Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

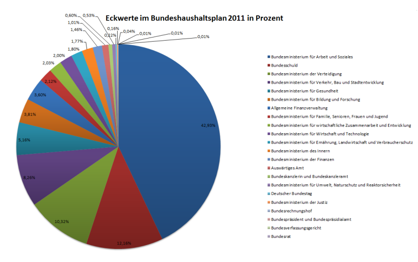
Vorlesung 27

Prozentrechnung

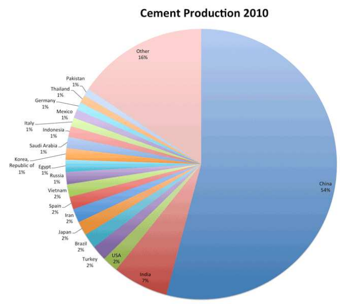
Definition 27.1. Ein *Prozent* ist $\frac{1}{100}$.

Definition 27.2. Ein *Promille* ist $\frac{1}{1000}$.

Dafür gibt es spezielle Zeichen, % und ‰. Von der Definition her ist die Prozentrechnung ein Spezialfall des Rechnens mit rationalen Zahlen, und zwar von Dezimalbrüchen. Eine rationale Zahl zwischen 0 und 1 gibt den Anteil von einer gegebenen Grundgröße an. Diese Anteilsgröße wird in vielen alltäglichen Kontexten am besten durch einen Dezimalbruch angeben, da dieser eine unmittelbare Größenvorstellung mitliefert, da Dezimalzahlen untereinander einfach vergleichbar sind, wie in Bemerkung 26.6 erwähnt wurde. Bei der Größenordnung will man es häufig gar nicht so genau wissen, sondern nur eine ungefähre Größenvorstellung haben. Deshalb werden viele Größenanteile in Hunderstel oder seltener in Tausendstel angegeben, wofür sich die Bezeichnungen Prozent und Promille eingebürgert haben. Die *Prozentrechnung* beschäftigt sich mit dem Rechnen von Größenangaben, die in Prozent gemacht werden. Prozentrechnung ist einfach, wenn man erkennt, dass es sich um Rechnungen mit rationalen Zahlen handelt. Dennoch gibt es einige, für die Prozentrechnung typische Formulierungen, bei denen man sich die zugrunde liegende mathematische Bedeutung erst klar machen muss. Im Prozentkontext werden die Angaben grundsätzlich nur mit einer gewissen Fehlergenauigkeit gemacht.



Der Bundeshaushalt von 2011



Wenn eine endliche Grundmenge G und eine Teilmenge $T \subseteq G$ gegeben ist, so versteht man unter dem *Anteil* von T in G einfach den Quotienten der

Anzahlen, also den Bruch

$$\frac{\#(T)}{\#(G)}.$$

Diese Zahl liegt zwischen 0 und 1. Wenn man daraus eine Prozentangabe machen will, so macht man die Umformung

$$\frac{\#(T)}{\#(G)} = \frac{\#(T) \cdot 100}{\#(G) \cdot 100} = \frac{\#(T) \cdot 100}{\#(G)} \cdot \frac{1}{100} = \frac{\#(T) \cdot 100}{\#(G)} \cdot \%.$$

Durch die Multiplikation mit dem Faktor kommt der Anteil, der ja eigentlich zwischen 0 und 1 liegt, in einen Zahlenbereich zwischen 0 und 100, der für die meisten Menschen vertrauter ist (in einer solchen Situation ist die Prozentangabe unterhalb von 100, in vielen anderen Kontexten ist aber auch ein größerer Anteil sinnvoll). Überhaupt werden Prozentangaben nur in einer Größenordnung verwendet, in der sie suggestiv sind, wo also die Multiplikation mit 100 dem Vorstellungsvermögen entgegenkommt. Ob man sagt, dass der Anteil von Gold an der Gesamtmasse des Universums gleich $2 \cdot 10^{-23}$ ist oder $2 \cdot 10^{-21}\%$ beträgt, macht keinen Unterschied.

