萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

自然哲學之數學原理

(七)

牛頓著

鄭太朴譯

商務印書館發行

自然哲學之數學原理

（七）

牛頓 著

鄭太朴 譯

漢譯世界名著

第七章　論流體之運動及拋出的物體之抵抗力

§ 43. 定理.　今有二個相似的物體系統，其部分之數相同，而且一系統內之部分與他系統內相當的部分不僅各各相似，亦且相比，其位置亦相似，密度間亦有一定之比．在相比的時間內，此二系統之部分開始以相似的方法作相互間之運動（一系統之物體間相互運動，他系統之物體，相互間亦作相似的運動）．在同一系統內，其部分間亦祇在撞擊反射時發生接觸，其相互吸引或相互排斥之力與對徑成反比與速度之平方成正比．在此種狀況下，兩系統內各部分即繼續以相似的方法作相互間之運動．反之亦然．

相似的物體之位置如相似，則在相比的時間內以相似的方法作相互間之運動，而如在該時間

之末將二系統之各部分作一比較，則其位置亦仍相似．故如相當的部分作成相似的圖形之相似的且相比的部分,則其時間亦必相比．所以,二個系統之性質如相同，則其相當的部分因開始時之運動相似,必能直下仍相似．按運動之第一定律，倘沒有其他的力作用於其間,則其運動必以直線進行．但如相互間有力生作用,此項力與直徑成反比,與速度之平方成正比,則因各部分之位置相似,其力亦相比,故由各部所合成之力,一若由二個中心所出發,此二中心之位置亦相似．此二力相比，亦如各部分力之相比,即，與對徑成反比，與速度之平方成正比．所以其作用，能使相當的部分，繼續作相似的圖形．祗須該項中心點為靜止的，即是如此;此則可由第一編 §18 之系 1 及 8 知之．倘此項中心點非為靜止的,則因相似運動之關係,其位置亦仍相似,在所作之圖形方面雖有變動,但亦仍相似．所以相似的相當的部分亦仍繼續的作相似的運動．因其相遇時之撞擊及反射亦均相似,故其

相似的運動於反射後仍無變動而可如是一直繼續下去.此即所欲證者.

系 1.　倘有二相似的物體，其對於二系統各相當部分之位置均同，而且在相比的時間內開始作相似的運動;倘此二物體之量及密度相比,一如二系統內相當部分者相比，則此二物體即繼續在相比的時間內作相似的運動.

蓋在此種狀況下，此二物體之關係與二系統本身內之關係一樣,故其情形亦一般.

系 2.　倘二系統內相似的部分，本身間均靜止着,祇有其中之較大的二者(此二者較其餘一切均大,而且在二系統內爲相當者)沿位置相似的直線以相似的方法開始運動，則對於二系統內之其餘部所引起之運動亦相似，並且繼續的在其中間以相似的方法在相比的時間內運動.其所作空間,亦與其直徑相比.

§ 44. 定理.　在與前相同的假定下，系統內之較大的部分,其所受抵抗力與速度之平方,與直徑

之平方,與系統各部分之密度相比。

抵抗力之一部分,係由向心力或離心力所發生,此項力亦即系統部分相互間之作用。其他一部分則發生於各部分之互相接觸.前一部分之抵抗力,其相比如產生此的全部運動力之相比,即是,如全部能發生加速作用的力以及相當的部分所含之物質量相比.所以此項抗抵力與速度之平方成正比,與各部分間之距離成反比,並與各部分所含物質之量成正比。而因一系統內各部分間之距離與他系統內之相當的距離相比,如一系統內一部分之直徑與他系統內其相當部分之直徑相比,又因物質之量相比,如密度及直徑之三次方相比,故此項抵抗力相比,如速度之平方,直徑之平方及二系統各部分之密度相比.此即所欲證者.

至於第二種的抵抗力,則其相比如相當的撞擊之次數及力二者之合相比.而撞擊之次數,則與部分之速度成正比,與中間之空間成反比,而其力則與速度,各部分之量及物質密度相比,即是,與

速度,直徑之三次方及各部分之密度相比.

今將此項比連結之,則可知各相當部分之抵抗力相比,如速度之平方,直徑之平方及各部分之密度相比.此即所欲證者.

系1. 倘該項系統為二彈性的流體,猶如空氣一樣的性質,其各部分相互間靜止着,另外又有二個物體與流體之部分相比(對於量及密度而言),而且為相似的,以相似的位置處於各部分間,並緣位置相似的直線拋出.流體各部分相互作用的力,其相比如所拋出的物體之徑相比之反,如速度之平方相比之正.如是則此二物體於相比的時間內在流體中引起相似的運動,其所作空間亦為相似,且與其徑相比.

系2. 在此流體內,一急速運動的拋出物所受之抵抗力與速度之平方很近似的相比.蓋互相隔開的各部分間之相互影響的力,如按速度之平方增大之,則拋出的物體所受之抵抗力亦卽加倍.所以中介物之部分如不相連結;相互間無有力影響,

則抵抗力準確的與速度之平方相比.

今設 A,B,C 爲三種中介物,由相等相似而且距離相同的各部分所成. A 與 B 之部分,相互間以某種力互相離開,此項力與 T 及 V 相比,而 T 及 V 則爲二數目字;但 C 則並無此項力生作用於其間. 設有四物體 D,E,F,G 在此項中介物內運動, D 與 E 在 A 及 B 內, F 與 G 則在 C 內. D 之速度與 E 之速度相比,以及 F 之速度與 G 之速度相比,如

$$\sqrt{T}:\sqrt{V}.$$

如是則 D 之抵抗力與 E 者相比,以及 F 之抵抗力與 G 者相比,如速度之平方相比,而 D 之抵抗力與 F 之抵抗力相比,如 E 之抵抗力與 G 之抵抗力相比.今設 D 與 F 之速度相等, E 與 G 之速度亦相等, 並將前二者之速度以任何比例放大之,同時,即以此比例之平方減小 B 各部分之力,則就其構造形狀及位置而言, B 可與 C 任意的互相接近,而相等並等速的二物體 E 與 G 在此二

中介物內所受之抵抗力，於是亦能漸趨於相等，最後，其差可小於任何可知之數。又因 D 與 F 之抵抗力相比，如 E 與 G 之抵抗力相比，故前者之抵抗力亦必漸趨於相等。故如 D 與 F 之速度甚大，則其抵抗力可很近似的相等，又因 F 之抵抗力與速度之平方相比，故 D 所受之抵抗力亦很近似的與速度之平方相比。

系 3. 故如一物體在一任意的彈性流體內作急速運動，則其所受之抵抗力，差不多猶如流體之各部分失去了其離心力，因而相互間並無相離之傾向一般，但須彈性力之來源是由於流體各部分之離心力，而且速度必須如是大，使該項力沒有充分的時間可以發生作用。

系 4. 倘中介物之分開的各部分，相互間並無相離之傾向，則相似而等速的物體於其內運動時，其抵抗力相比如徑之平方相比。在此狀況下，倘運動之速度甚大，則該項抵抗力雖在彈性的流體內亦很近似的與徑之平方相比。

系 5. 相似相等而且速度亦等的物體在密度相同的中介物內運動，此項中介物之各部分間並無相離之傾向，其部分爲多而小或少而大亦無關，祇須在同時間內物體所遇之物質量相同，所傳出的運動相等，反之，由此項物質量所受之反響亦相等，則其所受之抵抗力自然亦相等．因之在密度相同的彈性流質內，物體之運動倘很速，則其所受之抵抗力必很近似的相等，至於流體之部分爲粗強或細弱，全無關係．蓋在運動極速的物體方面，中介物之部分即使細弱，於抵抗力之影響亦甚微．

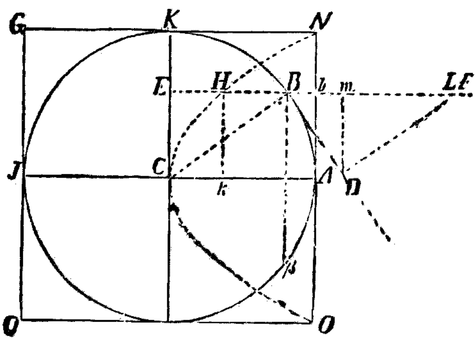
系 6. 倘流體之彈性力係來源於各部分之相離力，則此處所證明者均適用．但如彈性力非由此項相離力所產生，例如棉球之彈性力等，而由任何一其他原因所發生因而能使流體各部分間之運動受障礙者，則中介物之流體屬性即被限制，而抵抗力亦必增加，不能與以上諸系內所述者一樣了．

§ 45. 定理． 設有一球及一圓柱體，其徑相等，在一稀薄而有彈性的中介物內向圓柱體之軸所定

的方向運動，此中介物係由相等且距離亦相同的諸部分所成，則球所受之抵抗力祇有圓柱體所受者之半.

按運動定律之系 5，可知中介物對於物體所施之影響，不問物體在中介物內運動，或中介物之各部分以相同的速度對物體運動，二者並無分別，故我們可將物體視爲靜止的而研究中介物對於物體作運動時，其所施之影響若何.

