算學小叢書

算學導論

A. N. Whitehead 著

徐 韞 知 譯

商務印書館發行

算學小叢書

算學導論

A. N. Whitehead 著

徐韞知 譯

印書館發行

✤F一〇一四 周

國二十四年七月初版
國二十七年四月三版

算學小叢書 算學導論 一冊 (58738)

Introduction to Mathematics

每冊實價國幣肆角
外埠酌加運費匯費

原著者 A. N. Whitehead
譯述者 徐韞知
發行人 王雲五 長沙南正路
印刷所 商務印書館 長沙南正路
發行所 商務印書館 各埠

(本書校對者鄭光昭)

代序　研究算學應有的注意

在我國,作算學初步研究的人每會遇到兩層困難:第一,無論教科書或參考書,十分完善的都比較缺乏.或者取材過於簡單,或者說理過於艱深,兼之算學書的內容照例趨重專門化,以致重要的觀念反被蒙蔽.其次,除有特殊的指導者外,就一般說,對算學整個學問缺乏明確的認識,所以他們研究時程序零亂,用力大而收效微.這本書的貢獻就在,幫助讀者對算學能獲得一個明確的認識.原著者懷悌海 (A. N. Whitehead) 博士是英國有數的算學家和哲學家,主講劍橋大學有年,尤其對算理邏輯 (Mathematical logic) 有過不少的成就.這本書係他爲湯姆森 (J. Arthur Thomson) 教授等主編的"家庭大學現代知識文庫" (Home University Library of Modern Knowledge) 作的;並且經過六七度修正和再版,算得一部值得讀的名著.

我現在願意介紹的還不僅此.在原書的末尾,他提示出研究算學的程序以及重要的參考書.爲便利我們的讀者

起見,除他所提示的參考書,我再介紹幾本中文的算學的教科書和參考書,以供讀者選擇.

第一步研究的題目,除掉預先具備一點算術知識而外,應該是"初等幾何學"和"初等代數學".這兩科的研究應該短一點,只要認識所有必需的觀念就足夠了."代數學"方面應該學會"圖解"(The graphical representation)方法,若是實際上"初等解析幾何學"的觀念也就融會貫通.次一對研究主題應該是"初等三角學"和直線與圓的"解析幾何學"(卽"位標幾何學").學習後者,無妨時間短些;因爲它實在包容在代數學裏面.然後,讀者預備來研究"圓錐曲線",對於幾何的圓錐曲線儘可只費一點時間學習,而大部分時間應注意解析的圓錐曲線.但是在所有這些研究中間,應特別注意,除掉例證基本的觀念所必需者外,不必過於繁複.

現在.照同樣的方式進一步繼續研究"微分學"和"積分學".優良的教師最好在"代數學"和"位標幾何"的講授內,就用特例說明這兩個題目.此外,還應該讀一本簡短的關於"三度空間幾何學"(Three dimensional geometry)的書籍.

算學這一步初等的研究對於不以算學爲專科的讀者們當然是恰到好處;而對於具充分的算學研究興趣的人,這也是不可少的基本的知識. 然後他再準備進一步將研究範圍推廣,但是却不應奢望全部都能夠把握.這門科學已經發展到這樣廣大精深的地步, 恐怕當世的算學家就無一個能夠敢存這種奢望.

說到初步研究完畢以後應讀的重要書籍, 我們現在可以介紹幾種: Cremona 的 Pure Geometry (英譯本, 牛津 Clarendon Press 出版), Hobson 的 Treatise on Trigonometry (商務印書館有過譯本, 不過書名變更), Chrystal 的 Treatise on Algebra (兩卷), Salmon 的 Conic Sections 和 Analytical Geometry of Three dimensions, Lamb 的 Differential Calculus, Wilson 的 Advanced Calculus, 以及 Osborne 的 Differential and Integral Calculus. 餘外, 微分方程的書籍初學最好讀 Cohen 的 Differential Equations, 程度較深可讀馬君武先生譯 Kiepert 原著的 Differential-Gleichungen (商務印書館出版), 而 Forsyth 的 A Treatise on Differential Equations 也值得一讀. 讀者當然無須本本都用相

等的精神閱讀，儘可以就個人的興趣選讀一種或數種．然後再就自己的特殊興趣，選習幾本程度更深的書籍，而對某一門或某幾門算學作精深的研究．如果他的興趣在"解析學"，他就應該注意選讀關於分數原理變數原理以及變分原理的書籍，如 Pierpont, Hobson, Forsyth 等人的著作；而商務大學叢書熊慶來先生所著高等算學分析和這本書所取材的 Goursat 原著 Mathematical Analysis (英譯本凡二卷) 就是最基本的讀物．如果他專門於"幾何學"，那麼 Cremona, Salmon 等人的書就應該詳加研習，而 Eisenhart 的 Differential Geometry 也是一本必需的讀物．餘如 Weber 的算學叢書中譯本 (商務出版)，胡濬濟先生的整數論，圓正造的羣論 (商務有譯本出版)，Panton and Burnsid 的方程式論 (商務有譯本出版)，Bôcher 的 Higher Algebra，只要讀者對"高等代數學"有興趣，這些都是值得注意的，當然，讀者研究的時候，不必泥守現在的成法；而且現在所提述的仍不過是各種算學比較初等的書籍，掛一漏萬自然難免，這就要看讀者善爲活用了．

徐韞知 於南京旅次淞滬坝後三週日

目　次

算學導論

第一章

算學的抽象性質

算學的研究開始往往易致失望.由這門科學重要的應用,精密的觀念,以及峻嚴的方法等方面,在在都使我們希望對整個學問有一綫南捷徑的導論之必要.我們熟知,得算學的幫助,既可以權衡天空中羣星的輕重,亦可以測度水滴內盈兆分子的數目.可是這門偉大學問有時卻如哈孟雷特(Hamlet)的父親的精靈,(見莎士比亞樂府)同樣游移飄忽,"倏爾在此,倏爾在彼,倏爾不知所終",有非我們理智力所能捉摸者;其實並非言之過甚,以這樣精靈神通之廣大,用我們如此簡陋的方法,自難免有猶甚於此的迷惘.其最顯著者,卽在初等算學書內,有許多平常的結果且不免流露出類此的情形.

每當學校中講授這門科學的基本觀念時候,多不能拋脫向來專用以應付特殊問題的專門方式;所以會造成這

門科學名不符實的結果. 不幸的初學遂不免頭緒紛紜, 而莫衷一是. 當然, 專門的技巧是寶貴的理智活動首要的必需的因素: 如果我們一定認拼讀單字爲必要, 而又弄不清楚每個文字的形式, 那就不能夠欣賞彌爾敦 (Milton) 的韻節, 或雪萊 (Shelley) 的熱情. 從這方面說, 學問是無王者之路的. 但是, 如果只着眼專門的方式, 撇開普遍的觀念, 錯誤當然相等. 這樣, 就要走到書呆子的路上.

本書各章的目的並無教授算學的意思, 只不過使讀者從最初學習起, 得以明瞭這門科學所研究的對象, 以及它何以必定是應用於自然現象方面的精確思考的根本. 完全爲舉例起見, 各章中提到詳細的推論; 同時爲注意使一般理解更爲普遍化, 卽使間有讀者不懂的專門方法或符號, 也僅限於供說明之用.

大多數人第一次都是由"算術"和"算學"發生關係. 平常用"二和二成四"這個觀念代表各人都聽得到的一個簡單的"算學命題" (Mathematical proposition). 所以, 如果可能發現這門科學最顯明的特徵, 那麼"算術"就是一個很好的研究題目. 現在, 我們首先看到關於"算術"的事實是: 它適用於各種事物, 於聲, 於味; 上至天, 下至地,

以至心的觀念，體的骨骼，都適用到．事物的性質是完全無關的；在所有事物中間，二和二成四總是眞實的．這樣，我們可以將"算學"主要的特徵寫做："將所有的事物看成單純的事物，而不管和這些事物有關的特別的情緒或感覺，"算學"就是硏究可以適用於這類事物的性質和觀念的學問"．這就是"算學"被人稱做"抽象的科學"的緣故．

我們所獲得的這個結果是值得注意的．有人自然會以爲，抽象的科學因爲缺少關於各種事物實際方面的思考，對於人生就不能說有很大的重要．史威甫特 (Swift) 在所著革里維遊記 (Gulliver's voyage to Laputa) 上，關於此點就表現出兩種心思．他把拉蒲達 (Laputa) 這個小國家的算學家描寫成呆戇無用的空想者，須得用驚堂木纔打得斷他們的注意．還有，算學的成衣匠用一個象限儀來量他的身長，得數後再用一個直尺和一個圓規化成其他的長短，結果製出一套極不配身的衣服來．在另一方面，拉蒲達的算學家因爲他們有空氣中浮遊磁島的新奇發明，遂得統治這個地方並且保持着他們至高無上的地位．其實，史威甫特當時最不應該對數學家說風涼話的．正在這

個時候，形成近代文化的偉大力量之一的牛頓 (Newton) 格致原理 (Principia) 剛好寫就. 所以，史威甫特直不啻對地震說風涼話一樣.

但是，僅替算學的功績開個清單是不夠表現得出它的重要的. 現在應該先費一點工夫，從根本上來探求，算學既然極其抽象，何以總一定是思想方面最重要題目之一的理由. 最先，何以事物結局的規律的解釋總必定變成與"算學"有關，讓我們將這一點弄個明白.

現在試注意所有事變相互間的關係：看見電光的時候，我們就聽得雷聲；聽得風聲的時候，我們就看到海中的波瀾；在肅殺的秋天，就會有滿徑的落葉. 隨處都有規律在支配着，所以當已經看到某些情形的時候，我們可以預料其他情形的發現. 觀察這類相互間的關係，並且用一種冷靜頭腦來證明這個變化不斷的世界間的事變只不過是少數叫做"定律"(Laws) 的普遍關係的例子，這就促成科學的進步. 科學研究的目的是：發現變中的常，和特別中的普遍. 用科學的眼光來說，一個蘋果落地，一個行星繞日運動，以及大氣和地球相結都一律看成是引力定律的例子. 將最複雜莫測的情形分析成固定不移的定的例子，具

有這個可能的就是近代的研究.

爲要完全實現這個科學的理想，當然需要有若干個定律;現在先就這類定律研究一下.我們對周圍世界上所有特別事件的知識係由感覺獲得的:有的目視，有的耳聽，有的口嘗,有的鼻嗅,有的推撞,有的磨擦,有時感到寒燠,有時感到疼痛.這些正都是我們親身的感覺:我的牙痛不能作你的牙痛,同時我的眼界不必是你的眼界.但是我們卻將這些感覺的本原歸結到形成世界外表的事物中間的關係上面.所以,牙醫生拔去的只是病牙,並非牙痛.並且不僅這樣,我們也企圖將這個世界設想成一組聯貫的事物,這組事物形成人類所有知識的基礎.這種事物境界並非在我的感覺中是這個,在你的感覺中是那個;而其實兩個人卻共同一個.在牙醫生和病人雙方,總不外是同一個病牙.還有,我們所聞所觸和所見也其實是同一個世界.

所以,由此就容易明瞭,我們敍述這些外物間的關係時,實不應僅憑某些特殊的感覺，甚至還不應僅憑某些特殊人物的感覺.外物境界所有事變經過都能能適合的定律應該竭力用一種不偏不倚的包羅萬象的方式來敍述；無論盲聾,無論天才或凡庸,所接觸到的這種定則總應該是

一律的.

但是到我們既經拋棄我們的直接感覺時，所遺留的具備有明顯性確定性和普遍性的最有用的部分就構成我們對事物的抽象形體性質的一般觀念；實卽是上述抽象的算學的觀念. 由是，逐漸發揮這種意義，使人們漸傾向到宇宙性質的說明—種算學說明的探求，因為由這個方式，只能形成事物因果共同的一個普遍的觀念，撇開特殊人物或特殊感覺的關涉. 舉個例來說，用膳時有人拏 "一個蘋果" 作題目："在我眼裏，在你手裏，以及在他的鼻裏和口裏是甚麼東西?" 這樣的答案當然是相同的. 但是到最後的解決，科學係用 "分子" (Molecules) 的位置和運動，來敍述一個蘋果；這一個敍述不管我你和他，同時也無分視聽嗅和味. 所以，算學的觀念因為是抽象的，正就是這一種事物因果科學敍述所需的東西.

這一點每因為一般人眼界過狹，以致多數誤解. 畢達哥拉士 (Pythagoras) 在說 "數" (Number) 是一切事物的本源的時候，業已暗示到一點. 直到近代，一般相信一切事物最終的解釋要從牛頓力學中尋求；這個信仰正不啻說：一切的科學日臻完善，它所有的觀念也就隨同日漸算學化.

第二章

變數

當第一個人，大概是一個希臘人，無須特別指明某種某個特殊的事物，即證明關於同類"某幾個"(Some)事物或異類"任何個"(Any)事物的命題時，這就是"算學"(Mathematics)成為科學之始．希臘人最初提到的這些命題是關於幾何學方面的；因此，"幾何學"(Geometry)是聰明的希臘人的算學的學問．自從"幾何學"產生以後，中間希臘的算學家雖然隱約的透露過一點"代數學"的觀念；但是"代數學"(Algebra)眞正的開始卻還在幾百年之後．

因為用"文字"(Letters)來代替"算術"(Arithmetic)中的數目，"代數學"中間就容納了"任何個"(Any)和"某幾個"(Some)兩個觀念．於是，根據 $2+3=3+2$，在"代數學"中我們更使其普遍化，改為：如果 x 和 y 代表

任何兩個數目，那麼 $x+y=y+x$. 再者，代替說 $3>2$；我們推廣後就說，如果 x 為"任何"數目，就有"某個"數目（或，"某幾個"數目）y，可以辦到 $y>x$. 我們剛纔或許注意到，後邊這個假設——因為嚴格說，究竟是一個假設——對於"哲學"和"算學"兩方面都是非常重要的；因為賴有這個假設，我們的腦海中得容納進"無限"(Infinity) 的觀念. 或許有人說，利用文字代替自然數的方式既已拋棄，因為同時暗示算學上用文字代"任何個"數和"某幾個"數兩個觀念有種種方便之故，纔會需要容納進"阿剌伯數碼"(Arabic numerals). 羅馬人一定會限制過年代的紀數，比方他們記為 $MDCCCCX$ 的樣子，我們就寫做 1910，留下文字作別個用途.不過，這段言論只是一種揣測之辭. 到"代數學"產生以後，牛頓和萊布尼茨 (Leibniz) 又有"微分學"(Differential calculus) 的發明，再後，關於這些觀念的算學研究也卻暫告停頓不進；直到最近幾年，算學界認識清楚"任何個"和"某幾個"兩個基本觀念與算學的重要關係，結果纔重新開拓出最近算學各種研究的境界.

為使讀者對這兩個基本觀念的實在情形正確了解起

見,我們現在先做幾個代數題來說明:

(1) 對"任何"數 x, $x+2=2+x$;

(2) 對"某個"數 x, $x+2=3$;

(3) 對"某幾個"數 x, $x+2>3$.

第一點,應注意如此地所用的"某幾個"的意義包含的可能程度. 因為 $x+2=2+x$ 係無論 x 為何種數都適用,當然"某個"數 x 也適用. 這樣照此地的用法,"某幾個"卻包含任何個的意義. 其次,在第二個例中, $x+2=3$ 實際只有一個數 x, 即只有1這個數. 這樣,"某幾個"或者只是一個數. 但是在第三個例中,凡大於1的數 x, 都可以辦到 $x+2>3$. 因此,可作這個例中"某幾個"的答案的數就有無限個. 所以"某幾個"可算是"任何個"和"唯一個"二者中間的東西,不過這兩種極端情形也包括在內.

照理,(2)和(3)兩個題目改換成如下的問題:

(2′) 要甚麼數 x, 可以 $x+2=3$;

(3′) 要甚麼數 x, 可以 $x+2>3$.

就(2′)來說, $x+2=3$ 是一個"方程式"(Equation), 並且容易得到它的解答為 $x=3-2=1$ 在我們提出"方程

式" $x+2=3$ 本文所含的問題時, x 就叫做 "未知數" (Unknown). 解答 "方程式" 的目的就是決定 "未知數". "方程式" 在 "算學" 上極關重要, 表面上好像 (2′) 題較原來的 (2) 題例證一個更爲透澈和根本的觀念; 究其實, 這種見解完全錯誤. 用 "某幾個" 或 "任何個" 時遇到的未定 "變數" (Variable) 的觀念其實纔是 "算學" 上最重要的; 一個 "方程式" 不過需要能有簡捷的解答, 所以一個 "方程式" 內的 "未知數" 的觀念雖屬重要, 用途究竟略遜一籌. 初等代數學教科書中每在最前即提到 "方程式" 的解法, 這就是使內容難免瑣細庸俗的原因之一. 還有, "不等式" (Inequality) (3′) 來和原題 (3) 比較, 解答時也應有與此相同的注意.

但是大多數值得注意的公式, 特別是 "某幾個" 的觀念在場時候, 都含有一個以上的 "變數". 例如, 設想每對滿足 $x+y=1$ 的數 x 和 y (分數或整數), 意思中就含有兩個 "相關變數" x 和 y 的觀念. 兩個變數都在場時, 那就有同樣的兩種解釋. 例如, (1) 無論 "任何" 一對數, x 和 y, $x+y=y+x$; 和 (2) 有 "某幾" 對數, x 和 y, $x+y=1$.

第二個解釋提到全部以某種固定關係——在現在的例

中,係以 $x+y=1$ 的關係——來維繫的各對數的"集合"(Aggregate) 觀念. 第一種的公式有一個用途,無論"任何"一對數目都正確不誤;就是,應用它們,能夠將第二種的公式形成無窮的等值形式. 例如,"關係式"(Relation) $x+y=1$ 係和

$$y+x=1, (x-y)+2y=1, 6x+6y=6, \cdots\cdots,$$

等"關係式"等值是. 所以,一個熟練的算學家採用等值的"關係式",每能獲到很大的便利.

當一對數目滿足某個固定的"關係式"時,如果已知其一,並不定就能判定另一個數. 例如,當 x 和 y 滿足 $y^2=x$ 時,如果 $x=4$, y 可為 ± 2; 這就是 x 凡為正"值"(Value) 時, y 都有正負兩個值. 還有,在 $x+y>1$ 關係式內,當 x 或 y 為已知,餘下一個的值仍有無窮個.

其次,還有其他要點值得注意. 就 $x+y=1$ 的"關係式"說,如果限制用正整或正分數,那麼當 x 或 y 大於 1 時,另一個能夠滿足這個"關係式"的值就不會是正. 因此,x 的"關係式"的"域"(Field) 就限於小於 1 的各數;同理,y 的"關係式"的"域"亦然. 又如只就整數,正或負,來說,並設 $y^2=x$ 為每對這類數值所能滿足

的"關係式". 那麼, 無論使 y 爲怎樣的整數值, x 總能取得一個對應的整數值. 所以, y 的"域"在這些正負整數中間是無限制的. 但是 x 的"域"卻有兩種限制. 第一層, x 必須爲正; 第二層, 因爲 y 須是整數, x 必須爲一"完全平方"(Perfect square). 由是, x 的"域"卻限於 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \cdots\cdots$ 等, 即 $1, 4, 9, 16, \cdots\cdots$ 等, 這組整數.

爲便利起見, 我們可用下面所作的"圖式"(Diagram), 來研究各對數值間的一個關係的一般性質:

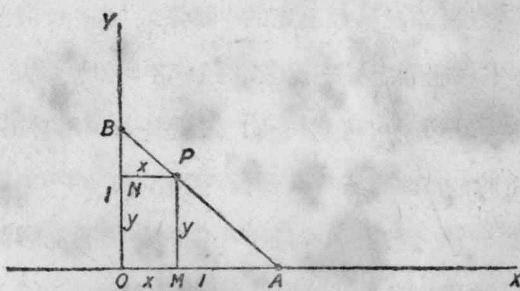

圖 1

作兩直線 OX 和 OY 互相垂直; 設沿 OX 截取 x 單位(任意尺度)的長度代表任意數 x, 沿 OY 截取 y 單位(任意尺度)的長度代表任意數 y. 若是, 如 OM 沿 OX 的長度爲 x 單位, 而 ON 沿 OY 的長度爲 y 單位; 完

成平行四邊形 $OMPN$, 我們得到對應 x 和 y 這對數值的一點 P. 對應每個點, 就有一對數值; 同時對應每對數值, 就有一點. 這對數值就叫做這個點的"位標" (Coordinates). 由是, "位標" 滿足某個固定關係的點都可以很便當的表出, 如果它們全體都在一條線上, 就畫一條直線, 如果它們是一個面積內所有的點, 就作一個面積. 如果這個關係能夠用一個 "方程式" 如 $x+y=1$, 或 $y^2=x$ 來表示, 那麼前者各點係在一直線上, 而後者各點係在一曲線上. 例如, 僅就正數說, "位標" 滿足 $x+y=1$ 的各點卽在第一圖的直線 AB 上, 在此 $OA=1$ 及 $OB=1$. 這樣, 這個直線線段 AB 就是限於正數的這個關係的性質的圖形表示.

還有許多二 "變數" 中間有一個關係的例子, 最顯著的如, "溫度" 固定時, 一定質量的某種氣體——例如空氣, 煤氣或蒸汽是——"容積" 和 "壓力" 的消長. 設 v 爲其容積內所有的立方呎數, p 爲每平方吋壓力的磅重. 那麼, 表示 p 和 v 兩個變數中間關係的定律, 所謂 "波以耳定律" (Boyle's law), 卽爲: pv 相乘積是一個 "常數" (Constant), 通常假設溫度不變. 例如, 設氣體的分量和

其餘的環境都能夠使 $pv=1$ (方程式右端常數值正確與否無多大關係).

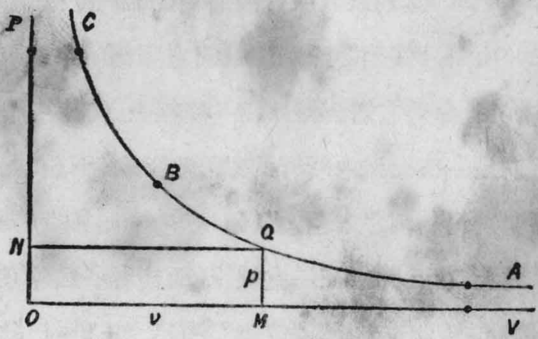

圖 2

於是, 在第二圖內, 我們取二直線 OV 和 OP, 互成直角; 另沿 OV 作 OM 代表 v 單位的"容積", 又沿 OP 作 ON 代表 p 單位的"壓力". 由是, 因完成平行四邊形 $MONQ$ 得到的 Q 點, 就表容積爲 v 立方呎和壓力每平方吋爲 p 磅重的氣體狀態. 如果所說的這部分氣體的環境卽爲 $pv=1$, 那麼所有對應這部分氣體的變化的這些點 Q 就必定在曲線 ABC 上; 這個直線包括所有 p 和 v 爲正, 而 $pv=1$ 的各點. 這樣, 這條曲線就是"容積"和壓力間所生關係的一個圖形表示. 壓力極大時, 對

應點 Q 一定隣近 C, 甚或在 C 以外曲線未畫出的部分上面; 同時, 容積將成為最小的. 容積大時 Q 將靠近 A, 或超過 A 點以外; 同時壓力就變得很小. 對應某個規定容積, 壓力等於若干, 一個工程家或物理學家大抵都需要知道的. 在此, 我們得到 v 為已知數時定 "未知數 p" 的例子. 不過, 這只算是在特別情形以內. 要就普通方面來研究氣體的性質和變化, 應該先認識整個 ABC 曲線一般的形式, 以及其一般的性質. 換句話說, 滿足 $pv=1$ 關係式的這對 "變數" 的觀念纔是眞正基本的觀念. 這個例子解釋明白 "變數" 的觀念在算學應用和理論兩方面的重要性.

第三章

應用的方法

滿足一個關係的這種"變數"觀念在算學應用方面的情形很值得研究一下，並且我們對此點稍微用點工夫，卽無異對整個題目的解釋有極大的幫助.

先就最簡單的例子來說：

假設每立方呎造屋工價爲 1 先令，而 20 先令爲 1 鎊. 那麽，當房屋從動工到完成，在所有複雜的環境，以及房主建築師工人營造匠旁觀者各人不同的感覺和情緒中間，房主所出的造價和立方容積二者間顯然有個固定的關係；卽，如果 x 爲立方呎數，£y 爲造價，這個關係就是 $20y=x$. 無論何人營造何種房屋，x 和 y 的這個關係料想總是對的. 而且，在此並沒有假設房屋的容積和造價係由任何特殊眼光，或經任何特殊的人物所估定. 所有的事實都係按照一種抽象的普遍的方式來作根據，完全與房

主在應付工價時的特殊心境無關.

現在,我們再將這段話說得詳細一點. 一所房屋的營造是一組錯綜複雜的環境. 如果不是在普遍的事物因果中,能見到有一組形成造房屋的一個特別情形的事實, 那就不能馬上應用前述的關係,或者試驗前述的關係. 簡單說,當我們看見一所房屋的時候, 我們應該知道這所房屋, 並且應該認識營造這所房屋的經過. 於是,在這些經過中間,就有性質和其餘不同的觀念出現, 就是, 造價和立方容積兩個要素應該能夠確定;並且當兩個都確定時, 如果前述的關係確實, 他們就滿足這個一般的公式

$$20y = x.$$

但是這個關係確實嗎?有過營造經驗的人將要感到, 我們在此所定的工價已嫌過高. 只有一種華麗的房屋,建造時纔會用到這個價錢. 這一點又是應該說明的地方. 在我們做和公式 $20y=x$ 有關的算學的計算時候, 前述的關係無論正誤都不成問題. 實在, 歸到 x 和 y, 一個是立方呎數而一個是鎊數的意義究竟如何是無關係的. 在算學的工作上, 我們其實只注意 x 和 y 一對變數中間這個關係的性質. 如果我們將 y 的意思解作漁人的數目, 而 x 解作

獲魚的數目，前述的關係就是平均每個漁人獲二十尾魚；我們的結果仍舊同樣適用. 算學的"確定性"(Certainity)只表現在 x 和 y 這對變數間的關係 $20y=x$ 的性質方面. 至於，實在房屋的造價，無論如何，是沒有算學的確定性的. 這類定律既不大眞實，所生結果自不大正確. 事實上，這或者是無意的錯誤.

現在，所有一切無疑表現得很顯明的. 但是，實在就比較複雜的例證而言，普通以爲旣經做過相當時間而且正確的算學計算，遂認定這個結果應用到自然界方面絕對確實，這種錯誤是一般難免的. 沒有證明的結論不能會比所出發的假設更見確實. 關於自然界的過程一切的算學計算應該從某個假定的自然律，譬如前邊所說造房屋假定的造價律出發. 因此，無論我們曾經將這種必然的經過推算如何正確，通常仍不免懷疑——這個定律正確嗎?如果定律告訴一個精密的結果，其實差不多就不會極其精確；甚至結果雖然計算時竭力求其精密，事實上却並不是這樣的情形. 可是，當其時如果我們沒有能夠評判理想的精密的技巧，那麽我們的定律雖不精密，也儘夠有用了.

我們現在要轉過來說一個實在的例子，即和牛頓以及

"引力定律"(The Law of Gravity) 有關的一個例子. 這個定律說:兩個物體互相吸引的力, 與他們的質量相乘積成正比, 與他們間距離的平方成反比. 因此,如果 m 和 M 爲兩個物體的質量, 譬如以磅計算, d 哩爲他們間的距離, 這個物體對那個物體吸引的力量就和 $\frac{mM}{d^2}$ 成比例; 這樣, 這個力就可以寫做等於 $\frac{kmM}{d^2}$, k 是一個固定的數, 依這種引力的絕對值和我們用來量力的單位而有差異. 我們容易看到, 如果我們想用力如一磅質量的重之類來計算, k 所表的數一定極其細微; 因爲使 m, M, d 三數都等於 1 時, $\frac{kmM}{d^2}=k$ 變成一磅重的同樣兩個質量相距一哩時的重心引力, 而這種力量却不大感覺得到.

雖然如是, 我們現在却已經得到我們的引力公式. 如果我們喚這種力爲 F, $F=k\frac{mM}{d^2}$ 就表 F, m, M 和 d 等變數間的相互關係. 我們都知道怎樣發現這個公式的故事. 據說, 牛頓正坐在果園內的時候,偶然看到一只蘋果落地, 於是就突然悟到"萬有引力定律"(The Law of Universal Gravitation). 也許他最後確定這個定律的時候恰好在一個果園內, 以及旁處地方——並且他一定在有些地方都

有過這種感觸.但是據我們的意見,來注意這衆多的預備觀念還比較有結果;這些觀念不知絞多少人腦汁和費多少年光陰纔逐漸形成,而且在能夠形成這個正確的定律以前必須具備的.第一,思想方面的算學習慣和前兩章所講的算學方法都應該在先產生;否則牛頓決不能想到表示"任何"兩個質量在"任何"距離彼此間的力的公式.其次,所用的"力"(Force),"質量"(Mass),"距離"(Distance)幾個名詞是甚麼意義呢?對於構成一定幾何形體的——例如各部分的距離可用某種單位長度如一哩或一碼之類來度量的——所有物體,我們都很容易感知.這層差不多就是我們所見的一種物質構造第一個特點.因為這樣,幾何學的研究以及度量的理論也日漸發達起來.甚至到現在,有些情形都仍以用異樣的思考為便利.在一個多山的國家,時常有以時刻計算距離的辦法.不過撇開"距離",其餘兩個名詞,"力"和"質量",都更加含糊.這兩個觀念的正確解釋自牛頓創用這兩個字後纔慢慢完備;而其實,牛頓本人却是透澈認識"力學"(Dynamics)眞正普遍的原則的第一人.

遍中世紀期間,因為受亞歷士多德(Aristotle)影響之

故,科學完全被人誤解.牛頓生當許多大科學家後,無形中已佔不少便宜;最主要的如意大利的加利流(G. Galileo):他在牛頓之前兩個世紀,已經重將科學建樹起來,並且發明研究它的適當的方法.牛頓就是將許多人的工作集其大成.到最後,在他的腦海中,所有"力""質量"和"距離"的觀念都已經明晰,並且這些觀念的重要以及它們對於一只蘋果落地和行星運動的關係也完全認識,他纔會想得到這個"重力定律"(The law of gravitation)和證實它是在這類各異的運動方面總適用的公式.

應用算學公式的主要條件是,第一要有清楚的觀念,和第二要對於它們和所觀察的現象的關係有一個正確的估計.我們的遠祖對於自然現象的重要以及解決事物因果有效方法的需要,其關心並不亞於我們今日.因爲受不相關觀念的影響,他們每逢遇到日月食的變故,纔致施行繁瑣的宗教儀式和祭禱,來做所謂護月救日的隆重工作.當然沒有理由可以說他們竟會比我們愚笨.但在那個期間,清楚和有關的觀念却無機會慢慢的累積起來.

物理科學逐漸發展成一種能用算學方法研究的形式,這段經過在電磁學的發展史上表現得非常清楚.暴雷雨

是一種嚴重的變故，使人甚至於獸都會發生驚駭的變故．從最早的時候起 它們必定就是原始的神奇的臆想的對象；固然有人或許會懷疑，我們近代科學上關於"電"(Electricity) 是否不比野蠻人巫術的解釋神秘．希臘人懂得琥珀 (希臘原文爲 Electron) 磨擦時可以吸取輕細乾燥的物質．到 1600 年，苛歇士特 (Colchester) 的吉爾伯博士 (Dr. Gilbert) 發表一本關於這個題目的著作，書內摹倣到所謂科學的方法．他列舉具有和琥珀性質相似的物質；還有"電"和"磁"兩種現象相提並論，雖然極其簡略，仍應歸功於他．電機 (Electrical machines) 製成，由它們就得到"電火花" (Sparks)；"來頓瓶" (Leyden jar) 發明，藉此可以增強這些效力．並且可算已得到相當有系統的知識；不過有關的算學觀念却仍舊未曾發現．佛蘭克林 (Franklin) 在 1752 年借放一個風箏到空中的實驗，證明雷就是電氣作用．

在最早的期間 (紀元前 2634 年)，中國人就會利用"羅盤針" (The compass needle) 的特性，不過好像並沒有使它和學理發生關係．人生實在深奧的變遷到最後都會因本身的用途而被人注意．歐洲傳入羅盤的用法還在十

二世紀末葉，這時候距中國發明的當日已在三千餘年了.“電磁”(Electromagnetism) 學問造成今日在人生各部分的重要地位，並不是因爲歐洲人特別注重實用的癖性，而是由於西方向來研究電磁現象的人都富有抽象的理論的興趣之故.

“電流”(The electric current) 的發現歸功於兩個意大利人，嘉萬尼 (Galvani) 在 1780 年，和弗打 (Volta) 在 1792 年. 這個偉大的發明開拓出一個新的研究境界. 到這個時候，科學界當前計有三組獨立的，但是相連的，事實——由電機磨擦生出的“靜”(Statical) 電作用，磁氣現象 (The magnetic phenomena)，和由“電流”所生的作用. 從十八世紀末葉起，這三條研究的路線很快的互相溝通，而且現在勢將改變人類生活的“電磁學”也由此樹立.

