幾何學辭典

題解中心

幾何學辭典

日本長澤龜之助原著
薛德炯 吳載耀編譯

上海新亞書店印行

本書經呈請內政部註册執有警字 6041 號執照

版權所有
翻印必究

中華民國卅八年 六月 五版

題解中心

幾何學辭典

精裝本基本定價二十八元六角

普及本基本價定十七元九角

（外埠酌加運費匯費）

原著者 長澤龜之助

編譯者 薛德炯 吳載耀

發行人 陳邦楨
上海河南路一五九號

印刷者 新亞書店

發行所 新亞書店
上海河南路一五九號

（Bo075）

編譯者言

余等自拋棄教書生涯,廁身於出版界,環顧同業現況,小說出品,車載斗量,科學書籍,寥若晨星,深感無以應國人之所需要,頗思有所貢獻.祇以自身對於科學,亦止淺嘗,何敢高騖;力短心長,不僅余等已也!

二十一年夏,新亞書店以編譯日本長澤氏所著算學辭典相囑,當以茲事體大,未敢輕於嘗試,擱置者半年.翌年春,新亞又重申前議,竊思事在人爲,雖不無荆棘當前,祇在吾人能鼓勇猛晉,自有成功希望;因卽由載耀編譯初稿,德炯加以修訂,閱時一載,積稿盈尺.於是卽開始製版,除由呂君憲章,韓君寅生襄助繪圖,史君炳坤襄助校對外,余等復始終自任覆校,明知魯魚亥豕,在所不免,祇期能減少萬一,以稍輕余等之罪過已耳.

茲值發行將始,例須於卷首有言,爰就編校上之所感,縷述於下,以誌完成是書之經過.

1. 是書原以問題解法某某辭典分名各册,而其內容於辭典之通行體裁,頗有出入之處,本擬更名曰辭典式算學題庫,卒以特種關係採用今名,非始願也.

2. 原書疊經修訂,新增之題別列於補遺之部,茲則爲之分門別類,納入本文;幾費經營,旨在一貫.中間或尙有未盡善處,祇以時間,精力,兩不我許,未及充分編配,引以爲憾.

3. 原書名詞之部依照假名順序編排,茲則改用筆畫順序.我國算學名詞,至不統一,最近國立編譯館正在釐訂而尙未公布,友人中頗有以出書未及其時,將來須經改訂手續爲余等惜者,際會如此,又何能已!

4. 排校算學書籍,難於普通書籍者奚啻倍蓰,稍一不愼,錯誤隨之.本書於算式之地位,尤加注意,絕不任其無理割裂.排校之時往往因算式之短長,牽涉行間之中斷,不得不設法添削字句,以資銜接;故爲解決此項問題,無形之中費却不少時間,不少精力,於字裏行間.卽此可知一書之編著與排校,莫妙於出自一手.坊間發行之算學書,對於算式之地位,支離割裂,目滿瘡痍者,所在都有;此種過誤,編著者自應負相當責任,不能盡諉之於排校者也.

5. 排校算學書籍,成本之重,遠超於普通書籍,商人於利薄事業而願斥重資者,什不獲一,此關於算學之刊物,數量上所以稀少之主因也.余等之於是書,實有賴於資方之促成,否則以全書五百萬言之巨,而竭我倆之棉薄欲印以行世,縱不望而却走,亦必有所戒懼也.

6. 是書校印將半,知友見之者,獎借備至,殊滋惶愧!余等自知此書之性質,僅屬一種便於翻檢之類書,與所謂'題庫'者正相若,非比涵義宏大,理論精嚴之皇然巨著.故於編譯之時,僅懸'信''達'二字爲的,而忽於文字之工拙.原書之誤點,亦僅就所發覺者加以訂正,未遑一一檢算也.特恐來日多方責難,用敢附明於此,尙希邦人君子有以諒之!

中華民國二十四年四月　　　　薛德炯　吳載耀

普通公理

(a) 全量大於其部分.

(b) 全量等於其各部分之和.

(c) 同量之各等量相等.

(d) 等量加等量,其和相等.

(e) 等量減等量,其差相等

(f) 等量加不等量,其和不等,所加之量大,其和亦大.

(g) 等量減不等量,其差不等,被減之量大,其差亦大.

(h) 等量之若干倍或若干等分相等.

幾何公理

1. 圖形得不變其形狀及大小而變其位置.

2. 可完全相合之量相等.

由普通公理 (d) 及 (e) 擴張之,則如次.

有甲乙二組之量,若甲組之量,分別等於乙組之量,則甲組各量之和與乙組各量之和,雖不全合,亦相等.

3. 過二點得引一直線,且限於一;又直線得向其任何方延長之.由是又可得以下二條.

α. 二任意直線,得將其一直線上之任意所設點,置於他直線上之任意所設點,而使二直線相合.

β. 二直線會於一點,而不全合,則此二直線不復相會.

4. 過一點得引所設直線之一平行線,且限於一.

定理之關係

1. 定理者,得由已知命題以證其爲眞理之命題也.但已知命題,或爲公理,或爲定理.

定理之敍述分二部,曰假設,曰終結是.假設者,假定之事,終結者,由假設所得之結果.茲示其範形如下.

設 A 爲 B, 則 C 爲 D.　(1)

其中設 A 爲 B 爲假設,則 C 爲 D 爲終結.

若此定理果眞,則下定理亦必眞.

設 C 非 D, 則 A 非 B.　(2)

如 (1) 與 (2) 者,曰互爲對定理.例如馬爲四足動物一命題,依前所示範形改述之,則如下.

設動物爲馬,則此動物有四足.

其對定理爲

設動物無四足,則此動物非馬.

而此定理之爲眞,可無疑義.

2. 有二定理,若其任一定理之假設,爲他定理之終結,則此二定理之一,曰他定理之逆定理.例如定理

設 C 爲 D, 則 A 爲 B.　(3)

爲 (1) 之逆定理.又 3 之對定理爲

設 A 非 B, 則 C 非 D.　(4)

(4) 曰 (1) 之倒定理.

一定理雖眞,但不能斷其逆定理及倒定理亦爲眞;欲斷後者之眞僞,須別加探討.

例如就前舉之定理,

設動物爲馬,則此動物有四足.

其逆定理爲

設動物有四足,則此動物爲馬.

又其倒定理爲

設動物非馬,則此動物無四足.

由此二者,即可知逆定理與倒定理不能普徧爲眞.

3. 上述定理之四種形式,茲列舉之如次.

原定理. 設 A 爲 B, 則 C 爲 D. (1)

其對定理. 設 C 非 D, 則 A 非 B. (2)

其逆定理. 設 C 爲 D, 則 A 爲 B. (3)

其倒定理. 設 A 非 B, 則 C 非 D. (4)

若 (1) 爲眞,則 (2) 必爲眞.又因 (4) 爲 (3) 之對定理,故 (3) 與 (4) 同時爲眞.然 (1) 雖爲眞,不能據以斷言 (3) 或 (4) 亦爲眞.故此四種形式之定理中,若已就幾何學證明其非互爲對定理之二者,即 (1) 與 (3), (1) 與 (4), (2) 與 (3), 或 (2) 與 (4), 則其他定理,可不俟證明而知其爲眞矣.

4. 若定理之假設甚複雜,則交換假設之一與終結,即得原定理之逆定理.例如定理

$$設 \left\{\begin{array}{l} A=D \\ B=E \\ C=F \end{array}\right\}, 則\ M=N,$$

其逆定理爲

$$設 \left\{\begin{array}{l} A=D \\ B=E \\ M=N \end{array}\right\}, 則\ C=F,$$

$$設 \left\{\begin{array}{l} A=D \\ M=N \\ C=F \end{array}\right\}, 則\ B=E.$$

…………….

5. 轉換法.亦稱窮舉證法.設有業已證明之一羣定理,凡可發生之事,已盡於假設,而終結不能兩立,即其中之二,不能同時成立,則此一羣定理之逆定理,亦必爲眞.如此之一羣定理,其最簡單之例,爲業已證明之一定理與其倒定理;此二定理中,其一之逆定理,即他一之對定理,由此一事,即可知轉換法之眞.又幾何學中數見不鮮之一例如下.

設 A 大於 B, 則 C 大於 D.

設 A 等於 B, 則 C 等於 D.

設 A 小於 B, 則 C 小於 D.

若此三定理,業已證明爲眞,則其逆定理亦必爲眞,即

設 C 大於 D, 則 A 大於 B.

設 C 等於 D, 則 A 等於 B.

設 C 小於 D, 則 A 小於 B.

6. 同一法.設有唯一之 A 及唯一之 B, 且已知 A 爲 B. 則可斷定 B 爲 A.

例如,設有一定直線 AB, 及此線外之定點 P, 則因由 P 至 AB 所引之最短線唯一,由 P 至 AB 所引之垂線亦唯一,且最短線爲垂線,故由同一法,可徑知垂線爲最短線.

平面軌跡

決定點之位置時,有時所設條件雖不足完全確定其位置,但可充分限制其點之位置,令在一線,或線之一部,或若干線上.此時謂點有軌跡.若一線,或線之一部,或若干線上之點,皆適合一定條件,且除此以外,更無適合此條件之點,則此線,或線之一部,或若干線曰適合條件之點之軌跡.據此,欲決定一線,或線之一部,或若干線 X 爲適合條件 A 之點之軌跡,其充要手續爲證明以下一組定理之成立.

1. 適合條件 A 之點在 X 上.

2. X 上之點適合條件 A.

又以下定理代 (1) 亦可,

3. 不在 X 上之點,不適合條件 A.

又以下定理代 (2) 亦可.

4. 不適合條件 A 之點,不在 X 上.

注意 有時軌跡爲平面之一部. 觀第一門 1526 題及 1529 題.

作　圖　題

作圖題之目的, 在完成幾何學的作圖. 解作圖題時, 得使用准許使用之工具; 若限制使用之工具, 而令其範圍愈狹隘, 則用此工具以解之作圖題之範圍亦愈狹隘, 從而其解法亦愈困難. 初等幾何學中,准許使用之工具,不外規及矩二物. 所謂規者,卽兩脚規,用以作圖及移距離之具也; 所謂矩者,即直尺,用以引直線及延長直線之具也.

作　圖　公　法

1. 由一任意點, 至他一任意點, 得引一直線.

2. 有限直線得任意延長之.

3. 以任意點爲中心,任意有限直線爲半徑,得作一圓.

倍量之性質

I 關於可通約量者

1. 若 $A=B$, 則 $mA=mB$.

2. 若 $mA=mB$, 則 $A=B$.

3. $mA+mB+\cdots\cdots=m(A+B+\cdots\cdots)$.

4. $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.

5, $mA+nA=(m+n)A$.

6. $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.

7. $m\cdot nA=mn\cdot A=nm\cdot A=n\cdot mA$.

II. 關於不可通約量者

1. 若 $A>=<B$, 則 $mA>=<mB$.

2. 若 $mA>=<mB$, 則 $A>=<B$.

3. $mA+mB+\cdots\cdots=m(A+B+\cdots\cdots)$.

4. $mA-mB=m(A-B)$, 但 $A>B$.

5. $mA+nA+\cdots\cdots=(m+n+\cdots\cdots)A$.

6. $mA-nA=(m-n)A$, 但 $m>n$.

7. $m\cdot nA=mn\cdot A=nm\cdot A=n\cdot mA$.

比例之定理

1. 等於同比之比皆相等.

例如,設 $A:B=P:Q$, $X:Y=P:Q$,

則 $A:B=X:Y$.

2. 設二比相等, 若第一比之前項較其後項大,或等,或小,則第二比之前項, 從而較其後項大,或等,或小.

例如,設 $A:B=P:Q$,

若 $A>=<B$,

則從而 $P>=<Q$.

3. 若二比相等,則其反比亦等.

例如,設 $A:B=P:Q$,

則 $B:A=Q:P$.

4. 取二量之一與第三量之比時, 若第一量較第二量大, 或等,或小, 則第一比從而較第二比大,或等,或小. 又取一量與他二量之比時, 若二量之第一量較第二量小, 或等, 或大, 則第一比較第二比大, 或等, 或

小.例如,設 A, B, C 爲同種之三量,若

$$A>=<B,$$

則從而 $A:C>=<B:C.$

又若 $A<=>B,$

則從而 $C:A>=<C:B.$

5. 二量之等倍量之比,等於此二量之比.其逆定理亦眞.

例如, $mA:mB=A:B$

$$A:B=mA:mB.$$

6. 若二量 A, B 與二整數 m, n 有同比,則 $nA=mB$. 反之,若 $nA=mB$, 則 A 與 B 之比,等於 m 與 n 之比.

7. 若 $A:B=P:Q,\quad nA=mB,$

則 $nP=mQ.$

8. 設同種之四量成比例,若其第二量較第四量大,或等,或小,則第一量從而較第三量大,或等,或小.

例如,設 $A:B=C:D,$

若 $B>=<D,$

則從而 $A>=<C.$

9. 若同種之四量成比例,則第一量與第三量之比,等於第二量與第四量之比[更比定理].

例如,設 $A:B=C:D,$

則 $A:C=B:D.$

10. 若同種之若干量成比例,則其一前項與一後項之比,等於其諸前項之和與諸後項之和之比[加比定理].

例如,設 $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$

則 $A:B=A+C+E+\cdots:B+D+F+\cdots.$

11. 設二比相等,則第一比中前項後項之和[差]對後項之比,等於第二比中前項後項之和[差]對後項之比.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $A+B:B=P+Q:Q$ [合比定理],

及 $A\sim B:B=P\sim Q:Q$ [分比定理].

12. 設兩比相等,若取兩前項之等倍量及兩後項之等倍量.則第一比中前項倍量與後項倍量之比.等於第二比中前項倍量與後項倍量之比.

例如,設 $A:B=P:Q,$

則 $mA:nB=mP:nQ.$

13. 有甲乙二組之量,甲組中第一量與第二量之比,等於乙組中第一量與第二量之比,又甲組中第二量與第三量之比,等於乙組中第二量與第三量之比,以下類此,則甲組中第一量與最後量之比,等於乙組中第一量與最後量之比[等比定理].

例如,設甲組之若干量爲 A, B, C,……, H, K, 乙組之若干量爲 P, Q, R,……, X, Y, 而

$$A:B=P:Q,$$
$$B:C=Q:R,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$H:K=X:Y,$$

則 $A:K=P:Y.$

14. 若 $A:C=P:R,\qquad B:C=Q:R,$

則 $A+B:R=P+Q:R.$

15. 若二比相等,則其二[illegible]等;反之,若二比之二乘比相等,則[illegible]等.

例如,設 $A:B=P:$[illegible]

J學公

則 $A^2:B^2=P^2:Q$[illegible]

反之,設 $A^2:B^2=P^2:Q^2,$

則 A[illegible]$P:Q,$

16. 若二比相等,則其二[illegible]

二比之三乘比相等,則其比亦等.

例如,設　$A:B=P:Q$,

則　$A^3:B^3=P^3:Q^3$,

反之,設　$A^3:B^3=P^3:Q^3$,

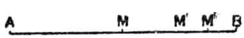
則　$A:B=P:Q$,

極　限　論

1.　某量有一定之値,則此量曰常數;若從某條件而消長增減,則此量曰變數.

2.　設一變數之値漸漸趨近一常數,其差得小於任意小之數,但此變數不能等於常數,則此常數曰變數之極限,而謂變數無限趨近其極限.變數漸漸增大而趨近其極限時,其極限曰增極;漸漸減小而趨近其極限時,其極限曰減極.

3.　設一點由 A 向 B 運動,第一秒間由 A 移至 AB 之中點 M,第二秒間由 M 移至 MB 之中點 M′,第三秒間,由 M′ 移至 M′B 之中點 M″,以下類推.



此時運動之點,雖可任意趨近 B,但決不能達於 B;因設某時動點在 A, B 間之某處,則下一秒此點在由此至 B 之中央,故此點雖可漸漸趨近 B,而欲達到 B,則恆尙須行距離之半分也,[illegible]決不能達 B.因此,由 A 至[illegible]距離,乃一變數,以常數[illegible]其[illegible]極限[illegible]趨近之;由動點至 B 之[illegible],以常數零爲極限而無

[illegible]

1.　若 A=B,長爲 2 寸,由 A 至動點之變[illegible]

2.　若 mA 變數與其[illegible]之差爲 v,則

3.　[illegible]　$v=1$,

第二秒後　$x=1+\frac{1}{2}$,　$v=\frac{1}{2}$,

第三秒後　$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$,　$v=\frac{1}{4}$,

第四秒後　$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$,　$v=\frac{1}{8}$,

餘準此.

級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$ 之和,顯然小於 2;但項數愈多,則與 2 之差愈小,故此差得爲任意小.因此 2 爲此級數在項數爲無窮多時之極限,零爲此級數與 2 之差之極限.

4.　(1)　變數與其極限之差,爲一變數,其極限爲零.

(2)　兩個以上之變數 $v, v', v'', \cdots\cdots$ 等,其極限皆爲零,則其和 $v+v'+v''+\cdots\cdots$ 之極限亦爲零.

(3)　設變數 v 之極限爲零,則 $a\pm v$ 之極限爲常數 a,又 $a\times v$ 之極限爲零.

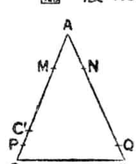
(4)　常數及變數之積,亦爲變數;常數與變數之積之極限,爲此變數之極限與常數之積.

(5)　設二變數爲俱增大之變數,或俱減小之變數,則此二變數之和或積亦爲一變數.

(6)　設二變數恆相等,則其極限亦相等.

設兩變數 AM, AN 恆相等,其極限分別爲 AC, AB,求證 AC=AB

證　設 AC>AB.取短於 AC 之 AC′,令 AC′=AB.因 AM 無限趨近 AC,故得假定 AM 達到大於 AC′ 之某値 AP,命 AQ 爲對應於 AP 之 AN 値.於是 AP=AQ, AC′=AB.此



二不等式之非眞理，至爲明顯，因 AP$>$AC′，AQ$<$AB 故也．故 AC 不能大於 AB．同理，AC 不能小於 AB，卽 AB 不能大於 AC．要之，AC 較 AB，既不能大，亦不能小，故 AC 非等於 AB 不可．

(7) 設二變數有定比，則其極限亦有同比．極限以 lim 記之，例如 $\lim(x)$ 爲 x 之極限．

圖 設 x 及 y 爲二變數，r 爲定比，則 $x:y=r$，卽 $x=ry$，故 $\lim(x)=\lim(ry)=r\lim(y)$，故 $\lim(x):\lim(y)=r$．

(8) 設比爲不可通約數，則此比爲其累次近似値之極限，故有以下之定理．

不可通約之二比 $a:b$ 及 $a':b'$，表之至同樣精密時，恆有同一之近似值，則此二比相等．

(9) 兩個以上之變數，其代數和之極限，等於其極限之代數和．

設 x, y, z 爲變數，其極限分別爲 a, b, c，則 $\lim(x+y+z)=a+b+c$，試證之．

圖 設 $a-x=v,\ b-y=v',\ c-z=v''$，則 $x=a-v,\ y=b-v',\ z=c-v''$．此時 $x+y+z=a-v+b-v'+c-v''$，

故 $\lim(x+y+z)$，

$$=\lim(a-v+b-v'+c-v''),\quad (6)$$

然 $\lim(a-v+b-v'+c-v'')$

$$=a+b+c,\quad (3)$$

故 $\lim(x+y+z)=a+b+c$．

(10) 兩個以上之變數，其積之極限，等於其極限之積．

設 x, y, z 爲變數，其極限分別爲 a, b, c，則 $\lim.(xyz)=abc$，試證之．

圖 設 $x=a-v,\ y=b-v',\ z=c-v''$，取其各邊之積，則

$xyz=abc\pm$(以 v, v', v'' 之一，或二，或全體爲因數之諸項)．

因此上式中自符號$\pm$以下諸項之極限爲零，(3)

故 $\lim(xyz)$

$$=\lim\{abc\pm(\text{極限爲零之諸項})\}\quad ($$

故 $\lim(xyz)=abc$．

以上之變數，係假定爲增大者，但對小之變數，證明同此．

記號及略語

$\therefore$	故．	$\because$	何則．
$=$	等於．	$\neq$	不等於．
$>$	大於．	$<$	小於．
$\geq$	大於及等於．	$\leq$	小於及等
$+$	加．	$-$	減以．
$\pm$	加減．	$\sim$	差．
$\stackrel{+}{\sim}$	加及差．	$\wedge$	角．
$\hat{R}$	直角．	$\triangle$	三角形．
$\parallel$	平行於．	$\perp$	垂直於．
$\equiv$	全等於．	▱	平行四邊形．
□	正方形．	▭	矩形．
$:$	比．	$\backsim$	相似．

普．公． 普通公理． 幾．公． 幾何公法． 作圖公法．

目　次

題解中心

幾何學辭典

第一門　解法之部

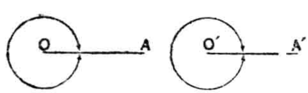
第一編

直線

第一章　角及直線

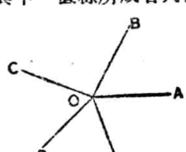
1. 凡周角皆相等.

證　周角 O 及 O′ 分別爲主線 OA 及 O′A′



以 O, O′ 爲樞, 就紙面上迴轉一周所成之角,故取其周角之一 O, 疊於 O′ 上,令 OA 疊於 O′A′ 上,而得全合. 因此周角 O, 等於周角 O′.

2. 由同一之點, 引若干直線, 則各直線與其下一直線所成各角之和,等於四直角.



證　由同一點 O 所引之若干直線 OA,OB, OC,OD, OE 依次所成之鄰角 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}A$, 其和等於周角,故等於 $4\hat{R}$.

3. 凡平角皆相等.

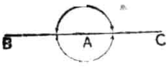
證　平角等於周角之半分,而周角皆相等 [1題],故平角亦皆相等.

別解　設所欲證者, 爲 AB, AC 所夾之平角,等於 DE, DF 所夾之平角. 令 AB, AC

所夾之角爲平角,故 BA,AC 成一直線 BAC. 同理, ED, DF 亦成一直線 EDF. 於是得置直線 BAC 於直線 EDF 上,使 A 點與 D 點相合. [幾.公.(3) α.]. 但 B 與 E 在 D 之同側,C 與 F 在 D 之他側,或 B 與 F 在 D 之同側, C 與 E 在 D 之他側皆可. 總之,於無論何款中, AB, AC 所夾之平角,與 DE, DF 所夾之平角全合. 凡得全合之量相等 [幾.公.(2)], 故此二平角相等.

注意　別證乃不依據周角之相等,而獨立證明平角之相等者也. 5題中直角之別證亦準此.

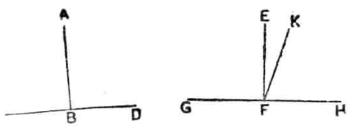
4. 同一之二邊 AB, AC 所夾之二平角相等.



證　由前題,一望而知其爲相等[本題爲前題之特例].

5.　凡直角皆相等.

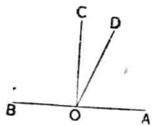
證　直角爲平角之半分,而等量之半分皆相等[普.公.(*h*)],故直角皆相等.



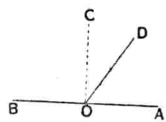
別解　設 ABC 爲直線 AB 立於直線 CBD 上所成之直角, EFG 爲直線 EF 立於直線 GFH 上所成之直角,求證 $A\hat{B}C$ 等於 $E\hat{F}G$. 今將直線 CBD 置於直線 GFH 上, B 點落於 F 點, BA 與 EF 在直線 GFH 之同側, 則直線 BA 當與直線 FE 相合. 何則,蓋若不然,則 BA 或落於 $E\hat{F}H$ 之內,或落於 $E\hat{F}G$ 之內. 茲假定 BA 落於 $E\hat{F}H$ 之內, 命其位置爲 FK. 此時 $K\hat{F}G$ 爲直角,故等於 $K\hat{F}H$ [直角定義]. 然 $E\hat{F}H$ 大於 $K\hat{F}H$ [普. 公. (*a*)], 故 $E\hat{F}H$ 又大於 $K\hat{F}G$, 故 $E\hat{F}H$ 又大於 $E\hat{F}G$ [普.公.(*a*)]. 然 $E\hat{F}G$ 爲直角,故等於 $E\hat{F}H$ [直角定義].故 $E\hat{F}G$ 小於 $E\hat{F}H$,又等於 $E\hat{F}H$.然此爲不可能,故直線 BA 不落於 $E\hat{F}H$ 之內. 仿此得證直線 BA 亦不落於 $E\hat{F}G$ 之內. 故直線 BA 與直線 EF 相合.故 $A\hat{B}C$ 與 $E\hat{F}G$ 相合,而 $A\hat{B}C = E\hat{F}G$ [幾.公.(2)].

6.　於一所設直線上之一所設點,得引其線之一垂線,而以一爲限.

證　二等分平角 AOB 之直線 CO, 令鄰角 COA, COB 皆爲直角,故 CO 爲 AB 之垂線. 若除 CO 以外,於 AB 上之 O 點,倘有他垂線 OD, 則 $D\hat{O}A = \hat{R}$. 然 $C\hat{O}A = \hat{R}$, 故 $C\hat{O}A = D\hat{O}A$ [普. 公. (*c*)],卽全量等於其一部. 此爲不可能[普. 公 (*a*)],故在 AB 之 O 點垂直於 AB 之直線,除 CO 外,別無他線.



別證　設直線 OD, 以 O 爲樞,由 OA 之位置, 迴轉至 OB 之位置, 則 $D\hat{O}A$ 由零漸漸增大,而 $D\hat{O}B$ 由 $2\hat{R}$ 漸漸減小, 其中必有一次 $D\hat{O}A = D\hat{O}B$. 設此時 DO 之位置爲 CO, 則 CO 爲 AB 之垂線;而如是之 CO 位置,顯然以一次爲限.



7.　等角之餘角亦等.

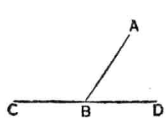
證　某角之餘角者,由直角減去其角而得之角也. 而直角相等 [5題],故等角之餘角亦等[普. 公. (*e*)].

8.　等角之補角亦等.

證　某角之補角者,由二直角減去其角而得之角也. 而二直角[平角]皆相等 [3題],故等角之補角皆相等[普. 公. (*e*)].

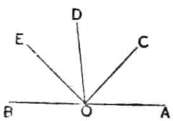
9.　一直線立於他一直線上,其所成鄰角之和,等於二直角.

證　設直線 AB,立於他直線 CD 上,求證鄰角 ABC, ABD 之和,等於二直角. 今鄰角 ABC, ABD 之和,爲 BC, BD 所夾之角, 而 CBD 爲一直線, 故其角爲平角. 故二角 ABC, ABD 之和等於平角,卽等於二直角.



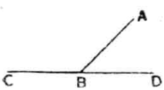
10. 由一直線上之一點,就其一側引若干直線,則其依次所成各鄰角之和,等於二直角.

證 由一直線AOB上之一點O,就其一側引若干直線OC, OD, OE, 其所成各鄰角AOC. COD, DOE, EOB之和,等於平角AOB,即等於$2\hat{R}$.

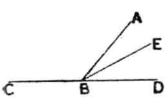


11. 一直線與他二直線所成鄰角之和,若等於二直角,則後二直線成一直線.

證 設直線AB與他二直線BC,BD所成鄰角ABC, ABD之和等於二直角,求證BC, BD成一直線. 今鄰角ABC, ABD之和,爲BC,BD所夾之角,而二角ABC, ABD之和爲二直角, 故BC, BD所夾之角等於二直角, 卽平角. 故BC, BD成一直線.

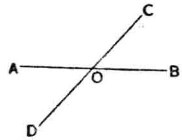


別證 設BD與BC不成一直線,而BE與BC成一直線, 則AB立於直線CBE上,故$A\hat{B}C + A\hat{B}E = 2\hat{R}$ [9題]. 然$A\hat{B}C + A\hat{B}D = 2\hat{R}$ [假設], 故$A\hat{B}C + A\hat{B}E = A\hat{B}C + A\hat{B}D$ [普. 公. (c)]. 故$A\hat{B}E = A\hat{B}D$ [普. 公. (e)], 卽全量等於其一部. 此爲不可能[普. 公. (a)]. 故BD與BC成一直線.



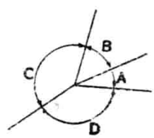
12. 二直線相交,其對頂角相等.

證 設二直線AB, CD交於O, 求證$A\hat{O}C$等於$B\hat{O}D$, $B\hat{O}C$等於$A\hat{O}D$. 今AO立於CD上,故鄰角AOC, AOD之和, 等於二直角[9題].又DO立於AB之上,故鄰角AOD, DOB之和等於二直角[9題].故二角AOC, AOD之和,等於二角AOD, DOB之和[普.公.(c)]. 由是可知, $A\hat{O}C$等於$B\hat{O}D$, 仿此,得證$B\hat{O}C$等於$A\hat{O}D$.



13. 一點之周圍,有A, B, C, D四角. B 2倍於A, C 3倍於B, D等於C, 則各角爲直角之幾分之幾?並以度數表之.

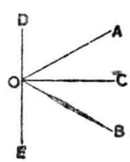
解 $B=2A$, $C=3B=6A$, $D=C$,故$A+B+C+D=A+2A+6A+6A=15A$, 而$A+B+C+D=4\hat{R}$, 故$15A=4\hat{R}$, 因此$A=\frac{4}{15}\hat{R}$.故$B=\frac{8}{15}\hat{R}$,$C=\frac{24}{15}\times\hat{R}=\frac{8}{5}\hat{R}$, 又$D=C=\frac{8}{5}\hat{R}$.



又若以度數表之, 則$A=90°\times\frac{4}{15}=24°$, $B=90°\times\frac{8}{15}=48°$, $C=90°\times\frac{8}{5}=144°$, $D=144°$.

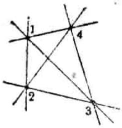
14. 過角之頂點,與此角之二等分線成直角之直線,與角之二邊成等角.

證 設過角AOB之頂點O, 與角之二等分線OC成直角之直線爲DE. 此時$C\hat{O}D=C\hat{O}E=\hat{R}$, $A\hat{O}C=B\hat{O}C$, 故$A\hat{O}D=B\hat{O}E$, 卽DE與OA, OB成等角.

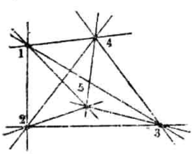


15. 四點最多得決定六直線,四直線最多得決定六點. 又五點最多得決定十直線, 五直線最多得決定十點.

證 (1)四點中各點與他三點聯結,可得十二直線. 然是等直線內,兩兩爲一直線,故



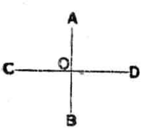
相異之直線,爲十二之半分,即六直線.而所設四點內,若有三點或四點在一直線上,則直線之數,皆少於六,故以六直線爲最多.次,設所設四直線,皆不平行,則各直線與他直線相交而得之點皆爲三,故共可得十二點.然是等點中,兩兩合一,故相異之點,爲十二之半分,即六.所設直線內,若有二線,或三線,或四線平行,則交點之數,皆少於六,故以六點爲最多數.



(2) 倣前推論,得證五點最多得決定4×5之半分,即十直線,五直線最多得決定十點.

16. 二直線相交,其所成之四角,若有一爲直角,則他三角亦爲直角.

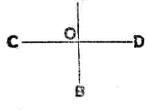
證 設AOB, COD爲二直線, AOC爲直角.



此時$A\hat{O}C$, $A\hat{O}D$之和等於二直角[9題],而$A\hat{O}C$爲直角[假設],故$A\hat{O}D$亦爲直角.根據同理, $D\hat{O}B$, $B\hat{O}C$亦各爲直角.

17. 會於一點之四直線,設其所成之角皆爲直角,則四直線成二直線.

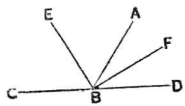
證 設會於一點O之四直線爲AO,CO,BO,DO,其所成之角AOC, COB, BOD, DOA皆爲直角.



於是$A\hat{O}C$, $C\hat{O}B$,爲各直角,故$A\hat{O}C+C\hat{O}B=2\hat{R}$,故AO, BO成一直線[11題].根據同理, CO, DO亦成一直線.故四直線兩兩成一直線.

18. 一直線與他直線成二鄰角,各角之二等分線互爲垂線.

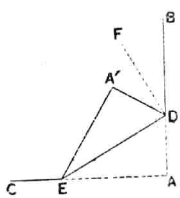
證 設$A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$爲直線AB與CBD所成之鄰角, BE, BF爲其二等分線,求證$E\hat{B}F$爲直角.



BE爲$A\hat{B}C$之二等分線,故$A\hat{B}E=E\hat{B}C$;同理, $A\hat{B}F=F\hat{B}D$,故$E\hat{B}F=E\hat{B}C+F\hat{B}D$ [普.公.(*d*)].然$E\hat{B}F+E\hat{B}C+F\hat{B}D=2\hat{R}$ [10題],故$E\hat{B}F$爲直角.

19. 斜折書籍之一頁,則其緣之二部分[由一緣所折成之二部分]所成角之二等分線,與折痕成直角.

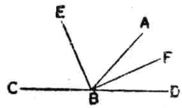
證 設一頁之書角爲A,斜折而至於A′之位置, DE爲其折痕,一緣BDA折而爲DB,DA′二部分,其所成角之二等分線爲DF,求證DF與DE成直角.



茲A折至A′之位置,故$A\hat{D}E=A'\hat{D}E$,因此DE爲$A\hat{D}A'$之二等分線,故$A'\hat{D}E+A'\hat{D}F=\hat{R}$ [18題].

20. 二鄰角之二等分線,若互相垂直,則其所不共之二邊,成一直線.

證 設$A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$爲共有頂點B之二鄰角,其二等分線分別爲BE, BF,且BE垂直於BF,求證CB, BD成一直線.



今

$A\hat{B}C=2A\hat{B}E$, $A\hat{B}D=2A\hat{B}F$, 故 $A\hat{B}C+A\hat{B}D=2A\hat{B}E+2A\hat{B}F=2(A\hat{B}E+A\hat{B}F)=2\hat{R}$. 故不共之二邊 CB, BD 成一直線[11題].

21. 前題中 $E\hat{B}C$ 與 $F\hat{B}D$ 互爲餘角, $A\hat{B}E$ 與 $D\hat{B}E$ 互爲補角.

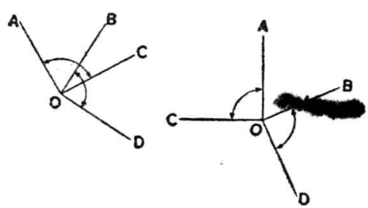
證 $E\hat{B}C=\frac{1}{2}A\hat{B}C$, $F\hat{B}D=\frac{1}{2}A\hat{B}D$. 而 $A\hat{B}C+A\hat{B}D=2\hat{R}$, 故 $E\hat{B}C+F\hat{B}D=\frac{1}{2}(A\hat{B}C+A\hat{B}D)=\hat{R}$. 又 $A\hat{B}E=E\hat{B}C$, 而 $E\hat{B}C+D\hat{B}E=2\hat{R}$, 故 $A\hat{B}E+D\hat{B}E=2\hat{R}$.

22. 六直線會於一點,成六等角,則各角爲一直角之三分之二.

證 六角之和爲一周角, 卽 $4\hat{R}$, 故各角爲 $4\hat{R}$ 之六分之一,卽 $\hat{R}$ 之三分之二.

23. 二角 AOB, COD 公有一頂點 O, 邊 AO 與邊 BO 分別垂直於邊 CO 與邊 DO, 則 $A\hat{O}B$ 或等於 $C\hat{O}D$, 或爲其補角.

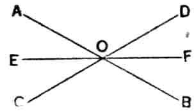
證 如(1)圖中, $A\hat{O}C=B\hat{O}D=\hat{R}$, 故雙方減



以 $B\hat{O}C$, 則其所餘之 $A\hat{O}B$ 與 $C\hat{O}D$ 相等. 如(2)圖中, $A\hat{O}B+B\hat{O}D+D\hat{O}C+A\hat{O}C=4\hat{R}$, 而 $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ 各爲直角,故 $A\hat{O}B+C\hat{O}D=2\hat{R}$, 故卽二角互爲補角.

24. 二對頂角之二等分線,成一直線.

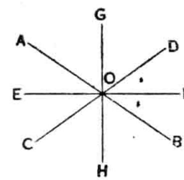
證 設二直線 AB, CD 交於 O, 二對頂角 AOC, BOD 之二等分線分別爲 OE, OF. 此時 $A\hat{O}C=B\hat{O}D$, 故其各自之半分 $A\hat{O}E=B\hat{O}F$. 而



$A\hat{O}F+B\hat{O}F=2\hat{R}$, 故 $A\hat{O}F+A\hat{O}E=2\hat{R}$, 故 OE, OF 成一直線[11題].

25. 相交二直線所成之四角,其二等分線成互相垂直之二直線.

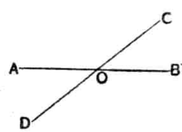
證 設二直線 AB, CD 交於 O, 其所成四角



之二等分線分別爲 OE, OH, OF, OG, 於是依據前題, EO, OF 成一直線, GO, OH 亦成一直線, 且此二直線互相垂直[18題].

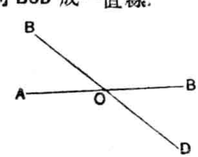
26. 四直線會於一點, 若不相隣之角相等,則此等直線,兩兩成一直線.

證 設四直線 AO, DO, BO, CO 會於一點 O, 其不相隣之角相等, 卽 $A\hat{O}D=B\hat{O}C$, $A\hat{O}C=B\hat{O}D$.



於是因 $A\hat{O}D=B\hat{O}C$, $A\hat{O}C=B\hat{O}D$, 故四角之和,等於 $2\times(A\hat{O}D+A\hat{O}C)$. 然四角之和爲 $4\hat{R}$, 故 $A\hat{O}D+A\hat{O}C=2\hat{R}$, 故 CO, OD 成一直線[11題]. 同理, AO, OB 亦成一直線.

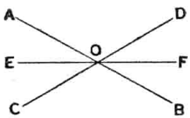
27. 二直線 OB, OD 與一直線 AC 會於同一點 O, 若在 AC 異側之二角 AOB, COD 相等, 則 BOD 成一直線.



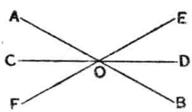
證 $A\hat{O}B+B\hat{O}C=2\hat{R}$, 然 $A\hat{O}B=C\hat{O}D$ 故 $C\hat{O}D+B\hat{O}C=2\hat{R}$, 故 OB, OD 成一直線[11題].

28. 二等分對頂角之一之直線,亦二等分他一對頂角.

證 設二直線 AOB, COD 交於 O, 而成對頂角 AOC, BOD, $A\hat{O}C$ 之二等分線爲 EOF; 求證此直線亦二等分他一角 BOD. 蓋 $A\hat{O}E = B\hat{O}F$, $C\hat{O}E = D\hat{O}F$, 而 $A\hat{O}E = C\hat{O}E$, 故 $B\hat{O}F = D\hat{O}F$.



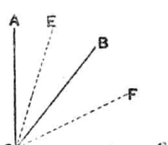
29. 二直線 AO, BO, 在他直線 CD 之兩側, 而與 CD 交於同點 O, 其所成角 AOC, COB 之和等於二直角. 引過 O 點之直線 EOF, 則 $A\hat{O}F$ 等於 $B\hat{O}E$.



證 $A\hat{O}C + C\hat{O}B = 2\hat{R}$, 故 AO, OB 成一直線 [11題]. 因此 $A\hat{O}F$, $B\hat{O}E$ 爲二直線 AB, EF 相交而生之對頂角, 故相等 [12題].

30. 相隣二角若互爲餘角, 則各角二等分線間之角, 等於直角之半分.

證 設 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ 互爲餘角, 其二等分線分別爲 OE, OF, 求證 $E\hat{O}F$ 爲直角之半分. 蓋 $E\hat{O}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$, $B\hat{O}F = \frac{1}{2} B\hat{O}C$, 故 $E\hat{O}F = E\hat{O}B + B\hat{O}F = \frac{1}{2}(A\hat{O}B + B\hat{O}C) = \frac{1}{2}\hat{R}$.



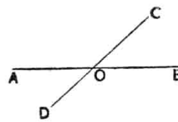
31. 設 $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ 爲依次相隣之角, 而其度數則 $A\hat{O}B = 105°30'$, $BOC = 15°20'$, $COD = 69°10'$, 問 AO, OD 成一直線否?

解 $A\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}D = 105°30' + 15°20' + 69°10' = 190°$, 故 AO, OD 不成一直線.

32. 定理<u>二直線相交, 其對頂角相等</u>之逆定理及倒定理如何? 試證之.

解 此定理若改如下述, 則其逆定理與倒定理, 甚易知之.

<u>四直線交於一點, 若兩兩成一直線, 則其二雙相對之角相等.</u>



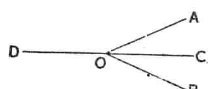
(逆定理) 四直線交於一點, 若二雙相對之角相等, 則四直線兩兩成一直線.

證 [同 26 題].

(倒定理) 四直線交於一點, 若不兩兩成一直線, 則其二雙相對之角不等. 何則, 蓋若各雙相對之角相等, 則四直線兩兩成一直線故也 [前款].

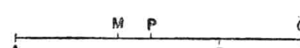
33. 角之二邊, 與其二等分線之延線成等角.

證 設 $A\hat{O}B$ 之二等分線 CO 之延線爲 DO, 則 $A\hat{O}D$ 爲 $A\hat{O}C$ 之補角, $B\hat{O}D$ 爲 $B\hat{O}C$ 之補角. 然 $A\hat{O}C = B\hat{O}C$, 故 $A\hat{O}D$, $B\hat{O}D$ 爲相等角之補角, 因此相等 [8題].



34. 設直線 AB 之中點爲 M, P 爲內分點, 則 $PM = \frac{1}{2}(AP \sim BP)$. 又設 Q 爲外分點, 則 $QM = \frac{1}{2}(AQ + BQ)$.

證 設 P 在 M 與 B 之間, 則 AP > BP, 且 $AP = AM + PM = BM + PM = 2PM + BP$, 故 $2PM = AP - BP$. 故 $PM = \frac{1}{2}(AP - BP)$. 若 P 在 M 與 A 之間, 則 $PM = \frac{1}{2}(BP - AP)$. 故 PM

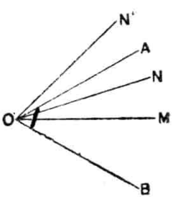


$=\frac{1}{2}(AP\sim BP)$.

次, $AQ+BQ=AM+QM+BQ=BM+QM+BQ=2QM$, 故 $QM=\frac{1}{2}(AQ+BQ)$.

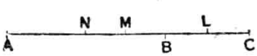
35. 設 $A\hat{O}B$ 之二等分線為 OM, ON 為角內之一直線,則 $M\hat{O}N=\frac{1}{2}(A\hat{O}N\sim B\hat{O}N)$. 又設 ON′ 為 $A\hat{O}B$ 外之一直線, 則 $M\hat{O}N'=\frac{1}{2}(A\hat{O}N'+B\hat{O}N')$.

證 設 ON 在 $A\hat{O}M$ 之內, 則 $A\hat{O}M=B\hat{O}M$, $B\hat{O}N=B\hat{O}M+M\hat{O}N$, $A\hat{O}N=A\hat{O}M-M\hat{O}N$, 故 $B\hat{O}N-A\hat{O}N=(B\hat{O}M+M\hat{O}N)-(A\hat{O}M-M\hat{O}N)=2M\hat{O}N$, 是以 $M\hat{O}N=\frac{1}{2}(B\hat{O}N-A\hat{O}N)$. 若 ON 在 $B\hat{O}M$ 之內,則仿前, $M\hat{O}N=\frac{1}{2}(A\hat{O}N-B\hat{O}N)$. 總之, $M\hat{O}N=\frac{1}{2}(A\hat{O}N\sim B\hat{O}N)$. 次,設 ON 與 OB 在 OA 之異側, 則



$A\hat{O}N'=M\hat{O}N'-A\hat{O}M$, $B\hat{O}N'=M\hat{O}N'+B\hat{O}M$, 故 $A\hat{O}N'+B\hat{O}N'=2M\hat{O}N'$, 故 $M\hat{O}N'=\frac{1}{2}(A\hat{O}N'+B\hat{O}N')$.

36. 設 A, B, C, 為依次並列於一直線上之三點, BC, CA, AB 之中點,分別為 L, M, N, 則 $MN=\frac{1}{2}BC$, $NL=\frac{1}{2}CA$, $LM=\frac{1}{2}AB$.



證 $MN=AM-AN=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}(AC-AB)=\frac{1}{2}BC$. $NL=BN+BL=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AB+BC)=\frac{1}{2}AC$. $LM=CM-CL=\frac{1}{2}AC-\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}(AC-BC)=\frac{1}{2}AB$.

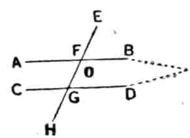
37. 二鄰角之度數, 分別為 160° 及 20°, 則其二等分線所夾角之度數如何?

解 所求之角$=\frac{1}{2}(160°+20°)=90°$,即直角.

第二章 平行直線

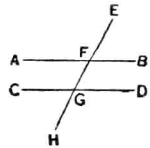
38. 一直線與他二直線交,若一組錯角相等,則後二直線平行.

證 二等分 FG 於 O 點,全圖形以 O 為樞而迴轉,令直線 FG 變為 GF. 此時因 OF 等於 OG, 故 F 點合於 G 點上, G 點合於 F 點上. 而 $A\hat{F}G$ 等於 $F\hat{G}D$, 故 FA 至 GD 之位置, GD 至 FA 之位置. 故 AB 與 CD 之位置, 彼此互換而為 DC, CA. 據此,設將 AB, BD 向 EH 之任何一方, 例如右方,卽 B, D 之一方延長而相交, 則由迴轉後之位置視之, AB, CD 又必交於 EH 之左方,而此違反幾.公.(3). 故 AB 與 CD, 無論向何方延長而不交,卽 AB, CD 平行.



39. 一直線與他二直線交,若其所成之一組錯角相等,或一組同位角相等,或在前一直線同側之二內角互為補角,則二組錯角相等,四組同位角相等,二組同側內角互為補角.

證 設直線 EFGH 與二直線 AB, CD 交,而錯角 $A\hat{F}G$, $F\hat{G}D$ 相等;求證錯角 $B\hat{F}G$, $F\hat{G}C$ 相等,同位角 $E\hat{F}B$, $F\hat{G}D$ 亦相等,內角 $B\hat{F}G$, $F\hat{G}D$ 互為補角. 今 $B\hat{F}G$ 為 $A\hat{F}G$ 之補角[9題], $F\hat{G}C$ 為 $F\hat{G}D$ 之補角 [9題], 而 $A\hat{F}G=F\hat{G}D$



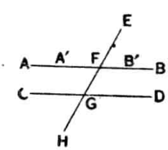
[假設],故 $B\hat{F}G=F\hat{G}C$ [8題]. 又 $E\hat{F}G=A\hat{F}G$ [12題], $F\hat{G}D=A\hat{F}G$[假設],故 $E\hat{F}B=F\hat{G}D$[普.公.(c)]. 次,$B\hat{F}G$ 為$A\hat{F}G$ 之補角, $A\hat{F}G=F\hat{G}D$ [假設],故 $B\hat{F}G$ 為 $F\hat{G}D$ 之補角.仿此可證其他各組同位角相等,及在 EH 他側之內角互為補角.

40. 一直線與他二直線交,若(1)一組同位角相等,或(2)一組同側內角互為補角,則後二直線平行.

證 前題圖中,若一組同位角 $E\hat{F}B$, $F\hat{G}D$ 相等,則因 $E\hat{F}B=A\hat{F}G$[12題],故 $A\hat{F}G=F\hat{G}D$,故 $AB \parallel CD$ [38題].又設 $B\hat{F}G+F\hat{G}D=2\hat{R}$,則因 $B\hat{F}G+A\hat{F}G=2\hat{R}$ [9題],故 $A\hat{F}G=F\hat{G}D$,故 $AB \parallel CD$ [38題].

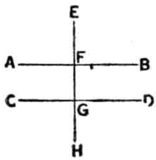
41. 一直線與二平行線交,其所成錯角相等.

證 設一直線EFGH與二平行線AB,CD交,



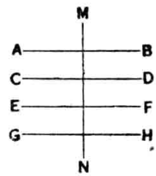
求證 $A\hat{F}G=F\hat{G}D$, $B\hat{F}G=F\hat{G}C$.過F引直線$A'B'$,令 $A'\hat{F}G=F\hat{G}D$,則 $A'B' \parallel CD$[38題].而 $AB \parallel CD$ [假設],又過F點平行於CD之直線唯一[幾.公.(4)],故 $A'B'$ 與 AB 相合.因此 $A'\hat{F}G=A\hat{F}G=F\hat{G}D$.仿此,$B\hat{F}G=F\hat{G}C$.

42. 一直線與二平行線交,且為其一之垂線,則亦必為他一之垂線.



證 設直線 EH 與二平行線 AB, CD 交,且 $EH \perp AB$,求證 $EH \perp CD$.今 $A\hat{F}G=F\hat{G}D$[41題].而$A\hat{F}G=\hat{R}$[假設].故 $F\hat{G}D=\hat{R}$,故 $EH \perp CD$.

43. 有多數直線,任取其二,皆相平行,則其一之垂線,亦必為其他之垂線.



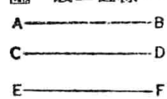
證 設直線 AB, CD, EF, ……,任取其二,皆相平行,直線MN 為其一,例如AB 之垂線,求證 MN 亦為CD, EF……之垂線.今 $AB \parallel CD$,且 $MN \perp AB$,故 $MN \perp CD$ [前題].仿此,$MN \perp EF$, $MN \perp GH$,…….

44. 一直線與二平行線交,則同位角相等,同側內角互為補角.

證 一直線與二平行線交,則錯角相等[41題].而一直線與他二直線交,若錯角相等,則同位角相等,同側內角互為補角[39題].故一直線與二平行線交,則同位角相等,同側內角互為補角.

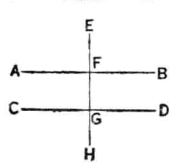
45. 平行於同一直線之各直線,亦互相平行.

證 設二直線 AB, CD 皆平行於同一直線



EF,求證 $AB \parallel CD$.今設AB 與 CD 不平行,則充分延長之,而交於某點.此時過此點得引平行於同一直線之二直線,而違反幾.公.(4).故 AB 與 CD 任意延長而不交,即 AB 與 CD 平行.

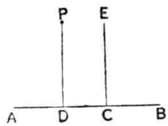
46. 垂直於同直線之各直線平行.



證 設直線AB,CD垂直於同直線 EH,求證 AB 平行於 CD.今 $A\hat{F}G$ 與 $F\hat{G}D$ 皆為直角[假設],故 $AB \parallel CD$ [38題].

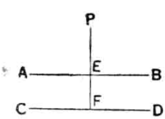
47. 由一直線外之一點，至此線得引唯一之垂線.

證　在一直線 AB 上之任意一點 C，得引其一垂線 CE，而其數唯一[6題]. 過 AB 外之一點 P，得引平行於 CE 之一直線 PD，而其數亦唯一[幾. 公. (4)]. 又 PD 爲 AB 之垂線[42題]，AB 之垂線平行於 CE [46題]，故由 P 向 AB 得引唯一之垂線.

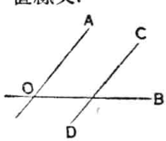


48. 由某點向二平行線引垂線，其二垂足與此點在一直線上.

證　設由一點 P 引二平行線 AB，CD 之垂線，其垂足分別爲 E，F. 茲命 PE 之延線與 CD 之交點爲 F′，則因 AB ∥ CD，故 PF′ ⊥ CD [42題]. 而由 P 向 CD 所引之垂線唯一，故 F′ 與 F 爲同一之點，因此 P，E，F 在一直線上.



49. 與相交二直線之一平行之直線，與他一直線交.

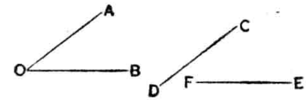


證　設 AO，BO 爲交於 O 之二直線，CD 爲平行於 AO 之直線，求證 CD 與 BO 相交. 茲設 CD 與 BO 不交，而相平行，則因 CD 與 AO 平行，故 AO 應與 BO 平行，是與假設相背. 故 CD 與 BO 必相交.

注意　由本題可知，與平行二直線之一相交之直線，亦必與他一相交.

50. 與相交二直線分別平行之直線，亦必相交.

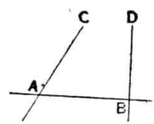
證　設二直線 AO，BO 交於 O，CD，EF 分別與之平行.



今 CD 平行於 AO，而 AO 與 BO 交，故 CD 與 BO 交. 而 EF 平行於 BO，故與 BO 交之 CD，又與 EF 交，卽 CD，EF 相交.

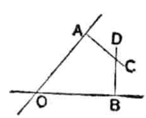
51. 一直線之垂線，與同直線之斜線交.

證　設一直線 AB 之垂線爲 BD，斜線爲 AC. 今假定 BD，AC 不交，卽平行，則 $C\hat{A}B + A\hat{B}D = 2\hat{R}$. 然 BD 爲 AB 之垂線，故 $A\hat{B}D = \hat{R}$，因此 $C\hat{A}B = \hat{R}$，是違反假設. 故 AC，BD 不平行而相交.



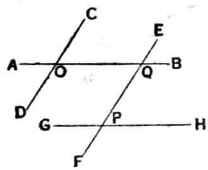
52. 與相交二直線分別垂直之二直線亦相交.

證　設二直線 OA，OB 相交於 O，其垂線分別爲 AC，BD. 今設 AC，BD 不相交，卽平行，則因 OA 爲 AC 之垂線，故又爲與 AC 平行之 BD 之垂線. 又 OB 爲 BD 之垂線. 於是 OA，OB 同爲 BD 之垂線，則必相平行. 然 OA，OB 爲不平行，卽相交之直線，因此 AC，BD 不平行，卽相交.



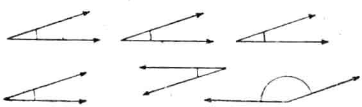
53. 設二直線分別與他二直線平行，則前一雙直線所成之角，等於後一雙直線所成之角.

證　設二直線 AB，CD 分別與他二直線 GH，EF 平行，求證 $A\hat{O}C$，$C\hat{O}B$ 分別與 $E\hat{P}G$，$E\hat{P}H$



相等. 今 CD 與 EF 平行,故 $C\hat{O}B$ 等於錯角 OQP. 而 AB, GH 亦平行,故 $E\hat{P}H$ 等於錯角 OQP. 故 $C\hat{O}B$ 等於 $E\hat{P}H$. 因此,又得 $A\hat{O}C$ 等於 $E\hat{P}G$.

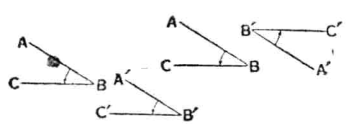
注意 由 O 及 P 引平行之二雙直線時,其所引之直線,或二雙皆同向[A圖],或二雙皆異向[B圖],此時其間之角相等;或一雙同向,一雙異向[C圖],則其間之角互爲補角. 但線向以矢向表之.



(A 圖)　(B 圖)　(C 圖)

54. 二直線平行,則與其成同向[即角廻轉之同向]且相等之角之直線,亦必平行.

證 設 $AB \parallel A'B'$. 若 BC 不平行於 $B'C'$,則試想像由 B' 引 BC 之平行線 $B'C''$, 卽得

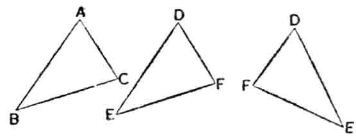


$A'\hat{B}'C''=A\hat{B}C$ [53題]. 而 $A\hat{B}C=A'\hat{B}'C'$ [假設], 故 $A'\hat{B}'C'=A'\hat{B}'C''$. 因此, $B'C''$ 與 $B'C'$ 合. 故 $B'C' \parallel BC$.

第三章　三角形

55. 兩三角形中,其一之二邊,分別與他一之二邊相等,且是等二邊間之角亦相等,則此兩三角形全等,而等角對等邊[兩三角形全等之第一款].

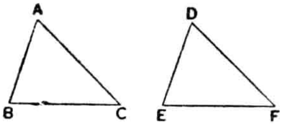
證 設兩三角形 ABC, DEF 中,邊 AB, AC 分



別與邊 DE, DF 相等, $B\hat{A}C$ 等於 $E\hat{D}F$, 求證兩三角形完全相等,且邊 BC 等於邊 EF,角 ACB, ABC 分別等於角 DFE, DEF. 茲取△ABC,置於△DEF 上,令 A 點合於 D 點,邊 AB 合於邊 DE, C 點與 F 點在 DE 之同側. 於是因 AB 等於 DE[假設],故 B 落於 E 上;又因 $B\hat{A}C$ 等於 $E\hat{D}F$ [假設],故 AC 落於 DF 上,且 AC 旣落於 DF 上,因 AC 等於 DF [假設],故 C 落於 F 上. 於是因 B 落於 E 上, C 落於 F 上,故 BC 與 EF 相合[幾.公.(3)]. 因而 △ABC 與 △DEF 全合,故此兩三角形全等 [幾.公.(2)], 且邊 BC 等於邊 EF, 角 ACB, ABC 分別等於角 DFE, DEF.

56. 兩三角形中, 其一之二角, 分別與他一之二角相等, 且是等二角間之邊亦等, 則此兩三角形全等, 而等邊對等角[兩三角形全等之第二款].

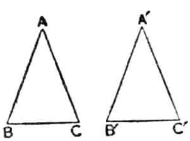
證 設兩三角形 ABC, DEF 中, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ 分別等於 $D\hat{E}F$, $D\hat{F}E$, 邊 BC 等於邊 EF, 求證兩三角形全等,角 BAC 等於角 EDF, 邊 AC, AB 分別等於邊 DF, DE. 茲取 △ABC 置於 △DEF 上,令 B 點置於 E 點上,邊 BC 置於邊 EF 上,A 點與 D 點在 EF 之同側. 於是因



BC 等於 EF [假設],故 C 落於 F 上.又因 $C\hat{B}A$ 等於 $F\hat{E}D$ [假設],故 BA 落於 ED 上;$B\hat{C}A$ 等於 $E\hat{F}D$, 故 CA 落於 FD 上. 據此, BA 與 CA 之交點 A, 落於 ED 與 FD 之交點 D 上, 因而 △ABC 與 △DEF 全合,故此兩三角形全等,且角 BAC 等於角 EDF, 邊 AC, AB 分別等於邊 DF, DE [幾. 公. (2)].

57. 三角形之二邊等,則其對角亦等.

證 設三角形 ABC 之邊 AB, 等於邊 AC, 求證角 ACB 等於角 ABC. 今設△A'B'C' 全等於 △ABC, 卽點 A', B', C' 分別對應於點 A, B, C. 於是兩三角形 ACB, A'C'B' 中, AB, AC 分別等於 A'C', A'B', 因 AB 等於 AC [假設], 且 AB, AC 分別等於 A'B', A'C' 故也. 又角 BAC 等於角 B'A'C'. 據此,二邊 AB, A'C' 之對角 ACB, A'B'C' 相等 [55題], 卽角 ACB 等於角 ABC.



58. 等邊三角形又爲等角三角形. 換言之,三角形之三邊等,則三角亦等.

證 由前題可明.

59. 三角形之二角等, 則其對邊亦等 [卽爲二等邊三角形].

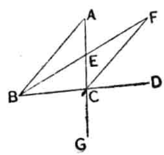
證 設三角形 ABC 之角 ABC 等於角 ACB, 求證邊 AC 等於邊 AB [用57題之圖]. 茲假定 △A'B'C' 全等於 △ABC, 卽點 A', B', C' 分別對應於點 A,B,C. 於是△ABC, △A'B'C' 中, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ 分別等於 $A'\hat{C}'B'$, $A'\hat{B}'C'$, 因 $A\hat{B}C$ 等於 $A\hat{C}B$ [假設], 且角 ABC, ACB 分別等於 $A'\hat{B}'C'$, $A'\hat{C}'B'$ 故也. 又邊 BC 等於邊 B'C'. 據此, 二角 ABC, A'C'B' 之對邊 AC, A'B' 相等 [56題], 卽邊 AC 等於邊 AB.

60. 等角三角形又爲等邊三角形. 換言之,三角形之三角等,則三邊亦等.

證 由前題可明.

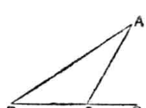
61. 延長三角形之任何一邊,其外角大於任一內對角.

證 將三角形 ABC 之邊 BC 延長至 D, 求證外角 ACD 大於內對角 BAC, ABC 之任何一者. 茲設 E 爲 AC 之中點, 聯結 BE, 且延長至 F, 令 EF 等於 BE, 又聯結 FC. 於是 △ECF, △EAB 中, 邊 EC 等於邊 EA, 邊 EF 等於邊 EB, 而角 CEF 等於角 AEB, 因二角爲對頂角也[12題]. 故 $E\hat{C}F$ 等於 $E\hat{A}B$ [55題]. 而 $A\hat{C}D$ 大於 $E\hat{C}F$ [普. 公. (a)],故 $A\hat{C}D$ 大於 $B\hat{A}C$. 但此 $B\hat{A}C$ 係延長邊 BC 之對角. 又延長 AC 至 G, 於是得仿前證 $B\hat{C}G$ 大於 AC 之對角 $A\hat{B}C$. 而 $B\hat{C}G$ 與 $A\hat{C}D$ 爲對頂角,故相等 [12題],因此 $A\hat{C}D$ 大於 $A\hat{B}C$.



62. 三角形任意二角之和,小於二直角.

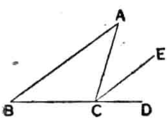
證 設 $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ 爲三角形 ABC 中之任意二角, 求證其和小於二直角. 延長 BC 至 D, 則外角 ACD 大於內對角 ABC [61題].此各角加角



ACB, 則角 ACD, ACB 之和, 大於角 ABC, ACB 之和 [幾.公.(f)]. 而角 ACD, ACB 之和等於二直角 [9題]. 故 $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ 之和小於二直角. 倣此, 得證 $B\hat{C}A$, $C\hat{A}B$ 之和, 或 $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ 之和小於二直角.

63. 延長三角形之一邊, 其所生之外角, 等於二內對角之和, 而三角形三內角之和, 等於二直角.

證　設三角形 ABC 之邊 BC, 延長至 D, 求證外角 ACD 等於二內對角 CAB, ABC 之和, 三內角 CAB, ABC, BCA 之和等於二直角. 今隔 AC 而在 B 之異側, 引直線 CE, 令 $A\hat{C}E$ 等於 $C\hat{A}B$, 於是因角 ACD 大於內對角 CAB [61題], 故角 ACD 又大於角 ACE, 因此 CE 落於角 ACD 之內. 又角 ACE 等於錯角 CAB, 故 CE, 與 AB 平行[38題]. 故角 ECD 等於同位角 ABC [44題]. 故全角 ACD 等於二角 CAB, ABC 之和[普.公.(d)]. 故角 CAB, ABC 之和等於角 ACD. 此各部加 $B\hat{C}A$, 則三角 CAB, ABC, BCA 之和, 等於二角 ACD, BCA 之和[普.公.(d)]. 而二角 ACD, BCA 之和等於二直角 [9題], 故三角 CAB, ABC, BCA 之和等於二直角.



64. 三角形之一角爲直角或鈍角, 則他二角爲銳角.

證　由前題可明.

65. 一三角形之二角, 分別與他三角形之二角等, 則其餘一角亦等.

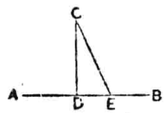
證　一切三角形, 其三角之和等於 $2\hat{R}$, 故一三角形之二角, 若分別與他三角形之二角等, 則其餘一角, 顯然亦等.

66. 各三角形至少有二銳角, 且直角三角形中, 二銳角互爲餘角.

證　由63題可明.

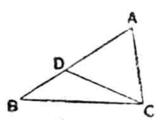
67. 由所設直線 AB 外之所設點 C, 得向此線引一垂線, 而以一爲限.

證　垂線者, 其左右之角, 各爲直角, 故顯然得引一垂線 CD. 又以一爲限者, 蓋若得引二垂線 [CD 之外有 CE], 則得有二直角之三角形 CDE, 此不合理[65題]. 故垂線以一爲限.



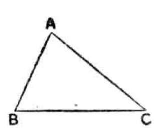
68. 三角形之二邊不等, 則大邊對大角.

證　設三角形 ABC 之邊 AB, 大於邊 AC, 求證 $A\hat{C}B$ 大於 $A\hat{B}C$. 今由 AB 截取 AD, 令等於 AC, 而聯結 CD. 於是因 AD 等於 AC, 故 $A\hat{D}C$ 等於 $A\hat{C}D$ [57題]. 而 $A\hat{D}C$ 爲三角形 BDC 之外角, 故大於內對角 ABC [61題]. 故 $A\hat{C}D$ 大於 $A\hat{B}C$. 因此 $A\hat{C}B$ 更大於 $A\hat{B}C$.



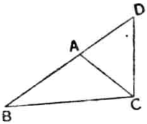
69. 三角形之二角不等, 則大角對大邊.

證　設三角形 ABC 中, 角 ABC 大於角 ACB, 求證邊 AC 大於邊 AB. 若 AC 不大於 AB, 則 AC 或等於 AB, 或小 AB, 而二者之中, 必居其一. 然 AC 等於 AB 爲不可能, 蓋若 AC 等於 AB, 則角 ABC, ACB 相等故也[57題]. 又 AC 小於 AB 亦爲不可能, 蓋若 AC 小於 AB, 則角 ABC 小於角 ACB 故也[68題]. 故 AC 大於 AB.



70. 三角形任意二邊之和, 大於第三邊.

證　設三角形 ABC 中任意二邊爲 BA, AC, 求證 BA, AC 之和, 大於 BC. 延長 BA 至 D, 令 AD 等於 AC, 聯結 CD. 於是因 AD 等於 AC, 故角 ACD 等於角 ADC [57題]. 而角 BCD 大於角 ACD [普.公.(a)], 故角 BCD 大於角 ADC, 卽 BDC. 故三角形 BDC 之邊 BD 大於邊 BC [69題]. 而 BA 與 AC 之和, 等於 BD, 因 AC 等於 AD 故也. 故 BA 與 AC 之和, 大於 BC. 仿此得證 AC 與 CB 之和大於 AB, 而 CB 與 BA 之和, 大於 AC.



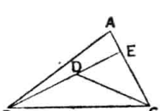
注意　設將命題"二點間之最短徑爲直線"視作公理, 則本題可不待證而自明.

71.　三角形任意二邊之差, 小於第三邊.

證　用前題之圖, 三角形 ABC 中, $BC+AC>AB$ [70題]. 兩邊減以 AC, 得 $BC>AB-AC$. 仿此得證 $AC>BC-AB$, $AB>BC-AC$.

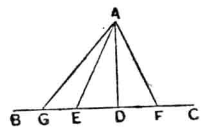
72.　由三角形內之一點, 至一邊之兩端, 引二直線, 則此二直線之和, 小於他二邊之和, 而其所夾之角, 大於他二邊所夾之角.

證　設 D 爲三角形 ABC 內之一點, 由 D 至邊 BC 之兩端, 引二直線 BD, CD, 求證 BD, DC 之和, 小於 BA, AC 之和, 而 $B\hat{D}C$ 大於 $B\hat{A}C$. 延長 BD, 令與 AC 交於 E. 此時 BA 與 AE 之和大於 BE [70題]. 此各部加 EC, 則 BA 與 AC 之和, 大於 BE 與 EC 之和 [普.公.(f)]. 又 DE 與 EC 之和, 大於 DC. 此各部加 DB, 則 BE 與 EC 之和, 大於 BD 與 DC 之和. 而 BA 與 AC 之和, 大於 BE 與 EC 之和, 故 BA 與 AC 之和, 更大於 BD 與 DC 之和. 又角 BDC 爲 △CED 之外角, 故大於內對角 DEC [61題]. 而角 DEC 爲 △BAE 之外角, 故大於角 BAC. 因此角 BDC 更大於角 BAC.



73.　由所設直線外之所設點, 向此線所引之一切線中, 垂線最短, 而與垂線成等角之二線相等, 與垂線成大角者, 大於與垂線成小角者.

證　設 A 爲所設點, BC 爲所設直線, 而 AD 爲由 A 至 BC 所引之垂線, AE, AF 爲與 AD 成等角 EAD, FAD 之任意直線, 又 AG 與 AD 所成之角 GAD, 大於角 EAD 或 FAD, 求證 AD 小於 AE; AF 等於 AE; AG 大於 AE 或 AF. 今 △ADE 中, 角 ADE 與角 AED 之和, 小於二直角 [62題], 而角 ADE 爲直角 [假設], 故角 AED 小於直角, 故 $A\hat{E}D$ 小於 $A\hat{D}E$, 因此 AD 小於 AE [69題]. 又兩三角形 ADE, ADF 中, 角 ADE 等於角 ADF, [因俱爲直角], 及 $E\hat{A}D$ 等於 $F\hat{A}D$ [假設], 而邊 AD 爲兩形所共, 故 AE 等於 AF [56題]. 又設 AE, AF 中之 AE, 與 AG 在垂線 AD 之同側, 於是三角形 AGE 中, 角 AEG 爲 △AED 之外角, 故大於內對角 ADE [61題]. 角 AEG 爲鈍角, 故 $A\hat{G}E$ 爲銳角 [64題], 因此 $A\hat{E}G$ 大於 $A\hat{G}E$, 故 AG 大於 AE [69題], 故又大於 AF.



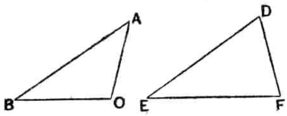
74.　由所設直線外之所設點, 向此線所引之等直線, 不多於二.

證　由前題, 自所設點至所設直線所引垂線之兩側中, 與垂線成等角之直線等長, 而其他直線非長於此, 即短於此, 故如題

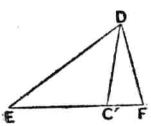
所言.

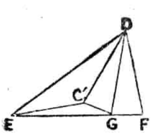
75. 一三角形之二邊,分別與他一三角形之二邊等,然是等二邊間之角不等,則其底亦不等,對大角之底大於他一底.

證 設兩三角形 ABC, DEF 中,邊 AB 等於



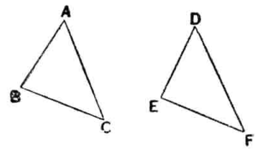
邊 DE, 邊 AC 等於邊 DF, 而 $B\hat{A}C$, $E\hat{D}F$ 不等, $E\hat{D}F$ 大於 $B\hat{A}C$, 求證底 EF 大於底 BC. 取三角形 ABC 置於三角形 DEF 之上,令 A 置於 D 上, AB 置於 DE 上,而 C 點落於 C′ 點, 且與 F 點在 DE 之同側.於是 B 落於 E 上,因 AB 等於 DE 故也[假設]. 若 C′ 在直線 EF 上,則 C′ 必在 E 與 F 之間,因 $E\hat{D}F$ 大於 $E\hat{D}C'$ 故也.據此, EC′,即 BC,小於 EF [普. 公. (a)]. 然若 C′ 不在直線 EF 上, 則可引 $F\hat{D}C'$ 之二等分線, 命其與 EF 之交點爲 G, 聯結 C′G. 於是兩三角形 C′DG, FDG 中,邊 C′D 等於邊 DF, 邊 DG 爲兩形所共,又角 C′DG 等於角 FDG, 故 C′G 等於 GF [55題]. 故 EG 與 GC′ 之和等於 EF [普. 公. (d)]. 而 EG 與 GC′ 之和,大於 EC′ [70題],故 EF 大於 EC′, 即 BC.





76. 兩三角形中,其一之二邊,分別與他一之二邊等,而底不等,則對底之角亦不等,對大底之角大於他角.

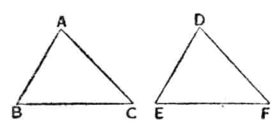
證 設兩三角形 ABC, DEF 中,邊 AB, AC 分



別等於邊 DE, DF, 而底 BC 大於底 EF, 求證角 BAC 大於角 EDF. 今設角 BAC 不大於角 EDF, 則角 BAC 非等於角 EDF, 即小於角 EDF, 二者之中,必居其一. 而角 BAC 等於角 EDF 爲不可能,蓋若角 BAC 等於角 EDF, 則底 BC 亦將等於底 EF 也[55題]. 又角 BAC 小於角 EDF 亦爲不可能,蓋若角 BAC 小於角 EDF, 則底 BC 亦將小於底 EF 也[75題].故角 BAC 非大於角 EDF 不可.

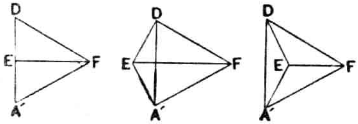
77. 兩三角形中, 其一之三邊, 分別等於他一之三邊, 則兩三角形全等, 而等角對等邊[兩三角形全等之第三款].

證 設兩三角形 ABC, DEF 中,邊 BC, CA, AB



分別等於邊 EF, FD, DE, 求證兩三角形全等,而角 CAB, ABC, BCA 分別等於角 FDE, DEF, EFD. 今兩三角形 ABC, DEF 中,邊 AB 等於邊 DE [假設],邊 AC 等於邊 DF[假設]. 若角 BAC 與角 EDF 不等,則底 BC 與底 EF 亦不等[75題]. 故角 BAC 與角 EDF 不能不等,故相等. 因此兩三角形全等 [55題], 而角 ABC 等於角 DEF, 角 BCA 等於角 EFD.

別證 將三角形 ABC 置於三角形 DEF 上,

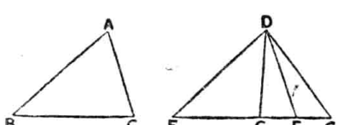


令 B 置於 E 上, BC 置於 EF 上, A 隔 EF 而在 D 之異側. 此時 C 落於 F 上, 以 BC 等於 EF 故也[假設]. 假定 A 落於 A′. 若 DEA′ 爲一直線, 則角 FDE 等於角 FA′E [57題]. 若 DEA′ 非一直線, 則聯結 DA′. 此時因 FD 等於 FA′ [假設], 故角 FDA′ 等於角 FA′D [57題]; 又 ED 等於 EA′, 故角 EDA′ 等於角 EA′D [57題]. 故是等角之和或差, 即角 FDE 與角 FA′E 相等 [普. 公. (d)或(e)]. 故上述各款中, 角 FDE 等於角 FA′E, 即 CÂB. 據此, 兩三角形 ABC, DEF 中, 邊 AB, AC 分別等於邊 DE, DF [假設], 而角 BAC 等於角 EDF, 故兩三角形全等 [55題], 角 ABC 等於角 DEF, 角 ACB 等於角 DFE.

注意 此第二證明法曰 Philo 氏證明法.

78. 兩三角形中, 其一之二角, 分別等於他一之二角, 且一組等角之對邊亦等, 則兩三角形全等, 而等邊對等角 [兩三角形全等之第四款].

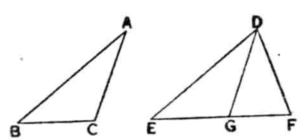
證 設兩三角形 ABC, DEF 中, 角 ABC, BCA 分別等於角 DEF, EFD, 且邊 AB 等於邊 DE, 求證兩三角形全等, 角 BAC 等於角 EDF,



邊 BC, CA 分別等於邊 EF, FD. 今取三角形 ABC 置於三角形 DEF 上, 令 A 置於 D 上, AB 置於 DE 上, 且 C 點與 F 點在 DE 之同側. 於是因 AB 等於 DE [假設], 故 B 落於 E 上. 又因角 ABC 等於角 DEF [假設], 故 BC 落於 EF 上. 此時若 C 不落於 F 上, 則當落於 EF 或 EF 之延線上之某點 G. 若然, 則二角 DGE, DFE 中, 其一爲三角形 DFG 之外角, 他一爲其內對角, 故角 DFE 不等於角 DGE, 即 ACB [61題], 而角 DFE 等於角 ACB [假設], 故 C 不能落於 EF 上 F 以外之點. 因此兩三角形全合, 故兩三角形全等, 而角 BAC 等於角 EDF, 邊 BC, CA 分別等於邊 EF, FD.

79. 兩三角形中, 其一之二邊, 分別等於他一之二邊, 且一組等邊之對角亦等, 則他組等邊之對角, 或相等, 或互爲補角, 而前款中兩三角形全等 [兩三角形之兩可款].

證 設兩三角形 ABC, DEF 中, 邊 AB, AC 分別等於邊 DE, DF, 角 ABC 等於角 DEF, 求證角 ACB, DFE 或相等 [此時兩三角形全



等], 或爲補角. 玆將三角形 ABC 置於三角形 DEF 之上, 令 A 置於 D 上, AB 置於 DE 上, C 點與 F 點在 DE 之同側. 於是因 AB 等於 DE. 故 B 落於 E 上. 又因角 ABC 等於角 DEF, 故 BC 落於 EF 上. 而 AC＝DF, 故 C 或落於 F 上, 或落於 EF 或其延線上. 若

C落於F上,則兩三角形全合,故兩三角形全等.若C落於EF或EF之延線上之某點G,則因DG等於DF,故角DFG等於角DGF[57題],因而兩角DGE,DFE為補角,卽兩角ACB,DFE為補角.

80. 前題中若一組所設等角為直角或鈍角,則兩三角形全等.

證 此時隣接所設角之所設邊,其對角俱為銳角,但可相等,而不能互為補角,故云.

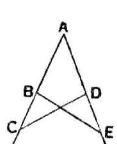
81. 79題中,若他一組等邊之對角,俱為銳角,俱為鈍角,或其一為直角,則兩三角形全等.

證 若俱為銳角,或俱為鈍角,則不能互為補角,而但可相等;又若其一為直角,則79題之二款中,他一亦為直角,故云.

82. 79題中各三角形所設角之對邊,若不小於他所設邊,則兩三角形全等.

證 此時隣接所設角之所設邊,不大於所設角之對邊,因而前邊之對角,不大於所設角,故俱為銳角,因此依據前題,兩三角形全等.

83. 設頂點為A之角,其一邊上有二點B,C,他邊上有二點D,E,而AB等於AD;AC等於AE,則BE等於CD.試證之.



證 $\triangle ABE$,$\triangle ADC$中$AB=AD$,$AE=AC$,而$\hat{A}$為兩形所共,故兩三角形全等,因而$BE=CD$[55題].

84. 試不依據關於平行線之定理,而證三角形之外角,大於其任何內對角.

證 同61題.

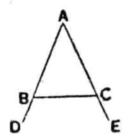
85. 三角形得有唯一直角或鈍角.

證 三角形三角之和為$2\hat{R}$,故顯然得有一直角或鈍角;然若有二以上之直角或鈍角,則三角形內角之和,大於二直角,而不合理[63題].

86. 試依據定理若三角形之二邊不等,則對大邊之角亦大,而證定理若三角形之二角等,則其對邊亦等.

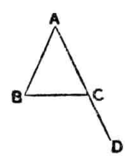
證 蓋若二邊不等,則依據第一定理,其對角亦不等也.

87. 延長二等邊三角形之等邊,其所成之二外角相等.



證 設延長二等邊三角形ABC之二等邊AB,AC,求證所成之外角CBD,BCE相等.蓋角CBD,BCE分別為等角ABC,ACB之補角也[8題].

88. 二等邊三角形底之外角,大於任何內角.



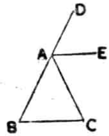
證 設二等邊三角形ABC底之外角為BCD,則由61題,$B\hat{C}D>\hat{A}$,又$B\hat{C}D>\hat{B}$,而$A\hat{C}B=\hat{B}$,故$B\hat{C}D>A\hat{C}B$,卽外角大於任何內角.

89. 延長二等邊三角形ABC之一等邊AC,而作CD,則$B\hat{C}D$與$A\hat{B}C$互為補角.

證 由前題之圖,$AB=AC$,故$A\hat{B}C=A\hat{C}B$,而$A\hat{C}B$與$B\hat{C}D$互為補角,故$B\hat{C}D$與$A\hat{B}C$亦互為補角.

90. 二等邊三角形中,其頂角外角之二等分線,與底邊平行.並證其逆定理.

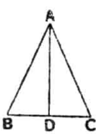
證 設ABC為二等邊三角形,其交角之外



角爲 CAD, $\widehat{CAD}$ 之二等分線爲 AE. 於是 $\widehat{CAD}=\hat{B}+\hat{C}$, 而 $\hat{B}=\hat{C}$, 故 $\widehat{CAD}=2\hat{C}$. 因此 $\hat{C}=\frac{1}{2}\widehat{CAD}=\widehat{CAE}$. 故 AE ∥ BC [38題]. 逆定理如下. 過頂點 A, 引平行於底 BC 之直線 AE, 則 AE 二等分頂點上之外角 CAD. 蓋 AE ∥ BC, 故 $\widehat{DAE}=\hat{B}$ [44題], $\widehat{CAE}=\hat{C}$ [41題]. 而 $\hat{B}=\hat{C}$, 故 $\widehat{DAE}=\widehat{CAE}$, 卽 AE 二等分外角 CAD.

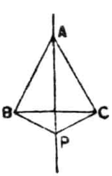
91. 由二等邊三角形之頂點, 向底所引之垂線, 將底及頂角二等分.

【證】 證 AD 爲由二等邊三角形 ABC 之頂點 A, 向底邊所引之垂線. 於是 △ADB, △ADC 各爲直角三角形, 斜邊 AB, AC 相等, 一邊 AD 爲兩形所共. 故 BD = CD, $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$ [80題], 卽 AD 二等分頂角, 且 D 等分 BC.



92. 二等邊三角形頂角之二等分線上之各點, 底距離邊之兩端等遠.

【證】 設二等邊三角形 ABC 之頂角 A 之二等分線爲 AP, P 爲其上之任意點, 聯結 PB, PC. 於是兩三角形 BAP, CAP 中, AB = AC, AP 爲兩形所共, $\widehat{BAP}=\widehat{CAP}$, 故 PB = PC [55題].

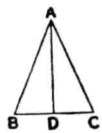


93. 二等分二等邊三角形頂角之直線, 二等分底邊於直角.

【證】 設二等邊三角形 ABC 之頂角 A 之二等分線爲 AD. 於是三角形 ADB, ADC 中, AB = AC, AD 爲兩形所共, $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$. 故 BD = CD [55題], 卽 AD 二等分底邊. 又 $\widehat{ADB}=\widehat{ADC}$, 且此二角之和爲二直角 [9題], 故皆爲直角, 卽 AD 垂直於底邊.

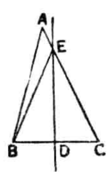
94. 聯結二等邊三角形之頂點與底之中點之直線, 垂直於底且二等分頂角.

【證】 設二等邊三角形 ABC 之底邊 BC 之中點爲 D, 聯結 AD, 則 △ADB, △ADC 中, AB = AC, AD 公有, BD = CD. 故 $\widehat{BAD}=\widehat{CAD}$ [77題], 即 AD 將頂角 A 二等分. 又 $\widehat{ADB}=\widehat{ADC}=\hat{R}$, 卽 AD 垂直於底邊.



95. 二等邊三角形底邊中點上之垂線, 必過頂點.

【證】 設 △ABC 中 AB = AC, BD = CD, 求證 BC 在 D 上之垂線過 A 點. 今設不過 A, 而截 AC 或 AB 於某點, 例如截 AC 於 E 點. 聯結 BE, 則 △BDE, △CDE 中, BD = CD, DE 公有, $\widehat{BDE}=\hat{R}=\widehat{CDE}$, 故 BE = CE [55題]. 因此 AE + EB = AE + EC = AC, 而 AC = AB [假設], 故 AE + EB = AB, 而不合理 [70題]. 故 BC 在 D 上之垂線過 A.

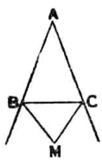


【注意】 由 91, 93, 94 題與本題併合考之, 可知 AD 適合四條件, 即此直線過頂點 A, 又過底之中點 D, 爲底之垂線, 且爲頂角之二等分線. 四者之中, 僅備其二, 已足可決定此直線 AD, 蓋過二點得引唯一直線, 一角有唯一二等分線, 由一點向一直線得引唯一垂線, 故滿足是等四條件中任何二者

之直線,必能滿足其他二條件也.

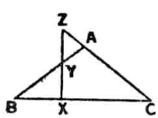
96. △ABC 中 B 及 C 之外角之二等分線之交點為 M, 而 △MBC 為二等邊三角形,則 △ABC 亦為二等邊三角形.

證 △MBC 為二等邊, 故 $M\hat{B}C=M\hat{C}B$. 而



$M\hat{B}C=\frac{1}{2}(\hat{A}+A\hat{C}B)$, $M\hat{C}B=\frac{1}{2}(\hat{A}+A\hat{B}C)$, 故 $\frac{1}{2}(\hat{A}+A\hat{C}B)=\frac{1}{2}(\hat{A}+A\hat{B}C)$, 因而 $A\hat{C}B=A\hat{B}C$, 故 AB=AC, 故 △ABC 為二等邊三角形.

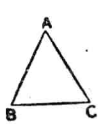
97. 由二等邊三角形 ABC 之底 BC 上之任意點 X,引 BC 之垂線,與邊 AB, AC 或其延線交於 Y, Z, 則 △AYZ 為二等邊.



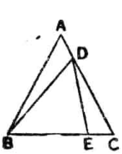
證 $\hat{Z}=\hat{R}-\hat{C}$, $Z\hat{Y}A=B\hat{Y}X=\hat{R}-\hat{B}$. 而 $\hat{C}=\hat{B}$ [假設], 是以 $\hat{Z}=Z\hat{Y}A$, 故 AY=AZ [59題].

98. 試由定理三角形之二角若不等,則大角之對邊, 大於小角之對邊, 以證定理二等邊三角形等邊之對角亦等.

證 設二等邊三角形之頂點為 A. $\hat{B}$ 或大於 $\hat{C}$,或等於 $\hat{C}$, 或小於 $\hat{C}$. 而若 $\hat{B}>\hat{C}$,則 AC>AB;若 $\hat{B}<\hat{C}$, 則 AC<AB. 然 AB=AC, 故 $\hat{B}=\hat{C}$.



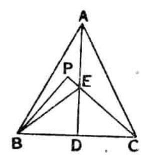
99. 聯結二等邊三角形底邊之一端,與其對邊上之任意點之直線,大於聯結此點與底邊上之任意點之直線.



證 聯結二等邊三角形 ABC 之底邊之一端 B, 與對邊上之任意點 D, 又設 BC 上之任意點為 E, 聯結 DE, 則 $A\hat{B}C>D\hat{B}E$, $A\hat{B}C=A\hat{C}B$, 故 $A\hat{C}B>D\hat{B}E$. 然 $D\hat{E}B>A\hat{C}B$, 故更 $D\hat{E}B>D\hat{B}E$. 因此, DB>DE.

100. 二等邊三角形頂角內之一點,若不在頂角之二等分線上,則距離底之兩端非等遠.

證 設 P 為二等邊三角形頂角 A 內之一點,而不在二等分線AD上, 命 PC 與 AD 之交點為 E,聯結 BE. 此時因 AD 為頂角之二等分線,故 BE=CE[92題]. 而 PB<PE+BE, 即 PB<PC, 即 P 距離底之兩端非等遠.

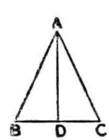


101. 二等邊三角形之各底角為銳角.

證 三角形內角之和為 $2\hat{R}$,故兩底角之和當小於 $2\hat{R}$. 而兩底角相等,故各須小於 $2\hat{R}$ 之半分 $\hat{R}$, 因此各為銳角.

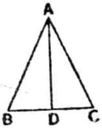
102. 三角形一角之二等分線, 若為其角對邊之垂線,則三角形為二等邊.

證 設三角形 ABC 中一角 A 之二等分線 AD, 垂直於對邊 BC. 此時兩三角形 ADB, ADC 中, $B\hat{A}D=C\hat{A}D$, AD 為 BC 之垂線,故 $A\hat{D}B=\hat{R}=A\hat{D}C$, 而 AD 為兩形所共. 故 △ADB≡△ADC [56題],故 AB=AC, 即△ ABC 為二等邊.



103. 引角 A 之二等分線,以證若三角形 ABC 之二邊 AB, AC 相等,則其對角亦等.

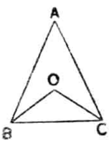
證 設角 A 之二等分線為 AD, 則兩三角形 ADB, ADC 中, AB=AC, AD 為兩形所共, $B\hat{A}D=C\hat{A}D$, 故 △ADB≡△ADC [55題]. 因



而 $\hat{B}=\hat{C}$, 即等邊 AB, AC 之對角 C, B 亦等.

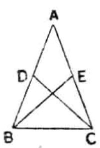
104. 二等邊三角形底邊隣角之兩二等分線與底邊,亦成二等邊三角形.

證　二等邊三角形 ABC 之底邊爲 BC, 其二隣角 B, C 之二等分線交於 O. 則因 AB＝AC, 故 $A\hat{C}B=A\hat{B}C$ [57題]. 因而各角之半分 $O\hat{C}B=O\hat{B}C$, 故 OC＝OB [59題], 即 OBC 爲二等邊三角形.



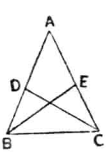
105. 由二等邊三角形底邊之兩端, 分別向其對邊之中點所引之直線相等.

證　設 BE, CD 爲由二等邊三角形 ABC 底邊 BC 之兩端, 分別向其對邊中點所引之直線, 則 △AEB, △ADC 中, AB＝AC, AE＝AD [普.公.(h)], $\hat{A}$ 公有. 故 △AEB ≡ △ADC [55題], 因此 BE＝CD.



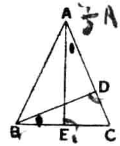
106. 二等邊三角形 ABC 中, 設底邊 BC 之隣角 B, C 之二等分線, 分別與其對邊交於 E 及 D, 則 BE 等於 CD.

證　△AEB, △ADC 中, $\hat{A}$ 爲兩形所共, $A\hat{B}E$, $A\hat{C}D$ 分別爲等角 ABC, ACB 之半分, 故相等 [普. 公. (h)], AB＝AC, 故 △AEB ≡ △ADC [56題], 因而 BE＝CD.



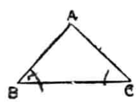
107. 由二等邊三角形底邊之端, 向其對邊所引之垂線, 與底邊所成之角, 等於頂角之半.

證　設 ABC 爲二等邊三角形, 由底邊 BC 之端 B, 向其對邊 AC 所引之垂線爲 BD, 求證 $C\hat{B}D$ 等於頂角 A 之半分. 今設 AE 爲頂角 A 之二等分線, 則 $E\hat{A}C=\frac{1}{2}B\hat{A}C$, 又 $A\hat{E}C=\hat{R}$ [93題]. 而 $B\hat{D}C=\hat{R}$, 故 $A\hat{E}C=B\hat{D}C$, 又 $\hat{C}$ 爲三角形 AEC, BDC 所共, 故 $D\hat{B}C=E\hat{A}C=\frac{1}{2}B\hat{A}C$.



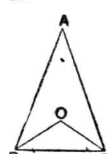
108. 設二等邊三角形之頂角 A, 爲底角 B 或 C 之二倍, 則 $\hat{A}$ 爲直角. 試證之.

證　因爲二等邊三角形, 故 $\hat{B}=\hat{C}$. 又 $\hat{A}$ 爲 $\hat{B}$ 或 $\hat{C}$ 之二倍, 故等於 $\hat{B}$ 與 $\hat{C}$ 之和. 而 $\hat{B}+\hat{C}$ 等於 $\hat{A}$ 之外角, 故內角 A 等於其外角, 因此 $\hat{A}$ 爲直角.



109. 設二等邊三角形之頂角 A, 爲底角 B 或 C 之半分, 則此角等於直角之五分之二. 此三角形之兩底角之二等分線所成之角爲若干?

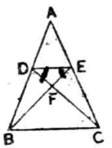
證　設 $\hat{A}$ 爲 $\hat{B}$ 之半分, 則 $\hat{B}=2\hat{A}$, 而 $\hat{B}=\hat{C}$, 故 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=5\hat{A}$, 又 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2\hat{R}$, 故 $\hat{A}$ 爲二直角之五分之一, 即等於直角之五分之二. 次, 設角 B 及 C 之二等分線 BO, CO 之交點爲 O, 則因 $\hat{A}=\frac{1}{2}\hat{B}=\frac{1}{2}\hat{C}$, 故 $O\hat{B}C=O\hat{C}B=\hat{A}=\frac{2}{5}\hat{R}$. 故 $O\hat{B}C+O\hat{C}B=\frac{4}{5}\hat{R}=\frac{2}{5}2\hat{R}$. 而 △OBC 之內角之和爲二直角, 故 $B\hat{O}C=2\hat{R}-\frac{2}{5}\cdot2\hat{R}=\frac{3}{5}\cdot2\hat{R}=\frac{6}{5}\hat{R}$, 即直角之五分之六.



110. 就二等邊三角形 ABC 之等邊 AB, AC 上, 分別取 D 及 E 點, 命 AD＝AE, 且 BE, CD

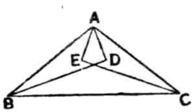
之交點爲 F, 則三角形 FBC, FDE 皆爲二等邊.

證　$\triangle DBC$, $\triangle ECB$ 中, $DB=EC$, $D\hat{B}C=E\hat{C}B$, 而 BC 爲兩形所共. 故 $D\hat{C}B=E\hat{B}C$ [55題], 故 $\triangle FBC$ 爲二等邊 [59題]. 又 $AD=AE$, 故 $A\hat{D}E=A\hat{E}D$ [57題], 故其補角亦等. 於是比較兩三角形 DEB, EDC, 卽可證 $\triangle FDE$ 爲二等邊.

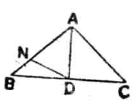


111. 由二等邊三角形之頂點, 向各底角之二等分線所引之垂線相等.

證　設由二等邊三角形 ABC 之頂點 A, 向各底角之二等分線 BD, CE 所引之垂線爲 AD, AE, 則兩直角三角形 ADB, AEC 中, 斜邊 $AB=AC$, 銳角 $ABD=ACE$ [普. 公. (h)], 故 $AD=AE$.

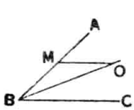


112. 設二等邊三角形 ABC 之頂點爲 A, 底 BC 之中點爲 D, 取 AM 等於 AD, 則 BM 小於 CD.



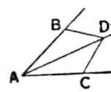
證　$BA-AD<BD$, 而 $AD=AM$, $BD=CD$, 故 $AB-AM<CD$, 卽 $BM<CD$.

113. 過角 ABC 之二等分線上之任意點 O, 作 CB 之平行線, 與 AB 交於 M, 則 MBO 爲二等邊三角形.



證　BO 爲 $A\hat{B}C$ 之二等分線, 故 $A\hat{B}O=C\hat{B}O$, 又 $OM \parallel BC$, 故 $B\hat{O}M=C\hat{B}O$ [41題], 故 $M\hat{B}O=M\hat{O}B$, 因而 $MO=MB$, 卽 MBO 爲二等邊三角形.

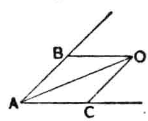
114. 由角 BAC 之二等分線上, 取任意點 D, 且令 AB 等於 AC, 則 $A\hat{D}B=A\hat{D}C$.



證　$\triangle ADB$, $\triangle ADC$ 中, $AB=AC$, AD 爲兩形所共, $B\hat{A}D=C\hat{A}D$. 因此 $A\hat{D}B=A\hat{D}C$ [55題].

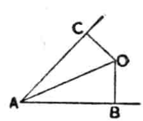
115. 由一角之二等分線上之一點, 向各邊引平行於他邊之直線, 則此二直線相等.

證　設 O 爲 $B\hat{A}C$ 之二等分線 AO 上之任意點, 由 O 向邊 AB, AC 所引平行於邊 AC, AB 之直線爲 OB, OC, 則 $\triangle AOB$, $\triangle AOC$ 中, $B\hat{A}O=C\hat{A}O$, 又 $B\hat{A}O=A\hat{O}C$, $C\hat{A}O=A\hat{O}B$, 故 $A\hat{O}B=A\hat{O}C$, 而 AO 爲兩形所共, 因此 $OB=OC$.



116. 設 O 爲距角 BAC 之二邊等遠之點, 則 OA 爲角 BAC 之二等分線.

證　設由 O 引垂線 OB, OC, 則兩直角三角形 AOB, AOC 中, AO 爲兩形所共, OB, OC 相等 [假設]. 故對相等直角之隣邊 OB, OC 之角 OAB, OAC 亦相等 [80題], 因此 OA 爲角 BAC 之二等分線.



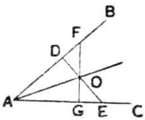
117. 角之二等分線上之任意點, 距角之兩邊等遠.

證　就前題之圖, 設 O 爲 $\hat{A}$ 之二等分線上之任意點, OB, OC 爲由此點向角之兩邊所引之垂線, 求證 $OB=OC$. $\triangle AOB$, $\triangle AOC$ 中, $A\hat{B}O=\hat{R}=A\hat{C}O$, $B\hat{A}O=C\hat{A}O$, AO 爲兩形所共, 故 $OB=OC$ [80題].

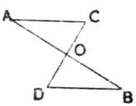
118. 通過角之二等分線上之一點, 且與

此線成等角之二直線，與角之二邊交，則其夾於二邊間之部分相等.

證　設 O 為角 BAC 之二等分線上之一點，過 O 與 AO 成等角之二直線為 DE, FG，則 $\triangle AOD$, $\triangle AOG$ 中，$D\hat{A}O = G\hat{A}O$, $A\hat{O}D = A\hat{O}G$, AO 為兩形所共，故 $OD = OG$ [56題]. 同理，$OE = OF$. 因此，$DE = FG$.



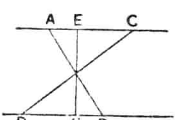
119.　設有限直線 AB, CD 交互二等分於 O，則 AC, BD 平行.



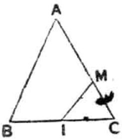
證　$\triangle AOC$, $\triangle BOD$ 中，$OA = OB$, $OC = OD$, $A\hat{O}C = B\hat{O}D$，故 $A\hat{C}O = B\hat{D}O$ [55題]. 因此 $AC \parallel BD$ [38題].

120.　過距二平行直線等遠一點之二直線，皆二等分於此點，且由平行直線截取等長.

證　設 O 為距二平行直線 AC, DB 等遠之點，即引平行線之垂線 EOF 時，$EO = OF$. 此時設引過 O 之任意直線 AOB，則 $\triangle AEO$, $\triangle BFO$ 中，$EO = OF$, $A\hat{E}O = \hat{R} = B\hat{F}O$, $A\hat{O}E = B\hat{O}F$，故 $AO = BO$，且 $AE = BF$ [56題]. 仿此，設過 O 之他任意直線為 COD，則 $CO = OD$，且 $CE = DF$. 故 $AC = BD$.



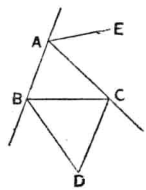
121.　設 I 為二等邊三角形 ABC 之底邊 BC 之中點，M 為 AC 邊上之任意點，則 IB, IM 之差，小於 AB, AM 之差.



證　$IC \sim IM < MC$. 而 $IC = IB$, $MC = AC - AM = AB - AM$，因此 $IB \sim IM < AB - AM$

122.　三角形 ABC 中 B 及 C 之外角之二等分線，其所夾之角等於他一外角之半分.

證　$\triangle ABC$ 於 B 之外角，與於 A, C 之內角和等 [63題]，於 C 之外角，與於 A, B 之內角和等. 故於 B, C 之外角和，等於內角 2A, B, C 之和. 而內角 A, B, C 之和等於 $2\hat{R}$ [63題]，故於 B, C 之外角和之半分，等於 $\frac{1}{2}\hat{A} + \hat{R}$. 故 $\hat{D}$ 等於 $\hat{R} - \frac{1}{2}\hat{A}$，而此顯然等於 $\hat{A}$ 之外角 $2\hat{R} - \hat{A}$ 之半分.

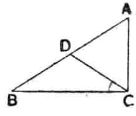


123.　直角三角形斜邊 BC 兩端外角之二等分線，其所成之角 BDC 等於直角之半分.

證　設 122 題之 $B\hat{A}C$ 為直角，則其外角亦為直角，其半分之 $C\hat{A}E = \frac{1}{2}\hat{R}$，因此 $B\hat{D}C = \frac{1}{2}\hat{R}$.

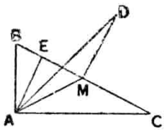
124.　直角三角形得分為兩二等邊三角形. 據此，斜邊之中點距三角頂等遠.

證　設直角三角形為 ABC，$\hat{C}$ 為直角. 按照 $B\hat{C}D = \hat{B}$，引 CD，命其與 AB 之交點為 D. 於是 $\hat{B} = B\hat{C}D$，故 $BD = CD$. 又 $\hat{A} = \hat{R} - \hat{B}$, $A\hat{C}D = \hat{R} - B\hat{C}D$；而 $\hat{B} = B\hat{C}D$，故 $\hat{A} = A\hat{C}D$，因而 $CD = AD$，即得分為兩二等邊三角形. 而 $BD = CD = AD$.



125.　設直角三角形 ABC 之直角為 A，$\hat{A}$ 之二等分線為 AD，斜邊 BC 之中點為 M，而 MD 垂直於 BC，則 MA, MD 相等.

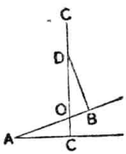
證　由 A 向邊 BC 引垂線 AE，則 $B\hat{A}E$, $\hat{C}$ 皆為 $E\hat{A}C$ 之餘角，故相等. 又 $MA = \frac{1}{2}BC = MC$



[124題],故 $M\hat{A}C=\hat{C}$,因而 $B\hat{A}E=M\hat{A}C$. 而 $B\hat{A}D=C\hat{A}D$, 故 $D\hat{A}E=D\hat{A}M$. 又 AE, DM 平行,故 $D\hat{A}E=A\hat{D}M$ [41題], 因此 $D\hat{A}M=A\hat{D}M$, 故 $MA=MD$.

126. 一角之二邊,分別垂直於他角之二邊,則兩角或相等,或互爲補角.

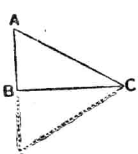
證 先設一角 BDC 之二邊 DB, DC, 分別垂直於他角 BAC 之二邊 AB, AC. 命 AB, DC 之交點爲 O, 則 $\triangle AOC$, $\triangle DOB$ 皆爲直角三角形, $O\hat{A}C$ 與 $A\hat{O}C$, $O\hat{D}B$ 與 $D\hat{O}B$ 互爲餘角, 而 $A\hat{O}C=D\hat{O}B$, 故 $O\hat{A}C=O\hat{D}B$, 卽兩角相等.



次,設 $B\hat{D}C'$ 之二邊 DB, DC' 分別垂直於 $B\hat{A}C$ 之二邊 AB, AC. 此時 DC' 之延線, 爲 AC 之垂線, 故 $B\hat{D}C=B\hat{A}C$ [前款]. 而 $B\hat{D}C'$ 與 $B\hat{D}C$ 互爲補角, 故 $B\hat{D}C'$ 與 $B\hat{A}C$ 亦互爲補角.

127. 設直角三角形之一銳角, 等於他銳角之二倍, 則斜邊等於最小邊之二倍. 又其逆定理如何?

證 設直角三角形 ABC 之銳角 BAC 等於銳角 BCA 之二倍. 於 AB 之延線上, 取 $BA'=AB$, 聯結 $A'C$, 則 $\triangle ABC=\triangle A'BC$. 於是 $B\hat{A}C=B\hat{A}'C$, $B\hat{C}A=B\hat{C}A'$, 故 $\triangle AA'C$ 之三角, 皆等於 $B\hat{C}A$ 之二倍. 故 $AA'C$ 爲正三角形, 而 $AC=AA'=2AB$. 但因 $B\hat{A}C=2B\hat{C}A$ 時, $AB<BC$, AC 大於他二邊, 故 AB 爲最小邊.



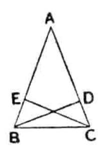
[逆定理] 設直角三角形之斜邊, 等於最小邊之二倍, 則一銳角等於他銳角之二倍.

證 $AC=2AB$ 時, $\triangle AA'C$ 爲正三角形, 因而 $B\hat{A}C=A\hat{C}A'=2B\hat{C}A$.

128. 等邊三角形之各角, 爲直角之三分之二.

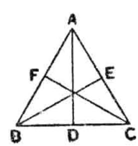
證 等邊三角形之三角相等, 而此三角之和爲二直角, 故各角爲二直角之三分之一, 卽直角之三分之二.

129. 由二等邊三角形底之兩端向對邊所引之垂線相等.



證 三角形 ABC 中, $AB=AC$, 故 $A\hat{C}B=A\hat{B}C$, 因而此各角之餘角 $C\hat{B}D=B\hat{C}E$, 而 BC 爲 $\triangle BCD$, $\triangle CBE$ 所共, 因此 $BD=CE$ [56題].

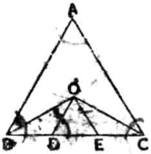
130. 由等邊三角形之頂點向對邊所引之三垂線相等.



證 設等邊三角形 ABC 中, AD, BE, CF 爲由各角頂向對邊所引之垂線, 則因 $AB=BC$, 故 $AD=CF$ [前題]. 同理, $BE=CF$. 故 $AD=BE=CF$.

131. 由正三角形兩底角之二等分線之交點, 所引平行於二邊之二直線, 將底三等分.

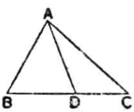
證 設 ABC 爲正三角形, 兩底角之二等分線爲 BO, CO, 其交點爲 O, 由 O 所引平行於 AB, AC 之直線爲 OD, OE, 命其與 BC 之



交點爲 D, E. 於是 $D\hat{O}B = A\hat{B}O = D\hat{B}O$, 故 $DB = DO$. 同理, $EC = EO$. 又 $O\hat{D}E = A\hat{B}C = A\hat{C}B = O\hat{E}D$, 皆爲正三角形之一角,故 $\triangle ODE$ 爲正三角形,而 $DO = DE = EO$. 故 $DB = DE = EC$, 即 BC 三等分於 D, E.

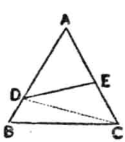
132. 由三角形之一頂點, 向其對邊所引之一直線, 小於他二邊中之大者. 若此二邊等,則小於此二邊中之任一邊.

證 設由 $\triangle ABC$ 之頂點 A, 向對邊 BC 所引之任意直線爲 AD, 且 $AC > AB$, 則 $\hat{C} < \hat{B} < A\hat{D}C$, 即 $\hat{C} < A\hat{D}C$, 故 $AD < AC$. 若 $AB = AC$, 則 $\hat{C} = \hat{B}$, 而 $\hat{B} < A\hat{D}C$, 因而 $\hat{C} < A\hat{D}C$, $AD < AC$. 故 AD 小於二邊 AB, AC 中之任一邊.



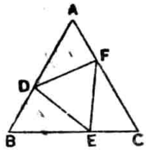
133. 兩端在正三角形二邊上之有限直線,小於此三角形之一邊.

證 設正三角形 ABC 之二邊間之直線爲 DE, 聯結 CD, 則 $CD < BC$ [132題]. 又 $\hat{A} = A\hat{C}B$, $A\hat{C}D < A\hat{C}B$, 故 $A\hat{C}D < \hat{A}$, 因而 $DC > DA$. 故 $DE < DC$ [132題], 因此 $DE < BC$.



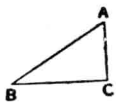
134. 於正三角形之各邊上, 順次取距其一端等遠之一點,聯結之,則得正三角形.

證 設 ABC 爲一正三角形,其各邊上所取之直線 AD, BE, CF 各距其頂點等遠,聯結 DE, EF, FD, 則 $\triangle ADF$, $\triangle BED$ 中, $AD = BE$, 又 AF, BD 分別爲由等直線 AC, AB 減去等直線 CF, AD 之所餘,故相等,且 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 爲正三角形之角, 故亦相等. 據此, $DF = DE$ [55 題]. 同理, $DE = EF$. 故 $DE = EF = DF$, 即 $\triangle DEF$ 爲正三角形.



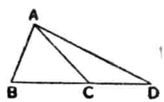
135. 直角三角形之斜邊,大於他邊.

證 設ABC爲直角三角形, $\hat{C}$ 爲直角,則 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 皆爲銳角, 故 $\hat{C} > \hat{A}$, $\hat{C} > \hat{B}$. 故 $AB > CB$, $AB > AC$, 即斜邊大於他邊.



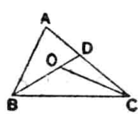
136. 將三角形 ABC 之底邊 BC, 依由 B 至 C 之方向,延長至 D, 令 CD 等於 AB, 則 AD 大於 BC.

證 $AB + AD > BC + CD$, 而 $AB = CD$, 故 $AD > BC$ [普.公.(g)].



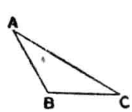
137. 設 O 爲三角形 ABC 內之一點, 則 $B\hat{O}C = B\hat{A}C + A\hat{B}O + A\hat{C}O$.

證 設 BO 之延線與 AC 之交點爲 D, 則 $B\hat{A}C + A\hat{B}O = O\hat{D}C$, 又 $O\hat{D}C + A\hat{C}O = B\hat{O}C$, 故 $B\hat{O}C = B\hat{A}C + A\hat{B}O + A\hat{C}O$.



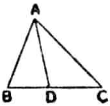
138. 鈍角三角形對鈍角之邊, 大於他邊.

證 設 ABC 爲鈍角三角形, $\hat{B}$ 爲鈍角, 則 $\hat{A}$, $\hat{C}$ 皆爲銳角, 故 $\hat{B} > \hat{A}$, $\hat{B} > \hat{C}$. 故 $AC > BC$, $AC > AB$, 即鈍角之對邊大於他邊.



139. 設三角形 ABC 中二等分角 A 之直

線,與邊 BC 交於 D, 則 BA 大於 BD, CA 大於 CD.



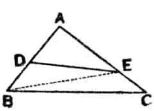
證 $A\hat{D}B > C\hat{A}D$, 而 $C\hat{A}D = B\hat{A}D$, 故 $A\hat{D}B > B\hat{A}D$, 因而 $AB > BD$. 同理, $AC > CD$.

140. 兩直角三角形, 若有一銳角及其隣邊,或一銳角及其對邊相等,則兩形全等.

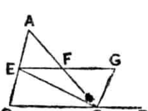
證 兩直角三角形中,若有一銳角相等,則他一銳角亦相等. 故兩直角三角形, 若有一銳角及其隣邊, 或一銳角及其對邊相等,則有一邊及其相隣之二角相等,而可歸於56題之款,因而兩形全等.

141. 設三角形 ABC 之最大角為 A, 則於 AB, AC 上分別取任意點 D,E 時, $DE < BC$.

證 聯結 BE, 則因 $\hat{A}$ 為最大角, 且 $B\hat{E}C > \hat{A}$, 故 $B\hat{E}C > \hat{C}$, 故 $BC > BE$. 又 $E\hat{D}B > \hat{A}$, 故 $E\hat{D}B > E\hat{B}D$, 故 $BE > DE$. 因此 $DE < BC$.



142. 設三角形 ABC 之邊 BC 延長至 D, 角 ACB 之二等分線與邊 AB 之交點為 E, 過 E 引平行於 BC 之直線, 命其與邊 AC. 及角 ACD 之二等分線之交點分別為 F, G, 則 $EF = FG$.

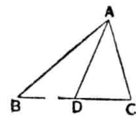


證 因 $EG \parallel BC$, 故 $F\hat{E}C = E\hat{C}B = F\hat{C}E$. 故 $EF = FC$. 同理, $FC = FG$, 故 $EF = FG$.

143. 設 D 為三角形 ABC 邊 BC 之中點, 邊 AB 小於邊 AC, 則角 ADC 為鈍角.

證 $\triangle ADB$, $\triangle ADC$ 中, AD 為兩形所共, $DB = DC$, 而 $AB < AC$, 故 $A\hat{D}B < A\hat{D}C$ [76題]. 據此, $A\hat{D}C$ 大於二直角之半分,卽大於直角,故為鈍角.

144. 設 D 為三角形 ABC 邊 BC 之中點, 角 ADB 為鈍角,則邊 AB 大於邊 AC.

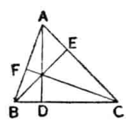


證 $\triangle ADB$, $\triangle ADC$ 中, AD 為兩形所共, $DB = DC$, 而 $A\hat{D}B$ 為鈍角, 故大於其補角 ADC. 因此 $AB > AC$.

145. 設三角形 ABC 中, $AB > BC > CA$, 則最大角及最小角若何?

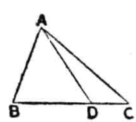
解 最大角為 $\hat{C}$, 最小角為 $\hat{B}$ [68題].

146. 三角形三高之和,小於三邊之和.



證 設三角形 ABC 之三高為 AD, BE, CF, 則 $AD < AB$, $BE < BC$, $CF < AC$ [73題]. 故 $AD + BE + CF < AB + BC + AC$.

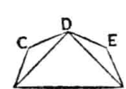
147. 設 D 為三角形 ABC 之邊 BC 上之一點,而 AB 不大於 BD, 則 AC 大於 CD.



證 設 $AB \leqq BD$, 則 $A\hat{D}B \leqq B\hat{A}D$, 而 $A\hat{D}C > B\hat{A}D$, $C\hat{A}D < A\hat{D}B$, 故更 $A\hat{D}C > C\hat{A}D$. 因此, $AC > CD$.

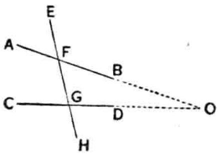
148. 兩端在所設二點上之直線,短於兩端在同二點上之折線.

證 命所設二點為 A, B, 其間之直線為 AB, 折線為 ACDEB. 引 AD, BD, 則 $AD < AC + CD$, $BD < DE + BE$, 因此 $AD + BD < AC + CD + DE + EB$. 而 $AB < AD + BD$, 故 AB 更小於 $AC + CD + DE + EB$, 卽小於折線 ACDEB.



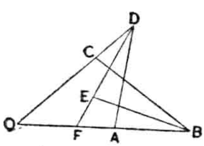
149. 定理一直線與他二直線交，若其所成之錯角等，則此二直線平行，其對定理包含於定理三角形之外角，大於其各內對角中.試說明之.

解　對定理如下：設二直線不平行，則一直線與其相交而成之錯角不等. 茲設直線 AB, CD 不平行而相交，又設直線 EH 與其交於 F, G, 於是 $\triangle OFG$ 中，依據後定理，$A\hat{F}G > F\hat{G}O$，即錯角不等. 因此前定理之對定理，包含於後定理中.



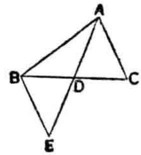
150. 設 A, B 爲所設直線上之二定點，C, D 爲所設他直線上之二定點，則 $A\hat{D}C$ 及 $C\hat{B}A$ 之二等分線所成之角，等於 $D\hat{A}B$ 與 $B\hat{C}D$ 之和之半分.

解　設 $A\hat{D}C$, $C\hat{B}A$ 之二等分直線分別爲 DE, BE, 其交點爲 E. 今命 DE 與 BA 之交點爲 F, 則 $B\hat{E}D = \frac{1}{2}\hat{B} + E\hat{F}B = \frac{1}{2}\hat{B} + \hat{O} + \frac{1}{2}\hat{D}$ [63題]. 又 $\frac{1}{2}(D\hat{A}B + B\hat{C}D) = \hat{O} + \frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{D}$. 故 $B\hat{E}D = \frac{1}{2}(D\hat{A}B + B\hat{C}D)$.



151. 由三角形之一頂點，向其對邊之中點所引之直線，小於他二邊之和之半分，而大於此和與第三邊之差之半分.

解　設由 $\triangle ABC$ 之頂點 A, 向對邊 BC 之中點 D 所引之直線爲 AD, 延長 AD, 令 DE=AD, 聯結 BE. 於是 $\triangle ADC$, $\triangle EDB$ 中, DA=DE, DC=DB, $A\hat{D}C = E\hat{D}B$, 故 AC=BE [55題]. 而 AE<AB+BE, 即 2AD<AB+AC, 故 $AD < \frac{1}{2}(AB+AC)$. 次, AD+DB>AB, AD+DC>AC, 故 2AD+BC>AB+AC, 因而 $AD > \frac{1}{2}(AB+AC-BC)$.

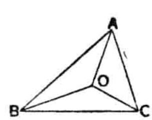


152. 三角形之中線，與其二隣邊所成之角中，與小邊所成者，大於與大邊所成者.

解　用前題之圖，由三角形 ABC 之頂點 A 所引之中線設爲 AD, 且 AB>AC, 延長 AD, 令 DE=AD, 且引 BE. 於是 $\triangle ADC$, $\triangle EDB$ 中，其二邊分別相等，且夾角亦等，故 $C\hat{A}D = B\hat{E}D$, AC=BE [55題]. 而 AB>AC, 故 AB>BE, $B\hat{E}D > B\hat{A}D$. 因此, $C\hat{A}D > B\hat{A}D$, 即與小邊 AC 所成之角，大於與大邊 AB 所成之角.

153. 由三角形 ABC 之各頂點，向其形內之一點 O 所引之三直線 AO, BO, CO 之和，小於三角形之周，而大於周之半分.

解　OB+OC<AB+AC [72題], OC+OA<AB+BC, OA+OB<AC+BC, 故 2(OA+OB+OC)<2(AB+AC+BC), 因此 OA+OB+OC<AB+AC+BC. 次, OB+OC>BC [70題], OC+OA>AC, OA+OB>AB, 故 2(OA+OB+OC)>AB+AC+BC, 因此 $OA+OB+OC > \frac{1}{2}(AB+AC+BC)$.



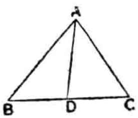
154. 三角形之一角，隨其小於，等於，大於他二角之和，而爲銳角，直角，鈍角.

解　命三角爲 A, B, C. 設 A<B+C, 則因 $A+B+C=2\hat{R}$, 故 A 小於 $2\hat{R}$ 之半分，即小

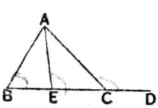
於 $\hat{R}$, 故為銳角. 次, 設 $A=B+C$, 則 A 等於 $2\hat{R}$ 之半分, 即等於 $\hat{R}$. 復次, 設 $A>B+C$, 則 A 大於 $2\hat{R}$ 之半分, 即大於 $\hat{R}$, 故為鈍角.

155. 三角形之一角, 隨過其頂點之中線, 大於, 等於, 小於對邊之半分, 而為銳角, 直角, 鈍角.

證 設 D 為 △ABC 之邊 BC 之中點, 求證隨 $AD>\frac{1}{2}BC$, $AD=\frac{1}{2}BC$, $AD<\frac{1}{2}BC$, 而定 $\hat{A}$ 為銳角, 直角, 鈍角. 茲設 $AD>\frac{1}{2}BC$, 則 $\hat{B}>B\hat{A}D$, $\hat{C}>C\hat{A}D$ [68 題], 故 $\hat{B}+\hat{C}>\hat{A}$. 而 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2\hat{R}$, 故 $\hat{A}<\hat{R}$. 倣此, 設 $AD=\frac{1}{2}BC$, 則 $\hat{A}=\hat{B}+\hat{C}$, 故 $\hat{A}=\hat{R}$; 又設 $AD<\frac{1}{2}BC$, 則 $\hat{A}>\hat{B}+\hat{C}$, 故 $\hat{A}>\hat{R}$.



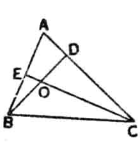
156. 三角形 ABC 之邊 BC 延長至 D, 命 $B\hat{A}C$ 之二等分線 AE 與 BC 之交點為 E, 則 $2A\hat{E}D=A\hat{B}D+A\hat{C}D$.



證 $A\hat{C}D=A\hat{B}D+B\hat{A}C=A\hat{B}D+2B\hat{A}E$. 故 $A\hat{C}D+A\hat{B}D=2A\hat{B}D+2\times B\hat{A}E=2A\hat{E}D$.

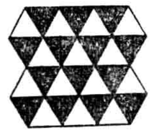
157. 由銳角三角形之二頂點向其對邊所引之二垂線間之角, 為其餘頂點中一角之補角.

證 設銳角三角形 ABC 中, 由 B 及 C 分別向其對邊所引之垂線為 BD, CE, 命其交點為 O, 則 $B\hat{O}C$ 為 $\hat{A}$ 之補角. 蓋 △CEA, △CDO 中, $C\hat{D}O=\hat{R}=C\hat{E}A$, 又 $D\hat{C}O$ 為兩形所共, 即兩三角形之二角, 分別相等, 故其餘之角 CAE 及 COD 亦等. 而 $C\hat{O}D$, $B\hat{O}C$ 互為補角, 故 $C\hat{A}E$, $B\hat{O}C$ 互為補角.



158. 以共有頂點之正三角形, 填充此點之周圍, 需正三角形若干?

解 一點周圍之角, 為四直角, 正三角形之各角, 為二直角之三分之一, 即四直角之六分之一. 故欲填充一點之周圍, 需六個正三角形.

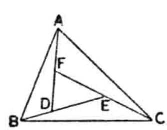


注意 以正三角磚敷地, 可如上圖敷滿之.

159. 設三角形之一角, 等於他二角之和, 則最大邊等於由其中點至對角頂之距離之二倍.

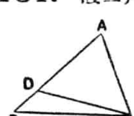
證 蓋三角形三角之和, 為二直角, 故若一角等於他二角之和, 其為直角三角形可知. 故斜邊之中點, 距三頂點等遠也. [124 題].

160. 於三角形 ABC 中, 過其各角頂引直線 AD, BE, CF, 令 $D\hat{A}B=E\hat{B}C=F\hat{C}A$. 若此三直線不交於一點, 則其所成之三角形, 與原三角形有分別相等之角.



證 △ADB 中, 外角 $F\hat{D}E=B\hat{A}D+A\hat{B}D$, 而 $B\hat{A}D=E\hat{B}C$, 故 $B\hat{A}D+A\hat{B}D=E\hat{B}C+A\hat{B}D=A\hat{B}C$. 故 $F\hat{D}E=A\hat{B}C$. 同理, $D\hat{E}F$, $E\hat{F}D$ 分別等於 $B\hat{C}A$, $C\hat{A}B$.

161. 設三角形 ABC 之邊 AB 大於 AC. 在邊 AB 上, 取 AD 等於 AC, 則角 DCB 等於角 ABC 及 ACB 之差之半分.

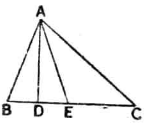


證 因 $AD=AC$, 故 $A\hat{D}C$

$=A\hat{C}D$, 而 $A\hat{D}C=A\hat{B}C+D\hat{C}B$, 又 $A\hat{C}D+D\hat{C}B=A\hat{C}B$, 故 $A\hat{C}B=A\hat{D}C+D\hat{C}B=A\hat{B}C+2D\hat{C}B$. 故 $D\hat{C}B=\frac{1}{2}(A\hat{C}B-A\hat{B}C)$.

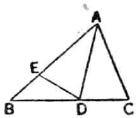
162. 三角形 ABC 中,設 AC>AB, 由 A 向 BC 引垂線 AD, 則 $D\hat{A}C>D\hat{A}B$, DC>DB.

證 AD 爲 BC 之垂線,故 $D\hat{A}B$, $D\hat{A}C$ 分別爲 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 之餘角. 而因 AC>AB, 故 $\hat{B}>\hat{C}$, 因此 $D\hat{A}B<D\hat{A}C$. 此時若取 $D\hat{A}E$ 等於 $D\hat{A}B$, 則 E 在 DC 上,而 DB=DE, 故 DC>DB.



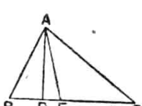
163. 設三角形 ABC 中 $\hat{A}$ 之二等分線與對邊交於 D, AB>AC, 則 BD>CD.

證 在 AB 上取 AE 等於 AC, 聯結 DE, 則 CD=DE, $A\hat{D}C=A\hat{D}E$[55題]. 而 $B\hat{E}D>A\hat{D}E$, $\hat{B}<A\hat{D}C$, 故 $B\hat{E}D>\hat{B}$. 因此 BD>DE, 卽 BD>CD.



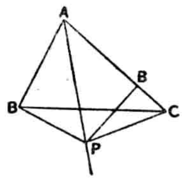
164. 三角形中,一角之二等分線,與由其頂點向對邊所引之垂線所成之角,等於他二角之差之半分.

證 設三角形 ABC 中 $\hat{A}$ 之二等分線爲 AE, 由 A 向對邊所引之垂線爲 AD, 則 $\hat{B}+A\hat{B}D=\hat{R}=\hat{C}+C\hat{A}D$. 故 $\hat{B}\sim\hat{C}=C\hat{A}D\sim B\hat{A}D$. 而 $B\hat{A}E=C\hat{A}E$, 故 $C\hat{A}D\sim B\hat{A}D=2D\hat{A}E$ [35題]. 據此, $2D\hat{A}E=\hat{B}\sim\hat{C}$, 故 $D\hat{A}E=\frac{1}{2}(\hat{B}\sim\hat{C})$.



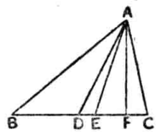
165. 在三角形 ABC 中角 A 之二等分線上任取一點, 則由此點至 B, C 之距離之差, 小於 AB, AC 之差.

證 設 $\hat{A}$ 二等分線上之任意點爲 P, 在 AC [或其延線] 上取 AB′ 等於 AB, 聯結 PB′, 則 PB=PB′, B′C=AC∼BA; 而 PC∼PB′<B′C. 卽 PC∼PB<AC∼AB.



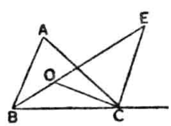
166. 三角形 ABC 中,設 AD 爲中線, AE 爲角 A 之二等分線,則 AE<AD.

證 AE 在中線 AD 與由 A 向 BC 所引之垂線 AF 之間[152題及162題],而與垂線 AF 成小角之直線 AE, 小於與同線成大角之直線 AD [73題].



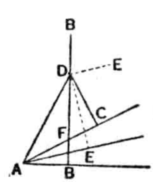
167. 三角形 ABC 中, 設角 B 之二等分線,與角 C 之外角之二等分線交於 E, 則 $B\hat{E}C$ 等於 $\hat{A}$ 之半分.

證 設 $\hat{C}$ 之二等分線,與 $\hat{B}$ 之二等分線交於 O, 則 $O\hat{C}E=\hat{R}$ [18題], 故 $B\hat{E}C$ 爲 $C\hat{O}E$ 之餘角. 而 $C\hat{O}E=O\hat{B}C+O\hat{C}B=\frac{1}{2}(A\hat{B}C+A\hat{C}B)=\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{A}$. 故 $B\hat{E}C=\hat{R}-(\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{A})=\frac{1}{2}\hat{A}$.



168. 二邊分別互相垂直之二角, 其二等分線或互相垂直,或平行.

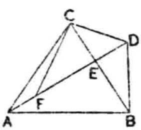
證 設角 BDC 之二邊 BD, BC, 分別垂直於角 BAC 之二邊 AB, AC. 命 AC, DB 之交點爲 F, 則 $B\hat{A}F=C\hat{D}F$ [126題]. 故設二等分線之交點爲 E, 則 $E\hat{A}F=E\hat{D}F$. 今聯結 AD, 則 $F\hat{A}D+F\hat{D}A$



$=D\hat{F}C$, $E\hat{A}F+E\hat{D}F=2E\hat{D}F=C\hat{D}F$, 故 $E\hat{A}D+E\hat{D}A=C\hat{D}F+D\hat{F}C=\hat{R}$. 故其補角 $A\hat{E}D$ 亦爲 $\hat{R}$, 卽兩二等分線互相垂直. 次,設一角爲 $C\hat{D}B'$, DB' 垂直於 AB, 則 $C\hat{D}B'$ 之二等分線 DE' 垂直於 DE. AE 亦垂直於 DE, 故 $AE \parallel DE'$.

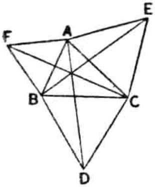
169. 三角形ABD中,設$\hat{A}<\hat{B}$,對於AB在D之同側,取一點C,令 $CA=CB=\frac{1}{2}(AD+DB)$,命CB與AD之交點爲E,則 $EA>EB$, 又 $EC>ED$.

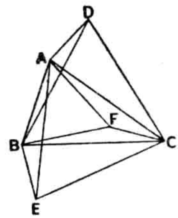
證 $\hat{A}<\hat{B}$, 故 $AD>BD$, 故 AD 大於 CA 或 CB. 據此,在 AD 上取 DF 等於 CB, 聯結 CF, 則 $CA=\frac{1}{2}(AD+DB)$, 因而 $2CA=AD+DB$, 故 $AF+DB=CA$, 故 $CA-AF=BD$. 而 $CA-AF<CF$, 故 $CF>DB$. 又 △BCD, △FDC 中, CD 爲兩形所共. $CB=DF$, $CF>DB$, 故 $C\hat{D}F>B\hat{C}D$ [76題],因此 $EC>ED$ [69題]. 又 $D\hat{A}B<C\hat{A}B$, 而 $C\hat{A}B=C\hat{B}A$, 故 $A\hat{B}E>E\hat{A}B$, 故 $EA>EB$.



170. 於三角形ABC之外側,就各邊上作正三角形BCD, CAE, ABF, 則 $AD=BE=CF$. 正三角形作於內側則如何?

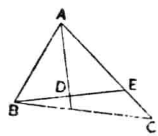
解 △ABD, △FBC 中, $AB=FB$, $BD=BC$, 以△ABF, △BCD 皆爲正三角形故也. 又 $C\hat{B}D=F\hat{B}A$, 雙方加 $A\hat{B}C$, 則 $A\hat{B}D=F\hat{B}C$. 故此兩三角形全等[55題]. 卽 $AD=FC$. 仿此得證△BCE, △DCA 中. $BE=AD$. 次,與前同樣之定理,於正三角形作於內側, 卽與前異側時, 亦可成立. 蓋 △ABE, △AFC 之二邊 其夾角皆相等. 故 $BE=CF$. 仿此可知 $AD=CF$. 據此, $AD=BE=CF$.





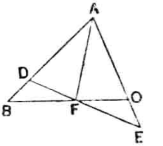
171. 三角形中,垂直於一角之二等分線之直線,(甲)與此角之二邊所成之角,各等於他二角之和之半分,(乙)與第三邊所成之角, 等於他二角之差之半分.

證 三角形ABC中,設垂直於角A之二等分線AD之直綫爲BDE,其與AC之交點爲E. 於是因 $B\hat{A}D=E\hat{A}D$, 故兩直角三角形 ADB, 及 ADE 全等,因而 $A\hat{B}E=A\hat{E}B$, 卽 BDE 與 AB, AC 成等角. 而 $A\hat{B}C+A\hat{C}B=A\hat{B}E+E\hat{B}C+A\hat{C}B=A\hat{B}E+A\hat{E}B=2A\hat{B}E$, 故 $A\hat{B}E=\frac{1}{2}(A\hat{B}C+A\hat{C}B)$, 卽 BE 與二邊 AB, AC 所成之角, 各等於二角 ABC, ACB 和之半分. 次, $A\hat{B}C-A\hat{C}B=A\hat{B}E+E\hat{B}C-A\hat{C}B=E\hat{B}C+A\hat{E}B-A\hat{C}B=E\hat{B}C+E\hat{B}C=2E\hat{B}C$, 故 $E\hat{B}C=\frac{1}{2}(A\hat{B}C-A\hat{C}B)$, 卽與第三邊所成之角,等於二角差之半分.



172. 在三角形ABC之邊AB上[若AC大於AB, 則於其延線上]取AD等於AC, 又仿前在邊AC上[或其延線上]取AE等於AB聯結DE, 命其與BC之交點爲F, 則AF將角BAC二等分.

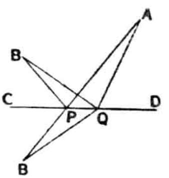
證 △ADE, △ACB 中, $AD=AC$, $AE=AB$, $\hat{A}$ 公有,故 $A\hat{E}D=A\hat{B}C$, $A\hat{D}E=A\hat{C}B$ [55題], 因而其補角 $F\hat{D}B=F\hat{C}E$, 又 $BD=CE$. 故△DFB, △CFE 中, 二角及其夾邊分別相等, 故 DF



$=CF$[56題] 於是 $\triangle ADF$, $\triangle ACF$ 中, 三邊分別相等, 故 $D\hat{A}F=C\hat{A}F$, 卽 AF 將角 BAC 二等分.

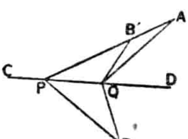
173. 設 A, B 爲在直線 CD 同側之二點, P 爲 CD 上之點, AP, BP 與 CD 成等角, Q 爲 CD 上之他任意點, 求證 $AP+BP<AQ+BQ$.

證　在 AP 之延線上, 取 $PB'=PB$, 則 $\triangle BPQ$, $\triangle B'PQ$ 中, $BP=B'P$, PQ 公有, $B\hat{P}Q=B'\hat{P}Q$, 故 $BQ=B'Q$[55題]. 而 $\triangle AQB'$ 中, $AB'<AQ+B'Q$, 即 $AP+BP<AQ+BQ$.

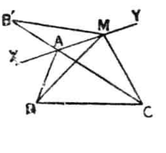


174. 設 A, B 爲在直線 CD 異側之二點, P 爲在 CD 上之點, AP, BP 與 CD 成等角, Q 爲 CD 上之他任意點, 求證 $AP\sim BP>AQ\sim BQ$.

證　在 AP 上依照 $PB'=PB$ 取 B′, 則 $BQ=B'Q$ [55題]. 而 $\triangle AB'Q$ 中, $AB'>AQ\sim B'Q$, 卽 $AP\sim BP>AQ\sim BQ$.



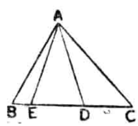
175. 過三角形 ABC 之一角頂 A, 垂直於角 A 之二等分線, 作直線 XY. 設 M 爲 XY 上之任意點, 聯結 M 與角頂 B, C, 其所成三角形 BMC 之周, 大於 ABC 之周.



證　在 CA 之延線上取 $AB'=AB$, 聯結 MB′, 則因 XY 爲 $B\hat{A}C$ 之二等分線之垂線, 故 $B\hat{A}C$ 之外角 BAB′ 爲 XY 所二等分, 卽 $B\hat{A}X=B'\hat{A}X$. 因而其補角 $B\hat{A}M=B'\hat{A}M$. 據此, $\triangle BAM$, $\triangle B'AM$ 中, 二邊與夾角相等, 故 $MB=MB'$ [55題]. 而 $MB'+MC>CB'$, 卽 $MB+MC>AC+AB$. 雙方加 BC, 則 $\triangle MBC$ 之周, 大於 $\triangle ABC$ 之周.

176. 在三角形 ABC 中, 引直線 AD 令其與 AB 成等於角 C 之角, 又引直線 AE, 令其與 AC 成等於角 B 之角, 則三角形 DAE 爲二等邊.

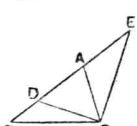
證　$B\hat{A}C$ 爲 $\hat{B}+\hat{C}$ 之補角, $A\hat{D}B$ 爲 $\hat{B}+B\hat{A}D$ 之補角. 而 $\hat{C}=B\hat{A}D$, 故 $B\hat{A}C=A\hat{D}B$. 仿此, $B\hat{A}C=A\hat{E}C$. 據此. $A\hat{D}B=A\hat{E}C$, 因而 $AD=AE$, 卽 $\triangle DAE$ 爲二等邊.



注意　成等於 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 之角之直線, 若共引於形外, 則此二直線成一直線, 因而與 BC 之交點僅一, 或竟無之. 又一引於形外, 一引於形內, 則此問題不成立.

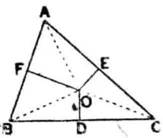
177. 三角形 ABC 中, 在邊 AB 及其延線上, 按 $AD=AE=AC$ 取二點 D, E, 聯結 CD, CE, 則角 E 等於三角形 ABC 中角 A 之半分, 且 $D\hat{C}E$ 爲直角.

證　$\hat{E}+A\hat{C}E=B\hat{A}C$, 而 $\hat{E}=E\hat{C}A$, 故 $2\hat{E}=B\hat{A}C$, 故 $\hat{E}=\frac{1}{2}\hat{A}$. 次, $AD=AC=AE$, 故 $A\hat{D}C=A\hat{C}D$, $A\hat{C}E=A\hat{E}C$, 因此 $A\hat{D}C+A\hat{E}C=D\hat{C}E$. 而此三角之和爲 $2\hat{R}$, 故 $D\hat{C}E$ 爲 $2\hat{R}$ 之半分, 卽 $\hat{R}$.



178. 過三角形各邊之中點, 作此各邊之垂線, 則此三直線過同點, 且此點距三角形三頂點等遠 [是點曰三角形之外心].

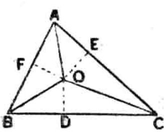
證 設△ABC之邊, BC, CA之中點為D, E, 其垂線為OD, OE, 命其交點為O. 由O向AB引垂線OF. 此時△OBD, △OCD中, BD = CD, OD公有,



$O\hat{D}B=\hat{R}=O\hat{D}C$, 故OB = OC [55題]. 仿此, OA = OC, 故OB = OA. 於是△OAF, △OBF中, OA = OB, OF公有, $A\hat{F}O=\hat{R}=B\hat{F}O$, 故AF = BF [80題], 即AB在其中點F上之垂線, 過點O.

179. 三角形各角之二等分線過同點, 且此點距各邊等遠[是點曰三角形之內心].

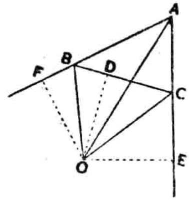
證 設三角形ABC中, $\hat{A}$, $\hat{B}$之二等分線分別為AO, BO, 其交點為O; 由O向BC, CA, AB, 所引之垂線, 分別命為OD, OE, OF. 此時



△OAF, △OAE中, OF = OE [117題]; 仿此, OF = OD. 故OE = OF = OD, 即O點距三邊等遠. 又△ODC, △OEC中, DO = OE, OC公有, $O\hat{D}C=\hat{R}=O\hat{E}C$, 故$O\hat{C}D=O\hat{C}E$ [80題], 即OC將角C二等分. 換言之, 各角之二等分線OA, OB, OC交於一點O.

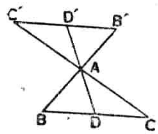
180. 三角形一角之二等分線, 及他二角外角之二等分線過同點, 且此點距三邊等遠[是點曰三角形之傍心, 各三角形之傍心共有三個].

證 設△ABC中, $\hat{B}$, $\hat{C}$之外角之二等分線為BO, CO, 其交點為O, 由O向BC, CA, AB引垂線OD, OE, OF. 此時OD = OF [117題]; 仿此, OD = OE. 故OF = OD = OE, 即O點至各邊之距離等. 聯結AO, 則△AOE, △AOF中, AO公有, OE = OF, $O\hat{E}A=\hat{R}=O\hat{F}A$, 故$E\hat{A}O=F\hat{A}O$ [80題], 即OA將角BAC二等分. 換言之, 一角之二等分線, 與他二角外角之二等分線, 會於一點.



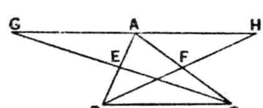
181. 將三角形ABC之邊AB, 向點A方延長, 在其上取與AB等長之AB'; 又將邊AC向A方延長, 在其上取與AC等長之AC'; 聯結B'與C', 則BC, B'C'之各中點與頂點A在一直線上.

證 設BC, B'C'之中點分別為D, D', 聯結AD, AD', 則△ABC, △AB'C'中, AB = AB', AC = AC', $B\hat{A}C=B'\hat{A}C'$, 故$\hat{B}=\hat{B}'$, BC = B'C', 因而BD = B'D', 又AB = AB', 故$B\hat{A}D=B'\hat{A}D'$ [55題], 故DAD'成一直線, [27題].



182. 設三角形ABC之二邊AB, AC之中點, 分別為E, F, 在CE之延線上取EG等於CE, 又在BF之延線上取FH等於BF, 則G, A, H在一直線上.

證 △AEG, △BEC中, AE = BE, EG = EC, $A\hat{E}G=B\hat{E}C$, 故$E\hat{A}G=E\hat{B}C$ [55題]. 仿此, $F\hat{A}H$

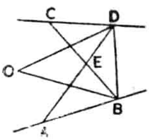


$=F\hat{C}B$, 故$E\hat{A}G+E\hat{A}F+F\hat{A}H=E\hat{B}C+E\hat{A}F+F\hat{C}B=2\hat{R}$, 故AG, AH成一直線[11題], 故

G, A, H 在一直線上.

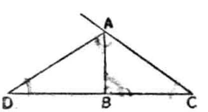
183. 設 A, B 為所設直線上之二定點, C, D 為所設他二直線上之二定點,則 $A\hat{D}C$ 及 $C\hat{B}A$ 之二等分線所成之角,等於 $D\hat{A}B$ 與 $B\hat{C}D$ 之和之半分.

證 設 $A\hat{D}C$, $C\hat{B}A$ 之二等分線交於 O, BC, AD 之交點為 E, 聯結 BD, 則 $2B\hat{O}D+2D\hat{B}O+2B\hat{D}O=4\hat{R}$, 而 $2D\hat{B}O=A\hat{B}E+2E\hat{B}D$, $2B\hat{D}O=E\hat{D}C+2E\hat{D}B$, 且 $2E\hat{B}D+2E\hat{D}B=2C\hat{E}D$ 故 $2B\hat{O}D+A\hat{B}E+E\hat{D}C+2C\hat{E}D=4\hat{R}$. 又 $D\hat{A}B+B\hat{C}D+A\hat{B}E+E\hat{D}C+2C\hat{E}D=4\hat{R}$. 據此, $2B\hat{O}D=D\hat{A}B+B\hat{C}D$, 故 $B\hat{O}D=\frac{1}{2}(D\hat{A}B+B\hat{C}D)$.

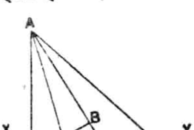


184. 三角形 ABC 角 A 之外角之二等分線與底邊所夾之角,等於 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 之差之半分.

證 設 $\hat{A}$ 之外角之二等分線為 AD,則 $B\hat{A}D$ 為 $\hat{A}$ 之外角之半分, 即 $\frac{1}{2}A\hat{B}C+\frac{1}{2}\hat{C}$. 於是 $A\hat{D}B=A\hat{B}C-B\hat{A}D=A\hat{B}C-(\frac{1}{2}A\hat{B}C+\frac{1}{2}\hat{C})=\frac{1}{2}A\hat{B}C-\frac{1}{2}\hat{C}=\frac{1}{2}(A\hat{B}C-\hat{C})$.



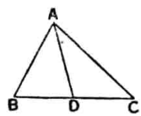
185. 由直線外之一點 A, 引此線之垂線 AB, 及斜線 AC, AD, AE,…… 於垂線之同側, 令 $B\hat{A}C=C\hat{A}D=D\hat{A}E=\cdots\cdots$, 則 $BC<CD<DE<\cdots\cdots$.



證 設直線為 XY, 於 AD 上取 AB′=AB, 聯結 CB′,則因 $B\hat{A}C=C\hat{A}D$,故 CB′=CB, $C\hat{B'}A=C\hat{B}A$ [55題]. 因而 $C\hat{B'}D=ABX$. 而 $A\hat{B}X>B'\hat{D}C$, 故 $C\hat{B'}D>B'\hat{D}C$. 因此 CB′<CD, 即 BC<CD. 仿此, CD<DE,…… 故 BC<CD<DE<…….

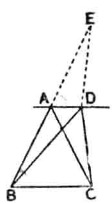
186. 三角形 ABC 中, 設 AC 不小於 AB, 聯結邊 BC 上之一點 D 與 A, 則 $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$ 皆大於 $A\hat{C}B$.

證 設 AB = AC, 則 $A\hat{B}C=A\hat{C}B$, 而 $A\hat{D}B>A\hat{C}B$, 又 $A\hat{D}C>A\hat{B}C$, 故 $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$ 皆大於 $A\hat{C}B$. 次, 設 AC>AB, 則 $A\hat{D}C>A\hat{B}C>A\hat{C}B$. 又 $A\hat{D}B>A\hat{C}B$, 故 $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$ 皆大於 $A\hat{C}B$.

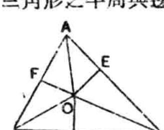


187. 設兩三角形 ABC, DBC 在同底邊 BC 上, 聯結其頂點之直線 AD, 與 BC 平行. 若 ABC 為二等邊三角形,則其周小於三角形 DBC 之周.

證 於 BA 之延線上,取 AE=AB, 聯結 ED, 則 $E\hat{A}D=A\hat{B}C$, $C\hat{A}D=A\hat{C}B$. 而 $A\hat{B}C=A\hat{C}B$, 故 $E\hat{A}D=C\hat{A}D$. 於是△EAD, △CAD 中, AE=AC, AD 公有, 故 ED=CD. 而 EB<ED+DB, 即 EA+AB<DB+DC, 即 AC+AB<DB+DC, 故 AC+AB+BC<DB+DC+BC.



188. 設三角形 ABC 中, 各角之二等分線交於 O, 由 O 向邊 AB 引垂線 OF, 則 AF 等於三角形之半周與邊 BC 之差. 又設 OD 為 BC 之垂線,則 BD 及 CD 各與何相等?



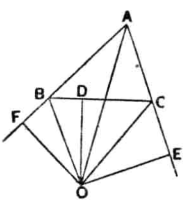
解 OD=OE=OF [179題], 故 △OBD≡△OBF [81題], 故 BD=BF. 仿此, CD=CE, AE=AF.

故 $AF+BD+CD$, 卽 $AF+BC$ 等於半周, 故 AF 等於半周與 BC 之差. 同理, BD 等於半周與 AC 之差, CD 等於半周與 AB 之差.

注意 設三角形 ABC 中, 角 A, B, C 之對邊,分別爲 a,b,c, 且 $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, 則 $AF=s-a$, $BD=s-b$, $CD=s-c$.

189. 設三角形ABC中,角A之二等分線,與B及C之外角之二等分線交於O, 由O向邊 BC, CA, AB 或其延線所引之垂線,分別爲 OD, OE, OF, 則 AE 及 AF 各等於三角形之半周. 又試以半周與邊表 BD, CD 之值.

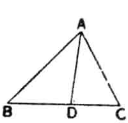
解 $\triangle OBD \equiv \triangle OBF$ [180題], 故 $BD=BF$. 仿此, $CD=CE$, $AF=AE$. 故AF, AE之和, 卽 AF 之二倍, 等於 AB, BC, CA 之和, 故 AF 等於半周. 又 $BD=BF=AF-AB$,故BD等於半周減以 AB,又 CD 等於半周減以 AC.



注意 在前題假定下, $AF=s$, $BD=s-c$, $CD=s-b$.

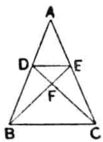
190. 由三角形之一頂點,向對邊中點所引之直線,隨比頂點上之角之大於直角,等於直角,小於直角,而小於,等於,大於對邊之半分.

證 假定 $B\hat{A}C>\hat{R}$. AD 不出下列三者: $AD>\frac{1}{2}BC$, 或 $AD=\frac{1}{2}BC$, 或 $AD<\frac{1}{2}BC$. 設 $AD>\frac{1}{2}BC$, 則 $A\hat{B}D>B\hat{A}D$, $A\hat{C}D>C\hat{A}D$, 因而 $B\hat{A}C<A\hat{B}D+A\hat{C}D$, 故 $B\hat{A}C<\hat{R}$. 又設 $AD=\frac{1}{2}BC$, 則 $A\hat{B}D=B\hat{A}D$, $A\hat{C}D=C\hat{A}D$, 因而 $B\hat{A}C=A\hat{B}D+A\hat{C}D$, 故 $B\hat{A}C=\hat{R}$. 此皆不合假設,故 $AD<\frac{1}{2}BC$ 仿此得證視 $B\hat{A}C=\hat{R}$, 或 $B\hat{A}C<\hat{R}$, 而 $AD=\frac{1}{2}BC$, 或 $AD>\frac{1}{2}BC$.



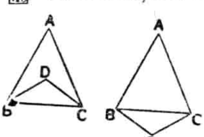
191. 二等邊三角形 ABC 中,平行於底 BC, 引一直線,命其與等邊之交點爲 D 及 E, 則得二邊及一角相等之兩三角形 CDE, DCB. 又此兩三角形全等否?

證 $\triangle ADE$ 爲二等邊,以角 ADE, AED 分別等於角 ABC, ACB [44題],而後二角相等故也 [57題] 次, $DB=EC$, 以 $AB=AC$, $AD=AE$ 故也. 此時 $\triangle DCB$ 及 $\triangle CDE$ 中, DC 公有, 故二邊相等,又一雙等邊 BD, CE 之對角 $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$ 相等,以 DE, BC 平行故也. 於是 $D\hat{B}C$, $D\hat{E}C$ 或相等,或互爲補角 [79題]. 而 $D\hat{B}C=A\hat{E}D$, 故 $D\hat{B}C$ 與 $D\hat{E}C$ 互爲補角.因此兩三角形不等.



192. 設ABC, DBC爲兩二等邊三角形,其底同爲 BC, 則 $A\hat{B}D=A\hat{C}D$.

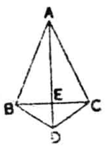
證 $A\hat{B}C=A\hat{C}B$, $D\hat{B}C=D\hat{C}B$. 而甲圖中, $A\hat{B}D=A\hat{B}C-D\hat{B}C$, $A\hat{C}D=A\hat{C}B-D\hat{C}B$, 故 $A\hat{B}D=A\hat{C}D$; 乙圖中 $A\hat{B}D=A\hat{B}C+D\hat{B}C$, $A\hat{C}D=A\hat{C}B+D\hat{C}B$, 故 $A\hat{B}D=A\hat{C}D$. 總之, $A\hat{B}D=A\hat{C}D$.



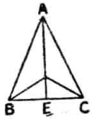
[甲圖] [乙圖]

193. 立於同底邊上之兩二等邊三角形,聯結其頂點之直線,或此直線之延線,將各頂角二等分,且將底邊垂直二等分.

證 設立於同底邊 BC 上之兩二等邊三角形爲 ABC, DBC, 聯結頂點之直線 AD,或其延線與底BC之交點爲E. 於是由前題, $A\hat{B}D$



［甲圖］

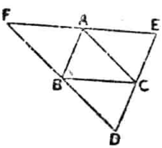


［乙圖］

$=A\hat{C}D$，故兩三角形 ABD，ACD 中 AB＝AC，DB＝DC，$A\hat{B}D=A\hat{C}D$，故 $B\hat{A}D=C\hat{A}D$［55題］，$B\hat{D}A=C\hat{D}A$；而乙圖中，$B\hat{D}E$ 及 $C\hat{D}E$ 分別爲等角 BDA，CDA 之補角，故亦等．據此，AD 或其延線將各頂角二等分．又 △AEB，△AEC 中，AB＝AC，AE 公有，$B\hat{A}E=C\hat{A}E$，故 BE＝CE［55題］，$A\hat{E}B=A\hat{E}C=\hat{R}$，即 AD 將底邊 BC 垂直二等分．

194. 過三角形之各頂點，作平行於其對邊之直線，則連原三角形共得四個等三角形．

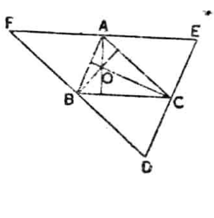
證　設過 △ABC 之各頂點，所引平行於其對邊之直線，交於 D，E，F，則 △ABC，△DCB 中，



因 AB，AC 分別與 DC，DB 平行，故 $A\hat{B}C=D\hat{C}B$，$A\hat{C}B=D\hat{B}C$，而 BC 公有，故 △ABC ≡ △DCB．倣此，△ACE，△ABF 亦等於 △ABC．故連原三角形，共得四個等三角形．

195. 由三角形之頂點，向其對邊所引之三垂線，過同一點．［此點曰三角形之垂心］．

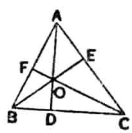
證　設三角形爲 ABC，由過各頂點，平行於其對邊所引直線而成之三角形爲 DEF，則 A，B，C 分別爲三角形 DEF 三邊之中點．何則，蓋由前題，△ABC



≡△DCB，故 BD＝AC，倣此，BF＝AC，故 BD＝BF 也．據此，過 A，B，C 分別引其邊之垂線，則過同點 O［178題］．然 DE，EF，DF 分別平行於 AB，BC，AC，故 DE，EF，DF 之垂線，亦即 AB，BC，AC 之垂線．故由 A，B，C 向對邊所引之垂線，過同一點．

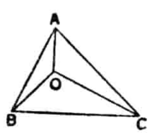
196. 設 O 爲三角形 ABC 之垂心，則四點 O，A，B，C 中，任何一點，爲由他三點所成三角形之垂心．

證　設 AO，BO，CO 與對邊之交點，分別爲 D，E，F．△BOC 中，由 B 向對邊 CO 所引之垂線爲 BF，由 C 向對邊 BO 所引之垂線爲 CE，由 O 向對邊 BC 所引之垂線爲 OD．然 BF，CE，OD 之交點爲 A，故 A 爲 △BOC 之垂心．倣此可知，無論何點皆爲以他三點爲頂點之三角形之垂心．



197. 有四點，聯結其任何二點之直線，垂直於聯結他二點之直線，則四點爲何？

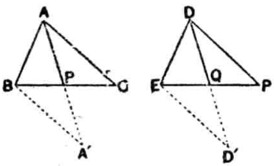
解　命四點爲 A，B，C，及 O．OA 與 BC，OB 與 CA，OC 與 AB 分別互相垂直，故 O 爲成三角形之三直線 BC，CA，AB 之垂線之交點，即三角形 ABC 之垂心．而 O 若爲三角形 ABC 之垂心，則四點之一，皆爲以他三點爲頂點之三角形之垂心［196題］．故所求之四點，其中三點爲不在一直線上之任意點，他一爲以此三點爲頂點之三角形之垂心．



198. 兩三角形中，二邊與中線分別相等，則兩形相等［有二款］．

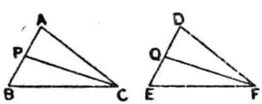
證　(1) 設 △ABC，△DEF 中，AB＝DE，AC

=DF, 中線 AP=中線 DQ. 在 AP, DQ 之延



線上,分別取 $PA'=AP$, $QD'=DQ$. 聯結 BA', ED',則 $BA'=AC$, $ED'=DF$,故 $\triangle ABA'$, $\triangle DED'$ 中, $AB=DE$, $BA'=ED'$, 且 $AA'=DD'$, 因此 $A\hat{B}A'=D\hat{E}D'$ [77題]. 而 $B\hat{A}C$, $E\hat{D}F$ 分別爲 $A\hat{B}A'$, $D\hat{E}D'$ 之補角,故相等. 據此, $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 中,二邊及其夾角相等,故兩形全等[55題].

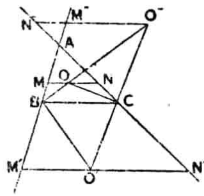
(2) 設相等之中線 CP, FQ 分別在一雙等



邊 AB, DE 上. 於是 $\triangle APC$, $\triangle DQF$ 中,三邊分別相等,因而 $\hat{A}=\hat{D}$. 故 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ 中,二邊分別相等,其夾角亦等,故兩形全等.

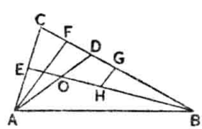
199. 設三角形 ABC 中, $\hat{B}$ $\hat{C}$ 之二等分線交於 O, 過 O 作 BC 之平行線,與 AB 交於 M, 與 AC 交於 N, 則 MN 等於 MB 與 NC 之和. 此題中 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 之二等分線,代以 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 外角之二等分線則如何?又代以 $\hat{B}$ 之二等分線及 $\hat{C}$ 外角之二等分線則如何?

解 $M\hat{B}O=O\hat{B}C=M\hat{O}B$, 故 $OM=MB$. 仿此, $ON=NC$. 據此, $OM+ON$, 即 MN 等於 $MB+NC$. 次,設 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 之各外角之二等分線交於 O',過 O' 引 BC 之平行線,與 AB, AC 之延線分別交於 M', N'. 於是 $M'\hat{B}O'=O'\hat{B}C=M'\hat{O}'B$, 故 $O'M'=M'B$. 仿此, $O'N'=N'C$. 據此, $M'N'=M'B+N'C$. 復次,設 $\hat{B}$ 之二等分線與 $\hat{C}$ 外角之二等分線交於 O'', 過 O'' 引 BC 之平行線,與 AB, AC [或其延線] 交於 M'', N''. 於是 $M''\hat{B}O''=O''\hat{B}C=M''\hat{O}''B$, 故 $O''M''=M''B$; 又 $N''\hat{O}''C=B\hat{C}O'=O'\hat{C}N'=N''\hat{C}O''$,故 $O''N''=N''C$. 據此. $O''N''\sim O''M''$, 卽 $M''N''$ 等於 $N''C\sim M''B$.



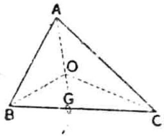
200. 三角形大角之二等分線,小於小角之二等分線.

證 三角形 ABC 中,設 $\hat{A}>\hat{B}$, $\hat{A}$ 之二等分線爲 AD, $\hat{B}$ 之二等分線爲 BE. 於是因 $\hat{A}>\hat{B}$,故 $C\hat{A}D>C\hat{B}E$. 據此,引 AF, 令 $D\hat{A}F=C\hat{B}E$,則 F 在 C, D 之間. 又 $F\hat{A}B>F\hat{B}A$, 故 $BF>AF$,因此在 BC 上取 BG, 令等於 AF, 則 G 在 F 與 B 之間, 故由 G 平行於 AF, 引 GH, 則與 BE 之交點 H 在 B, E 之間. 於是 $\triangle ADF$ 與 $\triangle BGH$ 中, 一邊與其兩端之角相等, 故兩形全等 [56題], 故 $BH=AD$, 因而 $BE>AD$.



201. 設三角形 ABC 之內心爲 O, 則 $B\hat{O}C=\frac{1}{2}\hat{A}+\hat{R}$, $C\hat{O}A=\frac{1}{2}\hat{B}+\hat{R}$, $A\hat{O}B=\frac{1}{2}\hat{C}+\hat{R}$.

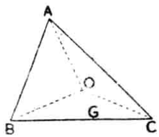
證 延長 AO 至 G, 則 $B\hat{O}G=\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{B}$, $C\hat{O}G=\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{C}$, 故 $B\hat{O}C=\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{C}$.



而 $\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{C}=\hat{R}$, 故 $B\hat{O}C=\frac{1}{2}\hat{A}+\hat{R}$. 其他亦可仿此證之.

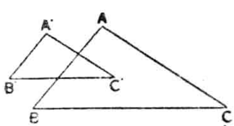
202. 設三角形 ABC 之外心爲 O, 則 $B\hat{O}C=2\hat{A}$ $C\hat{O}A=2\hat{B}$, $A\hat{O}B=2\hat{C}$.

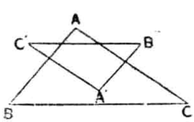
證 延長 AO 至 G, 則因 OA=OB, 故 $O\hat{A}B=O\hat{B}A$, 而 $O\hat{A}B+O\hat{B}A=B\hat{O}G$, 故 $B\hat{O}G=2O\hat{A}B$. 仿此, $C\hat{O}G=2O\hat{A}C$; 故 $B\hat{O}G+C\hat{O}G=2O\hat{A}B+2O\hat{A}C$, 即 $B\hat{O}C=2\hat{A}$. 同理, $C\hat{O}A=2\hat{B}$, $A\hat{O}B=2\hat{C}$.



203. 兩個等角三角形, 若其一之二邊, 分別與他一之二邊平行, 則其餘一邊, 亦必平行.

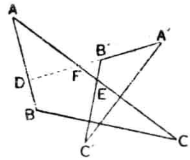
證 △ABC, △A'B'C'中, 設 $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{C}=\hat{C}'$, 且 AB ∥ A'B', BC ∥ B'C', 求證 CA ∥ C'A'. AB ∥ A'B', BC ∥ B'C', 又 $\hat{A}=\hat{A}'$, 故 $\hat{A}$, $\hat{A}'$ 之二邊, 或共爲同向.或互爲異向[53題注意].而 $\hat{B}=\hat{B}'$, 故 AC ∥ A'C' [54題].





204. 兩個等角三角形, 若其一之二邊, 分別垂直於他一之二邊, 則第三邊亦必互相垂直.

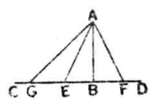
證 △ABC, △A'B'C' 中,設 $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{C}=\hat{C}'$, 且 AC ⊥ A'C', BC ⊥ B'C', 求證 AB ⊥ A'B'. 今設延長 A'B', 命其與 AB 交於 D, 與 AC 交於 F, 又設 B'C' 與 AC 之交點爲 E. 於是 $C\hat{E}C'=\hat{R}-\hat{C}$, $E\hat{B}'F=\hat{A}'+\hat{C}'=\hat{A}+\hat{C}$, 故 $E\hat{F}D=(\hat{A}+\hat{C})+(\hat{R}-\hat{C})=\hat{R}+\hat{A}$, 故 $A\hat{D}F=E\hat{F}D-\hat{A}=\hat{R}$.



注意 設將 △A'B'C' 在其平面內迴轉一直角, 則 A'C' ∥ AC, B'C' ∥ BC, 於是可由前題以明本題.

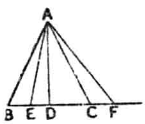
205. 由定直線外之一定點, 至其直線引斜線及垂線, 則諸斜線中, 其足至垂足之距離等者, 其線亦等, 其距離大者, 大於距離小者. 試證之; 並證其逆定理.

證 設 A 爲直線 CD 外之一定點, 由 A 向 CD 所引之垂線爲 AB, 斜線爲 AE, AF, AG. 求證若 BE=BF, 則 AE=AF; 若 BG>BE, 則 AG>AE. 今三角形 ABE, ABF 中, AB 公有, BE=BF [假設], $A\hat{B}E=\hat{R}=A\hat{B}F$, 因此 AE=AF [55題]. 次, $A\hat{B}E=\hat{R}$, 故 $A\hat{E}B<\hat{R}$, 因而 $A\hat{E}G>\hat{R}$, 故 $A\hat{G}E<A\hat{E}G$, 因此 AG>AE [69題]. 反之, 求證若 AE=AF, 則 BE=BF; 若 AG>AE, 則 BG>BE. 今若 BE≶BF, 則 AE≶AF, 是違反假設, 故 BE=BF. 仿此, 若 BG≦BE, 則 AG 不能大於 AE, 故 BG>BE.



206. 由二等邊三角形之頂點, 至底上任意點所引之線分, 小於等邊, 至底之延線上之任意點所引之線分, 大於等邊.

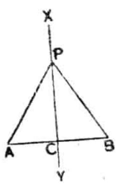
證 設三角形 ABC 中, AB=AC, 其高爲 AD. 此時 D 爲底 BC 之中點, 故設 E 爲底



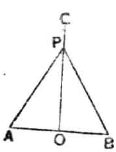
BC 上之任意點，則 $DE < BD$，故 $AE < AB$. 又設 F 爲底 BC 之延線上之任意點，則 $DF > DB$，故 $AF > AB$.

207. 距二定點 A, B 等遠之點，在線分 AB 之垂直二等分線上.

[證] 設 P 爲距 A, B 等遠之點，聯結 P 與 AB 之中點 C，則兩三角形 PAC，及 PBC 中，三邊分別相等，故 $P\hat{C}A = P\hat{C}B$，因此 $PC \perp AB$. 而 XY 亦爲過 C 垂直於 AB 之直線，故 PC 與 XY 相合[6題]，故 P 在 XY 上.

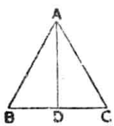


208. 設 O 爲有限直線 AB 之中點，OC 爲 AB 之垂線，P 爲 OC 上之點，則 $PA = PB$. 試證之.



[證] 兩三角形 POA, POB 中，PO 公有，$AO = BO$，$P\hat{O}A = P\hat{O}B$，因此 $PA = PB$ [55題].

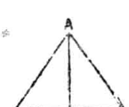
209. 由三角形 ABC 之角頂 A，向底邊所引之垂線 AD，若將底邊二等分，則其三角形爲二等邊.



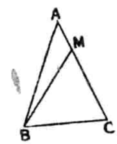
[證] D 爲 BC 之中點，而 $AD \perp BC$，故 $AB = AC$ [208題]，故 ABC 爲二等邊三角形.

210. 設三角形頂角之二等分線，將底二等分，則其二邊相等.

[證] 設 $\triangle ABC$ 中，頂角 A 之二等分線 AD，將底 BC 二等分. 此時兩三角形 ABD, ACD 中，$B\hat{A}D = C\hat{A}D$，AD 公有，$BD = DC$，於是對他等邊之角 B, C，或相等，或互爲補角[79題]. 然此時不能互爲補角，蓋若爲補角，則 BA, CA 平行，而不能成三角形故也. 故 $\hat{B} = \hat{C}$，因而兩三角形全等，而 $AB = AC$.



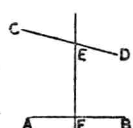
211. 設三角形 ABC 中，邊 AB 等於邊 AC. M 爲邊 AC 上之任意點，則 MB 大於 MC.



[證] $AB = AC$，故 $A\hat{B}C = A\hat{C}B$，又 M 爲 AC 上之點，故 BM 在角 ABC 之內. 據此，$A\hat{B}C > M\hat{B}C$，因而 $A\hat{C}B > M\hat{B}C$. 故 $BM > MC$ [69題].

212. 一已知直線上，距已知二點等遠之點，大概唯一.

[證] 設 A, B 爲二定點，CD 爲定直線. 距 AB 等遠之一切點，在有限直線 AB 之垂直二等分線 EF 上，故所求之點非在直線 EF 及定直線 CD 上不可. 而二直線之交點，大概唯一，故所求之點，大概唯一. 若 EF, CD 平行，則無所求點；若此二直線一致，則定直線 CD 上之點，皆適合條件.

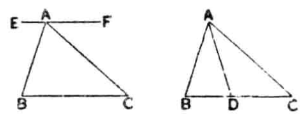


213. 試由以下二法，證明三角形三角之和，等於二直角.

(1) 過頂點引平行於底之直線.

(2) 聯結頂點與底上任意點.

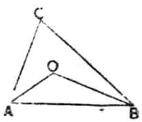
[證] 過 $\triangle ABC$ 之頂點 A，引平行於底 BC



之直線 EF，則 $E\hat{A}B = A\hat{B}C$ [41題]. $F\hat{A}C = A\hat{C}B$

「41題], 故 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}+E\hat{A}B+F\hat{A}C=2\hat{R}$ [10題]. 次,聯結 A 與 BC 上之點 D, 則 $A\hat{D}C$ 爲 △ABD 之外角,故 $A\hat{D}C=D\hat{A}B+A\hat{B}D$ [63題];同理, $A\hat{D}B=D\hat{A}C+A\hat{C}D$, 據此, $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=A\hat{D}C+A\hat{D}B=2\hat{R}$[9題].

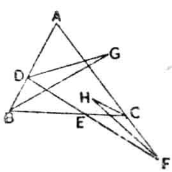
214. 三角形 ABC 中,角 A 及角 B 之二等分線所成之角 AOB 恆大於直角. 試證之.



證 △ABC 中, $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2\hat{R}$, 是以 $\hat{A}+\hat{B}<2\hat{R}$, 因而 $\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{B}<\hat{R}$. 而 $\frac{1}{2}\hat{A}=O\hat{A}B$, $\frac{1}{2}\hat{B}=O\hat{B}A$, 故 $O\hat{A}B+O\hat{B}A<\hat{R}$, 因而其補角 $A\hat{O}B>\hat{R}$.

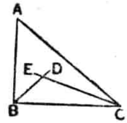
215. 由三角形 ABC 邊 AB 上之一點 D, 引直線 DEF, 命與 BC 交於 E, 與 AC 之延線交於 F, 則 $A\hat{B}E$ 及 $A\hat{D}E$ 之二等分線所成之二角等於 $A\hat{C}E$ 及 $A\hat{F}E$ 之二等分線所成之二角.

證 設無限直線 DE, 與 AC 向 C 方之延長部分相交. 今命二等分線 DG, BG 之交點爲 G, CH, FH 之交點爲 H, 則角 ADG 爲 △GDB 之外角, 故 $D\hat{G}B=A\hat{D}G-A\hat{B}G=\frac{1}{2}(A\hat{D}F-A\hat{B}C)$. 同理, $C\hat{H}F=\frac{1}{2}(A\hat{C}B-A\hat{F}D)$. 故 $C\hat{H}F=\frac{1}{2}\{2\hat{R}-(\hat{A}+\hat{B})-(2\hat{R}-\hat{A}-A\hat{D}F)\}=\frac{1}{2}(A\hat{D}F-\hat{B})=D\hat{G}B$. 若 DE 與 CA 之延線交,亦可仿此證之. 又等角之補角相等, 故第二部分亦顯然成立.



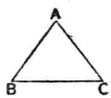
216. 三角形二角之二等分線,必交於形內.

證 △ABC 中, 設角 B, C 之二等分線,分別爲 BD, CE. 今 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2\hat{R}$, 故 $\hat{B}+\hat{C}<2\hat{R}$, 因此更 $\frac{1}{2}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{C}<2\hat{R}$, 即 $D\hat{B}C+E\hat{C}B<2\hat{R}$, 故 BD, CE 於三角形內相交.



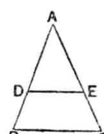
217. 設二等邊三角形之一角, 等於正三角形之一角,則此三角形爲正三角形.

證 設 △ABC 中, AB=AC, $A=\frac{2}{3}\hat{R}$. 於是 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}+2\hat{B}$ [57題] $=\frac{2}{3}\hat{R}+2\hat{B}=2\hat{R}$, 故 $2\hat{B}=\frac{4}{3}\hat{R}$, 故 $\hat{B}=\hat{C}=\frac{2}{3}\hat{R}$, 即 ABC 爲正三角形. 又設 $\hat{B}=\frac{2}{3}\hat{R}$. 於是 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}+2\hat{B}=\hat{A}+\frac{4}{3}\hat{R}=2\hat{R}$, 故 $\hat{A}=\frac{2}{3}\hat{R}$, 因此 ABC 又爲正三角形.



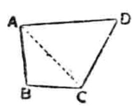
218. 在二等邊三角形 ABC 之等邊 AB, AC 上,取相等之線分 AD, AE, 引線分 DE, 則 DE 平行於底 BC.

證 △ABC 中, AB = AC [假設], 故 $\hat{B}=\hat{C}$ [57題]. 而 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2\hat{R}$ [63題], 故 $\hat{B}=\frac{1}{2}(2\hat{R}-\hat{A})$. 仿此 △ADE 中, $A\hat{D}E=A\hat{E}D$, 因而 $A\hat{D}E=\frac{1}{2}(2\hat{R}-\hat{A})$. 故 $A\hat{D}E=A\hat{B}C$ 因而 DE ∥ BC.



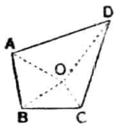
第四章 平行四邊形

219. 四邊形內角之和等於四直角.



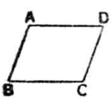
證 在四邊形 ABCD 中,引對角線 AC, 分成兩三角形, 則因各三角形內角之和, 等於二直角,故兩三角形內角之和,即四邊形內角之和,等於四直角.

別證 由形內之任意點 O, 引 OA, OB, OC, OD, 則以 O 爲頂點之四個三角形內角之和爲 $8\hat{R}$. 而是等內角之和, 等於四邊形內角之和, 與 O 點周角之和, 卽與 $4\hat{R}$ 之和;故四邊形內角之和, 等於 $8\hat{R}-4\hat{R}$, 卽 $4\hat{R}$.



220. 平行四邊形中, 相隣二角互爲補角, 相對二角相等.

證 設 ABCD 爲平行四邊形, 求證相隣二角 $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ 互爲補角, 相對二角 $A\hat{B}C$, $C\hat{D}A$ 相等. 今直線 BC, 與平行線 BA, CD 交, 故內角 ABC, BCD 互爲補角[44題]. 又 $A\hat{B}C$ 爲其隣角 BCD 之補角, $C\hat{D}A$ 亦爲其隣角 BCD 之補角, 故 $A\hat{B}C$ 等於 $C\hat{D}A$.

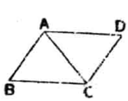


221. 平行四邊形之一角, 若爲直角, 則他角皆爲直角.

證 蓋依據前題, 其隣角及對角, 亦皆爲直角故也.

222. 平行四邊形之二組對邊各相等, 且其各對角線分四邊形爲二全等三角形.

證 設 ABCD 爲平行四邊形, AC 爲其對角線, 求證邊 AB 等於邊 CD, 邊 BC 等於邊 DA, 而三角形 ABC, CDA 全等. 今 AC 與平行線 AB, DC 交, 故 $B\hat{A}C=A\hat{C}D$ [41題]; 又 AC 與平行線 BC, AD 交, 故 $B\hat{C}A=C\hat{A}D$; 而 AC 爲兩三角形 ABC, CDA 公有; 故兩三角形全等 [56題], 而 AB=CD, BC=DA. 仿此得證對角線 BD 亦將平行四邊形 ABCD 分成兩全等三角形.

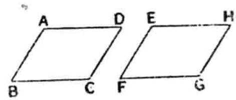


223. 平行四邊形之隣邊相等, 則其各邊皆等, 卽爲菱形.

證 由前題自明.

224. 設兩平行四邊形中, 其一之二隣邊, 分別等於他一之二隣邊, 且其間之角亦等, 則此二平行四邊形全等.

證 設 ABCD, EFGH 爲二平行四邊形, $A\hat{B}C=E\hat{F}G$ 且相隣二邊 AB, BC 分別等於 EF, FG, 求證平行四邊形 ABCD, EFGH 全等. 今將平行四邊形 ABCD 置於平行四邊形 EFGH 上, 令 B 點置於 F 點上, BC 置於 FG 上, 且 A 點與 E 點在 FG 之同側. 於是因 BC 等於 FG [假設], 故 C 點落於 G 點上. 又因 $A\hat{B}C=E\hat{F}G$ [假設], 故 BA 落於 EF 上; 且 BA=FE [假設], 故 A 點落於 E 點上. 又 A 點合於 E 點, 且 AD, EH 皆平行於 FG, 故 AD 落於 EH 上 [幾.公.(4)]; C 與 G 合, 且 CD, HG 皆平行於 FE, 故 CD 落於 GH 上 [幾.公.(4)]. 因此 D 點與 H 點合, 而兩平行四邊形全合, 故全等.

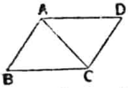


225. 兩矩形中, 設其一之相隣二邊, 分別等於他一之相隣二邊, 則兩矩形全等. 又兩正方形中, 若其一之一邊, 等於他一之一邊, 則兩正方形全等.

證 由前題自明.

226. 設四邊形之二對邊相等且平行, 則此四邊形爲平行四邊形.

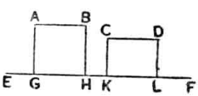
證 設 ABCD 爲一四邊形, 其二對邊 AD, BC 相等且平行, 求證 ABCD 爲平行四邊形. 聯結 AC, 則因 AC 與平行線 AD, BC 相交, 故



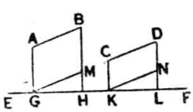
$C\hat{A}D=A\hat{C}B$ [41題]. 據此,兩三角形CAD,ACB中,AD=CB[假設],AC公有,$C\hat{A}D=A\hat{C}B$,故 $A\hat{C}D=C\hat{A}B$ [55題]. 而此二角係 AC 與 AB, DC 相交而成之錯角, 故 AB ∥ DC [38題].因此, ABCD 爲平行四邊形.

227. 設二直線相等且平行, 則此二直線在他任意直線上之射影相等. 反之, 二直線平行, 且在他任意直線上之射影相等, 則此二直線相等.

圖 設 AB, CD 爲二平行線,其在他任意直線 EF 上射影爲 GH, KL. 求證若 AB 等於 CD, 則 GH 等於 KL; 反之,若 GH 等於KL, 則 AB 等於 CD. 今設

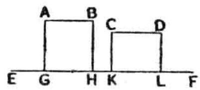


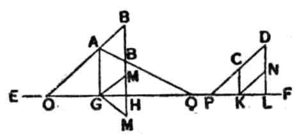
AB 與 CD 平行於 EF, 則 AGHB 及 CKLD 爲平行四邊形,故 AB 等於其正射影 GH [222題],而 CD 等於其正射影 KL [222題],故若 AB 等於 CD, 則 GH 等於 KL;反之,若 GH 等於 KL, 則 AB 等於 CD. 次,設 AB 與 CD 不平行於 EF, 可引平行於 AB 之 GM, 平行於 CD 之 KN, 命其與 BH, DL [必要時,與其延線]分別交於 M 及 N. 此時 GM 平行於 AB;KN 平行於 CD;AB 平行於 CD, 故 GM 平行於 KN [45題], 故 $M\hat{G}H=N\hat{K}L$ [53題].據此,△MGH,△NKL 中, $M\hat{G}H=N\hat{K}L$, $G\hat{H}M=\hat{R}=K\hat{L}N$, 故若 AB 等於CD,則 GM 等於 KN [222題],因而 GH 等於 KL [78題]. 反之,若 GH=KL, 則 GM 等於 KN [56題], 因而 AB 等於 CD.



228. 二直線相等, 且在他直線之射影亦相等, 則前二直線與後一直線,或平行, 或成等角.

圖 設 AB 與 CD 爲二相等直線, GH, KL 爲其在他直線 EF 上之射影, 且 GH = KL; 求證 AB 與 CD, 或平行於 EF, 或與 EF 成等角. 茲設 AB 與 CD 之一, 例如 AB,平行於 EF, 則 AGHB 爲平行四邊形,故 AB 等於其射影 GH [222題], 故 CD 又等於其射影 KL. 然由 C 向 DL 所引之垂線等於 KL, 故 CD 爲 DL 之垂線,因此 CD 平行於 EF. 故設 AB, CD 之一,平行於 EF, 則 AB, CD 皆平行於 FE. 若 AB, CD 皆不平行於 EF, 則引平行於 AB 之 GM, 平行於 CD 之 KN, 命其與 BH, DL [必要時,與其延線]分別交於 M, N, 又 AB, CD 或其延線分別與 EF 交於 O, P. 於是因 AB 等於 CD [假設],故 GM 等於 KN. 據此,直角三角形 MGH NKL 中, GM=KN GH=KL, 故 $M\hat{G}H=N\hat{K}L$ [80題],故 $A\hat{O}G=C\hat{P}K$ [44題],即 AB 與 CD, 與 EF 成等角.

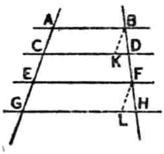




229. 有全體平行之二組直線, 與他直線交, 設各組之二直線所截得之部分相等, 則更與他任意直線交, 各組所截得之部分亦相等.

圖 設 AB, CD 與 EF, GH 爲全體平行之二

組直線，他直線 AG 爲此二組直線所截得之部分 AC, EG 相等；求證他任意直線 BH 爲此二組直線所截之部分 BD, FH 亦相等. 設 BH 平行於 AG, 則 BD 等於 AC [222題], FH 等於 EG [222題], 而 AC 等於 EG, 故 BD 等於 FH. 若 BH 不平行於 AG, 則可引平行於 AG 之 BK, 及 FL, 命其與 CD, GH 分別交於 K, L. 於是 BK 等於 AC [222題], FL 等於 EG [222題]；然 AC 等於 EG, 故 BK 等於 FL, 據此 △BKD, △FLH 中, $K\hat{B}D = L\hat{F}H$ [44題], $B\hat{D}K = F\hat{H}L$ [44題], 而 BK = FL, 故 BD = FH [78題].

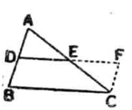


230. 三平行線與任意直線交，若其所截得之二部相等，則此三平行線與他任意直線交，其所截得之二部分亦相等.

證　由前題自明.

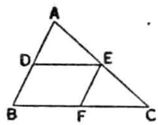
231. 過三角形一邊之中點，引平行於他邊之直線，此直線必過第三邊之中點.

證　設 △ABC 中, D 爲 AB 之中點, DE 爲由 D 所引平行於 BC 之直線, 與 AC 交於 E. 引平行於 AB 之 CF, 命與 DE 之延線交於 F, 則 BF 爲平行四邊形, 故 CF = BD = AD, 故 △ADE ≡ △CFE, 因此 AE = CE.

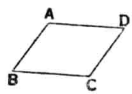


232. 聯結三角形二邊中點之直線，平行於第三邊，且等於其半分.

證　設三角形 ABC 之二邊 AB, AC 之中點爲 D, E, 則 DE 平行於 BC. 何則, 蓋設 DE 不平行於 BC, 則由 D 平行於 BC 所引之直線, 過 AC 之中點 E 故也 [前題]. 又引平行於 AB 之 EF, 命其與 BC 之交點爲 F, 則 F 爲 BC 之中點 [前題]. 據此, △ADE, △EFC 中, AE = EC, $D\hat{A}E = F\hat{E}C$, $A\hat{E}D = E\hat{C}F$, 故 DE = FC = $\frac{1}{2}$ BC.



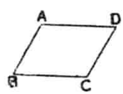
233. 四邊形之隣角皆爲補角，則此四邊形爲平行四邊形.



證　設四邊形 ABCD 中隣角皆爲補角. 例如 $\hat{B} + \hat{C} = 2\hat{R}$, 故 AB ∥ CD [40題]. 同理, AD ∥ BC, 故 ABCD 爲平行四邊形.

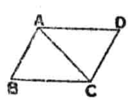
234. 四邊形之各對角，分別相等，則四邊形爲平行四邊形.

證　設四邊形 ABCD 中, $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{B} = \hat{D}$, 則 $\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} + \hat{D}$. 而是等四角之和爲 $4\hat{R}$, 故 $\hat{A} + \hat{B} = 2\hat{R}$, 因此 AD ∥ BC [40題]. 同理, AB ∥ DC, 故 ABCD 爲平行四邊形.



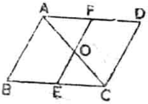
235. 設四邊形之二雙對邊各相等，則此四邊形爲平行四邊形.

證　設四邊形 ABCD 中, AB = CD, AD = BC, 聯結 AC, 則 △ACB, △CAD 中, 二邊分別相等, 一邊公有, 故 $A\hat{C}B = C\hat{A}D$ [77題], 因此, AD ∥ BC [38題]；又 $A\hat{C}D = C\hat{A}B$, 故 AB ∥ CD；故 ABCD 爲平行四邊形.



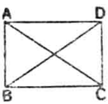
236. 聯結平行四邊形對邊中點之直線，將對角線二等分.

證　設平行四邊形 ABCD 對邊 BC, AD 之



中點爲 E, F, 直線 EF 與對角線 AC 之交點爲 O, 則 △AOF, △COE 中, AF, CE 分別等於等邊 AD, BC [222題] 之半分, 故相等, $O\hat{A}F = O\hat{C}E$, $O\hat{F}A = O\hat{E}C$, 故 OA = OC [56題].

237. 矩形之對角線相等.



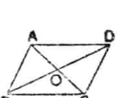
證 設 ABCD 爲矩形, 聯結 AC, BD, 則 △ACB, △DBC 中, $A\hat{B}C = \hat{R} = D\hat{C}B$, BC 公有, AB = DC [222題], 故 AC = BD.

238. 平行四邊形之對角線相等, 則此四邊形爲矩形.

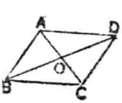
證 就前題之圖, 設 ABCD 爲平行四邊形, 對角線 AC, BD 相等. 於是因 ABCD 爲平行四邊形, 故 AB = DC [222題], 因此 △ACB, △DBC 之二邊, 分別相等, 且公有一邊, 故 $A\hat{B}C = D\hat{C}B$ [77題]. 而 AB ∥ DC, 故此二角又互爲補角, 因此各爲 $\hat{R}$, 卽此四邊形爲矩形.

239. 平行四邊形之對角線, 互相二等分.

證 設平行四邊形 ABCD 之對角線 AC, BD 之交點爲 O, 則△AOD, △COB 中, AD = CB [222題], $O\hat{A}D = O\hat{C}B$, $O\hat{D}A = O\hat{B}C$ [41題], 故 AO = CO, DO = BO [56題].



240. 四邊形之兩對角線互相二等分, 則四邊形爲平行四邊形.



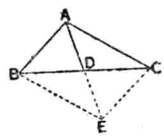
證 設四邊形 ABCD 中, O 爲對角線之交點, 則 △BOC, △DOA 中, OB = OD, OC = OA [假設], 又 $B\hat{O}C = D\hat{O}A$, 故 $O\hat{B}C = O\hat{D}A$ [55題], 故 AD ∥ BC [38題]. 同理, AB ∥ CD, 故 ABCD 爲平行四邊形.

241. 四邊形之兩對角線相等, 且互二等分, 則此四邊形爲矩形.

證 對角線互相二等分之四邊形爲平行四邊形 [240題], 且此對角線相等, 故爲矩形 [238題].

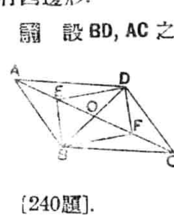
242. 三角形中聯結頂點與其對邊中點之直線, 視此頂點上之角, 大於, 等於, 小於直角, 而定小於, 等於, 大於對角之半分.

證 三角形 ABC 中, 設 $\hat{A} > \hat{R}$. 在聯結 A 及 BC 之中點 D 之直線 AD 之延線上, 取 DE = AD, 聯結 BE, CE, 則四邊形 ABEC 爲平行四邊形 [240題], 因此 $A\hat{B}C + A\hat{C}B = A\hat{B}E$. 而 $B\hat{A}C > \hat{R}$, 故 $B\hat{A}C$ 大於 $A\hat{B}C + A\hat{C}B$, 卽 $A\hat{B}E$, 而 △ABC, △ABE 中, AB 公有, AC = BE [222題], 故 AE < BC, 因而 AD < $\frac{1}{2}$ BC. 仿此得證若 $B\hat{A}C = \hat{R}$, 則 AD = $\frac{1}{2}$ BC; 若 $B\hat{A}C < \hat{R}$, 則 AD > $\frac{1}{2}$ BC.



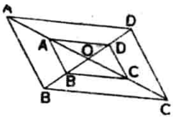
243. 在平行四邊形 ABCD 之對角線 AC 上, 取二點 E, F, 令 AE = CF, 則 BEDF 亦爲平行四邊形.

證 設 BD, AC 之交點爲 O, 則因 ABCD 爲平行四邊形, 故 AO = CO [239題], 又 AE = CF, 故 EO = FO, 而 BO = DO, 故 BEDF 爲平行四邊形 [240題].

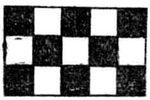


244. 由平行四邊形 ABCD 之對角線 AC 上, 取 AA′ = CC′, 又由 BD 取 BB′ = DD′, 則 A′B′C′D′ 亦爲平行四邊形.

證　設AC, BD之交點爲O, 則AO＝CO, BO＝DO [239題], 又AA′＝CC′, BB′＝DD′ [假設], 故OA′＝OC′, OB′＝OD′, 因此A′B′C′D′爲平行四邊形 [240題].



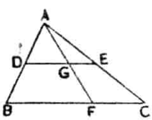
245. 欲塡充一點之周圍, 需幾個正方形之角?



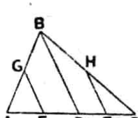
證　正方形之角各爲$\hat{R}$, 故欲塡充一點之周圍, 須$4\hat{R}\div\hat{R}=4$正方形角.

246. 由三角形之一角頂至對邊所引之直線, 爲聯結他二邊中點之直線所二等分.

證　設由三角形ABC之頂點A, 至對邊所引之直線爲AF, 聯結二邊AB, AC之中點之直線爲DE, 命此二直線之交點爲G, 則DE ∥ BC [232題], 而D爲AB之中點, 故G又爲AF之中點 [231題].



247. 在三角形ABC之底AC上取任意點D, 設AD, DC, AB, BC之中點分別爲E, F, G, H, 則EG與FH平行且相等.

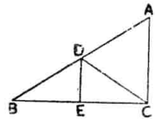


證　GE平行於BD, 且等於其半分; 同理, HF亦平行於BD, 且等於其半分, 故GE, HF相平行且相等.

別證　GH平行於AC, 且等於其半分 [232題], 又EF亦等於AC之半分, 故EF＝GH, 故GEFH爲平行四邊形 [226題]. 因此, EG, FH平行且相等.

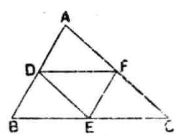
248. 直角三角形斜邊之中點, 距三頂點等遠.

證　設直角三角形ABC之斜邊AB之中點爲D. 聯結DC, 由D平行於AC引DE, 命其與BC之交點爲E, 則DE垂直於BC, 且E爲BC之中點 [231題], 故△DEB≡△DEC, DB＝DC; 而D爲AB之中點, 故AD＝BD＝DC.



249. 聯結三角形各邊之中點, 則將原三角形分爲四個全等三角形.

證　在△ABC各邊之中點間, 引DE, EF, DF, 則ADEF爲平行四邊形 [232題], DF爲其對角線, 故△ADF≡△DEF [222題]. 同理, △DEB≡△DEF≡△EFC.

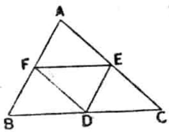


250. 過三角形之各頂點, 引平行於其對邊之直線, 則連原三角形共得四個全等三角形.

證　設過△ABC之各角頂, 引平行於其對邊之直線而生之三角形爲DEF, ABCE爲平行四邊形, 而AC爲其對角線, 故△ABC≡△ACE [222題]. 同理, △ABF≡△ABC≡△BCD, 卽四三角形全等.

251. 三角形ABC中, 由底BC之中點D, 引平行於邊BA, CA之直線, 命其分別交AC, AB於E, F, 則EF平行於BC.

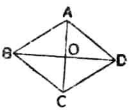
證　DE過邊BC之中點, 平行於邊AB, 故E爲邊AC之中點 [231題]. 同理, F爲AB



之中點. 是以 EF 爲過 AB, AC 中點之直線,因此平行於邊 BC [232題].

252. 菱形之二對角線互爲垂線, 且將其所過之角二等分.

證 平行四邊形之對角線,互相二等分[239題],故 AO = CO; 又二等邊三角形 BCA 中, BO 爲聯結頂點 B 與底邊 AC 中點之直線, 故 BO 垂直於 AC [94題],即對角線 AC, BD 互爲垂線. 而 BO 二等分角 B [94題]. 同理, OD 二等分角 D; 又 AC 二等分 $\hat{A}$ 及 $\hat{C}$.

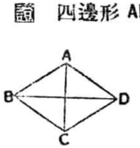


253. 平行四邊形之對角線,若互爲垂線,則此平行四邊形爲菱形.

證 由前題之圖, 平行四邊形 ABCD 之對角線,於其中點相交[239題],故 O 爲 BD 之中點. 今 △ABD 中,由頂角 A 向底邊 BD 所引之垂線二等分 BD 於 O, 故 △ABD 爲二等邊三角形,而以 A 爲頂點[95題注意],故 AB = AD. 因而此平行四邊形爲菱形.

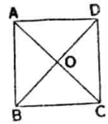
254. 設平行四邊形之對角線將角二等分,則平行四邊形爲菱形.

證 四邊形 ABCD 爲平行四邊形, 故對角相等 [220題], 又依據假設, 對角線 AC 將 $\hat{A}$, $\hat{C}$ 二等分, 故 $D\hat{A}C = D\hat{C}A$, 故 DA = DC. 因此四邊相等[222題],即平行四邊形爲菱形.



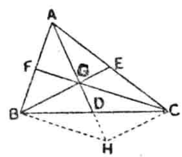
255. 正方形之對角線相等否? 其夾角之大小如何?

證 正方形 ABCD 可視爲相隣二邊相等之矩形, 故對角線相等 [237題]. 次,正方形之四邊相等,故可視爲菱形,故對角線互相垂直[252題],即其夾角等於 $\hat{R}$.

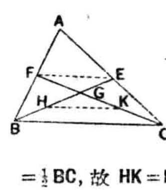


256. 三角形之三中線過同點, 此點至各頂點之距離, 等於其中線之三分之二. [此點曰三角形之重心].

證 設 BE, CF 爲 △ABC 之二中線, 其交點爲 G, 求證第三中線亦過 G. 延長 AG, 令 AG = GH, 交 BC 於 D. 於是 CF 過 △ABH 二邊之中點, 故平行於 BH [232題], 又 BE 過 △ACH 二邊之中點, 故平行於 CH. 據此, GBHC 爲平行四邊形, BC, GH 互相二等分於 D [239題], 因而 AD 爲中線, 故三中線會於一點 G. 次, AG = GH = 2DG, 故 AG = $\frac{2}{3}$ AD. 同理, BG = $\frac{2}{3}$ BE, CG = $\frac{2}{3}$ CF.



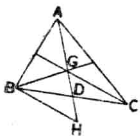
別證 設 △ABC 之二中線 BE, CF 之交點爲 G, 又 GB, GC 之中點分別爲 H, K, 聯結 HK, EF, 則 HK ∥ BC, FE ∥ BC [232題], 故 HK ∥ FE; 又 HK = $\frac{1}{2}$ BC [232題], FE = $\frac{1}{2}$ BC, 故 HK = FE; 故 EKHF 爲平行四邊形. 據此, EH, FK 互相二等分於 G, 故 EG = GH = HB, FG = GK = KC, 即二中線交於其距各角頂三分之二處. 同理, 他二中線 AD, BE 亦交於其距各角頂三分之二處, 即 G 點. 因此, AD, BE, CF 交於同點 G, 而 AG,



BG, CG 分別爲 AD, BE, CF 之三分之二.

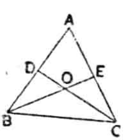
257. 聯結三角形 ABC 之重心 G 與頂點 A,並延長之,取 GH,令與 AG 等長,以三點 B,G, H 爲頂點,作三角形 BGH; 則其三邊分別爲三角形 ABC 中線之三分之二.

證 設 AG 與 BC 之交點爲 D, 聯結 CG, 則因 $GD=\frac{1}{2}AG$, $AG=GH$, 故 D 爲 GH 之中點,又 D 爲 BC 之中點, 且 $B\hat{D}H=C\hat{D}G$, 因此 $\triangle BDH \equiv \triangle CDG$ [55題], 故 $BH=CG$. 而 AG, BG, CG 爲各中線之三分之二,又 △BHG 中, GH 等於 AG; BH 等於 CG, 故其三邊分別等於 △ABC 之中線之三分之二.



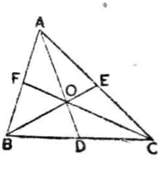
258. 設三角形之二中線相等,則爲二等邊三角形.

證 設三角形 ABC 之二中線 BE, CD 相等, 其交點爲 O, 則 $BO=\frac{2}{3}BE$, $CO=\frac{2}{3}CD$, 而 $BE=CD$, 是以 $BO=CO$, 因此 $O\hat{B}C=O\hat{C}B$. 次, △DBC, △ECB 中, $CD=BE$, BC 公有, $D\hat{C}B=E\hat{B}C$, 故 $A\hat{B}C=A\hat{C}B$ [55題], 因而 $AB=AC$, 卽爲二等邊三角形.



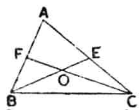
259. 設三角形之二邊不等,則過小邊中點之中線,大於過大邊中點之中線.

證 設 △ABC 中, $AB<AC$, E, F 爲此二邊之中點,求證 $CF>BE$. 命 BE, CF 之交點爲 O, 則 AO 過 BC 之中點 D [256題]. 於是 △ADC, △ADB 中, $DC=DB$, AD 公有, 而 $AC>AB$, 故 $A\hat{D}C>A\hat{D}B$. 因此, △ODC, △ODB 中, 其二邊相等, $O\hat{D}C>O\hat{D}B$, 故 $OC>OB$; 而 OC, OB 分別爲 FC, EB 之三分之二, 故 $FC>EB$.



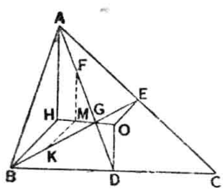
260. 由三角形大角之頂點所引之中線,小於由小角之頂點所引之中線.

證 設三角形 ABC 中, $A\hat{B}C>A\hat{C}B$, BE, CF 爲由此二角頂所引之二中線, 求證 $BE<CF$. 今 $A\hat{B}C>A\hat{C}B$, 故 $AC>AB$ [69題], 故 $BE<CF$ [256題].



261. 三角形之垂心 H, 重心 G, 外心 O, 共在一直線上,而 GH 等於 OG 之二倍.

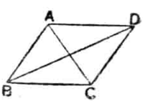
證 設三角形爲 ABC. AG 及 BG 分別與其對邊所交之點 D, E, 皆爲邊之中點. 過 D 引 BC 之垂線, 命其與 HG 之延線交於 O, 引 OE, BH, 在 AG, HG, BG 之中點間, 引 FM, MK, 則 $FM \parallel AH$, 又 $AH \parallel OD$, 故 $FM \parallel OD$. 又 $AG=2GD$, 因而 $FG=GD$. 據此, $\triangle FGM \equiv \triangle DGO$ [56題], 故 $GM=GO$; 因此, $HG=2OG$. 次, $KG=GE$, $GM=GO$, 故 $\triangle KGM \equiv \triangle EGO$, 故 $G\hat{K}M=G\hat{E}O$. 而 $G\hat{K}M=G\hat{B}H$, 故 $G\hat{E}O=G\hat{B}H$, 故 $OE \parallel BH$. 而 $BH \perp AC$, 故 OE 爲過 AC 中點之垂線, 因此 O 爲過二邊之中點所引二邊垂線之交點, 卽爲外心. 故 H, G, O 在同一直線上.



262. 三角形三中線之和,小於三角形之周,而大於周之四分之三.

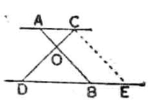
證 259題之圖中, 設三角形 ABC 之三中線爲 AD, BE, CF, 則因 $AD<\frac{1}{2}(AB+AC)$[151題], $BE<\frac{1}{2}(AB+BC)$, $CF<\frac{1}{2}(BC+AC)$, 故 $AD+BE+CF<AB+BC+AC$. 次,設其交點爲 O, 則 $OB+OC>BC$, $OC+OA>AC$, $OA+OB>AB$; 而 OA, OB, OC 分別爲 AD, BE, CF 之 $\frac{2}{3}$, 故 $\frac{2}{3}(BE+CF)>BC$, $\frac{2}{3}(CF+AD)>AC$, $\frac{2}{3}(AD+BE)>AB$, 因而 $\frac{4}{3}(AD+BE+CF)>AB+BC+AC$, 故 $AD+BE+CF>\frac{3}{4}\times(AB+BC+AC)$.

263. 設平行四邊形之一對角線, 等於本形之一邊,則他對角線大於各邊.



證 設平行四邊形 ABCD 之對角線 AC, 等於一邊 AB, 則 $A\hat{B}C=A\hat{C}B$, 而皆爲銳角.故 $B\hat{C}D$ 爲鈍角, 其對邊 BD 較他二邊 BC, CD 均大[138題].

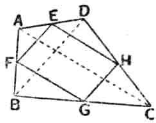
264. 設二直線 AB, CD 交於 O, 其夾於二平行線間之部分 AB, CD 相等,則 $OA=OC$, $OB=OD$.



證 平行於 AB 引 CE,則 $AB=CE=CD$, 故 $C\hat{D}B=C\hat{E}D=A\hat{B}D$, 因此, $OB=OD$, 因而 $OA=OC$ [普. 公. (e).]

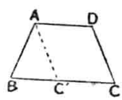
265. 順次聯結四邊形隣邊之中點,則成平行四邊形,其周等於原四邊形對角線之和;而原四邊行爲矩形或菱形,則所成者爲菱形或矩形.

證 設聯結四邊形ABCD各邊中點而得之四邊形爲 EFGH, 則 EF, GH 同平行於 BD [232題], EH, FG 同平行於 AC, 故 EFGH 爲平行四邊形. 又 EH, FG 各等於 $\frac{1}{2}$ AC [232題], EF, GH 各等於 $\frac{1}{2}$ BD, 故 EFGH 之周等於 AC+BD. 次,設 ABCD 爲矩形,則對角線 $AC=BD$,因而 $EF=EH$, 卽▱EFGH 之隣邊相等, 故四邊皆等, 而爲菱形. 又設 ABCD 爲菱形, 則其對角線所成之角爲 $\hat{R}$, 而▱EFGH之角,等於原四邊形對角線所成之角,卽爲直角,故爲矩形.

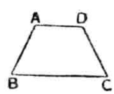


266. 二等邊梯形中,底之兩端之角相等.

證 設梯形 ABCD 之不平行二邊 AB, CD 相等,引AC′平行於 CD,則$AC'=CD$ [222題] $=AB$, 故 $\hat{B}=A\hat{C'}B$ [57題]. 而 $A\hat{C'}B=\hat{C}$, 故 $\hat{B}=\hat{C}$. 又 $B\hat{A}D$, $\hat{D}$ 分別爲等角 B, C 之補角,故相等.



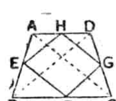
267. 設梯形之不平行二邊相等,則對角互爲補角.



證 設 ABCD 爲 AD ∥ BC 之梯形,而 $AB=DC$. 此時 $\hat{B}=\hat{C}$, $\hat{A}=\hat{D}$ [266題], 而 $\hat{A}+\hat{B}=2\hat{R}$, 故 $\hat{B}+\hat{D}=\hat{C}+\hat{A}=2\hat{R}$, 卽對角互爲補角.

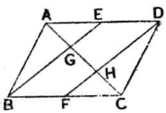
268. 順次聯結矩形或二等邊梯形四邊中點而生之四邊形爲菱形.

證 矩形之款, 業已證明 [265題]. 茲設 ABCD 爲 $AB=CD$ 之梯形, 順次聯結其四邊中點而生之平行四邊形爲 EFGH; 於是因 $A\hat{B}C=B\hat{C}D$ [266題],故 $\triangle ABC\equiv\triangle DCB$ [55題], 因而 $AC=BD$. 而 EF, EH 分別等於 AC, BD 之半分, 故相等;故平行



四邊形之相隣二邊相等,而爲菱形.

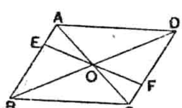
269. 設平行四邊形 ABCD 之對邊 AD,BC 之中點爲 E, F, 則二直線 BE, DF 將 AC 三等分.



證 $ED \parallel BF$, 且 $ED=BF$, 故 $BE \parallel DF$. 而 F 爲 BC 之中點,故 H 爲 GC 之中點[231題]. 同理, G 爲 AH 之中點;故 $AG=GH=HC$.

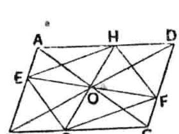
270. 設過平行四邊形對角線交點 O 之直線與二對邊分別交於 E 及 F,則 O 爲 EF 之中點, 又 EF 將平行四邊形分爲二個相等四邊形.

證 $\triangle OAE$, $\triangle OCF$ 中, $OC=OA$ [239題],又 $O\hat{A}E=O\hat{C}F$, $A\hat{O}E=C\hat{O}F$, 故 $EO=OF$ [56題].次, 四邊形 ADFE, CBEF 中, $AD=BC$, FE 公有, $EA=FC$, $DF=BE$, 且一方四邊形中二邊所夾之角, 皆等於他方四邊形中, 與之相等之二邊所夾之角;故將一方置於他方之上,而得全合.



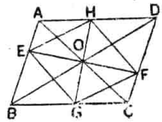
271. 設二直線過平行四邊形對角線之交點,則聯結其與各邊之交點而得之四邊形,爲平行四邊形.

證 設▱ABCD 對角線之交點爲 O, 過 O 之二直線與四邊之交點爲 E, G, F, H. 於是根據前題, $EO=FO$, $GO=HO$, 故四邊形 EGFH 爲平行四邊形 [240題].



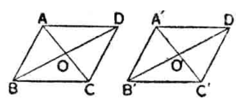
272. 過平行四邊形對角線之交點, 引互相垂直之二直線, 聯結其與各邊之交點, 則所生之四邊形爲菱形.

證 設平行四邊形 ABCD 之對角線之交點爲 O, 過 O 所引互相垂直之二直線爲 EF, GH, 則 O 爲 EF, GH 之中點 [270題], 故 EGFH 爲平行四邊形. 又其對角線 $GH \perp EF$, 故 EGFH 爲菱形 [253題].



273. 二對角線及其夾角相等之兩平行四邊形全等.

證 設二平行四邊形 ABCD, A′B′C′D′ 中, $AC=A'C'$, $BD=B'D'$, 及 $A\hat{O}B=A'\hat{O}'B'$, 則兩三角形 AOB, A′O′B′ 中,一角相等,其二邊分別爲相等之對角線之半,故相等,因此 $AB=A'B'$ [55題]; 同理, $BC=B'C'$, 因而 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, 而 $\hat{B}=\hat{B}'$; 故本題之二平行四邊形中,二邊與其夾角相等,因此全等 [224題].



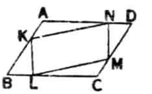
274. 平行四邊形 ABCD 之對邊 AD 及 BC 之中點,與其對邊之兩端聯結而得之四直線,成平行四邊形.

證 設平行四邊形 ABCD 之對邊 AD, BC 之中點分別爲 F, E, 若 EA, ED 分別交 FB, FC 於 G 及 H, 則四邊形 AECF 之對邊 AF, CE 分別爲相等之 AD, BC 之半分, 故相等, 且平行. 故 AECF 爲平行四

邊形,故 $AE \parallel CF$. 同理, $BF \parallel DE$. 故 EGFH 爲平行四邊形.

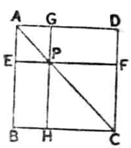
275. 在平行四邊形ABCD之各邊AB,BC,CD,DA上,取K,L,M,N點,令 $AK=BL=CM=DN$,則KLMN爲平行四邊形,

證 △AKN, △CML中, $AK=CM$, 又因 $AD=BC$, $DN=BL$, 故 $AN=CL$, 且 $\hat{A}=\hat{C}$ [220題], 故 $KN=ML$. 同理, $KL=MN$, 據此,四邊形KLMN之對邊相等,故爲平行四邊形[235題].



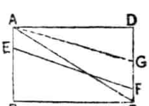
276. 沿正方形對角線之平行四邊形爲正方形.

證 設沿正方形ABCD之對角線之平行四邊形爲EG, HF. 此時 $AD=DC$, $\hat{D}=\hat{R}$, 故 $D\hat{A}C=D\hat{C}A=\frac{1}{2}\hat{R}$, 而 $GH \parallel DC$, 故 $G\hat{P}A=D\hat{C}A$, 故 $G\hat{P}A=G\hat{A}P$, 因此 $AG=GP$, 而 $A\hat{G}P=\hat{R}$, 故EG爲正方形. 同理, FH亦爲正方形.



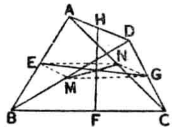
277. 矩形之對角線, 大於兩邊間之任意直線.

證 設矩形ABCD之對角線爲AC, 其兩邊間之任意直線爲EF. 引AG, 平行於EF, 則AF爲平行四邊形, 故 $AG=EF$; 而 $\hat{D}=\hat{R}$, 故 $A\hat{G}C>\hat{R}$, 因而 $A\hat{G}C>A\hat{C}G$, 故 $AC>AG$ [69題], 故 $AC>EF$.



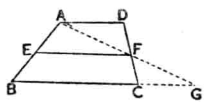
278. 任意四邊形中, 聯結二雙對邊中點之直線, 交於聯結兩對角線中點之直線之中點.

證 設E, F, G, H爲四邊形ABCD各邊之中點, M, N爲對角線BD, AC之中點, 聯結EN, MG, 則EN過△ABC二邊之中點, 故平行於底BC, 且等於其半分. 同理, $MG \parallel BC$. 且 $MG=\frac{1}{2}BC$. 故 $EN \parallel MG$, 且 $EN=MG$. 據此, EMGN爲平行四邊形, 故EG過MN之中點. 同理, HF亦過MN之中點. 故EG, HF交於MN之中點.

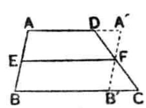


279. 聯結梯形不平行二邊中點之直線, 平行於底, 且等於其和之半分.

證 設梯形ABCD之不平行二邊爲AB,CD, 其中點爲E, F, 聯結AF, 命其延線與BC之交點爲G, 於是因F爲DC之中點, 故 △AFD≡△CFG [56題], 而 $AF=FG$, $AE=EB$, 故△ABG中 $EF \parallel BG$ [232題]. 又 $EF=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}(BC+CG)=\frac{1}{2}(BC=AD)$.



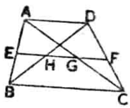
別證 設梯形ABCD不平行二邊AB,CD之中點爲E, F, 過F, 平行於AB, 引直線A′B′, 命其與底AD,BC之交點爲A′,B′, 則△CFB′≡△DFA′[56題], 故 $FA'=FB'$. 又 $AB=A'B'$, 故FA′與AE平行且相等, 故EA′爲平行四邊形, 因此EF平行於底. 次, $DA'=CB'$, 故 $AD+BC=AD+CB'+BB'=AD+DA'+BB'=AA'+BB'=2EF$, 故 $EF=\frac{1}{2}(AD+BC)$.



280. 梯形不平行二邊之中點, 及二對角線之中點, 在平行於二平行邊之一直線上;

四點之內，兩端二點之距離，等於二底之和之半分，中間二點之距離，等於二底之差之半分.

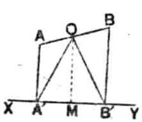
證 設梯形ABCD之不平行二邊爲AB,CD,



聯結此二邊中點之直線爲EF，命其與AC, BD之交點爲G, H，此時EF ∥ AD ∥ BC [279題]，故G爲AC之中點，H爲BD之中點，卽對角線之中點與不平行二邊之中點，在一直線上. 次，$EG=\frac{1}{2}BC$, $FG=\frac{1}{2}AD$，故 $EF=\frac{1}{2}(BC+AD)$；又 $EH=\frac{1}{2}AD=GF$, $EG=\frac{1}{2}BC=HF$，故 $HG=EG\sim GF=\frac{1}{2}(BC\sim AD)$.

281. 由有限直線之兩端，至他一直線引垂線，則其垂足與此有限直線中點之距離相等.

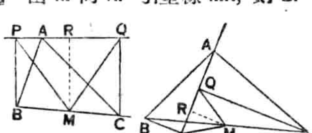
證 設由有限直線AB之兩端，至他一直線XY所引之垂線爲AA′，



BB′，求證A′, B′與AB之中點O之距離相等. 聯結A′B′之中點M與O，則OM ∥ AA′ [279題]，故OM⊥XY，而M爲A′B′之中點，故OA′=OB′ [55題].

282. 向過三角形ABC之角頂A之任意直線，引垂線BP, CQ，設BC之中點爲M，則MP=MQ.

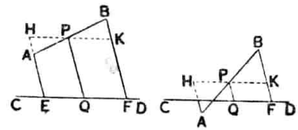
證 由M向AP引垂線MR，則BP ∥ MR



∥ CQ，而BM=MC，故PR=RQ [227題]，因而MP=MQ [281題].

283. 由二點及聯結此二點之直線之中點，至任意直線，引三平行線，則外二直線之和或差，等於中間直線之二倍.

證 設A, B爲二點，P爲AB之中點，CD

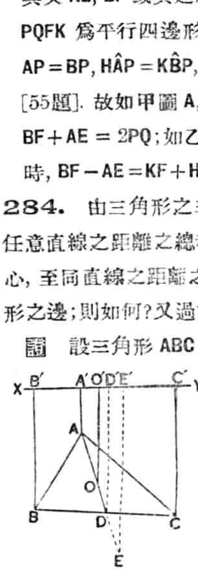


[甲圖]　　[乙圖]

爲任意直線，AE ∥ PQ ∥ BF，求證AE, BF之和或差等於2PQ. 過P引CD之平行線，命其交AE, BF或其延線於H, K. 於是HEQP, PQFK爲平行四邊形，故HE=PQ=KF. 又AP=BP, $H\hat{A}P=K\hat{B}P$, $H\hat{P}A=K\hat{P}B$，故AH=BK [55題]. 故如甲圖A, B在CD之同側時，則BF+AE=2PQ；如乙圖A, B在CD之異側時，BF−AE=KF+HE=2PQ.

284. 由三角形之三頂點，至不交其邊之任意直線之距離之總和，等於由三角形之重心，至同直線之距離之三倍. 設直線交三角形之邊；則如何？又過重心則如何？

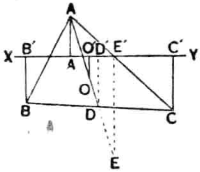
證 設三角形ABC之重心爲O，不交其邊



[1圖]

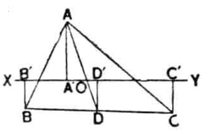
之任意直線爲XY [1圖]，由三頂點及重心O至XY之垂線，分別爲AA′, BB′, CC′, OO′，命AO與BC之交點爲D，在其延線上取DE=OD，引垂線DD′, EE′. 於是因D爲BC及OE之中點，O爲AE之中點，故BB′+CC′=2DD′=OO′

$+EE'$ [283題]. 雙方加 AA', 則 $AA'+BB'+CC'=OO'+EE'+AA'$, 而 $AA'+EE'=2OO'$, 故 $AA'+BB'+CC'=3OO'$. 次, 設 XY 與三角形之邊交[2圖], 則 $BB'+CC'=2DD'=OO'+EE'$. 雙方減以 AA', 則得 $BB'+CC'-AA'=OO'+EE'-AA'$,



[2 圖]

而 $EE'-AA'=2OO'$ [283題], 因此 $BB'+CC'-AA'=OO'+2OO'=3OO'$. 最後, 設 XY 過重心[3圖], 則 $BB'+CC'=2DD'$, 而 $OA=2DO$, 故 $AA'=2DD'$, 因此 $BB'+CC'=AA'$.

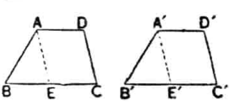


[3 圖]

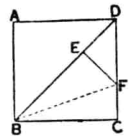
注意 2圖中係假定 $BB'+CC'>AA'$ 者. 若因 XY 之位置,而異其大小,但 XY 仍與邊交時, AA', BB', CC' 中二者之和,與他一者之差,仍恆等於 OO' 之三倍.

285. 有二梯形, 若依同順序所取之四邊相等,則兩形全等.

證 設二梯形 ABCD, A'B'C'D' 中, AB, BC, CD, DA, 分別等於 A'B', B'C', C'D', D'A', 引 AE 及 A'E', 分別平行於 CD, C'D', 命其與底之交點分別爲 E, E'. 於是 $AE=CD$, $A'E'=C'D'$ [222題], 而 $CD=C'D'$, 故 $AE=A'E'$. 又 AD, BC 分別等於 A'D', B'C', 故其差 BE, B'E' 亦等. 而 $AB=A'B'$, 故 $\triangle ABE\equiv\triangle A'B'E'$, 故 $\hat{B}=\hat{B}'$, $A\hat{E}B=A'\hat{E}'B'$, 因而 $\hat{C}=\hat{C}'$, 據此, 二梯形得全合, 故相等.



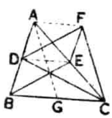
286. 在正方形ABCD之對角線BD上,取 $BE=BC$, 由E引BD之垂線,命其與CD之交點爲F, 則DE, EF, FC相等.



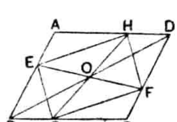
證 引BF, 則兩直角三角形BFE, BFC中, 斜邊BF公有, $BE=BC$, 故 $EF=FC$ [81題]. 又 $D\hat{E}F=\hat{R}$, $E\hat{D}F=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 $D\hat{F}E=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 $DE=EF$ [59題]. 即 $DE=EF=FC$.

287. 設三角形ABC中, BE, CD爲二中線, 平行於BE, 引DF, 平行於AB, 引EF, 令交於F, 聯結CF, 則三角形CDF之三邊,表三角形ABC之三中線.

證 引DE, AF及中線AG, 則因BDFE爲平行四邊形, 故 $EF=BD=AD$, 因而ADEF爲平行四邊形 [212題], 故 $AF=DE=\frac{1}{2}BC=CG$. 而 $BC\parallel DE\parallel AF$, 故AGCF爲平行四邊形, 而 $AG=CF$. 又因BDFE爲平行四邊形, 故 $DF=BE$. 因此 $\triangle CDF$ 之三邊CF, FD, DC分別等於 $\triangle ABC$ 之三中線AG, BE, CD.



288. 在平行四邊形ABCD之對邊AB, CD上,依反對方向,任取等長之AE及CF, 又在對邊AD, BC上,依反對方向,任取等長之AH, CG, 則EGFH爲平行四邊形. 此二平行四邊形之中心在同點.

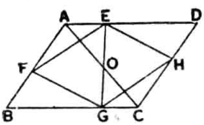


證 設BD, EF之交點爲O 則因 $AE=CF$, $AB=CD$, 故 $BE=DF$. 於是 $\triangle BOE$, $\triangle DOF$ 之角分別相等, 一邊相等, 故 $OB=OD$, $OE=OF$

[78題],卽 O 爲 ▱ABCD 之中心,且四邊形 EGFH 之對角線 EF 二等分於 O. 同理, GH 亦二等分於 O, 故 EGFH 爲平行四邊形[240題],而 O 爲公有之中心.

289. 設一平行四邊形之各角點,在他平行四邊行之各邊上,則二平行四邊形之對角線,交於同點.

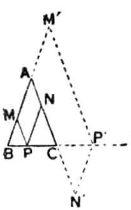
圖 設平行四邊形 EFGH 之頂點,在平行四邊形 ABCD 之各邊上,則 △AEF, △CGH 中, EF = GH, 各角相等[53題],



故 AE = CG. 因此,設 AC, EG 之交點爲 O, 則 △AOE ≡ △COG [56題],故 O 爲 AC, EG 之中點,因此 BD, FH 亦過 O.

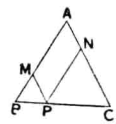
290. 由二等邊三角形底邊上之任意點,引分別平行於他二邊之直線,令與他邊相交,則此有限直線之和一定. 若點在底邊之延線上,則如何?

圖 設 ABC 爲二等邊三角形,底 BC 上之任意點爲 P, 由 P 所引 AC, AB 之平行線爲 PM, PN, 則 PMAN 爲平行四邊形,故 PM = AN, 又 $N\hat{P}C = \hat{B} = \hat{C}$, 故 PN = CN, 因此 PM + PN = AN + CN = AC, 卽等於一邊之長而爲一定. 次,設底邊延線上之任意點爲 P'. P'M'AN' 爲平行四邊形,故 P'M' = AN', 又 $N'\hat{P'}C = \hat{B} = \hat{C} = N'\hat{C}P'$, 故 P'N' = CN'; 因此 P'M' − P'N' = AN' − CN' = AC, 卽其差恆等於一邊之長,而爲一定.



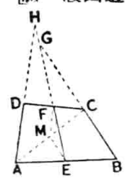
291. 由等邊三角形一邊上之任意點,引他二邊之平行線,其所得之平行四邊形之周一定.

圖 本題不過爲前題之特例. 卽等邊三角形 ABC 中, AB = AC, 故依據前題, PM + PN = AC, 卽等於一邊之長. 因此平行四邊形 AMPN 之周,等於一邊之長之二倍.



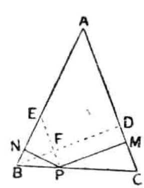
292. 設四邊形之相對二邊相等,則是等之邊與聯結他二邊中點之直線成等斜度.

圖 設四邊形 ABCD 中, AD = BC, AB, CD 之中點分別爲 E, F, 求證 $A\hat{H}E = B\hat{G}E$. 設對角線 AC 之中點爲 M, 則 MF ∥ AD, ME ∥ BC, 而 MF = $\frac{1}{2}$ AD, ME = $\frac{1}{2}$ BC, 而 AD = BC, 故 MF = ME, 故 $M\hat{F}E = M\hat{E}F$. 據此,分別平行於 MF, ME 之平行直線 AD, BC, 與 EF 成等斜度,卽 $A\hat{H}E = B\hat{G}E$.

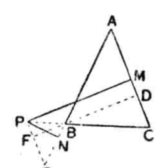


293. 二等邊三角形底邊上之任意點,至他二邊之距離之和爲定長. 點在底邊之延線上則如何?

圖 甲圖中 設 ABC 爲二等邊三角形, P 爲



[甲圖]



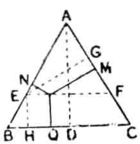
[乙圖]

底邊上之任意點, PN 垂直於 AB, PM 垂直於 AC, 求證 PN 與 PM 之和爲定長,卽等於由 B 所引之 AC 之垂線 BD. 由 P 引 PE 平

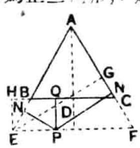
行於 AC, 截 BD 於 F,則△EBP 爲二等邊三角形. 何則, 蓋 $E\hat{P}B=A\hat{C}B$ [44題], $A\hat{C}B=A\hat{B}C$ [57題],故 $E\hat{B}P=E\hat{P}B$,故 EB=EP[59題]也. 而 △NPB, △FBP 中,邊 BP 公有,且 $N\hat{B}P=F\hat{P}B$, $B\hat{N}P=P\hat{F}B$, 故 NP=FB [78題]. 而 PM=FD [222題], 故 PN, PM 之和等於 BF, FD 之和,卽 BD. 乙圖中設 P 在底 CB 之延線上,仿前題作圖,則 PM, PN 之差,等於定長 BD. 蓋與前題同理, PM=FD,PN=FB 故 PM, PN 之差,卽 FD, FB 之差,等於 BD.

294. 由正三角形內之一點, 至三邊之垂線之和,恆相等. 若點在形外,則三垂線間之關係如何?

解 甲圖中,設 ABC 爲正三角形, P 爲其內



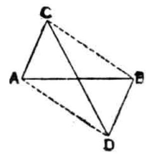
[甲圖]



[乙圖]

之任意點, PQ, PM, PN 分別爲邊 BC, CA, AB 之垂線, AD 爲邊 BC 之垂線, 求證 PQ, PM, PN 之和,等於定長 AD. 過 P 引 EF 平行於 BC, 又由 E 引 AC 之垂線 EG, 則 AEF 顯然爲正三角形,故 PM, PN 之和等於 EG [293題]. 又由 E 引 BC 之垂線 EH, 則因 AC, BC 相等[假設],故 EG EH 之和等於 AD[293題]. 而 PQ=EH [222題],故 PQ, PM, PN 之和,等於EG, EH 之和,即 AD. 乙圖中,設P 與 A 在 BC 之異側,仿前作圖,則 PM, PN 之和等於 EG. 又由 E 引 BC 延線之垂線 EH, 則因 AC 等於BC,故EG, EH 之差等於 AD [293題]. 而 PQ=EH, 故 PM, PN 之和減以 PQ, 等於定長 AD.

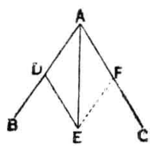
295. 由線分 AB 之兩端,依反對方向,引相等且平行之二線分 AC, BD, 則線分 CD 與 AB 之交點,爲 AB 之中點. 試證之.



解 聯結 AD, BC,則因 AC=BD, 且AC ∥ BD,故 ACBD 爲平行四邊形[226題], 因此對角線CD 將他對角線 AB 二等分[239題].

296. 在角 A 之一邊 AB 上取任意點 D,由 D 平行於 AC 且等於線分 AD, 引線分 DE, 則直線 AE 將角 A 二等分. 試證之.

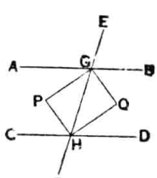
解 在邊 AC 上取 AF, 等於 AD, 聯結 EF,



則四邊形ADEF中,AF ∥ DE, AF=DE, 故此爲平行四邊形. 而 AD=AF, 故此又爲菱形[223題],故對角線 AE 將角 A 二等分[252題].

297. 一直線與二平行線交而生四內角,此四內角之二等分線,成一矩形. 試證之.

解 設 AB, CD 爲二平行線, 與他直線 EF

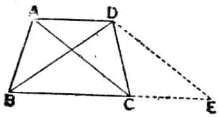


交於 G, H; 求證四內角之二等分線 GP, GQ, HP, HQ 成一矩形. 因 AB ∥ CD, 故錯角 $A\hat{G}H=G\hat{H}D$, [41題], 因而其半分 $P\hat{G}H=G\hat{H}Q$, 故 GP ∥ HQ [38題]. 同理, $Q\hat{G}H=G\hat{H}P$. 故 GQ ∥ HP. 據此, PGQH 爲平行四邊形. 次,因 AB 爲直線,故二隣角之二等分線 PG ⊥ GQ [18題]. 故 PGQH 爲矩形[221題].

298. 二等邊梯形之對角線相等. 反之,

對角線相等之梯形爲二等邊.

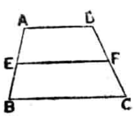
證　設梯形 ABCD 中, AB = DC. 此時因 $A\hat{B}C = D\hat{C}B$ [266題], 故 △ABC, △BCD 全等 [55題], 故 AC = BD.



反之, 設梯形 ABCD 中, AC = BD. 過 D 引 DE 平行於 AC, 命其與 BC 延線之交點爲 E, 於是 ACED 爲一平行四邊形. 故 AC = DE, 因而 BD = DE, 因此 DBE 爲二等邊三角形, 故 $D\hat{B}E = D\hat{E}B$, 然 $D\hat{E}B = A\hat{C}B$, 故 $D\hat{B}C = A\hat{C}B$, 故兩三角形 ABC, DBC 全等 [55題], 因而 AB = CD, 即梯形爲二等邊.

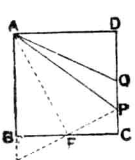
299.　梯形中平行於底且二等分他一邊之直線, 亦必二等分其餘一邊. 試證之.

證　設梯形 ABCD 中, EF 過邊 AB 之中點 E, 且平行於底, 而與邊 BC 交於 F. 三直線 AD, EF, BC 平行, 且 AE = EB [假設], 故 DF = FC [229題].



300.　在正方形 ABCD 之邊 CD 上, 取一點 P, 令 AP = PC + CB, Q 爲 CD 之中點, 則 $B\hat{A}P = 2Q\hat{A}D$.

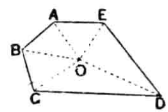
證　在 AB 之延線上取點 E, 令 BE = CP, 聯結 EP, 命其與 BC 之交點爲 F, 則因 BE, CP 平行且相等, 故 BECP 爲平行四邊形, 故 F 爲 BC 及 EP 之中點. 又 AB = BC, 故 AE = BC + CP = AP, 故 AF 將角 BAP 二等分. 次, 兩直角三角形 ABF, ADQ 中, 直角之二邊分別相等, 故全等. 因此 $B\hat{A}F = Q\hat{A}D$ 因而 $B\hat{A}P = 2Q\hat{A}D$.



第五章　多角形

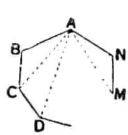
301.　任意凸多角形中, 一切內角與四直角之和, 等於多角形邊數二倍之直角.

證　設 ABCDE 爲任意凸多角形, 求證此多角形一切內角與四直角之和, 等於多角形邊數二倍之直角. 今在形角多 ABCDE 內, 取任意點 O, 聯結 O 與多角形之各角頂, 將多角形分成與其邊數同數之三角形 OAB, OBC, ……. 各三角形中, 三內角之和, 等於二直角 [63題], 故各三角形之各角之和, 等於多角形邊數二倍之直角. 而各三角形在公頂點 O 周之角, 共爲四直角 [2題], 三角形其他各角之和, 等於多角形內角之和, 故多角形之各內角與四直角之和, 等於多角形邊數二倍之直角.



302.　試聯結多角形之一頂點與其他各頂點, 以證定理多角形各內角之和, 較邊數二倍之直角少四直角.

證　聯結多角形 ABC……MN 之一頂點 A 與他頂點, 則所得之三角形數, 較邊數少二. 是等三角形之一切內角之和, 即多角形之內角之和, 而一三角形之內角和爲 $2\hat{R}$, 故多角形內角和之 $2\hat{R}$ 數, 較邊數少二, 卽多角形內角和之直角數, 較邊數之二倍少四, 換言之, 卽多角形各內角之和, 較邊數二倍之直角

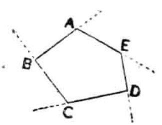


少四直角.

注意 設多角形之邊數爲 n, 則其內角和爲 $2(n-2)$ 直角.

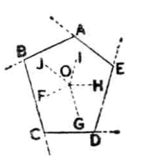
303. 任意凸多角形之各邊,順次延長而生之外角之和,等於四直角.

證 設 ABCDE 爲凸多角形,求證順次延長其各邊而生之一切外角之和,等於四直角. 各角頂上內角與外角之和,等於二直角[9題],故一切內角與一切外角之和,等於二倍多角形邊數之直角,而一切內角與四直角之和,等於二倍多角形邊數之直角,故一切外角之和等於四直角.



304. 試依據一點周圍各角之和等於四直角,以證定理順次延長凸多角形之邊而生之外角之和,等於四直角.

證 設 ABCDE 爲凸多角形,將其各邊順次延長,又任取一點 O, 過 O 平行於 AB, BC, CD, DE 等, 引直線 OF, OG, OH 等, 則 $F\hat{O}G$, $G\hat{O}H$, $H\hat{O}I$ 等分別等於 $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ 等之外角. 故各外角之和,等於點 O 周圍各角之和,卽等於 $4\hat{P}$.



305. 多角形之內角中,銳角數不多於三.

證 若多角形之內角中, 有多於三之銳角, 則因其各外角爲鈍角, 故外角之內,有多於三之鈍角,因而其外角之和大於 $4\hat{R}$. 然多角形外角之和,恆等於 $4\hat{R}$ [303題],故多角形不能有多於三之銳角.

306. 正六角形之各角,爲四直角之三分之一.

證 正六角形內角之和爲 $6\times2\hat{R}-4\hat{R}=8\hat{R}$ [301題], 且其各角相等, 故一角爲 $\frac{8}{6}\hat{R}=\frac{1}{3}\times4\hat{R}$, 卽 $4\hat{R}$ 之三分之一.

307 共一頂點之三個正六角形, 塡充頂點之周圍.

證 正六角形之一角,爲 $4\hat{R}$ 之 $\frac{1}{3}$[306題],故合三角而成一點之周角,卽 $4\hat{R}$.

注意 以正六角形之瓷甎敷地,其形如圖.

308. 某正多角形之內角, 等於外角之三倍,求此正多角形之邊數.

解 一內角與其外角之和, 等於 $2\hat{R}$, 故一外角爲 $\frac{1}{4}\times2\hat{R}$,卽 $\frac{1}{2}\hat{R}$. 而外角之和爲 $4\hat{R}$,故外角之數爲 $4\hat{R}\div\frac{1}{2}\hat{R}=8$, 故邊數爲 8.

309. 正五角形之各角,爲直角之幾分?

解 正五角形內角之和爲 $6\hat{R}$ [301題], 故各角爲 $6\hat{R}$ 之五分之一, 卽直角之五分之六.

310. 多角形內角之和爲十六直角, 求其邊數.

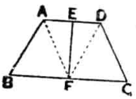
解 內角之和加 $4\hat{R}$,等於二倍邊數之直角[301題],故此多角形邊數二倍之直角應爲 $16\hat{R}+4\hat{R}=20\hat{R}$, 故邊數爲 $20\div2=10$.

311. 正五角形與正十角形之各內角之比爲 3:4. 試證之.

證 正五角形之各角爲 $\frac{6}{5}\hat{R}$,正十角形之各角爲 $\frac{16}{10}\hat{R}$, 故其比爲 $\frac{6}{5}:\frac{16}{10}$, 卽 3:4.

312. 四邊形對邊中點聯結之直線,若垂直於此各邊,則他二邊相等.

證 設四邊形 ABCD 中, AD, BC 之中點,分別爲 E, F; EF 垂直於 AD, BC,則三角形 AEF,



DEF 中, AE = ED, EF 公有, $A\hat{E}F=\hat{R}=D\hat{E}F$, 故 AF = DF, $A\hat{F}E=D\hat{F}E$ [55題]; 而 $B\hat{F}E=C\hat{F}E$[假設], 故 $A\hat{F}B=D\hat{F}C$, 又 AF = DF, BF = CF, 故 $\triangle AFB\equiv\triangle DFC$ [55題], 故 AB = CD.

注意 如是之四邊形, 若以聯結其中點之直線爲界而對折之, 則兩方可全合; 由是以證本題之成立亦可.

313. 五角形中, 得引對角線若干? 又 n 邊多角形中如何?

解 五角形中, 過每一頂點, 得引二對角線, 如是可得十對角線. 但其中兩兩合一, 故五角形之對角線共有五條. 又 n 邊多角形中, 過各頂點之對角線, 爲除此點及其相隣二點外之其餘 $n-3$ 點與其聯結之直線, 故有 $n-3$ 條, 因而全體有 $n(n-3)$ 條. 但其中兩兩合一, 故相異之對角線爲 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 條.

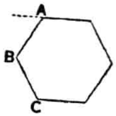
314. 一多角形, 對角線數爲 20, 求其邊數.

解 設以 n 表邊數, 則對角線之總數爲 $\frac{1}{2}n\times(n-3)$ [前題], 此數等於 20, 故 $\frac{1}{2}n(n-3)=20$, 由此得 $n=8$, 故所求之邊數爲 8.

315. 某正多角形之一外角, 等於正十角形一內角之十二分之五, 求其邊數.

解 正十角形之一內角爲 $\frac{16}{10}\hat{R}$, 卽 $\frac{8}{5}\hat{R}$, 故所求之正多角形之一外角爲 $\frac{5}{12}\times\frac{8}{5}\hat{R}$, 卽 $\frac{2}{3}\hat{R}$. 因此外角數爲 $4\hat{R}\div\frac{2}{3}\hat{R}=6$, 故邊數亦爲六, 卽爲正六角形.

316. 某正多角形之外角, 各等於正三角形之內角, 則此正多角形之邊數若何?



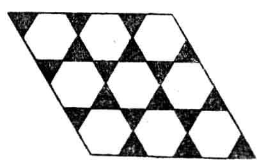
解 設所求之邊數爲 n, 則 $\frac{4}{n}\hat{R}=\frac{2}{3}\hat{R}$ [假設], 故 $n=6$. 因此邊數爲 6, 卽爲正六角形.

317. 以正方形, 正六角形, 正十二角形之各頂角, 得塡充一點之周圍, 試證之. 又以正方形, 正五角形及正二十角形則如何?

解 正方形, 正六角形, 正十二角形之各內角, 分別爲 $\hat{R}$, $\frac{8}{6}\hat{R}$, 及 $\frac{20}{12}\hat{R}$, 是等三者之和等於 $4\hat{R}$, 故此三頂角, 得合而塡充一點之周圍. 又正五角形, 正二十角形之各內角, 分別爲 $\frac{6}{5}\hat{R}$, $\frac{36}{20}\hat{R}$, 合而爲 $3\hat{R}$, 故是等之二頂角與正方形之一角, 亦得塡充一點之周圍.

318. 以正六角形之二角, 及正三角形之二角, 得塡充一點之周圍否?

解 正六角形之一角爲 $\frac{4}{3}\hat{R}$ [306題], 正三角形之一角爲 $\frac{2}{3}\hat{R}$, 故正六角形之二角與正三角形之二角, 合而爲 $\frac{8}{3}\hat{R}+\frac{4}{3}\hat{R}$, 卽 $4\hat{R}$, 故得塡充一點之周圍.



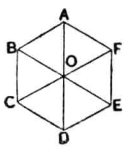
319. 二正八角形與一正方形, 得共一頂點以塡充其周圍. 又以正八角形與正方形之紙張貼於天花板之法如何?

解 (1) 正八角形之一角爲 $\frac{3}{2}\hat{R}$, 故其二倍爲 $3\hat{R}$, 加正方形之一角而爲 $4\hat{R}$, 故得

塡充一點之周圍. (2)正八角形之二角,與正方形之一角合而爲 $4\hat{R}$, 故可如圖貼滿之.

320. 以六個正三角形,得合成一正六角形.

解 茲設有相等之六個正三角形, 命爲 OAB, OBC, OCD, ……. 將此六正三角形, 如圖順次排列之, 則因正三角形之一角爲 $2\hat{R}$ 之三分之一, 卽 $4\hat{R}$ 之六分之一, 故六頂角適塡充一周角, 且六個相等之底, 成六角形之周, 其所成之角, 皆爲正三角形一角之二倍, 故相等;故此六角形爲正六角形.



321. 以同正多角形之紙,裱糊天花板,其法有幾?

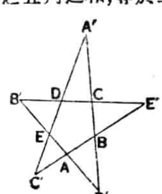
解 適於本題之正多角形,須其頂點上之角,合若干而成一周角,卽 $4\hat{R}$. 故所求之法,有以下三種:

(1) 以四正方形,因其各角爲 $\hat{R}$ 也.

(2) 以六正三角形, 因其各角爲 $4\hat{R}$ 之六分之一也.

(3) 以三正六角形, 因其各角爲 $4\hat{R}$ 之三分之一也.

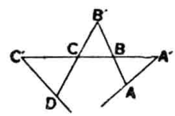
322. 延長凸五角形之各邊,其相交而生之五角之和,等於二直角.



解 延長五角形 ABCDE 之各邊, 令其相交, 設其交點爲 A', B', C', D', E'. 五角形周圍之五三角形各角之和爲 $10\hat{R}$, 而多角形一一所取外角之和爲 $4\hat{R}$ [303題], 故是等三角形底角之和等於 $8\hat{R}$, 因此其各頂角 A', B', C', D', E' 之和等於 $2\hat{R}$.

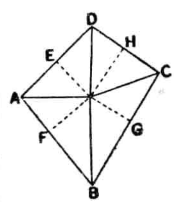
323. 延長 n 邊凸多角形之各邊,其相交而生之 n 個角之和等於 $2(n-4)$ 直角.

解 設 ABCD……爲 n 邊凸多角形, 其各邊延線所成之 n 角爲 $\hat{A}'$, $\hat{B}'$, $\hat{C}'$, ……. 以 A', B', C',……爲頂點之 n 個三角形之內角和爲 $2n\hat{R}$, 而此多角形之外角和爲 $4\hat{R}$, 故是等三角形之底角和爲 $8\hat{R}$,因此 $\hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'+\cdots\cdots=2n\hat{R}-8\hat{R}=2(n-4\,\hat{R}$.

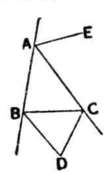


324. 設四邊形四角之二等分線過同點,則一雙對邊之和,等於他雙對邊之和.

解 設四邊形 ABCD 各角之二等分線過同點 O, 引垂線 OE, OF, OG, OH. 於是兩直角三角形 OAE, OAF 中, $O\hat{A}E=O\hat{A}F$, 斜邊 OA 公有,故 $AE=AF$ [80題]. 同理, $BF=BG$, $CG=CH$, $DH=DE$. 據此, $AE+DE+BG+CG$, 卽 $AD+BC$, 等於 $AF+BF+CH+DH$, 卽 $AB+CD$.



325. 三角形 ABC 中, B 及 C 之外角之二等分線所夾之角,等於 A 之外角之半分.

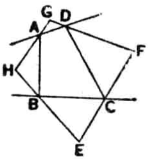


解 三角形三外角之和等於 $4\hat{R}$,故三外角和之半分,卽 $C\hat{A}E$, $D\hat{B}C$, $D\hat{C}B$ 之和等於 $2\hat{R}$,而 $D\hat{B}C$, $D\hat{C}B$, $B\hat{D}C$ 之和亦爲 $2\hat{R}$, 故 $C\hat{A}E=B\hat{D}C$.

326. 由四邊形 ABCD 外角之二等分線所

成之四邊形中,對角互爲補角.

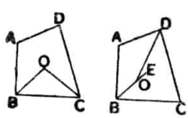
證 卽 ABCD 爲四邊形, 其外角之二等分線所成之四邊形爲 EFGH.



四邊形 ABCD 之外角和爲 $4\hat{R}$,故其各半分之和爲 $2\hat{R}$, 卽 $H\hat{A}B+H\hat{B}A+F\hat{C}D+F\hat{D}C=2\hat{R}$. 而 △HAB, △FCD 內角之和爲 $4\hat{R}$, 故 $\hat{H}+\hat{F}=2\hat{R}$, 因此 $\hat{H}$ 與 $\hat{F}$ 互爲補角. 同理, $\hat{E}$ 與 $\hat{G}$ 亦互爲補角.

327. 四邊形相隣二角之二等分線所夾之角, 等於他二角和之半分, 相對二角之二等分線所夾之角,等於他二角之差之半分.

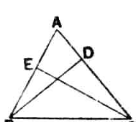
證 (1)甲圖中, $\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{C}+\frac{1}{2}\hat{D}=2\hat{R}$, 又 $\frac{1}{2}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{C}+B\hat{O}C=2\hat{R}$, 故 $B\hat{O}C=\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{D}=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{D})$. (2) 乙圖中, $2D\hat{O}E=4\hat{R}-2B\hat{O}D=4\hat{R}-2\times(\frac{1}{2}\hat{D}+\frac{1}{2}\hat{B}+\hat{C})$. 而 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=4\hat{R}$, 故 $2D\hat{O}E=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}-2(\frac{1}{2}\hat{D}+\frac{1}{2}\hat{B}+\hat{C})=\hat{A}-\hat{C}$, 故 $D\hat{O}E=\frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{C})$.



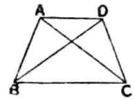
[甲圖] [乙圖]

328. 設三角形 ABC 之垂心爲 H, 則 $B\hat{H}C$ 爲 $B\hat{A}C$ 之補角.

證 設 BH, CH 與對邊之交點, 分別爲 D, E, 則四邊形 ADHE 內角之和爲 $4\hat{R}$, 而 $\hat{D}$, $\hat{E}$ 各爲 $\hat{R}$, 故 $\hat{A}$ 與 $D\hat{H}E$ 互爲補角.然 $D\hat{H}E=D\hat{H}C$, 故 $B\hat{H}C$ 與 $\hat{A}$ 互爲補角.



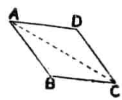
329. 設四邊形 ABCD 中, $A\hat{B}C=B\hat{C}D$, AB=CD, 則 AC=BD.



證 兩三角形ABC, DCB 中, AB = DC, BC 公有, $A\hat{B}C=B\hat{C}D$, 故 AC = BD [55題].

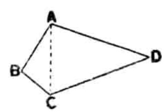
330. 四邊形之二雙對邊等, 則二雙對角亦等.

證 設四邊形 ABCD 中, AB=CD, BC=AD, 則由對角線 AC 所分成之兩三角形中,二邊分別相等,一邊 AC 公有, 故 $\hat{B}=\hat{D}$. 同理, $\hat{A}=\hat{C}$.



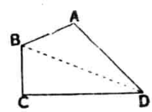
331. 設四邊形 ABCD 中,邊 AD 最大, 邊 BC 最小,則 $B\hat{C}D$ 大於 $B\hat{A}D$, $A\hat{B}C$ 大於 ADC. 試證之.

證 四邊形 ABCD 中, AD 爲最大, 故 AD $>$ CD, 因而 $D\hat{C}A>D\hat{A}C$ [68題]. 又 BC 爲最小, 故 AB $>$ BC, 因而 $B\hat{C}A>B\hat{A}C$. 據此, $D\hat{C}A+B\hat{C}A>D\hat{A}C+B\hat{A}C$, 卽 $B\hat{C}D>B\hat{A}D$. 仿此得證 $A\hat{B}C>A\hat{D}C$.



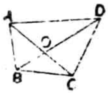
332. 四邊形之任意一邊, 小於他三邊之和.

證 設 ABCD 爲四邊形,聯結 BD. 於是 △BCD 中, CD $<$ BC+BD, 而 △ABD 中, BD $<$ AB+AD, 故 CD $<$ BC+AB+AD. 他邊亦可仿此證之.



333. 四邊形之周大於二對角線之和, 而小於其和之二倍.

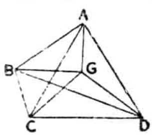
證 設四邊形爲 ABCD. 則 AB+AD $>$ BD,



$BC+CD>BD$, 又 $AB+BC>AC$, $AD+CD>AC$, 故 $2(AB+BC+CD+AD)>2(BD+AC)$, 因此 $AB+BC+CD+AD>BD+AC$. 次,設對角線之交點爲 O, 則 $AB<AO+BO$, $BC<BO+CO$, $CD<CO+DO$, $AD<AO+DO$. 因此 $AB+BC+CD+AD<2(AC+BD)$.

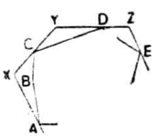
334. 四邊形二對角線之和, 小於由二對角線交點以外之點,至四頂點所引直線之和.

〔證〕 設 ABCD 爲四邊形, G 爲對角線交點以外之任意點, 則 $AC+BD$, 小於 $GA+GB+GC+GD$. 蓋 $AC<GA+GC$, 及 $BD<GB+GD$ 故也.



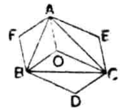
335. 多角形之周, 小於其外圍之任意多角形之周.

〔證〕 設凸多角形ABCDE……之周爲S,其外圍之任意多角形 AXYZ……之周爲 S′. 今 $AB+BC<AX+XC$ [72題], $CD<CY+YD$, $DE<DZ+ZE$, ……, 因此 $AB+BC+CD+\cdots\cdots<AX+XY+YZ+\cdots\cdots$, 即 $S<S'$.



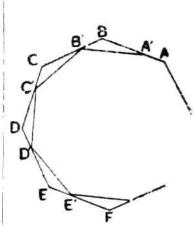
336. 聯三角形 ABC 之各頂點於其外心, 並由各頂點平行於所聯之直線, 引各二直線,則得一六角形. 此六角形之邊皆相等,其角兩兩相等,且等於三角形各頂角之二倍.

〔證〕 設外心爲 O; 引 BF, CE 平行於 AO; AF, CD 平行於 BO; AE, BD 平行於 CO; 而成六角形 AFBDCE. O 爲外心, 故 $AO=BO=CO$, 而六角形之邊,兩兩分別等於AO,BO,CO, 故六邊相等.次, $AF \parallel BO$, $AE \parallel CO$, 故 $E\hat{A}F=B\hat{O}C$, 而 $B\hat{O}C=2B\hat{A}C$ [202題]. 又 BOCD 爲平行四邊形,故 $B\hat{O}C=B\hat{D}C$. 據此, $F\hat{A}E=B\hat{D}C=B\hat{O}C=2B\hat{A}C$. 同理, $F\hat{B}D=A\hat{E}C=2A\hat{B}C$, $D\hat{C}E=A\hat{F}B=2A\hat{C}B$. 故角兩兩相等,而分別等於三角形 ABC 頂角之二倍.



337. 在正多角形之各邊上,順次依同向取距頂點等遠之點, 而順次聯結之, 則得邊數同前之第二正多角形.

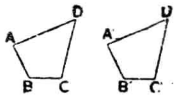
〔證〕 在正多角形 ABCD…… 之各邊上, 順次取 $AA'=BB'=CC'=DD'=\cdots\cdots$, 則 $\triangle A'BB'$, $\triangle B'CC'$ 中, 因 $AB=BC$, $AA'=BB'$, 故 $A'B=B'C$, 又 $BB'=CC'$, $\hat{B}=\hat{C}$, 故 $\triangle A'BB'\equiv\triangle B'CC'$. 同理, $\triangle B'CC'\equiv\triangle C'DD'\equiv\cdots\cdots$. 據此 $A'B'=B'C'=C'D'=\cdots\cdots$; 又 $B\hat{A'}B'=C\hat{B'}C'=D\hat{C'}D'=\cdots\cdots$, 及 $B\hat{B'}A'=C\hat{C'}B'=D\hat{D'}C'=\cdots\cdots$,故 $A'\hat{B'}C'=B'\hat{C'}D'=C'\hat{D'}E=\cdots\cdots$; 故 A′B′C′D′……爲正多角形.



338. 一四邊形之三邊, 分別等於他四邊形中依同順序所取之三邊,又其角亦分別相等,則兩四邊形全等.

〔證〕 設一四邊形 ABCD 之三邊 AB, BC, CD 分別等於他四邊形 A′B′C′D′ 之三邊 A′B′, B′C′, C′D′; 又 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 分別等於 $\hat{B'}$, $\hat{C'}$. 將四

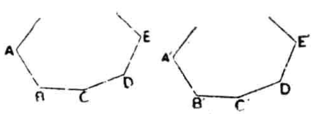
邊形 ABCD 置於 A′B′C′D′ 上,令 A 落於 A′ 上,AB 落於 A′B′ 上,則因 AB＝A′B′,故 B 落於 B′ 上,於是設全形皆在 A′B′ 之同側,則因 $\hat{B}$＝$\hat{B}'$,故 BC 落於 B′C′ 上,又因 BC＝B′C′,故 C 落於 C′ 上.同理,CD 落於 C′D′ 上,D 落於 D′ 上.據此,AD 落於 A′D′ 上,即兩四邊形全合,故全等.



注意 以上證明中,等角在依同順序之相等三邊間;否則三角須分別依同順序相等.

339. 設 n 邊多角形之 $n-1$ 邊與 $n-2$ 個夾角,分別等於他 n 邊多角形中依同順序所取之 $n-1$ 邊與 $n-2$ 個夾角,則此兩形全等.

證 設兩 n 邊多角形 ABCD……,A′B′C′D′……中,AB, BC, CD……等 $n-1$ 條邊分別等於 A′B′, B′C′, C′D′,……等 $n-1$ 條邊,$\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$,……等 $n-2$ 個角,分別等於 $\hat{B}'$, $\hat{C}'$, $\hat{D}'$,……等 $n-2$ 個角.將 ABCD……置於 A′B′C′D′……上,令 A 落於 A′ 上,AB 落於 A′B′ 上,兩形皆在 A′B′ 之同側.於是因 AB＝A′B′,故 B 落於 B′ 上,又因 $\hat{B}$＝$\hat{B}'$,故 BC 落於 B′C′ 上,C 落於 C′ 上.如是以至 $n-1$ 條邊與 $n-2$ 個角頂,分別相合,因而最後一邊之兩端相合,故此邊相合,而兩多角形全合,故全等.



注意 設 $n-2$ 個等角,皆在等邊間,則如上相合.不然,兩多角形或相等,或不等.普偏言之,若 $n-1$ 條邊與 $n-1$ 個角,分別依同順序相等,則兩形全等[參照前題注意].

340. 正方形得以一邊決定之,菱形得以一角與一邊決定之,矩形得以相異二邊決定之.以上各事,試加說明.又欲決定平行四邊形,梯形,普偏四邊形,五角形,及 n 邊多角形須知邊與角若干?

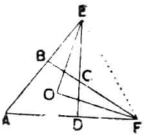
解 正方形之各角,皆為 $\hat{R}$,各邊相等,故有所設邊之正方形僅有一個,因此正方形得以一邊決定之.菱形之對角相等,相鄰之角互為補角,故若知其一角,則其餘各角,皆可推知,又其各邊相等,故菱形得以一邊與一角決定之.矩形之各角皆為 $\hat{R}$,對邊相等,故若知其相隣二邊,即得決定.平行四邊形得以相隣二邊及一角決定之,蓋若知其一角,即可推知其餘各角,且其對邊相等故也.梯形得以相對二底邊及底之二隣角,或以一角及三邊[內二邊平行]決定之.一切普偏多角形中,其第一頂點之位置,得任意定之.次,若知其一邊,則得第二頂點之位置;若更知其一角與一邊,則得其第三頂點之位置,又若順次知其一角與一邊,則可順次得其各頂點之位置.如是若知其 $n-1$ 條邊與 $n-2$ 個角,則可得其第 n 頂點之位置.但最後頂點之位置,亦可以二角決定之.據此,四角形得以三邊及二角,或二邊及三角決定之,五角形得以四邊及三角或三邊及四角決定之;n 邊多角形得以 $n-1$ 條邊及 $n-2$ 個角,或 $n-2$ 條邊及 $n-1$ 個角決定之.

注意 普通須知多角形中角及邊之順序

[338題注意].

341. 延長四邊形 ABCD 之對邊 AB, CD, 令交於 E, 及延長 DA, CB, 令交於 F, 則 $\hat{E}, \hat{F}$, 之二等分線所成之角, 等於 $\hat{A}, \hat{C}$ 和之半分.

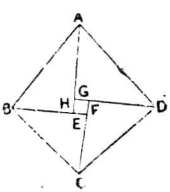
證 聯結 EF. 則 $2E\hat{O}F+2O\hat{E}F+2O\hat{F}E=4\hat{R}$,



而 $2O\hat{E}F+2O\hat{F}E=B\hat{E}C+D\hat{F}C+2C\hat{E}F+2C\hat{F}E=B\hat{E}C+D\hat{F}C+B\hat{C}E+D\hat{C}F$, 故 $2E\hat{O}F+(B\hat{E}C+D\hat{F}C+B\hat{C}E+D\hat{C}F)=4\hat{R}$, 又 $C\hat{B}E+C\hat{D}F+(B\hat{E}C+D\hat{F}C+B\hat{C}E+D\hat{C}F)=4\hat{R}$, 因此 $2E\hat{O}F=C\hat{B}E+C\hat{D}F=\hat{A}+\hat{C}$, 故 $E\hat{O}F$ 等於 $\hat{A}, \hat{C}$ 和之半分.

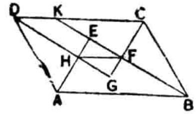
342. 四邊形各角之二等分線, 相交而生第二四邊形, (1) 其兩對角之和爲二直角, (2) 若第一四邊形爲平行四邊形, 則第二四邊形爲矩形, 其兩對角線平行於第一四邊形之各邊, 且等於其兩隣邊之差, (3)若第一四邊形爲矩形, 則第二四邊形爲正方形.

證 (1)設四邊形 ABCD 各角之二等分線爲 AH, BE, CF, DG. 則



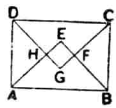
$H\hat{A}B+E\hat{B}A<2\hat{R}$, 故 AH, BE 交於一點 E. 同理, 他二等分線亦兩兩交於一點, 而成四邊形 EFGH. 又 $B\hat{A}E+A\hat{B}E+D\hat{C}G+C\hat{D}G=2\hat{R}$, 而 $B\hat{A}E+A\hat{B}E=A\hat{E}F$, $D\hat{C}G+C\hat{D}G=C\hat{G}H$, 故 $A\hat{E}F+C\hat{G}H=2\hat{R}$, 因而 $E\hat{H}G+E\hat{F}G=2\hat{R}$.

(2) 因 ABCD 爲平行四邊形, 則 $D\hat{A}B+C\hat{B}A=2\hat{R}$, 故 $E\hat{A}B+E\hat{B}A=\hat{R}$, 故 $H\hat{E}F=\hat{R}$; 同理, F, G, H 上之角亦爲直角, 故 EFGH 爲矩形.



又 △ADH, △BCF 中, AD=CB, $D\hat{A}H=B\hat{C}F$, $A\hat{D}H=C\hat{B}F$, 故 DH=BF; 又 CF 將角 C 二等分, 而 BF=FK, 故 DH=FK, 且 DH ∥ FK, 故 HF ∥ DC. 同理, EG ∥ DA. 又 HF=DK=DC−CK=DC−CB.

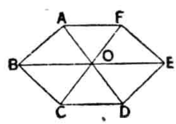
(3) 設 ABCD 爲矩形, 則 $D\hat{A}B=\hat{R}=C\hat{B}A$, 故



$E\hat{A}B=E\hat{B}A$, 故 EA=EB. 而 △DAH, △CBF 爲完全相等之二等邊三角形, 故 AH=FB, 故 EH=FE, 故 EFGH 爲正方形.

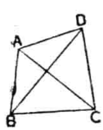
343. 設六角形之三組對邊, 平行而相等, 則其三對角線交於同點.

證 設 ABCDEF 爲六角形, 其三組對邊平行且相等.



此時 AF, CD 平行且相等, 故 ACDF 爲平行四邊形, 因此 CF 過 AD 之中點 O. 又 AB, DE 亦平行且相等, 故 ABDE 爲平行四角形, 因此 BE 過 AD 之中點 O. 據此, 三對角線過同點.

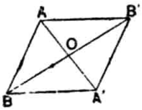
344. 設四角形之二隣邊相等, 且對角線將其夾角二等分, 則他二邊亦等.



證 設四邊形 ABCD 中, AB=AD, AC 將角 BAD 二等分. 此時 AC 將二等邊三角形之底 BD 垂直二等分[93題], 因而 BC=CD [92題].

345. 將二雙關於一點爲對稱之點, 聯結之二直線, 亦關於此點爲對稱. 又此二直線平行且相等.

解　設關於一點 O A, B 之對稱點爲 A′, B′. 此時 AO＝OA′, BO＝OB′, 故 AB′A′B 爲平行四邊形 [240題], 因此, 此四邊形關於 O 爲對稱 [380題], 故 AB, A′B′ 關於 O 爲對稱, 且 AB＝A′B′.



346.　n 邊正多角形各內角之大小如何?

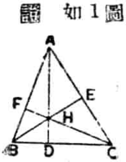
解　n 邊多角形內角之和爲 $2(n-2)\hat{R}$ [302題], 而正多角形中, 各內角相等, 故其一內角等於 $\frac{2(n-2)}{n}\hat{R}=\left(2-\frac{4}{n}\right)\hat{R}$.

347.　設某多角形內角之和, 等於其外角之和, 則此多角形之邊數若何?

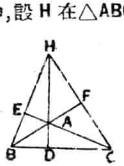
解　設多角形之邊數爲 n, 則其內角和爲 $2(n-2)\hat{R}$, 而外角和等於 $4\hat{R}$, 故 $2(n-2)\hat{R}=4\hat{R}$, 或 $2n-4=4$, 故 $n=4$. 故此多角形爲四邊形.

348.　設點 H 爲三角形 ABC 之垂心, 則角 BHC, CHA, AHB 分別等於角 A, B, C, 或爲其補角.

解　如1圖中, 設 H 在△ABC 之內, 命由各角頂至對邊所引垂線之足爲 D, E, F. 於是四邊形 AEHF 中, $A\hat{E}H=\hat{R}=A\hat{F}H$, 其內角和爲 $4\hat{R}$, 故 $E\hat{A}F+E\hat{H}F=2\hat{R}$, 因此等於 $E\hat{H}F$ 之 $B\hat{H}C$ 與 $\hat{A}$ 亦互爲補角. 同理, $A\hat{H}C+\hat{B}=2\hat{R}$, $A\hat{H}B+\hat{C}=2\hat{R}$. 次, 如2圖中, $\hat{A}$ 爲鈍角, H 在△ABC 之外. 此時 $B\hat{H}C+\hat{A}=2\hat{R}$, 但其他則不然, 卽 $A\hat{H}C=A\hat{B}C$. 何則, 蓋兩直角三角形 AFH, ADB 中, 一銳角 BAD, HAF 爲對頂角, 故相等, 因此他銳角 $A\hat{H}C=A\hat{B}C$. 同理, $A\hat{H}B=A\hat{C}B$.



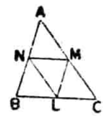
[1圖]



[2圖]

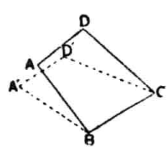
349.　在三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 上, 分別取點 L, M, N, 令三個三角形 ANM, NBL, MLC [角對應於此文字之順序] 互爲等角, 則是等三角形又與三角形 ABC, LMN 互爲等角.

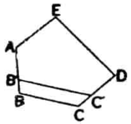
解　由題意, $A\hat{N}M=N\hat{B}L=\hat{B}$, $A\hat{M}N=M\hat{C}B=\hat{C}$, 卽 △ABC, △ANM 互爲等角. 次, NM ∥ BC, 同理, NL ∥ AC, LM ∥ BA. 故 ANLM 爲平行四邊形 $N\hat{L}M=N\hat{A}M=\hat{A}$; 同理, $L\hat{M}N=\hat{B}$, $M\hat{N}L=\hat{C}$, 卽 △ABC, △LMN 互爲等角者.



350.　一多角形之邊, 雖順次一一等於他多角形之邊, 或一多角形之角, 雖順次一一等於他多角形之角, 而二多角形不必相等.

解　兩三角形 ABC, A′B′C′ 中, 其邊分別相等時, 其角亦分別相等, 則兩三角形全等 [77題]. 但反之, 若其角分別相等, 不能謂其邊亦分別相等, 因在一三角形中, 若引其一邊之平行線, 截之以作一新三角形. 則此兩三角形, 一角公有, 兩角分別相等 [44題], 而此兩三角形雖不全等故也. 次設四邊形 ABCD 中, 固定邊 BC, 以 B 爲中心, 將邊 AB 向任意方面迴轉, 令至 BA′ 之位置, 則 D 至 D′ 之位置. 此時兩四邊形 ABCD, A′BCD′ 中, 四邊同順序相等, 而角 ABC, A′BC 不等, 故不能全等. 其他任意邊多角形中, 各邊雖同順序相等, 而角





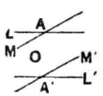
或爲不等，故不能恆全等．又設多角形ABCDE中，引直線$B'C'$平行於BC，且與邊BC之二隣邊AB，CD相交，而作第二多角形$AB'C'DE$，則此兩多角形中，$\hat{A}$，$\hat{D}$，$\hat{E}$公有，且$A\hat{B}C=A\hat{B'}C'$，$B\hat{C}D=B'\hat{C'}D$，故各角分別同順序相等．然其邊不全等，故兩多角形之角雖同順序相等，而不能恆全等．

351. 等邊多角形，卽等角多角形否？又等角多角形，卽等邊多角形否？

解 本題可應用前題解之．設一正多角形，對於一等邊多角形或等角多角形，一邊相等，且邊數亦相等，然依據前題，是等多角形，普通不相合．故等邊多角形，不必卽爲等角多角形，而等角多角形，不必卽爲等邊多角形．

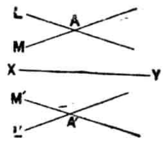
352. 二雙直線關於一點爲對稱，則其交點關於此點亦爲對稱．

證 二直線爲L，M，其關於O點之對稱直線爲L'，M'．命L，M之交點爲A，則因A在直線L上，故其關於O之對稱點A'在直線L'上．仿此，A在直線M上，故A'在直線M'上．據此，A'爲二直線L'，M'之交點．故L，M之交點，與L'，M'之交點關於O爲對稱．



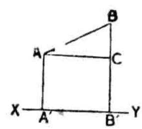
353. 二雙直線關於一直線爲對稱，則其交點關於此直線亦爲對稱．

證 設二直線爲L，M，其關於直線XY之對稱直線分別爲L'，M'．命L，M之交點爲A，其關於直線XY之對稱點爲A'．A在直線L上，故A'在直線L'上；又A在直線M上，故A'在直線M'上；故A'爲二直線L'，M'之交點．故二雙直線之交點A，A'關於直線XY爲對稱．



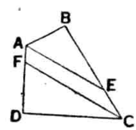
354. 一直線投於他直線上之正射影，不大於原直線．

證 設直線AB投於直線XY上之正射影爲$A'B'$，由A引直線AC平行於XY，命其與BB'或其延線之交點爲C．因$AA' \parallel CB'$，$AC \parallel A'B'$，故$AC=A'B'$．次，$BB' \perp XY$，故$AC \perp BB'$，而普通AB爲BB'之斜線，故$AB>AC$．特別時，AB平行於XY，而與AC相合，則$AB=AC$．故$AB \geqq A'B'$．



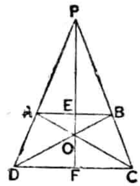
355. 四邊形對角之二等分線平行或一致時，則他二角相等．

證 設四邊形ABCD之對角A，C之二等分線AE，CF相平行，求證$\hat{B}=\hat{D}$．命AE，CF分別交BC，AD於E，F，則$\hat{B}=2\hat{R}-(B\hat{A}E+B\hat{E}A)=2\hat{R}-(D\hat{A}E+F\hat{C}B)$［假設］$=2\hat{R}-(D\hat{F}C+D\hat{C}F)=\hat{D}$．又AE，CF一致時，不過爲以上之特例．



356. 二等邊梯形中，聯結兩底中點之直線，垂直於底邊，兩對角線及不平行二邊之延線，皆交於此直線上．

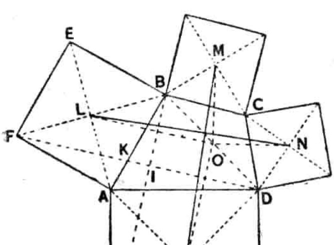
證 設ABCD爲二等邊梯形，其二底邊AB，CD之中點爲E，F，聯結EF，則四邊形AEFD，BEFC中，$AD=BC$，$\hat{A}=\hat{B}$，$\hat{D}=\hat{C}$，$AE=BE$，DF



$=CF$, 故兩形全等. 故 $A\hat{E}F = B\hat{E}F$, $E\hat{F}D = E\hat{F}C$, 因此, EF 垂直於 AB, CD. 次, 聯結對角線 AC, BD, 命其交點爲 O, 則三角形 ACD, BDC 中, $AD = BC$, DC 公有, 且 $A\hat{D}C = B\hat{C}D$, 故此兩形全等, 而 $A\hat{C}D = B\hat{D}C$, 故 $\triangle ODC$ 爲二等邊. 又 EF 爲 CD 之垂直二等分線, 故過點 O. 復次, 設 DA, CB 之延線之交點爲 P, 則 $\triangle PAB$ 爲二等邊, 故與前同理, EF 過點 P. 故如題所言.