今設 $ABKJ$ 爲一球形的物體，其中心爲 C，半徑爲 CA，中介物之部分以已知的速度沿一與 AC 平行的直線進行與之相撞.設 FB 爲如是的



第一七一圖

一直線，今於其上取 $LB=CB$，作 BD 線與球相切於 B. 又作垂線 BE, LD 垂於 CK 及 BD 上. 於是我們可將中介物之一部分，沿 FB 線對於球作斜撞的力，與該部分對於 $ONGQ$ 圓柱體所施之力相比較，則知第一力與第二力相比，如

$$LD : LB \text{ 或如 } BE : BC. \quad (1)$$

又，第一力在 FB 或 AC 方向內推動物體之效率與其在 BC 方向內所施之推動效率相比，如

$$BE : BC \quad (2)$$

將所得之二比相連結，即可知中介物之一部分所斜施於球(沿 FB 方向)上的推動效率(使球向此方向前進)，與該部分所垂直施於圓柱體上之效率相比，如 $$BE^2 : BC^2 \quad (3).$$

今於圓柱體之底面 NAO 上作 bE 垂線，使其等於 $AC=BC$，並設

$$bH=\frac{BE^2}{BC},$$

則 $$bH : bE = BE^2 : BC^2 \quad (4),$$

即，bH 與 bE 相比，等於中介物之部分所施於球

之推動効率與其所施於圓柱體者相比。

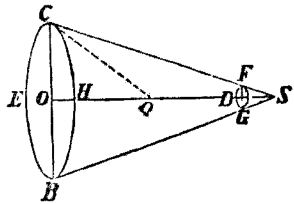
所以包有一切 bH 的物體與包有一切 bE 的物體相比，猶如中介物一切部分對於球所施之効率與對於圓柱體所施者相比。前者為一拋物線形之物體，其頂點在 C，其軸為 CA，通徑亦為 CA，後者係一包於前者之外的圓柱體，而由立體幾何學所證明，可知該拋物線體等於該圓柱體之一半。所以中介物所施於球之力等於其所施於圓柱體者之半。

倘中介物之部分係靜止着，但球與圓柱體以相等的速度運動，則亦可知球所受之抵抗力為圓柱體所受者之半。此即所欲證者。

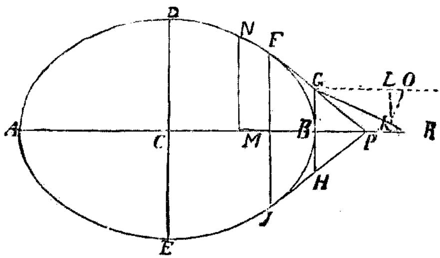
§ 46. 附註。 用同樣的方法，我們尚可比較其他形狀的物體所受之抵抗力，并求得一種形狀，最適宜於在有抵抗的中介物內運動者，

今以 $CEBH$ 為底面，其中心點為 O，半徑為 OC，並以 OD 為高，頂尖則暫不定，求作一圓錐狀體 $CBGF$，使其在同底同高之諸圓錐狀體中，所

受之抵抗力爲最小.如是,可將 OD 於 Q 平分之,將 OQ 引長至 S,使 $QS=QC$.此處所得之 S 即爲所求



第一七二圖



第一七三圖

之頂尖,因而該圓錐體卽可求得.

由此,復可得以下之理.因爲 CSB 角恆爲一銳角,故可用一橢圓形 $ADBE$ 以 AB 爲軸旋轉以產生一物體 $ADBE$,並引 FG,GH,HJ 諸線與之相切於 F,B,J 諸點,使 GH 於 B 點與橢圓形亦即物體之軸相垂直,FG 及 HJ 則與 GH 作成 $FGB=JHB=135°$ 角.於是將 $ADFGHJE$ 形亦

按 AB 軸旋轉之，則所得之物體，其所受之抵抗力亦即較以前之物體爲小，不過此二物體之運動均須在 AB 方向內，而且 B 須在前。我相信此定理對於造船上頗有用處。

倘 $DNFB$ 線有如是屬性，即，由 N 作垂線 NM 垂於 AB 上，并由 G 作 GR 線與 N 處之切線相平行，與 AB 之引長相交於 R 時，$MN:GR=GR^3:4BR\cdot GB^2$，則此線旋轉時所產生之物體，在其由 A 向 B 的運動上，於一稀薄而彈性的中介物內所受之抵抗力，較之任何同長同寬而圓形的物體所受者爲小。

§ 47. 問題． 一球在一稀薄的中介物內作等速運動，此中介物係由相等而且相互距離亦均等的各部分所成；今欲求其所受之抵抗力．

第一事．試設想一半徑相等高亦相等的圓柱體以相同的速度在該中介物內運動，其方向則與其軸之方向同．今設球或圓柱體與中介物之部分相撞時，後者能以極大的力反射回來．按 § 45. 可

知球之抵抗力等於該圓柱體之抵抗力之半;又,球=圓柱體之 $\frac{2}{3}$. 如是,中介物之部分與圓柱體相撞時,圓柱體能以極強的力反擊之,使其得圓柱體之倍大的運動.所以在一時間內(此時間內圓柱體經過其軸之半的道路),圓柱體所傳給中介物部分之運動與圓柱體之全運動相比,如中介物之密度與圓柱體之密度相比.球在一時間內(此時間內球經過與其軸相等的道路)所傳給中介物部分之運動亦與此同.但在另一時間內(在此時間內,球經過其徑之 $\frac{2}{3}$),球所傳與中介物之部分的運動與球之全運動相比,如中介物之密度與球之密度相比.所以球所受之抵抗力與一力(此力能使球於上述之時間內發生其全運動)相比,如中介物之密度與球之密度相比.

第二事. 今設中介物之部分,與球或圓柱體相撞後并不被擊回,圓柱體與之垂直的相撞後祇傳與其本身所有的速度,則圓柱體於此所受之抵抗力,僅爲其前所受者之半;球之關係亦仍不變.

第三事.　設中介物部分被球擊回之力非為極大亦非為零,但為一介於其間之值,則抵抗力較之以前第一事及第二事亦處於一中間之比.

系 1.　設球及中介物之部分均為無限的硬,一切彈性及反擊的力都沒有,則球之抵抗力與一力(此力能於球經過 $\frac{2}{3}$ 徑的時間內使球之全部運動失去或發生)相比,如中介物之密度與球之密度相比.

系 2.　在一切如常的狀況下,球之抵抗力與速度之平方相比.

系 3.　在一切如常的狀況下,球之抵抗力與其徑之平方相比.

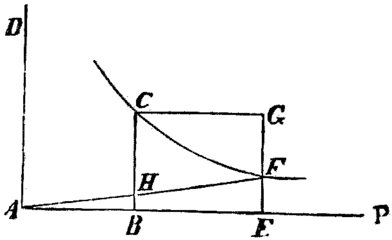
系 4.　在一切如常的狀況下,球之抵抗力與中介物之密度相比.

系 5.　球之抵抗力,與速度之平方,徑之平方及中介物之密度三者之合相比.

系 6.　球之運動及其抵抗力可如下敍明之.

今設 AB 為一時間,在此時間內球受繼續不

斷的抵抗力，能將其全部運動失去.於 AB 上作垂線 AD 及 BC,而且後者所表者即爲



第一七四圖

該全部運動.今以 AD 及 AB 爲漸近線,作一雙曲線經過 C, 於是將 AB 引長至一任何點 E, 作 EF 垂線與雙曲線相交於 F. 再將 $CBEG$ 平行方形完成,作 AF 線與 BC 相交於 H. 今如球於一任何時間 BE 內,以開始時之運動在無抵抗的中介物內作一道路,此道路可用 $CBEG$ 平行方形以表之,則在有抵抗的中介物內,其所作之道路可用雙曲線的面 $CBEF$ 以表之,而在該時間之末,其運動可用 EF 線以表之.在該時間之末,其抵抗力則可用 BH 線以表之.這些一切均可由 § 7 系 1 及 3 以知之.

系 7. 故如球於 T 時間內,因續繼不斷的抵抗

力 R 之作用能失去其全運動 M, 則在 t 時間內, 於有抵抗的中介物內因抵抗力 R (此抵抗力與速度之平方同減小) 之作用能失去其運動之 $\frac{tM}{T+t}$, 倘餘 $\frac{TM}{T+t}$. 其所作之道路, 與同時間內以等速運動 M 所作者相比, 如

$$2{,}302585092994 \cdot log\left(\frac{T+t}{T}\right) : \frac{t}{T},$$

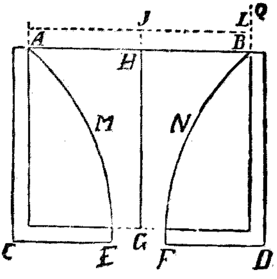
因爲 $BCFE$ 與 $BCGE$ 之比是如此.