算學觀念到現在眞正出現. 在 1780 到 1789 十年間，一個名叫古倫 (Coulomb) 的法國人證明“磁極”(The magnetic poles) 彼此相吸或相斥的力量和它們的距離平方倒數成比例，並且同一個定律也適用於“電荷”(The electric charges) 方面——這兩個定律奇特處就在其和

重力定律的相類. 1820 年, 一個名叫做歐斯鐵 (Oersted) 的丹麥人發現 "電流" 對 "磁石" (The magnet) 有一種力量; 並且差不多無幾時, 一個名叫安培爾 (Ampère) 的法國人除掉證實兩個 "電流" 相互以力作用的現象外, 還正確的作成算學的力的定律. "安培爾證明兩電流間力作用定律所作實驗算得科學最光彩的一件成就. 整個理論和實驗, 恰像現成從 '電學牛頓' 的腦裏躍出. 它的形體是完全的, 精密是無懈可擊的; 所歸結成的一個公式是所有現象大都可以據以推論的, 並且必定常可算成 '電動力學' (Electro-dynamics) 的根本公式". (註)

"電流" 間以及 "電流" 和 "磁石" 間誘導作用的幾個重要定律係法拉第 (Michael Faraday) 在 1831 至 1832 年間所發現. 有人問過法拉第: "這個發現的用處何在"? 他答覆說: "一個兒童的用處何在——就是生長成為一個大人". 法拉第的兒童已經長成為一個大人, 並且到現在是所有近世電學應用的基礎. 法拉第又將這門科學整個理論方面重加改造. 他的意見當時尚未能充分了解; 直到

(註) 參看馬克斯威爾 (Clerk Maxwell) 電磁學 (Electricity and Magnetism) 二卷三章.

1873 年馬克斯威爾纔將這個意見擴充並且使它成爲一種直接的算學的形式. 據馬克斯威爾用算學研究的結果, 認爲 "電的振動" (Electrical vibration) 應該可以傳佈. 他立刻發表成光的振動就是 "電振動" 的意見. 這個意見業已證實; 所以到現在, 整個光的理論不過是電學這門大學問的一分枝. 1888 年, 一個名叫海爾慈 (Herz) 的德國人照馬克斯威爾的意見, 進一步用直接的電學方法產生出 "電振動". 他的實驗就是我們今日的無線電報和無線電話的基礎.

在最近幾十年, 更有很多的重要的發現, 同時這門科學在理論的重要方面以及實用的興趣方面都有不斷的進步. 我們只消對於這種進步稍加考察, 就可以看到, 因爲由實驗觸發有關的學理根據, 又由這些學理的根據觸發新實驗, 兩者循環不已的逐漸導入許多新觀念之故, 使一整羣游離的甚至瑣細的現象融合成一門天衣無縫的科學, 在這門科學中間, 由少數簡單的假定的定律出發得到抽象的算學推論的各種結果, 供給我們對事物因果錯綜複雜狀態的種種解釋.

最後, 撇開 "電磁學" 和 "光學" 兩門特殊科學而說,

我們能夠使我們的觀點更加普遍化，來注意一般認爲科學思想重要的一章的"算學物理學"(Mathematical Physics)的發展.首先當然就是，它的發展最眞實的情形是怎樣的呢?

它的開端既不是當做一種學問，也不是當做某一種人的成績.加太的牧羊人會觀天象，美索波達米亞(Mesopotamia)和埃及(Egypt)政府有測量土地的專員，教士和哲學家都喜歡對所有事物的通性冥思刻想.自然界無窮的演變都係由神秘莫測的力量所造成."風動可聽"正表現當時泥守這些法則的無意識.廣義說，無論今古，事物因果只有一種潛在的規律.但是當時却不能使它們相互關係纖細都弄得淸楚，並且也根本不知怎樣來着手建設這一門學問.

不相連繫的推測就是充其量能夠產生的成績，其間雖然偶爾與事物眞相僥倖相差不遠，實在却並不多見.

當這個期間，由"土地測量"(Land survey)產生了"幾何學"(Geometry)，由天象的觀察啓發出"太陽系"(The solar system)正確的規律.後期的希臘學者中有幾個，例如阿幾默德(Archimedes)，且對於初等的"水力

學”(Hydrostatics) 和 “光學”(Optics) 的現象有相當的發現. 其實, 兼備算學天才和物理學眼光的阿幾默德應該與生當兩千年後的牛頓並列, 同爲創立算學物理學的開山大師. 他住在西拉苦士 (Syracuse), 西細里 (Sicily) 島一個有名的希臘大城. 當羅馬人圍攻這個城的時候 (在紀元前 210 至 212 年), 據說他曾用鏡集中太陽光線將他們的船焚燬. 這個傳說當然是不足憑信的, 不過由此却可以概見他因其光學的知識, 在當時曾獲得過人的令譽. 到這次圍攻的結局, 他被人所殺. 據寫給普魯塔(Plutarch)的記錄 (見他的瑪賽祿 (Marcellus) 的生活), 一個羅馬兵士尋到他時, 他正在屋中專心思索畫在沙地上的一個幾何圖式. 因爲他不肯立刻聽從這個兵士的命令, 所以就被兵士所殺. 而一方面, 因爲羅馬各統帥敬重之故, 對所有兵士曾有過赦免他的命令. 關於他, 還有一個著名的傳說, 極有價值; 因爲歸功於他的這個發現最足以表現他對算學和物理學研究的天才. 恰好這個發現比較簡單, 我們現在無妨將它詳明講述一下. 它算得應用算學觀念到物理學的方法中最簡單的一個實例.

西拉苦士王子希羅 (Hiero) 交過許多分量的金子給某

個金匠,做成一個金冕.他懷疑這個匠人竊去相當分量的金子,而以較劣的金屬混合餘金作爲代替.希羅將這個金冕交給阿幾默德,請他檢查.在這些日子中間,一定經過無數的化學檢查;但是最後,他不能不感到這個事體過於新奇.一天,他正躺在浴盆內,突然得到解決.他於是躍出浴盆,越過各街大呼着"Eureka! Eureka"(我已經查得!我已經查得!),一氣跑到王宮去.這一天如果我們確實知道,眞應該將它當做算學物理學的生日來紀念;這門科學到牛頓坐在他的果園中的時候,已是由來有素.阿幾默德眞正已經成就一個偉大的發現.他發現,一個物體沉在水裏的時候,受四圍水力的影響往上浮起,這些力的"合力"(Resultant force)等於所排去的水的重量.這個定律在理論方面,可以用"水力學"的算學原則來證明;而在實際方面,也可以用實驗來證明.由是,如果 W 鎊爲金冕在空氣中稱得的重量,w 鎊爲它完全沉在水中時排去的水的重量,$W-w$ 就是要使金冕懸空水中不沉餘外所需的向上的力量.

現在,這個向上的力量照附圖所示的辦法稱物體懸空水中時的重量,就能夠很容易的決定.如果右端天秤盤內

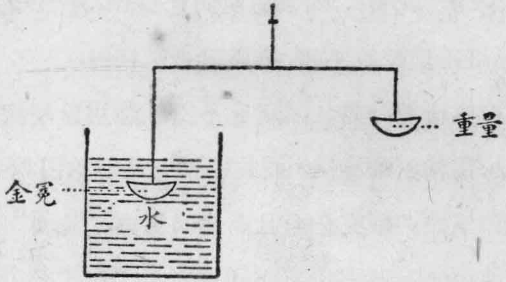

圖 3

的重量爲 F 磅，那麼金冕在水內的實重就是 F 磅；由是就得

$$F=W-w$$

所以 $$w=W-F,$$

和 $$\frac{W}{w}=\frac{W}{W-F} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

在此，W 和 F 都係用天秤，很容易的而且很精密的决定出來．所以，由方程式 (A)，就得到 $\frac{W}{w}$．但是 $\frac{W}{w}$ 是金冕的重量與同容積的水的重量之比．凡是相同物質的金屬，無論怎樣的一塊，這個比是相同的：現在通稱爲這種物質的"比重" (Specific gravity)，並且只隨物質的本性而變更，與物質的大小或多少無關．由是，爲要檢查王冕是否金做的，阿幾默德就只須取一塊明明白白的純金，照同樣的手

續求出它的"比重". 如果這兩個比重相符, 王冕就是純金的; 如果兩個數值不符, 這就摻着假在內.

這個證據極為詳盡: 因為它不僅是應用算學觀念到物理學第一個精密的實例, 並且因為它是無論何時表現科學方法和精神一個完全而且簡單的實例. "比重" 原理的發現顯見得他有無上的天才.

阿幾默德犧牲在一個羅馬兵士手裏的死正象徵世界有一個嚴重的變動: 重理想的而且愛好抽象科學的希臘人在歐洲的領袖地位被重實際的羅馬人所奪取. 貝康士費爾德勳爵 (Lord Beaconsfield) 在所著的一本小說內, 曾替重實際的人下過一個定義為體驗過祖先的錯誤的一種人. 羅馬人本是一個偉大的民族, 但是因為過於着重實際之故以致被人詛咒為毫無貢獻. 他們並沒有將祖先的知識加以改進, 並且所有他們的進步只有工程方面關於技巧的極細微的枝節處. 他們不是能夠別具新見地的理想家, 所以對於征服自然的根本大計就不能有更多的貢獻. 沒有一個羅馬人會因為對一個算學圖式冥思刻想而致喪生的.

第四章

動力學

到希臘的算學物理學家尋到嫡嗣的時候，已經不覺過了一千八百年的光陰了．在十六七世紀之交，偉大的意大利學術家，特別是藝術家達維錫（Leonardo da Vinci, 1452 生 1519 歿）和加里流（Galileo, 1564 生 1642 歿）復與阿幾默德不謀而合，再度發現抽象的算學觀念和自然現象實驗的研究相互間的密切關係．當時，算學逐漸進步，正確的天文知識亦日有積累，已經使自然哲學在研究方面獲得一個更加有利的地位．還有，當代極其目空一切的自尊心理，和個人求知欲的熱烈，都使當代的思想家感覺有了解一切現象的需要；實際上就發現出歸納的理解方面算學的理論和實驗相關的祕密．一個哲學家加里流會從庇薩（Pisa）斜塔使重物下落，這算得代表那個時代的出類拔萃的一件大事．平常有理想的人，也有行動的人；

"算學物理學"是理想的衝動和行動的衝動同時結合在一起的一個時代的產物.

這件從塔頂落重物的事體活繪出知識上重要的一步,這一步就是"動力學"一整個學問的根本的科學——這門科學方面正確觀念的初步獲得.特別爭論的問題就是,重量不同的物體從同一高度是否會在同一時間落下.按照亞歷士多德的一個格言,重的重物一定落得比較迅速,這個見解在當時是普遍信從的.加里流斷定,它們一定會在同時間落地;並且從斜塔的頂上落下重物,來證實它的主張.這個法則顯著的例外都只有一個情形,就是因為某種原因(譬如體質極輕微或速度極大),會受空氣抵抗的影響.但是略去空氣不計,這個定律是正確的.加里流成功的實驗並不是一種全憑僥倖猜想而得的結果.它係由他關於"惰性"(Inertia)和"質量"(Mass)的正確觀念所產生的."運動第一定律"(The first law of motion),我們現在照牛頓的樣子說出,是——每個物體繼續保持它的靜止狀態,或沿一直線上等速運動;如不受外力影響時,它的狀態不會改變.這個定律不只是一個嚴格的公式,它也是克服異端勝利的凱歌.從定律全文删去"或沿直

線上等速運動"一語,爭執的要旨就可以瞭然.在此,我們就得到所謂可以當做是亞歷士多德反對派的公式:"每個物體繼續保持它的靜止狀態,如不受外力影響時,它的狀態不會改變".

在前邊這個錯誤的公式內,就說得明白,沒有外力時一個物體繼續保持一種靜止的狀態;因此又說,如果一個物體正在運動,就得需一個力維持運動,所以力消滅時,運動也隨同消滅.眞正的牛頓定律觀點恰與此相反.一個物體不受外力影響時的狀態是沿一直線上等速運動,並且用不着再尋求外力或影響作爲這種"等速直線運動"(The uniform rectilinear motion)的原因,如果讀者願意這樣講,或即是這種運動永久不易的附屬物."靜止"(Rest)只算是這種運動的一個特殊情形,就只是在"速度"(The velocity)爲零並且永遠爲零的時候.所以,當一個物體正在運動時,除非要說明速度方面的改變或者方向方面的改變,就用不着再追問甚麼外力的影響.只要物體在同一速度和沿同一方向在運動,那用不着再要任何力量的幫助的.

這兩個見解不同之點在關於行星運動的原理方面,極

爲顯明. 哥白尼 (Copernicus)——出生在西普魯士韜恩 (Thorn) 地方的一個波蘭人——將行星, 包括地球在內, 沿與圓形近似的軌道繞日運轉的情形, 描摹得非常簡單; 以後到 1609 年, 一個德國算學家開普勒 (Kepler) 證明這類行星軌道實際是"橢圓形", 就是後面我們將要詳細研究的一種特殊的卵形曲線. 在此立刻就遇到一個問題——維持各行星作這種運動的力是甚麼? 根據開普勒主張的陳舊錯誤的見解, 實在的速度本身須得用力來維持. 因此, 他就得尋出如第四圖所示的

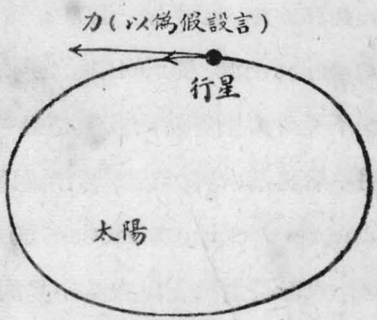

圖 4

"沿切線的力" (Tangential forces) 來. 但是根據牛頓定律, 無須外力, 行星會永遠以現有的速度沿一直線運動, 並且依照這個樣子與太陽背道而馳. 所以, 牛頓要推求使行星變成沿橢圓形軌道運動的這一個力量. 這個據他的意見, 應該是一種向太陽, 如第五圖所示的力. 實際上, 這個力就是太陽依前邊所述距離平方成反比的定律所生

的"重心引力".

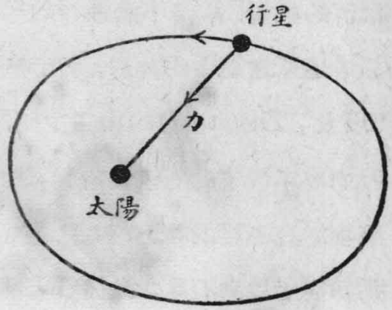

圖 5

"機械力學"(Mechanics) 這門學問也發源於希臘, 其一是他們對於用"槓杆"(The lever) 得到的機械便利的學理的研究, 又其一是他們對於與物體重量有關的各種問題的研究. 但是, 它的眞正的基礎確定終究在十六世紀末葉和十七世紀百餘年間, 如前所說, 一部分固然由於想借此說明落體的理論, 而主要的動機仍在行星運動問題, 纔無意中將這門學問建樹起來. 從那個時候起, "動力學" 本身已經弄到一個希望過奢的重擔, 而在今日, 這應屬於最終的學問範圍, 其餘各數學問都不過是它的一個分枝而已. 這個題目歸結一句話就是, 感官能夠感覺的事物的各種性質都不過我們用以鑑別空間內事物位置變動的特殊方法. 舉個例來說,譬如我們觀察威敏大寺(Westminster Abbey). 它斑白靜寂的立在那裏已經歷有年所. 但是, 按照近世科學的理論, 斑白的形態, 這樣的倍增我們對這所建築物死

沉沉的感覺，本身不過最後的無數的分子在急遽運動着，形成這所建築物的外表，並且將"振動"傳達到一種叫做"以太"(The ether)的物質中間，而入於我們的視官.其次，我們將手置它的石基上，留心手的冷熱，就是象徵這所建築物靜寂不動的冷熱.但是，這種溫度的感覺簡單說不過是熱從手傳到石基，或從石基傳到手的感覺；根據近代科學的理論，"熱"(Heat)就是一個物體的"分子"(The molecules)的擾動.最後，風琴開始彈奏神曲，而其實"音"(The sound)也不過是空氣激動耳鼓的運動的結果.

所以，要建立一種動力學觀的現象解釋，僅須照一般方式的說法——某一種物質或物體從前係在這個地方而現在係在那個地方——解釋它們就足夠了.由是，我們得到近世科學顯著的根本觀念爲：我們所有的感覺都是空間內事物在各個時間改變的形狀比較的結果.所以說，運動定律，換句話說即事物形狀改變定律，是物理學最終的定律.

在應用算學來研究自然哲學的時候，平常思想上是偶然的在科學上就成爲有系統的研究.當我們提到一把椅子的時候，平常的意思總是我們剛已看見或者觸到的某

個東西;但是我們的話語中多半會預先假設有某個東西,其存在並不要靠我們的視或觸.在算學物理學上,所取的方式適與此相反.對於這把椅子的認識,用不着提到特別某一個人,也用不着提到特別某一種知覺.結果,這把椅子在思想上變成空間內的一組"分子",或者一羣"電子"(Electrons),又或一部分運動的"以太"(Ether);無論我們用何種通行的科學觀念來描寫都可以.而重要的一點就是,科學將這把椅子分化成在空間內運動並且彼此交互影響的事物.因此,照現在所說的,構成一組動境的各個不同的因素都只是些事物,如像線的長短,角的大小,以及面積體積等可以安排定空間內物體的位置的事物.自然,在運動和變化的事實方面,除這些幾何的因素外,還應該添上這類因素變化的比率,換句話說就是,"速度"(Velocity),"角速度"(Angular velocity),"加速度"(Acceleration)一類的事物.按照這樣,假定用可變的數目代表這些幾何因素和它們的變化率的測度在自然界中彼此間的關係,算學物理學就研究這些可變的數目間的關係.但是算學的定律通常都以變數爲準,只有在偶然用實驗來檢查定律的時候,或者在用定律來做特殊的預測

的時候,纔用實在數目來替代.

遍算學物理學的研究,雖然研究所有事物的位置和形狀都以變化爲主,而依照這種抽象的方式認識的世界却有一個很有趣的特點,就是,這樣一個抽象世界的變遷足夠"解釋"我們的一切感覺.當我們聽到一種聲音的時候,在先空氣的分子曾有過相當的擾動:發生擾動,或者就叫它們做"空氣波",所有健全的人就聽得到聲音;如果沒有"空氣波",就沒有聲音.同樣,一種物理的原因就形成我們其他的感覺.我們種種思想都對應着腦的構造和運動,損害腦卽是損害思想.在其間,這個物理世界的變遷按照算學的定律,不管一切特別的感覺思想和情緒,互相不斷的遞嬗演進.

現在毫無疑義的,這是算學物理學世界對於我們的情緒,感覺和思想方面的關係普遍的情形;並且曾經由此引起許多的爭辯和筆戰.我們在此只須再加一個說明.我們在前邊曾經見到,發生這種情形的原因是由於我們想說明用以"解釋"我們各人的感覺和情緒的外界,換句話說卽是,不實在依靠任何特別的感覺或任何特別的某個人的一個世界.這樣一個世界只不過是一個偉大的仙境嗎?

但是仙境都是空想的臆造的：如果眞正有這樣一個世界，就應該有一個正確的形像，各部分以及它們相互的關係都應該在內明確規定．現在，大體說，這個科學上的世界正表現這種情形，並且它的事物變遷都可以用抽象的算學觀念的工具來探討和預測．在此，我們最初的假說好像實在得到一個歸納的證明．我們必得承認，沒有一個歸納的證明是有結論的；但是如果不因我們的知覺而存在的一個世界的整個觀念錯誤時；那麼，對於在所有可用的觀念中，用算學觀念來表現這個世界的特質就會有如此顯著的成功一層事實，我們理應加以詳明的解釋

在詳細說明其餘的運動定律之先，實在不能不多說一點本題外的話．本章下文應該專來說明幾個，無論對於"算學物理學"和對於"純正算學"兩方面都是基本的，重要觀念：卽"向量"(Vector)觀念和"向量"相加的平行四邊形定律(The parallelogram law for vector addition)．我們知道，運動的本來面目是，一個物體從前在 A 而現在在 C．從 A 到 C 的移動在未完全確定之前，有兩個不同的要素得須明白，卽移動的大小（卽，長度 AC）和移動的方向．現在任何事物，如像這種移動求出一個大

小和一個方向就完全決定的,叫做一個"向量"(Vector).譬如,"速度"的定義需要指定一個大小和一個方向.應該說,沿某一個方向每小時多少哩.要說明"速度"定義上的這兩個因素各自獨立存在的情形,可舉一隻船上溝通所有船員的船長做例:他對輪機長告訴應航的浬數,同時對舵手告知羅盤應取的方向.其次,"速度"的改變率,卽每單位時間所加的"速度",也是一種"向量":他叫做"加速度"(Acceleration).同理,一個"力"(Force)在動力學的解釋,也是一種"向量".其實,力的向量性質立刻可以根據動力學原理,從"速度"和"加速度"的向量性質推出來;但是這是用不着詳細說的一點.我們在此只消說一個力以若干大小沿某個方向作用於一個物體,這就夠了.

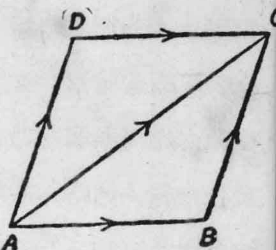

圖 6

如是,一切的"向量"都能夠用直線作圖表示.所有應做的只須準備:(1)一個"尺度"(Scale),根據着這個"尺度",長度的單位與"向量"大小的單位相應——例如在"速度"的題目中,一吋對應每小時十哩的一個"速

度"；又如在力的題目中，一吋對應十噸重的一個力——和 (2) 對應"向量"方向圖內的線的一個"方向" (Direction). 這種用圖表示"向量"的方法極爲重要. 得它的幫助，我們能夠將有名的不同方向同類"向量"相加的"平行四邊形定律" (The parallelogram law) 表出.

設在第六圖內，"向量" AC 代表一個物體從 A 到 C 所改變的位置：我們可以叫它做"搬運的向量" (The vector of transportation). 我們將要明白，如果照前邊所說，將物理現象化成單純的位置改變的辦法正確，那麼所有別種的物理向量實在都可以用種種方法化成這類簡單的形式. 如是，從 A 到 C 結果的搬運與從 A 到 B 的一個搬運再從 B 到 C 的一個搬運效果相等，或者，完成平行四邊形 $ABCD$, 亦即與從 A 到 D 的一個搬運再從 D 到 C 的一個搬運效果相等. 這些如此連續實行的搬運作用就叫做"相加". 這是我們所謂搬運作用相加的一個簡單的定義. 再進一步來說，設幾條平行線爲沿同一方向而作的直線，B 到 C 和 A 到 D 的搬運作用就可以認爲是對最初位置爲 B 和 A 的二物體所施的相等的搬運作用. 根據這個見解，我們可以說 A 到 D 的搬運是

施於任何位置，例如 B，的一個物體的作用. 這樣，我們就說，A 到 C 的搬運可以認為 A 到 B 和 A 到 D，無論怎樣搬法，兩個搬運作用之和. 現在，我們得到搬運作用相加的平行四邊形定律：即，如果搬運作用是 A 到 B 和 A 到 D，完成平行四邊形 $ABCD$，於是這兩個的和就是對角線 AC.

所有這個驟然觀察起來似乎全是人為的. 但是我們應該注意. 自然界本身却實實在在與這個觀念相符. 譬如，一隻輪船正沿 AD 方向（參照第六圖）移動，同時有一個人徐步在橫越甲板方向進行. 如果輪船靜止不動，在一分鐘，他應走到 B；但是在那個一分鐘期間，他在甲板上的發足點 A 已經從 AB 移到 DC. 所以事實上，他的搬運作用已經從海面上的 A 到 C. 無論如何，我們顯然可以將它分成兩個搬運作用的和，即，一個對輪船而言從 A 到 B，和一個就是輪船的搬運從 A 到 D.

再兼顧到"時間"因素，譬如一分鐘，這個人的搬運 AC 的圖就表示他的"速度". 因為如果 AC 表示若干呎的搬運，在此就代表每分鐘若干呎的一種搬運，換句話說，就是代表這個人的"速度". 因此，AB 和 AD 代表兩個

"速度",就是,他對於輪船而言的"速度",以及輪船的"速度",兩個的"和"合成他的"完全速度"(The complete velocity). 我們知道,如認為圖形係代表每個單位時間的搬運,關於"搬運"的圖形和定義就變成關於"速度"的圖形和定義. 其次,如認為圖形係代表每個單位時間所加的速度,關於"速度"的圖形和定義就變成關於"加速度"的圖形和定義.

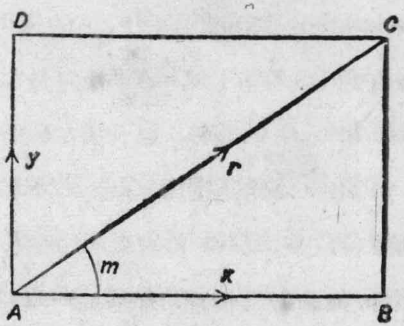

圖 7

由是,所謂向量速度的相加以及向量加速度的相加,我們都指按照平行四邊形定律的相加而言.

還有,按照運動定律,一個力用它在一個已知質量的物體上所生的向量加速度,就足夠表示. 根據此點,力當它們的共同結果可照平行四邊形定律計算時,就可以叫做"相加".

因此,在科學的根本的"向量",例如"搬運","速度"和"力"等方面,同類任何兩個相加結果就是按照平行四

邊形定律的規則，產生出一個“合成向量”(Resultant vector).

最後，平行四邊形最簡單的形式就是一個“矩形”(The rectangle); 在純正算學上，它的單個“向量”AC 對兩個成直角(參看第七圖)的“分向量”(Component vectors) AB 和 AD 的關係，並且這個關係是在不斷的循環. 設 x, y, 和 r 個單位代表 AB, AD, 和 AC 的長度；又設 m 角單位代表 BAC 角的大小. 那麼，x, y, r 和 m 間的關係，無論怎樣情形，都是純粹算學循環不斷的題目；而這些結果都是應用到算學物理學基本的向量方面所需要的. 這個圖形是純正算學要達到應用於自然界的希望必由的階梯.

第五章

算學的符號

我們現在回到純正算學方面，並且比較接近點就造成這門學問的觀念工具來研究. 最先和我們腦海接觸的就是這門學問的"符號"(Symbolism), 我們先從最簡單的而且普遍知道的符號, 就是算術的符號, 來說.

現在假設我們對於"整數"(The integral numbers), 即用"阿拉伯記號"(Arabic notations) 0, 1, 2,……, 9, 10, 11,……100, 101,……等表示的數目, 有很淸楚的認識. 這種記號是由阿拉伯人傳進歐洲的, 不過他們顯然仍是從印度方面得到的. 第一本有名的著作(註)是一個印度算學家巴士喀拉(Bhaskara, 1114年生)所作的, 書內對於這種記號有系統說明. 但是實在的數碼可以追溯到第

(註) 關於純正算學詳細的史實, 大部分都根據拜爾(W. W. R. Ball)氏所著算學略史(A Short history of Mathematics), 謹在此誌謝.

七世紀以前,並且多半還是西藏發明的.但是,就本書的宗旨而言,記號的歷史却是一種枝節之事.值得注意的有趣的地方是,一種良好的記號有其非常重要之點,這種數碼制度正就表現這種長處.一種良好的記號可以減省腦中一切不必要的工作,使他集中到比較高深的問題,而其實就增進這個民族的智慧力量.在"阿拉伯記號"未輸入之先,"乘法"(Multiplication)極爲繁難,而甚至整數的"除法"(Division)都要算有最大的天才.在現代的世界,因爲強迫教育的影響,西歐的全體人民,無論從最高以至最低,都能夠做出極大位數的除法,假使這個事實被一個希臘時代的算學家聽得,必定會感到萬分的駭怪.這個事實在他一定認爲是根本不可能的.以後推廣這種記號到十進分數方面,直到十七世紀,尙沒有做得十分完備.我們今日對於十進分數計算起來極其敏捷,這種能力可以說是這一種完備的記號逐漸發現後,纔有的好像奇蹟的結果.

算學因爲用了許多的符號,往往被人認爲是一種艱難而且不可思議的學問.當然,世間最難領會的就莫過於我們不懂的一種符號.並且,一種符號即使我們懂一部分,

而沒有用慣，也仍舊是不容易領會的．同樣的道理，任何行業或生意的專門術語如果向來沒有人教過使用，自然也是無法通曉．但是，這個並不是因爲他們本身艱難．反過來說，添進它們通常都無非使事理容易．所以在算學上，假使我們來特別注意算學的觀念，"符號"照常例就是一種絕巨的化繁爲簡的東西．它不僅有實際的用途，並且有顯著的趣味．因爲它代表主題所有觀念的一個分析，以及這些觀念互相關的一個極近的圖形表示．如果有人懷疑符號的利益，請他不用一個符號，將下列代表"代數學"上某幾個基本定律的方程式整個的意義充分寫出來：

$$x+y=y+x \tag{1}$$

$$(x+y)+z=x+(y+z) \tag{2}$$

$$x\times y=y\times x \tag{3}$$

$$(x\times y)\times z=x\times(y\times z) \tag{4}$$

$$x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z) \tag{5}$$

在此，(1)和(2)叫做加法的"交換定律"(The commutative law)和"集合定律"(The associative law)，(3)和(4)是乘法的"交換定律"和"集合定律"，而(5)是

加法乘法有關的“分配定律”(The distributive law). 譬如不用符號, (1) 變做: 如果將第二個數目和任一已知數目相加, 或將第一個已知數目和第二個數目相加, 得到的結果是相同的.

由這個譬喻可見, 得“符號”的幫助, 我們能夠改變成差不多用目的機械的推理作用, 要不然就得需更高明的腦力.

所有筆記以及名人演說常有我們應該培養懷疑現實的習慣的話, 這實在是一個很深的錯誤. 文化的進步就在我們擴充那些不用再研究就能做成的重要經營的數目. 思想上的經營就像戰陣中的騎兵隊一樣——數目有嚴格的限制, 可是却需要新的馬匹, 而且必須在規定時間內實現任務.

“符號”有一個極重要的性質, 就是簡明, 能夠一目了然並且書寫時極爲便捷. 如此, 我們將幾個符號“並列”(Juxtaposition) 一處, 更可以使它們變得簡明. 所以, 在一種完善的符號內, 重要的符號並列一定有一個重要的意義. 這是阿拉伯數目記號的功績之一; 用十個符號, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9., 和用簡單的並列法, 它將無論怎樣

的數目都用符號表出．其次，在代數學上，當我們有兩個變數 x 和 y 時，對於用它們並列 xy 來代表甚麼一層，我們不得不經過一番選擇．現在，兩個最重要的觀念，即加法和乘法，亟待解決．算學家爲使我們的符號更加簡明，就採取 xy 代表 $x\times y$ 的定義．由是，前邊 (3)，(4) 和 (5) 幾個定律一般就寫做，

$$xy=yx,\ (xy)z=x(yz),\ x(y+z)=xy+xz,$$

這樣，簡明二字更有一個很大的收穫．同樣的符號規則適用於一個實在數目和一個變數的並列：例如 $3\times x$ 寫 $3x$，和 $30\times x$ 寫 $30x$.

在用實在數目代替變數的時候，我們必須注意將乘號還原，方不致和"阿拉伯記號"相混，這是很清楚的．所以，當我們在 xy 內用 2 代 x 和 3 代 y 的時候，我們必須寫 2×3 代 xy，而不寫 23，否則就變做 $20+3$ 了．

怪有趣的，我們遇到，一個外貌極其平庸的符號會對於科學的發達有重要的關係．它可以作爲一個觀念，往往一個極深奧的觀念的有力表示；並且有它在場，這個觀念的所有有它在內和許多複雜的觀念的關係也容易由它表出．譬如取所有符號最平庸的一個，即 0，來說，這個符號

代表零這個"數目"(Number zero). 羅馬人的數目記號就沒有零的符號,並且古代算學家差不多最多數遇到零數的觀念都會認爲是很害怕的難題. 因爲,歸結一句話,它終究是一個極深奧的,不大顯明的觀念. 在哲學的書籍內,我們將可以尋到許多關於零的意思的討論. 實際說,零並不比其餘的"基數"(Cardinal number) 更見深奧或晦澀. 我們用 1, 用 2, 或用 3 表示甚麼呢?我們如想將形成它們的比較簡單的觀念作一明白的分析,一定有許多人都會感到困難;但是我們却習慣用這些觀念. 關於"零",有一點可供注意,就是在日常生活上,我們並不一定用到它. 沒有人到外面去購買零尾魚的. 它差不多是所有基數中程度最高等的,只有文化程度高的推理方面纔用得著. 許多重要工作都得代表零這個數目的符號 0 的幫助.

符號中,阿拉伯數目記號是一個不可少的部分;符號的發達與這種記號大有關係. 因爲在那種記號中間,一個數字 (The digit) 的値須視它所在的位置而定. 例如,就 25, 51, 3512, 5213 等數內"5"這個數字來說:在第一個數目上,"5"代表五;在第二個數目上,"5"代表五十;在

第三個數目上,代表五百;在第四個數目上,代表五千.如是,當我們將'五十一'這個數目寫做 51 這個符號式時,數字"1"將數字"5"推進到第二位(從右算到左),這樣就將"五十"這個值給了它.但是當我們想用它自己來代表"五十"時,我們不能再拿數字 1 來完成這個任務;我們需要在單位位置有一個數字,對於全值不增加一點,而仍使"5"這個數字進到第二位.這個任務就要靠"0",零的符號,來完成.我們很可以相信,為這個目的添出"0"來的人未免在腦海中就有零這個數目清楚的觀念.其實,他們只不過要這一個記識來表明所佔的數字位不添減一點而已.我們可以相信,零的觀念係由一種想將這個記識和代表"基數"的 1, 2,……, 9 等記識意義融合的希望漸漸造成.平常在算學上,以實用方便為主的一種符號每會引進一種深奧的觀念,這個當然就不是這種情形了.

所以,"0"的第一個用途就是使阿拉伯記號能夠見諸實用——設有一點旁的任務.我們可以想像,當為了這個目的添用它的時候,注重實用的人,即不歡喜理想的觀念一類的人,必定對於使它和一個零數相等的呆板習慣

會大不贊成. 但是他們却已是錯誤, 正好像旁人已經爲他們預備好食物, 他們還放棄本身咀嚼的官能. 因爲這個"0"符號負担的任務根本就和代表零數目的功用有關.