357. 在四邊形 ABCD 之各邊上, 以各邊爲一邊, 作正方形, 命其各對角線之交點爲 L, M, N, P, 則 PM 與 LN 相等, 且直交.

解 設 AB, AD 上所作之正方形分別爲 ABEF, AGHD; 聯結 BG, DF, 則因 $AB = AF$, $AG = AD$, $B\hat{A}G = B\hat{A}D + \hat{R} = F\hat{A}D$, 故 $\triangle ABG \equiv \triangle AFD$ 而 $BG = FD$, $A\hat{B}G = A\hat{F}D$. 據此, 設

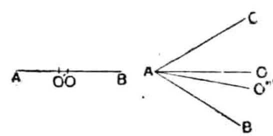


AB, DF 之交點爲 K; BG, DF 之交點爲 I, 則 $\triangle BKI$, $\triangle FKA$ 中, $B\hat{K}I = F\hat{K}A$, 故 $B\hat{I}K = F\hat{A}K = \hat{R}$, 即 $BG \perp FD$. 次, 設對角線 BD 之中點爲 O, 聯結 OL, OP, 則因 L, P 分別爲 BF, DG 之中點, 故 OL, OP 分別平行於 DF, BG, 且等於其半分, 故 $OL \perp OP$, 且 $OL = OP$. 同理, 聯結 OM, ON, 則 $OM \perp ON$, 且 $OM = ON$. 據此, $L\hat{O}N = L\hat{O}M + \hat{R} = M\hat{O}P$, 故 $\triangle LON \equiv \triangle MOP$, 因而 $LN = MP$. 又此兩三角形中, 二邊分別互相垂直, 故第三邊 LN, MP 亦互相垂直. 故 $LN = MP$, 且 $LN \perp MP$.

第六章 雜題

358. 一線分之中點唯一. 一角之二等分線唯一.

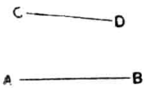
解 設 AB 爲有限直線, 求證其中點唯一.



假定有二中點 O, O′, 則 $AO = \frac{1}{2}AB$, $AO' = \frac{1}{2}AB$, 故 $AO = AO'$ [公理 c]. 據此, 不論 O′ 在線分 AO 上, 或在線分 BO 上, 總之因全體等於其部分, 乃違反公理 a. 故 AB 之中點唯一. 次, 求證角 BAC 之二等分線唯一. 設 AO 將角 BAC 二等分, 此外尙有二等分線 AO′, 則 $B\hat{A}O = \frac{1}{2}B\hat{A}C$, $B\hat{A}O' = \frac{1}{2}B\hat{A}C$, 故 $B\hat{A}O = B\hat{A}O'$. 據此, 不論 AO′ 在角 BAO 內, 或在角 OAC 內, 總之, 因全體等於其部分, 乃違反公理 a. 故一角之二等分線唯一.

359. 試述同一平面上之二直線相關之位置.

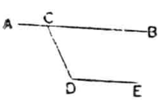
解 於同一平面上,引任意二直線 AB, CD 時,此二直線或相交,或不交.若不交,則 $AB \parallel CD$;若相交,則其所成之角中,隣角相等時, $AB \perp CD$; 否則 CD 爲 AB 之斜線.



注意 設 AB,CD 相合,則可視爲二線平行,而其距離爲零之特例.

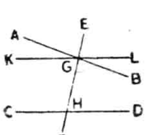
360. 二人相偕沿一直道步行,途中一人右折而成某角度,向前直行,若干時後,復作同前角度之左折,向前直行,此後二人無論步行若干時,决不相會.其故安在?

解 設最初二人在直線 AB 上前進,至 C, 一人右折而成角 ACD, 又於 CD 上之點 D, 作 $C\hat{D}E = A\hat{C}D$ 之左折而前進.此時兩直線 AB, DE 與一直線 CD 相交而成之錯角 $A\hat{C}D = C\hat{D}E$, 故 $AB \parallel DE$ [38題]. 故今後此兩人在此二直線上,無論步行若干時,决不能相會.



361. 一直線截二直線時,若在此橫截線同側之二內角之和,小於二直角,則以後此二直線交於是側.

證 設一直線 EF 與二直線 AB, CD 交於點 G, H, 且 $B\hat{G}H + G\hat{H}D < 2\hat{R}$. 今過點 G,引平行於 CD 之直線 KGL, 則 $L\hat{G}H + G\hat{H}D = 2\hat{R}$. 故 $L\hat{G}H > B\hat{G}H$,因而其補角 $K\hat{G}H < A\hat{G}H$, 故 AB 必與 CD 交.然 GB 在角 LGH 之內, GA 在角 KGH 之外;故 GA 無論如何延長,恆與 CD 在 GK 之異側,而不相交. 因此,若將 GB 向 B 方延長,必與 CD 交.

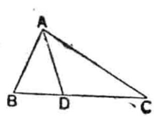


362. 試述平行於同一直線之二直線相平行之逆定理,且證之.

解 原定理之假設爲二直線 B, C, 平行於一直線 A;終結爲 B, C 互相平行. 據此,其逆定理如下:(1)若 $B \parallel C$,且 $A \parallel B$ 則 $A \parallel C$; (2)若 $B \parallel C$,且 $A \parallel C$,則 $A \parallel B$.據此,此二逆定理得綜括述之如次:二平行直線之一,若平行於第三直線,則他一亦必平行於第三直線. 而此逆定理,實際與原定理爲同一之定理,特其敍述之方法不同耳.蓋 $B \parallel C$, $A \parallel B$ 者,卽二直線 A, C,平行於同一直線 B 之謂,而終結則爲二直線 A, C 平行故也.

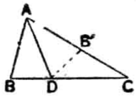
363. 設三角形 ABC 角 A 之二等分線與邊 BC 之交點爲 D,而角 B 大於角 C,則角 ADB 爲銳角, 角 ADC 爲鈍角. 又若角 B, C 相等,則如何?

證 $A\hat{D}B = \hat{C} + C\hat{A}D$, $A\hat{D}C = \hat{B} + B\hat{A}D$. 然 $C\hat{A}D = B\hat{A}D$, 及 $\hat{C} < \hat{B}$, 故 $A\hat{D}B < A\hat{D}C$. 故 $A\hat{D}B$ 爲銳角, $A\hat{D}C$ 爲鈍角. 又 $\hat{B} = \hat{C}$, 則 $A\hat{D}B = A\hat{D}C$, 故 $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$ 皆爲直角.



364. 設三角形 ABC 角 A 之二等分線與邊 BC 之交點爲 D,而邊 AC 大於邊 AB,則角 ADC 爲鈍角.反之,若角 ADC 爲鈍角,則 AC 大於 AB.

證 設以 AD 爲界,而將 △ABD 對折,則因 $B\hat{A}D = C\hat{A}D$, 故 AB 與 AC 相合.而 $AC > AB$, 故 B 落於 AC 上,命其點爲 B';則 $A\hat{D}B'$,卽 $A\hat{D}B$ 小於 $A\hat{D}C$,故 $A\hat{D}C$ 爲鈍角.反之,設 $A\hat{D}C$



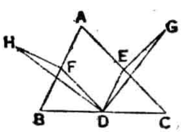
爲鈍角,則以 AD 爲界,而將 △AED 對折時,因 $B\hat{A}D=C\hat{A}D$,故 AB 合於 AC. 但 $A\hat{D}B<A\hat{D}C$,故 B 落於 AC 上之點 B′,故 AC 大於 AB′,卽 AB.

365. 設兩二等邊三角形之底角,互爲餘角,則頂角互爲補角.

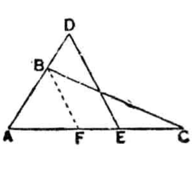
證 設 ABC, A′B′C′ 爲兩二等邊三角形,分別以 A, A′ 爲頂點,且 $\hat{B}+\hat{B}'=\hat{R}$,則 $\hat{A}=2\hat{R}-2\hat{B}$, $\hat{A}'=2\hat{R}-2\hat{B}'$,故 $\hat{A}+\hat{A}'=2\hat{R}-2\hat{B}+2\hat{R}-2\hat{B}'=4\hat{R}-2(\hat{B}+\hat{B}')=4\hat{R}-2\hat{R}=2\hat{R}$.

366. 設三角形 ABC 之三邊 BC, CA, AB 之中點,分別爲 D, E, F;由 E, F,在三角形外,分別引 AC, AB 之垂線 EG, FH,令其分別等於 AC, AB 之半分,則三角形 DEG, DFH 全等,且角 GDH 爲直角.

證 $DE=\frac{1}{2}AB$ [2 2題] $=FH$ [假設]; $EG=\frac{1}{2}AC=DF$;又 $DE \parallel AB$ [232題], $DF \parallel AC$,故 $D\hat{E}C=\hat{A}=D\hat{F}B$,故 $D\hat{E}G=\hat{R}+D\hat{E}C=\hat{R}+D\hat{F}B=H\hat{F}D$,故 $\triangle DEG \equiv \triangle HFD$ [55題]. 次, $G\hat{D}H=E\hat{D}G+E\hat{D}F+F\hat{D}H=E\hat{D}G+D\hat{E}C+E\hat{G}D=2\hat{R}-G\hat{E}C=\hat{R}$.

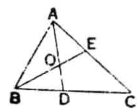


367. 設兩三角形 ABC, ADE 公有一頂角,且 $AD=AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$,則三角形 ADE 之底邊 DE,將三角形 ABC 之底邊 BC 二等分.



證 $AD=AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$,故 $AD+AE=AB+AC$. 今設 $AB<AC$,則 $BD=EC$. 次,引 $BF \parallel DE$,則因 △ADE 爲二等邊,故 $BD=FE$,因此 $FE=EC$,故 DE 將 BC 二等分 [231題].

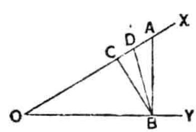
368. 三角形 ABC 中,設 A 爲直角,角 B 之二等分線與邊 AC 之交點爲 E,又由 A 至斜邊 BC 所引之垂線與 BE 之交點爲 O,則 AO, AE 相等.



證 $B\hat{A}E=\hat{R}$, $A\hat{D}B=\hat{R}$,故 $A\hat{E}B=$($A\hat{B}E$ 之餘角), $A\hat{O}E=B\hat{O}D=$($O\hat{B}D$ 之餘角). 而 $A\hat{B}E=O\hat{B}D$ [假設],故 $A\hat{E}B=A\hat{O}E$ 據此, $AO=AE$.

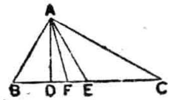
369. 在一角之一邊上取任意點,由此至他邊引垂線,復由其足至前邊引垂線,則此二垂線所成角之二等分線,在其同側與二邊成等角.

證 設由 $X\hat{O}Y$ 之一邊 OX 上之一點 A 引 OY 之垂線 AB,由 B 引 OX 之垂線 BC,命 $A\hat{B}C$ 之二等分線與 OX 之交點爲 D;求證 BD 與 OX, OY 成等角. 今 $O\hat{B}C=$($\hat{O}$ 之餘角)$=O\hat{A}B$, $C\hat{B}D=D\hat{B}A$ [假設],故 $O\hat{B}C+C\hat{B}D=O\hat{A}B+D\hat{B}A$,卽 $O\hat{B}D=O\hat{D}B$.



370. 直角三角形直角之二等分線,將由同角頂所引垂線與中線所成之角二等分.

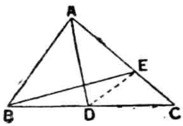
證 直角三角形 ABC 中,設由直角頂 A 至 BC 所引之垂線,中線,二等分線分別爲 AD, AE, AF. 求證 AF 將 $D\hat{A}E$ 二等分. E 爲 BC 之中點.



故 $E\hat{A}C=E\hat{C}A$ [124題] = ($\hat{B}$ 之餘角) = $B\hat{A}D$ 而 $B\hat{A}F=F\hat{A}C$, 故 $D\hat{A}F=F\hat{A}E$, 卽 AF 將 $D\hat{A}E$ 二等分.

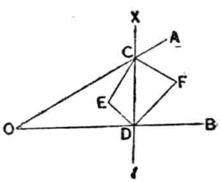
371. 由三角形之二角頂, 向對邊所引之直線, 不能互相二等分.

證　設由 △ABC 之角頂 A, B, 向對邊所引之直線爲 AD, BE. 若 AD, BE 互相二等分, 則 ABDE 爲平行四邊形[240題], 而 AE, BD 不得不平行. 此違反假設, 故 AD, BE 必不能互相二等分.



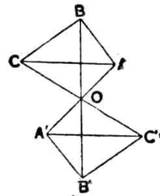
372. 所設二直線爲横截線所截時, 在横截線同側之二內角之二等分線, 交於所設二直線所成角之二等分線上.

證　設二直線 OA, OB 爲横截線 XY 截於點 C, D, 命其同側內角 OCD, ODC 之二等分線交於 E, 則 E 在角 AOB 之二等分線上, 因E 爲△OCD 之內心故也 [179題]. 又命他同側內角 ACD, BDC 之二等分線交於 F, 則 F 爲△OCD 之傍心, 故仍在 $A\hat{O}B$ 之二等分線上 [180題].



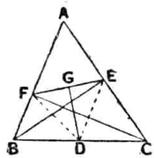
373. 設三線分 AA′, BB′, CC′ 交於一點 O 且 O 爲各線分之中點, 則兩三角形 ABC, A′B′C′ 全等. 又設三點 A, B, C 在一直線上, 則 A′, B′, C′ 亦在一直線上.

證　因 AA′, BB′ 在點 O 互相二等分, 故 AB, A′B′ 平行且相等[240題]. 同理, BC, B′C′; CA, C′A′ 亦各平行且相等. 據此, △ABC, △A′B′C′ 中, 三邊相等, 故兩形全等[77題]. 若 A, B, C 在一直線上, 則因 AB ∥ A′B′, AC ∥ A′C′, 故 A′B′, A′C′ 在一直線上, 即 B′ 在 A′C′ 上.



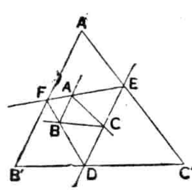
374. 設三角形 ABC 中, 由二角頂 B, C 至對邊所引之垂線爲 BE, CF, 則聯結 EF 之中點與 BC 中點之直線, 垂直於 EF.

證　設 BC, EF 之中點, 分別爲 D, G, 則 D 爲直角三角形 BEC 斜邊之中點, 故 BD = DE [124題]. 同理, BD = DF; 故 DE = DF, △DEF 爲二等邊, 故 DG ⊥ EF [94題].



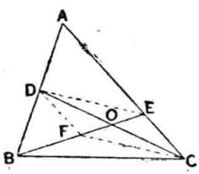
375. 設三角形 ABC 之各外角二等分線所成之三角形爲 DEF, 三角形 DEF 之各外角二等分線所成之三角形爲 A′B′C′, 則角 A′ 之大在角 A 與 $\frac{2}{3}\hat{R}$ 之間.

證　$\hat{D}=\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{A}$ [122題]. 同理, $\hat{E}=\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{B}$, $\hat{F}=\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{C}$. 同理, $\hat{A}'=\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{D}$, 故 $\hat{A}'=\hat{R}-\frac{1}{2}(\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{A})=\frac{1}{2}\hat{R}+\frac{1}{4}\hat{A}$. 倣此, $\hat{B}'=\frac{1}{2}\hat{R}+\frac{1}{4}\hat{B}$, $\hat{C}'=\frac{1}{2}\hat{R}+\frac{1}{4}\hat{C}$. 據此, △DEF 中各二角之差, 等於 △ABC 中各二角差之半分; △A′B′C′ 中各二角之差, 等於 △ABC 中各二角差之 $\frac{1}{4}$. 故 △A′B′C′ 較 △ABC 近於正三角形. 而 △ABC 各角大小之順序, 對應於 △A′B′C′ 各角大小之順序, 故角 A′ 在



角A與$\frac{2}{3}\hat{R}$之間. 但若$\hat{A}$爲$\frac{2}{3}\hat{R}$, 則$\hat{A}'$亦爲$\frac{2}{3}\hat{R}$.

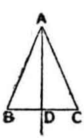
376. 設三角形 ABC 中,邊 AB 之中點爲 D, 在邊 AC 上取線分 AE, 令爲 AC 之三分之二;命 CD, BE 之交點爲 O, 則 OE 爲 BE之四分之一.



證 設BE之中點爲 F, 聯結 DF, 則 DF∥AE, 且 DF $=\frac{1}{2}$AE [232 題] 因 AE $=\frac{2}{3}$AC [假設],故 CE $=\frac{1}{3}$AC, 因此 CE$=\frac{1}{2}$AE, 故 DF$=$CE. 故聯結 DE, FC, 即得平行四邊形 DECF [226 題]; 因此 OE $=$OF$=\frac{1}{4}$BE.

377. 二等邊三角形頂角之二等分線, 爲其對稱軸.

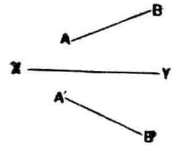
證 設二等邊三角形 ABC 之頂角爲 A, 其



二等分線爲AD,命其與底邊之交點爲D;求證AD將二等邊三角形 ABC 分於對稱. 今以 AD 爲界, 將△ADC 折疊於△ADB 之上,則因 D$\hat{A}$B$=$D$\hat{A}$C,故AC合於 AB 上,且因 AB 等於 AC,故 C 落於B上. 因而 DC 與 DB 重合, 而兩三角形完全相合. 故 AD 爲△ABC 之對稱軸.

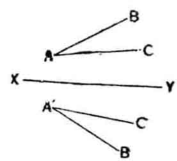
378. 設二點 A,B, 關於 XY 分別爲 A′, B′ 之對稱點,則直線 AB 等於直線 A′B′ [AB 與 A′B′ 之關係曰關於 XY 爲軸對稱].

證 A 關於 XY 爲 A′ 之對稱點. 換言之,以 XY 爲界, 將 A 方之平面圖, 折疊於 A′方,



則 A 落於 A′上;同理; B 落於 B′上;因而 AB 全合於 A′B′ 上, 故相等.

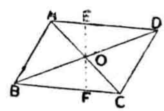
379. 二直線 AB, AC 所成之角 CAB, 等於此二線關於直線 XY 之對稱直線 A′B′, A′C′ 所成之角 C′A′B′.



證 仿前題, 以對稱軸 XY 爲界,將圖對折, 則 AB 合於 A′B′上, AC 合於 A′C′ 上,因此 C$\hat{A}$B $=$C′$\hat{A}'$B′.

380. 平行四邊形中具有關於其對角線交點之點對稱.

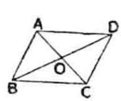
證 設▱ABCD 之對角線交於點 O,過 O 在任意兩對邊間引任意直



線 EOF, 則因 OA $=$ OC, O$\hat{A}$E$=$O$\hat{C}$F, A$\hat{O}$E$=$C$\hat{O}$F, 故 OE$=$OF. 故過 O 在對邊間所引直線,恆爲 O 所二等分,即 O 爲平行四邊形之對稱中心. 故平行四邊形中具有關於其對角線交點之點對稱.

381. 設四邊形關於其對角線之交點爲對稱,則此四邊形爲平行四邊形.

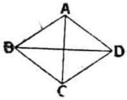
證 設四邊形 ABCD 關於對角線之交點 O



爲對稱,即過O在兩對邊間所引直線,恆二等分於O點. 於是 △AOD,△COB 中, OA $=$OC, OD$=$OB [假設], A$\hat{O}$D $=$C$\hat{O}$B, 故 O$\hat{A}$D$=$O$\hat{C}$B. 故 AD∥BC; 同理, AB∥CD. 據此, ABCD 爲平行四邊形.

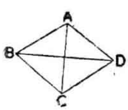
382. 菱形關於其各對角線爲對稱.

證　設 ABCD 爲菱形.菱形之對角線,將其角二等分[252題],故設以 BD 爲界,將△BCD 折疊於△BAD 之上,則因 $D\hat{B}C = D\hat{B}A$, $B\hat{D}C = B\hat{D}A$, 故 BC, DC 分別合於 BA, DA 上,因而 C 落於 A 上,即全合. 故 BD 爲菱形 ABCD 之對稱軸;同理, AC 亦爲同形之對稱軸. 故菱形關於各對角線爲對稱.



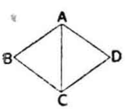
383.　設四邊形關於其各對角線爲線對稱,則四邊形爲菱形.

證　設四邊形 ABCD 關於對角線 AC 爲線對稱,即以 AC 爲界,而將△ABC 折於△ADC 之上,則全合,故 AB = AD, CB = CD. 仿此,設關於對角線 BD 爲線對稱,則 AB = CB. 故四邊相等,因而爲菱形.



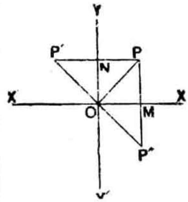
384.　平行四邊形關於其對角線之一爲線對稱,則此平行四邊形爲菱形.

證　設▱ABCD 關於其對角線之一 AC 爲對稱,即以 AC 爲界,將△ABC 折於△ADC 之上而全合,則 AB = AD. 然 AB = CD, AD = BC, 故四邊相等,而爲菱形.



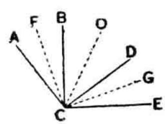
385.　關於互相垂直之二直線爲對稱之平面圖形,關於此二直線之交點爲對稱.

證　設互相垂直之二直線爲 XX′, YY′, P 爲關於此二直線爲對稱之平面圖形中之一點.此時因圖形關於 XX′ 爲對稱,故有 P 關於 XX′ 之對稱點 P″,又因關於 YY′ 爲對稱,故有 P 關於 YY′ 之對稱點 P′. 聯結 OP, OP′, OP″,則因△POM, △P″OM 全等,故 $P\hat{O}M = P''\hat{O}M$, 同理, $P\hat{O}N = P'\hat{O}N$, 故 $P'\hat{O}P'' = P'\hat{O}P + P\hat{O}P'' = 2P\hat{O}N + 2P\hat{O}M = 2\hat{R}$. 而 P′O = OP = P″O, 故 P′, P″ 關於 O 爲對稱.如是圖形中一切點具關於 O 爲對稱之點,故此圖形關於 O 點爲對稱.



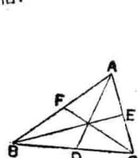
386.　設兩角 ACB, DCE 公有頂點 C. 且各角二等分線所成角之二等分線 CO, 將 $A\hat{C}E$ 或 $B\hat{C}D$ 二等分,則 $A\hat{C}B = D\hat{C}E$.

證　先,設 CO 將 $A\hat{C}E$ 二等分, 則由假設, $F\hat{C}O = G\hat{C}O$, $A\hat{C}O = E\hat{C}O$, 故 $A\hat{C}F = E\hat{C}G$. 但 $A\hat{C}B = 2A\hat{C}F$, $D\hat{C}E = 2E\hat{C}G$. 故 $A\hat{C}B = D\hat{C}E$. 次,設 CO 將 $B\hat{C}D$ 二等分, 亦可仿前證之.



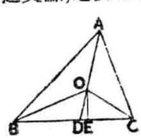
387.　三角形之周,小於其三中線和之二倍.

證　$AB + AC - BC < 2AD$ [151 題], $AB + BC - AC < 2BE$, $AC + BC - AB < 2CF$, 故相加,則 $AB + BC + AC < 2(AD + BE + CF)$.



388.　設 O 爲三角形 ABC 各角二等分線之交點,延長 AO, 令交 BC 於 D,由 O 引 BC 之垂線 OE, 則 $B\hat{O}D = C\hat{O}E$.

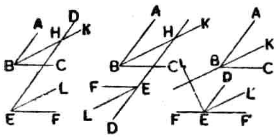
證　三角 A, B, C 之和爲 $2\hat{R}$, 故 $A\hat{B}O + B\hat{A}O + B\hat{C}O = \hat{R}$; 而 $A\hat{B}O + B\hat{A}O = B\hat{O}D$



[63題],故 $B\hat{O}D+B\hat{C}O=\hat{R}$;而 $C\hat{O}E+B\hat{C}O=\hat{R}$,故 $B\hat{O}D=C\hat{O}E$.

389. 設二角之二邊,分別平行,則二角之二等分線或平行,或垂直.

證　設 $A\hat{B}C$, $D\hat{E}F$ 之二邊,分別平行, BK, EL



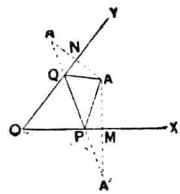
分別為其二等分線. (1) 若兩角中,二邊皆同向或異向,則可命 BK, DE 之交點為 H, 於是因 $A\hat{B}C=D\hat{E}F$ [53題], 故其半分 $A\hat{B}H=D\hat{E}L$. 而 $AB \parallel DE$, 故 $A\hat{B}H=B\hat{H}E$, 故 $B\hat{H}E=D\hat{E}L$, 故 $BK \parallel EL$. (2) 若兩角中,二邊之一同向,他一異向,則可延長 FE 至 F',命 $D\hat{E}F'$ 之二等分線為 EL',於是由(1), $EL' \parallel BK$. 但 $L\hat{E}L'=\hat{R}$ [18題],故 BK,EL 亦互相垂直 [42題].

390. 設三角形 ABC 中,一底角 B 為他底角 C 之二倍,則底邊之中點與由頂點 A 向底邊所引垂線之足之距離,等於邊 AB 之半分.

證　設 AH 為 BC 之垂線, D 為 BC 之中點, E 為 AB 之中點. 因 $E\hat{H}B=\hat{B}=2\hat{C}$, $E\hat{D}H=\hat{C}$ 故 $H\hat{E}D=E\hat{H}B-E\hat{D}H=2\hat{C}-\hat{C}=\hat{C}$. 故 $E\hat{D}H=H\hat{E}D$, 因而 $HD=EH=\frac{1}{2}AB$.

391. 角內之某點上有一彈,擊之使順次觸於二邊,而返至原點,則此彈所經之路徑如何?

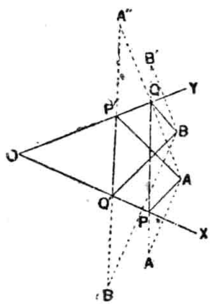
解　設角 XOY 內之一點 A, 為彈子最初之位置. 命 A 關於 OX 之對稱點為 A', 關於 OY 之對稱點為 A'', 聯結 A'A'', 命其與 OX, OY 之交點分別為 P, Q, 則 APQ 為所求之彈子路徑. 蓋 A' 為 A 之對稱點,



故 $A\hat{P}M=A'\hat{P}M=O\hat{P}Q$, 故由 A 沿 AP 擊出後之彈子,觸 OX 而循 PQ 折回. 又同理, $P\hat{Q}O=A\hat{Q}N$, 故沿 PQ 射出之彈子,觸 OY 而循 QA 折回.

392. 位於角內一點上之彈,欲擊之使順次觸及二邊,反射至角內之他點,則彈之路徑如何?

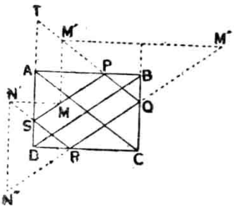
證　設彈最初在角 XOY 內之 A 點,欲擊之使觸及二邊後再觸 B 點之彈. 命 A 關於 OX 之對稱點為 A'; B 關於 OY 之對稱點為 B'; 聯結 A', B', 命其與 OX, OY 分別交於 P, Q; 聯結 AP, QB, 則仿前題,得證 APQB 為所求之擊彈路徑. 又取 A 關於 OY 之對稱點 A'', 取 B 關於 OX 之對稱點 B'', 聯結 A''B'', 則又得一路徑 AP'Q'B.

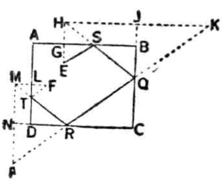


393. 設矩形之彈子臺上有二彈,今欲擊其一,使觸四邊後復至原位置,則當取若何之路徑?

又欲令至他彈之位置,則當取若何之路徑?

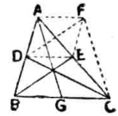
解 設M爲彈之原位置,欲擊之使觸矩形ABCD之四邊AB, BC, CD, DA於P, Q, R, S,而復返於M.命M, N關於AB,AD之對稱點分別爲M′,N′;命M′, N′關於BC, CD之對稱點分別爲M″, N″. 此時 $S\hat{R}D=N''\hat{R}D=Q\hat{R}C$, $P\hat{Q}B=M''\hat{Q}B=R\hat{Q}C$, 故M″, Q, R, N″在一直線上, 而銳角P, R爲等角之餘角,故相等,因而PQ∥RS.同理, PS∥QR.故PQRS爲平行四邊形,且其邊平行於矩形ABCD之對角線AC, BD. 故由M平行於對角線BD而擊彈, 則彈觸四邊後復至原位置. 次,設欲將在臺上E點之彈子,擊之使觸各邊,而最後與F點上之彈子相觸.由E引AB之垂線EG, 延長EG至H, 令GH=EG;由H引至CB延線之垂線HJ,延長HJ至K, 令JK=HJ; 由F引AD之垂線FL, 延長至M,令LM=LF;由M引至CD延線之垂線MN,延長至P, 令NP=MN.聯結KP,令交BC於Q,交CD於R.聯結HQ,MR,命交AB於S,AD於T.聯結ES, FT.則ESQRTF卽爲所求之路徑.





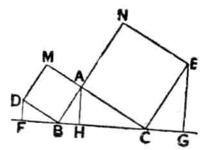
394. 三角形任意二中線之和,大於第三中線.

證 在△ABC中,引中線BE, CD,平行於BE引DF,平行於AB引EF,則△DCF之三邊表△ABC之三中線[287題].而△DCF任意二邊之和,大於第三邊[70題],故△ABC任意二中線之和,大於第二中線.



395. 直角三角形ABC中,就其直角之二邊AB, AC上作正方形ABDM, ACEN, 由對直角項A之角頂D, E, 引斜邊BC延線之垂線DF, EG, 則(1)斜邊BC等於DF, EG之和,(2)原三角形ABC等於兩三角形DFB, CEG之和.

證 (1)由A引BC之垂線AH, 則△ABH, △BDF中, $B\hat{A}H$, $D\hat{B}F$皆爲$A\hat{B}H$之餘角, 故相等;同理, $A\hat{B}H=B\hat{D}F$, 且BA=BD, 故BH=DF [56題].

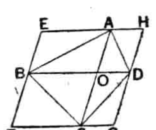


仿此, CH=EG. 故DF+EG=BH+CH=BC.

(2)由以上之證明, △ABH≡△BDF, △ACH≡△CEG, 故△BDF+△CEG=△ABC.

396. 過四邊形各對角線之兩端, 引平行於他對角線之直線,則是等直線所成之平行四邊形,爲原四邊形之二倍. 並由此定理,證兩四邊形中,若二對角線及其所夾角相等,則兩四邊形之面積亦等.

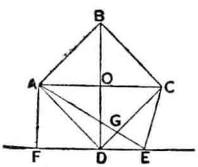
證 設過四邊形ABCD之各角頂, 引平行於其各對角線之四直線所成之平行四邊形爲EFGH, 命對角線之交點爲O,則因AB爲▱OE之對角線, 故△AEB≡△AOB [222題]. 同理, △FCB≡△BOC,



$\triangle CGD \equiv \triangle COD$, $\triangle DHA \equiv \triangle DOA$. 故 ▱EFGH $= 2$ (四邊形 ABCD). 次, 設兩四邊形中, 對角線分別相等, 且其所成之角亦等, 則因皆爲等平行四邊形之半分[224題], 故其面積相等.

397. 平行於正方形 ABCD 之對角線 AC, 引 DE, 令 AE 等於 AC, 命 AE, CD 之交點爲G, 則 CGE 爲二等邊三角形.

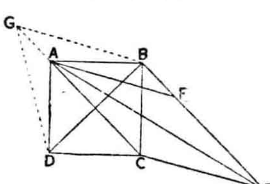
圖 延長 ED, 並引其垂線 AF, 聯結 BD, 則



AFD爲直角二等邊三角形, 故 $F\hat{A}D = \frac{1}{2}\hat{R}$. 但 $AE = AC = 2OD = 2AF$, 故直角三角形 AFE 中, $A\hat{E}F = \frac{1}{2} E\hat{A}F = \frac{1}{3}\hat{R}$. 而 $EF \parallel CA$, 故 $E\hat{A}C = A\hat{E}F = \frac{1}{3}\hat{R}$. 故 $A\hat{E}C = \frac{1}{2}(2\hat{R} - E\hat{A}C) = \frac{5}{6}\hat{R}$. 又 $E\hat{A}D = E\hat{A}F - D\hat{A}F = \frac{2}{3}\hat{R} - \frac{1}{2}\hat{R} = \frac{1}{6}\hat{R}$, 故 $A\hat{G}D = \hat{R} - \frac{1}{6}\hat{R} = \frac{5}{6}\hat{R}$. 而 $C\hat{G}E = A\hat{G}D$, 故 $C\hat{G}E = \frac{5}{6}\hat{R}$. 故 $C\hat{E}G = C\hat{G}E$, 因此 CGE 爲二等邊三角形.

398. 平行於正方形 ABCD 之對角線 AC 引 BE, 在 BE 上取 F 點, 令 $AF = AC$, 而成菱形 CAFE, 則 AE 及 AF 將 $B\hat{A}C (= \frac{1}{2}\hat{R})$ 三等分.

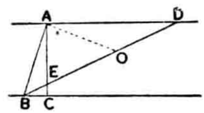
圖 以 BD 爲一邊, 在其上作正三角形 GBD, 則知 G,A,C 在一直線上. $BF \parallel GA$, 故



$F\hat{B}A = G\hat{A}B$, $FA = AC = BD = BG$, 而 AB 爲 $\triangle FBA$, $\triangle GAB$ 所共, 故 $F\hat{A}B = G\hat{B}A$ [81題], 故 $FA \parallel BG$, 故 $F\hat{A}C = B\hat{G}C = \frac{1}{3}\hat{R}$. 而 $F\hat{A}C$ 爲 AE 所二等分, 故 $E\hat{A}C = F\hat{A}E = \quad \hat{R}$. 而 $D\hat{A}F = \frac{1}{2}\hat{R} - \frac{1}{3}\hat{R} = \frac{1}{6}\hat{R}$. 故 $B\hat{A}C$ 爲 AF, AE 所三等分.

399. 設 AD 及 BC 爲二平行線, AB 爲其間之斜線, AC 爲 BC 之垂線. 引直線 BED, 截 AC 於 E, 令 $ED = 2AB$, 則 $D\hat{B}C = \frac{1}{3} A\hat{B}C$.

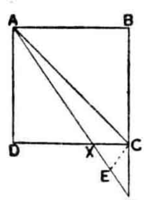
圖 將 ED 二等分於 O, 聯結 AO, 則因 ED



$= 2AB$, 故 $EO = OD = AB$. 而 $AO = \frac{1}{2}ED$ [124題], 是以可知 $AB = AO$, $AO = OD$ 故 $A\hat{B}O = A\hat{O}B$, $O\hat{D}A = O\hat{A}D$; 因此 $A\hat{B}O = 2O\hat{D}A = 2D\hat{B}C$, 故 $A\hat{B}C = 3D\hat{B}C$, 故 $D\hat{B}C = \frac{1}{3} A\hat{B}C$.

400. 設 ABCD 爲正方形, 過 A 引直線 AXY, 截 DC 於 X, 截 BC 之延線於 Y, 則 AX 及 AY 之和, 大於 AC 之二倍.

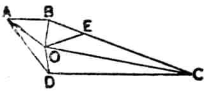
圖 設 XY 之中點爲 E, 則 $AX + AY = 2AE$



[34題]. 又 AX 在直角三角形 ADC 內, 故 $A\hat{X}D > A\hat{C}D$, 故 $A\hat{X}D > \frac{1}{2}\hat{R}$, 因而 $E\hat{X}C > \frac{1}{2}\hat{R}$. 而 $\triangle E\hat{C}X$ 中, $EC = EX$, 故 $E\hat{X}C = E\hat{C}X$, 故 $E\hat{C}X > \frac{1}{2}\hat{R}$. 據此, $A\hat{C}D + E\hat{C}X > \hat{R}$, 卽 $A\hat{C}E > \hat{R}$, 故 $A\hat{E}C < \hat{R}$, 因此 $A\hat{C}E > A\hat{E}C$, 故 $AE > AC$, 卽 $2AE > 2AC$, 卽 $AX + AY > 2AC$.

401. 設四邊形 ABCD 中, 二邊 AB, CD 互相平行, 且其和等於 BC, 則 $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ 之二等分線交於 AD 上.

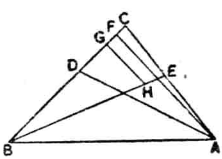
圖 設 $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$ 之二等分線交於 O. 因 $AB \parallel CD$, 故 $A\hat{B}C + B\hat{C}D = 2\hat{R}$, 故其半分 $O\hat{B}C$



$+O\hat{C}B=\hat{R}$. 取 BE $=AB$, 則 $CE=CD$ [假設]. 故 $\triangle ABO$, $\triangle EBO$ 中, $AB=BE$, BO 公有, $A\hat{B}O=E\hat{B}O$, 故 $A\hat{O}B=E\hat{O}B$ [55題]. 同理, $D\hat{O}C=E\hat{O}C$. 故 $A\hat{O}B+B\hat{O}E+E\hat{O}C+D\hat{O}C=2(B\hat{O}E+E\hat{O}C)=2\hat{R}$. 故 AO, OD 成一直線, 卽 O 在 AD 上.

402. 設三角形兩角之二等分線, 其止於對邊之部分相等, 則三角形爲二等邊.

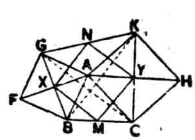
證 設 $\triangle ABC$ 中, $\hat{A}$ 及 $\hat{B}$ 之二等分線 AD BE 相等, 若 $AC \neq BC$, 則 $AC \lessgtr BC$. 今假定 $AC<BC$, 則 $C\hat{A}B>C\hat{B}A$, 故其半分 $D\hat{A}C>E\hat{B}C$.



於是命 $D\hat{A}F$ 等於 $E\hat{B}C$, 則因 $D\hat{A}B>A\hat{B}E$, 故 $F\hat{A}B>F\hat{B}A$, 故 $FB>FA$. 截取 BG, 令等於 FA; 引 GH, 令平行於 FA. 於是 $\triangle GBH$, $\triangle FAD$ 中, $BG=AF$, 其兩端之角分別相等, 故 $BH=AD$ [59題], 而 $BE=AD$ [假設], 此處 $BH=BE$, 不合理, 故 $C\hat{A}B$ 不大於 $C\hat{B}A$. 同理, $C\hat{A}B$ 不小於 $C\hat{B}A$. 故 $C\hat{A}B=C\hat{B}A$, 因而 $CA=CB$.

403. 就三角形 ABC 之二邊 AB 及 AC 上, 向三角形之外側, 作正方形 ABFG, ACHK, 則此兩正方形中對角線之交點, 與 BC 及 GK 之中點, 爲另一正方形之四頂點.

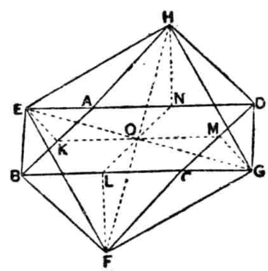
證 $\triangle ABK$, $\triangle AGC$ 中, $AB=AG$, $AK=AC$, $B\hat{A}K=G\hat{A}C$, 故此兩三角形全等. $BH=CG$. 而 $AB\perp AG$, $AK\perp AC$, 故 $BK\perp CG$ [204題]. 又 MX, NY 皆平行於 CG, 且爲其半分. 故 MX



$\parallel NY$, 且 $MX=NY$. 同理, NX, MY 皆平行於 BK, 且爲其半分. 故 $NX\parallel MY$, 且 $NX=MY$. 而 $CG\perp BK$, $CG=BK$, 前已證明, 故 MX, NY 與 NX, MY 成直角, 且相等. 故MXNY 爲正方形.

404. 在平行四邊形之各邊上, 向外方作直角二等邊三角形, 則其各直角頂爲一正方形之各角頂.

證 設 ABCD 爲平行四邊形, ABE, BCF,

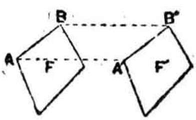


CDG, DAH 爲在其各邊上向外方所作之直角二等邊三角形. 由 E, F, G, H 分別引 AB, BC, CD, DA 之垂線 EK, FL, GM, HN, 則 K, L, M, N 分別爲邊 AB, BC, CD, DA 之中點. 故 $KM\parallel AD$, $LN\parallel AB$. 又 $FL=BL=AN=HN$, 而 LF, HN 爲平行二邊 BC, AD 之垂線, 故相平行, 因此 FLHN 爲平行四邊形 [226題], 故 FH, LN 互相二等分, 換言之, FH 過 LN 之中點. 同理, EG, KM 互相二等分, 換言之, EG 過 KM 之中點. 而 LN, KM 互相二等分於 O, 故 FH, EG 互相二等分於 O. 又 $\triangle EKO$, $\triangle HNO$ 中, $EK=AK=ON$, $KO=AN=NH$, $E\hat{K}O=\hat{R}+A\hat{K}O=\hat{R}+A\hat{N}O=O\hat{N}H$, 故 $\triangle EKO\equiv\triangle ONH$,

[55題], 故此兩三角形等角, 且 $EO = HO$. 而 $EK \perp AB$, 即 $EK \perp ON$; $HN \perp AD$, 即 $HN \perp KO$; 故 $EO \perp HO$ [204題]. 故 EG, FH 互相二等分於 O, 且 $EG \perp FH$, $EG = FH$, 故 EFGH 爲正方形.

405. 設同向且相等之二圖形 F, F′ 中, 一組對應線分 AB, A′B′ 爲同向, 則可由平行移動, 將 F 移至 F′ 之位置.

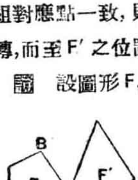
證 F, F′ 全等, 故對應線分 AB, A′B′ 亦相等, 又 AB, A′B′ 同向, 故平行. 因此聯結 A, A′; B, B′ 之直線平行且相等. 故 F, F′ 之對應線分皆平行, 聯結對應點之直線皆與 AA′ 平行且相等. 故 F′ 爲 F 平行移動而得之位置, 故得由平行移動法, 將 F 移至 A′ 之位置.



注意 由一圖形 F 之各點 A, 依一定方向, 經一定距離取各點 A′, 則 A′ 成與 F 全等之圖形 F′, 如是由圖形 F 作 F′, 曰平行移動.

406. 設同向且相等之二圖形 F, F′ 中, 一組對應點一致, 則得以此點爲中心, 將 F 迴轉, 而至 F′ 之位置.

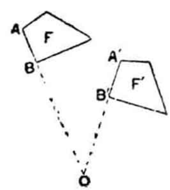
證 設圖形 F, F′ 中, 對應點 A, A′ 相一致. 此時將 F, F′ 中之對應點 B, B′, 各與 A 聯結, 則 $B\hat{A}B'$ 之大小一定, 且 $AB = AB'$. 故 F′ 爲 F 以 A 爲中心, 迴轉而得之位置, 因此 F 得以 A 爲中心, 而迴轉至 F′ 之位置.



注意 聯結定點 O 與圖形 F 中各點 A 之直線 OA, 依同向迴轉一定之角度, 而至 OA′ 之位置, 則 A′ 成與圖形 F 全等之 F′. 如是由圖形 F 作 F′ 曰迴轉.

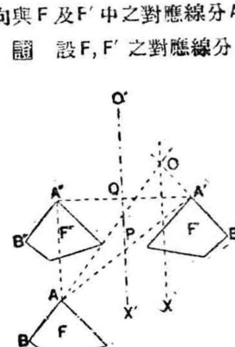
407. 同向且相等之二圖形, 得由平行移動或迴轉使其一致.

證 設同向且相等之二圖形爲 F, F′, 其對應線分爲 AB, A′B′. 此時設 AB, A′B′ 或其延線相交, 則命其交點爲 O. 於是以 O 爲中心, 將 F 迴轉 $A\hat{O}A'$ [或其補角], 而至 F′ 之位置, 令 AB, A′B′ 在一直線上且同向. 於是 F, F′ 之位置, 顯然可由平行移動以交換. 次, 設 AB, A′B′ 平行, 而其方向相同, 則由 405 題, 可知得將 F 平行移動至 F′ 之位置. 若其方向相反, 則 F, F′ 有中心對稱, 故得將 F 迴轉至 F′ 之位置. 綜上所述, 可知圖形 F, F′ 得由平行移動或迴轉而趨於一致.



408. 設二圖形 F, F′ 異向且相等, 則由平行移動, 得將 F 移至 F′ 之軸對稱位置, 且得令對稱軸與平行移動之方向互相平行 [此方向與 F 及 F′ 中之對應線分 AB, A′B′ 成等角].

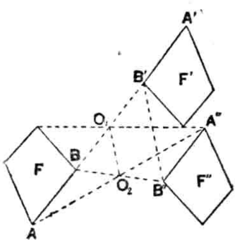
證 設 F, F′ 之對應線分 AB, A′B′ 交於 O, 作 $A\hat{O}A'$ 之二等分線 OX, 聯結 AA′, 過其中點 P, 平行於 OX, 引直線 O′X′. 於是以 O′X′ 爲軸, 在 F′ 之軸對稱位置, 作圖形



F″, 命 F″ 中與 A′ 對應之點爲 A″. 聯結 A′A″, 設其與 O′X′ 之交點爲 Q, 則 O′Q ⊥ A′A″, A′Q = QA″. 故聯結 AA″, 則 AA″ 平行於 O′X′. 又 F, F″ 爲同向相等之圖形, 其對應線分 AB, A″B″ 爲同向, 此可由作圖而知之者. 故依照 AA″ 之方向, 及 AA″ 之距離, 將 F 平行移動, 則可至 F″ 之位置 [405 題]. 故如題所言.

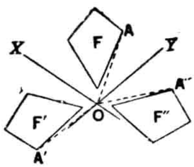
409. 設圖形 F′ 及 F″, 分別以 O_1 及 O_2 爲中心, 而與同一圖形 F 對稱, 則得由平行移動, 將 F′ 移至 F″ 之位置[其平行移動之方向與 O_1O_2 同, 距離等於 O_1O_2 之二倍].

證 設 F, F′, F″ 之一對應點分別爲 B, B′, B″, 則 O_1, O_2 分別爲 BB′, BB″ 之中點. 故聯結 B′B″, 則 B′B″ 平行於 O_1O_2, 且等於其 2 倍. 同理, 聯結 F′, F″ 中其他對應點之直線, 皆平行於 O_1O_2, 且等於其 2 倍. 據此, 將 F′ 依 O_1O_2 之方向, 及二倍 O_1O_2 之距離, 而平行移動, 則至 F″ 之位置.



410. 設圖形 F′ 與 F″, 分別以 x 及 y 爲軸而與同一之圖形 F 對稱, 則得以 x, y 之交點爲中心, 而將 F′ 迴轉至 F″ 之位置 [迴轉之角等於 x, y 夾角之二倍]. 又設 x, y 平行, 則可由平行移動, 令 F′ 至 F″ 之位置.

證 F′, F″ 皆爲 F 之對稱圖形, 故同向相等. 命 x, y 之交點爲 O, 則聯結 O 與 F, F′, F″ 中對應點 A, A′, A″ 之直線皆相等, 且 x, y 分別將 $A\hat{O}A'$, $A\hat{O}A''$ 二等分, 故 F′, F″ 之對應點距 O 等遠, 且 $A\hat{O}A''$ 爲 x, y 所成角之 2 倍. 故以 O 爲中心, 將 F′ 迴轉 x, y 所夾角之 2 倍, 則至 F″ 之位置. 又設 x, y 互相平行, 則聯結 F, F′, F″ 對應點 A, A′, A″ 之直線, 在垂直於 x, y 之同一直線上, 而 A′A″ 之長, 恆等於 x, y 距離之二倍, 故得由平行移動, 令 F′ 至 F″ 之位置.



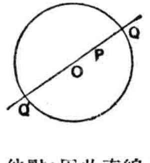
第二編

圓

第一章 基本性質

411. 由圓之中心至某點之距離, 視其點在圓內, 在圓周上, 或在圓外, 而小於, 等於, 或大於半徑.

證 設 O 爲圓之中心, P 爲任意點; 求證視 P 在圓內, 圓周上, 圓外, 而 OP 小於半徑, 等於半徑, 大於半徑. 過 O 與 P 之直線, 交圓周於二點 Q, Q′, 而不更交於他點; 因此直線上之點, 距 O 等於半徑者唯二故也. 設 P 在 Q 與 Q′ 之間, 則 P 在圓內, 而 OP 小於 OQ, 卽半徑. 設 P 與 Q 或 Q′ 相合, 則 P 在圓周上, 而等於 OQ 或 OQ′, 卽等於半徑. 設 P 在 OQ 或 OQ′ 之延線上, 則



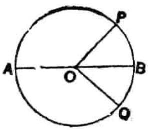
P 在圓外.而 OP 大於 OQ 或 OQ′,卽大於半徑.

412. 某點之位置,視其與圓之中心之距離,小於,等於,或大於半徑,而在圓內,圓周上,或圓外.

證 由前題可知.

413. 圓之任意直徑,將圓分成全等之二部.[此各部曰半圓].

證 設 O 爲圓 APBQ 之中心,AOB 爲其任意直徑;求證 APB 一部,等於 AQB 一部.在弧 APB 上取任意點 P,聯結 OP,在 AOB 之他側,引半徑 OQ,令其與 OB 之夾角 BOQ,等於角 BOP.於是以 AB 爲界,將 APB 折至 AQB 上,則因 $B\hat{O}P$ 等於 $B\hat{O}Q$,故 OP 落於 OQ 上,且因 OP 等於 OQ,故 P 與 Q 合.據此,弧 APB 之各點,與弧 AQB 之某點合.同理,弧 AQB 之各點,得與弧 APB 之某點合.故圖形 APB 與圖形 AQB 全合,故此兩圖形全等.

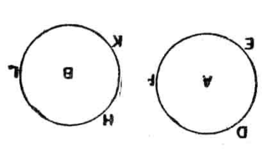


414. 圓中互相垂直之二直徑,將此圓分成全等之四部.[此各部曰象限,或四分圓].

證 圓得以任意直徑爲界,對折之令其全合[前題];而又得以垂直於此直徑之直徑爲界,對折之令其全合.故如題所言.

415. 半徑相等之二圓全等.

證 設 DEF,HKL 爲半徑相等之二圓,求證圓 DEF 全等於圓 HKL.設 A,B 分別爲圓 DEF,HKL 之中心,將圓 DEF 置於圓 HKL 上,令中心 A 合於中心 B 上,則 DEF 圓周上之任何點,皆落於 HKL之圓周上.何則,因由 HKL 之中心,至是點之距離,等於圓 DEF 之半徑,從而等於圓 HKL 之半徑故也[412題].仿此,HKL 圓周上之任意點,皆落於 DEF 之圓周上.據此,兩圓周相合,故兩圓相合而全等.



416. 設兩圓相合,則以公有之中心爲樞,將一圓迴轉任意之角,而兩圓恆可相合.

證 由前題可知.

417. 半徑不等之同心圓,決不相交.

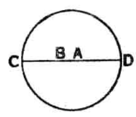
證 由415題可知.

418. 設二圓相交,則此二圓不能同心.

證 由415題可知.

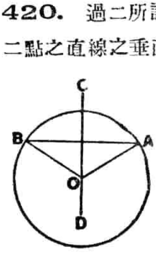
419. 一圓之中心唯一.

證 設有二中心 A 及 B,過此二點引直徑 CD,則因 A,B 皆爲圓之中心,故皆爲直徑之中點[定義],因而 AC = BC.此不合理,故不能有兩中心.故圓之中心唯一.



420. 過二所設點之圓,其中心在聯結此二點之直線之垂直二等分線上.

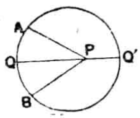
證 設過所設二點A,B之任意圓之中心爲 O,則 OA = OB [定義],卽中心 O 爲距二點 A,B 等遠之點,因而在直線 AB 之垂直二等分線上[95及100題].



421. 由圓內之一點,在過此點之直徑之兩側,引二直線至圓周,令其與直徑之夾角

相等,則此二直線相等.

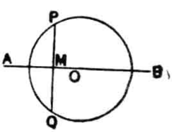
證　設過圓內所設點P之直徑為QPQ′, 且



$Q\hat{P}A = Q\hat{P}B$, 則 AP = BP. 何則, 蓋以直徑 QPQ′ 為界, 將 QAQ′ 折至 QBQ′ 上,則半圓 QAQ′ 全合於半圓 QBQ′ 上 [413題], 而 $Q\hat{P}A$, $Q\hat{P}B$ 相等 故 PA 合於 PB 上,因而 A 落於 B 上. 故 AP = BP.

422.　過一所設點, 且中心在一所設直線上之圓周,皆過他一定點.

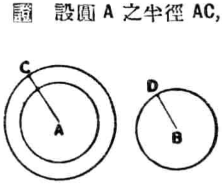
證　命所設點為 P, 所設直線為 AB; 求證



過 P 且中心在 AB 上之圓周,皆過他一定點. 由 P 引 AB 之垂線 PM, 在其延線上按 PM = MQ 取 Q. 於是 AB 為 PQ 之垂直二等分線,故 AB 上之一切點,距 P, Q 等遠[95及100題]. 據此,設以 AB 上之任意點 O 為中心,以 PO 為半徑而作圓,則圓周又過他定點 Q.

423.　圓之半徑大者,大於半徑小者.

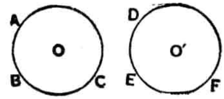
證　設圓 A 之半徑 AC, 大於圓 B 之半徑



BD. 取圓 B, 置於圓 A 上,令中心 B 合於中心 A,則因 AC > BD, 故點 C 在圓 B 之外[412題],其他圓 A 周上之點,皆在圓 B 之外.故圓 A 大於圓 B [普. 公. (a)].

424.　等圓之半徑相等.

證　設圓 O 與圓 O′ 相等. 取圓 O′ 置於圓 O 上, 令中心 O′ 合於中心 O 上, 則因兩圓

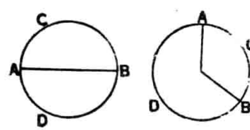


相等, 是以圓周 DEF 與圓周 ABC 全合. 故由 O 至原圓周之距離, 等於至後圓周之距離. 故兩圓之半徑相等.

425.　圓之一弧,等於其共軛弧,則此弧若何?

又設一弧等於其共軛弧之半分,則如何?

解　設弧 ACB 等於其共軛弧 ADB. 因弧

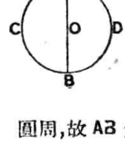


ACB＋弧ADB 全圓周,故弧 ACB 為半圓周. 次, 設弧 ACB 等於其共軛弧 ADB 之半分, 則弧 ACB 為全圓周之 $\frac{1}{3}$.

426.　所設曲線是否為圓之弧, 當如何定之?

解　於所設曲線上, 任取三點, 過此三點作圓, 而察其是否與曲線相合. 若曲線與圓周相合, 則曲線為圓之弧, 否則非圓之弧.

427.　一直線為圓之對稱軸,則此直線為直徑.

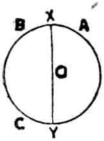


證　設直線 AB 為圓 O 之對稱軸,則以 AB 為界, 而將圓對折, 則此一部分可全合於他一部分上, 故弧 ACB 等於弧 ADB. 因此弧 ACB 為半圓周, 故 AB 為圓之直徑.

428.　設一線關於過所設點之各直線成

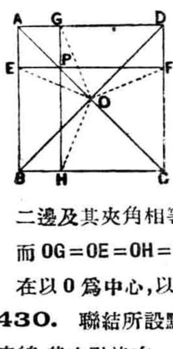
線對稱,則此線爲以所設點爲中心之圓周.

證　設一線 ABC, 關於過所設點 0 之一切直線成線對稱. 在線上取一點 A, 聯結 0A, 更於線上任取他點 B, 聯結 0B, 則 $0A=0B$; 因作 $A\hat{0}B$ 之二等分線 XY, 則 XY 過 0, 而線 ABC 關於過 0 之直線皆爲對稱, 因而關於 XY 亦爲對稱故也. 故線上之一切點,與 0 之距離,皆等於 0A; 因此所設線乃以 0 爲中心之圓周.



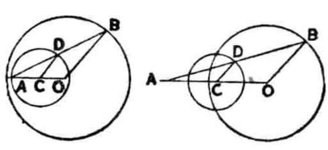
429. 過正方形對角線上之任意點, 引邊之平行線, 則此線與邊之交點, 皆在以對角線交點爲中心之圓周上.

證　設正方形 ABCD 對角線上之一點爲 P, 過 P 平行於邊之直線爲 EF, GH, 則 AEPG 爲正方形[276題], 故 $AG=AE$. 又 $AG=BH$, $AE=DF$. 故四三角形 0AG, 0AE, 0BH, 0DF 中, 二邊及其夾角相等, 故四三角形全等, 因而 $0G=0E=0H=0F$. 故四點 G, E, H, F 皆在以 0 爲中心,以 0G 爲半徑之圓周上.



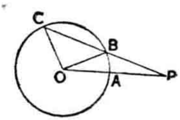
430. 聯結所設點與所設圓周上諸點之直線,其中點皆在一定圓周上.

證　命所設點爲 A, 所設圓之中心爲 0, 圓周上之任意點爲 B. 聯結 AB, A0, B0, 二等分 AB 於 D, 由 D 平行於 B0 引 DC, 截 A0 於 C, 則 C 爲 A0 之中點[231題]. 而 A 及 0 皆爲所設點,故 C 爲一定點. 又 CD 爲 B0 之半分[232題],而 B0 爲所設圓之半徑,故其長一定,因此 CD 之長亦爲一定.據此,聯結 A 點與圓周上諸點之各直線,其中點在以 C 爲中心, 以 B0 之半分爲半徑之圓周上.



431. 在定圓外取一點, 設由中心至此點之距離, 小於半徑之三倍, 則得由此點引一直線, 令此線在圓內之部分, 等於圓周與此點間之部分.

證　設定圓之中心爲 0, 圓外之一點爲 P, 則因 0AP 小於半徑之三倍[假設], 故 AP 小於直徑. 又於 A 之外,就圓周上另取一點 B, 聯結 PB, 延長之,令再交圓周於 C. 聯結 0B 則 $\triangle B0P$ 中,邊 B0, BP 之和, 大於邊 P0. 而 0A, 0B 各爲定圓之半徑,故相等,故 BP 大於 AP. 又聯結 0C, 則 $\triangle B0C$ 中,邊 0B, 0C 之和大於邊 BC[70題]. 而 0B, 0C 之和等於定圓之直徑,故 BC 小於直徑. 故隨點 B 在圓周上之位置,漸次脫離 A, 而 PB 漸次大於 PA, 其長漸次近於定圓之直徑, BC 則漸次小於定圓之直徑. 據此, 得於圓周上之某點,令 BC, PB 相等.

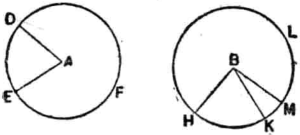


第二章　弧,弦,及中心角,圓周角

432. 同圓或等圓中,等中心角立於等弧

上;中心角不等,則大中心角立於大弧上.

證 (1)設等圓 DEF HKL 之中心,分別爲



A, B, 此二圓中,設角 DAE 等於角 HBK;求證角 DAE 所立之弧 DE, 等於角 HBK 所立之弧 HK. 將圓 DEF 置於圓 HKL 上, 令中心 A 合於中心 B, 則因此二圓相等,故二圓全合. 圓 DEF 以中心爲樞而廻轉,令 AD 合於 BH 上, 則因圓仍相合[416題], 故 D 點與 H 點合. 於是因角 DAE 等於角 HBK [假設], 故 AE 合於 BK 上,而 E 點落於 K 點. 故弧 DE 合於弧 HK, 因而相等.

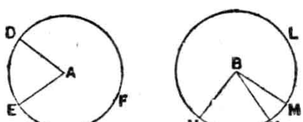
(2) 又設角 DAE 大於角 HBK, 求證弧 DE 大於弧 HK. 將圓 DEF 置於圓 HKL 上,令半徑 AD 與 BH 相合, 則 AE 與 BK 外之某半徑 BM 相合, 而弧 DE 與大於弧 HK 之弧 HM 相合. 故弧 DE 大於弧 HK.

433. 同圓或等圓中,等角之二扇形相等,不等角之二扇形中,角大者形亦大.

證 可如前題由疊合而證明之.

434. 同圓或等圓中,等弧張等中心角. 不等弧中,大者張大中心角.

證 設等圓 DEF, HKL 之中心,分別爲 A, B,



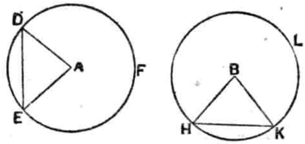
此二圓中, DE 與 HK 爲張中心角 DAE, HBK 之二弧. 求證隨弧 DE 大於, 等於, 小於弧 HK, 而中心角 DAE 大於,等於,小於中心角 HBK. 432題中,業已證明若角 DAE 大於角 HBK 則弧 DE 大於弧 HK; 若角 DAE 等於角 HBK, 則弧 DE 等於弧 HK;若角 DAE 小於角 HBK, 則弧 DE 小於弧 HK. 而是等假設中、必有一者成立; 終結中則二者不能同時成立. 故據轉換法, 以上各定理之逆定理亦成立.

435. 同圓或等圓中,等扇形有等角,不等扇形中,大者有大角.

證 由前題自明.

436. 同圓或等圓中,等弧張等弦,不等之二劣弧中,大者張大弦.

證 (1)設等圓 DEF, HKL 中,弧 DE 等於弧



HK;求證弦 DE 等於弦 HK. 設 A 及 B 爲二圓之中心,聯結 AD, AE, BH, BK, 則因弧 DE 等於弧 HK, 故不問 DE 及 HK 爲優弧劣弧, 三角形 ADE 之角 DAE, 等於三角形 BHK 之角 HBK [434題]. 據此, 三角形 ADE, BHK 中,邊 AD 等於邊 BH, 邊 AE 等於邊 BK, 而角 DAE 等於角 HBK, 故邊 DE 等於邊 HK [55題].

(2) 次,設劣弧 DE, 大於劣弧 HK; 求證弦 DE 大於弦 HK. 因劣弧 DE 大於劣弧 HK, 故三角形 ADE 之角 DAE, 大於三角形 BHK 之

角 HBK [434題].據此,三角形 ADE, BHK 中,邊 AD 等於邊 BH, 邊 AE 等於邊 BK, 而角 DAE 大於角 HBK, 故底 DE 大於底 HK [75題].

437. 同圓或等圓中,二優弧不等,則大弧張小弦.

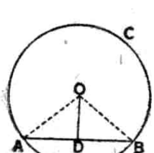
證 由前題自明.

438. 同圓或等圓中,等弦張等劣弧,及等優弧,二弦不等,則大弦張大劣弧及小優弧.

證 由436題之圖,設 DE, HK 爲等圓 DEF, HKL 之弦,求證隨弦 DE 大於,等於,小於弦 HK, 而劣弧 DE 大於,等於,小於劣弧HK,又優弧 DE 則小於,等於,大於優弧 HK. 今設劣弧 DE 大於劣弧 HK, 則弦 DE 大於弦 HK; 設劣弧 DE 等於劣弧 HK, 則弦 DE 等於弦 HK; 設劣弧 DE 小於劣弧 HK, 則弦 DE 小於弦 HK. 而是等假設中,其一必成立,又是等終結中, 二者不能同時成立. 故據轉換法,可知隨弦 DE 大於,等於,小於弦 HK, 而劣弧 DE 大於,等於,小於劣弧 HK; 又全圓周 DEF, HKL 相等,故優弧 DE 因之而小於,等於,大於優弧 HK.

439. 由圓之中心,向其弦之中點所引之直線,垂直於其弦.

證 設 O 爲圓 ABC 之中心, D 爲弦 AB 之中點,求證直線 OD 垂直於弦 AB.聯結 OA,OB, 則兩三角形 OAD,OBD 中,邊 AD 等於邊 BD[假設],邊 OD 爲兩形公有,且邊OA 等於邊OB,



故角 ODA 等於角 ODB [77題]. 據此,直線 OD 垂直於弦 AB.

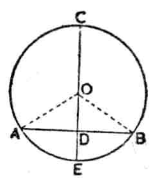
440. 由圓之中心,向其弦所引之垂線,將弦二等分.

證 由前題之圖, 設 O 爲圓 ABC 之中心, OD 爲由 O 向弦 AB 所引之垂線, 求證 AB 二等分於 D.聯結 OA, OB 則兩三角形 OAD, OBD 中,邊 OA 等於邊 OB, 邊 OD 爲兩形所公有, 而角 ODA, ODB 皆爲直角,故相等.因此, AD 等於 BD [81題],即 AB 二等分於 D.

注意 由圓之中心,向弦所引之垂線,又將此弦所分之共軛弧二等分.

441. 圓中弦之垂直二等分線,必過圓之中心.

證 設 AB 爲圓 ABC 之弦, CE 爲過其中點 D 之垂線,求證 CE 過圓之中心.設 O 爲圓之中心,聯結 OA, OB, OD, 則兩三角形 OAD, OBD 中,邊 AD 等於邊 BD[假設],邊 OD 爲兩形所共, 且邊 OA 等於邊

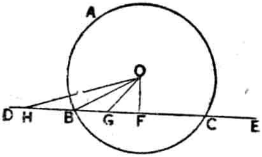


OB,故角 ODA 等於角 ODB [77題],故 OD 爲 AB 之垂線. 而 CD 亦爲 AB 之垂線 [假設], 故 OD 與 CD 合,即 CD 過圓之中心.

注意 439, 440, 441 三題之中, 若有一者經幾何方法證明,則由同一法可知其他成立.

442. 弦之兩端間即弦上之點,皆在圓內,弦之延線上之點,皆在弦外.

證 設直線 DBCE 過圓 ABC 周上之任意二點 B 與 C, 求證 BC 上之點, 皆在圓內,而 BD 及 CE 上之點, 皆在圓外. 設圓之中心爲 O, BC 之中點爲 F; G 爲 F 與 B 間之任



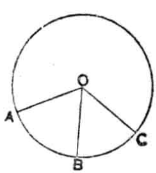
意點, H 爲 BD 上之任意點, 聯結 OF, OG, OB, OH. 因 F 爲弦 BC 之中點, 故 OF 爲 BC 之垂線[439題], 故 OF 小於 OB [73題], 故 F 在圓內 [412題]. 又角 GOF 小於角 BOF, 故 OG 小於 OB [73題], 故 G 在圓內. 同理 F 與 C 間之任意點皆在圓內. 又角 HOF 大於角 BOF, 故 OH 大於 OB [73題], 故 H 在圓外 [412題]. 同理, CE 上之任意點亦在圓外.

443. 一直線與圓周之交點, 不多於二.

證 由前題自明.

444. 過不在同一直線之三點, 得作唯一之圓.

證 設 A, B, C 爲不在一直線上之三點, 求證過 A, B, C 得作一圓, 而限於一. 距 A, B 等遠之點, 在 AB 之垂直二等分線上[95及100題]; 同理, 距 B, C 等遠之點, 在 BC 之垂直二等分線上. 今取其交點 O [52題], 聯結 OA, OB, OC, 則 OA, OB, OC 皆相等, 故以 O 爲中心, 以 OA 爲半徑所作之圓, 過 A, B, C. 又距 A, B, C 等遠之點唯一[幾.公.(3)β], 且中心半徑相同之圓相合, 故過 A, B, C 所作之圓唯一.



445. 兩圓之周, 若公有三點, 則此兩圓全合.

證 由前題自明.

446. 不相合二圓之周, 公有之點不能多於二.

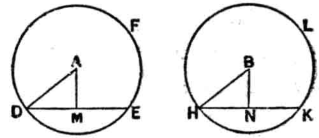
證 由444題自明.

447. 由圓內之一點, 向圓周引直線, 若等長者多於二, 則其點爲中心.

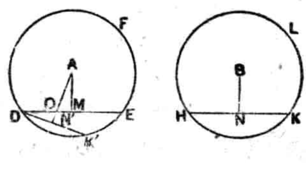
證 由444題自明.

448. 同圓或等圓中, 等弦距中心等遠, 不等弦則大者距中心較近.

證 (1)設等圓 DEF, HKL 之中心, 分別爲 A, B, 弦 DE 等於弦 HK, 且 AM, BN 分別爲

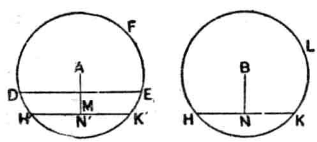


DE, HK 之垂線; 求證 DE 及 HK 距中心等遠, 即 AM 等於 BN. 聯結 AD, BH, 因 AM 爲由中心 A 向弦 DE 所引之垂線, 故 DM 爲 DE 之半分 [440題]; 同理, HN 爲 HK 之半分. 而 DE 等於 HK [假設], 故 DM 等於 HN [普.公.(h)]. 據此, 兩三角形 ADM, BHN 中, DM = HN, AD = BH, 而角 AMD, BNH 爲直角, 故 AM = BN [81題], 即 DE 及 HK 距中心等遠. (2)次, 設弦 DE 大於弦 HK, 求證 AM 小於 BN. 將圓 HKL 置於圓 DEF 上, 但 B 置於



A 上, H 置於 D 上, 劣弧 HK 置於劣弧 DE 上. 於是因弦 HK 小於弦 DE[假設], 故劣弧 HK 小於劣弧 DE [438題], 故 K 落於劣弧 DE 上. 今命其點爲 K′, 則弦 DK′ 上之各點, 除 D 以外, 皆與 A 在 DE 之異側. 命 N 之新位置爲 N′, AN′ 與 DE 之交點爲 O, 則 AN′ 大於 AO[普. 公.(a)], 而 AO 大於 AM[73題], 故 AN′ 更大於 AM, 卽 AM 小於 BN, 亦即 DE 較 HK 近中心.

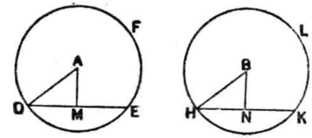
別證　設等圓 DEF, HKL 之中心爲 A, B, 又



AM, BN 分別爲 DE, HK 之垂線; 求證隨弦 DE 之大於, 等於, 小於弦 HK, 而距離 AM 小於, 等於, 大於距離 BN. 將圓 HKL 置於圓 DEF 上,但 B 置於 A 上,BN 置於 AM 上; 命 H′, N′, K′ 爲 H, N, K 之新位置. 於是因 DE, H′K′ 皆爲 AM 之垂線, 故或相合, 或平行[46題], 故 H′ 及 K′ 不在 DE 之異側. 又設弦 DE 大於弦 HK, 則劣弧 DE 大於劣弧 HK [438題], 故 H′ 及 K′ 在劣弧 DE 上, 故 AM 小於 AN′ [普. 公. (a)], 卽 AM 小於 BN, 因此 DE 較 HK 近中心. 又設弦 DE 等於弦 HK, 則劣弧 DE 等於劣弧 HK [438題], 故 H′ 及 K′ 分別落於 D 及 E 上, 故 N′ 與 M 合, 故 AM 等於 AN′, 卽 BN, 因此 DE 與 HK 距中心等遠. 仿此得證若弦 DE 小於弦 HK, 則 DE 較 HK 距中心遠.

449.　同圓或等圓中, 距中心等遠之弦等長, 距中心不等遠之弦, 則距中心近者大.

證　設等圓 DEF, HKL 之中心, 分別爲 A, B,



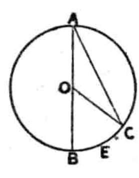
又 AM 及 BN 分別爲弦 DE 及 HK 之垂線, 求證距離 AM 設小於, 或等於, 或大於距離 BN, 則弦 DE 大於, 或等於, 或小於弦 HK. 由前題, 若弦 DE 大於弦 HK, 則 AM 小於 BN; 若弦 DE 等於弦 HK, 則 AM 等於 BN; 若弦 DE 小於弦 HK, 則 AM 大於 BN. 而是等假設中, 必有一者成立, 是等終結, 二者不能同時成立, 故據轉換法, 以上各定理之逆定理亦成立.

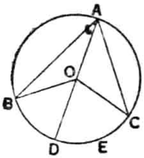
450.　圓之直徑爲最大之弦.

證　由前題自明.

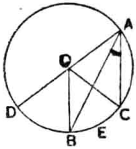
451.　圓周角等於立於同弧中心角之半.

證　設 BAC 爲圓周角, BOC 爲立於同弧 BEC 之中心角, 求證角 BAC 等於角 BOC 之半分. 先設中心 O 在角 BAC 之一邊 AB 上. 於是因 OA 等於 OC, 故角 OCA 等於角 OAC[57題], 故角 OAC 等於二角 OAC, OCA 和之半分. 而角 BOC 爲三角形 OAC 之外角, 故等於二角 OAC, OCA 之和[63題], 故角 BAC 等於立於同弧 BEC 上之角 BOC 之半分. 次設中心 O 在角 BAC 內. 聯結 AO 而延長之, 令交圓周於 D. 於是仿前可知角



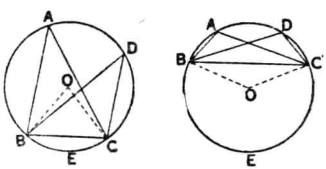


BAO 等於角 BOD 之半分。角 OAC 等於角 DOC 之半分. 故全角 BAC 等於立於同弧 BEC 之全中心角 BOC 之半分，復次，設中心角在 BAC 之外. 如前聯結AO,延長之令交圓周於D. 於是角 BAO 等於角 BOD 之半分,角 OAC 等於角 DOC 之半分. 故取此兩組角之差,則角 BAC 等於角 BOC 之半分.



452. 同弓形中之弓形角相等.

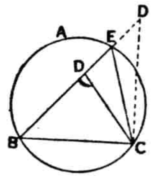
證　設 BAC, BDC 爲同弓形 BADC 中之弓形角,求證 $\hat{BAC}$ 等於 $\hat{BDC}$. 取圓之中心 O, 聯結 OB, OC. 於是因兩角 BAC、BDC 爲立



於同弧 BEC [此弧爲 BADC 之共軛弧] 之角,故此二角各等於立於同弧 BEC 之中心角 BOC 之半分[451題]. 故角 BAC 等於角 BDC [普.公.(h)].

453. 由與弓形在同一平面之一點至弓形之弦之兩端,引二直線,此二直線間之角,若點在弓形內,則大於弓形角,若點在弓形外 [但與弓形在弦之同側],則小於弓形角.

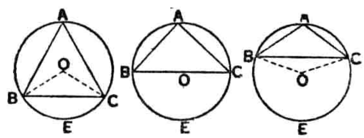
證　設 D 爲弓形 BAC 內之一點,求證角 BDC 大於弓形 BAC 中之弓形角. 延長 BD,



令交圓周於 E, 聯結 EC. 於是三角形 DEC 之外角 BDC 大於內對角 DEC [61題], 卽角 BDC 大於弓形 ABC 中之角 BEC. 仿此又得證 D 點若在弓形 BAC 之外 [與弓形在弦 BC 之同側], 則角 BDC 小於弓形 BAC 中之弓形角.

454. 弓形角之大小, 視弓形之大於, 或等於, 或小於半圓, 而小於, 或等於, 或大於直角.

證　設 $\hat{BAC}$ 爲圓 ABEC 所含弓形 BAC 中

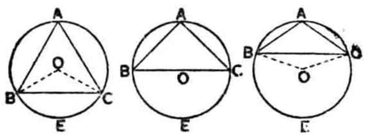


之弓形角, 求證隨弓形 BAC 之大於, 等於, 小於半圓, 而角 BAC 小於, 等於, 大於直角. 今設 O 爲圓之中心; 而 O 若不在 BC 上, 則聯結 OB, OC. 於是弓形 BAC 若大於, 或等於, 或小於半圓, 則弧 BEC 因而小於, 或等於, 或大於圓周之半分, 故立於弧 BEC 之中心角 BOC, 因而小於, 等於, 大於二直角. 而圓周角 BAC 與中心角 BOC 立於同弧 BEC, 故爲其半分 [451題]. 故角 BAC 之大小, 因弓形 BAC 之大於, 或等於, 或小於半圓, 而小於, 或等於, 或大於直角.

455. 弓形之大小, 視弓形角之小於, 或等於, 或大於直角, 而大於, 或等於, 或小於半圓.

證　設 BAC 爲圓 ABEC 之弓形, BAC 爲弓

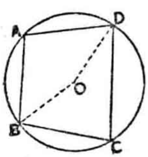
形角,求證弓形BAC之大小,視弓形角BAC



之小於,等於,大於直角,而大於,等於,小於半圓.由前題,若弓形BAC大於半圓,則角BAC小於直角;若弓形等於半圓,則角BAC等於直角;若弓形BAC小於半圓,則角BAC大於直角.而是等假設中,必有一者成立,由是等終結,不能二者同時成立,故據轉換法,以上各定理之逆定理亦成立.

456. 內接於圓之四邊形,其對角互爲補角.

證 設ABCD爲圓之內接四邊形,求證對角BAD,BCD互爲補角.設圓之中心爲O,聯結OB,OD.於是立於弧BCD之圓周角BAD,爲立於同弧BCD之中心角BOD之半分[451題];立於弧BAD之圓周角BCD,爲立於同弧BAD之中心角BOD之半分.故二角BAD,BCD之和,等於以OB,OD爲二邊之二共軛角之和之半分.此二共軛角之和,爲四直角,故二角BAD,BCD之和爲二直角,卽二角BAD,BCD互爲補角.



457. 內接於圓之四邊形,其外角等於內對角.

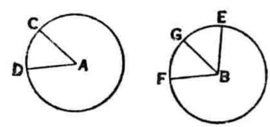
證 由前題自明.

458. 四邊形之對角互爲補角,則外接於此四邊形,得畫一圓.

證 蓋四邊形之一角頂,若不在過他三角頂之圓周上,則其點上之角,不與對角互爲補角故也[456題].

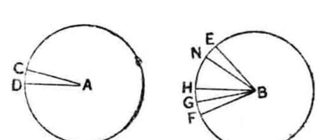
459. 等圓中,設一中心角爲他中心角之二倍,則對第一角之弧或扇形,亦爲對第二角之弧或扇形之二倍.

證 設等圓A,B中,中心角EBF爲中心角CAD之二倍;求證弧EF或扇形EBF爲弧CD或扇形CAD之二倍.引二等分$E\hat{B}F$之直線BG,則$E\hat{B}G=G\hat{B}F=\frac{1}{2}E\hat{B}F=C\hat{A}D$.故弧EG=弧GF$=\frac{1}{2}$弧EF[432題].又弧CD=弧EG=弧GF,因此弧EF=2弧CD,且扇形EBF=2扇形CAD



460. 等圓中,設一中心角爲他中心角之n倍,則對前者之弧或扇形,分別爲對後者之弧或扇形之n倍.

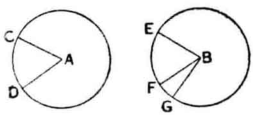
證 設等圓A,B中,中心角EBF爲中心角CAD之n倍.以BG,BH,……,BN將角EBF n等分,則$F\hat{B}G=G\hat{B}H=\cdots\cdots=N\hat{B}E$.於是弧FG=弧GH=……=弧NE[432題],故弧GF$=\frac{1}{n}$弧EF,扇形GBF$=\frac{1}{n}$扇形EBF.而$C\hat{A}D=G\hat{B}F$,故弧CD=弧GF[432題].故弧



$CD = \frac{1}{n}$ 弧 EF, 扇形 CAD $= \frac{1}{n}$ 扇形 EBF.

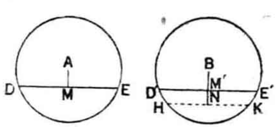
461. 試直接證明定理同圓或等圓中,對等弧之中心角相等,對不等弧之中心角中,對大弧者亦大.

解　設等圓 A 及 B 中,弧 CD 等於弧 EF.將圓 A 置於圓 B 上,令中心 A 合於中心 B,則因二圓相等,故兩圓周全合.據此,以中心爲樞,將圓 A 迴轉,令點 C 至點 E,則兩圓周仍合[416題].而弧 CD 等於弧 EF,故點 D 落於點 F 上.於是半徑 AC 合於半徑 BE,半徑 AD 合於半徑 BF,故 $C\hat{A}D = E\hat{B}F$.次,設弧 CD < 弧 EG,而如前相疊,則 D 合於弧 EG 內之某點 F,故 $E\hat{B}F < E\hat{B}G$,因而 $C\hat{A}D < E\hat{B}G$.



462. 試直接證明定理等圓中,距中心等遠之弦相等,距中心非等遠之弦中,近中心者大.

解　設 A, B 爲二等圓之中心, DE, HK 爲各圓之弦, AM, BN 爲其垂線.(1)設 AM = BN,於是將 AM 置於 BN,令 A 合於 B,則 M 合於 N 上,又 M, N 上之角,皆爲直角,故 DE 落於 HK 上;又因兩圓相等,故兩圓周全合,故 DE = HK.(2)設 BN > AM.如(1)相疊,則 M 落於 B 與 N 之間,命其點爲 M′,又 DE 至 D′E′ 之位置,而平行於 HK.故劣弧 D′E′ > 劣弧 HK,即劣弧 HK < 劣弧 DE,故弦 HK < 弦 DE.

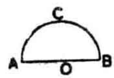


463. 試將兩圓相疊,而證等圓中等弦距中心等遠.

解　本題含於前題之中.

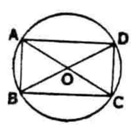
464. 同時爲圓之弓形及扇形者爲何?

解　設弓形 ACB 兼爲扇形 OACB,而以 O 爲角之頂點.ACB 爲弓形,故 AB 爲弦,而 ACB 又爲扇形,故角之頂點 O 爲圓之中心,即弦 AB 過圓之中心.故弓形 ACB 爲半圓.故同時爲弓形及扇形者爲半圓.



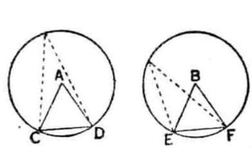
465. 外接於矩形得畫一圓.

解　設 ABCD 爲矩形,則 AC = BD [237題],又對角線之交點 O,爲各對角線之中點[239題],故 AO = OC = OB = OD.故以 O 爲中心,以 AO 爲半徑而作之圓,過矩形之各角頂.



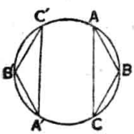
466. 試證明下之定理及其逆定理:同圓或等圓中,對等弧之圓周角相等.又對應於此之弦亦相等.

解　設等圓 A, B 中,弧 CD 等於弧 EF.對弧 CD 之圓周角爲中心角 CAD 之半分[451題];同理,對弧 EF 之圓周角,亦等於中心角 EBF 之半分,而 $C\hat{A}D = E\hat{B}F$ [434題],故對弧 CD, EF 之圓周角相等.反之,等圓中對等圓周角之弧相等.蓋設對弧 CD, EF 之圓周角相等,則爲其二倍之中心角 CAD, EBF 亦相等,故弧



CD, EF 相等. 又等弧 CD, EF 之弦 CD, EF 相等[436題].

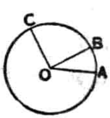
467. 設 A, B, C, A′, B′, C′ 爲順次在同一圓周上之點, 且弦 AB, AC 分別平行於弦 A′B′, A′C′, 則弦 BC 等於弦 B′C′.



證 因 A, B, C, A′, B′, C′ 爲順次在同圓周上之點, 弦 AB, AC 分別平行於弦 A′B′, A′C′, 且其方向相反, 故 $B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$, 故弧 BC = 弧 B′C′, 故弦 BC = 弦 B′C′.

468. 由一點若得引三等直線於圓周, 則此點爲圓之中心.

證 設圓 ABC 中, OA = OB = OC, 求證 O 爲圓之中心. 今因 OA = OB = OC, 故設以 O 爲中心, OA 爲半徑而作他圓, 則其圓周過 B 及 C. 據此, 二圓共有三點 A, B, C, 故此二圓全合[445題], 後圓之中心 O 又爲原圓之中心.

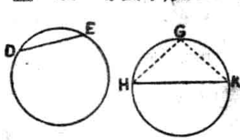


469. 兩圓不能共一弧.

證 若兩圓共一弧, 則於其所共之弧上取三點, 此三點卽爲二圓所共, 此不合理, 故兩圓不能共一弧.

470. 設等圓中, 一弧爲他弧之二倍, 則對前者之弦, 小於對後者之弦之二倍.

證 設二等圓中, 弧 HK = 2 弧 DE, 由弧 HK 之中點 G, 聯結 GH, GK, 則因弧 DE = 弧 HG = 弧 GK, 故弦 DE = 弦 HG = 弦 GK, 而弦 HK < 弦 HG + 弦 GK, 故 HK < 2DE.

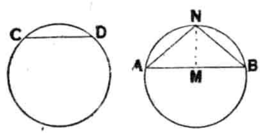


471. 弦之垂直二等分線, 將弦所分之弧二等分.

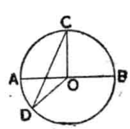
證 弦之垂直二等分線過中心[441題], 故過弦所分之二弧之中點.

472. 等圓中, 一弦爲他弦之二倍, 則對前者之弧, 大於對後者之弧之二倍.

證 設等圓中一圓之弦 AB, 等於他圓之弦 CD 之二倍. 過 AB 之中點 M, 引其垂線, 命其交弧於 N, 則 N 爲弧 AB 之中點[471題]. 於是引弦 AN, 則因 $A\hat{M}N = \hat{R}$, 故 AN > AM [135題] 而 AB = 2CD, 故 AM = CD, 因而 AN > CD, 故弧 AN > 弧 CD, 故 弧 AB > 2 弧 CD.



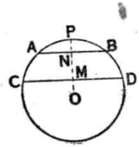
473. 試由定理三角形二邊之和, 大於他一邊以證圓之直徑爲最大之弦.



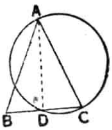
證 設 AOB 爲直徑, CD 爲任意弦, 由中心 O 聯結 OC, OD, 則 OC + OD > CD [70題], 又 OC = OD = OA = OB, 故 OC + OD = AB. 因此 AB > CD.

474. 平行弦由圓周截得之弧相等.

證 設圓之中心爲 O, 平行二弦爲 AB, CD, 由 O 向是等弦引公垂線, 命其交 CD, AB 及弧於 M, N, P, 則 P 爲弧 CD 及 AB 之中點[440 及 471 題], 故弧 PAC = 弧 PBD, 弧 PA = 弧 PB, 因此弧 AC = 弧 BD.

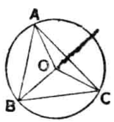


475. 設圓之直徑爲二等邊三角形之一邊,則三角形之底爲圓周所二等分.



證　設二等邊三角形爲 ABC, 其一邊 AC 爲圓之直徑,其底交圓於 D,聯結 AD, 則 $A\hat{D}C=\hat{R}$ [454題], 卽 AD 爲由頂點至底所引之垂線,故 BD＝CD [91題].

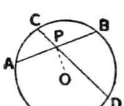
476. 設銳角三角形 ABC 之外接圓中心爲 O, 則角 BOC, COA, AOB 分別爲角 A, B, C 之二倍.



證　ABC 爲銳角三角形,故其外心 O 在形內. 故 $B\hat{O}C$, $C\hat{O}A$, $A\hat{O}B$ 分別爲 $\hat{A}$ $\hat{B}$, $\hat{C}$ 之二倍 [451題].

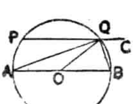
477. 圓之相交二弦不過中心者,不能互相二等分.

證　設圓之中心爲 O, 圓內之二弦 AB, CD 交於 P. 設 P 爲 AB, CD 之中點, 則 OP 同時垂直於 AB, CD [439題], 卽 $O\hat{P}B=O\hat{P}D=\hat{R}$. 然此二角不能相等, 故 P 不能同時爲二弦之中點. 是以 AB, CD 不能互相二等分.



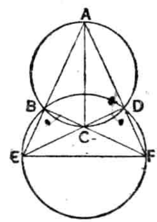
478. 設 PQ 爲 O 圓中之任意弦,直徑 AB 平行於 PQ, 則弦 QA 及 QB 將角 PQO 及其外角二等分.

證　OA＝OQ, 故 $O\hat{A}Q=O\hat{Q}A$, 而 AB ∥ PQ,故 $O\hat{A}Q=P\hat{Q}A$. 據此, $O\hat{Q}A=P\hat{Q}A$, 卽 QA 將 $P\hat{Q}O$ 二等分. 又設 PQ 之延線爲 QC, 則依據同理, QB 將 $P\hat{Q}O$ 之外角 $O\hat{Q}C$ 二等分.



注意　已知 AQ 將 $P\hat{Q}O$ 二等分後, 若注意 $A\hat{Q}B$ 爲直角 [454題], 卽可知 BQ 將 $O\hat{Q}C$ 二等分.

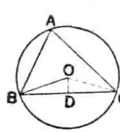
479. 設四邊形 ABCD 內接於一圓, 延長其二邊 AB, DC,令交於點 E, 又延長其他二邊 BC, AD, 令交於 F, 此時若過 B, E, F, D 得畫一圓,則 AC 爲前圓之直徑, EF 爲後圓之直徑.



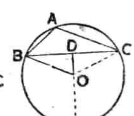
證　$E\hat{B}F=A\hat{D}C$ [457題],又 $E\hat{B}F=F\hat{D}E$ [452題],故 $A\hat{D}C=F\hat{D}E$. 然 $A\hat{D}C+F\hat{D}C=2\hat{R}$, 故 $A\hat{D}C=F\hat{D}C=\hat{R}$. 故 AC 及 EF 分別爲二圓之直徑[455題].

480. 在三角形 ABC 之外接圓中,由中心 O 至三角形之一邊 BC, 引垂線 OD, 則角 BOD 或等於角 A, 或爲其補角.

證　聯結 OB, OC. △OBC 爲二等邊, OD 爲底 BC 之垂線, 故將 $B\hat{O}C$ 二等分. 而 $\hat{A}=\frac{1}{2}\times B\hat{O}C$ [甲圖中劣角, 乙圖中優角]. 故 $\hat{A}$ 或等於 $B\hat{O}D$ [甲圖], 或等於其補角 [乙圖].



[甲圖]

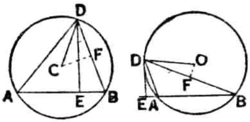


[乙圖]

注意　若 $\hat{A}$ 爲銳角,則 O 與 A 皆在 BC 之同側,而恆 $\hat{A}=B\hat{O}D$. 若 $\hat{A}$ 爲鈍角,則 O 與 A 在 BC 之異側,而恆 $\hat{A}+B\hat{O}D=2\hat{R}$.

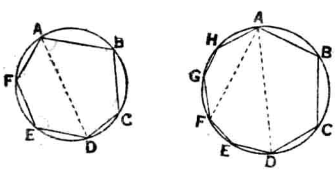
481. 設圓之中心爲 C, 弦爲 AB, 由圓周上之一點至弦之垂線爲 DE, 求證 $A\hat{D}E$ 等於 $B\hat{D}C$.

證　由 C 引 BD 之垂線 CF. 若角 A 爲銳角,則 $\hat{A}=D\hat{C}F$ [前題,甲圖]; 若角 A 爲鈍角, 則 $2\hat{R}-\hat{A}=D\hat{C}F$ [前題,乙圖]. 故此各角之餘角 $A\hat{D}E$, $B\hat{D}C$ 亦等.



482.　圓之內接六角形中, 相間各角之和等於 $4\hat{R}$, 內接八角形中, 相間各角之和等於 $6\hat{R}$. 普徧言之; 圓之內接 $2n$ 角形中, 相間各角之和等於 $(2n-2)\hat{R}$.

證　先於內接六角形 ABCDEF [甲圖]中,引對角線 AD, 而得兩內接四邊形,其對角之和等於 $2\hat{R}$ [456題], 卽 $B\hat{A}D+\hat{C}=2\hat{R}$, $F\hat{A}D$

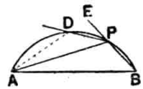


[甲圖]　　[乙圖]

$+\hat{E}=2\hat{R}$, 故 $B\hat{A}F+\hat{C}+\hat{E}=4\hat{R}$. 次, 於內接八角形 ABCDEFGH [乙圖]中,引對角線 AD, AF, 則 $B\hat{A}D+\hat{C}=2\hat{R}$ [456題], $D\hat{A}F+\hat{E}=2\hat{R}$, $F\hat{A}H+\hat{G}=2\hat{R}$. 合之得 $B\hat{A}H+\hat{C}+\hat{E}+\hat{G}=6\hat{R}$. 復次,於 $2n$ 多角形 ABCDEF……中,由一角頂引對角線 AD, AF,……, 則得 $n-1$ 個內接四邊形,故仿前,內接 $2n$ 角形中,相間各角之和爲 $(2n-2)\hat{R}$.

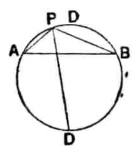
483.　設 P 爲圓弧 APB 上之任意點,則角 APB 之外角之二等分線恆過一定點.

證　延長 BP 至 E, 命 $A\hat{P}E$ 之二等分線交弧於 D, 聯結 AD, 則 ABPD 爲圓之內接四邊形, 故 $D\hat{A}B=D\hat{P}E$ [457題]. 而 $D\hat{P}E=D\hat{P}A$, 故 $D\hat{A}B=D\hat{P}A$; 故 D 爲弧 APB 之中點 [466題]. 故 $A\hat{P}E$ 之二等分線, 恆過此點. 卽恆過弧 APB 之中點.



484.　設 AB 爲一圓之定弦, P 爲圓周上之任意點, 則角 APB 之二等分線, 恆過二定點之一.

證　設二等分線與圓周之交點爲 D, 則 D 爲弧 ADB 之中點 [466題]. 同理,若 P 在弧 ADB 之上, 則二等分線過弧 APB 之中點 D′. 據此,不問 P 之位置如何, 角 APB 之二等分線, 恆過弦 AB 所分二共軛弧之二中點之一.

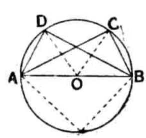


485.　同弓形中之一切弓形角,其二等分線過同點.

證　由前題可知.

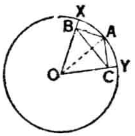
486.　共一斜邊之直角三角形,其頂點在一圓周上.

證　設兩直角三角形 ABC, ABD 共一斜邊 AB, 斜邊之中點爲 O, 則 $AO=OB=OC=OD$ [124題], 故 $OC=OD=\frac{1}{2}AB$. 其他共 AB 之直角三角形,其頂點與 O 之距離,皆等於 $\frac{1}{2}AB$. 據此, 一切頂點皆在以 O 爲中心,以 $\frac{1}{2}AB$ 爲半徑之圓周上.



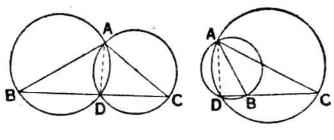
487.　在中心爲 O 之圓周上,取任意點 A, 由 A 至二定半徑引垂線 AB, AC, 則聯結其足 B, C 之直線有定長.

證 設定半徑為 OX, OY, 聯結 OA, 則 B, C 在以半徑 OA 為直徑之圓周上 [455題], 故直線 BC 恆對定角 XOY 或其補角. 而同圓或等圓中, 圓周角相等或互為補角, 則對之之弦亦等[466題], 故 BC 一定不易.



488. 以三角形之二邊為直徑所作之圓, 其圓周交於第三邊或其延線上.

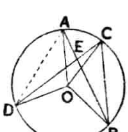
證 設以三角形 ABC 之邊 AC 為直徑之



圓, 交邊 BC 於 D, 聯結 AD, 則 $A\hat{D}C=\hat{R}$ [454題], 故點 D 為由 A 至對邊 BC 所引垂線之足. 同理, 設以邊 AB 為直徑之圓, 交 BC 於 D′, 則 D′ 亦為由 A 至對邊 BC 所引垂線之足. 故 D, D′ 相合, 而兩圓交於 BC 或其延線上.

489. 設二弦 AB, CD 交於圓內一點 E, 求證角 AEC 等於弧 AC, BD 所對中心角之和之半分.

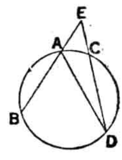
證 角 AEC 為三角形 ADE 之外角, 故 $A\hat{E}C=A\hat{D}E+E\hat{A}D$. 而 $A\hat{D}C=\frac{1}{2}\times A\hat{O}C$ [451題], $D\hat{A}B=\frac{1}{2}D\hat{O}B$, 故 $A\hat{E}C=\frac{1}{2}A\hat{O}C+\frac{1}{2}D\hat{O}B=\frac{1}{2}(A\hat{O}C+D\hat{O}B)$. 故 $A\hat{E}C$ 等於弧 AC, BD 所對中心角之和之半分.



注意 本題可改述如下: 交於圓內之二弦之夾角, 得以此二弦所夾弧之和之半分測度之.

490. 設 AB, CD 為圓內不交之二弦, 延長之令交於圓外之一點 E, 則角 AEC 等於弧 AC 及 BD 所對中心角之差之半分.

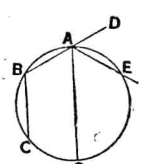
證 三角形 ADE 中, $B\hat{A}D=A\hat{E}D+A\hat{D}E$, 即 $A\hat{E}C=B\hat{A}D-A\hat{D}E$. 而角 $B\hat{A}D$ 為對弧 BD 之圓周角, 故為對弧 BD 之中心角之半分 [451題]; 同理, 角 ADC 為對弧 AC 之中心角之半分; 故角 AEC 等於弧 BD, AC 所對中心角之差之半分.



注意 本題可改述如下: 交於圓外之二弦之夾角, 得以此二弦所夾弧之差之半分測度之.

491. 由圓周上之一點引二弦, 其夾角之外角, 等於二弦所對弧之和所對之圓周角. 此外角之二等分線, 過等於此二弧和之弧之中點.

證 設 A 為圓周上之一點, 由 A 所引之二弦為 AB, AC, 其所夾角之外角為 CAD. 平行於 AC, 引弦 BC′, 則弧 AB = 弧 CC′ [474題], 故弧 BAC = 弧 ACC′, 而弧 ACC′ 所對之圓周角 ABC′ 等於角 CAD. 故角 CAD 等於弧 AB + 弧 AC 即弧 BAC 所對之圓周角. 次, 設 $C\hat{A}D$ 之二等分線與弧 AC 之交點為 E, 則 $D\hat{A}E$ 等於弧 BAE 所對之圓周角, $C\hat{A}E$ 等於弧 EC 所對之圓周角. 而 $D\hat{A}E=C\hat{A}E$, 故弧 BAE = 弧 EC, 即 E 為弧

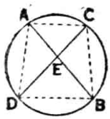


BAC 之中點.

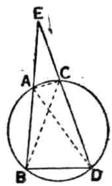
492. 設二弦 AB, CD 交於圓內或圓外之點 E, 則三角形 AEC, DEB 等角. 三角形 AED, CEB 亦然.

證　設 E 在圓內[甲圖], 聯結 AC, BD. 則 E 點上之角, $A\hat{C}E = D\hat{B}E$, $C\hat{A}E = B\hat{D}E$ [452 題], 故 △AEC, △DEB 等角. 又設 E 在圓外[乙圖], 則 $A\hat{C}E = D\hat{B}E$, $C\hat{A}E = B\hat{D}E$ [457題], 故 △AEC, △DEB 等角. 次, 仿前得證 △AED, △CEB 等角.

[甲圖]



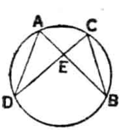
[乙圖]



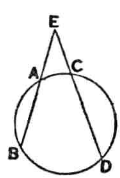
493. 設 AB, CD 爲一圓之弦, 其夾角一定, 則不問二弦之位置若何, 二弧 AC, BD 之和或差恆相等.

證　命 AB, CD 之交點爲 E. 設 E 在圓內[甲圖], 則 $\hat{E}$ 等於弧 AC, BD 所對中心角和之半分 [489 題]. 故若 $\hat{E}$ 一定, 則弧 AC, BD 之和亦從而相等. 設 E 在圓外[乙圖], 則 $\hat{E}$ 等於弧 AC, BD 之差所對中心角之半分[490題]. 故若 $\hat{E}$ 一定, 則弧 AC, BD 之差亦從而相等.

[甲圖]

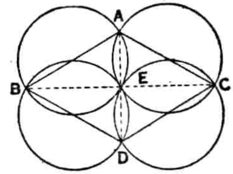


[乙圖]

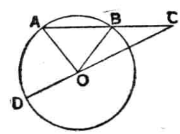


494. 以菱形之各邊爲直徑所作之四圓過同點.

證　設 ABCD 爲菱形. 分別以其二邊 AB, AC 爲直徑所作之圓, 交於對角線 BC 上, 且其交點爲由 A 至 BC 所引垂線之足[488題]. 而菱形之對角線, 互相垂直 [252題], 故二圓之交點, 卽對角線之交點. 仿此得證他二圓亦過此交點. 故四圓過同點.



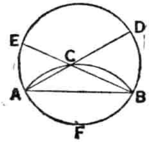
495. 設 O 爲圓之中心, AB 爲所設之弦, 延長 AB, 取 BC 等於半徑, 聯結 CO, 延長之令與圓周交於 D, 則 $B\hat{O}C$ 等於 $D\hat{O}A$ 之三分之一.



證　BC = BO, 故 $B\hat{O}C = B\hat{C}O$, 而 $O\hat{B}A = B\hat{O}C + B\hat{C}O$, 故 $2B\hat{O}C = O\hat{B}A = O\hat{A}B$. 而 $D\hat{O}A = O\hat{A}B + B\hat{C}O = 2B\hat{O}C + B\hat{O}C = 3B\hat{O}C$, 故 $B\hat{O}C = \frac{1}{3}D\hat{O}A$.

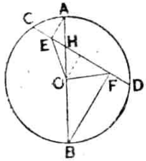
496. 設二弓形 ACB, ADB 立於同弦 AB 之上, 在弧 ACB 上取任意點 C, 聯結 CA, CB, 命 CA, CB 或其延線交弧 ADB 於點 D, E. 求證弧 DE 之大小, 一定不易.

證　設弧 AEDB 之共軛弧爲 BFA, 則 $A\hat{C}B$ 等於弧 AB, DE 所對中心角和之半分 [489題]. 而 $A\hat{C}B$ 一定 [452題], 弧 AB 所對之中心角亦一定, 故 $E\hat{C}D$ 一定, 因而弧 DE 之大小亦一定不易.



497. 由直徑之兩端, 至任意弦或其延線所引垂線之足, 距圓之中心等遠.

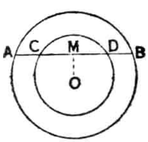
證　設圓之中心爲 O, 任意弦爲 CD, 由直



徑 AB 之各端至弦所引之垂線爲 AE, BF. 又設 OH 爲 CD 之垂線. 於是 AE $\parallel$ OH $\parallel$ BF, 而 AO = OB, 故 OE = OF [281題].

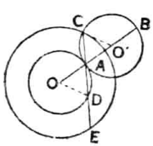
498. 設一直線交兩同心圓之圓周,則此直線夾於二圓周間之二部分相等.

證　設一直線 AB, 交中心爲 O 之同心圓於 A, C, D, B. 由 O 至 AB 引垂線 OM, 則 MA = MB, MC = MD [440題], 故 AC = BD.

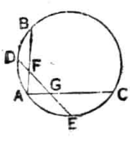


499. 由同心圓之中心 O, 引任意直線 OB, 命其交內圓周於 A, 令 OB 三倍於 OA, 以 AB 爲直徑作圓, 命其與外圓周之交點爲 C, 由 C 引外圓之弦 CAE, 則此弦爲內圓周所三等分.

證　設弦 CAE 交內圓周於點 D, 命 AB 之中點爲 O′, 聯結 OD, O′C, 則 OD = OA = O′A = O′C [假設]. 故 △AOD, △AO′C 皆爲二等邊三角形, 且底角 OAD, O′AC 相等, 故 AC = AD. 而 AC = DE [498題], 故 CE 三等分於 A, D.



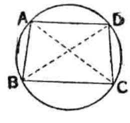
500. 設 A, B, C 爲圓周上之三點, 弧 AB, AC 之中點分別爲 D, E, 直線 DE 與弦 AB, AC 之交點爲 F, G, 則 AF = AG.



證　$A\hat{F}G$ 等於與弧 BD, AE 之和相等之弧所對之圓周角, 又 $A\hat{G}F$ 等於與弧 AD, CE 之和相等之弧所對之圓周角. 而弧 AD, BD 相等, AE, CE 亦相等, 故 $A\hat{F}G = A\hat{G}F$, 因而 AF = AG.

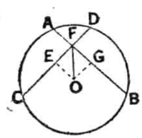
501. 同圓中聯結等弧端之二弦, 非平行, 卽相等.

證　設二等弧爲 AB, CD, 聯結其各端. 因弧 AB = 弧 CD, 故 $A\hat{D}B = D\hat{B}C$ [466題], 故 AD $\parallel$ BC [38題]. 又 △ABC, △DCB 中, BC 公有, AB = CD, 又因弧 BAD = 弧 ADC, 故 $A\hat{B}C = D\hat{C}B$, 故 AC = BD [55題].



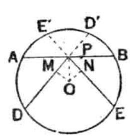
502. 設相交之二弦, 與過其交點之直徑成等角, 則此二弦相等.

證　設圓之中心爲 O, 二弦 AB, CD 交於 F, 且與過 F 之直徑 OF 成等角. 引垂線 OE, OG, 則二直角三角形 OFE, OFG 中, 斜邊 OF 公有, $O\hat{F}E = O\hat{F}G$ [假設], 故 OE = OG [78題]. 因此 AB, CD 距中心等遠, 故 AB = CD [449題].



503. 由弦之中點, 在弦之同側, 引二直線, 令與此弦成等角, 且與圓周相交, 則此二直線相等.

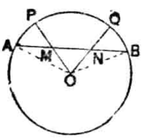
證　設圓之中點爲 O, 弦爲 AB, AB 之中點爲 P, 於 AB 之同側, 由 P 所引與 AB 成等角之直線爲 PD, PE. 延長 DP, EP, 令與圓周交於 D′, E′, 又由 O 引垂線 OM, ON, 聯結 OP.



於是 OP $\perp$ AB, $A\hat{P}D = B\hat{P}E$, 故 $O\hat{P}M = O\hat{P}N$, 因而 OM = ON [78題], 故 DD′ = EE′ [449題]. 故 DM = EN, 又 PM = PN, 故 PD = PE.

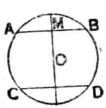
504. 將弦三等分,由中心過此分點引半徑,則分弧爲三部分,其兩端之部分相等,而小於中央之部分.

證 設圓之中心爲 O, 弦 AB 被半徑 OP OQ 三等分於 M, N. 此時 $\triangle OMA \equiv \triangle ONB$ [55題], 故 $A\hat{O}M = B\hat{O}N$, 故弧 AP = 弧 BQ, 即兩端之弧相等. 次, N 爲 BM 之中點, $OM < OB$ 故 $B\hat{O}N < M\hat{O}N$ [152題]. 故弧 BQ < 弧 PQ [432題].



注意 三等分弧之二半徑,並不三等分其所對之弦.

505. 設圓之直徑,將不過中心之一弦二等分, 則平行於此弦之一切弦, 皆爲此直徑所二等分.

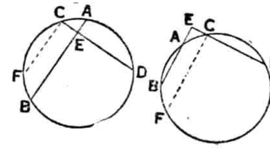


證 設圓之直徑 OM 將不過中心 O 之弦 AB, 二等分於 M, 則 $OM \perp AB$ [439題]. 若 $CD \parallel AB$, 則得 $OM \perp CD$, 故 OM 又將 CD 二等分 [440題].

注意 設弦 AB 過中心,得 AB 二等分於 O, 但普通 OM, AB 並不垂直.故 OM 亦不垂直於 AB 之平行弦,因而不將是等弦二等分.

506. 設圓之二弦 AB, CD 直交, 則弧 AC + 弧 BD = 弧 AD + 弧 BC [雙方各等於半圓周]. 又設其延線直交於圓外,則如何?

證 設兩弦之交點爲E,引平行於 AB 之弦 CF, 則弧 AC = 弧 BF [474題]. 故甲圖中弧 AC + 弧 BD = 弧 DBF, 而 $F\hat{C}D = B\hat{E}D = \hat{R}$, 故弧 DBF, 即弧 AC + 弧 BD 等於半圓周,因而弧 AD + 弧 BC 亦等於半圓周. 又乙圖中弧

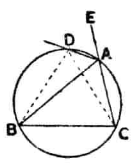


[甲圖]　　　[乙圖]

BD − 弧 AC = 弧 DF = 半圓周,故弧 FBACD, 即弧 AB + 弧 BC 之和亦等於半圓周.故此時弧 AC、BD 之差等於弧 AD, BC 之和.

507. 三角形頂點上外角之二等分線,若交外接圓之圓周於他點,則此點距底邊之兩端等遠.

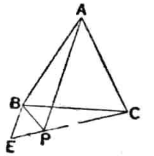
證 設 $\triangle ABC$ 中, AD 爲頂點 A 上外角之二等分線, AD 與外接圓之圓周交於 D, 聯結 BD, CD. 於是 ADBC 爲圓之內接四邊形, 故 $D\hat{B}C = E\hat{A}D$ [457題] $= D\hat{A}B = D\hat{C}B$ 故 $\triangle DBC$ 爲二等邊, 而 $DB = DC$.



508. 由圓周上之一點 P, 至內接正三角形一頂點之距離PA,等於至他二頂點之距離 PB, PC 之和. 並證其逆定理.

證 取 $AD = BP$, 聯結 DC. 於是 $P\hat{A}C = P\hat{B}C$, $AD = BP$, $AC = BC$, 故 $\triangle ADC \equiv \triangle BPC$, 因而 $CP = CD$. 故 $\triangle CDP$ 爲二等邊三角形, 且 $D\hat{P}C = A\hat{B}C = \frac{2}{3}\hat{R}$, 故 $\triangle CDP$ 爲正三角形, 因而 $BP + CP = AD + DP = AP$.

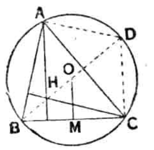
反之,設 $AP = BP + PC$, 求證 P 在 $\triangle ABC$ 之



外接圓周上. 在 BP 上作正三角形 BPE, 則 △ABP, △CBE 中, AB = BC, BP = BE, $A\hat{B}P = C\hat{B}E$, 故 AP = EC. 而 AP = BP + PC = EP + PC, 故 EC = EP + PC, 故 EPC 成一直線. 據此, $B\hat{P}C = 2\hat{R} - B\hat{P}E = 2\hat{R} - B\hat{A}C$; 故 P 在 △ABC 之外接圓周上.

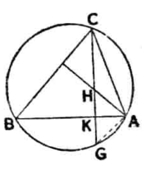
509. 由三角形之任意角頂至垂心之距離,等於由其對邊至外心之距離之二倍.

證　設垂心為 H, 外心為 O, 由 O 至 BC 之垂線為 OM. 引過 B 之直徑 BOD, 聯結 AD, CD, 則 $OM = \frac{1}{2} CD$ [337題]. 而 AH ∥ CD, CH ∥ AD, 故 AHCD 為平行四邊形, 故 AH = CD, 故 AH = 2OM.



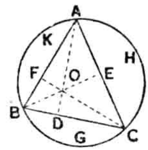
510. 由三角形之垂心,至一邊所引之垂線,延長至外接圓周時,此線分為是邊所二等分.

證　設△ABC 之垂心為 H, 由 H 至邊 AB 所引之垂線為 HK, 其延線與圓周之交點為 G, 聯結 GA. 此時 GH 顯然過 C, 故 $G\hat{A}B = G\hat{C}B = B\hat{A}H$, 且 $A\hat{K}G = \hat{R} = A\hat{K}H$, AK 為 △AGK, △AHK 所共, 故此兩形全等, 故 GK = KH.



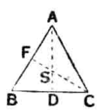
511. 作三角形之外接圓, 將此三角形外之三弓形, 以各邊為界, 而一一對折之, 則三弧形之弓交於同點.

證　由三角形 ABC 之各角頂, 至對邊引垂線 AD, BE, CF, 命其交點為 O, 則 $B\hat{O}C$, $C\hat{O}A$, $A\hat{O}B$ 分別為 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ 之補角, 故 $B\hat{O}C$, $C\hat{O}A$, $A\hat{O}B$ 分別等於弓形 BGC, CHA, AKB 所含之角. 故以 BC, CA, AB 為界, 而將弓形 BGC, CHA, AKB 翻折, 則其弧皆過 O 點.

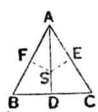


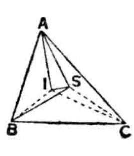
512. 設三角形內切圓之中心為 I, 外接圓之中心為 S, 則(1)若 I 與 S 相合, 則三角形為等邊, (2)若 I 與 S 在過一角頂之一直線上, 則三角形為二等邊, (3)聯結任意角頂與 I, S 之二直線所成之角, 等於他二角差之半分.

證　(1)設 I 與 S 相合, 聯結 AS, CS, 由 S 至 BC, AB 引垂線 SD, SF. 此時 AS 等於 CS, SD 等於 SF, 故兩三角形 ASF, CSD 全等, 而 AF = CD. 然 S 為外心, 故 D, F 分別為 BC, AB 之中點, 因而 AB = CB. 同理, AC = BC. 故 △ABC 為等邊三角形.



(2)　設 A, I, S 在一直線上, 命直線 AIS 與 BC 之交點為 D, 則 AD 為 $\hat{A}$ 之二等分線. 由 S 引 AB, AC 之垂線 SF, SE, 則兩直角三角形 ASE, ASF 全等, 因而 AE = AF. 故其二倍 AC = AB, 故 △ABC 為二等邊三角形.



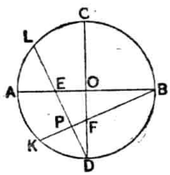


(3)　$I\hat{A}S = B\hat{A}S - B\hat{A}I = B\hat{A}S - C\hat{A}I = B\hat{A}S - C\hat{A}S - I\hat{A}S$, 即 $2I\hat{A}S = B\hat{A}S - C\hat{A}S$, 即 $I\hat{A}S = \frac{1}{2}(B\hat{A}S - C\hat{A}S) = \frac{1}{2}(S\hat{B}A - S\hat{C}A) = \frac{1}{2}(S\hat{B}A + S\hat{B}C$

$-S\hat{C}A-S\hat{C}B)=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C}.)$

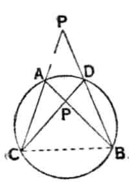
513. 設 AOB, COD 爲互相垂直之二直徑,在 OA 上任取 OE, 在 OD 上取等於此之 OF, 延長 BF, 則爲 DE 之垂線. 又設 BF, DE 之延線, 交圓周於 K, L, 則弧 KL 爲圓周之四分之一.

證　兩直角三角形 BOF, DOE 中, 直角之二邊分別相等, 故 $O\hat{B}F=O\hat{D}E$. 於是命 BF, DE 之交點爲 P, 則△BOF, △DPF 中, $O\hat{F}B=P\hat{F}D$, $O\hat{B}F=O\hat{D}E$, 故 $F\hat{O}B=F\hat{P}D$. 而 $F\hat{O}B=\hat{R}$, 故 $F\hat{P}D=\hat{R}$, 卽 BF 爲 DE 之垂線. 又 $O\hat{B}F=O\hat{D}E$, 故弧 AK = 弧 DL, 故弧 KAL = 弧 ALC. 然弧 ALC 爲圓周之四分之一, 故弧 KAL 亦爲圓周之四分之一.



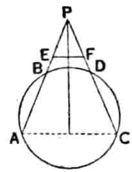
514. 由圓中相等二弦或其延線之交點, 至各弦兩端之距離, 兩兩相等.

證　設二等弦 AB, CD 交於圓內之點 P, 聯結 CB. 於是因弦 AB = 弦 CD, 故弧 ADB = 弧 CAD, 故弧 AC = 弧 BD, 故 $A\hat{B}C=D\hat{C}B$ [466 題]. 故 PB = PC, 因而 PA = PD. 次, 設二等弦 AC, BD 交於圓外之點 P′, 則因弧 AC = 弧BD, 故弧 CAD = 弧 ADB, 故 $A\hat{C}B=D\hat{B}C$. 故 P′B = P′C, 因而 P′A = P′D.



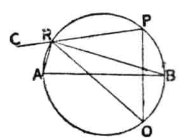
515. 設 AB, CD 爲圓之等弦, 分別延長至 E, F, 令 BE = DF, 則 EF 之垂直二等分線過圓之中心.

證　弦 AB = 弦 CD, 故弧 AB = 弧 CD, 因此弧 ABD = 弧 BDC, 故 $\hat{A}=\hat{C}$. 據此, 設 AE, CF 之交點爲 P, 則△PAC 爲二等邊. 又因 AE = CF, 故 PE = PF, 故△PEF 爲二等邊三角形, 而 EF ∥ AC. 故底 EF 之垂直二等分線, 將頂角 P 二等分 [91 及 95 題], 而二等邊三角形 APC 頂角 P 之二等分線, 將 AC 垂直二等分 [93題], 又 AC 之垂直二等分線過圓之中心 [441題].



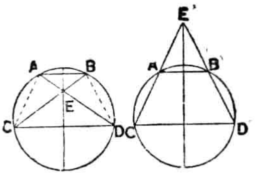
516. 設任意弦 PQ 垂直於圓之直徑 AB, 在圓周上取任意點 R, 則角 PRQ 及其外角之二等分線, 各過 A 或 B.

證　因直徑 AB 垂直於弦 PQ, 故 A, B 分別爲二弧之中點 [440及471題]. 故設 R 在弧 PAQ 上, 則 $P\hat{R}Q$ 之二等分線過弧 PBQ 之中點, 即B; 設R 在弧 PBQ 上, 則過 A [466題]. 又設 R 在弧 PAQ 上, 則外角 QRC 之二等分線, 過弧 PAQ 之中點 A; 設 R 在弧 PBQ 上, 則過 B. 總之, $P\hat{R}Q$ 及其外角之二等分線, 各過 A 或 B.



517. 設 AB, CD 爲平行之弦, 其長不等, 則 AC, BD 或 AD, BC 之交點, 在垂直於 AB 及 CD 之直徑或其延線上, 而與直徑成等角. 又設 AB, CD 相等, 則如何?

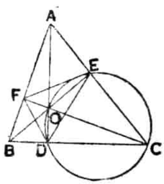
解　命 AD, BC 或 AC, BD 之交點爲 E. 因 AB ∥ CD, 故弧 AC = 弧 BD [474 題], 因而弧 CAB = 弧DBA. 故甲圖中 $B\hat{C}D=A\hat{D}C$, 乙圖中 $B\hat{D}C=A\hat{C}D$. 故 EC = ED [59題]. 據此.



AB 及 CD 之垂直二等分線過 E[95題], 且二等分角 CED [91題]. 設 AB = CD, 則 AD, BC 交於中心, 而 AC, BD 平行.

518. 由三角形之各角頂, 至其對邊引垂線, 聯結其垂足而成之三角形, 曰垂足三角形. 垂足三角形之任何二邊, 與原三角形中過此二邊交點之垂線成等角, 且又與原三角形之邊成等角.

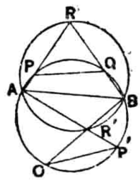
證 設由三角形 ABC 之頂點至對邊所引之垂線分別為 AD, BE, CF, 垂心為 O. 以 OC 為直徑之圓周, 過 D 及 E [486題], 故 $O\hat{E}D = O\hat{C}D$. 同理, $O\hat{E}F = O\hat{A}F$. 而 $O\hat{C}D$, $O\hat{A}F$ 皆為 $A\hat{B}C$ 之餘角, 故



相等, 因而 $O\hat{E}D = O\hat{E}F$, 卽垂足三角形 DEF 之二邊 ED, EF 與過 E 之垂線 BE 等成角; 又 $C\hat{E}D = A\hat{E}F$, 卽與過 E 之邊成等角. 同理, 垂足三角形之頂點 D, F 旁之二邊, 與過名該頂點之垂線及邊成等角.

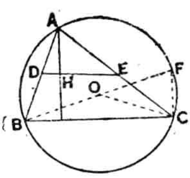
519. 設 AB 為圓 APQB 之所設弦, PQ 為同圓之弦, 而其長一定, 命 AP, BQ 之交點為 R, 則不論 PQ 之位置若何, R 恆在定圓周上.

證 設 PQ 之兩端, 在 AB 之同側, 或 AB 之異側, 則 $\hat{R}$ 等於與弧 AQ'P'B, PQ 之差相等之弧所對之圓周角[490及451題]. 而弧 PQ 不問其位置若何, 恆相等, 故弧 AQ'P'B, PQ 之差一定, 因而 $\hat{R}$ 為定角. 據此, $\hat{R}$ 在弧 ARB 上, 而 AB 為其圓之弦 [452及453題]. 又設 PQ 在 P'Q' 之位置, 即與前位置在 AB 之異側時, 則 R 在 R' 之位置, 而 $\hat{R}'$ 等於與弧 APQB, P'Q' 之和相等之弧所對之圓周角. 然弧 PQ = 弧 P'Q', 故 $\hat{R}+\hat{R}'$ 為二直角. 故 R' 所在之弧, 補足弧 ARB 而成一圓周, 因此 R 恆在一定圓周上.



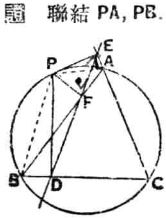
520. 設 O 為三角形 ABC 之外心, H 為其垂心. 在 AB 上取 AD 等於 AH, AC 上取 AE 等於 AO, 則 DE 等於外接圓之半徑.

證 作過 B 之直徑 BOF, 聯結 CO, CF, 則 △ADE, △COF 中, AE = AO = OF, AD = AH = FC [509題], $D\hat{A}E = O\hat{F}C$ [452題], 故 DE = OC [55題], 卽 DE 等於外接圓之半徑.



521. 在三角形外接圓之周上, 取任意點 P, 由 P 至三邊或其延線引三垂線, 則其垂足 D, E, F 在一同直線上. [此定理曰 Simson 氏定理, 此直線曰三角形關於 P 點之 Simson 氏線, 或垂足線]. 又試證其逆定理.

證 聯結 PA, PB. 因 P, E, A, F 在一圓周上, 故 $P\hat{F}E = P\hat{A}E = P\hat{B}D = 2\hat{R} - P\hat{F}D$. 何則, 以 P, B, D, F 在一圓周上故也. 據此, D, E, F 在一直線上.



[逆定理] $B\hat{P}D = B\hat{F}D$

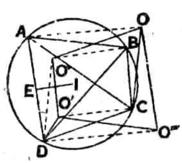
$=A\hat{F}E=A\hat{P}E$, 故 $B\hat{P}A=D\hat{P}E=2\hat{R}-\hat{C}$. 故 A, P, B, C 在一圓周上,即 P 在 $\triangle ABC$ 之外接圓周上.

注意 (1) PD, PF, PE 爲與三角形之邊成等角[依同方向迴轉所測得者]之斜線,由此可仿上以證 D, F, E 在一直線上.

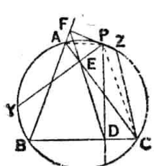
注意 (2)設四直線相交而成四三角形,則由其任意二者之外接圓之交點至四直線所引垂線之足,在一直線上.

522. 設 ABCD 爲圓之內接四邊形, 則以三角形 ABC, BCD, CDA, DAB 之垂心爲頂點之四邊形,全等於原四邊形.

證 設 I 爲圓之中心, O, O′, O″, O‴ 分別爲 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ 之垂心, 引 AD 之垂線 IE, 聯結 O″B, O′C, 於是 $O''B=2IE=O'C$, 且 O″B, O′C 皆平行於 IE, 故四邊形 BCO′O″ 爲平行四邊形, 而 $O'O''\parallel BC$, 且 $O'O''=BC$. 仿此, O′O‴, O‴O, OO″ 分別平行且等於 AB, AD, DC. 故四邊形 OO″O′O‴, 與四邊形 DCBA, 各邊各角分別相等,故此兩四邊形全等.



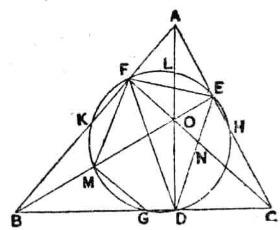
523. Simson 氏定理中,延長 PD, PE, PF, 令再交圓周於 X, Y, Z, 則 AX, BY, CZ 各平行於 Simson 氏線.



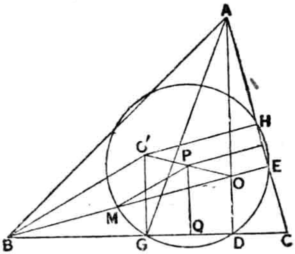
證 四邊形 APZC 內接於圓,故角 ACZ＝角 APF＝角 AEF＝角 CED, 故 $CZ\parallel DEF$. 仿此,得證 AX, BY 亦平行於 DEF.

524. 過關於三角形之下列九點,得作一圓. (A)各邊之中點. (B)由各頂點至對邊所引垂線之足. (C)各頂點與垂心連線之中點. [此圓曰九點圓]. 而外心,垂心,重心及九點圓之中心在一直線上,九點圓之中心在外心與垂心之中央. 又九點圓之半徑爲外接圓半徑之半分.

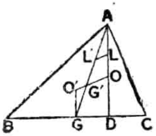
證 命 $\triangle ABC$ 之垂足爲 D, E, F, 圓 DEF 分



別截 AO, BO, CO 於 L, M, N; 於是因 $O\hat{F}B$, $O\hat{D}B$ 各爲直角,故以 OB 爲直徑作圓,則過 F, D. 又 $F\hat{M}O=F\hat{D}E=2F\hat{D}O$, 故 M 爲以 OB 爲直徑之圓之中心,卽 M 爲 OB 之中點. 同理, N, L 分別爲 OC, OA 之中點. 次,設圓 DEF 再截邊 BC, CA, AB 於 G, H, K, 則因 $M\hat{G}B=M\hat{E}D=O\hat{C}B$,故 $MG\parallel OC$. 然 M 爲 OB 之中點,故 G 爲 BC 之中點. 同理, H, K 分別爲邊 CA, AB 之中點. 故 D, E, F, G, H, K, L, M, N 九點在一圓周上.次, GD 之垂直二等分線 QP 將 OO′ 二等分於 P. 何則,以聯結 GD 之中點 Q 與 OO′ 之中點 P 之直線,平行於 OD 及 O′G 故也[279題]. 九點圓之中心,當在 GD 之垂直二等分線上,同時又當在 HE 之垂直二等分線上,故 P 爲九點圓之中心. 故九點圓之中心 P, 與垂心 O,

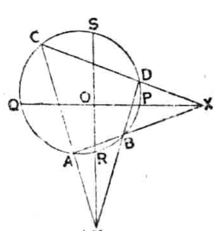


外心 O' 在一直線上. 而 P 在中央. PM 爲 BO' 之半分[232題],故九點圓之半徑等於外接圓半徑之半分. 次,設 G' 爲 $\triangle ABC$ 之重心,則 $G'A=2G'G$. 聯結 $O'G'$, 延長之,命交 AD 於 O;取 $G'A$ 之中點 L', AO 之中點 L,聯結 $L'L$, 則 $L'L \parallel G'O, L'L=\frac{1}{2}$ $XG'O$[232題].故 $\triangle GG'O'$, $\triangle AL'L$ 中. $GG'=AL'$,



$O'\hat{G}G'=L'\hat{A}L$, $O'\hat{G'}G=A\hat{G'}O=A\hat{L'}L$, 故 $O'G'=L'L=\frac{1}{2}G'O$. 仿此,設 $O'G'$ 交 BE 於 O'',則 $O'G'=\frac{1}{2}G'O''$. 然 O' 及 G' 爲定點,故 O 及 O'' 爲同點,卽垂心. 故垂心 O, 九點圓之中心 P, 重心 G', 外心 O 在一直線上.

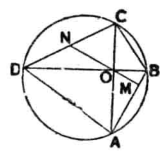
525. 圓之內接四邊形中,延長其二組對邊而得二角,此二角之二等分線直交.



證 設ABCD爲內接四邊形, AB, CD 之交點爲 X, DB, CA 之交點爲 Y, XPOQ, YROS 爲 $\hat{X}$, $\hat{Y}$ 之二等分線. 此時弧 AQ－弧 BP＝弧 CQ－弧 DP [490題],故弧 AQ＋弧 DP＝弧 CQ＋弧 BP. 同理,弧 AR＋弧 DS＝弧 CS＋弧 BR. 相加,則弧 QAR＋弧 PDS＝弧 QCS＋弧 PBR, 故＝號之各邊皆爲半圓周. 故 $Q\hat{O}R=Q\hat{O}S$ [480題]. 故 $XOQ \perp YOS$.

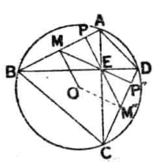
526. 圓之內接四邊形中,若兩對角線直交,則由其交點至任意一邊所引垂線,依反對方向延長時,將對邊二等分.[此定理曰 Brahmegpta 氏定理].

證 設內接四邊形 ABCD 中, $AC \perp BD$, 命其交點爲 O. 由 O 至 AB 引垂線 OM, 命 MO 之延線與 CD 之交點爲 N. 此時 $C\hat{O}N=A\hat{O}M=\hat{R}-B\hat{O}M=O\hat{B}M=O\hat{C}N$, 故 NC＝NO. 同理, ND＝NO. 故 DN＝NC.



527. 設圓之內接四邊形中,兩對角線直交,則由其交點至各邊所引垂線之足,與各邊之中點,其數凡八,同在一圓周上.

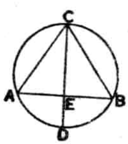
證 設圓之中心爲 O, 其內接四邊形爲 ABCD, 對角線 AC, BD 直交於 E. 由 E 引 AB 之垂線 EP, 命 PE 之延線與 CD 之交點爲 M'', 則依據 Brahmegpta 氏定理[前題], M'' 爲 CD 之中點. 同理,由 E 至邊 BC, CD, DA 所引之垂線 EP', EP'', EP''', 分別將對邊二等分於 M''', M, M'.次,聯結 OM, OM'',則 $OM \parallel EM''$, $OM'' \parallel ME$,故 $OM=EM''=\frac{1}{2}CD$. 其他亦可仿此證之. 又 P, P'' 上之角,皆爲直角,故 P, P'', M'', M 同在以 MM''



爲直徑之圓周上.同理, P′, P‴, M′, M‴, 同在以M′M‴爲直徑之圓周上.而MM M″M‴爲矩形之頂點[∵其各邊平行於 AC, BD], 故此形內接於以MM″, M′M‴之交點爲中心之圓.故 P, M, M′, P′, M″, P″, P‴, M‴在一圓周上.

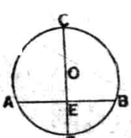
528. 過圓之弦AB之中點E, 所引AB之垂線,將此弦所分之二弧二等分.

證 設過 E 之 AB 之垂線,與圓周之交點爲 C, D, 聯結 AC, BC, 則因 EC⊥AB, 且 AE=EB, 故 AC=BC, 故弧 AC=弧 BC [436題].故 C 爲弧 ACB 之中點.同理, D 爲弧 ADB 之中點.



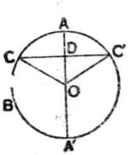
529. 將弦所分之二弧二等分之直線,過中心,且二等分弦.

證 設圓 O 之弦 AB 所分二弧之中點爲 C, D. 命 AB 之中點爲 E, 過 E 引 AB 之垂線, 則其線過 C, D [528題]. 而直線 CD 亦過 C, D, 因過二點之直線唯一,故直線 CD 過 E, 即將 AB 垂直二等分,因而過中心 O [441題].

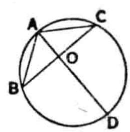


530. 圓關於其中心及任意直徑爲對稱.

證 設圓之中心爲 O, 在圓周上取任意點 A, 命過 A 之直徑之他端爲 A′, 則 AO, A′O 俱爲圓之半徑,故相等. 故點 A 關於點 O 之對稱點爲 A′,因此 O 爲圓之對稱中心. 次,取任意直徑爲 AA′, 在半圓周 ABA′ 上取任意點 C, 由 C 至 AA′ 引垂線CD, 命其延線與他半圓周之交點爲 C′. 於是兩直角三角形 COD, C′OD 中, CO=C′O, OD 公有, 故 CD=C′D. 據此,以 AA′ 爲界, 將半圓 ABA′ 折至他半圓上,則點 C 合於 C′. 同理,他半圓周上之任意點 C′ 關於直線 AA′ 之對稱點 C, 在半圓周 ABA′ 上.故 AA′ 爲圓 O 之對稱軸.

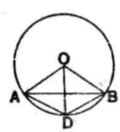


531. 設 AB, AC 爲圓中之等弦,則角 BAC 之二等分線過中心.



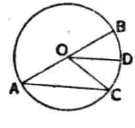
證 聯結 BC, 則得二等邊三角形 ABC, 而角 BAC 爲其頂角. 故角 BAC 之二等分線,將 BC 垂直二等分,而 BC 之垂直二等分線過中心[441題]故如題言.

532. 弦AB所分之共軛弧中,其一之中點與中心聯結之直線,將弦垂直二等分.



證 設 D 爲弧 AB 之中點, 則 AD=DB. 又 OA=OB, 故 OD 將 AB 垂直二等分[193題].

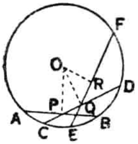
533. 設半徑 OD, 平行於弦 AC, 則此弦與直徑 AB 間之弧 BC, 爲半徑 OD 所二等分.



證 聯結 OC. $B\hat{O}D = B\hat{A}C = O\hat{C}A = C\hat{O}D$, 故弧 BD=弧 CD.

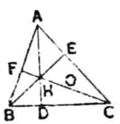
534. 設圓之第一弦爲第二弦二等分,第二弦爲第三弦二等分,第三弦爲第四弦二等分,以下仿此,則是等分點,依次趨近中心.

證 設圓 O 之弦爲 AB,其中點爲 P; CD 爲過 P 之弦,其中點爲 Q; 又 EF 爲過 Q 之弦,



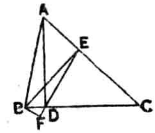
其中點爲R. 求證AB,CD,EF之中點,漸次邇近中心. OP⊥AB, OQ⊥CD, 故OP不垂直於CD, 故OP>OQ, 因此, 點Q較點P近中心.同理,點R較點Q近中心.以下次第如是,故如題所言.

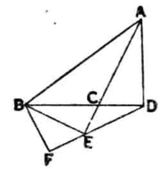
535. 設三角形之各角皆爲銳角,則外心,垂心,皆在形內.設爲鈍角三角形或直角三角形,則如何?



解 設三角形ABC之各角,皆爲銳角,則因角A爲銳角,故弓形BAC大於半圓,故中心O與A在BC之同側.同理,O與B在AC之同側,與C在AB之同側.據此,外心O在三角形ABC之內.次,設由各角項至對邊所引之垂線爲AD,BE,CF,則因角B,C爲銳角,故AD在角BAC之內.同理,BE在角ABC之內.而BE兩端之點B,E,在AD之異側,故直線BE與有限直線AD交.故垂心H在形內.設BAC爲鈍角,則弓形BAC小於半圓,故O與A在BC之異側.故外心在形外.又因須$E\hat{A}B<\hat{R}$,故E在CA之延線上.同理,F亦在BA之延線上.故其交點H在三角形之外,而在角ABC之對頂角內.又設$B\hat{A}C=\hat{R}$,則弓形BAC等於半圓,故O在邊BC上;二垂線BE,CF分別與邊BA,CA合.交點H與A合.

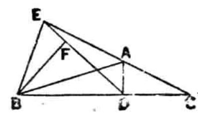
536. 由三角形之二項點A,B,分別至其對邊引垂線AD,BE,由B至直線DE引垂線BF,則角FBD等於角EBA.



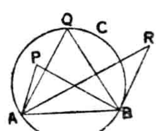


解 $A\hat{E}B=\hat{R}=B\hat{D}A$,故ABDE之四邊形,得內接於圓.故AB,AE所成之銳角,等於DB,DE所成之銳角.故與其餘角之角EBA,FBD相等.

537. 立於圓之弦上,且在其一方之諸角中,大於圓周角者,其頂點在圓內,等於圓周角者,其頂點在圓周上,小於圓周角者,其頂點在圓外.

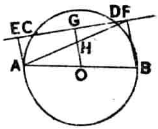


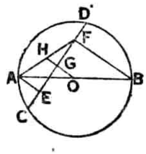
解 設圓ABC之弦爲AB,與C在AB同側之諸角$A\hat{P}B>A\hat{C}B$, $A\hat{Q}B=A\hat{C}B$, $A\hat{R}B<A\hat{C}B$.今與C在AB同側之點,與弦AB之兩端聯結之二直線所成之角,若其點(1)在弓形ABC內,則大於角ACB,(2)在弧上,則等於角ACB(3)在弓形ACB外,則小於角ACB[452,453題].而其點之位置,不出上舉三者,故據轉換法,其逆定理亦成立.故P在弓形內,Q在弧上,R在弓形外.



538. 由圓之任意直徑之兩端,至定長之弦引二垂線,則其和或差一定.

解 設圓O中AB爲任意直徑,DC爲定長之弦.由A,B,O至CD分別引垂線AE,BF,

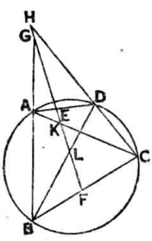




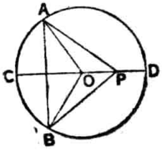
OG,則因 AO＝OB,故依據 283 題,$OG=\frac{1}{2}(AE\pm BF)$.然 CD 之長一定,故 OG 之長亦一定.故如題所言.

539. 圓之內接四邊形中,與其一雙對邊成等角之直線,與其餘一雙對邊及兩對角線亦成等角.

證　設 ABCD 爲圓之內接四邊形.直線 EF 與 AD, BC 成等角,其延線與 BA, CD 之延線分別交於 G, H, 又命其與對角線 AC, BD 之交點分別爲 K, L. 於是兩三角形 GAE, HCF 中, $G\hat{A}E=H\hat{C}F$ [457 題], $G\hat{E}A=H\hat{F}C$ [假設], 故 $A\hat{G}E=C\hat{H}F$. 次, 兩三角形 KCF, LDE 中, $K\hat{F}C=L\hat{E}D$ [假設], $K\hat{C}F=L\hat{D}E$ [452 題], 故 $C\hat{K}F=D\hat{L}E$.



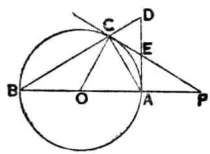
540. 設圓之中心爲 O, P 爲 O 以外之點,由 P 至圓周上二點 A, B 之距離相等,則過 P 之直徑將角 AOB, APB 二等分,將 AB 垂直二等分.



證　設過 P 之直徑爲 CD, 則 △AOP, △BOP 中,三邊相等,故 $A\hat{O}P=B\hat{O}P$, 因而 $A\hat{O}C=B\hat{O}C$, $A\hat{P}O=B\hat{P}O$. 又 OC 將二等邊三角形 AOB 之頂角二等分, 故將底邊 AB 垂直二等分. 故如題所言.

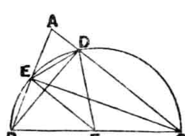
541. 將圓之直徑 BA, 延長至 P,令 AP 等於半徑. 於 A 引切線 AED, 由 P 引切線 PEC [C 爲切點], 命此二切線之交點爲 E. 聯結 B 與 C, 延長之令交 AED 於 D, 則 CDE 爲正三角形.

證　命圓之中心爲 O, 聯結 OC, AC, 則 △OCP 爲以 $\hat{C}$ 爲直角之三角形, 且 OC＝OA＝AP＝AC, 故 OAC 爲正三角形. 又因 $E\hat{A}P=\hat{R}$, 故 $C\hat{O}A=A\hat{E}P=C\hat{E}D$; 又因 $B\hat{C}A=\hat{R}$, 故 $B\hat{A}C=B\hat{D}A$, 即 △CDE 之二角,等於正三角形 OAC 之二角. 故 CDE 爲正三角形.



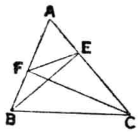
542. 設銳角三角形 ABC 中, BD, CE 分別爲由 B, C 至對邊所引之垂線, F 爲邊 BC 之中點,則角 FED, EDF 各等於角 A.

證　$B\hat{D}C=C\hat{E}B=\hat{R}$, 故 D, E 在以 BC 爲直徑之圓周上,而 F 爲 BC 之中點, 故 FD＝FE, 故 $D\hat{E}F=E\hat{D}F$. 又 $\hat{A}+A\hat{E}D=E\hat{D}C$, 而 $A\hat{E}D=2\hat{R}-B\hat{E}D=F\hat{C}D=F\hat{D}C$, 故 $\hat{A}=E\hat{D}F$, 即 $F\hat{E}D=E\hat{D}F=\hat{A}$.



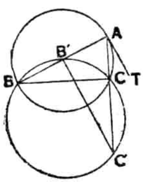
543. 三角形之底邊與頂角有定大時, 由兩底角之頂點至對邊所引垂線之足聯結之直線有定長.

證　設△ABC 中,底邊 BC 及頂角 A 之大小一定. 由 B, C 至對邊引垂線 BE, CF, 則



$B\hat{E}C=\hat{R}=B\hat{F}C$,故 E, F 在以 BC 爲直徑之圓周上. 而角 $E\hat{B}F$ 爲 $\hat{A}$ 之餘角, 且 $\hat{A}$ 之大小一定,故 $E\hat{B}F$, 卽立於弦 EF 上之圓周角一定,因而弦 EF 之長亦一定.

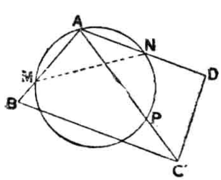
544. 設過三角形 ABC 之二角頂 B, C 之圓周與二邊 AB, AC 之交點爲 B′, C′, 則聯結 B′, C′ 之直線,恆平行於定直線.



證 作 △ABC 之外接圓, 自 A 引此圓之切線 AT, 且令 T 與 B 在 AC 之異側, 則因 $A\hat{C}'B'=A\hat{B}C$ [因各爲同弧上之角] $=T\hat{A}C$, 故 B′C′ ∥ AT. 而 AT 爲切定圓 ABC 於定點 A 之切線, 故爲定直線.

545. 設四邊形 ABCD 移動,而不變形,且其相隣二邊 AB, AD 分别恆過定點 M, N, 則對角線 AC 亦恆過定點.

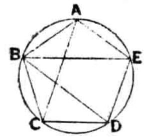
證 四邊形 ABCD 之形狀一定, 故 $\hat{A}$ 有定大,且 M, N 爲定點, 故 A 恆在以 MN 爲弦之弧上.



命 AC 與弧 MAN 之共軛弧交於 P, 則因 $M\hat{A}C$ 之大小一定,且 M 爲定點, 故弧 MP 一定,因而 P 爲定點. 故 AC 恆過定點 P. 然 A 至 MN 之異側時,則 AC 過 P 關於 MN 之對稱點 P′.

546. 三角相等之等邊五角形爲正五角形.

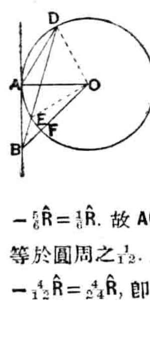
證 設等邊五邊形 ABCDE 中, $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}$, 求證此五角形爲正五角形.



三個二等邊三角形 ABE, BCA, CDB 中,等邊及頂角分别相等, 故全等. 故 $A\hat{E}B=A\hat{C}B$, 故四點 E, A, B, C 在一圓周上. 又 $B\hat{A}C=B\hat{D}C$,故 A, B, C, D 亦在一圓周上. 而此二圓共三點 A, B, C, 故兩圓相合. 因此, ABCDE 爲圓之內接等邊多角形,故爲正多角形[672題].

547. 在圓 O 中, 引與半徑等長之弦 AD, 於 A 引此圓之切線,由其對於 OA 在 AD 異側之部分,截取 AB, 令等於半徑,聯結 BD 及 BO, 命其與圓周之交點分别爲 E, F, 則弧 AE 等於圓周之$\frac{1}{12}$,弧 EF 等於圓周之$\frac{1}{24}$.

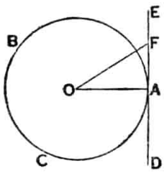
證 聯結 OD, OE. 由作圖,知 OAD 爲正三角形,ABD 爲二等邊三角形,OAB 爲直角二等邊三角形. 據此, $A\hat{D}B=\frac{1}{2}(2\hat{R}-B\hat{A}D)=\hat{R}-\frac{1}{2}\times B\hat{A}D$;然 $B\hat{A}D=\hat{R}+\frac{2}{3}\hat{R}=\frac{5}{3}\hat{R}$, 因而 $A\hat{D}B=\hat{R}-\frac{5}{6}\hat{R}=\frac{1}{6}\hat{R}$. 故 $A\hat{O}E=2A\hat{D}B=\frac{4}{12}\hat{R}$, 卽弧 AE 等於圓周之$\frac{1}{12}$. 又 $E\hat{O}F=A\hat{O}F-A\hat{O}E=\frac{1}{2}\hat{R}-\frac{4}{12}\hat{R}=\frac{4}{24}\hat{R}$, 卽弧 EF 等於圓周之$\frac{1}{24}$.



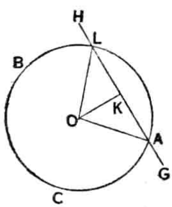
第三章 切線

548. 過圓周上一點之諸直線中,其與過同點之半徑相垂直者,不復交圓周於他點;其餘直線則有第二交點.

證　設點 A 在以 O 爲中心之圓 ABC 之周上, DAE 垂直於過 A 之半徑 OA. 求證 A 爲 DE 與圓周之唯一交點. 在 DE 上取任意點 F, 聯結 OF. 因 OA 垂直於 DE, 故 OF 大於



OA [73題], 故 F 在圓 ABC 之外[412題]. 故直線 DE 與圓 ABC 僅交於一點 A. 又設 GAH 爲過 A 而不垂直於 OA 之直線, 則 GH 當交圓周於第二點. ∵ 引 GH 之垂線 OK, 由 O 引 OL, 令交 GH 於 L, 角 KOL 等於角 KOA. 於是 OL 及 OA, 與 GH



之垂線 OK 成等斜度, 故 OL 等於 OA, 卽等於圓之半徑[73題], 故 L 在圓周上[412題], 卽直線 GH 交圓周於第二點 L.

549.　切圓於所設點之直線唯一.

證　過所設點之半徑唯一, 直交此半徑於所設點之直線亦唯一, 故切圓於所設點之直線唯一.

550.　圓之任意切線, 爲過其切點之半徑之垂線.

證　由548題可知.

551.　圓之中心在任意切線之垂線上, 但垂足爲切點.

證　因由切點所引切線之垂線唯一.

552.　由中心至切線之垂線, 交切線於切點.

證　因由中心至切線之垂線唯一.

553.　設圓之中心與一直線之距離, 小於, 或等於, 或大於半徑, 則此直線截圓, 或切於圓, 或與圓不相交.

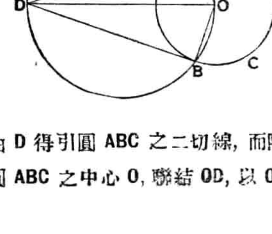
證　先設由中心至某直線之距離, 小於半徑. 此時由中心至此直線所引垂線之足在圓周內 [412題]. 又得在此直線上取一點, 令由中心至此點之距離爲任意大, 故得取此點於圓周外 [412題]. 據此, 是直線上之點, 有在圓周內者, 有在圓周外者, 故此直線截圓周. 次, 設由中心至某直線之距離等於半徑. 此時是直線爲半徑之垂線, 而過半徑之一端, 故此直線切於圓 [550題]. 復次, 設由中心至某直線之距離大於半徑. 此時由中心至是直線上各點之距離, 皆大於半徑[73題]. 故是直線上之各點, 在圓周外 [412題]. 故是直線全不截圓.

554.　設一直線截圓, 或切於圓, 或不與圓交, 則由此直線至圓之中心之距離, 小於, 或等於, 或大於半徑.

證　由前題可知.

555.　由圓外之一點, 得引圓之二切線, 而限於二.

證　設 ABC 爲所設圓, D 爲圓外之點, 求



證由 D 得引圓 ABC 之二切線, 而限於二. 取圓 ABC 之中心 O, 聯結 OD, 以 OD 爲直

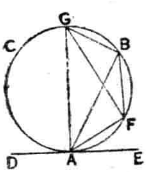
徑作圓,則此圓截圓 ABC 於二點,因 O 在圓 ABC 之內,而 D 在圓 ABC 之外也. 但此二圓之交點限於二[446題].設是等二交點爲 A, B, 聯結 DA, DB, 則 DA 與 DB 爲由 D 至圓 ABC 所引之二切線.何則,蓋聯結 OA, OB. 則半圓 DAO 中之角 DAO 爲直角 [454題], 故 DA 切於圓 ABC [550題]; 同理, DB 切於圓 ABC. 又由 D 至圓周 ABC 上他點所引之任意直線,例如 DE, 非圓 ABC 之切線,因角 DEO 之大小,視 E 在圓 ABD 之內或在其外,而大於直角,或小於直角故也[453題].

556. 由圓外之一點所引之切線相等,而與聯結是點及中心之直線成等角.

證　由前題自明.

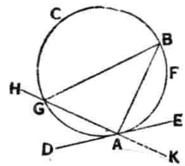
557. 圓之切線與由切點所引弦之夾角,等於此弦上在他側之圓周角.

證　設 DE 爲切圓 ABC 於 A 點之切線, AB 爲由 A 所引之弦. 求證銳角 BAE 等於弦 AB 上在他側之圓周角. 引直徑 AG, 聯結 BG. 此時 $G\hat{A}E$ 爲直角 [550題], 故 $B\hat{A}E$ 爲 $B\hat{A}G$ 之餘角. 又因弧 ABG 爲半圓周, 故 $A\hat{B}G$ 爲直角 [450題],故 $B\hat{G}A$ 亦爲 $B\hat{A}G$ 之餘角[66題].故 $B\hat{A}E$ 等於 $B\hat{G}A$ [7題], 卽 $B\hat{A}E$ 等於 AB 上在他側之圓周角. 又求證鈍角 BAD 亦等於 AB 上在他側之圓周角. 設 F 爲圓周上之一點,與角 BAD 在 AB 之異側. 聯結 FA, FB, FG, 則因 GAD, GFA 各爲直角,故相等,又角 GAB, GFB 爲立於同弦之圓周角, 故相等.



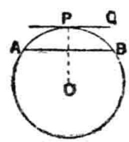
故角 BAD 等於角 AFB, 卽 $B\hat{A}D$ 等於 AB 上在他側之圓周角.

別證　設 DE 爲切圓 ABC 於 A 點之切線, AB 爲由 A 所引之弦. 求證 $B\hat{A}E$ 等於 AB 上與之異側之圓周角, $B\hat{A}D$ 亦等於 AB 上與之異側之圓周角. 於優弧 AB 上取任意點 G, 引割線 HGAK, 聯結 GB. 於是角 BGK, 不論 G 點在優弧 AB 上之位置如何, 其大小恆相等 [452題], G 點漸向 A 運動而至合於 A 時,割線 HK 卽成 A 點上之切線,而角 BGK 成角 BAE. 故 $B\hat{A}E$ 等於 AB 上與之異側之圓周角.同理, $B\hat{A}D$ 亦等於 AB 上與之異側之圓周角.



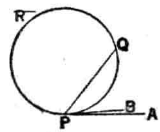
558. 平行於切線之弦所截之弧,爲切點所二等分.

證　在圓周上一點 P 引切線 PQ, 平行於 PQ 引任意弦 AB; 求證切點 P 爲弧 AB 之中點.設圓之中心爲 O, 聯結 OP, 則 PQ ⊥ OP [550題]. 而 AB ∥ PQ, 故 OP ⊥ AB, 因此弧 AP 等於弧 BP [440題注意].



559. 設過圓周上同點之直線與弦所成之角,等於此弦上在他側之圓周角,則此直線爲圓之切線.

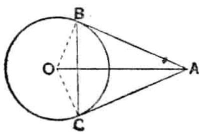
證　設 P 爲圓周上之一點, 弦 PQ 與直線 PA 皆過 P, 其所成角等於 PQ 上在他側之圓周角.



求證 PA 爲圓之切線. 設過 P 引切線 PB, 則角 BPQ 等於 PQ 上他側之圓周角, 故 $B\hat{P}Q = A\hat{P}Q$, 而 PA, PB 相合. 故如題所言.

560. 設圓之中心爲 O, A 爲圓外之一點, 由 A 引圓之二切線 AB, AC, 則 OA 將聯結二切線之弦 BC 垂直二等分.

圖 聯結 OB, OC, 則兩直角三角形 OAB, OAC 中, OB = OC, AB = AC [556 題], 故 $O\hat{A}B = O\hat{A}C$ [193題]. 而三角形 ABC, 因 AB = AC, 故爲二等邊, OA 將頂角 A 二等分, 故 OA 又將底邊 BC 垂直二等分 [93題].



561. 一圓之等弦, 皆切於此圓之一同心圓.

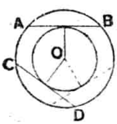
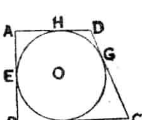


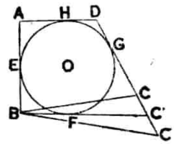
圖 圓之等弦, 距中心等遠 [448題]. 距中心等遠之直線, 切於以此等距離爲半徑之同心圓 [553題].

562. 設四邊形之各邊切於同圓, 則其對邊之和相等. 並證明其逆定理.

圖 設四邊形 ABCD 之各邊 AB, BC, CD, DA 分別切圓 O 於 E, F, G, H, 則 AE = AH [556 題], BE = BF, CG = CF, DG = DH. 故 AE + BE + CG + DG = AH + DH + BF + CF, 卽 AB + CD = AD + BC.



[逆定理]. 設四邊形對邊之和相等, 求證此四邊形之各邊切於同圓. 作圓 O, 令內切於四邊形 ABCD 之三邊 AB, AD, DC, 則此圓又必切於第四邊 BC. 何則, 蓋若 BC 非切線, 則由 B 引切線 BC′, 依本題, AB + DC′ = AD + BC′. 故 EB + GC′ = BC′; 而 EB + GC = BC [假設]. 據此, GC′ ∼ GC = BC′ ∼ BC, 卽 CC′ = BC′ ∼ BC. 於是三角形 BCC′ 中, 二邊之差, 等於他一邊, 此不合理 [71 題], 故 BC, BC′ 必相合.



563. 四邊切於同圓之平行四邊形爲菱形.

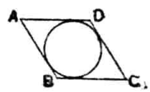
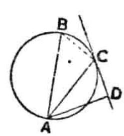


圖 設平行四邊形 ABCD 之各邊, 切於同圓, 則 AD + BC = AB + DC [562題]. 而 AD = BC, AB = DC [222 題], 故 2AD = 2AB, 卽 AD = AB, 故 ABCD 爲菱形.

564. 設一直徑過弦之一端, 一切線過弦之他端, 又由前端引切線之垂線, 則此垂線與直徑之夾角, 爲弦所二等分.

圖 設 AB 爲圓之直徑, AC 爲弦, CD 爲切線, AD 爲由 A 至 CD 之垂線, 聯結 BC, 則 $B\hat{C}A = \hat{R} = C\hat{D}A$, $C\hat{B}A = D\hat{C}A$ [557題]. 故 $B\hat{A}C = C\hat{A}D$ [65題]. 故 AC 將 $B\hat{A}D$ 二等分.

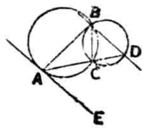


565. 設 AB, AC 爲由圓周上一點 A 所引之二弦, 平行於 A 點上之切線, 引 BD, 令交 AC 於 D, 則圓 BCD 切於 AB.

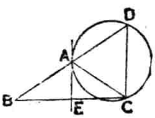
圖 聯結 BC, 則 $A\hat{B}C = C\hat{A}E$ [557題], $C\hat{A}E = B\hat{D}C$ [41題], 故 $A\hat{B}C = B\hat{D}C$, 故 AB 切於

圓 BCD [559題].

566. 在三角形 ABC 之邊 BA 之延線上,取 AD 等於 AC, 則 $B\hat{A}C$ 之二等分線,切於過 C, A, D 三點之圓周.



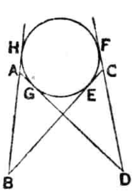
證 因 AD = AC, 故 $\hat{D} = A\hat{C}D$; $B\hat{A}C$ 爲三角形 ADC 之外角,故 $B\hat{A}C = \hat{D} + A\hat{C}D = 2\hat{D}$, 故 $C\hat{A}E = \hat{D}$.



故 AE 切於圓 ACD [559題].

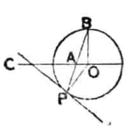
567. 設十字四邊形[一雙對邊相交者]之邊皆切於同圓, 則其一雙對邊之差, 等於他雙對邊之差.

證 設 ABCD 爲十字四邊形, 各邊之切點爲 H, E, F, G. BH = BE [556題], AH = AG, DG = DF, CE = CF, 故 BC ~ AD = (BE + EC) ~ (DG + AG) = (BH + CF) ~ (DF + AH) = (BH − AH) ~ (DF − CF) = AB ~ CD.



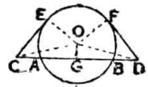
568. 設 A 爲圓之直徑上之一點, B 爲垂直於此直徑之半徑之端,聯結 BA, 延長之,令交圓周於 P, 於 P 點引切線, 命其與直徑延線之交點爲 C, 則 CA = CP.

證 聯結 OP, 則 $O\hat{P}C = \hat{R}$, 故 $A\hat{P}C$ 爲 $O\hat{P}A$ 之餘角. 次,三角形 OBP 中, OP = OB, 故 $O\hat{B}P = O\hat{P}B$; 而 $O\hat{A}B$ 爲 $O\hat{B}P$ 之餘角,故 $A\hat{P}C = O\hat{A}B$. 然 $O\hat{A}B = P\hat{A}C$, 故 $A\hat{P}C = P\hat{A}C$, 故 CA = CP.



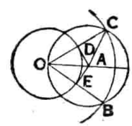
569. 將圓之弦 AB, 向雙方延長, 取相等之 AC, BD, 則由 C 及 D 所引之二切線相等.

證 設弦 AB 之中點爲 G, 聯結 OG, 則 OG 垂直於 AB [439題], 又 AC = BD, 故 G 又爲 CD 之中點, 而 OG ⊥ CD, 故 CO = OD [55題]. 於是兩三角形 CEO, DFO 中, $C\hat{E}O = \hat{R} = D\hat{F}O$, OE = OF, CO = OD, 故 CE = DF [81題].



570. 設一圓之中心爲 O, 半徑爲 R, 以此圓外之一點 A 爲中心, OA 爲半徑, 作弧 BOC, 又以 O 爲中心, 2R 爲半徑作弧, 命其與前弧之交點爲 B, C, 聯結 OB, OC, 命其與原圓之交點爲 E, D, 則二直線 AE, AD 切於原圓.

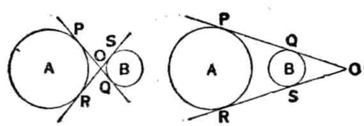
證 AO, AC 同爲圓 A 之半徑, 故相等, OC 爲 OD 之二倍, 故 DC = OD, 因此 AD 爲 OC 之垂線[94題], 故 AD 切於原圓. 同理, AE 亦切於原圓.



571. 兩圓公切線上切點間之長相等.

證 設二圓 A, B 之公切線爲 PQ, RS, 切點爲 P, Q, R, S; 求證 PQ = RS. 設圓 A, B 相等, 則一望而知 PQ = RS. 今設二圓不相等, 命切線 PQ, RS [甲圖]或其延線[乙圖]之交點爲 O, 則 OP = OR, OQ = OS [556題]. 而 PQ, RS 分別爲 OP 與 OQ, OR 與 OS 之和[甲

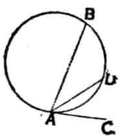
[甲圖] [乙圖]



圖]或差[乙圖],故相等.

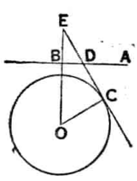
572. 由圓周上之一點,引圓之切線及弦,則與切線在弦之同側之弧之中點,距切線及弦等遠.

證　設AB爲弦,AC爲切線,點D爲AB,AC間所夾弧之中點;求證D距AB,AC等遠.聯結AD,則因弧BD爲弧ADB之半分,故角DAB等於弧ADB上之圓周角之半分[466題].然弧ADB上之圓周角,等於$B\hat{A}C$[557題],故$D\hat{A}B=\frac{1}{2}B\hat{A}C$.故D在$B\hat{A}C$之二等分線上,故距邊AB,AC等遠[117題].



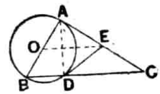
573. 由所設圓之中心O,至所設直線AB,引垂線OB,又由O引任意直線,命其與圓周之交點爲C,於C引切線,則此切線與AB之夾角,等於角COB.

證　設C點上之切線交AB於D,CD或其延線交OB於E[若CD,OB平行,則甚易證之].於是兩三角形EBD,ECO中,角$EBD=\hat{R}=$角ECO,故爲直角三角形,又$\hat{E}$爲兩形所共,故第三角EDB,COB相等[65題].



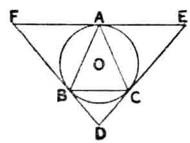
574. 直角三角形中,以直角之一隣邊爲直徑作圓,於其與斜邊之交點引切線,則此切線將直角之又一隣邊二等分.

證　設ABC爲$\hat{A}=\hat{R}$之直角三角形,邊AB爲直徑之圓與斜邊BC之交點爲D,又設D點上之切線與邊AC之交點爲E.求證E爲AC之中點.因$O\hat{A}E=\hat{R}$,故AE爲圓之切線,因此聯結兩切線AE,DE之交點E與圓之中心O,則OE⊥AD[560題].又因AB爲圓之直徑,故$A\hat{D}B=\hat{R}$.於是OE,BC同爲AD之垂線,故相平行,故E爲AC之中點[231題].



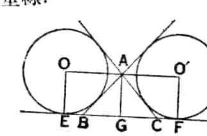
575. 於二等邊三角形之各頂點,引其外接圓之切線,則此三直線成二等邊三角形.又設此兩三角形皆非正三角形,則其頂角不相等.

證　設三角形ABC爲AB＝AC之二等邊三角形,於各角頂引其外接圓之切線而成之三角形爲DEF.因DB,DC爲切線,故聯結D與中心O,則OD將BC垂直二等分[560題].又OA將頂角二等分,故將底邊BC垂直二等分[93題].故A,O,D在一直線上.又三角形DEF中,AD二等分頂角[193題],且爲EF之垂線[550題],故三角形DEF爲DE＝DF之二等邊三角形.次,$B\hat{A}C=B\hat{C}D$[557題]$=D\hat{E}F$,故原二等邊三角形之頂角等於後二等邊三角形之底角,故若此兩三角形皆非正三角形,則頂角不相等.



576. 二等邊三角形中,其兩個等傍切圓之半徑,等於由三角形之頂點至底邊所引之垂線.

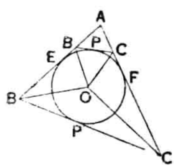
證　設三角形ABC爲AB＝AC之二等邊三角形,圓O,O′爲兩



相等傍切圓.命兩圓外公切線之切點爲 E, F,聯結 OA, AO′,則 OA, AO′成一直線[24題].又由 A 所引 BC 之垂線 AG, 將 $B\hat{A}C$ 二等分[91題], 故 OO′ ⊥ AG. 故 OO′ ∥ BC [38題],故 OE = O′F = AG.

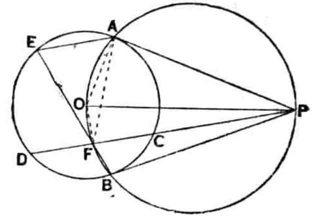
577. 作二邊切於圓之角,及凸向此角頂之弧某點之切線,則此切線與角之二邊所成之三角形,其周一定;且所作之切線,張定角於中心.若所作之切線,切於凹向角頂之弧,則如何?

證 設圓爲 O, 角爲 EAF, 切點爲 E, F, 又 P 爲圓周上之點, BPC 爲所引之切線,其與二邊之交點爲 B, C.此時 AE = AF [556題], BE = BP, CP = CF, 故 AB + BC + AC = AB + BP + PC + AC = AB + BE + CF + AC = AE + AF = 2AE = 一定. 又 BO 爲 $C\hat{B}E$ 之二等分線[556題], CO 爲 $B\hat{C}F$ 之二等分線,故 $B\hat{O}C$ 爲 $\hat{A}$ 之補角之半分,而爲一定[122題]. 次,設點 P′ 在凹向角頂之弧上, P′ 上之切線爲 B′C′,則 AB′ + AC′ − B′C′ = AB′ + AC′ − B′P′ − P′C′ = AB′ − B′P′ + AC′ − P′C′ = AE + AF = 2AE = 一定. B′O, C′O 爲三角形 AB′C′ 二角之二等分線,故 $B'\hat{O}C'$ 等於 $\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{A}$, 而爲一定.



578. 由圓外之點 P 引切線 PA, PB, 及割線 PCD, 又由 A 平行於 CD 引弦 AE, 則 EB 將弦 CD 二等分.

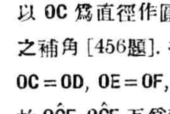
證 設弦 DC 之中點爲 F, 聯結 EF, FB, OP, 以 OP 爲直徑作圓,則因 $O\hat{A}P = \hat{R} = O\hat{F}P$



$= O\hat{B}P$, 故 P, A, O, F, B 在一圓周上[455題].據此, $A\hat{P}B$, $A\hat{F}B$ 互爲補角[456題]. 又因 $O\hat{F}A$, $O\hat{P}A$ 皆爲對弧 AO 之圓周角,故相等[452題]. 次, AE ∥ DC [假設], OF ⊥ DC [439題],故 OF 將 AE 垂直二等分,因此 $A\hat{F}E = 2A\hat{F}O$. 又 $A\hat{P}O = O\hat{P}B$ [556題], 故 $A\hat{P}B = 2A\hat{F}O$, 故 $A\hat{F}E = A\hat{P}B$. 於是 $A\hat{F}B$, $A\hat{F}E$ 互爲補角,故 EFB 成一直線[11題], 因而 EB 將 DC 二等分.

579. 將弦 AB 向雙方延長至 C 及 D, 令其長相等. 由 C, D 至反對之弧上引切線 CE, DF, 則 EF 將 AB 二等分.

證 設弦 AB 之中點爲 G, 聯結 EG, FG, 於是 $O\hat{G}D = \hat{R} = O\hat{F}D$, 故以 OD 爲直徑作圓,則圓周過 G, F [455題], 故 $O\hat{G}F = O\hat{D}F$ [452題]. 又 $O\hat{E}C = \hat{R} = O\hat{G}C$, 故以 OC 爲直徑作圓,過 E, G, 故 $O\hat{G}E$ 爲 $O\hat{C}E$ 之補角[456題]. 次,因 G 爲 CD 之中點,故 OC = OD, OE = OF, 因此 $O\hat{C}E = O\hat{D}F$ [81題]. 故 $O\hat{G}E$, $O\hat{G}F$ 互爲補角,因而 EG, FG 在一直線上.故 EF 將 AB 二等分.

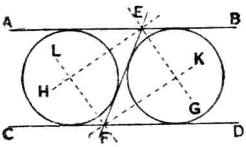


注意 本題又可由578題導出之.

580. 設二平行線與他一直線交,則切於

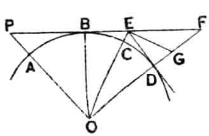
此三直線之圓僅二,且此二圓相等.

解 設 AB, CD 爲二平行線, EF 爲交此平行線於 E, F 之直線. 今切於二直線 AB, EF 之圓之中心,在此二直線夾角之二等分線 EG, EH 上[556題]. 又切於 CD, EF 之圓之中心,在二等分線 FK, FL 上,因此切於此三直線 AB, CD, EF 之圓之中心,必在前二等分線 EG, EH 與後二等分線 FK, FL 之交點上. 然 $EG \parallel FL$, $EH \parallel FK$ [38題],故其交點僅有 EG, FK 之交點與 EH, FL 之交點二者,故切於此三直線之圓僅有二. 次,因此二圓切於二平行線 AB, CD, 故其半徑皆爲此二平行線間距離之半分,因而二圓相等.



581. 由海岸瞭望直航於海中之船,其距離益遠,則船身之隱沒,隨而益速,何故?

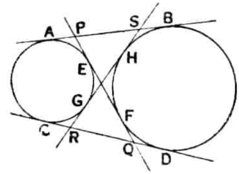
解 設 O 爲地球中心, P 爲眼之位置,由 P 引地球截面[圓*]之切線 PB, 延長之至 F, 在其上任取 BE, 聯結 EO, 又由 E 引地球截面之切線 ED, 聯結 OD, 延長之,令交 BE 之延線於 F, 引 $D\hat{E}F$ 之二等分線 EG. 於是因 $B\hat{O}E = D\hat{O}E$, 故弧 BC = 弧 CD. 船由 A 航至 B 時,全部可見,由 B 進至 C, D 時,船身漸由下部隱沒. 船在 C 時,其隱沒者爲 EC; 在 D 時,隱沒者爲 DF; 故欲解本題,可證 $DF > 2EC$. 今因 EO 將 $B\hat{E}D$ 二等分, EG 將 $D\hat{E}F$ 二等分,故 $O\hat{E}G = \hat{R}$ [18題],故 $OG > OE$; 而 $OD = OC$, 故 $DG > EC$. 又因 $E\hat{D}F = \hat{R}$, 故 $EF > ED$, 故 $FG > GD$ [163題]. 故 $FD > 2EC$.



***注意** 地球並非完全爲球形,故其截面非完全爲圓,今以之爲圓者乃假定也.

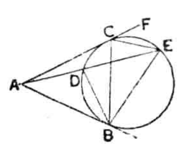
582. 有互相在外之二圓,其一雙外公切線之切點,分別爲 A, B 及 C, D, 又一雙內公切線與 AB, CD 之交點,分別爲 P, Q 及 R, S, 則 $AB = CD = PQ = RS$.

解 設切線 PQ, RS 之切點,分別爲 E, F 及 G, H. 此時 $AP = PE$ [556題], $PF = PB$, $QD = QF$, $QC = QE$. 故 $AB + CD = AP + PB + CQ + QD = PE + PF + QE + QF = PE + QE + PF + QF = 2PQ$. 然 $AB = CD$ [571題],故 $AB = PQ$. 同理, $AB = RS$. 故 $AB = CD = PQ = RS$.



583. 設角之頂點在圓外,其一邊爲割線,他邊爲切線,則此角與其二邊所夾弧之中心角間,有若何之關係? 又設二邊皆爲切線,則如何?

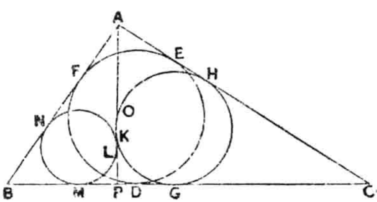
解 由圓外一點 A, 引切線 AB, 割線 ADE, 聯結 BD, BE, 則 $B\hat{E}D = A\hat{B}D$ [557題], $B\hat{A}D = B\hat{D}E - A\hat{B}D = B\hat{D}E - B\hat{E}D$. 故 $B\hat{A}D$ 等於弧 BE, BD 所對圓周角之差,因而等於同弧所對中心角差之半分. 次,設 AC 爲他切線, 則 $B\hat{A}C = B\hat{C}F - A\hat{B}C$



$=\widehat{BDC}-\widehat{BEC}$. 故 $\widehat{BAC}$ 等於弧 BEC, BDC 所對圓周角之差,即中心角之差之半分.

584. 由直角三角形之直角頂,至斜邊引垂線,將原三角形分成兩直角三角形,則此三直角三角形內切圓之半徑和,等於所引垂線.

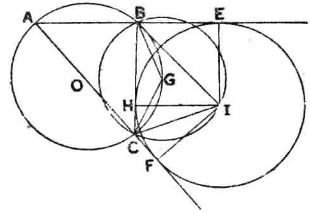
證 設內切圓之中心為 O, 由直角三角形



ABC 之直角頂 A, 至斜邊 BC 所引之垂線為 AP, 內切圓與邊 AB, AC 之切點分別為 F, E. 此時四邊形 OEAF 為正方形, 而 AE, AF 等於內切圓之半徑 R. 次設兩三角形 APC, APB 之內切圓之半徑, 分別為 r, r', 切點為 G, H, K 及 L, M, N. 此時因 P 上之二角皆為 $\hat{R}$, 故 $PG=r$, $PM=r'$. 又 $DM=FN$ [571題], $DG=EH$, 且 $MD+DG=r+r'$. 次, $AP=AL+LP=AN+LP=AF+FN+LP=R+MD+r'$, 又 $AP=AK+KP=AH+KP=R+EH+r=R+DG+r$. 故 $2AP=R+MD+r'+R+DG+r=2R+MD+DG+r+r'=2R+r+r'+r+r'$, 故 $AP=R+r+r'$.

585. 以 O 為中心作圓, 以其周上之點 G 為中心作第二圓, 截前圓於 B, C. 又以第二圓周上之一點 I 為中心, 作切於 BC 之第三圓. 則由 B, C 至第三圓所引他二切線,交於第一圓周上.

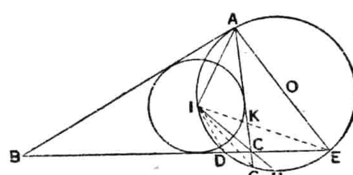
證 設由 B, C 所引二切線分別為 BE, CF,



切點為 E, F, 又命 BE, CF 之交點為 A. 於是因 AE, AF 為圓 I 之切線,故 $\widehat{AEI}=\hat{R}=\widehat{AFI}$, 因而 $\widehat{EIF}$, $\widehat{EAF}$ 互為補角. 又設 BC 與圓 I 之切點為 H, 則 BI, CI 分別為 $\widehat{EIH}$, $\widehat{HIF}$ 之二等分線. 故 $\widehat{BIC}=\frac{1}{2}\widehat{EIF}$. 而 G 為第二圓之中心, 故 $\widehat{BIC}=\frac{1}{2}\widehat{BGC}$ [451題]; 故 $\widehat{BGC}=\widehat{EIF}$, 故 $\widehat{BGC}$, $\widehat{BAC}$ 互為補角. 而 B, G, C 為第一圓周上之點, 故 A 亦為同圓周上之點 [458題].

586. 作一圓,過三角形 ABC 之頂點 A, 內心 I, 且切 AB 於 A, 命其與 BC 之交點為 D, E, 則 IC 將弧 DE 二等分.

證 設過 A, I 之圓之中心為 O, AC 與圓 O

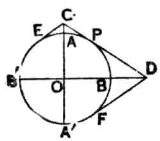


之交點為 G, 聯結 IG, 則 $\widehat{AGI}=\widehat{IAB}$ [557題]. 然 AI 為 $\widehat{BAC}$ 之二等分線, 故 $\widehat{AGI}=\widehat{IAG}$, 故弧 AI = 弧 IG [446題]. $\widehat{AKI}$ 為弧 AI, GE 所對圓周角之和[489題], 因而又為弧 IG, GE 所

對圓周角之和,卽 $I\hat{A}E$. 又 $I\hat{D}B=I\hat{A}E$[457題], 故 $I\hat{D}B=I\hat{K}A$, 因而其補角 $I\hat{D}C=I\hat{K}C$. 次 IC 爲 $D\hat{C}K$ 之二等分線,故 $D\hat{I}C=K\hat{I}C$, 故 IC 將 $D\hat{I}E$ 二等分,故將弧 DE 二等分[466題].

587. 延長圓中互相垂直之二直徑,令其與任意切線交,由其交點分別向圓引他切線,則所引二切線平行.

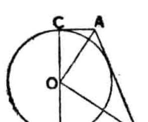
證 設 AA′,BB′爲圓 O 中互相垂直之二直徑, 於任意點 P 所引切線爲 CD, 命其與二直徑延線之交點爲 C, D, 又設由 C,D 所引之他切線爲 CE, DF; 求證 CE ∥ DF.



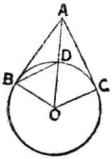
因 COD 爲直角三角形,故 $O\hat{C}D+O\hat{D}C=\hat{R}$, 又 $O\hat{C}D=\frac{1}{2}E\hat{C}D$, $O\hat{D}C=\frac{1}{2}F\hat{D}C$, 故 $E\hat{C}D+F\hat{D}C=2\hat{R}$. 而 E, F 在 CD 之同側,故 CE ∥ DF.

588. 於圓 O 之任意直徑 CD 之兩端, 引二切線, 令分別交他切線於 A, B, 則角 AOB 爲直角.

證 AC, BD 俱爲 CD 之垂線,故相平行,且 A, B 在 CD 之同側,故 $C\hat{A}B+A\hat{B}D=2\hat{R}$. 又 OA 將角 CAB 二等分 [556 題], OB 將角 ABD 二等分,故 $O\hat{A}B+A\hat{B}O=\hat{R}$, 故 $A\hat{O}B=\hat{R}$.



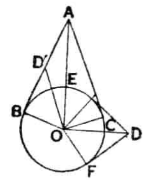
589. 設由圓之中心,至圓外一點之距離, 等於圓之直徑, 則由此點至圓所引二切線間之角度如何?



解 設 O 爲圓之中心, OA 等於圓 O 之直徑,由 A 至此圓所引之切線爲 AB, AC, 命 AO 與圓周之交點爲 D, 則因 AD=DO, $A\hat{B}O=\hat{R}$, 故 AD=DB=DO, 故 $B\hat{D}O=2B\hat{A}O=B\hat{A}C$. 然 BDO 爲正三角形,故 $B\hat{D}O=\frac{2}{3}\hat{R}$, 故 $B\hat{A}C=\frac{2}{3}\hat{R}$.

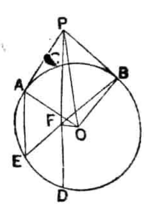
590. 由圓外之一點,至圓所引二切線之夾角, 若其點距中心遠,則小,距中心近,則大.

證 設由圓 O 外之二點 A, D 所引之切線爲 AB, AC, DE, DF, 且 AO > DO. 由 O 至 AB 引一斜線 OD′,令 OD′=OD. 於是 △OD′B ≡ △ODE, 因而 $O\hat{D}E=O\hat{D}'B$. 而 OA>OD′, 故 AB>D′B, 因而 $O\hat{D}'B>O\hat{A}B$, 卽 $O\hat{D}E>O\hat{A}B$. 然此各角爲 $E\hat{D}F$, $B\hat{A}C$ 之半分 [556題], 故 $E\hat{D}F>B\hat{A}C$.



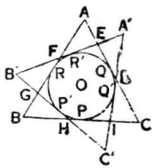
591. 由圓外之點 P, 至此圓引切線 PA, PB 及割線 PCD, 又由 A 引平行於 CD 之弦 AE, 則 EB 將弦 CD 二等分.

證 設 EB, CD 之交點爲 F, 則角 BFC 等於弧 BC, ED 之和所對之圓周角之半分. 而 AE ∥ CD, 故弧 AC=弧 ED, 故弧 BC+弧 ED=弧 AB. 故 $B\hat{F}C=\frac{1}{2}A\hat{O}B$. 聯結 OP, 則 $B\hat{O}P=\frac{1}{2}A\hat{O}B$, 故 $B\hat{F}C=B\hat{O}P$, 且 F, O 在 PB 之同側, 故 PFOB 內接於圓. 而 $O\hat{B}P=\hat{R}$, 故 $O\hat{F}P=\hat{R}$, 故 F 爲 CD 之中點.



592. 外切於一圓之兩個等邊三角形,相交而成六角形, 此六角形雖恆爲等邊, 而不恆爲等角.

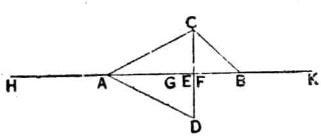
圖 設圓O之二外切正三角形爲ABC, A′B′C′, 其邊之交點爲D, E, F, G, H, I, 其切點爲P, Q, R, P′, Q′, R′. 此時弧PQ, P′Q′皆等於圓周之三分之一,故相等,因而弧PP′=弧QQ′,因此切線HP=HP′=DQ=DQ′. 又IP, IQ′皆爲過點I之切線,故相等,故IP+PH=IQ′+Q′D, 即IH=ID. 同理,弧PQ′=弧P′R, 故GP′=IP因而IH=GH. 仿此得證六邊形DEFGHI之邊皆相等. 次,弧PP′, PQ′普通不相等,因而$\hat{POP'}$, $\hat{POQ'}$不相等,故其補角$\hat{PHP'}$, $\hat{PIQ'}$不相等,故六邊形普通不等角.



第四章 二圓之關係

593. 設二圓之一交點,不在聯結兩中心之直線上,則二圓必交於第二點,而此二圓相交;且聯結兩交點之直線,將聯結兩中心之直線垂直二等分;又聯結二中心之直線,大於二半徑之差,而小於其和.

圖 設二圓之中心爲A及B, 二圓之一交



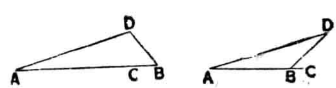
點爲C, 而C不在聯結A與B之直線上;求證此二圓又交於他一點.聯結AB, 引AB之垂線CE, 延長CE至D, 令ED等於CE. 於是兩三角形AEC, AED中, CE=DE, 邊AE公有, $\hat{AEC}=\hat{AED}$, 故AC=AD[55題],故D在以A爲中心之圓周上[412題]. 同理, D在以B爲中心之圓周上,故兩圓交於第二點D, 但不能復交於他點[446題]. 又由是可證二圓相交. 設過A及B之線,與A爲中心之圓交於F及H, 與他圓交於G及K, 但F與B在A之同側, G與A在B之同側. 於是因BK等於BC, 故AK等於AB及BC之和,故AK大於AC[70題],故K在圓A外[412題]. 又因BG等於BC, 故AG等於AB與BC之差,但AB與BC之差,小於三角形ABC之第三邊AC[71題],故AG小於AC, 故G在圓A內[412題]. 據此,二圓相交;又線AB將CD垂直二等分,而AB小於AC與BC之和[70題],大於AC與BC之差[71題].

594. 設二圓之交點唯一,則此點在聯結二圓中心之直線上.

圖 若二圓之交點,不在聯結其中心之直線上,則此二圓必有第二交點,已於前題證明,故其對定理:若二圓之交點唯一,則此點在聯結二中心之直線上,亦成立.

595. 二圓之交點,若在聯結其中心之直線上,則此二圓不更交於他點,而外切或內切;其兩中心間之距離,外切時等於二半徑之和,內切時等於二半徑之差.

圖 設二圓之中心爲A及B, 其圓周之交



[甲圖] [乙圖]

點爲C, 而C在過A與B之直線上;求證

此二圓不更交於他點.在 B 爲中心之圓周上,取 C 以外之任意點 D, 聯結 AD 及 BD. 於是甲圖中 AD 與 BD 之和,大於 AB [70題], BD 等於BC, 故 AD 大於 AC[普.公.(g)], 故 D 在 A 爲中心之圓之外[412題].故 B 爲中心之圓, 全在 A 爲中心之圓之外, 故二圓外切.乙圖中 AD 小於 AB 及 BD 之和[70題],而 BD 等於 BC, 故 AD 小於 AC,故 D 在 A 爲中心之圓之內 [412題]. 故 B 爲中心之圓, 全在 A 爲中心之圓之內, 而二圓內切. 又甲圖中 AB 等於二半徑 AC 及 BC 之和,乙圖中等於其差.

596. 二圓相交,則其交點不在聯結二中心之直線上.

證 此爲前題之對定理.

597. 二圓互相內切或外切,則聯結其中心之直線過切點.

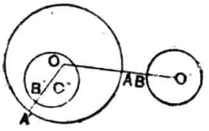
證 與594題同,不過措詞稍異耳.

598. 二圓相切時,有切於其切點之一公切線.

證 因由切點所引一圓半徑之垂線,亦爲他圓半徑之垂線也.

599. 設二圓之周不相遇,則各圓全在他圓之外時,其中心間之距離,大於二半徑之和;一圓全在他圓之內時,此距離小於半徑之差.

證 設二圓不相遇,各圓全在他圓之外,其中心分別爲 O, O′, 聯結 OO′,則其大於二半徑 OA, O′B 之和者,爲二圓周間之部分 AB,

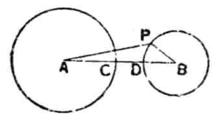


可一望而知. 若圓 O″ 全在圓 O 之內,則 OO″之小於二圓半徑之差者爲 A′B′.

600. 設二圓中心間之距離,(1)大於半徑之和,或(2)等於其和,或(3)小於其和而大於其差,或(4)等於其差,或(5)小於其差,則二圓(1)各在他之外,或(2)外切,或(3)相交,或(4)內切,或(5)一在他之內. 試據轉換法及由直接法幾何學證之.

證 命二圓之中心爲 A, B. 其半徑分別爲 R, r, 由 599, 593, 595 題,二圓(1)各在他之外, 或(2)外切, 或(3)相交, 或(4)內切,或(5)一在他之內,則(1)$AB > R + r$,(2) $AB = R + r$,(3) $R + r > AB > R \sim r$,(4) $AB = R \sim r$,(5) $AB < R \sim r$. 以上假設,已盡二圓位置之一切關係,而終結皆無同者,故據轉換法,其逆定理皆成立.

次,由幾何學證之. 聯結二圓之中心 A, B, 命 AB 與圓 A, B 之交點分別爲 C, D.

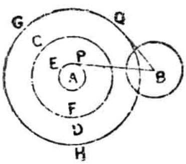


(1)設$AB > R + r$,則 $AB - DB > R$,即 $AD > R$. 在圓 B 之周上, 取任意點 P, 聯結 AP, BP, 則 $AP > AB - BP$ [71題],即 $AP > AD > R$. 故圓 B 周上之一切點,皆在圓 A 外[412題]. 同理,圓 A 周上之一切點,皆在圓B外.故二圓各在他之外. (2)設 $AB = R + r$,則 $AB - BD = R$, 即 $AD = R$.故點 D 在圓A 之周上[412題],因此兩圓公有在聯結中心之直線上之一點. 故兩圓外切[595題]. (3)設 $R + r > AB > R - r$ $[R > r]$, 則 $AB - BD < R$, 即 $AD < R$, 故點 D 在圓 A 內 [412題]. 命 AB 之延線與圓 B

之交點爲 E, 則 AB+BE>R, 卽 AE>R, 故點 E 在圓 A 之外. 故圓 B 周上之點,一部在圓 A 內,一部在其外, 故相交. (4)設 AB$=R-r$, 則 AB+BE=R, 故點 D 在圓 A 之周上[412題],卽二圓交於聯結中心之直線上之一點. 而 PA<PB+AB, 卽 PA<R, 故 P 在圓 A 內. 故圓內切 [595題]. (5)設 AB<$R-r$, 則 AB+BE<R. 又在圓 B 周上取任意點 P,則因 PA<PB+AB, 故更 PA<R. 故圓 B 周上之點, 皆在圓 A 內, 故一圓全在他圓內.

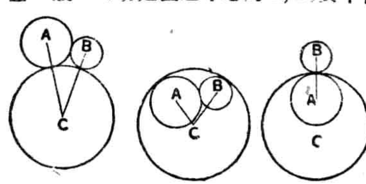
601. 以下各款中,兩圓之公切線有幾? (甲)一圓全在他圓外, (乙)二圓外切, (丙)二圓相交,(丁)二圓內切,(戊)一圓全在他圓內.

解 設圓 CD [中心爲 A], 圓 B 爲原圓,圓 GH, EF 爲分別以原圓半徑之和及差爲半徑,以圓 A 之中心爲中心之圓. 於是欲引外公切線,當先由中心 B 至圓 EF 引切線,欲引內公切線,當由 B 至圓 GH 引切線. 此時(甲)設一圓全在他圓外,則二中心之距離,大於二半徑之和, 故點 B 在圓 GH 及圓 EF 之外. 故由 B 得至圓 GH, FE 各引二切線,故內公切線及外公公切各有二. (乙)設二圓外切,則二中心之距離等於半徑之和, 故點 B 在圓 GH 之周上,由 B 至圓 GH 所得引之切線唯一,因而內公切線亦唯一. 但 B 在圓 EF 之外,故外公切線有二. (丙)設二圓相交,則中心之距離小於半徑之和, 而大於其差, 故點 B 在圓 GH 之內,而在圓 EF 之外. 故無內公切線, 僅有外公切線二. (丁)設二圓內切, 則二中心之距離, 等於半徑之差, 故 B 在圓 EF 之周上,因此僅有一外公切線. (戊)設一圓全在他圓之內, 則二中心之距離, 小於半徑之差,故點 B 在圓 EF 之內,因此內公切線,外公切線皆無.

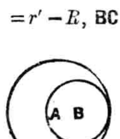


602. 設二定圓外切, 今作切此二圓之任意圓;(1)二定圓在其外方, (2)二定圓包含其內; (3)一定圓在外, 一定圓在內; 則在此三情形下,由外切圓之中心至二定圓中心之距離之差, 等於定圓半徑之差或和. 設二定圓內切,則如何?

解 設二外切定圓之中心爲 A, B; 其半徑爲 R, r [$R<r$],此二圓外切圓之中心爲 C, 半徑爲 r'. (1)二定圓在其外方, 於是 AC$=R+r'$ [595題], BC$=r+r'$, 故 AC$-$BC$=R-r$. (2)二定圓包含其內,於是 AC$=r'-R$ [595 題], BC$=r'-r$, 故 BC$-$AC$=R-r$; (3) 定圓一在其外, 一在其內, 則 AC$=r'-R$, BC$=r+r'$, 故 BC$-$AC $=R+r$.



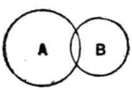
次設 A, B 內切,作其切圓 C,則(1)二定圓包含其內,則 AC $=R+r'$, BC$=r+r'$, 故 AC$-$BC$=R-r=$AB, (2) 二定圓皆在其外,則 AC$=r'-R$, BC$=r'-r'$, 故設 (γ) $r'<r$, 則 AC$=R-r'$, BC$=r-r'$, 故 AC $-$ BC $=R-r=$AB; (β)$r<r'<r$, 則



$AC=R-r'$, $BC=r'-r$, 故 $AC+BC=R-r=AB$. (γ) $r'>R$, 則 $AC=r'-R$, $BC=r'-r$, 故 $BC-AC=R-r=AB$ (3) 一圓在其外, 一圓在其內時, 則 $AC=R-r'$, $BC=r+r'$, 故 $AC+BC=R+r$.

603. 切於相交之二定圓,作任意圓,則由其中心至二定圓中心之距離之和或差爲定長.

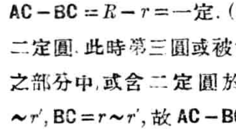
證 設相交二定圓之中心爲 A, B, 其半徑爲 R, r $[R>r]$, 第三圓之中心爲 C, 半徑爲 r'. (1)設圓 C 外切於二定圓,則 $AC=R+r'$, $BC=r+r'$, 故



$AC-BC=R-r=$一定. (2)設圓 C 內切於二定圓. 此時第三圓或被含於二定圓公有之部分中, 或含二定圓於其內, 故 $AC=R\sim r'$, $BC=r\sim r'$, 故 $AC-BC=R-r=$一定. (3)設圓 C 內切於一定圓,而外切於他一圓. 則(α) $AC=R+r'$, $BC=r-r'$, 或(β) $AC=R-r'$, $BC=r+r'$; 而皆 $AC+BC=R+r=$一定.

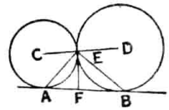
604. 設二圓不相交, 則其二雙公切線之交點, 在聯結各圓中心之直線上.

證 設二圓之中心爲 O, O', 其一雙公切線爲 AB, CD, 其交點爲 P, 聯結 OP, O'P, 則 OP 爲 $A\hat{P}C$ 之二等分線 [556 題], O'P 亦爲 $A\hat{P}C$ 之二等分線, 故 OP, O'P 成一直線. 仿此得證他一雙公切線之交點, 亦在聯結中心之直線上.



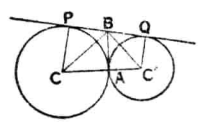
605. 設二圓外切於 E, 一直線分別切二圓於 A, B, 則以 AB 爲直徑之圓過 E, 且切於聯結原圓中心之直線, 而 $A\hat{E}B$ 爲直角.

證 於切點 E, 引圓 C 之切線 EF, 命其與 AB 之交點爲 F, 則因聯結二圓中心之直線 CD 過 E [597題], 故 EF 又切於圓 D [598 題]. 故 $AF=EF=BF$ [556題], 而 F 爲 AB 之中點. 因此以 F 爲中心, AF 爲半徑作圓, 則圓周過 E; 而 CD 爲 EF 之垂線, 故切於圓 ABE, 又因以 AF 爲半徑之圓, 卽以 AB 爲直徑之圓過 E, 故 $A\hat{E}B$ 爲 $\hat{R}$ [454題].



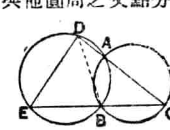
606. 設中心爲 C, C' 之二圓, 外切於 A, 引此二圓之公切線, 命其切點爲 P, Q, 則角 PCA, QC'A 之二等分線垂直相交於 PQ 上之一點.

證 於切點 A, 引公切線 AB, 命其與 PQ 之交點爲 B, 因 BP, BA 爲圓 C 之切線, 故 CB 將 $A\hat{C}P$ 二等分 [556題]. 同理, C'B 將 $A\hat{C}'Q$ 二等分. 故 $P\hat{C}C'$, $C\hat{C}'Q$ 之二等分線交於 PQ 上之點 B, 而 $C\hat{B}C'=\hat{R}$ [605題].



607. 設 A, B 爲二圓周之交點, 由一圓周上之任意點 C, 引二直線 CA, CB, 命其延線與他圓周之交點分別爲 D, E, 則弦 DE 之長一定不易.

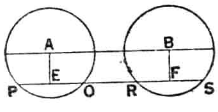
證 聯結 DB, 則 $D\hat{B}E=B\hat{D}C+B\hat{C}D$ [63題]. 然 $B\hat{D}C$ 爲對弧 AB 之



圓周角,故一定;同理, $A\hat{C}B$ 亦一定,故其和 $D\hat{B}E$ 亦一定. 故弦 DE 之長一定不易 [466 及436題].

608. 二圓相等,則聯結其中心之直線之平行線,爲二圓所截得之部分相等.

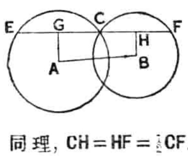
圖 設二圓之中心爲 A, B, 聯結 AB, 平行於 AB 引 PQRS, 由 A, B 引其垂線 AE, BF, 則 AE ∥ BF, 故四邊形



AEFB 爲平行四邊形, 故 AE = BF [222題], 因而 PQ, RS 分別距中心 A, B 等遠, 故 PQ = RS [449題].

609. 過二圓之交點, 引一直線, 設其端在各圓周上, 則聯結各圓中心之直線, 投於此直線上之正射影,等於其半分.

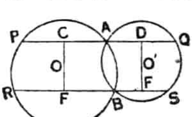
圖 設二圓 A, B 交點之一爲 C, 過 C 之任意直線爲 EF, AB 投於 EF 上之正射影爲 GH, 則 GA ⊥ EC, 故 GC = EG [440題] = $\frac{1}{2}$ EC.



同理, CH = HF = $\frac{1}{2}$CF. 故 GH = GC + CH = $\frac{1}{2}$ × (EC + CF) = $\frac{1}{2}$EF.

610. 過二圓之各交點,引平行割線,則其於圓周間之部分相等.

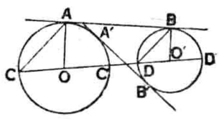
圖 設二圓 O. O′之交點爲 A, B,過 A, B 所引之平行割線爲 PQ, RS. 由中心 O, O′, 引 PQ 之垂線 OC, O′D, 命其延線與



RS 之交點爲 E, F. 於是因 CD ∥ EB [假設], CE ∥ DF [40題], 故 CD = EF [222題], 而 CD = $\frac{1}{2}$PQ [前題]. 同理, 因 OE, O′F 皆爲 RS 之垂線, 故 EF = $\frac{1}{2}$RS, 因此 PQ = RS.

611. 設二圓與一公切線之切點爲 A, B, 聯結二圓中心之直線交二圓周於點 C, D, 則由 A, B 分別向 C, D 所引之直線 AC, BD 平行.

圖 聯結 OA, O′B, 則因 OA, O′B 同爲 AB 之垂線, 故 OA ∥ O′B, 因此 $A\hat{O}C$ = $B\hat{O}'D$. 而 $A\hat{C}O$, $B\hat{D}O'$ 各爲其補角

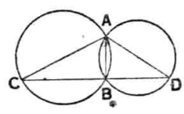


之半分,故相等,卽 AC ∥ BD.

注意 當取點 C, D 時,設 AB 爲外公切線, 則取於 O, O′之同側,設 AB 爲內公切線,則當取於 O, O′ 之異側.

612. 設二圓相交,以其一交點爲一端,作各圓之直徑,則聯結此二直徑之他端之直線,過他一交點.

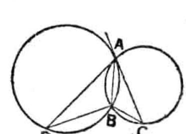
圖 設相交二圓之交點爲 A, B, 各圓過 A 之直徑爲 AC, AD. 聯結 CB, DB, AB, 則 $A\hat{B}C = \hat{R} = A\hat{B}D$ [454題]. 故 C, B, D 在一直線上,卽



CD 過 B.

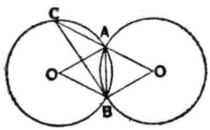
613. 設二圓交於 A, B, AC, AD 爲各圓之切線,與他圓周交於 C, D, 則角 ABD, ABC 相等.

圖 $B\hat{A}D = A\hat{C}B$ [557題], $B\hat{A}C = A\hat{D}B$. 故 △ABD, △ABC 中, 二角分別相等,故第三角亦相等, 卽 $A\hat{B}D$



$= A\hat{B}C$.

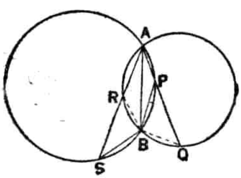
614. 設兩等圓公弦 AB，於其一圓中引等於 AB 之弦 AC，若其延線過他圓之中心，則公弦等於各圓之半徑.



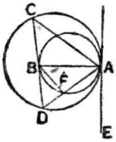
證 設二等圓之中心爲 O, O′，則 $A\hat{C}B = \frac{1}{2} A\hat{O}B$ [451題] $= \frac{1}{2} A\hat{O'}B$. 又 AC = AB，故 $A\hat{C}B = A\hat{B}C = \frac{1}{2} B\hat{A}O'$. 故 $A\hat{O'}B = B\hat{A}O'$，因此 AB = BO′.

615. 設二圓交於 A, B，過 A 引二直線，令與 AB 成等角，命二圓周與一直線之交點爲 P, Q，與他直線之交點爲 R, S，則 PQ, RS 相等.

證 弧 SB, BP 所對圓周角 $S\hat{A}B$, $P\hat{A}B$ 相等，故弦 SB = 弦 BP [466及436題]. 同理，弦 BQ = 弦 BR. 又 $P\hat{B}S$ 爲 $S\hat{A}Q$ 之補角 [456題]，$R\hat{B}Q$ 亦爲 $S\hat{A}Q$ 之補角，故 $P\hat{B}S = Q\hat{B}R$，因而 $R\hat{B}S = P\hat{B}Q$. 而 BS = BP, RB = BQ，故 △RBS ≡ △QBP，故 RS = PQ.



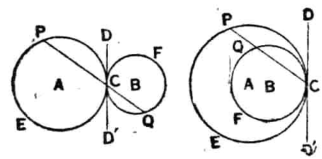
616. 設兩圓內切，引大圓之弦，令切於小圓，則聯結二圓之切點與此弦二端之直線，與聯結二切點之直線成等角.



證 設二圓之切點爲 A，大圓之弦 CD，切小圓於 B；AD 與小圓周之交點爲 F，於點 A 引公切線 AE，則 $E\hat{A}F = A\hat{B}F = A\hat{C}D$ [557題]，$A\hat{B}C = A\hat{F}B$ [557題]. 據此，△ABC, △AFB 中，二角分別相等，故 $B\hat{A}C = B\hat{A}F$ [65題].

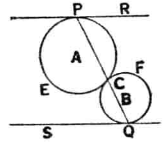
617. 設二圓相切，則過切點之任意直線，由圓所截得之弓形，含等弓形角.

證 設二圓之中心爲 A, B，切點爲 C，過 C 之任意直線爲 PCQ. 過 C 引圓 A 之切線 DD′，則 DD′ 又切於圓B. 故 $P\hat{C}D$ = 弓形 PEC 內之角，QCD′ = 弓形 QFC 內之角. 然 $P\hat{C}D = Q\hat{C}D'$，故弓形 PEC, QFC 所含之角相等.



618. 過二外切圓之切點，作一直線，在此直線與二圓圓周之交點，作各圓之切線，則此二切線平行.

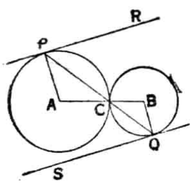
證 設二外切圓之中心爲 A, B，切點爲 C，過 C 之任意直線爲 PCQ，P, Q 上之切線分別爲 PR, QS，則角 RPC = 弓形 PEC 內之角，$C\hat{Q}S$ = 弓形 QFC 內之角. 然二弓形所含之角等 [617題]，故 $R\hat{P}C = C\hat{Q}S$，故 PR ∥ QS [38題].



619. 設二圓外切，引切於各圓之切線，令其切點在聯結中心直線之異側，且令其互相平行，則二切線之切點，與圓之切點在一直線上.

證 設二外切圓之中心爲 A, B，其切點爲

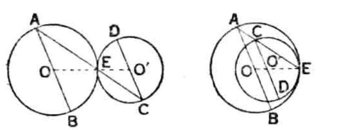
C, PR 切圓 A 於 P, QS 切圓 B 於 Q, 且 P, Q 在 AB 之異側, PR ∥ QS. 聯結 PC, QC 及 AB. 於是因二圓外切, 故 AB 過 C, 且 C 在 AB 之間. 又 $AP \perp PR$, $BQ \perp QS$,



而 PR ∥ QS, 故 AP ∥ BQ, 故 $P\hat{A}C = Q\hat{B}C$. 又 $P\hat{C}A = \frac{1}{2}(2\hat{R} - P\hat{A}C)$, $B\hat{C}Q = \frac{1}{2}(2\hat{R} - Q\hat{B}C)$, 故 $P\hat{C}A = B\hat{C}Q$. 於是因 PC, QC 立於 AB 上之一點 C, 在 AB 之異側, 且 $P\hat{C}A = B\hat{C}Q$, 故 PC, CQ 在一直線上.

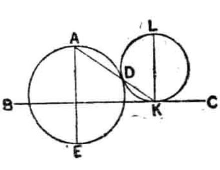
620. 聯結相切二圓之平行直徑 AB, CD 之端與端[外切時, 取在中心線之異側者; 內切時, 取在中心線之同側者]之直線過切點.

證 二圓之中心線 OO′, 過切點 E [597題].



聯結 AE, CE, 則 $\triangle AOE$, $\triangle CO'E$ 中, $A\hat{O}E = C\hat{O}'E$ [41題], 故 $\frac{1}{2}(2\hat{R} - A\hat{O}E) = \frac{1}{2}(2\hat{R} - C\hat{O}'E)$, 即 $A\hat{E}O = C\hat{E}O'$. 故 AE, EC 成一直線 [27題].

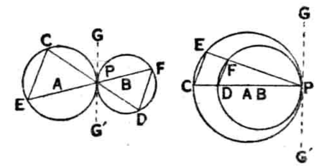
621. 作一圓, 令切他圓於 D, 切一直線 BC 於 K, 命後圓垂直於 BC 之直徑之一端爲 A, 則 A, D, K 在一直線上.



證 設 AE 爲後圓之直徑, KL 爲前圓過 K 之直徑, 則 AE, KL 因同爲 BC 之垂線, 故互相平行, 故 A, D, K 在一直線上[前題].

622. 設二圓相切, 過其切點引二任意直線, 則其由二圓周所截弧之弦平行.

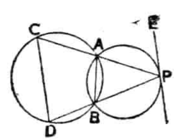
證 設圓 A, B 相切於點 P, 過 P 所引之二



任意直線爲 CPD, EPF, 聯結 EC, DF; 求證 EC, DF 平行. 過 P 引公切線 GPG′, 則 $G\hat{P}C$ [乙圖中 $G'\hat{P}D$] $= P\hat{E}C$ [557題], $G'\hat{P}D = P\hat{F}D$, 而 $C\hat{P}G = G'\hat{P}D$. 故 $P\hat{E}C = P\hat{F}D$. 故 EC ∥ DF [38, 40題].

注意 二圓內切時, 不必用對項角, 卽得證明.

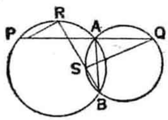
623. 設兩圓交於 A, B, 於其一圓周上取任意點 P, 由 P 引直線 PAC, PBD, 命其與他圓周之交點爲 C 及 D, 則弦 CD 平行於點 P 上之切線.

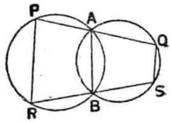


證 設 P 點上之切線爲 PE, 則 $A\hat{P}E = A\hat{B}P$ [559題], 而 $A\hat{B}P = A\hat{C}D$ [457題]. 故 $A\hat{P}E = A\hat{C}D$. 故 PE ∥ CD.

624. 過二圓之交點 A, B, 引直線 PAQ, RBS, 命其與圓周之交點爲 P, Q, R, S, 則 PR, QS 兩弦平行.

證 甲圖中, $A\hat{Q}S = A\hat{B}S$ [452題], $A\hat{B}S = A\hat{P}R$, 故 $A\hat{Q}S = A\hat{P}R$. 故 PR ∥ QS [38題].

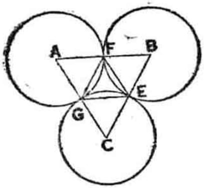




乙圖中, $A\hat{Q}S + A\hat{B}S = 2R$ [456題], $A\hat{B}S = A\hat{P}R$ [457題],故 $A\hat{Q}S + A\hat{P}R = 2\hat{R}$. 故 $PR \parallel QS$ [40題].

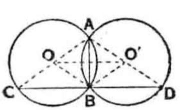
625. 設三圓相等且相切,則其中心爲正三角形之頂點,三切點亦然.

證 設相等三圓之中心爲 A, B, C, 其半徑爲 r, 則 $AB=2r$, $AC=2r$, $BC=2r$ [597題及595題],故三角形ABC爲正三角形. 次, $EF=\frac{1}{2}AC$ [232題] $=r$; 同理, $EG=r=FG$, 故 EFG 亦爲正三角形.



626. 二等圓相交,則其公弦所分之弓形分別相等,因而其角亦分別相等.

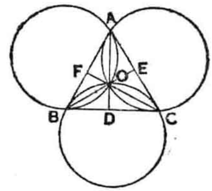
證 設二等圓之公弦爲 AB, 中心爲 O, O′, 則 AOBO′ 爲菱形,故 AB, OO′ 互相垂直二等分. 故設以 AB 爲界,而將圖對折,則兩方完全相合. 故 AB 所分之優劣二弓形,分別相等,因而其角亦分別相等[452題].

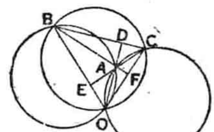


別證 由 A 引二圓之直徑 AOC, AO′D, 則 CBD 爲一直線 [612題]. 故 △ACD 爲二等邊,故 $\hat{C}=\hat{D}$.

627. 設三等圓過同點O,他交點爲B,C,A,則 A, B, C, O 四點中,任何一點,皆爲他三點所成三角形之垂心.

證 設點 O 在三角形 ABC 之內,命 AO, BO, CO 與邊之交點分別爲 D, E, F. 因三圓相等,故 $A\hat{B}E = A\hat{C}F$ [626題]. 於是 △ABE, △ACF 中,一角 A 公有,他一角相等,故第三角 $A\hat{E}B = A\hat{F}C$. 同理, $A\hat{D}B = B\hat{F}C$,

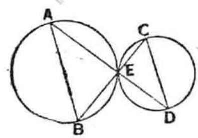


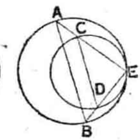


$A\hat{D}C = B\hat{E}C$. 然是等六角之和爲 $3\times 2\hat{R}$, 故 $AEB + A\hat{D}B + B\hat{E}C = 3\hat{R}$. 而 $A\hat{E}B + B\hat{E}C = 2\hat{R}$, 故 $A\hat{D}B = \hat{R}$, 故 $AD \perp BC$. 根據同理, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$. 故 O 爲三角形 ABC 之垂心. 因而四點 O, A, B, C 中,各點爲他三點所成三角形之垂心 [196題]. 若 O 在三角形 ABC 之外,亦可仿此證之.

628. 設二圓相切於 E 點, AB, CD 爲各圓之直徑,而相平行,則直線 AD, BC 交於 E 點.

證 AD 過切點 E [620題],而 BC 亦過切點

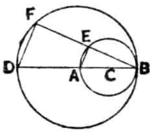




E, 故 AD, BC 交於切點 E.

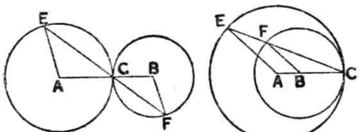
629. 設一圓之半徑，卽他圓之直徑，則二圓內切，且由切點 B，至外圓周所引之直線，二等分於內圓周.

證 設圓 A 之半徑 AB，卽圓 C 之直徑. 此時 $AC=AB-BC$，卽等於二半徑之差，故二圓內切[600題]. 次，設過切點 B 之任意弦 BF，交圓 C 於點 E，命過 B 之大圓直徑之他端爲 D，聯結 AE, DF，則 $A\hat{E}B=\hat{R}=D\hat{F}B$ [454題]，故 $AE \parallel DF$ [40題]. 而 A 爲 BD 之中點，故 E 爲 BF 之中點[231題].

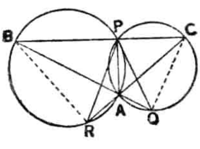


630. 設二圓相切，過其切點引任意直線，則此直線與各圓周之交點，與各該圓之中心聯結之二半徑平行.

證 設二圓之中心爲 A, B，聯結 AB，則切點 C 在 AB 或其延線上[579題]. 命過 C 之任意直線爲 EF，則 $A\hat{C}E=B\hat{C}F$. 於是 $\triangle ACE$, $\triangle BCF$ 中，$A\hat{E}C=B\hat{F}C$，因兩三角形皆爲二等邊故也. 故 $AE \parallel BF$ [38題].

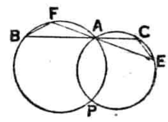


631. 設二圓交於 A, P，過 P 引 PA 之垂線，令與各圓周交於 B, C，延長 BA, CA，令再交各圓於 Q 及 R，則 AP 將 $Q\hat{P}R$ 二等分.



證 $R\hat{A}B=Q\hat{A}C$ [12題]，而 $R\hat{A}B=R\hat{P}B$ [452題]，$Q\hat{A}C=Q\hat{P}C$，故 $R\hat{P}B=Q\hat{P}C$. 然 $AP\perp BC$，故其各餘角 $A\hat{P}R=A\hat{P}Q$，卽 AP 將 $Q\hat{P}R$ 二等分.

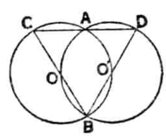
632. 設三角形 ABF, ACE 中，A 爲對頂角. 今作各三角形之外接圓，命其他一交點爲 P，則由 P 至 AC, AE, CE, BF 所引四垂線之足，在一直線上.



證 本題與521題注意(2)同.

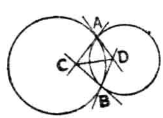
633. 設二等圓之周，各過他圓之中心，則過其一交點之直線與各圓周之交點及圓之他一交點，爲正三角形之頂點.

證 設二等圓之中心爲 O, O'，過交點 A 之直線爲 CD. 聯結他交點 B 於 C 及 D，則 $A\hat{D}B=A\hat{C}B$ [626題]. 而 $\triangle AOO'$, $\triangle BOO'$ 顯然皆爲正三角形，故 $A\hat{D}B=\frac{1}{2}A\hat{O'}B=A\hat{O'}O$. 故 $A\hat{D}B$, $A\hat{C}B$ 皆等於正三角形之一角，因而 $D\hat{B}C$ 亦等於正三角形之一角. 故 BCD 爲正三角形.



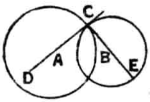
634. 相交二圓所成之二角相等.

證 設二圓之交點爲 A, B，點 A 上之切線爲 AC, AD，點 B 上之切線爲 BC, BD. 次，設 AC, BC 之交點爲 C；AD, BD 之交點爲 D，則 $DA=DB$ [556題]，$AC=BC$. 故 $\triangle ACD$, $\triangle BCD$ 中，一邊公有，二邊分別相等，故 $C\hat{A}D=C\hat{B}D$ [77題]，卽二圓周所成之角相等.



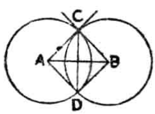
635. 設二圓直交,則各圓交點上之切線,過他圓之中心.

圖 設直交二圓之中心爲 A, B, 交點爲 C, 圓 B 在 C 上之切線爲 CD, 則 CD 爲 CB 之垂線 [550題]. 次,設圓 A 在 C 上之切線爲 CE,則 CE 爲 CD 之垂線 [假設], 故過中心 B [551題]. 同理, CD 過中心 A.

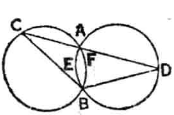


636. 設二等圓直交, 則其公弦等於中心距離.

圖 設二等圓之中心爲 A, B 交點爲 C, D, 則因二圓直交,故 AC, BC 分別爲圓 B, A 之半徑 [635題]. 而四邊形 ACBD 之四邊爲各等圓之半徑, 故相等, 故 ACBD 爲菱形; 又 $A\hat{C}B=\hat{R}$, 故又爲距形 [221題]. 故 AB=CD [237題].



637. 設二等圓交於 A, B, 過 A 之一直線與各圓周交於 C, D, 聯結 BC, BD, 則 △BCD 爲二等邊三角形.



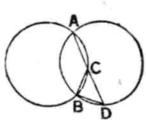
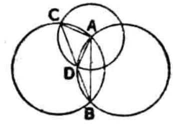


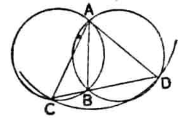
圖 $B\hat{C}D=B\hat{D}C$ [626題], 故 BD=BC.

638. 設二等圓交於 A, B, 以 A 爲中心,任意長爲半徑作圓,令與前圓各交於 C 及 D,則 B, D, C 在一直線上.

圖 AC=AD. 聯結 BD, BC, 則由438及466



[甲圖]

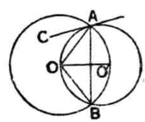


[乙圖]

題,甲圖中 $A\hat{B}C=A\hat{B}D$, 乙圖中 $C\hat{B}A+A\hat{B}D=2\hat{R}$. 綜上可知 B, C, D 在一直線上.

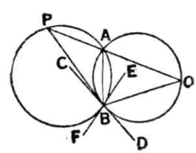
639. 設相交二圓中,一圓過他圓之中心, 則第一圓過交點之切線, 與公弦所成之角,爲第二圓過同交點之半徑所二等分.

圖 公弦 AB 爲中心線垂直二等分 [593題],故弧 AO=弧 BO [440題注意],因 $A\hat{B}O=O\hat{A}B$ [466題]. 而 $O\hat{A}C=A\hat{B}O$ [557題],故 $B\hat{A}O=O\hat{A}C$. 故 AO 將 $B\hat{A}C$ 二等分.



640. 設二圓相交, 過其一交點引任意直線,聯結圓之他一交點與所引直線交於各圓周之點, 則此聯結之二直線所成之角, 一定不易, 而等於圓之交角, 卽各圓於其交點上之切線所成之角.

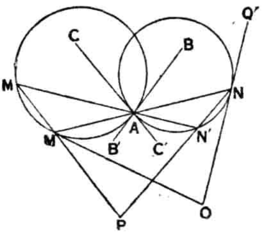
圖 設二圓之交點爲 A, B, 過 A 之任意直線爲 PQ, 又設二圓在B 點上之切線爲 EBF, CBD. 此時 $E\hat{B}A=A\hat{P}B$ [557題], $C\hat{B}A=A\hat{Q}B$,故 $C\hat{B}E=E\hat{B}A+C\hat{B}A=A\hat{P}B+A\hat{Q}B=2\hat{R}-P\hat{B}Q$. 故 $P\hat{B}Q=2\hat{R}-C\hat{B}E=E\hat{B}D$, 卽等於二切線所成之角.



641. 過二圓之交點 A, 引二直線 MAN, M′AN′,令與圓周交於 M, N, 及 M′, N′, 則 MM′

及 NN′ 之延線之夾角,一定不易,又於 M 及 N 上之圓周之切線所成之角,亦一定不易. 若此二割線合為一直線,則如何?

解 $\hat{P}$ 為△PMN 之內角,故 $\hat{P} = N\hat{M}M'$

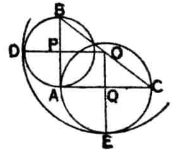


$-M\hat{N}P$ [63題],過 A 作二圓之切線 AB, AC, 則 $B\hat{A}M' = A\hat{M}M'$ [557題], $CAM' = C'\hat{A}N' = A\hat{N}N'$. 故 $\hat{P} = B\hat{A}M' - C\hat{A}M' = B\hat{A}C$, 故 $\hat{P}$ 等於 A 上二切線所夾之定角. 次,設 M, N 上切線之交點為 Q, 則 $\hat{Q} = M\hat{N}Q' - N\hat{M}Q$, $A\hat{N}Q' = A\hat{N}'N = N\hat{A}C$ [557題], $A\hat{M}Q = A\hat{M}'M = M\hat{A}B' = B\hat{A}N$. 故 $\hat{Q} = N\hat{A}C - B\hat{A}N = B\hat{A}C$, 即一定.

注意 若點 M′ 在圓周上漸近於 M, 則 N′ 漸近於 N, 因而 $P\hat{M}Q$, $P\hat{N}Q$ 漸次縮小,直線 PM, PN 分別漸近於 QM, QN. 最後至 MN, M′N′ 相合, 則 PM 變為 QM, PN 變為 QN, 交角 P 變為二切線 MQ, NQ 之夾角.

642. 以直角三角形夾直角之二邊 AB, AC 為直徑作圓,則此二圓之周,切於以斜邊 BC 之中點為中心,以 AB+AC 為直徑之圓.

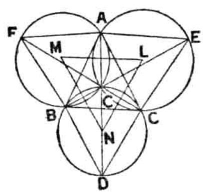
解 設 AB, AC, BC 之中點,分別為 P, Q, O, 又命 OP, OQ 之延線與 AB, AC 為直徑之圓周之交點為 D, E. 此時 OP⊥AB, OQ⊥AC; 且命 P, Q 分別為圓之中心, 故 PD, QE 為



圓之半徑. 於是 $OP = AQ = \frac{1}{2}AC$, $PD = AP = \frac{1}{2}AB$, 故 $OD = \frac{1}{2}(AC + AB)$. 同理, $OE = \frac{1}{2}(AC + AB)$. 故 O 為中心, $\frac{1}{2}(AC + AB)$ 為半徑之圓過 D, E; 且因中心之距離,等於半徑之差,故圓內切 [600題]. 故 O 為中心, AB+AC 為直徑之圓切於二圓.

643. 於三角形 ABC 之外側,就其各邊上作正三角形 DBC, ECA, FAB, 則三正三角形之外接圓過同點, AD, BE, CF 亦過同點,而此點即三外接圓之交點. 三正三角形之外心, 為一正三角形之頂點. 又設三外接圓之交點為 O, 則 AD=BE=CF=OA+OB+OC.

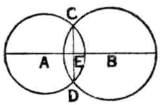
解 △ABF、△ACE 中,設其外接圓之交點為 O, 則 $A\hat{O}B = 2\hat{R}$



$- A\hat{F}B$ [456 題], $A\hat{O}C = 2\hat{R} - A\hat{E}C$. 而 $A\hat{F}B = A\hat{E}C$ [因各為正三角形之一角], 故 $A\hat{O}C = A\hat{O}B = \frac{2}{3}\cdot 2\hat{R} = \frac{4}{3}\hat{R}$. 據此, $B\hat{O}C = \frac{4}{3}\hat{R}$, 而 $B\hat{O}C$, $B\hat{D}C$ 互為補角,故三角形 BDC 之外接圓周過點 O [458題]. 次,聯結 DO, 則 $D\hat{O}C = D\hat{B}C = \frac{2}{3}\hat{R}$, 故 $D\hat{O}C$, $A\hat{O}C$ 互為補角,故 AOD 成一直線. 同理, BE CF 亦過點 O. 又設 △ACE, △ABF, △BCD 之外心分別為 L, M, N, 則 AO⊥LM [593題], OC⊥LN, 故 $A\hat{O}C + \hat{L} = 2\hat{R}$. 故 $\hat{L} = \frac{2}{3}\hat{R}$. 同理, $\hat{M} = \hat{N} = \frac{2}{3}\hat{R}$. 故三角形 LMN 為正三角形. 又 AD=BE=CF, 已在170 題中證明,且 BO+OC=OD [508題], 故AD=AO+BO+CO.

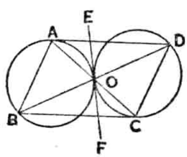
644. 試由圓之對稱關係,以證二圓相交,則其中心線將公弦垂直二等分.

【證】 設二圓 A, B 之交點為 C, D. 因 AB 過圓 A 之中心,故圓 A 關於 AB 為對稱;同理,圓 B 亦關於 AB 為對稱.



故圓 A 周上之點 C 關於 AB 之對稱點,在圓 A 之周上;而 C 又為圓 B 周上之點,故其對稱點又必在圓 B 之周上.故點 C 關於 AB 之對稱點,必同時在二圓周上,故為圓之第二交點 D. 故 CD 垂直於 AB, 且為之二等分.

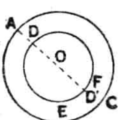
645. 設平行四邊形 ABCD 之對角線交點為 O, 則三角形 AOB, COD 之外接圓相切於 O.



【證】 過 O 引圓 AOB 之切線 EF, 則 $A\hat{O}E = A\hat{B}O$ [557題]. 而 $A\hat{O}E = C\hat{O}F$, $A\hat{B}O = C\hat{D}O$, 故 $C\hat{O}F = C\hat{D}O$, 故 EF 為圓 COD 在 O 上之切線[559題],故二圓相切.

646. 二同心圓中,由一圓周上之任意點至他圓周之距離相等.

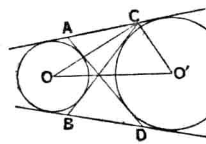
【證】 設以 O 為中心之二同心圓為 ABC, DEF, 取外圓周上之點 A, 命 OA 與內圓周之交點為 D, 則 AD 為 A 與內圓周之距離.而 OA 為外圓之半徑, OD 為內圓之半徑,故 AD 為二圓半徑之差,因而一定.故外圓周上之點與內圓周之距離皆相等.



【註】 延長 AD, 令過中心 O 而交內圓周於 D'. 取 AD' 為內外二圓周之距離,亦皆相等.

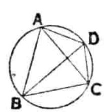
647. 二圓之外公切線與內公切線之四交點,在過二圓中心之一圓周上.

【證】 設二圓 O, O' 之外公切線與內公切線之交點為 A, B, C, D, 聯結 OC, O'C, OO', 則 OC 將 $A\hat{C}B$ 二等分, O'C 將 $A\hat{C}B$ 之外角二等分[560題].故 $O\hat{C}O'$ 為直角[18題],故 C 在 OO' 為直徑之圓周上.同理, A, B, D 亦在 OO' 為直徑之圓周上.故 A, B, C, D 同在 OO' 為直徑之圓周上.



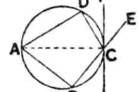
第五章　內接,外切

648. 試證定理圓之內接四邊形之對角,互為補角.但得引二對角線及引用定理同弓形中之弓形角相等.



【證】 $B\hat{A}C$, $B\hat{D}C$ 為同弓形中之弓形角,故相等.同理, $B\hat{D}A = B\hat{C}A$. 故 $A\hat{B}C + A\hat{D}C = A\hat{B}C + B\hat{A}C + B\hat{C}A = 2\hat{R}$.

649. 試藉內接四邊形之二頂點趨近而達極限,以證定理切線與過切點之弦之夾角;等於此弦上在其他側之圓周角.

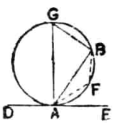


【證】 設 ABCD 為圓之內接四邊形,延長 BC 至 E, 於 C 引切線 CF. 於

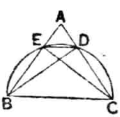
是 $D\hat{C}E = B\hat{A}D$ [457題]. 今設 B 漸趨近於 C, 最後與之相合, 則直線 BCE 合於 C 上之切線 CF, AB 合於 AC, 而 $D\hat{C}E$ 合於 $D\hat{C}F$, $B\hat{A}D$ 合於 $C\hat{A}D$. 故 $D\hat{C}F = C\hat{A}D$.

650. 試由定理圓之內接四邊形之對角, 互為補角, 以證切線與過切點之弦之夾角, 等於此弦上在其他側之圓周角.

證　設 DAE 為切線, A 為切點, AB 為弦. 引直徑 AG, 於弧 AB 上取點 F, 則 $A\hat{F}B + A\hat{G}B = 2\hat{R}$ [456題]. 而 AG 為直徑, 故 $A\hat{B}G = \hat{R} = G\hat{A}D$. 故 $A\hat{G}B + G\hat{A}B = \hat{R}$, 因而 $A\hat{G}B + B\hat{A}D = 2\hat{R}$. 故 $B\hat{A}D$ 與 $\hat{F}$ 皆為 $\hat{G}$ 之補角, 故相等, 又 $B\hat{A}E = \hat{G}$.



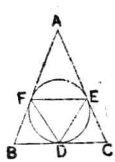
651. 由三角形 ABC 之頂點 B 及 C, 至其對邊引垂線 BD, CE, 則角 BCE, BDE 相等.



證　因 $B\hat{E}C = B\hat{D}C = \hat{R}$, 故 D, E 在 BC 為直徑之圓周上 [486題], 因而 $B\hat{C}E = B\hat{D}E$.

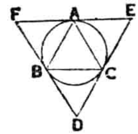
652. 聯結二等邊三角形內切圓之切點而得之三角形為二等邊.

證　設二等邊三角形為 ABC, 聯結其內切圓之切點而得之三角形為 DEF. 此時 AE = AF [556題], 而 AB = AC, 故 BF = CE. 又 △BDF, △CDE 中, BF = CE, BD = CD, $\hat{B} = \hat{C}$, 故 DF = DE, 卽三角形 DEF 為二等邊.



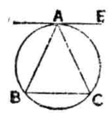
653. 圓之外切正三角形之邊, 等於其內接正三角形之邊之二倍.

證　設 △ABC 為圓之內接正三角形, 則點 A, B, C 上之切線所成之外切三角形亦為正三角形. 何則, 因 $F\hat{A}B = A\hat{C}B$ [557題] $= A\hat{B}C$ [57題], 故 AF ∥ BC [38題]; 同理, FD ∥ AC, ED ∥ AB; 故 $\hat{F} = \hat{C}$ [206題], $\hat{E} = \hat{B}$, $\hat{D} = \hat{A}$ 故也. 而 AF = BC = AE [208題], 故 EF = 2BC; 同理 FD = 2AC, DE = 2AB.



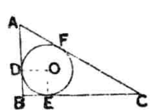
654. 過二等邊三角形之頂點, 引平行於底邊之直線, 切於三角形之外接圓. 並證其逆定理.

證　設過二等邊三角形 ABC 之頂點 A, 平行於底之直線為 AE, 則因 AE ∥ BC, 故 $E\hat{A}C = A\hat{C}B$. 而 $A\hat{C}B = A\hat{B}C$, 故 $E\hat{A}C = A\hat{B}C$. 故 AE 切外接圓 ABC 於 A [559題]. 反之, 設外接圓過 A 之切線為 AE, 求證 AE ∥ BC. 因 AE 為 A 上之切線, 故 $E\hat{A}C = A\hat{B}C$ [557題]. 而 $A\hat{B}C = A\hat{C}B$, 故 $E\hat{A}C = A\hat{C}B$, 因此 AE ∥ BC [38題].



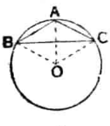
655. 直角三角形中, 其內切圓之直徑與斜邊之和, 等於他二邊之和.

證　設直角三角形 ABC 內切圓之中心為 O, 二邊 AB, BC 及斜邊 AC 上之切點分別為 D, E, F. 聯結 OD, OE, 則因 $\hat{B} = \hat{R}$, 且 OD, OE 皆垂直於邊, 故 ODBE 為正方形. 而 AD = AF, CE = CF [556題], 故 AC + BD + BE = AB + BC. 而 BD, BE 皆等於內切圓之半徑, 故 BD + BE 等於直徑. 故斜邊 AC 與直徑之和, 等於二邊之和 AB + BC.



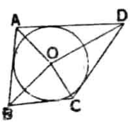
656. 設二等邊三角形之頂角,等於正三角形之外角,則其外接圓之半徑,等於等邊.

證　設二等邊三角形 ABC 之頂角 A, 等於正三角形之外角,即 $\frac{4}{3}\hat{R}$,外接圓之中心爲 O, 聯結 OA, OB, OC, 則因△OAB, △OAC 之三邊,分別相等,故 $O\hat{A}B=O\hat{A}C=\frac{1}{3}\cdot 2\hat{R}$. 而 OA = OC, 故 $O\hat{C}A=\frac{1}{3}\cdot 2\hat{R}$, 因而 $A\hat{O}C=\frac{1}{3}\cdot 2\hat{R}$. 故 $A\hat{C}O=A\hat{O}C$, 故 OA = AC.



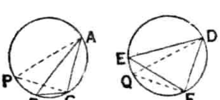
657. 作圓之外切四邊形,則其兩對邊所對中心角之和,等於二直角.

證　設四邊形爲ABCD,其內切圓之中心爲 O. 此時 OA, OB, OC, OD 分別將四邊形之各角二等分 [556題], 故 $O\hat{A}B+O\hat{B}A+O\hat{C}D+O\hat{D}C=\frac{1}{2}\cdot 4\hat{R}=2\hat{R}$. 而三角形 OAB, OCD 一切內角之和爲 $4\hat{R}$, 故 $A\hat{O}B+C\hat{O}D=4\hat{R}-2\hat{R}=2\hat{R}$. 同理, $A\hat{O}D+B\hat{O}C=2\hat{R}$.



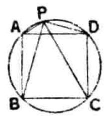
658. 設一三角形之一邊,等於他三角形之一邊,且對此各邊之角亦等,則此兩三角形之外接圓恆等.

證　設△ABC, △DEF 中, AC = DF, $A\hat{B}C=D\hat{E}F$, 作各三角形之外接圓,命其直徑爲AP, DQ. 於是△ACP, △DFQ 中, AC = DF, $A\hat{C}P=\hat{R}=D\hat{F}Q$, $\hat{P}=A\hat{B}C=D\hat{E}F=\hat{Q}$; 故 AP = DQ. 因此二圓之直徑相等,而二圓相等.



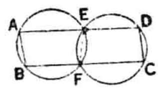
659. 在正方形之外接圓周上取任意點,則以此點爲角頂之角,其對正方形最近一邊之角,等於對其他各邊之角之三倍.

證　設正方形爲 ABCD, 於其外接圓上取一點 P 於弧 APD 上. 此時因弧 AB, BC, CD 相等, 故 $A\hat{P}B=B\hat{P}C=C\hat{P}D$. 故 $A\hat{P}D=3A\hat{P}B$.

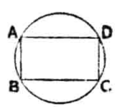


660. 設 ABCD 爲平行四邊形,過 A, B 之圓與 AD 及 BC 分別交於 E 及 F, 則外接於四邊形 EFCD, 得作一圓.

證　聯結 EF, 則因 AE ∥ BF, 故弧 AB, EF 相等, 因而弦 AB, EF 相等,故又 EF = CD. 故 $E\hat{F}C=D\hat{C}F$ [266題]. 而 $E\hat{D}C+D\hat{C}F=2\hat{R}$, 故 $E\hat{D}C+E\hat{F}C=2\hat{R}$, 故外接於四邊形 EFCD, 得作一圓.



661. 設外接於一平行四邊形得作一圓,則此四邊形爲矩形.

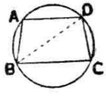


證　設圓之內接平行四邊形爲 ABCD, 則因 $\hat{A}=\hat{C}$ [220題], 及 $\hat{A}+\hat{C}=2\hat{R}$ [456題], 故 $\hat{A}=\hat{R}$, 即平行四邊形之一角爲直角,故此形爲矩形.

662. 圓之內接或外切平行四邊形,其對角線過圓之中心.

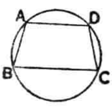
證　圓之內接平行四邊形爲矩形[661題], 故其對角線對等於直角之圓周角[455題], 故爲圓之直徑, 而過中心. 又圓之外接平行四邊形爲菱形[563題],故其對角線將角二等分 [392題], 因而過圓之中心 [556題].

663. 設圓之內接四邊形中,一雙對邊相等,則他雙對邊平行.



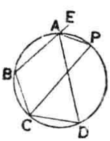
證 設圓之內接四邊形ABCD中,一雙對邊AB, CD相等,聯結BD,則因AB=CD,故弧AB=弧CD,故 $A\hat{D}B=D\hat{B}C$ [466題],故AD ∥ BC [38題].

664. 設梯形之不平行二邊相等,則得內接於圓.



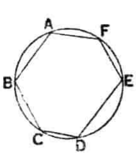
證 設梯形ABCD中,不平行二邊AB, CD相等.此時 $\hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}$ [267題].故此梯形可內接於圓[458題].

665. 在圓之內接四邊形中,作其一外角之二等分線,令交於圓周,則聯結此交點與此外角內對角之頂點之直線,將其內角二等分.



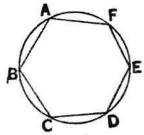
證 設圓之內接四邊形爲ABCD,其一外角DAE之二等分線與圓周之交點爲P,則P爲弧BAD之中點[483題].故 $P\hat{C}B=P\hat{C}D$ [466題],即PC將角BCD二等分.

666. 圓之內接六邊形中,對角不能互爲補角.[六邊形中之對角或對邊,係相隔二角或二邊之角或邊].



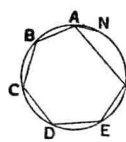
證 設ABCDEF爲圓之內接六邊形. $\hat{A}+\hat{D}$ 等於弧BCDEF+弧CBAFE所對中心角之半分.而此二弧之和,等於全圓周與弧BC,EF之和,故其所對中心角之半分,大於 $2\hat{R}$. 故 $\hat{A}+\hat{C}>2\hat{R}$,故不能互爲補角.

667. 圓之內接六邊形中,若相隣二邊分別平行於其對邊,則他二邊亦互相平行.



證 設圓之內接六邊形爲ABCDEF,其邊AB, BC分別平行於邊DE, EF.於是因AB ∥ DE,故弧AFE=弧BCD,又因BC ∥ EF,故弧CDE=弧FAB.據此,弧AFE+弧CDE即弧CDEFA等於弧BCD+弧FAB,即弧DCBAF.故雙方減以弧CD, AF,則餘弧ABC, FED相等,故AF ∥ CD.

668. 圓之內接六邊形中,不相隣三角之和爲幾直角?又設普徧言之,對於邊數爲偶數之一圓內接多角形如何?



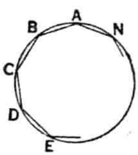
解 設圓之內接六邊形爲ABCDEF,則其相間各角A, C, E之和,等於弧BCDEF,DEFAB,FABCD之和[以S表之]所對中心角之半分.而弧BCDEF爲由圓周減去二弧FA, AB之所餘,弧DEFAB爲由圓周減去弧BC, CD之所餘,弧FABCD爲由圓周減去弧DE, FE之所餘.以上所減去之弧之和,等於圓周.故相間各角之數,即三個圓周,減以一圓周,即得S;換言之,S等於相間各角之數減以一個圓周.故 $\hat{A}+\hat{C}+\hat{E}$ 等於 $3-1$,即二圓周所對中心角之半分,故爲 $2\times4\hat{R}$ 之半分,即 $4\hat{R}$. 次設內接於圓,而邊數爲偶數之多角形爲ABCD……N.仿以上之證明,其相間各角之和,等於多角形角數之半減以一個圓周所對中心角之半分.故設

邊數爲 $2n$, 則所求角之和爲 $(n-1)\cdot 4\hat{R}$ 之半分, 即 $2(n-1)\times\hat{R}$.

注意 參照482題.

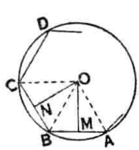
669. 設圓之內接直線形之角皆相等, 則其邊相間相等. 又此直線形如何則爲等邊?

解 設 A, B, C, ……, N 爲直線形中相隣之頂點. 於是因同圓中含等角之弓形相等, 故弧 ABC = 弧 BCD, 故弧 AB = 弧 CD. 同理, 弧 BC = 弧 DE = ……. 故此直線形之邊, 相間相等. 設邊之數爲奇數, 則依次相間取邊, 可得最初邊之隣邊. 故若邊數爲奇數, 則此直線形爲等邊; 若邊數爲偶數, 則不能必其爲等邊.

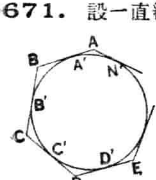


670. 設一直線形各邊之垂直二等分線, 皆過同點, 則過此直線形之一切頂點, 得作一圓.

證 設一直線形爲 ABCD……, 其各邊之垂直二等分線 MO, NO, ……過同點 O. 聯結 OA, OB, OC, ……, 則 OA = OB, OB = OC, ……[55題] 故 OA = OB = OC = ……, 故得以 O 爲中心, 作過各頂點 A, B, C, …… 之圓.



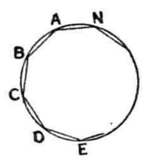
671. 設一直線形之邊數爲偶數, 其邊皆切於同圓, 則相間所取各邊之和相等.



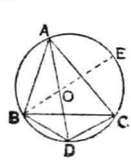
證 設直線形 ABCD…… 之邊數爲偶數, 其各邊切同圓於 A′, B′, C′, ……, N′. 此時 AN′ = AA′, BA′ = BB′, CB′ = CC′, ……, 故 AA′ + BA′ + CC′ + DC′ + …… = BB′ + CB′ + DD′ + ED′ + …… + AN′, 即 AB + CD + …… = BC + DE + …….

672. 圓之內接等邊直線形爲等角. 又圓之內接等角直線形必爲等邊否?

解 設圓之內接等邊直線形爲 ABCD……N. 因 A, B, C, …… 將圓周分成等弧. 故弧 BCD……N, CDE……NA, …… 相等, 故 $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=$ ……, 因此 ABCD……N 爲等角形, 故爲正多角形. 又設 ABCD……N 爲等角直線形, 則因 $\hat{A}=\hat{B}$. 故弧 BCD……N = 弧 CDE……NA; 各減以公有弦 CD……N, 則弧 AN, BC 相等. 同理, 弧 BC, DE 相等. 如是相間所取之弧相等, 因而其對應邊亦等. 故設邊數爲奇數, 則相間而取時, 最後邊與最初邊相等, 即隣邊相等, 因而各邊皆相等, 而爲正多角形. 但若邊數爲偶數, 則僅可知其邊相間相等, 而不能必其是否爲正多角形, 蓋其隣邊或相等, 或不相等, 故或爲正多角形, 或非正多角形也.



673. 設三角形 ABC 內切圓之中心爲 O, 過 O 及三角形之頂點 A 引一直線, 命其與三角形外接圓之交點爲 D, 則 DB, DO, DC 相等.

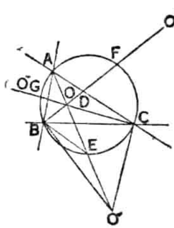


證 因 O 爲△ABC 之內心, 故 AO 將角 BAC 二等分, 故 D 爲弧 BC 之中點[466題], 因而 DB = DC. 又設 BO 與弧 AC 之交點爲 E, 則 E 爲

弧 AC 之中點. 而角 DOB 等於弧 DB, AE 之和所對中心角之半分, $D\hat{B}O$ 等於弧 DCE 所對中心角之半分. 然弧 DB, AE 之和, 等於弧 DCE, 因而 $D\hat{O}B = D\hat{B}O$. 故 DB = DO. 故 DB = DO = DC.

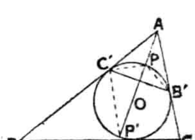
674. 設三角形 ABC 中, D 爲外心, O 爲內心, O′, O″, O‴ 分別爲在角 A, B, C 內之傍切圓之中心. 則(1)外接圓過 OO′, OO″, OO‴ 之中點, (2)四點 O, B, O′, C 在一圓周上, 其中心在圓 D 之周上.

圖 (1) EB = EO [673題]. 又 $O\hat{B}O' = \hat{R}$, $E\hat{B}O'$, $E\hat{O}'B$ 分別爲等角 $O\hat{B}E$, $B\hat{O}E$ 之餘角, 故相等; 因此, EB = EO′, 即 E 爲 OO′ 之中點. 同理, OO″ 及 OO‴ 亦爲圓 D 之周二等分. (2) EO′ = BE = EO = EC [前述及673題], 故 B, O, C, O′ 在一圓周上, 其中心爲圓 D 之周上之點 E.



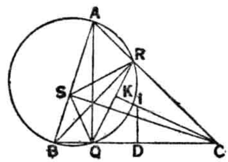
675. 設 O 爲三角形 ABC 之內心, 內切圓與邊 AB, AC 之切點, 分別爲 C′, B′, AO 與內切圓交於 P, P′, 則 P 爲三角形 AB′C′ 之內心, P′ 爲其傍心.

圖 AO 爲 B′C′ 之垂直二等分線 [560題], 故弧 C′P = 弧 PB′. 故 $P\hat{C}'B' = P\hat{B}'C'$. 而 $A\hat{C}'P = P\hat{B}'C'$ [557題], 故 PC′ 將 $A\hat{C}'B'$ 二等分. 因而 PB′ 將 $A\hat{B}'C'$ 二等分 [179題]. 故 P 爲 △AB′C′ 之內心. 仿此得證 P′ 爲其傍心.



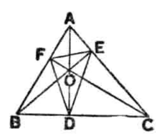
676. 設 I 爲三角形 ABC 之外心, Q, R, S 爲由頂點至對邊所引垂線之足, 則 IA, IB, IC 分別爲 RS, SQ, QR 之垂線.

圖 引 ID 垂直於 BC, 命 CI, RQ 之交點爲 K, 則 $D\hat{I}C = \hat{A}$ [202題]. 又因 A, B, Q, R 在一圓周上, 故 $R\hat{Q}C = \hat{A}$; 故 $D\hat{I}C = R\hat{Q}C$. 故 △CÎD, △CKQ 等角. 故 $C\hat{K}Q = C\hat{D}I = \hat{R}$. 仿此得證 IA, IB 分別垂直於 RS, SQ.

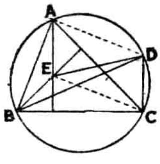


677. 命 D, E, F 爲由三角形 ABC 之頂點至對邊所引垂線之足. 設三角形 ABC 之垂心 O 在形內 [即三角形 ABC 爲銳角時], 則 O 爲 △DEF 之內心, A, B, C 爲其傍心. 又設三角形 ABC 爲鈍角或直角, 則如何?

圖 AD, BE, CF 將垂足三角形 DEF 之角 D, E, F 二等分 [518題], 故 O 爲垂足三角形之內心. 又 BC, CA, AB 分別將垂足三角形頂角 D, E, F 之外角二等分, 故其交點 A, B, C 爲傍心. 次設 ABC 爲鈍角三角形, B 爲鈍角, 其位置在 O 上, 則垂心 O 在 B 之位置. 故鈍角之頂點爲垂足三角形之內心, 他二頂點及垂心爲其傍心. 復次設 $\hat{B}$ 爲直角, 則 D 及 F 皆在 B 上, 而垂足三角形成一有限直線.



678. 設由三角形 ABC 之頂點 A, B 及 C 至對邊所引之垂綫交於 E, BD 爲外接圓之直徑, 則 AE 等於 CD, 而 AC, ED 互相二等分.

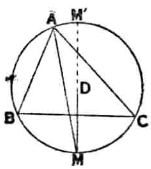


證 聯結 AD, CE. 因 BD 爲直徑,故 $B\hat{C}D=\hat{R}$, 故 AE ∥ DC. 同理, AD ∥ CE. 故 AECD 爲平行四邊形, 因而 AE = CD, 而 AC, ED 互相二等分.

注意 參照509題.

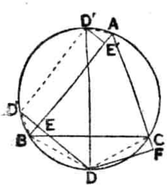
679. 設三角形 ABC 之外心爲 D, 弧 BC 之中點爲 M, 則角 AMD 等於角 B, C 之差之半分.

證 設 DM 之延線與圓周之交點爲 M′,則 MM′ 爲垂直於 BC 之直徑, 故 M′ 爲弧 BAM′C 之中點, 故弧 AM′ 等於弧 AC, AB 之差之半分. 而 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 之差, 等於弧 AC, AB之差所對中心角之半分,卽弧 AC, BC 之差之半分所對之中心角. 故 $A\hat{M}D=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$.



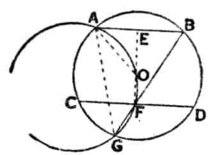
680. 設三角形 ABC 內接於圓,由弧 BC 之中點 D, 作 AB 之垂線 DE, 則 $AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$, $BE=\frac{1}{2}(AB\sim AC)$. 又由弧 BAC 之中點 D′ 至 AB 作垂線 D′E′, 則 $AE'=\frac{1}{2}(AB\sim AC)$, $BE'=\frac{1}{2}(AB+AC)$.

證 設 D 至 AC 引垂線 DF, 聯結 DB, DC, 則兩直角三角形 DEB, DFC 中,因 D 爲弧 BC 之中點, 故 DB = DC, 而 $O\hat{B}E=D\hat{C}F$ [457題]. 故斜邊及一銳角相等,因而 BE=CF, 又 AD 爲 $B\hat{A}C$ 之二等分線, 故 AE=AF. 據此, $AE=\frac{1}{2}(AE+AF)=\frac{1}{2}(AB+AC)$; $BE=\frac{1}{2}(BE+CF)=\frac{1}{2}(AB-AC)$, 但若 AB<AC, 則 $BE=\frac{1}{2}(AC-AB)$. 次設 DE 之延線與外接圓之交點爲 D″, 聯結 BD″, D″D′, D′A, 則因 DD′ 爲圓之直徑, 故 $D\hat{A}D'=\hat{R}$. 故 $B\hat{D}E$, $A\hat{D}D'$ 分別爲等角 DBE, DD′A 之餘角, 故相等. 因此 BD″=AD′, 故 D″D′ ∥ AB, 因而 ED″=E′D′. 故兩直角三角形 BED″, AE′D′ 中, $BE=AE'=\frac{1}{2}(AB-AC)$; $BE'=AE=\frac{1}{2}(AB+AC)$.



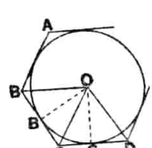
681. 設 AB, CD 爲圓 O 中之二平行弦, F 爲 CD 之中點. 又設過 A, O, F 之圓與前圓交於 G, 則 G, F, B 在一直線上.

證 設 FO 之延線與 AB 之交點爲 E. 於是因 AOFG 爲後圓之內接四邊形, 故 $A\hat{O}E=A\hat{G}F$. 又 F 爲 CD 之中點, 故 OF 垂直於 CD, 因而又垂直於 AB. 故聯結 BG, 則 $A\hat{G}B=A\hat{O}E$ [202題]. 故 $A\hat{G}F=A\hat{G}B$, 因而 GF, GB 成一直線, 卽 G, F, B 在一直線上.



682. 設直線形各角之二等分線過同點, 則得作此直線形之內切圓.

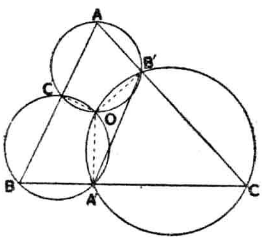
證 設直線形 ABCD……各角之二等分線過同點 O. 由 O 至各邊引垂線 OB′, OC′, ……, 則 △OB′C, △OC′C 中, OC 公有, $O\hat{C}B'=O\hat{C}C'$, $O\hat{B}'C=\hat{R}=O\hat{C}'C$, 故 OB′=OC′. 同理, 由 O 至次邊所引垂線等於 OC′, 因而由 O 至各邊所引垂線皆相等. 故以 O 爲中心,



OB′ 爲半徑作圓,則圓周過 B′, C′,……;且因 OB′, OC′,……皆垂直於邊,故圓周切邊於是等點. 故得作所設直線形之內切圓.

683. 設 A′B′C′ 爲三角形 ABC 內接之三角形,則三圓 AB′C′, BA′C′, CA′B′ 過同點.

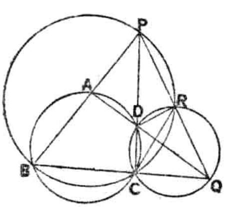
圖 命外接圓 BA′C′, CA′B′ 之交點爲 O,



聯結 OA′, OB′, OC′, 則 $\hat{B}+\hat{C}+A'\hat{O}C'+A'\hat{O}B'=4\hat{R}$. 而 $A'\hat{O}C'+A'\hat{O}B'+B'\hat{O}C'=4\hat{R}$, 故 $\hat{B}+\hat{C}=B'\hat{O}C'$. 又 $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=2\hat{R}$. 故 $\hat{A}+B'\hat{O}C'=2\hat{R}$, 故得作圓 AC′OB′, 卽三外接圓過同點 O.

684. 延長圓之內接四邊形 ABCD 之四邊,命 AB 與 CD 之交點爲 P, BC 與 AD 之交點爲 Q, 作三角形 PBC, QCD 之外接圓,命其圓周除 C 外復交於點 R. 則三點 P, Q, R 在一直線上.

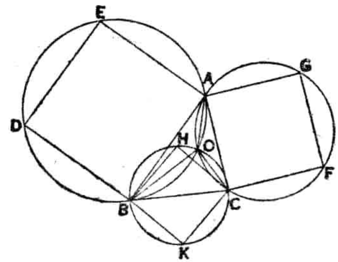
圖 聯結 RP, RQ, RD, RC, 則 $P\hat{R}C=2\hat{R}-A\hat{B}C=B\hat{A}Q+A\hat{Q}B$. 而 $A\hat{Q}B=D\hat{R}C$, 卽 $P\hat{R}D+D\hat{R}C=B\hat{A}Q+D\hat{R}C$, 故 $P\hat{R}D=B\hat{A}Q$. 又 $B\hat{A}Q=P\hat{C}Q$, 故 $P\hat{R}D=D\hat{C}Q$;



而 $D\hat{C}Q+D\hat{R}Q=2\hat{R}$, 故 $P\hat{R}D+D\hat{R}Q=2\hat{R}$. 故 P, R, Q 在一直線上.

685. 在三角形之二邊上作正方形,又以第三邊爲對角線,作正方形,則此三正方形之外接圓過同點.

圖 在三角形 ABC 之二邊上作正方形



ABDE, ACFG, 又以 BC 爲對角線, 作正方形 BKCH; 求證此三正方形之外接圓過同點. 設二外接圓周 ABDE, ACFG 之交點爲 O, 聯結 OA, OB, OC, 則 $A\hat{O}C=\frac{3}{2}\hat{R}=A\hat{O}B$. 故 $A\hat{O}C+A\hat{O}B=3\hat{R}$, 故 $B\hat{O}C=4\hat{R}-3\hat{R}=\hat{R}$. 而 $B\hat{H}C=\hat{R}$, 故正方形 BKCH 之外接圓周亦過 O [486題], 卽三圓周過同點.

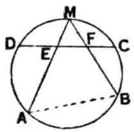
686. 設二弦 AB, AC 交於圓周上之點 A, 又他一弦平行於 A 點上之切線, 且截前二弦於 E, D, 則四邊形 BCDE 內接於圓.

圖 設切線爲 AF, 聯結 BC, 則 $C\hat{A}F=\hat{B}$. 而 AF ∥ ED, 故 $C\hat{A}F=A\hat{D}E$, 故 $\hat{B}=A\hat{D}E$, 故 $\hat{B}+E\hat{D}C=2\hat{R}$. 故四邊形 BEDC 內接於圓 [458題].

687. 由弧 CD 之中點 M, 引二弦 MA, MB, 令與弦 CD 交於 E, F, 則四點 A, B, F, E 在一

圓周上.

證　聯結 AB. $A\hat{E}F$ 等於弧 MD＋弧 ABC 所對中心角之半分; $A\hat{B}F$ 等於弧 ADM, 即弧 AD＋弧 MC 所對中心角之半分. 故 $A\hat{E}F+A\hat{B}F$ 等於弧 MD＋弧 ABC＋弧 AD＋弧 MC, 即圓周所對中心角之半分, 故爲 $2\hat{R}$. 因此 A, B, F, E 在一圓周上 [458題].



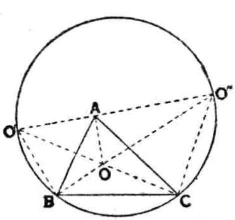
注意　本題與前題相較, 其途雖殊, 其歸則一.

688. 過三角形 ABC 之二頂點 B, C 及內心, 與切於邊 BC 之傍切圓之中心, 得作一圓.

證　觀674題.

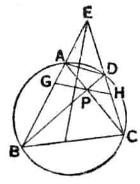
689. 三角形之二傍心及二頂點在一圓周上.

證　設三角形 ABC 之邊 AB, AC 上傍切圓之中心分別爲 O′, O″, 聯結此中心與三頂點, 則 O′, A, O″ 在一直線上, 因 $O'\hat{A}O=\hat{R}$, $O''\hat{A}O=\hat{R}$ 故也. 而 $O'\hat{C}O''=\hat{R}=O''\hat{B}O'$, 故以 O′O″ 爲直徑之圓周, 過 B 及 C [486題], 即二傍心 O′, O″ 及二頂點 B, C 在一圓周上.



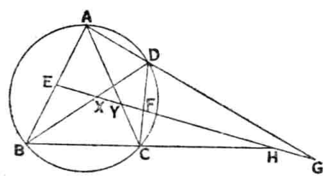
690. 圓之內接四邊形中, 過對角線之交點引一直線, 令垂直於一雙對邊之交角之二等分線, 則此直線將對角線之交角二等分.

證　設圓之內接四邊形爲 ABCD, 其對角線之交點爲 P, 對邊 AB, CD 之交點爲 E, 垂直於角 E 之二等分線, 且過 P 引直線 GH, 命其與 AB, CD 之交點爲 G, H. 於是 △APG, △DPH 中, 因 GH 垂直於 $\hat{E}$ 之二等分線, 故 $\hat{G}=\hat{H}$, 又 $G\hat{A}P=H\hat{D}P$, 故他一角 $A\hat{P}G$, $D\hat{P}H$ 相等. 而 $D\hat{P}H=B\hat{P}G$, 故 $A\hat{P}G=B\hat{P}G$. 故 PG 與 AC, BD 成等角.



691. 圓之內接四邊形中, 與一雙對邊成等角之直線, 與他一雙邊及二對角線亦成等角.

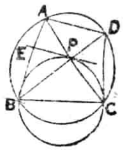
證　設圓之內接四邊形爲 ABCD, 與其一雙對邊 AB, CD 成等角之直線爲 EF; EF 之延線與 AD, BC 之延線分別交於 G, H. △EAG, △FCH 中, $E\hat{A}G=F\hat{C}H$, $A\hat{E}G=E\hat{F}D$ [假設] $=C\hat{F}H$. 故 $A\hat{G}E=C\hat{H}F$, 即 EF 與 AD, BC 成等角. 次設 EF 與對角線 BD, AC 之交點分別爲 X, Y, 則因 $B\hat{E}X=C\hat{F}Y$ [假設], $E\hat{B}X=F\hat{C}Y$, 故 $E\hat{X}B=F\hat{Y}C$, 即與二對角線成等角.



注意　本題得自前題導出之.

692. 過圓之內接四邊形之對角線交點及其二頂點作圓, 則此圓在該交點上之切線, 平行於四邊形之一邊.

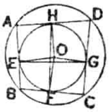
證　設圓之內接四邊形爲 ABCD. 其對角



線之交點為 P, 過 P 所引圓 BPC 之切線為 PE, 則 $E\hat{P}B = P\hat{C}B$ [557題]. 而 $P\hat{C}B = A\hat{D}B$, 故 $E\hat{P}B = A\hat{D}B$, 故 $PE \parallel AD$.

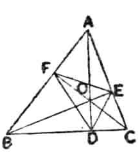
693. 設一四邊形內接於一圓, 外切於他圓, 則內切圓之相對切點聯結之直線, 互相垂直.

【證】 設四邊形為 ABCD, 內切圓之中心為 O, 切點為 E, F, G, H. 因 ABCD 為圓之內接四邊形, 故 $\hat{A}+\hat{C} = 2\hat{R}$ [456題]. 而 $O\hat{G}C = \hat{R} = O\hat{F}C$, 故 $\hat{C} + G\hat{O}F = 2\hat{R}$. 同理, $\hat{A} + H\hat{O}E = 2\hat{R}$. 故 $G\hat{O}F + H\hat{O}E = 2\hat{R}$. 而 HF, GE 所成之角, 等於 $G\hat{O}F + H\hat{O}E$ 之半分[489題], 即為 $2\hat{R}$ 之半分 $\hat{R}$.



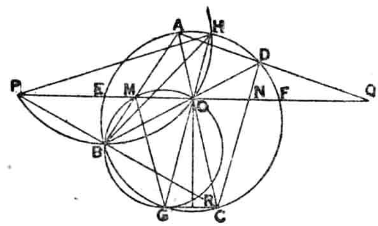
694. 銳角三角形 ABC 中, (1) 垂足三角形 DEF 之各角 $F\hat{D}E$, $D\hat{E}F$, $E\hat{F}D$ 分別為 $2\hat{A}$, $2\hat{B}$, $2\hat{C}$ 之補角, (2) △DEC, △AEF, △DBF 互相等角, 且與 △ABC 亦等角.

【證】 $E\hat{D}C = \hat{R} - O\hat{D}E = \hat{R} - O\hat{C}E = \hat{A}$, 又 $F\hat{D}B = \hat{R} - O\hat{D}F = \hat{R} - O\hat{B}F = \hat{A}$, 故 $F\hat{D}E = 2\hat{R} - 2\hat{A}$. 同理, $D\hat{E}C = F\hat{E}A = \hat{B}$, $E\hat{F}A = D\hat{F}B = \hat{C}$, 故 $D\hat{E}F = 2\hat{R} - 2\hat{B}$, $E\hat{F}D = 2\hat{R} - 2\hat{C}$. 根據前述, △DEC, △AEF, △DBF 之三角, 等於 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, 故互相等角, 且與 △ABC 亦等角.



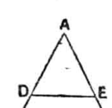
695. 設四邊形 ABCD 內接於圓, 過其對角線之交點 O, 引弦 EF, 令於此點二等分, 且令其與 AB, CD 之交點分別為 M, N, 與 BC, AD 延線之交點分別為 P, Q, 則 MN 及 PQ 皆二等分於 O.

【證】 由 C 平行於 EF 引 CG, 命 OG 之延線



與圓周之交點為 H, 聯結 BG, GM, BH, HP. 過圓之中心, 引 EF, CG 之公垂線 OR, 則因 O 為 EF 之中點, 故 R 為 CG 之中點, 故 $C\hat{O}R = G\hat{O}R$, 因此 $C\hat{O}N = G\hat{O}M$. 又 $M\hat{O}G = O\hat{G}C = O\hat{C}G$, $M\hat{B}G + O\hat{C}G = 2\hat{R}$, 故 $M\hat{B}G + M\hat{O}G = 2\hat{R}$. 故得畫圓 BGOM, 因而 $M\hat{B}O = M\hat{G}O = O\hat{C}N$, 而 $OG = OC$. 故 △OGM, △OCN 中, 兩角與其間之邊, 分別相等, 故 $OM = ON$. 次, $H\hat{B}C = H\hat{G}C = P\hat{O}G = H\hat{O}Q$, 故 $P\hat{B}H = P\hat{O}H$. 故得畫圓 PBOH. 因而 $P\hat{H}O + P\hat{B}O = 2\hat{R}$, $P\hat{B}O + O\hat{B}C = 2\hat{R}$; 而 $O\hat{B}C = O\hat{A}Q$, 故 $P\hat{H}O = O\hat{A}Q$. 又 $A\hat{H}O = 2\hat{R} - A\hat{B}G = M\hat{O}G = O\hat{G}C = O\hat{A}H$, 故 $OH = OA$. 故 △POH ≡ △QOA, 故 $OP = OQ$.

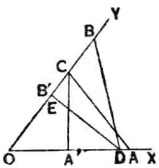
696. 設二等邊三角形 ABC 中, 底 BC 之平行線, 截他二邊於 D, E, 則 B, C, D, E 在一圓周上.



【證】 因 $DE \parallel BC$, 故 $D\hat{B}C + E\hat{D}B = 2\hat{R}$. 而 $AB = AC$, 故 $D\hat{B}C = E\hat{C}B$, 故 $E\hat{C}B + B\hat{D}E = 2\hat{R}$. 故四邊形 BCED 內接於圓[458題].

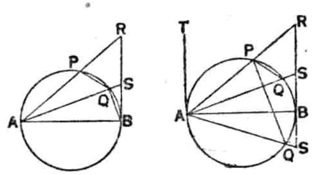
697. 於所設角 XOY 之二邊 OX, OY 上,分別取任意長 OA, OB, 由 OA 之中點 A′ 引 OA 之垂線,令與 OY 交於 C, 又由 OB 之中點 B′ 引 OB 之垂線,令與 OX 交於 D, 命此二垂線之交點為 E, 則 A, B, C, D, E 在一圓周上.

證　A′C 為 OA 之垂直二等分線, 故 $A\hat{C}A' = O\hat{C}A'$. 又二直角三角形 CA′O, DB′O 中, 一銳角 O 公有, 故 $O\hat{C}A' = O\hat{D}B'$. 故 $A\hat{C}A' = O\hat{D}B'$, 故過三點 D,E,C 之圓過點 A. 同理,圓 DEC 又過 B. 故五點 A, B, C, D, E 在一圓周上.



698. 過圓之直徑 AB 之一端 A, 引弦 AP, AQ, 延長之令分別交 B 上之切線於 R, S, 則 P, Q, R, S 在一圓周上.

證　因 ABQP 為圓之內接四邊形[假定 AP, AQ 在直徑 AB 同側],故 $Q\hat{P}R = A\hat{B}Q$[457題]. 又 $A\hat{B}S = \hat{R}$, BQ⊥AS, 故 $A\hat{B}Q = B\hat{S}Q$. $Q\hat{P}R = B\hat{S}Q$, 故 P, Q, R, S 在一圓周上 [458題].

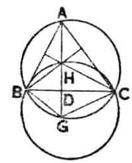


注意　設 AP, AQ 在 AB 異側,可仿此證之.

別證　由 A 引切線 AT, T 與 R 同側, 則 $A\hat{Q}P = T\hat{A}R = A\hat{R}B$, 以下同前.

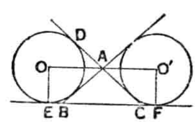
699. 有四點,各為他三點所成三角形之垂心,則此四點中,過其任何三點之圓相等.

證　設四點為 A, B, C, H, 則其中之一點,例如 H,必在△ABC 之內[其證略]. 聯結 AH, 命其延線與邊 BC 之交點為 D, 與△ABC 之外接圓周之交點為 G. 於是因 H 為△ABC 之垂心,故 DH = DG [510題], 故 BH = BG, CH = CG, 故 △HBC ≡ △GBC, 故△HBC 之外接圓等於△GBC 之外接圓.而△GBC 之外接圓卽△ABC 之外接圓, 故兩三角形 ABC, HBC 之外接圓相等. 其他△HCA, △HAB 之外接圓,亦得證其等於圓 ABC [參照 627 題].