Bemerkung 27.3. Wenn eine Grundmenge gegeben sind und davon Anteile durch Prozente beschrieben werden, und die Anteil disjunkt zueinander sind, so muss man die Prozentangaben addieren, um den Gesamtanteil zu erhalten. Wenn beispielsweise die Inhaltsstoffe eines Getränkes in Prozent angegeben werden, sagen wir 80% Wasser, 10% Orangensaft, 5% Himbersaft und 2% Heidelbeersaft und 3% Cola, so liegt der Fruchtsaftanteil wegen

$$10 + 5 + 2 = 17$$

bei 17 Prozent. Die Gesamtsumme der Prozentwerte sollte sich auf 100% addieren; da man bei Prozentangaben aber häufig gerundete Werte nimmt, muss das nicht immer stimmen.

Bemerkung 27.4. Häufig ändert sich, auch in einem bestimmten Kontext, die Bezugsmenge bei verschiedenen Prozentangaben. Wenn beipielsweise die Lebenshaltungskosten prozentual nach Essen, Wohnung, Körperpflege, Vergnügen aufgelistet wird, so werden die Vergnügungskosten eventuell weiter prozentual unterteilt, nach Kino, Theater, Kneipe, Spielhölle, und diese Angaben beziehen sich dann häufig auf die Gesamtvergnügungskosten. Den prozentualen Anteil an den Gesamtlebenshaltungskosten vom Kino muss man dann ausrechnen, indem man die relativen Prozentangaben in Anteile umrechnet, multipliziert und daraus wieder einen Prozentwert macht. Wenn die Vergnügungskosten 8% der Lebenshaltungskosten ausmachen und Kinobesuche 30% an den Vergnügungskosten, so muss man

$$0,08 \cdot 0,3 = 0,024$$

ausrechnen und erhält, dass die Kinobesuche $2,4\%$ der Lebenshaltungskosten ausmachen.

Bemerkung 27.5. Wenn man zwei Mengen (Vermögen, Einwohnerzahl, ...) A und B der Größe nach vergleicht, so kann man das durch einen Anteil und als Prozent ausdrücken. Man muss dann deutlich machen, welche Menge man als Grundmenge betrachten möchte. Wenn man A als Grundmenge nimmt, so ist

$$\#(B) = \frac{\#(B)}{\#(A)} \cdot \#(A)$$

und $\frac{\#(B)}{\#(A)}$ (bzw. $\frac{100 \cdot \#(B)}{\#(A)} \cdot \%$ in Prozent) beschreibt die Größe von B in Bezug auf A. Beispielsweise kann das Vermögen einer Person 30% des Vermögens einer anderen Person betragen. Wenn man die Verhältnisgröße umgekehrt wissen möchte, also die Größe von B in Bezug auf A, so muss man den inversen Bruch $\frac{\#(A)}{\#(B)}$ berechnen. Um aus der ersten Prozentangabe die neue Prozentangabe zu erhalten, muss man invertieren und mit 10000 multiplizieren (!), also

$$\frac{1}{30} \cdot 10000 = \frac{10000}{30} = \frac{1000}{3} = 333,33$$

Prozent. Die zweite Person hat also $333,33$ Prozent des Vermögens der ersten Person.

Wenn Angaben üblicherweise in Prozenten gemacht werden, wie beispielsweise das Ergebnis von Wahlen, so drückt man die Änderung zwischen zwei Wahlen durch *Prozentpunkte* aus, also nicht prozentual! Wenn die Partei von vier Jahren 35% erzielt hat und bei den neuen Wahlen 32% erzielt, so spricht man von einem Verlust von 3 Prozentpunkten.

Wachstum

Viele Wachstumsprozesse in Natur und Gesellschaft sind von der Form, dass sich die Größe nach einem bestimmten Zeitraum (beispielsweise nach einem Jahr) zur Ausgangsgröße proportional mit einem bestimmten konstanten Proportionalitätsfaktor verhält. Beispiele hierfür sind das Wachstum einer Population oder die Inflation. Bei konstanten Bedingungen hängt das Wachstum einer Population mit einem festen Faktor, genannt *Wachstumsfaktor*, von der Größe der Population ab. Wenn sich beispielsweise eine gewisse Population, sagen wir Mäuse, auf katzenfreien, kornreichen Feldern, in einem Jahr verdoppelt, so werden in einem Jahr aus 100 Mäusen 200 Mäuse, aus 1000 Mäusen 2000 Mäuse u.s.w. Das Verhältnis der Population nach einem Jahr zur Population vor einem Jahr ist also konstant gleich 2. Wenn die Bedingungen über einem längeren Zeitraum konstant sind, so ändert sich dieser Faktor nicht, und man muss von Jahr zu Jahr mit diesem Faktor multiplizieren. Nach n Jahren gibt es dann $2^n x$ Mäuse, wenn x die Größe der jetzigen Mauspopulation bezeichnet.