§ 48. 附註. 在此定理內, 所敍之抵抗力及被阻滯的狀況, 均爲球形的拋出物於不連續的中介物內所受者, 幷已指出此項抵抗力與一力 (此力於球經過 $\frac{2}{3}$ 徑的時間內能使球之全部運動消失或發生) 相比, 如中介物之密度與球之密度相比. 在這裏, 自須有一假定, 即, 球與中介物之部分均爲彈性極大的, 所以能以極大的力被擊回. 假如球及中介物之部分均爲無限硬, 完全沒有反擊的力, 則該項力祇有一半大.

在連續的中介物方面, 如水, 熱油, 水銀等, 球

在其內不能與流體之各部分直接相接觸，而由能接觸的部分轉而傳達出去，則抵抗力尚須以一倍縮小.蓋在此項中介物內,球所受之抵抵力與一力(此力於球經過 $\frac{8}{3}$ 徑的時間內能使球之全部運動消失或發生)相比,如中介物之密度與球之密度相比.以下試說明此理.

§ 49. 問題. 今有一圓柱體形之器皿盛以水,其底下開一孔,水由之流出；今求水之運動狀況.



第一七五圖

今設 $ACDB$ 爲器皿，AB 爲在上之口，CD 爲與地平面相平行的底，EF 即爲底面上之圓形的孔，G 爲此孔之中心點，GH 爲與地平面相垂直的圓柱體之軸.

我們設想一冰柱 $APQB$, 其大小恰與該器皿之內容相等，其軸亦相合，以等速的運動自上而下.當此冰柱達到 AB 面時，即融成爲水而流入

器皿，於是成爲一水柱 $ABNFEM$ 由 EF 孔流出，且適充滿此孔。今作 KL 線經過 J 點與地平面相平行，並與水柱相遇於 K 及 L. 經過 EF 孔流出的水之速度，與經過 JG 高下來的水所能達到之速度相等。所以按葛里雷所證明之定理，JG 與 JH 相比猶如經過 EF 孔流出的水之速度之平方與 AB 圓處水下墜的速度之平方相比，即是，如 AB 圓之平方與EF圓之平方相比。在同時間內以同量經過不同的諸圓之水，其速度相比，如此項圓面相比之反。此處所欲論者，是向地平面流下的水之速度。同時，自然尙有與地平面相平行的運動，因爲必須有此項運動，水之分子乃能互相接近；不過這裏我們不欲論此，因爲此項運動非產生於重力，並且對於向地平面之運動亦不能發生影響。我們可假定，水之各部分間有凝聚力，因而在其下降時，各部分能互相接近而成爲一整個的水柱，不致分散成爲若干個。至於此項凝聚力所發生的地平方向內水之部分之運動，這裏可以不論。

第一事. 試設想器內圍於水 $ABNFEM$ 外者全爲冰,水係由此項冰面上流下.因冰面爲全滑者並無若何抵抗力,故由 EF 孔流出時之速度,必與以前流下之速度同,而此項流出之原動力則爲 $ABNFEM$ 水之全重量.器皿底面所負擔之重量係水外冰之重量.今如該項冰亦融而爲水,則以上水之流出速度亦仍不會改變.蓋冰融爲水後,不會使流出的水之速度減小,因爲此項水本身亦有下降之傾向;同時,亦不會使其速度增加,因爲後者之下降傾向能對於流出的水發生阻礙.所以力既不變而流出的水之速度亦不變.

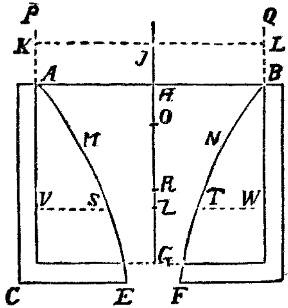
因流出的水之部分作斜的運動,故器皿底面之孔必漸增大.蓋流出的水之各部分,不能一切均垂直的下來,其由旁邊來的,仍以斜的方向流出.但因其均有通過底面而直下的傾向,故其運動與垂直的下流之水柱相同.此項水柱在孔外後較之適在孔內時爲小,其前者之徑與後者之徑相比如 5:6 或 5,5:6,5,假如我沒有量差.他曾經用過

一鐵片作試驗,片之中間開以孔,作圓形,約$\frac{5}{8}$英寸直徑.因為不欲使流出的水加速,而且加速時水柱將益小,故我不將此片裝於器皿之底面而裝於其旁邊,俾水柱在地平的方向內流出.如是,我於距孔$\frac{1}{2}$英寸處測水柱之徑,所得為$\frac{21}{40}$英寸.從可知孔之徑與孔外甚近處水柱之徑相比,如 25:21.蓋水由孔流出時,各面所來之水必均向孔收斂,而由此收斂,流出後水柱之大因而減小了,同時,因水柱之大減小,故其速度亦即增加.在以上所定之距離內,水柱之速度已增加,其比為 $25^2:21^2$,或 17:12,亦即為$\sqrt{2}:1$.

由種種試驗,我們已知在一定時間內經過器皿之底面上圓孔的流水量,等於一其他水量,此水量係以上述的速度經過一徑為前者之$\frac{21}{25}$的孔於同時間內流出者.所以在孔之本身內,該項流出的水所有之向下的速度,很接近的等於該項水因重力之作用,下墜經過器皿內水之高之半時所可達到的速度.但水旣出離器皿以後,因收斂之故,其

速度即增加，在距離約等於孔之直徑處，其速度之增加爲 $\sqrt{2}:1$. 在以下，我們用小孔 EF 以表水柱之徑。

今設 VW 爲一平面與 EF 方向相平行，在 EF 之上，與之相距約等於該 EF 孔之直徑．在此平面內另有一孔 ST，此孔較 EF 爲大．水柱由上面的孔下來恰充滿下面的孔而流出；此二孔之徑相比，約爲 25:21。



第一七六圖

在此狀況下，水柱垂直的經由下面之孔而流出，其水量就此孔之大小而言，差不多等於問題中所求者．所以二平面及向外流的水柱所佔的空間，可視之爲器皿之底．但欲使問題之解較簡單較合於數學，最好單將下面的平面視爲器皿之底，並假定在冰面上滑下的水恆保持其運動，冰則恆保持

其靜止.在以下,ST 爲一圓形的孔之徑,其中心點爲 Z,水由器皿內流出時,必先經過此孔.EF 爲在下的孔之徑,此孔恰爲流出的水之柱所充滿.今設上面的孔之徑 ST 與下面的孔之徑 EF 相比,如 25:21,ST 平面與 EF 平面之距離等於 EF 孔之徑,則經過 ST 流出的水在 ST 孔本身內時,其速度等於一物體下墜經過 JZ 高之半所可達到者,在 EF 孔本身方面,則其速度等於一物體下墜經過 JZ 高時所能達到者.

第二事. 設 EF 孔不在器皿之中間而在其一旁,則水流之速度亦仍如前;自然,我們須假定孔之大亦仍如前.雖然一重物體經過一斜線下降時,其所用時間較多,垂直下來時間較少,但其所能達到的速度則一樣,此係葛里雷所已證明者.

第三事. 倘將孔移在器皿之壁上,其流出的水之速度亦仍如此.如孔不大,AB 與 KL 二面之距離差不多等於零,則在地平方向內流出的水柱,作拋物線形,而由此拋物線之通徑,可知其速度仍

等於一物體由 HG 或 JG 高下降時所能達到之速度. 經幾次試驗後, 可知器皿內之水倘高出於孔 20 英寸,孔本身亦高於地平面 20 英寸,則流出的水約在 37 英寸之距離外下墜.倘將空氣之抵抗力減去.則水柱應在 40 英寸以外下墜,而拋物線之通徑爲 80 英寸.

第四事. 倘水向上噴出, 其速度亦仍如前. 蓋如水柱垂直的向上升,而不受空氣之抵抗,則其高可達 GH 或 GJ. 其流出之速度亦等於水由該項高下墜時所可達到者. 器皿內靜止的水之各部分,由各方面所受之壓力相等,故向各方面之推動力亦相等, 至於流出時之孔在底面上或經過一孔道後由在外的一孔流出,或在上的孔流出,均無關係.流出時的速度,不僅合於根據本節內之理所可推算得者,而且試驗方面所得之結果亦如此.

第五事. 流出的水之速度, 與孔之爲圓形, 方形或三角形均無關係;蓋速度與孔之形狀無關, 祗產生於孔之離 KL 之距離.

第六事. 倘將器皿 $ABDC$ 之下部浸入靜止的水內,此水之高,自器皿之底面計算,$=GR$, 則器皿內水經過 EF 而流入靜止的水之速度,等於其由 JR 高下降時所可達到的速度.在靜止的水面下之器皿內的水之全重量,為在其外的水所抵住而成為均勢,所以不能使器皿內下降的水之運動加速.在試驗方面如測定水流出的時間,則此事實可以證明.

系 1. 今將 CA 引長至 K 使 AK 與 CK 相比,等於(底面上任何處所作孔之)面積與 AB 圓之面積相比之平方,則流出的水之速度等於其由 CK 高下墜時所可達到之速度.