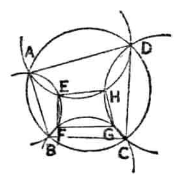
700. 三角形之二傍切圓相等,則此三角形為二等邊.

證　設三角形 ABC 之邊 AB, AC 上之二傍切圓 O, O′ 相等.由 O, O′ 至邊 BC 引垂線 OE, O′F, 則因 OE = O′F, 故 OO′ 平行於 BC; 且因 O, O′ 在角 A 外角之二等分線上, 故 OO′ 過點 A. 於是 $D\hat{A}O = A\hat{C}B$, $O\hat{A}B = A\hat{B}C$, 故 $A\hat{C}B = A\hat{B}C$, 因而 AB = AC.



701. 設四圓之弦成圓之內接四邊形,則此四圓之交點,在一圓周上.

證　設四圓之弦,成圓之內接四邊形 ABCD, 其交點分別為 E, F, G, H. 於是 $E\hat{H}G = 4\hat{R} - E\hat{H}D - G\hat{H}D$, $E\hat{H}D = 2\hat{R} - E\hat{A}D$, $G\hat{H}D = 2\hat{R}$

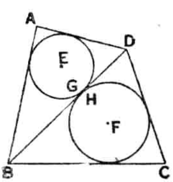


$-G\hat{C}D$; 故 $E\hat{H}G = 4\hat{R} - (2\hat{R} - E\hat{A}D) - (2\hat{R} - G\hat{C}D) = E\hat{A}D + G\hat{C}D$. 同理, $E\hat{F}G = E\hat{A}B + G\hat{C}B$. 故 $E\hat{H}G + E\hat{F}G = E\hat{A}D + G\hat{C}D + E\hat{A}B + G\hat{C}B = 2\hat{R}$. 故得作 EFGH 之外接圓.

注意 點 E, F, G, H 位置之關係,並不一律,因而證明之路徑,亦種種不同. 但最後所欲證者, 皆爲是等點在一圓周上, 除當引用451,456題外,其他定理,不須多引.

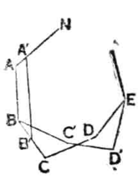
702. 設四邊形 ABCD 外切於圓, 則三角形 ABD, BCD 之內切圓互相外切.

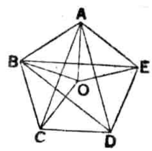
證 設 ABCD 爲圓之外切四邊形, △ABD 之內切圓 E 切於 BD 之點爲 G, △BCD 之內切圓 F 切於 BD 之點爲 H. 於是 $BG = \frac{1}{2}(AB + BD + AD) - AD = \frac{1}{2}(AB + BD - AD)$. 同理, $BH = \frac{1}{2}(BC + BD - CD)$. 又 $AB + CD = AD + BC$, 因而 $AB + BD + CD = AD + BC + BD$, 故 $AB + BD - AD = BC + BD - CD$. 故 $BG = BH$, 卽 G, H 相合,故二圓 E, F 相切. 且此二圓在 BD 之異側,故相外切.



703. 等邊多角形得外切於圓否?又等角多角形得外切於圓否?

解 (I) 設邊數爲 3, 則恆得外切於圓, 可不待言;茲所當探究者, 爲邊數多於 3 之多角形. 設 ABCD……N 爲等邊多角形,此多角形或得外切於圓,或不得外切於圓, 而不出此二者. 今設得外切,於 BE 上作四邊形 BC′D′E, 令其三邊皆等於 BC, 則此四邊形普通並不與四邊形 BCDE 全等;故後多角形不外切於原多角形之內切圓. 而多角形若爲六邊以上, 則二多角形所共之邊, 在三以上, 故得決定內切圓. 故多角形 ABC′D′E……N 不外切於圓. 次設 ABCDE 爲等邊五角形,若此五角形外切於圓,則各角之二等分線過同點. 今命其點爲 O, 則因 $AB = AE$, 故 $AO \perp EB$,因而 $OB = OE$. 同理, $OB = OD$, 又 $OA = OC$; 故 O 距各角之頂點等遠. 於是 O 又爲此多角形外接圓之中心, 其各邊所對之弧相等, 因而多角形之各角相等,故五邊形又爲等角. 據此,若非等角,則等邊五角形不能外切於圓. 復次, 等邊四邊形中, 其對邊之和相等, 故恆得外切於圓. 綜上所述, 可知若邊數爲 3, 4, 則等邊多角形得外切於圓;否則不得恆外切於圓.



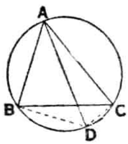


(II) 設邊數爲 3, 則等角多角形爲等邊,而恆得外切於圓. 今設 ABCD……N 爲邊數多於 3 之等角多角形,假定此多角形外切於圓. 於邊 NA 上,取任意點 A′, 引 A′B′ 平行於AB, 命其與BC之交點爲B′, 則A′B′CD……N 亦爲等角多角形.然邊 A′B′ 不外切於原多角形之內切圓, 至爲明顯. 而此二多角形所共之邊數,至少爲 3,故得決定一內切圓. 因此, 多角形 A′B′CD……N 不外切於圓. 故邊數爲 4 以上之等角多角形, 不能必其恆外切於圓.

704. 設ABC爲銳角三角形,其外接圓之

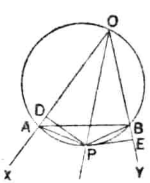
直徑爲 AD, 則角 BAD, CAD 分別爲角 ACB, ABC 之餘角.

證　聯結 BD, CD. 於是因 AD 爲圓之直徑, 故 $A\hat{B}D$ 等於直角, 因而 $B\hat{A}D + A\hat{D}B = \hat{R}$. 而 $A\hat{D}B$, $A\hat{C}B$ 爲立於同弧 AB 上之圓周角, 故相等. 因此 $B\hat{A}D + A\hat{C}B = \hat{R}$. 仿此得證 $C\hat{A}D + A\hat{B}C = \hat{R}$.



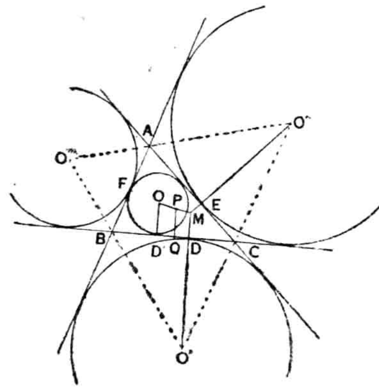
705.　在定角 XOY 之二等分線上取一點 P, 命過二點 O, P 之任意圓周與角之二邊 OX, OY 之交點分別爲 A, B, 則線分 OA, OB 之和, 一定不易.

證　由 P 至 OX, OY 分別引垂線 PD, PE, 則△OPD, △OPE 中, 斜邊 OP 公有, $P\hat{O}D = P\hat{O}E$, 故兩形全等, 故 OD = OE. 次, 聯結 PA, PB, 則因 P 爲弧 APB 之中點, 故 PA = PB, 又 PD = PE, $A\hat{D}P = \hat{R} = B\hat{E}P$. 故 △APD ≡ △BPE, 因此 AD = BE. 故 OA + OB = OD + OE. 然 D, E 爲定點, 故 OD + OE 有定長, 因而 OA + OB 之長亦一定.



706.　設三角形 ABC 之內心爲 O, 傍心爲 O′, O″, O‴, 傍切圓 O′, O″, O‴ 與邊 BC, CA, AB 之切點分別爲 D, E, F, 則 O′D, O″E, O‴F 過同點 M. 點 M 爲三角形 O′O″O‴ 之外心, OM 之中點爲三角形 ABC 之外心.

證　設 O′D, O″E 之延線交於 M, 則因 $M\hat{O}'C$ = ($B\hat{C}O'$ 之餘角) = ($A\hat{C}O''$ 之餘角) = $M\hat{O}''C$, 故 M 在 O′O″ 之垂直二等分線上. 同理,

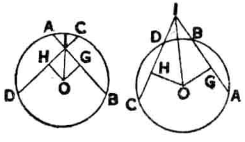


O″E, O‴F 延線之交點及 O‴F, O′D 延線之交點在 O″O‴, O‴O′ 之垂直二等分線上. 故 O″E, O‴F 過 M. 又 M 爲△O′O″O‴ 各邊垂直二等分線之交點, 故爲△O′O″O‴ 之外心. 次設 OM 之中點爲 P, 由 P 至 BC 引垂線 PQ, 命圓 O 切於 BC 之點爲 D′, 聯結 OD′. 於是 OD′ ∥ PQ ∥ MD, 又 P 爲 OM 之中點, 故 Q 爲 D′D 之中點. 而 BD′ = CD [729 題], 故 Q 爲 BC 之中點. 據此 P 在 BC 之垂直二等分線上. 同理, P 又在 CA, AB 之垂直二等分線上. 故 P 爲 △ABC 之外心.

第六章　雜題

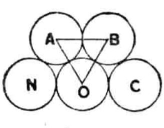
707.　設圓之二等弦 AB, CD 交於圓內或圓外, 則其交點 I 所分之二部分, 分別相等.

證　由圓之中心 O, 至 AB, CD 引垂線 OG, OH, 聯結 OI, 則因 AB = CD, 故 OG = OH, 而 O 爲兩直角三角形 OGI, OHI 公有, 故 IG = IH, 而 G, H 分別爲 AB, CD 之中點 [440



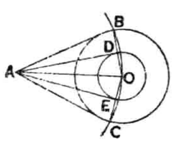
題], 故 AG－IG＝CH－IH, 卽 AI＝CI, 因而 IB＝ID.

708. 以若干等圓, 始得圍切一與其相等之所設圓?



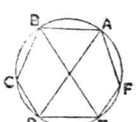
證　命所設圓爲 O, 圍切之諸圓爲 A, B, C, ……,N. ABO 爲正三角形 [625 題], 故 $A\hat{O}B=\frac{1}{6}\cdot 4\hat{R}$, 故圓 A, B, C,……之數須六.

709. 於中心爲 O 之圓外, 取一點 A, 以 O 爲中心, 以前圓半徑之二倍爲半徑作圓, 截 A 爲中心, AO 爲半徑之圓於 B, C, OB, OC 截前圓於 D, E, 則 AD, AE 爲前圓之切線.



證　OB ＝ 2OD [假設], 故BD＝OD; 而AB＝AO, 故 $A\hat{D}O=\hat{R}$ [94題]. 同理, $A\hat{E}O=\hat{R}$. 故 AD, AE 爲前圓之切線 [550 題].

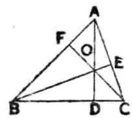
710. 設六點 A, B, C, D, E, F 在一圓周上, 弦 AB, BC 分別平行於 ED, EF, 則 FA, DC 亦平行.



證　因 AB ∥ DE, 及 BC ∥ EF, 故 $A\hat{B}C=D\hat{E}F$ [53 題]. 故弧 ABC＝弧 DEF. 故 $F\hat{A}D=A\hat{D}C$, 故 CD ∥ FA.

711. 設O爲三角形 ABC 之垂心, 則三角形 ABC, OAB, OBC, OCA 有同一九點圓.

證　設由 A, B, C 所引垂線之足, 分別爲 D, E, F, 又 BC, CA, AB, OA, OB, OC 之中點, 分別爲 M, N, P, G, H, K [圖中未示]. △ABC 之九點圓過 D, E, F, M, N, P, G, H, K 九點,



而圓爲三點所定 [444題]. 又 △OBC 中, A 爲垂心. M, H, K 爲其各邊之中點. 故△OBC 過此三點之九點圓與 △ABC 之九點圓相合. 其他準此.

712. 有同垂心及同外接圓之一切三角形, 有同九點圓.

證　九點圓之中心, 爲垂心與外心間距離之中點, 故有同垂心及同外接圓之一切三角形有同九點圓.

713. 過一直線上之三點, 得作一圓否?

解　過三點 A, B, C 之圓, 其中心距此三點等遠, 故此中心爲 AB 之垂直二等分線, 與 BC 之垂直二等分線之交點 [444題]. 然若 A, B, C 在一直線上, 則 AB 之垂直二等分線與 BC 之垂直二等分線平行 [47題], 故此兩垂直二等分線不相交, 故不能求得過 A, B, C 之圓之中心. 故若 A, B, C 在一直線上, 則無過之之圓.

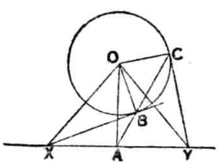
714. 設 O 爲三角形 ABC 之垂心, 且在形內, 則 O 爲聯結垂線 AD, BE, CF 之垂足所成三角形 DEF 之內心, A, B, C 則爲其傍心. 又設 O 在形外, 則如何?

解　設 O 在△ABC 內, 易言之, 設△ABC 爲銳角三角形, 則 AD, BE, CF 分別將 $F\hat{D}E$, $D\hat{E}F$, $E\hat{F}D$ 二等分, 故 O 爲△DEF 之內心. 又

A, B, C 爲 △DEF 之一內角與二外角之二等分線之交點,故爲三角形DEF之傍心.又設 O 在三角形外,易言之,設 △ABC 爲鈍角三角形,則 O, A, B, C 四點中, A, B, C 之一爲 △DEF 之內心,其他爲傍心.

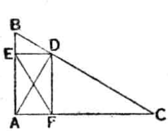
715. 由所設圓之中心 O,至任意直線XY上作垂線,過其垂足 A 作割線,令與圓周交於 B 及 C,在 B, C 作圓之切線,則此切線與 XY 之二交點,距 A 點等遠.

證　因 $O\hat{C}Y=O\hat{A}Y=\hat{R}$, 故 OAYC 在一圓周上[486題],故 $O\hat{Y}C=O\hat{A}C$. 又因 $O\hat{B}X=O\hat{A}X=\hat{R}$, 故 OBAX在一圓周上. 故 $O\hat{X}B=O\hat{A}B$, 因此 $O\hat{Y}C=O\hat{X}B$; 而



$O\hat{C}Y=\hat{R}=O\hat{B}X$, 及 $OC=OB$; 故 $\triangle OCY=\triangle OBX$, 故 $OY=OX$. 而 $OA\perp XY$, 故 $AY=AX$ [91題].

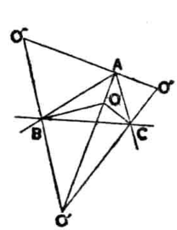
716. 直角三角形ABC中,由直角頂 A 至斜邊 BC 引垂線 AD, 由 D 至他邊引垂線 DE, DF, 則 B, E, F, C 在一圓周上.



證　聯結 EF. 因 AFDE 爲矩形,故得內接於圓,故 $E\hat{F}A=E\hat{D}A=\hat{B}$. 故 B, E, F, C 在一圓周上.

717. 聯結三角形二傍心之直線過一頂點,而垂直於聯結內心與第三傍心之直線.

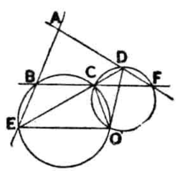
證　△ABC 之內心 O 與角 A 內之傍心 O′ 皆在 $\hat{A}$ 之二等分線上. 又角 B 內之傍心 O″ 與 A 聯結之直線,垂直於 AO′;角 C 內



之傍心 O‴ 與 A 聯結之直線,垂直於 AO′. 故 $O\hat{A}O''+O\hat{A}O'''=2\hat{R}$. 故 $O''\hat{A}O'''$ 在一直線上.

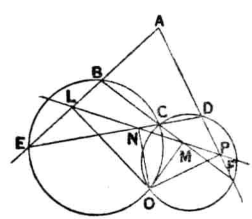
718. 由四直線所成四個三角形之四外接圓過同點,且此點與四圓之中心在一圓周上.

證　設不過同點亦不互相平行之四直線,



交於 A, B, C, D, E, F, 而得四個三角形 AED, ABF, BCE, CDF. 命二圓 BCE, CDF 之他交點爲 O,聯結 OE, OC, OD. 於是 $A\hat{B}C=E\hat{O}C$, $A\hat{F}B=D\hat{O}C$, 故 $A\hat{B}C+A\hat{F}B=E\hat{O}D$, 故 $\hat{A}+E\hat{O}D=2\hat{R}$. 故四邊形 AEOD 外接於圓,即 △AED 之外接圓過 O. 同理, △ABF 之外接圓亦過 O.

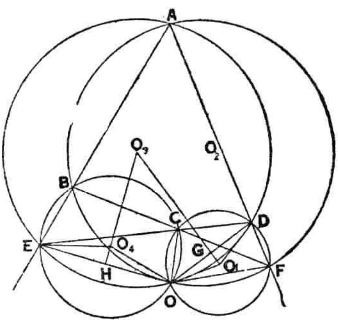
別證　由 △BCE, CDF 之第二交點 O, 至



ABE, BCF, ECD, FDA, 分別引垂線 OL, OM, ON, OP. 因 O 在圓 BCE 之周上,故三點 L, M, N 在一直線上[521題]. 仿此,圓 O 在圓 CDF 之周上,故三點 M N, P 在一直線

上. 故 L, M, N, P 皆在一直線上. 於是因 L, M, P 在一直線上, 故 O 在 △ABF 之外接圓周上; 又因 L, N, P 在一直線上, 故 O 在 △ADE 之外接圓周上. 故四圓 BCE, CDF, ABF, ADE 過同點 O.

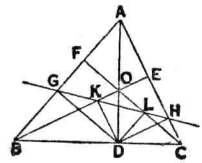
次設 O_1, O_2, O_3, O_4 分別爲 △CDF, △FBA,



△ADE, △EBC 之外接圓之中心, 聯結 EO_4, O_4O, OO_1, O_1D, O_1O_3, 命 O_1O_3 交 OD 於 G, O_3O_4 交 OE 於 H. 於是 $E\hat{O_4}O = 2E\hat{C}O$ [451 題], $H\hat{O_4}O = \frac{1}{2}\times E\hat{O_4}O$. 故 $H\hat{O_4}O = E\hat{C}O = D\hat{F}O = \frac{1}{2}D\hat{O_1}O = G\hat{O_1}O$, 故 $H\hat{O_4}O = O_3\hat{O_1}O$. 故 $O_3\hat{O_1}O + O\hat{O_4}O_3 = 2\hat{R}$, 故 $\triangle O_1OO_4$ 之外接圓過 O_3. 仿此得證 $\triangle O_1OO_4$ 之外接圓過 O_2. 故四圓之交點 O 與四中心 O_1, O_2, O_3, O_4 在一圓周上.

719. 設 AD, BE, CF 爲 △ABC 之三垂線, 則由 D 至 AB, AC, BE, CF 所引垂線之足, 在一直線上.

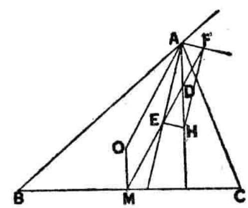
圖 設垂心爲 O, 因 $O\hat{E}C = \hat{R}$, $O\hat{D}C = \hat{R}$, 故 O, E, C, D 在一圓周上. 同理, O, F, B, D 亦在一圓周上. 於是因 D 爲 △OEC, △OFB 之



外接圓交點, 故設由 D 至 AB, AC, BE, CF 所引垂線之足分別爲 G, H, K, L, 則 G, K, L, H 在一直線上 [參照前題別證之前半].

720. 由三角形 ABC 之垂心, 至內外 A 角之二等分線引垂線, 則其垂足與邊 BC 之中點, 在一直線上.

圖 設垂心爲 H, 外心爲 O, 由 O 至 BC 引垂線 OM, 則 M 爲 BC 之中點, 且 $OM = \frac{1}{2}AH$. 命 AH 之中點爲 D, 聯結 MD, 命其與內外 $\hat{A}$



之二等分線之交點分別爲 E, F. 於是 AOMD 爲平行四邊形, 內 $\hat{A}$ 之二等分線 AE 爲 $O\hat{A}H$ 之二等分線, 故 $D\hat{A}E = O\hat{A}E = A\hat{E}D$, 因而 $ED = AD = DH$. 故聯結 HE, 則 HE 爲 AE 之垂線. 同理, 聯結 HF, 則 HF 爲外 $\hat{A}$ 二等分線之垂線. 故由 H 至內外 $\hat{A}$ 二等分線所引垂線之足 E, F 與 BC 之中點 M, 在一直線上.

721. 設任意二平行線公有一垂直二等分線, 則此二平行線之四端, 在一圓周上.

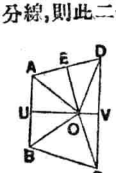
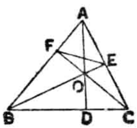


圖 設二平行線 AB, CD 公有一垂直二等分線 UV, 作 AD 之垂直二等分線 EO, 命其與 UV 之交點爲 O, 聯結 AO, BO, CO, DO. 於是因 EO 爲 AD 之垂直

二等分線, 故 AO=OD [55題]. 又因 UO 爲 AB, CD 之垂直二等分線, 故 AO=OB, OC=OD. 故 AO=BO=CO=DO. 故 A, B, C, D 在以 O 爲中心之圓周上.

722. 三角形之三垂線交於一點.

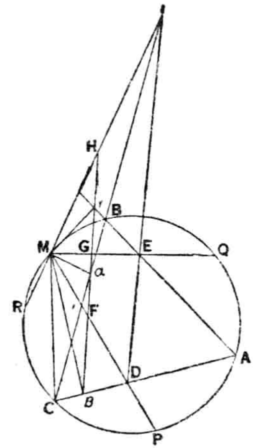
證 △ABC 中,設由 B, C 至對邊所引垂線 BE, CF 之交點爲 O, 聯結 AO, 命其延線交 BC 於 D, 於是所欲證者爲 $A\hat{D}C=\hat{R}$. 聯結 EF, 則因 $O\hat{F}A=\hat{R}$, $O\hat{E}A=\hat{R}$, 故 O, F, A, E 在一圓周上 [458題], 故 $O\hat{F}E=O\hat{A}E$. 又因 $B\hat{F}C=\hat{R}=B\hat{E}C$, 故 B, F, E, C 亦在一圓周上,故 $C\hat{F}E=C\hat{B}E$. 故 $O\hat{A}E=C\hat{B}E$. 各邊加 $A\hat{C}B$, 則 $O\hat{A}E+A\hat{C}B=C\hat{B}E+A\hat{C}B$. 因 $B\hat{E}C=\hat{R}$, 故 $C\hat{B}E+A\hat{C}B=\hat{R}$; 故 $O\hat{A}E+A\hat{C}B=\hat{R}$, 因而 $A\hat{D}C=\hat{R}$.



注意 參考 195 題.

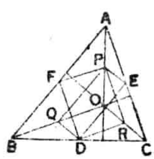
723. 於等邊三角形 ABC 之外接圓周上, 取一點 M, 聯結 M 與各邊所對弧之中點,則是等直線與各該邊之交點, 在一直線上. 此直線與三角形 ABC 關於 M 點之 Simson 氏線平行.

證 命弧 AC, AB, BC 之中點,分別爲 P, Q, R; 又 MP, MQ, MR 與 AC, AB, BC 之交點分別爲 D, E, K, 關於 M 點之 Simson 氏線爲 $\beta\alpha\gamma$, 聯結 MC. 於是因 β, α 在以 MC 爲直徑之圓周上,故 $A\beta\alpha=\alpha\hat{M}C=M\hat{C}B$ 之餘角. 而弧 BP 等於半圓周, 故 $A\hat{\beta}\alpha$ 爲 $\frac{1}{2}$ 弧 MP 所測得者. 又 $M\hat{D}C$ 爲 $\frac{1}{2}$(弧 MC + 弧 AP)所測得者; 而弧 AP=弧 CP, 故 $M\hat{D}C$ 亦爲 $\frac{1}{2}$ 弧 MP 所測得者. 故 $A\hat{\beta}\alpha=M\hat{D}C$. 又 $M\beta D$ 爲直角三角形, 故 $D\hat{M}\beta=F\hat{\beta}M$, 因而 $\beta F=MF=DF$. 同理, EM 及KM與 $\beta\alpha\gamma$ 之交點 G, H 分別爲 EM, KM 之中點. 故 $\beta\alpha\gamma$ 平行於 DEK.

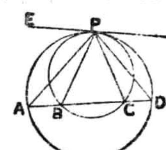


724. 設三角形 ABC 之垂心爲 O; 邊 BC, CA, AB 之中點分別爲 D, E, F; OA, OB, OC 之中點分別爲 P, Q, R; 則 PFDR, PQDE 皆爲矩形,其公有之對角線交點爲三角形 ABC 之九點圓中心.

證 PF, DR 皆平行於 BO, 且爲其半分; 又 FD, PR 皆平行於 AC, 且爲其半分. 而 AC, BO 互相垂直, 故四邊形 PFDR 之各角爲直角, 故爲矩形. 同理, PQDE 亦爲矩形. 而矩形 PFDR, PQDE 之外接圓相合,且爲三角形 ABC 之九點圓, 故其對角線之交點爲九點圓之中心.



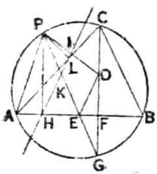
725. 設二圓相切於 P 點,一任意直線截二圓於四點 A, B, C, D, 則 $A\hat{P}B=C\hat{P}D$.



證　引切線 PE, 則 $E\hat{P}B = P\hat{C}B$ [557 題], $E\hat{P}A = P\hat{D}A$. 各邊相減,則得 $A\hat{P}B = C\hat{P}D$.

726.　三角形之垂心 O 與外接圓周上任意點 P 聯結之直線,爲三角形關於 P 點之 Simson 氏線所二等分.

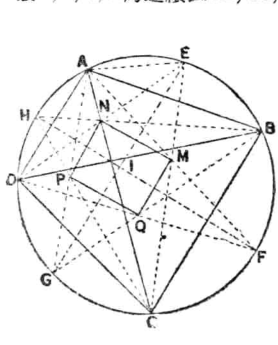
證　由 P 至邊 AB, AC 引垂線 PH, PL, 則 HL 爲 Simson 氏線. 聯結 OP, 命其與 HL 之交點爲 I; 求證 OP 二等分於 I. 聯結 AP, PG, 命 PG 與 HL 之交點爲 K, 與 AB 之交點爲 E, 聯結 OE.



於是因 APLH 爲圓之內接四邊形, 故 $P\hat{H}K = P\hat{A}C = P\hat{G}C = H\hat{P}K$, 因而 $K\hat{H}E = K\hat{E}H$. 又 CF = FG, 且 EF 爲二直角三角形 GEF, OEF 公有, 故 $G\hat{E}F = O\hat{E}F$. 而 $G\hat{E}F = K\hat{E}H = K\hat{H}E$, 故 $O\hat{E}F = K\hat{H}E$. 故 OE ∥ KH. 而 EP 二等分於 K, 故 OP 二等分於 I.

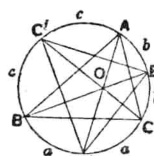
727.　設 ABCD 爲圓之內接四邊形, 則三角形 ABC, ABD, ACD, BCD 內切圓之中心 M, N, P, Q 爲矩形之頂點.

證　設 E, F, G, H 爲連續弧 AB, BC, CD, DA 之中點, 先求證弦 EG, FH 互相垂直. 因 I 爲是等直線之交點, 故角 EIF 爲 $\frac{1}{2}$(弧 EB + 弧 BF + 弧 GD + 弧 DH) = $\frac{1}{4}$(弧 AEB + 弧 BFC + 弧 CGD + 弧 DHA) = $\frac{1}{4}$ 圓周所測得者, 故 EG, FH 互相垂直. 又點 M, N 在 E 點爲中心, EA 爲半徑之圓周上, 故二等邊三角形之底邊 MN 爲 $D\hat{E}C$ 二等分線 EG 之垂線. 仿此得證 PQ 亦爲 EG 之垂線; 且 PN 及 QM 亦爲 FH 之垂線. 故 MNPQ 爲矩形.



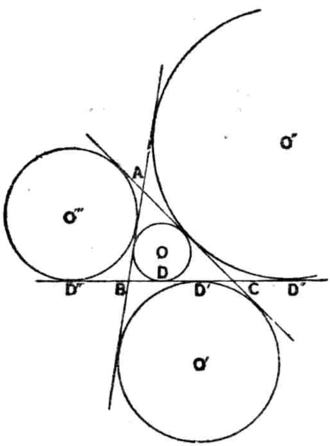
728.　圓之內接三角形中, 設各角之二等分線交於 O, 又 AO, BO, CO 之延線, 分別截圓周於 A′, B′, C′, 則 O 爲三角形 A′B′C′ 之垂心.

證　因 AA′ 爲 $B\hat{A}C$ 之二等分線, 故弧 A′B = 弧 A′C = a. 同理, 弧 B′A = 弧 B′C = b, 弧 C′A = 弧 C′B = c. 於是 AA′ 與 B′C′ 之交角, 等於弧 a, b, c 之和所對中心角之半分. 而弧 $(2a+2b+2c)$ 爲全圓周, 故此交角爲直角. 故 AA′ ⊥ B′C′. 同理, BB′ ⊥ C′A′, CC′ ⊥ A′B′. 故 O 爲 A′B′C′ 之垂心.

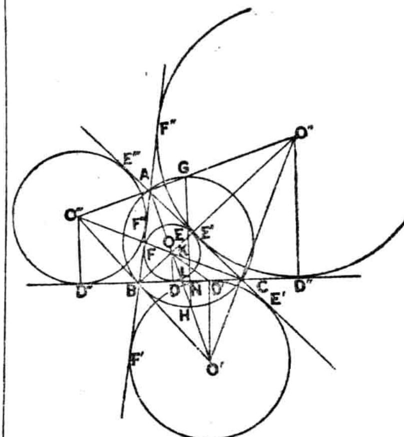


729.　作三角形 ABC 之內切圓及三個傍切圓, 命其切於邊 BC 之點, 如圖所示, 邊 BC, CA, AB 分別表以 a, b, c, 且 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, 則 BD″ = CD‴ = s, BD‴ = CD″ = $s-a$, BD = CD′ = $s-b$, BD′ = CD = $s-c$, DD″ = D‴D′ = b, DD‴ = D′D″ = c, DD′ = $b-c$, D‴D″ = $b+c$. 又此四圓中心所決定之六直線, 各爲 △ABC 之外接圓所二等分, 其分點各爲六個四邊形 BOCO′, COAO″, AOBO‴, ABO′O″, BCO$''$O$'''$，CAO$'''$O$'$ 之外接圓之中心，又設外接圓之半徑爲 R，內切圓之半徑爲 r，傍切圓之半徑分別爲 r'，r''，r'''，由外接圓之中心至三邊所引之垂線，分別爲 p'，p''，p'''，延長此垂線，命其在邊與外接圓周間之部分爲 q'，q''，q'''，則 $r'+r''+r'''=4R+r$，$p'+p''+p'''=R+r$，$q'+q''+q'''=2R-r$.

圖 BD$''$ = BF$''$ = $\frac{1}{2}$(AB+BC+CA) = CE$'''$



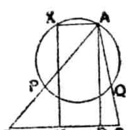
= CD$'''$ = AE$'$ = AF$'$ = s [557 題]. BD$'''$ = CD$'''$ − BC = BD$''$ − BC = CD$''$ = $s-a$. BD+CE+AE = $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, 故 BD = s − (CE+AE) = s − AC = $s-b$; 又 CE$'$ = AE$'$ − AC = $s-b$; 故 BD = CD$'$ = $s-b$. BD$'$ = BD + DD$'$ = CD$'$ + DD$'$ = CD, 又 BD$'$ = BF$'$ = AF$'$ − AB = $s-c$, 故 BD$'$ = CD = $s-c$. DD$''$ = DC + CD$''$ = BD$'$ + BD$'''$ = D$'''$D$'$ = CD$'''$ − CD$'$ = $s-(s-b)=b$. DD$'''$ = D$'''$B + BD = CD$''$ + CD$'$ = D$'$D$''$ = BD$''$ − BD$'$ = $s-(s-c)=c$. DD$'$ = BC − BD − CD$'$ = $a-(s-b)-(s-b)=a-2s+2b=a-(a+b+c)+2b=b-c$. D$'''D''$ = D$'''$C + CD$''$ = $s+s-a=2s-a=b+c$. 作三角形 O$'$O$''$O$'''$，則 O 爲其垂心，三角形 ABC 爲其垂足三角形 [717題]. 因此三角形 ABC 之外接圓爲三角形 O$'$O$''$O$'''$ 之九點圓，故過各邊之中點及 O$'$, O$''$, O$'''$ 與 O 聯結之直線之中點. 四邊形 OBO$'$C 中, O$\hat{B}$O$'$ = O$\hat{C}$O$'$ = $\hat{R}$, 故以 OO$'$ 之中點爲中心, OO$'$ 之半分爲半徑所作之圓, 外接於四邊形 OBO$'$C. 其他四邊形 COAO$''$, AOBO$'''$ 中亦然. 次, O$'\hat{A}$O$''$ = $\hat{R}$ = O$'\hat{B}$O$''$. 故以 O$'$O$''$ 之中點爲中心, O$'$O$''$ 之半分爲半徑所作之圓, 外接於四邊形 ABO$'$O$''$. 其他四邊形 BCO$''$O$'''$, CAO$'''$O$'$ 中亦然. C$\hat{A}$G = B$\hat{A}$O$'''$, B$\hat{A}$O$'''$ = B$\hat{C}$G [457 題]. 故 C$\hat{A}$G = B$\hat{C}$G, 因而弧 GC = 弧 BAG [466題]. 次, OO$'$ 之中點 H, 又爲弧 BHC 之



中點[466題],故 GH 將三角形 ABC 之外接圓周二等分,因而爲直徑.又 GH, $O'D'$ 皆爲 BC 之垂線,故相平行,因此設 OD' 與 GH 之交點爲 L,則 $LH=\frac{1}{2}O'D'=\frac{1}{2}r'$ [232題],因而 $LN=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}r$ [N 爲 GH, BC 之交點].故 $GN=GH-NH=2R-(LH-LN)=2R-\frac{1}{2}r'+\frac{1}{2}r$.次,$O''D''$, GN, $O'''D'''$ 相平行,且 G 爲 $O''O'''$ 之中點,故 $GN=\frac{1}{2}(O''D''+O'''D''')=\frac{1}{2}\times(r''+r''')$ [283題].故 $2R-\frac{1}{2}r'+\frac{1}{2}r=\frac{1}{2}(r''+r''')$,由是得 $r'+r''+r'''=4R+r$.次,設三角形 ABC 之外接圓中心爲 K,則 $KN=p'=R-NH=R-(\frac{1}{2}r'-\frac{1}{2}r)=R-\frac{1}{2}r'+\frac{1}{2}r$.同理,$p''=R-\frac{1}{2}r''+\frac{1}{2}r$, $p'''=R-\frac{1}{2}r'''+\frac{1}{2}r$.故 $p'+p''+p'''=3R-\frac{1}{2}(r'+r''+r''')+\frac{3}{2}r=3R-\frac{1}{2}(4R+r)+\frac{3}{2}r=R+r$.最後,$p'+p''+p'''+q'+q''+q'''=3R$;而 $p'+p''+p'''=R+r$,故 $q'+q''+q'''=2R-r$.

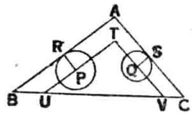
730. 與所設三角形全等之三角形中,設其二邊分別過二定點,則第三邊切於定圓.

證 設二邊 AB, AC 分別過二定點 P, Q,則角 $P\hat{A}Q$ 一定不易,故 A 點在過 P, Q 之定圓周上.由 A 平行於 BC 引圓 APQ 之弦 AX,則 $P\hat{A}X=A\hat{B}C$=一定,故弧 PX 一定,X 爲定點.引 BC 之垂線 AD, XY,則 AXYD 爲一矩形,故 XY=AD=一定.故 BC 恆切於定點 X 爲中心,由 A 至 BC 之定距離爲半徑所作之圓.



731. 與所設三角形全等之三角形中,設其二邊分別切於二定圓,則第三邊亦切於定圓.[是曰 Bobillier 氏定理].

證 設△ABC 之邊 AB, AC,分別切二定圓 P, Q 於點 R, S;過 P, Q 分別平行於 AB, AC,引直線 TPU, TQV,命其交點爲 T,分別截 BC 於 U, V.於是因 UPT, VQT 分別平行於 BA, CA,且距是等直線定遠,故△UTV 之形狀大小一定.故由前題,知 UV 切於定圓.



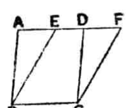
第 三 編

面 積

第一章 直線形

732. 立於同底上,且同在二平行線間之平行四邊形相等.

證 設 ABCD, EBCF 爲立於同底 BC 上,且同在二平行線 AF, BC 間之平行四邊形;求證平行四邊形 ABCD,等於平行四邊形 EBCF.兩三角形 DCF, ABE 中,角 FDC 等於角 EAB,因 DC 平行於 AB 故也[44題].又角 CFD 等於角 BEA,因 CF 平行於 BE 故也[44題].且邊 CD 及 BA 爲平行四邊形之二對邊,故相等[222題].據此,兩三角形 DCF, ABE 全等[78題].故由四邊形 ABCF 取去三角形 DCF,又由同四邊形取去與前相等之三角形 ABE,則所餘之 ABCD 等於所餘之 EBCF.



733. 平行四邊形等於與其等底等高之矩形.

證 由732題,平行四邊形等於與其同底及高之矩形,而由211題,此矩形等於與其等底及等高之他任意矩形,故如題所言.

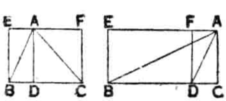
注意 設平行四邊形之底邊表以 b, 高表以 h, 則其面積等於 bh, 而此面積之單位,對應於底與高之線單位.

734. 等底等高之平行四邊形相等,而等高之二平行四邊形中,底之大者較大,等底之二平行四邊形中,高之大者較大.

證 平行四邊形等於與其等底等高之矩形,而等底等高之二矩形相等,故等底等高之二平行四邊形相等.又平行四邊形等於與其等底等高之矩形,而等高不等底之二矩形,得疊置之,令小底矩形爲大底矩形之一部,故等高不等底之二平行四邊形,底之大者較大.仿此可知,等底不等高之二平行四邊形,高之大者較大.

735. 三角形等於與其等底等高矩形之半分.

證 設ABC爲三角形,高爲AD;求證三角形ABC與底等於BC,高等於AD之矩形之半分相等.



由B及C引AD之平行線BE及CF,過A平行於BC引EAF,截前所引二直線於E, F.於是EC爲以BC爲底,AD爲高之矩形.三角形ABD爲矩形ED之半分[222題],三角形ADC爲矩形FD之半分[222題].故若於甲圖中取兩三角形ABD, ADC之和,於乙圖中取其差,則此和或差分別爲矩形ED, FD之和或差之半分.故三角形ABC爲矩形EC之半分.

注意 設三角形之底邊爲 b, 高爲 h, 則面積等於 $\frac{1}{2}bh$.

736. 同底或等底及等高之兩三角形相等.

證 各三角形等於與其等底等高矩形之半分,而由211題,等底等高之二矩形相等,故如題所言.

737. 同底或等底上之兩等積三角形,其高相等.

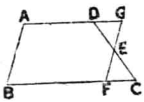
證 同底或等底上之兩不等高三角形,爲等底上兩不等高矩形之半分[735題].而大高之矩形,大於小高之矩形,故大高之三角形,大於小高之三角形.故若取其對定理,則等底上之兩三角形,若面積相等,則其高亦相等.

738. 同底且在其同側之兩等積三角形;或在同直線上,等底且在直線同側之兩等積三角形,其頂點聯結之直線,平行於底或含底之直線.

證 兩三角形之高,俱垂直於含二底之直線,故平行;而此兩高相等[735題],故兩三角形頂點聯結之直線,平行於含底之直線.

739. 梯形等於以其平行二邊和之半分爲底,以其平行二邊間之垂直距離爲高之矩形.

證 設ABCD爲梯形,AD平行於BC;求證梯形ABCD等於AD及BC和之半分爲底,AD及BC間之垂直距離爲高之矩形.

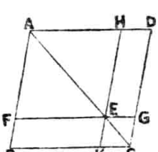


二等分 CD 於 E, 過 E 引 BA 之平行線 FEG, 令其交 BC, AD [必要時其延線]於 F 及 G. 於是兩三角形 DEG, CEF 中, 角 GDE 等於錯角 FCE [41題], 角 DEG 等於對頂角 CEF [12題], 而邊 DE 等於邊 EC, 故兩三角形全等, 而 GD 等於 FC. 於是兩等三角形 FEC, DEG 各加圖形 ABFED, 則梯形 ABCD 等於平行四邊形 ABFG. 又等線分 FC 及 DG, 各加 AD, BF 之和, 則 AD, BC 之和, 等於 AG, BF 之和. 而 AG 等於 BF [222 題], 故 BF 等於 AD 及 BC 和之半分. 又平行四邊形 ABFG 等於 BF 爲底, AD 及 BC 間之垂直距離爲高之矩形[733題]. 故梯形 ABCD 等於以 AD 及 BC 和之半分爲底, AD 及 BC 間之垂直距離爲高之矩形.

注意 設梯形之兩底 [平行二邊] 爲 a, b, 高爲 h, 則面積等於 $\frac{1}{2}(a+b)h$.

740. 任意平行四邊形中, 餘形相等.

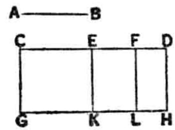
證 設 ABCD 爲平行四邊形, 其餘形爲 FK, HG; 求證 FK 等於 HG.



對角線將平行四邊形二等分 [222題], 故三角形 ABC, AFE, EKC 分別等於三角形 CDA, EHA, CGE. 據此, 由三角形 ABC 取去兩三角形 AFE, EKC, 又由三角形 CDA 取去兩三角形 EHA, CGE, 則所餘之 FK 及 HG 相等.

741. 所設二線所包之矩形, 等於其一與他一分成之若干分所包各矩形之和.

證 設 AB, CD 爲所設二直線, 將 CD 分爲若干分, 命其各分爲 CE, EF, FD; 求證 AB 與 CD 所包之矩形, 等於 AB 與 CE, AB 與 EF, AB 與 FD 所包各矩形之和. 引 CG, 令垂直於 CD, 且等於 AB; 過 G 平行於 CD 引 GH; 過 D, E F 平行於 CG 引 DH, EK, FL. 於是全圖形 CH, 等於其各部 CK, EL, FH 之和. 而 CH 爲 AB 與 CD 所包之矩形, 因 CG 等於 AB 故也. 同理, CK 爲 AB 與 CE 所包之矩形. 又 EL 爲 AB 與 EF 所包之矩形, 因 EK 等於 CG, 故又等於 AB 也 [222題]. FH 爲 AB 與 FD 所包之矩形, 因 FL 等於 CG, 故亦等於 AB 也. 據此, AB 與 CD 所包之矩形, 等於 AB 與 CE, AB 與 EF, AB 與 FD 所包各矩形之和.



注意 本題以代數式表之, 則如下: 設 $a=m+n+p+\cdots\cdots$, 則 $ab=bm+bn+bp+\cdots\cdots$.

742. 將一直線二等分, 則全線與其一分所包矩形, 等於其一分上正方形之二倍.

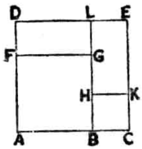
證 前題中設第一線等於第二線之半分, 而將第二線二等分, 卽得本題.

743. 將一直線二等分, 則全線上之正方形, 等於其一分上正方形之四倍.

證 741 題中, 設二線相等, 而將其一二等分, 卽可導出本題.

744. 二直線和上之正方形, 大於其各直線上正方形之和者, 爲二直線所包矩形之二倍.

證 設 AB, BC 爲二直線, AC 爲其和; 求



證 AC 上之正方形,大於 AB, BC 上正方形之和者,爲 AB 與 BC 所包矩形之二倍. 於 AC 上作正方形 ADEC, 於 AB, BC 上作正方形 AFGB, BHKC, 延長 BG, 交 DE 於 L. 於是因一切直角相等, 故 AF 落於 AD, CK 落於 CE. 又兩直角互爲補角,故 BH落於 BG. AD 等於 AC; AF 等於 AB, 故 FD 等於 BC. 同理, KE 等於 AB. 據此, GF, FD 所包之矩形 FL, 等於 AB, BC 所包之矩形; EK, KH 所包之矩形 HE, 等於 AB, BC 所包之矩形. 故矩形 FL, HE 之和等於矩形 AB·BC 之二倍. 而正方形 AE 大於二正方形 AG, BK 之和者,爲二矩形 FL, HE. 故 AC 上之正方形大於 AB, BC 上之正方形之和者, 爲 AB 與 BC 所包矩形之二倍.

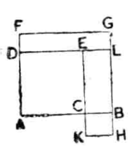
注意 以代數式表本題, 則如下: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$.

745. 將一直線內分爲二,則其全線上之正方形, 大於各分上正方形之和者, 爲其各分所包矩形之二倍.

證 由前題自明.

746. 二直線差上之正方形,小於此各直線上正方形之和者,爲此二線所包矩形之二倍.

證 設 AB, BC 爲二直線, 且 AB 大於 BC, 其差爲 AC. 求證 AC 上之正方形, 小於 AB, BC 上正方形之和者,爲 AB 與 BC 所包矩形之二倍. 在 AC 上作正方形 ADEC, 在 AB, BC 上作正方形 AFGB, BHKC, 但 AG 與 AE 在 AB 之同側, BK 與AE 在 AB 之異側. 延長 DE, 令交 BG 於 L. 於是因二直角相等, 且互爲補角,故 AF 落於 AD, KC 與 CE, HB 與 BG 成一直線. 因 AF 等於 AB, AD 等於 AC, 故 FD 等於 BC, 又EC 等於 AC, CK 等 CB, 故全線 EK 等於全線 AB. 據此, FG, FD 所包矩形 FL, 等於 AB, BC 所包矩形. 又 EK, KH 所包矩形 HE, 等於 AB, BC 所包矩形. 故 FL 與 HE 之和等於矩形 AB·BC 之二倍. 而正方形 AE, 小於二正方形 AG, BK 之和者,爲二矩形 FL, HE. 故 AC 上之正方形,小於 AB, BC 上之正方形之和者, 爲 AB 與 BC 所包矩形之二倍.



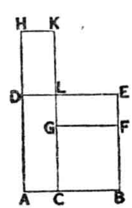
注意 $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ 爲本題之代數表示.

747. 一直線外分爲二, 則此直線上之正方形, 小於二分上正方形之和者, 爲此二分所包矩形之二倍.

證 由前題自明.

748. 二直線上正方形之差, 等於此二直線之和及差所包之矩形.

證 設 AB, BC 爲二直線,將其小者 BC 置於大者 AB 上, 求證 AB, BC 上正方形之差,等於 AB, BC 之和與差所包之矩形. 於 AB, BC 上作正方形 ADEB, BFGC, 延長 CG, 令交 DE 於 L, 又延長 AD 至 H, 令 DH 等於 BC,作矩形 DHKL. 此時 BF 落於 BE, CL 與 LK 成一直線. 於是因 BE 等於 AB, BF 等於 BC, 故



EF 等於 AC. 而 DL 等於 AC, 故 EF 等於 DL. 又 EL 等於 BC [222題], DH 等於 BC, 故 EL 等於 DH. 據此, DL 及 DH 所包之矩形 DK 等於 EF 及 EL 所包之矩形 LE [225題]. 又二正方形 AE 及 CF 之差,等於二矩形 AL, LF 之和,而 LF 等於 DK 等已證明. 故兩正方形 AE, CF 之差,等於矩形 AL, DK 之和,即等於矩形 AK; 而 AK 爲 AB, BC 之和 AH 與其差 AC 所包之矩形. 故 AB, BC 上二正方形之差,等於其和與差所包之矩形.

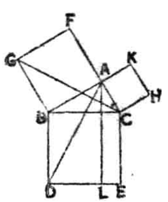
注意 本題之代數表示爲 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

749. 將一直線任意內分或外分於一點,則此二分所包之矩形,等於此線半分上正方形及此線分點與中點間部分上正方形之差.

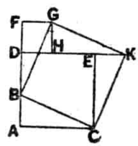
證 由前題自明.

750. 直角三角形斜邊上之正方形,等於他二邊上正方形之和.

證 設 ABC 爲直角三角形, $B\hat{A}C$ 爲直角; 求證 BC 上之正方形,等於 AB 與 AC 上正方形之和. 在 BC 上作正方形 BDEC, AB 上作正方形 BAFG, AC 上作正方形 ACHK, 又平行於 BD, 引 AL, 聯結 AD CG. 於是因角 CBD 等於角 ABG, 故角 ABD 等於角 CBG. 因此兩三角形 ABD, GBC 中, AB $=$ GB, BD $=$ BC, $A\hat{B}D=G\hat{B}C$, 故此兩三角形全等 [55題]. 而角 BAC, BAF 皆爲直角,故 FAC 爲一直線 [11題]. 故正方形 BF 與三角形 GBC 等高,且此兩形共底 GB, 故正方形 BF 爲三角形 GBC 之二倍[735題]. 同理,矩形 BL 爲三角形 ABD 之二倍. 而據前證明, 三角形 ABD 等於三角形 GBC, 故矩形 BL 等於 AB 上之正方形 BF. 仿此得證矩形 CL 等於 AC 上之正方形. 而矩形 BL 與 CL, 合而爲 BE, 即 BC 上之正方形; 故 BC 上之正方形等於 AB, AC 上正方形之和.



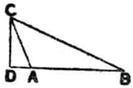
別證 在 AC 上作正方形 ADEC, 延長 AB 至 F, 令 BF 等於 AC 及 AD, 於是 DF 等於 AB. 於 DF 上作正方形 DFGH, 則此正方形等於 AB 上之正方形 [225題]. 聯結 BG, 延長 DH 至 K, 令 HK 等於 DE 及 AC, 聯結 CK, KG. 於是兩三角形 CAB, BFG 中, AC $=$ FB, AB $=$ FG, $C\hat{A}B=B\hat{F}G$, 故兩三角形全等[55題]. 仿此得證三角形 CAB, BFG KHG, CEK 皆相等. 據此,四邊形 CBGK 爲等邊形. 又 $E\hat{C}K=A\hat{C}B$, 故 $B\hat{C}K=A\hat{C}E$; 而 $A\hat{C}E=\hat{R}$, 故 $B\hat{C}K=\hat{R}$. 故四邊形 CBGK 爲 BC 上之正方形. 而三角形 CEK 等於三角形 BFG, 三角形 HGK 等於三角形 ABC, 故正方形 BK, 等於正方形 AE, DG 之和. 故 BC 上之正方形, 等於 AB, AC 上正方形之和.



注意 設直角三角形之斜邊爲 a, 他二邊爲 b, c, 則 $a^2=b^2+c^2$.

751. 鈍角三角形中,鈍角對邊上之正方形, 大於他二邊上正方形之和者, 爲此二邊中之一邊,與他邊投於此邊上之射影所包矩形之二倍.

證 設 ABC 爲鈍角三角形, $B\hat{A}C$ 爲鈍角,

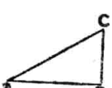


CD 爲 BA 之垂線；求證 BC 上之正方形，大於 BA, AC 上正方形之和者，爲 BA 與 AD [AC 投於 BA 延線上之射影] 所包矩形之二倍.因 BD 爲 BA 與 AD 之和，故 BD 上之正方形，大於 BA 與 AD 上正方形之和者，爲 BA 與 AD 所包矩形之二倍 [735題]. 各加 DC 上之正方形，則 BD 與 DC 上正方形之和，大於 BA, AD, DC 上正方形之和者，爲矩形 BA·AD 之二倍. 而 BD, DC 上正方形之和，等於 BC 上之正方形 [750題]；AD, DC 上正方形之和，等於 AC 上之正方形 [750題]. 故 BC 上之正方形，大於 BA, AC 上正方形之和者，爲 BA 與 AD 所包矩形之二倍.

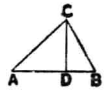
注意　設 BC$=a$, AC$=b$, AB$=c$, AD$=c'$, 則本題之代數表示爲 $a^2=b^2+c^2+2cc'$.

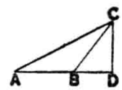
752.　任意三角形中，銳角對邊上之正方形，小於他二邊上正方形之和者，爲一邊與他邊投於此邊上之射影所包矩形之二倍.

證　設任意三角形 ABC 中，$\hat{BAC}$ 爲銳角；



求證 BC 上之正方形，小於 BA, AC 上正方形之和者，爲 BA 與 AC 投於 AB 上之射影所包矩形之二倍. 設角 ABC 爲直角，則 BA 與 AC 投於 AB 上之射影所包之距形，爲 AB 上之正方形；而 BC 上之正方形，小於 BA, AC 上正方形之和者，爲 AB 上正方形之二倍 [750題]. 設角 ABC 非直角，因 CD 垂直於 AB 或 AB 之延線，於是 AD 爲 AC 投於 AB 上之正射影. 因 BD 爲 BA 與 AD 之差，故 BD 上之正方形，小於 BA





與 AD 上正方形之和者，爲矩形 BA·AD 之二倍 [746題]. 各加 DC 上之正方形，則 BD 與 DC 上正方形之和，小於 BA, AD, DC 上正方形之和者，爲矩形 BA·AD 之二倍. 而 BD, DC 上正方形之和，等於 BC 上之正方形 [750題]；AD, DC 上正方形之和，等於 AC 上之正方形 [750題]. 故 BC 上之正方形，小於 BA, AC 上正方形之和者，爲 BA, AD 所包矩形之二倍.

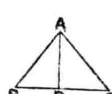
注意　本題之代數表示爲 $a^2=b^2+c^2-2cc'$.

753.　前三題之逆定理亦成立，卽三角形一邊上之正方形，若等於，或大於，或小於他二邊上正方形之和，則此邊所對之角爲直角，或鈍角，或銳角.

證　前三題之假設中，必有一者成立，而終結則不能二者同時成立，故由轉換法，其逆定理亦成立.

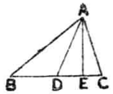
754.　三角形二邊上正方形之和，二倍於底之半分上之正方形，與至底所引中線上正方形之和.

證　設 ABC 爲三角形，D 爲底 BC 之中點；



求證 AB, AC 上正方形之和，等於 BD, DA 上正方形和之二倍.設 AD 爲 BC 之垂線，則 AB 上之正方形等於 BD, DA 上正方形之和 [750題]；AC 上之正方形等於 CD, DA 上正方形之和 [750題]，卽 BD, DA 上之正方形之和，因 CD 等於 BD 故也.

故 AB, AC 上正方形之和, 等於 BD, DA 上正方形和之二倍. 設 AD 不垂直於 BC, 而

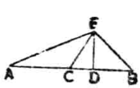


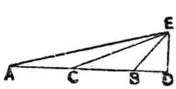
$A\hat{D}B$ 爲鈍角, AD 投於 BC 上之射影爲DE. 此時因 $A\hat{D}B$ 爲鈍角, 故 AB 上之正方形, 大於 BD, DA 上正方形之和者, 爲矩形 BD·DE 之二倍 [740題], 又因 $A\hat{D}C$ 爲銳角,故 AC 上之正方形,小於 CD, DA 上正方形之和者,爲矩形 CD·DE 之二倍 [741題], 即 AC 上之正方形, 小於 BD, DA 上正方形之和者, 爲矩形 BD·DE 之二倍,因 CD 等於 BD 故也. 故 AB, AC 上正方形之和, 等於 BD, DA 上正方形和之二倍.

注意 設 $\frac{1}{2}$BC$=x$, AD$=m$, 則本題之代數表示爲 $b^2+c^2=2m^2+2x^2$.

755. 將一直線內分或外分於任意點,則此二分上正方形之和,二倍於此線半分上之正方形及此線分點與中點間部分上之正方形之和.

證 設直線 AB 二等分於 C, 又內分或外





分於 D; 求證 AD, DB 上正方形之和, 二倍於 AC, CD 上正方形之和. 引 DE, 令垂直於 AB, 且有適當之長,聯結 EA, EB, EC. 於是 AE, EB 上正方形之和, 等於 AC, CE 上正方形和之二倍 [743題]. 而 AE 上之正方形,等於 AD, DE 上正方形之和[739題], EB 上之正方形等於 BD, DE 上正方形之和 [739題],而 CE 上之正方形,等於 CD, DE 上之正方形之和 [739題]. 故 AD, DB 上之正方形之和,加 DE 上正方形之二倍,等於 AC, CD, DE 上正方形和之二倍. 故 AD, DB 上正方形之和,等於 AC, CD 上正方形和之二倍.

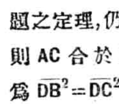
注意 設 AC$=$BC$=a$, CD$=x$, 則本題之代數表示爲 $(a+x)^2+(a-x)^2=2a^2+2x^2$.

756. 所設二直線之和及差上正方形之和,二倍於此二直線上正方形之和.

證 由前題可知.

757. 試證 744 題[二直線和上之正方形,大於二直線上正方形之和者,爲二直線所包矩形之二倍] 爲 751 題 [鈍角三角形中,鈍角對邊上之正方形,大於他二邊上之正方形之和者, 爲此二邊中之一邊, 與他邊投於此邊上之射影所包矩形之二倍] 中, 三角形 ACB 之角 C 爲平角時之極限結果.

證 設三角形 ACB 中, 角 C 爲鈍角;由 A

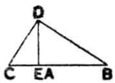


至邊 BC 引垂線 AD, 則其足 D 在 BC 之延線上. 於是由 751 題, $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2\times BC\cdot DC$. 設頂點 A,循垂線 AD,而漸近於 D, 則 A 之位置雖移動,而 751 題之定理,仍常成立. 如是至 A 合於 D 時, 則 AC 合於 DC, AB 合於 DB, 其定理遂變爲 $\overline{DB}^2=\overline{DC}^2+\overline{BC}^2+2DC\cdot BC$; 即兩直線 DC, CB 和上之正方形,大於各直線上正方形之和者, 爲二直線所包矩形之二倍. 故 744 題之定理,乃由 751 題之定理中,鈍角放大而爲平角之極限時之結果.

758. 試證746題[二直線差上之正方形,小於此二直線上正方形之和者,爲此二直線

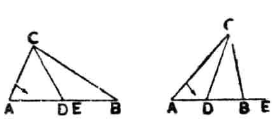
所包矩形之二倍]爲 752 題[任意三角形中，銳角對邊上之正方形，小於他二邊上正方形之和者，爲此二邊中之一邊，與他邊投於此邊上之射影所包矩形之二倍]中，$\triangle BCD$ 之角 C 爲零時之極限結果.

證 設三角形 BCD 中，角 BCD 爲銳角；由 D 至 BC 引垂線 DE，於是由 752 題，$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{DC}^2-2BC\cdot CE$. 固定 CB，而將邊 DC 廻轉，令角 BCD 漸小，則 BD 亦漸小，而 CE 益大；然對於其一切位置，定理恆能成立. 如是至角 BCD 爲零時，DC 取 AC 之位置，E 與 A 合，DB 變爲 AB，故 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-2BC\cdot CA$；卽二直線 BC，AC 之差 AB 上之正方形，小於各直線上正方形之和者，爲二直線所包矩形之二倍. 故 746 題之定理，乃由 752 題之定理中，銳角減小而爲零之極限時之結果.



759. 試證 755 題[將一直線內分或外分於任意點，則二部分上正方形之和，二倍於此直線半分上之正方形及此直線中點與分點間部分上正方形之和]爲 754 題[三角形二邊上正方形之和，二倍於半底上之正方形與至底所引中線上之正方形之和]極限之結果.

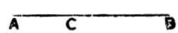
證 設三角形 ABC 之一中線爲 CD，則由



754 題定理，$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)$. 今設邊 AC 依照圖示之方向廻轉，則 $\hat{A}$ 漸小，邊 BC 亦漸小，而對於此各位置，754 題定理恆成立. 如是至邊 AC 與 AB 相合時，則 AC 變爲 AE，BC 變爲 EB，而 754 題之定理，變爲 $\overline{AE}^2+\overline{EB}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DE}^2)$；卽一直線 AB，內分[$AC<AB$ 時]或外分[$AC>AB$ 時]於 E 時，則二部分上正方形之和，二倍於此直線半分 AD 上之正方形，與分點中點間部分上正方形之和. 故 755 題之定理，乃由 754 題之定理中，一底角爲零之極限時之結果.

760. 將一直線分爲二分，則全線與其一分所包矩形，等於此分上之正方形，與二分所包矩形之和.

證 設一直線爲 AB，二分之於 C，則 $AB\cdot AC=(BC+AC)AC=AC\cdot BC+\overline{AC}^2$ [741題].



注意 若外分於 C，則全線與其一分所包之矩形，等於此分上之正方形，與二分所包矩形之差.

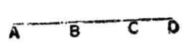
761. 將一直線分爲二分，則全線上之正方形，等於全線與各分所包矩形之和.

證 設一直線爲 AB，二分之於 C，則 $\overline{AB}^2=AB\cdot AB=AB(AC+BC)=AB\cdot AC+AB\cdot BC$ [741題].

注意 若外分，則本題之和變爲差.

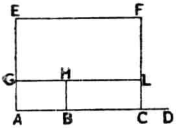
762. 設於一直線上，依次取四點 A，B，C，D，則矩形 $AC\cdot BD$ 等於矩形 $AB\cdot CD$ 與矩形 $BC\cdot AD$ 之和. [是曰 Euler 氏定理].

證 $AC\cdot BD=(AD-CD)(BC+CD)=AD\cdot BC-CD\cdot BC+CD(AD-CD)=AD\cdot BC-CD$



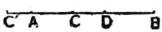
$\cdot BC + CD(AB+BC) = AD\cdot BC - CD\cdot BC + CD\cdot AB + CD\cdot BC = AD\cdot BC + CD\cdot AB.$

別證 在 AC 上作矩形 ACFE, 令等於矩形 $AC\cdot BD$, 在 AB 上作矩形 ABHG, 令等於矩形 $AB\cdot CD$; 此時 AE 與 AG 相合. 命 GH 之延線與 CF 之交點為 L, 則 ▭AF = ▭AH + ▭GF + ▭BL. 而 $AE = BD$, $AG = CD$, $GE = BC$, $CL = CD$, 故 $AC\cdot BD = AB\cdot CD + AC\cdot BC + CD\cdot BC = AB\cdot CD + AD\cdot BC$.



763. 將直線 AB 不等內分於 C, 又二等分於 D, 則 AC, BC 上正方形之和, 大於矩形 $AC\cdot BC$ 之二倍者, 為 CD 上正方形之四倍. 若外分於 C′, 則如何?

解 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)$ [755題], $2AC\cdot BC+4\overline{CD}^2=2(AD-CD)(AD+CD)+4\overline{CD}^2=2\overline{AD}^2-2\overline{CD}^2+4\overline{CD}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2)$, 故 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2AC\cdot BC+4\overline{CD}^2$. 次設外分於 C′, 則 $\overline{AC'}^2+\overline{BC'}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{C'D}^2)$ [755題], $4\overline{C'D}^2-2AC'\cdot BC'=4\overline{C'D}^2-2(C'D-AD)(C'D+AD)=4\overline{C'D}^2-2(\overline{C'D}^2-\overline{AD}^2)=2(\overline{C'D}^2+\overline{AD}^2)$, 故 $\overline{AC'}^2+\overline{BC'}^2=4\overline{C'D}^2-2AC'\cdot BC'$.

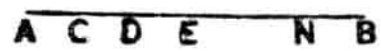


764. 二直線和及差上之正方形面積之差, 等於此二線所包矩形面積之四倍.

證 設二直線為 AB, CD, 則 $\overline{AB+CD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2AB\cdot CD$ [744題], $\overline{AB\sim CD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2-2AB\cdot CD$ [755題], 故 $\overline{AB+CD}^2-\overline{AB\sim CD}^2=4AB\cdot CD$.

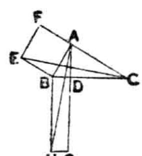
765. 將所設直線分為若干分, 則全線上之正方形, 等於各分上之正方形與各二分所包矩形之二倍.

證 設分所設直線 AB 於 C, D, E……N, 則 $\overline{AB}^2=AB(AC+CD+DE+\cdots\cdots+NB)=AB\cdot AC+AB\cdot CD+AB\cdot DE+\cdots\cdots+AB\cdot NB=(AC+CD+\cdots\cdots NB)AC+(AC+CD+\cdots\cdots+NB)CD+\cdots\cdots+(AC+CD+DE+\cdots\cdots+NB)NB=\overline{AC}^2+CD\cdot AC+DE\cdot AC+\cdots\cdots+NB\cdot AC+AC\cdot CD+\overline{CD}^2+DE\cdot CD+\cdots\cdots+NB\cdot CD+\cdots\cdots+AC\cdot NB+CD\cdot NB+\cdots\cdots+\overline{NB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DE}^2+\cdots\cdots+\overline{NB}^2+2AC\cdot CD+2AC\cdot ED+\cdots\cdots+2CD\cdot DE+\cdots\cdots+2DE\cdot EF+\cdots\cdots$.



766. 直角三角形中, 由直角頂至對邊引一垂線, 將斜邊分為二分, 則其一分與斜邊所包之矩形, 等於此分隣邊上之正方形.

證 三角形 ABC 中, 設 $\hat{A}=\hat{R}$, 於 AB 上之外方作正方形 ABEF, 又由 A 至 BC 引垂線 AD, 於 AD 之延線上按 $DG=BC$ 取 G, 作 BD, DG 為二邊之矩形. 於是 △EBC, △ABH 中, 兩邊與其夾角, 分別相等, 故此兩三角形全等 [55題]. 又因 $B\hat{A}C=\hat{R}$, 故 CA, AF 成一直線, 且 CA ∥ BE, 故 $\triangle EBC=\frac{1}{2}$□ABEF [735題]; 又因 AG ∥ BH, 故 $\triangle ABH=\frac{1}{2}$▭BDGH. 故 □ABEF = ▭BDGH, 即 $\overline{AB}^2=BC\cdot BD$. 同理, $\overline{AC}^2=BC\cdot DC$.

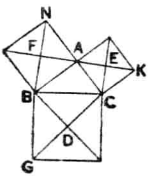


別證 因 C 為銳角, 故 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2BC\cdot DC$ [752題]. 而 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2-\overline{AB}^2$, 故

$\overline{AB}^2 = BC^2 - \overline{AB}^2 + BC^2 - 2BC\cdot DC$, 即 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 - BC\cdot DC = BC(BC-DC) = BC\cdot BD$.

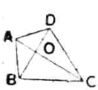
767. 設以三個直角二等邊三角形之斜邊所作之三角形,爲直角三角形,則原直角三角形之一,等於他二形之和.

證 設三個直角二等邊三角形爲 ABF, BCD, CAE, 其三斜邊 AB, BC, CA 成角 A 爲直角之角三形 ABC. 於三角形 ABC 之各邊上作正方形,則 □CG = □BN + □AK [750題]. 而三角形 BCD, ABF, CAE 分別爲前正方形之 $\frac{1}{4}$, 故 △BCD = △ABF + △CAE.



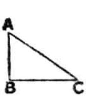
768. 設四邊形之對角線互相垂直,則一雙對邊上正方形之和,等於他雙對邊上正方形之和.

證 設四邊形 ABCD 中,對角線 AC, BD 直交於 O, 則 $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$ [750題], $\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2$. 故 $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 = (\overline{AO}^2 + \overline{DO}^2) + (\overline{BO}^2 + \overline{CO}^2) = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$.



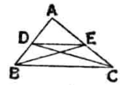
769. 直角三角形中,直角旁之一邊上之正方形,等於他二邊之和與差所包之矩形.

證 三角形 ABC 中,設 $\hat{B} = \hat{R}$, 則 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$ [750題]. 故 $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$. 而 $(AC+AB)(AC-AB) = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$ [798 題], 故 $\overline{BC}^2 = (AC+AB)(AC-AB)$.



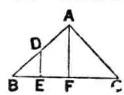
770. 直角三角形 ABC 中,平行於斜邊 BC, 引直線 DE 於他二邊之間,則 CD, BE 上正方形之和,等於 DE, BC 上正方形之和.

證 $\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2$ [750 題], $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$, 故 $\overline{DE}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$. 而 $\overline{DC}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{AE}^2$, 故 $\overline{DC}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{BC}^2$.



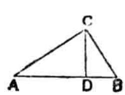
771. 直角三角形中,由一邊之中點,至斜邊引一垂線,則斜邊上爲此垂線所分成之二分上正方形之差,等於他一邊上之正方形.

證 設直角三角形爲 ABC, 由一邊 AB 之中點 D 及直角頂 A 至斜邊引垂線 DE, AF, 則 BE = EF [232題]. 故 $\overline{EC}^2 - \overline{BE}^2 = (\overline{BC - BE}^2) - \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{BE}^2 - 2BC\cdot BE - \overline{BE}^2$ [746 題] $= \overline{BC}^2 - 2BC\cdot BE = BC(BC - 2BE) = BC\cdot FC = \overline{AC}^2$ [746題].



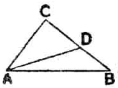
772. 設三角形 ABC 中, $\hat{C}$ 爲直角,則由 C 至斜邊所引垂線 CD 上之正方形,等於矩形 AD·BD.

證 因 $A\hat{D}C = \hat{R} = C\hat{D}B$, 故 $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$ [750題], 又 $\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DB}^2$. 故 $2\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - (\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2) = \overline{AB}^2 - (\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2)$. 而 $\overline{AB}^2 = \overline{AD + DB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 + 2AD\cdot DB$ [744題], 故 $2\overline{CD}^2 = 2AD\cdot DB$, 即 $\overline{CD}^2 = AD\cdot DB$.



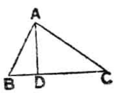
773. 由直角三角形之一銳角頂,至對邊引一直線,則此直線上之正方形,與此對邊上正方形之和,等於此對邊上隣接直角之一分上之正方形與斜邊上正方形之和.

證 設直角三角形 ABC 中, $\hat{C}=\hat{R}$, 由其一銳角 A 之頂點, 至其對邊引任意直線 AD, 則 $\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$ [750 題], $\overline{CB}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$, 故 $\overline{AD}^2+\overline{CB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{CD}^2+\overline{AB}^2$.



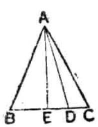
774. 由三角形之頂點至底引一垂線, 將底分爲二分,則他二邊上正方形之差,等於此二分上之正方形之差.

證 三角形 ABC 中,設由 A 至 BC 所引之垂線爲 AD,則 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2$ [750題], $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{DC}^2$. 故 $\overline{AB}^2\sim\overline{AC}^2=\overline{BD}^2\sim\overline{DC}^2$.



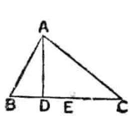
775. 二等邊三角形 ABC 中, 於其底 BC 或其延線上取一點 D, 則 AB, AD 上正方形之差,等於矩形 BD·DC.

證 由 A 至 BC 引垂線 AE, 則 BE＝EC [91 題]. 而 $\overline{AB}^2=\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$ [750 題], $\overline{AD}^2=\overline{AE}^2+\overline{ED}^2$. 故設 D 在 EC 上, 則 $\overline{AB}^2-\overline{AD}^2=\overline{BE}^2-\overline{ED}^2=(BE+ED)(BE-ED)=BD\cdot DC$. 若 E 在 BC 之延線上, 則 $\overline{AD}^2-\overline{AB}^2=BD\cdot DC$.



776. 由三角形之頂點至底邊引垂線, 則他二邊上正方形之差,等於此垂線之垂足與底邊中點間之部分與底邊所包矩形之二倍.

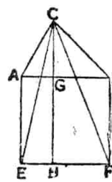
證 設三角形 ABC 中,由 A 至 BC 所引之垂線爲 AD, BC 之中點爲 E,則 $\overline{AC}^2\sim\overline{AB}^2=\overline{DC}^2\sim\overline{DB}^2$ [774 題] $=(DC+DB)\times(DC\sim BD)=BC\cdot 2DE=2BC\cdot DE$.



注意 若 D 在 BC 之延線上, 則 DC＋BD＝2DE, DC～BD＝BC.

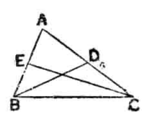
777. 在三角形 ABC 之邊 AB 上,於 C 之異側,作正方形 AEFB, 則 CE, CF 上正方形之差,等於 AC, BC 上正方形之差.

證 由 C 至 AB 引垂線 CG, 命其延線與 EF 之交點爲 H, 則四邊形 AGHE, BGHF 皆爲平行四邊形, 故 AG＝EH, GB＝HF. 三角形 ECF 中, $\overline{CE}^2\sim\overline{CF}^2=\overline{EH}^2\sim\overline{HF}^2$ [774 題]. 又三角形 ABC 中, $\overline{AC}^2\sim\overline{BC}^2=\overline{AG}^2\sim\overline{GB}^2=\overline{EH}^2\sim\overline{HF}^2$, 故 $\overline{CE}^2\sim\overline{CF}^2=\overline{AC}^2\sim\overline{BC}^2$.



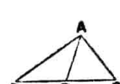
778. 三角形中,過大邊中點之中線,小於過小邊中點之中線.

證 設三角形 ABC 中, 邊 AB,AC 之中點, 分別爲 E, D, 且 AC＞AB. $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{CE}^2+\overline{BE}^2)$ [754題], $\overline{BC}^2+\overline{AB}^2=2(\overline{CD}^2+\overline{BD}^2)$. 然 $\overline{BC}^2+\overline{AC}^2>\overline{BC}^2+\overline{AB}^2$, 故 $2(\overline{CE}^2+\overline{BE}^2)>2\times(\overline{CD}^2+\overline{BD}^2)$, 即 $\overline{CE}^2+\overline{BE}^2>\overline{CD}^2+\overline{BD}^2$. 又 BE, CD 分別爲 AB, AC 之半分, 故 BE＜CD,故 $\overline{CE}^2>\overline{BD}^2$, 因而 CE＞BD.



779. 三角形 ABC 中, 中線 AD 上正方形之四倍, 小於 AB, AC 上正方形和之二倍者, 爲 BC 上之正方形.

證 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{BD}^2+2\overline{AD}^2$ [754 題], 故 $2(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)=4\overline{BD}^2+4\overline{AD}^2$. 而 $4\overline{BD}^2=\overline{BC}^2$, 故 $4\overline{AD}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)-\overline{BC}^2$.

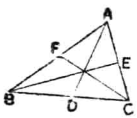


780. 正三角形中,由一頂點至其對邊引垂線,則此垂線上之正方形,等於半邊上正方形之三倍.

證 設正三角形ABC之高爲AD,則D爲邊BC之中點.而 $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=3\overline{BD}^2$.

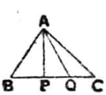
781. 三角形中,各邊上正方形和之三倍,等於各中線上正方形和之四倍.

證 設三角形ABC之三中線爲AD, BE, CF,則 $2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$, $2\overline{BE}^2+2\overline{CE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, $2\overline{CF}^2+2\overline{AF}^2=\overline{CA}^2+\overline{BC}^2$. 故 $2(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)-2(\overline{BD}^2+\overline{CE}^2+\overline{AF}^2)$. 取兩邊之二倍,則因 $4\overline{BD}^2=\overline{BC}^2$, $4\overline{CE}^2=\overline{CA}^2$, $4\overline{AF}^2=\overline{AB}^2$, 故 $4(\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2)=3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$.



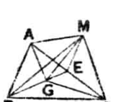
782. 設P爲三角形ABC之邊BC上之點,CP爲BP之二倍,則AB上正方形之二倍,與AC上正方形之和,等於六倍BP上之正方形與三倍AP上正方形之和.

證 設PC之中點爲Q,聯結AQ,則 $\overline{AB}^2+\overline{AQ}^2=2(\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)$ [754題], $\overline{AP}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AQ}^2+\overline{PQ}^2)$, 故 $2(\overline{AB}^2+\overline{AQ}^2)+\overline{AP}^2+\overline{AC}^2=4(\overline{AP}^2+\overline{BP}^2)+2(\overline{AQ}^2+\overline{PQ}^2)$, 即 $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=6\overline{BP}^2+3\overline{AP}^2$.



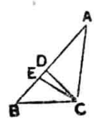
783. 設三角形ABC之重心爲G,任意點爲M,則 $\overline{MA}^2+\overline{MB}^2+\overline{MC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2+3\overline{MG}^2$.

證 設AC之中點爲E,則 $\overline{AM}^2+\overline{CM}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{EM}^2$ [754題]. 又 $2\overline{EM}^2+\overline{BM}^2=3\overline{GM}^2+6\overline{GE}^2$ [782題]. 故 $\overline{AM}^2+\overline{CM}^2+\overline{BM}^2=3\overline{GM}^2+4\overline{GE}^2+2\overline{GE}^2+2\overline{AE}^2=3\overline{GM}^2+\overline{BG}^2+\overline{AG}^2+\overline{CG}^2$.



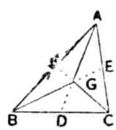
784. 三角形ABC中,設角B爲半直角,AB之中點爲D,由C至AB引垂線CE,則AC上之正方形,等於AD, DE上正方形和之二倍.

證 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2$ [653題], $\overline{CD}^2=\overline{CE}^2+\overline{ED}^2$ [750題]. 而 $\hat{B}=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 $E\hat{C}B=\frac{1}{2}\hat{R}$, 因此 BE=CE, $\overline{BC}^2=\overline{BE}^2+\overline{CE}^2=2\overline{CE}^2$. 故 $\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{CD}^2-\overline{BC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{CE}^2+2\overline{ED}^2-2\overline{CE}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{ED}^2)$.

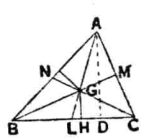


785. 設三角形ABC之重心爲G,則(1) $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=3(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)$. (2) $\overline{BC}^2+3\overline{AG}^2=\overline{AC}^2+3\overline{BG}^2=\overline{AB}^2+3\overline{CG}^2$.

證 (1)設△ABC之邊BC, CA, AB之中點,分別爲D, E, F,則 $\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=2\overline{GD}^2+2\overline{BD}^2$ [754題], $\overline{CG}^2+\overline{AG}^2=2\overline{GE}^2+2\overline{CE}^2$, $\overline{AG}^2+\overline{BG}^2=2\overline{GF}^2+2\overline{AF}^2$, 故 $4(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)=4(\overline{GD}^2+\overline{GE}^2+\overline{GF}^2)+4(\overline{BD}^2+\overline{CE}^2+\overline{AF}^2)=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2$, 故 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=3(\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2)$.



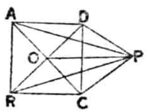
(2) 設△ABC之三中線爲AL, BM, CN,由A, G至BC引垂線AD, GH,則LD=3LH.何則,試由AG之中點P,至LD引垂線PQ,則LH=HQ=QD [229題]故也.故 $\overline{AB}^2\sim\overline{AC}^2=\overline{BD}^2\sim\overline{CD}^2=2BC\cdot LD=6BC\cdot LH$. 又 $\overline{BG}^2$



$\sim \overline{CG}^2 = \overline{BH}^2 \sim \overline{CH}^2 = 2BC\cdot LH$. 故 $\overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = 3(\overline{BG}^2 \sim \overline{CG}^2)$,或 $\overline{AB}^2 + 3\overline{CG}^2 = \overline{AC}^2 + 3\overline{BG}^2$. 仿此得證 $\overline{BC}^2 + 3\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + 3\overline{BG}^2$. 故 $\overline{BC}^2 + 3\overline{AG}^2 = \overline{AC}^2 + 3\overline{BG}^2 = \overline{AB}^2 + 3\overline{CG}^2$.

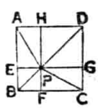
786. 設正方形 ABCD 之對角線交點爲 O, 任意點爲 P, 則 PA, PB, PC, PD 上正方形之和,等於 OA, OP 上正方形和之四倍.

證 因 O 爲對角線 AC, BD 之中點[239題], 故 $\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=2(\overline{AO}^2+\overline{PO}^2)$ [754題], $\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=2(\overline{DO}^2+\overline{OP}^2)$. 故 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=4(\overline{OA}^2+\overline{OP}^2)$ [∵ AO = DO].



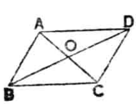
787. 正方形內之一點,與各角頂聯結,復由此點至各邊引垂線,則是等聯結直線上正方形之和,等於是等垂線上正方形和之二倍.

證 設正方形爲 ABCD, 其內之任意點爲 P, 由 P 至各邊所引之垂線爲 PE, PF, PG, PH, 聯結 P 與各角頂. 於是 AH = PE, BE = PF, FC = PG, GD = PH, 故 $\overline{AP}^2=\overline{PH}^2+\overline{PE}^2$ [750題], $\overline{BP}^2=\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$, $\overline{CP}^2=\overline{PF}^2+\overline{PG}^2$, $\overline{DP}^2=\overline{PG}^2+\overline{PH}^2$. 故 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=2(\overline{PE}^2+\overline{PF}^2+\overline{PG}^2+\overline{PH}^2)$.



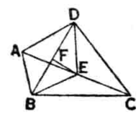
788. 平行四邊形中,各邊上正方形之和,等於兩對角線上正方形之和.

證 設平行四邊形爲 ABCD, 對角線之交點爲 O, 則因 O 爲兩對角線之中點, 故 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\times(\overline{AO}^2+\overline{BO}^2)$[754題]. 而 AB = CD, BC = AD, 故 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{AD}^2=4(\overline{AO}^2+\overline{BO}^2)=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2$.



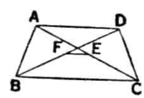
789. 四邊形各邊上正方形之和,大於對角線上正方形之和者,爲聯結對角線中點之直線上正方形之四倍.

證 設四邊形 ABCD 中,兩對角線之中點,分別爲 E, F, 則 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AE}^2+\overline{BE}^2)$ [754 題], $\overline{AD}^2+\overline{DC}^2=2(\overline{AE}^2+\overline{DE}^2)$. 故 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=4\overline{AE}^2+2(\overline{BE}^2+\overline{DE}^2)=\overline{AC}^2+4(\overline{DF}^2+\overline{EF}^2)=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{EF}^2$.

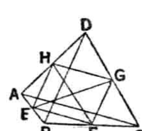


790. 梯形中兩對角線上正方形之和,等於不平行二邊上之正方形,加平行二邊所包矩形之二倍.

證 設 ABCD 爲 AD∥BC 之梯形,對角線 AC, BD 之中點,分別爲 E, F, 則 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{EF}^2$ [789題]. 而 $EF=\frac{1}{2}(BC\sim AD)$, 故 $4\overline{EF}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2-2BC\cdot AD$ [746題]. 故 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+\overline{BC}^2+\overline{AD}^2-2BC\cdot AD$, 故 $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2BC\cdot AD$.



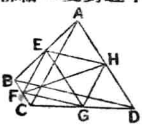
791. 聯結四邊形各邊之中點,作四邊形,則原四邊形各對角線上正方形之和,等於新四邊形各邊上正方形和之二倍.



證 設四邊形 ABCD 各邊之中點,分別爲 E, F, G, H, 則 HE = GF

$=\frac{1}{2}BD$ [225題], $EF=GH=\frac{1}{2}AC$, 四邊形 EFGH 爲平行四邊形. 故 $\overline{HF}^2+\overline{EG}^2=\overline{HE}^2+\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2$ [788題] $=2(\overline{EF}^2+\overline{HE}^2)=\frac{1}{2}(\overline{AC}^2+\overline{BD}^2)$. 故 $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{HE}^2)$.

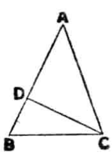
792. 四邊形對角線上正方形之和,二倍於聯結二雙對邊中點之直線上正方形之和.



解 設四邊形 ABCD 各邊之中點,分別爲 E, F, G, H, 則 $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=2(\overline{EF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GH}^2+\overline{HE}^2)$ [791題] $=2(\overline{EG}^2+\overline{FH}^2)$.

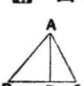
793. 二等邊三角形中,底上之正方形,等於底投於一邊上之正射影與是邊所包矩形之二倍.

解 三角形 ABC 中, 設 AB=AC, 由 C 至 AB 引垂線 CD, 則因 $\hat{B}$ 恆爲銳角 [57及66題], 故 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\cdot BD$ [752題] 而 AB=AC, 故 $\overline{BC}^2=2AB\cdot BD$.



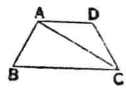
794. 設三角形 ABC 中,角 C 等於正三角形之一角,則 AB 上之正方形,等於 AC, CB 上正方形之和, 減去矩形 AC·CB. 若角 C 等於正三角形之外角,則如何?

解 由 A 至 BC 引垂線 AD, 則因角 C 爲銳角, 故 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2BC\cdot DC$ [752題]. 直角三角形 ADC 中, 因 $\hat{C}=\frac{2}{3}\hat{R}$, 故 AC=2DC [127題],故 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-BC\cdot AC$. 若角 C 爲正三角形之外角,則仿前得證 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+BC\cdot AC$.



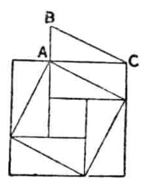
795. 設梯形中不平行二邊相等,則其一邊上之正方形與二底邊所包矩形之和,等於一對角線上之正方形.

解 設梯形 ABCD 中, AD ∥ BC, AB = CD. 普徧之梯形中, $\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2AD\cdot BC$ [790題]. 今 AC=BD [329題], AB = CD [假設],故 $2\overline{AC}^2=2\overline{AB}^2+2AD\cdot BC$, 卽 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+AD\cdot BC$.



796. 直角三角形中,斜邊上之正方形,與三角形面積四倍之和或差,等於直角旁二邊之和或差上之正方形.

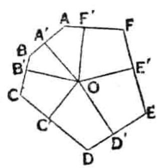
解 設三角形 ABC 中, $\hat{A}$ 爲直角,則由750題,得 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$. 而 $\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot AC$ [735題], 故 $\overline{BC}^2\pm4\triangle ABC=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2\pm2AB\cdot AC=(AB\pm AC)^2$ [744, 746題].



注意 本定理在算術中解開方應用問題時,常引用之,其圖示如左.

797. 由多角形平面上之一點,引各邊之垂線,將各邊分爲二分,則一間一所取各分上正方形之和相等.

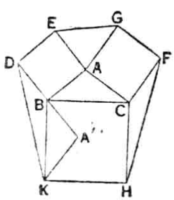
解 設 ABCDEF 爲多角形, 其平面上之任意點爲 O, 由 O 至各邊所引之垂線,分別爲 OA′, OB′, OC′, ……, OF′. 此時各垂線將各邊分成二分,故部分之總數爲邊數之二倍,恆爲偶數.據此設由AA′起,一間一而取, 則最後所取者爲 FF′, 由 A′B



起一間一而取,則最後所取者爲 F′A. 於是 $\overline{AA'}^2=\overline{OA}^2-\overline{OA'}^2$, $\overline{BB'}^2=\overline{OB}^2-\overline{OB'}^2$, $\overline{CC'}^2=\overline{OC}^2-\overline{OC'}^2$, ……, $\overline{FF'}^2=\overline{OF}^2-\overline{OF'}^2$; 故 $\overline{AA'}^2+\overline{BB'}^2+\overline{CC'}^2+\cdots\cdots+\overline{FF'}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\cdots\cdots+\overline{OF}^2-(\overline{OA'}^2+\overline{OB'}^2+\overline{OC'}^2+\cdots\cdots+\overline{OF'}^2)$. 又 $\overline{A'B}^2=\overline{OB}^2-\overline{OA'}^2$, $\overline{B'C}^2=\overline{OC}^2-\overline{OB'}^2$, ……, $\overline{F'A}^2=\overline{OA}^2-\overline{OF'}^2$, 故 $\overline{A'B}^2+\overline{B'C}^2+\cdots\cdots+\overline{F'A}^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\cdots\cdots+\overline{OA}^2-(\overline{OA'}^2+\overline{OB'}^2+\cdots\cdots+\overline{OF'}^2)$.

故一間一所取各分上正方形之和相等.

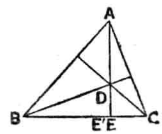
798. 設三角形 ABC 中,各邊上之正方形分別爲 ABDE, ACFG, BCHK, 聯結 EG, FH, KD, 則成六角形;此六角形各邊上正方形之和,爲三角形三邊上正方形和之四倍.若 $B\hat{A}C$ 爲直角,則六角形各邊上正方形之和,等於斜邊 BC 上正方形之八倍.



證 延長 DB,令 BA′ = DB, 聯結 KA′. 於是 $A\hat{B}A'=2\hat{R}-\hat{R}=\hat{R}$, $K\hat{B}C=\hat{R}$, 故 $A\hat{B}C=K\hat{B}A'$. 於是三角形 ABC, A′BK 中,兩邊 AB, BC 分別等於 A′B, BK, 其夾角亦相等, 故 AC = A′K [55題]. △DKA′ 中, $\overline{DK}^2+\overline{KA'}^2=2(\overline{DB}^2+\overline{BK}^2)$ [754題],即 $\overline{DK}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$. 同理, $\overline{FH}^2+\overline{AB}^2=2(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2)$, $\overline{EG}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AC}^2+\overline{AB}^2)$. 故 $\overline{DK}^2+\overline{HF}^2+\overline{EG}^2=3(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$. 而 DE=AB, KH=BC, FG=CA, 故 $\overline{ED}^2+\overline{DK}^2+\overline{KH}^2+\overline{HF}^2+\overline{FG}^2+\overline{GE}^2=4(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)$. 次,若 $B\hat{A}C=\hat{R}$, 則 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$ [750題], 故六角形各邊上正方形之和爲 $4(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2)=4\times2\overline{BC}^2=8\overline{BC}^2$.

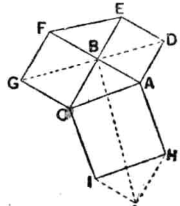
799. 設 A, B, C, D 爲一平面上之四點,且 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{AD}^2$, 則此四點中,聯結其任意二點之直線,垂直於聯結他二點之直線.

證 設聯結 A, D 之直線, 與聯結 B, C 之直線交於 E, 由 A 至 BC 引垂線 AE′, 則 $\overline{AB}^2\sim\overline{AC}^2=\overline{BE'}^2\sim\overline{CE'}^2$. 而由所設關係[所設等式之最初部分],得 $\overline{AB}^2\sim\overline{AC}^2=\overline{BD}^2\sim\overline{CD}^2$, 故 $\overline{BD}^2\sim\overline{CD}^2=\overline{BE'}^2\sim\overline{CE'}^2$, 故 DE′ 垂直於 BC. 而 E′ 上之垂線唯一, 故 AE′ 與 DE′ 相合. 故是等直線卽爲聯結 A, D 之直線,而 E′ 與 E 相合. 仿此得知 A, B, C, D 中, 聯結其任意二者之直線,垂直於聯結其他二者之直線.



800. 在直角三角形 ABC 之各邊上,作正方形如圖, 又在 HI 上作 △HIL, 令全等於 △ABC, 且 HL = BC, 聯結 EF, DBG, BL, 則 (1) △EBF 與 △ABC 全等, (2) 四邊形 GFED, GCAD, BCIL, LHAB 全等, (3) 由此以證 Pythagoras 氏定理.

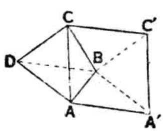
證 △EBF 與 △ABC 中, 二邊分別相等, 且其夾角亦等, 故兩三角形全等. (2) 四邊形 GFED, GCAD, BCIL, LHAB 之各邊, 分別相等, 且其對應角亦相等, 故此四個四邊形全等. (3) □ ACIH = 2(BCIL − △ABC). 又 □ BADE



$+\square CBFG=2(GFED-\triangle ABC)=2(BCIL-\triangle ABC)$. 故 $\square ACIH=\square CBFG+\square ABED$.

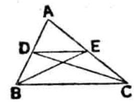
801. 四邊形ABCD中,設CD及DA分別平行於原位置而移動至C′B及BA′,則□AA′C′C中,具以下各條件:(1)由B至□AA′C′C之各角頂之距離,等於四邊形ABCD之各邊.(2)B周之各角,分別等於四邊形ABCD之各角.(3)□AA′C′C之各邊,等於四邊形ABCD之對角線.(4)□AA′C′C之各角,等於四邊形ABCD兩對角線間之角.(5)□AA′C′C之各邊與由B至其各角頂所引直線間之角,等於四邊形之各邊與對角線間之角.(6)□AA′C′C之面積,等於四邊形ABCD面積之二倍.

證 (1)因四邊形BC′CD, BA′AD皆爲平行四邊形,故 $CD=C'B$, $AD=A'B$ 故也.(2) $D\hat{C}B=C\hat{B}C'$, $D\hat{A}B=A'\hat{B}A$, 因而 $A\hat{D}C=A'\hat{B}C'$.(3) $CC'=AA'=BD$, $CA=A'C'$, 極爲明顯.(4) BD, CA分別平行於AA′, A′C′, 故BD, CA所成之角,等於四邊形AA′C′C之各角.(5) $B\hat{C}C'=C\hat{B}D$, $D\hat{B}A=B\hat{A}A'$, $B\hat{D}A=A\hat{A'}B$, $C\hat{D}B=C\hat{C'}B$,…….(6) $\triangle BCD=\triangle BCC'$, $\triangle BDA=\triangle ABA'$. 而 $\triangle BCC'+\triangle ABA'=\frac{1}{2}\square AA'C'C$; 故四邊形 $ABCD=\frac{1}{2}\square AA'C'C$.



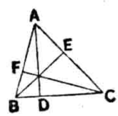
802. 試由定理設二等積三角形立於同底邊上,或同直線上之等底邊上,且在其同側,則聯結二頂點之直線,平行於底,以證聯結三角形二邊中點之直線,平行於第三邊.

證 設三角形ABC中,邊AB, AC之中點,分別爲D, E. 聯結BE, CD, 則△ADC, △BDC中,底邊AD, BD相等,高爲由C至同直線AB所引之垂線,故相等,故 $\triangle ADC=\triangle BDC$ [736題],即 $\triangle BDC=\frac{1}{2}\triangle ABC$. 同理, $\triangle BEC=\frac{1}{2}\triangle ABC$. 故 $\triangle BDC=\triangle BEC$. 而此兩三角形有同底,故 DE ∥ BC [738題].



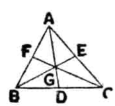
803. 由三角形之各頂點至其對邊所引之垂線與此對邊所包之矩形皆相等.

證 設由△ABC之各頂點至對邊所引之垂線爲AD, BE, CF 則 $AD\cdot BC=2\triangle ABC$[763題], $BE\cdot AC=2\triangle ABC$, $CF\cdot AB=2\triangle ABC$. 故 $AD\cdot BC=BE\cdot AC=CF\cdot AB$.



804. 設三角形ABC之重心爲G, 則三角形GAB, GBC, GCA等積.

證 設三角形ABC之三中線爲AD, BE, CF, 則 $\triangle ABD=\frac{1}{2}\triangle ABC$. 又因 $AG=\frac{2}{3}AD$ [256題], 故 $\triangle GAB=\frac{2}{3}\triangle ABD$; 故△GAB爲△ABC半分之 $\frac{2}{3}$, 即 $\frac{1}{3}$. 同理, △BCG, △CAG皆爲△ABC之 $\frac{1}{3}$, 因而相等.



805. 三角形之三中線,將三角形之面積六等分.

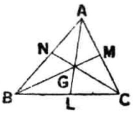
證 設△ABC之三中線爲AL, BM, CN, 其交點爲G, 則

$\frac{1}{2}\triangle AGB=\triangle BGL=\triangle CGL$ ……………(1)

$\frac{1}{2}\triangle BGC=\triangle CGM=\triangle AGM$ ……………(2)

$\frac{1}{2}\triangle AGC=\triangle AGN=\triangle BGN$ ……………(3)

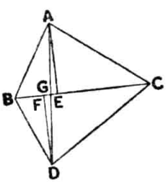
又　$\triangle ABL=\triangle ACL$ ……………(4)



取(1)與(4)之差,則 $\triangle AGB = \triangle AGC$. 同理, $\triangle AGB = \triangle BGC$. 故 $\triangle AGB = \triangle BGC = \triangle AGC$. 故 $\triangle BGL$, $\triangle CGL$, $\triangle CGM$, $\triangle AGM$, $\triangle AGN$, $\triangle BGN$ 相等.

806. 設兩等積三角形共一底,而在其異側,則聯結其頂點之直線,爲底邊或其延線所二等分. 並證其逆定理.

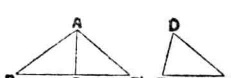
證 設$\triangle ABC$, $\triangle BCD$ 爲在同底邊上,且在異側之二等積三角形.



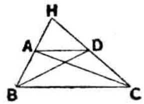
聯結 AD,命其與 BC 之交點爲 G;由 A, D 至底邊所引之垂線,命分別爲 AE, DF. 此時$\triangle ABC$, $\triangle BCD$ 之底邊公有, 且等積, 故 $AE = DF$ [737題]. 於是兩三角形 AGE, DGF 中, $E\hat{A}G = F\hat{D}G$, $A\hat{E}G = \hat{R} = D\hat{F}G$, $AE = DF$, 故 $AG = DG$ [56題]. 本定理之逆定理如下:兩三角形共一底,而在其異側,且聯結其頂點之直線,爲底邊或其延線所二等分,則此兩三角形等積. 今設 AD 爲底邊 BC 所二等分,卽 $AG = DG$,則兩直角三角形 AGE, DGF 中,一邊與其兩端之角,分別相等,故 $AE = DF$ [56題].因而 $\triangle ABC = \triangle BCD$ [736題]

807. 兩三角形中,二邊分別相等,其夾角互爲補角,則此兩三角形等積.

證 設三角形 ABC, DEF 中, $AC = DE$, $BC = EF$, $\hat{C} = 2\hat{R} - \hat{E}$. 延長 BC 至 B′,令 $CB' = BC$, 聯結 AB′, 則 $\triangle ABC = \triangle ACB'$ [736題]. 而 $\hat{E} = A\hat{C}B'$, 故 $\triangle DEF \equiv \triangle ACB'$ [55題]. 故 $\triangle ABC = \triangle DEF$.

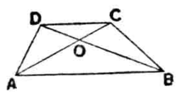


808. 設梯形之不平行二邊 BA, CD 交於 H, 則兩三角形 HAC, HDB 等積.



證 因$AD \parallel BC$, 故$\triangle ADB = \triangle ADC$[736題].雙方加$\triangle ADH$, 則 $\triangle HBD = \triangle HAC$.

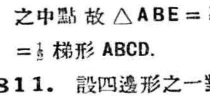
809. 設四邊形 ABCD 之對角線 AC, BD 之交點爲 O, 兩三角形 AOD, BOC 等積,則 AB 平行於 CD.



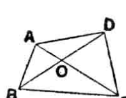
證 $\triangle AOD = \triangle BOC$, 故雙方加$\triangle AOB$, 則$\triangle ADB = \triangle ACB$. 故 $DC \parallel AB$ [738題].

810. 以梯形中不平行之一邊爲底,以其對邊中點爲頂點之三角形,等於梯形之半分.

證 設梯形 ABCD 中,不平行之一邊 DC 之中點爲 E, AE 之延線與 BC 延線之交點爲F.於是$\triangle AED \equiv \triangle FEC$ [56題], 故梯形 $ABCD = \triangle ABF$. 又 E 爲 AF 之中點 故 $\triangle ABE = \frac{1}{2}\triangle ABF$. 故 $\triangle ABE = \frac{1}{2}$ 梯形 ABCD.



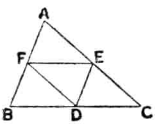
811. 設四邊形之一對角線,將他對角線二等分,則前對角線將四邊形二等分.



證 設四邊形 ABCD 中,對角線 AC 將他對角線 BD 二

等分,卽交點 O 爲 BD 之中點. 此時 $\triangle ABO=\frac{1}{2}\triangle ABD$, $\triangle BOC=\frac{1}{2}\triangle BCD$, 故 $\triangle ABO+\triangle BOC=\frac{1}{2}(\triangle ABD+\triangle BCD)$, 即 $\triangle ABC=\frac{1}{2}ABCD$, 故 AC 將四邊形二等分.

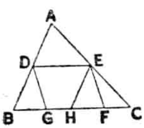
812. 聯結三角形各邊中點而成之三角形,爲本形之四分之一.



證 設三角形 ABC 中,邊 BC, CA, AB 之中點,分別爲 D, E, F, 則 D, E, F 兩兩聯結而得之四個三角形全等 [249題]. 故 $\triangle DEF=\frac{1}{4}\triangle ABC$.

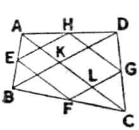
813. 以聯結三角形二邊中點之直線爲底, 作平行四邊形, 令其他底在三角形之底邊上,則此平行四邊形等於三角形之半分.

證 設三角形 ABC 之邊 AB, AC 之中點爲 D, E, 以 DE 爲底,對邊在 BC 上之平行四邊形爲 DEFG. 命 BC 之中點爲 H, 則 ▱DEFG = ▱DEHB [732題] $=\frac{1}{2}\triangle ABC$ [812題].



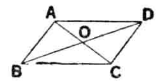
814. 依次聯結四邊形各邊之中點而得之四邊形,爲原形之半分.

證 設四邊形 ABCD 各邊之中點, 分別爲 E, F, G, H, 其依次聯結而得之四邊形 EFGH 爲平行四邊形 [265題]. 命邊 EH, FG 與 AC 之交點爲 K, L, 則平行四邊形 EFLK 中,因 E 及 F 分別爲邊 AB, BC 之中點,故 ▱EFLK $=\frac{1}{2}\triangle ABC$ [813題]. 同理, ▱HGLK $=\frac{1}{2}\triangle ADC$. 故 ▱EFGH $=\frac{1}{2}ABCD$.



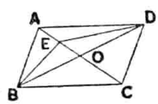
815. 平行四邊形之二對角線,分平行四邊形爲四等積三角形.

證 設平行四邊形 ABCD 之對角線交點爲 O, 因 O 爲二對角線之中點, 故 $\triangle AOB=\triangle BOC$ [736題], $\triangle AOD=\triangle DOC$, $\triangle BOC=\triangle COD$. 故 $\triangle AOB=\triangle BOC=\triangle COD=\triangle DOA$.



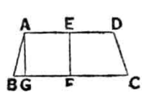
816. 在平行四邊形 ABCD 之對角線 AC 上取點 E, 聯結 EB, ED, 則兩三角形 ECB, ECD 等積. 又設 E 在 AC 上, 則三角形 EAB, ECD 之和,等於三角形 EAD, EBC 之和, 而各爲平行四邊形之半分. 若 E 在 AC 之延線上,則和變爲差.

證 設對角線 AC, BD 之交點爲 O, 則 $\triangle BEC$, $\triangle DEC$ 中, $BO=OD$, 故 $\triangle BEC=\triangle DEC$ [806題]. 又同理, $\triangle EAD=\triangle EAB$. 故 $\triangle EAB+\triangle ECD=\triangle EAD+\triangle ECB=\triangle EAD+\triangle ECD=\frac{1}{2}$▱ABCD. 又設 E 在 AC 或 CA 之延線上, 仿前得證 $\triangle EAB\sim\triangle ECD=\triangle EAD\sim\triangle ECB=\frac{1}{2}$▱ABCD.

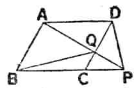


817. 設四邊形之一雙對邊平行, 則聯結此二邊中點之直線, 將本形二等分.

證 設四邊形 ABCD 之邊 AD ∥ BC, 此邊之中點爲 E, F. 此時兩四邊形皆爲梯形, 高皆爲 AG. 於是梯形 ABFE $=\frac{1}{2}(AE+BF)AG=\frac{1}{4}(AD+BC)AG=\frac{1}{2}$ 梯形 ABCD [739題]. 故 EF 將本形二等分.

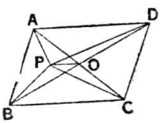


818. 過平行四邊形 ABCD 之角頂 A, 引任意直線,命其與 BC, DC 或其延線之交點爲 P, Q, 則兩三角形 ABQ, ADP 相等.



證 因 AB ∥ CD, 故 $\triangle ABQ = \frac{1}{2}\square ABCD$ [735題]. 又因 BC ∥ AD, 故 $\triangle ADP = \frac{1}{2} \times \square ABCD$. 故 $\triangle ABQ = \triangle ADP$.

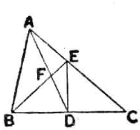
819. 設平行四邊形 ABCD 之對角線交點爲 O, 三角形 OAB 內之任意點爲 P, 則三角形 APB, CPD 之差,等於三角形 APC, BPD 之和.



證 因 P 爲三角形 AOB 內之點, 故 O 在三角形 PCD 之內. 故 $\triangle PAB + \triangle PAO + \triangle PBO = \triangle OAB = \triangle OCD$. 雙方加 $\triangle POD + \triangle POC$, 則 $\triangle PAB + \triangle PAC + \triangle PBD = \triangle PCD$, 故 $\triangle PCD - \triangle PAB = \triangle PAC + \triangle PBD$.

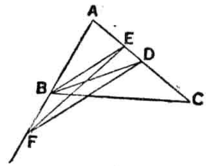
820. 設三角形 ABC 之底 BC 之中點爲 D, BE 過 AD 之中點, 交 AC 於 E, 則三角形 BEC 等於 ABE 之二倍.

證 三角形 EBC 中, D 爲 BC 之中點, 故 $\triangle BED = \frac{1}{2}\triangle BEC$ [736題]. 次, 兩三角形 ABE, BED 中, AD 爲 BE 所等分, 故 $\triangle ABE = \triangle BED$ [806 題], 故 $2\triangle ABE = \triangle BEC$.



821. 設三角形 ABC 之邊 AC 之中點爲 D, 引任意平行線 BE, DF, 令分別交 AC, AB 或其延線於 E, F, 則三角形 EAF 等於三角形 ABC 之半分.

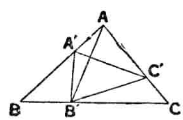
證 因 D 爲 AC 之中點, 故 $\triangle ABD = \frac{1}{2}\triangle ABC$ [736 題], 又 BE ∥ FD, 故 $\triangle BED = \triangle BEF$ [736題]. 雙方加 $\triangle ABE$, 則 $\triangle ABE + \triangle EBD = \triangle ABE + \triangle BEF$,



即 $\triangle ABD = \triangle AFE = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

822. 在三角形之各邊上取 AA′, BB′, CC′ 令分別等於各邊之三分之一, 則三角形 A′B′C′ 之面積, 等於三角形 ABC 面積之三分之一.

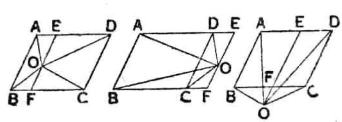
證 因 $BB' = \frac{1}{3} BC$, 故 $\triangle ABB' = \frac{1}{3}\triangle ABC$; 又因 $BA' = \frac{2}{3} AB$, 故 $\triangle A'BB' = \frac{2}{3}\triangle ABB'$. 故 $\triangle A'BB'$ 等於 $\frac{1}{3}\triangle ABC$ 之 $\frac{2}{3}$, 即 $\triangle ABC$ 之 $\frac{2}{9}$. 同理, $\triangle AA'C' = \frac{2}{9}\triangle ABC$,



$\triangle B'CC' = \frac{2}{9}\triangle ABC$. 故 $\triangle A'B'C' = \triangle ABC - (\triangle AA'C' + \triangle BB'A' + \triangle CC'B') = \triangle ABC - \frac{2}{3}\triangle ABC = \frac{1}{3}\triangle ABC$.

823. 設平行四邊形爲 ABCD, 任意點爲 O, 則三角形 OAB, OCD 之和或差, 等於平行四邊形之半分.

證 過點 O 引 AB 之平行線, 令交 AD, BC

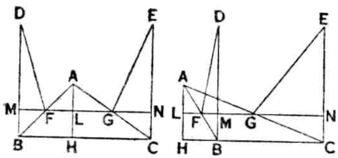


於 E, F. 於是 $\triangle OAB = \frac{1}{2}\square ABFE$ [733, 735 題], $\triangle ODC = \frac{1}{2}\square EFCD$. 又若 EF 截 AD, 則平行四邊形 AC, 等於兩平行四邊形 AF, DF

之和;若 EF 截 AD 之延線,則原平行四邊形等於後二平行四邊形之差. 故 $\triangle OAB$, $\triangle ODC$ 之和或差,等於平行四邊形 ABCD 之半分.

824. 由三角形 ABC 之 B 及 C,於底 BC 之同側,引垂線 BD, CE,令等於三角形高之二倍,設 F 及 G 分別爲 AB, AC 之中點,則視角 ABC, ACB 之是否皆爲銳角,而三角形 ABC 等於三角形 BDF, CEG 之和或差.

圖 因 $FG \parallel BC$, $AH \parallel BD$, 故 $ML=BH$. 又



F 爲 AB 之中點,故 $MF=FL=\frac{1}{2}BH$. 故 $\triangle FBD=\frac{1}{2}BD\cdot MF$ [735題] $=\frac{1}{2}AH\cdot BH$. 同理, $\triangle GEC=\frac{1}{2}AH\cdot HC$. 而若 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 皆爲銳角,則 $BC=BH+HC$, 故 $\triangle FDB+\triangle GEC=\frac{1}{2}AH\cdot BH+\frac{1}{2}AH\cdot HC=\frac{1}{2}AH(BH+HC)=\triangle ABC$. 若 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 之中有一者爲鈍角,則 $\triangle FDB\sim\triangle GEC=\frac{1}{2}AH\cdot BH\sim\frac{1}{2}AH\cdot HC=\frac{1}{2}AH(BH\sim HC)=\triangle ABC$.

825. 在三角形 ABC 之各邊上,作正方形 ABDE, BCFG, ACHI 於其外側,則三角形 AEI, BDG, CFH 等積.

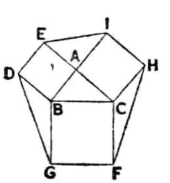
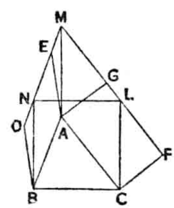


圖 因 $C\hat{A}I=\hat{R}=E\hat{A}B$, 故 $I\hat{A}E$, $B\hat{A}C$ 互爲補角. 故兩三角形 IAE, BAC 中,二邊分別相等,其夾角互爲補角,故 $\triangle EAI=\triangle ABC$ [807題]. 同理, $\triangle DBG=\triangle ABC$, $\triangle HCF=\triangle ABC$. 故 $\triangle EAI=\triangle DBG=\triangle HCF$.

826. 以三角形 ABC 之二邊 AB, AC 爲底,作平行四邊形 ABDE, ACFG, 命 DE, FG 之交點爲 M, 又以 BC 爲底,以平行於 MA 且與其等長之直線爲他邊,作平行四邊形,則 AB, AC 上平行四邊形之和,等於 BC 上之平行四邊形.

圖 由 B 平行於 AM, 引 BN, 命其與 DM 之交點爲 N, 則四邊形 ABNM 爲平行四邊形, 故 $AM=BN$, $AB=MN$. 故由 B 平行於 AM, 所引與其等長之直線,其端在 DM 上. 同理,由 C 仿前所引之 CL, 其端 L 在 FM 上,而 $CL=AM$, $AC=ML$. 又因 $AB \parallel MD$, $AC \parallel MF$, 故 $B\hat{A}C=D\hat{M}F$, 因此 $\triangle ABC \equiv \triangle NML$. 次, $\square ABDE=\square ABNM$ [732題], $\square ACFG=\square ACLM$. 故 $\square ABDE+\square ACFG=\square ABNM+\square ACLM=\square BCLN$.



827. 正方形等於其對角線上正方形之半分.

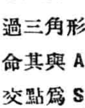
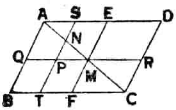


圖 設正方形爲 ABCD. 因 ABC 爲直角三角形, 故 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$ [750題], 卽 $2\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$, 故 $\overline{AB}^2=\frac{1}{2}\overline{AC}^2$.

828. 平行四邊形 ABCD 中,引對角線 AC, 過三角形 ABC 內之點 P, 引各邊之平行線,命其與 AB, CD 之交點爲 Q, R, 與 AD, BC 之交點爲 S, T, 則平行四邊形 QT 小於 RS. 又設 QR, ST 分別與 AC 交於 M, N, 則平行四

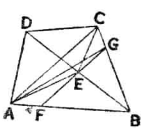
邊形 QT, RS 之差, 等於三角形 QNR, 或 SMT 之二倍.

證 過 M 平行於 AB, 引直線 EF, 則 $\square QF = \square RE$ [740題]. 因點 P 在三角形 ABC 內, 故 P 在 QM 上; 故 $\square RS > \square RE$, $\square QT < \square QF$; 因而更 $\square QT < \square RS$. 次; $\square RS = \square RE + \square MS$, $\square QT = \square QF - \square PF$; 故 $\square RS - \square QT = \square MS + \square PF = \square SF = 2\triangle SMT$ [733 及 735 題]. 又由 N 引 AD 之平行線, 得證 $\square RS$, $\square QT$ 之差等於 $2\triangle QNR$.



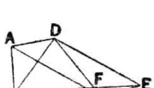
829. 過四邊形 ABCD 對角線 BD 之中點 E, 引他對角線 AC 之平行線 FEG, 命其與二邊之交點爲 F, G, 則 AG 將本形二等分.

證 E 爲 DB 之中點, 故 $\triangle DEC = \frac{1}{2}\triangle DBC$ [736題], $\triangle ADE = \frac{1}{2}\triangle ADB$, 故 $ADCE = \frac{1}{2} ABCD$. 而 $FG \parallel AC$, 故 $\triangle AGC = \triangle AEC$ [736題]. 雙方加 $\triangle ADC$, 則 $ADCE = ADCG$. 故 AG 將本形二等分.



830. 四邊形, 與以其二對角線爲二邊, 以其交角爲夾角之三角形等積.

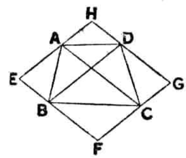
證 由 D 引 DE, 令平行且等於 AC, 作平行四邊形 ACED, 則此四邊形爲平行四邊形 [226題]. 聯結 BE, 則 $\triangle ABD + \triangle CBE = \frac{1}{2} \times \square AE = \triangle CDE$ [823題]. 命 BE, DC 之交點爲 F, 得四邊形 $ABCD = \triangle BDF + \triangle BAD + \triangle BCE - \triangle CEF = \triangle BDF + \triangle CDE - \triangle CEF = \triangle BDF + \triangle DEF = \triangle BDE$. 而三角形 BDE 以原四邊形之兩對角線爲二邊, 以對角線之交角爲其二邊之夾角.



注意 本題亦可如下831題作外接形以證之.

831. 對角線分別相等, 且成等角之四邊形等積.

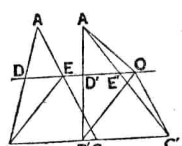
證 過四邊形 ABCD 之各項點, 引對角線之平行線, 而作四邊形 EFGH, 則此四邊形爲平行四邊形, 而等於原形之二倍 [396題]; 且如是作成之一切外接四邊形, 因原形之兩對角線及其交角相等, 故亦相等 [224題], 故等於其半分之原形亦皆相等.



注意 本題亦可由 830 題證之.

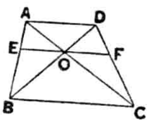
832. 設兩等高三角形共一底, 或其等底在一直線上, 則底之平行線, 爲此三角形之邊所截者相等.

證 設三角形 ABC, A'B'C' 之高相等, 底邊 BC, B'C' 亦相等, 且在一直線上; 又設 BC 之平行線爲 DED'E', 其爲各三角形之二邊所截者爲 DE, D'E'. 假定 $DE > D'E'$, 按 $DE = D'O$, 取 O, 聯結 OA', OB', OC' 及 BE, 則 $\triangle ADE = \triangle A'D'O$ [736題], $\triangle DBE = \triangle D'B'O$, $\triangle EBC = \triangle OB'C'$, 故 $\triangle ABC = A'B'C'O$. 然 $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, 故 O 非與 E' 相合不可, 卽 $DE = D'E'$. 若底邊之平行線, 與兩三



角形邊之延線交,亦同上.

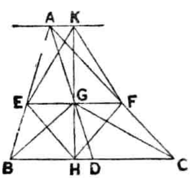
833. 過梯形 ABCD 對角線之交點 O, 引底 BC 之平行線,命其與二邊 AB, CD 之交點分別為 E, F, 則 OE 與 OF 相等.



證 因 AD ∥ BC,故△ABC =△DBC[736題],又因 EF ∥ BC,故 EO = OF [832題].

834. 三角形二邊間平行於底之直線,為由頂點至底邊所引之中線二等分.

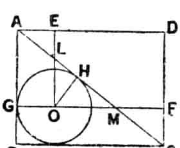
證 設三角形 ABC 之中線為 AD; BC 之平行線為 EF; AD 與 EF 之交點為 G. 過 G 引 BC 之垂線 GH, 命其延線交過 A 平行於 BC 之直線於 K. 於是 △ABD =△ACD, △GBD =△GCD, 故 △AGB =△AGC. 而 △AGB =△KEH, △AGC =△FKH; 故 △KEH =△FKH, 故 EG = GF [806題].



注意 由 832 題,可直接證明 EG = GF.

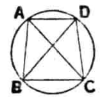
835. 設 ABCD 為矩形, O 為三角形 ABC 之內心, 引 AD, DC 之垂線 OE, OF, 則矩形 OEDF 等於全形之半分.

證 設內切圓與邊 AB, AC 之切點為 G, H 則 AE = OG [222題] = OH, 故 △AEL ≡△OHL [56題]. 同理, △CFM ≡△OHM. 故 □OEDF =△ADC $=\frac{1}{2}$□ABCD.



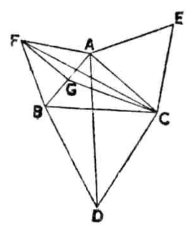
836. 兩三角形之底, 面積, 及頂角相等, 則此兩三角形全等.

證 將兩等三角形相疊, 令等底相合, 兩頂點在底邊之同側. 若頂點相合, 則兩三角形之全等明甚. 若不相合,則假定其所取之位置, 如圖所示之兩三角形 ABC, DBC. 因 $B\hat{A}C$, $B\hat{D}C$ 相等,故 △ABC 之外接圓周過 D [452 及 453 題].聯結 AD, 則 AD ∥ BC [738 題], 因而弧 AB = 弧 DC [474題], 故 $A\hat{C}B = D\hat{B}C$. 故 △ABC ≡△DCB [78題].



837. 直角三角形斜邊上之正三角形, 等於他二邊上正三角形之和.

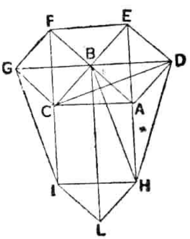
證 設直角三角形 ABC 各邊上之正三角形為 BCD, ACE, ABF, 由 F 至邊 AB 引垂線 FG, 則 G 為 AB 之中點, 而 AC ∥ FG, 故 △AFC =△AGC = $\frac{1}{2}$ ×△ABC [736題]. 又 △ABD, △FBC 中, 二邊與其夾角相等, 故兩三角形全等. 雙方加△AFC, 則四邊形 AFBC =△ABD + $\frac{1}{2}$△ABC. 同理, 四邊形 AECB =△ACD + $\frac{1}{2}$△ABC. 以上兩式, 各邊相加, 減以 △ABC 之二倍, 則得 △ABF +△ACE =△BCD.



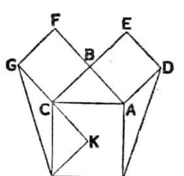
838. 設直角三角形 ABC 之直角頂為 B, 三邊上之正方形為 ABED, BCGF, CAHI, 求證: (1) AE. CF 平行. (2) D, B, G 在一直線上. (3) CD, BH 互相垂直. (4)三角形 EFB 與 ABC 全

等, GCI, DAH 皆與 ABC 等積. (5)在 HI 上作直角三角形 ILH, 令全等於 ABC, 而 HL 等於 BC, 聯結 BL, 則四邊形 GFED, GCAD, BCIL, LHAB 全等; 且據此以證定理直角三角形二邊上正方形之和, 等於斜邊上之正方形. (6) GI 上之正方形,等於 AB 上之正方形與 BC 上正方形之四倍之和; DH 上之正方形等於 BC 上之正方形與 AB 上正方形之四倍之和. (7) GI, DH 上之正方形之和, 等於 AC 上正方形之五倍.

圖　(1) $C\hat{B}A=\hat{R}$, $A\hat{B}E=\hat{R}$, 故 $C\hat{B}A+A\hat{B}E=2\hat{R}$, 故 C, B, E 在一直線上. 而 $F\hat{C}B=\frac{1}{2}\hat{R}=B\hat{E}A$, 故 AE ∥ CF [38題]. (2) $G\hat{B}C=\frac{1}{2}\hat{R}$, $C\hat{B}A=\hat{R}$, $A\hat{B}D=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 $G\hat{B}C+C\hat{B}A+A\hat{B}D=2\hat{R}$, 故 G, B, D 在同一直線上 [11題]. (3) △DAC, △BAH 中, DA=BA, AC=AH, $D\hat{A}C=B\hat{A}H$, 故 $A\hat{D}C=A\hat{B}H$, $A\hat{C}D=A\hat{H}B$ [55題], 故此兩三角形等角. 而 AD⊥AB, AC⊥AH, 故 CD⊥BH [204題]. (4)與 800 題(1)及 825 題同.

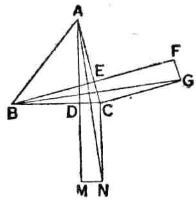


(5)與 800 題(2),(3)同. (6)延長 GC 至 K, 由 I 至 CK 引垂線 IK. 於是 △ABC, △KCI 中, AC=CI, $B\hat{C}A=\hat{R}-A\hat{C}K=I\hat{C}K$, $A\hat{B}C=\hat{R}=C\hat{K}I$. 故 BC=CK, AB=IK [81題]. 故 $\overline{GI}^2=\overline{GK}^2+\overline{IK}^2=\overline{2CK}^2+\overline{AB}^2=\overline{2BC}^2+\overline{AB}^2=4\overline{BC}^2+\overline{AB}^2$. 同理, $\overline{DH}^2=\overline{BC}^2+4\overline{AB}^2$. (7)由前條, 得 $\overline{GI}^2+\overline{DH}^2=5\overline{AB}^2+5\overline{BC}^2=5\overline{AC}^2$.



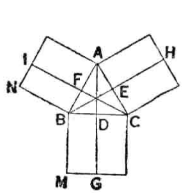
839.　三角形中, 一邊與他邊投於此邊上之正射影所包之矩形, 等於第二邊與第一邊投於此邊上之正射影所包之矩形.

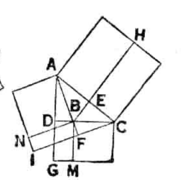
圖　由三角形 ABC 之 A, B 至對邊引垂線 AD, BE, 則 AC 投於 BC 上之正射影爲 DC, BC 投於 AC 上之正射影爲 EC. 在 DC 上作 BC, DC 所包之矩形 DCNM, 又在 EC 上作 AC, EC 所包之矩形 ECGF, 聯結 AN, BG. 於是兩三角形 ACN, GCB 中, 二邊與其夾角, 分別相等, 故此兩三角形全等. 而 AD ∥ CN, 故 △ACN $=\frac{1}{2}$ ▭CM $=\frac{1}{2}$ BC·DC. 同理, △BCG $=\frac{1}{2}$ ▭CF $=\frac{1}{2}$ AC·CE. 故矩形 BC·DC = AC·EC. 若三角形爲鈍角時亦同.



840.　三角形中, 銳角對邊上之正方形, 小於他二邊上正方形之和; 鈍角對邊上之正方形, 大於他二邊上正方形之和; 而兩者之中, 其差皆等於夾此角之一邊與他一邊投於此邊上之正射影所包矩形之二倍. 試於各邊上作正方形以證之.

圖　在 △ABC 之各邊上, 作正方形於其外





側，由各頂點至其對邊引垂線 AD, BE, CF, 分別延長之，令交正方形之對邊於 G, H, I. 於是 $\square CH=\square CG$ [839題], $\square AH=\square AI$, $\square BI=\square BG$. 設 $\hat{B}$ 爲銳角，(第一) E 在 A, C 間，則 D, F 皆在邊上，故 $\overline{AC}^2=\square CH+\square AH$, $\overline{AB}^2=\square AI+\square BI$, $\overline{BC}^2=\square CG+\square BG$. 故 $\overline{AC}^2<\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, 而其差爲 $\square BI+\square BG=2\square BG=2BC\cdot BD$. (第二) E 在 AC 之延線上，則 D, F 之一在邊上，故 $\overline{AC}^2=\square CH\sim\square AH$, $\overline{BC}^2=\square CG+\square BG$, $\overline{AB}^2=\square BI-\square AI$, 或 $\overline{BC}^2=\square BG-\square CG$, $\overline{AB}^2=\square AI+\square BI$. 故 $\overline{AC}^2=(\overline{BC}^2-\square BG)-(\square BI-\overline{AB}^2)=\overline{BC}^2+\overline{AB}^2-(\square BG+\square BI)=\overline{BC}^2+\overline{AB}^2-2\square BG$, 或 $\overline{AC}^2=(\overline{AB}^2-\square BI)-(\square BG-\overline{BC}^2)=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\square BG$. 故若 $\hat{B}<\hat{R}$, 則 $\overline{AC}^2$ 小於 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, 而其差爲 $2\square BG=2BC\cdot BD$. 設 $\hat{B}$ 爲鈍角. 此時 E 在 A, C 間, D, F 皆在邊之延線上，故 $\overline{AC}^2=\square CH+\square AH$, $\overline{AB}^2=\square AI-\square BI$, $\overline{BC}^2=\square CG-\square BG$. 故 $\overline{AC}^2=(\overline{BC}^2+\square BG)+(\overline{AB}^2+\square BI)=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2\square BG=(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+2BC\cdot BD$, 卽 $\overline{AC}^2$ 大於 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$, 而其差爲 $2BC\cdot BD$.

841. 過四邊形各對角線之中點，引他對角線之平行線，則由其交點至各邊中點之四直線，將本形四等分.

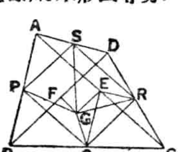
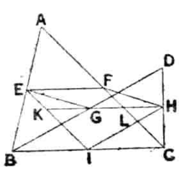


圖　四邊形 ABCD 中，設對角線 AC, BD 之中點，分別爲 E, F；過 E, F 平行於他對角線所引直線之交點爲 G; 又設邊 AB, BC, CD, DA 之中點，分別爲 P, Q, R, S, 此時 PQRS 爲平行四邊形 [265題]，而等於原形之半分 [814題]. 又 $\triangle GPS+\triangle GQR=\frac{1}{2}\square PQRS$ [823題] $=\frac{1}{4}ABCD$. 而 $EG\parallel QR$, 故 $\triangle GQR=\triangle EQR$. 又 $EQ\parallel AP$, $EQ=AP$, $AS\parallel ER$, $AS=ER$, 因而 $P\hat{A}S=Q\hat{E}R$, 故且 $\triangle APS\equiv\triangle EQR$. 故 $\triangle GPS+\triangle APS=APGS=\frac{1}{4}ABCD$. 仿此得證其他三個四邊形 GPBQ, GQCR, GRDS 亦各爲原形之四分之一.

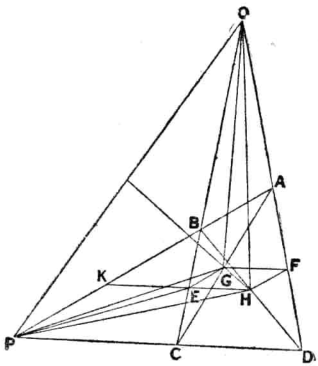
842. 設兩三角形共底且立於其同側，則聯結其邊之兩兩中點，得平行四邊形，而其面積等於兩三角形差之半分.

圖　設三角形 ABC, DBC 之邊 AB, AC, DB, DC, BC 之中點，分別爲 E, F, G, H, I, 則 EF, GH 皆平行於 BC, 且等於其半分 [232題]. 故 EFHG 爲平行四邊形 [226題]. 設 GH 與 AC, EI 之交點分別爲 L, K, 則 $\square EFHG=\square EFLK$ [732題] $=\square EFCI\sim\square KLCI$. 而 $\square EFCI=\frac{1}{2}\triangle ABC$ [813題], $\square KLCI=\square GHIB=\frac{1}{2}\triangle DBC$. 故 $\square EFHG=\frac{1}{2}\triangle ABC\sim\frac{1}{2}\triangle DBC=\frac{1}{2}(\triangle ABC\sim\triangle DBC)$.



843. 設四邊形 ABCD 對邊之交點爲 P, Q, 對角線 AC, BD 之中點爲 G, H, 則三角形 PGH, 及 QGH 皆爲四邊形 ABCD 之四分之一. 又 AC, BD, PQ 之中點，在一直線上.

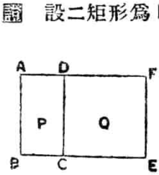
圖　設邊 BC, AD 之中點，分別爲 E, F, 聯結 EH, HF, FG, GE, 則 $\square EHFG=\frac{1}{2}(\triangle ACD-\triangle BCD)$ [842題]. 故 $\triangle EGH=\frac{1}{4}(\triangle ACD-\triangle BCD)$. 又設 HE 之延線與 BP 之交點爲



K, 則因 HE $\parallel$ DC, 且 E 爲 BC 之中點,故 K 爲 BP 之中點 [231題] 故 $\triangle$BEH$=\triangle$PEH [736題],卽$\triangle$ PEH$=\frac{1}{4}\triangle$BCD. 同理, $\triangle$PEG $=\frac{1}{4}\triangle$ABC. 故 $\triangle$PGH $=\triangle$EGH $+\triangle$PEH $+\triangle$PEG $=\frac{1}{4}(\triangle$ABC $+\triangle$BCD $+\triangle$ACD $-\triangle$BCD$)=\frac{1}{4}$ABCD. 同理, $\triangle$QGH$=\frac{1}{4}$ABCD. 因而又 $\triangle$PGH$=\triangle$QGH. 而此兩三角形共一底邊 GH, 且在其異側,故 PQ 爲 GH 所二等分 [736題], 因而 PQ, AC, BD 之中點,在一直線上.

844. 設兩矩形之高相等,則其和等於底之和與公高所包之矩形.

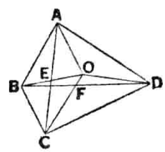
證 設二矩形爲 P, Q. 將一矩形 Q, 接於他矩形 P,令其共邊 DC,且在DC之異側;於是因 P 之邊 BC 與 Q 之邊 CE, 俱垂直於DC, 故 BCE成一直線; 同理, ADF 亦成一直線. 此時 AE 爲一矩形,其面積顯然等於 P+Q. 而此矩形之高,等於原矩形之高,底邊 BE 等於原矩形底之和 BC+CE. 故如題所言.

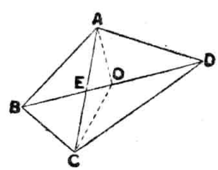


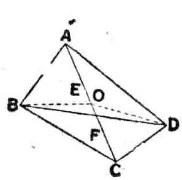
注意 設將 Q 置於 DC 之同側,而令 Q, P 相疊, 則得證兩等高矩形面積之差, 等於底之差與公高所包之矩形. 又矩形得以任何邊爲高,故兩等底矩形面積之和或差,等於其高之和或差與公底所包之矩形.

845. 由四邊形內之一點,至四頂點所引之直線,普通不能分四邊形爲四個等積三角形. 又其特例如何?

證 在四邊形 ABCD 內取任意點 O, 聯結 OA, OB, OC, OD. 設此四直線將四邊形分成四個等積三角形, 則因 $\triangle$ABO$=\triangle$CBO, 且此兩三角形共邊 BO, 故 AC 爲 BO 或其延線所二等分. 易言之,設 AC 之中點爲 E, 則 BO 或其延線過 E. 同理, 因 $\triangle$AOD$=\triangle$COD, 故 OD 之延線或 OD 過 E. 故 OB, OD 兩直線皆過二點 O, E; 因此或 B, E, O, D 在一直線上,或點 O, E 一致. 在前者中, 對角線 BD 將四邊形之面積二等分; 在後者中,對角線 AC 將四邊形二等分. 故欲令如 O 之點存在,須對角線之一,將四邊形之面積二等分. 不合此條件之四邊形中,無如 O 之點.

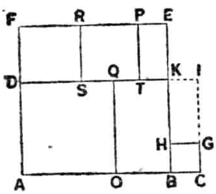






846. 二有限直線上正方形之和，等於此二直線和之半分上正方形及其差之半分上正方形之和之二倍；試由幾何學證之．又將一有限直線分為二分，則其二分上正方形之和，等於此直線半分上正方形之二倍，及分點與此直線中點間部分上正方形之二倍之和；試亦用幾何學證之．

證 (I)設二有限直線為 AB, BC［AB＞BC］，



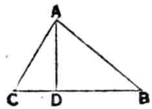
且 BC 在 AB 之延線上，作各線分上之正方形 AE, GB. 此時 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$ 等於圖形 ACGHEF. 設 AC 之中點為 O，則 $AO=\frac{1}{2}(AB+BC)$，$OB=\frac{1}{2}(AB-BC)$．又於邊 AF 上，取 AD 等於 AO，過 D 平行於 AB 引直線 DKI，命其與 BE 之交點為 K，與 CG 延線之交點為 I；又於 EF 上取 EP 等於 BC，過 P 平行於 EB 引 PT，命其與 DK 之交點為 T．於是 $OB=DF=\frac{1}{2}PF=\frac{1}{2}HE=HK$，故 ▭PK＝▭KG，故 ▭DB＋▭BG＋▭PK＝▭AI．而矩形 AQ, OI 皆為正方形，且相等，故 ▭AI＝2□AQ＝$2\overline{AO}^2$．又 ▭DP＝2□DR＝$2\overline{OB}^2$．故 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2\overline{AO}^2+2\overline{OB}^2=2\left\{\left(\frac{AB+BC}{2}\right)^2+\left(\frac{AB-BC}{2}\right)^2\right\}$．

(II)本題與前半題之意義相同．蓋命所設有限直線為 AC，二分之於 B，則各分上之正方形為 $\overline{AB}^2$, $\overline{BC}^2$，即□AE, □BG；又 AC 之半分為 AO，卽 $\frac{1}{2}(AB+BC)$，分點與中點間之部分為 OB，卽 $\frac{1}{2}(AB-BC)$ 故也．

注意 II 之別證見 755 題．

847. 設三角形 ABC 之角 C 為 60° 則 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-AC\cdot CB$.

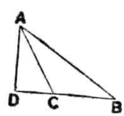
證 由 A 引 BC 之垂線 AD，則因 $A\hat{C}D=60°$，



故 $C\hat{A}D=30°$，故 △ACD 為正三角形之半，而 $AC=2CD$．又因 $A\hat{C}B<\hat{R}$，故 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-2CD\cdot CB$［752題］$=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2-AC\cdot CB$.

848. 設三角形 ABC 之角 C 為 120°，則 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2+AC\cdot CB$.

證 由 A 至對邊引垂線 AD，則因 $A\hat{C}B=120°$，



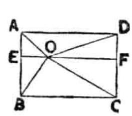
故 D 在 BC 之延線上，而 $A\hat{C}D=60°$，故 △ACD 為正三角形之半分，因而 $AC=2CD$．又因 $A\hat{C}B>\hat{R}$ 故 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2+2CD\cdot CB$［751題］$=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2+AC\cdot CB$.

849. 兩三角形等高等積，則必等底．

證 設二等積三角形 ABC, A′B′C′ 中，高 $AD=A'D'$．此時 $\triangle ABC=\frac{1}{2}AD\cdot BC$［735題］，$\triangle A'B'C'=\frac{1}{2}A'D'\cdot B'C'$．故 $AD\cdot BC=A'D'\cdot B'C'$，故 $BC=B'C'$.

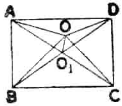
850. 設 O 為矩形 ABCD 內之任意點，則 $\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=\overline{OB}^2+\overline{OD}^2$.

證 過點 O 引 AD 之平行線 EF，命其與



AB, CD 之交點，分別為 E, F，則 EF⊥AB, EF⊥CD，且 $AE=DF$, $EB=FC$．而 $\overline{OA}^2=\overline{OE}^2+\overline{AE}^2$, $\overline{OB}^2=\overline{OE}^2+\overline{BE}^2$, $\overline{OC}^2=\overline{OF}^2+\overline{FC}^2$, $\overline{OD}^2=\overline{OF}^2+\overline{DF}^2$，故 $\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=\overline{OE}^2+\overline{OF}^2+\overline{AE}^2+\overline{FC}^2=(\overline{OE}^2+\overline{BE}^2)+(\overline{OF}^2+\overline{DF}^2)=\overline{OB}^2+\overline{OD}^2$.

別證 聯結點 O 與對角線之交點 O_1, 則

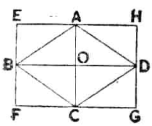


$\overline{AO}^2+\overline{CO}^2=2(\overline{AO_1}^2+\overline{O_1O}^2)$,
$\overline{BO}^2+\overline{DO}^2=2(\overline{BO_1}^2+\overline{O_1O}^2)$.
而 $AO_1=BO_1$. 故如題所言.

注意 點 O 並不一定須在矩形內.

851. 菱形之面積,等於其二對角線所包矩形之半.

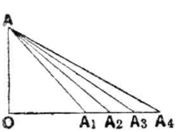
證 設 ABCD 爲菱形,過其各角頂,平行於不過此角頂之他對角線,引四直線,則得平行四邊形 EFGH, 其邊等於對角線. 而平行四邊形 EG＝2 菱形 AC [396 題], 且 AC ⊥ BD, 故 EFGH 爲矩形,故如題所言.



別證 設菱形 ABCD 對角線之交點爲 O, 則因 AC ⊥ BD, 故 $\triangle ABD=\frac{1}{2}AO\cdot BD$, $\triangle CBD=\frac{1}{2}CO\cdot BD$. 故菱形 $ABCD=\triangle ABD+\triangle CBD=\frac{1}{2}BD(AO+CO)=\frac{1}{2}AC\cdot BD$.

852. 引線分 OA, OA_1, 令互相垂直,且等於定正方形之邊. 在 OA_1 之延線上, 取 OA_2, 令等於 AA_1; OA_3, 令等於 AA_2; OA_4, 令等於 AA_3; 則 OA_2, OA_3, OA_4 爲邊之正方形之面積,等於定正方形面積之2倍, 3倍, 4倍.

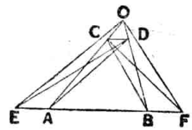
證 因 AOA_1 爲直角三角形, 故 $\overline{OA}^2+\overline{OA_1}^2=\overline{AA_1}^2$, 即 $2\overline{OA}^2=\overline{AA_1}^2=\overline{OA_2}^2$. $\overline{OA}^2+\overline{OA_2}^2=\overline{AA_2}^2$, 即 $3\overline{OA}^2=\overline{AA_2}^2=\overline{OA_3}^2$. 又 $\overline{OA_4}^2=\overline{AA_3}^2=\overline{OA}^2+\overline{OA_3}^2=4\overline{OA}^2$.



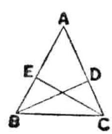
故 OA_2, OA_3, OA_4 上之正方形, 等於 OA 上之正方形, 即定正方形面積之 2 倍, 3 倍, 4 倍.

853. 設兩等積三角形 ACB, ADB 共底,且在其同側, 由 AC, BD 之交點 O, 平行於 DA, CB, 引二直線,命其與 AB 之交點,分別爲 E, F, 則 AE＝BF.

證 因 $\triangle ACB=\triangle ADB$, 故 CD ∥ AB [738 題], 因而 $\triangle ACD=\triangle BCD$. 各加 $\triangle OCD$, 則 $\triangle OAD=\triangle OCB$. 又因 OE ∥ DA, OF ∥ CB, 故 $\triangle OAD=\triangle EAD$, $\triangle OCB=\triangle FCB$, 因而 $\triangle DEA=\triangle CBF$. 而此兩三角形, 若分別以 EA, BF 爲底,則因其高相等,故 AE＝BF.



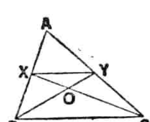
854. 設由三角形之二頂點至對邊之垂線相等,則三角形爲二等邊.



證 設△ABC 中,由 B, C 至對邊所引之垂線,分別爲 BD, CE, 則 $\triangle ABC=\frac{1}{2}BD\cdot AC$ [735 題] $=\frac{1}{2}CE\cdot AB$. 然 BD＝CE, 故 AC＝AB.

855. 設三角形 ABC 之邊 AB, AC 之中點,分別爲 X, Y, 又 BY, CX 之交點爲 O, 則三角形 AXY 爲三角形 XOY 之三倍.

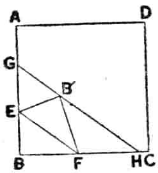
證 BY, CX 爲△ABC 之中線,故 O 爲其重心, 因此 $OY=\frac{1}{3}BY$. 於是兩三角形 XBY, XOY, 因其高相等, 故 $\triangle XBY=3\triangle XOY$. 又因 X 爲 AB 之中點, 故 $\triangle AXY=\triangle XBY$, 故 $\triangle AXY=3\triangle XOY$.



856. 折一紙角, 又再折之, 令兩折痕平

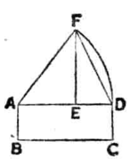
行, 所折紙角在第二折痕上, 則第一折痕所截去之三角形,爲兩折痕間面積之三分之一.

解 設紙角爲 B, EF 爲折痕. 折後所取之位置爲 B′EF. 過 B′, 引 EF 之平行線 GH, 則此直線爲第二折痕. 此時所欲證者,爲 △BEF 等於梯形 EFHG 之三分之一. 因 B′ 爲 B 關於 EF 之對稱點, 故 BB′ 爲 EF 垂直二等分,因而 E, F 爲邊 BG, BH 之中點. 故 △BEF $=\frac{1}{2}$ △BEH, △BEH $=\frac{1}{2}$ △GBH. 故 △BEF $=\frac{1}{4}$ △GBH. 因此 △EBF 爲梯形 EH 之三分之一.



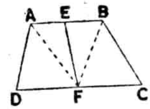
857. 設 ABCD 爲矩形, DE 等於 DC, 而爲 DA 之一部分. 引 AD 之垂線 EF, 令交中心 A 半徑 AD 之圓周於 F. 則 DF 等於與矩形面積之正方形之對角線.

解 設以 A 爲中心, AD 爲半徑之圓,其直徑爲 DD′, 聯結 D′F [圖中從略], 則 $\overline{DF}^2 = DD'\cdot DE = 2AD\cdot DC$. 而 AD·DC 等於矩形 AC, 故 DF 等於與矩形 AC 等積之正方形之對角線.



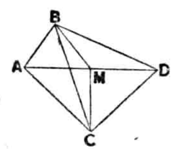
858. 四邊形中, 聯結其一組對邊中點之線分, 若將四邊形分爲二等積部分, 則此一組對邊平行.

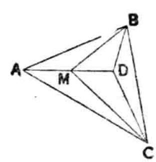
解 設四邊形 ABCD 中, 聯結對邊 AB, DC 之中點 E, F, 而四邊形 ADFE = BCFE; 求證 AB ∥ DC. 聯結 AF, BF, 則因 E 爲 AB 之中點, 故 △AFE = △BFE. 而根據假設, 四邊形 ADFE = BCFE, 故 △ADF = △BCF. 而 DF = CF, 故 AB 平行於 CD [738題].



859. 設 B, C 爲在一線分 AD 異側之二點, AD 之中點爲 M, 則 △MBC 之面積, 爲兩三角形 ABC, DBC 差之半分,或和之半分.

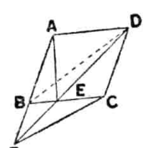
解 因 M 爲 AD 之中點, 故 △ABM = △BDM, △ACM = △CDM, 故四邊形 ABMC = DBMC. 而若 BC 與 AD 交, 則 △ABC = 四邊形 ABMC ± △MBC, △DBC = 四邊形 DBMC ∓ △MBC, 故 △ABC ∼ △DBC = 2 △MBC, 即 △MBC $=\frac{1}{2}$ (△ABC ∼ △DBC). 若 BC 與 AD 之延線交, 則 △ABC = 四邊形 ABMC + △MBC, 及 △DBC = △MBC − 四邊形 DBMC, 故 △ABC + △DBC = 2△MBC, 即 △MBC $=\frac{1}{2}$ (△ABC + △DBC). 又若 BC 與 DA 之延線交亦同.





860. 平行四邊形 ABCD 中, 由角頂 D 引任意直線 DEF, 令與邊 BC 交於 E, 與 AB 之延線交於 F, 則兩三角形 ABE, CEF 等積.

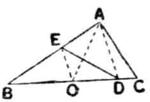
解 聯結 BD, 則因 CD ∥ AF, 故 △DBF = △CBF. 由各方



取去其公有部分,則 △DBE = △CEF. 而 AD ∥ BE, 故 △ABE = △DBE, 因此 △ABE = △CEF.

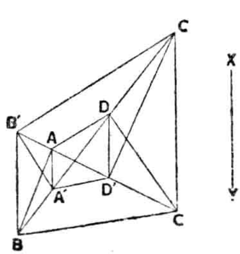
861. 設直角三角形 ABC 之邊 AB 大於 AC, 在斜邊 BC 上取 BD = BA, 又設 DE 爲二等分三角形之直線, 則 BE = DE = $\frac{1}{2}$BC.

證 因 AB > AC, 故設斜邊 BC 之中點爲 O, 則 D 在 O 與 C 之間, 此甚易知之. 又聯結 AD, AO, EO, 則 △BED = $\frac{1}{2}$△ABC [假設] = △ABO. 由各方取去公有部分, 則 △DEO = △AEO, 故 AD ∥ EO. 而 AB = BD, 故 BE = BO, 因而 AE = OD, 故 AEOD 爲二等邊梯形, 因而 AO = ED. 又因點 O 爲 BC 之中點, 故 AO = BO = $\frac{1}{2}$BC, 故 BE = ED = $\frac{1}{2}$BC.



862. 設由四邊形 ABCD 之各角頂, 引所設直線之平行線, 命其與不過此角頂之對角線之交點, 分別爲 A′, B′, C′, D′, 則四邊形 ABCD, A′B′C′D′ 等積.

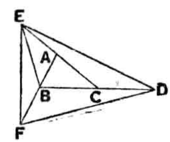
證 命所設直線爲 XY, 則 AA′, BB′, CC′,



DD′ 皆平行於 XY, 故互相平行. 據此, △BB′C = △BB′C′, △BB′A = △BB′A′, 故 △BB′C − △BB′A = △BB′C′ − △BB′A′, 卽 △BAC = △B′A′C′. 又 △DD′A = △DD′A′, △DD′C = △DD′C′, 故 △DD′A + △DA′C = △DD′A′ + △DD′C′, 卽 △DAC = △D′A′C′. 故 △BAC + △DAC = △B′A′C′ + △D′A′C′, 卽四邊形 ABCD = A′B′C′D′.

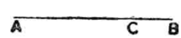
863. 在三角形 ABC 各邊之延線上, 取 CD, AE, BF, 令分別等於各邊, 則三角形 DEF 等於三角形 ABC 之7倍.

證 聯結 EB, 則因 B 爲 AF 之中點, 故 △EBF = △EAB. 又因 A 爲 EC 之中點, 故 △EAB = △ABC. 故 △EAF = 2△ABC. 同理, △FBD = 2△ABC, △DCE = 2△ABC. 故 △DEF = 6△ABC + △ABC = 7△ABC.



864. 設分線分 AB 於 C, 而 $\overline{AC}^2 = 2\overline{CB}^2$, 則 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2AB\cdot AC$.

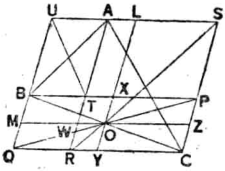
證 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC+BC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 + 2AC\cdot BC + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + 2\overline{BC}^2 + 2AC\cdot BC = \overline{AC}^2 + AC^2 + 2AC\cdot BC$ [假設] $= 2\overline{AC}^2 + 2AC\cdot BC = 2AC(AC+BC) = 2AC\cdot AB$.



若外分, 則 AB = AC ～ BC, 而結果同前.

865. 以三角形之各邊爲對角線, 以所設二直線之平行線爲邊, 作三平行四邊形, 則是等四邊形之他對角線, 交於一點.

證 設三角形爲 ABC, 所作之三平行四邊形爲 BPCQ, CRAS, ATBU; 求證 PQ, RS, TU, 或其延線交於一點. 今設 PQ, RS 之交點爲 O, 過 O 平行於所設直線引二直線 XOY,

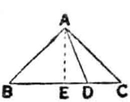


ZOW, 令交 BTP 於 X, SPC 於 Z, 命 XY 與 UAS 之交點爲 L, ZW 與 UBQ 之交點爲 M. 於是因 O 在平行四邊形 BPCQ 之對角線 PQ 上,故□OB=□OC; 又因 O 在 RS 上,故□OC=□OA. 故□OB=□OA, 因而□TM=□TL. 故 T 在平行四邊形 OLUM 之對角線 OU 上, 卽 UT 亦過 O.

注意 設三角形之邊中,有平行於所設直線者,則本題之平行四邊形,消失其一或二. 此時四邊形之他二或一對角線,或交於三角形之一邊上,或過其角頂.

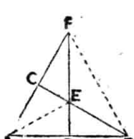
866. 設二等邊直角三角形 ABC 中, D 爲斜邊 BC 上之任意點,則 $2\overline{AD}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$.

證 由頂點 A 引斜邊 BC 之垂線 AE, 則 E 爲 BC 之中點, 故 AE=BE=CE. 故 $2\overline{AD}^2=2(\overline{AE}^2+\overline{ED}^2)=\overline{AE+ED}^2+\overline{AE-ED}^2=\overline{BE+ED}^2+\overline{CE-ED}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2$.



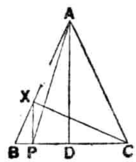
867. 直角三角形中,斜邊之垂直二等分線,將他一邊內分或外分,此二分上正方形之差,等於第三邊上之正方形.

證 設直角三角形 ABC 中,斜邊 BC 之垂直二等分線,與 AB, BC 及 AC 延線之交點,分別爲 D, E, F, 求證 $\overline{BE}^2-\overline{CE}^2=\overline{AC}^2$, 及 $\overline{AF}^2-\overline{CF}^2=\overline{BC}^2$. 聯結 AE, 則因 ED 爲 AB 之垂直二等分線,故 AE=EB. 而△ACE 爲 $\hat{C}$ 爲直角之直角三角形, 故 $\overline{BE}^2-\overline{CE}^2=\overline{AE}^2-\overline{CE}^2=\overline{AC}^2$. 又聯結 BF, 則 AF=FB. 而△BCF 爲 $\hat{C}$ 爲直角之直角三角形,故 $\overline{AF}^2-\overline{CF}^2=\overline{BF}^2-\overline{CF}^2=\overline{BC}^2$.



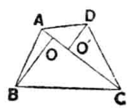
868. 設 ABC 爲二等邊三角形, A 爲頂點, CX 爲 AB 之垂線, XP 爲 BC 之垂線, 則 $\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PX}^2$.

證 由 A 引 BC 之垂線 AD, 則 BD=CD. 而 $\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AP}^2-\overline{PD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AP}^2+\overline{BD}^2-\overline{PD}^2=\overline{AP}^2+(BD+PD)\times(BD-PD)=\overline{AP}^2+CP\cdot BP=\overline{AP}^2+\overline{XP}^2$ [772題].



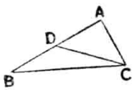
869. 四邊形中,設對邊上正方形之和相等,則二對角線互相垂直.

證 設四邊形 ABCD 中, $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$; 求證 AC, BD 互相垂直. 由 B, D 至 AC 引垂線 BO, DO′, 則 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2+\overline{CO'}^2+\overline{DO'}^2$, $\overline{AD}^2+\overline{BC}^2=\overline{AO'}^2+\overline{DO'}^2+\overline{BO}^2+\overline{CO}^2$. 而 $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=\overline{AD}^2+\overline{BC}^2$, 故 $\overline{AO}^2+\overline{CO'}^2=\overline{AO'}^2+\overline{CO}^2$, 卽 $\overline{AO}^2-\overline{CO}^2=\overline{AO'}^2-\overline{CO'}^2$, 卽 $(AO+CO)(AO-CO)=(AO'+CO')(AO'-CO')$. 而 $AO+CO=AC=AO'+CO'$, 故 $AO-CO=AO'-CO'$. 然欲令此關係成立, 非 O, O′ 一致不可. 故 AC, BD 互相垂直.



870. 直角三角形中,由銳角頂點至對邊中點所引直線上之正方形,等於斜邊上之正方形,減去此對邊半分上正方形之三倍.

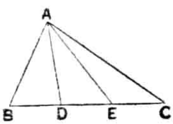
證 設 $\hat{A}=\hat{R}$ 之直角三角形 ABC 中, AB 之



中點為D；求證 $\overline{CD}^2=\overline{BC}^2-3\overline{AD}^2$. 因 $\hat{A}=\hat{R}$, 故 $\overline{CD}^2=\overline{AC}^2+\overline{AD}^2$[750題]$=\overline{BC}^2-\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=\overline{BC}^2-4\overline{AD}^2+\overline{AD}^2$[743題]$=\overline{BC}^2-3\overline{AD}^2$.

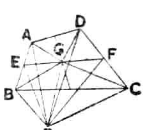
871. 設三角形ABC之邊BC，三等分於D, E, 則 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$.

證 因 $BD=DE=EC$, 故 $\overline{AB}^2+\overline{AE}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2$, $\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2$, 故 $\overline{AB}^2+\overline{AE}^2+\overline{AD}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2+2\overline{AE}^2+2\overline{DE}^2$, 即 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{BD}^2$, 即 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+\overline{BE}^2$.



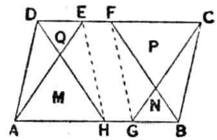
872. 設四邊形ABCD中，聯結對邊中點之直線，交於點G，而P為任意點，則 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{DG}^2+4\overline{PG}^2$.

證 四邊形ABCD中，依次聯結其各邊之中點，則成平行四邊形[165題]；故設AB, CD之中點為E, F, 則G為EF之中點. 故 $4\overline{PG}^2+4\overline{EG}^2=2\overline{PE}^2+2\overline{PF}^2$[754題]. 又 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=2\overline{PE}^2+2\overline{AE}^2+2\overline{PF}^2+2\overline{DF}^2=4\overline{PG}^2+4\overline{EG}^2+2\overline{AE}^2+2\overline{DF}^2$; $\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{DG}^2=2\overline{GE}^2+2\overline{AE}^2+2\overline{GF}^2+2\overline{DF}^2=4\overline{EG}^2+2\overline{AE}^2+2\overline{DF}^2$. 故 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+\overline{DG}^2+4\overline{PG}^2$.



873. 設平行四邊形ABCD中，由各角頂引直線AE, BF, CG, DH, 令AE=DH, BF=CG, 則圖中之四個三角形M, N, P, Q間，有以下之關係：M+N=P+Q.

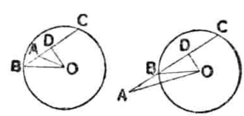
證 聯結EH，則梯形ADEH中，AE=DH，故DA=EH[298題]，故 $D\hat{A}H=E\hat{H}A$. 仿此，聯結FG，則 $F\hat{G}B=C\hat{B}G$. 而 $D\hat{A}H+C\hat{B}G=2\hat{R}$, 故 $E\hat{H}A+F\hat{G}B=2\hat{R}$; 故 $EH\parallel FG$, 因而 $EF=HG$. 於是梯形AEFB, DHGC中，兩底分別相等，高亦相等，故兩形等積. 因而兩形中除去其公有之六邊形，則所餘之 M+N=P+Q.



第二章 圓

874. 將圓之弦內分或外分，則此二分所包矩形，等於半徑上之正方形與聯結所設點及圓之中心之直線上正方形之差.

證 設BC為圓O之弦，二分之於點A；求證AB, AC所包之矩形，等於OB, OA上正方形之差. 引BC之垂線OD，則BD等於DC[440題]. 據此，AC等於BD與AD之和，AB則等於其差；故AB與AC所包之矩形，等於BD, AD上正方形之差[748題]，而OB上之正方形，等於BD, OD上正方形之和[750題]；OA上之正方形，等於AD, OD上正方形之和[750題]；故OB, OA上正方形之差，等於BD, AD上正方形之差. 據此，AB與AC所包之矩



形，等於 OB, OA 上正方形之差.

875. 過圓之平面上之一所設點，引任意弦，則此各弦爲所設點分成二分，其所包之矩形相等.

圖　由前題自明.

876. 若所設點在圓內，則過此點之任意弦爲此點所分之二分所包之矩形，等於二等分於此點之弦半分上之正方形.

圖　本題爲前題之特例.

877. 若所設點在圓外，則過此點之任意弦爲此點所分之二分所包之矩形，等於由此點至圓所引切線上之正方形.

圖　本題爲 875 題之特例.

878. 反之，設過圓外一點之弦，其爲此點所分二分所包之矩形，等於此點與圓周上之一點聯結之直線上之正方形，則此直線爲圓之切線.

圖　設 AB, AC 所包之矩形，等於 AP 上之正方形，而 AP 不切於圓，則 AP 當復交圓於 Q 點. 故由 875 題，AP, AQ 所包之矩形，等於 AB, AC 所包之矩形. 而由假設，AB, AC 所包之矩形，等於 AP 上之正方形，故 AP, AQ 所包之矩形，等於 AP 上之正方形. 此不合理，故 AP 切於圓.

879. 設兩等圓之中心，互在他圓周上，則其公弦上之正方形，等於半徑上正方形之三倍.

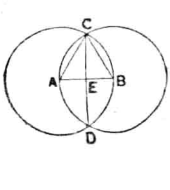
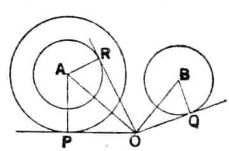


圖　設兩等圓之中心爲 A, B，其交點爲 C, D，則 AC, AB, BC 各爲等圓之半徑，故相等，故 ABC 爲正三角形. 命 CD 與 AB 之交點爲 E，則因 CD, AB 互相垂直二等分，故 $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2$ [750 題] $= \frac{1}{4}\overline{AB}^2 + \frac{1}{4}\overline{CD}^2$，即 $4\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2$. 故 $\overline{CD}^2 = 3\overline{AC}^2$.

880. 設 A, B 爲兩等圓之中心，O 爲圓外之定點. 今以 A 爲中心，OB 爲半徑作圓，則由 O 至此三圓所引之切線，等於直角三角形之三邊.

圖　設由 O 所引之三切線爲 OP, OQ, OR，

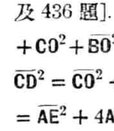


則 $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AP}^2$ [750題]，$\overline{OQ}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BQ}^2$，$\overline{OR}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AR}^2$，

又 AP = OB，AR = BQ，故 $\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AP}^2 + \overline{OB}^2 - \overline{BQ}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AR}^2 = \overline{OR}^2$.

881. 設兩弦 AB, CD 直交於 O，則其四分上正方形之和，等於直徑上之正方形. 又設圓之中心爲 M 則 $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 8\overline{AM}^2 - 4\overline{MO}^2$.

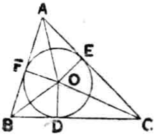
圖　過 A 引直徑 AE，聯結 BC, BE, DE, AD,



則 $A\hat{B}E = \hat{R} = A\hat{D}E$，故 $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2$ [750題]. 又因 BE, CD 皆爲 AB 之垂線，故相平行，而 DE = BC [474 及 436 題]. 故 $\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2 + \overline{CO}^2 + \overline{BO}^2$. 又 $\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{BO}^2 + 2AO \cdot BO$，$\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 + 2CO \cdot OD$；故 $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AE}^2 + 4AO \cdot BO = 4\overline{AM}^2 + 4(\overline{AM}^2 - \overline{MO}^2)$ [774題] $= 8\overline{AM}^2 - 4\overline{MO}^2$.

882. 三角形之面積，等於其周與內切圓之半徑所包矩形之半分.

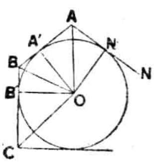
圖　設三角形 ABC 內切圓之中心爲 O，各



邊之切點分別爲 D, E, F, 則 $\triangle ABC = \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCA$. 而 $\triangle OAB = \frac{1}{2}AB \cdot OF$, $\triangle OBC = \frac{1}{2}BC \cdot OD$, $\triangle OCA = \frac{1}{2}CA \cdot OE$, 且 $OD = OE = OF$, 故 $\triangle ABC = \frac{1}{2}(AB+BC+CA)OD$.

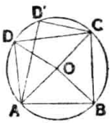
883. 圓之外切多角形, 等於其周與圓之半徑所包矩形之半分.

證 設圓 O 之外切 n 邊多角形爲 ABC……N, 聯結各角頂與中心 O, 則得 N 個三角形 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$,……. 而 $\triangle OAB = \frac{1}{2}AB \cdot OA'$ [735 題], $\triangle OBC = \frac{1}{2}BC \cdot OB'$,……, $\triangle ONA = \frac{1}{2}NA \cdot ON'$. 而 $OA' = OB' = \cdots\cdots = ON'$ [同圓之半徑], 故多角形 $ABCD\cdots\cdots N = \triangle OAB + \triangle OBC + \cdots\cdots + \triangle ONA = \frac{1}{2}AB \cdot OA' + \frac{1}{2}BC \cdot OB' + \cdots\cdots + \frac{1}{2}NA \cdot ON' = \frac{1}{2}(AB + BC + \cdots\cdots + NA)OA'$ [741 題].



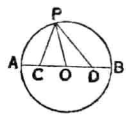
884. 設圓之任意內接四邊形中, 四邊之長一定, 則不問其邊之順序如何, 四邊形之面積一定. 又角之大小, 隨邊之順序變化而變化.

證 設 ABCD 爲內接於圓且各邊之長一定之四邊形. 今設外接圓之中心爲 O, 聯結 O 與各頂點, 則得四個三角形. 而此四邊形, 其邊之順序無論如何變更, 而所生之各三角形, 則恆爲四邊形之一邊與外接圓之二半徑所成, 故其面積一定, 因而其和亦一定. 次設 $CD > AD$, 變更其順序, 而 $AD' = CD$, 則因弧 $BAD' >$ 弧 BAD, 故 $B\hat{A}D' < B\hat{A}D$. 故若邊之順序變化, 則角之大小亦隨而變化.



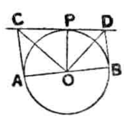
885. 在圓之直徑上, 取距中心等遠之兩點, 則由圓周上之任意點, 至此二點之距離上正方形之和一定.

證 在圓 O 之直徑上取兩點 C, D, 令 $OC = OD$, 又在圓周上取任意點 P, 則 $\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 2(\overline{PO}^2 + \overline{CO}^2)$ [754 題]. 而 PO 爲圓之半徑, 故一定, C 爲定點, 故 CO 亦一定. 故 $2(\overline{PO}^2 + \overline{CO}^2)$, 卽 $\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$ 亦一定.



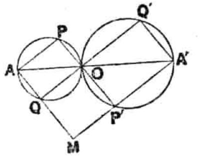
886. 引一圓之切線, 復於一直徑之兩端引二切線, 令截前切線, 則其截得之部分上爲切點所分成之二分所包之矩形, 等於半徑上之正方形.

證 設 AB 爲圓之直徑, CD 爲圓之任意切線, 其切點爲 P, 且與 A, B 上之切線交於 C, D, 又設圓之中心爲 O, 聯結 CO, DO. 於是 CO 將 AOP 二等分, OD 將 $B\hat{O}P$ 二等分 [556 及 65 題], 故 $D\hat{O}C = \frac{1}{2}B\hat{O}A = \hat{R}$, 又 $OP \perp CD$, 故 $CP \cdot DP = OP^2$ [772 題].



887. 設兩圓相切於點 O, 過切點引兩公割線 POP′, QOQ′, 令互相垂直, 命中心線與二圓之交點爲 A, A′, 則 PP′, QQ′ 上正方形之和, 等於 AA′ 上之正方形.

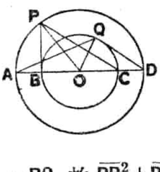
證 設 AQ, A′P′ 延線之交點爲 M, 則因 AO, OA′ 爲圓之直徑, 故 $A\hat{Q}O = \hat{R} = O\hat{P}'A'$



$=Q\hat{O}P'$, 故 $\hat{M}=\hat{R}$, $\overline{AA'}^2=\overline{AM}^2+\overline{A'M}^2$. 而 $AM=PP'$, $A'M=QQ'$, 故 $\overline{AA'}^2=\overline{PP'}^2+\overline{QQ'}^2$

888. 設兩同心圓之公直徑爲 ABCD, 外圓周上之任意點爲 P, 內圓周上之任意點爲 Q, 則 PB, PC 上正方形之和,等於 QA, QD 上正方形之和.

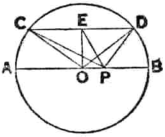
證 設同心圓之中心爲 O, 聯結 OP, OQ,



則三角形 PBC 中, $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{PO}^2+\overline{BO}^2)$ [764題]; 又三角形 QAD 中, $\overline{QA}^2+\overline{QD}^2=2(\overline{AO}^2+\overline{QO}^2)$. 而 $PO=AO$, $QO=BO$, 故 $\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{QA}^2+\overline{QD}^2$.

889. 設圓之弦 CD, 平行於直徑 AB, 命 P 爲 AB 上之任意點,則 CP, DP 上正方形之和,等於 AP, BP 上正方形之和.

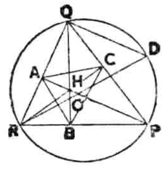
證 設圓之中心爲 O, 弦 CD 之中點爲 E,



聯結 PE. 於是 $\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=2(\overline{PE}^2+\overline{CE}^2)$ [754題] $=2(\overline{EO}^2+\overline{OP}^2+\overline{CE}^2)$ $=2\overline{EO}^2+2\overline{CE}^2+2\overline{OP}^2$ $=2\overline{CO}^2+2\overline{OP}^2=2(\overline{CO}^2+\overline{OP}^2)$. 而 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AO+OP}^2+\overline{AO-OP}^2=2(\overline{AO}^2+\overline{OP}^2)$. 故 $\overline{CP}^2+\overline{PD}^2=\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$.

890. 設四圓各切於不過同點亦不平行之三直線,則任意二圓中心線上正方形,與他二圓中心線上正方形之和,等於過任意三圓中心之圓中直徑上之正方形.

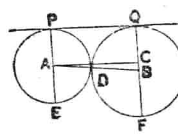
證 設不過同點且不平行之三直線爲



AB, BC, CA, 切於此三直線之圓之中心爲 H, P, Q, R, 則三角形 PQR 外接於三角形 ABC, H 爲其垂心[717題].設三角形 PQR 外接圓之直徑爲 RD, 聯結 QD, 則因 $R\hat{Q}D=\hat{R}$, 故 $\overline{RD}^2=\overline{RQ}^2+\overline{QD}^2$ [750題]. 而 QHPD 爲平行四邊形,故 $QD=PH$ [509題]. 故 $\overline{RD}^2=\overline{RQ}^2+\overline{PH}^2$. 同理, $\overline{RD}^2=\overline{RH}^2+\overline{PQ}^2$, $\overline{RD}^2=\overline{PR}^2+\overline{QH}^2$. 而 P, Q, R, H 四點中,各點爲他三點所成三角形之垂心 [196 題], 故過其任何三點之圓,其直徑相等.

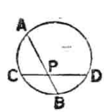
891. 設兩圓外切,則其公切線上之正方形,等於二圓直徑所包之矩形.

證 設 A, B 爲外切於 D 之二圓,公切線爲



PQ, 過 P, Q 引各圓之直徑 PE, QF, 又由 A 引 QF 之垂線 AC. 於是因 $A\hat{C}B=\hat{R}$, 故 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=(AB+BC)(AB-BC)$. 而 $AB+BC=AD+DB+BC$ $=AP+BF+BC=CQ+BF+BC=QF$; $AB-BC=AD+DB-BC=AE+BQ-BC=AE+CQ=AE+AP=PE$. 故 $\overline{AC}^2=\overline{PQ}^2=QF\cdot PE$.

892. 設過圓內一點之弦,其二分所包之矩形,等於過此點之他弦一分上之正方形,則第二弦二等分於此點.

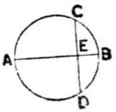


證 設圓內之一點爲 P, 過 P 之弦爲 APB, CPD, 而 $AP\cdot BP=\overline{DP}^2$; 求證 CD 二等分於 P. 今 $AP\cdot BP=CP\cdot DP$ [875 題],

故 $CP\cdot DP=\overline{DP}^2$, 故 $CP=DP$.

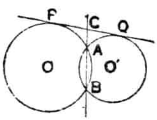
893. 由圓周上之一點至直徑所引垂線上之正方形,等於其垂足所分直徑之二分所包之矩形.

證 設 C 爲圓周上之點, AB 爲直徑,由 C 至 AB 所引之垂線爲 CE, 其延線與圓周之交點爲 D, 則因 CD 垂直於 AB,故 $CE=ED$ [876題],故 $\overline{CE}^2=AE\cdot BE$ [876題].



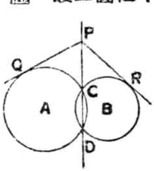
894. 設兩圓周相交,則其公弦之延線,將公切線切點間之部分二等分.

證 設 A, B 爲二圓 O, O′ 之交點, PQ 爲公切線, 公弦之延線與 PQ 之交點爲 C, 因 CAB 爲圓 O 之割線,故 $\overline{CP}^2=CA\cdot CB$ [877題]. 又因 CAB 爲圓 O′ 之割線, 故 $\overline{CQ}^2=CA\cdot CB$. 故 $\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2$, 因而 $CP=CQ$, 故 AB 將 PQ 二等分.



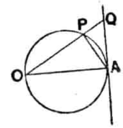
895. 由相交二圓公弦延線上之任意點,至兩圓所引之切線相等.

證 設二圓之中心爲 A, B, 公弦爲 CD, 其延線上之任意點爲P,由 P 所引二圓之切線爲 PQ, PR. 此時因 PCD 爲圓 A 之割線, 故 $PC\cdot PD=\overline{PQ}^2$ [877題].同理, $PC\cdot PD=\overline{PR}^2$. 故 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$, 即 $PQ=PR$.



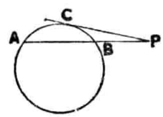
896. 由圓之直徑 OA 之一端 O, 引任意直線 OPQ, 令其交圓周於 P, 交過 A 之 OA 之垂線於 Q, 則矩形 $OP\cdot OQ$ 一定.

證 聯結 PA,則因 OA 爲圓之直徑,故 $O\hat{P}A=\hat{R}$, 故 $A\hat{P}Q=\hat{R}$. 因此以 AQ 爲直徑作圓,則圓周過 P [486題]. 而 $O\hat{A}Q=\hat{R}$, 故 $P\hat{Q}A=P\hat{A}O$, 故 OA 切於圓 APQ [559題]. 故 $OP\cdot OQ=OA^2$[877題],因而一定.



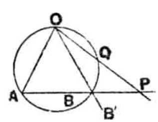
897. 由有限直線 AB 延線上之一定點,至過 A, B 之任意圓所引之切線皆相等.

證 設 AB 延線上之定點爲 P, 由 P 至過 A, B 之圓所引之切線爲 PC, 則 $\overline{PC}^2=PA\cdot PB$ [877題]=一定, 因而切線 PC 亦一定.



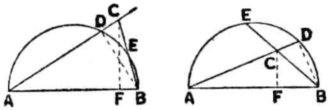
898. 過二等邊三角形 OAB 之頂點 O, 引一直線,命其交底 AB 於 P, 交外接圓周於 Q, 則矩形 $OP\cdot OQ$ 一定.

證 聯結 QB. 因角 BQP 爲內接四邊形 ABQO 之外角, 故 $B\hat{Q}P=B\hat{A}O$ [457 題] $=O\hat{B}A=P\hat{B}B'$.故作三角形 QBP 之外接圓, 則 OB 爲此圓之切線[559題].故 $OP\cdot OQ=\overline{OB}^2$ [877題],因而一定.若 OP 在 $A\hat{O}B$ 之內,亦可仿前證之.



899. 由半圓直徑AB之兩端,引二弦 AD, BE, 則 $AC\cdot AD+BC\cdot BE=\overline{AB}^2$.

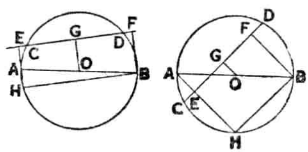
證 由半圓之直徑 AB 之兩端,引二弦 AD, BE, 由其交點 C, 引 AB 之垂線 CF. 於是因 $C\hat{F}B=A\hat{D}B=\hat{R}$, 故 C, F, B, D 在一圓周上, 因此 $AC\cdot AD=AF\cdot AB$ [875題]. 同理, $BE\cdot BC=BF\cdot AB$. 故 $AC\cdot AD+BC\cdot BE=AB(AF+BF)$



$=\overline{AB}^2$.

900. 由圓之直徑之兩端，引任意弦或其延線之垂線，則由弦之一端，至此二垂足之距離所包之矩形，等於二垂線所包之矩形.

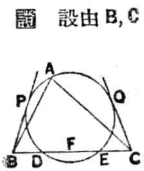
解 設由圓之直徑 AB 之兩端，所引任意



弦 CD 之垂線爲 AE, BF；求證 $CE\cdot CF=AE\cdot BF$. 今設 AE 之延線與圓周之交點爲 H, 由 O 所引 CD 之垂線爲 OG, 則 $CG=DG$ [440題], $EG=FG$ [227題], 因而 $CE=DF$, $CF=DE$, 又 $EH=BF$. 故 $AE\cdot EH=CE\cdot ED$ [875題], 卽 $AE\cdot BF=CE\cdot CF$.

901. 在三角形 ABC 之底上，取二點 D, E, 設由 B 及 C 所引圓 ADE 之切線相等，則 BD, CE 亦相等.

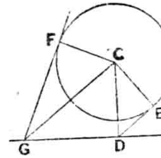
解 設由 B, C 所引之二切線爲 BP, CQ, 則 $\overline{BP}^2=BE\cdot BD$ [877 題], $\overline{CQ}^2=CE\cdot CD$. 故 $BE\cdot BD=CE\cdot CD$. 今命 DE 之中點爲 F, 則 $BE\cdot BD=\overline{BF}^2-\overline{DF}^2$ [749 題], $CD\cdot CE=\overline{CF}^2-\overline{DF}^2$. 故



$\overline{BF}^2-\overline{DF}^2=\overline{CF}^2-\overline{DF}^2$, 因而 $\overline{BF}^2=\overline{CF}^2$, 卽 $\overline{BF}=\overline{CF}$, 故 $BD=CE$.

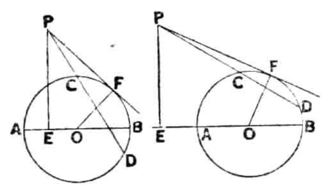
902. 由圓之中心 C 至任意直線 GD, 引垂線 CD, 由其足 D 引圓之切線 DE, 又由 GD 上之任意點引圓之切線 GF, 則 $\overline{GF}^2=\overline{GD}^2+\overline{DE}^2$. 若 G 與 D 合，則如何？

解 聯結 CG, CE, CF. 於是 $\overline{GF}^2=\overline{GC}^2-\overline{CF}^2$ [750題] $=\overline{GD}^2+\overline{DC}^2-\overline{CF}^2=\overline{GD}^2+\overline{DE}^2+\overline{EC}^2-\overline{CF}^2=\overline{GD}^2+\overline{DE}^2$. 若 G 與 D 合，則本題同 556 題.



903. 由圓外之一點，引二直線，令其一直交圓之直徑，他一截圓，則垂線上之正方形，隨此垂線內分或外分直徑，而等於割線全部與其圓外部分所包矩形及直徑之二分所包矩形之和或差.

解 設由圓 O 外之點 P, 至直徑 AB 所引

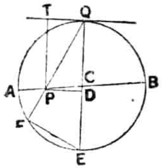


之垂線爲 PE, 割線爲 PCD, 其與圓之交點爲 C, D. 又由 P 引切線 PF, 則 $PC\cdot PD=\overline{PF}^2$ [877題]. 而 $AE\cdot EB=\overline{AO}^2-\overline{EO}^2$ [內分時，749題], 或 $AE\cdot EB=\overline{EO}^2-\overline{AO}^2$ [外分時，749 題]. 今 $\overline{PE}^2=\overline{PO}^2-\overline{OE}^2=\overline{PF}^2+\overline{OF}^2-\overline{OE}^2=\overline{PF}^2+\overline{AO}^2-\overline{OE}^2=PC\cdot PD+\overline{AO}^2-\overline{OE}^2$. 故內分時，$\overline{PE}^2=PC\cdot PD+AE\cdot EB$；外分時，$\overline{PE}^2=PC\cdot PD-AE\cdot EB$.

904. 由圓之直徑上之一點 P, 至圓周上之點 Q 上之切線，引垂線 PT, 則矩形 $PT\cdot AB$

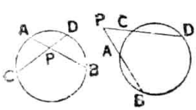
等於矩形 AP·PB 及 PQ 上正方形之和.

證 設圓之中心爲 C, 命 QC, QP 與圓周之交點爲 E, F, 又由 P 引 QE 之垂線 PD, 聯結 EF. 於是四邊形 PDEF 中, $P\hat{D}E=\hat{R}=P\hat{F}E$, 故此四邊形內接於圓 [458題], 故 QD·QE = QP·QF [875題]. 次因四邊形 PDQT 爲平行四邊形, 故 QD = PT, 故 QE·QD = AB·PT = QP·QF = QP(QP + PF) = $\overline{QP}^2$ + QP·PF. 而 QP·PF = AP·BP [875題], 故 AB·PT = $\overline{PQ}^2$ + AP·BP.



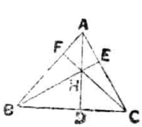
905. 設二有限直線 APB, CPD 過同點 P, 而 AP·PB = CP·PD, 則 A, C, B, D 在一圓周上.

證 欲證本題, 可證過三點 A, C, B 之圓周, 必過點 D. 於是假定此圓周截 CPD 於 D′, 則 AP·PB = CP·PD′ [875題]. 而 AP·PB = CP·PD [假設], 故 CP·PD′ = CP·PD, 故 PD′ = PD, 故 D′ 與 D 合. 因此 A, C, B, D 在一圓周上.



906. 三角形之垂心, 截各垂線而得之二分所包之矩形相等. 並證其逆定理.

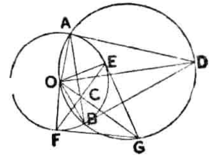
證 設△ABC 中, 由各頂點至對邊所引之垂線爲 AD, BE, CF, 其交點爲 H. 因 $B\hat{E}C=\hat{R}$, $B\hat{F}C=\hat{R}$, 故 E, F 在 BC 爲直徑之圓周上. 故 BH·EH = CH·FH [875題]. 同理, BH·EH = AH·DH. 故 BH·EH = CH·FH = AH·DH.



[逆定理] 設 BH·EH = CH·FH = AH·DH, 則 H 爲三角形 ABC 之垂心. 因 BH·EH = CH·FH, 故 B, F, E, C 四點在一圓周上 [905題], 故 $B\hat{F}C=B\hat{E}C$. 同理, $A\hat{F}C=A\hat{D}C$, $A\hat{E}B=A\hat{D}B$. 而 $A\hat{E}B$, $A\hat{F}C$ 爲等角之補角, 故相等, 因而與其相等之 $A\hat{D}B=A\hat{D}C$, 故 AD ⊥ BC. 同理, BE ⊥ AC, CF ⊥ AB. 故 H 爲垂心.

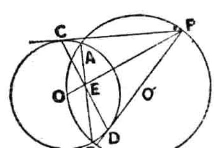
907. 在中心爲 O 之圓周上, 取二點 A, B, 於 A, B 上引切線, 命其交點爲 D, 則爲弦 AB 二等分之諸弦, 其兩端上之切線之交點, 在 OD 爲直徑之圓周上.

證 設爲弦 AB 二等分之弦爲 EF, 其交點爲 C, 命 E, F 上之切線之交點爲 G. 於是因 $O\hat{A}D=\hat{R}=O\hat{B}D$, 故 OD 爲直徑之圓周過 A, B [486題]. 同理, O, E, G, F 亦在一圓周上. 而圓 O 中; AC·BC = $\overline{CE}^2$; 圓 OG 中, OC·CG = $\overline{CE}^2$. 故 AC·BC = OC·GC, 故 O, A, G, B 在一圓周上, 即 G 在 OD 爲直徑之圓周上.



908. 設一圓周過他圓之中心, 由前圓周上之任意點, 至後圓引二切線, 則聯結其切點之直線, 爲公弦所二等分.

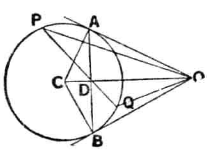
證 設圓 O′ 之周, 過圓 O 之中心, P 爲圓 O′ 周上之任意點, 由 P 所引圓 O 之二切線爲 PC, PD, 聯結其切點 C, D; 求證 CD 爲公弦



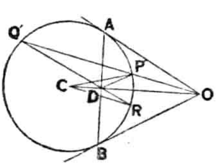
AB 所二等分.命 OP, CD 之交點爲 E, 則因 O, C, P, D 在一圓周上, 且 OP 二等分 CD [560題], 故 $OE\cdot PE=\overline{CE}^2$ [876題]. 次,聯結 AE, 命其延線與圓 O′ 之周之交點爲 B′, 則 $OE\cdot PE=AE\cdot B'E$, 故 $\overline{CE}^2=AE\cdot B'E$. 故 B′ 又在圓 O 之周上, 而 AB′ 與公弦 AB 合. 故 AB 二等分 CD.

909. 設 O 爲圓 C 外之點, OA, OB 爲由 O 所引圓 C 之切線, PQ 爲過 AB 中點 D 之任意弦,則 OC 將角 POQ 二等分.又引任意割線 OP′Q′,命其與圓周之交點爲 P′, Q′, 則 AB 將角 P′DQ′ 二等分.

證 四邊形 AOBC 中, $\hat{A}=\hat{R}=\hat{B}$, 故得作其



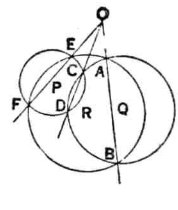
外接圓[486題].又 CO 將 AB 垂直二等分, 故 $\overline{AD}^2=CD\cdot DO$ [876題]. 而 $\overline{AD}^2=PD\cdot QD$, 故 $PD\cdot QD=CD\cdot DO$, 故 C, P, O, Q 在一圓周上 [905題]. 故此圓中,弦 PC= 弦 QC 所對之圓周角 $P\hat{O}C=Q\hat{O}C$ [436及466題]. 次設 Q′D 之



延線與圓周之交點爲 R, 則 O′, R, C, Q′ 在一圓周上, 故 $R\hat{C}O=R\hat{Q}'O$ [466題]. 而 $R\hat{Q}'P'=\frac{1}{2}R\hat{C}P'$ [451題]. 故 $R\hat{C}O=O\hat{C}P'$, 因而 $\triangle RCD\equiv\triangle P'CD$, 故 $R\hat{D}C=P'\hat{D}C$. 雙方減以 $\hat{R}$, 則 $P'\hat{D}A=R\hat{D}B=A\hat{D}Q'$, 故 AD 將 $P'\hat{D}Q'$ 二等分.

910. 作各圓, 令過二所設點, 並交所設圓, 則其公弦之交點唯一, 且在過二所設點之直線上.

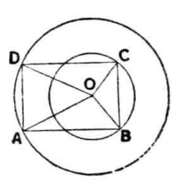
證 命所設二點爲 A, B, 所設圓爲 P. 今作一圓 Q, 令過 A, B, 且與圓 P 交於 C, D, 命二圓之公弦與 AB 延線之交點爲 O; 又作他任意圓 R, 令過 A, B, 且與圓 P 交於 E, F. 求證 EF 過 O. 設



EF 不過 O, 聯結 OF, 命其與圓 P 之交點爲 E′, 則 $OA\cdot OB=OC\cdot OD=OE'\cdot OF$ [875題],故 A, B, F, E′ 在一圓周上 [905題]. 然圓 R 亦過 A, B, F 三點, 因此得兩個公有三點之圓. 此不合理, 故 E 與 E′ 非相合不可, 故 EF 過點 O.

911. 固定矩形之一角項,令他二角項移動於一定之圓周上,則他一角項移動於與前圓同心之圓周上.

證 (1) 設矩形之一角項 A 固定, 他二角項 B, C 動於中心爲 O 之定圓周上.聯結 OA, OB, OC, OD, 則因 O 在 BC 及 DA 之公共垂直二等分線上, 故 OD =OA= 一定. 故 D 動於中心 O, 半徑 OA 之

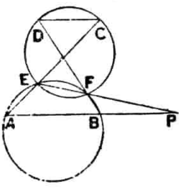


圓周上. (2)設 A 固定, B, D 動於中心爲 O 之定圓周上. 命矩形 ABCD 之對角線交點爲 E, 聯結 OA, OB, OC, OD 及 OE, 則 $\overline{OA}^2+\overline{OC}^2=2(\overline{OE}^2+\overline{AE}^2)=2(\overline{OE}^2+\overline{BE}^2)=\overline{OB}^2+\overline{OD}^2=2\overline{OB}^2$. 而 OA, OB 之長一定,故 OC

之長一定. 因此 C 動於中心 O 之定圓周上.

912. 設有限直線 AB 之位置一定, CD 爲定圓之動弦, 而平行於 AB, 聯結 AC 及 BD, 令分別截圓於 E, F, 則 EF 截 AB 於定點.

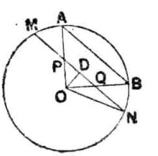
[證] 因 $E\hat{F}D=E\hat{C}D=C\hat{A}B$, 故四邊形 ABFE 內接於圓. 而過定點 A, B 之任意圓, 與定圓 CDE 之交點聯結之直線, 皆與 AB 交於同點 [910題], 故 EF 與 AB 之交點 P 爲定點.



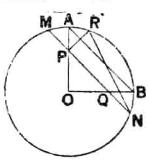
[注意] 交換圖中之 C, D, 本題仍能成立, 且其證較本題更易.

913. 設 AB 爲中心 O 之四分圓之弦, 引弦 MN, 令平行於 AB, 截半徑 OA, OB 於 P, Q, 則 $\overline{PM}^2+\overline{PN}^2=\overline{AB}^2$.

[解] 由 O 引 MN 之垂線 OD, 則 D 爲 MN 之中點, 故 $\overline{PM}^2+\overline{PN}^2=2(\overline{DN}^2+\overline{DP}^2)$ [846題]. 而 MN ∥ AB, $A\hat{O}D=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 DP=OD. 故 $\overline{PM}^2+PN^2=2(\overline{DN}^2+\overline{OD}^2)=2\overline{ON}^2$. 又 $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=2\overline{ON}^2$. 故 $\overline{PM}^2+PN^2=\overline{AB}^2$.

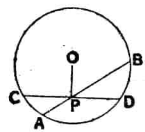


[別證] 在圓周上取點 R, 令弧 BN=弧 MA=弧 AR, 則弧 RN=弧 AB, 因而 AB=RN. 而 MP=RP, 且 $M\hat{P}A=A\hat{P}R=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 $R\hat{P}N=\hat{R}$, 故 $\overline{RP}^2+PN^2=\overline{RN}^2$, 即 $\overline{PM}^2+PN^2=\overline{AB}^2$.



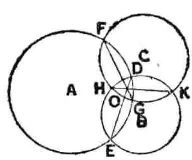
914. 試述定理過圓內所設點之弦, 其二分所包之矩形, 等於二等分於此點之弦半分上之正方形之逆定理, 並證之.

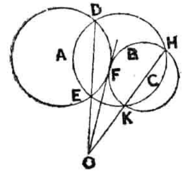
[證] 逆定理如下: 設一弦過圓內之所設點, 其二分所包矩形, 等於聯結所設點與圓周上一點之直線上之正方形, 則此直線爲二等分於此點之弦之半分. 其證如下: 設 P 爲圓內之點, AB 爲過 P 之任意弦, D 爲圓周上之點, 且 $AP\cdot PB=\overline{PD}^2$. 延長 DP, 命其與圓周之交點爲 C, 則 $AP\cdot PB=CP\cdot PD$ [875題], 故 $CP\cdot PD=\overline{PD}^2$. 故 CP=PD, 即 PD 爲二等分於 P 之弦 CD 之半分.



915. 設三圓兩兩相交, 則其公弦交於一點. 又設公弦爲公切線, 則如何?

[證] 設兩兩相交之三圓之中心爲 A, B, C, 其公弦爲 DE, FG, HK, 命 DE, FG 之交點爲 O, 則 $DO\cdot OE=FO\cdot OG$. 聯結 HO, 命 HO 或其延線與圓周 C 之交點爲 K′, 則 $FO\cdot OG=HO\cdot OK'$, 因而 $DO\cdot OE=HO\cdot OK'$, 故 K′ 亦在圓 B 之周上, 因而 K′ 與 K 合. 次設圓 A, C 相切, 則公弦 FG 變爲切線. 今命其切點爲 F, F 上之公切線與 DE 之交點爲 O, 聯結 OH, 命 OH 或其延

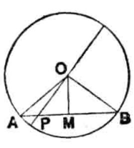




線與圓 C 周之交點為 K', 則 $OE.OD = \overline{OF}^2 = OK' \cdot OH$. 故 K' 亦在圓 B 之周上, 故 K' 與 K 合. 因此兩公弦及一公切線過同點. 仿此得證他公弦為公切線,則三直線亦過同點.

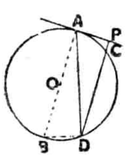
916. 設圓之弦 AB, 以半直角交所設直徑於 P, 則不問弦之位置如何, AP, PB 上正方形之和,恆等於半徑上正方形之二倍.

證 由中心 O, 至弦 AB 引垂線,命其垂足為 M,則 $AM = MB$. 又 $O\hat{P}M = \frac{1}{2}\hat{R}$ [假設]. $P\hat{M}O = \hat{R}$ [作圖],故 $P\hat{O}M$ 亦為 $\frac{1}{2}\hat{R}$, 因而 $PM = OM$ 故 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = (AM - PM)^2 + (BM + PM)^2 = (AM - OM)^2 + (AM + OM)^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{OM}^2) = 2\overline{AO}^2$.



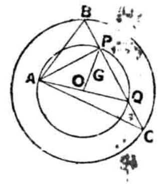
917. 設切線割線,垂直相交,則由切點至割線與圓周之二交點之距離上正方形之和,等於直徑上之正方形.

證 設圓 O 之切線 PA 與割線 PCD 互相垂直,引直徑 AOB, 聯結 BD. 於是因 $AB \perp AP$,故 $AB \parallel CD$, 故 $AC = BD$ [474題]. 又因 $A\hat{D}B = \hat{R}$, 故 $\overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 = \overline{直徑}^2$.



918. 有兩同心圓. 由內圓周上之定點P, 引任意弦PA, 垂直於PA, 引外圓之弦 BPC, 則 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 及 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$ 皆一定. 又設△ ABC 之重心為 G, 則線分 GP 亦一定.

證 設 BPC 與內圓之交點為 Q, 而 Q 在 P, C 之間,則 $BP = CQ$ [498題],聯結 AQ. 於是 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + (PQ + QC)^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PQ}^2 + \overline{QC}^2 + 2PQ \cdot QC = (\overline{PA}^2 + \overline{PQ}^2) + 2(\overline{CQ}^2 + PQ \cdot CQ) = \overline{AQ}^2 + 2CQ \cdot (CQ + PQ) = \overline{AQ}^2 + 2BP \cdot CP$. 而AQ為內圓之直徑, P 為定點,故 $\overline{AQ}^2 + 2BP \cdot CP$ 一定[875題], 因而 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 亦一定. 又 $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + (BP + PC)^2 + \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{PC}^2 + 2BP \cdot CP + \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2 = 2(\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 + BP \cdot CP)$ = 定量.

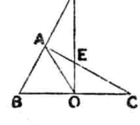


次,設 △ABC 之重心為 G, 則因 BC 之中點, 即 PQ 之中點, 故 G 亦為△ APQ 之重心. 故 G 在圓之中心 O 與點 P 聯結之直線上距 P $\frac{2}{3}OP$ 處. 故 G 為定點, 因而線分 GP 一定.

注意 設 Q 在 BP 上,得仿前證之. 設 Q 與 P 合, 則 PA 為圓之直徑;此時仍有與前同樣之結果,甚易知之.

919. 由直角三角形 ABC 之斜邊BC之中點 O, 引此邊之垂線, 令其分別交他二邊或其延線於 E, F, 聯結 AO, 則 $\overline{AO}^2 = OE \cdot OF$.

證 因 O 為斜邊 BC 之中點, 故 $OA = OB$ [124題],因而 $O\hat{A}B = O\hat{B}A$. 而 $E\hat{A}O = B\hat{A}C - O\hat{A}B = \hat{R} - O\hat{A}B = \hat{R} - O\hat{B}A = E\hat{F}A$, 故 AO 切圓 EAF 於 A, 故 $\overline{AO}^2 = OE \cdot OF$.



920. 設 A, B 為二定點,過 A 之任意直線,截定圓於 M, N, 則三角形 BMN 之外接

圓,除 B 外尚過一定點.

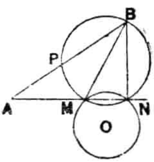
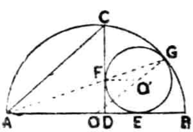


圖 設定圓爲 O, 圓 BMN 與 AB 之交點爲 P, 則 AM·AN＝AP·AB. 而 AM·AN 及 AB 一定, 故 AP 亦一定. 故 P 爲定點.

921. 由半圓周上之一點 C, 至直徑 AB 引垂線 CD; 作一圓, 令切 BD 於點 E, 切 CD 於點 F, 切半圓周於點 G, 則 A, F, G 在一直線上, 且 AE＝AC.

圖 先設半圓 ACB 及圓 EFG 之中心, 分別爲 O, O′, 則 O, O′, G 在一直線上. 聯結 AG, FG, 及 O′F. 此時因 F 爲圓 O′ 與直線 CD 之切點, 故 O′F 垂直於 CD. 又由假設, AD 或 AO 垂直於 CD, 故 AO 與 FO′ 相平行. 而 OO′ 爲 CD 之斜線 [特別在 E, O 相合時, 則平行], O′F 則爲其垂線, 故 F 不能在 O′O 上; 若欲越 O′O 而與 B 在同側, 則更不能矣. 故對於 O′O, F 與 B 在異側; 而與 A 則不同側, 因 A 與 B 在異側故也. 故 OA 與 O′F 爲同方向之平行線, 故 $A\hat{O}G = FO'G$ 然此二等角, 分別爲以圓 O 及圓 O′ 之半徑爲二等邊之兩三角形之頂角, 故此兩三角形之底角彼此皆相等, 如 $O\hat{G}A = O'GF$. 且由前所述, $O\hat{G}A$ 與 $O'\hat{G}F$, 卽 $O\hat{G}F$ 在 OO′ 之同側, 故 GA, GF 相一致. 故 A, F, G 在一直線上. 如是, AFG 爲圓 O′ 之割線, AE 則爲其切線, 故 $\overline{AE}^2 = AF \cdot AG$. 聯結 GB, CB, 則 $A\hat{G}B$,



$A\hat{C}B$ 皆爲直角, D 上之角亦爲直角, 故 $AF \cdot AG = AD \cdot AB = \overline{AC}^2$ 故 $\overline{AE}^2 = \overline{AC}^2$, 或 AE ＝AC.

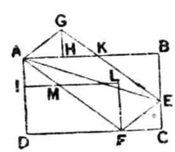
922. 設三角形 ABC 之三邊爲 a, b, c, 其和之半分爲 S, 內切圓之半徑爲 r, 切於邊 a, b, c 之傍切圓半徑, 分別爲 r_1, r_2, r_3. 則 $rr_1 = (s-b)(s-c)$, $\Delta^2 = rr_1\, s(s-a)$.

圖 $r = \dfrac{\Delta}{s}$, $r_1 = \dfrac{\Delta}{s-a}$ [1401題], 故 $rr_1 = \dfrac{\Delta^2}{s(s-a)} = \dfrac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)}$ [1402題] $=(s-b)(s-c)$. 又 $\Delta = rs$, $\Delta = r_1(s-a)$ [1401題], 故 $\Delta^2 = rr_1 s(s-a)$.

第三章 雜題

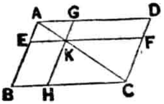
923. 矩形 ABCD 中, 設 E 爲 BC 上之任意點, F 爲 CD 上之任意點, 則矩形 ABCD 等於三角形 AEF 之二倍與矩形 BE·DF 之和.

圖 平行於 EF 引 AG, 平行於 AF 引 EG, 垂直於 AB 引 GH, 取 AI ＝CE, 完成矩形 IDFL. 此時 △AGH ＝ △ECF, △GHK ＝△AIM, △BEK ＝△MFL. 故 ▭ABCD ＝△AEF＋△ABE＋△ADF＋△ECF ＝△AEF＋△AEG＋▭IDEL＝2△AEF＋BE ·FD.



924. 在平行四邊形 ABCD 內取點 K, 引各邊之平行線 HKG, EKF, 若餘形 BK＝餘形 DK, 則 K 在對角線 AC 上.

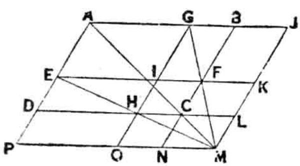
圖 設 K 不在對角線 AC 上, 令 AC 與 EKF 之交點爲 K′, 則 ▱BK′＝▱DK′. 若 K′ 在



KF上, 則□BK′>□BK, □BK′<□DK, 故□BK <□DK. 而□BK =□DK [假設], 故 K′ 不能在 KF 上. 同理, K′ 不能在 EK 上. 故與 K 合, 卽 K 在 AC 上.

925. 平行四邊形 ABCD 內, 平行於其二隣邊 AB, BC, 引二直線 EF, GH, 則四個平行四邊形中, 二對角線 EH, GF 與 ABCD 之對角線交於一點.

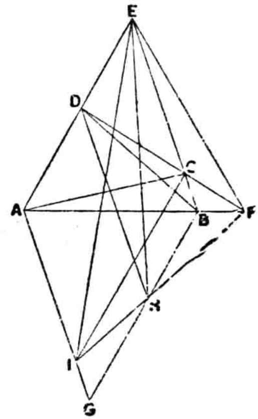
解　命 EH, GF 之交點爲 M. 過 M, 平行於



AB, BC, 分別引 MP, MJ, 延長 AD, GH, BC, 令交 MP, 又延長 AB, EF, DC, 令交 MJ. 於是餘形□OF=□FJ [740題], 各加□FL, 則圖形 OFL=□CJ. 又餘形□PH=□HK, 各加□OC, 則□PC=圖形 OFL. 故□PC =□CJ, 故 C 在對角線 AM 上 [924題].

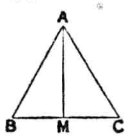
926. 完全四邊形三對角線之中點, 在一直線上.

解　完成□AEBG, 平行於 AG, BG, 分別引 DH, CI, 聯結 IH 而延長之. 於是 AB, CD, IH 交於一點 [925題], 故 IH 過 F. 聯結 EI, EH, 則 EI, EH, EF 之中點在一直線上 [231, 232 題]. 而 EI 之中點, 卽 AC 之中點; EH 之中點, 卽 DB 之中點. 故 AC, BD, EF 之中點在一直線上.



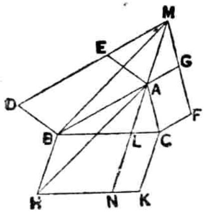
927. 三角形 ABC 中, 設 AB, AC 上正方形之和, 大於, 或等於, 或小於 BC 上之正方形, 則角 A 爲銳角, 或直角, 或鈍角.

解　由 A 引中線 AM, 則 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+2\overline{BM}^2$ [754題]. 故若 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2>=<\overline{BC}^2$, 則 $2\overline{AM}^2+2\overline{BM}^2>=<4\overline{BM}^2$, 卽 $\overline{AM}^2>=<\overline{BM}^2$, 卽 AM >=< BM. 而若 AM >=< BM, 則 $\hat{A}<=>\hat{R}$ [155題].

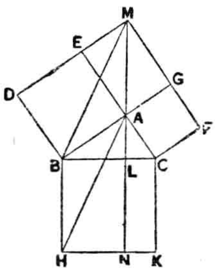


928. 設 ABC 爲任意三角形, 在邊 AB, AC 上作任意形狀大小之平行四邊形 AD, AF, 命其外邊 DE, FG 之交點爲 M, 聯結 MA, 在 BC 上作平行四邊形 BK, 令其邊 BH 等於且平行於 MA, 則平行四邊形 BK 等於平行四邊形 AD, AF 之和. 又試由是導出 Pythagoras 氏定理.

解　本題與 826 題同. □AD $=2$△ABM $=2$△ABH=□BN. 同理, □AF=□CN. 故

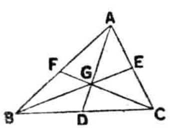


□AD＋□AF＝□BN＋□CN＝□BK. 次, 設 $B\hat{A}C=\hat{R}$, AD, AF 皆爲正方形, 則△AME 與△BCA 爲全等三角形, MA＝BC, 故 BCKH 爲 BC 上之正方形. 故正方形 AD, AF 之和, 等於正方形 BK, 卽 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$.



929. 三角形之三中線過同點, 而其交點與各頂點之距離, 分別等於各中線之三分之二.

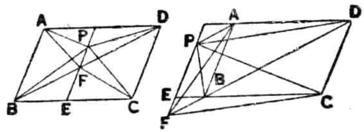
證 設△ABC之二中線 BE, CF 之交點爲 G, 聯結 AG, 命邊 BC 之中點爲 D; 於是所欲證者, 爲 AGD 成一直線.



因 BF＝FA, 故△BFC＝△AFC, 又△BFG＝△AFG; 各邊相減, 則△BGC＝△AGC. 又 CE＝EA, 故仿前得證△BGC＝△BGA. 故△BGA＝△CGA. 然 BD＝DC, 故△BGD＝△CGD, 故△BGA, △BGD 之和, 等於△CGA, △CGD之和. 故△BGA, △BGD 之和等於△ABC 之半分. 茲假定 A, G, D 不在一直線上, 引直線 AD. 於是因 BD＝DC, 故△ADB＝$\frac{1}{2}$△ABC. 而△AGB＋△BGD＝$\frac{1}{2}$△ABC, 業已證明, 故△AGB＋△BGD＝△ADB. 然若 G 不在直線 AD 上, 則此不合理. 故三中線交於同點 G. 又△BGA＝△CGA, 業已證明. 今 CE＝EA, 故△CGA＝2△EGA, 故△BGA＝2△AGE, 故 BG＝2GE. 同理, CG＝2GF, AG＝2GD,

930. 設P爲平行四邊形 ABCD 平面上之一點, 則三角形 PBD 爲兩三角形 PAB, PBC 之和或差.

證 [甲圖]設P 在形內. 平行於 AB 引 PE,



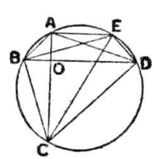
[甲圖] [乙圖]

命其與 BC, BD 之交點, 分別爲 E, F, 聯結 AF, FC. 於是△APB＝△AFB＝△BCF; △PDF＝△PCF. 故△PBD＝△PFB＋△PDF＝△PFB＋△PCF＝△PBC－△PAB.

[乙圖]設P 在形外. △PBD＝△PFD－△PFB＝△PCF－△PFB＝△PBC＋△PAB.

931. 設圓之內接四邊形中, 二對角線互相直交, 則其二雙對邊所包矩形之和, 等於四邊形面積之二倍, 因而等於兩對角線所包之矩形.

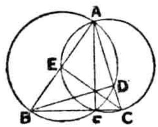
證 設 ABCD 爲圓之內接四邊形, 其對角線 AC, BD 之交點爲 O.



平行於 BD, 引 AE, 聯結 BE, CE, ED, 於是四邊形 ABCD＝四邊形 BCDE. AC, BD 相直交, 故弧 AB, CD 之和, 等於半圓周 [489題]. 同理, 弧 AD, BC 之和, 亦等於半圓周. 而 AE ∥ BD, 故弧 ED＝弧 AB [474題], 故 $C\hat{D}E$ 爲直角. 同理, $C\hat{B}E$ 亦爲直角. 故

$2BCDE = ED\cdot CD + BE\cdot BC$. 然 $ED = AB$, $BE = AD$, 四邊形 $ABCD$ = 四邊形 $BCDE$, 故 $2ABCD = AB\cdot CD + AD\cdot BC$. 然 $AC \perp BD$, 故 $2ABCD = AC\cdot BD$ [396題], 故 $AB\cdot CD + AD\cdot BC = AC\cdot BD$.

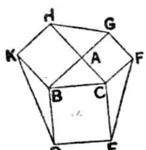
932. 任意三角形 ABC 中,設 BC 投於 AB 上之射影爲 BE, 又 BC 投於 AC 上之射影爲 CD, 則 $\overline{BC}^2 = BA\cdot BE + CA\cdot CD$.



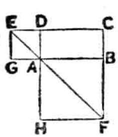
解 與 899 題同.

933. 在所設直角三角形之邊上,就形外作正方形,則聯結其各角頂而得之全圖形面積,以何式表之?

解 因 $\triangle AGH = \triangle BKD = \triangle ECF = \triangle ABC$ [825題] $= \frac{1}{2}AB\cdot AC$, 故全圖形 $DEFGHK = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 4\cdot\frac{1}{2}\times AB\cdot AC = 2\overline{BC}^2 + 2AB\cdot AC$.



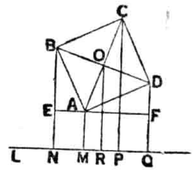
934. 以矩形之二隣邊爲邊,作二正方形,則矩形之面積,等於此二正方形對角線所包矩形之半分.



解 設ABCD爲矩形, DG, BH 分別爲邊 AD, AB 上之正方形,則 $\overline{AE}^2 = 2\overline{AD}^2$, $\overline{AF}^2 = 2\overline{AB}^2$. 故 $\overline{AE}^2\cdot\overline{AF}^2 = 4\overline{AD}^2\cdot\overline{AB}^2$, 即 $AE\cdot AF = 2AD\cdot AB$, 故 $AD\cdot AB = \frac{1}{2}AE\cdot AF$.

935. 由正方形之各角頂,至任意一直線引垂線,則由相對二角頂所引垂線上正方形之和,大於由他相對二角頂所引垂線所包矩形之二倍者,爲正方形之面積.

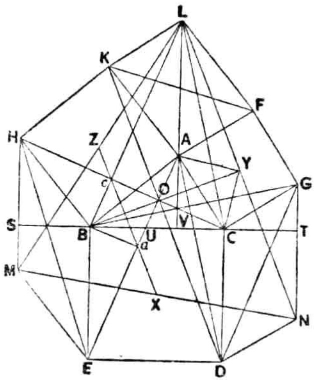
解 設 ABCD 爲正方形, L 爲任意直線,由各角頂至L所引之垂線爲 AM, BN, CP, DQ, OR, 過 A 平行於 L 引 EF. 於是因 $B\hat{A}D$ 爲直角,故 $B\hat{A}E + D\hat{A}F = \hat{R} = B\hat{A}E + A\hat{B}E$, 故 $A\hat{B}E = D\hat{A}F$. 而 $\hat{E} = \hat{R} = \hat{F}$, $AB = AD$, 故 $AE = DF$ [56題]. 又設 $AM = a$, $BE = b$, $DF = c$, 則 $BN = a+b$, $DQ = a+c$. 而 O 爲 AC, BD 之中點, 故 $BN + DQ = 2OR = AM + CP$, 故 $(a+b)+(a+c) = a + CP$, 故 $CP = a+b+c$. 於是 $\overline{BN}^2 + \overline{DQ}^2 - 2AM\cdot CP = (a+b)^2 + (a+c)^2 - 2a(a+b+c) = b^2 + c^2 = \overline{BE}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EA}^2 = \overline{BA}^2$, 即正方形之面積.



936. 設 ABC 爲任意三角形,在其各邊上就形外作正方形 BCDE, CAFG, ABHK, 命其外心[兩對角線之交點]爲 X, Y, Z, 完成平行四邊形 FAKL, EBHM, DCGN, 命由 B 至 AE, HC 所引之垂線分別爲 Ba, Bc, 又 AE 及 CH 之交點爲 O, 則(1) $\triangle FAK = \triangle HBE = \triangle DCG = \triangle ABC$; (2) LA, MB, NC 分別垂直於 BC, CA, AB; (3) LA, MB, NC 交於同點; (4)由$\triangle ABC$之 A, B, C 所引之中線,分別垂直於 KF, HE, DG, 且是等中線之二倍, 分別等於 KF, HE, DG; (5) BLAE, CLAD, 等爲平行四邊形; (6)設 AV 垂直於BC,且 BC 兩端之延線分別交 HM, GN 於 S, T, 則 $SB = CT = AV$, $GT = CV$, $SH = BV$; (7) HC 及 AE 直交於 O, GB, AD 亦直交, 因而 $HC \perp LB$, $GB \perp LC$; (8) CH, BG, LA 交於一點; (9) BO 將角 HOE 二等分; (10) BOY 成一直線; (11) KOD 成一直線; (12) $BaOc$ 爲正方形; (13) $XacZ$ 爲 BOY 之垂線; (14) AX.

BY, CZ 交於同點; (15) X, Y, Z 分別爲 MN, NL, LM 之中點.

證 (1)與 825 題同. (2) $\triangle FAL$, $\triangle CAB$ 中,



$FA=AC$, $FL\,(=AK)=AB$, $A\hat{F}L\,(=2\hat{R}-F\hat{A}K)=C\hat{A}B$. 故此兩三角形全等,而 $F\hat{A}L=A\hat{C}B$. 今設 LA 之延線,與 BC 之交點爲 V, 則 $C\hat{A}V+F\hat{A}L=\hat{R}$, 即 $C\hat{A}V+A\hat{C}V=\hat{R}$, 故 $A\hat{V}C=\hat{R}$, 卽 LA 爲 BC 之垂線. 同理, MB, NC, 分別爲 AC, AB 之垂線. (3) LA, MB, NC 分別爲 BC, CA, AB 之垂線, 故交於一點 [195題]. (4)完成平行四邊形 BACP, 則仿(2)可證其對角線 PA 爲 KF 之垂線,而 PA 二等分 BC [239題], 且 PA 等於 KF; 故由 A 所引之中線爲 KF 之垂線,且 KF 等於此中線之二倍. 同理, 由 B 所引之中線, 爲 HE 之垂線, HE 等於此中線之二倍; 由 C 所引之中線,爲 DG 之垂線, DG 等於此中線之二倍. (5) 由 2 條之證明, 知 LA 爲 BC 之垂線, 故 $LA \parallel BE$; 且 $AL=BC=BE$, 因 $\triangle AFL\equiv\triangle CAB$ 故也. 故 BLAE 爲平行四邊形 [226題]. 同理, CLAD, 等亦爲平行四邊形. (6) 三角形 BSH, AVB 中, $B\hat{S}H=\hat{R}=A\hat{V}B$, $A\hat{B}V\,(=\hat{R}-S\hat{B}H)=B\hat{H}S$, 而 $BH=AB$, 故 $BS=AV$, $SH=BV$ [140題]. 同理, $CT=AV$, $GT=CV$. (7) 設 AE 與 BC 之交點爲 U. $\triangle EBA$, $\triangle CBH$ 中, $EB=CB$, $BA=BH$, $E\hat{B}A=C\hat{B}H$, 故 $B\hat{E}A=B\hat{C}H$ [55題]. 而 $B\hat{U}E=C\hat{U}O$ [12題], 故 $C\hat{O}U=E\hat{B}U=\hat{R}$. 然 $BL\parallel EA$ [5條], 故 $BL\perp HC$. 同理, $GB\perp AD$, 因而 $LC\perp GB$. (8)因 $CH\perp BL$ [7條], $BG\perp LC$, 而 $LV\perp BC$ [2條], 故 CH, BG, LA 交於一點. (9) $\triangle BCc$, $\triangle BE\alpha$ 中, $BC=BE$, $B\hat{C}c=B\hat{E}\alpha$, $B\hat{c}C=\hat{R}=B\hat{\alpha}E$ [假設], 故 $Bc=B\alpha$ [140題]. 故 BO 將 $\alpha\hat{O}c$ 二等分[116題]. (10)正方形之兩對角線互爲垂線, 故 $A\hat{Y}C=\hat{R}=C\hat{O}A$. 然 YAOC 四角之和,等於 $4\hat{R}$, 故 $Y\hat{A}O+Y\hat{C}O=2\hat{R}$. 引 OA, OC 之垂線 $Y\alpha$, $Y\gamma$, 則 $Y\hat{A}\alpha=Y\hat{C}\gamma$, 又 $A\hat{\alpha}Y=C\hat{\gamma}Y$, 及 $YA=YC$, 故垂線 $Y\alpha$, $Y\gamma$ 相等. 故 Y 在 $A\hat{O}C$ 之二等分線上, 因而 BOY 成一直線. (11) 因 $A\hat{O}H=\hat{R}=H\hat{K}A$, 故四邊形 AOHK 內接於圓. 而 $KA=KH$, 故 KO 將 $A\hat{O}H$ 二等分. 同理, DO 將對頂角 $C\hat{O}E$ 二等分. 故 KOD 成一直線. (12) $BcO\alpha$ 爲矩形, 而其隣邊 $B\alpha$, Bc 相等, 故 $BcO\alpha$ 爲正方形.

注意 $c\alpha$ 將 OB 垂直二等分. (13) $E\hat{O}C$ 爲直角, X 爲 CE 之中點, 故 $XO=XC=XB$. 同理, $ZO=ZB$. 故 X, Z 乃 BO 爲底之兩二等邊三角形之頂點, 因此 XZ 將 BO 垂直二等分. 而因前條, $c\alpha$ 將 BO 垂直二等分. 故 $X\alpha cZ$ 成一直線. (14) YOB 爲 XZ 之垂線. 同理, $XA\perp YZ$, $ZC\perp XY$. 故 AX, BY, CZ 交於 $\triangle XYZ$ 之垂心. (15) $YF=YA$, $FL=AB$;

又 $A\hat{F}L=C\hat{A}B$, $Y\hat{F}A=Y\hat{A}C$, 故 $Y\hat{F}L=Y\hat{A}B$. 故 $\triangle YFL$, $\triangle YAB$ 全等,因而 $YL=YB$, $L\hat{Y}F=B\hat{Y}A$. 故 $L\hat{Y}F+A\hat{Y}L=B\hat{Y}A+A\hat{Y}L$, 故 $B\hat{Y}L=\hat{R}$. 同理, $B\hat{Y}N=\hat{R}$, $YN=YB$. 故 Y 爲 LN 之中點.同理, X, Z 分別爲 MN, LM 之中點. 由是 $AX=YZ=\frac{1}{2}MN$, $BY=ZX=\frac{1}{2}NL$, $CZ=XY=\frac{1}{2}LM$.

別證 由1條及2條,知 LA 等於 BC, 故 $LA=HM$, 且 $LA \parallel HM$, 故 LAMH 爲平行四邊形.因此 AH 之中點 Z 爲 LM 之中點.同理, X 爲 MN 之中點, Y 爲 NL 之中點.

第四編

比例

第一章 基本定理

I. 關於可通約量者.

937. 設二量有公倍量,則又有公約量. 反之,設二量有公約量,則又有公倍量.

證 設 A 與 B 有公倍量 C, 則 $C=mA$ 或 nB. mn 等分 C, 命其一分爲 D, 則因 $C=mA$, 且 $C=mnD$, 故 $mA=mnD=m\cdot nD$, 故 $A=n\cdot D$ [倍量性質2]. 仿前得 $B=mD$. 故 A 與 B 有公約量 D. 反之,設 A 與 B 有公約量 D, 則 $A=mD$, $B=nD$. 取 D之mn倍量,則 $C=mnD=n\cdot mD=nA$. 仿前, $C=mnD=m\cdot nD=mB$. 故 A 與 B 有公倍量 C.

938. 二等量對於同量有同比. 反之,對於同量有同比之二量相等.

證 設 A, B, C 爲同種之量,且 $A=B$, $mA=nC$. 因 $A=B$, 故 $mA=mB$. 而 $mA=nC$, 故 $mB=nC$. 因此 $A:C=B:C$. 反之,設 $A:C=B:C$, 而 $mA=nC$, 則 $mB=nC$. 故 $mA=mB$, 故 $A=B$.

939. 二量之比,等於各量二倍之比.

證 設二量 A, B 之比, 如 $mA=nB$. 此時 $2\cdot mA=2\cdot nB$. 而 $2\cdot mA=m\cdot 2A$, $2\cdot nB=n\cdot 2B$, 故 $m\cdot 2A=n\cdot 2B$. 故 $A:B=2A:2B$.

940. 二量之比,等於各量半分之比.

證 因 $A:B=2A:2B$, 而 A 與 B 分別爲 2A 與 2B 之半分故也.

941. 設 $A:B=C:D$, 而四量皆同種, 則 $A:C=B:D$ [是曰更比定理].

證 設 A, B 二量間, 有 $mA=nB$ 之關係, 則 $mC=nD$. 又設 $pA=qC$. 於是因 $mA=nB$, 故 $p\cdot mA=p\cdot nB$ [倍量性質 1], 故 $m\cdot pA=n\cdot pB$ [倍量性質 7]. 仿此,得 $m\cdot qC=n\cdot qD$. 又因 $pA=qC$, 故 $m\cdot pA=m\cdot qC$. 因此 $n\cdot pB=n\cdot qD$, 故 $pB=qD$ [倍量性質 2]. 於是因 $pA=qC$ 及 $pB=qD$, 故 $A:C=B:D$. 故同種之四量成比例,則其第一項與第三項之比,等於第二項與第四項之比.

942. 設 $A:B=P:Q$, 則 $A+B:B=P+Q:Q$ [是曰合比定理], 及 $A-B:B=P-Q:Q$ [是曰分比定理].

證 設二量 A 與 B 間,有 $mA=nB$ 之關係, 則 $mP=nQ$. 因 $mA=nB$, 故 $mA+mB=nB+mB$, 卽 $m(A+B)=(n+m)B$ [倍量性質 3 及 5]. 仿此, $m(P+Q)=(n+m)Q$. 因此 $A+B:B=P+Q:Q$. 仿上得證 $A-B:B=P$

$-Q:Q$. 但 A 大於 B.

943. 設 $A:B=C:D=E:F$, 則 $A:B=A+C+E:B+D+F$ [是曰加比定理].

證　設二量 A 與 B 間之關係爲 $mA=nB$, 則 $mC=nD$, $mE=nF$. 於是 $mA+mC+mE=nB+nD+nF$, 故 $m(A+C+E)=n(B+D+F)$ [倍量性質3]. 故 $A:B=A+C+E:B+D+F$. 此定理不但適用於三比,無論幾比,莫不皆然. 故同種之若干量成比例, 則其一前項與一後項之比,等於各前項之和與各後項之和之比.

944. 設 $A:B=C:D$, 而 A 大於 C, 則 $A:B=A-C:B-D$.

證　可仿前題證之.

945. 設 $A:B=P:Q$, $B:C=Q:R$, 則 $A:C=P:R$ [是曰等比定理].

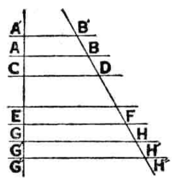
證　設二量 A, B 間之關係爲 $mA=nB$, 則 $mP=nQ$. 又設二量 B, C 間之關係爲 $hB=kC$, 則 $hQ=kR$. 因 $mA=nB$, 故 $h\cdot mA=h\cdot nB$ [倍量性質 1], 卽 $mh\cdot A=nh\cdot B$. 仿此, $nh\cdot B=nk\cdot C$. 故 $mh\cdot A=nk\cdot C$. 仿此得證 $mh\cdot P=nk\cdot R$. 故 $A:C=P:Q$. 由此可知, 設有二組之量, 每組三量, 第一組中第一量與第二量之比,等於第二組中第一量與第二量之比,且第一組中第二量與第三量之比,等於第二組中第二量與第三量之比,則第一組中第一量與第三量之比,等於第二組中第一量與第三量之比.

946. 設 $A:C=P:R$, $B:C=Q:R$, 則 $A+B:C=P+Q:R$.

證　因 $B:C=Q:R$ [假設], 故 $C:B=R:Q$. 而 $A:C=P:R$ [假設], 故 $A:B=P:Q$ [等比定理]. 故 $A+B:B=P+Q:Q$ [合比定理]. 而 $B:C=Q:R$ [假設], 故 $A+B:C=P+Q:R$ [等比定理].

947. 設有二雙直線,是等直線皆平行,則與其相交之直線上,爲各雙直線所夾二分之比, 等於與其相交之他直線上, 爲各雙直線所夾二分之比.

證　設 AB, CD 與 EF, GH 爲相平行之二雙直線, AG, BH 爲與其相交之二直線; 求證 $AC:EG=BD:FH$. 假定 $2\cdot AC=3\cdot EG$. 在 AG 上取 AA′,令等於 AC, 則 $CA'=2\cdot AC$. 又在 AG



上取 GG′, G′G″, 令各等於 EG, 則 $EG''=3\cdot EG$. 平行於 AB, 引 A′B′, G′H′, G″H″, 令與 BH 分別交於 B′, H′, H″. 於是因 $AC=AA'$, 故 $BD=BB'$ [229題],故 $DB'=2\cdot BD$. 同理, $FH''=3\cdot FH$. 而由假設, $CA'=EG''$, 故 $DB'=FH''$ [229題], 卽 $2\cdot BD=3\cdot FH$. 若 $m\cdot AC=n\cdot EG$, 則亦可仿上,證 $m\cdot BD=n\cdot FH$. 因此 $AC:EG=BD:FH$.

948. 三平行線自任意直線截得之二分之比,等於此三直線自他任意直線所截得之二分之比.

證　由前題自明.

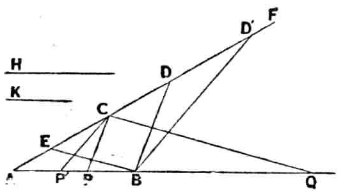
949. 設三角形之二邊,爲底之平行線所截,則其一邊之二分之比, 等於他邊之二分之比.

證　由 947 題自明.

950. 將有限直線按任意比內分爲二,或按等比外之任意比外分爲二,其分點皆唯

一.

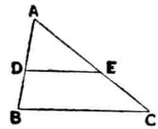
證　設 AB 爲一有限直線, H, K 爲有所設



比之直線; 求證 AB 得按比 H:K 內分或外分,而其分點皆唯一. 由 A 引與 AB 成任意角之直線 AF, 由 AF 取等於 H 之 AC, 及等於 K 之 CD, CE, 又聯結 BD, BE, 由 C 平行於 BD 引 CP, 平行於 BE 引 CQ, 令交 AB 及其延線於點 P 及 Q. 於是因 PC 平行於 BD, 故 AP:BP=AC:CD [949題], 故 AP:PB =H:K. 又因 QC 平行於 BE, 故 AQ:QB=AC :CE. 故 AQ:QB=H:K. 由是 AB 按比 H:K 內分於 P, 外分於 Q. 又 AB 不能按比 H:K 內分於 P 外之任意點. 何則? 茲設 AB 得按比 H:K 內分於 P 外之點 P′, 則 AP′:P′B =H:K. 聯結 CP′, 由 B 平行於 CP′ 引 BD′, 命其交 AF 於 D′. 於是因 CP′ 平行於 D′B, 故 AC:CD′=AP′:P′B [949題]. 而 AP′:P′B = H:K = AC:CD, 故 AC:CD′ = AC:CD, 故 CD′=CD [938題]. 此不合理,故 P 爲 AB 按比 H:K 之唯一內分點. 仿此可證 Q 爲 AB 按比 H:K 之唯一外分點.

951.　三角形之二邊分成比例時, 其分線平行於底.

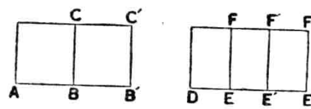
證　設直線 DE,將三角形 ABC 之二邊 AB, AC 二分,且 AD:DB=AE:EC; 求證 DE 平行



於 BC. 過 D 引 BC 之平行線, 則此線將 AC 分於比 AD:DB [949題], 故此線過 AC 按此比之唯一內分點 E [950題]. 故 DE 平行於 BC.

952.　等高矩形之比, 等於其底之比.

證　設 AC, DF 爲立於底 AB, DE 上之二等



高矩形; 求證矩形 AC 與矩形 DF 之比, 等於底 AB 與底 DE 之比. 假定 2·AB=3·DE. 在 AB 之延線上, 取等於 AB 之 BB′, 則 AB′ =2AB. 在 DE 之延線上, 取等於 DE 之 EE′ 及 E′E″, 則 DE″ =3·DE. 作矩形 BC′, EF′, E′F″. 於是因 AB=BB′, 故矩形 AC= 矩形 BC′ [225題], 因而矩形 AC′= 矩形 AC 之二倍. 同理, 矩形 DF″ = 矩形 DF 之三倍. 而由假設, AB′=DE″, 故矩形 AC′ = 矩形 DF″ [225題], 卽矩形 AC 之二倍 = 矩形 DF 之三倍. 若 m·AB=n·DE, 亦可仿上證得矩形 AC 之 m 倍=矩形 DF 之 n 倍. 由是矩形 AC 與矩形 DF 之比, 等於底 AB 與底 DE 之比.

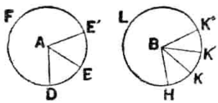
953.　等高平行四邊形或三角形之比, 等於其底之比.

證　因平行四邊形等於其等底等高之矩形[733題]; 又三角形等於其等底等高矩形之半分[735], 而二量之比等於各量二倍之比 [939題] 故也.

954. 同圓或等圓中，中心角及扇形，比例於其所立之弧．

注意 第二節中所述，弧係小於全圓周者，角係小於四直角者；但對大於全圓周之弧及大於四直角之角(432及434題)，亦能成立．

證 設以 A, B 為中心之等圓為 DEF, HKL, 弧 DE, HK 上所立之角為 $D\hat{A}E$, $H\hat{B}K$. 求證角 DAE 與角 HBK 之比，等於弧 DE 與弧 HK 之比；扇形 ADE 與扇形 HBK 之比，等於弧 DE 與弧 HK 之比．假定弧 DE 之二倍＝弧 HK 之三倍．在圓周 DEF 上，取等於弧 DE 之弧 EE′，則弧 DE′＝弧 DE 之二倍．又在圓周上取等於弧 HK 之弧 KK′, K′K″，則弧 HK″＝弧 HK 之三倍．聯結 AE′, BK′, BK″．於是因弧 DE＝弧 EE′，故角 DAE＝角 EAE′ [434題]，且扇形 DAE＝扇形 EAE′ [435題]．故角 DAE′＝角 DAE 之二倍，扇形 DAE′＝扇形 DAE 之二倍．同理，角 HBK″＝角 HBK 之三倍，扇形 HBK″＝扇形 HBK 之三倍．然由假設，弧 DE′＝弧 HK″，故角 DAE′＝角 HBK″ [434題]．扇形 DAE′＝扇形 HBK″；卽角 DAE 之二倍＝角 HBK 之三倍，扇形 DAE 之二倍＝扇形 HBK 之三倍．若弧 DE 之 m 倍＝弧 HK 之 n 倍，則倣上亦可證得角 DAE 之 m 倍＝角 HBK 之 n 倍，扇形 DAE 之 m 倍＝扇形 HBK 之 n 倍．要之，角 DAE：角 HBK＝弧 DE：弧 HK，扇形 DAE：扇形 HBK＝弧 DE：弧 HK．



II. 關於不可通約量者．

955. 等於同比之比相等：

證 設 A:B＝P:Q, X:Y＝P:Q；求證 A:B＝X:Y．因 A:B＝P:Q，故設 m 為任意數，mP 在 nQ 及 $(n+1)$Q 之間，或等於 nQ，則 mA 在 nB 及 $(n+1)$B 之間，或等於 nB．又因 X:Y＝P:Q，故 mX 在 nY 及 $(n+1)$Y 之間，或等於 nY．據此，設 m 為任意數，mX 在 nY 及 $(n+1)$Y 之間，或等於 nY，則 mA 在 nB 及 $(n+1)$B 之間，或等於 nB．故 A:B＝X:Y．

956. 設二比相等，其第一比之前項，大於，或等於，或小於後項，則其第二比之前項，亦大於，或等於，或小於後項．

證 設 A:B＝P:Q，而 A$>=<$B；求證 P$>=<$Q．設 m 與 n 為任意數，而 mA$>=<n$B，則 mP$>=<n$Q．而若 m 與 n 各等於 1，則由上可知，若 A$>=<$B，則 P$>=<$Q．

957. 兩比相等，則其反比亦等［是曰反比定理］．

證 設 A:B＝P:Q；求證 B:A＝Q:P．因 A:B＝P:Q，故 A 之諸倍量與 B 之諸倍量間之關係，同於 P 之諸倍量與 Q 之諸倍量間之關係．故 B 之諸倍量與 A 之諸倍量間之關係，同於 Q 之諸倍量與 P 之諸倍量間之關係．故 B:A＝Q:P．

958. 二量各與第三量之比，視第一量之大於，或等於，或小於第二量，而第一比大於，或等於，或小於第二比．又一量與他二量之比，視二量中之第一量小於，或等於，或大於

第二量,而第一比大於,或等於,或小於第二比.

證 設 A, B, C 爲同種之三量,求證視 $A >=< B$ 而 $A:C >=< B:C$,又視 $A <=> B$ 而 $C:A >=< C:B$. 設 $A=B$,則 A 及 B 之諸倍量完全相同,故 A 之諸倍量與 C 之諸倍量間之關係,同於 B 之諸倍量與 C 之諸倍量間之關係,故 $A:C=B:C$, $C:A=C:B$. 設 $A>B$,則可求得 m 之值,令 mB 之小於 mA 者大於 C. 由是設 mA 在 nC 及 $(n+1)C$ 之間,或等於 nC,則 mB 小於 nC,故 $A:C>B:C$. 又 nC 不大於 mA,而 $nC>mB$,故 $C:B>C:A$,卽 $C:A<C:B$. 若 $A<B$,則 $B>A$,故 $B:C>A:C$, $C:B<C:A$;即 $A:C<B:C$, $C:A>C:B$.

959. [前題之逆定理]設 $A:C>=<B:C$,或 $C:A<=>C:B$,則 $A>=<B$.

證 可用轉換法證之.

960. 二量等倍量之比,等於此二量之比.

證 設 A, B 爲二量,求證 $mA:mB=A:B$. 設 p, q 爲任意二數,而 $pA>=<qB$,則 $m\cdot pA>=<m\cdot qB$ [倍量性質 1]. 而 $m\cdot pA=p\cdot mA$, $m\cdot qB=q\cdot mB$ [倍量性質 7].故若 $pA>=<qB$,則 $p\cdot mA>=<q\cdot mB$. 故 $mA:mB=A:B$.

961. 設二量 A, B,及二整數 m, n 有同比,則 $nA=mB$. 反之,設 $nA=mB$,則 A 與 B 之比等於 m 與 n 之比.

證 因 $A:B=m:n$ [假設],且 $n\cdot A$ 與 $n\cdot m$ 爲 A 與 m 之等倍量, $m\cdot B$ 與 $m\cdot n$ 爲 B 與 n 之等倍量;故因 $n\cdot m=m\cdot n$,而知 $nA=mB$. 反之,設 $n\cdot A=m\cdot B$. 於是設 $pA>=<qB$,則 $n\cdot pA>=<n\cdot qB$ [倍量性質 1],卽 $p\cdot nA>=<q\cdot nB$,卽 $p\cdot mB>=<q\cdot nB$,卽 $p\cdot m>=<q\cdot n$. 故 $A:B=m:n$.

962. 設 $A:B=P:Q$,且 A 爲 B 之倍量,或 B 之一分,或 B 之一分之倍量,則 P 爲 Q 之同倍量,或同一分,或同一分之同倍量.

證 因 $A:B=P:Q$,及 $nA=mB$ 時 $nP=mQ$ 故也.

963. 設同種之四量成比例,則視其第二量之較第四量大,或等,或小,而第一量較第三量大,或等,或小.

證 設四量爲 A, B, C, D,而 $A:B=C:D$;求證視 $B>=<D$,而 $A>=<C$. 若 $B=D$,則 $A:B=A:D$ [958題];而 $A:B=C:D$ [假設],故 $A:D=C:D$ [955題],故 $A=C$ [959題].若 $B>D$,則 $A:B<A:D$ [958題];而 $A:B=C:D$ [假設],故 $C:D<A:D$,即 $A:D>C:D$,故 $A>C$ [959題]. 仿此可證 $B<D$,則 $A<C$.

964. 設同種之四量成比例,則其第一量與第三量之比,等於第二量與第四量之比[是曰更比定理].

證 設四量爲 A, B, C, D,而 $A:B=C:D$;求證 $A:C=B:D$. 因 $mA:mB=A:B$ [960題], $nC:nD=C:D$ [960題],故 $mA:mB=nC:nD$ [955題]. 由是因 $mA>=<nC$,而 $mB>=<nD$ [963題].而 m 與 n 爲任意數,故 $A:C=B:D$.

965. 設同種之若干量成比例,則其一前項與一後項之比,等於其諸前項之和與諸後

項之和之比[是曰加比定理].

證　設 A, C, E, …… 及 B, D, F, …… 爲成比例之同種量, 卽 $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$; 求證 $A:B=A+C+E+\cdots\cdots:B+D+F\cdots\cdots$. 因 $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$, 故視 $mA >=< nB$ 而 $mC>=<nD$, 及 $mE>=<nF$ 等, 因而 $mA+mC+mE+\cdots\cdots>=<nB+nD+nF+\cdots\cdots$, 卽 $m(A+C+E+\cdots\cdots)>=<n(B+D+F+\cdots\cdots)$ [倍量性質3]. 而 m 與 n 爲任意數, 故 $A:B=A+C+E+\cdots\cdots:B+D+F+\cdots\cdots$.

966. 設二比相等, 則其第一比中前項後項之和或差, 對後項之比, 等於第二比中前項後項之和或差, 對後項之比[取和者曰合比定理, 取差者曰分比定理].

證　設 $A:B=P:Q$; 求證 $A+B:B=P+Q:Q$, 及 $A\sim B:B=P\sim Q:Q$. 假定 m 爲任意數, n 爲能令 mA 介於 nB 及 $(n+1)B$ 間, 或等於 nB 之數. 於是 $mA+mB$ 或介於 $mB+nB$ 及 $mB+(n+1)B$ 間, 或等於 $mB+nB$. 然 $mA+mB=m(A+B)$, $mB+nB=(m+n)B$ [倍量性質 3 及 5], 故 $m(A+B)$ 或介於 $(m+n)B$ 及 $(m+n+1)B$ 間, 或等於 $(m+n)B$. 又因 $A:B=P:Q$, 故 mP 或介於 nQ 及 $(n+1)Q$ 間, 或等於 nQ. 故與前同理, $m(P+Q)$ 或介於 $(m+n)Q$ 及 $(m+n+1)Q$ 間, 或等於 $(m+n)Q$. 故 $P+Q$ 之諸倍量與 Q 之諸倍量間之關係, 同於 $A+B$ 之諸倍量與 B 之諸倍量間之關係, 因此 $A+B:B=P+Q:Q$. 用倍量性質 4 及 6, 仿前得證 $A>B$ 時, $A-B:B=P-Q:Q$; $A<B$ 時, $B-A:B=Q-P:Q$.

967. 設二比相等, 取其二前項之等倍量及二後項之等倍量, 則第一比中前項倍量對後項倍量之比, 等於第二比中前項倍量對後項倍量之比.

證　設 $A:B=P:Q$; 求證 $mA:nB=mP:nQ$. 設 p, q 爲任意數. 因 $A:B=P:Q$, 故視 $pm\cdot A>=<qn\cdot B$, 而 $pm\cdot P>=<qn\cdot Q$, 卽視 $p\cdot mA>=<q\cdot nB$, 而 $p\cdot mP>=<q\cdot nQ$, 故 $mA:nB=mP:nQ$.

968. 設有甲乙二組之量, 甲組中第一量與第二量之比, 等於乙組中第一量與第二量之比, 甲組中第二量與第三量之比, 等於乙組中第二量與第三量之比, 以下倣此, 則甲組中第一量與最後量之比, 等於乙組中第一量與最後量之比[是曰等比定理].

證　先設甲組之三量爲 A, B, C, 乙組之三量爲 P, Q, R, 而 $A:B=P:Q$, $B:C=Q:R$; 求證 $A:C=P:R$. $mA:mB=A:B$ [960題], $mP:mQ=P:Q$ [960題], 而 $A:B=P:Q$ [假設], 故 $mA:mB=mP:mQ$. 又 $B:C=Q:R$, 故 $mB:nC=mQ:nR$ [967題]. 設 $mA>nC$, 則 $mA:mB>nC:mB$ [958題]. 而 $mA:mB=mP:mQ$, $nC:mB=nR:mQ$ [反比定理], 故 $mP:mQ>nR:mQ$, 故 $mP>nR$ [959題]. 同理, 若 $mA=nC$, 則 $mP=nR$; 若 $mA<nC$, 則 $mP<nR$. 而 m 與 n 爲任意數, 故 $A:C=P:R$ [958題]. 次, 設甲組之若干量爲 A, B, C, ……, H, K, 乙組之若干量爲 P, Q, R, ……, X, Y, 而 $A:B=P:Q$, $B:C=Q:R$, ……, $H:K=X:Y$; 求證 $A:K=P:Y$. $A:C=P:R$, 業已證明; 而 $C:D=R:S$, 故仿前得證 $A:D=P:S$. 以下仿此, 最後卽得 $A:K=P:Y$.

969. 前題中設 $A:B=Q:R$, $B:C=P:Q$, 則 $A:C=P:R$.

證 設 S 爲 P, Q, R 之第四比例項,卽 $P:Q=R:S$, 則因 $A:B=Q:R$, $B:C=R:S$ [955題], 故 $A:C=Q:S$ [等比定理]. 而 $P:Q=R:S$, 故 $P:R=Q:S$ [更比定理], 故 $A:C=P:R$.

970. 設 $A:C=P:R$, $B:C=Q:R$, 則 $A+B:C=P+Q:R$.

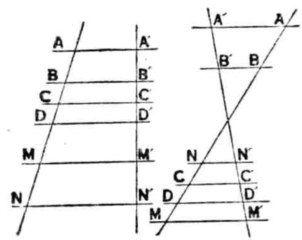
證 因 $B:C=Q:R$ [假設], 故 $C:B=R:Q$ [反比定理]. 而 $A:C=P:R$ [假設], 故 $A:B=P:Q$ [等比定理], 故 $A+B:B=P+Q:Q$ [合比定理]. 而 $B:C=Q:R$ [假設], 故 $A+B:C=P+Q:R$ [等比定理].

971. 設二比相等,則其二乘比亦相等. 反之,設二比之二乘比相等,則其比亦等.

證 設 $A:B=P:Q$; 求證 $A:B$ 之二乘比,等於 $P:Q$ 之二乘比. 設 A, B 之第三比例項爲 C, 而 P, Q 之第三比例項爲 R, 則 $A:B=B:C$, $P:Q=Q:R$. 於是因 $A:B=P:Q$, 故 $B:C=Q:R$ [955題]. 由是 $A:C=P:R$ [等比定理]. 卽 $A:B$ 之二乘比,等於 $P:Q$ 之二乘比. 次,設 $A:B$ 之二乘比,等於 $P:Q$ 之二乘比,卽 $A:C=P:R$. 取 S, 令 $A:B=P:S$, 則 $B:A=S:P$ [反比定理]. 而 $A:C=P:R$ [假設], 故 $B:C=S:R$ [等比定理]. 又因 $A:B=B:C$, 故 $A:B=S:R$ [955題]. 然 $A:B=P:S$, 故 $P:S=S:R$ [955題]. 卽 S 爲 P 與 R 之比例中項. 故 $S=Q$, 因而 $A:B=P:Q$.

972. 二直線爲諸平行直線所截,則一直線上二分之比,等於他直線上對應二分之比.

證 設諸平行直線截一直線於 A, B, C, D, ……, 截他直線於 A′, B′, C′, D′, ……, 而



AB 與 A′B′ 爲對應部分, CD 與 C′D′ 亦爲對應部分. 求證 AB 與 CD 之比,等於 A′B′ 與 C′D′ 之比. 在直線 ABC 上,取 $AM=m\cdot AB$, 及 $AN=n\cdot CD$, 令 M 與 N 在 A 之同側. 平行於諸平行線之一,引 MM′, NN′, 則此二直線平行於諸平行線, 且自相平行 [45題]. 於是將 AM 分爲 m 分,令各分等於 AB, 過各分點引平行於 AA′ 或 MM′ 之直線, 則他直線上對應於此各分之分, 皆等於 A′B′ [229題], 故 $A'M'=m\cdot A'B'$. 仿此, $A'N'=n\cdot C'D'$. 於是若 MM′ 與 AA′ 在 NN′ 之同側,或與 NN′ 相合,或與 AA′ 在 NN′ 之異側,則 $AM<=>AN$, 且 $A'M'<=>A'N'$; 故若 $m\cdot AB<=>n\cdot CD$, 則 $m\cdot A'B'<=>n\cdot C'D'$. 而 m 與 n 爲任意數, 故 $AB:CD=A'B':C'D'$.

973. 將有限直線按任意比內分爲二,或按等比外之任意比外分爲二,其分點皆惟一.

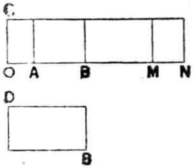
證 見950題.

974. 將三角形之二邊分成比例之直線,平行於底.

證 見951題.

975. 等高二矩形之比,等於其底之比.

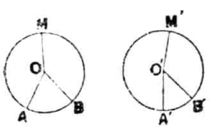
證 設AC, BD爲立於底AO, BQ上之二等高矩形;求證矩形AC與矩形BD之比,等於底AO與底BQ之比. 因兩矩形等高,故QD等於OC. 將DQ置



於CO上,令D合於C,則Q合於O;令B與A在CO之同側,則QB落於OA. 取OM $=m\cdot$OA, ON$=n\cdot$OB, 完成矩形MC, NC. 將OM分爲m分,令各分等於OA,在各分上作高等於OC之矩形,則是等矩形皆相等[225題],故矩形MC$=m\cdot$矩形AC. 同理,矩形NC$=n\cdot$矩形BC. 於是因底OM$>=<$底ON,而矩形MC$>=<$矩形NC[734題];即因$m\cdot$OA$>=<n\cdot$OB,而$m\cdot$矩形CA$>=<n\cdot$矩形CB. 而m與n爲任意數,故矩形AC:矩形CB$=$底OA:底OB,即矩形AO:矩形BD$=$底AO:底BQ.

976. 同圓或等圓中,中心角及扇形,比例於其所立之弧.

證 設O, O爲二等圓之中心, AB, A′B′爲是等圓之二任意弧,而分別夾於二半徑OA, OB及O′A′, O′B′間. 求證角AOB:角



A′O′B′$=$弧AB:弧A′B′,及扇形AOB:扇形A′O′B′$=$弧AB:弧A′B′. 取弧AM,令等於弧AB之m倍.於是弧AM爲由m個等於AB之弧所成,且立於是等弧上之角,各等於A$\hat{\text{O}}$B[424題],因此角AOM等於角AOB之m倍,扇形AOM等於扇形AOB之m倍[433題].同理,若弧A′M′$=n\cdot$A′B′,則角A′O′M′等於角A′O′B′之n倍,扇形A′O′M′等於扇形A′O′B′之n倍. 於是因弧AM$>=<$弧A′M′,而角AOM$>=<$角A′O′M′[434題],扇形AOM$>=<$扇形A′O′M′[432題];即因$m\cdot$AB$>=<n\cdot$A′B′,而$m\cdot$角AOB$>=<n\cdot$角A′O′B′, $m\cdot$扇形AOB$>=<n\cdot$扇形A′O′B′. 由是角AOB:角A′O′B′$=$弧AB:弧A′B′,扇形AOB:扇形A′O′B′$=$弧AB:弧A′B′.

III. 本章雜題

977. 設A等於C之m倍,B等於C之n倍,則A之n倍等於B之m倍,A之$\frac{1}{m}$等於B之$\frac{1}{n}$.

證 因A$=m$C,故$n\cdot$A$=n\cdot m$C$=mn\cdot$C,又因B$=n$C,故$m\cdot$B$=m\cdot n$C$=mn\cdot$C,故nA$=m$B. 次,因A$=m$C,故$\frac{1}{m}.$A$=\frac{1}{m}.m$C$=\frac{1}{m}m\cdot$C$=$C,又因B$=n$C,故$\frac{1}{n}.$B$=\frac{1}{n}.n$C$=$C,故$\frac{1}{m}.$A$=\frac{1}{n}.$B.

978. 試由比之不等定義,即有二比,若得取其二前項之等倍量與二後項之等倍量,令第一比中前項之倍量較後項之倍量大或等時,第二比中前項之倍量較後項之倍量不大或小,則曰第一比大於第二比,以證若A:B$>$P:Q,則B:A$<$Q:P.

證 因 $A:B>P:Q$, 故得選適當之 m,n, 令 mA 較 nB 大或等, 而 mP 較 nQ 不大或更小 [不等比定義]. 今設 m, n 爲如是選得者, 則 nQ 大於 mP, 而 nB 等於 mA; 又 nQ 等於 mP 或大於 mP, nB 小於 mA. 故 $Q:P>B:A$, 卽 $B:A<Q:P$.

979. 三所設量 A, B, P 有唯一之第四比例項; 而兩所設量 A, B 有唯一之第三比例項及唯一之比例中項.

證 設 Q 爲 A, B, P 之第四比例項, 則 $A:B=P:Q$. 又設尙有 Q', 亦爲其第四比例項, 則 $A:B=P:Q'$. 由是 $P:Q=P:Q'$ [905題]. 然此不合理 [958題], 故其第四比例項唯一. 次, 設 A, B 之第三比例項爲 R, R', 則 $A:B=B:R$, $A:B=B:R'$, 故 $B:R=B:R'$, 因此非 $R=R'$ 不可. 又設 A, B 之比例中項爲 M, M', 則 $A:M=M:B$, $A:M'=M':B$. 今設 $M>M'$, 則 $A:M<A:M'$ [958題], 故 $M:B<M':B$, 因而非 $M<M'$ 不可. 此亦不合理, 故 $M=M'$, 而比例中項唯一.

980. 若 $A:B=C:D$, 則 $mA:nB=mC:nD$. 試證之.

證 因 $A:B=C:D$, 故 $A:C=B:D$ [更比定理]. 而 $A:C=mA:mC$ [960題], $B:D=nB:nD$, 故 $mA:mC=nB:nD$, 因而 $mA:nB=mC:nD$ [更比定理].

981. 設 $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$, 求證以下各比例: (1) $A:B=A-C:B-D$. (2) $A:B=mA\pm nC:mB\pm nD$. (3) $A:B=mA+nC+pE+\cdots\cdots:mB+nD+pF+\cdots\cdots$.

證 (1) 因 $A:B=C:D$, 故視 $mA>=<nB$, 而 $mC>=<nD$, 因此 $mA-mC>=<nB-nD$, 卽 $m(A-C)>=<n(B-D)$. 故 $A:B=A-C:B-D$. (2) 因 $A:B=C:D$, 故 $A:B=mA:mB=nC:nD=mA\pm nC:mB\pm nD$ [加比定理及本題(1)]. (3) 因 $A:B=C:D=E:F=\cdots\cdots$, 故 $A:B=mA:mB=nC:nD=pE:pF=\cdots\cdots=mA+nC+pE+\cdots\cdots:mB+nD+pF+\cdots\cdots$ [加比定理].

982. 設 $A+B:B=P+Q:Q$, 則 $A:B=P:Q$, 試證之; 並由是導出若 $A:B=P:Q$, 則 $A-B:B=P-Q:Q$.

證 因 $A+B:B=P+Q:Q$, 故視 $m(A+B)$ 等於 nB, 或介於 nB 及 $(n+1)B$ 間, 而 $m(P+Q)$ 等於 nQ, 或介於 nQ 及 $(n+1)Q$ 之間 [比例定義]; 亦卽視 mA 之等於 $nB-mB=(n-m)B$, 或介於 $(n-m)B$ 與 $(n+1-m)B$ 之間, 而 mP 等於 $(n-m)Q$, 或介於 $(n-m)Q$ 與 $(n+1-m)Q$ 之間. 故 $A:B=P:Q$. 次, 設 $A+B=A'$, $P+Q=P'$, 則 $A=A'-B$, $P=P'-Q'$, 以此代入上文證明之定理, 卽得若 $A':B=P':Q$, 則 $A'-B:B=P'-Q:Q$. 故若 $A:B=P:Q$, 則 $A-B:B=P-Q:Q$.

983. 設 $A:B>P:Q$, 則 $A+B:B>P+Q:Q$; 且視 $A>$ 或 $<B$, 及 $P>$ 或 $<Q$, 而 $A\sim B:B>$ 或 $<P\sim Q:Q$.

證 因 $A:B>P:Q$, 故可求得 m, n, 令視 $mA>=nB$, 而 $mP\leqq<nQ$; 因而視 $mA+mB>=nB+mB$, 而 $mP+mQ\leqq<nQ+mQ$, 卽視 $m(A+B)>=(n+m)B$, 而 $m(P+Q)\geqq<(n+m)Q$. 故 $A+B:B>P+Q:Q$. 次, 設 $A>B$, $P>Q$, 則 $mA>mB$, $mP>mQ$, 故視 $mA-mB>=nB-mB$, 卽 $m(A$

$-B)>=(n-m)B$, 而 $m(P-Q)\geqq<(n-m)Q$, 故 $A-B:B>P-Q:Q$. 若 $A<B$, $P<Q$, 則 $mA<mB$, $mP<mQ$, 故視 $nB-mA<=mB-nB$, 而 $mQ-mP\leqq>mQ-nQ$, 卽視 $m(B-A)<=(m-n)B$, 而 $m(Q-P)\leqq>(m-n)Q$, 故 $B-A:B<Q-P:Q$.

984. 設 $A:B=P:Q$, 則 $A+B:A\sim B=P+Q:P\sim Q$, $A:A\sim B=P:P\sim Q$.

證 因 $A:B=P:Q$, 故 $A+B:B=P+Q:Q$ [合比定理], 因而 $A+B:P+Q=B:Q$ [更比定理]. 又 $A\sim B:B=P\sim Q:Q$ [分比定理], 因而 $A\sim B:P\sim Q=B:Q$ [更比定理]. 故 $A+B:P+Q=A\sim B:P\sim Q$, 卽 $A+B:A\sim B=P+Q:P\sim Q$. 次, 因 $A:B=P:Q$, 故 $A\sim B:B=P\sim Q:Q$; 由反比定理, $B:A\sim B=Q:P\sim Q$; 由等比定理, $A:A\sim B=P:P\sim Q$.

985. 設 $A:B$ 及 $C:D$ 之複比爲等比, 則 $A:B$ 與 $C:D$ 互爲反比.

證 假定 $A:B=P:Q$, 則因 $A:B$ 與 $C:D$ 之複比爲等比, 故必 $C:D=Q:P$, 因而 $D:C=P:Q$ [反比定理], 故 $A:B=D:C$, 因而 $A:B$ 與 $C:D$ 互爲反比.

986. 設 m 及 n 爲二數, 則 $m:n$ 之二乘比爲 $m^2:n^2$, 三乘比爲 $m^3:n^3$.

證 $m:n=m\cdot m:m\cdot n$, $m:n=n\cdot m:n\cdot n$, 故 $m:n$ 之二乘比爲 $m^2:m\cdot n$ 與 $n\cdot m:n^2$ 之複比, 卽 $m^2:n^2$. 仿此, $m:n=m^2\cdot m:m^2\cdot n$, $m:n=mn\cdot m:mn\cdot n$, $m:n=n^2\cdot m:n^2\cdot n$, 故 $m:n$ 之三乘比等於 $m^3:m^2n$, $m^2n:mn^2$, $mn^2:n^3$ 之複比, 卽 $m^3:n^3$.

987. 設 m, n, p, q 皆爲數, 則 $m:n$ 及 $p:q$ 之複比爲 $mp:nq$.

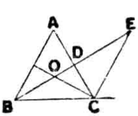
證 $m:n=mp:np$, $p:q=np:nq$, 故 $m:n$ 與 $p:q$ 之複比, 等於 $mp:np$ 與 $np:nq$ 之複比, 卽 $mp:nq$.

988. 設二比相等, 則其三乘比亦相等. 反之, 設二比之三乘比相等, 則二比亦相等.

證 設 $A:B=B:C=C:D$, $P:Q=Q:R=R:S$, 而 $A:B=P:Q$; 求證 $A:D=P:S$. 因 $A:B=P:Q$, 故 $B:C=Q:R$, 因而 $A:C=P:R$. 又因 $C:D=R:S$, 故 $A:D=P:S$. [逆定理]. 設 $A:B=B:C=C:D$, $P:Q=Q:R=R:S$, 而 $A:D=P:S$; 求證 $A:B=P:Q$. 取 T, U, 令 $A:B=P:T$, $B:C=T:U$. 於是因 $A:D=P:S$, $B:A=T:P$, 故 $B:D=T:S$. 又因 $C:B=U:T$, 故 $C:D=U:S$, 故 $P:T=T:U=U:S$. 然 $P:Q=Q:R=R:S$, 故若假定 $T>Q$, 則 $P:Q>P:T$, 故 $U>R$, 因而 $R:S<U:S$, 而不合理. 仿此, 若 $T<Q$, 則亦生不合理之結果. 故 $T=Q$, 卽 $A:B=P:Q$.

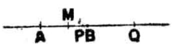
989. 正三角形之內切圓, 外接圓, 傍切圓之半徑, 成 1:2:3 之比.

證 正三角形 ABC 中, 設角 B 及 C 之二等分線交於 O, 延長 BO, 令交 AC 於 D, 交 $\hat{C}$ 之外角之二等分線於 E, 則 E 爲傍心, O 爲內心. 而 ABC 爲正三角形, 故 BD, CO 分別將 AC, AB 垂直二等分, 故 O 又爲 ABC 之外心. 因此, OD, OC, ED 分別爲內切圓, 外接圓, 傍切圓之半徑. $OB=OC$, $OB=2OD$, 故 $OC=2OD$. 又 $\triangle ABD\equiv\triangle CDE$, 故 $ED=BD=3OD$. 故 $OD:OC:ED=1:2:3$.



990. 試於定理有限直線 AB 內分於 P, 外分於 Q 而 PA:PB 及 QA:QB 等於所設任意比 H:K, 如是之分點, 卽 P 及 Q 唯一中,設 K 初較 H 小甚,漸漸增大而與 H 相等,最後較 H 大甚,而追跡 P 及 Q 位置之變化.

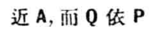
證　設有限直線 AB, 按比 H:K 內分及外分於 P, Q, 則 AP:BP = H:K = AQ:BQ.



茲設 K 小於 H 甚多, 則 BP, BQ 小於 AP, AQ 甚多,故 P, Q 皆甚近於 B. 設 K 由是漸增,則 BP, BQ 俱從而增大,故 P 離 B 而趨近 A, 而 Q 依 P 之反對方向,漸遠於 B. 如是至 K = H 時, 因 AP = BP, AQ = BQ, 故 P 至 AB 之中點 M,而 Q 至無窮遠.設 K 更由是增大, 則 $K>H$, 因而 $BP>AP$, $BQ>AQ$. 故 P 越 M 而益近於 A,而 Q 至前之異側, 即與 A 在 B 之同側;又 P, Q 隨 K 之增大, 而由 A 之兩側, 漸近於 A. 最後, K 大於 H 甚多時, P, Q 皆在極接近 A 之位置.

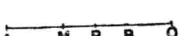
991. 設 P, Q 對於 A, B 爲調和共軛點, 則 A, B 對於 P, Q 亦爲調和共軛點.

證　因 AP:BP = AQ:BQ [假設], 故 AP:AQ = BP:BQ [更比定理]; 而此比例式卽表示 B, A 對於 P, Q 爲調和共軛點.



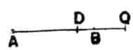
992. 設 A, P, B, Q 成調和點列, M 爲 AB 之中點,則 MA 爲 MP, MQ 之比例中項. 又設 PQ 之中點爲 O, 則 OP 爲 OA, OB 之比例中項.

證　因 AP:BP = AQ:BQ [假設], 故 AP + BP:BP = AQ + BQ:BQ [合比定理], 且 AP − BP:BP = AQ − BQ:BQ [分比定理]. 然 AP + BP = AB = 2AM, AQ + BQ = 2MQ, AP − BP = 2MP, AQ − BQ = AB = 2AM. 故 2AM:BP = 2MQ:BQ, 卽 2AM:2MQ = BP:BQ [更比定理],又 2MP:BP = 2AM:BQ, 卽 2MP:2AM = BP:BQ. 故 2AM:2MQ = 2MP:2AM; 由反比定理, MQ:AM = AM:MP. 次,設 PQ 之中點爲 O, 則 A, B 對於 P, Q 爲調和共軛點 [前題], 故仿前得證 OP 爲 OA, OB 之比例中項.



993. 設 A, P, B, Q 成調和點列, 則 QA, QP, QB 成調和級數. 又 AP, AB, AQ 亦成調和級數.

證　AP : BP = AQ : BQ [假設],而 AP = QA − QP, BP = QP − QB, 故 QA − QP:QP − QB = AQ:BQ, 故 QA, QP, QB 成調和級數. 次, AP:AQ = BP:BQ [更比定理], 由此式可證 AP, AB, AQ 亦成調和級數.



994. 等底二矩形之比,等於其高之比.

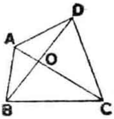
證　矩形之二隣邊中,得視其任何一邊爲底邊,故設以等邊爲高,他邊爲底,則兩矩形爲等高矩形,故本定理成立 [975題].

995. 等底之二平行四邊形或三角形,比例於其高.

證　平行四邊形等於其等底等高之矩形, 而等底矩形之比, 等於其高之比 [994題], 故等底平行四邊形, 比例於其高. 三角形等於其等底等高矩形之半分,故與前同.

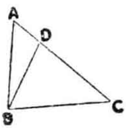
996. 四邊形爲其二對角線所分成之四個三角形成比例.

證　設四邊形 ABCD 中, 二對角線之交點



為 O. △AOB, △BOC 之高相等,故△AOB:△BOC＝AO:CO [953題]. 同理, △AOD:△DOC＝AO:CO. 故 △AOB:△BOC＝△AOD:△DOC.

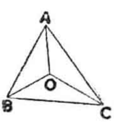
997. 設兩三角形 ABC, BCD 共邊 BC, 角 ACB, BCD 相等,則兩三角形之比等於 AC:CD.



證 設視AC, DC為△ABC, △DBC 之底, 則其高相等, 故△ABC:△DBC＝AC:CD [953題].

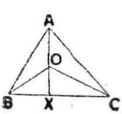
998. 三角形之內心與各頂點聯結,則其所成之三角形面積,分別比例於原三角形之邊.

證 設三角形 ABC 之內心為 O, 則三個三角形 OAB, OBC, OCA 之高皆為內切圓之半徑,故相等. 故 △AOB:△BOC:△COA＝AB:BC:CA [953題].



999. 設三角形 ABC 內之任意點為 O, 聯結 OA, OB, OC, 命 AO 之延線與邊 BC 之交點為 X, 則 △AOB:△AOC＝BX:CX.

證 △ABO:△BOX＝AO:OX [953題], △ACO:△COX＝AO:OX. 故 △ABO:△BOX＝△ACO:△COX,因而△ABO:△ACO＝△BOX:△COX [更比定理]＝BX:CX [953題].



1000. 設 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$, 則 $\dfrac{a}{d}=\dfrac{a^3}{b^3}$.

證 因 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=\dfrac{c}{d}$, 故取其複比, 則 $\dfrac{a^3}{b^3}$ $=\dfrac{abc}{bcd}=\dfrac{a}{d}$.

1001. 設 $a:b=c:d$, 則 $a+b:a\sim b=c+b:c\sim d$. 又試證其逆定理.

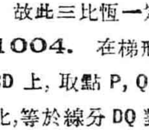
證 因 $a:b=c:d$, 故 $a+b:b=c+d:d$ [966題]⋯⋯(1), 又 $a\sim b:b=c\sim d:d$⋯(2), 取 (2) 之反比與 (1) 之複比,則 $a+b:a\sim b=c+d:c\sim d$. 反之,設 $a+b:a-b=c+d:c-d$,則 $a+b+a-b:a+b-a+b=c+d+c-d:c+d-c+d$ [本題前段],卽 $2a:2b=2c:2d$, 故 $a:b=c:d$.

1002. 設 $a:b=c:d$ 中, a 為最大, 則 $a+d>b+c$.

證 因 $a:b=c:d$, 故 $b:a=d:c$. 而 a 為最大, 故 $a>b$, $c>d$, 因此 $a-b:a=c-d:c$. 此式中因 $a>c$, 故 $a-b>c-d$, 卽 $a+d>b+c$.

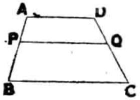
1003. 在角 A 之一邊 AB 上任取一點 M, 由 M 至他邊 AC 引垂線 MP, 則 MP:AP, MP:AM, AP:AM 之值恆一定.

證 在邊 AB 上取他任意點 M′, 由 M′ 引 AC 之垂線 M′P′, 則 △AMP∽△AM′P′ [1017題], 故 MP:AP＝M′P′:AP′, MP:AM＝M′P′:AM′, AP:AM＝AP′:AM′. 故此三比恆一定.



1004. 在梯形 ABCD 之不平行二邊 AB, CD 上, 取點 P, Q, 令線分 AP 對線分 PB 之比,等於線分 DQ 對線分 QC 之比,則線分 PQ 平行於底.

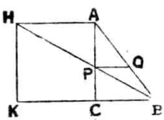
證 過 P 平行於 BC 引直線 PQ′, 命其與



DC 之交點爲 Q′, 則 AP : PB = DQ′ : Q′C [972 題]. 然 AP : PB = DQ : QC [假設], 故 DQ′ : Q′C = DQ : QC, 卽 Q, Q′ 爲直線 DC 按同比之內分點, 故相合 [950題]. 因而 PQ 平行於 BC.

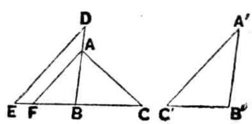
1005. 直角三角形 ABC 中, 在其直角之一邊 AC 上, 作正方形 ACKH, 聯結 BH, 命其與 AC 之交點爲 P, 由 P 引 CB 之平行線, 命其與斜邊 AB 之交點爲 Q, 則 CP = PQ.

圖 因 $A\hat{C}K = \hat{R} = A\hat{C}B$, 故 B, C, K 在一直線上. 而 PQ ∥ CB, AH ∥ BC, 故 PQ ∥ AH, 故 PQ : HA = BP : BH. 又 AC ∥ HK, 故 PC : HK = BP : BH. 故 PQ : AH = PC : HK. 然 AH = KH, 故 PQ = PC.



1006. 設兩三角形 ABC, A′B′C′ 中, 角 A 與角 A′ 相等, 角 B 與角 B′ 互爲補角, 則 BC 與 B′C′ 之比, 等於 AC 與 A′C′ 之比.

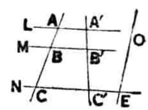
圖 在 CB 之延線上取 BE, 令等於 B′C′;



BA 上取 BD, 令等於 B′A′; 聯結 DE, 則 △DBE ≡ △A′B′C′ 明甚. 又過 A 平行於 DE 引 AF, 命其與 BE 或其延線交於 F. 於是 DE : AF = BE : BF ……(1). 又 $B\hat{D}E = B\hat{A}F$ [作圖], $B\hat{D}E = B\hat{A}C$ [假設], 故 $B\hat{A}F = B\hat{A}C$, 故 AF : AC = BF : BC ……(2). 取 (1), (2) 之複比, 則 DE : AC = BE : BC, 卽 A′C′ : AC = B′C′ : BC.

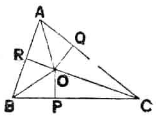
1007. 試證下定理之逆定理: 與一組平行線交之二橫截線, 爲是等平行線分成比例.

