{\frac{3}{2}}$		$\delta^3_{+\frac{3}{2}}$	
$x_2=x_0+2h$	y_2		δ^2_2		
		$\delta_{\frac{5}{2}}$			
$x_3=x_0+3h$	y_3				

此處 $\delta_{\frac{1}{2}}=y_1-y_0$; $\delta^2{}_0=\delta_{\frac{1}{2}}-\delta_{-\frac{1}{2}}=y_1-2y_0+y_{-1}$; $\delta_0{}^4=y_2-4y_1+6y_0-4y_{-1}+y_{-2}$,其他以此類推。

有一 x 值,同時必有一 y 值,今以 x 值除 x_0 至 x_1 之組距,使成 $p: q$ 之比率,則 $x=x_0+ph=x_1-qh$,而 $p+q=1$。

於是再用替換法,可知下一公式

$$y=py_1+qy_0-\tfrac{1}{6}pq\{(p+1)\delta^2{}_1+(q+1)\delta_0{}^2\}$$

$$+\tfrac{1}{120}pq(p+1)(q+1)\{(p+2)\delta^4{}_1+(q+2)\delta_0{}^4\}\cdots\cdots(\lambda)$$

(此式——以 $q=1-p$——乃爲一有理整數函數而爲 p 之五次方,同時亦爲 q 之五次方)必可以 $(x_{-2}y_{-2})(x_{-1}y_{-1})\cdots\cdots(x_3y_3)$ 六對數値滿足之;但若將含有第四級相差之一項删略,只用由 $(x_{-1}y_{-1})\cdots\cdots$ 至 (x_2y_2) 四項,亦能滿足之。

玆爲舉例釋明應用符號起見,吾人可以 $y_1=\log 23$,已見於本節第三目之對數函數相差表中,並以 $p=.2$,然後計算 $\log 22.2$。

$$\log\ 22.2=.2\ \log\ 23+.8\ \log\ 22$$

$$-\frac{.16}{6}\{1.2 \text{ of } (-.0008217)+1.8 \text{ of } (-.0008923)\}$$

$$+\frac{.16\times1.2\times1.8}{120}\{2.2 \text{ of } (-.000095)+2.8 \text{ of } (-.0000110)\}$$

$$=1.3462837+.0000694-.0000002=1.3463529。$$

而眞值則爲 1.3463530。

此一公式之重要,在並無一般代數函數而欲僅由鄰近數項

插施行補時，愈爲顯然。

（七）拉格郎支氏公式——上論 (ζ) (η) (θ) (κ) 及 (λ) 數則公式，所論情形，必須 x 之觀察值，彼此有相等之距離。至各觀察值距離並不相等時，迄無如此簡單之插補方法。惟拉格郎支 (Lagrange) 氏，曾得出一方程式，係爲第n次方者，並能滿足 (x_0y_0), (x_1y_1)……(x_ny_n) 共有$(n+1)$對數值，不論x各值間之關係若何也，玆請述之如下：

$$y=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$+\cdots\cdots+y_n\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}\cdots\cdots(\mu)$$

式中分子，可爲任何分數，譬如即爲 y_t 之乘數亦可，求此分子，只須乘 $(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$ 各因子而略去 $x-x_t$ 即可；至於分母，則以 x_t 代 x，由分子卽可得之。

理由最爲明顯者，當 $x=x_t$ 時，除 y_t 之乘數而外，其餘各分數，均爲零，蓋 y_t 之乘數，乃爲整一，故 $y=y_t$。

（八）前以公式(θ)表示 y 與 x 相互關係時，所下之假定，現頗有再加考慮之必要。

假如 y 與 x 用一函數法則發生聯結關係，換言之，卽假如對於 x 之所有已知各數值，y 亦各有確定之數值（此爲一假定，無此假定，多數之插補問題，必將失其意義），則 y 可作爲 x 之一函

數而表示之,譬如示如 $y=f(x)$ 者即是。如該函數及其引申函數,係爲連續的,則依麥克老令氏定理,

$$y=f(0)+xf^1(0)+\frac{x^2}{2!}f^2(0)+\frac{x^3}{3!}f^3(0)+\cdots\cdots$$ 以下連續至於無窮。