這個符號第二個用途初看起來簡單到令人發噱, 至於使一個初學的讀者無從認識它的重要的地步. 我們先就一個簡單例子來說. 在第二章內, 我們說過用方程式 $x+y=1$ 來表示的 x 和 y 兩個變數間的關係. 這個關係能夠表示成無窮個形狀;例如, $x=1-y$, $y=1-x$, $2x+3y-1=x+2y$, 等, 但是它重要的表示方式是

$$x+y-1=0.$$

同理, 方程式 $x=1$ 重要的表示方式是 $x-1=0$, 而方程式 $3x-2=2x^2$ 的是 $2x^2-3x+2=0$. 這個方式是, 所有代表變數, 如 x 和 y 的符號以及代表零以外某個實在數目的符號, 如前例內的 1 或 2, 寫在左邊, 如是便整個左邊就等於零這個數目. 第一個這樣做的人據說是湯麥士哈里奥 (Thomas Harriot), 1560 年生於牛津 (Oxford), 歿於 1621 年. 但是, 這種簡單的符號式的重要何在呢? 它是發生近世"代數式" (The algebraic form) 概念的原動力.

它是我們將要不斷求助於它的一種觀念；說得過甚一點，近代算學任何一部分不求它的幫助，就不能夠了解得十分眞切."式"這個概念是普遍的，我們不容易用抽象的術語來表現它的特性.在這個時候，最好還是舉幾個實例來說.這樣，$2x-3=0$, $x-1=0$, $5x-6=0$ 幾個方程式就都是"同式"的方程式，就是含有一個未知數 x 的方程式，而這個未知數並沒有用它自己來相乘的，所以 x^2, x^3, 等就不致出現. 其次，$3x^2-2x+1=0$, $x^2-3x+2=0$, $x^2-4=0$ 都是"同式"的方程式，就是含有一個未知數 x 而 $x\times x$, 卽 x^2 在內的方程式.這幾個方程式都叫做"二次方程式"(Quadratic equation). 同樣，"三次方程式"(Cubic equation) 是有 x^3 的另一"式"，由此類推.在前邊所舉的三個"二次方程式"中間，最末的方程式 $x^2-4=0$ 與前兩個方程式稍有不同；這是因爲在後一式 x (和 x^2 不同) 不出現，而在其餘兩式都存在.就他們都是三個"二次方程式"大處而言，這個差異眞是細微得很.

再進一層說，還有表示兩個變數間關係的各式的方程式；例如，$x+y-1=0$, $2x+3y-8=0$, 等.這些就是所謂

"方程式的一次式" (The linear form of equation) 的實例. "Linear" (直譯應爲直線的) 這個名字的來源是, 在第二章末尾所說的 "圖形表示法" (The graphic method of representation) 內, 往往用一條直線來表示這樣的方程式. 如是,遇得到各種的兩變數式一例如 "二次式", "三次式" 等. 但是現在的用意只有一點, 代數式的研究能夠成功, 其實這種研究能夠產生, 都靠將方程式右邊寫成用 "0" 符號的根本的一步.

在 "代數式" 的研究上, "0" 尙有別種官能. 無論 x 爲何數, 總是, $0\times x=0$, 和 $x+0=x$ 由這些性質, 可以使代數式細微的差異消蝕. 如是, 前邊所說 "二次式" $x^2-3x+2=0$ 和 $x^2-2=0$ 的差異, 如將後式寫做 $x^2+(0\times x)-4=0$ 的形式, 就能夠消滅. 因爲, 由前邊說過的定律, $x^2+(0\times x)-4=x^2+0-4=x^2-4$. 所以, 方程式 $x^2-4=0$ 只算代表二次方程式的一個特殊情形, 與 $x^2-3x+2=0$ 同屬於一種普遍的形式.

因爲這三個理由, 代表零這個數目的 "0" 這個符號對於近世算學是不可少的. 他使許多種從前沒有它就不可能的研究都已經變做可能的了.

實際上，算學的符號卽是作科學主幹的普遍觀念的收成. 我們現在有兩個這樣的普遍觀念在面前，卽"變數"的觀念和"代數式"的觀念. 算學上曾經誤把這兩個觀念連合當作另一種符號，這樣辦法所有的東西表面似乎精細，其實一點沒有效用. 我們已經知道，含有兩個變數 x 和 y 的一個方程式代表這對變數間的一個特殊關係因此，$x+y-1=0$ 代表變數 x 和 y 間某個一定的關係，$3x+2y-5=0$ 又代表另一個一定的關係；同時，兩個關係都有我們前邊所說的"直線關係"(Linear correlations)的形式. 但是現在，我們怎樣能夠表示變數 x 和 y 間任意"直線關係"呢？在此，我們需要照 x 表任意數的樣子；用符號來表任意"直線關係". 要辦到滿足這種需要，我們可將這個一定關係 $3x+2y-5=0$ 內所有的數字改變成文字. 得為 $ax+by+c=0$，在此，a, b, c 像 x 和 y 情形一樣，代表變數：不過兩組變數的用途却有一個區別. 我們研究 a, b, c 有定值時 x 和 y 間關係的普遍的性質. 我們並不來定 a, b 和 c 的值；但是無論它們的值為何，我們在研究對於 x 和 y 全部可能值這兩個變數間的關係時，它們總是固定的. 但是到我們已經得到這個關

係的性質時候，我們就看出，因為 a, b 和 c 實際尚未確定，這無異將應該屬於"任意"這樣的關係的性質證明．如是，現在將 a, b 和 c 作成變數，我們得到 $ax+by-0=0$ 代表 x 和 y 間一個可變的直線關係的這個觀念．比較 x 和 y 而說，a, b 和 c 這三個變數就叫做"常數"(Constants). 照這個方式使用的變數有時也叫做"變常數"(Parameters).

現在，算學家通常為免除，在他們方程式有關的變數方面，說明何者應該當做"常數"及何者應該當做變數的困難，就採用字母上最末的幾個文字來代表"可變的"變數，最初的幾個文字來代表"固定的"變數，或變常數．這兩組用法自然有在字母中間相遇的可能．有時，一二個字的說明是不可少的；不過就事實方面說，習慣和常識平常就儘夠幫助認識，即使好像用得很鬆懈，仍不致會有很多的混淆．

繼續用各級變常數消去實在數目，這個辦法的結果足使算學家對算術方面的工作減到極小．多數的算學家全討厭做數目上的計算，並且多半不大熟習．算術的領域達到極端，就是"變數"和"代數式"兩個觀念的出發點．

第六章

數的推廣

算學有一處極特別的地方，卽前邊曾經見到的與我們所出發的整數相連的這組觀念．這些觀念可以叫做"數的推廣"(The extensions or generalizations of number)．第一就是"分數觀念"(The idea of fractions)．我們現存的最古的關於"算術"的專書係紀元前 1700 年至 1100 年間一個名叫愛默士 (Ahmes) 的埃及教士所著，可以說是若干更古的著作的一本抄錄．這本書大部分係論"分數"的性質．所以，顯而易見的，這個觀念在算學史上發達很早．其實，這種材料差不多隨處可遇．將一塊地分成三個相等部分，取其中之二，應該是古人們早經司空見慣之事．因此，我們用不着驚異，遠古的人們都必定熟悉三分之二，和同類的一些觀念．所以說，數目的第一步推廣就是"分數"觀念．希臘人却用比例方式來看待

這個題目，因此一個希臘人自然會說出一條二呎長的線和一條三呎長的線成 2 和 3 之比的話. 及到受了代數記號的影響以後，我們就多半用一條線長度爲另一條的三分之二，並且就將"三分之二"認成一個數字的乘數.

關於"比"(Ratio)，或者"分數"，理論方面，希臘人有過很大的貢獻，這種貢獻曾經消耗無數哲學家和算學家的心血. 他們發現"不可通約"(Incommensurable) 比的存在. 他們證實，實際上係在做他們的幾何學研究的候，由一條任意長度的直線出發，應該有另外幾條直線，度和原來長度不成一對整數之比——或者，換一句話說應該有幾段長，並不和原長的任何正確分數相當.

例如，一個正方形的對角線就不能表成這個正方形的的任何分數；用我們近世的記號，對角線的長就是邊長 $\sqrt{2}$ 倍. 但是就沒有適於表 $\sqrt{2}$ 的"分數". 我們能夠心所欲求出極相近的近似値，但是我們決不能確實得它的眞値. 例如，$\frac{49}{25}$ 小於 2，而 $\frac{9}{4}$ 正大於 2，如此 $\sqrt{}$ 就在 $\frac{7}{5}$ 和 $\frac{3}{2}$ 的中間. 但是求 $\sqrt{2}$ 近似値最有系統的辦係用平常開平方的法子，得出一串十進分數，每個較前

個大一點;如是就得到一個級數為 $1, \frac{14}{10}, \frac{141}{100}, \frac{1414}{1000}, \cdots$,等.

這類"比"在希臘人的著作上,叫做"不可通約".它們從希臘時代起曾引起過許多的哲學上的爭論,並且和它們有關的種種困難也直到最近纔算解釋清楚.

我們決定將"不可通約"比歸到分數方面,同時將"整數","分數"和"不可通約數"全體看做組成我們所謂"實數"(Real number)的一類數目.我們每常將"實數"看成按大小次序排列,從零起由是漸進,位數愈進數目亦愈大,以至於無窮大.用一條線上的點,極易將實數表出.設 OX 為任意直線,一端自 O 起,延伸沿 OX 方向至

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{7}{2} & 4 & \\ \hline O & M & A & N & B & P & C & Q & D & X \end{array}$$

無窮.在線上隨便取 A 點,使 OA 表單位長;並截取長 AB, BC, CD 等,每段都與 OA 相等.如此,O 點代表數目 0,A 數目 1,B 數目 2,由是類推.事實上,任一點所代表的數目就是用單位長 OA 作標準,它從 O 點起的距離的"公量"(The measure).O 和 A 中間的點代表"眞分數"(The proper fraction)和小於 1 的"不可通約數";OA的中點代表 $\frac{1}{2}$,AB 的中點代表 $\frac{3}{2}$,BC 的

中點代表 $\frac{5}{2}$, 由是類推. 照這個方式, OX 上面每個點都代表一個"實數", 同時每個"實數"在 OX 上面都有一個點來表示.

沿 OX 的這串點,從 O 起順 O 到 X 的方向有次序的移動, 代表大小排列成一個昇位的"實數", 從零起以次遞增.

所有這類知識看起來極其簡單, 不過就照這種程度, 如果注意這些顯明的事實, 都會達到幾個有趣的觀念. 就說只代表整數的這串點, 卽 O, A, B, C, D 等點. 這裏, 有一個初始點 O, 就有一個第二定點 A; 同時每個點如 A 或 B 前後緊接總各有一個實在的點, 惟有 O 只有緊接後邊的一個點; 而且這個級數繼續以至無窮盡. 這種型式叫"整數位型" (The order-type of integers); 它的特點是除首位外兩邊都有緊接貼隣的一個. 其次將"整數"和"分數"合在一起, 剔去對應"不可通約"各比的點來觀察. 如是得到的這個羃式却大有差別. 第一項爲 0; 但是各項前後都沒有緊接貼隣的一項. 這個事實是顯而易見的, 因爲在任何兩個分數中間, 我們總能夠尋到另一個值介於兩者間的"分數". 一個最簡單的證法是將分數相加

後結果折半.例如,在 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$ 中間,就有分數 $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)$,即 $\frac{17}{24}$ 存在;而在 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{17}{24}$ 中間,又有 $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{17}{24}\right)$,即 $\frac{33}{48}$,存在;由此類推至無窮盡.因為這個性質,這個級數就叫做"緊密的"(Compact).這個級數沒有"終點"(The endpoint),任憑我們沿 OX 這條線增到無窮.我們初看起來,好像照這個方式從"分數"——通常包括"整數"在內——得到的這種級數必定同從所有"實數"——"整數""分數"以及"不可通約數"一概在內——即從所有在 OX 線上的點,得到的一樣.我們直到現在所說關於"分數"級數的一切對於全體"實數"的級數也同樣適用.但是有幾個重要的差異,我們現在須得繼續啓示,"分數"級數內剔去"不可通約數",結果有某幾種"終點"也隨同不復存在.譬如,舉 $\sqrt{2}$ 這個"不可通約數"來說.在"實數"級數內,這個數目介於所有自乘小於 2 的數和所有自乘大於 2 的數中間.但是如果限於"分數"級數而不注意"不可通約數",我們旣不能夠生出 $\sqrt{2}$,並且也沒有一個分數有照這個方式將級數分成兩部分的性質(即使所有一邊的分子自乘小於 2,而另一邊的分子自

乘大於 2). 所以, 在 "分數" 級數內, 有一處看得見的缺口, 即應該插上 $\sqrt{2}$ 的位置. "分數" 級數有這樣的缺口似乎是一件小事體; 可是任何算學家偶然遇到這樣, 都知道一羣數目的極限的偶然不在, 縱不是整個級數的數目普遍如此, 終是不小的缺陷. 要免除這種妨害, 只有向 "不可通約數" 方面求補救, 這就得到沒有缺口的一個完整的級數.

兩個級數還有其他或者更較重要的區別. 我們能夠將分數重排成一個和 "整數" 級數相似的新級數, 即, 有一個首項 (第一項), 並且每項前和後 (除首項而外) 緊隣都有一項. 我們可以將這段手續說明一下. 設所有整數, 除 0 外, 都寫成分數, 即 1 爲 $\frac{1}{1}$, 2 爲 $\frac{2}{1}$, 等; 由是將 "整數" 和 "分數" 的這個級數的項全寫成分數形式. 同時, 我們又將值相等而未約過的分數當做不同的分數; 如是, 例如, 不另外聲明時, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, 等全體當做不同的許多分數. 現在由每項的分子和分母相加結果, 將 "分數" 集成若干 "類". 爲求簡明起見, 我們叫一個分數的分子分母的這個和爲它的 "指數" (The index). 由是, 7 就

是 $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, 以及 $\frac{2}{5}$ 的"指數". 設每類中的"分數"卽是具某個特殊指數——所以也叫做"類指數" (The class index)——的所有的"分數", 現在按指數的大小, 將這些"類"排列起來. 第一"類"具"指數" 2, 它只含一個成員, 卽 $\frac{1}{1}$; 第二"類"具"指數" 3, 它的成員是 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{1}$; 第三"類"具"指數" 4 它的成員是 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{1}$; 第四"類"具"指數" 5, 它的成員是 $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{1}$; 由此類推. 我們容易看出, 任何"類"所屬的成員 (仍包括未約到最低項的分數在內) 的數目較它的指數少一. 並且, 任一類的成員都可以按次序排列: 第一個成員取分子爲 1 的這個分數, 第二個成員分數分子爲 2, 由此類推直到 $(n-1)$, 而 n 卽"指數". 如是在"指數" n 的"類"中, 各成員順次爲

$$\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \cdots\cdots, \frac{n-1}{1}.$$

前邊所舉的四"類"的成員實際就按這個次序排列. 由此, 現在我們業將全體分數按照和整數相同的一個次序, 排列起來. 這就是:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \left[\frac{2}{2}\right], \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \cdots\cdots,$$

$$\frac{n-2}{1}, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \frac{3}{n-3}, \cdots\cdots, \frac{n-1}{1}, \frac{1}{n},$$

由此類推.

現在,我們凡遇到同值的分數時候,設法將它們提出,如是就能夠免除一切的重複.在前邊所寫的最初幾項中,用方括弧圍着的這個 $\frac{2}{2}$ 是唯一未約成最低項的分數.它在前邊已經出現過,即 $\frac{1}{1}$. 因此這個數應被提出.但是殘存的這個級數仍舊性質相同,即(一)有一個首項,(二)每項都有貼鄰,(三)這個級數繼續至無窮.

我們能夠證明,整個實數級數却不能照這個方式排列.發現這個新奇事實的人是近世一個大算學家,德人佐治康托(Georg Cantor);這在算理哲學上是極重要的.我們在此實際上並已涉及"連續"(Continuity)意義和"無限"(Infinity)意義兩個大問題.

數目另一度推廣係由於容納進"演算"(Operation)的觀念的緣故;這個觀念的名稱因各人所持觀點而異,也有叫"步段"(Step)的.我們現在從一個特殊情形着手;設

有算式爲 $2+3=5$. 這是說, 我們加 3 到 2 上, 而得到 5. 注意加 3 的演算: 設用 $+3$ 來表示. 其次 $4-3=1$. 注意減 3 的演算: 設用 -3 來表示. 如是, 代替對 "實數" 本身的注意, 我們轉而注意加它們或減它們的 "演算": 代替 $\sqrt{2}$, 我們注意 $+\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$, 卽加 $\sqrt{2}$ 和減 $\sqrt{2}$ 的演算. 然後我們加上這兩種演算, 自然這一種加法與我們加數目不同. 兩種演算的和合成一個演算, 和連續施用兩種演算效果相同. 兩種演算應該照甚麼次序施用呢? 答案是, 這無關緊要, 因爲例如

$$2+3+1=2+1+3;$$

結果 $+3$ 和 $+1$ 的步驟的加法是可以互換.

算學家有一個習慣, 同一個符號好作不同而有連帶關係的用法, 這使專門考究意義的人不免迷惑, 可是在實用上却有很大的用處. 在他們的眼裏, 一個符號根本的要件是, 無論它可有種種的意義, 關於它的用法形式的定律通常應該是相同的. 按照這種習慣, 演算相加同數目相加一樣, 用 "+" 來表示. 由此, 我們能夠寫

$$(+3)+(+1)=+4;$$

左邊當中的 "+" 指 $+3$ 和 $+1$ 兩個演算的相加而言

但是從另一方面說,我們對於符號,除掉當我們實在追原意義的時候少數情形而外,都用不到如此的引經據典;因此我們將一行中的第一個"+"和括弧取消,並且絕對不使兩個"+"號疊寫.如是,前述方程式變做

$$3+1=4,$$

這個可以解釋作簡單的數值的加法,或作照前邊所寫方程式樣子表示的比較複雜的演算加法,最後或作施用"+1"演算到 3 這個數而得 4 這個數的結果.任何可能的解釋總是對的.但是在某些條件下,總可能的唯一解釋就是"演算"的解釋.其餘的解釋每不免生出無意義的結果.

這個立刻使我們發生一個問題,並且是一定早已縈迴在讀者心中的一個問題:就是,費這樣的氣力有甚麼用處呢?我們注重實用的朋友定會發生這個疑問,並且一定主張掃除所有這些腦筋中呆板的糾纏.這個問題的答案是,算學家所探求的是"普遍性"(Generality).這一個觀念重要處值得與"變數"和"式"兩個觀念相提並論,它是一切算學方法的根本.對於原理或證明又或解釋的"普遍性"方面,無論怎樣的何種限制與算學的本性相反的.

這三個觀念,"變數","式",和"普遍性"組成算學上的三元,純屬了整個學問.它們全體都是同根所生,就是同從這門科學的抽象性質發生.

現在,我們來考查何以"普遍性"的獲得與這種演算觀念的添進有密切關係.試取方程式 $x+1=3$,"解"(Solution)爲 $x=2$.在此,我們可以將所用的符號都解釋爲純粹的數目,並且就完全用不到"演算"幫忙.但是,如果 x 是一個純粹的數目,方程式 $x+3=1$ 就變做無意義.因爲 x 應該是當我們從一件事物取去 3 件事件賸餘的事物數目;根本是沒有這樣的辦法的.我們的代數式的觀念正顧到此點,只有普遍的方面又作別論.所以,我們注意與 $x+1=3$ 同式是一般的方程式.這個方程式的 $x+a=b$,它的解爲 $x=b-a$.至此,我們的困難就很顯明;因爲只有 b 大於 a 的時候,可以用這個式子作數的解釋,並且我們不能沒有限制的說 a 和 b 可以代表任何常數.換句話說,關於"常數" a 和 b 的變化程度,我們已經添上一重限制,應該隨時加以密切的注意.在這樣的條件下,實在加以引伸的算學研究一定是不可能的.每個方程式至少遇到一組限制就要無法自全.但是如果

我們現在將我們的符號解作"演算",一切限制都可以像幻術一般消滅無蹤.方程式 $x+1=3$ 供給 $x=+2$, 方程式 $x+3=1$ 供給 $x=-2$; 方程式 $x+a=b$ 供給 $x=b-a$, 這是加法或減法的一個演算,視現在的情形而異.我們用不着決定 $b-a$ 究竟表加法演算抑或減法演算,因為使用這些符號的規則在每個情形都是一樣的.

要將初等代數學用專章來討論,這已經越出我們這本書的範圍.我們現在的目的只是將形成這門科學的發展的基本觀念解說清楚.因此,對於正負數相乘相除等詳細的規則,我們都不再說明.剛纔我們說過正負數都是"演算".也曾經有人叫過它們為"步段".因此, $+3$ 是我們從 2 進到 5 所需的"步段", -3 是我們從 5 退到 2 的後向"步段".設直線 OX 被分成本章開始所說的樣

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & D' & C' & B' & A' & & +1 & +2 & +3 & \\
X' & -3 & -2 & -1 & O & A & B & C & D & E \quad X
\end{array}
$$

子.那麼, $+2$ 就是從 O 到 B 這個"步段",或從 A 到 C, 或(如果沿 OX' 向後取各分點)從 C' 到 A', 或從 D' 到 B', 以及其他與此類似的這個"步段".同樣道理, -2 就是從 O 到 B', 或從 B' 到 D' 或從 B 到 O, 或

從 C 到 A 的這個"步段".

我們可以將從 O 起一個步段達到的點,當做那個步段的代表.如是,A 代表 $+1$, B 代表 $+2$, A' 代表 -1, B' 代表 -2, 由此類推.我們將會看到,雖然前邊說過在純粹"不帶號"的實數方面,只有一邊(即沿 OX)是數目的代表;現在在"步段"方面,沿 O 兩邊伸展的整個線上每點都代表一個步段.這個是由正負數,即演算或步段,增進的較高普遍性的一個圖解.這些"帶號"(Signed)數並且是前邊所謂"向量"(這個字源自拉丁文"Veho",有我拉或運的意思)的特別情形.因爲我們可以當做一個"質點"(The particle),從 O 運到 A;或從 A 運到 B.

在前幾頁提到,注重實用的人必定不承認添進正負數會增長技巧;在這方面,我們意思係指那種非常人而言.其實,我們一面如此諷刺,一面却見得到這種人的勝利.如果必須承認事實的話,第一個使用實在"+"和"−"的符號的人就是實用家自己.他們的來源固然不十分確實,不過最可信的却是後邊的一個傳說.據說,從前德國倉庫內用粉筆在盛貨物的箱面上劃這種記號,以表較標準重量有餘或不足,這可算是它們的來源.最初提到這兩個符

號的一本書係 1489 年在萊布齊 (Leipzig) 出版.在算學上第一個使用它們的好像一個叫做史提非爾 (Stifel) 的德國算學家,即在 1544 年努來姆堡 (Nuremburg) 出版的一本書.但是德國人達到引人矚目,認爲是一種實際人物,正是距當時不久的事.古代有一首短詩說,海國交給英國人,陸國交給法國人,空國交給德國人.確實,德國人係從雲際得到"+"和"−";這兩個符號產生的觀念對於從海或從陸達到的人羣福利方面,都有極大的關係.

正負數應用的可能範圍極其廣大.如果一個方向的長度用一個正數代表,在相反方向的就用負數代表.如果有一個速度在一個方向是正,在相反方向就是負.如果沿鐘針反對方向(反鐘向)繞鐘面的一個旋轉是正,沿鐘針方向就是負.如果在銀行內一個"結餘"(Balance)是正,一個"透支"(Overdraft)就是負.如果帶玻璃棒電(Vitreous electrification)——卽"帶陽電"——是正,帶松脂棒電(Resinous electrification)——卽"帶陰電"——便是負.其實,在剛纔的情形內,帶正電和帶負電不過當做代名詞,實際上卻與其餘名詞不同.我們還可以舉出無數的例子實際方面說,正負電的觀念已經是最成功的算學技巧了

第七章

虛數

如果前章研究的算學觀念已成爲一種平凡的成就，本章研究的也一定同樣引起過普遍的注意．不過它們的成就性質已經不同，它是法國話所說的一種“失算的成就”(Succès de scandale)．不僅實際家，而且專家學者都曾對算學家專心注意這類由名字就可知是“虛的”神秘的東西，發生懷疑．在這個時候，我們應該知道，發生懷疑往常都是知識較低的一種人，其餘對於專門名詞的應用範圍却抱一種討論的態度．將“不可通約”數叫做數妥當嗎？正負數實在是數目嗎？虛數是虛幻的嗎？他們是數目嗎？——都是一些無關重要的疑問．在科學上，專門名詞都是任意派定的，好像兒童的基督記名一樣；可惜這句話却有人不大了解．還有對於這個名詞的正誤也不能毫無疑問．它們有時是審愼的，有時或是茍且的；因爲有時可以佈置

得容易記憶，或者會提示切要的觀念．但是其中根本的原則在登蒲提 (Humpty Dumpty) 的愛儷士漫遊奇境錄 (Wonderland to Alice) 上說得明白：他對她講，照他用字的方式，"我付他們小費，使他們表示我喜歡甚麼"．所以，我們對於究竟虛數是否虛幻，或對於究竟它們是否數目，用不着再來懷疑；不過應該將這個術語當做某一個算學觀念的人爲名字，而這種算學觀念就是現在我們要設法說明的主題．

這個觀念的來源在各方面都和正負數的來源相似．恰是同樣的方式，它源自"變數"，"代數式"，和"推廣"三個主要的數學觀念．正負數發生自 $x+1=3$, $x+3=1$ 以及普通式 $x+a=b$ 等一類方程式的研究．同樣道理，虛數的來源由於像 $x^2+1=3$, $x^2+3=1$, 以及 $x^2+a=b$ 等一類的方程式．恰可以照同樣的步驟來做．$x^2+1=3$ 變成 $x^2=2$, 這個有兩個解，$x=+\sqrt{2}$, 或 $x=-\sqrt{2}$. 通常將有這樣兩個交代解的意思寫做 $x=\pm\sqrt{2}$. 照前例的樣子，自然毫無問題發生．但是對於與此類似的方程式，却遇到一個難關．因方程式 $x^2+3=1$ 得出 $x^2=-2$, 根本就沒有一個正數或一個負數，自己相乘會得出一個負平方數．所

以,如果我們的符號係指平常正負數而言, $x^2=-2$ 就根本無解,同時方程式實際上也就沒有意義. 照這樣最後再取普遍式 $x^2+a=b$ 來說,我們求得這對解 $x=\pm\sqrt{(b-a)}$; 當並且只有當 b 不小於 a 時纔會有這類的解. 因此,我們不能無限制的說,"常數" a 和 b 可爲任何數目,即 a 和 b 不是,而理論上它們應該是,獨立的無限制的"變數";並且照我們繼續下去還要有無數的限制糾纏我們的工作.

所以,同樣的工作像前邊一樣等待我們來做:我們應該對我們的符號另給一個新的解釋,如是 $x^2+a=b$ 方程式的解 $\pm\sqrt{(b-a)}$ 就總有意義. 換句話說,我們需要這類符號的一個解釋,無論 a 爲正或負,使 $\sqrt{a}$ 總有意義. 自然,這個解釋必須是,所有平常的加法,減法,乘法以及除法的形式的定律都好適用;並且又必須不和我們已由使用正負數達到的"普遍性"相衝突. 實際上,它必須從一方面說,將它們當做特例包容. 當 a 爲負時,我們有用 $-c^2$ 的寫法代替,如此 c^2 就是正. 由是

$$\sqrt{a}=\sqrt{-c^2}=\sqrt{\{(-1)\times c^2\}}=\sqrt{(-1)}\sqrt{c^2}=c\sqrt{(-1)}$$

所以,如果我們能夠解釋我們的符號,使 $\sqrt{(-1)}$ 有一個

意義,我們就算達到我們的目的.所以,$\sqrt{(-1)}$ 結果曾被人看成一切虛數的主腦和前鋒.

替 $\sqrt{(-1)}$ 尋求一個解釋,較諸來解釋 -1,工作要繁重一些.實際上,雖然容易的問題差不多發生時就自然有解決,但是最初就在大算學家口中,終不說一個問題都可以解決.如像 $x^2=-3$ 的方程式,在發生的時候,簡直就被人當做無意義,棄置一旁.

然而,到十八世紀期間,它逐漸做到被人認識,或者在這個期間以前已經如此,這時候多人明白,如果能夠替這些無意義的符號派給一個解釋,必定有超越現狀以上的便利.這些符號形式的理論只要假設它們遵照平常代數的變形定律 (The algebraic laws of transformation) 就算完全;並且我們看到,只要這些符號係按照規則來使用,全體有趣的結果就都能夠獲得.許多的算學家當時對於他們的步驟的邏輯都不大清楚;並且形成一個觀念,從不可思議的方面說,無意義的符號用適當的措置能夠生出命題有效的證明.這樣的誤解不爲過小.未曾有適當定義的一種符號根本就不是一種符號;它不過是具有一個容易辨認的形狀的紙上一點墨漬.用一串墨漬,我們證明

不出甚麼，充其量無非表現有一隻禿筆和一個疏忽的寫者. 正在這個期間，“虛” 這個字辦到用於 $\sqrt{(-1)}$ 方面. 這些算學家眞正證明出來的是一羣假設的命題，而這個好像補插的空白：如果$\sqrt{(-1)}$ 以及 $\sqrt{(-1)}$ 的加法，減法，乘法和除法都有解釋，可以辦到滿足平常代數規則(例如 $x+y=y+x$, 等)，那麼也就會有這類的結果. 當然，算學家不會常常注重這個大寫的 “如果”，而把它隨時放在他們的結果的說明前面. 我們可以預料得到，這種解釋在尋求的時候比較在負數方面費力得多；同時讀者應該對初步的解釋加以密切的注意. 我們已經學過用兩個數解釋一點的方法. 由正負數幫助，我們現在能夠用一對這樣的數目，表示一個平面內任意點的位置. 因此，我們取

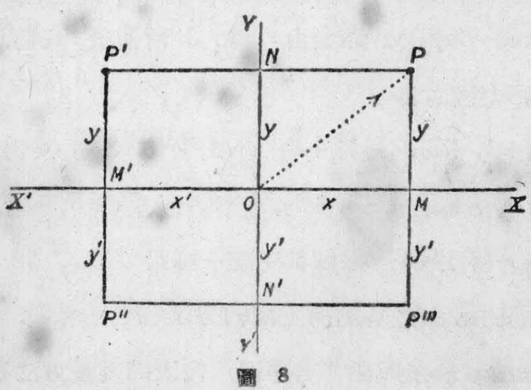

圖 8

XOX' 和 YOY' 這對直線,互相垂直,當做我們所有量度出發的"軸"(Axes). 沿 OX 和 OY 量得的長度爲正,沿 OX' 和 OY' 向後量得的長度是負. 假如一對數——設順次寫成 $(+3,+1)$,如是第一數爲 $+3$ 而第二數爲 $+1$——表示從 O 量起的兩個結果,沿 XOX' 爲第一數,而沿 YOY' 爲第二數. 如此在 $(+3, +1)$ 內(參照第九圖), 3 單位的一段長應沿 XOX' 正向度量,即從 O 到 X; 而 $+1$ 一段長應沿 YOY' 正向度量,即從 O 到 Y 同樣理由在 $(-3, +1)$ 內, 3 單位的長應從 O 量到 X', 1 單位從 O 量到 Y. 還有在 $(-3, -1)$ 內,兩段長應各沿 OX' 和 OY' 度量,而在 $(+3, -1)$ 內應各沿 OX 和 OY'. 如果我們現在叫這樣一對數爲一個"有序偶"(Ordered couple); 那麼由 1 和 3 兩個數,八個"有序偶"可以生出,即

$$(+1, +3), (-1, +3), (-1, -3), (+1, -3),$$

$$(+3, +1), (-3, +1), (-3, -1), (+3, -1).$$

這八個"有序偶"每個都支配一種沿 XOX' 和 YOY' 的度量方法,而且各個所支配的方法都各不相同.

剛纔所舉最後四個"有序偶"代表的度量方法在附圖

上業全部表現出來.長度 OM 和 ON 合起來相當 $(+3,+1)$, 長度 OM' 和 ON 合起來相當 $(-3,+1)$, OM' 和 ON' 相當 $(-3,-1)$, 以及 OM 和 ON' 相當 $(+3,-1)$. 但是由完成各矩形的辦法, 我們容易看到, P 點完全決定同

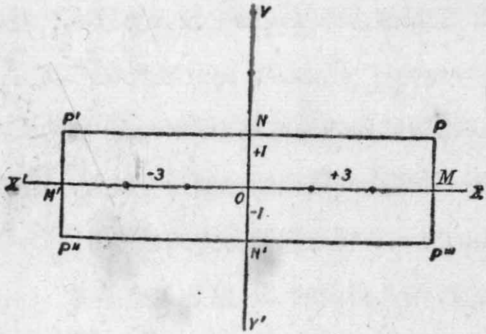

圖 9

時由 "有序偶" $(+3,+1)$ 所決定, P' 點由 $(-3,+1)$, P' 點由 $(-3,-1)$, 以及 P'' 點由 $(+3,-1)$. 更較普遍些, 如第八圖, P 線對應 "有序偶" (x,y), 在此圖內 x 和 y 兩個值都假定爲正; P' 點對應 (x',y), 在此圖內 x' 假定爲負; P'' 對應 (x',y'), 以及 P''' 對應 (x,y'). 如是, 一個 "有序偶" (x,y)——在此 x 和 y 爲任意正或負數——和對應點彼此交互決定. 在這方面, 爲方便起見, 還得增上幾個名字. 在 "有序偶" (x,y) 內, 首數 x 叫

做對應點的"橫距" (The abscissa), 次數 y 叫做這個點的"縱距" (The ordinate), 兩數相合叫做這個點的"位標" (Coördinates). "虛數" 理論業經形成的時候, 決定一點的位置用它的"位標"的這個觀念已不算甚麼新鮮的東西. 這個觀念係法國的一個大算學家和哲學家, 狄嘎兒 (Descartes) 所創建, 並且發表在 1637 年來頓 (Leyden) 出版的他的論文集 (Discours) 書內. "有序偶" 自己成爲一件事物的這個觀念則產生較遲, 而是想竭力用最抽象的方式解釋虛數的努力的結果.