圖 本定理之假設部分爲有多數平行線, 及二橫截線, 終結部分爲此橫截線之各部分成比例, 故其逆定理如下: (1) 任意二橫截線與一組直線交, 若二橫截線上之各部分成比例, 則此一組直線互相平行. (2) 分二直線, 令其對應部分成比例, 且聯結其中二組對應分點之直線平行, 則聯結他對應分點之直線亦平行. 茲先證明 (1) 設多數直線 L, M, N, …… 與任意二橫截線交, 其截取之部分成比例. 假定 ABC 爲一任意橫截線, 且是等多數直線 L, M, N 中, 有不平行者, 例如 L, M 不平行, 而交於 O. 於是過 O 引任意直線, 命其與 N 之交點爲 E, 則 AC : OE 不等於 BC : OE, 而違反假設. 故 L, M 不相交, 卽直線 L, M, N, …… 相平行. 次證明 (2). 設二直線 ABC, A′B′C′ 分成多數部分, 而 AB : A′B′ = BC : B′C′ = ……, AA′ ∥ BB′. 今過 C, 平行於 BB′, 引直線 CC″, 命其與 A′B′C′ 之交點爲 C″, 則 AB : A′B′ = BC : B′C″. 故 BC : B′C′ = BC : B′C″, 故 B′C′ = B′C″, 故 C′, C″ 相合, 直線 CC′ 卽 N 平行於 M. 其他任何對應分點聯結之直線, 亦皆平行於 AA′, BB′.



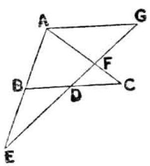
1008. 設 O 爲三角形 ABC 內之一點, 角 BOC, COA, AOB 之二等分線與邊 BC, CA, AB 之交點分別爲 P, Q, R, 則 (BP : PC)(CQ : QA) · AR : RB) = 1.

證 因 OP 爲角 BOC 之二等分線, 故 BP:PC = OB:OC. 同理, CQ:QA = OC:OA, AR:RB = OA:OB, 故 (BP:PC)(CQ:QA)(AR:RB) = (OB:OC)(OC·OA)(OA:OB) = 1.



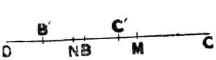
1009. 設三角形 ABC 之底 BC 之中點爲 D, 過 D 引一直線, 令交邊 AB, AC 或其延線於 E, F, 又交過 A 平行於 BC 之直線於 G, 則點 E, F 將直線 DG 分於調和.

證 因 AG ∥ DC, 故 △FAG, △FCD 之三角, 分別相等, 故 DF:GF = DC:GA [1017題]. 又因 AG ∥ BD, 故 ED:GE = BD:GA [1017題]. 然 BD = DC, 故 DF:GF = ED:GE, 卽 E, F 分 DG 於調和.



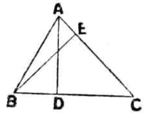
1010. 設 O, B, C 爲在一直線上之三點, OB, OC 之中點分別爲 B′, C′, 按 $m:n$ 內分或外分 BC 之點爲 M, 又 OM 之中點爲 N, 則 N 按同比內分或外分 B′C′.

證 設 M 爲內分點. 於是 OB′ + B′N = ON = $\frac{1}{2}$OM = $\frac{1}{2}$(OB + BM) = OB′ + $\frac{1}{2}$BM. 故 B′N = $\frac{1}{2}$BM. 又 ON + NC′ = OC′ = $\frac{1}{2}$OC = $\frac{1}{2}$(OM + MC) = ON + $\frac{1}{2}$MC. 故 NC′ = $\frac{1}{2}$MC. 故 B′N:NC′ = $\frac{1}{2}$BM:$\frac{1}{2}$MC = BM:MC. 外分時亦可仿此證之.



1011. 設三角形 ABC 中, AC 大於 BC, 由角頂 A, B 至對邊引垂線 AD, BE, 則 AC + BE 大於 BC + AD.

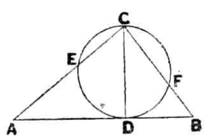
證 I. △ABC = $\frac{1}{2}$AD·BC = $\frac{1}{2}$BE·AC, 故 AD·BC = BE·AC. 然 AC > BC [假設], 故 AD > BE. 又由直角三角形, 知 AC > AD, BC > BE. 故此四直線中, AC 最大, BE 最小. 然兩矩形 AC·BE, BC·AD 等積, 故其周以二隣邊之差之小者爲小. 故 AC + BE > BC + AD.



證 II. 因 AD·BC = BE·AC, 故 AC:BC = AD:BE, 故 AC − BC:BC = AD − BE:BE. 而 BC > BE, 故 AC − BC > AD − BE, 故 AC + BE > AD + BC.

1012. 設以直角三角形 ABC 之斜邊 AB 爲底邊, 命高 CD 爲直徑之圓與二邊 AC, CB 之交點, 分別爲 E, F, 而 BF, AE, BC 及 AC 分別表以 x, y, a 及 b, 則 $x:y = a^3:b^3$.

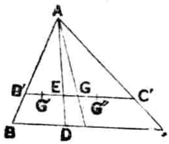
證 I. AB 切圓於 D, 故 AC·AE = $\overline{AD}^2$, BC·BF = $\overline{BD}^2$, 卽 $by = \overline{AD}^2$, $ax = \overline{BD}^2$, 故 $ax:by = \overline{BD}^2:\overline{AD}^2$ ……(1). 而 BD:AD = $\overline{BC}^2:\overline{AC}^2 = a^2:b^2$, 因而 $\overline{BD}^2:\overline{AD}^2 = a^4:b^4$, 故由 (1), 得 $ax:by = a^4:b^4$, 故 $x:y = a^3:b^3$.



證 II. 聯結 DE, DF, 則 CEDF 爲矩形, △DBF, △CDF, △ADE 皆相似於 △ABC, 此甚易證之. 故 x:DF = $a:b$, DF:CF = $a:b$, ED:y = $a:b$, 故 $x:y = a^3:b^3$.

1013. 聯結三角形 ABC 之角頂 A 及底邊上之點 D, 命 △ABC, △ABD, △ADC 之重心分別爲 G, G′, G″, 則 G 按 BD, CD 之反比內分 G′G″.

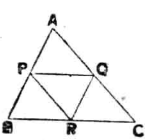
證 過 G 引 BC 之平行線, 命其與 AB, AD,



AC 之交點, 分別爲 B′, E, C′, 則 G, G′, G″ 分別爲 B′C′, B′E, EC′ 之中點, 此甚易證之. 故 $G'G'' = B'G = C'G$. 而 $BD:CD = B'E:C'E = B'G':C'G'' = B'G - G'G : C'G - GG'' = G'G'' - G'G : G'G'' - GG'' = GG'' : G'G$, 卽 G 按 BD:CD 之反比內分 $G'G''$.

1014. 三角形 ABC 中, 由邊 AB 上之一點 P, 平行於邊 BC, 引直線 PQ, 命其與邊 AC 之交點爲 Q; 復由 Q 平行於邊 AB 引直線 QR, 命其與邊 BC 之交點爲 R; 復由 R 平行於邊 CA 引直線, 若此直線過點 P, 則 P 爲 AB 之中點.

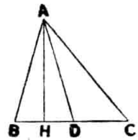
證 I. 由假設, PQ 平行於 BC, 故 $AP:PB = AQ:QC$. 又因 QR 平行於 AB, 故上比 $= BR:RC$. 又因 RP 平行於 AC, 故上比 $= BP:PA$. 故 $AP:PB = BP:PA$, 由是 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$. 故 $AP = BP$, 卽 P 爲 AB 之中點.



證 II. 由作圖, $AP \parallel QR$, $AQ \parallel PR$, 故 AQRP 爲平行四邊形, 而 $AP = QR$. 同理, PQRB 爲平行四邊形. 故 $PB = QR$. 故 $AP = PB$, 卽 P 爲 AB 之中點.

1015. 設三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 之長, 分別表以 a, b, c, 按比 $m:n$ 內分邊 BC 於 D, 假定 $CD = x$, $BD = y$ $[x:y = n:m]$, $AD = z$, 則 $mb^2 + nc^2 = mx^2 + ny^2 + (m+n)z^2 = \frac{mn}{m+n}a^2 + (m+n)z^2$.

證 設 $\hat{ADC}$ 爲鈍角, AH 爲高, 則 $\overline{AC}^2 - (\overline{CD}^2 + \overline{AD}^2) = 2CD \cdot HD$. $(\overline{BD}^2 + \overline{AD}^2) - \overline{AB}^2 = 2BD \cdot HD$; 卽 $b^2 - (x^2 + z^2) = 2x \cdot HD$, $(y^2 + z^2) - c^2 = 2y \cdot HD$. 故 $b^2 - x^2 - z^2 : y^2 + z^2 - c^2 = x:y = n:m$. 由是得 $m(b^2 - x^2 - z^2) = n(y^2 + z^2 - c^2)$, 卽 $mb^2 + nc^2 = mx^2 + ny^2 + (m+n)z^2$. 次, 由 $x:y = n:m$, 得 $x + y : y = n + m : m$, 故 $(x+y)^2 : y^2 = (n+m)^2 : m^2$, 故 $\frac{mn}{m+n}a^2 = \frac{n(n+m)y^2}{m}$. 又由 $x:y = n:m$, 得 $mx = ny$, 故 $mx^2 : ny^2 = n : m$, 故 $mx^2 + ny^2 : ny^2 = n + m : m$, 故 $mx^2 + ny^2 = \frac{n(n+m)y^2}{m} = \frac{mn}{m+n}a^2$. 故 $mb^2 + nc^2 = mx^2 + ny^2 + (m+n)z^2 = \frac{mn}{m+n}a^2 + (m+n)z^2$.



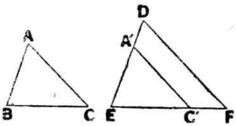
第二章　相似形

1016. 同直線形之二相似直線形相似.

證 設兩直線形 A, B, 皆相似於直線形 C; 求證直線形 A 與 B 相似. 因 A 相似於 C, 故 A 之各角, 與依同順序所取之 C 之各角, 分別相等. 同理, B 之各角, 與依同順序所取之 C 之各角, 分別相等. 而等於同物之物相等, 故 A 之各角, 與依同順序所取之 B 之各角相等. 又因 A 相似於 C, 故 A 之順次二邊之比, 等於 C 之對應邊之比. 同理, B 之順次二邊之比, 等於 C 之對應邊之比. 而等於同比之比相等, 故 A 與 B 之對應邊成比例. 由是可知, A 與 B 相似.

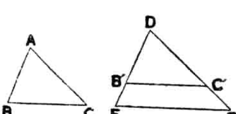
1017. 兩三角形中,其各角分別相等,則此兩三角形相似,等角之對邊爲比例之對應項.

證 設三角形 ABC 之角 A, B, 分別等於三角形 DEF 之角 D, E, 於是角 C 等於角 F [65題]; 求證兩三角形相似, 而 $AB:BC=DE:EF$, $BC:CA=EF:FD$, $CA:AB=FD:DE$. 將三角形 ABC 置於三角形 DEF 上,令 B 落於 E 上,BA 落於 ED 上.於是因 $A\hat{B}C$ 等於 $D\hat{E}F$,故 BC 落於 EF 上.假定 A 及 C 分別落於邊 ED 及 EF 或其延線上之 A', C'. 於是因角 $EA'C'$ 等於角EDF, 故 $A'C'$ 平行於 DF. 故 $A'E:DE=EC':EF$[949題],卽 $AB:DE=BC:EF$, 故 $AB:BC=DE:EF$ [更比定理]. 同理, $BC:CA=EF:FD$, $CA:AB=FD:DE$.



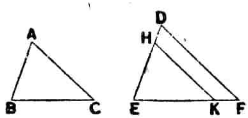
1018. 兩三角形中,一角相等,夾此角之邊成比例, 則兩三角形相似, 而對應邊之對角相等.

證 設三角形 ABC 之角 BAC 等於三角形 DEF之角 EDF, 且邊 AB 與 AC 之比, 等於邊 DE 與 DF 之比. 求證兩三角形相似,而角 ABC, ACB 分別等於角 DEF, DFE. 將三角形 ABC 置於三角形 DEF 上,令 A 落於 D 上, AB 落於 DE 上, 則 AC 常落於 DF 上,因角 BAC 等於角 EDF 故也. 茲假定 B 及 C 分別落於邊 DE 及 DF 或其延線上之點 B' 及 C'. 於是因 $AB:AC=DE:DF$, 故 $DB':DE=DC':DF$ [更比定理], 故 $B'C'$ 平行於 EF [951題]. 因此,角 $DB'C'$, $DC'B'$ 分別等於角 DEF, DFE, 卽角 ABC, ACB 分別等於角 DEF, DFE. 故兩三角形 ABC, DEF 等角,因而相似[1017題].



1019. 兩三角形中, 其順次所取各邊成比例, 則兩三角形相似, 而對應邊之對角相等.

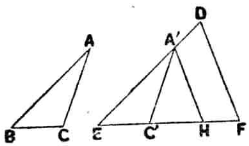
證 設兩三角形 ABC, DEF 中, $AB:BC=DE:EF$, $BC:CA=EF:FD$,於是由等比定理, $AB:AC=DE:DF$. 求證兩三角形相似, 而 ABC, BCA, CAB 分別等於角 DEF, EFD, FDE. 在 ED 上取 EH, 令等於 BA; 在 EF 上取 EK, 令等於 BC; 聯結 HK. 於是因 $AB:BC=DE:EF$ [假設], 故 $HE:EK=DE:EF$, 且角 E 爲兩三角形 HEK, DEF 所共, 故兩三角形 HEK, DEF 相似 [1018題], 故 $EK:KH=EF:FD$. 然 $BC:CA=EF:FD$ [假設],故 $EK:KH=BC:CA$. 然 EK 等於 BC, 故 KH 等於 CA [956題]. 由是兩三角形 ABC, HEK 中, $AB=HE$, $BC=EK$, $CA=KH$, 故兩三角形全等 [77題]. 而兩三角形 HEK, DEF 相似, 業已證明, 故三角形 ABC 相似於三角形 DEF [1016題], 角 A, B, C 分別等於角 D, E, F.



1020. 兩三角形中,一角相等,夾他一角之邊成比例, 而等角之對邊爲對應項, 則兩

三角形之第三角或相等，或互爲補角；相等時兩三角形相似.

圖　設三角形 ABC 之角 ABC, 等於三角形 DEF 之角 DEF, 且 AB : AC = DE : DF. 求證角 ACB, DFE 或相等，或互爲補角；相等時兩三角形相似.



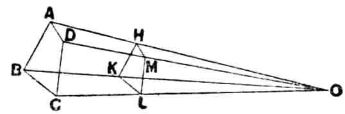
將三角形 ABC 置於三角形 DEF 上，令 B 落於 E, 而 BA 落於 ED, 則 BC 落於 EF, 因角 ABC 等於角 DEF 故也. 假定 A 及 C 分別等於 ED 及 EF, 或其延線上之 A′ 及 C′. 於是若 A′C′ 平行於 DF, 則角 A′C′E 等於角 DFE, 卽角 ACB 等於角 DFE. 此時兩三角形 ABC, DEF 相似 [1017題]. 然若 A′C′ 不平行於 DF, 則由 A′ 平行於 DF 引 A′H, 令與 EF 交於 H, 於是兩三角形 A′EH, DEF 等角，故 EA′ : A′H = ED : DF [1017題]. 而 EA′ : A′C′ = ED : DF [假設], 故 EA′ : A′H = EA′ : A′C′, 故 A′H 等於 A′C′ [956題], 故角 A′C′H 等於角 A′HC′, 因此角 A′C′E, A′HC′ 爲補角，故角 ACB, DFE 爲補角.

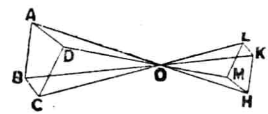
1021.　前題中，有以下三條件之一，則兩三角形相似. (1)等角爲直角或鈍角. (2)他一組對應邊之對角俱爲銳角，俱爲鈍角，或其一爲直角. (3)各三角形中，等角之對邊，不小於他所設邊.

圖　由前題自明.

1022.　設兩相似直線形之對應邊，互相平行，則其一之各角頂與他一之各對應角頂聯結之直線，或平行，或交於一點，而由此點沿任意直線至其與兩形對應邊交點之距離之比，等於兩形之對應邊之比.

圖　設 ABCD, HKLM 爲二相似直線形，前





者之邊 AB, BC, CD, DA 分別平行於後者之對應邊 HK, KL, LM, MH. 求證 AH, BK, CL, DM 或皆平行，或交於一點. 先設 AB, HK 爲由 A 及 H 依同一方向所引者. 此時若兩形相似且相等，則 ABKH 爲一組對邊 AB, HK 相等且平行之四邊形，故 AH, BK 平行 [226題]. 同理，BK 平行於 CL, CL 平行於 DM. 若兩形不相等，則延長 AH, 令截 BK 之延線於 O. 於是因 AB 與 HK 平行，故兩三角形 ABO, HKO 等角，故 BO : KO = AB : HK [1017題], 即 AH 按比 AB : HK 外分 BK. 同理，CL 按比 BC : KL 外分 BK. 然 AB : HK = BC : KL, 因兩形相似故也. 故 AH 與 CL, 按同比外分 BK, 故 AH 與 CL 截 BK 於同點 O [950題]. 由是類推，可知 DM 亦過 BK 截 CL 之點 O. 據此，AH, BK, CL, DM 過同一點 O. 次，設二線 AB, HK 係由 A 及 H 依反對方向所引者，則與前同理，AH, BK, CL, DM 按對應邊之比互相內分於同點 O. 此時若兩形相等，前述之證法，雖仍可適用，然若用平行四邊形之對二角線，互相二等

分之定理，則可得更簡明之證法．又設過 O 所引之任意直線，與對應邊 AB, HK 分別交於 P, Q．求證 OP:OQ＝AB:HK．因 AP 與 HQ 平行，故兩三角形 APO, HQO 等角，故 OP:OQ＝OA:OH．而 OA:OH＝AB:HK，故 OP:OQ＝AB:HK．

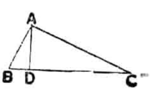
1023. 兩相似直線形，得分爲同數之相似三角形．

證 將兩相似直線形之小者，置於大者之內，而令兩形之對應邊平行．於是聯結其對應頂點之直線，交於兩形內之一點，而將兩形分成個數等於邊數之相似三角形．故如題所言．

注意 相似直線形之周之比，等於對應線之比．

1024. 直角三角形中，由直角頂至斜邊所引之垂線，將三角形分成兩相似三角形，而此兩三角形，皆與原三角形相似．

證 設 ABC 爲以 B$\hat{A}$C 爲直角之三角形，AD 爲 BC 之垂線；求證三角形 DBA, DAC 皆與三角形 ABC 相似，又互爲相似形．兩三角形 DBA, ABC 中，角 ABC 爲兩形所共，而直角 BDA, BAC 相等，故兩三角形相似［1017題］．同理，兩三角形 DAC, ABC 亦相似．於是因兩三角形 DBA, DAC 爲同三角形 ABC 之相似形，故又互爲相似形［1016題］．

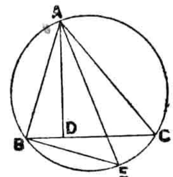


1025. 前題中，直角三角形之各邊，爲斜邊與斜邊上鄰接於該邊之一分之比例中項，垂線爲斜邊上二分之比例中項．

證 由前題自明．

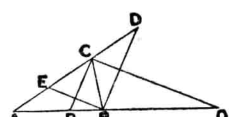
1026. 由三角形之任意角項，引底之垂線，則三角形外接圓之直徑，爲垂線與三角形夾該角之二邊之第四比例項．

證 設 AE 爲三角形 ABC 外接圓之直徑，AD 爲 BC 之垂線；求證 AD:AC＝AB:AE．聯結 BE．因 ABE 爲半圓，故角 ABE 爲直角［454題］，故角 ADC 等於角 ABE．又角 ACD 及角 AEB 爲同弓形 ACB 之弓形角，故相等［452題］．於是三角形 ACD, AEB 等角．故 AD:AC＝AB:AE［1017題］．



1027. 二等分三角形之頂角，或其外角之直線與底之交點，將底按三角形他二邊之比內分或外分．反之，三角形中，按二邊之比內分或外分底邊之點與頂點聯結之直線，將頂角或其外角二等分．

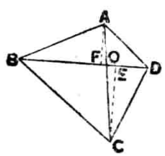
證 設三角形爲 ABC，頂角 C 及其外角之二等分線爲 CP 及 CQ，其與底 AB 及其延線之交點分別爲 P 及 Q．求證 AB 按比 AC:BC 內分於 P，外分於 Q．由 B 引 CP 之平行線 BD，引 CQ 之平行線 BE，令交 AC 於 D 及 E．於是因 CP 平行於 BD，故角 CBD 等於角 BCP，角 CDB 等於角 ACP．然角 BCP 等於角 ACP［假設］，故角 CBD 等於角 CDB，因而 CD 等於 CB．又因 PC 平行於 BD，故 AP:PB＝AC:CD［949題］．而 CD 等於 CB，故 AP:PB＝AC:CB．仿此得證



$AQ:QB=AC:CB$. 反之,設三角形 ABC 之底 AB 按比 $AC:CB$ 內分於 P, 外分於 Q; 求證 CP 與 CQ 分別爲角 C 及其外角之二等分線. 上文業已證明該二等分線按比 $AC:CB$ 內分及外分 AB. 而按比 $AC:CB$ 內分及外分 AB 之點唯一[950題], 今 P, Q 爲是等分點[假設], 故由同一法, CP 二等分角 ACB, 又 CQ 二等分其外角 BCD.

1028. 設四邊形 ABCD 兩對角線之交點爲 O, 則 $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ 之比,等於 AO, CO 之比.

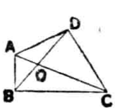
證 由頂點 A, C, 至對角線 BD 引垂線 AF, CE, 則 $\triangle AFO$, $\triangle CEO$ 相似, 因而 $AO:CO=AF:CE$. 今 $\triangle ABD:\triangle BCD=AF:CE$, 故 $\triangle ABD:\triangle BCD=AO:CO$.



別證 $\triangle ABO:\triangle BCO=AO:CO=\triangle ADO:\triangle DCO$ [953題], 故 $\triangle ABO+\triangle AOD:\triangle BCO+\triangle DCO=\triangle ABO:\triangle BCO$ [加比定理], 即 $\triangle ABD:\triangle BCD=\triangle ABO:\triangle BCO=AO:CO$.

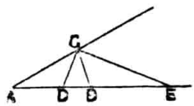
1029. 設四邊形 ABCD 之對角線 AC, 二等分他對角線 BD, 則 AC 二等分四邊形.

證 設四邊形 ABCD 之二對角線交點爲 O, 則 $\triangle ABC:\triangle ADC=BO:DO$ [1028題]. 而 $BO=DO$ [假設], 故 $\triangle ABC=\triangle ADC$.

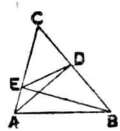


1030. 設三角形 ABC 之邊 AC 爲邊 BC 之二倍, 角 C 及其外角之二等分線與 AB 及其延線之交點爲 D, E, 則三角形 CBD, CAD, CAB, CDE 之比,如 1, 2, 3, 4 之比.

證 因 CD, CE 爲三角形 ABC 之角 C 及其外角之二等分線,故 $AD:BD=AC:BC=AE:BE$ [1027題] $=2:1$, 故 $AD=2BD$, $AB=3BD$, $DE=4BD$. 於是 $\triangle CBD:\triangle CAD:\triangle CAB:\triangle CDE=DB:AD:AB:DE$ [953題] $=1:2:3:4$.



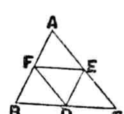
1031. 銳角三角形 ABC 中,由 A 及 B 至對邊引垂線 AD, BE, 則三角形 CDE, ABC 相似.



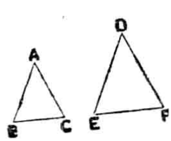
證 $A\hat{E}B=\hat{R}=A\hat{D}B$, 故四邊形 ABDE 內接於圓[486題]. 因此 $E\hat{D}C=B\hat{A}C$ [457題], $D\hat{E}C=A\hat{B}C$. 而兩三角形 CDE, CAB 之第三角公有,故相似[1017題].

1032. 聯結三角形三邊中點而得之三角形,與原三角形相似.

證 設三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 之中點分別爲 D, E, F, 作三角形 DEF, 則 $AB \parallel DE$ [232題], $AC \parallel DF$, 故 AFDE 爲平行四邊形,因此 $\hat{A}=\hat{D}$. 同理, $\hat{B}=\hat{E}$, $\hat{C}=\hat{F}$ 故 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ [1017題].



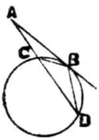
1033. 兩二等邊三角形之頂角或底角相等,則相似.



證 設兩二等邊三角形 ABC, DEF 中, 頂角 $\hat{A}=\hat{D}$. 此時 $\hat{B}=\frac{1}{2}(2\hat{R}-\hat{A})$, $\hat{E}=\frac{1}{2}(2\hat{R}-\hat{D})$, 故

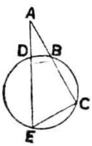
$\hat{B}=\hat{E}$, 因而 $\hat{C}=\hat{F}$. 故 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$. 次, 設兩二等邊三角形中, 底角 $\hat{B}=\hat{E}$. 此時 $\hat{B}=\hat{C}$, $\hat{E}=\hat{F}$, 故 $\hat{C}=\hat{F}$, 因而 $\hat{A}=\hat{D}$. 故 $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

1034. 由所設點 A 至所設圓引切線 AB, 及割線 ACD, 則三角形 ABC, ABD 相似.



證　兩三角形 ABC, ADB 中, $A\hat{B}C = A\hat{D}B$ [557題], $\hat{A}$ 公有, 因而 $A\hat{C}B = A\hat{B}D$. 故 $\triangle ABC \backsim \triangle ADB$ [1017題].

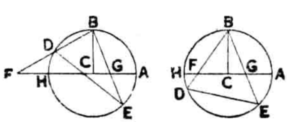
1035. 由圓外之點A, 引割線 ABC, ADE, 令與圓周交於 B, C 及 D, E, 則三角形 ABD, AEC 相似.



證　聯結 BD, CE. 因 $A\hat{B}D$ 爲圓之內接四邊形 BCED 之外角, 故等於 $A\hat{E}C$ [457題]. 同理, $A\hat{D}B = A\hat{C}E$. 而 $\hat{A}$ 公有, 故 $\triangle ABD \backsim \triangle AEC$ [1017題].

1036. 設 CA, CB 爲圓中互相垂直之半徑, DE 爲任意弦, BD, BE 分別與 AC 交於 F, G, 則三角形 BFG, BDE 相似.

證　兩三角形 BFG, BED 中, $\hat{B}$ 公有. $A\hat{F}B$

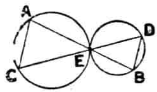


[甲圖]　　[乙圖]

爲弧 AB, DH 之和[乙圖]或差[甲圖]所對之圓周角 [490, 489 題]. 而弧 AB= 象限 =弧 BH, 故弧 AB±弧 DH=弧 BD, 故 $A\hat{F}B = B\hat{E}D$; 因而 $B\hat{G}F = B\hat{D}E$. 故 $\triangle BFG \backsim \triangle BED$.

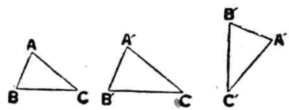
1037. 過兩外切圓之切點引二直線, 令其端在各圓之圓周上, 聯結各圓周上之二端, 則得以切點爲頂點之二相似三角形.

證　設兩外切圓之切點爲 E, 過 E 所引之二直線爲 AEB, CED, 聯結 AC, BD, 則 AC ∥ BD [622題], 故 $A\hat{C}E = B\hat{D}E$, $C\hat{A}E = D\hat{B}E$. 又 $A\hat{E}C = B\hat{E}D$ [12題], 故 $\triangle EAC \backsim \triangle EBD$.



1038. 設一三角形之邊, 分別平行或垂直於他三角形之邊, 則兩三角形相似.

證　設三角形 A'B'C' 之邊 A'B', B'C', C'A',



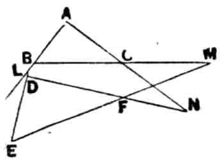
(甲)　(乙)　(丙)

分別平行[(甲)與(乙)]或垂直[(甲)與(丙)]於三角形 ABC 之邊 AB, BC, CA, 則是等二邊所夾之角, 或相等, 或互爲補角 [53, 162 題]. 由是發生以下之關係: (1)三角分別相等. (2) 兩角分別相等, 他一角互爲補角. (3)一角相等, 他二角互爲補角. (4)三角分別互爲補角. (1)當然可能, 此時兩三角形相似. (2)中設 $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{C}=2\hat{R}-\hat{C}'$. 此時因二角已相等, 故第三角非相等不可, 故 $\hat{C}=\hat{R}$, 否則不合理. 故若(2)成立, 亦可歸於(1). (3),(4)中兩三角形各角之和, 大於四直角, 此不可能, 故此兩關係, 爲決無之事. 故各關係不外乎(1), 因此兩三角形相似.

1039. 設三角形之三邊與他三角形之

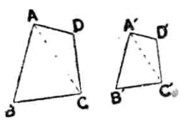
三邊,依同向交於等角,則兩三角形相似.

證　設三角形 DEF 之各邊,與三角形 ABC 之各邊,依同向分別成等角,即 $E\hat{L}A' = B\hat{M}E = A\hat{N}D$,則各角分別相等.[457 題,或 63 題], 故 △ABC∽△DEF.



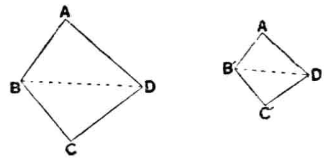
1040.　設一四邊形之三角,分別等於他四邊形之三角,且等角之一雙夾邊成比例[等角之隣邊相對應],則兩四邊形相似.

證　設兩四邊形 ABCD, A'B'C'D' 中, $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{C}=\hat{C}'$, 且 AB:BC=A'B':B'C'. 引對角線 AC, A'C', 則 △ABC∽△A'B'C',因而 AB:A'B'=BC:B'C'=CA:C'A',且 $B\hat{A}C=B'\hat{A}'C'$, $B\hat{C}A=B'\hat{C}'A'$. 由是 $D\hat{A}C=D'\hat{A}'C'$, $D\hat{C}A=D'\hat{C}'A'$,故 △ADC∽△A'D'C', 因而 AD:A'D'=CD:C'D'=AC:A'C', 且 $\hat{D}=\hat{D}'$. 故兩四邊形中, $\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $\hat{C}=\hat{C}'$, $\hat{D}=\hat{D}'$, AB:A'B'=BC:B'C'=CD:C'D'=DA:D'A',故此兩四邊形相似



1041.　兩四邊形之各邊,同順序成比例,則兩四邊形相似否?

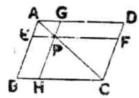
解　設兩四邊形爲 ABCD, A'B'C'D'. 若任意對應角 A, A' 相等,則作對角線 BD, B'D', 而將各四邊形分成兩三角形時,因 AB:A'B'=AD:A'D', 故 △ABD∽△A'B'D', 故 AB:A'B'=AD:A'D'=BD:B'D'. 於是由假設, △BCD, △B'C'D' 之三邊依同順序成比例,



故相似. 但若任意一組對應角不等, 則兩四邊形不能必其相似.

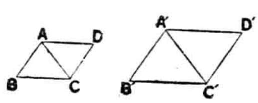
1042.　平行四邊形中沿對角線之平行四邊形,與原形相似,又自身相似.

證　設平行四邊形 ABCD 中沿對角線 AC 之平行四邊形爲 AEPG, PHCF, 則 $E\hat{A}G = H\hat{C}F$ [220 題], $A\hat{E}P = P\hat{F}C$ [41 題], 因而他兩角分別相等, 故兩平行四邊形之各角, 皆分別相等. 次, 因 △AEP∽△CDA, 故 AE:CD=EP:DA, 故 ▱AEPG∽▱CDAB [1040 題]. 同理, ▱CFPH∽▱CDAB. 故 ▱AEPG∽▱CFPH [1016 題].



1043.　兩平行四邊形中,一角相等,一雙隣邊成比例,則兩形相似.

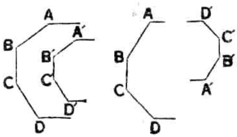
證　設兩平行四邊形 ABCD, A'B'C'D' 中, $\hat{B}=\hat{B}'$, AB:BC=A'B':B'C'. 聯結 AC, A'C', 則 △ABC∽△A'B'C' [1018 題]. 又因 △ABC∽△CDA, △A'B'C'∽C'D'A', 故 △CDA∽△C'D'A', 因而 CD:C'D'=AC:A'C'=DA:D'A'. 故 ▱ABCD∽▱A'B'C'D'.



1044.　設兩相似直線形中,一雙對應隣邊,分別平行,則其他一切對應邊,皆分別平

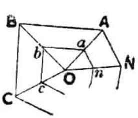
行.

證 設 ABCD……, A′B′C′D′……爲兩相似直線形, 其一雙對應隣邊 AB, BC 與 A′B′, B′C′ 分別平行. 今多角形中, 順次以頂點爲樞, 依同方向廻轉一邊, 令合於次邊, 此廻轉之量所測得者 爲多角形之各內角. 又因 $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, 且 $A\hat{B}C = A'\hat{B}'C'$, 故 BA, BC 與 B′A′, B′C′ 非分別爲同向, 卽分別爲異向. 因此, 固定此二邊, 則兩直線形對應邊之方向一定, 非同向, 卽異向. 故因 $BC \parallel B'C'$, 及 $\hat{C} = \hat{C}'$, 而邊 $CD \parallel C'D'$. 仿此得證一切對應邊互相平行.



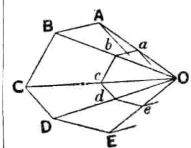
1045. 設任意點 O, 與直線形之角頂 A, B, C, ……聯結, 在 OA, OB, OC, ……上分別取點 a, b, c, ……, 若 $Oa : OA = Ob : OB = Oc : OC = \cdots\cdots$, 則直線形 abc……與原直線形 ABC……相似.

證 三角形 OAB, Oab 中, O 公有, $OA : Oa = OB : Ob$, 故 $\triangle OAB \backsim \triangle Oab$, 因而 $O\hat{A}B = O\hat{a}b$, 故 $AB \parallel ab$. 同理, $BC \parallel bc$, ……, $NA \parallel na$. 故 $N\hat{A}B = n\hat{a}b$, $A\hat{B}C = a\hat{b}c$, ……, 又 $AB : ab = OB : ob = BC : bc = CD : cd = \cdots\cdots$, 故直線形 ABCD……$N \backsim abcd\cdots\cdots n$.



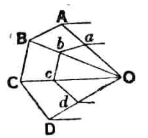
1046. 設 ABCD……, $abcd$…… 爲二直線形, Aa, Bb, Cc, ……過同點 O, 且 AB, BC, CD, ……分別平行於 ab, bc, cd, ……則兩直線形相似.

證 三角形 OAB, Oab 中, $ab \parallel AB$, 故 $ab : AB = Ob : OB$ [1017題]; 又 $bc \parallel BC$, 故 $Ob : OB = bc : BC$ 故 $ab : AB = bc : BC$. 同理, $bc : BC = cd : CD = de : DE = \cdots\cdots$. 次, 兩直線形之邊分別平行, 故夾角分別相等 [53題]. 據此, 兩直線形相似.



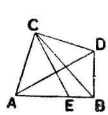
1047. 試證下定理之逆定理: 相似直線形, 得分爲同數之相似三角形.

證 本定理之逆定理如次: 設兩直線形 ABCD……, $abcd$……爲過同點 O 之直線, 分爲同數之相似三角形, 則此二直線形相似. 今 $\triangle OAB \backsim \triangle Oab$ [假設], 故 $ab : AB = Ob : OB$; 又因 $\triangle OBC \backsim \triangle Obc$, 故 $Ob : OB = bc : BC = Oc : OC$. 故 $ab : AB = bc : BC = cd : CD = \cdots\cdots$. 又 $ab \parallel AB$, $bc \parallel BC$, $cd \parallel CD$, ……, 故 $a\hat{b}c = A\hat{B}C$ [53題], $b\hat{c}d = B\hat{C}D$, ……. 故 ABCD……$\backsim abcd$.



1048. 三角形 ABC 中, 引邊 AB, AC 之垂線 BD, CD, 又由 C 引 AD 之垂線 CE, 命其與 AB 之交點爲 E, 則三角形 ABC, ACE 相似.

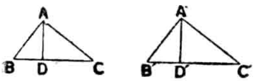
證 四邊形 ABDC 中, $A\hat{B}D = \hat{R} = A\hat{C}D$, 故此四邊形內接於圓 [86題], 故 $A\hat{D}C = A\hat{B}C$ [452題]. 而 $A\hat{D}C$, $A\hat{C}E$ 皆爲 $C\hat{A}D$ 之餘角, 故相等, 因而 $A\hat{C}E = A\hat{B}C$. 又 $\hat{A}$ 公有, 故其餘一角亦相等.



故 △ABC∽△ACE.

1049. 由相似三角形對應角之頂點至對邊所引垂線之比,等於對應邊之比.

證 設三角形 ABC, A′B′C′ 相似,由 A, A′ 分別至對應邊所引垂線爲 AD, A′D′.

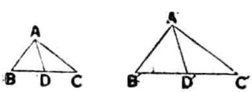


此時因 $\hat{C}=\hat{C}'$, 故其餘角 $C\hat{A}D=C'\hat{A}'D'$, 因此 △ADC∽△A′D′C′, 而 AD:A′D′=AC:A′C′.

注意 本題爲下題之特款.

1050. 由相似三角形之對應角頂引直線,令與對應邊所成之角相等,且與邊交,則是等線之比,等於三角形各對應邊之比.

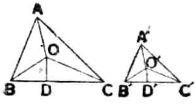
證 設ABC, A′B′C′爲相似三角形, AD, A′D′ 爲由對應角頂所引之直線, 分別與 BC, B′C′ 成等角.



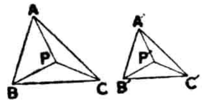
於是兩三角形 ABD, A′B′D′ 中, $\hat{B}=\hat{B}'$, $A\hat{D}B=A'\hat{D}'B'$, 故 △ABD∽△A′B′D′, 因此 AD:A′D′=AB:A′B′.

1051. 相似三角形內切圓或外接圓半徑之比,等於三角形對應邊之比.

證 設ABC, A′B′C′ 爲相似形, O, O′ 分別爲其內心. 由 O, O′ 分別至 BC, B′C′ 引垂線 OD, O′D′.



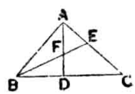
於是因 BO, CO, B′O′, C′O′ 分別二等分 $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $A'\hat{B}'C'$, $A'\hat{C}'B'$, 故兩三角形 BOC B′O′C′ 之三角分別相等,故相似, 因而 OD:O′D′=BC:B′C′ [1049題]. 又設相似三角形 ABC, A′B′C′ 之外心爲 P, P′, 聯結 BP, CP, B′P′, C′P′, 則兩三角形 BPC, B′P′C′



中, 頂角 BPC, B′P′C′ 分別爲等角 BAC, B′A′C′ 之二倍 [202題], 故相等, 因而兩三角形相似. 故 BP:B′P′=BC:B′C′.

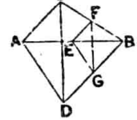
1052. 直角三角形 ABC 中, 由直角頂 A 至斜邊引垂線 AD, 又引角 B 之二等分線, 令交 AC, AD 於 E, F, 則 DF:AF=AE:CE.

證 因△ABC∽△DAB [1024題], 故 AB:BC=DB:BA. 又因 BE 爲 $\hat{B}$ 之二等分線, 故 DF:AF=BD:BA, AE:CE=AB:BC. 故 DF:AF=AE:CE.



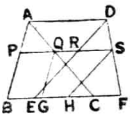
1053. 設兩三角形 ACB, ADB 共底 AB, 由 AB 上之點 E, 引 AC, AD 之平行線, 令與 BC, BD 分別交於 F, G, 則 FG 平行於 CD. 但上定理中,假定兩三角形在公底 AB 之兩側, 若在一側如何?

解 因 EF∥AC, 故 BF:FC=BE:EA [949題]. 又因 EG∥AD, 故 BE:EA=BG:GD, 故 BF:FC=BG:GD. 故 FG∥CD [951題]. 又若兩三角形在公底之同側, 則 GF 仍平行於 CD, 可仿前證之.



1054. 設兩等底三角形在同平行線間, 平行於底引任意直線, 則此直線自兩三角形截得之三角形相等.

證 設三角形 ABC, DEF 同在二平行線



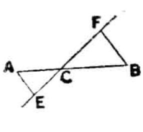
AD, EF 之間,底 BC＝EF. 平行於 AD 引直線 PS, 命其與兩三角形邊之交點爲 P, Q, R, S. 又平行於 AB 引 QG, 平行於 DE 引 SH, 則 BC:BG＝AC:AQ [949題], EF:EH＝DF:DS. 又 AD ∥ QS ∥ CF, 故 AC:AQ＝DF:DS [947題], 因此 BC:BG＝EF:EH. 而 BC＝EF, 故 BG＝EH. 又兩四邊形 PBGQ, REHS 皆爲平行四邊形,故 PQ＝BG, RS＝EH, 故 PQ＝RS, 因而 △APQ＝△DRS [736題].

1055. 設兩等積三角形共底, 且在底之同側, 則平行於底之直線, 在各三角形二邊間之部分相等.

證 本題之證,含於 1054 題中.

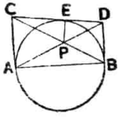
1056. 過直線 AB 上之點 C, 引任意直線, 則由 A, B 至此直線所引平行線之比一定.

證 設由 A, B 所引之二平行線,與過 C 之直線之交點爲 E, F. 此時



$A\hat{C}E＝B\hat{C}F$, $C\hat{A}E＝C\hat{B}F$ [41題],故 △ACE∽△BCF, 因而 AE:BF＝AC:BC 即一定.

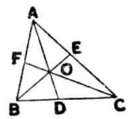
1057. 設直徑 AB 兩端上之切線爲 AC, BD,命任意點 E 上之切線與上二切線之交點分別爲 C, D, 又命 AD, BC 之交點爲 P, 則 PE 平行於 AC.



證 兩三角形 PAC, PDB 中, AC ∥ BD, 故 $P\hat{A}C＝P\hat{D}B$, $P\hat{C}A＝P\hat{B}D$ [41題], $A\hat{P}C＝D\hat{P}B$ [12題],故 △PAC∽△PDB, 因而 PA:AC＝PD:BD. 又 AC＝EC [556題], BD＝ED, 故 PA:PD＝CE:ED, 故 EP ∥ AC [951題].

1058. 試由定理三角形一角之二等分線, 分對邊於他二邊之比, 且其逆定理亦成立, 以證三角形各角之二等分線過同點.

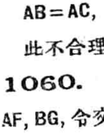
證 設三角形 ABC 中,各角之二等分線爲



AD, BE, CF, 命 BE, AD 之交點爲 O. 於是 AB:AE＝BO:EO [1027題], AB:BC＝AE:EC, 卽 AB:AE＝BC:EC [更比定理]. 故 BO:OE＝BC:EC, 故 CO 將角 C 二等分 [1027題].

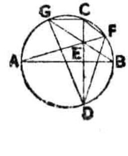
1059. 試由定理三角形中一角外角之二等分線, 外分對邊於他二邊之比, 以證二等邊三角形頂角外角之二等分線,平行於底.

證 設二等邊三角形 ABC 中,頂角 A 之外



角之二等分線爲 AD, 求證 AD 平行於 BC. 設 AD 不平行於 BC,命其與 BC 之交點爲 E, 則 BE:CE＝AB:AC [1027題]. 然 AB＝AC, 故 BE＝CE. 但若 E 非無窮遠,則此不合理,故 AD ∥ BC.

1060. 由圓之直徑 AB 之兩端引二弦 AF, BG, 令交於 E, 過 E 引 AB 之垂直弦 CED, 命其與圓周之交點爲 C, D, 則四邊形 CFDG 之二隣邊之比等於他二隣邊之比.

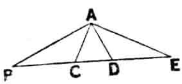


證 因 CD 垂直於直徑 AB, 故弧 CB＝弧 BD [440題注意], 故 $B\hat{G}C＝B\hat{G}D$ [466題],

故 GB 爲 $D\hat{G}C$ 之二等分線. 因此 GD : GC = DE : CE [1027題]. 同理, DF : FC = DE : CE, 故 DG : GC = DF : FC.

1061. 由一點 A 引四直線 AB, AC, AD, AE, 令角 BAC, CAD, DAE 各等於直角之半分, 交直線 BE 於 B, C, D, E, 而 AB 等於 AE, 則 BC 或 DE 爲 CD, BE 之比例中項.

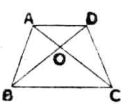
證 AC, AE 爲角 BAD 及其外角之二等分線, 故 BC : CD = AB : AD = BE : DE [1027題]. 然 AB = AE, $A\hat{B}C = A\hat{E}D$, $B\hat{A}C = E\hat{A}D$,



故 BC = DE [56題]. 故 CD : BC = BC : BE.

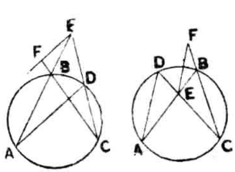
1062. 設梯形之平行二邊中, 一邊爲他邊之二倍, 則兩對角線交於互相三等分之一點.

證 設 ABCD 爲 AD ∥ BC 之梯形, 且 BC = 2AD, 命 AC, BD 之交點爲 O, 則 $O\hat{A}D = O\hat{C}B$, $O\hat{D}A = O\hat{B}C$ [41題], 故 △AOD ∽ △COB, AO : CO = OD : OB



= AD : BC = 1 : 2, 故 AO = $\frac{1}{3}$AC, DO = $\frac{1}{3}$BD.

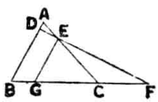
1063. 設圓之弦 AB, CD 分別向 B 及 D 之一方延長, 令交於 E 點, 過 E 平行於 AD 引直線 EF, 令交 CB 之延線於 F, 則 FB : EF = EF : FC. 若 AB, CD 交於圓內則如何?



證 兩三角形 EFB, CFE 中, $\hat{F}$ 公有, $D\hat{C}B = D\hat{A}B$ [452題] = $B\hat{E}F$, 故兩三角形相似, 因而 FB : EF = EF : FC. 又 AB, CD 交於圓內時亦然.

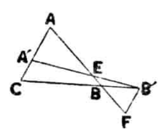
1064. 在三角形 ABC 之二邊 AB, AC 上取相等之 BD, CE, 命 DE, BC 之交點爲 F, 則 AB : AC = EF : DF.

證 過 E 引平行於 AB 之 EG, 命其與 BC 之交點爲 G, 則 △ABC ∽ △EGC, 故 AB : AC = EG : EC. 而 EC = DB, 故 AB : AC = EG : DB. 又 △EGF ∽ △DBF, 故 EG : DB = EF : DF, 故 AB : AC = EF : DF.



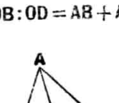
1065. 在三角形 ABC 之一邊 AC 上取一點 A′, 在 CB 之延線上取 BB′ = AA′, 則 A′B′ 爲 AB 所截成之二分之比, 等於 CB 與 CA 之比.

證 設 A′B′ 與 AB 之交點爲 E, 過 B′ 平行於 AC 引 B′F, 命其與 AB 延線之交點爲 F, 則 $A\hat{B}C = F\hat{B}B'$, $B\hat{A}C = B\hat{F}B'$, 故 △ABC ∽ △FBB′, 而 BC : CA = BB′ : B′F. 而 BB′ = AA′, 故 BC : CA = AA′ : B′F. 次, △AA′E ∽ △FEB′, 故 AA′ : B′F = A′E : EB′. 故 BC : CA = A′E : EB′.



1066. 設三角形 ABC 角 A 之二等分線與底邊之交點爲 D, 命底邊之中點爲 O, 則 OB : OD = AB + AC : AB ∼ AC.

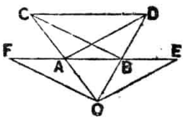
證 因 AD 爲 $\hat{A}$ 之二等分線, 故 BD : DC = AB : AC [1027題], 故 BD + DC : BD ∼ DC = AB + AC : AB ∼ AC [984



題].然 $BD+DC=BC=2BO$, $BD\sim DC=2DO$, 故 $BO:DO=AB+AC:AB\sim AC$.

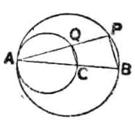
1067. 作同底同側之兩等積三角形, ACB, ADB, 由 AC, BD 之交點 O, 平行於 AD, BC, 分別引 OE, OF, 命其與 AB 延線之交點分別爲 E, F, 則 AE, BF 相等.

證　因 $AD \parallel OE$, 故 $\triangle ABD \backsim \triangle EBO$, 故 $AB:BE=BD:OB$. 同理, $AB:AF=AC:OA$. 次, $\triangle ABC=\triangle ABD$, 故 $CD \parallel AB$ [738 題], 故 $BD:OB=AC:OA$ [949 題]. 故 $AB:BE=AB:AF$, 因而 $BE=AF$, 故 $AE=BF$.



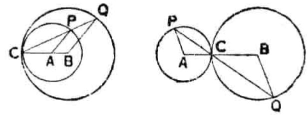
1068. 設兩圓內切, 則由切點所引外圓之一切弦, 其爲內圓周所分成之二部分, 皆成比例.

證　設兩內切圓之切點爲 A, 過 A 所引之任意弦爲 AQP, 命其與外圓周交於 P, 內圓周交於 Q. 過 A 引外圓之直徑 AB, 命其與內圓周之交點爲 C, 則 AC 爲內圓之直徑. 於是因 $A\hat{P}B=\hat{R}=A\hat{Q}C$, 故 $BP \parallel CQ$, 故 $AQ:QP=AC:CB$ [949題]. 其他過 A 之弦, 爲內圓周所分成之二部分之比, 皆等於 $AC:CB$. 故是等之二部分成比例.



1069. 設兩圓相切, 過切點引任意直線, 則兩圓由此直線所截得之弦之比, 等於其半徑之比.

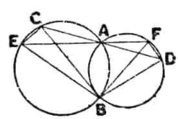
證　設兩圓之切點爲 C, 中心爲 A, B, 由過 C 之任意直線所截取之二弦爲 PC, QC,



聯結 AP, BQ, 於是兩二等邊三角形 APC, BQC 中, 一底角 $A\hat{C}P=B\hat{C}Q$, 故兩三角形相似 [1033題], 故 $PC:QC=AC:BC$. 故弦之比等於半徑之比.

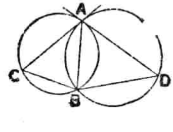
1070. 設兩圓周之交點爲 A, B, 過 A 之任意直線與圓周之交點爲 C, D, 則 $BC:BD$ 一定.

證　設過 B 之直徑爲 BE, BF, 聯結 EF, 則 EF 過 A [612題]. 又兩直角三角形 BCE, BDF 中, $C\hat{B}E=C\hat{A}E$ [452 題] $=D\hat{A}F$ [12 題] $=F\hat{B}D$ [452 題], 故此兩三角形相似, 而 $BC:BD=BE:BF$, 即等於兩直徑之比.



1071. 設 A 及 B 爲兩圓之交點, 於 A 引各圓之切線, 命其與各圓周之交點爲 C 及 D, 聯結 CB, BD, 則 BD 爲 CB, BA 之第三比例項.

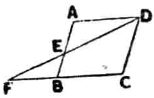
證　$\triangle ABC$, $\triangle DBA$ 中, $A\hat{C}B=D\hat{A}B$ [557題], $C\hat{A}B=A\hat{D}B$, 因而 $A\hat{B}C=D\hat{B}A$, 故此兩三角形相似, 而 $CB:AB=AB:BD$, 即 BD 爲 CB, AB 之第三比例項.



1072. 由平行四邊形 ABCD 之一角頂 D 引一直線, 令交 AB 於 E 及 CB 之延線於 F,

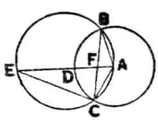
則 $EA:AD=AB:CF$.

證　兩三角形 AED, BEF 中, $A\hat{E}D=B\hat{E}F$ [12題], $E\hat{A}D=E\hat{B}F$ [41題], $A\hat{D}E=B\hat{F}E$, 故此兩三角形相似, 而 $BE:EA=FB:AD$. 故 $BE+EA:EA=FB+AD:AD$ [合比定理], 卽 $AB:EA=CF:AD$, 卽 $AB:CF=EA:AD$ [更比定理].



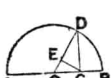
1073. 以圓 ABE 周上之任意點 A 爲中心, 任意長爲半徑作圓, 令交前圓於 B 及 C, 又由 A 引任意直線 AFE, 令交公弦 BC 於 F, 交圓周 BDC, ABE 於 D, E, 則 AD 爲 AF, AE 之比例中項.

證　聯結 AB, AC, EC, 則 $AB=AC$, 故 $A\hat{B}C=A\hat{C}B$. 而 $A\hat{B}C=A\hat{E}C$ [452題], 故 $A\hat{C}F=A\hat{E}C$. 於是兩三角形 ACF, AEC 中, $\hat{A}$ 公有, 他一角相等, 因而第三角亦相等, 故 $AE:AC=AC:AF$ [1017題]. 然 $AC=AD$, 故 $AE:AD=AD:AF$.



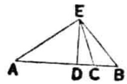
1074. 由半圓直徑 AB 上之任意點 C, 引 AB 之垂線 CD, 令交圓周於 D, 聯結中心 O 及 D, 由 C 至 OD 引垂線 CE, 則 DE 爲 AO, DC 之第三比例項.

證　因直角三角形 DCO 中, $CE\perp OD$, 故 $\triangle DCO\backsim\triangle DEC$ [1024題], 故 $DO:DC=DC:DE$. 而 $DO=AO$, 故 $AO:DC=DC:DE$.



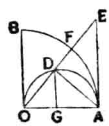
1075. 在直線 AB 上取二點 C, D, 令 AB, AC, AD 成連比例, 由 A 至任意方向引直線 AE, 令等於 AC, 則 BC 及 CD 張等角於 E.

證　因 $AB:AC=AC:AD$ [假設], $AC=AE$ [假設], 故 $AB:AE=AE:AD$. 又兩三角形 AEB, ADE 中, $\hat{A}$ 公有, 故 $\triangle AEB\backsim\triangle ADE$ [1018題], 故 $A\hat{E}B=A\hat{D}E$. 而 $A\hat{C}E=A\hat{E}C$, 故 $B\hat{E}C=D\hat{E}C$.



1076. 在象限 OAB 之半徑 OA 上, 作半圓 ODA, 於 A 引切線 AE, 由 O 引任意直線 ODFE, 令交兩圓周於 D, F, 交切線於 E, 引 OA 之垂線 DG, 則 OE, OF, OD, OG 成連比例.

證　聯結 AD, 則因 $DG\parallel AE$, 故三個三角形 OEA, OAD, ODG 相似. 故 $OE:OA=OA:OD=OD:OG$. 然 $OA=OF$, 故 $OE:OF=OF:OD=OD:OG$.



1077. 1027題[三角形之頂角或頂角外角之二等分線與底之交點, 按三角形二邊之比, 將底內分或外分]中, 若三角形之二邊相等, 則如何?

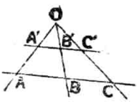
解　若三角形 ABC 爲二等邊, 則頂角外角之二等分線 CQ, 平行於底邊 AB [90題], 故交點 Q 無窮遠. 故此時 AB 之分點僅有內分點 P.

1078. 相似直線形之周之比, 等於其對應邊之比.

證　設兩直線形相似, 一直線形之各邊 $a, b, c,\cdots\cdots$ 分別對應於他直線形之各邊 $a', b', c',\cdots\cdots$, 則 $a:a'=b:b'=c:c'=\cdots$, 故 $a:a'=a+b+c+\cdots:a'+b'+c'+\cdots\cdots$ [加比定理].

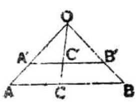
1079. 設由一點所引之三直線與二平行線交於點 A, B, C 及 A′, B′, C′, 則 $AB:BC=A'B':B'C'$.

證　命所設點爲 O. 因 $A'B' \parallel AB$, 故 $AB:A'B'=OB:OB'$ [1017題]. 同理, $BC:B'C'=OB:OB'$, 故 $AB:A'B'=BC:B'C'$. 由更比定理, $AB:BC=A'B':B'C'$.

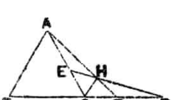


1080. 設兩平行線 AB, A′B′ 分別按同比內分或外分於 C 及 C′, 則 AA′, BB′, CC′ 或平行,或過同點.

證　聯結 AA′, BB′, 則此二直線非相交,卽平行,茲設 $AB=A'B'$, 則 ABB′A′ 爲平行四邊形, 而 $AA' \parallel BB'$. 次,過 C 平行於 AA′ 引 CC″,命其與 A′B′ 之交點爲 C″,則 $AC:BC=A'C'':B'C''$ [947題]. 然 $AC:BC=A'C':B'C'$, 故 $A'C'':B'C''=A'C':B'C'$, 而 C′,C″ 皆爲內分點,故相合 [950題], 故 CC′ 平行於 AA′. 次,設 AA′, BB′ 相交於點 O, 聯結 OC, 命其與 A′B′ 之交點爲 C″. 於是倣前得證 C″ 與 C′ 相合,故 AA′, CC′, BB′ 過同點.

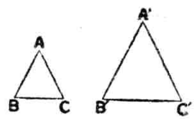


1081. 設 ABC 爲正三角形, E 爲 AC 上之一點,在 BC 之延線上取 CD, CF, 令分別等於 CA, CE. 命 AF, DE 之交點爲 H, 則 $CH:CE=AC:AC+CE$.



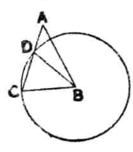
證　$\triangle ACF \equiv \triangle DCE$ [55題], 故 $C\hat{A}F=C\hat{D}E$, 因而 $\triangle AEH \backsim \triangle DFH$, 故 CH 爲 $A\hat{C}D$ 之二等分線 [172題], 故 $H\hat{C}F=A\hat{B}C$. 於是 $\triangle ABF \backsim \triangle HCF$, 因而 $HC:CF=AB:BF$, 卽 $HC:CE=AC:AC+CE$.

1082. 設兩二等邊三角形之頂角相等, 則其高之比等於底之比.



證　設兩二等邊三角形 ABC, A′B′C′ 中, 頂角 $\hat{A}$, $\hat{A}'$ 相等. 此時兩三角形相似 [1033題], 故高之比等於底之比 [1049題].

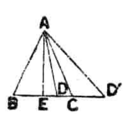
1083. 設以二等邊三角形 ABC 之底 BC 爲半徑, B 爲中心作圓, 令與 AC 交於 D, 則 BC 爲 AC, CD 之比例中項.



證　因 $BC=BD$, 故兩三角形 ABC, BDC 皆爲二等邊三角形, 且共一底角 C, 故其三角分別相等, 因而兩三角形相似. 故 $AC:BC=BC:CD$.

1084. 設 D 爲二等邊三角形 ABC 之底 BC 或其延線上之一點, 則三角形 ABD, ACD 之外接圓相等.

證　由頂點 A 至底引垂線 AE, 且命三角形 ABD, ACD 之外接圓半徑分別爲 R, R′, 則因 AE 爲兩三角形之公高, 故 $AE:AB=AD:2R$ [1026題], $AE:AC=AD:2R'$.

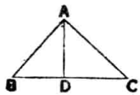


然 $AB=AC$, 故 $R=R'$, 故兩外接圓相等.

1085. 設由三角形之頂點至底邊所引之垂線在形內, 且爲底邊二分之比例中項,

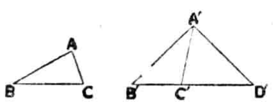
則此三角形爲直角三角形.

【證】 設由三角形 ABC 之頂點 A, 至底邊 BC 所引之垂線爲 AD, $BD:AD=AD:DC$. 此時兩三角形 ADB, ADC 中, $A\hat{D}B=C\hat{D}A$, 且是等角之二邊成比例, 故此兩三角形相似 [1018 題], 故 $A\hat{B}D=C\hat{A}D$. 然 $A\hat{B}D+B\hat{A}D=\hat{R}$, 故 $C\hat{A}D+B\hat{A}D=\hat{R}$, 且由假設, 垂線 AD 在角 BAC 內, 故 $C\hat{A}D+B\hat{A}D=B\hat{A}C=\hat{R}$, 即三角形 ABC 爲直角三角形.



1086. 兩三角形中, 一角相等, 他一角互爲補角, 則第三角之二邊成比例.

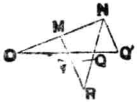
【證】 設兩三角形 ABC, A′B′C′ 中, $\hat{B}=\hat{B}'$,



$\hat{C}+\hat{C}'=2\hat{R}$. 在 B′C′ 之延線上取點 D, 令 $A'B'=A'D$, 則因 $A'\hat{B}'D=A'\hat{D}B'=\hat{B}$, $A'\hat{C}'D=\hat{C}$, 故 $\triangle ABC \backsim \triangle A'C'D$, 因而 $AB:AC=A'D:A'C'$, 即 $AB:AC=A'B':A'C'$.

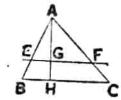
1087. 設 OMN, OPQ 爲二直線, MP, NQ 交於 R, 而 $OM:MP=ON:NQ$. 則三角形 PQR 爲二等邊.

【證】 過 N 平行於 MP 引 NQ′, 命其與 OP 或其延線之交點爲 Q′, 則 $OM:MP=ON:NQ'$. 而 $OM:MP=ON:NQ$ [假設], 故 $NQ'=NQ$. 於是 $N\hat{Q}Q'=N\hat{Q}'Q$ [57 題] $=M\hat{P}O$ [44 題], 故 $R\hat{P}Q=P\hat{Q}R$, 故 $PR=QR$ [59 題], 即 PQR 爲二等邊三角形.



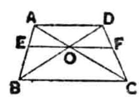
1088. 分三角形之二邊於同比之直線, 將由頂點至底邊所引一切直線分於同比.

【證】 設三角形 ABC 之二邊 AB, AC 按同比 $H:K$ 分於 E, F. 於是 $AE:EB=H:K=AF:FC$, 故 $EF \parallel BC$ [951 題]. 命由 A 至底邊所引任意直線與 EF, BC 之交點分別爲 G, H, 則因 $EG \parallel BH$, 故 $AG:GH=AE:EB=H:K$. 故 EF 將由 A 至 BC 所引之一切直線分於比 $H:K$.



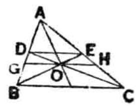
1089. 過梯形對角線之交點, 引底之平行線, 則此直線在形內之部分爲交點所二等分.

【證】 設 ABCD 爲 $AD \parallel BC$ 之梯形, 兩對角線之交點爲 O, 過 O 引 AD 之平行線 EF, 命其與邊 AB, DC 之交點分別爲 E, F. 於是 $EO:BC=AE:AB$ [1017 題], $OF:BC=DF:DC$. 然 $AD \parallel EF \parallel BC$, 故 $AE:AB=DF:DC$ [947 題]. 故 $EO:BC=OF:BC$, 故 $EO=OF$.



1090. 在三角形 ABC 之二邊 AB, AC 上, 分別取二點 D, E, 分 AB, AC 成比例, 則 BE, CD 之交點, 在由 A 所引之中線上.

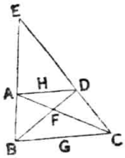
【證】 因 $AD:DB=AE:EC$ [假設], 故 $DE \parallel BC$ [951 題], 故四邊形 DECB 爲梯形. 命 BE, CD 之交點爲 O, 過 O 引 BC 之平行線 GOH, 命其與 AB, AC 之交點分別爲 G, H, 則 $GO=HO$ [1089 題]. 故 O 在由 A 所引之中線



上.

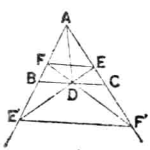
1091. 梯形二邊延線之交點, 對角線之交點, 及二底之中點在一直線上.

解 設梯形 ABCD 之不平行二邊 BA, CD 之延線之交點爲 E, 兩對角線之交點爲 F, 二底之中點爲 H, G. 因 AD ∥ BC, 故 EA : AB = ED : DC. 故本題與 1090題趨於一致, 因而 E, H, F, G 在一直線上.



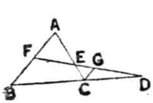
1092. 設三角形 ABC 之底 BC 之中點爲 D, 角 ADC, ADB 之二等分線與 AC, AB 之交點爲 E, F, 則 EF 平行於 BC. 又設 DE, DF 之延線與 AB, AC 之延線之交點爲 E′, F′, 則 E′F′ 平行於 BC.

解 因 DE, DF 分別爲 $A\hat{D}C$, $A\hat{D}B$ 之二等分線, 故 AE : EC = AD : DC [1027 題], AF : FB = AD : BD. 然 BD = DC, 故 AE : EC = AF : FB, 因而 EF ∥ BC [951 題]. 次, 因 DF′, DE′ 分別爲 $A\hat{D}C$, $A\hat{D}B$ 之共軛角之二等分線, 故仿前得證 BC ∥ E′F′.



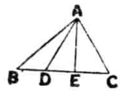
1093. 設直線 DEF 與三角形之邊 BC, CA, AB 分別交於 D, E, F, 且與 AB, AC 成等角, 則 BD : CD = BF : CE.

解 由點 C 引 AB 之平行線 CG, 命其與 DEF 之交點爲 G, 則 BF : CG = BD : CD [949題]. 次, $A\hat{E}F = A\hat{F}E$ [假設], $C\hat{E}G = A\hat{E}F$ [12題], $C\hat{G}E = A\hat{F}E$ [41題], 故 $C\hat{E}G = C\hat{G}E$, 因而 CG = CE. 故 BF : CE = BD : CD.



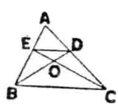
1094. 設 D 爲三角形 ABC 之底 BC 上之點, 則三角形 ABD, ACD 之外接圓直徑之比等於 AB : AC. 設 D 在 BC 之延線上, 則如何?

解 由頂點 A 至底邊 BC 引垂線 AE, 命三角形 ABD, ACD 之外接圓半徑分別爲 R, R′, 則 AE : AB = AD : 2R [1026 題], AE : AD = AC : 2R′. 由後者, AC : AE = 2R′ : AD [更比定理, 反比定理]. 故 AC : AB = 2R′ : 2R [等比定理]. 次, 若 D 在 BC 之延線上, 仍與前同.



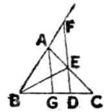
1095. 設 D 爲三角形 ABC 之邊 AC 上之點, E 爲他邊 AB 上之點, BD, CE 按 4:1 之比互分於其交點, 則 D, E 分別按 1:3 之比分 AC, AB.

解 設 BD, CE 之交點爲 O, 則 BO : OD = 4 : 1 [假設], CO : OE = 4 : 1, 故 BO : OD = CO : OE, 或 BO : CO = OD : OE [更比定理]. 又兩三角形 EOD, COB 中, $E\hat{O}D = C\hat{O}B$, 故 △EOD ∽ △COB [1018題], 而 ED : BC = EO : OC = 1 : 4, $O\hat{E}D = O\hat{C}B$, 故 ED ∥ BC. 於是 AD : AC = ED : BC = 1 : 4 [1017題], 故 AD : DC = 1 : 3 [分比定理]. 同理, AE : EB = 1 : 3.



1096. 三角形 ABC 中, 作角 A 之二等分線之平行線, 命其與 BC, CA, AB 之交點, 分別爲 D, E, F, 則 BD 與 CD 之比等於 FB 與 EC 之比.

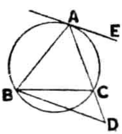
解 因 AG ∥ EF, 故 $A\hat{F}E = B\hat{A}G$, $F\hat{E}A = E\hat{A}G$; 然 $B\hat{A}G = E\hat{A}G$ [假設], 故 $A\hat{F}E = A\hat{E}F$, 因而



$AE=AF$. 次, $BF:AF=BD:DG$ [949題], $AE:EC=DG:DC$, 故 $BF:EC=BD:DC$ [等比定理].

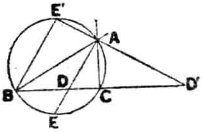
1097. 作三角形 ABC 之外接圓,過 B 點引 A 點上切線之平行線,令交 AC 於 D,則 AB 爲 AC 與 AD 之比例中項.

解 命 A 上之切線爲 AE. 於是 $E\hat{A}D=A\hat{B}C$ [557題], $E\hat{A}D=A\hat{D}B$ [41題]. 故 $A\hat{B}C=A\hat{D}B$. 又兩三角形 ABC, ADB 中, $\hat{A}$ 公有,故此兩三角形相似, $AC:AB=AB:AD$.



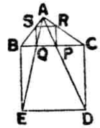
1098. 設三角形 ABC 中,角 A 及其外角之二等分線,分別與邊 BC 及其延線交於 D, D′, 又與外接圓周交於 E, E′, 則 BE 爲 EA 與 ED 之比例中項, BE′ 爲 E′A 與 E′D′ 之比例中項.

解 兩三角形 ABE, BDE 中, $\hat{E}$ 公有, $B\hat{A}E=E\hat{A}C$ [假設] $=E\hat{B}C$ [452題], 故 $\triangle ABE \backsim \triangle BDE$ [1017題], 故 $AE:BE=BE:DE$. 又兩三角形 ABE′, BD′E′ 中, $\hat{E}'$ 公有, $B\hat{A}E'=E'\hat{B}C$, 故 $\triangle ABE' \backsim \triangle BD'E'$, 而 $AE':BE'=BE':D'E'$.



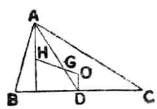
1099. 在三角形 ABC 之邊 BC 上作正方形 BCDE, 聯結 AD, AE, 命其與 BC 之交點分別爲 P, Q, 則 PQ 爲 ABC 之內接正方形之一邊.

解 由 P, Q 分別引 BC 之垂線 PR, QS, 命其與 AC, AB 之交點爲 R, S, 聯結 RS. 於是 $RP:CD=AP:AD=AR:AC$ [949題], 又 $SQ:BE=AQ:AE=AS:AB$. 然 $AQ:AE=AP:AD=PQ:ED$, 故 $AR:AC=AS:AB$, 因而 $RS \parallel BC$ [951題], 故 $RS:BC=PR:CD=PQ:ED=QS:BE$. 而此各比之後項相等, 故 $RS=PR=PQ=QS$, 故 PQ 爲三角形 ABC 之內接正方形之一邊.



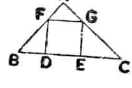
1100. 三角形之垂心 H, 重心 G, 外心 O 在一直線上,且 GH 等於 OG 之二倍.

解 命邊 BC 之中點爲 D, 聯結 OD. 因 AH, OD 皆垂直於邊 BC, 故相平行. 又聯結 AD, 則因 G 爲重心, 故在 AD 上. 次,聯結 HG, OG, 則因 $H\hat{A}G=O\hat{D}G$, $AH=2OD$, $AG=2DG$, $AH:OD=AG:DG=2:1$, 卽 $AH:AG=OD:DG$ [更比定理], 故 $\triangle AHG \backsim \triangle DOG$, 而 $A\hat{G}H=D\hat{G}O$, $HG:OG=AG:DG=2:1$. 因此, H, G, O 在一直線上, $HG=2OG$.



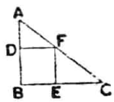
1101. 設正方形 DEGF 爲直角三角形 ABC 之內接四邊形, 邊 DE 合於邊 BC, 則正方形之一邊,爲斜邊之二分 BD, EC 之比例中項.

解 因 $\hat{A}=\hat{R}$, 故 $\hat{B}$ 爲 $\hat{C}$ 之餘角. 又 $E\hat{G}C$ 爲 $\hat{C}$ 之餘角, 故 $\hat{B}=C\hat{G}E$, 因此 $\triangle BDF \backsim \triangle GEC$, 而 $BD:DF=GE:EC$. 然 DF, GE 爲內接正方形之一邊, 故相等. 因此正方形之一邊, 爲 BD, EC 之比例中項.



1102. 設正方形 DBEF 內接於以 B 爲直角之三角形 ABC, 兩邊 BD, BE 與直角之二邊

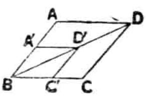
AB, BC 相合，一角頂 F 在斜邊上，則正方形之一邊爲 AD, CE 之比例中項.



證　兩直角三角形 ADF, FEC 中，$A\hat{F}D = F\hat{C}E$ [44題]，$D\hat{A}F = E\hat{F}C$，故 △ADF ∽ △EFC，而 AD : DF = FE : EC，卽 AD : DF = DF : EC.

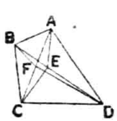
1103.　設兩平行四邊形相似，公有一角，在相似之位置，則過其公角頂之對角線，在一直線上.

證　設兩平行四邊形 ABCD, A′BC′D′ 相似，公有一角 B，且在相似之位置．聯結 BD, BD′，則兩三角形 BC′D′, BCD 中，$\hat{C} = \hat{C}'$ [假設]，BC : CD = BC′ : C′D′，故 △BCD ∽ △BC′D′ [1018題]，$C\hat{B}D = C'\hat{B}D'$．故 BD, BD′ 成一直線.



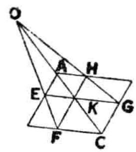
1104.　設四邊形 ABCD 中，角 A, C 之二等分線交於對角線 BD 上，則角 B, D 之二等分線，亦交於對角線 AC 上.

證　設 $\hat{A}$, $\hat{C}$ 之二等分線交點爲 E，則 AB : AD = BE : ED [1027題]，BC : CD = BE : ED；故 AB : AD = BC : CD，或 AB : BC = AD : CD [更比定理]．由是設 $\hat{B}$ 之二等分線與對角線 AC 之交點爲 F，則 AB : BC = AF : CF，因而 AF : CF = AD : DC，故 DF 二等分 $\hat{D}$ [1027題]．卽 $\hat{B}$, $\hat{D}$ 之二等分線交於 AC 上.



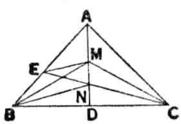
1105.　設 AEKH, KFCG 爲沿平行四邊形之對角線 AC 之平行四邊形，則 EF, AC, GH 相平行，或過同點.

證　設 EF 與 AC 之交點爲 O，則因 AE ∥ KF，故 AE : KF = OA : OK [949題]，卽 EF 按比 AE : KF 外分 AK．同理，HG 按比 AH : KG 外分 AK．然▱AEKH ∽ ▱KFCG，故 AE : KF = AH : KG；因此 EF, HG 按同比外分 AK，故 AC, EF, HG 過同點．若 K 爲 AC 之中點，則 AC, EF, GH 平行.



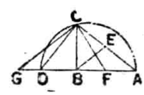
1106.　設二等邊直角三角形中，角 B 之三等分線，與由直角頂 A 至斜邊 BC 所引垂線 AMN 交於 M 及 N，又 CN 之延線與 AB 交於 E，則 EM 平行於 BN.

證　垂線 AMN 二等分頂角 A，BM 二等分 $A\hat{B}N$．又 $A\hat{C}N = A\hat{B}N$，$A\hat{C}M = A\hat{B}M$，此甚易證之，故 CM 爲 ACN 之二等分線．於是 M 爲三角形 AEC 中 $\hat{A}$, $\hat{C}$ 之二等分線交點，故爲其內心，故 EM 二等分 $A\hat{E}C$，故 AE : EN = AM : MN [1027題]．又因 BN = CN，故 $E\hat{N}B = 2N\hat{B}C = E\hat{B}N$，故 EB = EN，前比例式遂可易爲 AE : EB = AM : MN，故 EM ∥ BN [951題].



1107.　設 ABD 爲半圓 ACD 之直徑，ABC 爲直角，聯結 B 與 AC 上之任意點 E，由 C 至 AB 引直線 CF，令其與 AB 交於 F，且角 BCF 等於角 ABE，則 AE : EC = BF : BD.

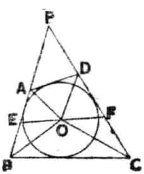
證　因 $D\hat{C}A = \hat{R}$，$C\hat{B}D = \hat{R}$，故 BC : BD = AB : BC [1024題]．又過 C 平行於 BE 引 CG，令其與 AD 之交點爲



G, 則兩直角三角形 CBG, CBF 中, $B\hat{C}F = E\hat{B}F$ [假設] $= C\hat{G}B$ [44題]. 故此兩三角形相似. 故 BF:BC = BC:BG, 因而 BF:BD = AB:BG [等比定理]. 然 BE ∥ CG, 故 AB:BG = AE:EC [949題], 故 BF:BD = AE:EC.

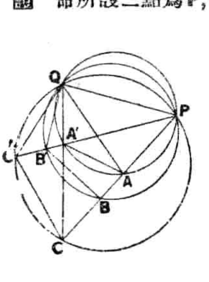
1108. 設ABCD爲外切於圓之四邊形, 過圓之中心 O 引直線 EOF, 令其與二邊 AB, DC 成等角, 且與其交於 E, F, 則 AE:EB = CF:FD.

證 命邊 AB, CD 延線之交點爲 P. 因 AO, DO 爲三角形 PAD 兩底角外角之二等分線, 故 $A\hat{O}D = \frac{1}{2}(\hat{P}$ 之外角) [325題] $= D\hat{F}O = A\hat{E}O$, 因而 $E\hat{A}O = D\hat{O}F$ [63題]. 故 △AOE∽△OFD, 故 AE:EO = OF:DO. 次, $B\hat{E}O = O\hat{F}C = \hat{R} + \frac{1}{2}\hat{P}$, $B\hat{O}C = \hat{R} + \frac{1}{2}\hat{P}$ [201題], 故 $B\hat{O}C = B\hat{E}O$, 因而 $E\hat{O}B = O\hat{C}F$ [63題]. 故 △BEO∽△OFC, EO:BE = FC:OF, 故 AE:BE = CF:DF [等比定理].



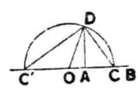
1109. 設無數圓周過二所設點, 過其一點引任意二直線, 令與是等圓周交, 則其交於圓周之對應部分成比例.

證 命所設二點爲 P, Q, 過 P 之二任意直線爲 PC, PC′, 命其與圓周之交點爲 A, B, C, A′, B′, C′. 求證 AB:A′B′ = BC:B′C′. △AA′Q, △BB′Q, △CC′Q 中, $A\hat{Q}A'$, $B\hat{Q}B'$, $C\hat{Q}C'$ 皆等於 $C\hat{P}C'$ [452題], 故相等. 同理, $A'\hat{A}Q = B'\hat{B}Q = C'\hat{C}Q = C'\hat{P}Q$. 因而第三角亦相等, 故此三個三角形相似 [1017題], 故 QA:QA′ = QB:QB′ = QC:QC′. 次, △ABQ, △A′B′Q 中, $A\hat{B}Q = A'\hat{B'}Q$ [452題], $B\hat{A}Q$, $B'\hat{A'}Q$ 爲等角 $P\hat{A}Q$, $P\hat{A'}Q$ 之補角, 故相等, 故此兩三角形相似, 而 AB:A′B′ = QA:QA′. 同理, BC:B′C′ = QB:QB′. 故 AB:A′B′ = BC:B′C′.



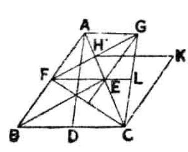
1110. 由直線 AB 之 A 端, 引此線之垂線 AD, 令其等於 AB, 延長 BA 至 O, 令 AO 等於 AB 之半分, 以 O 爲中心, OD 爲半徑作圓, 命其與 AB 及 AB 延線之交點爲 C 及 C′, 則 AB 按中末比分於 C 及 C′.

證 因 $C'\hat{D}C = \hat{R}$, AD ⊥ CC′, 故 C′A:AD = AD:AC [1024題], 或 OC + OA:AC = AB:AC, 或 OC + $\frac{1}{2}$AB − AB:AB = AB − AC:AC [分比定理], 卽 AC:AB = BC:AC, 卽 AB:AC = AC:BC. 又由 C′A:AD = AD:AC, 得 C′A:AB = AB:OC − $\frac{1}{2}$AB, 或 AB:AC′ = OC − $\frac{1}{2}$AB:AB, AB + AC′:AC′ = OC − $\frac{1}{2}$AB + AB:AB [合比定理], 卽 BC′:AC′ = AC′:AB. 故 C, C′ 分 AB 於中末比.



1111. 作一羣三角形, 令第一三角形之中線, 分別等於第二三角形之三邊, 第二三角形之中線, 分別等於第三三角形之三邊, 以下仿此, 則由是等三角形中, 一間一取得者相似.

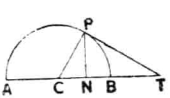
證 設三角形 ABC 之三中線爲 AD, BE, CF, 過 F 平行於 BE 引 FG, 令 FG = BE, 聯結 AG, EG, CG, 則三



角形 GFC 之邊，等於三角形 ABC 之三中線 何則? BEGF 爲平行四邊形，故 GE ∥ AB, GE＝BF [222題]＝AF，因而 AFEG 又爲平行四邊形 [226題]，故 AG ∥ EF ∥ BC，AG＝EF＝DC，故 ADCG 亦爲平行四邊形，而 AD ∥ GC，AD＝GC. 次，GE ∥ AF，故 GE 過 FC 之中點，而爲第二三角形之中線. 同理，EF 亦爲中線. 又 AFEG 爲平行四邊形，故 H 爲 FG 之中點，故 CH 爲中線，又過 H 平行且等於 FL 引 HK，聯結 CK，則得第三三角形 HCK，其各邊等於第二三角形之中線. 於是第二三角形之各邊，分別平行於第一三角形之中線，第二三角形之中線，分別平行於第一三角形之各邊. 而第三三角形之各邊，分別平行於第二三角形之中線，因而又平行於第一三角形之各邊，故第一第三兩三角形相似. 仿此得證一間一所取之三角形相 .

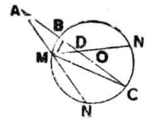
1112. 設 APB 爲中心爲 C，直徑爲 AB 之半圓，N 爲 CB 上之一點. 在 AB 之延線上取點 T，令 CT : AC＝AC : CN，由 T 引切線 TP，則角 CNP 爲直角.

證 聯結 CP. 兩三角形 PCT, NCP 中，$\hat{C}$ 公有，且 CT : AC＝AC : CN，即 CT : CP＝CP : CN，故此兩三角形相似 [1018題]，因而 $C\hat{N}P＝C\hat{P}T＝\hat{R}$.



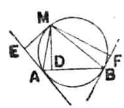
1113. 由一點 A 至中心爲 O 之圓，引割線 AMN，命 N 關於過點 A 之直徑 BC 之對稱點爲 N′，聯結 N′ 與 M，命其與直徑之交點爲 D，則 D 與三點 A, B, C 成調和點列.

證 聯結 CM, BM. 因 N, N′ 關於直徑 BC 爲對稱，故弧 CN＝弧 CN′，故 $C\hat{M}N＝C\hat{M}N'$ [466題]，即 CM 爲三角形 AMD 之外角之二等分線. 次，因 BC 爲直徑，故 $B\hat{M}C＝\hat{R}$，故 BM 將 $A\hat{M}D$ 二等分. 故 AB : DB＝AC : DC [1027題]，即 A, B, C, D 成調和點列.



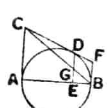
1114. 由圓周上之任意點 M 至任意弦所引之垂線，爲由 M 至此弦兩端上之切線所引垂線之比例中項.

證 兩三角形 MEA, MDB 中，$M\hat{E}A＝\hat{R}＝M\hat{D}B$，又 $M\hat{A}E＝M\hat{B}D$ [557題]，故 △MEA∽△MDB，而 ME : MA＝MD : MB. 同理，△AMD∽△BMF，而 MA : MD＝MB : MF. 故 ME : MD＝MD : MF [等比定理]，即 MD 爲 ME, MF 之比例中項.



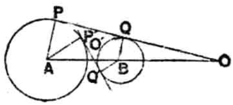
1115. 過圓之直徑 AB 之 A 端引切線，在切線上取點 C，由 C 引第二切線 CD，由切點 D 至 AB 引垂線 DE，則 DE 爲 CB 二等分.

證 命 B 上之切線與 CD 延線之交點爲 F. 於是 CA ∥ DE ∥ FB，故 DG : CD＝BF : CF [949題]. 而 BF＝DF，故 DG : CD＝DF : CF，又 DF : CF＝EB : AB [947題]，GE : AC＝EB : AB，故 DG : CD＝GE : AC. 而 AC＝CD，故 DG＝GE.



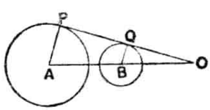
1116. 兩圓二雙公切線之交點，各按半徑之比，內分及外分中心線. [上述交點曰兩圓之相似中心，其中一爲內心，一爲外心].

證　設兩圓之中心爲 A, B, 兩外公切線之交點爲 O, 內公切線之交點爲 O′, 則 A, B O, O′ 在一直線上 [604題]. 今設其外公切線之一爲 PQ, 命其切點爲 P, Q, 則因 AP BQ 皆垂直於 PQ, 故相平行, 因此 AO:BO = AP:BQ. 同理, 設內公切線之一爲 P′Q′, 則 AO′:BO′ = AP′:BQ′. 故 O, O′ 按半徑之比外分及內分 AB.



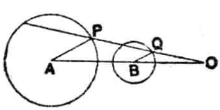
1117. 一圓之切線, 若過兩圓之相似中心, 則又切於他圓.

證　設兩圓 A, B 之相似中心爲 O, 由 O 引圓 B 之切線 OQ, 由 A 引 OQ 或其延線之垂線 AP. 於是因 AP ∥ BQ 故 BO:AO = BQ:AP [1017題]. 設圓 A 之半徑爲 R, 則 BO : AO = BQ : R [1116題], 故 AP = R. 故 P 在圓 A 之周上, 且 $A\hat{P}O = \hat{R}$, 故 OP 爲圓 A 之切線.



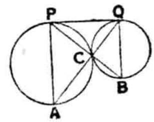
1118. 設一直線過兩圓之平行半徑之端, 則又過兩圓之相似中心.

證　設兩圓 A, B 之平行半徑爲 AP, BQ, 又命 PQ, AB 之交點爲 O, 則因 AP ∥ BQ, 故 BO:AO = BQ : AP [1017題], 故 O 分 AB 於二圓半徑之比, 故爲相似中心.



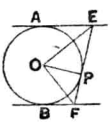
1119. 設兩圓外切, 則其公切線在切點間之部分, 爲各圓直徑之比例中項.

證　設兩外切圓之切點爲 C, 公切線爲 PQ, 切點爲 P, Q. 各圓過 P, Q 之直徑爲 PA, QB, 則 BP, AQ 過切點 C [628題]. 故 $P\hat{A}Q = C\hat{P}Q$ [557題], $P\hat{Q}A = P\hat{B}Q$, 因而 △APQ∽△PQB, AP : PQ = PQ : BQ.



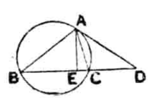
1120. 設兩平行線 AE, BF 分別切圓於 A, B, 又交他切線於 E, F, 則圓之半徑爲切線 EF 上切點所分二部之比例中項.

證　命他切線之切點爲 P, 圓之中心爲 O, 聯結 OE, OF, OP, 則因 AE ∥ BF, 故 $A\hat{E}P + B\hat{F}P = 2\hat{R}$. 然 OE, OF 分別爲 $A\hat{E}P$, $B\hat{F}P$ 之二等分線 [556 題], 故 $O\hat{E}P + O\hat{F}P = \hat{R}$, 故 $E\hat{O}F = \hat{R}$, 且 OP ⊥ EF, 故 OP 爲 EP, PF 之比例中項 [1024題].



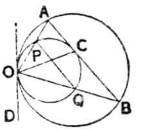
1121. 設 ABC 爲圓之內接三角形, A 上之切線 AD 與 BC 之延線交於 D, 則三角形 ABD, ACD 之外接圓直徑之比, 等於 AD, CD 之比.

證　由 A 引 BC 之垂線 AE, 命兩三角形 ABD, ACD 外接圓之半徑分別爲 R, R′, 則 AE : AB = AD : 2R [1026 題], AC : AE = 2R′ : AD. 故 AC : AB = 2R′ : 2R [等比定理]. 然兩三角形 ABD, CAD 中, $\hat{D}$ 公有, $A\hat{B}D = C\hat{A}D$ [557題], 故此兩三角形相似, 而 AC : AB = CD : AD. 故 2R′ : 2R = CD : AD.



1122. 設兩圓內切於 O, 一直線切內圓於 C, 交外圓於 A, B, 聯結 OA, OB, 令分別交內圓於 P 及 Q, 則 OP:OQ = AC:CB.

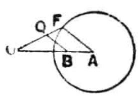
圖 聯結 PQ, 引切點 O 上之切線 OD, 則



$B\hat{A}O = B\hat{O}D = Q\hat{P}O$ [557題], 故 PQ ∥ AB, 故 AO:OB = OP:OQ. 次, 聯結 OC, 則 OC 二等分 $A\hat{O}B$ [616題], 故 OA:OB = AC:BC [1027題]. 故 OP:OQ = AC:CB.

1123. 命 O 爲所設點, P 爲所設圓周上之任意點. 在 OP 上取點 Q, 令 OQ:OP 等於所設比, 則 Q 恆在定圓周上.

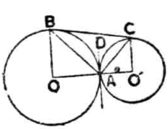
圖 命圓之中心爲 A, 在 OA 上取點 B, 令



OB:OA 等於所設比 H:K, 聯結 BQ, AP, 則 OQ : OP = OB : OA, 因而 BQ ∥ AP [951題], 故 OB : OA = BQ : AP. 然 OB, OA, AP 一定, 故 BQ 亦因而一定. 故 Q 在 B 爲中心, BQ 爲半徑之圓周上.

1124. 設兩圓相切, 過切點 A 引各圓之弦 AB, AC, 令相垂直, 則過 B 點與 C 點之直線, 過一定點.

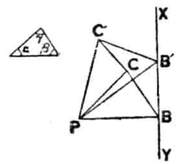
圖 設兩圓之中心, 分別爲 O, O′, 引切點



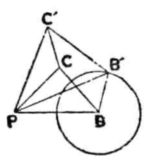
A 上之切線 AD, 則 $D\hat{A}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$ [557, 451 題], $D\hat{A}C = \frac{1}{2}A\hat{O'}C$. 而 $B\hat{A}C = \hat{R}$, 故 $A\hat{O}B + A\hat{O'}C = 2\hat{R}$, 故 OB ∥ O′C, 故 BC 過兩圓之相似外心 [1118題].

1125. 設三角形各角之大小一定, 其一角項在定點, 他一角項恆在定直線上, 則其餘一角項亦恆在定直線上. 若第二角項恆在一圓周上, 則第三角項亦恆在一圓周上.

圖 命所設三角爲 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$, 設 $\hat{\alpha}$ 之項點在定點 P 上, $\hat{\beta}$ 之項點恆在定直線 XY 上.



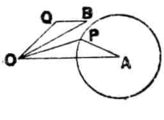
由 P 至 XY 引垂線 PB, 在 PB 上作三角形 PBC, 令其各角分別等於 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$. 命三角形之他任意位置爲 PB′C′, 聯結 CC′, 則因 △PBC ∽ △PB′C′, 故 PB:PC = PB′:PC′, 或 PB:PB′ = PC:PC′ [更比定理]. 而 $B\hat{P}B' = \hat{\alpha} \pm B'\hat{P}C = C\hat{P}C'$, 故 △BPB′ ∽ △CPC′ [1018題], 故 $P\hat{C}C' = P\hat{B}B' = \hat{R}$. 故 $\hat{\gamma}$ 之項點恆在由 C 所引 PC 之垂線上. 次, 設 $\hat{\beta}$ 之角項恆在圓 B 之周上. 仿前, 聯結 PB. 在 PB 上作三角形 PBC, 令其各角分別等於 $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$. 命三角形之他



任意位置爲 PB′C′, 聯結 BB′, CC′, 則 △BPB′ ∽ △CPC′, 故 PB : BB′ = PC : CC′. 而 PB, BB′, PC 之長一定, 故 CC′ 之長亦一定. 故 C′ 恆在 C 爲中心, CC′ 爲半徑之圓周上.

1126. 命 O 爲所設點, P 爲所設圓周上之點. 設 OQ 與 OP 成所設角, 且兩者之比等於所設比, 則 Q 恆在二定圓周之一上.

圖 命圓之中心爲 A, 聯結 OA, 引 OB, 令與 OA 成所設角 α, 且 B, Q 分別在 OA, OP 之同側, 及 OB:OA 等於所設比 H:K. 聯結

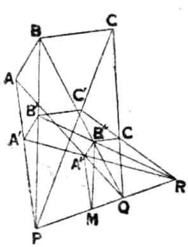


AP, BQ, 則 OB : OA = H : K = OQ : OP, $A\hat{O}P = \hat{\alpha} \pm P\hat{O}B = B\hat{O}Q$, 故△AOP ∽△BOQ, 因而 OA : AP = OB : BQ. 然 OA, AP, OB 一定, 故 BQ 亦一定, 故 Q 在定點 B 爲中心 BQ 爲半徑之圓周上. 但與 OP 成角 α 之直線 OQ, 可於 OP 之兩側引之,因而又可得 B 對於 OA 之對稱點. 故 Q 點所在之圓周,有關於 OA 之二對稱圓周.

注意 本題與 1125 題後段同.

1127. 設三相似直線形之對應邊相平行,則其每二者之相似中心,在一直線上.

證 設三相似直線形 ABC……, A′B′C′…, A″B″C″……之對應邊, 互相平行, 其兩兩之相似中心爲 P, Q, R. 聯結 PQ, 由 A″引 A′P 之平行線, 命其與 PQ 之交點爲 M, 聯結 B″M. 於是 AQ : A″Q = BQ : B″Q [1017 題]. 而

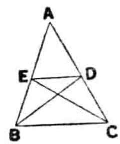


AP ∥ A″M, 故 AQ : A″Q = PQ : MQ. 故 BQ : B″Q = PQ : MQ, 因而 B″M ∥ BP [951 題]. 於是兩三角形 A′PB′, A″MB″ 中, 三邊分別平行,故 A′A″, B′B″, PM 過一點 [1022 題]. 而 A′A″, B′B″ 之交點爲 R, 故 PM, 卽 PQ 過 R.

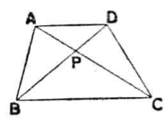
注意 本題若用 Menelaus 氏定理證之, 則較簡單.

1128. 設三角形 ABC 中,角 B 及角 C 之二等分線與其對邊 AC, AB 之交點爲 D 及 E, 線分 DE 平行於底 BC 則三角形爲二等邊.

證 因 BD 爲角 ABC 之二等分線, 故 AB : BC = AD : DC [1027 題]. 同理, AC : BC = AE : EB. 然 ED ∥ BC, 故 AE : EB = AD : DC [949 題], 因而 AB : BC = AC : BC. 故 AB = AC.

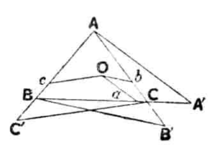


1129. 梯形 ABCD 之對角線 AC, DB 之交點 P, 分 AC, DB 於同比.



證 因 AD ∥ BC, 故過 P 引 AD 之平行線, 而由是推致, 卽得 PA : PC = PD : PB [947 題].

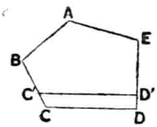
1130. 由三角形 ABC 之各頂點, 至其對邊 [或其延線] 引直線 AA′, BB′, CC′, 令其長皆等於所設長 L. 更由三角形內之任意點 O, 平行於 AA′, BB′, CC′, 分別引 Oa, Ob, Oc, 命其與 BC, CA, AB 之交點爲 a, b, c, 則 Oa, Ob, Oc 之和, 等於所設長 L.



證 $\frac{Oa}{AA'}+\frac{Ob}{BB'}+\frac{Oc}{CC'}=1$ [1282 題]. 然 AA′ = BB′ = CC′ = L, 故由前式 $\frac{Oa+Ob+Oc}{L}=1$. 故 $Oa+Ob+Oc=L$.

1131. 非三角形之多角形, 雖等角, 不必相似.

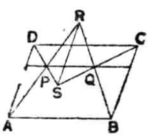
證 證 ABCDE 爲非三角形之任意多角形, 引邊 CD 之平行線, 命其與 BC, DE 之交點分別爲 C′, D′, 則兩多角形 ABCDE, ABC′D′E



等角,然對應邊並不成比例,因 AB, AE 雖爲兩多角形之公邊,而 BC 與 BC′, CD 與 C′D′ 等則不相等故也. 故兩多角形雖等角,而通常並不相似.

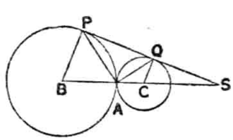
1132. 設平行四邊形 ABCD 中,在邊 AB 之平行線上取二點 P, Q, 命線分 PA, QB 之交點爲 R, 線分 PD, QC 之交點爲 S, 則直線 RS 平行於 AD.

證 因 PQ ∥ AB, 故 RP : RA = PQ : AB = PQ : DC = SP : SD. 故 RP : PA = SP : PD. 於是 △PAD, △PRS 中, 兩邊成比例, 且其夾角相等, 故 △PAD ∽ △PRS [1018題]. 故 $P\hat{A}D = P\hat{R}S$, 因而 AD ∥ RS.



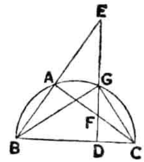
1133. 設兩圓之切點爲 A, 公切線與中心線之交點爲 S. 公切線與兩圓之切點爲 P, Q, 則線分 SA 爲線分 SP, SQ 之比例中項.

證 設兩圓之中心爲 B, C, 則 A 在直線 BC 上. 又因 BP ∥ CQ, 故 $P\hat{B}S = Q\hat{C}S$ 然 $S\hat{P}A = \frac{1}{2}A\hat{B}P$, $Q\hat{A}S = \frac{1}{2}Q\hat{C}S$, 故 $A\hat{P}S = Q\hat{A}S$, 因而 △SAP ∽ △SQA. 故 SP : SA = SA : SQ.



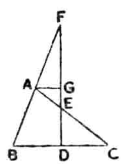
1134. 在直角三角形 ABC 之斜邊 BC 上取點 D, 由 D 引 BC 之垂線, 命其與邊 AB, AC, 及外接圓之交點分別爲 E, F, G, 則線分 DG 爲線分 DE, DF 之比例中項.

證 直角三角形 EAF, CDF 中, 銳角 $E\hat{F}A = C\hat{F}D$, 故 $F\hat{E}A = F\hat{C}D$, 因而兩直角三角形 EBD, CFD 相似, 故 ED : BD = CD : DF……(1). 又 △BDG ∽ △GDC, 故 BD : GD = GD : DC……(2). 取(1),(2)之複比, 則 ED : GD = GD : DF, 故 GD 爲 DE, DF 之比例中項.



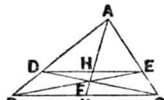
1135. 三角形 ABC 中, 過邊 BC 之中點 D 引一直線, 命其與邊 AC, AB 或其延線之交點分別爲 E, F, 則 AE : CE = AF : BF.

證 過 A 引 BC 之平行線, 命其與 DEF 之交點爲 G, 則 AE : CE = AG : CD = AG : BD = AF : BF.



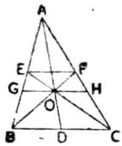
1136. 平行於三角形 ABC 之底邊 BC, 引直線 DE, 命其與 AB, AC 之交點分別爲 D, E; 聯結 DC 及 BE, 命其交點爲 F; 聯結 AF, 延長之, 令交 DE 及 BC 於 H 及 K, 則 A, F, H, K 成調和點列.

證 H, K 分別爲 DE, BC 之中點 [1091題], 故由相似三角形之定理, FH : FK = HE : BK = DH : BK = AH : AK. 卽直線 KH, 按同比內分及外分於 F 及 A, 故由定義, A, F, H, K 成調和點列.



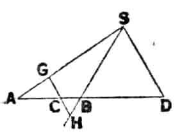
1137. 在三角形 ABC 之中線 AD 上取點 O, 聯結 OB, OC, 命其與邊 AB, AC 之交點, 分別爲 E, F, 則 EF 平行於 BC.

證 過 O 引 BC 之平行線,命其與 AB, AC 之交點分別爲 G, H, 則 O 爲 GH 之中點[1079題]. 而 EG:EB＝GO:BC＝OH:BC＝FH:FC, 故 EF 平行於 BC [951題].



1138. 設 S 爲含調和點列 A, C, B, D 之直線外之一點,過 C 引 SD 之平行線,命其與 SA, SB 之交點分別爲 G, H, 則 GC, CH 相等.

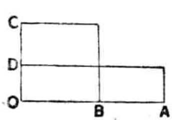
證 由假設, GCH 平行於 SD, 故 GC:SD＝AC:AD, CH:SD＝BC:BD. 然 A, C, B, D 成調和點列, 故 AC:BC＝AD:BD, 或 AC:AD＝BC:BD. 故最初二比例式中之右邊相等, 卽 GC:SD＝CH:SD, 因而 GC＝CH.



第三章 面積

1139. 設四直線成比例, 則其兩外項所包矩形,等於其兩內項所包矩形. 反之,設兩直線所包矩形, 等於他兩直線所包矩形, 則此四直線成比例,而一矩形之二邊爲兩內項.

證 設 OA, OB, OC, OD 四直線間,具 OA:OB＝OC:OD 之關係;求證 OA 與 OD 所包矩形,等於 OB 與 OC 所包矩形. 將 OA 及 OB 置於直角之一邊,OC 及 OD 置於他一邊,完成兩矩形 AD, BC, 而 BD 爲兩矩形 AD, BC 之公有部分. 於是因兩等高矩形之比, 等於其底之比, 故矩形 AD:矩形 BD＝OA:OB. 同理, 矩形 BC:矩形 BD＝OC:OD. 然 OA:OB＝OC:OD[假設], 故矩形 AD:矩形 BD＝矩形 BC:矩形 BD, 故矩形 AD＝矩形 BC [938題]. 故兩外項 OA, OD 所包之矩形,等於兩內項 OB, OC 所包之矩形.反之,設 OA 及 OD 所包之矩形, 等於 OB 及 OC 所包之矩形;求證 OA 與 OB 之比,等於 OC 與 OD 之比. 仿前作圖,則因矩形 AD 等於矩形 BC [假設], 故矩形 AD 與矩形 BD 之比,等於矩形 BC 與矩形 BD 之比 [938題]. 然矩形 AD 與矩形 BD 之比, 等於底 OA 與底 OB 之比 [952題], 矩形 BC 與矩形 BD 之比, 等於底 OC 與底 OD 之比 [952題], 故 OA:OB＝OC:OD.

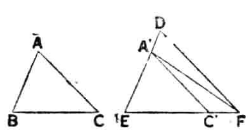


1140. 設三直線成比例, 則兩外項所包之矩形,等於中項上之正方形. 反之,設兩直線所包之矩形,等於他一直線上之正方形, 則此三直線成比例,而前二直線爲兩外項, 後一直線爲中項.

證 由前題自明.

1141. 相似三角形之比, 等於其對應邊之二乘比.

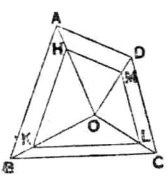
證 設 ABC, DEF 爲相似三角形,BC, EF 爲對應邊;求證三角形 ABC 與三角形 DEF 之比,等於 BC 與 EF 之二乘比. 將三角形 ABC 置於三角形 DEF 上,合 B 合於 E 上, BC 落於 EF 上. 於是因角



ABC 等於角 DEF [假設], 故 BA 落於 ED 上. 設 A, C 落於 ED, EF 或其延線上之點 A′, C′, 聯結 A′F. 因兩等高三角形之比, 等於其底之比, 故三角形 A′EC′ 與三角形 A′EF 之比, 等於 EC′ 與 EF, 即 BC 與 EF 之比. 同理, 三角形 A′EF 與三角形 DEF 之比, 等於 A′E 與 DE 之比, 即等於比 AB:DE. 然 AB:BC＝DE:EF [假設], 故 AB:DE＝BC:EF [更比定理]. 故三角形 A′EF 與三角形 DEF 之比等於比 BC:EF. 而三角形 A′EC′ 與三角形 DEF 之比, 等於三角形 A′EC′ 與三角形 A′EF 之比及三角形 A′EF 與 DEF 之比之複比 [945題]. 而是等二比, 皆等於比 BC:EF, 業已證明, 故三角形 A′EC′, 即三角形 ABC 與三角形 DEF 之比, 等於比 BC:EF 之二乘比.

1142. 兩相似直線形面積之比, 等於其對應邊之二乘比.

證 設 ABCD, HKLM 爲相似直線形, AB, HK 爲對應邊, 求證直線形 ABCD 與直線形 HKLM 之比, 等於 AB 與 HK 之二乘比. 將一形置於他形之內, 令其對應邊平行. 聯結 AH, BK, CL, DM 而延長之, 則交於相似中心 O [1022題], 於是兩形可分成與其邊數同數之相似三角形 [1023題], 而各組中兩三角形之比, 等於其底之二乘比 [1141題], 即等於兩直線形中對應邊之二乘比. 故成一直線形之諸三角形之和與成他直線形之諸三角形之和之比, 等於兩直線形對應邊之二乘比 [943題], 即直線形 ABCD 與直線形 HKLM 之比, 等於 AB 與 HK 之二乘比.



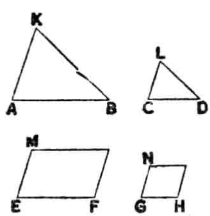
注意 相似直線形面積之比, 等於其對應線之二乘比.

1143. 兩相似直線形之比, 等於其對應邊上所作兩正方形之比.

證 因兩相似直線形之比及兩正方形之比, 皆等於其對應邊之二乘比故也.

1144. 設四直線成比例, 則其第一第二線上所作在相似位置之兩相似直線形, 與第三第四線上所作在相似位置之兩相似直線形成比例. 反之, 設四直線中, 第一線上所作之直線形與第二線上所作在相似位置之相似直線形之比, 等於第三線上所作直線形與第四線上所作在相似位置之相似直線形之比, 則此四直線成比例.

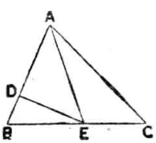
證 設 AB, CD, EF, GH 爲成比例之四直線, 又 KAB, LCD 爲 AB, CD 上在相似位置之相似直線形, MF, NH 爲 EF, GH 上在相似位置之相似直線形. 求證直線形 KAB 與直線形 LCD 之比, 等於直線形 MF 與直線形 NH 之比. 因比 AB:CD 等於比 EF:GH, 故 AB:CD 之二乘比, 等於 EF:GH 之二乘比 [971題]. 而直線形 KAB 與直線形 LCD 之比, 等於 AB:CD 之二乘比 [1142題], 直線形 MF 與直線形 NH 之比, 等於 EF:GH 之二乘比 [1142題]; 故直線形 KAB 與直線形 LCD 之比, 等於直線形 MF 與直線形 NH 之比. 反之, 設 AB 上之直線形



KAB 與 CD 上所作在相似位置之相似直線形 LCD 之比，等於 EF 上直線形 MF 與 GH 上所作在相似位置之相似直線形 NH 之比. 求證 AB 與 CD 之比，等於 EF 與 GH 之比. 直線形 KAB 與直線形 LCD 之比，等於 AB:CD 之二乘比 [1142題]，直線形 MF 與直線形 NH 之比，等於 EF:GH 之二乘比 [1142題]. 而直線形 KAB 與直線形 LCD 之比，等於直線形 MF 與直線形 NH 之比 [假設]，故 AB : CD 之二乘比，等於 EF : GH 之二乘比，因而 AB:CD = EF:GH [971題].

1145. 兩三角形或兩平行四邊形中，一角相等，則其面積之比，等於此角兩側各邊之比之複比.

證　設兩三角形 ABC, DBE 中，角 ABC 等於角 DBE. 求證三角形 ABC 與三角形 DBE 之比，等於 BC : BE 及 BA : BD 之複比. 將三角形 ABC 置於三角形 DBE 上，令 BC 落於 BE 上，則 BA 落於 BD 上，因角 ABC 等於角 DBE 故也. 聯結 AE. 於是三角形 ABC 與三角形 DBE 之比，等於三角形 ABC 與三角形 ABE 之比，及三角形 ABE 與三角形 DBE 之比之複比. 然三角形 ABC 與三角形 ABE 之比，等於比 BC : BE [953題]，三角形 ABE 與三角形 DBE 之比，等於比 AB:DB [953題]. 據此，三角形 ABC 與三角形 DBE 之比，等於比 BC:BE 及 BA :BD 之複比. 若兩形為平行四邊形，其證法準此. 若兩形中一角互為補角，本題亦可成立.



1146. 設兩三角形或兩平行四邊形中，一角互為補角，則其面積之比，等於此角兩側各邊之比之複比.

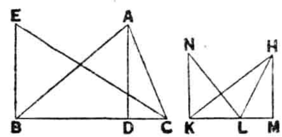
證　由前題自明.

1147. 四直線中，兩兩之比之複比，等於其兩前項所包矩形，與兩後項所包矩形之比.

證　由 1145 題自明.

1148. 兩三角形或兩平行四邊形之比，等於其底之比及高之比之複比.

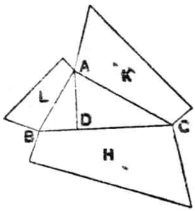
證　設 ABC, HKL 為兩三角形，AD, HM 為



其高；求證三角形 ABC 與三角形 HKL 之比，等於 BC:KL 及 AD:HM 之複比. 由 B 引 BC 之垂線 BE，令等於 AD，聯結 EC；又由 K 引 KL 之垂線 KN，令等於 HM，聯結 NL. 於是兩三角形 ABC 及 EBC 相等，他兩三角形 HKL 及 NKL 亦相等 [736題]. 然角 EBC 等於角 NKL，故三角形 EBC 與三角形 NKL 之比，等於 BC:KL 及 EB:NK 之複比 [1145題]，卽等於 BC:KL 及 AD:HM 之複比. 故三角形 ABC 與三角形 HKL 之比，等於 BC:KL 及 AD:HM 之複比，若兩形為平行四邊形，其證法準此.

1149. 直角三角形中，斜邊上所作之任意直線形，等於他二邊上所作與其在相似位置之兩相似直線形之和.

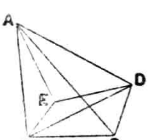
證　設直角三角形 ABC 中，$B\hat{A}C$ 為直角，



H, K, L 爲 BC, CA, AB 上所作在相似位置之相似直線形. 求證直線形 H 等於直線形 K, L 之和. 引 BC 之垂線 AD, 則 BC : CA = CA : CD [1024 題], 故 BC : CD 爲 BC:CA 之二乘比. 故直線形 K 與直線形 H 之比, 等於 CD 與 BC 之比 [1142 題]. 仿此得證直線形 L 與直線形 H 之比,等於 BD 與 BC 之比. 故直線形 K 及 L 之和與直線影 H 之比, 等於 CD 及 BD 之和與 BC 之比[946 題]. 然 CD 與 BD 之和, 等於 BC, 故直線形 K 及 L 之和, 等於直線形 H.

1150. 四邊形二對角線所包之矩形, 通常等於二組對邊所包矩形之和;但若此四邊形內接於圓, 則二對角線所包之矩形, 等於二組對邊所包矩形之和. [後者曰 Ptolemy 氏定理].

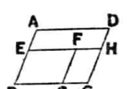
圖 設四邊形ABCD 不內接於圓,求證 AC, BD 所包之矩形, 小於 AB, CD 所包矩形及 AD, BC 所包矩形之和.



作角 BAE, 令等於角 CAD, 又取角 ABE, 令等於角 ACD, 聯結 DE, 於是兩三角形 ABE, ACD 等 . 因而 BA : AE = CA : AD [1017 題], 故 BA : AC = EA : AD [更比定理]. 又因角 BAE 等於角 CAD, 故角 BAC 等於角 EAD, 故兩三角形 BAC, EAD 相似 [1018 題]. 因兩三角形 ABE, ACD 相似, 故 AB : BE = AC : CD, 故 AB 與 CD 所包之矩形,等於 AC 與 BE 所包之矩形. 又兩三角形 BAC, EAD 相似, 故 BC : AC = DE : AD, 故 BC 與 AD 所包之矩形,等於 AC 與 DE 所包之矩形. 據此, AB 與 CD 所包矩形及 BC 與 AD 所包矩形之和,等於 AC 與 BE 所包矩形及 AC 與 DE 所包矩形之和. 而 BD 小於 BE 及 ED 之和, 故 AC 與 BD 所包之矩形, 小於 AC, BE 所包矩形及 AC, DE 所包矩形之和;即 AC 與 BD 所包之矩形, 小於 AB, CD 所包矩形及 BC, AD 所包矩形之和. 但若四邊形 ABCD 內接於圓, 則角 ABD 等於角 ACD, 故 E 點在 BD 上,因而 BD 等於 BE 與 ED 之和. 故 AC 與 BD 所包之矩形, 等於 AB, CD 所包矩形及 BC, AD 所包矩形之和.

1151. 試由定理兩三角形中,一角相等, 則兩三角形之比, 等於兩形中等角夾邊之比之複比, 並仿此定理之證法, 以證定理兩平行四邊形中, 一角相等, 則兩平行四邊形之比, 等於兩形中等角夾邊之比之複比.

圖 設兩平行四邊形 ABCD, EBGF 中, 角 B 相等. 命 EF 或其延線與 CD 之交點爲 H. 於是

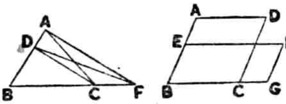


▱ABCD : ▱EBCH = AB : EB [953 題], ▱EBCH : ▱EBGF = BC : BG. 故 ▱ABCD : ▱EBGF, 等於比 AB : EB 與 BC : BG 之複比.

1152. 一角相等之兩三角形或平行四邊形相等, 則兩形中夾等角之一邊之比, 等於他邊之反比. 試先直接證之, 復由定理兩三角形或平行四邊形中, 一角相等, 則兩形之比,等於兩形中等角夾邊之比之複比證

之.

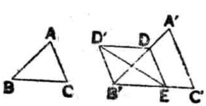
解 (1) 設兩三角形 ABC, DBF 相等，且 $\hat{B}$



亦相等.聯結 AF, DC, 則因△ABC＝△DBF, 故 △ADC＝△FDC, 因而 AF ∥ DC [738題], 故 AB:DB＝BF:BC [949題]. 而 BC : BF 等於 BF:BC 之反比, 故 AB : DB 等於他邊之比 BC : BF 之反比. 若兩形為平行四邊形, 則可引對等角之對角線, 而仿前證之. (2) 因兩三角形 ABC, DBF 之角 B 相等, 故 △ABC:△DBF 等於 AB:DB 與 BC:BF 之複比,然 △ABC＝△DBF, 故 AB:DB 與 BC:BF 之複比為等比. 於是因 AB·BC:DB·BF 為等比, 故 AB·BC＝DB·BF, 因而 AB:BD＝BF :BC [1139題]. 平行四邊形亦然.

1153. 下定理之逆定理如何: 一角相等之兩三角形或平行四邊形之比, 等於兩形中等角夾邊之比之複比.

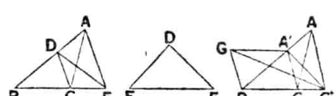
解 上定理之逆定理如下:設兩三角形或平行四邊形之比,等於兩形中一角夾邊之比之複比,則此角



相等. 令設兩三角形 ABC, A'B'C', △ABC :△A'B'C' 等於 AB:A'B' 及 BC:B'C' 之複比. 在 A'B' 上取 B'D, 令等於 AB, 在 B'C' 上取 B'E, 令等於 BC, 聯結 DE, 則 △DB'E :△A'B'C' 等於 DB':A'B', 及 EB':C'B' 之複比[1145題], 故△ABC＝△DB'E. 因此置三角形 ABC 於三角形 DB'E 上,令 BC 落於 B'E 上,且令 A, D 在 B'E 之同側,則 A 或落於 D 上,或落於他點 D' 上.若 A 落於 D 上, 則 $A\hat{B}C = D\hat{B}'E = A'\hat{B}'C'$. 若 A 落於 D' 上, 則因 △DB'E＝△D'B'E, 故 DD' ∥ B'C'; 而 B'D＝B'D', 故 $D\hat{B}'E$, $D'\hat{B}'E$ 互為補角. 因此在三角形時, 此定理不成立, 而角或相等, 或互為補角. 又就平行四邊形探討之. 在兩形中引對角線, 則與前同理, 角或相等, 或互為補角. 然平行四邊形中對邊相等, 隣角互為補角, 故若角不相等, 可將一邊代以對邊, 則夾角相等. 故在平行四邊形時, 本定理成立.

1154. 定理一角相等之兩三角形或平行四邊形相等,則兩形中夾等角之二邊,其一之比等於他一之反比之逆定理有二,試述之.又何者為眞?

解 本定理之假設有二, 卽角相等, 及積相等, 故其逆定理有以下二者. (1)設兩三角形或平行四邊形之一角相等,且夾此角之二邊一之比, 等於他一之反比, 則兩三角形或平行四邊形相等.(2)設兩三角形或平行四邊形相等,且夾其中一角之二邊,其一之比,等於他一之反比,則此角相等.



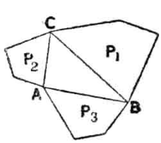
(1) 設三角形 ABC, DBE 中, $\hat{B}$ 相等. 此時得如甲圖所示, 令邊 BD, BE 分別置於邊 AB, BC 上. 而由假設, AB:DB 等於 BC:BE 之反比, 故 AB:DB＝EB:BC. 因此聯結 AE,

DC, 則 AE ∥ DC [951題], 因而 $\triangle ADC = \triangle EDC$, 故三角形 ABC = 三角形 DBE. 平行四邊形中亦然. 故第一定理成立.

(2) 設 $\triangle ABC = \triangle DEF$, $AB:DE = EF:BC$. 在 AB, BC, 或其延線上分別取 BA', BC', 令等於 DE, EF, 聯結 AC', $A'C$, 則因 $AB : A'B = BC' : BC$, 故 $AC' \parallel A'C$, 且 $\triangle ABC = \triangle A'BC'$, 故 $\triangle DEF = \triangle A'BC'$. 置三角形 DEF 於三角形 $A'BC'$ 上, 令 EF 落於 BC' 上, D, A' 在 BC' 之同側, 則因 $ED = BA'$, 故 D 或落於 A' 上, 或落於他點 G. 若 D 落於 A' 上, 則 $D\hat{E}F = A\hat{B}C$. 若落於 G, 則 $G\hat{B}C'$, 即 $D\hat{E}F$ 與 $A\hat{B}C$ 互爲補角. 故第二定理對三角形不能成立, 而角或相等, 或互爲補角. 然對於平行四邊形, 則仿前題, 得證其成立.

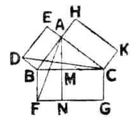
1155. 試由定理直角三角形中, 斜邊上之正方形, 等於他二邊上正方形之和, 以證定理直角三角形斜邊上之直線形, 等於他二邊上與其相似且在相似位置之直線形之和.

圖 設三角形 ABC 中, $\hat{A} = \hat{R}$, 在邊 BC, CA, AB 上之相似且在相似位置之多角形, 分別爲 P_1, P_2, P_3, 則 $P_3 : P_2 = \overline{AB}^2 : \overline{AC}^2$ [1141題], 故 $P_2 + P_3 : P_2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 : \overline{AC}^2$ [合比定理] $= \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2$ [750題]. 又 $P_1 : P_2 = \overline{BC}^2 : \overline{AC}^2$ 故 $P_2 + P_3 : P_2 = P_1 : P_2$, 因而 $P_2 + P_3 = P_1$.



1156. 定理直角三角形斜邊上之任意直線形, 等於他二邊上與其相似且在相似位置之直線形之和中, 設各邊上之直線形爲矩形, 試由直角項向斜邊引一垂線, 而將斜邊上之矩形分爲二矩形, 將此各矩形分別與他二邊上之矩形比較, 以證明之.

圖 設直角三角形 ABC 中, $\hat{A} = \hat{R}$, 其各邊上在相似位置之相似矩形, 分別爲 ABDE, ACKH, BCGF, 由 A 引 BC 之垂線 AM, 命其延線與 FG 之交點爲 N. 於是因 ▭ABDE ∽ ▭BCGF, 故 $DB:AB = BF:BC$, 或 $DB:BF = AB:BC$. 又兩三角形 DBC, ABF 中, $D\hat{B}C = \hat{R} + A\hat{B}C = A\hat{B}F$, 故 $\triangle BDC = \triangle ABF$ [1154題]. 而 ▭BE = 2△DBC, ▭BN = 2△ABF, 故 ▭BE = BN. 同理, ▭CH = ▭CN. 故 ▭BE + ▭CH = ▭BG.



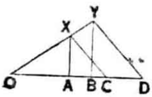
1157. 直角三角形 ABC 中, 由直角項 A 至斜邊引垂線 AD, 則連原直角三角形, 共得三相似直角三角形. 又試指出是等相似直角三角形之對應邊. 又斜邊之二分之比, 等於原直角三角形之二邊 AB, AC 之二乘比.

圖 在 1024 題中, 業已證明 $\triangle ABC \backsim \triangle DBA \backsim \triangle DAC$, 及 $B\hat{A}C = A\hat{D}B = A\hat{D}C$, $\hat{B} = D\hat{A}C$, $\hat{C} = B\hat{A}D$. 又相似三角形 ABC, DBA, DAC 之對應邊, 係對等角者, 故 BC, BA, AC 對應, AC, DA, DC對應, AB, DB, DA 對應. 又 $AB:AC = BD:DA = DA:DC$. 故 AB·AC 之二乘比, 爲 $BD:DA$, $DA:DC$ 之複比, 即 $BD:DC$.

1158. 設 A, B, C, D 四點在一直線上, 在 AC, BD 上作任意相似三角形 AXC, BYD, 令其對應邊 AX 與 CY, CX 與 DY 平行, 命 O 爲 YX, DA 之交點, 則矩形 OA·OD 等於矩形 OB

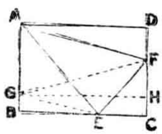
$\cdot OC$.

證　因 $AX \parallel BY$, 故 $OA:OB=OX:OY$ [949題]. 又因 $CX \parallel DY$, 故 $OC:OD=OX:OY$. 故 $OA:OB=OC:OD$, 故 $OA\cdot OD=OB\cdot OC$ [1139題].



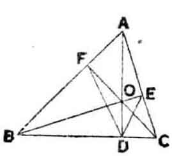
1159. 在矩形 ABCD 之邊 BC 上取點 E, 又在邊 CD 上取點 F, 則矩形之面積等於三角形 AEF 面積之二倍與矩形 $BE\cdot DF$ 面積之和.

證　由 E 平行於 AF 引 EG, 命其與 AB 之交點爲 G. 由 G 平行於 AD 引 GH, 命其與 DC 之交點爲 H. 於是 $\triangle AEF=\triangle AGF=\frac{1}{2}\square AH$. 又直角三角形 AFD, EGB 中, $A\hat{F}D=F\hat{A}G=E\hat{G}B$, 故 $\triangle AFD \backsim \triangle EGB$, 因而 $AD:FD=EB:GB$, 故 $AD\cdot GB=BE\cdot DF$ [1139題]. 故 $\square ABCD=\square AH+\square GC=2\triangle AEF+BE\cdot DF$.



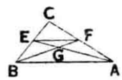
1160. 設三角形 ABC 中, 由 A, B, C 分別至對邊所引之垂線足爲 D, E, F, 命此三垂線之交點爲 O, 則 DO, DA 所包之矩形, 等於 DE, DF 所包之矩形.

證　A, E, D, B 在一圓周上, 故 $B\hat{A}D=B\hat{E}D$ [452題], 又 $F\hat{D}O=O\hat{D}E$ [518題]. 故三角形 ODE 與三角形 AFD 中, 三角分別相等, 而兩三角形相似. 故 $DE:DO=DA:DF$, 故 $DO\cdot DA=DE\cdot DF$ [1139題].



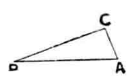
1161. 設三角形 ABC 之二邊 BC, AC 之中點爲 E, F, 命 AE, BF 之交點爲 G, 試比較三角形 AGB, EGF 之面積.

證　因 $EF \parallel BA$, 故兩三角形 ABG, EFG 中, 三角分別相等, 而此兩三角形相似. 故 $\triangle AGB:\triangle EGF=\overline{AB}^2:\overline{EF}^2$ [1141題] $=\overline{2EF}^2:\overline{EF}^2=4:1$, 故 $\triangle AGB=4\triangle EGF$.



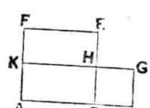
1162. 設三角形 ABC 中, 角 C 爲直角, BC 爲 AC 之三倍, 則 AB 上之正三角形等於 AC 上之正三角形之十倍.

證　設邊 AB, BC, CA 上之正三角形分別爲 P, Q, R, 則因 $P\backsim Q\backsim R$, 故 $Q:R=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2$ [1141題] $=\overline{3AC}^2:\overline{AC}^2=9:1$. 故 $P:R=Q+R:R$ [1155題, 合比定理] $=9+1:1=10:1$, 故 $P=10R$.



1163. 二直線所包之矩形, 爲各直線上正方形之比例中項.

證　設二直線爲 AB, BC, 其所包之矩形爲 AH; AB, BC 上之正方形分別爲 AE, BG. $\square AE:\square AH=BE:BH=AB:BC$ [975題], $\square AH:\square BG=AB:BC$ 故 $\square AE:\square AH=\square AH:\square BG$, 卽 $\overline{AB}^2:AB\cdot BC=AB\cdot BC:\overline{BC}^2$.



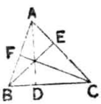
1164. 設兩三角形 [或平行四邊形] 相等, 則其高之比, 等於底邊之比之反比.

證　設兩三角形 ABC, A′B′C′ 相等, 其高分別爲 AD, A′D′. 此時 $\triangle ABC$

$:\triangle A'B'C'$ 等於 $AD:A'D'$, 及 $BC:B'C'$ 之複比, 卽 $AD\cdot BC:A'D'\cdot B'C'$. 而三角形 ABC ＝三角形 A'B'C' [假設], 故 $AD\cdot BC=A'D'\cdot B'C'$, 故 $AD:A'D'=B'C':BC$. 平行四邊形中亦然.

1165. 由三角形之二頂點至對邊所引垂線之比,等於此對邊之比之反比.

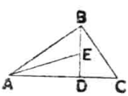
證 設由三角形 ABC 之各頂點至對邊所引之垂線分別爲 AD, BE, CF,



則 $AD\cdot BC=2\triangle ABC=BE\cdot AC$ [735題], 故 $AD:BE=AC:BC$ [1139題]. 同理, $BE:CF=AB:AC$.

1166. 由直角三角形 ABC 之直角頂 B 至斜邊 AC 引垂線 BD, 在 BD 上取 DE, 令等於BD, DC 之第三比例項,聯結 AE, 則三角形 ADE, BDC 相等.

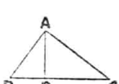
證 $B\hat{D}C=\hat{R}=A\hat{D}E$, 故 $\triangle BDC:\triangle ADE=BD\cdot DC:AD\cdot DE$ [1145題]. 而



$A\hat{B}C=\hat{R}$, 故 $AD:BD=BD:DC$ [1025題],又 $BD:DC=DC:DE$ [假設], 故 $AD:BD=DC:DE$, 故 $AD\cdot DE=BD\cdot DC$ [1139題]. 故 $\triangle BDC:\triangle ADE$ 爲等比,卽 $\triangle BDC=\triangle ADE$.

1167. 由直角三角形 ABC 之直角頂 A, 至斜邊引垂線 AD, 則三角形 ABC, ADB, ADC 比例於 BC, AB, AC 上之正方形.

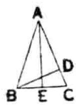
證 $\triangle ABC:\triangle ABD=BC:BD$ [953題]. 而



$\overline{AB}^2=BC\cdot BD$ [766題], 故 $\overline{BC}^2:\overline{AB}^2=BC:BD$, 故 $\triangle ABC:\triangle ABD=\overline{BC}^2:\overline{AB}^2$. 同理, $\triangle ABC:\triangle ACD=\overline{BC}^2:\overline{AC}^2$. 故 $\triangle ABC:\triangle ABD:\triangle ACD=\overline{BC}^2:\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$.

1168. 二等邊三角形 AOC 中, 由底 BC 之一端 B, 至邊 AC 引垂線 BD, 則 BC 上之正方形,等於矩形 AC·CD 之二倍.

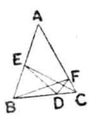
證 由頂點 A 至底 BC 引垂線 AE, 則 E 爲



BC 之中點. 又 $\triangle AEC$, $\triangle BDC$中, $A\hat{E}C=\hat{R}=B\hat{D}C$, $\hat{C}$ 公有,故 $\triangle AEC\backsim\triangle BDC$, 因而 $AC:CE=BC:CD$, 或$AC:\frac{1}{2}BC=BC:CD$. 故 $\overline{BC}^2=2AC\cdot CD$ [1139題].

1169. 二等邊三角形 ABC 中, 由底 BC 上之任意點 D, 至 AB, AC 分別引直線 DE, DF, 令與 BC 成等角,交 AB, AC 於 E, F, 則三角形 BDF, CDE 相等.

證 兩三角形 BDE, CDF 中,因 $AB=AC$, 故



$D\hat{B}E=D\hat{C}F$, 又 $E\hat{D}B=F\hat{D}C$ [假設], 故 $\triangle BDE\backsim\triangle CDF$, 而 $BD:ED=CD:FD$, 故 $BD\cdot FD=ED\cdot CD$ 次,三角形 BDF, EDC 中, $B\hat{D}F=E\hat{D}C$, 故 $\triangle BDF:\triangle EDC=BD\cdot DF:ED\cdot DC$ [1145題]. 故 $\triangle BDF=\triangle EDC$.

1170. 相似三角形之比, 等於由對應頂點至其對邊所引垂線之二乘比.

證 相似三角形之比,等於對應邊之二乘比[1141題] 而對應邊之比,等於對應邊上之高之比[1049題].故相似三角形之比,等於由對應頂點至對邊所引垂線之二乘比.

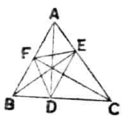
1171. 相似多角形之比, 等於其周或對應對角線之二乘比.

證 相似多角形之比,等於對應邊之二乘比[1142題],而對應邊之比,等於其周之比[1078題],或對應對角線之比 [1023題], 故相似多角形之比,等於其周或對應對角線

之二乘比.

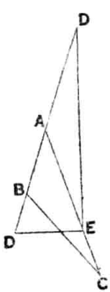
1172. 設三角形 ABC 中,由各角頂至對邊所引垂線之足聯結而成之三角形爲 DEF, 則三角形 ABC: 三角形 DBF 等於 AB:BD 之二乘比, 四邊形 AFDC: 三角形 BFD 等於 AD:BD 之二乘比.

解 △ABC:△DBF 等於 AB:BD 及 BC:BF 之複比 [1145題]. 今兩直角三角形ABD, CBF 中, $\hat{B}$ 公有, 故三角分別相等, 因而兩三角形相似, 故 AB : BD = BC : BF. 故 △ABC:△DBF 等於 AB:BD 之二乘比. 次, △ABC − △DBF : △DBF = $\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 : \overline{BD}^2$, 卽四邊形 AFDC: 三角形 DBF = $\overline{AD}^2 : \overline{BD}^2$ [750題].



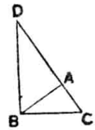
1173. 以三角形 ABC 之一角 A, 或其補角作頂角, 以等於 AB, AC 比例中項之直線爲二邊, 作二等邊三角形, 則此形與原三角形等積.

解 設二等邊三角形ADE之等邊, 等於三角形 ABC 之二邊 AB, AC 之比例中項 AE, 則 AB:AE=AE:AC[假設], 故 AB·AC=$\overline{AE}^2$. 而 △ABC:△ADE = AC·AB : AE·AD [1145題] = AC·AB : $\overline{AE}^2$. 故 △ABC = △ADE.



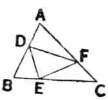
1174. 設兩三角形 ABC, BCD 公有頂點 C 及邊 CB, 角 ACB, BCD 相等, 且邊 BD 與 BC, 邊 BA 與 AC 相垂直, 則三角形 ABC 與 DBC 之比,等於 CA 與 CD 之比.

解 因 $C\hat{B}D = \hat{R} = C\hat{A}B$, 故 △ABC∽△BDC [1017題], 故 △ABC : △BDC = $\overline{BC}^2 : \overline{DC}^2$ [1141題]. 而 CA : BC = BC : CD, 卽 $\overline{BC}^2$ = CA · CD [1139題]. 故 △ABC : △BDC = CA·CD : $\overline{CD}^2$ = CA : CD.



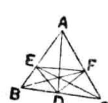
1175. 在三角形 ABC 之三邊上,分別取 D, E, F 三點, 令 AD:DB=BE:EC=CF:FA=1:2, 則三角形 ABC 與 DEF 之比如何?

解 兩三角形 CAB, FAD 公有角 A, 故 △ABC : △FAD = AB·AC:AD·AF [1145題]. 然 AB=3AD, AC=3CF, AF=2CF, 故△ABC : △FAD = 3·AD·3CF : AD·2CF = 9AD·CF : 2AD·CF = 9:2. 同理, △ABC : △DBE = 9:2, △ABC : △ECF = 9:2. 故 △ADF = △BED = △CFE, 因而 △ABC : 3△ADF = 9:6, 故 △ABC : △ABC − 3△ADF = 9:3 [分比定理], 卽 △ABC : △DEF = 3:1.



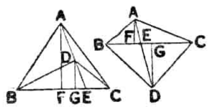
1176. 設直線 AD 將三角形 ABC 之角 A 二等分, 與邊 BC 交於 D, 直線 DE, DF 分別將角 ADB, ADC 二等分,且交 AB, AC 於 E, F. 求證三角形 BEF 與三角形 CEF 之比, 等於 BA 與 AC 之比.

解 △BEF : △AEF = EB : AE [953題], △AEF : △CEF = AF : FC, 故 △BEF : △CEF 等於比 EB : AE 及比 AF : FC 之複比. 而 DE, DF 分別爲 $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$ 之二等分線, 故 EB : AE = BD : AD [1027題], AF : FC = AD : DC, 故 EB : AE 與 AF : FC 之複比等於 BD : DC. 又因 BD : DC = AB : AC [1027題], 故 △BEF : △CEF = AB : AC.



1177. 共底邊之兩三角形之比，等於聯結其頂點之直線爲底邊所分二分之比.

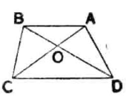
證 設三角形 ABC, DBC 公有底邊 BC, 命 AD 或其延線與底邊之交點爲 E. 由 A, D 分別引 BC 之垂線 AF, DG. 於是



因兩三角形共一底邊，故 △ABC : △DBC = AF : DG. 然 △AFE∽△DGE, 故 AF : DG = AE : DE, 故 △ABC : △DBC = AE : DE.

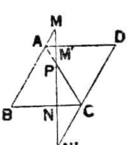
1178. 設四邊形 ABCD 之邊 AB, 平行於邊 CD, 其二對角線之交點爲 O, 則矩形 AO·OD 等於矩形 BO·OC.

證 兩三角形 AOB, COD 中, AB ∥ CD, 故三角分別相等，因而 △AOB∽△COD, AO : BO = CO : DO, 故矩形 AO·OD = 矩形 BO·OC [1139題].



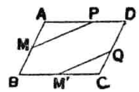
1179. 在平行四邊形 ABCD 之對角線 AC [或 AC 之延線] 上取任意點 P, 過 P 引一直線，令交 AB 於 M, BC 於 N, AD 於 M′, CD 於 N′, 則矩形 PM·PN 等於矩形 PM′·PN′.

證 兩三角形 APM, CPN′ 中, $A\hat{P}M = C\hat{P}N'$, $P\hat{A}M = P\hat{C}N'$, $P\hat{M}A = P\hat{N'}C$, 故 △APM∽△CPN′, 而 PN′ : PM = PC : PA [1017題] 又 △PAM′∽△PCN, 故 PN : PM′ = PC : PA. 故 PN′ : PM = PN : PM′, 因而 PM·PN = PM′·PN′ [1139題].



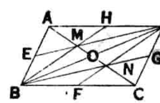
1180. 設 P, Q 爲分別在平行四邊形 ABCD 之二邊 AD, CD 上之定點，由 P, Q 依任意方向引平行線，命其與 AB, BC [或其延線] 之交點爲 M, M′, 則矩形 AM·CM′ 一定不易.

解 兩三角形 APM, CM′Q 中, $\hat{A} = \hat{C}$, $A\hat{M}P = C\hat{Q}M'$ [53題], $A\hat{P}M = C\hat{M'}Q$, 故 △APM∽△CM′Q, 因而 AP : AM = CM′ : CQ. 故 AM·CM′ = AP·CQ [1139題]. 而 P, Q 爲定點，故矩形 AP·CQ 一定，因而矩形 AM·CM′ 亦一定.



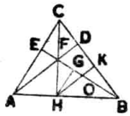
1181. 由平行四邊形中一雙對角之各頂點，至其對角傍二邊之中點引直線，是等直線組成一平行四邊形，而等於原平行四邊形之三分之一.

證 設平行四邊形 ABCD 各邊之中點分別爲 E, F, G, H, 命 BH, DE 之交點爲 M, 又 BG, DF 之交點爲 N. 因 BF, DH 分別爲平行且相等之直線 BC, DA 之半分，故相等，因而 BH ∥ DF [226題]. 同理, BG ∥ DE. 故 BNDM 爲平行四邊形. 又 AO, BH, DE 爲三角形 ABD 之中線，故 M 在 AC 上. 故 △ADO : △MDO = AO : MO = 3MO : MO = 3 : 1. 同理, △CDO : △NDO = △CBO : △NBO = △ABO : △MBO = 3 : 1. 故 ▱ABCD : ▱MBND = 3 : 1 [加比定理].



1182. 設兩三角形 ABC, ABF 在同底 AB 上，其比爲 2 : 1, 又設 AF, BF 之延線，分別交 BC, AC 於 D, E, 在 FB 上取 FG, 令等於 FE, 命 BG 之中點爲 O, 則 BO : BE = DF : DA.

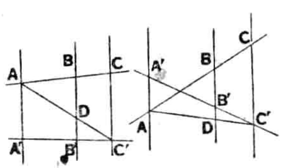
證 △ABC : △ABF = 2 : 1 [假設], 故其高之比亦爲 2 : 1. 據此，設 CF 之延線與 AB 之



交點爲 H, 則 CF=FH. 又 EF=FG, 故四邊形 CEHG 爲平行四邊形, 故 AC ∥ HG, 因此 BG:BE = BH:BA [949題]. 由 H 平行於 AD 引 HK, 命其與 BC 之交點爲 K, 則因 F 爲 CH 之中點, 故 2FD=HK. 而 BH:BA=HK:AD, 故 BG:BE=HK:AD, 卽 2OB:BE=2FD:AD. 故 OB:BE=FD:AD.

1183. 設三平行線 AA′, BB′, CC′ 與不相交之二直線 AC, A′C′ 相交, 且 AB:BC, 或 A′B′:B′C′ 等於所設比 $m:n$, 則 $(m+n)$BB′ $=n$·AA′ $+m$·CC′. 若 AC, A′C′ 相交, 則如何?

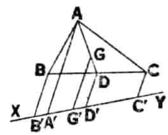
解 因 AA′, BB′, CC′ 相平行, 故 AB:BC



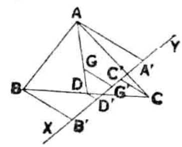
=A′B′:B′C′ $=m:n$ [972題], 次, 聯結 AC′, 命其與 BB′ 之交點爲 D, 則 BD:CC′=AB:AC $=m:m+n$, 故 $(m+n)$BD $=m$·CC′. 同理, DB′:AA′ $=n:m+n$, 因而 $(m+n)$DB′ $=n$AA′. 故 $(m+n)$BB′ $=n$AA′ $+m$CC′. 次, 若 AC, A′C′ 相交, 則 BB′=BD∼B′D, 故仿前得證 $(m+n)$BB′ $=n$AA′ $\sim m$CC′.

1184. 由三角形之三頂點及重心, 至不截三角形之某一直線, 引四平行直線, 則由重心所引直線之三倍, 等於他三直線之和. 若直線截三角形, 則如何?

解 命所設直線爲 XY, 由三頂點及重心 G 所引之四直線爲 AA′, BB′, CC′, GG′, 由 BC



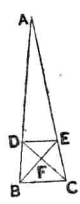
之中點 D 所引之平行線爲 DD′. 於是因 AG=2GD, 故 3GG′=AA′+2DD′ [1183題]. 又因 BD=DC, 故 2DD′=BB′+CC′. 故 3GG′=AA′+BB′+CC′. 次, 設 XY 截三角形, 則仿前得證 3GG′=AA′+BB′−CC′. 由是可



知, 此時由各頂點所引之直線, 在 XY 之兩側, 由重心所引之直線之三倍, 等於其同側他直線之和, 與異側直線之差.

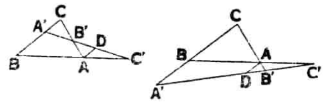
1185. 設 ABC 爲二等邊三角形, AC=25·BC, 由 BA, AC 分別取 BD, EC, 令各等於 BC, 命 BE, CD 之交點爲 F, 則 AC=35CF.

證 BD=CE, 故 DE ∥ BC; 而 FD=FE [110題], FB=FC [110題], 又 BC=EC [假設], 故 $\hat{BEC}$ = $\hat{CDE}$. 故 △CED ∽ △CFE, 因而 CD:CE = CE:CF. 又 △CFB ∽ △DFE, 故 CF:DF = BC:DE = CA:AE = 25:24, 因而 CF:CD = 25:49. 而 CD:CE = CE:CF, 故 CD:CF 爲 CE:CF 之二乘比, 故 $\overline{CE}^2:\overline{CF}^2$ = 49:25, 卽 CE:CF = 7:5. 又 AC:CE = 25:1, 故 AC:CF = 35:1 [複比], 故 AC = 35CF.



1186. 引一直線, 令交三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 或其延線於 A′, B′, C′, 則三比 AB′:B′C, CA′:A′B, BC′:C′A 之複比爲等比 [是曰 Menelaus 氏定理]. 又其逆定理如何?

解 過 A 平行於 BC 引 AD, 命其與 A′C′

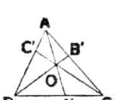


之交點爲D,則$BC':AC'=BA':AD$[949題].又$AB':B'C=AD:A'C$ [1017題], $CA':A'B=A'C:BA'$.據此,比$BC':AC'$, $AB':B'C$, $CA':A'B$之複比,等於比$BA':AD$, $AD:A'C$, $A'C:BA'$之複比, 即等於$BA':BA'$. 故前三比之複比,亦爲等比. 本定理之逆定理如下: 在三角形ABC之邊BC, CA, 或皆在其延線上,及AB之延線上分別取A', B', C',令三比$AB':B'C$, $CA':A'B$, $BC':C'A$之複比爲等比,則A', B', C'在一直線上. 此逆定理成立,因A', B', C'若不在一直線上,命$A'B'$之延線與BA之交點爲C'',則因$AB':B'C$, $CA':A'B$, $BC':C'A$之複比與$AB':B'C$, $CA':A'B$, $BC'':C''A$之複比皆爲等比,故$BC':CA'=BC'':C''A$, 於是C', C''按同比外分BA,而不合理故也.故A', B', C'在一直線上.

注意 逆定理中取三點時,須令其或皆外分,或二者內分,一者外分.

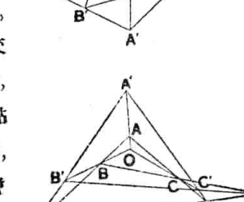
1187. 由三角形ABC之各頂點至對邊引直線AA', BB', CC',令交於一點,則$AB':B'C$, $CA':A'B$, $BC':C'A$之複比爲等比 [是曰Ceva氏定理]. 又其逆定理如何?

解 命三直線之交點爲O,則$\triangle ACO:\triangle ABO=CA':A'B$ [1028題], $\triangle ABO:\triangle BOC=AB':B'C$, $\triangle BOC:\triangle ACO=BC':C'A$. 故三比$CA':A'B$, $AB':B'C$, $BC':C'A$之複比,等於$\triangle ACO:\triangle ABO$, $\triangle ABO:\triangle BOC$, $\triangle BOC:\triangle ACO$之複比. 而後者之複比爲等比,故前者之複比亦爲等比. 反之,在三角形ABC之邊BC, CA, 或皆在其延線上,及AB上分別取A', B', C',令三比$AB:B'C$, $CA':A'B$, $BC':C'A$之複比爲等比,則三直線AA', BB', CC'交於同點. 何則? 設AA', BB'之交點爲O,聯結CO,命其延線與AB之交點爲C'',則因$AB':B'C$, $CA':A\,B$, $BC':C'A$之複比及$AB':B'C$, $CA':A'B$, $BC'':C''A$之複比皆爲等比,故$B'C:C'A=BC'':C''A$, 故C', C''按同比內分AB,因此非相合不可. 故AA', BB', CC'交於一點.



注意 逆定理中之三分點,須或皆內分,或二者外分,一者內分.

1188. 設兩三角形ABC, $A'B'C'$中,頂點與頂點聯結之直線AA', BB', CC'過同點,則對應邊之交點P, Q, R在一直線上. 反之,設兩三角形邊之交點P, Q, R在一直線上,則聯結對應頂點之直線過同點.

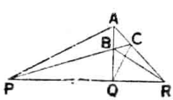


解 設AA', BB', CC'之交點爲O,邊BC, $B'C'$之交點爲P,邊AC, $A'C'$之交點爲Q,邊AB, $A'B'$之交點

爲 R. 於是因三角形 OAB 爲直線 A′B′R 所截,故 AR:RB, BB′:B′O, OA′:AA′ 之複比爲等比 [1186題]. 同理, △OBC 中, BP:PC, CC′:C′O, OB′: B′B 之複比, 及 △OAC 中, CQ:QA, AA′:A′O, OC′:C′C 之複比, 皆爲等比. 據此,此三複比之複比亦爲等比,卽 AR:RB, BP:PC, CQ:QA 之複比爲等比. 於是就三角形 ABC, 由 Menelaus 氏定理之逆定理, R, Q, P 在一直線上. 反之,設 P, Q, R 在一直線上, BB′, CC′ 之交點爲 O. 此時因兩三角形 RBB′, QCC′ 之對應頂點聯結之三直線,交於一點 P, 故由本定理, 其對應邊之交點 O, A, A′ 在一直線上, 卽 AA′, BB′, CC′ 三直線交於同點 O.

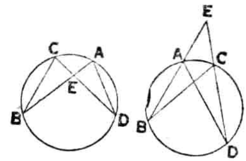
1189. 三角形各外角之二等分線, 與邊之三交點在一直線上.

圖 設三角形 ABC 三外角之二等分線與對邊之交點, 分別爲 P, Q, R; 求證 P, Q, R 在一直線上. 因 AP 爲 A 上外角之二等分線, 故 AB:AC = BP:PC [1027題]. 同理, BC:AB = CR:RA, AC:BC = AQ:QB. 故 BP:PC, CR:RA, AQ:QB 之複比, 等於 AB:AC, BC:AB, AC:BC 之複比. 然後複比爲等比, 故前複比亦爲等比, 因而 P, Q, R 在一直線上 [1186題].



1190. 試用定理四直線成比例, 則其外項所包之矩形, 等於內項所包之矩形及其逆定理設二直線所包之矩形, 等於他二直線所包之矩形, 則此四直線成比例, 而一矩形之二邊爲外項 [或內項], 他矩形之二邊爲內項 [或外項], 以證定理過圓內或圓外之所設點引二弦, 則一弦上二分所包之矩形, 等於他弦上二分所包之矩形.

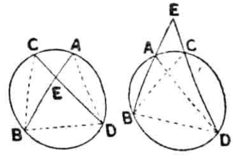
圖 設二弦 AB, CD 交於圓內之點 E [甲圖], 聯結 AD, BC, 則三角形 EAD, ECB 中, $A\hat{E}D = C\hat{E}B$, $\hat{A} = \hat{C}$, $\hat{D} = \hat{B}$, 故此兩三角形相似, 故 EA:EC = ED:EB, 故矩形 EA·EB = 矩形 EC·ED [1139題]. 次設交於圓外之點 E [乙圖]. 此時 $\hat{E}$ 公有, $\hat{D} = \hat{B}$, 且 $E\hat{A}D$, $E\hat{C}B$ 分別爲等角 BAD, DCB 之補角, 故相等, 因此兩三角形 EAD, ECB 相似. 由是仿前得證矩形 EA·EB = 矩形 EC·ED.



[甲圖]　　[乙圖]

1191. 設二直線 AB, CD 或其延線交於 E, 且 EA:EC = ED:EB, 則 A, B, C, D 在一圓周上.

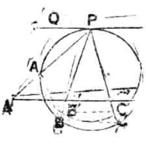
圖 $A\hat{E}D = C\hat{E}B$, EA:EC = ED:EB, 故 △EAD, △ECB 相似. 因此在甲圖中, $\hat{A} = \hat{C}$, 故聯結 BD, 則 A 及 C 在弓形 BCAD 之弧上 [452, 453題], 卽 A, B, C, D 在一圓周上. 在乙圖中, 因對應角 EAD, ECB 相等, 故分別爲其補角之 $B\hat{A}D$, $D\hat{C}B$ 相等, 因而 A, B, C, D 在一圓周上.



[甲圖]　　[乙圖]

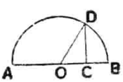
1192. 由圓周上之點 P 引弦 PA, PB, PC, ……, 令分別交 P 上切線之平行線於 A′, B′, C′, ……; 則矩形 PA·PA′, PB·PB′, PC·PC′, ……皆相等.

證　設 P 上之切線為 PQ, 聯結 AB, BC, ……, 則 △PAB, △PB′A′ 中, $\hat{P}$ 公有, $\hat{A}' = Q\hat{P}A'$ $=\hat{B}$, 故此兩三角形相似 [1017 題]. 於是 PA:PB′ = PB : PA′, 故矩形 PA·PA′ = 矩形 PB·PB′. 同理, PB·PB′ = PC·PC′……, 即 PA·PA′ = PB·PB′ = PC·PC′ = …….



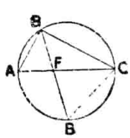
1193.　二直線不相等, 則其和之半分, 大於其比例中項. 設二直線相等, 則如何?

解　設二不相等之直線為 X, Y, 且 X>Y. 在任意直線上, 取 CA = X, CB = Y, 過 C 引 AB 之垂線, 令交直徑為 AB 之半圓周於 D, 聯結 D 與 AB 之中點 O, 則 CD 為 AC, CB 之比例中項. 而 OD $=\frac{1}{2}$AB, 且大於 CD [73題]. 故 X, Y 之和之半分, 大於其比例中項. 若 X, Y 相等, 則上圖中 C 在 O 上, 因而 X, Y 之比例中項, 等於其和之半分.



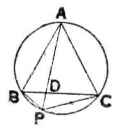
1194.　設直角三角形 ABC 中, 直角 B 之二等分線交斜邊於 F, 外接圓周於 D, 則矩形 BD·BF 為直角三角形 ABC 之二倍.

證　聯結 CD, 則 △ABF, △DBC 中, $A\hat{B}F = D\hat{B}C$, $\hat{A}=\hat{D}$, 故此兩三角形相似, 故 BA : BD = BF : BC, 故矩形 BD·BF = BA·BC. 然矩形 BA·BC 等於直角三角形 ABC 之二倍, 故矩形 BD·BF 等於直角三角形 ABC 之二倍.



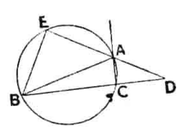
1195.　設 P 為等邊三角形 ABC 之外接圓弧 BC 上之任意點, 則 PA 上之正方形等於 BC 上之正方形與矩形 PB·PC 之和.

證　命 PA, BC 之交點為 D. △PAB, △BAD 中, $\hat{A}$ 公有, $A\hat{P}B$, $A\hat{B}D$ 係對等弧 AB, AC 之圓周角, 故相等, 故此兩三角形相似. 因此 PA:BA = BA:AD, 故 PA·AD = $\overline{BA}^2$. 又 △PAC, △PBD 中, $A\hat{P}C = B\hat{P}D$, $\hat{A}=\hat{B}$, 故 PA:PC = PB:PD, 故 PA·PD = PB·PC. 據此, PA·AD + PA·PD, 即 PA^2 等於 $\overline{BA}^2$ + PB·PC, 即 $\overline{BC}^2$ + PB·PC.



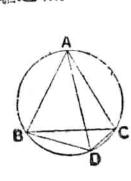
1196.　設三角形 ABC 中, 角 A 外角之二等分線與底之延線交於 D, 外接圓周交於 E, 則矩形 AB·AC 等於矩形 AE·AD.

證　聯結 BE. 因 AD 為角 A 外角之二等分線, 故 $C\hat{A}D = E\hat{A}B$, 又 $A\hat{C}D$ $= A\hat{E}B$, 故 △AEB ∽ △ACD, 因而 AB:AE = AD:AC, 故 AB·AC = AE·AD [1139題].



1197.　由正三角形外接圓周上之任意點, 至最遠頂點之距離, 等於至他二頂點距離之和.

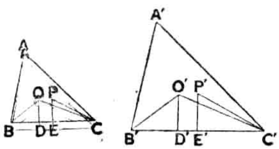
證　設 D 為 △ABC 之外接圓周上之任意點, 則 ABDC 為圓之內接四邊形, 故 AD·BC = AB·DC + AC·BD [1150題]. 然 AB = AC = BC,



故 $AD \cdot BC = BC \cdot DC + BC \cdot BD = BC(DC + BD)$，
故 $AD = DC + BD$.

1198. 相似三角形之比，等於其內切圓或外接圓半徑之比之二乘比.

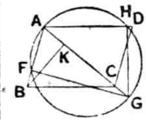
證 設 ABC, $A'B'C'$ 爲相似三角形，角 A,



B, C 分別等於角 A', B', C'. 命 O, O' 及 P, P' 分別爲內心及外心，引 BC, $B'C'$ 之垂線 OD, $O'D'$ 及 PE, $P'E'$，聯結 OC, OB, $O'C'$, $O'B'$ 及 PC, $P'C'$. 於是因 OC, $O'C'$ 分別爲等角 C, C' 之二等分線，故 $O\hat{C}B = O'\hat{C}'B'$ 同理，$O\hat{B}C = O'\hat{B}'C'$. 故 $\triangle OBC$, $\triangle O'B'C'$ 相似，故 $OB:O'B' = BC:B'C'$，又 $BC:B'C' = OD:O'D'$. 而 $\triangle ABC:\triangle A'B'C'$ 等於 $BC:B'C'$ 之二乘比，故又等於 $OD:O'D'$ 之二乘比，卽內切圓半徑之二乘比. 次，$E\hat{P}C$, $E'\hat{P}'C'$ 與等角 A, A'，或分別相等，或互爲補角 [202題]，故兩直角三角形 PEC, $P'E'C'$ 相似，而 $EC:E'C' = PC:P'C'$. 但 $EC = \frac{1}{2}BC$, $E'C' = \frac{1}{2}B'C'$，故 $BC:B'C' = PC:P'C'$. 故 $\triangle ABC:\triangle A'B'C'$ 等於 $PC:P'C'$ 之二乘比，卽外接圓半徑之二乘比.

1199. 設過平行四邊形 $ABCD$ 之一角頂 A 之圓周，交 AB, AD, AC 於 F, H, G，則矩形 $AB \cdot AF$, $AD \cdot AH$ 之和，等於矩形 $AC \cdot AG$.

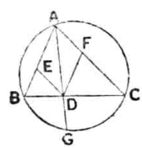
證 引 BK，命 $A\hat{B}K = A\hat{G}F$，則 $\triangle ABK$, $\triangle AGF$ 相似，故 $AG:AB = AF:AK$，故 $AB \cdot AF = AG \cdot AK$. 又因 $A\hat{K}B = A\hat{F}G$，故 $B\hat{K}C = B\hat{F}G$. 而 $B\hat{F}G$, $A\hat{H}G$ 各爲 $A\hat{F}G$ 之補角，故相等. 又



$B\hat{C}K = H\hat{A}G$，故 $\triangle BKC$, $\triangle AHG$ 相似，故 $BC:AG = CK:AH$，卽 $AD:AG = CK:AH$，故 $AD \cdot AH = AG \cdot CK$. 據此，$AB \cdot AF + AD \cdot AH = AG \cdot AK + AG \cdot CK = AG \cdot AC$.

1200. 由三角形 ABC 之邊 BC 上之一點 D，平行於 AB, AC 引 DF, DE，則 $AB \cdot AE + AC \cdot AF = \overline{AD}^2 + DB \cdot DC$.

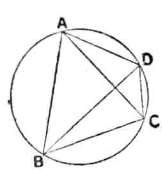
證 聯結 AD，命其延線與三角形 ABC 外接圓周之交點爲 G. 於是



由1199題，$AB \cdot AE + AC \cdot AF = AG \cdot AD = AD(AD + DG) = \overline{AD}^2 + AD \cdot DG = \overline{AD}^2 + DB \cdot DC$ [875題].

1201. 設圓之內接四邊形中，兩對角線直交，則二組對邊所包矩形之和，等於四邊形面積之二倍.

證 欲證 AC, BD 所包之矩形，等於四邊形 $ABCD$ 面積之二倍，



可過 A, B, C, D 分別引 AC, BD 之垂線而作矩形. 但由 Ptolemy 定理 [1150題]，$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$. 故 $AD \cdot BC + AB:CD = 2ABCD$.

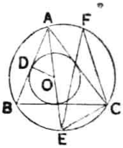
1202. 設圓之內接四邊形 $ABCD$ 中，對角線交點爲 O，則矩形 $AB \cdot AD$, $BC \cdot CD$ 之比，等於 AO, CO 之比.

證 設四邊形 $ABCD$ 內接於圓，命圓之半

徑 R, 由 A, C 分別引 BD 之垂線 AE, CF. 於是 $AB \cdot AD = AE \cdot 2R$, $BC \cdot CD = CF \cdot 2R$, 故 $AB \cdot AD : BC \cdot CD = AE : CF$. 而 $AE : CF = AO : CO$, 故 $AB \cdot AD : BC \cdot CD = AO : CO$.

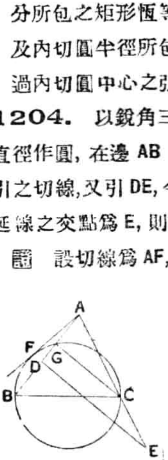
1203. 三角形外接圓直徑及內切圓半徑所包之矩形,等於外接圓中過內切圓中心之弦上二分[中心所分者]所包之矩形.

證 聯結三角形 ABC 之頂點 A, 及其內切圓之中心 O, 命其延線與外接圓周之交點為 E, 引外接圓之直徑 EF, 聯結 CE, CF, 又聯結 O 及 AB 與內切圓之切點 D. 於是因 E 為弧 BC 之中點, 故 $O\hat{A}D = O\hat{A}C = E\hat{F}C$, 故兩直角三角形 OAD, EFC 相似, 而 $OD : EC = OA : EF$, 故 $OD \cdot EF = EC \cdot OA$. 而 $EC = EO$ [673題], 故 $OD \cdot EF = OA \cdot OE$. 又外接圓中過 O 之弦上二分所包之矩形恆等[875題], 故外接圓直徑及內切圓半徑所包之矩形, 等於外接圓中過內切圓中心之弦上二分所包之矩形.



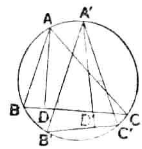
1204. 以銳角三角形 ABC 之邊 BC 為直徑作圓, 在邊 AB 上取 AD, 令等於由 A 所引之切線, 又引 DE, 令垂直於 AB, 命其與 AC 延線之交點為 E, 則三角形 ABC, ADE 等積.

證 設切線為 AF, 聯結 CG, 則 $AB \cdot AG = \overline{AF}^2$ [877題], 故 $AB : AF = AF : AG$ [1139題], 即 $AB : AD = AD : AG$. 而 $A\hat{G}C = A\hat{D}E = \hat{R}$, 故 $GC \parallel DE$, 故 $AD : AG = AE : AC$. 故 $AB : AD = AE : AC$, 故 $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ 等積 [1154題].



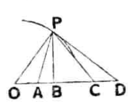
1205. 設兩三角形 ABC, A′B′C′ 內接於同圓, 且等積, 則矩形 $AB \cdot AC$: 矩形 $A'B' \cdot A'C' = B'C' : BC$.

證 設圓之直徑為 R, 由 A, A′ 至對邊引垂線 AD, A′D′, 則 $AB \cdot AC = AD \cdot R$, $A'B' \cdot A'C' = A'D' \cdot R$ [1026, 1139 題], 故 $AB \cdot AC : A'B' \cdot A'C' = AD \cdot R : A'D' \cdot R = AD : A'D'$. 而 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 等積, 故 $AD : A'D'$ 等於 $BC : B'C'$ 之反比, 即 $B'C' : BC$ [1161題], 故 $AB \cdot AC : A'B' \cdot A'C' = B'C' : BC$.



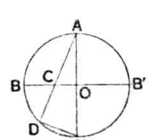
1206. 設 O, A, B, C, D 為如 1158 題所述之點, 直線 OE 上之正方形等於矩形 $OA \cdot OD$. 以 O 為中心, OE 為半徑作圓, P 為圓周上之任意點, 則角 APB, CPD 相等.

證 $\overline{OP}^2 = OA \cdot OD$ [假設], 故 $OA : OP = OP : OD$, 而 $\hat{O}$ 為 $\triangle OAP$, $\triangle OPD$ 所共, 故兩三角形相似, 而 $O\hat{P}A = O\hat{D}P$. 又 $OA \cdot OD = OB \cdot OC$ [1158 題], 即 $\overline{OP}^2 = OB \cdot OC$, 故仿前得證 $\triangle OBP$, $\triangle OPC$ 相似, 而 $O\hat{P}B = O\hat{C}P = C\hat{P}D + C\hat{D}P$, 即 $O\hat{P}A + A\hat{P}B = C\hat{P}D + C\hat{D}P$. 而 $O\hat{P}A = C\hat{D}P$, 故 $A\hat{P}B = C\hat{P}D$



1207. 由圓周上之點 A 引一直線, 令交圓周於 D, 又垂直於過 A 之直徑引一直徑, 令交 AD 於 C, 則矩形 $AC \cdot AD$ 等於半徑上正方形之二倍.

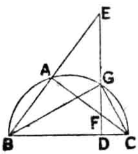
證 設中心為 O, 過 A 之直徑為 AA′, 其垂直之直徑為 BB′, 聯結 DA′. 於是兩直角三角形 AOC, ADA′



公有 $\hat{A}$, 故兩三角形相似, 因而 $AC : AA' = AO : AD$, 故 $AC \cdot AD = AO \cdot AA' = AO \cdot 2AO = 2\overline{AO}^2$.

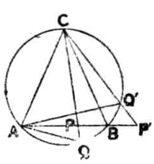
1208. 在BC爲直徑之半圓周上任取點A, 由BC上之任意點D, 引BC之垂線, 令與直線BA, CA及半圓周分別交於E, F, G, 則DG爲DE, DF之比例中項.

證 兩直角三角形BDE, FDC中, $\hat{E}$, $\hat{C}$共爲$\hat{B}$之餘角, 故相等, 因而兩三角形相似, 而 $DE : DC = DB : DF$, 故 $DE \cdot DF = DB \cdot DC$. 而 $DB \cdot DC = \overline{DG}^2$ [1025題], 故 $DE \cdot DF = \overline{DG}^2$, 卽DG爲DE, DF之比例中項.



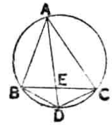
1209. 由二等邊三角形ABC之頂點引任意直線, 令交底AB於P, 外接圓周於Q, 則矩形CP·CQ一定不易.

證 聯結AQ, 則因弧CA, CB相等, 故 $C\hat{A}P = C\hat{Q}A$, 故△CAP, △CQA相似, 而 $CP : CA = CA : CQ$, 故 $CP \cdot CQ = \overline{CA}^2$, 卽一定不易. 次, 設AB延線上之點爲P′, CP′與圓周之交點爲Q′, 聯結AQ′, 則因 $C\hat{A}P' = C\hat{Q}'A$, 故△CAP′與△CQ′A相似, 於是仿前得證 $CP' \cdot CQ' = \overline{CA}^2$, 亦一定不易. 由是可知, 不問P點在底邊上, 抑在其延線上, CP·CQ一定不易.



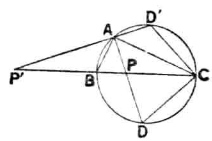
1210. 設三角形ABC中, 角A之二等分線交外接圓周於D, 聯結BD, 則 $AD \cdot BC = BD(AB+AC)$.

證 命AD, BC之交點爲E, 聯結DC, 則 $AC:AB = CE:BE$, 故 $AC+AB : CE+BE = AB : BE$, 卽 $AC+AB : BC = AB : BE$. 而△ABE, △ADC中, $B\hat{A}E = D\hat{A}C$, $A\hat{B}E = A\hat{D}C$, 故兩三角形相似, 因而 $AB:BE = AD:DC$. 又 $DC = BD$, 故 $AB:BE = AD:BD$. 故 $AC+AB:BC = AD:BD$, 故 $AD \cdot BC = BD(AB+AC)$.



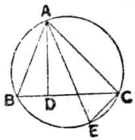
1211. 設三角形ABC中, 角A [或其外角] 之二等分線交BC於P, 則AP上之正方形, 等於矩形AB·AC與矩形PB·PC之差.

證 設$\hat{A}$之二等分線與外接圓周之交點爲D, 聯結DC. 因AP爲$\hat{A}$之二等分線, 且 $A\hat{B}P = A\hat{D}C$, 故△ABP, △ADC相似, 而 $AB : AD = AP : AC$, 故 $AB \cdot AC = AP \cdot AD = AP(AP+PD) = \overline{AP}^2 + AP \cdot PD = \overline{AP}^2 + BP \cdot CP$ [875題], 故 $\overline{AP}^2 = AB \cdot AC - BP \cdot CP$. 次, 設$\hat{A}$外角之二等分線與BC之延線交於P′, 與圓周交於D′. 聯結CD′, 則△AP′B, △CD′P′相似, 而 $CP':AP' = P'D':BP'$. 故 $BP' \cdot CP' = AP' \cdot D'P' = \overline{AP'}^2 + AP' \cdot AD'$, 故 $\overline{AP'}^2 = BP' \cdot CP' - AP' \cdot AD'$. 而△ABP′, △CD′A相似, 故 $AP' : AC = AB : AD'$, 故 $AP' \cdot AD' = AB \cdot AC$. 故 $\overline{AP'}^2 = BP' \cdot CP' - AB \cdot AC$.



1212. 由三角形ABC之頂點A, 至底BC引直線AD, 又引外接圓之弦AE, 令角BAD, CAE相等, 則矩形AB·AC等於矩形AD·AE

證 聯結CE, 則△ADB, △ACE中, $B\hat{A}D$

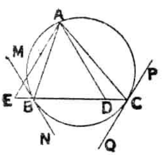


$=E\hat{A}C$, $\hat{B}=\hat{E}$, 故兩三角形相似, 而 $AB:AE=AD:AC$, 故 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

注意 AD, AE 須共在三角形之內方或外分, 若一者在內方,一者在外方,則此問題不成立.

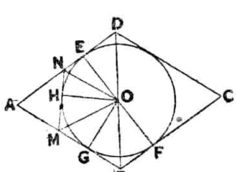
1213. 由圓之內接三角形 ABC 之頂點 A, 平行於 B 及 C 上之切線,分別引 AD, AE, 令交底邊 BC 於 D 及 E, 則矩形 $BD\cdot CE$, 等於 AD 或 AE 上之正方形, $BD:CE$ 等於 $AB:AC$ 之二乘比.

證 設 B 及 C 上之切線, 分別為 MN 及 PQ. 於是 $A\hat{D}B=C\hat{B}N=B\hat{C}Q=A\hat{E}D$, 故 $AD=AE$. 又 $\triangle ABD$, $\triangle AEC$ 中, $A\hat{D}B=A\hat{E}C$, $A\hat{B}C=A\hat{C}P=E\hat{A}C$, 故此兩三角形相似, 而 $BD:AE=AD:CE$, 即 $BD:AE=AE:CE$, 故 $BD\cdot CE=\overline{AE}^2=AD^2$. 又由 $BD:AE=AE:CE$, 知 $BD:CE$ 等於 $BD:AE$ 之二乘比. 而 $BD:AE=AB:AC$, 故 $BD:CE$ 等於 $AB:AC$ 之二乘比.



注意 AD, AE 或共在三角形內,或共在形外,本題皆能成立.

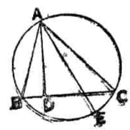
1214. 設菱形 ABCD 外切於圓, 任意切線 MN 與邊 AB, AD 分別交於 M, N, 則矩形 $BM\cdot DN$ 一定不易.



證 命圓之中心為 O, 及 AD, BC, AB, MN 與圓之切點分別為 E, F, G, H. 此時 B, O, D 及 E, O, F 分別在一直線上,而 $O\hat{B}M=O\hat{D}N$ [57題]. 又 $E\hat{N}H=2\hat{R}-E\hat{O}H=H\hat{O}F$; 而 ON, OM, OB 分別為 $E\hat{N}H$, $H\hat{O}G$, $G\hat{O}F$ 之二等分線,故 $O\hat{N}D=B\hat{O}M$. 於是 $\triangle ODN$, $\triangle OBM$ 中,三角分別相等,故相似, 因而 $OB:BM=DN:OD$, 故 $BM\cdot DN=OB\cdot OD=\overline{OB}^2$, 卽一定不易.

注意 MN 與 AB, AD 之延線交時亦然.

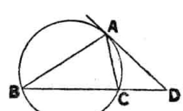
1215. 設 AE 為三角形 ABC 外接圓之直徑, 則矩形 $AB\cdot AC$ 與三角形 ABC 二倍之比, 等於 AE 與 BC 之比.



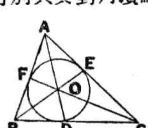
證 引垂線 AD, 則 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$ [1026題]. 又三角形 ABC 面積之二倍, 等於矩形 $AD\cdot BC$. 故矩形 $AB\cdot AC:2\triangle ABC=AD\cdot AE:AD\cdot BC=AE:BC$.

1216. 設三角形 ABC 內接於圓, 邊 BC 之延線交 A 上之切線於 D, 則 $CD:BD$ 等於 $CA:BA$ 之二乘比.

證 $\triangle ACD$, $\triangle BAD$ 相似, 故 $CD:DA=DA:BD$, 故 $CD:BD$ 等於 $CD:DA$ 之二乘比. 而 $CD:DA=CA:BA$, 故 $CD:BD$ 等於 $CA:BA$ 之二乘比.

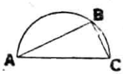


1217. 三角形之內切圓與三邊之切點, 分別與其對角頂點聯結之三直線過同點.



證 設三角形ABC之內切圓與邊 BC, CA, AB 之切點分別為 D, E, F, 則 BD, CE, AF 分別等於 BF, CD, AE, 故 BD:CD, CE:AE, AF:BF 之複比爲等比,故 AD, BE, CF 過同點 O [1187題].

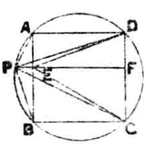
1218. 設 AC 爲半圓之直徑, 在其周上取點 B, 令 BC 等於半徑,則 AB 爲 BC 與 BC+CA 之比例中項.



證 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{CB}^2$ [750題] $=\overline{AC+CB}\cdot\overline{AC-CB}$ [748題] $=\overline{AC+CB}\cdot BC$, 故 BC : AB = AB : AC+BC.

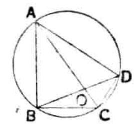
1219. 設 ABCD 爲正方形, P 爲其外接圓之弧 AB 上之一點, 則矩形 PC·PD 等於矩形 PA·PB, PB·PC, PD·PA 之和.

證 由 P 引 AB, CD 之公垂線 PEF, 聯結 EC, ED. 於是因弧 AB, BC, CD, AD 皆爲圓周之四分之一, 故 $A\hat{P}D=D\hat{P}C=C\hat{P}B$, 且皆爲 $A\hat{P}B$ 之補角, 故 △PCD : △PAB : △PBC : △PAD 等於 PC·PD : PA·PB : PB·PC : PD·PA, 因而 △PCD : △PAB + △PBC + △PAD = PC·PD : PA·PB + PB·PC + PD·PA. 而 △EFD = △PAD [736題], △PED = △PEA [736題], 故 △PFD = △PAD + △PEA. 同理, △PFC = △PBC + △PEB. 故 △PCD = △PAB + △PBC + △PAD. 故由上得之比例, 得 PC·PD = PA·PB + PB·PC + PD·PA.



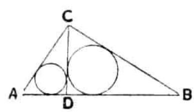
1220. 設圓之內接四邊形 ABCD 中, 邊 BC, CD 相等, 則矩形 AB·AD 與 BC 上正方形之和, 等於 AC 上之正方形.

證 設 BD, AC 之交點爲 E, 則 △ACB, △ADE 中, 因 BC=CD, 故弧 BC=弧 CD, 因而 $C\hat{A}B=D\hat{A}E$, 又 $A\hat{C}B=A\hat{D}E$, 故此兩三角形相似, AC:AB=AD:AE, 故 AB·AD=AC·AE. 又 △ACB, △BCE 中, $A\hat{C}B$ 公有, $C\hat{A}B=C\hat{A}D=C\hat{B}E$, 故此兩三角形相似, AC : BC = BC : CE, 因而 $\overline{BC}^2$ = AC·CE. 於是 AB·AD + $\overline{BC}^2$ = AC·AE + AC·CE = $\overline{AC}^2$.



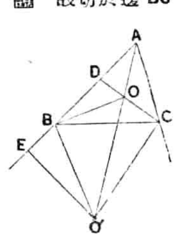
1221. 由直角三角形 ABC 之直角頂 C, 至斜邊引垂線 CD, 命三角形 ACD, BCD 之內切圓半徑分別爲 R, R', 則 $R'^2+R^2=(s-c)^2$. 但 c 爲斜邊, s 爲三角形 ABC 之半周.

證 直角三角形 ACD, BCD, ABC 相似 [1024題]. 命 △ACD, △BCD, △ABC 之內切圓半徑, 分別爲 R, R', ρ, 則 R, R', ρ 分別比例於邊 AC, BC, AB [1051, 1143 題]. 今 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$, 故 $R^2+R'^2=\rho^2=(s-c)$ [655題].



1222. 設三角形 ABC 之內切圓中心爲 O, 則 $\overline{AO}^2$:AB·AC = $s-a:s$.

證 設切於邊 BC 之傍切圓中心爲 O', 引邊 AB 之垂線 OD, O'E, 聯結 OB, OC, O'B, O'C. 此時 $O'\hat{B}O$, $O'\hat{C}O$ 皆爲直角, 故 OBO'C 內接於圓 [458題]. 故 $B\hat{O'}O = B\hat{C}O = A\hat{C}O$, $B\hat{A}O' = O\hat{A}C$, 故 △O'BA, △COA 相似 [1017題]; 故 O'A:BA=AC:AO, 故 O'A·OA=AB·AC. 故 $\overline{OA}^2$.AB·AC = $\overline{OA}^2$: O'A·OA = OA:O'A = AD:AE. 而 AD = $s-a$.

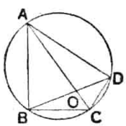


$AE=s$, 故 $\overline{OA}^2:AB\cdot AC=s-a:s$.

注意 $\frac{\overline{OA}^2}{bc}=\frac{s-a}{s}, \frac{\overline{OB}^2}{ca}=\frac{s-b}{s}, \frac{\overline{OC}^2}{ab}=\frac{s-c}{s}$, 故相加, 得 $\frac{\overline{OA}^2}{bc}+\frac{\overline{OB}^2}{ca}+\frac{\overline{OC}^2}{ab}=1$. 若 O', O'', O''' 爲三傍切圓之中心,則 $\frac{\overline{O'B}^2}{ca}+\frac{\overline{O'C}^2}{ab}-\frac{\overline{O'A}^2}{bc}=-1$, $\frac{\overline{O''A}^2}{bc}-\frac{\overline{O''B}^2}{ca}+\frac{\overline{O''C}^2}{ab}=1$, $\frac{\overline{O'''A}^2}{bc}+\frac{\overline{O'''B}^2}{ca}-\frac{\overline{O'''C}^2}{ab}=-1$.

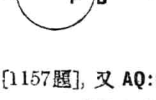
1223. 圓之內接四邊形二對角線之比,等於其兩端旁二邊所包矩形之和之比.

證 設圓之內接四邊形 ABCD 之對角線交點爲 O, 則 $AB\cdot AD:BC\cdot CD=AO:CO$ [1202 題], 故 $AB\cdot AD+BC\cdot CD:AB\cdot AD=AC:AO$. 同理, $AB\cdot BC+AD\cdot CD:AB\cdot BC=BD\cdot BO$. 而 $\triangle AOD$, $\triangle BOC$ 相似, 故 $AD:BC=AO:BO$, 因而 $AB\cdot AD:AB\cdot BC=AO:BO$, 故 $AB\cdot AD+BC\cdot CD:AB\cdot BC+AD\cdot CD=AC:BD$.



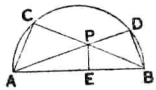
1224. 圓之直徑爲任意切線及過切點且垂直於直徑之直線分於調和.

證 設圓之直徑爲 AB, 由圓周上之任意點 C 至直徑所引之垂線及 C 上之切線將 AB 內分及外分於 P 及 Q. 此時 $AP:BP=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$ [1157 題], 又 $AQ:CQ=CQ:BQ$ [877 題], 故 $AQ:BQ=\overline{AQ}^2:\overline{CQ}^2$. 而 $AQ:CQ=AC:CB$, 因而 $\overline{AQ}^2:\overline{CQ}^2=\overline{AC}^2:\overline{CB}^2$ 故 $AP:BP=AQ:BQ$, 卽 AB 在 P 及 Q 分於調和.



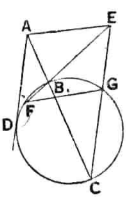
1225. 以 AB 爲直徑作半圓,命二弦 AD, BC 之交點爲 P, 則 AB 上之正方形等於矩形 $AD\cdot AP$ 與矩形 $BC\cdot BP$. 之和.

證 由 P 引 AB 之垂線 PE, 則兩直角三角形 AEP, ADB 中, $P\hat{A}B$ 公有, 故相似, 故 $AB:AP=AD:AE$, 故 $AB\cdot AE=AD\cdot AP$. 同理, $AB\cdot BE=BC\cdot BP$, 故 $AB\cdot AE+AB\cdot BE$, 卽 $\overline{AB}^2$ 等於 $AD\cdot AP+BC\cdot BP$.



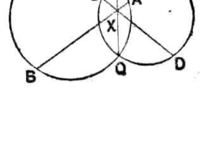
1226. 由圓外一點引二直線, 令其一切於圓, 他一與圓交. 由同點依任意方向引一直線, 令其長等於切線, 由此直線之端,至割線與圓周之交點引二直線,則此二直線所截弧之弦,與由 A 所引第三直線平行.

證 設由圓外之一點 A 所引之切線爲 AD, 割線爲 ABC, 由 A 依任意方向所引之直線爲 AE, 且 AE 等於 AD, 命 EB, EC 與圓周之交點分別爲 F, G; 求證 FG 平行於 AE. 因 $AC:AD=AD:AB$, 故 $AC:AE=AE:AB$. 而 $\triangle ACE$, $\triangle ABE$ 中, $\hat{A}$ 公有, 其兩側之邊成比例, 故此兩三角形相似, 因而 $A\hat{C}E=A\hat{E}B$. 然 $A\hat{C}E=B\hat{F}G$, 故 $A\hat{E}B=B\hat{F}G$, 故 AE, FG 平行.



1227. 設兩圓相交, 在其公弦上取任意點 X, 過 X 在各圓內引弦 AB, CD, 則矩形 $AX\cdot XB$, 等於矩形 $CX\cdot XD$.

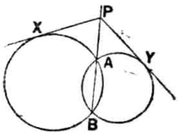
證 設公弦爲 PQ, 則 $AX\cdot XB=PX\cdot XQ=CX\cdot XD$ [875 題], 故



$AX \cdot XB = CX \cdot XD$.

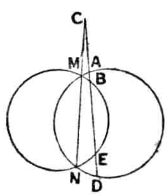
1228. 由相交二圓之公弦延線上之點,至二圓所引之切線相等.

證 設 P 爲公弦 AB 延線上之點,由 P 至各圓所引之切線分別爲 PX, PY, 則 $PB:PX=PX:PA$, $PB:PY=PY:PA$ [1034 題], 故 $PX=PY$.



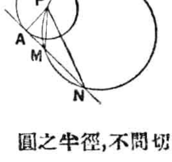
1229. 設 C 爲相交二圓公弦上之一點,過 C 引一直線,令交一圓周於 A, D, 他圓周於 B, E, 則 $AB:BC=DE:CD$.

證 設二圓之交點爲 M, N, 則 $AC \cdot DC = MC \cdot NC = BC \cdot EC$ [875題], 卽 $AC \cdot DC = BC \cdot EC$, 故 $BC:AC=DC:EC$ [1139 題], $BC-AC:BC=DC-EC:DC$, 卽 $AB:BC=DE:DC$.



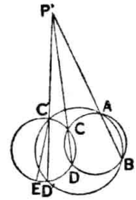
1230. 設一圓周上之點 P, 爲他圓之中心,命第二圓之切線與第一圓周之交點爲 M, N, 則矩形 $PM \cdot PN$ 一定不易.

證 聯結 P 與切點 A, 則 $PA \perp MN$, 故 PA 爲由三角形 PMN 之頂點 P, 至底邊所引之垂線. 命第一圓之直徑爲 R, 則 $PM \cdot PN = PA \cdot R$ [1026題]. 然 PA 爲第二圓之半徑,不問切線之位置若何,恆爲以 P 爲頂點之三角形之高, 故 $PA \cdot R$ 一定,因而 $PM \cdot PN$ 亦一定.



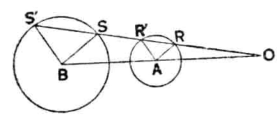
1231. 凡過所設二點, 且交所設圓周之圓,其公弦皆過一定點.

證 命二所設點爲 A, B, 所設圓周爲 CDD′, 又命過 A, B 之任意圓周與所設圓周之交點爲 C, D, 及 AB, CD 之交點爲 P. 又命過 A, B 之他任意圓周與所設圓周之交點爲 C′, D′; 求證 C′, D′, P 在一直線上. 命 PC′ 之延線交所設圓周於 E, 則 $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PC' \cdot PE$, 卽 $PA \cdot PB = PC' \cdot PE$, 故 A, B, E, C′ 在一圓周上 [905 題]. 而 A, B, D′, C′ 亦在一圓周上,故 E 與 D′ 爲同點 [444題]. 故公弦 C′D′ 過 P, 卽凡公弦過定點 P.



1232. 由兩圓之相似中心 O, 引任意直線,令交一圓於 R, R′, 他圓於 S, S′ [R與 S, R′ 與 S′ 分別對應,卽若 $OR<OR'$, 則 $OS<OS'$], 則矩形 $OR \cdot OS'$ 及矩形 $OR' \cdot OS$ 相等.

證 命二圓之中心爲 A, B, 聯結 AR, BS.

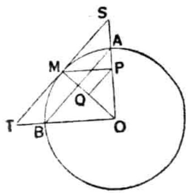


因 O 爲相似中心,故 $OA:OB=AR:BS$. 然一雙對應邊 OA, OB 之對角 ORA, OSB 皆爲鈍角, 故 $\triangle OAR$, $\triangle OBS$ 相似. 因而 $AR \parallel BS$, 故 $OA:OB=OR:OS$. 同理, 聯結 AR′, BS′, 則 $AR' \parallel BS'$, 故 $OA:OB=OR':OS'$. 故 $OR:OS=OR':OS'$, 故 $OR \cdot OS'=OR' \cdot OS$.

1233. 設 OA, OB 爲圓中互相垂直之半徑, M 爲弧 AB 上之任意點, M 上之切線與 OA, OB 延線之交點爲 S, T, 命由 M 至 OA 所

引垂線之足爲 P, 則三角形 AOB 等於三角形 SOT, OMP 之比例中項.

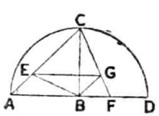
【解】 設由 P 至 OM 所引之垂線爲 PQ. 於



是 $\triangle SOT : \triangle AOB = ST \cdot OM : OB \cdot OA$. 而 $OM = OA$, 故 $\triangle SOT : \triangle AOB = ST : OB$. 又 $\triangle AOB : \triangle OMP = OB \cdot OA : OM \cdot PQ = OB : PQ$. 而兩直角三角形 SOT, OMP 相似, OM, PQ 爲由對應頂點至對邊所引之垂線, 故 $ST : OM = OM : PQ$, 即 $ST : OB = OB : PQ$. 故 $\triangle SOT : \triangle AOB = \triangle AOB : \triangle OMP$.

1234. 設 ABD 爲半圓 ACD 之直徑, ABC 爲直角, E 爲弦 AC 上之任意點, 聯結 BE, 作角 BCF, 令等於角 ABE, 命 CF, AD 之交點爲 F, 則 $AE : EC = BF : BD$.

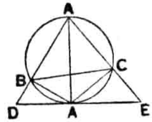
【解】 平行於 AC, 引直線 BG, 命其與 CF 之



交點爲 G, 聯結 EG. 於是 $C\hat{A}B = \frac{1}{2}\hat{R} = G\hat{B}F = G\hat{B}C$, $A\hat{B}E = B\hat{C}F$ [假設], $BA = BC$, 即 $\triangle ABE$, $\triangle BCG$ 之二角及其間之邊相等, 故 $AE = BG$, 故 AEGB 爲平行四邊形 [226題], $AF \parallel EG$, $AE : EC = FG : CG$. 然 BG 將 $C\hat{B}F$ 二等分, 故 $FG : CG = BF : BC = BF : BD$, 故 $AE : EC = BF : BD$.

1235. 由圓周上之點 A, 引弦 AB, AC, 在過 A 直徑之他端引圓之切線, 令交 AB, AC 延切線於 D, E, 則三角形 AED, ABC 相似.

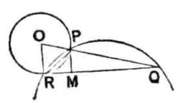
【解】 命過 A 直徑之他端爲 A′, 聯結 BC, A′B, A′C, 此時 AA′D 爲直角三角形, A′B



爲由直角頂至斜邊所引之垂線, 故 $AB \cdot AD = \overline{AA'}^2$ [1025題]. 同理, $AC \cdot AE = \overline{AA'}^2$. 故 $AB \cdot AD = AC \cdot AE$, 因而 $AB : AC = AE : AD$. 於是 $\triangle ABC$, $\triangle ADE$ 中, $\hat{A}$ 爲兩形所共, 其兩側之邊成比例, 故兩形相似 [1018題].

1236. 設點 P 在中心爲 O 之圓周上, 延長 OP, 取 $PQ = n \cdot OP$, 由 Q 引切線 QR, 聯結 PR, 則三角形 PQR 外接圓之直徑, 等於 PR 之 $n+1$ 倍.

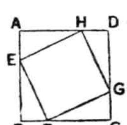
【解】 由 P 引 QR 之垂線 PM, 聯結 OR, 則



$OR \perp QR$, 故 $OR \parallel PM$, 因而 $OR : OQ = PM : PQ$. 而 $OR = OP$, $PQ = n \cdot OP$, 故 $OQ = (n+1)OP$, 因而 $OQ = (n+1)OR$, 故 $PQ = (n+1)PM$. 以 D 表 $\triangle PQR$ 外接圓之直徑, 則 $PQ : PM = D : PR$ [1026題], 而 $PQ = (n+1)PM$, 故 $D = (n+1)PR$.

1237. 設正方形 ABCD 之邊 AB, BC, CD, DA 分別按同比分於 E, F, G, H, 聯結 EF, FG, GH, HE, 則 EFGH 爲內接正方形.

【解】 $AE : BE = BF : CF = CG : DG = DH : AH$ [假

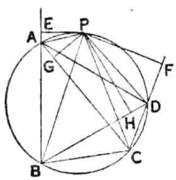


設], $AB = BC = CD = DA$ [假設], 故 $AE = BF = CG = DH$ [950題], 而 $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{R}$, 故 $\triangle AEH \equiv \triangle DHG \equiv \triangle CGF \equiv \triangle BFE$, 故 $EH = HG = GF = FE$. 次, $H\hat{E}A + E\hat{H}A = \hat{R}$, $E\hat{H}A = F\hat{E}B$, 故 $H\hat{E}A + F\hat{E}B = \hat{R}$, 因而 $H\hat{E}F = \hat{R}$. 同理, 四邊形

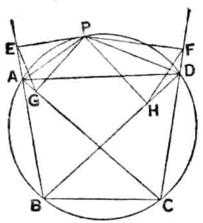
HEFG 之各角皆爲直角，故四邊形 HEFG 爲正方形.

1238. 由圓周上之任意點 P，至內接四邊形之一雙對邊所引垂線所包之矩形，等於至對角線所引垂線所包之矩形. 又試證其逆定理.

【證】 設圓之內接四邊形爲 ABCD，由 P 至對邊 AB，CD 及對角線 AC，BD 所引之垂線爲 PE，PF，及 PG，PH. 聯結 P 與四邊形之各角頂，以 R 表圓之直徑. 於是 △PAB 中，$PA \cdot PB = PE \cdot R$ [1026題]. 同理，$PB \cdot PD = PH \cdot R$，$PA \cdot PC = PG \cdot R$，$PC \cdot PD = PF \cdot R$. 故 $PA \cdot PB : PB \cdot PD = PE \cdot R : PH \cdot R$，卽 $PA : PD = PE : PH$. 又 $PA \cdot PC : PC \cdot PD = PG \cdot R : PF \cdot R$，即 $PA : PD = PG : PF$. 故 $PE : PH = PG : PF$，故 $PE \cdot PF = PG \cdot PH$.



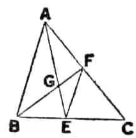
[逆定理] 設ABCD爲圓之內接四邊形，由點 P 至對邊 AB，CD，及對角線 AC，BD 所引之垂線爲 PE，PF，PG，PH，且 $PE \cdot PF = PG \cdot PH$. 此時 $PE : PG = PH : PF$ [1139 題]. 又 $E\hat{P}G = 2\hat{R} - E\hat{A}G = 2\hat{R} - F\hat{D}H = F\hat{P}H$. 故 △PEG，△PHF 相似 [1018題]，故 $P\hat{G}E = P\hat{F}H$. 而 PEAG 爲圓之內接四邊形，故 $P\hat{G}E = P\hat{A}E$；同理，$P\hat{F}H = P\hat{D}H$. 故 $P\hat{A}E = P\hat{D}H$，故 PDBA 內接於圓 [458題]. 換言之，△ABD 之外接圓過 P，即 ABCD 之外接圓過 P.



【注意】 至他一雙對邊 AD，BC 所引垂線所包之矩形，亦等於矩形 $PG \cdot PH$，故至圓之內接四邊形各雙對邊所引垂線所包矩形相等.

1239. 設三角形 ABC 之重心爲G，又 BC，CA 之中點爲 E，F，試比較 △ABC，△GEF 之面積.

【解】 $\triangle GAB : \triangle GEF = 4 : 1$ [1161題]，又因 $AG = 2GE$，故 $\triangle ABE : \triangle GAB = 3 : 2$，又 $\triangle ABC : \triangle ABE = 2 : 1$. 取以上各比之複比，則 $\triangle ABC : \triangle GEF = (4:1) \times (3:2)(2:1) = 12:1$.

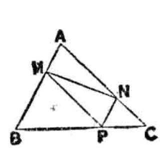


1240. 設若干直線形與一直線形相似，而前者之邊分別爲後者之2倍，3倍，4倍，…，則前者之面積，分別爲後者之幾倍?

【解】 兩相似直線形面積之比，等於其對應邊之二乘比 [1142題]. 據此，因前者之邊分別爲後者之 2 倍，3 倍，4 倍，……，故前者之面積，分別爲後者之 4 倍，9 倍，16 倍…….

1241. 由三角形ABC之底BC上之點P，引邊 AB，AC 之平行線，命其與 AC，AB 之交點分別爲 N，M，則三角形 AMN 爲三角形 BPM，PCN 之比例中項.

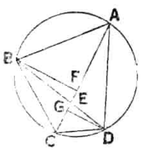
【證】 △PBM，△NAM 中，因 PN ∥ AB，故高相等，因此 $\triangle PBM : \triangle NAM = BM : AM$. 而 PM ∥ AC，故 $BM : AM = BP : CP = AN : NC$. 又 △MAN，△PNC 之高亦相等，故其



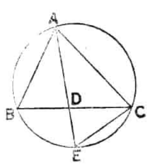
比等於底之比 AN : NC. 故$\triangle PBM:\triangle NMA=\triangle NMA:\triangle PNC$.

1242. 設四邊形 ABCD 內接於圓, 對角線 AC, BD 之交點爲 E, 則 $\frac{AB\cdot BC}{AD\cdot DC}=\frac{BE}{ED}$.

證 由 B, D 引 AC 之垂線 BF, DG, 命外接圓之半徑爲 R. 於是 BF : BC = AB : 2R [1023題], 故 $AB\cdot BC=2R\cdot BF$. 同理, $AD\cdot DC=2R\cdot DG$. 故 $AB\cdot BC:AD\cdot DC=2R\cdot BF:2R\cdot DG=BF:DG$. 然$\triangle BEF\backsim\triangle DEG$,故 BF : DG = BE : ED. 故 $\frac{AB\cdot BC}{AD\cdot DC}=\frac{BE}{ED}$.



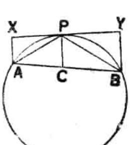
1243. 設三角形 ABC 中,角 A 之二等分線與邊 CB 之交點爲 D, 與外接圓之交點爲 E, 則 $AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

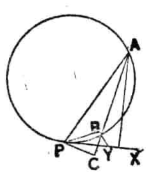


證 $\triangle ABD$, $\triangle AEC$ 中, $E\hat{A}D=E\hat{A}C$ [假設], $A\hat{B}D=A\hat{E}C$ [452題],故$\triangle ABD\backsim\triangle AEC$, 故 AB : AD = AE : AC,因而$AB\cdot AC=AD\cdot AE$.

1244. 設 A, B 爲圓周上之定點, P 爲弧 AB 上之任意點;由 A, B 至 P 上之切線引垂線 AX, BY, 由 P 引弦 AB 之垂線 PC, 則 $AX\cdot BY=\overline{PC}^2$.

證 聯結 AP, BP, 則 $A\hat{P}X=A\hat{B}P$, $B\hat{P}Y=B\hat{A}P$,故$\triangle APX\backsim\triangle PBC$, $\triangle PAC\backsim\triangle BPY$, 故 AX : AP = PC : PB, AP : PC = PB : BY, 因而 AX : PC = PC : BY [等比定理], 故 $\overline{PC}^2=AX\cdot BY$.

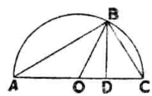




注意 如右圖中, $A\hat{P}X$ 與 $A\hat{B}P$ 互爲補角.

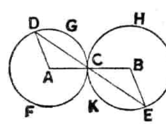
1245. 設 AC 爲半圓之直徑, B 爲半圓周上之點,而 BC 等於半圓之半徑, 則 AB 爲 BC 及 BC+CA 之比例中項.

證 由 B 至 AC 引垂線 BD, 命 O 爲圓之中心,則因 OB = BC, 故 D 爲 OC 之中點, 故 OD = DC. 而 ABC 爲直角三角形, 故 $\overline{AB}^2=AC\cdot AD=AC(CD+BC)=AC\cdot CD+AC\cdot BC=\overline{BC}^2+AC\cdot BC=BC(BC+CA)$, 故 AB 爲 BC 及 BC+CA 之比例中項.



1246. 兩圓相切,過切點引一直線,則所得之優弓形或劣弓形面積之比,等於半徑平方之比.

證 設相切二圓之中心爲 A, B, 切點爲 C, 過 C 所引任意直線與圓周之交點爲 D, E. 於是$\triangle ACD$, $\triangle BCE$ 皆爲二等邊, 底角 $A\hat{C}D=B\hat{C}E$, 故相似, 故$\triangle ACD:\triangle BCE=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$. 又扇形 ACFD : 圓 A = $C\hat{A}D:4\hat{R}$ [954題], 扇形 BCHE : 圓 B = $C\hat{B}E:4\hat{R}$,故扇形 ACFD : 圓 A = 扇形 BCHE : 圓 B, 或扇形 ACFD : 扇形 BCHE = 圓 A : 圓 B $=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$. 故$\triangle ACD$ + 扇形 ACFD : $\triangle BCE$ + 扇形 BCHE $=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$, 即優弓形 CFD : 優弓形 CHE $=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$. 次,關於劣弓



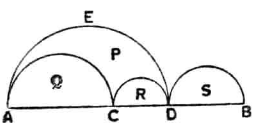
形亦可仿此證之.

1247. 設兩多角形相似,且爲內接多角形,則其周之比,等於二外接圓半徑之比,其面積之比,等於以半徑爲底之二正方形面積之比.

證 設兩相似多角形爲 P, P′, 其一雙對應邊爲 a, a', 外接圓之半徑爲 r, r', 其周爲 p, p'. 於是因 r, r' 爲 P, P′ 中之對應線, 故 $p:p'=r:r'$ [1023 題]. 又 $a:a'=r:r'$, 故 $P:P'=a^2:a'^2=r^2:r'^2$ [1142題].

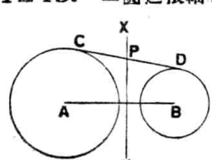
1248. 設線分 AB 二等分於C,又分爲不等之二分於 D, 如圖作半圓,則 $P+S=Q+R$. 但 P 爲半圓之罅隙.

證 $\overline{AD}^2+\overline{DB}^2=(AC+CD)^2+(AC-CD)^2$



$=2(\overline{AC}^2+\overline{CD}^2)$. 又半圓 $AED:S=\overline{AD}^2:\overline{DB}^2$, 或半圓 $AED+S$: 半圓 $AED=\overline{AD}^2+\overline{DB}^2:\overline{AD}^2$ $=2\times(\overline{AC}^2+\overline{CD}^2):AD^2$. 次, $Q:R=\overline{AC}^2:\overline{CD}^2$, 故 $Q:Q+R=\overline{AC}^2:\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$. 又半圓 $AED:Q=\overline{AD}^2:\overline{AC}^2$. 取以上三式之複比, 則半圓 $ADE+S:Q+R=2:1$, 故半圓 $AED+S=2(Q+R)$. 此式兩邊各減以 $Q+R$, 則 $P+S=Q+R$.

1249. 二圓之根軸將公切線二等分.

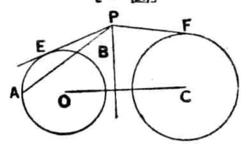


證 設二圓 A, B 之公切線爲CD,命 P 爲CD 之中點,則由 P 所引二圓之切線 PC, PD 相等, 故 P 在此二圓之根軸上,故根軸過點 P.

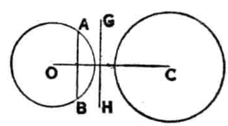
1250. 過二定點之圓周與一定圓周之根軸,與過此二定點之直線,或交於同點,或相平行.

證 設二定點爲 A, B, 定圓之中心爲 C [1圖]. 命過 A, B 之任意圓之中心爲 O, 圓O, C 之根軸與直線 AB 之交點爲 P. 由 P 引此二圓之切線 PE, PF, 則 $PE=PF$, $\overline{PE}^2=PA\cdot PB=\overline{PF}^2$. 然由 P 至過 A, B 之他圓所引切線上之正方形, 恆等於 $PA\cdot PB$, 因而其長等於 PF. 故點 P 在過 A, B 之圓與圓 C 之根軸上,卽適合條件之根軸皆過點 P. 若 AB 不交圓 O 與圓 C 之根軸 GH [2 圖], 則因 $GH\perp OC$, 故 $AB\perp OC$. 而點 O 恆在 AB 之垂直二等分線上, 故 C 亦在此二等分線上. 於是因過 A, B 之圓與圓 C 之根軸恆垂直於 AB 之垂直二等分線,故平行於 AB.

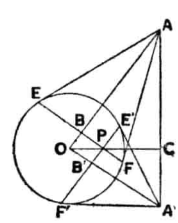
[1 圖]



[2 圖]



1251. 由圓外定直線上之任意點,引二切線,則聯結二切點之弦,過一定點.

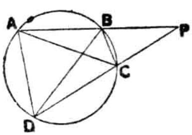


證 設 AA′ 爲圓 O 外之定直線, A 爲此線上之任意點, 由 A 所引之二切線爲 AE, AF, 聯結其切點之直線

EF 與由 O 至 AA′ 所引之垂線 OC 之交點爲 P, 又命 OA, EF 之交點爲 B. 於是因 $OA \perp EB$, $O\hat{E}A=\hat{R}$, 故 $OB\cdot OA=OE^2$. 又四邊形 ABPC 中, 對角 $\hat{B}=\hat{C}=\hat{R}$, 故得作其外接圓, 故 $OB\cdot OA=OP\cdot OC$, 故 $OP\cdot OC=\overline{OE}^2$. 而 OC, OE 爲定量, 故 OP 亦爲定量. 故不論點 A 在直線 AA′ 上之何處, 弦 EF 恆過點 P.

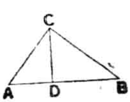
注意 P 爲直線 AA′ 關於圓 O 之極. 參照 2420題.

1252. 設一圓之內接四邊形 ABCD 中, 一雙對邊 AB, CD 之延線, 交於點 P, 則 $PB\cdot AC=PC\cdot BD$.



證 △PBD, △PCA 中, $\hat{P}$ 爲兩形所共, $B\hat{D}P=C\hat{A}P$, 故 $\triangle PBD \backsim \triangle PCA$. 故 $PB:BD=PC:CA$, 故 $PB\cdot CA=PC\cdot BD$.

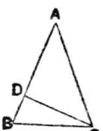
1253. 直角三角形 ABC 中, 由直角頂 C, 至斜邊 BC 引垂線 CD, 則 $\overline{AC}^2:\overline{BC}^2=AD:BD$.



證 $\overline{AC}^2=AB\cdot AD$ [1025題], $\overline{BC}^2=AB\cdot BD$, 故 $\overline{AC}^2:\overline{BC}^2=AB\cdot AD:AB\cdot BD=AD:BD$.

1254. 設二等邊三角形 ABC 之兩底角爲頂角 A 之二倍, 則 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AB\cdot BC$.

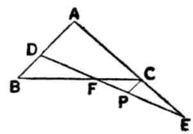
證I. 命 $\hat{C}$ 之二等分線與 AB 之交點爲 D, 則 $A\hat{B}C=A\hat{C}B=2\hat{A}$, 故 $A\hat{C}D=B\hat{C}D=\hat{A}$, 故 $C\hat{D}B=2\hat{A}$, 故 $\triangle ABC \backsim \triangle CBD$, 故 $AB:BC=BC:BD$, 故 $\overline{BC}^2=AB\cdot BD=AB(AB-AD)$. 而 $AD=DC=BC$, 故 $\overline{BC}^2=AB(AB-BC)=\overline{AB}^2-AB\cdot BC$, 即 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+AB\cdot BC$.



證II. 因 $\hat{A}=B\hat{C}D$, 故 BC 切 △ADC 之外接圓於 C, 故 $\overline{BC}^2=AB(AB-AD)$. 以下同證 I.

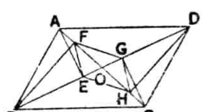
1255. 在三角形 ABC 之邊 AB 上取點 D, 在 AC 之延線上取點 E, 平行於 AB 引 CP, 令交 DE 於點 P, 而 $AB:BD=AD:CP$, 則三角形 ADE 等於三角形 ABC.

證 兩三角形中, 一角相等, 則兩三角形之面積, 比例於此角旁之二邊 [1145題] 所包之矩形, 據此, $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\dfrac{AD\cdot AE}{AB\cdot AC}=\dfrac{AD}{AB}\cdot\dfrac{AE}{AC}$. 由所設關係, 及 CP 之平行於 AB, 得 $\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{AD}{CP}=\dfrac{AE}{CE}$, 或 $\dfrac{AB}{AB-BD}=\dfrac{AE}{AE-CE}$, 即 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{AE}{AC}$. 故上述之比例式, 爲 $\dfrac{\triangle ADE}{\triangle ABC}=\dfrac{AD}{AB}\cdot\dfrac{AB}{AD}=1$, 即 $\triangle ADE=\triangle ABC$.



1256. 平行四邊形 ABCD 中, 由角頂 A, B, C, D 至對角線引垂線, 命其足分別爲 E, F, G, H, 則二四邊形 EFGH 與 ABCD 相似.

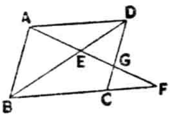
證 設對角線之交點爲 O, 則因 $AO=CO$, 故 $OE=OG$. 同理, $OF=OH$. 故 EFGH 爲平行四邊形 [240題]. 次, $A\hat{F}B=\hat{R}=A\hat{E}B$, 故四邊形 AFEB 內接於圓, 故 $O\hat{F}E=A\hat{B}O$. 於是共角 O 之兩三角形 OAB, OEF 相似, 故 $EF:AB=OF:OB$. 仿前, BFGC 內接於圓, 故 $O\hat{F}G$



$=O\hat{B}C$, 因而 $A\hat{B}C=E\hat{F}G$, 故兩平行四邊形 EFGH, ABCD 等角. 又因 $\triangle OFG \backsim \triangle OBC$, 故 $OF:OB=FG:BC$, 故 $EF:AB=FG:BC$, 故兩平行四邊形相似.

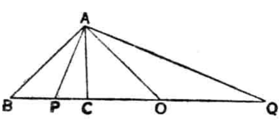
1257. 平行四邊形 ABCD 中, 過角頂 A 引一直線,令交對角線 BD 及邊 BC, CD 於 E, F, G, 則 AE 爲 EF, EG 之比例中項.

證 因 $AB \parallel GD, AD \parallel BF$, 故 $\triangle GED \backsim \triangle AEB$, $\triangle AED \backsim \triangle FEB$, 故 $GE:AE=ED:EB=AE:EF$, 卽 AE 爲 GE, EF 之比例中項.



1258. 設三角形 ABC 中, 頂角 A 之二等分線,與底邊 BC 交於點 P, 又頂角 A 之外二等分線與 BC 之延線交於點 Q, 命 PQ 之中點爲 O, 則 (1) $OB\cdot OC=\overline{OA}^2$, (2) $OB:OC=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$.

證 (1)因 $P\hat{A}Q=\hat{R}$, O 爲 PQ 之中點, 故 $O\hat{A}P$

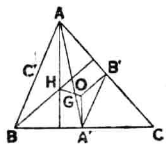


$=O\hat{P}A=P\hat{A}B+A\hat{B}P$, 而 $C\hat{A}P=P\hat{A}B$, 故 $O\hat{A}C=A\hat{B}P$, 故 $\triangle AOB \backsim \triangle COA$, 故 $OB:OA=OA:OC$, 故 $OB\cdot OC=\overline{OA}^2$.

(2) 由 (1), $OB:OC=\overline{OB}^2:\overline{OA}^2$. 而 $\triangle AOB \backsim \triangle COA$, 故 $OB:OA=AB:AC$, 因而 $\overline{OB}^2:\overline{OA}^2=\overline{AB}^2:\overline{OC}^2$, 故 $OB:OC=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$.

1259. 設三角形 ABC 之垂心爲 H, 外心爲 O, 角頂 A, B, C 之對邊之中點,分別爲 A′, B′, C′, 則兩三角形 HAB, OA′B′ 相似,其相似比爲 2:1; 重心 G 在 OH 上, OG 等於 OH 之三分之一.

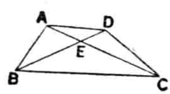
證 $\triangle HAB$, $\triangle OA'B'$ 中, $AB \parallel A'B'$, 又 AH, OA′ 皆垂直於BC, 故 $AH \parallel OA'$, 故 $H\hat{A}B=O\hat{A}'B'$, 同理, $H\hat{B}A=O\hat{B}'A'$, 故 $\triangle HAB \backsim \triangle OA'B'$, 其相似比爲 $AB:A'B'=2:1$.



次, 聯結 AA′, 命其與 OH 之交點爲 G, 則 $\triangle GAH \backsim \triangle GA'O$. 而 $AH=2OA'$, 故 $AG:GA'=GH:GO=2:1$, 故 G 爲 $\triangle ABC$ 之重心, 且 $OG=\frac{1}{3}OH$.

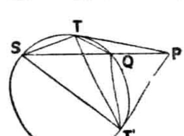
1260. 設四邊形 ABCD中, 一對角線 BD 爲二邊 AB, BC 之比例中項, 且二等分此二邊所成之角, 命此對角線與他對角線 AC 之交點爲 E, 則二線分 AE, CE 之比, 等於二邊 AD, CD 之二乘比.

證 由假設, $AB:BD=BD:BC$, $A\hat{B}D=D\hat{B}C$, 故 $\triangle ABD \backsim \triangle DBC$, 因而 $AD:DC=AB:BD=BD:BC$, 故 $\overline{AD}^2:\overline{DC}^2=AB\cdot BD:BD\cdot BC=AB:BC$. 然 BE 爲 $A\hat{B}C$ 之二等分線, 故 $AB:BC=AE:CE$, 故 $AE:CE=\overline{AD}^2:\overline{DC}^2$.



1261. 由圓外之一點,引圓之二切線,及一割線,則二切點各與割線之二交點聯結而成之四邊形中,二雙對邊所包之矩形相等.

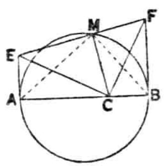
證 設圓外之一點爲 P, 由 P 所引之切線及割線爲 PT, PT′, 及 PQS, 作四邊形TST′Q; 求證 $TS\cdot T'Q=T'S\cdot TQ$. 兩三角形 PTQ, PST 中, 角 P 爲兩形



所共，他一角 $P\hat{T}Q$ 等於 $P\hat{S}T$，故兩三角形相似，故 $PS:PT=TS:TQ$. 同理，兩三角形 $PT'Q$, PST' 亦相似，故 $PS:PT'=T'S:T'Q$. 而 $PT=PT'$，故上二比例式之左邊相等，故 $TS:TQ=T'S:T'Q$，或 $TS\cdot T'Q=T'S\cdot TQ$.

1262. 聯結直徑 AB 上之點 C 及圓周上之任意點M，過 M 引 CM 之垂線，令交 A, B 上之切線於 E, F 則角 ECF 爲直角，矩形 $AE\cdot BF$ 一定.

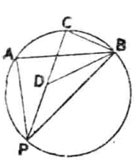
圖 聯結 AM, BM，則四邊形 ACME 中，$\hat{A}=\hat{R}=\hat{M}$，故內接於圓，故 $E\hat{C}M=E\hat{A}M$. 同理，$F\hat{C}M=F\hat{B}M$. 故 $E\hat{C}F=E\hat{C}M+F\hat{C}M=E\hat{A}M+F\hat{B}M=E\hat{A}M+M\hat{A}B=\hat{R}$；於是直角三角形



ACE, 及 BFC 相似，此甚易知之. 故 $AE:AC=BC:BF$，故 $AE\cdot BF=AC\cdot BC=$ (定量).

1263. 命所設圓周上之弧 AB 之中點爲 C，其共軛弧上之任意點爲 P，則比 $(AP+BP):PC$ 一定. 若 $\triangle ABC$ 爲正三角形，則此比如何?

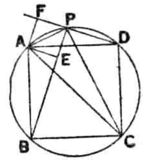
圖 聯結 BC，在 PC 上取點 D，令 $P\hat{B}D=C\hat{P}B$，則 $B\hat{D}C=2D\hat{P}B=A\hat{P}B$，又 $P\hat{A}B=P\hat{C}B$，故 $\triangle APB \backsim \triangle CDB$，故 $AP:BP:BA=CD:BD:BC$，故 $AP+BP:BA=CD+BD:BC$，即



$AP+BP:CD+BD=BA:BC$. 而 $DP=DB$，故 $AP+BP:PC=BA:BC=$ (定量). 若 $\triangle ABC$ 爲三角形，則 $BA=BC$，故 $AP+BP=PC$.

1264. 在正方形 ABCD 之外接圓弧 AD 上，取任意點 P，則比 $PC+PA:PB$ 及 $PC-PA:PD$ 皆一定.

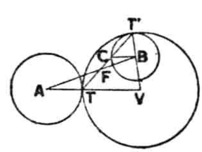
圖 由 A 至 PB 引垂線 AE，聯結 AC，則 $A\hat{P}C=\hat{R}=A\hat{E}B$，且 $A\hat{C}P=A\hat{B}P$，故 $\triangle ACP \backsim \triangle ABE$，故 $PC:PA:AC=EB:EA:AB$，故 $PC+PA:AC=EB+EA:AB$，即 $PC+PA:EB+EA=AC:AB=$ (定量). 而



$A\hat{P}B=A\hat{C}B$，故 $\triangle AEP$ 爲直角二等邊三角形，故 $EA=EP$. 故 $EB+EA=EB+EP=PB$，故 $PC+PA:PB$ 一定. 次，由 A 至 DP 之延線引垂線 AF，則與前同理，$AF=FP$, $\triangle APC \backsim \triangle AFD$. 故 $PC:PA:AC=FD:FA:AD$，故 $PC-PA:AC=FD-FA:AD$，於是 $PC-PA:AC=FD-FA:AD$，故 $PC-PA:FD-FP=AC:AD=$ (定量)，即 $PC-PA:PD$ 一定.

1265. 設兩定圓不相交，作一圓，令內切於定圓之一而外切於他一，則聯結其切點之直線，恆過一定點.

圖 設不相交之二定圓之中心爲 A, B；第三圓之中心爲 V，與圓 A 之外切點爲 T，圓 B 之內切點爲 T'. 求證直線 TT'，不問 V 之位置



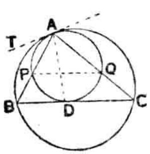
如何，恆過一定點. 命 TT' 與圓 B 之交點爲 C，聯結 AB, BC, TA, TV, BT', VT'，且命 AB 與 TT' 之交點爲 F. 於是因 T 爲圓 A 與圓 V 之切點，故 TA, TV 成一直線，又因 T' 爲圓 B 與圓 V 之切點，故 BT', VT' 成一直線. 故以圓 B 之半徑爲等邊之二等邊三角

形 $BT'C$ 與以圓 V 之半徑爲等邊之二等邊三角形 VTT', 共一底角, 故與此底角相等之他底角 $T'CB$, $T'TV$ 亦相等. 於是一直線 $T'CT$ 截二直線 CB, ATV, 而其同位角 $T'CB$, $T'TV$ 相等, 故 CB 與 ATV 平行. 因此兩三角形 ATF, BCF 等角, 因而相似, 故 $AF:BF = AT:BC =$ (圓 A 之半徑) : (圓 B 之半徑) = (定比), 卽 AB 按定比內分於 F, 故 F 爲定點, 而任意所取之 TT' 過此定點 F. 故如 TT' 之直線恆過定點.

注意 點 F 曰圓 A, B 之相似內心.

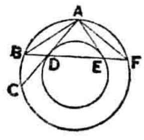
1266. 設兩圓內切於 A, 大圓之弦 BC, 切小圓於 D, 聯結 AB, AC, 命其與小圓之交點分別爲 P, Q, 則 $DC \cdot AP = DB \cdot AQ$.

證 設 A 上之公切線爲 TA [T 與 B 在 AD 之同側], 則 $T\hat{A}B = A\hat{C}B$ [557 題]. 又因 TA, BD 分別切小圓於 A, D, 故 $T\hat{A}D = B\hat{D}A$, 故 $T\hat{A}D - T\hat{A}B = B\hat{D}A - A\hat{C}B$, 卽 $B\hat{A}D = C\hat{A}D$, 故 $AC:AB = CD:DB$. 又因 TA 爲圓 APQ 之切線, 故 $T\hat{A}B = A\hat{Q}P$, 故 $A\hat{C}B = A\hat{Q}P$, 因此 $BC \parallel PQ$, 因而 $AC:AB = AQ:AP$. 故 $AQ:AP = CD:DB$, 故 $DC \cdot AP = DB \cdot AQ$.



1267. 有兩同心圓, 由外圓周上之一點 A, 引內圓之切線 AD, AE, 聯結切點 D, E, 延長 ED, AD, 命其與外圓周之交點分別爲 B, C, 則 (1) $\triangle ABE \backsim \triangle BCD$, (2) $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = BE:BD$.

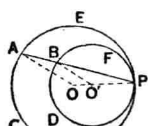
證 (1) 延長 DE, 命其與外圓周之交點爲 F, 聯結 AF, 則兩三角形 ADB, AEF 中, $AD = AE$, $BD = EF$, $A\hat{D}B\ [= 2\hat{R} - A\hat{D}E] = A\hat{E}F\ [= 2\hat{R} - A\hat{E}D]$, 故 $\triangle ADB \equiv \triangle AEF$, 因而 $B\hat{A}E = D\hat{A}F = C\hat{B}D$ [立於同弧 CF 上之圓周角], 又 $A\hat{E}B = A\hat{D}E = B\hat{D}C$, 故兩三角形 ABE, BCD 中, 兩角分別相等, 故相似, 卽 $\triangle ABE \backsim \triangle BCD$.



(2) 因上述兩三角形相似, 故 $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = \triangle ABE : \triangle BCD$. 而 $AD = DC$, 故 $\triangle BCD = \triangle ABD$, 故 $\triangle ABE : \triangle BCD = \triangle ABE : \triangle ABD = BE:BD$, 故 $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 = BE:BD$.

1268. 設兩圓相切, 則過切點之直線所分之優弓形或劣弓形面積之比, 等於半徑平方之比.

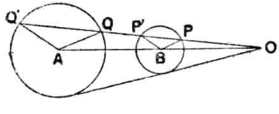
證 設兩圓 O, O′ 之切點爲 P, 過 P 之直線爲 PBA, 其所分之二劣弓形爲 AEP, BFP. 此二弓形之弓形角相等 [617 題], 故中心角 AOP, $BO'P$ 亦相等. 於是二扇形 $OAEP$, $O'BFP$ 中, 扇形角相等, 故其面積之比, 等於半徑平方之比 [1318 題], 卽 $\dfrac{\text{扇形 } OAEP}{\text{扇形 } O'BFP} = \dfrac{\overline{OP}^2}{\overline{O'P}^2}$. 次, 兩二等邊三角形 OAP, $O'BP$ 中, 頂角相等, 故相似, 故 $\dfrac{\triangle OAP}{\triangle O'BP} = \dfrac{\overline{OP}^2}{\overline{O'P}^2}$, 故合併二式得 $\dfrac{\overline{OP}^2}{\overline{O'P}^2} = \dfrac{\text{扇形 } OAEP}{\text{扇形 } O'BFP} = \dfrac{\triangle OAP}{\triangle O'BP} = \dfrac{\text{扇形 } OAEP - \triangle OAP}{\text{扇形 } O'BFP - \triangle O'BP} = \dfrac{\text{弓形 } AEP}{\text{弓形 } BFP}$. 優弓形亦然.



1269. 過兩圓相似中心之直線, 爲各圓

周所截取而成之弦之比,等於半徑之比.

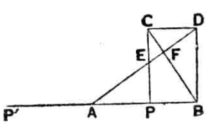
證 設兩圓之相似中心[圖中爲外心]爲



O 過 O 之直線截圓 B, A 於 P,P';Q, Q', 而 P 與 Q, P' 與 Q' 相對應.此時 BP ∥ AQ, BP' ∥ AQ' [1291題],故 $P\hat{B}P'=Q\hat{A}Q'$. 故兩二等邊三角形 BPP', AQQ' 相似,因而 PP':QQ' =BP:AQ.

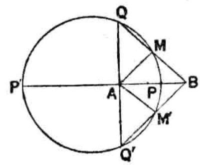
1270. 設 P 及 P' 內分及外分線分 AB 於中末比,求證 (1) 以 BP [或 BP'] 爲底邊,作矩形 BPCD [BP'C'D'], 令其高等於 AP [AP'], 則 AD [AD'] 垂直於 BC [BC']; (2)以 PP' 爲直徑之圓, 過以 AB 爲對角線之正方形之二角頂.

證 (1) 命 AD 與 CP, CB 之交點分別爲 E, F,則△FCD∽△FBA,



故 FC : FB = CD : AB $=\overline{CD}^2$: AB · CD. 而 $\overline{AP}^2$ = AB · BP = AB ·CD. 故 FC:FB $=\overline{CE}^2:\overline{EP}^2=\overline{CD}^2:\overline{AP}^2=\overline{CD}^2:\overline{DB}^2$. 今設由 D 至 BC 所引之垂線爲 DF', 則 F'C:F'B $=\overline{CD}^2:\overline{DB}^2$ [1157題]. 故 F' 合於 F, 因此 DF 垂直於 BC. 外分時亦得仿此證之.

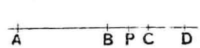
(2) 過 A 引 AB 之垂線,令交 PP' 爲直徑之圓周於 Q, Q', 聯結 BQ, BQ', 命其與圓周之交點分別爲 M, M'. 於是 $\overline{AB}^2=AP'\cdot AP$ [1940題] $=\overline{AQ}^2$, 故 AB = AQ. 又 $\overline{AP}^2=AB\cdot BP$, $\overline{AP'}^2=AB\cdot BP'$, 故 $(AP\cdot AP')^2=\overline{AB}^2\cdot BP\cdot BP'$. 而 $\overline{AB}^2=AP\cdot AP'$, 故 $BP\cdot BP'=AP\cdot AP'=\overline{AB}^2$. 故 $BP\cdot BP'=BM\cdot BQ=\overline{AB}^2$. 而 $\overline{BQ}^2=2\overline{AB}^2$, 故 M 爲 BQ 之中點, 故



AMB 爲直角二等邊三角形. 同理, AM'B 亦爲直角二等邊三角形. 卽 M, M' 爲以 AB 爲對角線之正方形之二角頂,故如題所言.

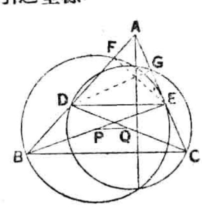
1271. 設二線分 AB, CD 在一直線上,則過 A, B 之圓與過 C, D 之圓之根軸, 過一定點.

證 設過 A, B 之任意圓與過 C, D 之任意圓之根軸, 交直線 AD 於點 P, 則因 P



爲此二圓根軸上之點,故 PA · PB = PC · PD, 故 PA : PC = PD : PB, 或 PA + PC : PC = PD + PB : PB, 卽 AC:PC = BD:PB, 卽 AC : BD = PC:PB. AC, BD 之長一定, 而點 P 按此二長之比內分 BC, 故 P 爲定點. 故過 A, B 之圓與過 C, D 之圓之根軸, 恆過 AD 上之定點 P.

1272. 三角形 ABC 中, 平行於邊 BC 引一直線,令交 AB, AC 於 D, E, 則 BE 爲直徑之圓與 CD 爲直徑之圓之根軸,爲由 A 至 BC 所引之垂線.

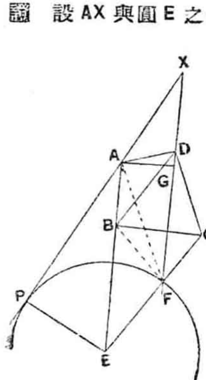


證 設 BE 爲直徑之圓與 AB 之交點爲 F, 則 EF ⊥ AB. 又設 CD 爲直徑之圓與 AC 之交點爲 G, 則 DG ⊥ AC. 故 $D\hat{F}E$

$=D\hat{G}E$, 故 D, E, G, F 在一圓周上,因而 $A\hat{F}G$ $=A\hat{E}D$. 而 DE ∥ BC, 故 $A\hat{E}D=A\hat{C}B$, 故 $A\hat{F}G$ $=A\hat{C}B$,因而F,B,C,G在一圓周上,故 AF·AB =AG·AC [1190題], 而由 A 至圓 BFE, DGC 所引切線上之正方形,分別等於AF·AB, AG ·AC, 故所引切線相等,故 A 在二圓 BE, CD 之根軸上. 次,設 BE, CD 之中點分別爲 P, Q, 則 P, Q 分別爲圓 BE, CD 之中心. 而 PQ ∥ BC [280 題], 圓 BE, CD 之根軸垂直於 PQ, 故此根軸又垂直於 BC. 故二圓 BE, CD 之根軸,爲由 A 至邊 BC 所引之垂線.

1273. 試證以下求四邊形 ABCD 面積之圖解法. 聯結 BD, 由 C 引 BD 之平行線,命其與 AB 延線之交點爲 E. 以 E 爲中心, 以單位長度之二倍爲半徑作圓,由點 A 引圓之切線 AX, 令交過 D 平行於 AB 之直線於 X. 於是表線分 AX 之數,卽表 ABCD 面積之數. 又試假定 BD=2 寸, AB=1·6 寸, BC=1·8 寸, CD =1·6 寸, DA=1·3 寸,而計算面積,並與依上法所求得之結果比較.

證 設 AX 與圓 E 之切點爲 P, 聯結 PE, 又由 A 至 XD 引垂線 AG. 因 AE ∥ XG, 故 $E\hat{A}P$ $=A\hat{X}G$, 故兩直角三角形 AEP, XAG 相似. 於是 AX:AG = EA:EP, 故 EP·AX = AG ·EA,卽 2·AX = AG ·EA. 命 XD 之延線與 CE 之交點爲 F, 聯結 AF, BF, 則 BEFD 爲平行四邊形, 可不待言, 故 △BFE = △BDF = △BCD. 又 △ABF = △ABD, 故 △AEF = 四邊形 ABCD, 故 AE·AG=2 (四邊形 ABCD). 故表 AX 之數, 等於表四邊形 ABCD 面積之數. 次,設 BD=2, AB = 1.6, BC = 1.8, CD = 1.6, DA =1.3, 則表四邊形 ABCD 面積之數如次.



$\frac{1}{2}(2+1.6+1.3)=2.45$, $2.45-2=0.45$, $2.45-1.6=0.85$, $2.45-1.3=1.15$, 又 $\frac{1}{2}(2+1.8+1.6)=2.7$, $2.7-2=0.7$, $2.7-1.8=0.9$, $2.7-1.6=1.1$, 故據 1402 題,得 $\sqrt{2.45\times0.45\times0.85\times1.15}+\sqrt{2.7\times0.7\times0.9\times1.1}=1.038\cdots\cdots+1.403\cdots\cdots=2.44\cdots\cdots$. 比較此數與由前作圖所得 AX 之寸數,可知其間並無大差.

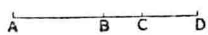
第四章 雜題

1274. 在有限直線 AB 上取一點 C, 令 AC 爲 AB, BC 之比例中項, 則 $3\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$.

證 因 AC 爲 AB, BC 之比例中項,故 AB : AC = AC : BC, 故 AB ·BC = $\overline{AC}^2$ [1139題]. 而

AC = AB − BC, 故 $\overline{AC}^2=\overline{AB-BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2AB\cdot BC=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}^2$, 故 $3\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$.

1275. 設 A, B, C, D 成調和點列, 則 $\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$. 又其逆定理如何?

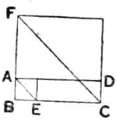


解 設 A, B, C, D 成調和點列, 則

AB, AC, AD 成調和級數 [993題], 故 $\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$. 反之, 設 A, B, B, D 在一直線上, 且 $\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$, 則此四點成調和點列. 何則? 因 $\frac{2}{AC}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AD}$, 故 AB, AC, AD 成調和級數, 故 $AD-AC:AC-AB=AD:AB$, 卽 $DC:BC=AD:AB$, 故此四點成調和點列.

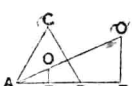
1276. 在矩形之二邊上作正方形, 以各正方形之對角線為二邊作矩形, 則原矩形等於所作矩形之半分.

證 設在矩形 ABCD 之邊 AB, BC 上所作正方形之對角線, 分別為 EA, CF, 則 $AE\cdot CF:AB\cdot BC=(AE:AB)\times(CF:BC)$. 而 $\triangle ABE\backsim\triangle FBC$, 故 $AE:AB=CF:BC$, 故 $AE\cdot CF:AB\cdot BC=\overline{AE}^2:\overline{AB}^2=2\overline{AB}^2:\overline{AB}^2=2:1$.



1277. 設三角形傍切圓之半徑, 等於內切圓半徑之三倍, 則此三角形之三邊, 成等差級數.

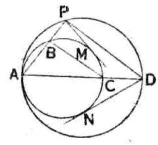
證 設三角形 ABC 內切圓之中心為 O, 一傍切圓之中心為 O′, 兩圓與 AB 之切點分別為 E, F. 於是因 $O'F:OE=3:1$, 故 $AF:AE=3:1$, 故 $FE=2AE$.



命 s, a, b, c 分別表三角形之半周及 A, B, C 之對邊, 則 $BF=s-c$, $BE=s-b$, $AE=s-a$ [729題], 故由 $FE=BF+BE$, 得 $2(s-a)=s-c+s-b$, 即 $2s-(b+c)=2s-2a$, 故 $b+c=2a$, 故 a, b, c 成等差級數.

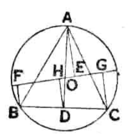
1278. 設兩圓內切於 A, 由外圓周上之任意點 P, 至內圓周劃切線 PM, 則 $PA:PM$ 一定.

證 引過 A 之直徑, 命其他端為 D, C, 由 D 引內圓之切線 DN. 於是因 $PD\parallel BC$, 故 $PA:PB=DA:DC$, 故 $PA\cdot DC=PB\cdot DA$ [1139題]. 而 $\overline{PM}^2=PA\cdot PB$ [877題], $\overline{DN}^2=DA\cdot DC$, 故 $\overline{PM}^2:\overline{DN}^2=PA\cdot PB:DA\cdot DC$. 又 $PA\cdot DC:PB\cdot DA$ 為等比, 故 $\overline{PM}^2:\overline{DN}^2$ 為 $PA\cdot PB:DA\cdot DC$ 與 $PA\cdot DC:PB\cdot DA$ 之複比, 卽 $\overline{PA}^2:\overline{DA}^2$, 故 $PM:DN=PA:DA$, 或 $PA:PM=DA:DN$, 卽一定.



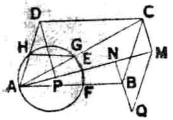
1279. 由圓之內接正三角形之各角頂, 至此圓之任意直徑引垂線, 則在此直徑一側之二垂線之和, 等於在他側之一垂線. 又是等垂足中, 其在中心之一側者至中心之距離, 等於在他側之二距離之和.

證 設由正三角形 ABC 之各角頂, 至外接圓之任意直徑所引之垂線分別為 AE, BF, CG, 由 BC 之中點 D, 至此直徑引垂線 DH. 於是 $2DH=BF+CG$ [283題]. 命圓之中心為 O, 則因 ABC 為正三角形, 故 O 又為重心, 因而 $AO=2OD$, 因而 $AE=2DH$, 故 $AE=BF+CG$. 次, 因 H 為 GF 之中點, $EO=2OH$, 故 $EO+GO=2OH+HG-OH=FH+OH=FO$.



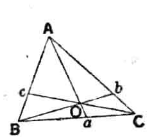
1280. 過平行四邊形 ABCD 之角頂 A 作圓, 令交 AB, AD 及對角線 AC 於 F, H, G, 則矩形 $AB\cdot AF$, $AD\cdot AH$ 之和, 等於 $AC\cdot AG$.

證　設圓之直徑爲 AE, 由 B, C, D 分別至 AE 引垂線 BN, CM, DP. 此時三四邊形 BNEF, CMEG, DHPE 皆內接於圓, 故 AB·AF＝AE·AN [877 題], AD·AH＝AE·AP, 故 AB·AF＋AD·AH＝AE(AN＋AP). 由 M 平行於 BC 引 MQ, 令交 NB 之延線於 Q, 則 CBQM 爲平行四邊形, 而 MQ＝BC＝AD, 且 AD ∥ QM, 故 △APD ≡ △MNQ, 而 AP＝MN. 故 AB·AF＋AD·AH＝AE(AN＋MN)＝AE·AM. 而 AE·AM＝AC·AG, 故 AB·AF＋AD·AH＝AC·AG.



注意　本題之別證, 見 1199 題.

1281.　設三角形 ABC 中, 由各頂點至對邊所引之三直線 Aa, Bb, Cc 交於形內之一點 O, 則 $\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=1$. 又設 O 在形外, 則如何?

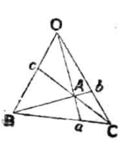


解　Oa : Aa＝△OBC : △ABC, Ob : Bb＝△OCA : △ABC, Oc : Cc＝△OAB : △ABC, 於是三式相加

$$\frac{Oa}{Aa}+\frac{Ob}{Bb}+\frac{Oc}{Cc}=\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}+\frac{\triangle OCA}{\triangle ABC}+\frac{\triangle OAB}{\triangle ABC}$$

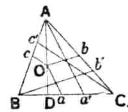
$$=\frac{\triangle OBC+\triangle OCA+\triangle OAB}{\triangle ABC}=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=1.$$

次. 設 O 在形外, 則因 △OBC, △OCA, △OAB 中, 最大者減以他二者之和, 等於原三角形 ABC, 故 $\frac{Oa}{Aa}$, $\frac{Ob}{Bb}$, $\frac{Oc}{Cc}$ 三比中, 最大者減以他二者之和, 則等於 1.



1282.　由三角形 ABC 內之一點 O, 至三邊引三直線 Oa, Ob, Oc, 由各角頂分別平行於是等直線, 引直線 Aa', Bb', Cc', 則 $\frac{Oa}{Aa'}+\frac{Ob}{Bb'}+\frac{Oc}{Cc'}=1$. 又設點 O 在形外, 則如何?

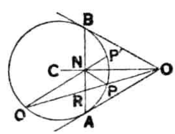
解　設 AO 之延線與 BC 之交點爲 D, 則 △OBC : △ABC＝OD : AD. 而 OD : AD＝Oa : Aa', 故 △OBC : △ABC＝Oa : Aa', 同理, △OCA : △ABC＝Ob : Bb', △OAB : △ABC＝Oc : Cc'.



故 $\frac{Oa}{Aa'}+\frac{Ob}{Bb'}+\frac{Oc}{Cc'}=1$. 若 O 點在形外, 則與前題之後款同.

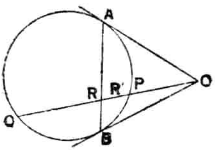
1283.　設 OA, OB 切中心爲 C 之圓於 A, B, 由 O 引任意割線, 令交圓周於 P, Q, 交 AB 於 R, 則 O, R 分 PQ 於調和.

證　命 OC 與 AB 之交點爲 N, 聯結 PN, QN, 命 QN 之延線與圓周之交點爲 P′. 此時 AN 將角 PNQ 二等分, ON 將其外角 PNP′ 二等分 [909 題]. 故 QR : PR＝QN : PN＝QO : PO [1927 題], 卽 O, R 分 PQ 於調和.



1284.　由所設點 O 引任意直線, 令交所設圓周於 P, Q, 在 PQ 上取點 R, 令 OQ : OP＝RQ : PR, 則 R 在定直線上.

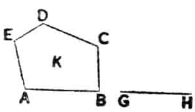
證　由 O 引切線 OA, OB, 聯結 AB, 命其與 OPQ 之交點爲 R, 則 OQ : OP＝RQ : PR [1283 題], 卽 OPQ 在其與 AB 之交點, 分於所設比. 今設 OPQ 上之點 R′, 適合 OQ : OP＝R′Q



$:PR'$, 則 $RQ:PR=R'Q:PR'$. 然按某比內分 PQ 之點唯一,故 OPQ 按所設比之分點 R, 恆在 AB 上.

1285. 在所設直線上作各直線形, 令與所設直線形相似,則所作之一切直線形中, 最大者與最小者之比,等於最大邊與最小邊之二乘比.

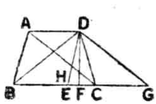
證　命所設直線形爲 K, 其最大邊爲 AB, 最小邊爲 DE. 在所設直線 GH 上所作 K 之各相似直線形中,最大者以 GH 對應於 K 之最小邊,



最小者以 GH 對應於 K 之最大邊. 今命其最大者爲 L, 最小者爲 M, 則 $L:K=\overline{GH}^2:\overline{DE}^2$, $K:M=\overline{AB}^2:\overline{GH}^2$. 故 L:K 及 K:M 之複比 L:M, 等於 $\overline{GH}^2:\overline{DE}^2$ 及 $\overline{AB}^2:\overline{GH}^2$ 之複比 $\overline{AB}^2:\overline{DE}^2$.

1286. 梯形中兩對角線上正方形之差與不平行二邊上正方形之差之比,等於平行二邊之和與差之比.

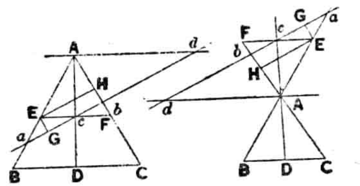
證　設 ABCD 爲 AD ‖ BC 之梯形, 由 D 平行於 AC, AB 引 DG, DH, 令分別交 BC 於 G, H. 又命 DE, 垂直於 BC, 命 F 爲 HC 之中點. 於



是因 BH = AD = CG, 故 F 又爲 BG 之中點. 故 $\overline{DG}^2-\overline{BD}^2=2EF\cdot BG$ [776 題], 卽 $\overline{AC}^2-\overline{BD}^2=2EF\cdot BG=2EF(BC+AD)$. 同理, $\overline{DC}^2-\overline{DH}^2=2EF\cdot HC=2EF(BC-AD)$. 故 $\overline{AC}^2-\overline{BD}^2:\overline{DC}^2-\overline{AB}^2=BC+AD:BC-AD$.

1287. 三角形之二邊與底邊上之中線, 及過頂點之底之平行線, 將同平面上之一切直線, 分於調和.

證　引三角形 ABC 之中線 AD, 及過 A 平



行於 BC 之直線 Ad, 於是引任意直線, 令交 AB, AC, AD, Ad 於 a, b, c, d. 過 c 引 BC 之平行線,令交 AB, AC 於 E, F; 又由 E 平行於 AC, cb 引 EG, EH. 於是 Ec = cF [834 題],故 EG = bF = Hb. 又 Ec ‖ Ad, 故 $ad:ac=a\mathrm{A}:a\mathrm{E}$, $bd:bc=\mathrm{A}b:b\mathrm{F}=\mathrm{A}b:\mathrm{H}b$. 而 EH ‖ ad, 故 $\mathrm{A}a:\mathrm{E}a=\mathrm{A}b:\mathrm{H}b$, 故 $ad:ac=bd:bc$.

1288. 有一圓臺,供打彈子之用;今欲自臺上之某點擊彈子, 使兩度觸邊後, 仍歸原處,則彈子之路徑若何?

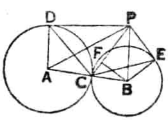
解　設 O 爲臺之中心, A 爲彈子之原位,所求之路徑爲 ABCA, 則 OB, OC 分別將角 ABC, BCA 二等分 [物理學反射定律], 而 $A\hat{B}C=B\hat{C}A$, 故 AOF ⊥ BC. 由 A 引 LOF 之垂線 AG, 令交 BO 之

延線於 G. 此時 AB = AG, 甚易知之. 以 A

爲中心, 作圓 OHL, 令交 BG 於 H, 則 BO $=$HG, 此亦甚易知之; 故 OG, OH 之差等於所設圓之半徑. 又 OHL, OAG 爲直角三角形, 且公有一角 O, 故兩形相似, 而 $OH:OA=OL:OG$, 卽 $OG\cdot OH=OA\cdot OL=$ 已知. 於是所求之線分 OG, OH 之差及其所包之矩形爲已知,因而可求得此各線分.

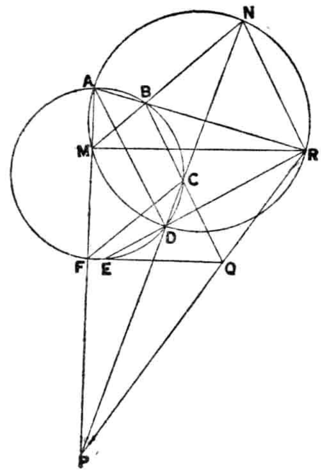
1289 設二圓 A, B 外切於 C, 取點 P, 令角 APC, BPC 相等. 由 P 引二圓之切線 PD, PE, 則 PC 上之正方形等於矩形 PD·PE.

解 因 $A\hat{P}C=C\hat{P}B$ [假設], 故 $PA:AC=PB:BC$, 或 $PA:AD=PB:BE$. 而 △PAD, △PBE 中, $\hat{D}=\hat{R}=\hat{E}$, 而他二邊成比例, 故 △PAD ∽ △PBE, 故 $A\hat{P}D=B\hat{P}E$, 故 $D\hat{P}C=E\hat{P}C$. 又 $P\hat{C}A$, $P\hat{F}B$ 皆爲二等邊三角形 BFC 底角之外角, 故相等. 於是兩四邊形 PDAC, PEBF 中,三角分別相等, 故 $D\hat{A}C=E\hat{B}F$. 次, $P\hat{D}C=\frac{1}{2}D\hat{A}C$ [557, 451 題], $E\hat{C}F=\frac{1}{2}E\hat{B}F$ [451題], 故 △PDC∽△PCE, 故 $PD:PC=PC:PE$, 因而 $\overline{PC}^2=PD\cdot PE$.



1290. 圓之內接六邊形中, 各雙對邊延線之交點,在一直線上.

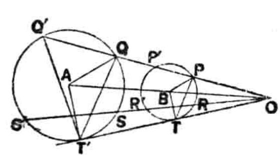
解 設圓之內接六邊形爲 ABCDEF, 其對邊延線之交點爲 P, Q, R. 過三點 A, D, R 作圓,令交 AP 於 M, 交 DC 之延線於 N, 聯結 MN, FC, AD. 於是 $M\hat{N}D=M\hat{A}D$ [452 題] $=F\hat{C}D$, 故 MN ∥ FC. 同理, NR ∥ CQ, 又 MR ∥ FQ. 於是兩三角形 MNR, FCQ 中,三邊分別平行, 故兩形相似, 聯結其對應頂點之直線過同點 [1022題], 故 RQ 過 MF, NC 之



交點 P. 故 P, Q, R 在一直線上.

1291. 過兩圓之相似中心 O, 引任意直線, 令交一圓於 P, P′, 他圓於 Q, Q′ [若 OP 小於 OP′, 則 OQ 小於 OQ′], 則 P 與 Q [或 P′ 與 Q′] 分別與其圓之中心聯結之半徑相平行. 命二圓公切線之切點, 分別爲 T, T′, 則 PT 平行於 QT′, 又 P′T 平行於 Q′T′. 命過 O 之他任意直線交二圓周於 R, R′, 及 S, S′, 則四點 P, Q′, R, S′ 在一圓周上. 又如是之四點有幾組?

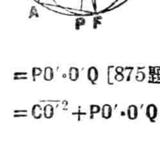
解 命二圓之中心爲 A, B, 由 A 引平行於



BP 之半徑,令與 BP 在 AB 之同側, 命其端

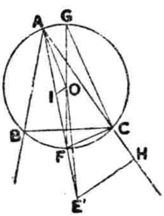
為 Q'', 則 Q'', P, O 在一直線上 [1118題], 而 Q, P, O 在一直線上, 故 Q 與 Q'' 相合, 即 BP ∥ AQ. 同理, BP' ∥ AQ'. 次, 因 AQ ∥ BP, AT' ∥ BT, 故 OP : OQ = OB : OA = OT : OT', 故 PT ∥ QT' [951題]. 同理, P'T ∥ Q'T'. 次, OP:OQ = OB:OA = OP':OQ', 故 OP·OQ' = OQ·OP'. 而 $Q\hat{T}'O = O\hat{Q}'T'$ [557題], $Q\hat{T}O = P\hat{T}O$ [44題], 故 $O\hat{Q}'T' = P\hat{T}O$, 故 △OPT∽△OT'Q', 而 OP:OT = OT':OQ', 故 OP·OQ' = OT·OT'. 故 OP·OQ' = OQ·OP' = OT·OT'. 同理, OR·OS' = OR'·OS = OT·OT'. 因此是等矩形皆相等, 故 P, Q', R, S' 在一圓周上 [905題]. 其他如 P, Q', R', S; P', Q, R, S'; 及 P', Q, R', S 亦各在一圓周上. 即 P, P', Q, Q', R, R', S, S' 八點中, 過其每四點之圓共四. 若將由 O 所引切線之切點加入計之, 則若是之圓, 為數更多.

1292. 過所設圓周上之點 M, 引二弦 MA, MB; 作一圓, 命內切於所設圓, 且切 MA, MB 於 C, D. 設 A, B 為定點, M 在圓周上移動, 則直線 CD 恆切於定圓.



解 命所設圓之中心為 O, 內切圓之中心為 O', 延長 MO', 命其與圓周之交點為 F, 命 MF 與 CD 之交點為 E, 引直徑 FOG 及 PO'OQ. 於是 $M\hat{C}O' = \hat{R}$, CE ⊥ MO', 故 O'E·O'M = $\overline{CO'}^2$ [766題], O'M·O'F = PO'·O'Q [875題], 故 O'E·O'M + O'M·O'F = $\overline{CO'}^2$ + PO'·O'Q = $\overline{CO'}^2$ + CO'·(PQ − CO') = CO'(CO' + PQ − CO'), 即 O'M·EF = CO'·PQ. 次, $A\hat{M}F = A\hat{G}F$, 故 △MCO' ∽ △GAF, 故 O'M:CO' = GF:AF, 因而 O'M·AF = CO'·GF = CO'·PQ, 故 O'M·EF = O'M·AF, 故 EF = AF. 而 F 為弧 AB 之中點, 故一定, 因而 AF 亦一定. 故 CD 切於以 F 為中心, AF 為半徑之圓.

1293. 命三角形之外接圓與內切圓之半徑分別為 R, r, 其中心分別為 O, I, 則 $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$ [是曰 Chapple 氏定理]. 又此題中內切圓代以中心為 E', 半徑為 r_1 之傍切圓, 則 $\overline{OE'}^2 = R^2 + 2Rr_1$.



解 設三角形為 ABC, 命 AI 之延線與外接圓周之交點為 F, 過 F 直徑之他端為 G, 則 FG = 2R, 而 $2R\cdot r$ = AI·IF [1203題]. 又 △AOF 為二等邊三角形, I 為底邊 AF 上之點, 故 $\overline{OF}^2 = \overline{OI}^2 + AI\cdot IF$ [775題], 即 $R^2 - \overline{OI}^2 = AI\cdot IF$. 故 $2R\cdot r = R^2 - \overline{OI}^2$, 即 $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$.

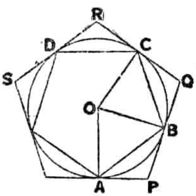
次, 設切於邊 BC 之傍切圓中心為 E', 引垂線 E'H. 聯結 CF, CG, 則因 $E'\hat{A}H = F\hat{G}C$, 故兩直角三角形 E'AH, FGC 相似, 而 E'A:FG = E'H:CF, 故 E'A·CF = FG·E'H. 而 CF = FE' [729題], E'H = r_1, 故 E'A·E'F = $2R\cdot r_1$. 又 E' 在二等邊三角形 AOF 底邊之延線上, 故 $\overline{OE'}^2 = \overline{OF}^2 + E'A\cdot E'F = R^2 + 2Rr_1$, 即 $\overline{OE'}^2 = R^2 + 2Rr_1$.

第五編

正多角形及圓之測度

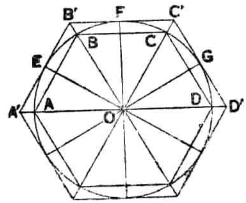
1294. 分全圓周爲若干等分，則引是等分點間之弦而得之內接形爲正多角形，又由各分點引切線而得之外切形亦爲正多角形.

證 (1)等分圓 ABC 之全周於 A, B, C,……[圖中假定爲五分], 引弦 AB, BC, CD,…; 求證內接形 ABC…爲正多角形. (2) 在 A, B, C, D,……各點上引切線, 作外切形 PQRS………; 求證 PQRS…… 亦爲正多角形.



(1) 弧 AB, BC, CD,……皆相等[假設], 故弦 AB, BC, CD,……皆相等[436題], 故多角形 ABCD……爲等邊形. 又多角形 ABCD……各角所立之弧, 較全圓周少去弧 AB, BC, CD,……中之二者, 而弧 AB, BC, CD,……皆相等[假設], 因而多角形各角所立之弧皆相等[普. 公. (e)], 故多角形等角[434, 451題]. 故多角形爲正多角形. (2) 求中心 O, 聯結 OA, OB, OC, 固定 O, 廻轉圖形 OAPB, 令 A 合於 B. 於是因弧 AB 等於弧 BC[假設], 故 B 落於 C 上; 且切線 AP 及 BP 與切線 BQ 及 CQ 合, 因各切線皆垂直於切點上之半徑[550題]故也. 故圖形 OAPB 與圖形 OBQC 全合, 因而 AP 等於 BQ. 然切線 AP 及 BP 相等[556題], 故切線 AP, BP, BQ, CQ,……皆相等, 故多角形 PQRS……爲等邊多角形, 因各邊皆爲是等切線之二倍故也. 又角 APB 與角 BQC 合, 故相等, 即多角形之任意角, 等於其隣角, 故多角形爲等角形. 因而此多角形爲正多角形.

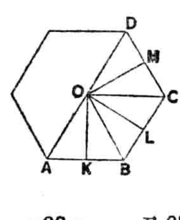
注意 設有圓之內接多角形, 由其各角頂引切線, 則得同邊數之外切多角形. 設有圓之外切多角形, 順次聯結其切點, 則得同邊數之內接多角形.



又設外切多角形 A'B'C'D'……之各角頂與圓之中心 O 聯結之直線, 截圓周於 A, B, C, D,……順次聯結 A, B, C, D,……, 則亦得同邊數之內接多角形. 又圖中若聯結弦 EA, EB, BF, FC,……, 則得二倍邊數之內接多角形, 若在 A, B, C,……上引切線, 令與 A'B', B'C', C'D',……交, 則得二倍邊數之外切多角形. 而內接多角形中之面積, 邊數爲二倍者大, 外切多角形中之面積, 邊數爲二倍者小.

1295. 正多角形各角之二等分線, 交於同點, 此點距各角頂等遠, 距各邊亦等遠.

證 設 ABCD……爲正多角形, 角 A 及 B 之二等分線交於 O, 聯結 OC, OD, 由 O 至邊 AB, BC, CD,……引垂線 OK, OL, OM,……. 求證 OC, OD,……, 將角 C, D 二等分, OA = OB = OC = ……, 又 OK = OL = OM = …….



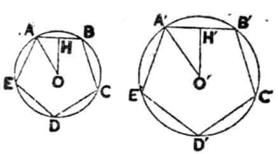
兩三

角形 OBA, OBC 中, 邊 AB＝邊 BC, 邊 OB 爲兩形所共, 且 $O\hat{B}A=O\hat{B}C$, 故 $O\hat{A}B=O\hat{C}B$ [55 題]. 而角 OAB 爲多角形中角 A 之半分 [假設], 且角 A 等於角 C [假設], 故 $O\hat{C}B$ 爲角 C 之半分, 卽 OC 將角 C 二等分. 同理, OD, ……將多角形之角 D, ……二等分. 又角 A 及 B 相等 [假設], 故是等角之半分角 OAB, OBA 亦相等 [普. 公. (h)], 故 OA 等於 OB [59 題]. 同理, OB 等於 OC, 餘仿此. 故 OA, OB, OC, …… 皆相等. 又由是得證 OK, OL, OM, ……皆相等. 蓋兩三角形 OBK, OBL 中, $O\hat{K}B=O\hat{L}B$, $O\hat{B}K=O\hat{B}L$, 而邊 OB 爲公邊, 故 OK 等於 OL [78題]. 同理, OL 等於 OM, 餘準此. 故垂線 OK, OL, OM, ……皆相等.

注意 由上可知, 正多角形內接於圓, 且外切於圓, 又各邊張於中心之角, 等於四直角除以邊數而得之商. 又 $A\hat{B}C=2A\hat{B}O=A\hat{B}O+B\hat{A}O$, 故正多角形之各角, 與各邊張於中心之角, 互爲補角.

1296. 同邊數之正多角形相似.

證 設 ABCDE, A′B′C′D′E′ 爲同邊數之正



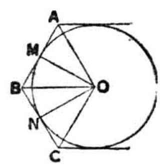
多角形. 此二多角形互相等角, 因角之大小, 僅與邊數有關也 [301題]. 次, 對應邊成比例, 因 AB:A′B′, 等於 BC:B′C′, 或 CD:C′D′, ……故也. 故此兩正多角形相似.

1297. 同邊數正多角形周之比, 等於其外接圓半徑之比, 又等於其內切圓半徑之比. 而其面積則等於是等半徑上正方形之比.

證 因正多角形外接圓之半徑及內切圓之半徑爲兩形之對應線故也 [1023 題注意及 1142 題注意].

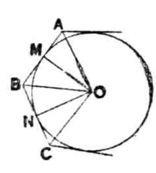
1298. 圓之外切等角多角形, 皆爲正多角形.

證 設圓之中心爲 O, 其外切等角多角形爲 ABC……, 命其切點爲 M, N, ……. 聯結 OA, OB, ……及 OM, ON, ……, 則兩直角三角形 OMB, ONB 中, OM＝ON, OB 爲兩形所共, 故 BM＝BN, $O\hat{B}M=O\hat{B}N$, 故 OA, OB, …… 分別將角 $\hat{A}$, $\hat{B}$, ……二等分. 故兩直角三角形 OMA, OMB 相等, 因而 AM＝BM, 卽 AM＝BM＝BN＝……, 故又 AB＝BC＝……. 故 ABC……爲正多角形.



1299. 圓之外切等邊多角形, 若邊數爲奇數, 則爲正多角形.

證 設等邊多角形 ABC…… 外切於中心爲 O 之圓, 其切點爲 M, N, ……, 聯結 OA, OB, …及 OM, ON, ……, 則 OA, OB, …… 皆將多角形之角 A, B, ……二等分 [556 題]. 又 AB＝BC, BM＝BN, 故 AM＝CN, 故 △OAM＝△OCN, 因而 $O\hat{A}M=O\hat{C}N$, 故 $\hat{A}=\hat{C}$, 卽多角形 ABC……中, 一間一所取之各角相等. 而邊數若爲奇數,

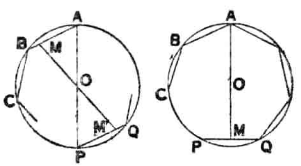


則一間一取角時,最後之角爲最初角之隣角;故邊數爲奇數,則隣角相等,因而各角皆相等,故爲正多角形.

註 若邊數爲偶數,則一間一所取之各角雖相等,而隣角則或等或不等,故多角形或爲正多角形,或非正多角形.

1300. 正多角形視其邊數之爲偶爲奇而定有無對稱中心.

證 設正多角形爲 ABC……,其外接圓之



[甲圖] [乙圖]

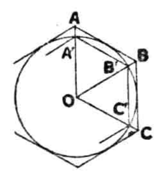
中心爲 O. 若邊數爲偶數[甲圖]而一對角線 AP 將邊數等分爲二,則圓周亦爲之等分爲二,卽此對角線爲圓之直徑,而過中心 O. 故過 O 引任意直線 MOM′,於一雙對邊間,則因 AP 將 $\hat{A}$ 及 $\hat{P}$ 二等分,故 $OM=OM'$,故 ABC……對於 O 爲對稱.次,若邊數爲奇數[乙圖],由一角頂 A 引過中心 O 之直線,則將一邊垂直二等分.命其分點爲 M,則因 $OA>OM$,故 O 非對稱中心.又過 AM 之中點 O′,引任意直線,命其在多角形邊間之部分爲 M′M″,則 O′ 不能爲 M′M″ 之中點.故若邊數爲奇數,則無對稱中心.

1301. n 邊正多角形,有 n 個對稱軸.

證 設 n 爲偶數,則如前題甲圖,引直徑 AP,以之爲界,而折 ABC……,令至 PQ……上,則兩方全合,故 AP 爲對稱軸,而如是之軸有 $\frac{1}{2}n$ 個.又對邊互相平行,故過中心爲一雙對邊之公垂線,以之爲界而對折,則兩方全合,故此公垂線爲對稱軸,而如是之軸亦有 $\frac{1}{2}n$ 個.故若 n 爲偶數,則對稱軸有 $(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n)$ 個,卽 n 個.次,若 n 爲奇數,則如前題乙圖,AO 將對邊 PQ 垂直二等分,故以 AM 爲軸,而將圖形對折,則兩方全合,故 AM 爲對稱軸,而如是之軸有 n 個.由是可知,n 邊正多角形,有 n 個對稱軸.

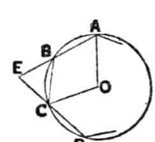
1302. 引由圓之中心至外切正多角形各角頂之直線,又順次聯結是等直線與圓周之交點,則得正多角形.

證 設圓之中心爲 O, 外切正多角形爲 ABC……,命 OA, OB, OC,……與圓周之交點分別爲 A′, B′, C′,…….



因 $OA=OB=OC=\cdots\cdots$, $OA'=OB'=OC'=\cdots\cdots$, 故 $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, …, 故 $\hat{A}'=\hat{A}$, $\hat{B}'=\hat{B}$, ……, 因而 $\hat{A}'=\hat{B}'=\hat{C}'=\cdots\cdots$. 又 $A\hat{O}B=B\hat{O}C=\cdots\cdots$, 故 $A'B'=B'C'=C'D'=\cdots\cdots$. 故 A′B′C′……爲正多角形.

1303. 設正多角形 ABCD……之中心爲 O, 將邊 BC 旁之二邊 AB, CD 延長,令交於 E, 則四邊形 AECO 內接於圓.

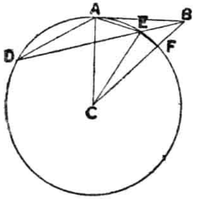


證 OA, OC 皆將正多角形之角 $\hat{A}$, $\hat{C}$ 二等分,故 $O\hat{A}E=O\hat{C}D$, 故 $O\hat{C}E+O\hat{A}E=2\hat{R}$, 故 AECO 內接於圓.

1304. 設 DA 爲圓之內接正六角形之一邊,由 A 至弧 AD 之異側引切線 AB, 令其長

等於 AD, 命 C 爲中心, BD, BC 與圓之交點爲 E, F, 則 AE, EF 分別爲圓之內接正十二角形及正二十四角形之一邊.

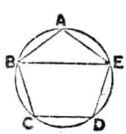
證 因 AD = AB, 且 AB 爲切線, 故 $A\hat{B}D = A\hat{D}B = B\hat{A}E$, 故 $A\hat{E}D = B\hat{A}E + A\hat{B}D = 2A\hat{B}D = 2A\hat{D}E$, 故弧 AD 爲弧 AE 之二倍. 而弧 AD 爲正六角形一邊所對之弧, 故弧 AE 對



正十二角形之一邊, 故弦 AE 爲正十二角形之一邊. 又聯結 CA, CE, 因 CA = AB, $C\hat{A}B = \hat{R}$, 故 $A\hat{C}B = \frac{1}{2}\hat{R}$. 而 $A\hat{C}E$ 爲對正十二角形一邊之中心角, 故爲 $4\hat{R}$ 之十二分之一, 卽 $\frac{1}{3}\hat{R}$, 故 $E\hat{C}F = \frac{1}{2}\hat{R} - \frac{1}{3}\hat{R} = \frac{1}{6}\hat{R} = \frac{1}{24}\cdot 4\hat{R}$. 故弦 EF 爲正二十四角形之一邊.

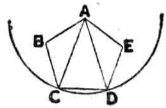
1305. 正五角形之各對角線, 平行於一邊.

證 設正五角形爲 ABCDE, 求證其對角線 BE 平行於一邊 CD. 作外接圓, 則 $C\hat{B}E + C\hat{D}E = 2\hat{R}$, 而 $C\hat{D}E = B\hat{C}D$, 故 $C\hat{B}E + B\hat{C}D = 2\hat{R}$, 故 BE 平行於 CD.



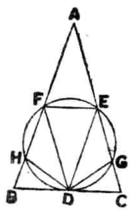
1306. 以正五角形之一角頂爲中心, 以其對角線爲半徑作圓, 則五角形之一邊, 等於此圓內接正十角形之一邊.

證 以正五角形 ABCDE 之一角頂 A 爲中心, 以對角線 AD 爲半徑所作之圓過 C, 因 AD = AC 故也. 而 $C\hat{A}D$ 爲正五角形一邊張於一角頂之角, 故爲同邊張於此形外接圓中心之角之半分, 卽 $4\hat{R}$ 之 $\frac{1}{5}$ 之半分, 故 $C\hat{A}D$ 爲 $4\hat{R}$ 之 $\frac{1}{10}$. 故 CD 張於圓 A 之中心之角, 爲 $4\hat{R}$ 之 $\frac{1}{10}$, 故 CD 爲圓 A 之內接正十角形之一邊.



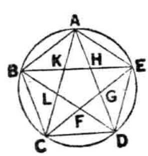
1307. 設三角形之二角, 各爲第三角之二倍, 則過此三角形三邊中點之圓, 自二邊所截得之弦, 各爲內接正五角形之邊.

解 設 △ABC 中, $\hat{B}$, $\hat{C}$ 各爲 $\hat{A}$ 之二倍, D, E, F 分別爲三邊之中點, 則圓周 DEF 切 BC 於 D, 因 DE, DF, EF 分別平行於 AB, AC, BC, 則 $E\hat{D}C = \hat{C} = D\hat{F}E$ 故也. 故 $G\hat{D}C = D\hat{E}G = \hat{A}$, 故此角等於 $\frac{1}{2}\hat{C}$. 而 $E\hat{D}C = \hat{C}$, 故 DG 將 $E\hat{D}C$ 二等分, 而各分等於 $\hat{A}$. 同理, DH 將 $F\hat{D}B$ 二等分. 而 $E\hat{D}F = \hat{A}$, 故 DGEFH 各邊所對之圓周角相等, 故 DGEFH 爲正五角形.



1308. 正五角形五對角線所成之五角形, 亦爲正五五角形.

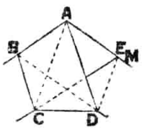
證 設正五角形 ABCDE 對角線所成之五角形爲 FGHKL. 作外接圓 ABCDE, 則 AB = CD = BH, AB = DE = AL, 又因 $A\hat{B}E = B\hat{A}C$, 故 AK = BK, 故 KL = KH. 同理, KH = HG = ……, 故 FGHKL 爲等邊形. 次, 弧 AB, BC, …… 皆相等, 故弧 AB + 弧 CDE = 弧 AE + 弧 BCD, 因而 $L\hat{K}H = K\hat{H}G$. 同理, $K\hat{H}G = H\hat{G}F = \cdots\cdots$. 故



FGHKL 爲等角形. 故 FGHKL 爲正五角形.

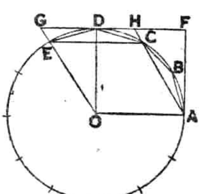
1309. 設紙之邊緣,兩兩平行,則可折之成正五角形.

解　設折成之形爲 ABCDE. 因 ED 爲折 CE 而得者, 故設其原位置爲 ED′, 則 $M\hat{E}D = M\hat{E}D' = A\hat{E}C$, $M\hat{E}D = E\hat{A}C$, 故 $C\hat{A}E = A\hat{E}C$, 故 AC = CE. 同理, AC = AD, AD = BD, 卽對角線皆相等. 又 $C\hat{B}A = B\hat{A}E = A\hat{E}D$, $E\hat{D}C = D\hat{C}B$, 而 AC ∥ ED, 且 AD = CE, 故 $A\hat{E}D = E\hat{D}C$, 卽五角皆相等. 又 BD ∥ AE, 且 $B\hat{A}E = A\hat{E}D$, 故 AB = ED. 同理, AB = CD = AE = BC, 卽五邊皆相等. 故 ABCDE 爲正五角形.



1310. 圓之內接正十二角形之面積, 等於半徑上正方形之三倍.

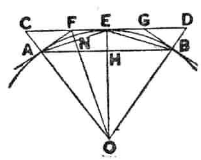
解　設 AB, BC, CD, DE 爲內接正十二角形之四隣邊, 引半徑 OA, OE, 則 OABCDE 爲十二角形之三分之一, 故得證此圖形之面積, 等於半徑上之正方形卽可. 引半徑 OD, 及 A, D 上之切線 AF 與 GDF, 聯結 AC 及 CE, 又延長 AC 及 OE, 令交切線 GF 於 H 及 G. 於是因含正十二角形之三邊之弧 AD, 等於圓周之四分之一, 故 $A\hat{O}D$ 爲直角, OF 爲半徑上之正方形. 又因 AC 及 CE 爲內接正六角形之邊, 故皆等於半徑, 故 OACE 爲平行四邊形. 因而 GOAH, GECH 亦爲平行四邊形. 而 △DEC = △BCA [77題], 且 △DEC = $\frac{1}{2}$□EH [735題], 故 △DEC + △BCA = □EH. 此式兩邊各加 □OC, 則圖形 OABCDE 等於平行四邊形 OH. 然平行四邊形 OH 等於正方形 OF [732題], 故圖形 OABCDE 等於正方形 OF, 卽正十二角形之三分之一,等於半徑上之正方形.