如 $f^{n+1}(0)$ 及隨後之係數甚小,且 x 永不大,則自第 $n+2$ 項以上之各項,較之以前各項,所值甚微,大可删略不計,故僅以在前之 $n+1$ 項,已能約略決定 y 之值;但依本節第二目附註中之第(1),(2)兩公式所規定,當 Δ^{n+1},Δ^{n+2}……等等均小時,f^{n+1} 乃甚大,Δ^{n+1},Δ^{n+2}……均甚大時,則反是。由此觀之,吾人可得一結論於下:y 與 x 間任何之函數關係,必均可化爲n次元之拋物線方程式(見公式 θ),如高於第 n 級之相差消失時,且如此種高於第 n 級之相差雖未消失但爲甚小時,方程式(θ)終爲表示此函數關係之約略公式。

但如經過所示各點,畫成之曲線,其確度爲連續而變動緩和時,則可證明:臨近各點之第二級相差,必不甚大,蓋縱坐標增加率變動過急,則曲度變化必速也。又如吾人更作一第二曲線,橫坐標仍如前,而以第一級相差,爲其縱坐標,則甚小之第三級相差,即爲第一級相差並無激烈變動之表示,其他以此類推。但如在此點之外,則爲插補法背景之假定,與各次連續相差之減少量,二者之關係,必不易看出。雖然,在反對方面則較爲明顯;假如在任一數字級數中,依試驗所示,知連續各項相差,有趨消滅之傾

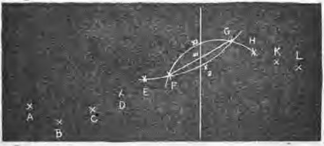
向，則不論任何曲線，凡經過此諸點者，均可由一拋物線方程式，約略表示之。德摩剛(De Morgan)氏，述此結論如下:『假如吾人取定之n點，彼此相距不遠，其橫坐標，為一算術級數，而有甚小——至少須不太大——之公相差，至其縱坐標，彼此相距並不過於懸殊時，則一有$n-1$次方之拋物線，必將與同樣大概形式之任何有規則曲線，大致相合，至少當以在同點與同點間為然也』，布爾氏(Boole)對此之解釋，為:『依慣例，吾人須假定所提數值之一般方程式，為x之一有理且為整數之函數，然後根據所給條件，以決定常數。此一假定之基礎，建築於一「假設連續各次之相差減退甚速」之假定上，而此假設，確已在一切函數(註三)表中證實之矣』。

依照本節第二目附註中公式(1)之規定，當h甚小時，連續各級相差之級數愈高，則連續各級相差對於任何曲線之影響亦愈微，然則吾人以假定更高級相差均消滅為基礎，建立任何函數數值之一級數，自不失為一合法之處置。

假如隨手畫成之曲線，畫時確能經過選就之固定點，且此曲線之曲度，變化儘量求其緩和，則必可得一曲線，與用公式(θ)所求得之曲線，相合甚近。此種曲線，絕似騎腳踏車者，故意經過數點，或避免幾處障礙物時，所過之軌跡。

(九)由以上之研究，可知隨意經過若干點，吾人即可畫成

一調勻而連接之曲線；蓋用拋物線方程式(θ)，當 x 連接變動時，y，$\frac{dy}{dx}$，或$\frac{d^2y}{dx^2}$之各值，絕不致現出驟然之跳動；而且吾人可隨常數之多寡，如數求出若干一次方程（唯一次方程，乃永必有眞值），而方法甚簡單，只須就原來方程式中之 n，即作爲固定點之點數即可。



（第二十二圖）

並設吾人意欲在F與G之間一條已定直線上找出一個點，則僅就F與G而論，將此兩點畫成一條直線，然後找出 x_1 一點固可；如就E，F與G，或就F，G，與H而論，畫成一條拋物線，因而求得 x_2 或 x_3 亦可；即或不然僅就E，F，G及H畫成三次之拋物線，亦無不可。由此三次拋物線上，亦能於近於下點處找出一轉向點（point of inflexion）。此一條線，必約略與騎腳踏車者所經路線相合，假如此騎腳踏車者，由E點起行，騎向臨近之點H，然後總往下及G。但如吾人連D及K兩點合併在內（假如，騎腳踏車

