理論靜力學

蘇聯尼軻雷原著
何志奇陳毓晉譯述

理 論 靜 力 學

E. L. Nekolae 原 著
何志奇陳毓晉譯述

開 明 書 店 印 行

序

本書原著人尼軻雷氏，係蘇聯莫斯科大學教授，憑其十餘年教學之經驗，深知學生中程度疏淺者，多半由於在中學時代未經完美訓導之故，乃開始著作本書．其目的不求高深，但求普遍，使大學學生讀之，不嫌其淺，高中學生讀之，不覺其深，而均可自行補習參考也．本書自 1934 年經蘇聯最高人民教育委員會審定得爲工科大學教科書後，蘇聯各工業專校，技術航空學校及普通工學院，皆以之作教授材料．

譯者因見於目下國中土木、航空兩科，正在發育之際，靜力學實爲其基本主要知識；而本國缺乏是項分類完全之書籍，故翻譯之，以供各界參考．玆略述本書之編制於下：

本書共分十一章，可歸納爲三部；其中之一、二及十一各章，敍述靜力學之普通性質，三、四、五、六各章，敍述關於平面上各靜力之性質，而七、八、九、十各章，則敍述關於立體上各靜力之性質．對於靜力學之大概情形，已相當完全，足夠供初學者研究．惟譯者才疏學淺，書中難免有錯誤之處，尙乞海內學者多多指教是幸．

何志奇　陳毓晉

目　　錄

第一章 總　論

第二章 靜力學基本定律

第三章 力 偶

第四章 位於同一平面上任意位置諸力之性質

第五章 力之圖解法

第六章 屋架及橋梁各樑上荷重之圖解法

第七章 位於空間任意位置作用於同一點上諸力之合力

第八章 位於空間諸力偶之合力偶

第九章　對於點之力矩及對於軸之力矩

第十章　位於空間任意位置諸力之性質

第十一章　重　　心

第一章

總論

1. 引言　凡研究自然界各種現象之學問，謂之自然科學，惟其範圍甚廣，包羅極多，往往更事分科，而天文學，地質學，生物學，礦物學，化學，物理學之名因是出也．物理學又分為力學，熱學，聲學，光學，電磁學等諸部分，而力學中更劃為理論，實用兩界，剖成靜力學，運動學，動力學諸科．然宇宙間之事物繁多，吾人之精力有限，定難普遍研習，祇得各就其興趣之相近，實用之需要，分頭研究．先求明晰其理，再求附合於事實，而研究之範圍愈小，則所得之學問愈精，故近世學者皆埋頭於一部分之工作，而登峯造極，其意蓋不求博，但求專精也．

靜力學者研究物體靜止時之學也．理論靜力學則研究物體靜止時一切普通現象及定律，而再由定律演出其他各種公式，用以解決物體靜止時之種種問題．惟關於工業上之各種問題，如屋基之牢固與否？機械動作之迅速與否？均由實用力學，運動學或動力學等所論及，不在靜力學範圍之內．本書純係研究物體在靜止或平衡時之各種狀況，比之力學中其他部

分，較爲簡單，同時亦最爲重要，故研究力學非自靜力學開始不可，是以普通力學書中．往往列靜力學於首篇也．

靜力學中最普通簡單之定律，在十七世紀前早已成立，惟範圍甚爲狹小，不能達到其應有之重要性．自十七世紀微積分學發明後，各種科學均突飛猛進，靜力學亦豁然開朗，瞬息擴大，較之昔日，誠不啻小巫之見大巫．然科學有進無退，他日讀者諸君努力研究，爲科學界放一異彩，亦意中事也．

2. 有向量　在物理學中尤其在力學中所述之量(價値)，乃爲有方向之量，除其數値外，尚有一指定之方向，普通稱之爲有向量．此種有向量在力學中之地位甚爲重要，與力學之關係極爲密切，如力，速度等，均爲有向量也．本書所論之有向量，僅其中之最主要最基本且爲靜力學所需要者，讀者如欲研究複雜高深之有向量，考之"矢算學"可也．

3. 矢　凡表示有向量之線段均名爲矢．如圖 1，設有一直線段 $\overline{AB}$，其長度爲 l，方向乃自 A 至 B，圖中已有 B 點上之箭頭表之；此種已有量及方向之線段，即一最明瞭最簡單

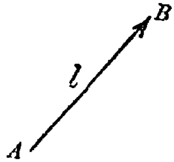


圖 1

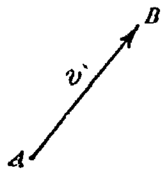


圖 2

之矢（有向量）也．每一矢既必有一定之量及方向，作時可取一直線段 $\overline{AB}$，如圖 2，使其長等於有向量之長度 v（長度之單位可由吾人隨意定之），方向爲有向量之方向，而用 B 上之箭頭表明之．圖中之 A 點爲矢之起點，名曰矢尾．B 點爲矢之終點，名曰矢首．在文字或語言上矢之稱呼有兩種：卽一字母 $\bar{v}$ 或兩字母 $\overline{AB}$，惟用兩字母時，須以前者 A 表其矢尾（起點），後者 B 表其矢首（終點），故若其方向爲自 B 至 A 時，則應書作 $\overline{BA}$ 而非 $\overline{AB}$ 也．

4.　矢之相等　兩個或兩個以上之有向量相等時，非但其數量相等，且其方向相同．如圖 3，若 $\bar{v}_1$，$\bar{v}_2$ 爲兩相等之矢，則此兩線段之長度相等，互相平行，且其方向相同．此種相等之矢如 $\bar{v}_1$，$\bar{v}_2$，可名之曰同位等矢（大小相等方向相同），算式上仍可以普通之等號表之，惟前後兩項各加一短劃於其上，如：

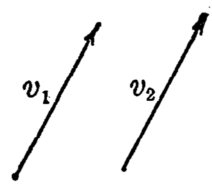


圖 3

$$\bar{v}_1=\bar{v}_2.$$

上述之等式，可名曰幾何式地相等．

5.　數矢之和　欲求數個有向量 $\bar{v}_1$，$\bar{v}_2$，$\bar{v}_3$，$\bar{v}_4$ 之和，可將各矢之尾與他矢之首次第啣接，然後自第一矢 $\bar{v}_1$ 之起點與最後矢 $\bar{v}_4$ 之終點聯一直線，卽得所求之和 $\bar{v}$．如圖 4，任意取一點 a，由 a 作 $\overline{ab}$ 線段，使其幾何式地等於 $\bar{v}_1$，卽長短與

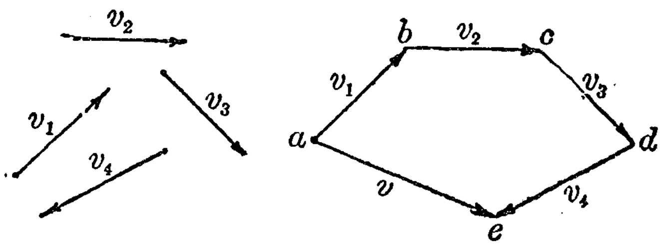


圖 4

$\bar{v}_1$ 相等，方向與 $\bar{v}_1$ 相同，再由 b 依次作 $\overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$，各使幾何式地等於 $\bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$. 聯接 ae 以 $\bar{v}$ 表之，其方向為自 a 至 e，而 $\bar{v}$ 即所求諸有向量之和，名曰**幾何和**。而 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ 同時亦可云各為 $\bar{v}$ 之**分矢**。此種加法名曰**幾何加法**，在算式上仍用普通符號，惟在其和及各加數上加一短劃，如：

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3+\bar{v}_4.$$

若有 n 個有向量 $\bar{v}_1, \bar{v}_2\cdots\cdots\bar{v}_n$ 之幾何和為 v 時，同樣可寫作：

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\cdots\cdots+\bar{v}_n.$$

6. 兩矢之差 若已知 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ 兩矢，欲求其差時，如圖 5，可任意取一 a 點，由 a 引 $\overline{ab}, \overline{ac}$ 兩線段，各使幾何式地等於 $\bar{v}_1, \bar{v}_2$. 再聯 $\overline{bc}$，其方向為自 b 至 c，用字母 $\bar{v}$ 表之，由上節可知 $\bar{v}$ $\bar{v}_1$ 兩矢之幾何和等於 $\bar{v}_2$，故 $\bar{v}$ 即

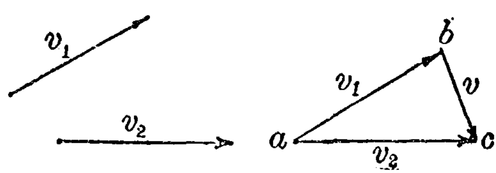


圖 5

爲 $\bar{v}_2$, $\bar{v}_1$ 兩矢之幾何差. 此種減法,名曰幾何減法. 算式中仍用普通符號,惟在被減數,減數及差上,各加一短劃. 如:

$$\bar{v}=\bar{v}_2-\bar{v}_1$$

又由上節可知 $\bar{v}$ 同時爲 $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ 兩矢中之一矢 ($\bar{v}_1$ 或 $\bar{v}_2$) 與另一矢 ($\bar{v}_2$ 或 $\bar{v}_1$) 平行且方向相反之矢之幾何和也.

7. 矢之倍數　作一 $m\bar{v}$ 矢,使其數量等於一已知矢 $\bar{v}$ 之 m 倍,如圖 6 (m 爲一任意正數); 方向則與已知矢 $\bar{v}$ 之方向相同, 如此而得之 $m\bar{v}$ 矢, 即 $\bar{v}$ 矢與 m 數之倍矢. 故欲乘一已知矢時, 僅以欲乘之數乘此矢之數量, 至於此矢之方向,則恆不變也.

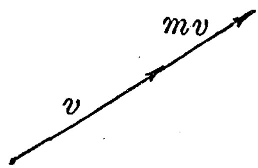


圖 6

若以一任意正數 m 乘兩等矢 $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ 則所得之 $m\bar{v}_1$ 及 $m\bar{v}_2$, 仍爲兩等矢. 因此二矢之方向各不變, 而其數量各爲原來之 m 倍,故必仍作幾何式之相等也.

若:　$\bar{v}_1=\bar{v}_2$,

則:　$m\bar{v}_1=m\bar{v}_2$.

由此可知,以同一任意正數乘兩等矢後,其原來之等號仍不稍變.

若以一任意正數乘已知諸矢之幾何和, 則所得之倍矢, 爲每一已知矢乘此數而得之諸倍矢之幾何和也. 如圖 7,以幾何加法加已知諸矢 $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$, 得一多邊形 $MNFQR$, 其各

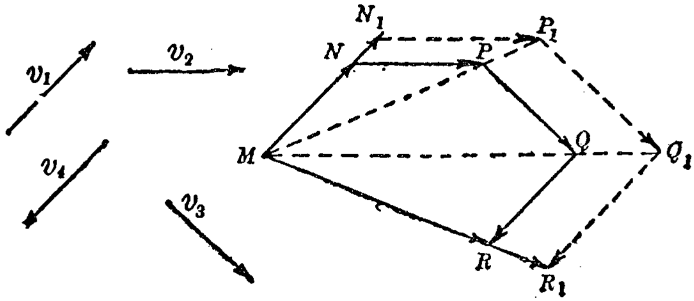


圖 7

邊均使幾何式地等於各已知矢，且 MR 爲諸矢之幾何和，設以 $\bar{v}$ 代之，則：

$$\bar{v}=\bar{v}_1+\bar{v}_2+\bar{v}_3+\bar{v}_4.$$

再聯 $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, 並各依原來方向延長 $\overline{MN}$, $\overline{MP}$, $\overline{MQ}$, $\overline{MR}$ 至 N_1, P_1, Q_1, R_1 各點，使：

$$\overline{MN_1}=m\overline{MN}.$$

$$\overline{MP_1}=m\overline{MP}.$$

$$\overline{MQ_1}=m\overline{MQ}.$$

$$\overline{MR_1}=m\overline{MR}.$$ (m 爲一任意正數。)

卽得一新多角形 $MN_1P_1Q_1R_1$, 且與多角形 $MNPQR$ 相似(因 $\triangle MN_1P_1\backsim\triangle MNP$, $\triangle MP_1Q_1\backsim\triangle MPQ$, $\triangle MQ_1R_1\backsim\triangle MQR$), 則多角形 $MN_1P_1Q_1R_1$ 之邊與多角形 $MNPQR$ 之邊，各自互相平行，亦卽：

$$多角形\ MN_1P_1Q_1R_1=m\ 多角形\ MNPQR.$$

故諸線段 $\overline{MN_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{Q_1R_1}$ 各爲諸已知矢 $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$, $\bar{v}_4$

之 m 倍,卽各各幾何式地等於 $m\bar{v}_1, m\bar{v}_2, m\bar{v}_3, m\bar{v}_4$, 但 $\overline{MR_1}$ 爲諸線段 $\overline{MN_1}, \overline{N_1P_1}, \overline{P_1Q_1}, \overline{Q_1R_1}$ 之幾何和,所以:

$$m\bar{v}=m\bar{v}_1+m\bar{v}_2+m\bar{v}_3+m\bar{v}_4.$$

故以一任意正數乘諸已知矢之幾何和時,等於以此數乘每一已知矢之和也.

8. 軸　軸乃一有定方向之無限直線,普通用 x, y 等字母表示之.

9. 矢在軸上之射影　今欲射影一已知矢 $\bar{v}$ 於一已知之軸 x 上,其方向在圖 8 中均有箭頭作記. A 爲矢 $\bar{v}$ 之起點 B 爲矢 $\bar{v}$ 之終點, 從 A, B 兩點各作平面 P, Q, 使垂直於軸 x, 且與之相交於 a, b 兩點,則 a 爲 A 點之射影,

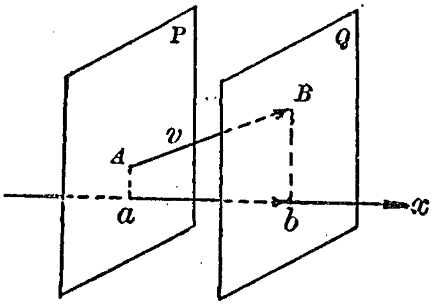


圖 8

b 爲 B 點之射影,而線段 $\overline{ab}$ 卽爲矢 $\bar{v}$ 在軸 x 上之射影也.惟 $\overline{ab}$ 之方向,可正可負,若與軸 x 之方向相同,則爲正方向.反之,若與軸 x 之方向相反,則爲負方向.吾人如以 $\bar{v}_x$ 代表 $\bar{v}$ 矢在軸 x 之射影,則:

$$\bar{v}_x=\pm\overline{ab}\quad(\text{正負號卽表示其正負方向也})。$$

但以上述之作法定 a, b 兩點,甚覺麻煩,大可簡單之.吾人只須從 A, B 兩點各作垂線於軸 x 上,則 $\overline{Aa}$ 交軸於 a, $\overline{Bb}$ 交軸

於 b, 而所得之線段 $\overline{ab}$, 卽爲 $\overline{AB}$ 在軸 x 上之射影，而地位與前法不稍異也.

10. 定理 一已知矢在兩平行且同方向之軸上之射影相等.

已知一矢 $\bar{v}$ 及兩平行且同方向之軸 x, x', 如圖 9, 從矢 $\bar{v}$ 之起點 A 及終點 B 各作平面 P, Q, 同時垂直於軸 x 及 x' (因兩軸互相平行)，則聯 P, Q 兩平面與軸 x' 之交點 $\overline{a'b'}$, 爲矢 $\bar{v}$ 在軸 x' 上之射影，而與軸 x 之交點 $\overline{ab}$, 爲矢 $\bar{v}$ 在軸 x 上之射影. 此兩射影矢 $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$ 之方向相同(因 x 軸與 x' 軸爲同方向)，且按幾何定理(平行平面間之距離相等)，其價値(卽此兩線段之長短) 亦相等. 所以一已知矢在兩平行且同方向之軸上之射影相等. 惟此定理只適合於已知矢及已知軸間之關係，否則又有他種之性質矣.

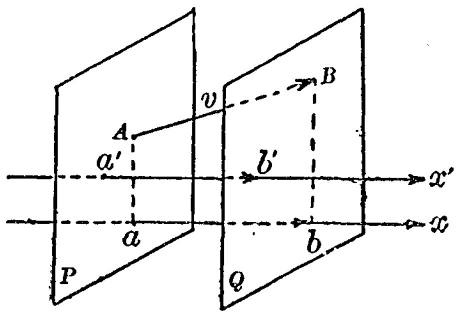


圖 9

由上節定理可知若欲射影一已知矢於一已知軸上，有一簡單便利之作法，如圖 10. 今欲求矢 $\bar{v}$ 在一已知軸 x 上之射影矢，可從 $\bar{v}$ 矢之起點 A, 作一與軸 x 平行且同方向之軸 x', 再由 v 矢之終點 B, 作垂線交軸 x' 於 b 點，則在軸 x' 上所得

之射影矢 $\overline{Ab}$，與矢 $\bar{v}$ 在軸 x 上之射影相等。因其與軸 x 爲同方向，$\overline{Ab}$ 之方向爲正，仍可以 $\bar{v}_x$ 表之。此法較前之作平面及兩垂線者更爲簡單。且就直三角形（$\angle b$ 乃直角）ABb 中，可知：

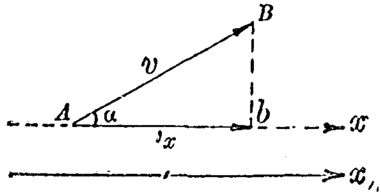


圖 10

$$\bar{v}_x = \bar{v} \cdot \cos\alpha. \qquad (1)$$

卽：矢在一定軸上之射影 = 已知矢 × 矢與軸兩方向所成角之餘弦。且射影矢之正負方向，在 (1) 式中完全由 $\cos\alpha$ 之正負値表明之。若射影矢與軸之方向相同，則已知矢與軸所成之 α 角必在 $0°$ 與 $90°$ 或 $270°$ 與 $360°$ 之間，而此角之餘弦 $\cos\alpha$ 之値，恰爲正。反之，則 α 角在 $90°$ 與 $180°$ 或 $180°$ 與 $270°$ 之間，而 $\cos\alpha$ 之値恰爲負。故 (1) 式實爲計算射影矢之完全公式也。

11. 矢在平面上之射影　若欲射影一已知矢於一已知平面上，其作法完全與射影一已知矢於一已知軸上相同。如圖 11，只須由已知矢 $\bar{v}$ 之起點 A 及終點 B，作兩垂線於已知平面 L 上，其垂足 A_1，B_1 卽爲 A，

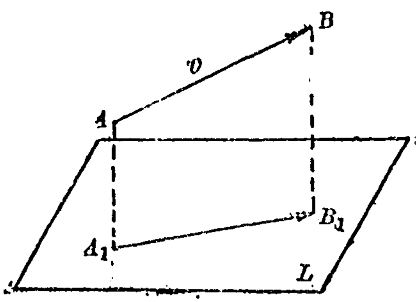


圖 11

B 兩點在 L 平面上之射影，其線段 $\overline{A_1B_1}$ 即爲 $\bar{v}$ 矢在 L 平面上之射影，方向乃自 A_1 至 B_1.

12. 數矢之幾何和在一已知軸上之射影 數矢之幾何和在定軸上之射影等於各矢在同一軸上射影矢之代數和。如圖 12，已知 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ 四矢，從多角形 $MNPQR$ 中，求得其

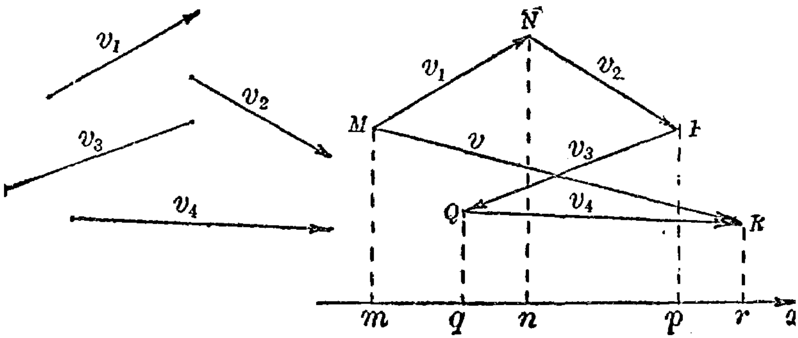


圖 12

幾何和 $\bar{v}$ (卽圖中之 $\overline{MR}$). 今由 M, N, P, Q, R 諸點各作垂線 $\overline{Mm}$, $\overline{Nn}$, $\overline{Pp}$, $\overline{Qq}$, $\overline{Rr}$ 於已知之軸 x 上，若以 $\bar{v}_{1x}, \bar{v}_{2x}, \bar{v}_{3x}, \bar{v}_{4x}$, $\bar{v}_x$ 代表 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}$ 諸矢在軸 x 上之射影，則:

$$\bar{v}_{1x}=\overline{mn},$$

$$\bar{v}_{2x}=\overline{np},$$

$$\bar{v}_{3x}=\overline{pq}, \quad \text{(矢 } \bar{v}_3 \text{ 與軸 } x \text{ 之方向相反)}$$

$$\bar{v}_{1x}=\overline{qr},$$

$$\bar{v}_x=\overline{mr}.$$

在圖上可見：　　$\overline{mr}=\overline{mn}+\overline{np}-\overline{pq}+\overline{qr}.$

所以：　　$\bar{v}_x=\bar{v}_{1x}+\bar{v}_{2x}+\bar{v}_{3x}+\bar{v}_{4x}.$

故數已知矢在一定軸上射影之代數和，等於其幾何和在此軸上之射影。

13.　數已知矢之幾何和在一定平面上之射影　數矢之幾何和在一定平面上之射影等於各矢在同一平面上射影之幾何和。如圖 13，已知 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ 數矢。從多角形 $MNPQ$ 中得

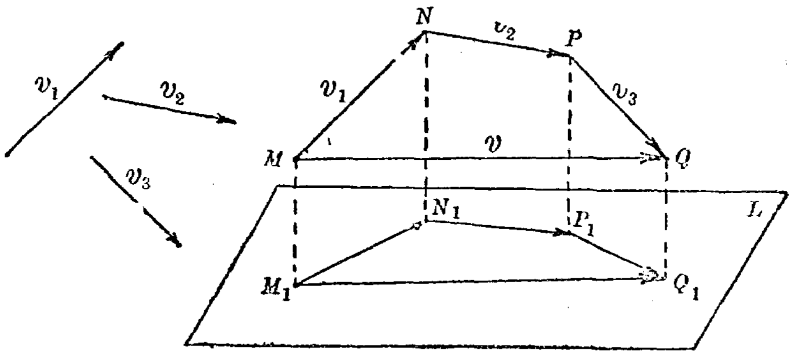


圖　13

其幾何和爲 $\bar{v}$（即 $\overline{MQ}$ 線段）。今由 M, N, P, Q 諸點各作垂線 $\overline{MM_1}, \overline{NN_1}, \overline{PP_1}, \overline{QQ_1}$ 於定平面 L 上，若以 $\bar{v}_{1x}, \bar{v}_{2x}, \bar{v}_{3x}, \bar{v}_x$ 代表 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}$ 在 L 平面之射影，則：

$$\bar{v}_{1x}=\overline{M_1N_1},$$

$$\bar{v}_{2x}=\overline{N_1P_1},$$

$$\bar{v}_{3x}=\overline{P_1Q_1},$$

$$\bar{v}_x=\overline{M_1Q_1}.$$

從圖中可見 $\overline{M_1Q_1}$ 爲 $\overline{M_1N_1}$, $\overline{N_1P_1}$, $\overline{P_1Q_1}$ 之幾何和，故 $\bar{v}_x$ 爲 $\bar{v}_{1x}$, $\bar{v}_{2x}$ $\bar{v}_{3x}$ 之幾何和.所以數已知矢在定平面上射影之幾何和等於其幾何和在此平面上之射影也.

第二章

靜力學基本定律

14. 定律 凡爲自然科學均係建立於同一基礎（自然現象）上,故研究之方法,亦不外歸納及演繹兩種;卽吾人由種種現象的觀察與實驗,作成結果,再從此種結果,推論出其他各種現象.而最後之步驟,乃綜合各結果以最簡單最精確之文字或公式表出之,此種表示之文字或公式,卽吾人所謂之定律.

吾人旣明定律在自然科學上之重要,故須熟習之.在力學中之定律,大都均爲牛頓氏所發現;尤其在靜力中牛頓定律占極重要之位置,本書以後所論之定律,十九均爲牛頓最普通之定律.餘者雖直接非牛頓氏所發現,然亦從牛頓定律中推演而來,此種定律在普通物理學書中都有詳細證明,本書爲節省篇幅起見,不再重行敍述之矣.

15. 分子 分子者,乃用物理方法,分一物體至不可再分之小粒也.此種小粒,甚爲微渺,其所占地位之大小,常可忽略不計;凡宇宙間各種物體,皆可分成此種小粒.換言之,

即吾人日常所見之物,均係由微小之分子所組合而成者也.

16. **靜力學第一定律** 此定律普通稱之曰慣性定律或惰性定律.蓋凡物體均有維持其已有之運動或靜止狀態之特性,卽當物體不受外力影響時,則靜者恆靜,動者恆沿一直線作等速度之運動也.

17. **直線等速運動** 直線等速運動乃物體作一定方向之運動(前進或後退),其在每單位時間內所行之距離均相等.

18. **力** 反之,若一物體作任何運動時(或非直線,或非等速),則按第一定律,可知此物體必受有他種物體之作用.此種作用卽名之曰力.

19. **施力點** 若施力於物體之某點上,此受力之點,在物理學中稱之曰施力點.

今吾人宜特別注意者,卽任何之力均係一物與他物或數物相互間之作用;如自由落體運動,卽爲一最普遍之例也.蓋因物體與地心互相吸引後,發生一種力量,此種力量,卽能使物體自由落至地面也,吾人名之曰重力;且此重力與地面成垂直.

20. **力之計量** 力爲一抽象之名辭,吾人無法直接測量其大小,祇可由比較而得之.蓋任何力作用於物體後,必能發生一種效應,吾人卽以其所發生不同之效應而比較力之大小也.惟在事先必須定一標準之力,作爲力之單位,再以刻有

度數之彈簧秤而測量力之大小也.

21. 力之單位 力之單位甚多,惟本書因專論靜力,故所取之單位. 完全爲重力單位(卽物體重量之單位),而非絕對單位也.茲分述於後:

仟克 一升(卽一千立方厘米或一市升)之水,在攝氏表四度時之重量,定爲重力之單位,名曰一仟克.

克 克卽一立方厘米之水在攝氏表四度時之重量也.

$$1\ 仟克=1000克$$

$$1\ 克=0.001仟克$$

米噸 米噸卽一立方米突之水在攝氏表四度時之重量也.

$$1\ 米噸=1000仟克=1000000克$$

$$1\ 仟克=0.001米噸$$

$$1\ 克=0.000001米噸.$$

吾人既定力之單位,卽可用以比較各種不同之力,所得之倍數,卽力之值也.此有值之力,往往以 F 表之.

22. 力之方向 力除上節已論及之大小之量外,尚有一定之方向. 如地心吸力乃一垂直地面之力也,故力爲一種有向量.如圖14.力 F 作用於 A 點,吾人

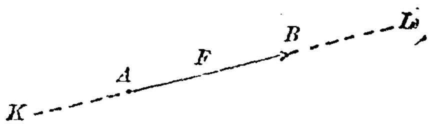


圖 14

卽可用矢 $\overline{AB}$ 表之,而以線段 $\overline{AB}$ 之長短,表力之大小 (可

任意定一長度，作一單位力之代表，則若干倍單位之力，可用若干倍所定之長度表之)．A 點爲力 F 之起點，B 點爲力 F 之終點，在 B 點上之箭頭，卽用以表力 F 之方向也．又直線 KL 乃 $\overline{AB}$ 之延長線，名爲力 F 之作用線．

3. **力之平衡** 設有 n 個不同之力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$，同時作用於上圖之 A 點上，若 A 點仍保持其原來位置，或依一直線作等速運動，則此 n 個不同之力 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 必互相平衡．

24. **內力與外力** 吾人旣知各種物體無論其爲氣體，液體或固體，均由無數個分子組合而成，故當論及物體所受之力時，亦宜分兩方面述之，一爲外力，乃此物體內各分子受其他物體所作用之力也；二爲內力，卽物體本身內所有各分子間互相作用之力也．

今設有 n 個力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 同時作用於一靜止之物體上，如圖 15，則此物體內之各分子因而互起作用，此種作用所發生之力，卽爲內力．若此物體受 n 力後仍保持其原來之靜止狀態，則所加之 n 個外力已互相抵消．換言之，卽 n 個外力已呈平衡狀態．然此時物體

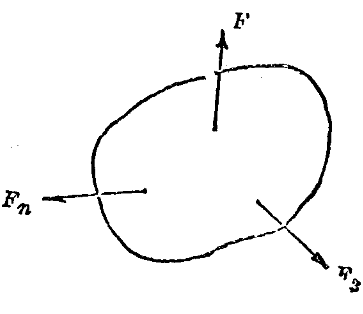


圖 15

內各分子所互相作用而發生之力則情形比較複雜，惟此種內

力大都不在本書討論範圍以內，學者可參看氣體動力論（研究氣體內各分子之內力），流體力學（研究液體內各分子之內力），及材料強度學（研究固體內各分子之內力）等書．故圖 15 中亦無相當線段表示此物體之內力．而本書所研究者，係關於物體所受之外力及其平衡時之狀態也．

25. 剛體　凡物體受外力侵入後，其本體內之任何兩點不因而改變其地位者，名為剛體．簡言之，凡物體受力之作用，而不變更其容積及形狀者，卽稱剛體．惟宇宙間實無一物能受外力侵入後而不變其形狀者，無論其堅固至若何程度，當其受外力時，必改變其原來狀態，但若所加之力不十分強大，則多數固體所變之容積或形狀，甚為微小，吾人可忽略不計，而仍以剛體名之．因此凡一物體若受有可互相抵消之諸外力時，仍能保持其平衡狀態者，卽可名之曰剛體．

本書既不述及內力，故以後所有論及之外力，均直接簡稱為力，而剛體亦直接簡稱為固體（有時或直接稱為物體）．惟欲表示其內力時，則仍當隨時指明．

26. 靜力學第二定律　此定律亦可名之為平衡定律．當兩力同時作用於一靜止物體時，若此物體仍保持其靜止狀態，則所起作用之兩力，必位於同一直線上，且其大小相等，方向相反，如圖 16 所示者是也，蓋此兩力已互相抵消矣．

27. 靜力學第三定律　設有數力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 作用於一物體上而使其平衡，若同時另加能自行互相抵消之數力

$S_1, S_2, \cdots\cdots S_m$，亦作用於同一之物體上，則此物體仍能保持其平衡．反之，若減去其能互相抵消之諸力如 $S_1, S_2 \cdots\cdots S_m$，則此物體亦仍能平衡．由此可知若於一物體上加以數力或減去數力，而此物體仍維持其原來狀態者，則所加所減之諸力，必能互相抵消，此定律甚爲重要，且可永遠適用於靜力學中，吾人得以證明其他多種物體受力後之性質者，多賴此定律之助．

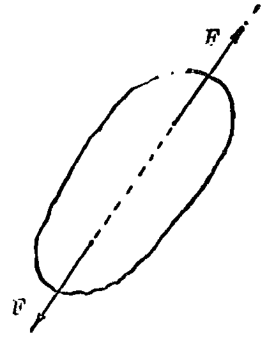


圖 16

設加 F 力於一物體之 A 點上而使之平衡，如圖 17，若再於 F 力之作用線上任意一點 B，加兩大小均等於 F 且方向相反之力 $F'F''$ (F' 與 F 爲同方向，而 F'' 與 F 爲反方向）按第二定律，F' 與 F'' 能自行互相抵消．按第三定律，此物受 F', F'' 兩力後仍能平衡．但圖中之 F 與 F'' 兩力，亦爲大小相等方向相反且位於同一直線上之兩力，故亦能互相抵消．

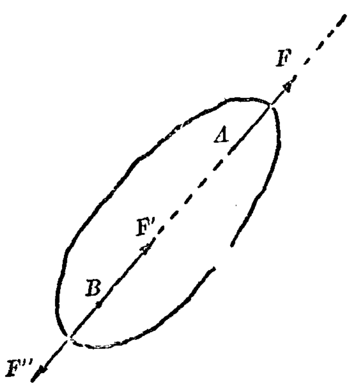


圖 17

換言之，若取消此物體所受之 F 及 F'' 兩力，此物體仍可不變其平衡，由此可知移動 F 力於其作用線上之任意一點，均

不變此物體之平衡也（惟當研究其內力時則不然，此律僅可適用於外力及平衡上）.

28. 靜力之相等 兩力若相等時，如使其互相替換，則所起之作用完全相同. 設有一組力 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 作用於一固體上而使其靜止，若此時取消 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力，而代以他組力 $P_1, P_2 \cdots\cdots P_m$，如此固體仍呈靜止狀態，則此兩組力 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 及 $P_1, P_2 \cdots\cdots P_m$ 已完全相等.

29. 合力及分力 若一組力 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 與一 L 力相等時，則 L 力卽爲 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力之合力. 而同時 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$，各爲 L 力之分力. 且 L 力既與 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力相等，若 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力代以 L 力，名曰力之合成法. 反之，若 L 力代以 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力，則名曰力之分解法.

設已知 L 力爲 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力之合力，若有他力 L' 其大小等於 L 力，方向則與 L 力相反，且與 L 力同時作用於一直線上. 依平衡定律，可知 L, L' 兩力，能自行互相抵消. 然如以 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力代替 L 力，則 L' 力亦能與之抵消而成平衡狀態. 故 L' 力爲 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力之反力，且大小與 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力之合力相等，方向相反，而位於同一直線上. 惟讀者須注意，合力非任何組力均能有之. 換言之，卽非任何組力均能以一反力抵消之. 至於一組力在何種情形下之有合力，今暫置勿論，容後述之.

30. 靜力學第四定律 兩力之合力乃爲兩力所成平行

四邊形之對角線．如圖 18，已知 F_1，F_2 兩力作用於一物體之 A 點上，由 F_1，F_2 兩線段作得平行四邊形 AF_2BF_1，則此平行四邊形之對角線 $\overline{AB}$，卽為 F_1，F_2 兩力之合力也．其大小與 $\overline{AB}$ 成正比，其方向為自 A 至 B．

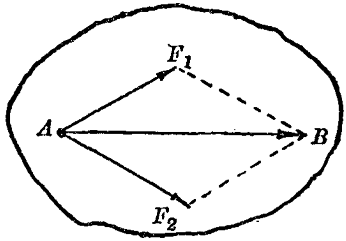


圖 18

31. **靜力學第五定律** 凡物體受力之作用後，必發生一相當之阻力，此所發生之阻力，與所受力之大小相等．方向相反，且位於同一直線上．

32. **作用與反作用** 吾人旣知力為兩物或兩物以上互相作用而發生，故關於第五定律，可作下述之解釋：如圖 19，設由 B 點發生一力於 A 點上，則 A 點同時亦必發生一力作用於 B 點上，此兩力中一名作用，一名反作用，且其大小相等，方向相反，位於同一直線上．

圖 19

凡宇宙間實無僅有一方面發生之力．換言之，卽旣有一作用，必能發生一反作用．有時亦可簡單說：作用等於反作用，惟其方向相反，今舉數例以明之：

33. **例一，萬有引力** 萬有引力乃兩物間相互之吸力．如太陽與地球間之相互吸力，一為向心力，一為離心力，其大小

相等方向相反，作用於地球及太陽之聯心線上.