注意　圓之外切正方形之面積, 等於半徑上正方形之四倍,彰彰明甚. 又圓之面積, 大於內接正十二角形之面積, 而小於外切正方形之面積. 故設以半徑上之正方形爲單位,則圓面積大於 3 而小於 4.

1311. 已知圓之內接 n 邊正多角形之周及外切 n 邊正多角形之周, 求同圓之 $2n$ 邊外切及內接正多角形之周.

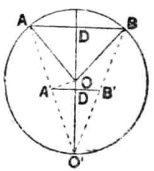
解　設 n 邊內接正多角形之邊爲 AB, 弧 AB 之中點爲 E, 由 E 引切線 CD, 則 CD 爲與前多角形相似之外切正多角形之一邊. 聯結 AE, 由 A 及 B 引切線 AF 及 BG, 則 AE 爲 $2n$ 邊內接正多角形之一邊, FG 爲 $2n$ 邊外切正多角形之一邊. 命 n 邊內接正多角形之周爲 p, 外切正多角形之周爲 P, $2n$ 邊內接正多角形之周爲 p', 及 $2n$ 邊外切正多角形之周爲 P′. 於是因 OC 乃周爲 P 之多角形外接圓之半徑,故 $\frac{P}{p}=\frac{OC}{OA}=\frac{OC}{OE}$. 而 OF 爲角 COE 之二等分線, 故 $\frac{OC}{OE}=\frac{CF}{FE}$, 故 $\frac{P}{p}=\frac{CF}{EF}$, 故 $\frac{P+p}{2p}=\frac{CF+FE}{2FE}=\frac{CE}{FG}$. 而 FG 乃周爲 P′ 之多角形之一邊, P 中所含 CE 之個數, 等



於 P′ 中所含 FG 之數, 故 $\frac{CE}{FG}=\frac{P}{P'}$, 故 $\frac{P+p}{2p}=\frac{P}{P'}$, 故 $P'=\frac{2pP}{P+p}$……(1). 又直角三角形 AEH 及 EFN 中, 銳角 EAH FEN 相等, 故此兩三角形相似, 而 $\frac{AH}{AE}=\frac{EN}{EF}$. 而 p 中所含 AH 之數, 等於 p' 中所含 AE 之數, 故 $\frac{AH}{AE}=\frac{p}{p'}$. 又 p' 中所含 EN 之數, 等於 P′ 中所含 EF 之數, 故 $\frac{EN}{EF}=\frac{p'}{P'}$. 故 $\frac{p}{p'}=\frac{p'}{P'}$, 故 $p'=\sqrt{p\times P'}$……(2).

1312. 已知正多角形之半徑及邊心距, 求二倍邊數之等周正多角形之半徑及邊心距.

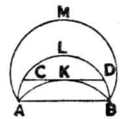
圖 設 AB 爲正多角形之一邊, O 爲其中心, 則 OA 爲其半徑, OD 爲邊心距. 延長 DO, 令交外接圓周於 O′, 聯結 O′A, O′B, 由 O 引 O′A 之垂線 OA′, 過 A′ 平行於 AB 引直線 A′B′. 新多角形之邊數爲原多角形邊數之二倍, 故其一邊張於中心之角, 等於 $A\hat{O}B$ 之半分; 故等於 $\frac{1}{2}A\hat{O}B$ 之 $A\hat{O'}B$ [451 題] 爲新多角形一邊所張之中心角. 又新多角形之周, 雖等於原多角形之周, 而邊數則爲二倍, 故新多角形之一邊, 等於原多角形一邊之半分; 故 AB 之半分 A′B′ [440, 231 題] 爲新多角形之一邊. 故 O′A′ 爲新多角形之半徑, O′D′ 爲其邊心距. 於是命 OA 爲 R, 命 OD 爲 r, 命所求之半徑 O′A′ 爲 R′, 所求之邊心距 O′D′ 爲 r', 則 $O'D'=\frac{1}{2}O'D=\frac{1}{2}(OO'+OD)$, 即



$r'=\frac{1}{2}(R+r)$……(1). 又直角三角形 OA′O′ 中, $\overline{O'A'}^2=OO'\cdot O'D'$ [766 題], 亦即 $R'=\sqrt{R\times r'}$……(2). 故 r' 爲 R 與 r 之等差中項, R′ 爲 R 與 r' 之等比中項.

1313. 圓之弧較圍繞此弧且與其公有兩端之任意線小.

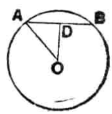
圖 設 AKB 爲圓之弧, AB 爲其弦, ALB, AMB,…… 爲止於 A 及 B 之任意線. 圍繞圓之弧 AKB 之一切線 ALB, AMB,…… 中, 至少有一最小線*. 而圍繞圓之弧 AKB 之 ALB, AMB,…… 等線, 皆不能爲最小線. 何則? 引弧 AKB 之切線 CKD, 則線 ACKDB 小於 ACLDB, 故 ALB 非最小. 仿此得證, 圍繞弧 AKB 之一切線, 皆不能爲最小. 故弧 AKB 爲最小. *雖假定有多於二之最小線, 但其中仍應有一最小者或二最小者等.



注意 圓弧小於其外切任意多角形之周.

1314. 圓之內接正多角形之邊數無限增大, 則其邊心距以圓之半徑爲極限而無限趨近.

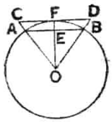
圖 設正多角形之一邊爲 AB, 其外接圓之半徑爲 OA, 邊心距爲 OD. 三角形 OAD 中, OA－OD<AD [71 題]. 於是若多角形之邊數增加, 則邊 AB 之長, 得縮至任意小, 因而其半分 AD 亦得縮至任意小, 從而小於 AD 之 OA－OD 亦得縮至任意小. 換言之, 邊心距 OD 以半徑 OA 爲極限而無限趨近.



1315. 圓之內接及外切正多角形之邊

數無限增大,則多角形之周以圓周爲極限,面積以圓面積爲極限.

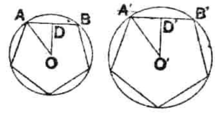
證　設 AB 及 CD 爲內接及與其相似之外切正多角形之邊,以 z 表邊心距 OE,以 R 表半徑 OF,以 p 表內接多角形之周,P 表外切多角形之周.於是 $P:p=R:r$ [1297題],故 $P-p:P=R-r:R$ [分比定理],卽 $P-p=\frac{P}{R}(R-r)$.



而由前題,多角形之邊數增加,則 $R-r$ 得縮至任意小,因而多角形之邊數充分增加,則 $\frac{P}{R}(R-r)$,卽 $P-p$ 得縮至任意小.而 P 恆大於圓周,p 恆小於圓周,故圓周與 P 或 p 之差,小於 $P-p$.故若多角形之邊數充分增加,則此圓周與 P 或 p 之差,得令縮至任意小,故圓周爲 P 及 p 之公極限.又設兩相似內接及外切正多角形之面積,分別爲 s 及 S,則因 △COD 與 △AOB 之差爲梯形 CABD,其面積爲 $\frac{1}{2}(CD+AB)\times EF$,故是等多角形面積之差爲 $S-s=\frac{1}{2}(P+p)(R-r)$,因而 $S-s<P(R-r)$.若多角形之邊數無限增大,則 $P(R-r)$ 得縮至任意小,因而 $S-s$ 亦得縮至任意小.然 S 恆大於圓面積,s 恆小於圓面積,故圓面積與 S 或 s 之差,等於 $S-s$,因而是等差得令縮至任意小.故圓面積爲 S 或 s 之公極限.

1316.　二圓周之比,等於其半徑之比,面積之比,等於半徑平方之比.

證　設 R 及 R′ 爲二圓之半徑,C 及 C′ 爲其周,S 及 S′ 爲其面積.又命二圓之內接相似正多角形之周爲 P 及 P′,面積爲 A 及 A′.於是因兩多角形相似,故 $P:P'=R:R'$,$A:A'=R^2:R'^2$ [1297題].是等關係,不問多角形之邊數若何,恆能成立.又若邊數無限增加,則 P 以 C 爲極限而趨近之,P′ 以 C′ 爲極限而趨近之.但 $P:P'$ 等於定比 $R:R'$,故其極限之比亦等於同比,故 $C:C'=R:R'\cdots\cdots(1)$.又 A 之極限爲 S,及 A′ 之極限爲 S′,故 $S:S'=R^2:R'^2\cdots\cdots(2)$.

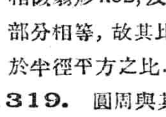


1317.　二圓周之比,等於其直徑之比;面積之比等於直徑平方之比.

證　由前題(1),$C:C'=2R:2R'\cdots\cdots(1)$.由前題(2),$S:S'=4R^2:4R'^2=\overline{2R}^2:\overline{2R'}^2\cdots(2)$.

1318.　兩相似弧之比,等於其半徑之比;兩相似扇形面積之比,等於其半徑平方之比.

證　相似弧 AB,A′B′ 張於中心之角相等,故其在全圓周中所佔之部分相等,故其比等於圓周之比,因而又等於半徑之比.又相似扇形 AOB,及 A′O′B′ 在全圓中所佔之部分相等,故其比等於圓之比,因而又等於半徑平方之比.



1319.　圓周與其直徑之比一定,卽一切圓中皆同.

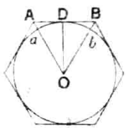
證　由1317題(1),$C:2R=C':2R'$,故云.此一定之比,以 π 表之,故直徑爲 2R 之任意圓中,圓周 $C=2\pi R$.

注意　依照高等算學之證明,π 爲不可通

約數，故僅得求其近似値．但 π 係表其精密之値者．

1320. 圓之面積等於其圓周與半徑之積之半．

證 設圓之任意外切正多角形之面積爲 A，其周爲 P，其邊心距［等於圓之半徑］爲 R，則 $A=\frac{1}{2}P\cdot R$［883題］，即 $A:P=\frac{1}{2}R$．將多角形之邊數，順次增大二倍，則 A 以圓面積 S 爲極限而趨近之，P 以圓周 C 爲極限而趨近之．而 A 與 P 之比等於常數 $\frac{1}{2}R$，故其極限之比亦等 $\frac{1}{2}R$，即 $S:C=\frac{1}{2}R$，故 $S=\frac{1}{2}C\cdot R$．



1321. 圓面積等於半徑之平方與常數 π 之積．

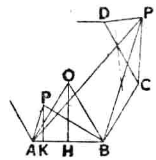
證 前題結果中之 C，其値爲 $2\pi R$［1319題］，故 $S=\pi R^2$．

1322. 圓之扇形之面積，等於其弧與半徑之積之半分．

證 1320題之圖中，設以 c 表扇形 aOb 之弧 ab，以 s 表其面積，則 c 與 s 分別在圓周 C 及圓面積 S 中所佔之部分相等，故 $s:S=c:C=\frac{1}{2}c\times R:\frac{1}{2}C\times R$．然 $S=\frac{1}{2}C\times R$，故 $s=\frac{1}{2}c\times R$．

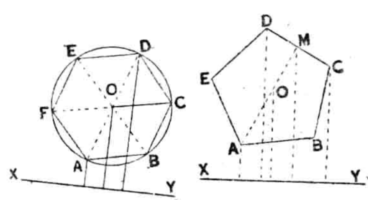
1323. 由 n 邊正多角形內之任意點，至各邊之距離之和，等於邊心距之 n 倍．若任意點在形外，則如何？

證 設 n 邊正多角形爲 ABC……，其中心爲 O，形內之任意點爲 P，由 O 至邊所引之垂線爲 OH，命其一邊爲 a，由 P 至 AB，BC，……所引之垂線爲 $p_1, p_2, \cdots\cdots$，正多角形之面積爲 S，則 $S=\triangle OAB+\triangle OBC\cdots\cdots=\frac{1}{2}OH\cdot AB+\frac{1}{2}OH\cdot BC+\cdots\cdots=\frac{1}{2}OH\cdot na$，又 $S=\triangle PAB+\triangle PBC+\cdots\cdots=\frac{1}{2}p_1\cdot AB+\frac{1}{2}p_2\cdot BC+\cdots\cdots=\frac{1}{2}a(p_1+p_2+\cdots\cdots)$．故 $\frac{1}{2}a(p_1+p_2+\cdots\cdots)=\frac{1}{2}OH\cdot na$，故 $p_1+p_2+\cdots\cdots=n\cdot OH$．若 P 在形外，則由此點至各邊或其延線所引之垂線內，與原形在同側者之和，減以在異側者之和，其剩餘等於 $n\cdot OH$．何則？若 P 之位置，如圖所示，則由 P 至 AB，BC，……所引之垂線與原形在同側，至 CD 所引之垂線與原形在異側，又以與原形在同側之垂線爲高之三角形之和，減以以與原形在異側之垂線爲高之三角形之和，其差與原形等積，故如上云云．



1324. 由 n 邊正多角形之各角頂，至不截此多角形之任意直線所引垂線之和，等於由此多角形之中心至同直線所引垂線之 n 倍．

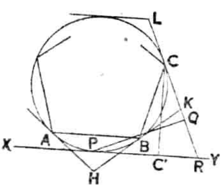
證 先設 n 爲偶數而證之．命正多角形爲 ABCD……，聯結其相對之頂點 A，D 之直線，過此多角形之中心 O，故設由 A，B，C，……及 O，至不截此多角形之任意直線 XY 所引之垂線，分別爲 $a, b, c, \cdots\cdots$ 及 g，



則 $a+d=2g$, $b+e=2g$,……, 故 $a+b+c+d+\cdots\cdots=ng$. 次設 n 爲奇數,此時聯結一頂點與其對邊中點 M 之直線過中心 O. 命 $AO:OM=p:q$, 則 $(p+q)g=qa+p\cdot\frac{1}{2}(c+d)$ [1183題]. 同理, $(p+q)g=qb+p\cdot\frac{1}{2}(d+e)$,……. 相加,得 $(p+q)ng=q(a+b+c+\cdots\cdots)+p(a+b+c+\cdots\cdots)=(p+q)(a+b+c+\cdots\cdots)$, 故 $ng=a+b+c+\cdots\cdots$.

1325. 由圓之內接 n 邊正多角形之各角頂, 至切圓周於任意點之切線引垂線, 則是等垂線之和,等於半徑之 n 倍.

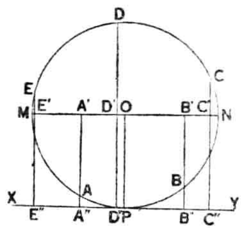
圖 設 n 邊正多角形爲 ABC……, 圓周上之任意點爲 P, 過 P 所引之切線爲 XY, 由角頂 C 至 XY, 所引之垂線爲 CC′. 又設由 A, B, C,…… 上之



n 條切線所成之外切多角形爲 HKL……, 此多角形爲 n 邊正多角形. 由 P 至 HKL…之各邊引垂線, 命其一爲 PQ, 而垂直於 C 上之切線 KL. 命 QL 與 XY 之交點爲 R, 則兩直角三角形 RCC′, RPQ 中, $\hat{R}$ 爲兩形所共, RC=RP, 故 PQ=CC′. 同理,由 A, B, C,……至 XY 所引之垂線, 分別等於由 P 至外切正多角形切圓於 A, B, C,……之各邊所引之垂線,因而是等垂線之和亦相等. 然 P 爲正多角形 HKL……形內之點, 故由 P 至 HKL……之各邊所引垂線之和, 等於此多角形邊心距,卽半徑之 n 倍[1323題], 故由 A, B, C,……至 XY 所引垂線之和,亦等於半徑之 n 倍.

1326. 由正多角形之各角頂, 至外接圓之任意直徑引垂線,則在此直徑一方之垂線之和,等於他方之垂線之和.

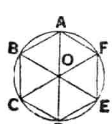
圖 設正多角形之頂點爲 A, B, C……,外接圓之中心爲 O, 任意直徑爲 MN, 由 A B, C,……至 MN 所引之垂線爲 AA′, BB′,……, 命其與平行於 MN之切線XPY



之交點, 分別爲 A″, B″,……. 於是 AA″+BB″+……=n·OP [1325題]. 而 A′A″, B′B″,……皆等於 OP, 故 A′A″+B′B″+……=n OP, 故 AA″+BB″+…=A′A″+B′B″+……. 雙方減以 AA″+BB″+…, 則 AA′+BB′+……=CC′+DD′+EE′+….. 卽由在 MN 一方之頂點 A, B,……至 MN 所引垂線之和,等於由他方之頂點 C, D, E,……至 MN 所引垂線之和.

1327. 正六角形之周, 等於其外接圓直徑之三倍.

圖 設正六角形爲 ABCDEF, 其外接圓之中心爲 O, 聯結 OA, OB,…, 則 OA, OB,…… 分別爲角 A, B,……之二等分線. 然正六角形之各角,爲二直角之三分之二, 故其半分爲二直角之三分之一, 故 △OAB, △OBC,……皆爲正三角形, 其邊 AB, BC,……皆



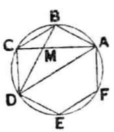
等於圓之半徑,故其周等於半徑之六倍,即直徑之三倍.

1328. 試由圓之內接正六角形與外切正方形,以證 π 之值在 3 與 4 之間.

證 圓周大於其內接正六角形之周,而小於其外切正方形之周.然圓之內接正六角形之周爲直徑之三倍[1327題],圓之外切正方形之周,爲直徑之四倍.故圓周倍於直徑之數 π 大於 3 而小於 4,即在 3 與 4 之間.

1329. 正六角形 ABCDEF 之對角線 AC, BD 按何比互分.

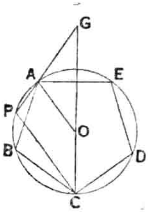
解 命 AC, BD 之交點爲 M, 聯結 AD, 則 AD 爲外接圓之直徑.又圓之內接正六角形之邊等於半徑,故 $AD=2BC$. 弧 AB, CD 相等,故 $AD \parallel BC$, 故 $AM:MC=AD:BC=2BC:BC=2:1$.



即對角線 AC, BD 按 2 與 1 之比互分.

1330. 設正五角形 ABCDE 內接於一圓, P 爲弧 AB 之中點, 則 AP 及圓之半徑之和, 等於 PC.

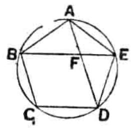
證 設 O 爲圓之中心.正五角形之各角爲 $\frac{6}{5}\hat{R}$, OC 二等分 $B\hat{C}D$, 故 $O\hat{C}B=\frac{3}{5}\hat{R}$. 又 P 爲弧 AB 之中點, 故 $P\hat{C}B=\frac{1}{5}\hat{R}$. 故 $O\hat{C}P=\frac{3}{5}\hat{R}-\frac{1}{5}\hat{R}=\frac{2}{5}\hat{R}$. 而 $C\hat{P}A=C\hat{B}A=\frac{6}{5}\hat{R}$, 故設 CO, PA 之延線交於 G, 則 $P\hat{G}C=\frac{2}{5}\hat{R}=O\hat{C}P$, 故 $PG=PC$.



又 CG 過弧 AE 之中點,故 $A\hat{O}G=\frac{2}{5}\hat{R}=A\hat{G}O$, 故 $AO=AG$. 故 $PC=PG=PA+AG=PA+OA$.

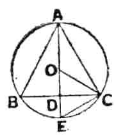
1331. 正五角形中不過同頂點之對角線,按中末比互分.

證 設正五角形 ABCDE 之對角線 AD, BE 交於 F. 作外接圓, 則三角形 ABE, AFE 中, $\hat{E}$ 爲公角, 弧 AE = 弧 ED, 故 $A\hat{B}E=F\hat{A}E$,故此兩三角形相似, 故 $BE:AE=AE:EF$. 而 $AE=AB=CD=BF$. 故 $BE:BF=BF:EF$, 即分於中末比.



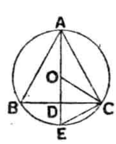
1332. 圓之內接正三角形之各邊, 自過對角頂之直徑,截取其四分之一.

證 設圓之中心爲 O, 內接正三角形爲 ABC, 直徑 AE 與邊 BC 之交點爲 D, 聯結 CO, CE. 於是因 AE, CO 分別將正三角形之角 BAC, ACB 二等分, 且 $B\hat{A}E=B\hat{C}E$, 故 $O\hat{C}D=E\hat{C}D$. 又 AE 垂直於 BC, 故 $DE=OD=\frac{1}{2}OE=\frac{1}{4}AE$.



1333. 設正三角形及正六角形內接於同圓,則兩形邊上正方形之比如何?

解 設中心爲 O 之圓中,內接正三角形爲 ABC, 內接正六角形之一邊爲 CE. 內接正六角形之一邊等於半徑,故聯結 OC, OE, 則得正三角形 OCE. 而 OE 垂直於 BC, 其交點 D 爲 BC, OE 之中點 [1332題], 故 $\overline{CD}^2=\overline{CE}^2-\overline{DE}^2=\overline{CE}^2-\frac{1}{4}\overline{CE}^2$. 而 $\overline{BC}^2=4\overline{CD}^2$, 故 $\overline{BC}^2=3\overline{CE}^2$, 故 $\overline{BC}^2:\overline{CE}^2=3:1$.



1334. 正三角形外接圓之直徑, 等於內

切圓直徑之二倍.

證 前題圖中, OC 爲外接圓之半徑, OD 爲內切圓之半徑,而 OC＝2OD[1332題],卽外接圓之直徑等於內切圓直徑之二倍.

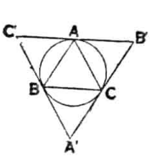
1335. 延長正六角形之各邊,而聯結其交點,則得新正六角形,而此二正六角形之比爲 3:1.

證 設正六角形爲 ABCDEF, 其各邊延線之交點爲 A′, B′, C′, D′, E′, F′; 求證 A′B′C′D′E′F′ 爲正六角形. 此時 △A′AF, △B′BA,…… 之角,皆等於正三角形之角,故皆爲正三角形.

故 B′A＝AF＝FF′. 又△A′B′F′,△A′FF′中,各角相等,故 B′F′:A′F′＝A′F′:FF′, 故 B′F′:FF′＝$\overline{A'F'}^2:\overline{FF'}^2$. 而 B′F′:FF′＝3:1, 故 $\overline{A'F'}^2:\overline{FF'}^2=3:1$. 又兩正六角形之比爲 $\overline{A'F'}^2:\overline{FF'}^2$, 因而兩形之比等於 3:1.

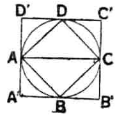
1336. 所設圓之內接正三角形,正方形,正六角形分別爲同圓之外切正三角形,正方形,正六角形之四分之一,二分之一,四分之三.

證 設圓之內接正三角形爲 ABC, 外切正三角形爲 A′B′C′, 其切點爲 A, B, C. 於是 △AB′C 中, B′ÂC, B′ĈA 皆等於正三角形之一角,因而 AB′C 爲正三角形, 而 AB′＝AC.

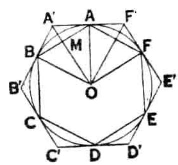


同理, AC′＝AB. 故外切正三角形與內接正三角形之邊之比, 等於 2:1, 故其面積之比爲 $2^2:1^2$, 卽 4:1. 故內接正三角形爲外切正三角形之四分之一.

次,設內接正方形爲 ABCD, 外切正方形爲 A′B′C′D′, 其切點爲 A, B, C, D. 此時外切正方形之一邊, 等於內接正方形之對角線 AC, 故 A′B′C′D′:ABCD＝$\overline{AC}^2:\overline{AB}^2=2\overline{AB}^2:\overline{AB}^2=2:1$. 故內接正方形爲外切正方形之二分之一.



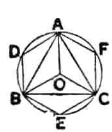
復次,設內接正六角形爲 ABCDEF, 外切正六角形爲 A′B′C′D′E′F′, 其切點爲 A, B, C, ……. 命圓之中心爲 O, 聯結 OA, OB, OA′, OF′, 命 OA′, AB 之交點爲 M, 則 △OAB, △OA′F′ 皆爲正三角形,其比等於高之二乘比.



又正六角形 A′B′C′……, ABC……分別爲正三角形 OA′F′, OAB 之六倍, 故 A′B′C′……:ABC……＝$\overline{OA}^2:\overline{OM}^2$. 而 $\overline{OM}^2=\frac{3}{4}\overline{OA}^2$, 故 $\overline{OA}^2:\overline{OM}^2=\overline{OA}^2:\frac{3}{4}\overline{OA}^2=4:3$. 故內接正六角形等於外切正六角形之四分之三.

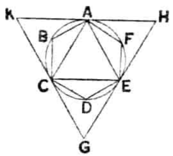
1337. 圓之內接正六角形, 等於同圓之內接正三角形之二倍.

證 設圓之中心爲 O, 其內接正三角形及正六角形爲 ABC, ADBECF, 聯結 OA, OB, OC. 於是因正六角形之一邊,等於半徑,故△OBC ≡ △BEC, △OAB ≡ △ADB, △OAC ≡ △AFC, 故正六角形 ADBECF 爲正三角形 ABC 之二倍.



1338. 圓之內接正六角形與同圓之外切正三角形面積之比如何?

解 設圓之內接正六角形爲 ABCDEF；又設由 A, C, E 上之切線所成之三角形爲 GHK, 則 GHK 爲圓之外切正三角形. 引正六角形之對角線 AC, CE, AE, 則 ACE 爲正三角形.



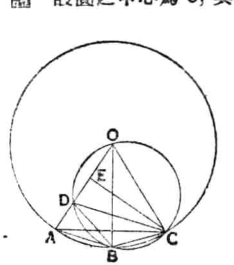
今正六角形 ABCDEF 等於正三角形 ACE 之二倍[1337題],正三角形 GHK 爲正三角形 ACE 之四倍[1336題], 故內接正六角形與外切正三角形之比爲 2:4, 即 1:2.

1339. 圓之內接正六角形爲同圓之內接正三角形與外切正三角之比例中項. [用前題之圖].

證 由 1338 題, GHK:ABCDEF=2:1, 又由 1337 題, ABCDEF:ACE=2:1. 故 GHK:ABCDEF=ABCDEF:ACE.

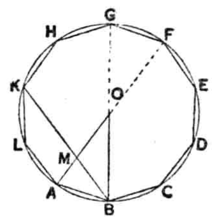
1340. 圓之內接正五角形一邊上之正方形,等於內接正十角形一邊上之正方形及半徑上正方形之和.

證 設圓之中心爲 O, 其內接正十角形之二邊爲 AB, BC, 則 AC 爲內接正五角形之一邊. 過 O, B, C 三點作圓, 令交 OA 於 D, 聯結 OB, BD. 於是因 AB 爲正十角形之一邊, 故 $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 2A\hat{O}B$, $O\hat{A}B = O\hat{C}B = A\hat{D}B$, 故 AB=BD. 又 $A\hat{B}D = A\hat{O}B = O\hat{B}D$, 故 BD=OD. 故 OD, DB, BC 爲圓 OCB 之內接正五角形之邊,因而垂線 CE 二等分 OD 於 E. 又因 $A\hat{B}D = A\hat{O}B$, 故 AB 切於圓 OCB, 故 $\overline{AB}^2 = AO\cdot AD = (AE+OE)(AE-OE) = \overline{AE}^2 - \overline{OE}^2$, 即 $\overline{AE}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{AB}^2$. 雙方加 $\overline{CE}^2$, 則 $\overline{AE}^2 + \overline{CE}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{AB}^2$, 故 $\overline{AC}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{AB}^2$.



1341. 圓之半徑分於中末比時, 其較大之分等於內接正十角形之一邊.

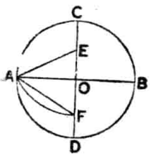
證 設圓之中心爲 O, 其內接正十角形爲 ABCD……KL, 聯結 BK,令交 AO 於 M. 於是 $\hat{O}$ 爲 $4\hat{R}$ 之十分之一, 即 $2\hat{R}$ 之五分之一；而 $O\hat{A}B = O\hat{B}A$, 故各爲 $2\hat{R}$ 之五分之二, 因而 $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 2\hat{O}$. 又 $A\hat{B}M$ 立於弧 ALK, 即全圓周之五分之一上, 故 $A\hat{B}M = \frac{1}{10}\cdot 4\hat{R} = \hat{O}$, 因而 $M\hat{B}O = \frac{1}{10}\cdot 4\hat{R} = \hat{O}$. 又 $B\hat{A}M$ 立於弧 BCDEF, 即全圓周之十分之四, 即五分之二上, $B\hat{M}A$ 立於弧 AB+弧 FGHK, 即全圓周之十分之四, 即五分之二上,故 $B\hat{A}M = B\hat{M}A$. 因而 △OAB, △BAM 相似,又因 $\hat{O} = M\hat{B}O$, $B\hat{A}M = B\hat{M}A$, 故 OM=MB=BA. 又因 △OAB, △BAM 相似,故 AO:AB=AB:AM, 即 AO:OM=OM:AM. 故 AO 按中末比分於 M 時,其較大之分 OM 等於內接正十角形之一邊 AB.



1342. 設中心爲 O 之圓中, 二直徑 AB, CD, 互相垂直,以 OC 之中點 E 爲中心, EA 爲半徑作圓, 令交 CD 於 F, 則 OF 等於內接正

十角形之一邊，AF 等於內接正五角形之一邊.

證 $\overline{OA}^2=\overline{EA}^2-\overline{OE}^2=(EA+EO)(EA-OE)$, 即 $\overline{OD}^2=CF\cdot OF$. 而 $\overline{OD}^2=OF\cdot OD+FD\cdot OD$, $CF\cdot OF=(OF+OD)\cdot OF=\overline{OF}^2+OF\cdot OD$. 故 $OF\cdot OD+FD\cdot OD=\overline{OF}^2+OF\cdot OD$, 故 $\overline{OF}^2=FD\cdot OD$, 即 $OD:OF=OF:FD$.



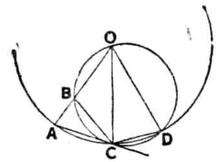
故 OF 等於圓 O 之內接正十角形之一邊 [1431題]. 次, $\overline{AF}^2=\overline{OA}^2+\overline{OF}^2$, 故 AF 等於內接正五角形之一邊 [1340題].

別證 命半徑為 r, 則 $\overline{EA}^2=\overline{AO}^2+\overline{OE}^2=r^2+\left(\frac{1}{2}r\right)^2$, 故 $EA=\frac{\sqrt{5}}{2}r$. 而 EF = EA, OF = EF − OE, 故 $OF=EA-OE=\frac{\sqrt{5}}{2}r-\frac{1}{2}r=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$, 故 OF 為圓 O 之內接正十角形之一邊 [1386題]. 次, $\overline{AF}^2=\overline{AO}^2+\overline{OF}^2=r^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)^2=\frac{10-2\sqrt{5}}{4}r^2$, 是以 $AF=\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2}r$, 故 AF 為內接正五角形之一邊 [1386題].

注意 因 OF, AF 分別為內接正十角形，正五角形之邊，故由別證，1340 題之關係，甚易知之.

1343. 設中心為 O 之圓中，半徑 OA 按 $OA:OB=OB:AB$ 內分，引弦 AC 令等於 OB, 過三點 O, B, C 作圓，令交前圓於 D, 則 OB, BC, CD 為第二圓中內接正五角形之三邊.

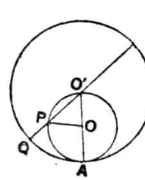
證 $OA:OB=OB:AB$, $OB=AC$, 故 $OA:AC=AC:AB$, 故△OAC 與△CAB 相似，而 $C\hat{B}A$



$=O\hat{C}A$, 故 $C\hat{A}B=C\hat{B}A$, 因而 $AC=BC=OB$, 故 $C\hat{O}B=O\hat{C}B$. 而由△OAC, △CAB 之相似, $A\hat{O}C=A\hat{C}B$, 故 $O\hat{C}A=O\hat{A}C=2A\hat{O}C$, 故 $A\hat{O}C=\frac{1}{5}\cdot 2\hat{R}$, 故 OB, BC 為圓 OBC 之內接正五角形之二邊. 又 △OAC, △OCD 中, $OA=OC=OD$, $O\hat{D}C=C\hat{B}A=O\hat{A}C=O\hat{C}A=O\hat{C}D$, 故 $C\hat{O}D=A\hat{O}C$, 因而 $BC=CD$, 故 CD 亦為圓 OBC 之內接正五角形之一邊.

1344. 設一圓周內切於半徑為二倍之圓周，且不使滑動而廻轉，則其周上之點，所經之路，為大圓之直徑.

證 設圓 O 內切於圓 O′, 其半徑為圓 O′ 半徑之半分；又圓 O 內切於圓 O′, 且不使滑動而廻轉. 命 P 為圓 O 周上之任意點，引聯結 O′P 之直徑，則 $A\hat{O}P=2A\hat{O'}P$ [451 題]. 故弧 AP = 弧 AQ. 何則，蓋因

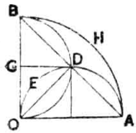


$A\hat{O}P$ 為 $4\hat{R}$ 之 $\frac{1}{m}$, 則 $A\hat{O'}P$ 為 $4\hat{R}$ 之 $\frac{1}{2m}$, 而圓周 O′ 之長，為圓周 O 之二倍 [1316 題] 故也. 故 P 為圓 O′ 之直徑.

1345. 在象限 OAHB 之二半徑 OA, OB 上，作二半圓 OEDA, OFDB, 則 A, B, D 在一直線上. 又 OFDA, OEDB 之面積，各等於 OA 上正方形之四分之一.

證 聯結 DA, DB, DO, 由 D 平行於 OB 引 DC, 平行於 OA 引 DG, 則 $O\hat{D}A=\hat{R}$, $O\hat{D}B=\hat{R}$,

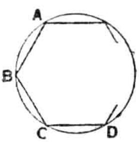
故 $O\hat{D}A+O\hat{D}B=2\hat{R}$, 故 A, D, B 在一直線上.



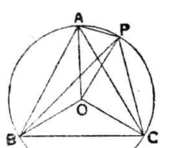
又 OFDA 之面積, 係由 OFDC 及象限 DAC 所成, 而象限 DAC 等於象限 DFOG, 故 OFDA 等於正方形 OCDG, 即半徑 OA 上正方形之四分之一. 同理, OEDB 之面積, 亦等於半徑 OB 上正方形之四分之一.

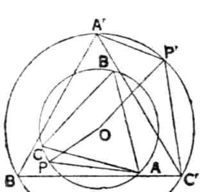
1346. 等角多角形得內接於圓否?

解 設 ABCD……爲圓之內接等角多角形,則弧 ADC=弧 BAD. 兩邊減以公弧 AD, 則弧 CD=弧 BA, 因而邊 AB=邊 CD. 同理, ABCD……中,一間一所取之邊相等. 故若等角多角形一間一所取之各邊不等,則不得內接於圓. 故等角多角形不皆能內接於圓.



1347. 設 P 爲正三角形外接圓周上之任意點,則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 一定. 又若 ABCP, A'B'C'P' 爲同心圓, ABC, A'B'C' 爲正三角形,則 $\overline{AP'}^2+\overline{BP'}^2+\overline{CP'}^2=\overline{A'P}^2+\overline{B'P}^2+\overline{C'P}^2$.





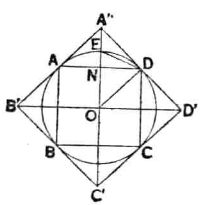
證 因外心 O 爲正三角形 ABC 之重心,故由738題, $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2+\overline{CO}^2+3\overline{PO}^2=6\overline{PO}^2$, 即一定. 次再由 783 題, $\overline{AP'}^2+\overline{BP'}^2+\overline{CP'}^2=3\overline{P'O}^2+3\overline{PO}^2$, 又 $\overline{A'P}^2+\overline{B'P}^2+\overline{C'P}^2=3\overline{PO}^2+3\overline{P'O}^2$, 故 $\overline{AP'}^2+\overline{BP'}^2+\overline{CP'}^2=\overline{A'P}^2+\overline{B'P}^2+\overline{C'P}^2$.

1348. 圓周介乎其內接及外切二多角形周之間.

證 內接多角形周上之點, 除其角頂外, 皆在圓內, 故圓周在內接多角形之外. 又外切多角形周上之點, 除其切點外, 皆在圓外, 故圓周在其外切多角形之內. 故圓周介乎其內接及外切二多角形之間.

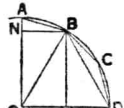
1349. 圓之內接正八多角形等於內接正方形及外切正方形之邊所包之矩形.

證 設圓之中心爲 O, 其內接正方形爲 ABCD, 外切正方形爲 A'B'C'D', OA' 交 AD 於 N, 交弧 AD 於 E. 聯結 DE, 則 DE 爲內接正八角形之一邊. 聯結 OD, 則 $D\hat{O}A'=D\hat{A}'O=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 $OE=OD=DA'=\frac{1}{2}A'D'$. 又 OA' 垂直二等分 AD 於 N, 故 $DN=\frac{1}{2}AD$, 因而 $\triangle ODE=\frac{1}{2}\cdot OE\cdot DN=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A'D'\cdot\frac{1}{2}AD=\frac{1}{8}A'D'\cdot AD$. 然內接正八角形等於 △ODE 之八倍, 即 $\frac{1}{8}A'D'\cdot AD$ 之八倍,因而等於 $A'D'\cdot AD$.



1350. 圓之內接正十二角形之面積, 等於半徑上正方形之三倍.

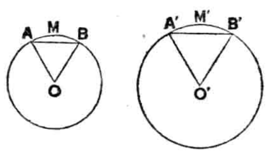
證 設圓之中心爲 O, 其內接正十二角形爲 ABC……, 聯結 OB, BD, 引垂線 BM. 於是因弧 BCD 爲圓周之 $\frac{1}{6}$, 故 $B\hat{O}D=\frac{1}{6}\cdot4\hat{R}=\frac{1}{3}\cdot2\hat{R}$, 故 OBD 爲正三角形,



垂線BM之足M爲OD之中點. 而OM等於由B至OA所引之垂線BN, 故$2\triangle OAB = OA\cdot OM = OD\cdot\frac{1}{2}OD = \frac{1}{2}\overline{OD}^2$. 故內接正十二角形之面積, 卽$\triangle OAB$之12倍, 等於$6\times\frac{1}{2}\times\overline{OD}^2 = 3\overline{OD}^2$.

1351. 一扇形之角等於他扇形之角, 則二扇形之比, 等於半徑之二乘比. 聯結弧之兩端所生弓形之比, 亦等於半徑之二乘比.

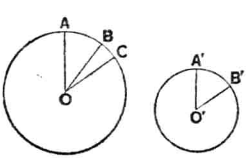
證 設中心爲O之圓中, 扇形OAMB之角



O, 等於中心爲O′之圓中扇形O′A′M′B′之角O′. 此時, 圓O: 扇形OAMB $=4\hat{R}:\hat{O}$, 圓O′: 扇形O′A′M′B′ $=4\hat{R}:O'$. 而$\hat{O}=\hat{O}'$, 故扇形OAMB: 扇形O′A′M′B′ = 圓O: 圓O′ $=\overline{OA}^2:\overline{O'A'}^2$.

次, $\triangle OAB$, $\triangle O'A'B'$相似, 故$\triangle OAB:\triangle O'A'B' = \overline{OA}^2:\overline{O'A'}^2$, 故扇形OAMB: 扇形O′A′M′B′ $=\triangle OAB:\triangle O'A'B'$, 故扇形OAMB $-\triangle OAB$: 扇形O′A′M′B′ $-\triangle O'A'B' = \triangle OAB:\triangle O'A'B' = \overline{OA}^2:\overline{O'A'}^2$, 卽弓形AMB: 弓形A′M′B′ $=\overline{OA}^2:\overline{O'A'}^2$.

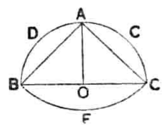
1352. 兩圓之弧相等, 則其所對中心角之比, 等於半徑之反比.



證 設兩圓之中心爲O, O′, 弧AB = 弧A′B′. 引OC, 合$A\hat{O}C = A'\hat{O}'B'$, 則$A\hat{O}B:A\hat{O}C$ = 弧AB: 弧AC. 然$A\hat{O}C = A'O'B'$, 弧AB = 弧A′B′, 故$A\hat{O}B:A'O'B'$ = 弧A′B′: 弧AC. 又弧A′B′: 弧AC $=O'A':OA$, 故$A\hat{O}B:A'\hat{O}'B' = O'A':OA$.

1353. 在直角二等邊三角形ABC之斜邊BC上, 作半圓BDAEC, 又以A爲中心, AB爲半徑, 作弧BFC, 則弓形BFC等於二弓形BDA, CEA之和.

證 命BC之中點爲O, 聯結AO, 則因

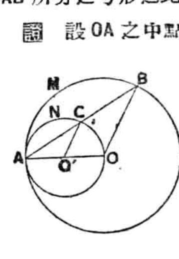


$B\hat{A}C = \hat{R} = A\hat{O}B$, 故弓形BFC: 弓形BDA $=\overline{AB}^2:\overline{AO}^2 = 2:1$ [1351題]. 卽弓形BDA等於弓形BFC之半分. 而兩弓形BDA, AEC相等, 故弓形BFC等於兩弓形BDA, AEC之和.

別證 弓形BFC $=\frac{1}{4}\pi\overline{AB}^2 - \frac{1}{2}\overline{AB}^2 = \frac{1}{4}(\pi-2)\times\overline{AB}^2$. 同理, 弓形ADB, AEC皆等於$\frac{1}{4}(\pi-2)\overline{AO}^2$. 而$2\overline{AO}^2 = \overline{AB}^2$, 故弓形BFC = 弓形ADB + 弓形AEC.

1354. 設O爲圓之中心, AB爲圓之弦, 過弦之一端, 以AO爲直徑作圓, 則二圓爲弦AB所分之弓形之比, 等於4:1.

證 設OA之中點, 卽內圓之中心爲O′, 命AB與圓O′之交點爲C, 聯結O′C, OB, 則因

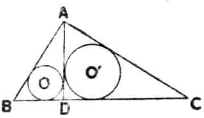


$O\hat{B}A = O\hat{A}B = O'\hat{C}A$, 故$A\hat{O}B = A\hat{O}'C$, 故弓形AMB: 弓形ANC $=\overline{OA}^2:\overline{O'A}^2$ [1351題] $=\overline{OA}^2:\overline{\tfrac{1}{2}OA}^2 = 4:1$.

1355. 直角三角形ABC中, 由直角頂

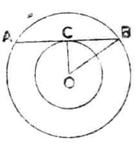
至斜邊引垂線 AD, 則兩直角三角形 ADB, ADC 之內切圓面積之比, 等於此兩三角形之比.

證 命兩直角三角形 ADB, ADC 之內切圓中心為 O, O′, 其半徑為 r, r'. △ADB, △ADC 相似 [1024題], 故 △ADB: △ADC 等於 $r:r'$ 之二乘比. 而圓 O: 圓 O′ 亦等於 $r:r'$ 之二等比 [1316題], 故圓 O: 圓 O′ = △ADB : △ADC.



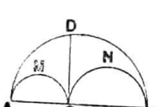
1356. 二同心圓間之面積, 等於以大圓周中切小圓周之弦為直徑所作圓之面積.

證 設同心圓之中心為 O, 外圓之弦 AB 與內圓之周切於點 C, 聯結 OC, OB, 則外圓之面積為 $\overline{OB}^2\pi$, 內圓之面積為 $\overline{OC}^2\pi$, 故兩圓周間之面積為 $(\overline{OB}^2-\overline{OC}^2)\pi$. 而 $O\hat{C}B=\hat{R}$, 故 $\overline{OB}^2-\overline{OC}^2=\overline{BC}^2$, 故 $(\overline{OB}^2-\overline{OC}^2)\pi$ 等於以 BC 為半徑之圓面積, 而 C 為 AB 之中點, 故又等於以 AB 為直徑之圓面積.



1357. 由半圓直徑 AB 上之點 C, 引 AB 之垂線, 令交圓周於 D. 又以 AC, BC 為直徑, 在所設半圓之內部, 作二半圓周, 則由三半圓周所成曲線形之面積, 等於以 CD 為直徑之圓面積.

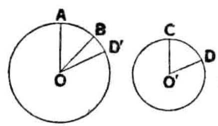
證 曲線形 AMCNBD 之面積, 等於 AB 為直徑之半圓, 減以 AC 及 BC 為直徑之兩半圓, 故



$AMCNBD=\frac{1}{2}\{(\frac{1}{2}AB)^2-(\frac{1}{2}AC)^2-(\frac{1}{2}BC)^2\}\pi=\frac{1}{8}\{(AC+BC)^2-\overline{AC}^2-\overline{BC}^2\}\pi=\frac{1}{8}\cdot 2AC\cdot BC\cdot\pi=\frac{1}{4}\cdot\overline{CD}^2\pi$ [1025題] $=(\frac{1}{2}CD)^2\pi$, 即以 CD 為直徑之圓面積.

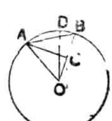
1358. 半徑不同之圓中, 若扇形角之比等於半徑平方比之反比, 則扇形等積.

證 設半徑不同之圓之中心為 O, O′, 扇形 ABO 之角 AOB, 對扇形 CDO′ 之角 CO′D 之比, 等於 $\overline{OA}^2:\overline{O'C}^2$ 之反比, 即 $\overline{O'C}^2:\overline{OA}^2$. 引 OD′, 令 AOD′ = CO′D, 則扇形 ABO: 扇形 AD′O = $A\hat{O}B : A\hat{O}D'$, 扇形 CDO′: 扇形 AD′O $=\overline{O'C}^2:\overline{OA}^2$. 然 $A\hat{O}B:A\hat{O}D'=\overline{O'C}^2:\overline{OA}^2$ [假設], 故扇形 ABO: 扇形 AD′O = 扇形 CDO′ : 扇形 AD′O, 故扇形 ABO = 扇形 CDO′.



1359. 由中心為 O 之弧 AB 之一端 A, 至 OB 引垂線, 命其足為 C, 在弧 AB 上取與 AC 等長之弧 AD, 作 AB 及 OD, 則弓形 ADB 與扇形 DOB 等積.

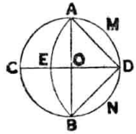
證 弓形 ADB = 扇形 OADB − △OAB = $\frac{1}{2}$弧 ADB·OB − $\frac{1}{2}$AC·OB. 然弧 AD = AC, 故弓形 ADB = $\frac{1}{2}$弧 ADB·OB − $\frac{1}{2}$弧 AD·OB = $\frac{1}{2}$弧 BD·OB = 扇形 DBO.



1360. 設中心為 O 之圓中, 互相垂直之二直徑為 AB, CD, 以 D 為中心, DA 為半徑作弧 AEB, 則新月形 ACBE 與三角形 DAB 等積.

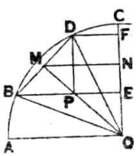
證 弓形 ABE = 弓形 ADM + 弓形 DBN [1353題], 故弓形 ABE + △DAB 等於半圓.

然弓形 ABE＋新月形 ACBE 亦等於半圓, 故新月形 ACBE 等於三角形 DAB.

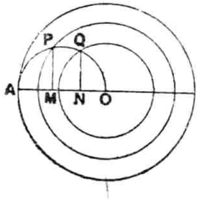


1361. 設中心爲 O 之圓中, 互相垂直之二半徑爲 OA, OC, 在弧 AC 上取點 B, D, 令弧 AB, CD 相等, 由 B, D 至 OC 引垂線, 命其足爲 E, F, 則圖形 BEFD 與扇形 BOD 等積.

證　弧 AB＝弧 CD, 故由 B 至 OA 所引之垂線等於 DF, 故設由 D 至 BE 所引之垂線爲 DP, 則 OE＝EP. 由是命 OP 之延線與 BD 之交點爲 M, 則 $O\hat{P}E=\frac{1}{2}\hat{R}=B\hat{P}M$, 故 OM ⊥ BD. 又命由 M 至 OC 所引之垂線爲 MN, 則兩直角三角形 OMN, PMD 相似, 而 OM : MN＝DP:DM, 故 OM·DM＝MN·DP＝MN·EF. 而 M 爲 BD 之中點, 因而 N 爲 EF 之中點, 故 OM·DM 等於△OBD, 而 MN·EF 等於梯形 BDFE [279, 739 題]. 故△OBD＝梯形 BDFE. 雙方加弓形 BD, 則圖形 BEFD 與扇形 BOD 等積.



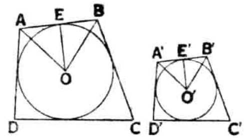
1362. 設 OA 爲圓 O 之半徑, 在 OA 上取 M, N, 令 AM＝MN＝NO. 以 AO 爲半徑, 在其上作半圓, 由 M, N 引 AO 之垂線 MP, NQ, 令交半圓周於 P, Q. 求證以 O 爲中心, OP, OQ 爲半徑之圓周, 將原圓之面積三等分.



證　$\overline{PO}^2=MO\cdot AO$, $\overline{QO}^2=NO\cdot AO$. 而 AM＝MN＝NO, 故 $\overline{PO}^2=2NO\cdot 3NO=6\overline{NO}^2$, $\overline{QO}^2=NO\cdot 3NO=3\overline{NO}^2$. 又 AO＝3NO, 故 $\overline{AO}^2=9\overline{NO}^2$. 而以 AO, PO, QO 爲半徑之圓面積, 比例於 $9NO^2$, $6\overline{NO}^2$, $3NO^2$, 故二內圓周三等分外圓之面積.

1363. 圓面積爲其外切多角形, 及他一相似多角形, 其周等於此圓周者之比例中項. [是曰 Galilleo 氏定理].

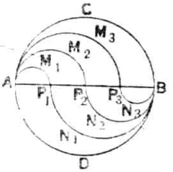
證　命所設圓之中心爲 O, 半徑爲 r, 其外切多角形爲 ABCD, 與其相似且周等於圓周之多角形爲 A'B'C'D'.



兩多角形相似, 而 ABCD 外切於圓, 故 A'B'C'D' 亦得外切於圓. 命此圓之中心爲 O', 一雙對應邊 AB, A'B' 與圓之切點爲 E, E', 則△OAB, △O'A'B 相似, OE, O'E' 分別爲相似形之高, 故 AB:A'B'＝OE:O'E'. 而 AB＋BC＋……: A'B'＋B'C'＋……＝AB:A'B', 故 AB＋BC＋……:A'B'＋B'C'＋…＝OE : O'E'. 但 A'B'＋B'C'＋……＝$2OE\pi$ [假設], 故 AB＋BC＋……:$2OE\pi$＝OE:O'E', 因而 $\frac{1}{2}$(AB＋BC＋………)OE : $\overline{OE}^2\pi=\overline{OE}^2\pi$: $OE\cdot O'E'\pi$. 然 $OE\cdot O'E'\pi=\frac{1}{2}O'E'\cdot 2OE\pi$＝$\frac{1}{2}$O'E'(圓 O 之周)＝$\frac{1}{2}$(A'B'＋B'C'＋……)×O'E', 故 ABCD: 圓 O＝圓 O:A'B'C'D'.

1364. 設圓之直徑 AB n 等分於 P_1, P_2, …… 在 AB 之同側, 以 AP_1, AP_2…… 爲直徑作半圓, 又在異側以 BP_1, BP_2……爲直徑作半圓, 則圖形 $AP_{m-1}BP_m$ 之周, 等於所設圓周, 其面積等於圓之 n 分之一.

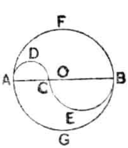
證 $AM_{m-1}P_{m-1}:BN_{m-1}P_{m-1}=AP_{m-1}:BP_{m-1}$,故 $AM_{m-1}P_{m-1}N_{m-1}B:AM_{m-1}P_{m-1}=AB:AP_{m-1}$. 然 $ACB:AM_{m-1}P_{m-1}=AB:AP_{m-1}$, 故 $AM_{m-1}P_{m-1}N_{m-1}B=ACB$. 同理, $AM_mP_mN_mB=ACB$, 故 $AP_{m-1}BP_m$ 等於圓周. 次 $ACBD:AP_{m-1}BP_m=AB^2:\frac{1}{2}(\overline{AP_m}^2-\overline{AP_{m-1}}^2)+\frac{1}{2}(\overline{BP_{m-1}}^2-\overline{BP_m}^2)=2AB^2:AB\times 2P_{m-1}P_m=AB:\frac{1}{n}AB=n$, 故 $AP_{m-1}BP_m=\frac{1}{n}ABCD$.



注意 不問 AP_m, BP_m, 及 AP_{m-1}, BP_{m-1} 之大小如何, $\overline{AP_m}^2-\overline{AP_{m-1}}^2+\overline{BP_{m-1}}^2-\overline{BP_m}^2=AB\cdot 2P_{m-1}P_m$.

1365. 設圓 O 之直徑 AB 二分於 C, 以 AC, BC 為直徑, 分別在 AB 之兩側, 作半圓 ADC, CEB, 則由二半圓周所成之線 ADCEB, 按直徑上二線分之比, 分圓為二部.

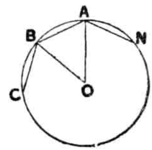
證 在 AB, AC, BC 上所作之半圓, 分別比例於直徑上之正方形, 故 $AFBECD:AGBECD=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2:\overline{AB}^2-\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$. 然 $\overline{BC}^2-\overline{AC}^2=(AC+BC)(BC-AC)$, 故 $AFBECD:AGBECD=(AC+BC)+(BC-AC):(AC+BC)-(BC-AC)=BC:AC$. 又由定理圓周比例於直徑[1317題], 可推知半圓周 ADC, CEB 之和, 等於 AB 上所作之半圓周.



注意 本題係前題之普徧者.

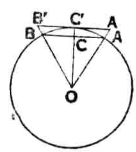
1366. 正多角形之一內角, 與其一邊所對之中心角互為補角.

證 設 ABC……N 為正多角形, 其中心為 O. 此時 OA, OB 分別將 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 二等分, 且為外接圓之半徑, 故 $O\hat{A}B=O\hat{B}A=O\hat{B}C$, 故 $A\hat{B}C=O\hat{A}B+O\hat{B}A=2\hat{R}-A\hat{O}B$.



1367. 內接正多角形之半徑, 為邊心距及相似外切正多角形半徑之比例中項.

證 設 AB 為圓 O 之內接正多角形之一邊, 由 O 至 AB 所引之垂線為 OC, 命 OC 之延線與圓周之交點為 C′, 又命 C′ 上圓之切線與 OA, OB 延線之交點為 A′, B′. 此時 A′B′ 為外切於圓 O 且具同邊數之正多角形之一邊. 而 AC ∥ A′C′, 故 OC : OA = OC′ : OA′; 其中 OA = OC′, 故 $\overline{AA}^2=OC\cdot OA'$, 即內接正多角形之半徑 OA, 為邊心距 OC 及相似外切正多角形半徑 OA′ 之比例中項.



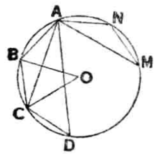
1386. 正多角形之邊數無限增大, 則其一內角及一外角之極限如何?

解 正多角形之一內角, 為其一邊所對中心角之補角 [1366題]. 而正 n 角形之一邊所對之中心角為 $\frac{4\hat{R}}{n}$, 故若 n 無限增大, 則此角趨近於零, 因而正 n 角形之一內角趨近於二直角, 故其極限為二直角. 由是又可知等於其補角之外角, 以 O 為極限.

1369. n 邊之正多角形中, 由一頂點至他諸頂點引對角線, 則是等對角線間之角

如何?

解 設 ABCD……MN 為 n 邊正多角形,引對角線 AC, AD,…, AM, 求 $B\hat{A}C$, $C\hat{A}D$,……, $M\hat{A}N$ 之大小. 命外接圓之中心為 O,因正多角形各邊所對之中心角相等,故

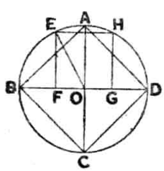


$B\hat{O}C=C\hat{O}D=\cdots\cdots=\frac{4}{n}\hat{R}$.

然 $B\hat{A}C=\frac{1}{2}B\hat{O}C$, 故 $B\hat{A}C=\frac{1}{2}\times\frac{4}{n}\hat{R}=\frac{2}{n}\hat{R}$.同理,其他各角皆等於 $\frac{2}{n}\hat{R}$.

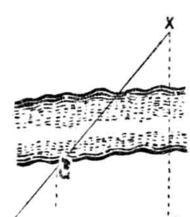
1370. 半圓之內接正方形與全圓內接正方形之面積之比,為 2:5.

解 設圓 O 之內接正方形為 ABCD, 半圓 BAD 之內接正方形為 EFGH, 且命其面積分別為 S, S′, 其半徑為 r. 於是 $S=\overline{AB}^2=2r^2$, 又 $\overline{OE}^2=\overline{OF}^2+\overline{EF}^2=\overline{OF}^2+4\overline{OF}^2=5\overline{OF}^2$, 卽 $\overline{OF}^2=\frac{1}{5}r^2$, 故 $S'=\overline{EF}^2=4\overline{OF}^2=\frac{4}{5}r^2$. 故 $S':S=\frac{4}{5}r^2:2r^2=2:5$.



第六編 計算問題

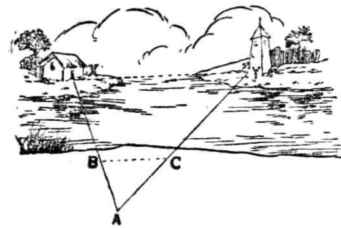
1371. 圖中設 AP＝200 尺, OP＝20 尺, OQ＝32 尺,求 AX. 但 OQ ∥ AX.



解 OP : OQ = AP : AX, 卽 20 尺 :32 尺＝200 尺 :AX, 由是得 AX＝320 尺.

1372. 圖中設 AX = 4 里, AB = 200 尺, BC＝225 尺,求 XY. 但 BC 平行於 XY.

解 AB:BC = AX:XY, 即 200 尺 :225 尺



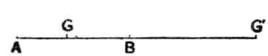
＝4 里 :XY, 故 XY＝4.5 里.

1373. 設三角形三邊之長為 3 尺, 4 尺, 5 尺, 則其最大角如何? 又設三邊之長為 12 尺, 13 尺, 20 尺, 則最大角大於直角抑小於直角?

解 三邊之長為 3 尺, 4 尺, 5 尺時, 最大之角所對之邊為 5 尺者; 其夾邊為 3 尺, 4 尺.而 $3^2+4^2=25=5^2$, 故最大之角為直角 [753 題]. 又三邊之長為 12 尺, 13 尺, 20 尺時, 最大之角所對之邊若為 20 尺,則 $20^2>12^2+13^2$, 故最大角大於直角 [753 題].

1374. 設有限直線 AB 按中末比內分及外分於 G 及 G′, 而 AB＝12 寸, 則 BG 及 BG′ 為方程式 $x^2+12x=144$ 之根.

解 內分時, 設 BG＝x, 則 AB : x＝x : AB

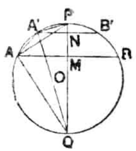


$-x$,即 $12:x=x:12-x$, 故 $x^2+12x=144$. 外分時,設 BG′＝x,則 AB: x＝x:AB＋x, 故

$x^2-12x=144$. 此二方程式之根, 絕對值相等, 符號相反, 故設由 B 至 G 之方向所測之長爲正, 由 B 至 G′ 之方向所測之長爲負, 則 BG, BG′ 俱爲方程式 $x^2+12x=144$ 之根.

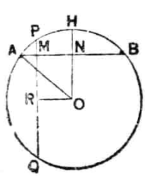
1375. 設圓穹之高爲 18 尺, 闊爲 60 尺, 則其曲率之半徑如何? 若洪水氾濫, 此圓穹被浸於水者深達 14 尺, 則其闊減爲若干?

解 設圓穹爲 APB, 補足之, 成中心爲 O 之全圓周, 命垂直於 AB 之直徑爲 PMQ, 則 AB 爲圓穹之闊, PM 爲其高. 聯結 PA, QA, 則 $\overline{AM}^2=PM\cdot MQ$ [876題], 卽 $30^2=18\cdot MQ$, 故 $MQ=50$,



故 $PQ=18+50=68$, 因而半徑爲 68 尺 $\div 2=34$ 尺. 次, 設水深爲 MN, 則過 N 所引平行於 AB 之弦 A′NB′, 爲洪水時圓穹之闊, PN 爲其高, 故聯結 PA′, QA′, 則 $\overline{A'N}^2=PN\cdot NQ$. 然 $PN=PM-MN=18-14=4$, 因而 $QN=68-4=64$, 故 $A'N=\sqrt{4\times 64}=16$, 故 $A'B'=16$ 尺 $\times 2=32$ 尺.

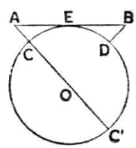
1376. 設在闊 60 尺之車道及其兩側各闊 10 尺之人行道上, 建一圓穹, 其在車道人行道界線上之高爲10尺, 求此圓穹之曲率半徑及高.



解 設圓穹爲 APB, 人行道爲 AM, 界線上之高爲 PM, 補足此圓穹, 命其全圓周爲 APBQ, 中心爲 O, 延長 PM, 令交圓周於 Q, 由 O 至 AB, PQ 引垂線 ON, OR, 聯結 OA. 於是 $PM\cdot MQ=AM\cdot MB$, 而 $PM=10$, $AM=10$, $MB=70$, 故 $MQ=70$, 因而 $ON=MR=PR-PM=30$, 又 $NA=40$, 故 $OA=\sqrt{(30^2+40^2)}=50$, 卽曲率半徑爲 50 尺. 又命 ON 之延線與圓穹之弧交於 H, 則 NH 爲圓穹之高, 而 $NH=OH-ON=50$ 尺 -30 尺 $=20$ 尺.

1377. 設有兩山, 各高 1350 呎, 則欲互相望見, 最遠可相距若干?

解 設二山之高爲 CA, DB, 則其可相見之最遠距離在直線 AB 切於地球面時. 今命其切點爲 E, 則因 $CA=DB$, 故 E 爲 AB 之中點. 又 AC, BD 皆過地球之中心 O, 故延長 AC, 令再交地球之表面於 C′, 則 CC′ 爲地球之直徑. 而



$\overline{AE}^2=AC\cdot AC'$ [877 題], 但 AC 比之於 CC′, 微小之至, 故可視爲 $AC'=CC'$, 因而又可視爲 $\overline{AE}^2=AC\cdot CC'$. 今 $AC=1350$ 呎 $=\frac{45}{176}$ 哩, $CC'=3963$ 哩 $\times 2=7926$ 哩, 故 $AE=\sqrt{\left(\frac{45}{176}\times 7926\right)}$ 哩 $=45$ 哩. 故 $AB=AE\times 2=45$哩$\times 2=90$哩.

1378. 設眼距湖水面 6 呎, 適可望見相距 6 哩高於水面 6 呎之燈光, 求地球直徑之哩數. 又設 h 爲眼高於海面之呎數, d 爲視線所經海面距眼之哩數, 試由以上之已知各項, 以證 $d=\sqrt{\left(\frac{3}{2}h\right)}$.

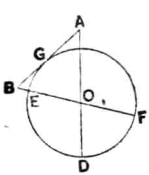
解 前題圖中, $AC=6$ 呎 $=\frac{1}{880}$ 哩, $AE=3$

哩,故 $CC'=3^2\div\frac{1}{880}=7920$ [前題], 故地球之直徑爲 7920 哩. 次 $AC=h$ 呎 $=\frac{h}{5280}$ 哩, $AE=d$ 哩,故 $d^2=\frac{h}{5280}\times7920$, 故 $d=\sqrt{\left(\frac{h}{5280}\times7920\right)}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}h\right)}$.

注意　設 $\overline{AE}^2=AC\cdot AC'$, 則代入上述各值得 $d^2=\frac{h}{5280}\times\left(7920+\frac{h}{5280}\right)$, 兩邊開方,得 $d=\sqrt{\left\{\frac{3}{2}h+\left(\frac{h}{5280}\right)^2\right\}}$. 但 $\left(\frac{h}{5280}\right)^2$ 較之 $\frac{3}{2}h$, 極爲微小, 故根號中之數, 亦可謂等於 $\frac{3}{2}h$.

1379. 設燈塔之燭光, 高於海面 96 呎, 則此光所照之海面, 最遠可至幾哩? 又設眼高於海面 24 呎,則最遠可由若干距離, 望見此燭光?

解　設 AC 爲燭光之高, AC 之延線與地球表面之交點爲D, 由 A 引切線 AG, 則 $\overline{AG}^2=AC\cdot CD$ [1377題]. 然 $AC=96$ 呎 $=\frac{1}{55}$哩, $CD=7926$哩,是以$AG=\sqrt{\left(\frac{1}{55}\times7926\right)}$哩 $=12$ 哩. 次,設海面上 24 呎之高爲 BE, 地球之表面與 AB 之切點爲 G, 延長 BE, 令交地球之表面於 F, 於是與前同理, $BG=\sqrt{\left(\frac{1}{220}\times7926\right)}$ 哩 $=6$ 哩, 故 $AB=12$ 哩 $+16$ 哩 $=18$ 哩.

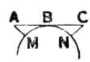


1380. 在平原之鐵道上高 $13\frac{1}{2}$ 呎之處, 置一標識, 今一火車, 由此駛向極遠之地,速度爲每時 36 哩,則車中人在幾分鐘後, 可見此標識在地平線上?但眼高從略.

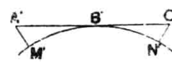
解　前題圖中,設 AC 爲標識,在 G 可見此標識在地平線上, 因 $AC=13\frac{1}{2}$呎 $=\frac{9}{3520}$ 哩, 故 $AG=\sqrt{\left(\frac{9}{3520}\times7926\right)}$ 哩 [1377題] $=4.5$ 哩. 而 AG 與弧 CG 之差甚小,故可視爲 $AG=$ 弧 CG, 故所求之時數, 約爲 $4.5\div36=\frac{1}{8}$, 卽一時之 $\frac{1}{8}$, 約爲 8 分鐘.

1381. 有二球,及同高之二物體,此二物體在一球上可互相望見之最遠距離,爲在他球上者之二倍,試比較此二球之直徑.

解　設二物體爲 AM, CN, 在甲球上可互相



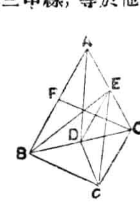
[甲圖]



[乙圖]

望見之最遠距離爲 AC, 在乙球上者爲 A'C', 而此二距離顯然爲聯結二物體頂端之直線切於球面者. 今命其切點分別爲 B, B'. 則 $2AB=A'B'$ [假設], $AM=A'M'$ [假設] $=h$. 命甲乙之直徑分別爲 r, R, 則 $\overline{AB}^2=h(h+r)$, $\overline{A'B'}^2=4\overline{AB}^2=h(h+R)$, 故 $4h(h+r)=h(h+R)$, 或 $4h+4r=h+R$, 或 $3h+4r=R$. 然實際上 h 較之直徑,甚爲微小, 故可視爲 $h=0$, 於是 $4r=R$.

1382. 設一三角形之三中線, 等於他三角形之三邊, 求此兩三角形面積之比.

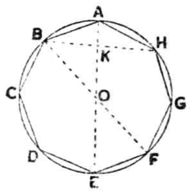


解　命 △ABC 之三中線爲 AD, BE, CF, 引 EG 令等於且平行於 AD, 聯結 DG, CG, BG, DE.

則 DE ∥ BF, CG ∥ DE, 且 BF = DE = CG, 故 BG 等於 CF, 故 △EBG 爲以 △ABC 之三中線爲邊之三角形,且其重心爲 D. 然 △DEG = △ADE = $\frac{1}{4}$△ABC,故 △EBG: △ABC = 3:4.

1383. 正八角形之面積爲 $2r^2\sqrt{2}$. 但 r 爲外接圓之半徑.

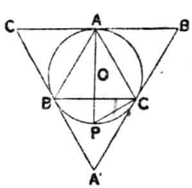
解 引直徑 AOE, BOF, 及 BH, 則 BH 垂直於直徑 AOE. 而 $F\hat{B}H = B\hat{O}A$, 因而 BK = OK, 故 $BK = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$, 故 $\triangle AOB = \frac{r^2}{2\sqrt{2}}$ 而



△AOB 爲 ABCDEFGH 之 $\frac{1}{8}$, 故 $ABCDEFGH = \frac{8r^2}{2\sqrt{2}} = 2r^2\sqrt{2}$.

1384. 求外切及內接於半徑爲 r 之圓之正三角形之邊,由是更求外切及內接正六角形,正十二角形,正二十四角形,……之邊.

解 命圓之中心爲 O, 內接正三角形爲 ABC, 切於 A, B, C 之外切正三角形爲 A′B′C′. 聯結直徑 AP 之端 P 與 C, 則 ACP 爲直角三角形, $A\hat{P}C = 2P\hat{A}C$, 故 AP = 2PC

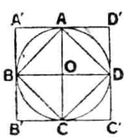


[127題]. 而 $AC = \sqrt{(\overline{AP}^2 - \overline{PC}^2)} = \sqrt{(\overline{2r}^2 - r^2)} = \sqrt{3}r$, 又 $C\hat{A}B' = A\hat{C}B = B\hat{A}C' = A\hat{B}C$, 而皆等於正三角形之一角, 故 △ACB′, △ABC′ 皆爲正三角形, 故 $B'C' = 2AC = 2\sqrt{3}r$. 次,因外切及內接正三角形之周, 分別爲 $6\sqrt{3}r$, $3\sqrt{3}r$, 故外切正六角形之周爲 $\frac{2\times6\sqrt{3}r\times3\sqrt{3}r}{6\sqrt{3}r+3\sqrt{3}r}$ [1311題] $=4\sqrt{3}r$, 因而一邊爲 $\frac{4\sqrt{3}r}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$; 內接正六角形之周爲 $\sqrt{(4\sqrt{3}r\times3\sqrt{3}r)}$[1311題] $=6r$, 因而一邊爲 $\frac{6r}{6} = r$. 同理, 外切正十二角形之一邊爲 $\frac{1}{12}\times\frac{2\times4\sqrt{3}r\times6r}{4\sqrt{3}r+6r} = 2(2-\sqrt{3})r$, 內接正十二角形之一邊爲 $\frac{1}{12}\times\sqrt{\{24(2-\sqrt{3})r\times6r\}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})}r$. 此方法賡續行之,卽可求得內接及外切正二十四角形,……之邊.

注意 如上所得之公式,隨邊數之加多而益複雜,故演算時可一一求其近似值而逐次代入之.

1385. 求半徑爲 r 之圓之外切及內接正方形之邊,更由是求外切及內接正八角形,正十六角形,……之邊.

解 設圓之中心爲 O, 內接正方形爲



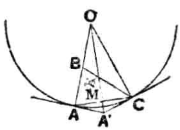
ABCD, 切於其角頂之外切正方形爲 A′B′C′D′. 因 AC, BD 爲圓之直徑, 且互相垂直於 O, 故 $AB = \sqrt{(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2)} = \sqrt{(2r^2)} = \sqrt{2}r$. 又 A′D′ = BD = $2r$. 次, 因外切及內接正方形之周,分別爲 $8r$, $4\sqrt{2}r$, 據是以求,外切正八角形之一邊爲 $\frac{1}{8}\times\frac{2\times8r\times4\sqrt{2}r}{8r+4\sqrt{2}r} = 2(\sqrt{2}-1)r$, 內接正八角形之一邊爲 $\frac{1}{8}\sqrt{\{16(\sqrt{2}-1)r\cdot4\sqrt{2}r\}} = \sqrt{(2-\sqrt{2})}r$. 復次, 賡續推求外切正十六角形之一邊知爲 $\frac{1}{16}\times\frac{2\times16(\sqrt{2}-1)r\times8\sqrt{(2-\sqrt{2})}r}{16(\sqrt{2}-1)r+8\sqrt{(2-\sqrt{2})}r}$ $= \frac{2(\sqrt{2}-1)\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2(\sqrt{2}-1)+\sqrt{(2-\sqrt{2})}}r$. 內接正十六

角形之一邊亦同樣屢續推求,知爲$\frac{1}{16}$ $\times\sqrt{\left\{\frac{32(\sqrt{2}-1)\sqrt{(2-\sqrt{2})}\times 8\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2(\sqrt{2}-1)+\sqrt{(2-\sqrt{2})}}\right\}}r$ $=\sqrt{\left\{\frac{3\sqrt{2}-4}{2(\sqrt{2}-1)+\sqrt{(2-\sqrt{2})}}\right\}}r$. 此方法屢續行之,卽得外切及內接正三十二角形,正六十四角形,……之一邊.

注意 同前題.

1386. 求半徑爲r之圓中內接及外切正十角形之邊,更由是求內接及外切正五角形,正二十角形……之邊.

解 設圓之中心爲 O, 半徑爲 OA, 按 OA : OB = OB : AB 內分 OA 於 B, 引 AC 令等於 OB, 則 AC 爲內接正十角形之一邊[1341題]. 故設 AC $=x$, 則 $r:x=x:r-x$, 由是得 $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$. 又命切圓於 A, C 之切線 AA′, CA′ 之交點爲 A′, 則 AA′ 爲外切正十角形一邊之半分. 而 OA′ 將 AC 垂直二等分於 M, 故兩直角三角形 OAA′, AMA′ 相似, 因而 OM : AM = OA : AA′, 故 AA′ $=\frac{\text{AM}\cdot\text{OA}}{\text{OM}}$. 但 AM $=\frac{1}{2}$AC $=\frac{\sqrt{5}-1}{4}r$, OM $=\sqrt{(\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{AM}}^2)}=\sqrt{\left\{\sqrt{r^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right)^2}\right\}}$ $=\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}r$, 因而 AA′ $=\frac{\sqrt{5}-1}{4}r\times r\div\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}r=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}r$, 故外切正十角形之一邊爲 2AA′ $=\frac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}r$.



次, 命外切及內接正五角形之周, 分別爲 p, q, 外切及內接正十角形之周, 分別爲 p', q', 則 $p'=\frac{2pq}{p+q}$……(1), $q'=\sqrt{(p'q)}$ ……(2) [1311題]. 由(2)得 $q'^2=p'q$, 故 $q=\frac{q'^2}{p'}$. 而 $p'=\frac{20(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}r$, $q'=5(\sqrt{5}-1)r$, 故 $q=25(\sqrt{5}-1)^2r^2\div\frac{20(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}r$ $=\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)\sqrt{(10+2\sqrt{5})}r=\frac{5}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}r$. 因而求得內接正五角之一邊爲 $\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2}r$. 又由 (1), 得 $p'p+p'q=2pq$, 故 $p=\frac{p'q}{2q-p'}$, 故以 p', q 值代入,

得 $p=\dfrac{\frac{20(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}r\times\frac{5}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}r}{5\sqrt{(10-2\sqrt{5})}r-\frac{20(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}r}$

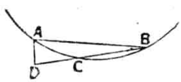
$=10+(5-2\sqrt{5})r$, 因而外切正五角形之一邊爲 $2\sqrt{(5-2\sqrt{5})}r$. 又外切及內接正二十角形, 正四十角形, ……之邊, 亦可由外切及內接正十角形之邊求得之.

注意 1. 同 1384 題.

注意 2. 內接正十角形之邊若已求得, 則可由 1340 題以求得內接正五角形之邊, $\sqrt{\left\{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+r^2\right\}}=\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2}r$, 與上所得者同.

1387. 求半徑爲r之圓中內接正十五角形之一邊.

解 設 AB, BC 分別爲內接正六角形, 正十角形之一邊, 則弧 AB 爲圓周之$\frac{1}{6}$, 弧 BC 爲圓周之$\frac{1}{10}$, 故弧 AC 爲圓周之$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$, 故 AC 爲內接正十五角形之一邊. 由 A 至



BC 之延線引垂線 AD, 則 $B\hat{A}C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot 4\hat{R}=\frac{1}{5}\hat{R}$, $A\hat{B}C=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{15}\cdot 4\hat{R}=\frac{2}{15}\hat{R}$, 故 $A\hat{C}D=\frac{1}{5}\hat{R}+\frac{2}{15}\hat{R}=\frac{1}{3}\hat{R}$, 因而 $C\hat{A}D=\frac{2}{3}\hat{R}$, 即 $C\hat{A}D=2A\hat{C}D$, 故 $AC=2AD$ [127題], 故 $CD=\frac{\sqrt{3}}{2}AC$. 於是 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2BC\cdot CD$, 而 $AB=r$ [1327題], $BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$ [1386題], 故設 $AC=x$, 則 $r^2=x^2+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\right)^2+2\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\frac{\sqrt{3}}{2}x$, 即 $x^2+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)rx}{2}=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}r^2$. 由是得 $x=\frac{1}{4}\{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}-\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)\}r$.

注意 欲求外切正十五角形之邊, 可仿前題中 AA′ 之求法, 求其半分.

1388. 求半徑為 r 之圓之內接正三角形, 正六角形, 正方形, 正八角形, 正五角形, 正十角形之邊心距.

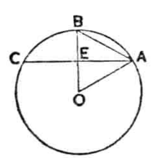
解 邊心距乃以半徑為斜邊, 邊之半分為一邊之直角三角形之他一邊, 故正三角形中 $\sqrt{\left\{r^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2\right\}}=\frac{1}{2}r$, 正六角形中, $\sqrt{\left\{r^2-\left(\frac{1}{2}r\right)^2\right\}}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$ [1384題], 正方形中, $\sqrt{\left\{r^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r\right)^2\right\}}=\frac{\sqrt{2}}{2}r$, 正八角形中, $\sqrt{\left\{r^2-\left(\frac{\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{2}r\right)^2\right\}}=\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}r$, 正五角形中, $\sqrt{\left\{r^2-\left(\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{4}r\right)^2\right\}}=\frac{\sqrt{(6+2\sqrt{5})}}{4}r$; 以及正十角形中, $\sqrt{\left\{r^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right)^2\right\}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5})}}{4}r$ [1386題].

注意 正三角形, 正六角形, 正方形中, 可不由上法而直接求得之; 但上法為邊心距之普偏求法.

1389. 求半徑為 r 之圓中, 內接正三角形, 正方形, 正五角形, 正六角形, 正八角形, 正十角形之面積.

解 正多角形中, 各角頂與中心聯結, 則得個數等於邊數之等三角形, 故正多角形之面積, 等於以邊心距為高, 一邊為底邊之三角形面積, 乘以邊數而得之積. 故內接正三角形之面積為 $3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}r\cdot\frac{1}{2}r=3\sqrt{3}r^2\div 4$, 正方形為 $4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}r=2r^2$, 正五角形為 $5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2}r\cdot\frac{\sqrt{(6+2\sqrt{5})}}{4}r=\frac{5}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}r^2$, 正六角形為 $6\cdot\frac{1}{2}\cdot r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}r=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$, 正八角形為 $8\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(2-\sqrt{2})}r\times\frac{\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}r=2\sqrt{2}r^2$, 正十角形為 $10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}r\cdot\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}r=\frac{5}{4}\times\sqrt{(10-2\sqrt{5})}r^2$.

別解 正方形之面積, 等於其對角線, 即直徑平方之半分, 故可直接求得之. 次, 設 AC, AB 為內接正三角形及內接正六角形之邊, 則 OB 將 AC 垂直二等分於 E, 故



$\triangle OAB=\frac{1}{2}OB\cdot AE=\frac{1}{2}r\cdot\frac{1}{2}AC$, 而 $AC=\sqrt{3}r$ [1384題], 故 $\triangle OAB=\frac{1}{4}r\cdot\sqrt{3}r=\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$. 然

內接正六角形之面積爲 △OAB 之六倍，故爲 $6\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$. 若 AC, AB 爲內接正方形, 內接正八角形之一邊, 則因 AC $=\sqrt{2}r$ [1385題], 故 △OAB $=\frac{1}{2}r\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}r=\frac{\sqrt{2}}{4}r^2$, 因而正八角形之面積爲 $8\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}r^2=2\sqrt{2}r^2$. 或因外切正方形之一邊爲半徑之二倍, 卽 $2r$, 故內接正八角形之面積爲 $2r\cdot\sqrt{2}r=2\sqrt{2}r^2$. 又設 AC, AB 分別爲內接正五角形及正十角形之一邊, 則因 AC $=\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2}r$ [1386 題], 故內接正十角形之面積爲 $10\cdot\frac{1}{2}r\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2}r=\frac{5}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}r^2$.

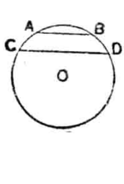
注意　設已知圓之半徑, 及其內接正多角形之一邊, 則可求得邊數二倍之內接正多角形之面積. 又外切正多角形中, 邊心距等於半徑, 故若已知半徑及其一邊之長, 卽可求得其面積.

1390.　設圓之半徑爲 r, 求其內接正十二角形之面積.

解　內接正六角形之一邊, 等於圓之半徑, 故依照前題, 內接正十二角形之面積爲 $12\cdot\frac{1}{2}r\cdot\frac{1}{2}r=3r^2$, 卽半徑平方之三倍.

1391.　設 AB, CD 爲相平行之弦, AB 爲內接正六角形之一邊, CD 爲內接正三角形之一邊, 求圖形 ABDC 之面積.

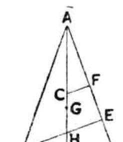
解　因弧 AC 爲圓周之十二分之一, 故爲



$\frac{1}{6}\pi R$, 弦 AC 可由 $b=\sqrt{[2R\times\{R-\sqrt{(R^2-\frac{1}{4}a^2)}\}]}$ 中, 命 $a=R$ 而得之, 卽 AC $=b=R\times\sqrt{(2-\sqrt{3})}$. 又設由 O 至 AC 之距離爲 h, 則 $h=\sqrt{\{R^2-\frac{1}{4}R^2(2-\sqrt{3})\}}=\frac{1}{2}R\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, 故 △OAC $=\frac{1}{4}R^2\sqrt{(2-\sqrt{3})}\times\sqrt{(2+\sqrt{3})}=\frac{1}{4}R^2$. 又扇形 OAC $=\frac{1}{12}\pi R^2$, 因而弓形 AC $=\frac{1}{12}(\pi-3)R^2$. 次, AB, CD 之距離 $d=\sqrt{\{R^2(2-\sqrt{3})-\frac{1}{4}R^2(\sqrt{3}-1)^2\}}=\frac{1}{2}R(\sqrt{3}-1)$, 故梯形 ACDB $=\frac{1}{4}R^2(\sqrt{3}+1)\times(\sqrt{3}-1)=\frac{1}{2}R^2$, 因而圖形 ABDC $=\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{6}(\pi-3)R^2=\frac{1}{6}\pi R^2$.

1392.　二等邊三角形中, 重心與垂心之距離 $d=\pm m\left(\frac{2\delta}{h}-\frac{2}{3}\right)$, 或 $d=m\left(\frac{2\delta}{h}+\frac{2}{3}\right)$, 但 m 爲底之中點上之中線, h 爲由底之一端至等邊所引之垂線, δ 爲垂心與等邊之距離. 求證.

證　設△ABC 中, AB＝AC, 且 H, G, O 分別爲其垂心, 重心, 外心. 於是

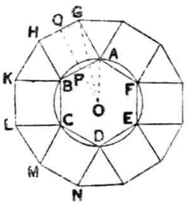


GH $=\pm$(AG $-$ AH) [視 AG $\gtrless$ AH 而取 (+) 或 (−)], 亦卽 $d=\pm(\frac{2}{3}m-\text{AH})$……(1). 次, △AOF ∽ △AHE, 故 AH : AO = HE : OF. 而 AO $=m-$ OD $=m-\frac{1}{2}$AH, OF $=\frac{1}{2}$BH $=\frac{1}{2}(h-\delta)$, 故 AH $=2\delta m/h$. 以此值代入 (1) 式中, 卽得 $d=\pm m\left(\frac{2}{3}-\frac{2\delta}{h}\right)$. 但在上述情形中, 假定 H 在 A 與 D 之間, 卽 $\hat{A}<90°$. 若 $\hat{A}>90°$, 卽 H 不在 A 與 D 之間, 則前式當變爲 $d=m\left(\frac{2}{3}+\frac{2\delta}{h}\right)$.

1393.　在正六角形之各邊上, 就其外側作正方形, 聯結其不屬於正六角形之頂點, 則得正十二角形. 設已知正六角形之一邊, 求此正十二角形外接圓之半徑及正十二角

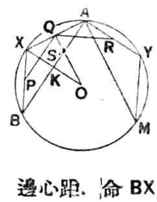
形之面積.

證　設正六角形為 ABCDEF, 在其各邊上就外側所作之正方形為 ABHG, BCLK, CDNM,……,聯結HK, LM,……,而作十二角形GHKLM……;求證此十二角形為正十二角形. △BHK 為二等邊,且其頂角為正六角形一角之補角,故 $H\hat{B}K=\frac{2}{3}\hat{R}$ [因正六角形之一角,等於 $(2\times6-4)\div6=\frac{4}{3}$ 直角故也], 故 △BHK 為正三角形。同理, △CLM,……亦為正三角形,其一邊等於正六角形 ABCDEF 之一邊,故十二角形 GHKLMN…等邊. 又此十二角形之各角,皆等於 $\hat{R}+\frac{2}{3}\hat{R}=\frac{5}{3}\hat{R}$, 故 GHKLMN……為正十二角形. 今設正六角形ABCDEF之外接圓中心為 O, 則 O 又為正十二角形 GHKL……之外接圓中心, 此甚易知之. 由 O 引 AB 之垂線 OPQ, 命其與 AB, GH 之交點分別為 P, Q, 聯結 OA, OG, 命 $AB=a$, 則 $OP=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, 故 $OQ=\frac{2+\sqrt{3}}{2}a$, 又 $GQ=\frac{1}{2}a$ 明甚, 是以正十二角形外接圓之半徑 $OG=\sqrt{\left\{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\frac{a^2}{4}\right\}}=\sqrt{(2+\sqrt{3})}a=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a$. 次, 正十二角形 GHKL……為 AB 上之正方形六個與 AB 上之正三角形十二個之和. 而 AB 上正方形之面積為 a^2, 又 AB 上正三角形之面積為 $\frac{1}{4}\sqrt{3}a^2$, 故正十二角形之面積 $S=6a^2+3\sqrt{3}a^2=3a^2(2+\sqrt{3})$.



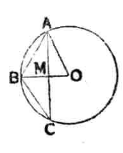
1394. 設正多角形之半徑為 R, 邊心距為 r, 又周與其相等,邊數為其二倍之他正多角形中,半徑為 R′, 邊心距為 r', 則 $r'=\frac{1}{2}(R+r)$, $R'=\sqrt{(R\times r')}$.

證　設正多角形之二邊為 AB, AM, 外接圓中心為 O, 弧 AB, AM 之中點為 X, Y,聯結 OX, 令交 AB 於 K.於是因 OX 為正多角形 MAB……之半徑, 又 OX⊥AB, 故 OK 為邊心距. 命 BX, XA, AY,……之中點為 P, Q, R,……, 則 △PXQ≡△QAR≡……,故多角形 PQR……中, PQ=QR=……, $\hat{Q}=\hat{R}=$……, 因而為正多角形. 且 $PQ=\frac{1}{2}AB$, 故正多角形 PQR……之邊,為正多角形 MAB……邊之半分,且前者之邊數為後者邊數之二倍, 故二正多角形之周相等. 又 OX⊥PQ, 故命 OX, PQ 之交點為 S, 則 OS 為正多角形 PQR……之邊心距;聯結 OQ, 則 OQ 為其外接圓之半徑. 而 S 為 KX 之中點,故 $OS=\frac{1}{2}(OX+OK)$, 即 $r'=\frac{1}{2}(R+r)$. 次, 兩直角三角形 OQX, OSQ 相似, 故 OX:OQ=OQ:OS, 故 $OQ=\sqrt{(OX\cdot OS)}$, 即 $R'=\sqrt{(R\times r')}$.



1395. 設圓之半徑為 r, 求其內接正五角形之對角線.

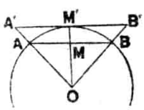
解　命中心為 O, 內接正五角形之二邊為 AB, BC, 其對角線為 AC. 聯結 OA, OB, 命 OB, AC 之交點為 M, 則 OB⊥AC, 且 M 為 AC 之中點. 今 $AB^2-OA^2=BM^2-OM^2=OB\times(BM$



$-$OM), 因此, 得 $\left(\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{2}r\right)^2-r^2$ $=r(\text{BM}-\text{OM})$, 故 $\text{BM}-\text{OM}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}r$, 故 $\text{OM}=\frac{1}{2}\left(r-\frac{3-\sqrt{5}}{2}r\right)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}r$, 因而 AM $=\sqrt{(\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{OM}}^2)} = \sqrt{\left\{r^2-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}r\right)^2\right\}}$ $=\frac{1}{4}r\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$, 故 $\text{AC}=\frac{1}{2}r\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$.

1396. 設圓之半徑為 r, 其內接正多角形之邊為 a, 同邊數外切正多角形之邊為 a', 則 $a'=\frac{2ar}{\sqrt{(4r^2-a^2)}}$, $a=\frac{2a'r}{\sqrt{(4r^2+a'^2)}}$.

證 命內接多角形之一邊為 AB, 中心為 O, 由 O 至 AB 所引之垂線為 OM, 其延線與圓周之交點為 M′, 過 M′ 平行於 AB 引 A′B′, 命其與 OA, OB 延線之交點分別為 A′, B′, 則

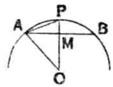


A′B′ 為邊數相同之外切正多角形之一邊, 而 M′ 為其切點. 於是 $\text{OM}=\sqrt{(\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{AM}}^2)}$ $=\sqrt{\{r^2-(\frac{1}{2}a)^2\}}=\frac{1}{2}\sqrt{(4r^2-a^2)}$. 又 OM:OM′ = AB:A′B′, 故 $\text{A}'\text{B}'=\frac{\text{OM}'\cdot\text{AB}}{\text{OM}}$, 即

$a'=\frac{ar}{\frac{1}{2}\sqrt{(4r^2-a^2)}}=\frac{2ar}{\sqrt{(4r^2-a^2)}}$. 次, 由 a' $=\frac{2ar}{\sqrt{(4r^2-a^2)}}$, 得 $a'\sqrt{(4r^2-a^2)}=2ar$, 故 $a'^2(4r^2-a^2)=4a^2r^2$, 故 $a^2=\frac{4a'^2r^2}{4r^2+a'^2}$, 故 a $=\frac{2a'r}{\sqrt{(4r^2+a'^2)}}$.

1397. 設圓之半徑為 r, 其內接 n 邊正多角形之邊為 a, 內接 $2n$ 邊正多角形之邊為 a', 則成立以下二式: $a'^2=r\{2r-\sqrt{(4r^2-a^2)}\}$, $a^2=\frac{a'^2(4r^2-a'^2)}{r^2}$.

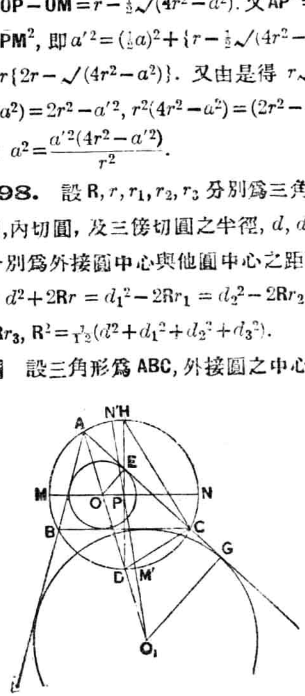
解 設中心為 O, n 邊內接正多角形之一邊為 AB, 由 O 至 AB 引垂線 OM, 延長之令交圓周於 P, 則直線 AP 為內接 $2n$ 邊正多角形之一邊.



而 $\text{OM}=\sqrt{(\overline{\text{OA}}^2-\overline{\text{AM}}^2)}$, 即 $\text{OM}=\sqrt{\{r^2-(\frac{1}{2}a)^2\}}=\frac{1}{2}\sqrt{(4r^2-a^2)}$, 故 PM $=\text{OP}-\text{OM}=r-\frac{1}{2}\sqrt{(4r^2-a^2)}$. 又 $\overline{\text{AP}}^2=\overline{\text{AM}}^2+\overline{\text{PM}}^2$, 即 $a'^2=(\frac{1}{2}a)^2+\{r-\frac{1}{2}\sqrt{(4r^2-a^2)}\}^2$ $=r\{2r-\sqrt{(4r^2-a^2)}\}$. 又由是得 $r\sqrt{(4r^2-a^2)}=2r^2-a'^2$, $r^2(4r^2-a^2)=(2r^2-a'^2)^2$, 故 $a^2=\frac{a'^2(4r^2-a'^2)}{r^2}$.

1398. 設 $\text{R}, r, r_1, r_2, r_3$ 分別為三角形外接圓, 內切圓, 及三傍切圓之半徑, d, d_1, d_2, d_3 分別為外接圓中心與他圓中心之距離, 則 $\text{R}^2=d^2+2\text{R}r=d_1^2-2\text{R}r_1=d_2^2-2\text{R}r_2=d_3^2-2\text{R}r_3$, $\text{R}^2=\frac{1}{12}(d^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2)$.

證 設三角形為 ABC, 外接圓之中心為 P,



內切圓與 AC 切於點 E, 命 AO 與外接圓周之交點為 D, 過 D 之直徑為 DH, 聯結 OE, DC, △AOE, △HDC 相似, 故 DH·OE = OA·DC; 而 DC = DO [673題], 故 2Rr

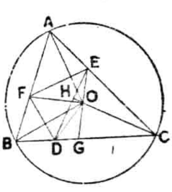
$=OA\cdot OD=ON\cdot OM=(PN+OP)(PN-OP)=(R+d)(R-d)=R^2-d^2$, 故 $R^2=d^2+2Rr$. 次，設切於 BC 之傍切圓之中心爲 O_1, 傍切圓與 AC 之切點爲 G, 聯結 O_1G. A, O, O_1 在一直線上, 故 $\triangle HDC$, $\triangle AO_1G$ 相似, $DH\cdot O_1G=O_1A\cdot DC$. 而 $DC=DO=O_1D$ [729題], 故 $2Rr_1=O_1A\cdot O_1D$. 聯結 O_1P, 命其與外接圓周之交點爲 M', N', 則 $2Rr_1=O_1A\cdot O_1D=O_1N'\cdot O_1M'=(O_1P+PN')(O_1P-PN')=(d_1+R)(d_1-R)=d_1^2-R^2$, 故 $R^2=d_1^2-2Rr_1$. 同理, $R^2=d_2^2-2Rr_2=d_3^2-2Rr_3$. 又由以上所得之關係, $4R^2=d^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2-2R(r_1+r_2+r_3-r)$. 然 $r_1+r_2+r_3-r=4R$ [729題], 故 $4R^2=d^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2-2R\cdot 4R$, 故 $R^2=\frac{1}{12}(d^2+d_1^2+d_2^2+d_3^2)$.

1399. 設三角形 ABC 之邊爲 a, b, c, 面積爲 S, 外接圓之半徑爲 R, 則 $S=abc/4R$.

證　由 A 至對邊引垂線 AD, 則 $S=\frac{1}{2}a\cdot AD$. 然 $bc=2R\cdot AD$ [1026, 1139 題], 因此 $AD=\frac{bc}{2R}$, 故 $S=\frac{1}{2}a\times\frac{bc}{2R}=\frac{abc}{4R}$.

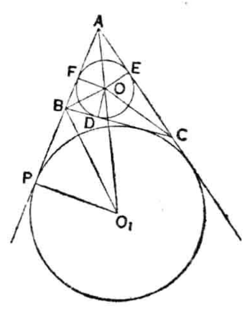
1400. 三角形之面積, 等於外接圓之半徑與垂足三角形周之半分所包之矩形.

證　設三角形爲 ABC, 其垂足三角形爲 DEF, 外接圓之中心爲 O. 聯結 OA, OB, OC, OD OE, OF, 由 O 至 BC 引垂線 OG, 命 CO 之延線與 DE 之交點爲 H, 則兩三角形 COG, CDH 中, $\hat{C}$ 爲兩形所共, $C\hat{O}G=B\hat{A}C$ [202題], 而 ABDE 內接於圓, 故 $B\hat{A}C=C\hat{D}H$, 故 $C\hat{O}G=C\hat{D}H$, 因而 $C\hat{H}D=C\hat{G}O=\hat{R}$. 同理, AO, BO 分別垂直於 EF, DF. 四邊形 $ODCE=\triangle CDE-\triangle ODE=\frac{1}{2}DE\cdot CH-\frac{1}{2}DE\cdot OH=\frac{1}{2}DE\cdot OC$, 四邊形 $OFAE=\frac{1}{2}EF\cdot OA$, 四邊形 $ODBF=\frac{1}{2}DF\cdot OB$, 故 $\triangle ABC=ODCE+OEAF+ODBF=\frac{1}{2}DE\cdot OC+\frac{1}{2}EF\cdot OA+\frac{1}{2}DF\cdot OB=\frac{1}{2}OA(DE+EF+FD)$.



1401. 設三角形 ABC 之三邊爲 a, b, c, 其和之半分爲 s, 內切圓之半徑爲 r, 頂點 A, B, C 所對傍切圓之半徑分別爲 r_1, r_2, r_3, 則三角形之面積, 得以下列各式之一表之: sr, $r_1(s-a)$, $r_2(s-b)$, $r_3(s-c)$.

證　命內切圓之中心爲 O, 邊 BC, CA, AB 上之切點爲 D, E, F, 頂點 A 所對傍切圓之中心爲 O_1, 其與 AB 延線之切點爲 P, 聯結 OD, OE, OF, O_1P 及 OB, OC. 於是 $\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA=\frac{1}{2}AB\cdot OF+\frac{1}{2}BC\cdot OD+\frac{1}{2}AC\cdot OE=\frac{1}{2}(cr+ar+br)=\frac{1}{2}(a+b+c)r=sr$. 又兩直角三角形 AOF, AO_1P 相似, $AF:AP=OF:O_1P$, 故 $AP\cdot OF=O_1P\cdot AF$. 然 $AP=s$, $AF=s-a$ [729題], 故 $sr=r_1(s-a)$. 同理, $sr=r_2(s-b)=r_3(s-c)$.

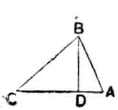


1402. 設三角形 ABC 內切圓之半徑爲 r, 頂點 A, B, C 所對傍切圓之半徑分別爲 r_1, r_2, r_3, 則 $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$. 又設 A, B, C 之

對邊爲 a, b, c, 及 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, 三角形之面積爲 S, 則 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, 或 $S=\sqrt{rr_1r_2r_3}$.

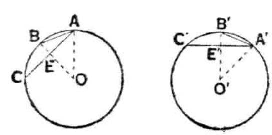
證 由前題, $\frac{S}{r}=s$, $\frac{S}{r_1}=s-a$, $\frac{S}{r_2}=s-b$, $\frac{S}{r_3}=s-c$. 然因 $\frac{S}{r_1}+\frac{S}{r_2}+\frac{S}{r_3}=(s-a)+(s-b)+(s-c)=3s-(a+b+c)=s$, 故 $\frac{S}{r}=\frac{S}{r_1}+\frac{S}{r_2}+\frac{S}{r_3}$, 是以 $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$. 次,前圖中兩直角三角形 OBF, O_1BP 相似, 故 OF:BF=BP:O_1P, 即 $r:s-b=s-c:r_1$, 故 $rr_1=(s-b)(s-c)$. 又 $sr=r_1(s-a)$ [前題], 故 $\frac{r}{r_1}=\frac{s-a}{s}$. 故 $rr_1\times\frac{r}{r_1}=(s-b)(s-c)\times\frac{s-a}{s}$, 亦即 $r^2=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$, 故 $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$. 而 $S=sr$, 以 r 之值代入,得 $S=s\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-b)}$. 復次, 由前題, $r=\frac{S}{s}$, $r_1=\frac{S}{s-a}$, $r_2=\frac{S}{s-b}$, $r_3=\frac{S}{s-c}$, 故 $rr_1r_2r_3=\frac{S^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 然因 $S^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$, 故 $rr_1r_2r_3=\frac{S^4}{S^2}=S^2$, 故 $S=\sqrt{rr_1r_2r_3}$.

別解 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 亦可如下證之. 由三角形 ABC 之頂點 B, 至對邊 AC 引垂線 BD, 命 BD$=h$, AD $=c_1$, CD$=a_1$. 於是 $h^2=c^2-c_1^2=(c+c_1)\times(c-c_1)$. 然 $b^2=c_1^2+a_1^2+2a_1c_1$, $c^2=c_1^2+h^2$, $a^2=a_1^2+h^2$, 三式相加, 故得 $b^2+c^2-a^2=2c_1^2+2a_1c_1=2(c_1+a_1)c_1=2bc_1$,因 $c_1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$. 故 $c+c_1=c+\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b}$, 依據同理, 可知 $c-c_1=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b}$, 因而代入前式得 $h^2=\frac{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{4b^2}=\frac{2s\cdot2(s-a)\cdot2(s-b)\cdot2(s-c)}{4b^2}\left[\because s=\frac{a+b-c}{2}\right]=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2}$, 故兩邊開方,得 $h=\frac{2}{b}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 因得 $S=\frac{1}{2}bh=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.



1403. 設圓之半徑爲 5 尺, 求內接正八角形及正十二角形之一邊,並計算其面積.

解 設圓之內接正八角形之一邊爲 AB



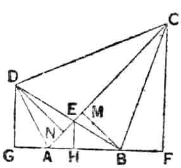
$=b$, 正方形之一邊 AC$=a$, 圓之半徑爲 R, 則 $b=\sqrt{\left\{2R\times\left[R-\sqrt{\left(R^2-\frac{a^2}{4}\right)}\right]\right\}}$. 然 R$=5$ 尺, $a=\sqrt{2}R=5\sqrt{2}$ 尺, 故 $b=5\sqrt{(2-\sqrt{2})}$ 尺. 次,正八角形之面積等於△OAB之八倍, 而 △OAB$=\frac{1}{2}$R×AE$=\frac{25\sqrt{2}}{4}$, 故正八角形之面積爲 $50\sqrt{2}$ 平方尺. 次, 設 $b=\sqrt{\left\{2R\times\left[R-\sqrt{\left(R^2-\frac{a^2}{4}\right)}\right]\right\}}$ 中, 設 a

$=R=5$ 尺,則由上式可得半徑5尺之圓之內接正十二角形之一邊 $A'B'$. 卽 $A'B'=b=\sqrt{\left\{10\times\left[5-\sqrt{\frac{3\times25}{4}}\right]\right\}}=\sqrt{\{25(2-\sqrt{3})\}}=5\sqrt{(2-\sqrt{3})}$ 尺. 又正十二角形之面積爲 $\triangle O'A'B'$ 之十二倍,而 $\triangle O'A'B'=\frac{1}{2}R\times A'E'=\frac{1}{2}\times5\times\frac{5}{2}=\frac{25}{4}$, 故正十二角形之面積爲 $25\times3=75$ 平方尺.

別解 圓之內接正十二角形之面積,等於半徑上正方形之三倍[1310題], 故 $5^2\times3=75$ 平方尺.

1404. 由四邊形 ABCD 之角頂C, D 及對角線之交點至邊 AB 引垂線 CF, DG, EH, 則四邊形之面積爲 $\frac{1}{2}AB\cdot\frac{CF\cdot DG}{EH}$.

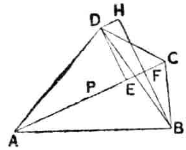
解 由 B, D 至對角線 AC 引垂線 BM, DN,



則 $\triangle ABC:\triangle ADC=BM:DN=BE:DE$, 故 $\triangle ABC+\triangle ADC:\triangle ABC=BE+DE:BE$. 於是以 S 表四邊形之面積, 則 $S:\triangle ABC=BD:BE$. 而 $BD:BE=DG:EH$, 故 $S:\triangle ABC=DG:EH$. 但 $\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot CF$, 因而 $S:\frac{1}{2}AB\cdot CF=DG:EH$, 故 $S=\frac{1}{2}AB\cdot\frac{CF\cdot DG}{EH}$.

1405. 設 a, b, c, d 表四邊形之邊, m, n 表對角線, S 表面積, 則 $S=\frac{1}{4}\sqrt{\{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)\}}$. 若四邊形內接於圓,命 $p=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$, 則 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. 若四邊形外切於一圓且內接於他圓,則 $S=\sqrt{abcd}$.

解 設四邊形 ABCD 中, AB, BC, CD, DA 及 AC, BD 分別爲 a, b, c, d 及 m, n, 命 P 爲 AC 之中點, DE, BF 爲 AC 之垂線, DH 爲 BF 延線之垂線.

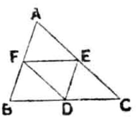


$\triangle ABC=\frac{1}{2}AC\cdot BF=\frac{1}{2}m\cdot BF$, $\triangle ADC=\frac{1}{2}AC\cdot DE=\frac{1}{2}m\cdot FH$, 故 $ABCD=\frac{1}{2}m\cdot BF+\frac{1}{2}m\cdot FH=\frac{1}{2}m\cdot BH$. 又若 $AB>BC$, 則 $\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=\overline{AF}^2-\overline{CF}^2=2AC\cdot PF$, 卽 $a^2-b^2=2m\cdot PF$. 同理,若 $AD>CD$, 則 $d^2-c^2=2m\cdot PE$. 故 $a^2-b^2+c^2-d^2=2m\cdot PF-2m\cdot PE=2m\cdot EF$, 故 $2mn+a^2-b^2+c^2-d^2=2mn+2m\cdot EF=2m(n+EF)$. $2mn-a^2+b^2-c^2+d^2=2mn-2m\cdot EF=2m(n-EF)$, 故 $(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)=4m^2(n^2-\overline{EF}^2)$. 又 $S=\frac{1}{2}AC\cdot BH=\frac{1}{2}m\sqrt{(n^2-\overline{DH}^2)}$, 因而 $S^2=\frac{1}{4}m^2(n^2-\overline{EF}^2)$, 故 $S^2=\frac{1}{16}(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)$, 故 $S=\frac{1}{4}\sqrt{\{(2mn+a^2-b^2+c^2-d^2)\times(2mn-a^2+b^2-c^2+d^2)\}}$. 次, 設四邊形內接於圓, 則 $mn=ac+bd$ [1150題], 故 $2mn+a^2-b^2+c^2-d^2=a^2+2ac+c^2-b^2+2bd-d^2=(a+c)^2-(b-d)^2=(a+b+c-d)(a-b+c+d)=4(p-d)(p-b)$. 同理, $2mn-a^2+b^2-c^2+d^2=4(p-c)(p-a)$, 故 $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. 又若四邊形外切於圓, 且內接於他圓, 則因 $a+c=b+d$, 故 $p=b+d$, 因而 $p-d=b$, 同理, $p-a=c$, $p-b=d$, $p-c=a$, 是以 $S=\sqrt{abcd}$.

1406. 聯結三角形各邊之中點, 作第二

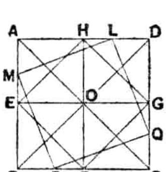
內接三角形，復聯結此第二三角形各邊之中點，作第三內接三角形，如是作無限之內接三角形，則是等內接三角形和之極限如何？

解 設聯結三角形 ABC 各邊之中點所得之三角形爲 DEF，則△DEF之面積，爲原三角形之四分之一．同理，第三三角形爲第二三角形之四分之一．故設以第一三角形爲單位，則第二，第三，第四，……分別爲 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{64}$，……，即成初項爲1，公比爲 $\frac{1}{4}$ 之等比級數．故欲求內接三角形之和，可求無窮級數 $\frac{1}{4}$ 以下之總和，即 $\frac{1}{4}\div(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{3}$，故所求之極限等於原三角形之三分之一．



1407. 按內接於所設正方形，作第二正方形之法，內接於第二正方形，作第三正方形，如是作無限之正方形，則(1)內接正方形和之極限如何？(2)欲令此和等於所設面積，則內接正方形之作法如何？

解 設正方形爲 ABCD，其一邊之長爲 a．內接正方形作法之最簡單者如下：過對角線之交點O，平行於邊引 HOF，EOG，聯結其與邊之交點，作正方形 HEFG，以下仿此．茲求此諸內接正方形和之極限．第一內接正方形，等於所設正方形之半分，即 $\frac{1}{2}a^2$，第二內接正方形又爲第一內接正方形之 $\frac{1}{2}$，如是以至無限．於是命所求和之極限爲 S，則 $S=a^2(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots)=a^2$．故由此方法所作內接正方形和之極限，等於所設正方形．若以 LMPQ 之作法，次第作內接正方形，而假定 $LM=ra$ $[r<1]$，則內接正方形 LMPQ 之面積爲 r^2a^2，故 $S=a^2(r^2+r^4+\cdots\cdots)=\frac{r^2}{1-r^2}a^2$．在內接正方形之一邊小於 a，而大於 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ 之界限內，內接正方形之作法無限．換言之，r 之值得按 $a>ra>\frac{a}{\sqrt{2}}$，即 $1>r>\frac{1}{\sqrt{2}}$ 之條件，任意定之．何則，蓋 $\overline{LM}^2=\overline{AM}^2+\overline{AL}^2=\overline{AL}^2+\overline{LD}^2$，又 $\overline{HE}^2=\overline{AE}^2+\overline{AH}^2=\overline{AH}^2+\overline{HD}^2$，$\overline{AH}^2+\overline{HD}^2<\overline{AL}^2+\overline{LD}^2$ [755題]，因而 $HE<LM$，故內接於 ABCD 之最小正方形爲 HEFG，而 LM 小於 $AM+AL$，即 AD 故也．故內接正方形和之最小極限爲 a^2．次，設 S 爲所設值，則因 $r^2a^2+r^4a^2+\cdots\cdots=S$，故 $r^2=\frac{S}{a^2+S}$．故第一內接正方形之邊，對於所設正方形邊之比，即 $r=\sqrt{\frac{S}{a^2+S}}$，故第一內接正方形之邊爲 ar．欲求此正方形之作法，當先求內接正方形之角頂，與所設正方形角頂之距離．茲假定此內接正方形之位置爲 LMPQ，則 $LM=ar$，$AM+AL=a$．於是直角三角形二邊之和及斜邊爲已知，由是可求得直角傍之一邊，以定 L 之位置．



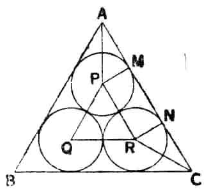
1408. 一旗杆，爲風吹折，頂落於距根20尺之地，修繕而重豎之，又被吹折，惟折處較前低 5 尺，頂所落之地較前遠 10 尺．求杆長．

解 設直角三角形之二邊爲 a, b，斜邊爲 c，則 $a^2=c^2-b^2=(c+b)(c-b)$，因而 $c-b=\frac{a^2}{c+b}$．據此，設杆長爲 x 尺，其所折之部

分爲斜邊，以下之部分爲直角之一邊，則此二部分之差，初折時爲 $\frac{20^2}{x}$，後折時爲 $\frac{30^2}{x}$，但後折時之差,較初折時之差多 $5\times2=10$ 尺，故得 $\frac{30^2}{x}-\frac{20^2}{x}=10$，由是得 $x=50$，故杆長爲 50 尺.

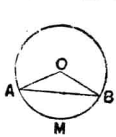
1409. 設正三角形之一邊爲 a，其內切且互切之三個等圓之半徑如何?

解 設正三角形爲 ABC，三個等圓之中心爲 P, Q, R. 命二圓 P, R 與 AC 之切點爲 M, N, 聯結 PM, RN, 則皆垂直於 AC. 今聯結 AP, RC, 則直角三角形 APM 之一銳角 $\mathrm{PAM}=\frac{1}{3}\hat{\mathrm{R}}$, 因而 $\mathrm{A\hat{P}M}=\frac{2}{3}\hat{\mathrm{R}}$, 故 $\mathrm{AP}=2\mathrm{PM}$. 同理, $\mathrm{CR}=2\mathrm{RN}$. 於是命三個等圓之半徑爲 r, 則 $\mathrm{AM}=\mathrm{CN}=\sqrt{\{(2r)^2-r^2\}}=r\sqrt{3}$. 而 $\mathrm{MN}=\mathrm{PR}=2r$, 因 $\mathrm{AC}=2\mathrm{AM}+\mathrm{MN}=a$, $a=2r\sqrt{3}+2r$, 故 $r=\frac{a}{2(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)a$.



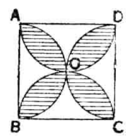
1410. 設圓之半徑爲10尺,一弧所對之圓周角等於直角之三分之二,求此弧及其弦所成弓形之面積.

解 因圓周角爲 $\frac{2}{3}\hat{\mathrm{R}}$, 故同弧所對之中心角爲 $\frac{4}{3}\hat{\mathrm{R}}$, 即 $4\hat{\mathrm{R}}$ 之 $\frac{1}{3}$, 故此弧所對之弦爲圓之內接正三角形之一邊. 命此弦爲 AB, 圓之中心爲 O, 聯結 OA, OB, 則因扇形 OAMB 爲圓之三分之一, 故其面積爲 $\frac{1}{3}\times10^2\pi=\frac{100}{3}\pi$. 又三角形 OAB 之面積, 乃以 AB 爲一邊之正三角形之三分之一, 故爲 $\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\times10^2$ [1389題] $=25\sqrt{3}$. 故弓形 ABM 之面積爲 $\frac{100}{3}\pi-25\sqrt{3}=104.72-43.30=61.42$ [近似數], 即約 61.42 平方尺.



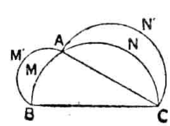
1411. 設正方形之一邊爲 a, 以邊爲直徑, 就形內在各邊上作半圓, 則得四形如葉, 求此四葉之面積.

解 以正方形 ABCD 之各邊爲直徑, 在圓內所作之半圓過同點. 何則? 設半圓 AB, AB 之交點爲 O, 聯結 OA, OB, OC, 則 $\mathrm{A\hat{O}B}=\hat{\mathrm{R}}=\mathrm{B\hat{O}C}$, 因而 AOC 爲對角線, O 爲其中點故也. 四半圓之和, 等於正方形之面積與四葉面積之和, 而四半圓之和, 乃以正方形之一邊爲直徑所作圓之二倍, 故四葉之面積爲 $2(\frac{1}{2}a)^2\pi-a^2$, 即 $(\frac{1}{2}\pi-1)a^2$.



1412. 作直角三角形之外接半圓周, 又以直角之二邊爲直徑, 就三角形之外側作半圓周, 求所得兩新月形之面積. 但直角之二邊爲 a 及 b.

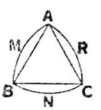
解 設 ABC 爲直角三角形, $\hat{\mathrm{A}}$ 爲直角, 其外接圓半徑爲 BMANC, 以 AB, AC 爲直徑之半圓爲 ABM′, ACN′. 二新月形 AMBM′, ANCN′ 之和等於半圓 ABM′, ACN′ 之和, 減以弓形 ABM, ACN 所得之差, 即半圓 ABM′, ACN′ 及直角



三角形 ABC 之和，減以半圓 BMANC 所得之差．而半圓 ABM′$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a)^2\pi$，半圓 ACN′$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}b)^2\pi$，直角三角形$=\frac{1}{2}ab$，半圓 BMANC$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}BC)^2\pi=\frac{1}{8}(a^2+b^2)\pi$，故兩新月形之和爲 $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}a)^2\pi+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}b)^2\pi+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{8}(a^2+b^2)\pi=\frac{1}{2}ab$，卽等於直角三角形之面積．

1413. 設三弧之半徑相等，合成一三角狀之圖形，各弧之中心，爲他二弧之交點，則此圖形之面積若何？但半徑爲 r.

解 設三角狀之圖形爲 AMBNCR. 因 A, B, C 分別爲弧 BNC, CRA, AMB 之中心，故三角形 ABC 之三邊，皆爲等圓之半徑，故三角形爲正三角形，因此扇形 ABNC, BCRA, CAMB 皆爲圓之六分之一，卽 $\frac{1}{6}r^2\pi$. 又正三角形 ABC 之面積爲 $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$ [1389題]．今圖形 AMBNCR 等於扇形 ABNC 之三倍減以三角形 ABC 之二倍所得之差，故爲 $3\times\frac{1}{6}r^2\pi-2\times\frac{\sqrt{3}}{4}r^2=\frac{\pi-\sqrt{3}}{2}r^2=0.704r^2$ [近似數]．



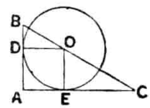
1414. 設二同心圓之半徑爲 a, b，一梯形與此二圓周間之環等積，而梯形之底等於二圓周之長，求梯形之高．

解 設 $a>b$，則環之面積爲 $a^2\pi-b^2\pi$，卽 $(a^2-b^2)\pi$ [1321題]，又設梯形之高爲 h，則其面積爲 $\frac{1}{2}(2a\pi+2b\pi)h$ [739題]，卽 $(a+b)\pi h$. 而此二面積相等，故 $(a^2-b^2)\pi=(a+b)\pi h$，由是得 $h=\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$.

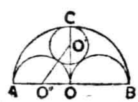
別解 作內圓之外切正多角形，由中心引過各角頂之直線，依次聯結其與外圓周之交點，則得邊數相等內接於外圓之正多角形，而在環內形成個數與邊數相等之梯形．是等梯形皆相等，其底爲二正多角形之邊，其高爲由中心至邊之距離之差．命是等梯形大底之和爲 m，小底之和爲 n，高爲 h，面積之和爲 S，環之面積爲 S′. 此時 S<S′. 而正多角形之邊數增多，則 m 與 $2a\pi$，n 與 $2b\pi$，h 與 $a-b$ 之差，漸漸減小，因而 S 與 S′ 之差亦漸漸減小．又正多角形之邊數無限增大，則是等之差，無限減小，終至 $m=2a\pi$，$n=2b\pi$，$h=a-b$，S=S′. 卽與環等積，底由 $2a\pi$，$2b\pi$ 之梯形，高爲 $a-b$.

1415. 設直角三角形之二邊爲 a, b，一圓之中心在斜邊上，且切於他二邊，則此圓之半徑若何？

解 設圓在 BC 上之中心爲 O，邊 AB, AC 上之切點爲 D, E，聯結 OD, OE，則 ODAE 爲正方形，OD, OE 爲圓之半徑．命圓之半徑爲 r，因兩直角三角形 BDO, OEC 相似，故 BD:OD=OE:EC. 而 AB$=a$，AC$=b$，故 $a-r:r=r:b-r$，故 $r^2=(a-r)(b-r)$，由是得 $r=\frac{ab}{a+b}$.



1416. 在半圓內引相等且切於半圓之二個等半圓，切於此三圓，引一小圓，則此小圓之半徑與等圓半徑之比爲 2:3.

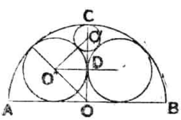


解 設半圓爲 ACB，中心爲 O，等圓之中心爲 O″，

小圓之中心爲 O′, 則 O″ 爲 AO 之中點, OO′ 爲 AB 之垂線,此易知之.命圓 O, O′, O″ 之半徑分別爲 R, r, r', 則 $OO'=R-r$, $O'O''=r+r'$. 因 $\overline{OO'}^2+\overline{OO''}^2=\overline{O'O''}^2$, 故 $\overline{R-r}^2+r'^2=\overline{r+r'}^2$, 即 $(2r'-r)^2+r'^2=(r+r')^2$, 或 $4r'^2-4rr'+r^2+r'^2=r^2+2rr'+r'^2$, $4r'^2=6rr'$, 或 $2r'=3r$, 故 $r:r'=2:3$.

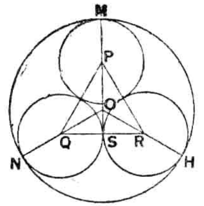
1417. 在半圓內作相切且切於半圓之二個等圓, 又切於此三圓作小圓, 求小圓半徑與等圓半徑之比.

解 設 ABC 爲半圓,等圓之一爲 O″, 小圓爲 O′, 其半徑分別爲 R, x, y, 則 $\overline{OD}^2=x^2=R\times(R-2x)\cdots(1)$, 又 $O'D=R-(x+y)$, 而 $\overline{O'D}^2+\overline{O''D}^2=\overline{O'O''}^2$, 故 $[R-(x+y)]^2+x^2=(x+y)^2$, 或 $R^2-2R(x+y)+x^2=0$, 以 (1) 式代入, 則 $R^2-2R(x+y)+R^2-2Rx=0$, 或 $R-2x-y=0$. 以此式之 R 代入 (1), 則 $x^2=(2x+y)^2-2(2x+y)x$, $x^2=4x^2+4xy+y^2-4x^2-2xy$, 或 $x^2=y^2+2xy$. 兩邊除以 y^2, 則 $\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\frac{x}{y}+1=2$, 即 $\frac{x}{y}-1=\sqrt{2}$, $\frac{x}{y}=\sqrt{2}+1$, 故 $y:x=1:\sqrt{2}+1$.



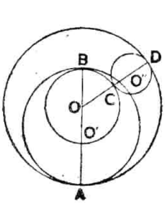
1418. 設圓之半徑爲 r, 在此圓中作三個等圓, 令相外切且內切於原圓, 則此三個等圓之半徑若何?

解 設圓之中心爲 O, 三等圓之中心爲 P, Q, R, 等圓與外圓之切點爲 M, N, H, 兩圓 Q, R 之切點爲 S. 此時 O, P, M; O, Q, N; 及 O, R, H 各成一直線, 故 OP = OQ = OR. 故 O 爲正三角形PQR之中心, 而OS爲正三角形之中心與邊之距離. 命等圓之半徑爲 a, 則因 $RS=\sqrt{(\overline{OR}^2-\overline{OS}^2)}=\sqrt{(\overline{OR}^2-(\frac{1}{2}\overline{OR})^2)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot OR$, 即 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot OR$, 故 $OR=\frac{2}{\sqrt{3}}a$. 而 $OH=OR+RH$, 即 $r=\frac{2}{\sqrt{3}}a+a$, 由是得 $a=(2\sqrt{3}-3)r$.



1419. 設二同心圓之半徑分別爲 a, b, 作內切於此二圓之圓, 及內切於外圓外切於內圓之圓, 求所作二圓之半徑.

解 設二同心圓之中心爲 O, 中心爲 O′ 之圓內切外圓於 A, 外切內圓於B, 則 O, O′, A 在一直線上, 又 O′, O, B 亦在一直線上. 而此二直線共有二點 O, O′, 故 A, O′, O, B 在一直線上. 命圓 O′ 之半徑爲 r, 則 $2r=AB=OA+OB=a+b$, 故 $r=\frac{1}{2}(a+b)$. 次, 設 $a>b$, 中心爲 O″ 之圓內切外圓於 D, 外切內圓於 C, 則 O, C, O″, D 在一直線上, 故設圓 O″ 之半徑爲 r'', 則 $2r''=CD=OD-OC=a-b$, 故 $r''=\frac{1}{2}(a-b)$.



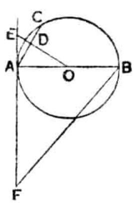
1420. 設圓之半周, 以其內接正方形之一邊及內接正三角形一邊之和表之, 其誤差如何?

解 設圓之半徑爲 r, 則內接正方形之一

邊為 $\sqrt{2}\cdot r$ [1385題], 內接正三角形之一邊為 $\sqrt{3}\cdot r$ [1384 題], 故其和為 $r(\sqrt{2}+\sqrt{3})=r\times 3.14626\cdots\cdots$. 然半徑為 r 之圓之半周為 $r\times 3.14159\cdots\cdots$, 是以其誤差應多 $r(3.14626\cdots\cdots-3.14159\cdots\cdots\cdots)=r\times 0.00467\cdots\cdots$。

1421. 設圓之中心為 O, 直徑為 AB, 等於半徑之弦為 AC. 由 O 引 AC 之垂線 OD, 延長之令交 A 上之切線於 E. 在此切線上,由 E 依 EA 之方向取 EF, 令等於半徑 OA 之三倍, 聯結 FB, 以之代半圓周,則其誤差如何?

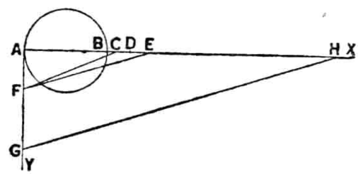
解 設半徑 AO$=1$, 則 AB$=2$, EF$=3$. 而



三角形OAC為正三角形, 故 $\mathrm{O\hat{A}C}=\frac{2}{3}\hat{\mathrm{R}}$, 故 $\mathrm{A\hat{O}D}=\frac{1}{3}\hat{\mathrm{R}}$, 故 $\mathrm{A\hat{O}D}=\frac{1}{3}\hat{\mathrm{R}}$, 故 OE$=2$AE [127題], $\mathrm{OA}^2=4\overline{\mathrm{AE}}^2-\overline{\mathrm{AE}}^2=3\overline{\mathrm{AE}}^2$, 故 $\mathrm{AE}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 因此 $\overline{\mathrm{BF}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AF}}^2=2^2+\left(3-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=4+\frac{28-6\sqrt{3}}{3}=\frac{40}{3}-2\sqrt{3}$, 故 BF$=3.14123\cdots\cdots$. 令半徑為 1 時,半圓周為 $3.14159\cdots\cdots$, 故若以 BF 代圓周,所生誤差雖大, 但若以之代半圓周, 則所生誤差, 尚小於 $\frac{1}{10000}$ 也.

1422. 設圓之半徑為 r, 在直徑 AB 之延線 BX 上取 BC$=$CD$=$DE$=\frac{1}{5}r$, 又在 A 上之切線 AY 上取 AF$=r$, AG$=$CF, 平行於 EF 引 GH, 命其與 BX 之交點為 H, 則 AH 約等於圓周.

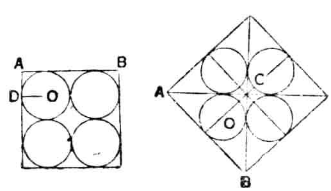
解 因 EF ∥ GH, 故 AG : AH $=$ AF : AE. 而 AG $=$CF. 今 $\overline{\mathrm{CF}}^2=\overline{\mathrm{AF}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2$, AF$=r$, AC $=2r$



$+\frac{1}{5}r=\frac{11}{5}r$, 故 $\overline{\mathrm{CF}}^2=r^2+\frac{121}{25}r^2$, 因此, CF $=\frac{\sqrt{146}}{5}r$. 又 AE$=2r+\frac{3}{5}r=\frac{13}{5}r$. 於是上述比例式, 得變為 $\frac{\sqrt{146}}{5}r:\mathrm{AH}=r:\frac{13}{5}r$. 是以 $\mathrm{AH}=\frac{13}{5}\cdot\frac{\sqrt{146}}{5}r=\frac{13\sqrt{146}}{50}\cdot 2r$. 而 $\frac{13\sqrt{146}}{50}=\frac{13}{50}\cdot 12.0830459\cdots\cdots=3.14159\cdots\cdots$, 卽與 π 值之差, 較十萬分之一尚小.

1423. 設相切之四個等圓, 內切於一邊為 a 之正方形,求等圓之半徑.

解 左圖中, OD$=\frac{1}{4}$AB, 故 $r=\frac{1}{4}a$. 又右圖



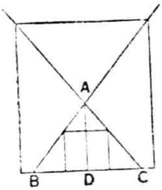
中, AC$=$BC$=\frac{1}{\sqrt{2}}a$. 而 $r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}=\frac{1}{2}a^2$, 故 $r=\frac{1}{2}a(\sqrt{2}-1)$.

1424. 設三角形之三邊為 a, b, c, 三高為 p, q, r, 三內接正方形之邊為 x, y, z, 三傍接正方形之邊為 x', y', z', 試證下列各式:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{a},\quad \frac{1}{y}=\frac{1}{q}+\frac{1}{b},\quad \frac{1}{z}=\frac{1}{r}+\frac{1}{c},$$

$\frac{1}{x'}=\frac{1}{p}-\frac{1}{a},\ \frac{1}{y'}=\frac{1}{q}-\frac{1}{b},\ \frac{1}{z}=\frac{1}{r}-\frac{1}{c}.$

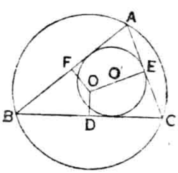
解 因 BC$=a$, AD$=p$, 故 $p:a=p-x:x$,



故 $\frac{1}{x}=\frac{1}{p}+\frac{1}{a}$, 同理, $\frac{1}{y}=\frac{1}{q}+\frac{1}{b}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}+\frac{1}{c}$. 又 $p:a=x'-p:x'$, 故 $\frac{1}{x'}=\frac{1}{p}-\frac{1}{a}$; 同理, $\frac{1}{y'}=\frac{1}{q}-\frac{1}{b}$, $\frac{1}{z'}=\frac{1}{r}-\frac{1}{c}$.

1425. 由三角形之外心, 至各邊所引垂線之和, 等於內切圓半徑與外接圓半徑之和.

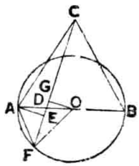
解 設外接圓之半徑爲 R, 內切圓之半徑



爲 r, 面積爲 Δ, 則 $R=\frac{abc}{4\Delta}$, $r=\frac{2\Delta}{a+b+c}$, [1399, 1401題], 故 $R+r=\frac{a}{2}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta}+\frac{b}{2}\cdot\frac{a^2-b^2+c^2}{4\Delta}+\frac{2}{c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{4\Delta}$, 而 OD $=\sqrt{(R^2-\overline{BD}^2)}$, 卽 OD$=\frac{a}{2}\cdot\frac{-a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$, 根據同理, OE$=\frac{b}{2}\cdot\frac{a^2-b^2+c^2}{4\Delta}$, OF$=\frac{c}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{4\Delta}$. 故 OD+OE+OF=R+$r$.

1426. 在圓 O 之直徑 AB 上作正三角形 ABC, n 等分 AB, 聯結角頂 C 及第二分點 D, 延長 CD, 令交圓周於 F, 求弦 AF 之長. 設 $n=3$, $n=4$, $n=6$, 則 AF 之長各如何?

解 由假設, AD$=\frac{2}{n}\times 2r$, DO$=\frac{n-4}{n}r$, CO$=r\sqrt{3}$, CD$=\sqrt{(\overline{DO}^2+\overline{CO}^2)}$

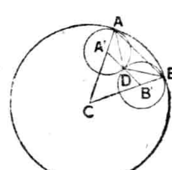


$=\frac{2r}{n}\sqrt{(n^2-2n+4)}$, 命 OG 垂直 CF 於 G, 則 OG $\frac{CO\cdot DO}{CD}=\frac{(n-4)\sqrt{3}}{2\sqrt{(n^2-2n+4)}}r$. 又 DG $=\frac{\overline{OD}^2}{CD}=\frac{(n-4)^2r}{2n\sqrt{(n^2-2n+4)}}$, GF$=\sqrt{(r^2-\overline{OG}^2)}=\frac{\sqrt{(n^2+16n-32)}}{2\sqrt{(n^2-2n+4)}}r$, 因此得 DF=GF−GD $=\frac{n\sqrt{(n^2+16n-32)}-(n-4)^2}{2n\sqrt{(n^2-2n+4)}}r$. 命 AE 垂直於 CF, 則 DE$=\frac{AD\cdot OD}{CD}=\frac{2(n-4)r}{n\sqrt{(n^2-2n+4)}}$. 然 $\overline{AF}^2=\overline{AD}^2+\overline{DF}^2-2DF\cdot DE$ [752題], 故 AF $=\sqrt{\left\{\frac{n^2+4n+16-(n-4)\sqrt{(n^2+16n-32)}}{2(n^2-2n+4)}\right\}}r$.

若 $n=3$, 則 AF$=r\sqrt{3}$, 卽 AF 爲內接正三角形之一邊. 若 $n=4$, 則 AF$=r\sqrt{2}$, 卽內接正方形之一邊. 又若 $n=6$, 則 AF$=r$, 卽 AF 爲內接正六角形之一邊.

注意 普徧言之, 本題之 AF, 約等於內接正 n 角形之一邊.

1427. 設相切之 m 個等圓, 內切於所設圓, 求等圓之半徑. 但所設圓之半徑爲 a, 其圓周之 m 分之一所對之弦爲 d.

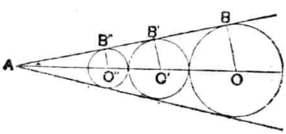


解 設 m 等分圓周所得之一分爲 AB, 引半徑 AC, BC, 又命二等分 $\hat{CAB}$ 及 $\hat{CBA}$

之線 AD, BD, 交於點 D, 過 D 平行於 AB 引 A'DB', 則 A', B' 爲內切等圓之中心. 於是 AB : AC = A'B' : A'C, 然 A'C = AC − AA', A'B' = 2AA', 故 AB : AC = 2AA' : AC − AA', 卽 AB : 2AC = AA' : AC − AA', 卽 AA' : AC = AB : AB + 2AC, 故 $AA' = \dfrac{AB \cdot AC}{AB+2AC} = \dfrac{ad}{d+2a}$.

1428. 設相交於 A 點之二直線, 夾一連續次相切之圓, 且與之相切. A 至最遠圓中心之距離爲 OA, 最遠圓之半徑爲 OB, 求證諸圓之面積之和, 與最遠圓 O 之面積之比爲 $\dfrac{(OA+OB)^2}{4OA \cdot OB}$.

解 依各圓之中心, 依由 O 至 A 之方向,



順次爲 O', O'',……, 半徑爲 O'B', O''B'',……. 於是 OA:OB = O'A:O'B', 故 $O'A = \dfrac{OA}{OB} \cdot O'B'$. 又 OA + OB : OB = O'A + O'B' : O'B' = OA − OB : O'B', 故 $O'B' = \dfrac{OB(OA-OB)}{OA+OB}$.

依據同理, 可得 $O''B'' = \dfrac{O'B'(O'A-O'B')}{O'A+O'B'}$

$$= \frac{O'B'\left(\dfrac{OA}{OB} \cdot O'B' - O'B'\right)}{\dfrac{OA}{OB} \cdot O'B' + O'B'} = \frac{OA-OB}{OA+OB} \cdot O'B'$$

$= \dfrac{OB(OA-OB)^2}{(OA+OB)^2}$, 其他各圓半徑依此類推.

今設圓 O + 圓 O' + 圓 O'' + …… = S, 則 S

$$= \pi\overline{OB}^2 + \pi\frac{\overline{OB}^2(OA-OB)^2}{(OA+OB)^2} + \pi\frac{\overline{OB}^2(OA-OB)^4}{(OA+OB)^4}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots = \pi\overline{OB}^2 \cdot \frac{1}{1-\left(\dfrac{OA-OB}{OA+OB}\right)^2}$$

$= \pi \cdot \overline{OB}^2 \cdot \dfrac{(OA+OB)^2}{4OA \cdot OB}$. 故如題所言.

1429. 設三角形之三中線爲 α, β, γ, 則其面積 $S = \frac{1}{3}\sqrt{(2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4)}$.

解 由 287 題及其圖, $\triangle DEF = \triangle ADE = \frac{1}{4} \times \triangle ABC$, 而 $\triangle DEF = \frac{1}{3}\triangle DCF$, 故 $\triangle DCF = \frac{3}{4} \times \triangle ABC$. 然 △DCF 之三邊, 等於 △ABC 之三中線 α, β, γ, 故 $\triangle DCF = \frac{1}{4}\sqrt{(2\gamma^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4)}$, 是以 $S = \triangle ABC = \frac{4}{3} \times \triangle DCF = \frac{1}{3}\sqrt{(2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4)}$.

1430. 已知三角形之三高 h, h', h'', 求其三邊與面積.

解 設面積爲 S, 則 $h = \dfrac{2S}{a}$, $h' = \dfrac{2S}{b}$, $h'' = \dfrac{2S}{c}$, 故 $a = \dfrac{2S}{h}$, $b = \dfrac{2S}{h'}$, $c = \dfrac{2S}{h''}$. 又 $S = \dfrac{1}{4}$

$$\sqrt{\left\{\frac{32S^4}{h^2h'^2} + \frac{32S^4}{h'^2h''^2} + \frac{32S^4}{h''^2h^2} - \frac{16S^4}{h^4} - \frac{16S^4}{h''^4}\right.}$$

$\left.-\dfrac{16S^4}{h''^4}\right\}$, 故 $S = 1\Big/\left[\sqrt{\left\{\dfrac{2}{h^2h'^2} + \dfrac{2}{h'^2h''^2} + \dfrac{2}{h''^2h'^2} - \dfrac{1}{h^4} - \dfrac{1}{h'^4} - \dfrac{1}{h''^4}\right\}}\right]$.

1431. 試計算圓周與其直徑之比.

解 設圓之直徑爲已知, 計算某內接正多角形及其相似外切正多角形之周, 次計算邊數二倍之內接外切正多角形之周, 復次計算邊數又爲上形二倍之正多角形之周, 以下仿此, 如是計算所得之値, 爲圓周値

之近似值.命圓之直徑爲1,先作圓之內接外切正方形,則內接正方形之周 $=4\times\frac{1}{2}\sqrt{2}=2\sqrt{2}$;外切正方形之周 $=4$,故 $P=4$, $p=2\sqrt{2}=2.8284271$. 次,外切及內接正八角形之周爲:

$$P'=\frac{2p\times P}{P+p}=3.3137085,$$

$$p'=\sqrt{(p\times P')}=3.0614675.$$

取是等量爲所設量,命 $P=3.3137085$, $p=3.0614675$,則由同式,可得外切及內接16邊正多角形之周 $P'=3.1825979$,及 $p'=3.1214452$. 如此繼續行之,結果如下:

邊數	外切正多角形之周	內接正多角形之周
4	4.0000000	2.8284271
8	3.3137085	3.0614675
16	3.1825979	3.1214452
32	3.1517249	3.1365485
64	3.1441184	3.1403312
128	3.1422236	3.1412773
256	3.1417504	3.1415138
512	3.1416321	3.1415729
1024	3.1416025	3.1415877
2048	3.1415951	3.1415914
4096	3.1415933	3.1415923
8192	3.1415928	3.1415926

由此表之最後二數,可知直徑爲1之圓周,小於3.1415928,而大於3.1415926. 但直徑爲1時,周 $C=\pi$,故 $\pi=3.1415927$,其誤差在第七小數位之一單位以內. 以上之 π 值,又名之曰圓周率. 圓周率計至小數二百零八位者,其值如下:

3.14159 26535 89793 23846 26433
83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286
20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384
46095 50582 23172 53594 08128
48473 78139 20386 33830 21574
73996 00825 93125 91294 01832
80651 744…… …… …… ……

1432. 設 m, n 爲任意整數,表三角形三邊之數爲 $m^2+n^2, m^2-n^2, 2mn$,則此三角形爲直角三角形. 又試順次定 m, n 之值,令表直角三角形三邊之數,皆爲簡單之整數.

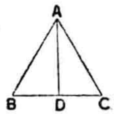
解 $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=m^4-2m^2n^2+n^4+4m^2n^2=m^4+2m^2n^2+n^4=(m^2+n^2)^2$. 故有如是三邊之三角形爲直角三角形,而直角之對邊爲 m^2+n^2. 次,設 $m=2$, $n=1$,則三角形之邊分別爲5, 3, 4; 設 $m=3$, $n=1$,則邊爲10, 8, 6,而三角形與前款中者相似. $m=3$, $n=2$,則三邊爲13, 5, 12; 若 $m=4$, $n=1$,則爲17, 15, 8; 若 $m=4$, $n=2$,則與第一款相似;若 $m=4$, $n=3$,則爲25, 7, 24. 其他仿此.

1433. 設直角三角形之三邊,已知爲三連續整數,求是等三邊.

解 設三邊爲 $m-1, m, m+1$,則 $(m+1)^2=m^2+(m-1)^2$,或 $m^2+2m+1=m^2+m^2-2m+1$,故 $m^2-4m=0$. 由是得 $m=0$,或 $m=4$. 然 $m=0$ 不適題意,故 $m=4$,因而他邊爲3及5.

1434. 已知等邊三角形之面積 S,求一邊 a 及高 h.

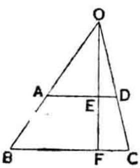
解 設 ABC 爲等邊三角形, AD 爲其高, 於是因 $AD=h$, $AB=a$, 故 $\frac{1}{2}ah=S$, 而 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, 故 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=S$, 故 $a=\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\times\sqrt{S}$, 因而



$h=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\sqrt{S}=\sqrt[4]{3}\sqrt{S}$.

1435. 延長梯形之不平行二邊, 令交於一點, 而視梯形爲兩三角形之差, 以求其面積.

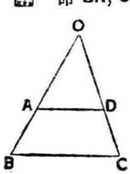
解 設 ABCD 爲梯形, 其不平行之二邊爲 BA, CD, 此二邊延線之交點爲 O. 由 O 至 BC 引垂線 OF, 命其與 AD 之交點爲 E, 於是 $OE\perp AD$. 今 $\triangle OBC=\frac{1}{2}OF\cdot BC$, $\triangle OAD=\frac{1}{2}OE\cdot AD$, 故梯形 ABCD



$=\triangle OBC-\triangle OAD=\frac{1}{2}(OF\cdot BC-OE\cdot AD)$
$=\frac{1}{2}\{(OE+EF)\times BC-OE\cdot AD\}$. 然 $OE:OF=AD:BC$, 卽 $OE\cdot BC=OF\cdot AD$, 故梯形 ABCD $=\frac{1}{2}\{OE\cdot BC+EF\cdot BC-OE\cdot AD\}=\frac{1}{2}\{OF\cdot AD+EF\cdot BC-OE\cdot AD\}=\frac{1}{2}\{(OF-OE)\times AD+EF\cdot BC\}=\frac{1}{2}\{EF\cdot AD+EF\cdot BC\}=\frac{1}{2}EF(AD+BC)$.

1436. 已知梯形之高及底, 求以此梯形爲差之兩三角形之面積.

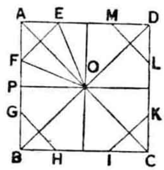
解 命 BA, CD 之交點爲 O, $AD=a$, $BC=b$, 梯形之高爲 h, 則因 $\triangle OAD\backsim\triangle OBC$, 故 $\triangle OBC:\triangle OAD=\overline{BC}^2:\overline{AD}^2=b^2:a^2\cdots\cdots(1)$. 故 $\triangle OBC:\triangle OBC-\triangle OAD=\triangle OBC:ABCD=b^2:b^2-a^2$, 因此, 得 $\triangle OBC=\frac{1}{2}(a+b)h\times\frac{b^2}{b^2-a^2}$



$=\frac{b^2h}{2(b-a)}$. 故由比例式 (1), 又得 $\triangle OAD=\frac{a^2h}{2(b-a)}$.

1437. 設一正八角形之四邊, 分別在所設正方形之四邊上, 求正八角形一邊之長.

解 設 ABCD 爲正方形, O 爲其中心, 由 O 至 AB 引垂線 OP, 作角 AOP 之二等分線 OF, 命其與 AB 之交點爲 F, 仿此, 命他二等分線與正方形邊之交點爲 G, H, I, K, L, M, E, 則 EFGH……M 爲正八角形, 此甚易知之.



命 $AB=a$, 則 $AP=\frac{1}{2}a$, $OP=\frac{1}{2}a$, $AO=\frac{1}{\sqrt{2}}a$. 又 $OA:OP=AF:FP$, $OA+OP:OP=AF+FP:FP$, 故 $\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{2}a:\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}a:FP$, 因此求得 $FP=\frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{1}{\sqrt{2}}a+\frac{1}{2}a}=\frac{(\sqrt{2}-1)a}{2}$. 故正八角形之一邊爲 $(\sqrt{2}-1)a$.

1438. Ahmes 曰, 以直徑之九分之八爲一邊所作之正方形, 其面積略等於圓面積, 此值爲古代埃及人所知之 π 近似值, 此值正確至小數第幾位?

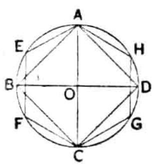
解 設圓之半徑爲 1, 則圓面積爲 π, 而依照 Ahmes 所言, 直徑爲 2, 故以其九分之八爲一邊所作之正方形, 其面積爲 $(\frac{16}{9})^2$, 約爲 3.16. 故以此值爲 π, 正確至小數第一位.

1439. 設以 S 表圓面積, C 表圓周, 則 $S=C^2/4\pi$

解 設圓之半徑爲R,則 $S=\pi R^2$, $C=2\pi R$, 由此兩式消去R,即得 $S=\frac{C^2}{4\pi}$.

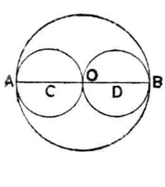
1440. 在同圓之內接正方形及正六角形之一邊上,作正三角形,求此正三角形之比.

解 設圓O之內接正方形爲ABCD,正六邊形爲AEFCGH,則 $AB=\sqrt{2}AO$, $AE=AO$. 又設在AB, AE上所作之正三角形,分別爲P, Q,則 $P:Q=\overline{AB}^2:\overline{AE}^2=2\overline{AO}^2:\overline{AO}^2=2:1$.



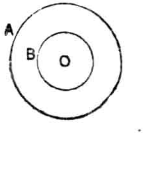
1441. 設互相外切之二個等圓,內切於定圓,且二中心在定圓之直徑上,則此二個等圓面積之和,等於定圓面積之半分.

解 設定圓之中心爲O,半徑爲R,任意直徑爲AB;又設互相外切之二個等圓C, D之中心在AB上,且內切於定圓.此時兩圓外切於O,內切定圓於A, B,故 $OC=OD=\frac{1}{2}R$,故圓C+圓D $=\pi\overline{OC}^2+\pi\overline{OD}^2=2\pi\overline{OC}=2\pi\times\frac{1}{4}R^2=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}$圓O.



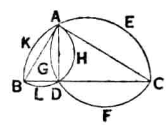
1442. 圓環之面積,等於以二圓周之長爲底,以二半徑之差爲高之梯形面積.

解 設O爲圓環之中心,外圓之半徑爲R,內圓之半徑爲r,則圓環之面積爲 $\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)=(\pi R+\pi r)\times(R-r)$.而外圓周爲 $2\pi R$,內圓周爲 $2\pi r$,故以 $2\pi R$, $2\pi r$ 爲底,$R-r$ 爲高之梯形面積,等於 $\frac{1}{2}(2\pi R+2\pi r)\times(R-r)=(\pi R+\pi r)(R-r)$,即等於圓環之面積.



1443. 在直角三角形之三邊上,作半圓,令皆在三角形之內側,則直角之二邊所分弓形之和,減以斜邊所分之弓形而得之差,等於直角二邊上之半圓公有之部分.

解 設三角形ABC中,$\hat{A}=\hat{R}$. 半圓BAC $=\frac{1}{2}\pi\frac{\overline{BC}^2}{4}=\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot\overline{BC}^2$. 同理,半圓ADC $=\frac{1}{8}\pi\times\overline{AC}^2$,半圓ADB $=\frac{1}{8}\times\pi\overline{AB}^2$. 然 $\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$,故半圓BAC=半圓ADC+半圓ADB. 此式兩邊減以△ABC,則弓形BKA+弓形AEC=弓形DFC+弓形AGD+弓形AHD+弓形BLD,故弓形BKA+弓形AEC−(弓形DFC+弓形BLD)=弓形AGD+弓形AHD.



1444. 設正多角形之一角爲162° [$\frac{9}{5}\hat{R}$],其邊數如何?

解 設所求正多角形之邊數爲n,則其一角爲 $\frac{2(n-2)}{n}\hat{R}$. 然由題意,此值於等 $\frac{9}{5}\hat{R}$,故 $\frac{2(n-2)}{n}=\frac{9}{5}$. 解之,得 $n=20$,即所求之邊數爲20.

1445. 一凸多角形,其內角成等差級數,最小角爲120度,公差爲5度,求其邊數.

解 茲以度爲單位以測角,命邊數爲n,則內角度數之總和爲 $\frac{n}{2}\{120\times2+(n-1)\times5\}$,* 或 $(2n-4)\times90$,故求n之方程式

爲 $\frac{n}{2}\{120\times2+(n-1)\times5\}=(2n-4)\times90$, 即 $n^2+25n+144=0$. 解之, 得 $n=16$, 或 9. 然多角形之邊數設爲 16, 則其最大角之度數爲 $120+(16-1)\times5=195$†, 而超過 180 [即二直角之度數], 故不適合凸多角形之條件. 若邊數爲 9, 則其最大角之度數爲 $120+(9-1)\times5=160$, 而不超過 180, 故適合所設之條件. 故所求之邊數爲 9.

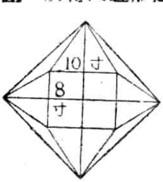
注意 等差級數中,設初項爲 a,公差爲 d,項數爲 n, 末項爲 l, 總和爲 S, 則 *$S=\frac{n}{2}\times\{2a+(n-1)d\}$, † $l=a+(n-1)d$.

1446. 有甲乙二正多角形,甲之邊數,爲乙之邊數之二倍,甲之一角與乙之一角之比爲 9:8, 求各多角形之邊數.

解 設乙之邊數爲 n, 則甲之邊數爲 $2n$. 正 n 邊形之一內角爲 $\frac{2(n-2)}{n}\hat{R}$. 正 $2n$ 邊形之一內角爲 $\frac{2(2n-2)}{2n}\hat{R}$. 故 $\frac{2(2n-2)}{2n}:\frac{2(n-2)}{n}=9:8$. 由此式求 n 值, 則得 $n=10$. 故乙之邊數爲 10, 甲之邊數爲 20.

1447. 一矩形, 二邊之長爲10寸及8寸, 今以此矩形之四邊爲底邊,就形外作四個等邊三角形, 依次聯結此諸三角形之角頂. 求所得四邊形之面積.

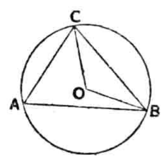
解 所得四邊形之各邊相等,因而本形爲



菱形, 其對角線互相直交,此甚易證之. 又矩形8寸邊上所作等邊三角形之角頂聯結之直線, 以寸爲單位表之, 則得 $10+2\sqrt{8^2-4^2}=10+8\sqrt{3}$. 又 10 寸邊上所作等邊三角形之角頂聯結之直線,爲 $8+2\sqrt{10^2-5^2}=8+10\sqrt{3}$(寸). 故以平方寸爲單位, 表本形之面積, 則爲 $\frac{1}{2}(10+8\sqrt{3})(8+10\sqrt{3})=160+82\sqrt{3}$ $\doteqdot 160+82\times1.732050=160+142.0281$ $=302.0281$, 卽約 302.03 平方寸.

1448. 一三角形之三角爲 60°, 40°, 80°, 其外接圓周爲 2 呎,求三角形之三邊所對各圓弧之長.

解 設三角形爲 ABC, $\hat{A}=60°$, $\hat{B}=40°$, C



$=80°$, 命三角形 ABC 外接圓之中心爲 O, 聯結 OB, OC, 則 $B\hat{O}C=2\hat{A}=120°$, $120°=360°\div3$, 故弧 BC 爲圓周 ABC 之三分之一,因而弧 BC 之長, 爲 2 呎之三分之一, 即 8 吋. 而 $\hat{B}=40°$, $\hat{C}=80°$, 故 $\hat{C}=2\hat{B}$, 因而弧 AB=2 弧 AC, 故弧 AB 之長爲 $(24-8)\times\frac{2}{3}=16\times\frac{2}{3}=10\frac{2}{3}$ (吋), 弧 AC 之長爲 $10\frac{2}{3}\div2=5\frac{1}{3}$ (吋).

1449. 有長若干尺之繩, 若以之爲周邊作正方形,則正方形之面積爲324平方尺,若以之爲周邊作正六邊形,則正六邊形之面積若何?

解 所設正方形之一邊爲 $\sqrt{324}=18$, 卽 18 尺, 故繩之長爲 $18\times4=72$ (尺). 故正六邊形一邊之長爲 $72\div6=12$ 尺,又其邊心距爲 $12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ (尺), 故所求之面積爲 $12\times6\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times6=216\sqrt{3}\doteqdot216\times1.7320508\doteqdot374.123$ (平方尺).

1450. 邊長 1 尺之正方形之外接圓，與邊長 2 尺 4 寸之等邊三角形之內切圓孰大？

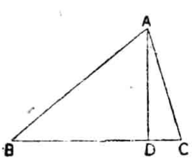
解 邊長為 1 尺之正方形中，對角線長 $\sqrt{(1^2+1^2)}$，即 $\sqrt{2}$ 尺，亦即 $10\sqrt{2}$ 寸，此即其外接圓之直徑．次，邊長為 2 尺 4 寸之等邊三角形中，由角頂至對邊所引之垂線，長 $\sqrt{(24^2-12^2)}$，即 $12\sqrt{3}$ 寸．等邊三角形中，內心與重心一致，故其內切圓之直徑為 $12\sqrt{3}\times\frac{2}{3}$，即 $8\sqrt{3}$ 寸．欲知兩圓之大小，故比較其直徑．今 $(10\sqrt{2})^2=200$，$(8\sqrt{3})^2=192$，故 $10\sqrt{2}>8\sqrt{3}$，故本題正方形之外接圓，大於三角形之內切圓．

1451. 設三角形 ABC 中，由 A 所引之中線為 AG，邊 $AB=3$ 寸，$AC=4$ 寸，又 $AG=3$ 寸，求底邊 BC 之長．

解 由 754 題，$2\overline{AG}^2+2\overline{BG}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$．以所設之數代入，則 $2\times3^2+2\overline{BG}^2=3^2+4^2$，故 $2\overline{BG}^2=16-9=7$．而 $BC=2BG$，故 $\overline{BC}^2=4\overline{BG}^2=2\times2\overline{BG}^2=2\times7=14$．故 $BC=\sqrt{14}$ (寸)，或約 3.742 寸．

1452. 設三角形 ABC 中，$AC=2$ 吋，$BC=3$ 吋，AC 投於 BC 上之正射影為 0.5 吋，則 AB 之長若何？

解 三角形 ABC 中，設 $AD\perp BC$，則 $CD=0.5$ 吋．而由 751 或752題，$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\pm2BC\cdot CD$，即 $\overline{AB}^2=2^2+3^2\pm2\times3\times0.5=4+9\pm3=16$，或 10 (吋)，故 $AB=4$，或 $\sqrt{10}$ (吋)，即 4吋，或約 3.162 吋．

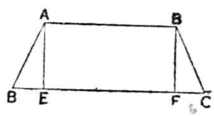


1453. 設二等邊三角形中，二等邊各為 10 吋，底邊為 7 吋，求高及面積．

解 所之求高為 $\sqrt{(10^2-\frac{1}{4}\times7^2)}=\sqrt{(100-12.25)}=\sqrt{87.75}=\frac{3}{2}\sqrt{39}$ (吋)，或約 $\frac{3}{2}\times6.2449=9.367$ (吋)．又面積為 $\frac{1}{2}\times$高$\times$底邊 $=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{39}\times7=\frac{21}{4}\sqrt{39}$ (平方吋)，或約 32.786 平方吋．

1454. 有一梯形，高 0.7 寸，小底 2 寸，不平行之二邊相等，各為 1 寸，求梯形之面積．

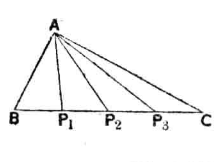
解 設 ABCD 為梯形，$AD\parallel BC$，$AB=CD=1$ (寸)，$AD=2$ (寸)，由 A, D 至底邊 BC 引垂線 AE, DF，則 $BE=CF$，此甚易知之．



今 $\overline{BE}^2=\overline{AB}^2-\overline{AE}^2=1^2-0.7^2=1-\dfrac{49}{100}=\dfrac{51}{100}$，故 $BE=CF=\dfrac{1}{10}\times\sqrt{51}$ (寸)．而 $AD=2$ (寸)，故 $BC=AD+BE+CF=2+\frac{1}{5}\sqrt{51}$ (寸)，故面積 $=\frac{1}{2}AE(AD+BC)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}\times(4+\frac{1}{5}\sqrt{51})=\dfrac{7}{100}(20+\sqrt{51})$ (平方寸)，或約 $\dfrac{7}{100}(20+7.14142)\doteqdot1.899$ (平方寸)．

1455. 直角三角形中，設直角旁二邊之長為 a, b，則斜邊之四等分點與直角頂聯結之三直線，各長幾何？

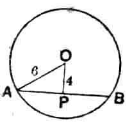
解 設直角三角形為 ABC，斜邊 BC 之四等分點，由 B 方起順次為 P_1, P_2, P_3．$BC=\sqrt{(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)}=\sqrt{(a^2+b^2)}$，$AP_2=\frac{1}{2}\times BC=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$．次，$\overline{AB}^2+\overline{AP_2}^2=2(\overline{BP_1}^2+\overline{AP_1}^2)$，故



$\overline{AP_1}^2=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AP_2}^2)-\overline{BP_1}^2=\frac{1}{2}\times\{a^2+\frac{1}{4}(a^2+b^2)\}-\frac{1}{16}(a^2+b^2)$, 由是得 $AP_1=\frac{1}{4}\sqrt{(9a^2+b^2)}$. 同法,得 $AP_3=\frac{1}{4}\sqrt{(a^2+9b^2)}$.

1456. 設圓之半徑爲 6 寸. 一點距中心 4 寸, 則過此點之諸弦中, 最短者之長若何? 又過此點所引任意弦上二分所包矩形之面積若何?

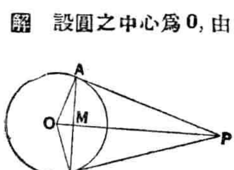
解 設圓之中心爲 O, 所設點爲 P. 因 OP 爲 4 寸,半徑爲 6 寸, 故點 P 在圓 O 內. 命過 P 垂直於 OP 之弦爲 AB, 則 AB 爲過 P 諸弦中之最短者. 聯結 OA, 則由直角三角形 OAP, 得 $AP=\sqrt{(\overline{OA}^2-\overline{OP}^2)}=\sqrt{(6^2-4^2)}=2\sqrt{5}$. 然因 OP 垂直於 AB, 故 P 爲 AB 之中點, 因而 $AB=2AP=2\times2\sqrt{5}=4\sqrt{5}\doteqdot4\times2.2360=8.944$, 即約 8.944 寸.



次. 過 P 之任意弦上二分所包之矩形,恆等於 $AP\cdot PB$, 即 $AP\cdot PB=2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=20$ (平方寸).

1457. 設一圓之半徑爲 2 尺 1 寸, 點 P 距圓周 3 尺 5 寸,由 P 引圓之二切線, 求聯結切點之弦之長.

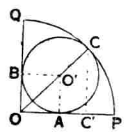
解 設圓之中心爲 O, 由 P 所引切線之切點爲 A, B. 聯結 OA, OP, 命 OP, AB 之交點爲 M, 則 OP 垂直二等分 AB 於 M [560題]. 三角形 OAP 乃以 OP 爲斜邊之直角三角形, 故 $OP:OA=OA:OM$. 其中 $OP=21+35=56$ (寸), $OA=21$ (寸), 故 $OM=\frac{\overline{OA}^2}{OP}=\frac{21^2}{56}=\frac{63}{8}$, 因而 $\overline{AM}^2=\overline{OA}^2-\overline{OM}^2=21^2-\left(\frac{63}{8}\right)^2=\frac{24255}{64}$, 故 $AM=\sqrt{\frac{24255}{64}}=\frac{21}{8}\sqrt{55}$, 故 $AB=2\cdot AM=\frac{21}{4}\sqrt{55}=38.935$……, 即約 38.94 (寸).



注意 點與圓周之距離, 小於直徑, 故僅有一解.

1458. 設一圓內切於半徑爲 r 之象限, 求此圓之半徑.

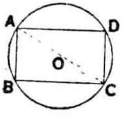
解 I. 設半徑爲 r 之象限爲 POQ, 其內切圓之中心爲 O′, 圓 O′ 與 OP, OQ, 及弧 PQ 之切點分別爲 A, B, C, 則 OO′C 在一直線上. 又 O′A, O′B 分別垂直於 OP, OQ, 且 O′A=O′B, 故 O′BOA 爲正方形. 於是命 $O'A=O'B=O'C=x$, 則因 $\sqrt{(\overline{O'A}^2+\overline{O'B}^2)}=OO'=OC-O'C$, 故 $\sqrt{(x^2+x^2)}=r-x$, $\therefore x\sqrt{2}=r-x$, 即 $(\sqrt{2}+1)x=r$, 故 $x=\frac{r}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)r$.



解 II. 由 C 至 OP 引垂線 CC′, 則 $OC:CC'=OO':O'A=OC-O'A:O'A$, 故 $OC+CC':CC'=OC:O'A$. 然 $CC'=OC'$, 故 $CC'=\frac{1}{\sqrt{2}}OC$, 故 $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)OC:\frac{1}{\sqrt{2}}OC=OC:O'A$, 因此得 $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}x=\frac{1}{\sqrt{2}}r$, 故 $x=\frac{1}{\sqrt{2}+1}r=(\sqrt{2}-1)r$.

1459. 設圓之半徑爲 r, 其內接矩形之面積爲 a^2, 求矩形二邊之長.

解 設圓之中心爲 O, 內接矩形爲 ABCD. 對角線 AC 爲圓之直徑, 故設 $AB=x$, BC



$=y$, 則 $xy=a^2$, $x^2+y^2=4r^2$, 故 $x+y=\sqrt{(4r^2+2a^2)}$, $x\sim y=\sqrt{(4r^2-2a^2)}$. 由是得所求之二邊如下:

$\frac{1}{2}\{\sqrt{(4r^2+2a^2)}+\sqrt{(4r^2-2a^2)}\}$,

及 $\frac{1}{2}\{\sqrt{(4r^2+2a^2)}-\sqrt{(4r^2-2a^2)}\}$.

1460. 一點距圓之中心 4 吋, 由此點至圓所引切線之長爲 3 吋, 求圓之半徑.

解 設圓之半徑爲 r, 則 $r^2=4^2-3^2=7$, 故 $r=\sqrt{7}\fallingdotseq 2.646$ (吋).

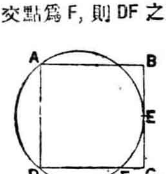
1461. 設弦 AB, CD 直交於 O, AO = OB = 2 吋, CO = 1.5 吋, 求圓之半徑.

解 $CO\cdot DO=\overline{AO}^2$ [876題], 故 $1.5\times DO=2^2$, 故 $DO=\frac{8}{3}$ (吋), 因而 $CD=CO+OD=1.5+\frac{8}{3}=\frac{25}{6}$ (吋). 而弦 CD 將弦 AB 垂直二等分, 故 CD 爲圓之直徑. 故所求之半徑 $=\frac{1}{2}\cdot CD=\frac{25}{12}$ (吋), 或約 2.083 (吋).

1462. 一圓中相平行之二弦, 各長一吋, 相距 1.2 吋, 求圓之半徑.

解 兩平行弦之長相等, 故在中心之兩側, 距中心等遠, 故由中心至弦之距離皆爲 $\frac{1}{2}\times 1.2=0.6$ (吋). 據此, 所求半徑之長 $=\sqrt{(0.5)^2+(0.6)^2}=\sqrt{0.61}$ (吋), 或約 0.781 吋.

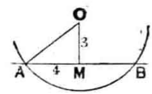
1463. 設 ABCD 爲各邊長 2 吋之正方形, E 爲 BC 之中點, 命過 A, E, D 之圓周與 DC 之交點爲 F, 則 DF 之長若何?



解 BC 切圓 AED 於 E, 此甚易知之, 故 $\overline{CE}^2=CF\cdot CD$ [877題]. 命 $DF=x$ (吋), 因 $CD=2$ (吋), 故 $CF=2-x$ (吋), 而 $CE=\frac{1}{2}BC=1$ (吋), 故 $1^2=2(2-x)$, 故 $x=\frac{3}{2}$ (吋).

1464. 有一定點及一定直線, 相距 3 寸. 今欲以此定點爲中心, 作一圓, 令其由定直線所截得之弦長 8 寸, 則圓之半徑當若何?

解 設定點爲 O, 所求圓與定直線之交點爲 A, B, 則 AB = 8 (寸). 由 O 至 AB 引垂線, 命其足爲 M. 此時 AM 爲 AB 之半分, 卽 4 寸, OM 爲 3 寸. 於是本題與下題一致: 直角三角形 OAM 中, 已知二邊 OM, AM, 求斜邊 OA. 故 $OA=\sqrt{(OM^2+AM^2)}=\sqrt{(3^2+4^2)}=5$ (寸).

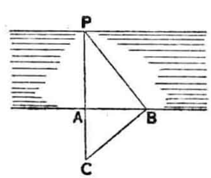


1465. 設正三角形之面積爲 120 萬方尺, 則其一邊如何?

解 一邊爲 a 之正三角形之面積, 爲 $\frac{1}{2}a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. 故設 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=1200000$, 則 $a^2=1600000\sqrt{3}\fallingdotseq 1600000\times 1.7320508=2771281.28$, 故 $a\fallingdotseq 1665$ (尺).

1466. 設河岸邊一點 P 上, 植有一樹, 一人立於正對岸之 A 點, 由是沿岸行 40 步, 止於 B 點, 更與 PB 成直角, 而前進 50 步, 則達線 PA, 求此河之闊. 但一步之長爲 75 糎.

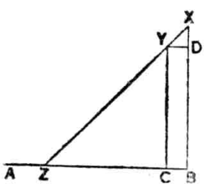
解 設最後所達之點爲 C, 則 PAC 成一直線, 今 $AB=40$ (步), $BC=50$ (步), 命 $PA=x$ (步), 則因 $P\hat{B}C=\hat{R}$, $AB\perp PC$, 故 $\overline{AB}^2=PA\cdot AC$. 而 $AC=\sqrt{(\overline{BC}^2-\overline{AB}^2)}=\sqrt{(50^2-40^2)}=30$, 故 $30x=40^2$, 故 $x=\frac{160}{3}$ (步). 而一步之長爲 75 糎, 故 $x=75$



$\times\frac{160}{3}=4000$ (糎) $=40$ (粍).

1467. 設線分 AB 之長爲3吋,在其上取 BC, 令等於 0.3吋. 由點 B, C, 引 BA 之二垂線於 AB 之同側,於二垂線上分別取 X, Y, 令 $BX=2.5$ 吋, $CY=2.2$ 吋, 命直線 XY 與 AB 之交點爲 Z, 則 AZ 之長如何?

解 由 Y 引 BX 之垂線 YD, 則 $XD=BX-CY=2.5-2.2=0.3$ (吋). 然 $BC=0.3$ (吋), 故 $XD=BC=YD$, 故 $BZ=BX=2.5$ (吋). 然 $AB=3$ (吋). 故 $AZ=3-2.5=0.5$ (吋).



1468. 設兩相似多角形對應邊之比爲 3 : 25, 大者之面積爲 1 平方尺,則小者之面積若何?

解 相似多角形之比,等於對應邊之二乘比,故設所求之面積爲 x 平方尺,則 $3^2:25^2=x:1$, 由是得 $x=(\frac{3}{25})^2=0.0144$ (平方尺).

1469. 設一正方形之面積, 等於一邊長 1 寸及 2 寸之二正方形面積之和, 求此正方形一邊及對角線之長.

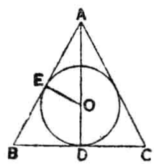
解 一正方形等於他二正方形之和,則前一正方形之邊,等於以後二正方形之邊爲二邊所作直角三角形之斜邊. 故所求邊之長,爲 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\fallingdotseq2.236$ (寸). 又 $\sqrt{5}$ 爲一邊之正方形之對角線, 爲 $\sqrt{5+5}=\sqrt{10}\fallingdotseq3.162$ (寸).

1470. 設三角形 ABC 中,角 A 之二等分線 AD 與對邊 BC 之交點爲 D. 而 BD 爲 CD 之三倍,則邊 AB 爲邊 AC 之幾倍?

解 $AB:AC=BD:CD$ [1027題] $=3:1$, 故 $AB=3AC$, 卽邊 AB 爲邊 AC 之三倍.

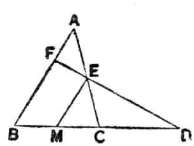
1471. 有二等邊三角形, 底邊與高之比爲 3:2, 求高爲內心所分二分之比如何?

解 設二等邊三角形 ABC 之內心爲 O, 內切圓與底邊 BC 之切點爲 D, 則 AOD 成一直線,此甚易知之. 又命內切圓與等邊之一 AB 之切點爲 E, 因 $BC:AD=3:2$, 且 $BC=2BD$, 故 $2BD:AD=3:2$, 故 $BD:AD=3:4$, 因而 $\overline{BD}^2:\overline{BD}^2+\overline{AD}^2=3^2:3^2+4^2$, 故 $BD:\sqrt{(\overline{BD}^2+\overline{AD}^2)}=3:\sqrt{(3^2+4^2)}$, 卽 $BD:AB=3:5$. 然 $\triangle ABD$, $\triangle AOE$ 相似, 故 $AO:OE=AB:BD=5:3$, 設 $AO:OD=5:3$.



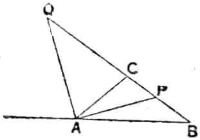
1472. 在三角形ABC 之邊 BC 之延線上取 CD, 令等於 BC, 聯結點 D 與 AC 之中點 E, 命 DE 之延線與 AB 之交點爲 F, 求 FE 與 ED 之比.

解 命 BC 之中點爲 M, 聯結 EM, 則 $EM \parallel AB$, 故 $FE:ED=BM:MD=BM:MC+CD=\frac{1}{2}BC:\frac{1}{2}BC+BC=\frac{1}{2}\times BC:\frac{3}{2}BC=1:3$.



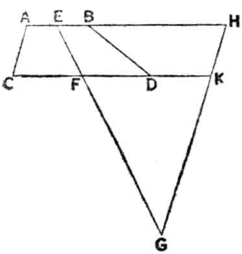
1473. 設三角形ABC 之三邊 AB, BC, CA 之長,分別爲1 尺 2 寸, 7 寸, 9 寸,又角 BAC 及其外角之二等分線,分別交對邊及其延線於 P, Q, 則 PQ 之長如何?

解　$CP:BP=AC:AB$, 由合比定理, $CP:CP+BP=AC:AC+AB$, 即 $CP:BC=AC:AC+AB$. 以所設之數代入,則 $CP:7=9:9+12=3:7$, 故 $CP=3$. 又 $CQ:BQ=AC:AB$, 故 $CQ:BQ-CQ=AC:AB-AC$, 即 $CQ:BC=AC:AB-AC$, 故 $CQ:7=9:12-9=3:1$, 故 $CQ=21$. 因而 $PQ=CP+CQ=3+21=24$ (寸).



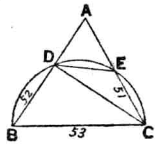
1474.　設梯形 ABCD 之平行二邊 AB, CD 分別延長至 H, K, 而 $BH=CD$, $DK=AB$, 聯結 H, K, 命 AB, CD 之中點為 E, F, 聯結 E, F, 令交 HK 之延線於 G. 設 $AB=7$, $CD=9$, $EF=8$, 則 EG 之長如何?

解　$EH:FK=EG:FG$. 由分比定理, $EH:EH-FK=EG:EG-FG$, 即 $EH:EH-FK=EG:EF$. 然 $EH=EB+BH=\frac{1}{2}AB+CD=\frac{7}{2}+9=\frac{25}{2}$, $EH-FK=\frac{1}{2}AB+CD-\frac{1}{2}CD-AB=\frac{1}{2}CD-\frac{1}{2}AB=\frac{9}{2}-\frac{7}{2}=1$, 而 $EF=8$, 故 $\frac{25}{2}:1=EG:8$, 故 $EG=100$.



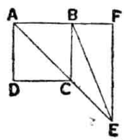
1475.　設三角形 ABC 之邊 AC, AB, BC 之長,分別為 51 寸, 52 寸, 53 寸, 今以 BC 為直徑作圓,令交 AB, AC 於 D, E, 則 DB, DC 及 DE 之長各如何?

解　$51^2=2601$, $52^2=2704$, $53^2=2809$, 其中任二者之和,大於他一者, 故 ABC 為銳角三角形,因而頂點 A 在半圓周 BDEC 之外, 故 D, E 在邊 BA, CA 之上. 而 $B\hat{D}C$ 為直徑所對之圓周角, 故等於直角, 因此 $\overline{CB}^2-\overline{CA}^2=(\overline{CD}^2+\overline{BD}^2)-(\overline{CD}^2+\overline{AD}^2)=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2=(BD+AD)(BD-AD)=AB(BD-AD)$, 或 $52(BD-AD)=53^2-51^2$, 故 $BD-AD=4$. 又 $BD+AD=52$. 由此二式, 得 $BD=28$, $AD=24$. 次, $\overline{DC}^2=\overline{CA}^2-\overline{AD}^2=\overline{51}^2-24^2$, 故 $DC=\sqrt{(51+24)(51-24)}=\sqrt{75\times27}=\sqrt{25\times81}=5\times9=45$. 最後, $A\hat{D}E$ 為內接四邊形 BDEC 中 $\hat{D}$ 之外角, 故等於內對角 C. 因此, 公有 $\hat{A}$ 之兩三角形 ADE, ACB 相似, 故 $DE:CB=AD:AC$, 即 $DE:53=24:51$, 故 $DE=53\times\frac{24}{51}=24.9\cdots\cdots$. 故所求之長 $DB=28$ (寸), $DC=45$ (寸), $DE\fallingdotseq25$ (寸).



1476.　設 ABCD 為各邊長 5 糎之正方形, 今在對角線 AC 之延線上取 CE, 令等於 CB, 由 E 至 AB 之延線引垂線 EF, 則線分 EF, BE 之長各如何?

解　因 $AB=BC=5$ (糎), 故 $AC=AB\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ (糎), 故 $AE=AC+CE=AC+BC=5\sqrt{2}+5=5\times(\sqrt{2}+1)$ (糎). 於是因 $AC:BC=AE:EF$, 故 $5\sqrt{2}:5=5(\sqrt{2}+1):EF$, 因而 $EF=\frac{5(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$



$=\frac{5(2+\sqrt{2})}{2}\fallingdotseq8.5$ (糎). 又 $AC:CE=AB:BF$, 即 $5\sqrt{2}:5=5:BF$, 故 $BF=\frac{5}{\sqrt{2}}$. 因 $\overline{BE}^2$

$=\overline{BF}^2+\overline{EF}^2$, 是以 $\overline{BE}^2=\frac{25}{2}+\frac{25(3+2\sqrt{2})}{2}$
$=\frac{25(4+2\sqrt{2})}{2}=25(2+\sqrt{2})=85.3553\cdots$,
故 BE $\doteqdot 9.2$ (粴).

1477. 設三角形 ABC 中, C 爲直角, 角 A 之二等分線與對邊 BC 之交點爲 D, 且已知此三角形之面積爲 6 平方寸, 邊 AC 之長爲 4 寸, 求直線 AB 及 AD 之長.

解 因直角三角形 ABC 之面積爲 $\frac{1}{2}$AC·BC,

故 $\frac{1}{2}$AC·BC$=6$, 而 AC$=4$, 故 $\frac{1}{2}$·4·BC$=6$, 故 BC$=3$. 於是 AB $=\sqrt{(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2)}=\sqrt{(4^2+3^2)}=5$ (寸). 次, AD 爲 $\hat{A}$ 之二等分線, 故 AC:AB$=$CD:BD, 故 AC$+$AB:AC$=$CD$+$BD:CD, 卽 $4+5:4=3$:CD. 由是得 CD$=\frac{4\times3}{9}=\frac{4}{3}$. 因此, 得 AD $=\sqrt{(\overline{AC}^2+\overline{CD}^2)}=\sqrt{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{10}$ $\doteqdot\frac{4}{3}\times3.16227\doteqdot4.216$ (寸).

1478. 設三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 之長, 分別爲 3 粴, 4 粴, 5 粴. 一點 O 與三邊 BC, CA, AB 之距離之比爲 3:4:5, 求 O 之位置.

解 因 BC $=3$, CA $=4$, AB$=5$, 而 $3^2+4^2=5^2$, 故 $\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$. 故 △ABC 爲直角三角形, $\hat{C}$ 爲直角, AB 爲斜邊. 故此三角形面積之二倍, 爲 BC·CA$=3\times4=12$(平方粴). 命由 O 至邊 BC, CA, AB 所引之垂線分別爲 $3x$, $4x$, $5x$, 則 $\pm3\times3x\pm4\times4x\pm5\times5x=12\cdots(1)$, 卽 $\pm9x\pm16x\pm25x=12$. 但複號之組合, 有 $2^3=8$ 種, 卽 $+++$, $++-$, $+-+$, $-++$, $+--$, $-+-$, $--+$, $---$. 其第一款中, 點 O 在 △ABC 內, 此時由 (1) 得 O 至邊 BC, CA, AB 之距離, 分別爲 $\frac{18}{25}$ 粴, $\frac{24}{25}$ 粴, $\frac{6}{5}$ 粴. 第二款中, 點 O 在 △ABC 之外, 且在角 BCA 之內, 然由 (1) 得 $0\times x=12$, 故爲不可能. 第三款中, 點 O 在△ ABC 之外, 且在角 ABC 之內, 此時由 (1) 得 O 至邊 BC, CA AB 之距離, 分別爲 2 粴, $\frac{8}{3}$ 粴, $\frac{10}{3}$ 粴. 第四款中, 點 O 在 △ABC 之外, 且在角 BAC 之內, 此時由 (1) 得 O 至邊 BC CA, AB 之距離分別爲 $\frac{9}{8}$ 粴, $\frac{3}{2}$ 粴, $\frac{15}{8}$ 粴. 第五, 第六款中, 點 O 分別在 B$\hat{C}$A, B$\hat{A}$C 之對頂角內, 此時 (1) 左邊 x 之係數爲負, 故不成立. 第七款中, 點 O 在 A$\hat{B}$C 之對頂角內, 此時(1)爲 $0\times x=12$, 故不可能. 第八款中, 點 O 不論在如何之位置, 皆不成立

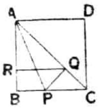
1479. 三角形三邊之比爲 13:14:15, 面積爲 1 平方粨, 求各邊之長.

解 設三邊爲 a, b, c, 則 $a:b:c=13:14:15$, 故得命 $a=13k$, $b=14k$, $c=15k$, 故 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=21k$, 因而代入求三角形面積之公式, 得 S$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $=\sqrt{(21k\cdot8k\cdot7k\cdot6k)}=3\cdot7\cdot4k^2=84k^2$. 然今面積爲 1 平方粨, 故 $84k^2=1$, 故 $k=\frac{1}{2\sqrt{21}}$. 故三邊之長, $a=\frac{13}{2\sqrt{21}}=\frac{13\sqrt{21}}{42}$, 或 1.418 (粨), $b=\frac{14}{2\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$, 或 1.528 (粨), $c=\frac{15}{2\sqrt{21}}=\frac{5\sqrt{21}}{14}$, 或 1.637(粨).

1480. 設 ABCD 爲正方形, AP 將對角線 AC 與邊 AB 所成之角 BAC 二等分, P 爲 AP

與 BC 之交點.由 P 至 AC 引垂線 PQ, 由 Q 至 AB 引垂線 QR, 則 QR 上之正方形, 爲原正方形之幾分?

解　比較兩三角形 ABP, AQP, 則 $A\hat{B}P\,[=\hat{R}]$ $=A\hat{Q}P$ [假設], $B\hat{A}P=Q\hat{A}P$ [假設], AP 爲兩形所共, 故 △ABP ≡ △AQP, AB = AQ. 又 RQ 平行於 BC, 故 $\overline{QR}^2:\overline{BC}^2=\overline{AQ}^2:\overline{AC}^2=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2=\overline{AB}^2:\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2:2\overline{AB}^2=1:2$. 故 $\overline{QR}^2=\frac{1}{2}\overline{BC}^2$, 即 QR 上之正方形等於原正方形之半分.



1481. 三角形之二邊長 4 糎及 4.5 糎, 則第三邊之長若何?但三角形之面積爲 7 平方糎.

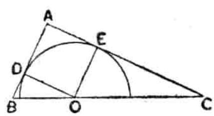
解　設未知之一邊爲 a, 則 $2s=a+4+4.5$ $=a+8.5$, $2(s-a)=8.5-a$, $2(s-4)=a+0.5$, $2(s-4.5)=a-0.5$, 故設面積爲 S, 則 $4S=\sqrt{\{(8.5^2-a^2)(a^2-0.5^2)\}}$. 然 $S=7$, 故 $28^2=(8.5^2-a^2)(a^2-0.5^2)$, 即 $a^4-72.5\times a^2+802.0625=0$. 此爲 a^2 之二次方程式,解之, 得 $a^2=36.25\pm16\sqrt{2}$, 而 $16\sqrt{2}<36.25$, 故 a^2 有二值.由是得所求之二值爲 7.67 糎,及 3.69 糎.

1482. 設三角形 ABC 中, 底邊 BC 爲 5 寸, AB×AC 爲 8 平方寸, 命角 A 之二等分線與 BC 之交點爲 D, 而 AD 爲 2 寸,則 AB, AC 之長各幾何?

解　$AB\cdot AC=\overline{AD}^2+BD\cdot DC$ [1211題]. 然 $AB\cdot AC=8$ (平方寸), $AD=2$ (寸), 故 $8=4+BD\cdot DC$, 故 $BD\cdot DC=4$ (平方寸)……(1). 然 $BD+DC=BC=5$(寸)……(2),故 $BD\sim DC$ $=\sqrt{5^2-4\times4}=3$ (寸)……(3).由(2)與(3), 得 BD = 4, 或 1, CD = 1, 或 4, 因而 $AB:AC=BD:CD=4:1$, 或 $1:4$. 故 $\overline{AB}^2:AB\times AC=4:1$, 或 $1:4$, 或 $\overline{AB}^2:8=4:1$, 或 $1:4$, 故 $\overline{AB}^2=32$, 或 2.於是 $AB=4\sqrt{2}\doteqdot5.657$(寸), 或 $\sqrt{2}\doteqdot1.414$(寸).同理, $AC=\sqrt{2}\doteqdot1.414$ (寸),或 $4\sqrt{2}\doteqdot5.657$ (寸).

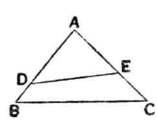
1483. 設一半圓之中心, 在直角三角形 ABC 之斜邊 BC 上,且切於他二邊,則半圓之半徑 R 如何?但 AB = 4 寸, AC = 5 寸.

解　設半圓之中心爲 O, 由 O 至邊 AB, AC 分別引垂線 OD, OE. 此時 OD, OE 皆爲半圓之半徑, 故 OD = OE. 而 △ABC = △OAB + △OAC, 故 $4\times5=4\cdot OD+5\cdot OE=9\cdot OE$, 故 OE $\frac{20}{9}$ (寸).



1484. 在三角形 ABC 之二邊 AB, AC 上, 分別按 $BD=\frac{1}{4}AB$, $CE=\frac{2}{5}AC$, 取點 D, E. 聯結 D, E, 則三角形 ABC 與四邊形 BCED 之面積之比如何?

解　$\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ADE}=\dfrac{AB\cdot AC}{AD\cdot AE}=\dfrac{AB\cdot AC}{\frac{3}{4}AB\cdot\frac{3}{5}AC}=\dfrac{20}{9}$. 而四邊形 BCED = △ABC − △ADE, 故 $\dfrac{\triangle ABC}{\text{四邊形}BCED}=\dfrac{\triangle ABC}{\triangle ABC-\triangle ADE}$, 亦即所求面積之比 $=\dfrac{20}{20-9}=\dfrac{20}{11}$



1485. 設兩相似三角形之面積, 一爲 1 平方尺,一爲 110 平方寸,求其相似比.

解　相似三角形面積之比,等於相似比之二乘比, 故相似比 $=\sqrt{1}$(平方尺)$:\sqrt{110}$

(平方寸)$=\sqrt{100}$(平方寸)$:\sqrt{110}$(平方寸)$=\sqrt{10}:\sqrt{11}$.

1486. 一正方形內接於周爲 22 糎之圓,求正方形之面積.

解 圓之內接正方形之對角線,等於圓之直徑 [$=2r$],故正方形之面積爲 $2r^2$. 而周爲 $2\pi r$, 故 $2\pi r=22$ (糎),由是得 $r=\frac{11}{\pi}$. 故 $2r^2=2\times\frac{121}{\pi^2}=\frac{242}{\pi^2}$. 今定 $\pi=\frac{22}{7}$, 則 $2r^2=242\times\frac{7^2}{22^2}=\frac{49}{2}=24.5$ (平方糎).

1487. 已知同圓之內接正六角形及正方形之差,求圓之半徑.

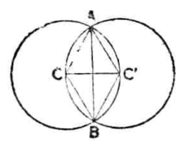
解 命所設面積爲 m^2, 所求半徑爲 r, 則內接正六角形之面積爲 $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$ [1389題], 內接正方形之面積爲 $2r^2$ [1389題], 故由題意, $\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2-2r^2=m^2$, 或 $r^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}-2\right)=m^2$, 或 $r^2=\frac{m^2}{\frac{3\sqrt{3}}{2}-2}=\frac{2(3\sqrt{3}+4)}{(3\sqrt{3}-4)(3\sqrt{3}+4)}\times m^2=\frac{2(3\sqrt{3}+4)}{11}m^2$, 是以所求圓之半徑 $r=m\sqrt{\frac{2(3\sqrt{3}+4)}{11}}$.

1488. 試將圓之面積及周分別與內接正六角形之面積及周比較.

解 半徑爲 R 之圓面積爲 πR^2, 其周爲 $2\pi R$. 又內接正六角形之面積爲 $\frac{\sqrt{3}}{2}R\cdot\frac{R}{2}\cdot 6=\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$, 其周爲 6R. 故圓之面積與內接正六角形面積之比爲 $\pi R^2:\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. 卽 $2\pi:3\sqrt{3}$, 周之比爲 $2\pi R:6R$, 卽 $\pi:3$.

1489. 設兩個等圓之中心,互在他圓周上,則其公弦上之正方形,等於半徑上正方形之三倍,試證之. 且求二圓公有部分之面積及一圓面積之比.

證 設兩等圓之中心 C, C′ 互在他圓周上,公弦爲 AB; 求證 $\overline{AB}^2=3\overline{CA}^2$. 兩圓相等,故 $CA=CB=C'A=C'B=CC'$, 卽 ACBC′ 爲菱形,故 $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2+\overline{C'B}^2+\overline{C'A}^2=\overline{AB}^2+\overline{CC'}^2$, 故 $3\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$. 其次,



$\triangle ACC'$, $\triangle BCC'$ 俱爲正三角形,故 $A\hat{C}B=120°$. 故設等圓之半徑爲 r, 則弓形 $ACB=\frac{1}{3}\times\pi r^2-\triangle ACB$, 故兩圓公有部分之面積爲 $\frac{2}{3}\pi r^2-$ (菱形 ACBC′) $=\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{1}{2}AB\cdot CC'=\frac{2}{3}\cdot\pi r^2-\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\overline{CA}^2=\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{1}{2}\sqrt{3}r^2$, 故所求之比爲 $\frac{2}{3}\pi r^2-\frac{1}{2}\sqrt{3}r^2:\pi r^2=4\pi-3\sqrt{3}:6\pi$.

1490. 設互相外切二圓之直徑,一爲 18 尺,一爲 8 尺,則此二圓外公切線切點間部分之長如何?

解 所求長之平方,等於二圓直徑之積 [1119題], 故 $\sqrt{18\times 8}=\sqrt{36\times 4}=6\times 2=12$ (尺), 爲所求之長.

1491. 求以下二款中兩圓公切線之長.

(1) 00′ (中心間之距離) $=15$ (糎), 半徑爲 9 糎及 4.5 糎.

(2) $00'=3.4$ (尺), 半徑爲 2.7 尺及 1.5 尺.

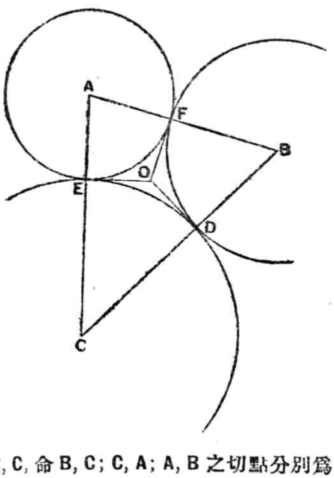
解 (1) $9+4.5=13.5$, 故半徑之和,小於中心間之距離,故兩圓互在他圓之外,而全相離. 又命外公切線之長爲 t, 則 $t^2=15^2-(9-4.5)^2=15^2-4.5^2=19.5\times 10.5$, 故 $t=\sqrt{204.75}=14.3$ (糎). 又內公切線之長

爲 $\sqrt{15^2-(9+4.5)^2}=\sqrt{28.5\times1.5}=6.5$ (𨑩).

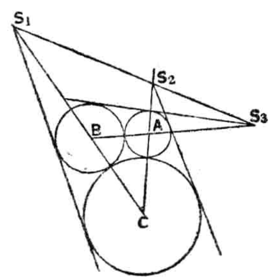
(2) $2.7+1.5=4.2$, $2.7-1.5=1.2$, 故中心間之距離，小於二圓半徑之和，大於二圓半徑之差，故兩圓相交．命公切線之長爲 t, 則仿前, $t^2=3.4^2-(2.7-1.5)^2=3.4^2-1.2^2=10.12$, 故 $t=\sqrt{10.12}=3.1812$ (尺).

1492. 設三圓兩兩外切，其半徑分別爲 1 寸, 1.5 寸, 及 2 寸, 求其內公切線交點之位置，及兩兩之相似外心之位置，且證是等外心在一直線上.

解 設兩兩互相外切之三圓，其中心爲 A,



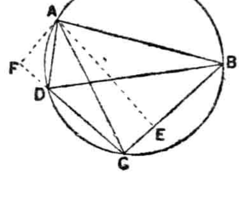
B, C, 命 B, C; C, A; A, B 之切點分別爲 D, E, F. 命 D, E, F 上三公切線之一交點 [2367題] 爲 O, 則 OD = OE, OE = OF [556題], 故 OD = OE = OF, 因而 O 爲三角形 ABC 內切圓之中心．據此，欲求 O 之位置，可求內切圓之半徑．今三角形 ABC 中, $a=1.5+2=3.5$, $b=2+1=3$, $c=1+1.5=2.5$, 故設 $a+b+c=2s$, 則 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(3.5+3+2.5)=4.5$, $s-a=1$, $s-b=1.5$, $s-c=2$, 故面積 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{4.5\times1\times1.5\times2}=3\sqrt{1.5}$, 故內切圓之半徑 $=\frac{S}{s}=\frac{3\sqrt{1.5}}{4.5}=\frac{\sqrt{1.5}}{1.5}$. 又命 B, C; C, A. A, B 之相似外心，分別爲 S_1, S_2, S_3. 於是 $BS_1:S_1C$ 等於半徑之比，即 $BS_1:S_1C$



$=1.5:2.0=3:4$. 同理, $CS_2:S_2A=2.0:1.0=2:1$; $AS_3:S_3B=1.0:1.5=2:3$. 故 $(BS_1:S_1C)\times(CS_2:S_2A)(AS_3:S_3B)=1$, 故 S_1, S_2, S_3 在一直線上 [2341題].

1493. 設圓之內接四邊形之四邊，分別長 2 呎, 3 呎, 4 呎, 5 呎, 求兩對角線之長.

解 設 ABCD 爲圓之內接四邊形，由 A 至邊 BC, CD [必要時，至其延線] 分別引垂線 AE, AF. 命 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=x$, $BD=y$, $BE=z$, DF



$=t$, 則 $x^2=a^2+b^2-2bz\cdots\cdots(1)$ [752題], $x^2=c^2+d^2+2ct\cdots\cdots(2)$[751題]. 而△ABE, △ADF 相似, 故 $\frac{z}{t}=\frac{a}{d}\cdots\cdots(3)$. 由(1), (2), 得 $a^2+b^2-2bz=c^2+d^2+2ct\cdots\cdots(4)$. 由(3), 得 $t=\frac{dz}{a}$; 於是代入(4)以求 z, 則得 $z=\frac{a^3+ab^2-ac^2-ad^2}{2(ab+cd)}$. 以此值代入(1)或(2), 卽可求得 x. 如代入(1), 則 $x^2=a^2+b^2-\frac{a^3b+ab^3-abc^2-abd^2}{ab+cd}$ 將是式右邊通分而簡化之, 得 $x^2=\frac{a^2cd+b^2cd+abc^2+abd^2}{ab+cd}$

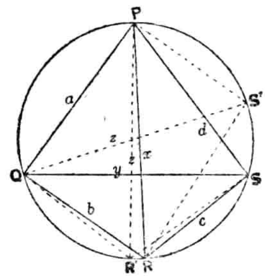
將右邊析爲因數, 得 $x^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}$,

故 $x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bd)}{ab+cd}}$. 仿此可求得 y 值. 或就 x 之値中, 易 a 爲 b, 易 b 爲 c, 易 c 爲 d, 易 d 爲 a 以導出之, 亦可. 於是 $y=\sqrt{\frac{(bd+ac)(ab+cd)}{bc+ad}}$. 今題中設 $a=2$, $b=3$, $c=4$, $d=5$, 故 $x=\sqrt{\frac{(8+15)(10+12)}{6+20}}=\sqrt{\frac{23\times11}{13}}=4.41$ (呎), 再以所設代入 y, 結果得 $y=\sqrt{\frac{(15+8)(6+20)}{12+10}}=\sqrt{\frac{23\times13}{11}}=5.21$(呎).

注意 以此 x, y 之値相乘, 則得 $xy=ac+bd$, 卽"圓之內接四邊形兩對角線所包之矩形, 等於二組對邊所包矩形之和". 所謂 Ptolemy 氏定理者, 卽此也.

1494. 設 PQRS 爲圓之內接四邊形, a, b, c, d 分別爲表 PQ, QR, RS, SP 之數, x, y 爲表對角線 PR, QS 之數, z 爲表二弧 PQ, RS 之和所對弦之數. 求證 $xy=ac+bd$, $zx=ad+bc$, $yz=ab+cd$, 且由是求 x, y, z.

解 由前題注意, $xy=ac+bd$. 又設弧



PS' = 弧 RS 則 QS' $=z$, PS' $=c$, S'R $=d$, 故前條之結果爲 $zx=ad+bc$. 又設弧 QR' = 弧 RS, 則 PR' $=z$, R'S $=b$, QR' $=c$, 故前條之結果爲 $yz=ab+cd$. 故三式相乘而開方, $xyz=\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}$,

$x=\sqrt{(ac+bd)(ad+bc)/(ab+cd)}$,

$y=\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)/(ad+bc)}$,

$z=\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)/(ac+bd)}$.

1495. 欲闢面積爲 6 分之圓地, 其直徑須幾尺? 不滿 1 尺之數, 四捨五入, 圓周率作 3.1416 計.

解 設所求之直徑爲 x 尺, 則 $\frac{1}{4}\pi x^2=6\times600$, 因此得 $x^2=\frac{4\times6\times600}{\pi}$, $x=\frac{2\times60}{\sqrt{\pi}}=\frac{120}{\sqrt{\pi}}\doteqdot120\times0.56419\doteqdot68$ (尺).

1496. 一脚踏車, 前輪之直徑爲 3 尺, 後輪之直徑爲 2 尺, 今行若干距離, 前後輪之迴轉數共爲 2450 回, 求距離.

解 設所求之距離爲 x 尺, 則由題意, 得 $\frac{x}{3\pi}+\frac{x}{2\pi}=2450$, 故 $\frac{x}{\pi}=490\times6$, 因而 x

$=490\times6\times3.1416=9236.304$ (尺).

1497. 設一圓形庭園之半徑爲 8 丈, 環繞庭園之草地闊 $\frac{5}{6}$ 丈, 求草地之面積. 但圓周率爲 3.1416, 不滿方丈之數四捨五入.

解 外圓中切於內圓之弦, 其半分之平方爲 $\left(8\frac{5}{6}\right)^2-8^2=16\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{505}{36}$. 故由 1356 題, 所求之面積爲 $\pi\times\frac{505}{36}=3.1416\times\frac{505}{36}=44$ (方丈).

1498. 一直徑 3 尺之鐵製圓輪, 令其溫度較現在增高 300°F, 則其周膨脹若干? 試計算至厘位, 但鐵之膨脹係數爲 0.0000067 (華氏每一度).

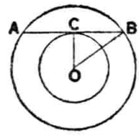
解 因直徑爲 3 尺, 故周爲 3π 尺. 故若溫度增高 300°F, 則周當膨脹 $3\pi\times0.0000067\times300=0.00603\pi$ (尺). 茲計算之至厘位, 卽小數第三位, 如下左方:

0.0060300	0.0189390
....51413	0
18090	12
603	0
240	30
6	0.0189432
0.018939	5

此處若依常法處理最後二位, 則將影響小數第三位, 故今須多算一位, 如上方所示. 故所求之膨脹尺數, 至厘位止, 爲 0.018 (尺).

1499. 有半徑爲 10 吋及 7 吋之同心圓, 及與此二圓之周所圍圓輪等積之圓, 求第三圓之直徑至吋之小數第三位.

解 設同心圓之中心爲 O, 外圓中切內圓於 C 之弦爲 AB. 由 1356 題, 兩同心圓周所圍圓輪之面積, 等於以 AB 爲直徑之圓面積, 故欲解本題, 但須求 AB 之長至吋之小數第三位. 今 $OB=10$ (吋), $OC=7$ (吋), 故 $\overline{CB}^2=\overline{OB}^2-\overline{OC}^2=10^2-7^2=51$, 故 $AB=2CB=2\sqrt{51}=14.282$ (吋).

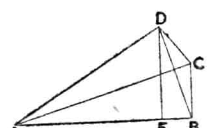


1500. 甲乙二圓, 甲之面積爲 150 平方寸, 乙之面積爲 120 平方寸, 然則甲圓之直徑, 當乙圓直徑之幾倍? 求之至小數第四位.

解 設甲圓之直徑爲 d, 乙圓之直徑爲 d', 則 $\frac{1}{4}\pi d^2=150$, $\frac{1}{4}\pi d'^2=120$, 故 $d^2:d'^2=150:120=5:4$, 故 $d:d'=\sqrt{5}:2$, 故 d 爲 d' 之 $\frac{\sqrt{5}}{2}=1.1180$ 倍.

1501. 設四邊形 ABCD 中, $\hat{A}=30°$, $AD=AB=2.5$ (尺), $\hat{B}=\hat{D}=\hat{R}$, 求 CD, BC 及對角線 BD, AC 之長.

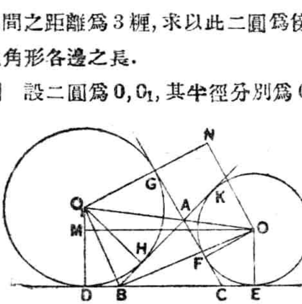
解 $AB=AD=2.5$, $\hat{A}=30°$, 故由 D 至 AB 引垂線 DE, 則 $A\hat{D}E=60°$, 由是可知 ADE 爲正三角形之半分. 故 $DE=\frac{1}{2}AD=1.25$, $AE=AD\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1.25\sqrt{3}$. 故 $EB=AB-AE=2.5-1.25\sqrt{3}=1.25(2-\sqrt{3})$, 故 $\overline{BD}^2=\overline{DE}^2+\overline{EB}^2=1.25^2+1.25^2(2-\sqrt{3})^2=1.25^2(8-4\sqrt{3})=2.5^2(2-\sqrt{3})=2.5^2\times\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{2}\right)=2.5^2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^2$, 故 $BD=2.5\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$



$=\frac{2.5}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})=\frac{2.5}{2}\times(2.4494897-1.4142136)=\frac{2.5}{2}\times1.0352761\doteqdot1.294$(尺).又$AB=AD$, $A\hat{B}C=A\hat{D}C=\hat{R}$,故$BC=CD$,且$AC$, BD直交.由是命$BC=CD=x$,則$2.5x\times2=BD\cdot AC$,卽$2.5x\times2=2.5\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\times AC$,故$AC=\sqrt{2}\times(\sqrt{3}+1)x\cdots(1)$.又$\overline{AC}^2=\overline{BC}^2+\overline{AB}^2$,卽$\overline{AC}^2=x^2+2.5^2\cdots\cdots(2)$.由(1), (2),得$2(4+2\sqrt{3})x^2=x^2+2.5^2$,故$(7+4\sqrt{3})x^2=2.5^2$,卽$(2+\sqrt{3})^2x^2=2.5^2$,故$(2+\sqrt{3})x=2.5$,　故　$x=\frac{2.5}{2+\sqrt{3}}=2.5(2-\sqrt{3})=2.5(2-1.7320508)=2.5\cdot0.2679492\doteqdot0.670$(尺).因而$AC=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)x=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\times2.5\times(2-\sqrt{3})=2.5\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{2})=2.5(2.4494897-1.4142136)\doteqdot2.59$(尺).

1502. 設兩圓之半徑爲1.5糎及0.8糎,中心間之距離爲3糎,求以此二圓爲傍切圓之三角形各邊之長.

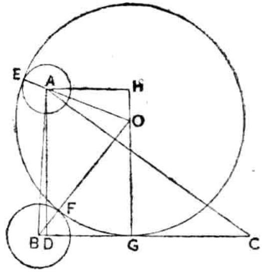
解　設二圓爲O, O_1,其半徑分別爲0.8糎



及1.5糎, OO_1爲3糎.引圓O, O_1之外公切線DE,及內公切線FG, HK;命內公切線之交點爲A,內公切線與外公切線之交點爲C, B.於是ABC爲以O, O_1爲二傍切圓之三角形[外公切線有二,今設DE之外,尚得引一$D'E'$,因而又得一對應於$D'E'$之三角形$A'B'C'$,則三角形$A'B'C'$全同於ABC,故對於$A'B'C'$不復置論].引半徑O_1D, OE, OF, O_1G,又引OM,令垂直於O_1D,引ON令垂直於O_1G.　於是$DE^2=OM^2=\overline{OO_1}^2-\overline{O_1M}^2=\overline{OO_1}^2-(O_1D-OE)^2=3^2-(1.5-0.8)^2=3^2-0.7^2=9-0.49=8.51$,故$DE=\sqrt{8.51}\doteqdot2.917190$.　又$\overline{FG}^2=\overline{ON}^2=\overline{OO_1}^2-\overline{O_1N}^2=\overline{OO_1}^2-(O_1G+OF)^2=3^2-(1.5+0.8)^2=3^2-2.3^2=9-5.29=3.71$,故$FG=\sqrt{3.71}\doteqdot1.926136$.而$O_1G:OF=AG:AF$,且$AG+AF=FG$,故$1.5:0.8=AG:AF\cdots(1)$, $AG+AF=\sqrt{3.71}\cdots\cdots(2)$.由(1), (2),得$AF=\frac{8}{23}\sqrt{3.71}\doteqdot1.01467$, $AG=AH=\frac{15}{23}\sqrt{3.71}=1.25618$.　又$BD=CE$ [729題], $\triangle O_1BD$, $\triangle BOE$相似,故$O_1D:BD=BE:OE$,卽$1.5:BD=DE-BD:0.8$.故設$BD=x$,則$1.5:x=\sqrt{8.51}-x:0.8$,由是得$1.5\times0.8=x\times(\sqrt{8.51}-x)$,即$x^2-2.917190x+1.2=0$.解之,得$x=1.458595\pm0.963067=2.421662$,或$0.495528$.但$2.421662$表$BE$,故$x=0.495528$,故$AB=AH+HB=AH+BD\doteqdot1.25618+0.49552\doteqdot1.752$(糎), $AC=AF+FC=AF+CE\doteqdot1.01467+0.49552\doteqdot1.510$(糎), $BC=DE-2DB\doteqdot2.91719-0.99105\doteqdot1.926$(糎).

1503. 設三角形ABC之三邊BC, CA, AB分別爲10粍, 12粍, 7.2粍,以角頂B及A爲中心所作之圓之半徑,分別爲1.2粍, 0.8粍,求內切於圓A,外切於圓B,且切於BC之圓之半徑.

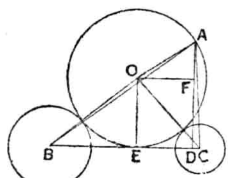
解　設內切於圓A,外切於圓B,且切於BC



之圓之中心爲 O, 其切點分別爲 E, F, G. 引 AD, AH 令分別垂直於 BC, OG, 則因 $12^2<10^2+7.2^2$, 卽 $\overline{AC}^2<\overline{BC}^2+\overline{BA}^2$, 故 $\hat{B}$ 爲銳角,故 D 在邊 BC 上. 命 $OG=x$ (粎), $BG=y$ (粎), 則 $OB=x+1.2$, $OA=x-0.8$, $OH=AD-x$, $AH=y-BD$, 故 $\overline{OB}^2=\overline{OG}^2+\overline{BG}^2$, $OA^2=\overline{OH}^2+AH^2$; 卽 $(x+1.2)^2=x^2+y^2$, $(x-0.8)^2=(AD-x)^2+(y-BD)^2$; 卽 $x^2+2.4x+1.44=x^2+y^2\cdots\cdots(1)$, $x^2-1.6x+0.64=\overline{AD}^2-2AD\cdot x+x^2+y^2-2BD\cdot y+\overline{BD}^2$. 兩式各邊相減,則 $4x+0.8=2AD\cdot x+2BD\cdot y-AB^2$, 故 $BD\cdot y=2x-AD\cdot x+26.32$. 而由 (1), 得 $y^2=2.4x+1.44$, 故 $\overline{BD}^2(2.4x+1.44)=\{(2-AD)x+26.32\}^2$, 即 $(51.84-\overline{AD}^2)(2.4x+1.44)=\{(2-AD)x+26.32\}^2\cdots\cdots(2)$. 今 $\triangle ABC$ 中, $s=\frac{1}{2}(10+12+7.2)=14.6$, $s-a=4.6$, $s-b=2.6$, $s-c=7.4$, 故其面積 $S=\sqrt{14.6\times4.6\times2.6\times7.4}=\sqrt{1292.1584}$. 因此 $\overline{AD}^2=\left(\frac{2S}{BC}\right)^2=\frac{4}{100}\times1292.1584=51.686336$, 因而求得 $AD=\sqrt{51.686336}=7.189\cdots\cdots\doteqdot7.19$, 於是由 (2), 得 $0.153664(2.4x+1.44)=(26.32-5.19x)^2$, 故 $26.9361x^2-273.5703936x+692.52112384=0$, 卽 $x^2-10.156x+25.709777=0$, 解之, 得 $x=5.078\pm\sqrt{5.078^2-25.709777}=5.078\pm0.278=5.36$, 或 4.8, 卽所求之半徑爲 5.36 粎, 或 4.8 粎. 但半徑 5.36 粎之圓,切於 CB 之延線.

1504. 設三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 分別長 6.4 寸, 5 寸, 及 8 寸, 以角頂 B, C 爲中心所作圓之半徑, 分別長 2 寸及 1 寸, 則過點 A 且切於二圓 B, C 之第三圓之半徑如何?

解 命過點 A, 且外切於圓 B, C 之圓之中心爲 O, 引 BC 之垂線 AD, OE, 又引 AD 之垂線 OF. 因 $8^2<5^2+6.4^2$, 卽 $\overline{AB}^2<\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$, 故



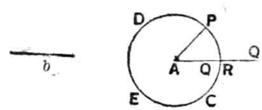
D在邊 BC 上. 茲命 $OA=x$ (寸), $OF=y$ (寸), 於是求得 $AF=\sqrt{x^2-y^2}$, $OB=x+2$, $OC=x+1$, $BE=BD-y$, $CE=CD+y$, $OE=AD-\sqrt{x^2-y^2}$, 因此得 $OB^2=\overline{BE}^2+\overline{OE}^2$, $\overline{OC}^2=\overline{CE}^2+\overline{OE}^2$, 卽 $(x+2)^2=(BD-y)^2+(AD-\sqrt{x^2-y^2})^2\cdots(1)$, 及 $(x+1)^2=(CD+y)^2+(AD-\sqrt{x^2-y^2})^2\cdots\cdots(2)$. 各邊相減, 則 $(x+2)^2-(x+1)^2=(BD-y)^2-(CD+y)^2$, 或 $2x+3=BC(BD-CD-2y)$, 或 $2x+3=6.4(BD-CD)-12.8y\cdots\cdots(3)$. 又由 (2), 得 $x^2+2x+1=\overline{CD}^2+2CD\cdot y+y^2+\overline{AD}^2-2AD\sqrt{x^2-y^2}+x^2-y^2$, 或 $2x+1=\overline{AC}^2+2CD\cdot y-2AD\sqrt{x^2-y^2}$, 或 $2x-2CD\cdot y$

$-24=-2AD\cdot\sqrt{x^2-y^2}$, 或 $x-CD\cdot y-12=-AD\sqrt{x^2-y^2}$. 兩邊平方, $x^2+\overline{CD}^2\cdot y^2+144-2CD\cdot xy-24x+24CD\cdot y=\overline{AD}^2(x^2-y^2)$, 或 $(\overline{AD}^2-1)x^2-AC^2y^2+2CD\cdot xy+24x-24CD\cdot y-144=0$, 或 $(\overline{AD}^2-1)x^2-25y^2+2CD\cdot xy+24x-24CD\cdot y-144=0$ ……(4). 今 $\triangle ABC$ 中, $s=\frac{1}{2}(6.4+5+8)=9.7$, $s-a=3.3$, $s-b=4.7$, $s-c=1.7$, 故 $S=\sqrt{9.7\times3.3\times4.7\times1.7}$, 故求得 $\overline{AD}^2=\left(\frac{2S}{BC}\right)^2=\frac{4\times9.7\times3.3\times4.7\times1.7}{6.4\times6.4}=\frac{2557599}{102400}$, 又 $\overline{BD}^2-\overline{CD}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2$, 或 $BD-CD=\frac{(AB+AC)(AB-AC)}{BD+CD}=\frac{13\times3}{6.4}=\frac{195}{32}$, 因而 $2CD=6.4-\frac{195}{32}=\frac{49}{160}$, 故由(4), 得 $\frac{2455199}{102400}x^2-25y^2+\frac{49}{160}xy+24x-\frac{147}{40}y-144=0$……(5). 由(3),得 $2x+3=6.4\times\frac{195}{32}-12.8y$, 或 $y=\frac{18-x}{6.4}$. 以此 y 值代入(5), 則 $\frac{2455199}{102400}x^2-25\left(\frac{18-x}{6.4}\right)^2+\frac{49(18-x)x}{6.4\times160}+24x-\frac{147(18-x)}{40\times6.4}-144=0$, 或 $\left(\frac{2455199}{102400}-\frac{25}{6.4\times6.4}-\frac{49}{64\times16}\right)x^2+\left(\frac{25\times36}{6.4\times6.4}+\frac{49\times18}{64\times16}+\frac{147}{4\times64}+24\right)x-\frac{25\times324}{6.4\times6.4}-\frac{147\times18}{4\times64}-144=0$. 簡化之, 則 $265311x^2+539400x-4006000=0$, 解此二次方程式以求其根, 得 $x=\frac{-269700}{265311}\pm\frac{\sqrt{269700^2+265311\times4006000}}{265311}$ $=\frac{-269700\pm\sqrt{1063564246900}}{265311}$ $=\frac{-269700\pm1031292.4\cdots}{265311}=\frac{761592.4\cdots}{265311}$, 或 $-\frac{130099.2\cdots}{265311}=2.87\cdots\cdots$ 或 $-4.90\cdots$, 即圓 O 外切於圓 B, C 時, 所求之半徑爲 2.87 寸, 內切於圓 B, C 時, 所求之半徑爲 4.90 寸. 仿此可求得圓 O 內切於圓 B, C 之一及外切於他一時所求之半徑.

第七編　軌跡

1505. 設自某點至所設點有一定距離, 則某點之軌跡若何?

解 設 A 爲所設點, b 爲所設一定距離, 求距 A 爲 b 之點之軌跡. 以 A 爲中心, b 爲半徑作圓 CDE, 則圓周 CDE 爲所求之軌跡.

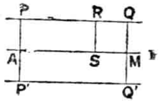


(α)設圓周 CDE 上之任意點爲 P, 聯結 AP, 則 AP 爲圓 CDE 之半徑, 故等於 b. (β) 設不在圓周 CDE 上之任意點爲 Q, 聯結 AQ, 命 AQ [必要時, 其延線] 與圓周之交點爲 R. Q 與 R 不相合, 故 AQ 不等於 AR. 然 AR 等於 b, 故 AQ 不等於 b. (γ) 故 CDE 乃距 A 爲 b 之點之軌跡.

注意 (α) 款證明卷首所載之定理 (2), 而 (β) 款證明定理 (3), 是以, (γ) 款得決定所求之軌跡.

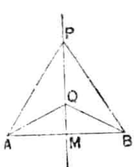
1506. 設自某點至所設直線有一定距離, 則某點之軌跡若何?

解　設 d 爲所設一定距離, AB 爲所設直線,求距 AB 爲 d 之點之軌跡. (α) 設 Q 爲在 AB 上方距 AB 爲 d 之點. 過 A 作 AB 之垂線, 在其上向 AB 上方取 AP 令等於 d, 則 P 亦爲距 AB 爲 d 之點.聯結 P, Q. 過 Q 引 AB 之垂線 QM. 於是 QM 等於 d 故等於 PA. 而 MQ 平行於 PA[46題],故 PQ 平行於 AM [226 題], 故 Q 爲過 P 平行於 AB 之直線上之點. (β) 又此直線上之各點至 AB 之距離爲 d. 在直線 PQ 上取任意點 R, 過之引 AB 之垂線 RS, 則因 RS 平行於PA[46題],且 RSAP 爲平行四邊形,故 RS 等於 PA [222題],故 RS 等於 d. (γ) 故過 P 所引 AB 之平行線, 爲在 AB 上方距 AB 爲 d 之點之軌跡. 同理,在過 A 所作 AB 之垂線向 AB 下方取 AP′, 令等於 d, 又過 P′ 平行於 AB 引 P′Q′, 則此直線亦爲距 AB 爲 d 之點之軌跡. 故距 AB 爲 d 之點之軌跡, 爲一組平行線 PQ 及 P′Q′.



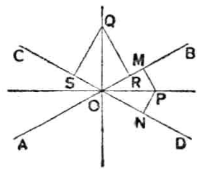
1507. 求距所設二點等遠之點之軌跡.

解　設 A, B 爲二所設點, 求距 A 及 B 等遠之點之軌跡. (α) 設 P 爲距 A, B 等遠之任意點, 聯結 AB, 二等分 AB 於 M, 聯結 PM. 於是兩三角形 AMP, BMP 中, 邊 AM = 邊 BM, 邊 PM 公有, 邊 AP = 邊 BP [假設], 故 $\widehat{AMP} = \widehat{BMP}$ [77 題], 故此二角皆爲直角, 故 P 在 AB 之垂直二等分線上. (β) 設 Q 爲 MP 上之任意點, 聯結 QA 及 QB, 則兩三角形 AMQ, BMQ 中, 邊 AM = 邊 BM, 邊 MQ 爲兩形所共, $\widehat{AMQ} = \hat{R} = \widehat{BMQ}$, 故 QA = QB. 故知 MP 上之各點距 A, B 等遠. (γ) 故 AB 之垂直二等分線爲距 A, B 等遠之點之軌跡.



1508. 求距相交二直線等遠之點之軌跡.

解　設 AB, CD 爲相交於 O 之二直線, 求距 AB, CD 等遠之點之軌跡. (α) 設 P 爲適合條件之點, 卽 AB 之垂線 PM 與 CD 之垂線 PN 相等. 聯結 OP, 則兩直角三角形 OPM, OPN 中, 邊 PM = 邊 PN, 邊 OP 爲兩形所共,故 $\widehat{POM} = \widehat{PON}$ [80題], 故 P 在 AB 與 CD 所成角之一之二等分線上. (β) 設 Q 爲是等二等分線上之任意點, 引 AB 之垂線 QR, 及 CD 之垂線 QS. 於是兩三角形 QRO, QSO 中, $\widehat{QRO} = \widehat{QSO}$, $\widehat{QOR} = \widehat{QOS}$, 而邊 QO 爲兩形所共, 故 QR = QS. 故知是等二等分線上之各點距 AB, CD 等遠. (γ) 故 AB 與 CD 間二角之二等分線,爲距 AB, CD 等遠之點之軌跡.



1509. 設各圓過一定點, 且其半徑等於所設直線,則此圓中心之軌跡如何?

解　設定點爲 P, 圓之中心之一爲 A. 於是直線 PA 爲此圓之半徑, 故其長等於所設直線. 故 A 之軌跡等於距定點 P 定遠之點之軌跡, 故由 1505 題,知所求之軌跡爲以 P 爲中心,所設直線爲半徑之圓周.

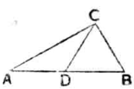
1510. 設各圓過二定點, 則此各圓中心

之軌跡如何?

解 過二所設點之圓之中心,卽軌跡上之一點,自此以至二所設點之距離,同爲圓之半徑,故相等.故所求之軌跡,卽距二所設點等遠之點之軌跡,故由1507題,知此軌跡爲二點間直線之垂直二等分線.

1511. 以所設有限直線爲斜邊作直角三角形,則直角頂之軌跡如何?

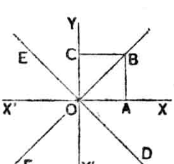
解 命所設直線爲AB,以AB爲斜邊之任意直角三角形爲ABC.命AB之中點爲D,聯結CD,則AD=CD=DB[124題],故C在以AB之中點D爲中心,AB之半分爲半徑之圓周,卽直徑AB之圓周上.反之,在此圓周上取任意點,作AC,BC,則三角形ABC爲直角三角形.



注意 自"反之"以下,爲1058題所未備,茲爲初學者計,故論及之,嗣後則將視事實以定詳略.

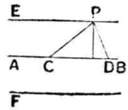
1512. 設一正方形之二邊,在直交之二定直線上,則此正方形他二邊所成角之頂點之軌跡如何?

解 設XOX′,YOY′爲直交之二直線,正方形OABC之二邊OA,OC分別在OX,OY上,求B之軌跡.由B至OX,OY之距離BA,BC相等,故所求之軌跡等於距二直線OX,OY等遠之點之軌跡,因而此軌跡爲OX,OY所成角之二等分線BOF,EOD[1508題].



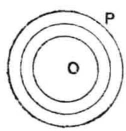
1513. 設各三角形與一定三角形全等,且其底邊在一定直線上,則是等三角形頂點之軌跡若何?

解 設一三角形PCD與定三角形全等,且其底邊CD在定直線AB上,求頂點P之軌跡.因定三角形與△PCD全等,故不論底CD在直線AB上如何運動,由P至CD之距離,卽三角形之高一定不易.故所求之軌跡爲距定直線等遠之點之軌跡,卽距AB之遠等於定三角形之高,且在AB兩側之二平行線[1506題].



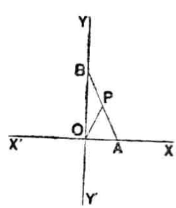
1514. 距所設圓周定遠之點之軌跡如何?

解 設定遠爲h,求距所設圓周爲h之點之軌跡.命所設圓之半徑爲r,則自軌跡上之任意點P,至所設圓之中心O之距離爲一定之$r+h$,或$r\sim h$.故所求之軌跡爲以$r+h$,$r\sim h$爲半徑而與所設圓同心之圓周[1505題].



1515. 設定長直線之兩端,分別在直交之二直線上運動,則此直線中點之軌跡如何?

解 設AB爲定長直線,其兩端分別在直交之二直線XOX′,YOY′上.聯結O與AB之中點P,則因P爲直角三角形AOB之斜邊AB之中點,故OP=$\frac{1}{2}$AB,因而其長一定.故P之軌跡爲距定點O之遠等於定長$\frac{1}{2}$AB之點之



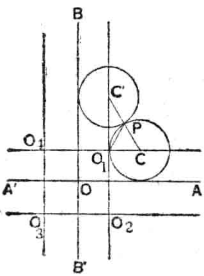
軌跡，卽以 O 爲中心，$\frac{1}{2}$AB 爲半徑之圓周[1505題].

1516. 設一梯倚於壁，今其下端沿水平之地面滑下，則此梯中點之軌跡若何？

解　在前題之圖中，設 OY 爲壁，OX 爲水平地面，BA 爲梯，則其中點 P 之軌跡顯然爲以 O 爲中心，OP 爲半徑，含於 $X\hat{O}Y$ 內之一象限弧.

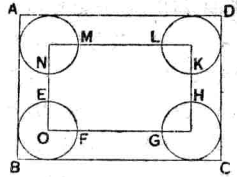
1517. 設兩等圓恆相切，且分別與直交之二所設直線之一相切而運動，則兩圓切點之軌跡如何？

解　設兩圓之中心爲 C, C′，其切點爲 P，過 C, C′，平行於直交之二直線 AA′, BB′，引 CO_1O_4, $C'O_1O_2$，命其交點爲 O_1，則因 O_1 至 AA′, BB′ 之距離等於半徑，故 O_1 爲定點. 於是因 C, C′ 至二直線 AA′, BB′ 之一之距離皆等於半徑，故 C, C′ 在直線 CO_1 或 $C'O_1$ 上. 聯結中心 C, C′，則 CC′ 過切點 P，且其長等於圓之直徑，故一定. 而 P 爲 CC′ 之中點，故由 1515 題，此點之軌跡爲以 O_1 爲中心而與原圓相等之圓周. 又 O_2, O_3, O_4 等點，皆爲所求軌跡之圓之中心，故所求之軌跡乃以 O_1, O_2, O_3, O_4 爲中心，以所設圓之半徑爲半徑之四個圓周.



1518. 設兩相等之銅幣，置入矩形箱中，各切於箱邊，且相切而運動，則銅幣切點之軌跡如何？

解　設 ABCD 爲矩形箱之底，銅幣之半徑爲 r，則由前題，一銅幣切於邊 AB，他一幣切於邊 BC 時，切點之軌跡，爲以距 AB, BC 各等於 r 之點 O 爲中心，r 爲半徑之一象限 EF. 又兩幣共切於一邊 BC 時，切點之軌跡，一望而知爲 FG. 故全體軌跡爲四直線 FG, HK, LM, NE，及四象限 EF, GH, KL, MN.

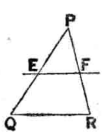


1519. 求立於所設底邊上之二等邊三角形頂點之軌跡.

解　命所設底邊爲 PQ，頂點之一爲 A，則 PA = AQ [假設]，故 A 之軌跡，等於距二定點 P, Q 等遠之點之軌跡. 故所求之軌跡，爲 PQ 之垂直二等分線[1507題].

1520. 由所設點至所設直線之一切直線，其中點之軌跡如何？

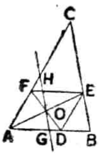
解　命所設點爲 P，所設直線爲 QR. 由 P 至 QR 引任意二直線 PQ, PR，聯結其中點 E, F，則 EF ∥ QR [232題]. 故由 P 至 QR 所引直線之中點，在過 E 平行於 QR 之直線，卽 EF 上. 次，在 EF 上取任意點 F，聯結 PF，命其延線與 QR 之交點爲 R，則 △PQR 中，因 EF 過 PQ 之中點 E，且平行於 QR，故 F 爲 PR 之中點[231題]. 故所求之軌跡卽直線 EF.



1521. 設各平行四邊形與三角形 ABC 共角 A，其對於角 A 之頂點在 BC 上，則是等

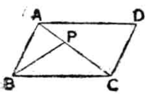
平行四邊形之對角線交點之軌跡如何?

解 設平行四邊形 ADEF 與 △ABC 共 $\hat{A}$, 其一頂點 E 在 BC 上,其對角線之交點為 O, 則 AO=OE, 故 O 之軌跡即由 A 至 BC 所引直線中點之軌跡, 故此軌跡為聯結 AB, AC 之中點 G, H 之直線 GH.



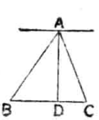
1522. 設平行四邊形之二隣邊張於一動點之鄰角,互為補角,則此點之軌跡若何?

解 設 ABCD 為平行四邊形, 相隣二邊為 AB, BC. 命軌跡上之一點為P,則由假設,$A\hat{P}B+B\hat{P}C=2\hat{R}$, 故 APC 成一直線, 因而 P 在對角線 AC 上. 次,在此對角線上取任意點 P, 則 $A\hat{P}B+B\hat{P}C=2\hat{R}$, 可一望而知.故設兩邊為 AB, BC, 則所求之軌跡為對角線 AC. 同理, 設相隣二邊為 AD, DC, 則其軌跡亦為 AC. 然若相隣二邊為 AB, AD [或 BC, DC], 則所求之軌跡為對角線 BD.



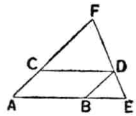
1523. 設三角形之底及面積為一定, 且底之位置亦為一定,則其頂點之軌跡如何?

解 設△ABC 之面積,及底 BC 為一定, 則高 AD 亦為一定,故頂點 A 之軌跡,為平行於 BC 之二直線[1506題].



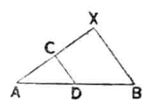
1524. 設平行四邊形 ABCD 之周一定,A 點固定,兩隣邊 AB, AC 之方向一定,則 D 點之軌跡如何?

解 因平行四邊形 ABDC 之周 $2m$ 一定, 頂點 A 固定, AB, AC 之方向一定, 故 AB, AC 之位置一定. 今在 AB, AC 之延線上分別取 E, F, 令 $AE=AF=m$, 則 E, F 為定點. 又 △BDE, △CDF 之各角, 分別相等, 且各為二等邊三角形,故 $C\hat{D}F+B\hat{D}E=2\hat{R}-\hat{A}=2\hat{R}-\hat{D}$, 故聯結 EF 之直線恆過 D 點,即 D 在 EF 上. 反之,在 EF 上取點 D, 平行於 AC, AB 分別引 DB, DC, 而作平行四邊形 ABDC, 則 △BED, △CDF 皆為二等邊, 且 ABDC 四邊之和為 $AE+AF=2m$. 故D 點之軌跡為有限直線 EF. 若 D 在 EF 之延線上,則平行四邊形 ABDC 相隣二邊之差一定.



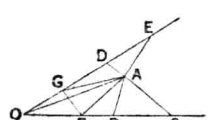
1525. 設 AB 為已知直線, AX 為由 A 至過 B 之任意直線所引之垂線,則 AX 中點之軌跡如何?

解 設 AX 之中點為 C, 又 AB 之中點為 D, 則 $A\hat{C}D=\hat{R}$, 故 C 在 AD 為直徑之圓周上.反之,在此圓周上之點, 皆適合條件,故 C 之軌跡乃以 AD 為直徑之圓周.

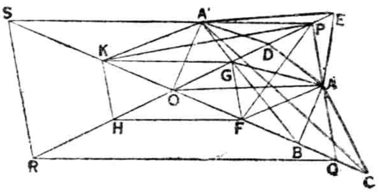


1526. 設兩三角形共一頂點, 各三角形之底, 底之位置, 及面積之和一定, 則其頂點之軌跡若何?

解 設 △ABC, △ADE 共有頂點 A, 二底 BC, DE 之大小, 位置一定, 且其面積之和亦一定. 命 BC, DE 之交點為 O, 取 OF, OG 令分別等於 BC, DE, 則 △OFG 一定. 聯結 AG, AF, 則

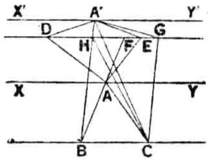


△ABC＝△AOF [736題], △ADE＝△AOG, 故四邊形 AGOF 之面積一定,因而△AGF 之面積亦一定.而 GF 之大小及位置一定,故 A 之軌跡爲角 EOC 內平行於 GF 之直線截於二直線 OE, OC 間之部分 PQ. 次,設



適合條件之點在角 EOC 外,例如在角 EOS 內,命之爲 A'. 在 OS 上取 OK, 令等於 BC, 聯結 A'K, A'O, A'G, 則 △A'BC＝△A'KO, △A'DE＝△A'OG, 故 △A'BC＋△A'DE＝△A'KO＋△A'OG, 故四邊形 A'KOG＝四邊形 AGOF. 然 △GOF＝△GOK, 故 △AGF＝△A'KG. 聯結 KP, 則因 △KPG＝△FPG, 故 △PKG＝△A'KG, 故 PA' 平行於 GK. 即角 EOS 內適合條件之點之軌跡爲過 P 平行於 GK 之直線 PS. 又 PS 以外之點,不適合條件, 甚易知之. 仿此得證所求之軌跡,在角 SOR 內爲 SR, 在角 COR 內爲 QR. 故 BC, DE 若相交, 則 A 點之軌跡爲平行四邊形 PQRS.

注意 設所設面積小於三角形 GOF, 則所求之軌跡, 等於以其差爲積, 平行四邊形 GFHK 之各邊爲底,且在此平行四邊形內所作三角形頂點之軌跡. 故所求之軌跡爲在 GFHK 內所作之平行四邊形. 次,設 BC, DE 平行,且 DE＞BC. 設 A 在二平行線間,



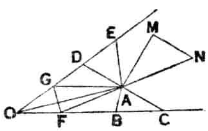
且適合條件, 聯結 AB, AC, AD, AE, 又在 DE 上取 DF, 令等於 BC, 則聯結 AF, △ABC＋△ADF 等於以 BC 爲底,二平行線 BC, DE 間之距離爲高之三角形面積,故一定,因而 △AFE 亦一定, 故過 A 平行於 BC 之直線 XY 爲軌跡之一部. 又設 A' 在 BC, DE 之外,而亦適合條件, 作 △A'BC, △A'DE, 命 A'B 與 DE 之交點爲 H, 則△ABC＋△ADE＝△A'BC＋△A'DE, △HBC＝△ABC＋△ADF, 故 △A'HC＋△A'DE＝△AFE. 由 C 平行於 BH 引 CG, 命其與 DE 或 DE 之延線之交點爲 G,則 △A'HC＝△A'HG, 故△A'HG＋△A'DE＝△AFE 此式左邊之兩三角形,高相等,底爲 DE＋BC, 故 A' 之軌跡爲過 A' 平行於 ED 之直線 X'Y'. 設由 A, A' 至 DE 所引之垂線分別爲 m, n, 則 △AEF＝$\frac{1}{2}m$·EF, △A'DE＋△A'HG＝$\frac{1}{2}n$(DE＋BC), 故 $m:n$＝DE＋BC:DE－BC.

注意 若二平行線 BC, DE 之距離爲 l, 所設面積 P 小於 $\frac{1}{2}l$·BC, 則無適合條件之點. 又若 $\frac{1}{2}l$·DE＞P＞$\frac{1}{2}l$·BC, 則軌跡爲在二平行線間之 XY, 及與 XY 在大邊 DE 異側之 X'Y' 二直線. 設 P＞$\frac{1}{2}l$·DE, 則二平行線間無軌跡,而其兩外側各有一軌跡. 若 P＝$\frac{1}{2}$×l·BC, 則軌跡爲無限直線 DE; 若 P＝$\frac{1}{2}$×l·DE, 則爲無限直線 BC. 次,設 BC＝DE. 此時若 P＜$\frac{1}{2}l$·BC, 則無軌跡. 若 P＝$\frac{1}{2}$·l·BC, 則兩平行線及其間之平面皆爲軌跡. 若 P＞$\frac{1}{2}l$·BC, 則軌跡爲二平行線外

側之一雙平行線.

1527. 設三個三角形 ABC, ADE, AMN 共一頂點，其底之大小與位置，及其面積之和一定，求公頂點 A 之軌跡.

解 由前題，$\triangle ABC+\triangle ADE=AFOG=\triangle GOF+\triangle AGF$，故 $\triangle ABC+\triangle ADE+\triangle AMN=\triangle GOF+\triangle AGF+\triangle AMN$. 然 $\triangle GOF$ 因其二邊 OF, OG 及此二邊之夾角一定，故其面積亦一定，

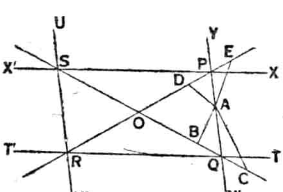


因而 $\triangle AGF+\triangle AMN$ 亦一定. 故與前題同理，所求之軌跡為四有限直線.

注意 本題得擴張至四個以上之三角形.

1528. 設兩三角形 ABC, ADE 共一頂點，其底之大小，位置一定，其面積之差亦一定，求公頂點之軌跡.

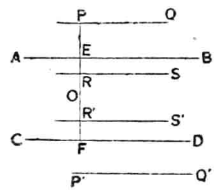
解 在 1526 題中，業已證明. 若 $\triangle ABC$



$+\triangle ADE$ 一定，則 A 之軌跡為有限直線 PQ, QR, RS, SP. 若頂點 A 在 QP 之延線 PY 上，則當視 $\triangle ADE$ 為負，故若 $\triangle ABC-\triangle ADE$ 一定，則 A 之軌跡之一部，為 QP 之延線 PY. 同理，PX, QY′, QT, SU, SX′, RU′, RT′ 在兩三角形之差一定時，亦為 A 之軌跡之一部. 故所求之軌跡為平行四邊形 PQRS 各邊之延線.

1529. 求一軌跡，令其上各點至所設二平行線之距離之和或差等於所設長.

解 命所設平行線為 AB, CD, 所設長為 l，求至 AB, CD 之距離之和，等於 l 之點之軌跡. 設 P 為軌跡上之一點，與 CD 在 AB 之異側. 由 P 引公垂線



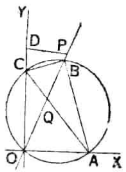
PEF, 則 PE, PF 分別為由 P 至 AB, CD 之距離，$PE=\frac{1}{2}(PE+PF-EF)=\frac{1}{2}(l-EF)$. 其中 l 為所設長，EF 為平行線之距離，故皆一定，因而 $\frac{1}{2}(l-EF)$，即 PE 一定. 故 P 之軌跡為在平行線之外側，至 AB 或 CD 之距離等於定長 $\frac{1}{2}(l-EF)$ 之點之軌跡 [1506題]，故所求之軌跡為在平行線之外側，與平行線平行之二直線 PQ, P′Q′. 次，求至 AB, CD 之距離之差等於所設長 l' 之點之軌跡. 設 R 為軌跡上之一點，而在 AB, CD 之間. 過 R 引公垂線 ERF, 則 RE, RF 分別表由 R 至 AB, CD 之距離. 命 EF 之中點為 O, 且 R 在 OE 之上方，則 $RO=\frac{1}{2}(RF-RE)=\frac{1}{2}l'$，故 $RE=\frac{1}{2}EF-\frac{1}{2}l'$. 其中 EF, $\frac{1}{2}l'$ 皆一定，故 RE 亦一定，故 R 之軌跡為在 AB, CD 間，且與 AB, CD 平行之二直線 RS, R′S′.

注意 若 $l=EF$，則 P 之軌跡為平面在 AB, CD 間之一部分. 若 $l<EF$，則問題為不可能. 又設 $l'=EF$，則 AB, CD 之平面上，除此二線間之部分外，餘皆為 R 之軌跡. 若 $l'>EF$，則問題為不可能.

1530. 設所設直角三角形 ABC 之斜邊

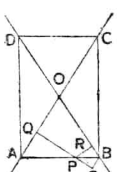
AC 之兩端,分別在直交之二直線 OX, OY 上而移動,則直角頂 B 之軌跡如何?

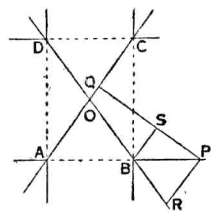
解 由假設, $A\hat{O}C$ 及 $A\hat{B}C$ 皆爲直角,故四點 O, A, B, C 在一圓周上,故 $C\hat{O}B = C\hat{A}B$, 即爲定角,因而直線BO之位置一定,故 B 恆在直線 OB 上.次,在OY 上取OD,令等於 AC,引 DP 令垂直於 OP, 命其與 OB 之交點爲P;又在 OB 上取 OQ,令等於 CB. 於是凡 PQ 上之點皆適合條件.故設角頂 A 在 OX 上,C 在 OY 上,且 B 與 O 在 AC 之異側,則 B 之軌跡爲有限直線 PQ.



1531. 設兩直線相交,由各直線至一點之距離之和[或差],等於所設長,求此點之軌跡.

解 先求至二直線之距離之和,等於所設長之軌跡. 命相交二直線爲 AC, BD, 其交點爲 O, 軌跡上之一點爲 P, 則由 P 至 OA, OB 所引垂線 PQ, PR 之和等於所設長[命爲 l]. 在 QP 之延線上按 PS=PR 取 S, 由 S 平行於 AC 引 SB, 命其與 BD 之交點爲 B. 聯結 BP, 令交 AC 於 A, 則因兩直角三角形 RPB, SPB 全等[80題], 故 $R\hat{B}P = S\hat{B}P = Q\hat{A}P$, 因而 $\triangle OAB$ 爲二等邊,即 P 在二等邊三角形 OAB 之底邊 AB 上.反之,由 AB 上之一點 P, 至 AC, BD 所引之垂線 PQ, PR 之和, 等於 l. 又取 OA=OB=OC=OD, 聯結 BC, CD, DA, 則 ABCD 爲矩形,此矩形之各邊皆爲所求之軌跡. 次, 求至二直線之距離之差, 等於所設長 l 之軌跡. 設 P 爲軌跡上之一點, 由 P 至 AC, BD 引垂線 PQ, PR, 則 $PQ \sim PR = l$. 在 PQ 上取 PS=PR, 引 $SB \parallel AC$, 命 SB 與 OB 之交點爲 B, 聯結 PB, 命其與 AC 之交點爲 A. 於是 $\triangle PBS \equiv \triangle PBR$, $\triangle OAB$ 爲二等邊,此易知之.故 P 在 $\triangle OAB$ 之底 AB 之延線上.



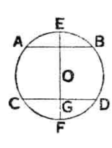


同理, 取 OA = OB = OC = OD, 則ABCD 爲矩形, P 在此矩形之各邊雙方之延線上. 反之,在此矩形四邊之延線上取一點 P, 由 P 至二定直線 AC, BD 引垂線 PQ, PR, 則 $PQ \sim PR = l$. 故所求之軌跡爲矩形 ABCD 各邊之延線.

注意 若第一款中之 l 與第二款中之 l 相等,則各款中之矩形 ABCD, 完全相等, 此易明之.

1532. 圓中平行諸弦之中點之軌跡如何?

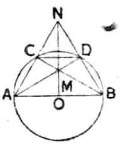
解 設圓之中心爲 O, 其一弦爲 AB, 則平行於 AB 之諸弦之中點, 顯然在垂直於 AB 之直徑 EF 上.反之,在 EF 上取一點 G, 過 G 平行於 AB 引弦 CD, 則 EF 爲 CD 之垂線,故 G 爲弦 CD 之中點.故軌跡爲圓之直徑 EF.



1533. 設 AB 爲一圓之定直徑, CD 爲其平行弦, CB, DA 交於 M, 又 CA, BD 交於 N,

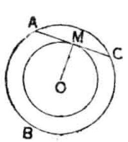
令 CD 恆平行於 AB 而移動,則 M 及 N 之軌跡如何?

解 聯結 MN, 則因 CD $\parallel$ AB, 故 MN 爲三角形 ABN 底邊之垂線[517題],且 MN 與 AB 之交點爲圓之中心 O. 故 M, N 在過中心 O,且垂直於 AB 之直線上.故所求之軌跡爲過 O 垂直於 AB 之直線.



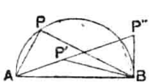
1534. 設圓中諸弦之長一定, 則其中點之軌跡爲一同心圓.

解 同圓中等弦距中心等遠,故圓 ABC 中, 等於弦 AC 之諸弦之中點,與中心 O 之距離皆等於 OM. 故所求之軌跡乃以 O 爲中心, OM 爲半徑之圓周 [1505題].



1535. 設一有限直線 AB, 張定角於點 P, 求點 P 之軌跡.

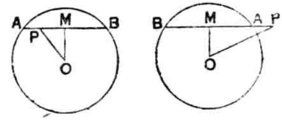
解 設 AB 張於 P 之角爲定角, 卽 $A\hat{P}B$ 爲一定, 則 AB 張於圓 APB 之弧 APB 上各點之角,皆爲定角[452題].又若 P 在此弧內之 P′,或弧外之 P″ 時, $A\hat{P}'B > A\hat{P}B$, $A\hat{P}''B < A\hat{P}B$ [453題], 故弧 APB 爲所求之軌跡.



注意 與弧 APB 全等而在 AB 異側之弧亦爲軌跡.

1536. 過所設圓中或外之所設點引弦, 則是等弦之中點之軌跡成一圓周.

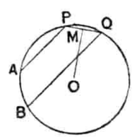
解 命所設點爲 P, 過 P 之任意弦爲 AB, 聯結 AB 之中點 M 與中心 O, 則 OM $\perp$ AB.



故 M 點之軌跡, 爲以 PO 爲直徑之圓周 [1535題].

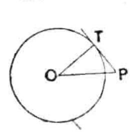
1537. 由圓周上之二定點 A, B, 引平行線 AP, BQ, 令交圓周於 P, Q, 則 PQ 中點之軌跡成一同心圓.

解 設圓周上之二定點爲 A, B, 則因 AP $\parallel$ BQ, 故 PQ = AB, 卽一定 [474, 436題]. 故由 O 至 PQ 所引垂線 OM 爲定長,而 M 爲 PQ 之中點. 故 PQ 之中點 M 之軌跡,乃以 O 爲中心, OM 爲半徑之圓周 [1505題].



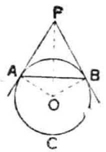
1538. 求一軌跡,令由其各點至所設圓所引之切線等於所設長.

解 命所設圓之中心爲 O, 軌跡上之一點爲 P, 由 P 至圓所引之切線爲 PT, 則 OT = 半徑 = 一定, PT = 所設長 = 一定, $O\hat{T}P = \hat{R}$, 故 $\triangle$OPT 之形及大小,一定不變,故 OP 亦一定不變.故 P 之軌跡,乃以此一定不變之長爲半徑, O 爲中心之圓 [1505題].



1539. 在所設圓 ABC 中,引等於所設長之弦 AB,命其兩端上之切線之交點爲 P, 則 P 之軌跡如何?

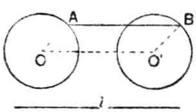
解 命中心爲 O, 聯結 OA, OB, OP, 則 $O\hat{A}P = \hat{R} = O\hat{B}P$, 故四點 A, P, B, O 在一圓周上,



而 OP 爲此圓之直徑. AB 之長一定,故 $O\hat{A}B=O\hat{B}A=$一定, 因而 $P\hat{A}B=P\hat{B}A=$一定, 於是 △APB 之形狀, 大小亦一定不易, 故其外接圓之大小亦一定不易, 因而直徑 PO 之長亦一定不易. 故 P 之軌跡, 乃以 O 爲中心, 定長 OP 爲半徑之圓周 [1505題].

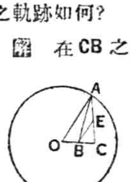
1540. 過所設圓周上之任意點 A, 平行於所設直線 l, 引 AB, 令等於所設長 a, 若 A 在此所設圓周上運動, 則 B 點之軌跡如何?

解　命所設圓之中心爲 O, 過 O 引 OO′, 令平行於 l, 且等於 a. 於是因 AB ∥ OO′, 且 AB＝OO′, 故四邊形 AOO′B 爲平行四邊形 [226題], 故 O′B＝OA, 即其長一定. 又 O′ 爲由定點 O, 平行於定直線 l 所引之直線, 且 OO′ 爲定長, 故 O′ 爲定點. 故 B 之軌跡, 乃以定點 O′ 爲中心, 定長 O′B, 即所設圓之半徑爲半徑之圓周 [1505題].



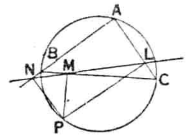
1541. 設三角形 ABC 之底 BC, 及由 B 所引之中線 BE, 分別等於所設長, 則頂點 A 之軌跡如何?

解　在 CB 之延線上取 BO, 令等於 CB, 此時 △OAC 中, B 爲 OC 之中點, E 爲 AC 之中點, 故 OA＝2BE, 而爲定長. 故 A 之軌跡, 乃以 O 爲中心, 定長 2BE 爲半徑之圓周 [1505題].



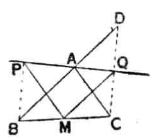
1542. 求一軌跡, 令由其各點至所設三角形之三邊所引垂線之足成一直線.

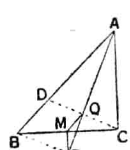
解　設 P 爲適合條件之點, 則由 P 至三角形 ABC 之三邊所引垂線之足 L, M, N 在一直線上, 故由 Simson 氏定理之逆定理 [521題], P 在三角形 ABC 之外接圓周上. 次, 由此圓周上之任意點至三邊所引垂線之足, 在一直線上 [521題]. 故所求之軌跡爲三角形 ABC 之外接圓周.



1543. 設三角形底之大小及位置一定, (1)他二邊之和一定, 求由底之兩端, 至頂角之外二等分線所引垂線之足之軌跡. (2)他二邊之差一定, 求由底之兩端至頂角之二等分線所引垂線之足之軌跡.

解　設 △ABC 之底邊 BC 之大小及位置一定, (1) 且他二邊之和 AB＋AC＝m. 延長 BA, 令 AD＝AC, 則 BD＝m. 聯結 CD, 則 CD 爲 $\hat{A}$ 之外二等分線 AQ 之垂線, 且其交點 Q 爲 CD 之中點 [93題]. 命 BC 之中點爲 M, 聯結 MQ, 則 MQ＝$\frac{1}{2}m$. 同理, 設由 B 至 $\hat{A}$ 之外二等分線所引垂線之足爲 P, 則 MP＝$\frac{1}{2}m$. 故 P, Q 之軌跡乃中心爲 M, 半徑爲 $\frac{1}{2}m$ 之圓周 [1505題]. (2)設 AB∼AC＝m, 由 B, C 至 $\hat{A}$ 之二等分線所引垂線之足爲 P, Q. 延長 CQ, 命其與 AB 之交點爲 D, 則 AC＝AD [102題], Q 爲 CD 之中點. 今設 BC 之中點爲 M, 聯結 MP, MQ, 則

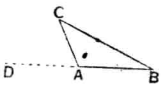




$MQ=\frac{1}{2}m$, $MP=\frac{1}{2}m$, 故P, Q之軌跡乃中心爲M, 半徑爲$\frac{1}{2}m$之圓周[1505題].

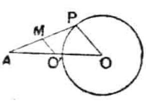
1544. 設有二直線過一所設有限直線之兩端,今此二直線同時由AB之方向始,以AB之兩端爲中心, 在同平面依順時計向而迴轉, 但一直線之速度爲他直線之二倍, 則此二直線交點之軌跡如何?

解　命所設有限直線爲AB, 因AC之迴轉速度爲BC之二倍, 故$C\hat{A}D=2A\hat{B}C$. 然$C\hat{B}A+B\hat{C}A=C\hat{A}D$, 故$C\hat{B}A=B\hat{C}A$, 因而AC＝AB. 故C點之軌跡, 乃以A爲中心, AB爲半徑之圓周[1505題].



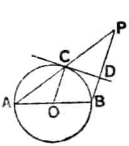
1545. 由定點至定圓所引一切直線之中點,在一圓周上.

解　設由定點A至中心O之定圓所引之任意直線爲AP, 聯結AO之中點O′, 及AP之中點M, 則因O′M∥OP, 且$O'M=\frac{1}{2}OP$＝一定, 故M之軌跡乃以O′爲中心,定圓半徑之半分爲半徑之圓周[1505題].



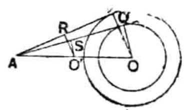
1546. 設所設圓之直徑AB一定, C爲圓周上之一點, CD爲C上之切線, BD爲CD之垂線, P爲AC, BD延線之交點,若C在圓周上運動, 則P之軌跡如何?

解　聯結圓之中心O與C, 則因OC⊥CD, BD⊥CD[假設],故OC∥BD. △ABP中, O爲AB之中點, OC∥BP, 故BP＝2OC, 卽爲定長. 故P之軌跡, 乃以B爲中心, 以2OC, 卽所設圓之直徑爲半徑之圓周[1505題].



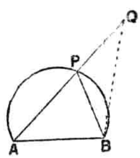
1547. 由一所設點至諸同心圓引切線, 則是等切線中點之軌跡如何?

解　命所設點爲A, 由A至諸同心圓所引之切線爲AP, AQ,…, 是等切線之中點爲R, S,……, 聯結OA之中點O′與R, S,…, 則O′R, O′S,……分別平行於OP, OQ,……, 故$O'\hat{R}A=O'\hat{S}A=\cdots\cdots=\hat{R}$, 故R, S,……之軌跡乃以AO′爲直徑之圓周[1535題].



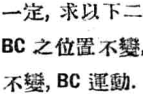
1548. 設P爲圓弧APB上之任意點,延長AP, 取PQ＝PB, 則Q之軌跡爲一圓弧.

證　因△PBQ爲二等邊, 故$A\hat{Q}B=\frac{1}{2}A\hat{P}B$, 卽一定,故Q之軌跡乃以AB爲弦, 含定角$\frac{1}{2}A\hat{P}B$之弓形之弧[1535題].



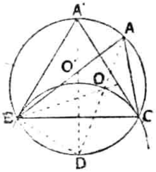
1549. 由所設直線AB之兩端,依任意方向引平行線AP, BQ, 則$P\hat{A}B$, $Q\hat{B}A$之二等分線交點R之軌跡如何?

解　因AP∥BQ, 故$P\hat{A}B+A\hat{B}Q=2\hat{R}$, 故各角半分之和$R\hat{A}B+R\hat{B}A=\hat{R}$, 因而$A\hat{R}B$亦爲直角, 故R之軌跡乃以AB爲直徑之圓周[1535題].



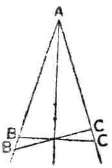
1550. 設三角形之頂角A, 及底邊BC一定, 求以下二款中三角形內心之軌跡. (1) BC之位置不變, A點運動. (2) 角A之位置不變, BC運動.

解　(1)設O爲軌跡上之一點, 則$B\hat{O}C$等於$\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{B}+\frac{1}{2}\hat{C}$, 卽$\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{A}$, 故O點之軌



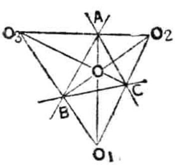
跡,爲BC上含角 $\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{A}$ 之二圓弧.

(2) 點O恆在角A之二等分線上,此易明之.茲決定其限界,則三角形爲二等邊時,AO爲最大.何則?命三角形A'BC爲二等邊,其內心爲O',又移成非二等邊時,命爲△ABC,其內心爲O.於是如能證得A'O'>AO卽可.茲命頂角之二等分線A'O', AO與△ABC[△A'BC]之外接圓周之交點爲D,則DO=DB[673題].同理,DO'=DB. 然A'O'=DA'−DO', AO=DA−DO;但DA'爲△ABC外接圓之直徑,故DA'>DA,故A'O'>AO.

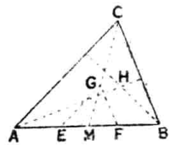


1551. 設三角形之底邊一定,頂角之大小亦一定.求以下各點之軌跡.(1)傍心,(2)垂心,(3),重心,(4)九點圓之中心.

解 (1)設三角形ABC之底BC及 $\hat{A}$ 之大小一定,命內心爲O,三傍心爲 O_1, O_2, O_3.此時 $B\hat{O_1}C=2\hat{R}-(\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{A})=\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{A}$ =一定,故 O_1 之軌跡乃一圓弧,而與內心軌跡之圓弧互爲共軛弧. 又 $B\hat{O_2}C=\frac{1}{2}\hat{A}$, $B\hat{O_3}C=\frac{1}{2}A$,故 O_2, O_3 之軌跡乃以BC爲弦,含 $\frac{1}{2}\hat{A}$ 之圓弧[1535題].

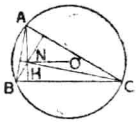


(2) 設△ABC底AB之位置及大小一定,頂角C之大小亦一定,H爲垂心,則 $A\hat{H}B=\hat{C}$ 之補角,亦一定,故H之軌跡,乃以AB爲弦,含 $2\hat{R}-\hat{C}$ 之圓弧[1535題].



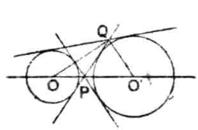
(3) 由上圖,命G爲重心,則 $GM=\frac{1}{3}CM$,故由G平行於AC, BC引GE, GF,命其與AB之交點分別爲E, F,則 $ME=MF=\frac{1}{3}AM$,故E, F爲定點.且 $E\hat{G}F=\hat{C}$,亦一定.故G之軌跡,乃以EF爲弦,含 $\hat{C}$ 之圓弧.

(4) 因△ABC之底邊BC及頂角A一定,故頂點A恆在定圓周上,命此定圓之中心爲O,三角形之垂心爲H,九點圓之中心爲N.於是H之軌跡乃以BC爲弦之圓弧[(2)款],且N爲OH之中點[524題],故N之軌跡,乃以聯結圓BHC之中心與O之直線之中點爲中心,圓BHC半徑之半分,卽圓O半徑之半分爲半徑之圓弧[1505題].



1552. 有不相交之二圓,其中心一定,半徑變動,求其公切線交點之軌跡.

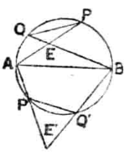
解 設不相交二圓之定中心爲O, O',內公切線之交點爲P,外公切線之交點爲P',則P, P'恆在無限直線OO'上[604題].反之,OO'上之點爲二圓O, O'內公切線或外公切線之交點,此甚易知之.又設一外公切線與一內公切線之交點爲Q,聯結OQ, O'Q,則 $O\hat{Q}O'=\hat{R}$[556, 18題],故Q點之軌跡,乃以OO'



為直徑之圓周[1535題]. 故所求之軌跡為中心線 OO′ 無限延長之直線及以 OO′ 為直徑之圓周 [但圓 O, O′ 內之部分除外].

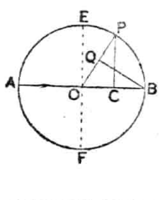
1553. 定圓中直徑之兩端, 與定長弦之兩端聯結, 令聯結之二直線相交, 則其交點之軌跡如何?

解 設定圓之定直徑為 AB, 定長之弦為 PQ, 聯結 A 與 P, B 與 Q, 命其交點為 E. 於是因弧 PQ 之長一定[438題], 故弧 PQ 與半圓周之和一定, 故 $A\hat{E}B$ 一定, 故 E 之軌跡, 乃以 AB 為弦之圓弧[1535題]. 又設 PQ 移至 P′Q′ 之位置, 則此軌跡乃前軌跡個弧之共軛弧.



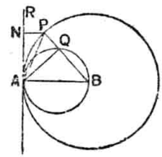
1554. 設圓 O 為定圓, P 為其周上之動點, PC 為由 P 至定直徑 AOB 所引之垂線, 在 OP 上取 OQ, 令等於 OC, 則 Q 點之軌跡如何?

解 先設 P 點在 AB 之垂直直徑 EF 之右方. 兩三角形 BOQ, POC 中, OQ = OC, OB = OP, $P\hat{O}B$ 為兩形所共, 故此兩三角形全等, 故 $O\hat{Q}B = \hat{R}$, 故 Q 點之軌跡乃以 OB 為直徑之圓周 [1535題]. 同理, 若 P 在直徑 EF 之左方, 則 Q 點之軌跡乃以 OA 為直徑之圓周. 故所求之軌跡乃以 OA, OB 為直徑之二個等圓周.



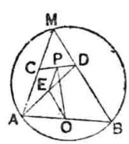
1555. 設 AB 為所設圓之所設直徑, 過其一端 B 引任意弦 BQ, 在其延線上取點 P, 令 PQ 之長, 等於由 P 至 A 上之切線 AR 所引垂線 PN, 求點 P 之軌跡.

解 聯結 AP, AQ. 於是兩三角形 APQ, APN 中, 因 AB 為圓 AQB 之直徑, 故 $A\hat{Q}B = \hat{R}$, 故 $A\hat{C}P = A\hat{N}P$, 且 PQ = PN, AP 為兩形所共, 故此兩三角形全等, 因而 $A\hat{P}Q = A\hat{P}N$. 然 PN ∥ AB, 故 $A\hat{P}N = P\hat{A}B$, 故 $A\hat{P}Q = P\hat{A}B$, 即 PB = AB. 故 P 點之軌跡乃以 B 為中心, BA 為半徑之圓周 [1505題].



1556. 定圓周上之任意點 M, 與同圓周上之二定點 A, B 聯結, 在 AM 上取 AC, 令等於定長 m, BM 上取 BD, 令等於定長 n, 則 CD 中點之軌跡如何?

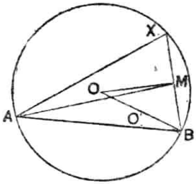
解 命 CD, AD, AB 之中點分別為 P, E, O, 聯結 PE, OE, OP, 則 PE ∥ AC, 且 $\frac{1}{2}\times AC = PE = \frac{1}{2}m$. 同理, EO 平行於 BD, 且 $EO = \frac{1}{2}n$. 故 △PEO 之二邊 PE, EO 一定不易, 且其夾角為 $A\hat{M}B$ 之補角, 故亦一定不易. 據此, M 點在優弧 AMB 上時, △PEO 之大小不變, 因而 PO 一定, 故 P 點之軌跡乃中心為 O, 半徑為 OP 之圓周, 在 AB 之上方者 [1505題]. 次, 設 M 點在劣弧 AB 上, 則 P 點之軌跡為在 AB 下方之半圓周[但半徑不能必其與前軌跡之半徑等]. 次, 設在 MA, MB 之延線上取二點 C, D, 則 P 之軌跡為補足前二半圓周之二半圓周.



1557. 設 AB 為定圓之定弦, AX 為同圓

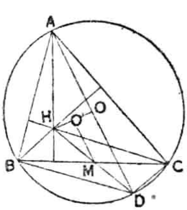
之動弦. 以 AB, AX 爲二隣邊作平行四邊形, 則其對角線交點之軌跡如何? 又由 A 所引最長對角線之位置如何?

解　以 AB, AX 爲二隣邊之平行四邊形中, 其對角線之交點, 爲弦 BX 之中點 M, 此易明者. 今命圓之中心爲 O, 聯結 OM, OB, 則因 $OM \perp BX$, 故以 AB, AX 爲二隣邊之平行四邊形, 其對角線之交點 M 之軌跡, 乃以 OB 爲直徑之圓周 [1535 題]. 次, 以 AB, AX 爲二隣邊之平行四邊形中, 由 A 所引最大之對角線, 其半分 AM 亦爲最大. 然 M 之軌跡, 乃以 OB 爲直徑之圓周. 故 AM 之最大者, 爲 AM 之過 OB 之中點, 即圓周 OMB 之中心 O′ 者. 茲命 AO′ 之延線與圓周 OMB 之交點爲 M′, 則以 AB, AX 爲二隣邊之平行四邊形中, 由 A 所引對角線之最大者爲 AM′ 之二倍.



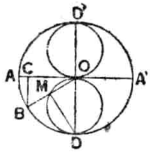
1558. 設一三角形內接於定圓, 而欲令其垂心爲一定點, 則其各邊中點之軌跡爲圓. 試證之.

解　設 ABC 爲一定圓之內接三角形, 其垂心 H 爲一定點. 命過 A 之直徑之他端爲 D, 聯結 BD, CD, 則四邊形 BHCD 爲平行四邊形, 故 HD, BC 之交點 M 爲 BC 之中點, 故 M 之軌跡乃以 HO 之中點 O′ 爲中心, 定圓半徑 OD 之半分爲半徑之圓周 [1505 題].

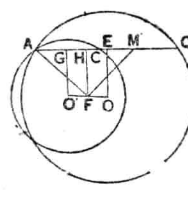


1559. 設 AOA′ 爲所設圓 ABA′ 之定直徑, OB 爲動半徑, 由其端 B 至 AOA′ 引垂線 BC, 在 OB 上取 OM = BC, 則點 M 之軌跡如何?

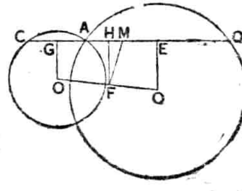
解　作垂直於 AOA′ 之直徑 DOD′, 聯結 DM, 則因 $M\hat{O}D$ 爲 $B\hat{O}C$ 之餘角, 故等於 $O\hat{B}C$. 於是兩三角形 BOC, DOM 中, BC = MO, OB = OD, $O\hat{B}C = M\hat{O}D$, 故兩形完全相等, 因此 $O\hat{M}D = B\hat{C}O$, 即爲直角. 故 M 在以 OD 爲直徑之圓周上. 反之, 在此圓周上取任意點 M, 聯結 OM, 延長之, 令交圓於點 B, 作 $BC \perp AO$, 且聯結 MD. 於是兩直角三角形 OCB, OMD 中, $\hat{B} = C\hat{O}B$ 之餘角 $= M\hat{O}D$, 且 BO = DO, 故 BC = MO. 故所求之軌跡乃以 OD 爲直徑之圓周. 若動半徑移至他半圓內, 則又得關於 AOA′ 與圓 DMO 對稱之他圓.



1560. 過二圓 O, O′ 之交點 A, 引倍弦 ACQ, 求其中點 M 之軌跡.



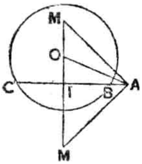
解　命中心線 OO′ 之中點爲 F, 由 O, O′, F 至倍弦引垂線 OE,



$O'G$, FH, 則 $AG=CG$, $AE=QE$, $GH=EH$. 而 $CM=QM=\frac{1}{2}(AC\pm AQ)$, 故 $ME=MQ\sim EQ=\frac{1}{2}\times AC$ [36題] $=AG$, 故 $AH=HM$, 故 $\triangle FAM$ 爲二等邊, $AF=MF$. 故 M 點之軌跡乃以定點 F 爲中心, 定長 FA 爲半徑之圓周 [1505題].

1561. 有一定圓及同平面上之定點 A, 過 A 引割線 ABC, 由弦 BC 之中點 I, 垂直於 BC 引 $IM=IA$, 則 M 點之軌跡如何?

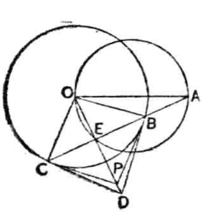
解 IM 過弦 BC 之中點, 且垂直於此弦, 故過中心 O, 而 $IA=IM$, 故 $I\hat{M}A=I\hat{A}M=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 M 點在以 AO 爲弦, 含 $\frac{1}{2}\hat{R}$ 之弓形之弧上. 故所求之軌跡, 乃以 OA 爲弦, 含 $\frac{1}{2}\hat{R}$ 之弓形之全圓周 [1535題].



注意 軌跡乃關於 OA 爲對稱之二圓周, 若所設點 A 在圓外, 則由 A 至圓 O 引二切線, 聯結中心 O 與切點之直線, 與軌跡圓周之切點, 爲軌跡之界限, 甚易知之.

1562. 由一定點至同平面上之所設圓周引一割線, 在其與圓周之二交點上引切線, 則得一三角形. 設過定點之割線運動, 則三角形垂心之軌跡如何?

解 命所設圓爲 O, 所設點爲 A, 過 A 之任意割線爲 ABC, 切圓於 B, C 之切線之交點爲 D, 三角形 BCD 之垂心爲 P. 此時 OB, CP 皆爲 BD 之垂線, 故 $OB\parallel CP$. 同理, $BP\parallel OC$. 故 OBPC 爲平行四邊形, 因而 $OE=EP$. 又因 $A\hat{E}O=\hat{R}$, 故 E 恆在以 OA 爲直徑之圓周上 [1535題], 故 P 在 O 與圓 OEA 之周上任意點 E 聯結之直線上, 而 $OE=EP$. 故 P 在以 A 爲中心, OA 爲半徑之圓周上. 故 P 點之軌跡乃以 A 爲中心, OA 爲半徑之圓周.

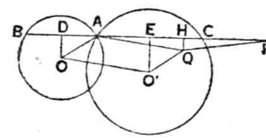


注意 若所設點 A 在圓外, 由 A 至圓 O 引二切線, 聯結 O 與切點而延長之, 令截圓 OP, 則其截點爲軌跡之界限, 甚易知之.

1563. 設 A 爲兩所設圓周之一交點, 過 A 引一直線, 截二圓於 B, C, 在此直線上取 AP, 令等於 AB, AC 之和, 求點 P 之軌跡.

解 命兩所設圓之中心分別爲 O, O′, 以

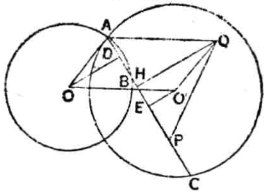
[1 圖]



AO, OO′ 爲兩隣邊, 作平行四邊形 AOO′Q, 聯結 QP, 且由 O, O′, Q 至直線 BAC, 分別引垂線 OD, O′E, QH. 於是因 $OO'=AQ$, 且 $OO'\parallel AQ$, 故 $DE=AH$ [227題], 然 $DE=\frac{1}{2}BC$, 故 $AH=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AP$, 因而 $AH=HP$, $\triangle AHQ\equiv\triangle PHQ$, 故 $QP=QA=OO'$, 即一定. 然平行四邊形 AOO′Q 一定, 故 Q 爲定點, 故 P 點在以 Q 爲中心, OO′ 爲半徑之圓周上 [1505題].

