Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Analysis I

Arbeitsblatt 9

Übungsaufgaben

Aufgabe 9.1. Zeige $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 9.2.*

Es sei

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Finde das kleinste n mit
$$x_n \geq 2.$$
(2) Finde das kleinste n mit
$$x_n \geq 2{,}5.$$

Aufgabe 9.3.*

Karl möchte mit seinem programmierbaren Taschenrechner den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ annähernd berechnen. Die Anzeige des Rechners besitzt 8 Nachkommastellen. Der Rechner schafft pro Sekunde eine Addition (also ein Reihenglied wird zur bisherigen Summe draufaddiert) der Reihe und zeigt das neue Ergebnis direkt an. Karl hat richtig programmiert und denkt sich folgende Strategie aus: „Wenn die Anzeige eine ganze Stunde lang immer das gleiche anzeigt, so wird das wohl ziemlich nah am Ergebnis sein, so dass ich das als eine gute Annäherung nehmen kann. Der Rechner soll dann aufhören“.

(1) Was ist ungefähr das letzte Reihenglied, das aufaddiert wird?
(2) Was ist von der Strategie zu halten?

Aufgabe 9.4. Zeige, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2}$$

divergieren.

Aufgabe 9.5.*

Zeige die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 3\sqrt{n}.$$

Aufgabe 9.6.*

Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen komplexer Zahlen.

Aufgabe 9.7. Es seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von komplexen Zahlen mit den Summen s und t. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = a_k + b_k$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.
(2) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_k = \lambda a_k$ konvergent mit der Summe λs.

Aufgabe 9.8. Man gebe ein Beispiel für eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, die (als Folge von Partialsummen) beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

Aufgabe 9.9. Zeige $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{5^n} = \frac{45}{14}$.

Aufgabe 9.10.*

Entscheide, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergiert.

Aufgabe 9.11.*

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert.

Aufgabe 9.12. Es sei $\mathcal{R}$ die Menge aller komplexen Reihen und $\mathcal{F}$ die Menge aller komplexen Folgen. Zeige, dass die Zuordnungen

$$\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{F},\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \longmapsto (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } x_n := \sum_{k=0}^{n} a_k,$$

und

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{R},\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ mit } a_0 := x_0 \text{ und } a_k := x_k - x_{k-1} \text{ für } k \geq 1,$$

zueinander invers sind und eine Bijektion zwischen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{F}$ festlegen. Zeige, dass sich dabei die Konvergenzbegriffe entsprechen und dass sich reelle Reihen und reelle Folgen entsprechen. Zeige ferner, dass sich im reellen Fall Reihen mit nichtnegativen Reihengliedern und wachsende Folgen entsprechen.

Aufgabe 9.13. Professor Knopfloch und Dr. Eisenbeis schauen gerne die unendliche Fernsehserie „Zebras“, die in der botswanischen Kalahari spielt und vom ewigen Kampf zwischen Löwen und Hyänen handelt. Dabei setzen sie unterschiedliche Strategien ein: Professor Knopfloch vergisst alle vorhergehenden Folgen, damit die neue Folge spannend wird. Dr. Eisenbeis merkt sich hingegen alle vorhergehenden Folgen genau und achtet bei jeder neuen Folge darauf, was sich geändert hat und was neu hinzukommt. Was ist Ihre Strategie? Was hat das mit Folgen und Reihen zu tun?

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe. Eine *Umordnung* dieser Reihe ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mit $b_k = a_{\sigma(k)}$ zu einer bijektiven Abbildung $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Bei einer Umordnung einer Reihe kommen zwar genau die gleichen Summanden vor, es ändert sich aber die Folge der Partialsummen und damit eventuell auch das Konvergenzverhalten.

Aufgabe 9.14. Zeige, dass bei einer Folge die Änderung von endlich vielen Folgengliedern weder die Konvergenz noch den Grenzwert ändert, und dass bei Reihen die Änderung von endlich vielen Reihengliedern zwar die Konvergenz nicht ändert, wohl aber die Summe.

Aufgabe 9.15. In einer Studenten-WG bereitet Studi 1 Kaffee zu, und füllt die Menge x_1 Kaffee in den Kaffeefilter. Dies sieht entsetzt Studi 2 und sagt: „Willst Du, dass wir alle schon total wach werden?“ und nimmt die Kaffeemenge $x_2 < x_1$ wieder aus dem Filter heraus. Danach kommt Studi 3 und sagt: „Bin ich hier in einer Weicheier-WG gelandet?“ und kippt wieder eine Kaffeemenge $x_3 < x_2$ dazu. So geht es unendlich weiter, wobei sich Kaffeeherausnehmer und Kaffeenachfüller abwechseln. Wie kann man charakterisieren, ob die Kaffeemenge im Filter konvergiert?