34. 例二，拉繩之作用 如圖 20，懸 $\overline{AB}$ 線於一不動之 A 點上，其他端 B 繫一物體，則 B 點因受所繫物體重量之關係，發生一自上向下，垂直地面之拉力 T，可名之為正作用，而同時 B 點復受 $\overline{AB}$ 線牢繫物體之拉力 R，其大小與 T 力相等，方向則與之相反，且位於同一作用線上. 此 R 力卽 T 力之反作用也.

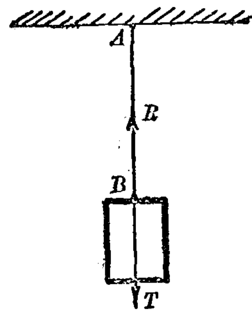


圖 20

35. 例三，平面所受之壓力及發生之反作用 如圖 21，S 球旋轉於水平面之 $\overline{AB}$ 線上，因 S 球重量之關係，在平面與 S 球之切點上，受一垂直平面之壓力 Q，而同時在此點亦受一由平面對於 S 球所發生之反作用 R，此 Q，R 兩力之大小相等，方向相反，作用於同一直線上.

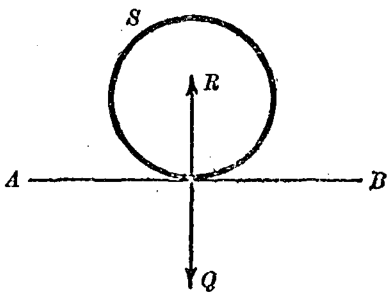


圖 21

36. 例四，支點所受之壓力及其因而發生之反作用 如圖 22，已知槓桿 AB 橫置於兩支點上，此兩點各受槓

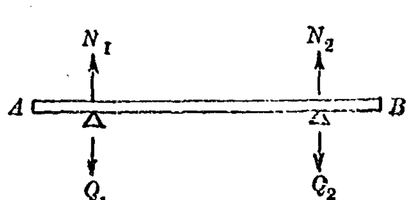


圖 22

桿之壓力 Q_1 及 Q_2，且同樣各發生一反作用 N_1 及 N_2. 則 N_1 爲 Q_1 之反作用，N_2 爲 Q_2 之反作用，而 Q_1, N_1 及 Q_2, N_2 各自之大小相等，方向相反，位於同一作用線上.

37. 例五，摩擦力 凡一物體移動於一平面上，此物體之本身受有一由平面所發生之反作用，其方向與物體移動之方向相反，此反作用卽稱爲摩擦力，在普通物理學中已有實驗證明. 如圖 23，設 M 物體在 AB 平面上移動，自左至右作等速進行，圖中已有箭頭表示其方向，此時 AB 平面受有物體之重力 P, 已有其反作用 R 力抵消之. 惟同時在 AB 平面上發生另一與物體運動反方向之摩擦力 T, 其大小等於 M 物體向右移動之拉力 F. 依 1781 年庫倫氏及 1833 年馬林氏兩人之證明，已知此摩擦力 T 與平面之反作用 R 力成正比，或與 M 物體之重力 P 成正比. 卽:

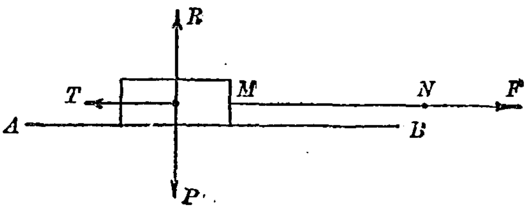


圖 23

$$T = kR$$

k 爲一係數，名曰摩擦係數，其值視摩擦物體之材料及摩擦面之光滑程度而異，與摩擦面積之大小，及物體運動不過大之速度無關. 其後復由實驗測得，若物體在十分光滑之平面上摩擦時（物理學名此時平面之光滑爲絕對光滑），其摩擦

係數之値爲零。卽：

$$k=0$$

若物體在一斜面上摩擦時，設斜面與水平面所成之角爲$\angle\phi$，此角名曰摩擦角，而摩擦係數之値，適等於此角之正切。卽：

$$k=\tan\phi$$

在圖 23 中，已知 M 物體在 AB 平面上作等速運動，則依平衡定律，此時 M 物體所受之諸力，應互相抵消。從以前例題中已知 P 力可與 R 力互相抵消，故其餘拉力 F 及摩擦力 T 亦應互相抵消。換言之，卽：

$$T=F$$

或：

$$F=kR$$

今設在 N 端所施之拉力 F，小於以前可使物體運動之力時，卽：

$$F<kR$$

則 M 物體仍呈靜止狀態，惟依力之平衡定律，此時之拉力 F 仍等於摩擦力 T。故：

$$T<kR.$$

由此可知若 M 物體在 AB 平面上移動時，其摩擦力爲：

$$T=kR$$

若 M 在靜止時，則摩擦力爲：

$$T<kR.$$

故 M 物體在 AB 平面上靜止時，其最大之摩擦力為：

$$T=kR$$

普通均寫作：

$$T\leq kR.$$

38 例六，應力 物體受外力作用後，其體內各分子間相互作用而發生之內力，稱為應力．在作用及反作用之立場上講，可云在物體內任意兩分子間相互作用而發生之應力，其大小相等，方向相反，且位於同一聯此兩分子之直線上．今舉一普通之例以明之．如圖 24 a，設有兩均等於 F 之力，各自向外

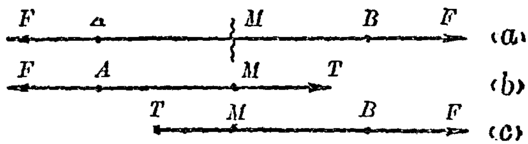


圖 24

拉 AB 棍．依平衡定律，AB 棍仍得如原來之靜止狀態．若加一截面於 AB 軸之任意點 M 上，分 AB 為 AM 及 MB 兩部分，則 M 點所受之力亦可分為二，一為 MB 對於 AM 所發生之力，一為 AM 對於 MB 所發生之力，設以 T 表此兩力各自之大小之量，則依作用及反作用之定律，可知此兩力之大小相等(各等於 T)，方向相反．今 AM 部份在 AB 上且呈靜止狀態，如圖 24 b，則 AM 部份兩端所受之力，已互相平衡．故：

$$F=T$$

可知作用於棍上之外力 F，等於棍內所發生之應力 T. 且在 MB 部份，如圖 24 c，亦有同樣之性質：

$$F=T$$

如上節之情形，而發生之應力，名曰張力．若所加之外力 F 並非拉力，而爲一向內之推力，則所發生之應力，名曰壓力，其大小亦等於外壓力，普通以 S 字母表示而別之．

在 M 點所受之力 T. 乃 A　B 兩方所發生之應力．若分 AB 爲 AM 及 MB 兩部，則 T 爲 AM 或 MB 所發生之外力，而非應力矣．此法名曰截面法，往往用以求應力之值．卽理想中分已知之棍或槓桿等爲兩部份，再觀其平衡與否．因未分開前之應力於分開後均一變而爲外力，故若爲平衡．吾人卽可依力之平衡條件求之．

39. 非剛體之平衡狀態　今有一非剛體 A，在 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力之作用下而呈平衡．若有另一式樣與非剛體完全恆等之剛體 B，亦受此 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力之作用，則亦必能呈平衡狀態．換言之，卽以一式樣與非剛體恆等之剛體代替一在力之作用下而平衡之非剛體時，其平衡仍不變異．

40. 靜力學第六定律　非剛體變爲剛體時，仍不變其平衡狀態．此定律一名凝固定律．卽流體之平衡狀態不因其凝固而變更，常用於研究關於流體之種種問題．故流體平衡時亦應依照固體平衡時之條件也．

吾人旣知適用於剛體平衡之條件，亦適用於非剛體平衡

之時，惟尚須知非剛體平衡除需要剛體平衡之諸條件外，尚須其他各種條件．今舉一例以明之．如圖 25，AB 線之兩端各受力 F 之作用．若 AB 為一剛體線(鉛絲，鋼絲)，則依第二定律，欲使此線平衡，只須兩端之力 F 為大小相等，方向相反，位於同一直線上三條件足矣．無論此兩力 F 為向外之拉力，或向內之推力，AB 線均能呈平衡狀態．惟若 AB 為普通日常縫衣之線，則在上述三條件下，仍能平衡與否，須視兩端之力 F 之方向若何而定．若力 F 為向外之拉力（如圖中箭頭所示者），則可．反之，若力 F 為向內之壓力（與圖中所示者相反），則雖有此三條件，仍不能呈平衡狀態也．故非剛體呈平衡時，有時需要兩項條件，一種為普通剛體受力而平衡所需要之條件，他種則為補充第一種所不足之條件．此項條件，視非剛體之物理性質及受力情形之不同而更變．

圖 25

41. 合力之求法 凡數力同時作用於一物體上，有兩種情形，一為此數力在同一平面上者，另一為作用之諸力不位於同一平面上者．故欲求其合力時，亦可分兩種情形，今先述諸力位於同一平面且同一點上之加法於後．

42. 力之平行四邊形法 設 F_1, F_2 兩力同時作用於一物體之 A 點上，如圖 26，吾人已知其必有一合力 R，亦作用於同一 A 點上，且此 R 合力可用以 F_1, F_2 作兩邊之平

行四邊形求之，其大小適為此平行四邊形之對角線．在有向量之性質上言之，此對角線為 F_1, F_2 兩力之幾何和．故 R 力為 F_1, F_2 兩力之合力無疑矣．以上所得之平行四邊形，名為**力之平行四邊形**．而如上之作法，名曰**力之平行四邊形法**．

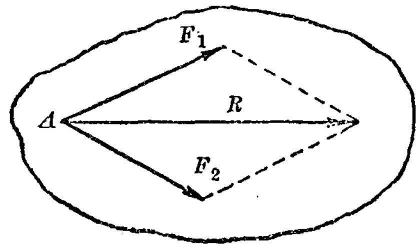


圖　26

43. 力之三角形法　求兩力之合力，除上述之平行四邊形法外，尚有一較簡之法．如圖 27，已知 F_1, F_2 兩力作用於一物體之 A 點上，可從 F_1 力之終點 B, 作 $\overline{BC}$ 線段，使其幾何式地等於力 F_2(大小相等，平行及同方向)．再聯 F_1 力之起點 A 及 $\overline{BC}$ 之終點 C, 此 $\overline{AC}$ 直線段即所求 F_1 F_2 兩力之合力 R 也．惟須注意圖中 F_1, F_2, R 諸力之箭頭．F_1, F_2 兩分力為順方向，而合力 R 則為逆方向．此由分力 F_1, F_2 及合力 R 所成之三角形 ABC,名為**力之三角形**,而此作法，則名曰**力之三角形法**．

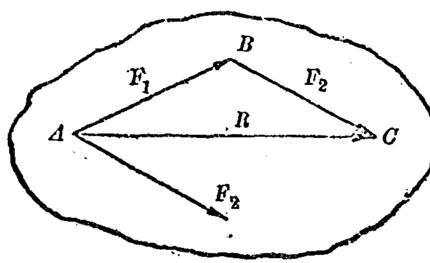


圖　27

44. 力之分解法　既有分力，則必可得合力然若有一力，則亦可分解為數力．由一力分解成兩力，普通亦有兩法，

一爲平行四邊形法，如圖 28，設 F 力作用於一物體之 A 點上，今若欲在此 A 點分解 F 爲兩分力，且使其作用線各爲已知之直線 KL 及 MN，可自 F 力之終點 B，作兩直線 BD 及 BC，各平行於 KL 及 MN，其與 MN 及 KL 之交點爲 D 及 C，則得一力之平行四邊形 $ACBD$。而在 A 點之兩邊 $\overline{AC}$ 及 $\overline{AD}$，卽爲所求之分力 F_1, F_2。其方向爲自 A 至 C，及自 A 至 D，因均以 A 點爲起點故也。

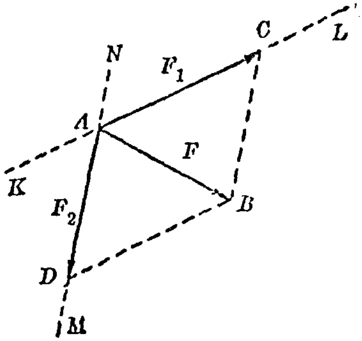


圖 28

一爲三角形法，如圖 29，設 F 力作用於 A 點上，今欲在 A 點分 F 力爲兩分力 F_1 及 F_2，使其各作用於已知直線 KL 及 MN 上，可自 F 力之終點 B，作 BC 線，使其平行 MN，交 KL 於 C 點，則此 $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ 兩線段，卽爲所求 F_1, F_2 兩分力之大小及方向，一爲自 A 至 C，一爲自 C 至 B，因其以 A 爲起點作順方向之折線，且與原來之力 F 爲逆方向故也。此法較平行四邊形法稍簡。

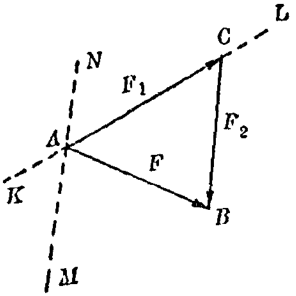


圖 29

45. 力之多角形法 前者所述之加法，僅可適用於一

平面上之兩力，今設有數力 F_1, F_2, F_3, F_4 位於同一平面，且同時作用於 A 點上，欲求其合力時，僅能次第作三角形法而得之。如圖 30，先以三角形法求得 F_1, F_2 之合力 R_1，再以同法求 R_1 力及 F_3 力之合力 R_2，如此繼續

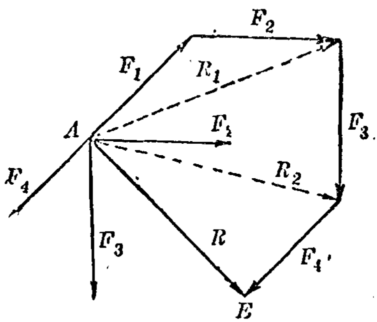


圖　30

不斷，可得最後之合力 R，此 R 力即爲 F_1, F_2, F_3, F_4 諸力之合力也。惟如此求合力，頗覺麻煩，可直接以下法求得之。如圖 31，先自力 F_1 之終點 B，作 $\overline{BC}$ 線段，使其幾何式地等於力 F_2 再由 C 點作 $\overline{CD}$ 線段，使其幾何式地等於力 F_3。如此次第啣接，至最後力 F_4 爲止，則可得一不閉多角形 $ABCDE$。若聯力 F_1 之起點 A 及 F_4 之終點 E，則所得之 $\overline{AE}$ 線段，即爲所求 F_1, F_2, F_3 F_4 諸力之合力 R 也。其方向爲自 A 至 E，適與分力

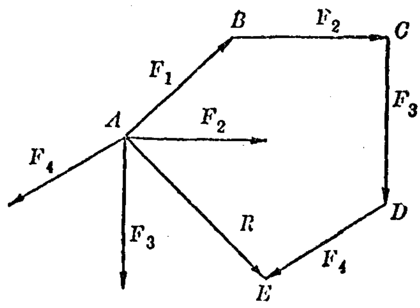


圖　31

F_1. F_2, F_3. F_4 之順方向相反，因 $\overline{AE}$ 復爲此多角形之閉合線，故此法名曰力之多角形法。且依有向量之性質，可知無論分

力爲若干，R 力必爲其幾何和也．若有 n 個分力，則可書：

$$\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\cdots\cdots+\overline{F}_n$$

46. **一點上數力之平衡條件** 吾人旣知作用於一點上之數力呈平衡時，則其合力必等於零．故若以上法求其合力時，則第一力之起點，與最後力之終點必相疊合，而所得之多角形，則一變而爲閉多角形，由此可知若一點上數力爲平衡時，則以此諸力所作之多角形，爲一閉多角形，換言之，若一點上數力之幾何和爲零值時，則此諸力必能呈平衡狀態．今舉數例題於后：

47. 〔例題一〕 M 物體在一絕對光滑與水平面成 a 角之斜面上，被一繫於不動點 B 且平行斜面之 AB 線所拉住，如圖 32，試求 AB 線之拉力．

答： M 物體旣在其重量 P 力，斜面之反作用力 R（R 與斜面垂直），及 AB 線之反作用力 T（T 等於 AB 線之拉力）等三力作用下而平衡，若以此三力作力多角形，則必能得一閉多角形，今從任意一點 a 作 $\overline{ab}$ 線段，使其幾何式地等於 P 力，再從 a, b 兩點作兩分別平行於 R

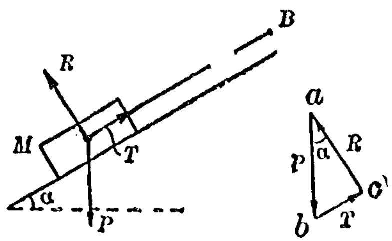


圖 32

力與 T 力之直線，得一交點 c．則本題中力之多角形爲一直角三角形 $a\ b\ c$（c 爲直角，因 R 力垂直斜面，而 T 力則平行

斜面故也）．且因 R 力垂直斜面，而 P 力垂直水平面，故 a 角適爲斜面與水平面所成之 a 角．所以：

$$T = F\sin a$$

〔例題二〕 已知一堆土之斜面之摩擦係數等於 0.8，試求此斜面與地平面所成之 a 角．

答： 既然此斜面爲一堆土所成，則每一土分子必能靜止於斜坡上．設 M 爲土分子之一，如圖 33，在重量 P 力，斜面之反作用力 R，及摩擦力 T 等三力下而平衡，則如上題，亦可得一直三角形 $a\,b\,c$，而其中之 a 角卽爲所求之 a 角也．故得：

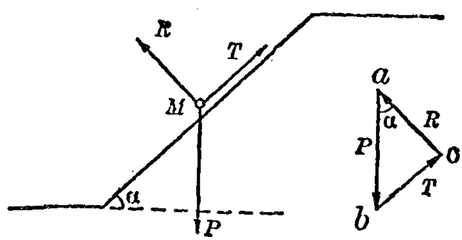


圖　33

$$\tan a = \frac{T}{R}$$

吾人由摩擦力性質，已知：

$$T \leq kR \qquad (k\text{ 爲摩擦係數})$$

因此：

$$\tan a \leq k$$

故所求之 a 角之正切最大爲等於摩擦係數，因若過此極大角，則土分子不能再行平衡，必依土斜坡之方向而向下滑動；與題意不合矣．今已知摩擦係數爲 0.8，所以

$$\tan\alpha = 0.8$$

$$\therefore \quad \angle\alpha = 38°40'$$

此求得之極大角 α，一名摩擦角，若吾人先知摩擦角，亦可求得摩擦係數之值．

〔例題三〕 在一與地面成垂直牆上之 AB 兩點，釘有 AC，BC 兩棍，兩棍之各一端在 C 點合一，若 AC 棍成水平時，則 BC 棍與之成 α 角，如圖 34．今設有 P 力作用於 C 點上，其方向爲下垂直，試求 AC，BC 兩棍上之應力．

答： 垂直力 P 作用於 C 點後，則兩棍或受一張力或受一壓力，勢必移動．惟實際上 AC 棍之 A 端尙受一由牆發生之反作用之力（或爲張力或爲壓力），與 C 端所發生之力，位於同一

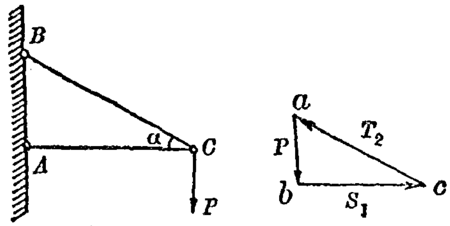


圖 34

直線上，大小相等，方向相反，故得相互抵消，而 AC 棍仍能平衡．同樣 BC 棍亦如是．故 C 點在 P 力及 AC，BC 兩棍之反作用三力下而平衡．今由一任意 a 點作 $\overline{ab}$ 線段，使其幾何式地等於 P 力，再由 a，b 兩點作各平行於 AC，BC 兩棍之兩直線，其交點爲 C，則得一閉直角三角形 $a\,b\,c$．$\overline{bc}$ 邊等於 AC 棍所發生之力，$\overline{ca}$ 邊等於 BC 棍所發生之力，其方向在圖中已由箭頭表示之．故知 AC 棍所發生之力爲壓力，而 BC 棍所發

生者爲張力．設以 S_1 表 AC 桿所發生之壓力，T_2 表 BC 桿所發生之張力，則從直三角形 $a\,b\,c$ 中可得：

$$S_1 = P\cot\alpha$$

$$T_2 = \frac{P}{\sin\alpha}.$$

48. 力在一已知軸上之射影　吾人已知矢之射影，今研究力之射影以對照之．觀圖 35，設欲射影力 F 於一已知軸 x 上，其方向在圖中已有箭頭表示．今從力 F 之起點 A，作一平行於軸 x 且與之同方向之軸 x'，再由力 F 之終點 B，作一垂直於軸 x' 之直線 Bb，則在軸 x' 上之線段 $\overline{Ab}$，卽爲力 F 在軸 x 上之射影，其方向爲自 A 至 b．設以 X 表之，若 $\overline{Ab}$ 與軸 x 爲同方向，則 X 爲正值，反之爲負．

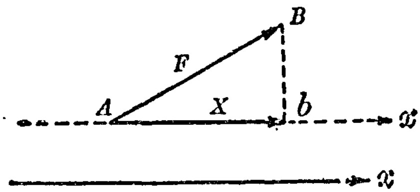


圖　35

在直三角形 ABb 中，可知：

$$X = F\cos(F,x) \tag{1}$$

(F,x) 乃表力 F 與軸 x 兩方向所成之角．

在圖中可知 X 值爲正．若其爲負值時，(1) 式仍能應用．因若力 F 與軸 x 爲異方向時，則所成之角必在 $90°$ 與 $270°$ 間，而此時之餘弦值適爲負故也．

若角 (F,x) 爲 $0°$ 時，則力 F 與軸 x 爲平行，且同方向．故其射影卽等於力 F 之值．若角 (F,x) 爲 $180°$ 時則力 F 與軸

x 爲平行而反方向，故其射影適等於力 F 之負値。若角(F,x)爲 $90°$ 時，則力 F 垂直於軸 x，射影變爲一點，故其値爲零。

49. 一力同時在兩垂直軸上之射影 今欲求力 F 在兩垂直軸 x, y 上之射影。如圖 36，從力 F 之起點 A，作平行於兩已知垂直軸且各與之同向之兩軸。爲便利計，仍以 x, y 表之，再射影力 F 於此兩軸上。設在軸 x 上之射影爲 X，在軸 y 上之射影爲 Y，從圖中可知力 F 適爲其兩射影所成長方形之對角線，故：

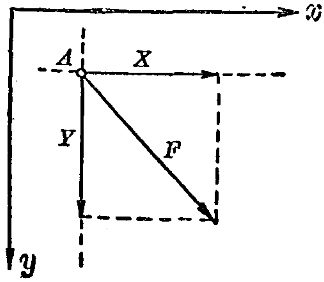


圖 36

$$F=\sqrt{X^2+Y^2} \qquad (1)$$

且從兩射影之本身上講，仍可書：

$$X=F\cos(F,x); \qquad Y=F\cos(F,y)$$

所以：

$$\cos(F,x)=\frac{X}{F}; \qquad \cos(F,y)=\frac{Y}{F} \qquad (2)$$

從(1)，(2)兩式中可知若已知兩 X, Y 射影，則可求力 F 之數值及方向矣。

50. 用力之射影求位於同一平面且作用於同一點上諸力之合力法 設欲求位於同一平面且作用於一點諸已知力 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 之合力 R。如圖 37，吾人已知合力 R 等於諸已知分力 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 之幾何和，且在前論有向量節中，已知諸已知矢之幾何和在一軸上之射影，等於各矢在同軸上射影之

代數和(§ 12)，故可云合力在任意軸上之射影，等於各分力在同軸上射影之代數和。今在圖中任意取兩垂直軸 x 及 y,用上法求得合力 R 之射影為 X,Y;諸已知分力 $F_1,F_2\cdots\cdots F_n$ 之射影為X_1,Y_1; $X_2,Y_2,\cdots\cdots X_n, Y_n$。諸值各為:

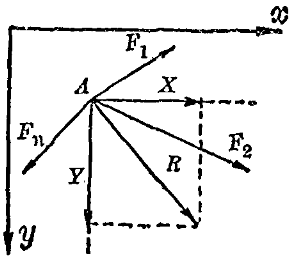


圖　37

$$X_1=F_1\cos(F_1,x);\qquad Y_1=F_1\cos(F_1,y)$$
$$X_2=F_2\cos(F_2,x);\qquad Y_2=F_2\cos(F_2,y)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$X_n=F_n\cos(F_n,x),\qquad Y_n=F_n\cos(F_n,y)$$

而:

$$X=X_1+X_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+X_n$$
$$Y=Y_1+Y_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+Y_n$$

然:

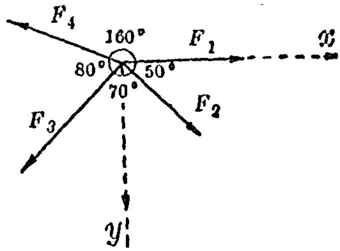
$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$
$$\cos(R,x)=\frac{X}{R};\qquad \cos(R,y)=\frac{Y}{R}.$$

由此可得合力 R 之數值及方向矣。今舉一例題以明之:

51.〔例題〕 已知位於同一平面之 F_1,F_2,F_3,F_4 四力作用於一點上。計:

$F_1=10$仟克,$F_2=10$仟克,$F_3=15$仟克,$F_4=20$仟克。

其方向如圖 38 中所示，計：



$\angle\ (F_1, F_2)=50°$，

$\angle\ (F_2, F_3)=70°$，

$\angle\ (F_3, F_4)=80°$，

$\angle\ (F_4, F_1)=160°$。

試求此四力之合力。

圖 38

答： 以力 F_1 之作用線爲 x 軸，經過諸力之作用點且垂直 x 軸之直線爲 y 軸，可得各力之射影：

$$X_1=10\cos 0°=10$$

$$X_2=10\cos 50°=6{,}428$$

$$X_3=15\cos 120°=-7{,}500$$

$$X_4=20\cos 160°=-18{,}794.$$

$$Y_1=10\cos 90°=0$$

$$Y_2=10\cos 40°=7{,}660$$

$$Y_3=15\cos 30°=12{,}990$$

$$Y_4=20\cos 70°=-6{,}840$$

故：

$$X=-9{,}886$$

$$Y=13{,}810$$

所以：

$$R=\sqrt{X^2+Y^4}=16{,}972 \text{ 仟克}$$

且：

$$\cos(R,x)=\frac{X}{R}=-0{,}5813$$

$$\cos(R,y)=\frac{Y}{R}=0{,}9137$$

$$\therefore\quad \angle(R,x)=125°32'30'',$$

$$\therefore\quad \angle(R,y)=35°,32'30''$$

52.　位於同一平面作用於一點上諸力平衡時之公式

吾人旣能直接求位於同一平面且作用於一點上諸力之合力，然若諸力適互相平衡時，則其合力爲零值；而此合力在兩垂直軸上之射影亦等於零必矣．從公式：

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$

中亦可見得，若：

$$R=0$$

則：

$$X=0$$

及：

$$Y=0$$

故可得公式如下：若位於同一平面且作用於一點上之諸力 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 爲平衡時，其在兩垂直軸射影之代數和必各等於零，卽：

$$X_1+X_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+X_n=0$$

$$Y_1+Y_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+Y_n=0$$

此兩公式名曰在一點上作用諸力之平衡公式，吾人可用以解

決在一點作用諸力平衡時之問題,惟因僅有兩公式,故只可解決含兩未知數之問題,若其未知數在兩個以上,則此兩公式不夠應付,爲靜力學所不能解決,只可倚諸材料强度學.故靜力學所能解決之問題,僅爲可能解決問題中之一部份,換言之,若問題中之未知數不在兩個以上時,則爲靜力學力之平衡問題.否則非在靜力學解決範圍之內也.

計算此種問題之時,必須選擇兩垂直軸,爲便利計算起見,往往使兩軸平行及垂直於未知力中之一力.今舉數例題於後:

53. 〔例題一〕 物體 M 在一絕對光滑與水平面成 α 角之斜面上,被一繫於不動點,且平行斜面之繂所拉住,如圖 39,試求線之拉力 T,及斜面之反作用 R (M 之之重量爲 P).

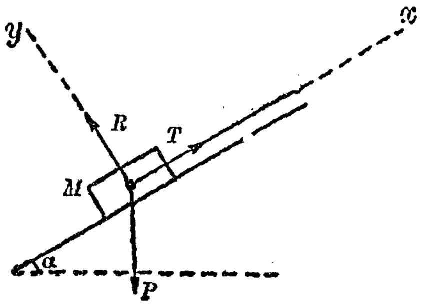


圖 39

答: 物體 M 既在 P, T, R 三力作用下而平衡,若依 R 及 T 兩力之作用線爲垂直軸 x, y, 且射影三力於其上,則得:

$$T+P\cos(90^\circ+\alpha)=0 \qquad (1)$$

$$R+P\cos(180^\circ-\alpha)=0 \qquad (2)$$

自 (1) 得 $\quad T-P\sin\alpha=0$

自 (2) 得 $R-P\cos\alpha=0$

$\therefore\quad T=P\sin\alpha$

$\therefore\quad R=P\cos\alpha$

〔例題二〕 在天花板之 A, B 兩點，斜釘 AC, BC 兩棍，各與天花板成 α 角，相交於 C 點，可用鉸鏈連之，如圖 40，設在 C 點加一垂直力 P，試求兩棍之應力 T_1 及 T_2.

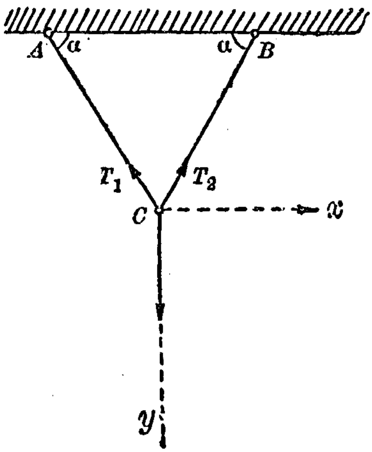


圖 40

答： C 點既在重力 P，AC 之應力(反作用)T_1 及 BC 之應力T_2三力作用下而平衡．若經過 C 點之 P 力作用線，及平行天花板之線為兩垂直軸，並射影 P, T_1, T_2 三力於其上，則得：

$$T_2\cos\alpha+T_1\cos(180^\circ-\alpha)=0 \qquad (1)$$

$$P+T_1\cos(90^\circ+\alpha)+T_2\cos(90^\circ+\alpha)=0 \qquad (2)$$

自 (1) 得 $T_2\cos\alpha-T_1\cos\alpha=0$

自 (2) 得 $P-T_1\sin\alpha-T_2\sin\alpha=0$

$$\therefore\quad T_1=T_2=\frac{P}{2\sin\alpha}$$

54 作用於一線上諸力之加法 吾人已知在同一平面作用於一點上諸力之合力，即閉此諸力所成多角形之邊，且

亦作用於原來之作用點上．今如圖 41，F_1, F_2, F_3, F_4 四力作用於一點上，且位於同一直線．F_3, F_4 兩力之方向與 F_1, F_2 兩力相反．其合力 R 亦必作用於此點上．如欲求合力 R 之大小及方向時，可仍以力之多角形法求之．惟在此種情形下，所得力之多角形乃爲一直線，在圖中 F_1,F_2 及 F_3, F_4 用兩平行線表示之．設若：

$$F_1+F_2>F_3+F_4$$

則：

$$R=F_1+F_2-F_3-F_4$$

合力 R 之方向與 F_1, F_2 兩力相同．若：

$$F_1+F_2<F_3+F_4$$

則：

$$R=F_3+F_4-F_1-F_2$$

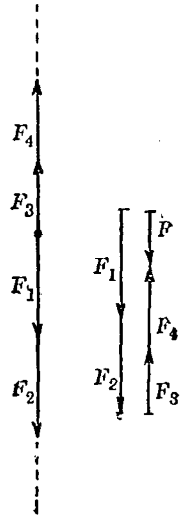


圖 41

其方向則與 F_3, F_4 兩力相同．故位於一線諸力之合力等於此數力之代數和．

然若 F_1, F_2, F_3 F_4 四力適爲平衡時，則其合力之值爲零．

$$R=0$$

或：

$$F_1+F_2-F_3-F_4=0$$

故若一線上諸力之代數和爲零時，則此數力必呈平衡狀態．

55 數力之作用線能交於一點之合力 在一平面上作

用於數點之諸力之合　，等於此諸力之幾何和，且作用於諸力之作用線之交點上.如圖42，設有數力，F_1 作用於一物體之 A_1 點，F_2作用於 A_2 點，…… F_n 作用於 A_n 點，諸力之作用線之交點爲 A. 吾人已知可任意移動一力於其作用線

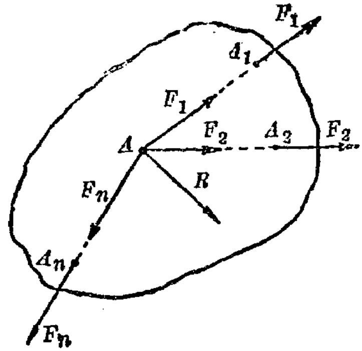


圖　42

上，今將 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 等力各於其作用線上移動，且使其均作用於 A 點，則在 A 點作用之 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力之合力，卽爲此數力之幾何和，且作用於 A 點上.

若合力爲零值時，則此作用於不同數點之力呈平衡狀態.