系 2. 能產生流出的水之全運動的力等於圓柱體形的水柱之重量,此水柱之底為 EF, 其高為 $2GJ$ 或 $2CK$. 當流出的水與此水柱之量相等時,其所須時間能使由 GJ 高下降的水於此時間內達到其流出時之速度.

系 3. $ABDC$ 內全部水之重量與其一部分

(此部分能使水向外流)相比,如

$$AB+EF:2EF \quad (1).$$

蓋如 JO 爲 JH 與 JG 中間之中比,則經過 EF 孔在一時間內(在此時間內一水滴由 J 下降時能經過 JG 道路)所流出的水,其量等於一圓柱體之量,此圓柱體之底爲 EF, 其高爲 $2JG$, 即是,等於一圓柱體,其底爲 AB, 高爲 $2JO$. 蓋

$$EF:AB=\sqrt{JH}:\sqrt{JG},$$

$$EF:AB=\sqrt{JH\cdot JG}:JG \quad (2)$$

$$=JO:JG,$$

而在一時間內(於此時間內由 J 下降的一水滴能經過 JH 高),向外流的水與一圓柱體相等,其

$$底=AB,$$

$$高=2JH.$$

但在另一時間內(於此時間內,由 J 下墜的水滴經過 HG 道路),向外流出的水,即, $ABNEFM$ 內之全部水量與一圓柱體相等,此圓柱體之

$$底=AB,$$

$$高=2HO.$$

所以 $ABDC$ 全部器皿內所有之水與 $ABNEFM$ 內之全部水量相比，如

$$HG:2HO=HO+OG:2HO$$

$$=JH+JO:2JH \quad (3).$$

$ABNEFM$ 內所有全部水之重量能使水向外流；所以器皿內全部水之重量與其一部（此部能使水向外流）相比，如

$$JH+JO:2JH,$$

或如 $$AB+EF:2EF. \quad (4)$$

系 4. 又，$ABDC$ 器皿內全部水之重量與其他一部分（此部分為器皿之底面所負擔者）相比，如

$$AB+EF:AB-EF \quad (5).$$

系 5. 底所負擔的水之部分與一其他部分（此部分能使水外流）相比，如

$$AB-EF:2EF \quad (6),$$

或如

$$底之面積:2\cdot孔之面積.$$

系 6. 對於底施壓力的水之部分，與垂直在底面上之全部水量相比，如

$$AB : AB+EF \quad (7),$$

或如 AB 圓 : $2\cdot AB$ 圓 − 底之面積.

但施壓力於底的重量之部分，與器皿內全部水之重量相比，如

$$AB-EF : AB+EF \quad (8),$$

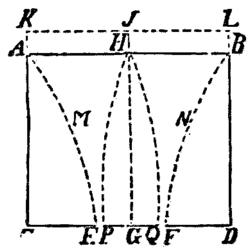
後者之重量與垂直在底面上全部水重相比，如

$$AB : AB-EF \quad (9).$$

所以施壓力於底的重量之部分與垂直於底面上全部水之重量相比，如

$$AB : AB+EF = AB : 2AB-(AB-EF).$$

系 7. 今於 EF 孔之中間作一小圓 PQ 與地平面相平行，其中心點為 G，則此圓所負擔之水重大於一水柱重量之三分之一，此水柱之底



第一七七圖

爲該圓，其高爲 GH.

今設 $ABNFEM$ 爲下降的水柱，其軸爲 GH. 試設想器皿內之全部水量，包括水柱之外及小圓上之水，凡不能使水之下降加速者，均結爲固體。設小圓上之固結的水柱爲 PHQ, 其頂尖爲 H, 其高爲 GH. 又設想流下的水因其本身之重量下降，既不積於 PHQ 上，亦不與之生摩擦而衹滑過。在水流旁的 $AMEC$ 及 $BNFD$ 二固體，均以其凸面 AME 及 BNF 向水流，PHQ 對之亦爲凸的。因此，PHQ 較之一底爲 PQ, 高爲 GH 的圓錐體爲大，亦卽是大於由該底及高所成的圓柱體之三分之一。所以該小圓所負擔之重量大於該項圓錐體或該項圓柱體之三分之一。

系 8.　以上所說的小圓 PQ 所負擔的水之重量，看來小於一圓柱體重量之 $\frac{2}{3}$, 此圓柱體之底爲該小圓，其高爲 GH.

在以上之假定下，試設想作一半球體，其底爲該圓，其半軸爲 GH. 此半球體等於該圓柱體之三

分之二，並將 PQH 水柱包入內，而此水柱之重量則爲小圓所當負擔者．欲使水之運動成爲儘可能的直線方向，必須此水柱之外面與 PQ 所成之角不如是之銳乃可，因爲水下降時恆加速而因此加速水柱必更小．因此角小於 $90°$，故水柱之下部亦包在半球內，其上端則爲一尖，俾水之地平方向內的運動對於半球之頂而言不致較其垂直的運動爲無限速．PQ 圓愈小，則水柱愈銳，倘將其縮成爲無限小，則 PHQ 角亦成爲無限小，故水柱恆在半球之內．所以此水柱小於該項圓柱體之 $\frac{2}{3}$，而小圓所負擔的水之重量等於該水柱之重量，因爲在其四圍的水僅能使水向外流．

系 9. 小圓 PQ 所負擔的水之重量與一水柱之重量近似的相等，此水柱之底爲該圓，其高爲 $\frac{1}{2}$ GH. 此重量爲上所述的圓錐體及半球之重量之中比．今如將該小圓放大，使其與 EF 孔相等，則其所負擔的水之重量爲垂直在其上的全部水之重量，即是，所負擔之重量爲一水柱，其底爲該圓，其

高為 GH.

<u>系 10.</u> 此小圓所負擔之重量與一水柱(其底為該圓或與之相等的圓,其高為 $\frac{1}{2}GH$)相比,如

$$EF^2 : EF^2-\tfrac{1}{2}PQ^2,$$

或近似的如

EF 圓比此圓減去 PQ 圓之半之差.

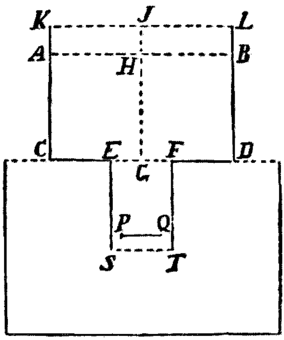
<u>§ 50. 補題.</u> 設如一圓柱體沿其軸之方向前進,則軸之大小雖可改變而其所受抵抗力不變.因此,該圓柱體所受之抵抗力,等於一圓所受者,此圓之徑與圓柱體之徑同,其速度亦同,其前進之方向為一與圓面相垂直的直線.

蓋圓柱體之兩旁,對於運動上極少阻礙,故如將其軸減至無限小,即得一圓.

<u>§ 51. 定理.</u> 一圓柱體在一緊縮的無限的且無彈性的中介物內運動,其速度為等速的,方向係沿其軸;如是則其抵抗力與一力(此力於圓柱體經過其軸之四倍的道路的時間內,能產生或消失其全部運動)相比,很近似的如中介物之密度與圓柱體

之密度相比.

今設 $ABDC$ 器皿之底 CD 與一靜止的水之面相接觸.由圓柱體形的管 $EFTS$ 有水向地平面流出.今作一小圓 PQ 於管之中間,與地平方向平行,將 CA 引長至 K, 使 AK 與 CK 相比,等於 EF 減 PQ 之差與 AB 相比之平方.按 § 49 第五及第六事以及系 1,可知經過小圓與器皿之旁邊而流出的水之速度,等於水自由下降經 KC 或 JG 時所可達到之速度.又如器皿之寬爲無限,因而 HJ 成爲零或 $JG=HG$, 則向小圓下來的水之力與圓柱體之重量(此圓柱體之底爲 PQ, 高爲 $\frac{1}{2}JG$)相比,如



第一七八圖

$$EF^2 : EF^2-\tfrac{1}{2}PQ^2.$$

以等速運動經過全管向外流的水之力,對於

小圓 PQ 之作用亦如是大;此小圓亦可在管之內部.今假定 EF 與 ST 二孔口被閉,小圓於四圍受壓的流體內上升,因而使在其上的水下降.如是則小圓上升之速度與水下降之速度相比,如 EF 減 PQ 之差與 PQ 相比,而前者之速度與下降的水對於上升的圓之相對速度相比,如

$$EF^2-PQ^2 : EF^2.$$

今設此項相對速度等於一其他速度,此速度為以前水向外流時所有者,即是,等於水下降時經過 JG 高所能達到之速度.如是則水對於上升的圓之力仍與前一樣,即是,上升的小圓之抵抗力與一水柱(其底為 PQ, 高為 $\frac{1}{2}JG$)相比,很近似的如

$$EF^2 : EF^2-\tfrac{1}{2}PQ^2.$$

小圓之速度,與水下降時經過 JG 高所能達到之速度相比,如

$$EF^2-PQ^2 : EF^2.$$

今將管之寬放大至無限,則

$$EF^2-PQ^2 : EF^2$$

與 $$EF^2 : EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$$

可相等. 因而小圓之速度等於水下降經過 JG 時所能達到之速度,其抵抗力等於一圓柱體之重力,此圓柱體之底爲 PQ, 高爲 $\frac{1}{2}JG$. 此圓柱體沿其軸運動時所有之抵抗力與小圓之抵抗力相等, 所以很近似的等於一力, 此力於圓柱體經過其軸之四倍的道路時能產生該項運動.

