Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Mathematik für Anwender II

Arbeitsblatt 46

Übungsaufgaben

Aufgabe 46.1. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto xy,$$

(1) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(2,5)$,
(3) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(4) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(0,1)$,
(5) im Punkt $(2,3)$ in Richtung $(-1,0)$,
(6) im Punkt $(3,7)$ in Richtung $(5,-4)$.

Aufgabe 46.2. Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto \frac{x}{y},$$

(1) im Punkt $(0,1)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,1)$ in Richtung $(0,1)$,
(3) im Punkt $(1,3)$ in Richtung $(2,4)$,
(4) im Punkt $(-1,6)$ in Richtung $(-3,-1)$,
(5) im Punkt $\left(1, \frac{1}{100}\right)$ in Richtung $(0,-1)$.

Aufgabe 46.3.*

Bestimme zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto t^2,$$

die Richtungsableitung in Richtung 3 für jeden Punkt.

Aufgabe 46.4. Sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f in einem Punkt $P \in \mathbb{R}$ genau dann differenzierbar ist, wenn f in P in Richtung 1 differenzierbar ist, und dass dann die Gleichheit

$$(D_1 f)(P) = f'(P)$$

gilt.

Aufgabe 46.5. Bestimme die Richtungsableitung einer Abbildung in Richtung 0.

Aufgabe 46.6. Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge, und $f\colon G \to W$ eine Abbildung. Es sei $P \in G$ ein Punkt und $v \in V$ ein fixierter Vektor. Zeige, dass f in P in Richtung v genau dann differenzierbar ist, wenn die (auf einem Intervall bzw. einer offenen Ballumgebung um $0 \in \mathbb{K}$ definierte) Kurve

$$g\colon I \longrightarrow W,\ t \longmapsto g(t) = f(P+tv),$$

differenzierbar ist, und dass in diesem Fall die Gleichheit

$$(D_v f)(P) = g'(0)$$

gilt.

Wie muss dabei das Intervall gewählt werden?

Aufgabe 46.7. Bestimme, für welche Richtungen die Richtungsableitung im Nullpunkt zur Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \max(x,y),$$

existieren.

Aufgabe 46.8. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^n$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung der euklidischen Norm

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2},$$

existiert.

Aufgabe 46.9. Bestimme, für welche Punkte $P \in \mathbb{R}^2$ und welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto |x+y|,$$

existiert.

Aufgabe 46.10. Untersuche die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto x^2-y^2,$$

im Nullpunkt $(0,0)$ auf Richtungsableitungen. Man entscheide für jede Gerade G durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung von f auf G im Nullpunkt ein Extremum besitzt.

Aufgabe 46.11. Es sei $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis und

$$g\colon S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion mit $g(-Q) = -g(Q)$, gegenüberliegende Punkte auf dem Kreis haben also zueinander negierte Werte.

(1) Zeige, dass durch $f(0) = 0$ und

$$f(P) := \|P\| g\left(\frac{P}{\|P\|}\right)$$

für $P \neq 0$ eine Funktion auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

(2) Zeige, dass f genau dann stetig ist, wenn g stetig ist.
(3) Man gebe ein Beispiel für ein nichtstetiges g derart, dass f im Nullpunkt stetig ist.
(4) Zeige, dass die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt linear ist.
(5) Zeige, dass f im Nullpunkt in jede Richtung differenzierbar ist.
(6) Es sei

$$g(Q) = \begin{cases} 1, & \text{falls die } x-\text{Koordinate von } Q \text{ rational ist} \\ 0, & \text{falls die } x-\text{Koordinate von } Q \text{ irrational ist}. \end{cases}$$

Zeige, dass f in jedem Punkt $P \neq 0$ nur in eine Richtung (bis auf Skalierung) eine Richtungsableitung besitzt.

Aufgabe 46.12. Es seien V und W euklidische Vektorräume und

$$f, g\colon G \longrightarrow W$$

seien Abbildungen auf einer offenen Menge $G \subseteq V$, die in Richtung $v \in V$ differenzierbar seien. Zeige, dass dann auch die Abbildung

$$h\colon G \longrightarrow \mathbb{R},\, P \longmapsto \langle f(P), g(P) \rangle\,,$$

in Richtung $v \in V$ differenzierbar ist, und dass

$$(D_v h)(P) = \langle f(P), (D_v g)(P) \rangle + \langle (D_v f)(P), g(P) \rangle$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 46.13. (4 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x^2 \sin y - e^x y - x,$$

(1) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,0)$,
(2) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(0,1)$,
(3) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(2,0)$,
(4) im Punkt $(0,0)$ in Richtung $(1,-3)$,
(5) im Punkt $(1,1)$ in Richtung $(1,1)$,
(6) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(-1,\frac{1}{2})$,
(7) im Punkt $(5,7)$ in Richtung $(1,0)$,
(8) im Punkt $(1,0)$ in Richtung $(5,7)$.

Aufgabe 46.14. (2 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x^2 + y^3 = 0\} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto \frac{x^2 - xy + y^4}{x^2 + y^3},$$

(1) im Punkt $(1, 1)$ in Richtung $(1, 0)$,
(2) im Punkt $(0, 1)$ in Richtung $(0, 1)$,
(3) im Punkt $(1, 0)$ in Richtung $(0, 1)$,
(4) im Punkt $(3, -2)$ in Richtung $(2, -5)$.

Aufgabe 46.15. (5 Punkte)

Bestimme die Richtungsableitungen der Funktion ($r_i \in \mathbb{N}$)

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1^{r_1} \cdots x_n^{r_n},$$

in einem Punkt

$$a = (a_1, \ldots, a_n)$$

in Richtung

$$v = (v_1, \ldots, v_n)\,.$$

Aufgabe 46.16. (4 Punkte)

Zeige, unter Verwendung von Aufgabe 46.15, dass zu einer polynomialen Funktion

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

zu einer fixierten Richtung $v \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung $D_v\varphi$ existiert und selbst polynomial ist.

Aufgabe 46.17. (3 Punkte)

Seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{R}$-Vektorräume, sei $G \subseteq V$ offen, $P \in G$ ein Punkt, $v \in V$ ein Vektor und sei

$$f\colon\ G \longrightarrow W$$

eine Abbildung, die im Punkt P in Richtung v differenzierbar sei. Zeige, dass f auch in Richtung cv mit $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist und die Beziehung $(D_{cv}f)(P) = c(D_vf)(P)$ gilt.

Abbildungsverzeichnis