我們注意, 第九圖內的 M 點是"有序偶" $(+3, 0)$, N 點是"有序偶" $(0, +1)$, M' 點是"有序偶" $(-3, 0)$, N' 點是"有序偶" $(0, -1)$, O 點是"有序偶" $(0, 0)$; 這些圖形可作爲"有序偶"這個觀念的又一表示.

另一種表示"有序偶" (x, y) 的方法是不將它當做僅是 P 點, 而將它認爲代表虛線 OP (參照第八圖). 這樣, "有序偶" 就代表從一個原點 O 所作, 有一定長度和一定方向的一條線. OP 這條線可以叫做從 O 到 P 的"向線" (The vector line), 或從 O 到 P 的"步段". 所以可見我們在本章僅將我們前面給正負數的解釋推廣. 在

我們提到"有序偶"的加法和乘法演算應有的意義時,這個用向量做解釋的方法是很有用的.

我們現在還要進一步來研究,對於 (x, y) 的 (x', y') 兩個"有序偶"的加法應該派甚麼意義給它纔相宜. 這個解釋應該(一)使加法的結果爲另一個"有序偶";(二)使演算可以互換而能 $(x, y)+(x', y')=(x', y')+(x, y)$;(三)使演算可以集合而能 $\{(x, y)+(x', y')\}+(u, v)=(x, y)+\{(x', y')+(u, v)\}$;(四)使減法是結果一律,如是當我們來決定可以滿足方程式

$$(x, y)+(a, b)=(c, d)$$

的未知"有序偶"時,答案有一個而且只有一個,可以表爲

$$(x, y)=(c, d)-(a, b).$$

取 $(x, y)+(x', y')$ 表示"有序偶" $(x+x', y+y')$, 所有這些必需條件就可以滿足. 所以,由定義我們使

$$(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y').$$

注意此地用同一個"+"號已經照算學上的習慣,有兩個不同的意義. 方程式左邊的"+"號具有我們剛纔規定的"+"號的意義;同時右邊的兩個"+"號却具有前章規定的正負數(演算)相加的意義. 實際上這兩種用法並沒

有混淆之處.

舉加法做例, 我們得

$$(+3, +1) + (+2, +6) = (+5, +7),$$

$$(+3, -1) + (-2, -6) = (+1, -7),$$

$$(+3, +1) + (-3, -1) = (0, 0).$$

現在, 減法的意義也同時替我們規定現成; 得為

$$(x, y) - (u, v) = (x-u, y-v).$$

是由 $(+3, +2) - (+1, +1) = (+2, +1),$

又 $(+1, -2) - (+2, -4) = (-1, +2),$

又 $(-1, -2) - (+2, +3) = (-3, -5).$

我們也容易看出

$$(x, y) - (u, v) = (x, y) + (-u, -v).$$

還有 $(x, y) - (x, y) = (0, 0).$

所以 $(0, 0)$ 是被當做 "零有序偶" (The zero ordered couple). 例如

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y).$$

用圖表示"有序偶"的加法, 方法非常容易.

設 OP 代表 (x, y), 如是 $OM=x$ 和 $PM=y$; 設 OQ 代表 (x_1, y_1) 如是 $OM_1=x_1$ 和 $QM_1=y_1$. 作虛線 PR 和

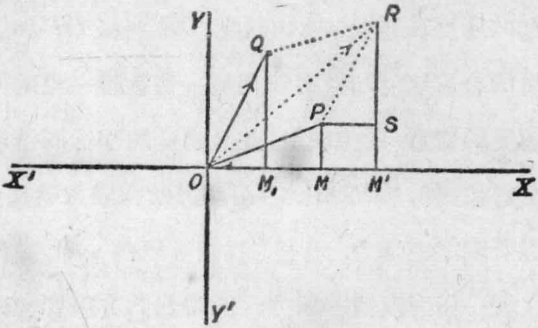

圖 10

QR 完成平行四邊形 $OPRQ$, 那麼對角線 OR 就是"有序偶" $(x+x_1, y+y_1)$. 因爲作 PS 平行 OX; 那麼顯而易見的 OQM_1 和 PRS 兩三角形完全相等. 因此 $MM'=PS=x_1$, 和 $RS=QM_1$; 所以

$$OM'=OM+MM'=x+x_1,$$

$$RM'=SM'+RS=y+y_1.$$

這樣, OR 就代表所求的"有序偶". 這個圖也可以作成使 OP 和 OQ 各在一"象限" (The Quadrant) 內.

在此顯而易見, 我們已經重新提到第六章內所講, 施用於速度和力方面的, 關於運動定律的平行四邊形定律. 我們將會記起, 如果 OP 和 OQ 代表兩個速度, 一個質點如果它以 OR 速度運動, 就叫做以一個等於兩個速度加

在一起的速度在運動. 換句話說, OR 叫做 OP 和 OQ 兩個速度的合成速度. 還有作用於一個物體--點的力也可以像速度的情形, 用線表出; 並且同樣的平行四邊形定律也完全適用, 卽, OP 和 OQ 兩個力的合成力就是由 OR 對角線所表的這個力. 由是, 我們可以將一個"有序偶"看成代表一個速度或一個力, 同時我們方纔曾經給"有序偶"加法的規則現在就代表力以及速度加法的機械學的基本定律. 算學最能引人入勝的特徵中有一個, 就是主題各部分的觀念和結果都彷彿天衣無縫一般, 彼此吻合. 在本章和前章的討論中, 我們開始只注意純正算學研究最抽象的方面; 可是到每章的後邊, 都曾經提到一切自然定律最基本的方面, 這種定律無論工程師作一個引擎的設計圖樣或者造船師計算一隻船的吃水, 都得預先就有它們放在心上. 不成問題可以說, 我們越偏重理論方面, 我們就越和實際的應用方面接近.

第八章

虛數（續）

"有序偶"的乘法定義理解方面恰與加法相同. 這種乘法的意義應該是

(一)得到的結果另是一個"有序偶";

(二)演算可以互換,即

$$(x, y)\times(x', y') = (x', y')\times(x, y);$$

(三)演算可以集合,即

$$\{(x,y)\times(x',y')\}\times(u,v) = (x,y)\times\{(x',y')\times(u,v)\};$$

(四)應該使除法結果一律［除掉"零偶"(0, 0)情形一個例外］,即當我們要決定滿足方程式

$$(x, y)\times(a, b) = (c, d)$$

的未知偶(x, y)時,有一個答案並且只有一個,我們可以表爲

$$(x, y) = (c, d)\div(a, b),\text{或}(x, y) = \frac{(c, d)}{(a, b)}.$$

（五）另外，包含有加法和乘法二者的定律，叫做分配定律，也應該得到滿足，即

$$(x,y)\times\{(a,b)+(c,d)\}=\{(x,y)\times(a,b)\}+\{(x,y)\times(c,d)\}.$$

所有這些條件（一），（二），（三），（四），（五）都可以用一個解釋來滿足；這種解釋初看好像複雜，其實却能夠用一個簡單的幾何的解釋.

由定義，我們使

$$(x,y)\times(x',y')=\{(xx'-yy'),(xy'+x'y)\} \qquad (A)$$

這是"×"這個符號寫在兩個"有序偶"中間時的意義的定義. 由這個定義可見，乘法的結果另是一個"有序偶"；還有同時使 x 和 x'，y 和 y' 互換，方程式 (A) 右邊的值沒有改變. 因此，當然滿足（一）和（二）兩個條件.（三）（四）（五）等條件滿足的證明也同樣容易，只要我們稍費一點工夫給出幾何的解釋就行. 不過在這樣做之前，我們應該先觀察一下，究竟已否達到開始一切這些工作以前預備的階段.

我們遇到 $x^2=-3$ 形式的方程式，都不能用正負實數來定它們的解. 我們隨又發現，如果能夠解釋 $x^2=-1$ 的意義，即如果能夠規定 $\sqrt{(-1)}$ 成 $\sqrt{(-1)\times(-1)}=-1$,

所有的困難就一定消滅.

現在我們再來研究三個特別的"有序偶"(註) (0,0) (1,0) 和 (0,1).

我們已經證明過

$$(x, y) + (0, 0) = (x, y).$$

另外, 我們現在得

$$(x, y) \times (0, 0) = (0, 0).$$

因此, 在加法和在減法兩方面, (0, 0) 這個偶代替初等算術和代數學內零的職務; 讀者可將前邊兩個方程式和 $x+0=x$, 和 $x\times 0=0$ 對照就明瞭了.

其次來說 (1, 0): 這個偶代替初等算術和代數學內 1 的職務. 在這些初等科學內, 1 的特徵是無論 x 的值為何, $x\times 1=x$. 如是由我們的乘法定律

$$(x, y) \times (1, 0) = \{(x-0), (y+0)\} = (x, y).$$

這樣, (1, 0) 就是單位偶 (The unit couple).

最後來說 (0, 1): 這就我們而言係 $\sqrt{(-1)}$ 這個符號的解釋. 所以這個符號應該具有 $\sqrt{(-1)} \times \sqrt{(-1)} = -1$

(註) 以後我們依照平常的習慣, 祇要可能的地方, 都略去 "+" 號; 這樣 (1, 0) 就代替 (+1, 0), (0, 1) 就代替 (0, +1).

這個特殊的性質. 如是, 由有序偶的乘法定律

$$(0,1)\times(0,1)=\{(0-1),(0+0)\}=(-1,0).$$

但是 $(1,0)$ 是單位偶, $(-1,0)$ 就是負單位偶; 所以 $(0,1)$ 就有所希望的性質. 但是, -1 應該有兩個根, 即 $\pm\sqrt{(-1)}$. 來說 $(0,-1)$; 在此重新注意到 $(-1)^2=1$ 一點, 我們得

$$(0,-1)\times(0,-1)=(-1,0).$$

因此, $(0,-1)$ 是 $\sqrt{(-1)}$ 的另一平方根. 根據這點, "有序偶" $(0,1)$ 和 $(0,-1)$ 就是 $\pm\sqrt{(-1)}$ 的有序偶的解釋. 但是某一個對應某一個呢? $(0,1)$ 對應 $+\sqrt{(-1)}$, 而 $(0,-1)$ 對應 $-\sqrt{(-1)}$; 抑或 $(0,1)$ 對應 $-\sqrt{(-1)}$, 而 $(0,-1)$ 對應 $+\sqrt{(-1)}$ 呢? 我們的答案是, 符號隨我們採取, 都完全沒有關係的.

"有序偶" 可以分成三種型式, (一) "複虛數" 型式 (The complex imaginary type) (x,y), x 或 y 都不爲零; (二) "實數" 型式 (The real type) $(x,0)$; (三) "純虛數" 型式 (The pure imaginary type) $(0,y)$. 我們現在先說這幾種型式相互的關係. 第一, 將 "複虛數" 偶 (x,y) 和 "實數" 偶 $(a,0)$ 相乘, 得

$$(a,0)\times(x,y)=(ax,ay).$$

如是,結果不過用正或負實數 a 乘 (x, y) 這個偶 (x, y) 的各項.

第二,將"複虛數"偶 (x, y) 和"純虛數"偶 $(0, b)$ 相乘,得

$$(0, b) \times (x, y) = (-by, bx)$$

在此,結果就比較複雜,最好是幾何的解釋容易了解;我們再說三個特別情形以後,就回過來說這個幾何的解釋.

第三,我們將"實數"偶 $(a, 0)$ 和虛的 $(0, b)$ 相乘,就得

$$(a, 0) \times (0, b) = (0, ab).$$

第四,我們將 $(a, 0)$ 和 $(a', 0)$ 兩個"實數"偶相乘,就得

$$(a, 0) \times (a', 0) = (aa', 0).$$

第五,我們將 $(0, b)$ 和 $(0, b')$ 兩個"虛數"偶相乘,就得

$$(0, b) \times (0, b\ ) = (-bb', 0).$$

我們現在轉過來研究幾何的解釋,最先從幾個特別情形說起.設"有序偶" $(1, 3)$ 和 $(2, 0)$,注意

$$(2, 0) \times (1,3) = (2, 6)$$

這個方程式.

在圖內(第十一圖),OP 向量代表 $(1, 3)$,ON 向量代

表 (2, 0), OQ 向量代表 (2, 6). 由是, 設 OQ 向量的長爲

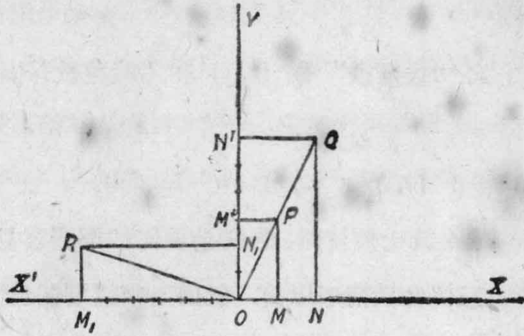

圖 11

OP 和 ON 向量的長的乘積, 又延長 (在本題內) OP 到 Q 等於所求長, (2, 0) × (1, 3) 的積就由幾何學得出. 其次, 來看 (0, 2) × (1, 3) 這個乘積, 得

$$(0, 2) \times (1, 3) = (-6, 2).$$

向量 ON_1 對應 (0, 2), 而向量 OR 對應 (−6, 2). 如此, 代表新乘積的 OR 就和 OQ 垂直並且長度相等. 注意關於 OQ 的長的定律完全與前題相同, 即, 它的長是乘在一起的這兩個向量的長的乘積; 不過現在係以沿 "縱距" 軸 OY 的 ON_1 代替沿 "橫距" 軸 OX 的 ON, OP 的方向已經被我們旋轉了九十度.

在前邊這些乘法例中, 我們都將向量 OP 看成依 ON

和 ON_1 兩個向量而變化. 我們現在將這種觀點倒轉, 並且將 ON 和 ON_1 兩個向量看成依 OP 向量而變化; 如是對於一般的方向定律的研究, 我們將可以得到一個新的線索. 關於這方面, 長度的定律仍舊不變; 合成長仍是兩個向量相乘積的長. 求 ON 延長線(卽 CQ) 的新方向, 可以使它沿從 OX 到 OY (反鐘向) 的方向旋轉, 經過等於 POX 角的一個角度卽得: 現在這種旋轉使 OQ 落在 OP 一條線上, 這不過是這個特別情形偶然有的事. 其次來注意 ON_1 和 OP 的相乘積; 求 ON_1 延長線 (卽 OR) 的新方向, 可使 ON 沿反鐘向旋轉, 經過等於 POX 角的一個角度卽得, 卽須 N_1OR 角等於 POX 角.

現在, 我們可以將乘法用幾何表示一般的規則說明如下:

OP 和 OQ 兩個向量的相乘積是一個向量 OR, 它的長等於 OP 和 OQ 的長的相乘積, 又它的方向 OR 所含角 ROX 須等於 POX 和 QOX 兩個角的和.

因此, 我們可以將 OP 向量看成使 OQ 旋轉過 POX 一個角度 (卽, ROQ 角 $=POX$ 角), 或將 OQ 向量看做使 OP 旋轉過 QOX 一個角度 (卽, ROP 角 $=QOX$ 角).

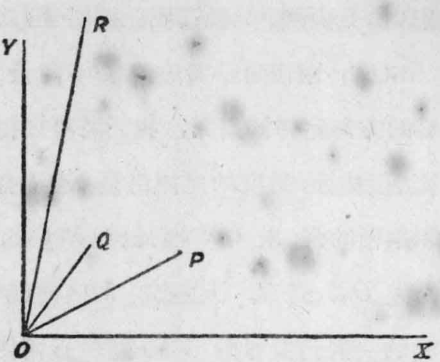

圖 12

我們並不想證明這個一般的規則，因爲這類繁重的專門算學的方法不在本書的範圍．不過現在我們很快可以明白，在乘法方面，集合定律〔見前邊寫著（三）的一段〕是適用的．先就合成向量的長來說；這是用平常實數相乘的方法得到的；所以集合定律當然適用．

其次，合成向量的方向係由單純角度的加法得到，所以在這方面，集合定律也當然適用．

乘法方面大概如此．我們現在由加法和乘法的研究，已經很快的將一平面內向量的代數學或"計算術"(Calculus)能夠樹立的情形說明，就是將這個平面內任意兩個向量能夠加或減，和能夠乘，或彼此相除等等證明．

所有這些的詳細的專門的方面因爲過於繁重，所以都未曾說到；不過我們却曾將一般的方面提述過.當我們照這個方式解釋我們的代數符號時候，這就叫做使用"虛數"或"複數".這些名詞都不過是枝節的東西，究竟選擇得適當不適當，我們認爲這還是題外之事.

我們現在得到的結果是：任何像 $x+3=2$ 或 $(x+3)^2=-2$ 的方程式現在總可用向量來解釋，並且總可替他們求出解來.在求這類解釋的時候，我們注意 3 變成 $(3,0)$ 和 -2 變成 $(-2,0)$，而 x 變成"未知"偶 (u,v)：這樣，兩個方程式就變成 $(u,v)+(3,0)=(2,0)$，和 $\{(u,v)+(3,0)\}^2=(-2,0)$.

我們現在已經完全將研究代數學原理時就要遇到的難題解決.由這種解決更進一步，這門科學在觀念方面就更比初步複雜得多.實際上，我們已經創建一種新的而且完全不同的科學，這種新學問將擔當下舊學問的一切和其他的一切工作.但是，在我們能夠用這個結果自慰之前，我們應該設法消除這時候初學的人們心中的懷疑.初學的讀者一定會有這樣的懷疑：所有這種新解釋 (New interpretation) 的發明到甚麼地方終止呢？其實我們在

代數學上,已經解釋成功的總不過可以用來解像

$$x^2-2x+4=0$$

的一種二次方程式;但是除此以外,還有無限數目的其他的方程式,例如

$$x^3-2x+4=0, x^4+x^3+2=0,$$

由此類推以至無窮. 我們辦到有一個新方程式就有一種新學問嗎?

現在如果眞有這種情形,那麼我們前邊的全部研究雖然在一些人心目中會有相當的興趣,而其實却不見一點重要了. 但是,我們知道,自從近世解析學發達以來,得這種向量計算術的幫助,每個發生的問題都能夠得到它適宜的解釋;並且能夠證明每個方程式的"未知"數都表一個向量. 所以,這門科學提到它的基本觀念,現在也算是內容完備. 它得到最後的規模正與蒸汽引擎完成同時;到將來. 縱然那種機器奇異的模型已經和更早的甲冑盔鎧並列在博物院裏面,敢相信它將仍是用思想制勝萬物的事業方面一個偉大的而且有力的武器啊.

第九章

位標幾何學

在前數章,我們已經使用到"位標幾何學"(Coordinate geometry)的方法和觀念. 現在,我們特別來將它們詳細研究下; 在這樣做的時候,我們將根據着前邊說過的幾個觀念出發. 並且,從本章起,我們要回到正負實數觀念,同時拋棄前兩章介紹到的虛數觀念.

在一個平面內,取兩個軸 XOX' 和 YOY',那個平面內任意點 P 的位置都可以用 x 和 y 一對正或負數來決定,在此(參看第十三圖),x 是長度 OM 而 y 是長度 PM; 這個觀念曾經永遠爲我們所採用. 這個觀念,表面上好像簡單,却是"位標幾何學"這門大學問的根本觀念. 它的發現在算學理論史上刻劃出一個重要的關鍵. 發現這個觀念的人是(前邊已經說過)哲學家狄嘎兒,當他一天清晨躺在榻上的時候,偶然想出這一個重要的算學

的方法. 哲學家到對算學業有透澈的認識以後, 他們在這門科學方面也不亞於別些專家, 曾貢獻過不少的最完善的觀念. 在另一方面, 我們却應該說, 除掉極少數的例外,

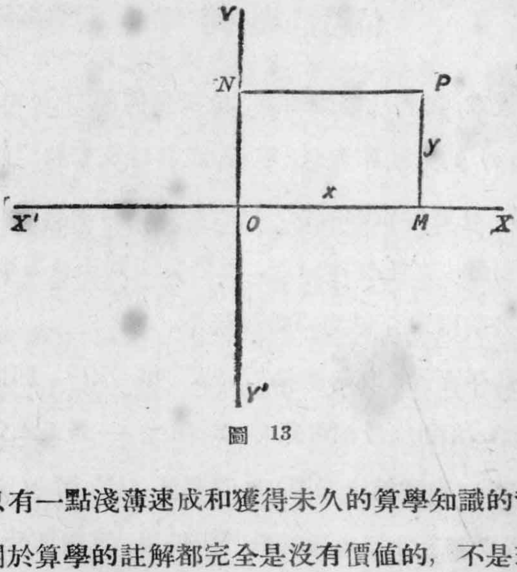

圖 13

那些只有一點淺薄速成和獲得未久的算學知識的哲學家所有關於算學的註解都完全是沒有價値的, 不是瑣碎就是錯誤. 這是一個奇特的事實; 因爲算學的根本觀念終究都是極簡單的, 差不多婦孺皆知的, 並且正包容在哲學思想的範圍內面. 大概因爲它們過於簡單纔會發生錯誤; 我們通常並不專注這類簡單的抽象的事物, 而在我們設法避免重蹈這種思想上的覆轍時候, 就是想避免一部分的

錯誤，也得需長時間的訓練的.

"位標幾何學"的發現，以及差不多同時的"投影幾何學"(Projective geometry) 的發現，在思想史上繼續證實了一個重要的事實，就是，有些最偉大的發現都是從極其現成的材料裏面做成的. 到十七世紀前後，幾何學的研究就從希臘時代算起，都已經有兩千多年的歷史. 在亞列山得里亞大學 (The University of Alexandria) 教學的歐幾里得 (Euclid) 已是紀元前 330 年左右生的人；並且他還只是將若干代以前先進們，有幾個而且具有極大的天才，的成績整理擴充. 到他以後，一代一代的算學家都在努力改進這門學問. 這門學問的進步並沒有受過何種致命的打擊. 換句話說，它的研究並不限於少數特殊的人們，事實確恰與此相反；到十七世紀時候，它已經先後受過埃及人和希臘人，阿拉伯人以及日耳曼人的注意. 而且經過這樣長久的歲月這樣複雜的人物的努力，它最重要的秘密仍舊有待於我們來發明. 學幾何學的人就是研究初步都沒有不感到缺少相當的指示的方法. 每個命題都得用很敏活的機智來證明；而證明命題眞實的一種學問就缺少科學思想最主要的條件，就是，"方法" (Method).

現在,"位標幾何學"的特點就是它第一個貢獻出"方法".算學上作遙遠的推論,就在理論方面根本也沒有多大的重要的.現在,這門科學固然已經有不少高明的方法,由這些方法對於這門科學範圍內任何題目都能夠容易得到它的消息;而其實却仍舊不算完備.一種科學的發展根本不在分量,而在觀念;同時觀念發展愈多,值得寫出的推論就愈少.不幸,算學往往受教科書內所容納的無數補充命題的妨礙,這些命題因爲過於偏重普遍眞理的特例方面,已經失去它們的重要——並且照我們曾經主張過的,普通性是算學唯一的靈魂.

其次,"位標幾何學"還表現出前邊曾經提到的算學的另一個特點,就是各科算學在發展的歷程都彼此銜接,並且共同根據相同的觀念.我們可以說,算學各個分枝都經過一個不斷的推廣的歷程,到它們變成普遍化的時候,却會彼此鎔合爲一.再則,這們科學本身的性質,它的普遍性,也是現在的根據;換句話說,現在正根據算學研究適於一切事物的普遍的眞理一個事實.因爲這種關係,"位標幾何學"的興味就在它將以空間的研究出發的幾何學同以數目的研究出發的代數學聯繫起來

現在我們無妨將這兩門科學的主要觀念追憶一下，然後再來看狄嘎兒的位標方法怎樣聯繫它們．先從代數學說起．我們為免除麻煩起見，撇開虛數，只說帶有正號或負號的實數．基本觀念就是用一個文字而不用實在數碼表示的任何數，變數，的觀念．因此，我們進一步來注意變數間的關係．舉例來說，如果 x 和 y 是兩個變數，我們可以將它們看做係用方程式 $x+y=1$，或用 $x+y=1$，或用其他無限個方式中任一個，來聯繫．這個就立刻牽涉到代數式這個觀念的應用．實際上，我們儘可想像某種有興味的關係，如是從第一個變數觀念起進到第二個數的變關係觀念．這樣，我們就將 $x+y=1$ 這個關係推廣成 $ax+by=c$ 這個關係．在此，a 和 b 和 c 都是文字，代替任何數值並且實際上它們本身就是變數．不過它們是決定變關係的變數；這種關係在決定時即使 x 和 y 幾個變數聯繫起來．如像前邊用來決定關係的 a, b 和 c 等變數都叫做"常數"，或"變常數"．照這個情形，實際是一個變數，而用"常數"這個名詞，初看起來似乎是偶然的；但其實却是很自然的．因為到我們假設 a, b, c 都已經決定以後，算學的研究就變做與 x 和 y 兩個變數

間的關係有關. 所以在對 x 和 y 一方面而言, "常數" a, b, 和 c 就是常數. 因此, $ax+by=c$ 代表一種代數式的一般的範例, 換句話說, 即代表屬於某一組的一個變關係.

其次, 我們將 $x^2+y^2=1$ 推廣成 $ax^2+by^2=c$, 或者進一步成爲 $ax^2+2hxy+by^2=c$, 又或者更進一步成爲 $ax^2+hxy+by^2+2gx+2f=c$.

在此, 重新使我們回到用各種代數式表示的變關係方面.

現在 轉過來說幾何學. 提到這門科學的名字, 立刻使我們腦海中湧現出三角形, 矩形, 正方形, 圓形等一切相互間有特別關係存在的圖形. 這些形狀的簡單性質的研究因爲向來都交給初等的緣故, 好像成爲初等幾何學的主題. 可是我們稍加思索, 就會發現這個見解的錯誤. 幾何學的知識要根據形狀來學習, 可以說對兒童是適宜的, 他們儘可以用剪刀剪成三角形, 正方形等一類的形狀. 然而, 甚麼是一個三角形呢? 它是用三條直線的三條圍成而且畫出的一個圖形.

現在, 所謂幾條線圍成空間的界限就是一個極複雜的

觀念，根本與我們在這方面希望表現簡單普遍的意思相反. 我們需要更簡單而且更普遍. 因爲受錯誤的初步觀念——這個題目初步研究時極自然的而且眞實的觀念——支配的緣故，所以這門科學的研究會在這麼悠遠的時間無甚發展. 直到狄嘎兒發明'位標幾何學"，纔算實現幾何思想眞正的簡單的目的.

代替所謂一條直線的一條，我們想像有一條兩端無盡延長的直線. 這是我們的幾何學研究所從出的這個普遍觀念. 希臘人對於這個現在爲一切近世幾何學思想的基礎的觀念，絕對不像懂得使用. 歐幾里得常認爲兩定點間所作的一段就是一條直線；並且當應該延長到這個線段以外時，總很審慎的將這段話提出敍述. 他決不想到直線是最後一個完整的實體. 這個審愼的定義和限制，以便除去不和感官直接接觸的一種無限觀念，很可以象徵希臘人在各方面的活動. 希臘式建築和嘎特式建築的區別處在此，希臘宗教和近世宗教的區別處也在此. 一個嘎特式大禮拜堂上面的尖頂以及近世幾何學上無限直線的重要二者足代表近代世界的改觀.

所以，就整個而言的直線是近世幾何學所從出的根本

觀念. 可是不久我們又遇到其他種類的線, 並且達到"完全曲線" (Complete curve) 的觀念; 在這種曲線上面, 各點都表現某種一致的特徵, 正像直線上所有的點都表現平直的特徵一樣. 例如, 在"圓" (The circle) 上所有的點都表現與"圓心" (The centre) 有一定距離的特徵; 又如一種卵形曲線的"橢圓" (The ellipse), 在這種曲線上所有的點同兩個叫做它的焦點 (The focus) 的定點的兩個距離之和都是相同的. 顯而易見的, 一個"橢圓"有一個特別情形, 卽在兩個焦點疊合爲一點的時候, 就成爲一個"圓"; 因爲這時候兩個距離的和卽是圓半徑的兩倍. 古代人已經了解圓和橢圓的性質, 當然他們所說的圓和橢圓是整個的. 譬如, 歐幾里得向來就未嘗單用圓的幾段(幾片), 當時係將它們展長來說. 他通常以爲當就整個圓來說. 不幸, 圓不是幾何學內眞正的基本線, 所以他對直線見解上的缺點可以說無有下文.

在幾何學上, 表示這個普遍的觀念, 卽線上任何點都表現某種一致的性質的一種曲線, 的就是"軌跡" (The locus) 這個名詞. 一個"軌跡"就是由所有具某種已知性質的點形成的曲線 (或面, 如果我們不限於一個平面).

對各點能夠有的每個性質，都有含所有具備這個性質的點的一種"軌跡"相應. 要研究一個'軌跡"整個的性質, 我只須觀察這個軌跡上的"任"一點或幾點. 因此, 在幾何學上, 我們又遇到"變數"這個基本觀念. 另外, 將"軌跡"分成直線, 圓, 橢圓等類的時候, 我們又發現"式"的觀念.

所以, 在代數學上, 和我們發生關係的有"變數", 變數間的"關係", 以及用代數式的觀念對關係的"分類"; 現在在幾何學上, 和我們發生關係的有"變點"(Variable points), 滿足某種條件而形成一個"軌跡"的變點, 以及用同式條件的觀念對軌跡的"分類".

由是, "位標幾何學"的本質就是證明代數關係和幾何軌跡的相合. 在代數學上, 一個平面上的點係用它的兩個"位標" x 和 y 表示, 而軌跡上任何點滿足的條件係用對應的 x 和 y 間的關係表示. 最後對可以表爲某種普遍的代數式, 如 $ax+by=c$, 的關係, 就有所有幾何條件都是同一形式的某種普遍型式的軌跡相應. 若是我們達到一個地步, 可以辦到使兩門科學間的觀念和結果全體互換. 每門使另一門解釋得更加清楚, 並且本身獲得無窮的

力量. 歷史上有若干冒險和發現的刹那, 不能不使當時的人們心理感到很大的激動——例如哥倫布 (Columbus) 當第一個看到西海岸的時候, 庇薩洛 (Pizarro) 當他凝視太平洋 (The Pacific Ocean), 佛蘭克林 (Franklin) 當電火花從他的風箏線發出的時候, 加里流當他初將他的望遠鏡轉向天空的時候. 在抽象的思想方面, 讀者也可以看到這樣的刹那, 而狄嘎兒躺在榻上發明 "位標幾何學" 的方法的一個清晨應該算內中出類拔萃的一個.

當我們已經了解 "位標幾何學" 的觀念時候, 立刻就有一個問題發生, "對應習見的幾種代數式是甚麼種類的軌跡呢?" 例如, 代數式普遍型式中最簡單的是 $ax+by=c$. 對應這個型式的這種軌跡是一條直線, 反過來說, 對每條直線, 就有一個這種型式的方程式相應. 眞正巧極, 幾何軌跡中最簡單的恰好和代數式最簡單的相應. 其實正因爲有這種幾何的和代數的簡單性普遍相應的情形, 纔使全部主題發生力量. 我們知道幾何學和代數學間的關係不是偶然的和人爲的, 而是基礎很深的和根本的; 這可算是方纔事實的根據. 對應一個 "軌跡" 的方程式叫做這個軌跡 (或者, 屬於這個軌跡) 的方程式. 有幾個直線方程

式的例可作現在的說明.

就 $y-x=0$ 來說；在此，普遍式內的 a, b 和 c 都已

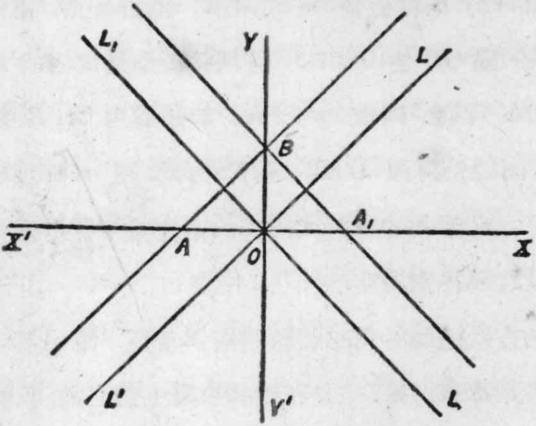

圖 14

經分別用 $1, -1$ 和 0 來代替. 這條線經過圖內的原點 O, 並且平分 XOY 角. 它卽是圖內的 $L'OL$ 線. 同時使 $x=0$ 和 $y=0$ 可以滿足這個方程式, 但是 0 和 0 是原點 O 的位標；所以它經過原點的事實是顯而易見的. 其實用同一方法也容易推廣和看出，任何經過原點的線的方程式必成 $ax+by=0$ 的形狀. $y+x=0$ 方程式的軌跡也經過原點並且平分 $X'OY$ 角：它卽是圖內的 L_1OL 線.

就 $y-x=1$ 來說：對應的軌跡就不經過原點. 所以我

們要尋它交軸的地方. 它必定截 x 軸在位標為 x 和 0 的某點. 但是在方程式內命 $y=0$, 我們得 $x=-1$; 所以這個點 (A) 的位標是 -1 和 0. 同樣理由, 這條線截 OY 軸的點 (B) 是 0 和 1. 這個軌跡即是圖內的 AB 線, 和 LOL' 平行. 同理, $y+x=1$ 即是圖內 A_1B 線的方程式; 同時軌跡和 LOL_1 平行. 由此, 用 $ax+by=0$ 和 $ax+by=c$ 形式的方程式代表的兩條線平行這個普遍的定理就容易得到證明.

我們方纔遇到的第二組軌跡極為重要, 單是這一部分就值得用專章討論. 但是在繼續來說它們之前, 我們要費一點工夫注意這方面的根本的觀念.