今將圓柱體之軸放大或縮小, 則其運動以及經過其軸之四倍的道路所須之時間均以該同比增加或減小. 所以在相比的時間內能產生或消失該項已放大或縮小的運動之力,仍爲不變的;此力仍等於圓柱體之抵抗力,因爲按 § 50 此抵抗力亦仍不變.

設圓柱體之密度增加或減小, 則其運動及力亦以同比增加或減小. 所以圓柱體之抵抗力與一力 (此力於圓柱體經過其軸之四倍的道路時能產生其全運動或消失之)相比,很近似的如中介物之密度與圓柱體之密度相比.

流體必須經壓搾乃能成爲連續，必須連續而且沒有彈性，乃能使整個的壓力(由壓搾所發生的壓力)迅卽傳達出去，旣整齊的對於運動的物體之各部分施以影響，故其抵抗力仍不變．由物體運動所產生的壓力能使流體之部分運動，因而產生抵抗力．但由流體之緊縮所產生的壓力，則不問其強度如何，倘仍傳達出去，對於流體之連續的部分，不能發生運動作用，亦不能影響運動使其改變，因而旣不增加抵抗力亦不能縮小之．由緊縮所發生的流體之効率，在運動的物體之後部不能較之其前部爲強，所以對於本節內所述之抵抗力，不能發生減小的影響，但如被壓的物體之運動，其速度較之該項効率爲無限小，則此項效率亦不能對於其前部之影響爲特甚．祇須流體爲連續且無彈性的，則此項傳達可無限速．

系 1. 一圓柱體在連續的無限的中介物內沿其軸之方向作等速運動，則此圓柱體所受之抵抗力相比，如速度之平方相比，如徑之平方相比，如中

介物之密度相比．所以此項抵抗力與三者之合相比．

系 2. 倘管不放大至於無限，圓柱體在管內之靜止的中介物內向其軸之方向前進，後者之軸與前者之軸相合，則其抵抗力與一力(此力能於圓柱體經過其軸之四倍的道路時，產生或消失其全運動)相比，等於$EF^2:EF^2-\frac{1}{2}PQ^2$,$EF^2:EF^2-PQ^2$之平方及中介物之密度比圓柱體之密度，三者之組合．

系 3. 仍在以前之假定下，L 線與圓柱體之軸之四倍相比，等於 $EF^2-\frac{1}{2}PQ^2:EF^2$ 及 $EF^2-PQ^2:EF^2$ 之平方二者之合，則圓柱體所受之抵抗力與一力(此力當圓柱體經過 L 線時能產生其全部運動或消失之)相比，如中介物之密度與圓柱體之密度相比．

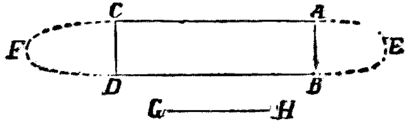
§ 52. 附註． 在以前的定理內，我們所求得者祇是圓柱體切面所產生之抵抗力，其由運動之斜方向所發生的部分却未曾計入．在 § 49 第一事內

斜的方向內之運動為器皿內全部水向 EF 孔收斂的作用,對於水之流出能有阻礙;在這裏此項斜運動為圓柱體之前端對於水所施之壓力所致因而能使其向各方向分散,而在其通過圓柱體之前端附近時,能發生阻礙作用使其向後退,故其影響使流體向較遠的距離方面運動,增加抵抗的力,其比約略等於 25:21 之平方.

在該節之第一事內,我們曾使水之部分垂直的經過 EF 孔流出,在這裏,我們欲使斜方向內之運動消失,使水之部分能讓圓柱體較易通過,僅留由圓柱體之切面所發生的抵抗力(此抵抗力能由減小該切面之面積以減小之),則必須假定作斜運動之流體部分本身間為連續的,在圓柱體之開端為靜止的,且環繞着圓柱體.

今設 $ABDC$ 為一直角形, AE 及 BE 為二拋物線弧,其軸為 AB, 其通徑與 GH(圓柱體自由下墜時必經過此高乃能達到其速度)相比,如 $GH:\frac{1}{2}AB$. CF 及 DF 亦為二拋物線弧,其軸為

CD, 其通徑較前者大四倍.如是, 以 EF 爲軸將此形旋轉時,所得之物體之中段 $ABDC$ 爲前述之



第一七九圖

圓柱體,其兩端 ABE 及 CDF 包有流體在內,此項流體本身間靜止着,而如結爲固體時,成爲附着於圓柱體的頭與尾. $EACFDB$ 固體向 E 之方向沿其軸 FE 前進時所受之抵抗力,很接近的等於本節內所已述過的抵抗力,亦即是,此抵抗力與一力(此力當圓柱體以等速運動經過 $4AC$ 時能發生或消失其全運動)相比,很近似的如流體之密度與圓柱體之密度相比.按 § 49 系 7, 此抵抗力之被該力所減小,其比不能超過 2:3.

§ 53. 補題. 如將一圓柱體, 一球體及一卵形體相繼放入一圓柱體形之管內, 此三物體之寬均相同,而且其軸恆與管之軸相同.則此三物體對於

水之流過該管，其所有之抵抗力相等.

在管之壁及該項物體之中間的空間，爲水所流過者，其積均相等，故水之流出狀況亦相似.此定理自須在一假定之下，即，凡對於流出的水不能使其加速的水之流性，在物體之上均結爲固體；此在§49系7內已說明了.

§54. 補題. 仍如前節內之假設，並可知該項物體所受沿管流出的水之壓力均相等.

此可由§53及運動之第三律知之，因爲物體及水之互相壓迫，其力相等.

§55. 補題. 設管內之水爲靜止的，物體在其內以相等的速度運動，但方向相反，則其抵抗力亦相等.

此可由前節知之，因爲其相對運動無變動.

§56. 附註. 凡一切凸而圓的物體，其軸如與管之軸相合，其關係亦即如前所述.因摩擦之大小，亦可發生一些相差，但在這些補題方面，我們係假定物體爲全滑的，中介物之黏韌性及摩擦爲

零，對於水之通過管時有妨害的流體之部分本身間靜止着因而不發生影響，此如 § 52 內所已說過者.在以下的定理內，我們研究圓的物體所受之最小抵抗力，此項圓的物體係由旋轉所發生.

在流體內游泳而前進的物體，其作用能使在其前的流體舉起而在其後者則沉下，尤其是物體略帶扁形時即係如此.蓋物體之前後端帶扁形時，較之尖形時所受之抵抗力爲大. 倘流體有彈性而物體之兩端帶扁形，則其運動能使在其前之流體稠密，使在其後者稀薄；所以較之兩端爲尖時，所受之抵抗力亦較爲大. 在此處所提之補題及定理內，均係無彈性的流體，而且我們所論的物體，亦非浮在水面上而係浸入水內. 旣推得此項抵抗力後，如欲進而論有彈性的物體及空氣內之抵抗力時，必須將其放大，論靜水面上所浮之物體時，亦須放大.

§ 57. 定理. 一球在一被壓搾過的，無限的而且無彈性的中介物內作等速運動，則其抵抗力與

一力（此力於物體經過其徑之 $\frac{8}{3}$ 的時間內能產生或消失其全運動）相比，很近似的如中介物之密度與球之密度相比。

蓋球與其外切圓柱體相比，如 2:3. 所以能使圓柱體之運動消失的力（當圓柱體經過其軸之四倍的道路時，能使其運動消失），在球經過 $\frac{8}{3}$ 徑的時間內亦能將球之運動完全消失。圓柱體之抵抗力與此力相比，很近似的如流體之密度與圓柱體之密度相比，而按 §§ 53,54,55, 球之抵抗力很近似的等於圓柱體之抵抗力。此即所欲證者。

系 1. 球在被壓榨過的無限的中介物內所受之抵抗力，其相比等於速度之平方，球徑之平方，中介物之密度三者相比之合。

系 2. 一球在有抵抗的中介物內因其相對重量而下降所可達到之最大速度，等於該球以該重量在無抵抗的中介物內自由下墜時經過一道路所可達到之速度，此道路與 $\frac{4}{3}$ 徑相比，如球之密度與中介物之密度相比。

蓋在下墜的時間內球以其所可達到的速度作成一道路，此道路與 $\frac{8}{3}$ 徑相比，如其密度與中介物之密度相比．又，重量之力，卽產生運動之力與一力（此力於球經過 $\frac{8}{3}$ 徑的時間內能產生該項全運動）相比，如中介物之密度與球之密度相比．從可知重量之力與抵抗力相等，故不能使球加速．

系 3. 倘在運動之開始時，球之密度及速度均爲已知，中介物之密度亦爲已知，球係在此中介物內運動．則按 § 47 系 7 我們可求得任何時之速度，抵抗力及其所作之道路．

系 4. 一球在被壓搾過的，無限的，靜止的而且密度均勻的中介物內運動，則在經過與徑之二倍相等的道路以前，球已失去其運動之半．

此可由 § 47 系 7 以知之．

§ 58. 定理． 一球在一被壓搾過的流體內作等速度運動，此流體係包在一管內，管作圓柱體形，則其所受之抵抗力與一力（此力於球經過 $\frac{8}{3}$ 徑的時間內能產生或消失其全運動）相比，等於一複合

的比例,此比如下合成:

管之孔:此孔減去球上大圓之半;

管之孔之平方:此孔減去大圓之餘之平方.

