Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 9

Übungsaufgaben

Aufgabe 9.1. Bestimme die freien Variablen in den folgenden Ausdrücken, wobei x, y, z Variablen seien und f ein einstelliges Funktionssymbol und R ein zweistelliges Relationssymbol sei.

(1) $\forall x (fx = y)$,
(2) $\forall x (fx = y) \wedge \exists z (fx = y)$,
(3) $\forall x \exists y Rxfy$,
(4) $(\forall x \exists y Rxfy) \rightarrow x = y$.

Aufgabe 9.2. Es sei $\alpha \in L_0^S$ ein Satz einer erststufigen Sprache über einem Symbolalphabet S. Es sei eine S-Struktur mit Trägermenge M gegeben und I_1 und I_2 zwei auf M definierte S-Interpretationen. Zeige $I_1 \vDash \alpha$ genau dann, wenn $I_2 \vDash \alpha$ gilt.

Aufgabe 9.3. Es seien c, d Konstanten einer erststufigen Sprache, x, y, z, v Variablen, f ein einstelliges und g, h zweistellige Funktionssymbole. Bestimme die Substitution

$$ghhxcdfz \frac{fx, \quad gxz, \quad hvfx}{x, \quad y, \quad z}.$$

Aufgabe 9.4. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \ldots, x_k$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \ldots, t_k$ fixierte S-Terme.

a) Interpretiere die Termsubstitution $\frac{t_1, \ldots, t_k}{x_1, \ldots, x_k}$ als Abbildung.

b) Interpretiere die Substitution von Ausdrücken $\frac{t_1, \ldots, t_k}{x_1, \ldots, x_k}$ als Abbildung.

Aufgabe 9.5.*

Es seien x, y, z Variablen (mit der angegebenen Reihenfolge), c eine Konstante und f ein einstelliges Funktionssymbol.

(1) Bestimme
$$(\exists x (x = c)) \frac{z}{x}.$$
(2) Bestimme
$$(\exists x (x = c)) \frac{x}{x}.$$

(3) Bestimme
$$(\exists x(x=c))\frac{fx}{x}\,.$$

Aufgabe 9.6. Es sei S das Symbolalphabet eines angeordneten Körpers und sei
$$\alpha \;=\; x \geq 0 \rightarrow \exists y(x = y\cdot y).$$
Bestimme die Substitutionen

(1)
$$\alpha\frac{x}{y}\,.$$
(2)
$$\alpha\frac{y}{x}\,.$$

Aufgabe 9.7.*

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben.

(1) Zeige, dass die Substitution $\frac{x}{x}$ für die Terme die Identität ist.
(2) Zeige, dass die Substitution $\frac{x}{x}$ für die Ausdrücke die Identität ist.

Aufgabe 9.8. Gehört in einem Ausdruck der Form $(x=y)\frac{t}{x}$ die Symbolfolge $\frac{t}{x}$ zur prädikatenlogischen Sprache? Gehört $(x=y)\frac{t}{x}$ dazu?

Aufgabe 9.9. Es sei c eine Konstante einer erststufigen Sprache, x,y,z,u Variablen, f ein einstelliges Funktionssymbol, g,h zweistellige Funktionssymbole und R ein zweistelliges Relationssymbol. Bestimme die Substitution
$$(\forall yRxy \wedge \neg Ryfz)\frac{fx,\quad gxz,\quad hcfx}{x,\qquad y,\qquad z}\,.$$

Aufgabe 9.10. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Man gebe ein Beispiel für eine Substitution $\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}$ und einen S-Ausdruck α derart, dass die sukzessive substituierten Ausdrücke
$$\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k},\left(\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k},$$
$$\left(\left(\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k},\ldots$$
immer länger werden.

Aufgabe 9.11.*

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1,\ldots,x_k$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1,\ldots,t_k$ fixierte S-Terme. Zeige, dass für jeden S-Satz $\alpha\in L_0^S$ die Gleichheit
$$\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k} \;=\; \alpha$$
gilt.

Aufgabe 9.12. Es sei $\alpha \in L^S$. Zeige, dass die Gleichheit

$$\left(\alpha \frac{y}{x}\right)\frac{z}{y} = \alpha \frac{y, z}{x, y}$$

im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 9.13.*

Es seien x_1, x_2 Variablen, t_1, t_2 Terme und α ein Ausdruck in einer prädikatenlogischen Sprache. Zeige, dass

$$\alpha \frac{t_1, t_2}{x_1, x_2} \rightarrow \left(\alpha \frac{t_1}{x_1}\right)\frac{t_2}{x_2}$$

im Allgemeinen nicht allgemeingültig ist.

