代數六百難題詳解

駱師存編

新文化服務社印行

數六百難題詳解目次

代數六百難題詳解

(一) 代數式及一次方程式之題解

[1] 設 $a=1, b=2, c=-3$，求 $a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$ 之值。

解 $a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)=1+8+(-27)+3\times(2-3)(-3+1)(1+2)$
$=1+8-27+3\times(-1)\times(-2)\times(3)=1+8-27+18=0$

[2] 設 $a=1, b=2, c=3, d=4, e=5$，

求 $\dfrac{8a^2+3b^2}{a^2b^2}+\dfrac{4c^2+6b^2}{c^2-b^2}-\dfrac{c^2+d^2}{e^2}$ 之值。

解 $\dfrac{8a^2+3b^2}{a^2b^2}+\dfrac{4c^2+6b^2}{c^2-b^2}-\dfrac{c^2+d^2}{e^2}=\dfrac{8+3\times4}{4}+\dfrac{4\times9+6\times4}{9-4}-\dfrac{9+16}{25}=\dfrac{20}{4}+\dfrac{36+24}{5}-\dfrac{25}{25}=5+12-1=16.$

[3] 設 $b=10, y=5$，求 $6b-8y\div2y\times b-2b$ 之值。

解 $6b-8y\div2y\times b-2b$
$=6\times10-(8\times5)\div(2\times5)\times10-2\times10=60-40\div10\times10-20=60-40-20=0$。

[4] $(3ab^2-2b^3+a^3)+(5a^2b-ab^2-3a^3)+(8a^3+5b^3)+(9a^2b-2a^3+ab^2)=?$

解　先把同類項依乘冪的次序排成縱行，附以原來的符號，再行計算：

$$
\begin{array}{rrrr}
-2b^2 & +3ab^2 & & +a^3 \\
 & -ab^2 & +5a^2b & -3a^3 \\
5b^2 & & & +8a^3 \\
+) & ab^2 & +9a^2b & -2a^3 \\
\hline
3b^2 & +3ab^2 & +14a^2b & +4a^3
\end{array}
$$

[5]　求下列各式之和：

$x^3+3x^2y-3xy^2+y^3$，

$xy^2-x^3+y^3+x^2y$，及

$8x^3-7x^2y$。

解

$$
\begin{aligned}
&(x^3+3x^2y-3xy^2+y^3)\\
&+(xy^2-x^3+y^3+x^2y)\\
&+(8x^3-7x^2y)\\
&=8x^3-3x^2y-2xy^2+2y^3.
\end{aligned}
$$

[6]　設 $a=1, b=2, c=-1$，則 $-a+b-c$ 之值如何。

解　$-a+b-c=-1+(-2)-(-1)=1-2+1=-2$。

[7]　演下列乘法：

$(x^2+4x+4)(x^2-4x+4)$。

解

$$
\begin{array}{r}
x^2+4x+4 \\
x^2-4x+4 \\
\hline
-4x^2+16x+16
\end{array}
$$

$$-4x^3-16x^2-16x$$

$$x^4+4x^3+4x^2$$

$$\overline{x^4\qquad -8x^2\qquad +16}$$

答: $(x^2+4x+4)(x^2-4x+4)$

$$=x^4-8x^2+16。$$

[8] 簡約 $\left\{(x^{3ab})^5\times(x^{5b})^{-2}\right\}^{\frac{1}{3a-2}}$

解 $\left\{(x^{3ab})^5\times(x^{5b})^{-2}\right\}^{\frac{1}{3a-2}}$

$$=\left\{x^{15ab}\times x^{-10b}\right\}^{\frac{1}{3a-2}}$$

$$=\left\{x^{15ab-10b}\right\}^{\frac{1}{3a-2}}=x^{\frac{15ab-10b}{3a-2}}$$

$$=x^{\frac{5b(3a-2)}{3a-2}}=x^{5b}$$

[9] 化 $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$ 為簡式。

解 $\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$

$$=\frac{1}{x-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{x}}}-\frac{1}{x+\dfrac{1}{x-\dfrac{1}{x}}}$$

$$=\frac{1}{x-\dfrac{x}{x^2+1}}-\frac{1}{x+\dfrac{x}{x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}}-\frac{1}{\dfrac{x(x^2-1)+x}{x^2-1}}$$

$$=\frac{x^2+1}{x^3+x-x}-\frac{x^2-1}{x^3-x+x}=\frac{x^2+1-x^2+1}{x^3}$$

$$=\frac{2}{x^3}$$

[10] 化簡 $\dfrac{3x+3x^{-1}-6}{x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}}$

解 $\dfrac{3x+3x^{-1}-6}{x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}}$

$$=\frac{3x-3x^{-1}+6x^{-1}-6}{x^{\frac{3}{2}}-x^{-\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)-6\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)-3x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{3x\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)-6\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-3x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{3x\left(1+\frac{1}{x}\right)-6}{x^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}-3x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3x+3-6}{x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3x-3}{x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3x-3}{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3(x-1)}{x^{\frac{1}{2}}(x-1)}=x^{-\frac{1}{2}}$$

【11】 試將 $x^3+(3xy+y^3-1)-[x^3-(y^3-1)]$ 化爲簡式。

解 $x^3+(3xy+y^3-1)-[x^3-(y^3-1)]=x^3+3xy+y^3-1-x^3+y^3-1=2y^3+3xy-2$。

【12】 試將 $1-[1-(2-x)]+[4x-(3-6x)]+[4-(6x-5)]$ 化爲簡式。

解 $1-[1-(2-x)]+[4x-(3-6x)]+[4-(6x-5)]$

$=1-[1-2+x]+[4x-3+6x]+[4-6x+5]$

$=1-[x-1]+[10x-3]+[-6x+9]$

$=1+1-x+10x-3-6x+9=3x+8$。

【13】 $(2x-3y)(4x-7y)=?$

解 照算術的方法，排列被乘數和乘數，再計算：

$$\begin{array}{rl} & 2x-3y \\ \times) & 4x-7y \\ \hline & 8x^2-12xy \\ & \qquad -14xy+21y^2 \\ \hline & 8x^2-26xy+21y^2 \end{array}$$

[14] $(x^3+x^4-16x-4-9x^2)\div(4+x^2+4x)=?$

解 先依降冪序排列，再用分離係數法：

$$\begin{array}{r|l} 1+1-9-16-4 & 1+4+4 \\ \cline{2-2} 1+4+4\qquad\quad & 1-3-1 \\ \cline{1-1} -3-13-16 & \\ -3-12-12 & \\ \cline{1-1} -1-4-4 & \\ -1-4-4 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$\therefore$ 商 $=x^2-3x-1$.

[15] 設 $a=9$, $b=12$, $c=15$, 及 $2s=a+b+c$ 時

則 $\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}$ 之值如何？

解 $2s=a+b+c=9+12+15=36$, 故 $s=18$

據此 $\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}=\sqrt{\dfrac{18.9}{9.3}}=\sqrt{3^2}=3.$

[16] 設 $a=-1$, $b=-2$, $c=-3$, 則

$\{a-(b-c)\}^2+\{b-(c-a)\}^2+\{c-(a-b)\}^2=?$

解 原式 $=(a-b+c)^2+(b-c+a)^2+(c-a+b)^2$

$=\{-1-(-2)+(-3)\}^2+\{-2-(-3)+(-1)\}^2+\{-3-(-1)+(-2)\}^2=(-1+2-3)^2+(-2+3-1)^2+(-3+1-2)^2=(-2)^2+0^2+(-4)^2=4+16=20$。

[17] 設 $3x=a+b+c$ 求下列之值：

$(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3+3(x-a)(x-b)(x-c)$.

解 原式可變化如下：

$$\frac{1}{2}\{(x-a)+(x-b)+(x-c)\}\times\Big[\{(x-a)-(x-b)\}^2+\{(x-b)-(x-a)\}^2+\{(x-c)-(x-a)\}^2\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\{3x-(a+b+c)\}\Big[(b-a)^2+(c-a)^2+(a-c)^2\Big].$$

而$3x=a+b+c$,故$3x-(a+b+c)=0$. 由此得原式等於0。

[18] 自 $2n-(3n-\overline{2m-n})$ 減去 $2m-(3m-\overline{2n-m})$。

解 $\Big[2n-(3n-\overline{2m-n})\Big]-\Big[2m-(3m-\overline{2n-m})\Big]$

$=2n-(3n-2m+n)-[2m-(3m-2n+m)]$

$=2n-(4n-2m)-2m+(4m-2n)$

$=2n-4n+2m-2m+4m-2n=4m-4n.$

[19]　求x^4-2x^2+x-3與x^4-x^3-x-3之積。

解

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr}
 & & x^4 & & -2x^2 & +x & -3 & & \\
 & & x^4 & +x^3 & & -x & -3 & & \times \\
\hline
x^8 & & -2x^6 & +x^5 & -3x^4 & & & & \\
 & +x^7 & & -2x^5 & +x^4 & -3x^3 & & & \\
 & & & -x^5 & & +2x^3 & -x^2 & +3x & \\
 & & & & -3x^4 & & +6x^2 & -3x & +9 \\
\hline
x^8 & +x^7 & -2x^6 & -2x^5 & -5x^4 & -x^3 & +5x^2 & & +9
\end{array}
$$

[20]　化$\dfrac{\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}}{1-\dfrac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$為簡式。

解

$$\frac{\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}}{1-\dfrac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$$

$$=\frac{(1+bc)(a-b)+(1+ab)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)-(a-b)(b-c)}$$

$$=\frac{b^2(a-c)+(a-c)}{b^2(ac+1)+(ac+1)}$$

$$=\frac{(b^2+1)(a-c)}{(b^2+1)(ac+1)}$$

$$=\frac{a-c}{ac+1}$$

[21] [illegible]

$$x+(3m-1)y=0,\ x+2y=m-4.$$

解 $x+(3m-1)y=0$ ……………………(1)

$x+2y=m-4$ ……………………(2)

(2)−(1) $x+2y=m-4$

$$\frac{x+(3m-1)y=0}{(3-3m)y=m-4,}$$

$y=\dfrac{m-4}{3(1-m)}$；以y之值代入(2)

$$x=m-4-2\times\frac{m-4}{3(1-m)}$$

$$=\frac{15m-12-3m^2-2m+8}{3(1-m)}$$

$$=\frac{3m^2-13m+4}{3(m-1)}=\frac{(3m-1)(m-4)}{3(m-1)}$$

故 $x=\dfrac{(3m-1)(m-4)}{3(m-1)},\ y=\dfrac{m-4}{3(1-m)}$.

[22] 解次之各聯立方程式

$$3x-2y+1=0,\ -4x+7y=23$$

解 $3x-2y=-1$ ……………………(1)

$-4x+7y=23$ ……………………(2)

[23] $(b+c)x+(b-c)y=2ab,\ (c+a)x+(c-a)y=2ac.$

解 $(b+c)x+(b-c)y=2ab$ ……………(1)

$(c+a)x+(c-a)y=2ac$ ……………(2)

(1)以$c-a$，(2)以$b-c$乘之，邊邊相減。

$$\{(b+c)(c-a)-(c+a)(b-c)\}x=2ab(c-a)-2ac(b-c),$$

即 ……$(c^2-ab)x=a(c^2-ab)$，故以c^2-ab除兩邊，

得　$x=a, y=a$。

[24]　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$。

解　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ……………………………(1)

$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ ……………………………(2)

(1)，(2)邊數相加　$x+y=\frac{2ab}{a+b}$ ……………(3)

(1)，(2)邊數相加　$x-y=0$ ……………………(4)

由(3)，(4)得　$x=\frac{ab}{a+b}$ 及 $y=\frac{ab}{a+b}$。

[25]　$11x-3x-5x+7x$。

解　$11x-3x-5x+7x=10x$。

[26]　$11b-5b+3b-b$。

解　$11b-5b+3b-b=8b$。

[27]　$7ab-3ab-5ab+2ab$。

解　$7ab-3ab-5ab+2ab=ab$。

[28]　$11x^2-9x^2+3x^2-4x^2$。

解　$11x^2-9x^2+3x^2-4x^2=x^2$。

[29]　$7a^3+8a^3-3a^3+11a^3-9a^3$。

解　$7a^3+8a^3-3a^3+11a^3-9a^3=14a^3$。

[30] $4a^2b^2-a^2b^2-7a^2b^2+5a^2b^2$。

解 $4a^2b^2-a^2b^2-7a^2b^2+5a^2b^2=a^2b^2$。

[31] $7abcd-11abcd+41abcd-2abcd$。

解 $7abcd-11abcd+41abcd-2abcd=35abcd$。

[32] $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+x-\frac{2}{3}x$。

解 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+x-\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}x$。

[33] $\frac{x}{18}=\frac{9}{42}$。

解 $\frac{x}{18}=\frac{9}{42}$, $x=3\frac{6}{7}$。

[34] $\frac{4}{3x}=\frac{16}{27}$。

解 $\frac{4}{3x}=\frac{16}{27}$,

$48x=108$; $\therefore x=2\frac{1}{4}$。

[35] $\frac{x+2}{x-2}=1\frac{2}{9}$。

解 $\frac{x+2}{x-2}=1\frac{2}{9}=\frac{11}{9}$; $9(x+2)=11(x-2)$

$11x-9x=22+18$, $\therefore x=20$。

[36] $\frac{x-2}{x+2}=\frac{3}{7}$。

解 $\frac{x-2}{x+2}=\frac{3}{7}$,

$7x-3x=6+14$, $\therefore x=5$。

[37] $\frac{x}{17}=\frac{29}{51}$.

解 $\frac{x}{17}=\frac{29}{51}$, $x=9\frac{2}{3}$.

[38] 解次之聯立方程:

$x+3y=11 \cdots\cdots\cdots (1)$,

$2x-\ \ y=1 \cdots\cdots\cdots (2)$

解 用代入法:

從(1),得 $x=11-3y$, 代入(2),得

$2(11-3y)-y=1$,

即 $-7y=-21$, $\therefore\ y=3$;

以 y 值代入(2),

$2x-3=1$, $2x=4$, $\therefore\ x=2$.

答: $x=2$, $y=3$.

[39] 試解下列之聯立方程:

$x+3y=3 \cdots\cdots\cdots (1)$

$3x+5y=1 \cdots\cdots\cdots (2)$.

解 用比較法:

從(1),得: $x=3-3y$,

從(2),得: $x=\frac{1-5y}{3}$.

$\therefore\ 3-3y=\frac{1-5y}{3}$,

兩端乘3; $9-9y=1-5y$, $-4y=-8$,

$\therefore\ y=2$.

以 y 值代入(1); $x+6=3$;

$\therefore\ x=-3$.

答：$x=-3$，$y=2$。

[40] $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ 中有 $x=0, y=2$；$x=-1, y=1$；$x=3, y=0$ 三組 x, y 之值可以適合，試定 g, f, c 之值。

解　$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ……………(1)

(1)以 $x=0, y=2$ 代入，則 $4+4f+c=0$ ……………(2)

(1)以 $x=-1, y=1$ 代入，

則 $2-2g+2f+c=0$ ……………(3)

又(1)以 $x=3, y=0$ 代入，

則 $9+6g+c=0$ ……………(4)

(2),(3)相減 $g+f+1=0$ ……………(5)

(3),(4)相減，則 $8g-2f+7=0$ ……………(6)

由(5),(6)得 $g=-\frac{9}{10}$，

$f=-\frac{1}{10}$，故由(2)得 $c=-\frac{18}{5}$。

[44] [illegible]之數值如何定之？

$36x+\frac{y}{36}=97$ ……………(1)

$25x+\frac{y}{25}=86$ ……………(2)

$16x+\frac{y}{16}=a$ ……………(3)

由(1) $36^2x+y=97\times36$ ……………(4)

由(2) $25^2x+y=86\times25$ ……………(5)

兩邊相減　$(36^2-25^2)x=97\times36-86\times25$.

由是得$x=2$，由(5)得$y=900$

以之代入(3) $a=16\times2+\frac{900}{16}=88\frac{1}{4}$。

[42]　有甲乙二戶之借款，其元金合爲2200圓，甲之年利8%借11個月，乙為年利10%借9個月。其利息合爲163.5圓，問元金各幾何。

解　甲之元金爲x圓，則乙之元金爲$(2200-x)$圓，故得次之方程式，

$$\left(0.08\times\frac{11}{12}\right)x+0.1\times\frac{9}{12}(2200-x)=163.5.$$

解之　$x=900$，於是$2200-x=1300$。

即甲爲900圓，乙爲1300圓。

[43]　工人作工，言明作工一日，給洋五角，停工一日，除不給工資外，並扣洋二角。今甲於一月終（月以三十日計），共得工資十元八角，問由在此月內作工若干日，停工若干日？

解　設甲在此月內作工x日，則停工日數爲$30-x$日。

故：　$5x-2(30-x)=108$，

$5x+2x-60=108$，

$7x=168$，　$\therefore\ x=24$.

故甲作工24日，停工6日。

[44]　四時五時之間，時表之長針與短針成直線，問其時刻。

解　兩針成一直線，是在反對方向，要有30分劃之差，今恰當4時，則有20分劃之差。故長針走過短針，不可不再有30分劃之差。

今以所要之長針為x，則因短針進$\frac{x}{12}$分劃，

故得次之方程式，

$$x-\frac{x}{12}=30+20, \quad 12x-x=600.$$

$$\therefore \quad 11x=600, \quad \therefore \quad x=\frac{600}{11}=54\frac{6}{11}.$$

即 4 時$54\frac{6}{11}$分。

[45] 分100為兩份，使一份之三倍與他一份五倍之和為410，問兩數各若干？

解 x為一份，

則$100-x$為其他一份。

$3x+5(100-x)=410,$

$3x+500-5x=410,$

$2x=90,$

$\therefore \quad x=45$……一份；

$100-45=55$……其他一份。

[46] 有人以年利8分每半年將利滾入本，用複利，借96300圓，至滿一年之終，與滿二年之終，二回還清。其第一回與第二回之還額為1與2之比，問所還金額各如何。

解 第一回之還金為x圓，則第二回還金為$2x$圓；

於是 $1.04^2x+2x=96300\times1.04^4$

即 $3.0816x=96300\times1.04^4$

故 $x=\frac{96300\times1.04^4}{3.0816}=36558.08$(圓)，

故 $2x=7316.16$(圓).

[47] 買入米若干，賣之之時，照市價漲百分之二十五，後以八八折賣卻，得利益金100圓，原價如何。

解 原價為x圓則依題意

$$x(1+0.25)(1-0.12)=x+100$$

由是$x=1000$，即所要之原價為1000圓。

[48] 試解下之程式：

$$\begin{cases}4x+9y=3 & (1)\\ 3x+7y=2 & (2)\end{cases}$$

解 用代入法 從(2)得 $y=\dfrac{2-3x}{7}$，

代入(1)，得

$$4x+9\left(\frac{2-3x}{7}\right)=3$$

$$28x+9(2-3x)=21$$

$$28x+18-27x=21$$

[49] 照定價賣，得利3圓之商品，今將此商品半打，以八五折賣出，所得之利益，等於10個以八三折賣出所得之利益，問元價如何。

解 元價為x，則定價為$x+3$，故得次之方程式，

$$6(x+3)\times0.85-6x=10(x+3)0.83-10x$$

解之得$x=12$，即元價為12圓。

[50] 甲驛開往乙驛之汽車，達到兩驛間距離五分之三時，因機關上障礙，其速每時減10哩，乃到着

乙驛，知平均之速，比最初之速每時少6哩，問最初之速每時何哩。

解　最初之速爲x哩，甲乙之距離爲$5a$，得次之方程式，

$$\frac{3a}{x}+\frac{2a}{x-10}=\frac{5a}{x-6}.$$

因$a \neq 0$，乃以a除，去分母，

$$3(x-10)(x-6)+2x(x-6)=5x(x-10),$$

即　$3x^2-48x+180+2x^2-12x=5x^2-50x,$

$$10x=180, \quad \therefore \quad x=18\text{哩}.$$

故所要之速爲18哩。

【51】 酒精與水之混合液裝入甲乙二樽，其酒精與水之成分，甲爲4:3乙爲2:3，而甲中所有酒精之量爲2斗1升。若兩樽之液全部混合，則得酒精與水，等分之混合液，問乙樽所有酒精之量幾何。

解乙樽所有酒精之量爲x升，則此樽所有水量爲$\frac{3}{2}x$升，而甲樽中之水量爲

$21\text{升}\times\frac{3}{4}=15\text{升}.75,$

故　$21+x=15.75+\frac{3}{2}x,$

即　$5.25=\frac{1}{2}x,$　故　$x=1.05.$

即乙樽中酒精之量爲1斗5合。

【52】 某工廠有男工300人，女工850人，每日付工資180圓，後因物價騰貴，男工工資加其3成，女工工資加以男工工資增額之半，則日費231圓，問男工女工當初一日中工資各幾何。

解　男工女工當初之工資爲x分，y分，

$$300x+250y=18000 \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$300x+300\times0.3x+250y+250\times0.15x$$
$$=23100 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(2)減(1)　$90x+37.5x=5100$.

故$x=40$，由(1)得$y=24$。

即男工40分，女工24分。

[53]　試解 $\begin{cases}\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=m & (1)\\[2mm] \dfrac{c}{x}+\dfrac{d}{y}=n & (2)\end{cases}$

解　用加減法：(1)乘d；(2)乘b，就得

$$\frac{ad}{x}+\frac{bd}{y}=md,$$

$$\frac{bc}{x}+\frac{bd}{y}=nb,$$

相減，$\dfrac{ad-bc}{x}=md-nb$,

$$\therefore\quad x=\frac{ad-bc}{md-nb}.$$

同樣，(1)乘c；(2)乘a，再相減，可得

$$y=\frac{cd-bc}{na-mc}.$$

[54]　甲乙兩人競走336米之距離，乙在出發點前方28米之處開始競走，比甲遲2秒到決勝點，若兩人共由出發點出走，甲遲乙12秒出發，則乙到着決勝點時，甲尚在其後48米之處，問兩人每秒之速各幾何。

甲　解　乙每秒之速爲x米，y米，依題意得次之聯立方

程式，

$$\frac{336-28}{y}-\frac{336}{x}=2,$$

$$\frac{336}{y}-\frac{336-48}{x}+12.$$

簡單爲 $\frac{154}{y}-\frac{168}{x}=1.$

$$\frac{28}{y}-\frac{24}{x}=1.$$

由是 $x=8, y=7$，即所要每秒之速，甲8米乙7米。

[55] 有人家，每月消費木炭，因其一石之價漲5角，欲支出之預算不動，則其消費量不得不減 1.2 石。又木炭與石炭瓦斯併用，石炭瓦斯費 1000 立方呎，木炭比最初消費量減 4 石，則費用比木炭漲價可節約1圓5角，問最初此家木炭使用量，一個月幾石，但約炭瓦斯1000 立方呎之價比木炭漲價前之木炭一石之價，高2角5分。

解 最初木炭一石之價爲x，一個月之石數爲y，則漲價後之價爲$x+50$，又石炭瓦斯1000立方呎爲$x+25$。

故依題意得次之方程式，

$$xy=(x+50)(y-1.2)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(x+50)(y-4)+2(x+25)$$

$$=xy-150\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1) $3x-125y=-150,$

由 (2) $x-25y=50,$

解之得$y=6$，即一月6石。

[56] 茶葉12斤咖啡3斤，其價共計4.2元，咖啡12斤，茶葉3斤，其價共計3.3元，問茶葉及咖啡每斤各値價若干？

解　設茶葉每斤之價爲x角，咖啡每斤之價爲y角，則

$$\begin{cases} 12x+3y=42 \cdots\cdots\cdots\cdots (1), \\ 3x+12y=33 \cdots\cdots\cdots\cdots (2); \end{cases}$$

(1)×4:　$48x+12y=168 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$,

(3)−(2):　$45x=135$

$\therefore x=3 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$;

代入(1):　$3y=42-36=6$,

$\therefore y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$.

故茶葉每斤之價爲3角，咖啡每斤之價爲2角.

[57] 某中學校之生徒總額560人其五年生爲一年生三分之一，三年生與四年生合計，與一年生同，二年生與三年生合計當五年生之4倍，四年生與二年生人數之比，如4:7，問各年生之人數.

解　一年生之人數爲x，二生年之人數爲y，則五年生爲$\frac{1}{3}x$，四年生爲$\frac{4}{7}y$，因之三年生爲$x-\frac{4}{7}y$.

於是　$x+y+x+\frac{1}{3}x=560$,

$y+x-\frac{4}{7}y+\frac{4}{3}x$.

卽　$7x+3y=1680 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$

$9y=7x \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$

由(1),(2)得　$x=180$,　$y=140$.

由是　$\frac{4}{7}x=80,\ \frac{1}{3}x=60,\ x-\frac{4}{7}y=100.$

即一年生180人,二年生140人,三年生100人,四年生80人,五年生60人.

[58]. 有含4%鹽分之水若干格,由此液蒸發水分,使成含10%鹽分之水,後以含4%鹽分之水300格混之,則得含6.4%鹽分之水,問始之水液幾格.

解. 最初之比液爲x格,因此含4%鹽分,則其鹽分爲$0.04x$,蒸發之水分爲y格,則其量爲$x-y$,濃度10%,

故其鹽分爲$0.1(x-y)$,而水分既蒸發,故其鹽量無變化,

故　$0.04x=0.1(x-y)$,

即　$3x=5y$……………………………(1)

然含4%鹽分之水300格混入,其全量爲$x-y+300$,其鹽分之濃度爲6.4%,故$(x-y+300)\times 0.064$係$0.04x$鹽分之中以300格4%之鹽分混之者爲$0.04x+300\times 0.04$,

即　$(x-y+300)\times 0.064=x\times 0.04+12$,

即　$3x-8y=-900$……………………(2)

故解(1),(2)得　$x=500,\ y=300.$

故始之水液爲500格.

[59]. 鹿鶴在園,數其頭共101,數其足共332,求鹿鶴各若干?

解. 設鹿數爲x,鶴數爲y.則:

$$\begin{cases} x+y=101 \cdots\cdots\cdots\cdots(1); \\ 4x+2y=332 \cdots\cdots\cdots\cdots(2); \end{cases}$$

由(1)：　$x=101-y$ ……………………(3)

代入(2)：$4(101-y)+2y=332$，

$404-4y+2y=332$，

$2y=72$，　$\therefore y=36$頭 ……………(4)

代入：　$x=101-36=65$頭 ………………(5)

[60]　某工事甲乙二人合作，要5日．今甲乙合作8日之後，乙獨作5日，成此工事之2倍，問甲乙各一人，作此工事，幾日可成．

解　甲乙各一人作此工事之日

則　$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ ………………………………(1)

$8\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+\dfrac{5}{y}=2$ ……………………(2)

則(1)代入(2)則　$\dfrac{8}{5}+\dfrac{5}{y}=2$。

即　$\dfrac{5}{y}=\dfrac{2}{5}$，

故$y=12\frac{1}{2}$，由是由(1)得$x=8\frac{1}{3}$，

即甲以8日$\frac{1}{3}$，乙以12日$\frac{1}{2}$可成。

[61]　一列車，由甲地，他一列車由乙地，同時相向出發，兩列車相會時，其所走之差為63哩，由是一經 時間到乙地，他經 時間到甲地，問甲乙兩地間距離，及各列車之速度．

解　甲乙各列車一時間之速為x哩，y哩，於是甲乙兩地間之距離為$4x+9y$哩，因兩人所走距離之差為63哩；

則 $9y-4x=63$……………………(1)

而甲走$9y$哩,乙走$4x$哩之時間相等,

則 $\dfrac{9y}{x}=\dfrac{4x}{y}$, 或 $9y^2=4x^2$,

x,y應皆爲正,則 $2x=3y$……………………(2)

以(2)代入(1) $9y-6y=63$,

$\therefore\ y=21$. 故 $x=31.5$.

故一時間之速,甲31.5哩,乙21哩。

而甲乙兩地間之距離爲

$4x+9y=4\times31.5+9\times21=315$,

即315哩。

[62] 有甲乙丙三人,現在甲之年齡等於乙丙年齡之和,甲10年前之年齡等於乙10年前年齡之2倍,問自今10年後,甲之年齡何以爲丙年齡之2倍.

解 甲乙丙各人現在之年齡爲x,y,z;依題意

$x=y+z$……………………(1)

$x-10=2(y-10)$……………(2)

解(1),(2) $x=2z+10$,

故10年後 $x+10=2z+20=2(z+10)$.

即10年後,等於z,即丙之10年後2倍。

[63] 有上中下三種酒,以上酒1,中酒2,下酒2之比例混合,平均得一升7角4分之酒,以上酒3中酒4,下酒5之比例混合平均得一升7角5分之酒,以上酒2,中酒1,下酒7之比例混合,平均得一升6角9分5厘之酒,問上酒中酒下酒一升之價各幾何.

解 上中下各一升之價爲x分,y分,z分,

$x+2y+2z=74(1+2+2)=370$……………(1)

$3x+4y+5z=75(3+4+5)=900$……………(2)

$2x+y+7z=69.5(2+1+7)=695$……………(3)

解之　$x=100$，$y=75$，$z=60$。

即一升之值上酒1圓，中酒7角5分，下酒6角．

[64]　二數之和爲63，大者比小者之2倍多3，試求此二數。

解　設小數爲x，則大數爲$2x+3$，故：

$2x+3+x=63$；

$3x=60$；　∴　$x=20$……………小數；

$2\times20+3=43$………大數．

[65]　隔7里甲乙兩地間，有來往之人，往路要5時24分，復路要6時間，今知此人，上路以一時間$\frac{5}{6}$里，下路以一時間$1\frac{2}{3}$里，平地以一時間$1\frac{1}{3}$里之速步行，問甲乙兩地間之平地爲幾里。

解　上路爲x，下路爲y，平地爲z，依題意得次之方程式；

$$\frac{z}{1\frac{1}{3}}+\frac{y}{1\frac{2}{3}}+\frac{x}{\frac{5}{6}}=5\frac{2}{5};$$

即　$\frac{3z}{4}+\frac{3y}{5}+\frac{6x}{5}=\frac{27}{5}$……………………………(1)

又　$\frac{z}{1\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{5}{6}}+\frac{x}{1\frac{2}{3}}=6$。

即　$\frac{3z}{5}+\frac{6y}{5}=\frac{3x}{5}=6$……………………………(2)

又 $x+y+z=7$ ………………………………(3)

由(1)得$24x+12y+15z=108$，由(2)得$12x+12yx$，$+24y+15z=120$，(1)以(2)加之，以6除之，

$$6x+6y+5z=38 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)之6倍減(4)，得$z=4$，

即平地為4里。

[66]　三村M，N及P，假定在三角形之角頂、今有人由第一村到次村，係每里n分步行，由是到三村，係每里n分自轉車，由是到第一村，係每里p分騎馬歸來，此人若由N村出發，以$m+p-n$時，到P，再由P村出發，以$n+m-p$時，到M，後由M村出發，於是以$p+n-m$時，歸到第一村。知進行之方向常同，求一周之距離。

解　全周為s里，M，N，P所對應之邊長，為x里，y里z里，依題意，

$$s=x+y+z \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$mx+ny+pz=60(m+p-n) \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$my+nz+px=60(n+m-p) \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$mz+nx+py=60(p+n-m) \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

作(2)+(3)+(4)

則　$(m+n+p)(x+y+z)$

$$=60(m+n+p)$$

於是　$m+n+p\neq0$，∴故　$x+y+z=60$。

由(1)得$s=60$，即60里。

[67]　甲乙二人年歲之和為 0，五年後，甲年恰為乙年之二倍，問甲乙二人年歲各若干？

解 設甲年為x歲，乙年為$50-x$歲，則：

$$x+5=2[(50-x)+5],$$

$$x+5=110-2x,$$

$$3x=105,$$

$$x=35\text{歲}\cdots\cdots\text{甲年};$$

$$50-35=15\text{歲}\cdots\cdots\text{乙年}。$$

[48] 父年六十五歲，子年三十五歲，問父年在幾歲時適當子年之三倍。

解 設所求之父年為x，則此時之子年當為：

$$x-(65-35)=x-30,$$

$$\therefore\quad x=3(x-30)$$

$$\therefore\quad x=45\text{歲}\cdots\cdots\text{父年}。$$

(二)因數分解之題解

[49] 有二位數，牠的十位數字比單位數字大2；而牠和牠的兩個數字的位置交換所成的數的和為88，求原數。

解 設十位數為x，個位數為y，則：

$$\begin{cases} x=y+2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1); \\ 10x+y+10y+x=88\cdots\cdots\cdots\cdots(2); \end{cases}$$

由(2)： $$11(x+y)=88,$$

$$x+y=8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3),$$

由(1)： $$x-y=2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4);$$

(3)+(4)： $2x=10$， $\therefore\ x=5$；

(3)−(4)： $2y=6$， $\therefore\ y=3$。

故該數爲53。

[70]　x爲實數，則次式恆爲正，試證之。

$$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10$$

解　原式$=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10$

$$=(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+82$$
$$=(x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+81+1$$
$$=(x^2-7x+9)^2+1.$$

然x爲實數，故$(x^2-7x+9)^2$無論x代以任何實數恆爲正，

故$(x^2-7x+9)^2+1$爲正。

[71]　分解下列各式之因式：

(a)　x^4+x^2+1。

(b)　$27x^3+8$。

解　(a)　$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$，

(b)　$27x^3-8=(3x)^3-(2)^3=(3x-2)(9x^2+6x+4)$。

[72]　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

解　原式$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2$

$$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)$$
$$=(b-c)[a^2+bc-ab-ca]$$
$$=(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]$$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)。$$

[73]　$a^2-12b^2-8c^2+20bc-2ac+4ab$，分解其因式。

解　先依a冪順次整列之。

$$a^2+2(2b-c)a-12b^2+20bc-8c^2$$
$$=a^2+2(2b-c)a+(2b-c)^2-(2b-c)^2$$

$-12c^2+20bc-8b^2$

$=(a+2b-c)^2-(16b^2-24bc+9c^2)$

$=(a+2b-c)^2-(4b-3c)^2$

$=(a+6b-4c)(a-2b+2c).$

〔74〕 $x^4+2x^3-3x^2-4x+4.$

解 依剩餘定理 $x=1$ 則

原式$=1+2-3-4+4=0.$

於是此式有$x-1$因數.

故 原式$=x^3(x-1)+3x^2(x-1)-4(x-1)$

$=(x-1)(x^3+3x^2-4)$

$=(x-1)(x^3-x^2+4x^2-4x+4x-4)$

$=(x-1)\{x^2(x-1)+4x(x-1)$

$+4(x-1)\}$

$=(x-1)(x-1)(x^2+4x+4)$

$=(x-1)^2(x+2)^2.$

〔75〕 $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b).$

解 $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

$=bc(b-c)+c^2a-ca^2+a^2b-ab^2$

$=bc(b-c)-a(b^2-c^2)+a^2(b-c)$

$=(b-c)\{bc-a(b+c)+a^2\}$

$=(b-c)\{b(c-a)-a(c-a)\}$

$=-(b-c)(c-a)(a-b).$

〔76〕 試求$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$之積

解 $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=x^4+x^2y^2+y^4.$

〔77〕 試將下列各式析爲因子:

(1) a^2-b^2.

(2) a^3-b^3.

(3) a^3+b^3.

(4) a^4-b^4.

解 (1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

(3) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

(4) $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)$

$=(a^2+b^2)(a-b)(a+b)$.

〔78〕 $b^2=ac$ 試證次式.

$(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)$

$=a^4+b^4+c^4$.

解 $(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)$

$=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}\{a^2-b^2+c^2\}$

$=\{(a+c)^2-b^2\}\{a^2+c^2-b^2\}$

然 $b^2=ac$ ∴ $=\{(a+c)^2-ac\}$

$\{a^2+c^2-ac\}$

$=(a^2+ac+c^2)(a^2+c^2-ac)$

$=\{(a^2+c^2)+ac\}\{(a^2+c^2)-ac\}$

$=(a^2+c^2)^2-a^2c^2$

$=a^4+2a^2c^2+c^4-a^2c^2$

$=a^4+a^2c^2+c^4=a^4+b^4+c^4$.

〔79〕 求 $3x^2+7x-6$ 之因子.

解 $3x^2+7x-6=(x+3)(x-2)$.

〔80〕 $n=a^2+x^2=b^2+y^2=c^2+(x+y)^2$

試證 $(n-a^2-b^2+c^2)^2=4(n-a^2)(n-b^2)$

解 由原式 $n-a^2=-x^2$,

$-b^2+c^2=-y^2+(x+y)^2$.

兩邊相加, $n-a^2-b^2+c^2=2xy$.

然 $-x^2=n-a^2$, $-y^2=n-b^2$

∴ $x^2y^2=(n-a^2)(n-b^2)$,

∴ $(n-a^2-b^2+c^2)^2=4x^2y^2$

$=4(n-a^2)(n-b^2)$.

[81] $a+b+c=0$

試證 $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

解 因 $a+b+c=0$ 則 $a+b=-c$,

兩邊平方 $a^2+2ab+b^2=c^2$,

移項 $a^2+b^2-c^2=-2ab$.

再兩邊爲平方

$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=4a^2b^2$,

移項 $a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

[82] 求下列二組之最小公倍式.

(a) $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, (a^2-b^2);

(b) $4(x-y)^2x^3$, $y^3(x+y)^2$, $xy(x^2-y^2)$.

解 (a) ∵ $(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$

∴ 最小公倍式爲

$(a+b)^2(a-b)^2$.

(b) ∵ $xy(x^2-y^2)=xy(x+y)(x-y)$,

∴ 最小公倍式爲

$4x^3y^3(x+y)^2(x-y)^2$.

[83] $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$

解 原式$=(a+b+c)^3-a^3-(b^3+c^3)$

$=(b+c)\{(a+b+c)^2+(a+b+c)a+a^2-b^2$
$+bc-c^2\}$

$=(b+c)\{(a+b+c)^2-b^2+(c+a)a+bc+ab$
$-(c^2-a^2)\}$

$=(b+c)(c+a)\{a+b+c+b+a+b-(c-a)\}$

$=(b+c)(c+a)(3a+3b)$

$=3(b+c)(c+a)(a+b).$

〔84〕 分解x^2-4y^2+x-2y之因式.