Jahre	0	1	2	3	4	5	6
Mäuse	100	200	400	800	1600	3200	6400

Der Wachstumsfaktor 2 ist recht groß. Häufiger sind Wachstumsfaktoren wie $1,01$, $1,02$, $1,05$ und ähnliches. Bei einem Preisentwicklungsfaktor von $1,05$ erhält man beispielsweise (gerundete Werte)

Jahre	0	1	2	3	4	5	6
Bierpreis auf der Wiesn	10	10,50	11,03	11,58	12,16	12,76	13,40

Ein Wachstum wird häufig nicht mit dem Wachstumsfaktor beschrieben, sondern mit dem proportionalen Zuwachs, dem *Zuwachsfaktor*. Es wird also der proportionale Anteil in Bezug auf die Vorgängergröße angegeben, der hinzukommt. Bei einem Wachstumsfaktor von 2 ist der Zuwachsfaktor gleich 1 (die Größe der Population kommt in einem Jahr neu hinzu), in den weiteren genannten Beispielen ist der Zuwachsfaktor gleich $0,01$, $0,02$, $0,05$. Dieser Zuwachsfaktor wird zumeist in Prozent angegeben, man spricht von einem jährlichen Wachstum von 100%, von 1%, 2%, 5%. Eine Prozentangabe bei Wachstumsprozessen von $a\%$ bedeutet also einen Zuwachsfaktor von $\frac{a}{100}$ und einen Wachstumsfaktor von $\frac{100+a}{100}$. Wenn man einen Wachstumsprozess, der mit einer Prozentangabe beschrieben wird, über mehrere Jahre verstehen will, muss man also den Wachstumsfaktor ausrechnen und diesen potenzieren (mit der Anzahl der Jahre im Exponenten). Es ist falsch, die Prozentwerte mit der Anzahl der Jahre zu multiplizieren und dies als Gesamtzuwachs zu nehmen. Im Wiesnbeispiel führt die falsche Rechnung zu folgendem Ergebnis

Jahre	0	1	2	3	4	5	6
Bierpreis auf der Wiesn (falsch gerechnet)	10	10,50	11	11,50	12	12,50	13

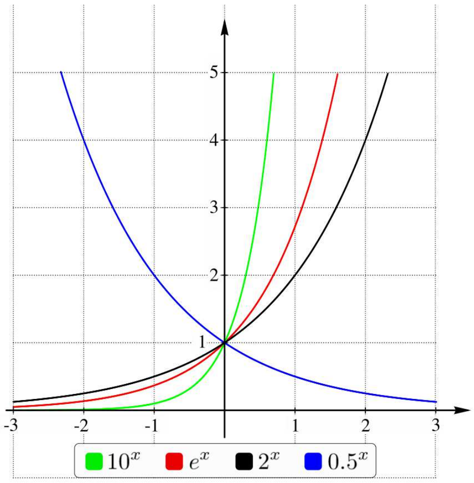
Die Abweichung wird zunehmend größer, für kleine Zeiträume ist die einfachere falsche Rechnung als Überschlagsrechnung akzeptabel. Aufgrund der allgemeinen binomischen Formel ist

$$(1+a)^n = 1 + na + \binom{n}{2}a^2 + \binom{n}{3}a^3 + \cdots + a^n,$$

und $1 + na$ ist das Ergebnis bei der falschen Rechnung. Wenn a wie häufig klein, etwa $\leq 0,05$ ist, so sind die höheren Potenzen a^2, a^3 besonders klein, und das wird auch durch die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{i}$ (bei nicht allzu großem n) nicht sehr groß gemacht. Der Fehler wird aber, egal wie klein der Prozentsatz ist, bei hinreichend großem n beliebig groß.

Exponentialfunktionen auf Z

Wir studieren das Wachstumsverhalten bei konstanten Bedingungen genauer mit dem Begriff der (ganzzahligen) Exponentialfunktion.



Die Exponentialfunktionen werden wir später auf ganz $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ ausdehnen, definiert haben wir sie bisher nur für ganzzahlige Stellen.