中介物之密度:球之密度.

此定理之眞理,可由 § 51 系 2 知之,其證明亦可如前節得之.

§ 59. 附註. 在以前數節內,凡在球前面的流體,能增加其所受之抵抗力者,我均視之爲已結爲固體.假如此項固體開始融化,則抵抗力必須放大,不過在此處所提之定理內,此項放大關係甚小,可略之不計.

§ 60. 問題. 一球在一被壓搾但很流動的中介物內運動,今試用實驗以求其抵抗力.

設球在眞空內之重量爲 A, 其在中介物內之重量爲 B,D 爲其徑,F 爲一長,此長與 $\frac{4}{3}D$ 相比,如球之密度與中介物之密度相比,即,$F:\frac{4}{3}D=A:A-B$.

又設 G 爲一時間,在此時間內,球以重量 B

下墜不受抵抗力時能經過道路 F, 其所能達到之速度則爲 H; 如是，球在有抵抗的中介物內下墜時，H 爲其所能達到的最大速度.物體以此項速度下墜時，其所受之抵抗力與 B 相等.但物體以他種速度下降時所受之抵抗力與 B 相比，則如該項速度與最大速度 H 相比之平方.此可由 § 57 系 1 知之。

此抵抗力之來源，由於流動的物質之惰性;其由彈性，黏韌性及摩擦等所發生之抵抗力則可以下法得之。

今將一球任其自然，則因其重量之作用，在流體內能下墜，其所須時間以 P 表之(以秒爲單位)，以前所用之時間 G, 今亦以秒爲單位作計算.又設 N 爲一絕對數目字，其對數爲

$$0{,}4342944819\cdot\frac{2P}{G},$$

而 $\frac{N+1}{N}$ 之對數則爲 L. 如是則下墜時所達到之速度爲

$$\frac{N-1}{N+1}\cdot H,$$

而所作的高爲

$$\frac{2PF}{G}-1{,}3862943611\cdot F$$

$$+4{,}605170186\cdot FL.$$

倘流體很深,則末項可略去不計,因而所作之高很近似的爲

$$\frac{2PF}{G}-1{,}3862943611\cdot F.$$

我們祇須假定物體所受之抵抗力除由流動的物質之惰性外沒有其他來源,則此即可由本編 § 13 知之.倘尚有其他抵抗力,則下墜時間自須增加,而且由此項時間之增加,亦可推論得該項抵抗力之強.

爲求便利推算物體在眞空內之下墜速度及所作道路起見,我作了一表列下.表內第一列,表下墜之時間,第二列表下墜內所能達到之速度,其最大速度 H 定爲

100000000.

第三列所表者爲該時間內所作之道路，$2F$ 爲物體於 G 時間內以最大速度所作之道路．第四列爲物體在該項時間內以最大速度所作之道路．此列內所列之數目字，爲 $\frac{2P}{G}$ 之値，倘由此減去

$$1,3862944-4,6051702\cdot L$$

後，卽得第三列內之數目．

此外，我尙有一第五列列入，其中所包爲在該項時間內物體所作之道路，惟係在眞空內因其相對重量 B 之作用而下墜時所作者．

時間 P	在流體內下墜的物體之速度 $\frac{N-1}{N+1}H$	在流體內下墜時所作之道路 $\frac{2PF}{G}-1,386\cdot F+4,605\times LF$	最大運動所作之道路 $\frac{2PF}{G}$	眞空內下墜時所作之道路 $F\cdot\frac{P^2}{G^2}$
0,001G	99999,58	0,0000001 $\times F$	0,002$\cdot F$	0,000001$\cdot F$
0,01 G	999967,	0,0001 $\times F$	0,02 $\cdot F$	0,0001 $\cdot F$
0,1 G	9966799,	0,0099834 $\times F$	0,2 $\cdot F$	0,01 $\cdot F$
0,2 G	19737532,	0,0397361 $\times F$	0,4 $\cdot F$	0,04 $\cdot F$
0,3 G	29131261,	0,0886815 $\times F$	0,6 $\cdot F$	0,09 $\cdot F$

0,4	G	37994896,	0,1559070	×F	0,8	•F	0,16	•F
0,5	G	46211716,	0,2102290	×F	1,0	•F	0,25	•F
0,6	G	53704957,	0,3402706	×F	1,2	•F	0,36	•F
0,7	G	60436778,	0,45 5105	×F	1,4	•F	0,49	•F
0,8	G	66403677,	0,5815071	×F	1,6	•F	0,64	•F
0,9	G	71629787,	0,7196609	×F	1,8	•F	0,81	•F
1,	G	76159416,	0,8675617	×F	2,	•F	1,	•F
2,	G	96402758,	2,6500055	×F	4,	•F	4,	•F
3,	G	99505475,	4,6186570	×F	6,	•F	9,	•F
4,	G	99932930,	6,6143765	×F	8,	•F	16,	•F
5,	G	99990920,	8,6137964	×F	10,	•F	25,	•F
6,	G	99998771,	10,6137179	×F	12,	•F	36,	•F
7,	G	999 9834,	12,6137073	×F	14,	•F	49,	•F
8,	G	99999980,	14,6137059	×F	16,	•F	64,	•F
9,	G	99999997,	16,6137057	×F	18,	•F	81,	•F
10,	G	99999999,6	18,6137053	×F	20,	•F	100,	•F

§ 61. 附註. 爲方便用試驗以測定流體之抵抗力計,我曾作了一個四角形的木器,其內部長 9 英寸,寬亦 9 英寸,深 9½ 英尺,其中盛以雨水.於是

用蠟製成爲球,其內嵌有鉛,使其由 112 英寸高下墜,詳記其所須之時間.

一立方英尺雨水重 76 羅馬磅,一立方英寸雨水重 $\frac{19}{36}$ 盎司 $=253\frac{1}{3}$ *Gran.* 一個徑爲一英寸的球在空氣中重 132,645 *Gran*, 或,在眞空內重 132,8 *Gran*; 一其他任何的球與其眞空中及水中之重量之差相比.

第一試驗. 一球,在空氣內之重量爲 $156\frac{1}{4}$ *Gran*, 在水內重 77*Gran*, 由 112 英寸高下墜,須 4 秒鐘.經重覆試驗後,所得結果仍是如此.

球在眞空內之重量爲 $156\frac{13}{38}Gr$, 較其水內之重量超過 $79\frac{13}{38}$ *Gr*, 由此,則即可求得徑之長爲 0,84224英寸.此超過的重量,與眞空內球之重量相比,如水之密度與球之密度相比;徑之 $\frac{8}{3}$ 與 $2F$ 相比,亦是如此,因而 $2F=4,4256$ 英寸.在眞空內因其重量 $156\frac{13}{38}$ *Gr* 之力而下墜時,球於一秒鐘內可經過 $193\frac{1}{3}$ 英寸.水內之重量 77*Gr* 其力能使

球於同時間內在水中經過 95,219 英寸，但須不受其他抵抗力．今設 G 為一時間，與 1 秒相比，等於 $\sqrt{F} : \sqrt{95,219,}$ 則在此時間內，球經過 $F=2,2128$ 英寸，其所能達到之速度為 H，此速度亦即為球在水內下墜時所可達之最大速度．但 $G=0,15244$ 秒，在此時間內球以最大的速度運動時能經過 $2F=4,4256$，故在 4 秒鐘內能經過 116,1245 英寸．今由此數目上減去 $1,3862944 \cdot F=3,0676$，則餘 113,0569 英寸，此即為球在盛有水的大器皿內下墜時於四秒鐘內所可經過之道路．因器皿之寬甚有限，故此道路之長又必須減小，其比為 1:0,9914.