解 x^2-4y^2+x-2y

$=(x+2y)(x-2y)+(x-2y)$

$=(x-2y)(x+2y+1).$

〔85〕 次式試簡單之.

$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$
$-(a+b-c)^3.$

解 原式

$=2a\{(a+b+c)^2+(a+b+c)(b+c-a)$
$+(b+c-a)^2\}$

$-2a\{(c+a-b)^2-(c+a-b)(a+b-c)$
$+(a+b-c)^2\}$

$=2a\{(a+b+c)^2-(c+a-b)^2+(b+c-a)^2$
$-(a+b-c)^2+(b+c)^2-a^2+a^2-(b-c)^2\}$

$=2a\{4(a+c)b+4b(c-a)+4bc\}$

$=8ab(a+c+c-a+c)=24abc.$

〔86〕 分解下列因式:

(a) $2xy-x^2-y^2+z^2.$

(b) $x^3-125.$

(c) $1-x+x^2-x^3$.

解 (a) 見前。

(b) $x^3-125=x^3-(5)^3=(x-5)(x^2+5x+25)$.

(c) $1-x+x^2-x^3=(1-x)+x^2(1-x)$

$=(1+x^2)(1-x)$.

〔87〕 $\frac{a^4}{64}+\frac{a^3}{8}-a+1$.

解 原式 $=\frac{a^4}{64}-\frac{a^2}{4}+1+\frac{a^3}{8}-a+\frac{a^2}{4}$

$=\left(\frac{a^2}{8}-1\right)^2+a\left(\frac{a^2}{8}-1\right)+\frac{a^2}{4}$

$=\left(\frac{a^2}{4}-1+\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2}{8}+\frac{a}{2}-1\right)^2$.

〔88〕 應用剩餘定理求a與b之值，若x^3+ax^2+2x+b能被$(x-1)(x+4)$除盡。

解 根據剩餘定理$x=1$及$x=-4$，則

$R=0$ 故

$1+a+2+b=0$

$a+b+3=0$ ……(1)

$-64+16a-8+b=0$

$-16a+b-72=0$ ……(2)

(2)−(1) $15a+96=0$

∴ $a=-\frac{23}{5}$ ……(3)

代入(1) $b=\frac{23}{5}-3=\frac{23}{5}-\frac{15}{5}$

$$=\frac{3}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

〔89〕 $a^3+pa+q=0$, $b^3+pb+q=0$,

及 $c^3+pc+q=0$ 如a,b,c代以相異之數,

則$a+b+c=0$.

解 $a^3+pa+q=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$b^3+pb+q=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$c^3+pc+q=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

當(1)減(2)

$a^3-b^3+(a-b)p=0$,

由是$(a-b)(a^2+ab+b^2+p)=0$;

因$a\neq b$則 $p=-(a^2+ab+b^2)\cdots\cdots\cdots(4)$

以之代入(1)則 $a^3-(a^2+ab+b^2)a+q=0$

$\therefore\ q=ab(a+b)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(4)(5)代入(3)

$c^3-(a^2+ab+b^2)c+ab(a+b)=0$,

$\therefore\ a^2(b-c)+ab(b-c)-c(b^2-c^2)=0$;

$\therefore\ (b-c)(a^2+ab-bc-c^2)=0$;

$\therefore\ (b-c)(a-c)(a+b+c)=0$.

然因$b\neq c$, $a\neq c$,則 $a+b+c=0$

〔90〕 用綜合法求以$x-1$除$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$之餘式.

解.

$$\begin{array}{llll}
a_0+ & a_1+ & a_2 & +\ a_3 \\
 & a_0+ & (a_0+a_1) & +\ (a_0+a_2+a_2) \\
\hline
a_0+ & (a_0+a_1)+ & (a_0+a_1+a_2) & +\ (a_0+a_1+a_2+a_3)
\end{array}$$

∴ 餘式為 $a_0+a_1+a_2+a_3$,

〔91〕 x^4+4x^2+16, 分解其下式。

解 $x^4+4x^2+16=x^4+8x^2+16-4x^2$

$=(x^2+4)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$.

〔92〕 求下式之因子 $x^3+x+10=?$

解 x^3+x+10

此處 x^3 之係數為1，常數項為 $10=1,2,5$,

故設原式可分為因式，則必為下列之一？

$(x\pm1),(x\pm2),(x\pm5)$

個別除之，得 $x+2$ 為其一因式，故

$x^3+x+10=(x+2)(x^2-2x+5)$.

〔93〕 $(a-b)^2-(b-c)^2+(c-d)^2-(d-a)^2=0$,

試證 $abcd=a^2bd$ 或 $=ab^2c$ 或 $=bc^2d$ 或 $=acd^2$

解 $(a-b)^2-(b-c)^2+(c-d)^2-(d-a)^2=0$,

$\therefore (a-b)^2+(c-d)^2=(b-c)^2+(d-a)^2$,

即 $2ab+2cd=2bc+2ad$,

$ab+cd-bc-ad=0$,

即 $(a-c)(b-d)=0$,

$\therefore a=c$ 或 $b=d$,

$abcd=a^2bd$ 或 ab^2c 或 bc^2d 或 acd^2.

〔94〕 $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

解 $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$=(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)$

$\times(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)$

$=\{(c+d)^2-(a-b)^2\}\{(a+b)^2-(c-d)^2\}$.

$$=(c+d-a+d)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

〔95〕 $2x^3-4x^2y-x^2z+2xyz+2xy^2-y^2z$.

解 $2x^3-4x^2y-x^2z+2xyz+2xy^2-y^2z$

$$=2x^3-x^2z-4x^2y+2xyz+2xy^2-y^2z$$

$$=x^2(2x-z)-2xy(2x-z)+y^2(2x-z)$$

$$=(2x-z)(x^2-2xy+y^2)=(2x-z)(x-y)^2$$

〔96〕 試將x^2+2x+4析為二個一次因式.

解 x^2+2x+4

$$=\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{2^2-4.4}{2}}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{2^2-4.4}{2}}\right)$$

$$=(x+1+\sqrt{-3})(x+1-\sqrt{-3}).$$

〔97〕 $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

解 原式就a,b,c為五次之交代式 設$b=c$, 則為零.

$(c-a)(a-b)$因數;

故有$(b-c)$……式之因數.

以外就a,b,c有二次對稱……$(a-b)$

於是設 $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$

$$=(b-c)(c-a)(a-b)\{L(a^2+b^2+c^2)+M(bc+ca+ab)\}$$

可決定係數L,M之值.

今比較a^4b之係數知$L=-1$,

比較a^3b^2之係數知$L-M=0$,故$M=-1$,

於是原式

$$=-(b-c)(c-a)(a-b)$$
$$(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab).$$

〔98〕 求 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 之因式。

解 以 $x=-(y+z)$ 代入原式，得

$$-(y+z)^3+y^3+z^3+3(y+z)yz=0,$$

故 $(x+y+z)$ 爲原式之一因式，由除法得以

$$x+y+z$$

除 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 之商式爲

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx,$$

故得：

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)$$
$$(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

〔99〕 次之各式將因數分解之

$$x^2+4x-5.$$

解 $$x^2+4x-5=(x+5)(x-1).$$

〔100〕 $$x^2-3x=40.$$

解 $x^2-3x-40$ 因 $-8+(+5)=-3$,

$-8\times(+5)=-40$, $\therefore$ $(x-8)(x$ [illegible]

〔101〕 $9x^2+39x$ [illegible] $5)$

解 原式 [illegible] -18

$$=7x^2-3x+42x-18$$
$$=x(7x-3)+6(7x-3)$$
$$=(7x-3)(x+6).$$

〔102〕 求下列各式之因式：

(a) $12x^2-x-6$,

(b) $x^2-xy-6y^2-x+3y$.

解 (a) $12x^2-x-6=(4x-3)(3x+2)$,

(b) $x^2-xy-6y^2-x+3y$

$=(x-3y)(x+2y)-(x-3y)$

$=(x-3y)(x+2y-1)$。

〔103〕求x^2-1，x^3+1，x^3-1之$L.C.M.$

解 $x^2-1=(x+1)(x-1)$，

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$，

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$，

故$L.C.M.=(x^3+1)(x^3-1)=x^6-1$。

〔104〕求下列三式之$L.C.M.$

$a^2+ax-20x^2$，$24x^3+a^2x$

$-10ax^2$，$a^2x+30ax^2$.

解 $a^2+ax-20x^2=(a+5x)(a-4x)$。

$24x^3+a^2x-10ax^2=x(a-4x)(a-6x)$。

$a^2x+30ax^2-a^3=-a(a-6x)(a+5x)$。

故$L.C.M.=ax(a-4x)(a+5x)(a-6x)$。

〔105〕 $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40$

解1. $x^2-3x+2xy+y^2-3y-40$

$=(x^2+2xy+y^2)-(3x+3y)-40$

$=(x+y)^2-3(x+y)-40$

$=(x+y-8)(x+y+5)$。

解2. 題式$=x^2+(2y-3)x+(y-8)(y+5)$

$=(x+y-8)(x+y+5)$。

〔106〕 $2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$

解 原式$=(2y^2-5xy+2x^2)-(y+x)a-a^2$

$=(2y-x)(y-2x)+\{-(2y-x)+$

$(y-2x)\}-a^2$

$=(2y+x+a)(y-2x-a)$.

〔107〕 求 a^2-b^2, a^2-4b^2, a^2-2, a^4-16b^4, a^3-9ab^2, $(a+b)^2-(c+d)^2$ 之因式.

解 (1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(2) $a^2-4b^2=a^2-(2b)^2$

$=(a+2b)(a-2b)$.

(3) $a^2-2=a^2-(\sqrt{2})^2$

$=(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$.

(4) $a^4-16b^4=(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)$

$=(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$.

(5) $a^3-9ab^2=a(a^2-9b^2)$

$=a(a+3b)(a-3b)$.

(6) $(a+b)^2-(c+d)^2$

$=[(a+b)+(c+d)]$

$[(a+b)-(c+d)]$

$=(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.

〔108〕 $2x^2-5x-5xy-5y+2y^2-25$

解 原式 $=2x^2-5x(y+1)+2y^2-5y-25$

$=2x^2-5x(y+1)+(2y+5)(y-5)$

$=\{2x-(y-5)\}\{x-(2y+5)\}$

$=(2x-y+5)(x-2y-5)$.

〔109〕 將多項式 P 及 P' 以 D 除之,其剩餘各為 R, R' 則 PP' 及 RR' 各以 D 除之,其剩餘同一,試證之.

解 將 P 及 P' 以 D 除之之商,各為 p, p' 則 $P=pD+R$, $P'=p'D+R'$, 因而 $PP'=(pD+R)(p'D+R')$

$=RR'D+R'PD+RP'D+PP'D+RR'$，故以D除PP'之剩餘，與除其右邊之剩餘，即除RR'之剩餘。

〔110〕 $\dfrac{x^3y^3}{72}-\dfrac{x^3y^5}{32}-\dfrac{1}{9x^2}+\dfrac{y^2}{4}$

解 原式$=\dfrac{x^3y^3}{8}\left(\dfrac{1}{9x^2}-\dfrac{y^2}{4}\right)-\left(\dfrac{1}{9x^2}-\dfrac{y^2}{4}\right)$

$$=\left(\frac{1}{9x^2}-\frac{y^2}{4}\right)\left(\frac{x^3y^3}{8}-1\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3x}+\frac{y}{2}\right)\left(\frac{1}{3x}-\frac{y}{2}\right)\left(\frac{xy}{2}-1\right)$$

$$\left(\frac{x^2y^2}{4}+\frac{xy}{2}+1\right)$$

〔111〕 求$am+an$及$3x^3+6x^2y+9xy^2$之因式。

解 (1) $am+an=a(m+n)$。

(2) $3x^3+6x^2y+9xy^2$

$$=3x(x^2+2xy+3y^2)。$$

〔112〕 求$ax^2+1+(a+1)x$之因式。

解 原式$=ax^2+ax+x+1$

$$=ax(x+1)+(x+1)$$

$$=(x+1)(ax+1)。$$

〔113〕 求$2x^3-4x^2y+2xy^2-z(x^2-2xy+y^2)$之因式。

解 原式$=(x^2-2xy+y^2)(2x-z)$

$$=(x-y)^2(2x-z)。$$

〔114〕 分析$x^3+px^2+px+p-1$之因式。

解 原式$=(x^3-1)+p(x^2+x+1)$

$$=(x-1)(x^2+x+1)+p(x^2+x+1)$$
$$=(x^2+x+1)(x-1+p)。$$

〔115〕求x^4+y^4之因式

解 $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$$=(x^2+y^2+\sqrt{2xy})(x^2+y^2-\sqrt{2xy})。$$

〔116〕 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

解 原式$=(x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15$
$$=(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$$
$$=(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+105+15$$
$$=(x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+12\times10$$
$$=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$$
$$=(x+2)(x+6)(x+4+\sqrt{6})$$
$$(x+4-\sqrt{6})。$$

〔117〕求$b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)$之因式。

解 原式$=(x+a)[b(x^2-xa+a^2)+a(x^2-ax)+a^3]$
$$=(x+a)[b(x^2-xa+a^2)$$
$$+a(x^2-xa+a^2)]$$
$$=(x+a)(b+a)(x^2-xa+a^2)$$

〔118〕 $2x^3+3x^2-1$.

解 依剩餘定理$x=-1$代入原式則爲0故有$x+1$因數。

即 $2x^3+2x^2+x^2+x-x-1$
$$=2x^2(x+1)+x(x+1)-(x+1)$$
$$=(x+1)(2x^2+x-1)$$
$$=(x+1)(x+1)(2x-1)$$
$$=(x+1)^2(2x-1)。$$

〔119〕 求$a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$之因式。

解 原式$=a^2-2a(b+c)-(3b^2-10bc+3c^2)$

$=a^2-2a(b+c)-(3b-c)(b-3c)$

$=a^2-a[(3b-c)-(b-3c)]$

$-(3b-c)(b-3c)$

$=a^2-a(3b-c)+a(b-3c)$

$-(3b-c)(b-3c)$

$=a[a-(3b-c)]+(b-3c)$

$[a-(3b-c)]$

$=[a+(b-3c)][a-(3b-c)]$

$=(a+b-3c)(a-3b+c)$。

〔120〕 求a^3+b^3，$8x^3+27y^6$之因式。

解 (1) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。

(2) $8x^3+27y^6=(2x)^3+(3y^2)^3$

$=(2x+3y^2)(4x^2-6xy^2+9y^4)$。

〔121〕 $(a^2-bc)^2-(b^2-ca)(c^2-ab)$。

解 原式$=a^4-2a^2bc+b^2c^2-b^2c^2+c^3a+ab^3-a^2bc$

$=a^4-3a^2bc+c^3a+ab^3$

$=a(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$=a(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$。

〔122〕 求$2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$之因式。

解 原式$=2\left\{[y-\frac{1}{4}(5x+a)]^2-\frac{1}{16}(3x+a)^2\right\}$

$=2[y-\frac{1}{4}(5x+a)+\frac{1}{4}(3x+3a)]$

左右二式 ... $[y-\frac{1}{4}(5x+a)-\frac{1}{4}(3x+2a)]$

$[y-\frac{1}{4}(\ldots)-\frac{4}{4}]=$ ...

$=(2y-x+a)(y-(a-a))$.

〔123〕 $(a^2-b^2)x^2+2(a^3+2b^3)xy+(a^4-b^4)y^2$。

解 $(a^2-b^2)x^2+2(a^3+2b^3)xy+(a^4-b^4)y^2$

$=[(a-2b)x+(a^2+b^2)y]$

$[(a+b)x+(a^2-b^2)y]$.

因 $(a+2b)(a^2-b^2)+(a+2b)(a^2+b^2)$

$=a^3+4b^3$. 故也。

〔124〕 求下列各式之因式：

(1) $x^2(x+2)^2+(x+2)^2+2x(x+2)^2$.

(2) $-x^2(a+b)^2+2xy(a+b)(a-b)-y^2(a-b)^2$.

解 (1)原式$=(x+2)^2(x^2+1+2x)$

$=(x+2)^2(x+1)^2$.

(2)原式$=-[x^2(a+b)^2-2xy(a+b)(a-b)$

$+y^2(a-b)^2]$

$=-[x(a+b)-y(a-b)]^2$

$=-(ax+bx-ay+by)^2$.

〔125〕 $(x^3-x^2+x+1)(x^3-x^2+x+2)-6$

解 原式$=\{(x^3-x^2+x)+1\}\{(x^3-x^2+x)+2\}-6$

$=(x^3-x^2+x)^2+3(x^3-x^2+x)-4$

$=(x^3-x^2+x+4)(x^3-x^2+x-1)$

$=(x^3-x^2+x+4)(x-1)(x^2+1)$.

〔126〕 求$x^2(a+1)-xy(x-y)(a+b)+y^2(b+1)$之因式。

解 原式$=a(x^2-xy+y^2)+(x^2+y^2)+by$

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)+(ax+by)(x^2-xy+y^2)=$

$=(x^2-xy+y^2)(ax+by+x+y)$.

〔127〕 $(a+b)^2x^4-2(a^2+b^2)x^2y^2+(a-b)^2y^4$

解 原式 $=(a+b)^2x^4-\{(a+b)^2+(a-b)^2\}x^2y^2+(a-b)^2y^4$

$=(x^2-y^2)\{(a+b)^2x^2-(a-b)^2y^2\}$

$=(x+y)(x-y)\{(a+b)x+(a-b)y\}$

$\{(a+b)x-(a-b)y\}$.

〔128〕 $x^2+x=\frac{1}{3}$ 則 $6x^4+15x^3+10x^2=1$ 試證之

解 因 $6x^4+15x^3+10x^2=6x^2(x^2+x)+9x^3+10x^2$

[illegible]

則 $x^2+x=\frac{1}{3}$ 即 $=9x^3\times\frac{1}{3}+7x\times\frac{1}{3}+x^2$

$=3(x^2+x)=3\times\frac{1}{3}=1$.

故 $6x^4+15x^3+10x^2=1$.

〔129〕 試析 $(a+b)(a+2b)(a+3b)(a+4b)+b^4$ 之

解 原式 $=[(a+b)(a+4b)][(a+2b)(a+3b)]+b^4$

$=(a^2+5ab+4b^2)(a^2+5ab+6b^2)+b^4$

令 $a^2+5ab+4b^2=y$, 則

$=y(y+2b^2)+b^4$

$=y^2+2b^2y+b^4$

$=(y+b^2)^2$

再將 $y=a^2+5ab+4b^2$ 換入

$=(a^2+5ab+4b^2+b^2)^2$

$=(a^2+5ab+5b^2)^2$.

〔130〕 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

解 原式 $=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-24$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$$

$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24-24$$

$$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$$

$$=x(x+5)(x^2+5x+10)$$

〔131〕 $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2$

解 原式$=(x^2+x+4+5x)(x^2+x+4+3x)$

$$=(x^2+6x+4)(x^2+4x+4)$$

$$=(x+2)^2(x^2+6x+4)$$

〔132〕 $1-(a-b)^6$ [illegible]

解 原式$=\{1-(a-b)^3\}\{1+(a-b)^3\}$

$$=\{1-(a-b)\}\{1+(a-b)+(a-b)^2\}$$

$$\times\{1+(a-b)\}\{1-(a-b)+(a-b)^2\}$$

$$=(1-a+b)(1+a-b+a^2-2ab+b^2)$$

$$\times(1+a-b)(1-a+b+a^2-2ab+b^2)。$$

〔133〕 試析 $x^4-27x^2y^2+y^4$ 之因式。

解 原式$=x^4-2x^2y^2+y^4-25x^2y^2$

$$=(x^2-y^2)^2-(5xy)^2$$

$$=(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)。$$

〔134〕 $2x^3-x^2y-2xy^2+6y^3$

解 原式$=2x^3+3x^2y-4x^2y-6xy^2+4xy^2+6y^3$

$$=x^2(2x+3y)-2xy(2x+3y)$$

$$+2y^2(2x+3y)$$

$$=(2x+3y)(x^2-2xy+2y^2)。$$

〔135〕 [illegible]

求下列三組之H.C.F.

(1) [illegible], $x^2+3x-10$, x^2 [illegible] $x+13$。

(2) x^2-x-2, x^2+5x+4, x^3+1.

解 (1) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$,

$x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$,

$x^2-9x+14=(x-2)(x-7)$,

故 $H.C.F.$ 為 $x-2$.

(2) $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$,

$x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$,

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$,

故 $H.C.F.$ 為 $x+1$.

〔136〕 x^4+4.

解 $x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2$

$=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$

〔137〕試析 $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$ 之因式.

解 令 $x^2+4x=y$ 則:

原式 $=y^2-2y-15$

$=y^2+(-5+3)y+(-5)\times3$

$=(y+3)(y-5)$ 再將原式代入

$=(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)$

$=[x^2+(1+3)x+1\times3][x^2+(-1+5)x+(-1)\times5]$

$=(x+1)(x+3)(x-1)(x+5)$.

〔138〕試析 $x^4+2x^2y^2+4y^4$ 之因式.

解 原式 $=x^4+4x^2y^2+4y^4-2x^2y^2$

$=(x^2+2y^2)^2-(\sqrt{2x^2y^2})^2$

$=[(x^2+2y^2)+\sqrt{2x^2y^2}]$

$[(x^2+2y^2)-\sqrt{2x^2y^2}]$

$=(x^2+2y^2-\sqrt{2}.xy)(x^2+2y^2+\sqrt{2}.xy)$

$=(x^2-\sqrt{2}.xy+2y^2)(x^2+\sqrt{2}.xy+2y^2)$

〔139〕 試析 x^4+4a^4.

解 $x^4+4a^2x^2+4a^4-4a^2x^2$

$=(x^2+2a^2)^2-4a^2x^2$

$=(x^2+2ax+2a^2)(x^2-2ax+2a^2)$

〔140〕 試析 $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$ 的因式.

解 原式 $=(x^2+3x-2)[(x^2+3x-2)+6]-16$

令 $x^2+3x-2=y$, 則:

$=y(y+6)-16=y^2+6y-16$

$=(y+8)(y-2)$

[illegible] 代入

$=(x^2+3x-2+8)(x^2+3x-2-2)$

再將 $x^2+3x-2=y$ 代入

$=(x^2+3x-2+8)(x^2+3x-2-2)$

$=(x^2+3x+6)(x^2+3x-4)$

$=(x^2+3x+6)(x+4)(x-1)$

〔141〕 [illegible] $x^4+x^2y^2+y^4$.

解 $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=(x^2+xy+y^2)$

(x^2-xy+y^2).

〔142〕 求 $3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$ 與 $4x^2y-5xy^2+y^3$ 之 H.C.F.

解 $3x^3-3x^2y+xy^2-y^3$

$=3x^2(x-y)+y^2(x-y)$

$=(x-y)(3x^2+y^2)$。

$4x^2y-5xy^2+y^3$

$=4xy(x-y)-y^2(x-y)$

$=(x-y)(4xy-y^2)$

$=(x-y)(4x-y)y$

故所求之$H.C.F.$爲$x-y$.

x^2-16, $6(x+4)$, x^2-x-12之$L.C.M.$

〔143〕求9(x

解 $x^2-16=(x+4)(x-4)$

$x^2-x-12=(x-4)(x+3)$,

故$L.C.M.=18(x+3)(x+4)(x-4)$.

〔註：此處數字係數18可省去〕

(三)約數及倍數之題解

〔144〕三次整多項式x^3+ax^2+bx+c以$(x-1)(x+2)$除之以

$(x+2)(x-3)$除之，又以$(x-3)(x-1)$除之剩餘恆爲3，

問a, b, c之值如何.

解 以$(x-1)(x+2)$, $(x+2)(x-3)$,

$(x-3)(x-1)$各式除之，其最小數，爲此三式之最小公倍數即爲

$(x-1)(x+2)(x-3)=x^3-2x^2-5x+6$

三次整多項式

故依題意恆有3之剩餘數，即爲x^3-2x^2-5x+9;

此與x^3+ax^2+bx+c相當.

故 $a=-2$, $b=-5$, $c=9$.

〔145〕求次之三式最小公倍數

x^3-3x^2+3x-1, x^3-x^2-x+1,

x^4-2x^3+2x-1,

解 $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$,

$x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)$

$=(x-1)^2(x+1)$,

$x^4-2x^3+2x-1=(x^2-1)(x^2+1-2x)$

$=(x-1)^3(x+1)$.

故三式之最小公倍數為 $(x-1)^3(x+1)=x^4-2x^3+2x-1$.

〔146〕 求下式之最大公約數

x^2+x, x^2-1, $5x^3+5$.

解 $x^2+x=x(x+1)$, $x^2-1=(x+1)(x-1)$,

$5x^3+5=5(x+1)(x^2-x+1)$.

故所要之最大公約數爲 $x+1$。

〔147〕 簡約 $\frac{1}{x-3}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

解 原式 $=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}$

$=\frac{(x+3)-(x-3)}{(x-3)(x+3)}+\frac{3(x-1)-3(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{6}{x^2-9}-\frac{6}{x^2-1}$

$=\frac{6(x^2-1)-6(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-1)}$

$=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}$

〔148〕 $5x^3-7x^2+ax+b$ 以 x^2-2x-3 得整除之,問 a 及 b 之值如何.

解 $5x^3-7x^2+ax+b$ 以 x^2-2x-3 整除,其餘

必為第一式之因數.

故第一式之 x^2,以第二式之 $x^2=2x+3$ 代入之,其結果要為零.

即　$5x^3-7x^2+ax+b$

$=5x(2x+3)-7(2x+3)+ax+b$

$=10x^2+15x-14x-21+ax+b$

$=20x+30+x+ax-21+b=$

$=21x+ax+9+b=(21+a)x+(9+b)$,

故此式為零,則 $21+a=0$, $9+b=0$,

故　$a=-21$, $b=-9$.

〔149〕有同次之二式,其最大公約數為 $x-1$,最小公倍數為 $x^3-6x^2+11x-6$,二式如何.

解　$A=mG$, $B=nG$, $L=mnG$,

$\therefore mn=\dfrac{L}{G}$.

今　$G=x-1$, $L=x^3-6x^2+11x-6$

$=x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6$

$=x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)$

$=(x-1)(x^2-5x+6)$

$=(x-1)(x-2)(x-3)$.

$\therefore$　$mn=(x-1)(x-2)(x-3)\div(x-1)$

$=(x-2)(x-3)$.

然依題意為一次之二式,

故二式為 $(x-1)(x-2)$ 及 $(x-1)(x-3)$.

〔150〕化簡 $\dfrac{2}{x(x^2-1)}-\dfrac{1}{2x^2-4x+2}-\dfrac{1}{1-x^2}$

解 原式$=\dfrac{2}{(x-1)^2(x+1)^2}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}$

$+\dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

$=\dfrac{4-(x+1)^2+2(x-1)(x+1)}{2(x-1)^2(x+1)^2}$

$=\dfrac{4-x^2-2x-1+2x^2-2}{2(x-1)^2(x+1)^2}$

$=\dfrac{x^2-2x+1}{2(x-1)^2(x+1)^2}$

$=\dfrac{(x-1)^2}{2(x-1)^2(x+1)^2}$

$=\dfrac{1}{2(x+1)^2}$。

[161] 有二次及三次之式，其相乘積為

$x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1$，其最大公約數為

$x-1$，求其二式。

解 二數之相乘積為$x^5+2x^4-3x^3-$

$-3x^2+2x+1$

故最小公倍數為

$(x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1)\div(x-1)$

$=x^4+3x^3-3x-1$

命此二式以最大公約數除之，其商為 A，B；

則 $AB=(x^4+3x^3-3x-1)\div(x-1)$

$=x^3+4x^2+4x+1$。然 x^3+4x^2+4x+1

$=(x+1)(x^2+3x+1)$；

故二次式以最大公約數除之必為$x+1$；

三次式以最大公約數除之必為x^2+3x+1

即元之二次式為$(x+1)(x-1)=x^2-1$；

三次式為$(x^2+2x+1)(x-1)$

$=x^3+2x^2-2x-1$。

〔152〕化簡$\dfrac{\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}+\dfrac{2a}{a^2-x^2}}{\dfrac{1}{a+x}-\dfrac{1}{a-x}-\dfrac{2a}{a^2-x^2}}$

解　用　$(a+x)(a-x)$乘分子分母，得

原式$=\dfrac{a-x+a+x+2a}{a-x-(a+x)-2a}$

$=\dfrac{4a}{-2x-2a}$

$=-\dfrac{2a}{x+a}$。

〔153〕求次之二式最小公倍數；

$3x-13x^2+23x-22$，$9x^3+x^2-44x+21$。

解　二式相加

$12x^3-12x^2-21x$　或　$3x(4x^2-4x-7)$。

又由(2)減(1)之3倍　$40x^2-113x+84$。

以之減　　$4x^2-4x-7$……………………(1)

之10倍，則　$63x+151$，或　$7(9x+22)$；

然$9x+22$不能整除(1)。

故一式二式無公約數，故最小公倍數為

$(3x^3-13x^3+23x-21)$

$=(9x^3+x^2-44x+21)$

$=27x^6-114x^5+62x^4+469x^3-1306x^2$

$+1407x=441$。

〔154〕簡化下式：$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$

解 原式$=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x+1}}$

$$=\frac{1}{\dfrac{x+1-x}{x+1}}=\frac{1}{\dfrac{1}{x+1}}=x+1。$$

〔155〕$x^4+3x^3+mx^2+nx+p$以$(x^2+1)(x+2)$得整除之，則m,np為何值？

解 四次式以三次式除之，其商為一次式，且將實法之首項，末項之係數比較之，當其整除時，可知為 $x+\dfrac{p}{2}$

於是 $x^4+3x^3+mx^2+nx+p$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)(x^2+1)(x+2)$$

$$=x^4+\left(2+\frac{p}{2}\right)x^3+(1+p)$$

$$x^2+\left(2+\frac{p}{2}\right)x+p.$$

比較兩邊x之同次冪係數：

$$2+\frac{p}{2}=3;\quad 1+d=m;\quad 2+\frac{p}{2}=n。$$

即 $\frac{p}{2}=1$, 故 $m=3$, $p=2$, $n=3$。

即 $m=3$, $n=3$, $p=2$。

(四) 分數之題解

〔156〕 $\frac{x^4-16}{x^4+4x^2+16}\times\frac{x^3+8}{x^2+4}\div\frac{(x-2)^2(x+2)}{x^2-2x+4}$。

解 $\frac{(x^2+4)(x^2-4)}{(x^2+2x-4)(x^2-2x+4)}$

$\times\frac{(x+2)(x^2+2x+4)}{x^2+4}\times\frac{x^2-2x+4}{(x-2)^2(x+2)}=1$。

〔157〕 求解 $\frac{3x-5}{x-5}=0$。

解 $3x-5=0$, 故 $3x=5$,

$\therefore\ x=\frac{5}{3}$。

〔158〕 $\frac{b^2-c^2+2ca-a^2}{b^2-c^2-2ab+a^2}\times\frac{c^2+2ca+a^2-b^2}{c^2-2ab-a^2-b^2}$

解 原式 $=\frac{b^2-(c-a)^2}{(a-b)^2-c^2}\times\frac{(a+c)^2-b^2}{c^2-(a+b)^2}$

$=\frac{(b+c-a)(b-c+a)(a+c+b)(a+c-b)}{(a-b+c)(a-b-c)(c+a+b)(c-a-b)}=1$。

〔159〕 $\frac{x^2-y^2}{(x-y)(x-2y)}\times\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}\div\frac{(x-y)^2}{x^2-xy}$。

解 原式 $=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(x-2y)}\times\frac{y(x-2y)}{x(x+y)}\times\frac{x(x-y)}{(x-y)^2}$

$=\frac{y}{x-y}$。

〔160〕 $$\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3-3\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2+3\frac{a-b}{a+b}-1\right\}$$
$$\div\left\{1+3\frac{a-b}{a+b}+3\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}-\frac{(b-a)^3}{(b+a)^3}\right\}$$ 試簡單之.

解　$$\text{原式}=\left\{\frac{a-b}{a+b}-1\right\}^3\div\left\{1+\frac{a-b}{a+b}\right\}^3$$
$$=\left\{\frac{a-b}{a+b}-1\right\}^3\div\left\{1+\frac{a-b}{a+b}\right\}^3$$
$$=\frac{-8b^3}{(a+b)^3}\div\frac{8a^3}{(a+b)^3}$$
$$=-\frac{b^3}{a^3}$$

〔161〕 $$\left(1+\frac{12}{x+1}-\frac{4}{x+3}\right)$$
$$\left(1+\frac{4}{x+5}-\frac{12}{x+7}\right).$$

解　$$\text{原式}=\left(\frac{x-1}{x+3}+\frac{12}{x+1}\right)\left(\frac{x-5}{x+7}+\frac{4}{x+5}\right)$$
$$=\frac{x^2-1+12x+36}{(x+3)(x+1)}\times\frac{x^2-25+4x+28}{(x+7)(x+5)}$$
$$=\frac{(x^2+12x+35)(x^2+4x+3)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}$$
$$=\frac{(x+5)(x+7)(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}=1.$$

〔162〕 $$\frac{3(x^2+x-2)}{x^2+x-2}-\frac{3(x^2-x-2)}{x^2+x-2}$$

$$=\frac{8x}{x^2-4}+\frac{4x}{1-x^2}.$$

解 原式 $=\frac{3(x^2+x-2)}{x^2-x-2}-\frac{3(x^2-x-2)}{x^2+x-2}$

$$-\frac{8x}{x^2-4}-\frac{4x}{x^2-1}$$

$$=\frac{3(x^2+x-2)^2-3(x^2-x-2)^2}{(x^2-4)(x^2-1)}$$

$$-\frac{8x(x^2-1)+4x(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2-1)}$$

$$=\frac{3[(x^2+x-2)^2-(x^2-x-2)^2]-12x^3+24x}{(x^2-4)(x^2-1)}$$

$$=\frac{12x(x^2-2)-12x(x^2-2)}{(x^2-4)(x^2-1)}=0.$$

〔161〕 $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$ 試簡單之。

解 以各分母除分子，則

$$\text{原式}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}=0.$$

〔164〕 $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}\div\frac{x^2-4x+3}{2x^2+3x+1}\times\frac{x^2+3x-4}{2x^2-3x-2}$.

解 $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+4}\div\frac{x^2-4x+3}{2x^2+3x+1}\times\frac{x^2+3x-4}{2x^2-3x-2}$

$$=\frac{(x-2)(x-3)}{(x+4)(x+1)}\times\frac{(2x+1)(x+1)}{(x-3)(x-1)}$$

$$\times\frac{(x+4)(x-1)}{(2x+1)(x-2)}=1.$$

〔165〕 試解 $\frac{x+7}{9-4x^2}-\frac{1-x}{2x+3}=\frac{4}{2x-3}$ 方程式。

解　各分母的$L.C.M.$是$4(x^2-1)$，用這$L.C.M.$乘全式，得

$$3-(x+7)-(2x-3)(1-x)=4(2x+2)$$

化簡，得　　$x^2-7x-8=0$。

分解因數　$(x-8)(x+1)=0$。

$$x=8\text{ 或 }x=-1。$$

〔166〕　$\dfrac{a^3-x^3}{a^2-x^2}\times\dfrac{x^3+a^3}{x^4+a^2x^2+a^4}$

解　原式$=\dfrac{(x^3-a^3)(x^3+a^3)}{(x^2-a^2)(x^4+a^2x^2+a^4)}$

$$=\frac{x^6-a^6}{x^6-a^6}=1。$$

〔167〕　$\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$。

解　原式

$$=\frac{-bc(b-c)(a+d)-ca(c-a)(b+d)-ab(a-b)(c+d)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$$

而　$-bc(b-c)(a+d)=$

$-abc(b-c)-bc(b-c)d$，

$-ca(c-a)(b+d)=$

$-abc(c-a)-ca(c-a)d$，

$-ab(a-b)(c+d)=$

$-abc(a-b)-ab(a-b)d$，

故分子　$=-\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}d$

$$=(b-c)(c-a)(a-b)d,$$

故原式$=\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)d}{(b-c)(c-a)(a-b)}=d$。

〔168〕 $\dfrac{x-a}{b}+\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{b}{x-a}+\dfrac{a}{x-b}$.

解 將題之方程移項，則

$$\frac{x-a}{b}-\frac{a}{x-b}+\frac{x-b}{a}-\frac{b}{x-a}=0;$$

或 $\dfrac{x^2-(a+b)x}{b(x-b)}+\dfrac{x^2-(a+b)x}{a(x-a)}=0$,

故$x^2-(a+b)x=0$，從此可得$x=0$或$a+b$之根，而其他之根，可自$\dfrac{1}{b(x-b)}+\dfrac{1}{a(x-a)}=0$ 得之，當$(x-a)(x-b)\neq 0$時，去其分母，得$a(x-a)+b(x-b)=0$,

即$(a+b)x=a^2+b^2$,

$\therefore\ x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$，故所求之根為

0，$a+b$，$\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$.