要決定任意點 P 的位置, 我們可以隨意選定一個原點 0, 兩個成直角的軸 OX 和 OY, 然後注意他的位標 x 和 y, 即 OM 和 PM, 即得. 由前章我們知道, P 也能夠用"向量" OP 來決定; 在此, 向量的觀念包含有一個確定的方向和一個確定的長度. 從一種抽象的算學的觀點說, 一個隨意的原點這個觀念似乎有點矯揉造作; 對於隨意作的 OX 和 OY 軸, 亦有相同的感想. 不過就算學對於宇宙間萬事的應用方面說, 我們在此正是用極簡單的符

號，將我們感官所接的世界外觀有關的最根本的事實表出．我們每個人都將我們感官所得事物的知識歸結到我們叫做"這裏"的一個來原：我們在包含整個宇宙的空間的特殊一部分內的位置是我們身體存在不可少的事實．我們想像中到可以說人們觀察所有空間內一切現象，係用一種相等的眼光，拋棄畸輕畸重的任何偏見．對於我們，這是兩樣的；我們脚面上的一頭貓，實在說起來，就比荷恩角(Cape Horn)的一回地震，或密爾基匯(Milky Way)內的一個社會的毀滅，更值得我們注意．實在要使我們的知識和我們同儕的知識內容共通，我們必須拋棄我們自己所謂的"這裏"的眞正私見．我們用進"相近這裏"(Nearly here)代替"這裏"；因此我們量哩數係從最近的城鎮的政府大廳，或從這個國家的首都出發．在測量地球的時候，科學家會假定原點在地球的中心；天文家甚至極端寬大，將他們的原點放到太陽內面去．這個原點可以算得不近，不過也許我們會取比較近的恆星內某個更適宜的點，然而用無涯的空間來相比較，那麼剛纔我們探討宇宙所取的方式實在仍只算用一個"相近這裏"的原點．

復次，位標 OM 和 MP (即，x 和 y) 對向量 OP 的

關係是有名的平行四邊形定律的一個例證，我們由完成 $OMPN$ 平行四邊形就可以看出(見十三圖).“向量” OP, 卽一個有方向的大小的觀念,是物理科學的根本觀念.任何運動物體總有一個沿一定方向有一定大小的速度；換句話說,他的速度是一種有方向的大小,一種向量.再者,一個力也有一定的大小和一定的方向.所以,當在解析幾何學內提到“原點”,“位標”,以及“向量”等觀念時候,我們所研究的正是對應物質世界基本的事實的那些抽象的概念.

第十章

圓錐曲線

當希臘的幾何學家認爲已將直線和圓所成各形比較明顯而且有趣的性質說完的時候，他們就轉變方針來研究曲線；由他們平常注意事物多出自偶然的顚撲不破的天性，“圓錐曲線”(Conic sections)，卽平面截圓錐體面所成的曲線，就變成他們專注的主題．應該享受發明這種硏究的榮譽的人是密納克穆士 (Menaechmus, 紀元前 375 年生，前 325 年歿)；他是柏拉圖 (Plato) 的一個學生，也是亞歷山大大帝師傅之一．說到亞歷山大，却是得到良好教育實惠的一個顯明的例證，因爲他另一個師傅就是哲學家亞歷士多德 (Aristotle)．我們也許揣想亞歷山大當時會覺得密納克穆士是一個笨先生，因爲據說他曾請密氏將證明做短一點．對這個請求，密納克穆士答覆說：“在鄉下到有私路甚至皇家大道；但是在幾何學內，却總

共只有一條路". 這個答覆當然很眞實, 亞歷山大聽到時, 必定能立刻了解. 但是如果密納克穆士認爲他的證法不能縮短, 那就不免錯誤; 現在如果要許多近世算學家來研究圓錐曲線性質的希臘證法, 他們都必定不免討厭萬分的. 一種科學因爲容納許多相關的觀念得到力量, 而種種力量最大的收獲實莫過於與觀念的增加相伴的證法日漸縮短的成就. 有一種算學家, 對於一個題目的觀念的迂迴屈折往往不耐: 他急望立刻達到"重要"問題的證明. 科學的歷史完全不容許他如此. 科學上亦有皇家大道; 不過首先踏上這類大道的人却是天才的人, 而不是帝王之流.

最初呈現到算學家眼裏的圓錐曲線情形如下: 設想"頂" (The vertex) 爲 V, 豎立在一個圓底 STU 上面的一個圓錐體 (參照第十五圖). 譬如, 一盞電燈的一個圓錐形狀的陰影通常就是這樣一個面的一個實例. 現在設所有經過 V 並且位置在面上的"造形"線 (The generating lines) 都向後延長; 結果就是一個"雙圓錐" (Double cone), 同時 PQR 就是和"橫截面" (The cross section) STU 相對的在 V 的另一端的另一個"橫截面". 圓錐體的"軸" (The axis) CVC' 經過所有這些圓的圓

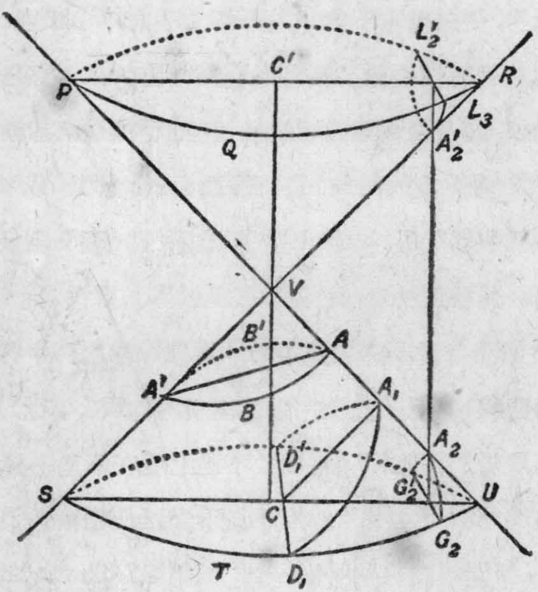

圖 15

心，並且垂直到它們的互相平行的平面．在圖內，假設位置在紙的平面背面的曲線各部分都用虛線，而在平面上或在平面前的各部分都用實線．現在，假設這個雙圓錐被不和 CVC' 軸垂直，至少或者不一定和它垂直，的一個平面所切．這樣就能夠有三種情形發生：——

(1)　這個平面或許切圓錐成一種卵形的閉曲線，如 $ABA'B'$，位置完全在兩個"半圓錐"的一個上面．在這

種情形內，平面根本不會和另一個"半圓錐"相遇.這樣一種凸線就叫做一個"橢圓"(The ellipse)；它是一種卵形曲線.這一種圓錐截面有一個特別情形，就是當平面和 CVC' 軸垂直的時候，這時候截面，如 STU 或 PQR，就是一個"圓"(The circle).因此，一個"圓"就是"橢圓"的一種特別情形

(2) 這個平面或許和圓錐的"造形"線之一平行，例如圖內曲線 $D_1A_1D_1'$ 的平面和造形線 VS 平行；這種曲線仍限於"半圓錐"的一個，不過它現在不是一種卵形的閉曲線，隨"半圓錐"造形線從頂點延長繼續伸張至無盡.這一種圓錐曲線就叫做一個"拋物線"(The parabola).

(3) 這個平面或許切兩個半圓錐，如是完全的曲線就包含兩個游離部分，或者照我們叫它們的"支"(Branches)；如圖 $G_2A_2G_2'$ 和 $L_2A'_2L'_2$ 兩"支"合成這種曲線.沒有一"支"是閉合的，每個都隨兩個"半圓錐"從頂點延長繼續伸張至無窮.這一種圓錐曲線就叫做一個"雙曲線"(The hyperbola).

因此，"圓錐曲線"(Conic section)共有三種，即"橢圓"，"拋物線"以及"雙曲線".我們容易看到，由一方面

說,"拋物線"正介於"橢圓"和"雙曲線"二者之間.它們三個形成比較特別的一類並且定能滿足一個比較特別的條件. 這三個名字明顯的出自帕加 (Perga) 的阿波洛紐士 (Apollonius, 約在紀元前 260 年生, 前 200 年歿),他著有一部關於"圓錐曲線"的有系統的論集,直傳到十六世紀,仍爲人看做典型的著作.

我們一定會立刻感到,希臘幾何學家對於這些曲線性質的研究未免過於艱巨和笨拙. 這類曲線都是平面曲線,

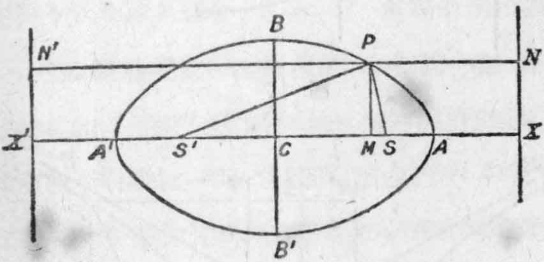

圖 16

可是他們的研究却含有用一個立體圖形透視的作法. 如此在前邊的圖內,我們實際上並未曾作補助線,可是圖形仍舊複雜得很. 這類曲線是平面曲線,並且似乎明白說,我們應該能夠解釋它們,不用越出平面的範圍而跑到一種立體形狀去. 同時,正像在這種"立體的"定義內,生出

三種情形的定義——卽，一個圓錐被一個平面切成的曲線——有一個不易的方法 所以在任何"平面的"定義內，也應該有一個支分成三種情形的方法. 它們的形狀在它們各自的平面上作出就是第十六，第十七和第十八三圖

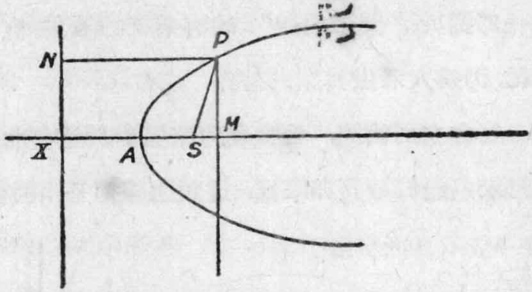

圖 17

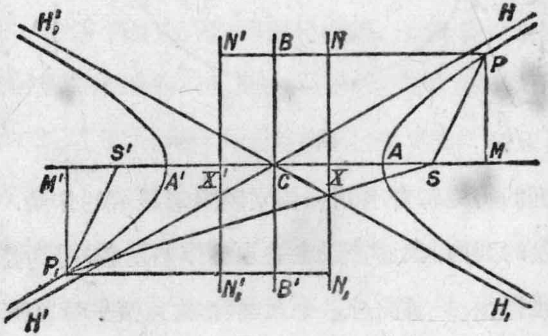

圖 18

內的曲線. 圖形內的 A 和 A' 點叫做"頂點"，而 AA' 線

叫做“長軸”(The major axis). 我們將會見到, 一個“拋物線”(參看第十七圖) 只有一個“頂點”. 阿波洛紐士(註)證出 PM^2 與 $AM\cdot MA'$ 的比 $\left(\text{即 } \dfrac{PM^2}{AM\cdot MA'}\right)$ 在“橢圓”和“雙曲線”兩種形內 (第十六和十八圖) 都永是常數, 又證出 PM^2 與 AM 的比在第十七圖的“拋物線”形內是個常數; 並且他的著作大部分就以這個事實做根據. 現在我們所做的顯然是以不越出平面範圍的那種希望的不易的定義爲標準; 不過事實上却尙未達到不易的地步.

在第十六和十八圖內, S 和 S' 兩點將值得我們特別注意一下; 還有在第十七圖內的 S 一點亦然. 這幾個點就是曲線的“焦點”(The focus), 並且是極端重要的點. 阿波洛紐士明瞭在一個“橢圓”形內, SP 和 $S'P$ 的和 (即 $SP+S'P$) 是固定的, 任憑 P 在曲線上移動終歸等於 AA'. 同理在一個“雙曲線”形內, $S'P-SP$ 這個差是固定的並且等於 AA' (P 在其一支上而言); 又 $SP'-S'P'$ 這個差是固定的並且等於 AA' (P' 在另一支上而言). 不過, 當時好像在“拋物線”形內並無與此相當的一點存在.

(註) 提到阿波洛紐士和巴布士 (Pappus), 讀者可參看拜爾的算學略史.

經過五百年後,最晚一個偉大的希臘幾何學家,即亞歷山得里亞的巴布士 (Pappus) 將這個最後的秘密發現,而完成這段重要的工作. 在第十六和十八圖內,我們看得見 XN 和 $X'N'$ 兩條線; 在第十七圖內, XN 一條線. 這些就是曲線的"準線" (The directrix), 在"橢圓"以及"雙曲線"方面每個都是前兩個,在"拋物線"方面即是後一個. 每個"準線"和它相近的"焦點"相應. 在三類曲線任何一個形內,一個"焦點" S, 以及它的對應"準線" XN 的特性爲 SP 和 PN 的比 $\left(即\dfrac{SP}{PN}\right)$ 固定不易. (在此 PN 是從 P 到"準線"上的垂線, 而 P 是曲線上的任意點). 我們現在算最後已經將希望的這幾種曲線的性質尋出, 而始終不越出平面的範圍並且在所有這三種曲線方面都是一律. 在"橢圓"方面, $\dfrac{SP}{PN}$ 這個比小於 1; 在"拋物線"方面,比等於 1; 而在"雙曲線"方面,比大於 1.

當巴布士業已完成他的研究時候,他必定自己覺得,除掉極小的擴充而外,實際上應無再可提說的材料; 如果他眞能預知一千多年科學的歷史, 當然可以證實他的這種信念. 而其實,關於這門算學眞正豐富的觀念根本却還遙

遠得很，誰都沒有猜中它們對於自然方面最重要的應用知識和研究都要限制到表面有用的方面的人們定會感到相當的刺激，試想一千八百餘年之久都只將"圓錐曲線"當做一種抽象科學來研究，除掉滿足算學方面的求知慾外毫無一點功利思想存乎其間，可是到這長時期抽象研究的結局，人們也會發現它們是體會一個最重要的自然定律必需的寶鑰.

在這個期間，完全不同的"天文學"(Astronomy)的研究也正在進步. 希臘的大天文學家托來米(Ptolemy 公元 168 年歿)在亞歷山得里亞大學發表他關於這個題目的不朽的論著，用地靜而太陽和行星等環繞地運行的見解，說明太陽和行星等所謂恆星間肉眼所見的運動. 自此以後，一千三百年間，天象觀測的數目和精確增加；結果使根據托來米假說的行星運動的解釋日漸糾纏不清. 哥白尼(Copernicus, 公元 1473 年生, 1543 年歿)指出，如果假設太陽靜止而地球和行星繞太陽運動，這些天體的運動就更可以簡單說明. 雖然他仍舊以為這些運動天然成圓形，可是較諸原來所謂的圓運動已經加上一些細小的限制. 這是 1571 年凱普勒(Kepler)誕生在德國司徒

脫嘎特 (Stuttgart) 城以前的情形. 幾何學的 "圓錐曲線" 和天文學兩門科學都經過極久遠的研究, 可是却無人想到兩者間有密切的關係. 凱普勒是一個天文學者, 但他也是一個能幹的幾何學家, 關於 "圓錐曲線" 這個題目, 在當時已算得有獨到的見解. 從前認為要使科學的研究有成, 應該用全付精力專注到極狹的範圍上去; 他可算證實這個觀念的謬誤的許多例子中之一. 新穎的觀念極容易從一種非凡的知識集錦產生——但不一定由於廣泛的知識, 但由於各種學問的方法和觀念一種透澈的了解. 我們大概記得, 達爾文 (Charles Darwin) 達到他的進化定律的見解之先, 也曾獲得讀馬爾薩斯 (Malthus) 著名的人口論 (Essay on Population) 的幫助, 這本書正討論一個不同的題目, 至少當時總有這種意見.

凱普勒說出三個 "行星運動定律" (Laws of planetary motion), 頭兩個發表在 1609 年, 而第三個又在十年之後. 它們的全文如下:

(1)　行星的軌道 (The orbit) 為橢圓形, 而太陽在焦點上.

(2)　當一個行星沿它的軌道移動時, 從太陽到行星的

半徑向量 (The raduis vector) 在相等時間內旋成相等的面積.

(3)　這幾個行星的週行次數 (The periodic time) 的平方和它們的長軸的立方成比例.

這幾個定律不過是達到觀念一個更重要的發展的一步. 牛頓想出萬有引力的觀念, 就是, 任何兩片物體都以和它們質量相乘積成比例以及和它們相互的距離平方成反比的一個力互相吸引. 這個包羅萬象的定律, 連他解成最後形狀的三個運動定律, 恰夠說明一切的天文現象.(包括凱普勒定律), 並且形成了近世物理學的基礎. 在其他的題目內, 他證出 "彗星" (The comet) 會成極長的橢圓形運動, 或拋物線形運動,或近似拋物線的雙曲線形運動. 復現的彗星——例如哈列彗星 (Halley's comet)——自然必定作橢圓形運動. 但是, 證明重力定律, 甚至提示定律的初步觀念, 不可少的一步就是聯繫行星運動和圓錐曲線理論的凱普勒定律的證明.

自十七世紀以後, 抽象的曲線理論曾經享到幾何學上兩度中興的實惠, 即 "位標幾何學" 和 "投影幾何學" 的參加. 在投影幾何學上, 基本的觀念都團聚到經過一共同

點 ("線束" 的頂點) 的若干組線——叫做 "線束" (The pencils)——的觀察方面. 現在 (參看第十九圖) 如果 A,

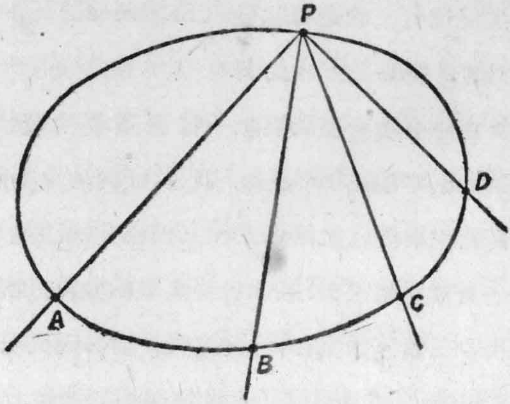

圖 19

B, C, D 爲一種圓錐曲線上任意四個定點, 又 P 爲曲線上一個變點, 這束線 PA, PB, PC, 和 PD 就有一個特別性質, 卽它的 "複比" (The cross ratio) 一定. 在此可以說, "複比" 是投影幾何學上一個基本觀念. 在投影幾何學方面, 這實卽是曲線的定義, 或者實際和定義相當的類似的性質. 我們將會看出, 在研究的長久過程中, 現在離開古老的切取一個圓形圓錐截面的原觀念已相差不可以道里計. 我們今日知道希臘人曾得到比較不大重要的一點性質; 不過在當時却應該值得注意. 現在, 在算學的成

語中,儘可將"截面"(The section)這個字去掉,因爲它根本是不大重要的.所以普通,現在都只用"圓錐曲線"(Conics)來代替"圓錐截面"(Conic sections).

最後,我們回到前章"位標幾何學"未說的地方.我們曾經問過對應普遍代數式 $ax+by+c$ 的"軌跡"的種類,並且曾經斷定它是這類平面內的直線.我們曾經看到,每條直線都有一個這種形式的方程式,並且每個這種形式的方程式都對應一條直線.我們現在要繼續研究以下普遍形狀的代數式.添上含有 x^2 和 xy 和 y^2 的幾項,這個目的就很容易的達到.由是,新的普遍式應該寫成——

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

這個代表甚麼?答案是,它通常代表一種圓錐曲線,在另一方面說,每種圓錐曲線的方程式通常都能夠做成這個形狀.判別這種方程式所表的圓錐曲線的種類,方法極爲簡易.這完全根據 $ab-h^2$ 的觀察,在此 a, b, 和 h 都是照前邊寫的"常數".如果 $ab-h^2$ 是一個正數,曲線就是一個"橢圓";如果 $ab-h^2=0$,曲線就是一個"拋物線";如果 $ab-h^2$ 是一個負數,曲線就是一個"雙曲線".

例如,命 $a=b=1, h=g=f=0, c=-4$. 我們由是得方

程式 $x^2+y^2-4=0$. 我們容易證明,這是圓心在原點而半徑長 2 單位的一個圓的方程式. 現在 $ab-h^2$ 變成 $1\times1-0^2$, 卽 1, 所以是正. 照這個情形, 所以說圓是一個橢圓的一種特別情形. 由此推廣, 任何圓的方程式可以寫成 $a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$ 這個形式. 因此 $ab-h^2$ 變成 a^2-0, 卽 a^2, 這當然是正. 根據這個理由, 所以一切圓都滿足橢圓的條件. 一個拋物線的方程式的普遍式是

$$(dx+ey)^2+2gx+2fy+c=0,$$

如是二次項能夠寫成一個完全平方. 因為自乘後, 我們就得

$$d^2x^2+2dexy+e^2y^2+2gx+2fy+c=0;$$

如是兩式相對照, $a=d^2, h=de, b=e^2$, 所以 $ab-h^2=d^2e^2-(de)^2=0$. 因此, 自然滿足本題的必需條件. 方程式 $2xy-4=0$ (在此 $a=b=g=f=0, h=1, c=-4$) 代表一個雙曲線. 因為 $ab-h^2$ 這個條件變成 $0-1^2$, 卽 -1, 這是一個負數. 在方程式的普遍式內, 有幾個特別情形, 我們立刻會看出不是圓錐曲線. 常數選擇得適當, 我們能夠使這個方程式代表兩個直線. 現在, 兩條相交直線恰可以說屬於希臘所謂的圓錐曲線範圍內. 因為, 就前邊雙圓錐的圖

形說，我們將可看到，經過頂點 V 的幾個平面切圓錐成相交在 V 的一對直線．將一個圓柱體看做一個圓錐體的一種特別情形，兩平行直線的情形就也可以包括．因爲，這時候一個平面如和圓柱體相切並和它平行時，那就會切成兩條平行的直線．無論古代的希臘人曾否允許這些特別情形可以叫做圓錐曲線，但是它們實際上却包括在二次普遍代數式代表的曲線各類中．這個事實是值得注意的；因爲近世算學的特徵是，將所有從前應受特別待遇的特殊情形都包容在普遍式中間．這正由於它對普遍性的追求．

第十一章

函數

在普通生活方面，也曾經照算學上的情形，採用過"函數"(The function)這個名詞．例如，"他的體質是他消化力量的一個函數"，所用這個名詞意義正和算學上一樣．它的意思是，能夠規定出一個公式，只要讀者知道他的消化力量怎樣，這個公式就會告訴出他的體質．所以，一個"函數"的觀念極為簡單，我們須注意算學上怎樣使用它到變數方面就足夠了．我們先來舉幾個具體的例證：如果一列火車曾以每小時二十哩的速度在開行，若干小時——設為 t 小時——後所行的距離(s 哩)得為 $s=20\times t$；s 就叫做 t 的一個函數．又 $20\times t$ 就是 s 恆等時 t 的函數．如果約翰長湯麥一歲，那麼，湯麥 x 歲時，約翰的歲數(y 年)得為 $y=x+1$；而 y 就是 x 的一個函數，即是函數 $x+1$．在這些例中，t 和 x 在它們出現的函數

內叫做這個函數的"主變數" (The argument). 因此, t 是函數 $20\times t$ 的"主變數", 而 x 是函數 $x+1$ 的"主變數". 如果 $s=20\times t$, 及 $y=x+1$, 這時候的 s 及 y 就叫做 $20\times t$ 及 $x+1$ 各函數的"值" (The value).

現在來說普遍情形: 我們可以用兩變數間的一個關係來做算學上一個函數的定義; 這兩個變數一個叫做函數的"主變數", 而另一個叫做函數的"值", 無論派給"函數的主變數"甚麼值, "函數的值"等於甚麼值總可以明白決定. 反過來說就不一定實在, 就是, 函數的值定出時, 主變數未必也可以明白定出. 主變數 x 的其他函數如

$$y=x^2, y=2x^2+3x+1, y=x, y=\log x, y=\sin x.$$

在這羣函數中, 只要讀者稍懂得一點代數學和三角學, 就算最後兩個, 都極易了解. 不過現在純粹用它們來做譬喻, 詳細的說明將在下文提到.

在此, 我們雖然已經將一個函數普遍的定義說出, 而提述的却只是一些特別的函數. 但是算學, 與它普遍的進行方法相符, 却係用符號來將任何函數的普遍觀念表出. 這樣, 對於任何 x 的函數, 就寫做 $F(x), f(x), g(x), \phi(x)$, 等, 在此"主變數"放在括弧內, 而在括弧前面附加 F,

f, g, ϕ, 等一類文字來替代函數的意思. 這種記號有它的缺點. 若是, 它明白和單個文字代表變數的規定抵觸; 因爲現在附加在一個括弧前面的 F, f, g, ϕ, 等, 係代表變函數. 當然容易舉出許多例子, 都可以僅憑常識和上下文的意思來分別. 免除混淆的一個法子是用希臘文字 (如前邊的 ϕ) 代表函數; 另一個法子是專用 f 和 F (函數一字的首字母) 代表函數這個字, 如果尚須表示別個變函數, 就取相鄰的一個字母, 如 g.

有了這些說明和注意, 我們寫 $y=f(x)$, 就指 y 是主變數 x 的某個未定函數的值; 這裏的 $f(x)$ 可以代表 $x+1$, x^2-2x+1, $\sin x$, $\log x$, 或只 x 自己, 等式. 不可少的一點是, x 爲已知時, y 就由此完全決定. 我們對於這個觀念的普遍性, 應該在先弄清楚. 這樣在 $y=f(x)$ 內, 如果我們擇定 $f(x)$ 的意義係 x 爲一整數時, $f(x)$ 爲零, x 有其他值時, $f(x)$ 爲 1, 我們可以定出 $f(x)$ 的值. 因此, 設 $y=f(x)$, 同時照這樣擇定 f 的意義, y 就按照 x 的值爲整數或否等於 0 或 1. 由是 $f(1)=0, f(2)=0, f\left(\frac{2}{3}\right)=1$, $f(\sqrt{2})=1$, 等. 根據一個函數的普遍定義, 將 $f(x)$ 的意義這樣規定可以得出主變數 x 的一個完善的函數.

一個函數因為究竟只算是兩變數間的一種關係，所以也像別些關係一樣，可以用一種圖形，其實就是用位標幾何學的方法，來表示．例如，第二章內第二圖是函數 $\frac{1}{v}$ 的圖形，這裏的 v 是主變數而 p 是函數的值．在這個例中，作的圖形只有正的 v 值，因為第二章所說的物理應用只有正的 v 值時纔有意義．其次在第九章的第十四圖內，AB 線的全長，兩端無限延長，是函數 $x+1$ 的圖形，這裏的 x 是主變數而 y 是函數的值；又在同圖內，無限的 A_1B 線是函數 $1-x$ 的圖形，而 LOL' 線是函數 x 的圖形，這裏的 x 也是主變數而 y 是函數的值．

這些用簡單代數公式表示的函數都適於用圖表來代表．但是對於某些函數，這種表示法如無一個詳細的解釋一定最易導入歧路，或者甚至會不可能．如此，就剛纔說過的函數來觀察，這個函數除掉它的主變數 x 為整數，即 $x=0$, $x=1$, $x=2$, 等它有零值外，其餘所有 x 的值都使它有值 1．在圖形上，它應該成 ABA' 直線．與 XOX' 軸在 1 單位長的距離平行．不過對應 1, 2, 3, 4 等主變數 x 的值的 C_1, C_2, C_3, C_4, 等點應該刪去，代替它們的應該在 OX 軸上取 B_1, B_2, B_3, B_4, 等點．我們容易尋出圖形

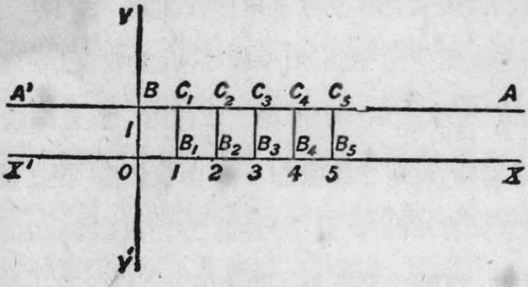

圖 20

表示不僅不方便而且不可能的函數. 不要圖表幫助的函數在高等算學上極爲重要, 不過我們目前却用不着提說許多.

"連續函數" (The continuous function) 和 "不連續函數" (The discontinuous function) 是函數最重要的兩大分野. 所謂 "連續函數" 就是當它的值只隨主變數逐漸改變時候; 如果它的能夠突然改變, 那就叫做 "不連續的". 因此, 在第九章第十四圖內, 直線圖形代表的兩個函數 $x+1$ 和 $1-x$ 就是 "連續函數"; 又如在第二圖內, 函數 $\frac{1}{v}$ 如果只要正的 v 值, 也是 "連續函數". 但是如本章第二十圖所代表的函數却是 "不連續的", 因爲在它的主變數 $x=1, x=2$, 等值的地方, 它的值都突然改變.

現在我們就五官接觸的自然界, 舉幾個函數的例證, 藉

此說明"連續"(The continuity) 和"不連續"(The discontinuity) 實在的情形. 設想一列火車從甲站沿鐵路線進行. 在這條鐵路上, 順次爲乙丙等站. 設 t 是這列火車從甲站已經開行的小時數, s 是所經過的哩數. 這時候, s 就是 t 的一個函數, 也就是對應變主變數 t 的變值. 如果我們知道這列火車開行的情形, 那麼只要隨便派給 t 一個特別值, 我就立刻知道 s 的值. 現在, 不成問題, 我們可以大膽說, s 是 t 的一個連續函數. 如果我們能夠連續將火車從甲站開到乙站, 而以後竟不需一點時間, 會火車在丙站出現, 這樣就不可以說是"連續". 這個觀念拿到我們計算裏面太過希奇: 它想得到的竟像天方夜譚內的材料; 而且就在那些古話中, 也罕有想到明白的運動不連續的情形, 它們充其量不敢超過極端"非常速"的範圍. 但是"非常速"並不和自然界所保持的偉大的運動連續定律抵觸. 若是光每秒約以 190, 000 哩速度運動, 從太陽來到地面需七八分鐘; 但是雖有這樣高的速度, 它所經過的距離總是時間的一個"連續函數".

說到一個物體的速度總是時間的一個連續函數一層, 就沒有前述這樣明白. 設想任意 t 時後的火車, 它以某個

確定的速度在運動,設每小時 v 哩,這裏火車停在站上時 v 就是零而火車後退時 v 就是負.現在我們可以很快的承認,在一列龐大厚重的火車方面 v 不能突然改變它的值的.這列火車當然不能夠從上午 11 時 45 分到正午係以每小時四十哩的速度在開行,而突然不經過一點時間就變成以每小時五十哩的速度駛行.我們立刻承認,速度的改變應是一種逐漸的變遷.但是有些突然的變化又怎樣解釋呢?假設兩列火車相碰;或者再說小一點,假設一個人踢一只足球.當然在我們心目中,好像足球突然開始運動.這樣在速度例中,我們的感覺並不背它是時間的一個不連續函數的觀念;因爲在我們心目中,這列火車是從乙站頃刻間移到丙站.實際上,如果運動定律,根據所謂質量的見解,實在,宇宙間就不會有不連續速度這種事.按照運動定律,任何在我們心目中好像不連續的速度改變,都應該認爲是一種逐漸的改變,不過太快以致我們覺察不出罷了.然而遽然概括一切說,宇宙間沒有不連續的函數,那也未免過於燥率.一個人相信倫敦和巴黎間水平面上陸地的平均高度是從倫敦起算的距離的一個連續函數,在杜佛 (Dover) 附近莎士比亞絕巖 (Shakespeare's

Cliff) 頂點夜行, 如仍舊夢想密基匯似的坦途, 那到知道應該注意科學的結論來改變他的觀念時, 已經葬身魚腹了.

就在最簡單的代數公式中間, 我們都很容易尋出一種"不連續函數". 例如, 取 $y=\frac{1}{x}$ 的函數, 這個函數就是前邊所說的 $p=\frac{1}{v}$ 這個形狀, 而 v 係限於正值. 但是現在設 x 有任何正值或負值. 這個函數的圖形如第二十一圖內所

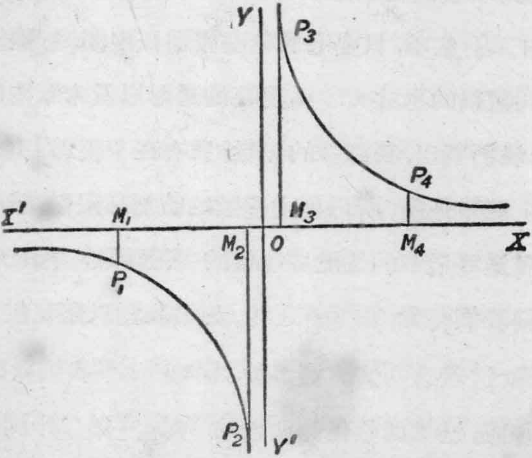

圖 21

示. 假設 x 連續改變, 自一個大的負值, 經過一羣絕對值遞減的負值直到 O 為止, 然後再經過一羣遞增的正值.

如是，設一個運動點 M 代表 XOX' 上面的 x，M 從 XOX' 軸的極左端移動，陸續經過 M_1, M_2, M_3, M_4，等．函數方面的對應點是 P_1, P_2, P_3, P_4，等．我們容易看到，在 $x=0$，即在原點 O，有一個不連續點．因爲在原點負的（左）一端，這個函數的值變成無限的大，但總是負；而在正的（右）一端亦然，但總是正．所以，我們取 M_2，M_3 無論怎樣的小，在 M_2 和 M_3 的函數的值中間總有突然的一跳．其實這個情形有一個特點，極爲明顯；我們所取 M_2 和 M_3 愈小，只要它們包圍原點在中間，那麼它們間函數的值跳的也益大．由現在的圖形以及本章內的第二十圖，我們看出，在許多的函數，只有在"絕點"(Isolated point) 纔不連續，所以對主變數的值加以限制，我們可以得到就這些遺下的值說是連續的一種函數．因此從第二十一圖我們得知，在 $y=\frac{1}{x}$ 內，如果我們只限正值並且除去原點，這就有一個連續函數．同理，如果我們只限負值，不算原點，這個函數仍是連續的．其次，第二十圖內表示的函數在 B 和 C_1 間，C_1 和 C_2 間，C_2 和 C_3 間，等是連續的，每個情形內總不算兩端的兩點．然而我們也容易尋出在所有的點都是不連續的函數．例如，設想一個函

數 $f(x)$, 當 x 是任何分數時 $f(x)=1$, 而當 x 是不可通約數時 $f(x)=2$. 這個函數在所有各點是不連續的.

