Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 36

In dieser Vorlesung möchten wir verstehen, wie man an der beschreibenden Matrix zu einer linearen Abbildung erkennen kann, ob diese bijektiv ist, und wann ein lineares Gleichungssystem $Mx = y$ die Eigenschaft besitzt, dass es für jedes y eine eindeutige Lösung x gibt, und wie man diese findet.

Invertierbare Matrizen

Definition 36.1. Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann heißt M *invertierbar*, wenn es eine weitere Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

gibt.

Definition 36.2. Es sei K ein Körper. Zu einer invertierbaren Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ heißt die Matrix $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit

$$A \circ M = E_n = M \circ A$$

die *inverse Matrix* von M. Man schreibt dafür

$$M^{-1}.$$

Beispiel 36.3. Eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn sämtliche Diagonaleinträge von 0 verschieden sind. Die inverse Matrix dazu ist

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{d_{n-1n-1}} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{d_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Das Produkt von invertierbaren Matrizen ist wieder invertierbar, die invertierbaren Matrizen bilden eine Gruppe. Aus der einzigen Gleichung

$$A \circ M = E_n$$

folgt sogar die umgekehrte Gleichung

$$M \circ A = E_n,$$

also die Invertierbarkeit von M. Dies ist aber rein matrizentheoretisch schwierig zu beweisen, für den Fall von 2×2-Matrizen siehe Aufgabe 36.9. Mit Hilfe der Korrespondenz zwischen Matrizen und linearen Abbildungen kann man es beweisen, indem man verwendet, dass für eine lineare Abbildung $\varphi\colon K^n \to K^n$ die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv äquivalent sind (das haben wir nicht bewiesen). Invertierbare Matrizen und bijektive lineare Abbildungen hängen unmittelbar zusammen.

Satz 36.4. *Es sei K ein Körper und sei $\varphi\colon K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung mit zugehöriger Matrix M. Dann ist φ genau dann bijektiv, wenn M invertierbar ist.*

Beweis. Wenn φ bijektiv ist, so gibt es eine lineare Abbildung

$$\psi\colon K^n \longrightarrow K^n$$

mit

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{K^n} = \psi \circ \varphi.$$

Es sei M die Matrix zu φ und N die Matrix zu ψ. Nach Satz 35.15 ist dann

$$M \circ N = E_n = N \circ M$$

und dies bedeutet die Invertierbarkeit von M. Die Rückrichtung geht genauso. □

Elementarmatrizen

Wir möchten zu einer Matrix M bestimmen, ob sie invertierbar ist oder nicht und wie gegebenenfalls die inverse Matrix aussieht. Dazu sind Elementarmatrizen hilfreich, da man mit ihnen die Manipulationen, die im Eliminationsverfahren auftreten, als Matrizenmultiplikationen beschreiben kann.

Definition 36.5. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die folgenden Manipulationen an M *elementare Zeilenumformungen*.

(1) Vertauschung von zwei Zeilen.
(2) Multiplikation einer Zeile mit $s \neq 0$.
(3) Addition des a-fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Elementare Zeilenumformungen ändern nicht den Lösungsraum von homogenen linearen Gleichungssystemen, wie in Lemma 32.3 gezeigt wurde.

Definition 36.6. Es sei K ein Körper. Mit B_{ij} bezeichnen wir diejenige $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (i, j) den Wert 1 und sonst überall den Wert 0 hat. Dann nennt man die folgenden Matrizen *Elementarmatrizen*.

(1) $V_{ij} := E_n - B_{ii} - B_{jj} + B_{ij} + B_{ji}$.
(2) $S_k(s) := E_n + (s-1)B_{kk}$ für $s \neq 0$.
(3) $A_{ij}(a) := E_n + aB_{ij}$ für $i \neq j$ und $a \in K$.

Ausgeschrieben sehen diese Elementarmatrizen folgendermaßen aus.

$$V_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_k(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementarmatrizen sind invertierbar, siehe Aufgabe 36.1, und ihre Inversen sind ebenfalls Elementarmatrizen.

Lemma 36.7. *Es sei K ein Körper und M eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen in K. Dann hat die Multiplikation mit den $m \times m$-Elementarmatrizen von links mit M folgende Wirkung.*

(1) *$V_{ij} \circ M =$ Vertauschen der i-ten und der j-ten Zeile von M.*
(2) *$(S_k(s)) \circ M =$ Multiplikation der k-ten Zeile von M mit s.*
(3) *$(A_{ij}(a)) \circ M =$ Addition des a-fachen der j-ten Zeile von M zur i-ten Zeile ($i \neq j$).*

Beweis. Siehe Aufgabe 36.11. □

Satz 36.8. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann gibt es elementare Zeilenumformungen und eine (Neu-)Nummerierung der Spalten*

$$j_1, j_2, \ldots, j_n$$

und ein $r \leq n$ derart, dass in der entstandenen Matrix die Spalten die Gestalt

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{k,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } b_{k,j_k} \neq 0 \text{ für } k \leq r$$

und

$$s_{j_k} = \begin{pmatrix} b_{1,j_k} \\ \vdots \\ b_{r,j_k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für } k > r$$

besitzen. Durch elementare Zeilenumformungen und zusätzliche Spaltenvertauschungen kann man also eine Matrix auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} d_{11} & * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ 0 & d_{22} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{rr} & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $d_{ii} \neq 0$ bringen.