〔169〕 $\dfrac{1}{x-3a}-\dfrac{1}{x+3a}+\dfrac{3}{x+a}-\dfrac{3}{x-a}$,

解 原式$=\dfrac{6a}{x^2-9a^2}-\dfrac{6a}{x^2-a^2}$

$$=\frac{6a\cdot 8a^2}{(x^2-9a^2)(x^2-a^2)}$$

$$=\frac{48a^3}{(x^2-9a^2)(x^2-a^2)}.$$

〔170〕解 $\frac{3+x}{3-x}-\frac{2+x}{2-x}+\frac{1+x}{1-x}=1$。

解 $\frac{3+x}{3-x}-\frac{2+x}{2-x}=1+\frac{1+x}{1-x}$，

$$1+\frac{2x}{3-x}-\left(1+\frac{2x}{2-x}\right)=\frac{2}{1-x}，$$

即 $\frac{2x}{3-x}-\frac{2x}{2-x}=\frac{2}{1-x}$，

即 $x\left(\frac{1}{3-x}-\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{1-x}$，

故 $\frac{-x}{(3-x)(2-x)}=\frac{1}{1-x}$，

今假定$(1-x)(2-x)(3-x)\neq 0$，以$(1-x)(2-x)(3-x)$乘兩邊，則

$$x(x-1)=(3-x)(2-x)，$$

即 $x^2-x=6-5x+x^2$，

故 $4x=6$，$x=\frac{3}{2}$。

〔171〕 $$\frac{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}$$

解 原式$=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}$

$$=\frac{2(a^2+b^2)}{4ab}$$

$$=\frac{a^2+b^2}{2ab}$$

〔172〕 $\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)}+\frac{a+y}{y(y-z)(y-x)}$

$+\frac{a+z}{z(z+x)(z-y)}$試簡單之。

解 原式$=-\{yz(a+x)(y-z)+xz(a+y)(z-x)$

$+xy(a+z)(x-y)\}/$

$\{xyz(x-y)(y-z)(z-x)\}$

$=-\frac{a\{yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)\}}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$

$=-\frac{-a(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}$

$=\frac{a}{xyz}$。

〔173〕 $\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}$

$+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$。

解 原式$=\frac{-bc(b-c)-ca(c-a)-ab(a-b)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}$

$=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc(b-c)(c-a)(a-b)}$

$=\frac{1}{abc}$。

〔174〕 $\frac{x+21}{x^3+x^2-3x-6}+\frac{x-15}{x^3+2x^2-3}$。

解 原式$=\frac{x+15}{(x-2)(x^2+3x+3)}$

$\frac{-x-(15-x)}{(x-1)(x^2+3x+3)}$

$$=\frac{(x+24)(x-1)+(x-15)(x-2)}{(x-2)(x-1)(x^2+3x+3)}$$

$$=\frac{2(x^2+3x+3)}{(x-2)(x-1)(x^2+3x+3)}$$

$$=\frac{2}{x^2-3x+2}$$

$$=\frac{2}{(x-1)(x-2)}$$

〔175〕 $\dfrac{1}{x^2-5x+6}-\dfrac{2}{x^2-4x+2}+\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 試簡單之

解　原式$=\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}-\dfrac{2}{(x-1)(x-3)}$

$$+\frac{1}{(x-2)(x-2)}$$

$$=\frac{(x-1)-2(x-2)+(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{0}{(x-1)(x-2)(x-3)}=0.$$

〔176〕 $$\frac{x-2-\dfrac{1}{x-2}}{x-2-\dfrac{4}{x-5}}\times\frac{x-4-\dfrac{4}{x-4}}{x-4-\dfrac{1}{x-4}}$$

解　原式$=\dfrac{\dfrac{(x-2)^2-1}{x-2}}{\dfrac{x^2-7x+6}{x-5}}\times\dfrac{\dfrac{(x-4)^2-4}{x-4}}{\dfrac{(x-4)^2-1}{x-4}}$

$$=\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-2)(x-1)(x-6)}$$

$$\times\frac{(x-2)(x-6)}{(x-3)(x-5)}=1.$$

〔177〕 $$y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=1$$

試證 $xyz+1=0$.

解 由 $y+\frac{1}{z}=1$

得 $yz+1=z$,

及 $\frac{1}{x}=1-z$ 或 $yz=z-1$

及 $x=\frac{1}{1-z}$.

兩邊相乘 $xyz=-1$, 即 $xyz+1=0$.

〔178〕 $a+b+c=0$

試證 $$\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$$

解 原式 $=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{ab+bc+ca}{abc}$

因 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

而 $a+b+c=0$, 故 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\therefore\ \frac{a^2+b^2+c^2}{3abc}+\frac{2(ab+bc+ca)}{3abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)^2}{3abc}=\frac{0}{3abc}=0.$$

〔179〕 解 $\frac{x^2+6x-7}{x^2+4x-21}-1=\frac{x^3}{6x^3-2x^3}+\frac{7}{5}$

解　右邊第一項就是$\frac{1}{4}$，把[illegible]移到右邊，再加起來。

那末方程式變成：

$$\frac{x^2+6x-7}{x^2+4x-21}=\frac{49}{20}.$$

用分母的$L.C.M.$乘兩邊，得

$$20x^2+120x-140=49x^2+196x-1029$$

移項合併，　$29x^2+76x-889=0.$

就是：　$(x+7)(29x-127)=0.$

$$\therefore\quad x=-7\text{或}\frac{127}{29}.$$

因爲$x=-7$能使得分母$x^2+4x-21$成零，所以$x=-7$是僞根；原方程式祇有一個根$x=127/29$。

〔180〕　$a+c=2b$　求次式之值

$$\frac{a^3+4b^3+c^3}{b(a^2+c^2)}.$$

解　$$\frac{a^3+4b^3+c^3}{b(a^2+c^2)}=\frac{2(a^3+c^3+8b^3)}{2b(a^2+c^2)}.$$

因　$$2b=a+c$$

則　$$=\frac{2(a^3+c^3)+(a+c)^3}{(a+c)(a^2+c^2)}$$

$$=\frac{2(a^2-ac+c^2)+(a+c)^2}{a^2+c^2}$$

$$=\frac{3(a^2+c^2)}{a^2+c^2}=3.$$

〔181〕　$$\frac{1}{2+\frac{2}{x+1}}=\frac{1}{x+\frac{1}{2+\frac{x-1}{x+3}}}$$

解 原式 $=\dfrac{1}{\dfrac{3x+5}{x+1}}\times\dfrac{1}{x+5\dfrac{x+1}{x\times3}}$

$=\dfrac{x+1}{3x+5}\times\dfrac{3x+5}{3x^2+6x+3}$

$=\dfrac{1}{3(x+1)}$

〔182〕 $2s=a+b+c$

試證 $\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{1}{s-b}+\dfrac{1}{s-c}-\dfrac{1}{s}$

$=\dfrac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

解 $\dfrac{1}{s-a}+\dfrac{1}{s-b}+\dfrac{1}{s-c}-\dfrac{1}{s}$

$=\dfrac{c}{(s-a)(s-b)}+\dfrac{c}{s(s-c)}$

$\because\ a+(b+c)=2s.$

$=\dfrac{c\{s(s-c)+(s-a)(s-b)\}}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\dfrac{c\{2s^2-s(a+b+c)+ab\}}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\dfrac{c(2s^2-s.2s+ab)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\dfrac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

〔183〕 解 $\begin{cases}\dfrac{x+y-1}{x-y+2}=3 & (1)\\[2ex] \dfrac{y-x-1}{x+y+1}=2 & (2)\end{cases}$

解 把(1),(2)去分母,得

$$x+y-1=3x-3y+6;$$
$$y-x-1=x-y+1.$$

整理,得 $$2x-4y=-7,$$
$$2x-2y=-2.$$

解這兩方程式,得 $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$.

〔184〕 $$a+b+c=0$$

試證 $$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3=0.$$

解 原式之左邊

$$=\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc}{abc}$$

$$=\frac{(a+b+c)(bc+ca+ab)}{abc}$$

因 $a+b+c=0$,

故原式之左邊 $=\frac{0}{abc}=0$.

〔185〕 $$x=a+\frac{1}{a},\ y=b+\frac{1}{b},$$

$z=ab+\frac{1}{ab}$ 將 $x^2+y^2+z^2-xyz$ 之值,試最簡表之.

解 $$x^2+y^2+z^2-xyz$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(ab+\frac{1}{ab}\right)$$

$$\text{左邊}=-\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(ab+\frac{1}{ab}\right)$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(ab+\frac{1}{ab}\right)\left(-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)$$

$$=a^2+2+\frac{1}{a^2}+b^2+2+\frac{1}{b^2}-b^2-\frac{1}{a^2}-a^2-\frac{1}{b^2}=4.$$

〔186〕解

$$\begin{cases}\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{6}{y+2}=1, & (1)\\[2ex] \dfrac{8}{x-3}-\dfrac{3}{y+2}=\dfrac{1}{8}. & (2)\end{cases}$$

假令 $\frac{1}{x-3}=u$，$\frac{1}{y+2}=v$，就得

$$4u+6v=1,$$

$$8u-3v=\frac{1}{8}.$$

解出來，得 $u=\frac{1}{16}$，$v=\frac{1}{8}$，

就是 $\frac{1}{x-3}=\frac{1}{16}$，$\frac{1}{y+2}=\frac{1}{8}$

$$\therefore\quad x=19,\ y=6.$$

〔187〕

$$\frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}+1+\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}-x+\dfrac{1}{1-x}}$$

解　原式$=\dfrac{\left(\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x}{x+1}\right)}{\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{1-x+x^2}{x-1}\right)}=\dfrac{x^2+x}{x+1}\times\dfrac{x-1}{x-1}=x$

〔188〕化簡下列各式：

(a)　$\dfrac{x^2-5xy+4y^2}{x^2-16y^2}$

(b)　$\dfrac{2x+1}{x^2-16}+\dfrac{4}{3x^3-x+2}$.

解　(a)　原式$=\dfrac{(x-y)(x-4y)}{(x+4y)(x-4y)}$

$$=\frac{x-y}{x+4y}.$$

(b)　原式$=\dfrac{2x+1}{(x-1)(x+1)}$

$$+\frac{4}{(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{(2x+1)(x-2)+4(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{2x^2-3x-2+4x+4}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$=\frac{2x^2+x+2}{x^3-2x^2-x+2}.$$

〔189〕　$\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x-1}{x}}}$

解　原式$=\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{\dfrac{x^2+x+1}{x}}}$

$$=\frac{x}{x-\dfrac{x^2+2x}{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{x}{\dfrac{x^3-x}{x^2+x+1}}$$

$$=\frac{x(x^2+x+1)}{x(x^2-1)}$$

$$=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}.$$

〔190〕試解 $\dfrac{x^2-5x}{x+3}=x-3+\dfrac{1}{x}$.

解　左邊 $=x-8+\dfrac{24}{x+3}$,

故 $x-8+\dfrac{24}{x+3}=x-3+\dfrac{1}{x}$,

$\therefore\quad \dfrac{24}{x+3}-5=\dfrac{1}{x}$,

設 $x(x+3)\neq 0$, 去分母而簡之, 則

$$(5x-3)(x-1)=0,$$

$\therefore\quad x=\dfrac{3}{5}$ 或 1.

〔191〕試解 $\dfrac{2x+3}{x+1}=\dfrac{4x+5}{4x+4}+\dfrac{3x-3}{3x+1}$.

解 $\dfrac{2x+3}{x+1}-2=\dfrac{4x+5}{4x+4}-1+\dfrac{3x+3}{3x+1}-1$.

$\therefore\quad \dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{4(x+1)}+\dfrac{2}{3x+1}$

故於$(x+1)(3x+1)\neq0$時，以$4(x+1)(3x+1)$乘兩邊則：

$$4(3x+1)=3x+1+8(x+1)；$$

$$\therefore\quad 12x+4=3x+1+8x+8；$$

$$\therefore\quad x=5。$$

〔192〕 試解 $$\frac{x^3+7x^2+24x+30}{x^2+5x+13}=\frac{2x^3+11x^2+36x+45}{2x^2+7x+20}.$$

解 由題之方程得

$$x+2+\frac{x+4}{x^2+5x+13}$$

$$=x+2+\frac{2x+5}{2x^2+7x+20}，$$

或$(x+4)(2x^2+7x+20)=(2x+5)$

$$(x^2+5x+13)=0$$

簡之，得 $$-3x+15=0，$$

∴則 $$x=5。$$

〔193〕 $x=\frac{1}{2}$時，試求$\frac{4x^3-4x^2-x+1}{2x^2-x}$之值。

解 式中之x，若以$\frac{1}{2}$代之，則成不定形$\frac{0}{0}$；故先將題式簡單之，則

$$\frac{(4x^2-1)(x-1)}{x(2x-1)}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}。$$

故 $x=\frac{1}{2}$時，此式為-2。

〔194〕 $x^2-x+\frac{72}{x^2-x}=18$，試解之。

解　將$x^2-x=X$，則所設方程為

$$X+\frac{72}{X}=18,$$

$\therefore\quad X^2-18X+72=0,$

$\therefore\quad (X-12)(X-6)=0,$

$\therefore\quad X=12,$　或6。

故若$X=12$，則$x^2-x=12$，即$(x+3)(x-4)$

$\therefore\quad x=-3,$　或4。

又若$X=6$，　則$x^2-x=6$，

$\therefore\quad (x-3)(x+2)=0,$

$\therefore\quad x=3,$　或-2，

故所設之方程，有$-3,4,3,-2$之四根。

〔195〕 $\left(y-\frac{a^2-xy}{y-x}\right)\left(x-\frac{a^2-xy}{y-x}\right)\div\left(\frac{a^2-xy}{y-x}\right)$試簡單之。

解　原式 $=\frac{y^2-a^2}{y-x}\times\frac{a^2-x^2}{y-x}\div\left(\frac{a^2-xy}{y-x}\right)^2$

$$=\frac{(y^2-a^2)(a^2-x^2)\div(a^2-xy)^2}{(y-x)^2}$$

$$=\frac{a^2(y-x)^2}{(y-x)^2}=a^2.$$

〔196〕 $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$試簡單之。

解　原式 $=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}$

$$=\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}$$

$$=\frac{8}{1-x^8}$$

〔197〕解 $\dfrac{(x-a)(x+b)}{(x-ma)(x-mb)}$

$$=\frac{(x+a)(x+d)}{(x-ma)(x+mb)}$$

解 $\dfrac{(x+a)(x+l)}{(x-a)(x-a)}-1$

$$=\frac{(x+m^3)(x+mb)}{(x-ma)(x-mb)}=-1;$$

$\therefore\quad x=0$，或 $(x-ma)(x-mb)=m(x-a)(x-b)$，

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{mab}.$$

〔198〕$\dfrac{x+c}{x^2-(a+b)x+ab}+\dfrac{b+b}{x^2-(a+c)x+ac}+\dfrac{x+a}{x^2-(b+c)x+bc}$

試簡單之。

解 原式 $=\dfrac{x+c}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{x+b}{(x-a)(x-c)}+\dfrac{x+b}{(x-b)(x-c)}$

$$=\frac{x^2-c^2+x^2-c^2+x^2-a^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$=\frac{3x^2-a^2-b^2-c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

〔199〕 $x=\frac{1}{2}(a+b)$時，試求$\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2-\frac{x-2a+b}{x+a-2b}$

之值。

解 原式$=\left(\frac{2x-2a}{2x-2b}\right)^2-\frac{2x-4a+2b}{2x+2a-4b}$

$=\left(\frac{b-a}{a-b}\right)^2-\frac{3b-3a}{3a-3b}=(-1)^2+1=0$。

〔200〕 求$x+y$之值。

解 (1)之2倍與(2)相加，

$$\frac{7}{x+y}=14, \quad \therefore \ x+y=\frac{1}{2}.$$

〔201〕 $\frac{x-8}{x-3}-\frac{x-9}{x-4}=\frac{x+7}{x+8}-\frac{x+2}{x+3}$。

解 $1-\frac{5}{x-3}-1+\frac{5}{x-4}$

$=1-\frac{1}{x+8}-1+\frac{1}{x+3}$,

$\therefore \quad \frac{5}{x-4}-\frac{5}{x-3}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+8}$,

$\therefore \quad \frac{5}{(x-4)(x-3)}=\frac{5}{(x+3)(x+8)}$,

$\therefore \quad (x+3)(x+8)=(x-4)(x-3)$。

$\therefore \quad 18x=-12, \quad \therefore \quad x=-\frac{2}{3}$.

$\frac{3}{x+y}=\frac{2}{x-y}+1, \quad \frac{1}{x+y}+\frac{4}{x-y}=12$

〔202〕 $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=2, \qquad \frac{18}{x}+\frac{8}{y}=0$。

解 $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=2$……………………………(1)

$-\frac{18}{x}+\frac{8}{y}=0$ ……………………(2)

(1)之2倍加(2)得 $\frac{36}{x}=4$,

$\therefore x=9$, 故 $y=-4$.

[203] 解 $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{2-x}=\frac{3}{x-3}$.

解 $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{2-x}=\frac{3}{x-3}$,

$\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$,

$(x-2)(x-3)+2(x+2)(x-3)$

$=3(x+2)(x-2)$ $x^2-5x+6+2x^2-2x-$

$12=3x^2-12$,

$-7x+6=0$,

$\therefore x=\frac{6}{7}$.

[204] $\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{z}$, $\frac{3}{z}-\frac{2}{y}=2$,

$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{4}{3}$.

解 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ 作爲未知數，就此解之，取後之逆數即得。

答 $x=\frac{7}{6}$, $y=-\frac{7}{2}$, $z=\frac{21}{10}$.

[205] 解

$$\begin{cases} \dfrac{2}{y}=10-\dfrac{1}{x} \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\[2ex] \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=20 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

解　(1)移項：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}=10 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

(3)×3：$\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=30 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(2)×2：$\dfrac{8}{x}+\dfrac{6}{y}=40 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(5)−(4)：$\dfrac{5}{x}=10$

$\therefore\quad x=\dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

代入(1)：$\dfrac{2}{y}=10-\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=10-2=8.$

$\therefore\quad y=\dfrac{1}{4} \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

〔206〕試解下之方程：

$$\frac{16}{3x-4}=\frac{27}{5x-6}.$$

解　$\dfrac{16}{3x-4}=\dfrac{27}{5x-6},$

$16(5x-6)=27(3x-4),$

$80x-96=81x-108.$

$81x-80x=-96+108,$

$x=12.$

[207]......$\dfrac{x-8}{x-4}+\dfrac{x-5}{x-7}=2.$

解　由題之方程式

$$\frac{x-8}{x-4}-1+\frac{x-5}{x-7}-1=0.$$

即　$\dfrac{-4}{x-4}+\dfrac{2}{x-7}=0.$　∴　$\dfrac{2}{x-4}=\dfrac{1}{x-7}.$

$$2(x-7)=x-4\qquad \therefore\ x=10.$$

[208] 解次之方程：$\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}=0.$

解　$\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{1-x}=0;$

$$\frac{4}{(x+1)(x-1)}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}=0;$$

$$4+(x-1)+(x+1)=0,$$

$$2x+4=0;$$

$$\therefore\ x=-1.$$

(五)　未定係數之題解

[209]　　$x^4+6x^3+7x^2+ax+b$

為完全平方式，試定a,b之數值。

解　完全平方式以x^2+px+q表之，則

$$x^4+6x^3+7x^2+ax+b=(x^2+px+q)^2.$$

右邊展開　$x^4+2px^3+(p^2+2q)x^2+2pqx+q^2.$

於是x之相當項係數相等，

$2p=6$, ∴ $p=3$ ......(1)

$p^2+2q=7$ ......(2)

$2=2pq$ ....(3)

$b=q^2$ ....(4)

(1)代入(2) $\quad {}^2+2q=7,$

$\therefore \quad q=-1$ ....(5)

(1)及(5)代入(3)，(4) $a=2\times3\times$

$(-1)=-6,\quad b=(-1)^2=1.$

〔210〕若a,b,c為不相等之三正數，則

$$a^3+b^3+c^3-3abc>0,$$

試證之。

解 $\therefore \quad (a-b)^2>0,$

$\quad (b-c)^2>0,$

$\quad (c-a)^2>0,$

$\therefore \quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0,$

$\therefore \quad a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0,$

又 $\quad a+b+c>0,$

相乘得：

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)>0,$$

即 $\quad a^3+b^3+c^3-3abc>0.$

〔211〕$13x^2+18x+10$試變為$(ax+b)^2+(cx+d)^2$之形，

但a,b,c,d為正整數。

解 $\quad 13x^2+18x+10=(ax+b)^2+(cx+d)^2$

$\quad =(a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)x+(b^2+d^2).$

$\therefore \quad a^2+c^2=13$ ....(1)

$\quad b^2+d^2=10$ ....(2)

$\quad ab+cd=9$ ....(3)

由(1) $a^2=4$，或9，$c^2=9$，或4；

由(2) $b^2=9$，或1，$d^2=1$，或3，

故 $a=2$，或3，$c=3$，或2，

$b=3$，或1，$d=1$，或3

然 $a=2, b=3, c=3, d=1$，

或 $a=3, b=1, c=2, d=3$ 適合(2)。

故所要之值為 $a=2, b=3, c=3, d=1$

或 $a=3, b=1, c=2, d=3$

〔212〕 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-2x^2+3x-4$

試求$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$之數值。

解 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)x-\alpha\beta\gamma$

故 $\alpha+\beta+\gamma=2, \beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta=3, \alpha\beta\gamma=4$

次 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma+3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-3)+12$

$=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha)+6$

$=2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+6$

$=2(4-6)+6=-4+6=2$。

(六) 根，根數，指數之題解

〔213〕 $x=b\sqrt{2a-b^2}$ 試將$\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$簡單之。

解 $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$

$=\dfrac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}$

$=\dfrac{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}{2x}=\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

然 $a^2-x^2=a^2-b^2(2a-b^2)=a^2-2ab^2+b^4$
$=(a-b^2)^2$

故 $a-b^2\geqq 0$時，則

前式$=\dfrac{a+(a-b^2)}{b\sqrt{2a-b^2}}=\dfrac{2a-b^2}{b\sqrt{2a-b^2}}=\dfrac{\sqrt{2a-b^2}}{b}$

又 $a-b^2\leqq 0$時，則

前式$=\dfrac{a+(b^2-a)}{b\sqrt{(2a-b^2)}}$

$=\dfrac{b^2}{b\sqrt{(2a-b^2)}}$

$=\dfrac{b}{\sqrt{(2a-b^2)}}$

〔214〕 $\sqrt{15+10\sqrt{2}-6\sqrt{6}-4\sqrt{12}}$

解 $15+10\sqrt{2}-6\sqrt{6}-4\sqrt{12}$

$=5(3+2\sqrt{2})-2\sqrt{6}(3+2\sqrt{2})$

$=(5-2\sqrt{6})(3+2\sqrt{2})$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(\sqrt{2}+1)^2$

故此平方根為

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$

$=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2.$

〔215〕將 $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ 簡單之.

解 $\dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

$$=\frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(3\sqrt{2})^2+12\sqrt{2\times3}+(2\sqrt{3})^2}{(3\sqrt{2})^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{18+12\sqrt{6}+12}{18-12}$$

$$=\frac{30+12\sqrt{6}}{6}=5+2\sqrt{6}.$$

〔216〕 $\dfrac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}.$

解 題式$=\dfrac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})+\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$

$$=\frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(3-2)(7-5)}$$

$$=\tfrac{1}{2}(\sqrt{21}-\sqrt{15}-\sqrt{14}+\sqrt{10})$$

〔217〕 化簡 $\sqrt{18}-\sqrt{8}$.

解 原式$=\sqrt{18}-\sqrt{8}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}.$

〔218〕 $\sqrt{\dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{24}}{4\sqrt{2}+\sqrt{24}}}.$

解 $$\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-\sqrt[3]{24}}{4\sqrt{2}+\sqrt[3]{24}}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$=2-\sqrt{3}$$

〔219〕化简 $\sqrt[4]{x^{2n+1}}\cdot\sqrt[4]{x^{-2}}$.

解 原式 $=\sqrt[4]{x^{2n+1}\cdot x^{-1}}=\sqrt[4]{x^{2n}}=\sqrt{x^{n}}$.

〔220〕 $$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$+\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

解 题式 $=\frac{1}{1+(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$$+\frac{1}{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

$$+\frac{1}{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$+\frac{1}{1+(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2}{1-(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}$$

$$+\frac{2}{1-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{2}{-4-2\sqrt{6}}+\frac{2}{-4+2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}-2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}+2}{6-4}$$

$$=\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}。$$

〔221〕試求$\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$之近似值至小數三位。

解 原式$=\dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$

$$=\frac{7+2\sqrt{21}+3}{7-3}$$

$$=\frac{10+2\sqrt{21}}{4}=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$$=\frac{5+4.582}{2}=\frac{9.582}{2}=4.791$$

〔222〕 $$x=\frac{2ab}{b^2+1}$$

試求 $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$之值。

解 因 $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$

則 $a+x=a\left(1+\dfrac{2b}{b^2+1}\right)=\dfrac{a(b+1)^2}{b^2+1}。$

〔223〕 $\left\{(a^2b)^3\times\left(\dfrac{b}{a}\right)^2\right\}^3$

$\div\left\{(ab^2)^2\times\left(\dfrac{a}{b}\right)^3\right\}^4$

解 $\left\{(a^2b)^3\times\left(\frac{b}{a}\right)^4\right\}^5$

$\div\left\{(ab^2)^2\times\left(\frac{a}{b}\right)^3\right\}^4$

$=\left\{a^6b^3\times\frac{b^4}{a^4}\right\}^5\div\left\{a^2b^4\times\frac{a^3}{b^3}\right\}^4$

$=(a^2b^7)^5\div(a^5b)^4=a^{10}b^{35}\div a^{20}b^4=\frac{b^{31}}{a^{10}}$。

〔224〕求下式之平方根：

解 $a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4$。

$a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4(a^2-ab+b^2$
$a^4)$

$2a^2-ab \mid -2a^3b+3a^2b^2$
$\qquad\qquad -2a^3b+\ a^2b^2$

$2a^2-2ab+b^2 \mid 2a^2b^2-2ab^3+b^4$
$\qquad\qquad 2a^2b^2-2ab^3+b^4$

$\therefore$ 平方根$=a^2-ab+b^2$。

〔225〕$2x=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}$問$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-4}}$之值如何。

解 $2x=\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

故 $x=\frac{3\sqrt{2}}{4}$。

故 $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{\frac{18}{16}-1}}{\frac{3\sqrt{2}}{4}-\sqrt{\frac{18}{16}-1}}$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{2\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{2}.$$

〔226〕 求 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{b}{a}}+3$ 之平方根。

解 原式 $=\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2+1^2+2\sqrt{\frac{a}{b}}$

$$+2\sqrt{\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{b}{a}}$$

得平方根 $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}+1$.

〔227〕 $(x-a)(x-2a)(x-3a)(x-4a)+a^4$ 之平方根。

解 原式 $=(x-a)(x-4a)(x-2a)(x-3a)+a^4$

$$=\{(x^2-5ax)+4a^2\}\{(x^2-5ax)+6a^2\}+a^4$$

$$=(x^2-5ax)^2+10a^2(x^2-5ax)+25a^4$$

$$=(x^2-5ax+5a^2)^2.$$

故所要之平方根為 $x^2-5ax+5a^2$。

〔228〕 求 $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)+16$ 之平方根。

解 $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)+16$

$$=(4x^2+16x+7)(4x^2+16x+15)+16$$

$$=(4x^2+16x)^2+22(4x^2+16x)+105+16$$

$$=(4x^2+16x+11)^2.$$

故原式之平方根為 $4x^2+16x+11$。

〔229〕化簡$\dfrac{a^{-2}x^{-2}}{(ax)^{-1}-(ax)^{-2}}$

解 原式$=\dfrac{\dfrac{1}{a^2x^2}}{\dfrac{1}{ax}-\dfrac{1}{a^2x^2}}=\dfrac{\dfrac{1}{a^2x^2}}{\dfrac{ax-1}{a^2x^2}}=\dfrac{1}{ax-1}$

〔230〕化簡$\dfrac{ax(a^{-1}x-ax^{-1})}{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}$

解 原式$=\dfrac{x^2-a^2}{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{(x^{\frac{2}{3}})^3-(a^{\frac{2}{3}})^3}{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}$

$=(x^{\frac{2}{3}})^2+x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}+(a^{\frac{2}{3}})^2=x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{4}{3}}$

〔231〕

$$\left\{\left\{x^{\frac{p-q}{r}}\right\}^{\frac{q-r}{p}}\right\}^{\frac{r-p}{q}} \quad \frac{p-q}{r}+\frac{q-r}{p}+\frac{r-p}{q}$$

$$\times x$$

$$\frac{p-q}{r}\times\frac{q-r}{p}\times\frac{r-q}{p}$$

$$-\quad\times x$$

$$\frac{p-q}{r}+\frac{q-r}{p}\times\frac{r-p}{q}$$

解 題式$=x$

故指數為

$$\frac{(p-q)(q-r)(r-p)}{ppr}$$

$$+\frac{-(p-q)(q-r)(r-p)}{pqr}=0$$

於是題式為1。

〔232〕化簡 $\left(\sqrt[4]{x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}\sqrt{xy}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

解 原式 $=\left(\sqrt[4]{x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(\sqrt[4]{x^{-\frac{1}{6}}y}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$=\left(x^{-\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(x^{-\frac{1}{24}}y^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{2}{3}}$

$=x^{-\frac{1}{24}\left(-\frac{2}{3}\right)}y^{\frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)}=x^{\frac{1}{36}}y^{-\frac{1}{6}}$

〔233〕求 $43-15\sqrt{8}$ 之平方根，試以二個有理數平方根之差答之。

解1. 依公式 $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$

$-\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

則 $\sqrt{43-15\sqrt{8}}=\sqrt{25}-\sqrt{18}$

$=5-3\sqrt{2}$

解2. $\sqrt{43-15\sqrt{8}}$

$=\sqrt{(43-2\sqrt{15\times15\times2})}$

$=\sqrt{(25-2\sqrt{25\times18}+18)}$

$=\sqrt{25}-\sqrt{18}=5-3\sqrt{2}$

（七） 二次方程式之題解

〔234〕有二數其和為 a，其積為 b^2，問其積最大，則二數各幾何？

解 所求二數為方程式 $x^2-ax+b^2=0$ 之二根，故二數為 $\dfrac{a\pm\sqrt{(a^2-4b^2)}}{2}$，而此二數為實數，則必 a^2

$\geqq 4b^2$，由是二數之和 a 爲已知，而其積 b^2 最大，

則 $a^2-4b^2=0$，即 $b^2=\frac{1}{4}a^2$，故二數皆爲 $\frac{1}{2}a$。

〔235〕問當 m 爲何數時，二次方程

$$(m+2)x^2-2mx+1=0$$

之二根相等。

解 欲二根相等，則必

$$\triangle=4m^2-4(m+2)=4(m^2-m-2)=0$$

$$\therefore\ m=-1,\ 或\ +2。$$

〔236〕求 $\frac{1}{2}(x+1)(x+2)$ 之極小值。

解 $\frac{1}{2}(x+1)(x+2)=\frac{1}{2}\left\{(x+\frac{3}{2})^2\right.$

$\left.+2-\frac{9}{4}\right\}$，但 $(x+\frac{3}{2})^2$

恆爲正，故上式極小值爲 $\frac{1}{2}(2-\frac{9}{4})=-\frac{1}{8}$。

〔237〕試求 $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ 之極大及極小值。

解 命 $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\lambda$，則 $(1-\lambda)x^2+(1+\lambda)x$

$+1-\lambda=0$，此方程有實根，則必 $(1+\lambda)^2$

$-4(1-\lambda)^2 \nless 0$，或 $3\lambda^2-10\lambda+3 \ngtr 0$， 即

$(3\lambda-1)(\lambda-3) \ngtr 0$，故 $3 \nless \lambda \nless \frac{1}{3}$，因而 λ 之極

大值爲3，而極小值爲 $\frac{1}{3}$。

〔238〕解二次方程 $x^2-2ax+a^2-b^2=0$。

解 原式左邊$=(x-a)^2-b^2=0$,

$\therefore\ (x-a)^2=b^2$,

二邊開方,得:

$$x-a=\pm b,$$

$$\therefore\ x=a\pm b.$$

〔239〕 $mx^2-1=\dfrac{x(m^3-n^2)}{mn}$ 試解之.

解 去分母移項,得:

$m^2nx^2-(m^3-n^2)x-mn=0$,

故 $(m^2x+n)(nx-m)=0$,

故 $m^2x+n=0$, 即 $x=-\dfrac{n}{m^2}$;

或 $nx-m=0$, 即 $x=\dfrac{m}{n}$.

〔240〕 $2x^2-5x+1=0$,試解之.

解 自公式得

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-8}}{4}$$

$$=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}.$$

〔241〕 $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$

$=x^2$,試解之.

解 a,b為此方程之根,而此為二次方程,故二根以外無他根.

〔242〕 解方程 $\dfrac{2a}{x}-\dfrac{x}{a}-2=0$.

解　$\frac{2a}{x}-\frac{x}{a}-2=0$；

$\times ax$：$2a^2-x^2-2ax=0$。

$\times -1$：$x^2+2ax-2a^2=0$。

$\therefore\ x_1=\frac{-2a+\sqrt{4a^2+4\times 2a^2\times 1}}{2}$

$=-a+a\sqrt{3}=a(\sqrt{3}-1)$；

$x_2=\frac{-2a-\sqrt{4a^2+4\times 2a^2\times 1}}{2}$

$=-a-a\sqrt{3}=-a(1+\sqrt{3})$。

〔243〕解$\left(\frac{1-x}{x-2}\right)^2=8\left(\frac{1-x}{x-2}\right)-15$.

解　令$\left(\frac{1-x}{x-2}\right)=y$，則：

$y^2-8y+15=0$，

$\therefore\ y=3$ 或 5，

$1-x=y(x-2)=3x-6$ 或 $5x-10$。

$\therefore\ x=\frac{7}{4}$ 或 $\frac{11}{6}$。

〔244〕解　$a^2x^2-4abx-5b^2=0$。

解　$a^2x^2-4abx-5b^2=0$；

$(ax+b)(ax-5b)=0$，

$ax+b=0$。　$\therefore\ x=-\frac{b}{a}$；

$ax-5b=0$，　$x=\frac{5b}{a}$。

〔245〕解下列方程$x^4-3x^2-2=0$。

解 命 $X=x^2$,

則原方程爲: $X^2-3X+2=0$,

$(X-2)(X-2)=0$,

$\therefore\quad X=1;\qquad X=2;$

$\therefore\quad \begin{cases} x=+1, \\ x=-1; \end{cases}\qquad \begin{cases} x=+\sqrt{2}, \\ x=-\sqrt{2}. \end{cases}$

〔246〕 $x^2-3x+2=0$, 試解之。

解 $(x-2)(x-1)=0$,

$\therefore\ x-2=0$, $\quad\therefore\ x=2$;

或 $x-1=0$, $\quad\therefore\ x=1$.

〔247〕 $2(x^2-7)+3(x^2-11)=33$, 試解之。

解 $2x^2-14+3x^2-33=33$,

$\therefore\quad 5x^2=80$,

$x^2=16$;

$x=\pm 4$.

〔248〕 $x^2+5x=14$, 試解之。

解 $x^2+5x-14=0$,

$\therefore\ (x-2)(x+7)=0$.

$\therefore\ x=2, -7$.

〔249〕 作一根爲3, 之二次方程。

解 設方程爲

$$Ax^2+Bx+C=0$$

則 $\dfrac{B}{A}=-(3+8)=-11\qquad \therefore\ B=-11A$

$\dfrac{C}{A}=3\times 8=24\qquad \therefore\ C=24A$

故所求方程爲，

$$Ax^2-11Ax+24A=0$$

即　$x^2-11x+24=0$.

〔250〕求$3x^2+56x-220=0$之根。

解　於$3x^2+56x-220=0$中

$$a=3,\quad b=56,\quad c=-220,$$

$$\therefore\ x_1,\ x_2=\frac{-56\pm\sqrt{(56)^2+4\times3\times220}}{2\times3}$$

$$=\frac{10}{3},\quad -22.$$

〔251〕解方程$x^3+2x^2+2x+1=0$。

解　$x^3+2x^2+2x+1=0$.

$(x+1)(x^2+x+1)=0,$

$\therefore\quad x=-1$，或 $x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$,

或　$x=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

〔252〕　$a(x^2+1)=x(a^2+1)$

解　原式$=ax^2+a=a^2x+x$,

即　$ax^2-a^2x-x+a=0$,

即　$ax(x+a)-(x-a)=0$

$\therefore\ (x-a)(ax-1)=0$

$\therefore\ x-a=0$，或 $ax-1=0$,

$\therefore\ x=a$，或 $x=\dfrac{1}{a}$.

〔253〕　$\left(\dfrac{3x+4}{5}\right)^2-\dfrac{12}{5}x=8\dfrac{1}{5}$.

解　由方程式兩邊減

則 $$\left(\frac{3x+4}{5}\right)^2-\frac{4(3x+4)}{5}=5,$$

或 $$\left(\frac{3x+4}{5}-5\right)\left(\frac{3x+4}{5}+1\right)=0,$$

故　$3x+4=25$，或　-5，

故　$x=7$，　或　-3。

（八）準一元二次方程式之題解

〔254〕$x^4=1$，試解之。

解　$x^4-1=0$，

∴ $(x^2-1)(x^2+1)=0$，

$x^2-1=0$，

∴ $x=\pm1$，

又 $x^2=-1$，

∴ $x=\pm i$

〔255〕$x^5=1$，試解之。

解　$x^5-1=0$，

∴ $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+2)=0$，

∴ $x-1=0$

∴ $x=1$，又 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$，

各項以x^2除之，則

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

$$\therefore\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0,$$

令 $x+\frac{1}{x}=p$，則

$p^2-2+p+1=0$,

$\therefore p^2+p-1=0$,

$\therefore p=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$,

因而 $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, 或 $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

自此得x之值,即

$$x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-10-2\sqrt{5}},$$

$$\text{或}\ \frac{-1-\sqrt{5}}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{-10+2\sqrt{5}}.$$

〔256〕 $x^3-1=0$.

解 $x^3-1=0$, 即 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

故 $x-1=0$, 或 $x^2+x+1=0$

故 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$

注意 茲所得之虛根,通例以ω, ω^2表之.

〔257〕解$x^3=1$即$x^3-1=0$而得之根爲1, $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$, 及$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ 此之後二根,爲1之立方虛根數,其一根等其他一根之平方;試證之.

解 $\left\{\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})\right\}^2$

$=\dfrac{1}{4}\left\{1-2\sqrt{-3}+(-3)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left\{-1-\sqrt{-3}\right\}$;

$$又\left\{\frac{1}{2}(-1\mp\sqrt{-3})\right\}^2$$

$$=\frac{1}{4}\left\{1+2\sqrt{-3}\mp(-3)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2}(-1\mp\sqrt{-3}).$$

故令其虛根之一為w，則其他一根為w^2.

〔258〕 $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$，試解之.

