**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2019/2020**

# Bündel, Garben und Kohomologie

## Arbeitsblatt 16

Aufgabe 16.1. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokal freie Garben auf einem beringten Raum vom Rang $r$ bzw. $s$. Zeige, dass die direkte Summe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ lokal frei vom Rang $r+s$ ist.

Aufgabe 16.2. Es sei $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe vom Rang $r$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass die duale Garbe $\mathcal{F}^*$ ebenfalls lokal frei vom Rang $r$ ist.

Aufgabe 16.3. Zeige, dass eine lokal freie Garbe $\mathcal{F}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ in natürlicher Weise isomorph zu ihrem Bidual $\mathcal{F}^{**}$ ist.

Aufgabe 16.4. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokal freie Garben auf einem beringten Raum. und sei $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein surjektiver Modulhomomorphismus. Zeige, dass der Kern $\operatorname{kern} \varphi$ ebenfalls lokal frei ist.

Aufgabe 16.5. Zeige, dass der Rang von lokal freien Garben auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ additiv für kurze exakte Sequenzen ist. Dies bedeutet, dass wenn eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

von lokal freien Garben vorliegt, dass dann

$$\operatorname{rang} \mathcal{G} = \operatorname{rang} \mathcal{F} + \operatorname{rang} \mathcal{H}$$

ist.

Aufgabe 16.6. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokal freie Garben auf einem beringten Raum vom Rang $r$ bzw. $s$. Zeige, dass das Tensorprodukt $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$ lokal frei vom Rang $rs$ ist.

Aufgabe 16.7. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ lokal freie Garben auf einem beringten Raum und sei $\varphi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein injektiver Modulhomomorphismus. Zeige, dass die Quotientengarbe $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ im Allgemeinen nicht lokal frei ist.

Aufgabe 16.8. Es sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter Modul auf einem noetherschen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$. Es sei $r \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind.

(1) $\mathcal{F}$ ist lokal frei vom Rang $r$.
(2) Für jeden Punkt $P \in X$ ist der $\mathcal{O}_{X,P}$-Modul $\mathcal{F}_P$ frei vom Rang $r$.

Aufgabe 16.9. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches integres Schema und sei $\mathcal{F}$ ein kohärenter Modul auf $X$. Zeige, dass es eine offene nichtleere Teilmenge $U \subseteq X$ derart gibt, dass $\mathcal{F}|_U$ frei ist.

Aufgabe 16.10. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein noethersches Schema und sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Modulhomomorphismus von kohärenten Moduln $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ auf $X$. Es sei $P \in X$ ein Punkt derart, dass $\varphi_P\colon \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ ein Isomorphismus ist. Zeige, dass es eine offene Umgebung $P \in U \subseteq X$ derart gibt, dass $\varphi\colon \mathcal{F}|_U \to \mathcal{G}|_U$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 16.11. Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $M$ ein flacher $R$-Modul. Es sei $S$ eine $R$-Algebra. Zeige, dass $M \otimes_R S$ ein flacher $S$-Modul ist.

Aufgabe 16.12.*

Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $M$ ein $R$-Modul. Zeige, dass $M$ genau dann ein projektiver Modul, wenn es einen weiteren Modul $N$ derart gibt, dass die direkte Summe $M \oplus N$ frei ist.

Aufgabe 16.13. Es sei $K$ ein Körper und $R = K^n$ der Produktring. Zeige, dass jeder $R$-Modul $M$ projektiv ist.

Aufgabe 16.14. Man gebe ein Beispiel für einen artinschen Ring und einen endlich erzeugten $R$-Modul $M$, der nicht projektiv ist.

Aufgabe 16.15. Zeige, dass es zu dem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$p\colon \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_+)} \longrightarrow \mathbb{Q},\ e_n \longmapsto \frac{1}{n},$$

keinen Gruppenhomomorphismus

$$i\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_+)}$$

mit $p \circ i = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$ gibt. Folgere, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ nicht projektiv ist.

Aufgabe 16.16. Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $M$ ein projektiver $R$-Modul. Es sei $T \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass $M_T$ ein projektiver $R_T$-Modul ist.

Aufgabe 16.17. Es sei $R$ ein kommutativer Ring und $M$ ein projektiver $R$-Modul. Es sei $S$ eine $R$-Algebra. Zeige, dass $M \otimes_R S$ ein projektiver $S$-Modul ist.

Aufgabe 16.18. Sei $R$ ein kommutativer Ring und $f_1, \ldots, f_n \in R$. Es sei

$$\mathcal{S} = \operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n)$$

die zugehörige Syzygiengarbe auf $U = D(f_1, \ldots, f_n) \subseteq \operatorname{Spek}(R)$. Man gebe explizite Trivialisierungen für $\mathcal{S}|_{D(f_i)}$ an.

Aufgabe 16.19. Sei $R$ ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $f_1, \ldots, f_n \in R$ homogene Elemente vom Grad $d_i$. Das von den $f_i$ erzeugte Ideal $I$ und das irrelevante Ideal $R_+$ haben das gleiche Radikal. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es liegt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} R(-d_i) \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

von graduierten $R$-Moduln mit homogenen Homomorphismen vor.

(2) Auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$ liegt eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_Y(-d_i) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

von lokal freien Garben vor.

(3) Auf $D_+(f_i)$ ist die Einschränkung der lokal freien Garbe

$$\operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n)$$

isomorph zu einer direkten Summe von getwisteten Strukturgarben.

Aufgabe 16.20. Es sei $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe auf einem beringten Raum. Zeige, dass die Determinantengarbe $\operatorname{Det} F$ invertierbar ist.

Aufgabe 16.21. Es sei $\mathcal{F}$ eine lokal freie Garbe auf einem beringten Raum mit der Dualgarbe $\mathcal{F}^*$. Zeige, dass für die Determinantengarben die Beziehung

$$(\operatorname{Det} F)^* = \operatorname{Det}(F^*)$$

gilt.

Aufgabe 16.22. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei

$$\mathcal{F} = \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_r$$

eine direkte Summe von invertierbaren Garben. Zeige

$$\operatorname{Det} F \cong \mathcal{L}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}_r .$$

Aufgabe 16.23. Zeige, dass in der Situation von Aufgabe 16.19 die Determinantengarbe der lokal freien Garbe $\operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n)$ auf $Y = \operatorname{Proj}(R)$ gleich

$$\operatorname{Det}(\operatorname{Syz}(f_1, \ldots, f_n)) = \mathcal{O}_Y(-\sum_{i=1}^n d_i)$$

ist.

## Abbildungsverzeichnis