56. 不平行三力平衡時之定理　若不平行三力呈平衡狀態時，則三作用線必能同交於一點.如圖 43，已知不平行三力：F_1 作用於一物體之 A_1 點，F_2 作用於 A_2 點，F_3 作用於 A_3 點，因其爲不

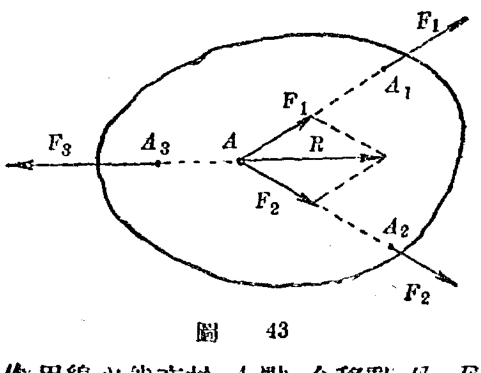


圖　43

平行，故 F_1, F_2 兩力之作用線必能交於 A 點.今移動 F_1, F_2 兩力於其作用線上，使其均作用於 A 點，則 F_1, F_2, F_3 三力

之平衡仍不變。換言之，卽 F_3 力能與 F_1, F_2 之合力 R 互相抵消，則其大小相等，方向相反，作用於同一直線上必矣。R 力旣作用於 A 點上，則 F_3 力之作用線，亦必經過 A 點。故不平行三力呈平衡時，其作用線必能交於同一點。玆舉一例題以應用之。

57. 〔例題〕 在起重機之 C 點上懸一 2 噸之重力 P。已知 C 點與 AB 轉軸之距離爲 4 米，AB 之距離爲 2 米，如圖

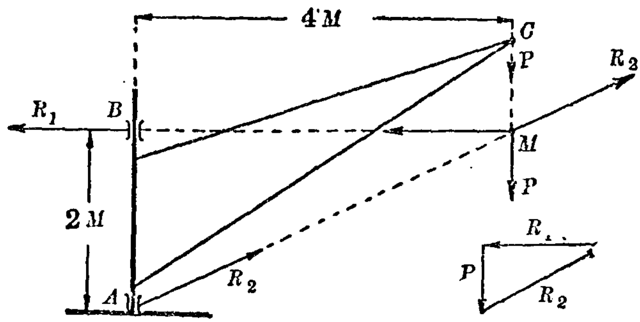


圖 44

44，試求從 A, B 所發生之反作用 R_2 與 R_1。

答： P, R_1, R_2 旣爲不平行之三力，且 P 力向下垂直，B 所發生之反作用 R_1 爲水平，今此三力呈平衡狀態，若 P 及 R_1 兩力之作用線交於 M 點，則 A 所發生之反作用力 R_2 之作用線，亦必經過 M 點。玆移動 P, R_1, R_2 三力於其各作用線上，使其均作用於 M 點，則依平衡定律，可得一閉多角形，此力之閉多角形，爲一直三角形，與直三角形 ABM 相似。故：

$$\frac{R_1}{P}=\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}}=\frac{4\ M}{2\ M}=2$$

$\therefore\quad R_1=2P=4$ 噸

$$\frac{R_2}{P}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{20M}}{2M}=\sqrt{5}$$

$\therefore\quad R_2=\sqrt{5}\,P=4.472$ 噸

第三章

力偶

58. 平行且同方向兩力之合力 關於位在同一平面上數力之合力之求法，既如上述。設欲求平行且同方向 F_1, F_2 兩力之合力 R，已知 F_1 力作用於物體之 A 點，F_2 力作用於物體之 B 點，如圖 45. 今聯 AB 直線，且於 A, B 兩點上各加一能互相抵消之 S 力(大小相等，方向相反，位於同一 AB 線上)。再在 A 點求得 F_1, S 兩力之合力 T_1，在 B 點求得 F_2, S 兩力之合力 T_2. 延長 T_1, T_2 兩力之作用線，得其交點 M，移動合力 T，T_2 及諸分力 F_1, S, F_2, S 於 M 點，則 M 點之兩 S 力，可互相抵消，而 F_1, F_2 兩力因其本爲平行及同方向，故至此則位於同一直線，其合力 R 可等於其和：

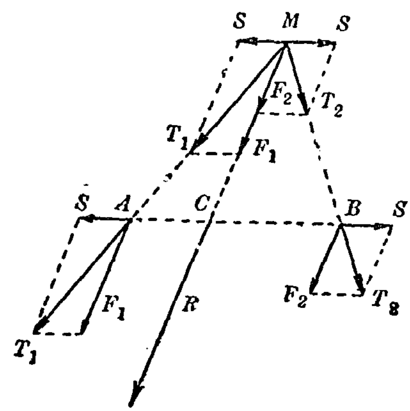


圖 45.

$$R=F_1+F_2$$

R 力與 F_1, F_2 兩力爲同方向，且其作用線與原來之 F_1, F_2 兩力平行．若延長之，交 AB 線於 C 點．今移動合力 R 於 C 點上，則從相似三角形，MCA 及 MF_1T_1 中可得：

$$\frac{\overline{AC}}{S}=\frac{\overline{MC}}{F_1}.$$

或：

$$\overline{AC}\cdot F_1=\overline{MC}\cdot S \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

又從相似三角形 MCB 及 MF_2T_2 中可得：

$$\frac{\overline{BC}}{S}=\frac{\overline{MC}}{F_2}.$$

或：

$$\overline{BC}\cdot F_2=\overline{MC}\cdot S \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

(1), (2) 兩等式中消去一邊，得：

$$\overline{AC}\cdot F_1=\overline{BC}\cdot F_2$$

或：

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

故 C 點分 A, B 爲兩線段，此兩線段與其每端所作用之力，適成反比例．且由第三式

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$

得：

$$\frac{\overline{AC}}{F_2}=\frac{\overline{BC}}{F_1}=\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{F_1+F_2}.$$

但：

$$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AB}$$

$$F_1+F_2=R$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{AC}}{F_2}=\frac{\overline{BC}}{F_1}=\frac{\overline{AB}}{R}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

吾人應用第四式，即可計算 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 兩線段之長短：

$$\left.\begin{aligned}\overline{AC}&=\overline{AB}\cdot\frac{F_2}{R}\\ \overline{BC}&=\overline{AB}\cdot\frac{F_1}{R}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

從此諸式中可以解決一大部平行及同方向兩力之問題，今舉一例題以明之。

59.〔例題〕試分解一作用於 M 點之 F 力爲兩分力 F_1, F_2，使其作用於已知 I 及 II 兩直線上。如圖 46，I, II 兩已知直線均平行於 F 力之作用線。

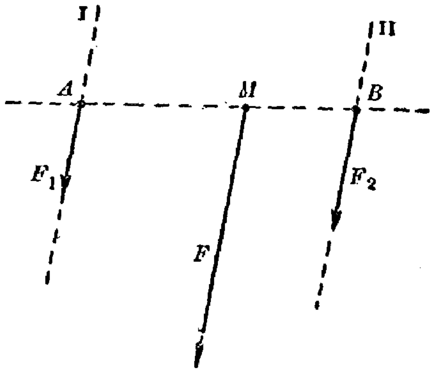


圖 46.

答：經過 M 點作一直線交 I, II 兩線於 A, B 兩點，若 F_1 力作用於 A 點，F_2 力作用於 B 點，則 F_1, F_2 兩力可用下列公式求之：

$$F_1+F_2=F.$$

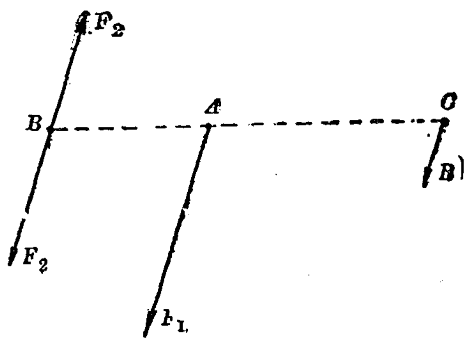
$$\frac{\overline{AM}}{F_2}=\frac{\overline{BM}}{F_1}=\frac{\overline{AB}}{F}.$$

$$\therefore \quad F_1=F\frac{\overline{BM}}{\overline{AB}},\ F_2=F\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}.$$

60. 平行而方向相反且大小不等兩力之合力 設 F_1 力作用於 A 點，F_2 力作用於 B 點，其作用線互相平行，其方向則相反，如圖 47，已知：

$$F_1>F_2$$

則其合力 R 之求法爲若何？今先分解 F_1 力爲兩平行且同方向之分力 F_2 及 R，使 F_2 力之大小等於原來之 F_2 力，亦使其作用於 B 點，惟方向適相反。至於他分力 R 之大小及其施力點（作用點）C，可用下列公式求之：



47.

$$F_1=F_2+R.$$

$$\frac{\overline{AB}}{R}=\frac{\overline{AC}}{F_2}=\frac{\overline{BC}}{F_1}.$$

$$\therefore \quad R=F_1-F_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(1)}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{AC}&=\overline{AB}\frac{F_2}{R}\\ \overline{BC}&=\overline{AB}\frac{F_1}{R}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2)}$$

惟在 B 點上作用之兩 F_2 力，可互相抵消．故僅剩 R 一力，此 R 力卽原來 F_1, F_2 兩力之合力也．且 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ 兩線段與 F_1, F_2 兩分力亦成反比例．

61. 力偶　力偶乃兩平行而方向相反且大小相等之力也，如圖 48 各於 A, B 兩點上作用之 F 力是也．吾人往往以 (F, F) 之符號代之．若用上法求其合力 R 時，則上節之 (1), (2) 式，一變而為下列所書者：

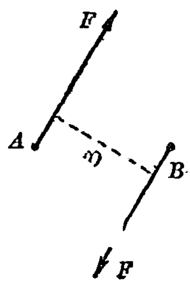


圖 43.

由 (1),　　$R = F - F = 0.$

由 (2).　　$\overline{AC} = \infty.$

$\overline{BC} = \infty.$

卽力偶之代數和雖為零值，因不能求得其合力之施力點，故仍不能呈平衡狀態，僅使作用之物體起迴轉運動而已．

62. 力偶之臂　力偶之臂為力偶中兩力作用線之距離，通常以 p 表示之．

63. 力偶矩　力偶矩乃力偶中一力與二力間垂直距離之積，往往以 m 表之，若力偶迴轉物體之方向為順時針方向，則力偶矩 m 為正值，反之為負值．故普通書作：

$$m = \pm F \cdot p$$

惟若其兩力間之距離為零時，則力偶矩 m 亦為零值．而此時力偶之兩力，成為作用於同一直線上大小相同方向相反之兩力，故仍得平衡．

兩力間之距離旣須垂直距離，爲便利起見，往往移動兩力之施力點，使聯此兩施力點之線段，適爲垂直距離，如圖 49 之 AB. 以後均仿此，故在本書中可云力偶矩等於力偶中一力與聯其兩力施力點之乘積.

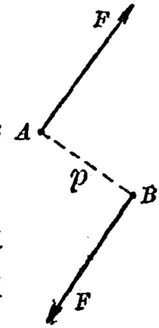


圖 49.

64. 力偶矩之單位 若以仟克爲力偶之單位，米爲施力點距離之單位，則此力偶距之單位爲仟克米. 例如各爲十仟克所成力偶間兩施力點之距離爲二米，且依順時針方向使物體迴轉，則力偶矩爲：

$$m = +20 \text{ 仟克米}.$$

換言之，一仟克米等於兩各爲一仟克之動力所成之力偶，其施力點爲一米之力偶矩也.

65. 定理 任意移動力偶於同一平面上，均不變此力偶之值. 如圖 50，力偶 (F, F)，間之距離爲 AB，今欲把牠移

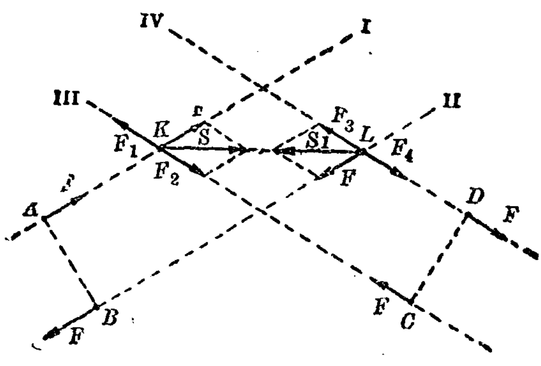


圖 50

動至一任意位置 CD 上 (CD 與 AB 在同一平面，且 CD 距離等於 AB)。先作兩 F 力之作用線 I 及 II，再從 C, D 兩點作兩垂直於 CD 之線 III 及 IV，III 交 I 於 K 點，IV 交 II 於 L 點.今移動兩 F 力於 K, L 兩點上,且在 K 點復加兩位於直線 III 上方向相反大小均等於 F 之力 F_1 及 F_2，在 L 點亦於直線 II 上同樣加 F_3, F_4 兩力.則 K 點上 F, F_2 之合力 S 爲其所成菱形之對角線，L 點上 F, F_3 之合力 S_1，亦爲其所成菱形之對角線.且 S 力之大小等於 S_1 力,因 K, L 兩點所作力之菱形相等故也．但 KL 線爲 I, II, III, IV, 四線所成菱形之對角線,亦平分$\angle(F, F_2)$ 及 $\angle(F, F_3)$ 爲兩等角,則 S, S_1 兩力均作用於 KL 線上,而其大小相等,方向相反,故可互相抵消.在圖中僅剩作用於 III 線上之 F_1 力及作用於 IV 線上之 F_4 力，若移動於 C,D 兩點上，則所得之兩 F 力與在 AB 上作用之兩 F 力毫無變更.由此可知在同一平面吾人可任意移動力偶之位置明矣。

66. **力偶之相等**　定理：若兩力偶矩相等時，則此兩力偶必作靜力式之相等。如圖 51，設 A,B 兩點上力偶 (F,F) 之施力點距離爲 P; C, D 兩點上力偶 (S, S) 之施力點距離爲 q，各依順時針方向迴轉。已知其力偶距 m_1, m_2 相等，卽：

$$F\cdot p=S\cdot q \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

(注意：若兩力偶矩各爲負值時亦相同)。

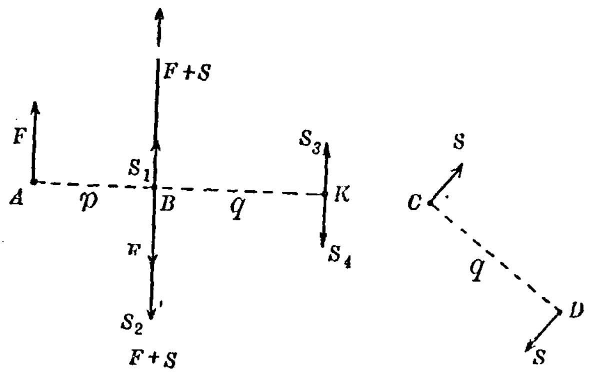


圖 5

今延長 $\overline{AB}$ 綫段至 K 點，使 $\overline{BK}$ 等於 $\overline{CD}$ (等於 q). 在 B, K 兩點上加大小各等於 S, 能相互抵消且垂直於 $\overline{BK}$ 之 S_1, S_2, S_3, S_4 四力，則 B 點上之 F 力與 S_2 力之合力爲 $F+S$, 仍依原來方向，作用於 B 點；A 點上之 F 力與 K 點上之 S_3 力之合力，其大小亦等於 $F+S$, 方向與 F, S_3 原來之方向相同，且作用於 B 點上，因依 (1) 式，B 點分 $\overline{AK}$ 爲與力 F 及 S_3 成反比例之兩線段也。

卽
$$\frac{F}{q}=\frac{S}{p}$$
但：
$$S=S_3,\quad p=\overline{AB},\quad q=\overline{BK}.$$
$$\therefore\quad \frac{F}{\overline{BK}}=\frac{S_3}{\overline{AB}}.$$

如此則在 B 點上兩合力，其大小均等於 $F+S$, 位於同一直線上，方向相反，能互相抵消必矣。故原來在 A, B 兩點

上之 (F, F) 力偶，已一變而爲作用於 B, K 兩點上之力偶 (S, S) $(S_1 = S;\ S_1 = S)$.

從前節定理，可知吾人能任意移動一力偶於同一平面上，而不稍變其值。故此力偶 (S, S) 可移之於同一平面之 C, D 兩點上。所以凡力偶矩相等之力偶，必仍作靜力式之相等。

67. 數力偶之合力偶. 設力偶 (F_1, F_1) 之施力點距離爲 p_1，力偶 (F_2, F_2) 之施力點距離爲 p_2，依順時針方向迴轉；另有力偶 (F_3, F_3) 之施力點距離爲 p_3 及力偶 (F_4, F_4) 之施力點距離爲 p_4，此兩力偶則依反時針方向迴轉。如圖 52，欲求其合力時則如何？若以 m_1, m_2, m_3, m_4 表諸力偶之力偶矩，即：

$$m_1 = F_1 \cdot p_1$$

$$m_2 = F_2 \cdot p_2$$

$$m_3 = -F_3 \cdot p_3$$

$$m_4 = -F_4 \cdot p_4$$

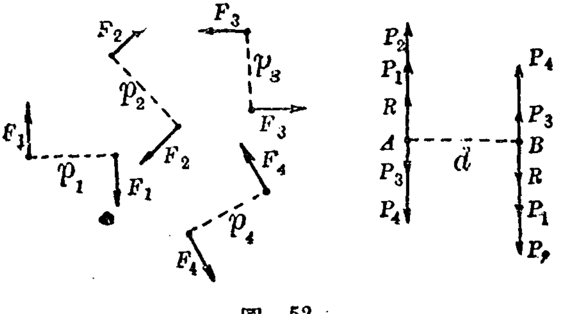


圖 52.

再取一長短等於 d 之線段，在其兩端 A, B 上，施以 (P_1, P_1)，(P_2, P_2)，(P_3, P_3)，(P_4, P_4) 四力偶，使其力偶矩各等於 m_1，m_2，m_3 及 m_4，即：

$$P_1 \cdot d = m_1$$

$$P_2 \cdot d = m_2$$

$$-P_3 \cdot d = m_3$$

$$-P_4 \cdot d = m_4$$

則依定理，所加之四力偶與原來之四力偶 (F_1, F_1)，(F_2, F_2)，(F_3, F_3) 及 (F_4, F_4)，各作靜力式之相等。今先求 A 點上 P_1，P_2，P_3，P_4 四力之合力 R. 假使：

$$P_1 + P_2 > P_3 + P_4$$

則：

$$R = P_1 + P_2 - P_3 - P_4$$

其方向與 P_1，P_2 兩力之方向相同，即垂直 AB，並作用於 A 點。同樣在 B 點上 P_1，P_2，P_3，P_4 四力之合力之大小亦為 R，其方向適與 A 點上 R 力之方向相反，作用於 B 點．故 (F_1, F_1) (F_2, F_2)，(F_3, F_3)，(F_4, F_4) 四力偶之合力，亦為一力偶，名之曰合力偶。其力偶矩則可名曰合力偶矩，若以 m 表之，可書：

$$\begin{aligned} m = R \cdot d &= (P_1 + P_2 - P_3 - P_4)d \\ &= P_1 d + P_2 d - P_3 d - P_4 d \\ &= m_1 + m_2 + m_3 + m_4. \end{aligned}$$

故合力偶矩等於各力偶矩之代數和。假使：$P_1+P_2<P_3+P_4$ 時，亦可得同樣之結果，惟爲負值。

68. **諸力偶矩之代數和爲零時，此諸力偶呈平衡狀態**

在上節中若：

$$P_1+P_2=P_3+P_4$$

則：

$$R=0.$$

即：

$$m=0.$$

$$\therefore\quad m_1+m_2+m_3+m_4=0.$$

故力偶矩之代數和爲零時之諸力偶，呈平衡狀態。

若有 n 個力偶，其力偶矩爲 $m_1, m_2\cdots\cdots m_n$，其性質亦完全相同。即其合力偶矩 m 等於各力偶矩之代數和。

$$m=m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n$$

而：

$$m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n=0$$

時，則此諸力偶呈平衡狀態。今舉數例題於後：

69. 〔例題 1〕 已知力偶 (F_1, F_1) 中之 F_1 力爲五仟克，其施力點之距離 P_1 爲二十米；力偶 (F_2, F_2) 中之 F_2 力爲二仟克，其施力點之距離 P_2 爲三十米；力偶 (F_3, F_3) 中之 F_3 力爲三仟克，其施力點之距離 P_3 爲四十米，如圖 53. 且知 (F_1, F_1) 及 (F_2, F_2) 兩力偶依順時針方向迴轉，而 (F_3, F_3) 力偶則依反時針方向迴轉。試求其合力偶 (F, F).

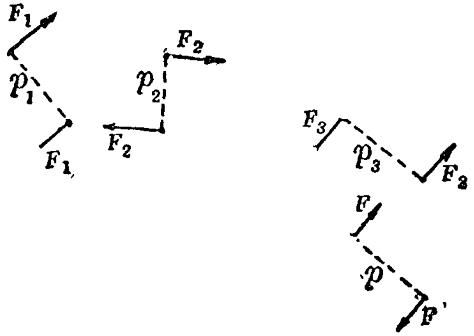


圖 53.

答：先求其合力偶矩 m.

$$m=5\times20+2\times30-3\times40=40 \text{ 仟克米。}$$

祇須力偶矩爲 40 仟克米之力偶，均爲所求之力偶，如：

(1)　　$F=2$ 仟克，　$P=20$ 米。

(2)　　$F=4$ 仟克，　$P=10$ 米。

(3)　　$F=10$ 仟克，　$P=4$ 米。

等等。

〔例題 2〕若上題中 (F_1, F_1), (F_2, F_2) 兩力偶及 (F_3, F_3) 力偶之施力點距離 P_3 均不變，試更易 F_3 力之大小，使此 (F_1, F_1), (F_2, F_2), 及 (F_3, F_3) 呈平衡狀態。

答：僅須其合力偶矩 m 爲零值時卽可：

$$5\times20+2\times30-F_3\times40=0.$$

$$F_3=\frac{160}{40} \text{ 仟克。}$$

$$\therefore\ F_3=4 \text{ 仟克。}$$

第四章

位同一平面上任意位置諸力之性質

70. 力矩 設有一 F 力及一定點 O, 如圖 54, 從 O 點至 F 力作用線之垂線 P, 謂之 F 力對於 O 點之力矩之臂，而 F 力與 p 之乘積，名曰 F 力對於 O 之力矩；普通用 $m(F)$ 之符號表示之. 若 F 力依順時針方向使其作用平面迴轉，則力矩爲正値，反之爲負値. 故可書:

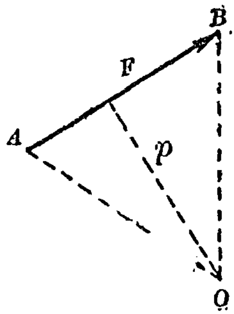


圖 54

$$m(F)=\pm F\cdot p$$

因定點 O 名曰力矩中心. 在圖中可知 F 力對於 O 點之力矩適等於 O 點與 F 力所成三角形面積之兩倍:

$$m(F)=\pm 2\triangle AOB.$$

若 O 點與 F 力之距離 P 爲零値時，則:

$$m(F)=0$$

換言之，若 F 力之作用線經過 O 點時，則 F 力對於 O 點之力矩爲零値.

力矩與力偶矩無甚分別，故其單位與力偶矩相同。即若以仟克爲力之單位，以米爲垂直距離之單位時，則力矩之單位爲仟克米。

71. 移動一力於一定點上之性質　設已知 F 力作用於 A 點，如圖 55，今如於已知點 O 上，加兩大小均等於 F 力且與 F 力平行，而方向相反，能互相抵消之力，則在 O 點上加有兩小劃之 F 力，與作用於 A 點之已知 F 力無異。而作用於 A, O 兩點之兩大小相等，方向相反之 F 力，適成一 (F, F) 力偶。故若依原來方向移動一已知力於一定點上，除已知力之本身不變外，可多得一作用於固定點及已知力原來之施力點上，且大小等於已知力之力偶。此因移動而新添之力偶，名之曰**移動力偶**。

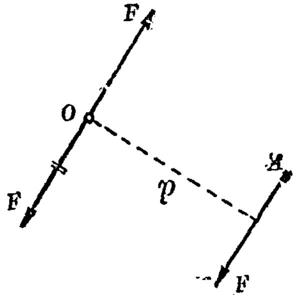


圖　55

若 O 點與作用於 A 點之 F 力之垂直距離爲 p，則 $F\cdot p$ 之乘積 m，可謂之移動力偶矩。且從圖中可見此 (F, F) 力偶，依順時針迴轉，故 m 之值爲正。

然 $F\cdot p$ 之乘積同時爲作用於 A 點之 F 力對於定點 O 之力矩 $m(F)$：

$$\therefore\quad m = m(F)$$

即由於移動一力於一定點而發生之移動力偶矩，等於此已知

力對於定點之力矩.

72. 依數力之原來方向移動諸力於同一平面上任意位置之性質 設已知力 F_1 作用於點 A_1, 力 F_2 作用於點 A_2, ……力 F_n 作用於點 A_n, 如圖 56. 今在其同一平面上任意取一點 O, 依上述方法, 移動 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力於 O 點上, 則

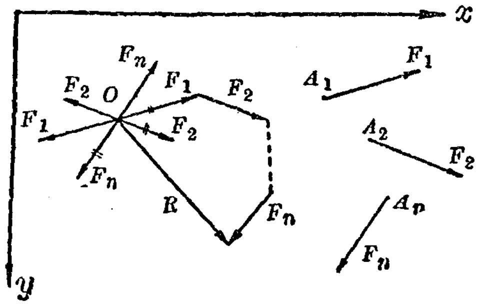


圖 56

得在圖中加有二短劃之 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力, 及 (F_1, F_1), $(F_2, F_2)\cdots\cdots(F_n, F_n)$ 諸移動偶力; 其移動力偶矩 $m_1, m_2\cdots\cdots m_n$ 各等於 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力對於 O 點之力矩:

$$m_1 = m(F_1)$$

$$m_2 = m(F_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_n = m(F_n)$$

此任意所取之點 O, 可名之曰移動中心. 在 O 點上加有二短劃之 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力之合力 R, 等於諸力之幾何和, 名之曰主矢. 而 (F_1, F_1), $(F_2, F_2)\cdots\cdots(F_n, F_n)$ 諸移動力偶之合力

偶矩，等於各移動力偶矩之和：

$$m=m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n$$
$$=m(F_1)+m(F_2)+\cdots\cdots+m(F_n)$$

可知 m 同時亦等於 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 各力對於移動中心點 O 之力矩之和；名之曰諸力對於移動中心之主力矩：

由此可知依數力原來方向移動於同一平面之任意移動中心上，所得之結果為一主矢 R，及一主力矩 m.

若欲計算主矢 R 之大小及方向，可用射影法求之．如圖 56，任意取兩垂直軸 x 及 y，而射影 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 諸力及主矢 R 於其上．設 X, Y 為 R 在 x, y 兩軸上之射影，而 X_1, Y_1；X_2, Y_2；$\cdots\cdots X_n, Y_n$，各為 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 在 x, y 兩軸上之射影，因主矢 R 為 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 諸力之幾何和，故依幾何和射影之定理，可得：

$$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$$
$$Y=Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n$$

求得兩射影矢 X, Y 之大小後，由下式即可求得主矢 R 之數值矣：

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$

至於主矢 R 之方向可以其與 x, y 兩軸所成之 (R, x) 及 (R, y) 兩角求之：

$$X=R\cos(R, x),\quad Y=R\cos(R, y)$$

即
$$\cos(R, x)=\frac{X}{R}$$

$$\cos(R, y)=\frac{Y}{R}.$$

73. 移動呈平衡狀態諸力之公式　若上述之主矢 R 及主力矩 m 均爲零值時，即：

$$m=0, \quad R=0.$$

則 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力，及 $(F_1, F_1), (F_2, F_2) \cdots\cdots (F_n, F_n)$ 諸移動力偶均呈平衡狀態，而：

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$

公式中之 X, Y, 必各等於零，即：

$$X=0, \quad Y=0.$$

但：

$$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$$

$$Y=Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n$$

$$m=m(F_1)+m(F_2)+\cdots\cdots+m(F_n)$$

$$\therefore \quad X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\therefore \quad Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n=0 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\therefore \quad m(F_1)+m(F_2)+\cdots\cdots+m(F_n)=0 \cdots\cdots (3)$$

(1) (2) (3) 三式爲移動呈平衡狀態諸力之公式。反言之，若適合 (1) (2) (3) 式之諸力，其在移動前必呈平衡。

74. 數力移動後成一力偶時之情形　設圖 56 中之主矢 R 爲零值，而其主力矩 m 不等於零，即：

$$R=0, \quad m\neq 0$$

則圖56中加有二小劃之$F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$諸力呈平衡狀態而諸移動力偶則否．故$F_1, F_2\cdots\cdots F_n$已變爲一力偶，其力偶矩即爲諸力對於移動中心力矩之和也．

$$m = m(F_1) + m(F_2) + \cdots\cdots + m(F_n)$$

75.　數力移動後成一合力時之情形　若所得之主矢R不等於零，則$F_1, F_2\cdots\cdots F_n$諸已知力之合力等於主矢R之原來値．假使此時對於移動中心之主力矩m爲零値，則(F_1, F_1), $(F_2, F_2)\cdots\cdots(F_n, F_n)$諸移動力偶可呈平衡狀態，而$F_1, F_2\cdots\cdots F_n$諸力僅成一作用於移動中心之合力主矢$R$. 假使其主力矩$m$之値亦不等於零且爲正値時，則$F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$諸力成一合力主矢$R$及一合力偶，其力偶矩等於$m$. 今取一力等於$R$，而其施力點距離爲$\frac{m}{R}$之力偶．(此力偶即諸移動力偶之合力偶，因其力偶矩適等於m故也．)且使其中之一力作用於移動中心點O上，方向與主矢R相反，如圖57；他力則作用於N點上；ON之距離等於$\frac{m}{R}$，且與主矢R垂直．而圖中使此力偶迴轉之方向與時針相同，則在移動中心點O上之兩R力，爲大小相等方向相反作用於同一直線上之力，故能互相抵消；則$F_1, F_2\cdots\cdots F_n$諸力於移動後亦成一合力矣，惟其施力點爲N，而非移動中心

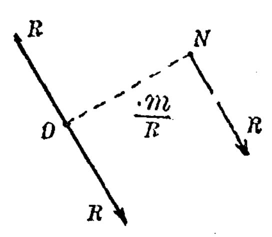


圖　57

也(若主力距 m 爲負值時亦同)。

76. 定理 若數力移動後成爲一合力時，則此合力對於任意點之力矩,等於各力對於同一點力矩之和。如圖 57,已知 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力移動後成一合力 R,作用於 N 點上。若以 $m(R)$ 表示 R 力對於 O 點之力矩,則:

$$m(R)=R\cdot\frac{m}{R}=m$$

$$=m(F_1)+m(F_2)+\cdots\cdots+m(F_n)$$

卽 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 諸力移動後所成一合力 R,對於移動中心 O 點之力矩等於 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 各力對於 O 點諸力矩之和。然移動中心 O 點本爲任意所取，故 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 諸力移動後所成合力對於任意點之力矩等於各力對於此點諸力矩之和。

77. 一力對於兩垂直軸原點之力矩與其在此兩軸上射影之關係 設力 F 作用於一點 A 上，今欲計其對於任意點 O 之力矩 $m(F)$. 取兩垂直軸 x 及 y, 量得 A 點在此兩軸上之坐標爲 x, y, O 點之坐標爲 a 及 b, 如圖 58. 若 F 力在兩軸上之射影爲 X, Y, 則 F 力適爲其兩射影之合力。依上節定理可知:

$$m(F)=m(X)+m(Y)$$

但:

$$m(X)=-(y-b)X,$$

$$m(Y)=(x-a)Y$$

$$\therefore \quad m(F)=(x-a)Y-(y-b)X$$

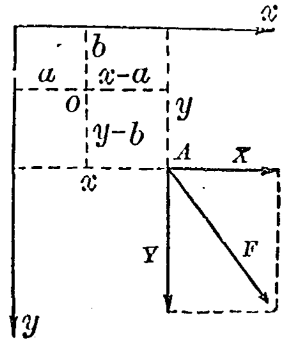


圖　58

若任意所取之 O 點適在 x, y 兩垂直軸之原點，(卽 x, y 兩垂直軸之交點) 上，則

$$a=0$$

$$b=0$$

故 F 力對於 x, y 兩垂直軸原點之力矩與其在此兩垂直軸上之射影有下列之關係：

$$m(F)=xY-yX$$

78.　靜力學能解決之問題及非靜力學能解決之問題

吾人已知平面任意位置之數力呈平衡時之公式爲：

$$(1) \qquad X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n=0$$

$$(2) \qquad Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n=0$$

$$(3) \quad m(F_1)+m(F_2)+\cdots\cdots+m(F_n)=0$$

且已知若問題中之未知數不超過靜力學之公式者，爲靜力學

能解決之問題，否則非靜力學範圍所能解決．今吾人應用上列三公式以計算物體受同一平面上數力而平衡之問題，若用此三公式(卽兩關於力之射影之公式，及一關於力矩之公式，已能解決，則此問題在靜力學範圍內可以成立．故若問題內之未知數爲三，則此問題爲靜力學能解決之問題．若有三個以上未知數之問題，則尚須應用其他力學部份之公式，而爲非靜力學所能解決之問題．

惟若問題中受力而平衡之物體爲兩，則祇須所作用之兩組呈平衡諸力位於同一平面上，吾人可用兩次同一公式，故未知數之範圍爲六．若物體爲三，則未知數之範圍爲九，可依此類推，今舉數例以明之．

79.〔例題 1〕 已知一橋梁架於一不動支點 A 及一可動支點 B 上，受位於同一平面上之 P_1, P_2, P_3 三力而平衡，如圖 59. 若此橋梁爲桁桿所構成，則名曰桁桿式之橋梁．試求 A, · 兩支點對於 P_1, P_2, P_3 三力所發生之反作用．

答： B 點旣爲一可移動之支點，則所發生之反作用僅爲

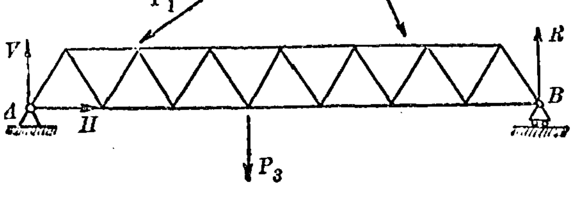


圖　59

一垂直於施力平面之力 R；而不動點 A 所發生之反作用，可分為二：一為垂直於施力平面之力 V，一為平行於施力平面之力 H. 故此題中所欲求者乃三未知力，吾人可用前三公式解決之，則此問題為靜力學能解決之問題.

〔例題 2〕　若上題之橋梁為一弧形式者，倚於兩不動支點 A, B 上，如圖 60. 已知 P_1, P_2 兩重力作用於其上，試求呈平衡時 A, B 兩支點對 P_1, P_2 兩力之反作用.

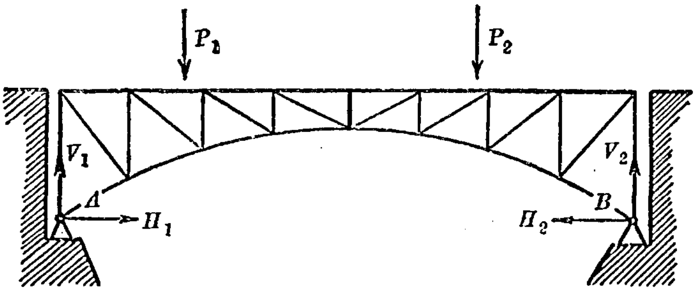


圖　60

答：　A, B 兩支點既為不可移動之點，則在每點上所發生之反作用乃一垂直力 V_1 與 V_2，及一水平力 H_1 與 H_2. 此題中所求之未知力為四，吾人所有之三靜力學公式不夠解決，欲求 A, B 兩支點所發生之反作用，實為靜力學所不可能者，故此問題為非靜力學所能解決之問題.

〔例題 3〕　若上述橋梁之弧形為兩半弧形所成，此兩半弧在其接觸處 C 點有一鉸鏈連之，如圖 61，試求 A, B, C 三點所發生之反作用.

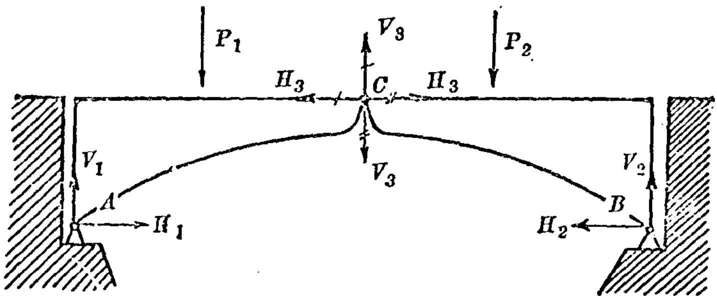


圖　61

答：　此橋梁旣爲兩半弧(在同一平面上)所成，吾人可分別述之。設左邊半弧 A 點所發生之反作用爲一垂直力 V_1 及一水平力 H_1, 在 C 點對於右邊半弧所發生之反作用爲在圖中加有一短劃之垂直力 V_3 及水平力 H_3; 右邊半弧之 B 點所發生之反作用爲一垂直力 V_2 及一水平力 H_2, 在其 C 點對於左邊半弧所發生之反作用，爲在圖中加有兩短劃之垂直力 V_3 及水平力 H_3. 惟 C 點所發生之兩 V_3 力及兩 H_3 力，各爲大小相等之力，則本題中實僅有 $V_1, H_1, V_2, H_2, V_3, H_3$ 六未知力，吾人可用兩次同樣三靜力學之公式求之。故此問題爲靜力學能解決之問題：

80.　求支點所發生反作用之計算題　吾人已知可用下列三公式解決諸力平衡時之種種問題：

$$X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n=0$$

$$Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n=0$$

$$m(F_1)+m(F_2)+\cdots\cdots+m(F_n)=0$$

且所需之兩垂直軸及一力矩中心,可任意在同一平面上取之.惟爲計算便利起見,往往使軸垂直於一未知力,則在關於力之射影方程式中,至少可減去一未知數;而以兩未知力作用線之交點取作力矩中心,則在關於力矩之方程式中,又可減去兩未知數矣.且計算此種問題時,不一定需要兩射影公式及一力矩公式,有時亦可射影諸力於一軸上,而取兩不同之點作爲力矩中心,或不計其射影,而取不同三點作爲力矩中心.然須注意若計算一物平衡之問題,至多用三方程式.若多取力矩中心,雖公式之數目加多,而在實際上仍爲三式,因三式以後之公式與最前三式合一故也.今例數題於後.