解，今將x^2+x以p表之，則上方程式為：

$$(p+1)(p+2)=12,$$

$$\therefore\quad p^2+3p+2=12,$$

$$\therefore\quad (p-2)(p+5)=0,$$

$$\therefore\quad p=2,\quad 或\quad -5,$$

即 $x^2+x=2$,　或　-5,

$$\therefore\quad 自 x^2+x-2=0,$$

而得$x=1$, $x=-2$，又自$x^2+x+5=0$,

而得$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{19}}{2}$，故題之方程式之根為：$1$, -2,

$$\frac{-1+\sqrt{-19}}{2},\ \frac{-1-\sqrt{19}}{2}.$$

〔259〕 1之三個立方根之和為零，而其二根之根之積為1，試證之.

解　自 $x^3-1=0$，得$(x-1)(x^2+x+1)=0$，因而 w 及w^2為$x^2+x+1=0$之根，故$w^2+w+1=0$，故1之三個立方根之和為零，又$w.w^2=w^3=1$.

〔260〕 試求$x^6-19x^3=216$之實根.

解 $(x^3-27)(x^3+8)=0$,

∴ $x^3-27=0$ ……………………………(1)

$x^3+8=0$ ……………………………(2)

自(1)而得$(x-3)(x^2+3x+9)=0$，自此第一因式，得$x=3$，若自第二因式為0而得之根，即為虛數，自(2)而得$(x+2)(x^2-2x+4)=0$，自此第一因式得$x=-2$，若自第二因式為0而得之根，即為虛數。故實根僅3及-2。

〔261〕解方程

$$3x^4+10x^2-8=0.$$

解 令$y=x^2$則得

$$3y^2+10y-8=0;$$

∴ $y=x^2=2/3$, 或-4;

∴ $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$, 或$\pm 2i$.

〔262〕 $abx(x+a+b)^3-(ax+bx+ab)^3=0$.

解 上式可書為$(x^2-ab)(a^2-bx)(b^2-ax)=0$.

故其根為$\frac{a^2}{b}$, $\frac{b^2}{a}$及$\pm\sqrt{ab}$.

〔263〕試解$abcx(x+a+b+c)^3-(xbc+xca+xab+abc)^3=0$.

解 上式為

$x^3abc-x^2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)+xabc(a^2+b^2+c^2)-a^2b^2c^2=0$.

即$(ax-bc)(bx-ca)(cx-ab)=0$;

故 $x=\frac{bc}{a}$, 或 $x=\frac{ca}{b}$, 或 $x=\frac{ab}{c}$.

〔264〕 $x^3=1$，試解之。

解 $x^3-1=0$， $\therefore\ (x-1)(x^2+x+1)=0$，

$\therefore\ x-1=0$， $\therefore\ x=1$。

或 $x^2+x+1=0$。

$\therefore\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$。

〔265〕 $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$，試解之。

解　由觀察知 $x=1$，$x=2$，適合於題之方程，由除法得 $(x-1)(x-2)(x^2+5x+2)=0$，故所設方程除 $x=1$，$x=2$，二根之外，有解 $x^2+5x+2=0$ 而得之根

$$\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}.$$

〔266〕 $x(x-1)(x-2)(x-3)=9.8.7.6$，試解之

解　所設方程以 $x=9$，$x=-6$ 適合，故行除法，得 $(x-9)(x+6)(x^2-3x+56)=0$，此外之根，可解 $x^2-3x+56=0$ 而得之。卽

$$\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-215})$$

（九）二次之一元分數方程式之題解

〔267〕 $\dfrac{a}{x+a-c}+\dfrac{b}{x+b-c}=2$。

解　由題之方程式 $1-\dfrac{a}{x+a-c}$

$+1-\dfrac{b}{x+b-c}=0$。

或 $$\frac{x-c}{x+a-c}+\frac{x-c}{x+b-c}=0,$$

故 $$(x-c)\left(\frac{1}{x+a-c}+\frac{1}{x+b-c}\right)=0,$$

或 $$\frac{(x-c)(2x+a+b+2c)}{(x+a-c)(x+b-c)}=0,$$

故 $$(x-c)(2x+a+b-2c)=0,$$

由是　$x=c$　或　$c-\frac{1}{2}(a+b)$.

〔268〕 $$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

解 $$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

$$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{x-b}-\frac{1}{a}=0.$$

$$\therefore\ \frac{a+b-x}{b(x-a)}+\frac{a+b-x}{a(x-b)}=0.$$

$$\therefore\ (a+b-x)\left\{\frac{1}{b(x-a)}+\frac{1}{a(x-b)}\right\}=0,$$

$\therefore\ x=a+b$.　或 $\frac{1}{b(x-a)}+\frac{1}{a(x-b)}=0,$

即 $$\frac{(a+b)x-2ab}{ab(x-a)(x-b)}=0$$

$$\therefore\ (a+b)x-2ab=0,$$

$\therefore\ x=\frac{2ab}{a+b}$ 故所要之根為 $a+b$, $\frac{2ab}{a+b}$.

〔269〕 $$\frac{1}{1+2x}-\frac{2}{2+3x}+\frac{3}{3+4x}-\frac{4}{4+5x}.$$

解　題之方程式為

$$\frac{2x}{(1+2x)(2+3x)}+\frac{2x}{(3+4x)(4+5x)}=0.$$

$$x=0$$

又 $(3+4x)(4+5x)+(1+2x)(2+3x)=0$;

即 $12+31x+20x^2+2+7x+6x^2=0$.

$\therefore\quad 13x^2+19x+7=0$,

$\therefore\quad x=\frac{-19\pm\sqrt{361-364}}{26}=\frac{-19\pm\sqrt{-3}}{26}$

故所要之根爲 $0,\ \frac{-19\pm i\sqrt{3}}{26}$.

〔270〕 $x^2-\frac{1}{x^2}=a^2-\frac{1}{a^2}$.

解 題式移項 $x^2-a^2+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}=0$

即 $x^2-a^2+\frac{x^2-a^2}{a^2x^2}=0$;

即 $(x^2-a^2)\left(1+\frac{1}{a^2x^2}\right)=0$;

故 $x^2-a^2=0$, 或 $1+\frac{1}{a^2x^2}=0$.

由 $x^2-a^2=0$ 得 $x=\pm a$;

由 $1+\frac{1}{a^2x^2}=0$ 得 $x=\pm\frac{\sqrt{-1}}{a}$.

〔271〕 $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}$.

解 由題之方程式

$$\frac{a(x-a)+b(x-b)}{ab}=\frac{b(x-b)+a(x-a)}{(x-a)(x-b)},$$

故　$\{a(x-a)+b(x-b)\}\cdot$

$\left\{\frac{1}{ab}-\frac{1}{(x-a)(x-b)}\right\}=0$。

故　$a(x-a)+b(x-b)=0$……………(1)

或　$\frac{1}{ab}-\frac{1}{(x-a)(x-b)}=0$……………(2)

由(1)得$(a+b)x=a^2+b^2$，故$x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$。

由(2)得$(x-a)(x-b)=ab$，

即$x^2-(a+b)x=0$，　故$x\{x-(a+b)\}=0$。

故　$x=0$，　或　$a+b$。

(十)　二元二次方程式之題解

〔272〕　$x^2+xy+y^2=9$……………………………(1)

$x^4+x^2y^2+y^4=243$……………………(2)

試解之。

解　自(2)而$(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)=243$，將(1)代入，而

$x^2+xy+y^2=27$……………………………(3)

自(1)減(3)，得

$xy=9$………………………………………(4)

自(1)與(4)，得

$(x+y)^2=36$，　$(x-y)^2=0$，

故　$x=y$，　$x+y=\pm6$，

故　$x=y=\pm3$。

〔273〕　$x^2+y^2=25$，$xy=12$。

解 $x^2+y^2=25$ ……………………………(1)

$xy=12$ ……………………………(2)

(2)之2倍及(1)兩邊相加，$(x+y)^2=49$，

$x+y=\pm7$ ……………………………(3)

由(2)及(3)

$y=\pm3$，或±4，$x=\pm4$或±3，

即 $x=3, y=4, x=4, y=3, x=-3, y=-4$，

$x=-4, y=-3$。

〔274〕 $x+\frac{4}{y}=1$，$y+\frac{4}{x}=18$。

解 由題之方程式

$xy-y+4=0$ ……………………………(1)

$xy-18x+4=0$ ……………………………(2)

相減得 $18x+y=0$，故 $y=18x$。

以之代入(2) $18x^2-18x+4=0$，

或 $(3x-2)(3x-1)=0$，

故 $x=\frac{2}{3}$ 或 $\frac{1}{3}$。

由是 $y=12$或 6。此適於題式

〔275〕 $x^2+xy=12$，$xy-2y^2=1$。

解 $x^2+xy=12$ ……………………………(1)

$xy-2y^2=1$ ……………………………(2)

(2)以12乘之，與(1)兩邊相減，

$x^2-11xy+24y^2=0$，或$(x-3y)(x-8y)=0$。

故 $x=3y$ ……………………………(3)

$x=8y$ ……………………………(4)

以(3)代入(2)，簡單之， $y^2=1$，

故$y=\pm1$，由(4)，得$x=\pm3$。以(3)代入(2)，簡單之，$-6y^2=1$，故$y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$。

由(4)，得$x=\pm\frac{8}{\sqrt{6}}$。故所要x，y之值爲

$$x=\pm3；y=\pm1；x=\pm\frac{8}{\sqrt{6}}；$$

$$y=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}；$$

但複符號，同時取正或負。

〔276〕 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{12}$，$xy=24$。

解 由第一式得$\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{12}$，以之代入第二式

$$x+y=10\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由(1)及第二式，得$x=4$ 或6，$y=6$ 或4，

即所要之值爲 $x=4$，$y=6$；或$x=6$，$y=4$。

〔277〕 解下列聯立方程：

$$x+y=5；$$
$$x^2+y^2=13。$$

解 $\begin{cases} x+y=5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)；\\ x^2+y^2=13\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

由(1)： $x=5-y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)；$

代入(2)： $(5-y)^2+y^2=13\cdots\cdots\cdots(4)；$

$$25-10y+y^2+y^2=13；$$
$$2y^2-10y+12=0；$$

則 $(2y-4)(y-3)=0$.

代入(3) $\begin{cases}y=2,\\x=3;\end{cases}$ $\begin{cases}y=3.\\x=2.\end{cases}$

〔278〕 $x^2y+xy^2=30$ ……………………(1)

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}$ ……………………(2)

解 由(1)得 $x^2y^2\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{x}\right)=30$ 以(2)除之

$x^2y^2=36$, 故 $xy=\pm6$ ……………………(3)

由(2)得 $\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{6}$, 又由(3)

$x+y=\pm5$ ……………………(4)

由(3),(4) $x=2, y=3; x=3, y=2$.

或 $x=1, y=-6; x=-6, y=1$.

〔279〕 $2x^2+2y^2=5xy$, $4x-4y=xy$.

解 $2x^2+2y^2=5xy$ ……………………(1)

$4x-4y=xy$ ……………………(2)

(2)之兩邊,平方之,

$16(x^2+y^2-2xy)=x^2y^2$,

或 $8\{2(x^2+y^2)-4xy\}=x^2y^2$,

參照(1) $8xy=x^2y^2$. 故 $xy=0$, 或 $xy=8$.

由(2)及 $xy=0$ 得 $x=0$, $y=0$;

又由(2)及 $xy=8$ 得 $x-y=2$,

故 $x, -y$ 爲次之二次方程式之根,

$X^2-2X-8=0$, 故 $X=4$, 或 -2.

故 $x=4, y=2$; $x=-2, y=-4$.

〔280〕 $x^2+xy+y^2=13$, $x^2-xy+y^2=7$, 試解之。

解 自第一式減第二式 $2xy=6$

$\therefore \quad xy=3$,

將此式加於第一式,而

$x^2+2xy+y^2=16$,

$\therefore \quad x+y=\pm 4$,

因而組合 $x+y=4$, $xy=3$,

得 $x=3$, $y=1$,

或 $x=1$, $y=3$,

又若組合 $x+y=-4$; $xy=3$,

得 $x=-3$, $y=-1$,

或 $x=-1$, $y=-3$,

〔281〕 $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=28$ ……………………(1)

$x+y=12$ ……………………(2)

解 由(1) $\dfrac{x^3+y^3}{xy}=28$,

故 $(x+y)(x^2-xy+y^2)=28xy$, 以之代入(2)得,

$12(x^2-xy+y^2)=28xy$.

即 $3x^2-10xy+3x^2=0$,

即 $(x-3y)(3x-y)=0$,

故 $x-3y=0$ ……………………(3)

或 $3x-y=0$ ……………………(4)

由(2)與(3) $y=3$, $x=9$,

由(2)與(4) $x=3$, $y=9$.

xy 此等之值,適合(1),故所要 x, y 之值,爲

$x=3, y=9$, $x=9, y=3$ 二組。

〔282〕解 $\begin{cases} x^2-xy+y^2=48, \\ x-y-8=0. \end{cases}$

解 $\begin{cases} x^2-xy+y^2=48 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1); \\ x-y-8=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2); \end{cases}$

由(2): $x=y+8 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$,

代入(1): $(y+8)^2-(y+8)y+y^2=48$;

$y^2+16y+64-y^2-8y+y^2=48$;

$y^2+8y+16=0$,

$(y+4)^2=0$,

$y=-4$, $\therefore \quad x=4$.

〔283〕 $2x^2+27xy+6y^2-6x-21y+4=0 \cdots\cdots (1)$

$2x^2+9xy-3y^2-6x+6y+4=0 \cdots\cdots (2)$

解 由(1)減(2)

$36xy+9y^2-27y=0$, $\therefore \; y=0$,

或 $4x+y=3$. $y=0$ 代入(1)

$x^2-3x+2=0$, $\therefore \; (x-2)(x-1)=0$。

即 $x=2$, 或 $x=1$.

次因 $4x+y=3$, 代入(1)則

$2x^2+27x(3-4x)+6(3-4x)^2-6x-21(3-4x)+4=0$,

簡單之 $2x^2-3x+1=0$.

$\therefore \; (2x-1)(x-1)=0$.

$\therefore \; x=\frac{1}{2}$, 或 $x=1$.

故 $x=2, x=1, x=\frac{1}{2}, x=1; y=0, y=1$,

$y=1, y=-1$。

〔284〕 $2x^2-9xy-3y^2-6x+6y+4=0$；

及 $2x^2+27xy+6y^2-6x-21y+4=0$，試解之。

解　將二方程相減，以9除之，則 $4xy+y^2-3y=0$，或 $y(4x+y-3)=0$。故得 $y=0$，及 $4x+y-3=0$；若 $y=0$，則將此值代入所設方程之一，而得 $x=4$，及 $x=2$，又若自 $4x+y-3=0$，求 y 則可得 $y=3-4x$，將此值代入所設方程之一；例如代第八二方程，則 $2x^2-3x+1=0$，或 $(2x-1)(x-1)=0$；故得 $x=1$，或 $x=\frac{1}{2}$，再將此值代入 $y=3-4x$，而得 $y=-1$，及 $y=1$；故可得次之四組答數

$$\left.\begin{array}{l}x=1\\y=0\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=2\\y=0\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\y=1\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=1\\y=-1\end{array}\right\}.$$

〔285〕 $18+9(x+y)=2(x+y)^2$ ……………(1)

$6-(x-y)=(x-y)^2$ ……………(2)

解　由(1)，得 $2(x+y)^2-9(x+y)-18=0$

$\{2(x+y)+3\}\{(x+y)-6\}=0$

$\therefore\ x+y=-\frac{3}{2}$ ……………(3)

$x+y=6$ ……………(4)

由(2)得 $(x-y)^2+(x-y)-6=0$，

$\{(x-y)+3\}\{(x-y)-2\}=0$；

$\therefore\ x-y=-3$ ……………(5)

$x-y=2$ ……………(6)

故 $\left.\begin{array}{r} x+y=-\frac{3}{2} \\ x-y=-3 \end{array}\right\}$ ……………………(7)

$\left.\begin{array}{r} x+y=-\frac{3}{2} \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ ……………………(8)

$\left.\begin{array}{r} x+y=6 \\ x-y=-3 \end{array}\right\}$ ……………………(9)

$\left.\begin{array}{r} x+y=6 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ ……………………(10)

由(7)得　$x=-\frac{9}{4}$,　$y=\frac{3}{4}$;

由(8)得　$x=\frac{1}{4}$,　$y=-\frac{7}{4}$;

由(9)得　$x=\frac{3}{2}$,　$y=\frac{9}{2}$;

由(19)得　$x=4, y=2$.

〔286〕 $x-y=10$ ……………………(1),

$x^4+y^2=58$ ……………………(2), 試解之

解　自(1)而$y=x-10$, 代入於(2), 則

$$x^2+(x-10)^2=58.$$

$\therefore$　$x^2+x^2-20x+100=58$,

$\therefore$　$2x^2-20x+42=0$,

$\therefore$　$x=3$,　或　7,

因而　$y=-7$　或　-3;

即　$\left.\begin{array}{r} x=3 \\ y=-7 \end{array}\right\}$, 或 $\left.\begin{array}{r} x=7 \\ y=-3 \end{array}\right\}$.

【287】　$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$ ……………………(1)

$xy+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8$ ……………………(2)

解　(2)與(1)兩邊相減，　$xy=6$；

故　$x=\frac{6}{y}$，以之代入(1)去分母

$y^2-12y+6=0$，　$\therefore y=6\pm\sqrt{30}$；

由是　$x=6\mp\sqrt{30}$。

故　$\left.\begin{array}{l}x=6-\sqrt{30}\\ y=6+\sqrt{30}\end{array}\right\}$　$\left.\begin{array}{l}x=6+\sqrt{30}\\ y=6-\sqrt{30}\end{array}\right\}$

【288】　$(x+y)(x+y-1)=30$ ……………………(1)

$(x-y)(x-y-2)=15$ ……………………(2)

解　由(1)得　$(x+y-6)(x+y+5)=0$

$\therefore$　$x+y-6=0$ ……………………(3)

$x+y+5=0$ ……………………(4)

由(2)得　$(x-y-5)(x-y+3)=0$，

$\therefore$　$x-y-5=0$ ……………………(5)

又　$x-y+3=0$ ……………………(6)

依(3)及(5)，得　$x=\frac{11}{2}$，$y=\frac{1}{2}$；

依(3)及(6)，得　$x=\frac{3}{2}$，$y=\frac{9}{2}$，

依(4)及(5)　$x=0$，　$y=-5$；

依(4)及(6)　$x=-4$，$y=-1$；

即得四組之根

[289] $x^2+y^2=97$ ……………………(1)

$xy=36$ ……………………(2)；試解之。

解：將(2)之2倍加於(1)，則 $x^2+2xy+y^2=169$，開平方

$x+y=\pm 13$ ……………………(3)。

又將(2)之2倍自(1)減之，開平方

$x-y=\pm 5$ ……………………(4)。

自(3)與(4)得：

$$\left.\begin{array}{l}x=9\\y=4\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=-9\\y=-4\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=4\\y=9\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=-4\\y=-9\end{array}\right\}。$$

[290] $2x-3y+9=0$ ……………………(1)

$x^2-xy+y^2+6x-6y-7=0$ ……(2)

解：由(1) $x=\dfrac{3y-9}{2}$，代入(2)

$$\left(\frac{3y-9}{2}\right)^2-\frac{3y-9}{2}y+y^2+6\cdot\frac{3y-9}{2}-6y-7=0,$$

$$\therefore\ \frac{9y^2-54y+81}{4}-\frac{3y^2-9y}{2}+y^2+\frac{18y-54}{2}-6y-7=0.$$

$$\therefore\ 7y^2-24y-55=0;$$

$$\therefore\ (7y+11)(y-5)=0;$$

故　$y=-\frac{11}{7}$，或 $y=5$。

y之值代入(1)，得

$$x=-\frac{48}{7},\ 或x=3.$$

故 $x=-\frac{48}{7},\ y=-\frac{11}{7};\ x=3,\ y=5.$

〔291〕 $x^2-4y^2+x+3y=2x-y=1$

解 $x^2-4y^2+x+3y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$2x-y=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由(2)得 $y=2x-1 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$;

以(3)代入(1)

$$x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)=1,$$

$$\therefore\ 15x^2-23x+8=0,$$

$$\therefore\ (x-1)(15x-8)=0.$$

$$\therefore\ x=1,\ 或\ \frac{8}{15}.$$

$x=1$ 則由(3)得 $y=1.$

$x=\frac{8}{15}$ 則由(3)得 $y=\frac{1}{15}.$

$$\therefore\ x=1,\ y=1\ 或\ x=\frac{8}{15},\ y=\frac{1}{15}$$

〔292〕 解下之聯方程:

$$\begin{cases} x-y=3, \\ x^2-xy+2=19. \end{cases}$$

解 $\begin{cases} x-y=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2-xy+2=19 \cdots\cdots\cdots\cdots(2), \end{cases}$

由(1)； $y=x-3 \cdots\cdots\cdots\cdots(3),$

代入(2)： $x^2-x(x-3)+2=19$，

$$x^2-x^2+3x=19-2,$$

∴ $$x=\frac{17}{3}=5\frac{2}{3}.$$

$$y=\frac{17}{3}-3=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$

〔293〕 $x+y=7$ ……………………………(1)

$x^3+y^3=91$ ……………………………(2)

解 以(1)代入(2)則 $x^2-xy+y^2=13$ ……(3)

由(1)之平方,減(3)以3除之,則

$xy=12$ ……………………………(4)

由(1),(4)得x,y為方程式 $X^2-7X+12=0$

之根,卽由 $(X-3)(X-4)=0$

得 $X=3, X=4$;

故 $x=3,\ y=4;\ x=4,\ y=3.$

〔294〕 $2(x+y)^2-9(x+y)=18$ …………(1)

$(x-y)^2+(x-y)=6$ …………(2)

解 (1)及(2)之因數分解,

$\{2(x+y)+3\}\{(x+y)-6\}=0$ ……(3)

$\{(x-y)-2\}\{(x-y)+3\}=0$ ……(4)

由(3)得 $2x+2y+3=0$ ……………………(5)

$x+y-6=0$ ……………………(6)

由(4)得 $x-y-2=0$ ……………………(7)

$x-y+3=0$ ……………………(8)

將(5)與(7)又(8)組合,

$x=\frac{1}{4}$, $y=-\frac{7}{4}$, 又 $=-\frac{9}{4}$, $y=\frac{3}{4}$。

將(6)與(7)及(8)組合,

$x=4$, $y=2$ 又 $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{9}{2}$。

即得四組之根。

[295] $x^2+xy+y^2=13$ ……………………(1)

$x^4+x^2y^2+y^4=91$ ……………………(2)

解 以(1)除(2)

$x^2-xy+y^2=7$ ……………………(3)

(1),(3)相加,或相減,

$x^2+y^2=10$ ……………………(4)

$xy=3$ ……………………(5)

由(4),(5)得 $x=3$, $y=1$; $x=1$, $y=3$;

$x=-3$, $y=-1$; $x=-1$, $y=3$;

[296] $x^2+3xy+y^2+4(x+y)=13$ ………(1)

$3x^2-xy+3y^2+2(x+y)=9$ ………(2)

試解之。

解 自(1)得

$(x+y)^2+4(x+y)+xy-13=0$ …(3)

自(2)得

$3(x+y)^2+2(x+y)-7xy-9=0$ (4)

將(3)之7倍加於(4),則

$(x+y)^2+3(x+y)-10=0$,

$\because \{(x+y)+5\}\{(x+y)-2\}=0$。

$\therefore x+y+5=0$;

或 $x+y-2=0$,

$\therefore\ x+y=-5$ ....(5)

$x+y=2$ ....(6)

將(5)代入於(3),而得

$xy=8$ ....(7)

自(7)與(5),得:

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\\ y&=\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x&=\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}\\ y&=\frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\end{aligned}\right\}$$

將(6)代入於(3),而得

$xy=1$ ....(8)

自(6)與(8),得 $x=1$, $y=1$, 故求得之根爲:

$$\left.\begin{aligned}x&=1\\ y&=1\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x&=\frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\\ y&=\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}\end{aligned}\right\}\quad\left.\begin{aligned}x&=\frac{-5-i\sqrt{7}}{2}\\ y&=\frac{-5+i\sqrt{7}}{2}\end{aligned}\right\}$$

[297] $x^2+xy=8x+3$ ....(1)

$y^2+xy=8y+6$ ....(2)

解 (1)以(2)加,整頓之,

$$(x+y)^2-8(x+y)-9=0,$$

$$(x+y-9)(x+y+1)=0.$$

$\therefore\ x+y=9$ ....(3)

$x+y=-1$ ....(4)

由(1)得 $x(x+y)=8x+3$.

以(3)代入 $9x=8x+3 \quad \therefore \quad x=3$

由(2) $y(x+y)=8y+6,$

以(3)代入, $9y=8y+6, \quad \therefore \quad y=6.$

又以(4)代入 $-x=8x+3, \quad \therefore \quad x=-\frac{1}{3};$

由是 $-y=8y+6 \quad \therefore \quad y=-\frac{2}{3}.$

故 $x=3, \quad y=6; \quad x=-\frac{1}{3}, \quad y=-\frac{2}{3}.$

(十二) 三元二次方程式之題解

【298】 試求 $x^4-3x^3-18x^2-6x+28=0$ 之實根之外界及內界.

解 因原方程可變爲

$$(x-2)^4+11(x-2)^3+29(x-2)^2+10(x-2)+4=0.$$

此式對 $(x-2)$ 而言不復有正根,

即 $\quad x-2 \geqq 0.$

$\therefore \quad x>2.$

又原式可書成

$$(x+6)^4-21(x+6)^3+138(x+6)^2-396(x+6)+244=0.$$

此式對 $(x+6)$ 而言不復有負根.

即 $\quad x+6 \geqq 0.$

$\therefore \quad x>-6.$

$\therefore \quad -6>x>2.$

即所求實根之內外界.

【299】 $xy+x+y+3=0, \; yz+y+z+3=0.$

$$zx+z+x-11=0.$$

解 各式之因數分解.

$$(x+1)(y+1)=-2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(y+1)(z+1)=-6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$(x+1)(z+1)=12 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2), (3) 各邊相乘, 開平方,

$$(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 12 \cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) 以 (1) 除, $z+1=\mp 6.$

$\therefore z=-7$, 或 5.

(4) 以 (2) 除, $x+1=\mp 2.$

$\therefore x=-3$, 或 1.

(4) 以 (3) 除, $y+1=\pm 1.$

$\therefore y=0$, 或 $-2.$

故 $x=-1,\ y=0.\ z=-7.$

$x=1,\ y=-2,\ z=5.$

〔300〕 $x^2-11x+22=0$ 之根爲 α, β, 則以 $\alpha+\beta$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ 爲根之方程如何?

解 所求方程爲:

$$x^2-\left(\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)x+(\alpha+\beta)$$

$$\times\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=0,$$

即 $x^2+\left(\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)x+(\alpha+\beta)\cdot$

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=0,$$

$$\therefore 0 = x^2 - \left(11 + \frac{11}{12}\right)x + 11 \times \frac{11}{12} = 0,$$

$$2x^2 - 33x + 11 = 0.$$

〔301〕 $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 時

試證 $x(1-x)^2 = y(1-y)^2 = z(1-z)^2$

解　將已知方程式變形，

$$y + z = 2 - x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y^2 + z^2 = 2 - x^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)爲平方，$y^2 + 2yz + z^2 = 4 - 4x + x^2$ …(3)

由(3)，(2)得　$2yz = 2 - 4x + 2x^2$，

$$yz = 1 - 2x + x^2$$

$$\therefore\quad (1-x)^2 = yz \quad \therefore\quad x(1-x)^2 = xyz.$$

同樣　$y(1-y)^2 = xyz$，$\therefore$ $z(1-z)^2 = xyz$.

$$x(1-x)^2 = y(1-y)^2 = z(1-z)^2.$$

〔302〕試解下列各方程：

(a)　$x^3 - 1 = 1$.

(b)　$x^4 + 1 + x^3 + x - 4x^2 = 0$.

解　(a)　$x^3 - 1 = 0$,

$$(x-1)(x^2 + x + 1) = 0;$$

$$\therefore\quad x = 1.$$

或　$x = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

$$x = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

(b)　$x^4 + 1 + x^3 + x - 4x^2 = 0$.

即 $(x-1)(x^3+2x^2-2x-1)=0$,

即 $(x-1)(x-1)(x^2+3x+1)=0$;

$\therefore\quad x=1$,

或 $x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$,

$x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

〔303〕 $x(y+z)=6$ ………………………(1)

$y(z+x)=12$ ………………………(2)

$z(x+y)=10$ ………………………(3)

解 由(1)+(2)+(3)得 $xy+yz+zx=14$.

又以(1),(2),(3)順次減之,得

$yz=8$ ………………………(4)

$zx=2$ ………………………(5)

$xy=4$ ………………………(6)

$\therefore\quad x^2y^2z^2=64$, $\therefore\quad xyz=\pm 8$ ………(7)

以(4),(5),(6)除(7),得

$x=\pm 1$, $y=\pm 4$, $z=\pm 2$.

〔304〕 試求變 $a'x^2+b'x+c'=0$ 二根之符號,而爲 $ax^2+bx+c=0$ 二根之條件.

解 $\alpha+\beta=-\dfrac{b'}{a'}$,

$\therefore\quad (-\alpha)+(-\beta)=-\dfrac{b'}{a}$,

又 $\alpha\beta=\dfrac{c'}{a'}$,

$$\therefore \quad (-\alpha)(-\beta)=\frac{c'}{a'},$$

$$\therefore \quad \frac{b'}{a'}=\frac{b}{a}.$$

$$\frac{c'}{a'}=\frac{c}{a}.$$

即 $$\frac{a}{a'}=-\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

〔305〕適合於$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=0$其 x,y,z 之中.任何二個相等,而有異符號,試證之.

解 $$(x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=0.$$

即 $$(x+y+z)\{xy+z(x+y)\}-xyz=0.$$

即 $$xy(x+y+z)+z\{(x^2+2xy+y^2)+z(x+y)\}-xyz=0$$

即 $$xy(x+y)+z^2(x+y)+z(x+y)^2=0$$

即 $$(x+y)(xy+z^2+xz+yz)=0.$$

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0.$$

於是……$x+y=0,\ y+z=0,\ z+x=0.$

故……$x=-y,\ y=-z,\ z=-x.$

即 x,y,z 任何二個,有異符號而相等之絕對值.

〔306〕$ax^2+bx+c=0$之根爲α,β,則以$\alpha\beta,\frac{1}{\alpha\beta}$爲根之方程如何?

解 $\because\ \alpha\beta=\frac{c}{a}.$

故所求之方程爲:

$$x^2-\left(\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}\right)x+\alpha\beta\cdot\frac{1}{\alpha\beta}=0,$$

卽 $x^2-\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)x+1=0$

卽 $acx^2-(a^2+c^2)x+ac=0$

〔307〕 方程 $2x^2-3x+7=0$ 之根爲 $\alpha,\ \beta$，求作以 $2\alpha+\beta$ 及 $\alpha+2\beta$ 爲根之方程。

解 由題意 $\alpha+\beta=\frac{3}{2}$，$\alpha\beta=\frac{7}{2}$

$$(2\alpha+\beta)+(\alpha+2\beta)=3(\alpha+\beta)=\frac{9}{2}.$$

$$(2\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{7}{2}=8,$$

所求方程式爲

$$x^2-\frac{9}{2}x+8=0,$$

或 $2x^2-9x+16=0$.

〔308〕 $(y+z)(x+y+z)=10$ ....(1)

$(z+x)(x+y+z)=20$ ....(2)

$(x+y)(x+y+z)=20$ ....(3)

解 由(1)，(2)，(3)之和，得 $(x+y+z)^2=50$，

故 $x+y+z=5$ ....(4)

又 $x+y+z=-5$ ....(5)

(4)與(1)，(2)，(3)各組合

$$y+z=2,\ z+x=4,\ x+y=4.$$

將此等之式，順次由(4)減之，得

$$x=3,\quad y=1,\quad z=1.$$

〔309〕 k 為何數時，此方程有相等之實根。

$$(k-4)x^2+(k-2)x+2=0.$$

解 $(k-4)x^2+(k-2)x+2=0,$

當 $(k-2)^2-8(k-4)=0$ 時，此方程有相等之實根，

$$(k-2)^2-8(k-4)=0.$$

$$k^2-4k+4-8k+32=0,$$

$$k^2-12k+36=0,$$

$$(k-6)^2=0,$$

$$k=6,$$

即 當 k 等於6時，方程有相等之實根。

〔310〕 設方程 $x^2+2(k+2)x+9k=0$ 之兩根相等，求 k 之值.

解 設 $x^2+2(k+2)x+9k=0$ 有等根，

則 $[2(k+2)]^2-4\times9k=0,$

$$4k^2+20k+16=0,$$

$$4(k-1)(k-4)=0.$$

$$k=1,\quad 或\quad k=4.$$

〔311〕 方程之根為 $3x^2-4x+1=0$ 之根之3倍其方程如何?

解 設方程 $3x^2-4x+1=0$ 之二根為 α,β，由所求方程之二根為 $3\alpha,3\beta$，

$$3\alpha+3\beta=3(\alpha+\beta)=-4,$$

$$3\alpha.3\beta=9\alpha\beta=3,$$

故所求之方程為

$$x^2-4x+3=3.$$

〔312〕　$x^2-yz-7=0$ ……………………(1)

$x+y+z=0$ ……………………(2)

$3x-2y+2z+2=0$ ……………………(3)

解　由(2)得　$z=-(x+y)$ ……………………(4)

以之代入(1),(3)簡單之，得

$x^2+xy+y^2-7=0$ ……………………(5)

及　$x=4y-2$ ……………………(6)

以(6)代入(5)簡單之，

$7y^2-6y-1=0$，　或　$(y-1)(7y+1)=0$，

於是　$y-1=0$，　或　$7y-1=0$，

故　　$y=1$，　或　$-\frac{1}{7}$。

以　$y=1$　代入(6)，則$x=2$，

以此x,y之值代入(4)則　$z=-3$，

次將　$y=-\frac{1}{7}$與前同樣，

得　$x=-\frac{18}{7}$，　$z=\frac{19}{7}$。

故x,y,z之值，爲$x=2,y=1,z=-3$；

或　$x=-\frac{18}{7},y=-\frac{1}{7},z=\frac{19}{7}$。

〔313〕已知方程之根爲$\frac{4}{3}$，$-\frac{3}{2}$，求此方程

解　　$\frac{4}{3}-\frac{3}{2}=-\frac{1}{6}$，

$\frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-2$，

故所求方程爲

$$x^2+\frac{1}{6}x-2=0.$$

或 $$6x^2+x-12=0.$$

〔314〕求解下列方程:

(a) $\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{2x-1}{x+6}$,

(b) $\sqrt{x+36}-\sqrt{x}=2$。

解 (a) $\dfrac{x+1}{x+4}=\dfrac{2x-1}{x+6}$,

$$(x+1)(x+6)=(2x-1)(x+4),$$

$$x^2+7x+6=2x^2+7x-4.$$

$$x^2=10,\quad x=\pm\sqrt{10}.$$

(b) $\sqrt{x+36}-\sqrt{x}=2$.

平方之: $x+36-2\sqrt{x^2+36x}+x=4$,

$$\sqrt{x^2+36x}=x+16,$$

再平方之: $x^2+36x=x^2+32x+256$,

$$4x=256,\quad \therefore x=64.$$

〔316〕 $x+y+z=\frac{13}{3}$ ……………………(1)

$x+yz=\frac{10}{3}$ ……………………(2)

$xyz=1$ ……………………(3)

解 設 $yz=k$ 代入(2),(3)

$$x+k=\frac{10}{3},\quad xk=1$$

由是得 $x=3,\ yz=\frac{1}{3}$, 或 $x=\frac{1}{3},\ yz=3$

以此值代入(1)及(2)

$$\left.\begin{aligned} y+z&=\tfrac{4}{3} \\ yz&=\tfrac{1}{3} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\left.\begin{aligned} y+z&=4 \\ yz&=3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

由(4)得 $z=\frac{1}{3}$ 或 1. 故 $y=1$, 或$\frac{1}{3}$.

即 $x=3,\quad y=1,\quad z=\frac{1}{3}$,

或 $x=3,\quad y=\frac{1}{3},\quad z=1$.

又由(5)得 $z=3$, 或 1, 故$y=1$, 或3.

故 $x=\frac{1}{3},\quad y=1,\quad z=3$,

即 $x=\frac{1}{3},\quad y=3,\quad z=1$.

〔316〕若二次方程 $(\gamma+2)x^2-\gamma x+1=0$ 之根相等,問 γ 之值為何?

解 $(\gamma+2)x^2-\gamma x+1=0$ 有兩等根時,必

$$\gamma^2-4(\gamma+2)=0,$$

$$\gamma^2-4\gamma-8=0.$$

$$\therefore\quad \gamma=\frac{+4\pm\sqrt{16+32}}{2},$$

$$\therefore\quad \gamma=2+2\sqrt{3},$$

$$\text{或}\quad \gamma=2-2\sqrt{3}.$$

(十二) 無理方程式及指數方程式之題解

〔317〕 $x+y+\sqrt{x+y}=30$ ……………(1)

$$xy=144 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解　由(1)設 $\sqrt{x+y}=X$,則 $X^2+X-30=0$,

$\therefore\ (X-5)(X+6)=0$,

故 $X=5$ 或 $X=-6$.

因根號表正之規約,則

$\sqrt{x+y}=-6$ 應棄之. 由 $\sqrt{x+y}=5$

$x+y=25$, 再由(2)得

$x=9,\ y=16$; 或 $x=16,\ y=9$.

〔318〕　$\sqrt{2a-x}+\sqrt{2b-x}=2\sqrt{a+b}$.

解　兩邊平方,則

$$2(a+b)-2x+2\sqrt{(2a-x)(2b-x)}=4(a+b),$$

即 $\sqrt{(2a-x)(2b-x)}=(a+b)+x$,

兩邊平方,則

$$4ab-2(a+b)x+x^2=(a+b)^2+2(a+b)x+x^2,$$

即 $-4(a+b)x=(a-b)^2$,

故 $x=-\dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)}$.