注意 若直線 BAC 以 A 爲中心, 而漸漸迴轉, 至如(2)圖, 則 BA 之方向, 與(1)中相反. 若以代數學符號之意義言之, 則設 BA 取負方向, 因而 AP 之絕對值爲 AC 與 AB 之

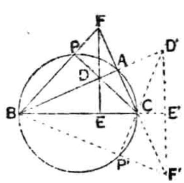
[2 圖]



差. 於是仿前得證 P 在 Q 爲中心, OO′ 爲半徑之圓周上. 綜觀(1),(2), 可知 P 點在中心 Q, 半徑 OO′ 之全圓周上. 如上所述, 若幾何學之軌跡, 僅爲直線或圓等之一部, 而此問題, 得由代數學之正負考之, 則此直線或圓之全部, 亦可適用. 如是之軌跡, 在幾何學中, 數見不鮮.

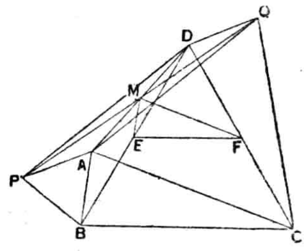
1564. 設所設三角形 ABC 中, A 爲直角, 引 BC 之垂線 EF, 命其與 AB 之交點爲 D, 與 AC 之交點爲 F, 又命 BF, CD 之交點爲 P. 若 E 點在直線 BC 上運動, 則 P 點之軌跡如何?

解 $\triangle FBC$ 中, $FE \perp BC$, $BA \perp CF$, 故 D 爲此三角形之垂心, 故 $CD \perp BF$ [195 題], 即 $B\hat{P}C = \hat{R}$. 故 P 點在 BC 爲直徑之圓周上. 反之, 此圓周上之一切點, 皆適合本題之條件, 是亦甚易證之. 故 P 點之軌跡, 乃以 BC 爲直徑之圓周. 圖中點線所示者, 爲 E 點行於 BC 之延線時, P 點之軌跡亦在同一圓周上.



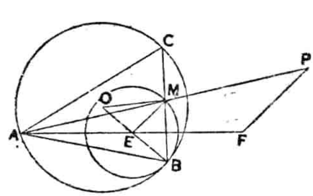
1565. 設三角形 ABC 中, $\hat{A}$ = 定角 K, 底 BC 亦一定. 今在 AB, AC 上, 就形外作正三角形 ABP, ACQ, 則 PQ 中點 M 之軌跡如何?

解 在 BC 上作正三角形 BCD, 令與三角形 BAC 在 BC 之同側, 聯結 DP, DQ. 於是因 $PB = AB$, $DB = CB$, $P\hat{B}D = A\hat{B}C$, 故 $\triangle PBD \equiv \triangle ABC$, 因而 $PD = AC = AQ$. 又同理, $\triangle ABC \equiv \triangle QDC$, 因而 $QD = AP$. 故 DPAQ 爲平行四邊形, 故 M 爲 AD 之中點. 命 DB, DC 之中點分別爲 E, F, 則 $ME \parallel AB$, $MF \parallel AC$, 故 $E\hat{M}F = B\hat{A}C = \hat{K}$, 且 E, F 皆爲定點, 故 M 在以 EF 爲弦之弧上. 又此弧上之點, 皆適合本題之條件. 故所求之軌跡乃弧 EMF.



1566. 設 AB 爲所設圓之所設弦, 作三角形 ABC, 令其頂點 C 在圓周上, 命 BC 之中點爲 M, 在直線 AM 之延線上取點 P, 令 $AM = MP$, 則 P 點之軌跡如何?

解 設圓之中心爲 O, 則 $OM \perp BC$, 故 M

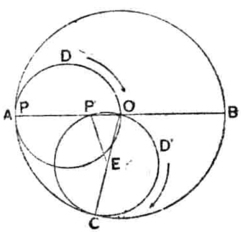


之軌跡, 乃 OB 爲直徑之圓周, 而在 AB 之上方者. 故所求之軌跡, 乃此圓外之一點

A 與此圓周上之一點 M 聯結之直線,而在其延線上按 AM＝MP 所取 P 點之軌跡. 命 OB 之中點爲 E, 聯結 AE, 在其延線上取 F, 令 AE＝EF. 於是以 F 爲中心, 定長 2EM, 即 OB 爲半徑作圓,其在 AB 延線之上部者,即所求之軌跡. 若 C 可在與前相反之弧上,則 P 之軌跡爲圓 F 之全周.

1567. 設圓 ABC 爲定圓,圓 OPD 爲以定圓之半徑爲直徑之圓,今小圓 OPD 內切於大圓而廻轉,則小圓上一點 P 之軌跡如何?

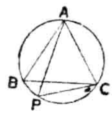
解 設小圓最初之位置爲 PDO, 其定點 P 爲大圓與小圓之切點, 由是依矢向廻轉, 而至 OD′C 之位置. 命此時之中心爲 E, 過 P 引大圓之直



徑 AOB, 命其與小圓之交點爲 P′. 於是因小圓之直徑爲大圓之半徑,故在此兩位置之小圓之一交點 O, 爲大圓之中心. 又聯結 OE 而延長之,必過切點 C. 於是 △OEP′ 中, $C\hat{E}P' = O\hat{P}'E + P'\hat{O}E$, 而 OE＝EP′,故 $O\hat{P}'E + P'\hat{O}E = 2E\hat{O}P'$, 故 $C\hat{E}P' = 2A\hat{O}C$, 故弧 AC ＝弧 P′C [976, 1318題]. 故小圓由第一位置行至第二位置, 即切點由 A 行至 C 時, P 點隨而行至 P′. 換言之, P 點恆在直徑 AB 上運動,故 AB 爲所求之軌跡.

1568. 設 ABC 爲正三角形,聯結三角頂 A, B, C 於一點 P, 令 PA＝PB＋PC, 求 P 點之軌跡.

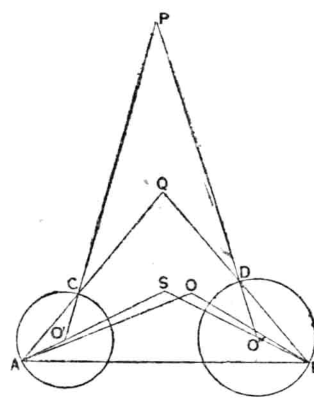
解 PA＝PB＋PC, 且 ABC 爲正三角形,故



PA·BC＝PB·AC＋PC·AB, 故由 Ptolemy 氏定理 [1150題] 之逆定理, P 在 △ABC 之外接圓周上. 又在此圓周之劣弧 BC 上取一點 P, 則由 Ptolemy 氏定理, PA·BC＝PB·AC＋PC·AB, 即 PA＝PB＋PC. 故所求之軌跡爲 △ABC 外接圓之一部,即劣弧 BC. 其他劣弧 AB, AC 分別爲按 PC＝PA＋PB, PB＝PA＋PC 所取 P 點之軌跡.

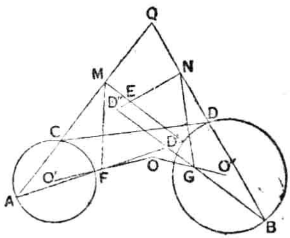
1569. 設 A, B 分別爲圓 O′, O″ 周上之定點; O′P, O″P 成定角, 則 △AQB 之內心及 △CQD 之外心之軌跡如何?

解 $2O'\hat{A}C = 2\hat{R} - A\hat{O}'C$, $2O''\hat{B}D = 2\hat{R}$



$- B\hat{O}''D$, 故 $2O'\hat{A}C + 2O''\hat{B}D = 4\hat{R} - (A\hat{O}'C + B\hat{O}''D)$. 命 $A\hat{S}B$ 爲 $\hat{S}$, 則 $2O'\hat{A}C + 2O''\hat{B}D + 2\hat{Q} = 2\hat{S}$, 以上得關係代入, 則 $2\hat{Q} + 4\hat{R} - (A\hat{O}'C + B\hat{O}''D) = 2\hat{S}$, 即 $2\hat{Q} + 4\hat{R} - (4\hat{R} - \hat{S} + \hat{P}) = 2\hat{S}$, 即 $2\hat{Q} = \hat{S} + \hat{P}$ ＝一定 [若 P 與 S 在 AB 之異側,則 $2\hat{Q} = \hat{S} - \hat{P}$]. 於是因

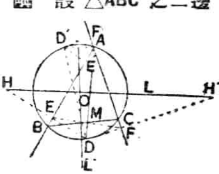
$\hat{Q}$ 爲定角，故知 $\triangle AQB$ 之內心之軌跡爲圓弧[1535題]．次，因 $\hat{Q}$ 爲一定，故 $\triangle AQB$ 之外心爲定點 O．命 OO'，OO'' 之中點分別爲 F，G，又 QC，QD 之中點分別爲 M，N，聯結



AF，BG，MF，NG，又由 M 及 N 引 CQ，DQ 之垂線 ME，NE，命其交點爲 E，又命 AF，ME 之交點爲 D'，及 BG，NE 之交點爲 D''，則 E 爲 $\triangle CQD$ 之外心．又 AQ 爲過圓 O，O' 之交點 A 所引之弦，CQ 爲此二圓周間之部分，故 CQ 之中點 M，在以 OO' 之中點 F 爲中心，AF 爲半徑之圓周上[1560題]．故直角三角形 AMD' 中，$AF=MF=FD'$，因而 D' 爲定點．同理，D'' 亦爲定點．又 $\hat{E}$ 爲定角 $\hat{Q}$ 之補角，故爲定角．故 E 點之軌跡，乃以 $D'D''$ 爲弦，含 $\hat{Q}$ 之補角之圓弧[1535題]．

1570. 設角 BAC 在一定之位置，在二邊 AB，AC 上分別取 B，C，令 AB 與 AC 之和[或差]等於所設長，聯結 B，C，則 $\triangle ABC$ 之外接圓中心之軌跡如何？又底 BC 中點之軌跡如何？

解 設 $\triangle ABC$ 之二邊 $AB+AC=2l$，D 爲



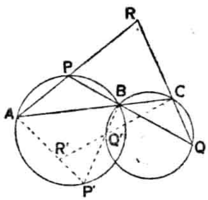
$\triangle ABC$ 外接圓之弧 BC 之中點，O 爲外心．由 D 引 AB 之垂線 DE，則 $AE=l$ [680題]．又因 $E\hat{A}D=\frac{1}{2}\hat{A}$，故直角三角形 AED 一定，故 D 爲定點．故三角形 ABC 之外接圓中心 O 在 AD 之垂直二等分線 L 上．反之，在 L 上取一點 O，以 O 爲中心，過 A，D 作圓，令截 $\hat{A}$ 之二邊 AB，AC，於 B，C，由 D 引 AB 之垂線 DE，則 $AE=l$，$AB+AC=2l$，此甚易知之．故所求之軌跡爲直線 L．又因 O 亦在 AB，AC 之垂直二等分線上，故設 AC 逐漸減少，而至於零，則 $AB=2l$，其垂直二等分線變爲 DE．同理，設 AB 逐漸減少，而至於零，則 AC 爲 $2l$，其垂直二等分線爲 DF．故設 DE，DF 與直線 L 之交點分別爲 H，H'，則所求之軌跡爲 HH'．次，設 $AB\sim AC=2l$．命三角形 ABC 之外接圓中，過 D 之直徑之他端爲 D'，由 D' 至 AB 引垂線 $D'E'$，則 $AE'=l$ [680題]＝一定，故直角三角形 $AE'D'$ 一定，故 D' 爲定點，故 O 在 AD' 之垂直二等分線 L' 上．反之，直線 L' 上之點，皆適合條件，此易證之．故軌跡爲直線 L' 之在 AD' 下方者．

次，求 BC 之中點 M 之軌跡．先設 $AB+AC=2l$，則 $AE=AF=l$，故 E，F 爲定點．聯結 EM，FM，則兩四邊形 BEMD，CFDM 分別內接於直徑爲 BD，CD 之圓，故 $E\hat{M}B=E\hat{D}B$，$C\hat{M}F=C\hat{D}F$．而 $\triangle BDE\equiv\triangle CDF$，故 $E\hat{D}B=C\hat{D}F$，因而 $E\hat{M}B=C\hat{M}F$．故 EMF 成一直線，即 M 在直線 EF 上．反之，可證 EF 上之點 M，爲適合 $AB+AC=2l$ 之 $\triangle ABC$ 中底 BC 之中點．故 M 之軌跡爲直線 EF．次，設 $AB\sim AC=2l$，仿前得證 BC 之中點 M 之軌跡，乃由弧 BAC 之中點 D'，至 AB，AC 所引垂線 $D'E'$，$D'F'$ 之足 E'，F' 聯結之直

線

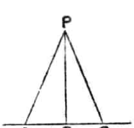
15,1. 設兩所設圓 APB, BCQ 相交, B 爲交點之一, BA 及 BC 分別爲兩圓中過 B 之所設弦. 引過 B 之任意弦 PBQ, 令交二圓於 P, Q, 求 AP, QC 之交點 R 之軌跡.

解 AB, BC 分別爲定圓中之定弦, 故 $A\hat{P}B$ 及 $B\hat{Q}C$ 皆爲定角, 故三角形 PQR 之兩角 P 及 Q 一定, 因而 $\hat{R}$ 亦一定. 故所求之軌跡, 乃以聯結二定點 A, C 之直線爲弦, 含定角 R 之圓弧 [1535 題]. 設弦 PBQ 行至如點線 BQ′P′ 之位置, 則所求之軌跡爲以 AC 爲弦, 含定角 $\hat{R}'$ 之圓弧. 但 $\hat{R}$ 與 $\hat{R}'$ 互爲補角, 故此兩款中之圓弧, 合而成全圓周.



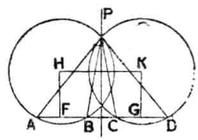
1572. 一直線上相隣且相等之二部分張於一動點之角相等, 則此點之軌跡若何?

解 設 AB, BC 在一直線 ABC 上, 且 AB = BC. 命 P 爲軌跡上之一點, 則 $A\hat{P}B = C\hat{P}B$, 又 AB = BC, PB 爲兩形所共, 故兩三角形 APB, CPB 之二雙對應邊相等, 且其一雙等邊所對之角 APB, CPB 相等, 故由79題, 他一雙等邊所對之角 A 及 C, 或相等, 或互爲補角. 然 $\hat{A}$, $\hat{C}$ 不能互爲補角, 蓋若 $\hat{A}+\hat{C}=2\hat{R}$, 則 AP ∥ CP 故也. 故 $\hat{A}=\hat{C}$, 因而 △ABP ≡ △CBP. 故 P 之軌跡爲 AC 之垂直二等分線.



1573. 設一直線 ABCD 之不相隣部分 AB, CD 相等, 取一點 P, 令 $A\hat{P}B = C\hat{P}D$, 則 P 點之軌跡如何?

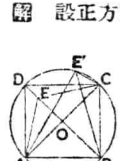
解 設 P 之一位置爲 P, 作 △ABP 及 △CDP 之外接圓, 命其中心分別爲 H 及 K. 於是因 AB = CD, 且 $A\hat{P}B = C\hat{P}D$, 故此兩圓相等. 據此, 由 H, K 至 ABCD 引垂線 HF, KG, 則 HF = KG, 因而 HK = FG. 又由 P 向 HK 引垂線, 則將 HK 二等分 [91題], 因而又將 FG 二等分. 故 P 在 FG 之垂直二等分線上, 因而又在 AD 之垂直二等分線上. 反之, 此垂直二等分線上之一點, 爲適合條件之 P 點之一位置, 此甚易證之. 故所求之軌跡爲 AD 之垂直二等分線.



注意 本題中若 B 與 C 一致, 則與前題同, 其解法更爲簡單.

1574. 正方形之二邊, 張於一動點之角相等, 則此點之軌跡若何?

解 設正方形爲 ABCD, 張等角之二邊爲 AB, BC. 命 E 爲軌跡上之一點, 則 △AEB 與 △EBC 中, AB = BC, EB 爲兩形所共, $A\hat{E}B = B\hat{E}C$, 故 $E\hat{A}B$, $E\hat{C}B$ 或相等, 或互爲補角 [79 題]. 先設 $E\hat{A}B = E\hat{C}B$, 則 △AEB ≡ △ECB, 故 $E\hat{B}A = E\hat{B}C$, 故 E 在對角線 BD 或其延線上. 次, 設 $E\hat{A}B$ 與 $E\hat{C}B$ 互爲補角, 則 EABC 爲圓之內接四邊形, E [如圖中所示之 E′] 在圓 ABCD 之半圓周 ADC 上. 綜上以觀, 所求之軌跡爲半圓周 ADC 及無限直線 BD. 仿此,

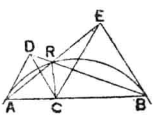


若他相隣二邊所張之角相等,則所求之軌跡亦爲半圓周及對角線之一. 是等軌跡,合而成全圓周與兩對角線,及對角線之無限延線. 又若兩對邊張等角,則所求之軌跡爲圓 ABCD. 及過對角線之交點 O, 與原正方形之邊平行之直線.

注意　由此問題,又可知一動點,令正方形之三邊,張等角於其上者之軌跡.

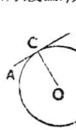
1575. 在所設直線 AB 上取任意點 C, 以 AC, BC 爲一邊, 就同側分別作正三角形 ACD, BCE, 聯結 DB, AE, 則其交點 R 之軌跡如何?

解　因 $AC=DC$, $CE=CB$, $A\hat{C}E=D\hat{C}B$, 故 $\triangle AEC\equiv\triangle DBC$, 故 $A\hat{E}C=D\hat{B}A$, 故四點 R, E, B, C 在一圓周上. 故 $E\hat{R}B=E\hat{C}B$, 因而 $A\hat{R}B$=(正三角形之外角), 故一定不易. 故 R 在 AB 爲弦, 含正三角形外角之弓形之弧上. 反之,設此弧上之任意點爲 R, 聯結 AR 而延長之,令交此弧在 B 上之切線於 E, 則 $A\hat{B}E$ 等於 $A\hat{R}B$ 之補角, 即正三角形之一角. 在 AB 上取點 C, 令 $BC=BE$, 則 $\triangle BCE$ 爲正三角形. 過 C 平行於 BE 引 CD, 命其與 BR 之交點爲 D, 則三角形 ACD 亦爲正三角形. 故所求之軌跡爲弓形弧 ARB.



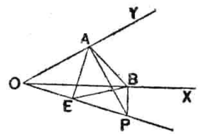
1576. 設一圓直交所設圓於其周上之所設點,則前圓中心之軌跡如何?

解　命所設圓之中心爲O, 其周上之所設點爲 C, 由 C 引此圓之切線 CA. 於是 CA 爲與圓 O 直交之圓之直徑 [550題], 因而後圓之中心, 在此切線上. 又以此切線上之任意點爲中心,以 C 爲圓周上一點之圓,與圓 O 直交. 故所求之軌跡爲切線 AC.



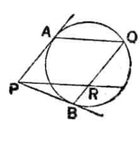
1577. 設一定長直線之兩端, 恆在所設角之二邊上, 以兩端爲垂足, 分別引角之二邊之垂線,則其交點之軌跡如何?

解　命所設角爲 XOY, 定長直線之一位置爲 AB, 作 $AP\perp OY$, $BP\perp OX$, 命 AP, BP 之交點爲 P. 聯結 OP, 命其中點爲E, 聯結 EA, EB. 於是 E 爲直角三角形 OBP 之斜邊 OP 之中點, 故 $OE=BE$, 且 $B\hat{E}P=2B\hat{O}E$. 同理, E 又爲直角三角形 OAP 之斜邊 OP 之中點,故 $OE=AE$, 且 $A\hat{E}P=2A\hat{O}E$. 故 $AE=EB$, 且 $A\hat{E}P-B\hat{E}P=2A\hat{O}E-2B\hat{O}E$, 即 $A\hat{E}B=2A\hat{O}B$. 故三角形 AEB 爲頂角 AEB 及底一定不易之二等邊三角形,故此三角形亦一定不易. 因而 AE 爲定長,故等於 2AE 之 OP 亦爲定長. 故 P 之軌跡乃以 O 爲中心,定長 OP 爲半徑之圓周 [1505題].



1578. 由圓外之定點P,引二切線,命其切點爲 A, B, 過 A 引任意弦 AQ, 平行於 AQ 引 PR, 命其與 QB 之交點爲 R, 求 R 之軌跡.

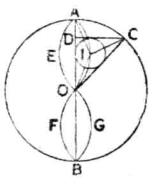
解　因 P 爲定點,故切點 A, B 一定, 因而弧 AB 亦一定,故 $A\hat{Q}B$ 一定不易. 而 $AQ\parallel PR$, 故 $P\hat{R}B=A\hat{Q}B$, 或 $P\hat{R}B+A\hat{Q}B=2\hat{R}$ [設 R 與 A 在 PB 之異側], 因而 $P\hat{R}B$ 亦一定不易. 故 R之軌跡乃以定直線PB爲弦,在其上含定



角 AQB 之弓形之全圓周 [1535題].

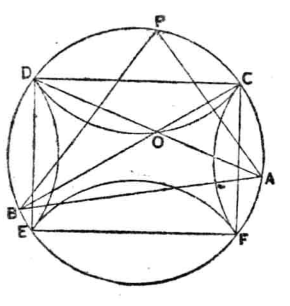
1579. 由定圓中半徑之端, 至所設直徑引一垂線而成三角形, 若半徑運動, 則三角形內心之軌跡如何?

解　命定圓之所設直徑爲 AB, 動半徑之一位置爲 OC, 由 C 至 OA 引垂線 CD, 命△OCD 之內心爲 I, 聯結 IA, IO, IC, 則 $O\hat{I}C=\hat{D}+\frac{1}{2}\hat{O}+\frac{1}{2}\hat{C}=\frac{3}{2}\hat{R}$. 而 △AOI≡△COI [55 題], 故 $O\hat{I}A=O\hat{I}C=\frac{3}{2}\hat{R}$. 故內心 I 之軌跡, 乃以 AO 爲弦, 含 $\frac{3}{2}\hat{R}$ 之弓形弧 [1535題]. 由是可知, 若 OC 取一切之位置, 則 I 點之軌跡乃關於 AB 爲對稱之四弧 AIO, AEO, OGB, OFB.



1580. 由所設圓周 ABC 上之任意點 P, 平行於所設二直線引弦 PA, PB, 聯結 AB, 則三角形 PAB 內心之軌跡如何?

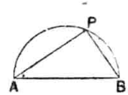
解　設 PA, PB 之一位置, 如圖所示, 命 O



爲 △PAB 之內心. 因 O 在 PAB 之二等分線上, 故設 AO 之延線與圓之交點爲 D, 則 D 爲弧 PB 之中點. 同理, 設 BO 之延線與圓之交點爲 C, 則 C 爲弧 AP 之中點. 而 PB 及 PA 分別平行於所設直線, 故弧 PB 之中點 D, 弧 PA 之中點 C 爲定點, 且 $D\hat{O}C=\hat{P}+\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{B}$ [201題] $=\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{P}$, 其中 $\hat{P}$ 爲定角, 故角 DOC 之大小一定. 因此 O 點之軌跡, 乃以 DC 爲弦, 含定角 $\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{P}$ 之弓形弧 [1535題]. 又 $C\hat{P}D$ [其測度 $=\frac{1}{2}$ 弧 CABD $=\frac{1}{2}$(弧 CA + 弧 AB + 弧 BD)] $=\frac{1}{2}\hat{B}+\hat{P}+\frac{1}{2}C$, 故適等於 $C\hat{O}D$, 故弧 COD 爲弧 CPD 關於弦 CD 之對稱弧. 由是可以推知, 若以 DC 爲一邊, 作圓之內接矩形, 則由 P 之種種位置而生之軌跡之全體, 乃原圓之劣弧關於此矩形四邊之四對稱弧.

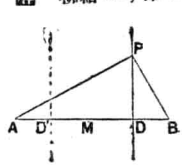
1581. 由所設二點至一點之距離上正方形之和, 等於前二點間之距離上之正方形, 求後一點之軌跡.

解　命所設二點爲 A, B, 適於條件之一點爲 P, 聯結 PA, PB, AB, 則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=\overline{AB}^2$ [假設], 故 $A\hat{P}B=\hat{R}$ [753題], 故 P 在直徑爲 AB 之圓周上. 又圓周上之任意點皆適合條件, 甚易證之. 故 P 點之軌跡, 乃以 AB 爲直徑之圓周.



1582. 設由一動點 P 至二定點 A, B 之距離上正方形之差一定, 則 P 點之軌跡如何?

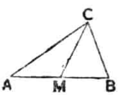
解　聯結 AB, 命 M 爲 AB 之中點, 由軌跡上之一點 P, 至 AB 引垂線 PD, 則 $\overline{AP}^2\sim\overline{BP}^2=\overline{AD}^2\sim\overline{BD}^2=4\cdot AM\cdot DM$ [776題] $=k^2=$ 一定, 故 DM 爲定長, 故 P 所在之直線, 乃距 M 定遠之點 D 上, 垂



直於 AB 之直線. 反之,在直線 PD 上取點 P, 聯結 PA, PB, 則 $4AM \cdot DM = k^2 = \overline{AD}^2 \sim \overline{BD}^2 = \overline{AP}^2 \sim \overline{BP}^2$. 故軌跡爲直線 PD. 若 AP<BP, 則軌跡爲按 MD=MD′ 所取點 D′ 上垂直於 AB 之直線.

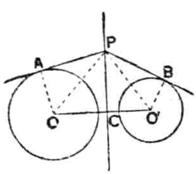
1583. 設三角形之底一定, 他二邊上正方形之和亦一定,則其頂點之軌跡如何?

解 設 △ABC 之底 AB 一定, 他二邊 AC, BC 上正方形之和亦一定. 命 AB 之中點爲 M, 聯結 CM, 則 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2)$ [754題]=一定. 其中 AM 一定,故 CM 亦非一定不可. 故 C 之軌跡,乃以 M 爲中心,定長 CM 爲半徑之圓周.



1584. 設由一點至二圓周之方積相等,則此點之軌跡如何?

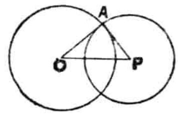
解 設至二圓 O, O′ 之方積相等之一點爲 P, 則由 P 至二圓所引之切線相等,即 PA=PB. 聯結 OO′, OA, O′B, OP, O′P, 由 P 引 OO′ 之垂線 PC, 則 $\overline{PO}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{PA}^2 = \overline{PB}^2 = \overline{PO'}^2 - \overline{O'B}^2$, 或 $\overline{PO}^2 \sim \overline{PO'}^2 = \overline{OA}^2 \sim \overline{O'B}^2 = \overline{OC}^2 \sim \overline{O'C}^2$. 故 P 所在之直線, 乃按 $\overline{OC}^2 \sim \overline{O'C}^2 = \overline{OA}^2 \sim \overline{O'B}^2$ 所取點 C 上垂直於 OO′ 之直線. 反之, 在此直線上取點 P, 則 $\overline{PO}^2 \sim \overline{PO'}^2 = \overline{OC}^2 \sim \overline{O'C}^2 = \overline{OA}^2 \sim \overline{O'B}^2$, 或 $\overline{PO}^2 - \overline{OA}^2 = \overline{PO'}^2 - \overline{O'B}^2$, 即 $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$, 因而 PA=PB, 故 PC 上之點 P, 爲至二圓周之方積相等之點. 故所求之軌跡爲直線 PC.



注意 由本解可知, 至二所設圓 O, O′ 所引切線相等之點之軌跡,與本題所求得之軌跡完全相同.

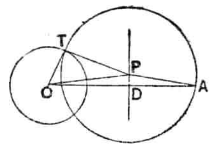
1585. 設一等半徑之圓, 以所設角交所設圓,則前圓中心之軌跡如何?

解 設所設圓之中心爲 O, 適合條件之圓之中心爲 P, 兩圓之交點爲 A, 則 $O\hat{A}P$ 等於兩圓之交角, 故一定. 於是三角形 OAP 中, OA, AP 一定, 其夾角亦一定, 故 OP 亦一定, 故 P 在以 O 爲中心, OP 爲半徑之圓周上. 次, 此圓周上之點皆適合條件, 其證甚易. 故所求之軌跡, 乃以 O 爲中心, 以 OP 爲半徑之圓周.



1586. 設一圓過二所設點, 而直交一所設圓周,求前圓中心之軌跡.

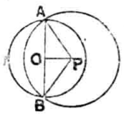
解 命所設圓爲 O, 所設點爲 A, 求一軌跡, 令其上之各點爲過 A 且直交圓 O 之圓之中心. 命此中心之一位置爲 P, 由 P 至圓 O 引切線 PT, 聯結 OT, PA, 則由假設, PT=PA, 故 $\overline{PO}^2 - \overline{PA}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{PT}^2 = \overline{OT}^2$, 即一定不變. 聯結 P, A; P, O, 則 P 點爲聯結直線上正方形之差一定之點. 故所求之軌跡, 乃過按 $\overline{OD}^2 - \overline{DA}^2 = \overline{OT}^2$ 在 OA 上所取點 D, 且垂直於 OA 之直線 [775題].



注意 若將 1584 題之一圓, 縮小爲點而察之, 則可知其與本題爲同一之問題.

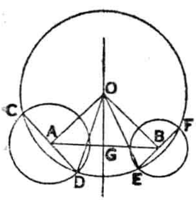
1587. 設一等半徑圓與所設圓相交，而後圓之周爲交點所二等分，求前圓中心之軌跡.

解 命所設圓爲 O，適合條件之一圓爲 P，且二圓之交點爲 A, B，則弦 AB 爲圓 O 之直徑.故三角形 PAO 中，AO, AP 分別爲二圓之半徑，故一定，$A\hat{O}P=\hat{R}$，亦一定，故 OP 亦一定，因而 P 在以 O 爲中心，OP 爲半徑之圓周上.又此圓周上之點皆適合條件，其證甚易.故所求之軌跡，乃以 O 爲中心，O 爲半徑之圓周.



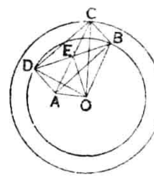
1588. 設一圓二等分所設二圓之圓周，求此圓中心之軌跡.

解 設中心爲 O 之圓，二等分所設二圓 A, B 之圓周，命圓 O 與二圓 A, B 之交點爲 C, D, E, F，則 CD, EF 爲兩圓之直徑.由 O 至中心線 AB 引垂線 OG，聯結 OA, OB, OD, OE，則 $\overline{AG}^2\sim\overline{BG}^2=\overline{OA}^2\sim\overline{OB}^2=(\overline{OD}^2-\overline{AD}^2)\sim(\overline{OE}^2-\overline{BE}^2)=\overline{BE}^2\sim\overline{AD}^2$. 故 G 點爲 AB 之分點，其所分二分上正方形之差，等於所設圓半徑上正方形之差，故 G 點爲定點，故 O 在過定點 G 且垂直於 AB 之直線上.反之，此直線上之點適合條件.故軌跡爲直線 OG.



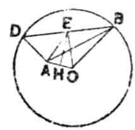
1589. 設矩形之一角頂在一定點，其相隣二角頂沿一所設圓周移動，求其餘一角頂之軌跡.

解 設矩形 ABCD 中，頂點 A 爲定點，B, D 在所設圓 O 之周上移動.命對角線 AC, BD 之交點爲 E，聯結 OA, OB, OC, OD, OE，則 $\overline{AO}^2+\overline{CO}^2=2(\overline{OE}^2+\overline{AE}^2)$ [754 題] $=2(\overline{BE}^2+\overline{OE}^2)$ [237 題] $=\overline{OB}^2+\overline{OD}^2$. 然 AO, BO, DO 爲定長，故 OC 之長一定，因而 C 之軌跡爲一同心圓.



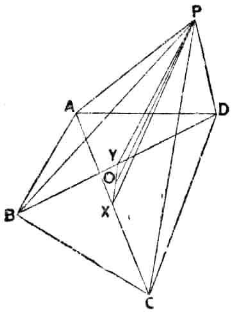
1590. 設矩形之一角頂在一定點，其相隣二角頂沿一所設圓周移動.求此矩形對角線交點之軌跡.

解 設 AO 之中點爲 H，聯結 BO, EA, EH，則 $\overline{AE}^2+\overline{EO}^2=2\overline{EH}^2+2\overline{AH}^2$ [754題].然 E 爲直角三角形DAB之斜邊 DB 之中點，故 AE=EB，因而 $\overline{EB}^2+\overline{EO}^2=2\overline{EH}^2+2\overline{AH}^2$. 然 E 爲弦 DB 之中點，O 爲圓之中心，故 OE⊥DB，故 $\overline{EB}^2+\overline{EO}^2=\overline{OB}^2$，故 $\overline{OB}^2=2\overline{EH}^2+2\overline{AH}^2$. 其中 OB 爲圓之半徑，故一定，AH 爲聯結二定點 O, A 之直線之半分，故亦一定，因而 EH 非一定不可.故所求之軌跡，乃以定點 H 爲中心，定量 EH，即 $\sqrt{\{\frac{1}{2}(\overline{OB}^2-2\overline{AH}^2)\}}$ 爲半徑之圓周[1505題].



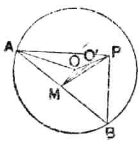
1591. 設由一點至所設四邊形各頂點之距離之平方和一定，則此點之軌跡爲圓周.

解 命所設四邊形 ABCD 之對角線 AC, BD 之中點分別爲 X, Y，命 XY 之中點爲 O，則 O 爲定點.設軌跡上之一點爲 P，則 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=k^2$ [但 k 爲定量]. 今



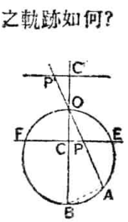
$\overline{AP}^2+\overline{CP}^2=2\overline{PX}^2+2\overline{AX}^2$ [754題], $\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=2\overline{PY}^2+2\overline{BY}^2$, 而 $2\overline{PX}^2+2\overline{PY}^2=4(\overline{PO}^2+\overline{OX}^2)$, 故 $2\{2(\overline{PO}^2+\overline{OX}^2)+(\overline{AX}^2+\overline{BY}^2)\}=k^2$. 其中 $\overline{OX}^2$, $\overline{AX}^2$, $\overline{BY}^2$, k^2 皆一定, 故 PO 爲定長. 故 P 之軌跡,乃以定點 O 爲中心,定長 PO 爲半徑之圓周 [1505題].

1592. 設一定圓之弦, 張直角於圓內或圓外之定點,則此弦中點之軌跡爲圓. 但其中心爲定圓中心及定點間之中點.



解 與 1590 題同.

1593. 過所設圓周上之一點 O, 引任意弦 OA, 內分及外分此弦於 P, 令 OA·OP 等於定量 k^2, 則因此弦位置之變動,而生之 P 點之軌跡如何?

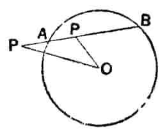


解 在過 O 之直徑 OB 上取 C 及 C′, 令 $OC\cdot OB=k^2$, $OC'\cdot OB=k^2$. 於是因 OB 及 k 爲定量,故 OC, OC′ 亦一定不易. 而 $OP\cdot OA=k^2$, $OP'\cdot OA=k^2$, 故 $OP\cdot OA=OC\cdot OB$, $OP'\cdot OA=OC'\cdot OB$, 因而四點 C, P, A, B 及 C′, P′, B, A 分別在一圓周上. 故 $P\hat{C}B+P\hat{A}B=2\hat{R}$, $P'\hat{C}'B=P'\hat{A}B$, 因而 $P\hat{C}B$ 及 $P'\hat{C}'B$ 皆爲直角. 故 P 及 P′ 分別在過定點 C 及 C′ 且垂直於 OB 之直線上. 反之, 無限直線 PC 及 P′C′ 上之各點,皆適合條件. 故 P, P′ 之軌跡爲二直線 PC, P′C′.

注意 若點 A 移至弧 EOF 上,則內分點消滅, 而外分點則在 O 點之兩側, 各有一點.

1594. 在所設圓中引弦 AB, 內分及外分之於 P, 令 PA PB 等於所設量 k^2, 若弦 AB 之位置變動,則 P 點之軌跡如何?

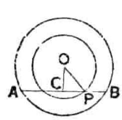
解 命所設圓之中心爲 O, $OA=r$, $OP=d$,



則 $PA\cdot PB=d^2\sim r^2$ [874題], 故 $k^2=d^2\sim r^2$. 其中 k 及 r 爲定量,故 d 亦爲定量,卽 P 與定點 O 之距離一定. 因此,所求之軌跡,乃以 O 爲中心,一定不變之距離爲半徑之圓周.

1595. 設所設圓中之一切等弦, 分於所設比,求其分點之軌跡.

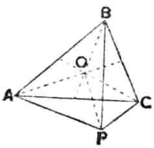
解 命所設圓爲 O, 等於所設長之任意弦



爲 AB, 此弦分於 P, 而 AP:BP 等於所設比. 由 O 至 AB 引垂線 OC, 則 C 爲 AB 之中點,而 AB 一定, 故 OC 亦一定. 又 AP:BP 等於所設比, 且 AB 一定, 故 BP 亦一定, 因而 PC 亦一定. 於是 △OPC 中, OC, PC 一定, 且 $O\hat{C}P=\hat{R}$ 亦一定,故 OP 之長一定不變. 故所求之軌跡,乃以 OP 爲半徑之同心圓 [1505題].

1596. 設由一點至所設三角形三頂點之距離之平方和,等於所設平方和,則此點之軌跡如何?

解 設三角形爲ABC,所設平方爲k^2,求一點P之軌跡,命$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=k^2$.由783題,設O爲三角形之重心,則$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+3\overline{OP}^2$,故$k^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+3\overline{OP}^2$.然$k$及OA, OB, OC皆爲定量,故OP亦一定.因此,P之軌跡,乃以O爲中心,以定量$OP=\sqrt{\frac{1}{3}\{k^2-(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)\}}$爲半徑之圓周[1505題].



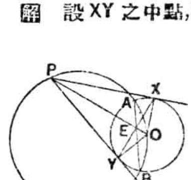
1597. 設由一點至所設正多角形各角頂之距離之平方和,等於所設平方,則此點之軌跡如何?

解 設ABCD……MN爲所設n邊正多角形,

P爲適合條件之點.作正多角形之外接圓,命其中心爲O,過P引直徑QR,垂直於QR引直徑ST.由正多角形之各角頂,至直徑ST引垂線AA′, BB′, CC′,……,又至直徑QR引垂線AA″, BB″, CC″,……,則AA′=OA″, BB′=OB″, CC′=OC″,……,且AA′, BB′,……內,在ST之一方者之和,等於在他方者之和[1326題].又$A\hat{O}P$, $B\hat{O}P$, $C\hat{O}P$,……內,其正多角形之頂點,與P在ST之同側者爲銳角,在異側者爲鈍角.故$\overline{AP}^2=\overline{OA}^2+\overline{OP}^2-2OP\cdot AA'$, $\overline{BP}^2=\overline{OB}^2+\overline{OP}^2-2OP\cdot BB'$, $\overline{CP}^2=\overline{OC}^2+\overline{OP}^2-2OP\cdot CC'$, $\overline{DP}^2=\overline{OD}^2+\overline{OP}^2-2OP\cdot DD'$,……,故$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\cdots\cdots=n\overline{OA}^2+n\overline{OP}^2-2OP(AA'+BB'+CC'-DD'-\cdots\cdots)$.命所設平方爲$m^2$,則因$AA'+BB'+CC'-DD'-\cdots\cdots=0$,故$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\cdots\cdots=n\overline{OA}^2+n\overline{OP}^2=m^2$.其中OA一定,故OP亦一定,故P在O爲中心,OP爲半徑之圓周上.又此圓周上之一切點適合條件.故所求之軌跡,乃以O爲中心,以$OP=\sqrt{\left(\frac{m^2}{n}-\overline{OA}^2\right)}$爲半徑之圓周[1505題]

1598. 設AB爲定圓O中之所設弦,引爲AB所二等分之弦XY,命其兩端上之切線XP, YP之交點爲P,則P之軌跡如何?

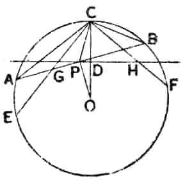
解 設XY之中點,即XY與AB之交點爲E,則因OP過XY之中點,故過E.今$O\hat{X}P=O\hat{Y}P=\hat{R}$,故OXPY爲圓之內接四邊形,故OE·EP=XE·EY[875題].然XY, AB爲同圓之弦,故XE·EY=AE·EB,故OE·EP=AE·EB,故四點O, A, P, B在一圓周上.反之,圓AOB周上之點皆適合條件.故P點之軌跡爲圓AOB.



1599. 設圓周上之一定點C,與弦AB

之兩端聯結之直線 CA, CB 之平方和 $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2$ 爲定量,則弦 AB 中點之軌跡如何?

解　設 AB 之一位置, 如圖所示, 命其中點爲 P, 定量 $\overline{CA}^2+\overline{CB}^2$ 爲 $2k^2$, 則 $2k^2=2(\overline{CP}^2+\overline{AP}^2)$. 而 $\overline{AP}^2=\overline{AO}^2-\overline{OP}^2$, 故 $2k^2=2(\overline{CP}^2+\overline{AO}^2-\overline{OP}^2)$, 由是得 $\overline{CP}^2-\overline{OP}^2=k^2-\overline{AO}^2$.

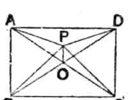


其中 k^2 及 $\overline{AO}^2$ 一定,故 $\overline{CP}^2-\overline{OP}^2$ 亦一定, 即 P 點具備以下之條件: P 點與定點 O, C 聯結之二直線 CP, OP 之平方差,等於定量 k^2 及 $\overline{AO}^2$ 之差. 故 P 點之軌跡, 乃 OC 之垂線, 其足 D 係按 $\overline{OD}^2-\overline{CD}^2=k^2-\overline{AO}^2$ 所取者.

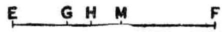
注意　由 C 引弦 CE, CF, 令 $\overline{CE}^2=2k^2=\overline{CF}^2$, 命其與軌跡之交點爲 G, H, 則軌跡之界限爲 G, H.

1600.　設 ABCD 爲所設矩形, 求 P 點之軌跡,令 PA+PC=PB+PD.

解　命對角線之交點爲 O. 因 PA + PC = PB + PD, 故 $(PA+PC)^2=(PB+PD)^2$, 卽 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2+2PA\cdot PC=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2+2PB\cdot PD$ [744題]. 今 O 爲 AC 之中點, 且爲 BD 之中點, 故 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=2\overline{PO}^2+2\overline{OA}^2$, $\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=2\overline{PO}^2+2\overline{OB}^2$, 而 OA=OB, 故 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$, 故 PA·PC=PB·PD. 於是因 PA, PC 之和及積, 分別等於 PB, PD 之和及積, 故若非 PA=PB, 且 PC=PD, 則必 PA=PD, 且 PC=PB [見注意]. 在前款中, P 在過 O 平行於 AD 之直線上; 後款中, P 在過 O 平行於 AB 之直線上. 故所求之軌跡, 乃過 O 平行於矩形兩邊之直線.



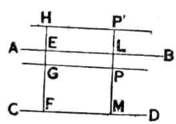
注意　今設 AP + PC = EF = PB + PD, EG = AP, EH = BP, 命 EF 之中點爲 M.



於是 $AP\cdot PC=\overline{MF}^2-\overline{MG}^2$ [749 題], $BP\cdot PD=\overline{MF}^2-\overline{MH}^2$. 而 AP·PC=BP·PD, 故 $\overline{MF}^2-\overline{MG}^2=\overline{MF}^2-\overline{MH}^2$, 因而 MG=MH. 故 AP, PC 非分別等於 BP, PD, 卽分別等於 PD, BP.

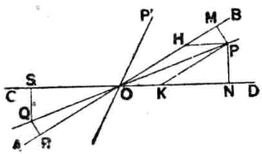
1601.　求軌跡,令其上之各點,與二平行線之距離,等於所設比 $l:m$.

解　命所設二平行線爲 AB, CD, 引此二直線之公垂線 EF, 命內分及外分 EF 於比 $l:m$ 之點爲 G, H. 設 P 爲適合條件之一點,由 P 至 AB, CD 分別引垂線 PL, PM, 則 P, L, M 在一直線上. 設 P 在二平行線內, 聯結 PG, 則因 GE:GF $=l:m=$ PL:PM, 故 EF:GF=LM:PM, 而 EF=LM, 故 GF=PM, 故 GP ∥ CD. 同理, HP′ ∥ CD. 故 P, P′ 分別在過 G, H 而平行於 AB 之直線上. 又 GP, HP′ 上之一切點, 皆適合條件. 故所求之軌跡爲平行於 AB, CD 之一雙直線.



1602.　設一點距相交二直線有所設比, 求此點之軌跡.

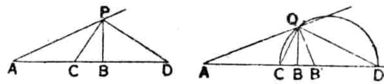
解　設 AB, CD 二直線相交於 O, 求距 AB 及 CD 有所設比之點之軌跡. 由任意點 P 至 AB 引垂線 PM, 至 CD 引垂線 PN, 假定 PM 與 PN 之比爲所設比. 由 P 平行於 ON



引 PH, 令交 AB 於 H; 由 P 平行於 OM 引 PK, 令交 CD 於 K. 設 P 在 $B\hat{O}D$ 或其對頂角內. 於是 $P\hat{H}M=P\hat{K}N$; 因此二角皆等於 $B\hat{O}D$ 也; 又直角 PMH, PNK 亦相等, 故兩三角形 PMH, PNK 相似 [1017題], 故 PH:PM＝PK:PN, 故 PH:PK＝PM:PN [更比定理], 即 PH:PK 等於所設比, 因而 OK:PK 爲所設比, 而 $O\hat{K}P$ 一定不變, 因 $O\hat{K}P$ 爲 $B\hat{O}D$ 之補角也, 故 $P\hat{O}K$ 一定不變 [1018題], 故 P 在過 O 之定直線上. 仿此得證, 設 P′ 在 $B\hat{O}C$ 或其對頂角內, 則 P′ 在第二定直線上. 茲證是等二直線上之點, 至 AB, CD 之距離有所設比. 命 Q 爲如是之一點, 由 Q 引 AB 之垂線 QR, 及 CD 之垂線 QS, 於是兩三角形 QRO, PMO 等角, 故 QR:PM＝OQ:OP [1017題]. 又兩三角形 QSO, PNO 亦等角, 故 QS:PN＝OQ:OP [1017題]. 故 QR:PM＝QS:PN, 故 QR:QS＝PM:PN [更比定理], 故由 Q 至 AB 及 CD 之距離之比, 等於所設比, 因此, 與 AB 及 CD 之距離有所設比之點之軌跡, 爲一組過 AB 及 CD 之交點之直線.

1603. 求軌跡, 令其上之各點與所設二點之距離有所設比 [非等比].

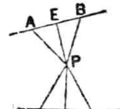
解 命 A, B 爲二所設點, 求距 A 及 B 有所設比之點之軌跡. 取任意點 P, 命 PA:PB 爲所設比, 聯結 AB, 命 C 及 D 爲按所設比



內分及外分 AB 之點　於是 PA:PB＝AC:CB, PA:PB＝AD:DB, 故 PC 及 PD 分別爲三角形 APB 頂角之內外二等分線 [1027題], 故 $C\hat{P}D=\hat{R}$, 故 P 在 CD 爲直徑之圓周上. 又此圓周上之各點, 至 A 及 B 之距離有所設比, 茲證之如下: 設 Q 爲圓周上之任意點, 聯結 QA, QB, QC, QD, 作 $C\hat{Q}B'$, 令等於 $C\hat{Q}A$, 於是 QC 爲 $A\hat{Q}B'$ 之二等分線. 又 $C\hat{Q}D$ 爲半圓角, 故爲直角, 因而 QD 二等分三角形 AQB′ 頂角之外角, 故 AC:CB′＝AD:DB′ [1027題], 故 AC:AD＝CB′:DB′ [更比定理]. 然 AC:CB＝AD:DB, 故 AC:AD＝CB:DB [更比定理]. 故 CB′:B′D＝CB:BD, 故 B′ 與 B 爲一點, 故 QC 將 $A\hat{Q}B$ 二等分, 故 QA:QB＝AC:CB [1027題], 即由 Q 至 A 及 B 之距離之比, 等於所設比. 故距 A 及 B 有所設比之點之軌跡, 乃 CD 爲直徑之圓周, 而 C 及 D 爲按所設比內外分 AB 之點.

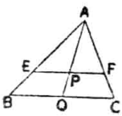
1604. 設以所設二有限直線 AB, CD 爲二底邊, 以一點 P 爲公頂點之兩三角形等積, 則此頂點之軌跡如何?

解 由適合條件之點 P, 至 AB, CD 或其延線引垂線 PE, PF, 則 △PAB＝△PCD, 故 PE:PF＝CD:AB [1164題]＝定比, 故點 P 與所設二直線之距離之比一定, 故其軌跡可仿 1602 求之.



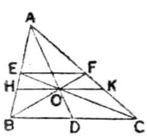
1605. 三角形底邊之平行線爲他二邊所截得之部分,其中點之軌跡如何?

解 設三角形爲 ABC, 底邊爲 BC, 底之一平行線爲 EF. 聯結 EF 之中點 P 與 A 而延長之,令交 BC 於 Q, 則 $EP:BQ=AP:AQ$, $FP:QC=AP:AQ$, 故 $EP:BQ=FP:QC$. 然 P 爲 EF 之中點,故 $EP=FP$, 故 $BQ=QC$, 而 Q 爲 BC 之中點. 故 P 在由 A 所引中線 AQ 上. 反之, AQ 上之點皆適合條件. 故 P 之軌跡, 爲頂點 A 與底之中點 Q 聯結之直線.

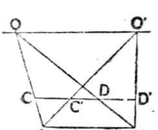


1606. 在三角形之二邊間, 引平行於底之甚多直線,而作梯形,則由三角形之頂點至底之中點所引之直線, 爲是等梯形對角線交點之軌跡.

解 設三角形爲 ABC, 梯形之一爲 BEFC, 其對角線交點爲 O. 過 O 平行於底 BC 引 HOK, 則 $BC:HO=BE:EH=CF:FK=BC:OK$, 故 $OH=OK$, 卽 O 與二邊間所引平行於 BC 之直線之中點一致. 故所求之軌跡,爲由 A 所引之中線 AD [1605題].



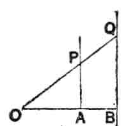
1607. 設 AB 爲所設直線, CD 爲 AB 之平行線而有所設長者, 命 AC, BD 之交點爲 O, 則 CD 沿其自身而變位時, O 之軌跡爲 AB 之平行線.



解 命 AC, BD 之交點爲 O, 在 CD 上取 $C'D'=CD$, 聯結 AC', BD', 命其交點爲 O', 則 $AO:CO=AB:CD$, $AO':C'O'=AB:C'D'$, 故 $AO:CO=AO':C'O'$, 或 $AC:CO=AC':C'O'$ [分比定理], 故 $OO' \parallel CD \parallel AB$. 反之, 在 OO' 上之點皆適合條件,其證甚易 [832題]. 故所求之軌跡,爲平行於 AB 之直線 OO'.

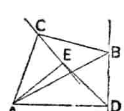
1608. 由 O 點引任意直線,在其上取二點 P, Q, 令 $OP:OQ$ 等於所設比, 若 P 點之軌跡爲直線 AP, 則 Q 點之軌跡,爲與其平行之直線.

解 設 $OP:OQ=m:n$ [若 $m<n$, 則 Q 與 O 在直線 AP 之異側, $m>n$, 則 Q 與 O 在直線 AP 之同側]. 由 O 引 AP 之垂線 OA, 在其上取 B, 令 $OA:OB=m:n$, 聯結 BQ. 於是 $OP:OQ=m:n=OA:OB$, 故 $BQ \parallel AP$, 卽 Q 在 AP 之平行線 BQ 上. 反之, 在 BQ 上取點 Q, 聯結 OQ, 命此線或其延線與 AP 之交點爲 P, 則 $m:n=OA:OB=OP:OQ$. 故 Q 點之軌跡乃平行於 P 之軌跡之直線



1609. 與所設三角形相似之三角形中,其一頂點爲一定點,他一頂點恆在所設直線上,則第三頂點之軌跡爲一直線。

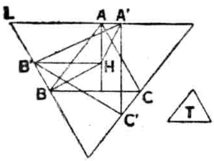
解 設定點爲 A, 定直線爲 BD. 由 A 至 BD 引垂線 AD, 在 AD 上作相似於 △ABC 之 △ADE, 則頂點 C 在定直線 AE 之垂線 CE 上 [1125題]. 反之, 在 CE 上取點 C, 聯結 AC, 引直線 AB, 令交 BD 於 B, 且 $C\hat{A}B=E\hat{A}D$, 聯結 BC. 於是因 $D\hat{A}B=E\hat{A}C$, 故 △DAB 與 △EAC 相似, 因而 $AD:AE=AB:AC$. 而 $D\hat{A}E=B\hat{A}C$, 故 △DAE 與



$\triangle BAC$ 又相似. 故 C 點之軌跡爲直線 CE. 若三角形 ABC 之方向與前相反,即圖中之 C 點在 AB 之下側,則 C 點之軌跡爲 CE 關於 AD 之對稱線.

1610. 設三角形 ABC 恆相似於一所設三角形,其垂心之位置一定, A 點在定直線上移動,則 B 及 C 點之軌跡如何?

解 命所設三角形爲 T, 所設直線爲 L, 所設垂心爲 H. 作適合所設條件之二 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$, 假定其中之 BC 平行於 L, 於是 $\triangle ABC$ 之位置固定.

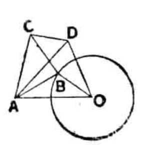


今 $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ 皆相似於 T, 故兩形相似, 因而 $AH:A'H = BH:B'H$, 而 $A\hat{H}A' = B\hat{H}B'$, 故 $\triangle AHA' \backsim \triangle BHB'$, 故 $H\hat{A}A' = H\hat{B}B' = \hat{R}$, 即點 B' 在 BH 之垂線上. 同理, 點 C' 在 CH 之垂線上. 其逆亦易證之. 故所求之軌跡爲過 B 及 C 而垂直於 BH, CH 之直線.

注意 直線 L 與二軌跡之直線所成之角, 及二軌跡之交角, 分別等於 $\triangle ABC$ 之角, 此甚易知之.

1611. 設一三角形與一已知形狀之三角形相似,其中一角之頂點固定,他一角之頂點循一定圓周運動,求第三角頂點之軌跡. [三角形之各角一定, 則此三角形爲已知形狀. 普偏言之,多角形之各角一定,且各邊之比一定,則此多角形爲已知形狀].

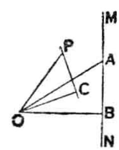
解 聯結 A 與圓之中心 O, 在 AO 上作相似於 $\triangle ABC$ 之 $\triangle AOD$, 則 D 爲定點. 今



$\triangle ABC \backsim \triangle AOD$, 故 $AO : AB = AD : AC$. 而 $D\hat{A}C = B\hat{A}C \sim B\hat{A}D = D\hat{A}O \sim B\hat{A}D = B\hat{A}O$, 故 $\triangle ADC \backsim \triangle AOB$, 故 $AO : OB = AD : CD$. 而 AO, OB, AD 之長一定, 故 CD 之長亦一定. 故 C 在定點 D 爲中心, 定長 DC 爲半徑之圓周上. 反之, 此圓周上之點皆適合條件. 故 C 點之軌跡乃中心爲 D 之圓周.

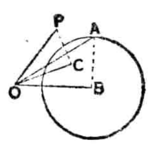
注意 與前題同.

1612. 設 O 爲一定點, MN 爲不過 O 之一所設直線; 引 OA, 令交 MN 於 A; 引 OP, 令與 OA 成所設角, 且 $OA:OP$ 爲定數; 然則因 A 點在 MN 上運動而生之 P 點之軌跡如何?



解 本題與 1609 題比較, 即可知此兩題相同.

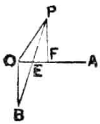
1613. 過所設點 O, 至所設圓周引任意直線 OA, 又引 OP, 令與 OA 成所設角, 且 $OA:OP$ 等於所設比. 若 A 點在此圓周上運動, 則 P 點之軌跡如何?



解 本題與 1611 題比較, 即可知此兩題完全相同.

1614. 設 $A\hat{O}B$ 爲直角, 由其一邊 OB 上之定點 B, 引任意直線 BP, 令交他邊 OA 於 E, 且由 P 至 OA 引垂線 PF, 聯結 PO, 而 $PO:PF = OE:EF$, 則 P 點之軌跡如何?

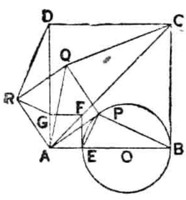
解 由假設, $PO:PF = OE:EF$, 故 $O\hat{P}E = E\hat{P}F$ [1027題]. 然 $O\hat{B}E = E\hat{P}F$, 故 $O\hat{P}E = O\hat{B}E$, 故



BO＝PO, 故 PO 恆爲定長, 因而 P 之軌跡乃 O 爲中心, OB 爲半徑之圓周 [1505題], 而在直線 AO 或其延線之上部者.

1615. 由所設圓外之所設點, 至圓周引一直線, 以此直線爲邊作正方形, 則正方形他二角頂之軌跡若何?

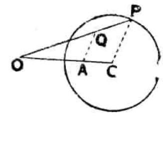
解　過所設點 A 及所設圓之中心 O, 引 AEOB, 在 AE, AB 上作正方形 AEFG, ABCD, 則 G, F, D, C 皆爲定點. 由 A 至圓引任意直線 AP, 在 AP 上作正方形 APQR, 聯結



GR, RD, CQ, QF, CF, PE, PB, 則 $D\hat{A}R=P\hat{A}E$, $RA=AP$, $AG=AE$, $AD=AB$, 故 $\triangle AGR\equiv\triangle AEP$, $\triangle ADR\equiv\triangle ABP$. 故 $A\hat{R}G=A\hat{P}E$, $D\hat{R}A=A\hat{P}B$, 故 $D\hat{R}A-A\hat{R}G=D\hat{R}G=A\hat{P}B-A\hat{P}E=\hat{R}$. 故頂點 R 之軌跡, 乃 GD 爲直徑之圓周 [1535題]. 次, 求頂點 Q 之軌跡. A, F, C 在一直線上. $Q\hat{A}C$, $G\hat{A}R$ 皆爲由 $\frac{1}{2}\hat{R}$ 減 $Q\hat{A}G$ 之餘, 故相等, 且 $AF:AG=QA:RA=\sqrt{2}:1$, 故 $\triangle AGR\backsim\triangle AFQ$. 同理, $\triangle ARD\backsim\triangle AQC$. 故 $A\hat{R}G=A\hat{Q}F$, $A\hat{R}D=A\hat{Q}C$, 故 $G\hat{R}D=F\hat{Q}C=\hat{R}$. 故 Q 點之軌跡乃 FC 爲直徑之圓周 [1535題].

1616. 設由所設點 O 引直線 OP, 其一端 P 之軌跡爲一圓周, 則按所設比分 OP 之點 Q 之軌跡, 亦爲圓周.

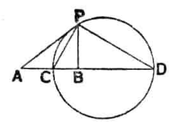
證　設 P 點之軌跡, 乃中心爲 C 之圓周, 聯結 CP, OC, 在 OC 上取 A, 令 $OC:OA=OP:OQ=m:n$, 聯結 QA, 則 $QA\parallel CP$ [951題],



因而 $\triangle OAQ\backsim\triangle OCP$, $PC:QA=m:n$, 故 QA＝一定. 故 Q 之軌跡, 乃 A 爲中心, AQ 爲半徑之圓周 [1505題]. 仿此得證, 若 Q 爲外分點, 軌跡亦爲圓周.

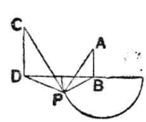
1617. 設三角形之底爲所設直線, 頂角之外二等分線與底之延線之交點爲定點, 求此三角形頂點之軌跡.

解　設三角形之底爲 AB, 頂角 APB 之外二等分線與底之延線之交點爲 D, 在 AB 上取 C, 令 $AC:CB=AD:DB$, 則 CP 將 $A\hat{P}B$ 二等分 [1027題], 因而 $C\hat{P}D=\hat{R}$. 故 P 之軌跡, 乃 CD 爲直徑之圓周.



1618. 由一平坦之原野, 可望見二塔頂. 今有一人, 行於此原野, 其望此二塔頂之仰角恆相等, 求證此人所行之路爲一圓周.

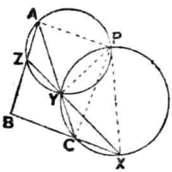
證　設 AB, CD 爲二塔, 此人之某位置爲 P, 聯結 PA, PB, PC, PD, 則 $A\hat{P}B=C\hat{P}D$ [假設], $A\hat{B}P=\hat{R}=C\hat{D}P$, 故 $\triangle ABP\backsim\triangle CDP$, 故 $AB:CD=BP:DP$. 然 AB, CD 爲定長, 故比 AB:CD 一定, 因而 BP:DP 亦一定, 故 P 點爲至二定點 B, D 之距離有所設比之點. 而如是之點之軌跡爲一圓周 [1603題], 故此人所行之路爲一圓周.



1619. 引一任意直線, 令截三角形 ABC, 分別交 A, B, C 之對邊 [必要時其延線] 於 X, Y, Z, 求三角形 AZY, CXY 外接圓他交點之

軌跡.

解 設△CXY, △AYZ 之外接圓之他交點爲 P,聯結 AP, PY, PC,

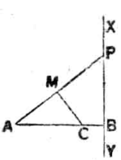


則 $A\hat{P}Y = Y\hat{Z}B$[457題], $Y\hat{P}C = Y\hat{X}C$[452題],故 $A\hat{P}C + \hat{B} = Y\hat{Z}B + Y\hat{X}C + \hat{B} = 2\hat{R}$, 故 P 在三角形 ABC 之外接圓周上. 反之,在△ABC 外接圓周上之點,皆適合條件,其證甚易. 故 P 點之軌跡,爲三角形 ABC 之外接圓周.

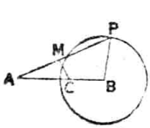
注意 由於橫截線 XYZ 之位置,有時 $A\hat{P}Y$, $X\hat{Z}B$ 互爲補角,又 $Y\hat{P}C$, $Y\hat{X}C$ 亦互爲補角,但其證法無異.

1620. 設 A 爲定點,XY 爲定直線,聯結 XY 上之任意點 P 與 A, 二分之於 M, 令 AP·AM 之值等於定數, 則 M 點之軌跡如何?若 XY 非直線而爲圓周,則如何?

解 命 $AP \cdot AM = m^2$. 由 A 至 XY 引垂線 AB, 分 AB 於 C, 令 $AB \cdot AC = m^2$. 於是 C 爲定點, 且因 $AB \cdot AC = AP \cdot AM$, 故四邊形 PBCM 得內接於圓,因而 $A\hat{M}C = \hat{R}$. 故 M 之軌跡乃 AC 爲直徑之圓周[1535題]. 若取 AC′, 令在前之異側,且等於 AC, 則 AC′ 爲直徑之圓周,亦爲所求之軌跡.

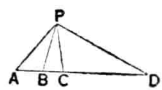


次,聯結圓之中心 B 與 A, 分 AB 於 C, 令 $AC \cdot AB = AM \cdot AP = m^2$, 則 C 爲定點. 且因 $AC \cdot AB = AM \cdot AP$, 故 AC : AM = AP : AB, 故 △AMC∽△APB [1018題], 因而 AM : MC = AB : BP = 定比. 故 M 點之軌跡,乃以 AC 按 AB:BP 之內外分點間之距離爲直徑之圓周 [1603題].



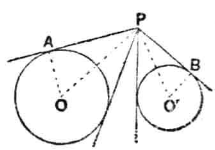
1621. 設三點 A, B, C 在一直線上, 求視 AB 與 BC 之角相等之點之軌跡.

解 設 P 爲軌跡上之一點,則 $A\hat{P}B = B\hat{P}C$, 故 AP:CP = AB:BC = 定比, 故 P 點之軌跡, 乃 AC 按 AB:BC 之外分點 D 與 B 之距離爲直徑之圓周 [1603題].



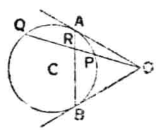
1622. 求對於所設二圓周之視角相等之點之軌跡.

解 命所設二圓之中心爲 O, O′,由軌跡上之點 P, 至二圓引切線 PA, PB, 聯結 OA, OP, O′B, O′P, 則因 $A\hat{P}O = B\hat{P}O'$, 故兩直角三角形 AOP, BO′P 相似, 因而 PO:PO′ = OA:O′B = 定比. 故 P 點之軌跡,乃中心線 OO′ 之內外分點間之距離爲直徑之圓周, 但二分點分 OO′ 於定比 [1603題].



1623. 由定點 O 至圓引任意割線, 令截圓於 P, Q, 設 R 對於 P, Q 爲 O 之調和共軛點,則 R 之軌跡如何?

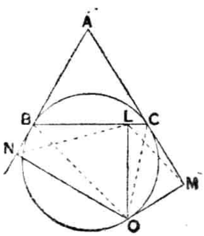
解 設 R 爲軌跡上之一點,由 O 引圓之切線 OA, OB, 命 AB 與 OPQ 之交點爲 R′, 則 R′ 對於 P, Q 爲 O 之調和共軛點



[1283題], 故 R 與 R′ 爲同一點,卽 R 在直線 AB 上. 反之,在 AB 上取點 R, 聯結 OR, 命其與圓周之交點爲 P, Q, 則 R 對於 P, Q 爲 O 之調和共軛點 [1283題]. 故所求之軌跡乃中心爲 C 之圓之弦 AB.

1624. 由一點至二等邊三角形之等邊引垂線,若此垂線所包之矩形,等於由同點至底邊所引垂線上之正方形,則此點之軌跡,爲切等邊於底邊之端之圓周.

解 設 O 爲軌跡上之一點,由 O 至 BC, CA, AB 引垂線 OL, OM, ON, 則 $\overline{OL}^2=OM\cdot ON$, 故 $OM:OL=OL:ON$. 聯結 OB, OC, LN, LM, 則四邊形 BLON, CLOM 得內接於圓, 故

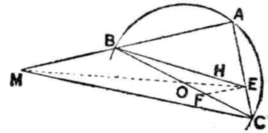


$L\hat{O}M=A\hat{C}B=A\hat{B}C=L\hat{O}N$, 故△LON∽△MOL [1018題], $O\hat{C}M=O\hat{L}M=L\hat{N}O=L\hat{B}O$, 故 OBC 之外接圓切 AC 於 C [559題]. 同理,此圓切 AB 於 B. 故 O 在分別切 AB, AC 於 B, C 之圓周上. 反之,在此圓周上取一點 O, 由 O 至 BC, CA, AB 分別引垂線 OL, OM, ON, 聯結 BO, CO, LN, LM, 則因 BLON, CLOM 內接於圓,故 $O\hat{L}M=O\hat{C}M=O\hat{B}L=O\hat{N}L$. 同理, $O\hat{M}L=O\hat{L}N$. 故△OML∽△OLN, 因而 $OM:OL=OL:ON$, 或 $\overline{OL}^2=OM\cdot ON$. 故所求之軌跡爲切 AB, AC 於 B, C 之圓周.

注意 若點 L 可落於底 BC 之延線上,則所求之軌跡,除此圓外,尙有所謂雙曲線者.

1625. 設直角三角形 ABC 之斜邊 BC 之中點爲 O, 在 AB 之延線上取點 M, 令△MBC 與△ABC 等積. 命 MO 與 AC 之交點爲 E, 在直線 BE 上取點 H, 令 BH 與 HE 之比等於定比 $m:n$, 若 A 點移動,則 H 點之軌跡如何?

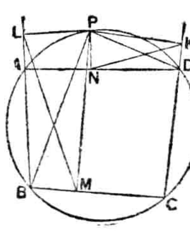
解 由 E 平行於 AB 引 EF, 則 $F\hat{E}C=\hat{R}$, 又



$CF:BC=EF:AB=EF:BM=OF:OB=OF:OC$, 故 $CF:OF=BC:OC=2:1$, 因而 F 爲定點. 故 E 之軌跡乃 CF 爲直徑之圓周[1535題]. 又因 BE 爲由定點 B 至 CF 爲直徑之圓周所引之直線, 故按定比 $m:n$ 分之之點 H 之軌跡,乃一圓周,而以 CF 之中點 K 與 B 間之距離按 $m:n$ 之分點爲中心.

1626. 設 ABCD 爲圓之內接四邊形, 由一點 P 至其各雙對邊所引之二垂線所包之矩形相等,則 P 點之軌跡如何?

解 設垂線之足爲 L, M, N, K, 如圖所示. 四邊形 PLBM 中,角 L 及 M 皆爲直角,故此四邊形內接於圓,而 $L\hat{P}M=A\hat{B}M$ 之補角.然 ABCD 亦爲圓之內接四邊形,

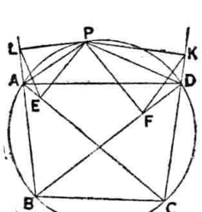


故 $A\hat{B}M$ 之補角 $=A\hat{D}C$. 次, NPKD 亦爲圓之內接四邊形, 故 $A\hat{D}C=N\hat{P}K$, 故 $L\hat{P}M=N\hat{P}K$, 且 $PL:PM$

$=$PN : PK [假設], 故 $\triangle$PLM∽$\triangle$PNK, 故 $L\hat{M}P=N\hat{K}P$. 然據前所論,兩四邊形 LBMP, PNDK 皆為圓之內接四邊形, 故 $A\hat{B}P=L\hat{M}P$, $N\hat{K}P=A\hat{D}P$, 故 $A\hat{B}P=A\hat{D}P$, 故 PABD 亦內接於圓. 換言之, P 在圓 ABCD 之周上. 其逆亦甚易證之 [1238題]. 故所求之軌跡卽圓 ABCD.

1627. 設 ABCD 為圓之內接四邊形, 由一點 P 至一雙對邊所引之二垂線所包之矩形, 等於由同點至二對角線所引垂線所包之矩形,則 P 點之軌跡若何?

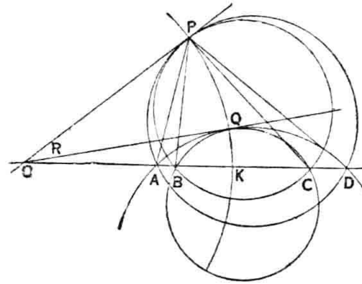
解 設至邊 AB, CD 所引垂線之足為 L, K, 至對角線 AC, BD 所引垂線之足為 E, F. 因四邊形 PLAE, PKDF 皆內接於圓, 故 $L\hat{P}E=B\hat{A}C$ [457題], $K\hat{P}F=B\hat{D}C$. 今 $B\hat{A}C=B\hat{D}C$ [452題],



故 $L\hat{P}E=K\hat{P}F$, 且由假設, PL:PE=PF:PK, 故 $\triangle$LPE∽$\triangle$FPK [1018題], 故 $P\hat{F}K=P\hat{L}E$. 然 $P\hat{F}K=P\hat{D}K$, $P\hat{L}E=P\hat{A}E$, 故 $P\hat{D}K=P\hat{A}E$, 故四邊形 PACD 內接於圓. 其逆亦易證之 [1238題]. 故所求之軌跡,卽圓 ABCD.

1628. 設 A, B, C, D 為在一直線上之四所設點, 求對於 AB, CD 之視角相等之點之軌跡.

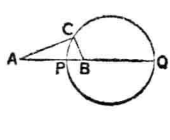
解 在直線 ABCD 上取點 O, 令其至 A, B, C, D 之距離,順次成比例. 於是 OA·OD=OB×OC. 求點 K, 令 $OA\cdot OD=OB\cdot OC=\overline{OK}^2$; 以 O 為中心, OK 為半徑作圓周, 則此圓周即所求之軌跡. 茲證之如下: 在此圓周上取



任意點 P, 作二圓 PAD, PBC, 則 $\overline{OP}^2=\overline{OK}^2=OA\cdot OD=OB\cdot OC$, 故 OP 切於此二圓,因而此二圓相切,故由725題, $A\hat{P}B=D\hat{P}C$, 故圓 PK 上之點適合本題之條件. 次,設 Q 為適合條件之一點. 作二圓 QAD 及 QBC, 則二圓有公切線於 Q. 何則? 作 AQD 之切線 QR, 則 $A\hat{Q}R=A\hat{D}Q$, 而 $A\hat{Q}B=C\hat{Q}D$, 故 $B\hat{Q}R=B\hat{C}Q$, 故 QR 又為圓 BQC 之切線. 茲命切線 RQ 與直線 OA 之交點為 R, 則 $\overline{QR}^2=RA\cdot RD=RB\cdot RC$, 故由 R 至 A, B, C, D 之距離, 順次成比例, 故 R 與 O 為同點, 因而 Q 在圓 PK 上. 故所求之軌跡,即圓 PK.

1629. 設平面上有二發光點, 求此平面上光度相等之點之軌跡. 但發光點在單位距離內之光度分別為 a, b, 光度與距離之平方成反比例.

解 設 A, B 為二發光點,單位距離內 A, B 之光度分別為 a, b, 且 $a>b$. 命所求之點為 C, 且命 A 在 C 點之光度為 α, B 在 C 點之光

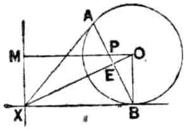


度為 β, 則 $a:\alpha=\overline{AC}^2:1$, $b:\beta=\overline{BC}^2:1$. 故

$\alpha=a\cdot\frac{1}{(AC)^2}$, $\beta=b\cdot\frac{1}{(BC)^2}$. 而 $\alpha=\beta$, 故 $a\cdot\frac{1}{(AC)^2}=b\cdot\frac{1}{(BC)^2}$, 故 $\overline{AC}^2:\overline{BC}^2=a:b$, 卽一定,故 C 在一圓周上,其直徑爲按 $\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 內外分 AB 之點 P, Q 間之直線.故所求之軌跡爲圓周 PCQ.

1630. 過圓內之定點 P 引任意弦 AB, 在 A, B 上引切線, 命其交點爲 X, 則 X 之軌跡如何?

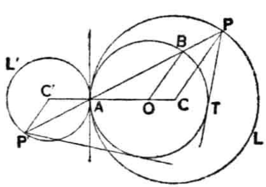
解 聯結 OP 而延長之, 由 X 向其引垂線 XM, 命 OX 與 AB 之交點爲 E, 則 $P\hat{E}X=P\hat{M}X=\hat{R}$, 故 P, M, X, E 在一圓周上, 因而 $OP\cdot OM=OE\cdot OX$.



然 $\triangle BOX$ 中之 $\hat{B}$ 爲直角, 且 $BE\perp OX$, 故 $OE\cdot OX=\overline{OB}^2$. 故 $OP\cdot OM=\overline{OB}^2$, 卽一定數, 而其中 OP 亦一定數, 故 OM 亦非一定不可. 故所求之軌跡, 乃垂直於 OP, 且過其上之定點 M 之直線.

1631. 過所設圓 ABT 之周上之一定點 A, 引任意弦 AB, 在 AB 之延線上取點 P, 令 PA 與由 P 所引之切線 PT 之比, 恆等於定比 $l:m$, 求 P 點之軌跡.

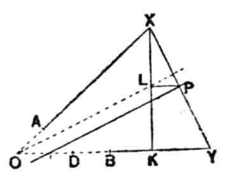
解 由假設, $PA:PT=l:m$, 且 PA 爲圓



ABT 之割線, PT 爲切線, 故 $PA:PT=PT:PB$, 因而 $\overline{PA}^2:\overline{PT}^2=PA:PB$, 故 $PA:PB=l^2:m^2$. 在 AO 之延線上取一點 C, 令 $CA:CO=l^2:m^2$, 則 $CP\parallel BO$, 且 C 爲定點. 而 $\triangle AOB\backsim\triangle ACP$, $AO=OB$, 故 $AC=CP$, 故 P 點之軌跡乃定點 C 爲中心, 定長 AC 爲半徑之圓周 [1505 題]. 若 $l>m$, 則 $CA>CO$, 故軌跡如上圖之圓 APL; 若 $l=m$, 則爲 A 上之切線; 若 $l<m$, 則 $CA<CO$, 而如上圖之圓 AP′L′.

1632. 由二定點 A, B 依一定之方向, 引二直線 AX, BY, 令 $AX:BY$ 恆等於所設比 $m:n$, 聯結 X, Y, 在 XY 上取點 P, 令 $PX:PY$ 等於所設比 $a:b$. 求 P 點之軌跡.

解 命 XA, YB 延線之交點爲 O, 在直線 OB 上取點 D, 令 $AX:BY=AO:BD$. 又在直線 BY 上取一點 K, 令 $OD=YK$, 聯結 XK.

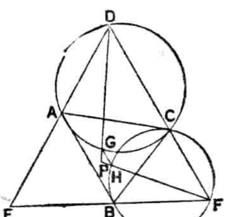


於是因 $AX:AO=BY:BD$, 故 $AX+AO:AX=BY+BD:BY$, 卽 $OX:AX=DY:BY$. 然因 $OD=KY$, 故 $OK=DY$, 故 $OX:AX=OK:BY$, 或 $OX:OK=AX:BY=m:n$. 故 $\triangle XOK$ 中, 不論 X, K 之位置如何變動, 此三角形之形, 始終相似, 故 $O\hat{K}X$ 一定. 又引 $PL\parallel YO$, 命 PL 與 XK 之交點爲 L, 聯結 OL. 於是因 $O\hat{K}X$ 一定, 故 $OK:KX$ 一定, 又 $KX:KL=YX:YP=PX+PY:PY=a+b:b$, 卽一定, 故 $OK:KX$, $KX:KL$ 之復比, $OK:KL$ 亦一定. 故 $K\hat{O}L$ 亦一定, 因而 OL 之方向一定. 又因 LP 平行於 OY, 故其方向一定, 且因比例式 $XY:XP=KY:LP$

中, $XY:XP=a+b:a=$一定, $KY=OD=$一定,故 LP 之長亦一定,故由 P 至定直線 OL 所引之垂線亦一定. 故 P 點之軌跡,爲距直線 OL 等遠之點之軌跡,因而爲 OL 之平行線.

1633. 設定三角形之一外接三角形,始終相似而移動,則其平面內一點 [至各角之距離之比一定] 之軌跡如何?

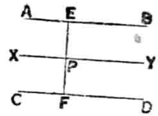
解 命所設三角形爲 ABC, 其外接三角形



爲 DEF, 且命所設定點爲 P. 點 P 之位置,爲三角形 PDF 之一頂點,且不論三角形 DEF 如何移動,三角形 PDF 始終相似,故兩角 PDF, PFD 一定,而 D 沿 AC 爲弦,弓形角等於 $\hat{D}$ 之弓形弧而移動, F 仿前沿弧 BFC 而移動. 命 DP, FP 分別與圓周 ADC, CFB 之交點爲 G, H, 則因 $C\hat{D}P$, $C\hat{F}P$ 一定,故 G, H 亦一定. 又三角形 PDF 始終相似而移動,故 $G\hat{P}H$ 亦一定. 據此,三角形 DEF 移動時, P 之軌跡乃 GH 爲弦, $G\hat{P}H$ 爲弓形角之弓形弧.

1634. 求距平行二直線等遠之點之軌跡.

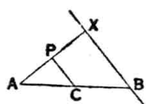
解 設 AB, CD 爲二平行線, P 爲距此二直線等遠之點. 由 P 至 AB, CD 分別引垂線



PE, PF, 則因 AB ∥ CD, 故 PE 又垂直於 CD, 故 EPF 在一直線上,且 P 爲其中點. 故 P 在過 AB, CD 公垂線之中點,且平行於 AB 之直線 XY 上, 反之,此直線上之點皆適合條件. 故所求之軌跡爲直線 XY.

1635. 設 AB 爲所設直線, 過 B 引任意直線,由 A 至此直線引垂線 AX, 求 AX 中點之軌跡.

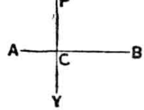
解 設 P 爲 AX 之中點, C 爲 AB 之中點,



則 PC ∥ XB [232 題], 故 $A\hat{P}C=A\hat{X}B=\hat{R}$, 故 P 在 AC 爲直徑之圓周上. 反之在此圓周上取任意點 P, 聯結 AP, 過 B 平行於 CP 引直線 BX, 命其與 AP 延線之交點爲 X, 則因 C 爲 AB 之中點,故 P 爲 AX 之中點,且因 CP ⊥ AP, 故 BX ⊥ AX, 故 P 適合條件. 故所求之軌跡,乃 AC 爲直徑之圓周.

1636. 切所設直線於所設點之圓,其中心之軌跡如何?

解 設切定直線 AB 於 C 之圓,其中心爲



P, 聯結 PC, 則 PC ⊥ AB, 故適合條件之圓之中心,在過 C 垂直於 AB 之直線 XY 上. 反之,在 XY 上取任意點 P, 以 P 爲中心, PC 爲半徑作圓,則此圓切直線 AB 於點 O. 故所求之軌跡爲直線 XY.

1637. 有所設半徑,切於所設直線之圓,

其中心之軌跡如何?

解 適合條件之圓之中心,至定直線之距離一定. 反之,至定直線之距離等於定長之點,得爲適合條件之圓之中心,故本題所求之軌跡,實卽至定直線之距離等於定長之點之軌跡,故可由1506題求之.

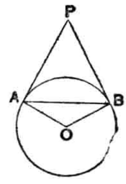
1638. 設由一點至相交二直線之距離之和或差等於所設長,則此點之軌跡,在和時爲一矩形之邊,在差時爲是等邊延線之部分. 今若在某條件之下,以距離之和差爲代數和,則軌跡如何?

解 設1531題之圖中,距離之正負號,依下列條件決定:至AC之距離,若垂線與B在AC之同側,則爲正,與D在同側,則爲負;至DB之距離,若與A在DB之同側,則爲正,在異側,則爲負. 於是第一圖之PQ, PR俱爲正,若l爲正,則$PQ+PR=l$,而P適合條件.第二圖中,PQ爲正,PR爲負,故其代數和爲$PQ+PR=l$,而此點亦適合條件.又他三直線上之點不適合條件.故此時所求之軌跡爲無限直線AB.若l爲負,或軌跡之正負,與前完全相反,則所求之軌跡,爲無限直線DC. 次,設對於AC之條件與最初同,對於BD之條件與最初相反,則軌跡爲無限直線BC. 反之,則所求之軌跡爲無限直線AD.

注意 若足Q, R在矩形內,而令兩線分之符號同於l;又若其一方或雙方在矩形外,而令近O者與l同號,他一與l異號,則代數和$PQ+PR$等於l之點之軌跡,爲組成矩形四邊之四無限直線.

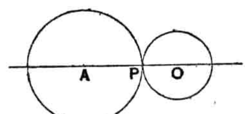
1639. 由同點至圓引二切線,若其交角爲一定,則此點之軌跡若何?

解 設P爲適合條件之點,由P至圓O引二切線PA, PB,則$A\hat{O}B=2\hat{R}-A\hat{P}B=$定量,故弧AB爲定量,因而弦AB之長亦爲定量.又其逆亦眞.故所求之軌跡,實卽定長之弦兩端上切線交點之軌跡,故由1539題,所求之軌跡爲同心圓.



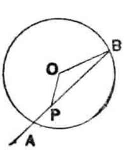
1640. 切所設圓於所設點之圓,其中心之軌跡如何?

解 設P爲定圓A周上之定點,O爲適合條件之圓之中心,則直線AO或其延線過P,故適合條件之點,在聯結AP之無限直線上.反之,在此直線上取任意點O,以O爲中心,OP爲半徑作圓,則因AP, PO之和或差等於AO,故兩圓相切於點P.故所求之軌跡爲直線AP,



1641. 設一圓之弦二分於一點,其二分所包矩形之面積一定,則此點之軌跡如何?

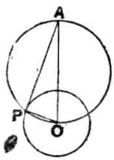
解 設P爲適合條件之點,卽過P引弦AB,則矩形AP·PB等於所設面積m^2. 此時$AP\cdot PB=\overline{OB}^2\sim\overline{OP}^2=m^2$.然OB爲圓之半徑,故一定,因而OP亦一定,故P在O爲中心,OP爲半徑之圓周上.次,過此圓周上任意點之弦,其爲此點所分二分所包之矩形等於m^2. 故所求之軌跡,乃半徑爲$\sqrt{(r^2}$



$\sim m^2$) 之同心圓 [但 r 爲定圓之半徑].

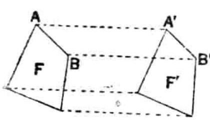
1642. 由一定點, 至無數之同心圓引切線,其切點之軌跡如何?

解 設 A 爲定點,由 A 至同心圓中之一圓 O 所引之切線爲 AP,聯結 OP,則 OP⊥AP, 故 P 在 OA 爲直徑之圓周上. 反之,得證此圓周上之點皆適合條件.故所求之軌跡爲圓周 APO.



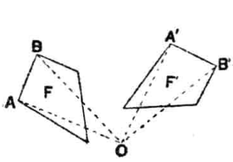
1643. 設依一定方向, 距一圖形 F 之各點 A 定遠之點爲 A′, 則 A′ 之軌跡爲與 F 同向全等之圖形 F′.

解 設由圖形 F 中之二點 A, B, 依一定之方向及一定之距離分別取點 A′, B′, 則線分 A′B′ 等於 AB, 且保同向. 故由 F 之各點 A, 依一定之方向及一定之距離取點 A′, 則就 A′ 所成之圖形 F′, 任取各點而聯結之線分,與就 F 上所取對應各點聯結之線分相等, 且保同向. 故 A′ 之軌跡,爲與 F 同向全等之圖形 F′.



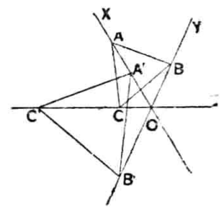
1644. 聯結定點 O 與圖形 F 之各點 A, 以 O 爲中心, 令 OA 依同方向迴轉一定之角度,而至 OA′ 之位置, 則 A′ 之軌跡爲與 F 全等之圖形 F′.

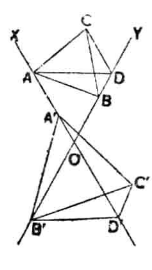
解 聯結定點 O 與圖形 F 中之二點 A, B, 令 OA, OB 依同方向迴轉同角度, 而至 OA′, OB′ 之位置,則因 A′O, B′O 分別等於 AO, BO, 且 $A'\hat{O}B' = A\hat{O}B$, 故線分 A′B′ 等於 AB. 故 F 之各點 A 與 O 聯結之直線 OA, 依一定之方向迴轉一定之角度, 而至 OA′ 之位置, 則就 A′ 所成之圖形 F′, 任取各點而聯結之各線分,與就 F 上所取對應各點而聯結之各線分相等. 故 A′ 之軌跡爲與 F 全等之圖形 F′.



1645. 設相交二直線 X, Y 成角 60°, 一正三角形之二角頂, 分別在 X, Y 上, 則其第三角頂之軌跡如何?

解 命直線 X, Y 之交點爲 O, 假定正三角形 ABC 之角頂 A 在 X 上, B 在 Y 上, 且視 AB 在 X, Y 所成之銳角內或鈍角內, 而定 C 與 O 在 AB 之同側或異側. 聯結 CO, 則因 $A\hat{O}B$ 或爲 60°, 或爲其補角, 而 $A\hat{C}B$ 爲 60°, 故 A, B, O, C 在一圓周上, 故 $A\hat{O}C = A\hat{B}C = 60°$, 即 C 在 X, Y 所成 120° 之角之二等分線 OC 上. 反之, 在 OC 上取任意點 C′, 與 X 上之任意點 A′ 聯結, 引 C′B′, 令 $A'\hat{C}'B' = 60°$, 且命其與 Y 之交點爲 B′, 聯結 A′B′. 於是由作圖, $A'\hat{C}'B'$, $A'\hat{O}B'$, 或相等, 或互爲補角, 故 A′, C′, B′, O 在一圓周上, 因而 $C'\hat{A}'B' = C'\hat{O}B' = 60°$, 故 A′B′C′ 爲正三角形, 而 C′ 適合條件. 故 C 之軌跡爲 X, Y 所成鈍角之二等分線. 次, 設 C 對於 AB

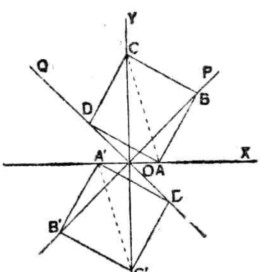




在前之異側,則 X, Y 所定平面上之點, 皆適合條件,此可證之如下:在 X, Y 所成之銳角內取任意點 C, 過 C 平行於 X, 引 CD, 命其與 Y 之交點爲 D, 引 $C\hat{D}O$ 之二等分線 DA, 命其與 X 之交點爲 A, 聯結 AC, 引 AB, 令 $C\hat{A}B=60°$, 且與 D 在 AC 之同側,命其與 Y 之交點爲 B. 於是 $B\hat{A}C=A\hat{O}B=$($C\hat{D}B$ 之補角), 故 A, B, D, C 在一圓周上, 因而 $A\hat{B}C=A\hat{D}C=60°$, 故 ABD 爲正三角形,即 C 適合條件. 又在 X, Y 所成鈍角內取任意點 C′ 時,亦可仿此證之.

1646. 設二直線 X, Y 交於直角,一正方形之相對二角頂, 分別在 X, Y 上, 則其他二角頂恆在兩定直線上.

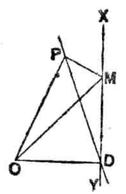
證 命直線 X, Y 之交點爲 O, 設正方形



ABCD 之角頂 A 在 X 上, C 在 Y 上, 則因 $A\hat{B}C=\hat{R}=A\hat{O}C$, 故 A, B, C, O 在一圓周上, 因而 $B\hat{O}C=B\hat{A}C=\frac{1}{2}\hat{R}=$(定角), 故 B 在 XY 所成角之二等分線 OP 上. 同理, D 在 OP 之垂線 OQ 上.反之,在 OP 上取任意點 B′, 在 OX 上取 A′, 垂直於 B′A′ 引 A′D′, B′C′, 令分別交 QO, YO 於 D′, C′, 聯結 C′D′. 於是因 $A'\hat{B}'C'=\hat{R}$, 故 A′, B′, C′, O 在一圓周上,故 $B'\hat{A}'C'=B'\hat{O}C'=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 B′A′C′ 爲直角二等邊三角形.又因 $C'\hat{A}'D'=\frac{1}{2}\hat{R}=C'\hat{O}D'$, 故 C′, A′, O, D′ 在一圓周上, 故 $A'\hat{D}'C'=A'\hat{O}C'=\hat{R}$, 故 A′D′C′ 爲直角二等邊三角形. 故 A′B′C′D′ 爲正方形,卽 B′ 爲適合條件之點.次, B′ 取於 OQ 上時亦然. 又就 D′ 言亦然.故 B, D之軌跡爲直線 OP, OQ.

1647. 聯結定點 O 與定直線上之任意點 M, 由 M 引一直線, 令與 MO 成定角, 由 O 至此直線引垂線 OP, 則 P 之軌跡爲直線.

證 設定直線爲 XY, 由 O 至 XY 引垂線



OD, 聯結 PD, 則因 $O\hat{D}M=\hat{R}=O\hat{P}M$, 故 O, P, M, D 在一圓周上,故 $O\hat{D}P=O\hat{M}P=$(定角), 故 P 恆在過 D 且與 OD 成定角之直線上. 反之,在此直線上取任意點 P, 聯結 OP, 引 OP 之垂線 PM, 命其與 XY 之交點爲 M, 聯結 OM. 於是因 O, P, D, M 在一圓周上, 故 $P\hat{M}O=P\hat{D}O=$(定角), 卽 P 適合條件. 又若取 P 於 OM 之異側, 則仿前得證, PD 關於 OD 之對稱線亦爲所求之軌跡. 故 P 之軌跡爲過 D 且與 OD 成定角之一雙直線.

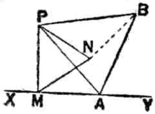
1648. 設正方形之一角頂在定點 P 上, 其對角項在定直線 X 上, 求他二角項之軌跡.

解 1647 題中, 設定角 OMP 爲 $\frac{1}{2}\hat{R}$, 則與本題一致. 故設由定點 P 至定直線 X 所引之垂線爲 PD, 則所求之軌跡爲過 D 而與 PD 成半直角之一雙直線.

1649. 由定點至定直線引甚多直線, 在此諸直線上作正三角形, 則其頂點之軌跡如

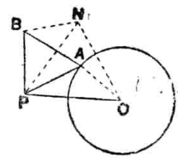
何?若定直線易以定圓周,則如何?

解 設定點爲P, 定直線爲XY, 由P至XY引任意直線,求此直線上正三角頂點之軌跡.



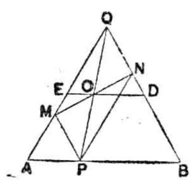
垂直於XY引PM, 在PM上作正三角形PMN,令頂點N與Y在PM之同側,則PMN爲定三角形.又由P至XY引任意直線PA, 在PA上作正三角形PAB, 令B與Y在PA之同側, 聯結BN. 今兩三角形PMA, PNB中, PM與PN, PA與PB分別爲同一正三角形之二邊,故相等.且就$N\hat{P}B$與$M\hat{P}A$而言,視A關於PM與X在同側,抑與Y在同側,而此兩角依次同按$\frac{2}{3}\hat{R}\pm M\hat{P}B$, 或$\frac{2}{3}\hat{R}\mp N\hat{P}A$變化. 例如在上圖中, $M\hat{P}A=M\hat{P}N-N\hat{P}A=\frac{2}{3}\hat{R}-N\hat{P}A$, $N\hat{P}B=A\hat{P}B-N\hat{P}A=\frac{2}{3}\hat{R}-N\hat{P}A$, 故$M\hat{P}A=N\hat{P}B$. 故$\triangle PMA\equiv\triangle PNB$, 因而$P\hat{N}B=P\hat{M}A=\hat{R}$, 卽B在直交定直線PN於定點N之直線BN上. 反之, 在直線BN上取任意點B, 聯結PB, 引直線PA, 令$B\hat{P}A=\frac{2}{3}\hat{R}$, 且B與Y在PA之同側,命PA與XY之交點爲A. 於是不問B之位置若何,依照前述,兩角MPA, NPB恆相等. 故兩三角形PMA, PNB中, PM=PN, $P\hat{M}A=\hat{R}=P\hat{N}B$, $M\hat{P}A=N\hat{P}B$, 故PA=PB. 於是聯結AB, 則得二等邊三角形PAB, 其頂角P爲$\frac{2}{3}\hat{R}$, 故此三角形爲正三角形, 卽BN上之任意點適合條件. 故所求之軌跡之一爲直交定直線PN於定點N之直線BN. 次, 在PM上作正三角形PMN′, 令N′與X在PM之同側,作直交PN′於N′之直線B′N′, 則B′N′亦爲所求之軌跡, 此可由與前款對稱之關係明之.故所求之軌跡爲二直線BN, B′N′.

次,設定直線代以定圓O之周, 在PO上作正三角形PON, 則N爲定點. 仿前可證$\triangle POA\equiv\triangle PNB$, 故BN=OA=(圓O之半徑),故頂點B在中心爲N, 與圓O相等之圓周上. 反之,此圓周上之點皆適合條件, 可仿前證之. 故所求之軌跡乃N爲中心,與圓O相等之圓周, 及圓N關於PO之對稱圓周.



1650. 設定長線分AB過定點P, 且其方向一定, 以AP, PB爲底邊作兩正三角形於同側,聯結其頂點,則此聯結線分中點之軌跡如何?

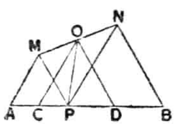
解 設在AP, BP上就同側所作正三角形之頂點分別爲M, N, 延長AM, BN, 命其交點爲Q, 又命MN, PQ之交點爲O, 則因PMQN爲平行四邊形, 故O爲MN之中點,又爲PQ之中點. 故本題所求之軌跡,即O之軌跡, 茲求之如下. △ABQ爲正三角形, 邊AB之長一定, 故Q在P爲頂點, 平行且等於AB之線分A′B′爲底之正三角形PA′B′之底邊上. 設PA′, PB′之中點分別爲E, D, 則O在ED上. 反之, 在線分ED上取任意點O′, 聯結PO′, 延長之令交A′B′於Q′, 則O′爲PQ′之中點. 又平行於AQ引Q′M′, 平行於BQ引Q′N′, 則因PM′Q′N′爲平行四邊形, 故PQ′之中點O



又爲 M'N' 之中點. 故所求之軌跡爲線分 DE.

1651. 設定長線分 AB 過定點 P, 且 AP, PB 之長皆一定, 今在此二線分上各就同側作正三角形而聯結其頂點, 則此聯結線分中點之軌跡如何?

解 設在 AP, BP 上就同側所作正三角形之頂點, 分別爲 M, N, 求 MN 之中點 O 之軌跡. 平行於 MA, NB, 分別引 OC, OD, 命分別交 AB 於 C, D, 則

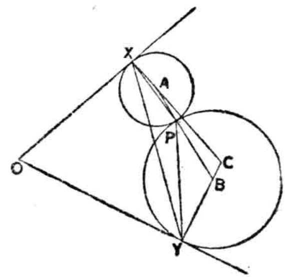


因 $M\hat{A}C=\frac{2}{3}\hat{R}=N\hat{P}B$, 故 AM ∥ PN. 同理, BN ∥ PM. 故 C, D 分別爲 AP, BP 之中點, 故 CD 爲 AB 之半分, 且因 $O\hat{C}D=O\hat{D}C=\frac{2}{3}\hat{R}$, 故 △OCD 爲正三角形. 因此, PO 之長一定, 故 O 在 P 爲中心, PO 爲半徑之圓周上. 反之, 在此圓周上取任意點 O', 聯結 O'P, 過 P 引直線 A'PB', 命 $O'\hat{P}A'=O\hat{P}C$, 在 P 之兩側取 A', B', 命 A'P = AP, B'P = BP. 在 A'P, PB' 上就同側作正三角形 A'PM', PN'B', 聯結 M'O', O'N', 則因 △M'PO', △O'PN' 之二邊及其夾角, 分別與 △MPO, △OPN 之二邊及其夾角相等, 故前兩三角形分別與後兩三角形全等. 故 M', O', N' 在一直線上, 且 O' 爲 M'N' 之中點, 故 O' 適合條件. 故點 O 之軌跡, 乃以 P 爲中心, PO 爲半徑之圓周.

別證 三角形 PMN 中, PM, PN 分別等於 PA, PB, 故一定, 其夾角 $M\hat{P}N=\frac{2}{3}\hat{R}$ = (定角), 故其形狀及大小皆一定, 因而由 P 所引之中線 PO 亦一定, …….

1652. 分別切二定直線於定點之二圓, 設又相外切, 則其切點之軌跡如何?

解 設兩定直線爲 X, Y, 切 X 於定點 X

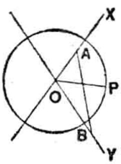


之圓爲 A, 切 Y 於定點 Y 之圓爲 B, 圓 A 與 B 之外切點爲 P, 求 P 之軌跡. 先設直線 X, Y 相交, 命其交點爲 O. 聯結 AX, BY, 命其交點爲 C, 則因 AX ⊥ OX, BY ⊥ OY, 且 X, Y 爲定點, 故 C 爲定點, 而 $X\hat{C}Y$ 爲定角. 聯結 AP, XP, BP, YP, 則 AP, BP 在一直線上 [594題]. 故 $A\hat{P}X=\frac{1}{2}B\hat{A}C$, $B\hat{P}Y=\frac{1}{2}A\hat{B}C$, 故 $A\hat{P}X+B\hat{P}Y=\frac{1}{2}(B\hat{A}C+A\hat{B}C)$ = (定角), 因而 $X\hat{P}Y$ 亦爲定角. 故 P 在 XY 爲弦, $X\hat{P}Y$ 爲弓形角之弓形弧上. 反之, 在此弧上取任意點 P', 聯結 P'X, P'Y, 引 P'A', 命 $X\hat{P'}A'=P'\hat{X}C$, 且命其與 CX 之交點爲 A'. 聯結 A'P', 命其延線與 CY 之交點爲 B', 則 $Y\hat{P'}B'=\frac{1}{2}A'\hat{B'}C$, 故 B'P' = B'Y. 據此, 分別以 A', B' 爲中心, 以 A'X, B'Y 爲半徑所作之圓, 分別切 OX, OY 於 X, Y, 且互相外切於 P', 故 P' 爲適合條件之點. 故所求之軌跡乃 XY 爲弦, 定角 XPY 爲弓形角之弓形弧, 若圓 A, B 之中, 有一對於 X, Y 在前之異側, 則仿前得證所求之軌跡, 乃以 XY

爲弦,在前之異側, 張弓形角 $2\hat{R}-\frac{1}{2}\hat{C}$ 之弓形弧,而不在角 XOY 內者. 次,設直線 X, Y 平行, 則 P 在直線 XY 上, 所求之軌跡爲有限直線 XY.

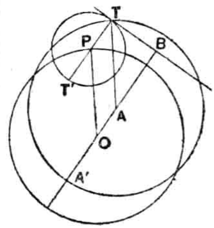
1653. 設 AB 爲定長線分,其兩端分別在定角 XOY 之二邊上運動, 求三角形 OAB 外心之軌跡.

解　三角形 OBA 中,底邊 AB 之長一定,頂角 AOB 一定 [或爲其補角], 故其外接圓皆相等, 因而其半徑爲定長. 茲設 P 爲 △AOB 之外心, 聯結 OP, 則 OP 爲 △OAB 外接圓之半徑, 故其長一定, 而 O 爲定點, 故 P 在以 O 爲中心, OP 爲半徑之圓周上. 反之,在此圓周上取任意點 P′, 以 P′ 爲中心, OP′ 爲半徑作圓, 命分別截 OX, OY 於 A′, B′, 聯結 A′B′. 於是 △A′OB′, △AOB 之外接圓.因半徑相等,故兩圓亦相等.然 $A'\hat{O}B'$ 等於 $A\hat{O}B$ [或其補角], 故 A′B′ 等於 AB, 故 P′ 適合條件.故所求之軌跡乃 O 爲中心, OP 爲半徑之圓周.



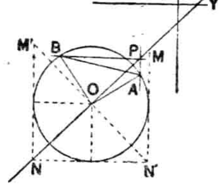
1654. 設一圓之半徑一定, 其中心在所設圓周上運動,則其定方向切線之切點軌跡如何?

解　命所設圓之中心爲 O, 其半徑爲 R,又中心在此圓上之圓,其半徑命爲 r. 在圓 O 之周上取任意點 P, 以 P 爲中心, r 爲半徑作圓,命切此圓於 T, 且有定方向之切線爲 TB, 過 O 引 TB 之垂線 OB, 又引圓 P 之直徑 TPT′. 聯結 OP, 平行於 OP 引 TA, 則 OATP 爲平行四邊形,且 OB 垂直於有定向之直線,故其向亦一定, 因而 $OA=PT=r$, $AT=OP=R$, 而 A 爲在定向直徑 OB 上之定點, T 至定點 A 之距離爲 R, 故 T 在 A 爲中心, R 爲半徑之圓周上. 反之,在此圓周上取任意點 T, 引 OB 之垂線 TB, 聯結 AT, 平行於 AT 引 OP, 命其與定圓周之交點爲 P, 聯結 TP, 則因 $AT=OP=R$, $AT \parallel OP$, 故 OATP 爲平行四邊形. 於是因 $OB \perp TB$, 故 $TP \perp TB$, 且 $TP=OA=r$, 故 T 適合條件. 故所求之軌跡, 乃圓 O 之定向 (垂直於所設方向之方向) 直徑上距中心爲 r 之兩點 A, A′ 爲中心,定圓之半徑爲半徑所作之二個等圓周.



1655. 由圓中互相垂直之二任意半徑之端, 分別平行於互相垂直之二定直線引二直線,其交點之軌跡,爲過中心之一直線.

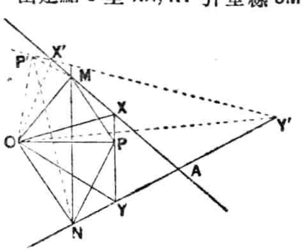
解　設互相垂直之二定直線爲 X, Y, 圓 O 中互相垂直之二任意半徑爲 OA, OB, 過 A, B 分別引 X, Y 之平行線,命其交點爲 P, 求 P 之軌跡. 因 $A\hat{O}B=\hat{R}=A\hat{P}B$, 故 A, O, B, P 在一圓周上.聯結 OP, AB, 則 $O\hat{P}A=O\hat{B}A=\frac{1}{2}\hat{R}=$ (定角), 又 PA 恆平行於定直線 X, 故直線 OP



之方向一定. 又 OP 在 OA, OB 分別平行於 X, Y 時爲最大. 據此,平行於 X, Y, 引圓 O 之切線, 命其與 OP 之交點爲 M, N, 則 P 恆在線分 MN 上. 反之,在線分 MN 上取點 P′, 過 P′ 引 Y 之平行線, 則必交圓 O, 命其交點之一爲 B′, 聯結 B′O, 垂直於 B′O 引半徑 OA′, 令 $B'\widehat{O}A'$ 與 $B\widehat{O}A$ 同向, 聯結 P′A′. 於是因 $B'\widehat{P'}O = B\widehat{P}O = \frac{1}{2}\widehat{R} = B'\widehat{A'}O$, 故 B′, P′, A′, O 在一圓周上. 故 $B'\widehat{P'}A' = \widehat{R}$, 因此 P′A′ 平行於X, 故 P′ 適合條件. 故所設之軌跡乃過 O 之線分 MN. 若 $B\widehat{O}A$ 與前異向,則軌跡爲垂直於 MN 之線分 M′N′.

1656. 設 O 爲定點, AX, AY 爲定直線, XOY 爲定角,其邊 OX, OY 與定直線 AX, AY 之交點爲 X, Y, 聯結 XY, 由 O 至 XY 引垂線, 命其足爲 P, 則 $X\widehat{O}Y$ 以 O 爲中心而廻轉時, P 之軌跡通常爲一圓周, 但若 $X\widehat{O}Y$ 與 $X\widehat{A}Y$ 互爲補角,則爲一直線.

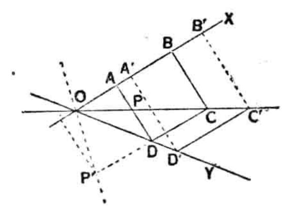
解 由定點 O 至 AX, AY 引垂線 OM, ON,



聯結 MN, PM, PN, 則因 $O\widehat{M}X = \widehat{R} = O\widehat{P}X$, 故 O, M, X, P 在一圓周上, 因而 $O\widehat{P}M = O\widehat{X}M$. 同理, O, N, Y, P 在一圓周上,因而 $O\widehat{P}N = O\widehat{Y}N$, 故 $M\widehat{P}N = O\widehat{P}M + O\widehat{P}N = O\widehat{X}M + O\widehat{Y}N = X\widehat{O}Y + X\widehat{A}Y =$ (定角), 故 P 在 MN 爲弦, 張定角 $(X\widehat{O}Y + X\widehat{A}Y)$ 之弧上. 又設 X, Y, P 分別至 X′, Y′, P′ 之位置,則 $O\widehat{P'}M = O\widehat{X'}M$, $O\widehat{P'}N = O\widehat{Y'}N$, 故 $M\widehat{P'}N = O\widehat{P'}M - O\widehat{P'}N = O\widehat{X'}M - O\widehat{Y'}N =$ [命 X′A, OY′ 之交點爲 Q, 則] $(O\widehat{X'}Q + X'\widehat{Q}O) - (Q\widehat{Y'}N + Y'\widehat{Q}A) = (2\widehat{R} - X'\widehat{O}Y') - M\widehat{A}N = 2\widehat{R} - (X'\widehat{O}Y' + M\widehat{A}N)$, 故 P′ 在 MN 爲弦,張與前互爲補角之角之弧上. 故 P 恆在一圓周上. 反之得證此圓周上之任意點適合條件. 故點 P 之軌跡爲一圓周. 若 $X\widehat{O}Y$ 與 $X\widehat{A}Y$ 互爲補角, 則 $M\widehat{P}N = 2\widehat{R}$, 故點 P 在直線 MN 上. 故軌跡爲直線 MN.

1657. 設 OX, OY 爲由一點 O 所引之二定直線, 正方形之一邊在 OX 上, 一角頂在 OY 上,求其餘角頂之軌跡.

解 設適合條件之一正方形爲 ABCD, 邊



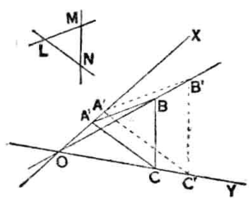
AB 在 OX 上, 角頂 D 在 OY 上, 求角頂 C 之軌跡. 聯結 OC, 命其與 AD 之交點爲 P, 則因 OX ∥ DC, 故 AP:PD = OA:CD = OA:AD. 然 △OAD 之形狀一定, 故 OA:AD 一定, 故 AP:PD 亦一定, 故 C 在直線 OP 上. 反之, 在 OP 上取任意點 C′, 平行於 CB, CD 分別引 C′B′, C′D′, 命其與 OX, OY 之交點爲 B′, C′, 平行於 DA 引 D′A′, 命其與 OX 之交點爲 A′, 則由作圖, 可知 A′B′C′D′ 爲矩形. 而 OA′ : A′D′ = OA : AD, OA′ : D′C′ = OA

:DC, 且 AD=DC, 故 A'D'=D'C', 故 A'B'C'D' 爲正方形, 故 C' 適合條件. 又若取 BC 於 AD 之異側, 則尙可得一直線 OP'. 故所求之軌跡爲過 O 之一雙直線 OP, OP'.

注意 由 C 至直線 Y 引垂線 CE, 則直角三角形 CDE 之形狀一定, 故 CD:CE=(定比), 卽 CB : CE=(定比). 然 CB, CE 爲由 C 至 X, Y 之距離, 故點 C 之軌跡爲過 O 之一雙直線 [160 題].

1658. 設一三角形之三邊, 各具定方向, 二頂點分別在二定直線上運動, 求第三頂點之軌跡.

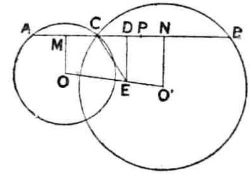
解 設三角形 ABC 之角頂 A, C 分別在定



直線 X, Y 上, 三邊 AB, BC, CA 分別平行於所設方向 L, M, N, 求角頂 B 之軌跡. 命 X, Y 之交點爲 O, 聯結 OB, 則因 △AOC, △ABC 之形狀一定, 故四邊形 ABCO 之形狀一定, 故 $A\hat{O}B$ 一定, 故 B 在直線 OB 上. 反之, 在 OB 上取任意點 B', 平行於 BA, BC 分別引 B'A', B'C', 命其與 OX, OY 之交點爲 A', C', 聯結 A'C'. 於是 OA' : OA =OB' : OB=OC' : OC, 故 A'C' ∥ AC, 故 B' 適合條件. 故所求之軌跡爲直線 OB. 次, 設直線 X, Y 平行, 則軌跡爲平行於 X, Y 之直線.

1659. 過兩圓周交點之一之倍弦, 按所設比而分時, 其分點之軌跡若何?

解 設兩圓 O, O' 交點之一爲 C, 過 C 之



倍弦爲 ACB, 而 A 在圓 O 周上, B 在圓 O' 周上, 求 AB 分於定比 $m:n$ 之點 P 之軌跡. 聯結中心 O, O', 內分 OO' 於 E, 令 OE : EO'=$m:n$; 由 O, E, O' 至倍弦 AB 引垂線 OM, ED, O'N. 於是 MD : DN = OE : EO' =m :n, 故 MD+DN : DN=$m+n:n$. 而 AP+PB : PB=$m+n:n$, 其中 AP+PB=2(MD+DN), 故 PB=2DN. 而 PB+CP=2(DN+CD), 故 CP=2CD, 故 D 爲 CP 之中點. 故 EP=EC =(定長), 且 E 爲定點, 故點 P 在 E 爲中心, EC 爲半徑之圓周上. 反之, 得證此圓周上之點皆適合條件. 故所求之軌跡爲此圓周. 又若 P 爲外分點, 則可仿此求之.

注意 前解中式之符號, 因圓 O, O' 之位置及比 $m:n$ 之值而有變更之必要.

第八編

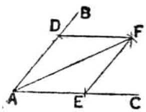
作圖題

第一章 直線

I. 基本作圖

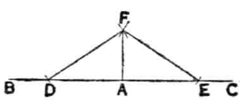
1660. 二等分所設角.

解 設 BAC 爲所設角，試二等分之. 以 A 爲中心，任意長爲半徑作圓，令截 AB 於 D，截 AC 於 E，[公法 3]. 以 D 與 E 爲中心，大於 DE 半分之任意長爲半徑作二圓 [公法 3]，命 F 爲此二圓周在角 BAC 內之交點. 聯結 AF [公法 1]. 則 AF 爲角 BAC 之二等分線. 聯結 DF, EF. 此時因兩圓 D, E 之半徑和，大於中心距離 DE，故二圓相交 [600題]. 而兩三角形 DAF, EAF 中，AD = AE [作圖]，AF 公有，DF = EF [作圖]，故 $D\hat{A}F = E\hat{A}F$ [77題]，故 AF 二等分角 BAC.



1661. 由所設直線上之所設點，引此線之垂線.

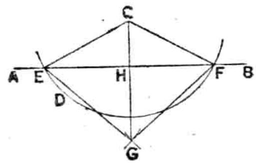
解 設 BAC 爲所設直線，A 爲此直線上之所設點，試由 A 引 BAC 之垂線. 以 A 爲中心，任意長爲半徑作圓，令截 AB 於 D，截 AC 於 E [公法 3]. 以 D 與 E 爲中心，以大於 AD 或 AE 之長爲半徑作二圓 [公法 3]，命 F 爲此兩圓之交點. 聯結 AF [公法 1]. 則 AF 爲 BAC 之垂線. 聯結 DF, EF. 此時兩三角形 DAF, EAF 中，AD = AE [作圖]，AF 公有，DF = EF [作圖]，故 $D\hat{A}F = E\hat{A}F$ [77題]，故 AF 垂直於 BAC.



注意 因 $B\hat{A}F = \hat{R} = C\hat{A}F$，故 AF 乃以 BA, AC 爲二邊之 $B\hat{A}C$ 之二等分線，因此本題爲二等分所設角 BAC 之特殊問題.

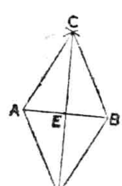
1662. 由所設直線外之所設點，引此線之垂線.

解 設 AB 爲所設直線，C 爲此線外之所設點，試由 C 至 AB 引垂線. 取任意點 D，令與 C 在 AB 之異側. 以 C 爲中心，CD 爲半徑作圓，令截 AB [必要時其延線] 於 E 及 F [公法 3]. 以 E 及 F 爲中心，前圓半徑爲半徑作圓，命其對於 AB 在 C 異側之交點爲 G [公法 3]. 聯結 CG，令截 AB 於 H，則 CH 卽 AB 之垂線. 聯結 CE, CF, EG, FG，則三角形 ECG, FCG 中，CE = CF [作圖]，EG = FG [作圖]，邊 CG 公有，故 $E\hat{C}G = F\hat{C}G$ [77題]. 又兩三角形 ECH, FCH 中，EC = FC [作圖]，CH 公有，$E\hat{C}H = F\hat{C}H$，故 $C\hat{H}E = C\hat{H}F$ [55題]，故 CH 爲 AB 之垂線.



1663. 二等分所設有限直線.

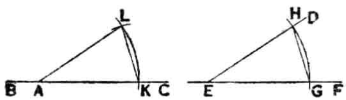
解 設 AB 爲所設有限直線，試二等分之. 以 A 與 B 爲中心，AB 爲半徑作二圓，命其交點爲 C 及 D [公法 3]，聯結 DC，令截 AB 於 E [公法 1]，則 AB 二等分於 E. 聯結 AC, AD, BC, BD. 此時兩圓必相交，而兩三角形 ACD, BCD 中，AC = BC [作圖]，AD = BD，CD 公有，故 $A\hat{C}D = B\hat{C}D$ [77題]. 又兩三角形 ACE, BCE 中，AC = BC [作圖]，CE 公有，$A\hat{C}E = B\hat{C}E$，故



AE＝BE [55題], 故 AB 二等分於 E.

1664. 在所設直線上之所設點, 作等於所設角之角.

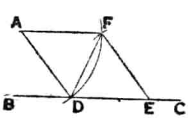
解 設 A 爲所設直線 BC 上之所設點,



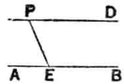
DÊF 爲所設角, 試由 A 引一直線, 令與 BC 成等於 DÊF 之角. 以 E 爲中心, 任意長爲半徑作圓, 令截 EF 及 ED 於 G 及 H [公法 3]. 聯結 GH. 以 A 爲中心, 前圓之半徑爲半徑作圓, 令截 BC 於 K [公法 3]. 以 K 爲中心, 等於 GH 之長爲半徑作圓, 截前圓於 L [公法 3]. 聯結 AL, 則 AL 與 BC 成等於 DÊF 之角. 聯結 KL, 則兩三角形 LAK, HEG 中, AK = EG [作圖], AL = EH [作圖], LK ＝HG [作圖], 故 LÂK＝HÊG [77題], 卽 AL 與 BC 成等於 DÊF 之角.

1665. 過所設點, 引所設直線之平行線.

解 設 A 爲所設點, BC 爲所設直線, 試過 A 引 BC 之平行線. 在 BC 上取任意點 D, 聯結 AD, 以 A 爲中心, AD 爲半徑作圓 [公法 3], 由 DC 截取 DE, 令等於 AD [公法 3]. 以 E 爲中心, ED 爲半徑作圓, 截前圓於 F [公法 3], 聯結 AF [公法 1], 則 AF 平行於 BC. 聯結 DF, EF, 則兩三角形 ADF, EFD 中, AF = ED [作圖], FD 公有, AD = EF [作圖], 故 AF̂D＝ED̂F [77題]. 而此兩角爲 DF 與 AF 及 BC 相交而生之錯角, 故 AF 平行於 BC [38題].

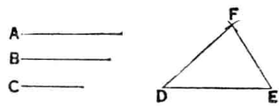


別解 設 P 爲定點, AB 爲定直線, 聯結 P 與 AB 上之任意點 E, 過 P 引直線 PD, 令互爲錯角之 DP̂E = PÊA [1664 題], 則 PD 爲所求之直線.



1666. 已知三邊, 作三角形.

解 設 A, B, C 爲設所三邊, 作一三角形,

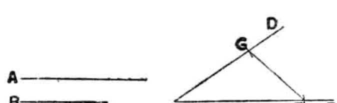


令其三邊分別等於 A, B, C. 引等於 A 之直線 DE [公法 3]; 以 D 爲中心, 等於 B 之長爲半徑作圓 [公法 3]; 又以 E 爲中心, 等於 C 之長爲半徑作圓, 令截前圓於 F [公法 3]. 聯結 DF, EF [公法 1], 則 FDE 爲所求之三角形. 因 DE 等於 A [作圖], DF 等於 B [作圖], EF 等於 C [作圖], 故 FDE 爲所求之三角形.

注意 所設三邊中, 任意二邊之和, 須大於他一邊 [70題].

1667. 已知二邊及其夾角, 作三角形.

解 設 A, B 爲所設二邊, CÊD 爲所設角,

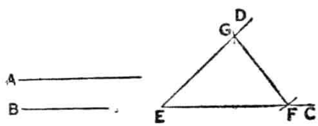


作一三角形, 令其二邊等於 A, B, 且此二邊間之夾角等於 CÊD. 由 EC 截取 EF, 令等於 A [公法 3], 由 ED 截取 EG, 令等於 B

[公法 3], 聯結 FG [公法 1], 則 EFG 爲所求之三角形. 因 EF 等於 A [作圖], EG 等於 B [作圖], 而角 FEG 卽角 CED, 故 FEG 爲所求之三角形.

1668. 已知二邊,及其中一邊之對角,作三角形.

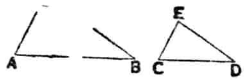
解 設 A, B 爲二所設邊, $C\hat{E}D$ 爲等於 B 之



邊所對之所設角; 試作一三角形, 令具等於 A, B 之二邊, 且 B 之對角等於 $C\hat{E}D$. 由 EC 截取等於 A 之 EF [公法 3], 以 F 爲中心, 等於 B 之直線爲半徑作圓 [公法 3]. 於是若 B 小於由 F 至 ED 所引之垂線, 則圓不交 ED, 而解不成立. 在 B 等於此垂線, 則圓與 ED 交於唯一之點, 而有唯一之解. 若 B 大於此垂線, 而小於 A, 則圓與 ED 交於所設角頂同側之二點, 而有兩解, 是卽兩可款. 若 B 大於 A, 則圓與 ED 交於所設角頂異側之兩點, 而有唯一之解. 玆命圓與 ED 之交點爲 G, 聯結 FG [公法 1], 則 EFG 爲所求之三角形. EF 等於 A [作圖], FG 等於 B [作圖], 而角 FEG 卽角 CED, 故 FEG 爲所求之三角形.

1669. 已知二角,及其間之邊,作三角形.

解 設 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 爲二所設角, CD 爲所設邊, 作一三角形, 令其二角分別等於 $\hat{A}$, $\hat{B}$, 且此二角間之邊等於 CD. 在直線 CD 上之 C

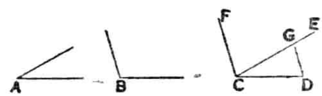


點, 作角 DCE 令等於角 A [1664 題]; 又在直線 CD 上之 D 點, 作角 CDE 令等於角 B [1664 題]. 於是 CDE 卽所求之三角形. 角 $D\hat{C}E$ 等於 $\hat{A}$ [作圖], 角 CDE 等於 $\hat{B}$ [作圖], 而 CD 爲三角形之一邊, 故 CDE 爲所求之三角形.

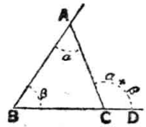
注意 所設二角之和, 須小於二直角 [62 題].

1670. 已知三角形之二角, 及其中一角之對邊, 作三角形.

解 設 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 爲所設二角, CD 爲所設邊, 作



一三角形, 令其二角分別等於 $\hat{A}$, $\hat{B}$, 且等於 $\hat{B}$ 之角所對之邊等於 CD. 在直線 CD 上之 C 點作角 DCE, 令等於角 A [1664題]; 在直線 CE 上之 C 點, 作角 ECF, 令等於角 B [1664題]. 過 D 點平行於 CF 引 DG, 令交 CE 於 G [1665題], 則 GCD 爲所求之三角形. 因 DG 平行於 CF, 故角 DGC 等於錯角 GCF [41題], 卽等於角 B [作圖], 又角 DCG 等於角 A [作圖], 且 CD 爲三角形之一邊, 故 GCD 爲所求之三角形.



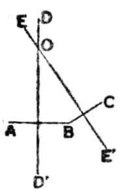
別解 延長 BC, 在其上取點 D, 則 $A\hat{C}D = \alpha + \beta$ [63 題]. 據此, 在任意直線 BD 上取 BC, 令等於所設邊.

又引直線 BA, 令與 BC 所成之角等於 β, 次引直線 CA, 令與 CD 所成之角等於 $\alpha+\beta$, 且命其與 BA 之交點為 A, 則 ABC 為所求之三角形.

II. 軌跡之交點

1671. 求距不在一直線上之所設三點等遠之點.

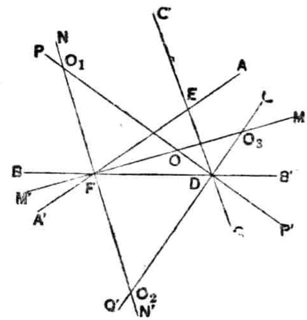
解 設 A, B, C 為不在一直線上之所設三點, 求距 A, B, C 等遠之點.



引 AB 之垂直二等分線 DD' [1663題], 又引 BC 之垂直二等分線 EE', 則距 A, B 等遠之點皆在 DD' 上 [1505題], 距 B, C 等遠之點皆在 EE' 上, 故距 A, B, C 等遠之點應在 DD', EE' 上. 今 DD' 當與 EE' 交 [52題], 故設此二直線之交點為 O, 則 O 點距 A, B, C 等遠. 又 DD' 與 EE' 之交點唯一 [幾.公.(2)], 故距 A, B, C 等遠之點僅 O.

1672. 設所設三直線兩兩相交, 求距此三直線等遠之點.

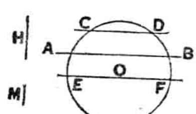
解 設 AA', BB', CC' 為所設三直線, 此三直線兩兩相交而生三角形 DEF, 求距 AA', BB', CC' 等遠之點. 引 AA' 及 BB' 交角之一組二等分線 MM', NN' [1660題], 又引 BB' 及 CC' 交角之一組二等分線 PP', QQ'. 於是距 AA' 及 BB' 等遠之點皆在 MM' 或 NN' 上 [1508題], 距 BB' 及 CC' 等遠之點皆在 PP' 或 QQ' 上; 故距 AA', BB', CC' 等遠之點應在 MM' 或 NN' 及 PP' 或 QQ' 上. 今 MM' 與 PP' 必不平行, 蓋兩角 MFD,



PDF 分別為三角形 DEF 之兩角 EFD, EDF 之半分, 故其和決不能為二直角也. 又 MM' 與 QQ' 決不平行, 蓋角 MFD 為角 EFD 之半分, 角 QDB' 為三角形 DEF 外角 EDB' 之半分, 故角 MFD 決不等於角 QDB' 也. 據此, 命 MM' 交 PP' 於 O, 交 QQ' 於 O_3. 同理, 命 NN' 交 PP' 於 O_1, 交 QQ' 於 O_2. 於是四點 O, O_1, O_2, O_3 距 AA', BB', CC' 等遠. 又兩直線之交點唯一 [幾.公.(2)], 故距 AA', BB', CC' 等遠之點僅 O, O_1, O_2, O_3.

1673. 設 O 為所設點, AB 為所設直線, 求距 O 為 H, 距 AB 為 M 之點.

解 距所設點 O 為 H 之點之軌跡, 乃中心為 O, 半徑等於 H 之圓周. 又距 AB 為 M 之點之軌跡為平行於 AB 之二直線 CD, EF. 故所求之點必在此圓周與 CD, EF 上, 因而所求之點為是等軌跡之四交點 C, D, E, F.

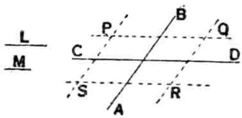


吟味 設圓 O 與此二直線 CD, EF 俱交; 或與其一者交, 而切於其他一者; 或切於其

二者;或切於其一者,而與他一者全不相交;或與二者皆不交;則本題有四解;或三解;或二解,或一解,或無解.

1674. 設所設兩直線相交,求距此二直線分別為所設遠之點.

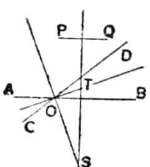
解 設相交二直線為 AB, CD, 求距 AB 為



L, 距 CD 為 M 之點. 距 AB 為 L 之點之軌跡, 乃在 AB 之兩側, 距 AB 為 L 之兩平行線 PS 及 QR. 距 CD 為 M 之點之軌跡, 乃在 AB 之兩側, 距 CD 為 M 之平行線 PQ 及 SR. 故此二組平行線之交點 P, Q, R, S 為所求之點.

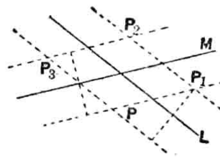
1675. 設一平面上有二無限直線及二點,求距此二直線等遠,距此二點亦等遠之點.

解 設 AB, CD 為二無限直線, P, Q 為二點. 因所求之點距此二直線等遠,故此點必在此二直線所成角 O 之二等分線 OS, OT 上 [1508題]; 且所求之點距 P, Q 等遠, 故此點又必在 PQ 之垂直二等分線 TS 上 [1507題]. 故設 OS, OT 與 TS 之交點為 T 及 S, 則 T 及 S 為所求之點. 普徧言之, 一直線 TS 與二直線 OT, OS 交於二點, 故適合本題條件之點有二. 但若垂直二等分線與 OT, OS 內之任一平行, 或過點 O, 則適合條件之點僅一. 又若 TS 與 OT 或 OS 之一全合, 則此線上之一切點皆適合條件.



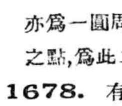
1676. 求至所設二直線具所設等距離之點.如是之點有若干?

解 本題為1674題之特款, 所求之點, 普通有 P, P_1, P_2, P_3 四點. 若 L, M 平行, 而其距離為所設距離之二倍, 則所求之點, 在距 L, M 等遠之平行線上, 而有無數; 但若 L, M 之距離非所設距離之二倍, 則無解.



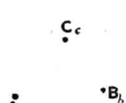
1677. 求對於所設三圓之視角相等之點.

解 命所設三圓為 A, B, C, 其半徑分別為 r, r', r''. 對於圓 A, B 之視角相等之點之軌跡乃一圓周, 其直徑為按 $r:r'$ 內外分 AB 之點間之直線 [1622題]. 同理, 對於圓 B, C 之視角相等之點之軌跡亦為一圓周. 故對於本題三圓之視角相等之點, 為此二軌跡之二交點.



1678. 有三發光點, 求其平面上受同光度之點.

解 設三發光點為 A, B, C, 單位距離之光度分別為 a, b, c, 則由二發光點 A, B 所受光度相等之點之軌跡為一圓周, 其直徑之兩端為直線 AB 按 $\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 之內外二分點. 同理, 由二發光點 B, C 所受光度相同之點之軌跡亦為



一圓周.故由三發光點所受之光度相同之點,為此二軌跡之二交點.

III. 直線問題

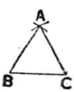
1679. 四等分所設角.

解 用1660題之方法,先將所設角二等分;再將同法施諸所得之各角;而將其二等分. 如是所設角即等分為四.

注意 如將上述方法連續施行,即可將所設角 2^n 等分.但 n 為正整數.

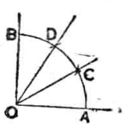
1680. 在所設底邊上作等邊三角形.

解 命所設底邊為 BC, 以 BC 為半徑, B 為中心作圓;又以 C 為中心, BC 為半徑作圓.命此兩圓之交點為 A, 則 ABC 即所求之三角形.



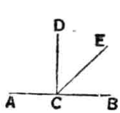
1681. 三等分直角.

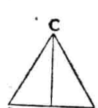
解 設 AOB 為直角.以任意直線 OA 為半徑, O 為中心作弧 AB, 以 A, B 為中心,等於 OA 之直線為半徑作圓,截弧 AB 於 D, C, 聯結 OC, OD, 則直角 AOB 等分為三,因 △OAD, △BOC 為全等之正三角形[77題],弧 AC, CD, DB 相等故也.



1682. 作 45°, 135°, 60°, 30° 之角.

解 引任意直線 AB, 在其上取任意點 C,

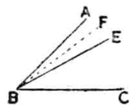




過 C 引 AB 之垂線 CD [1661題], 引角 BCD 之二等分線 CE [1660題]. 於是 $B\hat{C}E=\frac{1}{2}\hat{R}=45°$, $A\hat{C}E=\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{R}=135°$. 次,在任意直線 AB 上作正三角形 ABC [1680題], 由 C 至 AB 引垂線 CD [1662題].於是 $B\hat{A}C=\frac{2}{3}\hat{R}=60°$, $A\hat{C}D=90°-60°=30°$.

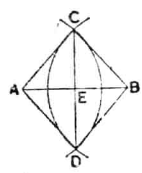
1683. 將等於直角半分之角六等分.

解 設 $A\hat{B}C$ 等於直角之半分[前題], $C\hat{B}E$ 為直角之三分之一[前題], 則 $A\hat{B}C$ 為直角之六分之三, $E\hat{B}C$ 為直角之六分之二,故 $A\hat{B}E$ 等於直角之六分之一,因而等於 $A\hat{B}C$ 之三分之一. 今設 $A\hat{B}E$ 為 AF 所二等分,則其一分適為 BC 之六分之一.



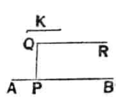
1684. 作所設有限直線之垂直二等分線.

解 1663題中, E 為直線 AB 之中點, 且 CED ⊥ AB, 故本題可仿之以求解.



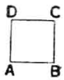
1685. 引一平行線,令至所設直線之距離,等於所設距離.

解 設所設直線為 AB, 所設距離為 K. 在 AB 上取任意點 P, 過 P 引 AB 之垂線 PQ [1661題], 令 PQ=K, 又過 Q 引 PQ 之垂線 QR, 則 QR 為所求之直線. 何則,因 $B\hat{P}Q=\hat{R}=P\hat{Q}R$, 故 AB ∥ QR, 且 PQ=K 也. 又在 AB 之他側,亦有所求之平行線.



1686. 在定直線上作正方形.

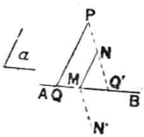
解 設 AB 為定直線,由 A 引 AD, 令 $B\hat{A}D=\hat{R}$ [1661題], 在 AD 上取 D 點, 令 AD



$=AB$. 又由 B 引 BC, 令 $A\hat{B}C=\hat{R}$, 在 BC 上取點 C, 令 $BC=AB$. 聯結 CD, 則 ABCD 卽所求之正方形. 其證甚易.

1687. 過定點引一直線, 令與定直線成所設角.

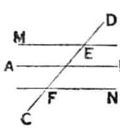
解 設定點爲 P, 定直線爲 AB, 所設角爲 α, 在 AB 上取任意點 M, 引直線 MN, 令與 MB 所成之角等於所設角 α [1664 題]. 過 P 平行於 MN 引 PQ [1665 題], 則 PQ 卽所求之直線. 何則? 因 $P\hat{Q}B=N\hat{M}B=\alpha$ 也.



注意 與 MB 所成之角等於 α 之直線, 除 MN 外, 尙有 MN 關於 MB 之對稱線, 故若 $\alpha \gtrless \hat{R}$, 則本題有二解.

1688. 試在一所設直線上求一點, 令其至所設他直線之距離, 等於所設距離.

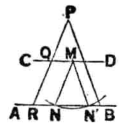
解 設 AB, CD 爲所設二直線. 距 AB 爲所設遠之點之軌跡, 爲平行於 AB 之二直線 M, N [1506 題], 故所求之點必在此二直線上. 而所求之點又必須在 CD 上; 故 M, N 與 CD 之交點 E, F 卽所求之點.



吟味 若 CD 平行於 AB, 則普通無解, 但若與 M, N 之一相合, 則有無數解.

1689. 過所設點 P, 引一直線, 令其在所設二平行線 AB, CD 間之部分, 等於所設長 m.

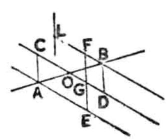
解 設所求之直線爲 PQR $QR=m$. 在 CD 上取一點 M, 由 M 平行於 PR 引 MN, 則 $MN=QR=m$. 於是得作圖法如下. 以 CD 上之任意點 M 爲中心, m 爲半徑作圓, 命其與 AB 之交點爲 N, N'. 由 P 平行於 MN, MN' 引二直線, 則此二直線卽所求者.



吟味 若圓 M 不交 AB, 卽 m 小於二平行線之距離, 則無解. 若圓 M 切 AB, 即 m 等於二平行線之距離, 則有一解. 若 m 大於二平行線之距離, 則有二解.

1690. 試在相交二直線間, 置已知長之直線, 令平行於他已知直線.

解 設相交二直線爲 AB, CD, 已知長爲 l, 等於 l 之直線爲 AC, 他已知直線爲 L; 試置 AC 於 AB, CD 間, 令平行於 L. 在 CD 上取任意點 G, 由 G 平行於 AC, 引 EG, 令 $GE=l$, 聯結 AE, 則 AE ∥ CG. 據此, 先過 OD 上之一點 G 平行於 L 引 EGF, 取 $EG=FG=l$, 過 E, F 平行於 CD 引 EA, FB, 命與 AB 之交點爲 A, B. 由 A, B 平行於 L 引 AC, BD, 命其與 CD 之交點分別爲 C, D, 則 AC, BD 爲所求之直線.

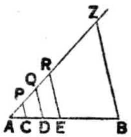


1691. 在定三角形中, 平行於底邊引一直線, 令其在兩邊間之部分, 等於定直線.

解 由前題, 甚易得解.

1692. 將所設直線, 等分爲 n 分. 但 n 爲任意整數.

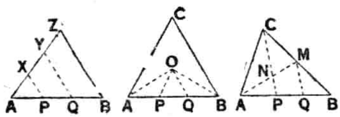
解 引直線 AZ, 令與所設直線 AB 成適宜之角; 在其上取任意長 AP, 按 $AP=PQ$



=……(n 個) 取 P, Q,……, Z; 聯結 ZB, 由各分點 P, Q, …… 平行於 ZB 引 PC, QD, ……,則 C, D,……爲所求之分點,可由 229 題明之.

1693. 有限直線 AB 之三等分點 P, Q, 可由以下三法之一求之. (1) 由 A 引任意直線,在其上取等長之 AX, XY, YZ, 聯結 BZ,平行於 BZ 引 XP, YQ, 令交 AB 於 P, Q. (2) 以 AB 爲一邊,作正三角形,命角 A, B 之二等分線之交點爲 O, 平行於 AC, BC 引 OP, OQ, 令交 AB 於 P, Q. (3) 以 AB 爲一邊,作任意三角形 ABC, 引中線 AM, 由 C 至 AM 之中點 N 引直線,延長之,令交 AB 於 P, 由 M 平行於 CP 引 MQ, 令交 AB 於 Q.

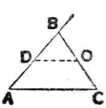
解 (1)此爲 1692 題 $n=3$ 之特款. (2)觀



131 題. (3)因 M 爲 BC 之中點, N 爲 AM 之中點,且 CP ∥ MQ, 故由 △BCP, △AMQ, 可知 BQ = QP = AP. 故以上三款中之 P, Q, 皆爲 AB 之三等分點.

1694. 過角 BAC 內之定點 O, 引直線 BOC, 令 BO 等於 OC.

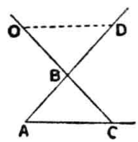
解 設已知 BOC 爲適合條件之直線,平行



於 AC 引 OD, 則 D 爲 AB 之中點.據此,由 O 平行於 AC 引 OD, 在 AB 上取點 B, 令 DB = AD, 聯結 BO, 命其延線與 AC 之交點爲 C, 則直線 BOC 即所求者.

1695. 設點 O 爲所設角 BAC 外之所設點,試由 O 引直線 OBC, 令 OB 等於 BC.

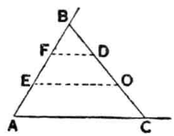
解 設所求之直線爲 OBC,由 O 平行於 AC



引 OD, 則 B 爲 AD 之中點 [56題], 據此, 由 O 平行於 AC 引 OD, 求 AD 之中點 B, 聯結 OB, 延長之,令交 AC 於 C. 於是直線 OBC 即所求者.

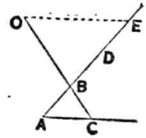
1696. 設 O 爲所設角 BAC 內之所設點,試過 O 引直線 BOC, 令 BO 爲 CO 之二倍.

解 設所求之直線爲 BOC, BO 之中點爲



D. 過 O, D, 平行於 AC 引 OE, DF, 命其與 AB 之交點爲 E, F, 則 AE = EF = FB [229題]. 據此,由 O 平行於 AC 引 OE, 在 AB 上取 AE = EF = FB, 而順次定點 F, B, 聯結 BO, 令交 AC 於 C, 則 BOC 即所求之直線.

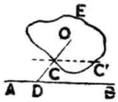
1697. 設 O 爲所設角 BAC 外之所設點,由 O 引直線 OBC, 令 OB 爲 BC 之二倍.



解 由 O 引 AC 之平行線 OE, 三等分 AE 於 B, D [1693 題], 聯結 OB, 延長之令交 AC 於 C, 則 OBC 爲所求之直線.

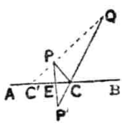
1698. 由某任意閉合曲線內部之一點,至其外部之定直線引一直線,令爲此曲線所二等分.

解 設 CC E 爲曲線, O 爲其內部之定點, AB 爲其外部之定直線. 由一定點 O, 至一定直線 AB 上之一定點 D, 所引直線 OD 之中點之軌跡, 爲平行於 AB 之直線 [1520 題], 玆命之爲 CC′. 命 CC′ 與曲線之一交點爲 C, 聯結 OC, 命其延線與 AB 之交點爲 D, 於是 OD 卽所求之直線. 故設直線 CC′ 與曲線之交點有 n 個, 則適合本題條件之直線有 n 條.



1699. 試在定直線上求一點, 令由此點至在定直線同側之二定點所引之二直線, 與定直線所成之角相等.

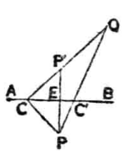
解 設 AB 爲定直線, 在 AB 同側之二定點爲 P, Q. 求 P 關於直線 AB 之對稱點 P′, 聯結 P′Q, 命其與 AB 之交點爲 C, 則 C 爲所求之點. 何則? 設 PP′ 與 AB 之交點爲 E, 則 PE＝P′E, $P\hat{E}C=P'\hat{E}C$, 故 △PEC ≡ △P′EC [55題], 故 $P\hat{C}E=P'\hat{C}E$. 然 $P'\hat{C}E=Q\hat{C}B$, 故 $P\hat{C}E=Q\hat{C}B$.



注意 若直線 PQ 不平行於 AB, 則 PQ 與 AB 之交點亦爲所求點.

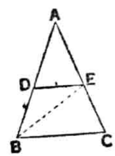
1700. 試在定直線上求一點, 令由此點至在定直線異側之二定點所引之二直線, 與定直線所成之角相等.

解 設 AB 爲定直線, P, Q 爲在 AB 異側之二定點. 命 P 關於 AB 之對稱點爲 P′, 聯結 QP′ 而延長之, 命其與 AB 之交點爲 C, 於是 C 卽所求之點. 何則? 命 PP′ 與 AB 之交點爲 E, 則 P′E＝PE, $P'\hat{E}C=P\hat{E}C$, 故 △P′EC ≡ △PEC [55題], 因而 $P'\hat{C}E=P\hat{C}E$. 次, 聯結 PQ, 命其與 AB 之交點爲 C′, 則 C′ 亦爲所求之點, 此甚易知之.



注意 設 P′Q ∥ AB, 則僅有 C′, 而無相當於 C 之解.

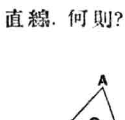
1701. 在二等邊三角形 ABC 中, 引底邊 BC 之平行線 DE, 令 DE＝BD.



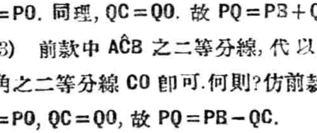
解 引角 ABC 之二等分線 BE, 由 E 平行於 BC 引 ED, 則 ED 卽所求之直線. 何則? $D\hat{E}B=E\hat{B}C=D\hat{B}E$, 故 DE＝BD.

1702. 在三角形 ABC 中, 平行於底邊 BC 引直線 PQ, 令交 AB, AC 於 P, Q, 且 (1) PQ＝BP, (2) PQ＝PB＋CQ, (3) PQ＝PB－CQ.

解 (1) 引角 ABC 之二等分線, 則其與 AC 之交點卽 Q. 何則? 因 $P\hat{Q}B=Q\hat{B}C=P\hat{B}Q$, 故 PB＝PQ.



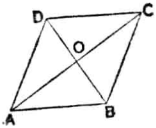
(2) 引角 ABC, ACB 之二等分線 BO, CO, 過其交點 O, 平行於 BC 引 POQ, 則 POQ 卽所求之直線. 何則? 因 $P\hat{O}B=O\hat{B}C=O\hat{B}P$, 故 PB＝PO. 同理, QC＝QO. 故 PQ＝PB＋QC.



(3) 前款中 $A\hat{C}B$ 之二等分線, 代以其外角之二等分線 CO 卽可. 何則? 仿前款, PB＝PO, QC＝QO, 故 PQ＝PB－QC.

1703. 已知二對角線,作一菱形,又已知一對角線,作一正方形.

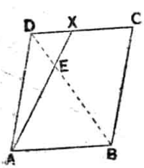
解　(1) 菱形之對角線直交,且互相二等分,故得作圖法如下.引直交之二直線 AOC, BOD,取 AO = CO, BO = DO,令分別等於所設長之半分.依次聯結 ABCD,則四邊形 ABCD 卽所求之菱形.



(2) 正方形得視爲一矩形,故若已知一對角線,則知他對角線與其等長.次,正方形又可視爲菱形,故(2)中所求之圖,可仿(1)作之.

1704. 在平行四邊形中,聯結 A 點與 CD 上之 X 點,令 AX = AB + XD.

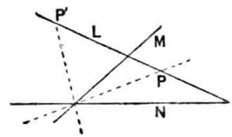
解　設所求之直線 AX 業已引得,在 AX 上取 E 點,令 AE = AB,則 XE = XD.聯結 DE, BE,則 $A\hat{E}B = A\hat{B}E$, $X\hat{E}D = X\hat{D}E$.而 CD ∥ AB,故 $E\hat{X}D = E\hat{A}B$,故 $A\hat{E}B = A\hat{B}E = X\hat{E}D = X\hat{D}E$,故 DE, BE 在一直線上.據此,引對角線 BD,及中心 A,半徑 AB 之圓,令其截 BD 之點爲 E,聯結 AE 而延長之,令其與 CD 之交點爲 X,則 AX 卽所求之直線.



注意　若 AD ≧ AB,則 AX = AB ± DX 中,有一成立;但 AD = AB,則 X 點與 D 點合.又若 AD < AB,則本題無解[此時 X 點在 CD 之延線上,而 AX = AB − XD].

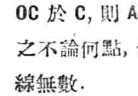
1705. 試在一所設直線上,求距他二所設直線等遠之點.

解　設前一所設直線爲 L,他二所設直線爲 M, N,試在 L 上求距 M, N 等遠之點.先設 M, N 相交,則距 M, N 等遠之點之軌跡,爲 M, N 所成角之二等分線 P 及 P′ [1508題],故所求之點爲 P 與 L 及 P′ 與 L 之交點.次設 M 與 N 平行,則距 M, N 等遠之點之軌跡,爲 M, N 公垂線之垂直二等分線 P,故所求之點爲 P 與 L 之交點.若 P 與 L 平行,則 P′ 與 L 之交點爲唯一之解.若 P 與 L 相合,則有無數解.次,若 M, N, L 平行,而 L 非距 M, N 等遠之直線,則無所求之點;若 L 爲距 M, N 等遠之直線,則有無數解.



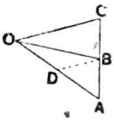
1706. 有過同一點之三所設直線,試引一直線,令其在此三線間之二部分相等.

解　設所求之直線爲 ABC,由 B 平行於 OC 引 BD,令其與 OA 之交點爲 D,則 OD = DA.據此,在 OB 上取任意點 B,由 B 平行於 OC 引 BD,按 OD = DA 取 A 於 OD 上,聯結 AB,延長之令交 OC 於 C,則 ABC 卽所求之直線.因 OB 上之不論何點,皆可取作 B 點,故所求之直線無數.



1707. 由一點引所設長之三直線,令其外側兩直線之末端,距中央直線之末端等遠,且三末端在一直線上.又試玩索問題之可能與不可能.

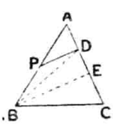
解　設所求之直線業已求得,由 B 平行於



OC 引 BD, 且命所設三長 OA $=l$, OB $=m$, OC $=n$, 則△OBD 之三邊分別長 $\frac{1}{2}l$, m, $\frac{1}{2}n$, 故爲已知.據此,先作三邊長 $\frac{1}{2}l$, m, $\frac{1}{2}n$ 之三角形 OBD, 按 OD=DA 延長 OD, 聯結 AB, 按 BA=BC 取 C, 聯結 OC, 則 OA, OB, OC 分別等於 l, m, n, 且 B 爲 AC 之中點.

吟味 欲令此問題可能,其充要條件爲得作△BDO, 即 $\frac{1}{2}l+\frac{1}{2}n>m>\frac{1}{2}l\sim\frac{1}{2}n$, 或 $l+n>2m>l\sim n$. 若此條件具備, 則問題恆能成立;否則問題爲不可能.

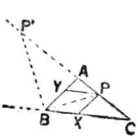
1708. 試在三角形 ABC 之邊 AB 上取一點 P, 令 P 與 AC 之距離,等於線分 BP.



解 設由 P 至 AC 之距離 PD 等於 BP, 引 AC 之垂線 BE, 聯結 BD, 則 $P\hat{B}D=P\hat{D}B=D\hat{B}E$, 故 BD 爲 $A\hat{B}E$ 之二等分線. 據此以求作圖法,甚爲易易.

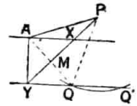
1709. 試在三角形 ABC 之一邊 AC 上求一點 P, 令由此所引 AB, BC 之平行線分別交 BC, AB 於 X, Y, 而 PX=PY.

解 設所求之點 P, 業已求得,聯結 PB,則因 PXBY 爲菱形, 故 BP 爲 $\hat{B}$ 之二等分線. 據此, 設 $\hat{B}$ 之內外二等分線與 AC 或其延線之交點爲 P 及 P′, 則 P, P′ 爲所求點.



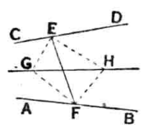
1710. 設 a, b 二直線平行, A 爲 a 上之所設點, 試過平行線外之所設點引一直線, 令截 a 於 X, b 於 Y, 而 AX, AY 相等.

解 命所設點爲 P, 直線 a 上之所設點爲 A, 假定所求之直線 PXY 業已求得,則因 AX=AY,故設 XY 之中點爲 M, 聯結 AM, 命其延線與 b 之交點爲 Q, 則 AQ⊥PY, 且 M 爲 AQ 之中點, 甚易明之. 故 △PAQ 爲二等邊, PA=PQ. 據此, 以 PA 爲半徑, P 爲中心作圓, 令截直線 b 於 Q, Q′, P 與 AQ, AQ′ 之中點 M, M′ 聯結,則 PXY, PX′Y′ 卽所求之直線.



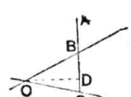
1711. 設二直線不平行,而未相交,試不延長而求其夾角之二等分線.

解 命不平行之所設直線爲 AB, CD, 求 AB, CD 夾角之二等分線. 引任意直線 EF, 令交 AB, CD, 作 E, F 上各角之二等分線 EG, FG, EH, FH, 命其交點爲 G, H, 則 G, H 各距三直線 AB, CD, EF 等遠. 故 GH 爲 AB, CD 交角之二等分線.據此, 引任意直線 EF, 命 EF 與 AB, CD 之交點爲 E, F, 引 E, F 上各角之二等分線, 令交於 G, H, 則 GH 卽所求之直線.



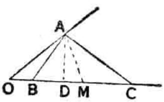
1712. 過所設點引一直線, 令與所設二直線成等角.

解 命所設點爲 A,所設二直線爲 OB, OC, 其交點爲 O. 假定所求之直線 ABC 業已求得,命其與 $B\hat{O}C$ 之二等分線 OD 之交點爲 D, 則因 △OBC 爲二等邊,故 ABC 爲 OD 之垂線. 據此,引所設二直線 OB, OC 所成角之兩二等分線,由 A 至此二直線引垂線 ABC, AB′C′, 則 ABC, AB′C′ 卽所求之直線.



1713. 設 A 爲已知角之一邊上之已知點,試在他邊上求二點 B, C, 令 BC 等於已知線分,且 $B\hat{A}C$ 等於直角.

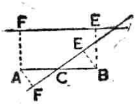
解 設 B, C 業已求得,命 BC 之中點爲 M,



則因 $B\hat{A}C=\hat{R}$, 故 AM $=\frac{1}{2}$BC, 因此得作圖法如下: 以 A 爲中心, $\frac{1}{2}$·BC 爲半徑作圓, 命其與 OC 之交點爲 M, 就直線 OB 上,在 M 之兩側取 B, C, 令 MB $=$ MC $=\frac{1}{2}$BC 卽可. 若 $\frac{1}{2}$BC 小於由 A 至直線 OC 所引之垂線 AD, 則以 A 爲中心, $\frac{1}{2}$BC 爲半徑之圓, 不交直線 OM, 因此無解. 若 $\frac{1}{2}$BC$=$AD, 則有唯一之解. 若 $\frac{1}{2}$BC$>$AD, 則有二解. 但 BC 得在邊 OC 之延線上.

1714. 過所設點引一直線, 令距他二所設點等遠.

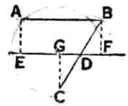
解 命所設點爲 P, 他二所設點爲 A, B;



試過 P 引一直線,令距A, B 等遠. 假定此直線業已求得, 由 A 及 B 至此直線引垂線 AF, BE, 則 AF $=$ BE, 故若 EF 與 AB 相交, 命其交點爲 C, 則 $\triangle$ACF$\equiv\triangle$BCE, 故 C 爲 AB 之中點. 次,設 EF, AB 不相交, 則 ABEF 爲平行四邊形. 據此,由 P 平行於 AB 所引之直線 PEF, 及由 P 過 AB 之中點 C 所引之直線 PC, 皆爲所求之直線.

1715. 引一直線,令距三定點等遠.

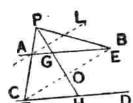
解 設三點爲 A, B, C. 聯結此三點中之任意二點,例如 B, C, 過其中點 D, 平行於 AB 引直線 DE, 則此直線卽所求之直線.



何則? 因 DE 過 CB 之中點 D, 故距 B, C 等遠[前題]. 又因 DE 平行於 AB, 故又距 A, B 等遠. 因而 DE 距三點 A, B, C 等遠. 又過 D 平行於 AC 所引之直線, 亦適合所設之條件. 又過 AB 之中點平行於 AC 或 BC 之直線, 及過 AC 之中點平行於 AB 或 BC 之直線, 亦皆適合所設之條件. 但是等直線中,兩兩相合,故實際僅有三直線;因此本題之解,普通有三個. 但若三點在一直線上,則可得無數解.

1716. 在所設二平行線上,各取一點,令距所設點等遠,且所取二點聯結之直線,與所設直線平行.

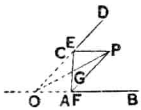
解 命所設二平行線爲 AB, CD, 所設點爲



P, 所設直線爲 L. 假定所求點 E, F 已求得, 聯結 EF, 由 P 至 EF 引垂線 PO, 命 PO 或其延線與 AB, CD 之交點爲 G, H. 於是因 PE $=$PF, 故 EO$=$FO, 因而 GO $=$ HO; 又因 EF $\parallel$ L, 故 PO$\perp$L. 據此,得作圖法如下. 過 P 垂直於 L 引 PGH, 命其與 AB, CD 之交點爲 G, H, 求 GH 之中點 O, 過 O 平行於 L 引 EF, 令交 AB, CD 於 E, F, 則 E, F 卽所求之點.

1717. 過一定點引一直線, 令達於二定直線之交點,但交點爲未知.

解 設定點爲 P, 所設二直線爲 AB, CD. 假定所求之直線 PO 業已求得, 命三直線 AB, CD, OP 之交點爲 O. 由 P 平行於 AB, CD 引二直線, 命其與 CD, AB 之交點爲 E,

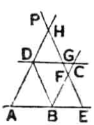


F, 聯結 EF, 則因四邊形 PEOF 爲平行四邊形, 故 OP 過 EF 之中點 G. 由是可得作圖法如下. 由 P 平行於 AB, CD, 分別引 PE, PF, 令其與 CD, AB 之交點爲 E, F, 聯結 EF 之中點 G 與 P, 卽得所求之直線.

注意 用圓之定理或比之定理以作所求之直線時, 更爲簡單.

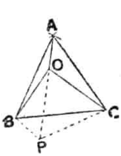
1718. 有甲乙二對平行線, 其交點順次爲 A, B, C, D, 試由一點 P 引一直線, 令其在各對平行線間之部分相等.

解 設夾於甲乙二對平行線間之部分 HF $=$ GE, 則 HG $=$ EF. 而$\triangle$HGD 與$\triangle$FEB 顯然等角, 故此兩三角形全等, 因此聯結頂點 B, D 之直線平行於 PE. 據此, 過 P 平行於 BD, AC 引二直線, 則此二線爲所求之直線.



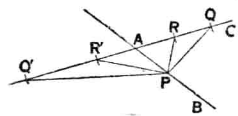
1719. 作一正三角形, 令其各角頂距所設點分別等於所設距離.

解 命所設點爲 O, 所求之正三角形爲 ABC, 且 AO $=\alpha$, BO $=\beta$, CO $=\gamma$. 在 OC 上作正三角形 COP, 聯結 BP, 則因 OC $=$ PC, AC $=$ BC, $A\hat{C}B - B\hat{C}O = P\hat{C}O - B\hat{C}O$, 故 $\triangle AOC \equiv \triangle BPC$, 因而 AO $=$ BP, 故三角形 OBP 之三邊爲已知. 由是得作圖法如下. 以 α, β, γ 爲三邊作三角形 OBP, 在 OP 上作正三角形 OPC, 聯結 BC, 在 BC 上作正三角形 ABC, 則三角形 ABC 卽所求之正三角形.



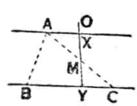
1720. 由定角 BAC 之一邊 AB 上之定點 P, 至 AC 引一直線 PQ, 令 $A\hat{P}Q$ 等於 $A\hat{Q}P$ 之三倍.

解 假定所求之直線 PQ 業已求得, 引直線 PR 令 $Q\hat{P}R$ 等於 $A\hat{Q}P$, 則 $P\hat{R}A = 2P\hat{Q}A = A\hat{P}R$, 故 AP $=$ AR. 故作圖法如下: 就 AC 上在 A 之兩側取 R, R′, 令 AR $=$ AP $=$ AR′; 又取 RQ 及 R′Q′, 令分別等於 PR, PR′, 聯結 PQ 及 PQ′, 則 PQ, PQ′ 卽所求之直線.



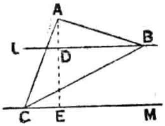
1721. 設 A 及 B 分別爲二所設平行線上之所設點, 試過他所設點 O 引一直線, 令截平行線於 X, Y, 且 AX, BY 之和等於所設長.

解 命所求之直線爲 XY, 所設點爲 O, AX $+$ BY $=m$. 按 BY $+$ CY $=m$ 取點 C, 則 YC $=$ AX. 聯結 AC, 則 AC, XY 之交點 M, 爲 AC, XY 所共之中點, 故 M 點可求得之. 於是得作圖法如下: 按 BC $=m$ 取點 C, 聯結 AC 之中點 M 與 O 而延長之, 令交二平行線於 X, Y, 則 XY 卽所求之直線. 又 C 點亦可於 B 之左方取之, 故仿前可求得他所求直線 X′Y′. 故本題普通有二解. 因 A, B 之位置, 和有時變而爲差.



1722. 作一直角二等邊三角形, 令其直角之頂點爲一所設點, 他二頂點分別在所設二平行線上.

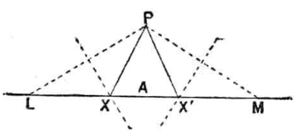
解 設直角二等邊三角形 ABC 業已求得,



其兩頂點 B, C 分別在所設二平行線 L, M 上, 其直角頂點為所設點 A. 由 A 至二平行線引公垂線 ADE, 則因 $\hat{CAE}=\hat{ABD}$ [126題], 故兩直角三角形 ACE, BAD 全等, 而 CE＝AD, AE＝BD. 由是得作圖法如次. 由 A 引二平行線 L, M 之公垂線 ADE, 在直線 L 上取 DB＝AE, 在直線 M 上取 EC＝AD, 令與 DB 在 AE 之異側, 則 △ABC 即所求之直角二等邊三角形.

1723. 設 A 為所設直線上之所設點, P 為此直線外之所設點, 設在此直線上求一點 X, 令 AX 與 XP 之和等於所設長 m.

解 假定問題已得解, 取 XL 令等於 PX,



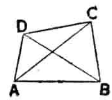
則因 AL＝m, 故 L 點一定. 由是得作圖法如次. 按 AL＝AM＝m 取二點 L, M, 引 PL, PM 之垂直二等分線, 令截 LM 於 X, X′, 則 X, X′ 為所求之點.

1724. 已知四邊形之各邊, 及其對角線之一, 求作其形.

解 設四邊形 ABCD 之各邊 AB, BC, CD, DA 及一對角線 AC 為已知, 則 △ABC, △CDA 之三邊為已知, 因而得作此兩形, 故四邊形 ABCD 之作法甚易.

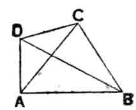
1725. 已知四邊形之三邊及其各對角線, 求作其形.

解 設四邊形 ABCD 之三邊 AB, BC, CD 與對角線 AC, BD 為已知, 則 △ABC, △BCD 中, 兩形之各邊皆為已知, 因而得作兩形, 故四邊形 ABCD 甚易作之.



1726. 已知四邊形之各邊及其一角, 求作其形.

解 設四邊形 ABCD 之各邊 AB, BC, CD, DA 及其一角 A 為已知, 則 △ABD 之二邊及其夾角為已知, 故得作其形, 因而 △CBD 之三邊又為已知, 故此形亦得作之. 故四邊形 ABCD 可求得之.

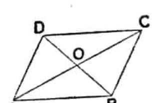


1727. 已知二邊及其夾角, 作平行四邊形.

解 平行四邊形之對邊相等, 故若知其相隣二邊, 則可知其四邊, 因而可仿前題作之.

1728. 已知二對角線及一邊, 作平行四邊形.

解 設已知平行四邊形 ABCD 之一邊 AB $=l$, 對角線 AC $=m$, BD $=n$, 則 OA$=\frac{1}{2}m$, OB$=\frac{1}{2}n$, 故可求得 △OAB. 由是得作圖法如次. 以 l, $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}n$ 為三邊作 △OAB, 在 AO, BO 之延線上分別取 OC$=\frac{1}{2}m$, OD$=\frac{1}{2}n$, 以定 C, D 二點. 於是四邊形 ABCD 即所求之平行四邊形. 若非 $\frac{1}{2}(m+n)>l>\frac{1}{2}(m\sim n)$, 則無解.



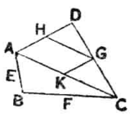
1729. 已知二對角線及其夾角, 作平行四邊形.

解 用前題之圖. 設已知平行四邊形

ABCD 之二對角線 $AC=m$, $BD=n$ 及二對角線之交角 α. 命對角線之交點爲 O, 則 $AO=\frac{1}{2}m$, $BO=\frac{1}{2}n$, $A\hat{O}B=\alpha$, 故得作三角形 AOB, 由是可仿前題作得所求之平行四邊形.

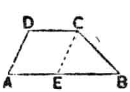
1730. 已知四邊形各邊中點之位置及一邊, 作其形.

解 設四邊形 ABCD 各邊之中點 E, F, G, H 及其一邊 BC 爲已知, 聯結 BE, 在其延線上取 A, 令 EA =BE, 聯結 AH, CG, 命其延線之交點爲 D, 則 ABCD 爲所求之四邊形. 何則? 由作圖, E 爲 AB 之中點, 聯結 AC, 則 $AC \parallel EF$, $EF=\frac{1}{2}AC$; 故 $HG \parallel AC$, $HG=\frac{1}{2}AC$. 次, 命 AC 之中點爲 K, 聯結 GK, 則因 HG=AK, 故 AKGH 爲平行四邊形, 而 $GK \parallel AD$, 故 G 爲 CD 之中點, 因而 H 爲 AD 之中點. 故四邊形 ABCD 適合所設條件.



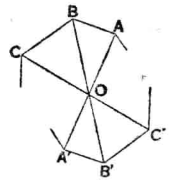
1731. 已知四邊, 作梯形.

解 設已知梯形 ABCD 之邊 $AB=l$, $BC=m$, $CD=n$, $DA=p$. 由 C 平行於 DA 引 CE, 則 △CBE 中, $BE=l-n$, $BC=m$, $CE=p$, 故得作 △CBE, 因而得作梯形 ABCD. 據此, 先以 $l-n$, m, p 爲三邊作 △CBE, 於是由 C 平行於 BE 引 CD, 令 $CD=n$, 又在 BE 之延線上取 $EA=n$, 聯結 DA, 則 ABCD 卽所求之梯形.



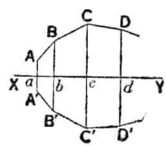
1732. 作一多角形, 令關於一所設點與所設多角形對稱.

解 設所設點爲 O, 所設多角形爲 ABC……, 求作關於 O 與 ABC……對稱之多角形. 聯結 AO, BO, CO, …, 在其延線上分別取 A′, B′, C′, …, 令 AO = OA′, BO = OB′, CO = OC′, …, 聯結 A′B′C′………, 則 A′B′C′……卽所求之多角形. 何則? 因 AO=OA′, BO=OB′, 故 AB, A′B′ 關於 O 爲對稱. 同理, BC 與 B′C′, ……等皆關於 O 爲對稱. 故兩多角形 ABC……, A′B′C′……關於 O 爲對稱.



1733. 作一多角形, 令關於一定直線與所設多角形對稱.

解 設定直線爲 XY, 所設多角形爲 ABCD……, 求作關於 XY 與 ABCD……對稱之多角形. 由 A, B, C, D, ……各頂點至 XY 引垂線, 在其延線上分別取 A′, B′, C′, D′, ……, 令 $Aa=aA'$, $Bb=bB'$, $Cc=cC'$, ……, 依次聯結 A′B′C′D′……, 則 A′B′C′D′……卽所求之多角形. 何則? 因 $Aa=aA'$, $Bb=bB'$, ……, 故設以 XY 爲界, 而將全圖形對摺, 則多角形 A′B′C′D′……與多角形 ABCD……全合, 故此兩多角形關於 XY 爲對稱.



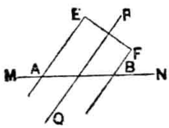
1734. 試在定直線上求各點, 令距定點之遠等於定距離.

解 設定點爲 O, 定距離爲 n. 以 O 爲中心, n 爲半徑作圓, 命其與定直線 AB 之交點爲 A, B, 則此二點卽所求之點, 此甚易明之. 若所作之圓

不與定直線交，而僅切於唯一之點，則適合所設條件之點唯一，此點卽切點．若所作之圓與定直線 AB 全不相交，則無適合所設條件之點．

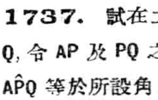
1735. 試在一定直線上求各點，令距他定直線等於定距離．

解 設 MN 及 PQ 爲二定直線，試在 MN 上求各點，令其至 PQ 之距離等於定長 d．在 PQ 上取任意點，過此點引 PQ 之垂線，在此垂線上就 PQ 之兩側取二點 E, F，令距 PQ 等於 D．過 E, F 分別平行於 PQ 引 EA, FB，命其與 MN 之交點爲 A, B，則 A, B 爲所求點．



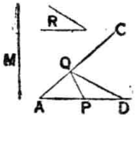
1736. 設三無限直線相交而成三角形，試在一直線上求各點，令距他二直線等遠．

解 設三直線相交而成三角形 ABC，試在一直線 BC 上求各點，令距他二直線等遠．命 $\hat{A}$ 之內外二等分線與 BC 之交點分別爲 D 及 E，則 D 及 E 卽所求之點 [1508題]．



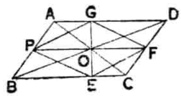
1737. 試在二直線 AB, AC 上分別取 P, Q，令 AP 及 PQ 之和等於他有限直線 M，且 $A\hat{P}Q$ 等於所設角 R．

解 在 AB 上取 AD 令等於 M，由 D 引一直線 DQ 令 $A\hat{D}Q=\frac{1}{2}\hat{R}$，且交 AC 於 Q．由 Q 引一直線 QP 令 $D\hat{Q}P$ 等於 $\frac{1}{2}\hat{R}$，且交 AB 於 P，則 P, Q 爲所求點．何則？蓋 $P\hat{Q}D=P\hat{D}Q=\frac{1}{2}\hat{R}$，故 $PQ=PD$，因而 $AP+PQ=AD=M$，且 $A\hat{P}Q=\frac{1}{2}\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{R}=\hat{R}$ 故也．



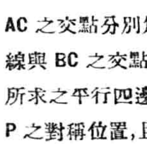
1738. 試在平行四邊形內作一菱形，但其一角頂須在一邊之定點上．

解 設 ABCD 爲平行四邊形，P 爲其一邊 AB 上之所設點．聯結 P 與對角綫交點 O，延長之令交他邊於 F．過 O 引 POF 之垂線，命其與平行四邊形二邊之交點爲 G, E，則 PEFG 爲所求之菱形．何則？因平行四邊形關於對角線交點爲對稱 [380題]，故 $PO=OF$，$GO=OE$，因而 PEFG 爲平行四邊形．又由作圖，其對角線 POF, GOE 相垂直，故此形又爲菱形 [253題]．



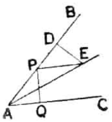
1739. 內接於定三角形，且以其內之一定點爲對角線之交點，作一平行四邊形．

解 設 P 爲所設三角形 ABC 內之所設點，聯結 AP 而延長之，命其與邊 BC 之交點爲 D．取 D 關於 P 之對稱點 D′，過 D′ 平行於 BC 引一直線，命其與邊 AB, AC 之交點分別爲 E, H．又命 EP, HP 之延線與 BC 之交點分別爲 G, F，則 EFGH 爲所求之平行四邊形．何則？因 D, D′ 在關於 P 之對稱位置，且 EH ∥ FG，故二點 E, G，及二點 F, H 關於 P 亦皆在對稱之位置，因而 EFGH 爲平行四邊形．仿前，先聯結 BP，或先聯結 CP，亦可得所求之平行四邊形．故普通本題有三解．但若 AP<PD，則平行四邊形之角頂，移至三角形邊之延線上．



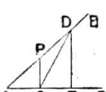
1740. 設兩直線 AB, AC 相交於 A, 試在 AB 上取一點 P, 令由 P 至 AC 引垂線 PQ, 而 AP, AQ 之和,等於有限直線 m.

解 在 AB 上取 AD, 令等於有限直線 m, 過 D 引 AB 之垂線 DE, 命其與 $\hat{A}$ 之二等分線之交點爲 E, 過 E 平行於 AC 引一直線, 命其與 AB 之交點爲 P, 則 P 卽所求點. 何則? 因 AE 爲 $P\hat{A}Q$ 之二等分線,故 $Q\hat{A}E=P\hat{A}E$, 而 $PE \parallel AQ$, 故 $Q\hat{A}E=A\hat{E}P$. 故 $P\hat{A}E=A\hat{E}P$, 因而 AP＝PE. 於是△APQ 與△PED 中, AP＝PE, $Q\hat{A}P=E\hat{P}D$, $\hat{Q}=\hat{D}$, 故 AQ＝PD. 因而 AQ＋AP＝PD＋AP＝AD＝m.



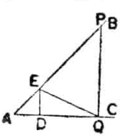
1741. 試在所設角 BAC 之一邊 AB 上取一點 P, 令由 P 至他邊 AC 所引之垂線 PQ 與 AP 之和等於定長 m.

解 在 AB 上取 AD 令其長等於 m, 由 D 至 AC 引垂線 DE, 又引 $A\hat{D}E$ 之二等分線 DQ, 令交 AC 於 Q, 由 Q 引 AC 之垂線 QP, 命其與 AB 之交點爲 P, 則 P 卽所求點. 何則? 因 $QP \parallel DE$, 且 DQ 爲 $P\hat{D}E$ 之二等分線,故 $P\hat{Q}D=Q\hat{D}E=Q\hat{D}P$, 因此 PQ＝PD, 故 AP＋PQ＝AP＋PD＝AD＝m.



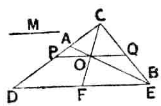
1742. 在所設角 BAC 之一邊 AB 上取一點 P, 令由P點至他邊 AC 所引之垂線 PQ 與 AP 之差等於定直線 m.

解 在 AB 上取 AE, 令等於 m. 由 E 至 AC 引垂線 ED, 作 $D\hat{E}P$ 之二等分線 EQ, 命其與 AC 之交點爲 Q. 由 Q 引 AC 之垂線 QP, 令交 AB 於 P, 則 P 卽所求點. 因 $ED \parallel PQ$, 故 $D\hat{E}Q=E\hat{Q}P$. 然 EQ 二等分 $D\hat{E}P$, 故 $P\hat{E}Q=E\hat{Q}P$, 故 PE＝PQ, 故 AP－PQ＝AP－PE＝AE＝m. 故 P 爲所求點.



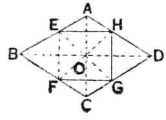
1743. 設 ABC 爲一直角三角形, $\hat{C}$ 爲直角,試在直角之二邊 AC, BC 或其延線上分別取點 P, Q, 令 PQ 之中點適在斜邊 AB 上, 且 PQ 平行於他所設直線 M.

解 平行於 M 引任意直線 DE, 令交兩邊 CA, CB 或其延線於 D, E. 聯結 DE 之中點 F 與 C, 命其與斜邊 AB 之交點爲 O, 過 O 平行於 DE 引 FQ, 命其與兩邊或兩邊延線之交點爲 P, Q, 則 P, Q 卽所求之點. 因 $PQ \parallel DE$, $DE \parallel M$,故 $PQ \parallel M$. 又因 F 爲直角三角形 DCE 之邊 DE 之中點,故 DF＝FC＝FE, 因而 $F\hat{D}C=F\hat{C}D$, $F\hat{E}C=F\hat{C}E$. 而 $PQ \parallel DE$, 故 $O\hat{P}C=F\hat{D}C$, $O\hat{Q}C=F\hat{E}C$, 故 $O\hat{P}C=O\hat{C}P$, $O\hat{Q}C=O\hat{C}Q$, 故 PO＝OC＝OQ. 故 O 爲 PQ 之中點.



1744. 試在菱形 ABCD 內作一正方形.

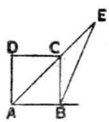
解 設 ABCD 爲菱形, EFGH 爲在其內所作之正方形. 由對稱之理,菱形對角線之交點 O 與正方形對角線之交點 O 一致. 又 $H\hat{O}G=\hat{R}$, 且 $C\hat{O}G$, $G\hat{O}D$, 等皆等於 $\frac{1}{2}\hat{R}$, 故得如下之作法. 作菱形之對角線, 命其交點爲 O, 過 O 作 $A\hat{O}D$, $D\hat{O}C$, 等之二等分線, 令與菱形之邊分別交於 H, G, F, E, 則



EFGH 爲所求之正方形.

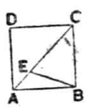
1745. 已知一對角線與一邊之和, 作正方形.

解　設 ABCD 爲所求之正方形, 在對角線 AC 之延線上取一點 E, 令 CE=CB, 則 AE 爲一對角線與一邊之和, 故等於所設長. 又 $B\hat{A}C=B\hat{C}A=\frac{1}{2}\hat{R}$, 且 $\hat{E}=\frac{1}{4}\hat{R}$, 故得作圖法如下. 引任意直線 AE, 令其長等於所設之一對角線與一邊之和; 以 AE 爲底, 作三角形 ABE, 令 AE 兩端之角分別爲 $\frac{1}{2}\hat{R}$, $\frac{1}{4}\hat{R}$. 於是以 AB 爲一邊, 在其上作正方形 ABCD, 則此正方形卽所求之正方形.

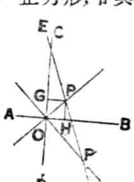


1746. 已知一對角線與一邊之差, 作一正方形.

解　設 ABCD 爲所求之正方形, 在對角線 CA 上取一點 E, 令 CE=CB. 聯結 EB, 則 $\hat{C}=\frac{1}{2}\hat{R}$, 且 $C\hat{E}B$ 爲 $\frac{1}{4}\times\hat{R}$ 之餘角, 故等於 $\hat{R}-\frac{1}{4}\hat{R}=\frac{3}{4}\times\hat{R}$; 其外角 $A\hat{E}B=2\hat{R}-\frac{3}{4}\hat{R}=\frac{5}{4}\hat{R}$. 於是得作圖法如下. 引等於所設差之 AE, 以 AE 爲一邊, 作三角形 AEB, 令 $\hat{A}=\frac{1}{2}\hat{R}$, $\hat{E}=\frac{5}{4}\hat{R}$; 以 AB 爲一邊, 在其上作正方形, 則此形卽所求之正方形.



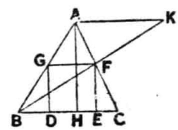
1747. 設二直線 AB, CD 直交於 O, 試作一正方形, 令其兩邊在此二直線上, 他兩邊交於他所設直線 EF 上.



解　設 GOHP 爲所求之正方形, 則 PO 二等分 $G\hat{O}H$. 反之, 設 $B\hat{O}C$ 之二等分線與 EF 之交點爲 P, 由 P 至 AB, CD 引垂線 PH, PG, 則 OGPH 卽所求之正方形. 又設 $\hat{O}$ 之二等分線之一 OP′ 與 EF 之交點爲 P′, 則由同前之作圖法, 亦可得所求之正方形.

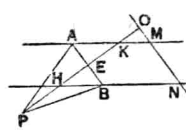
1748. 作正方形, 令內接於所設三角形.

解　設正方形 DEFG 內接於所設三角形 ABC, 引高 AH, 聯結 BF, 延長之令交過 A 之 BC 之平行線於 K. 則 AH : GD = BA : BG = AK : GF = AK : GD, 故 AK = AH. 據此, 過 A 平行於 BC 引直線 AK, 令等於高 AH. 聯結 BK, 命其與 AC 之交點爲 F, 由 F 平行於 BC 引直線 FG, 則 FG 卽所求正方形之一邊.



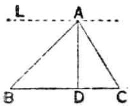
1749. 設 AM 平行於 BN, 又 MN 爲他所設直線, P 爲同平面內之所設點; 試在二平行線上分別取點 A, B, 令 PA=PB, 且 AB ∥ MN.

解　命 AB 之中點爲 E, 聯結 PE, 則 △PAB 中, 因 PA=PB, 故 PE ⊥ AB. 而 AB ∥ MN, 故 PE ⊥ MN. 令 PE 與平行線之交點爲 H, K, 則 E 爲 HK 之中點. 於是得如下之作圖法. 由 P 至 MN 引垂線 PQ, 命其與平行線之交點爲 H, K. 過 HK 之中點 E, 引 HK 之垂線, 命其與平行線之交點爲 A, B, 則 A, B 卽所求點.



1750. 已知底邊, 高, 及一底角, 作一三角形.

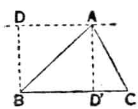
解　設已知底 BC=m, 高 AD=h, 一底角 B=β. 假定 △ABC 已求得, 則頂點 A 當



在距 BC 爲 h, 且平行於 BC 之直線 L 上; 同時頂點 A 又當在與 BC 成角 β 之直線 AB 上. 據此, 引任意直線 BC, 命等於 m; 引直線 L, 命距 BC 爲 h, 且平行於 BC; 又引直線 BA, 命與 BC 成角 β, 命 BA 與 L 之交點爲 A, 則 △ABC 卽所求三角形.

1751. 已知三角形之底 a, 高 h_a, 及頂角 A, 作其形.

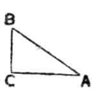
解 命 BC 爲所設底. (1)引 BC 之垂線 BD, 命其長等於 h_a, 由 D 平行於 BC 引 DA, 則所求三角形之頂點當在此直線上. (2)以 BC 爲弦, 作含 $\hat{A}$ 之圓弧, 則所求三角形之頂點, 在此圓弧上. 故所求三角形之頂點, 爲此二軌跡, 卽直線 DA 及圓弧 BAC 之交點 A, A′.



注意 兩三角形 ABC, A′BC 全等, 甚易知之.

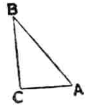
1752. 設直角三角形 ABC 之一銳角 B 及直角之一邊 AC 爲已知, 求作其形.

解 在任意直線上取 AC, 命等於所設之一邊, 過 C 引 AC 之垂線 CB, 過 A 引 AB, 命與 AC 所成之角等於所設角 B 之餘角, 且命其與 CB 之交點爲 B, 則 ABC 爲適合所設條件之三角形甚明.



1753. 已知斜邊與一邊, 作直角三角形.

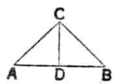
解 引直線 AC, 命其長等於所設邊, 由 C 引 AC 之垂線 CB, 以 A 爲中心, 所設斜邊之長爲半徑作圓, 命圓周與 CB 之交點爲 B, 則 ABC 卽所求之三角形.



別解 引直線 AB, 命等於所設斜邊. 以 AB 爲直徑作半圓, 又以 A 爲中心, 所設一邊之長爲半徑作圓, 與前半圓交於 C. 於是 ABC 卽所求之三角形.

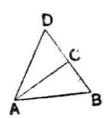
1754. 以所設直線爲斜邊, 作直角二等邊三角形.

解 設 AB 爲所設直線, AB 之中點爲 D, 由 D 引 AB 之垂線 DC. 在 DC 上取點 C, 命 CD = DA = DB, 則 ACB 卽所求之三角形. 何則? 因 CD = DA = DB, 故 $A\hat{C}B = \hat{R}$, 且因 △ADC ≡ △CDB, 故 AC = BC.



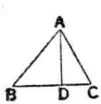
1755. 以所設直線爲斜邊, 作直角三角形, 令其一銳角爲他銳角之二倍.

解 命 AB 爲所設直線. 在 AB 上作正三角形 ABD [1680題]. 命 BD 之中點爲 C, 聯結 AC, 則 ABC 卽所求之三角形. 何則? 因 AB = AD, BC = CD, 故 $A\hat{C}B$, $A\hat{C}D$ 皆爲 $\hat{R}$ [94題], 且 $\hat{B} = D\hat{A}B = 2C\hat{A}B$.



1756. 已知高 h_a 及二底角 B, C, 作三角形.

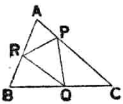
解 引任意直線 AD, 令等於 h_a. 過 D 引 AD 之垂線 BDC. 由 A 引直線 AB, 令 $B\hat{A}D$ 等於 $\hat{B}$ 之餘角, 且命其與 BC 之交點爲 B; 又由 A 引一直線 AC, 令 $C\hat{A}D$ 等於 $\hat{C}$ 之餘角, 命其與 BC 之交點爲 C. 此時 ABC 卽所求之三角形.



1757. 內接於所設三角形作一三角形,

令其二邊分別等於二所設直線,一項點在前三角形一邊上之所設點.

解　命所設三角形為 ABC, 所設二直線為

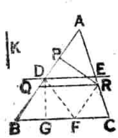


M, N, 所設點為邊 AC 上之 P. 以 P 為中心, M 為半徑作圓,命其與 AB 之交點為 R, R′; 又作 N 為半徑之同心圓, 命其與 BC 之交點為 Q, Q′. 於是三角形 PQR, PQR′, PQ′R, PQ′R′ 皆為所求三角形.

注意　四交點 R, R′, Q, Q′ 中,若有在邊之延線上者,不可用之.

1758.　內接於所設三角形, 作一二等邊三角形,令有所設高,且其底邊平行於前三角形之一邊.

解　命所設三角形為 ABC, 所設高為 K.

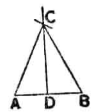


平行於 BC 引 DE, 令其間之距離等於 K, 命 DE 與 AB 之交點為 D. 以 D 為中心, DB 為半徑作圓,命其與 BC 之交點為 F. 過 F 平行於 AB 引 FR, 命其與 AC 之交點為 R. 過 R 平行於 BC 引 RQ, 命其與 AB 之交點為 Q. 在 AQ 上取 QP, 令等於 BD, 聯結 PR, 則 PQR 卽所求之三角形. 因 BC $\|$ QR, 故 $P\hat{Q}R = D\hat{B}F$, QR = BF, QP = BD, 故 △PQR ≡△DBF. 而三角形 DBF 為二等邊, 且高 DG 等於 K, 故 PQR 適合所設條件.

注意　因所求之二等邊三角形之一邊,平行於 BC, 故其一底角等於 $\hat{B}$, 或 $\hat{C}$, 而此二角顯然當取其小者. 又若 AQ<BD, 則無解.

1759.　在所設底邊上作二等邊三角形,令其等邊之和等於定直線 m.

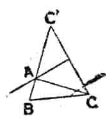
解　命所設底邊為 AB, 過 AB 之中點 D,



引 AB 之垂線 DC. 次,以 A 為中心, m 之半分為半徑作圓,令交 DC 於 C. 聯結 AC, BC, 則 ABC 卽所求之三角形. 因 C 在 DC 上,而 DC 為距二點 A, B 等遠之點之軌跡,故 AC = BC [1507題]. 而 AC = $\frac{1}{2}m$, 故 AC + BC = m, 卽三角形 ABC 適合所設條件.

1760.　已知底邊及其端之一角與他二邊之和,作三角形.

解　設 ABC 為所求之三角形,在 BA 之延



線上取一點 C′, 令 AC′ = AC, 則 A 距 C, C′ 等遠,且 BC′ 之長等於所設二邊之和,故得如次之作圖法. 以所設底邊及二邊之和為二邊,令其夾角等於所設角 B, 作三角形 C′BC. 引 CC′ 之垂直二等分線,命其與 BC′ 之交點為 A, 則 ABC 卽所求之三角形.

1761.　已知斜邊上之二點,及由直角項點至斜邊所引垂線之長與各邊上之一點,作直角三角形.

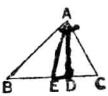
解　設 ABC 為所求之三角形, D, E 為

斜邊上之二已知點, L, M 為他二邊上之已知點. 因 D, E 已知,而斜邊在聯結此二點之直線上,故斜邊之位置為已知. 又 AH 為所設長, 故 A 在距 BC 為所設長, 且平行於 BC 之直線 AK 上. 命 LM 之中點為 N, 則因 AN = $\frac{1}{2}$LM = 一定, 故 A

在 N 爲中心, $\frac{1}{2}$LM 爲半徑之圓周上.據此,設此圓周與 AK 之交點爲 A, 則 A 卽所求三角形之頂點. 聯結 AL, AM, 命其與斜邊之交點爲 B, C, 則 ABC 卽所求三角形.

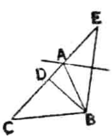
1762. 已知頂角 A, 高 h_a, 及角 A 之二等分線 w_a, 作三角形.

解 設 ABC 爲所求之三角形, D 及 E 分別爲 h_a 及 w_a 與底 BC 之交點. △ADE爲斜邊與一邊已知之直角三角形, 故甚易作之. 卽引任意直線AD, 令等於 h_a, 由 D 引 DE, 令 $A\hat{D}E=\hat{R}$, 以 A 爲中心, w_a 爲半徑作圓, 令交 DE 於 E 卽得. 於是在直線 AE 之左右分別作 $B\hat{A}E$ 及 $C\hat{A}E$, 令各等於 $\frac{1}{2}\hat{A}$, 命 AB, AC 與 BC 之交點分別爲 B 及 C. 此時三角形 ABC 卽所求者.



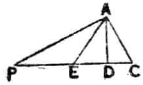
1763. 已知底邊 a, 他二邊之和 $b+c$, 及由底邊之一端至對邊所引之垂線 h_b, 作三角形.

解 設 ABC 爲所求之三角形, D 爲 h_b 與 AC 之交點, 則直角三角形 BCD 中, 斜邊 BC [卽 a] 及一邊 BD [卽 h_b] 爲已知, 故 BCD 之作法甚易得之. 作得 BCD 後,在 CD 之延線上取 E 點, 令 CE = $b+c$. 聯結 BE, 引其垂直二等分線,令交 CE 於 A, 則 ABC 爲所求之三角形.



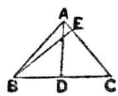
1764. 已知高爲 h_a, 底上之中線爲 m_a, 且底 a 爲他一邊 b 之二倍,作三角形.

解 設 ABC 爲所求之三角形, D, E 爲 h_a, m_a 與底之交點,則直角三角形 ADE 中,斜邊 AE [卽 m_a] 及一邊 AD [卽 h_a] 爲已知, 故三角形 ADE 之作法,甚易得之. 又因 $a=2b$, 故 AC=EC, 故 C 在 AE 之垂直二等分線上,故此垂直二等分線與 DE 延線之交點卽 C. 又在 CE 之延線上取 B 點,令 CE=EB. 於是 ABC 卽所求之三角形.



1765. 已知三角形 ABC 之底邊 BC=a, 由 B 至對邊所引之垂線爲 h_b, 底上之中線爲 m_a, 求作三角形.

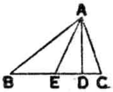
解 設三角形 ABC 爲所求之三角形, D 及 E 分別爲 m_a 及 h_b 與 BC 及 AC 之交點.此時直角三角形 BEC 中, 斜邊 BC [卽 a] 及一邊 BE [卽 h_b] 爲已知,故 BEC 之作法, 甚易得之. 以 BC 之中點 D 爲中心, m_a 爲半徑作圓, 命其與 CE [或其延線] 之交點爲 A. 於是 ABC 卽所求之三角形.



吟味 若 $h_b>a$, 則三角形 BEC 不能作, 故本題當然無解. 茲假定 $h_b<a$. 因 D 爲 BC 之中點,故由 D 至 CA 所引垂線之長爲 h_b 之半分.故設 $m_a<\frac{1}{2}h_b$, 則以 D 爲中心, m_a 爲半徑之圓不交 CE, 因而交點 A 不能求得,故問題爲不可能. 設 $m_a=\frac{1}{2}h_b$, 則圓切於 CE, 故得一解. 若 $m_a>\frac{1}{2}h_b$, 則圓交 CE 於二點,故有二解. 次,假定 $h_a=a$ 以玩索解之有無.

1766. 已知高 h_a, 底上之中線 m_a, 及他一邊 b, 作三角形.

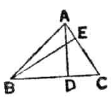
解 設所求之三角形爲 ABC, h_a 及 m_a 與 BC 之交點分別爲 D, E. 於是直角三角形



ADE 中,斜邊與一邊爲已知, 故 ADE 甚易作得. 又 AC 爲已知長 b, 故 A 爲中心, b 爲半徑之圓與 ED 或其延線之交點卽 C. 在 CE 之延線上取 B, 令 EB=CE. 於是 ABC 卽所求之三角形.

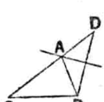
1767. 設三角形 ABC 中,由 A 及 B 至對邊所引之垂線 h_a, h_b 及 $\hat{B}$ 爲已知, 求作△ABC.

解 設 ABC 爲所求之三角形, D 及 E 分別爲 h_a, h_b 之足. 於是直角三角形 ABD 中, 一角 B 及一邊 AD 爲已知, 故 ABD 甚易作得. 又 E 點當在 B 爲中心, h_b 爲半徑之圓周上, 且當在 AB 爲直徑之圓周上,故此二圓周之交點卽 E. 又聯結 AE, 則其延線與底之交點卽 C. 於是卽得所求之三角形 ABC.



1768. 已知底邊 a, 頂角 A, 及他二邊之和 $b+c$, 求作三角形.

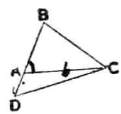
解 設 ABC 爲所求之三角形, 令 CA 向 A 方延長, 在其延線上取 D, 令 AD = AB, 則因 CD=CA+AB, 故等於已知長 $b+c$. 又因 AD =AB, 故 $\hat{D}=\frac{1}{2}B\hat{A}C$, 故 $\hat{D}$ 等於所設角 $\hat{A}$ 之半分. 又由作圖, A 距 D, B 等遠. 由是得作圖法如下. 引任意直線 CD, 令等於 $b+c$; 由 D 引 DB, 令 $C\hat{D}B=\frac{1}{2}\hat{A}$. 以 C 爲中心, a 爲半徑作圓,令交 DB 於 B. 作 DB 之垂直二等分線,令交 DC 於 A. 於是 ABC 卽所求三角形. 若 C 爲中心, a 爲半徑之圓不與 DB 交, 則無解; 若相切, 則有一解; 若相交, 則因兩交點皆可取作 B, 故有二解. 若 $a>b+c$, 當然無解.



注意 在 BC 上就同側作二弓形, 令其一含 $\frac{1}{2}\hat{A}$, 他一含 $\hat{A}$; 又以 C 爲中心, $b+c$ 爲半徑作圓, 取其與外弓形之交點; 由是亦可作得所求之三角形.

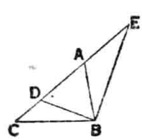
1769. 已知一底角 A, 底邊 b, 及他二邊之差 $a\sim c$, 求作三角形.

解 設 ABC 爲所求之三角形, 在 BA 之延線上取 D, 令 BD = BC, 聯結 DC, 於是 AD = BC ~ BA = $a\sim c$, 故等於所設差. 因此得作圖法如下. 引任意直線 AC 令等於 b, 引 AB 令 $C\hat{A}B=\hat{A}$. 在 AB 上 [$a<c$ 時] 或 BA 之延線上 [$a>c$ 時] 取 D, 令 AD $=a-c$, 聯結 DC, 命其垂直二等分線與 AB 之交點爲 B. 於是 ABC 卽所求三角形. 若 $a-c>b$, 卽 AD>AC, 則 DC 之垂直二等分線不與半直線 AB 交,而與 BA 之延線交,故其交點不能爲 B, 因而此時無解.



1770. 已知底邊 a, 他二邊之和 $b+c$, 及二底角之差 $\hat{B}-\hat{C}$, 試作一三角形.

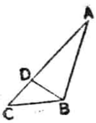
解 設 ABC 爲所求三角形, 在 CA 及其延線上分別取 D 及 E, 令 AD = AB = AE, 聯結 DB, BE. 於是由 171 題, $C\hat{B}D=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$, 故爲已知. 又 $D\hat{B}E=\hat{R}$ [177題], 故 $C\hat{B}E=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})+\hat{R}$, 因而亦爲已知. 又 CE$=b+c$, 亦爲已知. 於是得如次之作圖法. 引任意直線 BC, 令等於 a; 引 BE 令 $C\hat{B}E=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})+\hat{R}$, 以 C 爲中心, $b+c$ 爲半徑作圓,令交 BE 於



E. 作 BE 之垂直二等分線, 令交 CE 於 A, 則 ABC 卽所求之三角形. 若 $a>b+c$, 則 BE 之垂直二等分線不交 CE 而交 CB, 故不能得所求之三角形.

1771. 已知底邊 a, 他二邊之差 $b-c$, 及二底角之差 $\hat{B}-\hat{C}$, 求作三角形.

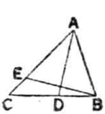
解 設 ABC 爲所求三角形, D 爲在 AC 上按 AD=AB 所取之點, 則 $C\hat{B}D=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$[171題], $CD=b-c$. 故 △CBD 之二邊及其中一邊之對角爲已知, 因而 △CBD 甚易作得之. 由是得作圖法如下. 引任意直線 BC, 令等於 a, 由 B 引一直線 BD, 令 $D\hat{B}C=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$. 以 C 爲中心, $b-c$ 爲半徑作圓, 交 BD 於 D. 引 DB 之垂直二等分線, 交 CD 於 A. 於是 ABC 卽所求三角形.



注意 三角形 CBD 之二邊及其中一邊之對角爲已知, 故由 1668 題可知其解或爲一, 或爲二. 但 $A\hat{D}B$ 爲二等邊三角形之一底角, 故爲銳角, 因而 $C\hat{D}B$ 爲鈍角, 故他一三角形在 CB 之下方.

1772. 已知一邊 [非底] c, 二底角之差 $\hat{B}-\hat{C}$, 及 $\hat{A}$ 之二等分線 w_a, 作三角形.

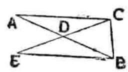
解 設 ABC 爲所求之三角形, D 爲 w_a 與 BC 之交點, 在 AC 上取 AE=AB, 聯結 BE, 則 $E\hat{B}C=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$ [171題], 故爲已知. 又 AD 爲二等邊三角形 AEB 頂角之二等分線, 故與底 BE 直交, 因而 $A\hat{D}B=\hat{R}-D\hat{B}E=\hat{R}-\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$, 故亦爲已知. 於是三角形 ABD 中, 二邊 AB, AD, 及 AB 之對角爲已知, 故 △ABD 可作得之 [1668題]. E 爲 B 關於 AD 之對稱點, 故得如下之作圖法. 以 c, w_a 爲二邊作三角形 ADB, 令 c 之對角爲 $\hat{R}-\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$. 命 B 關於 AD 之對稱點爲 E, 聯結 AE 而延長之, 令交 BD 之延線於 C. 於是 ABC 爲所求三角形.



注意 仿前題注意, 對於 $A\hat{D}B<\hat{R}$, 應加注意.

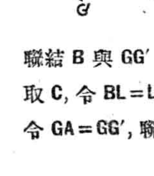
1773. 已知二邊 a, b 及第三邊上之中線 m_c, 作三角形.

解 設所求之三角形爲 ABC, D 爲 AB 之中點, 卽 m_c 與 AB 之交點. 在 CD 之延線上取 E 點, 令 CD=DE, 聯結 BE, 則因 AD=DB, CD=DE, 故 AC=EB [55題], 因此三角形 CEB 之三邊爲已知長, 故作之甚易. 於是得如下之作圖法. 以 a, b 及 $2m_c$ 爲三邊作三角形 CEB, 命相當於 $2m_c$ 之邊 CE 之中點爲 D, 聯結 DB, 在其延線上取 A, 令 DB=DA, 則 ABC 即所求之三角形.



1774. 已知三中線, 作三角形.

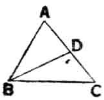
解 設所求之三角形爲 ABC, 其中線 AL, BM, CN 之交點爲 G. 在 AL 之延線上取 G′, 令 GL=LG′, 聯結 BG′, 則 △BGG′ 之三邊分別爲 △ABC 三中線之三分之二. 據此, 先作三邊爲已知之 △BGG′, 聯結 B 與 GG′ 之中點 L, 在 BL 之延線上取 C, 令 BL=LC, 又在 GG′ 之延線上取 A, 令 GA=GG′, 聯結 AB, AC, 則 ABC 卽所求



三角形.

1775. 設已知底邊 a, 由底之一端至對邊所引之中線 m_b, 及此中線與對邊所成之角,求作三角形.

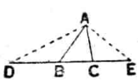
解 設 AC 之中點為 D, 則 △BDC 中, BC $=a$, BD $=m_b$, 及 B$\hat{D}$C 皆為已知,故可先仿 1668 題, 作三角形 BDC, 再在 CD 之延線上取 A 點, 令 CD=DA, 則 ABC 即所求之三角形.



附註 因三角形 BDC 中,二邊及其一之對角為已知, 故作此三角形,或無解, 或有一解,或有二解 [1668 題], 從而本題或無解, 或有一解,或有二解.

1776. 已知周 $a+b+c$, 及二底角 $\hat{B}$, $\hat{C}$, 作三角形.

解 引任意直線 DE, 令等於 $a+b+c$. 由 D 引 DA, 令 A$\hat{D}$E 等於 $\frac{1}{2}\hat{B}$; 又由他端 E 引 EA, 令與 DA 在 DE 之同側, 且 A$\hat{E}$D 等於 $\frac{1}{2}\hat{C}$. 命此二直線之交點為 A. 在角 DAE 內,由 A 引 AB, 令 D$\hat{A}$B 等於 $\frac{1}{2}\hat{B}$, 命其與 DE 之交點為 B. 仿此, 由 A 引 AC, 令 E$\hat{A}$C 等於 $\frac{1}{2}\hat{C}$, 命其與 DE 之交點為 C. 於是 ABC 即所求之三角形. 何則? A$\hat{B}$C = A$\hat{D}$B + D$\hat{A}$B = $\hat{B}$. 同理, A$\hat{C}$B 等於所設角 C. 又 AB = DB, AC = CE, 故 AB + BC + CA = DE = $a+b+c$.



1777. 已知周,作直角二等邊三角形.

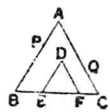
解 直角二等邊三角形之二底角,各為 $\frac{1}{2}\hat{R}$, 故兩底角與周為已知, 因此可依照前題作得之.

1778. 已知高,作正三角形.

解 引直線 AB, 令與任意直線 BC 成角 $\frac{2}{3}\hat{R}$. 平行於 BC, 引距 BC 為所設長之直線, 令交 BA 於 A. 在 BC 上取 BC, 令等於 AB. 於是 ABC 即所求三角形.

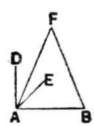
1779. 設過二定點引二直線, 令與定位置之直線成等邊三角形.

解 設 P, Q 為二定點,定位置之直線為 XY. 在 XY 上取任意長 EF, 以 EF 為一邊, 在其上作正三角形 EFD. 過 P 及 Q 分別平行於 DE, DF 引 AB, AC, 命其與 XY 之交點為 B, C, 命 AB, AC 之交點為 A. 於是 ABC 即所求三角形.



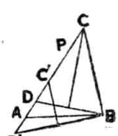
1780. 作二等邊三角形, 令底角之三分之一,等於頂角之半分.

解 引任意直線 AB, 過 A 引 AB 之垂線 AD, 作 D$\hat{A}$B 之二等分線 AE, 又作 D$\hat{A}$E 之二等分線 AF. 次由 AB 上之任意點 B 引 BF, 令 A$\hat{B}$F 等於 B$\hat{A}$F, 命 AF, BF 之交點為 F. 於是 FAB 即所求三角形. 何則? F$\hat{A}$B = $\frac{3}{4}\hat{R}$, 故 F$\hat{B}$A 亦為 $\frac{3}{4}\hat{R}$, 因而 $\hat{F}=2\hat{R}-(\frac{3}{4}\hat{R}+\frac{3}{4}\hat{R})=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 $\frac{1}{2}\hat{F}=\frac{1}{3}F\hat{A}$B $=\frac{1}{3}\times$F$\hat{B}$A.



1781. 作一三角形, 令以所設直線為底邊,他二邊之差等於所設量, 且有一邊過定點.

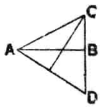
解 設 AB 為所設底邊, P 為一邊所過之點. 在直線 AP 上取 AD, 令等於二邊之差, 聯結 DB, 引其垂直二等分線,



令交 AP 之延線於 C 點,則 ABC 爲所求三角形.又在 AP 上取 AD′, 令等於二邊之差,且與 AD 在 A 之異側,引 D′B 之垂直二等分線,令交 AP 於 C′, 則 ABC′ 亦爲所求之三角形.

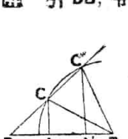
注意 仿聯結 AP 之作法,聯結 BP 而作之,亦可得二解. 又聯結 AP, 則 $\hat{A}$ 一定,故本題與已知底邊,底角之一,及他二邊之差而作三角形之問題同.

1782. 已知斜邊與一邊之差,及他一邊,作直角三角形.



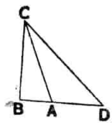
解 引 AB, 令等於所設之一邊,引 BD, 令 $A\hat{B}D=\hat{R}$, 在 BD 上取 D 點,令 BD 等於斜邊與一邊之差. 命 AD 之垂直二等分線與 DB 延線之交點爲 C. 於是 ABC 即所求三角形.何則? $A\hat{B}C=\hat{R}$, 且因 $AC=CD$, 故 $AC-BC=DC-CB=DB$, 即等於所設之斜邊與一邊之差.

1783. 已知斜邊及他二邊之和,作直角三角形.



解 引 DB, 令等於二邊之和,過 D 引 DC, 令 $C\hat{D}B=\frac{1}{2}\hat{R}$. 以 B 爲中心,所設斜邊之長爲半徑作圓,令交 DC 於 C, 由 C 至 DB 引垂線 CA, 則 ABC 即所求三角形.何則?因 $\hat{D}=\frac{1}{2}\hat{R}$, 且 $C\hat{A}D=\hat{R}$, 故 $D\hat{C}A$ 亦爲 $\frac{1}{2}\hat{R}$, 因而 $DA=AC$, 故 $DB=CA+AB$.

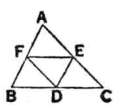
1784. 已知斜邊及他二邊之差,作三角形.



解 引 AD 令等於所設之二邊之差,由一端 D 引 DC, 令 $A\hat{D}C=\frac{1}{2}\hat{R}$. 以 A 爲中心,所設斜邊之長爲半徑作圓,令交 DC 於 C, 由 C 至 DA 之延線引垂線 CB, 則 ABC 即所求三角形. 何則?直角三角形 CBD 中, $\hat{D}=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 $B\hat{C}D$ 亦爲 $\frac{1}{2}\hat{R}$, 因而 $CB=BD$, $CB-AB=AD=$(所設之二邊之差), 且斜邊 AC 等於所設斜邊.

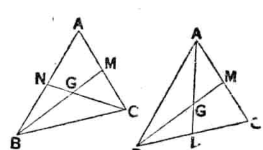
1785. 已知三邊之中點,作三角形.

解 設各邊之中點爲 D, E, F, 聯結 DE, EF, FD, 則各邊分別平行於此三直線[232題]. 於是得如下之作圖法. 順次聯結 DEF 作三角形,過此三角形之各角頂平行於對邊引三直線,命此三直線所圍之三角形爲 ABC. 於是 ABC 即所求之三角形[250題].



1786. 已知一邊及二中線,作三角形.

解 (1)設三角形 ABC 之底 BC, 二中線

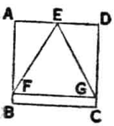


BM, CN 爲已知. BG, CG 分別爲 BM, CN 之三分之二.據此,以所設底邊 BC 及 BM, CN 之三分之二 BG, CG 作三角形 GBC; 在 BG, CG 之延線上取 M, N, 令 $GM=\frac{1}{2}BG$, $GN=\frac{1}{2}\times CG$. 聯結 BN, CM, 命其交點爲 A, 則 $\triangle ABC$ 即所求三角形.(2)設三角形 ABC 之底 BC, 二中線 AL, BM 爲已知. 此時 $BG=\frac{2}{3}BM$, $GL=\frac{1}{3}AL$, $BL=\frac{1}{2}BC$. 據此,以 $\frac{1}{2}BC$,

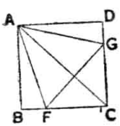
$\frac{2}{3}$BM, $\frac{1}{3}$AL 爲三邊作三角形 GBL, 在 BL, LG 之延線上分別取 C, A, 令 CL＝BL, AG＝2GL, 則 ABC 卽所求三角形.

1787. 在正方形內作正三角形, 但其一角頂須在 (1) 正方形一邊之中點上, (2) 正方形之一角頂上, (3) 正方形一邊之任意所設點上.

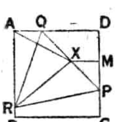
解 設正方形爲 ABCD. (1) 以邊 AD 之中點 E 爲中心, 正方形一邊之長爲半徑作圓, 令截 AB, CD 於 F, G, 則 EFG 即所求正三角形, 因 EF＝EG＝BC＝FG 故也.



(2) 由 A 引 AF, AG, 令各與 AC 成角 $\frac{1}{3}\hat{R}$, 則 AFG 即所求正三角形. 何則? 因 $F\hat{A}C = G\hat{A}C = \frac{1}{3}\hat{R}$, 故 $F\hat{A}G = \frac{2}{3}\hat{R}$. 而 △AFC ≡ △AGC [56 題], 故 AF＝AG, 因而 AFG 爲正三角形.

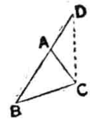


(3) 設 PQR 爲所求正三角形. 引 PQ 之垂線 RX, 則 PQ 二等分於 X. 故設 PD 之中點爲 M, 則 XM ∥ AD. 又 R, X, Q, A 在一圓周上, 故 $Q\hat{A}X = Q\hat{R}X = \frac{1}{3}\hat{R}$. 據此, 設 P 爲 CD 上之所設點, 距 C 較近. 由 PD 之中點 M 引 PD 之垂線 MX, 又引 AX, 令其與 AD 成角 $\frac{1}{3}\hat{R}$, 則得 X 點, 因而得引 PXQ. 次, 過 X 引 PQ 之垂線 XR, 命其與 AB 之交點爲 R, 聯結 PR, QR, 卽得所求之三角形 PQR.



1788. 已知二邊之和及二角, 作三角形.

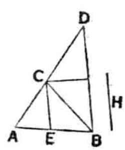
解 假定三角形 ABC 已求得, AB＋AC＝s, $\hat{A}=\alpha$, $\hat{B}=\beta$ 爲已知. 延長 BA 令 AD＝AC, 則 $A\hat{D}C=\frac{1}{2}\alpha$, $\hat{B}=\beta$, BD＝s, 故三角形 DBC 可作得之. 據此, 取 BD＝s, 由 B, D 引 BC, DC, 令分別與 BD 成角 β, $\frac{1}{2}\alpha$, 且命 BC, DC 之交點爲 C. 引 CD 之垂直二等分線, 令交 BD 於 A, 則 ABC 卽所求三角形.



注意 三角形中, 若已知其二角, 則其餘一角可徑求得之, 故本題中已知之二角不論爲何角皆可.

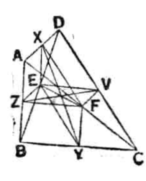
1789. 已知底邊及他二邊之和, 作三角形, 令其頂角之二等分線平行於定直線.

解 假定三角形 ABC 業已作得, 在 AC 之延線上取點 D, 令 BC＝CD, 則 AD 等於所設和. 而 BD ∥ CE [90 題], 故 BC 平行於定直線 [命之爲 H]. 由是得作圖法如下. 引直線 AB, 令等於所設底邊, 由 B 平行於 H 引 BD, 以 A 爲中心, 所設和之長爲半徑作圓, 令交 BD 於 D. 命 BD 之垂直二等分線與 AD 之交點爲 C, 則 ABC 即所求三角形.



1790. 已知四邊形之各邊及聯結一雙對邊中點之直線, 求作其形.

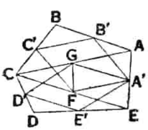
解 設 ABCD 爲所求之四邊形, 命各邊之中點順次爲 X, Z, Y, V, 各邊及 XY 爲已知. 命對角線 BD, AC 之中點分別爲 E, F, 則 XE, FY 皆平行於 AB, 而爲 AB 之半分; 又 XF, EY 亦皆平行於 DC, 且爲 DC



之半分.故 XEYF 爲平行四邊形,二邊分別等於 $\frac{1}{2}$AB 及 $\frac{1}{2}$CD. 又同理, ZEVF 亦爲平行四邊形, 二邊分別等於 $\frac{1}{2}$AD, $\frac{1}{2}$BC. 由是得以下之作圖法.引任意直線 XY, 令等於所設之聯結二對邊中點之直線, 以 XY 爲對角線, $\frac{1}{2}$AB, $\frac{1}{2}$CD 爲兩隣邊,作平行四邊形 XEYF, 又以 EF 爲對角線, $\frac{1}{2}$AD, $\frac{1}{2}$BC 爲兩隣邊,作平行四邊形 EZFV. 過 X, Y, V, Z 分別平行於 ZE, ZF, XF, XE 引四直線, 命此四直線所圍之四邊形爲 ABCD, 則 ABCD 卽所求之四邊形.

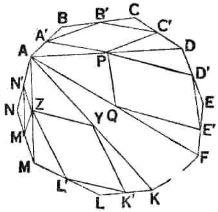
1791. 已知五邊形各邊之中點,作其形.

解 命各邊之所設中點爲 A′, B′, C′, D′, E′. 命 AC, CE 之中點分別爲 G, F, 則 A′B′C′F 爲 EABC 各邊之中點依次聯結而得之四邊形,故爲平行四邊形 [265題]. 同理, A′GD′E′ 亦爲平行四邊形. 又 G, F, A′ 爲三角形 AEC 各邊之中點, 故 GA′, GF, A′F 依次平行於 CE, AE, AC. 故得以下之作圖法. 以 A′B′, B′C′ 爲兩隣邊, 作平行四邊形 A′B′C′F; 又以 A′E′, E′D′ 爲兩隣邊,作平行四邊形 A′E′D′G, 過 A′, G, F 分別平行於 GF, A′F, A′G 引三直線,命其所成之三角形爲 AEC, 又命 EE′, CD′ 延線之交點爲 D, 及 AB′, CC′ 延線之交點爲 B. 於是 ABCDE 卽所求之五邊形.



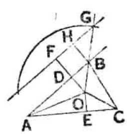
1792. 邊數爲奇數之多角形, 其各邊中點之位置爲已知,求作本形.

解 設所求之多角形 ABCD……MN 業已作得, 命各邊之中點爲 A′, B′, C′, D′…… M′, N′. 命 AD 之中點爲 P, 則 A′B′C′P 爲一平行四邊形. 又命 AF 之中點爲 Q, 則 PD′E′Q 亦爲平行四邊形. 如是,順次作平行四邊形時, 因多角形之邊數爲奇數,故最後得一三角形 AMN. 由是得作圖法如下. 由三點 Z, M′, N′ 作三角形 AMN, 再由一邊 AM 及各邊之中點 Y, K′, L′, Z 作四邊形 AKLM [1703題]. 如是順次作四邊形,至 ADCB 爲止,卽得所求之多角形 ABCD…… MN.



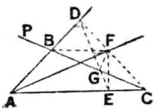
1793. 作三角形 OBC, 令其一頂點 O 在所設角 BAC 內之所設點 O 上,他二頂點在 $B\hat{A}C$ 之二邊上, 且 OB, OC 之和等於 m, $A\hat{B}O = A\hat{C}O$.

解 在 OB 之延線上取 G, 令 BG=OC. 過 G 平行於 AB 引 GHF; 由 B, O 至 GHF 引垂線 BH, OF, 命 OF 與 AB 之交點爲 D. 由 O 至 AC 引垂線 OE, 則因 $O\hat{C}E = O\hat{B}D = B\hat{G}H$, $\hat{E} = \hat{H}$, OC =BG, 故 $\triangle OCE \equiv \triangle BGH$, 因而 OE=BH, 故 DF=OE.於是得以下之作圖法.由 O 至 AB, AC 分別引垂線 OD, OE, 在 OD 之延線上取 F, 令 DF=OE, 過 F 平行於 AB 引直線FHG, 命其與 O 爲中心, m 爲半徑之圓之交點爲 G.聯結 OG,令交 AB 於 B, 引 OC 令 $B\hat{O}D = E\hat{O}C$, 且交 AC 於 C, 則 OBC 卽所求三角形.



1794. 設 $B\hat{A}C$ 爲所設角,試過定點 P 引一直線,令 AB+AC 等於定長 k.

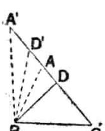
解 取 $AD=\frac{1}{2}k=AE$, 引 DF 令垂直於 AD, 且交角 A 之二等分線於 F. 以 PF 爲直徑作圓,令交 DE 於 G. 於是聯結 PG 之直線 PBGC 卽所求直線.



因 $F\hat{G}B=\hat{R}=F\hat{D}B$, 故 F, D, B, G 在一圓周上. 此時直角三角形 FDB, FEC 中, $D\hat{F}B=D\hat{G}B=E\hat{G}C=E\hat{F}C$, $FD=FE$, 故此兩直角三角形全等,因而 $DB=EC$. 故 $BA+AC=DA+AE=k$.

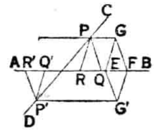
1795. 設三角形 ABC 中,由 B 至對邊所引之垂線爲 BD, 今已知 $\hat{A}$, $AB+AC$, 及 $BD+DC$, 求作其形.

解 假定所求之三角形 ABC 業已作得,在 CA 之延線上取 DD′, AA′, 令分別等於 BD, BA, 則 $B\hat{D}'D=\frac{1}{2}\hat{R}$, $B\hat{A}'A=\frac{1}{2}\hat{A}$, 且 CD′, CA′ 皆爲已知. 於是得作圖法如下. 引任意直線 CA′, 令等於 AB+AC, 在其上取 CD′, 令等於 BD+DC. 由 A′ 引 A′B, 令 $C\hat{A}'B=\frac{1}{2}\hat{A}$; 由 D′ 引 D′B, 令 $C\hat{D}'B=\frac{1}{2}\hat{R}$; 命此二直線之交點爲 B. 次作 A′B 之垂直二等分線,令交 CA′ 於 A, 於是 ABC 卽所求三角形.



1796. 作一三角形,令與所設三角形全等,且其一邊在所設直線上,此邊之對角頂在他一所設直線上.

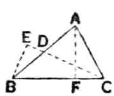
解 命所設二直線爲 AB, CD, 在 AB 上任取 EF, 令等於所設三角形之一邊. 以 EF 爲一邊,在 EF 之兩側作兩三角形 EFG, EFG′, 令皆全等於所設三角形. 過 G, G′ 平行於 AB 引二直線,命其與 CD 之交點分別爲 P, P′. 過 P 引 PQ, PR 令分別平行於 GF, GE, 則 PQR 卽所求三角形. 關於 P′ 亦然. 因 PG ∥ AB, PQ ∥ GF, 故 $PQ=GF$; 同理, $PR=GE$; 又因 PQ ∥ GF, PR ∥ GE, 故 $R\hat{P}Q=E\hat{G}F$, 故 $\triangle PQR\equiv\triangle GFE$. 又 P 在直線 CD 上, 邊 QR 在直線 AB 上, 故 △PQR 適合所設條件.



注意 若 CD ∥ AB, 則或無解,或有無數解.

1797. 設三角形之高,一底角,及由此角頂至自底之他端所引中線之距離爲已知,求作此三角形.

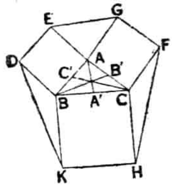
解 假定所求之三角形 ABC 已求得,高 AF, $\hat{B}$, 及由 B 至中線 CD 所引之垂線 BE 爲已知. 此時直角三角形 ABF 中, AF 及 $\hat{B}$ 爲已知, 故 △ABF 可作得之. 又因 D 爲 AB 之中點,故爲已知,因而 BD 亦爲已知; 於是三角形 BED 中,因 BD, BE 及 $B\hat{E}D=\hat{R}$ 爲已知,故 △BED 可作得之. 於是得作圖法如次. 先作直角三角形 ABF, 求 AB 之中點 D, 以 BD 爲直徑作圓, 又以 B 爲中心, BE 爲半徑作圓,命此兩圓之交點爲 E, 又命 ED 之延線與 BF 延線之交點爲 C, 則 ABC 卽所求三角形.



注意 關於兩圓之他交點 E′, 亦有一解.

1798. 設三角形 ABC 中, 在其三邊上向外方所作之正方形爲 ABDE, ACFG, BCHK. 今 EG, FH, KD 之長爲已知,求作原三角形.

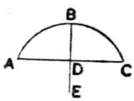
解　由 936 題,若三角形之三中線爲 AA′, BB′, CC′, 則 EG = 2AA′, FH = 2CC′, DK = 2BB′,故若已知 EG, FH, DK, 則可知三中線,因而得作所求之三角形[1774 題].



第　二　章　圓

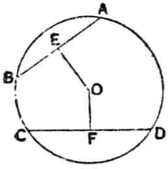
1799.　二等分所設弧.

解　設 ABC 爲所設弧, 試二等分之. 聯結 AC, 引 AC 之垂直二等分線 DE [1663 題], 命 DE 與弧 ABC 之交點爲 B, 則弧 ABC 二等分於 B. 因 DE 爲距 A, C 等遠之點之軌跡 [1507 題], 故弦 AB 等於弦 BC, 而弧 AB 及 BC 俱爲劣弧, 故相等 [438題], 卽弧 ABC 二等分於 B.



1800.　求所設圓或所設弧之中心.

解　設 ABC 爲所設圓周或弧,求其圓之中心. 取不平行之任意二弦 AB, CD, 引 AB, CD 之垂直二等分線 EO, FO [1684題], 命其交點爲 O, 則 O 卽所求之中心. 因 EO 爲弦 AB 之垂直二等分線, 故中心在 EO 上 [441題]; 又因 FO 爲弦 CD 之垂直二等分線,故中心又在 FO 上. 故 EO 與 FO 之唯一交點 O 爲圓之中心.



1801.　在所設圓周上之所設點, 引一切線.

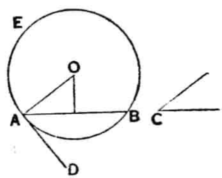
解　引過此點之半徑之垂線卽可.

1802.　由所設圓外之一點, 至此圓引一切線.

解　由 555 題自明.

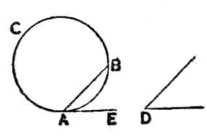
1803.　在所設直線上, 作含所設角之弓形.

解　設 AB 爲所設直線, C 爲所設角,試在 AB 上作含角 C 之弓形. 作角 BAD, 命等於所設角 C [1664題],由 A 引 AD 之垂線 [1661 題], 又引 AB 之垂直二等分線 [1684題], 命是等二線之交點爲 O. 以 O 爲中心, OA 爲半徑作圓 ABE, 則角 BAD 外之弓形 AEB 卽所求弓形. 因 AB 之垂直二等分線爲距 A 及 B 等遠之點之軌跡 [1507題], 故 O 距 A 及 B 等遠,因此 B 在 O 爲中心, OA 爲半徑之圓周上 [412題]. 又因角 OAD 爲直角, 故 AD 爲圓之切線 [548題], 故角 BAD 等於弓形 AEB 所含之弓形角 [557題]. 而角 BAD 等於 C [作圖], 故弓形 AEB 所含之角等於所設角 C. 因此 AEB 爲所求之弓形.



1804.　由所設圓截取含所設角之弓形.

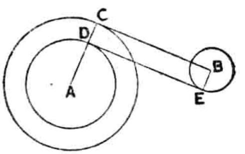
解　設 ABC 爲所設圓, D 爲所設角, 試由圓 ABC 截取一弓形,令其所含之弓形角等於所設角 D. 在圓周上之任意點 A 引切線 AE

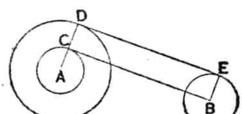


[1801題]; 引 AB 令與 AE 所成之角等於 D [1664題], 於是角 BAE 外之弓形 ACB, 卽所求之弓形. 因 AE 爲圓之切線, AB 爲由切點所引之弦, 故角 BAE 等於弓形 ACB 所含之弓形角 [557題]. 然角 BAE 等於角 D [作圖], 故弓形 ACB 所含之角等於所設角.

1805. 引所設二圓之公切線.

解 設 A 與 B 爲所設二圓之中心, 前圓大





於後圓; 試引此二圓之公切線. 以 A 爲中心, 所設二圓半徑之和或差爲半徑作圓 [公法 2], 由 B 引此圓之切線 BC, 命切點爲 C [1802題], 聯結 AC, 命 AC 或其延線與圓 A 之交點爲 D. 過 B 平行於 CD 引 BE, 令與 CD 在 BC 之同側 [1665題], 命 BE 與圓 B 之交點爲 E, 聯結 DE, 則 DE 卽所求之公切線. 因 BC 爲圓之切線, 故角 ACB 爲直角 [548題]. 又因 AC 等於 AD 與 BE 之和或差, 故 BE 等於 CD, 而 BE 又平行於 CD, 故 BCDE 爲平行四邊形 [226題]. 而此平行四邊形之一角 BCD 爲直角, 故角 CDE 及 BED 亦爲直角 [221題], 故 DE 切於所設圓.

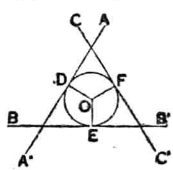
注意 若所設兩圓互在他圓之外, 則 AB 大於二半徑之和, B 在作圖用之二圓之外, 故得引四公切線. 若兩圓外切, 則 AB 等於二半徑之和, B 在作圖用二圓之一之周上, 故得引三公切線. 若兩圓相交, 則 AB 小於二半徑之和, 而大於其差, B 在作圖用二圓之一之內, 而在他一之外, 故得引二公切線. 若兩圓內切, 則 AB 等於二半徑之差, B 在作圖用兩圓之一之內, 而在他一之周上, 故得引一公切線. 若二圓之一, 全在他圓內, 則 AB 小於二半徑之差, B 在作圖用二圓之內, 故不能引切線.

1806. 過不在一直線上之三點, 作一圓.

解 此作圖法及證明, 皆包含於 444 題中.

1807. 設三所設直線不交於一點, 而兩兩相交, 試作切於此三直線之圓.

解 設 AA′, BB′, CC′ 爲不過同點, 而兩兩相交之三所設直線, 求作切 AA′, BB′, CC′ 之圓. 取距 AA′, BB′, CC′ 等遠之四點 [1672題], 命 O 爲是等點中之一,



由 O 引 AA′ 之垂線 OD, 以 O 爲中心, OD 爲半徑作圓, 則此圓切三所設直線. 何則? 引 BB′, CC′ 之垂線 OE, OF, 則因 O 距 AA′, BB′, CC′ 等遠, 故 OE 與 OF 各等於 OD, 故 E 與 F 在 O 爲中心, OD 爲半徑之圓周上 [412題]. 而 D, E, F 上之角, 皆爲直角, 故此圓切三直線 AA′, BB′, CC′ [548 題]. 又距所設三直線等遠之點, 尙有三點; 仿上, 以此三點爲中心, 亦可作得切所設直線之三

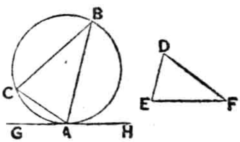
圓.故切 AA′, BB′, CC′ 之圓,可作四個.

1808. 設一直線與二平行線交,則切此三直線之圓,可作兩個.

解 由前題自明.

1809. 在所設圓內作一三角形,令與所設三角形等角.

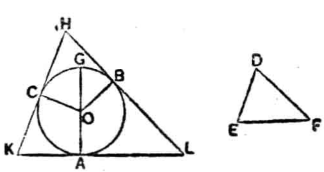
解 設 ABC 為所設圓, DEF 為所設三角形;試在圓ABC內作與 DEF 等角之三角形.



在圓周 ABC 上之任意點 A,引切線 GH [1801題],由 A 引弦 AB,令角 HAB 等於角 DEF [1664題].又由 A 引弦 AC,令角 GAC 等於角 DFE,聯結 BC,於是 ABC 卽所求三角形.今角 HAB 等於在此角外之弓形所含之角 ACB [557題];然角 DEF 等於角 HAB,故角 ACB 等於角 DEF [普.公.(c)].同理,角 ABC 等於角 DFE.故其餘一角 BAC 等於其餘一角 EDF [65題].故三角形 ABC 與三角形 DEF 等角.又此三角形係在圓 ABC 內所作明甚.

1810. 外切於所設圓作一三角形,令與所設三角形等角.

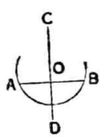
解 設 ABC 為所設圓, DEF 為所設三角形;試外切於 ABC 作與 DEF 等角之三角形.



先求圓之中心 O [1800題],引任意直徑 AG,作角 GOC 令等於角 DEF [1664題],又在 AG 之他側作角 GOB,令等於角 DFE.由點 A, B, C 引圓之切線 [1801題],而作三角形 HKL,則 HKL 卽所求三角形.因 A 及 C 上之角皆為直角 [550題],故四邊形 CKAO 內接於圓 [458題],故角 CKA 等於外角 COG [457題],卽等於角 DEF.同理,角 ALB 等於角 DFE.故其餘一角 KHL 等於其餘一角 EDF [65題].故三角形 HKL 與三角形 DEF 等角,且此三角形外切於圓 ABC.

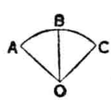
1811. 過所設二點作一圓.

解 命二所設點為 A 及 B,則過此二點之圓,其中心之軌跡為 AB 之垂直二等分線 CD [1510題].故在 CD 上取任意點 O,以之為中心,作半徑等於 OA 或 OB 之圓,卽得所求.



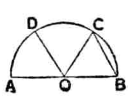
1812. 試二等分所設扇形.

解 命所設扇形為 AOC.作角 AOC 之二等分線,令交弧 AC 於 B,則直線 OB 卽將此扇形二等分.其理可由433題明之.



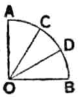
1813. 試三等分半圓.

解 設 ADCB 為半圓.以 B 為中心, BO 為半徑作圓,令交半圓周於 C.又引 $A\hat{O}C$ 之二等分線,令交弧 AC 於 D,則 D, C 將此半圓三等分.何則?由作圖法, BOC 為正三角形,故 $B\hat{O}C=\frac{2}{3}\hat{R}$,因而 $A\hat{O}C=\frac{4}{3}\hat{R}$,故 $A\hat{O}D=D\hat{O}C=\frac{2}{3}\hat{R}$.



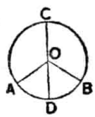
1814. 設三等分一象限.

解 設 AOB 爲象限.此時 $A\hat{O}B$ 爲 $\hat{R}$, 故作 $A\hat{O}B$ 之三等分線 OC, OD [1681題], 命其與弧之交點分別爲 C, D, 則象限 AOB 即爲 OC, OD 所三等分.



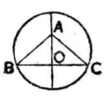
1815. 試三等分定圓周.但圓心爲已知.

解 設定圓爲 O, 以圓周上之任意點 D 爲中心, OD 爲半徑作圓,命其與前圓之交點爲 A, B, 再求優弧 AB 之中點 C [1799題], 則 A, B, C 即所求之三點.何則? 因三角形 AOD, DOB 皆爲正三角形,故 $A\hat{O}D=D\hat{O}B=\frac{2}{3}\hat{R}$, 故 $A\hat{O}B=\frac{4}{3}\hat{R}$, 因而其共軛角 $A\hat{O}B=4\hat{R}-\frac{4}{3}\hat{R}=\frac{8}{3}\hat{R}$, 故 $B\hat{O}C=A\hat{O}C=\frac{4}{3}\hat{R}$, 故弧 AB=弧 BC=弧 AC.



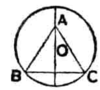
1816. 試作二等邊三角形, 令其角頂在所設圓內之所設點上,且等於所設角,並令其底之兩端在所設圓周上.

解 設圓內之所設點爲 A, 引過 A 之直徑 AO, 作角 $B\hat{A}O$, $C\hat{A}O$, 令各等於所設角之半分,命 B, C 分別爲 AB, AC 與圓周之交點, 則 ABC 即所求之三角形.何則,因 $B\hat{A}O=C\hat{A}O$, 故 BA = CA [421題], 且 $B\hat{A}C$ 等於所設角.



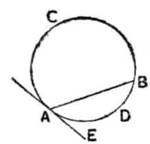
1817. 作一等邊三角形, 令其二頂點在所設圓周上,他一頂點在此圓內之所設點上.

解 命圓內之所設點爲 A, 過 A 引直徑 AO, 在 AO 之兩側分別引 AB, AC, 令 $B\hat{A}O=C\hat{A}O=\frac{1}{3}\hat{R}$, 命 AB, AC 與圓周之交點分別爲 B, C, 則 ABC 即所求三角形. 何則? 因 AB, AC 爲由直徑上之一點 A 所引之直線, 且與直徑成等角, 故 AB=AC [421題],故 $\hat{B}=\hat{C}$. 而 $B\hat{A}C=\frac{2}{3}\hat{R}$, 因而 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 皆爲 $\frac{2}{3}\hat{R}$. 故 ABC 爲等邊三角形.



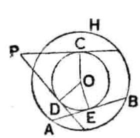
1818. 將已知圓分成二弓形, 令其一所含之弓形角,等於他一所含弓形角之二倍.

解 設弓形 ACB 所含之角,等於弓形 ADB 所含角之半分,則弓形 ACB 所含之角爲二直角之三分之一,即正三角形之一角. 據此, 由圓周上之一點 A 引一切線 AE, 由 A 引弦 AB, 令與 AE 所成之角, 等於正三角形之一角,則 AB 即將圓分爲二, 而弓形 ADB 所含之角,等於 ACB 所含之角之二倍.



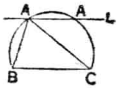
1819. 在所設圓內引一所設長之弦, 令過所設點.

解 命所設圓爲 ABH. 在此圓內任意引一所設長之弦 AB, 由圓之中心 O, 至此弦引一垂線 OE, 以 O 爲中心, OE 爲半徑作圓 DEC, 由所設點 P 至此圓引切線 PD, PC, 則 PD, PC 上之弦即所求弦.何則?因 PC, PD, AB 與中心 O 之距離, 皆等於圓 DEC 之半徑, 故相等,因而弦之長亦相等, 即等於所設長.



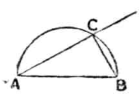
1820. 在所設直線上求一點, 令他直線張於此點之角等於所設角.

解 設所設直線 L 上之所求點 A, 業已求得,聯結 A 與 BC 之兩端, 則 A 在 BC 為弦, 含所設角 α 之圓弧上. 據此, 先在 BC 上作含已知角 α 之圓弧, 命此圓弧截直線 L 之點為 A, A′, 則 A, A′ 卽所求點.



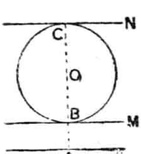
1821. 由一已知點引一直線, 令由他已知點至此直線所引之垂線等於已知長.

解 設由已知點 A, 引一直線 AC, 由他已知點 B 至 AC 所引之垂線 BC 等於所設長. 此時因 $A\hat{C}B = \hat{R}$, 故 C 在 AB 為直徑之圓周上. 據此, 以 AB 為直徑作圓, 以 B 為中心, l 為半徑作圓, 截前圓於 C, C′, 則直線 AC, AC′ 卽所求直線. 又直線 AC, AC′ 顯然關於 BA 為對稱.

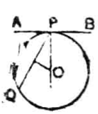


1822. 引所設圓之切線, 令平行於所設直線.

解 命平行於所設直線 L, 切所設圓 O 於 B 之直線為 M, 則 OB 或其延線為 L 之垂線. 據此, 由 O 引 L 之垂線 OA, 命 OA 與圓周之二交點為 B, C, 由 B, C 引圓之切線 M, N, 則 M, N 卽所求之切線



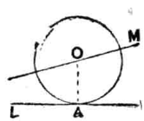
1823. 過所設點, 切所設直線於所設點, 作一圓.



解 命所設點為 Q, 所設直線上之所設點為 P. 由 P 引 AB 之垂線, 令交 PQ 之垂直二等分線於 O, 以 OP 為半徑, O 為中心作圓, 則作得之圓卽所求圓. 因 OP⊥AB, 故圓切於 AB; 又因 OP = OQ, 故此圓過 Q 點.

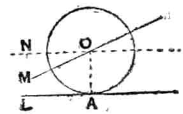
1824. 作一圓, 令其中心在所設直線上, 且切他所設直線於所設點.

解 設所求圓之中心為 O, 其中心 O 在所設直線 M 上, 且此圓切他所設直線 L 於所設點 A, 則 OA 垂直於 L. 據此, 過 A 引直線 L 之垂線, 令交他直線 M 於 O, 則 O 卽所求點. 若直線 M 垂直於 L 而不過 A, 則無解, 若過 A, 則有無數解.



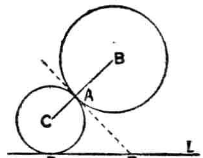
1825. 作所設半徑之圓, 令切於所設直線, 且其中心在他所設直線上.

解 命所求圓之中心為 O, 則 O 至直線 L 之距離等於所設半徑, 且 O 在直線 M 上. 據此, 平行於直線 L 引一直線 N, 令其間之距離等於所設半徑, 命 N 與 M 之交點為 O, 則 O 卽所求圓之中心.



1826. 作一圓, 令切所設直線, 且切所設圓於所設點.

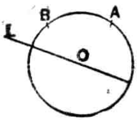
解 設所求之圓為 C, 切所設圓 B 於所設點 A, 且切於他所設直線 L. 命 A 上之切線為 AE, AE 與 L 所成角之二等分線為 EC, 則 C 卽 BA 與 EC 之交點. 據此, 由 A 引所設圓 B 之切線, 作此切線與所設直線



L 所成兩隣角之二等分線, 命其與 BA 之交點爲 C, C′, 則 C, C′ 卽所求圓之中心.

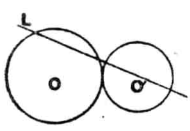
1827. 過二所設點作一圓, 令其中心在所設直線上.

解 聯結所設二點, 作其聯結直線之垂直二等分線, 則此垂直二等分線與所設直線之交點, 卽所求圓之中心. 若聯結所設二點之直線, 其垂直二等分線與所設直線平行, 則無解; 相合, 則有無數解.



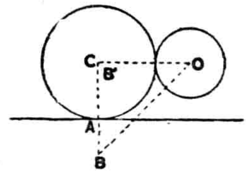
1828. 作所設半徑之圓, 令其中心在所設直線上, 且切所設圓.

解 假定所求之圓業已求得, 其中心 O_1 在所設直線 L 上, 其半徑爲 R′, 與其相切之所設圓爲 O, 其半徑爲 R. 此時 O_1 乃以 R+R′ 或 R∼R′ 爲半徑, O 爲中心之圓周與直線 L 之交點. 據此, 以 O 爲中心, R+R′, R∼R′ 爲半徑作圓, 則其圓周與直線 L 之交點, 卽所求圓之中心. 所求圓之中心, 普通有四. 但若 R+R′, R∼R′ 爲半徑之二圓周中, 其一與直線 L 切, 或其一不與之交, 或其一不與之交而他一與之切, 或二者皆不與之交, 則所求之圓有三, 或二, 或一, 或竟無之.



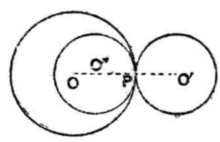
1829. 作一圓, 令切所設直線於所設點, 且切所設圓.

解 命所設圓之中心爲 O, 所設直線上之所設點爲 A. 今設所求圓之中心爲 C, 在 CA 之延線上取 AB, 令等於所設圓之半徑, 聯結 BO, 則△CBO 爲二等邊三角形, 因而 C 在 BO 之垂直二等分線上. 據此, 過 A 引所設直線之垂線 BAB′, 在其上取 B, B′, 令在 A 之異側; 且 AB, AB′ 等於所設圓之半徑. 聯結 BO, B′O, 作 BO, B′O 之垂直二等分線, 令交 BAB′ 或其延線於 C, C′, 則 C, C′ 卽所求圓之二中心.



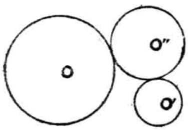
1830. 以所設半徑作圓, 令切所設圓於所設點.

解 命 P 爲所設圓周上之所設點. 聯結中心 O 與 P, 在此聯結直線上取 PO″, 令等於所設半徑, 以 O″ 爲中心, 以 O″P 爲半徑作圓, 則作得之圓卽所求圓. 因 OO″ = OP − O″P, 故兩圓切於 P. 若 O″ 不取於 OP 之內部, 而取於其延線上, 命爲 O′, 且 PO′ 等於所設半徑, 則以 O′ 爲中心, O′P 爲半徑所作之圓, 亦爲適合本題條件之圓. 故通常可得二圓. 但若 OP 適等於所設半徑, 則僅可得一圓.



1831. 以所設半徑作圓, 令切於二所設圓.

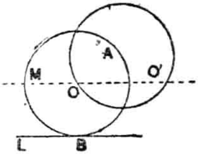
解 設兩所設圓之中心爲 O, O′, 其半徑分別爲 r, r_1, 命所求圓之半徑爲 r_2, 則所求圓之中心, 在外切於二圓 O, O′ 時, 乃 O, O′ 爲中心, $r+r_2$, r_1+r_2 爲半徑之二圓周



之交點；在外切於二圓 0, 0′ 之一，而內切於他一時，乃 $r+r_2$, $r_1\sim r_2$, 或 $r\sim r_2$, r_1+r_2 爲半徑之二圓周之交點；在內切於二圓 0, 0′ 時，乃 $r\sim r_2$, $r_1\sim r_2$ 爲半徑之二圓周之交點.［以上各款，由所設二圓之位置而生各種變化，學者可自行玩索之］.

1832. 以所設半徑作各圓，令分別適合以下之條件. (1)過所設點，且切所設直線. (2)過所設點，且切所設圓. (3)切所設二圓周.

解 (1) 假定切所設直線 L，過所設點 A，

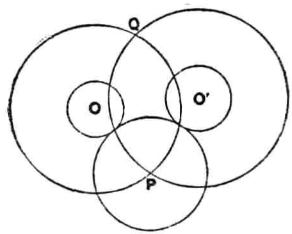


半徑爲 R 之圓業已求得，命其中心爲 0，則 0 在平行於直線 L，且距 L 爲 R 之直線 M 上；同時 0 又在 A 爲中心，半徑爲 R 之圓周上. 故所求圓之中心，爲此二線之交點 0, 0′. 若直線 M 切於 A 爲中心之圓，或不與之交，則有一解，或無解.

(2) 命所設圓之中心爲 B，其半徑爲 r，

所設點爲 A，所設半徑爲 R，則所求圓之中心，在中心爲 B，半徑爲 $r+$R 之圓周上，或中心爲 B，半徑爲 $r\sim$R 之圓周上；同時所求圓之中心，又在 A 爲中心，R 爲半徑之圓周上. 故所求圓之中心，乃中心爲 B，半徑爲 R$+r$ 之圓周與中心爲 A，半徑爲 R 之圓周之二交點；或中心爲 B，半徑爲 R$\sim r$ 之圓周與中心爲 A，半徑爲 R 之圓周之二交點. 在前款中所得之圓外切於所設圓，後款中所得之圓則內切於所設圓. 而在兩款中，若中心爲 A，半徑爲 R 之圓，與中心爲 B，半徑爲 R$+r$ 及 R$\sim r$ 二圓中之一者相切，他一相交，或一者相交，他一不交，或俱相切，或一者相切，而他一不交，或俱不相交，則有三解，或二解，或一解，或無解.

(3) 命所設二圓之中心爲 0, 0′，其半徑

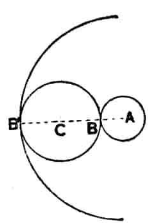


爲 R, R′，所設半徑爲 r. 今假定所求之圓業已作得，且命其中心爲 P，則 P 在中心爲 0，半徑爲 R$+r$ 之圓周上，或中心爲 0，半徑爲 R$\sim r$ 之圓周上；同時 P 又在中心爲 0′，半徑爲 R′$+r$ 之圓周上，或中心爲 0′，半徑爲 R′$\sim r$ 之圓周上. 故所求圓之中心，爲是等圓中之中心爲 0 者與中心爲 0′ 者之交點，因此通常有八解.

1833. 以所設點爲中心，作切所設圓之圓. 並證通常有二解. 又有僅可得一解之時否?

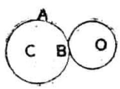
解 設所設點爲 A，以 A 爲中心之圓切中心爲 C 之所設圓於 B，則切點 B 爲直線 AC 與中心爲 C 之所設圓之交點. 據此，設直線 AC 及其延線截圓 C 之點爲 B, B′，則

以 A 爲中心, 以 AB 及 AB′ 爲半徑之二圓即所求圓. 一直線截圓之點有二, 故有二解. 若點 A 在圓 C 之周上, 則僅有一解. 若 A 與 C 合, 則無解.



1834. 過所設點作一圓, 令切所設圓於所設點.

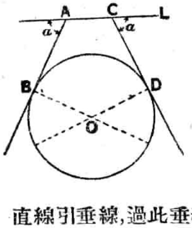
解 命所設點爲 A, B, 所設圓之中心爲 O. 假定所求之圓業已求得, 其中心爲 C, 兩圓之切點爲 B, 則中心 C 爲 AB 之垂直二等分線與 OB 之交點.



據此, 聯結 OB, 引 AB 之垂直二等分線, 命此二直線之交點爲 C, 則中心 C, 半徑 CA 之圓卽所求圓.

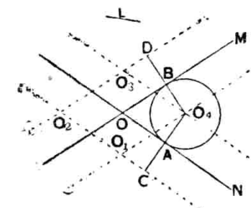
1835. 引直線, 令切所設圓, 且與所設直線成所設角.

解 命所設圓之中心爲 O, 所設直線爲 L, 所設角爲 α. 假定所求直線之一 AB 業已求得, 則 $\hat{A}=\alpha$. 據此, 由 L 上之一點引一直線 A′B′, 令與 L 成角 α, 由中心 O, 至此直線引垂線, 過此垂線〔或其延線〕與圓周之交點引 A′B′ 之平行線 AB, 則 AB 卽所求直線. 此外尙有與 AB 在異側, 與 L 成角 α 之所求切線 CD. 次, 過 B 及 D 之直徑他端上之切線, 亦爲所求直線. 故所求直線通常有四.



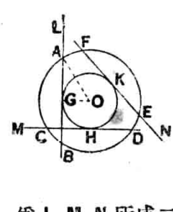
1836. 作已知半徑之圓, 令切於已知二直線.

解 以已知長 L 爲半徑之圓, 假定已求得其一, 將中心 O_4 與切點 A, B 聯結, 則 O_4 距 M, N 皆爲 L. 於是得作圖法如下. 引 M, N 之垂線 O_4AC, O_4BD. 取 O_4A, AC, O_4B, BD, 各令等於 L, 過 O_4, C, D 平行於 M, N 引 O_4O_3, O_1O_2, O_1O_4, O_2O_3, 命此四直線之交點爲 O_1, O_2, O_3, O_4, 則此四交點卽所求圓之中心.



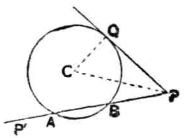
1837. 作一圓, 令其自所設三直線 L, M, N 所截得之弦各等於所設長.

解 求三直線 L, M, N 所成三角形之內心 O, 由 O 至三直線之一, 例如 L, 引垂線 OG, 在直線 L 上取 GA, 令等於所設長之半分, 以 O 爲中心, OA 爲半徑作圓卽得. 因 O 爲 L, M, N 所成三角形之內心, 故由 O 至 L, M, N 之距離相等, 因而弦 AB = CD = EF. 而 AB = 2AG = (所設長).



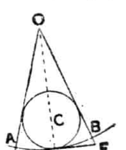
1838. 延長圓之已知弦, 在其上求一點, 令由此點至圓所引之切線, 等於已知長.

解 命圓之中心爲 C, 已知弦爲 AB. 假定所求點 P 已在 AB 之延線上求得,由 P 所引之切線 PQ 之長等於已知長 l. 聯結 CP, CQ. 則三角形 QCP 爲直角三角形, 且二邊 CQ, PQ 爲已知, 故 CP 之長一定. 據此, 先在圓周上取點 Q′, 引切線 Q′R, 令 Q′R$=l$, 以 CR 爲半徑, C 爲中心作圓, 令截 AB 之延線於 P, P′, 則 P, P′ 卽所求點.



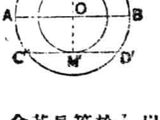
1839. 作已知扇形之內切圓.

解 假定已知扇形 OAB 之內切圓業已求得, 其中心爲 C, 則 OC 與 AÔB 之二等分線相合 [556題],且所求之圓周與扇形弧 AB 之切點 D 爲 OC 與弧 AB 之交點 [594題], 故 D 爲弧 AB 之中點. 引切弧 AB 於 D 之切線, 則三角形 OEF 爲二等邊, 所求圓之中心 C 爲三角形 OEF 之內心. 據此,由弧 AB 之中點 D, 引此弧之切線 EF, 令交 OA, OB 之延線於 E, F, 作三角形 OEF 之內切圓, 則此圓卽所求圓.



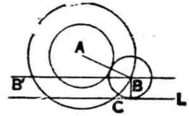
1840. 平行於所設直徑引所設長之弦.

解 命所求弦爲 CD, 其長爲 l. 由中心 O 至 CD 引垂線 OM, 則 OM 又爲 AB 之垂線. 而由中心至等於 CD 之弦所引之垂線, 恆等於 OM [448題]. 據此, 先引任意弦, 令其長等於 l, 以由 O 至此弦之距離爲半徑作同心圓,引後圓中垂直於 AB 之直徑, 由其端 M, M′ 引後圓之切線 CD, C′D′, 則 CD, C′D′ 爲所求弦.



1841. 以已知半徑作切已知直線及已知圓之圓.

解 設所求圓 B 切直線 L 及中心爲 A 之圓, 則(1) B 至 L 之距離等於所設半徑. (2) B 至 A 之距離等於圓 A 之半徑與所設半徑之和. 據此, 作距 L 爲所設半徑且平行於 L 之二直線,令在 L 之異側,以 A 爲中心, AB 爲半徑作圓, 令交前二直線, 於是所得之四交點,卽所求圓之中心.

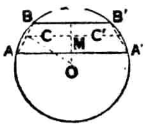


吟味 若平行於 L 之二直線中,其一與 AB 爲半徑之圓交,他一與之切, 則所求圓有三.若平行於 L 之直線中,其一與 AB 爲半徑之圓交,他一不與之交,則所求圓有二. 若平行於 L 之二直線中, 僅有一者與半徑爲 AB 之圓相切,則所求之圓唯一.若平行於 L 之二直線, 皆不與半徑爲 AB 之圓交,則本題無解. 次,以二圓半徑之差爲半徑作圓,交平行線 BB′, 則其交點亦爲所求圓之中心,此時兩圓內切.

注意 本題通常有四解,但限於圓 A 與直線 L 相交時始然.

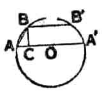
1842. 過圓周上之二點,作二平行弦,令其和等於所設長.又令其差等於所設長.

解 假定和等於所設長 $2l$. 設 A, B 爲中心 O 之圓周上之二所設點, 過 A, B 之所求平行弦 AA′, BB′ 業已作得. 過 AB 之中點 C, 引此平行弦之平行線 CC′, 命其與



A′B′ 之交點爲 C′, 則 CC′ $=l$ [279題]. 因 AB = A′B′, 故 OC = OC′, 故設由 O 至 CC′ 引垂線 OM, 則 M 爲 CC′ 之中點. 因此 M 在 OC 爲直徑之圓周上, 且 CM $=\frac{1}{2}l$, 故得引 CC′, 因而得作所求之平行弦. 先聯結 AB 之中點 C 與中心 O, 在 CO 爲直徑之圓周上取 M, 令 CM $=\frac{1}{2}l$, 聯結 CM, 由 A, B 平行於 CM 引平行弦 AA′, BB′, 則 AA′, BB′ 即所求弦. 而直徑爲 CO 之圓周, 與 C 爲中心, $\frac{1}{2}l$ 爲半徑之圓周, 交於二點 M, M′, 故所求之平行弦, 除 AA′, BB′ 一組外, 尙有一組 AA″, BB″.

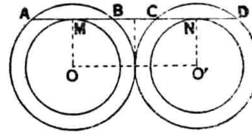
次, 設 AA′ ~ BB′ $=2l$. 由 B 至 AA′ 引垂線 BC, 則 AC $=l$, 此易明之, 故可求得 C, 因而可作得 AA′, BB′.



據此, 先以 AB 爲直徑作圓, 次在此圓周上取 C, 令 AC $=l$, 命聯結 AC 之弦爲 AA′, 由 B 平行於 AA′ 引弦 BB′, 則 AA′, BB′ 即所求平行弦之一組. 又中心 A, 半徑 l 之圓與直徑爲 AB 之圓之交點, 有 C, C′ 二個, 故所求之平行弦有 AA′, BB′ 與 AA″, BB″ 二組.

1843. 設有相切且相等之二圓, 試作直線, 令其兩端及兩個三等分點, 俱在此二圓之周上.

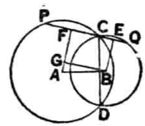
解 設所求直線 ABCD 業已求得, 由 O, O′ 至此弦引垂線 OM, O′N, 則因 AB = CD, 故 OM = O′N, 且 OM ∥ O′N, 故四邊形 OO′NM 爲矩形 [226題], 因而 OO′ = MN $=\frac{2}{3}$AD, 故 AB = BC = CD = 半徑. 據此, 先在中心爲 O



之圓中作弦 PQ, 令等於半徑, 由 O 至 PQ 引垂線 OR, 以 OR 爲半徑, 以 O, O′ 爲中心作二圓, 則此二圓之外公切線 ABCD, A′B′C′D′ 即所求直線.

1844. 過相交二圓之一交點, 引一倍弦, 令其長等於兩圓之公弦.

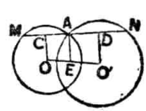
解 命所設二圓爲 A, B, 其交點爲 C, D. 假定所求之倍弦 PCQ 業已引得, 由 A, B 至 PCQ 引垂線 AF, BE, 則 CF $=\frac{1}{2}$PC, CE $=\frac{1}{2}$CQ, 故 EF $=\frac{1}{2}$PQ $=\frac{1}{2}$ × CD. 由 B 至 AF 引垂線



BG, 則 BG = EF [222題], $A\hat{G}B=\hat{R}$. 因此三角形 AGB 一定, 故得以下之作圖法. 以 AB 爲直徑作半圓, 以 B 爲中心, CD 之半分爲半徑作圓, 命前半圓與後圓之交點爲 G, 過 C 平行於 BG 引倍弦 PCQ, 則 PCQ 即所求之倍弦.

注意 設 AB 爲直徑之他半圓, 交 A 爲中心, CD 之半分爲半徑之圓於 G′, 仿前行之, 則尙可得一適合條件之倍弦.

1845. 過相交二圓之一交點引倍弦, 令其二等分於此交點.

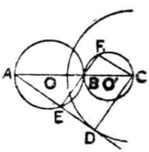


解 命兩圓之中心爲 O, O′, 聯結 OO′, 命其中點爲 E. 聯結 E 與二圓之交點 A, 過 A 引

EA 之垂線 MAN, 命其與二圓之交點爲 M, N, 則 AM=AN. 何則? 由 O, O′ 至 MAN 引垂線 OC, O′D, 則因 OE=O′E, 故 CA=AD. 而 MA=2CA, AN=2AD, 故 MA=AN.

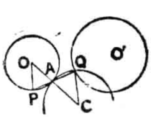
1846. 有二圓相外切, 試過其切點引所設長之直線,令其兩端在二圓周上.

解 命兩圓之中心線 OO′ 之延線與圓之交點爲 A, C. 以 C 爲中心, 所設長爲半徑作圓, 過 A 作此圓之切線 AD. 過二圓之切點 B, 引 CD 之平行線, 命其與二圓之交點爲 E, F, 則直線 EF 卽所求直線, 何則? 因 AÊB 及 BF̂C 同爲半圓內之角, 故皆等於直角, 因此 EFCD 爲矩形, 而 EF 等於 CD, 卽所設長.



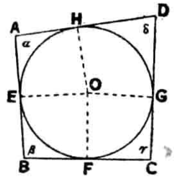
1847. 設 O, O′ 爲兩所設圓, A 爲圓 O 周上之所設點, PA 爲圓 O 之弦, Q 爲 PA 之延線與圓 O′ 之交點, 今欲令 PA=AQ, 則 PA 之位置如何?

解 聯結 OA, 在其延線上取 C, 令 OA=AC, 以 C 爲中心, CA 爲半徑作圓, 令交圓 O′ 於 Q. 聯結 QA 而延長之, 令交圓 O 於 P, 則 PQ 卽所求直線. 何則? 兩三角形 OPA, CQA 皆爲二等邊, 而其一底角 OAP, CAQ 爲對頂角, 因而相等, 且 OA=CA, 故又 PA=AQ.



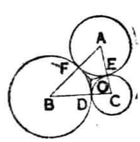
1848. 作所設圓之外切四邊形, 令與所設四邊形等角.

解 令所設四邊形之角爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 假定所求四邊形 ABCD 業已求得, $\hat{A}=\alpha$, $\hat{B}=\beta$, $\hat{C}=\gamma$, $\hat{D}=\delta$. 命圓之切點爲 E, F, G, H, 聯結中心 O 與 E, F, G, H, 則 $H\hat{O}E=\alpha$ 之補角, $E\hat{O}F=\beta$ 之補角, $F\hat{O}G=\gamma$ 之補角, $G\hat{O}H=\delta$ 之補角. 據此, 在圓周上取一點 E, 聯結 OE, 順次引 OF, OG, OH, 令 $E\hat{O}F=\beta$ 之補角, $F\hat{O}G=\gamma$ 之補角, $G\hat{O}H=\delta$ 之補角. 由 E, F, G, H 引圓之切線 AB, BC, CD, DA, 命其交點爲 A, B, C, D, 則 ABCD 卽所求四邊形.



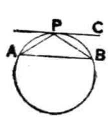
1849. 以所設三點爲中心, 作兩兩相切之三圓.

解 以所設三點爲 A, B, C, 三角形 ABC 之內切圓中心爲 O, 聯結 O 與各邊之切點 D, E, F, 則 OD, OE, OF 分別垂直於 BC, CA, AB, 而 BD=BF, CD=CE, AE=AF, 故 AF, BD, CE 爲所求圓之半徑. 若以傍心代內心 O, 則仿前可得兩兩相切之三圓. 因此通常有四解.



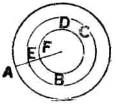
1850. 試不求中心, 而引切圓於所設點之切線.

解 設 P 爲所設圓周上之所設點, 由 P 取等長之弧 PA, PB, 聯結 AB, 過 P 平行於 AB 引 PC, 則 PC 卽所求切線. 何則? 因 BP̂C 等於其隣弓形之角 PAB 故也 [559 題].



1851. 作距所設四點等遠之圓周.

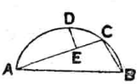
解　過四點中之三點作圓，聯結此圓之中心與他一點，令其[或其延線]交圓周，求他一點與此交點間之中點，以由圓之中心至此中點之距離爲半徑，作同心圓，



則此圓卽所求圓．而由四點中取每三點之方法有四，故用上法解本題，通常可得四解．又先將所設四點分成二組，令各組含二點，作二同心圓，令各含一組，再在此二圓之中央作一圓，則此圓亦爲所求圓．而此分組法有三，故由此法解本題，通常可得三解．

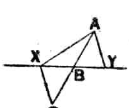
1852.　將所設弧分爲二部，令此二部所對弦之和等於所設長．

解　命所設弧爲 ADCB，其中點爲 D．以 AD 爲直徑作圓，再以 A 爲中心，所設長 m 之半分爲半徑作圓，命此兩圓之交點爲 E，聯結 AE 而延長之，令交弧於 C，於是 C 卽按本題之條件分所設弧爲二部．何則？因 D 爲弧 ACB 之中點，且 DE⊥AC，故 $AE=\frac{1}{2}(AC+CB)$ [680 題]．而由作圖，$AE=\frac{1}{2}m$，故 $\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}(AC+CB)$，因而 $m=AC+CB$．



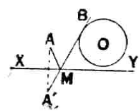
1853.　有所設點 A，B 及過 B 點之所設直線，試在此直線上取兩點 X，Y，令距 B 點等遠，且 A 點對於 XY 之視角等於所設角．

解　命 X，Y 爲所求點，延長 AB 至 C，令 $BC=AB$，則 $\triangle ABY\equiv\triangle CBX$，故 $B\hat{A}Y=B\hat{C}X$，故 $B\hat{A}X+A\hat{C}X=X\hat{A}Y=$ 一定，因而 $A\hat{X}C=$ 一定．據此，在 AB 之延線上取 C，令 $AB=BC$，以 AC 爲弦作弓形，令其弓形角等於所設角之補角，命弓形弧截 XY 之點爲 X，取 $BY=BX$，則 X，Y 卽所求點．



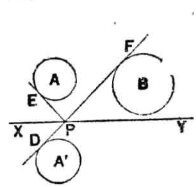
1854.　在無限直線 XY 之同側，有所設圓 O 及所設點 A，試在 XY 上求一點 M，令由此點至圓周所引之切線及 MA 與 XY 所成之角等．

解　命 A 關於 XY 之對稱點爲 A′，由 A′ 至圓 O 引切線 A′B，命此切線與 XY 之交點爲 M，則 M 爲所求點．何則？$B\hat{M}Y=A'\hat{M}X$；而 A，A′ 爲關於 XY 之一雙對稱點，故 $A\hat{M}X=A'\hat{M}X$，故 $A\hat{M}X=B\hat{M}Y$．由 A 至圓 O 引切線，則得他二解．



1855.　在所設直線上求一點，令由此點至二所設圓周所引之切線，與此直線成等角．

解　命所設直線爲 XY，兩圓爲 A，B．作圓 A 關於 XY 之對稱圓 A′，作兩圓 A′，B 之公切線 DF，命其與 XY 之交點爲 P，則 P 卽所求點．由 P 引 PE，令與 PD 在 XY 之異側，且與 XP 所成之角，等於 $X\hat{P}D$，則因圓 A，A′ 關於 XY 爲對稱，故 PE 切圓 A．而 $X\hat{P}D=Y\hat{P}F$，故 $X\hat{P}E=Y\hat{P}F$．因此 P 適合所設條件．

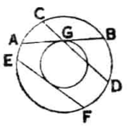


吟味　兩圓 A′，B 之公切線，通常有四，故本題通常有四解．又解之個數，視此公切

線之個數,及所設直線 XY 過此兩圓 A′, B 之相似中心而變化. 如前題末文,若取圓 A, B 之公切線與 XY 之交點, 則得他四解.

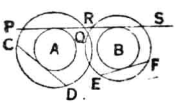
1856. 在所設圓中引弦, 令其等於所設長,且爲所設弦所二等分.

解 假定所求弦 AB 業已求得, 其中點 G 在所設弦 CD 上. 作切弦 AB 之同心圓,則切點顯然爲 G, 且因 AB 等於所設長,故距中心一定. 據此,先引任意弦 EF, 作切此弦之同心圓, 令交 CD 於 G, G′, 則切小圓於 G, G′ 之弦卽所求弦.



1857. 引所設二圓之割線, 令其爲各圓所截取之弦,分別等於所設長.

解 命所設二圓之中心爲 A, B. 在兩圓中分別引弦 CD, EF, 令分別等於所設長, 作切 CD, EF 之二同心圓, 則此二圓之公切線 PQRS, 卽所求之割線.



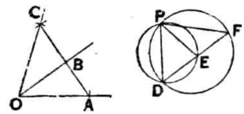
注意 兩圓之公切線通常有四, 故本題之解通常有四.

1858. 在三角形 ABC 之底 BC 上取二點 D, E, 令由 B 及 C 至三角形 ADE 之外接圓所引之切線相等.

解 若 D, E 二點, 按 BD=CE 而取, 卽適合條件,其理可由 569 題明之.

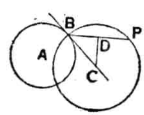
1859. 有由一點 O 所引之三直線 OA, OB, OC, 試引一所設長之直線 ABC, 令 AB =BC.

解 引任意直線 DF, 令等於所設長, 取其中點 E. 以 DE 爲弦作弓形,令其弓形角等於 $A\hat{O}B$, 又以 DF 爲弦作弓形, 令其弓形角等於 $A\hat{O}C$, 命此兩弓形弧之交點爲 P, 聯結 PD, PF. 由 OA, OC 分別取 A, C, 令 OA, OC 等於 PD, PF; 聯結 AC, 則 AC 卽所求直線. 兩三角形 AOC, DPF 中, AO, OC 分別等於 DP, PF, 其夾角亦相等,故兩形全等;由是 $O\hat{A}C=P\hat{D}F$, AC=DF, 故 △AOB ≡ △DPE, 而 AB=DE. 故 B 爲 AC 之中點.



1860. 過所設點作一圓, 令直交所設圓於其周上之所設點.

解 設 B 爲所設圓 A 周上之所設點, P 爲他所設點. 過 B 引圓 A 之切線 BC, 則過 B 直交圓 A 之圓, 其中心在 BC 上 [635題]. 又因所求圓過 B 及 P, 故其中心又當在 BP 之垂直二等分線 DC 上. 據此,求 BC, DC 之交點 C, 以 C 爲中心, CB 爲半徑作圓,則所得之圓過 B, P, 且與圓 A 直交.



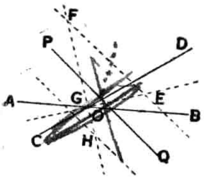
1861. 在三角形 ABC 內求一點 O, 令引 AO, BO, CO, 而角 OBC, OCA, OAB 相等.

解 過 B, C 引切 AC 之圓, 又過 C, A 引切 AB 之圓,令交前圓於點 O, 則 O 即所求點. 聯結 CO, BO, 則 $A\hat{C}O=C\hat{B}O$ [557題]. 同理, $B\hat{A}O=A\hat{C}O$. 故 $O\hat{B}C=O\hat{C}A=O\hat{A}B$.

1862. 作一圓,令切所設二直線,且距他

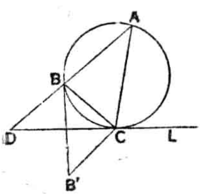
所設直線等於所設距離.

解 命所設二直線爲 AB, CD, 他所設直線爲 PQ; 求作一圓, 令切前二直線, 且其中心距後一直線等於所設長 k. 因中心距 PQ 等於 k, 故必在如是之點之軌跡 EF, HG [1505題] 之上. 又因圓切 AB, CD, 故中心又必在 AB, CD 所成角之二等分線 OE, OF 上. 故此二軌跡之交點 E, F, G, H 卽所求圓之中心.



1863. 過二所設點作切所設直線之圓.