81. 〔例題 1〕 已知一起重機之重量 P 爲兩噸,如圖62,其重心與旋轉軸 AB 之距離 a 爲一米,起重點與 AB 之距離 c 爲四米,其垂直高 h 爲五米,所起物體 Q 重三噸.求其 A, B 兩支點所發生之反作用.

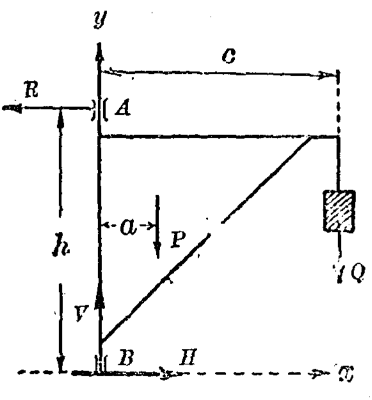


圖 62

答: 設 A 點所發生之反作用爲一水平力 R, B 點所發生之反作用,可分爲一水平力 H, 及一垂直力 V. 既然起重機受此 P, Q, R, V, H 五力作用下而平衡,當然可應用平衡力之三公式.若以 AB 爲 y 軸,另在 B 點上作一水平線爲 x 軸,並

射影諸力於此兩軸上，則得：

$$H-R=0,$$

$$V-P-Q=0.$$

再以 B 點（V, H 兩未知力之交點）爲力矩中心，則得：

$$-Rh+Pa+Qc=0.$$

$$\therefore\quad R=\frac{2\times1+3\times4}{5}=2.8 \text{ 噸},$$

$$\therefore\quad V=2+3=5 \text{ 噸},$$

$$\therefore\quad H=2.8 \text{ 噸}.$$

〔例題 2〕　一橋梁架於一不動支點 A，及一可動支點 B 上，如圖 63. 已知梁上諸等邊三角形底長之半爲 a，現在有一垂直力 P_1 作用於 C 點上，及一水平力 P_2 作用於 D 點上，求其 A, B 兩支點所發生之反作用（且知架高爲 h）.

答：　不動支點 A 所發生之反作用可分爲垂直力 V 及水平力 H 兩力，移動支點 B 所發生之反作用僅爲一垂直力 R. 橋梁既在 P_1, P_2, R, V, H 五力作用下而平衡，若從 A 點

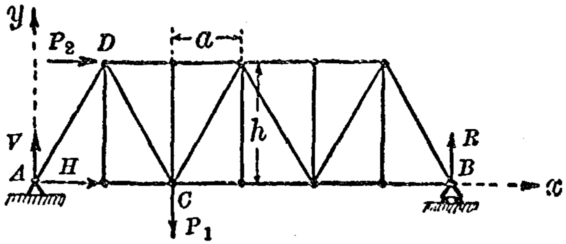


圖　63

作一水平線及一垂直線爲兩垂直軸 x, y, 而射影五力於其上並以 A 點爲力矩中心，則得：

$$H+P_2=0$$

$$V+R-P_1=0$$

$$-6Ra+2P_1a+P_2h=0$$

$$\therefore \quad R=\frac{1}{3}P_1+\frac{h}{6a}P_2$$

$$\therefore \quad V=\frac{2}{3}P_1-\frac{h}{6a}P_2$$

$$\therefore \quad H=-P_2$$

所求得之 H 力爲負值，則可知其方向應與 x 軸之方向相反，即應與圖中所示之方向相反。

〔例題 3〕 有一橋梁爲同一平面上兩半弧所成，兩半弧之一端交於 C 點，用鉸鏈連之，他端則各位置於 A, B 兩不動支點上，如圖 64. 今有二十噸重之 P_1 力垂直作用於距 C 點左

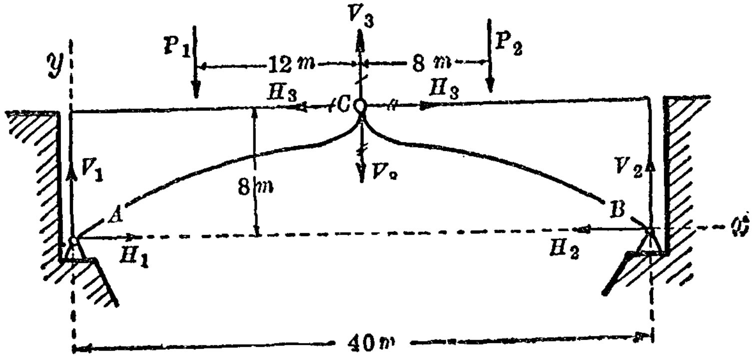


圖 64

邊十二米之處，四十噸重之 P_2 力垂直作用於 C 點右邊八米之處，已知橋架之全長爲四十米，其高爲八米，求 A, B, C 三點所發生之反作用。

答：在 A, B 兩支點所發生之反作用各可分爲垂直力 V_1 與 V_2 及水平力 H_1 與 H_2，C 點所發生之反作用爲兩對大小相等方向相反之垂直力 V_3 及水平力 H_3，圖中以加有一短劃及兩短劃分別之，則對於完全橋梁可應用三公式（包含兩半弧）。若以經過 A 點之一垂直線及一水平線爲兩垂直軸，以 A 點爲力矩中心，可得：

$$H_1 - H_2 = 0, \tag{1}$$

$$V_1 + V_2 - 20 - 40 = 0, \tag{2}$$

$$20 \times 8 + 40 \times 28 - 40 \times V_2 = 0. \tag{3}$$

從 (2) (3) 兩式中求得：

$$V_1 = 28 \text{ 噸},$$

$$V_2 = 32 \text{ 噸}.$$

對於左邊之半弧亦可應用三式以求之，若以 C 點爲力矩中心，仍射影諸力於兩原來之 x, y 軸上，則得：

$$H_1 - H_3 = 0,$$

$$V_1 + V_3 - 20 = 0,$$

$$20 \times V_1 - 8 \times H_1 - 20 \times 12 = 0.$$

$$\therefore\quad H_1 = H_2 = H_3 = 40 \text{ 噸},$$

$$\therefore\quad V_3 = -8 \text{ 噸}.$$

從 V_3 力之負值可知其方向與圖中所示者適相反，即左邊半弧 C 點所發生之垂直反作用 V_3 力（圖中加有一短劃），乃自上向下；而右邊半弧上 C 點所發生之垂直反作用 V_3 力(圖中加有兩短劃)，乃自下向上．

〔例題 4〕 一水平棍 AB 之一端 A 用鉸鏈連於一垂直牆上，他端 B 則有一與 AB 成 α 角之斜棍，間接連於牆上，如圖 65．已知 α 角爲 32°，棍長 l 爲 4 米，其重量 P 爲 200 仟克，作用於 AB 之中點．今有一重 500 仟克之 Q 力作用於距牆爲 c 等於 3 米之 AB 棍上一點，試求 A 點所發生之反作用及 BC 棍之應力．

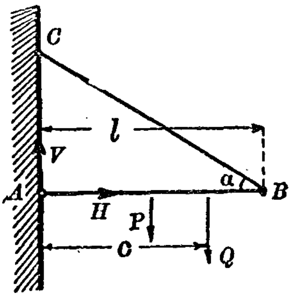


圖 65

答： A 點所發生之反作用爲一垂直力 V 及一水平力 H，今 AB 棍既在 P, Q, V, H 及 BC 之應力 T 諸力作用下而平衡，當然可應用平衡時之諸公式．若以 B 點爲力矩中心，則得：

$$4\times V-2\times 200-1\times 500=0.$$

$$\therefore\quad V=225\ \text{仟克}.$$

若以 C 點爲力矩中心，則得：

$$2\times 200+3\times 500-H\times \overline{AC}=0.$$

但：

$$\overline{AC}=\overline{AB}\times\tan\alpha=4\times\tan 32^\circ=2.50\ \text{米},$$

$$\therefore \quad H = 760 \text{ 仟克.}$$

若以一平行 AB 棍之水平線爲軸，而射影諸力於其上，則得：

$$H - T \times \cos\alpha = 0,$$

$$\therefore \quad T = \frac{H}{\cos\alpha} = \frac{760}{\cos 32^\circ} = 896 \text{ 仟克.}$$

〔例題 5〕 設有一直平行六面體之橋樁. 其所繫橋梁對於此樁之拉力爲 F, 與橋之對角線方向相同，且與水平線成 α 角，如圖 66. 已知此橋樁與地面之摩擦係數爲 k, 問此樁最少須若干重量，方可支住橋梁.

答： 作用於此橋樁之力爲其重量 P 及橋梁之拉力 F, 地面之反作用 N, 及摩擦力 T. 又 N 力之施力點爲未知，今設此點與橋樁右端之距離爲 a. 若橋樁能支住其橋梁而不動，

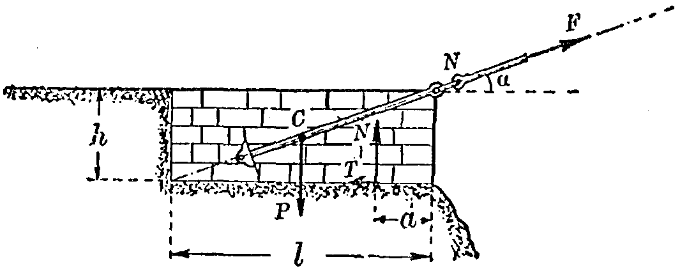


圖 66

則作用於其上之諸力應呈平衡，卽此諸力應適合於力之平衡公式. 今射影諸力於水平軸及垂直軸上，並以橋樁之重心 C 點爲力矩中心，則得：

$$F\cos\alpha - T = 0$$

$$F\sin\alpha-P+N=0$$

$$T\frac{h}{2}-N\left(\frac{l}{2}-a\right)=0$$

其中之 l 為橋樁之長度，h 為橋樁之高．再以 $N, T,$ 及 a 為諸未知數而解以上諸式：

$$N=P-F\sin\alpha$$

$$T=F\cos\alpha$$

$$a=\frac{l}{2}-\frac{hF\cos\alpha}{2(P-F\sin\alpha)}$$

然須注意 $N, T,$ 及 a, 應適合於下列各條件：

(1)　$N\geq0$, 因地面之反作用不能垂直向下．

(2)　$T\leq kN$, 從摩擦定律得來 (§ 37).

(3)　$a\geq0$, 因 N 力施力點之移動方向,自左至右，故其値不能為負數．

即：
$$P-F\sin\alpha\geq0$$

$$F\cos\alpha\leq k(P-F\sin\alpha)$$

$$l(P-F\sin\alpha)-hF\cos\alpha\geq0$$

解以上諸不等式則得橋樁能支住橋梁時之重量條件為：

$$P\geq F\sin\alpha$$

$$P\geq F\left(\sin\alpha+\frac{\cos\alpha}{k}\right)$$

$$P\geq F\left(\sin\alpha+\frac{h}{l}\cos\alpha\right)$$

但
$$h=l\tan\alpha$$

$$\therefore \quad P \geq 2F \sin \alpha$$

若 $\angle\alpha<45°$, $k<1$, 則 $\cos\alpha>\sin\alpha$, 同時 $\frac{\cos\alpha}{k}>\sin\alpha$. 在此情形下,則下列不等式中 P 對於所有條件已完全適合:

$$P \geq F\left(\sin\alpha+\frac{\cos\alpha}{k}\right)$$

由此式卽可定楿椿最小之重量.

假設:

$$F=20\text{ 噸}, \quad \angle\alpha=20°, \quad k=0.6.$$

則得: $$P=20\left(0.342+\frac{0.940}{0.6}\right)=38.2\text{ 噸}.$$

82. **合力作用線之公式** 吾人已知若位於同一平面上之數力有一合力 R 時(卽其合力不爲零值時),可用公式以求 R 力之數值及方向:

$$X=X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n$$

$$Y=Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n$$

$$R=\sqrt{X^2+Y^2}$$

$$\cos(R,x)=\frac{X}{R}$$

$$\cos(R,y)=\frac{Y}{R}$$

然 R 力作用線應如何指定,尙未論及.今詳述於下:設位於同一平面上之 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 數力作用於 $A_1, A_2\cdots\cdots A_n$ 諸點,如圖 67. 已知其合力 R 不爲零值,且作用於 N 點上 (N

爲 R 力作用線上任意一點)。今取兩垂直軸 x 及 y，而求 R 力作用線對於此兩軸之公式。設 N 點之坐標爲 x 及 y，R 力在兩軸之射影爲 X 及 Y，則 R 力對於 x, y 兩垂直軸原點 O 之力矩爲 (§ 77)：

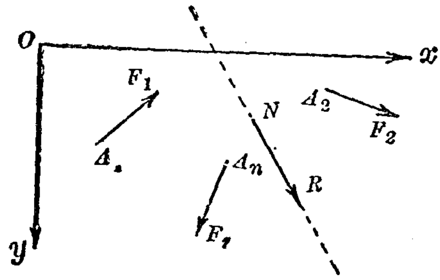


圖　67

$$m(R) = xY - yX$$

依定理又知 R 力對於 O 點之力矩，等於 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 數力對於 O 點各力矩之和，若以 $\Sigma m(F_i)$ 表各分力矩之和，則：

$$xY - yX = \Sigma m(F_i)$$

此公式包含 R 力作用線上任意一點對於 x, y 兩垂直軸之關係，故爲合力作用線之公式。如欲定作用線上任意點之坐標，可任意取一值作爲縱標或橫標，而從公式求其他之橫標或縱標之值也。今舉一例以明之。

83. 〔例題〕 設 P_1, P_2, P_3 三力作用於一矩形式之橋梁上，如圖 68. 已知 P_1 爲一垂直力，重二十噸，作用於距左端十米處之矩形底邊上，P_2 亦爲一垂直力，重四十噸，作用於距橋梁左端四十米處矩形之頂邊上，P_3 則爲一水平力，重三十噸，作用於矩形之頂邊。橋梁之高爲六米，試求 P_1, P_2, P_3 三力之合力。

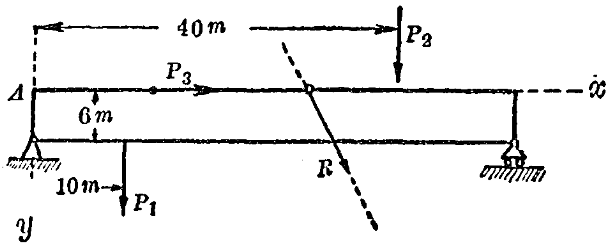


圖 68

答： 以圖中之 x, y 兩線取作兩垂直軸，而射影諸力於其上，則 P_1, P_2, P_3 三力之合力 R 在兩軸上之射影

$$X=30 \text{ 噸}$$

$$Y=20+40=60 \text{ 噸}.$$

故合力 R 之數值爲：

$$R=\sqrt{30^2+60^2}=67.08 \text{ 噸}.$$

今求 R 力之作用線。設以 A 點（卽 x, y 兩軸之交點）爲力矩中心，則 P_1, P_2, P_3 三力對於 A 點之力矩和爲：

$$10\times 20+40\times 40=1800 \text{ 噸米}$$

故 R 力作用線在 x, y 兩軸之公式爲：

$$60x-30y=1800$$

此作用線與橋梁頂邊之交點，其縱標 y 爲零，可從其方程式中求得横標之值：

$$x=30 \text{ 米}$$

作用線與橋梁底邊之交點，其縱標 y 爲六米，可從其方程式中求得横標 x 之值爲：

$$x=33\text{ 米}$$

若聯此兩交點所成之直線，卽爲 R 力之作用線．吾人可於其上取一任意點爲 R 力之着力點．至於 R 力之方向，則可從：

$$\cos(R,x)=\frac{X}{R}$$

$$\cos(R,y)=\frac{Y}{R}$$

兩式中求得之．

84. 位於同一平面上諸平行力之合力　吾人已在以前數節中研究位於同一平面上任意位置諸力之性質，本節所論者，乃爲前數節中之特別情形，卽作用於平面上之諸力均互相平行．故對於以前數節中之定理，均可適用．惟前者之主矢(合力)爲各分力之幾何和，而平行力之合力，則爲各分力之代數和．玆述於後．設位於同一平面上之 $F_1, F_2,\cdots\cdots F_n$ 諸平行力，各作用於 $A_1, A_2,\cdots\cdots A_n$ 諸點，如圖69已知 $F_1, F_2,\cdots\cdots F_k$ 諸力之方向與 $F_{k+1},\cdots\cdots F_n$ 等相反．若欲知其合力 R 時，可仍用力之多角形法求之，惟此種力之多角形，僅

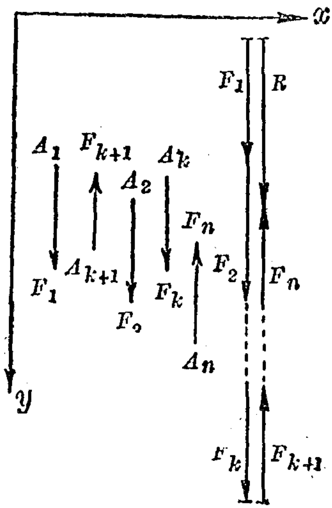


圖　69

爲一直線．在圖中假定 $F_1, F_2,\cdots\cdots F_k$ 諸力之和大於 F_{k+1},

$\cdots\cdots F_n$ 之和，即：

$$F_1+F_2+\cdots\cdots+F_k>F_{k+1}+\cdots\cdots+F_n$$

則其合力 R 爲：

$$R=F_1+F_2+\cdots\cdots+F_k-F_{k+1}-\cdots\cdots-F_n$$

R 合力與已知諸力平行，惟其方向與 F_1, F_2,……F_k 諸力相同，與 F_{k+1},……F_n 諸力相反。今以前數節所得之結果解釋之。

若所求得之合力 R 爲零值，而各分力對於任意點之主力矩亦爲零值，即：

$$R=0,\quad m=0$$

則諸平行力 F_1, F_2……F_n 呈平衡狀態。

若 R 力爲零值，而諸力之主力矩不等於零，即：

$$R=0,\quad m\neq 0$$

則諸平行力 F_1, F_2,……F_n 成一力偶，其對於任意點之力偶矩，等於諸力對於此點之主力矩。

若 R 力不爲零值，則諸平行力有一合力 R，即吾人所求得之 R 力也。

至於諸平行力呈平衡之公式，則一變爲二式，而不再如前之三式矣。茲述如下：在圖 69 中，取一垂直諸平行力之直線爲 x 軸，平行諸平行力之直線爲 y 軸，而射影諸平行力於其上。

在 x 軸上諸呈平衡之平行力之射影公式爲：

$$0=0 \tag{1}$$

在 y 軸上諸呈平衡之平行力之射影公式為：

$$F_1+F_2+\cdots\cdots+F_k-F_{k+1}-\cdots\cdots-F_n=0 \quad (2)$$

而對於一任意點 O 之力矩公式仍為：

$$m(F_1)+m(F_2)+\cdots\cdots+m(F_n)=0 \quad (3)$$

故平行力呈平衡時之公式僅為 (2), (3) 兩式。則對於此類問題在靜力學範圍內能解決者，至多包含兩未知數，亦較前減少一數，今舉數例於後。

85. 〔例題 1〕 P_1, P_2, P_3 三力向下垂直作用於 AB 棍上之 M_1, M_2, M_3 三點，如圖 70. 已知：

$$P_1=1\text{ 噸},\quad \overline{AM_1}=2\text{ 米}$$
$$P_2=2\text{ 噸},\quad \overline{M_1M_2}=3\text{ 米}$$
$$P_3=3\text{ 噸},\quad \overline{M_2M_3}=3\text{ 米}$$
$$\overline{M_3B}=2\text{ 米}$$

試求其合力 R.

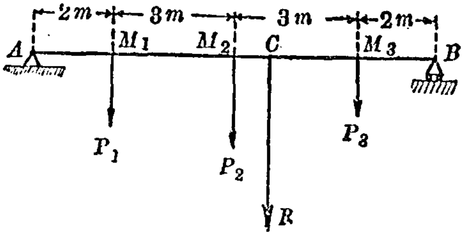


圖 70

答： R 力之數值為：

$$R=1+2+3=6\text{ 噸}$$

合力 R 旣不等於零，可知 P_1, P_2, P_3 三力僅成一合力 R. 今求其在 AB 棍上之作用點 C. 設 $\overline{AC}$ 之長爲 x, 依定理知合力 R 對於 A 點之力矩等於 P_1, P_2, P_3 三力對於 A 點各力矩之和，故：

$$6x=1\times 2+2\times 5+3\times 8=36$$

$$\therefore \quad x=6 \text{ 米}$$

故知 R 力之施力點 C, 與 AB 棍左端 A 點之距離爲六米。至於合力 R 之方向，則與 P_1, P_2, P_3 三力之方向相同。

〔例題 2〕 AB 棍水平地倚於一不動支點 A, 及一可動支點 B 上。設有 P_1, P_2 兩平行力向下垂直作用於棍上之 C, D 兩點，如圖 71. 已知：

$$P_1=2 \text{ 噸}, \quad \overline{AC}=3 \text{ 米}.$$

$$P_2=3 \text{ 噸}, \quad \overline{CD}=3 \text{ 米}.$$

$$\overline{DB}=2 \text{ 米}.$$

試求 A, B 兩支點所發生之反作用。

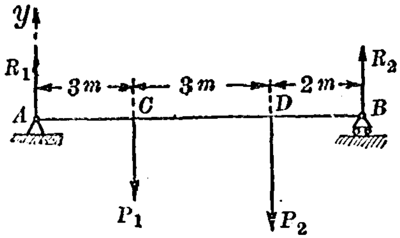


圖 71

答： 因兩支點中之一支點爲可動支點，故其發生之反

作用僅各爲向上垂直之 R_1 力及 R_2 力，如此可知 AB 在 P_1, P_2, R_1, R_2 四力作用下而平衡．今以經過 A 點之垂線爲 y 軸，並以 A 點作力矩中心，則從平行力呈平衡時之二公式中求得：

$$R_1+R_2-2-3=0$$

$$2\times3+3\times6-8R_2=0$$

$$\therefore\quad R_2=3\text{ 噸},$$

$$\therefore\quad R_1=2\text{ 噸}.$$

若題中之 AB 棍倚於三支點上，而求此三支點所發生之反作用，則僅用此兩公式不夠解決(因其未知數爲三故也)．而此題亦因而變爲非靜力學能解決之問題．

並知此棍純爲單一之棍，若係由數棍聯合組織而成，則又發生其他之反作用．而此題又變爲非靜力學能解決之問題矣．

〔例題 3〕　用鉸鏈聯繫 AC, BC 兩棍於 C 點，使其水平地倚於 A, D, B 三支點上，且 A 爲不動支點，而 B, D 則爲可動支點．設有 P_1, P_2 兩平行力向下垂直作用於棍上之 M, N 兩點，如圖 72. 已知：

$$P_1=10\text{ 噸},\qquad P_2=5\text{ 噸}.$$

$$\overline{AM}=3\text{ 米},\qquad \overline{MD}=3\text{ 米}.$$

$$\overline{DC}=3\text{ 米},\qquad \overline{CN}=2\text{ 米}.$$

$$\overline{NB}=3\text{ 米}.$$

試求 A, B, D 三支點所發生之反作用。

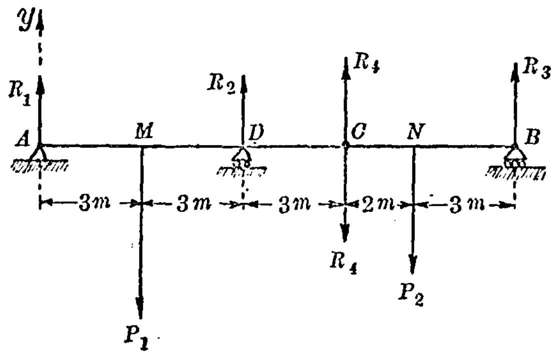


圖 72

答： AB 全棍既為 AC, BC 兩棍所成，則可用兩次同樣之公式。在 A, D, B 三點所發生之反作用，各為向上垂直，以 R_1 力，R_2 力及 R_3 力表之。在 C 點所發生之反作用，則為兩力，一為 AC 棍對於 BC 棍之作用，一為 BC 棍對於 AC 棍之作用。然此兩力之大小相等，方向相反（一為向上垂直，一為向下垂直，）故可以 R_4 代表之，並能互相抵消，仍不妨害本題中之平衡。且題中僅求 R_1, R_2, R_3 三力，則可於四公式中任意取三公式求之。若以經過 A 點之垂線為 y 軸，而射影 AB 全棍上作用之諸力於其上（兩 R_4 力可不計之，因題中既不問及，且因其能互相抵消，故雖不計及，仍不妨害吾人所欲之平衡），並以 C 點為力矩中心，則得諸方程式如下：

$$R_1+R_2+R_3-10-5=0$$

$$9R_1+3R_2-10\times 6=0$$

$$5\times 2-5R_3=0$$

$\therefore$ $R_1=3.5$ 噸，

$R_2=9.5$ 噸，

$R_3=2$ 噸。

第五章

力之圖解法

86. 力之不閉多角形　前章用以求位於同一平面上任意位置諸力之合力，乃用數學方法；本章中則以圖解法求之。設欲求作用於 M_1, M_2, M_3 三點之 F_1, F_2, F_3 三力之合力，如圖 73. 今先作 F_1, F_2, F_3 三力之多角形，

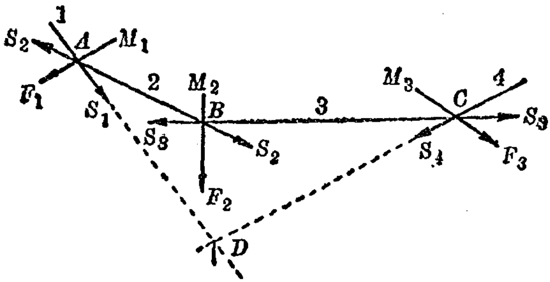


圖　73

如圖 74 中之 a, b, c, d, 即任意取一 a 點，作 $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}$ 三線段，各使其幾何式地等於 F_1, F_2, F_3 三力．設所得之力之多角形爲一不閉多角形，則從以前諸章所述，可知 F_1, F_2, F_3 三力僅成一不等於零之合力 R；

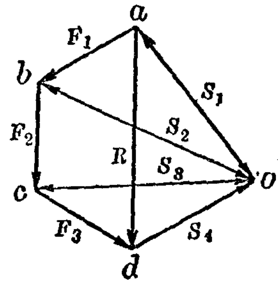


圖　74

此合力 R 卽爲用以閉多角形之 $\overline{ad}$ 線段，其方向爲自 a 至 d. 如此則已求得 F_1, F_2, F_3 三力合力 R 之數值及方向，然尙不知 R 力之施力點. 今詳述其求法如下. 在圖 74 中，多角形 $a\ b\ c\ d$ 外，取一任意點 O, 名之曰極. 從 O 點用直線段連接多角形之諸頂點 a, b, c, d, 所得之 $\overline{Oa}, \overline{Ob}, \overline{Oc}, \overline{Od}$ 名曰向徑，用 S_1, S_2, S_3, S_4 代表之；且向徑之數常比成不閉多角形諸分力之數多一. 再在圖 73 中作直線 (1) 使其平行於向徑 S_1, 與 F_1 力之作用線交於 A 點，從交點 A 作直線 (2) 使其平行於向徑 S_2, 與 F_2 力交於 B 點，從 B 點作直線 (3) 平行於向徑 S_3, 交 F_3 力於 C 點，從 C 點作直線 (4)，平行於向徑 S_4, 交直線 (1) 於 D 點，則此諸直線 (1), (2), (3), (4) 所成之多角形，名曰向徑多角形，且此多角形之邊數與諸向徑數相同，常比 F_1, F_2, F_3 諸分力之數多一. 而直線 (1) 與直線 (4) 之交點 D, 卽所求 R 合力之施力點；此法名曰向徑多角形法. 茲證明於後：

移動 F_1, F_2, F_3 三力於其作用線上，使各作用於 A, B, C 三點. 分解作用於 A 點之 F_1 力爲兩分力，使其各作用於直線 (1) 及直線 (2) 上，此可用力之三角形法分解之，且此三角形毋須新作，可借用圖 74 中之 $a\ O\ b$ 三角形，其 S_1, S_2 兩邊，卽 F_1 分力之數值及方向（諸方向與普通性質相同，卽 S_1, S_2 兩分力爲連續方向，與 F_1 合力之方向相反）. 今移之於圖 73 中之 A 點（圖 73 中之 S_1, S_2, S_3, S_4 四力，已用比例尺縮小）. 再

用同法分解作用於 B 點之 F_2 力爲 S_2, S_3 二分力，使其各作用於直線 (2) 及直線 (3) 上；分解作用於 C 點之 F_3 力，爲 S_3, S_4 兩分力，使其各作用與直線 (3) 及直線 (4) 上。如此則在 A, B 兩點上作用之兩 S_2 力，及在 B, C 兩點上作用之兩 S_3 力，均爲大小相等方向相反作用於同一直線上之兩力，可使其互相抵消．故僅餘作用於直線 (1) 上 A 點之 S_1 力及直線 (4) 上 C 點之 S_4 力．若各依原來作用線移動於 D 點上，而求其合力 R，則 R 力亦必作用於 D 點無疑矣．至於其數值及方向，復可用力之三角形法求之，此三角形卽圖 74 中之三角形 aOd，其 R 邊之大小及方向，卽合力之大小及方向也．由此可知用圖解法亦可求得 F_1, F_2, F_3 三力之合力 R 之數值及方向，且知其作用於 D 點．今舉一例以明之．

37. 〔例題〕　設 F_1, F_2, F_3 三力向下垂直作用於 AB 棍上，如圖 75，試用圖解法求其合力 R

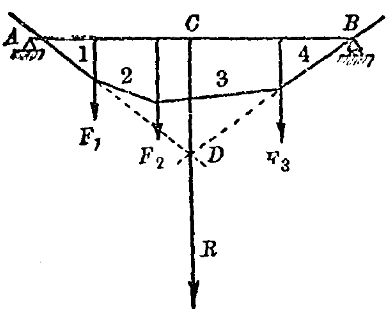


圖　75

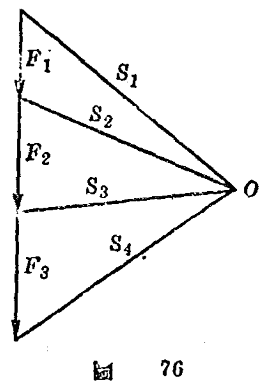


圖　76

答: 先作 F_1, F_2, F_3 三力之多角形，如圖 76. 因其爲平行力，故所得之多角形乃爲一直線；而合力 R 之方向 F_1, F_2 F_3 與三力相同，其數值爲:

$$R=F_1+F_2+F_3$$

爲求 R 力之施力點，則在圖 76 中，從一任意極 O 點，作 S_1, S_2, S_3, S_4 四向徑. 且在圖 75 以 1), (2), (3), (4) 四直線作得一向徑多角形，其 (1) (4) 兩邊之交點 D，即爲所求合力 R 之施力點. 而經過 D 點垂直 AB 棍之直線，即爲合力 R 之作用線，因吾人可任意移動合力 R 於其作用線上，故爲美觀起見，可置於 AB 棍上之 C 點，其方向乃向下垂直，與 F_1 F_2, F_3 三力相同.

88. 力之閉多角形 設圖 77 中作用於 M_1, M_2, M_3 三

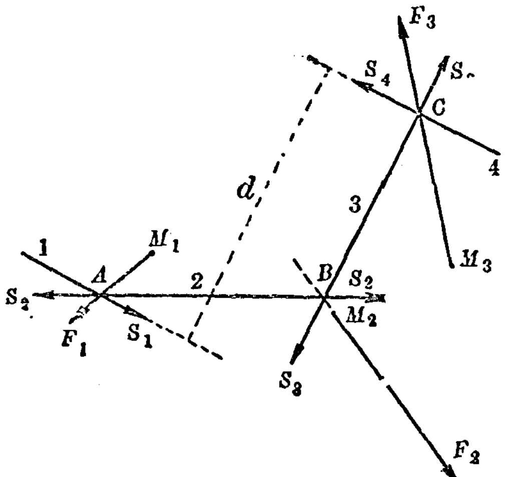


圖 77

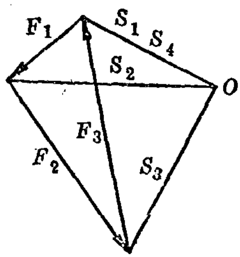


圖 78

點之 F_1, F_2, F_3 三力，在圖 78 中所成之力之多角形爲一閉多角形，則依前章定理可知 F_1, F_2, F_3 三力或呈平衡狀態，或成一力偶，今以圖解法研究之。在圖 78 中取一任意點 O 作極，再從 O 點作 S_1, S_2, S_3, S_4 四向徑，因多角形中 F_1 力之起點與 F_3 力之終點叠合，故 S_1, S_4 兩向徑亦合而爲一。同樣如前節所述，在圖 77 中以 (1), (2), (3), (4) 四直線作一向徑多角形，其 (1), (4) 兩邊互相平行，因各與 S_1 S_4 兩向徑合一之線平行故也。復依 F_1, F_2, F_3 三力原來之作用線，使其分別作用於向徑多角形之 A, B, C 三角頂上；再在 A, B, C 三施力點分解 F_1, F_2, F_3 之力各爲兩分力，其分別作用於向徑多角形之各邊上(分力之大小及方向，與前節所述無異，亦爲圖78中諸向徑 S_1, S_2；S_2, S_3；S_3, S_4 三組)，則在 (2), (3) 兩直線上之兩 S_2 力及兩 S_3 力，爲大小相等方向相反作用於同一直線上，均能互相抵消，故 F_1, F_2, F_3 三力已變成作用於直線 (1) 上之 S_1 力及作用於直線 (4) 上之 S_4 力，此 S_1, S_4 兩力爲大小相等方向相反之力。而 (1), (4) 兩直線爲向徑多角形不相交之兩邊。設其間之距離爲 d，由此可知 F_1, F_2, F_3 三力已成一力偶，其力偶距 m 爲：

$$m = -S_1 d.$$

S_1 乃圖 78 第一向徑之值，d 乃圖 77 中向徑多角形不交邊之距離。且因在圖 77 中 S_1, S_4 兩力迴轉之方向與時針相反，故力偶矩 m 之值爲負。

若 d 爲零值時，則力偶矩 m 之値爲零；而 F_1 F_2, F_3 三力能呈平衡狀態，因 S_1, S_4 兩力變爲作用於同一直線上大小相等方向相反之力，故能互相抵消.

89. **連鎖多角形**　凡向徑多角形之兩不交邊合爲一直線時，卽向徑多角形爲一閉多角形時，另名之曰連鎖多角形.

80, **位於同一平面上諸力作用時之情形**　由上述兩節，可知位於同一平面諸力圖解上有下列三種性質.