最後,我們要將前邊所說的"連續性"定義,更爲詳細的說明一下.我們說過,一個函數當它的值只隨主變數逐漸改變時,這就是連續的,如果突然能夠改變它的值,這就是"不連續的".這一種定義其實只能使我們算學的先輩滿意,却不能夠使近世的算學家滿意.我們值得費點時間來注意它一下,因爲當我們了解近世對它反對的意見時候,我們將先對近世算學的精神有相當的認識.現在正確的記載中間都不再容許像"逐漸的"那種囫圇晦澀的字樣,這是新舊算學的根本區別.近世算學只准記載,定義以及證明專門使用關於數目,大小以及變數的幾個簡單的觀念,而且這幾個觀念卽是構成這門科學的基本東西.在兩個數中間,這個可以大於或小於那個;這個也可以是那個的倍數;但是兩個數間却沒有"逐漸"(The graduality)的關係,因此這個名詞是不容許的.初看起來,似乎現在的見解過於拘執.不過我們對於這種批評,也有兩個解釋.第一層,在十九世紀前半期間,有些大算學家,特別是瑞典的阿倍耳(Abel)和德國的汪爾斯特拉士(Weierstrass), 都感到照舊法隨便陳敍算學, 大部分全是錯誤. 瑪可萊 (Macaulay) 在所著論培根 (Bacon) 的文章中, 將算學的正確和哲學的不正確兩相對照; 並舉一個修辭學的例證, 他說 "從來對泰勒爾定理 (Taylor's theorem) 未曾有人反對". 不能夠說, 這一個例證舉得不當. 因爲, 我們如果將英國和這篇文章同時出版的算學教科書分析一下, 就會相信泰勒爾定理的記載和證明算得其中最正確的. 所以, 近世算學所迫切希望的精密對於正確是必需的. 第二層, 它對於研究也是必需的. 它增進思想的清晰, 結果並且增進思想的勇氣以及觀念新的種種發展. 當最初的記載不清楚而且不齊整時候, 在以後思維的各階段中, 常識就不得不參加來限制應用和說明意義. 現在, 在創造的思維方面, 常識是一種不良的導師. 第一可以批評的地方是, 它將使新觀念和舊觀念無從分辨. 換句話說, 它只能有阻礙創作的作用.

在我們未說精密的連續定義 (卽如應用到函數方面的) 之先, 我們要將數目間沒有 "逐漸" 的關係存在這句話注意一下. 或許有人要問, 一個數不能比另一個數微大一點呢? 或者換一句話說, 兩個數中間的關係不能細微嗎? 整

個的意見是，在抽象的方面，撇開某種隨意假定的應用，就沒有像一個大數或一個小數的這種東西．一百萬哩在一個天文家觀測恆星的時候是一個小的哩數，可是一百萬鎊却是一筆大的年俸．還有，四分之一作善舉在個人進項上是一個大的分數；但是餘賸的四分之三留供私用，却只算一個小的分數．關於這類抽象意義的大小不能抽象的應用到數目的例證，實在不勝枚舉．我們可以說兩個數這個較那個大或小，但是却不能不特別聲明任一數大或小的特殊情形．所以，我們現在的工作是替"連續"下定義，而不要說到方程式的值有一個甚麼"小的"或"逐漸的"改變．

為要實現這個希望，我們先給幾個觀念一個名字；在我們說到"極限"(Limits) 和"微積分"(The differential calculus) 的時候，這幾個名字也有很大用處．

一個函數 $f(x)$ 的主變數 x 的值的一個"間距"(The interval) 就是介於主變數某兩個值間所有的值．例如，$x=1$ 和 $x=2$ 中間的"間距"包括所有介於 1 和 2 中間的 x 能夠獲得的值．但是一個"間距"的臨界數却用不着是整數．一個主變數值的間距"含有"(Contains) 一

個數目 a, 就是當 a 爲間距的一分子時候. 例如, 1 和 2 中間的間距含有 $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{4}$ 等是.

一組數在一個"標準" (Standard) k 內漸近一個數 k, 就是指在 a 和組內各數的差都小於 k 的時候而言. 在此, k 是"近算的標準" (The standard of approximation). 這樣說, 3, 4, 6, 8 這組數就算在標準 4 以內漸近 5 這個數. 在這個情形內, 4 這個標準並不是可能選擇的最小者, 這組數也在 3.1 或 3.01 或 3.001 等任一標準內漸近於 5. 再者, 3.1, 3.141, 3.1415, 3.14159 等數在標準 .032 以內漸近於 3.13102, 並且在較小的標準 .03103 內也有這個情形.

一個間距和在一個標準以內漸近於一個數目, 這兩個觀念極其容易; 卽使有點困難, 也只是因爲它們外表好像過於平常所致. 但是, 到結合上緊接的一個數的"貼鄰" (The neighbourhood) 的觀念, 這時候, 它們就成爲近世算學理論的重要基礎. 某件事物對於一個函數 $f(x)$ 在主變數 x 的值 a 的貼鄰是眞實, 這句話作甚麼解釋呢? 這就是我們現已辦到實現精密二字的基本觀念.

一個函數 $f(x)$ 的値叫做在"a 的貼鄰" 有一個特徵,

當我們能夠尋出某個間距：(一) 它含有 a 而不當做是一個"終點"(The end-point),(二) 函數對於間距內除 a 外的主變數所生的值都具有這個特徵. 函數對於主變數 a 所生的値 $f(a)$ 可以有或者可以無有這個特徵. 關於 a 的貼鄰的記載並沒有規定這一點任何情形.

例如,假設我們取 x^2 這個特別的函數來說. 現在,'在 2 的貼鄰內', x^2 的值都小於 5. 因爲我們能夠尋出一個間距,譬如從 1 到 2.1,(一)含有 2 而不當做一個終點,(二)對間距內 x 各值, x^2 小於 5.

現在,再結合上前邊所述的兩個觀念,我們就明瞭,說'在 a 的貼鄰內' 函數 $f(x)$ 在'標準 k' 以內漸近於 c 的意義. 這句話的意義是,我們能夠尋出某個間距,(一)含有 a 而不當做一個終點,(二)對間距內除 a 外的 x 值,所有生出來的 $f(x)$ 的值與 c 相差較 k 爲小. 例如,在 2 的貼鄰,函數 $\sqrt{x}$ 在標準 .0001 以內漸近於 1.41425. 這是眞實的：因爲 1.99996164 的平方根是 1.4142, 而 2.00024449 的平方根是 1.4143,因此,在 1.99996164 到 2.00024449 的間距內(正含有 2 而不當做一個終點),函數 $\sqrt{x}$ 的值全體都在 1.4142 和 1.4143 中間,而且所以

每個和 1.41425 的差數都小於 .0001. 在這個例中，如果我們高興，儘可以設定一個比較小的漸近標準，即如 .000051 或 .0000501 是. 再取另一個例來說，在 2 的貼鄰內，函數 x^2 在標準 .5 以內漸近於 4. 因爲 $(1.9)^2=3.61$ 和 $(2.1)^2=4.41$，如是就尋出所求的間距從 1.9 到 2.1，含有 2 而不當做一個終點. 由這個例子，我們看出，說一個函數 $f(x)$ 在一個數 a 的貼鄰與說 $x=a$ 時 $f(x)$ 的值各有不同. 我們須得設出一個 '間距'，使我們所說在其中都是眞實的. 所以，只是 $2^2=4$，我們並不能就說在 2 的 '貼鄰' 函數 x^2 等於 4. 這個說法一定是不眞實的，因爲不能夠設出有所求的性質的這種間距. 還有 $2^2=4$，也不能使我們就可以說在 2 的 '貼鄰' 函數 x^2 在標準 .5 以內漸近於 4；雖然實際上，我們剛纔證明過這個說法還是眞實的.

如果我們了解前邊這幾個觀念，我們就了解近世算學的基礎. 我們以後還要在專論 "級數" (Series) 的一章，以及專論 "微分" (The Differential Calculus) 再行說到. 在目前，我們預備來替 "連續函數" 下個定幾. 一個函數 $f(x)$ 在它的主變數的一個值 a 是 "連續"，即當在 a 的

貼鄰它的值在每個近算的標準以內漸近於 $f(a)$ (卽漸近於它在 a 的值).

這是說, 無論標準 k 怎樣擇定, 在 a 的貼鄰 $f(x)$ 在標準 k 以內漸近於 $f(a)$. 例如, x^2 在它的主變數值 2 是連續的: 因爲無論 k 怎樣擇定, 我們總能夠尋出一個間距, (一) 含有 2 而不當爲一個終點, (二) 對於間距內的主變數, x^2 的值在標準 k 以內漸近於 4 (卽 2^2). 因此, 假設我們擇定標準爲 .1; 現在 $(1.999)^2=3.996001$, 和 $(2.01)^2=4.0401$, 而這兩個數和 4 的差都小於 .1. 由是在 1.999 到 2.01 的間距內, x^2 的值在標準 .1 以內漸近於 4. 同樣, 隨我們高興, 對任何其他的標準, 都能夠設出一個間距.

就火車的例來說. 當火車經過揚旗的時候, 他的速度是連續的: 如果我們高興派定怎樣的速度 (譬如說每小時百萬分之一哩), 在經過的瞬間前後, 總能夠尋出一個 "時距" (The interval of time), 凡在這個時距內所有的瞬間, 火車速度與火車經過揚旗的速度相差小於每小時百萬分之一哩; 無論改用其他速度來代替每小時百萬分之一哩, 情形都是一樣的.

第十二章

宇宙的週期性

支配着整個宇宙間一切的就是週期性(The periodicity)的事變，換句話說，也就是彼此極相類似的，差不多可以叫做同一事變的循環的，接續不斷的事變．地球自轉生出接續不斷的晝夜．其實，無論我們將一晝夜的定義下得怎樣抽象，不算偶然的現象在內，每個晝夜都和以前的各晝夜不同．但是如有一個充分抽象的一晝夜的定義，那麼兩天中間性質的區別就變得薄弱並且與實際不生影響；這時候，每天都可以認為是地球一度自轉現象的一回循環．再者，地球繞日的徑路引起每年季節的循環，並且在所有宇宙的演變方面，佈置着別種週期的關係．另一種比較不大重要的週期性事實可以從月球表面的盈虧看到．在近世文明的生活上，因為月球的光不是自發的，所以這些盈虧現象並無多大重要，不過在古代時候，在炎熱如焚以及

天際澄淨的天氣，人類生活顯然大半要受到月光有無的影響．所以，我們劃分星期和月份的方法，以及它們連帶有關的宗教儀式，會從悉利亞 (Syria) 和美索玻達米亞 (Mesopotamia) 普及到全歐民族間，固然觀測月球盈虧的還有許多旁的國家的．但是，月球週期性對於地球歷史上最有影響尙不是它的明暗盈虧，而是與它有連帶關係的潮汐．

我們身體的生活根本是週期的．支配人身的就是心臟的跳動，和呼吸的循環．其實，預先假定週期性，對於我們眞正的生活觀念，是不可少的．我們如果不能夠說"這已經在從前遇過"，我們就不能夠想像宇宙演變的一個過程．經驗爲行動之母的整個見解一定不存．人們一定總覺得自己在新的環境中間，與過去歷史的陳蹟根本不同．將時間當做數量來測度的方法一定不存．事變的經過仍舊可認爲連貫的一串，有的在前而有的在後．不過，我們現在却要比這種認識更進一步．我們不僅能夠說，A, B, C 三件事變按着這個次序出現；並且能夠說，A 和 B 出現間的時距長爲 B 和 C 間的兩倍．現在，時間久暫與觀察中間曾有的自然循環次數有關．按照我們所指循環的

種類, 我們可以說 A 和 B 間的時長是這麼許多天, 或這麼許多月, 或這麼許多年. 其實, 在文明的初期, 這三種計時的方式確各有不同. 在開化或半開化的民族中間, 將它們鎔合成一種銜接的度量, 曾經成爲最初科學的工作之一. 我們應該知道這種工作的全體範圍. 我們不僅應該確定某一年的日數 (例如, 365.25····); 並且應該先確定繼續數年內都有相同的日數. 我們能夠想像週期性存在的一個世界, 而且沒有兩個是銜接的. 有些年代會有過 200 天, 又有些年代會有過 350 天. 確定許多較重要的週期廣泛的一致性是自然科學的第一步工作. 這種一致性並不是由抽象的直覺的思維定律得來的; 它純是經驗保證的宇宙一種觀測得到的事實. 實際上, 因爲它根本不是一個必要的定律, 甚至它還不大眞實. 每種情形都有歧異的地方. 有些例子, 這類歧異的地方到容易觀測, 所以非常顯明. 又有些例子, 要使它們看得見, 需有最精細的觀測和天文學上的準確. 廣義說, 一切與活體有關的循環現象, 如像心臟跳動等, 比較其餘的循環現象變化迅速. 最顯着的安定的循環象——所謂安定, 卽指與非常準確的意義相符而言——就是與地球整個的運動有關的那些, 以及

與類似的天體運動有關的那些.

所以，我們假定這些天文的循環現象表現出相等的時距. 但是對精細的天文觀測探查的它們的差異，我們怎樣應付呢? 顯然，我們不得不任意假定，這些組現象有一兩個表現出相等的時間——就是，或者所有的日都長短相等，或者所有的年都長短相等. 事實並不是這樣的：相當的假設應該做，不過天文家決定時間的度量所根據的假設是，由證明證實運動定律是正確的. 在說明這個怎樣做之先，我們應該知道，將時間度量的確定工作交給天文家，向來都說是由於他們注意循環現象安定的一致性的緣故. 如果在人體表現的循環現象看到這卓越的一致性，我們自然會看到醫生較準我們的鐘表的事實.

在說到運動定律怎樣和這方面發生關係之先，讀者應該認識，兩種不一致的計時法將使同一物體生出不同的幾種速度. 例如，假設我們規定一小時為一日二十四分之一，取一列火車以每小時二十哩的等速度開行二小時的情形來說. 現在，另根據一個大不相同的計時法，假設它使第一小時有第二小時的兩倍長. 那麼，按照這個另外的計時法，火車的開行被分成兩部分，在每個部分，它曾經

行過相同的距離,就是,二十哩;但是第一部分時間相當第二部分時間的兩倍.因此,火車的速度已經不是均匀,並且平均第二個時間內的速度爲第一個時間內的兩倍.這個就有個問題發生,究竟火車已經在等速行駛呢?抑或完全與我們所取時間的標準無關呢?

現在,爲迎合所有地球上平常生活的目的,各種天文的循環現象可以看成是絕對的一致;另外再假定它們的一致性,並由是假定物體具有的速度和速度變化,我們做到差不多將前邊曾經說到的運動定律證實在.但是當我們轉到某些天文現象時候,只算得'差不多'實在.然而我們知道,假定行星和恆星的自轉和運動有稍不同的速度,這幾個定律就能夠完全證實.得到這個假設;實際上由此,我們已經擇用一種計時法,只根據天文象來規定,但不一定對任何一個都完全一致.但是,顯而易見的,這許多所根據的時間均匀的綿延本身就得根據週期事變的觀測.

卽如表面上好像偶然的例外的許多現象,或者在另一方面,本身一定不移的許多現象,都會受到遙遠的週期性的影響.例如,就共振原理(The principle of resonance)

來說.兩組相關的動境有相同週期的時候,就發生"共振".所有物體殘餘的細微振動持續時間依物質的性質而定,這是動力學上的一個定律.因此,一個擺(The pendulum)擺動持續的時間依它的形狀重量分佈以及長度而異.一個比較複雜的物體會有許多種振動方法;但是每種振動方法必定有它本身特有的"週期"(The period).一個物體的那些振動週期都叫做它的"自由週期"(The free period).因此,一個擺只有一種振動週期,然而一個吊橋將會有許多種.當振動週期全體和最長的都成簡單分數時候,我們就得到一種樂器,如像梵亞鈴的琴絃是;就是,如果 t 秒是最長的週期其餘就是 $\frac{1}{2}t$, $\frac{1}{3}t$, 等,在此任何意較小的週期都可以不出現.現在,假設我們借一個本身有週期性的原因,引起一個物體的振動;如果這個原因的週期極與物體的週期之一相近,那就引起物體很強烈的振動;甚至引起的原因本身不大都不生問題.這個現象就叫做"共振".這層道理很容易了解.有人想推翻一塊岩石,因為岩石擺動將會推出"入調"的聲音來,這樣對於搬運石塊有相當的益處.如果推出不入調的聲音,總是擺動過度,就會設法矯正.但是當他們推得合拍時,經過不

久時間後，推下出必定比較方便．"共振"這個字出自音學方面；不過這個現象却超過音學的範圍很遠．光的吸收和射出依靠它，其他無線電信接受器的"調整"，行星對彼此運動的影響相當的重要，兵士列隊踏過吊橋的危險，以及逆風沿之字行駛的船隻在某種速度生絕大的動蕩，也就根據這個現象．這種週期一致的結果可以產生固定不易的現象，卽在兩個週期性的事變起一種永久結合的時候；或者它會生出猛烈的突然的爆發情形，卽在這種結合是偶然的暫時的時候．

再則，前述的這種特殊的固定的振動週期就是我們心目中所謂感官根本的刺激物的主要原因．我們在一種固定的光線中工作幾個小時，或者我們傾聽一種固定不易的聲音．但是，如果近世的科學正確無誤，這種固定在宇宙間到覓不出相同的副本．固定的光線係由於振動的以太內無盡數目的週期性波碰到眼裏，而固定的聲音係由於振動的空氣內類似的波動作用．我們在此並不要說明光的理論或音的理論．由前邊幾個例證，我們儘夠表明，要使算學成爲探討宇宙一個適當的工具，第一步中必須辦到算學必定能夠表示事物根本的週期性．如果我們已經

明白此點，對於以後將要提到的幾個算學概念，即如週期函數 (The periodic functions)，就能夠了解它們的重要了.

第十三章

三角學

"三角學" (Trigonometry) 並不是由普遍對宇宙週期性的研究產生的. 在這方面, 它的歷史和"圓錐曲線"相彷彿, 都從極特別的觀念發生. 的確, 將這兩門科學的歷史互相對照, 我們很可以發現出許多相同的地方, 和許多相反的地方. "三角學" 像 "圓錐曲線" 一樣, 發源於希臘. 它的發明人就是希臘的一個天文家希怕克士 (Hipparchus, 生在公元前 160 年前後), 他在洛刺 (Rhodes) 做觀測天象的工作. 他對於天文學的貢獻非常偉大, 在他手裏的是有重要結果的一種眞實的科學材料, 和表現進步的正確方法. "三角學" 的發明在他研究的這種根本的科學中, 可以說就不是最小的一種貢獻. 第二個增廣 "三角學" 的人就是妥奈米 (Ptolemy), 他是亞歷山得里亞的一個大天文學家, 我們在前邊已經說過. 我們現在立刻看

出"圓錐曲線"和"三角學"間顯明的差異. 三角學的來源是實用; 因爲天文學的研究必需用到它, 纔發明出它來. 圓錐曲線的來源純粹是理論的. 最初研究它唯一個理由是因爲它所包含的觀念有抽象的興味. 圓錐曲線的發明約先於三角學 150 年, 正當希臘文化的極盛時代, 這個也儘夠表現它們的特點. 但是三角學對於算學的理論和應用兩方面的重要地位, 只不過是普通科學由它實際的應用獲得的無數有價值的觀念的一個例子.

我們現在應該設法認識甚麼是三角學, 和爲甚麼它會從天文學的科學研究產生兩層事實. 第一層: 一個天文學家能夠做的測量是甚麼呢? 天文學家可以安置一個望遠鏡(因爲討論近世天文學家習用的儀器比較容易), 使它只能繞東西向的一個固定軸旋轉; 結果望遠鏡只能直指南方, 方向稍有俯或仰, 或者如果轉過天頂 (The zenith) 以外, 就直指北方. 這是"子午儀" (The transit instrument), 測量正對南方或北方正確的量時的重要儀器. 但是, 這種儀器間接亦測量角度. 因爲當兩星過子午線相距時間已經測得時, 由地球等速自轉的假設, 我們得到在那段時間內地球旋成的角度. 其次, 用其他的儀器, 兩星間的角度

也可以直接測得. 因爲如果 E 代表天文家的眼睛, 而 EA 和 EB 是看星的方向, 我們容易造出測 AEB 角的儀器. 因此, 當天文家在做天體測量時

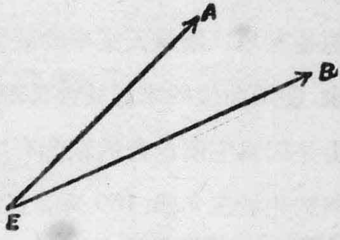

圖 22

候, 他實卽在測角度, 以便確定恆星和行星在任何瞬間的相對方向. 還有, 在土地測量 (Land-surveying) 同類的問題內, 角度也是測量的主題. 直接的長度測量不盡能夠正確; 江河, 房屋, 森林, 山嶺,以及一般不規則的地形都屬於這一類. 一塊整的曠野可以專依賴一兩種直接的長度測量來實測, 不過却難免費極大的工夫. 一種測量主要的工作就是角度測量. 例如, A, B 和 C 是所測區域——設爲教堂的塔巔——顯明的幾處. 這幾處互相可

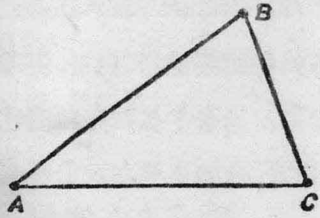

圖 23

以看見. 若是, 在 A 量 BAC 角, 在 B 量 ABC 角, 在 C 量 BCA 角, 都是一件極簡單的事體. 理論方面說, 這三個角度只

須測定兩個；因爲，由幾何學上一個習見的命題，一個三角形三內角的和等於二直角，所以當這些角有兩個知道，第三個就能夠推得．但是在實際上，我們最好將三個都測過，這樣就能免除觀測方面任何細小的差錯．在製地圖的時候，一個地區完全照這種方式用三角形來包括．這種方法叫做"大三角測量"(Triangulation)，並且是測量術上基本的方法．

現在，當知道一個三角形所有的角時，就知道這個三角形的形狀——就是，與大小不同的形狀．我們在此無意中遇到幾何學上著名的相似(Similarity)原理．這個觀念在實際應用方面極爲普通．我們都熟習按比例尺作圖樣的事實．因此，如果一個圖樣的比例尺是一吋和一碼之比，圖樣上三吋的一段長就指原形三碼的一段長而言．圖樣上所畫的形狀也就是原來的形狀，所以原形內一個直角在圖樣上也成一個直角．同樣在一個地圖內，地圖上長度的比例就是所表示的地點間距離的比例．例如，如果在地圖上這個地點在那個的西北偏北，實際也就是這樣；換句話說，在一個地圖上，角度如實際的一樣．幾何學上的相似性質可以規定如下：兩形相似(1)如果對這個形內任一

點,在那個形內有一點相應,如是對每條線有一條線相應,對每個角有一個角相應;(2)如果對應線長度的比例一定,同時對應角的大小相同. 地圖上(或圖樣上)和原來對應線長度的定比叫做這個地圖的比例尺 (The scale). 比例尺通例都必須在每個地圖和圖樣的邊緣列出. 我們已經

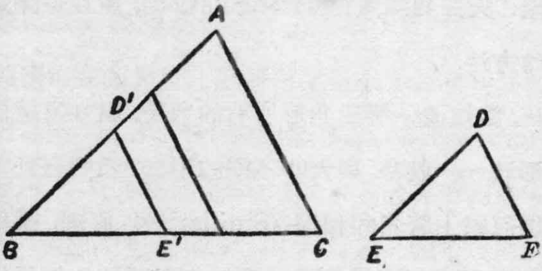

圖 24

說過,對應角相等的兩個三角形相似. 因此,如果在 ABC 和 DEF 兩個三角形內,在 A 和 D, 在 B 和 E, 以及在 C 和 F 等處的對應角相等,那麼 DE 和 AB, EF 和 BC, 以及 FD 和 CA 的比都相等. 但是, 在別些圖形中,單是角相等並不夠保證形相似. 例如, 舉習見的一種矩形和一種正方形來說. 設 $ABCD$ 是一個正方形, 而 $ABEF$ 是一個矩形. 現在,所有對應角都相等. 但是,正方形的 AB 邊雖與矩形的 AB 邊相等,正方形的 BC 邊

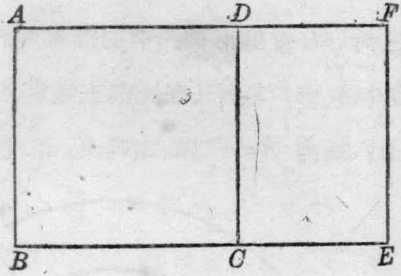

圖 25

却只有矩形 BE 邊的長一半. 所以, 正方形 $ABCD$ 與矩形 $ABEF$ 相似, 就不實在. 三角形的這個特性, 爲別些直線形所未有, 使它成爲相似理論上的基本圖形. 因此在測量方面, 大三角測量是基本的方法; 也就是"三角學" (Trigonometry) 這個字所從出, 這個字源自兩個希臘字 "trigonon" (一個三角形) 和 "metria" (測量). 三角學根本係由解答一個問題發生的: 已知一個三角形的角度, 對於邊的相對長度, 我們能夠說甚麼呢? 注意 "相對" (Relative) 二字, 因爲由相似理論, 只算是已知邊的比例. 爲要解答這個問題, 我們須得容納進幾個關於角度的函數, 將一個角度看做主變數. 就它們的來原說, 這幾個函數係由一個直角三角形的研究達到的, 同時角度的大小係用一個圓的弧長作定義. 在近世的初等算學書中, 圓弧做角度大小的定義漸漸失去價值, 一方面對於理論並無裨益, 一方面解釋也欠明白, 我

們應該在先注意，關於相似性質方面，圓在曲線形中間和三角形在直線形中間有同樣重要的地位．任何兩個圓都是相似形；它們只在比例上差別．兩個圓的周長，如第二十六圖內 APA' 和 $A_1P_1A'_1$，和它們的半徑的長成比例．

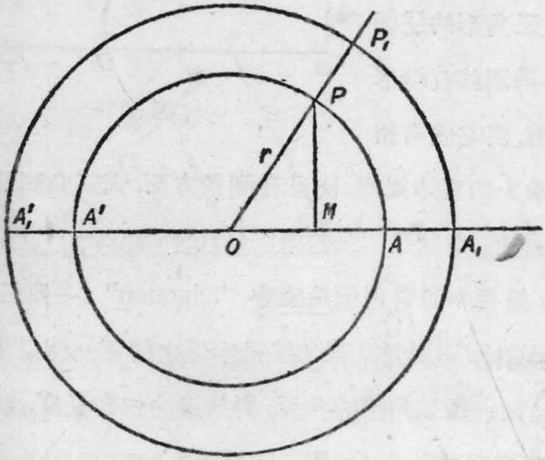

圖 26

另外，如果兩個圓有同一圓心 O，如第二十六圖內的兩個圓，那麼任意角 AOP 兩股所包的 AP 弧和 A_1P_1 弧也與它們的半徑成比例．因此，AP 弧的長和 OP 半徑的長的比，就是 $\frac{\text{弧 } AP}{\text{半徑 } OP}$，是一個完全與 OP 長無關的數，而與 $\frac{\text{弧} A_1P_1}{\text{半徑} OP_1}$ 分數的結果相同．"半徑除弧"這個分數是

量一個角度大小的理論的根據；因爲它無須依賴任意規定的長度單位，也無須分成任何假定角度，如一個直角，的任意方法．若是，$\frac{AP}{OA}$ 這個分數代表 AOP 角的大小．現在，作 PM 垂直於 OA．那麼，希臘算學家就叫 PM 線爲 AP 弧的"正弦"(The sine)，而 OM 線爲 AP 弧的"餘弦"(The cosine)．他們早都明白，這幾條線互相關係的重要處就在我們剛纔說過的相似理論方面．但是他們並未辦到使他們的定義表示由這種理論所生的性質．他們既沒有具備近世將函數當做相關的幾對變數的普通觀念，實際上他們也沒有近世代數和代數解析的知識．所以，他們自然只會注意到一個圖形內某幾條線的關係．在我們現在，情形完全不同：我們要將較有力的觀念融成一片．

因此，在近世算學上，代替說 AP 弧，我們說 $\frac{AP}{OP}$ 這個分數，這個數對 OP 各種長度都是相同的；而代替說 PM 和 OM 兩條線，我們就說 $\frac{PM}{OP}$ 和 $\frac{OM}{OP}$，這兩個數也不依賴 OP 的長度，就是與我們作圖的比例尺無關．這時候，我們定 $\frac{PM}{OP}$ 這個數爲 $\frac{PA}{OP}$ 這個數的"正弦"，$\frac{OM}{OP}$ 這個

數爲 $\frac{PA}{OP}$ 的"餘弦"這幾個分數印刷不雅觀;所以我們命 u 代表 $\frac{AP}{OP}$ 這個分數,就是代表 AOP 角的大小,又命 v 代表分數 $\frac{PM}{OP}$, 和 w 代表分數 $\frac{OM}{OP}$. 那麼 u, v, w 都是幾個數目,同時因爲我們說'任意角' AOP, 它們就都是幾個變數. 但是在它們的大小間有一個關係,若是當 u (就是 AOP 角) 爲已知時, v 和 w 的大小可以完全確定. 我們曾經叫 v 爲 u 的"正弦", 而 w 爲 u 的"餘弦".我們希望普遍的函數記號 $y=f(x)$ 適用於這類特別情形: 因此在近世算學上, 當我們想表示特殊的"正弦"函數時, 我們就寫"sin"代替"f", 而當我們想表示特殊的"餘弦"函數時,我們就寫"cos"代替"f". 若是,照前邊所說 u, v, w 的意義,我們得到

$$v=\sin u, \text{ 和 } w=\cos u,$$

在此對於這類特殊函數, $f(x)$ 內圍 x 的括弧省去不用. 聯繫 u 和 v, u 和 w 各對數目的這些函數 sin 和 cos 的意義是: 作 (參看第二十六圖) 一角 AOP, 它的公量"AP 除以 OP"等於 u, 函數關係就可以尋出, 於是 v 這個數就由"PM 除以 OP"得出, 而 w 就由"OM 除以

OP'' 得出.

我們知道, 如果沒有其他的定義, 當 u 取得過大時候, 我們就要遇到困難. 因爲這時候, AP 弧或許大於圓周四分之一, 而 M 點 (參看第二十六圖) 或許落在 O 和 A' 中間而不在 O 和 A 中間. 還有 P 也許在 AOA' 線下面而不在它上面, 如第二十六圖. 爲要解除這種困難, 我們就求 "位標幾何學" 的觀念和慣例幫助, 完成我們的 "正弦" 和 "餘弦" 的定義. 設這個角的一股 OA 爲 OX 軸, 延長這個軸向後得出它的負號部分 OX'. 作另一軸 YOY' 和它垂直. 設任意點 P 與 O 相距 r, 位標爲 x 和 y. 這兩個位標在平面圖第一 "象限" (The quadrant) 內都是正, 即第二十七圖內 P 的位標 x 和 y. 在其餘象限內, 位標一個或兩個爲負, 例如, P' 方面的 x' 和 y, P'' 方面的 x' 和 y', 以及 P''' 方面的 x 和 y'. 見第二十七圖, 在此 x' 和 y' 都是負數. 正角 POA 等於弧 AP 除以 r, 它的正弦是 $\frac{y}{r}$, 而餘弦是 $\frac{x}{r}$; 正角 $P'OA$ 等於弧 ABP' 除以 r, 它的正弦是 $\frac{y}{r}$, 而餘弦是 $\frac{x'}{r}$; 正角 $P''OA$ 等於弦 $ABA'P''$ 除以 r, 它的正弧是 $\frac{y'}{r}$, 而餘弦是 $\frac{x'}{r}$;

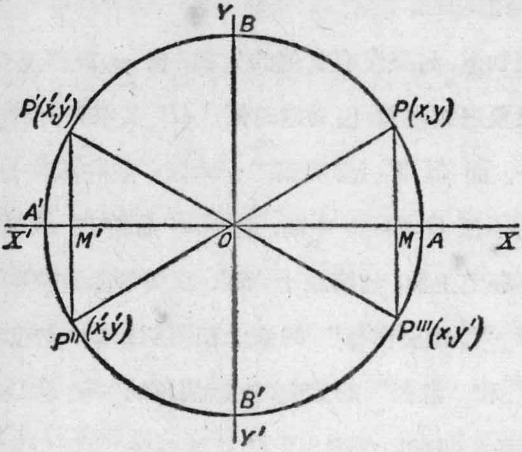

圖 27

正角 $P'''OA$ 等於弧 $ABA'B'P'''$ 除以 r, 它的正弦是 $\frac{y'}{r}$, 而餘弦是 $\frac{x}{r}$.

但是就到現在, 我們仍不算說得透徹. 因爲假設我們擇 u 爲大於全圓周長對半徑的比的一個數. 因爲一切圓的相似性, 這個比在一切圓方面都相同. 在算學上, 通常用 2π 這個符號表示, 在此 π 是希臘形式的 p 字, 它在希臘字母上叫做 "*Pi*". 我們能夠證明, π 是一個不可通約數, 所以它的值不能用任何分數, 或用任何有限或循環小數表示. 它到小數幾位的值是 3.1416; 在許多方面, 一個

充分正確的漸近值是 $\frac{22}{7}$. 算學家容易能夠計算 π 到任何正確程度, 好像 $\sqrt{2}$ 能夠這樣計算一樣. 它的值實在上曾經求至小數 707 位. 這樣費大力計算純粹是一種好奇心理, 並沒有實際或理論的興趣. π 值的精密決定是著名的圓化方問題兩部分之一. 這個問題的另一部分是, 用純正幾何學理論的方法, 作一條直線和圓周等長. 現在都知道這個問題兩部全不可能; 並且這個不可解的問題現在已經失去所有特殊實際的或理論的興趣, 變成傾向到較廣義的方面.