以之代入題之方程式之左邊,則

$$\sqrt{\frac{9a^2+6ab+b^2}{4(a+b)}}+\sqrt{\frac{a^2+6ab+9b^2}{4(a+b)}}$$

$$=\frac{3a+b}{2\sqrt{(a+b)}}+\frac{a+3b}{2\sqrt{(a+b)}}$$

$$=\frac{4(a+b)}{2\sqrt{(a+b)}}=2\sqrt{(a+b)},$$

即適合,故為所要之根.

〔319〕 $x+y+\sqrt{xy}=14$ ……………………(1)

$x^2+y^2+xy=84$ ……………………(2)

解 以(1)之各邊除(2)之各邊，

$x+y-\sqrt{xy}=6$ ……………………(3)

(1)與(3)相加，又相減，則

$2(x+y)=20$, $2\sqrt{xy}=8$,

各邊以2除之，則

$x+y=10$ ……………………(4)

$\sqrt{xy}=4$ ……………………(5)

由(4)之平方，減(5)之平方之4倍；則

$x^2-2xy+y^2=36$, 即 $(x-y)^2=36$

各邊開平方. $x-y=\pm6$ ……………………(6)

由(4)，(6)得

$x=8, y=2$； 或 $x=2, y=8$。

〔320〕 $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{6-x}$,

解 移項 $\sqrt{2x-1}=\sqrt{6-x}+\sqrt{x-1}$。

$2x-1=5+2\sqrt{(6-x)(x-1)}$。

兩邊平方， $x-3=\sqrt{7x-6-x^2}$,

再兩邊平方， $x^2-6x+9=7x-6-x^2$。

$2x^2-13x+15=0$,

即 $(2x-3)(x-5)=0$

$x=5$, 或 $x=\frac{3}{2}$,

然以5代入題式，

則左邊爲 $\sqrt{2\times5-1}-\sqrt{5-1}=\sqrt{9}-\sqrt{4}$

$=3-2=1$, 右邊爲 $\sqrt{6-5}=\sqrt{1}=1$。

又以$\frac{3}{2}$代入題式

則左邊爲　$\sqrt{3-1}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}-\sqrt{\frac{1}{2}}$,

右邊爲　$\sqrt{6-\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{9}{2}}=3\sqrt{\frac{1}{2}}$,

故本題之根只5.

〔321〕解 $x^2-4x+2\sqrt{x^2-4x+7}=1$.

解　令 $x^2-4x=y$,則原式成

$$y+2\sqrt{y+7}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

即　$2\sqrt{y+7}=1-y$,

兩端平方並化簡得

$y^2-6y-27=0$, $\therefore\ y=9$ 或 $y=-3$.

中$y=9$根不合於(1),棄去,則:

$$x^2-4x=-3,$$

$$(x-1)(x-3)=0.$$

$$x=1,\ \text{或}\ +3.$$

〔322〕$3x^2-4x-10+2\sqrt{3x^2-4x+5}=0$.

解　由題之方程式,

$$3x^2-4x+5+2\sqrt{3x^2-4x+5}-15=0;$$

或　$(\sqrt{3x^2-4x+5}+5)\cdot$

$$(\sqrt{3x^2-4x+5}-3)=0.$$

然根號之前爲正,則

$$\sqrt{3x^2-4x+5}+5\neq0,$$

故　$\sqrt{3x^2-4x+5}=3$.

平方　$3x^2-4x+5=9$,

或　$3x^2-4x-4=0$,

或 $(x-2)(3x+2)=0$,

故 $x=2,\ -\frac{2}{3}$。

〔323〕 $x^2+xy+y^2=189,\ x-\sqrt{xy}+y=9$。

解 前式以後式除之.

$$x+\sqrt{xy}+y=21 \cdots\cdots(1)$$

又第二式爲 $x-\sqrt{xy}+y=9 \cdots\cdots(2)$

將(1)(2)兩邊相加,

$2(x+y)=30$, 卽 $x+y=15 \cdots\cdots(3)$

又由(1),以(2)兩邊相減,

則 $2\sqrt{xy}=12$。

$\therefore\ xy=36 \cdots\cdots(4)$

由(3),(4)得x,y爲3或12.

故 $x=3,y=12;\ x=12,y=2$。

〔324〕 $(\sqrt{5}-2)x^2-2x+4=0$

解 各項以$\sqrt{5}+2$乘之,

$x^2-2(\sqrt{5}+2)x+4(\sqrt{5}+2)=0$,

卽 $x^2-2(\sqrt{5}+2)x+4(\sqrt{5}+2)^2=1$,

$\therefore\ x-(\sqrt{5}+2)=\pm1$,

$\therefore\ x=3+\sqrt{5}$, 或 $1+\sqrt{5}$。

〔325〕 $(x^2+ax+b^2)^{\frac{1}{2}}-(x^2-ax+b^2)^{\frac{1}{2}}=2a$。

解 設 $x^2+ax+b^2-(x^2-ax+b^2)=2ax$。

此以 $\sqrt{x^2+ax+b^2}-$

$\sqrt{x^2-ax+b^2}=2a \cdots\cdots(1)$

兩邊相除,則

$\sqrt{x^2+ax+b^2}+$

$\sqrt{x^2-ax+b^2}=x$ ......(2)

由(1)+(2)得 $2\sqrt{x^2+ax+b^2}=2a+x$,

兩邊平方 $4(x^2+ax+b^2)=4a^2+4ax+x^2$

故 $3x^2=4(a^2-b^2)$, ∴ $x=\pm2\sqrt{\frac{a^2-b^2}{3}}$。

〔326〕 $x+y+\sqrt{x+y}=6$, $x^2-y^2=27$。

解 由第一式得 $x+y+\sqrt{x+y}-6=0$,

故 $(\sqrt{x+y}+3)(\sqrt{x+y}-2)=0$,

而根號之前為正符號,則

$$\sqrt{x+y}+3\neq0,$$

故 $\sqrt{x+y}-2=0$, 故 $x+y=4$。

再由第二式,得 $x-y=\frac{27}{4}$,

故 $x=\frac{1}{2}(4+\frac{27}{4})=\frac{43}{8}$,

$$y=\frac{1}{2}(4-\frac{27}{4})=-\frac{11}{8}。$$

〔327〕 $3\sqrt{x+4}-2\sqrt{2x-1}=3$。

解 由題之方程式,

$$3\sqrt{x+4}=2\sqrt{2x-1}+3,$$

兩邊平方之,簡單之,

$$x+31=12\sqrt{2x-1}$$

又平方,簡單之,

$$x^2-226x+1105=0$$

或 $(x-5)(x-221)=0$,

故 $x=5$ 或 221

而此值，適合於題之方程式。

〔328〕解 $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$

解 $\sqrt{2x-3}-\sqrt{5x-6}+\sqrt{3x-5}=0$, 所以

$\sqrt{2x-3}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{5x-6}$,

平方之；$(2x-3)+(3x-5)+2\sqrt{(2x-3)(3x-5)}=5x-6$,

$5x-8+2\sqrt{6x^2-19x+15}=5x-6$

$\sqrt{6x^2-19x+15}=1$,

平方之：$6x^2-19x+15=1$,

$6x^2-19x+14=0$,

$(6x-7)(x-2)=0$,

$x=\frac{7}{6}$ 或 2,

$x=\frac{7}{6}$ 一根與本題不合棄去，故本題祇有一解。

〔329〕$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}-2\sqrt{x+11}=0$

解 移項，$\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=2\sqrt{x+11}$,

兩邊平方，且整頓之，

$x+10=\sqrt{(x+4)(x+20)}$,

再平方，整頓之，則 $4x=20$, $x=5$。

（驗算）$\sqrt{5+4}+\sqrt{5+20}-2\sqrt{5+11}$

$=3+5-2\times4=0$,

故 $x=5$ 為所要之根。

【330】 $\sqrt{x-3}-\sqrt{x+6}=1$.

解　兩邊平方，

$$x-3+x+6-2\sqrt{(x-3)(x+6)}=1.$$

移項，再將兩邊平方，

$$x^2+2x+1=(x-3)(x+6),$$

解之，　　$x=19$.

驗　$\sqrt{19-3}-\sqrt{19+6}=\sqrt{16}-\sqrt{25}$

$=4-5=-1$，

可知19非原方程式之根，

故本題爲不能之方程式，

【331】 解下之無理方程：

$$\sqrt{x+9}=\sqrt{2x+35}-\sqrt{x+2}.$$

解　$\sqrt{x+9}=\sqrt{2x+35}-\sqrt{x+2}$，

兩邊平方：

$$x+9=(2x+35)+(x+2)$$
$$-2\sqrt{(2x+35)(x+2)},$$
$$x+9-(2x+35)-(x+2)=$$
$$-2\sqrt{(2x+35)(x+2)}.$$
$$-2x-28=-2\sqrt{(2x+35)(x+2)},$$

兩邊平方：

$$(-2x-28)^2=4(2x+35)(x+2),$$
$$4x^2+112x+784=8x^2+156x+280,$$
$$4x^2+44x-504=0,$$
$$4(x+18)(x-7)=0,$$
$$x=7,\quad 或\quad x=-18,$$

其中 $x=-18$ 一根。於本題不合棄去，故方程祇有一根，即 $x=7$.

(十三) 二次方程式根及係數之關係之題解

〔382〕 就 x 欲爲完全平方，試求 a 與 b 之比

$$(a-b)x^2+(a+b)^2x+(a^2-b^2)(a+b).$$

解 題式爲完全平方，則此式爲 0 之二次方程式，必有等根，

故 $(a+b)^4-4(a-b)(a^2-b^2)(a+b)=0$

即 $(a+b)^2\{(a+b)^2-4(a-b)^2\}=0$，

即 $(a+b)^2(-a+3b)(3a-b)=0$，

故 $a+b=0$，$-a+3b=0$，或 $3a-b=0$，

即 $\dfrac{a}{b}=-1$，$\dfrac{a}{b}=3$，或 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{3}$.

〔383〕 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α,β，試將 $\alpha^3+\beta^3$ 之值，以 a,b,c 表之

解 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 α,β，則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故 $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$=(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$

$=-\dfrac{b}{a}\left\{\left(-\dfrac{b}{a}\right)^2-\dfrac{3c}{a}\right\}$

$=-\dfrac{b}{a}\left\{\dfrac{b^2}{a^2}-\dfrac{3c}{a}\right\}$

$$=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}$$

$$=\frac{3abc-b^3}{a^3}.$$

〔334〕方程式$ax^2+bx+c=0$之二根爲p, q，試將$p^4+p^2q^2+q^4$之值，以a, b, c之項表之。

解 依二次方程式根與係數之關係，

得 $$p+q=-\frac{b}{a},\quad pq=\frac{c}{a}.$$

故$p^4+p^2q^2+q^4=(p^2+pq+q^2)(p^2-pq+q^2)$

$$=\{(p+q)^2-pq\}\{(p+q)^2-3pq\}$$

$$=\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{a^4}(b^2-ca)(b^2-3ca)$$

〔335〕求次之方程式二根之和及積。

$$3x^2+x+6=0.$$

解 $3x^2+x+6=0$之二根爲α, β， 則

$$\alpha+\beta=-\tfrac{1}{3},\ \alpha\beta=2.$$

〔336〕方程式 $3x^2+mx+9=0$ 之一根爲他根之三倍，求m之值。

解 二根爲$\alpha, 3\alpha$， 則$\alpha+3\alpha=-\frac{m}{3}$，

以 $3\alpha^2=\frac{9}{3}=3$， 即 $\alpha^2=1$

代入之，則 $12(\pm1)=-m$，

∴ $m=\mp12$.

〔337〕方程式　$x^2-2(a-5)x+a^2-1=0$

之根爲實數，問 a 之值如何，

解　$x^2-2(a-5)x+a^2-1=0$

之根爲實數，則判別式不可不爲正，

故　$(a-5)^2-(a^2-1)\geqq 0$，

即　$a^2-10a+25-a^2+1\geqq 0$，

即　$-10a+26\geqq 0$，　$a\geqq\frac{13}{5}$，

〔338〕方程式 $x^2(b^2+d^2)+2x(ab+cd)+a^2+c^2=0$

其根爲實數，則其根相等，試證之，

但 a,b,c,d 爲實數，

解　$(b^2+d^2)x^2+2(ab+cd)x+a^2+c^2=0$

其根爲實數，則其判別式必大於零，或等於零。

故　$(ab+cd)^2-(b^2+d^2)(a^2+c^2)\geqslant 0$

$\therefore\quad -(bc-ad)^2\geqslant 0$

然 a,b,c,d 皆爲實數，上式只在等號時成立

故 $ac=bd$　故有等根。

〔339〕$ax^2+bx+c=0$　之根爲 α,β。

試證　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{b}{c}=0$。

解　$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$。

故　$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=-\frac{b}{a}\times\frac{a}{c}=-\frac{b}{c}$

故 $\qquad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{b}{c}=0$.

〔340〕k有如何數值，則

$$x^2-y^2+3x-7y+k$$

可分解爲二個一次因數，

解 $x^2-y^2+3x-7y+k$，就 x 整頓之：

$$x^2+3x-(y^2+7y-k),$$

此式若分解爲一次因數，則此判別式不可不爲完全平方數，故作此判別式如

$$9+4y^2+28y-4k$$

茲欲爲完全平方式，則此式之判別式，又不可不爲0.

故 $\qquad 14^2-4(9-4k)=0, \quad \therefore k=-10.$

〔341〕方程式$2x^2+3x-6=0$之根爲α, β，

試計算 $\qquad \frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$

解 $2x^2+3x-6=0$ 之二根爲α, β

則 $\qquad \alpha+\beta=-\frac{3}{2}, \alpha\beta=-3.$

又 $\qquad \frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^3\beta^3}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{(\alpha\beta)^3}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}}{(\alpha\beta)^3}.$$

以之代入前值則爲$\frac{5}{8}$.

〔342〕方程式$(1+\sqrt{2})x^2+(\sqrt{2}-1)x=1$求其根之差

之平方，計算至小數第三位止。

解　二根為 α,β，則 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}}\right)^2+\frac{16}{1+\sqrt{2}}$$

$$=(\sqrt{2}-1)^4+16(\sqrt{2}-1)$$

$$=4\sqrt{2}+1=4\times1.4142\cdots\cdots+1=6.656\cdots\cdots$$

(十四)　二次方程式之應用題解

[343] 今有一夥少年買田，如多二人，每人可以少出12元，如少三人，每人須多出24元，問該夥人數若干？又每人應付銀若干？

解　設該夥為 x 人，共出資 y 元則：

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x+2}=\dfrac{y}{x}-12\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)；\\[2ex] \dfrac{y}{x-3}=\dfrac{y}{x}+24\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)。\end{cases}$$

由(1)：　$xy=y(x+2)-12x(x+2)$，

$12x^2+24x-2y=0\cdots\cdots\cdots(3)$；

由(2)：　$xy=y(x-3)+24x(x-3)$；

即：　$24x^2+48x-3y=0\cdots\cdots\cdots(4)$；

(3)×2：　$24x^2-72x-4y=0\cdots\cdots\cdots(5)$；

(4)−(5)：　$-120x+y=0$

$\therefore\ y=120x\quad \dfrac{y}{x}=120$，每人應付銀數。

代入(1)：　$\dfrac{120x}{x+2}=\dfrac{120x}{x}-12$，

$120x=108(x+2)$；

$$12x=216,$$

$$\therefore \quad x=18.$$

〔344〕　α, β為一　$ax^2+bx+c=0$ 之二根，試證其有次之關係，

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{b^2-2ac}{2}$$

解　$ax^2+bx+c=0$ 之二根為 α,β，則

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

今　$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha^2\beta^2}$$

$$=\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)-2\times\frac{c}{a}\right\}\times\left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$=\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)\times\frac{a^2}{c^2}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\times\frac{a^2}{c^2}$$

$$=\frac{b^2-2ac}{c^2}.$$

〔345〕有船，以一定之速，航行某距離，若其速，每時增2海里，則早4時間到，減2海里，則遲6時間到，問航路之長。

解　一定之速，為 y 海里，距離為 x 海里，依題意得次之方程式，

$$\frac{x}{y}=\frac{x}{y+2}+4=\frac{x}{y-2}-6,$$

$$\therefore \quad x=2y^2+4y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及　$$x=3y^2-6y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)，(2)得　$3y^2-6y=2y^2+4y$，於是

$y=10$. 以y之此値代入(1)，則得

$x=240$ 卽240海里.

〔346〕甲乙二人欲繞行池之周圍，同時由同一點，依反對之向出發，甲以6時間，繞完一周，乙在途中與甲相遇後，以8時間歸着出發點，問乙繞行池之一周所要之時間.

解 乙一周之時間爲x，則甲乙至相會之時間爲$(x-8)$. 而因甲乙一時間，繞行其池之周圍之

$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{x}$. 故$\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{x}\right)(x-8)=1$.

去分母，移項，　$x^2-8x-48=0$,

$\therefore\ (x-12)(x+4)=0$

故　$x=-4$, 又$x=12$.

而x之負値不適題意，故所要之時間，爲12時間.

〔347〕有兵一隊，列作矩形之陣，其長爲寬之2倍，又若由此人員之中，減206人，則可作三列厚之中空方陣，且其外面一列之人數，與原矩形陣之長之人數相同，問此隊人員幾何.

解 寬爲x人，則長爲$2x$人，

故矩形充實之人員爲$2x^2$,

又三列之中空方陣人員，係由充實方陣，減其中自第四列起之充實方陣，得之，因其一列之人員爲$2x$，故第四列之一列人員爲$2x-6$，故依題意得次之方程式.

$$(2x)^2-(2x-6)^2=2x^2-206,$$

簡單之　$x^2-12x-85=0$,

$\therefore\quad (x-17)(x+5)=0.$

舍負根無意,故寬之列為 17 人.

故全人員為　$17\times2\times17=578,$

答578人.

〔348〕有甲乙兩種布疋,以金120圓買之,乙比甲多3疋,又知甲3疋之價,比乙4疋之價少2圓,問各一疋之價幾何,但一疋在[illegible]圓以上.

解　甲乙二疋之價為x圓,y圓,又120圓可買得之疋數為z,v,依題意

$$xz=120\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$yv=120\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$v=z+3\cdots\cdots\cdots(3)$$
$$3x=4y-2\cdots\cdots\cdots(4)$$

解之,以(3)代入(2),

$y(z+3)=120,$

$\therefore\quad yz+3y=120\cdots\cdots\cdots(5)$

由(4)得$x=\dfrac{4y-2}{3}$以之代入(1)

$$2yz-z=180\cdots\cdots\cdots(6)$$

由(5)(6)得$6y+z=60$　$\therefore\ z=60-6y.$

以之代入(5)　$(60-6y)y+3y=120,$

$$6y^2-63y+120=0,$$
$$2y^2-21y+40=0,$$

$\therefore\ (2y-5)(y-8)=0.$ 故 $y=\dfrac{5}{2}$ 或 $y=8$

然各一疋之價在[illegible]圓以上,故y之值為8圓,甲10圓.

乙8圓。

〔349〕有一長方形，其長較同面積之正方形多四尺，其闊少三尺，求其長闊。

解　設x為長方形之長，y為長方形之闊，

則：$\begin{cases} xy=(x-4)(y+3) \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x-4=y+3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

整理(1)：$xy=xy-4y+3x-12 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

移項：　$3x-4y=12 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

整理(2)：$x-y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

(5)×4：$4x-4y=28 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

(6)−(4)：$x=16$;

代入(5)：$y=9$。

〔350〕有人，買甲乙二種大豆，甲種價為1圓48分，乙種價為2圓4分，且知一升之價，甲種比乙種高1分5厘，又所買升數，甲種比乙種少4升，問甲乙各種升數及價格如何。

解　甲種一升之價為x錢，其升數為y升，於是乙種一升之價為$(x-1.5)$分，

其升數為$(y+4)$。於是得次之方程式。

$$xy=148 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(x-1.5)(y+4)=204 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解之，棄負根，得　$x=18.5$，　$y=8$。

又　$x-1.5=17$，　$y+4=12$，

故甲種一升1角8分5厘，8升。

乙種一升1角7分，1斗2升。

〔351〕有二數，其和為63，其比與其逆比之和，為2.05，

求此二數。

解　依題意　$x+y=63$ ……………(1)

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=2.05$ ……………(2)

由(2)得 $\frac{x^2+y^2}{xy}=2.05$

$\therefore \frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=2.05$

以之代入(1)，則　$63^2-2xy=2.05xy$

$\therefore\ xy=980$ ……………(3)

由(1),(3)得　$X^2-63X+980=0$,

$\therefore (X+28)(X-35)=0$,

故　$x=28, y=35, x=35, y=28$

〔352〕兄弟二人歲數之和爲35.其各人歲數平方之和，等於兄五年後歲數之平方，求各人之歲數。

設x爲兄之歲數，y爲弟之歲數，則：

$$\begin{cases} x+y=35 \text{ ……………(1)} \\ x^2+y^2=(x+5)^2 \text{ ……………(2)} \end{cases}$$

整理(2)：$x^2+y^2=x^2+10x+25$ ……………(3)

即：　$y^2=10x+25$ ……………(4)

由(1)：$x=35-y$ ……………(5)

將(5)代入(4)：$y^2=10(35-y)+25$,

$y^2=350-10y+25$.

$y^2-10y-375=0$ ……………(6)

$(y+25)(y-15)=0$

$\therefore\ y=-25\quad y=15$ ……………(7)

但歲數不能爲負數，故$y=15$；

以(2)代入(1)：……$x=20$。

〔353〕甲向相距7哩之一地出發，20分之後，乙由同地出發，追之．而乙追及甲後，隨即循原路而歸，甲到目的地，同時乙歸着原地，知乙每時之速爲4哩，問甲每時之速如何

解 設甲每時之速爲x哩，則乙自出發後至追及甲之時間，爲$\frac{20}{60}x\div(4-x)$，故

得次之方程式，$$\frac{\frac{20}{60}x}{4-x}\times 2+\frac{20}{60}=\frac{7}{x}.$$

即 $$\frac{2x}{3(4-x)}+\frac{1}{3}-\frac{7}{x}=0.$$

去分母 $2x^2+x(4-x)-21(4-x)=0$，

即 $x^2+25x-84=0$.

即 $(x+28)(x-3)=0$，

然 $x+28\neq 0$，故 $x=3$，

即甲每時之速爲3哩。

〔354〕二實數之積爲156，各平方之差爲25，試求此二實數．

解 設所求二實數爲x，y則得

$$xy=156\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2-y^2=25\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解二方程式，由(1)得 $x=\frac{156}{y}$

代入(2)則　$\left(\frac{156}{y}\right)^2-y^2=25$,

$y^4+25y^2-24336=0$,

$\therefore\ (y^2+169)(y^2-144)=0$.

然由　$y^2+169=0$, 則y之實數值不得

故由　$y^2-144=0$　得　$y=\pm 12$

以y之值代入(1)知　$x=\pm 13$.

〔355〕三數成等差級數,其和爲69,中數之平方較他二數之積之二倍少79,求此三數。

解　令此三數爲a, $a+d$, $a+2d$.

則:　$a+(a+d)+a+2d=69$ ……(1),

$2a(a+2d)-(a+d)^2=79$ ……(2).

由(1):　$a+d=23$ ……………………(3).

代入(2):$2(a^2+2ad+2d^2)-(a+d)^2-2d^2=79$.

$\therefore$　$2(a+d)^2-(a+d)^2-2b^2=79$,

$\therefore$　$2d^2=23^2-79=450$,

$d=15$ 或 -15,

$a=8$ 或 38,

故此三數爲8,23,38。

〔356〕有罈可盛醬油9升,今汲出若干升醬油,補之以水,再比先所汲出之容量,多2升1合,汲出其混合液,又以水補之,則原醬油與水成等分。問最初汲出之醬油,當總量幾成。

解　最初汲出之量爲x升,則第一回補水後,罈中所含之原醬油,爲$(9-x)$升,第二回汲出之$(x+2.1)$升中,所含原醬油爲

$$\frac{9-x}{9}(x+2.1)$$

故得次之方程式.

$$9-x-\frac{9-x}{9}(x+2.1)=\frac{9}{2}$$

故 $(9-x)(9-x-2.1)=40.5$

卽 $(9-x)^2-2.1(9-x)-40.5=0.$

卽 $(9-x-7.5)(9-x+5.4)=0.$

卽 $(1.5-x)(14.4-x)=0.$

然 $0<x<9$ 故 $14.4-x\neq 0.$

故 $1.5-x=0.$ 故 $x=1.5.$

於是所要之百分算爲 $\frac{1.5}{9}=0.166$,

卽1分6厘6毫66……

〔357〕有甲乙二臺發電機.每分,乙比甲多迴轉100回.甲900迴轉所要之時間,比乙700迴轉所要之時間,多十二分之一分,問甲乙每分間之迴轉數.

解 甲之迴轉數每分爲x.則乙之迴轉數爲

$x+100$,於是 $\frac{900}{x}=\frac{700}{x+100}+\frac{1}{12}$

去分母.簡單之,則

$$x^2-2300x+1080000=0$$

或 $(x-2700)(x+400)=0.$

然x之負值不適題意,

故 $x=2700.$

於是甲之迴轉數2700回,乙之迴轉數2800回

〔358〕有若干工人.由甲地,往復乙地,9回,將若干彈

丸運完。若工人增7人，每一人少運2個，則要8回。若工人減4人，每一人多運1個，則要10回。求工人之數及彈丸之數。

解 最初工人之數，為x人，一人一回之運搬數為y，則

$$9xy=8(x+7)(y-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$9xy=10(x-4)(y+1)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解之，捨x，y之負值 得 $x=28$，$y=20$

故人數為28人。

彈丸之數，為

$$9xy=9\times20\times28=5040(\text{個})$$

〔359〕設給A 27元，則二人所有相等；如A給B 43元，則A所有為B之半，問各有若干？

解 假定A有銀x元，B有銀y元，照題意，得

$$x+27=y-27\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x-43=\frac{y+43}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解出來，$x=183$，$y=237$，

所以 A有銀183元，B有銀237元。

〔360〕有矩形及正方形，其面積互相等，又正方形之一邊，比矩形之長邊短6寸，今矩形之短邊增加1寸，長邊減少2寸，其面積仍不變，問矩形及正方形之邊長各如何。

解 矩形短邊之長為x寸，長邊之長為y寸，則正方形一邊之長為$y-6$寸，依題意得次之方程式。

$$xy=(y-6)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(x+1)(y-2)=xy \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)得$y=2(x+1)$，以之代入(1)，

$\therefore\ x=1$，或 8。

然 $x=1$

不適題意，故捨之，取　$x=8$

卽矩形8寸，18寸，正方形12寸。

〔361〕有人，以一定之速行 哩之道．若此人，最初行 1 哩後，每時將速，增 1 哩而行，則比其速不變時，早半時間到目的地，問其旅行費幾時間。

解　旅人每時之速爲x哩，依題意

$$\frac{7}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{6}{x+1}$$

$\therefore x^2+x-12=0$，$(x-3)(x+4)=0$。

因負根不適題意，捨之，

得　$x=3$，故預定之時間爲　$7\div3=2\frac{1}{3}$

卽2時20分。

〔362〕三角形有兩角相等，且此相等兩角之和等於第三角，求各角之度數？

解　假定x, y, z是三角形三個角的度數，那末

$$\begin{cases} x+y+z=180^\circ & (1) \\ x=y & (2) \\ x+y=z & (3) \end{cases}$$

因爲三角形內角的和等於180°

用(3)代入(1)　$2x+2y=180^\circ \cdots\cdots(4)$

再(2)代入(4)　$4x=180^\circ$，

$\therefore\ x=45°, y=45°$ 及 $z=90°$.

所以這三角形的三個角是45°, 45° 及 90°

[363] 二多角形邊數之和爲12, 其對角線數之和爲19,
求各多角形之邊數.

解 甲之邊數爲x, 乙之邊數爲y, 則甲之對角線數爲
$\frac{x(x-3)}{2}$, 乙之對角線數爲$\frac{y(y-3)}{2}$.

故得 $x+y=12$ ……………………………(1)

$\frac{x(x-3)}{2}+\frac{y(y-3)}{2}=19$ …………(2)

二方程式.

今由(2)得 $x^2-3x+y^2-3y=38$,

$x^2+y^2-3(x+y)=38$,

$(x+y)^2-3(x+y)-2xy=38$,

故 $12^2-3\times12-2xy=38$,

$144-36-2xy=38$,

故 $xy=35$ ……………………………(3);

由(1)及(3)得 $x=7, y=5$

卽七邊形並五邊形.

[364] 甲乙兩地間之距離爲385哩; A號飛機,由甲地出發,飛向乙地,後經1時間; B號飛機由乙地出發,飛向甲地,而途中相遇後, A號以2時55分間着乙地, B號以2時間着甲地,問兩飛行機之速,每時幾哩,

解 兩機相會後, 及到前方, 其飛行距離之和, 等於甲乙兩地間之距離, 今兩機之速, 設爲每時x哩, y.

哩，據題意，

$$2\frac{11}{12}x+3y=385 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 B 號 3 時間所飛之距離 $3y$ 哩，A 號飛之，其時間，比 A 號 $2\frac{11}{12}$ 時間所飛之距離哩 $2\frac{11}{12}x$ 哩，B 號所飛之時間，多 1 時間，

故 $$\frac{3y}{x}-\frac{2\frac{11}{12}x}{y}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)得 $3y^2-2\frac{11}{12}x^2=xy$，

即 $35x^2+12xy-36y^2=0$，

$\therefore\ (5x+6y)(7x-6y)=0$，

$\therefore\ 5x+6y=0$，或 $7x-6y=0$，

$\therefore\ 5x=-6y,\ 7x=6y$，然因 $5x+6y=0$

其 x，或 y 之一爲負，無意義，

故以 $x=\frac{6}{7}y$ 代入(1)，簡單之，

則 $11y=770$，故 $y=70$ 哩，於是 $x=60$ 哩

故 A 號 60 哩，B 號 70 哩。

[365] 有甲乙兩數，其和爲 21，其平方和爲 233，求此兩數。

解：設甲數爲 x，乙數爲 y，

$$\begin{cases} x+y=21 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ x^2+y^2=233 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(1)：$x=21-y \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

代入(2)：$(21-y)^2+y^2=233$，

$441-42y+y^2+y^2=233$，

$2y^2-42y+208=0$ ……………(4)，

$$y=\frac{42\pm\sqrt{(-42)^2-4\times2\times208}}{2\times2}$$

$$=\frac{42\pm10}{4}$$

$\therefore\begin{cases}y=13,\\ x=8;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=8,\\ x=13.\end{cases}$

代入(3)：

故此二數爲 8，13。

【366】有人乘自動車，赴相距 105 哩之某地，以某速，依預定時刻，可到目的地，走過 63 哩，因障礙，停車 24 分間，其後每時增其速爲 3.5 哩，恰依預定之時刻到着，然則最初之速如何。

解 最初之速爲 x，得次之方程式。

$$\frac{105}{x}-\left(\frac{63}{x}+\frac{105-63}{x+3.5}\right)=\frac{24}{60}$$

去分母…………$2x^2+7x-735=0$，

$\therefore\ (x+21)(2x-35)=0$，

故 $x=-21$，$x=17.5$。

負根棄之，卽最初之速爲 17.5 哩。

【367】某水手漕下 a 哩河流，由甲村至乙村，要 m 時間，若任流，不漕而下，則比在等距離靜水中，漕行所要之時間，多費 3 分之 $8m$ 時，問乙村至甲村漕上所要之時間如何。

解 不漕而下之時間，以 x 表之，則其間假定爲靜

水，其所需之時間為 $x-\frac{8}{3}m$，於是得次之方程式：

$$\frac{a}{x}+\frac{a}{x-\frac{8}{3}m}=\frac{a}{m},$$

由是 $x^2-\frac{14}{3}mx+\frac{8}{3}m^2=0$，

$$\left(x-4m\right)\left(x-\frac{2}{3}m\right)=0,\quad \frac{2}{3}m>\frac{8}{3}m$$

即 $\qquad x=4m,\ x-\frac{8}{3}m=\frac{4}{3}m$

故所求之時間為 $a\div\left(\frac{a}{\frac{4}{3}m}\div\frac{a}{4m}\right)=2m$。

即上之時，要下之時間2倍。

〔368〕分25為二份，而此二份之積為156，求其各份。

解 設甲數為 x，乙數為 y；

$$\begin{cases} x+y=25 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ xy=156 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

由(2)： $\quad x=\frac{156}{y}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

代入(3)：$\frac{156}{y}+y=25$，

$$156+y^2=25y\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

移項，$\quad y^2-25y+156=0$，

$$y=\frac{25\pm\sqrt{(25)^2-4\times1\times156}}{2\times1}$$

$$=\frac{25\pm1}{2},$$

代入(3)：$\therefore\begin{cases}y=13,\\x=12;\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=12,\\x=13.\end{cases}$

故此二份為 12，13.

〔369〕有菱形地面，其邊之長，為 15 丈，兩對角線之差為 6 丈，問方數如何.

解 短對角線為 $2x$ 丈，則長對角線為 $2x+6$ 丈.

於是 $x^2+(x+3)^2=15^2$;

即 $2x^2+6x-216=0$,

故 $x^2+3x-108=0$.

即 $(x+12)(x-9)=0$.

因 x 之負值不適題意 故 $x=9$

故所要之方數，為

$$\tfrac{1}{2}\times2x(2x+6)=\tfrac{1}{2}\times18\times24=216(\text{方}).$$

〔370〕某人，有金 2000 圓，以年利率若干，借出一年後，由元利合計中，支取 160 圓.將其餘金.以同利率，倘借一年，得元利合計 2057 圓 2 角 5 分，求年利率.

解 利率為 x，則一年後之元利合計，為

$$2000\times(1+x);$$

又二年終之元利合計，依題意為

$$\{2000\times(1+x)-160\}(1+x)=2057.25.$$

解之，得 $1+x=\dfrac{320\pm\sqrt{320^2+8000\times8229}}{8000}.$

$$=\frac{320\pm8120}{8000}$$

負根棄之 $i=1.055$. ∴ $x=0.055$.

卽 5 厘 5 毫。

〔371〕有兒童一羣，不知其數；但云其數之 11 倍較其數之平方之二倍多 5，問兒童之數幾何?

解 設兒童之數爲 x，則：

$$2x^2+5=11x$$

卽 $2x^2-11x+5=0$

則 $(2x-1)(x-5)=0$

∴ $x=\frac{1}{2}$，或 $x=5$；

但 $x=\frac{1}{2}$ 不合理；

故兒童之數爲 5。

〔372〕某人以年利率若干，存銀 400 圓於銀行，每一年末，於其應收取之利息外，再加銀 100 圓，作元金。當第三年之始，有 646 圓之存金，問年利率如何。

解 年利率爲 r，則

$$400(1+r)^2+100(1+r)+100=646,$$

簡單之 $200r^2+450r-23=0$；

或 $(20-1)(10r+23)=0$.