若已知力三角形爲一閉多角形，而所得之向徑多角形爲一連鎖多角形(卽一閉多角形)，則位於同一平面上之諸力呈平衡狀態.

若已知力之多角形爲一閉多角形，而所得之向徑多角形爲一不閉多角形(非連鎖多角形)，則位於同一平面上之諸力成一合力偶.

若已知力之多角形爲一不閉多角形，則位於同一平面上之諸力成一合力.

91. 〔例題〕　設 AB 棍支於 A, B 兩支點上，如圖 79. 今有 F_1, F_2 兩力向下垂直作用於其上，試用圖解法求 AB 兩支點所發生之反作用.

答：　設兩反作用爲 F_3, F_4 (在圖 79 中以虛線表之)，知其必分別作用於 A, B 兩點上，其方向均與 F_1, F_2 兩力相反，而爲向上垂直. 今祇須求此兩反作用之大小. 因 F_1, F_2, F_3, F_4 四力呈平衡狀態，故其力之多角形必爲一閉多角形. 在圖 80

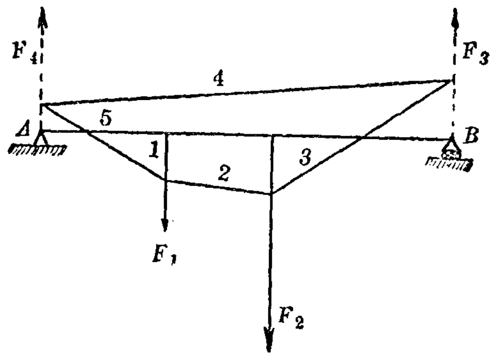


圖 79

中作此閉多角形；然因 F_3 爲一未知力，則此多角形第四角頂（卽 F_3 力之終點及 F_4 之起點）之位置，亦爲未知，而第五角頂（卽 F_4 之終點）則與第一角頂（卽 F_1 之起點）合一．再取一任意點 O 作極，引 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 五向徑，向徑 S_4 爲未知，而向徑 S_5 則與向徑 S_1 合一，復在圖 79 中，作一連鎖多角形（因 F_1, F_2, F_3, F_4 呈平衡狀態，故向徑多角形爲一閉多角形），作 (1), (2), (3) 三直線，而直線 (4) 則爲未知，直線 (5) 則與直線 (1) 合一（因爲閉多角形故也）．今連接直線 (3) 與 F_3 力，及直線 (5) 與 F_4 力之兩交點，則所得之閉合線（閉合向徑多角形之線），卽爲直線 (4)．再從圖 80 之 O 點作一平行直線 (4) 之線段，此線段卽爲向徑 S_4，此向徑指定力之多角形之第四角頂．由此則知 F_3, F_4 兩反作用之大小矣．

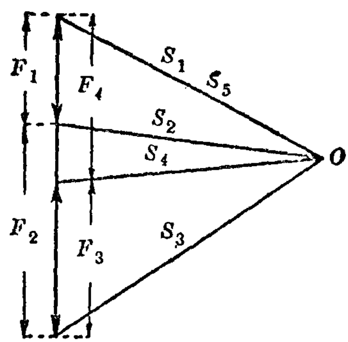


圖 80

92. 平衡折線形 凡釘於兩不動點之線，受數力作用後呈平衡時，所成之圖形，名曰平衡折線形．如圖 81，設釘於 M, N 兩不動點之一線，受 F_1, F_2, F_3 三力作用於其 A, B, C 三點後，而呈平衡狀態，此時所成之折線形狀，卽平衡折線形．

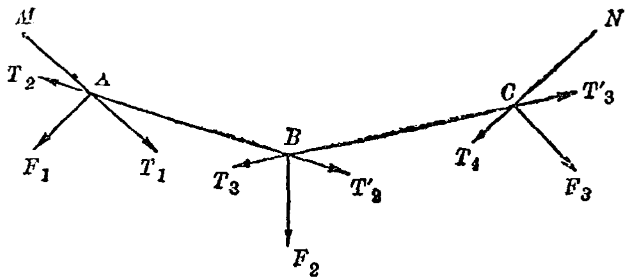


圖 81

93. 定理 上圖中 MN 線受 F_1, F_2, F_3 三力作用於其 A, B, C 三點而呈平衡時所成之平衡折線形，卽爲 F_1, F_2, F_3 三力所成之向徑多角形．

欲證明此定理，祇須證明 F_1, F_2, F_3 三力之向徑，各與 $\overline{MA}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CN}$ 諸線段平行卽可．

今先求 $\overline{MA}, \overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CN}$ 諸線段因 F_1, F_2, F_3 三力作用而發生之張力．分解 F_1 力爲兩分力 T_1 及 T_2，使其施力點均爲 A 點，而分別作用於 $\overline{MA}, \overline{AB}$ 兩線段上．至於 T_1, T_2 兩分力之大小及方向，可用力之三角形法求之．如圖 82 (a)，任意取一線段，使其幾何式地等於 F_1 力，在此線段之兩端，引兩直線分別平行於 $\overline{MA}$ 及 $\overline{AB}$，則得一三角形；而從所得之三

角形中，可知 T_1, T_2 兩分力大小及方向．用同樣方法，如圖 82 之 (b), (c)．分解得 F_2 力爲 T'_2 及 T_3 兩分力，使其施力點爲 B 點，分別作用於 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 兩線段上．F_3 力爲 T'_3 及 T_4 兩力，使其施力點爲 C 點，分別作用於 $\overline{BC}$, $\overline{CN}$ 兩線段上．

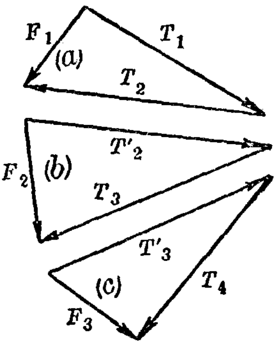


圖 82

(在圖 81 中之 $T_1, T_2, T'_2\, T_3, T'_3, T_4$ 諸力，已用比例尺縮小）然因圖中之 $\overline{AB}$ 線段呈平衡狀態則 T_2 T'_2 兩力之大小應相等，同理作用於 $\overline{BC}$ 線段兩端之，T_3, T'_3 兩力之大小亦應相等，如此在圖 82 中若移力之三角形 (a) 於力之三角形 (b) 上，則 T_2 邊應與 T'_2 邊合一；移力之三角形 (c) 於力之三角形 (b) 上，則 T'_3 邊應與 T_3 邊合一．故三三角形可變爲圖 83 之形狀，而其中 F_1, F_2, F_3 三邊所成者，即爲此三力之不閉多角形；而 T_1, T_2, T_3, T_4 恰成爲 O 點對於 F_1, F_2, F_3 三力之多角形之諸向徑．從作法中，已知此 T_1, T_2, T_3, T_4 四向徑與 $\overline{MA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CN}$ 四線段各相平行，所以 MN 受 F_1, F_2, F_3 三力作用於其 A, B, C 三點後而呈平衡時之平衡折線形，即爲 F_1, F_2, F_3 之向徑多角形也．

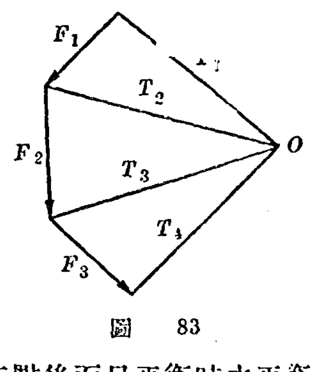


圖 83

第六章

屋架及橋梁各樑上負擔之圖解法

94. 馬克斯韋爾及克利蒙那之應力圖 本章中吾人以圖解方法解決關於屋架及橋梁各樑上受力時之問題.此種問題,爲英國物理學家馬克斯韋爾(Maxwell, James Clerk, 1831-1879)及義國數學家克利蒙那(Cremona, Luigi, 1830-1903)兩氏所成立.設有七樑用鉸鏈聯成複式瑞士屋架,倚於一不動支點 A,及一可動支點 B 上.如圖 84.有一重力 P,向下垂直作用於其 C 頂上,今研究此屋架上各樑因受 P 力而發生之諸應力.茲先注意若架上各樑均爲直線形,且聯於各端,此聯接之點,名曰

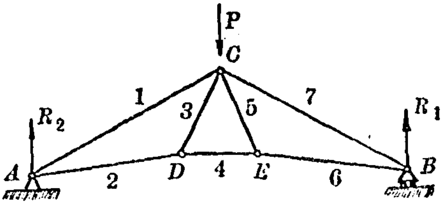


圖 84

節點.因各力均作用於其節點上,則各樑發生之應力,僅或爲張力,或爲壓力,決不爲一種呈起伏運動或屈曲之力也.例如架上之 CD 樑所發生之應力,僅爲作用於其 C, D 兩端上之兩

力，且因其呈平衡狀態，故作用於此 C, D 兩端之兩力應爲大小相等，方向相反，且位於 CD 直線之上．至於其爲張力或壓力，則須視各外力而定．作用於此屋架上之外力，爲一垂力 P，及 A, B 兩支點所發生之反作用 R_2, R_1．因屋架上之負擔係屬勻稱，故兩支點所發生之反作用亦必相等，各爲向上垂直等於 P 力之半．

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{2} P$$

（吾人亦可用連鎖多角形法求之）．若以 (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) 表此七樑之號數，以 T 表各樑發生之張力，更以樑之號數示於 T 字之右下方（例如第四樑之張力表以 T_4）．以 S 表各樑發生之壓力，亦以樑之號數示於 S 字之右下方（例如第七樑發生之壓力表以 S_7）．若樑被其兩端之節點向外拉引，則此樑兩端之應力爲張力，其方向指向樑內．如圖 85, M 端發生之應力，方向爲自 M 至 N, N 端發生之應力，方向爲自 N 至 M．反之，若樑被其兩端之節點向內壓縮，則此樑兩端之應力爲壓力，其方向指向樑外．故吾人視樑兩端之節點，即可迅速知此樑所發生之應力爲張力或爲壓力．更須注意無論各樑發生之應力爲張力或壓力，必各作用於樑之兩端，且大小相等，方向相反．今開始論及馬克斯韋爾及克利蒙那之應力圖．因屋架每一節點，皆爲靜止，則作用於每一節點之諸力，均呈平衡．換言之，即作用於每一節點上諸力之多

圖 85

角形,均為閉多角形.茲分別作屋架上作用於每一節點諸力之閉多角形(此數多角形可作於同一圖中).因 P, R_1, R_2 三力亦呈平衡,則其多角形亦必為一閉多角形;今先作之.如圖 86,作 $\overline{ab}$ 線段,使其幾何式地等於 P 力(圖 86 中已用比例尺放大).再作 $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ 兩線段,使其各作幾何式地等於 R_1 及 R_2,則 P, R_1, R_2 之力之閉多角形,即為 ab 線段.再作作用於節點 A 之力 R_2 及 (1),(2) 二樑發生之兩應力之閉多角形.力 R_2 在圖 86 中為 $\overline{ca}$ 線段,從其終點 a 作 $\overline{ad}$ 線段,使其平行 (1) 樑,從其起點 C 作 $\overline{cd}$ 線段,使其平行 (2) 樑,則得閉多角形 $c\,a\,d$. 而 $\overline{ad}$, $\overline{dc}$ 兩線段之長度,即 (1) (2) 兩樑發生之應力之大小也.且 $\overline{ad}$ 線段之方向為向 (1) 樑之外,$\overline{dc}$ 線段之方向乃向 (2) 樑之內,故知 (1) 樑所發生者為壓力,(2) 樑所發生者則為張力,今以 S_1, T_2 分別表示之.再作作用於節點點 D 之諸力之閉多角形.作用於 D 點為 (2), (3), (4) 三樑發生之應力,且已知 (2) 樑 A 點上發生者為張力,則在 D 點上發生者,亦必為大小相等,方向反之張力 T_2,即為圖 86 中之 $\overline{cd}$ 線段,茲從其終點 d,作一直線平行 (3) 樑,從其起點 c,作一直線平行 (4) 樑,則得一閉多角形 $c\,d\,e$.

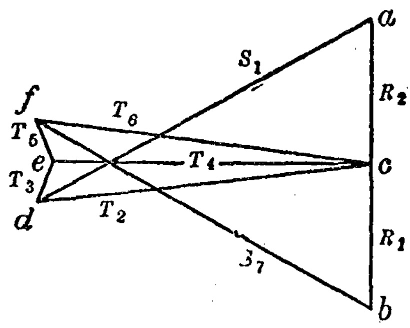


圖 86

而其 $\overline{de}$, $\overline{ec}$ 兩邊，即 (3), (4) 兩樑發生應力之大小也。因其方向均分別向 (3), (4) 兩樑之內，故知其均為張力，今以 T_3, T_4 表之. 再作用於節點 E 之諸力之閉多角形。在 (4) 樑所發生之應力即為圖 86 中之 $\overline{ce}$ 線段，從 c, e 兩點作兩直線分別平行 (5), (6) 兩樑，則得一閉多角形 $c\,e\,f$. 其 $\overline{cf}$ 及 $\overline{fe}$ 兩邊，即 (5), (6) 兩樑發生應力之大小，亦為兩張力，用 T_5, T_6 表之。同樣求得作用於節點 B 之 R_1 力及 (6), (7) 兩樑發生之應力之閉多角形，為圖 86 中之 $b\,c\,f$. 其 $\overline{fb}$ 邊即 (7) 樑發生之應力，因其方向指向 (7) 樑之外，故知其為壓力，亦用 S_7 表之。如此則作法已完。然作用於節點 B 之 R_1 力，及 (6) 樑所發生之張力 T_6, 在圖 86 中吾人早已求得；則作作用於 B 點諸力之閉多角形 $b\,c\,f$, 祇須聯 f, b 兩點，即得 (7) 樑發生之 $\overline{fb}$ 應力，惟此 $\overline{fb}$ 線段，必須與 (7) 樑平行，故觀 $\overline{fb}$ 線段與 (7) 樑平行與否，即可知吾人之作法錯誤與否。同時須注意所作之圖中，並不包含作用於 C 頂諸力之閉多角形，且圖中之 $a\,b\,f\,e\,d$ 閉多角形，即為 P 力及 (7), (5), (3), (1) 各樑發生之應力呈平衡時之閉多角形。所得之圖，即為馬克斯韋爾及克利蒙那之應力圖。在圖中可知複式瑞士屋架各樑上因擔負而發生之應力。圖中之各閉多角形，可分別作於諸圖，不必定使其合而為一圖也。

至於此圖之簡單作法，及在何種屋架或何種情形下可作此圖，則須應用圖解靜力學之定理，可見之於圖解靜力學中，

本書僅述其大概而已.

95. 李脫計算法　設有一華倫橋梁,爲十九短桿組織而成,成水平式架於一不動支點 A 及一可動支點 B 上,如圖87.有四向下垂直之等力 P, 作用於其下弦之 C, D, E, F 四節點上,若欲求其各桿上所發生之應力,可用下法定之.

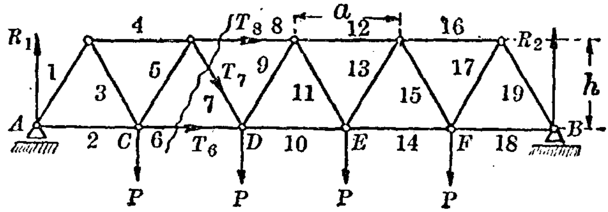


圖　87

假使此橋樑上下弦上各橫桿之長度均等於 a, 上下弦之高度爲 h, 各斜桿之長度均相等, 且與上, 下弦成 α 角. α 角之正弦爲:

$$\tan\alpha = \frac{2h}{a}$$

今先定其 A, B 兩支點發生應力 (反作用) R_1 及 R_2, 其方向爲向上垂直,施力點各爲 A, B 兩點,其大小均等此橋梁擔負之半:

$$R_1 = R_2 = 2P,$$

茲以 (1), (2), (3),……(19), 爲各短桿之號數.而求 (8) 桿所發生之應力,可應用第二章所述之截面法,設有一截面 (圖中劃有曲線者),割 (6), (7), (8) 三桿, 分橋梁爲左右兩部份. 今研

究其左部份平衡時之諸力，除已知作用於 A, C 兩節點之 R_1, P 兩力外，尚有橋梁右部對於左部所發生之作用，其施力點為截面割 (6), (7), (8) 三桿之處．此所發生之作用卽為橋梁之內力(應力)，但對於橋梁左部則可視為外力，然其為張力或壓力，則尚屬未知．在算演時，可設 (6), (7), (8) 三桿上之應力均為張力，而均以 T 表之，且在 T 之右下方加一號數，使與各桿之號數符合以示區別，若演算之結果，其方向指向樑外，則為正值；反之為負值．故若 T 為正時，則為張力，反之為壓力；其方向設如圖 87 中之箭頭所示．如是則橋梁左部在 P, R_1, T_6, T_7, T_8 五力作用下而平衡，故可以平衡公式應用之：若以 D 為力矩中心，則 T_6, T_7 兩力對於 D 點之值為零，故力矩方程式為：

$$2R_1a-Pa+T_8h=0$$

$$\because \qquad R_1=2P$$

則：
$$3Pa+T_8h=0$$

$$\therefore \qquad T_8=-3P\frac{a}{h}$$

因 P, a, h 均為正值，故 T_3 為負值，卽 T_8 之方向與假定之方向相反，故 T_8 實為一壓力．用同樣方法，可定 T_6 之方向．若以上弦之第二節點為力矩中心，則所得之力矩方程式為：

$$\frac{3}{2}R_1a-\frac{1}{2}Pa-T_6h=0$$

$$\therefore \qquad T_6=\frac{3}{2}P\frac{a}{h}$$

T_6 之值既爲正，卽與假定之方向相符，故爲張力．

欲以同法求 T_7 時，因 (6), (8) 兩桿互相平行而無交點，無法應用力矩方程式，故祇得取一向上垂直線爲軸，而射影諸力於其上，得一射影方程式如下：

$$R_1 - P - T_7 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\because \qquad R_1 = 2P.$$

$$\therefore \qquad T_7 = \frac{P}{\sin\alpha}$$

因 T_7 之值爲正，故知其爲張力．

若依此在上弦之各桿作斜截面，則可求得橋梁上各桿所發生之應力．因其求法完全相同，故不繼續．惟希望讀者諸君，能自行繼續以練習之．

此法爲李脫 (A. Ritter) 第一人所應用，故名曰李脫計算法．可應用於各式屋架及各種橋梁上，甚爲簡便，且爲吾人所常用．

第七章

位於空間任意位置作用於同一點上諸力之合力

93. 力之多角形法及力之平行六面體法 位於同一平面諸力之合力，吾人已能設法求之，本章專論不位於同一平面諸力合力之求法．設欲求作用於 A 點 F_1, F_2, F_3, F_4 四力之合力，如圖 88，先用力之三角形法求得 F_1, F_2 兩力之合力爲 R_1，再以同法求得 R_1, F_3 兩力之合力爲 R_2，復依次求得 R_2, F_4 兩力之合力爲 R．則 R 力即爲 F_1, F_2, F_3, F_4 四力之合力．在圖 88 中可見 R 力適爲多角形之閉合線，故知其爲 F_1, F_2, F_3, F_4 四力之幾何和．

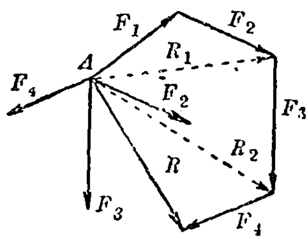


圖 88

然須注意 F_1, F_2, F_3, F_4 四力不位於同一平面上，故其所成之多角形，亦不位於同一平面上．且此法可適用於無論何數之諸力上，其合力必等於諸力之幾何和．

惟若所求諸力之數爲三，則可用一較簡之法求之，如圖89，不位於同一平面上之 F_1, F_2, F_3 三力作用於 A 點，欲求其合力時，可以 F_1, F_2, F_3 作一平行六面體，從 A 點所引之對角線 $\overline{AB}$，卽爲所求之合力 R. 其方向爲自 A 至 B，因其適爲 $AabB$ 多角形之閉合線故也．（多角形 $AabB$ 卽爲 F_1, F_2, F_3 三力之多角形）．此法名曰力之平行六面體法，專用於求不位於同平面上三力作用於一點時之合力．

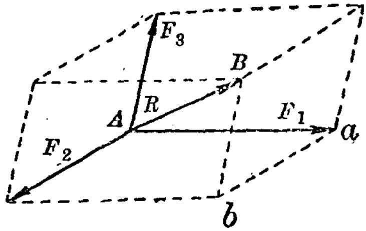


圖　89

若所得之合力爲零值，則諸力呈平衡狀態，故不位於同一平面且作用於同一點之諸力呈平衡之條件爲：若諸力之多角形爲一閉多角形時，則此不位於同一平面且作用於同一點上之諸力，必呈平衡狀態．換言之，若諸力之幾何和爲零值時，則此諸力必呈平衡狀態．

97. 力在一軸之射影　設 F 力作用於 A 點，如圖 90，

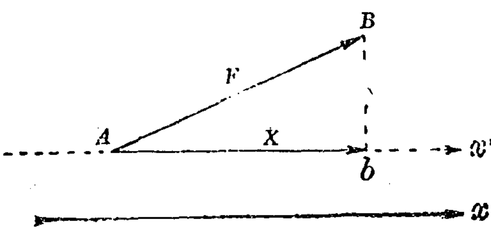


圖　90

其方向由圖中之箭頭表示之，若欲射影於不位於同一平面之 x 軸上，可從 F 力之起點 A，作一直線平行於已知 x 軸，且使之與 x 軸爲同方向，從 F 力之終點 B，引 Bb 垂直線於此直線(此直線可名曰 x' 軸)，則在 x' 軸上所得之 $\overline{Ab}$ 線段，卽爲 F 力在 x 軸上之射影．其方向爲自 A 至 b，仍用 X 表之，若此射影之方向與 x 軸相同，則爲正值，反之爲負值．

從直三角形 ABb 中已知：

$$X = F\cos(F, x)$$

(F, x) 仍爲 F 力之方向與 x 軸之方向所成之角．若：

$$\angle(F, x) = 90°$$

則：

$$X = 0$$

93. 力在三垂直軸上之射影 設欲射影作用於 A 點之 F 力於三垂直軸 x, y, z 上，如圖 91．先作一直平行六面體，使其三主稜平行於 x, y, z 三垂直軸；而使 F 力爲其中之一對角線，則此直平行六面體之三主稜，卽爲 F 力在 x, y, z 三垂直軸上之射影，可分別用 X, Y, Z 表之．從力之平行六面體性質可知 X, Y, Z 三射影力之合力，適爲 F 力．故若知 X, Y, Z 三射影力之大小及方向，卽可

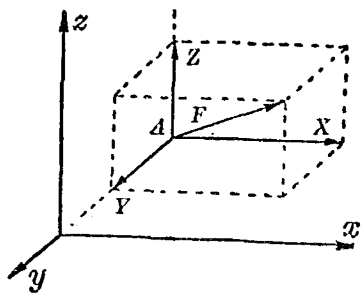


圖 91

知 F 力之大小及方向矣．復因 F 力爲 X, Y, Z 三射影力所成直平行六面體之對角線，故知其有下列之關係：

$$\therefore \quad F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

且從力之射影性質上可知：

$$X=F\cos(F, x)$$

$$Y=F\cos(F, y)$$

$$Z=F\cos(F, z)$$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore \quad \cos(F,x)=\dfrac{X}{F}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \therefore \quad \cos(F,y)=\dfrac{Y}{F}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \therefore \quad \cos(F,z)=\dfrac{Z}{F}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}(2)$$

若知 X, Y, Z 三射影力之值，則在 (1) 式中可求 F 力之大小，而在 (2) 式中可求 F 力之方向，(1), (2) 有時稱爲力之射影公式.

99. 用射影法求作用於一點諸力之合力 今用力之射影性質求不位於同一平面而作用於一點上諸力之合力，如圖 92，設欲求作用於 A 點 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力之合力 R. 今作三垂直軸 x, y, z 而分別射影 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 諸力於各軸上，並以 $X_1, Y_1\ Z_1, X_2, Y_2\ Z_2; \cdots\cdots X_n,$

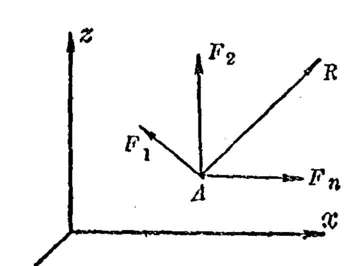


圖 92

Y_n, Z_n 分別表各軸上之射影力. 因合力 R 爲 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力之幾何和,則依有向量幾何和之射影性質,可知 R 力在任意軸上之射影,等於諸分力在此軸上各射影之代數和,若以 X, Y, Z 表 R 力在 x, y, z 三軸上之射影,則得:

$$X = X_1 + X_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + X_n$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + Y_n$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + Z_n$$

而 X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; $\cdots\cdots X_n, Y_n, Z_n$ 諸射影力之値,可用下列各式得之:

$$X_1 = F_1 \cos(F_1, x), X_2 = F_2 \cos(F_2, x) \cdots X_n = F_n \cos(F_n, x)$$

$$Y_1 = F_1 \cos(F_1, y), Y_2 = F_2 \cos(F_2, y) \cdots Y_n = F_n \cos(F_n, y)$$

$$Z_1 = Z_1 \cos(F_1, z), Z_2 = F_2 \cos(F_2, z) \cdots Z_n = F_n \cos(F_n, z)$$

若已求得 X, Y, Z 三射影合力之值,則可從下列諸式中求得合力之大小及方向:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}$$

$$\cos(R, y) = \frac{Y}{R}$$

$$\cos(R, \ ) = \frac{Z}{R}$$

若 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 呈平衡狀態時,則其合力 R 爲零値,然從公式:

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

中可知，若：

$$R=0$$

則必：

$$X=0$$

$$Y=0$$

$$Z=0$$

故 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力呈平衡時，則其在 x, y, z 三垂直軸中與一軸上諸射影，必有下列之關係：

$$X_1+X_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+X_n=0$$

$$Y_1+Y_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+Y_n=0$$

$$Z_1+Z_2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+Z_n=0$$

此三方程式名曰諸力平衡時之射影公式.

第八章

位於空間諸力偶之合力偶

100 力偶相等之條件 本章研究不位於同一平面諸力偶之合力偶求法.在以前曾證明若位於同一平面上兩力偶相等,則其力偶矩作代數式之相等(數目相等,正負號相同).換言之,若兩力偶相等時,則位於同一平面上而其力偶矩之數值相等,且迴轉之方向相同.

101. 定理 兩位於平行平面上之力偶,若其力偶矩之數值相等,且迴轉之方向相同,則此兩力偶必相等.

證明: 設已知 (F,F) 力偶位於平面 P 上,其施力點之距離爲 $\overline{AB}$, 如圖 93. 今作一平面 Q, 使其平行 P 平面.如證明得用一位於 Q 平面上之力偶,其力偶矩與 (F,F) 之力偶矩相等(即兩力偶矩之數值相等,而兩力偶之迴轉方向相同),代替位於

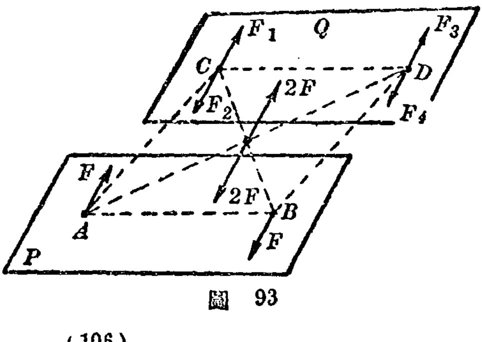


圖 93

P 平面上之 (F, F) 力偶，而不變 (F, F) 力偶之原來價值，則可云此定理已證明矣。茲在 Q 平面上作一 $\overline{CD}$ 線段，使其平行且等於 $\overline{AB}$. 在 C, D 兩點上分別加以能自行互相抵消之 F_1, F_2, F_3, F_4 四力，使其平行且各等於 (F, F) 力偶中之 F 力，卽：

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F$$

今變作用於 P 平面上 A 點之 F 力，及作用於 Q 平面上 D 點之 F_3 力爲一合力；因此兩力之大小相等，方向相同，則其合力之大小爲各分力之兩倍，卽等於 $2F$，合力之方向與分力之方向相同；作用於聯此兩分力施力點 $\overline{AD}$ 線段之中點上。同樣變作用於 P 平面上 B 點之 F 力，及作用於 Q 平面上 C 點之 F_2 力爲一合力，此合力之大小亦等於 $2F$，方向與 F, F_2 兩分力相同，作用於聯兩分力施力點 $\overline{BC}$ 線段之中點。然多角形 $ABCD$ 爲一平行四邊形，可知其對角線互交於中點。故求得之兩合力作用於用一點上。因其大小相等（各等於 $2F$），方向相反（因 F_2 與 F_3 之方向相反），位於同一直線上，則其能自行互相抵消必矣。今僅餘位於 Q 平面上之 F_1 及 F_4 兩力，此兩力適爲一力偶，其施力點距離爲 $\overline{CD}$ 線段。由此可知位於 P 平面上之力偶 (F, F)，可被 Q 平面上之力偶 (F_1, F_4) 所代替。換言之，卽可移動 P 平面上之 (F, F) 力偶於 Q 平面上也。惟其兩施力點距離 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 則互相平行。然依力偶性質，可知位於 Q 平面上之力偶，可爲位於同一平面上任

意力偶所代替，祇須其力偶矩之數值與原來力偶矩之數值相等，並迴轉之方向相同。故兩位於平行平面上之力偶，若其力偶矩之數值相等，而迴轉之方向相同，則此兩力偶必相等。

102. 力偶矩爲一有向量. 力偶矩除力與其施力點距離乘積之數值外，尙有一定之方向，唯此種方向皆隨力偶迴轉之方向而變異。吾人已知可從其正負號中分別其方向，設一 (F, F) 力偶，其施力點 A, B 之距離爲 p, 位於 P 平面上，如圖 94，其力偶矩 m 之數值爲：

$$m = F \cdot p.$$

至於其方向，則非如以前僅論及一平面上力偶方向之定法（因立體上之方向，甚爲複雜故也），可如下法定之。在 $\overline{AB}$ 之

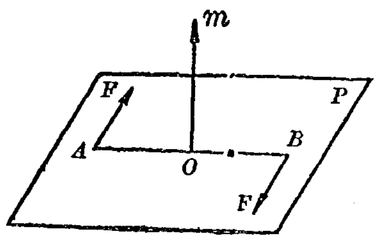


圖 94.

中點 O 上，引一垂直 (F, F) 力偶平面 P 之垂線，而吾人依此垂直方向立於 O 點上，以觀此 (F, F) 力偶迴轉之方向，使之常與時針之方向相同（如圖中之方向，則吾人之頭部在 P 平面之上，若爲反圖中之方向，則吾人之頭部在 P 平面之下部）。再取一矢表力偶矩 m（因其爲有向量故可以矢表之），亦垂直置於 O 點上，惟此矢之矢尾（箭頭），則與吾人頭部之位置相同。如此則所有表偶力矩之矢，均常以正值計之。而欲比較數力偶之力偶矩，祇須比較表此數力偶矩之諸矢可矣。故在力偶相等時之條件中，換得一簡單之新條件。如圖 95，若

位於 P 平面施力點距離為 p 之 (F,F) 力偶，等於位於 P_1 平面施力點距離為 p_1 之 (F_1, F_1) 力偶，則其兩力偶矩：

$$m=F\cdot p,$$

$$m_1=F_1\cdot p_1.$$

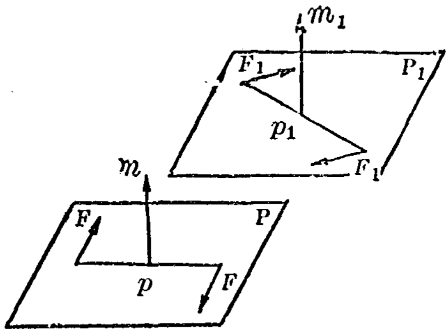


圖 95

亦為相等，即代表此兩力偶矩之矢為大小相等，互相平行且方向相同之同位等矢．換言之，即此兩矢作幾何式之相等也．故力偶相等時之新條件為：若兩力偶矩作幾何式之相等時，則此兩力偶相等．且吾人可移動兩相等力偶矩於任意空間，均不改變其等值．惟須注意此兩力偶矩之方向，應常常相同．

103.　力偶之合力及力偶之平衡　前第三章曾論及位於同一平面諸力偶之合力偶之求法，此種求法亦可用於位於平行平面上諸力偶之合力偶之求法，因平行平面上之諸力偶，均可移之於同一平面故也．今求位於空間任意位置諸力偶之合力偶之求法．如圖 96，設欲求位於 P 平面及與 P 相交之 Q 平面上兩力偶之合力偶，可移動位於 P 平面之 (F,F) 力偶於其原來平面上，使其中一力 F 作用於 P,Q 兩平面交線 KL 之任意點 A，並使 F 力之作用方向為 KL，則 (F,F) 力偶之施力點 A, B 之距離 p，必垂直於 KL (因本書所取之施力點距

離，必垂直於作用之力)．同時分解位於 Q 平面上之力偶為數力偶，使其中之一分力偶之一力等於 F 力，並使其作用於 KL 線之 A 點，其方向與前 P 平面上力偶之 F 力相

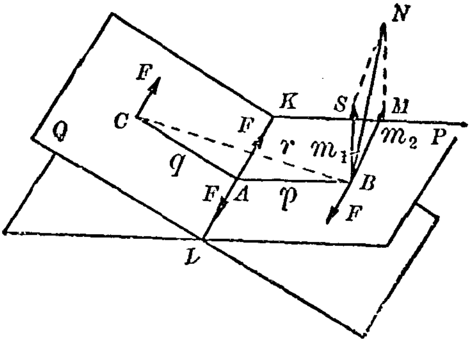


圖 96

反，則此分力偶施力點 A, C 之距離 q，必垂直於 KL 線．如此則 KL 線上之兩 F 力能互相抵消，而所餘者為一 (F, F) 新力偶，其施力點之距離為 BC，設以 r 表之．此力偶即為 P 平面上 (F, F) 力偶及 Q 平面上 (F, F) 分力偶之合力偶也，其合力偶矩為兩分力偶矩 m_1, m_2 之幾何和：

$$m_1 = F \cdot p, \quad m_2 = F \cdot q.$$

今移動 m_1, m_2 兩分力偶矩各依原來方向於 B 點上，即 m_1 垂直 P 平面，而 m_2 垂直 Q 平面，再以 m_1, m_2 兩矢作一平行四邊形，則所得之對角線 $\overline{BN}$，即所求之合力偶矩，玆證明於下：

吾人應分三步證明之：

(1) 須證明：

$$\overline{BN} = F \cdot r.$$

(2) 須證明 $\overline{BN}$ 垂直於合力偶矩之平面．

(3) 如吾人依 $\overline{BN}$ 方向觀察合力偶矩迴轉之方向，應與時針之方向相同。

〔證明 1〕：

$$\because \quad \frac{\overline{BS}}{\overline{SN}}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{F\cdot p}{F\cdot q}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

$$\overline{BS}\perp\overline{AB}, \quad \overline{SN}\perp\overline{AC}.$$

則：
$$\angle BSN=\angle CAB.$$

故：
$$\triangle ABC\sim\triangle SBN.$$

卽：
$$\frac{\overline{BN}}{m_1}=\frac{r}{p}.$$

$$\therefore \quad \overline{BN}=m_1\frac{r}{p}=F\cdot p\frac{r}{p}=F\cdot r.$$

〔證明 2〕： 欲證明 $\overline{BN}$ 垂直於合力偶矩之平面，祇須證明 $\overline{BN}$ 垂直於 F 力及施力點距離 r. 因 m_1 垂直於 F 力，而 m_2 亦垂直於 F 力，則 m_1 m_2 所成之平行四邊形 $BMNS$，亦必垂直於 F 力，故其對角線 $\overline{BN}$ 垂直於 F 力也。又因：

$$\angle SBA=90°,$$

$$\angle CBA=\angle SBN.$$

$$\therefore \quad \angle CBN=90°.$$

故 $\overline{BN}$ 垂直於施力點距離 r，卽 $\overline{BN}$ 垂直於合力偶矩之平面。

〔證明 3〕 從圖中可見，若吾人依 $\overline{BN}$ 方向觀察合力偶

迴轉方向，則恰與時針之方向相同。

由上諸證明中可知 $\overline{BN}$ 卽爲合力偶矩是故合力偶矩爲各分力偶矩之幾何和，卽 m_1, m_2 所成平行四邊形之對角線也。

上述求合力偶矩之法，名曰力矩之平行四邊形法。然亦可如力之性質，以力矩之三角形法求之。且同時尙可應用此等法則，分解一力矩爲兩分力矩。

惟吾人所求得之合力偶，乃僅爲位於 P 平面 (F, F) 力偶，與位於 Q 平面力偶之一分力偶之合力偶。若欲求位於 P 平面 (F, F) 力偶與位於 Q 平面完全力偶之合力偶，祇須繼續下求，至成一合力偶爲止。然通常吾人求合力偶，往往求其合力偶矩，而適合於此合力偶矩之力偶，卽爲所求之合力偶。如圖 97，作已知 (F_1, F_1), (F_2, F_2), (F_3, F_3) 三力偶之力偶矩 m_1, m_2, m_3（注意：若已知力偶之數大於三，則亦可如下列之求法）。先用力矩之三角形法，求 m_1, m_2 兩力偶矩之合力偶矩，卽從任意點 a，引一線段，使其幾

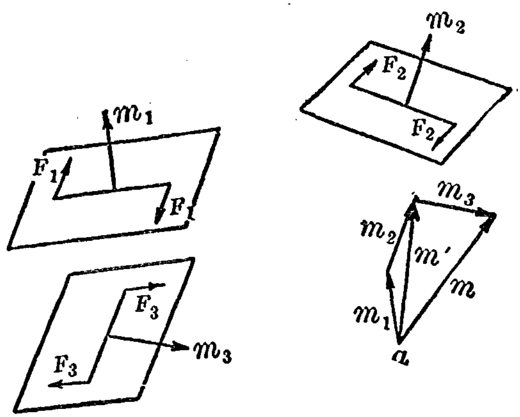


圖 97

何式地等於 m_1 矢 復從此線段之終點,引一他線段,使其幾何式地等於 m_2 矢,則 a 點與等於 m_2 線段終點之聯接線,即 m_1, m_2 之合力偶矩 m',其方向與 m_1, m_2 兩矢之順方向相反.再以同法求 m' 與 m_3 之合力偶矩,從 m' 矢之矢尾作一線段,使其幾何式地等於 m_3 矢,而 m' 矢首 a,與等於 m_3 線段終點之聯線,即 m' 矢與 m_3 矢之合力偶矩 m,其方向與 m', m_3 兩矢之順方向相反.因 m' 爲 m_1, m_2 之合力偶矩,故 m 卽爲 m_1, m_2, m_3 三力偶矩之合力偶矩,適爲 m_1, m_2, m_3 三力偶矩所成多角形之閉合線,等於 m_1, m_2, m_3 三力偶矩之幾何和.

