Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 20

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 20.1. Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von 5 und der andere ein Fassungsvermögen von 7 Litern. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 20.2. Interpretiere das Lemma von Bezout als eine Lösungsaussage über eine Gleichung.

Aufgabe 20.3.*

Finde eine Darstellung der 1 für das Zahlenpaar 11 und 13.

Aufgabe 20.4. Man gebe eine Darstellung des ggT von 5 und 7 an. Wie viele solche Darstellungen gibt es?

Aufgabe 20.5. Finde eine Darstellung der 1 für die folgenden Zahlenpaare: 5 und 7; 20 und 27; 23 und 157.

Aufgabe 20.6. Die Wasserspedition „Alles im Eimer" verfügt über 77-, 91- und 143-Liter Eimer, die allerdings keine Markierungen haben. Sie erhält den Auftrag, genau einen Liter Wasser von der Nordsee in die Ostsee zu transportieren. Wie kann sie den Auftrag erfüllen?

Aufgabe 20.7. Zeige, dass es zu ganzen Zahlen d, n mit $d > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen q, r mit $0 \leq r < d$ und mit

$$n = dq + r$$

gibt.

Aufgabe 20.8. Es seien n, d positive Zahlen und es sei

$$n = qd + r$$

mit $q \in \mathbb{N}$ und r zwischen 0 und $d - 1$. Wie erhält man daraus die Division mit Rest von $-n$ durch d?

Aufgabe 20.9.*

Zeige, dass es zu ganzen Zahlen d, n mit $d > 0$ eindeutig bestimmte ganze Zahlen k, s mit

$$n = kd + s$$

und mit

$$-\frac{d}{2} < s \leq \frac{d}{2}$$

gibt.

Aufgabe 20.10. Zeige, dass für zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die folgenden Beziehungen äquivalent sind.

(1) a teilt b (also $a|b$).
(2) $b \in \mathbb{Z}a$.
(3) $\mathbb{Z}b \subseteq \mathbb{Z}a$.

Aufgabe 20.11. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

Aufgabe 20.12. Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 5439 und 3871.

Aufgabe 20.13. Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 2956 und 2444.

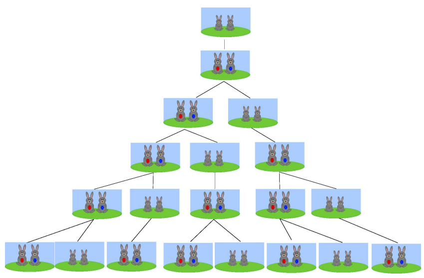
Aufgabe 20.14.*

Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1085 und 806 und schreibe die beiden Zahlen als Vielfache des größten gemeinsamen Teilers.

Aufgabe 20.15. Es seien a und b teilerfremde natürliche Zahlen. Es stehen beliebig viele Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, deren Fassungsvermögen a bzw. b ist. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

Aufgabe 20.16.*

Es stehen zwei Eimer ohne Markierungen zur Verfügung, ferner eine Wasserquelle. Der eine Eimer hat ein Fassungsvermögen von a und der andere ein Fassungsvermögen von b Litern, wobei a und b teilerfremd seien. Zeige, dass man allein durch Auffüllungen, Ausleerungen und Umschüttungen erreichen kann, dass in einem Eimer genau ein Liter Wasser enthalten ist.

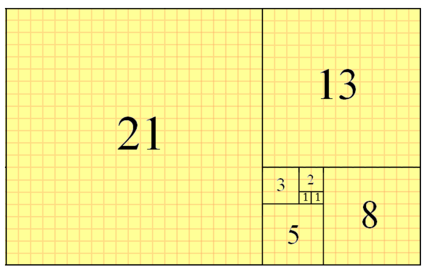


Aufgabe 20.17. Kaninchen werden bekanntlich immer zur Monatsmitte geboren, die Tragzeit beträgt einen Monat und die Geschlechtsreife erreichen sie im Alter von zwei Monaten. Jeder Wurf besteht aus genau einem Paar, und alle leben ewig.

Wir starten im Monat 1 mit einem Paar, das einen Monat alt ist. Sei f_n die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat, also $f_1 = 1$, $f_2 = 1$. Beweise durch Induktion die Rekursionsformel

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n .$$

Diese Zahlfolge nennt man die Folge der *Fibonacci-Zahlen*. Wie viele der f_n Paare sind im n-ten Monat reproduktionsfähig?



Die Fibonacci-Zahlen sind somit $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Aufgabe 20.18. Wende auf zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen den euklidischen Algorithmus an. Welche Gesetzmäßigkeit tritt auf?

Aufgabe 20.19.*

Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt (für $n \geq 2$)

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Aufgabe 20.20.*

Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass das Produkt von n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen von $n!$ geteilt wird.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 20.21. (2 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 823 und 629.

Aufgabe 20.22. (2 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Z}$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler von 1983 und 1528.

Aufgabe 20.23. (4 Punkte)

Bestimme den größten gemeinsamen Teiler von $4199, 2431$ und 3553, sowie eine Darstellung desselben als eine Linearkombination der gegebenen Zahlen.

Aufgabe 20.24. (5 Punkte)

Es seien a, b teilerfremde natürliche Zahlen. Zeige, dass jede natürliche Zahl

$$n \geq ab$$

eine Darstellung

$$n = xa + yb$$

mit $x, y \in \mathbb{N}$ besitzt.

Aufgabe 20.25. Alle Flöhe leben auf einem unendlichen Zentimeter-Band. Ein Flohmännchen springt bei jedem Sprung 78 cm und die deutlich kräftigeren Flohweibchen springen mit jedem Sprung 126 cm. Die Flohmännchen Florian, Flöhchen und Carlo sitzen in den Positionen $-123, 55$ und -49. Die Flohweibchen Flora und Florentina sitzen in Position 17 bzw. 109. Welche Flöhe können sich treffen?

Aufgabe 20.26. (6 Punkte)

Wir betrachten eine digitale Uhr, die 24 Stunden, 60 Minuten und 60 Sekunden anzeigt. Zur Karnevalszeit läuft sie aber nicht in Sekundenschritten, sondern addiert, ausgehend von der Nullstellung, in jedem Zählschritt immer 11 Stunden, 11 Minuten und 11 Sekunden dazu. Wird bei dieser Zählweise jede mögliche digitale Anzeige erreicht? Nach wie vielen Schritten kehrt zum ersten Mal die Nullstellung zurück?

Abbildungsverzeichnis