者由D點起行，經過E、F，G及H四點，而達於K點)，則全部曲線，必將稍有改變。同理，吾人如併入各點愈多，則FG之路綫，將不斷微受影響。再者假如吾人併入所有較近各點，能使FG線與一最終位置愈益約略相近，同時如更將較遠各點合併在內，卽能使FG一線與最終位置離開，則吾人可得一結論，斷定此較遠諸點，必不受較近諸點所受之同一數字條件之支配。例如，在生命表(table of survivals)中，年齡在五歲以下者之數字，其分佈情況必不與用年齡較長者之數字所繪成之曲線相合。又如在工資表中，可見工資甚高之數字，與工資低者，並不受同一原因之支配。在他一方面，每次舉行人口普查所得之數字，乃須視以前數十年之數字而定。故如插補一八七六年之英國人口數，僅將一八五一，一八六一，一八七一，一八八一，及一八九一年，或並將一九〇一年之數字合併計算在內，吾人必將得若干不同之數字。此種處置方法，並不足奇，蓋插補一八七六年之人口，果有錯誤，若非連查二十五年之數字，必不能免除也。由此可見，距欲插補之數字，所在之期間，甚遠之諸點，必不若相距甚近之諸點，所生之影響之大，且據試驗所示，此一條件，在上述之方法中，可以完全滿足也。不特此也，在公式(κ)之級數中，連續各項之係數，自第r項(此時$x<x_0+(2r-3)h$)起，卽行逐漸減少，換言之，卽當x在x_0與x_0+h之間時，第一級相差之係數，必開始漸減也。

在此吾人可以注意，此曲線之突升突降，已爲一條件所限制，在此條件之下，有 $n-1$ 次方之曲線，其轉向點必不致超過 $n-3$ 個，蓋$\frac{d^2y}{dx^2}$並無一項之方次，能大於 x^{n-3} 也。

仍就上舉之例而論，由 F 起至 G 止中間諸點，可用 D，E，F，G，H，或用 E，F，G，H，K 五點求得之。此兩條曲線，在 F 與 G 之間，可以治合爲一。臨近 F 之諸點，以用前五點求得爲確實，而在此五點中，F 恰在中央；至接近 G 之點，可用後五點求之，G 亦在其中央。兩條曲線在 F 與 G 間治合爲一之線段，與第一曲線在 F 點相接，與第二曲線接觸於 G 點。故爲簡便起見，此可以用正弦 (sine) 曲線求之。以意度之，英國人事登記總監處所用者，不外乎此也。

雖然，現在所論之統計插補法理論，吾人殊不能謂之有完全滿意之基礎（註四）。蓋一則支配此一理論之原則，並未善爲說明，二則將原理與事實發生關係，必須有方法，而此種方法之數理的研究，並未完全也。然既有較爲密切之方法，如再苦心另求別法，恐亦無此必要，蓋一則除非吾人確知支配此種數字之法則之代數公式外，僅恃插補所得之數字，求其完全精確，事乃絕不可能，二則茲所討論之方法，依經驗所示，已能滿足條件，若再求進一步之精密，亦不過產生些須之修正而已。

（十）公式在數字上應用之例釋

（1）玆有工資以五先令爲一組之工人人數，試估計工資在二四先令以上而不滿二五先令之人數。

		每千人中之工人人數（成年男子）	相差 第一級	第二級	第三級	第四級
工資在10先令以上而不滿	15先令	39				
			257			
	20先令	296		46		
			303		−144	
	25先令	599		−98		151
			205		7	
	30先令	804		−91		18
			114		25	
	35先令	918		−66		
			48			
	40先令	966				

上表中工資在一五先令以下之人數之漸增相差數，可删略之。

用公式（κ），$x_0=20$（先令），$h=5$，$y_0=296$，$\Delta_0^1=303$，$\Delta_0^2=-98$，$\Delta_0^3=7$，$\Delta_0^4=18$。

工資不滿二五先令之組，$y=599$，見上表。

工資在二四先令之處，$x=24$，

$$y=296+\frac{4}{5}\times 303+\frac{4}{5}\cdot\frac{-1}{10}\times(-98)+\frac{4}{5}\left(\frac{-1}{10}\right)\cdot\frac{-6}{15}\times 7+\frac{4}{5}\cdot\frac{-1}{10}\cdot\frac{-6}{15}\cdot\frac{-11}{20}\cdot 18$$

$$=296+242.4+7.84+.224+.3168=547\text{（約略）}.$$

故所求數爲 $599-547=52$。

再在二三先令處，$x=x_0+3$，$y=489$，故工資在二三先令以上而不滿二四先令之人數爲 58。

(2)設一八一三年之進口貨值，因記錄已燬於火，茲請作一估計以補充之。

各年進口貨值如下：

一八一〇	£39,202,000	y_1。
一八一一	26,510,000	y_2。
一八一二	26,163,000	y_3。
一八一三	26,163,000	y_4。
一八一四	33,755,000	y_5。
一八一五	32,987,000	y_6。
一八一六	27,431,000	y_7。