Aufgabe 9.14.*

Es seien x_1, x_2 Variablen, t_1, t_2 Terme und α ein Ausdruck in einer prädikatenlogischen Sprache. Zeige, dass

$$\left(\alpha \frac{t_1}{x_1}\right)\frac{t_2}{x_2} \rightarrow \alpha \frac{t_1, t_2}{x_1, x_2}$$

im Allgemeinen nicht allgemeingültig ist.

Aufgabe 9.15.*

Es seien x, y Variablen, s, t Terme und α ein Ausdruck in einer prädikatenlogischen Sprache. Es seien u, v neue Variablen, die weder in s noch in t noch in α vorkommen. Zeige, dass

$$\alpha \frac{s, t}{x, y} \leftrightarrow \alpha \frac{s\frac{v}{y}}{x} \frac{t\frac{u}{x}}{y} \frac{x}{u} \frac{y}{v}$$

allgemeingültig ist, wobei der Ausdruck rechts als die Hintereinanderausführung von vier Einzelsubstitutionen (von links nach rechts) zu lesen ist.

Aufgabe 9.16.*

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben, $\alpha \in L^S$ und I eine Interpretation mit $I \vDash \alpha$. Zeige durch ein Beispiel, dass daraus nicht im Allgemeinen die Gültigkeit $I \vDash \alpha \frac{t_1, \ldots, t_k}{x_1, \ldots, x_k}$ unter einer Substitution folgt.

Aufgabe 9.17. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \ldots, x_k$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \ldots, t_k$ fixierte S-Terme. Zeige, dass zu einem allgemeingültigen Ausdruck α auch die Substitution $\alpha \frac{t_1, \ldots, t_k}{x_1, \ldots, x_k}$ allgemeingültig ist. Gilt hiervon auch die Umkehrung?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.18. (2 Punkte)

Es sei α ein S-Ausdruck. Zeige, dass es einen S-Ausdruck β der Form $\beta = \alpha \wedge \gamma$ derart gibt, dass

$$\mathrm{Frei}\,(\beta) \;=\; \mathrm{Var}\,(\alpha) \;=\; \mathrm{Var}\,(\beta)$$

gilt.

Aufgabe 9.19. (2 Punkte)

Es seien c, d Konstanten einer erststufigen Sprache, x, y, z, u, v, w Variablen (in dieser Reihenfolge), f ein einstelliges Funktionssymbol, g ein zweistelliges Funktionssymbol und P, R einstellige Relationssymbole. Bestimme die Substitution

$$(\forall y(y = c) \vee (\neg Rfz \rightarrow \exists x \neg Pu)\frac{gzz, \quad c, \quad fu}{x, \quad\; y, \quad\; z}\,.$$

Aufgabe 9.20. (3 Punkte)

Man gebe für jedes $r \in \mathbb{N}_+$ ein Beispiel für eine Substitution $\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}$ und einen S-Ausdruck α derart, dass die sukzessive substituierten Ausdrücke

$$\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k},\ \left(\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k},\ \left(\left(\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k},\ldots$$

eine Periode der Länge r besitzen.

Aufgabe 9.21. (3 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_\ell$ fixierte S-Terme. Zeige, dass für Terme τ, in denen $y_1, \ldots, y_\ell$ nicht vorkommen, die Gleichheit

$$\left(\tau\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell} \;=\; \tau\frac{t_1\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell},\ldots,t_k\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell}}{x_1,\ldots,x_k}$$

gilt.

Aufgabe 9.22. (2 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_\ell$ fixierte S-Terme. Zeige durch ein Beispiel, dass für Terme τ die Gleichheit

$$\left(\tau\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell} \;=\; \tau\frac{t_1\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell},\ldots,t_k\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell}}{x_1,\ldots,x_k}$$

nicht gelten muss.

Aufgabe 9.23. (4 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_\ell$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \ldots, t_k, s_1, \ldots, s_\ell$ fixierte S-Terme. Zeige durch ein Beispiel, dass für Ausdrücke α die Gleichheit (von Ausdrücken)

$$\left(\alpha \frac{t_1, \ldots, t_k}{x_1, \ldots, x_k}\right) \frac{s_1, \ldots, s_\ell}{y_1, \ldots, y_\ell} = \alpha \frac{t_1 \frac{s_1, \ldots, s_\ell}{y_1, \ldots, y_\ell}, \ldots, t_k \frac{s_1, \ldots, s_\ell}{y_1, \ldots, y_\ell}}{x_1, \ldots, x_k}$$

nicht gelten muss.

Aufgabe 9.24. (3 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien x, z verschiedene Variablen, t ein S-Term und α ein S-Ausdruck, wobei z weder in t noch in α vorkomme. Gilt dann die Gleichheit

$$\left(\alpha \frac{z}{x}\right) \frac{t}{z} = \alpha \frac{t}{x} ?$$

Abbildungsverzeichnis