然因 r 爲正數，故

$10r+23\neq0$，故 $20r-1=0$；

故 $r=0.05$；

卽年利 5 厘。

〔373〕甲列車由東地，乙列車由西地，同時相向出發，相會時，其所走距離之差爲 63 哩，由是甲經 4 時間，到西地，乙經 9 時間，到東地，問兩地間之距離及各列車之速。

解　東西兩地之距離爲 x 哩，甲一時間之行程爲 y 哩，乙一時間之行程爲 z 哩，則兩列車相會之點，距東爲 $\frac{xy}{y+z}$ 哩，距西爲 $\frac{xz}{y+z}$ 哩，故依題意，得次之方程式。

$$\frac{xy}{y+z}-\frac{xz}{y+z}=63\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{xz}{y(y+z)}=4\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{xy}{z(y+z)}=9\cdots\cdots(3)$$

(2)(3) 相除，得　$4y^2=9z^2$，$\therefore 2y=3z$，

$$\therefore y=\frac{3z}{2}\cdots\cdots(4)$$

將(1)簡單之 $\frac{x(y-z)}{y+z}=63$，

以之代入(4)　$x=315$ 哩，

以(4)及 x 之值，

代入(2)(3)　$y=31.5$，　$z=21$，

即距離爲 315 哩，甲一時間之速 31.5 哩，乙一時間之速 21 哩。

〔374〕兩數的和是 18，他們的乘積是 77，試求這兩數。

解　設 x 爲甲數，$18-x$ 爲乙數，

$$x(18-x)=77,$$
$$18x-x^2=77,$$
$$x^2-18x+77=0,$$
$$x=\frac{18\pm\sqrt{(-18)^2-4\times1\times77}}{2}$$
$$=\frac{18\pm4}{2}$$

$$\therefore\ \begin{cases}x=11,\\18-x=7;\end{cases}\quad 或\quad \begin{cases}x=7,\\18-x=11。\end{cases}$$

故二數為 7,11。

〔375〕客車由甲站出發，開向乙站，同時，貨車由乙站出發，開向甲站，發車後 36 分卽相會，知貨車比客車早 30 分到着目的地，甲乙兩站間為 30 哩，問兩列車每時之速。

解 客車貨車每時之速為 x 哩，y 哩，則得次之聯立方程式，

$$\frac{36}{60}(x+y)=30\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{30}{x}-\frac{30}{y}=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)得 $x+y=50$，故 $y=50-x\cdots\cdots(3)$

由(2)得 $60(y-x)=xy$，以之代入(3)。

$$60(50-2x)=x(50-x),$$

卽 $x^2-170x+3000=0,$

卽 $(x-150)(x-20)=0,$

故 $x=150$，或 $x=20$，

於是由(3)得　$y=-100$, 或 $y=30$

而 y 之負值不適題意。

故所要之速，客車 20 哩，貨車 30 哩。

〔376〕父與其一子年齡之和爲 100 歲，又父子年齡之數之積，比父年齡之數之 10 倍多 1800 求父子之年齡。

解　父之年齡爲 x 歲，則子之年齡爲 $100-x$ 歲，故依題意得次之方程式。

$$x(100-x)=10x+1800.$$

解之　$x^2-90x+1800=0$,

$$(x-30)(x-60)=0.$$

$$\therefore \quad x=30, \text{或} \quad x=60.$$

然父爲 30 歲，則子爲 70 歲，無意義，故父年爲 60 歲，子年爲 40 歲。

〔377〕問某兒童之年齡，答曰 6 年後之年齡，等於 6 年前年齡之平方，問現今年齡幾何。

解　現在年齡爲 x 歲，依題意

$$x+6=(x-6)^2,$$

變化之　$x^2-13x+30=0$,

即　$(x-10)(x-3)=0$,

$$\therefore \quad x=10, \text{或} \quad x=3.$$

然因 3 歲無意義，故現在爲 10 歲。

〔378〕二數之較爲 12，其平方之和爲 1130，求二數。

解　假定 x 是大數，那末 $x-12$ 是小數照題意，

得　$x^2+(x-12)^2=1130$,

整理，$x^2-12x-493=0$,

$$(x-29)(x+17)=0,$$

$$\therefore\ x=29 \text{ 或 } -17.$$

$$29-12=17 \text{ 或 } -17-12=-29.$$

所以這兩個數是29和17或−17和−29。

例2.一長方形之錫片，長大於寬4公寸，於其四角各割去每邊6公寸之正方形，則可成一容積840立方公寸。

〔379〕某人借田地若干畝，支付地價84圓，而其中4畝自耕，其他每一畝擡高5角，批與他人耕，彼得其批價，恰可償前之地價，問借地畝幾何。

解　所借地畝爲x畝，則批出爲$x-4$畝，故所借一畝之地價，及批出之地價，爲$\frac{84}{x}$圓，

$\frac{84}{x-4}$圓，於是得次之方程式。

$$\frac{84}{x-4}-\frac{84}{x}=0.5$$

解之得$x=28$或-24。

捨負根，取28，可知所借之田地，爲28畝。

（十五）　比及比例之題解

〔380〕　　$a:b=b:c$

試證　$(a+c)b$爲a^2+b^2，b^2+c^2之比例中項。

解　$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{a^2}{ab}=\frac{b^2}{bc}=\frac{a^2+b^2}{ab+bc}=\frac{a^2+b^2}{b(a+c)}$$

又　$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{ab}{b^2}=\frac{bc}{c^2}=\frac{ab+bc}{a^2+c^2}=\frac{b(a+c)}{b^2+c^2}$$

$$\therefore\ \frac{a^2+b^2}{b(a+b)}=\frac{b(a+c)}{b^2+c^2}$$

$$\therefore\ a^2+b^2:b(a+c)=b(a+c):b^2+c^2$$

即　$b(a+c)$ 為 a^2+b^2 及 b^2+c^2 之比例中項。

〔381〕 $(l^2+m^2)x^2-2(lp+mq)x+(p^2+q^2)=0$ 有等根，則 $l:p=m:q$

解　題式之判別式

$$(lp+mq)^2-(l^2+m^2)(p^2+q^2)$$

為 0，則　$2lmpq-m^2p^2-l^2q^2=0$，

即　$-(lq-mp)^2=0$，　$\therefore\ lq=mp$，

$$\therefore\ l:p=m:q.$$

〔382〕 設 $y\propto x^2$，而 $x=2$ 時 $y=1$，問當 $y=3$ 時，x之值若干？

解　$y=kx^2$。

$1=k2^2=4k$，

$$\therefore\ k=\frac{1}{4},$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{4}x^2,$$

$$\therefore\ 3=\frac{1}{4}x^2,$$

$$x=\pm2\sqrt{3}.$$

〔383〕
$$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$$

試證　$x+y+z=0$

解
$$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$$

$$=\frac{x+y+z}{a-b+b-c+c-a}=\frac{x+y+z}{0}.$$

然此比例既成立，不可不為 $x+y+z=0$ 即如題言。

〔384〕設 $y\propto x$，而當 $x=5$ 時，$y=-2$，問當 $x=7$ 時 y 之值如何？

解 $y=kx$，

$-2=5k$，

$\therefore k=-\frac{2}{5}$；

$\therefore y=-\frac{2}{5}x=-\frac{2}{5}\times 7=-\frac{14}{5}$.

〔385〕有矩形之甲乙兩地皮，其縱之比為5:3，其面積之比為 8:9，而甲之橫長為 24 丈，問乙之橫長如何。

甲乙縱長為 x, x'　橫長為 y, y'

則面積為 $xy, x'y'$。故依題意

$x:x'=5:3$ ……………………(1)

$xy:x'y'=8:9$ ……………………(2)

$y=24$ ……………………(3)

$24x:x'y'=8:9$，$9\times 24x=8x'y'$

以之代入(1)：$9\times 24\times 5=8\times 3y'$，

$\therefore y'=45$，即乙之橫長 45 丈。

〔386〕解分式方程：

$$\frac{x^2+ax-a}{x^2-ax+a}=\frac{2x^2+a}{2x^2-a}.$$

解 因 $x^3+ax-ax^2-a : x+a=2x^2+a : 2x^2-a$。

$\therefore\quad 2x^2 : 2)ax-a)=4x^2 : 2a$,

$\therefore\quad x^2 : x-1=2x^2 : 1$,

$\therefore\quad 2x^2(x-1)=x^2$,

$\therefore\quad x^2(2x-3)=0$,

$\therefore\quad x=0$, 或 $3/2$.

〔387〕$-2, 3, 10, 40$ 之最初三數，以如何同數加之，則成比例.

解 所要之數爲 x，則

$$-2+x,\quad 2+x,\quad 10+x,\quad 40$$

成比例，故 $\dfrac{-2+x}{3+x}=\dfrac{10+x}{40}$.

$\therefore\quad 40(x-2)=(3+x)(10+x)$.

$x^2-27x+10=0$, $\therefore\ (x-22)(x-5)=0$

即 $x=22$, 又 5

〔388〕$ax+by=c$ 及 $bx-cy=d$

試將 x, y 之值，由 $\dfrac{x}{y}$ 求之.

解 $ax+by=c$ ……………………(1)

$bx-ay=d$ ……………………(2)

(1), (2) 相除, $\dfrac{ax+by}{bx-ay}=\dfrac{c}{d}$,

$\therefore\quad d(ax+by)=c(bx-ay)$,

$\therefore\quad (ad-bc)x+(bd+ac)y=0$,

$\therefore\quad \dfrac{x}{y}=\dfrac{ac+bd}{bc-ad}$.

〔389〕有甲乙二容器，容酒精與水之混合液，由各器取

等量作成混合液，則成酒精 3，水 4 之成分，又若由甲取 14 升，由乙取 21 升，作成混合液，則成酒精 2，水 3 之成分，問甲乙各容器之酒精與水之比如何。

解 甲乙容器所容之酒精與水之成分，爲 $1:x, 1:y$。則得次之方程式

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y}:\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}=1:4\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{14}{1+x}+\frac{21}{1+y}:\frac{14x}{1+x}+\frac{21y}{1+y}=2:3\cdots\cdots(2)$$

由(1) $6xy-x-y=8\cdots\cdots(3)$

由(2) $2xy-x-y=3\cdots\cdots(4)$

(4)之 3 倍；由(3)減之 $2x-y=-1$；

$\therefore\ y=2x+1\cdots\cdots(5)$

以(5)代入(4)

$4x^2+x-3=0$， 即 $(4x-3)(x+1)=0$，

$\therefore\ x=\frac{3}{4}$，又 $x=-1$，$x=-1$ 棄之

由(5)得 $y=\frac{5}{2}$。 $\therefore\ y:x=4:3$；

$1:y=2:5$

即甲 4 : 3，乙 1 : 5。

〔390〕 $a:b=c:d$，則

$$\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}。$$

試證之。

解 $a:b=c:d$，

故 $a:c=\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}\cdots\cdots(1)$，

又 $a:b=c:d$,

故 $a^3:b^3=c^3:d^3$,

∴ $a^3:a^3+b^3=c^3:c^3+d^3$,

∴ $a:c=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}$ ………(2).

自(1),(2)得

$$\sqrt{a^2+b^2}:\sqrt{c^2+d^2}$$
$$=\sqrt[3]{a^3+b^3}:\sqrt[3]{c^3+d^3}$$

〔391〕某公司某一年間之分配金,對其資本金,當1分1厘,對於公司債,當2分5厘,平均當1分8厘7毫5忽.問此公司之公司債與資本金之比.

解 資本金爲x圓,公司債爲y圓,依題意

$$0.15x+0.25y=0.1875(x+y),$$

$$\therefore\quad 0.0625y=0.0375x,$$

$$\therefore\quad x:y=0.0625:0.0375=5:3.$$

〔392〕 $x:y:z=a:b:c$

試證 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$
$=(ax+by+cz)^2$

解 $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x^2}{ax}=\frac{y^2}{by}=\frac{z^2}{cz}$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz},$$

又 $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{ax}{a^2}=\frac{by}{b^2}=\frac{cz}{c^2}$$
$$=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2},$$

$$\because \quad \frac{x^2+y^2+z^2}{ax+by+cz}=\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2},$$

$$\therefore \quad (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$
$$=(ax+by+cz)^2.$$

〔393〕甲槽有酒精 1 石 5 斗，水 5 斗之混合液，乙槽有酒精 5 斗，水 1 石 5 斗之混合液，今由甲乙兩槽汲出等量之液，混和等分之，歸入甲乙二槽，則兩槽中酒精之比為 13 與 7；問由各槽汲出之液量如何？

解　由各槽汲出之量為 x 斗，則混和之液中所含酒精之量，為

$$\frac{15}{15+5}x+\frac{5}{5+15}x=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x=x.$$

於是
$$15-\frac{3}{4}x+\frac{x}{2}:5-\frac{1}{4}x$$
$$+\frac{x}{2}=13:7,\ \text{或}$$
$$15-\frac{1}{4}x:5+\frac{1}{4}x=13:7.$$

故　$13(20+x)=7(60-x)$.

於是　$x=8$,　即 8 斗.

〔394〕$a:b=c:d$，則

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{ab}-\frac{1}{3c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{ad}$$
$$\left\{\frac{a}{4}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}+d\right\},\quad \text{試證之。}$$

解　$a:b=c:d$，故 $ad=bc$。因而

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{2b}-\frac{1}{3c}+\frac{1}{4d}$$

$$=\frac{1}{ad}\left\{d-\frac{ad}{2b}-\frac{ad}{3c}+\frac{d}{4}\right\}$$

$$=\frac{1}{ad}\times\left\{\frac{a}{4}-\frac{bc}{3c}-\frac{bc}{2c}+d\right\}$$

$$=\frac{1}{ad}\left\{\frac{a}{4}-\frac{b}{3}-\frac{c}{2}+d\right\}$$

〔395〕 $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ 與 $11\sqrt{7}+13\sqrt{5}$ 之比例中項。試以最簡之形表之。

解　所要之比例中項爲 x，則

$$x^2=(\sqrt{7}-\sqrt{5})(11\sqrt{7}+13\sqrt{5})$$

$$=11\times7+2\sqrt{35}-13\times5=12+2\sqrt{35}$$

$$=(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2.$$

故　$x=\pm(\sqrt{7}+\sqrt{5})$。

〔396〕 $$\frac{b}{a+b}=\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c}$$

試求 $a:b:c$ 之值。

解　由題式得 $$\frac{2b}{2a+b}=\frac{a+b+c}{a+b+c}$$

$$=\frac{(a+b)+c}{a+3b}=\frac{a+b+c}{2a+b+2c},$$

故　$a+b+c=2a+b+2c$，

或　$a+c=2b$ ……………(1)

故　$$\frac{a+b+c}{2a+b+2c}=\frac{3}{5},$$

於是 $\frac{b}{a+b}=\frac{3}{5}$，故 $\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$…………(2)

於是由(1)， $\frac{c}{d}=2\frac{b}{a}-1=2$ …………(3)

由(2)(3) ∴ $a:b:c=2:3:4$。

〔397〕 $a:b=b:c$ 試證次式

$(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)$
$=a^4+b^4+c^4$

解 由 $a:b=b:c$ 得 $b^2=ac$

故 $(a+b+c)(a-b+c)(a^2-b^2+c^2)$
$=\{(a+c)^2-b^2\}(a^2-b^2+c^2)$
$=(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)$
$=(a^2+c^2)^2-b^4$
$=a^4+2a^2c^2+c^4-b^4=a^4+b^4+c^4$

〔398〕 某國，茶有咖啡之3倍需用，今茶之需用增 $a\%$，咖啡之需用減 $b\%$，則全體之需用，增加 $2c\%$。若茶減 $2b\%$，咖啡增 $5a\%$，則全體減少 $3c\%$，求 a 與 b 之比。

解 茶為 x 斤，咖啡為 y 斤，依題意

$x=3y$…………………(1)

$(1+a)x+(1-b)y$
$=(1+2c)(x+y)$…………………(2)

$(1-3b)x+(1+5a)y$
$=(1-3c)(x+y)$…………………(3)

以(1)，代入(2)，(3)

$3y(1+a)+(1-b)y=(1+2c)4y$.

$$3y(1-3b)+(1+5a)y=(1-3c)4y.$$

故 $3a-b=8c$ ……………………………(4)

$5a-9b=-12c$ ……………………………(5)

(4)以3乘,(5)以2乘,加之:

$$19a-21b=0, \quad \therefore \quad a:b=21:19.$$

〔399〕 x 爲 m 與 n 間之比例中項,

試求 $\dfrac{1}{m^2-x^2}+\dfrac{1}{n^2-x^2}+\dfrac{1}{x^2}$ 之值。

解 x 爲 m 與 n 之比例中項,則 $x^2=mn$

故題式 $=\dfrac{1}{m^2-mn}+\dfrac{1}{n^2-mn}+\dfrac{1}{mn}$

$$=\frac{1}{m(m-n)}-\frac{1}{n(m-n)}+\frac{1}{mn}$$

$$=\frac{n-m+(m-n)}{mn(m-n)}=0.$$

〔400〕 a,b,c,d 成比例.試證下式,亦成比例.

$$\frac{a+c}{a-c},\quad \frac{b+d}{b-d},\quad \frac{b^2+d^2}{b^2-d^2},\quad \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}.$$

解 由 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ 得 $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$,

故 $\dfrac{a+c}{a-c}=\dfrac{b+d}{b-d}$ ……………………………(1);

又 $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{c^2}{d^2}$,

故 $\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$ ……………………………(2)

由(1),(2)得 $\dfrac{a+c}{a-c}:\dfrac{b+d}{b-d}$

$$=\frac{b^2+d^2}{b^4-d^4}:\frac{a^2+c^2}{a^2-b^2}$$

〔401〕設 $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$，則各比等於

$$(l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n)^{\frac{1}{n}}$$

$$:(l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n)^{\frac{1}{n}}$$

解 因 $a_1^n:b_1^n=a_2^n:b_2^n=a_3^n:b_3^n$，

$$\therefore \quad =l_1a_1^n:l_1b_1^n$$

$$=l_2a_2^n:l_2b_2^n$$

$$=l_3a_3^n:l_3b_3^n$$

$$=(l_1^na_2^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n):$$

$$(l_1b_1^n+l_2b_2^n+l_3b_3^n).$$

$$\therefore \quad a_1:b_1=(l_1a_1^n+l_2a_2^n+l_3a_3^n)^{\frac{1}{n}}:$$

$$(l_1b_1^n+l_2a_2^n+l_3b_3^n)^{\frac{1}{n}}.$$

〔402〕 $a:b=c:d$ 試證次式

$$a+d=b+c+\frac{(a-b)(a-c)}{a}$$

解 因 $bc=ad$

則 $a+d=\frac{bc}{d}+\frac{bc}{a}$

$$=\frac{a^2d+ad^2}{ad}=\frac{a^2+bc}{a}$$

$$=b+c=\frac{ad}{c}+\frac{ad}{b}$$

$$=\frac{abd+acd}{ad}=\frac{ab+ac}{a}$$

故　$(a+d)-(b+c)=\frac{a^2+bc-ab-ac}{a}$

$$=\frac{(a-b)(a-c)}{a}$$

故　$a+d=b+c+\frac{(a-b)(a-c)}{a}$

[403]　$\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}$

$=\frac{z}{a+b-c}$ 試證

$(a+b+c)(yz+zx+xy)$

$=(x+y+z)(ax+by+cz)$

解　$\frac{x}{b+c-a}=$

$=\frac{z}{a+b-c}$,

由是　$=\frac{x+y}{2c}=\frac{y+z}{2a}=\frac{z+x}{2b}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$

或　$=\frac{(x+y)z}{2cy}=\frac{(y+z)x}{2ax}$

$=\frac{(z+x)y}{2by}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$,

或　$=\frac{2(yz+zx+xy)}{2(ax+by+cz)}=\frac{x+y+z}{a+b+c}$,

故　$(a+b+c)(yz+zx+xy)$

$=(x+y+z)(ax+by+cz)$

【404】 $a:b=c:d$，則

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ad:cd,$$

試證之。

解 $a^4+b^4:c^4+d^4=b^4:d^4$ ………………(1)，

$$a^2:b^2=c^2:d^2,$$

$$b^2:d^2=a^2:c^2,$$

又 $$b^2:d^2=b^2:d^2,$$

$$\therefore\quad b^4:d^4=a^2b^2:c^2d^2.$$

將此代入(1)，

$$a^4+b^4:c^4+d^4=a^2b^2:c^2d^2.$$

即

$$\frac{a^4+b^4}{ab}:\frac{c^4+d^4}{cd}=ab:cd,$$

即

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ab:cd.$$

【405】 $x^2-9x+14=0$ 之根爲 a,b 不解此方程式。

試求 $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ 之値。

解 $x^2-9x+14=0$ 之兩根爲 a,b 則

$$a+b=9 \text{ ………………………………(1)}$$

$$ab=14 \text{ ………………………………(2)}$$

今 $a^2+b^2=(a+b)^2-4ab=9^2-4\times14=25,$

$$\therefore\quad a^2-b^2=(a+b)(a-b)=\pm5\times9=\pm45$$

$\therefore\quad \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\pm$ [illegible]3

〔406〕 $yz+zx+xy=0$，$x(b-c)=y(c-a)=z(a-b)$

試將 $(b-c)^2x+(c-a)^2y+(a-b)^2z$ 簡單之

解 設 $x(b-c)=y(c-a)=z(a-c)=k$

則 $b-c=\frac{k}{x}$，$c-a=\frac{k}{y}$，

$a-c=\frac{k}{z}$，

簡單之，代入其式，消去 a, b, c，則

$$(b-c)^2x+(c-a)^2y+(a-b)^2z$$

$$=\frac{k^2}{x}+\frac{k^2}{y}+\frac{k^2}{z}=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)k^2$$

$=\frac{yz+zx+xy}{xyz}k^2$，然因 $yz+zx+xy=0$

故此式之右邊爲 0.

於是 $(b-c)^2x+(c-a)^2y+(a-b)^2z=0$

〔407〕 若 $a:b=c:d$，求證

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$$

（證） 用綜合法求證：

$$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}\text{（合分理）}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{c^2+2cd+d^2}{c^2-2cd+d^2},\text{（定理7）}$$

用合分理，得 $\frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{c^2+d^2}{2cd}$.

$$\therefore \frac{ab}{a^2+b^2}=\frac{cd}{c^2+d^2} \quad (\text{逆理})$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}=\frac{c^2+2cd+d^2}{c^2+d^2} \quad (\text{合理})$$

$$\therefore \frac{a^2+2ab+b^2}{c^2+2cd+d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}. \quad (\text{更理})$$

所以從定理7，知道

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}},$$

[405] a,b,c,d 爲正數。

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{(2a^2-3b^2)}}{\sqrt{(2c^2-3d^2)}}$$

試證 $a:b=c:d$

解 因 a,b,c,d 爲正數，由原式，得

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{c^2+2cd+d^2}=\frac{2a^2-3b^2}{2c^2-3d^2}\circ$$

故 $(a^2+2ab+b^2)(2c^2-3d^2)$

$=(c^2+2cd+d^2)(2a^2-3b^2)$

$\therefore$ $(bc-ad)(4ac+5bc+5ad+6bd)=0$

然 $4ac+5bc+5ad+6bd\neq 0$

故 $bc-ad=0$，即 $bc=ad$，故 $a:b=c:d$

[406] 設 $a:b=c:d$，證

$$b(a+b-c-d)=(a+b)(b-a),$$

(證) 用解析法。證：

假定這式是眞確的，那末一定有

$$\frac{a+b-c-d}{b-d}=\frac{a+b}{b},$$

從分理，知道一定要

$$\frac{a-c}{b-d}=\frac{a}{b}\text{或}\frac{a-c}{a}=\frac{b-d}{b}。\text{(更理)}$$

$$\therefore\ 1-\frac{a-c}{a}=1-\frac{b-d}{b},$$

就是 $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ 或 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$。

$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 這式是眞，所以原式也眞

〔410〕設 $x-z:y-z=x^2:y^2$

試證 $x=y$，或 $\frac{1}{z}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

解 由 $x-z:y-z=y^2:x^2$

得 $y^2(x-z)=x^2(y-z)$

故 $y^2x-y^2z-x^2y+x^2z+xyz-xyz=0$,

或 $yz(x-y)+zx(x-y)-xy(x-y)=0$,

或 $(x-y)(yz+zx-xy)=0$,

故 $x=y$，或 $yz+zx=xy$,

即 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$。

〔411〕 $\frac{a}{a^2+ab+b^2}=\frac{c}{b^2+bc+c^2}$

問 b 常爲 a, c 之比例中項否。

由題式，$\frac{a^2+ab+b^2}{a}=\frac{b^2+bc+c^2}{c}$,

即 $a+b+\frac{b^2}{a}=\frac{b^2}{c}+b+c$

$$\therefore\quad \frac{b^2}{a}-c-\frac{b^2}{c}+a=0,$$

$$\frac{b^2-ac}{a}-\frac{b^2-ac}{c}=0,$$

$$\therefore\quad (b^2-ac)(c-a)=0.$$

然　$c=a$　則題式之兩邊爲同一式,

故　　$ac=0$, $\therefore$ $b^2=ac$,

即 b 爲 a, c 之比例中項.

〔412〕設有氣體,當溫度爲攝氏 90 度,壓力爲水銀柱 750 粍時,其體積有 1 立方呎. 問當溫度爲 240 度,壓力爲 1000 粍時,其體積幾何?

解　假定體積是 x 立方呎,溫度是攝氏 y 度,壓力是 z 粍,那末

$$x\propto\frac{y+273}{z}\text{ 卽 }x=\frac{m(y+273)}{z}$$

或　$xz=m(y+273)$

所以　$1\times750=m(90+273)$

$$\therefore\quad m=\frac{750}{363}=\frac{250}{121}$$

$\therefore$ 所求的體積是 $x=\frac{250}{121}\times\frac{240+273}{1000}$

$$=\frac{250}{121}\times\frac{513}{1000}=1.06\text{ 立方呎}$$

〔413〕　　$ad=bc$

試證　$\frac{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}{(a+b+c+d)^2}=ad$

解　　$ad=bc$, $\therefore$ $a:b=c:d$

故 $(a+b)(a+c)=a^2+a(b+c)+bc$

$=a^2+a(b+c)+ad=a(a+b+c+d)$

次 $(b+d)(c+d)=bc+bd+cd+d^2$

$=ad+bd+cd+d^2=d(a+b+c+d)$,

故 $\dfrac{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}{(a+b+c+d)^2}$

$=\dfrac{a(a+b+c+d)d(a+b+c+d)}{(a+b+c+d)^2}=ad$.

〔414〕有銅與亞鉛之合金甲乙二塊，甲中銅對於亞鉛之比爲 3:2，乙中之比爲 7:3 問甲乙二塊以如何成分混熔之，則其中所含之銅，對於亞鉛之比爲 11:5。

期 甲乙所要之成分爲 x 與 y，則

$$\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y:\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y=11:5.$$

故 $11\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{10}y\right)=5\left(\frac{3}{5}x+\frac{7}{10}y\right)$.

卽 $11(4x+3y)=5(6x+7y)$.

卽 $14x=2y$.

卽 $x:y=2:14=1:7$.

〔415〕汽車行走所要之時間，與距離爲比例，與速度爲反比例，速度則與走 1 哩所要之石炭量平方根爲比例，與其連結車輛之數爲反比例，今連車輛 20 輛之汽車，於 36 哩之距離，走 1 時間，要石炭 900 噸，然則連車輛 18 輛之汽車，在 30 哩之距離，走 45 分時間，要石炭幾何。

解 時間爲 t 時，距離爲 d 哩，每時之速爲 v 哩，每哩所要之石炭爲 q 噸，列車之數爲 c，則

$$t \propto \frac{d}{v}, \quad 及 \quad v \propto \frac{\sqrt{q}}{c},$$

由是 $t \propto \dfrac{cd}{\sqrt{q}}$,

或 $t = \dfrac{kcd}{\sqrt{q}}$, 但 k 爲常數，

以題之最始部分之數 $c=20$, $d=36$,

$$\sqrt{q}=\sqrt{\frac{900}{36}}=5 \quad 代入$$

則 $1=\dfrac{k\times 20\times 36}{5}$

$$\therefore k=\frac{1}{144}.$$

由是 $t=\dfrac{1\cdot c\cdot d}{144\sqrt{q}}$,

今以題之第二部分之數代入 t, c, d 則

$$\frac{45}{60}=\frac{18\times 30}{144\sqrt{q}}. \quad \therefore \sqrt{q}=5 \quad \therefore q=25.$$

(十五) 等差級數之題解

[416] $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}, \dfrac{1}{c}$ 爲等差級數，則 $a-b:b-c=a:c$，試證之。

解 $\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}$,

即 $$\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc},$$

$$\therefore\quad \frac{a-b}{b-c}=\frac{ab}{bc}=\frac{a}{c}.$$

〔417〕 $\frac{1}{a+b}$，$\frac{1}{a+c}$，$\frac{1}{b+c}$ 爲等差級數，則 a^2，b^2，c^2，亦爲等差級數，試證之。

解 $\frac{1}{a+b}$，$\frac{1}{a+c}$，$\frac{1}{b+c}$ 爲等差級數，

故 $$\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}=\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c},$$

$$\therefore\quad \frac{b-c}{(a+b)(a+c)}=\frac{a-b}{(b+c)(a+c)}$$

此式之兩邊以 $(a+b)(a+c)(b+c)$ 乘之，則

$$b^2-c^2=a^2-b^2,$$

故 a^2，b^2，c^2 亦爲等差級數。

〔418〕 甲乙兩隊，同時由同一地點出發，行軍於同一道路，甲隊，始終以每日 10 里進行，乙隊則初日行 8 里，第二日行 8.5 里，第三日行 9 里，漸次如斯，每日之行程，every 0.5 里增加，問幾日之後，乙隊可到達甲隊之位置。

解 所求日數爲 x，則甲之行程爲 $10x$，

乙之行程爲 $$\frac{x}{2}\left\{8\times2+\frac{1}{2}(x-1)\right\}$$

故 $$\frac{x}{2}\left\{8\times2+\frac{1}{2}(x-1)\right\}=10x,$$

而 $x\neq0$，

故兩邊以 x 除之，

$$\frac{1}{2}\left\{8\times2+\frac{1}{2}(x-1)\right\}=10.$$

解之得 $x=9$. 即 9 日之後，達於同位置。

〔419〕某等差級數之第 6 項，爲初項之 3 倍. 問第幾項，爲初項之 9 倍。

解　初項爲 a，公差爲 d，則第六項爲 $a+5d$，

故　$a+5d=3a$　$\therefore$　$5d=2a$.

故所求之項爲 x，則 $a+(x-1)d=9a$，

$\therefore$ $(x-1)d=8a$，　$\therefore$ $(x-1)d=20d$，

因 $d\neq0$ 故以 d 除之，

$x-1=20$，　$\therefore$　$x=21$.

可知爲第二十一項。

〔420〕自最初至第 n 項之和，爲 n^2+3n，問此級數爲如何級數。

解　$n=1$　則　$n^2+3n=1+3=4$，

此卽初項，

$n=2$　則　$n^2+3n=2^2+3\times2=10$，

此卽初項與第二項之和，

第二項 $=10-4=6$. 故公差爲 $6-4=2$.

故所要之級數爲 $4, 6, 8$.

〔421〕有合成等差級數之三數，三數相加之和爲 36，如以 1, 4, 43 分別加此三數，則另成三數，彼此關係適爲等比級數。

解　設 a 爲等差級數之第一項，b 爲等差級數第三項，根據定理，第二項必爲 $\frac{36}{3}=12$ 則得下列之關

係：

$$\begin{cases}12-a=b-12 \quad\cdots\cdots(1),\\ (12+4):(a+1)=(b+43):(12+4)\quad\cdots(2);\end{cases}$$

由(1)： $b=24-a \quad\cdots\cdots(3)$,

由(2)： $(a+1)(b+43)=16^2 \quad\cdots\cdots(4)$,

以(3)代入(4)： $(a+1)(67-a)=256$。

$$-a^2+66a+67=256,$$

$$a^2-66a+189=0,$$

$$(a-63)(a-3)=0,$$

$a=3$, 或 $a=63$;

代入(3)： $b=21$ 或 $b=-39$。

故此三數爲：

3, 12, 21 或 63, 12, -39。

〔422〕次之等差級數之項數爲 $4n+1$，其距初項之第 n 項，距末項之第 n 項，及中央之項，試書之。

$$d-a,\ d-3a,\ d-5a,\ d-7a,$$

解 因公差 $-2a$，初項 $d-a$ 故第 n 項爲

$$d-a+(n-1)(-2a)=d-a-2an+2a$$
$$=d-(2n-1)a。$$

因距末項之第 n 項，爲第 $3n+2$ 項，故

$$d-a+(3n+1)(-2a)=d-a-6na-2a$$
$$=d-3(2n+1)a。$$

又因中央之項爲第 $2n+1$ 項，故

$$d-a+2n(-2a)=d-(4n+1)a。$$

〔423〕100 與 500 之間，7 之倍數有幾何．又其總和爲若何？

解　$100=7\times14+2$，　$500=7\times71+3$.

故 100 與 500 之間，7 之倍數爲 $71-14=57$.

又其總和，爲初項 7×15，末項 7×71，項數 57 之等差級數之和，故

$$\frac{57}{2}\times(7\times15+7\times71)=17157.$$

〔424〕 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ 爲等差級數，則

$(s-a)^2$，$(s-b)^2$，$(s-c)^2$ 亦等差級數。

但　$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$

解　$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$ 爲等差級數，則

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b},$$

$$\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}.$$

$$c(a-b)=a(b-c)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

今　$a+b+c=2s$

故　$c=2s-a-b=s-b+s-a$.

$a-b=(s-b)-(s-a)$,

$a=(s-c)+(s-b)$，$b-c=(s-c)-(s-b)$

以此等之值代入(1)，

$$\{(s-b)+(s-a)\}\{(s-b)-(s-a)\}$$
$$=\{(s-c)+(s-b)\}\{(s-c)-(s-b)\}$$

故　$(s-b)^2-(s-a)^2=(s-c)^2-(s-b)^2$,

即　$(s-a)^2$，$(s-b)^2$，$(s-c)^2$ 爲等差級數。

〔425〕 等差級數之公差爲首項之 2 倍，則至第 m 項之

項對於至第 n 項之和之比爲 $m^2:n^2$，試證之。

解　令首項爲 a，公差爲 $2a$，其 m 項之和爲 s，n 項之和爲 s'，

則　$s:s'=\frac{m}{2}\left\{2a+(m-1)\times 2a\right\}:$

$\frac{n}{2}\left\{2a+(n-1)\times 2a\right\}=m^2:n^2$。

〔426〕問等差級數 12，9，6……幾項之和爲 -54

解　因初項 12，公差 -3，所要之項數爲 n，

則　$\frac{n}{2}\{12\times 2-3(n-1)\}=-54$。

或　$27n-3n^2=-108$，

或　$n^2-9n-36=0$，

或　$(n-12)(n+3)=0$，

由是　$n=12$　或　-3。

棄負根，知所要之項數爲 12。

〔427〕P,Q,R 爲等差級數之第 p 項，第 q 項，第 r 項

則　$P(q-r)+Q(r-p)+R(p-q)=0$

解　初項爲 a，公差爲 d　則 $P=a+(p-1)d$，

此兩邊以 $q-r$ 乘之，

$P(q-r)=a(q-r)+(p-1)(q-r)d$，

就 Q,R 亦得同樣之式

於是　$\Sigma P(q-r)=\Sigma a(q-r)+$

$\Sigma(p-1)(q-r)d$。

$=a\Sigma(q-r)+d\{\Sigma p(q-r)-\Sigma(q-r)\}$，

然　$\Sigma(q-r)=0$，$\Sigma p(q-r)=0$，

故　$\sum P(q-r)=0$,

即　$P(q-r)+Q(r-P)+R(P-q)=0$.

〔428〕有多角形，其內角爲等差級數，其公差爲 $4°$ 其最大之角爲 $172°$，試求其邊數。

解　設所求之邊數爲 x，則此 x 等於首項 172，公差 -4，總和 $90(2x-4)$ 之等差級數之項數。

$\therefore\quad 90(2x-4)=\frac{x}{2}\left\{2\times172-4(x-1)\right\}$,

$\therefore\quad x^2+3x-180=0$

$\therefore\quad x=12$，或　$x=-15$,

$x=-15$，不合於題意，故捨之。而所求之邊數爲 12。

〔429〕200 與 700 之間之數，以 13 除之，得剩餘 7，所有總數之和，試求之。

解　$200=13\times15+5$，$700=13\times53+11$，故 200 與 700 之間，以 13 除，得剩餘 7，其總數爲　$7+(13\times15)$，

$7+(13\times16)$，…，$7+(13\times53)$

而求此總和，等於求

初項　$7+(13\times15)$　即　202,

末項　$7+(13\times53)$,　即　696,

項數　$53-(15-1)$,　即　39.

等差級數之總和，

故所要之總和爲　$\frac{39}{2}(202+696)=17511$.

〔430〕有甲乙二人競走，甲先出發，最初一分間，行 300 米，次之一分間，行 290 米，又其次之一分間

行 280 米，次第如斯，一分間之行程每減 10 米，進行，乙自甲後 1 分假，由同地出發，一分間以 240 米之等速，進行，問乙自甲出發後，幾分追及甲。

解　乙自甲出發後，以 x 分追及甲，則二人之行程相等，

於是　$\frac{x}{2}\{300\times2-10(x-1)\}=240(x-1)$.

簡單之，　$x^2-13x-48=0$,

或　$(x-16)(x+3)=0$.

棄此負根，爲 16 分。

〔431〕有四數爲等差級數，其和爲 20，其平方之和爲 120，問四數如何？

解　將此等差級數之公差爲 $2y$，則四數能以 $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$，表之，故得次之方程

$$(x-3y)+(x-y)+(x+y)+(x+3y)=20,$$

$$(x-3y)^2+(x-y)^2+(x+y)^2+(x+3y)^2=120.$$

$\therefore$　$x=5$,

及　$x^2+5y^2=30$.

即　$y=\pm1$,

故所求之數爲 2, 4, 6, 8.

〔432〕　$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ 爲等差級數，則

$$3(a-b)(c-d)=(b-c)(a-d)$$

解 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ 為等差級數，則

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{d}-\frac{1}{c}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{a}\right),$$

或 $$\frac{a-b}{ab}=\frac{b-c}{bc}=\frac{c-d}{cd}=\frac{a-d}{3ad}.$$

故 $$\frac{(a-b)(c-d)}{abcd}=\frac{(b-c)(a-d)}{3abcd}$$

故 $$3(a-b)(c-d)=(b-c)(a-d)$$

〔433〕有三數為等差級數，其和為18，其平方之和為126，問三數各如何？

解 此等差級之三數，可以 $x-y, x, x+y$ 表之，故依題意可得次之方程：

$$(x-y)+x+(x+y)=18,$$
$$(x-y)^2+x^2+(x+y)^2=126,$$

∴ $x=6$,

及 $3x^2+2y^2=126$,

即 $y=\pm 3$,

故三數為 3，6，9.

〔434〕有等差級數之三數，其和30，其積960，問三數各如何。

解 三數為 $x-y, x, x+y$，則

$$(x-y)+x+(x+y)=30,$$

及 $(x-y)x(x+y)=360$,

或 $3x=30$, ∴ $x=10$.

及 $x(x^2-y^2)=960$，

故 $10(100-y^2)=960$，

故 $100-y^2=96$，

由是 $y=\pm 2$.

由是 $x-y=8$， $x=10$， $x+y=12$，

或 $x-y=12$， $x=10$， $x+y=8$.

即 三數爲 8，10，12.

〔435〕100 與 300 之間所夾之整數，以 3 除之，得剩餘 2，其總數之和，試求之。

解 101 與 299 爲適於條件兩端之數，故其總數和，由

$a=101$， $l=299$， $d=3$

項數 $n=\frac{299-98}{3}=67$

得 $S=\frac{67}{2}(101+299)=13400$.

(十六) 等比級數之題解

〔436〕初項 a，公比 r 之等比級數，自初項至第 $2n$ 項之連乘積試求之。

解 等比級數 $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots, ar^{2n-1}$

之連乘積爲 $a^{2n}r^{1+2+3+\cdots+(2n-1)}$.

此指數，爲初項 1，末項 $2n-1$ 之等比級數

$(2n-1)$ 項之和，

等於 $\frac{(2n-1)(1+2n-1)}{2}=n(2n-1)$

故所要之連乘積為

〔437〕求下列級數之第6項及首六項之和.

$$3, 6, 9, \cdots\cdots$$

解　$a=3$,

∴　$l=3+(6-1)\times 3=18$.

$$s=\frac{3+18}{2}\times 6=63.$$

〔438〕等比級數之至第四項之和，爲40，至第八項之和爲3280，試求此等比級數.

解　初項爲x，公比爲y，則依題意，

$$x\frac{y^4-1}{y-1}=40 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x\frac{y^8-1}{y-1}=3280 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)，(2)相除，則　$y^4+1=82$，

∴　$y^4=81$，　$y=\pm 3$.

以y之此值代入(1)，得　$x=1$，或　$x=-2$.

〔439〕求$\frac{3}{4}$與5之調和均數.