既減小此後，即得一道路 112,08 英寸，按理論上之推測，球於四秒鐘內很近似的經過此路．在試驗上，我測得所經過之道路為 112 英寸．

第二試驗． 有三個相等的球，在空氣中的重量為 $76\frac{1}{3}Gr$，在水中則為 $5\frac{1}{16}Gr$，今將其繼續的一一放於水中，下墜時在 15 秒鐘內能經過 112 英寸．今就實際上計算之，則可知球在眞空內之重

量爲 $76\frac{5}{12}Gr$, 後者超過其水內之重量爲 $71\frac{17}{48}Gr$, 於是可知球之徑爲 0,81296 英寸,其 $\frac{8}{3}$ 爲 2,16789, 而 $2F=2,3217$. 下墜的球在一秒鐘內所作之道路, 爲 12,808 英寸,但須不受若何其他抵抗力,僅以其重量與 $5\frac{1}{16}Gr$ 下墜; G 則爲 0,301056 秒.

如是,球以最大的速度運動時,在水內以其重量 $5\frac{1}{16}Gr$ 於 0,301056 秒內能下降經過 2,3217 英寸,而以此相同的速度在 15 秒內能經過 115,678 英寸.今由此減去 $1,3862944\cdot F=1,609$ 英寸,則尙餘 114,069; 此即爲球於同時間內在較大的器皿中所能經過者.但因我們所用器皿之寬有限,故必再減去 0,895 英寸,所餘 113,174 英寸,即爲球於 15 秒鐘內按理論上之推測所可作者.但在試驗上,所得爲 112 英寸,故其差亦不算大.

第三試驗. 有三個相等的球,其在空氣內之重量爲 $121Gr$, 在水內則爲 $1Gr$, 今將其陸續放任之,在水內下墜時所作之道路爲 112 英寸,其所

需時間爲 46,47,50 秒.

按之理論,其所須時間當爲 40 秒;但事實上却超過此數,其故何在?或者其原因在此,因爲在速度較小的運動方面,由惰性力所發生之抵抗作用與由其他原因所發生者相比,其比例較小.或者因球上附着有氣泡,致使其運動之速度減小;或則因蠟受手之熱或空氣之熱而稀薄所致,或則當球浸入水時發生其他不能注意到的差失所致.我不知道這些原因中何者是其眞的原因,但由這個試驗內,無論如何可知在此項試驗方面,球之重量必須較大.乃能有較可靠的結果.

第四試驗. 以上諸試驗,用以尋求流體之抵抗力者,我在未知上所述的理論之前早卽做過.是後,我又作了一木箱,其寬 $8\frac{2}{3}$ 英寸,深 $15\frac{1}{3}$ 英尺,並作 4 球,內實以鉛,外面包有蠟.在空氣內此項球之重量爲 $139\frac{1}{4}Gr$,在水內爲 $7\frac{1}{8}Gr$,當此項球在水內下墜時,我用一半秒的擺錘鐘以測其時間.當我將其放下水時,我已將此項球冷却許多時

候，因爲熱能使蠟稀薄，因而減輕其水內之重量，而且因熱而稀薄時，亦不能立即恢復其密度，故我須將其冷却許多時候.我先將球完全浸入水內，然後放之使下，其原因則恐未浸入水之部分能於開始時加速球之運動. 但浸入水內後我仍細心的將其放下，俾手不致發生加速的影響. 如是，在 $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$,50 及 51 振動的時間內，球經過 15 英尺 2 英寸.以後，在氣候較寒時，我又重復作過試驗，其所須時間爲 49,$49\frac{1}{2}$,50 及 53; 其後再作一次試驗，得 $49\frac{1}{2}$,50,51,53. 如是屢作重復的試驗後，結果得 $49\frac{1}{2}$ 及 50 爲最多的次數.

今按理論計算之，則知眞空內球之重爲 $139\dfrac{2}{5}$ Gr, 徑爲 0,99868 英寸，故其 $\dfrac{8}{3}$ 爲 2,66315 英寸. $2F$ 於此爲 2,8066 英寸，而 $7\dfrac{1}{8}Gr$ 重的球不受抵抗力而下墜時在 1 秒內所能作之道路爲 9,88164 英寸，G 爲 0,376843 秒.所以球以最大速度因其重量之力在水內下墜時，於 0,376843 秒時間內能作 2,8066 英寸道路，而以此速度在一秒鐘

內能經過 7,44766 英寸,在 25 秒鐘內，能經過 186,1915 英寸.今將 1,386294·F=1,9454 由此減去,所餘 184,2461 英寸即爲球在該時間內於一很廣的器皿內所能作之道路.

因爲我所用的器皿很小，故必須將所得者減小,於是可得 181,86 英寸,爲球於 25 秒鐘內在器皿內所經過之道路.在實驗上，所得者爲 182 英寸,其時間爲 $49\frac{1}{3}$ 及 50 振動,即 25 秒稍差及 25 秒.

第五試驗.　用四個球，在空氣內之重量爲 $154\frac{3}{8}\,Gr$, 在水內爲 $21\frac{1}{2}Gr$, 經幾次放下後,其所作道路爲 15 英尺 2 英寸,其所須時間爲 $28\frac{1}{2}$,29, $29\frac{1}{2}$,30, 有時爲 31,32,33 振動.

按之理論,所須時間當爲 29 振動.

第六試驗.　用五個球,空氣內之重量爲 $212\frac{3}{8}$, 水內爲 $79\frac{1}{2}Gr$. 經重復試驗幾次後,測得所作之道路爲 15英尺 2 英寸,其所須時間爲 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17, 18 次振動.

按之理論當爲 15.

第七試驗. 四個球,空氣內之重量爲 $293\frac{3}{8}$,水內爲 $35\frac{7}{8}Gr$,經幾次試驗後,所得道路爲 15 英尺 1,5 英寸,時間爲 $29\frac{1}{2}$,30,$30\frac{1}{2}$,31,32,33 振動.

按之理論當爲 28.

這些試驗中所用之球均相等,重量及大小亦均等,但下墜時有的較速,有的較遲,我於是推求其原因,而得以下之結果.

當我將球放下時,此項球能按中心旋轉,因爲其各部分面中有的較重故能發生旋轉的影響.球既旋轉,則旋轉時對於水所傳給之運動自較不旋轉而下降爲多,因之旋轉的球,自必多失去其下降之運動,而有速度減小之事實發生.同時,球又有離開其旋轉的部分之傾向而與器皿之壁相接近,於是運動受阻礙,有時並能與壁相撞.在較重的球方面,旋轉亦較爲大,所以對於水所傳出之運動亦較多.爲救濟此項差失計,我另作了些新的球,此項球亦由蠟與鉛所成,但鉛不在球之中心,而靠近

其一面.當我將球在水內放下時,我將其含有鉛的一面按在最下面,使其不能發生旋轉作用.如是所得結果較前爲佳,其下墜時間不若前此之相差了.以下諸試驗內,可見到此.

第八試驗. 四個球,空氣中之重量爲 139 Gr, 水中之重量爲 $6\frac{1}{2}Gr$, 經幾次重復試驗後,知所經過之道路爲 182 英寸,其所需時間爲 50 至 52 次振動,最多的爲 51 次.

按之理論當爲 52 次.

第九試驗. 四個球,其空氣內之重量爲 $273\frac{1}{4}$ Gr, 水內之重量爲 $140\frac{3}{4}Gr$, 經幾次重復試驗後,得所經過之高爲 182 英寸,所需時間爲 12 至 13 次振動.

按之理論當爲 $11\frac{1}{3}$ 次.

第十試驗. 四個球,空氣內之重量爲 384 Gr, 水內之重量爲 $119\frac{1}{2}Gr$, 經過 $181\frac{3}{4}$ 英寸時,其所須時間爲 $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$, 19 次振動.在這些試驗方面有時有若干球與器皿之壁相遇,此爲我所

聽到者.

按之理論當爲 $15\frac{5}{9}$ 次振動.

第十一試驗. 三個球，其空氣内之重爲 48 Gr, 在水内爲 $3\frac{29}{32}\,Gr$, 經過之高爲 $182\frac{1}{2}$ 英寸，所須時間爲 $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45, 46 振動.

按之理論當爲 $46\frac{5}{9}$ 振動.

第十二試驗. 三個球，空氣内之重爲 141 Gr, 水内重 $4\frac{3}{8}Gr$, 經幾次試驗後，所須時間爲 61, 62, 63, 64, 65, 振動，其高爲 182 英寸.

按之理論當爲 $64\frac{1}{2}$ 振動.

由這些試驗中可知球之下墜速度如不大，例如 2, 4, 5, 8, 11, 12 諸試驗，則其下墜時間頗能與理論上所要求者相一致；但如下墜速度大，如在 6, 9, 10 諸試驗内，則其所受抵抗力亦較大，超過速度之平方的比例. 蓋球在下墜時，微有振動，在較輕的球方面，此項振動易消失，但如較大而較重的球方面，此項振動所歷之時間較長. 但有時亦能因球之速度大，故水對於其後部之壓力減小. 倘將速

度繼續增加，則結果球之後部可留出一眞空的地位;除非我們同時於後部增加壓力,此項眞空部分即能產生.我們必須使壓力以速度之平方增加,乃能使抵抗力恆與速度之平方相比.但事實上,壓力不能隨速度之平方而增加，故速度較大的球之後部所受壓力必較小，結果使其所受之抵抗力大於速度之平方的比例.