解 設 A, B 爲二所設點, L 爲所設直線. 聯結 AB 而延長之, 令交直線 L 於 D, 命 B 點關於直線 L 之對稱點爲 B′. 次, 假定所求之圓, 業已求得, 命其與直線 L 之切點爲 C. 聯結 B′C, BC, AC, 則 $\hat{D}+D\hat{C}A+\hat{A}=2\hat{R}$; 而 $B'\hat{C}D=B\hat{C}D=\hat{A}$, 故 $\hat{D}+D\hat{C}A+B'\hat{C}D=2\hat{R}$, 卽 $\hat{D}+B'\hat{C}A=2\hat{R}$, 故 $B'\hat{C}A$ 一定. 而 B′ 爲定點, 故以 AB′ 爲弦, 作含定角 B′CA 之圓弧, 卽得 C 點.

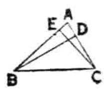


1864. 已知三角形之底邊 a, 高 h_a, 及中線 m_a, 作此三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形, 則 BC 等於所設長 a, 故其中點 M 爲已知. 因 MA 等於所設長 m_a, 故 A 在 M 爲中心, m_a 爲半徑之圓周上. 又因高 AD 等於所設長 h_a, 故 A 在距 BC 爲 h_a 且平行於 BC 之直線上. 故設此平行線與前圓之一交點爲 A, 則 A 卽所求三角形之頂點. 若此平行線不與圓交, 卽 $m_a<h_a$, 則本題爲不可能.

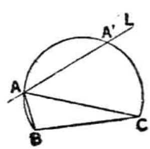
1865. 已知底邊 a, 及由底之兩端至對邊所引之垂線 h_b, h_c, 作三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形, 則由 B 至 CA 所引之垂線 BD 等於 h_b, 由 C 至 AB 所引之垂線 CE 等於 h_c, 故得作圖法如下. 引任意直線 BC, 令等於 a. 以 B 爲中心, h_b 爲半徑作圓, 由 C 引此圓之切線 CD; 又以 C 爲中心, h_c 爲半徑作圓, 由 B 引此圓之切線 BE; 命 CD, BE 之交點爲 A. 於是 ABC 卽所求三角形.



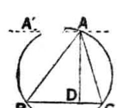
1866. 已知底邊及頂角之大小, 作三角形, 令其頂點在所設直線上.

解 設 BC 爲所設底, L 爲所設直線. 以 BC 爲弦, 在其上作含所設角之弧, 命其與直線 L 之交點爲 A 及 A′, 則三角形 ABC 及 A′BC 皆爲所求三角形.



1867. 已知底邊, 高 [由頂點至底邊所引之垂線], 及外接圓之半徑, 作三角形.

解 設 △ABC 業已求得, 高 AD $=h$, 外接圓之半徑爲 r, 底邊爲 m, 則頂點 A 距 BC 爲 h, 且在半徑爲 r 之圓周上. 據此, 先作半徑爲 r 之圓, 再作此圓之弦 BC, 令等於 m, 引 BC 之平行線 AA′, 令



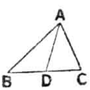
其距 BC 爲 h, 交圓於 A, A′, 則三角形 ABC, A′BC 卽所求圓. 但此兩圓全等. 若 AA′ 不與圓交,則無解.

1868. 已知斜邊及由直角頂至斜邊所引之垂線,作直角三角形.

解 本題係前題中 BC 取作斜邊之特例.

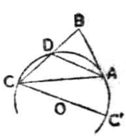
1869. 已知頂角 A, 底邊 a, 及底上之中線 m_a, 作三角形.

解 引任意直線 BC, 令等於所設長 a, 則頂點 A 在 BC 爲弦,含所設角 $\hat{A}$ 之弓形弦上; 同時頂點 A 又在 BC 之中點 D 爲中心, 所設長 m_a 爲半徑之圓周上. 故此二弧之交點,卽所求三角形之頂點 A.



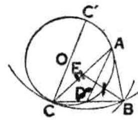
1870. 已知底邊 b, 底角之一 A, 及由此角頂所引之中線與對邊所成之角,作三角形.

解 假定三角形 ABC 業已作得, 由 A 所引之中線與對邊 BC 之交點爲 D, 則 $\hat{ADC}$ 爲已知. 故 D 在圓弧 ADC 上. 又因 CD = DB, 故命 C′ 爲過 C 直徑之他端,則 B 在 C′ 爲中心, C′C 爲半徑之圓周上 [1505 題]. 如是若底角 $\hat{A}$ 爲已知, 則 B 卽由 A 按 $\hat{CAB}=\hat{A}$ 所引之直線與圓 C′ 之交點. 故三角形 ABC 可作得之.



1871. 已知三角形 ABC 中底上之中線與底所成之角 $(\widehat{m_a, a})$, AC $=b$, 及 AC 上之中線 m_b, 求作本形.

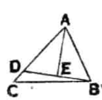
解 設 ABC 爲所求三角形, BC 之中點爲 D, AC 之中點爲 E. 因已知 AC $=b$, $\hat{ADC}$ $=(m_a, a)$, 故得作圓 ADC. B 係在直線 CD 上按 DB = DC 所取之點,故設圓 ADC 中過 C 直徑之他端爲 C′, 則 B 在 C′ 爲中心, CC′ 爲半徑之圓周上 [1505 題]. 同時 B, 又在 E 爲中心, m_b 爲半徑之圓周上.據此, 得作圖法如下. 引任意直線 AC, 令等於所設長 b. 以 AC 爲弦, 在其上作含角 $(\widehat{m_a,a})$ 之弓形.命此弓形之圓之中心爲 O, 直線 CO 與此圓之交點爲 C′, 作 C′ 爲中心, CC′ 爲半徑之圓.又以 AC 之中點 E 爲中心, m_b 爲半徑作圓,命其與前圓之交點爲 B. 於是 ABC 卽所求三角形.



注意 取圓 C′ 與圓 E 之他交點 B′, 倘可得一三角形 AB′C.

1872. 已知底邊 a, 頂角 A, 及他二邊之差 $b-c$, 求作三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形,在 AC 上取 D, 令 AD = AB, 聯結 DB, 由 A 至 DB 引垂線 AE, 則因 AD = AB, 故 $\hat{DAE}=\frac{1}{2}\hat{A}$, 因而 $\hat{CDB}=\frac{1}{2}\hat{A}+\hat{R}$, 卽爲已知. 又 CD = CA − AD = CA − AB $=b-c$, 故亦爲已知. 於是得作圖法如下.引任意直線 BC, 令等於所設長 a, 以 BC 爲弦, $\frac{1}{2}\hat{A}+\hat{R}$ 爲弓形角, 作弓形弧,以 C 爲中心, $b-c$ 爲半徑作圓.命此二弧之交點爲 D, 又命 CD 之延線與 DB 之垂直二等分線之交點爲 A. 於是 ABC 卽所求三角形.

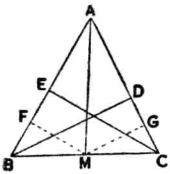


注意 若 $c>b$, 亦可仿前作得之.

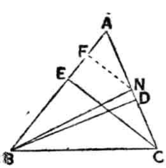
1873. 已知三角形之一中線及二垂線,

作本形.

解 (1) 設已知之中線爲 AM, 垂線爲 BD, CE. 由 M 至 AB, AC 引垂線 MF, MG, 則 MF, MG 分別等於 CE, BD 之半分, 故爲已知. 據此, 以 AM 爲直徑作圓; 以 M 爲中心, $\frac{1}{2}$BD 爲半徑作圓弧, 令截前圓於 G; 又以 M 爲中心, $\frac{1}{2}$CE 爲半徑作圓弧, 令截前圓於 F. 聯結 AG, AF, 在 AF 上取 B, 令距 AC 等於 BD. 聯結 BM 而延長之, 令截 AG 於 C, 則 ABC 卽所求三角形.



(2) 設已知之中線爲 BN, 垂線爲 BD, CE. 直角三角形 BDN 中, BD, BN 爲已知, 故 △BDN 可作得之 [1753題]. 次, 由 N 至 AB 引垂線 NF, 則 NF $=\frac{1}{2}$CE, 故爲已知, 故三角形 BNF 亦可作得之 [1753題]. 據此, 先作三角形 BND, 再以 BN 爲直徑作圓, 又以 N 爲中心, $\frac{1}{2}$CE 爲半徑作圓弧, 命此弧截前圓之點爲 F, 命 BF, DN 之交點爲 A, 在 AN 之延線上取 NC, 令等於 AN. 聯結 BC, 則 ABC 卽所求三角形.

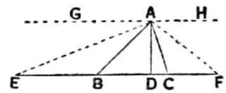


本題 (1) 中, 須 $\frac{1}{2}h_c<m_a$, $\frac{1}{2}h_b<m_a$, 卽 $h_c<2m_a$, $h_b<2m_a$. (2) 中準此.

注意 三角形之三中線與三垂線中, 若有三者爲已知, 而求作時, 則若已知者爲三中線, 可觀 1774 題; 二中線一垂線, 可觀 1913題; 一中線二垂線, 可觀本題; 三垂線, 可觀2036題.

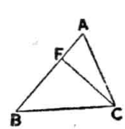
1874. 已知(1)一角, 一垂線, 周; (2)二角, 一垂線, 求作三角形.

解 (1)(A)設已知三角形 ABC 之周 $2p$, 一垂線 AD $=h$, 及 $\hat{A}=\alpha$. 假定所求三角形 ABC 業已求得, 取 BE = AB, CF = AC, 聯結 AE, AF, 則 △AEF 中, EF $=2p$, AD $=h$, $E\hat{A}F=\hat{\alpha}+\frac{1}{2}(2\hat{R}-\hat{\alpha})=\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{\alpha}$, 故三角形 AEF 可求得之. 據此, 先引長 $2p$ 之直線 EF, 又引平行於 EF, 距 EF 爲 h 之直線 GH. 在 EF 上作含 $\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{\alpha}$ 之圓弧, 命此圓弧與 GH 之交點爲 A, A′. 作 AE, AF 及 A′E, A′F 之垂直二等分線, 令截 EF 於 B, C, 及 B′, C′, 則三角形 ABC, 三角形 A′B′C′, 卽所求三角形. 但兩三角形全等, 此甚易知之. 若圓弧 EAF 與 GH 相切. 則有一解; 不相交且不相切, 則無解.



(B) 設已知三角形 ABC 之 $\hat{B}=\beta$, 周 $2p$, 垂線 AD $=h$. 假定三角形 ABC 已求得, 則因 $A\hat{E}F=\frac{1}{2}\beta$, AD $=h$, EF $=2p$, 故三角形 AEF 可求得之, 因而三角形 ABC 亦可求得. 據此, 先取 EF $=2p$, 引 EA, 令與 EF 成角 $\frac{1}{2}\beta$, 引 GH, 令平行於 EF, 且距 EF 爲 h. 命 GH 與 EA 之交點爲 A, 聯結 EA, FA, 命其垂直二等分線與 EF 之交點爲 B, C, 聯結 AB, AC, 卽得所求之三角形 ABC.

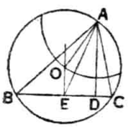
(2) 設已知三角形 ABC 之二角 B, C, 及垂線 CF. 此時直角三角形 BCF 中, $\hat{B}$ 及 CF 已知, 故可作得之, 因而可知 BC. 於是問題變爲已知底邊 BC, 及



二底角 B, C, 求作三角形. 解此問題,至爲易易. 若已知者爲 CF 及 $\hat{A}$, $\hat{B}$, 可觀 1756 題.

1875. 已知高 h_a, 底邊上之中線 m_a, 及外接圓半徑 r, 求作三角形.

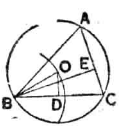
解 設所求之三角形爲 ABC, D 及 E 分別爲 h_a, m_a 與底之交點.



此時三角形 ADE 爲已知斜邊及一邊之直角三角形, 故甚易作得之. 又外心 O 在過 BC 之中點 E 而垂直於 BC 之直線 EO 上, 且 O 與 A 之距離爲 r, 故又在 A 爲中心, r 爲半徑之圓周上. 據此,命此圓周與 EO 之交點爲 O, 則 O 爲外心,由是可作得外接圓,命 DE 之延線與圓之交點爲 B, C, 則 ABC 卽所求三角形.

1876. 設過底邊 a, 外接圓之半徑 r, 及由底之一端所引之垂線 h_b, 求作三角形.

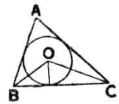
解 設三角形 ABC 爲所求三角形, E 爲 h_b 與邊 AC 之交點.



於是三角形 BCE 爲已知斜邊 BC, 卽 a, 及一邊 BE, 卽 h_b 之直角三角形, 故甚易作得之 [1753題]. 又外心 O 乃 B 爲中心, r 爲半徑之圓與 BC 之垂直二等分線之交點, 故外心 O 可求得之, 由是又可得外接圓. 命 CE 之延線與此外接圓之交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.

1877. 已知一底角 B, 底邊 a, 及內切圓之半徑 ρ, 求作三角形.

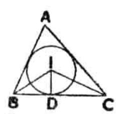
解 設 ABC 爲所求之三角形, O 爲內心,



則因 $O\hat{B}C$ 爲 $\frac{1}{2}\hat{B}$, 故爲已知角. 於是三角形 OBC 中, 底 BC $[a]$, 一角 OBC, 及高 ρ 爲已知, 故三角形 OBC 甚易作得之 [1750題]. 據此,以 O 爲中心, ρ 爲半徑作圓, 則此圓卽內切圓. 由 B 及 C 至此圓引切線, 命其交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.

1878. 已知底邊 a, 頂角 A, 及內切圓之半徑 ρ, 作三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形, I 爲內心. 本題中以先決定 I 爲妙.



因 I 爲內心, 故由 201 題, $B\hat{I}C = \hat{R} + \frac{1}{2}\hat{A}$, 而 $\hat{A}$ 爲已知, 故此角亦一定. 又 ID 爲三角形 IBC 之高, 而等於所設之 ρ. 故 △IBC 中, 底, 高, 及頂角皆已知, 故此三角形可作得之 [1751題], 因而可作得內切圓. 由 B 及 C 至此圓引切線, 命其交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.

1879. 已知頂角 A, 此角之二等分線 w_a, 及內切圓半徑 ρ, 求作三角形.

解 作 $B\hat{A}C$, 令等於所設角 A, 在此角之二等分線上取點 D, 令 AD $= w_a$,

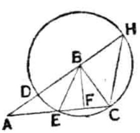
於是內心當在此直線 AD 上, 可不待言. 引一直線, 令平行於此角二邊之一, 例如 AB, 且令其距離爲 ρ, 於是內心又當在此直線上. 故設此直線與 AD 之交點爲 O, 則 O 爲內心. 據此, 以此 O 點爲中心, ρ 爲半徑作圓, 則此圓切 AB, AC, 而爲三角形 ABC 之內切圓. 過

D 引圓之切線,命其與角 A 之二邊之交點爲 B 及 C, 則 ABC 卽所求三角形.

吟味　若 D 在圓 O 內, 則無解;若在圓周上, 則有一解, 若在圓外, 則有二解.

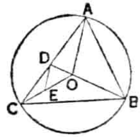
1880.　已知頂角 B, 及其二邊之差 $c-a$, 及由頂點至底邊所引垂線 h_b 將底所分二分之差, 求作三角形.

解　設 ABC 爲所求三角形,在 BA 上取 BD ＝BC, 則 AD＝$c-a$, 故爲已知.次命 h_b 之足爲 F, C 關於 F 之對稱點爲 E, 則 AE ＝ AF－FE ＝ AF －FC, 故亦爲已知.由作圖, BD＝BC＝BE, 故三點 D, E, C 皆在 B 爲中心之一圓周上. 命 DB 之延線與此圓之交點爲 H, 則 $\hat{H}=\frac{1}{2}\hat{B}$, 故爲已知.而 DECH 爲圓之內接四邊形,故 $A\hat{E}D=\hat{H}=\frac{1}{2}\hat{B}$, 故 $A\hat{E}D$ 亦爲已知. 於是三角形 AED 中, 二邊 AE, AD 及 AD 之對角 AED 爲已知,故此三角形可作得之[1668題]. 又 B 距二點 D, E 等遠,且在直線 AD 之延線上.因此得作圖法如下. 作三角形 ADE, 令 AD＝$c-a$, AE ＝(b 爲 h_b 所分二分之差), 且 $A\hat{E}D=\frac{1}{2}\hat{B}$ [1668題].命 DE 之垂直二等分線與 AD 延線之交點爲 B, 由 B 至 AE 之延線上引垂線,命其足爲 F, 取 E 關於 F 之對稱點 C, 則 ABC 卽所求三角形.



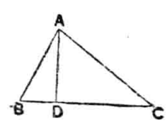
1881.　已知底邊 a, 頂角 A, 及由底之一端至對邊所引之中線 m_b, 求作三角形.

解　假定 ABC 爲已作得之三角形, O 爲外心, E 爲 OC 之中點, D 爲 AC 之中點.於是因 $\hat{A}$ 及 a 爲已知, 故可定外接圓, 因而中心 O, 半徑 OA 之大小亦可決定.而 ED＝$\frac{1}{2}$ ×OA, 故 ED 亦可決定.又 D 乃中心 E, 半徑 $\frac{1}{2}$OA 之圓,與中心 B, 半徑 m_b 之圓之交點. 由是得作圖法如下. 引任意直線 BC, 令其長等於 a, 以 BC 爲弦作弓形, 令其弓形角等於 $\hat{A}$, 命其中心爲 O. 聯結 OC, 命其中點爲 E, 以 E 爲中心, $\frac{1}{2}$OC 爲半徑作圓,又以 B 爲中心, m_b 爲半徑作圓,命此二圓交點之一爲 D. 聯結 CD 而延長之,令交圓於 A, 聯結 AB, 卽得所求三角形 ABC.

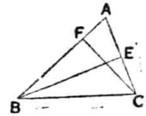


1882.　已知(1)二邊及一垂線,(2) 一邊及二垂線,(3)外接圓之半徑,一邊,及一垂線,求作三角形.

解　(1)設已知 AB, AC, 及垂線 AD, 則三角形 ABD 可作得之[1753題].於是先作三角形 ABD, 再作中心 A, 半徑 AC 之圓弧,令截 BD 或其延線於 C′, C, 則三角形 ABC, ABC′ 皆爲所求三角形.



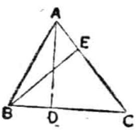
次, 設已知 AB, AC 及垂線 BE, 則三角形 ABE 可作得之. 於是先作三角形 ABE, 再在 AE 上取 AC, 令等於所設長,則 ABC 即所求三角形.



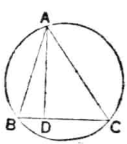
(2)　設三角形 ABC 之一邊 BC 及二垂線 BE, CF 爲已知, 則 E,F 在 BC 爲直徑之圓周上. 據此, 先以 BC 爲直徑作半圓周,再

以 B 及 C 爲中心, BE 及 CF 爲半徑作圓弧,令分別交前圓於 E, F. 聯結 BF, CE, 命其交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.

次, 設三角形 ABC 之一邊 BC 及二垂線 BE, AD 爲已知,則直角三角形 BEC 中, 有二邊已知, 故可作得之[1753題]. 據此,先作直角三角形 BEC, 再作平行於 BC 且距 BC 等於所設距離 AD 之直線,命其與 CE 之交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.



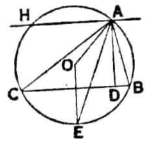
(3) 設外接圓之半徑 r, BC $=a$, 垂線 AD $=h_a$ 爲已知. 先作半徑 r 之圓, 取此圓之弦 BC, 令等於 a, 引平行於 BC, 且距 BC 爲 h_a 之直線, 命其與圓之交點爲 A, A′, 則三角形 ABC, A′BC 卽所求三角形.



次, 設外接圓之半徑 r, 一邊 BC, 及垂線 BE 爲已知. 此時三角形 EBC 爲直角三角形, 且二邊已知,故可作得之. 據此,先作半徑 r 之圓, 取弦 BC 令等於所設長, 以 BC 爲斜邊作直角三角形 EBC, 令其一邊 BE 等於所設長, 命 EC 與圓之交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.

1883. 已知高 h_a, 二底角之差 $\hat{B}-\hat{C}$, 及外接圓之半徑 r, 求作三角形.

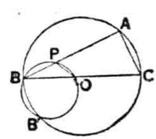
解 設 ABC 爲所求三角形, E 爲外接圓周上弧 BC 之中點, D 爲 h_a 之足, O 爲外心. 此時三角形 OAE 爲二等邊, 故 $O\hat{A}E=O\hat{E}A$. 而弧 BE $=$ 弧 EC, 故 AE 爲 $\hat{A}$ 之二等分線. 又 AD, OE 皆垂直於 BC, 故 AD $\parallel$ OE, 故 $\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})=D\hat{A}E$ [164題] $=A\hat{E}O=O\hat{A}E$. 據此, 在半徑爲 r 之圓周上取任意點 A, 聯結 OA, 引 AE 令與 OA 成角 $\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$, 命其與圓周之交點爲 E. 過 A 平行於 OE 引直線 AD, 令 AD $=h_a$, 再過 D 垂直於 AD 引弦 BC, 則 ABC 卽所求三角形.



別解 由 A 平行於 BC 引直線 AH. 因 $\hat{B}$ 之測度爲 $\frac{1}{2}$ 弧 AHC, $\hat{C}$ 之測度爲 $\frac{1}{2}$ 弧 AB, 故 $\hat{B}-\hat{C}$ 之測度爲 $\frac{1}{2}$(弧 AHC $-$ 弧 AB) $=\frac{1}{2}\times$(弧 AHC $-$ 弧 HC) $=\frac{1}{2}$ 弧 AH. 而 $\hat{B}-\hat{C}$ 已知,故弧 AH 甚易知之. 又因 AH $\parallel$ BC, 故 OE 垂直於 AH. 由是得作圖法如下. 作半徑爲 r 之圓, 在此圓周上取任意弧 AH, 令 $\frac{1}{2}$ 弧 AH 爲 $\hat{B}-\hat{C}$ 之測度,由 O 引 OE 令垂直於 AH, 且交前弧 AH 之共軛弧於 E. 引 AD 令平行於 OE, 且 AD $=h_a$, 過 D 點平行於 AH [或垂直於 AD] 引一直線, 令交圓於 B 及 C, 則 ABC 卽所求三角形.

1884. 作直角三角形,令內接於所設圓, 一銳角等於所設角, 且一邊過所設點.

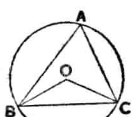
解 設 O 爲所設圓之中心, P 爲一邊 AB 所過之定點, 且 $P\hat{B}C$ 等於所設銳角. 假定所求三角形 ABC 業已作得, 則斜邊 BC 過圓之中心,而 B 在 OP 爲弦,含所設銳角之弧上. 故設作如是之弧,命其與所設圓之交點爲 B [及 B′], 則此點 [他點亦然] 爲含所設銳角



之頂點. 由是得作圖法如下. 以 OP 爲弦, 在其上作含所設角 PBO 之弧, 令與所設圓交於 B, B′. 聯結 BO, BP, 命其延線與圓周之交點爲 C, A, 則 ABC 卽所求三角形. 關於 B′ 亦然. 若過定點 P 之邊爲 AC, 或此點在圓外, 則僅須略加變更, 卽可得所求之三角形.

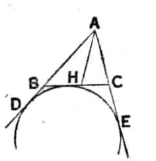
1885. 已知頂角 A, 外接圓之半徑 r, 及三邊之和 $a+b+c$, 求作三角形.

解 設所求三角形 ABC 之外心爲 O, 則 $B\hat{O}C = 2\hat{A}$, $OB = OC = r$, 故三角形 OBC 中, 已知其二邊及夾角, 因而可知 BC, 卽 a, 因此又可知 $b+c$, 且 $\hat{A}$ 爲所設角, 故由 1768 題可作得所求之圓.



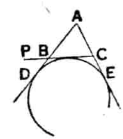
1886. 已知頂角 A, 其二等分線 w_a, 及三邊之和 $a+b+c$, 作三角形.

解 假定△ABC 業已作得, 作其傍切圓, 令在 $\hat{A}$ 內, 命其與 AB, AC 之切點爲 D 及 E, 則 $AD = AE = \frac{1}{2}(a+b+c) = s$ [729題], 故爲已知. 於是得作圖法如下. 在 $\hat{A}$ 之二邊上取 D, E, 令 $AD = AE = s$, 作切角之二邊於 D 及 E 之圓. 引 $\hat{A}$ 之二等分線 AH, 令 $AH = w_a$. 過 H 引前圓之切線 BHC, 命其與角之二邊之交點爲 B, C, 則 ABC 卽所求三角形. H 點若在角之二邊及劣弧 DE 所圍部分之內, 則可得二切線, 因而有二解; 若在劣弧 DE 上, 則有一解, 若在上述部分之外, 則無解.



1887. 過所設點引一直線, 截所設角之二邊, 令由是所生三角形之周, 等於所設長.

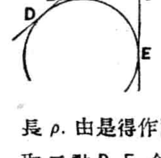
解 命所求三角形 ABC 之周爲 $2s$, 作 $\hat{A}$ 內之傍切圓, 則 AB, AC 上之切點 D 及 E 至 A 之距離分別爲 AD, AE, 而各等於 s [577題]. 於是得作圖法如下. 在所設角之二邊上分別取 D, E, 令 $AD = AE = s$, 作切此角之二邊於 D 及 E 之圓, 過 P 作此圓之切線 PBC, 令交角之二邊於 B 及 C, 於是 ABC 卽所求三角形.



吟味 若所設點 P 在角外, 則由 P 雖可引得二切線, 但由其一切線所得之三角形中, $b+c-a = 2s$, 不適合所設之條件, 故此時僅有一解. 若 P 點在角之邊上, 而 $AP > s$, 則無解; $AP < s$, 則有一解. 若 P 點在角內, 且在角之二邊及劣弧 DE 所圍部分內, 則有二點; 又若 P 點雖在角內, 而不在此部分內, 則在劣弧 DE 上時, 有一解, 否則無解.

1888. 已知頂角 A, 內切圓半徑 ρ, 及三邊之和 $a+b+c$, 求作三角形.

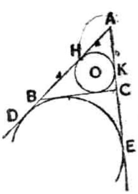
解 設 ABC 爲所求三角形, 作 $\hat{A}$ 內之傍切圓, 命其與 AB, AC 延線之切點爲 D, E, 則 $AD = AE = s$ [但 $a+b+c = 2s$], 故 D 及 E 爲定點. 又內心 O 不論至 AB 或 AC 之距離, 皆等於所設長 ρ. 由是得作圖法如下. 在 $\hat{A}$ 之二邊上取二點 D, E, 令 $AD = AE = s$, 作切此角之



二邊於 D, E 之圓. 引 AB 之平行線, 令與 C 在 AB 之同側, 且與 AB 之距離爲 ρ; 又引 AC 之平行線, 令與 B 在 AC 之同側, 且與 AC 之距離爲 ρ; 命此二平行線之交點爲 O. 以 O 爲中心, ρ 爲半徑作圓 [此時此圓切二邊 AB, AC], 作此圓與前圓 DE 之內公切線, 命其與角之二邊之交點爲 B, C, 則 ABC 卽所求三角形. 若圓 O 不與 DE 交, 則可得此圓之二內公切線, 故有二解. 若兩圓相切, 則僅可得一內公切線而解僅一. 若兩圓相交, 則無解.

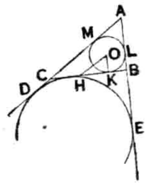
1889. 已知底邊 a, 內切圓之半徑 ρ, 及他二邊之和 $b+c$, 求作三角形.

解 設所求三角形爲 ABC, 切於邊 BC 之傍切圓與邊 AB, AC 之切點分別爲 D, E, 切於邊 BC 之內切圓與邊 AB, AC 之切點分別爲 H, K, 則 $AD=\frac{1}{2}(a+b+c)=s$, 故一定, $AH=s-a$ [729題], 故亦一定, 於是得作圖法如下. 引任意直線 AHD, 在其上取 $AH=s-a$, $AD=s$. 以 ρ 爲半徑, 作切 AD 於 H 之圓. 由 A 引此圓之切線 AKE, 在此直線上取 E 點, 令 $AE=s$. 作切 AB, AC 於 D, E 之圓, 及此圓與前圓之公切線 BC, 則 ABC 卽所求三角形. 若圓 O 不與圓 DE 交, 則有二解. 若此二圓相切, 則有一解; 相交, 則無解.



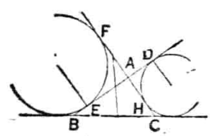
1890. 已知底邊 a, 內切圓之半徑 ρ, 及他二邊之差 $b-c$, 求作三角形.

解 設內切圓之切點爲 K, M, L, 傍切圓之切點爲 H, D, E. 此時 $KH=b-c$ [729題], 卽等於所設長; 又 OK 爲 ρ, 故亦等於所設長. 於是直角三角形 OKH 之二邊 OK, HK 爲已知, 故 OKH 可作得之. 又 $CK=s-c$ [729題] $=\frac{1}{2}(a+b-c)$, 而 a 及 $b-c$ 爲已知, 故 CK 亦爲已知. 於是得作圖法如下. 先作 $OK=\rho$, $HK=b-c$, $O\hat{K}H=\hat{R}$ 之三角形, 在 KH 之延線上取一點 C, 令 $CK=\frac{1}{2}(a+b-c)$. 由 C 至中心 O, 半徑 OK 之圓引切線 CMA, 又在 CK 之延線上取 B 點, 令 $CB=a$. 由 B 至同圓引切線 BLA, 命其與前切線之交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.



1891. 已知三角形 ABC 之底邊 a, 切於邊 AC, AB 之傍切圓半徑爲 ρ_b 及 ρ_c, 求作本形.

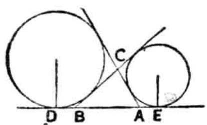
解 設所求三角形爲 ABC, 作半徑爲 ρ_b, ρ_c 之二傍切圓, 命其切點爲 D, E, H, F, 如圖所示. 此時 $AD=s-c$ [729題], $AE=s-b$, 故 $AD+AE=s-c+s-b=a$. 由是得作圖法如下. 在任意直線上取二點 D 及 E, 令 $DE=a$, 以 ρ_b 及 ρ_c 爲半徑, 分別作切 DE 於 D 及 E 之圓, 令在此直線之異側. 引此二圓之公切線 FH 及 BC, 命 DE, FH 之交點爲 A, FH 與 BC 之交點爲 C, DE 與 CB 之交點爲 B. 於是 ABC 卽所求三角形.



1892. 設三角形 ABC 中, 已知其一邊 AB 延線上之二傍切圓半徑 ρ_a, ρ_b 及他二邊

之和 $a+b$, 求作本形.

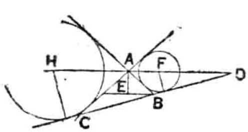
解 設所求之三角形為 ABC, 命 $\hat{B}$ 及 $\hat{A}$ 內之傍切圓與邊 AB 延線之切點分別為 E, D. 此時 $DE=a+b$ [729題], 故 DE 等於所設長 $a+b$,



由是得作圖法如下. 在任意直線上取二點 D, E, 令 $DE=a+b$, 以 ρ_a 及 ρ_b 為半徑作二圓, 令分別切 DE 於 D 及 E. 作此二圓之內公切線, 命是等切線之交點及其與 DE 之交點為 C, A, B, 則 ABC 即所求三角形.

1893. 設三角形 ABC 中, 已知其一邊 BC 延線上之二傍切圓半徑 ρ_b, ρ_c, 及此邊夾角之差 $\hat{B}-\hat{C}$, 求作本形.

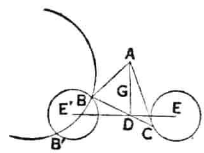
解 假定所求之三角形 ABC, 及對應於 ρ_b, ρ_c 之傍切圓業已作得, 作此二圓之中心線, 則此線顯然過頂角 A, 且為 $\hat{A}$ 之外二等分線. 引 $\hat{A}$ 之內二等分線 AE, 由 B 至 AE 引垂線 BE, 則 BE 平行於前中心線. 設中心線與 BC 之交點為 D, 則因 $C\hat{B}E=C\hat{D}A$, 而 $C\hat{B}E=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$ [171題], 故 $C\hat{D}A=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$. 由是得作圖法如下. 在任意直線 CB 上取點 D, 由 D 引一直線 DA, 令 $C\hat{D}A=\frac{1}{2}(\hat{B}-\hat{C})$. 在直線 DA 上取 F, 令由 F 至直線 CB 之距離為 ρ_c; 又取他一點 H, 令由 H 至直線 CB 之距離為 ρ_b. 以 F 為中心, ρ_c 為半徑作圓: 以 H 為中心, ρ_b 為半徑作圓, 則此二圓皆切直



線 CB, 可不待言. 作此二圓之內公切線, 命是等切線之交點, 及其與直線 CB 之交點為 A, B, C, 則 ABC 即所求三角形.

1894. 已知重心及一頂點之位置, 且他二頂點在所設二線[直線或圓周]上, 求作三角形.

解 設 ABC 為所求三角形, E, F 分別為二頂點 C, B 所在之圓周. 重心 G 已知, 底 BC 之中點 D 在聯結 AG 之直線上, 至 G 之距離 $GD=\frac{1}{2}\times AG$. 而 BC 當二等分於 D, 故今作圓 E 關於 D 之對稱圓 E′, 則 B 當在圓 E′ 上, 而 B 當然又須在圓 F 上, 故兩圓 F, E′ 之交點即 B 點. 於是得作圖法如下. 聯結 AG, 在其延線上取 $GD=\frac{1}{2}AG$, 作圓 E 關於 D 之對稱圓 E′, 命圓 E′ 與圓 F 之交點為 B. 聯結 BD 而延長之, 令交圓 E 於 C. 於是 ABC 即所求三角形. 兩圓 E′, F 之交點, 通常有二, 故交點 B′ 亦可為所求三角形之一頂點, 因而通常有二解.

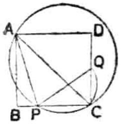


1895. 三角形中, 已知由各頂點至對邊所引垂線之足之位置, 求作其形.

解 設三垂線之足為 D, E, F, 作三角形 DEF, 引其各角之外二等分線, 命其交點為 A, B, C, 則 ABC 即所求三角形 [518題].

1896. 作一正方形, 令其二邊過二所設點, 他二邊交於他所設點.

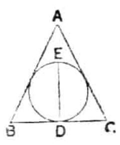
解 設 P 及 Q 為二邊所當過之所設點, A 為他二邊之所設交點. 假定所求正方形 ABCD 業已作得, 則 $A\hat{C}P=\frac{1}{2}\hat{R}$, 故 C 在 AP



爲弦，含 $\frac{1}{2}\hat{R}$ 之弧上．又 $P\hat{C}Q=\hat{R}$，故 C 在 PQ 爲直徑之半圓周上．故作圖法如次．在 AP 上作含 $\frac{1}{2}\hat{R}$ 之弓形，在 PQ 上作半圓，令交前弧於點 C．由 A 至 CP, CQ 分別引垂線 AB, AD，命其足爲 B, D，則 ABCD 卽所求正方形．

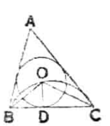
1897. 已知底邊及內切圓之直徑，作二等邊三角形．

解 引任意直線 BC，令等於所設底，取 BC 之中點 D，由 D 引 BC 之垂線 DE，令等於所設內切圓之直徑．以 DE 爲直徑作圓，由 B, C 至此圓引切線 BA, CA，命其交點爲 A，則 ABC 卽所求二等邊三角形．其理易明之．



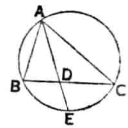
1898. 已知頂角及內切圓之切點將底邊所分之二部，作三角形．

解 在任意直線上取 BD, DC，令等於底邊之二部．以 BC 爲弦，所設角 α 之半分加直角，卽 $\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{\alpha}$ 爲弓形角，作弓形，過 D 引 BC 之垂線，令交弓形弧於 O．以 O 爲中心，OD 爲半徑作圓，由 B, C 至此圓引切線 BA, CA，命其交點爲 A，則 ABC 卽所求三角形．何則，因弧 BOC 乃頂角爲 α 之內心之軌跡，故 $\hat{A}=\hat{\alpha}$．



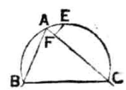
1899. 已知頂角及此角之二等分線將底邊所分之二部，求作三角形．

解 設 ABC 爲所求三角形，二等分線 AD 與外接圓周之交點爲 E，則 E 爲弧 BEC 之中點．由是得作圖法如次．由同一直線上取 BD, DC，令等於所設二部，以 BC 爲弦，作含所設角 $\hat{A}$ 之圓弧，聯結弧 BEC 之中點 E 與 D，命其延線與圓周之交點爲 A，則 ABC 卽所求三角形．



1900. 在所設角之二邊間，置一所設直線，令由是所得之三角形，有所設周．

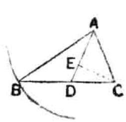
解 假定所求三角形 ABC 業已求得，作外接圓 BAC，由弧 BAC 之中點 E，至 AB, AC 二者中較大之邊 AC 引垂線 EF，則 $FC=\frac{1}{2}(AB+AC)$ [680題]．由是得作圖法如下．引任意直線 B′C′，令等於所設直線，在 B′C′ 上作含所設角之弓形，命其弧之中點爲 E′．以 E′C′ 爲直徑作半圓；以 C′ 爲中心，以所設周減去 BC 所餘之半分爲半徑作圓；命此兩圓之交點爲 F．聯結 C′F，命其延線與最初弧之交點爲 A′．於是由所設角之二邊截取 AB, AC，令等於 A′B′, A′C′，聯結 BC，卽得所求三角形 ABC．



別解 本題已知周，BC，及頂角 A，故與已知底，頂角，及他二邊之和，求作三角形之問題同 [1768題]．

1901. 已知二邊及由一頂角至一中線所引之垂線，求作三角形．

解 設 ABC 爲所求三角形，AD 爲中線，CE 爲此中線之垂線．(1)已知 AB, AC, CE．此時三角形 AEC 中，AC, CE，及 $A\hat{E}C=\hat{R}$ 爲已知，故此三角形可作



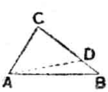
得之.又 B 在 A 為中心, AB 為半徑之圓周上;且因 CD=BD, 故 B 又在平行於 AD, 距 AD 等於 CE 之直線上. 由是得作圖法如次. 先作三角形 AEC, 以 A 為中心, AB 為半徑作圓, 過 C 關於 AD 之對稱點, 引 AD 之平行線. 命此平行線與圓之交點為 B, B′, 則 ABC, AB′C 即所求三角形.

(2) 已知 AB, BC 及 CE. 此時 DC, CE, 及 $D\hat{E}C$ 為已知, 故可先作三角形 CED. 延長 CD, 令 BD=CD; 以 B 為中心, AB 為半徑作圓, 命其與 DE 之交點為 A, 則 ABC 即所求三角形.

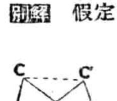
(3) 已知 BC, CA,及 CE. 先作三角形 DEC, 以 C 為中心, CA 為半徑作圓, 令交 DE 之延線於 A. 再在 CD 之延線上取 B, 令 DB=CD, 則 ABC 即所求三角形.

1902. 已知三角形 ABC 之邊 $BC=a$, $AC=b$, 及 $\hat{A}-\hat{B}$, 求作三角形.

解 設所求三角形為 ABC, 在 CB 上取 CD, 令等於 AC, 聯結 AD, 則 $BD=a-b=$ 已知, $B\hat{A}D=\frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{B})=$ 已知. 於是得作圖法如下. 引任意直線 BD, 令等於 $a-b$, 在 BD 上作含 $\frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{B})$ 之弓形弧. 延長 BD, 取 BC 令等於 a, 以 C 為中心, b 為半徑作圓, 令交前弧於 A, 則 ABC 即所求三角形.

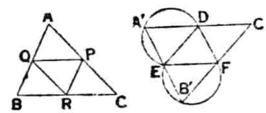


別解 假定所求三角形 ABC 業已求得,將此三角形迴轉, 令點 A 移至 B, 點 B 移至 A, 而得與原三角形全等之三角形 ABC′. 此時 $C\hat{A}C'=\hat{A}-\hat{B}$, $AC=b$, $AC'=a$, 故三角形 ACC′ 可作得之. 次, $\triangle ACC'\equiv\triangle BC'C$, 故 $\triangle BCC'$ 又可作得之. 於是得作圖法如下. 引成角 $\hat{A}-\hat{B}$ 之二直線 AC, AC′, 取 $AC=b$, $AC'=a$. 以 C 及 C′ 為中心, 分別作半徑為 a, b 之圓. 命其交點為 B, 則 ABC 即所求三角形.



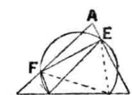
1903. 內接於所設三角形 ABC 作三角形,令與他所設三角形全等.

解 設第二所設三角形為 DEF, 求在第一所設三角形 ABC 內, 作與三角形 DEF 全等之三角形. 先在三角形 DEF 之邊 DE 上, 且就外側作含 $\hat{A}$ 之弓形;仿此,在 EF 上作含 $\hat{B}$ 之弓形. 過 E 引倍弦 A′B′, 令等於 AB, 命 A′D 及 B′F 延線之交點為 C′. 在邊 AB, BC, CA 上分別取 AQ, BR, CP, 令分別等於 A′E, B′F, C′D, 則 PQR 即所求三角形. 令 △ABC, △A′B′C′ 中, 邊 AB, A′B′ 相等, 其兩端之角亦等, 故兩形全等. 於是 PQ, QR, RP 之分別等於 DE, EF, FD 極易證得.



1904. 內接於所設三角形,作一三角形,令其二邊有所設方向,第三邊有所設長.

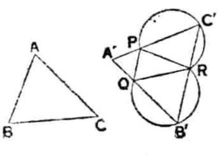
解 設所設三角形為 ABC, 所求內接三角形為 DEF. 此時因 DE, DF 之方向一定,故 $E\hat{D}C$, $E\hat{D}B$ 一定,因而 $E\hat{D}F$ 亦一定. 次, 作 DEF 之外接圓,命其與 BC 之交點為 D′, 則三角形



D′EF 之三角 $E\hat{D'}F$, $E\hat{F}D'$, $D'\hat{E}F$ 分別等於 $E\hat{D}F$, $E\hat{D}C$, $F\hat{D}B$, 故一定, 且 EF 爲已知長, 故三角形 D′EF 亦一定. 據此, 先在三角形 ABC 內, 作與 D′EF 全等之三角形 [1903 題]; 次, 作此三角形之外接圓, 令交邊 BC 於 D, 則 DEF 即所求三角形.

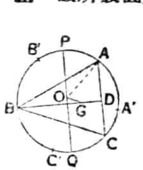
1905. 作一三角形, 令與所設三角形全等, 且各邊過所設點.

解 設所設三角形爲 ABC, 所設三點爲 P, Q, R. 以 QR 爲弦作弓形, 令其弓形角等於 $\hat{B}$; 又以 PR 爲弦作弓形, 令其弓形角等於 $\hat{C}$. 過 R 引倍弦 B′C′, 令等於 BC; 命 B′Q, C′P 之延線之交點爲 A′, 則 A′B′C′ 即所求三角形.



1906. 已知一邊, 及至他一邊所引之中線, 求作三角形, 令內接於所設圓, 且其重心在所設直徑上.

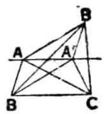
解 設所設圓爲 O, 所設直徑爲 PQ. 引任意弦 BC, 令等於所設之一邊. 以 BC 爲一邊, 作圓 O 之內接三角形, 令其中線 BD 等於所設長 [作時可先以 OC 爲直徑作圓, 再以 B 爲中心, BD 爲半徑作圓, 令交前圓於 D, 聯結 CD, 命其延線與圓 O 之交點爲 A, 聯結 AB 即得]. 次求其重心 G, 以 O 爲樞, 將三角形 ABC 迴轉 $G\hat{O}Q$ 角度, 即得所求三角形 A′B′C′, 其重心 G 在 PQ 上.



注意 以 O 爲樞, 再將三角形 A′B′C′ 迴轉二直角, 則得又一適合條件之三角形. 次, BC 爲邊, 中線等於 BD 之三角形, 除 △ABC 外, 尚有一個. 故本題通常有四解.

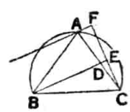
1907. 已知底邊 a, 高 h_a, 及兩底角之差 $\hat{B}-\hat{C}$, 求作三角形.

解 假定三角形 ABC 業已求得, 將此三角形迴轉, 令點 B 移於 C, 點 C 移於 B, 則 A 移至 A′. 此時 $A\hat{B}A'=\hat{B}-\hat{C}$, 以 AB, A′B 爲二邊作平行四邊形, 則 $AB'=AC$, $A'B'=A'C$, 故 AA′ 將 B′C 垂直二等分, 故 $B'C=2h_a$, 因此三角形 BCB′ 可作得之. 次, $A\hat{B}A'+B\hat{A}B'=2\hat{R}$, 故 $B\hat{A}B'$ 爲已知. 於是得作圖法如下. 作 $BC=a$, $CB'=2h_a$ 之直角三角形 BCB′; 以 BB′ 爲弦, 作含 $2\hat{R}-(\hat{B}-\hat{C})$ 之弓形, 令交 B′C 之垂直二等分線於 A, 則 ABC 即所求三角形.



1908. 已知底邊, 頂角, 及由底之一端所引之中線至他端之距離, 求作一三角形.

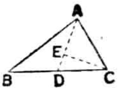
解 設 ABC 爲所求三角形, 其中 BC, $\hat{A}$, 及由 C 至中線 BD 所引之垂線 CE 爲已知. 此時直角三角形 BEC 中, BC, CE 爲已知, 故此三角形可作得之. 次, 在 CE 之延線上, 取 $EF=CE$, 過 F 引 BE 之平行線, 則此直線因 $CD=DA$, 故過 A. 而 $\hat{A}$ 一定, 故以 BC 爲弦, 作含 $\hat{A}$ 之弓形, 則 A 在此弓形之弧上. 據此, 先作三角形 BEC, 延長 CE, 令 $EF=CE$, 過 F 平行於 BE 引一直線, 令交 BC 爲弦, 含 $\hat{A}$ 之弓形弧於 A, A′, 則 ABC, A′BC 即所求三角形.



1909. 已知底邊, 頂角, 及由底之一端至

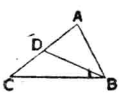
底上之中線所引之垂線,求作三角形.

解 假定三角形 ABC 業已求得,命中線爲 AD, 由 C 至 AD 所引之垂線爲 CE. 此時 $DC=\frac{1}{2}BC$, $C\hat{E}D=\hat{R}$, CE=已知, 故 $\triangle CED$ 可作得之. 次 A 在 BC 爲弦,含 $\hat{A}$ 之弓形弧上,同時又在 DE 之延線上. 故作圖法如次. 先作三角形 DEC, 延長 CD, 令 BD=DC, 在 BC 上作含 $\hat{A}$ 之弓形,命其與 DE 延線之交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.



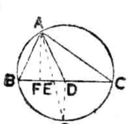
1910. 已知二邊, 及第三邊與由其一端所引中線所成之角,求作三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形, 其中 AB, AC, 及中線 BD 與 BC 所成之角爲已知. 此時 $DC=\frac{1}{2}AC$, $C\hat{B}D$=已知, 故 B 在 DC 爲弦, 含 $C\hat{B}D$ 之弓形弧上;而 B 又在 A 爲中心, AB 爲半徑之圓周上. 據此, 引任意直線 AC, 令等於所設長, 求其中點 D, 在 DC 上作含 $C\hat{B}D$ 之弓形弧,以 A 爲中心,他所設長爲半徑作圓,令交前弧於 B, 則 ABC 卽所求三角形.



1911. 已知三角形底邊上之中線 m_a, 二等分線 w_a, 及高 h_a, 求作其形.

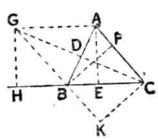
解 假定所求三角形 ABC 業已求得, AD 爲中線, AE 爲二等分線, AF 爲垂線. 此時直角三角形 AFD 中, 已知二邊 AD, AF, 故此三角形可作得之. 又設 AE 之延線與由 D 所引 BC 之垂線交於 G, 則 G 在 $\triangle ABC$ 之外接圓周上. 又圓之中心,爲 GD 或其延線與 AG 之垂直二等分線之交點. 故作圖如下: 先作直角三角形 AFD, 以 A 爲中心, AE 爲半徑作圓,命其與 FD 之交點爲 E. 過 D 引 FD 之垂線,令交 AE 之延線於 G. 以 AG 之垂直二等分線與 GD 或其延線之交點爲中心,作過 A 之圓,命此圓與 FD 延線之交點爲 B, C, 則 ABC 卽所求三角形.



注意 欲令本題可能,須 $h_a<w_a<m_a$. 若 $h_a=w_a=m_a$, 則三角形爲二等邊, 問題爲不定.

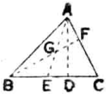
1912. 三角形 ABC 中,已知由 C 至對邊所引之中線 m_c, 及由 A, B 分別至對邊所引之垂線 h_a, h_b, 求作其形.

解 設三角形 ABC 爲所求三角形,在中線 CD 之延線上取 G, 令 CD=DG, 聯結 AG, BG, 則 AGBC 爲平行四邊形. 由 G, C 分別至邊 BC, BG 引垂線 GH, CK, 則 GH=AE=已知, CK=BF=已知; 因此三角形 BCG 中, 一邊 $GC=2m_c$, 及由此邊之兩端至對邊所引之二垂線爲已知,故 $\triangle BCG$ 可作得之,由是得作圖法如次. 先引任意直線 $GC=2m_c$, 在其上作三角形 BGC, 令 $GH=h_a$, $CK=h_b$ [1865題]. 聯結 GC 之中點 D 與 B, 在 DB 上取 A, 令 BD=DA, 則 ABC 卽所求三角形.



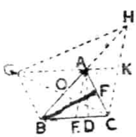
1913. 三角形 ABC 中,已知由 A 至對邊所引之垂線 h_a, 及由 A, B 所引之中線 m_a, m_b, 求作其形.

解 設所求之三角形爲 ABC, $AD=h_a$, AE



$=m_a$, BF$=m_b$. 此時三角形 AED 中, $\hat{ADE}=\hat{R}$, AD, AE 爲已知,故此三角形一定. 命 AE, BF 之交點爲 G, 則 G 爲定點, BG 爲定長. 由是得作圖法如下. 引任意直線 AD, 命等於 h_a, 過 D 引垂線 ED. 以 A 爲中心, m_a 爲半徑作圓, 命其與 ED 之交點爲 E. 在 AE 上取點 G, 命 EG$=\frac{1}{3}$AE; 以 G 爲中心, $\frac{2}{3}m_b$ 爲半徑作圓,命其與 DE 延線之交點爲 B, B′. 在 BE 之延線上取 EC, 命等於 BE, 則 ABC 爲所求三角形. 就 B, 仿前行之,亦可得適合條件之三角形.

別解 由 C 引中線 CO, 引其延線 OG, 命等於 CO, 又引 BA 之延線 AH, 命等於 BA. 於是因 GA∥BC, 故 GA 之延線將 HC 二等分. 而 AD 等於由 C 至 AK 所引之垂線,因而等於由 H 至 AK 所引之垂線. 又 HC$=2$AE$=2m_a$ 甚明, GH $=$ 2BF $=2m_b$ 可聯結 A 與 BG 之中點以明之. 於是三角形 GCH 中, 已知二邊 GH, CH, 及由 H 至中線 GK 所引之垂線,故此三角形可作得之[1901題], 因而可求得三角形 ABC.



1914. 設三角形 ABC 中,由 A, C 分別至對邊所引之垂線 h_a, h_c, 及由 B 所引之中線 m_b 爲已知,求作其形.

解 前題別解之圖中, GH$=2m_b$, 由 A 至對邊所引之垂線 h_a, 等於由 H 至 GA 所引之垂線, h_c 等於由 G 至 AH 所引之垂線. 故三角形 AGH 中,一邊 GH 及由其兩端至對邊所引之垂線爲已知, 故此三角形可作得之[1865題], 因而甚易求得三角形 ABC.

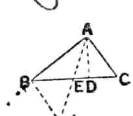
1915. 設三角形 ABC 中,由 A 至對邊所引之垂線 h_a, 及由 B, C 所引之二中線 m_b, m_c 爲已知,求作其形.

解 假定所求三角形業已求得[1913題別解之圖]. 此時 AD$=h_a$ 等於由 C 至 GA 所引之垂線, $m_b=$BF 等於 GH 之半分, GC 爲 $m_c=$CO 之二倍, 故三角形 GHC 中, 二邊 GH, GC 爲已知,由一角頂 C 至中線 GK 所引之垂線, 亦爲已知, 故 GHC 可作得之[1901題], 因而所求三角形 ABC 亦可求得.

1916. 已知頂角 A, 高 h_a, 及底邊上之中線 m_a, 求作三角形.

解 假定三角形 ABC 業已作得[1913題別解之圖]. 此時三角形 AHC 中, HC$=2$AE$=2m_a$, $\hat{CAH}=\hat{A}$ 之補角,且由 C 至中線 AK 所引之垂線等於 h_a. 因此三角形 ACH 可作得之[1909題],由是又可作得所求三角形 ABC.

別解 直角三角三角形 AED 中,已知 AE, AD, 故可作得之. 在 AE 之延線上取 A′, 命 AE$=$EA′, 聯結 A′B, 則 $\hat{BA'A}=\hat{CAA'}$, $\hat{ABA'}=$($\hat{A}$ 之補角),故 B 在 AA′ 爲弦, 含 $2\hat{R}-\hat{A}$ 之弓形弧上. 由是得作圖法如下. 作直角三角形 AED, 延長 AE 至 A′, 命 AA′$=2m_a$, 以 AA′ 爲弦,作含 $2\hat{R}-\hat{A}$ 之弓形,命 DE 之延線與弧之交點爲 B, 在 BE 之延線上取 C, 命 EC$=$BE, 則 ABC 即所求



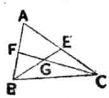
三角形.

1917. 已知頂角 A, 高 h_a, 及由底之一端所引之中線 m_b, 求作三角形.

解 假定所求三角形 ABC 業已求得[1913題別解之圖]. 此時三角形 GBH 中, GH $=2BF=2m_b$, $G\hat{B}H=\hat{A}$, 由底之一端 H 至中線 GA 所引之垂線等於 h_a, 故三角形 GBH 可作得之 [1908題], 因而三角形 ABC 亦可作得.

1918. 三角形 ABC 中,已知一角 B, 兩中線 BE, CF, 求作本形.

解 三角形 BCF 中, CF 及 $\hat{B}$ 一定, 故 B 在 CF 爲弦, 含角 B 之弧上. 又 G 在 CF 上, 而 $FG=\frac{1}{3}CF$, 故 G 爲定點, 又 $BG=\frac{2}{3}BE$, 故一定, 因此 B 在 G 爲中心, BG 爲半徑之圓周上. 故三角形 BCF 可先作得之, 從而又可作得三角形 ABC.



1919. 設三角形 ABC 中,已知由 A 及 C 所引之二中線 m_a, m_c, 及由 B 所引之中線與 BC 所成之角$(\widehat{m_b,a})$, 求作本形.

解 假定所求三角形 ABC 業已作得[1913題別解之圖]. 此時因 GH ∥ BF, GA ∥ BC, 故 $F\hat{B}C=A\hat{G}H$. 因此三角形 CGH 中, $GC=2m_c$, $CH=2m_a$, 及一中線 GK 與第三邊所成之角爲已知, 因此三角形 CGH 可求得之 [1910題], 因而所求三角形 ABC 亦可求得.

1920. 設三角形 ABC 中,已知由 A, B 至對邊所引之二垂線 h_a, h_b, 及由 A 所引之中線與 AC 所成之角 $(\widehat{m_a,b})$, 求作本形.

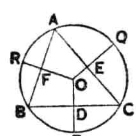
解 假定所求三角形 ABC 業已作得 [1913題別解之圖]. 此時 AE ∥ CH, 故 $A\hat{C}H=C\hat{A}E$ $=\widehat{m_a,b}$, 由 B 至 AC 所引之垂線 h_b, 等於由 H 至 AC 所引之垂線, 由 A 至 BC 所引之垂線 h_a, 等於由 C 至 AK 所引之垂線. 故三角形 ACH 中, 已知一角 ACH, 及由 H 至 AC, 由 C 至中線 AK 之二距離, 故此三角形可作得之 [1797題], 從而所求三角形亦可作得.

1921. 設三角形 ABC 中, 已知底邊 a, 高 h_a, 及由 B 所引之中線與邊 AB 所成之角 $(\widehat{m_b,c})$, 求作本形.

解 1913 題別解圖中, BF ∥ GH, 故 $G\hat{H}A$ $=A\hat{B}F=(\widehat{m_b,c})$, $GA=BC=a$, 又 $AD=h_a$ 等於由 H 至 GA 所引之垂線. 故三角形 HGA 中,已知底邊 GA, 頂角 $G\hat{H}A$, 及高, 故此三角形可作得之 [1751題], 從而所求三角形 ABC 亦可作得.

1922. 已知三角形之邊所對弧之中點, 試內接於圓,作此三角形.

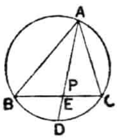
解 假定三角形 ABC 業已求得,各邊所對弧之中點爲 P, Q, R. 聯結中心 O 與各中點, 令分別交邊於 D, E, F,則 OD ⊥ BC, OE ⊥ AC, OF ⊥ AB, $\hat{C}=D\hat{O}E$ 之補角, $\hat{A}=E\hat{O}F$ 之補角, 故三角 A, B, C 一定. 由是得作圖法如次. 先引任意二弦,令其所成之角等於 $E\hat{O}F$ 之補角. 再引一弦 BC, 令等於聯結前二弦端之弦, 且垂直於 OP. 由 C 垂直於 OQ 引弦 CA, 聯結 AB, 則 AB 垂直於 OR, 甚易知之. 故 ABC 爲所求三角形.



1923. 已知一邊之方向, 對角之二等分

線, 及此二等分線所過之一點, 求作三角形, 令內接於所設圓.

解 假定三角形 ABC 業已求得, 其中 BC 有所設方向, $\hat{A}$ 之二等分線 AE 等於所設長, 且過所設點 P. 命 AE 之延線與圓周之交點爲 D, 則 D 爲弧 BC 之中點. 於是因 BC 有一定方向, 卽平行於一所設直線, 故弧之中點 D 爲一定點; 而 AE 過二定點 P, D, 故爲定直線. 由是得作圖法如次. 平行於所設直線引任意弦, 求其所對弧之中點 D, 聯結 PD, 命其與圓周之交點爲 A, 在 AD 上取 AE, 過 E 平行於所設直線, 引弦 BC, 則 ABC 卽所求三角形.



注意 本題通常有二解. 若 AE 不小於 AD, 則無解. 若 P 與 D 合, 則無解.

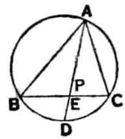
1924. 作所設圓之內接三角形, 令其一邊平行且等於所設直線, 並令此邊對角之二等分線過所設點.

解 前題圖中, 設 BC 爲平行且等於所設直線之弦, P 爲二等分線所過之所設點. 於是因 P 爲定點, 故二等分線 AP 之位置一定. 由是得作圖法如下. 引圓之弦 BC, 令平行且等於所設直線, 聯結弧 BC 之中點 D 與 P, 命其與圓周之交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.

注意 若 BC 大於圓之直徑, 則無解; 等於直徑, 則有一解; 小於直徑, 則有二解. 若所設點 P 與 D 合, 則解無數, 卽問題不定.

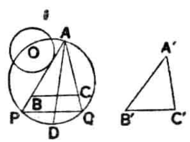
1925. 已知一邊, 試作圓之內接三角形, 令此邊上之中線過所設點, 且有所設方向.

解 設所求之圓之內接三角形爲 ABC, 邊 BC 等於所設長, 中線 AD 過所設點且平行於所設直線. 於是因 AD 過所設點 P, 且平行於所設直線, 故 AD 一定. 又 BC 等於所設直線, 且爲 AD 所二等分. 由是得作圖法如下. 先過 P 平行於所設直線引弦 AE, 命其與圓周之交點爲 A, E, 再引弦 BC, 令等於所設長, 且爲 AE 所二等分 [1856 題]. 此時三角形 ABC, EBC 皆適合所設條件.



1926. 作三角形, 令與所設三角形全等, 且其二邊過所設點, 此二邊所成角之二等分線切所設圓.

解 假定所求三角形 ABC 業已求得, 與所設三角形 A′B′C′ 全等, 且其邊 AB, AC 分別過所設點 P, Q, 角 A 之二等分線 AD 切所設圓 O. 此時角 PAQ 等於所設角 A′, 故 A 在 PQ 爲弦, 含角 A′ 之弓形弧上. 次, 設二等分線之延線, 與弧 PAQ 之共軛弧之交點爲 D, 則 D 爲 PDQ 之中點, 故爲定點. 由是得作圖法如次. 以 PQ 爲弦, 作含 $\hat{A}$ 之弓形, 命其共軛弧 PQ 之中點爲 D, 由 D 至圓 O 引切線 DA, 令其與圓周 PAQ 之交點爲 A, 在 AP, AQ 或其延線上分別取 AB, AC, 令等於 A′B′, A′C′, 則 ABC 卽所求三角形.



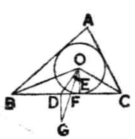
1927. 已知二邊之差 $c-b$, 其二邊之夾角 A, 及內切圓之半徑 ρ, 求作三角形.

解 設所求三角形爲 ABC, O 爲內切圓之

中心, D 爲邊 BC 之切點, M 爲其中點. 此時 MD $=\frac{1}{2}(c-b)$ [729題], 三角形 ODM 中, OD $=\rho$, MD = 已知, $O\hat{D}M=\hat{R}$, 故此三角形可作得之,從而 OM 亦可作得. 次, 因 $B\hat{O}C=\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{A}$, 故三角形 BOC 中,已知頂角,高,及底邊上之中線, 因而可作得此三角形 [1869題]. 由是得作圖法如次. 先作三角形 ODM, 求 OM, 再作三角形 OBC, 引 BA, CA, 令 OB, OC 分別爲角 ABC, ACB 之二等分線,則 ABC 卽所求三角形.

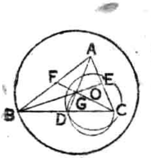
1928. 已知二邊之差 $c-b$, 此二邊對角之差 $\hat{C}-\hat{B}$, 及內切圓之半徑 ρ, 求作三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形, O 爲內切圓之中心, D 爲 BC 之中點, E 爲內切圓之切點. 此時 DE $=\frac{1}{2}(c-b)$ [729題]. 次設 $B\hat{O}C$ 之二等分線爲 OF, 則 $E\hat{O}F=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\hat{C}-\frac{1}{2}B)=\frac{1}{4}(\hat{C}-\hat{B})$ [164題]. 因此三角形 OED 可作得之, 從而可知 OF 之長. 故三角形 OBC 中,已知 OE, OF, OD, 故此三角形可作得之 [1611題],因而可作得三角形 ABC.



1929. 已知二中線, 及他中線與對應邊所成之角,求作三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形, 中線 BE, CF, 及中線 AD 與 BC 所成之角 ADC 爲已知. 命重心爲 G, 則 CG $=\frac{2}{3}$CF, BG $=\frac{2}{3}$BE, 故爲已知. 故 B 在 G 爲中心, $\frac{2}{3}$BE 爲半徑之圓周上.



次,因 $G\hat{D}C$ = 一定,故 D 在 GC 爲弦,含 $G\hat{D}C$ 之弓形弧上. 又因 D 爲 BC 之中點, 故 D 又在 GC 之中點 O 爲中心, $\frac{1}{2}$BG 爲半徑之圓周上. 故作圖法如次. 引 CG 令等於 $\frac{2}{3}$CF, 以 G 爲中心, $\frac{2}{3}$BE 爲半徑作圓,又在 CG 上作含 $G\hat{D}C$ 之弓形,再以 CG 之中點 O 爲中心, BG 之半分爲半徑作圓,命其與圓弧 GDC 之交點爲 D, D′. 聯結 CD, 命其與最初圓周之交點爲 B, 又在 DG 之延線上取 GA = 2DG, 則 ABC 爲所求三角形. 就 D′ 尙可得一三角形.

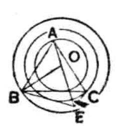
1930. 作所設圓之內接三角形, 令其底邊平行於所設直線, 他二邊過此所設直線上之所設二點.

解 命所設二點爲 P, Q, 所設圓爲 O. 過二點 P, Q, 作切圓 O 之圓, 命其切點爲 A, 聯結 PA, QA, 命其延線與圓 O 之交點爲 C, B, 則 ABC 卽所求三角形. BC 之平行於 PQ, 可由 622 題明之.

注意 過 P, Q 且切圓 O 之圓有二,故所求三角形亦有二.

1931. 作正三角形, 令其頂點分別在所設三同心圓周上.

解 假定所求之正三角形 ABC 業已求得, 聯結 B 與中心 O. 在 BO 上作正三角形 OBE, 則兩三角形 ABO, CBE 中, AB = CB, BO = BE, $A\hat{B}O=\frac{2}{3}\hat{R}-O\hat{B}C=C\hat{B}E$, 故 AO = EC. 故作圖法如次. 在所設外圓周上取任意點 B, 在 BO 上作正三角形 BOE, 以 E 爲中心, 內圓之半徑爲半

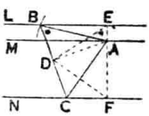


徑作圓，命其與中間圓周之交點爲 C，在 BC 上作正三角形 ABC，則 ABC 卽所求三角形.

注意 最初所取之 B 點，不必限於外圓周上，無論在何圓周上皆可，此甚易知之.

1932. 作正三角形，令其頂點分別在所設三平行線上.

解 假定所求三角形 ABC 業已求得，由 A 引三平行線 L, M, N 之公垂線，又由 A 至 BC 引垂線 AD，聯結 ED, FD. 此時四邊形 AEBD 中，$A\hat{E}B=\hat{R}=A\hat{D}B$，故此四邊形

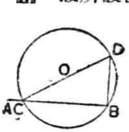


內接於圓，因而 $A\hat{E}D=A\hat{B}D=\frac{2}{3}\hat{R}$. 同理，$A\hat{F}D=\frac{2}{3}\hat{R}$. 由是得作圖法如次. 先在直線 M 上取任意點 A，由 A 引 M 之垂線 EF，令交 L, N 於 E, F. 以 EF 爲一邊，作正三角形 EFD，過 D 引 AD 之垂線 BC，命其與 L, N 之交點爲 B, C，則 ABC 卽所求正三角形.

注意 由廻轉之理，在直線 N 上取點 C，將 L 繞 C 之周廻轉 $\frac{2}{3}\hat{R}$，則 L 與 M 之交點顯然爲 A，因此可求得 CA，從而可求得正三角形 ABC.

1933. 試由直線之一端，引此線之垂線，但不許延長此直線過此端.

解 設所設直線 AB 之一端爲 B，試由 B 引 AB 之垂線，在直線外取任意點 O，以 O 爲中心，OB 爲半徑作圓，命其與 AB 之他一交點爲 C，過 C 直徑之他端爲 D，聯結 BD，則 BD 卽所求垂線.

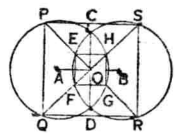


何則，因 CD 爲圓之直徑，故 $C\hat{B}D=\hat{R}$ 也.

注意 若圓與直線 AB，不交於 B 以外之點，則 OB 卽所求垂線.

1934. 設兩等圓相交，試作一正方形，令內接於此二圓，而二雙頂點分別在二圓周上.

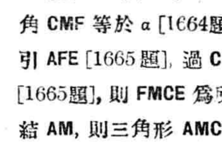
解 聯結相等二圓之中心 A, B，又聯結其交點 C, D，過此二直線之交點 O，引 AB, CD 交角之二等分線 PR, QS，命 PR, QS 與圓之交點爲 P, E, G, R，及 Q, F, H, S，則 PQRS 及 EFGH 皆爲所求正方形，因兩圓關於 CD 及 AB 對稱也.



第三章　面積

1935. 作一平行四邊形，令與所設三角形等積，且其一角等於所設角.

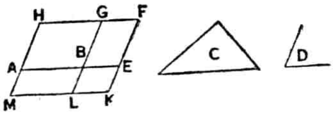
解 設 ABC 爲所設三角形，α 爲所設角；求作一平行四邊形，令其等於 $\triangle ABC$，且一角等於所設角 α.



二等分 BC 於 M [1663題]，由 M 引 MF 令角 CMF 等於 α [1664題]，過 A 平行於 BC 引 AFE [1665題]，過 C 平行於 MF 引 CE [1665題]，則 FMCE 爲所求平行四邊形. 聯結 AM，則三角形 AMC 等於三角形 ABC 之半分 [736題]，而平行四邊形 FMCE 等於三角形 AMC 之二倍，故平行四邊形 FMCE 等於三角形 ABC. 又此平行四邊形之角 CMF，由作圖知其等於所設角 α.

1936. 在所設底邊上作平行四邊形，令與所設三角形等積，且其一角等於所設角.

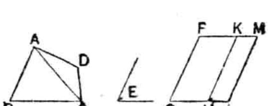
解 設 AB 爲所設底邊，C 爲所設三角形，



D 爲所設角. 試在 AB 上作一平行四邊形，令等於△C，且一角等於 D. 作平行四邊形 GBEF，令等於三角形 C，且角 GBE 等於 D [1935題]，但 BE 須與 AB 成一直線. 過 A 平行於 BG 引直線 AH，令交 FG 之延線於 H [1665題]，聯結 HB. 因 HA 平行於 FE，而 HB 不平行於 FE，故若延長 HB 與 FE，則必相交；但其交點在 BE 之下方，因 HB 在角 FHA 內故也. 命此 HB 與 FE 之交點爲 K，過 K 平行於 AE 或 HF 引直線 KLM [1665題]，令交 GB，HA 之延線於 L，M，則 AL 卽所求平行四邊形. AL，GE 爲平行四邊形 FM 中沿對角線 HK 之平行四邊形 AG，LE 之餘形，故 AL 等於 GE [740題]. 然 GE 等於 C，故 AL 等於 C. 又角 ABL 等於對頂角 GBE，故等於 D. 故 AL 等於三角形 C，角 ABL 等於 D，底邊爲 AB，卽 AL 適合條件.

1937. 作一平行四邊形，令與所設直線形等積，且其一角等於所設角.

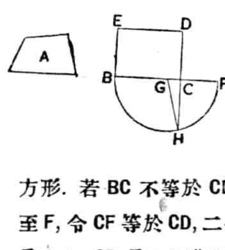
解 設 ABCD 爲所設直線形，其邊有四，E



爲所設角；試作平行四邊形，令與 ABCD 等積，其一角等於 E. 聯結 AC，作平行四邊形 FGHK，令與三角形 ABC 等積，且角 FGH 等於 E [1935題]. 在 KH 上作平行四邊形 KHLM，令與三角形 ACD 等積，且角 KHL 等於 E [1936題]，則 FGLM 卽所求平行四邊形. 因角 FGH，KHL 各等於 $\hat{E}$ [作圖]，故 $K\hat{H}L = F\hat{G}H$；而角 FGH 爲角 GHK 之補角 [220題]，故角 KHL 與角 GHK 互爲補角，因此 GH 與 HL 成一直線 [11題]. 又 FK，KM 各平行於 GHL，且公有一點 K，故 FKM 成一直線，故 GL 平行於 FM. 又 FG 與 ML 各平行於 KH，故此二直線亦相平行 [45題]，故 FGLM 爲平行四邊形. 又平行四邊形 FGLM 等於四邊形 ABCD，因 FGLM 爲 FH，KL 所合成，而 FH，KL 分別等於三角形 ABC，ACD 故也. 又角 FGL 等於 E，故 FGLM 爲所求平行四邊形. 若所設直線形之邊數在五以上，則可先分之爲三個以上之三角形，其後之作圖法及證明法，與邊數爲四時無異.

1938. 作正方形，令與所設直線形等積.

解 設 A 爲所設直線形，求作與 A 等積之

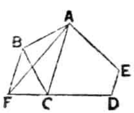


正方形. 作等於 A 之矩形 BCDE [1937題]. 此時若 BC 等於 CD，則 BD 卽所求正方形. 若 BC 不等於 CD，則可將 BC 延長至 F，令 CF 等於 CD，二等分 BF 於 G. 以 G 爲中心，GB 爲半徑作圓，延長 DC，令交圓周於 H，此時 CH 上之正方形等於 A. 聯結

GH, 則 CH 上之正方形, 等於 GH 及 GC 上之正方形之差 [750題], 而 GH 等於 GB, 故 CH 上之正方形等於 BG 及 GC 上正方形之差. 而 BG 與 GC 上正方形之差, 等於此二直線之和 BC 及差 CF 所包之矩形 [748 題], 卽等於矩形 BD, 因 CF 等於 CD 故也. 故 CH 上之正方形等於 BD, 因而等於所設直線形 A.

1939. 試作一直線形, 令與所設直線形等積, 然較其少一邊. 並由此推定作與所設直線形等積之三角形法.

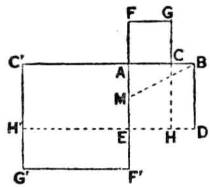
解 設 ABCDE 爲所設直線形, 假定其邊數爲五; 求作與 ABCDE 等積之四邊形. 聯結 AC, 過 B 平行於 AC 引 BF, 令交 DC 之延線於 F, 聯結 AF,



則 AFDE 與 ABCDE 等積. 兩三角形 AFC, ABC 共底 AC, 且等高, 故三角形 AFC 與三角形 ABC 等積 [736 題]. 此兩三角形各與 ACDE 合, 則成等積之四邊形 AFDE 與五邊形 ABCDE. 又再依五邊形 ABCDE 變成等積之四邊形 AFDE 之方法, 四邊形可變爲等積之三角形. 卽聯結 EF, 引其平行線 AG, 命其與 DF 延線之交點爲 G, 則三角形 EGD 等於四邊形 AFDE, 因而又等於五邊形 ABCDE. 以上之作圖法及證明法, 無論所設直線形之邊數爲若干, 莫不皆然.

1940. 試證下法將直線 AB 按中末比分於 C 及 C′. 在 AB 上作正方形 ABDE, 二等分 AE 於 M, 在 MA 之延線上取 MF＝MB, 作正方形 AFGC, 而得 C 點. 又欲得 C′ 點, 可在 AM 之延線上, 取 MF′＝MB, 令與前在 M 之異側, 在 AF′ 上作正方形 AF′G′C′ 卽得.

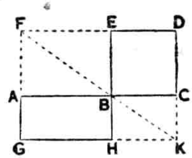
證 $\overline{AB}^2=\overline{BM}^2-\overline{AM}^2=\overline{FM}^2-\overline{AM}^2=EF\cdot FA$ [748題]. 雙方減以 ▭ AH, 則 ▭ AG ＝▭BH ＝ AB · BC, 卽 C 按中末比內分 AB. 又 $\overline{AB}^2=\overline{BM}^2-\overline{AM}^2=\overline{MF'}^2-\overline{AM}^2$



＝AF′·EF′＝▭EG′. 雙方加▭AH′, 則▭AG′＝▭BH′＝AB · BC′, 卽 C′ 按中末比外分 AB.

1941. 試在已知底上作矩形, 令等於已知正方形.

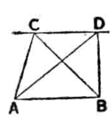
解 設已知底爲 AB, 已知正方形爲 BCDE, 求在 AB 上作等於 BCDE 之矩形. 將已知正方形 BCDE 移至 AB 之延線上, 令其一邊 BC 爲 AB 之延



線. 在 DE 之延線上取 EF, 令等於 AB. 聯結 BF, 延長之令交 DC 之延線於 K. 由 K 平行於 AB 引 KG, 令交 FA, EB 之延線於 G, H, 則 ABHG 卽所求矩形, 其理可由 740 題明之.

1942. 已知二邊之長及面積, 求作三角形.

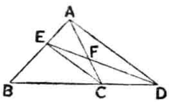
解 在一已知邊 AB 上作等於已知面積之三角形 ABD, 過 D 引 AB 之平行線, 以 A 爲中心, 他一已知邊爲半徑作圓, 令交前平行線於 C, 則 ABC 卽所求三角形.



注意 取圓 A 與直線 CD 之他交點 C′, 則得適合條件之他三角形.

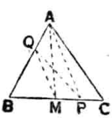
1943. 設一已知點 D 在三角形 ABC 之邊 BC 或其延線上, 試在 AB 或其延線上取點 E, 令 $\triangle EBD=\triangle ABC$.

解 由 C 平行於 AD 引 CE, 命其與 AB 之交點爲 E, 則 E 卽所求點. 因 $AD \parallel CE$, 故 $\triangle AED=\triangle ACD$. 雙方減以 $\triangle AFD$, 則 $\triangle AEF=\triangle CFD$. 故 $BCFE \pm \triangle AEF = BCFE \pm \triangle CFD$, 卽 $\triangle ABC=\triangle EBD$.



1944. 試由三角形一邊上之已知點引一直線,將三角形二等分.

解 設三角形 ABC 之一邊 BC 上之已知點爲 P, 由 A 引中線 AM, 假定 P 在 MC 間, 則在 AB 上求一點 Q, 令 $\triangle QBP=\triangle ABM$ [前題]. 聯結 PQ, 則 PQ 卽所求直線.何則,因 $\frac{1}{2}\triangle ABC=\triangle ABM=\triangle QBP$.



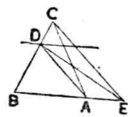
注意 若 P 在 BM 上亦然.

1945. 試由已知三角形一邊上之已知點引二直線,將三角形三等分.

解 設已知三角形爲 ABC, 一邊 BC 上之已知點爲 P, 假定所求之三等分線 PQ, PR 已求得. 命 E, F 爲 BC 之三等分點, 則 $\triangle ABE=\triangle QBP=\frac{1}{3}\times\triangle ABC$, 故 $\triangle AQE=\triangle QEP$, 故 $AP \parallel QE$. 同理, $AP \parallel FR$. 故作圖法如下. 過 BC 之三等分點 E, F, 平行於 AP 引 EQ, FR, 命其與對邊之交點爲 Q, R, 則 PQ, PR 卽所求直線.

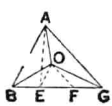
1946. 試作一三角形, 令其底邊與已知三角形 ABC 之底邊 AB 在一直線上, 又其頂點在平行於 AB 之定直線上, 且其面積等於 ABC.

解 設底 AB 之平行線與 BC 之交點爲 D, 聯結 DA, 過 C 平行於 DA 引一直線, 命其與 BA 延線之交點爲 E. 此時 DBE 卽所求三角形. 何則? 因 $DA \parallel CE$, 從而 $\triangle ADC=\triangle ADE$, 從而 $\triangle ABC=\triangle DBE$ 故也.



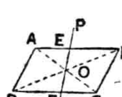
1947. 試在三角形內求一點, 令由此點至各角頂所引之三直線, 將原形分成三個等三角形.

解 假定所求點 O, 已在三角形 ABC 內求得. 由 O 平行於 AB 引 OE, 命其與 BC 之交點爲 E, 則 $\triangle ABE=\triangle ABO$ [736 題] $=\frac{1}{3}\times\triangle ABC$, 故 $BE=\frac{1}{3}BC$. 同理, 由 O 平行於 AC 引 OF, 命其與 BC 之交點爲 F, 則 $FC=\frac{1}{3}BC$. 由是得作圖法如次. 三等分 BC 於 E, F, 由 E, F 分別平行於 AB, AC 作一直線, 命其交點爲 O, 則 O 卽所求點.



1948. 試以過所設點之直線, 二等分所設平行四邊形.

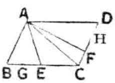
解 命所設平行四邊形爲 ABCD, 所設點爲 P. 設平行四邊形之對角線交點爲 O, 聯結 PO 之直線,則此直線卽所求直線. 何則, 命直線 PO 與平行四



邊形之兩邊 AD, BC 之交點分別爲 E, F, 則 ABFE＝EFCD [270題] 故也.

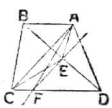
1949. 試由平行四邊形 ABCD 之一角頂 A, 引二直線 AE, AF, 將本形等分爲三.

解 三等分邊 CD 於 F, H, 又三等分邊 BC 於 G, E, 設是等分點中,較近於 C 者爲 F, E, 則 AE, AF 卽所求直線. 何則? $\triangle ABE=\frac{2}{3}\times\triangle ABC=\frac{1}{3}\square ABCD$. 同理, $\triangle ADF=\frac{1}{3}\square ABCD$. 從而 AECF 亦爲 $\frac{1}{3}\times\square ABCD$.



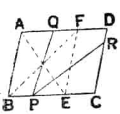
1950. 試由四邊形之一角頂引一直線, 將本形等分爲二.

解 設四邊形 ABCD 之對角線 BD 之中點爲 E, 過 E 平行於他對角線 AC 引一直線, 令交邊 CD 於 F, 聯結 AF, 則 AF 將四邊形二等分 [829題].



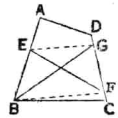
1951. 試由所設平行四邊形一邊上之所設點引二直線,將本形等分爲三.

解 設所設平行四邊形爲 ABCD, 其一邊 BC 上之所設點爲 P. 在邊 BC, AD 上分別取 E, F, 令 $EC=\frac{1}{3}BC$, $FD=\frac{1}{3}AD$, 聯結 EF, 則 ABEF 爲平行四邊形,而等於 ABCD 之 $\frac{2}{3}$. 故得作圖法如次. 引 ABEF 之二等分線 PQ [1948題], 又引四邊形 PCDQ 之二等分線 PR [1950], 則 PQ, PR 卽所求直線.



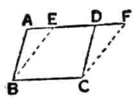
1952. 試由四邊形一邊上之所設點引一直線,將此四邊形等分爲二.

解 設四邊形爲 ABCD, 其邊 AB 上之所設點爲 E, 假定所求直線 EF 業已求得. 引 BG, 令將四邊形 ABCD 二等分, 聯結 EG, BF, 則四邊形 $EBCF=\frac{1}{2}ABCD=\triangle BCG$, 因而 $\triangle EBF=\triangle GBF$, 故 EG ∥ BF. 故作圖法如次. 過 B 作直線 BG, 將四邊形 ABCD 等分爲二 [1950題], 聯結 EG, 由 B 平行於 EG 引直線 BF, 命其與 CD 之交點爲 F, 聯結 EF, 則 EF 卽所求二等分線.



1953. 試作一菱形, 令與所設平行四邊形等底等高.

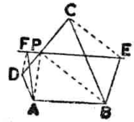
解 設 ABCD 爲所設平行四邊形. 以 B 爲中心, BC 爲半徑作圓, 命其與 AD 之交點爲 E. 以 BC, BE 爲二隣邊作平行四邊形,則此形卽所求菱形. 何則,因 $\square ABCD=\square EBCF$, 且 BC＝BE, 因而 EBCF 爲菱形故也. 仿此, 以 B 爲中心, AB 爲半徑作圓, 取其與 DC 之交點,則尙可得一解.



注意 若 BC 小於 AD, BC 間之距離, 則無前解,若 AB 小於 AB, CD 間之距離,則無後解.

1954. 有一四邊形 ABCD, 試以 AB 爲一邊,過邊 CD 上之所設點且平行於 AB 之直線爲他邊,作第二四邊形,令與原四邊形等積.

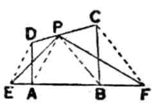
解 命邊 CD 上之所設點爲 P, 過 P 平行於 AB 引直線 FE. 次,過 D 及 C 分別平行於 AP, BP 引直線DF, CE,



命其與 EF 之交點爲 F, E, 則 ABEF 卽所求四邊形. 因 DF || AP, 故 $\triangle DAP=\triangle FAP$. 又因 CE || BP, 故 $\triangle PCB=\triangle PEB$. 故 ABCD = ABEF, 且 FE || AB, 故 ABEF 適合所設條件.

1955. 有一四邊形 ABCD, 試作一三角形, 令其底邊與 AB 在一直線上, 其頂點爲 CD 上之定點 P, 且其面積等於原四邊形

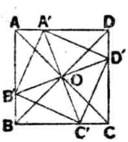
解 過 D 及 C, 分別平行於 AP, BP 引直線 DE, CF, 命其與 AB 延線之交點爲 E, F, 則 PEF 卽所求三角形. 何則, 因



DE || PA, 故 $\triangle ADP=\triangle AEP$, 同理, $\triangle BCP=\triangle BFP$, 故 $ABCD=\triangle PEF$ 也.

1956. 內接於所設正方形, 作與他所設正方形等積之正方形.

解 設內接於所設正方形 ABCD 之所求正方形 A′B′C′D′, 業已作得. 此時兩正方形之對角線交點爲同一點 O [289 題], 且 A′O 爲已知正方形之對角線之半分, 故爲已知. 故作圖法如次. 以正方形 ABCD 對角線之交點 O 爲中心, 他所設正方形對角線之半分爲半徑作圓, 令交 AD 於 A′. 聯結 A′O, 命其延線與 BC 之交點爲 C′. 次過 O, 垂直於 A′OC′ 引 B′OD′, 命其與 AB, DC 之交點爲 B′, D′, 則四邊形 A′B′C′D′ 卽所求正方形. 取圓 O 與 AD 之他交點 A″, 則仿前行之, 尙可得一所求三角形 A″B″C″D″.



1957. 作一正方形, 令等於所設二正方形之和.

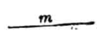
解 命所設二正方形之邊, 分別爲 m, n. 以 m, n 爲直角旁之二邊, 作直角三角形, 則此直角三角形斜邊上之正方形, 卽所求正方形 [750題].

1958. 作一正方形, 令等於所設二正方形之差.

解 命所設二正方形之邊, 分別爲 m, n $(m>n)$. 以 m 爲斜邊, n 爲直角旁之一邊, 作直角三角形, 則他一邊上之正方形卽所求正方形 [750題].

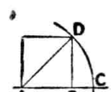
1959. 將所設直線分爲二, 令此二線分上正方形之和, 等於他所設直線上之正方形.

解 命所設直線爲 AB, 內分之於 C, 假定 AC, BC 上正方形之和, 等於他所設直線 m 上之正方形. 於是因 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=m^2$, 故若以 AC, BC 爲直角旁之二邊, 作直角三角形, 則斜邊之長, 顯爲 m. 因是得作圖法如下. 以 m 爲斜邊作直角三角形, 令他二邊之和等於 AB [1783題]. 於是此二邊卽所求之二部. 外分時, 可以 m 爲斜邊, 作直角三角形, 令他二邊之差, 等於 AB [1784題], 卽得所求之二部.



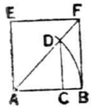
1960. 試延長所設直線 AB 至 C, 令 $\overline{AC}^2=2\overline{AB}^2$.

解 以 AB 爲一邊, 在其上作正方形, 命其對角線爲 AD, 則 $\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2=2\overline{AB}^2$, 故在 AB 上取 AC 等於 AD 卽可.



1961. 二分所設直線AB於C, 令$\overline{AC}^2=\frac{1}{2}\times\overline{AB}^2$.

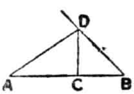
解 以AB爲一邊,在其上作正方形ABFE,



以A爲中心, AB爲半徑作圓, 命其與對角線AF之交點爲D, 由D至AB引垂線DC, 則C即所求分點 何則,因AC=CD, 且$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$, 即$\overline{AB}^2=2\overline{AC}^2$故也.

1962. 二分所設直線AB於C, 令$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=m^2$.

解 由分點C引AB之垂線CD, 以A爲中

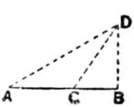


心, m爲半徑作圓, 命其與CD之交點爲D. 此時$\overline{AC}^2+\overline{CD}^2=m^2$,故CD=CB, 從而$C\hat{B}D=\frac{1}{2}\hat{R}$. 故作圖法如次. 以AB爲底作三角形ABD, 令AD$=m$, $A\hat{B}D=\frac{1}{2}\hat{R}$, 由D至AB引垂線DC, 則C即所求分點[參照1668題].

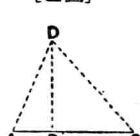
1963. 試內分或外分一所設直線爲二, 令其二分上正方形之差,等於所設正方形.

解 設已知直線爲AB, 已知正方形之一

[甲圖]



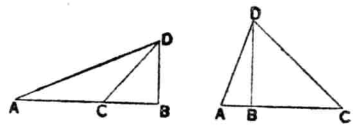
[乙圖]



邊爲BD. 假定所求點C[甲圖中爲內分點, 乙圖中爲外分點]業已求得,引AB之垂線BD, 聯結DA, DC, 則$\overline{CD}^2-\overline{BC}^2=\overline{BD}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$, 故CD=CA, 從而三角形CDA爲二等邊.故作圖法如次.由AB之端B引AB之垂線BD, 令BD等於已知正方形之一邊, 聯結AD, 引直線DC, 令與AD所成之角等於$B\hat{A}D$, 且交AB或其延線於C, 則C即所求點. 若$B\hat{A}D>A\hat{D}B$, 則C爲外分點, $B\hat{A}D<A\hat{D}B$, 則C爲內分點.

1964. 分已知直線AB於C, 令$\overline{AC}^2=2\overline{CB}^2$. 又外分時,此法成立否?

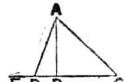
解 設C按$\overline{AC}^2=2\overline{CB}^2$分AB. 引BD, 令



垂直且等於BC, 聯結AD, 則$\overline{CD}^2=2\overline{BC}^2$, 故AC=CD, 故三角形CAD爲二等邊, 且$D\hat{A}C=A\hat{D}C=\frac{1}{4}\hat{R}$. 由是得作圖法如下. 引直線AD, 令與AB所成之角等於$\frac{1}{4}\hat{R}$, 且交AB之垂線BD於D. 由D引直線DC, 令與AD所成之角等於$\frac{1}{4}\hat{R}$, 且交AB於C, 則C即所求點. 若C在AB之延線上, 則與前同理, 兩三角形BCD, CAD皆爲二等邊,因而可求得C. 即外分時, 其方法亦同前.

1965. 試在所設三角形ABC之底CB之延線上取一點E, 令$\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=BC\cdot BE$.

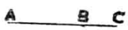
解 假定問題業已得解,則$\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=BC\cdot BE$. 命由A至BC所引垂線之足爲D, 則$\overline{AC}^2-\overline{AB}^2=\overline{CD}^2-\overline{BD}^2$ [775題]$=(CD+BD)(CD-BD)=BC(CD-BD)$, 故$BC\cdot BE=BC(CD-BD)$, 故$BE=CD-BD$, 故$BE+BD=CD$, 即ED=DC. 故作圖法如下.由三角形之頂點A,



至對邊引垂線 AD, 在 CB 之延線上取 DE $=CD$, 則 E 點卽所求點.

1966. 試延長一直線 AB 至 C, 令 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2AC\cdot BC$.

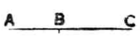
解 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2AC\cdot BC$, 故 $\overline{AB}^2=2AC\cdot BC-\overline{BC}^2$, 或 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-(\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2AC\cdot BC)$.



然 $\overline{AB}^2=(AC-BC)^2=\overline{AC}^2-2AC\cdot BC+\overline{BC}^2$, 故 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$, 或 $2\overline{AB}^2=\overline{AC}^2$. 故 AC 適等於 AB 上所作正方形之對角線. 故作圖法如次. 在 AB 上作正方形, 並在 AB 之延線上取 AC, 令等於所作正方形之對角線, 則 C 卽所求點.

1967. 延長所設直線 AB 至 C, 令 $2AC\cdot BC=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$.

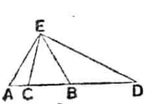
解 $\overline{AB}^2=(AC-BC)^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2AC\cdot BC$, 故 $2AC\cdot BC=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2$.



而由題意, $2AC\cdot BC=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$, 故 $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2$, 卽 $\overline{BC}^2=2\overline{AB}^2$, 故 BC 等於 AB 上正方形之對角線. 故得作圖法如次. 在 AB 上作正方形, 取 BC, 令等於此正方形之對角線卽得.

1968. 二分所設直線 AB 於 C, 令 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{CB}^2$.

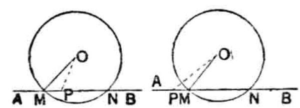
解 在 AB 之延線上取 D, 令 $BD=AB$, 在 AB 上作正三角形 ABE, 聯結 DE, 在 AB 上取點 C, 令 $DC=DE$, 則 C 卽所求點.



由作圖法, $\overline{AD}^2=4\overline{AB}^2$, $A\hat{E}D=\hat{R}$, 且 $AE=AB$, 故 $\overline{DE}^2=\overline{AD}^2-\overline{AE}^2=4\overline{AB}^2-\overline{AB}^2$, 或 $\overline{DC}^2=3\overline{AB}^2$. 而 B 爲 AD 之中點, 故 $\overline{DC}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{CB}^2$ [755題], 故 $3\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AB}^2+2\overline{CB}^2$, 卽 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{CB}^2$.

1969. 設 O 爲所設點, P 爲所設直線 AB 上之所設點, 試以 O 爲中心作圓, 令交 AB 於 M, N, 而矩形 PM·PN 等於所設面積.

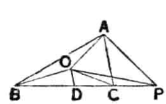
解 命所設面積爲 k^2, 假定所求圓已作



得, 則 $\overline{OM}^2-\overline{OP}^2=k^2$ [874題], 或 $\overline{OP}^2-\overline{OM}^2=k^2$, 卽 $OM^2=k^2+\overline{OP}^2$, 或 $OM^2=\overline{OP}^2-k^2$. 故當先按 $\overline{OM}^2=k^2+\overline{OP}^2$, 或 $\overline{OM}^2=\overline{OP}^2-k^2$ 以求 OM 之長 [1957, 1958題], 以 O 爲中心, OM 爲半徑作圓, 則此圓卽所求圓.

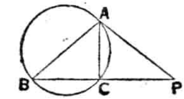
1970. 試在所設三角形 ABC 之底 BC 之延線上取一點 P, 令 $\overline{PA}^2=PB\cdot PC$.

解 假定問題已得解, 命 O 爲外心, 則 $\overline{PA}^2=PB\cdot PC=(PD+BD)(PD-BD)=\overline{PD}^2-\overline{BD}^2=(\overline{OD}^2+PD^2)-(\overline{BD}^2+\overline{OD}^2)=\overline{OP}^2-\overline{OA}^2$, 故 $O\hat{A}P=\hat{R}$.



故當先求外心 O, 聯結 O, A, 引 OA 之垂線 AP, 命其與 BC 延線之交點爲 P, 於是 P 卽所求點.

別解 假定 P 已求得, 作三角形 ABC 之外接圓, 則因 $\overline{AP}^2=PB\cdot PC$, 故 AP 爲圓 ABC 之切線 [878題].

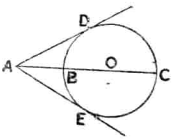


故可先作 ABC 之外

接圓,由 A 引切線 AP, 命其與 BC 所引之交點爲 P, 則 P 卽所求點.

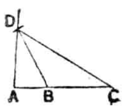
1971. 試在所設圓外求一點, 令由此點至此圓周所引之二切線之和, 等於由此點過圓之中心所引割線之全體.

解 假定所求點 A 業已求得,由 A 引二切線 AD, AE, 則 $AD=AE$, $AB\cdot AC=\overline{AD}^2=\frac{1}{4}\overline{AC}^2$, 故 $AB=\frac{1}{4}AC$,從而 $AC-AB=BC=\frac{3}{4}AC$, 故 $3AB=BC$. 故可先延長圓之直徑 BC, 在延線上取 $BA=\frac{1}{3}BC$, 則 A 卽所求點.



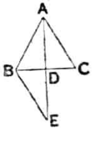
1972. 試作鈍角二等邊三角形, 令其底邊上之正方形, 等於一等邊上正方形之三倍.

解 延長任意直線 AB 至 C, 令 $BC=2AB$, 過 A 引 AD, 令 $C\hat{A}D=\hat{R}$; 以 B 爲中心, BC 爲半徑作圓, 令交 AD 於 D; 聯結 BD, CD, 則 BCD 卽所求三角形.



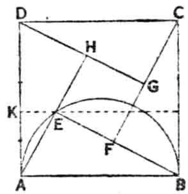
何則? 因 $C\hat{B}D$ 爲鈍角, 故 $\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+2BC\cdot BA=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+BC(2BA)=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2+\overline{BC}^2=3\overline{BC}^2$.

別解 先在任意直線上作等邊三角形 ABC, 聯結 BC 之中點 D 與 A, 在 AD 延線上取 E, 令 $DE=AD$, 則 ABE 卽所求三角形.何則?由作圖法, $AB=BE$, 且 $\overline{AE}^2=4\overline{AD}^2=4(\overline{AB}^2-\overline{BD}^2)=4\overline{AB}^2-4\overline{BD}^2=4\overline{AB}^2-\overline{BC}^2=4\overline{AB}^2-\overline{AB}^2=3\overline{AB}^2$.



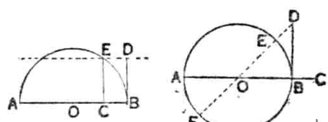
1973. 試將正方形等分爲五, 令其四爲直角三角形,他一爲正方形.

解 假定所求直線 BE, CF, DG, AH 業已作得,則點 E 在直徑爲 AB 之圓周上, 又由 E 平行於 AB 引直線 KE, 則因 $\triangle EAB=\frac{1}{5}$□ABCD, 故 K 爲 AD 之五等分點中,由 A 起位於第二者. 由是得作圖法如次. 過 K 引 AB 之平行線,令交 AB 爲直徑之圓於 E. 引 AE, 由 D 引 AE 之垂線 DHG, 由 C 引 DHG 之垂線 CGF, 由 B 引 CGF 之垂線 BFE, 則是等直線即所求分線.



1974. 將一所設直線內分或外分爲二, 令其二分所包矩形, 等於所設正方形. 又所設正方形之大小,須受若何之限制?

解 引 AB 之垂線 BD, 令 BD 等於所設正方形之一邊, 由 D 平行於 AB 引直線 DE, 令交 AB 爲直徑之半圓周於 E, 由 E 引 AB 之垂線 EC, 則 $AC\cdot BC=\overline{EC}^2$ [893題] $=\overline{BD}^2$, 故 C 卽所求點. 外分時, 可由 D 引圓之直徑,命此直線與圓之交點爲 E, 在 AB 之延線上取 BC, 令等於 DE, 則 C 卽所求點.但內分時,所設正方形之一邊,不能大於圓之半徑,卽所設直線之半分.



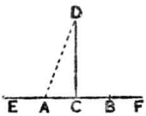
1975. 試作一矩形, 令與所設直線形等

積,且其二邊之和等於所設直線.

解　先依 1938 題將所設直線形變爲與其等積之正方形,再依 1974 題,卽可作得所求矩形.

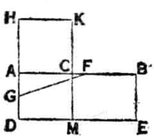
1976.　試作一矩形,令與所設直線形等積,且其二邊之差,等於所設直線.

解　設 AB 爲所設差,h 爲與所設直線形等積之正方形之一邊.命 AB 之中點爲 C,由 C 引 AB 之垂線 CD,令等於 h,聯結 AD,在 CA 上 C 之兩旁分別取 E, F,令 CE $=$ CF $=$ AD,則 AE, AF 等於所求之兩邊.何則? $AF-AE=AB$,且 $AE\cdot AF=(CE-CA)(CA+CF)=(CE-CA)(CA+CE)=\overline{CE}^2-\overline{CA}^2=\overline{AD}^2-\overline{CA}^2=h^2$.



1977.　分所設直線 AB 於 C,令 $AB\cdot BC=m\overline{AC}^2$.但 m 爲任意數.

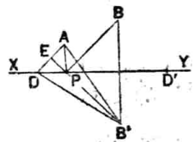
解　引一直線 AD,令 $B\hat{A}D=\hat{R}$,且 $AD=\dfrac{AB}{m}$,作矩形 ABED,在 AB 上取 AF,令其長等於與此矩形等積之正方形之一邊.聯結 F 與 AD 之中點 G,在 DA 之延線上取 GH $=$ GF.在 AB 上取點 C,令 AC $=$ AH,則 C 卽所求點.何則?作正方形 ACKH,命 KC 之延線與 DE 之交點爲 M,則 $\overline{GF}^2-\overline{AG}^2=\overline{GH}^2-\overline{AG}^2=(GH+AG)(GH-AG)=HD\cdot HA$,故 $HD\cdot HA=\overline{AF}^2$.故 ▭HDMK $=$ ▭ABED,故 □HC $=$ ▭BM,故 $\overline{AC}^2=BC\cdot AD$,卽 $\overline{AC}^2=BC\cdot\dfrac{AB}{m}$,



故 $m\,\overline{AC}^2=BC\cdot AB$.

1978.　有二所設點 A, B,在定直線 XY 之同側,試在此直線上取一點 P,令 $A\hat{P}X=2B\hat{P}Y$.

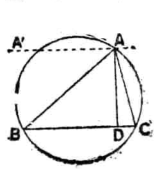
解　命 B 關於 XY 之對稱點爲 B′,聯結 B′P,在其延線上取一點 E,則 $B\hat{P}Y=B'\hat{P}Y=X\hat{P}E$,而 $A\hat{P}X=2\times B\hat{P}Y$,故 $A\hat{P}X=2\times X\hat{P}E$.在 XY 上取 D 點,令 PA $=$ PD,聯結 AD,則 B′P ⊥ AD,故又 AB′ $=$ DB′.故作圖法如下.取 B 關於 XY 之對稱點 B′,聯結 B′A,以 B′ 爲中心,B′A 爲半徑作圓,命其與 XY 之交點爲 D,引 AD 之垂直二等分線,令交 XY 於 P,則 P 卽所求點.



注意　今取中心 B′,半徑 B′A 之圓與 XY 之他交點 D′,則由同上之方法,又可在 XY 上取得一點 P′,但此時 $B\hat{P}'Y=2A\hat{P}'X$.

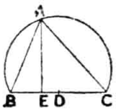
1979.　已知一角,此角之對邊,及面積,求作三角形.

解　設 $\hat{A}=\alpha$, $BC=l$,及三角形 ABC 之面積 m^2 爲已知.假定三角形 ABC 業已求得,則 $m^2=\frac{1}{2}l\cdot AD$,故 AD 一定.故頂點 A 在平行於 BC,且距 BC 等於定長 AD 之直線 AA′ 上.同時 A 又在 BC 爲弦,含角 α 之弓形弧上.故聯 AA′ 與弧 BAC 之交點 A 於 B, C,卽得所求三角形 ABC.



1980.　已知底邊 a,頂角 A,及他二邊上正方形 b^2-c^2,求作三角形.

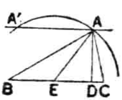
解 設 ABC 爲所求三角形，則底 BC 之長爲已知，A 之大小亦爲已知，故 A 在 BC 爲弦，含所設角之弓形弧上. 又由頂點 A 至底 BC 引垂線，命其足爲 E，



則 $b^2-c^2=\overline{CE}^2-\overline{BE}^2=(CE+BE)(CE-BE)$. 故設 BC 之中點爲 D，則 $b^2-c^2=a(2ED)$，故 $ED=(b^2-c^2)/2a$. 故得作圖法如下. 引任意直線 BC，令其長等於 a，以此直線爲弦，在其上作含所設角 A 之弓形. 又取 BC 之中點 D，由 D 至 B 方取 E 點，令 $ED=(b^2-c^2)/2a$ [1941題]，過此 E 點引 BC 之垂線，命其與前弓形弧之交點爲 A，則 ABC 卽所求三角形.

1981. 已知底邊 a，高 h_a，及他二邊上正方形之和 b^2+c^2，求作三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形，D 爲由 A 至 BC 所引垂線之足，E 爲 BC 之中點，則 AD 等於所設長 h_a，故 A 在平行於 BC，且距 BC 爲 h_a 之直線上. 又

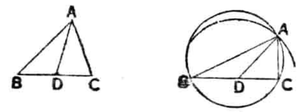


$b^2+c^2=2(\overline{AE}^2+\overline{BE}^2)$，故 $\overline{AE}^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2-2\overline{BE}^2)$，其中 b^2+c^2 爲已知量，BE 爲所設長 a 之半分，故爲定長，因而 AE 亦爲定長. 故 A 點在 E 爲中心，定長 $\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-2\overline{BE}^2)}$ 爲半徑之圓周上. 故得作圖法如次. 引任意直線 BC，令其長等於 a，引 BC 之平行線 AA′，令其與 BC 之距離爲 h_a. 取 BC 之中點 E，以 E 爲中心，$\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-2\overline{BE}^2)}$ 之長爲半徑作圓，令交前平行線 AA′ 於 A，則 ABC 卽所求三角形.

注意 $\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-2\overline{BE}^2)}$ 可用幾何學作圖法求得之 [參照下題注意].

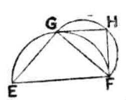
1982. 已知頂角 A，底邊 a，及他二邊上正方形之和 b^2+c^2，求作三角形.

解 引任意直線 BC，令等於所設邊 a，則



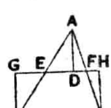
三角形之頂點 A，在 BC 爲弦，含所設角 A 之弓形弧上. 命 BC 之中點爲 D，則 $b^2+c^2=2\overline{BD}^2+2\overline{AD}^2$，故 $\overline{AD}^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2-2\overline{BD}^2)$，其中 b^2+c^2 及 BD 皆爲已知量，故 AD 亦爲定量；故頂點又在 D 爲中心，$\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-2\overline{BD}^2)}$ 爲半徑之圓周上. 故此圓周與前弓形之交點，卽所求三角形之頂點 A.

注意 求 $\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2-2\overline{BD}^2)}$ 之作圖法如次. 將此式易書爲 $\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\overline{BD}^2}$，命 EF 爲等於 b^2+c^2 之正方形之一邊，在 EF 上作二等邊直角三角形 EGF，則 $\overline{GF}^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)$. 次，以 GF 爲直徑作半圓，取 HF 令等於 BD，聯結 GH，則 GH $=$ AD，因 $\overline{GH}^2=\overline{GF}^2-\overline{HF}^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2)-\overline{BD}^2=\overline{AD}^2$ 故也.



1983. 設三角形之二底角俱爲銳角，試剖此三角形爲三部分，俾得集成一矩形，其底邊等於原三角形之底邊.

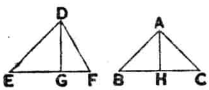
解 設三角形 ABC 中，$\hat{B}$，$\hat{C}$ 爲銳角，命 AB，AC 之中點爲 E，F，聯結 E，F，由 A 至 EF 引垂線 AD，此時三角形 ABC 卽分成所求之三部分 AED，AFD，EBCF. 由 B，C 至 EF



之延線引垂線 BG, CH, 則因 AE = BE, AF = CF, BG || AD || CH, 故 $\triangle$AED ≡ $\triangle$BEG, $\triangle$AFD ≡ $\triangle$CFH. 故若取三角形 AED, AFD 而置於 $\triangle$BEG, $\triangle$CFH 之上,卽可作得矩形 BCHG.

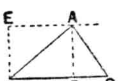
1984. 試在所設底邊上, 作與所設三角形等積之二等邊三角形.

解 命所設三角形爲 DEF, 他所設底邊爲 BC. 由 D 至 EF 引垂線 DG, 在 BC 上作一矩形,令其面積等於 DG·EF [1936題],命 BC 之隣邊爲 m. 次,過 BC 之中點 H, 引 BC 之垂線 HA, 令其長等於 m, 聯結 AB, AC, 則 ABC 卽所求三角形. ABC 爲二等邊三角形甚明,又 DG·EF = AH·BC, 故 2$\triangle$DEF = 2$\triangle$ABC, 即 $\triangle$DEF = $\triangle$ABC.



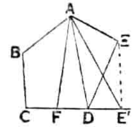
1985. 已知三角形之底,面積,及其一底角,求作本形.

解 設 ABC 爲所求三角形, 由頂點 A 至 BC 所引之垂線爲 AD, 所設面積爲 m^2, 則 $\frac{1}{2}$AD·BC $= m^2$, 其中 BC 爲已知,故 AD 可求得之, 因此頂點 A 在平行於 BC, 且距 BC 爲 AD 之直線上. 又 $\hat{B}$ 爲已知,故 A 又在過 B 而與 BC 成所設角 B 之直線上. 故作圖法甚易得之.

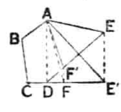


1986. 試由所設五邊形之一角頂引一直線,將本形等分爲二.

解 設所設五邊形爲 ABCDE, 試由 A 引一直線,將本形等分爲二. 過 E 平行於 AD 引 EE′, 命其與 CD 延線之交點爲 E′. 次由 A 引一直線 AF, 將四邊形 ABCE′ 等分爲二 [1950題], 則 AF 卽所求直線. 何則, 因 ABCDE = ABCE′, 從而 ABCF = $\frac{1}{2}$ABCE′ = $\frac{1}{2}$ABCDE 故也.



注意 若 AF 與 CD 之延線交, 則可過 F, 平行於 AD 引 FF′, 命其與 DE 之交點爲 F′, 則 AF′ 卽所求直線, 此甚易知之.

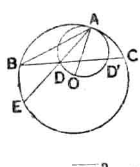


1987. 作一正方形, 令等於若干所設正方形之和.

解 先自若干所設正方形內, 任取其二, 於是作一正方形,令等於此二者之和 [1957題]. 次, 再作一正方形,令等於上次所作正方形與所餘正方形之任一之和. 以下仿此,最後所得者卽所求正方形.

1988. 試在三角形之底邊上求一點, 令由此點至頂點所引直線上之正方形,等於底上二分所包之矩形.

解 設三角形 ABC 之外心爲 O, 以 AO 爲直徑作圓,命其與 BC 之交點爲 D, D′, 則 D, D′ 卽所求點. BD·DC = AD·DE [875題], 然 $\widehat{ADO} = \hat{R}$, 故 AD = DE, 因而 BD·DC = AD^2. 同理, $\overline{\mathrm{AD}'}^2$ = BD′·D′C.

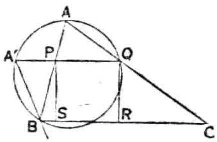


吟味 若 AO 爲直徑之圓與底邊 BC 相交, 則有二解; 相切, 則有一解; 不交不切, 則無解.

1989. 設三角形 ABC 中, 已知角 A, 內接正方形 [其二頂點在 BC 上] 之一邊, 及此

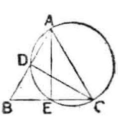
正方形在 AB 上之頂點,將 AB 所分二分所包之矩形,求作此三角形.

解 命所設正方形之一邊爲 M,所設之矩形面積爲 S,假定所求三角形 ABC 業已作得,其內接正方形爲 PQRS. 過 A, B, Q 三點作一圓,命 QP 之延線與圓周之交點爲 A′,則 $AP\cdot BP=PQ\cdot PA'=S$,故可求得 PA′. 聯結 A′B,則 $P\hat{A}'B=\hat{A}=$ 已知. 由是得作圖法如次. 作一邊爲 M 之正方形 PQRS,在 QP 之延線上取 PA′,令 $PQ\cdot PA'=S$,過 A′ 引 A′B,令 $Q\hat{A}'B=\hat{A}$,命其與 RS 延線之交點爲 B. 次,作 △A′BQ 之外接圓,令交 BP 之延線於 A,命 AQ 之延線與 BR 延線之交點爲 C,則 ABC 卽所求三角形.



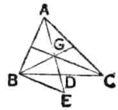
1990. 已知底邊 a,頂角 A,及 BD·BA,求作三角形. 但 D 爲由 C 至 AB 所引垂線之足.

解 設 ABC 爲所求三角形,作三角形 ADC 之外接圓,命其與 BC 之交點爲 E,則 $BD\cdot BA=BE\cdot BC$,卽爲已知. 其中 BC 爲已知,故 BE 可求得之. 又 $A\hat{E}C=A\hat{D}C=\hat{R}$. 故作圖法如次. 引任意直線 BC,令其長等於 a,在其上取 BE,令 $BE\cdot BC=BD\cdot BA$. 過 E 引 BC 之垂線,令交 BC 爲弦,含所設角 $\hat{A}$ 之弓形弧於 A,則 ABC 卽所求三角形.



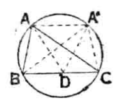
1991. 已知一中線 m_a,他二中線所成之角 $(\widehat{m_b, m_c})$,及面積,求作三角形.

解 假定所求三角形 ABC 業已求得,已知中線爲 AD,重心爲 G,面積爲 S. 延長 GD,令 DE=GD,聯結 BE,則四邊形 BGCE 爲平行四邊形,$\triangle BGC=\triangle BGE=\frac{1}{3}\triangle ABC$,$GE=2GD=\frac{2}{3}AD$,$G\hat{B}E=B\hat{G}C$ 之補角=已知,故三角形 GBE 可作得之. 故作圖法如次. 作三角形 GBE [1979題],聯結 GE 之中點 D 與 B,在其延線上取 C,令 DC=BD,在 EG 之延線上取 A,令 GA=EG,則 ABC 卽所求三角形.



1992. 已知二邊所包之矩形 $b\times c$,第三邊,卽底邊上之中線 m_a,及二底角之差 $\hat{B}-\hat{C}$,求作三角形.

解 假定所求三角形 ABC 業已求得,迴轉此三角形,令 B 點移於 C 點,C 點移於 B 點,而得三角形 A′BC,則顯然 $ABA'=\hat{B}-\hat{C}$. 於是三角形 ABA′ 中,$A\hat{B}A'$ 爲已知,二邊 AB, A′B 所包之矩形亦爲已知,故三角形 ABA′ 之面積一定,卽此面積等於一二等邊三角形,其等邊爲與 $AB\cdot A'B$ 等積之正方形之一邊,頂角等於 $\hat{B}-\hat{C}$. 次,設 BC 之中點爲 D,聯結 AD, A′D,則因 $AA'\parallel BC$,故 $\triangle ABA'=\triangle ADA'$. 故二等邊三角形 ADA′ 中,已知其面積及二等邊,故可作得之. 因此作圖法如次. 作三角形 ADA′,過 D 平行於 AA′ 引直線 BC,以 AA′ 爲弦,作含 $\hat{B}-\hat{C}$ 之弓形弧,令交 BC 於 B, C,則 ABC 卽所求三角形.



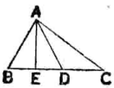
1993. 已知高 h_a,二底角之差 $\hat{B}-\hat{C}$,及

二邊所包之矩形 $b\times c$, 求作三角形.

解 前題中, 二等邊三角形 ADA′ 之面積及高爲已知, 故可作得之, 從而仿前題, 可作得所求三角形 ABC.

1994. 已知三角形之一中線 m_a, 此中線兩側二邊上正方形之差 b^2-c^2, 及此中線與第三邊所成之角 $(\widehat{m_a, a})$, 求作此三角形.

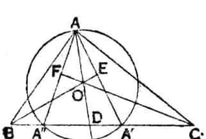
解 假定所求三角形 ABC 業已作得, 命中線爲 AD, 由 A 至 BC 所引之垂線爲 AE, 則直角三角形 AED 中, $\widehat{ADE}$ 及 AD 爲已知, 故此三角形可作得之.



又 $b^2-c^2=2a\cdot ED$ [776題], 故 BC 可作得之. 由是得作圖法如下. 引任意直線 AD, 令等於 m_a, 過 D 引直線 BC, 令與 AD 所成之角等於所設角 $(\widehat{m_a, a})$, 由 A 至 BC 引垂線 AE. 求 a 令 $b^2-c^2=2a\cdot ED$, 在 BC 上 D 之兩側取 B, C, 令 $DB=DC=\frac{1}{2}a$, 聯結 AB, AC, 則 ABC 卽所求三角形.

1995. 設三角形 ABC 中, 已知 $\hat{A}$ 之二等分線 AD, AB−BD, 及 AC−CD, 求作此三角形.

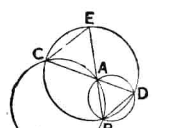
解 在邊 BC 上取 BA′, CA″, 令分別等於 BA, CA, 則 DA′, DA″ 爲所設長. 作三角形 AA′A″ 之外接圓, 則此圓與原三角形之內接圓同心.



何則, 命 $\hat{B}$, $\hat{C}$ 之二等分線之交點爲 O, 則 BO 爲二等邊三角形 ABA′ 之頂角之二等分線, 從而將 AA′ 垂直二等分; 同理, CO 亦將 AA″ 垂直二等分故也. 因此 O 爲三角形 AA′A″ 之外心. 命 AD 之延線與圓 AA′A″ 周之交點爲 G, 則 AG 爲直徑, 且 AD·DG=A′D·A″D, 故可求得 DG, 從而直徑 AG 亦可求得. 由是得作圖法如下. 引任意直線 AG, 令等於 AD+DG, 以 AG 爲直徑作圓, 令交 D 爲中心, DA′=AB−BD 爲半徑之圓於 A′, 聯結 A′D, 命其延線與第一圓之交點爲 A″. 次, 命 AA′, AA″ 之垂直二等分線與 A′A″ 或其延線之交點分別爲 B, C, 則 ABC 卽所求三角形.

1996. 試過相交二圓之一交點, 引一割線, 令其在此二圓間之二弦所包之矩形, 等於所設正方形 m^2.

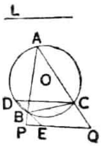
解 設兩圓之交點爲 A, B, 假定過 A 之所求倍弦 CAD 業已引得, 過 BCD 作一圓, 命其與 BA 延線之交點爲 E, 則 $AC\cdot AD=AB\cdot AE=m^2$.



然 AB 爲二圓之公弦, 故一定, 從而 E 爲定點. 又 $\widehat{AEC}=\widehat{ADB}$=一定. 由是得作圖法如下. 在 AB 之延線上取 E 點, 令 $AE\cdot AB=m^2$, 由 E 引 EC, 令 $\widehat{AEC}$ 等於一圓之圓周角 $\widehat{ADB}$, 並令 EC 交他圓於 C, 聯結 AC, 卽可得所求弦 CAD.

1997. 作所設圓之內接三角形, 令其底邊平行於所設直線, 他二邊分別過所設二點.

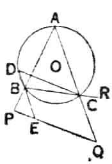
解 設 ABC 爲內接於圓 O 之所求三角形, BC 平行於所設直線 L, 又 AB, AC 分別過所設點 P, Q. 由 C 平行於 PQ 引弦 CD, 聯結 DB, 命其延線與 PQ 之交點爲 E. 於是



因 $BC \parallel L$, $DC \parallel PQ$, 故 $D\hat{C}B$ = 一定. 從而弦 DB = 一定. 次, 因 $B\hat{A}C = B\hat{D}C = D\hat{E}P$, 故 ABEQ 在一圓周上, 故 $PE \cdot PQ = PB \cdot PA$ = 一定, 故 E 爲定點. 故作圖法如下. 分 PQ 於 E, 令 $PE \cdot PQ$ 等於由 P 至圓 O 所引切線上之正方形. 過 E 引一割線 EBD, 令弦 BD 等於前所求得之長. 求 BEQ 之外接圓與圓 O 之交點 A, 聯結 AQ, 命其與圓 O 之交點爲 C, 則 ABC 卽所求三角形.

1998. 作所設圓之內接三角形, 令其三邊分別過所設三點.

解 命 P, Q, R 爲所設三點, 所求三角形爲 ABC. 由 C 平行於 PQ 引弦 CD, 命 DB 之延線與 PQ 之交點爲 E, 則如前題所述, E 爲定點. 故作圖法如下. 作圓 O 之內接三角形 BCD, 令其一邊 DC 平行於 PQ, 他二邊分別過定點 E, R [前題]. 命 PB 之延線與圓周之交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.



1999. 過圓外二定點, 至此圓引二割線, 令相交於圓周, 且聯結其與圓周之他交點之弦, 平行於所設直線.

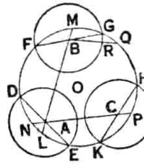
解 本題與 1997 題同.

2000. 將有限直線 AB 向兩方延長, 令其全線爲原有限直線之各端所分二分所包之矩形, 分別等於所設正方形.

解 由 AB 之兩端 A 及 B, 引二垂線 AD, BE, 令分別等於所設二正方形之邊. 聯結 DE, 等分之於 F, 由 F 引 DE 之垂線 CF, 令交 AB 於 C, 聯結 CD, CE, 以 C 爲中心, CD 或 CE 爲半徑作半圓 GDEH, 令交 AB 兩側之延線於 G 及 H, 則 GH 卽所求延線. 何則, 因 $GA \cdot AH = \overline{AD}^2$, $GB \cdot BH = \overline{BE}^2$ [893題] 故也.

2001. 作所設三圓周之二等分圓周.

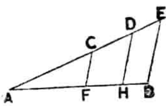
解 設 A, B, C 爲所設三圓之中心, 聯結 AB, AC, 將 AB, AC 向兩方延長, 令 $MB \cdot BL$ = (B 圓半徑)^2, $MA \cdot AL$ = (A 圓半徑)^2, $NA \cdot AP$ = (A 圓半徑)^2, $NC \cdot CP$ = (C 圓半徑)^2 [2000 題]. 過 M, L, P 作圓 O, 則此圓卽二等分圓 A, B, C 之所求圓. 何則? 因 $MA \cdot AL$, $NA \cdot AP$ 皆等於 A 圓半徑上之正方形, 故圓 MLP 又過 N 點. 聯結 FB 而延長之, 則必過 G. 蓋若不然, 假定截二圓 B 及 O 於 R 及 Q, 則 FBQ, MBL 爲圓 O 中相交於 B 之二弦, 故 $MB \cdot BL = FB \cdot BQ$ [876 題]. 然 $MB \cdot BL = FB \cdot BG$ [作圖], 故 $FB \cdot BG = FB \cdot BQ$, 故 BG, 卽 BR = BQ, 此不合理; 故 FB 之延線過 G, 卽圓 O 之周將圓 B 之周二等分. 仿此得證, 圓 O 之周又將他二圓 A 及 C 之周二等分.



第四章 比 例

2002. 試按已分直線上各分之比, 分一直線.

解 設 AB 爲求分之直線, ACDE 爲已分之



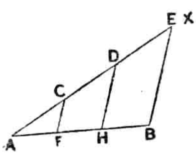
直線,試按 AE 上各分之比分 AB. 引 AE 令與 AB 成任意角,聯結 EB, 過 C, D 平行於 EB 引 CF, DH, 令交 AB 於 F 及 H, 則 AB 卽按 ACDE 上各分之比分於 F 及 H. 因 FC, HD 及 BE 相平行, 故 AF:FH＝AC:CD, FH:HB＝CD:DE [947題], 故 AB 按 ACDE 上各分之比分於 F 及 H.

2003. 試按所設比內分或外分一直線.

解 本題之作圖法及證明,可由 950 題明之.

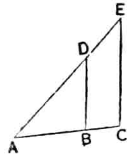
2004. 試由所設直線, 截取其若干等分之一.

解 設 AB 爲所設直線, 試由 AB 取其若干等分之一. 假定求取 AB 之三等分之一. 由 A 引直線 AX, 令與 AB 成任意角,在 AX 上取任意點 C, 取 CD, DE 令各等於 AC [公法 3], 聯結 EB, 由 C 平行於 EB 引 CF, 令交 AB 於 F, 則 AF 即 AB 之三等分之一. 何則? 由 D 平行於 EB 引 DH, 令交 AB 於 H. 因 CF, DH, 及 EB 相平行, 而 AC, CD, DE 皆相等,故 AF 爲 AB 之三等分之一 [229題]. 又不論 m 爲若何之整數, AB 之 m 等分之一,皆可仿上得之.



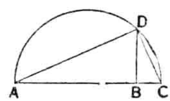
2005. 求一直線, 令爲所設三直線之第四比例項.

解 設 AB, BC, AD 爲所設三直線, 求爲 AB, BC, AD 之第四比例項之直線. 置 AB, BC 於一直線上, 令與 AD 成任意角. 聯結 BD, 由 C 平行於 BD 引 CE, 令交 AD 或其延線於 E. 此時 DE 卽所求第四比例項. 何則? 因 BD, CE 平行, 故 AB:BC＝AD:DE [949題], 卽 DE 爲 AB, BC, AD 之第四比例項.



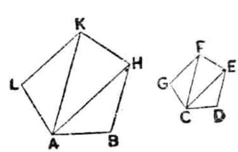
2006. 求一直線, 令爲所設二直線之比例中項.

解 設 AB, BC 爲二所設直線, 求爲 AB, BC 之比例中項之直線. 置 AB, BC 於一直線上, 在 AC 上作半圓 ADC, 由 B 垂直於 AC 引 BD, 令交圓周於 D, 則 BD 卽 AB, BC 之比例中項. 聯結 AD, CD, 因 ADC 爲半圓, 故角 ADC 爲直角, 而 DB 爲直角三角形 DAC 斜邊之垂線, 故 AB : BD＝BD : BC [1025題], 卽 BD 爲 AB, BC 之比例中項.



2007. 試在所設直線上作一直線形, 令與他所設直線上之所設直線形相似, 且在相似之位置.

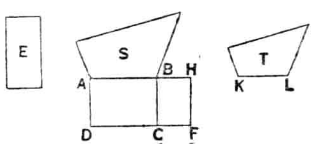
解 設 AB 爲所設直線, CDEFG 爲所設直線形. 試在 AB 上作一直線形, 令與 CD 上之直線形 CDEFG 相似, 且在相似之位置. 引直線形 CDEFG 之對角線 CE, CF, 分之成三角形. 作角 BAH, ABH, 令分別等於角 DCE, CDE, 又作角 HAK, AHK 令分別等於角 ECF, CEF, 以下仿此, 至作得所作直



線形所分成之一切三角形之等角三角形爲止.於是 ABHKL 卽所求直線形.由作圖,直線形 ABHKL 與直線形 CDEFG 等角. 又因兩三角形 ABH, CDE 等角, 故 AB:BH=CD:DE [1017題]; 又 BH:HA=DE:EC 而兩三角形 AHK, CEF 亦等角, 故 HA:HK=EC:EF; 故 BH:HK=DE:EF [等比定理]. 同理, HK:KL=EF:FG. 餘仿此.故兩直線形等角傍之二邊成比例,因此直線形 ABHKL 與直線形 CDEFG 相似.

2008. 作一直線形,令與一所設直線形等積,且與他所設直線形相似.

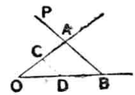
解 命 E 及 S 爲二所設直線形,求作與 E



等積,與 S 相似之直線形.在 S 之一邊 AB 上作與 S 等積之矩形 ABCD [1937題], 在 BC 上作與 E 等積之矩形 BCFH, 取 AB 與 BH 之比例中項 KL, 在 KL 上作與 S 相似之直線形 T, 令 KL 與 AB 爲直線形 T 與 S 之對應邊 [2007題]. 此時 T 卽所求直線形. AB:KL=KL:BH, 故 AB 與 BH 之比,等於 AB 與 KL 之二乘比. 而直線形 S 與直線形 T 之比,等於 AB 與 KL 之二乘比,從而又等於 AB 與 BH 之比. 又等高矩形之比, 等於其底之比, 故矩形 AC 與矩形 BF 之比,等於 AB 與 BH 之比.故直線形 S 與直線形 T 之比, 等於矩形 AC 與矩形 BF 之比.然直線形 S 等於矩形 AC, 故直線形 T 等於矩形 BF, 從而 T 又等於所設直線形 E. 故 T 爲所設直線形.

2009. 試過所設點 P 引一直線,令交角 O 之二邊於 A 及 B, 而 OA:OB 等於所設比.

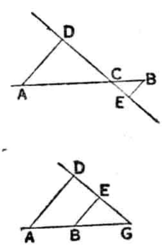
解 命所設比爲 $m:n$, 假定所求直線 PAB 業已求得. 在 OA, OB 上分別取 OC, OD, 令等於 m, n, 則因 OA:OB $=m:n=$ OC:OD, 故 AB ∥ CD [951題].



故作圖法如下. 在角 O 之二邊 OA, OB 上分別取 OC, OD, 令等於 m, n, 聯結 CD, 由 P 平行於 CD 引 PAB, 令交角 O 之二邊於 A 及 B, 則 PAB 卽所求直線.

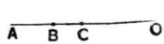
2010. 分已知直線 AB 於 C, 令由 A, B 至過 C 之任意直線所引之二垂線,等於已知比 $m:n$.

解 假定所求點 C 業已求得, 由 A, B 至過 C 之直線 DE 引垂線 AD, BE, 則因 △ADC ∽ △BEC, 故 AD:BE =AC:BC $=m:n$. 故 C 爲分 AB 於比 $m:n$ 之內分及外分點.



2011. 命一直線上之三點,依次爲 A, B, C, 試在此直線上求他一點 O, 令 OB 爲 OA, OC 之比例中項.

解 假定所求點 O 業已求得, 則 OA:OB =OB:OC, 或 OA∼OB:OB =OB∼OC:OC, 卽 AB:OB =BC:OC, 故 OB:OC=AB:BC. 其中 AB:BC 爲已知, BC 亦爲已知. 故作圖法如次. 將

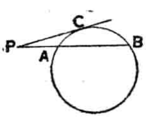


BC 按比 OB:OC=AB:BC 外分於 O, 於是 O 卽所求點.

注意 O 點之位置, 視 OA≷OB 而在 ABC 方向之延線上, 或在 CBA 方向之延線上. 又若 O 爲 B, C 間之內分點,或 A, B 間之內分點, 命 AB=a, BC=b, 則 $(a+b-x)x=(b-x)^2$ 之二根,卽 OC 之二値.

2012. 過圓外之所設點 P, 試引圓之割線,令交圓於 A, B, 而圓內之部分爲全線 PB 與圓外部分 PA 之比例中項.

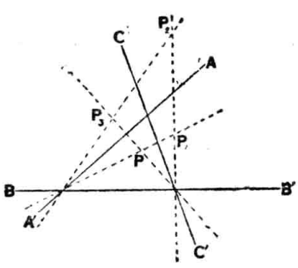
解 假定所求直線 PAB 業已引得, 則 PB : AB = AB : PA, 或 $\overline{AB}^2$=PA・PB. 而由 P 至圓引切線 PC, 則 $\overline{PC}^2$=PA・PB [877題],故 PC=AB.



故作圖法如下. 由 P 至圓引切線 PC, 在圓內作等於 PC 之弦, 又作切此弦之同心圓, 由 P 至此圓引切線 PAB, PA′B′, 則此直線卽所求直線 [462 題]. 欲令此問題可能,須 AB=PC 不大於圓之直徑.

2013. 求點, 令其至所設三直線之距離之比,等於所設比.

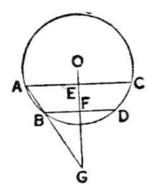
解 命所設三直線爲 AA′, BB′, CC′. 至



AA′, BB′ 之距離之比等於所設比之點之軌跡, 爲二直線 PP_1, P_3P_2 [1602題]. 又至 BB′, CC′ 之距離之比等於所設比之點之軌跡, 爲二直線 PP_3, P_1P_2. 故至三直線之距離之比等於所設比之點, 爲此四直線之交點 P, P_1, P_2, P_3. 所求點之數, 由於此軌跡之位置及 AA′, BB′, CC′ 之位置, 有時爲一, 有時爲二, 或竟無之.

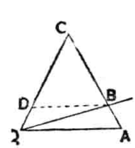
2014. 設圓周上有二點, 試過各點引一弦,令所引二弦平行,且其比爲所設比.

解 命所設二點爲 A, B, 假定所求平行弦 AC, BD 業已求得,由 O 至 AC, BD 引公垂線 OEF, 延長之, 令交 AB 之延線於 G, 命所設比爲 $m:n$. 於是因 AE, BF 分別爲 AC, BD 之半分, 故 AG : BG =AE : BF=$m:n$. 由是得作圖法如次. 求 AB 按 $m:n$ 之外分及內分點 G, G′, 聯結 G 與中心 O, 由 A, B 垂直於 OG 引弦 AC, BD, 則 AC, BD 卽所求弦. 又就 G′ 亦可仿上求得所求二弦.



2015. 有交於一點之三直線, 試引一直線,令其爲此三直線所截得之二分有所設比.

解 設所求直線爲 ABC, BC : AB=$m:n$. 平行於 OA 引 BD, 則 CD : DO=CB : BA=$m:n$. 故作圖法如下. 取任意長 OC, 又在 CO 上取 D, 令 CD : OD =$m:n$, 由 D 引 OA 之平行線, 令交 OB 於 B, 於是聯結 CB 之直線 CBA 卽所求直線. 又外分 OC 於 D, 令 CD

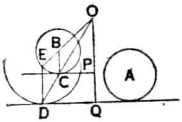


:OD $=m:n$, 則可得他一直線.

注意　本題之解無數.

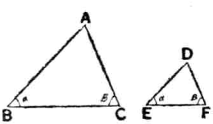
2016.　有一點 O 及二圓,試引各圓之切線,令相平行,且由 O 至此切線之距離之比,等於所設比 $m:n$.

解　命所設二圓之中心分別爲 A, B, 切此二圓之所求平行線爲 DQ, CP, 又命 OPQ 爲 DQ 之垂線.引 BC, OB, OCD, 由 D 引 DQ 之垂線 DE, 令交 OB 或其延線於 E, 則 $m:n=$ OP:OQ $=$ OC:OD $=$ OB:OE $=$ BC:ED. 故作圖法如下. 在 OB 上求 E 點,令 OB : OE $=m:n$, 又求 ED 之長,令 B 圓之半徑 :ED $=m:n$. 以 E 爲中心, ED 爲半徑作圓,引此圓與 A 圓之公切線 DQ; 平行於 ED 引圓 B 之半徑 BC, 又引切圓 B 於 C 之切線 CP, 於是 CP, DQ 卽二所求切線.



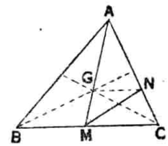
2017.　已知二角及面積,求作三角形.

解　假定所求三角形 ABC 業已作得,其面積爲 S, 二角 B, C 分別爲 α, β [但 S, α, β 皆爲所設量]. 在任意直線 EF 上作三角形 DEF, 令 $\hat{E}=\alpha$, $\hat{F}=\beta$, 則 △ABC, △DEF 相似, 故 △ABC:△DEF $=\overline{BC}^2:\overline{EF}^2$. 於是得作圖法如次. 在任意直線 EF 上作 △DEF, 令 $\hat{E}=\alpha$, $\hat{F}=\beta$, 由 S:△DEF $=\overline{BC}^2:\overline{EF}^2$ 求 BC; 在 BC 上作三角形 ABC, 令 $\hat{B}=\alpha$, $\hat{C}=\beta$, 則三角形 ABC 卽所求三角形.



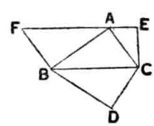
2018.　試由三角形一邊之中點引二直線,令分全形爲三分,其比爲 1:2:3.

解　命三角形 ABC 中,邊 BC 之中點爲 M, 求由 M 引二直線,分全形於比 1:2:3. 各部分與全形之比爲 1:6, 2:6, 3:6, 故設三角形 ABC 三中線之交點爲 G, 則最小部分等於三角形 GMC. 故由 G 平行於 BC 引一直線,令交 AC 或 AB 於 N, 聯結 MN, 卽得一所求直線. 根據同理,可知 MA 爲他一所求直線.



2019.　作一三角形,令等於二或三個相似三角形之和,且與諸相似三角形相似.

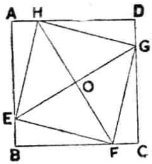
解　先求作等於二相似三角形之和且與此原形相似之三角形. 以二相似三角形對應邊爲直角之二邊,作直角三角形,在斜邊上作與原形相似且在相似位置之三角形,則此三角形卽所求者. 次求作等於三相似三角形之和且與此原形相似之三角形. 依上法,作等於二相似三角形之和,且與此原形相似之三角形; 再以此三角形之一邊,與第三相似三角形之對應邊爲直角之二邊,作直角三角形,在其斜邊上作與原形相似且在相似位置之三角形,則此形卽所求三角形.



注意　不論相似三角形之數爲若干,凡等於其和且與其相似之三角形,皆可依上法作得之.

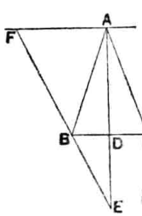
2020. 作已知正方形之內接正方形，令其面積等於已知正方形面積之四分之三.

解　設已知正方形之一邊爲 m，所求正方形之一邊爲 x. 正方形 ABCD, EFGH 之對角線過同點 O [289 題]，甚易明之；又 $\overline{OD}^2:\overline{OH}^2=\frac{1}{2}m^2:\frac{1}{2}x^2=m^2:x^2=4:3$. 而 OD 爲已知，故 OH 可求得之.欲求得 OH，可以 OD 爲直角之二邊，作直角三角形，又以其斜邊及 OD 爲直角之二邊，作直角三角形，取最後斜邊之半分卽得. 於是以如是求得之 OH 爲半徑，以 O 爲中心作圓，截已知正方形之四邊 AB, BC, CD, DA 於 E, E′, F, F′, G, G′, H, H′，則正方形 EFGH, E′F′G′H′ 卽所求正方形.

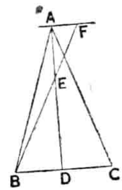


2021. 已知底與高之和或差，及頂角，求作二等邊三角形.

解　(1) 已知底高之和 m 及頂角 α. 假定所求三角形 ABC 業已求得，延長高 AD，令 AE $=m$，聯結 BE 而延長之，令交過 A 而垂直於 AE 之直線 AF 於 F. 於是因 △EAF∽△EDB，故 AE:AF＝DE:BD；其中 DE＝BC＝2BD，故 AE＝2AF. 故作圖法如下. 引成角 α 之直線 AB, AC，在角 A 之二等分線 AE 上取 AE＝m，引 AE 之垂線 AF，令其長等於 $\frac{1}{2}m$，由 EF 與 AB 之交點 B，引 AE 之垂線 BC，令交 AC 於 C，則 ABC 卽所求三角形.

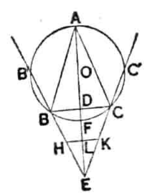


(2) 已知底高之差 m 及頂角 α. 假定所求三角形 ABC 業已求得，取 ED＝BC，聯結 BE 而延長之，令交 AD 之垂線 AF 於 F，於是仿前得證 AF＝$\frac{1}{2}\times m$. 故作圖法如下. 引成角 α 之直線 AB, AC，在 $\hat{A}$ 之二等分線 AD 上取 AE＝m，又引 AF⊥AE，且 AF＝$\frac{1}{2}m$，聯結 E, F 而延長之，令交 AB 於 B，由 B 引 AD 之垂線 BC，令交 AC 於 C，則 ABC 卽所求三角形.



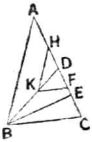
2022. 設圓之內接二等邊三角形中，已知高底之和，試作之.

解　設 ABC 爲所求三角形，在高 AD 之延線上取一點 E，令 DE＝BC，聯結 EB, EC，則 △BCE 中，底高相等，故其形一定，又 AE 等於所設之高底和. 於是由相似形定理，得作圖法如下. 在所設圓之直徑 AF 之延線上取一點 E，令 AE＝高底和. 過此直線上之一點 L，引此直線之垂線 HLK，在 L 之兩側取 H 及 K，令 HL＝LK＝$\frac{1}{2}$LE. 聯結 EH, EK 而延長之，令交圓於 B 及 C，則 ABC 卽所求三角形. 取 EH, EK 與圓之他交點 B′, C′，則得他所求三角形 AB′C′.



2023. 設二等邊三角形中，已知等邊上之高及中線，試作之.

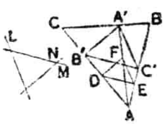
解　設 ABC 爲所求三角形，AB＝AC. 因中線 BD 及高 BE 爲已知，故直角三角形 BED



可徑作得之. 在 D 之兩側,取等長之 DH, DF, 作 FK ∥ BC, HK ∥ AB, 則 △HKF 與 △ABC 相似,故爲二等邊,且 K 在 BD 上. 於是得作圖法如次. 作直角三角形 BDE, 令 BD＝所設中線, BE＝所設高, $B\hat{E}D=\hat{R}$. 在 ED 及其延線上取 F, H, 令 DF＝DH; 以 H 爲中心, HF 爲半徑作圓, 令交 BD 於 K; 過 B 平行於 KH, KF 分別引 BA, BC, 令交 ED 或其延線於 A, C, 則 ABC 卽所求三角形.

2024. 內接於三角形 ABC, 試作三角形 A′B′C′, 令其各邊分別平行於所設三直線.

解 命所設三直線爲 L, M, N, 假定所求三角形 A′B′C′ 業已求得. 平行於 B′C′ 引一直線 DE, 令交 ABC 之二邊於 D, E, 過 D 及 E 分別平行於 B′A′ 及 C′A′, 引直線 DF, EF, 命其交點爲 F, 則因 △A′B′C′ 與 △FDE 相似,且其對應邊相平行, 故 A′F 之延線過 A [1022 題]. 故得作圖法如次. 平行於 L, M, N 內之一者, 例如 M, 引一任意直線 DE, 令交 AC, AB 於 D 及 E, 過 D 及 E 分別平行於 N, L, 引直線 DF, EF, 命其交點爲 F, 聯結 AF 而延長之, 令交 BC 於點 A′. 過 A′ 平行於 N 及 L 引二直線 A′B′, A′C′, 令交 AC, AB 於 B′, C′, 則 A′B′C′ 卽所求三角形.

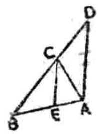


2025. 已知二角與一線 [中線, 高, 周等], 求作三角形.

解 因已知二角, 故可作得相似三角形; 由此卽可作得與此三角形相似, 且所設線等於所設長之三角形.

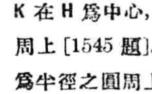
2026. 已知二邊 a, b, 及此二邊所夾角之二等分線 w_c, 求作三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形, CE 爲 w_c. 過 A 平行於 CE 引一直線, 令交 BC 之延線 D. 於是因 $A\hat{D}C=E\hat{C}B=E\hat{C}A=C\hat{A}D$, 故 CD＝CA＝$b$. 而 BC:CE＝BD:DA, 或 $a:w_c=a+b$:DA, 故 DA 可求得之. 因此三角形 CDA 之三邊爲已知, 故此三角形可作得之, 從而又可作得三角形 ABC. 先由比例式 $a:w_c=a+b$:DA 求 DA 之長, 以 DA 爲底, 作二等邊三角形 ACD, 令其等邊等於 b. 在 DC 之延線上取點 B, 令 CB＝a, 則 ABC 卽所求三角形.



2027. 已知底邊 a, 他二邊之比 $b:c$, 及由底之一端所引之中線 m_c, 求作三角形.

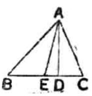
解 設 ABC 爲所求三角形, $b:c$ 爲已知. 按此比內分及外分底邊於 D 及 E, 以 DE 爲直徑作圓, 則圓周過 A 點. 命此圓之中心爲 O, 直線 BA 之中點爲 K, OB 之中點爲 H, 則 K 在 H 爲中心, $\frac{1}{2}$OA, 卽 $\frac{1}{2}$OD 爲半徑之圓周上 [1545 題]. 而 K 又在 C 爲中心, m_c 爲半徑之圓周上. 故作圖法如次. 引任意直線 BC, 令其長等於 a, 按比 $b:c$ 內分及外分 BC 於 D 及 E, 求 DE 之中點 O, 以 OB 之中點 H 爲中心, $\frac{1}{2}$OD 之長爲半徑作圓, 又以 C 爲中心, m_c 爲半徑作圓, 命其與前圓之交點爲 K, 聯結 BK, 在其延線上取一



點 A, 令 BK = KA, 於是 ABC 卽所求三角形.

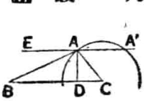
2028. 設已知三角形 ABC 之高 h_a, 底上之中線 m_a, 及底與他一邊之比 $a:b$, 求作此三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形, D 及 E 分別爲 h_a 及 m_a 之足, 則三角形 ADE 爲已知斜邊及一邊之直角三角形, 故易作得之. E 爲 BC 之中點, 故 EC $=\frac{1}{2}a$, 故 C 至 E, A 之距離之比爲 $\frac{1}{2}a:b$, 即在至 E, A 之距離有此比之點之軌跡上 [1603 題]. 而 C 又在 ED 之延線上. 故作圖法如次. 以 m_a 爲斜邊, h_a 爲一邊, 作直角三角形 ADE, 按比 $\frac{1}{2}a:b$ 將斜邊 EA 內分及外分. 聯結此二分點, 以之爲直徑作圓, 命 ED 之延線與此圓之交點爲 C. 在 CE 之延線上取 B, 令 EB $=$ EC $=\frac{1}{2}a$, 於是 ABC 卽所求三角形.



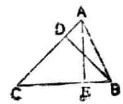
2029. 已知底邊 a, 高 h_a, 及他二邊之比 $b:c$, 求作三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形. 因 a 爲已知, 故BC爲已知. 又因高 AD 爲已知, 故頂點 A 在平行於BC, 距BC爲 h_a 之直線 AE 上. 又因 $b:c$ 爲已知, 故頂點 A 在一軌跡上, 由此軌跡上之各點至 C 及 B 之距離, 有所設比 $b:c$. 欲求此軌跡, 可將 BC 按此比內外分之, 而聯結二分點以爲直徑作圓卽得 [1603題]. 故此圓與直線 AE 之交點, 卽所求三角形之頂點 A. 圓與直線之交點, 通常有二, 故本題通常有二解 [卽圖中之 ABC, 及 A'BC]. 若此圓與 AE 相切, 則僅得一三角形. 若此圓與 AE 不交 則無解.



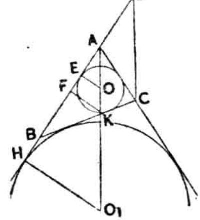
2030. 設三角形 ABC 中, 由 B 至對邊所引垂線之足爲 D, 已知 BC, $\hat{A}$, 及 CD·AC, 求作此三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形, E 爲由頂點 A 至對邊所引垂線之足. 於是兩直角三角形 ACE 及 BCD 公有 $\hat{C}$, 故 AC:CE = BC:CD, 故 CD·AC = CE·BC, 故 CE = CD·AC/BC, 其中 CD·AC 爲所設量, 故 CE 爲定長. 頂點 A 在過 E 垂直於 BC 之直線上. 又 $\hat{A}$ 爲已知, 故 A 又在 BC 爲弦含 $\hat{A}$ 之弓形弧上. 故作圖法如下. 引任意直線 BC, 令等於所設長, 在此直線上取一點 E, 令 CE 等於 CD·AC/BC, 由 E 引 BC 之垂線 AE. 以 BC 爲弦, 作含 $\hat{A}$ 之弓形弧, 命此弧與 AE 之交點爲 A, 於是 ABC 卽所求三角形.



2031. 已知底邊 a, 他二邊之和 $b+c$, 及頂角之二等分線 w_a, 求作三角形.

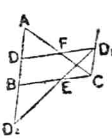
解 設ABC爲所求三角形, 作其內切圓 O, 及其 $\hat{A}$ 內之傍切圓 O_1, 則中心 O, O_1, 及頂點 A 在一直線上. 命此直線與 BC 之交點爲 K, 則因 BO 爲 $\hat{B}$ 之內二等分線, BO_1 爲 $\hat{B}$ 之外二等分線, 故 A, O, K, O_1 成調和點列, 故由此四點至直線 AB 所引四垂線之足 A, E, F, H 亦成調和



點列. 而對應於 O 及 O_1 之足 E 及 H, 分別為內切圓及傍切圓之切點, 故 AE＝$s-a$ $[2s=a+b+c]$ AH＝s. 其中 s 為已知, 故 AE 及 AH 皆為定長, 因而 AF 之長可求得之, 從而直角三角形 AFK 中, 已知 AK＝w_a 及 AF, 故此三角形甚易作得之. 又由 C 平行於 AK 引一直線, 令交 BA 之延線於 L, 則因 AK 為 $\hat{A}$ 之二等分線, 故 AC＝AL, 因而 BL＝$b+c$. 而 BA : BK＝BL : BC＝$b+c:a$; 故 B 同時在直線 AF 之延線上, 及至二點 A, K 之距離有比 $b+c:a$ 之點之軌跡上. 仿此, C 在適合 CA:CK＝$b+c:a$ 之點之軌跡上, 同時又在直線 BK 上. 故作圖法如次. 在一直線上取一點 A, 在 A 之同側取 E, H, 令 AE＝$s-a$, AH＝s, 求 F 令 A, F, E, H 成調和點列. 由 F 引此直線之垂線 FK, 令交 A 為中心, w_a 為半徑之圓於 K. 次, 求至 A 及 K 之距離之比為 $b+c:a$ 之點之軌跡, 命此軌跡與直線 AH 之交點為 B, 聯結 BK, 命其與前軌跡 [此軌跡為一圓] 之交點為 C, 則 ABC 即所求三角形.

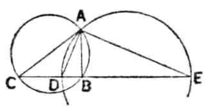
2032. 已知三邊分別按三所設比之分點, 求作三角形.

解 設 ABC 為所求三角形, D, E, F 為所設點, BD:DA＝$m:n$, AF:FC＝$p:q$, CE:EB＝$r:s$. 作 $CD_1 \parallel AB$, 令交 DF 之延線於 D_1. 於是 $\triangle ADF \backsim \triangle CD_1F$, 故 DF:$FD_1$＝AF:FC, 即 DF:$FD_1$＝$p:q$, 其中 DF 為已知, 故 FD_1 亦一定, 因而 D_1 為定點. 次, 聯結 D_1E, 令交 AB 之延線於 D_2; 於是 $\triangle D_1EC \backsim \triangle D_2EB$, 故 $D_1E:ED_2$＝CE:BE＝$r:s$. 然如上所論, D_1 既為定點, 則 D_1E 當然為定長, 故由此比例式可求得 ED_2, 故 D_2 亦為定點, 從而可知三角形之邊 AB 之方向. 由是得作圖法如下. 聯結 DF, 在其延線上取一點 D_1, 令 DF:FD_1＝$p:q$. 聯結 D_1E, 在其延線上取一點 D_2, 令 $D_1E:ED_2$＝$r:s$. 聯結 DD_2, 則所求三角形之一邊 AB, 當在此直線上. 仿此, 聯結 EF 或 ED, 依同上之方法行之, 即可得他二邊所在之直線, 從而可作得所求三角形.

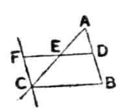


2033. 已知頂角 A, 底邊 a, 及他二邊之比 $b:c$, 求作三角形.

解 引任意直線 BC, 令其長等於 a. 以 BC 為弦, 作含 $\hat{A}$ 之弓形弧 BAC, 又按比 $b:c$ 將 BC 內分及外分於 D 及 E, 以 DE 為直徑作圓 DAE, 令交前弓形弧於 A. 於是 ABC 即所求三角形.

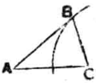


別解 作任意角 DAE, 令等於 $\hat{A}$. 在其一邊上取任意點 E, 在他邊上取 D, 令 AE:AD＝$b:c$. 聯結 DE, 在 DE 或其延線上取一點 F, 令 DF＝a. 過 F 平行於 AD 引一直線, 令交 AE 或其延線於 C. 過 C 平行於 ED 引一直線, 令交 AD 或其延線於 B. 於是 ABC 即所求三角形. 又三角形 ABC 之適合所設條件, 甚易證之.



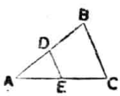
2034. 已知底角 底邊 b. 及他二邊之比 $a:c$, 求作三角形.

解 引任意直線 AC, 令等於 b. 按比 $a:c$



將 AC 內分及外分，以聯結二分點之直線爲直徑作圓，則此圓爲至二點 A 及 C 之距離有比 $a:c$ 之點之軌跡 [1603題]，故 B 在此圓周上. 又過 A 引一直線 AB，令 $C\hat{A}B$ 等於所設角 $\hat{A}$. 命此直線與前圓之交點爲 B. 於是 ABC 卽所求三角形.

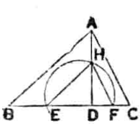
別解 引任意二直線 DE, AD，令其比爲 $a:c$. 以此二直線爲二邊，作一三角形，令 DE 之對角等於 $\hat{A}$ [1668題]. 在 AE 之延線上取一點 C，令 AC$=b$. 過 C 平行於 DE 引一直線，令交 AD 之延線於 B. 於是 ABC 卽所求三角形.



注意 在第一作圖法中，AB 與圓之交點通常有二. 在第二作圖法中，適合條件之三角形 ADE，可作得二個. 故在兩作圖法中，皆可得二解.

2035. 已知頂角 A，高 h_a，及 h_a 將底所分二分之比，求作三角形.

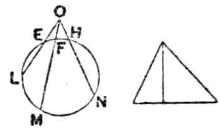
解 設 h_a 將 a 所分二分之比爲 $m:n$，命比例於 m 及 n 之任意直線爲 DE, DF. 將 ED, DF 置於一直線上，如圖所示. 以 EF 爲弦，作含 $\hat{A}$ 之弓形弧. 由 D 引 EF 之垂線，命其與前弓形弧之交點爲 H. 在 DH 或其延線上取一點 A，令 DA$=h_a$. 過 A 平行於 HE, HF 分別引 AB, AC，令交 EF 或其延線於 B 及 C. 於是 ABC 卽所求三角形，其理甚易明之.



注意 有時取 E, F 於 D 之同側，亦可仿上卽得所求三角形.

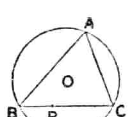
2036. 已知三高 h_a, h_b, h_c，求作三角形.

解 高與其對邊所包之矩形等於三角形面積之二倍，故設由圓外之一點 O 引此圓之三割線 OEL, OFM, OHN 其中 E, F, H 爲近 O 方之交點 [或遠 O 方之交點]，而 OE, OF, OH 分別等於三高，則三角形之三邊，分別比例於 OL, OM, ON. 故以 OL, OM, ON 爲三邊作三角形，則與所求三角形 ABC 相似. 在此所作三角形中，取對應於 h_a 之高 h_a'. 求適合比例式 $h_a':h_a=\text{OL}:a$ 之 a. 仿此，求 b, c. 於是以 a, b, c 爲三邊所作之三角形，卽所求三角形.



2037. 試作圓之內接三角形，令與所設三角形相似，且一邊過一所設點.

解 命所設圓爲 O，所設點爲 P，所設三角形之三角分別爲 α, β, γ，假定點 P 在 α 之對邊上. 因角 α 爲已知，故其對邊之長爲已知，卽由任意點引夾 α 之二弦，聯結此二弦之他端卽得. 故作圖法如下. 過 P 引弦 BC，令等於對 α 之弦，過 B 引弦 BA，令其與 BC 所成之角等於 β，聯結 AC，卽得所求三角形 ABC.

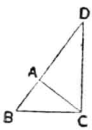


注意 過 P 所引等於 BC 之弦，通常有二，故所求三角形通常亦有二.

2038. 設三角形 ABC 中，已知底邊 a，頂

角 A, 及他一邊 c 與第三邊 n 倍之和 $c+nb$, 求作此三角形. 但 n 表所設數

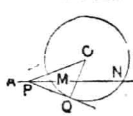
解 設 ABC 爲所求三角形, 在 BA 之延線上取 D, 令 $AD=nAC$, 聯結 CD, 則三角形 CAD 中, $C\hat{A}D=\hat{A}$ 之補角 = 已知, $AC:AD=1:n$, 故可作得三角形 CAD 之相似三角形, 從而 $A\hat{D}C$ 爲定角. 故作圖法如下. 作三角形 CAD 之相似三角形, 引任意直線 BC, 令其長等於 a, 以 BC 爲弦作弓形, 令其所含之角等於 $A\hat{D}C$. 以 B 爲中心, $c+nb$ 爲半徑作圓, 令交前弓形弧於 D. 以 BC 爲弦作弓形, 令其所含之角等於 $\hat{A}$. 命此弓形之弧與 BD 之交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.



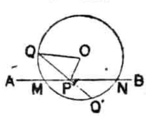
2039. 設 O 爲所設點, P 爲所設直線 AB 上之所設點. 試以 O 爲中心作圓, 截 AB 於 M, N, 令 PM, PN 之比例中項等於所設長.

解 假定所求圓業已作得, 聯結 OP. 若 P 在圓外 [甲圖], 由 P 引切線 PQ, 則 $\overline{PQ}^2=PM\cdot PN$, 故 $PM:PQ=PQ:PN$, 故 PQ 等於所設長. 故以 OP 爲直徑作圓, 又以 P 爲中心, 所設比例中項爲半徑作圓, 令交前圓於 Q, 聯結 OQ, 則 OQ 卽所求半徑. 若 P 在圓內 [乙圖], 過 P 垂直於 OP 引弦 QQ′, 則 $\overline{PQ}^2=PM\cdot PN$, 故 $PM:PQ=PQ:PN$. 故過 P 垂直於 OP 引 PQ, 令 PQ 等於所設比例中項, 則 OQ 卽所求半徑.

[甲圖]



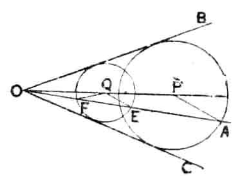
[乙圖]



註意 所設比例中項 PQ, 若小於 OP, 則得甲圖, 若大於 OP, 則得乙圖, 此甚易知之.

2040. 試過所設點 A, 且切交於 O 之二所設直線作圓.

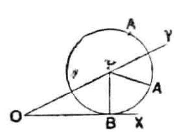
解 假定所求圓 P 業已求得, 引任意圓 Q, 令切所設二直線 OB, OC, 則 O 爲圓 P, Q 之相似中心. 聯結 OA, 令交圓 Q 之周於 E, F, 則 AP ∥ EQ [1291題]. 故作圖法如下. 引任意圓 Q, 令切二直線 OB, OC; 聯結 OA, 令交所作圓於 E, F. 由 A 平行於 EQ, FQ 引二直線, 令交 OQ 之延線於 P, P′, 則 P, P′ 卽所求中心.



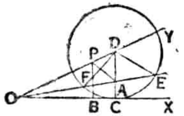
別解 引 $B\hat{O}C$ 之二等分線, 命 A 關於此線之對稱點爲 A′, 過 A, A′ 作切 OB 之圓 [1863題], 則此圓卽所求圓.

2041. 試在所設直線上求一點, 令此點距他所設直線及所設點等遠.

解 命所設點爲 A, 所設二直線爲 OX, OY. 假定所求點 P 業已求得, 由 P 至 OX 引垂線 PB, 則 $PA=PB$. 又 $P\hat{B}O=\hat{R}$, 故以 P 爲中心, PA 爲半徑作圓, 則此圓切 OX. 命 A 關於 OY 之對稱點爲 A′, 則圓 P 又過 A′. 因此先取 A 關於 OY 之對稱點 A′, 過 A, A′ 作切 OX 之圓, 則此圓之中心卽所求點.

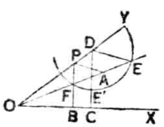


別解 在 OY 上取任意點 D, 由 D 至 OX 引垂線 DC, 以 D 爲中心, DC 爲半徑作圓, 令交 OA [必要時其延線] 於 E, F. 過 A 平行於 ED, FD 引二直線, 令交 OY 於 P, P′, 則 P, P′ 卽所求點. 何則? 由 P 至 OX 引垂線 PB, 則 PB:DC=OP:OD=PA:DE; 其中 DC=DE, 故 PB=PA. 關於 P′ 亦然.



2042. 試在所設直線上求一點, 令由此點至他所設直線及所設點之距離, 有所設比 $m:n$.

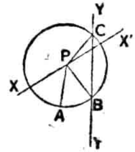
解 命所設二直線爲 OX, OY, 所設點爲 A. 由 OY 上之任意點 D, 至 OX 引垂線 DC, 在 DC 上求一點 E′, 令 DC:DE′ $=m:n$. 次,以 D 爲中心, DE′ 爲半徑作圓, 令交聯結 OA 之直線於 E, F. 由 A 平行於 ED, FD, 引直線 AP, AP′, 命其與 OY 之交點爲 P, P′, 則 P, P′ 卽所求點. 何則? 由 P 至 OX 引垂線 PB, 則 PB : DC=OP : OD=PA:DE. 然因 DE=DE′, 故 PB:DC=PA:DE′, 故 PB :PA=DC:DE′ $=m:n$.



注意 本題及前題中,由所求點至所設直線所引之垂線,若代以與所設直線成所設角之直線,可同樣得解.

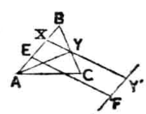
2043. 過所設點作一圓, 令其中心在所設直線上, 且其爲他所設直線所截之弧, 其所對之中心角等於所設角.

解 命所設點爲 A, 中心所在之直線爲 XX′, 他所設直線爲 YY′. 假定所求圓業已作得, P 爲其中心, 與 YY′ 之交點爲 B, C. 於是 $B\hat{P}C$ 等於所設角 α, 故 $P\hat{B}C=\frac{1}{2}\times(2\hat{R}-\alpha)=\hat{R}-\frac{1}{2}\alpha$, 卽一定. 由是本題與前題注意趨於一致,卽本題變爲在 XX′ 上求一點,令由此點至 YY′ 所引成定角之直線, 等於由定點至此點之距離. 故所求圓之中心可依此求得之.



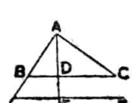
2044. 試在三角形 ABC 中,平行於所設直線, 引一直線, 令截 AB 於 X, BC 於 Y, 而 XY 與 YA 之和等於所設直線.

解 假定所求直線 XY 業已引得, 在 XY 之延線上取 Y′, 令 AY=YY′. 過 Y′ 平行於 AB 引 Y′F, 命其與所設直線 EF 之交點爲 F. 於是 XY+AY = XY+YY′=EF = m [但 m 爲已知長]. 故作圖法如次. 在已知直線 EF 上求點 F, 令 EF=m, 過 F 平行於 AB 引一直線 FY′. 在 BC 上求一點 Y, 令由此點至 FY′ 所引成定角 AEF 之直線, 等於聯結此點與定點 A 之直線 [2042 題注意]. 過 Y 平行於所設直線引一直線, 則此直線卽所求直線.



2045. 設三角形 ABC 中, 已知底邊 a, 底角 B, 及 $\hat{B}$ 之對邊 AC 與高之差 $b-h_a$, 求作此三角形.

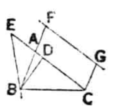
解 假定所求三角形 ABC 業已求得,在高 AD 之延線上取 E, 令 AE=AC. 過 E 平行於 BC 引一直線, 則 AC



$-$AD$=$AE$-$AD$=$DE$=$已知，故直線 EF 之位置一定.故作圖法如下.引任意直線 BC，令等於所設底邊 a，過 B 引 BA，令與 BC 所成之角等於所設角 B. 平行於 BC 引一直線，令其與 BC 之距離等於 $b-h_a$. 在 BA 上求一點 A，令由此點至 EF 之距離等於 AC [2041題]，於是 ABC 卽所求三角形.

2046. 設三角形 ABC 中，由 B 至對邊所引垂線之足爲 D，今已知頂角 A，差 BC$-$AB，及和 BD$+$CD，求作此三角形.

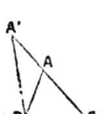
解 假定所求三角形 ABC 業已求得，在



CD 之延線上取 E，令 DE$=$BD，在 BA 之延線上取 F，令 AF$=$BC$-$AB. 過 F 平行於 AC 引 FG，則 $B\hat{A}C=A\hat{F}G=$已知，又因 AF 一定，故 FG 之位置亦一定. 次，AF$+$AB$=$BC$-$AB$+$AB$=$BC，且因 ED$=$BD，$B\hat{D}E=\hat{R}$，故 $D\hat{E}B=\frac{1}{2}\hat{R}$. 故作圖法如下.引任意直線 CE，令等於 BD$+$CD，過 E 引 EB，令 $C\hat{E}B=\frac{1}{2}\hat{R}$，過 C 引 CG，令 $E\hat{C}G=\hat{A}$，且 CG$=$BC$-$AB. 過 G 平行於 EC，引直線 GF. 在 EB 上取一點 B，令由 B 至 FG 所引成定角 A 之直線等於 BC [2042題注意]，於是得 B 點，從而又可得 A 點.

2047. 設三角形 ABC 中，已知頂角 A，其二邊之和 $b+c$，及底邊與他一邊之和 $a+c$，求作此三角形.

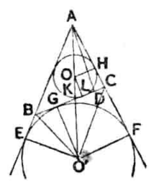
解 設 ABC 爲所求三角形，



在 CA 之延線上取 A'，令 AA'$=$AB，聯結 A'B，則 $A\hat{A}'B=\frac{1}{2}\times\hat{A}$，故 A'B 爲定向直線.次，$B\hat{A}C=\hat{A}$ 爲已知，故 BA 亦爲定向直線. 因此，先引任意直線 A'C，令等於 $b+c$，過 A' 引直線 A'B，令與 A'C 所成之角等於 $\frac{1}{2}\hat{A}$. 次，引一直線 AB，令與 A'C 成所設角，交 A'C，A'B 於 A，B，而 AB$+$BC 等於所設長 $a+c$ [2044題]，於是 ABC 卽所求三角形.

2048. 設三角形 ABC 中，已知內切圓半徑 ρ，$\hat{A}$ 內之傍切圓半徑 ρ_a，及 $\hat{A}$ 之二等分線 w_a，求作此三角形.

解 假定所求三角形 ABC 業已求得，命內



切圓之中心爲 O，傍切圓之中心爲 O'，由 O，O' 至 AC 引垂線 OH，O'F，由 O' 至 AB，BC 分別引垂線 O'E，O'G. 於是可得下式：$\triangle ABC=\triangle ABO'+\triangle ACO'-\triangle BCO'$，故命 BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$，則 $b\rho_a+c\rho_a-a\rho_a=ah_a$ [$h_a=$AD]，或 $(b+c-a)\,\rho_a=ah_a$. 然 $(a+b+c)\rho=ah_a$，卽 $(b+c)\rho=a(h_a-\rho)$，或 $(b+c):a=(h_a-\rho):\rho$. 而 $(b+c)\rho_a=a(h_a+\rho_a)$，卽 $(b+c):a=(h_a+\rho_a):\rho_a$. 故 $(h_a-\rho):\rho=(h_a+\rho_a):\rho_a$，或 $h_a\rho_a-\rho\rho_a=h_a\rho+\rho\rho_a$，$h_a(\rho_a-\rho)=2\rho\rho_a$，故 $h_a=2\rho\rho_a/(\rho_a-\rho)$，因而可求得 h_a 之長.於是可作得三角形 AKD；而 ρ 爲已知，故又可作得三角形 ABC，卽以 ρ 爲半徑作圓，令其中心在 AK 上，且切 DK，由 A 引二切線 AB，AC，令交 DK 之延線卽得.

2049. 設三角形 ABC 中，已知內切圓半徑 ρ，$\hat{A}$ 內之傍切圓半徑 ρ_a，及 $\hat{A}$ 之二邊之差 $c-b$，求作此三角形.

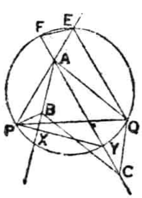
解　前題圖中，由 O 至 BC 引垂線 OL，則 GL$=c-b$，故 O，O′ 之位置可求得之．又 $O\hat{C}O'=\hat{R}=O\hat{B}O'$．故作圖法如下．引任意直線 GL，令等於 $c-b$．過 G，L 引 GL 之垂線 GO′，LO，令分別在 GL 之兩側，且 GO′$=\rho_a$，LO$=\rho$．以 OO′ 爲直徑作圓，令交 GL 之延線於 B，C．以 O 爲中心，ρ 爲半徑作圓，由 B，C 至此圓引切線 BA，CA，命其交點爲 A，則ABC 卽所求三角形．

2050.　已知周 $2s$，高 h_a，及內切圓半徑 ρ，求作三角形．

解　2048 題圖中，設 AD$=h_a$，ρ，$a+b+c=2s$ 爲已知量．此時 $(a+b+c)\rho=ah_a$，故可求得 a．於是三角形 ABC 中，已知 a，ρ，$b+c$，故此三角形可作得之［1889題］．

2051.　試過所設點 P 引一直線，交二所設直線 AX，AY 而成三角形 AXY，令其面積等於所設面積．

解　命所設面積爲 S，引一直線 BC，作三角形 ABC，令其面積等於 S［此作圖甚易，故略之］．聯結 AP，BP，在 AC 上作三角形 ACQ，令與三角形 APB 相似，而 AP，AC 爲對應邊．以 PQ 爲弦作弓形，令其所含之角等於 $P\hat{A}C$；



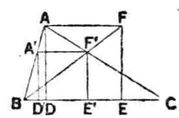
命此弓形弧之共軛弧與 AC 之交點爲 Y，聯結 PY，則 PY 卽所求直線．何則？命圓周與 PA，CA 之他交點爲 E，F．於是 $P\hat{A}C=P\hat{E}Q$，故 AC ∥ EQ，故 $Q\hat{Y}A=Y\hat{F}E=Y\hat{P}A$，故 △APX ∽ △AYQ．又由作圖，△APB ∽ △ACQ．因此 AX : AP＝AQ : AY，AP : AB＝AC : AQ，故 AX : AB＝AC : AY，故 AX·AY＝AB·AC，故 △AXY＝△ABC＝S．

2052.　試過所設點引一直線，將所設三角形等分爲二．

解　本題中之所設點，若在三角形之邊上，則作圖法甚易得之［1944題］．若所設點在三角形內或外，則本題爲 2051 題中所設面積等於三角形半分之特例，故所求直線，可仿 2051 題作得之．

2053.　作所設三角形之內接正方形．

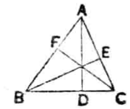
解　命所設三角形爲 ABC．在 BC 上取 DE，令等於垂線 AD．由 A，E 分別平行於 BC，AD，引 AF，EF，命其交點爲 F，則 AE 爲一正方形．命 BF，AC 之交點爲 F′，引 F′A′ ∥ AF，及 F′E′ ∥ EF ∥ A′D′，則 EF : E′F′＝BF : BF′＝AF : A′F′．而 EF＝AF，故 E′F′＝A′F′，故 A′E′ 爲 △ABC 之內接正方形．



注意　將本題推廣考察之，假定正方形之一邊在 BC 上，不屬此邊之二頂點在 AB，AC，或其延線上，則除上得之正方形外，通常尚可得一正方形，卽延長 CF，令交 AB 之延線，則此交點卽此正方形之一頂點．若 CF ∥ AB，則僅有上得之一正方形．別解在 1748 題中．

2054.　已知三角形 ABC 之高 h_a，二邊 AB，AC 之和 $b+c$，及由 B，C 至對邊所引垂線之比 $h_b:h_c$，求作三角形．

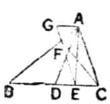
解　設 ABC 爲所求三角形，AD，BE，CF 分別爲由各頂點至對邊所引之垂線，則 CF



·AB = 2△ABC = BE·AC, 故 AB:AC = BE:CF = 已知. 故二邊 AB, AC 之和及比, 皆爲已知, 從而可求得此二邊. 卽引任意直線, 令其長等於 $b+c$, 按比 $h_b:h_c$ 內分之, 則此二部分卽 b 及 c. 於是三角形 ABC 中, 已知高 AD, 及二邊 AB, AC, 故可作得之 [1882題].

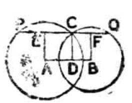
2055. 設三角形 ABC 中, 已知由頂點 A 至底 BC 所引之垂線 h_a, 中線 m_a, 及由 C 至對邊所引之垂線與 AC 之比 $h_c:b$, 求作此三角形.

解 設所求三角形爲 ABC, 其中 AE, CF 爲垂線, AD 爲中線. 聯結 EF, 由 A 至 EF 引垂線 AG. 於是因 A, F, E, C 在一圓周上, 故 $A\hat{C}F = A\hat{E}G$. 兩直角三角形 ACF, AEG 中, 一銳角相等, 故相似, 故 CF:AC = EG:AE. 其中 CF:AC, 及 AE 爲已知, 故 EG 可求得之, 因而可作得三角形 AGE, 從而可求得 $E\hat{A}G = B\hat{A}C$. 於是三角形 ABC 中, 已知頂角 A, 垂線 AE, 及中線 AD, 故此三角形可作得之 [1916題].



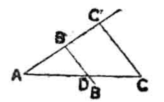
2056. 過相交二圓之交點引一倍弦, 令其二弦之比爲所設比 $m:n$.

解 命二圓之交點爲 C, 假定所求倍弦 PCQ 業已求得, 由中心 A, B 至 PQ 引垂線 AE, BF, 則 PC = 2EC, CQ = 2CF, 故 PC:CQ = EC:CF = $m:n$. 由 C 平行於 BF 引 CD, 則 EC:CF = AD:DB = $m:n$. 故作圖法如下. 聯結中心 AB, 按比 $m:n$ 內分及外分之於 D, D′. 過 C 垂直於 DC, D′C 引二倍弦, 則此二倍弦卽所求倍弦.



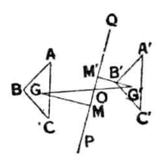
2057. 有 A, B, C 三點, 試過 A 引一直線, 令由 B, C 至此直線所引垂線之足與 A 之距離, 有所設比 $m:n$.

解 假定所求直線 AB′C′ 業已引得, 命由 B, C 所引垂線之足爲 B′, C′, 聯結 AC, 命其與 BB′ 或其延線之交點爲 D, 則 AD:AC = AB′:AC′ = $m:n$. 故作圖法如下. 分 AC 於 D, 令 AD:AC = $m:n$, 聯結 BD, 由 A 引 BD 之垂線 AB′C′, 則此直線卽所求直線.



2058. 有兩三角形及一點, 試過此點引一直線, 令由兩三角形之頂點至此直線距離之和, 有所設比 $m:n$.

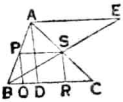
解 命 P 爲所設點, 假定所求直線 PQ 業已求得. 命三角形 ABC, A′B′C′ 之重心爲 G, G′. 由 G, G′ 分別至 PQ 引垂線 GM, G′M′, 命 GG′ 與 PQ 之交點爲 O. 於是由 A, B, C 至 PQ 所引垂線之和, 等於 3GM [1184 題], 由 A′, B′, C′ 所引垂線之和, 等於 3G′M′, 故 3GM:3G′M′ = GM:G′M′ = $m:n$. 然因 △GMO∽△G′M′O, 故 GM:G′M′ = GO:G′O, 故 GO:G′O = $m:n$. 由是得作圖法如下. 求 G, G′, 聯結 GG′, 按比 $m:n$ 內分及外分之於 O, O′, 聯結 P 與 O, O′, 則此二直線卽所求直線.



2059. 作所設三角形之內接平行四邊

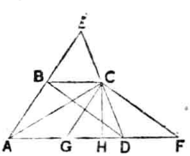
形,令與所設平行四邊形相似.

解　命所設三角形爲 ABC, 他所設平行四邊形之一角爲 α, 此角二邊之比爲 $m:n$. 由 A 至 BC 引直線 AD, 令 $\widehat{ADC}=\alpha$, 過 A 平行於 BC 引直線 AE, 令 $AD:AE=m:n$. 聯結 BE, 命其與 AC 之交點爲 S, 過 S 平行於 BC 引 PS, 平行於 AD 引 PQ, SR, 則 PQRS 卽所求平行四邊形. 何則? $PQ:AD=BP:BA=PS:AE$, 故 $PQ:PS=AD:AE=m:n$, 且 $\widehat{PQR}=\widehat{ADC}=\alpha$, 故 PQRS 與所設平行四邊形相似.



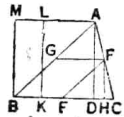
2060.　已知二對角線及不平行二邊, 求作梯形.

解　設 ABCD 爲所求梯形, 且 BC ∥ AD. 平行於 AB, BD, 分別引 CG, CF, 令交 AD 及其延線於 G 及 F. 由 C 至 AD 引垂線 CH, 則 $\overline{AC}^2-\overline{BD}^2:\overline{AB}^2-\overline{CD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CF}^2:\overline{CG}^2-\overline{CD}^2=\overline{AH}^2-\overline{HF}^2:\overline{GH}^2-\overline{HD}^2$ $=(AH+HF)(AH-HF):(GH+HD)(GH-HD)$ $=(AD+BC)(GH-HD):(AD-BC)(GH-DH)$ $=AD+BC:AD-BC$. 然 AC, BD, AB, CD 爲已知, 故 $(AD+BC)/(AD-BC)=$ 已知 $=m/n$, 故 $AD/BC=(m+n)/(m-n)$. 命 AB, DC 延線之交點爲 E, 則 $AD/BC=AE/BE$, 故 $AE/BE=(m+n)/(m-n)$, 故 BE 可求得之. 同理, CE 亦可求得之. 於是三角形 AEC 及 DEB 之各邊, 皆爲已知, 故此兩三角形可作得之, 從而可求得 AD, BC.



2061.　作所設三角形之內接平行四邊形, 令有所設面積, 且玩索之.

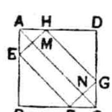
解　命所設三角形爲 ABC, 所設面積爲 m^2. 作矩形 BKLM, 令等於 m^2, 其一邊等於三角形 ABC 之高 AD. 在 BC 上取一點 E, 令 $BE\cdot EC=BK\cdot BC$. 過 E 平行於 AB 引 EF, 命其與 AC 之交點爲 F. 過 F 平行於 BC 引 FG, 則 BEFG 爲所求平行四邊形. 何則? 由 F 至 BC 引垂線 FH, 則 $AD:FH=BC:EC$. 而 $\square BL=AD\cdot BK$, $\square BF=FH\cdot BE$, 故 $\square BL:\square BF=AD\cdot BK:FH\cdot BE=(AD:FH)(BK:BE)$ $=(BC:EC)(BK:BE)=BC\cdot BK:EC\cdot BE=$ 等比, 故 $\square BF=\square BL=m^2$.



玩味　$BE\cdot EC$ 之最大者爲 $\frac{1}{4}\overline{BC}^2$, 故須 $BK\cdot BC\leqq\frac{1}{4}\overline{BC}^2$, 卽 $BK\leqq\frac{1}{4}BC$, 從而須 $m^2\leqq\frac{1}{2}\times\triangle ABC$.

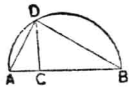
2062.　內接於正方形, 作所設面積之矩形.

解　命所設正方形爲 ABCD, 引對角線 AC, 作三角形 ABC 之內接矩形 EFNM [2061 題], 延長 EM, FN, 令分別交 AD, CD 於 H, G. 聯結 HG, 則 EFGH 卽所求矩形. 何則? 因正方形關於對角線爲對稱, 故矩形 EFNM ＝ 矩形 HMNG, 從而矩形 EFGH 等於所設面積.



2063.　作二正方形, 令其比等於所設二直線之比. 又若已知二正方形一邊之和或差, 則如何?

解　命所設二直線爲 M, N. 引任意直線



AB, 令等於 M, 在 AB 上取 BC = N [假定 M>N]. 過 C 垂直於 AB 引一直線, 令交 AB 爲直徑之半圓於 D, 則 ABD 爲直角三角形, DC 爲由直角項至斜邊所引之垂線, 故 AB : BC $=AB^2 : BD^2$ [765題]. 故若令二正方形之邊之比爲 AB : BD, 則其面積之比恆等於 M : N. 設已知正方形之邊之和 P, 則可按 AB : BD 分 P 爲二, 其所分各分卽所求正方形之邊. 又設已知其差 Q, 則可求 AB－BD, BD, 及 Q 之第四比例項, 卽得所求正方形中較小者之一邊.

2064. 作 n 個正方形, 令其比爲所設 n 條直線之比.

解 命 n 條所設直線爲 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots$. 依 2063 題, 求有比 $M_1 : M_2$ 之二正方形, 命其邊爲 A, B, 則 $M_1 : M_2 = A^2 : B^2$. 次, 求有比 $M_2 : M_3$ 之二正方形, 命其邊爲 B′, C′, 則 $M_2 : M_3 = B'^2 : C'^2$. 於是求 B′, C′, B 之第四比例項, 卽得 $B'^2 : C'^2 = B^2 : C^2 = M_2 : M_3$, 從而 $A^2 : B^2 : C^2 = M_1 : M_2 : M_3$. 此方法連續行之, 卽可得有所設比之 n 個正方形 A, B, C, D, …….

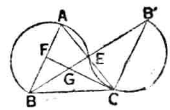
注意 在 n 個正方形內, 若有一邊之長, 或任意二邊之差等爲已知, 卽可確定一切邊之長.

2065. 作一有限直線, 令其對一所設有限直線之比, 等於他所設二有限直線上正方形之比.

解 試由 2063 題之反面考察之, 卽可得本題之作圖法.

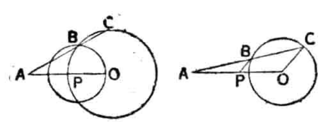
2066. 設三角形 ABC 之頂角 A, 中線 BE, 及他中線 CF 與邊 BC 之比 $m:n$ 爲已知, 求作此三角形.

解 因 BE 及 A 爲已知, 故 A 在 BE 爲弦, 含 $\hat{A}$ 之弓形弧上, 在 BE 之延線上取 B′, 令 B′E = BE, 聯結 CB′, 則 △ABE ≡ △CB′E, 故 C 在 EB′ 爲弦, 含 $\hat{C}$, 卽 $\hat{A}$ 之弓形弧上. 次, 命重心爲 G, 則 G 爲定點, 且 $CG : BC = \frac{2}{3}CF : BC = \frac{2}{3}m : n =$ 一定; 故若按比 $\frac{2}{3}m : n$ 內分及外分 GB, 聯結此二分點以爲直徑, 作圓, 則 C 又在此圓周上. 因此可決定 C 點之位置, 而作得所求三角形.



2067. 過圓外之所設點, 引此圓之割線, 令其圓內之長等於圓外之長. 又令圓外之長, n 倍於圓內之長.

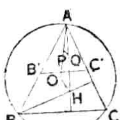
解 (1) 命所設點爲 A, 圓之中心爲 O. 所求直線之中點, 在圓 O 之周上. 又由 A 至圓周所引之直線, 其中點之軌跡, 乃以 AO 之中點 P 爲中心, 所設圓半徑之半分爲半徑之圓 [1545 題], 故所求直線之中點, 又在此圓之周上. 故此二圓周之交點卽所求直線之中點. 由是得作圖法如下. 先作中點之軌跡圓 P, 令交圓 O 於 B, B′, 聯結 AB, AB′, 則此二直線皆爲所設直線.



(2) 設所求直線爲 ABC, 聯結 OC, 由 B′ 平行於 CO 引 BP, 命其與 AO 之交點爲 P, 則 $AB:AC=AP:AO=BP:CO$. 而 $AB=n BC$, 從而 $AC=(n+1)BC$, 故 $AP:AO=BP:CO=n:n+1$. 由是得作圖法如下. 內分 AO 於 P, 令 $AP=\{n/(n+1)\}AO$, 以 P 爲中心, $\{n/(n+1)\}OC$ 爲半徑作圓, 令交所設圓周於 B, B′, 聯結 AB, AB′, 則此二直線皆爲所求直線.

2068. 已知二角及垂心至外心之距離, 求作三角形.

解 設 ABC 爲所求三角形, $\hat{B}$, $\hat{C}$, 及外心垂心間之距離 OH 爲已知量. 在邊 AB 上取任意長 AB′, 平行於 BC 引 B′C′, 命三角形 AB′C′ 之外心爲 P, 垂心爲 Q. 三角形 AB′C′ 之二角 $\hat{B}'$, $\hat{C}'$ 爲已知, 故甚易作得之, 且與 △ABC 相似. 其垂心 Q 在 AH 上, 此易知之. 又因 $O\hat{A}B=H\hat{A}C$, $P\hat{A}B'=Q\hat{A}C'$ [481題], 故 $O\hat{A}B=P\hat{A}B'$, 從而 P 在 AO 上. 次, 因 B′Q ∥ BH, 故 $AQ:AH=AB':AB$; 又因 B′P ∥ BO, 故 $AP:AO=AB':AB$. 故 $AB':AB=AQ:AH=AP:AO=PQ:OH$, 故 PQ:OH 可求得之, 從而可求得外接圓之半徑 AO 及邊 AB. 故作圖法如下. 在任意直線 AB′ 上作與所求三角形相似之三角形, 求其外心至垂心之距離 PQ, 由前比例式求 AO, AB. 於是以 AO 爲半徑作圓, 再以 AB 爲一邊, 作此圓之內接三角形, 令有所設角, 則此三角形卽所求三角形.

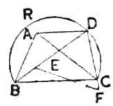


2069. 已知二角及內心外心間之距離, 求作三角形.

解 因已知二角, 故可仿前題, 在任意直線上作與所求三角形相似之三角形, 求其外接圓之半徑, 內心, 及外心, 由是卽可求得所求三角形之外接圓之半徑, 作此圓之內接三角形, 令有所設角, 則此形卽所求三角形.

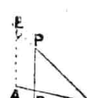
2070. 作二等邊三角形, 令與所設三角形等積, 且有所設頂角.

解 命所設三角形爲 ABC, 以 BC 爲弦, 作含所設頂角之弓形, 過 A 平行於 BC 引一直線, 令交前弓形弧於 D, 作三角形 DBC. 在 DB, DC 上取 DE, DF, 令各等於 BD, DC 之比例中項, 作三角形 DEF, 則此形卽所求三角形. 何則? 三角形 DEF 之頂角, 顯然等於所設角. 又 $\triangle DEF:\triangle BDC=DE\cdot DF:BD\cdot DC=\overline{DE}^2:BD\cdot DC$; 而 $BD\cdot DC=\overline{DE}^2$, 故 $\triangle DEF=\triangle BDC=\triangle ABC$.



2071. 有一所設點 A 及一所設角, 試過 A 引一直線, 令交角之二邊於 B, C, 而 BA:CA 等於所設比.

解 命所設角爲 BPC, 所設比爲 $m:n$. 由 A 平行於 BP 引 AE, 令交 CP 或其延線於 E. 求一點 C, 令 $EP:EC=m:n$ [2005題]. 聯結 AC, 則 ABC 卽所求直線. 因 BP ∥ AE, 從而 $AB:AC=EP:EC=m:n$ 故也.



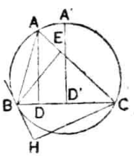
2072. 作一多角形, 令與所設多角形相似, 且周等於所設長.

解 命所設多角形之一邊爲 AR, 周爲 P,

他所設周爲 p. 兩相似多角形周之比, 等於對應邊之比, 故設所求多角形中對應於 AB 之邊爲 ab, 則 $P:p=AB:ab$, 故 ab 可求得之 [2005題]. 故作圖法如下. 由前比例式求 ab, 在 ab 上作與所設多角形相似之多角形, 令 ab 對應於 AB, [2007題], 則此形卽所求多角形.

2073. 在所設底上作一三角形, 令有所設頂角, 且底爲他二邊之比例中項. 並證若所設角大於正三角形之一角, 則此作圖不成立.

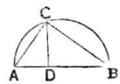
解 在所設底 BC 上, 作含所設角 α 之弓形, 補足之成圓, 求此圓之直徑與 BC 之第三比例項 AD [2005題]. 以 AD 爲高, 作此圓之內接三角形 ABC, 則 ABC 卽所求三角形. 何則? 命直徑爲 2R, 則 $2R:AC=AB:AD$ [1016題], 且 $2R:BC=BC:AD$, 故 $BC:AC=AB:BC$, 卽 $AB:BC=BC:AC$.



次, 由 B 至 AC 引垂線 BE, 由 C 至 B 上之切線引垂線 CH, 則 $\triangle ABE \backsim \triangle BCH$, $\triangle ADC \backsim \triangle BEC$, 故 $AB:BC=BE:CH$, $BC:AC=BE:AD$. 然 $AB:BC=BC:AC$, 故 $BE:CH=BE:AD$, 故 $CH=AD$. 若角 α 漸漸增大, 終至 $\frac{2}{3}\hat{R}$, 則 $C\hat{B}H=B\hat{A}C=\frac{2}{3}\hat{R}$, 故 CH 等於 BC 上正三角形之高 A'D', 卽 AD 變爲 A'D'. 若 α 更增大, 則 CH 隨而益大, 但 AD 不能大於 A'D', 從而不能作得內接三角形 ABC, 故無解.

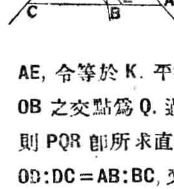
2074. 在所設直線上作直角三角形, 令其三邊成連比例.

解 以所設直線 AB 爲直徑作半圓, 分 AB 於 D, 令 $\overline{DB}^2=AD\cdot AB$ [1940題]. 過 D 引 AB 之垂線 DC, 令交圓周於 C, 則 ABC 卽所求三角形. 何則? ACB 顯然爲直角三角形, 且 $CD\perp AB$, 故 $BD:BC=BC:AB$, $\overline{AC}^2=AD\cdot AB$. 然 $\overline{DB}^2=AD\cdot AB$, 故 $AC=BD$. 故 $AC:BC=BC:AB$, 卽三邊成連比例.



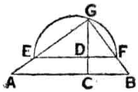
2075. 有三直線交於一點, 試引一直線, 令其爲前三直線所截得之二分, 等於所設長.

解 命三直線爲 OA, OB, OC, 他所設二直線爲 K, L. 在 OC 上取 OD, DC, 令分別等於 K, L. 過 D 平行於 OA 引 DB, 命其與 OB 之交點爲 B. 聯結 CB, 命其延線與 OA 之交點爲 A. 在 AB 上取 AE, 令等於 K. 平行於 OA 引 EQ, 命其與 OB 之交點爲 Q. 過 Q 平行於 ABC 引 PQR, 則 PQR 卽所求直線. 何則? 因 $DB\parallel OA$, 故 $OD:DC=AB:BC$, 又 $AB:BC=PQ:QR$, 故 $OD:DC=PQ:QR$. 然 $PQ=AE=OD=K$, 故 $QR=DC=L$.



2076. 作矩形, 等令於所設正方形, 且相隣二邊有所設比 $m:n$.

解 引任意直線 EF, 按比 $m:n$ 內分之於 D, 以 EF 爲直徑作半圓, 過 D 引 EF 之垂線, 令交半圓周於 G. 在 GD 或其延線上取



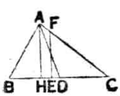
C, 令 GC 等於所設正方形之一邊. 過 C 平行於 EF 引 AB, 令交 GE, GF 或其延線於 A, B, 則 AC, BC 卽所求矩形之二邊. 何則? 因 $A\hat{G}B=\hat{R}=G\hat{C}A$, 從而 $\overline{GC}^2=AC \cdot BC$, 且 $ED:DF=AC:CB$ [1079題] $=m:n$ 故也.

2077. 作與所設直線形相似之直線形, 令二者之比等於所設比.

解 命所設比爲 $m:n$, 所設直線形 P 之一邊爲 AB. 求一直線 CD, 令 $\overline{AB}^2:\overline{CD}^2=m:n$ [2063題], 在 CD 上作與 P 相似之直線形 Q, 令 CD 爲 AB 之對應邊 [2007題], 則 Q 卽所求直線形.

2078. 試引三角形一邊之垂線, 等分三角形爲二.

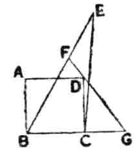
解 設所求直線爲 EF, 且 FE 爲三角形 ABC 之邊 BC 之垂線. 命 AD 爲中線, AH 爲垂線, 則 △ACD:△FCE 等於 AC:CF, DC:CE 之複比 [1145題].



然 EF ∥ AH, 故 AC:CF=HC:CE; 故前兩三角形之比等於 HC:CE, DC:CE 之複比. 然此兩三角形相等, 故此二比之複比爲等比, 故 HC:CE=CE:DC, 卽 CE 爲 HC, DC 之比例中項. 故作圖法如下. 求 HC, DC 之比例中項 CE, 過 E 引 BC 之垂線 EF, 則 EF 卽所求直線.

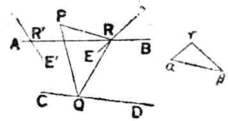
2079. 作正三角形, 令等於所設正方形.

解 命所設正方形爲 ABCD, 以 BC 爲一邊作三角形 EBC, 令一角 EBC 爲 $\frac{2}{3}\hat{R}$, 高爲 BC 之二倍. 次, 作二等邊三角形 FBG, 令與三角形 EBC 等積, 且公有一角 EBC [2070題], 則 FBG 卽所求三角形.



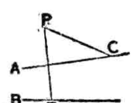
2080. 作所設三角形之相似三角形, 令其一角頂在定點上, 他二角頂分別在二所設直線上.

解 命所設三角形爲 $\alpha\beta\gamma$, 所設二直線爲 AB, CD, 所設點爲 P. 一三角形, 若其一頂點在定點 P 上, 他一頂點恆在定直線 CD 上, 且其形與定三角形 $\alpha\beta\gamma$ 相似, 則其第三角頂之軌跡爲二直線 ER, E′R′ [1125題]. 故設 ER, E′R′ 與直線 AB 之交點爲 R, R′, 在 PR, PR′ 上作與三角形 $\alpha\beta\gamma$ 相似之三角形, 則此形卽所求三角形.



2081. 試由所設點 P, 至二所設直線引等直線 PC, PE, 令其所成之角等於所設角.

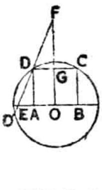
解 先作有所設頂角之任意二等邊三角形; 再作此三角形之相似三角形, 令其頂點在 P 上, 他二頂點分別在所設二直線 A, B 上 [2080題], 卽得所求二直線 PC, PE.



2082. 已知底高之和, 作所設半圓之內接矩形.

解 設所求內接矩形爲 ABCD, 過中心 O 引 AB 之垂線 OF, 令 OF 等於底高之和 m. 聯結 FD, 延長之, 令交直徑 AB 於 E, 則 △FDG∽△FEO, 故 FG:DG=FO:EO. 然 FG

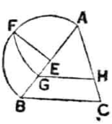
$=DC=2DG$, 故 $FG:DG=FO:EO=2:1$, 故 $EO=\frac{1}{2}FO=\frac{1}{2}m$. 故作圖法如下. 在直徑上取 $EO=\frac{1}{2}m$, 由 O 引直徑 AB 之垂線 OF, 令 $OF=m$. 聯結 EF, 令交圓周於 D, D′. 過 D, D′ 平行於直徑引弦 DC, D′C′. 由 D, C, D′, C′ 至直徑引垂線 DA, CB, D′A′, C′B′, 則 ABCD, A′B′C′D′ 皆爲所求矩形.



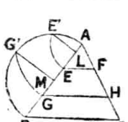
注意 若 EF 與圓,或相切,或不交,則或有一解,或無解.

2083. 試平行於三角形之一邊引一直線,將其面積等分爲二. 又普徧之,試平行於三角形之一邊, 引若干直線, 令按所設直線之比,分三角形爲二,或三以上.

解 (1)令所設三角形爲 ABC, 所求二等分線爲 GH. 此時因 $\triangle AGH \backsim \triangle ABC$, 故 $\triangle AGH:\triangle ABC=\overline{AG}^2:\overline{AB}^2=1:2$. 故分 AB 於 G, 令 $\overline{AG}^2:\overline{AB}^2=1:2$ [2063題], 過 G 平行於 BC 引 GH, 則 GH 卽所求直線.

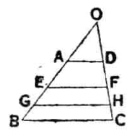


(2) 令所設比爲 $l:m:n$, 分邊 AB 於 L, M, 令 $AL:LM:MB=l:m:n$, 由 L, M 引 AB 之垂線 LE′, MG′, 令交 AB 爲直徑之半圓周於 E′, G′. 以 A 爲中心, 作 AE′、AG′ 爲半徑之二圓, 令分別截 AB 於 E, G. 由 E, G 平行於 BC 引 EF, GH, 則 EF, GH 卽所求直線. $\triangle AGH:\triangle ABC=\overline{AG}^2:\overline{AB}^2=\overline{AG'}^2:\overline{AB}^2=AB\cdot AM:\overline{AB}^2=AM:AB$, 故 $\triangle ABC-\triangle AGH:\triangle ABC=GBCH:\triangle ABC=AB-AM:AB=BM:AB$. 同理, $\triangle AEF:\triangle ABC=AL:AB$, $EBCF:\triangle ABC=LB:AB$. 故 $EBCF:GBCH=LB:BM$, 因而 $EBCF-GBCH:GBCH=EGHF:GBCH=LB-BM:BM=LM:BM$, 卽 $EGHF:GBCH=m:n$. 同理, $\triangle AEF:EGHF=AL:LM=l:m$. 故 $\triangle AEF:EGHF:GBCH=l:m:n$.



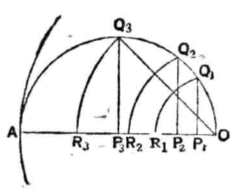
2084. 引梯形底之平行線, 等分梯形之面積爲任意個部分.

解 假定梯形 ABCD 已爲 EF, GH 所三等分. 延長 BA, CD, 令其交點爲 O. 此時三角形 OAD 之面積爲已知, 令之爲 k^2, 又令梯形之面積爲 m^2, 則 $\triangle OAD:AEFD:EGHF:GBCH=k^2:\frac{1}{3}\times m^2:\frac{1}{3}m^2:\frac{1}{3}m^2$, 故所求分線可仿前題作得之. 但比 $k^2:\frac{1}{3}m^2:\frac{1}{3}m^2:\frac{1}{3}m^2$ 當依 2063 題改爲直線之比.



2085. 試以所設圓之同心圓周, 分所設圓於所設比.

解 令所設圓之中心爲 O, 所設比爲 $M_1:M_2:M_3:\cdots\cdots$. 分半徑 OA, 令 $OP_1:P_1P_2:P_2P_3:\cdots\cdots$ 等於 $M_1:M_2:M_3:\cdots\cdots$. 過各分點, 引 OA 之垂線, 令交 OA 爲直徑之半圓周於 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots\cdots$. 以 O 爲中心, $OQ_1, OQ_2, OQ_3, \cdots\cdots$ 爲半徑作圓, 令交 OA 於 $R_1, R_2, R_3, \cdots\cdots$. 此時 $\overline{OA}^2:\overline{OR_1}^2=OA:OP_1$ [766題], $\overline{OA}^2:\overline{OR_2}^2=OA:OP_2$, 故 $\overline{OR_1}^2:\overline{OR_2}^2=OP_1$



:OP_2, $\overline{OR_1}^2:\overline{OR_2}^2-\overline{OR_1}^2=OP_1:OP_2-OP_1$ $=M_1:M_2$. 然圓 OR_1: 圓 $OR_2=\overline{OR_1}^2:\overline{OR_2}^2$, 從而圓 OR_1: 圓 OR_2－圓 $OR_1=\overline{OR_1}^2:\overline{OR_2}^2-\overline{OR_1}^2$, 故圓 OR_1: 圓 OR_2－圓 $OR_1=M_1:M_2$, 卽圓 OR_1: 環 $Q_1R_1R_2Q_2=M_1:M_2$. 同理, 環 $Q_1R_1R_2Q_2$: 環 $Q_2R_2R_3Q_3=M_2:M_3\cdots$. 故 OR_1, OR_2, OR_3,……卽所求圓之半徑.

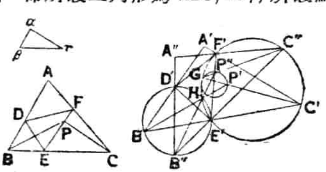
注意 參考 2083 題.

2086. 試以所設圓之同心圓周, 等分所設圓爲三.

解 本題爲前題 $M_1=M_2=M_3$ 之特款. 參觀 1362 題.

2087. 作所設三角形之內接三角形, 令與他所設三角形相似, 且一邊過所設點.

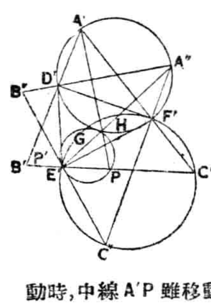
解 命所設三角形爲 ABC, $\alpha\beta\gamma$, 所設點爲



P. 在任意位置, 作三角形 $\alpha\beta\gamma$ 之相似三角形 D'E'F'; 外接於此三角形, 作 ABC 之相似三角形 A'B'C'. 引二直線 B'P', C'P', 令 $C'\hat{B}'P'=C\hat{B}P$, $B'\hat{C}'P'=B\hat{C}P$, 命此二直線之交點爲 P'. 求三角形 A'B'C' 外接於 D'E'F', 且相似於自身而移動時, 其平面內一點 P' 之軌跡 GP'H [1633題]. 命 GP'H 與 E'F' 之交點爲 P'', 又命 P' 移至 P'' 時, 三角形 A'B'C' 之位置爲 A''B''C''. 內分 BC, CA, AB 於 E, F, D, 令 BE:EC=B''E':E'C'', CF:FA=C''F':F'A'', AD:DB=A''D':D'B'', 則 DEF 卽所求三角形. 何則? 由作圖, △ABC∽△A'B'C'∽△A''B''C'', 而 BE:EC=B''E':E'C'', 故 BE+EC:EC=B''E'+E'C'':E'C'', 卽 BC:EC=B''C'':E'C'', 或 BC:B''C''=EC:E'C''. 同理, AC:A''C''=FC:F'C''. 然 △ABC∽△A''B''C'', 故 EC:E'C''=FC:F'C'', 故 △ECF∽△E'C''F', 故 $E\hat{F}C=E'\hat{F}'C''$, $F\hat{E}C=F'\hat{E}'C''$. 同理, △ADF∽△A''D'F', $D\hat{F}A=D'\hat{F}'A''$, 故 $D\hat{F}E=D'\hat{F}'E'$. 同理, 三角形 DEF 與三角形 D'E'F' 之三角, 分別相等, 故 △DEF∽△D'E'F'. 次, △PBE, △PEC 分別與 △P''B''E', △P''E'C'' 相似, 且點 P'' 在邊 F'E' 上, 故點 P 顯然在 FE 上. 故三角形 DEF 適合條件.

2088. 作所設三角形之內接三角形, 令與他所設三角形相似, 且重心在第一所設三角形之一中線上.

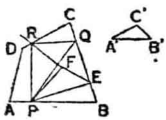
解 作所設三角形 $\alpha\beta\gamma$ 之任意相似三角形 D'E'F', 外接於此三角形, 在任意位置, 作所設三角形 ABC 之相似三角形 A'B'C', 引中線 A'P. 三角形 A'B'C', 外接於三角形 D'E'F', 且相似於自身而移動時, 中線 A'P 雖移動, 但三角形 A'PC' 仍保持相似, 故 $P\hat{A}'C'$ 一定, 從而 $A'\hat{P}B'$ 亦一定, 且 A'P 與圓 D'A'F' 之交點 H 爲定點, 故 P 在 E'H 爲弦之圓弧上 [1535題]. 聯結 H 與三角形 D'E'F' 之重心 G, 命其與圓 PHE' 之交點爲 P'. 以 A''P' 爲中線作三角形 A''B''C'', 令與 A'B'C' 相似, 且外接



於三角形 D'E'F'. 於是在三角形 ABC 之各邊上, 仿前題取 D, E, F, 則 DEF 卽所求三角形. 其證明與前題同, 故略之.

2089. 作所設四邊形之內接三角形, 令與所設三角形相似, 一頂點爲四邊形一邊上之所設點, 他二頂點在四邊形之他二邊上.

解 命所設四邊形爲 ABCD, 所設三角形爲 A'B'C', 所設點爲在 AB 上之 P 點. 依據 1125 題, 由 P 至 BC 引垂線 PE, 在 PE 上作所設三角形 A'B'C' 之相似三角形 PEF, 過 F 引 PF 之垂線 FR, 則三角形 A'B'C' 之相似三角形, 其一頂點恆在 P 上, 而他一頂點在邊 BC 上移動時, 其第三頂點之軌跡爲 FR. 故所求內接三角形之一頂點, 必在直線 FR 上, 同時又在四邊形 ABCD 之邊上. 故作圖法如下. 先求軌跡 FR, 命 FR 與四邊形邊之交點爲 R, 聯結 PR, 過 P 引 PQ, 令其與 PR 所成之角等於所設角 A', 命 PQ 與 BC 之交點爲 Q, 則 PQR 卽所求三角形.



注意 軌跡直線 FR 爲關於 PE 之二對稱直線, 故設所求內接三角形之各頂點, 可在四邊形邊之延線上, 則因二軌跡直線與邊 AD, DC 之交點, 通常有四, 故所求之三角形有四. 次, 頂角 Q 在邊 DC 上時, 又有四解. 同理, 在 AD 上時, 又有四解.

2090. 試作所設平行四邊形之內接二等邊三角形, 令各角等於所設角, 一頂點在平行四邊形之一頂點上.

解 本題爲 2089 題之特款, 故作圖法與該題同.

2091. 試作所設平行四邊形之內接正三角形, 令一頂點爲四邊形一邊上之所設點.

解 本題爲 2089 題之特款, 故作法與該題同.

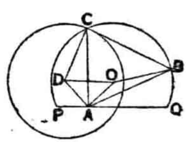
2092. 作正方形之內接正三角形.

解 本題爲 2089 題之特款, 故可仿該題作得之.

注意 所設點爲正方形邊之中點, 或正方形之一頂點時, 其作圖法詳 1787 題中.

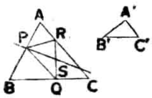
2093. 作所設弓形之內接三角形, 令與所設三角形相似, 一頂點爲弓形弦上之所設點.

解 命所設弓形爲 PCQ, 所設點爲 A, 假定所求內接三角形 ABC 業已作得. 聯結 AO, 在 AO 上作三角形 AOD, 令與三角形 ABC 相似, 且 AO 對應於 AB, 又以 D 爲中心, DC 爲半徑作圓, 則三角形 ABC 相似於自身, 一頂點 A 固定, 他頂點 B 在圓 PCQ 之周上移動時, 他頂點 C 之軌跡卽上作之圓周 [1125題]. 故作圖法如下. 聯結 AO, 在 AO 上作所設三角形之相似三角形 AOD, 以 D 爲中心, 適合 DC:OB = AD:AO [1125 題] 之 DC [2005 題] 爲半徑作圓, 求此圓與弓形弧之交點 C, 聯結 AC, 引 AB, 令與 AC 所成之角等於 DÂO, 命 AB 與弓形弧之交點爲 B, 則 ABC 卽所求三角形.



2094. 作所設三角形之內接三角形，令與他所設三角形相似，且一頂點爲第一所設三角形一邊上之所設點.

解　命所設三角形爲 ABC，他所設三角形爲 A′B′C′，所設點爲 BC 上之 Q. 置對應於 B′ 之頂點在 Q 上，令對應於 C′ 之頂點在 AC 上移動，則對應於

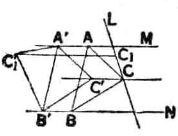


A′ 之頂點之軌跡，爲直線 PS [1125題]. 故作圖法如下. 求 PS 與邊 AB 之交點 P，聯結 PQ，引 QR，令 $P\hat{Q}R$ 等於 $\hat{B}'$，命 QR 與 AC 之交點爲 R，則 PQR 卽所求三角形.

注意　參觀 2089 題.

2095. 作三角形，令三角頂在三所設直線上，且與所設三角形全等.

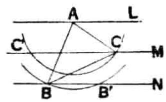
解　若三所設直線相交而成三角形，則其解已詳 1903 題. 茲當論者，爲(1)設二直線平行，他一與之相交. 假定所求三角形 ABC 業已求得，在直



線 M 上取任意點 A′，平行於 AB 引 A′B′，平行於 AC 引 A′C′，由 B′ 平行於 BC 引 B′C′，令交 A′C′ 於 C′. 聯結 CC′，則 CC′ 平行於 M. 故作圖法如下. 在二平行線之一 M 上取任意點 A′，以 A′ 爲中心，AB 之長爲半徑作圓，令交直線 N 於 B′. 在 A′B′ 上作三角形 A′B′C′，令與所設三角形全等. 過 C′ 平行於 M 引 CC′，命其與直線 L 之交點爲 C. 過 C 平行於 C′A′，C′B′ 引 CA，CB，聯結 AB，則 ABC 即所求三角形.

注意　圓 A′ 與直線 N 之交點有二，且以 A′B′ 爲一邊，與所設三角形全等之三角形，在 A′B′ 之兩側，各有一個，故可得四解.

(2)　設三直線 L, M, N 平行. 假定所求三角形 ABC 業已求得. 此時 AB, AC 之長一定，故 B 及 C 乃 A 爲中心，AB，AC 爲半徑之圓與直線 N, M 之交點. 故作圖法



如下. 在直線 L 上取任意點 A，以 A 爲中心，AB 爲半徑作圓，令交直線 N 於 B, B′；又以 AC 爲半徑作同心圓，令交直線 M 於 C, C′. 若 $B\hat{A}C$ 或 $B\hat{A}C'$ 等於所設角，則 ABC 或 ABC′ 即所求三角形. 若不等，則無解. 故本款中通常無解.

2096. 試作成比例之四圓周，令最大圓等於其他三圓面積之和，且全體圓周之和及面積之和，分別等於所設圓周及所設圓面積.

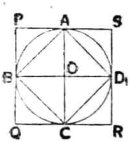
解　命所求四圓之半徑分別爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$，有所設面積之圓之半徑爲 m，有所設圓周之圓之半徑爲 n，則得以下四式. $\alpha:\beta=\gamma:\delta\cdots\cdots(1)$, $\pi(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=\pi\delta^2\cdots\cdots(2)$, $\pi(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=\pi m^2\cdots\cdots\cdots(3)$, $2\pi(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=2\pi n\cdots\cdots(4)$. 由 (2), (3), 得 $2\delta^2=m^2$, 故 $\delta=m/\sqrt{2}$. 由 (4), 得 $\beta+\gamma=n-\alpha-\delta=n-\alpha-m/\sqrt{2}$, 故 $\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma=n^2+\alpha^2+\frac{1}{2}m^2-2n\alpha-\sqrt{2}mn+\sqrt{2}m\alpha\cdots\cdots(5)$. 由 (1), 得 $\beta\gamma=\alpha\delta=\alpha m/\sqrt{2}$, 故 $\frac{1}{2}m^2-\alpha^2+\sqrt{2}m\alpha=n^2+\alpha^2+\frac{1}{2}m^2-2n\alpha-\sqrt{2}mn+\sqrt{2}m\alpha$, 或 $2\alpha^2-2n\alpha-\sqrt{2}mn+n^2=0$, 故 $\alpha=\frac{1}{2}\{n\pm\sqrt{(n^2+2}$

$\times\sqrt{2mn-2n^2})\} = \frac{1}{2}\{n\pm\sqrt{(2\sqrt{2mn}-n^2)}\}$. 今假定 m 爲對角線之正方形，其一邊爲 m'，則 $m=\sqrt{2}m'$，故 $\alpha=\frac{1}{2}\{n\pm\sqrt{(4m'n-n^2)}\}$. 欲合解成立，須 $4m'-n\geqq 0$，卽 $4m'\geqq n$. 次，已知 α，則 β, γ 可由式 $\beta+\gamma=n-\alpha-m'$，$\beta\gamma=\alpha m'$ 求得之.

第五章　正多角形及圓之測度

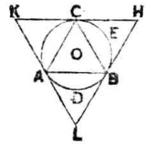
2097. 內接或外切於所設圓，作邊數爲四，八，十六，三十二等之正多角形.

解　命 ABCD 爲所設圓，求作圓 ABCD 之內接或外切 4, 8, 16, 32, ……邊正多角形. 求中心 O，引互相垂直之二直徑 AC, BD [1661題]，聯結 AB, BC, CD, DA，作切圓於 A, B, C, D 之切線 [1801 題]，命其所成之四邊形爲 PQRS，則 ABCD 及 PQRS 爲所求內接及外切正多角形. 何則? O 上各角，皆爲直角 [作圖]，故弧 AB, BC, CD, DA 皆相等 [432題]，故四邊形 ABCD, PQRS 爲正多角形 [1294題]. 欲作內接正八角形及外切正八角形，可將弧 AB, BC, CD, DA 二等分 [1799題]，而後仿前行之. 其他 16, 32, ……邊正多角形之作法亦準此.



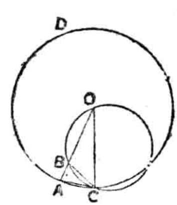
2098. 內接或外切於所設圓，作邊數爲三，六，十二，二十四等之正多角形.

解　命 ABC 爲所設圓，求作圓 ABC 之內接或外切 3, 6, 12, 24, …… 邊正多角形. 求中心 O [1800題]，以所設圓周上之任意點 D 爲中心，所設圓半徑之長爲半徑作圓，截圓周 ABC 於 A 及 B. 又以 B 爲中心，同長爲半徑作圓，截圓 ABC 於 E；以 E 爲中心，同長爲半徑作圓，截圓 ABC 於 C. 聯結 AB, BC, CA. 由 A, B, C 引切線，作三角形 HKL，則 ABC 及 HKL 卽所求內接及外切正多角形. 何則? 三角形 AOD, DOB, BOE, EOC 皆爲等邊三角形 [作圖]，故角 AOD, DOB, BOE, EOC 皆爲二直角之三分之一 [63題]，故角 AOB, BOC 皆爲四直角之三分之一. O 周之角，合而爲四直角，故其餘一角 COA 亦爲四直角之三分之一，故弧 AB, BC, CA 皆相等 [432題]，故 ABC, HKL 爲正多角形 [1294 題]. 欲作 6, 12, 24, …邊正多角形，可將弧 AB, BC, CA 逐次二等分，而仿前引弦及切線卽得.



2099. 作圓之內接正十角形. 又據此以作圓之外切正十角形，圓之內接或外切五邊，二十邊，四十邊，八十邊等正多角形.

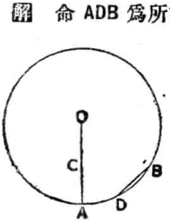
解　命 ACD 爲所設圓，求作圓 ACD 之內接正十角形. 求中心 O，引任意半徑 OA，二分 OA 於 B，令 OA, AB 所包矩形等於 OB 上之正方形 [1940題]. 以 A 爲中心，OB 之長爲半徑作圓，截圓 ACD 之周於 C，聯結 AC. 於是 AC 卽圓 ACD 之內接正十角形之一邊. 何則? 聯結 OC, BC，過三點 O, B, C 作一圓 [1806題]；於是因 AC 上之正方形等



於 AO, AB 所包之矩形[作圖], 故 AC 切圓 OBC [878 題], 故角 ACB 等於角 BOC [557 題], 故全角 ACO 等於二角 BOC 及 BCO 之和[普.公.(d)], 故又等於外角 ABC [63題]. 然 OA 等於 OC, 故角 OAC 等於角 OCA [57題], 從而等於角 ABC [普.公.(c)], 故 BC 等於 AC [59 題], 從而等於 OB [普.公.(c)], 故角 BCO 等於角 BOC [57題]. 因此角 ACO 等於角 AOC 之二倍, 故角 AOC 爲三角形 OAC 各角和之五分之一, 從而等於四直角之十分之一, 故劣弧 AC 爲全圓周 ACD 之十分之一 [954題]. 將全圓周分爲等於劣弧 AC 之弧, 引是等弧之弦, 則其所成之多角形, 卽所求內接正十角形 [1294題]. 由圓周之各分點引切線, 卽得所求外切正十角形 [1294題]. 前所求得之圓周上之分點, 一間一取之, 則圓周等分爲五, 由是卽可求得內接及外切正五角形. 將等於 AC 之各弧, 逐次二等分, 卽順次得二十邊, 四十邊, 八十邊等正多角形.

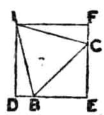
2100. 作圓之內接正十五角形, 並據此以作圓之外切正十五角形, 圓之內接及外切三十邊, 六十邊, 百二十邊等正多角形.

解 命 ADB 爲所設圓, 求作圓 ADB 之內接正十五角形. 命 O 爲中心, 作任意半徑 OA, 分 OA 於 C, 令 AC 上之正方形, 等於 AO, OC 所包之矩形 [1940 題]. 以 A 爲中心, AO 及 AC 爲半徑作二圓, 截圓 ADB 之周於 B 及 D, 聯結 BD, 則 BD 卽圓 ADB 之內接正十五角形之一邊. 何則? AB 爲圓 ADB 之內接正六角形之一邊 [1384 題], AD 爲內接正十角形之一邊 [2099題]; 故若將全圓周等分爲三十分, 則弧 AB 佔五分, 弧 AD 佔三分, 從而弧 BD 佔二分, 故弧 BD 爲全圓周之十五等分之一. 將全圓周分成等於 BD 之各弧, 引是等弧之弦, 其所成之多角形, 卽所求內接正十五角形 [1294 題]. 又由圓周上是等之分點引切線, 則得外切正十五角形 [1294題]. 將等於 BD 之各弧逐次二等分, 卽可作得三十邊, 六十邊, 百二十邊等正多角形.



2101. 作所設正三角形之外接正方形, 令兩形公有一頂點.

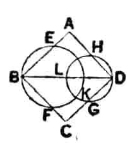
解 命所設正三角形爲 ABC, 在 BC 上且就外方作二等邊直角三角形 BCE, 由 A 至 EB, EC 分別引垂線 AD, AF, 則 ADEF 卽所求正方形. 何則? 因 AE 將 $B\hat{E}C$ 二等分, 故 AF=AD; 又因 $\hat{D}=\hat{E}=\hat{F}=\hat{R}$, 故 $\hat{A}=\hat{R}$. 故 ADEF 爲正方形.



注意 本題爲 1896 題之特款.

2102. 有四所設點 E, F, G, H, 試作一正方形, 令四邊分別過此四點.

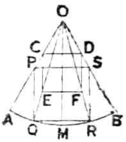
解 命所求正方形爲 ABCD. 因 $E\hat{B}F=\hat{R}$, 故 B 在 EF 爲直徑之圓周上. 同理, D 在 GH 爲直徑之圓周上. 而對角線 BD 將 $\hat{B}$ 及 $\hat{D}$ 二等分, 故 BD 過半圓弧 EKF, GLH 之中點 K, L. 故作圖法如下. 以 EF, GH 爲直徑作二圓, 過半圓弧之中點 K, L



引一直線; 命其與二圓周之交點爲 B, D, 又命 BE, DH 之交點爲 A, 及 BF, DG 之交點爲 C, 則 ABCD 卽所求正方形.

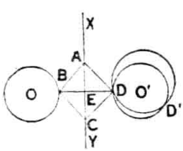
2103. 作所設扇形之內接正方形.

解 命弧 AB 之中點爲 M, 引 OM 之任意垂線 CD, 在 CD 上作正方形 CEFD, 聯結 OE, OF, 命其與弧 AB 之交點爲 Q, R, 過 Q, R 平行於 OM 引 QP, RS, 命其與 OA, OB 之交點爲 P, S, 則 PQRS 爲所求正方形. 何則? 因扇形關於 OM 爲對稱, 故 CD, EF, QR 平行. 次, CE:PQ=OE:OQ=EF:QR, 故 PQ=QR, 故 PQRS 爲正方形.



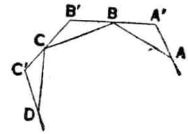
2104. 作正方形, 令其相對二頂點在一所設直線上, 他二頂點分別在所設二圓周上.

解 設 ABCD 爲所求正方形. 因所設直線 XY 爲正方形之對角線, 故正方形關於 XY 爲對稱. 今以 XY 爲界, 而將 ABC 折至他部上, 則 B 落於 D. 故作圖法如下: 作圓 O 關於 XY 之對稱圓, 令交圓 O′ 於 D, D′. 由 D, D′ 至 XY 引垂線 DE, D′E′, 命其延線與圓 O 之交點爲 B, B′. 以 DB, D′B′ 爲對角線作正方形, 則此形卽所求正方形.



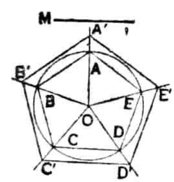
2105. 作所設正 n 邊形之外接正 n 邊形, 令等於他所設正 n 邊形.

解 命所設正 n 邊形爲 ABCD……, 以各邊爲弦, 分別在其外方作弓形, 令其所含之角等於 $A\hat{B}C$. 過 B 引一倍弦 A′B′, 令等於他所設正 n 邊形之一邊. 過 B′, C 引倍弦 B′C′; 以下仿此, 卽得所求正 n 邊形 A′B′C′……. 一切頂角, 皆等於正 n 邊形之內角, 可無庸證. 次, $C\hat{B}A'=B\hat{B'}C+B'\hat{C}B$, $A\hat{B}C=B\hat{B'}C$, 故 $A\hat{B}A'=B\hat{C}B'$, 故 $AA'=BB'$. 同理, $A'B=B'C$, $BB'=CC'$, $B'C=C'D$, ………, 故 $A'B'=B'C'=C'D'=$…….



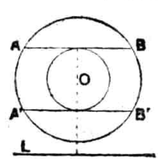
2106. 以所設有限直線爲一邊, 作正五角形.

解 命所設直線 M, 爲求以 M 爲一邊, 作正五角形. 作中心爲 O 之任意圓, 在圓內作正五角形 ABCDE [2099 題], 在 OA, OB, 或其延線間置一直線 A′B′, 令平行於 AB 且等於 M [1690 題]. 由是順次平行於 BC, CD, DE, 引 B′C′, C′D′, D′E′, 最後聯結 A′E′, 則因 $AA'=BB'=$…………$=EE'$, 故 $A'E' \parallel AE$, 故 A′B′C′D′E′ 亦爲正五角形, 且其一邊等於 M, 故爲所求正五角形.



2107. 平行於所求直線, 引一直線, 分所設圓周於比 3:5.

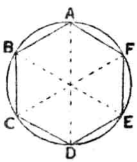
解 假定所求直線 AB 業已作得, 則弧 AB 爲圓周之 $\frac{3}{8}$, 卽圓之內接正八角形一邊所截弧



之三倍. 故作圖法如下. 作圓之內接正八角形, 取其三隣邊所截之弧, 聯結此弧之兩端作弦, 由中心至此弦引一垂線, 以此垂線爲半徑作同心圓. 由中心至所設直線 L 引垂線, 過此垂線及其延線截小圓周之點引切線 AB, A′B′, 則 AB, A′B′ 卽所求直線.

2108. 作正方形, 令與所設正六角形等積.

解 命所設正六角形爲 ABCDEF, 其一邊之長爲 a, 則正六角形之面積爲 $3\sqrt{3}\cdot a^2/2$ [1389題]. 設所求正方形之一邊爲 l, 則 $l^2=3\sqrt{3}\cdot a^2/2$, 故 $(3/2)a:l=l:\sqrt{3}a$, 卽 l 爲 $\frac{3}{2}a$ 與 $\sqrt{3}a$ 之比例中項, 故可求得之, 從而可求得所求正方形.

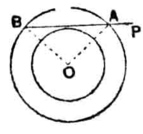


2109. 作正三角形, 令與所設正六角形等積.

解 命所設正六角形爲 ABCDEF, 聯結其一間一之頂點, 則得一正三角形 ACE, 其面積等於原正六角形之半分. 設所求正三角形之一邊爲 l, 面積爲 S, 則 $S:\triangle ACE=l^2:\overline{AC}^2=2:1$. 故 l 乃 AC 爲一邊之正方形之對角線, 故可求得之, 從而可作得所求正三角形. 卽先引所設正六角形之對角線 AC, 在 AC 上作正方形, 求其對角線, 以之爲一邊作正三角形卽得.

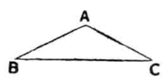
2110. 過所設點引一直線, 分所設圓周爲二, 令其比爲 3:7.

解 命所設點爲 P, 所設圓之中心爲 O. 假定所求直線 PAB 業已求得, 命此直線與圓周之交點爲 A, B, 聯 O 於 A 及 B, 則因弧 AB 與其共軛弧之比爲 3:7, 故 $A\hat{O}B$ 與其共軛角之比爲 3:7, 卽 $A\hat{O}B$ 爲 $3\times\frac{4}{10}\hat{R}$, 故弧 AB 爲此圓內接正十角形一邊所截弧之三倍. 故作圖法如下. 先作圓之內接正十角形, 取其三隣邊所截之弧, 引此弧之弦, 以中心至此弦之距離爲半徑, 作同心圓, 由 P 引此圓之切線 PAB, PA′B′, 則 PAB, PA′B′ 卽所求直線. 若 P 在小同心圓之周上, 則有一解; 若在此圓內, 則無解.



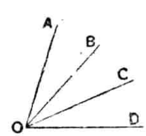
2111. 作二等邊三角形, 令頂角爲各底角之三倍.

解 一底角爲 $\frac{4}{10}\hat{R}$, 此角爲圓之內接正十角形一邊所對之中心角, 故可作得之, 從而所求三角形, 甚易作得之.

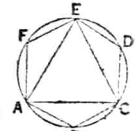


2112. 三等分正五角形之外角.

解 正五角形之外角爲 $\frac{4}{5}\hat{R}$, 又圓周之 $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$ 所對之中心角爲 $\frac{4}{15}\hat{R}$. 故由正五角形之外角 AOD 之頂點, 引 OB, OC, 令其由此外角所截得之角, 等於圓周之 $\frac{1}{15}$ 所對之中心角, 則 $A\hat{O}D$ 卽爲 OB, OC 所三等分.



2113. 作正六角形 ABCDEF, 令對角線 AC 等於所設長.

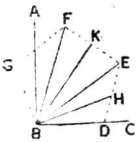


解 引 AC, 令等於所設長, 以之爲一邊, 在其上作

正三角形 ACE, 作此正三角形之外接圓, 求弧 AC, CE, EA 之中點 B, D, F, 則 ABCDEF 卽所求正六角形, 其理甚易知之.

2114. 五等分一直角.

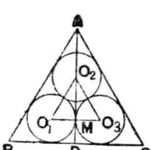
解 在直角 ABC 之一邊 BC 上, 取任意長 BD, 以 BD 爲一邊作五正角形 BDEFG, 聯結 BE, BF, 引 $D\hat{B}E$ 及 $E\hat{B}F$ 之二等分線 BH 及 BK, 則四直線 BH, BE, BK, BF 將角 ABC 五等分. 何則? 作此正五角形之外接圓, 則因弧 ED, EF 爲全圓周之五分之一, 故此弧所對之圓周角 DBE, EBF 各爲 $\frac{2}{5}\hat{R}$, 故此各角之半分等於 $\hat{R}$ 之 $\frac{1}{5}$, 從而 $A\hat{B}F$ 亦爲 $\frac{1}{5}\hat{R}$.



別解 作圓之內接正二十邊形, 求其一邊所對之中心角, 由直角逐次截取等於此中心角之角, 則截此諸角之直線, 卽五等分直角之直線.

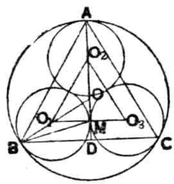
2115. 作三等圓, 令相切且內切所設正三角形.

解 假定正三角形 ABC 之三個內切等圓, 業已作得, 命其中心爲 O_1, O_2, O_3, 則三角形 $O_1O_2O_3$ 爲正三角形, 且其三邊分別平行於 ABC 之三邊, 故引角 A 之二等分線 AD, 則 D 爲 BC 之中點, 且 AD 過 O_2, 而與 O_2O_1, O_2O_3 成等角, 故將 O_1O_3 垂直二等分, 從而過圓 O_1, O_3 之切點 M. 總括言之, 由 A 至對邊所引之垂線, 過 O_2, 正三角形之中心, 及圓 O_1 與 O_3 之切點. 而 O_1 在角 B 及直角 ADB 之二等分線上, 故其位置可決定之, 從而可得三等圓之中心. 故作圖法如下. 命 $\hat{B}$ 及 $A\hat{D}B$ 之二等分線之交點爲 O_1, 引 AD 之垂線 O_1M, 引 $O_3M=O_1M$, 以 O_1O_3 爲一邊作正三角形 $O_1O_2O_3$, 則其二頂點卽所求三等圓之中心. 何則? 以 O_1, O_3 爲中心, O_1M 爲半徑作圓 O_1, O_3, 則各切三角形之二邊, 且互切於垂線 AD 上之 M 點, 又以 O_2 爲中心, 作等半徑之圓, 則切二邊 AB, AC; 且切圓 O_1, O_3, 其切點分別在由 C, B 至對邊所引之垂線上. 故 O_1, O_2, O_3 爲所求等圓之中心.



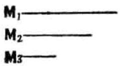
2116. 作三等圓, 令相切, 且內切所設圓.

解 命圓之中心爲 O, 作內接正三角形 ABC, 則 OB 將 $\hat{B}$ 二等分. 命角 $O\hat{B}C$ 之二等分線與 AO 之交點爲 M, 過 M 平行於 BC 引直線 O_1O_3, 命其與 BO 之交點爲 O_1, 且 $O_1M=MO_3$, 在 O_1O_3 上作正三角形 $O_1O_2O_3$. 因 $O_1B=O_1M$, 故以 O_1 爲中心, O_1M 爲半徑作圓, 則切圓 O 於 B, 切 AM 於 M. 次, 以 O_2, O_3 爲中心, 作等半徑之圓, 則此二圓分別切所設圓於 A, C, 且又互切, 其互切點在 △ABC 中由頂點至對邊所引之垂線上; 此種關係, 可由圖形關於 AO, BO 之對稱明之. 故圓 O_1, O_2, O_3 爲所求三等圓.



2117. 作一圓, 令其面積等於所設二個或多個圓之面積和.

解 命所設圓之半徑, 分別爲 M_1, M_2, M_3

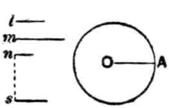


……. 在 $M_1, M_2, M_3,$…… 上分別作正方形, 以此諸正方形面積之和爲面積, 再作一正方形,命其一邊爲 N [1987題]. 命半徑爲 $M_1, M_2, M_3,$…… 之圓面積分別爲 $S_1, S_2, S_3,$……, 半徑爲 N 之圓面積爲 S, 則 $M_1^2 : S_1 = M_2^2 : S_2 =$……, 故 $M_1^2+M_2^2+\cdots : S_1+S_2+\cdots\cdots = M_1^2 : S_1 = N^2 : S$ [965題]. 然 $M_1^2+M_2^2+\cdots\cdots=N^2$, 故 $S_1+S_2+\cdots\cdots=S$, 卽所求圓之半徑爲 N.

注意 欲作一圓,令其面積等於所設二圓面積之差, 可先作一正方形, 令等於所設二圓半徑上正方形之差,而後以其一邊爲半徑作圓,於是作得之圓卽所求圓.

2118. 作若干個圓,令其半徑之比,等於同個數之所設直線之比,且其面積之和等於所設圓面積.

解 命所設若干直線爲 $l, m, n,\cdots\cdots, s$, 有所設面積之圓之中心爲 O, 半徑爲 OA. 以 l, m 爲直角之二邊, 得直角三角形, 求其斜邊 a; 再以 a, n 爲直角之二邊, 作直角三角形,求其斜邊 b; 如是繼續進行, 命最後所得之斜邊爲 k, 則 $k^2=l^2+m^2+n^2+\cdots\cdots s^2$. 依照 $k:\mathrm{OA}=l:\mathrm{R}=m:\mathrm{R}_1=n:\mathrm{R}_2=\cdots\cdots$ 求 $\mathrm{R}, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2,\cdots\cdots$, 則 $k^2:\overline{\mathrm{OA}}^2=l^2:\mathrm{R}^2=m^2:\mathrm{R}_1^2=n^2:\mathrm{R}_2^2=\cdots\cdots$, 故 $k^2:\overline{\mathrm{OA}}^2=l^2+m^2+\cdots\cdots:\mathrm{R}^2+\mathrm{R}_1^2+\cdots$, 然 $k^2=l^2+m^2+\cdots\cdots$, 故 $\overline{\mathrm{OA}}^2=\mathrm{R}^2+\mathrm{R}_1^2+\cdots\cdots$. 命所設圓面積爲 S, 半徑爲 $\mathrm{R}, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2,\cdots\cdots$ 之圓面積分別爲 L, M, N,……, 則由 1316 題, $\mathrm{S}:\mathrm{L}=\overline{\mathrm{OA}}^2:\mathrm{R}^2$, $\mathrm{S}:\mathrm{M}=\overline{\mathrm{OA}}^2:\mathrm{R}_1^2,\cdots\cdots$, 故 $\mathrm{S}:\mathrm{L}+\mathrm{M}+\cdots\cdots=\overline{\mathrm{OA}}^2:\mathrm{R}^2+\mathrm{R}_1^2+\cdots\cdots$, 而 $\overline{\mathrm{OA}}^2=\mathrm{R}^2+\mathrm{R}_1^2+\cdots\cdots$, 故 $\mathrm{S}=\mathrm{L}+\mathrm{M}+\mathrm{N}+\cdots\cdots$, 卽所求得之圓之半徑, 比例於 $l, m, n,\cdots$, 且其面積之和,等於所設圓面積.



第六章 計算作圖

I. 代數式作圖

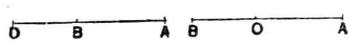
[單位項所表之線長, 稱爲一次因數, 單純之數,及表單純數之記號,稱爲係數. 以下諸例中所用之英文字母, 如 $a, b, c,$…… 等居前部者表一次因數, m 及 n 表係數, x 表所求量].

2119. 作 $x=a+b$ 之圖.

解 本題爲作一直線,令等於所設二直線之和,其作圖法已自明.

2120. 作 $x=a-b$ 之圖.

解 設 $\mathrm{OA}=a$, 由 A 依反對方向取 $\mathrm{AB}=b$,



則 OB 表 x 值. 若 $b>a$, 則 x 值爲負. 此時單就絕對值考之, 毫無意義, 若加入位置考之, 則 x 之負值, 乃由 0 依正值之反對方向延長而得者, 卽 x 之負値, 乃依正方向 OA 之反對方向所延長而得者.

2121. 作 $x=m/n$ 之圖.

解 本題之意,在分 a 於比 $m:n$.

2122. 作 $x=ab$ 之圖.

解 本題之 x, 係表 a, b 爲二邊之矩形面積.

2123. 作 $x=bc/a$ 之圖

解　本題中之 x, 乃 a, b, c 之第四比例項.

2124. 作 $x=b^2/a$ 之圖.

解　本題中之 x, 乃 a, b 之第三比例項.

2125. 作 $x=\sqrt{(ab)}$ 之圖.

解　本題係求 a, b 之比例中項.

2126. 作 $x=\sqrt{(a^2+b^2)}$ 之圖.

解　本題中之 x, 乃 a, b 爲二邊之直角三角形之斜邊.

2127. 作 $x=\sqrt{(a^2-b^2)}$ 之圖.

解　本題中之 x, 乃 a 爲斜邊, b 爲一邊之直角三角形之他一邊. 又因 $\sqrt{(a^2-b^2)}=\sqrt{\{(a+b)(a-b)\}}$, 故 x 又爲 $a+b, a-b$ 之比例中項.

2128. 作 $x=a\sqrt{2}$ 之圖.

解　本題中之 x, 乃 a 爲一邊之正方形之對角線.

2129. 作 $x=\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ 之圖.

解　本題中之 x, 乃 a 爲一邊之正三角形之高.

2130. 作 $x=a\sqrt{5}$ 之圖.

解　本題中之 x, 乃 a 及 $2a$ 爲二邊之直角三角形之斜邊.

2131. 作 $x=a\sqrt{m}$ 之圖.

解　本題中之 x, 乃 a 與 ma 之比例中項.

2132. 作 $x=ab/\sqrt{(a^2+b^2)}$ 之圖.

解　本題中之 x, 乃以 a, b 爲二邊之直角三角形中由直角頂至斜邊所引之高.

2133. 作 $x=\sqrt{(a^2+b^2-ab)}$ 之圖.

解　本題中之 x, 乃二邊爲 a, b, 其夾角爲 60° 之三角形之第三邊.

2134. 作 $x=\sqrt{(a^2+b^2+ab)}$ 之圖.

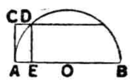
解　本題中之 x, 乃二邊爲 a, b, 其夾角爲 120° 之三角形之第三邊.

2135. 作 $x=a\sqrt{19}$ 之圖.

解　將題式右邊改書爲 $\sqrt{(a\times 19a)}$, 及 $\sqrt{\{(4a)^2+(2a)^2-a^2\}}$, $\sqrt{\{(5a)^2-(2a)^2-a^2-a^2\}}$, 則可得三種作法.

2136. 方程式 $x^2-ax+b^2=o$ 之根, 試作圖示之.

解　代數學中,二次方程式 $x^2+px+q=o$ 之二根之和爲 $-p$, 二根之積爲 q, 故設本題之二根爲 x_1, x_2, 則 $x_1+x_2=a$, $x_1x_2=b^2$. 由是等關係, 可知若二根爲實數,則俱爲正數,因二根之和 a 及積 b^2 皆正故也. 此時本題變爲下題: 已知二根之和 a 及積 b^2, 試作二直線以表之. 引 AB$=a$, 以 AB 爲直徑, 作半圓於其上, 引 AB 之垂線 AC, 令等於 b, 平行於 AB 引 CD, 交半圓周於 D, 引 AB 之垂線 DE, 令交 AB 於 E, 則 AE 及 EB 卽所求二直線.



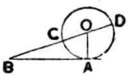
吟味　若 $b>\frac{1}{2}a$, 卽 $a<2b$, 則 CD 不交圓. 故二根爲虛數. 若 $a=2b$, 則 CD 切圓, 而二根各爲 $\frac{1}{2}a$.

2137. 方程式 $x^2+ax+b^2=o$ 之根, 試作圖示之.

解　所設之方程式乃由 $x^2-ax+b^2=o$ 中之 x 變爲 $-x$ 而得. 故 $x^2-ax+b^2=o$ 之根變號, 卽成 $x^2+ax+b^2=o$ 之根. 因此本題之二根, 其絕對値與前題同.

2138. 方程式 $x^2-ax-b^2=o$ 之根, 試作圖示之.

解　所設方程式中二根之符號相反,因二根之積 $-b^2$ 爲負故也.命 x_1 爲正根, x_2 爲負根之絕對值,則 $x_1-x_2=a$, $x_1x_2=b^2$. 故本題變成下題:已知二直線之差 a, 積 b^2, 試引此二直線.以 O 爲中心, $\frac{1}{2}a$ 爲半徑作圓,在此圓周上取任意點 A, 過 A 引切線 AB $=b$, 聯結 BO 且延長之,交圓周於 C 及 D, 則 BC 及 BD 即所求二直線.



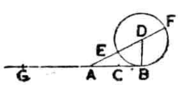
2139. 方程式 $x^2+ax-b^2=o$ 之根,試作圖示之.

解　所設之方程式,乃由 $x^2-ax-b^2=o$ 中之 x 易爲 $-x$ 而得者,故所設二根絕對值之作圖法,與前題同.

II. 代數幾何法例題

2140. 將所設直線 a 分爲二分,令其平方差等於其積.

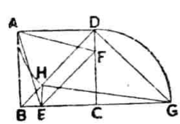
解　設 AB 爲 a, 所求分點爲 C. 於是若能求得 AC, 即得解本題.玆命 AC $=x$, 則 BC $=a-x$, 而 $x^2-(a-x)^2=x(a-x)$, 即 $x^2+ax-a^2=o$, 其二根如下: $x_1=-\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+a^2)}=\sqrt{[(\frac{1}{2}\times a)^2+a^2]}-\frac{1}{2}a$, $x_2=-\frac{1}{2}a-\sqrt{\{\frac{1}{4}a^2+a^2\}}=-\{\sqrt{[(\frac{1}{2}a)^2+a^2]}+\frac{1}{2}a\}$.



作圖法　引 AB 之垂線 BD, 令等於 $\frac{1}{2}a$, 聯結 AD. 以 D 爲中心, DB 爲半徑作圓,令交 AD 於 E 及 AD 之延線於 F. 於是就絕對值而言, $x_1=$ AE, $x_2=$ AF; 就符號而言, x_1 爲正, x_2 爲負.故在 AB 上取 AC $=$ AE, 在 BA 之延線上取 AG $=$ AF. 此時 C 點必在 A 與 B 間[試說明其故]. 題文若嚴格解釋之,則 C 點爲唯一之解.然若將本題改述如下:延長所設直線 BA 至 G, 令 $\overline{\mathrm{GB}}^2-\overline{\mathrm{GA}}^2=\mathrm{GB}\cdot\mathrm{GA}$, 則可命 AG $=x$, 而得方程式 $(a+x)^2-x^2=x(a+x)$; 其正根爲 $x=\frac{1}{2}\times a+\sqrt{a^2+\frac{1}{4}a^2}$, 此值與原問題方程式負根 x_2 之絕對值同.由是可知,所設之代數解法恆有二,其一爲本題本身之解,他一爲與本題有密接關係之問題之解.此二問題若併合爲一而概括述之,則如下:在過所設二點 A, B 之直線上求 C 點,令由 C 至 A 及 B 之距離之平方差及積等. 又本題與下題一致,分所設直線爲二分,令全線與一分所包之矩形,等於他分上之正方形,因由比例式 $a:x=x:a-x$ 可得方程式 $x^2+ax-a^2=o$ 故也.

2141. 在所設正方形內作一等邊三角形,令與正方形公有一角頂,他二角頂在正方形之二邊上.

解　設 ABCD 爲所設正方形, AEF 爲所求三角形.命 AB $=a$, BE $=x$, 則 $\overline{\mathrm{AE}}^2=a^2+x^2$, $\overline{\mathrm{EF}}^2=2(a-x)^2$; 而 AE $=$ EF, 故 $a^2+x^2=2(a-x)^2$. 就 x 解此方程式,得 $x=2a\pm a\sqrt{3}$. x 之二值皆爲正,然大值大於 a, 故若將正方形之邊,視作角頂間之有限直線,則大值宜棄去之.



作圖法　延長 BC 至 G, 令 CG $=a$, 聯結 DG, DB, 在 DB 上取 DH $=$ DA, 聯結 GH, 則 GH $=a\sqrt{3}$. 在 GB 上取 GE $=$ GH, 則 BE $=2a$

$-a\sqrt{3}$, 而 E 爲所求三角形之一角頂. 以 A 爲中心, AE 爲半徑作圓,截 CD 於 F, 聯結 EF, 則 AEF 卽所求三角形. AEF 爲等邊三角形,其證甚易.

吟味 欲作他根 $2a+a\sqrt{3}$ 之圖, 可延長 BC 過 G, 而至 K 點,令 GK＝GH. 在 DC 之延線上取 L, 令 AL＝AK, 則三角形 AKL 亦爲等邊三角形, 其證甚易. 故若將正方形之邊, 視作過二角頂之無限直線, 則三角形 AKL 亦爲本題之一解.

2142. 試過所設點 P, 至所設圓引一割線,令其圓外之一分與圓內之一分相等.

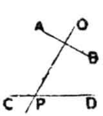
解 命 O 爲所設圓之中心, r 爲其半徑, $OP=a$, x 爲圓外之部分,則 $2x^2=a^2-r^2$ [874 題], 故 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(a^2-r^2)}$. 此作圖與證明,無說明之必要,故略之.

吟味 x 之負值無用,故棄之. 若 $a<r$, 則本題不成立, 因此時之 x 值爲虛數故也. 又若 $a>3r$, 卽 $x>2r$, 則本題亦不成立, 因此時割線之圓內一分,大於直徑故也.

第七章 雜題

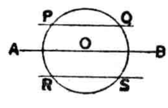
2143. 在定直線上求一點, 令其至線外二定點之距離相等.

解 設 A, B 爲二定點, CD 爲定直線. 假定 CD 上適合條件之點 P 業已求得,則 PA＝PB, 故 P 在 AB 之垂直二等分線上 [1507 題], 故 AB 之垂直二等分線與定直線 CD 之交點,即所求點. 解答之數, 通常爲一. 若 AB⊥CD, 而 CD 不將 AB 二等分,則不可能;若二等分, 則解答無數.



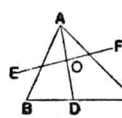
2144. 在所設圓周上, 求距定直線定遠之點.

解 設 AB 爲定直線, O 爲所設圓. 因所求點距定直線等於定長 m, 故在距 AB 爲 m 之點之軌跡, 即平行於 AB 之一雙直線上. 而所求點又須在圓 O 之周上,故軌跡平行線與圓周之交點 P, Q, R, S 爲所求點. 解答之數, 通常爲四.



2145. 在三角形 ABC 之底 BC 上取任意點 D, 引截三角形之一直線, 令以此直線爲界,而對折三角形時, A, D 二點相合.

解 過有限直線 AD 之中點 O, 引 AD 之垂線 EF, 則此直線卽所求直線. 何則? 今以 EF 爲界, 將圖形 EAF 折至他部上, 假定 A 所落之位置爲 A′, 則 A′O⊥EF, DO⊥EF, 故 A′ 在 DO 上; 而 A′O＝DO, 故 A′ 與 D 相合.

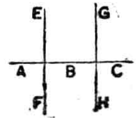


2146. 求距二平行直線等遠之點.

解 由 1634 題可知, 過所設二直線公垂線之中點, 引平行於所設二直線之直線, 則凡此直線上之點,皆爲所求點.

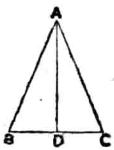
2147. 距一直線上之三點等遠之點如何?

解 設 A, B, C 爲一直線上之三定點,距 A, B 等遠之點,在線分 AB 之垂直二等分線 EF 上; 又距 B, C



等遠之點, 在 BC 之垂直二等分線 GH 上. 故距三點 A, B, C 等遠之點,必爲此二直線之交點.然 EF, GH 俱爲直線 ABC 之垂線, 故相平行,因此無所求點.

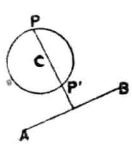
2148. 已知二等邊三角形之高與頂角, 求作本形.



解 作角 A 令等於所設角, 引其二等分線 AD, 令等於所設高, 過 D 垂直於 AD 引一直線,令交角 A 之邊於 B, C, 則 ABC 即所求三角形明甚.

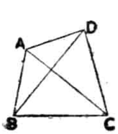
2149. 求一點,令距一定點定遠,距他二定點等遠.

解 設 A, B, C 爲三定點,求距 A, B 等遠,距 C 爲定遠 l 之點.命 P 爲所求點, 則因 AP$=$BP, 故 P 在 AB 之垂直二等分線上. 又因 CP$=l$, 故 P 在 C 爲中心, l 爲半徑之圓周上. 據此, 所求點 P 爲圓周 C 與 AB 之垂直二等分線之交點 P, P′. 解答之數, 有時爲二,有時爲一,或竟無之.



2150. 已知四邊形之一邊, 此邊兩端之角,及二對角線,求作本形.

解 引任意直線 BC, 令等於二等邊. 過 B 引 BA, 令與 BC所成之角等於所設角;過 C 引 CD 令與 BC 所成之角等於他所設角, 且與 BA 在 BC 之同側, 次, 以 C 爲中心, 所設對角線之一爲半徑作圓,截 BA 於 A; 又以 B 爲中心,他已知對角線爲半徑作圓, 截 CD 於 D. 於是 ABCD 即所求四邊形.



吟味 圓 C 與 BA 之交點, 通常有二. 若二交點在 B 之 A 側,則皆可爲所求四邊形之頂點, 若在異側, 則僅可取其在 A 側者. 圓 B 與直線 CD 之交點亦然. 又兩對角線互換, 則尚可得他解. 故本題最多可得八解.

2151. 四邊形 ABCD 中, 已知 AC, $C\hat{A}B$, $A\hat{C}D$, CD, 及 DB, 求作本形.

解 三角形 ACD 中, AC, CD, 及其夾角 ACD 爲已知, 故可作得之 [1667題]. 又過 A 引 AB, 令與 AD 在 AC 之異側,且與 AC 成所設角 CAB, 於是 B 在 AB 上. 而 B 又在 D 爲中心, BD 爲半徑之圓周上. 故圓 D 與 AB 之交點即所求點B. 因此可作得四邊形 ABCD. 解答之數,有時爲二, 有時爲一, 或竟無之.

2152. 四邊形 ABCD 中, 已知 AB, BC, BD, $\hat{A}$ 及 $\hat{B}$, 求作本形.

解 三角形 ABC 中,已知二邊 AB, BC, 及其夾角, 故此三角形可作得之 [1667 題]. 次,過 A 引 AD, 令與 AC 在 AB 之同側,且與AB成所設角 $B\hat{A}D$, 於是 D 在直線AD 上. 而 D 又在 B 爲中心 DB 爲半徑之圓周上. 故圓 B 與 AD 之交點即所求點 D, 因此可作得四邊形 ABCD. 解答之數, 有時爲二, 有時爲一,或竟無之.

2153. 四邊形 ABCD 中, 已知邊 AB, AC, 角 A, D, 及 C, 求作本形.

解 三角爲已知, 故第四角可由 $4\hat{R}$ 減去他三角形之和以求得之. 因此三角形 ABC

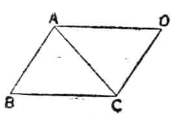
中,已知邊 AC, AB, 及頂角 B, 故此三角形可作得之 [1668 題]. 又兩直線 AD, CD 分別與邊 AB, BC 所成之角爲已知,故 AD, CD 可引得之,從而可求得其交點 D, 因此可作得所求四邊形 ABCD. 解答之數,有時爲二,有時爲一.或竟無之.

2154. 四邊形 ABCD 中, 已知 AB, AC, CD, $B\hat{A}C$, 及 $A\hat{B}D$, 求作本形.

解 三角形 ABC 中,已知二邊 AB, AC, 及其夾角 BAC, 故此三角形可作得之 [1667 題]. 然因 $A\hat{B}D$ 爲已知, 故可引得直線 BD, 因此點 D 乃 C 爲中心, CD 爲半徑之圓周與直線 BD 之交點, 故四邊形 ABCD 可作得之. 解答之數, 有時爲二, 有時爲一, 或竟無之.

2155. 已知平行四邊形之二隣邊, 及一對角線. 求作本形.

解 設平行四邊形 ABCD 之邊 AB, BC, 及對角線 AC 爲已知. 此時三角形 ABC 之三邊爲已知, 故可求得之, 從而過 A, C, 分別平行於 BC, BA 引 AD, CD,

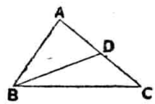


卽得所求平行四邊形. 若 AB, BC, 及他對角線 BD 爲已知, 則因 AB=CD, 故 △BCD 可決定之, 從而可仿前作得所求平行四邊形. 問題成立之條件,與三角形 ABC 成立之條件同.

2156. 已知三角形之二邊及中線, 求作本形,但須就種種情形作之.

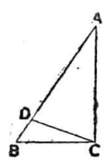
解 (I) 已知二邊及第三邊上之中線時,其解法與 1773 題同.

(II) 已知二邊及其中一邊上之中線時.假定所求三角形 ABC 業已求得,邊 AB, AC, 及中線 BD 爲已知. 此時三角形 ABD 中, 二邊 AB, BD 爲已知,第三邊 AD 爲已知邊 AC 之半分, 故亦爲已知, 因此 ABD 得決定之, 從而又可決定點 C. 故所求三角形甚易作得之.



2157. 已知直角三角形之斜邊與他一邊之差, 及一銳角, 求作本形.

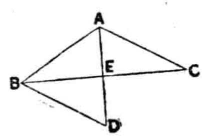
解 設直角三角形 ABC 中, 一銳角 B, 及斜邊 AB 與邊 AC 之差 d 爲已知量. 在 AB 上取 AD, 令等於 AC, 聯結 CD, 則因 $\hat{A}=\hat{R}-\hat{B}$, 故爲已知, 又 BD$=d$, $A\hat{D}C=\frac{1}{2}\times(2\hat{R}-\hat{A})$. 故作圖法如下. 作角 ABC, 令等於所設角 B, 在 BA 上取 BD, 令等於 d, 過 D 引 DC, 令與 BC 在 AB 之同側,且與 DA 所成之角等於 $\frac{1}{2}(2\hat{R}-\hat{A})$. 命 DC 與 BC之交點爲 C. 過 C 引 BC 之垂線 CA, 命其與 BA 之交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形.



注意 若已知角非 $\hat{B}$ 而爲 $\hat{A}$, 則因 $\hat{B}$ 爲 $\hat{A}$ 之餘角,故仍可知之,因此作圖法不變.

2158. 作二等邊三角形, 令頂角爲各底角之四倍.

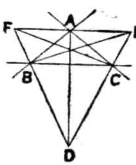
解 作任意正三角形 ABD, 由 B 至 AD 引垂線 BE, 在其延線上取 EC, 令等於 BE, 聯結 AC, 則 ABC 卽所求二等邊三角形. 何則?



AE 爲 BC 之垂直二等分線,故 AB＝AC, $B\hat{A}E＝C\hat{A}E$. 又因 ABD 爲正三角形,故 $B\hat{A}E＝2A\hat{B}E$, 故 $B\hat{A}C＝4A\hat{B}C$. 又其他適合條件之三角形,皆與此相似,可得證之.

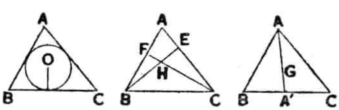
2159. 已知三傍心,作三角形.

解 命所設三傍心之位置爲 D, E, F, 假定所求三角形 ABC 業已求得, 則直線 EF, FD, DE 分別過 A, B, C, 且 DA⊥EF, EB⊥FD, FC⊥DE. 據此,由三角形 DEF 之各頂點至對邊所引垂線之足, 卽所求三角形之頂點, 故若作 DEF 之垂足三角形, 卽得所求三角形 ABC. 欲令問題成立, 其條件乃 DEF 須爲銳角三角形.



2160. 以下列之已知件作三角形. (1)一邊 a 之大小及位置, 內心之位置. (2)一邊 a 之大小及位置, 垂心之位置. (3)一邊 a 之大小及位置, 重心之位置.

解 設 BC 爲所設邊 a 之大小及位置, O



爲內心之位置, H 爲垂心之位置, G 爲重心之位置. (1)以 O 爲中心,作切 BC 之圓, 由 B, C 至此圓引切線 BA, CA, 命其交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形. 成立之條件爲 O 不在 BC 上,且 $B\hat{O}C>\hat{R}$.

(2) 聯結 CH, BH, 由 B 至 CH 引垂線 BF, 由 C 至 BH 引垂線 CE, 命其交點爲 A, 則 ABC 卽所求三角形. H 若與 B 或 C 一致, 則不定,在 BC 上之他點,則不可能.

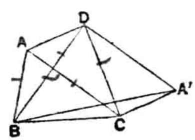
(3) 命 BC 之中點爲 A′, 聯結 A′G, 在其延線上取 GA, 令等於 2GA′, 則 AEC 卽所求三角形.成立之條件爲 G 不在 BC 上.

2161. 已知四邊形三邊中點之位置, 求第四邊中點之位置.

解 順次聯結四邊形各邊之中點,則得平行四邊形 [265 題], 故四邊形三邊之已知中點, 爲平行四邊形之三頂點, 因此其第四頂點,卽第四邊之中點,甚易求得之.

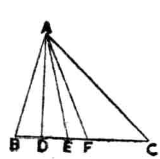
2162. 已知四邊形之一雙對邊, 二對角線及其夾角,求作本形.

解 設四邊形 ABCD 中, 已知 AD＝a, BC＝b, AC＝l, BD＝m, 及 AC, BD 之交角 α. 假定四邊形 ABCD 業已求得,過 D 平行於 AC 引 DA′, 令等於 AC, 聯結 BA′, CA′, 則 △BDA′ 中,已知 BD＝m, DA′＝l, $B\hat{D}A'＝\alpha$, 故 △BDA′ 可作得之. 又 AC, DA′ 平行且相等, 故 ACA′D 爲平行四邊形, 因而 A′C＝a, 故三角形 BA′C 之三邊爲已知, 故此三角形可作得之,由是卽可作得所求四邊形.解答或有二,或有一,或無之.



2163. 由定三角形之一頂點引 $n-1$ 條直線,將三角形 n 等分.

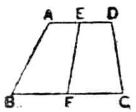
解 命所設三角形爲 ABC, 將底邊 BC n 等分於 $n-1$ 個點 D, E, F, ……, 聯結是等分點與頂點 A 之直線,即所求



直線，何則？n 個三角形 ABD, ADE, AEF, ……之底 BD, DE, EF, ……相等，且高同爲點 A 至邊 BC 之距離，故相等，因此是等 n 個三角形相等.

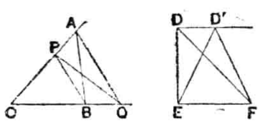
2164. 過梯形之一平行邊之中點，引一直線，將梯形二等分.

解 設梯形 ABCD 之底 AD 之中點爲 E，則聯結 E 及 BC 之中點 F 之直線，即所求直線，因兩梯形 ABFE, EFCD 之高相等，二底之和亦相等，從而兩梯形等積故也.



2165. 過所設角一邊上之定點，引一直線，令過所設角之二邊，而成與已知三角形等積之三角形.

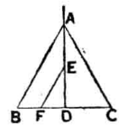
解 設定角 AOB 一邊上之定點爲 P，所設



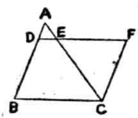
三角形爲 DEF. 過 D 平行於 EF 引直線 DD′，過 E 引 ED′，令與 EF 所成之角等於角 AOB，而交 DD′ 於 D′. 次，在 OA 上取 OA＝ED′，OB 上取 OB＝EF，過 A 平行於 PB 引 AQ，聯結 PQ，則 PQ 即所求直線. 何則？AQ ∥ PB，故 △AOB＝△POQ；又 DD′ ∥ EF，故 △DEF＝△D′EF. 然 △POB，△D′EF 中，二邊及其夾角，分別相等，故兩形全等，從而 △POQ＝△DEF.

2166. 已知底邊及頂角，求作二等邊三角形.

解 設 BC 爲所設底邊，α 爲所設頂角. 求 BC 之中點 D，過 D 引 BC 之垂線，在此垂線上取任意點 E，過 E 引直線 EF，令與 ED 所成之角等於 $\frac{1}{2}\alpha$，並令與 B 在 ED 之同側. 次，過 B 平行於 EF 引直線 BA，命其與 DE 之交點爲 A，則 ABC 即所求二等邊三角形.

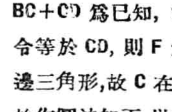


注意 以 BC 爲弦，在其上作弓形，令其所含之角等於所設頂角，則此弓形與 BC 之垂直二等分線之交點 A 亦爲所求頂點. 又在角 α 之二邊 AB, AC 上分別取 D, E，令 AD＝AE，在 DE 上取 DF＝BC，引 FC ∥ AB，即可決定 C 點.



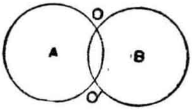
2167. 已知梯形之兩對角線及其夾角，與兩隣邊之和，求作本形.

解 假定所求梯形 ABCD 業已求得，過 D 平行於 AC 引 DE，令交 BC 之延線於 E. 於是 DE＝AC，因 AC, BD，角 BOC 爲已知，故 △BDE 爲已知. 次，因 BC＋CD 爲已知，故在 BC 之延線上取 CF 令等於 CD，則 F 爲定點. 而 CDF 爲二等邊三角形，故 C 在 DF 之垂直二等分線上. 故作圖法如下. 以兩對角線爲二邊，以 $\hat{BOC}$ 爲其夾角，作三角形 BDE，在 BE 上取 BF，令等於所設二隣邊 BC, CD 之和. 命 DF 之垂直二等分線 GC 與 BF 之交點爲 C，作平行四邊形 DECA，聯結 AB 即得. 成立之條件爲 C 內分 BE, BF.



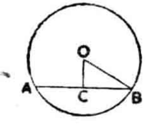
2168. 過所設二點作所設半徑之圓.

解 命所設二點爲 A, B, 所設半徑爲 m. 以 A, B 爲中心, m 爲半徑作二圓, 命其交點爲 O, O′, 則是等二點即所求圓之中心. 若圓 A, B 相交, 則有二解; 相切, 有一解; 不交不切, 無解.



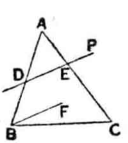
2169. 在所設圓內引一弦, 令其長等於中心至此弦之距離之二倍.

解 假定在所設圓 O 內, 已引得所求弦 AB. 由 O 至 AB 引垂線 OC, 則 $OC=\frac{1}{2}AB$, C 爲 AB 之中點, 故 OC = CB. 據此, 引任意半徑 OB, 以 OB 爲直徑作圓, 命 OB 之垂直二等分線與圓周之交點爲 C, 聯結 BC, 命其延線與圓周之交點爲 A, 則 AB 卽所求弦.



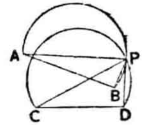
2170. 過定點引一直線, 截所設三角形之二邊, 令其二截點與第三邊之兩端在一圓周上.

解 設 P 爲定點, ABC 爲所設三角形, 試過 P 引與 AB, AC 相交之直線, 令其交點與 B, C 在一圓周上. 過 B 引直線 BF, 令其與邊 AB 所成之角等於 $A\hat{C}B$, 過 P 平行於 BF 引一直線, 則此直線卽所求直線. 何則? 命此直線與邊 AB, AC 之交點分別爲 D, E, 則 $A\hat{D}E = A\hat{B}F = A\hat{C}B$, 故四邊形 DBCE 得內接於圓.



2171. 求一點, 令所設二有限直線張於此點之角, 分別等於所設角.

解 命 AB, CD 爲所設二有限直線, 因 AB 張於所求點之角, 等於定角 α, 故所求點在 AB 爲弦, 含定角 α 之弓形弧上. 又因 CD 張於所求點之角, 等於定角 β, 故所求點又在 CD 爲弦, 含定角 β 之弓形弧上. 故此二弧之交點, 卽所求點.



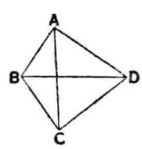
吟味 軌跡弓形弧, 得作於定直線之異側, 軌跡之交點, 即所求點, 故解答之數, 最多有八.

2172. 求一點, 令其對於所設二圓之視角, 分別等於所設角.

解 對於所設圓之視角爲一定之點, 其軌跡爲一同心圓周. 故可先求適合所設條件之二軌跡圓周, 於是此二圓周之交點卽所求點.

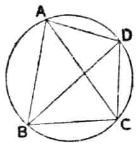
2173. 四邊形 ABCD 中, 已知 AB, BC, AC, BD, 及 $\hat{D}$, 求作本形.

解 三角形 ABC 之三邊爲已知, 故此三角形可作得之. 又角 D 爲已知, 故 D 在 AC 爲弦, 含角 D 而與 B 在異側之弓形弧上. 又 BD 爲已知長, 故 D 又在 B 爲中心, BD 爲半徑之圓周上. 故此弓形弧與圓周之交點卽 D, 由是卽可求得所求四邊形. 若有解答, 則通常有相異之二個.



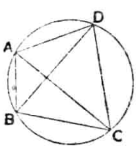
2174. 圓之內接四邊形中, 已知一角, 此角之一邊, 及二對角線, 求作本形.

解 設圓之內接四邊形 ABCD 中，已知角 A，邊 AB，及二對角線 AC，BD．三角形 ABD 中，邊 BD，AB，及角 A 爲已知，故此三角形可求得之[1668題]．次，因 $B\hat{C}D = 2\hat{R} - \hat{A}$，故又爲已知，卽 C 在 △ABD 之外接圓周上，且其所在之弧爲弧 BAD 之共軛弧．又 AC 爲所設長，故 C 在 A 爲中心，AC 爲半徑之圓周上．故求二軌跡之交點，卽得所求點．解答之數，最多爲四，或無解．



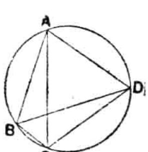
2175. 圓之內接四邊形 ABCD 中，已知 AB，BC，CA，及兩對角線之交角，求作本形．

解 三角形 ABC 之三邊爲已知，故此三角形可作得之，從而又可作得其外接圓，於是 D 在弧 ABC 之共軛弧上．又因 AC，BD 之交角爲已知，故可由 B 引直線 BD，令與 AC 所成之角，等於所設交角．BD 與圓周之交點，卽點 D．解答之數，或爲一，或爲二，或爲 0．



2176. 圓之內接四邊形 ABCD 中，已知外接圓之半徑 r，對角線 AC，BD，及二邊 AB，BC 之和或差，求作本形．

解 外接圓之半徑爲已知，故可作得外接圓．引等於 AC 之任意弦 AC，卽可求得弓形角 $A\hat{B}C$，卽 $\hat{B}$．於是三角形 ABC 中，已知底 AC，頂角 B，及他二邊之和或差，故此三角形可作得之[1768，1872 題]．又他對角線 BD 爲已知，故以 B 爲中心，BD 爲半徑作圓，而求其與弧 ADC 之交點，卽得第四頂點 D，從而可作得所求四邊形 ABCD．解答之數，或爲二，或爲一，或爲 0．



2177. 圓之內接四邊形 ABCD 中，已知 $\hat{A}$，$A\hat{B}D$，AC，及 BD，求作本形．

解 三角形 ABD 中，已知 BD，$A\hat{B}D$，$\hat{A}$，故此三角形可作得之[1670題]，從而得作其外接圓．C 在此圓周上，同時又在 A 爲中心，AC 爲半徑之圓周上，故 C 點可求得之．解答之數，或爲一，或爲二，或爲 0．

2178. 圓之內接四邊形 ABCD 中，已知邊 AB，BC，對角線 AC，及他二邊 AD，CD 之和或差，求作本形．

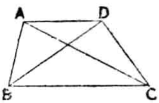
解 三角形 ABC 中，三邊爲已知，故此三角形可作得之，從而得作其外接圓．此時角 D 爲弧 ABC 所對之圓周角，故角 D 爲已知；因此三角形 DAC 中，邊 AC，角 ADC，及他二邊之和或差爲已知，故此三角形可作得之[1768，1872 題]．因此可得所求四邊形 ABCD．解答之數，通常有二．

2179. 圓之內接四邊形 ABCD 中，已知 $AB \pm BC$，DA，BD，及 $\hat{A}$，求作本形．

解 三角形 ADB 中，AD，BD，及 $\hat{A}$ 爲已知，故可作得之[1668題]，從而可知 AB 之長．又由 $AB \pm BC$ 可求得 BC 之長．次，作三角形 ABD 之外接圓，求弧 BAD 之共軛弧與 B 爲中心 BC 爲半徑之圓之交點，則此點卽第四頂點 C．故所四求邊形 ABCD 可作得之．

2180. 梯形中，已知二對角線，一角，及一平行邊，求作本形．

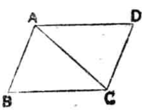
解 設梯形 ABCD 中,已知對角線 AC, BD, 角 B, 及一平行邊 BC. 於是三角形 ABC 中, 二邊 AC, BC, 及角 B 爲已知, 故此三角形可作得之 [1668題].