DEFINITION 27.6. Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K_+$ ein positives Element. Dann nennt man die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow K, \, n \longmapsto b^n,$$

die (ganzzahlige) *Exponentialfunktion* zur Basis b.

Die Basis b ist dabei der Wachstumsfaktor.Später werden wir Exponentialfunktionen b^x für beliebige reelle Zahlen x erklären, bis jetzt aber haben wir Ausdrücke wie $7^{1/2}$ oder $\left(\frac{1}{5}^\pi\right)$ noch nicht zur Verfügung. In den Skizzen werden wir aber diese Fortsetzung gelegentlich schon benutzen.

LEMMA 27.7. *Es sei K ein angeordneter Körper und $b \in K_+$ ein positives Element. Dann besitzt die (ganzzahlige) Exponentialfunktion*

$$\varphi_b \colon \mathbb{Z} \longrightarrow K, \, n \longmapsto b^n,$$

zur Basis b die folgenden Eigenschaften.

(1) *Es ist*
$$\varphi_b(n) = b^n > 0$$
für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) *Es ist*
$$\varphi_b(0) = b^0 = 1.$$

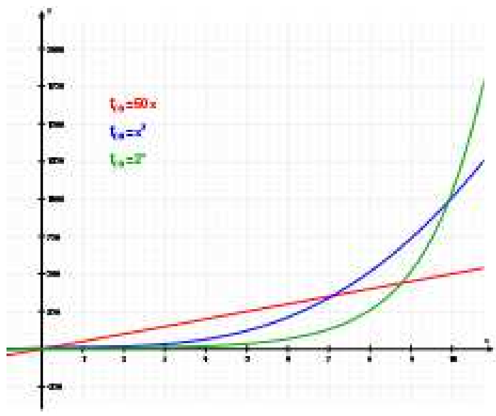
(3) *Es ist*
$$\varphi_b(1) = b^1 = b.$$

(4) *Es ist*
$$\varphi_b(m+n) = b^{m+n} = b^m \cdot b^n = \varphi_b(m) \cdot \varphi_b(n)$$
für $m, n \in \mathbb{Z}$.

(5) *Für* $m \in \mathbb{Z}$ *ist*

$$\varphi_b(-m) = b^{-m} = (b^m)^{-1} = (\varphi_b(m))^{-1}.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt für $n \geq 1$ aus der Verträglichkeit der Ordnung mit der Multiplikation und für n negativ aus Lemma 24.5 (1), die anderen Eigenschaften folgen aus den Potenzgesetzen. $\square$



Die Exponentialfunktion zur Basis 2 im Vergleich zu einer linearen Funktion und zur dritten Potenz. Auf der x- und der y-Achse wurden unterschiedliche Maßstäbe gewählt.

LEMMA 27.8. *Es sei* K *ein angeordneter Körper und* $b \in K_+$ *ein positives Element. Dann besitzt die (ganzzahlige) Exponentialfunktion*

$$\varphi_b \colon \mathbb{Z} \longrightarrow K,\ n \longmapsto b^n,$$

zur Basis b *die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Bei* $b > 1$ *ist die Exponentialfunktion streng wachsend.*
(2) *Bei* $b < 1$ *ist die Exponentialfunktion streng fallend.*

Beweis. (1) Sei $b > 1$ und $m > n$. Wir müssen zeigen, dass

$$\varphi_b(m) = b^m > b^n = \varphi_b(n)$$

ist. Nach Lemma 27.7 (4) ist

$$b^m = b^{m-n} \cdot b^n$$

mit $m - n > 0$. Wegen Lemma 19.13 (8) ist

$$b^{m-n} > 1$$

und daher ist auch

$$b^m = b^{m-n} \cdot b^n > 1 \cdot b^n = b^n.$$

(2) Dies folgt aus Teil (1), wenn man die Identität

$$b^n = \left(b^{-1}\right)^{-n}$$

verwendet.