若所得之合力偶矩 m 爲零值時,則其力偶矩爲 m_1, m_2, m_3 之三力偶呈平衡狀態.故空間諸力偶呈平衡時,有下列之情形:

若其力偶矩之幾何和爲零值,則此位於空間任意位置之諸力偶呈平衡狀態.

第九章

對於點之力矩及對於軸之力矩

104. 對於點之力矩 位於平面之力，對於點之力矩，在以前曾經論及。點之力矩，乃爲一有向量。即除其數值外，尙有一定之方向。如圖 98，已知一 F 力及一 O 點，從 O 點引一垂線於 F 力上，其距離爲 p，此垂線名曰 F 力對於 O 點之力矩之臂，而 O 點名曰力矩中心，F 力與 p 之乘積，即爲 F 力對於 O 點之力矩，設以 L 表之，則 L 之數值爲：

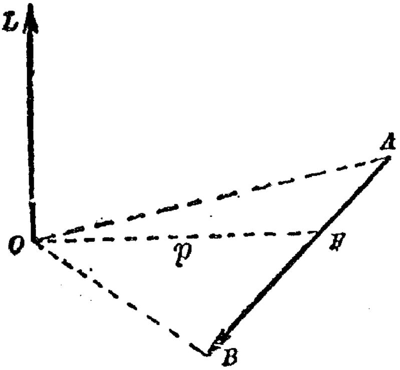


圖 98

$$L = F \cdot p.$$

至於 L 力矩之方向，可用下法定之。從 O 點引一垂直於 F 力與 O 點所成平面之直線，而吾人依此垂線之地位，立於 O 點以觀 F 力迴轉之方向，使其常依時針迴轉方向，即若如圖 98 所示之方向，則吾人之頭部在 F 力與 O 點所成平面之上，反

之在此平面之下，則 L 力矩之方向與吾人之方向相同，(自足至頭)，而 L 力矩之數值，則常使其為正數。

且 $F \cdot p$ 之乘積，適為三角形 AOB 面積之兩倍，故 F 力對於 O 點之力矩 L，尚可書一其他等式：

$$L = 2\triangle AOB.$$

若：$p=0$ 時，則 L 力矩亦為零值，由此可知若力矩中心在力之作用線上時，則此力對於力矩中心之力矩為零值。總之以上所論者，皆與平面時相同。

105. 對於軸之力矩 設已知一 F 力及一 z 軸，如圖99，z 軸有一定方向，已由圖中之箭頭表明之。今作一垂直於 z 軸之 p 平面，且射影 F 力於 P 平面上，其在 P 平面之 $\overline{A_1B_1}$ 射影線段以 F_1 表之；再從 z 軸與 P 平面之交點 O_1，引一垂直於 F_1 之直線，O_1 點

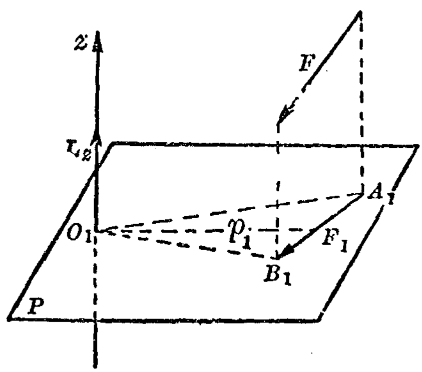


圖 99

與 F_1 之垂直距離 p_1，即為 F 力對於 z 軸之力矩之臂，而 F 力之射影 F_1 與 p_1 之乘積，為 F 力對於 z 軸之力矩，通常以 L_z 表之，且附有正負值：

$$L_z = \pm F_1 \cdot p_1.$$

其正負值可由下列方法規定之：若吾人依 z 軸之方向以觀之

力繞 z 軸迴轉之方向與時針之方向相同，則 L_z 爲正値．反之，則 L_z 爲負値．故吾人置 L_z 矢於 O_1 點上，若其爲正値，則使其與 z 軸之方向相同．若其爲負値，則使其與 z 軸之方向相反．

且 $F_1 \cdot p_1$ 之乘積，適爲三角形 $A_1O_1B_1$ 面積之兩倍，故可寫作：

$$L_z = \pm 2\triangle A_1O_1B_1.$$

今試觀 L_z 値何時爲零：

(1) 若： $F_1=0$, 則： $L_z=0$.

即若 F 力與 z 軸平行，則 F 力對於 z 軸之力矩爲零値．

(2) 若： $P_1=0$, 則： $L_z=0$.

即若 F 力之作用線與 z 軸相交，則 F 力對於 z 軸之力矩爲零値．

106. 對於點之力矩與對於軸之力矩間之關係 設有一 F 力作用於 AB 線上，如圖 100. 今任意取一點 O，則 F 力對於 O 點之力矩 L 爲：

$$L = 2\triangle AOB.$$

L 矢之方向，乃垂直於 $\triangle AOB$ 之平面且向上．再作一經過 O 點之任意軸

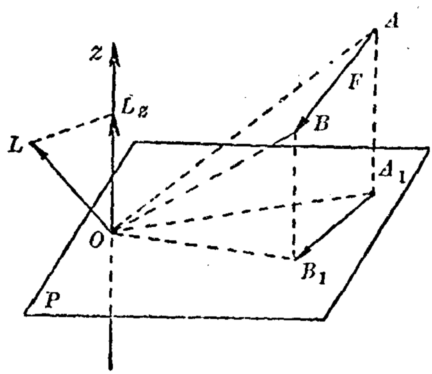


圖 100

z，其方向由圖中之箭頭表示之，則 F 力對於 z 軸之力矩 L_z 爲：

$$L_z=2\triangle A_1OB_1 \text{ (設 } L_z \text{ 爲正值)。}$$

$\overline{A_1B_1}$ 線段爲 F 力在經過 O 點與 z 軸垂直 P 平面上之射影.

置 L_z 力矩於 O 點上，其方向與 z 軸之方向相同（因設其爲正）。

因 $\triangle A_1OB_1$，爲三角形 AOB 在平面 P 上之射影，則依幾何定理，可知三角形 A_1OB_1 之面積，等於 AOB 三角形之面積，乘三角形 AOB 所成之平面與平面 P 間所成角之餘弦. 但此角適等於 L 力矩與 z 軸所成之角，故：

$$\triangle AOB\cdot\cos(L,z)=\triangle A_1OB_1.$$

兩邊各乘以 2，則：

$$2\triangle AOB\cdot\cos(L,z)=2\triangle A_1OB_1$$

$$\therefore\quad L\cos(L,z)=L_z.$$

所以 F 力對於 O 點之力矩在 z 軸上之射影，即爲 F 力對於 z 軸之力矩. 此爲 F 力對於 O 點之力矩，與 F 力對於 z 軸之力矩間之關係。

此定理非僅在靜力學中極爲重要，並且在動力學中亦甚爲重要。且可依此定理變更力對於點之力矩爲力對於軸之力矩也.

惟吾人曾假說 L_z 之值爲正，然若 L_z 爲負值時，亦可得同樣結果，而公式：

$$L\cos(L,z)=L_z$$

中之 $\cos(L,z)$，已可定 L_z 之正負值.

107. 數力對於一點諸力矩之主力矩 設位於空間任意位置之 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 數力，分別作用於 $A_1, A_2 \cdots\cdots A_n$ 諸點上，如圖 101. 今取一任意點 O，而在 O 點上分別作 $F_1, F_2, \cdots$

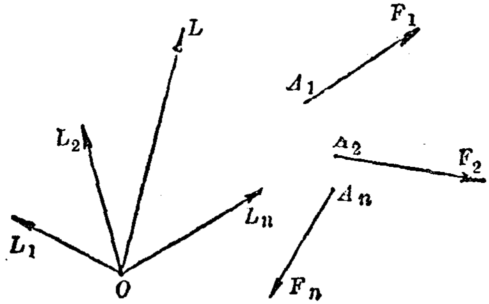


圖 101

$\cdots F_n$ 數力對於 O 點之各力矩 $L_1, L_2 \cdots\cdots L_n$. 此 $L_1, L_2, \cdots\cdots L_n$ 諸力矩之幾何和，卽爲 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 數力對於 O 點諸力矩之主力矩(卽合力矩)，若以 L 表之，則得：

$$\overline{L}=\overline{L}_1+\overline{L}_2+\cdots\cdots+\overline{L}_n$$

108. 數力對於一軸諸力矩之主力矩 設位於空間任意位置之 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 數力分別作用於 $A_1, A_2 \cdots\cdots A_n$ 諸點上，如圖 102. 今作一任意 z 軸，其方向在圖中用箭頭表示之. 在 z 軸上，分別作 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 對於此軸之力矩 $L_{1z}, L_{2z}, \cdots$

$\cdots L_{nz}$，此 $L_{1z}, L_{2z}, \cdots\cdots L_{nz}$ 諸力矩之代數和，即為 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 數力對於 z 軸諸力矩之主力矩，若以 L_z 表之，則得：

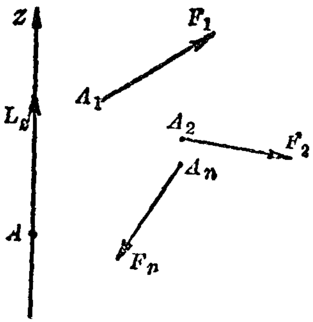


圖 102

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + \cdots\cdots + L_{nz}.$$

此主力矩 L_z 之值，可正可負。今置之於 z 軸之 A 點上（依 z 軸之方位），若 L_z 為正值，則其方向與 z 軸之方向相同，若 L_z 為負值，則其方向與 z 軸之方向相反。

109. 數力對於一點之主力矩及對於一軸之主力矩間之關係 設 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 為諸已知力，如圖 103，今取一任意點 O，並作諸已知力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 各對於 O 點之力矩 $L_1, L_2, \cdots\cdots L_n$，及其主力矩 L 於其上，再作一經過 O 點之任意軸 z，其方向在圖中已用箭頭示之，而射影 $L_1, L_2\cdots\cdots L_n$ 諸分力矩及 L 主力矩於 z 軸上。因 L 主力矩為 $L_1, L_2\cdots\cdots L_n$ 諸分力矩之幾何和，但幾何和之射影則等於各分力矩射影之代數和，故得：

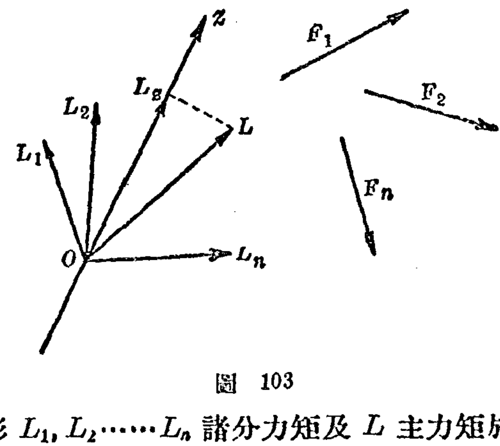


圖 103

$$L\cos(L,z)=L_1\cos(L_1,z)+L_2\cos(L_2,z)+\cdots\cdots+L_n\cos(L_n,z).$$

復從力對於點之力矩及對於軸之力矩之關係中，可知：

$$L_1\cos(L_1,z)=L_{1z},$$

$$L_2\cos(L_2,z)=L_{2z},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_n\cos(L_n,z)=L_{nz}$$

而 $L_{1z}, L_{2z},\cdots\cdots L_{nz}$ 各為 $F_1, F_2,\cdots\cdots F_n$ 數力對於 z 軸之力矩，故得：

$$L\cos(L,z)=L_{1z}+L_{2z}+\cdots\cdots+L_{nz}$$

但等式右邊 $L_{1z}+L_{2z}+\cdots\cdots L_{nz}$，適等於 $F_1, F_2,\cdots\cdots F_n$ 數力對於 z 軸主力矩 L_z 之值：

$$\therefore\quad L\cos(L,z)=L_z$$

換言之，卽數力對於 O 點主力矩在 z 軸上之射影，等於數力對於此軸之主力矩。

所以數力對於點之主力矩及對於軸之主力矩之關係中，仍包含有其每一力矩對於點之關係及對於軸之關係。

第十章

位於空間任意位置諸力之性質

110. 移動一已知力於一點後之性質 本章中所述者，爲求位於空間任意位置且作用於不同點上諸力之合力．吾人仍可用第四章所述位於同一平面作用於不同點上諸力合力之求法．惟先須注意移動一已知力於一已知點後之性質．設已知 F 力作用於 A 點，如圖 104．今在已知點 O 上，加兩能互相抵消之平衡力(大小相等,方向相反,作用於同一直線上)使其大小均等於 F 力，而使其中一力與 F 力爲同方向，他力則與 F 力爲反方向．如此則作用於 A 點之已知力 F，可被一作用於 O 點在圖中加有兩短劃之 F 力，及一 (F, F) 力偶所代替，此 (F, F) 力偶名曰移動力偶．而以作用於 O 點在圖上加有兩短劃之 F 力，及一 (F, F) 移動力偶，代替作用於 A 點之 F 力，則與移動作用於 A 點之 F 力，使其作用

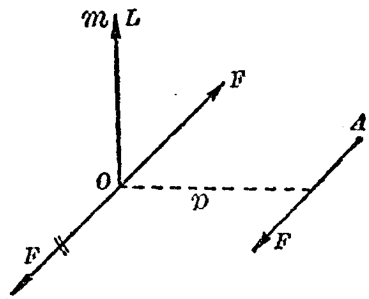


圖 104

於已知點 O 上無異。

從 O 點作一垂線使垂直於 A 點 F 力之作用線,若其垂直距離爲 p, 則 F 力與 p 之乘積,卽爲移動力偶矩 m 之值:

$$m=F\cdot p$$

此移動力偶矩向上垂直於 F 力與 O 點所成之平面(其方向之定法與力偶矩相同)。然 F 力與 p 之乘積,同時爲 F 力對於 O 點力矩 L 之值:

$$L=F\cdot p$$

L 之方向則與 m 之方向完全合一,則 L, m 兩矢作幾何式地相等:

$$\overline{m}=\overline{L}$$

故移動一力於一已知點後,則成一作用於此已知點之力,及一移動力偶.而移動力偶矩則幾何式地等於此已知力對於已知點之力矩。

111. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力之合力

設欲求作用於物體之 $A_1, A_2,\cdots\cdots A_n$ 各點上 $F_1, F_2,\cdots\cdots F_n$ 諸力之合力,如圖 105. 今取一任意點 O, 名之曰**移動中心**,而移動諸已知力於此點上,則得作用於 O 點上之 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 諸力(在圖中均加有兩短劃)及 (F_1, F_1), (F_2, F_2),$\cdots\cdots(F_n, F_n)$ 諸移動力偶,其各移動力偶矩爲 $m_1, m_2\cdots\cdots m_n$; 若以 $L_1, L_2\cdots\cdots L_n$ 表 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 各已知力對於移動中心 O 點之力矩,則:

$$\overline{m}_1=\overline{L}_1,\ \overline{m}_2=\overline{L}_2,\cdots\cdots\overline{m}_n=\overline{L}_n$$

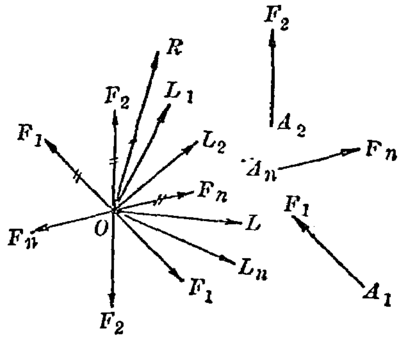


圖　105

再求得在圖中加有兩短劃作用於 O 點 $F_1, F_2,\cdots\cdots F_n$ 諸力之合力 R, R 亦作用於 O 點,且爲 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 之幾何和:

$$\overline{R}=\overline{F}_1+\overline{F}_2+\cdots\cdots+\overline{F}_n$$

R 力在圖 105 中亦加有兩短劃，可名之曰主矢。

復求得 (F_1, F_1), (F_2, F_2),$\cdots\cdots(F_n, F_n)$ 諸移動力偶之合力偶，其力偶矩 m, 爲 $m_1, m_2,\cdots\cdots m_n$ 各分力偶矩之幾何和，同時爲 $L_1, L_2,\cdots\cdots L_n$ 各分力矩之幾何和:

$$\overline{m}=\overline{m}_1+\overline{m}_2+\cdots\cdots+\overline{m}_n$$
$$=\overline{L}_1+\overline{L}_2+\cdots\cdots+\overline{L}_n$$

然 $L_1, L_2,\cdots\cdots L_n$ 諸分力矩之幾何和，等於 $F_1, F_2\cdots\cdots F_n$ 諸力對於 O 點之主力矩 L:

$$\therefore\quad \overline{m}=\overline{L}.$$

故合力偶矩與數力對於移動中心之主力矩,作幾何式之相等,

所以位於空間任意位置且作用於不同點諸力之合力爲一主矢 R，及一合力偶．其合力偶矩乃幾何式地等於諸力對於移動中心之主力矩．

112. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力呈平衡時之情形 若從上節所得之主矢 R 爲零值，而主力矩 L 亦爲零值則如何？

若：
$$R=0$$
則在圖 105 中加有兩矩劃作用於 O 點之 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力呈平衡狀態．

同時若：
$$L=0$$
則 (F_1, F_1), $(F_2, F_2) \cdots\cdots (F_n, F_n)$ 諸移動力偶亦呈平衡狀態．

即諸已知力 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 完全呈平衡狀態．

故位於空間任意位置且作用於不同點上諸呈力平衡狀態時，則其主矢爲零值，而對於任意點之主力矩亦爲零值，即：
$$\boldsymbol{R}=0, \quad \boldsymbol{L}=0$$
此兩者爲位於空間任意位置諸力之平衡條件．

113. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力成一力偶時之情形 如所得之 R 主矢爲零值，而主力矩 L 不等於零則如何？

若：
$$R=0$$
則在圖 105 中加有兩矩劃作用於 O 點上 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力

呈平衡狀態。

同時若 $L \neq 0$

則各移動力偶不呈平衡，可使之成一合力偶，其力偶矩卽等於 L 之値。

故若位於空間任意位置且作用於不同點上諸力之主矢爲零値，而對於任意點之主力矩不等於零時，則此諸力之合力爲一力偶，其力偶矩幾何式地等於主力矩。

114. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力成一主矢時之情形 如所得之 R 主矢不爲零値，而主力矩 L 等於零，或不等於零而垂直於主矢時則如何?

(1) 若: $L=0$

則 $(F_1, F_1), (F_2, F_2)\cdots\cdots(F_n, F_n)$ 諸移動力偶呈平衡狀態，可使之互相抵消，而僅餘一在圖 105 中加有兩短劃作用於 O 點上之 R 主矢. 故已知之 $F_1, F_2,\cdots\cdots F_n$ 諸力成一作用於 O 點之 R 主矢。

(2) 若: $L \neq 0$

$$L \perp R$$

則位於空間任意位置且作用於不同點上之 $F_1, F_2,\cdots\cdots F_n$ 諸力成一 R 主矢(在圖 106 中加有兩短劃)，及一合力偶，其力偶矩爲 L, 垂直於 R 主矢，如圖 106. 今使此合力偶中之力各等於 R, 其力偶矩之臂則定爲 $\frac{L}{R}$; 且使其中之一力作用於 O, 與在圖中加有兩短劃之 R 主矢成反方向，而位於同一直線上。

其他一力則使其作用於經過O點垂直於R, L所成平面之直線上之N點，O, N之距離爲$\frac{L}{R}$，而ON之方向，則使吾人依L方向觀察此合力偶矩迴轉之方向，與時針相同。

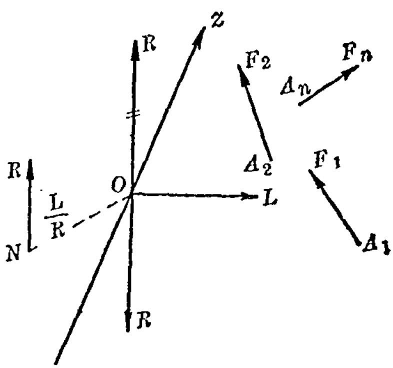


圖　106

試觀作用於O點之兩R力，乃大小相等方向相反位於同一直線上之力，則能互相抵消，而僅餘作用於N點之R力矣。

故$F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$諸力已成一作用於$N$點之$R$主矢。

所以若立於空間任意位置且作用於不同點上諸力之不爲零值之主力矩L與不爲零值之主矢互相垂直時，則此諸力之合力爲一主矢。

在前曾述宇宙間諸力不必能求得其合力，今則可知宇宙間諸力有一合力時之條件，即此諸力之主矢不爲零值，而對於任意點之主力矩可或爲零值，或垂直於主矢。否則吾人無法求得其合力也。

115. **定理**　此定理可稱之爲合力之力矩定理，即若已知$F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$諸力可成一合力，則其合力對於任意點之力矩，等於各力對於此點諸分力矩之幾何和，對於任意軸之力矩，等於各力對於此軸諸分力矩之代數和。

證明：　在圖 106 中作 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力作用於 N 點之合力 R 對於移動中心 O 點之力矩，若以 $L(R)$ 表之，則得：

$$L(R)=R\cdot\frac{L}{R}=L$$

其方向以前者所述之法定之，適與 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力之主力矩 L 合一。故合力之力矩 $L(R)$ 與主力矩 L 作幾何式的相等：

$$\overline{L(R)}=\overline{L}$$

然 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力對於移動中心 O 點之主力矩 L，等於 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 各力對於 O 點諸分力矩之幾何和，設各分力矩為 $L_1, L_2, \cdots\cdots L_n$，則：

$$\overline{L}=\overline{L_1}+\overline{L_2}+\cdots\cdots+\overline{L_n}$$

卽：

$$\overline{L}(R)=\overline{L_1}+\overline{L_2}+\cdots\cdots+\overline{L_n}$$

故合力對於移動中心 O 點之力矩，等於各分力對於 O 點諸分力矩之幾何和，但移動中心 O 點為吾人任意所取，由此可證明定理之前半部。

今在圖 106 中，作一經過移動中心 O 點之任意軸 z，再作作用於 N 點 R 合力對於此軸之力矩，設以 $L_z(R)$ 表之，則依已知定理，可知 $L_z(R)$ 等於 R 合力對於移動中心 O 點之力矩 $L(R)$ 在 z 軸上之射影，但因：

$$\overline{L(R)}=\overline{L}$$

則 $L_z(R)$ 等於主力矩 L 在 z 軸上之射影：

$$L_z(R)=L\cos(L, z)$$

惟 $F_1, F_2, \cdots F_n$ 諸力對於 O 點之主力矩 L 在 z 軸上之射影，等於 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力對於軸之主力矩 L_z:

$$L\cos(L, z) = L_z$$

故:

$$L_z(R) = L_z$$

但 L_z 等於 $F_1, F_2, \cdots F_n$ 各力對於軸之諸力矩 $L_{1z}, L_{2z}, \cdots\cdots L_{nz}$，之代數和:

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + \cdots\cdots + L_{nz}$$

$$\therefore \quad L_z(R) = L_{1z} + L_{2z} + \cdots\cdots + L_{nz}$$

所以 R 合力對於 z 軸之力矩，等於各力對於此軸諸分力矩之代數和。

且 z 軸亦為吾人任意所取（因 O 點為任意所取），由此可證明定理之後半部。

116. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力成一原動力時之情形　若以前所得之 R 主矢不為零值，而主力矩 L 亦不等於零，且亦不垂直於主矢，則 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力成一在圖 107 中加有兩短劃作用於 O 點之合力 R 及一合力偶，其力偶矩為 L。今分解此合力偶為兩力偶，使其一力偶之作用平面垂直於 R 主矢，而使他力偶

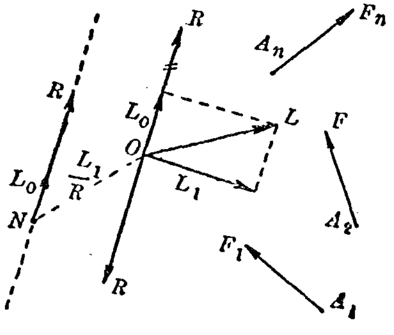


圖　107

之作用平面則平行於主矢，吾人可先用力矩之平行四邊形法分解 L 主力矩爲 L_0 及 L_1，如圖 107，使 L_0 與 R 主矢同方向，而 L_1 則垂直於 R 主矢之作用線，故此兩分力矩之値各爲：

$$L_0 = L\cos(L, R)$$

$$L_1 = L\sin(L, R)$$

再使力偶矩爲 L_1 之力偶中之兩力各等於 R 力，則其力偶矩之臂應爲 $\frac{L_1}{R}$. 今更使其中之一 R 力作用於 O 點，與 R 主矢之方向相反，而另一 R 力則作用於經過 O 點垂直於以 R 主矢及主力矩 L 所成平面之直線上之 N 點，ON 之距離爲 $\frac{L_1}{R}$. 其方向仍與前述者相同，即使吾人依 L_1 方向觀此分力偶之迴轉，與時針迴轉之方向相同．

今可知作用於 O 點之兩 R 力，爲大小相等方向相反位於同一直線上之力，能互相抵消，故結果僅餘一作用於 N 點之 R 力，及一以 L_0 爲力偶矩之力偶．此力偶之平面與 R 主矢(加有兩短劃)之作用線垂直，且可依其原來方向移動 L_0 力矩於 N 點上．

故已知 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力，已成一大小等於主矢作用於 N 點之 R 力，及一力偶，其作用平面則垂直於主矢之作用線，同時垂直於作用於 N 點 R 力之作用線．如此所得之 R 力及作用平面垂直於 R 力作用線之力偶，總名之曰原動力．

由此可知若 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力之 R 主矢不爲零值，而 L 主力矩亦不等於零，且不垂直於 R 主矢，則成一原動力。此原動力乃由 R 力及一以 L_0 爲力偶矩之力偶組合而成。

而此 R 力之作用線，則名之曰 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力之中心軸。

且以前所論諸力或呈平衡狀態，或成一力偶，或成一合力時之情形，卽爲本節中下列之諸情形：

(1) 若： $R=0$ 及 $L_0=0$

則 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力呈平衡狀態。

(2) 若： $R=0$ 及 $L_0 \neq 0$

則 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力成一力偶。

(3) 若： $R \neq 0$ 及 $I_0=0$

則 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力成一合力。

117. 位於空間任意位置且作用於不同點上諸力之主力矩對於移動中心地位之關係 以前所得 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力之 R 主矢之數值及方向，與所取之移動中心點 O 毫無關係，而其主力矩 L 之數值及方向，對於所取移動中心點 O 之地位則有下述之關係：

在圖 107 中，移動中心點 O 與 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力之中心軸之距離 ON 爲 $\frac{L_1}{R}$，若以 r 表之，則 L_1 力矩之值爲：

$$L_1 = r \cdot R$$

$$\therefore \quad L=\sqrt{L_0{}^2+L_1{}^2}=\sqrt{L_0{}^2+r^2\cdot R^2}$$

同時 $$\sin(L,R)=\frac{L_1}{L}=\frac{r\cdot R}{\sqrt{L_0^2+r^2\cdot R^2}}.$$

故若移動中心點 O 位於距中心軸 r 距離之處，換言之，即若 O 點位於以 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力之中心軸爲軸,以 r 爲半徑所成直圓柱體之表面上,則 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力之主力矩 L 之値及與 R 主矢所成之角,仍絲毫不變.

若移動中心點 O 位於其餘之位置時,則從公式:

$$L=\sqrt{L_0^2+r^2\cdot R^2}$$

可知 L 爲變數 r 之函數，即 L 之大小與 r 之大小成正比例.若 r 爲零値,即移動中心點 O 位於中心軸上,則 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 對於移動中心點 O 之主力矩 L 爲最小値,即若:

$$r=0$$

則: $$L=L_0$$

故知 L_0 爲 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸已知力主力矩之最小値.

又從公式:

$$L_0=L\cos(L,R)$$

可知 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸已知力主力矩之最小値 L_0,等於此諸力對於任意所取 O 點之主力矩在以 R 主矢作用線爲軸上之射影,由此更可明瞭主力矩 L 在以 R 主矢作用線爲軸上之射影,與任意所取 O 點之地位,毫無關係.