解　因$\frac{4}{3}$與$\frac{1}{5}$之等差均數爲

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{23}{15}=\frac{23}{30}$$

故所求之調和均數爲

十項至其[illegible]$\frac{80}{23}$。

〔440〕三數爲 m^2+m+1，$m^2+2m+11$，$m^2+3m+28$ 係等比級數，問 m 之值幾何。

解　已知三數爲等比級數，則

$$(m^2+m+1)(m^2+3m+28)$$

$$=(m^2+2m+11)^2$$

即　$m^4+4m^3+32m^2+31m+28$

$$=m^4+4m^3+26m^2+44m+121;$$

簡單之，整頓，則　$6m^2-13m-93=0$。

即　$(6m-31)(m+3)=0$，

故　$m=\frac{13}{6}$，　或　$m=-3$。

〔441〕求證二項級數

$$1+c_1^n x+c_2^n x^2+\cdots+c_r^n x^r+\cdots$$

於 $|x|<1$ 時收斂。

解
$$\frac{u_{r+1}}{u_r}=\frac{c_r^n x^r}{c_{r-1}^n x^{r-1}}$$

$$=\frac{(n-r+1)}{r}x$$

$$=\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{u_{r+1}}{u_r}=-x$$

故當 $|x|<1$ 時級數爲收斂級數。

〔442〕第三項爲 32，第六項爲 2048 之等比級數，自第七項至第十一項之和試求之。

解 初項為 a，公比為 r，則第七項為 ar^6 其至第十一項之和為 S 則

$$S=ar^6+ar^7+ar^8+ar^9+ar^{10}$$
$$=ar^6(1+r+r^2+r^3+r^4)=ar^6\left(\frac{r^5-1}{r-1}\right)$$

然 $ar^2=32$，$ar^5=2048$，

故 $r^3=\frac{2048}{32}=64$，$\therefore r=4$，得 $a=2$

故所要之和為 $\frac{4^5-1}{4-1}\times2\times4^6=341\times2^{13}$
$$=341\times8192=2793472.$$

〔443〕有二數其等比均數為12，其調和均數為 $9\frac{3}{5}$，求此二數。

解 $\sqrt{ab}=12$，$\frac{2ab}{a+b}=9\frac{3}{5}$，

$\therefore$ $ab=144$，$a+b=30$，

從此得二數為 6 及 24。

〔444〕化0.341341……為分數。

解 0.341341……

$$=0.341+0.000341+\cdots$$
$$=0.341\left(1+\frac{1}{1000}+\frac{1}{(1000)^2}+\cdots\right)$$
$$=0.341\times\frac{1}{1-\frac{1}{1000}}$$
$$=\frac{341}{999}.$$

〔445〕5 與 -1215 之間，插 4 個等比中項，試求其和？

解 插入等比中項時之公比為 r，則因 5 為初項，-1215 為第六項。

故 $5r^5=-1215$，故 $r^5=-243$。

取 r 之實數值，得 $r=-3$。故所要之和，為

$$\frac{5-(-1215)(-3)}{1-(-3)}$$

$$=\frac{-3640}{4}=-910。$$

〔446〕有長 a 尺之物，初取去其三分之一，次取去其餘之三分之一，次又取去其餘之三分之一，次第如斯，無限進行，問取去部分之長，總計幾尺。

解 初取去之部分，為 $\frac{1}{3}a$，次取去其餘之 $\frac{1}{3}$，

則 $$\frac{2}{3}a\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}a\times\frac{2}{3}。$$

因再取去其餘之 $\frac{1}{3}$，

則 $$\frac{1}{3}a\times\frac{2}{3}\times2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}a\times\left(\frac{2}{3}\right)^2。$$

由此類推，此所取去部分之總和 S，為

$$S=\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}a\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}a\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots$$

可知其為等比級數

因公比 $0<\frac{2}{3}<1$ 可求此等比級數無限項之和，

故 $$S=\frac{\frac{1}{3}a}{1-\frac{2}{3}}=a。$$

即 a 尺。

〔447〕將連續之奇數，如(1)，(3，5)，(7，9，11)，(13，15，17，19)，…分之，則其第 n 組之和等於 n^3，試證之。

解　第 n 組之和為 n 項之等差級數之和，其公差為 2，其初項為以前各組項數之和

$$1+2+3+\cdots(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$$

之 2 倍加 1，即等於 $n(n-1)+1$。

$$故和=\frac{n}{2}[2\{n(n-1)+1\}+(n-1)\times 2]$$

$$=n[n^2-n+1+n-1]=n^3.$$

〔448〕求級數 $3\frac{1}{3}$，$9\frac{1}{9}$，$27\frac{1}{27}$，…之 n 項之和。

解　$3+9+27+\cdots+3^n=3\cdot\dfrac{3^n-1}{3-1}$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3^n-1}{3^n(3-1)}$$

$$3\frac{1}{3}+9\frac{1}{9}+27\frac{1}{27}+\cdots n\ 項$$

$$=(3^n-1)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^n}\right)$$

$$=\frac{3^n-1}{2}\left(3+\frac{1}{3^n}\right).$$

〔449〕以 a 為一邊之長，作正三角形，連續其各邊中點，作第二正三角形，以下同樣作圖，所得諸三角

形面積之和之極限，試求之。

解 設一邊之長為 a，則正三角形之面積，為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，其各邊中點連結，所得三角形之面積，為其 $\frac{1}{4}$，故所得諸三角形面積之和，為

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2.$$

【450】 初項 a，公比 r 之等比級數 n 項之積為幾何，又等比級數 n 項之積，等於初項與末項之積之 n 乘之平方根，試證之。

解 設級數 n 項之積為 P，則

$$P=a\times ar\times ar^2\times\cdots\cdots\times ar^{n-1}$$

$$=a^nr^{1+2+3+\cdots+(n-1)},$$

然 $$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

故 $$P=a^nr^{\frac{n(n-1)}{2}}=\sqrt{(a\times ar^{n-1})^n}$$

【451】 自 1 起連續 n 項奇數之和等於 n^2，試證之。

解 連續奇數為 $1,3,5,7,\cdots,(2n-1)$，

故 $$s=\frac{1}{2}\{1+(2n-1)\}n$$

$$=\frac{1}{2}\times 2n\times n=n^2.$$

【452】 a,b,c 為實數，

方程式 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$

有實根，則 a,b,c 為等比級數，而其實根 x 為其級數之公比，試證之。

解 題之方程式旣有實根，則其判別式，必為負數：

$$b^2(a+c)^2-(a^2+b^2)(b^2+c^2)\geqq 0$$

即 $$-(b^2-ac)^2\geqq 0.$$

此式旣成立，則 $b^2-ac=0$。

即 $b^2=ac$，即 a,b,c 為等比級數，

而此時之方程式為等根，其根為

$$x=\frac{b(a+c)}{a^2+b^2}=\frac{b(a+c)}{a^2+ac}=\frac{b}{a}$$

即等比級數 a,b,c 之公比。

【453】 當 x 為何數時，級數

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$$

為收斂級數。

解 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}}$$

$$=\frac{(-1)\times nx}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=-x$$

故當 $|x|<1$ 時，級數為收斂級數。

【454】 初項 7，末項 448，總和 880 之等比級數之公比，試求之。

解　初項 a，公比 r，末項 l 之等比級數之總和以 S 表之，則

$$S=\frac{rl-a}{r-1}$$

今　　$l=448,\ a=7,\ S=889,$

$$\therefore\ 889=\frac{448r-7}{r-1},$$

$$\therefore\ 441r=882,\quad \therefore\ r=2$$

有若干項之等比級數，公比爲3，末項爲486。

〔455〕求證指數級數 $1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots$ 爲斂級數。

解　指數級數

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots \text{中。}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{x^n}{\underline{|n}}}{\dfrac{x^{n-1}}{\underline{|n-1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$$

故此級數，爲斂級數。

〔456〕以銀 760 圓，分配甲乙丙三人，使三人所得爲幾何級數，且乙丙二人所得之差，爲甲乙二人所得之

差三分之二，問三人所得各如何？

解 甲乙丙所得，為等比級數，設為 x^2, xy, y^2

由是 $x^2+xy+y^2=760$ ……………………(1)

$xy-y^2=\frac{2}{3}(x^2-xy)$ ……………………(2)

因不為 $x=y$ 故(2)之兩邊以 $x-y$ 除之，

$y=\frac{2}{3}x$ ……………………………………(3)

以之代入(1)，

$x^2+\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{9}x^2=760$， 即 $\frac{19}{9}x^2=760$。

故 $x^2=760\times\frac{9}{19}=360$。

於是由(3)得 $y^2=\frac{4}{9}\times360=160$

由(1)得 $xy=240$。

即甲乙丙之所得為 360 圓，240 圓，160 圓。

〔457〕有 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$ 之等比級數，試求其和之極限

解 $s=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$。

〔458〕二 a 及 b 之等差均數，等比均數，調和均數，為 A

G, H 則 G 為 A 與 H 之比例中數，試證之。

解
$$A=\frac{a+b}{2},$$
$$G=\sqrt{ab},$$
$$H=\frac{2ab}{a+b}.$$
$$\therefore\quad AH=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2.$$

〔459〕已知等比級數中
$$a=-3,\ l=-46875,\ s=-39063,$$
求 r 及 n。

解　由 $s=(a-rl)/(1-r)$ 得：
$$-39063=\frac{-3+46875r}{1-r}$$
$$\therefore\quad r=-5.$$
$$\therefore\quad -46875=-3(-5)^{n-1},$$
即 $$(-5)^{n-1}=15625=5^6=(-5)^6,$$
$$\therefore\quad n=7.$$

〔460〕有初項為3，公比為 $\frac{2}{3}$ 之等比級數，試求其和之極限。

解
$$s=\frac{3}{1-\frac{2}{3}}=9.$$

〔461〕求此級數 $4+1.2+0.36+0.108+\cdots$ 至無窮項之和。

解　$a=4,\quad r=\frac{1.2}{4}=0.3$

$$=\frac{4}{0.7}=5\frac{5}{7}.$$

〔462〕有 $4+\frac{4}{3}+\frac{4}{9}+\cdots$ 之級數，試求其和之極限。

解 $s=\frac{4}{1-\frac{1}{3}}=4\times\frac{3}{2}=6.$

〔463〕等比級數和之爲 1456，初項爲 4，末項爲 972，求公比與項數。

解 $S_n=\frac{lr-a}{r-1}$

命 $S_n=1456$，$a=4$，$l=972$

$\therefore\quad 1456=\frac{972r-4}{r-1}.$

$\therefore\quad r=3;$

$4\times3^{n-1}=972,$

$n-1=5,\quad n=6.$

故公比=3，項數=6。

〔464〕試求首項爲32，公比爲 $\frac{1}{2}$ 之等比級數之第八項。

解 $l=32\times\left(\frac{1}{2}\right)^7=32\times\frac{1}{128}=\frac{1}{4}.$

〔465〕級數之和爲 1456，首項爲 4，末項爲 972 求公比及項數。

解 $a=4$，$l=972$，$s=1456$。

代入公式，得 $972=4r^{n-1}$ ……(1)

$1456=\frac{4(r^n-1)}{r-1}$ ……(2)

從(1)得 $r^{n-1}=243$ ……(3)

代入(2)并且化簡，得 $364(r-1)=243r-1$.

解出來， $r=3$,

代入(3)， $3^{n-1}=243=3^5$

$\therefore\ n-1=5\quad\therefore\ n=6$

答： 公比是 3，項數是 5。

【466】 求等比級數 $\frac{5}{7}+\frac{10}{21}+\frac{20}{63}+\frac{40}{189}+\cdots$ 無窮項之和。

解 $\because\quad r=\frac{10}{21}\div\frac{5}{7}=\frac{2}{3}$

$$\therefore\ \text{無窮項之和}=\frac{\frac{5}{7}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{5}{7}}{\frac{1}{3}}=\frac{15}{7}$$

【467】 設一等比級數之第一項為 2 第四項 1024，求第二項與第三項.

解 因 $l=ar^{n-1}$,

$1024=2r^{4-1}$

$r^3=512$,

$r=\sqrt[3]{512}=8$,

第二項 $=2\times8^{\frac{3+1}{3}}=2\times8=16$,

第三項 $=2\times8^{\frac{3+1}{2}}=2\times64=128$.

〔468〕二數之等比中項爲等差中項與調和中項之間之等比中項。試證之。

解 a, b 二數間之三種中項爲：

$$A=\frac{a+b}{2},\quad G=\pm\sqrt{ab},$$

$$H=\frac{2ab}{a+b}.$$

因 $A\times H=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab$,

$G^2=(\pm\sqrt{ab})^2=ab$

故 $G^2=A\times H$.

(十七) 級數雜題之題解

〔469〕有非 0 之三數 a, b, c, 爲等差級數, $c-a, b, c+a$ 爲等比級數. 求比 $a:b:c$

解 依題意 $2b=a+c$ ……………(1)

$b^2=(c-a)(c+a)$ ……………(2)

由(2)得 $b^2=c^2-a^2$

以(1)代入(2) $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2=c^2-a^2$.

$(a+c)^2-4(c-a)(a+c)=0$

$\therefore (a+c)(a+c-4c+4a)=0$.

$\therefore (a+c)(5a-3c)=0$.

然 $a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$, 故 $c+a\neq0$

故　$5a=3c$,　$\therefore\ \dfrac{a}{3}=\dfrac{c}{5}$.

設以此値爲 k, 則 $a=3k$, $c=5k$

以之代入(1), 則 $b=\dfrac{3k+5k}{2}$

$$=\frac{8}{2}k=4k.$$

$\therefore a:b:c=3k:4k:5k=3:4:5$

〔470〕 a, b, c 爲等差級數, a, b, c, d 爲調和級數. 試證 $a:b=c:d$

解　依題意　$a-b=b-c$,

及　$b-c:c-d=b:d$, 故 $a-b:c-d=b:d$,

故　$a-b:b=c-d:d$, 故 $a:b=c:d$.

〔471〕求 $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots n$ 項之和。

解　$S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$

以 x 乘之,　$xS=x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n$,

兩邊相減, $(1-x)S=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{n-1}-nx^n$

$$=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

$$\therefore S=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}$$

$$=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

〔472〕有初項 2, 公差 3, 總和 40 之等差級數, 以其項數爲初項, 公比爲 $\dfrac{1}{5}$ 之等比級數無窮項之和, 試

求之；

解　等差級數之項數爲 n，則

$$\frac{1}{2}n\{2\times2+(n-1)\times3\}=40.$$

故　$n(4+3n-3)=80$.

變形，　$3n^2+n-80=0$.

即　$(n-5)(3n+16)=0$，因 n 爲正整數，

則　$3n+16\neq0$

故　$n-5=0$，故 $n=5$.

次以 5 爲初項，公比爲 $\frac{1}{5}$ 之等比級數無窮項之和，爲 S，則

$$S=\frac{5}{1-\frac{1}{5}}=\frac{25}{4}=6\frac{1}{4}.$$

〔473〕 $\frac{1}{b-a}$，$\frac{1}{2b}$，$\frac{1}{b-c}$ 爲等差級數，則 a, b, c 爲等比級數，

解　$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{b}$

去分母，$b(b-c)+b(b-a)=(b-a)(b-c)$，

簡單之，$b^2=ac$，即 a, b, c 爲等比級數。

〔474〕 求次之級數 n 項之總和，

$$(1+\tfrac{1}{4})+(3-\tfrac{1}{2})+(5+1)+(7-2)+(9+4)+\cdots\cdots$$

解　此級數爲等差級數 $1+3+5+7+\cdots\cdots n$ 項之和，加等比級數 $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1-2+\cdots n$ 項之和總和

而第一級數之和爲 $\frac{n}{2}\left\{2+2(n-1)\right\}=n^2$

第二級數之和爲

$$\frac{1\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{1}{12}\left\{1-(-2)^n\right\}$$

於是原級數之和，爲

$$n^2+\frac{1}{12}\left\{1-(-2)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\left\{12n^2+1-(-2)^n\right\}$$

〔475〕a,b,c 爲等差級數，x 爲 a,b 之等比中項，y 爲 b,c 之等比中項，則 x^2,b^2,y^2 爲等差級數。

解　依題意得次之三方程式，

$$2b=a+c\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x^2=ab\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$y^2=bc\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2),(3)兩邊相加，則 $x^2+y^2=b(a+c)$，

由(1)得 $2b^2=b(a+c)$. $\therefore$ $x^2+y^2=2b^2$，

即 x^2,b^2,y^2 爲等差級數。

〔476〕a,x,y,b 爲 $A.P.$，c^3,x,y,d^3 爲 $G.P.$

則　$a+b=cd(c+d)$

解　a,x,y,b 爲等差級數，

則　$a+b=x+y$，又 c^3,x,y,d^3 爲等比級數，則

公比爲　$\frac{d}{c}$

故　$x+y=c^3\times\frac{d}{c}+d^3$

$$又\ \frac{c^3}{d}=c^2d+cd^2=cd(c+d).$$

故　$a+b=cd(c+d)$.

〔477〕等比級數和之為1456，初項為4，末項為972.求公比與項數.

解　$S_n=\dfrac{lr-a}{r-1}$

令　$S_n=1456,\quad a=4,\quad l=972.$

$\therefore\quad 1456=\dfrac{972r-4}{r-1}$

$\therefore\quad r=3;$

$4\times3^{n-1}=972;$

$n-1=5,\quad n=6.$

故公比$=3$，　項數$=6$.

〔478〕有等差級數之四數，此等之數，順次以1,1,3,9加之，則成等比級數.各數如何.

解　所要之四數為　$x-y,\ x,\ x+y,\ x+2y$.　依題意

$(x+1)^2=(x-y+1)(x+y+3)\cdots\cdots(1)$

$(x-y+1)(x+2y+9)=(x+1)(x-y+3)\cdots(2)$

由(1)得$x=\dfrac{y^2+2y-2}{2}$

由(2)　$x=\dfrac{y^2+4y-3}{3}$

故　$\dfrac{y^2+2y-2}{2}=\dfrac{y^2+4y-3}{3}$

或　$y(y-2)=0$，故$y=2$.

由是 $x=3$，故所要之數爲 $3-2$，3，$3+2$，

$3+2\times2$。

即 1，3，5，7。

〔479〕2與9之間，試插入二數，使首三數爲等差級數，後三數爲等比級數。

解 二數爲 x,y，$2,x,y$ 爲等差級數，

$x,y,9$ 爲等比級數，

得次之方程式。 $2x=2+y\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$9x=y^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

以(1)代入(2) $9\left(\frac{2+y}{2}\right)=y^2$，

即 $2y^2-9y-18=0$，

$(y-6)(2y+3)=0$，

由是 $y=6$，又 $y=-\frac{3}{2}$

〔480〕有二數，其等差中項，比等比中項大13，又等比中項，比調和中項大12，問二數各如何。

解 二數爲 x,y，則

$$\frac{x+y}{2}=\sqrt{xy}+13\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\sqrt{xy}=\frac{2xy}{x+y}+12\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以(1)之 $\frac{x+y}{2}$ 之値，代入(2)則

$$\sqrt{xy}=\frac{xy}{\sqrt{xy}+13}+12。$$

去分母，則 $xy+13\sqrt{xy}=xy+12\sqrt{xy}+156$。

即　$\sqrt{xy}=156$ ……………………(3)；

以之代入 (1)，

$x+y=338$，再由 (3) 之平方，得 $x=234$，

$y=104$，或 $x=104$，$y=234$。

〔481〕調和級數 ($H.P.$) 與等差級數 ($A.P.$) 之關係，試以算式說明之，并將任意二數 (a 及 c) 之間之調和中項，算出之。

解　$a,b,c,d,$……等數爲調和級數，則有次之關係，

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}=\cdots\cdots$$

即調和級數之逆數，爲等差級數，

故 a,c 之調和中項 b，由 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$

得　$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$，故 $b=\frac{2ac}{a+c}$。

(十八)　對數之題解

〔482〕$\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}}=c$，試作求 x 之值之式。

解　$\log a^{mx}-\log b^{nx-1}=\log c$，

$\therefore\ mx\log a-(nx-1)\log b=\log c$，

$(m\log a-n\log b)x=\log c-\log b$，

$$\therefore\ x=\frac{\log c-\log b}{m\log a-n\log b}。$$

〔483〕有某級數，自初項至第 n 項之和，加 1，其常用對數爲 n，問此級數如何。

解　設級數 $a,b,c,\cdots$ 至 n 項之和爲 S_n，則

$$S_n+1=10^n$$

$n=1$ 則 $a+1=10$，$\therefore a=9$

$n=2$ 則 $a+b=100-1$，$\therefore b=90$，

$n=3$ 則 $a+b+c=1000-1$，$\therefore c=900$。

故其級數爲 9，90，900，…… 卽初項 9，公比 10 之等比級數。

【484】 $(\frac{1}{2})^{95}$ 以小數表之，問小數點與最初有效數字之間，零之數如何，但決定此數，用

$$\log 2=0.301$$

解　$\log(\frac{1}{2})^{95}=95\log(\frac{1}{2})=95\times(0-\log 2)$

$=95\times(-0.301)=-28.595=\overline{29}.405$

故所要之零之數，爲 28 個。

【485】 $x=a^2bcd^3$，試以對數式表之。

解　$\log x=\log a^2+\log b+\log c+\log d^3$

$=2\log a+\log b+\log c+3\log d$。

【486】 2，4，8，16…之等比級數，自初項至第 30 項之總和，爲幾行之數。

但以 $\log 2=0.30103$ 計算之。

解　依公式，總和爲 S，則因

公比 $=2$，初項 $=2$，項數 $=30$，故

$$S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}=\frac{2(2^{30}-1)}{2}=2^{30}-2,$$

此式之 2^{30}，爲非常大之數，其 -2 則爲小數，故 -2 暫時省之，得

$$S=2^{30}。$$

故 $\log S=30\log 2=30\times 0.30103=9.03090$。

由是知為 10 行之數。

〔487〕 $\log\frac{a}{b}+\log\frac{b}{c}+\log\frac{c}{a}=0$，試證之。

解 左邊 $=\log a-\log b+\log b-\log c+\log c-\log a=0$。

〔488〕 有 $a\times a^3\times a^5\times a^7\times\cdots\times a^{2n-1}=A$

之關係，試證 $n^2=\frac{\log A}{\log a}$

但 a 為正數，n 為任意正整數。

解 $A=a\times a^3\times a^5\times a^7\times\cdots\cdots\times a^{2n-1}$

$=a^{1+3+5+7+\cdots+2n-1}$。

此指數為公差 2，項數 n 之等差級數，故

$=a^{n^2}$

$\therefore\ \log A=n^2\log a$，$\therefore\ n^2=\frac{\log A}{\log a}$。

〔489〕 (1) $\log 5$。 (2) $\log 1.8$。

解 (1) $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2$

$=1-0.30103=0.69397$。

(2) $\log 1.8=\log\frac{18}{10}=\log\frac{2\times 3^2}{10}$

$=\log 2+2\log 3-\log 10=0.30103+2\times 0.47712-1=1.25321$。

〔490〕 證；$\log_E ab=\log_E a+\log_E b$。

解 令 $a=E^m$， $b=E^n$，

則 $\log_E a=m$， $\log_E b=n$；

因 $ab=E^m\cdot E^n=E^{m+n}$， 則

故 $\log_E ab=m+n$，

$\therefore \log_E ab=\log_E a+\log_E b$.

〔491〕知 $\log 2, \log 3, \log 7$ 之常用對數，求 $\sqrt[3]{\frac{35}{96}}$ 之對數並真數。

解 $\sqrt[3]{\frac{35}{96}}=x$ 則 $\log x=\frac{1}{3}(\log 70-\log 192)$

$=\frac{1}{3}\{\log(7\times10)-\log(2^6\times3)\}$

$=\frac{1}{3}\{1+\log 7-6\log 2-\log 3\}$

〔492〕 $\log\frac{\sqrt{0.05}\times\sqrt{0.3}}{\sqrt[3]{2}}$.

解 原式 $=\frac{1}{2}\log 0.05+\frac{1}{2}\log 0.3-\frac{1}{3}\log 2$

$=\frac{1}{2}(-\log 2-1+\log 3-1)-\log 2$

$=-1+\frac{1}{2}\times0.4771-\frac{5}{6}\times0.3010$

$=-1+0.2386-0.2508$

$=-1.0122=\bar{2}.9878$.

〔493〕 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=b$；但 a 爲正數，b 小於1。

解 已知方程式爲 $\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{b}{1}$，

$\frac{2a^x}{2a^{-x}}=\frac{1+b}{1-b}$

即 $a^{2x}=\frac{1+b}{1-b}$.

故 $2x\log a=\log(1+b)-\log(1-b)$,

∴ $x=\dfrac{\log(1+b)-\log(1-b)}{2\log a}$.

〔494〕 知 $\log_{10}5=0.69897$,求 $\log_{10}8$.

解 $\log_{10}8=\log_{10}\dfrac{1000}{125}=\log_{10}\left(\dfrac{10}{5}\right)^3$

$=3(\log_{10}10-\log_{10}5)$

$=3(1-0.69897)=0.90309$.

〔495〕 $a^{\frac{x+1}{x-1}}=b^{\frac{x-1}{x+1}}$,試作求 x 之值之式.

解 $\dfrac{x+1}{x-1}\log a=\dfrac{x-1}{x+1}\log b$,

∴ $(x+1)^2\log a=(x-1)^2\log b$.

∴ $\dfrac{x+1}{x-1}=\pm\sqrt{\dfrac{\log b}{\log a}}$,

∴ $x=\dfrac{\left(\pm\sqrt{\dfrac{\log b}{\log a}}+1\right)}{\left(\pm\sqrt{\dfrac{\log b}{\log a}}-1\right)}$.

〔496〕 $\log\sqrt[3]{0.03125}$.

解 $\log\sqrt[3]{0.03125}=\log\left(\dfrac{5^5}{10^5}\right)^{\frac{1}{3}}$

$=\log\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$

$=\dfrac{5}{3}(\log 1-\log 2)=\dfrac{5}{3}\times(0-0.30103)$

$=-\dfrac{1.50515}{3}=-0.50172$.

知 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$

求次之各式.

〔497〕證 $\log_a b\ \log_b a=1$

解 $\log_b a=x$ 則 $b^x=a$

$$\therefore b=a^{\frac{1}{x}} \quad \therefore \log_a b=\frac{1}{x}$$

$$\therefore \log_b a\ \log_a b=x\times\frac{1}{x}=1.$$

〔498〕 $x^{\log x}=100x$.

解 $x^{\log x}=100x$,

$(\log x)^2=\log 100+\log x$,

$(\log x)^2-\log x-2=0$,

$(\log x-2)(\log x+1)=0$,

故 $\log x-2=0$, $\therefore \log x=2$.

故 $x=100$. 次 $\log x+1=0$,

$\therefore \log x=-1$, 故 $x=\frac{1}{10}$.

即 $x=100$, 又 $\frac{1}{10}$.

〔499〕 0.0108

解 $\log 0.0108=\log\frac{2^2\times3^3}{10^4}$

$=2\log 2+3\log 3-4$

$=0.6020+1.4313-4=\bar{2}.0333$.

〔500〕 $a^x=cb^x$, 試作求 x 之值之式.

解 $x\log a=\log c+x\log b$，

$\therefore\quad x(\log a-\log b)=\log c$，

$\therefore\quad x=\dfrac{\log c}{\log a-\log b}$

〔501〕證 $\log(xy)=\log x+\log y$

解 對數之底爲 a，設 $x=a^p$，$y=a^q$ 則

$xy=a^{p+q}$ 而 $\log x=p$，$\log y=q$

$\log(xy)=p+q$，故 $\log(xy)=\log x+\log y$。

〔502〕 $\log\sqrt{5x+5}=1-\log\sqrt{2x-1}$。

解 $\log 10=1$，故已知式爲

$$\sqrt{5x+5}=\frac{10}{\sqrt{2x-1}}$$

$2x-1\neq0$，去分母，

則 $\sqrt{(5x+5)(2x-1)}=10$，

兩邊二乘，$(5x+5)(2x-1)=100$，

即 $(x-3)(2x+7)=0$。

故 $x=3$，又 $x=-\dfrac{7}{2}$，

然 $x=3$ 適原方程式，$x=-\dfrac{7}{2}$，不適原方程式，

且 $x=3$ 則不使 $2x-1$ 爲 0，

故所求之根爲 3。

〔503〕已知 $\log2=0.30103$，$\log3=0.47714$，$\log5=0.69897$，試求 $\log180$ 之值。

解 $\log 180=\log(2^2\cdot 3^2\cdot 5)$

$=2\log 2+2\log 3+\log 5$

$=2\times 0.30103+2\times 0.47712+0.69897$

$=2.25527.$

〔504〕 $2^{y-1}=16^{x-1}$ ……………………………(1)

$2^{\frac{1}{x}}=9^{\frac{1}{z}}$ ……………………………(2)

$\sqrt[x]{5^{y-3}}=\sqrt[2x]{125^{z-2}}$ ……………………(3)

解 由(1)得 $2^{y-1}=2^{4(x-1)}$,

$\therefore\ y-1=4(x-1)$,

$\therefore\ 4x-y=3$ ……………………………(4)

由(2)得 $3^{\frac{1}{x}}=3^{\frac{2}{z}}$

$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{2}{z}$, 即 $z=2x$ ……………(5)

又(3)之兩邊爲 $2x$ 乘,

則 $(5^{y-3})^2=125^{z-2}$

即 $5^{2(y-3)}=5^{3(z-2)}$

$\therefore\ 2(y-3)=3(z-2)$,

$\therefore\ 2y=3z$ ……………………………(6)

由(5),(6) 得 $2y=3z=6x$

$\therefore\ y=3x$。由(4)得 $4x-3x=3$

$\therefore\ x=3$。由是 $y=9$, 及 $z=6$。

〔505〕 $\log x+\log y=2+\log 3$, $2x+3y=85$。

解　由題之方程式，得 $\log xy=\log(100\times3)$。

及　$2x+3y=35$；或 $xy=300$，

即　$(2x)(3y)=1800$ ……………………(1)

及　$2x+3y=85$ ……………………(2)

由(1)，(2)得 $2x=40$；$3y=45$；

或　$2x=45$，$3y=40$。

故　$x=20$，$y=15$；

或　$x=\frac{45}{2}$，$y=\frac{40}{3}$。

〔506〕 $a^x=b$，試作求 x 之值之式。

解　$$x\log a=\log b,$$

$$x=\frac{\log b}{\log a}.$$

〔507〕　$2\log(3x-1)+\log(x+1)=0$，

解　$\log(3x-1)^2+\log(x+1)=0$；

即　$\log(3x-1)^2(x+1)=0$；

$\therefore\ (3x-1)^2(x+1)=1$。

整頓之，爲 $x(9x^2+3x-5)=0$ 則 $x=0$。

或　$$\frac{-3\pm\sqrt{189}}{18}=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{6}.$$

〔508〕 $a^x=b^y=(ab)^z$ 試證 $z=\frac{xy}{x+y}$

但 a，b 爲正實數。

解　$a^x=a^zb^z$，則 $a^{x-z}=b^z$。又 $b^y=a^zb^z$

則 $a^z=b^{y-z}$，故 $b=a^{\frac{x-z}{z}}$

又　$l=a^{\frac{z}{y-z}}$,

∴　$\frac{x-z}{z}=\frac{z}{y-z}$　∴　$(x-z)(y-z)=z^2$,

即　$xy-z(x+y)=0$,　∴　$z=\frac{xy}{x+y}$

[509] 證 $\log_b m=\log_a m/\log_a b$.

解　設　$m=a^x$　即　$x=\log_a m$,

　又　$b=a^y$　即　$y=\log_a b$.

　因　$a^y=b$,　∴　$a=b^{\frac{1}{y}}$,

　故　$m=a^x=(b^{\frac{1}{y}})^x=b^{\frac{x}{y}}$,

　即　$\log_b m=x/y=\log_a m/\log_a b$,

[510]　解 $4^x+48=2^{x+4}$

用　$\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$.

解　由題之方程式,得

$$2^{2x}-48=16\times2^x,$$

或　$2^{2x}-16\times2^x+48=0$.

即　$(2^x-4)(2^x-12)=0$,

故由　$2^x=4=2^2$

得　$x=2$.

又由　$2^x=12$

得　$x\log 2=\log 12=2\log 2+\log 3$

於是　$x=2+\frac{\log 3}{\log 2}=2+\frac{0.47712}{0.30103}$.

$$=3\frac{17600}{30103}$$

〔511〕已知 $\log 2=0.30103$，$\log 3=0.47712$，試計算 $\log 4$，$\log 5$，$\log 6$，$\log 8$，$\log 9$ 之值．

解：$\log 4=\log 2^2=2\log 2=2\times 0.30103=0.60206$，$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0.30103=0.69897$．$\log 6=\log(2\times 3)=\log 2+\log 3=0.30103+0.47712=0.77815$．

$\log 8=\log 2^3=3\log 2=3\times 0.30103=0.90309$．

$\log 9=\log 3^2=2\log 3=2\times 0.47712=0.95424$．

〔512〕　$y=b^x$ 試證次式

(1) $y=a^{x\log_a b}$　(2) $y=a^{\frac{x}{\log_b a}}$．

解　(1) $y=b^x$，∴ $\log_a y=\log_a(b^x)=x\log_a b$．

∴ $y=a^{x\log_a b}$

(2) 依對數之性質 $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$

∴ $y=a^{x\log_a b}=a^{\frac{x}{\log_b a}}$．

〔513〕$\log 2+\log 5+\log 100-3\log 10^{\frac{2}{3}}=?$

解　原式$=\log[2\times 5\times 100\div(10^{\frac{2}{3}})^3]=\log 10=1$．

〔514〕證　$\log_b M=\log_a M\times\frac{1}{\log_a b}$．

解　設 $\log_b M=x$，則 $b^x=M$．

若此兩邊，各以 a 爲底之對數，則

$\log_a b^x=\log_a M$，故 $x\log_a b=\log_a M$．

由是　$\log_b M=x=\log_a M\times\frac{1}{\log_a b}$．

〔515〕 $\log x+\log_y=2$, $x+y=29$。

解 $\log x+\log y=2$ ……………………(1)

$x+y=29$ ……………………(2)

由(1)得 $\log x+\log y=\log xy=2$

$\therefore xy=100$ ……………………(3)

由(2),(3)得 $X^2-29X+100=0$

$\therefore X=25$, 或 $X=4$。

即 $x=25, y=4$; $x=4, y=25$。

〔515〕 解指数方程式 $\sqrt[3]{\left(\frac{5}{6}\right)^{2x}}=\left(\frac{6}{5}\right)^{4-x}$

解 把原方程式改做:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{2x}{3}}=\left(\frac{5}{6}\right)^{x-4} \therefore \frac{2x}{3}=x-4。$$

解出来。 $x=12$。

〔517〕 设 $2^{x+2}=2\sqrt{2}$,求 x。

解 $2^{x+2}=2^{\frac{3}{2}} \therefore x+2=\frac{3}{2}$;

得 $x=-\frac{1}{2}$。

〔518〕 解 $a^{\frac{x+1}{x-1}}=b^{\frac{x-1}{x+1}}$

解 两数取对数,得

$$\frac{x+1}{x-1}\log a=\frac{x-1}{x+1}\log b;$$

$$(x+1)^2\log a=(x-1)^2\log b,$$

$$(x^2+2x+1)\log a=(x^2-2x+1)\log b;$$

$$(\log a-\log b)x^2+2(\log a+\log b)x+\log a-\log b=0$$

$$[(\sqrt{\log a}-\sqrt{\log b})x+(\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b})]\times[(\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b})x+(\sqrt{\log a}-\sqrt{\log b})]=0.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b}}{\sqrt{\log a}-\sqrt{\log b}},$$

$$x\text{或}=-\frac{\sqrt{\log a}-\sqrt{\log b}}{\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b}}.$$

(十九) 複利年金之題解

〔519〕有期票，以年5厘，6個月之折現，其銀行折扣與眞折扣，有1圓之差，問額面幾何。

解 額面爲a，年5厘，6個月，是與2厘5毫相當，故銀行折扣爲 $(1-0.025)a=0.975a$。

眞折扣爲 $\dfrac{a}{1+0.025}=\dfrac{a}{1.025}$.