用公式 (η)，僅取 y_3 及 y_5 二數字，並假定第二級相差業已消滅，

$$y_5-2y_4+y_3=0,\text{ 則 } y_4=29,959。$$

用公式 (η)，並加用 y_2 及 y_6 二值，並假定第四級相差業已消滅，

$$y_6+y_2-4(y_5+y_3)+6y_4=0,\text{ 則 } y_4=30,029。$$

依公式 (η)，並加用 y_1 及 y_7 二值，並假定第六級相差業已

消滅，

$$y_7+y_1-6(y_6+y_2)+15(y_5+y_3)-20y_4=0,\text{則}y_4=30,421。$$

觀上各值，第一，第二相距甚近，而第三值，則大不相同，故吾人可即採用 £30,000,000 爲所求值。

（3）在布斯(Boothe)先生之『人民之生活與勞動』第五卷第四十六頁，載有表示各等級年齡分配之圖式數則，用處甚多，茲將其所用數字列下：

年齡	在十歲至八十歲總數一萬人中所佔之比例	各組年齡中每歲平均數
10—15歲	193.5	38.7
15—20歲	880	176
20—25歲	933	188.6
25—35歲	1636	163.6
35—45歲	1201	120.1
45—55歲	830	83
55—65歲	434	43.4
65—80歲	192.5	12,8

布斯先生之圖式，卽用最末一欄畫成，此最末欄之數，卽爲各該年齡分組中點之縱坐標。既將各點求出，然後卽連以一條直線。如此辦理，如就其原來目的而言，確已盡確實之能事，惟吾人

如欲從中間年齡中求出較為詳盡之數字，則布斯氏之方法，可供吾人為研究插補問題之有趣舉例。

年　齡	年齡在 x 以下者在總數一萬人中所佔之比例
$15=x_1$	$193.5=y_1$
$20=x_2$	$1073.5=y_2$
$25=x_3$	$2006.5=y_3$
$35=x_4$	$3642.5=y_4$
$45=x_5$	$4843.5=y_5$
$55=x_6$	$5673.4=y_6$
$65=x_7$	$6107.5=y_7$
$80=x_8$	$6300\quad=y_8$

請用拉格郎支氏公式 (μ)，以求年齡在三十歲以下之人數，至年齡在五十五歲以上之人數，則略去之。如此則 $x=30$。

$$y=193.5\times\frac{10.5(-5)(-15)(-25)}{(-5)(-10)(-20)(-30)(-40)}$$

$$+1073.5\times\frac{15.5(-5)(-15)(-25)}{5(-5)(-15)(-25)(-35)}$$

$$+2006.5\times\frac{15.10(-5)(-15)(-25)}{10.5(-10)(-20)(-30)}$$

$$+3642.5\times\frac{15\cdot10\cdot5(-15)(-25)}{20\cdot15\cdot10(-10)(-20)}$$

$$+4843.5\times\frac{15\cdot10\cdot5(-5)(-25)}{30\cdot25\cdot20\cdot10(-10)}$$

$$+5673.5\times\frac{15\cdot10\cdot5(-5)(-15)}{40\cdot35\cdot30\cdot20\cdot10}=2879。$$

此數據布斯先生圖式之計算，乃爲 2824.5，而布斯氏所用者，僅爲 y_3 及 y_4 二值。

在此公式中，如僅用y_2,y_3,y_4,y_5四值，則y據計算乃爲2869。

以上所用之拉格郎支氏公式，意與假定第六級相差消滅而年齡分佈甚爲均勻相等。茲以三十歲之 y 值爲 a，四十歲之 y 值爲 b，五十歲之 y 值爲 c。

然後用 y_1，y_2，y_3，a，y_4，b，y_5，依公式(β)或公式(η)，則得

$y_1-6y_2+15y_3-20a+15y_4-6b+y_5=0$，

且依同理，

$$y_2-6y_3+15a-20y_4+15b-6y_5+c=0$$

又
$$y_3-6a+15y_4-20b+15y_5-6c+yb=0$$

由此直進而計算之，則 $a=2879$ 如上。此一方法，應用之時，較用拉格郎支氏公式，計算尤爲簡單。

（4）爲例釋求中位數及乘數方法起見，吾人可用已於第四章第四節第十三表所用之數字，茲列表於下：

工　資	x	y	相	差		
在$ .25 以上	−1	0				
			317			
在 .75 以上	0	317		1157		
			1472		−1332	
在 1.25 以上	1	1789		−175		+15
			1279		−152	
在 1.75 以上	2	3086		−327		
			970		−137	
在 2.25 以上	3	4056		−464		
			506			
在 2.75 以上	4	4562				