118.　用力在軸上之射影代表此力對於同軸之力矩之公式　設有一 F 力作用於 A 點上，如圖 108. 取 x, y, z 三垂直

軸，而以 x, y, z 分別表 A 點對於此三軸之坐標。再以經過 A 點分別平行 x, y, z 三軸之三直線為主，而使 F 力為對角線，作一直平行六面體，則此直平行六面體之三主棱，卽為 F 力分別在 x,y,z 三軸上之射影，設以 X, Y, Z 表之。然從力之平行六面體法，可知 F 力卽為其三射影力 X, Y, Z 之合力，復依合力之力矩定理(§ 108)，則得 F 力對於 x 軸之力矩 L_x 為 X, Y, Z 分別對於 x 軸諸力矩 $L_x(X)$, $L_x(Y)$, $L_x(Z)$ 之代數和：

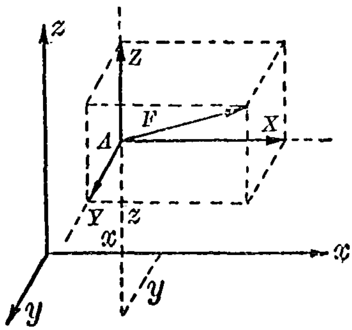


圖 108

$$L_x = L_x(X) + L_x(Y) + L_x(Z)$$

但從力對於軸之力矩性質 (§ 105) 中，又得：

$$L_x(X) = 0$$

$$L_x(Y) = -zY$$

$$L_x(Z) = yZ$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{L_x = yZ - zY}$$

同理得 F 力對於 y, z 兩軸之力矩 L_y, L_z 之公式為：

$$\therefore \quad \boldsymbol{L_y = zX - xZ}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{L_z = xY - yX}$$

此三者為以 F 力在 x, y, z 三垂直軸上之射影，分別表 F 力對於 x, y, z 三垂直軸之力矩之公式。

119. 用射影法以求諸力之主矢及主力矩　今用射影法求位於空間任意位置分別作用於 $A_1, A_2 \cdots\cdots A_n$ 諸點上之 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力之主矢 R 及對於任意點 O 之主力矩 L 之公式。如圖 109，以 O 點作移動中心而移動 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力後，則得一作用於 O 點之 R 主矢，及一以諸力對於 O 點之主力矩 L 爲力偶矩之力偶、若以 $L_1, L_2 \cdots\cdots L_n$ 分別表 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力對於 O 點之力矩，則有下列之關係：

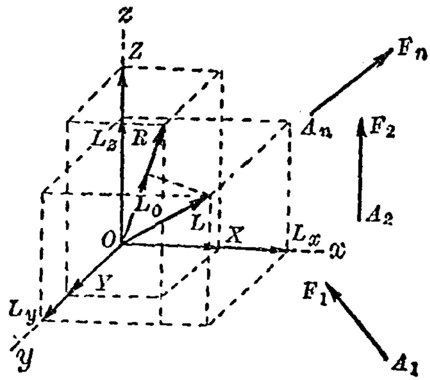


圖　109

$$\overline{R}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\cdots\cdots+\overline{F_n}$$

$$\overline{L}=\overline{L_1}+\overline{L_2}+\cdots\cdots+\overline{L_n}$$

今從 O 點引 x, y, z 三垂直軸而射影諸力，如圖 109 所示者然。設以 X, Y, Z 分別表 R 主矢在 x, y, z 三垂直軸上之射影；以 X_1, Y_1, Z_1；X_2, Y_2, Z_2；$\cdots\cdots X_n, Y_n, Z_n$ 分別表 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力在 x, y, z 三垂直軸上之射影。R 主矢既爲 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力之幾何和，則依幾何和之射影定理，可知：

$$X = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots\cdots + Y_n$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \cdots\cdots + Z_n$$

從以上三公式中求得 R 主矢在 x, y, z 三垂直軸上之射影 X, Y, Z 後，則可求得 R 主矢之數値，因 R 主爲 X, Y, Z 三射影力所成直平行六面體之對角線也：

故：
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

至於 R 主矢之方向，則可從下列諸式中求得之：

$$\because \quad X = R\cos(R, x)$$

$$Y = R\cos(R, y)$$

$$Z = R\cos(R, z)$$

$$\therefore \quad \cos(R, x) = \frac{X}{R}$$

$$\cos(R, y) = \frac{Y}{R}$$

$$\cos(R, z) = \frac{Z}{R}$$

玆再求主力矩 L 之公式。以 x, y, z 三垂直軸爲主，使 L 爲對角線，從 O 點作得一直平行六面體，其三主棱卽爲主力矩 L 在 x, y, z 三垂直軸上之射影。然依對於點之主力矩與對於軸之主力矩間之關係(§ 109)中，可知主力矩 L 在 x, y, z 三垂直軸上之射影，分別等於 F_1, F_2, $\cdots\cdots F_n$ 諸力對於 x, y, z 三垂直軸之主力矩 L_x, L_y, L_z, 設以 L_{1x}, L_{1y}, L_{1z}; L_{2x}, L_{2y},

L_{2z}；……L_{nx}, L_{ny}, L_{nz} 分別表 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力對於 x, y, z 之垂直軸之分力矩，則得：

$$L_x = L_{1x} + L_{2x} + \cdots\cdots + L_{nx}$$

$$L_y = L_{1y} + L_{2y} + \cdots\cdots + L_{ny}$$

$$L_z = L_{1z} + L_{2z} + \cdots\cdots + L_{nz}$$

從上式中求得 L_x L_y, L_z 之値後，卽可求得 L 主力矩之數値，因 L 爲以 L_x, L_y, L_z 作三主棱所成直平行六面體之對角線也。

故：
$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$$

至於 L 主力矩之方向，則可用下列各公式定之：

$$\because \quad L_x = L\cos(L, x)$$

$$L_y = L\cos(L, y)$$

$$L_z = L\cos(L, z)$$

$$\therefore \quad \cos(L, x) = \frac{L_x}{L}$$

$$\cos(L, y) = \frac{L_y}{L}$$

$$\cos(L, z) = \frac{L_z}{L}$$

至於 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力對於 x, y, z 三垂直軸之分力矩 L_{1x}, L_{1y}, L_{1z}；L_{2x}, L_{2y}, L_{2z}；……L_{nx}, L_{ny}, L_{nz}，則或可用力對於軸之力矩法 (§ 105) 求之，或可用 118 節所述之三公式求之。又自此三公式亦可直接求得諸力對於 x, y, z 三垂直軸之主力

矩 L_x, L_y, L_z. 設以 i 表自 1 至 n, 則 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力之作用點 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 可表之以 A_i, 其對於 x, y, z 三垂直軸之坐標爲 x_i, y_i 及 z_i; 而 F_i 力在此三軸上之諸射影, 爲 X_i, Y_i, Z_i, 則得:

$$L_{ix} = y_i Z_i - z_i Y_i$$

$$L_{iy} = z_i X_i - x_i Z_i$$

$$L_{iz} = x_i Y_i - y_i X_i$$

由此卽得:

$$\boldsymbol{L_x = \Sigma(y_i Z_i - z_i Y_i)}$$

$$\boldsymbol{L_y = \Sigma(z_i X_i - x_i Z_i)}$$

$$\boldsymbol{L_z = \Sigma(x_i Y_i - y_i X_i)}$$

今再求 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力對於 O 點之主力矩爲最小值 L_0 時之公式. 在以前已知主力矩最小值 L_0, 等於主力矩 L 在以 R 主矢爲軸上之射影 (在圖 109 中亦有相當線段表示 L_0) 則得:

$$L_0 = L \cos(L, R)$$

惟從他方又知諸力對於 O 點之主力矩 L, 適爲諸力對於 x, y, z 三垂直軸之主力矩 L_x, L_y, L_z 之幾何和, 依幾何和之射影定理, 及因 L_x, L_y, L_z 之方向與 x, y, z 三垂直軸之方向合一, 則得:

$$\because \quad \overline{L} = \overline{L_x} \quad \overline{L_y} + \overline{L_z}$$

$$\therefore \quad L \cos(L, R) = L_x \cos(x, R) + L_y \cos(y, R) + L_z \cos(z, R)$$

故: $\boldsymbol{L_0 = L_x \cos(R, x) + L_y \cos(R, y) + L_z \cos(R, z}$

但：

$$\cos(R, x) = \frac{X}{R}$$

$$\cos(R, y) = \frac{Y}{R}$$

$$\cos(R, z) = \frac{Z}{R}$$

$$\therefore \quad L_0 = \frac{XL_x + YL_y + ZL_z}{R}.$$

120. 空間任意位置諸力之平衡公式　前於第 112 節中，吾人已知位於空間任意位置諸力呈平衡時，則其所成之主矢 R 爲零值，而對於任意點之主力矩 L 之値亦等於零．在 119 節復知 R 及 L 之公式爲：

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$$

若：

$$R = 0$$

$$L = 0$$

則必須合於下列六條件：

$$X = 0$$

$$Y = 0$$

$$Z = 0$$

$$L_x = 0$$

$$L_y = 0$$

$$L_z = 0$$

從 R 主矢之射影公式及 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力對 x, y, z 三垂直軸之主力矩 L_x, L_y, L_z 公式中，可知位於空間任意位置之 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力若平衡時，必須適合於下列各方程式：

$$X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n=0$$
$$Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_n=0$$
$$Z_1+Z_2+\cdots\cdots+Z_n=0$$
$$L_{1x}+L_{2x}+\cdots\cdots+L_{nx}=0$$
$$L_{1y}+L_{2y}+\cdots\cdots+L_{ny}=0$$
$$L_{1z}+L_{2z}+\cdots\cdots+L_{nz}=0$$

此六方程式名曰空間任意位置諸力之平衡公式．前三式可名曰射影公式，後三式可名曰力矩公式．而三力矩公式可寫作：

$$\Sigma(y_iZ_i-z_iY_i)=0$$
$$\Sigma(z_iX_i-x_iZ_i)=0$$
$$\Sigma(x_iY_i-y_iX_i)=0$$

其中之 x_i, y_i, z_i 爲已知力 F_i 施力點對於三垂直軸之坐標．

既知力之平衡公式爲六，則關於位於空間任意位置作用於一物體上不同諸點之力呈平衡時之問題，若其所求之未知數爲六，或不過於六時，則此問題爲靜力學能解決之問題．若其未知數超過於六，則非靜力學所能解決矣．

當用射影公式解決問題時，則必取用以射影之軸，此種軸名之曰射影軸．若以力矩公式解決問題時，則所取之軸名

之曰力矩軸.在前設立六平衡公式時所取之射影軸與力矩軸兩者,係合一於一直線且同方向;惟若不使之合一亦無甚關係,因此軸本爲吾人任意所取故也.但爲便利計算起見,以後取射影軸時,最好使之垂直於一個(或數個)未知力;取力矩軸時,則或使之平行於一個(或數個)未知力,或使其相交於一個(或數個)未知力之作用線.

121. 支於兩不動點物體之平衡條件及支點所發生反作用之求法　設一物體倚於兩不動點 O_1 及 O_2, 如圖 110, 可知此物體至多祇能作以 O_1O_2 直線爲軸之旋轉運動. 今有 F_1, F_2,……F_n 諸力作用於其上,欲求此 F_1, F_2,……F_n 諸力使物體平衡時之條件.須知此物體除受 F_1, F_2,……F_n 諸作用外,尚受由 O_1, O_2 兩不動點所發生之反作用 N_1 及 N_2. 假使此物體在 F_1, F_2, ……F_n, N_1 N_2 等力作用下而平衡,則

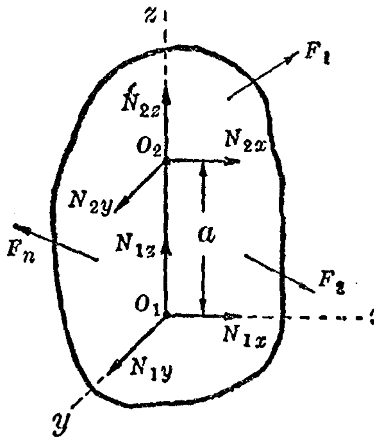


圖 110

此諸力必可適合於力之平衡公式.今從兩不動點中任意一點 O_1, 引三垂直軸 x, y, z (O_1 可名之曰原點), 而使 z 軸卽爲 O_1O_2 直線(亦卽物體之旋轉軸), 則 x, y 兩軸均垂直於 O_1O_2 旋轉軸. 各依 x, y, z 三軸之方向分別分解 N_1, N_2 爲三力,而以

$N_{1x}, N_{1y}, N_{1z}, N_{2x}, N_{2y}, N_{2z}$ 表之，則 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$；$N_{1x}$ N_{1y} N_{1z}；N_{2x}, N_{2y}, N_{2z} 諸力之平衡公式(設 $\overline{O_1O_2}=a$) 爲：

$$\Sigma X_i + N_{1x} + N_{2x} = 0 \tag{1}$$

$$\Sigma Y_i + N_{1y} + N_{2y} = 0 \tag{2}$$

$$\Sigma Z_i + N_{1z} + N_{2z} = 0 \tag{3}$$

$$\Sigma L_{ix} - aN_{2y} = 0 \tag{4}$$

$$\Sigma L_{iy} + aN_{2x} = 0 \tag{5}$$

$$\Sigma L_{iz} = 0 \tag{6}$$

其中之 X_i, Y_i, Z_i 分別表 F_i 諸力在 x, y, z 三垂直軸上之射影，而 L_{ix}, L_{iy}, L_{iz} 分別表 F_i 力對於 x, y, z 三垂直軸之力矩，i 則表自 1 至 n.

在最後一公式：

$$\Sigma L_{iz} = 0$$

中，不包含 O_1, O_2 兩不動點所發生之反作用，故此公式爲 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力使物體平衡時之條件。所以支於兩不動點上之物體呈平衡時之條件，爲其所作用諸力對於旋轉軸各力矩之和爲零值。

在前五式中可求 O_1、O_2 兩不動點所發生反作用之關係。從 (4), (5) 兩式中可得：

$$N_{2x} = -\frac{1}{a}\Sigma L_{iy}$$

$$N_{2y} = \frac{1}{a}\Sigma L_{ix}$$

以之分別代入 (1), (2) 兩式中可得：

$$N_{1x}=\frac{1}{a}\Sigma L_{iy}-\Sigma X_i$$

$$N_{1y}=-\frac{1}{a}\Sigma L_{ix}-\Sigma Y_i$$

最後從 (3) 式中求得：

$$N_{1z}+N_{2z}=-\Sigma Z_i$$

由此可知 N_{1x}, N_{1y}, N_{2x}, N_{2y}, 四值各能直接求得，然 N_{1z} N_{2z} 兩值僅能知其和，而不能求得其各自單獨之值．故若問題中欲求支點發生之反作用，則此問題爲非靜力學所能解決之問題．

惟須注意，若 O_1, O_2 兩支點中僅 O_1 點爲不動支點，而 O_2 可依 O_1O_2 直線移動，如此則 N_{2z} 爲零值，則從 (3) 式可得：

$$\Sigma Z_i+N_{1z}=0$$

$$\therefore\quad N_{1z}=-\Sigma Z_i$$

122.　〔例題〕　如圖 111, CD 爲一旋轉軸，A, B 爲套有皮帶之兩輪，設 A 輪之半徑爲 r_1, B 輪之半徑爲 r_2, A, B 兩輪與旋轉軸一端支點 C 之距離各爲 a 及 b, 而旋轉軸之長，即 C, D 兩旋轉支點之距離爲 l, A 輪之上弦皮帶（即位於 A 輪上方之皮帶）與水平線所成之角爲 α, 而 B 輪之上下弦兩皮帶均成水平．已知 T_1, T_2 爲 A 輪上下弦兩皮帶之張力，T_3 爲 B 輪上弦皮帶之張力，試求能使旋轉軸呈平衡之 B 軸下弦皮帶之張力 T_4, 及 C, D 兩旋轉支點因諸張力而發生之反作用．

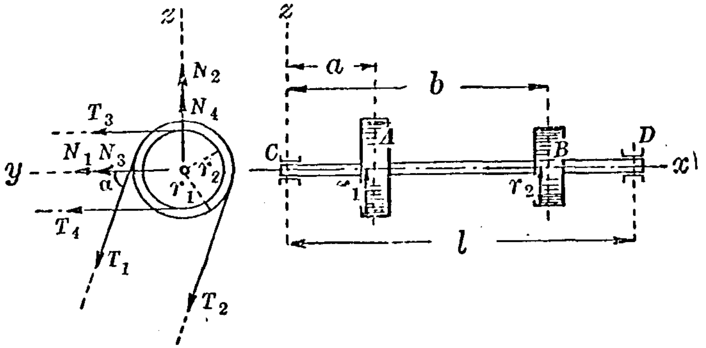


圖 111

答：若旋轉軸在 T_1, T_2, T_3, T_4 四張力及 C, D 兩旋轉支點所發生之反作用諸力作用下而呈平衡，則可應用力之平衡公式。

今以 C 點爲原點作 x, y, z 三垂直軸，使 x 軸與旋轉軸之方向合一，使 y 軸之方向爲水平，而 z 軸之方向則向上垂直。再以 N_1, N_2 分別表旋轉支點 C 所發生之反作用，其方向各與 y, z 兩軸之方向相同，N_3, N_4 表旋轉支點 D 所發生之反作用，其方向亦各與 y, z 兩軸相同，則諸力對於 x 軸之力矩公式爲：

$$T_2 r_1 - T_1 r_1 - T_3 r_2 + T_4 r_2 = 0$$

$$\therefore \quad T_4 = T_3 - \frac{r_1}{r_2}(T_2 - T_1)$$

而諸力對於 y, z 兩軸之諸力矩公式爲：

$$aT_1 \sin\alpha + aT_2 \sin\alpha - lN_4 = 0$$

$$aT_1 \cos\alpha + aT_2 \cos\alpha + bT_3 + bT_4 + lN_3 = 0$$

$$\therefore \quad N_4=\frac{a}{l}(T_1+T_2)\sin\alpha$$

$$N_3=-\frac{a}{l}(T_1+T_2)\cos\alpha-\frac{b}{l}(T_3+T_4)$$

再諸力在 y, z 兩軸上之諸射影公式為:

$$N_1+N_3+T_1\cos\alpha+T_2\cos\alpha+T_3+T_4=0$$

$$N_2+N_4-T_1\sin\alpha-T_2\sin\alpha=0$$

$$\therefore \quad N_1=-N_3-(T_1+T_2)\cos\alpha-(T_3+T_4)$$

$$N_2=-N_4+(T_1+T_2)\sin\alpha$$

假使用各數值計算之,若已知:

$$T_1=200 \text{ 仟克}$$

$$T_2=400 \text{ 仟克}$$

$$T_3=500 \text{ 仟克}$$

$$r_1=25 \text{ 厘米}$$

$$r_2=20 \text{ 厘米}$$

$$a=1 \text{ 米}$$

$$b=3 \text{ 米}$$

$$l=4 \text{ 米}$$

$$\angle\alpha=70^\circ$$

則得:

$$T_4=500-\frac{25}{20}(400-200)=250 \text{ 仟克}$$

$$N_4=\frac{1}{4}(200+400)\sin 70^\circ=141 \text{ 仟克}$$

$N_3 = -\frac{1}{4}(200+400)\cos 70° - \frac{3}{4}(500+250) = -614$ 仟克

$N_1 = 614 - (200+400)\cos 70° - (500+250) = -314$ 仟克

$N_2 = -141 + (200+400)\sin 70° = 423$ 仟克

123. 用實用法以求諸力之主矢及主力矩 今以諸力之平衡公式定其主矢及主力矩.設有一築於一圓臺上之建築模型，此圓臺倚於六桿上，其中之三桿爲垂直桿，他三桿爲水平桿，如圖 112，諸桿之位置則在圖中表明之，且以 1, 2, 3, 4, 5, 6 爲各桿之號數．若此建築模型受任意諸 P 力後(例如風壓)，則其主矢 R 及主力矩 L 之定法爲何如?

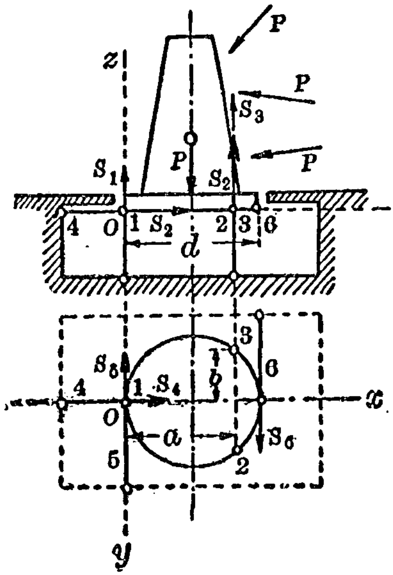


圖 112

今取一任意點 O 爲移動中心，從 O 點引 x, y z 三垂直軸（此三軸之方向在圖 112 中均有表明）．設諸 P 力之主矢 R 及對於移動中心 O 點之主力矩 L 在 x, y, z 三垂直軸上之射影各爲 X, Y, Z, L_x, L_y, L_z，且 L_x, L_y, L_z 復等於諸 P 力對於 x, y, z 三垂直軸之主力矩，則欲求此六值，須設立諸 P 力之六平衡公式．

茲以 P 表建築模型及圓臺之重量，知其必作用於其公共重心上，而各桿所發生之反作用，均以壓力計之，若其中有為張力者，則加一負號以別之，可用 $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ 分別表之。然此建築模型受諸 P 力侵入後仍能靜止，故此諸力必可適合於力之平衡公式。射影諸力於 x, y, z 三垂直軸上，則其射影公式及諸力對於 x, y, z 三垂直軸之力矩公式為：

$$X+S_4=0$$

$$Y-S_5+S_6=0$$

$$Z-P+S_1+S_2+S_3=0$$

$$L_x+S_2b-S_3b=0$$

$$L_y+P\frac{d}{2}-S_2a-S_3a=0$$

$$L_z+S_6d=0$$

（其中之 a, b 及 d 均為距離，在圖 112 中都曾標出。）

$$\therefore\quad X=-S_4$$

$$Y=S_5-S_6$$

$$Z=P-S_1-S_2-S_3$$

$$L_x=(S_3-S_2)b$$

$$L_y=(S_3+S_2)a-P\frac{d}{2}$$

$$L_z=-S_6d$$

至於 $S_1, S_2, \cdots\cdots S_6$ 諸力係直接用量力器定得，故本題中支持圓臺之各桿均由兩彈簧棒合成，而量力器即置於兩彈簧棒之間，如圖 113 所示者。當桿端受有外力時，即變動桿之原來形

狀，而在量力器上指針所示者，即此桿所發生反作用之大小也。

圖 113

如此若已知重量 P 及 a, b, d 等距離後，則從各方程式中可求得 X, Y, Z 及 L_x, L_y, L_z 諸值；而復從以前之公式：

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

$$L=\sqrt{L_x{}^2+L_y{}^2+L_z{}^2}$$

中，求得 R 主矢及 L 主力矩之數值。而從諸公式：

$$\cos(R, x)=\frac{X}{R}$$

$$\cos(R, y)=\frac{Y}{R}$$

$$\cos(R, z)=\frac{Z}{R}$$

$$\cos(L, x)=\frac{L_x}{L}$$

$$\cos(L, y)=\frac{L_y}{L}$$

$$\cos(L, z)=\frac{L_z}{L}$$

中，求得 R 主矢及 L 主力矩之方向。

若當諸 P 力僅成一合力時，亦能求得此合力之數值，方向及施力點。

124. 空間諸平行力之合力及其平衡公式 今就前數節

所論位於空間任意位置且作用於不同點上諸力之合力，及其平衡公式中所得之結果，研究當此諸力互相平行時之情形。設已知 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸平行力分別作用於 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 諸點，如圖 114. 今取一任意點 O 作移動中心，則得 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸力所成作用於 O 點之主矢 R，及一以諸力對於 O 點之主力矩 L 爲力偶矩之力偶。先求此 R 主矢及 L 主力矩之值：以 O 點爲原點，引

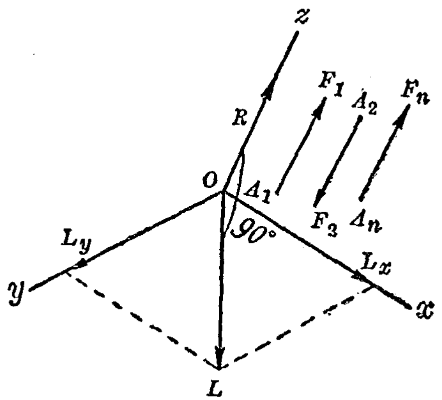


圖　114

x, y, z 三垂直軸，而使 z 軸與諸已知力平行，則 x, y 兩軸應與諸已知平行力垂直。茲求得 R 主矢在 x, y, z 三垂直軸上之射影 X, Y, Z 爲：

$$X=\Sigma X_i$$

$$Y=\Sigma Y_i$$

$$Z=\Sigma Z_i$$

其中之 Σ 爲和之符號，X_i, Y_i, Z_i 分別表 F_i 力在 x, y, z 三垂直軸上之射影（i 表自 1 至 n 數）。

但因諸已知力均與 z 軸平行，則得：

$$X_i=0$$

$$Y_i=0$$

$$Z_i=\pm F_i$$

(若 F_i 力與 z 軸爲同方向，則 Z_i 爲正值，例如圖中之 F_1 力。若 F_i 力與 z 軸爲反方向，則 z_i 爲負值，例如圖中之 F_2 力。)

$$\therefore\quad X=0$$

$$Y=0$$

$$Z=\Sigma(\pm F_i)$$

既然：

$$X=0$$

$$Y=0$$

則 R 主矢應與 z 軸平行，其數値等於其在 z 軸上射影之絕對値：

$$R=|Z|=|\Sigma(\pm F_i)|$$

若：

$$\Sigma(\pm F_i)>0$$

則 R 主矢與 z 軸爲同方向。

若：

$$\Sigma(\pm F_i)<0$$

則 R 主矢與 z 軸爲反方向(圖 114 中所作乃假設 $\Sigma(\pm F_i)>0$)。

復求得 L 主力矩在 x, y, z 三垂直軸上之射影 L_x, L_y, L_z (L_x, L_y, L_z 三者，亦可云爲 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力對於 x, y, z

三軸之主力矩)爲:

$$L_x = \Sigma L_{ix}$$

$$L_y = \Sigma L_{iy}$$

$$L_z = \Sigma L_{iz}$$

其中之 L_{ix}, L_{iy}, L_{iz} 乃 F_i 力對於 x, y, z 三垂直軸之力矩,但因 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力均與 z 軸平行,

則:
$$L_{iz} = 0$$

故:

$$L_z = 0$$

由此可知主力矩 L 與 z 軸垂直.換言之,即 L 主力矩之位置,乃在 x, y 兩軸所成之平面上也.且 L 主力矩適爲其在 x, y 兩軸上之射影 L_x, L_y 所成矩形之對角線,故得:

$$L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}.$$

L 主矢既位於 x, y 兩軸所成之平面上,而 R 主矢乃位於 x 軸上,則 L, R 間之角爲一直角:

$$\angle(R, L) = 90°$$

今從所得諸結果中,再繼續研究之:

(1) 若:

$$R = 0$$

$$L = 0$$

則諸已知平行力呈平衡狀態.

(2) 若:

$$R=0$$

$$L \neq 0$$

則諸已知平行力成一力偶，其力偶矩等於主力矩 L.

(3) 若:

$$R \neq 0$$

$$L=0 \quad 或 \quad L \neq 0$$

則諸已知平行力成一合力等於主矢 R，因無論主力矩爲零值與否必須與 R 主矢垂直故也.

由此可知空間任意諸平行力，永無成一原動力之時.

吾人已知若諸平行力之主矢 R 及力主矩 L 均爲零值時，則此諸平行力呈平衡狀態.且從公式:

$$L=\sqrt{L_x^2+L_y^2}$$

中可知，若:

$$L=0$$

必須:

$$L_x=0$$

$$L_y=0$$

但:

$$R=|\Sigma(\pm F_i)|$$

$$L_x=\Sigma L_{ix}$$

$$L_y=\Sigma L_{iy}$$

故知若 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸平行力呈平衡時，則必適合於下列

三方程式：

$$\Sigma(\pm F)=0$$

$$\Sigma L_{ix}=0$$

$$\Sigma L_{iy}=0$$

此三式乃為空間諸平行力之平衡公式。讀者須注意 $\Sigma(\pm F)$ 中之正負號，若以一方向之力為正，則他方向之力為負．

空間諸平行力之平衡公式既為三，則關於是項之問題，若其中之未知數不過於三，卽為靜力學所能解決之問題．若其中之未知數超過三個以上，則為非靜力學所能解決之問題矣．

125. 用轉幅相加法求空間諸平行力之合力　在前節乃用移動諸平行力於一點法以求其合力，本節則用轉輻相加法求諸平行力之合力．設 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ 六平行力分別作用於 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 六點，如圖 115.已知 F_1, F_2, F_3 三力同一方向，而 F_4, F_5, F_6 三力之方向均與前者相反，今用求兩平行力之合力法，先求得 F_1, F_2 兩力之合力 R_1，其施力點為 C_1：

$$R_1=F_1+F_2$$

C_1 點分 $\overline{A_1A_2}$ 線段為兩部份，與 F_1, F_2 兩力成反比，卽：

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1A_2}}=\frac{F_2}{F_1}$$

再求得 R_1, F_3 之合力 R_2 其施力點為 C_2

$$R_2=R_1+F_3=F_1+F_2+F_3$$

C_2 點亦分 $\overline{C_1A_3}$ 線段爲兩部份，與 R_1, F_3 兩力成反比，卽：

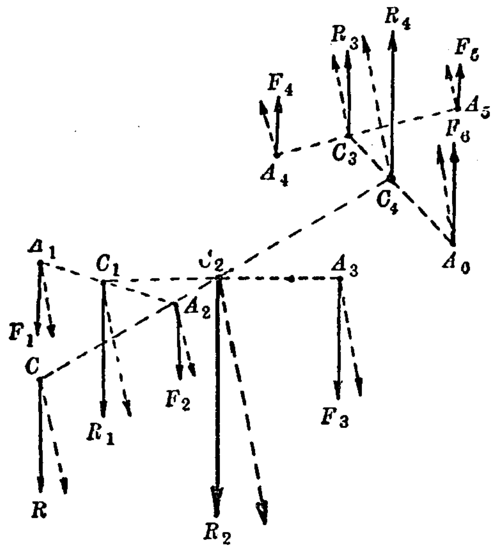


圖 115

$$\frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{C_2A_3}}=\frac{F_3}{R_1}$$

再用同法求得 F_4, F_5 兩力之合力 R_3，其施力點爲 C_3：

$$R_3=F_4+F_5$$

C_3 亦分 $\overline{A_4A_5}$ 線段爲兩部份，與 F_4, F_5 兩力成反比，卽：

$$\frac{\overline{A_4C_3}}{\overline{C_3A_5}}=\frac{F_5}{F_4}$$

最後求得 R_3, F_6 兩力之合力爲 R_4，其施力點爲 C_4：

$$R_4=R_3+F_6=F_4+F_5+F_6$$

C_4 同樣分 $\overline{C_3A_6}$ 線段爲兩部份，與 R_3, F_6 兩力成反比，卽：

$$\frac{\overline{C_3C_4}}{\overline{C_4A_6}}=\frac{F_6}{R_3}$$

故 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ 諸已知平行力成 R_2, R_4 兩平行力，其方向相反。今分別研究之。

(1) 若 R_2, R_4 兩力不等，假設：

$$R_2>R_4$$

則繼續求 R_2, R_4 兩力之合力，得一 R 力：

$$R=R_2-R_4$$

其方向與較大力 R_2 之方向相同，其施力點 C 位於 $\overline{C_2C_4}$ 線段之延長線上近較大力 R_2 邊，與 C_2, C_4 兩之關係爲：

$$\frac{\overline{C\,C_2}}{\overline{C\,C_4}}=\frac{R_4}{R_2}.$$

在此情形下，諸已知平行力僅成一合力 R.

(2) 若 R_2, R_4 兩力相等，但其施力點則不同，則成一力偶 (R_2, R_4)，在此情形下，諸已知平行力成一力偶 (R_2, R_4).

(3) 若 R_2, R_4 兩力相等，且作用於同一點上，卽其兩作用線合一，則互相抵消，呈平衡狀態。在此情形下，諸已知平行力，呈平衡狀態。

注意：若諸已知平行力之數爲 n，則亦完全相同。

126. 諸平行力之中心點　設在上述之第一種情形中，則諸已知平行力成一合力 R，其施力點爲 C，如圖 115，今研

究此 C 點之性質．若諸已知力各以其施力點爲中心作任意旋轉，惟仍互相平行，則其合力 R 亦以施力點 C 爲中心，作任意旋轉，而亦與諸分力平行，且與較大諸分力爲同方向，玆證明於後．

若 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ 六平行力分別以 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ 六點爲中心，旋轉於一任意新位置，惟旋轉後之 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_6$ 六力仍互相平行，復以上節之法，先求 F_1, F_2 之合力 R_1：

$$R_1 = F_1 + F_2$$

R_1 之施力點 C_1 分 $\overline{A_1A_2}$ 線段爲兩部份，與 F_1, F_2 兩力成反比，即：

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{C_1A_2}} = \frac{F_2}{F_1}$$

其方向與 F_1, F_2 兩力之新方向相同，宛若 F_1, F_2 使其合力 R_1 以 C_1 爲中心旋轉於此新位置者然．同樣位於新位置之 R_1，F_3 兩力，使作用於 C_2 點之 R_2 合力旋轉一新位置，F_4, F_5 兩力使其作用於 C_3 點之 R_3 合力旋轉一新位置，而 F_3, F_6 兩力亦使其作用 C_4 點之 R_4 合力旋轉於一新位置．最後求位於新位置之兩 R_2, R_4 平行力之合力 R，若其方向仍爲相反，則：

$$R = R_2 - R_4$$

其施力點仍爲 C，故 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_6$ 諸平行力各以其施力點爲中心旋轉一同一角度後，若仍互相平行，則其合力 R 亦以其

施力點 C 爲中心，旋轉一同一角度，且與諸力平行.

R 合力之施力點 C，即爲名曰 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_6$ 諸平行力之中心點.

127. 諸平行力中心點之坐標　當諸平行力成一合力時，則其合力之施力點即此諸平行力之中心點．若知此中心點之坐標，即能定其合力施力點之位置矣．今求立中心點坐標之公式．設 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸平行力分別作用於 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 諸點上，如圖 116. 已知諸

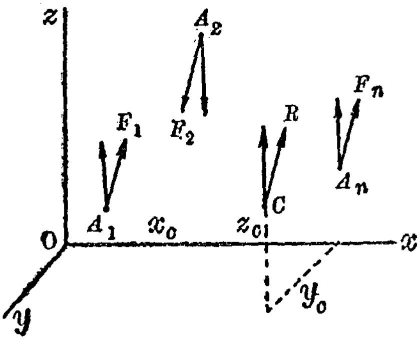


圖　116

已知平行力之代數和爲 $\Sigma(\pm F_i)$:

$$F_1 - F_2 \pm \cdots\cdots + F_n = \Sigma(\pm F_i)$$

(各力爲正值者，與 F_1 力同方向，負值者，與 F_1 力反方向).

假設:

$$\Sigma(\pm F_i) \neq 0$$

且:

$$\Sigma(\pm F_i) > 0$$

則諸已知平行力能成一合力 R，其方向與 F_1 力相同:

$$R = \Sigma(\pm F_i)$$

今欲定合力 R 之施力點，即 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸平行力中心點

之位置．取 x, y, z 三垂直軸，設諸已知平行力施力點對於 x, y, z 三垂直軸之坐標爲：$A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, ……$A_n(x_n, y_n, z_n)$，而諸平行力中心點 C 之坐標則爲 $C(x_c, y_c, z_c)$．現在以 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 諸點爲中心，旋轉 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸平行力，使各與 z 軸平行，則其合力 R 亦應以 C 點爲中心，旋轉至與 z 軸平行爲止，其方向與 z 軸相同（卽與 F_1 力相同）．而 R 力對於 x 軸之力矩，等於 $F_1, F_2 \cdots\cdots F_n$ 諸力對於 x 軸各力矩之代數和；

$$Ry_c = F_1y_1 - F_2y_2 \pm \cdots\cdots + F_ny_n = \Sigma(\pm F_iy_i)$$

但：

$$R = \Sigma(\pm F_i)$$

$$\therefore \quad y_c = \frac{\Sigma(\pm F_iy_i)}{\Sigma(\pm F_i)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

（注意若 $\Sigma(\pm F_i)$ 中之力爲正值時，則在 $\Sigma(\pm F_iy_i)$ 中之此力，亦應爲正值．若 $\Sigma(\pm F_i)$ 之力爲負值時，則 $\Sigma(F_iy_i)$ 中之此力，亦應爲負值．）

再以 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$ 諸點爲中心，旋轉 $F_1, F_2, \cdots\cdots F_n$ 諸平行力，使各與 y 軸平行，則合力 R 亦應以 C 點爲中心旋轉至與 y 軸平行爲止，其方向與 y 軸相同（卽仍與 F_1 力相同），而諸力及合力對於 z, x 兩軸各力矩之關係爲：

$$\therefore \quad x_c = \frac{\Sigma(\pm F_ix_i)}{\Sigma(\pm F_i)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$\therefore \quad z_c=\frac{\Sigma(\pm F_i z_i)}{\Sigma(\pm F_i)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以上 (1), (2), (3) 三式乃爲定諸平行力中心點坐標之公式.

注意: 吾人曾假設: $\Sigma(\pm F_i)>0$

然若: $\Sigma(\pm F_i)<0$

時,亦完全相同.

128. 〔例題〕 設 F_1, F_2, F_3 三平行力,向下垂直作用於

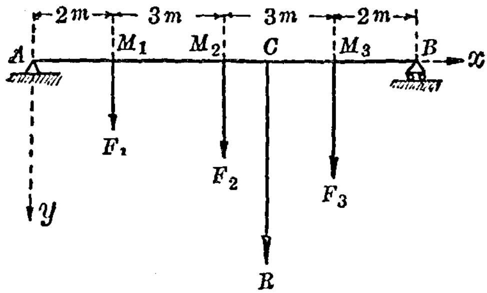


圖 117

AB 根之 M_1, M_2, M_3, 如圖 117, 已知:

$F_1=1$ 噸

$F_2=2$ 噸

$F_3=3$ 噸

$AM_1=2$ 米

$M_1M_2=3$ 米

$M_2M_3=3$ 米

$M_3B=2$ 米

試求其合力 R.

答: 合力 R 之大小爲:

$$R=1+2+3=6 \text{ 噸}$$

其方向與 F_1, F_2, F_3 三平行力之方向相同，今祇須求其施力點 C 之位置；亦卽 F_1, F_2, F_3 三平行力中心點之位置．因 F_1, F_2, F_3 三力之施力點均位於 AB 棍上，則中心點 C 亦位於 AB 棍上．今以 A 點爲原點，以 AB 直線爲 x 軸,則得諸平行中心點對於 x 軸之坐標 x_c 爲:

$$x_c=\frac{1\times2+2\times5+3\times8}{6}=6 \text{ 米}$$

故知合力 R 之施力點 C, 位於離點 A 右端六米之處．

第十一章

重　　心

129. 物體之重心及體積之重心　凡一物體近地面時，其所有分子 M_i 均受有垂直地面之地心吸力 p_i, 之作用如圖 118，此種作用於所有分子上之地心吸力，互成平行，其合力 P 卽爲物體之重量.