Aufgabe 9.16. Nachdem der Kaffee am Vortag für die Befürworter eines starken Kaffees zu schwach geworden ist, entwickeln sie eine neue Strategie: Sie wollen etwas früher aufstehen, so dass am Tagesanfang und zwischen je zwei Kaffeereduzierern immer zwei Kaffeeauffüller zum Zuge kommen. Dabei bleibt die interne Reihenfolge der beiden Lager als auch die hinzuzufügende bzw. wegzunehmende Kaffeemenge einer Person unverändert. Können sie mit dieser Strategie den Kaffee stärker machen, beispielsweise bei $x_n = \frac{1}{n}$?

Aufgabe 9.17.*

Es sei z eine komplexe Zahl, $z \neq 1$. Beweise für $n \in \mathbb{N}$ durch Induktion die Beziehung

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

Aufgabe 9.18. Zwei Personen, A und B, sitzen in der Kneipe. A will nach Hause gehen, aber B will noch ein Bier trinken. „Na gut, dann trinken wir eben noch ein Bier, das ist aber das allerletzte“ sagt A. Danach möchte B immer noch Bier, aber da das vorhergehende Bier definitiv das letzte war, einigen sie sich auf ein allerletztes halbes Bier. Danach trinken sie noch ein allerletztes Viertelbier, danach noch ein allerletztes Achtelbier, u.s.w. Wie viel „allerletztes Bier“ trinken sie insgesamt?

Aufgabe 9.19. Sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

Aufgabe 9.20.*

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$$

konvergiert.

Aufgabe 9.21.*

Untersuche, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{4n^3-3n+2}$$

konvergiert oder divergiert.

Aufgabe 9.22. Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+7}{n^3-4n^2+3n-5}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 9.23. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3-n^2-n+2}$,
(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^2-\sqrt{n}+1}$,
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

Aufgabe 9.24. Zeige, dass es für jedes $\epsilon > 0$ eine Familie ϵ_n, $n \in \mathbb{N}$, von positiven reellen Zahlen mit $\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \leq \epsilon$ gibt.

Aufgabe 9.25. Beweise das folgende *Minorantenkriterium*.

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen von nichtnegativen reellen Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei divergent und es gelte $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

Aufgabe 9.26. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert.

Aufgabe 9.27. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe mit $a_k \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die durch

$$y_n := \sum_{k \geq n/2}^{n} a_k$$

definierte Folge eine Nullfolge ist.

Aufgabe 9.28. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge. Beweise den folgenden Satz (Satz von Olivier): Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ konvergiert, dann ist $(n \cdot x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Aufgabe 9.29. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente komplexe Reihe. Zeige, dass dann auch jede Umordnung der Reihe gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.

Aufgabe 9.30.*

Es sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k .$$

Die nächste Aufgabe befasst sich mit der *g-adischen Entwicklung* von reellen Zahlen, vergleiche Aufgabe 9.29.

Aufgabe 9.31. Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Es sei eine Ziffernfolge

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\, i \leq k\,,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben und es sei

$$r = \sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i$$

die durch diese Ziffernfolge definierte reelle Zahl. Zeige, dass die Ziffernfolge genau dann ab einer gewissen Stelle *periodisch* ist, wenn r eine rationale Zahl ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.32. (2 Punkte)

Es sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{i}^k z^k .$$

Aufgabe 9.33. (3 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$$

divergiert.

Aufgabe 9.34. (3 Punkte)

Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Eine *Ziffernfolge*, die durch

$$z_i \in \{0, 1, \ldots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z},\, i \leq k\,,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben ist, definiert eine reelle Reihe[1]

$$\sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i \, .$$

Zeige, dass eine solche Reihe gegen eine eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl konvergiert.

Aufgabe 9.35. (4 Punkte)

In einen Klärteich mit einem Fassungsvermögen von $2000\,\mathrm{m}^3$ werden zu Beginn eines jeden Tages $200\,\mathrm{m}^3$ Wasser eingelassen, das einen bestimmten Schadstoff in einer Volumen-Konzentration von $10\,\%$ enthält und vollständig mit dem vorhandenen Wasser vermischt. Im Laufe eines Tages reduziert sich durch biologische Reaktion die vorhandene Schadstoffmenge jeweils um $20\,\%$. Gegen Ende eines Tages werden dann $200\,\mathrm{m}^3$ Wasser aus dem Klärteich abgepumpt. Welche Schadstoffkonzentration (in Prozent) stellt sich auf Dauer bei dem abgepumptem Wasser ein, wenn ganz am Anfang der Teich mit $1800\,\mathrm{m}^3$ klarem Wasser gefüllt war?

Aufgabe 9.36. (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

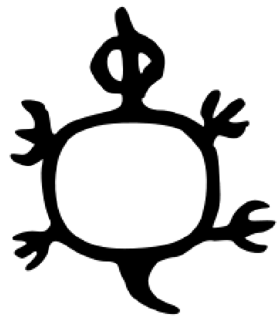
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

konvergiert.

Aufgabe 9.37. (5 Punkte)

Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1 ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.

[1] Hier läuft also der Index in die umgekehrte Richtung.



Berechne die Folgenglieder s_n, die zugehörigen Zeitpunkte t_n, sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkt berechneten Überholungsdaten.

Abbildungsverzeichnis