工人總數爲 5123，爲求中位數，以 $y=2562$，並用自 $x=0$ 至 $x=4$ 之各項。如求至第四級相差爲止時，則

$$2562=317+1472x-\tfrac{1}{2}\cdot175x(x-1)-\tfrac{1}{6}\cdot152x(x-1)(x-2)$$
$$+\tfrac{1}{24}\cdot15x(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\therefore 61488=7608+36122x-111x^2-698x^3+15x^4$$

解此方程式，如用亨納(Horner)氏解法，得 $x=1.5715$。

故中位數乃在 $\$.75+1.5715\times.50=\$1.536$。

此外另有一法，乃假設 x 爲 y 之函數（註五），如用拉格郎支公式，則

$$x=\frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)}x_0+++$$

吾人如僅用上列一表之四項，則得

$$x=\frac{(2562-1789)(2562-3086)(2562-4056)}{-1472\times-2769\times-3739}(\times0)+++$$

由此得 $x=1\cdot5624$，於是中位數爲 $1\cdot531$。

此法適用計算機計算之。

爲求乘數，請用自 $x=-1$ 至 $x=-2$ 之各項。

本節第六目公式之相差符號表中，如用以求第二及第三級相差，此處之第二相差爲 1157，第三相差爲 -1332

所求值爲 $\$.75+\frac{1157}{1332}\times.50=\$1.18$。

其實其他各種方法，無不可以應用，惟結果則略有不同。事

實上，上表分組既如是之寬，而更高級相差並不漸趨於零，求出之總數，自不能十分精確。

此一方法，應用之處甚多，如人口數，結婚率，出生率，死亡率及其他等等，在何期間，其增加率爲最速，及在何年年齡，死亡之機率增加最烈，種種問題，均可應用之（註六）。

（十一）當一種原始調查報告，尙須加以修正時，例如在人口普查所得原始材料中，以決定依年齡之人口分佈時，乃又有一類極重要之插補問題焉。

現先就經過極多點之附近，但不必經過任何一點，以繪一條匀曲線之問題而論。在此之時，必須有一假定，此假定一則假設所得報告甚少不敷獨立應用，或其確度不足使人完全信賴，二則假設據此種報告所示，年齡確有有規則之分佈，而此即調查報告有表現之原來使命者也。

（1）第一法，須假定極大羣類中之平均數均爲確實。然後採用上文所論之任一方法，以插補此中平均數。

（2）第二法在討論修匀曲時（見前第七章），業已用過。茲可重述如下：取二點，或三點，或四……十點之連續羣類，依一定之橫坐標，再三由不同之縱坐標起書之。然後求每一羣類之重心；換言之，即立定一縱坐標，使與在此羣類之外部縱坐標之橫坐標兩端之中間一點上之羣類各縱坐標之平均數相等。經過求得之

各點，畫一條線。則吾人可以察見，此一條線必能與已定之條件相合。此一方法之例釋，已列如在第七章第一節之第六圖。

（3）另外一法，乃須將原始數字之曲線，加以修勻，直至第四級，或第五級，或更高級相差消失時為止；然後再應用普通插補公式。

例如，援用本章本節第十目之第一例，可重作一表於下：

工　資 在十五先令以上	修勻後之人數	修正相差數 第一級	第二級	第三級
至 20 先令為止	296			
		$303+a$		
至 25 先令為止	$599+a$		$-98-a+b$	
		$205+b$		$7-3b$
至 30 先令為止	$804+a+b$		$-91-a-2b$	
		$114-a-b$		$25+2a+3b$
至 35 先令為止	918		$-66+a+b$	
		48		
至 40 先令為止	966			

吾人如以 $b=2\frac{1}{3}$，則 $a=-16$，而第三級相差乃消滅，於是 $\Delta_0^1=287$，$\Delta_0^2=-79\frac{2}{3}$，$\Delta_0^3=\Delta_0^4=0$；當 $x=25$ 時，則 $y=583$，又當 $x=24$ 時，則

$$y=296+\frac{4}{5}\cdot 287-\frac{2}{25}\cdot\left(-79\frac{2}{3}\right)=531.97$$