Beweis. Dies beruht auf den entsprechenden Manipulationen für Gleichungen wie beim Eliminationsverfahren, siehe die zweite Vorlesung. □

Beispiel 36.9. Wir betrachten die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Wir wollen diese Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf Diagonalgestalt bringen und diese Manipulatonen durch Multiplikationen mit Elementarmatrizen realisieren. Die erste Umformung ist, die zweite Zeile durch $II - \frac{3}{4}I$ zu ersetzen. Die geschieht durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{17}{4} \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Die dritte Zeile soll durch $III - 2I$ ersetzt werden, dies wird realisiert durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{17}{4} \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & \frac{13}{2} \end{pmatrix}.$$

Die neue dritte Zeile kann man zu einer Nullzeile machen, indem man sie durch $III - \frac{2}{13}II$ ersetzt. Dies wird realisiert durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{26}{17} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & \frac{17}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 36.10. Wir betrachten die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Wir wollen diese Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf Diagonalgestalt bringen und diese Manipulationen durch Multiplikationen mit Elementarmatrizen realisieren. Die einzige Umformung ist, die zweite Zeile durch $II - \frac{5}{4}I$ zu ersetzen. Dies wird durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{5}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{13}{4} \end{pmatrix}$$

realisiert.

Beispiel 36.11. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht in der in Satz 36.8 zuletzt beschriebenen Form, und kann auch nicht durch Zeilenumformungen dahin gebracht werden. Durch Spaltenvertauschungen ist das möglich.

Korollar 36.12. *Es sei K ein Körper und sei M eine invertierbare $n \times n$-Matrix über K. Dann gibt es elementare Zeilenumformungen derart, dass nach diesen Umformungen eine Matrix der Gestalt*

$$\begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & d_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

mit $d_i \neq 0$ entsteht. Durch weitere elementare Zeilenumformungen kann die Einheitsmatrix erreicht werden.

Beweis. Dies beruht auf den Manipulationen des Eliminationsverfahrens und darauf, dass elementare Zeilenumformungen nach Lemma 36.7 durch Multiplikationen mit Elementarmatrizen von links ausgedrückt werden können.

Dabei können in einer Spalte bzw. in einer Zeile nicht nur Nullen entstehen, da die Elementarmatrizen invertierbar sind und so in jedem Schritt die Invertierbarkeit erhalten bleibt. Eine Matrix mit einer Nullspalte oder einer Nullzeile ist aber nicht invertierbar. Wenn eine obere Dreiecksmatrix vorliegt, so sind die Diagonaleinträge nicht 0 und man kann mit skalarer Multiplikation die Diagonaleinträge zu 1 machen und damit die in jeder Spalte darüberliegenden Einträge zu 0. □

Insbesondere gibt es zu einer invertierbaren Matrix M Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_k$ derart, dass

$$E_k \circ \cdots \circ E_1 \circ M$$

die Einheitsmatrix ist.

Auffinden der inversen Matrix

Verfahren 36.13. Es sei M eine quadratische Matrix. Wie kann man entscheiden, ob die Matrix invertierbar ist, und wie kann man die inverse Matrix M^{-1} finden?

Dazu legt man eine Tabelle an, wo in der linken Seite zunächst die Matrix M steht und in der rechten Seite die Einheitsmatrix. Jetzt wendet man auf beide Matrizen schrittweise die gleichen elementaren Zeilenumformungen an. Dabei soll in der linken Seite die Ausgangsmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt werden. Dies ist genau dann möglich, wenn diese Matrix invertierbar ist. Wir behaupten, dass bei dieser Vorgehensweise in der rechten Seite die Matrix M^{-1} als Endmatrix entsteht. Dies beruht auf folgendem *Invarianzprinzip*. Jede elementare Zeilenumformung kann als eine Matrizenmultiplikation mit einer Elementarmatrix E von links realisiert werden. Wenn in der Tabelle

$$(M_1, M_2)$$

steht, so steht im nächsten Schritt

$$(EM_1, EM_2)\,.$$

Wenn man das Inverse (das man noch nicht kennt, das es aber gibt unter der Voraussetzung, dass die Matrix invertierbar ist.) der linken Seite mit der rechten Seite multipliziert, so ergibt sich

$$(EM_1)^{-1}EM_2 \,=\, M_1^{-1}E^{-1}EM_2 \,=\, M_1^{-1}M_2.$$

D.h., dass sich dieser Ausdruck bei den Einzelschritten nicht ändert. Zu Beginn ist dieser Ausdruck gleich $M^{-1}E_n$, daher muss zum Schluss für (E_n, N) gelten

$$N \,=\, E_n^{-1}N \,=\, M^{-1}E_n \,=\, M^{-1}.$$

Beispiel 36.14. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ gemäß dem in Verfahren 36.13 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 0 & \frac{62}{5} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{5} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{3}{62} & \frac{5}{62} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{7}{62} & -\frac{9}{62} \\ \frac{3}{62} & \frac{5}{62} \end{pmatrix}$

Für eine invertierbare 2×2-Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kann man die inverse Matrix einfacher direkt angeben, es ist nämlich

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(und die „Determinante“ $ad - bc$ ist genau dann ungleich 0, wenn die Matrix invertierbar ist).

Beispiel 36.15. Wir wollen zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ gemäß dem in Verfahren 36.13 beschriebenen Verfahren die inverse Matrix M^{-1} bestimmen.

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 11 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$

Abbildungsverzeichnis