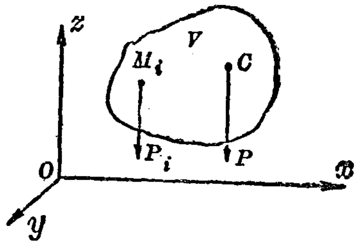


圖　118

$$P=\Sigma p_i$$

而此諸平行力 P_i 之中心點，名曰物體之重心，其在物體內之位置永不變更，無論物體在空間之位置爲何如，物體之重心之位置決不稍移也，今證明於下：

若旋轉此物體於任意位置時，則作用於其中所有分子 M_i 之地心吸力 p_i, 均仍作用於 M_i 點，而向地面垂直，決不稍有變更，但從物體方面視之，則此諸平行力 p_i, 均以其作用之 M_i 點爲中心，而互成平行之旋轉也. 在前章已知若諸平行力作如此旋轉時，其中心點恆不變，故物體在空間任意旋轉時

其重心之位置永不移動。

至於物體重心之位置，則可用平行力中心點坐標之法定之，設圖 118 中之重心 C 點，在 x, y, z 三垂直軸上之坐標爲 x_c, y_c, z_c，而物體中任意分子 M_i 之坐標爲 x_i, y_i, z_i，則可得下列諸式：

$$x_c = \frac{\Sigma p_i x_i}{\Sigma P_i} = \frac{\Sigma p_i x_i}{P}$$

$$y_c = \frac{\Sigma p_i y_i}{\Sigma P_i} = \frac{\Sigma p_i y_i}{P}$$

$$z_c = \frac{\Sigma p_i z_i}{\Sigma P_i} = \frac{\Sigma p_i z_i}{P}$$

其中之和乃整個物體中之分子。

若所取之物體爲一勻稱體，即其中任意一小部份之密度均相同之物體，設以 Δv_i 表勻稱體中任意一分子 M_i 之體積，則 $\frac{P_i}{\Delta v_i}$ 之值爲一常數，假設：

$$\frac{p_i}{\Delta v_i} = \omega$$

則：

$$P_i = \omega \cdot \Delta v_i$$

而勻稱體之重量 P 與其體積 V 有下列之關係：

$$P = \Sigma p_i = \Sigma \omega \Delta v_i = \omega \Sigma \Delta v_i = \omega V$$

當勻稱體之體積爲單位體積時，即：

$$V = 1$$

則：

$$P=\omega$$

故 ω 乃匀稱體中每一單位體積之重量，而其物體重心坐標之公式爲：

$$x_c=\frac{\Sigma\,p_i\,x_i}{P}=\frac{\Sigma\,\omega x_i\,\Delta v_i}{\omega V}=\frac{\omega\,\Sigma\,x_i\,\Delta v_i}{\omega V}=\frac{\Sigma\,x_i\,\Delta v_i}{V}$$

同理：

$$y_c=\frac{\Sigma\,y_i\,\Delta v_i}{V}$$

$$z_c=\frac{\Sigma\,z_i\,\Delta v_i}{V}$$

在此三式中，可知 x_c, y_c, z_c 與常數 ω 毫無關係，僅與體積 V 發生關係，故此 C 點名之曰體積之重心。

130. 面積之重心及平面形之靜力矩　設一極薄金屬片之週界爲一任意曲線，其面積爲 S，如圖 119。因其厚薄甚爲

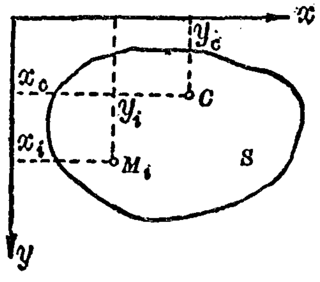


圖　119

微渺，故可忽略不計，且假設其爲一匀稱體。今取 x, y, z 三垂直軸（z 軸與 x, y 兩軸垂直，在圖中未曾示出）。以 M_i 表此金屬片之分子，其面積爲 Δs_i，其重量爲 p_i，而其 $\frac{p_i}{\Delta s_i}$ 之值乃一常

數，即：

$$\frac{p_i}{\Delta s_i}=\sigma$$

則： $$p_i=\sigma\cdot\Delta s_i$$

而此金屬片之全重量 P，與其完全面積 S，有下列之關係：

$$P=\Sigma\, p_i=\Sigma\,\sigma\Delta s_i=\sigma\,\Sigma\,\Delta s_i=\sigma\cdot S$$

若： $$S=1$$

則： $$P=\sigma$$

故 σ 爲此勻稱金屬片每一單位面積之重量，而其重心坐標之公式爲：

$$x_c=\frac{\Sigma\, p_i\, x_i}{P}=\frac{\Sigma\,\sigma\, x_i\Delta s_i}{\sigma S}=\frac{\sigma\,\Sigma\, x_i\Delta s_i}{\sigma S}=\frac{\Sigma\, x_i\Delta s_i}{S}$$

同理：

$$y_c=\frac{\Sigma\, y_i\Delta s_i}{S}$$

其中之 x_i, y_i 各爲 M_i 對於 x, y 兩軸之坐標，而 M_i 之和乃爲此勻稱金屬片所有分子之全體．然因此金屬片其厚薄甚微，在 z 軸之坐標 z_i 可忽略不計，故竟可書：

$$z_c=0$$

如此求得金屬片之重心之坐標，與常數 σ 毫無關係，僅與其面積 S 有關；故此重心名曰面積之重心．

此金屬片每一分子之面積 Δs_i 與其對於 y, x 兩軸距離 x_i, y_i 乘積之和 $\Sigma\, x_i\,\Delta s_i$ 及 $\Sigma\, y_i\,\Delta s_i$，爲此金屬片之平面形對

於 y, x 兩軸之靜力矩（其距離 x_i, y_i, 若在軸之一邊爲正值，則在軸之他邊爲負值），若以 M_y, M_x 分別表之，則：

$$\Sigma x_i \Delta s_i = M_y$$

$$\Sigma y_i \Delta s_i = M_x$$

而此平面形面積重心之坐標爲：

$$x_c = \frac{M_y}{S}$$

$$y_c = \frac{M_x}{S}$$

從此兩式中，若已知平面形之靜力矩，則可求其面積重心之位置，反之，若已知面積重心之位置，則可求平面形之靜力矩．因：

$$M_x = Sy_c$$

$$M_y = Sy_c$$

131. 長度之重心　設有一甚細之曲線 L, 其截面爲圓形，且各部份均勻稱，如圖 120, 因此線甚細，故其粗細可視之爲各段均等，且可忽略不計，而其截面軌（卽各截面圓心之軌跡）亦與線之本身合一．今以 M_i 表其中之分子，此分子佔據之長度則以 Δl_i 表之，而其重量則以 p_i 表之，因此線爲勻稱體，則 $\frac{p_i}{\Delta l_i}$ 之值可等於一常

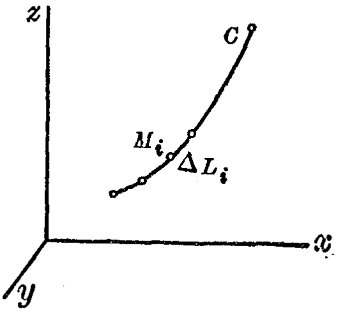


圖　120

數 ρ:

$$\frac{p_i}{\Delta l_i}=\rho$$

卽:

$$p_i=\rho\cdot\Delta l_i$$

則此線之完全重量 P, 與其全長 L 之關係爲:

$$P=\Sigma\, p_i=\Sigma\,\rho\,\Delta l_i=\rho\,\Sigma\,\Delta l_i=\rho L$$

若:

$$L=1$$

則:

$$P=\rho$$

故 ρ 爲每一單位長度之重量.

若取 x, y, z 之垂直軸，則此線之重心對於 x, y, z 三軸之坐標爲:

$$x_c=\frac{\Sigma\, p_i\, x_i}{P}=\frac{\Sigma\,\rho\, x_i\,\Delta l_i}{\rho L}=\frac{\rho\,\Sigma\, x_i\,\Delta l_i}{\rho L}=\frac{\Sigma\, x_i\,\Delta l_i}{L}$$

同理:

$$y_c=\frac{\Sigma\, y_i\,\Delta l_i}{L}$$

$$z_c=\frac{\Sigma\, z_i\,\Delta l_i}{L}$$

其中之 x_i, y_i, z_i 乃 M_i 分子對於 x, y, z 三軸之坐標. 且因重心 C 之坐標與常數 ρ 毫無關係，僅與線之長度有關，故可名之曰長度之重心.

132, 重心及靜力矩之基本定法 諸重心坐標公式中之 $\Sigma p_i x_i$, $\Sigma x_i \Delta v_i$, $\Sigma x_i \Delta s_i$, 及 $\Sigma x_i \Delta l_i$ 等,乃代表物體中無窮個分子之重量,體積,面積及長度與坐標之積之和,須用微積分方法計算,但有時亦可用較簡方法確定之,玆列舉於後:

若體積有一對稱平面者,則此體積之重心必位於其對稱平面上. 設 P 平面爲已知 V 體積之對稱平面, 如圖 121. 作 x, y, z 三垂直軸,使 x, y 兩軸均位於 P 平面, 而 z 軸則垂直於此對稱平面, 今計算 V 體積重心 C 對於 z 軸之坐標 Z_c, 已知:

$$z_c=\frac{\Sigma z_i \Delta v_i}{V}$$

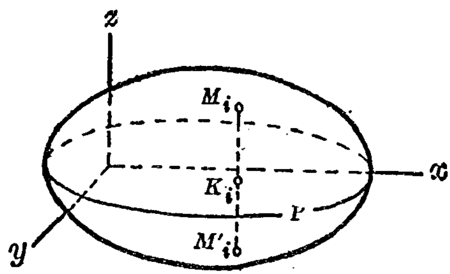


圖 121

z_i 乃 V 體積中 M_i 分子對於 z 軸之坐標, 而 Δv_i 則爲 M_i 分子之體積. 因 P 平面爲 V 體積之對稱平面, 故若從 M_i 點引一垂線 $M_i K_i$ 於 P 平面,且延長至 M'_i 點,使:

$$M_i K_i=K_i M'_i$$

則 M'_i 點亦必在 V 體積之內,其所佔居之體積亦爲 Δv_i. 但若以 x_i, y_i, z_i 分別表 M_i 對於 x, y, z 三垂直軸之坐標,則 M'_i 對於三同軸之坐標應分別爲 $x_i, y_i, -z_i$, 且在 $\Sigma z_i \Delta v_i$ 中 M_i 與 M'_i 諸分子之數相同,即 $\Sigma z_i \Delta v_i$ 可分爲兩部份, 此兩部份之

數值相等，而正負號相反，由此得：

$$\Sigma z_i \Delta v_i = 0$$

卽：

$$z_c = 0$$

故 V 之體積重心 C，必位於其對稱平面 P 上。

若體積有一對稱軸者，則此體積之重心必位於其對稱軸上。設 AB 直線為已知 V 體積之對稱軸，如圖 122. 作 x, y, z 三垂直軸，使 z 軸卽位於對稱軸上，今計算 V 體積重心 C 點對於 x, y 兩軸之坐標 x_c, y_c，已知：

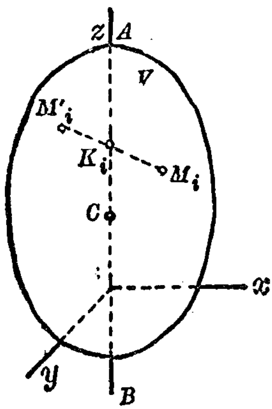


圖 122

$$x_c = \frac{\Sigma x_i \Delta v_i}{V}$$

$$y_i = \frac{\Sigma y_i \Delta v_i}{V}$$

x_i, y_i 分別為 V 體積中 M_i 分子對於 x, y 兩軸之坐標，而 Δv_i 則為 M_i 所佔之體積。因 z 軸為 V 體積之對稱軸，故若從 M_i 點作 $M_i K_i$ 垂直線於其上並延長至 M'_i 點，使：

$$M_i K_i = K_i M'_i$$

則 M'_i 點亦必在 V 體積之內，其體積亦為 Δv_i. 惟若以 x_i, y_i, z_i 分別表 M_i 之坐標，則 M'_i 之坐標應為 $-x_i, -y_i, z_i$；且在 $\Sigma x_i \Delta v_i$ 及 $\Sigma y_i \Delta v_i$ 中之各 M_i 與 M'_i 分子可分為兩部份，其

分子之數值相等，而對 z 軸之方向相反，故：

$$\Sigma x_i \Delta v_i = 0$$

$$\Sigma y_i \Delta v_i = 0$$

卽：

$$x_c = 0$$

$$y_c = 0$$

故 V 體積之重心 C 點，必位於 AB 對稱軸上。

同理若面積或長度有對稱軸者，則其面積或長度之重心，必位於其對稱軸上；且有時亦可定其平面形之靜力矩。設欲求 S 面積之重心 C 點之位置，如圖 123. 已知若分此 S 面積爲 S_1, S_2, S_3 三部份，則其各部份之重心 C_1, C_2, C_3 三點，爲三已知點，今取 x, y 兩軸（位於同一 S 平面上），並以 M_x M_y 表 S 平面形對於 x, y 兩軸之靜力矩，x_c，y_c 表面積重心 C 點之坐標，則已知：

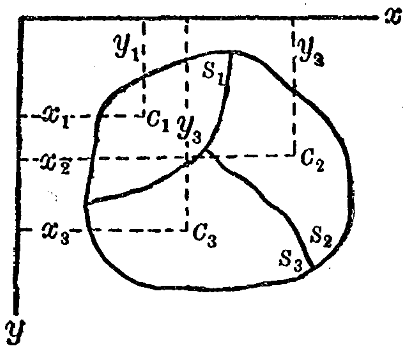


圖　123

$$x_c = \frac{M_y}{S}$$

$$y_c = \frac{M_x}{S}$$

若 S_1, S_2, S_3 三平面形對於 x, y 兩軸之靜力矩各爲 M'_x, M'_y,

M'''_x 及 M'_y, M''_y, M'''_y, 則：

$$M_x=M'_x+M''_x+M'''_x$$
$$M_y=M'_y+M''_y+M'''_y$$

另一方面，若 C_1, C_2, C_3 三點之坐標分別爲 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 及 (x_3, y_3), 則：

$$M'_x\ =S_1\,y_1$$
$$M''_x=S_2\,y_2$$
$$M'''_x=S_3\,y_3$$
$$M'_y\ =S_1\,x_1$$
$$M''_y=S_2\,x_2$$
$$M'''_y=S_3\,x_3$$

故：

$$M_x=S_1\,y_1+S_2\,y_2+S_3\,y_3$$
$$M_y=S_1\,x_1+S_2\,x_2+S_3\,x_3$$

如此則可得 S 平面形之靜力矩，至於 x_c 及 y_c 復可用下式求之：

$$x_c=\frac{S_1\,x_1+S_2\,x_2+S_3\,x_3}{S}$$
$$y_c=\frac{S_1\,y_1+S_2\,y_2+S_3\,y_3}{S}$$

今舉數例以明之。

133　〔例題一〕　試定 Z 式截面對於 ab 軸之靜力矩，如圖 124，各部份距離均在圖中表示之，不再另述。

答：若分此Z式截面爲三矩形，則每一矩形之面積及其重心之位置，均可直接求得（按矩形之重心，乃位於其中心點上）。今代入上列之兩靜力矩公式中，則得：

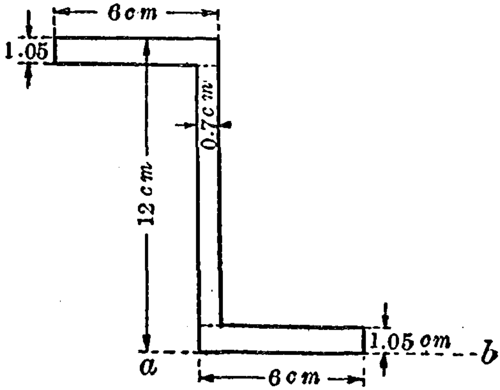


圖　124

$$M_{ab}=1.05\times6\left(12-\frac{1.05}{2}\right)+(12-2.1)\times0.7\left(\frac{12}{2}\right)$$
$$+1.05\times6\left(\frac{1.05}{2}\right)$$

$$\therefore\quad M_{ab}=6.3\times11.475+6.93\times6+6.3\times0.525$$
$$=117.18\text{ 厘米}^3$$

〔例題二〕　試定L式截面之重心C點之位置，如圖125，各部份之距離，均在圖中表出，不再另述。

答：以L形兩外界作x, y兩垂直軸，並分此形爲兩矩形，則得：

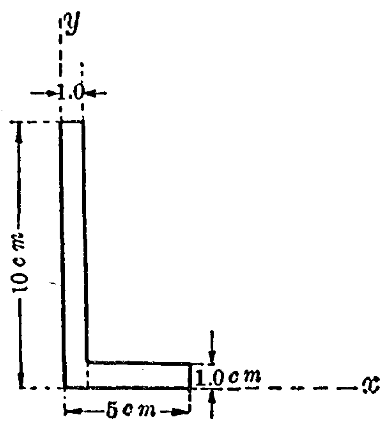


圖　125

$$x_c=\frac{10\times 0\ 5+4\times 3}{10+4}=\frac{17}{14}=1.21\text{厘米}.$$

$$y_c=\frac{10\times 5+4\times 0.5}{10+4}=\frac{52}{14}=3.71\text{厘米}.$$

且可用此法以求體積重心之位置及長度之重心.

134. 戈爾登第一定理 在某種情形之下，吾人可應用戈爾登之兩定理求面積及長度之重心，今分述如下：

設有一 AB 曲線所圍成之平面形，其面積為 S，如圖 126. 今在其同一平面上作一任意 z 軸，而使此平面形以 z 軸為主軸而旋轉，則 AB 曲線之軌跡形成一旋轉面積，而此面積圍成之體，名曰**旋成體**. 茲設法求其體積 V.

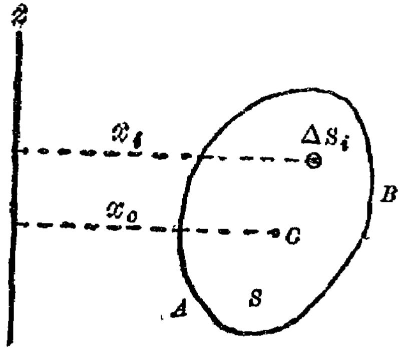


圖 126

先分 AB 曲線圍成之面積 S 為無窮個分子，每分子之面積為 Δs_i. 當 AB 曲線依 z 軸旋轉時，則每一小面積 Δs_i 亦同樣旋轉，其軌跡為一圓環，其半徑卽 z 軸與此小面積 Δs_i 之距離 x_i. 故所求之體積 V，等於此無窮個小面積 Δs_i 旋轉而成諸小圓環體積之和. 而每一小面積 Δs_i 旋轉而成之小圓環之體積，等於 $2\pi\, x_i\, \Delta s_i$，則所求之體積為：

$$V=\Sigma\, 2\pi\, x_i\, \Delta s_i=2\pi\, \Sigma\, x_i\, \Delta s_i$$

再設 S 面積之重心 C 點與 z 軸之距離為 x_0，則在前已

知：

$$x_c=\frac{\Sigma x_i \Delta s_i}{S}$$

卽：

$$\Sigma x_i \Delta s_i = x_c S$$

$$\therefore \quad V=2\pi x_c S$$

由此可知 S 面積依 z 軸旋轉後所成旋成體之體積，等於 S 面積與其重心旋轉後所成圓周長度之乘積，此卽爲戈爾登之第一定理．若已知 S 面積重心之位置，則可用以計算 V 體積之值．反之，若已知 S 面積依 z 軸旋轉後所成旋成體之體積 V，卽可定 S 面積重心之位置．例如今欲定 AMB 半圓形所圍成 S 面積之重心 C 點之位置，如圖 127．因 OM 半徑垂直於 AB 直徑，則可爲此面積之對稱軸，而其重心 C 點，必位於此半徑上，今祇須求 $OC=x_c$ 之值．

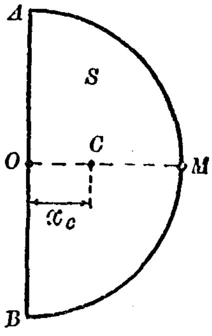


圖　127

若此半圓形依 AB 軸而旋轉，則所成之旋轉面積爲一圓球面積；以 V 表此圓球之體積，其半徑卽 AB 之半，以 R 表之，則：

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

同時已知之 S 面積，等於此圓面積之半：

$$S=\frac{1}{2}\pi R^2$$

從戈爾登第一定理，得：

$$x_c=\frac{V}{2\pi S}=\frac{4}{3\pi}R=0.4244R$$

135. 戈爾登第二定理 設一曲線 AB 之長度為 L，如圖 128，作一 z 軸於 AB 曲線之平面上，若此 AB 曲線依 z 軸而旋轉，則得一旋轉側面積 S，今分 AB 曲線成無窮個分子，每分子之長度為 Δl_i；當 AB 依 z 軸在旋轉時，則其中每一小分子均作同樣旋轉，而所成諸小旋轉側面積之和等於 S，且既因 Δl_i 甚為微渺，則可以一直線段視之。而每一小分子旋轉所成之側面積，均可視作一正直旋轉圓錐體之側面積，故等於 $2\pi\ x_i\ \Delta l_i$，其中之 x_i，乃 Δl_i 分子對於 z 軸之距離，則 AB 曲線旋轉後之側面積 S 為：

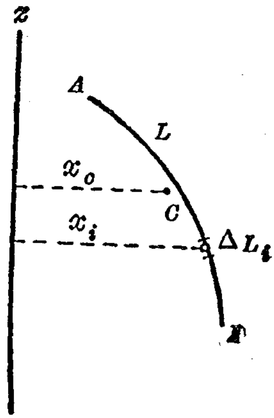


圖 120

$$S=\Sigma\, 2\pi\ x_i\ \Delta l_i=2\pi\ \Sigma\ x_i\ \Delta l_i$$

再若 AB 曲線之重心 C 點與 z 軸之距離為 x_c，則：

$$x_c=\frac{\Sigma\ x_i\ \Delta l_i}{L}$$

即：

$$\Sigma\ x_i\ \Delta l_i=x_c\ L$$

$$\therefore\quad S=2\pi\ x_c\ L$$

故 AB 曲線之旋轉側面積，等於 AB 曲線之長度 L 與其長度重心所成旋轉圓周之積．此即戈爾登之第二定理，吾人可以之求長度重心之位置．例如欲定 AMB 半圓周之長度重心C點之位置，如圖129.因 OM 半徑垂直於直徑 AB，則長度重心 C 點，必在 OM 對稱軸上．今使 AMB 半圓周依 AB 軸而旋轉，則得一圓球之面積 S，其半徑 $OM=R$，則：

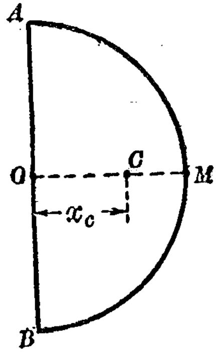


圖　129

$$S=4\pi R^2$$

而 AMB 半圓周之長度 L 爲：

$$L=\pi R$$

設 x_c 表長度之重心 C 點與 z 軸之距離，則得：

$$x_c=\frac{S}{2\pi L}=\frac{2}{\pi}R=0.6366\ R$$

136. 普通各種幾何形之重心

(1)　三角形之重心　設欲求三角形 ABC 之重心，如圖130，今以諸平行於 AB 底邊之直線，分此三角形爲無窮個狹帶，其闊狹則甚爲微渺，而此諸狹帶之重心，均位於自 C 頂至 AB 底之中線CM上，故知 ABC 全三角形之重心，亦必位於 CM 中線上，但同時可云此重心位於其他兩中線上，故知其必位於其三中線之交點上．所以知重心位於 CM 上距 M 點

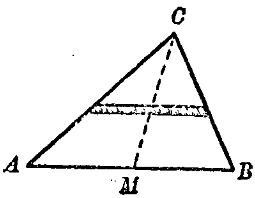


圖　130

於 $\frac{1}{3}CM$ 處。

(2) 梯形之重心 設欲求梯形 $ACDB$ 之重心，如圖 131，已知 $AB=a, CD=b$，h 爲此梯形之高，今以平行上下兩底之

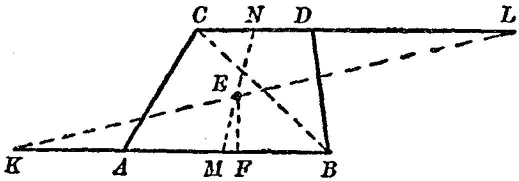


圖 131

諸直線，分此梯形成無窮個狹帶，其闊狹則甚爲微渺，而每一狹帶之重心均位於 AB, CD 兩中點之聯線 MN 上，故知完全梯形之重心，亦必位於 MN 線上。

今再求其與 AB 底之距離 y_c 之値。以 BC 聯線分此梯形爲兩三角形 ABC 及 BCD，設其面積各爲 S_1 及 S_2，而其每一重心對於 AB 之距離爲 y_1 及 y_2，則：

$$y_c=\frac{S_1\,y_1+S_2\,y_2}{S_1+S_2}$$

但：

$$S_1=\frac{ah}{2}, \qquad S_2=\frac{bh}{2}$$

$$y_1=\frac{h}{3}, \qquad y_2=\frac{2h}{3}$$

$$\therefore\quad y_c=\frac{\dfrac{ah^2}{6}+\dfrac{2bh^2}{6}}{\dfrac{ah}{2}+\dfrac{bh}{2}}=\frac{h(a+2b)}{3(a+b)}$$

故知梯形之重心位於 MN 線上，與 AB 底之距離為 y_0.

此重心點復可用下法定之：

延長 $\overline{AB}$ 至 K 點，$\overline{CD}$ 至 L 點，使 $\overline{AK}=b$, $\overline{DL}=a$. 再聯 KL 直線，此 KL 聯線與 MN 線之交點 E, 即為所求之重心 C. 茲證明之於下：

從 E 點作 EF 垂線於 AB 底上，則：

$$\frac{\overline{EF}}{h}=\frac{\overline{EM}}{\overline{MN}}$$

即：

$$\overline{EF}=h\frac{\overline{EM}}{\overline{MN}}$$

再：

$$\because \quad \triangle KEM \sim \triangle LEN$$

則：

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{EN}}=\frac{\overline{KM}}{\overline{LN}}=\frac{\frac{a}{2}+b}{a+\frac{b}{2}}=\frac{a+2b}{2a+b}$$

但：

$$\overline{EN}=\overline{MN}-\overline{EM}$$

則：

$$\frac{\overline{EM}}{\overline{MN}-\overline{EM}}=\frac{a+2b}{2a+b}$$

即：

$$\overline{EM}=\overline{MN}\frac{a+2b}{3(a+b)}$$

$$\therefore \quad \overline{EF}=\frac{h(a+2b)}{3(a+b)}=y.$$

故 E 點即為梯形 $ACDB$ 之重心。

(3) 圓弧之重心 設欲求 $\widehat{AB}$ 弧之重心，其圓心為 O 點，半徑為 R，如圖 132. 因 OM 半徑經過 $\widehat{AB}$ 弧之中點，故即為 $\widehat{AB}$ 弧之對稱軸，而 $\widehat{AB}$ 之重心 C 點，必位於 $\overline{OM}$ 半徑上．今分 $\widehat{AB}$ 弧成無窮個小線段 Δl_i，再以 O 點為原點，OM 為 x 軸，則 Δl_i 小線段中點 D_i 之橫標為 x_i，復設 $OC=x_c$，可得：

$$(OE_i=x_i)$$

$$x_c=\frac{\Sigma x_i\,\Delta l_i}{L}$$

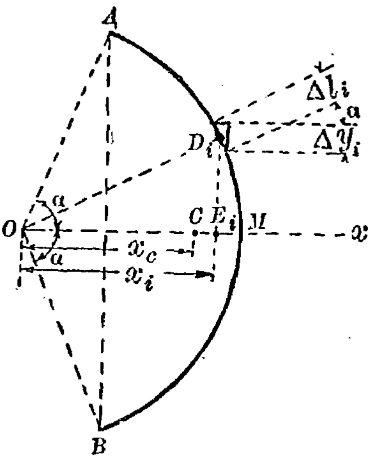


圖 132

其中之 L 乃 $\widehat{AB}$ 弧之長度，$\Sigma x_i\,\Delta l_i$ 乃所有小線段 Δl_i 對 x 軸之坐標之積之和，今計算之於下：

從 Δl_i 小線段兩端引兩直線，一與 $\overline{AB}$ 弦平行，一與 $\overline{AB}$ 弦垂直，則得一小直三角形（因 Δl_i 之長度甚為微渺，故可以直線段計之），其與 $\overline{AB}$ 弦平行之邊之長度，以 Δy_i 表之；此小直三角形與直三角形 $OD_i\,E_i$ 相似，則得：

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta l_i}=\frac{\overline{OE_i}}{\overline{OD_i}}=\frac{x_i}{R}$$

即：

$$x_i \Delta l_i = R \Delta y_i$$

$$\therefore \quad x_c = \frac{\Sigma R \Delta y_i}{L} = \frac{R}{L} \Sigma \Delta y_i$$

但所有小邊 Δy_i 之和，等於 $\overline{AB}$ 弦之長度，今以 S 表之，則：

$$x_c = R \frac{S}{L}$$

如此則已定得重心 C 點之位置，而所得之結果，復可以圓心角表之。設 $\angle AOB = 2\alpha$，則：

$$L = 2R\alpha$$

$$S = 2R \sin\alpha$$

$$\therefore \quad x_c = R \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

今以此式定半圓周之重心，因半圓周所包含之圓心角等於 π，即 (180°)，則 $\alpha = \frac{\pi}{2}$，故：

$$x_c = \frac{2}{\pi} R$$

此所得之結果，與從戈爾登第二定理中所得者無二。

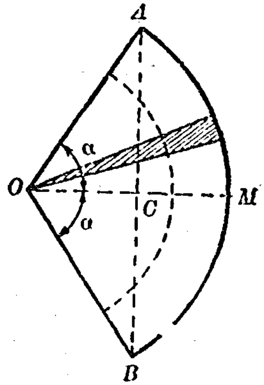


圖　133

(4)　**扇形之重心**　設欲求 OA，OB 兩半徑及 AB 弧所組成扇形之重心，如圖 133. 已知其半徑為 R，今從圓心 O 點引無窮半徑，則得無窮個小扇形，此種小扇形可當作小三角形視之，因每一小扇形之弧甚

短，可視作直線段故也．故每一小扇形之重心，均距 O 點於 $\frac{2}{3}R$ 處，則完全扇形之重心，與以 O 點爲圓心，$\frac{2}{3}R$ 爲半徑，所成圓弧之重心合於一點．故重心 C 點必位於可作對稱軸之 OM 半徑上，與圓心 O 點之距離爲：

$$\overline{OC}=\frac{2}{3}R\frac{S}{L}=\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

其中之 S，乃 $\overline{AB}$ 弦之長度，L 乃 $\overline{AB}$ 弧之長度，α 則爲圓心角 AOB 之半．

若爲半圓形時，則 $\angle\alpha=\frac{\pi}{2}$，故：

$$\overline{OC}=\frac{4}{3\pi}R$$

所得之結果，與前戈爾登第一定理中所得者無二．

(5) **弓形之重心** 設欲求以 AB 弦及 AMB 圓弧所組成弓形之重心，如圖 134，已知其圓心爲 O 點，半徑爲 R．今從 O 點引 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$ 兩半徑，則得一扇形 OAB．而 $\overline{AB}$ 弦適分此扇形爲兩部份，一爲三角形 OAB，一爲弓形 AMB，設 C 爲弓形之重心，C_1 爲三角形之重心，C_2 爲扇形之重心，此三點均位於垂直 $\overline{AB}$ 弦之對稱軸 OM 半徑上，再以 x，x_1，x_2 分別表 C，C_1，C_2 三與圓心 O 點之距離，則：

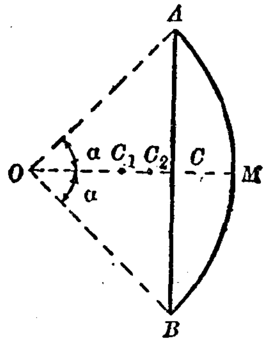


圖 134

$$x_2=\frac{Sx+S_1x_1}{S_2}$$

其中之 S 表弓形之面積，S_1 表三角形 OAB 之面積，S_2 表扇形 OAB 之面積，卽：

$$x=\frac{S_2x_2-S_1x_1}{S}=\frac{S_2x_2-S_1x_1}{S_2-S_1}$$

但：

$$S_1=R^2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$S_2=R^2\alpha$$

$$x_1=\frac{2}{3}R\cos\alpha$$

$$x_2=\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

(α 等於圓心角 AOB 之半)

$$\therefore\quad x=\frac{\frac{2}{3}R^3\sin\alpha-\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\cos^2\alpha}{R^2\alpha-R^2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{2}{3}R\frac{\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$$

此式卽可定弓形之重心 C 點與圓心 O 點之距離。

137. 用向徑多角形法以定重心　面積之重心，亦可用圖解法確定之，普通卽用向徑多角形法。今舉一例以解釋之。設欲定 S 面積之重心，其形狀如圖 135 中所示者然。今分此 S 面積爲三矩形，其重心 C_1, C_2, C_3 三點均甚易定得，可當作已知。玆假設在此 C_1, C_2, C_3 三點，有 P_1, P_2, P_3 三垂直重力

作用於其上，與 S_1, S_2, S_3 分別成正比例，此三平行力之中心點，卽所求 S 面積之重心。

吾人在前已知此三平行力之中心點，必位於其合力

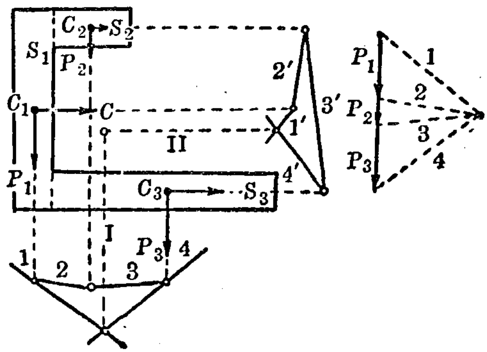


圖　135

之作用線上，今用向徑多角形法定 P_1, P_2 P_3 三平行力合力之作用線。分別作 P_1, P_2, P_3 三力之多角形，及 1, 2, 3, 4 諸向徑，並此四向徑所成之向徑多角形，經過此多角形外頂（卽 1, 4 兩極徑之交點）之垂直線 I，卽 P_1, P_2, P_3 三力合力之作用線。依平行力中心點之性質，可使此 P_1, P_2, P_3 三平行力各以其施力點 C_1, C_2, C_3 爲中心，向右旋轉一直角，再求其合力之作用線 II，此直線 II 與前所得直線 I 之交點 C，卽爲此諸平行力之中心點。

注意：此旋轉後 P_1, P_1, P_3 三力合力之作用線，不必再作新向徑多角形，祇須使每邊分別與先前力之多角形中 1,2,3,4 四向徑垂直，而經過其外頂之水平線，卽合力之作用線 II 也。其與直線 I 之交點，卽爲所求 S 面積之重心 C 點之位置。而所用之法，卽爲向徑多角形法，可用以求複雜形狀面積之重心。

理論靜力學

二十九年六月初版　　三十六年一月再版

每冊定價國幣二元

原著者　E. L. Nekolae

譯述者　何志奇　陳毓晉

發行者　開明書店
代表人范洗人

印刷者　開明書店

(94 P.) Y　　靜