然則工資在二十四先令而不滿二十五先令者之人數，現經求得為 51，並非 52。

任何原始數字，均可加以修正。

吾人現時尚須多解一方程式，以便完成自工資二十先令至三十先令之表格。

當 $x=23$ 時，$y=296+\frac{3}{5}\cdot287+\frac{3}{25}\cdot79\frac{2}{3}$。此值與 y 之值之差額，在 $x=24$ 時，爲 $\frac{1}{5}\cdot287-\frac{1}{25}\cdot79\frac{2}{3}=54\cdot21$。

於是吾人乃得出下列一表，在此表中，斜體字之數字，乃舊已算出者，至用正體字之數字，則爲在第三級相差爲零之假定下加入者。

工資	人數	相差數		
		第一級	第二級	第三級
至 20 先令爲止	296	63.75	...	...
至 21 先令爲止	360	60.57	3.18	0
至 22 先令爲止	420	57.39	3.18	0
至 23 先令爲止	478	54.21	3.18	0
至 24 先令爲止	532	51.03	3.18	0
至 25 先令爲止	583	47.85	3.18	0
至 26 先令爲止	631	44.67	3.18	0
至 27 先令爲止	676	41.49	3.18	0
至 28 先令爲止	717	38.31	3.18	0
至 29 先令爲止	755	35.13	3.18'	...
至 30 先令爲止	790		...	

吾人計算第二級相差，如果更爲確切，則上表最末一數，自應爲 $804+a+b=790\frac{1}{3}$。

在此法之下，一經發現其重要差(Signipicant differences)，則許多數字，卽可隨手找出，但在原來資料，已甚確切時，此法亦能作普遍之應用。

(4)此外另有一法，所用數理較深，本應在將差誤律 (the Law of Error) 研究之後，再行討論，方爲適宜；惟此時不妨先作一簡短之解釋，順便介紹一有用之公式。

假設有相連之點五個：$(-2,y_{-2})$，$(-1,y_{-1})$$(0,y)$，$(1,y_1)$，$(2,y_2)$，均爲已知。

經過此五點，可畫成一具有四次方之拋物線，但此線卻有兩個轉向點。如臨近所有五點，可畫成三次方之拋物線，爲數極多，各線並無轉向點，但亦能滿足普通之插補法之條件。

茲借用最小二乘法(註七)之一原理，假設拋物線

$$y=a+bx+cx^2+dx^3$$

之係數，選定時足使此數量

$$\Sigma(a+bx+cx^2+dx^3)^2$$

(式中總和號一直施用於 x 與 y 之五年數值)成爲最小，則如此求得之拋物線，卽爲最適於其目的。

關於此點，其必不可少之數理的研究，吾人可就達爾文(Darwin) 教授之『難免錯誤之度量』(On Fallible Measures)(註八)一文，加以探討，蓋上一方法，卽根據該文而來也。

年次	英國人口平均每人貨播進口之小麥數量（磅）	相差數 第一級	第二級	第三級	第四級	修勻後數字
一八九〇	226					
		18				
一八九一	244		−17			
		1		19		
一八九二	245		2		−16	$245+\frac{3}{35}$ of $16=246\frac{1}{2}$
		3		3		
一八九三	248		5		13	$248-\frac{3}{35}$ of $13=247$
		8		16		
一八九四	256		21		−94	$256+\frac{3}{35}$ of $94=264$
		29		−78		
一八九五	285		−57		134	$285-\frac{3}{35}$ of $134=263\frac{1}{2}$
		−28		56		
一八九六	257		−1		−16	$257+\frac{3}{35}$ of $16=258\frac{1}{2}$
		−29		40		
一八九七	228		39			
		+10				
一八九八	238					

每年年底之小麥存貨，年有不同，且無記錄可查，消費量之統計，並無確實可言。故此列數字，應以尙待修正，並須剷去過大之出入者視之，方爲合理。

（5）除此而外，尙有一較爲普遍之插補問題，乃須求出一代數公式，與前時所用，目的在表現全數列或全羣類之拋物線方程式，迥有不同。關於此公式，本書第二編第五章，曾有一簡短之介紹焉。

附註——公式（λ）乃愛爲來特（Everett）教授所建立，通用名詞及公式之證明，均爲彼之貢獻（見理論與實用數學季刊，一九〇一年，第一百二十八號，公式G）。

茲覓得其證明如次：