次, D 在過 A 平行於 BC 之直線 AD 上, 同時又在 B 爲中心, BD 爲半徑之圓周上. 故求得此平行線與圓周之交點, 卽可得所求梯形 ABCD. 解答之數,通常有二.

2181. 已知一對角線及一邊, 求作平行四邊形,令其一角爲他角之二倍.

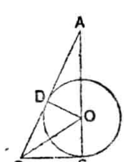
解 設平行四邊形 ABCD 中, 已知對角線 AC, 及邊 AB. 假定 $2A\hat{B}C = B\hat{C}D$, 則因 $A\hat{B}C + B\hat{C}D = 2\hat{R}$, 故 $A\hat{B}C = \frac{2}{3}\hat{R}$. 因此三角形 ABC 中, 邊 AB, AC, 角 B 爲已知, 故可作得之 [1668題], 故 D 亦可決定之.



注意 若 BD 爲已知, 則 $B\hat{C}D = \frac{4}{3}\hat{R}$, 故所求平行四邊形, 仍可仿前作得之.

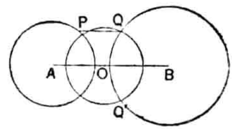
2182. 作一圓,令切直角三角形之斜邊, 過直角頂,且中心在一邊上.

解 設 ABC 爲直角三角形, $\hat{C} = \hat{R}$, 命角 B 之二等分線與對邊之交點爲 O, 以 O 爲中心, OC 爲半徑作圓,則此圓卽所求圓. 何則? 由 O 至 AB 引垂線 OD, 則 OC = OD, 故圓 O 過 D, 且因 OD ⊥ AB, 故又切 AB 於 D. 就 A 仿前作圖,則得他一解答.



2183. 試在二定圓間引一直線, 令平行於中心線, 且等於定線分.

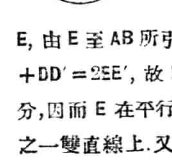
解 設二定圓之中心爲 A, B, 所設長爲 m. 假定所求直線 PQ 業已求得, 則 PQ ∥ AB, PQ $= m$, 又定線分 m 之一端在圓 A 之周上移動, 而 m 恆平行於 AB 時, 他端之軌跡爲圓周 O [1540題], 故 Q 在圓 O 之周上. 據此, 先求軌跡圓周 O 與定圓 B 之交點 Q, Q′, 引 PQ, P′Q′, 則此二線分卽所求線分.



注意 若 PQ 不平行於中心線, 而平行於他所設直線,作圖法仍同前.

2184. 過定點引一直線,令交所設圓,且其交點至一所設直線之距離和, 等於所設長.

解 設 AB 爲定直線, P 爲定點, O 爲所設圓之中心. 假定所求直線 PCD 業已引得, 命其與圓 O 之交點爲 C, D, 由 C, D 至 AB 所引之垂線爲 CC′, DD′, 弦 CD 之中點爲 E, 由 E 至 AB 所引之垂線爲 EE′. 此時 CC′ + DD′ = 2EE′, 故 EE′ 等於所設長 m 之半分, 因而 E 在平行於 AB, 且距 AB 爲 $m/2$ 之一雙直線上. 又因角 $O\hat{E}P = \hat{R}$, 故 E 又在 OP 爲直徑之圓周上. 據此, 先求此平行線與圓周之交點, 則聯結此點與 P 之直線, 卽所求直線.



吟味 假定線分 DD′, CC′ 中絕對値大者

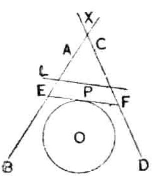
與 m 同號,與其在 AD′ 異側者與 m 異號,則令代數和 DD′+CC′ 爲 m 之解法,最多有四.

2185. 求一點,令由此點至二所設圓所引之切線,分別等於所設長.

解 由 1538 題,可知至定圓所引切線等於定長之點之軌跡,爲一同心圓.故所求點在分別與二定圓同心之二軌跡圓周上,故求其交點卽得.

2186. 試在所設圓周上求一點,令由此點至二所設直線之距離和爲最小.

解 設二定直線 AB, CD 相交於 X, 定圓之中心爲 O. 引直線 L, 令與 AB, CD 所成之角相等,平行於 L, 引圓 O 之切線 EF, 命其切點爲 P. 但 EF 爲二切線之近 AB, CD 之交點 X 者.於是 P 卽所求點.何則?命 E 爲 AB 與 EF 之交點,則 P 至二直線之距離和等於 E 至 CD 之距離.任取圓周上之他點,則其距離和皆較此距離大.此甚易證之.

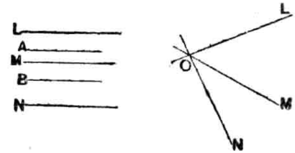


注意 1. 若類於 EF 之二種直線[互相垂直者]上皆無 P 點,卽 P 點在二者之延線上,則圓至少與一直線相交,故其交點中之近 X 者卽所求點.又平行於上述切線之他切線,其切點爲至二定直線之距離和最大之點.

注意 2. 若 AB ∥ CD, 則解法較易.但若圓在 AB, CD 之中間,而不與之交,則由圓周上之一切點至 AB, CD 之距離和一定,故問題爲不可能.

2187. 設三直線平行,或過同點,則不能作得切是等直線之圓.

證 (I) 設三平行直線爲 L, M, N. 切二平

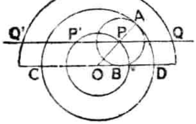


行線 L, M 之圓之中心,距此二直線等遠,故在距 L, M 等遠之點之軌跡上;卽切二平行線 L, M 之圓之中心,在平行於此二平行線,且介於其間之某直線 A 上.同理,切 M, N 之圓之中心,在平行於此二直線,且介於其間之某直線 B 上.故切 L, M, N 三直線之圓之中心,爲此二軌跡直線之交點.然 A, B 俱平行於所設三平行線,故不能交.且 A, B 不能相合,因設 M 在 L, N 之間,則 A, B 在 M 之異側故也.故切此三平行線之圓,不能作得之.

(II) 設三直線 L, M, N 公有一點 O. 切 L, M 之圓之中心,在二直線 L, M 之交角之一雙二等分線上,又切 M, N 之圓之中心,亦在 M, N 之交角之一雙二等分線上,故切三直線之圓之中心,爲此二雙直線之交點.然是等二等分線,公有一點 O, 故不更交於他點.又此二雙二等分線不能一致,因若二等分線一致,則因其角之一邊公有,從而他一邊亦必一致,而此與假設相反故也.又點 O 不能爲所求圓之中心,因點在所求圓當切之直線上,從而圓須縮小爲點故也.故切如是三直線之圓,不能作得之.

2188. 作定半徑之圓，令切定圓及其直徑或直徑之延線.

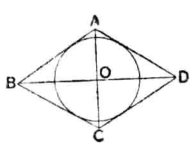
解 設定圓之中心爲 O，其半徑爲 R，所設半徑爲 r. 假定所求圓 P 業已作得，與圓 O 之切點爲 A，與直徑 CD 之切點爲 B. 此時 PB 爲 CD 之垂線，且等於 r，故 P 在距 CD 爲 r 之點之軌跡上，卽平行於 CD 之一雙直線 PP′，SS′ 上 [1506 題]. 又因 OA＝R，PA＝r，故 OP＝R±r，故 P 在 O 爲中心，R＋r 或 R～r 爲半徑之圓周上. 故所求圓之中心，爲此二組軌跡之交點.



吟味 若 R＜r，則直線 PP′ 與 O 之距離 r 大於 r－R，故直線 PP′ 與圓周 r－R 不交，從而無二圓內切之解. 而 PP′ 與圓周 R＋r 之交點有二，故有四解. 非然，則通常有八解.

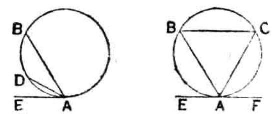
2189. 作所設菱形之內切圓.

解 設 ABCD 爲菱形，O 爲對角線之交點. 若對角線將其所過之角二等分 [252 題]，故 O 距四邊等遠. 故以 O 爲中心，作切一邊之圓，則此圓卽所求內切圓.



2190. 試證：依下法，可不求圓之中心，而由圓周上之定點 A 引圓之切線. (1) 由定點引任意弦 AB，命弧 AB 之中點爲 D，引直線 AE，令角 DAE 等於角 BAD. (2) 由定點 A 引任意等弦 AB，AC，由 A 引弦 BC 之平行線.

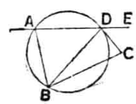
證 (1) 因 AD＝BD，故 $D\hat{A}B＝D\hat{B}A$. 然 $D\hat{A}B＝D\hat{A}E$，故 $D\hat{A}E＝D\hat{B}A$，因而 AE 切圓 [559 題].



(2) 因 AB＝AC，故 $A\hat{B}C＝A\hat{C}B$，又 BC ∥ EF，故 $A\hat{B}C＝B\hat{A}E$，故 $B\hat{A}E＝A\hat{C}B$，故 EF 切圓 [559 題].

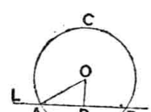
2191. 有三定點 A，B，C，及過點 A 之一定直線. 試過 A，B 作一圓，令交定直線於 D，而 DC 爲圓之切線.

解 假定所求圓業已作得，則因 DC 爲圓之切線，故 $B\hat{D}C＝B\hat{A}D$，因而 D 在 BC 爲弦，含定角 $B\hat{A}D$ 之弓形弧上，故此弧與定直線 AD 之交點 D 可求得之. 故先求弓形 BDC 與直線 AD 之交點 D，而後過 A，B，D 作圓卽得. 有時因點 C 之位置，而弓形角 BDC 變爲上述角之補角，但解法之着眼點，仍與前同.



2192. 以所設點爲中心作一圓，令爲所設直線所截弓形之角等於已知角.

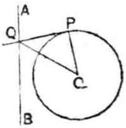
解 設 O 爲定點，L 爲定直線，α 爲已知角. 由 O 至 L 引垂線 OD，引直線 OA，令與 OD 所成之角等於 α，命 OA 與 L 之交點爲 A. 以 O 爲中心，OA 爲半徑作圓 ACB，則此圓卽所求圓. 何則？命圓與直線 L 之



他交點爲 B, 則弓形 ACB 所含之角爲 $A\hat{O}B$ 之半分,即 $A\hat{O}D$, 從而等於 α.

2193. 引所設圓之切線, 令其與一定直線之交點至切點之距離等於定長.

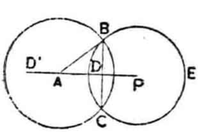
解 命定圓之中心爲 O, 半徑爲 r, 所設長爲 m. 假定所求切線 PQ 業已引得,命切點爲 P, 與定直線 AB 之交點爲 Q. 聯結 OP, OQ, 則直角三角形 OPQ 中, $OP=r$, $PQ=m$,故 OQ 爲定長. 因此 Q 在以此定長爲半徑之同心圓周上, 同時又在直線 AB 上. 據此, 在圓 O 之周上取任意點 P′, 引切線 P′Q′, 令 $P'Q'=m$. 以 O 爲中心, OQ′ 爲半徑作圓, 命其與 AB 之交點爲 Q, R, 則由 Q, R 所引圓之切線,即所求切線.

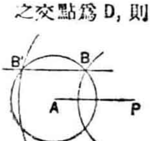


吟味 本題通常有四解. 然 OQ 若等於由 O 至 AB 之距離,或小於此距離,則有二解,或無解. 又若 AB 切圓 O, 則僅有二解.

2194. 試以所設圓外之一所設點爲中心作圓,令由所設圓所截得之弦等於所設長.

解 設定圓之中心爲 A, 形外之定點爲 P, 假定所求圓 BCE 業已求得, 命 AP 與公弦 BC 之交點爲 D, 則 D 爲 BC 之中點;而 BC 等於定長 m, 故 BD 亦一定. 故在 AP 之一側,平行於 AP 引一直線,令距 AP 爲 $\frac{1}{2}$BC, 且交圓 A 於 B, B′.





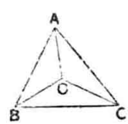
以 P 爲中心, PB, PB′ 爲半徑作圓, 則此二圓即所求圓. 解答數最多爲二, 有時不可能.

2195. 作切平行線且過所設點之圓.

解 本題係 2040 題中定直線平行之特款. 切定直線之圓,其中心之軌跡,乃過此二直線公垂線之中點, 且平行於此二直線之直線. 又圓之半徑爲此二直線距離之半分,故一定. 因此以定點爲中心,平行線距離爲直徑作圓, 求其與中心軌跡直線之交點, 則此點即所求中心. 若所設點在二平行線之外側,則不可能.

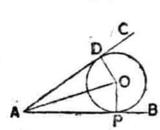
2196. 求對於三角形三邊之視角相等之點.又有不可能之時否?

解 設 ABC 爲所設三角形, O 爲所求點. 此時 O 非在 △ABC 內不可, 因若在外部, 則必有一角, 爲他二角之和, 而不能相等也. 又因 $A\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}A=4\hat{R}$, 故 $A\hat{O}B=\frac{4}{3}\hat{R}$. 據此, 以各邊爲弦, 在三角形內作弓形, 令其所含之角等於 $\frac{4}{3}\hat{R}$, 即正三角形之一外角, 則是等弓形弧之交點,即所求點. 若某邊之對角頂,在以此邊爲弦之弓形內, 則無所求之解, 此可由上文明之.



2197. 作一圓,令切一所設直線,且切他所設直線於所設點.

解 命所設二相交直線爲 AB, AC, 直線 AB 上之定點爲 P, 假定適合條件之圓業已作得;命其中心爲 O, 與 AC 之切點爲 D. 此



時 O 距 AB, AC 等遠, 故 O 在此二直線所成角之二等分線 AO, AO′ 之任一上. 又圓切直線 AB 於 P, 故其中心 O 在過 P 垂直於 AB 之直線 OP 上. 據此, 先作 AB, AC 交角之一雙二等分線, 過 P 引 AB 之垂線, 命其與二等分線之交點爲 O, O′, 以 O, O′ 爲中心, 作過 P 之圓, 則此圓卽所求圓.

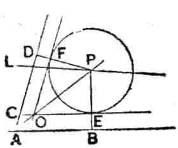
注意 本題通常有二解. 若所設二直線平行, 則距此二直線等遠之點之軌跡, 爲唯一直線, 從而解亦唯一.

2198. 作所設三角形之外接三角形, 令與他所設三角形等角.

解 本題爲 1905 題之普徧者, 凡過 R 之倍弦皆可爲所求三角形之一邊, 故有無數解.

2199. 作一圓, 令其中心在所設直線上, 圓周至他二所設直線之距離, 分別等於所設長.

解 假定所求圓 P 業已求得, 其中心 P 在定直線 L 上, 圓周至二定直線 AB, CD 之距離, 分別等於定長 m, n. 由 P 至 AB, CD 分別引垂線 PB, PD,

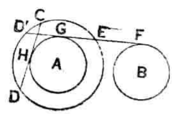


命其與圓周之交點分別爲 E, F. 過 E, F 分別平行於 AB, CD 引直線 OE, OF, 則 EB $=m$, FD $=n$, PE $\perp$ OE. PF $\perp$ OF. 據此, 求距 AB, CD 分別爲 m, n 之點之軌跡, 卽二雙平行直線, 由此二雙平行直線, 分別取出一者, 作切於此二者, 且中心在所設直線 L 上之圓, 則此圓卽所求圓.

吟味 由二雙平行直線, 分別取其一者而得之組合有四, 而切於二定直線, 中心在一定直線上之圓有二, 故本題之解, 通常有八.

2200. 試引一直線, 令切一已知圓, 交他已知圓, 而爲第二已知圓所截得之弦, 等於已知長.

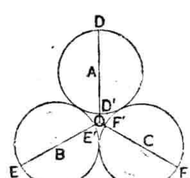
解 命 A, B 爲所設圓, m 爲已知長. 在圓 A 中, 引等於已知長 m 之弦 CD, 作切 CD 之同心圓 GH, 引二圓 GH, B 之公切線 D′EF, 則 D′EF 卽所求直線. 何則? 設 D′E 爲弦, 則因 D′E 切圓 GH, 故 D′E $=$ CD $=m$, 且 D′EF 切圓 B 故也.



吟味 若 m 大於圓 A 之直徑, 則弦 CD 不能引得, 故無解. 次, 若 m 不大於圓之直徑, 則因兩圓 GH, B 之公切線通常有四, 故通常有四解.

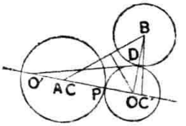
2201. 有互相外切之三等圓, 試作切此三等圓之圓.

解 設 A, B, C 爲互相外切之三等圓之中心, O 爲三角形 ABC 之外心, 過 O 引各圓之直徑 DD′, EE′, FF′, 於是以 O 爲中心, OD 或 OD′ 爲半徑之圓皆爲所求圓. 何則? 因 O 爲三角形 ABC 之外心, 故 OA $=$ OB $=$ OC, 從而各加等半徑, 則得 OD $=$ OE $=$ OF, 又各減以等半徑, 則得 OD′ $=$ OE′ $=$ OF′, 故此二圓皆切三定圓.



2202. 作一圓,令切一所設圓,並切他所設圓於所設點.

解 設 A, B 爲所設圓之中心, P 爲圓 A 周上之定點.聯結 AP, 在 AP 上就 P 之異側取 PC, PC′, 令各等於圓 B 之半徑, 命 BC, BC′ 之垂直二等分線與 AP 之交點爲 O, O′. 於是以 O, O′ 爲中心, OP, O′P 爲半徑分別所作之圓, 卽所求圓.



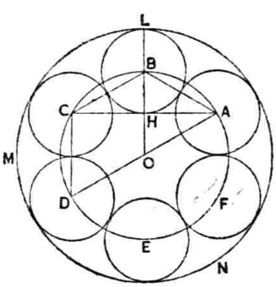
何則? 命 OB 與圓 B 之交點爲 D, 則 OB =OC, BD=PC, 故 OP=OD, 因而圓 O 切二定圓.仿此得證,圓 O′ 亦切二定圓.

2203. 試在定正方形內作四等圓, 令各外切他二圓,且切正方形之一邊於其中點.

解 由 1423 題,所求圓甚易作得之.

2204. 作內切定圓之六等圓, 令各外切他二圓.

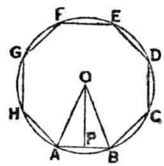
解 設定圓爲 LMN, 所求六圓爲 A, B, C,



D, E, F. 順次聯結 ABCDEF, 則成正六角形, 此形與原圓公有中心 O, 故 AOB 爲正三角形,從而可知原圓之半徑爲內切圓半徑之三倍,因此得作圖法如下. 將圓 LMN 之任意半徑 OL 三等分, 命此分點中離圓心遠者爲 B, 以 OB 爲半徑,作圓 ABCDEF, 作此圓之內接正六角形 ABCDEF, 以其各頂點爲中心,等於 BL 之長爲半徑,順次作六圓卽得. [參照 1427 題].

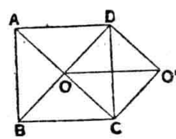
2205. 試在所設有限直線上作正八角形.

解 命 AB 爲所設有限直線. 以 AB 爲弦, 作含 $\frac{1}{4}\hat{R}$ 之弓形,由 B 起在此圓周上順次取等於 AB 之弦 BC, CD, DE, ……,則 ABCDEFGH 卽所求正八角形,此甚易明之.



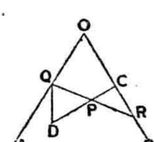
2206. 作正方形, 令其面積等於定正方形面積之半分.

解 以定正方形 ABCD 之二頂點 C, D 爲中心,各作過對角線交點 O 之圓, 求其第二交點 O′, 則正方形 DOCO′ 卽所求正方形. 證明從略.



2207. 過定點引一直線, 截所設角之二邊,令所引直線爲此點所分二線分所包之矩形,等於所設正方形.

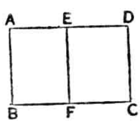
解 設 AOB 爲所設角, P 爲此角內之定點. 假定所求直線 QPR 業已求得.由 P 至邊 OB 引垂線 PC, 在 PC 之延線上取 PD, 令 PC×PD =PQ×PR$=m^2$ [m 爲已知正方形之邊]. 於是 Q, D, R, C 在一圓



周上,故 $D\hat{Q}R=D\hat{C}R=\hat{R}$, 故 Q 在 DP 爲直徑之圓周上.據此,由 P 至 OB 引垂線 PC, 在 CP 之延線上取 D 點, 令 $PC\cdot PD=m^2$, 以 DP 爲直徑作圓周, 命其與邊 OA 之交點爲 Q, Q′, 聯結 QP, Q′P, 則此二直線皆爲所求直線.

注意 若 P 在角外,所求直線亦可仿此作得之,惟 D 點當在 PC 或其延線上定之.

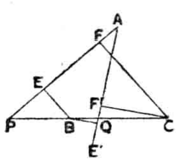
2208. 平行於矩形 ABCD 之邊 AB 引一直線, 命其與邊 AD, BC 之交點分別爲 E, F, 令矩形 ABFE 與原矩形相似.



解 取 AE, 令 AD:AB=AB:AE, 過 E 平行於 AB 引 EF, 則 EF 卽所求直線, 此甚易明之,故證從略.

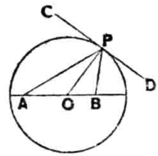
2209. 有不在一直線上之三定點, 試過其一點引一直線, 令他二點至此直線之距離有所設比 $m:n$.

解 設 A, B, C 爲三定點,命按比 $m:n$ 外分及內分有限直線 BC 之點爲 P, Q, 聯結 AP, AQ, 則此二直線卽所求直線.何則?由 B, C 至 PA 引垂線 BE, CF, 則 BE ∥ CF, 故 BE:CF=PB:PC=$m:n$. 關於 AQ 亦然. 又 BC 代以 CA 或 AB, 則分別得過 B 或 C 之他所求直線.



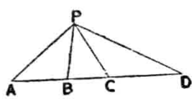
2210. 有一圓形之彈子臺, 其同直徑上有二球, 今欲擊其一, 令由圓周反射至他球, 則當依何方向擊之.

解 設圓 O 直徑上之二球位置爲 A, B, 球觸於圓周之點爲 P, 則 AP, BP 與過 P 之切線 CD 所成之角相等, 從而與過 P 之半徑 OP 所成之角亦相等, 故 AP:BP=AO:OB=定比,故 P 又在至 A, B 之距離有定比 AO:OB 之點之軌跡圓周 [1603題] 上. 故求此圓周與定圓周之交點,而將球依由 A 至此點之方向擊出,卽可反射至他球.



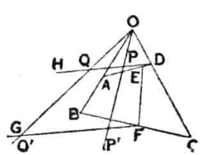
2211. 設 AB, BC, CD 爲一直線上之三線分,求對於此三線分之視角相等之點.

解 設適合條件之點爲 P, 則 $A\hat{P}B=B\hat{P}C$, 故 AP:PC=AB:BC=定比, 故 P 在距 A, C 有定比 AB:BC 之點之軌跡圓周上 [1603 題]. 又因 $B\hat{P}C=C\hat{P}D$, 故同理, P 在距 B, D 有定比 BC:CD 之點之軌跡圓周上.故所求點爲此二軌跡之交點.



2212. 求一點, 令其至定四邊形二對邊之距離和,等於所設長 l, 至他二對邊之距離比,等於所設比 $m:n$.

解 設 ABCD 爲定四邊形,則至 AD, BC 之距離和等於 l 之點, 在矩形 EFGH 之邊或 AD, BC 之平面上 [1529, 1531題], 又至 AB, CD 之距離比等於 $m:n$ 之點, 在一雙直線之任一直線上 [1601, 1602題]. 故所求點爲此二軌跡之交點.

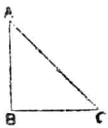


2213. 作一圓,令直交三所設圓.

解 所求圓之中心爲三圓之根軸心.但此點須在圓外,始能適合條件.

2214. 作一多角形,令與定多角形相似,但面積爲其二倍.

解 引 BC,令等於所設多角形之任意一邊,過 B 垂直於 BC 引 BA,令等於 BC.於是在 AC 上作定多角形之相似多角形,令 AC,BC 爲對應邊,則所作多角形即所求多角形.何則?命定多角形之面積爲 S,所求多角形之面積爲 S′,則 $S':S=\overline{AC}^2:\overline{BC}^2$ [1142 題].然 $\overline{AC}^2=2\overline{BC}^2$,故 $S':S=2\overline{BC}^2:\overline{BC}^2=2:1$,故 $S'=2S$.



注意 1. 面積不限於二倍,無論幾倍,皆可作得之.

注意 2. 參照 1167 題.

2215. 引二直線,令有二所設比之複比.

解 設二比爲 $l:m$,$n:p$ [但 l, m, n, p 爲所設長].求適合比例式 $n:p=m:q$ 之第四比例項 q 之長,則 $(l:m)(n:p)=(l:m)\times(m:q)=l:q$,故 l, q 或有比 $l:q$ 之二直線,皆爲所求直線.

2216. 內接於所設三角形,作他所設三角形之最大相似三角形.

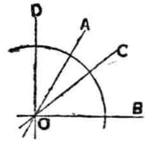
解 由 2270 題(4),甚易作得之.

2217. 作半圓之內接正方形.

解 半圓爲扇形之特款,故可仿 2103 題作得之.

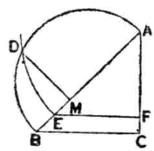
2218. 求一點,令距所設角之頂點等於所設長,且距其二邊有所設比.

解 命 AOB 爲所設角.距此角之二邊有所設比之點之軌跡,爲過 O 之一組直線 [1602 題],故所求點在此直線上.又距 O 爲定遠之點,在 O 爲中心,定長爲半徑之圓周上.故此二軌跡之交點爲所求點.



2219. 平行於三角形之底,引一直線,令其所截得之三角形與原三角形之比,等於底與一邊之比.

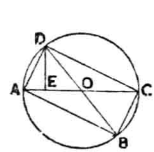
解 在 AB 上取 AM=BC,垂直於 BA 引 MD,令交 AB 爲直徑之圓周於 D.次,以 A 爲中心,AD 爲半徑作圓,命其與 AB 之交點爲 E.過 E 平行於 BC 引直線 EF,則 EF 即所求直線.何則?



$\triangle AEF:\triangle ABC=\overline{AE}^2:\overline{AB}^2=\overline{AD}^2:\overline{AB}^2=AM\cdot AB:\overline{AB}^2=AM:AB=BC:AB.$

2220. 內接於定圓作一矩形,令其面積等於定正方形之面積.

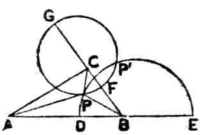
解 設矩形 ABCD 內接於定圓,且其面積等於所設正方形之面積 m^2.引對角線 AC,則因 $A\hat{D}C=\hat{R}$,故 AC 爲定圓之直徑.由 D 至 AC 引垂線 DE,則 $DE\cdot AC=2\triangle ADC=\square ABCD=m^2$;其中 AC 爲一定,故 DE 之長可求得之.故作圖法如下.引任意直徑 AC,求適合比例式 $AC:m=m:DE$ 之 DE 之長,引平行於 AC,距 AC



爲 DE 之直線以決定 D, 作過 D 之直徑 DB 以決定 B, 依次聯結 ABCD 即得.

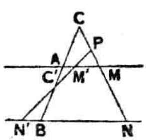
2221. 設 A, B, C 爲三角形之頂點,求 P 點,令 PA:PB:PC$=m:n:p$. 但 m, n, p 爲所設線分.

解 設 P 爲所求點, 則 PA:PB$=m:n$, 故 P 在距 A, B 有所設比 $m:n$ 之點之軌跡圓周上. 又因 PB:PC$=n:p$, 故 P 又在距 B, C 有所設比 $n:p$ 之點之軌跡圓周上. 故所求點爲此二軌跡圓周之交點, P, P′。



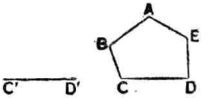
2222. 設 A, B 分別爲所設二平行線上之定點,試過他定點 P, 引一直線, 截上述二平行線於 M, N, 令 AM, BN 有所設比.

解 假定所求直線 PMN 業已引得,命 BA, NM 之交點爲 C,則因 AM ∥ BN, 故 AC : BC = AM : BN $=m:n$ [定比]. 故先按比 $m:n$ 外分及內分 AB 於 C, C′, 聯結 PC 或 PC′, 即得所求直線.



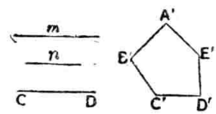
2223. 作所設三角形之相似多角形, 令有所設周.

解 命所設多角形爲 ABCDE,所設周爲 p. 命多角形 ABCDE 之周爲 P, 求適合比例式 P:p=CD:C′D′ 之直線 C′D′ [2005 題], 在 C′D′ 上作多角形 ABCDE 之相似多角形 A′B′C′D′E′, 令 C′D′ 對應於 CD [2007 題], 則 A′B′C′D′E′ 即所求三角形. 何則? 因兩多角形相似, 故設所作多角形之周爲 p', 則 P:p'=CD:C′D′=P:p [1078 題], 故 $p=p'$.



2224. 作一多角形, 令與一定多角形等積,他定多角形相似.

解 設定多角形爲 P 及 A′B′C′D′E′, 求作與 P 等積, 與 A′B′C′D′E′ 相似之多角形. 作分別與 P 及 A′B′C′D′E′ 等積之正方形,命其一邊爲 m, n. 求適合 $m:n$=CD:C′D′ 之長 CD, 在 CD 上作多角形 ABCDE, 令與多角形 A′B′C′D′E′ 相似, 且 CD, C′D′ 相對應, 則 ABCDE 即所求多角形. 何則? P:A′B′C′D′E′ $=m^2:n^2$, 又 ABCDE : A′B′C′D′E′ $=\overline{CD}^2 : \overline{C'D'}^2$; 而 $m:n$ = CD : C′D′, 故 P:A′B′C′D′E′=ABCDE:A′B′C′D′E′, 從而 P=ABCDE.



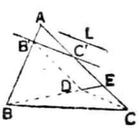
2225. 三角形中, 已知面積, 內切圓半徑, 及一傍切圓半徑,或已知面積, 及二傍切圓半徑,求作本形.

解 (1)命所設面積爲 S, 內切圓半徑爲 r, 傍切圓半徑爲 r'. 假定所求三角形 ABC 業已求得 [1401 題], 且 r' 爲半徑之傍切圓切邊 BC. 於是由式 sr=S [1401 題] 可得 s, 即圓周之半分. 次,由式 $(s-a)r'$=S 可得 $s-a$, 即 AF. 據此,引直線 AP$=s$, 在其上取 AF$=s-a$. 過 F, P 引 AP 之二垂線 FO, PO′, 令分別等於 r, r', 以 O, O′ 爲中心, r, r' 爲半徑作圓,由 A 至圓 O 引切線 AC, 引二圓之內公切線 BC, 命其與 AP, AC 之交點爲 B, C, 則 ABC 卽所求三角形.

(2) 由 729 題及其圖, $D'D''=CD''+CD'=s-a+s-b$. 然由 1401 題, $r'(s-a)=S=r''(s-b)$, 故 $s-a$, $s-b$ 可求得之. 故作圖法如下. 求 $s-a(S/r')$, $s-b(S/r'')$. 次,引相當於 $D'D''$, 卽 $CD''+CD'$ 之線分, 在此線分之異側,作切此線分於 D', D'' 之圓 r', r'', 引此二圓之他內公切線及一外公切線卽得.

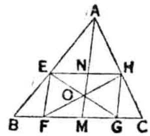
2226. 平行於定直線引一直線, 截所設三角形 ABC 之二邊 AB, AC 於 B', C', 令 BB', CC' 相等.

解 命所設直線爲 L, 假定所求橫截線 $B'C'$ 業已引得. 平行於 $B'C'$, 卽平行於 L, 引 CD; 又平行於 AC 引 $B'D$, 令交 CD 於 D, 則 $B'C'CD$ 爲平行四邊形, 故 $CC'=B'D$, 從而 $B'B=B'D$. 聯結 BD, 命其延線與 AC 之交點爲 E, 則 $B'\hat{B}D=B'\hat{D}B=A\hat{E}B$, 故 $AB=AE$. 因此, 得作圖法如下. 在 AC 上取 AE, 令等於 AB, 由 C 平行於 L 引 CD, 命其與 BE 之交點爲 D. 次,平行於 AC 引 DB', 命其與 AB 之交點爲 B', 由 B' 平行於 L 引 $B'C'$, 則 $B'C'$ 卽所求橫截線.



2227. 作已知三角形之內接平行四邊形,令其兩對角線之交點爲形內之已知點.

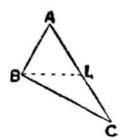
圖 設三角形 ABC 內之已知點爲 O, 求作三角形 ABC 之內接平行四邊形, 令其對角線之交點爲 O. 假定所求平行四邊形 EFGH 業已求得,邊 FG 在 BC 上.聯結 AO, 延長之, 令交邊 FG, EH 於 M, N, 則 OM=ON [270題], 故得作圖法如下.聯結 AO, 命其延線與 BC 之交點爲 M, 在 OA 上取 N, 令 ON=OM, 過 N 平行於 BC 引一直線,命其與 AB, AC 之交點分別爲 E, H, 聯結 EO, HO, 延長之,令分別交 BC 於 G, F, 則 EFGH 卽所求平行四邊形.



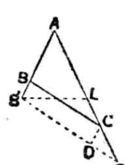
附註 聯結 BO 及 CO, 仿前行之, 則得他解. 若點 O 在 △ABC 之中點三角形外,則平行四邊形之各頂點,俱移至 △ABC 各邊之延線上.

2228. 作三角形,令其頂角等於所設角,一邊等於所設有限直線,且一底角等於他底角之三倍.

解 (1) 已知頂角 A, 一邊 AB, $\hat{B}=3\hat{C}$, 求作 △ABC. 作等於 $\hat{A}$ 之角 BAL, 令 AB 等於一所設邊, 在 AL 上取 AL=AB, LC=BL; 聯結 BC, 則 ABC 卽所求三角形.何則? $A\hat{B}C=A\hat{B}L+L\hat{B}C=A\hat{L}B+\hat{C}=2\hat{C}+\hat{C}=3\hat{C}$, 故 △ABC 卽所求三角形.



(2) 已知頂角 A, 一邊 AC, 且 $\hat{B}=3\hat{C}$, 求作三角形 ABC. 引任意長之直線 AB', 仿 (1) 得作 $\triangle AB'C'$, 在 AC' 或其延線上取 AC, 令等於所設長, 過 C 平行於 $B'C'$, 引 BC, 令交 AB 或其延線於 B,

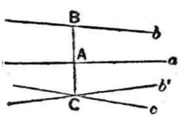


則 ABC 即所求三角形,其理甚易明之.

(3)　已知邊 AC, 代以底邊 BC 時. 仿前作三角形 $AB'C'$, 在 $B'C'$ 或其延線上取 $B'D$, 令等於所設底邊 BC, 平行於 AB' 引 CD, 命其與 AC' 或其延線之交點為 C, 過 C 平行於 $C'B'$ 引 CB, 則 ABC 即所求三角形, 此甚易明之.

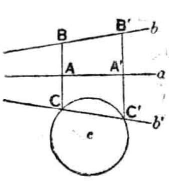
2229.　引一直線, 令直交一定直線於 A, 且交他二定直線 [或一直線與一圓, 或二圓] 於 B, C, 而 A 為 BC 之中點.

解　(1) 設三定直線為 a, b, c, 求作截此三直線於 A, B, C 之直線 BAC, 令垂直於 a, 且 A 為 BC 之中點. 引直線 b 關於 a 之對稱直線 b', 令截直線 c 於 C, 由 C 引 a 之垂線 CA, 命其延線與 b 之交點為 B, 則 BAC 即所求直線,其證甚易.



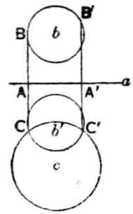
吟味　若 b 及 c 皆平行於 a, 則 b' 或合於 c, 或不交 c. 若相合,則由直線 c 上之任意點至 a 所引之垂線, 皆適合條件, 故解無數. 若 b' 不與 c 交,則無解.

(2)　若(1)中之 c 為圓,可由直線 b' 與圓 c 之交點 C, C′ 至 a 引垂線,命其分別與 a, b 之交點為 A, B; A′, B′. 則 BAC, B′A′C′ 皆為所求直線, 此甚易證之.



吟味　若 b' 與圓 c 交, 則有二解; 相切, 有一解; 不交不切, 無解.

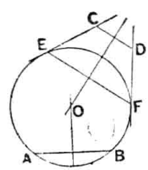
(3)　若 (2) 中之 b 為圓,則 b' 亦為圓, 由此圓與圓 c 之交點 C, C′ 至 a 引垂線交直線 a 於 A, A′, 交圓 b 於 B, B′ [與 C, C′ 對應者], 則 BAC, B′A′C′ 即所求直線. 此甚易證之.



吟味　圓 b', c 相交, 則有二解; 相切, 一解; 相合, 則由圓 c 周上之任意點至 a 所引之垂線, 皆適合條件, 故有無數解; 若 b', c 全不相交, 則無解.

2230.　過二定點作一圓, 令由他二定點至此圓所引切線之長相等.

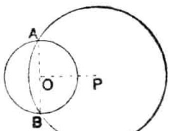
解　設二定點為 A, B, 他二定點為 C, D, 求過 A, B 作一圓, 令由 C, D 至此圓所引之切線等長. 假定所求圓 O 業已作得, 由 C, D 至圓 O 所引之切線分別為 CE, DF, 聯結 EF, 則 $CE = DF$, $\hat{CEF} = \hat{DFE}$, 故聯結 CD, 則 CDFE 為二等邊梯形. 因此中心 O 在 EF 之垂直二等分線上, 從而又在 CD 之垂直二等分線上; 同時 O 又在 AB 之垂直二等分線上. 故作圖法如下. 聯結 AB, 引 AB 之垂直二等分線; 又聯結 CD, 引 CD 之垂直二等分線; 命此二垂直二等分線之交點為 O, 以 O 為中心, OA 或 OB 為半徑作圓, 則此圓即所求圓.



吟味　若 C, D 在 O 為中心, OA 為半徑之圓內, 則無解. 又若 AB 之垂直二等分線與 CD 之垂直二等分線相平行, 則無解; 若一致, 則在此直線上取 O, 令 $OA<OC$, 於是凡中心 O, 半徑 OA 之圓, 皆適合條件, 故解無數.

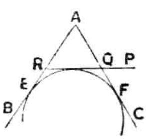
2231. 以所設點爲中心作一圓，令二等分所設圓周.

解 命所設點爲 P，所設圓之中心爲 O，假定以 P 爲中心，二等分圓 O 之圓業已作得，命其與 O 之交點爲 A，B，則 AB 爲圓 O 之直徑，又公弦 AB 垂直於中心線 OP. 由是得作圖法如下. 作垂直於 OP 之直徑 AB，以 P 爲中心，PA 爲半徑作圓，則此圓卽適合所設條件之圓. 若 P 與 O 合，則因同心圓周，不能僅公有二點，故無解.



2232. 過定點引一直線，截定角之二邊，令由是所生三角形之周，等於所設長.

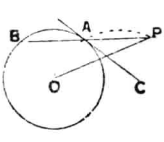
解 設定點爲 P，定角爲 BAC，所設長爲 m，求過 P 引截 $B\hat{A}C$ 之直線，令所得三角形之周等於 m. 在邊 AB，AC 上取 $AE=AF=\frac{1}{2}m$，作切邊 AB，AC 於 E，F 之圓，由 P 引此圓劣弧 EF 之切線 PQR，則 PQR 卽所求直線. 何則？命 PQR 與邊 AB，AC 之交點分別爲 R，Q，則 $\triangle AQR$ 之周，爲 AE 或 AF 之二倍，卽等於 m [557題].



吟味 若點 P 移至圖形 BEFC 內，則無解.

2233. 過所設點引直線，截所設圓周，令直線與圓周之交角，等於所設角.

解 命所設圓爲 O，在其外之所設點爲 P，所設角爲 α；求過 P 引圓 O 之割線，令此線與圓周之交角等於 α. 以 OP 爲弦，$\hat{R}+\alpha$ [設 $\alpha<\hat{R}$] 爲弓形角作弓形，命其與圓 O 之周之交點爲 A，則聯結 PA 之直線，卽所求直線. 何則？引 A 上之切線 AC，令 C 與 O 在 PA 之同側，則 $O\hat{A}C=\hat{R}$，$O\hat{A}P=\hat{R}+\alpha$，故 $P\hat{A}C=\alpha$.

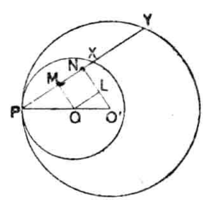


吟味 弓形 OAP 得作於 OP 之兩側，故本題恆有二解.

注意 若點 P 在圓 O 內，則以 OP 爲弦，$\hat{R}-\alpha$ 爲弓形角作弓形，亦可仿前作得所求直線. 又若 α 爲鈍角，則可取其補角，而行同樣之作圖. 若 α 爲直角，則聯結 PO 卽得.

2234. 設兩圓互相內切於 P，試引直線 PXY，令交二圓於 X，Y，而 XY 等於所設線分.

解 設二圓爲 O，O′，直線 PXY 業已求得，點 X，Y 分別在圓 O，O′ 之周上. 聯結 OO′，則其延線過 P，由 O，O′ 至 PXY 引垂線 OM，O′N，由 O 至 O′N 引垂線 OL.



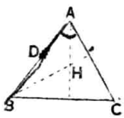
於是 $PM=\frac{1}{2}PX$，$PN=\frac{1}{2}PY$，$MN=OL$，故 $MN=\frac{1}{2}(PX\sim PY)=\frac{1}{2}XY=OL$，故得作圖法如下. 以 OO′ 爲直徑作圓，又以 O 爲中心，所設線分之半分爲半徑作圓，命其截前圓之點爲 L，L′，則 OL，OL′ 之平行線 PXY，PX′Y′ 卽所求直線.

吟味 所設線分之半分若小於 OO′，則因可求得 L，L′，故有二解；若等於 OO′，則有一解；所求直線與 OO′ 相合，若大於 OO′，

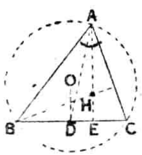
則無解。

2235. 已知三角形之一角頂, 一邊之中點, 及垂心之位置, 求作本形.

解 (1)設已知 △ABC 之角頂 A, 邊 AB 之中點 D, 及垂心 H 之位置, 求作本形. 聯結 AD, 在其延線上取 DB, 命等於 AD; 由 A, B 分別至 BH, AH 引垂線, 命其交點爲 C, 則 ABC 卽所求三角形, 其理甚易明之.



(2) 設已知 △ABC 之角頂 A, 邊 BC 之中點 D, 及垂心 H 之位置, 求作本形. 由 D 至 AH 引垂線 DE, 過 D 引 DE 之垂線 OD [若 H 在 A 與 DE 之間, 則令 O 與 A 在 BC 之同側; 若 H 與 DE 在 A 之異側, 則令 O 與 A 在 BC 之異側], 令 $OD=\frac{1}{2}AH$, 以 O 爲中心, OA 爲半徑作圓, 命其與 DE 雙方延線之交點爲 B, C, 則 ABC 卽所求三角形. 何則, 因 $OD\perp BC$, 從而 D 爲 BC 之中點, 又 $AE\perp BC$, $OD=\frac{1}{2}AH$, 從而 H 爲 △ABC 之垂心故也 [509題].



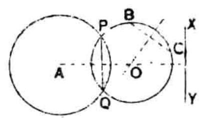
2236. 作一圓, 令切所設圓, 中心在所設直線上, 且過此直線上之一所設點.

解 命所設圓之中心爲 A, 所設直線 XY 上之定點爲 P, 作中心在 XY 上, 過 P, 且切圓 A 之圓. 在 XY 上取 PC $=PC'=$(圓 A 之半徑), 引 AC 之垂直二等分線, 命其與 XY 之交點爲 O, 作中心 O, 半徑 OP 之圓 則此圓卽所求圓. 何則? 由作圖, $OA=OC$, 命 OA 與圓 A 之交點爲 B, 則因 $PC=BA$, 故 $OP=OB$. 因此圓 O 過 P, 且切圓 A 於 B. 同理, AC′ 之垂直二等分線與 XY 之交點 O′ 亦爲所求圓之中心.

吟味 若 AC 或 AC′ 垂直於 XY, 則僅有一解.

2237. 過所設二點作圓, 令交所設圓, 且公弦平行於所設直線.

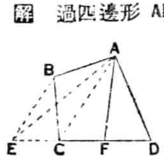
解 命所設二點爲 B, C, 所設圓之中心爲 A, 所設直線爲 XY, 假定過 B, C 之所求圓 O 業已求得, 其公弦 PQ 平行於 XY. 於是因 $PQ\perp AO$, 故 $AO\perp XY$; 又圓 O 過 B, C, 故 O 在 BC 之垂直二等分線上. 據此, 由 A 至 XY 引垂線, 令交 BC 之垂直二等分線於 O, 作中心 O, 半徑 OB 之圓, 則此圓卽所求圓.



吟味 由 A 至 XY 所引之垂線, 若與 BC 之垂直二等分線平行, 則無解; 相合, 則有無數解. 又點 O 雖已求得, 若 OB 爲半徑之圓, 不與圓 A 交, 則仍無解.

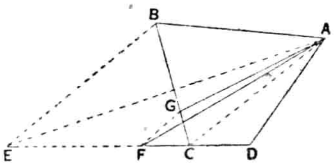
2238. 過四邊形之一角頂, 引等分四邊形爲三之二直線.

解 過四邊形 ABCD 之一角頂 A, 求引二直線, 等分此四邊形爲三. 引對角線 AC, 過 B 平行於 AC 引直線 BE, 命其與 DC 延線之交點爲 E, 三等分 ED, 命其近 D 方之分點爲 F.



若 F 在 CD 上,則因 $\triangle AFD=\frac{1}{3}\triangle AED=\frac{1}{3}$(四邊形 ABCD) [1939 題], 故 AF 爲一所求直線. 欲得他一直線, 可過 BF 之中點, 引 AC 之平行線, 聯結 A 與此平行線截 BC 或 CD 之點卽得 [1950題].

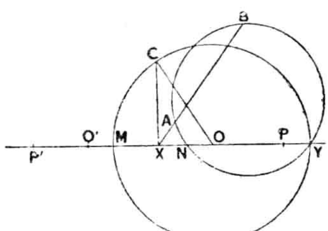
次, 若 F 在 CE 上, 則當過 F 平行於 CA 引



FG, 命其與 BC 之交點爲 G, 聯結 AG, 則 $\triangle AGC=\triangle AFC$, 故 (四邊形 AGCD) $=\triangle AFD=\frac{1}{3}$ (四邊形 ABCD), 故 AG 爲一所求直線. 欲得他一所設直線, 可聯結 A 與 BG 之中點卽得.

2239. 過二定點作一圓, 令由定直線截取所設長之弦.

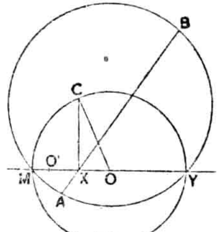
解 過二定點 A, B, 求作一圓, 令由定直



線 XY 所截得之弦, 等於所設長 l.

(1) 設 AB 之延線與 XY 相交, 命其交點爲 X, 過 X 引 XY 之垂線 XC, 令 XC 之長等於 XA, XB 之比例中項. 又在 XY 上取 XP, XP′, 令等於 l, 命其中點爲 O, O′. 以 O, O′ 爲中心, 作半徑 OC [=O′C] 之圓, 令截 XO, XO′ 之延線於 Y, Y′, 於是過 A, B, Y 及 A, B, Y′ 之圓卽所求圓. 何則? 於直徑 XOY 之他端爲 M, 圓 ABY 截 XY 之點爲 N. 因 O 爲 MY 之中點, 又爲 XP 之中點, 故 MX=PY. 又 $MX\cdot XY=\overline{CX}^2=XA\cdot XB=XN\cdot XY$, 故 XN=MX=PY, 故 NY=XP $=l$. 關於圓 ABY′ 亦然.

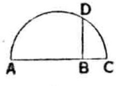
(2) 設 AB 與 XY 之交點 X 在 AB 上, 過 X 引 XY 之垂線 XC, 令 XC 之長等於 XA, XB 之比例中項. 以 C 爲中心, l 之半分爲半徑作圓, 命其截 XY 之點爲 O, O′. 以 O, O′ 爲中心, OC 或 O′C 爲半徑作圓, 命其截 XY 之點爲 Y, Y′, 則過 A, B, Y 及 A, B, Y′ 之圓, 卽所求圓. 何則? 命直徑 XOY 之他端爲 M, 則 $MX\cdot XY=\overline{CX}^2=AX\cdot XB$, 故圓 ABY 過點 M, MY $=2OC=l$. 關於圓 ABY′ 亦然.



吟味 $\frac{1}{2}l$ 若大於 CX, 則有二解; 等於 CX, 則有一解; 小於 CX, 則無解.

2240. 作一正方形, 令等於所設二正方形之比例中項.

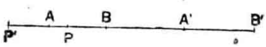
解 命所設二正方形爲 X, Y, 求作他正方形 Z, 令 X:Z=Z:Y. 引任意直線 ABC, 依次在其上取 AB, BC, 令分別等於 X, Y 之一邊. 以 AC 爲直徑作半圓, 由 B 引 AC 之垂線 BD, 命其與半圓周



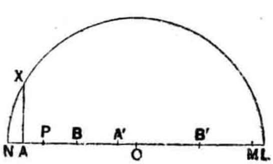
之交點爲 D, 則以 BD 爲一邊所作之正方形,卽所求正方形.何則? AB : BD = BD : BC [895 題], 故 $\overline{AB}^2:\overline{BD}^2=\overline{BD}^2:\overline{BC}^2$, 故由作圖, $X:\overline{BD}^2=\overline{BD}^2:Y$, 卽 $\overline{BD}^2$ 相當於所求正方形.

2241. 設 A, B, A′, B′ 爲依次排列在一直線上之四點, 試在此直線上取一點 P, 令 (1) AP : PB = A′P : PB′, (2) AP : PB = B′P : A′P.

解 (1) 假定所求點 P 業已求得, 而 P 爲

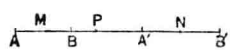


AB 之內分點. 於是因 AP : PB = A′P : PB′, 故 AP + PB : PB − AP = A′P + PB′ : PB′ − A′P, 卽 AB : PB − AP = 2PB + 2BA′ + A′B′ : A′B′, 故 (PB − AP)(2PB + 2BA′ + A′B′) = AB·A′B′, 而 AB·A′B′ 爲已知. 又 (2PB + 2BA′ + A′B′) − (PB − AP) = AB + 2BA′ + A′B′ = AB′ + BA′, 卽已知長. 故 PB − AP 可求得之, 從而可求得 P, 故作圖法如下. 在直線 AB 之延線上取 M, 令 AM = AB′ + BA′, 過 A 引 AM 之垂

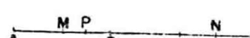


線 AX, 令其長等於 AB, A′B′ 之比例中項. 以 AM 之中點 O 爲中心, OX 爲半徑作圓, 截 OA 之延線於 N, 命 NB 之中點爲 P, 則 P 卽所求點. 何則? 命 NO 之他端爲 L, 則 O 爲 NL 之中點, 且又爲 AM 之中點, 故 NA = ML, AL − NA = AM = AB′ + BA′, 又因 AN·AL = $\overline{AX}^2$ = AB·A′B′, 故 AN = PB − AP, 故 NB = NA + AB = (PB − AP) + (PB + AP) = 2 × PB. 次, 設所求點爲 BA 之外分點, 命其點爲 P′, 則 AP′ : P′B = A′P′ : P′B′, 故 P′A : P′B − AP′ = P′A′ : P′B′ − P′A′, 卽 P′A : AB = P′A′ : A′B′, P′A : P′A′ = AB : A′B′, 卽 P′ 按 AB : A′B′ 外分 AA′. 故若 AB < A′B′, 則所求點可在 BA 之延線上求得之 [990題]. 仿此, 可求得 A′B′ 之內分點及外分點. 但線分 BA′ 之上. 顯無所求點, 因任取 BA′ 上之任意點 P, 則 AP > PB, A′P < PB′ 故也.

(2) 先求 AB 之中點 M, 及 A′B′ 之中點 N, 於是所求點不能在線分 MN 之延線上;

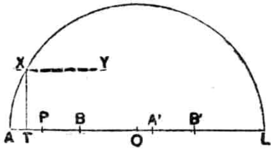


因在 MN 之延線上取任意點 P, 則 AP ≧ PB, 從而 B′P ≦ A′P 故也. 今假定所求點 P 業已求得, 且 P 在線分 BA′ 上, 則 AP : PB = B′P : A′P, 故 AP − PB : BP = B′P − A′P : A′P, 卽 AB : BP = A′B′ : A′P, 故 BP : A′P = AB : A′B′, 卽 P 爲按 AB : A′B′ 內分 BA′ 之點, 故甚易求得之. 次, 設所求點 P 在線



分 MB 上, 則 AP : PB = B′P : PA′, 故 AP + PB : AP − PB = B′P + PA′ : B′P − PA′, 卽 AB : AP − PB = 2PB + 2BA′ + A′B′ : A′B′, 故 (AP − PB)(2PB + 2BA′ + A′B′) = AB·A′B′, 而 AB·A′B′ 爲已知; 又 (AP − PB) + (2PB + 2BA′ + A′B′) = AB′ + BA′, 亦爲已知; 故 AP − PB

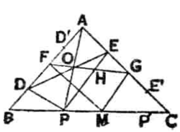
可求得之. 因此作圖法如次. 在 AB 之延線上取 L, 令 $AL=AB'+BA'$, 以 AL 之中點 O 爲中心, OA 爲半徑作圓. 引 AL 之平行線 XY, 令其與 AL 之距離等於 AB, A′B′ 之比



例中項, 命 XY 與圓周之交點〔與 A 在 O 之同側者〕爲 X, 由 X 至 AL 引垂線 XT, 求 TB 之中點 P. 則 P 卽所求點. 何則? $AT\cdot TL=\overline{XT}^2=AB\cdot A'B'$, $AT+TL=AB'+BA'$, 故 $AT=AP-PB$, $TB=AB-AT=(AP+PB)-(AP-PB)=2PB$. 又 AB, A′B′ 之比例中項, 若大於 AL 之半分, 則無解. 若點 T 移至線分 BL 上, 則違反假設, 故無解. 次, 若點 P 在 A′N 上, 可仿此求得之.

2242. 有三角形 ABC, 試在一邊 BC 上求點 P, 令由 P 所引平行於 AB, AC 之二直線, 其所圍之平行四邊形面積, 等於三角形 ABC 之 $\frac{4}{9}$.

解 I. 假定所求點 P 業已求得, 由 P 平行於 AB, AC 引二直線 PE, PD, 命其分別與 AC, AB 之交點爲 E, D, 則 $\square ADPE=\frac{4}{9}\times\triangle ABC$.



命兩對角線 AP, DE 之交點爲 O, 則 O 爲 AP, DE 之公有中點, 過 O 之任意直線將平行四邊形 ADPE 分成等積之二部, 且過 O 平行於 BC 之直線, 將由 A 至 BC 所引之一切直線二等分. 據此, 過 O 引 BC 之平行線, 命其與 AB, AC 之交點分別爲 F, G, 與 PD, PE 之一, 例如 PE 之交點爲 H,* 則四邊形 $AFHE=\frac{1}{2}\square ADPE=\frac{2}{9}\times\triangle ABC$. 而 F, G 分別爲 AB, AC 之中點, 故由是可推得 $\triangle AFG=\frac{1}{4}\triangle ABC$. 又 $\triangle AFG$ 與 $\triangle EHG$ 相似, $\frac{\triangle AFG}{\triangle EHG}=\frac{\overline{AG}^2}{\overline{EG}^2}$, 或 $\frac{\overline{AG}^2}{\overline{EG}^2}=$

$$\frac{\triangle AFG}{\triangle AFG-\text{四邊形 }AFHE}=\frac{\frac{1}{4}\triangle ABC}{\frac{1}{4}\triangle ABC-\frac{2}{9}\triangle ABC}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\triangle ABC}{\frac{1}{36}\triangle ABC}=\frac{9\triangle ABC}{\triangle ABC}=\frac{9}{1}=\frac{3^2}{1^2},$$ 故 $\frac{AG}{EG}=\frac{3}{1}$, 或 $EG=\frac{1}{3}AG$. 因此, 點 E 之位置, 可由是求得之, 從而點 P 之位置, 亦可決定之. 其法先求得 AC 之中點 G, 三等分 AG, 命近於 G 之分點爲 E, 過點 E 平行於 AB 引一直線, 命其與 BC 之交點爲 P, 則 P 卽所求點; 何則? 過 P 引 AC, AB 之平行線, 命其分別與 AB, AC 之交點爲 D, E, 則

$$\frac{\square ADPE}{\triangle ABC}=\frac{AE\cdot(\text{由 P 至 AC 所引之垂線})}{\frac{1}{2}AC\cdot(\text{由 B 至 AC 所引之垂線})}$$

$$=\frac{AE}{\frac{1}{2}AC}\cdot\frac{\text{由 P 至 AC 所引之垂線}}{\text{由 B 至 AC 所引之垂線}}.$$ 而由作圖, $\frac{1}{2}AC=AG=3EG=\frac{3}{2}AE$, 或 $\frac{AE}{\frac{1}{2}AC}=\frac{2}{3}$, 及

$$\frac{\text{由P至AC所引之垂線}}{\text{由B至AC所引之垂線}}=\frac{PC}{BC}=\frac{EC}{AC}=\frac{EG+GC}{2AG}$$

$$=\frac{EG+AG}{2AG}=\frac{EG+3EG}{2\times 3EG}=\frac{4EG}{6EG}=\frac{2}{3}.$$ 由是知

$$\frac{\square ADPE}{\triangle ABC}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$ 卽 $\square ADPE=\frac{4}{9}\triangle ABC$.

吟味 命 BC 之中點爲 M, 聯結 MF, MG, 則 AFMG 爲平行四邊形, 其面積爲三角形 ABC 之 $\frac{1}{2}$, 且爲內接平行四邊形中之最大者. 今由 $\frac{4}{9}<\frac{1}{2}$ 視之, 可知本題恆爲可能.

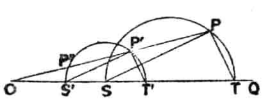
又移動點 E 之位置，令漸趨近 C，則 E 與 G 合時，P 與 M 合，D 與 F 合．又脫離此最大平行四邊形之區域後，E 更趨近 C，終至點 E′ 之位置，而 GE′ = GE 時，則與其對應之 P，D 之位置，分別爲 P′，D′．檢驗平行四邊形 AD′P′E′ 之面積，可知其亦等於 $\frac{4}{9}$△ABC，故 P′ 亦爲所求位置．但 P 與 B 間及 P′ 與 C 間，無同樣之位置，此可推明之．

*據上所述，一雙對應點 P，E，或 P′，D′ 在 FG 之異側，故解析中所謂命 FG 與 PE 之交點爲 H，……，無不可能之時，故本題恆有二解．

解 II. 所求點 P 爲 BC 之三等分點，從而有二．何則？命 BC 之三等分點之一爲 P，由 P 引二邊 AB，AC 之平行線，命其與 AC，AB 之交點爲 E，D，聯結 ED，則 ADPE 爲平行四邊形，△ADE 爲其半分．而 BP : PC = BD : DA = AE : EC = 1 : 2，故 △ADE : △ABC = AD·AE : AB·AC = 2·1 : 3·3 = 2 : 9，故 ▱AP : △ABC = 4 : 9．

2243. 設 OQ 爲過點 O 之所設直線，P 爲不在此直線上之所設點，試過點 P 作一圓，令其中心在 OQ 上，截 OQ 於 S，T，而 OS 與 ST 之比等於所設比．

解 命所設比爲 $m:n$，假定所求點之一組

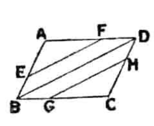


S，T 業已求得，則 OS : OT = $m:n$，$\hat{SPT} = \hat{R}$．今在 OP 上取任意點 P′，過 P′ 平行於 PS，PT 分別引 P′S′，P′T′，命其與 OQ 之交點爲 S′，T′，則 OS′ : OS = OP′ : OP = OT′ : OT，即 OS′ : OS = OT′ : OT，或 OS′ : OT′ = OS : OT = $m:n$．且由作圖，S′P̂′T′ 之二邊分別與 SP̂T 之二邊平行，且皆同向，故 S′P̂′T′ = SP̂T = R̂，故得作圖法如下．在 OQ 上取任意點 S′，又在同直線上取第二點 T′，令 OS′ : OT′ = $m:n$．次，以 S′T′ 爲直徑作圓，命其與 OP 之一交點爲 P′，聯結 P′S′，P′T′；過 P 平行於 P′S′ 引 PS，平行於 P′T′ 引 PT，命其與 OQ 之交點分別爲 S，T，則 S，T 爲所求點之一組．何則？因 SP̂T = S′P̂′T′ = R̂，故以 ST 爲直徑之圓［其中心在 OQ 上，因此中心爲 ST 之中點也］過點 P．而由作圖，P′S′，P′T′ 分別與 PS，PT 平行，故 OS : OS′ = OP : OP′ = OT : OT′，故 OS : OT = OS′ : OT′ = $m:n$，即 S，T 爲所求點之一組．

吟味 若圓 S′T′ 與 OP 交於他一點 P″，則對應於 P″ 之點 S，T 亦適合條件，此得證之．故設圓 S′T′ 與 OP 交，則有二解；相切，則有一解；不切不交，則無解．

2244. 平行於對角線，引二直線，將平行四邊形等分爲三．

解 設平行四邊形爲 ABCD，假定平行於對角線之一，例如 BD 之所求二直線 EF，GH 業已引得，則 △AEF = 圖形 EBGHDF = △CGH．此時三角形 ABD 等於平行四邊形 ABCD 之二分之一，三角形 AEF 爲平行四邊形 ABCD 之三分之一，而兩三角形相似，故由相似三角形面積之關係，△ABD : △AEF = $\overline{AB}^2 : AE^2$，

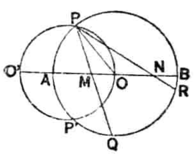


或 $\overline{AB}^2:\overline{AE}^2=\triangle ABD:\triangle AEF=\frac{1}{2}\square ABCD:\frac{1}{3}\times\square ABCD=3:2$. 同理, $\overline{CD}^2:\overline{CH}^2=3:2$. 而 AB=CD, 故 AE=CH. 由是得作圖法如下. 由比例式 $\overline{AB}^2:x^2=3:2$, 求直線 x [2005 題], 在所設平行四邊形之二邊 AB, CD 上分別取 AE, CH, 令各等於 x; 過 E, H 平行於 BD 引 EF, HG, 則 EF, HG 卽所求二直線.

吟味 平行四邊形之對角線有二, 故本題有二解.

2245. 圓之一直徑上有二所設點, 試過此各點引弦, 令共一端且等長.

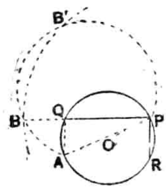
解 命圓 O 直徑 AB 上之所設點爲 M, N, 求過 M, N 引共一端且等長之弦 PMQ, PNR. 假定所求弦 PMQ, PNR 業已引得, 聯結 PO, 則因 PQ, PR 等長, 故 PO 二等分 $Q\hat{P}R$, 此甚易知之. 故 PM:PN=MO:ON [1027 題]=(定量). 據此, 求 MN 按比 MO:ON 之外分點 O′, 以 OO′ 爲直徑作圓; 命其與圓 O 之交點爲 P, P′, 於是聯結 PM, PN 之弦 PMQ, PNR, 及聯結 P′M, P′N 之弦 P′MQ′, P′NR′ 卽所求弦. 何則, 因 P 在 OO′ 爲直徑之圓周上, 從而 PO 二等分 $M\hat{P}N$ [1603題], 因而 PQ=PR 故也.



吟味 直徑 AB 雖可視作適合條件之弦, 但當除外之. 若以 OO′ 爲直徑之圓, 不與圓 O 交, 則無解. 若 O 爲 MN 之中點, 則圓 OO′ 變爲垂直於直徑 AB 之直徑.

2246. 試由定圓周上之一定點, 引互相垂直之二弦, 令其和等於所設長.

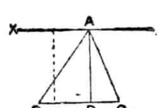
解 設定圓 O 之周上之所設點爲 P, 引過 P 之直徑 PA, 以 PA 爲弦, 作含 $\frac{1}{2}\hat{R}$ 之弓形弧, 以 P 爲中心, 所設長 m 爲半徑作圓, 命其與前弧之交點爲 B, B′. 命 PB 與所設圓周之交點爲 Q, 則 PQ 卽所求之一弦, 從而他弦可由 P 垂直於 PQ 引弦 PR 卽得. 何則? $A\hat{B}P=\frac{1}{2}\times A\hat{Q}P=\frac{1}{2}\hat{R}$, $A\hat{Q}B=\hat{R}$, 故 $B\hat{A}Q=\frac{1}{2}\hat{R}=A\hat{B}Q$, 故 AQ=BQ. 又因 $A\hat{Q}P=\hat{R}=Q\hat{P}R$, 故 AQ ∥ PR, 從而 PR=AQ, 故 PQ+PR=PQ+AQ=PQ+QB=PB=m. 次, 聯結 PB′, 則得他解. 然此二解僅將 PQ, PR 之位置交換. 又弧 ABP 得作於 AP 之兩側, 故又可得一解.



吟味 弧 ABP 之中心, 顯然爲半圓弧 AP 之中點 S, 若 m 大於 2PS 及不大於 PA, 則無解.

2247. 已知三角形之底邊, 高, 及他二邊之和, 求作本形.

解 設三角形 ABC 中, 已知底邊 BC, 高 AD=h, 及 AB+AC=l, 求作本形. 先引底邊 BC, 平行於 BC 引直線 X, 令相距 h, 則 A 必在 X 上. 故在直線 X 上求一點 A, 令至 B, C 之距離和等於 l, 則三角形 ABC 卽所求者.

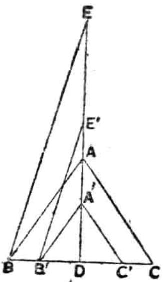


吟味 以 AD 及 BC 之半分爲二邊作直角三角形, 若 l 小於其斜邊之二倍, 則無解 [參照 2264 題].

2248. 已知一邊與高之和, 求作正三角

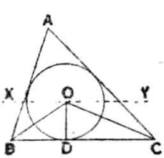
形.

解　設已知正三角形 ABC 之一邊與高之和 l, 求作正三角形. 先作任意大之正三角形 $A'B'C'$, 引高 $A'D$, 向 A' 方延長之, 在其上取 E', 令 $A'E'=A'B'$, 又在其上取 E, 令 $DE=l$. 聯結 $B'E'$, 過 E 平行於 $E'B'$ 引 EB, 命其與 DB' 或其延線之交點爲 B. 過 B 平行於 $B'A'$ 引 BA, 命其與 ED 之交點爲 A, 過 A 平行於 $A'C'$ 引 AC, 命其與 BD 延線之交點爲 C, 則 ABC 卽所求正三角形. 何則? 由作圖, $\triangle EBA \backsim \triangle E'B'A'$, $\triangle EBD \backsim \triangle E'B'D'$, $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, 故 $BA=AE$, 從而 $BA+AD=ED=l$, 而 $\triangle BAC$ 爲正三角形.



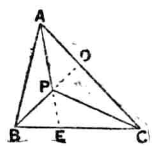
2249. 已知三角形之一邊, 此邊之對角, 及內切圓之半徑, 求作本形.

解　假定所求三角形 ABC 業已作得, 其內心爲 O, 由 O 至 BC 引垂線 OD, 則 OD 爲內切圓之半徑, 故爲已知. 因此, $\hat{A}$, BC, OD 皆爲已知. 此時 $B\hat{O}C=\hat{R}+\frac{1}{2}\hat{A}$, 卽一定, 故 O 在平行於 BC, 距 BC 定遠之直線 XY 上, 又在 BC 爲弦, 含定角之弧上; 故 O 卽其交點, 因而內切圓 O 一定. 於是因 BA, CA 分別爲過 B, C 至此圓所引之切線, 故 BA, CA 可決定之, 因而甚易作得所求三角形. 次, 欲令此作圖可能, 須 BC 爲弦之弧與 XY 相交或切. 又相交時, 雖可得二內切圓, 但全等, 故本題之解, 不多於一.



2250. 試在三角形 ABC 內求一點 P, 令 $\triangle BCP$, $\triangle CAP$, $\triangle ABP$ 之面積, 比例於所設三線分.

解　命所設三線分爲 l, m, n. 內分邊 AC 於 D, 令 $AD:DC=n:l$, 又內分邊 BC 於 E, 令 $BE:EC=n:m$. 命 BD, AE 之交點爲 P, 則 P 卽所求點. 何則? $\triangle ABD:\triangle CBD=AD:DC$, $\triangle APD:\triangle CPD=AD:DC$, 故 $\triangle APB:\triangle BPC=AD:DC=n:l$. 同理, $\triangle APB:\triangle APC=BE:EC=n:m$. 故 $\triangle BPC:\triangle APC:APD=l:m:n$.



第九編　極大極小

2251. 分所設直線爲二, 則其各分上正方形之和, 在二等分時爲極小.

證　命所設直線爲 AB, 其中點爲 M, 其上之任意點爲 X, 則 $\overline{AX}^2+\overline{BX}^2=2\overline{AM}^2+2\times\overline{MX}^2$ [755 題], 故 X 在 M 時, AX^2+BX^2 爲極小.

2252. 分所設直線爲二, 則其各分所包之矩形, 在二等分時爲極大.

證　由前題之圖, $AX\cdot BX=\overline{BM}^2-\overline{MX}^2$ [749 題], 故 X 在 M 時, $AX\cdot BX$ 爲極大.

2253. 有所設周之一切矩形中, 以正方形之面積爲極大.

解 由前題自明.

2254. 設二直線所包之矩形一定,則此二直線之和,在此二直線相等時爲極小.

證 設 X 爲 AB 之中點, Y 爲 AB 或其延線上之任意點,

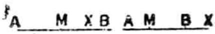
則 $AY\cdot YB+\{\frac{1}{2}\times(AY\sim BY)\}^2=\{\frac{1}{2}(AY+YB)\}^2$ [764題].故取 AY, YB 爲二線時,若 $AY=YB$, 則其和爲極小.

2255. 有所設面積之一切矩形中,以正方形之周爲極小.

證 由前題自明.

2256. 設二直線上正方形之和一定,則此二直線之和,在二直線相等時爲極大.

證 設 M 爲 AB 之中點, X 爲 AB 或其延線上之任意點,



則 $XA^2+BX^2=2AM^2+2MX^2$ [755題], 或 $4AM^2+4MX^2=2(AX^2+BX^2)$, 即 $(AX+BX)^2+(AX\sim BX)^2=2(AX^2+BX^2)$. 故若取 AX, XB 爲二直線,則 $AX=XB$ 時,其和爲極大.

注意 與此類似之定理,不獨對於二直線可以成立,對於任何二量,皆可成立,祇須有下二代數恆等式成立:

$$x^2+y^2=2\left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\},$$

$$xy=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2.$$

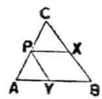
又對於二量之逆數亦然,祇須有以下之恆等式成立:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{2\left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\}^2},$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}.$$

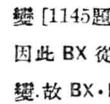
2257. 設三角形之內接平行四邊形中,二邊在三角形之二邊上,一角頂在三角形之第三邊上,求證此平行四邊形面積之極大,在其頂點在第三邊之中點時,此時之面積爲所設三角形之半分.

證 命 ABC 爲所設三角形, PX, PY 分別爲由 AC 上之點 P 平行於 AB, BC 所引之直線. 此時平行四邊形 BXPY 之 $\hat{B}$ 一定,故其面積從 $BX\cdot BY$ 而變 [1145題]. 然 $BX:AP=BC:AC$ 爲定比,因此 BX 從 AP 而變. 同理, BY 從 CP 而變.故 $BX\cdot BY$ 從 $AP\cdot CP$ 而變. 又由 2252 題, $AP\cdot CP$ 之極大,在 P 爲 AC 之中點時. 此時 X, Y 分別爲 BC, AB 之中點,故 $\square BP=\frac{1}{2}\triangle ABC$.



2258. 聯結所設弓形弧上之一點與弦之兩端,則由是所生三角形之極大,在以弧之中點爲頂點時.

證 設 APB 爲所設弓形,聯結弧上之任意點 P 與 A, B, 由 P 至 AB 引垂線 PN, 則 $\triangle APB=\frac{1}{2}AB\cdot PN$, 故 $\triangle APB$ 之極大,在 PN 爲極大時,卽 P 爲弓形弧之中點時.



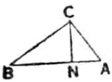
2259. 設三角形之底邊及頂角一定,則三角形在二等邊時爲極大.

證 由前題自明.

2260. 設三角形之二邊一定,則在此二

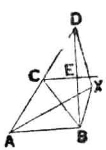
邊之夾角爲直角時，三角形之面積爲極大.

證 設 AB, AC 爲定邊，由 C 至 AB 引垂線 CN，則 $\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot CN$，故 $\triangle ABC$ 之極大，在 CN 爲極大時. 然 $C\hat{N}A=\hat{R}$，故若 CN 不與 CA 合，則 $CN<CA$，故 $\triangle ABC$ 在 $C\hat{A}B=\hat{R}$ 時爲極大.



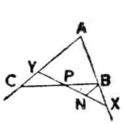
2261. 立於同底上之諸等周三角形中，極大者爲二等邊三角形.

證 設 AB 爲定底邊，ABC 爲立於其上之二等邊三角形，AXB 爲他三角形. 此時 $AX+BX=AC+CB$. 延長 AC 至 D，令 $CD=CB$，平行於 AB 引 CE，令交 DB 於 E，聯結 DX. 於是因 $\triangle CED$ 與 $\triangle CEB$ 全等，故 $AC+CB=AC+CD$，$AC+CD<AX+DX$，即 $AX+BX<AX+DX$，故 $BX<DX$. 故 X 與 AB 在 CE 之同側，因此 $\triangle AXB$ 之高小於 $\triangle ACB$ 之高，從而 $\triangle AXB<\triangle ACB$，卽二等邊三角形 ACB 爲極大.



2262. 以所設二定直線爲二邊，第三邊過一定點之諸三角形中，以定點爲第三邊之中點者極小.

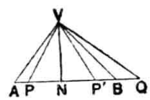
證 設 P 爲定點，AB, AC 爲二定直線. 引任意直線 XPY，令交 AB, AC 於 X, Y. 若 PX, PY 不相等，在較大之 PX 上，取 $PN=PY$. 平行於 AC 引 NB，令交 AB 於 B，聯結 BP，命 BP 之延線與 AC 之交點爲 C. 三角形 BPN, CPY 中，$P\hat{N}B=P\hat{Y}C$，$B\hat{P}N=C\hat{P}Y$，$PN=PY$，故 $PB=PC$，$\triangle BPN\equiv\triangle CPY$. 故 $\triangle ABC$ 較 $\triangle AXY$，尙小 $\triangle BXN$，即 $\triangle ABC$ 在 $PB=PC$ 時極小.



注意 欲作極小三角形，可過 P 引 AC 之平行線，令交 AB 於 E，取 EB 令等於 EA 卽得.

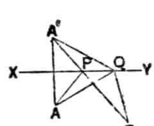
2263. 三角形之頂角與高一定，則三角形之極小，在二等邊時.

證 設 AVB 爲有定高 VN 與頂角 AVB 之二等邊三角形，取同高同頂角之他三角形 PVQ，命 $\triangle VNP'$ 爲 $\triangle VNP$ 關於 VN 之對稱三角形. 於是 $Q\hat{V}B=A\hat{V}P=B\hat{V}P'$，故 $QV:VP'=QB:BP'=QB:AP$. 然 $QV>VP'$ [73題]，故 $QB>AP$，從而 $PQ>AB$，故 $\triangle PVQ>\triangle AVB$，卽 $\triangle AVB$ 爲極小.

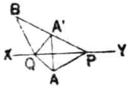


2264. 設 A, B 爲二定點，XY 爲定直線，在 XY 上取 P，令 AP, BP 與 XY 所成之角等，則 (1) A, B 在 XY 之同側時，$AP+BP$ 爲極小，(2) A, B 在 XY 之異側時，$AP\sim BP$ 爲極大.

證 (1)設 A′ 爲 A 關於 XY 之對稱點，則 A′B 交 XY 於 P，因 $A\hat{P}X=A'\hat{P}X=B\hat{P}Y$ 故也. 在 XY 上取任意點 Q，聯結 QA, QB, QA′，則 $(AQ+BQ=A'Q+BQ)>(A'B=AP+BP)$，即 $AP+BP$ 爲極小.



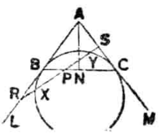
(2) 仿 (1) 作圖，則 $(QA\sim QB=QA'\sim QB)<(BA'=BP\sim PA'=BP\sim AP)$，卽 $AP\sim BP$ 爲極大.



註　兩圖中設 B′ 爲 B 關於 XY 之對稱點,則 $(AP+BP)^2=\overline{AB}^2+AA'\cdot BB'$[(1)之圖], $(AP\sim BP)^2=\overline{AB}^2-AA'\cdot BB'$ [(2) 之圖]. 由關於內接四邊形之 Ptolemy 氏定理,此結果甚易證之.

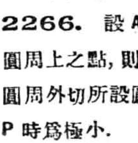
2265. 過所設角內之所設點,引一直線,令交所設角之二邊,則此直線之二分所包矩形之極小,在此直線與二邊成等角時.

證　設 P 爲 $L\hat{A}M$ 內之所設點, AN 爲 $\hat{A}$ 之二等分線,引 AN 之垂線 PN, 命其與 AL, AM 之交點分別爲 B, C. 於是 AB＝AC, 故得作一圓,令切 AL, AM 於 B, C. 過 P 引一直線,令交 AL, AM 於 R, S, 交圓於 X, Y, 則 X, Y, 皆在 $L\hat{A}M$ 之內. 然 $BP\cdot CP=XP\cdot YP$, 故 $BP\cdot CP<RP\cdot SP$. 故與 AL, AM 成等角之直線 BPC, 其二分 BP, CP 所包之矩形爲極小.



2266. 設 A, B 爲所設圓外之定點, P 爲圓周上之點, 則角 APB 在 (1) 過 A, P, B 之圓周外切所設圓於 P 時爲極大, (2) 內切於 P 時爲極小.

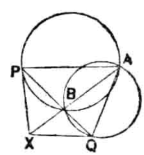
證　(1) 過 A, B 作外切所設圓於 P 之圓,在所設圓周上取任意點 P′, 聯結 P′A, P′B, 命 P B 與圓 APB 之交點爲 X, 聯結 AX, 於是因 $A\hat{P}B=A\hat{X}B$, 故 $A\hat{P}B>A\hat{P'}B$, 卽 $A\hat{P}B$ 在 P 爲切點時極大.



(2) 圓 APB 內切所設圓於 P 時,可仿 (1) 證得 $A\hat{P}B$ 爲極小.

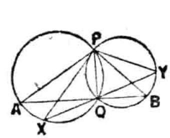
2267. 過兩所設圓之一交點引一直線,則其爲二圓所截取之弦所包之矩形,在此直線兩端上之切線相等時爲極大.

證　設 AB 爲兩圓之公弦, PBQ 爲過 B 所引之任意直線, 交二圓於 P, Q, 聯結 PA, QA, 在 AB 之延線上取 X, 令 $B\hat{X}Q=A\hat{P}B$, 於是 A, P, X, Q 在一圓周上,故 $PB\cdot BQ=AB\cdot BX$. 因此 $PB\cdot BQ$ 從 BX 爲極大而極大. 然 $B\hat{X}Q$ 爲定角,故 QX 無論取若何之位置,恆與自身平行,又 BX 在 XQ 切一所設圓時爲極大,此時 $P\hat{A}B=P\hat{Q}X=Q\hat{A}S=Q\hat{P}X$, 故 XP 切他所設圓,卽 $PB\cdot BQ$ 之極大,在 P 與 Q 上之二切線相等時.



2268. 過兩所設圓之一交點引一倍弦,以此倍弦爲底邊,他交點爲頂點之諸三角形中,底邊垂直於公弦者爲極大.

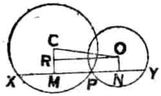
證　設 P, Q 爲兩圓之交點, AQB 爲過 Q 垂直於 PQ 之直線, XQY 爲過 Q 之任意直線, A, B, X, Y 在二圓周上. 此時 $P\hat{X}Q=P\hat{A}Q$, $P\hat{Y}Q=P\hat{B}Q$, 因含於同弓形故也. 從而 $\triangle PXY\backsim\triangle PAB$, 故 $\triangle PAB:\triangle PXY=\overline{PA}^2:\overline{PX}^2$. 然 $A\hat{Q}P=\hat{R}$, 故 PA 爲直徑, $PA>PX$, 故 $\triangle PAB>\triangle PXY$, 卽 $\triangle PAB$ 爲極大.



2269. 過二圓交點之一,而終於二圓周之諸直線中, 平行於中心線者爲極大, 此直

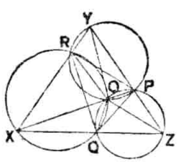
線爲中心線之二倍.

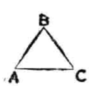
[證] 設 P 爲中心 C, O 之二圓之一交點, XPY 爲過 P 且兩端 X, Y 在二圓周上之直線.引 XY 之垂線 CM, ON, 又引 CM 之垂直 OR. 此時 $XY=2PM+2PN=2MN=2RO$. 而 $C\hat{R}O=\hat{R}$, 故若 RO 不與 CO 合, 則 $2RO<2\times CO$. 故 XY 在平行於 CO 時爲極大,而此時 $XY=2CO$.



2270. 設 P, Q, R 爲不在一直線上之三所設點, ABC 爲所設三角形, 在三角形 PQR 之外側,以 QR, RP, PQ 爲弦, 作分別含角 A, B, C 之弓形, 則 (1) 補足三弓形弧而得之三圓周,過一定點;(2)設任意直線 YPZ 之 Y 在過 P, R 之圓周上, Z 在過 P, Q 之圓周上,且 YR, ZQ 交於 X, 則 X 在過 Q, R 之圓周上;(3)角 XOY, YOZ, ZOX 一定;(4)垂直於 PO 引 YPZ, 則 ZX, XY 分別垂直於 QO, RO; 此時 XYZ 爲三邊過 P, Q, R 且與 ABC 等角之極大三角形.

[證] (1),(2)設過 PQ, PR 之二圓,再交於 O,





聯結 PO, QO, RO. 此時 $P\hat{O}Q=2\hat{R}-P\hat{Z}Q$, $P\hat{O}R=2\hat{R}-P\hat{Y}R$, 故 $P\hat{O}Q+P\hat{O}R+P\hat{Z}Q+P\hat{Y}R=4\hat{R}=P\hat{O}Q+P\hat{O}R+Q\hat{O}R$, 故 $Q\hat{O}R=P\hat{Z}Q+P\hat{Y}R=2\hat{R}-Q\hat{X}R$, 故 O, X 與 Q, R 在一圓周上.

(3) $X\hat{O}Y=P\hat{Z}Q+Q\hat{X}O+P\hat{Y}O=P\hat{Z}Q+P\hat{R}Q$, 即 $X\hat{O}Y$ 一定. 仿此得證 $Y\hat{O}Z$, $Z\hat{O}X$ 亦一定.

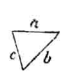
(4) $Z\hat{Q}O=Z\hat{P}O$ 之補角, 故皆爲直角. 同理, $Y\hat{R}O$ 亦爲直角. 根據前題, △XYZ 之三邊爲極大之倍弦,故此三角形爲適合所設條件之極大三角形.

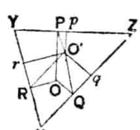
[注意] (1) 若 △XYZ 一定,欲令 △PQR 適合所設條件, 則亦可成立同樣之結果; 又 △PQR 之極小,在 OP, OQ, OR 垂直於△XYZ 之三邊時.

(2) 若 △XYZ 一定, RPQ 乃 PQ:PR 爲定比之橫截線, 則三角形 XYZ, XQR, YPR, ZPQ 之外接圓交點 O 一定 [718題]. 何則? 因 △QOR∽△ZOY, 故 OY:OZ=OR:OQ; 然 $P\hat{O}Q$, $P\hat{O}R$ 一定, PQ:PR 爲定比,故 OR:OQ 爲定比, 此甚易證之. 故 O 爲二定圓之交點, 且一定.

2271. 前題中若三角形 ABC 之邊 a, b, c 一定, O 爲三圓之交點,則 $a\cdot OP+b\cdot OQ+c\cdot OR$ 較 O 在他位置時爲極小.

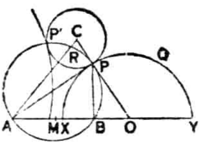
[證] 如前題中,令 △XYZ 之各邊, 分別垂直於 OP, OQ, OR, 取他任意點 O′, 引 $O'p$, $O'q$, $O'r$, 令垂直於△XYZ 之各邊. 此時 $YZ\cdot OP+ZX\cdot OQ+XY\cdot OR=2\triangle XYZ=YZ\cdot O'p+ZX\cdot O'q+XY\cdot O'r$. 然 YZ, ZX, XY 分別比例於 a, b, c, 故 $a\cdot OP+b\cdot OQ+c\cdot OR=a\cdot O'p+b\cdot O'q+c\cdot O'r$, 故小於 $a\cdot O'P+b\cdot O'Q+c\cdot O'R$. 故如題所言.





2272. 設 A, B 爲所設點, P 爲在一定圓周上之點, 則比 PA:PB 之極大或極小, 在 P 爲定圓與過 A, B 之他圓之直交點時.

證 在 AB 上取任意點 X, 將 AB[或 BA] 延長至 Y, 令 A, B, X, Y 成調和點列. 以 XY 爲直徑作圓, 命 Q 爲此圓周上之一點, 則 QA : QB = XA : XB = YA : YB. 命 M 爲 AB 之中點, 則恆 $MX \cdot MY = MA^2$. 故 X, Y 運動之方向相反. 因此 QA:QB 之極大在 XY 爲極小時, 其極小在 XY 爲極大時. 而以如是之 XY 爲直徑之諸圓, 切定圓者有二. 故此時設 Q 在定圓上, 則 QA·QB, 卽 PA:PB 之極大, 在 XY 爲直徑之圓之中心近 AB 之 B 方時, 其極小在近 A 方時. 故 C 爲定圓之中心, 聯結 CA, 分之於 R, 令 $CA \cdot CR = CP^2$, 於是過 A, B, R 之圓直交定圓. 但 P, P′ 中, P 爲中心近 B 之圓之切點. 命 CP 與 AB 延線之交點爲 O, 作中心 O, 半徑 OP 之圓, 令交 AB 之內部於 X, 外部於 Y, 則此圓切定圓於 P, 且 A, B, X, Y 成調和點列, 故 PA:PB 爲極大. 同理, P′A:P′B 爲極小.

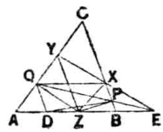


注意 1. PA:PB 爲極大時, PB:PA 爲極小, 此易明之. 其逆亦眞. 故由 P, P′ 所得之値爲極大或極小, 視取 A 方爲前項或後項而定.

注意 2. 圖中若 AB 之垂直二等分線, 分定圓爲二, 則切定圓之二圓, 在此垂線之兩側, 而二者皆外切. 否則, 兩切圓在此垂直二等分線之同側, 而一內切, 一外切.

2273. 設 ABC 爲定三角形, D 爲 AB 上之定點, E 爲 AB 延線上之定點. 以 D 爲頂點, 底之延線過 E, 且內接於 ABC 之諸三角形中, 以由底之兩端所引 CA, CB 之平行線交於 AB 上者爲極大.

證 設 EXY 爲截 CB, CA 於 X, Y 之直線, XZ, YZ 爲分別平行於 CA, CB 之二直線, 其交點 Z 在 AB 上. 引他任意直線 EPQ, 令交 CB, CA 於 P, Q, 聯結 PZ, QZ, QX. 於是 △PQD:△PQZ = (由 D 至 EQ 之垂線):(由 Z 至 EQ 之垂線) = ED:EZ, 卽定比; 故 △PQD 之極大, 在 △PQZ 之極大時. 又因 PX ∥ ZY, 故 X 至 QZ, 較 P 至 QZ 遠, 因此 △XQZ > △PQZ. 又因 QY ∥ ZX, 故 △XQZ = △XYZ. 故 △XYZ > △PQZ, 卽 △XYZ 在具備所設之條件時爲極大, 故 △XYD 亦然.



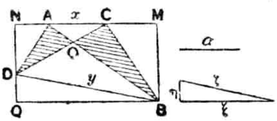
注意 1. 若 PQ 取於 XY 之他側, 亦可倣此證之.

注意 2. 有四點, 其中任何三點, 皆不在一直線上. 玆以四直線, 聯結此四點, 若此四直線中, 有二者互交, 則如是所得之圖形, 曰交截四邊形. 今設 A, B, C, D 爲四點, 以 AB, BC, CD, DA 四直線聯結之, 則四直線曰交截四邊形之邊, 而 AC, BD 曰對角線. 此四邊形之四邊及二對角線若以 a, b, c, d 及 x, y 表之, 則 (1) 若四邊形不交截, 則 $xy < ac + bd$. (2) 若四邊形交截, 則 $xy > ac \sim bd$. 然若四邊形

之頂點在一圓周上,則以上二款中之不等式,皆變爲等式.

2274. 若交截四邊形之四邊爲所設邊,則其兩三角形面積之差,在四點爲共圓點時極小.

證 設 ABCD 爲交截四邊形,兩邊 AB, CD



交截於 O. 垂直於 AC 引 BM, DN, 垂直於 ND 引 BQ. 以 a, b, c, d 表定長 AB, BC, CD, DA, 以 x, y 表變長 AC, BD. 於是 $a^2-b^2=x(\mathrm{AM}+\mathrm{CM})$, $c^2-d^2=x(\mathrm{CN}+\mathrm{AN})$, 故 $a^2-b^2+c^2-d^2=2x\cdot\mathrm{MN}=2x\cdot\mathrm{BQ}$, 故 $x\cdot\mathrm{BQ}$ 一定. 又 $\triangle\mathrm{BOC}\sim\triangle\mathrm{DOA}=\triangle\mathrm{BAC}\sim\triangle\mathrm{DAC}=\frac{1}{2}x(\mathrm{BM}\sim\mathrm{DN})=\frac{1}{2}x\cdot\mathrm{DQ}$, 故 $x\cdot\mathrm{DQ}$ 爲所設面積之二倍. 今取某定長 α, 又取長 ξ, η, ζ, 令 $\alpha\xi$, $\alpha\eta$, $\alpha\zeta$ 分別等於 $x\cdot\mathrm{BQ}$, $x\cdot\mathrm{DQ}$, $x\cdot\mathrm{BD}$. 於是 $\xi:\mathrm{BQ}=\eta:\mathrm{DQ}=\zeta:\mathrm{BD}$, 故以 ξ, η, ζ 爲各邊作三角形, 則與三角形 BDQ 相似, 因此 $\eta^2+\xi^2=\zeta^2$. 然 $\alpha\xi=x\cdot\mathrm{BQ}$, 故 ξ 爲定長; 因此 η 在 ζ 爲極小時極小, 故 $\alpha\eta$ [即 $x\cdot\mathrm{DQ}$] 在 $\alpha\zeta$ [即 xy] 爲極小時極小. 而 A, B, C, D 若不在一圓周上, 則 $xy>ac\sim bd$; 故 $x\cdot\mathrm{DQ}$ 在四邊形內接於圓時爲極小, 因而面積 AOD, COB 之差亦在此時爲極小.

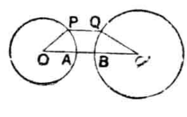
註 仿此, 得證通常四邊形[不交截者]中, 在此四邊形內接於圓時, 有極大之面積.

2275. 若四邊形之四邊 a, b, c, d 爲所設邊 則其對角線間之銳角, 在此四邊形內接於圓時,(1)若非交截四邊形,爲極大.(2)若爲交截四邊形,爲極小. 但此處 $a^2-b^2+c^2-d^2\neq 0$; 否則,對角線直交,面積爲極小.

證 由前題自明.

2276. 兩圓不交, 求其間最短及最長之距離.

解 命中心線 OO′ 與此二圓之交點爲 A, B [共在 O, O′ 間之點], 則 AB 爲所求之最短距離. 何則? 在兩圓上各取一點, 命爲 P, Q,



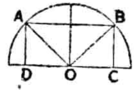
於是 $(\mathrm{OP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QO'})>(\mathrm{OO'}=\mathrm{OA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BO'})$, 由是得 $\mathrm{PQ}>\mathrm{AB}$ 仿此, 將 OO′ 向雙方延長, 令再交圓周於 O″, O‴, 則 O″O‴ 爲最長距離.

2277. 所設圓之一切內接矩形中, 有極大面積者爲正方形.

證 因內接於半圓之極大三角形, 爲直角二等邊三角形故也.

2278. 求內接於所設半圓之極大矩形.

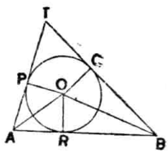
解 設圓之中心爲 O, 所求之矩形爲 ABCD, 則此矩形應爲 △AOB 之二倍, 而 AO, BO 皆爲圓之半徑, 故爲定長; 因此, 三角形 AOB

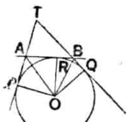


在 $\mathrm{A\hat{O}B}=\hat{\mathrm{R}}$ 時爲極大 [2260題]. 故作圖法如下. 過中心 O 引垂直於直徑之半徑, 又引二半徑 OA, OB, 令二等分前所引半徑與直徑間之二角, 命 OA, OB 與圓周之交點爲 A, B, 由 A, B 至直徑引垂線 AD, BC, 則 ABCD 即所求矩形.

2279. 所設圓之二定切線與一不定切線所圍三角形之面積，在不定切線二等分於切點時爲極大或極小.

證　命 O 爲圓之中心, TP, TQ 爲定切線,

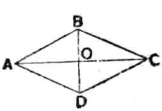




不定切線之切點爲 R, 又命此不定切線與 TP, TQ 之交點分別爲 A, B. 於是 $\triangle AOP = \triangle AOR$, $\triangle BOQ = \triangle BOR$, 故 $\triangle AOB = \frac{1}{2} \times APOQB$. 又 $A\hat{O}B = \frac{1}{2}P\hat{O}Q$, 卽爲定角. 今若不定切線截 TP, TQ 之延線,則 $\triangle TAB$ [卽 $TPOQ + 2\triangle AOB$] 在 $\triangle AOB$ 爲極小時極小, 卽在 $OA = OB$, 或 $AR = RB$ 時爲極小. 又若不定切線截 TP, TQ 本線,則 $\triangle TAB = TPOQ - 2\triangle AOB$, 故在 $\triangle AOB$ 爲極小時極大,卽在 $OA = OB$, 或 $AR = RB$ 時爲極大.

2280. 對角線爲定量之平行四邊形中，以菱形之面積爲極大.

證　平行四邊形爲二對角線所分成之四個三角形中, 有定長之二邊 [分別爲所設對角線之半分], 故此三角形在對角線互相垂直時 [2260 題], 卽平行四邊形爲菱形時極大.

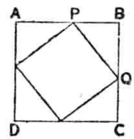


2281. 設四邊形之對角線爲定量，則其面積在此對角線直交時爲極大. 而此對角線不論互截於何點,與面積完全無關.

證　因一切四邊形之面積, 皆等於以其二對角線爲二邊, 以其二對角線間之角爲此二邊間之角所作之三角形也 [830題].

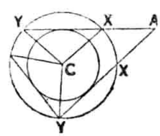
2282. 所設正方形之內接正方形中，有極小面積者,乃等於原正方形之半分者.

解　命 ABCD 爲所設正方形, P, Q 爲其內接正方形在 AB, BC 上之頂點, 則顯然 $AP = BQ$, 故 $\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2$. 而此在 P 爲 AB 中點時極小 [2251 題], 此時 $\overline{PQ}^2 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$.



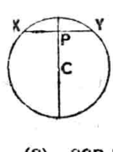
2283. 命所設圓之中心爲 C, 圓外之所設點爲 A, 過 A 引直線 AXY, 命其與圓之交點爲 X, Y, 則三角形 CXY 極大時之位置如何?

解　因兩邊 CX, CY 有定長,故 $\triangle CXY$ 在 $X\hat{C}Y$ 爲直角時極大. 故得作圖法如下. 引互相垂直之二半徑, 及聯結此二半徑端之直線, 作切此直線之同心圓, 由 A 至此圓引二切線, 則由此二直線, 卽可得 $\triangle CXY$ 之極大值.



2284. 命所設圓之中心爲 C, 此圓之弦爲 XY, 垂直於 XY 引 CP, 則 (1) $CP + XP$, (2) $CP \cdot PX$ 在何時爲極大?

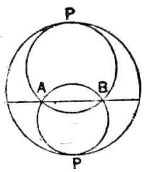
解　(1) $(CP + PX)^2 + (CP \sim PX)^2 = 2(CP^2 + PX^2) = 2$(半徑上之正方形), 故 $CP + PX$ 在 $CP = PX$, 卽 XY 爲內接正方形之一邊時極大.



(2)　$2CP \cdot PX + CP^2 + PX^2$, 卽 $2CP \cdot PX +$ (半徑上之正方形)等於 $(CP + PX)^2$, 故 $CP \cdot PX$

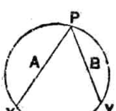
在 CP＋PX 爲極大時，即 XY 爲內接正方形之一邊時爲極大.

2285. 設 A, B 爲所設圓內之定點，P 爲圓周上之動點，則角 APB 爲 (1) 極大，(2) 極小時之 P 點位置如何?



解 過 A, B 引切所設圓之二圓，設 P 爲是等切點之一，則 $A\hat{P}B$ 爲極大. 又延長 AB，令交於圓周，則 AB 張於此交點之角，有極小值零. 其理甚易知之.

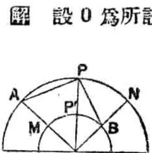
2286. 設 A, B 爲所設圓內之定點，在此圓周上取一點 P，命 PA, PB 之延線與圓周之交點爲 X, Y，則弦 XY 爲極大時，P 點之位置若何?



解 $X\hat{P}Y$ 爲極大時，XY 亦爲極大；此時之 P 有二，其位置可過 A, B 作切所設圓之二圓以決定之 [前題].

2287. 設 A 爲所設半圓周上之定點，B 爲定半徑上之中點，P 爲同圓周上之任意點，求 AP＋2BP 之極小或極大值.

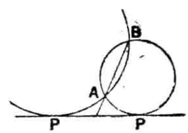
解 設 O 爲所設半圓之中心，r 爲半徑之長，於是若四邊形 APBO 非圓之內接四邊形，則 $\frac{1}{2}\times r(AP+2BP)>AB\cdot r$ [1150 題]，即 $AP+2BP>2AB$. 故 AP＋2BP 之極小，在 P 爲圓 OAB 截所設圓之點時.



別解 作中心 O 半徑 OB 之圓，命 OA, OP 與此圓之交點爲 M, P′，又命 OB 與所設圓之交點爲 N，於是 $AP+2BP=2(MP'+NP')$. 此括弧內之和，在 P′ 爲 MN 與內圓之交點時極小；今設 P 爲外圓周上與此對應之點，則因 $\triangle BAO\equiv\triangle MNO$. 故 $B\hat{A}O=M\hat{N}O=O\hat{P}B$，故 P 在圓 OAB 上.

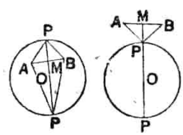
2288. 設 A, B 爲在所設直線同側之二所設點，試在此所設直線上求一點 P，令 $A\hat{P}B$ 爲極大或極小.

解 過 A, B 引二圓，令各切所設直線，命其任一切點爲 P，則 $A\hat{P}B$ 皆爲極大. 延長 AB，令交所設直線，則 AB 張於此交點之角，有極小值零.

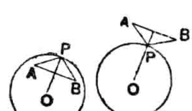


2289. 設 P 爲所設圓周上之動點，A, B 爲二定點，求 P 之位置，令 (1) $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$，或 (2) PA＋PB 爲極大或極小. [是曰 Alhazen 氏問題].

解 (1) 設 M 爲 AB 之中點，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PM}^2+2\overline{MA}^2$，故其極大或極小，在 PM 爲極大或極小時. 即引過 M 之直徑，若於此直徑之兩端中，取其遠 M 者爲 P，則所設式有極大值，取其近 M 者爲 P，則所設式有極小值.



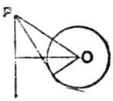
(2) 命圓之中心爲 O，其圓周上之任意點爲 P，則 $O\hat{P}A=O\hat{P}B$ 時，PA＋PB 爲極大或極小. 有時 (A) 設圓與點 A, B 在 P 上切線之異側，則 PA＋PB 爲極小，(B) 設圓與



點 A, B 在 P 上切線之同側，則 PA+PB 或無極大，或無極小，或並無之.［此吟味與圓錐曲線法相闗，參照 2314 題］.

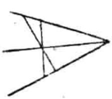
2290. 試由所設直線上之一點，至所設圓引最短之切線.

解 設 O 爲所設圓之中心，P 爲所設直線上之一點，則 $\overline{PO}^2=$(由 P 所引切線)$^2+$(半徑)^2，故 PO 與由 P 所引切線同時爲極小，即在 P 爲由 O 至所設直線所引垂線之足時極小.



2291. 有一定角，及其二等分線上之一定點．過此定點在定角內所引之直線中，與角之二邊成等角者有極小之長，且其所截得之三角形，有極小之面積.

解 由 2262 題，可知具所設條件之三角形，顯然有極小之面積．又過此定點之各直線，其所截得之一切三角形中，以具所設條件之三角形，有最大之高，而其面積爲最小，因此其底邊爲最小.



2292. 與所設角之二邊交，而成定面積三角形之一切直線中，與角之二邊成等角者，有極小之長.

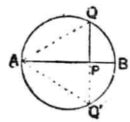
解 與所設角之二邊交之直線，其所截取之三角形中，若其面積爲一定，則因如題文之直線所截得之三角形之高，大於他直線所截得之三角形之高，故其底邊爲極小.

2293. 求所設圓之極大內接三角形.

解 極大內接三角形爲等邊三角形．蓋若此三角形之任何二邊不等，則由 2258 題，可得更大之內接三角形也．故極大三角形，非三邊相等不可.

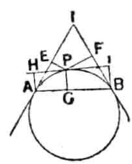
2294. 在一圓之直徑 AB 上取一點 P，引 PQ 令垂直於此直徑 AB，且交圓於 Q，則欲令 AP·PQ 爲極大，P 點之位置須如何?

解 延長 PQ，令交圓於 Q′．於是 AP·PQ＝△AQQ′，故在等邊三角形時爲極大．此時之 P，爲半徑之中點.



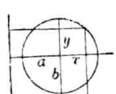
2295. 設 TA, TB 爲定圓之定切線，P 爲此定圓周上之一點．欲令 (1) 由 P 至 TA, TB 所引二垂線所包之矩形，(2) 由 A, B 至 P 上切線所引二垂線所包之矩形爲極大或極小，則 P 點之位置當若何?

解 由 P 至切線 TA 所引之垂線 PE，等於由 A 至 P 上之切線所引之垂線 AH．同理，PF＝BL．因此 AH·BL＝PE·PF＝$\overline{PG}^2$［1114 題］，但 PG 爲由 P 至 AB 所引之垂線，故各矩形之極大，在 P 爲弧 AB 之中點時，其極小，在 P 爲 A 及 B 時.



2296. 有一圓及不交此圓而相直交之二直線，試在此圓周上求一點，令由此點至二直線之距離和爲極大或極小.

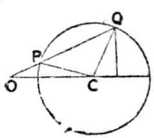
解 設 a, b 爲由圓之中心至所設二直線之距離，$a+x$, $b+y$ 爲由圓周上之一點至所設二直線之距離，於是 x, y 分別爲由該點至所設二直線過中心之二平行線之距離，而 x, y 之爲正或負，視該點關於此二平行線之位置而定.



此時所設之距離和爲 $a+x+b+y$, 此和顯然與 $x+y$ 同時爲極大, 且在 $x+y$ 爲負,而絕對值爲極大時極小. 因此由 2256 題, 所求之位置, 可平行於所設二直線所成角之二等分線, 引一直徑, 以求其兩端卽得. [x^2+y^2 爲定量,故 $x+y$ 在 $x=y$ 時爲極大, 卽所求點在過中心, 而二等分所設二直線之平行線所夾角之直徑上時爲極大].

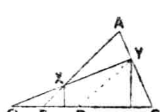
2297. 設 O 爲圓之直徑延線上之定點, 試過 O 引一割線 OPQ, 令由 P 及 Q 至直徑所引二垂線之差爲極大.

解 命 C 爲圓之中心,則(所設垂線之差) $\propto$($\triangle OCQ-\triangle OCP=\triangle PCQ$). 而 $\triangle PCQ$ 之極大, 在 $P\hat{C}Q$ 爲直角時 [2283題], 故得作圖法如下.作所設圓之內接正方形,再作此正方形之內切圓,於是由 O 至此圓所引之切線,各爲所求割線.



2298. 命所設三角形爲 ABC, O 爲邊 CB 延線上之定點, 由 O 引直線 OXY, 令交 AB, AC 於 X, Y 然則由 X, Y 至邊 BC 所引二垂線之差爲極大時, OXY 之位置若何?

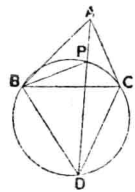
解 設 D 爲 CB 上之一點, 則得 (由 X, Y 至 BC 之垂線之差) $\propto\triangle ODY-\triangle ODX$ $\propto\triangle DXY$, 而此最後三角形極大時之條件, 卽所求條件, 可由 2273 題定得之.



2299. 設 ABC 爲所設三角形, P 爲其內之動點, 則 (1) $\Sigma\overline{PA}^2$, (2) ΣPA 爲極小時, P 點之位置如何?

解 (1) 若 G 爲重心, 則 $\Sigma\overline{PA}^2=\Sigma\overline{GA}^2+3\overline{PG}^2$, 故若 P 爲重心,則 $\Sigma\overline{PA}^2$ 爲極小.

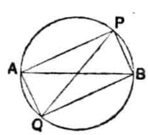
(2) 在 BC 上作等邊三角形 BDC 於外側, 若 P 在 $\triangle ABC$ 內, 而不在圓 BCD 上, 則 $PB\cdot CD+PC\cdot BD+PA\cdot BC>PD\cdot BC+PA\cdot BC$, 卽 $PB+PC+PA>PD+PA$. 而若 P 在此圓周上, 則不等式變爲等式 [1150題]. 因此若 P 在圓 BCD 上,卽爲 AD 與圓 BCD 之交點時, 則 ΣPA 與 $PD+PA$ 同時爲極小.



注意 此P點曰 Fermat 氏點, $A\hat{P}B=B\hat{P}C=C\hat{P}A$.

2300. 設 AB 爲一半圓之直徑, P 爲半圓弧上之點, 今設 a, b 爲所設完全數, 則 $a\cdot PA+b\cdot PB$ 爲極大時, P 之位置如何?

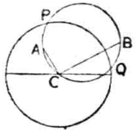
解 在他半圓弧上求一點 Q, 令 $QB:QA=a:b$, 又求 c, 令等於以 a 及 b 爲邊之直角三角形之斜邊,則 $a:b:c=QB:QA:AB$. 而 $QB\cdot AP+QA\cdot BP=AB\cdot QP$, 故 $a\cdot AP+b\cdot BP=c\cdot QP$. 而 QP 在過 Q 而爲直徑時極大, 此時 $PA:PB=QB:QA=a:b$. 因此 P 點可用 1603 題中所述軌跡求得之.



2301. 設 A 及 B 爲二定點,分別在中心爲 C 之定圓之內部及外部, BC, AC 分別爲半徑之 m, n 倍, P, Q 爲定圓周上之二點. 於是若此二點爲圓 ACB 與定圓之交點, 則 (1)

$m\cdot PA+n\cdot PB$ 爲極小, (2) $m\cdot QA\sim n\cdot QB$ 爲極大. 但 C 與 P 在 AB 之異側, C 與 Q 在 AB 之同側.

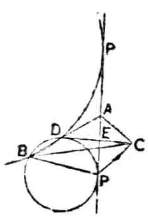
證 (1)應用 1150 題於四邊形 PACB, P 若不在圓 ABC 上, 則 $mr\cdot AP+nr\cdot BP>AB\cdot r$. 但 r 乃中心 C 之圓之半徑. 故 $m\cdot AP+n\cdot BP>AB$. 而 P 若移至題文之位置, 則此不等式變爲等式.



(2) 用同樣之方法, 由四邊形 QCAB, 通常可得 $r\cdot AB+nr\cdot BQ>mr\cdot AQ$, 卽 $m\cdot AQ\sim n\cdot BQ<AB$. 若 Q 移至題文之位置, 則不等式變爲等式.

2302. 設 ABC 爲所設三角形, 試在角 A 之二等分線上求一點 P, 令 $P\hat{B}C$ 與 $P\hat{C}B$ 之差爲極大; 並證極大時是等角之和等於角 BAC 之半分.

解 假定 AC<AB, 由 C 至 A 之二等分線引垂線, 令交 AB 於 D. 過 B, D 作一圓, 令切二等分線於 P, 則 P 卽所求點. 而切點 P 在頂點 A 之下方及上方, 各有一個, 此二點皆令 $P\hat{B}C\sim P\hat{C}B$ 爲極大. 何則? 就第一點言, $P\hat{B}C+P\hat{C}B=\frac{1}{2}B\hat{A}C$; 就第二點言, $P\hat{B}C+P\hat{C}B=\pi-\frac{1}{2}B\hat{A}C$. 命 $B\hat{A}C$ 之二等分線與 DC 之交點爲 E. 於是視 P 在底邊之下方或頂點之上方而 $P\hat{B}C\sim P\hat{C}B=P\hat{B}E\sim P\hat{D}E=D\hat{P}B\mp D\hat{E}B$. 然 $D\hat{E}B$ 一定, 故所設之極大值, 在 $D\hat{P}B$ 爲極大時, 而欲令 $D\hat{P}B$ 爲極大, 須 P 爲過 B, D 之圓與 AE 之切點. 又對於此二點, $P\hat{B}C+P\hat{C}B=\pi-(B\hat{P}A+A\hat{P}C)=\pi-(B\hat{P}A+A\hat{P}D)=\pi-(B\hat{P}A+A\hat{B}P)=B\hat{A}P$.



2303. 設邊數爲已知之多角形之各頂點, 分別在與邊數同個數之定直線上, 則此多角形周之極小, 在此定直線皆將多角形之外角二等分時.

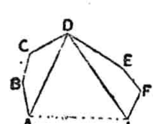
證 若定直線之一, 不適合此條件, 則不變他頂點, 僅將在此直線上之頂點移動, 令此直線適將頂點上之外角二等分, 則多角形之周較前短 [2264題], 故如題所言.

2304. 邊數爲已知之等周多角形中, 正多角形有極大之面積.

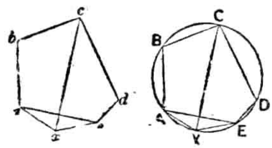
證 此多角形之二隣邊不等時, 若不動他頂點, 僅將此二邊所成之頂點移動, 令此二邊相等 [此二邊之和, 當然與前無異], 則多角形之面積卽增大 [2261 題]. 故如題所言.

2305. 多角形中, 若除一邊外之其他各邊皆爲所設長時, 則此多角形之極大, 在內接於除外之一邊爲直徑之半圓時. 又試由是導出, 若多角形之一切邊爲所設長, 則此多角形之極大, 在內接於圓時.

證 設多角形爲 ABCDEF……L, AL 爲非所設長之邊. 若 $A\hat{D}L$ 非直角, 則不變多角形 ABCD 及 DEF……L, 而將 $A\hat{D}L$ 變爲直角時, △ADL 之面積卽增大, 從而多角形 ABCDEF……L 之面積亦增大 [2260題]. 據此, 若 AL 張於他頂點之角亦非直角, 則一一變爲直角後, 多角形之面積卽爲極大.



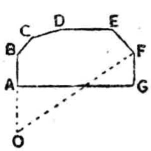
設 ABCDE 及 $abcde$ 爲各邊分別相等之二



多角形, ABCDE 內接於圓, 而 $abcde$ 不內接於圓. 今設 ABCDE 之外接圓中,過 C 直徑之他端爲 X, 假定 X 在弧 AE 上. 在直線 ae 上作三角形 axe, 令全等於三角形 AXE, 則根據前述, 多角形 $CBAX > cbax$, 多角形 $CDEX > cdex$, 故多角形 $ABCDE > abcde$ [參照 2316題].

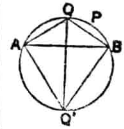
2306. 設多角形中,除一邊外,其他各邊皆爲定長, 而除外一邊之兩隣邊相平行, 然則此多角形何時爲極大?

解 設多角形爲 ABCDEFG, 兩邊 AB, GF 平行. 在 BA 之延線上取一點 O, 令 $AO=FG$, 則 AG 及 OF 互相二等分, 故 $\triangle OBF =$ 四邊形ABFG, 因此多角形 ABCDEFG $=$ 多角形 OBCDEF, 故其極大在 B, C, D, E 共在 FO 爲直徑之圓周上時 [前題].

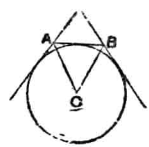


2307. (1)圓之內接同邊數諸多角形中, 以正多角形之面積及周爲極大. (2)圓之外切同邊數諸多角形中, 以正多角形之面積及周爲極小.

解 (1)以所設弓形之弦爲底,頂點在其弧上之一切三角形中, 二等邊者有極大之面積及周. 關於面積之證明,已詳 2258 題中. 關於周之證明如下: 設 P 爲弧 APB 上之任意點, Q 爲同弧之中點, 過 Q 之直徑之他端爲 Q'. 於是由 Ptolemy 氏定理, $AQ'(AQ+QB)=AB\cdot QQ'$, $AQ'(AP+PB)=AB\cdot PQ'$. 而 $QQ'>PQ'$, 故 $AQ+QB>AP+PB$. 因此, 多角形之相隣二邊中, 若有不等者存在, 則可不動他頂點, 而將二不等隣邊相交處之頂點移動, 令此二邊相等, 以增加面積及周. 故如題所言.



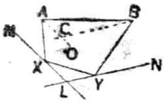
(2) 設有切於一圓之二定切線,引第三切線與之相交, 則此三切線所成之三角形面積, 在第三切線與前二切線成等角時爲極大, 而此時之第三切線爲最短. 其中第一部分,已於 2279 題證明, 第二部分可證之如下. $\triangle OAB$ 中,高及 $A\hat{O}B$ 一定不易[2279題], 故 AB 在 $\triangle OAB$ 爲極小時, 即 AB 與二定切線成等角時爲極小 [2263題]. 故外切多角形之相隣二角中, 若有不等者存在, 則可不動他邊, 而單將此不等角間之邊移動, 令其與兩端之切線成等角, 以增加此三切線所成之三角形面積, 從而減少多角形之面積. 又如是移動時, 移動之切線之長減小, 因而多角形之周亦減小. 故如題所言.



注意 動邊旁二邊之切點間之多角形之周,適等於動邊之二倍.

2308. 設四邊形之一邊固定, 其對邊恆過一定點, 而不定頂點分別在所設二直線上, 則此四邊形在何時爲極大?

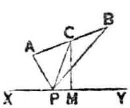
解 設 AB 爲四邊形 AXYB 之固定邊, LM,



LN 爲 X, Y 分別所在之直線, 且 O 爲邊 XY 所過之定點. 過 A 及 B 分別平行於 LM, LN 引直線, 命其交點爲 C, 則 C 爲定點. 過 O 引直線 XY, 令交 LM, LN 於 X, Y, 聯結 AX, BY, 則四邊形 ABYX $=\triangle ACB+\triangle ACX+\triangle BCY+\triangle CXY$. 是等三角形中, 第一三角形爲定三角形, 第二, 第三兩三角形之面積爲一定, 故此四邊形在 $\triangle CXY$ 爲極大時極大. 而 $\triangle CXY$ 之極大時, 可由 2273 題知之.

2309. 試在一所設直線上求一點, 令由二所設點至此點之距離上正方形之和爲最小.

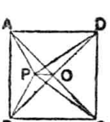
解 命所設直線爲 XY, 所設二點爲 A, B.



在 XY 上取任意點 P, 則 $\overline{AP}^2+\overline{PB}^2=2(\overline{AC}^2+\overline{PC}^2)$ [但 C 爲 AB 之中點]. 上式右邊之 AC 爲定長, 故 $\overline{AP}^2+\overline{PB}^2$ 之最小, 在 PC 爲最小時. 故由 C 至 XY 引垂線 CM, 命其足爲 M, 則 M 卽所求點.

2310. 試在正方形內求一點, 令由此點至四頂點之直線上之正方形和爲最小.

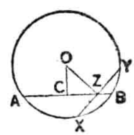
解 設 ABCD 爲正方形, 對角線交點爲 O,



命一任意點爲 P, 則 $\overline{AP}^2+\overline{PC}^2=2(\overline{AO}^2+\overline{PO}^2)$, $\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=2(\overline{BO}^2+\overline{PO}^2)$. 然 AO $=$ BO, 故 $\overline{AP}^2+\overline{PC}^2+\overline{BP}^2+\overline{DP}^2=4(\overline{AO}^2+\overline{PO}^2)$; 故此式左邊值之最小, 在 PO 爲最小時. 因此, 所求點爲對角線交點 O.

2311. 設 AB 爲圓中之定弦, XY 爲一任意弦, 後弦之中點 Z 在前弦上, 求 XY 之最大及最小者. 又 Z 愈近 AB 之中點, 則 XY 愈大. 試證之.

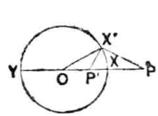
證 設圓之中心爲 O, 聯結 OZ, 則 XY



$\perp$ OZ; 而 OZ 愈小, 則弦 XY 從而愈大, 故 OZ 最小時, 弦爲最大. 然 Z 恆在弦 AB 上, 故 OZ 之最小, 在 OZ 垂直於 AB 時, 卽 Z 移至 AB 之中點 C 時; 此時 XY 顯與 AB 合. 同理, XY 之最小, 在 OZ 爲最大時, 卽 Z 移至 A 或 B 時, 此時弦 XY 爲零. 次, Z 由 A 移向 C 時, OZ 漸小, 故 XY 漸大, 至 C 時則爲最大; 越 C 而移向 B 時, 則 XY 漸小, 終爲零.

2312. 由所設點至所設圓周之最長及最短直線過中心.

證 設所設圓之中心爲 O, 所設圓外之點

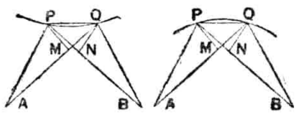


爲 P; 求證由 P 至圓 O 周上之最大及最小距離過中心 O. 由 P 過 O 引直線 PXOY, 命其與圓周之二交點, 近 P 者爲 X, 遠 P 者爲 Y. 由 P 至圓周引任意直線 PX′, 聯結 OX′, 則 PO $-$ OX′ $<$ PX′; 而 OX′ $=$ OX, 故 PX $<$ PX′, 故 PX 爲由 P 至圓周之最小距離. 次, PO $+$ OX′ $>$ PX′, 卽 PY $>$ PX′, 故 PY 爲最大距離. 故最大者與最小者過中心. 若 P 移至圓內之 P′, 亦可仿前證之. 何則, 由 P′ 至圓周引任意直線 P′X′, 則 OX′ $-$ OP′

$<P'X'$, 卽 $P'X<P'X'$, 又 $OX'+OP'>P'X'$; 卽 $P'Y>P'X'$ 故也.

2313. 設 A, B 爲圓外之二定點,試在圓周上求一點 P, 令由 A, B 至 P 之距離和爲極大或極小.

解　設 P 爲所求點, Q 爲圓周上與 P 相隣

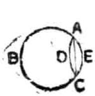


之點,聯結 AQ, BQ, PQ, 引 AQ 之垂線 PM, 及 BP 之垂線 QN. 此時 APM 爲直角三角形, $P\hat{A}M$ 甚小, 故 $\triangle APM$ 可視作二等邊, 因而 $AM=AP$. 同理, $BN=BQ$. 故 $AQ=AM+MQ=AP+MQ$, $BQ=BN=BP-PN$. 然 $AP+BP=AQ+QB=AP+MQ+BP-PN$, 故 $MQ=NP$, 卽直角三角形 PNQ, PMQ 全等, 故 $N\hat{P}Q=M\hat{Q}P$. 而 PQ 最後爲 P 上切線之方向, 故 AP 與 BQ 在其與 P 上切線成等角,且圓弧凸向 AB 時爲極小,而凹向時爲極大.

注意　P 乃以 A, B 爲焦點之橢圓與原圓之切點.

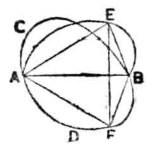
2314. 等周之平面形中,圓爲最大.

證　本題可分以下三段證之.(1)有同周之種種形及面積之圖形, 可作得無數, 且得使其面積爲任意小,但不能使其任意大, 此甚易知之. 執此以言, 則有同周之圖形中,必有極大者.



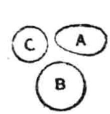
(2) 有極大面積之定周圖形,必爲凸形. 何則,設 ABCD 爲凹形,且聯結 AC 之直線在形外, 則以 AC 爲軸, 將 ADC 折至對面 AEC 之位置, 則兩圖形 ABCD ABCE 之周相等, 面積後者較大, 故凹形不能爲定周圖形中之有極大面積者.

(3) 設 ACBFD 爲以定周所作之極大圖形,



在其周上取二點 A, B, 而將周等分爲二, 則直線 AB 亦將面積等分爲二. 何則,若二部分 ACB, ADB 不等, 而 ADB 大於 ACB, 則以 AB 爲界, 而將 ADB 折至 AEB 之位置,於是 AEBD 大於 ACBD, 而其周則相等; 但此違反假設, 故將周二等分之直線 AB, 又將面積二等分.次,設 ACBD 爲極大之圖形,從而 AEBD 亦爲極大之圖形.此時因二部分 AEB, ADB 關於 AB 爲對稱,故取二對應點 E, F, 則 EF 垂直於 AB, 且爲 AB 所二等分甚明. 而 $A\hat{E}B$, $A\hat{F}B$ 皆當爲直角,因若非直角,則不變弦 AF, BF, AE, BE 之長, 而令 $A\hat{E}B$, $A\hat{F}B$ 爲直角時, 兩三角形 AFB, AEB 增大 [2260題], 從而圖形 AEBFD 亦增大故也. 而 E, F 爲周上對應之任意點, 故 AEB, AFB 非皆爲半圓不可. 據此, 二等分極大圖形之周之二點聯結, 則其所生之圖形之半分, 皆爲半圓, 故有定周之極大圖形爲圓.

2315. 有等面積之平面形中, 周最小者爲圓.

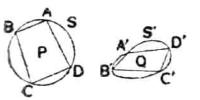


證　設 C 爲一圓, A 爲與其等積之他形, 求證 C 之周小於 A 之周. 作圓 B, 令其周等於 A 之周,則 $B>A$ [2314題],

從而 B>C. 故 C 之周小於 B 之周, 從而 C 之周又小於 A 之周.

2316. 邊長分別相等之直線形中, 內接於圓者爲最大.

證 設 ABCD, A′B′C′D′ 爲各邊分別相等之二多角形, 且 ABCD 得內接於圓, 而 A′B′C′D′ 則否; 求證 ABCD 大於 A′B′C′D′. 在 A′B′C′D′ 之各邊上作弓形, 令與 ABCD 各邊上之弓形分別全等, 命由是所生之全圖形爲 S′, 則 S′ 之周等於 S 之周, 故 S 大於 S′. 因此, 雙方減去全等之弓形, 卽知多角形 ABCD 較多角形 A′B′C′D′ 大.

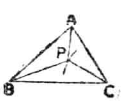


2317. 有等周之三角形中, 正三角形爲最大.

證 本題爲 2304 題之特例.

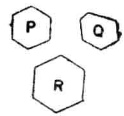
2318. 設三角形之各角, 小於三分之四直角, 試在此三角形內求一點, 令由此點至各角頂之距離和爲最小.

證 設 ABC 爲各角小於 $\frac{4}{3}\hat{R}$ 之三角形, P 爲所求點. 設 CP 不變, 則 AP+BP 之最小, 在 AP, BP 與 C 爲中心, CP 爲半徑之圓過 P 之切線成等角時 [2313題], 故 $A\hat{P}C=B\hat{P}C$. 同理, 設 AP 爲一定, 則在 $A\hat{P}B=A\hat{P}C$ 時. 因此, 設三者皆變, 則在 $A\hat{P}C=A\hat{P}B=B\hat{P}C$ 時, 卽各角皆爲 $\frac{4}{3}\hat{R}$ 時. 故欲得所求點, 可在各邊上就外側作正三角形, 作是等正三角形之外接圓, 以求三圓之交點卽得.



2319. 等積之同邊數多角形中, 正多角形之周爲最小.

證 設 P, Q 爲等積之同邊數多角形, 且 P 爲正多角形, Q 則否; 求證 P 之周小於 Q 之周. 作正多角形 R, 令其周等於 Q 之周, 邊數等於 Q 之邊數, 則 R>Q [2304題], 從而 P<R. 而 P, R 爲等邊數之正多角形, 故 P 之周小於 R 之周, 從而 P 之周小於 Q 之周.

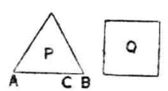


2320. 等積三角形中, 正三角形之周爲最小.

證 本題爲 2319 題之特例.

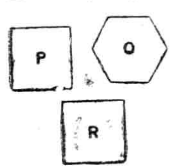
2321. 以定周作正多角形, 則其邊數愈多, 面積愈大.

證 設 P 爲正三角形, Q 爲正方形, 其周相等. 在正三角形 P 之一邊 AB 上取任意點 C, 則 P 可視作一四邊形, 其二邊 AC, BC 交於 C, 成平角. 於是等周之兩四邊形中, Q 爲正方形, 故 Q>P [2304題]. 同理, 設 R 爲與 Q 等周之正五邊形, 則 R>Q. 由是類推, 則邊數愈多, 面積愈大.



2322. 以定面積作正多角形, 則其邊數愈多, 周愈小.

證 設 P, Q 爲面積相等之正多角形, 而 Q 之邊數大於 P 之邊數; 求證 Q 之周小於 P 之周. 作正多角形 R, 令其周等於 Q 之周, 邊數等於 P 之邊



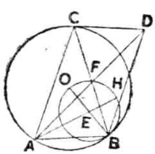
數,則 $R<Q$ [2321題], 從而 $R<P$. 故 R 之周小於 P 之周,從而 Q 之周小於 P 之周. 故面積相等之正多角形中, 邊數多者, 其周較小.

2323. 等角等周之平行四邊形中, 菱形之面積爲最大.

解 等角平行四邊形之面積,比例於其二隣邊所包之矩形 [1145題], 故此矩形最大,則其平行四邊形亦最大. 今周爲一定, 故二隣邊之和,即周之半分,亦一定; 故矩形之最大, 在二邊相等時 [2252題], 因此等角等周之平行四邊形中, 菱形之面積爲最大.

2324. 設 AB 爲圓之定弦, 試由 A 引一弦 AC, 令以 AB, AC 爲二隣邊之平行四邊形中,由 A 所引之對角線爲最大.

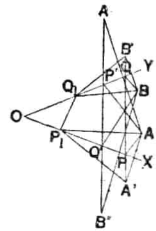
解 設 AC 在某位置時之平行四邊形爲



ABDC. 因對角線互相二等分於其交點 F, 故 $AF=\frac{1}{2}AD$, 因此 AD 之最大在 AF 爲最大時. 又 BC 之中點 F 之軌跡, 乃聯結中心 O 與 B 之直線, 即所設圓之半徑爲直徑之圓周 [1545題]. 故欲求最大之 AF, 可求由 A 至圓周 OFB 之最大線,即由 A 過 OB 之中點 E 止於圓周之直線 AH [2312題], 由是即可求得弦 AC 之位置及最大對角線之長.

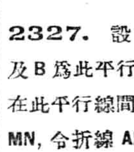
2325. 設 A 及 B 爲所設角 XOY 內之二所設點, 試在 OX [或 OY] 上取一點 P, 在 OY [或 OX] 上取一點 Q, 令 $AP+PQ+QB$ 之長爲最小.

解 設 A, B 分別關於 OX, OY 之對稱點爲 A', B', 直線 $A'B'$ 與 OX, OY 之交點爲 P, Q, 則 P 及 Q 即所求點, $AP+PQ+QB$ 爲最小. 何則? 在 OX, OY 上分別取任意點 P_1, Q_1, 則 $P_1A=P_1A'$, $Q_1B=Q_1B'$, 從而 $AP_1+P_1Q_1+Q_1B=A'P_1+P_1Q_1+Q_1B'$, 而大於 $AP+PQ+QB$, 即 $A'B'$ [392題].



註 設 A 關於 OY, B 關於 OX 之對稱點分別爲 A'', B'', 直線 $A''B''$ 與 OY, OX 之交點爲 P', Q', 則可得另一最小長 $AP'+P'Q'+Q'B$. 又此二最小長孰小, 乃單屬於幾何學上之問題,而非極大極小之問題, 因所謂極大極小者, 乃就連續量而言者也. 故本題之解有二.

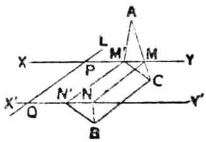
2326. 試過三所設點,引三直線,作極大之正三角形.



解 本題爲2270題之特例, 所異者, 即 $\triangle ABC$ 各邊上所作之圓弓形, 其所含之角爲 $\frac{2}{3}\hat{R}$ 也.

2327. 設 XY, $X'Y'$ 爲所設二平行線, A 及 B 爲此平行線外且在異側之二所設點, 試在此平行線間, 插入一有所設方向之直線 MN, 令折線 AMNB 爲最短.

解 命所設方向之直線爲 L, 其在平行線間之部分爲 PQ, 假定 A, B 之位置, 如圖所示, 由 B [或 A] 引 $BC \parallel PQ$, 且 $BC=PQ$, 命 AC 與 XY 之交點爲 M, 平行於 L 引

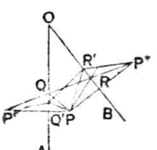


MN, 命其與 X'Y' 之交點爲 N, 則 AMNB 卽所求之最短折線. 何則? 引他任意折線 AM'N'B. 聯結 M'C, 則因 BC $\parallel$ M'N', 且皆等於 PQ, 故 BCM'N' 爲平行四邊形, 從而 BN' = CM', 故 AM'N'B = BC + CM' + AM'. 而 AMNB = AC + BC, 且 AM' + M'C > AC, 故 AM'N'B > AMNB.

注意 若最初由 A 引 L 之平行線,令其長等於 PQ, 則聯結其端與 B 之直線,交 X'Y' 於 N, 故所求折線僅上一者.

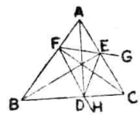
2328. 作三角形, 令其一頂點在所設點上, 他二頂點分別在相交二直線上, 而其周爲最小.

證 設 P 爲所設點, 相交二直線爲 OA, OB. 假定三角形 PQR 之二邊 PQ, QR 與直線 OA 成等角, 二邊 PR, QR 與直線 OB 成等角. 作他任意三角形 PQ'R'. 命 P 關於 OA, OB 之對稱點分別爲 P', P'', 於是三角形 PQR 之周等於直線 P'P'' [391題], 此甚易明之. 又三角形 PQ'R' 之周,顯然等於折線 P'Q'R'P'', 故三角形 PQR 之周小於三角形 PQ'R' 之周. 由是可知, 所求三角形乃其各邊與所設二直線 OA, OB 成等角者.



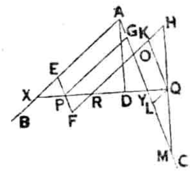
2329. 銳角三角形之內接三角形中, 周最小者爲垂足三角形.

證 設三角形 ABC 之一內接三角形之頂點,置於邊 BC 上之 D 點, 則他頂點 E, F 令二邊 DE, FE, 及二邊 DF, EF 分別與原三角形之邊 AC, AB 成等角時, 三角形之周爲最小 [2328題]. 同理, 若點 E 一定,或點 F 一定,則他二頂點上之邊與原三角形之邊成等角時,內接三角形之周爲最小. 故普偏言之, 內接三角形周之最小, 在其邊與原三角形之邊成等角時. 據此, 設三角形 DEF 之邊 FD, ED 與 BC, 邊 DE, FE 與 AC, 邊 EF, DF 與 AB 成等角. 延長 FE, FD, 在其上分別取點 G, H, 於是 $D\hat{E}C = F\hat{E}A = C\hat{E}G$, 故 CE 爲 $D\hat{E}G$ 之二等分線. 同理, CD 爲 $E\hat{D}H$ 之二等分線. 於是因 CE, CD 分別爲三角形 DEF 之外角 $\hat{E}$, $\hat{D}$ 之二等分線, 故第三角 F 之二等分線過 CE, CD 之交點 C [180題]. 而 AB 又爲 $E\hat{F}D$ 之外角之二等分線, 故 CF $\perp$ AB, 因此 F 爲由 C 至對邊 AB 所引垂線之足. 同理, D, E 亦爲三角形 ABC 中由 A, B 至對邊所引垂線之足, 故 DEF 爲三角形 ABC 之垂足三角形. 因此, 銳角三角形之內接三角形中, 周最小者爲垂足三角形.



2330. 設 P 爲角 BAC 內之一定點, XPY 爲過 P 在角之二邊間所引之直線, D 爲由 A 至 XPY 所引垂線之足; 求證 XPY 之最短, 在此線由 D 至角之一邊之一部分 DY 等於此線由定點 P 至他邊之一部分 PX 時.

證 延長 XY, 令 PQ = XY, 則 YQ = PX. 又由 P 平行於 AC 引 EP, 在其延線上取 F 點, 令 PF = EP, 由 P, F 平行於 BA 引 PG,



FH, 再由 Q 平行於 AB, CA 引 QL, QK 於是因$\triangle FPR \equiv \triangle EPX$, 故 $PR=PX=YQ$, 因此 $\triangle RKQ \equiv \triangle PGY$, 故四邊形 YQKO, ROGP 相等,而$\triangle YLQ \equiv \triangle PFR$, 故 $\square LK=\square FG=\square PA$, 故 XY 之位置,不論變至何處,$\square LK$ 恆等於$\square PA$. 然若 $DY=PX$, 則 $PX=PR=DY=YQ$, 故 $XD=RQ$. 因此, 設引 XQ 之垂線 HQM, 則 $\triangle AXD \equiv \triangle HRQ$, 故 $AD=HQ$; 而 $AD=QM$, 故 $HQ=QM$, 卽 Q 爲三角形 HOM 之一邊 HM 之中點, 故 $\square LK$ 爲三角形 HOM 之最大內接平行四邊形. 據此, 仿 XQ 過 P 引他一直線 $X'Q'$, 又仿 $\square LK$ 作他 $\square L'K'$, 則 $\square L'K'=\square PA=\square LK$. 然 $\square LK$ 爲 $\triangle HOM$ 之最大內接平行四邊形,故與其等積之 $\square L'K'$ 不能內接於 $\triangle HOM$, 卽 Q' 在 $\triangle HOM$ 之一邊 HM 之外, 故 $PQ<PQ'$, 因 $PQ\perp HM$ 故也. 然 $PQ=XY$, $PQ'=X'Y'$, 故 $XY<X'Y'$, 故 XY 爲最短.

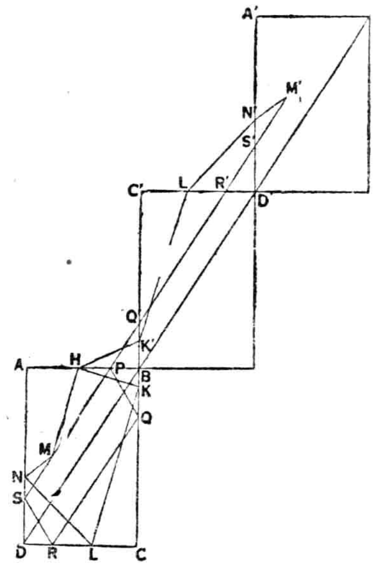
注意 此 XY 曰 Philo 氏線. 藉規及矩之運用[卽初等純正幾何學]以作此線之法, 至今尚未發見云.

2331. 有一矩形之彈子臺, 彈子在臺面上之任意位置 M, 打後歷觸臺之四緣而復歸原處, 求證其所經之路徑,爲由 M 順次聯結四邊上之任意點所得直線形周中之最小者.

證 就 393 題之圖, 設彈子之路徑爲 MPQRSM, 則其長爲 $N''M''$, 此甚易知之. 除此以外,順次聯結 M 及四邊上之任意點所得直線形之周,大於以 N'', M'' 爲端之某折線,此甚易知之,故顯然大於直線 $N''M''$. 因此彈子之路徑小於由 M 順次聯結四邊上之各點所得直線形之周.

注意 彈子之路徑,與 M 點之位置無關.

別證 在彈子臺矩形 ABCD 之對角線 DB

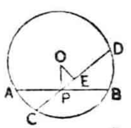


之延線上, 作與原形全等之二矩形, 如圖所示, 假定彈子之位置爲 M, 其路徑爲 MPQRSM, 則得證此折線,小於由 M 出發, 歷經各邊上之一點, 復至 M 之任意折線 MHKLNM 卽可. 今 MP, SM, QR 平行於對角線 BD, 又 PQ, SR 平行於對角線 AC [393 題], 故由 M 平行於 DB 引直線 $MPQ'R'S'$, 令截第二第三矩形之邊於 Q', R', S', 取 $S'M'=SM$, 則由 $\triangle PBQ' \equiv \triangle PBQ$, 知 PQ'

$=PQ$. 次，由 $\triangle Q'C'R'\equiv\triangle QCR$，知 $Q'R'=QR$；又由 $\triangle R'D'S'\equiv\triangle RDS$，知 $R'S'=RS$. 而 $S'M'=SM$，故直線 MM' 等於折線 $MPQRSM$，即 MM' 等於彈子之路徑. 又若取 $BK'=BK$, $C'L'=CL$, $D'N'=DN$，則折線 $MHKLNM$ 等於折線 $MHK'L'N'M'$，此易明之. 而直線爲二點間之最短線，故直線 $MM'<$ 折線 $MHK'L'N'M'$，故彈子之路徑小於任意折線 $MHKLNM$.

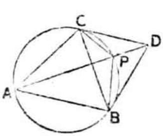
2332. 過圓內一定點之諸弦中，垂直於過此點之直徑者爲最小，過中心者爲最大.

解 設圓 O 內之定點爲 P，過 P 垂直於 OP 之弦爲 AB，他任意弦爲 CD. 由 O 引 CD 之垂線 OE，則直角三角形 OEP 中，$OP>OE$，從而 $AB<CD$ [449 題]，故 AB 小於過 P 之一切弦. 次，過 P 之直徑爲最大弦，因其至中心之距離等於零故也.



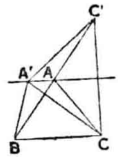
2333. 試在所設弓形之弧上求一點，令由此點至弦之兩端之距離和爲最大.

解 設 ACB 爲所設弓形，則所求點爲弧 ACB 之中點 C. 何則？取他任意點 P，聯結 AP, PB，在 AP 之延線上取 PD，令等於 PB，聯結 CD, CP，則因 C 爲弧 ACB 之中點，故 PC 將角 APB 之外角二等分，即將 $\triangle PBD$ 之頂角二等分. 故 PC 爲 BD 之垂直二等分線，故 $CB=CD$. 由是即可推知 $AC+CB<AP+PB$.



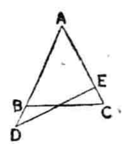
2334. 一底邊上之諸等積三角形中，其周以他二邊相等者爲最小，試證之.

證 以 BC 爲底邊，作二等邊三角形 ABC，又以 BC 爲底邊，作與 ABC 等積之任意三角形 $A'BC$ 於底之同側. 此時 $AA'\parallel BC$. 命 C 關於 AA' 之對稱點爲 C'，則 B, A, C' 在一直線上，此甚易明之. 因此 $BA+AC=BC'$，$BA'+A'C=BA'+A'C'$，故 $BA'+A'C'>BC'$，從而 $\triangle ABC$ 之周小於 $\triangle A'BC$ 之周.



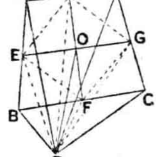
2335. 頂角及其二邊之和一定不易之三角形中，以此二邊相等者爲最大.

證 設 ABC 爲二等邊三角形，求證此三角形在 $\hat{A}$ 及 $AB+AC$ 一定之諸三角形中爲最大. 今在邊 AB, AC 取他任意長 AD, AE，令 $AD+AE=AB+AC=m$，則 $\triangle ABC:\triangle ADE=AB\cdot AC:AD\cdot AE$. 然 $AB\cdot AC>AD\cdot AE$ [2252 題]，故 $\triangle ABC>\triangle ADE$.



2336. 求一點，令由此點至四定點之距離上正方形之和爲最小.

解 設四定點爲 A, B, C, D，順次兩兩聯結 A, B, C, D，則成四邊形 ABCD，取任意點 P，聯結 PA, PB, PC, PD，命 AB, BC, CD, DA 之中點分別爲 E, F, G, H，聯結 PE, PG，則 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2(\overline{AE}^2+\overline{CG}^2)+2(\overline{PE}^2+\overline{PG}^2)$, $2(\overline{AE}^2+\overline{CG}^2)=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{CD}^2)=$(定量)，故 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$

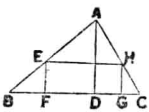


之最小,在 $\overline{PE}^2+\overline{PG}^2$ 爲最小時. 茲命 EG 之中點爲 O, 聯結 PO, 則 $\overline{PE}^2+\overline{PG}^2=2\overline{PO}^2+2\overline{EO}^2=2\overline{PO}^2+\frac{1}{2}\overline{EG}^2$. 而 $\overline{EG}^2$ 爲定量, 故前式之左邊,在 $\overline{PO}^2=0$, 卽 P 與 O 一致時爲最小, 從而 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$ 在 P 與 O 一致時爲最小, 因此, O 爲所求點. 次, 設 A, B, C, D 中有三者或四者在一直線上,可視爲特例,仿上求得之.

別證 聯結 PF, PH, 可同樣得解.

2337. 求所設三角形之最大內接矩形.

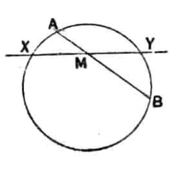
解 設 △ABC 中,底邊 $BC=a$, 高 $AD=h$, 其任意內接矩形爲 EFGH [圖中 FG 置於 BC 上]. 於是由三角形之相似, 得



$\frac{EH}{BC}=\frac{AE}{AB}$, 及 $\frac{EF}{AD}=\frac{BE}{BA}$, 故

$\frac{EH\cdot EF}{BC\cdot AD}=\frac{AE\cdot BE}{AB\cdot BA}$, 卽 $\frac{EF\cdot EH}{ah}=\frac{AE\cdot BE}{\overline{AB}^2}$. 而 ah, $\overline{AB}^2$ 爲定量,故 $EH\cdot EF$ 之最大,在 $AE\cdot BE$ 爲最大時. 然 $AE+EB=AB$, 卽定長,故 $AE\cdot EB$ 之最大, 在 $AE=EB$ 時 [2252 題], 卽 E 爲 AB 之中點時. 故 EH, EF 分別爲 a, h 之半分時,矩形 EFGH 之面積爲最大. 其值爲 $a/2\cdot h/2=ah/4=\frac{1}{2}\cdot\triangle ABC$, 即等於 △ABC 之半分.

2338. 在定直線之兩側,各有一定點,試過此二定點作一圓,令由此直線所截取之弦爲最小.



解 設定直線爲 XY, 在其兩側之二定點爲 A, B, 求過 A, B 作一圓,令由 XY 所截取之弦爲最小. 聯結 AB, 命其與 XY 之交點爲 M, 在 XY 上取 MX, 令等於 AM, MB 之比例中項, 過 A, B, X 作圓, 則此即所求圓. 何則? 設圓 AXB 截 XY 之點爲 Y, 則 $XM\cdot MY=AM\cdot MB=\overline{XM}^2$, 故 $XM=MY$; 而過 A, B 之任意圓由 XY 所截得之弦內分於點 M, 其兩分所包之矩形恆等於 $AM\cdot MB$, 卽 $\overline{XM}^2$ 故也 [2254 題].

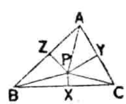
第十編

附錄

第一章 共點性及共線性

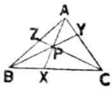
2339. 設 X, Y, Z 分別爲三角形 ABC 之邊 BC, CA, AB 上之點,今過是等點引其所在邊之垂線,若是等線爲共點線,則 $(\overline{BX}^2-\overline{CX}^2)+(\overline{CY}^2-\overline{AY}^2)+(\overline{AZ}^2-\overline{BZ}^2)=0$. 其逆亦眞.

證 設 P 爲三垂線之交點, 聯結 P 與 A, B, C, 則 $(\overline{BX}^2-\overline{CX}^2)+(\overline{CY}^2-\overline{AY}^2)+(\overline{AZ}^2-\overline{BZ}^2)=\overline{BP}^2-\overline{CP}^2+\overline{CP}^2-\overline{AP}^2+\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=0$. 反之,設 X, Y 上之垂線交於 P, 引 AB 之垂線 PZ′, 則由前證, $(\overline{BX}^2-\overline{CX}^2)+(\overline{CY}^2-\overline{AY}^2)+(\overline{AZ'}^2-\overline{BZ'}^2)=0$. 然由假定, $(\overline{BX}^2-\overline{CX}^2)+(\overline{CY}^2-\overline{AY}^2)+(\overline{AZ}^2-\overline{BZ}^2)=0$, 故 Z 與 Z′ 非同點.



2340. 設由三角形 ABC 之頂點 A, B, C 所引之三直線 AX, BY, CZ 分別與對邊之交點爲 X, Y, Z, 若此三直線爲共點線, 則 (AZ

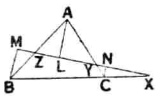
$:ZB)(BX : XC)(CY : YA) = 1$,
其逆亦眞 [Ceva 氏定理].



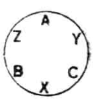
證　見 1187 題

2341. 設分別在三角形 ABC 之三邊 BC, CA, AB 上之三點 X, Y, Z 爲共線點，則 $(AZ : ZB)(BX : XC)(CY : YA) = 1$, 其逆亦眞 [Menelaus 氏定理].

證　見 1186 題.

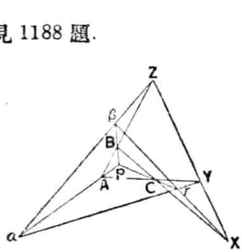


注意　以前三定理中之文字順序，可排列之如左圖. 以表三角形頂點之文字 A, B, C 置於一圓周上，以其對邊上之點 X, Y, Z 分別置於對應之位置，例如邊 BC 上之點 X, 置於弧 BC 之間. 於是可由某文字始，依一方廻轉，順次取其連續二文字，順次插入上比之位置. 此排列法極便於記憶.



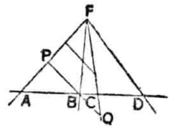
2342. 設兩三角形中，若聯結其對應頂點之直線爲共點線，則其對應二邊之交點爲共線點，其逆亦眞. [是曰 Desargue 氏定理].

證　見 1188 題.



2343. 具四射線之一定束線，爲一橫截線所截時，不問橫截線之位置如何，其四截點之十字比不變.

證　設束線 [焦點 F] 爲一橫截線截於 A, B, C, D, 過 B 平行於 FD 引一直線，令交 FA 於 P, 及 FC 於 Q. 於是 $AB : AD = PB : FD$, $CD : BC = FD : QB$, 故 $AB \cdot CD : AD \cdot BC = PB : QB$; 其右邊爲定比，故十字比 $AB \cdot CD : AD \cdot BC$ 對於一切橫截線恆一定.



注意　列點 A, B, C, D 之十字比，以 (ABCD) 表之，如上之束線，以 F (ABCD) 表之. 依據 Euler 氏定理 [762 題], 卽列點 A, B, C, D, 有 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ 之關係，若十字比 $AB \cdot CD : AD \cdot BC$, $AB \cdot CD : AC \cdot BD$, $AD \cdot BC : AC \cdot BD$ 中，有一者或其反比爲常數，則其他亦爲常數. 由此可知，十字比中，交換其任意二文字，同時又交換他二文字，比値不變.

2344. 將束線 AF, BF, CF, DF 延長，則此新束線之十字比，與原束線之十字比有同値.

解　由 2343 題自明.

2345. 設二束線有等十字比，且三射線公有，則第四射線亦公有.

證　由 2343 題自明.

2346. 設一束線中之各角，依次與他束線中之各角相等，則是等束線之十字比相等.

證　因置一束線於他束線，得全合故也.

2347. 將一圓周上之四點，與同圓周上之任意他點聯結，則其所得束線之十字比爲常數.

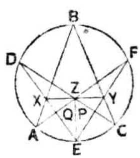
證　因如是聯結而得之束線，其各角爲常

數故也.

注意　設一圓周上之四點爲 A, B, C, D, 其與同圓周上之動點 P 聯結而生之束線之十字比,以 P(ABCD) 表之,其值與以任意橫截線截此束線所生點列之十字比同.

2348. 設 A, B, C, D, E, F 爲一圓周上之任意六點, 今將此六點依任意順序連續聯結之, 則如是所生之六直線內, 第一及第四之交點, 第二及第五之交點, 第三及第六之交點 [必要時, 是等直線延線之交點] 爲共線點.

證　命 AB, DE 之交點爲 X; BC, EF 之交點爲 Y; CD, FA 之交點爲 Z. 聯結 ZX, ZY, ZE, 命 ZA 與 XE 之交點爲 Q; ZC 與 YE 之交點爲 P. 此時 Z(FYPE) = C(FYPE)



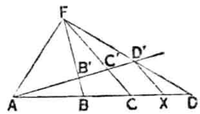
= C(FBDE) = A(FBDE) = A(QXDE) = Z(QXDE), 故對應於此始與終之二組束線有等十字比, 而其三射線公有, 故第四射線亦必公有,即 XZ, ZY 成一直線.

注意 1.　本題之最簡單者,爲依次聯結圓周上之各點, 而作六角形, 此時本題之定理,可述之如下. 圓之內接六邊形中,其對邊之交點爲共線點. 此定理曰 Pascal 氏定理,已見 1290 題.

注意 2.　如是之線 XYZ 曰 Pascal 氏線; 依種種不同之順序, 聯結此六點, 共可得六十條 Pascal 氏線. 參觀 Catalan 氏幾何學定理及問題第三編定理 28.

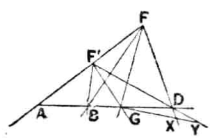
2349. 設有不在一直線上之二組點列, 每組有四點, 其中一點公有; 若此二組有等十字比,則聯結其對應點之直線爲共點線.

證　設 ABCD, AB′C′D′ 爲公有 A, 且 (ABCD) = (AB′C′D′) 之二組點列, 命直線 BB′, CC′ 之交點爲 F, 直線 FD′ 與 ABCD 之交點爲 X, 聯結點 F 與點 A, 於是 F(ABCX) = F(AB′C′D′) = F(ABCD), 故由 2345 題, FX 及 FD 非爲一射線不可,故 X 及 D 爲同點, 即 BB′, CC′, DD′ 爲共點線.



2350. 設有集點相異之二組束線, 每組有四射線, 其中一射線公有, 若此束線有等十字比,則其對應射線之交點爲共線點.

證　設 F(ABCD) 及 F′(ABCD) 爲公有射線 FF′ 及同十字比之二組束線, 將 BC 向雙方延長,令交 FF′ 於 A, FD 於 X, F′D 於 Y, 於是



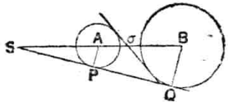
F(ABCX) = F(ABCD) = F′(ABCD) = F′(ABCY) = F(ABCY). 故由 2345 題, FX 及 FY 非爲同一射線不可,即 X 及 Y 一致, 從而此二點與 D 一致,故 B, C, D 爲共線點.

注意　前二定理可合爲一而簡單述之如下. 若二組點列或束線 ABCD, $abcd$ 有等十字比, 而 (A, a) 一致, 則 (B, b), (C, c), (D, d) 之結合線爲共點線,交點爲共線點.

第二章　相似中心

2351. 由兩圓之相似中心, 至此二圓中之一圓所引之切線,亦必切於他圓.

證　設圓 A 及 B 之相似外心爲 S, 由 S 至圓 A 所引切線 SP 之切點爲 P, 作 SP［必要時其延線］之垂線 BQ. 於是依據相似三角形之定理,

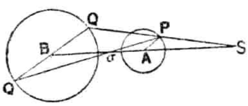


AP:BQ = SA:SB = (圓 A 之半徑):(圓 B 之半徑), 故 BQ 爲圓 B 之半徑, 從而 SPQ 爲切 B 圓於 Q 之切線. 關於相似內心 σ, 可完全仿上證之.

注意　設一圓完全在他圓之內, 則此二圓無公切線, 故其相似中心, 二者皆在二圓之內部. 同理, 若二圓相交, 則其相似外心在二圓之外部, 相似內心在二圓之內部. 若二圓外切, 則相似內心與切點一致.

2352. 聯結兩圓中平行半徑之端之直線, 若此二半徑在中心線之異側, 則過相似內心; 若此二半徑在中心線之同側, 則過相似外心.

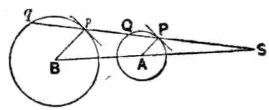
證　設 AP, BQ 爲圓 A, B 之平行半徑, 且在 AB 之同側, 命 QP, BA 之交點爲 S. 於是由相似



三角形之定理, SA : SB = AP : BQ, 故 S 爲相似外心. 同理, 若 AP, BQ′ 在 AB 之異側, 則 PQ′ 過相似內心 σ.

2353. 過兩圓之相似中心, 引截兩圓之一直線, 則至此對應截點之二半徑相平行.

證　設 S 爲兩圓 A, B 之相似中心, SPQpq 截圓 A 於 P, Q, 圓 B 於 p, q, 其中 P 對應於 p, 而 Q 對應於 q, 此時 SA:SB = AP:Bp,



故 AP 及 Bp 平行. 同理, AQ 及 Bq 平行.

2354. P, p 上之切線, 垂直於 AP, Bp, 而互相平行. 同理, Q, q 上之切線亦互相平行.

證　由前題自明.

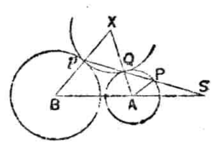
2355. 過兩圓之相似中心, 引截兩圓之一直線, 則由相似中心至不對應二點之二距離所包之矩形等於至他不對應二點之二距離所包之矩形, 且此二矩形各爲常數.

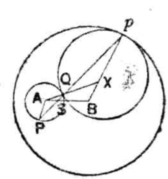
證　用2353題之圖, SP : Sp = AP : Bp = SQ : Sq, 故 SP·Sq = SQ·Sp. 又 SP·Sq : Sp·Sq = SP : Sp = SA : SB, 此爲常數, 且 Sp·Sq 等於由 S 至圓 B 所引切線上之正方形, 故爲常數, 故 SP · Sq 爲常數, 從而 SQ·Sp 亦爲常數. 關於相似內心亦然.

2356. 有一動圓, 若切於二定圓, 則過其切點之直線, 過此二定圓之相似中心; 但此相似中心, 在二相切爲同種類時, 則爲外心; 在二相切爲異種類時, 則爲內心.

證　設圓 X 爲一動圓, 分別切定圓 A 及 B

［1 圖］　［2 圖］





於 Q 及 p. 聯結 pQ, 令交 BA 於 S, 再交圓 A 於 P, 於是 Bp, AQ 交於 X. 1 圖示同

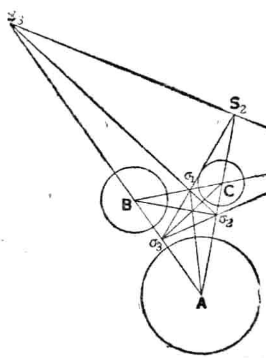
種類之相切, 2 圖示異種類之相切. 而雙方 $X\hat{p}Q = X\hat{Q}p = A\hat{Q}P = A\hat{P}Q$, 故 $AP \parallel Bp$, 從而 $AP:Bp = SA:SB$, 故 S 爲相似中心.

2357. 由 S 至圓 X 所引之切線爲定長.

證 因其上之正方形, 等於矩形 $Sp\cdot SQ$, 而由 2355 題,此矩形爲常數故也.

2358. 有三圓, 兩兩取之, 得六相似中心,其位置之關係如次. (α) 聯結各圓中心與他二圓相似內心之三直線爲共點線. (β) 三相似外心爲共線點. (γ) 一雙圓之相似外心與他二雙圓之二相似內心爲共線點.

證 設 A, B, C 爲三圓之中心, S_1, σ_1 分



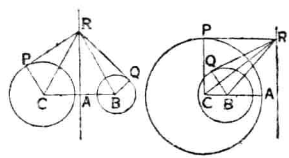
別爲二圓 B, C 之相似外心及相似內心, S_2, σ_2 分別爲二圓 C, A 之相似外心及相似內心, S_3, σ_3 分別爲二圓 A, B 之相似外心及相似內心,命 a, b, c 分別爲圓 A, B, C 之半徑. 於是 $A\sigma_2:\sigma_2C = a:c$, $C\sigma_1:\sigma_1B = c:b$, $B\sigma_3:\sigma_3A = b:a$. 故若作是等比之複比,則 $(A\sigma_2:\sigma_2C)(C\sigma_1:\sigma_1B)(B\sigma_3:\sigma_3A)=1$, 故 $A\sigma_1$, $B\sigma_2$, $C\sigma_3$ 爲共點線. 又 $AS_2:S_2C = a:c$, $CS_1:S_1B = c:b$, $BS_3:S_3A = b:a$, 故 $(AS_2:S_2C)(CS_1:S_1B)(BS_3:S_3A)=1$, 故 S_1, S_2, S_3 爲共線點. 仿此得證 $S_1\sigma_2\sigma_3$, $S_2\sigma_1\sigma_3$, 及 $S_3\sigma_1\sigma_2$ 爲共線點.

第三章 同軸圓

2359. 二圓之根軸, 乃至此二圓之切線相等之點之軌跡.

證 取兩任意圓 C, B, 設 C 之半徑大於 B

[1 圖] [2 圖]



之半徑,命 A 爲 CB 上之一點 [1 圖], 或其延線上之一點 [2 圖], 且 $\overline{CA}^2-\overline{BA}^2=$(C 圓半徑$)^2-$(B 圓半徑$)^2$. 由 A 引 CB 之垂線, 命其上之一點爲 R, 由 R 分別至圓 C, B 引切線 RP, RQ. 於是 $\overline{CA}^2-\overline{BA}^2=\overline{CP}^2-\overline{BQ}^2$, $\therefore \overline{CR}^2-\overline{BR}^2=\overline{CP}^2-\overline{BQ}^2$, 或 $\overline{CR}^2-\overline{CP}^2=\overline{BR}^2-\overline{BQ}^2$, $\therefore \overline{RP}^2=\overline{RQ}^2$, 卽由 R 至二圓所引之切線相等. 故 RA 爲如是之點之軌跡.

2360. 設兩圓相交, 則其根軸爲此兩圓之公弦.

證 由前題自明.

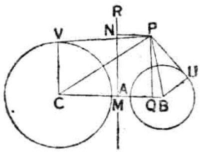
2361. 設有二任意圓, 則與其有同根軸之圓無數.

證 (1) 若前二圓相交,則凡過其交點之圓,與此二圓有同根軸 [前題]. (2) 若此二圓不交, 則可在 RA 之一側引 RS, 令 RS

=RP, 垂直於 RS 引 SX, 令交 CB 於 X, 於是以 X 爲中心, XS 爲半徑之圓與圓 C, B 有同根軸. 故如題所言.

2362. 由任意點至二圓引二切線, 此切線之平方差, 等於中心線與由此點至根軸所引之垂線所包矩形之二倍.

證　設 RA 爲二圓 C, B 之根軸, A 爲中心線 BC 上之點, PV, PU 分別爲由任意點 P 所引之切線. 由 P 至 RA, CB 分別引垂線 PN, PQ,



命 M 爲 CB 之中點, 則 $\overline{PV}^2+\overline{CV}^2=\overline{PC}^2$, $\overline{PU}^2+\overline{BU}^2=\overline{PB}^2$, 故 $\overline{PV}^2-\overline{PU}^2+\overline{CV}^2-\overline{BU}^2=\overline{PC}^2-\overline{PB}^2$. 其中 $\overline{PC}^2-\overline{PB}^2=\overline{CQ}^2-\overline{BQ}^2=2BC\cdot QM$, 又 $\overline{CV}^2-\overline{BU}^2=\overline{CA}^2-\overline{BA}^2=2BC\cdot AM$, 故 $\overline{PV}^2-\overline{PU}^2=2BC\cdot QA=2BC\cdot PN$. 由本題可知以下四題.

2363. P 若在 RA 上, 則 PN=0, 故 PV=PU, 如 2359 題所述.

2364. 若 PU=0, 則 $\overline{PV}^2=2BC\cdot PN$.

2365. 若 PU=0, CV=0, 則 $\overline{PC}^2=2BC\cdot PN$.

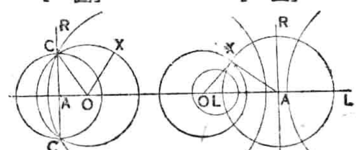
2366. 若 PXX′, PYY′ 爲割線, 則 $PX\cdot PX'-PY\cdot PY'=2BC\cdot PN$.

2367. 有中心不在一直線上之三圓, 兩兩取之, 則其根軸爲共點線.

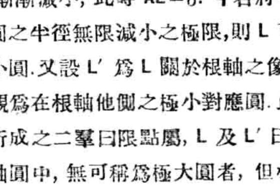
證　設 A, B, C 爲不共線之點, 圓 A, B, C 之半徑分別爲 r_1, r_2, r_3, 命此圓之三根軸分別截 BC, CA, AB 之點爲 X, Y, Z. 於是 $\overline{BX}^2-\overline{CX}^2=r_2{}^2-r_3{}^2$, $\overline{CY}^2-\overline{AY}^2=r_3{}^2-r_1{}^2$, $\overline{AZ}^2-\overline{BZ}^2=r_1{}^2-r_2{}^2$, 故 $(\overline{BX}^2-\overline{CX}^2)+(\overline{CY}^2-\overline{AY}^2)+(\overline{AZ}^2-\overline{BZ}^2)=0$. 此卽 X, Y, Z 上之三垂線爲共點線之條件, 故三根軸交於一點.

定義　以上所述三根軸之交點曰根軸心. 有若干圓, 其中心在一直線上, 則聯結其中心之直線曰中心軸. 設若干圓公有一中

[1 圖]　[2 圖]



心軸及根軸, 則是等圓曰同軸圓. 茲設 O 及 OX 爲同軸系中一任意圓之中心及半徑, A 爲中心軸與根軸之交點, 則由定義, $\overline{OA}^2\sim\overline{OX}^2$ 爲常數, 故可假定之爲 δ^2. (1) 若諸圓中任意二者公有點 C, C′ [1 圖], 則過 C, C′ 之各圓所成之羣曰共點屬. 此時 $CA=\delta=C'A$, 圓之半徑 δ 爲極小. (2) 若圓不相交 [2 圖], 則 OX 在其由 O 移向 L 時, 漸漸減小, 此時 $AL=\delta$. 今若將一點視爲圓之半徑無限減小之極限, 則 L 可視爲極小圓. 又設 L′ 爲 L 關於根軸之像, 則 L′ 可視爲在根軸他側之極小對應圓. 此同軸圓所成之二羣曰限點屬, L 及 L′ 曰限點. 同軸圓中, 無可稱爲極大圓者, 但根軸則可視爲圓無限增大時之極限. 下圖中, 設



二直線直交於 A, 有 P, Q 爲在其中一直

線上之二點,距 A 等遠.茲由 P, Q 考之,可知 P, Q 爲一同軸系之限點,又爲他一同軸系之公有點,而此二組同軸系中,一組之中心線及根軸,分別相當於他組之根軸及中心線.由是可知,若有一同軸系,則必有一他同軸系與之對應,前者之根軸及中心線,分別爲後者之中心線及根軸,又前者之公有點[或限點]爲後者之限點[或公有點],且前者之各圓與後者之各圓直交.設 δ 無限減小,則限點[或公有點]無限趨近 A,至 δ 消失時,則與 A 一致.因此,若一組圓切於一點,則此一組圓可視爲二限點及二公點與切點一致時之一組同軸圓.故若二圓之限點之一在圓周上時,此二圓切於其點.

2368. 設三圓同軸,則由其一圓周上之一點至他圓所引切線之平方比,等於由後二圓之中心至前一圓中心之距離之比.

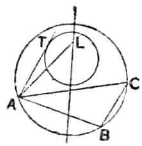
證 設 A, B, C 爲同軸圓, P 爲圓 C 周上之一點,由此點至圓 A, B 所引之切線爲 PT, PS, 至根軸所引之垂線爲 PN, 則由 2364 題, $\overline{PT}^2=2CA\cdot PN$, $\overline{PS}^2=2CB\cdot PN$, 故 $\overline{PT}^2:\overline{PS}^2=CA:CB$.

2369. 前題中若圓 B 縮小而爲限點 L, 則 $\overline{PT}^2:\overline{PL}^2=CA:CL$. 據此,若 L 爲二圓之限點, PT 爲由外圓周上之一點 P 至內圓所引之切線,則 PT:PL 爲定比.

證 由前題自明.

2370. 設 ABC 爲圓之內接三角形, AT, BT′, CT″ 爲至他圓所引之切線,若三矩形 BC·AT, CA·BT′, AB·CT″ 中,二者之和等於他一者,則二圓相切.

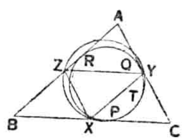
證 設兩圓之限點爲 L, 則由 2369 題, AT : AL = BT′ : BL = CT″ : CL,



故題文之條件,令 BC·AL, CA·BL, AB·CL 中任意二者之和,等於第三者.故由 Ptolemy 氏定理, L 與 A, B, C 爲共圓點,故二圓切於 L.

2371. 三角形之九點圓與內切圓及傍切圓相切.[是曰 Feuerbach 氏定理].

證 設三角形之頂點 A, B, C 之對邊爲 a, b, c, 而 s 爲全周之半分, X, Y, Z 分別爲各邊之中點, P, Q, R 爲內切圓之切點.



此時 △ZYZ 之外接圓即 △ABC 之九點圓.今 $XP=\frac{1}{2}a-(s-c)=\frac{1}{2}(c-b)$, $YQ=\frac{1}{2}b-(s-a)=\frac{1}{2}(a-c)$, $ZR=\frac{1}{2}c-(s-a)=\frac{1}{2}(a-b)$, 故 $YZ\cdot XP=\dfrac{a}{2}\times\left(\dfrac{c-b}{2}\right)=\frac{1}{4}(ac-ab)$, $XY\cdot ZR=\dfrac{c}{2}\left(\dfrac{a-b}{2}\right)=\frac{1}{4}(ac-bc)$, $ZX\cdot YQ=\dfrac{b}{2}\left(\dfrac{a-c}{2}\right)=\frac{1}{4}(ab-bc)$, 故 $YZ\cdot XP+ZX\cdot YQ=\frac{1}{4}(ac-bc)=XY\cdot ZR$, 故由 2370 題,九點圓切內切圓於某點 T.仿此,得證九點圓切傍切圓.

第四章　相切

2372. 過三所設點作一圓.

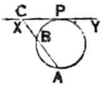
解 由 444 題自明.

2373. 切三所設直線作一圓.

解 觀 1807 題.

2374. 過二點且切一直線作一圓.

解 設 A, B 爲所設點, XY 爲所設直線. 聯結 AB, 令交 XY 於 C, 在 XY 上取 CP, 令爲 CA, CB 之比例中項, 卽 $CP^2=CA\cdot CB$. 於是過 A, B, P 之圓切 XY 於 P,

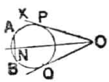


此處如是之 P 點有二, 故本題有二解.

注意 參觀 1863 題.

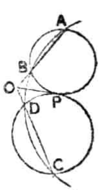
2375. 切二直線且過一點作一圓.

解 設 OX, OY 爲二所設直線, A 爲所設點. 引 $X\hat{O}Y$ 之二等分線 ON, 命 B 爲 A 關於 ON 之對稱點. 於是依 2374 題, 過 A, B 切 OX 於 P 作圓, 則此圓顯然切 OY 於 Q, 卽關於 ON 爲 P 之對稱點. 此處 P 之位置亦有二, 故本題有二解.



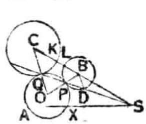
2376. 過二點且切一圓作圓.

解 設 A, B 爲二所設點, 過 A, B 作任意圓, 令切所設圓於 C, D, 命 AB, CD 之交點爲 O, 由 O 至所設圓引切線 OP, 命切點爲 P, 則 $OP^2=OC\cdot OD=OA\cdot OB$, 故過 A, B, P 之圓, 切 OP 於 P, 因此又切所設圓於 P. 此處 P 之位置有二, 故本題有二解.



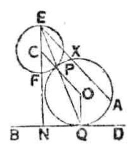
2377. 切二圓且過一點作圓.

解 設 A 爲所設點, B, C 爲所設圓之中心. 取 B, C 之相似外心 S, 命 BC 與所設圓之交點爲 L, K. 聯結 SA, 在其上取 SX, 令等於 SA, SK, SL 之第四比例項, 卽 SA:SK=SL:SX, 故 $SA\cdot SX=SK\cdot SL$. 過 A 及 X, 且切圓 B 於 P 作圓 [2376題], 命其中心爲 O. 聯結 SP, 令再交圓 B 於 D, 交圓 C 於 Q. 於是因 S 爲相似中心, 故 $SA\cdot SX=SK\cdot SL=SP\cdot SQ$, 故 Q 在過 A, X, P 之圓周上. 由相似中心之性質, BD ∥ CQ, 因此 $S\hat{D}B=C\hat{Q}S$. 然 $O\hat{Q}P=O\hat{P}Q=B\hat{P}D=B\hat{D}P=2\hat{R}-S\hat{D}B$, $\therefore O\hat{Q}P=2\hat{R}-C\hat{Q}S$, 故 CQO 成一直線, 因此圓 O 切二圓 B, C, 且過 A. 此處 P 之位置有二, 故就相似外心可得二解. 又若取相似內心, 又可得二解. 因此共有四解.



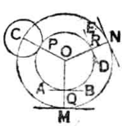
2378. 過一點, 且切一直線及一圓作圓.

解 設 A 爲所設點, C 爲所設圓之中心, BD 爲所設直線. 引 CN 垂直於 BD, 命其足爲 N, 交圓周於 F. 延長 NC, 令再交圓周於 E, 聯結 EA, 在其上取 EX, 令等於 EA, EN, EF 之第四比例項, 卽 EA:EN=EF:EX, 故 $EN\cdot EF=EA\cdot EX$. 過 A 及 X, 且切 BD 於 Q 作圓 O [2374題], 聯結 EQ, 令截所設圓於 P, 聯結 CP, OP, OQ, FP. 於是因 $F\hat{P}E$ 及 $F\hat{N}Q$ 皆爲直角, 故四邊形 FNQP 之角項爲共圓點, 故 $EP\cdot EQ=EF\cdot EN=EA\cdot EX$, 因此 P 在圓 O 之周上, 故 $O\hat{P}Q=O\hat{Q}P=C\hat{E}P=C\hat{P}E$, 故 CPO 成一直線, 而兩圓切於 P. 過 A 及 X 且切 BD 之圓有二, 故由此可得二解. 又 EA 代以 FA, 則尙可得二解.



2379. 作切二直線且切一圓之圓.

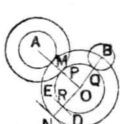
解 設 AB, DE 爲所設直線, C 爲所設圓之中心. 引 AB, DE 之平行線, 令在 AB, DE



之距 C 較遠之一側,且平行線間之距離等於 C 之半徑. 過 C 作一圓, 令切 AB 之平行線於 M, 切 DE 之平行線於 N [2375 題], 命其中心爲 O, 又命 OM 截 AB 之點爲 Q, 及 ON 截 DE 之點爲 R. 聯結 CO, 令截所設圓於 P, 以 O 爲中心, OP 爲半徑作圓. 於是因 $OC=OM$, $QM=CP$, 故 $OQ=OP$. 同理, $OR=OP$, 故 Q 及 R 在圓 O 周上. 然 $O\hat{Q}A$, $O\hat{R}E$ 皆爲直角, 故圓 O 切 AB, DE 於 Q, R. 又對應於 2375 題之二解,本題亦有二解. 又 AB, DE 之平行線,若作於近 C 之一側, 則尚可得二解.

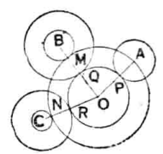
2380. 作切二圓及一直線之圓.

解 設 A, B 爲所設圓之中心, DE 爲所設直線. 引 DE 之平行線, 令在 DE 之距 B [較小之圓] 較遠之一側, 且平行線間之距離等於 B 之半徑. 以 A 爲中心, 二圓 A, B 半徑之差爲半徑作圓. 又過 B 作一圓, 令切所作平行線於 N, 所作小圓 A 於 M [2378 題], 命其中心爲 O. 又命 ON 與 ED 之交點爲 R, OA 與圓 A 之交點爲 P, OB 與圓 B 之交點爲 Q. 於是因 $OB=ON$, $QB=RN$, 故 $OR=OQ$. 同理, $OP=OQ$. 故中心 O, 半徑 OP 之圓過 Q 及 R, 且切所設二圓及直線於 P, Q, R. 對應於 2378 題之四解,本題亦可得四解. 又 ED 之平行線, 若作於直線 ED 之他側, 則尚可得四解.



2381. 作切三圓之圓.

解 設 A, B, C 爲所設圓之中心, 其中 A 不大於他圓. 以 B 爲中心, B 及 A 之半徑差爲半徑作一圓; 又以 C 爲中心, C 及 A 之半徑差爲半徑作一圓. 過 A, 且切所作二圓作一圓 [2377題], 命其切點爲 M, N. 命 BM, CN 之交點爲 O, OA 與圓 A 之交點爲 P, OB 與圓 B 之交點爲 Q, OC 與圓 C 之交點爲 R. 於是因 $OM=OA$, $MQ=PA$, 故 $OQ=OP$. 同理, $OP=OR$. 故中心 O, 半徑 OP 之圓過 Q 及 R, 又因 OA, OB, OC 爲中心線, 故此圓切各所設圓於 P, Q, R. 此處共有八解,甚易知之.

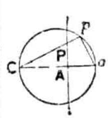


第五章 倒形法

[本章中倒轉圓之半徑,概以 R 表之].

2382. 一直線之倒形爲過倒轉中心之一圓.

解 設 AP 爲一直線, C 爲倒轉中心, CA 爲 AP 之垂線, P 爲 AP 上之一任意點, a 爲 A 之倒點, p 爲 P 之倒點. 於是 $CP\cdot Cp=R^2=CA\cdot Ca$, 故 P, p, a, A 爲共圓點. 然 $P\hat{A}a$ 爲直角,故 $C\hat{p}a$ 亦爲直角. 因此 p 之軌跡乃以 Ca 爲直徑之圓.

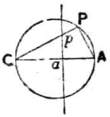


2383. 一直線爲其倒形及倒轉圓之根軸.

解 由前題自明.

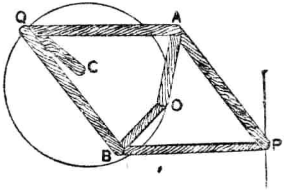
2384. 過倒轉中心之圓, 其倒形爲一直線.

解 設 CA 爲過倒轉中心 C 之圓之直徑,



P 爲此圓周上之任意點, a 爲 A 之倒點, p 爲 P 之倒點. 於是 $CP\cdot Cp=R^2=CA\cdot Ca$, 故 P, p, a, A 爲共圓點. 然 $C\hat{P}A$ 爲直角, 故 $C\hat{a}p$ 亦爲直角. 故 p 之軌跡爲垂直於 CA 之直線.

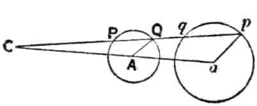
注意 本定理可以說明 Peaucellier 氏



直線器之原理. 由於器械構造之對稱, P, O, Q 恆在一直線上. 設 AB 截 POQ 於 N, 則 N 上之角爲直角, 且 N 爲菱形對角線之中點, 故 $QO\cdot PO=(QN+NO)(QN-NO)=\overline{QN}^2-\overline{NO}^2=\overline{QA}^2-\overline{AO}^2$, 此爲常數, 故 P, Q 互爲倒點. 而 Q 恆在過倒轉中心 O 之圓周上, 故 P 在一直線上運動.

2385. 不過倒轉中心之圓, 其倒形爲一圓.

證 設 A 爲所設圓之中心, P 爲其周上之任意點. 命倒轉中心爲 C, 聯結 CP, 令再交圓於 Q, 取



P, Q 之倒點 p, q. 於是 $CP\cdot Cp=R^2=CQ\cdot Cq$. 聯結 AQ, 平行於 AQ, 引 pa, 令交 CA 於 a. 於是因 $CP\cdot CQ$ 爲常數, 故 $Cp:CQ$ 亦爲常數, 從而 $Pa:QA$ 亦爲常數. 而 QA 爲定長, 故 pa 亦爲定長. 又 $CA:Ca$ 爲定比, 故 a 爲定點. 故 p 之軌跡乃中心爲 a 之圓.

2386. C 爲此二圓之相似中心.

證 由前題可明.

2387. 設 CT 爲圓 A 之切線, 則 (圓 a 之半徑):(圓 A 之半徑) $=R^2:\overline{CT}^2$.

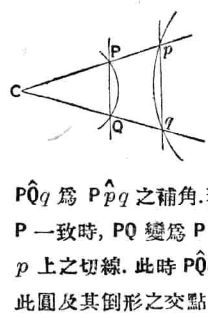
證 由 2385 題可明.

2388. 二軌跡之交點, 爲此二軌跡倒形交點之倒點.

證 二軌跡交點之倒點, 必在各軌跡之倒形上, 故爲此倒形之交點.

2389. 倒轉圓之動徑, 與互爲倒形之二圓之交角互爲補角.

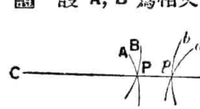
證 設 CPp, CQq 爲過倒轉中心之任意動徑, 且 p, q 分別爲 P, Q 之倒點, 於是 $CP\cdot Cp=R^2=CQ\cdot Cq$, 故 P, Q, p, q 爲共圓點, 因此



$P\hat{Q}q$ 爲 $P\hat{p}q$ 之補角. 若 Q 趨近 P, 終至與 P 一致時, PQ 變爲 P 上之切線, pq 變爲 p 上之切線. 此時 $P\hat{Q}q$ 及 $P\hat{p}q$ 爲 CPp 與此圓及其倒形之交點上之切線與動徑所成之角.

2390. 二軌跡所成之角, 等於其倒形所成之角.

證 設 A, B 爲相交於 P 之二軌跡, a, b 爲相交於 p 之 A, B 之倒形. 此時 p 爲 P 之倒點. 設 C



爲倒轉中心, 則 CPp 爲動徑, 故 CP, AP 所

成之角,爲 Cp, ap 所成角之補角; CP, BP 所成之角,爲 Cp, bp 所成角之補角. 而二角之差, 等於此二角補角之差, 故 AP, BP 所成之角,等於 ap, bp 所成之角.

2391. 若二圓〔或一直線及一圓〕相切, 則其倒形亦相切.

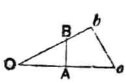
證 由前題自明.

2392. 若一軌跡及其交跡線倒轉, 則其各倒形相交.

證 由 2390 題可明.

2393. 設 $a, b, c,\cdots\cdots$ 分別爲任意點 A, B, C,……之倒點,倒轉中心爲 O, 則 (1) 就其中任二點 A, B 而言, $ab:AB=R^2:OA\cdot OB$; (2) 就其中任三點 A, B, C 而言, $bc:ca=OA\cdot BC:OB\cdot CA$; (3) 就任四點 A, B, C, D 而言, $bc\cdot ad:ca\cdot bd=BC\cdot AD:CA\cdot BD$.

證 因 $OA\cdot Oa=R^2=OB\cdot Ob$, 故三角形 OAB 與 Oba 相似. 故 (1) $ab:AB=Oa:OB=OA\cdot Oa:OA\cdot OB=R^2:OA\cdot OB$. (2) 及 (3) 之證,可由此徑得之.



2394. 十字比對於其倒形不變.

證 由前題可明.

〔以上之定理, 爲倒形之基本定理, 由此甚易導出以下諸重要定理〕.

2395. 二點與其倒點爲共圓點.

2396. 設 A, B 爲二點, a, b, 爲其倒點, 倒轉中心爲 O, 則 $ab:AB=$(由 O 至 ab 所引之垂線):(由 O 至 AB 所引之垂線).

2397. 過一組倒點之圓, 截倒轉圓之直徑於互爲倒點之點.

2398. 圓中弦上之任意點與其倒點, 與〔關於此圓之〕中心及弦之兩端爲共圓點

2399. 過在倒轉中心同側之一對倒點之各圓,與倒轉圓直交.

2400. 設一圓與他圓直交, 且前圓爲後圓之倒轉圓,則後圓爲其自身之倒形. 同理, 一圓以其弦之中點爲倒轉圓之中心, 以其弦之半分爲倒轉圓之半徑而倒轉時, 其倒形即爲自身.

2401. 二圓關於其逆相似之二圓, 互爲倒形.

2402. 直交之二圓, 各截他圓之直徑於互爲倒點之點.

2403. 設 P, Q 互爲倒點,其倒轉中心爲 C, 命 X 爲倒轉圓周上之一點, 則 $PX^2:QX^2=PC:QC$, 其逆亦眞.

注意 由兩三角形 PCX, XCQ 之相似關係,卽可導出.

2404. 前題中設 L 爲以 P, Q 爲對稱點之對稱軸, 則 $PX^2=2PC\cdot XL$, $QX^2=2QC\cdot XL$, 其逆亦眞. 但 XL 爲 L 之垂線.

2405. 互爲倒形之二圓,與倒轉圓同軸.

2406. 二圓得由其同軸圓周之各點, 倒形於等圓, 而其中心爲此同軸圓之相似中心.

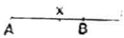
2407. 限點屬之同軸系圓中, 其二限點關於此系各圓互爲倒形.

2408. 若共點屬之同軸系圓, 以其任一公有點爲倒轉中心而倒轉, 則其倒形爲直線,而公有他公有點之倒點.

2409. 限點屬之同軸系圓, 關於任一限點而倒轉時, 則其倒形爲同心圓, 而以他一限點之倒點爲中心.

第六章 調和點列

2410. 設四點成調和點列，則由其端之一點，至其共軛點之距離，等於由同點至他二點距離之調和中項.

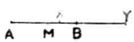


證 見 993 題.

2411. 前題中 $AB(AX+AY)=2AX\cdot AY$, $XY(AY+BY)=2AY\cdot BY$. 反之，若是等關係成立，則四點 A, X, B, Y 成調和點列.

證 由前題，$AY(AB-AX)=AX(AY-AB)$，故甚易明之.

2412. 設 X, Y 爲關於 A, B 之調和共軛點，M 爲 AB 之中點，則 $\overline{MA}^2=MX\cdot MY=\overline{MB}^2$. 其逆亦眞.



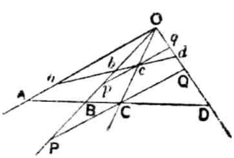
證 見 992 題.

2413. 前題中 X 及 Y 依反對方向而運動.

證 由前題自明.

2414. 設四射線組成一束線，其與一橫截線之交點成調和點列，則不論橫截線之位置如何，其交點皆成調和點列.

證 設束線之頂點爲 O，爲一橫截線截於 A, B, C, D 而成調和比例. 過 C 平行於 AO 引一直線 PCQ，令交 OB, OD 於 P, Q，則 $AB:BC=AO:CP$, $AD:DC=AO:CQ$，故 $CP=CQ$. 今設 $abcd$ 爲截此束線之他橫截線，pcq 爲 PCQ 之平行線，其在同射線上之交點，命以同樣之文字，



則 $cp=cq$，然 $ab:bc=aO:cp$, $ad:dc=aO:cq$，故 $ab:bc=ad:dc$，故 a, b, c, d 成調和點列.

2415. 設以平行於一射線之直線截調和束線，則其相隣接之三射線間之二部分等長.

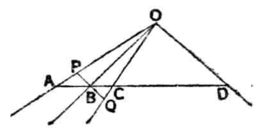
證 由前題自明.

2416. 前題之逆亦眞.

證 由 2414 題自明.

2417. 一角之二邊，與此角之內外兩二等分線成調和束線. 反之，若一調和束線中，有二射線直交，則此二射線分別爲他二射線所成角之內外兩二等分線.

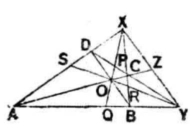
證 關於本題之第一部分，可由 1027 題



及調和點列之定義，直接知之. 關於第二部分，可證之如下. 設調和束線 O(ABCD) 中，$B\hat{O}D$ 成直角. 平行於 OD 引 PBQ，令交 OA, OC 於 P, Q. 於是 $PB=QB$，且 PBQ 垂直於 OB，故 $P\hat{O}B=Q\hat{O}B$，故 OB 爲 $A\hat{O}C$ 之內二等分線. 又 OD 爲 OB 之垂線，故 OD 又爲 $A\hat{O}C$ 之外二等分線.

2418. 完全四邊形中，延長聯結三對角線交點之直線，則一切點列及束線爲調和.

證 設四邊形 ABCD 中，BC, AD 交於 X，



及 AB, CD 交於 Y，又 AC, BD 交於 O. 引 XO，令截 CD 於 P，截 AB 於 Q. 引

YO, 令截 BC 於 R, 截 AD 於 S. 引 XY, 令截 AOC 於 Z. 於是因 O 爲 △ABX 內部之點, 故 (AQ:QB)(BC:CX)(XD:DA)=1; 又因 YCD 爲 △ABX 之橫截線, 故 (AY:YB)(BC:CX)(XD:DA)=1. 故 AQ:QB=AY:YB, 即 (AQBY) 爲調和點列, 從而 X(AQBY) 及 O(AQBY) 爲調和束線. 由此, 得證 X(AOCZ), Y(AOCZ), Y(ASDX) 等亦爲調和束線.

注意 設一調和束線中, 已知其三連續射線, 則其第四射線, 可由本定理求得之. 茲設 XA, XQ, XB 爲三所設射線, O 爲 XQ 之任意點, BO, AO 分別與 XA, XB 之交點爲 D, C, 延長 DC, 令交 AB 於 Y, 則 XY 即所求第四射線.

第七章 極及極直線

2419. 由極及極直線之定義, 可推得以下各事.

(1) 極及極直線在中心之同側.

(2) 二者之一趨近中心, 則他一離遠中心. 其逆亦眞.

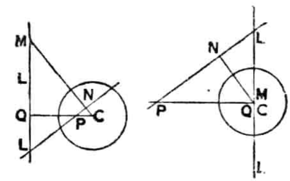
(3) 若直線切圓, 則切點及切線爲極及極直線.

(4) 二切線之交點及切弦爲極及極直線.

(5) 聯結二極之直線張於中心之角, 等於其極直線間之角或補角.

2420. 設一直線過一定點, 則此直線之極在定點之極直線上. 反之, 設一點在一定直線上, 則此點之極直線過定直線之極.

證 設 P, L 爲定點及定直線, P 爲極, L 爲極直線. 命 C 爲倒轉圓之中心, Q 爲 CP



與 L 之交點. (1) 過 P 引任意直線, 由 C 引此直線之垂線 CN, 令交 L 於 M. 於是因 P, N, M, Q 爲共圓點, 故 CN·CM=CP·CQ =(半徑)^2, 故 M 爲 PN 之極.

(2) 設 M 爲 L 上之任意點, 由 P 至 CM 引垂線 PN, 則與前同理, CN·CM=CP·CQ =(半徑)^2, 故 PN 爲 M 之極直線.

2421. 聯結任意二點之直線, 爲此二點極直線之交點之極直線. 反之, 二直線之交點, 爲聯結此二直線之極所得直線之極.

證 由前題自明.

2422. 設一三角形之二頂點及其二對邊分別爲極及極直線, 則第三頂點及對邊亦爲極及極直線.

證 由 2421 題自明.

2423. 自身共軛三角形中, 垂心爲倒轉中心.

證 何則? 因 677 題之圖中, OA·OD=OB·OE=OC·OF, 故以 O 爲中心, 以與上列矩形等積之正方形之一邊爲半徑所作之圓爲倒轉圓.

注意 由極及極直線之性質, 自身共軛三角形之垂心在形外, 即爲鈍角三角形.

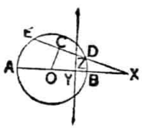
2424. 以自身共軛三角形之各邊爲直徑, 在其上所作之三圓, 與倒轉圓直交.

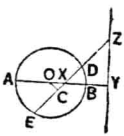
證 依前題之圓, 以 AB 爲直徑之圓過 D,

E, 故(由 O 至此圓之切線)^2=OA·OD=(倒轉圓之半徑)^2, 故與倒轉圓直交.

2425. 設一直線截圓, 以其上之任意點爲極, 則極直線與此直線之交點與極, 爲關於此直線與圓之交點之調和共軛點.

證　設 E, D 爲直線截中心 O 之圓之點,

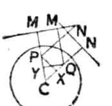
[1 圖]


[2 圖]


X 爲在其上所取之極. 命 XBA 爲過 X 之直徑, 截極直線於 Y. 作 OC⊥XE, 則因 OX·OY=R^2, 故 $\overline{OX}^2 \mp OX\cdot XY=\overline{CO}^2+\overline{CD}^2$, 故 $\overline{CO}^2+\overline{CX}^2 \mp CX\cdot ZX=\overline{CO}^2+\overline{CD}^2$ [複號中之 −, 對應於 1 圖, + 對應於 2 圖], 故 CX·CZ=$\overline{CD}^2$. 然 C 爲 ED 之中點, 故 X, Z 爲關於 E, D 之調和共軛點.

2426. 由圓之中心至二點之距離之比, 等於由各點至他點關於此圓之極直線之距離之比. [是曰 Salmon 氏定理].

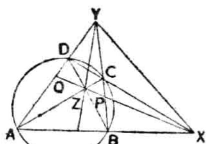
證　設 P, Q 爲二點, 此二點關於圓 C 之極



直線分別爲 M, N. 引 M, N 之垂線 PN, QM, 及 CQN, CPM 之垂線 PX, QY. 於是 CP·CM=R^2=CQ·CN; 而 P, Y, X, Q 爲共圓點, 故 CP·CY=CQ·CX, 故由減法, CP·YM=CQ·XN. 因此 PC:QC=XN:YM=PN:QM.

2427. 設 ABCD 爲圓之內接四邊形, AB, CD 之交點爲 X. BC, AD 之交點爲 Y, AC, BD 之交點爲 Z, 則 XYZ 爲自身共軛三角形.

證　引 XZ, 令截 YCB 於 P, 截 YDA 於 Q, 於是 (BPCY) 及 (AQDY) 爲調和點列. 又 Y



之極直線截 YCB 之點, 爲 Y 關於 C, B 之調和共軛點, 又其截 YDA 之點, 爲 Y 關於 D, A 之調和共軛點, 故 P, Q 爲 Y 之極直線截 BC, AD 之點, 因此 XZ 爲 Y 之極直線. 同理, YZ 爲 X 之極直線. 故 XY 又爲 Z 之極直線. 因此三角形 XZY 爲自身共軛三角形.

2428. 引一圓之割線 XBA, XCD, 命 BC, AD 之交點爲 Y, AC, BD 之交點爲 Z, 則 YZ 爲 X 之極直線, XY 爲 Z 之極直線.

證　由前題可明.

注意　由本題可得單用直尺以引圓之切線之方法. 在圓外取一點 X, 仿本題引割線, 於是 YZ 爲 X 之極直線, 故 YZ 截圓之點, 卽由 X 至圓所引切線之切點. 因此聯結此點與 X, 卽得切線. 而是等直線, 僅爲聯結點之直線, 故可僅用直尺引得之.

第二門　名詞之部

二　畫

【二乘比】［英］Duplicate ratio. 二比相等，則其複比曰原比之二乘比.

【二等分線】［英］Bisector. 同[內二等分線].

【二等邊梯形】［英］Isosceles trapezoid. 梯形之不平行二邊相等者.

【二等邊三角形】［英］Isosceles triangle. 三角形之二邊相等者，曰二等邊三角形，或曰等脚三角形；其他一邊曰底，底之對角曰頂角.

【二線所包矩形】［英］Rectangle contained by two lines. 即以二直線爲兩隣邊所作之矩形.

【十字比】［英］Cross-ratio. 亦稱不調和比(Unharmonic ratio). 將一有限直線 AB，內分於 X，外分於 Y，取比 AX：BX 及 AY：BY 之項，交叉相乘，作比 AX·BY：AY·BX，是曰四分線之十字比，或不調和比.

【十角形】［英］Decagon. 卽以十直線所圍成之平面形.

【十一角形】［英］Hendecagon，或 Undecagon. 卽以十一直線所圍成之平面形.

【十二角形】［英］Dodecagon. 卽以十二直線所圍成之平面形.

【十五角形】［英］Quindecagon. 卽以十五直線所圍成之平面形.

【九角形】［英］Nonagon，或 Enneagon. 卽以九直線所圍成之多角形.

【九點圓】［英］Nine point circle. 見 524 題.此定理係 Poncelet 氏所發見；氏爲法國算學家，公元 1788 年生，1867 年卒.

【七角形】［英］Heptagon. 卽以七直線所圍成之平面形.

【八角形】［英］Octagon. 卽以八直線所圍成之平面形.

三　畫

【三乘比】［英］Triplicate ratio. 三比相等，則其複比曰原比之三乘比.

【三角形】［英］Triangle，或 Trigon. 三直線所圍成之平面形曰三角形.取三角形之任意一邊，名之曰底；底之對角之頂，曰三角形之頂；由頂點向底所引之垂線，曰三

角形之高.

【弓形】 [英]Segment of circle. 圓中弦與其所張弧所圍圓之一部,曰弓形.

【弓形角】 [英] Angle at the segment. 聯結弓形之弧上之一點與此弧之兩端,作二弦,此二弦所夾之角曰弓形角.

【大小】 [英] Magnitude. 此語本用以指物體所占有之部分,卽物體之體積;今擴張其義,兼可指數而言,線,面,角,……等,固無論矣.

四 畫

【內分】 [英] To divide internally. 於一有限直線上取一點,則曰此直線爲此點內分.內分爲與外分[見外分條]相對之語.

【內角】 [英] Interior angle. 如[同位角]條之圖,一直線爲二直線所截,則 2, 3, 5, 8 之角曰內角.又多角形之各角亦曰內角.

【內項】 [英] Mean. 卽比例式中之第二第三項.

【內接】 [英] To be inscribed.多角形之各角項,在一圓或一多角形之邊上,則曰前多角形內接於圓或後多角形.

【內接形】 [英] Inscribed figure. 多角形之各角頂,在一圓周或多角形之邊上,則名前多角形曰內接形;內接形依其邊數之爲 3, 4,……而分別稱之曰內接三角形,內接四邊形,…….

【內接四邊形】 [英] Inscribed quadrilateral. 見[內接形]條.

【內接多角形】[英] In-polygon.同內接形.

【內心】 [英] In-centre. 卽三角形內切圓之中心.

【內切】 [英] To touch internally. 一圓於他圓之內而相切,曰內切.

【內切圓】 [英] Inscribed circle. 切於多角形各邊之圓,曰多角形之內切圓.普通多就三角形而言.

【內對角】 [英] Interior opposite angle. 三角形中,與一外角不相隣之二內角,曰此外角之內對角.又四邊形中,隣於外角之內角之對角,亦曰此外角之內對角.

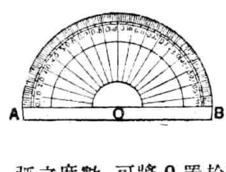
【內錯角】 [英] Alternate interior angles. 如[同位角]條之圖,二直線爲他一直線所截時,2 與 8, 3 與 5 曰互爲內錯角.

【內公切線】 [英] Internal common tangent. 二圓之公切線中,二圓在其異側者,曰二圓之內公切線.

【內二等分線】 [英] Internal bisector. 某角之內二等分線者,卽此角之二等分線,而與外二等分線相對而言者也.

【分】 [英] Minute. 卽一度之六十分之一.

【分度器】 [英] Protractor. 分度器者,乃如圖所示之物;半圓形之周圍,刻有度數,用以測量弧所含之度數及作角.欲量弧之度數,可將 O 置於弧之中心,弧之一端置於 AO 之上,聯結弧之他端與 O 作直線,而觀由 A 至此直線之度數.又若欲作角,可將 O 置於角項,先觀所欲作之度數,於是將 AO 置於所欲作之處,由 A 起數至前所觀得之度,而作所求之角.



【分線器】［英］Divider. 乃如圖所示之器械,由金屬製之兩脚所成,用以移距離及畫圓.

其一脚之有螺旋處,可換裝鉛筆,或鋼筆.

【分於調和】［英］To divide harmonically. 將一有限直線 AB, 按 AC:BC=AD:BD, 分於 C, D, 曰分 AB 於調和.

【分於相似】［英］To divide similarly. 將所設直線,按他所設直線上所設二分之比分割,曰將前直線按後直線分於相似. 又以對應直線分相似形,亦曰分於相似.

【分比定理】［英］Dividendo. 見 942 題.亦稱除比定理.

【中線】［英］Median. 卽由三角形之一角頂,向對邊中點所引之直線.

【中點】［英］Middle point. 卽有限直線上中央之點.

【中心】［英］Centre. 大都係就圓而言. 圓之中心者,乃圓中之一點,由此點至圓周所引之直線皆相等.

【中心角】［英］Angle at the centre. 角頂位於圓之中心之角,曰中心角.

【中心對稱】［英］Central symmetry. 某直線上之二點,距同直線上之一點 0 等遠,且在 0 之異側,則曰此二點關於 0 爲對稱. 又某圖形上之各點,與同圖形上之他點,關於一定點 0 爲對稱,則曰此圖形關於 0 爲對稱. 以上二種對稱,亦曰關於 0 之中心對稱,或點對稱.

【中末比】［英］Extreme and mean ratio. 所謂分於中末比,其義與中末分割同,可覲[中末分割]條.

【中末分割】 英 Median section. 將一有限直線內分或外分,令其一部分上之正方形,等於全線與他部分所包之矩形,是曰中末分割. 此種分割,在幾何學中,極爲重要;古時希臘算學家,名之曰黃金分割 (Golden section).

【比】［英］Ratio. 所謂一量對於同種之他量之比者,乃第一量與第二量就其倍量上之關係.

【比例】 英 Proportion. 二比相等,以符號＝聯結之,卽成比例.

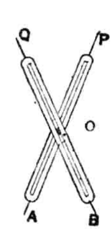
【比例中項】［英］Mean proportional.比例之二相等內項,曰比例中項.

【比例第三項】［英］Third proportional. 即第三比例項,見[第三比例項]條.

【比例第四項】［英］Fourth proportional. 卽第四比例項,見[第四比例項]條.

【比例量】［英］Proportional quantity.卽成比例之量.

【比例規】［英］Proportional compasses. 用以按已知比增大或減小已知線分者. 用時可將動點 0 移動,令 OP:AO 等於已知比[此規之各脚上,皆刻有分割,俾易得所欲之比],命 AB 等於已知線分.於是 PQ 卽爲將 AB 按 OP:AO 之比增大或減小而得之直線.但 0 爲 AP 及 BQ 之交點.



【公法】［英］Postulate. 解幾何學作圖題時,有特許不證自明之根本法三條,名之曰公法.條文見卷首.

【公理】 [英] Axiom. 作爲推理基礎之命題曰公理, 公理不能依其他證明之, 但憑吾人之經驗, 認爲確實. 公理有普通公理及幾何學公理二種,俱載卷首.

【公弦】 [英] Common chord. 聯結相交二圓之二交點所得之直線曰公弦.

【公切線】 [英] Common tangent. 卽二圓所共之切線.

【不合理】 [英] Absurdity. 一命題若違反已知眞理, 則爲不合理, 此於稱爲歸謬法 [Reductio ad absurdum] 之證明法中常用之. 此種證明法,乃將一命題,假定爲眞,而逐次推理,以達於與已知眞理相反之結果,由是知最初假定爲眞之命題不成立,而其相反之命題,轉能成立.

【不定問題】 [英] Indeterminate problem. 卽可得無數解答之問題. 例如已知三角形之底及高, 作本形, 則可得無數三角形,故此問題爲不定問題.

【不平行四邊形】 [英] Trapezium. 四邊形之任何二邊, 皆不平行, 則此四邊形曰不平行四邊形.

【不可通約量】 [英] Incommensurable quantities. 觀[可通約量]條.

【切線】 [英] Tangent. 一直線與圓周會於唯一之點, 則曰一直線切圓於此點, 而名此直線曰切線,點曰切點.

【切弦】 [英] Chord of contact. 由圓外之一點, 向圓引二切線, 則聯結此二切點所得之直線曰切弦.

【切點】 [英] Point of contact. 見[切線]條.

【方向】 [英] Sense. 有限直線 AB 有由 A 至 B 之方向及由 B 至 A 之反對方向; 故若謂直線 AB, 則指由 A 至 B 之方向言, 若謂直線 BA, 則指由 B 至 A 之方向言.

【方積】 [英] Power [Puissance]. 由圓外一點向圓引一割線, 則圓周上之交點至此點之距離所包之矩形,曰方積.

【五角形】 [英] Pentagon. 卽以五直線所圍之直線形.

【反比定理】 [英] Invertendo. 見 957 題.

五　畫

【外分】 [英] To divide externally. 分一有限直線於某點時,若其所分之二部之差,等於原有限直線, 則曰將原有限直線外分.

【外角】 [英] Exterior angle. 如 [同位角] 條之圖,二直線爲一直線所截時, 1, 4, 6, 7 之角曰外角. 又多角形之一邊, 與其隣邊延線所夾之角,亦曰外角.

【外項】 [英] Extreme. 比例 $a:b=c:d$ 中, a 與 d 曰外項.

【外心】 [英] Circum-centre. 卽多角形外接圓之中心. 大都指三角形外接圓之中心.

【外錯角】 [英] Alternate exterior angles. 如 [同位角] 圖條之, 二直線爲一直線所截時, 1 與 7, 6 與 4 均各曰互爲外錯角.

【外接圓】 [英] Circumscribed circle. 過多角形之各角頂, 所畫得之圓, 曰多角形之外接圓. 大都就三角形而言.

【外公切線】 [英] External cmmon tangent. 二圓之公切線中,二圓在其同側者,曰外公切線.

【外二等分線】 [英] External bisector. 某

角之外二等分線者,即其補角之二等分線也.

【外切形或外接形】[英] Circumscribed figure. 各邊切於一圓周之多角形,曰外切形; 又各邊過一多角形各角頂之多角形,曰外接形.

【外切四邊形或外接四邊形】[英] Circumscrib.d quadrilateral. 外切於圓之四邊形曰外切四邊形; 又四邊形之邊,過他四邊形之各角頂,則名前四邊形曰後四邊形之外接四邊形.

【平角】[英] Straight angle. 角之二邊成一直線,則名其角曰平角;或曰直線角.

【平面】[英] Plane surface, 或 Plane. 取面上之任意二點,聯結而得之直線,若與面密合,則其面曰平面.

【平面圖】[英] Plane figure. 卽平面上之圖形.

【平面形】[英] Plane figure. 同平面圖.

【平面直線形】[英] Plane rectilinear figure. 卽由三或更多之直線所圍成之平面形.

【平面幾何學】[英] Plane geometry, 或 Planimetry. 卽討論平面形之形狀,大小,及位置之學科.

【平行線】[英] Parallels. 平行直線之略.

【平行直線】[英] Parallel straight lines. 同一平面上之二直線,任意延長而不相交者,曰平行直線.

【平行四邊形】[英] Parallelogram. 四邊形之二雙對邊平行,則名此四邊形曰平行四邊形.

【正方形】[英] Square. 卽等邊等角之四邊形.

【正射影】[英] Orthogonal projection. 見[射影]條.

【正多角形】[英] Regular polygon. 卽等邊等角之多角形.

【半徑】[英] Radius. 卽由圓之中心至圓周所引之直線,

【半圓】[英] Semicircle. 以直徑分圓所得之任何一部曰半圓;亦卽全圓之半分.

【凹角】[英] Reflex angle, 或 Re-entrant angle, 或 Re-entering angle. 卽小於四直角大於二直角之角.

【凹多角形】[英] Re-entrant polygon. 多角形有一或更多之凹角,則爲凹多角形. 凸多角形由其任何一邊觀之,全形皆在此邊之一方; 但於凹多角形,若由其凹角之一邊觀之,則全形跨此邊之兩方.

【凸折線】[英] Convex broken line. 凸折線者,由折線之任何一部直線觀之,全體在其一側,而不跨於兩側者也.

【凸多角形】[英] Convex polygon. 卽不含凹角之多角形.

【四邊形】[英] Quadrilateral, 或 Tetragram. 卽四直線所圍之平面形.

【四角形】 同四邊形.

【可通約量】[英] Commensurable quantities. 普通得以同一單位精密表示之諸量,曰可通約量; 不得以同一單位精密表示之諸量,曰不可通約量.

【立體幾何學】[英] Solid geometry, 或 Stereometry, 或 Geometry of space.

卽討論空間之點,直線,角,曲線,平面,曲面,或由其集合而成之圖形之學科.

【未定長直線】[英] Indefinite straight line. 卽其長不定之直線,

六 畫

【共點性】[英] Concurrency. 卽三以上之直線,交於一點.

【共點線】[英] Lines of concurrency. 卽三以上之直線,交於一點者.

【共點屬】[英] Common point species. 見2367題注意.

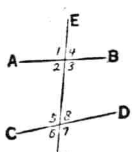
【共軛角】[英] Conjugate angles. 見角條.

【共軛弧】[英] Conjugate arcs. 圓之二弧,合而等於全圓周,則曰二弧互爲共軛.

【共線性】[英] Collinearity. 卽三以上之點,在一直線上.

【同軸圓】[英] Coaxial circles. 同根軸上之諸圓,曰同軸圓.

【同位角】[英] Corresponding angles. 二直線 AB, CD, 爲一直線 EF 所截,則得八角,其中 1 與 5, 2 與 6, 3 與 7, 4 與 8 分別稱爲同位角.



【同一法】[英] Rule of Identity. 設有唯一之 X 與唯一之 Y, 而 X 爲 Y, 則 Y 爲 X; 如是推定之法,曰同一法.

【同心圓】[英] Concentric circles. 二以上之圓,有同一之中心者,曰同心圓.

【同積同形】[英] Congruent figures. 卽完全相等之圖形.

【劣角】[英] Minor conjugate angle, 或 Minor angle. 見[角]條.

【劣弧】[英] Minor conjugate arc, 或 Minor arc. 圓之二弧,合而爲全圓周時,其小者曰劣弧.

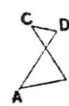
【劣比】[英] Ratio of less inequality. 比 A:B 中,若 A<B, 則其比爲劣比; A=B, 則爲等比; A>B, 則爲優比.

【劣弓形】[英] Minor conjugate segment, 或 minor segment. 合而爲全圓之二弓形,其小者曰劣弓形.

【交】[英] To intersect. 線與線,線與面,面與面相截而合曰交.

【交點】[英] Point of intersection. 直線與直線,直線與曲線,及曲線與曲線所共之點曰交點.

【交截四邊形】[英] Cross quadrilateral. 如圖所示,二邊互截之四邊形曰交截四邊形.



【合同形】[英] Congruent figures. 卽同積同形.

【合比定理】[英] Componendo. 見966題.

【有中心形】[英] Central figure. 卽有中心之圖形,如球,平行四邊形,圓等是.

【有限直線】[英] Finite straight line. 卽其長爲有限之直線.

【多角形】[英] Polygon. 三以上之直線所圍之平面形曰多角形. 又是等直線曰多角形之邊, 邊與邊相會之點曰多角形之頂點, 各邊之和曰多角形之周. 多角形依其邊數或角數區別爲三角形[三邊形],四角形[四邊形], 五角形[五邊形], 等. 各邊相

等之多角形曰等邊形,各角相等之多角形曰等角形,等邊等角之多角形曰正多角形.

【自共軛三角形】[英] Self-conjugate triangle. 三角形之各角頂爲對邊之極者,曰自共軛三角形.

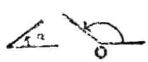
七 畫

【作圖】[英] Construction. 由已知件以作幾何圖形曰作圖.

【作圖題】[英] Problem of construction. 由幾何方法,作適合已知件之圖形之問題,曰作圖題.

【作圖基本法】[英] Postulate. 同公法.

【角】[英] Angle. 由一點引二直線,其形曰角;二直線曰角之二邊,點曰角頂. 或一直線將其一端爲樞而旋轉,則亦可得角.



角之大小,不關邊長,視其一邊由他邊起所旋轉之量而定. 角常用反時計向之弧形簇表之,故又得以角內之一字母表之,如角 α, 或 $\angle\alpha$, 或 $\hat{\alpha}$. 又以角頂上之一字母表之亦可,如 $\angle O$, 或 $\hat{O}$. 又以三字母表之亦可,如 $\angle AOB$, 或 $A\hat{O}B$; 但此時在角頂之字母,須書於中央.

又以其二邊之字母表之亦可,如 $\angle(a, b)$, 或 $a\hat{\ }b$. 直線 OA, OB 所夾之角有二,一爲由 OA 向右旋轉至 OB 者,一爲由 OA 向左旋轉至 OB 者. 此二角曰互爲共軛,其大者曰優角,其小者曰劣角. 一直線將其一端爲樞,旋轉一周而至原位置,其所成之角曰周角. 由一點引三直線 OA, OB, OC, 設 OB 在 $A\hat{O}C$ 之內,則 $A\hat{O}B$ 與 $B\hat{O}C$ 互稱爲隣角或接角.

【角度】[英] Angular measure. 卽角之大小. 直角之九十等分之一曰度,度之六十等分之一曰分,分之六十等分之一曰秒. 度分秒分別以記號 °, ′, ″ 表之;如二十八度三十七分五十四秒記作 28° 37′ 54″.

【位置】[英] Position. 同一之物,持於左手與持於右手,其位置不同;故凡物體皆有位置,位置者,乃以表示物體之所在者也.

【位於相似】[英] To be similarly situated. 若干相似形之對應邊,互相平行,則曰是等相似形位於相似,或應位相似,或在相似之位置.

【足】[英] Foot. 由某點向一直線引垂線或斜線,則其會合之點曰垂線或斜線之足.

【形】[英] Shape. 物體中有爲圓者,有爲四角者,其所成之種種形狀曰形.

【系】[英] Corollary. 由一命題直接推定而得之命題曰系.

【夾角】[英] Included angle, 或 Contained angle. 卽夾於二直線或弧間之角.

【求積】[英] Mensuration. 求積爲應用幾何學之一分科,論究線長,面積,體積等之求法者.

【束線】[英] Pencil. 多數[大都爲 4]直線交於一點,則在其交點一方之部分曰束線.

【折線】[英] Broken line. 接合種種直線之端與端而成之線曰折線.

【延線】[英] Production. 卽有限直線之

延長部分.

【更比定理】［英］Alternando. 見 964 題.

【完全四邊形】［英］Complete quadrilateral. 延長四邊形之二組對邊,其相交而生之形,曰完全四邊形.

八　畫

【直徑】［英］Diameter. 即圓中過中心之直線.

【直線】［英］Straight line, 或 Right line. 始終有同一方向之線曰直線.又取線中任何部分,任疊於他部分上,而能全合者,則其線曰直線.

【直線形】［英］Rectilinear figure. 卽三以上之直線所圍之平面形.

【直角】［英］Right angle. 一直線爲他直線之垂線,則其所夾之角曰直角.

【直角三角形】［英］Right-angled triangle. 三角形中,一角爲直角者,曰直角三角形.

【垂線】［英］Perpendicular. 一直線與他直線相交,其所成之二隣角各爲直角,則曰此二直線互爲垂線.

【垂心】［英］Ortho-centre. 由三角形之各角頂,向其對邊引三垂線,其交點曰三角形之垂心.

【垂足線】［英］Pedal line. 同 Simson 氏線.

【垂足三角形】［英］Orthique triangle, 或 Pedal taiangle. 由三角形之各角頂,向對邊引三垂線,聯結其垂足而得之三角形,曰垂足三角形.

【垂直二等分線】［英］Perpendicular bisector. 垂直於有限直線中點之直線,曰有限直線之垂直二等分線.

【定義】［英］Definition. 即規定名詞術語意義之陳述.

【定理】［英］Theorem 幾何學中之定理者,乃得依據已知命題證明之命題也.所謂已知命題,包含定義,公理,或已證明之定理.

【定長直線】［英］Definite straight line. 卽其長爲一定之直線.

【定周最大積形】［英］Didonia. 卽以定周所圍成之最大面積之曲線形,是卽圓.

【長方形】［英］Oblong. 同矩形.

【長菱形】［英］Rhomboid. 卽平行四邊形.

【弧】［英］Arc. 普徧言之,凡曲線之一部皆曰弧.惟初等幾何學中所謂弧者,係單指圓周之一部,所謂圓弧是也.

【弧度】［英］Circular measure. 四等分圓周,其一曰象限;九十等分一象限,其一曰度;六十等分一度,其一曰分;六十等分一分,其一曰秒.

【弦】［英］Chord. 圓周間所夾之直線曰圓之弦.

【弦】［英］Hypotenuse. 直角三角形對直角之邊曰弦,又稱斜邊.

【底】［英］Base. 由多角形之一邊觀之,多角形立於其上,則名其邊曰多角形之底.又二等邊三角形中,不等之邊曰底;平行四邊形梯形中,平行之邊曰底.

【底角】［英］Base angle. 卽隣於底邊之角.

【周】［英］Perimeter, 或 Contour. 閉合

幾何圖形境界之全體曰周.

【周角】［英］Circum-angle, 或 Perigon. 觀［角］條.

【股】 直角三角形中, 直角傍之二邊, 其長者曰股.

【玩索】［英］Discussion. 作圖題之玩索者, 即論究其解答數, 可能與不可能之限界等之謂也.

【法線】［英］Normal. 平面曲線某點上之法線者, 乃在此曲線之平面內, 於是點垂直於此點之直線, 故圓之法線, 過其中心.

【空間】［英］Space. 空間之精密定義, 雖無從規定, 但概括言之, 不論任何方面, 凡包含一切物體之無限之廣, 皆曰空間.

【命題】［英］Proposition. 一事項之陳述曰命題.

【例題】［英］Example. 用以表示普徧原理之特別應用之命題曰例題, 大都爲說明定律之性質及應用而設者.

【兩可款】［英］Ambiguous case. 如 79 題, 由一假設生出二終結時, 曰兩可款.

【近世幾何學】［英］Modern Geometry. 近世幾幾學者, 即由十九世紀中 Carnot (著 Géométrie de position, 1803 年), Brianchon (著 Mémoire sur les lignes du second ordre, 1817 年), Poncelet (著 Traité des propriétés projective des figures, 1822 年), Möbius (著 Barycentrische calcul, 1827 年), Steiner (著 Systematische Entwickelung, 1832 年), Charles (著 Géométrie supériure, 1852 年), Von Staudt (著 Geometrie der Lage, 1847 年), 及其他諸氏之研究而成之綜合幾何學 (Synthetic geometry), 其中所論述者, 以不調和比, Brianchon 氏定理, Ceva 氏定理, 同軸圓, 完全四邊形, 十字比, Desargue 氏定理, 調和點列, 調和束線, 倒形法, 對合, Menerus 氏定理, Pascal 氏定理, 極及極線, 與 Ptolemy 氏定理等爲主.

【沿對角線之平行四邊形】［英］Parallelograms about the digonal. 過平行四邊形對角線上之任意點, 作平行於邊之二直線, 則得四平行四邊形, 其跨於對角線之二者, 曰沿對角線之平行四邊形.

九 畫

【面】［英］Face. 即圍立體之平面.

【面】［英］Surface. 空間之一部與他部之界曰面, 又立體與其周旁空間之界曰面, 面有長, 廣, 及位置, 而無厚. 又線不沿其自身而運動, 其所生者曰面, 面之義如是定之亦可.

【面積】［英］Area. 平面形形內所含之廣曰面積, 又圍立體之面之廣亦曰面積.

【相似形】［英］Similar figures. 同相似直線形.

【相似中心】［英］Centre of similitude, 或 centre of similarity. 二相似形之對應邊, 分別平行, 則聯結各對應角頂之直線, 交於一點, 此點曰相似中心.

【相似內心】［英］Inner centre. 二相似多角形或二圓之二相似中心, 其在兩形之內

方者,曰相似內心,在外方者曰相似外心.

【相似外心】 [英] Outer centre. 見[相似內心]條.

【相似直線形】 [英] Similar rectilihear figures. 卽邊成比例之等角形.

【軌跡】 [英] Locus. 一點依某條件而運動,其所經徑路之全體,曰其點之軌跡. 若點之運動,以平面上爲限,則其軌跡大概爲一或多數之直線或曲線.

【軌跡交截法】 [英] Intersection of loci. 幾何學之作圖題中,常有決定合於二條件之點之位置者. 欲解此問題,軌跡法最爲必要;因適合各條件之一切點,皆有其軌跡,而此二軌跡所共之點,卽二軌跡之交點,能適合二條件也. 應用此原理以解是等作圖題之方法,曰軌跡交截法.

【秒】 [英] Second. 一度之六十分之一曰分,一分之六十分之一曰秒.

【重心】 [英] Centroid, 或 Center of gravity, 或 Median point. 卽質量之中心;初等幾何學中,大都指三角形之重心. 三角形之重心者,乃三中線之交點;若以此點支持之,則三角形得平衡.

【後項】 [英] Consequent, 卽比之第二項.

【前項】 [英] Antecedent. 比 A:B 中, A 曰前項.

【首線】 [英] Initial line. 一直線將其一端爲樞,旋轉而畫角時,其原位置曰首線.

【約量】 [英] Measure. 設一直線適精密含有若干個他直線,或一面積適精密含有若干個他面積,則後直線或面積曰前直線或面積之約量.

【限點屬】 [英] Limiting point species. 見 2367 題注意.

十 畫

【逆定理】 [英] Converse theorem. 某定理之假設與終結,分別爲他定理之終結與假設,則二定理互稱爲逆定理. 觀卷首.

【逆相似圓】 [英] Circles of anti-similitude, 以二圓之二相似中心爲中心, 以對應之逆相似矩形之平方根爲半徑所作之圓,曰逆相似圓.

【逆相似矩形】 [英] Rectangle of anti-similitude. 卽 2355 題中之各常數矩形.

【根軸】 [英] Radical axis. 由各點向二圓所引之切線皆相等,則此各點之軌跡曰二圓之根軸,此軌跡爲一直線. 觀 2359 題.

【根軸心】 [英] Radical centre. 一組三圓中,其兩兩之根軸,交於同點,此點曰是等圓之根軸心.

【射線】 [英] Projective line 組成束線之直線曰射線.

【射影】 [英] Projection. 一點於一直線上之射影者,乃由此點至此直線上所引斜線[卽射線]之足. 一直線在他一直線上之射影者,乃由前直線上之各點向後直線上所作各平行直線之足之軌跡;又若射線爲後直線之垂線,則名之曰正射影.

【倍量】 [英] Multiple 一直線爲他直線精密測量時,適得整數若干倍,則前直線曰後直線之倍量.

【倍弦】 [英] Double chord. 過二圓之交

點，兩端終於圓周之直線曰倍弦.

【高】［英］Height. 三角形之高，爲由三角形之頂點至底邊或其延線之垂直距離. 平行四邊形及梯形之高，爲二平行邊間之垂直距離.

【原點】［英］Origin. 設角爲其一邊由他一邊之位置起，環繞頂點依反時計向旋轉而生者，則其不動之一邊曰主線，頂點曰原點.

【配景】［英］Perspective. 如 2342 題之兩三角形之關係，曰配景，三直線之交點曰配景中心 (Centre of perspective)，三交點所在之直線曰配景軸 (Axis of perspective).

【扇形】［英］Sector. 卽圓之二半徑與弧所圍之部分.

【矩形】［英］Rectangle. 各角爲直角之平行四邊形曰矩形. 或謂一角爲直角之平行四邊形曰矩形亦可.

【倒定理】［英］Obverse theorem. 觀卷首.

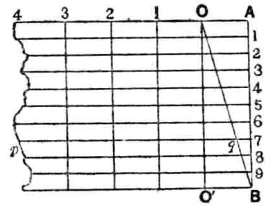
【除比定理】［英］Dividendo. 同分比定理. 觀 966 題.

十 一 畫

【斜角】［英］Oblique angle. 不爲直角之角曰斜角，卽銳角或鈍角.

【斜線】［英］Oblique line, 或 Oblique. 某直線之斜線者，卽與其相交之直線中，除其垂線以外之一切線. 或謂與某直線成斜角之線亦可.

【斜尺】［英］Digonal scale. 斜尺，一名對角線尺，乃依據相似三角形之原理，以計算精密之極小線分者. 如圖所示者，可計算一吋之四十分之一. 其中 OA 爲一吋之四分之一；以水平平行線十等分 AB，命分點爲 1, 2, 3,……. 於是夾於 AB 及 OB 間



之水平平行線部分，得依據相似三角形之原理計算之，而知其表 OA 之 $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, ……, $\frac{9}{10}$. 故 pq 之長爲 1 吋及其四十分之七.

【斜邊】［英］Hypotenuse. 卽直角三角形中直角之對邊. 同弦.

【斜度】［英］Inclination. 某直線對他直線之斜度者，卽其二直線間之角.

【斜三角形】［英］Scalene triangle, 或 Oblique triangle. 卽三邊不等之三角形，亦謂之不等邊三角形.

【頂角】［英］Vertical angle. 卽三角形底邊之對角.

【頂】［英］Vertex. (1) 角之頂者，卽角之二邊之交點. (2) 二等邊三角形之頂者，卽底之對角之頂點. (3) 以三角形之一邊爲底，則其對角之頂曰三角形之頂.

【頂點】［英］Vertex. 同頂.

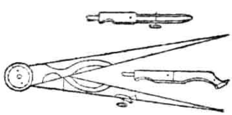
【第三比例項】［英］Third proportional. 三量成比例時，最後之量曰前二量之第三比例項.

【第四比例項】［英］Fourth proportional. 四量成比例時，最後之量曰前三量之第四比例項.

【假設】［英］Hypothesis. 見卷首［定理之關係］條.

【假定】［英］Assumption. 同假設.

【規】［英］Compasses. 一名圓規，又名兩脚規. 其兩脚以一端爲樞，而得自由開合；其中一脚可裝鋼筆，或鉛筆，或具尖頭之脚，其他一脚之尖頭爲針. 規之用途爲畫圓及移距離.



【動徑】［英］Radius Vector. 例如一點 P，沿某線運動時，由一定點（原點）至此點之距離曰動徑.

【常數】［英］Constant. 常數係與變數相對之語，其值一定不變.

【問題】［英］Problem. 問題者，乃欲求解或證明之題. 所謂解問題者，乃求適合題中所設條件之值，或證明一事.

【接角】［英］Adjacent angles, 或 Contiguous angles. 見角條.

【終結】［英］Conclusion. 由假設經推理而得之最後結果曰終結. 觀卷首.

【梯形】［英］Trapezoid. 四邊形有二邊平行，而他二邊不平行者，曰梯形.

【得全合】［英］Superposable. 圖形相疊而得完全密合，曰得全合.

十二畫

【等積形】［英］Equivalent figures. 卽面積相等之圖形.

【等角形】［英］Isogon, 或 Equiangular figure. 卽各角相等之多角形.

【等角三角形】［英］Equiangular triangle. 卽三角相等之三角形.

【等十字比】［英］Equi-cross ratio. 二組點列有相等之十字比時，名之曰等十字比.

【等比定理】［英］Ex-æquali. 見 968 題.

【等脚梯形】［英］Isosceles trapezoid. 梯形之不平行二邊相等者，名之曰等脚梯形.

【等脚三角形】［英］Isosceles triangle. 同二等邊三角形.

【補題】［英］Lemma. 卽補助之命題，爲證明或解本命題時所必要者.

【補弦】［英］Chord, Supplementary. 卽補弧之弦. 互爲補弧之二弧之弦，曰互爲補弦.

【補角】［英］Supplement. 二角之和爲二直角，則二角曰互爲補角.

【補弧】［英］Supplement. 二弦合而爲半圓周，則此二弧曰互爲補弧.

【幾何學】［英］Geometry. 幾何學爲算學之一分科，係論究物之大小，形狀，及位置之學科. 初等幾何學中所討論者，爲點，直線，圓，及由是等集成者，與由圓所成之面［卽平面，圓柱面，圓錐面，球］及其對應之立體等.

【幾何體】［英］Geometrical solid. 空間之有限部分曰幾何體，或立體. 空間爲可分者，由空間所分得之一部曰幾何體. 幾何體與物體不同：物體係就其實質而言，如

木,石等;立體係就物體所占有之空間而言,與實質無關.又立體有長,廣,厚,且爲可分者.

【幾何學公理】[英] Geometrical axiom. 見卷首.

【傍心】[英] Ex-centre. 即傍切圓之中心.

【傍切圓】[英] Escribed circle, 或 Excribed circle, 或 Ex-circle. 即切於三角形之一邊及其他二邊延線之圓.

【軸】[英] Axis. 某圖形之各部,關於一直線,皆爲對稱,則名其直線曰此圖形之軸.

【軸對稱】[英] Axial symmetry. 以一直線,分某圖形爲完全相等之二部分,即以一直線爲界,將此圖形摺合,而二部分完全密合時,曰以此直線將圖形分於對稱,而名其圖形曰有軸對稱之圖形.

【鈍角】[英] Obtuse angle. 大於一直角而小於二直角之角曰鈍角.

【鈍角三角形】[英] Obtuse angled triangle. 一角爲鈍角之三角形,曰鈍角三角形.

【量】[英] Quantity. 得增減且得測量者曰量.

【隅】[英] Corner. 多角形之角頂曰隅.

【菱形】[英] Rhombus, 或 Lozenge. 隣邊相等之平行四邊形曰菱形.

【割線】[英] Secant. 截曲線於二或多點之直線曰割線. 圓之割線,爲截圓周於二點之無限直線.

【距離】[英] Distance. 二點間之距離者,即聯結二點之直線之長.

【象限】[英] Quadrant. 圓周之四分之一曰象限.

【單位】[英] Unit. 單位者,因欲表量而選之一定量,量與單位之比爲其量之數值.

【圍繞線】[英] Closed line. 曲線之兩端密合者曰圍繞線.

【普通公理】[英] General axiom. 即作爲推理基本之命題,關於普通之量者. 觀卷首.

【黃金分割】[英] Golden section. 同中末分割.

十三畫

【圓】[英] Circle. 圓者,乃以一線分之一端爲樞,旋轉一周而生之平面形;其端點曰圓之中心,他端所畫之曲線,即圓之界,曰圓周.

【圓規】[英] Compasses. 同[規].

【圓弧】[英] Circular arc. 即圓周之一部.

【圓周】[英] Circumference. 見[圓]條.

【圓周率】[英] Ludolphian number. 圓周與直徑之比曰圓周率.

【圓周角】[英] Angle at the circumference. 由圓周上之一點引二弦,其所夾之角曰圓周角.

【極】[英] Pole. 於圓之任意直徑上取二點,其一取於內,他一取於外,令由中心至此二點之距離所包之矩形,等於半徑上之正方形. 過此二點引此半徑之垂線,則此垂線之一,曰他點[此垂線不過者]之極線,而點曰極線之極.

【極限】[英] Limit. 變量之極限者,爲變量漸漸趨近之量,此量與變量之差,得命其

小於任意量,但變量決不達其極限.

【極線】［英］Polar 見［極］條.

【極大值】［英］Maximum value. 設一量Y,含變量X,Y之值隨X之遞變而漸漸增大或漸漸減小. 當其由增大而減小時,Y必通過大於前後隣接值之值,其值曰Y之極大值. 反之,當其由減小而增大時,Y必通過小於前後隣接值之值,其值曰Y之極小值.

【極小值】［英］Minimum value. 見［極大值］條.

【解法】［英］Solution. 問題之解法者,卽適合問題條件之未知部分之求法.

【解答】［英］Solution. 解得之結果.

【解析法】［英］Analysis, method of. (1) 古代解析法.茲由 Pappus (約於公元 340 年左右,產於亞力山大里亞) 之著書中,摘錄古代解析法之意義大要於下: 解析法者,由假定所求部分成立而出發之推理法也. 反之,於綜合法 (Synthesis) 中,則由解析法中之最後部分出發,以達於所求部分. (2)近世解析法.近世解析法,非推理之特別方法,而為算學之推究. 解析法中,以單一之字母表數,用記號而運算,因而極為簡明. 解析法不但有利於算學之研究,且應用於物理學等時,其效用亦匪淺鮮.

【鉤】 直角三角形中,直角傍之二邊,其較短者曰鉤.

【鉤股形】［英］Right angled triangle. 同［直角三角形］.

【傾斜】［英］Inclination. 同斜度.

十四畫

【對角】［英］Opposite angle. 某角之對角者,卽與其相對之角.

【對角線】［英］Digonal. 聯結多角形不相隣接之二對角頂之直線曰對角線.

【對應】［英］Homologous, 或 Corresponding. 幾何學中相似多角形之相似部分,曰對應部分,如相似多角形中之對應邊,對應角等. 又比例中之第一項與第三項,第二項與第四項曰對應項.

【對應邊】［英］Homologous sides, 或 Corresponding sides. 見［對應］條.

【對應角】［英］Homologous angles, 或 Corresponding angles. 見［對應］條.

【對應線】［英］Homologous line. 相似形中分別對應之二點,其各自聯結之直線曰對應直線. 普徧言之,一線上一切點之對應點在他線上,則名二線曰對應線.

【對稱】［英］Symmetry. 中心對稱,軸對稱,等總名曰對稱. 觀［中心對稱,軸對稱］條.

【對稱軸】［英］Axis of symmetry. 見［軸對稱］條.

【對稱中心】［英］Centre of symmetry. 見［中心對稱］條.

【對頂角】［英］Vertically opposite angles. 二直線相交,其所成之相對之角曰對頂角.

【對定理】［英］Opposite theorem. 見卷首.

【圖】［英］Diagram. 卽幾何學中為證明

或說明而繪畫者.

【圖形】 [英] Figures. 點, 線, 面及其集成者曰圖形.

【像】 [英] Image. 由一點 A, 向一直線 XY, 引垂線 AM; 延長 AM 爲 AA′, 令 A′M = AM; 於是 A 及 A′ 曰關於直線 XY 互爲他點之像.

【複比】 [英] Compound ratio. 有同種之若干量, 其第一量與最後量之比, 曰第一量與第二量之比, 第二量與第三量之比, 如是以至最後量等諸比之複比. 又有若干比與一組諸量, 其第一量與第二量之比, 等於第一比, 第二量與第三量之比, 等於第二比, 以下倣此, 則此一組之第一量與最後量之比, 曰前若干比之複比.

【聚交點】 [英] Point of concurrence. 三以上之直線, 交於一點, 則名其交點曰聚交點.

十 五 畫

【調和分割】 [英] Harmonic division. 將某直線分於調和, 其分法曰調和分割.

【調和中項】 [英] Harmonic mean. C, D 二點將直線 AB 分於調和時, AD, CD, BD 成調和級數, CD 曰調和中項.

【調和點列】 [英] Harmonic range. 設 C, D 爲關於直線 AB 之調和共軛點, 則 A, B, C, D 曰調和點列.

【調和束線】 [英] Harmonic pencil. 束線, 卽由一點射出之四直線, 截一直線, 而其四交點成調和點列時, 名其束線曰調和束線.

【調和共軛點】 [英] Harmonically conjugate points. 直線 AB 爲二點 C, D 分於調和時, 名 C, D 曰關於直線 AB 之調和共軛點.

【線】 [英] Line. 面之界曰線, 面之一部與他一部之界亦爲線. 線有位置與長, 而無廣及厚. 面與面之交處亦爲線. 幾何學中之線, 分爲直線及曲線二種.

【線分】 [英] Segment of a straight line. 卽直線之一部.

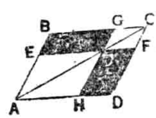
【線向】 [英] Line direction. 卽線之方向, 觀 [方向] 條.

【線對稱】 [英] Line symmetry. 同 [軸對稱].

【線上正方形】 [英] Square on the line. 卽以一直線爲一邊而作之正方形.

【餘角】 [英] Complement. 二角合而爲一直角, 則曰二角互爲餘角.

【餘形】 [英] Complement (of the parallelogram). 平行四邊形中隣接於沿對角線之平行四邊形, 曰餘形. 如 OHDF, OGBE 是.



【餘弧】 [英] Complement (of arc). 二弧合而爲一象限, 卽圓周之四分之一, 則曰此二弧互爲餘弧.

【銳角】 [英] Acute angle. 卽小於直角之角.

【銳角三角形】 [英] Acute angled triangle. 三角形之各角爲銳角者, 曰銳角三角形.

【隣角】 [英] Adjacent angles. 見 [角] 條.

【隣弓形】［英］Alternate segment. 由圓周上一點，引切線及割線，其對於割線而在切線異側之弓形曰隣弓形，此乃指切線與割線間之弓形而言者.

【窮舉證法】［英］Proof by exhaustion. 此證明法乃由古代學者應用而來，其法如下．不相容之若干假設中，有一爲眞，而證明是等假設，除一者以外，其餘皆爲僞者，因而知所餘之假設爲眞.

十六畫

【錯角】［英］Alternate angles. 同內錯角，觀［內錯角］條.

【橫截線】［英］Transversal. 橫截一列直線之直線曰橫截線.

十七畫

【優角】［英］Major angle. 見［角］條.

【優弧】［英］Major conjugate arc. 二弧合而爲全圓周時，其大者曰優弧.

【優弓形】［英］Major conjugate segment. 卽大於半圓之弓形.

【點列】［英］Range. 多數［普通爲四］之點，位於一直線上時，名之曰點列.

【點對稱】［英］Point symmetry. 同中心對稱.

【應位相似】［英］To be similarly situated. 同［位於相似］.

十八畫

【轉換法】［英］Rule of conversion. 見卷首.

十九畫

【證明】［英］Proof, 或 Demonstration. 證明者，乃達於終結之推理歷程．證明之目的，在說明其結果必與假定之眞理相伴而來．算學之證明中，假定爲眞理者，有定義，公理，及已證明之命題．證明之方法，有直接間接二種.

【邊心距】［英］Apothem. 正多角形中，由其一邊至中心之距離，曰邊心距.

外來字

【Alhazen 氏問題】見 2289 題.

【Archimedes 氏定理】見 195 題.

【Bobillier 氏定理】見 731 題.

【Brahmegpta 氏定理】見 526 題.

【Carnot 氏定理】見 197 題.

【Castillon 氏問題】見 1998 題.

【Ceva 氏定理】見 1187, 2340 題.

【Chapple 氏定理】見 1293 題.

【Desargue 氏定理】見 2342 題.

【Euclid】希臘古代幾何學家，爲著完全幾何學書之第一人，後世卽以其名名其書.

【Euler 氏定理】見 762 題.

【Feuerbach 氏定理】見 2371 題.

【Galilleo 氏定理】見 1362 題.

【Menelaus 氏定理】見 1127, 1186, 2341 題.

【Pascal 氏定理】見 2348 題.

【Peaucellier 氏直線器】見 2384 題注意.

【Philo 氏證法】見 77 題注意.

【Philo 氏線】見 2330 題注意.

【Poncelet 氏定理】 即九點圓定理,見 524 題.

【Ptolemy 氏定理】 見 1150 題 Ptolemy 爲西曆紀元第二世紀之希臘星學家,地理學家,及幾何學家.

【Pythagoras 氏定理】 見 750, 1149 題.

【Salmon 氏定理】 見 2426 題.

【Simson 氏線】 見 521 題.

英漢名詞對照表

A

Absurdity. 不合理.
Acute angle. 銳角.
Acute angled triangle. 銳角三角形.
Addendo. 加比定理.
Adjacent angle. 接角. 隣角.
Alternando. 更比定理.
Alternate exterior angles. 外錯角.
Alternate interior angles. 內錯角.
Alternate angles. 錯角.
Alternate segment. 隣弓形.
Altitude. 高.
Ambiguous case. 兩可款.
Analysis, Method of. 解析法.
Angle. 角.
Angle at the circumference. 圓周角.
Angle at the centre. 中心角.
Angle at the segment. 弓形角.
Angle of inclination. 傾斜角.
Angular measure. 角度.
Anharmonic ratio. 不調和比.
Antecedent. 前項.
Apothem. 邊心距.
Approximate value. 近似值.
Arc. 弧.
Area. 面積.
Assumption. 假定.
Axial-symmetry. 軸對稱.
Axiom. 公理.
Axis. 軸.
Axis of perspective. 配景軸.透視軸.
Axis of symmetry. 對稱軸.

B

Base. 底.
Base angle. 底角.
Bisector. 二等分線.
Body. 體.立體.
Boundary. 境界.
Breadth. 闊.
Broken line. 折線.

C

Central axis. 中心軸.

Central figure. 有中心形.

Central symmetry. 中心對稱.

Centre. 中心.

Centre-line. 中心線.

Centre of inversion. 倒轉中心.

Centre of gravity. 重心.

Centre of similarity. 相似中心.

Centre of symmetry. 對稱中心.

Centre of perspective. 配景中心. 透視中心.

Centroid. 重心.

Chord. 弦.

Chord of contact. 切弦.

Chord supplementary. 補弦.

Circle. 圓.

Circles of anti-similitude. 逆相似圓.

Circle of inversion. 倒轉圓.

Circular arc. 圓弧.

Circular measure. 弧度.

Circular method. 弧度法.

Circular point. 圓周上之點.

Circum-angle. 周角.

Circum-centre. 外心.

Circumference. 圓周.

Circum-polygon. 外接[切]多角形.

Circumscribed circle 外接圓.

Circumscribed figure. 外接形 外切形.

Circumscribed quadrilateral. 外接四邊形. 外切四邊形.

Circumscribed polygon. 外接多角形. 外切多角形.

Closed line. 圍繞線.

Co-axal circles. 共軸圓.

Collinearity. 共線性.

Collinear points. 共線點.

Commensurable magnitude. 可通約量.

Common chord. 公弦.

Common point species. 共點屬.

Common tangent. 公切線.

Compasses. 規.圓規.兩脚規.

Complement (of angle). 餘角.

Complement (of arc). 餘弧.

Complement (of the parallelogram). 餘形.

Complete quadrilateral. 完全四邊形.

Componendo. 合比定理.

Compound ratio. 複比.

Concentric circles. 同心圓.

Conclusion. 終結.

Concurrency. 共點性.

Condition. 條件.

Congruent figures. 合同形.同積同形.

Conic sections. 圓錐曲線法.

Conjugate angles. 共軛角.

Conjugate arcs. 共軛弧.

Consequent. 後項.

Constant. 常數.

Construction. 作圖.

Constructive geometry. 作圖幾何學.

Contained angle. 夾角.

Contiguous angles. 接角.

Continued proportion. 連比例.
Continuity. 連續量.
Contour. 周.
Contrapositive theorem. 對定理.
Converse theorem. 逆定理.
Convex broken line. 凸折線.
Convex polygon. 凸多角形.
Corner. 隅.
Corollary. 系.
Corresponding. 對應.
Corresponding angle. 對應角.同位角.
Corresponding sides. 對應邊.
Cross quadrilateral. 交截四邊形.
Cross ratio. 十字比.
Curve. 曲線.
Curved line. 曲線.

D

Data. 已知件.
Datum. 已知件.
Decagon. 十角形.
Deduction. 演繹法.
Definite straight line. 定長直線.
Definition. 定義.
Degree. 度.
Demonstration. 證明.
Diagonal. 對角線.
Diagonal scale. 斜尺.
Diagram. 圖.
Diameter. 直徑.
Diamond. 菱形.
Didonia. 定周最大積形.
Direction. 方向.
Discussion. 吟味.玩索.
Distance. 距離.
Divide externally. 外分.
Divide harmonically. 分於調和.
Divide internally. 內分.
Divide medially. 分於中末.
Divide similarly. 分於相似.
Divide symmetrically. 分於對稱.
Dividendo. 分比定理.除比定理.
Divider. 分線器.
Dodecagon. 十二角形.
Double chord. 倍弦.
Duplicate ratio. 二乘比.

E

Elementary geometry. 初等幾何學.
Enneagon. 九角形.
Equiangular figure. 等角形.
Equiangular triangle. 等角三角形.
Equi-cross ratio. 等十字比.
Equilateral triangle. 等邊三角形.
Equivalent figures. 等積形.
Escribed circle. 傍切圓.
Ex-æquali. 等比定理.
Example. 例題.
Ex-centre. 傍心.
Ex-circle. 傍切圓.
Excribed circle. 傍切圓.
Extension. 廣袤.
Exterior angle. 外角.
External axis of similitude. 相似外軸.

External bisector. 外二等分線.

External centre of similitude. 相似外心.

External common tangent. 外公切線.

Extreme. 外項.

Extreme and mean ratio. 中末比.

F

Face. 面.

Figure. 圖形.

Finite straight line. 有限直線.

Foot. 足.

Fourth proportional. 比例第四項.第四比例項.

G

General axiom. 普通公理.

Geometrical axiom. 幾何學公理.

Geometrical image. 幾何像.

Geometrical solid. 幾何體.

Geometry. 幾何學.

Geometry of space. 立體幾何學.

Gnomon. 磬折形.

Golden section. 黃金分割.

H

Harmonic division. 調和分割.

Harmonic (或 harmonical) mean. 調和中項.

Harmonic pencil. 調和束線.

Harmonic proportion. 調和比例.

Harmonic range. 調和點列.

Harmonic section. 調和分割.

Harmonically conjugate points. 調和共軛點.

Height. 高.

Hendecagon. 十一角形.

Heptagon. 七角形.

Hexagon. 六角形.

Homologous angles. 對應角.

Homologous lines. 對應線.

Homologous points. 對應點.

Homologous sides. 對應邊.

Holizon. 水平.

Hypotenuse. 斜邊.弦.

Hypothesis. 假設.

I

Image. 像.

In-centre. 內心.

In-circle. 內切圓.

Inclination. 傾斜.斜度.

Included angle. 夾角.

Incommensurable quantities. 不可通約量.

Indefinite straight line. 未定長直線.

Indeterminiate problem. 不定問題.

Initial line. 首線.

Inner centre. 相似內心.

In-polygon. 內接多角形.

Inscribe. 內接.

Inscribed circle. 內切圓.

Inscribed figure. 內接形.

Inscribed quadrilateral. 內接四邊形.

Interior angle. 內角.

Interior opposite angle. 內對角.

Internal bisector. 內二等分線.
Internal centre of similitude. 相似內心.
Internal common tangent. 內公切線.
Intersect. 交.
Intersection of loci. 軌跡交截法.
Inverse points. 倒點.
Inverse proportion. 逆比例.反比例.
Inverse ratio. 逆比.反比.
Invertendo. 反比定理.
Isogon. 等角形.
Isosceles trapezoid. 二等邊梯形. 等脚梯形.
Isosceles triangle. 二等邊三角形. 等脚三角形.

J

Joins. 連線.

L

Lemma. 補題.
Length. 長.
Limit. 極限.
Limiting point species. 限點屬.
Line. 線.
Line direction. 線向.
Line symmetry. 線對稱.
Line of concurrency. 共點線.
Locus. 軌跡.
Lozenge. 菱形.
Ludolphian number. 圓周率.

M

Magnitude 大小.
Major angle. 優角.
Major counjugate arc. 優弧.
Major conjugate segment. 優弓形.
Maximum value. 極大值.
Mean. 中項.內項.
Mean proportional. 比例中項.
Measure. 約量.
Medial section. 中末分割.
Median. 中線.
Median point. 重心.
Mensuration. 求積.
Middle point. 中點.
Minimum value. 極小值.
Minor angle. 劣角.
Minor conjugate angle. 劣角.
Minor arc. 劣弧.
Minor conjugate arc. 劣弧.
Minor segment. 劣弓形.
Minor conjugate segment. 劣弓形.
Minute. 分.
Modern geometry. 近世幾何學.
Multiple. 倍量.

N

Nine point circle. 九點圓.
Nonagon. 九角形.
Normal. 法線.

O

Oblique. 斜線.
Oblique angle. 斜角.
Oblique taiangle. 斜三角形.

Oblong. 矩形.長方形.

Obtuse angle. 鈍角.

Obtuse angled triangle. 鈍角三角形.

Obverse theorem. 倒定理.

Octagon. 八角形.

Opposite angles. 對角.

Opposite sides. 對邊.

Opposite theorem. 對定理.

Origin. 原點.

Orthique triangle 垂足三角形.

Ortho-centre. 垂心.

Ortho-circle. 直交圓.

Orthogonal projection. 正射影.

Orthotomic circle. 直交三圓之圓.

Outer centre. 相似外心.

P

Parallel straight lines. 平行直線.

Parallelogram. 平行四邊形

Parallelograms about the diagonal. 沿對角線之平行四邊形

Parallels. 平行線.

Pedal line. 垂足線.

Pedal triangle. 垂足三角形.

Pencil. 束線.

Pentagon. 五角形.

Pentedecagon. 十五角形.十五邊形.

Perigon. 周角.

Perimeter. 周.

Perpendicular. 垂線.

Perpendicular bisector. 垂直二等分線.

Perspective. 配景.

Plane. 平面.

Plane angle. 平面角.

Plane figure. 平面圖.平面形.

Plane geometry. 平面幾何學.

Plane rectilinear figure. 平面直線形.

Plane surface. 平面.

Planimetry. 平面幾何學.

Point. 點.

Point of contact. 切點.

Point of concurrence. 聚交點.

Point of intersection. 交點.

Point symmetry. 點對稱.

Polar. 極線,極直線.

Pole. 極.

Polygon. 多角形.

Position. 位置.

Postulate. 公法.作圖基本法.

Power. 方積.

Problem. 問題.

Problem of constructiones. 作圖題.

Production. 延線

Projection. 射影.

Proof. 證明.

Proof by exhaustion. 窮舉證法.

Proportion. 比例.

Proportional compasses. 比例規.

Proportionals. 比例量.

Proposition. 命題.

Protracter. 分度器.

Puissance. 方積.

Q

Quadrangle. 四角形.
Quadrant. 象限.
Quadrilateral. 四邊形.
Quantity. 量.
Quindecagon. 十五角形.

R

Radical axis. 根軸.
Radical centre. 根軸心.
Radius. 半徑.
Radius vector. 動徑.
Range. 點列.
Ratio. 比.
Ratio of equality. 等比.
Ratio of less inequality. 劣比.
Rays. 射線.
Reciprocal ratio. 反比.逆比.
Rectangle. 矩形.
Rectangle contained by two lines. 二線所包矩形.
Rectangle of anti-similitude. 逆相似矩形.
Rectilinear figure. 直線形.
Re-entering angle. 凹角.
Re-entrant angle. 凹角.
Re-entrant polygon. 凹多角形.
Reflex angle. 凹角.
Regular polygon. 正多角形.
Rhomboid. 長菱形.
Rhombus. 菱形.
Right angle. 直角.
Right angled triangle. 直角三角形. 鈎股弦.
Right line. 直線.
Rule of conversion. 轉換法.
Rule of identity. 同一法.
Ruler. 直尺.

S

Salient polygon. 凸多角形.
Scalene triangle. 斜三角形.
Secant. 割線.
Second. 秒.
Sector. 扇形.
Segment of a straight line. 線分.
Segment of a circle. 弓形.
Self-conjugate triangle. 自共軛三角形.
Semicircle. 半圓.
Semi-circumference. 半圓周.
Semi-diameter. 半徑.
Sense. 線向.
Shape. 形.
Side. 邊.
Similar figures. 相似形.
Similar polygon. 相似多角形.
Similarly situated. 位於相似. 應位相似. 在相似之位置.
Solid geometry. 立體幾何學.
Solution. 解法.解答.
Space. 空間.
Square. 正方形.
Square on the line. 線上正方形.

Stereometry. 立體幾何學.

Straight angle. 平角.

Straight line. 直線.

Superposable. 得全合.

Supplement of angle. 補角.

Supplement of arc. 補弧.

Surface. 面.

Symmetry. 對稱.

T

Tangent. 切線.

Tangential circle. 切圓.

Term. 項.

Tetragon. 四角形.

Tetragram. 四邊形.

Theorem. 定理.

Third proportional. 比例第三項. 第三比例項.

Touch internally. 內切.

Transversal. 橫截線.截線.

Trapezium. 不平行四邊形.

Trapezoid. 梯形.

Triangle. 三角形.

Trigon. 三角形.

Triplicate ratio. 三乘比.

U

Undecagon. 十一角形.

Unequal. 不等.

Unit. 單位.

V

Value. 值.

Variable. 變量.

Vertex. 頂.頂點.

Vertical angle. 頂角.

Vertical line. 垂直線.

Vertically opposite angles. 對頂角.

索引例言

●本辭典以問題解法爲中心，翻檢之時有待於靈便之索引，自屬必要.●但本辭典與他種辭典不同，帶有練習解題之性質，故全書順序，始自初步問題，逐步遞進，由淺入深，以期單用本書即能進窺堂奧，而無事他求.●是以爲使用本辭典者之便利計，注意於下列二事：●第一，所載各題，除至少數外，均各附圖，以檢索幾何學問題時，從圖形入手，實爲最妙之法也.●第二，另編索引，分册裝訂，不附於卷末，俾檢索之時，得便宜使用，而免上下翻查之障礙.●索引之編製，一以問題之種類爲歸，分類之法詳於索引目次，讀者可辨明所查問題係屬何種性質，先就目次得其所屬，檢明頁數，再查索引本文，自能檢得所求之題.●本辭典所集問題達二千四百有餘，搜羅雖不可謂殆盡，而於中等程度以及較高程度需用之題，自信已屬至廣.●本書所漏列之題雖已於續幾何學辭典中補入，而其解法實多可藉本書所載問題稍加推考即可得之.●類別問題之際，有取假設中之主要者，有取終結中之主要者，均斟酌題意之所重輕而定，例如 24 題［二對頂角之二等分線，成一直線］依其假設而歸入［角］部；38 題［一直線與他二直線交，若一組錯角相等，則後二直線平行］則依其終結而歸入［平行直線］部.●有時節取題文，而仍以不妨原意爲限，例如平行四邊形 ABCD 之作 □ABCD，在檢索上反形便利.●有時並用符號以代題文，例如 744 題可代以 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ 是.

幾何學辭典索引

目 次

第一 定理之部

第二 作圖題之部

第三 軌跡之部

第四 計算問題之部

第五 極大極小 123

第六 雜題

I. 計算的作圖

II. 附錄(近世幾何)

幾何學辭典

(索引)

第一 定理之部

1. 點

2. 直線

3. 角

4. 直角

5. 垂線及斜線

6. 平行直線

7. 二等邊三角形

[△ABC 中，假定 AB=AC].

8. 正三角形

9. 直角三角形

[△ABC 中,假定 C 為直角]

10. 三角形

[△ABC 中, 假定 $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ 之對邊分別爲 a, b, c, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$].

11. 平行四邊形

12. 菱形

13. 矩形

14. 正方形

15. 梯形

16. 四 邊 形

17. 多角形

18. 正多角形

19. 射影

20. 圓

21. 等圓

22. 對稱

23. 二圓

24. 同 心 圓

25. 圓 之 弦

26. 圓之弧

27. 圓周角

28. 內接形

29. 外 切 形

30. 三個以上之圓

31. 切線

32. 切圓

33. 圓之方積

第二 作圖題之部

1. 點

2. 角

3. 直線

4. 切線

5 弦

6. 三　角　形

[條件簡單者]

[三角形 ABC 中,在頂點 A, B, C, 之角,分別以 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ 表之,其對邊分別以 a, b, c, 表之,由 A, B, C 所引之中線分別以 AA′, BB′, CC′ 表之,命其長分別爲 m_a, m_b, m_c, 又命垂線 AD$=h_a$, BE$=h_b$, CF$=h_c$, 命二等分線 AM$_a=w_a$, BM$_b=w_b$, CM$_c=w_c$. 又外心表以 0, 內心表以 I, 三傍心表以 I$_a$, I$_b$, I$_c$, 而外接圓,內切圓,三傍切圓之半徑分別表以 r, ρ, ρ_a, ρ_b, ρ_c, 垂心表以 H, 重心表以 G.]

已知以下各件,求作三角形.

7. 直角三角形

[△ABC 中命 C 爲直角]

8. 二等邊三角形

[△ABC 中命 AB＝AC]

9 正三角形

10. 內接三角形

11. 外接〔切〕三角形

12. 三角形之雜題

13. 四邊形

14. 平行四邊形

15. 矩形

16. 菱 形

17. 正 方 形

18. 梯　形

19. 多 角 形

20. 正多角形

21. 圓

第三 軌跡之部

1. 等遠點之軌跡

2. 定遠點之軌跡

3. 等長線端之點之軌跡

4. 定長線端之點之軌跡

5. 中點之軌跡

6. 定比分點之軌跡

7. 令距離成定比之點之軌跡

8. 交點之軌跡

9. 頂點之軌跡

10. 中心之軌跡

11. 分成等積之點之軌跡

12. 令成定積之點之軌跡

13. 張等角之點之軌跡

14. 雜題

第四　計算問題之部

1. 求線分之長

2. 求邊之長

3. 求直徑,半徑之長

4. 求高,距離,弦之長

5. 求面積

6. 求比

7. 求邊數

8. 雜題

第五　極大極小

過一定點; (2) 設任意直線 YPZ 之 Y 在過 P, R 之圓周上, Z 在過 P, Q 之圓周上, 且 YR, ZQ 交於 X, 則 X 在過 Q, R 之圓周上; (3) 角 XOY, YOZ, ZOX 一定; (4) 垂直於 PO 引 YPZ, 則 ZX, XY 分別垂直於 QO, RO; 此時 XYZ 爲三邊過 P, Q, R 且與 ABC 等角之極大三角形. ... **2270**

●前題中若三角形 ABC 之邊 a, b, c 一定, O 爲三圓之交點, 則 $a\cdot OP+b\cdot OQ+c\cdot OR$ 較 O 在他位置時爲極小. **2271**

●設 A, B 爲所設點, P 爲在一定圓周上之點, 則比 PA : PB 之極大或極小, 在 P 爲定圓與過 A, B 之他圓之直交點時. **2272**

●設 ABC 爲定三角形, D 爲 AB 上之定點, E 爲 AB 延線上之定點, 以 D 爲頂點, 底之延線過 E, 且內接於 ABC 之諸三角形中, 以由底之兩端所引 CA, CB 之平行線交於 AB 上者爲極大. **2273**

●若交截四邊形之四邊爲所設邊, 則其兩三角形面積之差, 在四點爲共圓點時極小. **2274**

●若四邊形之四邊 a, b, c, d 爲所設邊, 則其對角線間之銳角, 在此四邊形內接於圓時, (1) 若非交截四邊形, 爲極大. (2) 若爲交截四邊形, 爲極小. 但此處 $a^2-b^2+c^2-d^2\neq 0$; 否則, 對角線直交, 面積爲極小. **2275**

●兩圓不交, 求其間最短及最長之距離. **2276**

●所設圓之一切內接矩形中, 有極大面積者爲正方形. **2277**

●求內接於所設半圓之極大矩形. **2278**

●所設圓之二定切線與一不定切線所圍三角形之面積, 在不定切線二等分於切點時爲極大或極小. ... **2279**

●對角線爲定量之平行四邊形中, 以菱形之面積爲極大. **2280**

●設四邊形之對角線爲定量, 則其面積在此對角線直交時爲極大. 而此對角線不論互截於何點, 與面積完全無關. **2281**

●所設正方形之內接正方形中, 有極小面積者, 乃等於原正方形之半分者. **2282**

●命所設圓之中心爲 C, 圓外之所設點爲 A, 過 A 引直線 AXY, 命其與圓之交點爲 X, Y, 則三角形 CXY 極大時之位置如何? **2283**

●命所設圓之中心爲 C, 此圓之弦爲 XY, 垂直於 XY 引 CP, 則 (1) CP+XP, (2) CP·PX 在何時爲極大? ... **2284**

... ... 2300

●設 A 及 B 爲二定點，分別在中心爲 C 之定圓之內部及外部，BC, AC 分別爲半徑之 m, n 倍，P, Q 爲定圓周上之二點．於是若此二點爲圓 ACB 與定圓之交點，則 (1) $m\cdot PA+n\cdot PB$ 爲極小，(2) $m\cdot QA\sim n\cdot QB$ 爲極大．但 C 與 P 在 AB 之異側，C 與 Q 在 AB 之同側． 2301

●設 ABC 爲所設三角形，試在角 A 之二等分線上求一點 P，令 $P\hat{B}C$ 與 $P\hat{C}B$ 之差爲極大；並證極大時是等角之和等於角 BAC 之半分． 2302

●設邊數爲已知之多角形之各頂點，分別在與邊數同個數之定直線上，則此多角形周之極小，在此定直線皆將多角形之外角二等分時． 2303

●邊數爲已知之等周多角形中，正多角形有極大之面積． 2304

●多角形中，若除一邊外之其他各邊皆爲所設長時，則此多角形之極大，在內接於除外之一邊爲直徑之半圓時．又試由是導出，若多角形之一切邊爲所設長，則此多角形之極大，在內接於圓時． 2305

●設多角形中，除一邊外，其他各邊皆爲定長，而除外一邊之兩隣邊相平行，然則此多角形何時爲極大？ ... 2306

●(1) 圓之內接同邊數諸多角形中，以正多角形之面積及周爲極大．(2) 圓外之切同邊數諸多角形中，以正多角形之面積及周爲極小． 2307

●設四邊形之一邊固定，其對邊恆過一定點，而不定頂點分別在所設二直線上，則此四邊形在何時爲極大？ 2308

●試在一所設直線上求一點，令由二所設點至此點之距離上正方形之和爲最小． 2309

●試在正方形內求一點，令由此點至四頂點之直線上之正方形和爲最小． 2310

●設 AB 爲圓中之定弦，XY 爲一任意弦，後弦之中點 Z 在前弦上，求 XY 之最大及最小者．又 Z 愈近 AB 之中點，則 XY 愈大，試證之． 2311

●由所設點至所設圓周之最長及最短直線過中心． 2312

●設 A, B 爲圓外之二定點，試在圓周上求一點 P，令由 A, B 至 P 之距離和爲極大或極小． 2313

●等周之平面形中，圓爲最大． 2314

●有等面積之平面形中，周最小者爲圓． 2315

●邊長分別相等之直線形中，內接於圓者爲最大． 2316

●有等周之三角形中，正三角形爲最大． 2317

第六 雜題

I. 計算的作圖

1. 代數式之作圖

2. 代數幾何法例題

II. 附錄(近世幾何)

1 共點性及共線性

2. 相似中心

3. 同軸圓

4. 相切

5. 倒形法

6　調和點列

7. 極及極直線

幾何學上應知之

算學家年表

〔生卒之年,均用公元,第一數目表生年,第二數目表卒年,加負號者爲公元前,加?號者爲約數.〕

【Ahmes】 (ä'mes). −1700? 埃及之僧. 所著算學書爲世界上之最古者.

【Anaxagoras】 (an-aks-ag'ō-ras). −499, −428. 希臘之哲學家兼算學家.

【Archimedes】 (är-ki-mē'dēz). −287, −212. 西西利人. 古代之算學及物理學大家.

【Aryabhatta】 (är-yä-bhä'ta). 476 生. 古印度之算學家. 著有代數學及幾何學.

【Boscovich】 (bos'ko-vich). Roger Joseph. 1711, 1787. 意大利之算學家,星學家,物理學家.

【Bramagupta】 (bräh-ma-göp'ta). 598 生. 印度之算學家. 印度最古著作家之一.

【Carnot】 (kär-no), Lazare Nicholas Marguerite. 1753, 1823. 法國之算學家及物理學家.

【Cavalieei】 (kä-vä-lē-ā'rē), Bonaventura. 1598, 1647. 意大利之有名算學家.

【Ceulen】 (koi'len), Ludolph van. 1540, 1610. 荷蘭之幾何學家.

【Ceva】 (chā'vä), Giovanni. 1648, 1737?. 意大利之幾何學家.

【Dase】 (dä'ze), Zaharias. 1824, 1861. 德國之有名計算家.

【De Morgan】 (dēmôr'gan), Augustus. 1806, 1871. 英國之算學家及物理學家.

【Descartes】 (dā-kärt'), Rene. 1596, 1650. 法國之有名算學,物理學,哲學家. 始創解析幾何學.

【Euclid】 (ū'klid). −300? 埃及之有名幾何學著作家.

【Euler】 (oi'ler), Leonhard. 1707, 1783. 瑞士人. 近世算學大家之一.

【Fermat】 (fer-mä), Pierre de. 1601, 1665. 法國之著名算學家.

【Gauss】 (gous), Karl Friedrich. 1777, 1855. 德國人. 近世算學大家之一.

【Henridci】 (hen-rē-tsə), Olaus. 1840 生. 幾何學之近世著作家. 曾居於倫敦.

【Hero】 (hēr'ō) of Alexandria. 或【Heron】 (hē'ron). −110? 希臘之有名測量及機械學家.

【Hippocrates】 (hi-pok'ra-tez) of Chios −470 生. 幾何學最初教科書之著者.

【Jones】 (jōnz), William, 1675, 1749. 英國之教員.

【Kepler】 (kep'ler), Johann. 1571, 1630. 德國之算學及物理學家,而尤以星學著名.

【Leibnitz】 (lib'nits), Gollfried Willhelm. 1646, 1716. 德之著名哲學家兼算學家. 始創微積分學者之一人.

【Lexell】 (lex'el), Anders Johann. 1740, 1784. 瑞典之算學家.

【L' Huilier】 (l'wē-ē-ā'), Simon Antoine Jean, 1750, 1840. 瑞士之算學家.

【Lindemann】 (lin'de-man), Ferdinand. 1852 生. 德國之教授.

【Menelaus】 (men-e-lā'us). −100? 希臘之算學及星學家 三角法最初著者之一.

【Möbius】 (mē'bē-ŏs), August Ferdinand. 1790, 1868. 德國之算學及星學家. 近世幾何學之一名著者.

【Monge】 (mônzh), Gaspard. 1746, 1818. 法國人. 始創畫法幾何學. 巴黎百工學校創辦人之一.

【Œnopides】 (ē-nop'i-dēz). −465 . 希臘古幾何學家.

【Pascal】 (päs-käl'), Blaise. 1623, 1662. 法國之有名算學,物理學,及哲學家.

【Plato】 (plā'tō). −429?, −348? 希臘之有名哲學家及幾何學家.

【Poncelet】 (pôns-lā'), Jean Victor. 1788, 1867. 法國