關於 π 值這個正題外的材料提述一點以後, 我們現在回到一個角大小普遍的定義這個問題, 以便可以作成一個對應任意值 u 的角. 假設有一運動點 Q, 從 OX 上 A (參看第二十七圖) 沿正向 (反鐘向, 在所說圖內) 旋繞圓周任意次數, 最後停止在任意點, 卽在 P 或 P' 或 P'' 或 P'''. 那麼, 所經曲線的圓徑全長除以圓半徑 r, 就是'任意' 大小的一個正角廣義的定義. 設 x, y 是 Q 點停止處的位標, 就是在第二十七圖內提到四個交迭地位之一; x 和 y (照此地的用法) 將爲 x 和 y, 或 x' 和 y, 或 x' 和 y', 或 x 和 y''. 這時候, 這個普遍可用角的正弦

是$\frac{y}{r}$，而它的餘弦是$\frac{x}{r}$. 有這些定義後，函數關係 $v=\sin u$ 和 $w=\cos u$ 在 u 所有正的實值方面算得以確定. 對於 u 的負值，我們只消取 Q 沿相反方向（沿鐘向）的旋轉；不過現在普遍的方面已經說明過，值不得再費工夫來討論這個地方.

由現在的定義，這些正弦和餘弦函數使我們能夠應付三角學所從出的三角形關係的問題. 但是我們現在要進一步將三角學和廣義的週期性觀念聯繫起來，這個觀念的重要在前章曾有詳細的說明. 我們容易看出，$\sin u$ 和 $\cos u$ 都是 u 的 "週期函數" (The periodic function). 因為設想一個運動點 Q 的位置 P (在第二十七圖內)，曾從 A 起而繞圓旋轉. 這個位置 P 表 $\frac{\text{弧}\,AP}{r}$，又 $2\pi+\frac{\text{弧}\,AP}{r}$，又 $4\pi+\frac{\text{弧}\,AP}{r}$，又 $6\pi+\frac{\text{弧}\,AP}{r}$，....等無窮個數角度. 現在，所有這些角都有相同的正弦和餘弦，即，$\frac{y}{r}$ 和 $\frac{x}{r}$. 因此我們容易看出，如果設 u 有任意值，主變數 u 和 $2\pi+u$，和 $4\pi+u$，和 $6\pi+u$，和 $8\pi+u$ 以至無窮，對於相應的正弦和餘弦都必定有相同的值. 換句話說.

$$\sin u=\sin(2\pi+u)=\sin(4\pi+u)=\sin(6\pi+u)=\cdots;$$

$$\cos u=\cos(2\pi+u)=\cos(4\pi+u)=\cos(6\pi+u)=\cdots.$$

這個事實無異說明，$\sin u$ 和 $\cos u$ 是週期等於 2π 的週期函數.

函數 $y=\sin x$ 的圖形見第二十八圖 (注意，我們現在用比較習見的 y 和 x 來代替 v 和 u). 我們在 x 軸截取任意長度代表 π 這個數，又在 y 軸上截取任意長度代表 1 這個數目. 正弦和餘弦的數值絕不能超過 1. 我們將可看見在 2π 週期後，這個形循環的情形. 這個圖形代表最簡單的一種週期函數型式，由此造成其他一切的週期函數. 餘弦在根本上沒有甚麼和正弦不同. 因為我們容易證明 $\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; 因此得知，$\cos x$ 的圖形不過是第二十八圖的變相，將原來 OY 軸的位置變成經過 OX 上表 $\frac{\pi}{2}$ 的地方.

我們容易造出一個週期有任何派定值 a 的"正弦"函數. 因為我們只消寫

$$y=\sin\frac{2\pi x}{a},$$

再則

$$\sin\frac{2\pi(x+a)}{a}=\sin\left\{\frac{2\pi x}{a}+2\pi\right\}=\sin\frac{2\pi x}{a}.$$

因此，這個新函數的週期現在是 a. 我們現在來替"週期函數"下一個普遍的定義. 函數 $f(x)$ 是週期的，具有週

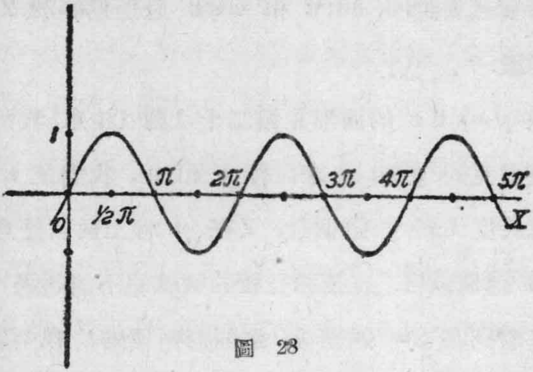

圖 28

期 a 時,須 (1) 對於 x 的'任何'值,我們得 $f(x)=f(x+a)$, (2) 不會有一個小於 a 的數目 b 可以無論 x '任何'值, $f(x)=f(x+b)$.

定義中第二段有相當的重要,因爲當我們設想 $\sin\frac{2\pi x}{a}$ 時候,它不僅以週期 a 爲週期,抑且以 $2a$ 和 $3a$, 等爲週期;發生這個情形因爲

$$\sin\frac{2\pi(x+3a)}{a}=\sin\left(\frac{2\pi x}{a}+6\pi\right)=\sin\frac{2\pi x}{a}.$$

因此它是我們應該主張叫做函數週期最小的一個. 週期函數抽象的理論大半, 還有這種理論對物理學的應用全部, 都受一個重要定理——叫做傅立葉定理 (Fouries's theorem)——的支配;就是,如果 $f(x)$ 是一個週期爲 a 的週期函數, 又如 $f(x)$ 滿足某種條件, 實際上在自然現象

暗示的函數通常在先有這類條件存在時,那麼 $f(x)$ 可以寫成下列的一組項數的和:

$$c_0+c_1\sin\left(\frac{2\pi x}{a}+e_1\right)+c_2\sin\left(\frac{4\pi x}{a}+e_2\right)$$
$$+c_3\sin\left(\frac{6\pi x}{a}+e_3\right)+\cdots.$$

在這個公式內, c_0, c_1, c_2, c_3, 等, 以及 e_1, e_2, e_3, 等都是常數, 選它們能夠適合這個特殊的函數. 其次, 我們必須要問, 應該選多少項呢? 並且在此有一個新的難題發生: 因為我們能夠證明, 雖然在某幾個特例中,可以有一個定數; 可是就一般說我們能夠做的是, 項數取得愈多, 對於函數的值愈加接近. 這種逐漸接近的辦法引起我們對 "無窮級數理論" (The theory of infinite series) 的注意. 這種理論是算學上基本的一種理論, 我們在下章將要詳細說明.

前邊將一個週期函數表成一些正弦的和的方法叫做函數的 "調和解析" (Harmonic analysis). 例如, 在海岸上某點,潮汐漲落成週期性. 因此在杜佛海峽附近的一處,由地球的自轉, 每日可以有兩度潮汐. 因為有兩種潮, 一向英吉利海峽, 一掠蘇格蘭北部復折而南向以到北海, 潮汐

的漲落就弄得很複雜. 再則有些滿潮比其餘的高得多:這是由於太陽也和月球一樣, 有一種形成潮汐的作用. 照這個樣子, 按月和其他週期都添出來. 還有, 就是我們不能夠預料的例外的風的影響, 無待我們多說. 潮汐的調和解析這個普遍的問題是求出幾組像前邊式中的項, 使每組可以極近精確的表出一個 '週期' 的生潮作用在任何瞬間對潮汐高度的結果. 所以主變數 x 就是任意方便起算的 '時間'.

其次, 一條梵啞鈴琴弦的振動也適於做一種調和解析; 還有對應光波和音波的以太和空氣振動亦然. 我們現在遇到的是算學物理學基本方法之一, 卽它應付 "週期性" 這種顯著的自然現象的普遍的方法.

第十四章

級 數

初學算學的人最感到枯燥的莫過於"級數"這個大題目. 所說的級數就是比較次要的兩個範例, 即算術級數(Arithmetic series) 和幾何級數 (Geometric series); 這些例子都很重要, 因為它們是一種重要的普遍的理論最簡單的例子. 不過普遍的觀念未曾說出;所以這些例子不夠例證,就變成瑣碎枯燥的東西.

在算學的普遍的觀念上, 一個級數就是一組依次排列的事物. 由這個名詞普通的用法,這個意義表示得很恰當. 例如, 設想十九世紀期間英國首相的序列, 按照他們在這個世紀內第一次就那種職位的先後排列. 這個序列從威廉庇提 (William Pitt) 開始, 到恰是第一人的傳述者的洛士柏利勳爵 (Lord Rosebery) 為止. 我們可以按別些序列次序來排列這幾個人;例如,按照他們的身長或體重

這些其他提到的次序對於首相方面好像過於瑣碎，自然不會出現在腦中;不過由抽象的方面說，它們也像其他任何次序同樣的完善．當項目的一種次序比較別些次序更爲重要或更爲明顯，通常就叫它做那些項的"次序" (The order). 所以，整數的次序總必定指它們的次序按大小排列而言．不過，自然有無窮個其他排列它們的方法．當設想的事物數目有限時候，按次序排列它們的方法的數目叫做它們的"錯列數目" (The number of their permutations). 一組 n 個事物 (n 爲有限整數) 的"錯列數目"是

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times4\times3\times2\times1$$

換句話說，它是從頭 n 個整數的相乘積; 這個相乘積在算學上很是重要，代替它的有一個特別的符號，通常寫做 $n!$ 若是，$2!=2\times1=2$，又 $3!=3\times2\times1=6$，又 $4!=4\times3\times2\times1=24$，又 $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$. n 增大時，$n!$ 的值增大更迅速;因此 $100!$ 爲 $99!$ 的一百倍．

我們容易證明，n 值較小時，$n!$ 是將 n 個事物按次排列的次數．若是就 a 和 b 兩個事物來說;這可以有兩個次序 ab 和 ba，而 $2!=2$.

其次取 a, b 和 c 三個事物來說；這能夠有六種次序 abc, acb, bac, bca, cab 和 cba, 而 $3!=6$. 同理 a, b, c 和 d 四個事物能夠排成二十四種次序.

當我們轉到無窮組事物——例如所有整數，或所有分數，或所有實數各組——時候，我們立刻遇到錯綜複雜的"位型理論" (The theory of order-types). 我們在第六章內，說整數，分數以及實數能有的次序時，已經涉及這個題目. "位型" 全部問題形成極重要的算學的一個新的分枝. 我們現在再詳細解釋幾句. 我們現在所說的一切 "無窮級數" 都和按大小昇位排列的整數有相同的 "位型"；卽有一首項，每項都有一對緊接的貼隣，除首項自然只有一個貼鄰外，其餘盡皆每邊有一個. 因此，如果 m 為任意整數(除零外)，總一定有一個第 m 項. 有一有限項數 (設為 n 項) 的一種級數在貼鄰關係方面有和一無窮級數相同的特徵；所不同的只在有一個末項，卽第 n 項.

一串數目級數——以後都照前述的意義使用 "級數" 這個字——所做的主要工作是將它連續各項加起來.

因此，如果 u_1, u_2, u_3,⋯⋯u_n⋯⋯ 各為一個數目級數的第一，第二，第三，⋯⋯第 n⋯⋯ 等項，我們繼續做成 u_1, u_1+u_2,

$u_1+u_2+u_3, u_1+u_2+u_3+u_4,\cdots$ 等各級數;若是從頭 n 項的和就可以寫做

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n.$$

如果級數只有一有限個項數,最後照這個方式就得到這些項整個級數的和.但是,如果級數有一無限個項數,這種繼續做成各項和的手續就無有止境;照這個意思,所謂一個無窮級就不會有和.

但是照這個方式繼續將一個級數的項相加,爲甚麽見得重要呢?我們的答案是,在此表出求近似的基本的運思方法.這是不僅在算學範圍內有其重要的方法.我們有限的智慧不能夠應付所有繁雜的材料,用整理的方法就是求其近似.政治家預備他的演說稿,第一先擬定主題,其次自然纔是細目.構思的人爲換位法就是先提示次要的或者特別的細目,然後逐漸的達到一個轉變的關頭.在每個方式內,所採方法都是逐漸的將結果總結起來;這正與連續將一個級數各項總結起來相同.我們平常記數的方法就是這一種逐漸總結的方法,至少在大數的情形內如此.因此 568,213 在我們的腦海中成爲——

$$500,000+60,000+8,000+200+10+3.$$

在十進分數例中, 更可以說是這樣的. 所以 3.14159 是

$$3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{5}{10000}+\frac{9}{100000};$$

並且, 3 和 $3+\frac{1}{10}$, 和 $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}$, 和 $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}$, 以及 $3+\frac{1}{10}+\frac{4}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{5}{10000}$ 都是到完全結果 3.14159 的連續近算. 如果我們從了單位起自右至左將 568,213 從後邊讀起, 我們就照人爲的方式讀它, 逐漸在腦中映入 500, 000 這個最後關頭.

平常數目相乘的方法就用一個級數的總結辦法來做. 試就下列算式一看便知.

$$\begin{array}{r} 342 \\ 658 \\ \hline 2736 \\ 1710 \\ 2052 \\ \hline 225036 \end{array}$$

由此, 相加的三行構成首項爲第一列的一個級數. 這個級數依照常法將最要項放在最後, 並不是求其美觀, 而是因爲確定了單位的位置, 使我們省去許多空 0, 當然有相當的便利.

但是當我們逐漸用一個無窮級數連續各項相加近算時, 我們近算在求甚麼呢? 難點在, 照 "和" (Sum) 嚴格

的字義說，這個級數就沒有"和"，因為加上它各項的演算决做不完．我們的答案是，我們近算在求這個級總結的"極限"(The limit)，同時我們必須就此說明一個級數的"極限"的意義．

當一個級數任何個數項的和，設如這個數目夠大，隨我們願意愈和一個值差不多相等時，這個級數的總和就是漸近於一個極限，而差不多相等的這個值就是極限．不過這種漸近於一極限意義的描摹在近世算學的眼光中，當然不大精確．"夠大"，"差不多相等"以及隨我們願意作甚麼解釋呢？所有這些含糊的字句應該用正純算學上簡單抽象的觀念加以解釋．

設級數連續各項為 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n$，等，如是 u_n 為級數的第 n 項．又設 s_n 為從頭 n 項的和，不論 n 為何值．如此——

$$s_1 = u_1,\ s_2 = u_1 + u_2,\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3,\ \text{以及}$$

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n.$$

這時候，$s_1, s_2, s_3, \cdots, s_n, \cdots$ 各項成為一個新級數，而這個級數的形成就是由原級數求總和的方法得來．因此，原級數總和"漸近"於一個"極限"即指"這個新級數

的項漸近於一個極限"而言．現在我們又得將所謂一個級數的項漸近於一個極限的意義說明一下．

現在，由（第十二章所說）一個近算標準的定義，一個極限的意義是：l 是 s_1, s_2, s_3, …. s_n,…. 各項的極限，如果對應取做一個近算標準的每一實數 k，能夠在這個級數尋出一項 s_n，使所有以後的各項（即 s_{n+1}, s_{n+2}, 等）在那個近算標準內漸近於 l．如果擇取另一個更小的標準 k'，s_n 項在級數內的位置或許過前，那麼就可以尋出有前邊性質的一個位置更後的項 s_m．

如果具有這種性質，那麼當我們自左至右順次計算 s_1, s_2, s_3, ….，s_n,…. 這個級數時候，不久遇到若干項，都可以比我們隨意派定的任何數接近 l．換句話說，我們愈加隨心所欲漸近 l．這個級數極限定義和連續函數定義（見第十一章）極容易看出．

然後回到原級數 u_1, u_2, u_3, ….，u_n,….，這個級數各項 s_1, s_2, s_3, ….，s_n,….，的極限叫做原級數的"無窮和"(Sum to infinity)．但是我們明瞭，"和"字這個用法是很不自然的，並且我們如果沒有相當特殊的研究，不應該假定有限個數項平常的和有類似的性質．

我們現在來說一個"無窮和"的例子. 設有循環小數 $\cdot 1111\cdots$. 這個小數純粹是 $\cdot 1, \cdot 01, \cdot 001, \cdot 0001$ 等一個級數的一種表示法. 由求總和得到的對應級數為 $s_1 = .1$, $s_2 = \cdot 11, s_3 = \cdot 111, s_4 = \cdot 1111$, 等. 這個級數項的極限是 $\frac{1}{9}$; 這是由單純除法即容易看出的, 因為

$$\frac{1}{9} = \cdot 1 + \frac{1}{90} = \cdot 11 + \frac{1}{900} = \cdot 111 + \frac{1}{9000} = \cdots.$$

因此, 如果擇定 $\frac{3}{17}$ (定義中的 k), $\cdot 1$ 和"所有"以後的項和 $\frac{1}{9}$ 相差小於 $\frac{3}{17}$; 如果擇定 $\frac{1}{1000}$ (定義的 k 另一種擇法), $\cdot 111$ 和所有以後的項和 $\frac{1}{9}$ 相差小於 $\frac{1}{1000}$; 由此類推, 無論怎樣擇定 k.

前邊所說當然對於一個級數"無窮和"怎樣求出這個觀念毫未提到. 我們不過說出這一種數所滿足的條件. 其實, 各種情形都適用的求級數無窮和的一種普遍的方法根本是不可能的, 因為照現在的定義, 這一種和往往就不存在. 有一個無窮和的級數叫做"收斂"(Cenvergent), 不有一個無窮和的級數叫做"散分"(Divergent).

一個散分級數顯明的一個例子就是 $1, 2, 3, \cdots, n \cdots$ 即按大小次序的整數級數. 因為無論我們取任何數 l 做

它的無窮和，無論我們選任何數 k 做近算標準，取這個級數若干項，總能夠使它們的和與 l 相差大於 k. 其次，另一個"散分級數"的例是 1, 1, 1, 等，卽每項等於 1 的級數. 這時候，n 項的和就是 n，同時這個和隨 n 增加而增至無限. 其次，另一個"散分級數"的例是 1, -1, 1, -1, 1, -1,.... 等，卽各項交迭爲 1 和 -1 的級數. 奇數個項的和爲 1，而偶數個項的和爲 0. 所以 s_1, s_2, s_3, ... s_n,.... 這個級數項雖沒有無限制的增加，却也不漸近至一個極限.

有人想假設 u_1, u_2, ... u_n.... 有一個無窮和的條件是，n 增加 u_n 應該愈加減小. 如果眞可以如此，算學定可以成爲一門比較容易的科學. 不幸這個假定並不眞確.

例如級數

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

是"散分級數". 我們容易看出這是實在情形；因爲就從第 $n+1$ 項起 n 項的和來觀察. 這 n 項是 $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+2}$, $\frac{1}{n+3}$, ... $\frac{1}{2n}$. 它們共有 n 個而 $\frac{1}{2n}$ 是其中最小的. 所以，它們的和大於 $\frac{1}{2n}$ 的 n 倍，卽大於 $\frac{1}{2}$. 現在，如果有無窮

和不致改變它,我們能夠將鄰項加起,而得級數

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},\ \text{等},$$

就是,由我們前邊說過的,自第二項以後各項大於下列級數對應項的一個級數,

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \text{等},$$

在這個對應級數內,第一項以後所有各項都是相等的.但是這個對應級數是散分的.所以原級數是散分的.

由這個關於"散分"或否的討論,足見我們辯證有限個項和性質同無窮級數和性質時應該特別注意.因為有限個項最根本的性質自然是它們應有一個和:但是"無窮級數"甚至連這個基本的性質都不一定具有.這點注意不過說明,我們不應受所謂"一個無窮級數的和"這個專門名詞所欺騙.我們通常將

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\ u_n,\ \cdots$$

這個無窮級數的和表為

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

我們現在進一步來說,算學應用變數的方式,對於一種級數觀念的推廣.直到現在,我們只注意過每個定項都是一種定數的級數.但是同樣我們能夠推廣起來,使每項都

是含有一個變數 x 的算學式. 若是, 我們可以設想 $1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots$ 這個級數, 和

$$x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \cdots, \frac{x^n}{n}, \cdots$$

這個級數.

為要使任何這樣的函數的普遍觀念用符號表出, 我們取 x 的一個函數 $f_n(x)$ 來說, 在這個函數的形成中含有一個變整數 n; 那麼使 n 等於 1, 2, 3, ⋯ 等值, 我們得級數

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots, f_n(x), \cdots.$$

這一種級數可以對 x 的某些值為 "收斂", 而對另外某些值為散分. 實在, 我們很不易尋得一含有一個變數 x 的級數, 對 x 的一切值都是 "收斂"——至少在某種特別情形即不大靠得著. 例如, 我們可以就其中最簡單的一個來考查, 即 "幾何" 級數

$$1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n, \cdots.$$

n 項的和得為

$$s_n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n.$$

現在兩邊用 x 乘, 我們得

$$xs_n = x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^{n+1}.$$

現在從上列減去下列,得

$$s_n(1-x)=s_n-xs_n=1-x^{n+1},$$

因此(如 x 不等於 1)

$$s_n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

現在如果 x 絕對數值小於 1, 對極大的 n 值, $\frac{x^n}{1-x}$ 總小於 k, 無論 k 怎樣定法. 因此,如果 x 小於 1, 級數 1, x, x^2, ... x^n, ... 爲收斂級數,而 $\frac{1}{1-x}$ 爲它的極限. 用符號表示,這段話就變成

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdot+x^n+\cdots\cdot,\ (x<1).$$

但是如果 x 絕對值大於 1, 或絕對值等於 1, 這個級數就是散分級數. 換句話說,如果 x 位於 -1 和 $+1$ 中間,級數是收斂的;但如 x 等於 -1 或 $+1$, 或者如果 x 位在 -1 至 $+1$ 這個間距以外,那麼級數就是散分的. 因此,除兩端點外,在 -1 至 $+1$ 間距內所有的"點",級數都是收斂的.

我們研究到這個地方,又發生一個問題. 假設函數

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\cdots\cdot+f_n(x)+\cdots\cdot$$

對所有 x 位在 a 至 b 間距內的值爲收斂,就是,$f(x)$ 對大於 a 而小於 b 的任何 x 值都爲收斂.又設我們需要確定,在極限近算中,我們將某個近算標準 k 以內充分的項數相加.我們總能夠說出一個項數 n,如果我們取 n 或更多項做成總和,那麼"無論" x 在間距內的值爲何,都可以滿足所需要的近算標準嗎?

對於 k 的每個值,我們有時能夠這樣做,而有時也不能夠這樣做.當能夠時候,這種級數叫做"在全間距內一致收斂"(Uniformly convergent throughout the interval);而當我們不能這樣做時候,這種級數就叫做"在全間距內不一致收斂"(Non-uniformly convergent throughout the interval).一個級數看他在全間距內是否一致收斂,性質方面就大有區別.現在,我們就最簡單的例子而且最簡單的數目,來說明這種情形.

設想幾何級數

$$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots.$$

它在它遍 -1 至 $+1$ 全間距,除兩端值 $x=\pm1$ 外,內爲收斂的.

但是它在這個全間距內却是不一致收斂,因爲如果 $s_n(x)$

爲 n 項的和,我們曾經證明過, $s_n(x)$ 和極限 $\frac{1}{1-x}$ 間的差爲 $\frac{x^{n+1}}{1-x}$. 現在假設 n 是任意已知項數,設爲 20; 又設 k 爲任意派定的近算標準, 設爲 $\cdot 001$. 那麼, 取 x 極和 $+1$ 接近,或極和 -1 接近,我們能夠使 $\frac{x^{21}}{1-x}$ 的絕對值大於 $\cdot 001$. 因此 20 項將不能適於整個間距, 雖然它在其他部分都能夠適用.

無論我們取任何其他數代替 20, 和任何其他近算標準代替 $\cdot 001$, 同樣的理解總可以適用. 因此, 幾何級數

$$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots$$

遍它"整個"收斂間距 -1 至 $+1$ 內是不一致收斂的. 例如,取 0 至 $+\frac{1}{10}$ 這個間距來說. 那麼, 任何使 $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ 在 x 的這兩個極限, 絕對值小於 k 的 n 值對這兩個極限內所有的 x 值也可以適用, 因爲這時候, $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ 絕對值隨 x 的絕對值減小而愈見減小. 例如, 取 $k=\cdot 001$; 那麼, 命 $x=\frac{1}{10}$, 我們得:

$$n=1\text{ 時}, \frac{x^{n+1}}{1-x}=\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^2}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{90}=\cdot 0111\cdots\cdots,$$

$$n=2\text{ 時}, \frac{x^{n+1}}{1-x}=\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^3}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{900}=\cdot 00111\cdots\cdots,$$

$$n=3\text{ 時}, \frac{x^{n+1}}{1-x}=\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^4}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9000}=\cdot 000111\cdots\cdots.$$

因此,三個項就可以適於整個間距;自然對間距內某些部分,項數應該還得多一些.注意,因爲

$$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots$$

遍 -1 至 $+1$ 全間距內爲收斂(雖不是一致的),對間距內 x 每個值,我們總能夠尋到項數 n,可以滿足一種希望的近算標準;但是愈使 x 和端值 $+1$ 或 -1 接近,用的 n 值就不得不愈大了.

很奇特的,發現一致和不一致收斂間這個重要關係除掉 1847 年的史托克 (Stokes) 外,還有 1850 年的一個德國算學家桑代兒 (Seidel);他們對此是不約而同的.

不一致收斂出現的臨界點不一定在全體都收斂的間距的兩端.這是一種屬於幾何級數的特性.

在幾何級數 $1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n+\cdots\cdots$ 例中,我們可

以將一個簡單的代數式 $\frac{1}{1-x}$ 當做它在它收斂間距內的極限. 但是並不是都是這種情形. 我們每常能夠證明一個級數在某一個間距內爲收斂, 可是對於極限除掉知道它是這個級數的和外就不知道其他甚麼. 但是這到是替一個函數下定義最好的方法, 就是, 當做一個無窮的收斂級數的和, 其實許多函數都照這個方式, 或者應該照, 下定義的.

因此, 初等解析內最重要的級數是

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

在此 $n!$ 有本章前邊所規定的意義. 我們能夠證明, 這個級數對"所有" x 的值爲收斂, 和在任何隨意所取的間距內爲一致收斂. 因此, 它具備一個級數應有的一切適宜的算學性質. 它的名稱爲"指數級數" (The exponential series). 用 $expx$ 表它的無窮和. 若是, 由定義,

$$expx=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

$expx$ 就叫做"指數函數" (The exponential function).

只要一點初等算學的知識, 我們很容易證明

$$(expx)\times(expy)=exp(x+y)\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

換句話說,

$$(expx) \times (expy) =$$

$$1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\cdots+\frac{(x+y)^n}{n!}+\cdots.$$

(*A*)這個性質就是所謂一種"加法定理"(The addition-theorem)的一個例子.當已經替任何函數[設為 $f(x)$]下妥定義時候,我們第一件要做的事是設法只用 x 的已知函數,又 y 的已知函數將 $f(x+y)$ 表出.如果我們能夠辦到,這個結果就叫做一種"加法定理"."加法定理"在算學解析上佔着一個重要的地位.若是,正弦方面加法定理就為

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

而餘弦方面就為

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y.$$

實用方面,$\sin x$ 和 $\cos x$ 最好的定義並不是照前章用費力的幾何方法來下,而係分別作成下列兩個級數

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,$$

和

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,$$

的極限;因此我們命

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots.$$

這兩個定義和幾何的定義意義相同；並且可以證明兩個級數對所有 x 的值爲收斂,和遍任何間距都是一致收斂.這幾個關於正弦和餘弦的級數與前邊所說的指數級數有共通的同點.其實,應用第七第八兩章內解釋的虛數原理,儘能使它們和他發生密切關係.

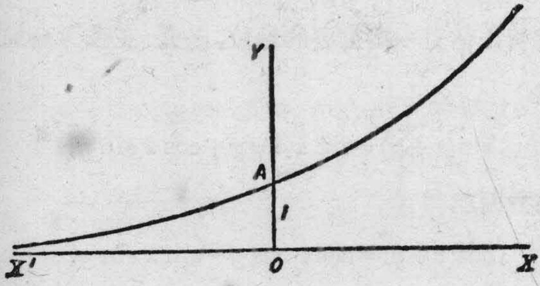

圖 29

指數函數的圖形如第二十九圖所示.它在 $y=1$ 點切 OY 軸.顯而易見它應該如此,因爲當 $x=0$ 時,這個級數除第一項外,各項都爲零.指數函數的重要,在它代表任何變動的物理量,不過這種量在任何時間的增加率應爲它在那個時間的值一種均勻的百分率.例如,前圖代表有

一種均勻的生殖率的一處人口的多少, 在此 x 相當從任何方便的日期起算的時間, 而 y 代表對某種尺度說的人口數. 這種尺度應爲, 取日期做原點, OA 就代表那個日期的人口. 但是我們現在遇到的"增加率"的觀念, 却是下章的一個主題.

在指數函數內, 命 $-x^2$ 代替 x^2, 我們得到一個極和指數函數相近的重要函數. 若是 我們就得 $exp(-x^3)$. 第三十圖內正表示 $y=exp(-x^2)$ 的圖形.

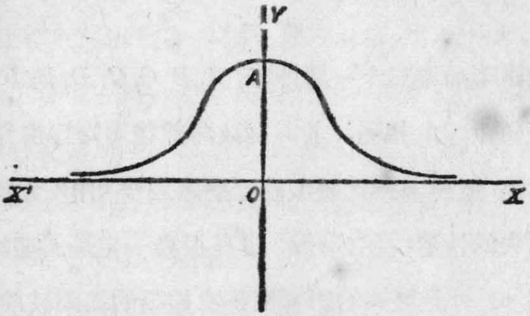

圖 30

這種曲線, 有點像一頂拿破崙式帽, 叫做"常態誤差曲線" (The curve of normal error). 它的相當函數對統計學理論方面極爲重要, 它告訴我們在許多情形內預料得到的平均結果的幾種差誤.

還有一個重要函數，係照下邊的方式，將指數函數和正弦併合，即：

$$y=exp\,(-cx)\times\sin\frac{2\,\pi x}{p}.$$

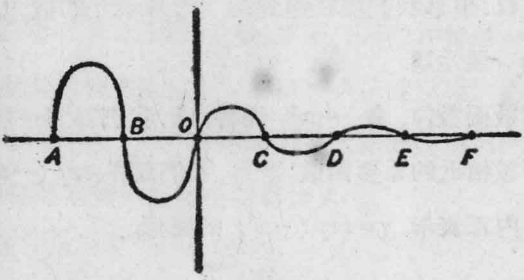

圖 31

它的圖形如第三十一圖所示. A, B, O, C, D, E, F 等點都以等間距 $\frac{1}{2}p$ 相隔，並且應該向前後兩端作出無限個類似的點. 這種函數代表振動受磨擦或受"阻"力的影響逐漸消失的情形. 沒有磨擦，這些振動一定是週期的，而週期為 p；可是磨擦的影響使每次振動的範圍較前縮小，相當那個範圍"一定百分比"(Constant percentage). "週期性"觀念(應以正弦或餘弦做代表)和"一定百分比"觀念的這種結合正就是形成這個函數的根據；換句話說，因為這樣，所以這個函數的形狀成為一個正弦函數和一個指數函數的一個乘積.

第十五章

微分學

在算學史上，"微分"(The differential calculus)的發明表出一個重大的轉變．科學的進步不外分成兩個時期．在第一個時期內，慢慢的累積起許多觀念；在第二個時期內，由這樣耐心的搜羅得研究的新材料，有些天才者借着一種新方法或一種新見解的發明，一步將全部學問提昇到一個較高的水平．思想史上這些比對進步的時期可以借用雪萊(Shelley)詠冰山形成的詩作譬喻．

那陽光灼融的冰山，
乃是雪花一片一片所結合，
雖經風雨多番吹擊，
仍是矗立而不倒．

智者的心胸亦復如此，

由一點一點的思想所組成；

一旦把那眞理揭穿，

萬國都要響應起來.

這個譬喻儘夠給讀者相當深刻的印象. 灼融冰山最終的陽光照射不一定勝過慢慢造成它的別些宇宙力量. 科學上亦然. 適逢其會造成轉變全部思想範圍最終觀念的天才不一定會勝過以前累積基礎的先輩. 在科學史方面，如果只贊美最後成功的那些人，那就未免數典忘祖了.

在現在的特殊情形中，這門學問到經它的兩個發明家最後樹立起來的時候，已有一段悠久的歷史. 甚至在希臘算學家中間，我們可以尋到它類方法相當的跡象；最後到這門學問正式成立前不久，福爾瑪 (Fermat, 1601 年生, 1665 年歿)——一個著名的法國算學家——更根據前人的觀念加以改良，替這門學問開拓出以後的新路線. 福爾瑪還應該和他並世同國的狄嘎兒匹列，共享位標幾何學發明人的榮譽. 所不同者，科學界實際係由狄嘎兒得到這些新觀念，福爾瑪不過獨立的造詣到這個地步.

但是，我們却不能不歸功到牛頓和萊布尼茨 (Leibnitz).