□

Lemma 27.9. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $b \in K_+$ ein positives Element $\neq 1$ und*

$$\varphi_b \colon \mathbb{Z} \longrightarrow K,\ n \longmapsto b^n,$$

die zugehörige (ganzzahlige) Exponentialfunktion zur Basis b. Es seien $M \in K$ und $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, vorgegebene Zahlen. Dann gibt es eine ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi_b(n) \geq M$$

und eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit

$$\varphi_b(m) \leq \epsilon.$$

Beweis. Für $b > 1$ und M ist dies eine Umformulierung von Lemma 25.5, für $b < 1$ und ϵ ist dies eine Umformulierung von Korollar 25.6. Die anderen Fälle können darauf zurückgeführt werden, indem man negative Exponenten betrachtet. □

Häufig findet man die Vorstellung, dass exponentielles Wachstum etwas wie „explosives Wachstum“ ist. Das ist so nicht richtig. Wenn der Wachstumsfaktor zwischen 0 und 1 liegt, so ist die Exponentialfunktion sogar fallend und wenn der Faktor knapp oberhalb von 1, so ist das Wachstum langsam. Allerdings zeigt der folgende Satz, dass sich exponentielles Wachstum gegenüber jedem Wachstum, das durch eine Potenzfunktion beschrieben wird, letztlich durchsetzt. Man beachte auch, dass eine Exponentialfunktion als auch eine Potenzfunktion durch den gleichen funktionalen Ausdruck, nämlich als Potenz g^e, beschrieben wird. Der Unterschied besteht darin, ob die Grundzahl g oder der Exponent e als variabel betrachtet wird.

Beispiel 27.10. Wir vergleichen die Werte der Identität und der Quadratfunktion mit der Exponentialfunktion zur Basis

$$b = \frac{3}{2}.$$

Es ergibt sich die folgende Wertetabelle

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$\left(\frac{3}{2}\right)^n$	1	$1,5$	$2,25$	$3,37$	$5,06$	$7,59$	$11,39$	$17,08$	$25,63$	$38,44$	$57,66$

Im Vergleich mit der konstanten Funktion ist die Exponentialfunktion schon durchgängig größer, im Vergleich mit der Quadratfunktion bleibt die Exponentialfunktion im angegebenen Bereich zurück. Man sieht aber, dass sie „ziemlich schnell“ aufholt.

Satz 27.11. *Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $b > 1$ mit der zugehörigen Exponentialfunktion*

$$\varphi_b \colon \mathbb{Z} \longrightarrow K,\, n \longmapsto b^n,$$

zur Basis b. Es sei k eine natürliche Zahl. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq m$ die Abschätzung

$$\varphi_b(n) \,=\, b^n \,>\, n^k$$

gilt.

Beweis. Wir zeigen die Existenz des m durch Induktion über k für jedes $b > 0$. Für $k = 0$ ist die Aussage klar. Sei $k = 1$. Wir schreiben $b = 1 + u$ mit $u > 0$ und betrachten (für $n \geq 2$) die auf dem binomischen Lehrsatz in Verbindung mit $u > 0$ beruhende Abschätzung

$$\begin{aligned} b^n &= (1+u)^n \\ &\geq 1 + nu + \binom{n}{2} u^2 \\ &= 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2} u^2 \\ &= 1 + nu + n\frac{(n-1)}{2} u^2 \,\geq\, n\frac{(n-1)u^2}{2}. \end{aligned}$$

Da $\frac{u^2}{2}$ positiv ist, gibt es nach Lemma 25.3 eine natürliche Zahl m mit

$$m\frac{u^2}{2} \,\geq\, 1.$$

Für $n > m$ ist dann

$$b^n \,\geq\, n\frac{(n-1)u^2}{2} \,\geq\, n,$$

wie gewünscht. Sei nun die Aussage für $k \geq 1$ und alle $b > 1$ schon bewiesen, und wir müssen sie für $k + 1$ beweisen. Wir schreiben $b = cd$ mit Zahlen

$$c, d \,>\, 1,$$

die es nach Aufgabe 24.17 gibt. Aufgrund der Induktionsvoraussetzung gibt es eine natürliche Zahl m derart, dass für alle $n \geq m$ die Abschätzung

$$c^n \,\geq\, n^k$$

gilt. Ebenso gibt es eine natürliche Zahl m' mit der Eigenschaft, dass für alle $n \geq m'$ die Abschätzung

$$d^n \,\geq\, n$$

gilt. Damit gilt für alle

$$n \,\geq\, \max(m, m')$$

die Abschätzung

$$b^n = (cd)^n = c^d d^n \geq n^k n = n^{k+1}.$$

$\square$

Abbildungsverzeichnis