故依題意 $\dfrac{a}{1.025}-0.975a=1.$

卽 $a(1-0.999375)=1.025.$

卽 $0.000625a=1.025$；故 $a=1640$(圓)。

〔520〕每年末可收取100圓，可收10年，今欲以年利5厘，每一年之複利，作一次收取，問其金額幾何。

但 $\log 105=2.0212$,

$\log 0.1629=\bar{1}.2120$

解 本題，求初項100；公比1.05；項數10等比級數之和。

故 $\frac{1.05^{10}-1}{0.05}$

$\times 100=\frac{6200}{5}=1253$。

但算 1.05^{10} 用 $\log x=10\log 1.05$

$=10\times 0.0212=0.2120$

$\log 0.1622=\bar{1}.2120$

故 $x=0.1629$。代入原式

$$S=\frac{100(0.1629-11)}{0.05}=1258.$$

即 1258 圓。

〔521〕以年利率若干，存金 a 圓於銀行，每滿一年除將其時應取之利息外，再加 m 圓於元金，第三年之始，照例存入 m 圓；結果得元利合計金 b 圓，問年利率幾何；

又若 $a=10,000$，$m=200$ $b=10,408$

則如何。

解 利率為 i，則一年之終為 $a(1+i)$；二年之始為 $a(1+i)+m$，故二年之終為 $\{a(1+i)+m\}(1+i)$

$=a(1+i)^2+m(1+i)$ 然三年之始，加 m。故

$$a(1+i)^2+m(1+i)+m=b$$

$$\therefore\quad 1+i=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4am+4ab}}{2a}$$

$$i=\frac{-m+\sqrt{m^2-4am+4ab}-2a}{2a}$$

則以 $a=10000$，$m=-200$，$b=10,408$ 代入，則

（但負根棄之）

$$i=\{200+\sqrt{(200^2+4\times10000\times200+4\times10000\times10408)}-2\times10000\}\div2\times10000$$

$$=(200+\sqrt{424360000}-20000)\div20000$$

$$=(200+20600-20000)\div20000$$

$$=\frac{8}{200}=0.04。$$ 即4厘。

〔522〕有到期之 s 圓負債，欲今後，以年利率 r，作 n 年，每年分還 a 圓，試計算 a。

解　第一年$=S$，　令 $R=1+r$

第二年$=S+S(1+r)=S+SR$；

第三年$=S+SR+SR^2$；

……………………

第 n 年$=S+SR+SR^2+\cdots\cdots+SR^{n-1}$

故　$a=\frac{S(Rn-1)}{R-1}=\frac{S(Rn-1)}{r}$。

〔523〕某人借入金1000圓，用9厘之複利計，爾後一年欲分年償還，作10年還清，問其償還額如何。

但　$1.09^{-10}=0.42241$

解　元金為 A，年利率為 r，年數為 n，分還額為 a，則有次之公式。

$$a=\frac{Ar}{1-(1+r)^{-n}}$$

此式中設 $A=1000$，$r=0.09$，$n=10$ 則

$$a=\frac{1000\times0.09}{1-1.09^{-10}}=\frac{90}{1-0.42241}$$

$$=\frac{90}{0.57759}=155.82.$$

即約155圓8角2分。

〔524〕某人25歲時，在其年之始，加入生命保險，保險金爲2000圓，每年應納保險金之2厘相當保險料。至40歲時，某人於年終死亡；若此人加入生命保險時，每年以其保險料之金額，照年利5厘，每年末將利子滾入元金，用複利法，存入銀行，問生如何損益，但分位未滿者四捨五入。

解　每年之保險料，爲2000圓×0.02＝40圓，由25歲至40歲，有40－25＋1＝16(年)，故以保險料作存款之元利合計，爲

$$40\times1.05^{16}+40\times1.05^{15}+\cdots+40\times1.05$$

$$=40\times1.05\times\frac{1.05^{16}-1}{1.05-1}$$

$$=40\times1.05\times\frac{2.1828746-1}{0.05}$$

$$=840\times1.1828746=993.615.$$

又所得保險金時之純收入爲

2000圓－40圓×16＝1360圓，

故存款，爲

1360圓－993.615圓＝366.385圓，

即366圓3角9分弱之損。

〔525〕金若干圓，以年8厘之複利存入銀行，欲元利

合計，達元金之5倍，問要幾年，

但 $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$.

解 元金 a 圓，以年利8厘，以一年為一期，用複利存 n 年，則 n 年後之元利合計為 $a(1+0.08)^n$，故得次之方程式。

$$a(1+0.08)^n=5a \text{ 由是 } 1.08^n=5,$$

即 $\left(\dfrac{2^2+3^3}{100}\right)^n=\dfrac{10}{2}$ 取兩邊之對數 則

$$n\{2\log 2+3\log 3-2\}=1-\log 2,$$

即 $n(0.60206+1.43136-2)=1-0.30103$.

即 $0.03342n=0.69897$,

故 $n=21$ 弱，即21年弱

(二十) 行列式及消去法之題解

(526) 從 $a_1x+b_1y+c_1=0$ ……………………(1)

$a_2x+b_2y+c_2=0$ ……………………(2)

$a_3x+b_3y+c_3=0$ ……………………(3)

消去 x, y。

解 從(1)(2)解 x, y，代入(3)得:

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0.$$

即 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

〔527〕 *Prove that* $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ b & b & a & b \\ a & a & a & b \end{vmatrix} = -(a-b)^4$

解 原式 $=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ a & b-a & 0 & a \\ b & b-a & a-b & b \\ a & 0 & a-b & b \end{vmatrix} = (a-b)^2 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ a & -1 & 0 & a \\ b & -1 & 1 & b \\ a & 0 & 1 & b \end{vmatrix}$

$= (a-b)^2 \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ a-b & 0 & 1 & b \end{vmatrix} = (a-b)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & b \end{vmatrix}$

$= (a-b)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (a-b)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= -(a-b)^3 \begin{vmatrix} -1 & a \\ -1 & b \end{vmatrix} = -(a-b)^4$。

〔528〕 求 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 11 \\ 2 & 8 & 1 & 2 \\ 5 & -7 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ 之值。

解 原行列式 $=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 11 \\ -1 & 8 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -4 & 7 \end{vmatrix}$

$$=2\begin{vmatrix}3&-1&3&9\\0&3&0&11\\-1&3&-1&2\\-2&7&-2&7\end{vmatrix}=0$$

〔529〕求 $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&x&x^2\\3&2&1\end{vmatrix}=0$ 內 x 之值。

解 $\begin{vmatrix}1&2&3\\1&x&x^2\\3&2&1\end{vmatrix}=0$

$x+6x^2+12-9x-2x^2-4=0$。

$\therefore\quad 4(x^2-2x+2)=0$，

$\therefore\quad x=1\pm i$。

〔530〕證 $\begin{vmatrix}1&p&q&r+s\\1&q&r&s+p\\1&r&s&p+q\\1&s&p&q+r\end{vmatrix}=0$.

證 $\begin{vmatrix}1&p&q&r+s\\1&q&r&s+p\\1&r&s&p+q\\1&s&p&q+r\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&p+q+r+s&q&r+s\\1&p+q+r+s&r&s+p\\1&p+q+r+s&s&p+q\\1&p+q+r+s&p&q+r\end{vmatrix}$

$$=(p+q+r+s)\begin{vmatrix}1&1&q&r+s\\1&1&r&s+p\\1&1&s&p+q\\1&1&p&q+r\end{vmatrix}=0.$$

〔531〕求 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ 之值。

解 $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 7 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2^2}\begin{vmatrix} -18 & -16 & -22 \\ 4 & 5 & -13 \\ 14 & 19 & 17 \end{vmatrix}$

$=-\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 9 & 8 & 11 \\ 4 & 5 & -13 \\ 14 & 19 & 17 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 13 & -161 \\ 59 & -1 \end{vmatrix}$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}(-13+9499)$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\times 9486=-527.$

〔532〕有三式 $x+y+z=a$, $x^2+y^2+z^2=b^2$,

及 $x^3+y^3+z^3=c^3$

試將積 xyz 之值，以 a, b, c 之項表之。

解 恆等式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.

以題式代入，則，

$c^3-3xyz=a(b^2-yz-zx-xy)$.

然由題之第一第二式，得

$yz+zx+xy=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$,

故　$c^3-3xyz=\left(b^2-\frac{a^2-b^2}{2}\right)$

於是　$xyz=\frac{a^3-3ab^2+2c^3}{6}$

〔533〕由 $x+y+z=a,$ ……………………………(1)

$x^2+y^2+z^2=b,$ ……………………………(2)

$x^3+y^3+z^3-3xyz=c$ ……………………………(3)

消去 x,y,z。

解　(1)之兩邊爲平方，則

$$x^2+y^2+z^2+2(yz+zx+xy)=a^2$$

此式由(2)代入，則

$$b+2(yz+zx+xy)=a^2$$

$$\therefore\quad yz+zx+xy=\frac{a^2-b}{2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)得

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)=c$$

此式以(1)，(2)，(4)代入，則

$$a\left\{b-\frac{a^2-b}{2}\right\}=c,$$

$$a\left\{\frac{3b-a^2}{2}\right\}=c;$$

$$\therefore\quad 3ab-a^3=2c,\quad \therefore\ a^3-3ab+2c=0$$

〔534〕由次之各式消去 x,y,z。

$x+y+z=0$ ……………………………(1)

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0$ ……………………………(2)

$$\frac{a}{x}(x-p)=\frac{b}{y}(y-q)$$

$$=\frac{c}{z}(z-r)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

解 由(3) $\frac{a}{x}(x-p)$, $\frac{b}{y}(y-q)$,

$\frac{c}{z}(z-r)$因其相等,

則以之乘(2)之左邊各項。

$$\frac{x}{a}\times\frac{a}{x}(x-p)+\frac{y}{b}\times\frac{b}{y}(y-a)$$

$$+\frac{z}{c}\times\frac{c}{z}(z-r)=0。$$

即 $(x-p)+(y-q)+(z-r)=0$。

即 $(x+y+z)-(p+q+r)=0$;

由(1)得 $x+y+z=0$; $\therefore p+q+r=0$。

(二十一) 不等式,極大,極小,之題解

〔535〕設 a^2,b^2,c^2 皆不相等,則 $a^4+b^4+c^4>a^2c^2+a^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c)$,試證之。

解 a,b^2,c^2皆不相,等故 $a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2=\frac{1}{2}\{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\}>0$。因此第一不等式成立。

又,$a^2+b^2>2ab$,

∴ $c^2(a^2+b^2)>2abc^2$,

同理，$a^2(b^2+c^2)>2bca^2$,

$b^2(c^2+a^2)>2cab^2$,

∴ $2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)>2abc(a+b+c)$;

因此第二不等式成立。

〔536〕使 $x^2-6x+8>0$, $x^2-9x+18<0$ 同時滿足，其 x 之範圍如何.

解 $x^2-6x+8>0$ ……………………(1);

即 $(x-2)(x-4)>0$,

故適合爲(1)之範圍，爲 $x<2$，或 $x>4$

又 $x^2-9x+18<0$ ……………………(2)

即 $(x-3)(x-6)<0$,

故適合(2)之 x 範圍，爲 $3<x<6$。

於是(1)，(2)同時適合之 x 值，要在 $4<x<6$ 之範圍中。

〔537〕設 $c<0$，$a>b$ 則 $ac<bc$，試證之。

解 $a>b$，故 $a-b$ 爲正數，因此 $c(a-b)$，即 $ac-bc$ 爲負數，換言之，$bc-ac$ 爲正數，故由定義知 $bc>ac$。

〔538〕$1+2x^4$ 常不小於 x^2+2x^3，試證之。

證 $1+2x^4-(x^2+2x^3)$

$=x^4-2x^3+x^2+x^4-2x^2+1$

$=(x^2-x)^2+(x^2-1)^2$.

此式當 x 爲實數時不爲負數。

故 $1+2x^4-(x^2+3x^3)\geqq 0$,

即 $1+2x^4\geqq x^2+3x^3$.

即 $1+2x^4$ 不小於 x^2+2x^3。

〔539〕證明 $A^2+B^2+C^2>BC+CA+AB$。

解　因　$(A-B)^2>0$　(1)

$(B-C)^2>0$　(2)

$(C-A)^2>0$　(3)

相加，移項，以二除之，得所求式。

〔540〕a,b,m 為非零之實數，

方程式　$x+y+z=a$　$x^2+y^2+z^2=bm$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=am^2$

若聯立，則 $9b^2$ 不小於 $8a^2$。

解　$(x+y+z)^2=a^2$.

則以 $x^2+y^2+z^2=bm$ 減之，以 2 除之.

$$yz+zx+xy=\frac{1}{2}(a^2-bm),$$

故

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$$

$$=a\left(\frac{3}{2}bm-\frac{a^2}{2}\right)=am^2。$$

$$2m^2-3bm+a^2=0。$$

此 m 為實數則　$9b^2-8a^2\geqq0$.

即 $9b^2$ 不小於 $8a^2$.

〔541〕解次之不等式.

1. $2x^2+6>7x$.　2. $3x^2+11x<4$,

解　$2x^2-7x+6>0$,

即　$(x-2)(2x-3)>0$.

故 x 不可不在 2 與 $\frac{3}{2}$ 之間。

故 $x>2$，又 $x<\frac{3}{2}$.

2. 解 $3x^2+11x-4<0$，

即 $(x+4)(3x-1)>0$，

故 x 要在 -4 與 $\frac{1}{3}$ 之間：

即 $\frac{1}{3}>x>-4$.

〔542〕設 a 與 b 均為正數，而不相等，則 $a^3+b^3>ab(a+b)$，試證之。

解 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

故 $a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2-2ab+b^2)$

$=(a+b)(a-b)^2=$正數。

故由定義，知 $a^3+b^3>ab(a+b)$.

〔543〕某機關車之速，在不連結貨車時，每時為36哩。連結貨車時，則依其貨車數之平方根為比例，以減其速。只知連結貨車4臺時，其速為每時30哩。今欲保每時20哩以上之速，試求所掛貨車之最大數。

解 掛貨車 x 輛，減速為 y 哩，則

$\sqrt{4}:\sqrt{x}=36-30:y$，∴ $y=3\sqrt{x}$.

今欲得20哩以上之速，則

$y=36-20=16$. ∴ $16>3\sqrt{x}$,

$\frac{16}{3}>\sqrt{x}$.

∴ $x<(\frac{16}{3})^2$. ∴ $x<28.4\cdots$

故所要之車輛數，為28輛。

〔544〕二次方程式 $x^2+px+q=0$ 之根，若其一根大於已知數 a，他一根小於 a，問 a,p,q 之間要有如何關係．

解 二根 α,β 之中，$\alpha>a$, $\beta<a$.

於是 $\alpha=a+d$,

$\beta=a-e$（d,e 爲正數）

而 $\alpha+\beta=2a+d-e=-p$.

$\alpha\beta=a^2+a(d-e)-de=q$.

$\therefore$ $d-e=-p-2a$.

以代入後式，得 $a^2-a(p+2a)-de=q$

$\therefore$ $de=-(ap+q+a^2)$.

由是有次之關係．$a^2+ap+q<0$.

〔545〕定 $\sqrt{8}$ 與 $\sqrt[3]{12}$ 之大小．

解 設 $\sqrt{8}$ 與 $\sqrt[3]{12}$ 爲同次乘根，

則 $\sqrt[6]{8^3}$, $\sqrt[6]{12^2}$.

然 $8^3=512$, $12^2=144$,

$\sqrt[6]{8^3}>\sqrt[6]{12^2}$，即 $\sqrt{8}>\sqrt[3]{12}$.

〔546〕四正數 a,b,c,d 之中，a 爲最大，

且 $a:b=c:d$,

則 $a+d>b+c$.

證 $a:b=c:d$ 若 a,b,c,d 爲正數，且 a 爲最大，

則 d 爲最小，明矣。

故 $a-b:b=c-d:d$,

即 $a-b:c-d=b:d$ 若 $b>d$,

故 $a-b>c-d$，故 $a+d>b+c$.

〔547〕設 a, b 二正數，實而不等。

且 $A=\frac{1}{2}(a+b)$；

$G=+\sqrt{ab}$，

$H=\frac{2ab}{a+b}$。

試證 $A>G>H$。

解 (1) $\because\ (a-b)^2>0$，

$\therefore\ (a+b)^2>4ab$，

$\therefore\ a+b>+2\sqrt{ab}$，

$\therefore\ \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$，

即 $A>G$。

(2) 因 $ab>0$，

故 $\frac{a+b}{2ab}>\frac{\sqrt{ab}}{ab}=\frac{1}{\sqrt{ab}}$，

即 $\frac{1}{H}>\frac{1}{G}$；

$\therefore\ G>H$；

$\therefore\ A>G>H$。

〔548〕二相異正數之等差中項，大於其等比中項。

證 二相異正數爲 a, b。

則 $(a-b)^2>0$，兩邊以 $4ab$ 加之。

$(a-b)^2+4ab>4ab$， 即 $(a+b)^2>4ab$；

因兩邊爲正數，故取平方根之正值

$a+b>2\sqrt{ab}$；

$$\therefore\ \frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$$

即等差中項小於等比中項。

〔549〕二式 $2x^2-5c^2+x-6c+3$

$x^2-4c^2-3x-9c+1$

若相等，且 x 爲實數，則 c 不能在 1 與 2 之間。

證　$2x^2-5c^2+x-6c+3$

$=x^2-4c^2+3x-9c+1$，

$$\therefore\ x^2+4x-c^2+3c+2=0,$$

$$\therefore\ x=-2\pm\sqrt{4+c^2+3c-2}$$

$$=-2\pm\sqrt{(c-1)(c-2)}.$$

由是知 x 爲實數，則 $(c-1)(c-2)$ 之符號，不得不爲負。即 c 不在 1 與 2 之間。

〔550〕　$a^3+b^3+c^3-3abc>0$。

試證之。

解　$\because\ (a-b)^2>0$，

$(b-c)^2>0$，

$(c-a)^2>0$，

$$\therefore\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0,$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca>0,$$

又　$a+b+c>0$，

相乘得：

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)>0;$$

即　$a^3+b^3+c^3-3abc>0$。

〔551〕某市人口 40000 人，其死亡爲百分之三，每年由

他移往者有 400 人，2 年後，增加 1500 人以上之之人口，問其出產率如何．

解　出產率爲百分之 x，則

$$\left\{40000\times\left(1+\frac{x-3}{100}\right)+400\right\}$$

$$\times\left(1+\frac{x-3}{100}\right)+400>41500,$$

即　$4(x+97)^2+(x+97)-41100>0,$

即　$(x+97)^2+(x+97)-10275>0.$

$$\left\{(x+97)+\frac{1+\sqrt{41101}}{2}\right\}\cdot$$

$$\left\{(x+97)-\frac{\sqrt{41101}-1}{2}\right\}>0.$$

故　$x+97<-\frac{1+\sqrt{41101}}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

或　$x+97>\frac{\sqrt{41101}-1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

然因 $x+97>0$ 則 (1) 不成立，故由 (2) 得

$$x>3.86\cdots\cdots 即 \frac{3.86\cdots\cdots}{100} 以上.$$

〔562〕四正數爲等比級數，則第一項與第四項之差之絕對值，不小於他二項之差之絕對值 3 倍，其證如何．

證　等比級數之四正數爲 a, ar, ar^2, ar^3

則　$a\sim ar^3=a(1\sim r^3)=a(1\sim r)(1+r+r^2)$

又　$3(ar\sim ar^2)=3ar(1\sim r).$

然 $$1+r+r^2-3r=(1-r)^2,$$

即 $$1+r+r^2-3r\geqq 0,$$

或 $1+r+r^2\geqq 3r$。故 $a\sim aa^3\geqq 3(ar\sim ar^3)$.

〔553〕設 x 爲實正數，則

$$x+\frac{1}{x}\nless 2$$

證之。

解 $(x-1)^2\nless 0$

$\therefore\quad x^2-2x+1\nless 1$

$\therefore\quad x^2+1\nless 2x$

因 x 爲正數，故以 x 除二邊後不等式之號不變，

$\therefore\quad x+\dfrac{1}{x}\nless 2.$

〔554〕a,b,c 爲實數，試證次式。

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqq abc(a+b+c).$$

證 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-abc(a+b+c)$

$$=\frac{1}{2}\{a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2\}$$

因 a,b,c 悉爲實數，故此式之值爲正。

故 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\geqq abc(a+b+c).$

〔555〕設 $a>0$，$b>0$，則 a^3+b^3 與 $3a^2(a+b)$ 孰大？

解 $a^3+b^3-3a^2(a+b)=(a+b)^2(b-2a)$；

故若 $b-2a=0$ 則 $a^3+b^3=3a^2(a+b)$；

若 $b-2a>0$. 則 $a^3+b^3>3a^2(a+b)$；

若 $b-2a<0$， 則 $a^3+b^3<3a^2(a+b)$.

〔556〕有七厘公債，(100 圓)今欲買入，得 8 厘以上之

利.問買入 市價有幾何之限制.

解 利率為7厘,故利息為7圓,今欲得8厘以上之利,則得不等式 $0.08x \leqq 7$

故 $x \leqq \frac{7}{0.08}$ 即 $x \leqq 87.5$

即87圓5角以下.

〔557〕 次之二次方程式

$$x^2+2(k-1)x+5k-9=0$$

若有實根,問 k 之值限界如何.

$$x^2+2(k-1)x+5k-9=0$$

之根,若為實根,其要件為

$$(k-1)^2-5k+9\geqq 0,$$

或 $k^2-7k+10\geqq 0$

或 $(k-5)(k-2)\geqq 0,$

此式能成立,則 $k\geqq 5$ 或 $k\leqq 2$.

此即所要之限界.

〔558〕 設 $a>b>c$, 則 $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}$ 為正,試證之.

解 $\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}$

$$=\frac{(c-a)(a-b)+(a-b)(b-c)+(b-c)(c-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)},$$

∴此式之分子 $=ac-a^2-bc+ab+ab-b^2-ac+bc+bc-c^2-ab+ac=-(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

而 $a>b>c$, 故分子為負,分母亦為負,因此題式為正.

(二十二) 列方，合組遍遇法之題解

〔559〕某市街。依碁盤格區分之。南北有 5 條路，東西有 8 條路。今某人，由此市街之北西隅，往東南隅。欲選最近之路，其路線種類有幾通。

解　由北西隅往南東隅，最近之路線，東西要行 4 區劃，南北要行 7 區劃。

故行 4+7，即 11 區劃之道中，其 4 條行東西，則他行南北。故所要之方，有

$${}_{11}C_4=\frac{11.10.9.8}{1.2.3.4}=330(通).$$

〔560〕由 12 人之中，欲依抽籤法選出 4 人，問其選法有幾通。又同一人每回當籤之機會，有幾回。

解　由 12 人之中，選出 4 人，其法，與由 12 個取 4 個之組合相當，其數爲

$${}_{12}C_4=\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}=495(通).$$

又同人每回當籤之機會，與由 11 個取 3 個之組合相當。其數爲

$${}_{11}C_3=\frac{11.10.9}{1.2.3}=165(回).$$

〔561〕擲普通之六面骰子，一回中出現三點之適遇如何？

解　六面中各面出現之機會相同，故三點出現之機會有一回，不出現之機會有五回，故三點出現之適遇爲$\frac{1}{6}$。

〔562〕10人圍坐，使其中 A, B 二人常相鄰，求其排列法若干？

解　按題意，10人作環狀順列，其中二人常相鄰，無異二人相同，則其排列法爲

$$\frac{(10-1)!}{2!}=\frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9}{1.2}$$

$$=181,440\text{ 種.}$$

〔563〕某選舉，有五人候補者，選舉人在其三人以內，可自由對幾人投票，問其投票方法有幾通。

解　$${}_5C_3=\frac{5.4.3}{1.2.3}=10,$$

$${}_5C_2=\frac{5.4}{1.2}=10,\quad {}_5C_1=5$$

如斯，5人候補者，選3人之方法有10通，選2人之方法有10通，選1人方法有5通，共爲2通。

〔564〕一囊中有白球五，紅球七，則由其中取一紅球之適遇如何？

解　取無論何球，其機會相同，故於12個同一之機會中，取出紅球之機會爲5，故所求之適遇爲$\frac{7}{12}$。

〔565〕四變數之 n 次完全齊次多項式含有幾項，設此多項式有20項，試定 n 之值。

解　項數爲四變數中，每次取 n 個，而可複用同字之組合法，即

$$C_n^{4+n-1}=C_n^{n+3}=C_3^{n+3}$$

$$=\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{1.2.3}=20,$$

$\therefore\ (n+3)(n+2)(n+1)=120,$

$\therefore\ n=3.$

〔566〕求$(1+x)^6$之展開式中各項係數之和。

解　$(1+x)^6={}_6C_0+{}_6C_1x+{}_6C_2x^2+{}_6C_3x^3+{}_6C_4x^4+{}_6C_5x^5+{}_6C_6x^6$ 以 $x=1$ 代入，則

$$2^6={}_6C_0+{}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3+{}_6C_4+{}_6C_5+{}_6C_6,$$

故$(1+x)^6$之展開式中，諸係數之和$=2^6=64$。

〔567〕一袋中有信100封，各附以1，2，3，…，100之號目，今無心取出二封，則此二封號目之和爲奇數，以50對49之比成功，試證之。

解　此100封信中，奇數及偶數號目之信，各有50封，又奇數號目之信，每次取兩封之方法，有 ${}_{50}C_2=\dfrac{50.49}{1.2}$ 種，偶數號目之信，每次取兩封之方法亦有 ${}_{50}C_2$ 種，全體信中每次取兩封之方法，有 ${}_{100}C_2=\dfrac{100.99}{1.2}$ 種，今取得之二封信，無論其爲奇數號目或爲偶數號目，其和皆爲偶數，故二信和爲偶數之適遇爲：

$$\left(\frac{50.49}{1.2}+\frac{50.49}{1.2}\right)\div\frac{100.99}{1.2}=\frac{49}{99};$$

由是二信和之奇數之適遇爲：

$$1-\frac{49}{99}=\frac{50}{99}.$$

故二信號目之和爲奇數，以50對49成功，

〔568〕有四男四女圍坐圓桌，男與男不相鄰，女與女亦然問坐法有幾？

解 n 個相異物作環狀順列之公式 $(n-1)!$ 今四男不相鄰，則無異悉相同，又四女不相鄰，亦無異悉相同，故坐法計有

$$\frac{(3-1)!}{(4-1)!(4-1)!}=\frac{7!}{3!}$$

$$=\frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.1.2.3}=140 \text{ 種.}$$

〔569〕有 n 點，無三點在同一直線上，聯任意兩點作一直線，則直線之數為 $\frac{n(n-1)}{2}$ 試證之。

解 自 $A, B, C, D \cdots n$ 點，聯 AB 得一直線，但 AB 與 AB 同一直線，故不能取，其他諸點皆同，故此題為自 n 個之中，每取二個之組合，因得直線之數為

$${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

〔570〕n 角形，有對角線若干。

解 n 角形角頂之數為 n，故其每二個連結之直線之數為 ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{1.2}$，但其中 n 個為多角形之邊，故去之，而為 $\frac{n(n-1)}{2}-n=\frac{n(n-3)}{2}$ 對角線之數也。

〔751〕平面上有 n 個點，任取三點，不在一直線上，則以是等之點為角頂之三角形之數，為 $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$，試證之。

解　如前題，

$$ {}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

〔572〕一骰擲六回，至少擲得二回六點之適遇如何？

解　擲骨一回，擲得六點之適遇爲$\frac{1}{6}$，故擲骰六回，擲得二回或二回以上之六點，其適遇爲：

$$\left(\frac{1}{6}\right)^6+6\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)$$
$$+\frac{6.5}{1.2}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^2$$
$$+\frac{6.5.4}{1.2.3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3$$
$$+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4$$
$$=\frac{12281}{46656}.$$

別解．不得二回六點之適遇爲：

$$\left(\frac{5}{6}\right)^6+6\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5$$
$$=\frac{34375}{46656}.$$

故所求之適遇爲：

$$1-\frac{34375}{46656}=\frac{12281}{46656}.$$

(二十三) 二項定理之題解

〔575〕 $(1+x)^{39}$ 之展開式中，第十二項與第十六項相等。問 x 之值如何。

解 $(1+x)^{39}$ 之展開式中，第 12 項與第 16 項相等，

則 $${}_{39}C_{11}x^{11}={}_{39}C_{15}x^{15},$$

或 $$\frac{39.38\cdots29}{1.2\cdots11}x^{11}=\frac{39.38\cdots25}{1.2\cdots15}x^{15}$$

或 $$x^4=\frac{12.13.14.15}{28.27.26.25}=\frac{1}{15}.$$

故 $$x=\sqrt[4]{\frac{1}{15}}.$$

注意 $x=\pm\sqrt{\pm\sqrt{\frac{1}{15}}}$ 亦可

〔574〕 試依 y 升冪序展 $(x-3y)^{\frac{1}{3}}$ 至前四項爲止。

解 $(x-3y)^{\frac{1}{3}}$

$$=x^{\frac{1}{3}}-\frac{1}{3}(3y\ x^{\frac{1}{3}-2}$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}(3y)^2x^{\frac{1}{3}-2}$$

$$-\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1.2.3}(3y)^3x^{\frac{1}{3}-3}+\cdots\cdots$$

$$=x^{\frac{1}{3}}-yx^{-\frac{2}{3}}-y^2x^{-\frac{5}{3}}-\frac{10}{6}y^3x^{-\frac{8}{3}}+\cdots$$

$$=x^{\frac{1}{3}}-\frac{y}{x^{\frac{2}{3}}}-\frac{y^2}{x^{\frac{5}{3}}}-\frac{10y^3}{6x^{\frac{8}{3}}}+\cdots$$

〔575〕 $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{14}$ 依 x 之升冪展開之。求其中央項。

解 此項數爲15。故其中央項爲第八項，故所要之項爲

$$_{14}C_7\left(-\frac{x^2}{3^7}\right)^7=-\frac{14.13.12.11.10.9.8}{1.2.3.4.5.6.7}\times\frac{x^{14}}{3^7}$$

〔576〕 試展開 $\left(2-\frac{3x}{2}\right)^5$。

解 原式 $=2^5+{}_5C_1+2^4\left(-\frac{3x}{2}\right)$

$$+{}_5C_2\times2^3\left(-\frac{3x}{2}\right)^2+{}_5C_3$$

$$\times2^2\left(-\frac{3x}{2}\right)^3+{}_5C_4$$

$$\times2\left(-\frac{3x}{2}\right)+{}_5C_5\left(-\frac{3x}{2}\right)^5$$

$$=32-120x+180x^2-135x^3$$

$$+\frac{405}{8}x^4-\frac{243}{32}x^5.$$

〔577〕 $(2x-1)^{13}$ 之展開式，求至第十二項。

解 所要之項爲

$$_{13}C_{11}(2x)^2(-1)^{11}=-{}_{13}C_2\times4x^2$$

$$=-\frac{13.12.4}{2}x^2=-312x^2.$$

$$=\frac{1144}{729}x^{14}$$

〔578〕 試將$(2x-y^3)^6$展開之。

解 依二項定理，得：

$$(2x-y^3)^6=(2x)^6+\frac{6}{1}(2x)^5(-y^3)$$

$$+\frac{6.5}{1.2}(2x)^4(-y^3)^2$$

$$+\frac{6.5.4}{1.2.3}(2x)^3(-y^3)^3$$

$$+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}(2x)^2(-y^3)^4$$

$$+\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}(2x)(-y^3)^5$$

$$+\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}(-y^3)^6$$

$$=64x^6-192x^5y^3+240x^4y^6-160x^3y^9$$

$$+60x^2y^{12}-12xy^{15}+y^{18}.$$

〔579〕 試求$(x+3)^7$展開式中x^5之係數。

解 $(x-3)^7$展開式中x^5之係數，為

$$\frac{7.6}{1.2}\times(3)^2=189.$$

〔580〕 試求$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$中不含$x$之項。

解 不含x之項為 $x^{2n-n}\left(\frac{1}{x}\right)^n$，故其係數為${}_{2n}C_n$.

故所求之項爲 $\frac{(2n)!}{n!\,n!}$.

〔581〕變 350834 數字之順序，可得幾通奇數。

解 350834 之中因有 3 二個，5 爲末尾數字之奇數，有 $\frac{1}{5}\times{}_5P_5$

又 3 爲末尾數字之奇數，有 ${}_5P_5$.

故所要之數，爲 $\frac{1}{2}\times{}_5P_5=2\cdot3\cdot4\cdot5=160$(通)

〔582〕試求 $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^8$ 之第七項.

解 第七項 $={}_8C_6(2x)\left(-\frac{1}{2}\right)^6$

$={}_8C_2\times2^2x^2\times\frac{1}{64}=\frac{7}{4}x^2$.

〔583〕試求 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$ 之第五項.

解 第五項 $={}_8C_4\times x^4\left(-\frac{1}{x}\right)^4$

$=\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\times x^4\times\frac{1}{x^4}=70$.

〔584〕$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2m}$ 之展開式，試求其 x^m 之係數.

解 公項 $={}_{2m}C_r(x^2)^{2m-3r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$

$={}_{2m}C_r{}^{4m-2r}\times\frac{1}{x^r}={}_{2m}C_rx^{4m-3r}$.

∴ x^{4m-3r} 之指數，若令爲 m，則 $4m-3r=m$;

$\therefore\quad r=m,$

故所求之係數為 ${}_{2m}C_m=\frac{(2m)!}{m!m!}$。

〔585〕 $(ax+b)^{2n}$ 與 $(bx+a)^{2n+1}$ 之展開式中，x^n 之係數相等，試證

$$x=\frac{n+1}{2n+1}$$

解　依題意 ${}_{2n}C_n a^n b^n={}_{2n+1}C_n b^n a^{n+1}$，

故 $\frac{a^{n+1}}{a^n}=\frac{{}_{2n}C_n}{{}_{2n+1}C_n}$，

即 $a=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\lfloor n}\times\frac{\lfloor n\lfloor n+1}{\lfloor 2n+1}=\frac{n+1}{2n+1}$。

〔586〕 問 $(x^2+x)^{10}$ 含 x^{16} 之項為第幾項？

解　依公式 ${}_{10}C_r(x^2)^{10-r}x^r$ 之 $x^{20-2r}x^r$，即 x^{20-r} 之指數為 16，則 $20-r=16$，故 $r=4$，所求之項為第五項。

〔587〕 求 $1^2+2^2+3^2+\cdots n^2$ 之和。

解　假定 $1^2+2^2+3^2+\cdots n^2=a+bn+cn^2+dn^3$
$+en^4+\cdots$

用 $n+1$ 來代 n，得

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2$
$=a+b(n+1)+c(n+1)^2+d(n+1)^3$
$+e(n+1)^4+\cdots$

相減，得

$n^2+2n+1=b+2cn+c+3dn^2+3dn+d+4en^3$
$+6en^2+4en+e+\cdots$

比較同次項的係數，知 $ef\cdots$ 等都是零，并且

$$3d=1,\quad 3d+2c=2,\quad d+c+b=1.$$

解出來，得 $d=\frac{1}{3}$，$c=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{6}$。

又 a 是零，這個是很容易明白，祇要在第一個式子裏，令 $n=0$ 就得到了。

所以 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

〔588〕 求 $(1-x)^{-3}$ 之第 $(r+1)$ 項。

解 照公式知道第 $(r+1)$ 項是

$$\frac{(-3)(-3-1)(-3-2)\cdots(-3-r+1)}{\underline{|r}}(-x)^r$$

$$=(-1)^r\cdot\frac{3\cdot4\cdot5\cdots(r+2)}{\underline{|r}}(-1)^r x^r$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)}{2}x^r$$

〔589〕 求 $(x^2-x^{-1})^{14}$ 中 x^{10} 之係數。

解 從公式 (a)，知道第 $r+1$ 項是

$$\frac{\underline{|14}}{\underline{|r}\,\underline{|14-r}}(x^2)^{14-r}(-1)^r(x^{-1})^r$$

$$=\frac{\underline{|14}}{\underline{|r}\,\underline{|14-r}}(-1)^r x^{28-3r}$$

令 $28-3r=10$　$\therefore r=6$

所以 x^{10} 由係數是 $\dfrac{\lfloor 11}{\lfloor 6\lfloor 1}=3003$

〔590〕試求 $(1+x)^{10}$ 展開式中之最大係數項，及其所含 x 之指數

解　因爲 $n=10$，所以第 6 項的係數最大，展開式的第 6 項是

$$\frac{\lfloor 10}{\lfloor 5\lfloor 5}x^5=252x^5$$，所以軸的指數是 5。

〔591〕求 $(1+x)^6$ 展開式中各項係數之和，

解　各係數之和 $=1+6+\dfrac{6\times5}{1\times2}+\dfrac{6\times5\times4}{1\times2\times3}$

$$+\frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4}+\frac{6\times5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4\times5}+1$$

$$=(1+1)^6=2^6=64.$$

〔592〕試證 $(a+b)^n$ 展式內，諸係數之和爲 2^n

解　證　各係數之和 $={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots{}_nC_r$

$$+\cdots+{}_nC_n$$

$$=1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots$$

$$+\frac{\lfloor n}{\lfloor r\lfloor n-r}+\cdots+1$$

$$=(1+1)^n=2^n$$

〔593〕試求 $\left(9x-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^6$ 之第五項。

解　第五項 $={}_6C_4(9x)^2\left(-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^4$

$$=\frac{6.5}{1.2}\times 9^2x^2\times\frac{1}{3^4\times x^2}=15.$$

〔594〕求$(x+y)^{16}$中之第9項.

解 $n=16$, $r+1=9$, $r=8$.

∴所求項爲

$$\frac{16.15.14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6.7.8}x^8y^8$$

即 $11440x^8y^8$

〔595〕試求$(x+2y)^{10}$之中項.

解 中項爲$\frac{10}{2}+1$, 即第六項, 故得

$$中項={}_{10}C_5x^5(2y)^5=8064x^5y^5$$

〔596〕求$(1+2x)^8$展開式之中項.

解 中項爲第五項, 由公式

$$中項=\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}(2x)^4=1120x^4$$

〔597〕求$\left(2x-\frac{x}{2}\right)^8$之中項.

解 依二項定理$(x+a)^n$之$r+1$項爲:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots r}a^rx^{n-r}$$

今求$\left(2x-\frac{x}{2}\right)^8$之中項, 則

$$n=8,\quad r=4$$

$$中項=\frac{8(8-1)(8-2)(8-4+1)}{1.2.3.4}\left(-\frac{x}{2}\right)^4(2x)^{8-4}=70x^8$$

試習

〔598〕 於$\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^{12}$中有無$x^{20}$一項？如有，試求其項。

解 設$r+1$表該項項數，則因$n=12$，$a=x^3$，$b=\frac{1}{x}$故必$a^{n-r}b^r=(x^3)^{12-r}\frac{1}{x^r}=x^{36-4r}=x^{20}$

$\therefore \quad r=4$.

故第五項含有x^{20}，代入公式，得該項爲

$$\frac{12.11.10.9}{1.2.3.4}x^{20}=495x^{20}$$

〔599〕 試展開$(1-x)^{\frac{3}{2}}$至第四項。

解 $$(1-x)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}(-x)+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{1.2}(-x)^2$$

$$+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{1.2.3}(-x)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots$$

〔600〕 試展開$(2+3x)^{-4}$至第四項.

解 $$(2+3x)^{-4}=2^{-4}\left(1+\frac{3}{2}x\right)^{-4}$$

$$=\frac{1}{2^4}\left[1+(-4)\left(\frac{3x}{2}\right)\right.$$

$$+\frac{(-4)(-5)}{1.2}\left(\frac{3x}{2}\right)^2$$

$$\left.+\frac{(-4)(-5)(-6)}{1.2.3}\left(\frac{3x}{2}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left(1-6x+\frac{45}{2}x^2-\frac{135}{2}x^3+\cdots\right)$$

代數六百難題詳解

每册定價國幣肆元陸角

編輯人　駱　師　存

發[illegible][illegible]　新文化服務社

[illegible]售[illegible]　各　大　書　局

[illegible]三十二年四月叁版