牛頓是一個算學家而兼物理科學的專家，萊布尼茨是一個算學家而兼哲學家，而每人在他自己所研究的範圍，都是世界知名最大的天才家之一．這門共同的發明每成爲一種不幸而且極不光榮的紛爭的原因．牛頓在 1666 年用到他所謂的 "Fluxions" 方法，並且使用於所著的格物原理 (Principia) 文章裏面，不過印刷的時候却省去若干特別的代數記號．但是他在 1693 年以前却沒有將這個方法印成單行本．萊布尼茨係在 1684 年發表他第一篇文字．牛頓的朋友說他得自牛頓一本作成未公開的筆記裏面，萊布尼茨也說牛頓抄襲他的發明．現在大致成爲定案，兩個人都應同享獨立發現的榮譽．這門學問曾達到發現醞釀成熟的階段，當然這樣兩個能幹人物會獨立的推究出來．

這類共同的發現在科學上是很普通的．發現並不都是由從前思想的傾向慢慢引起；而且在那個時間，許多的腦海裏都在努力從事於重要觀念的追求．如果我們僅就與英國人有關的發現說，立刻會憶到達爾文 (Darwin) 和華拉士 (Wallace) 同時說出"自然選擇"的定律 (The law of natural selection)，以及亞當姆士 (Adams) 和法國天文

家勒弗理 (Leverrier) 同時發現"海王星" (The Neptune) 等幾個事實. 關於何人應該享受榮譽的爭執每每夾有褊狹的國家成見在其間. 算學史給我們的眞正深刻的印象是, 在這麽多時代, 這麽多國家, 以及這麽多種族的人們中間, 見解和興趣總是單一的. 印度人, 埃及人, 亞述人, 希臘人, 阿拉伯人, 意大利人, 法國人, 德國人, 英國人, 以及俄國人都對於這門科學的發達有過重要的貢獻. 確實說, 一個特殊國家有點貢獻遽揚揚自得, 實不足以表偉大的精神.

"微分學" (The differential calculus) 的重要就在它的根本性質方面, 卽函數增加率的系統研究. 只要注意宇宙的現象, 立刻就可以看出這種情形; 速度是經過的距離的增加率, 而加速度是速度的增加率. 因此, 變化的基本觀念, 就是我們對現象的全部認識的基礎, 立刻提示出變化率的問題. 習見的"快"和"慢"兩個名詞實際卽含有提到變化率的意義. 因此, "微分學"是算學能夠用來說明自然的歷程重要的一把鎖鑰.

變化率這個觀念自然在牛頓的心目中, 而被容納進他說明這門學問的辭句間. 但是却有一個問題, 究竟這個由

自然現象誘導出的見解已否被以前預備階段的算學家注

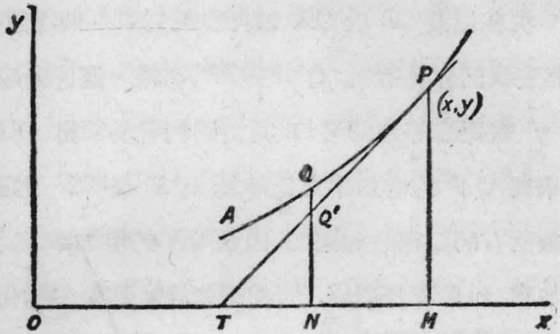

圖 32

意．他們注意過比較抽象的引曲線的切線，求曲線的長短，以及求曲線所圍的面積等問題．最後兩個問題，他們所謂的"曲線化直"(The rectification of curves)和"曲線化方"(The quadrature of curves)的問題，屬於"積分學"(The integral calculus)範圍；但是這種"積分學"却和"微分學"同被容納在一門學問裏面．

位標幾何學的增加使這兩個觀念溶合為一．因為(參看第三十二圖)，設 AQP 為任意曲線，又設 PT 為在線上 P 點的切線．設位標軸為 OX 和 OY，又設 $y=f(x)$ 為曲線的方程式，若是 $OM=x$，和 $PM=y$．現在設 Q 為曲線上任意運動點，位標為 x_1, y_1；因此 $y_1=f(x_1)$．又設

Q 爲切線上有相同橫距 x_1 的點；假設 Q' 的位標爲 x_1 和 y'. 現在假設 N 沿 OX 軸自左至右以一個等速度運動；那麽我們容易看出，Q' 沿 TP 切線等速運動時，Q' 點的 y' 縱距也等速的增加. 其實我們容易看出，$Q'N$ 的增加率與 ON 的增加率之比等於 $Q'N$ 與 TN 之比，這在直線所有的點都是相同的. 但是 QN 的增加率，即 $f(x_1)$ 的增加率，如果不是直線，那就隨曲線的點而生變化. 當 Q 經過 P 點時，$f(x_1)$ 的增加率（在此 x_1 與 x 疊合）和 P 點切線上的增加率相同. 所以，如果我們有一個普遍方法. 來定一變數 x 的一個函數的增加率；我們就能夠定出在一個曲線上任意點 (x,y) 的切線的斜度 (The slope)，而且作出它來. 因此，引一個曲線的切線以及定一個函數的增加率實際是相同的問題.

我們將可看到，如在"圓錐曲線"和"三角學"例中，兩個見解中人爲成分較多的一個就是現在這門學問所由發生. 這門科學實在重要的地方直到後來纔表現出來. 在任何科學中最後期待發現的事件就是這門科學實際研究的事物，這在歷史上差不多成爲一種慣例. 人們摸索幾個世紀，全憑著一種模糊的本能和一種迷離的好奇心，直到最

後"纔將眞理揭穿".

我現在舉幾個特殊情形，藉以認識我們要使其精密的這種觀念. 一列火車在運動——我們將如何確定它在某個瞬間，設說正午，的速度呢？我們可以取連正午在內五分鐘的一段時距，並測量這列火車在那個時間內經過的遠近. 假設我們求得爲五哩，我們就可以斷定這列火車係以每小時 60 哩的速度在開行. 但是五哩是一個長距離，我們不能夠確定，剛在正午火車係以這個速度運動. 在正午的時候，或許曾以每小時 70 哩的速度開行過，後來或許纔突然發生變化. 比較妥當一點，我們可以取一個較小的時距，設爲一分鐘，將正午包括在內，然後來測量在那個時間內所經的空間. 但是有些時候，還需要精確一些，那麼一分鐘還會嫌其太長. 實際上，我們測量就難免不精確，所以用不着將要測量的一段時間取得太短. 但是理論上，時間却越短越好，並且使得我們說，理想的準確需取一段極小的時間. 較前的算學家，特別是萊布尼茨，不僅盲從說，而且使人盲從. 即至今日，除非我們知道怎樣將它解釋成通俗的辭句外，這總算一種有用的說法. 所可異者，自然科學家的牛頓在說明這種學問的基本知識時，用到文

句反較哲學家的萊布尼茨多帶哲學的色彩，而且在另一方面，萊布尼茨貢獻出極令人滿意的記號，對於這門學問的發展方面曾有不少的幫助.

現在就純正算學範圍，另取一個例來說. 假設我們來求函數 x^2 對它的主變數任意值 x 的增加率. 我們其實還未曾定好"增加率" (The rate of increase) 的意義. 現在先就這個特例，來說明"增加率"的意義. 當 x 增到 $x+h$ 時，函數 x^2 增到 $(x+h)^2$；如是因爲主變數的一種增加 h，全部增加就是 $(x+h)^2-x^2$. 因此，遍 x 至 $x+h$ 全間距，主變數每度增加時函數的平均增加是 $\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$. 但是

$$(x+h)^2=x^2+2hx+h^2,$$

所以

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{2hx+h^2}{h}=2x+h.$$

若是，$2x+h$ 就是每度主變數增加時函數 x^2 的平均增加，這種平均係就 x 至 $x+h$ 這個間距內而言. 我們將明白得到我們需要的主題，即愈漸使 h 減小，在主變數的值 x 的"增加率". 所以到極限當 h 已無限減小時，我們說 $2x$ 就是 x^2 在主變數的值 x 的增加率.

在此，我們用"到極限當 h 已無限減小時"這種字樣，顯見不能不重新提起無限小數量的觀念．萊布尼茨認爲，似乎有點不可思議，實際上有這類無限小量的東西存在，自然就有無限小數對應它們．牛頓的辭句和觀念比較近代化；不過他說明這種事體並不比萊布尼茨用間接的語句明白．第一個眞正說明這門學問還是汪爾斯托拉士以及十九世紀中葉柏林派的算學家．但是在萊布尼茨和汪爾斯托拉士中間，對於這類算學發現繼由哲學說明的不可思議的無限小量，曾造成不少的著作．有些哲學家，例如柏凱萊 (Berkeley) 主教，都否認整個觀念的眞實，不過他們所持的理由却與現在所說的不同．但是終究希奇，不管所有對這個題目的基礎批評如何，算學的手續根本不錯，這是毫無問題的．實際上，題材是不錯的，不過解釋却都是錯誤的．在科學的進步方面，往往外界的批評——不啻是停止對一種方法的探討——徒勞無益，因爲這樣，所以無論解釋完全錯誤，它總能夠不錯．熟練的研究者的天性，和它們對於想達到的事物的好奇心理都是很可靠的南針．無論如何，微分學的成功結果使哲學對無限小的觀念平添不少的謬解．這種累贅的殘跡仍舊可以在關於微

分學的許多初等算學教本的解說中尋到. 我們儘可以引用一條規則說, 當一個算學的或哲學的作家寫到一種玄妙的文章時候, 他所說的卽毫無意義.

牛頓必定已經採用下列的說法, 當 h 臨近零, 到極限 $2x+h$ 變成 $2x$. 我們爲要說明這段話的意思, 就應先證明, 這段話實際上並沒有隱寫萊布尼茨所謂的無限小量的存在. 在研究牛頓記載的方法時, 好像說可以簡捷一點說, 當 h 爲零時, $2x+h$ 爲 $2x$. 但是却不應該這樣說; 因爲如此就將平均增加的計算所根據的 x 至 $x+h$ 的間距取消. 現在問題是, 怎樣使用長度 h 的一種間距而計算其間的平均增加, 同時研究 h 爲零時的情形. 牛頓解決這個問題係用一種極限的觀念, 而我們現在要進一步來說汪爾斯托拉士對它的眞實意義的解釋.

第一點應該注意, 討論 $2x+h$ 時, 我們曾將 x 值當做固定, 而 x 在變化. 換句話說 x 曾被當爲一種"固定的"變數, 或變常數, 如第九章所說; 而其實我們係將 $2x+h$ 當做主變數 h 的一個變數. 所以, 我們可以將現在的問題推廣, 來問我們說當主變數 h 臨到零值時函數 $f(h)$ 臨到極限 l 這句話的意義是甚麽. 但是另外, 我們將看到

主變數的這個特別值零並不是本題的要件；我們還可以再進一步來問，我們說當 h 臨到 a 值時 $f(h)$ 臨到極限 l 這句話的意義是甚麼.

現在，按照汪爾斯托拉士的解釋，h 臨到 a 值整個觀念雖然隱約描繪出我們所追求的對象，實際上却完全離開本題. 其實顯而易見，就算我們維持"h 臨到 a"一類的話作成基本的觀念，實際上並沒有逸出無限小的掌握；因為我們隱含有 h 極接近 a 的意思. 這正是我們要拋棄的那種觀念.

因此，我們要重將我們需加解釋的辭句提述一下，來注意我們說函數 $f(h)$ 在 a 的極限為 l 的意義.

$f(h)$ 在 a 的極限是 a 的貼鄰的一種性質，這裏"貼鄰"這個名詞用法見第十一章關於函數連續性的討論. 函數 $f(h)$ 在 a 的值為 $f(a)$；但是極限和值意義不同，或許根本就不相同，並且當值未經確定時也能存在. 我們又將照第十一章的定義，來使用"近算標準"這個名詞. 其實，在那一章末尾所下"連續性"的定義，我們實已下過一個"極限"的定義. 一個"極限"的定義是：——

一個函數 $f(x)$ 在它的主變數 x 的一個值 a 處有極

限 l, 即當在 a 的貼鄰函數值在每個近算標準以內漸進於 l.

將這個定義對照前邊給過的連續性定義, 即:——

一個 $f(x)$ 在它的主變數的一個值 a 處爲連續, 即當在 a 的貼鄰函數值在每個近算標準以內漸進於函數在 a 處的值.

我們立可看出,一個函數在 a 爲連續須當 (一) 它在 a 處有一極限, (二) 那個極限等於它在 a 處的值. 所以, 在第十一章末所給連續性的說明就是一個極限觀念的說明, 就是, 所有說明都在證實對所取的函數和所取的 a 的值說, $f(a)$ 是 $f(x)$ 在 a 處的極限. 其實, 我們來注意在函數並不連續的一點的極限, 還更有意味. 例如, 就第十一章第二十圖所表的函數來說. 這個函數 $f(x)$ 的定義是, 對主變數所有除整數 1, 2, 3, ... 等以外的值, 它的值爲 1; 而對這些整數值, 它的值爲 0. 現在我們來研究它在 $x=3$ 時的極限. 我們知道, 在極限定義內, 函數在 a 處 (現在, $a=3$) 的值並不計入. 但是, 除去 $f(3)$, 當 x 位於任何 (一) 含 3 但不爲一端點和 (二) 並不延展到 2 和 4 的間距以內時, $f(x)$ 的值全都等於 1; 因此這些值在每

個近算標準以內漸近於 1. 所以, 1 是 $f(x)$ 在主變數 x 的值 3 處的極限, 但是由定義 $f(3)=0$.

這一個例子的函數, 在主變數的值 3 處兼備一個值和一個極限, 不過值並不等於極限. 在第十一章末研究過函數 x^2 在主變數的值 2 處的情形. 這個函數在 2 處的值爲 2^2, 卽 4, 並且它的極限也證實爲 4. 在此, 我們就得到值和極限都相等的一個函數.

最後, 我們來說一種與本題有最重要的關係的情形, 就是, 具有一個極限, 但在它的主變數某一個值處沒有確定值的一種函數. 我們用不着費力尋求, $\frac{2x}{x}$ 儘夠做現在這種函數的一個範例. 在任何算學書內, 我們可以見到方程式 $\frac{2x}{x}=2$, 毫無疑義也無須註釋. 但是在此却有一個難點; 因爲當 x 爲零時, $\frac{2x}{x}=\frac{0}{0}$; 而 $\frac{0}{0}$ 並無確定的意義. 因此, 函數 $\frac{2x}{x}$ 在 $x=0$ 處的值沒有確定的意義. 但是對於 x 每個其他的值, 函數 $\frac{2x}{x}$ 的值爲 2. 所以, $\frac{2x}{x}$ 在 $x=0$ 處的極限爲 2, 而在 $x=0$ 處它爲無狠. 同樣, $\frac{x^2}{x}$ 在 $x=a$ 處的極限爲 a, 無論 a 爲何數, 如是 $\frac{x^2}{x}$ 在 $x=0$ 處的極

限爲 0. 但是 $\frac{x^2}{x}$ 在 $x=0$ 處的值成不定式 $\frac{0}{0}$, 這個式並沒有確定的意義. 所以函數 $\frac{x^2}{x}$ 有一個極限, 但在 0 處無值.

現在, 我們然後回到原來討論這種極限性質的本題. 對於函數 x^2 在它的主變數任意值 x 處的 "增加率", 我們打算怎樣下定義呢? 我們的答案是, 這種 "增加率" 就是 $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ 這個函數在主變數 h 的值爲零時的極限. (注意: x 在此處是一個 "常數"). 我們現在來看, 根據我們的極限定義, 這個答案怎樣做下去. 我們知道

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{2hx+h^2}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}.$$

現在, 在求 $\frac{h(2x+h)}{h}$ 在主變數 h 的值 0 處的極限時, 函數在 $h=0$ 處的值 (無論多少) 並不計入. 但是對所有 h 的值, 除 $h=0$ 而外, 我們可以用 h 來除分子分母. 因此, $\frac{h(2x+h)}{h}$ 在 $h=0$ 處的極限和 $2x+h$ 在 $h=0$ 處的極限相同. 現在, 無論我們如何選取近算標準 k, 就 $-\frac{1}{2}k$ 至 $+\frac{1}{2}k$ 這段間距來研究, 我們看到對間距內的 h 值, $2x+h$ 和 $2x$ 相差小於 $\frac{1}{2}k$, 卽小於 k. 這是無論任

何標準 k 都是眞實的. 所以在 h 的值 0 的貼鄰, $2x+h$ 在每個近算標準以內都漸近於 $2x$, 因此 $2x$ 是 $2x+h$ 在 $h=0$ 處的極限. 由是得到, $2x$ 就是我們所說的 x^2 在主變數的值 x 處的"增加率". 用這個方法得到 x^2 的增加率, 和照萊布尼茨的方式使 h 化成"無限小", 結果是一樣的.

"微係數" (The differential coefficient), "誘導函數" (The derived function) 等幾個比較抽象的名詞, 通常卽用來代替我們現在所說的一個函數的"增加率". 一般的定義如下: 函數 $f(x)$ 的微係數就是函數 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 在主變數值爲 0 時的極限.

用這個定義和相輔的極限定義, 我們實際上怎樣辦到不用從前在算學界糾纏不已的"無限小數"的觀念呢? 在它們方面確也有困難, 因爲一方面它們不得不用 x 至 $x+h$ 一段間距而計算中間的平均增加, 而在另一方面, 它們最後須得命 $h=0$. 結果好像又牽涉到一種實有的零間距的觀念. 現在, 我們怎樣避免這個困難呢? 照這個情形——我們就採用另一種解釋說, 對應任何近算標準, 可以尋到具有某某性質的某個間距. 所不同者, 我們從前着重

在"變數"觀念,而它們並不是這樣.所以,在我們說完算學解析根本的觀念以後,我們不能不重新回到第二章研究所根據的觀念——在算學上,根本重要的觀念是"某幾個事物"和"任何個事物"兩個觀念.

第十六章

幾何學

“幾何學” (Geometry), 像其餘的算學一樣, 是抽象的. 在它內面, 研究物件的形狀和相對位置的性質. 但是我們無須注意誰在觀察這些物件, 或者他究竟由看或觸抑或聽來認識它們. 簡單一句話,我們不管一切特殊的感覺.而且, 即如國會議院,或地球這樣的特殊物件也完全不管.每個命題討論有某某幾何性質的任何物件. 當然, 它幫助我們的思考集中於 “球” (Spheres) “圓錐體” (Cones) “三角形” 以及 “正方形” 等特殊的例子. 但是命題並不是只適用於眞正書內所印的形體, 而是適用於任何這樣的形體.

所以, “幾何學” 和 “代數學” 一樣, 受 “任何個” 以及 “某幾個” 事物兩個觀念所支配. 還有, 它也同樣的來研究各組事物相互的關係. 例如, 取任意兩個三角形

ABC 和 *DEF* 來說.

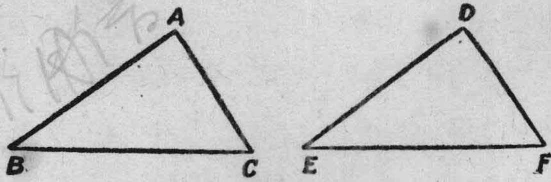

圖 33

為要使兩個三角形可以完全相等，這兩個三角形某幾部分間應該有甚麼關係存在呢? 這在一切初等幾何學中開始就着手的研究之一. 它是兩個三角形間能有的一組關係的一種研究. 答案是，這兩個三角形完全相等，如果:——

(甲) 這個的兩個邊和夾邊各與那個的兩個邊和夾角相等;

或(乙)這個的兩個角和夾邊各與那個的兩個角和夾邊相等:

或(丙)這個的三個邊各與那個的三個邊相等.

這個答案立刻引起另外一個問題. 當一個三角形的三個角各與另一三角形的三個角相等時，這兩個三角形中間的關係是甚麼呢? 由這個進一步的研究，我們得到"相似性" (The similarity) 的全部理論，這是另一類的三角

形關係.

其次,另取一個例子,來研究三角形 ABC 內部的結構.它的邊和角都互有關係——大角對大邊,而一個"等腰三角形"(The isosceles triangle)的兩底角相等.如果我們提到三角學,這個關係還得到一種比較準確的表示,即

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c},$$

$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos A$,以及兩個類似的公式.

另外,三角形的幾個角中間還有更簡單的關係,即,它們的和等於兩個直角;而在三個邊中間,即,任意兩邊的長度的和大於第三邊的長度.

所以研究幾何學眞正的方法即注意關係簡單的形體,如三角形平行四邊形以及圓形之類,並考查它們各部分中間的相互關係.幾何學家腦海裏所有的不是一個游離的命題,而是一個各部分有相互關係的形體.正如在代數學裏面一樣,他將三角形推廣成多邊形,將邊推廣成圓錐曲線.或者倒過來,按照等邊,等腰或鈍角將三角形分類,按照邊數將多邊形分類,以及按照是雙曲線,橢圓或拋物線將圓錐曲線分類.

前邊幾個例子說出幾何學的基本觀念恰和代數的基本

觀念有相同的情形;所不同者 代數學討論數目,而幾何學討論線,角,面積以及其他幾何實體. 這種根本的同一是這許多幾何學眞理能夠着上代數學外套的一個理由. 因此,如果 A, B, 和 C 爲三角形 ABC 內各個角的度數,角間的相互關係就表爲方程式

$$A+B+C=180°;$$

又如 a, b, 和 c 各爲三個邊的呎數,邊間的相互關係就表爲 $a<b+c, b<c+a, c<a+b$. 還有,前邊所舉的三角公式也是本題內的例子. 由是可知,變數觀念和變數相互關係在幾何學內正如在代數學內同樣重要.

但是因爲長度,面積,體積以及角度全都可以計算,我們還能夠將幾何學和代數學間類似之點推進一步; 譬如任意長度的大小可以用它含有某種隨意規定的單位的倍數(不一定是整數)來定,同樣對於面積,體積以及角度等. 前邊所舉的幾個三角公式就是這類實例. 不過它得到最大的用途却在解析幾何學方面 這門高深的學問每被人誤稱爲"解析圓錐曲線學"(The analytical conic sections),因此只注意它的一小分枝. 好像高深的"人類學"(Anthropology)被人稱"鼻的研究"(The study of noses), 正因為鼻是人體一個顯著的部分.

雖然在幾何學和代數學上算學的程序是根本一致的, 而且在發展方面是互相溝通的, 但是空間的性質和數目的性質中間終必有一種基本的差異——其實就是所有空間和數目中間根本的區別. 空間的"廣袤性" (The spaciness) 和數目的"衆多性" (The numerosity) 是根本不同的事件, 並且立刻就應該領悟的. 無論應用代數學對幾何學方面, 抑或應用幾何學對代數學方面, 決不能抹煞這個主要的差異.

空間和數目間一個極顯明的區別就是, 前者表面上彷彿不及後者這樣抽象和緊要. 天使的數目能夠計算, 就因為他們同為事物之一. 當我們不論何時知道他們的名子是拉斐耳 (Raphael), 嘎布理耳 (Gabriel) 和麥凱耳 (Michael), 以及這些不同的名字代表不同的人物時, 我們就無疑問的知道他們有三個. 承認這個大前提, 世界上一切關於天使有無的大道理總不能改變這個事實.

但是, 說到他們對空間的關係, 我們仍舊莫明其妙. 他們總存在空間內嗎? 說他們在此處, 或者在彼處, 或者在隨處, 或者在每處, 或者都是同樣的荒謬. 他們的存在可

以完全和空間內的所在不生關係. 所在, 雖然數目必須適用於一切事物, 空間就無須這樣. 事物所在的知覺好像一定要依件, 或者被它含在我們的多種, 或全體, 感覺. 它伴有多種感覺而不依靠任何特殊的感覺. 但是它是我們用感覺認識的事物的一個特性. 我們直接由事物相互的位置來認識的事物是一種另成一類的事物, 也像由聲音, 顏色, 香臭, 以及甘苦來認識一樣. 所以, 初看起來, 算學就它包容的幾何學而言, 好像已不是第一章所說它的"抽象性"的那樣抽象.

但是, 這却是一個錯誤; 事實是, 空間的"廣袤性"根本不在我們幾何學的理解裏面. 它在算學家的幾何的直覺中間, 依人而有差異. 但是在我們的理解中間的不過是空間內事物, 或構成空間的事物——這類的性質當然完全如第一章內抽象的定義那樣的抽象——某幾種性質; 這些性質不含任何特殊的空間認識或空間直覺或空間感覺. 它們的立場和算學上數的性質完全相同. 所以, 對於研究幾何學是這樣不可少的一種幫助的空間直覺 (The space-intuition) 在邏輯上是不適用的: 當正式提敍大前提的時候並沒有將它包容在內, 而在推理的時候也無須

用到它. 它在實用方面, 相當於激動我們的思想不可少的一個例子的重要. 在數目方面, 激動我們的思想的例子是同樣不可少的. 當我們想到"二"和"三"的時候, 我們就注意划船的槳, 或成堆的球, 或其他特殊物件形體的累積. 幾何學的特點在我們思想中的這一種特例有它固定不易的而且接近人生的重要. 命題抽象的邏輯的程式完全說出來是, "如果任意幾羣事物有某某抽象的性質, 它們也有某某其他的抽象的性質". 但是顯現在我們眼底的却是空間內一羣點,線, 面和體積: 這種例子確像, 並且也就是使命題發生趣味的唯一個例子. 但是, 無論它怎樣的緊要, 它終不過是一個例子.

幾何學視爲算學的一科, 就是較普遍的"位的科學" (The science of order) 的一個分枝. 有人稱它爲"廣袤位的科學" (The science of dimensional order); 添上"廣袤"這個形容詞的理由是, 因爲有些限制使它只成爲普遍的位的科學之一部, 而這些限制正和直線和平面以及平面對整個空間等正式關係之產生有關.

我們容易了解, 在形成科學的一個物理外界觀念時, 空間實際上的重要. 在一方面, 我們的空間知覺和我們各種

感覺交織，並且將它們連繫起來．我們儘可以斷定，我們觸覺一個物體係和我們看它在相同的地方；而且即在反常的情形中，我們觸着它仍在看見它的同一地方，這是連繫我們各種感覺的實在的基礎．因此，可以說空間知覺是我們感覺的共同部分．其次，空間抽象的性質也佔所謂有空間的意味的一大部分．我們還可以說，對每個空間性質，有一個抽象的算學記載相應．取一個最不利的情形說，一個曲線能夠有形狀上的一種特別的美觀：但是對這種形狀，就會有僅和這種形狀相伴的某些抽象的算學性質相應．

所以結論是：(一) 幾何學內研究的空間的性質，像數的性質一樣，是屬於當做事物看的事物的性質，而不特別涉及任何特殊的認識方式；(二) 空間知覺伴同有我們的感覺，有時或者所有的感覺，至少當然不只一種；但是一定都存在某一空間內或任意空間內到不見得是事物的一個必要的性質．

第十七章

量

在前章，我們說過，長度可以用某種單位長度來量，面積用某種單位面積來量，以及體積用單位體積來量.

當我們有一組事物，如可以用任何它們其中之一來量的長度，我們就說它們是"同類量" (Quantities of the same kind). 所以長度都是同類量，面積也都是同類量，以及體積也都是同類量. 但是一個面積却不是和一個長度同類的量，也不是和一個體積同類的量. 我們現在先將"可量"的意義解釋幾句，那麽就舉長度做例.

長度係用直尺來量. 將直尺往來搬動，我們辨別出長度相等不相等. 其次，三個緊貼的長度，每段一呎，形成三呎的一段整長. 所以量長度，我們必須確定長度的相等以及長度的相加. 到使用過某種檢驗，如直尺的搬動後，我們就說這些長度相等；而到使用過某種手續，如使各個長度

相接而不重疊後，我們就說已將長度加成一段完整的長度．但是我們不能夠隨意取任何檢驗做相等的檢驗，和任何的手續做加法的手續．相加演算和相等判斷的結果必須和某些預先設定的條件相合．例如，兩段較大的長度相加所生的一段長度必須大於兩段較小的長度相加所生的．這些預先設定的條件準確表出時或者就叫做"數量公理"(Axioms of quantity)．唯一能夠發生的關於它們眞僞的問題是，當這些公理被滿足時，究竟我們是否一定得到平常人所謂的"量"(Quantities)．如果我們不這樣，那麼"數量公理"這個名字定就失於鑒別——這是事實．

這些"數量公理"完全是抽象的，正像空間的算學性質一樣．它們對於所有的數量都是相同的，並且它們並不預先設定特殊方式的知覺．與數量觀念相連的觀念是用來可以一種"連續量"(The continuum)——如一條線，一個面積或一個體積——分成確定部分的工具．然後計算這些部分；結果就能夠得來確定一個連續的整個準確的性質．

我們的時間之流以及事變連續的知覺就是這些數量觀念應用的一個主要例子．我們由類似事變的重複測量時

間(如討論週期性時說過的)——一支標準燭接連各时的燃燒,地球對恆星的自轉,一個時鐘長短針的旋轉全都是這類重複的實例.這些種事變代替與長度有關的直尺.我們用不着假設,這些種任一種事變在每度循環久暫剛好相等.我們所用得着的是,應該曉得一種尺度,使我們能夠藉以表出某一種的幾個例子相對的久暫.例如,我們如果高興可以假設,地球自轉的速度在減小,每日要較前一日增長一秒若干分之幾.有這樣一種尺度,我們能夠將任何一日的長來和其他一日的長比較.但是根本的地方在,應該取一串重複的現象,例如接連若干日,作成一串標準;同時如果不將那串的各個事變取做久暫相等,應該規定一種尺度,利用任何一日的久暫較準每日應該派定的久暫.

那麼,這樣一種尺度應該具備的要件是甚麼呢?第一點,對常識斷定久暫相等的事變,應派給它們差不多相等的久暫.一種尺度,如使各日長短懸殊過甚,和使極類似的演變相差太大,根本就不能夠如此.所以,第一個要件是要與常識完全符合.但是僅此絕對不夠確定這個規則,因爲常識是一種粗率的批評,並且極容易滿足.第二個要

件是，這個規則詳細的規定應該做到能夠將自然的定律作最簡單的陳述. 例如，天文學家告訴我們，地球的自轉日漸緩慢，如是每日增長一秒想不到的細微的若干分之幾. 他們要這樣肯定的唯一理由是,沒有這個事實做根據,他們勢必須放棄牛頓的運動定律. 為要維持運動定律的簡單,他們就改變時間的測法. 只要從頭到尾考查一下,就見得這是一種完全合法的手續.

前邊關於空間的算學性質的抽象性的說明稍加文字間的修正，適用於時間的算學性質. 時間之流的意義和所有我們的感覺和知覺都是相連的，而實際上. 所有時間方面引起我們注意的一切儘能夠與我們派給它的抽象的算學性質相合. 反過來說，前邊對我們用以定每日長短的尺度兩個要件的話也適用於定一種碼量長短的尺度方面——即，碼量移動時顯然保持同一長短. 所以，任何尺度必須辦到，除細微的變更外，始終長度不變. 其次，第二個要件是這個，對於細微的變更，將設定一種尺度，藉此能夠將自然定律極簡單的表示出來. 例如,按照第二個要件,我們假設，碼量依造成的質量溫度變更而有漲縮.

撇開前邊所說的我們的感覺和所在以及久暫的知覺相

連帶，和線面積久暫等每種都是數量兩個事實，數的理論對於宇宙定律探討的工作就必定無有多大用處．可以說，物理的科學就寄托和"數"，"量"，"空間"和"時間"幾個基本觀念上面．和它們相連的算學科學部分並不足構成算學的全體，不過它們卻是今日所有的算學物理學支柱的基石．

譯名對照表

A

Abel 阿倍耳

Abscissa 橫距

Abstractness 抽象性

Adams 亞當姆士

Addition-Theorem 加法定理

Ahmes 愛默士

Alexander the Great 亞歷山大大帝

Algebra, Fundamental Laws of 代數學的基本定律

Ampère 安培爾

Analytical Conic Sections 解析圓錐曲線學

Apollonius of Perga 帕加的阿波洛紐士

Approximation 近算

Arabic Notation 阿拉伯記號

Archimedes 阿幾默德

Argument of a Function 一個函數的主變數

Aristotle 亞歷士多德

Astronomy 天文學

Axes 軸

Axioms of Quantity 數量公理

B

Bacon 培根

Ball, W. W. R. 拜爾

Beaconsfield 貝康士費爾德

Berkeley 柏凱萊

Bhaskara 巴士喀拉

C

Cantor, Georg 康托

Circle 圓

Circular Cylinder 圓柱體

Clerk Maxwell 馬克斯威爾

Columbus 哥倫布

Compact Series 緊湊的級數

Complex Quantities 複數量

Conic Sections 圓錐曲線

Conics 圓錐曲線

Constants 常數

Continuity 連續, 連續性

H

Halley 哈列
Harmonic Analysis 調和解析
Harriot, Thomas 哈立奧
Herz 海爾慈
Hiero 希羅
Hipparchus 希帕克穆士
Hyperbola 雙曲線

I

Imaginary Numbers 虛數
Imaginary Quantities 虛量
Incommensurable Ratios 不可通約比
Infinitely Small Quantities 無限小量
Infinity 無限性, 無限
Integral Calculus 積分學
Interval 間距

K

Kepler 開普勒
Kepler's Laws 開普勒定律

L

Laputa 拉蒲達
Laws of Motions 運動定律
Leibnitz 萊布尼茨
Leonardo da Vinci 達維錫
Leverrier 勒弗理
Light 光
Limit of a Function 一個函數的極限
Limit of a Series 一個級數的極限
Limits 極限
Locus 軌跡

M

Macaulay 馬可萊
Major Axis 長軸
Malthus 馬爾薩斯
Marcellus 瑪賽祿
Mass 質量
Measure 公量
Mechanics 機械力學
Menaechmus 密納克穆士
Minor axis 短軸
Motion, First Law of 運動, 第一定律

N

Neighbourhood 貼鄰
Newton 牛頓
Non-Uniform Convergence 不一致的收斂
Normal Error, Curve of 常態誤

Stokes ,Sir George 史托克
Sum to Infinity 無窮和
Surveys 測量
Swift 史威甫特

T

Tangents 切線
Taylor's Theorem 泰勒爾定理
Time 時間
Transportation, Vector of 搬運的向量
Triangle 三角形
Triangulation 大三角測量
Trigonometry 三角學

U

Uniform Convergence 一致的收斂
Unknown, The 未知數

V

Value of a Function 一個函數的值
Variable, The 變數
Variable Function 變函數
Vectors 向量
Vertex 頂點
Volta 弗打

W

Wallace 華拉司
Weierstrass 汪爾斯托拉士

Z

Zero 零