從可知理論與現象並無不合之處.在水內下墜的物體方面已可證明了.我們要進而研究空氣內下墜的物體方面發生之現象.

第十三試驗.　一七一〇年六月,有人於倫敦自聖保羅教堂之頂同時放下二玻璃球，其一盛以水銀,其他則爲空氣所滿.在這下墜內，其所經過之道路爲 220 英尺.當時係用一木板,其一邊用鐵釘釘牢,其他邊則裝在一木栓上.二球先置於板上,然後將木栓由一引至地的鐵線抽去，因而板即翻轉,而二球同時向地下來.在抽去木栓時，同時能使一擺鍾鐘振動,故可確知其所須時間.所得一切

列表如下：

水銀球			空氣球		
重量	徑	下墜時間	重量	徑	下墜時間
908*Gr*.	0,8 英寸	4 秒	510*Gr*.	5,1 英寸	$8\frac{1}{2}$ 秒
983*Gr*.	0,8 英寸	4− 秒	642*Gr*.	5,2 英寸	8 秒
866*Gr*.	0,8 英寸	4 秒	599*Gr*.	5,1 英寸	8 秒
747*Gr*.	0,75 英寸	4+ 秒	515*Gr*.	5,0 英寸	$8\frac{1}{4}$ 秒
808*Gr*.	0,75 英寸	4 秒	483*Gr*.	5,0 英寸	$8\frac{1}{2}$ 秒
784*Gr*.	0,75 英寸	4+ 秒	641*Gr*.	5,2 英寸	8 秒

此項試驗方面所觀察到的時間，必須加以修正．按葛里雷所得結果，水銀球於 4 秒內能經過 257 英尺，倘經過 220 英尺，祇須 $3\frac{42}{60}$ 秒．因之，可知板翻轉與抽去栓之中間，或須一些時間，因而下墜時間被增加了．球原係置在板之中間，離栓稍遠；所以下墜時增加了 $\frac{18}{60}$ 秒；我們必須將此數減去方得確數．

此項修正在大的球方面尤爲重要，因爲球徑

旣大,所以增加的時間亦多,必須減去方能用.經修正後,所得六個較大的球之下墜時間如下:

$$8\text{ 秒又 }\frac{12}{60},$$

$$7\text{ 秒又 }\frac{42}{60},$$

$$7\text{ 秒又 }\frac{42}{60},$$

$$7\text{ 秒又 }\frac{57}{60},$$

$$8\text{ 秒又 }\frac{12}{60},$$

$$7\text{ 秒又 }\frac{42}{60},$$

第五個空氣球之徑爲 5 英寸,其重爲 $483Gr$,須 $8\frac{12}{60}$ 秒時間乃能經過 220 英尺.與此相等的水球,其重爲 $16600Gr$,在眞空內,該球之重爲 $483+19\frac{3}{10}=502{,}3Gr$,與同容積的空氣之量相比,如 $502{,}3:19{,}3$. $2F$ 與徑之 $\frac{8}{3}$ 相比,亦是如此,或即是

$$2F:13\tfrac{1}{3}=502{,}3:19{,}3,$$

而由此,卽可知 $2F=28$ 英尺 11 英寸.此球以其 $502{,}3Gr$ 的重量在眞空內下墜時,一秒時間能經

過 $193\frac{1}{3}$ 英寸，以 483*Gr* 重量於一秒內能經過 185,905 英寸。

在眞空中經過 $F=14$ 英尺 5,5 英寸所須之時間爲 $\frac{58}{60}$ 秒，而在此時間內所達到之速度，爲空氣內下墜時所能有之最大速度．用此速度時，球於 $8\frac{12}{60}$ 秒內能經過 245 英尺 $5\frac{1}{3}$ 英寸．今由此減去 $1,3863\cdot F=20$ 英尺 0,5 英寸．尙餘 225 英尺 5 英寸，即爲理論上球所當經過的道路．但按之試驗，所經過爲 220 英尺，所以相差不爲很遠．將各球均計算後，可得一表如下．

球之重量	球之徑	經過120英尺所須時間	理論上所當經過之道路	理論與觀察上所得結果之差
510*Gr*.	5,1 英寸	$8\frac{12}{60}$ 秒	226 英尺 11 英寸	6 英尺 11 英寸
642*Gr*.	5,2 英寸	$7\frac{42}{60}$ 秒	230 英尺 9 英寸	10 英尺 9 英寸
599*Gr*.	5,1 英寸	$7\frac{42}{60}$ 秒	227 英尺 10 英寸	7 英尺 10 英寸
515*Gr*.	5,0 英寸	$7\frac{57}{60}$ 秒	224 英尺 5 英寸	4 英尺 5 英寸
483*Gr*.	5,0 英寸	$8\frac{12}{60}$ 秒	225 英尺 5 英寸	5 英尺 5 英寸
641*Gr*.	5,2 英寸	$7\frac{42}{60}$ 秒	230 英尺 7 英寸	10 英尺 7 英寸

第十四試驗．　一七一九年六月德桑久利(*Desanguliers*)將此項試驗重復試過幾道．他用某種薄膜製成爲球形，先用空的木球包於其外，將薄膜球潤溼，灌入空氣，使其裝滿，於是待其乾，將包於其外之木球取去，使其由一固定的處所下墜，此處所係在一教堂之頂上．如是，此球由 272 英尺之高下墜；同時，尙有數鉛球亦由該處下墜．在教堂之頂上放下墜球之處所，有人在那裏觀察下墜的時間．同時，並有人專門觀察鉛球與薄膜球二者之下墜時間之差．此項差係用一半秒的擺錘鐘之鳴以量之．在底下有一人持有一能計四分之一秒的時計，另外尙有一人用一機器，其上連有一四分之一秒的擺錘鐘．在上的一人亦有同樣的器具．此項機器能隨人所欲立即開始運動或終止．如是，測得鉛球之下墜時間約爲 $4\frac{1}{4}$ 秒；加上前所述之差後，即可得薄膜球所需之下墜時間．如是，五個薄膜球之下墜時間，超過鉛球之時間，爲：

第一次試驗　　$14\frac{3}{4}, 12\frac{3}{4}, 14\frac{5}{8},$

$17\frac{3}{4}$, $16\frac{7}{8}$ 秒,

第二次試驗 $14\frac{1}{2}$, $14\frac{1}{4}$, 14,

19, $16\frac{3}{4}$ 秒.

再加上鉛球之下墜時間 $4\frac{1}{4}$ 秒,即得薄膜球之下墜時間爲:

第一次試驗 19, 17, $18\frac{7}{8}$,

22, $21\frac{1}{8}$ 秒,

第二次試驗 $18\frac{3}{4}$, $18\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{4}$,

$23\frac{1}{4}$, 21 秒.

在上的人所觀察到的時間爲:

第一次試驗 $19\frac{3}{8}$, $17\frac{1}{4}$, $18\frac{3}{4}$,

$22\frac{1}{8}$, $21\frac{5}{8}$ 秒,

第二次試驗 19, $18\frac{5}{8}$, $18\frac{3}{8}$,

24, $21\frac{1}{4}$ 秒.

不過薄膜球下墜時，並不恆循直線道路，有時彎曲，有時並旋轉，因而其下墜時間常常增加了 $\frac{1}{2}$ 秒乃至 1 秒.在第一次試驗方面，第二與第四球較能循直線，在第二次試驗方面，第一與第三較循直線.第五球較爲不定，因而其下墜時間亦即增加.至於球之徑，則我用一線量其週以推得.在以下之表內，我將理論上所推得與經驗上所測得者相較；於此，空氣之密度與雨水之密度相比，我假定其爲 1:860，如是我求得的結果如下.

薄膜球之重量	薄膜球之徑	下墜經過 272 英尺之時間	在此時間內按照理論所當經過之道路	理論上所推得與觀察上所測得二者之差
128 *Gr.*	5,28 英寸	19 秒	271 英尺 11 英寸	-0 英尺 1 英寸
156 *Gr.*	5,19 英寸	17 秒	272 英尺 0,5 英寸	+0 英尺 0,5 英寸
$173\frac{1}{2}$ *Gr.*	5,3 英寸	$18\frac{1}{2}$ 秒	272 英尺 7, 英寸	+0 英尺 7, 英寸
$97\frac{1}{2}$ *Gr.*	5,26 英寸	22 秒	277 英尺 4, 英寸	+5 英尺 4, 英寸
$99\frac{1}{8}$ *Gr.*	5,0 英寸	$22\frac{1}{8}$ 秒	282 英尺 0 英寸	+10 英尺 0 英寸

從可知我們的理論，差不多可以決定水內及空氣內球運動時之全部抵抗力；倘球之速度及大

小均相等,則此項抵抗力與流體之密度相比.在第六章之附註內,我曾用擺錘試驗指出過,相等的球以相等的速度在空氣,水及水銀內運動時,其所受抵抗力與流體之密度相比.在這裏,我已用物體在空氣及水內之下墜以準確的試驗過了. 擺錘之每個振動於流體內引起一運動, 此運動之方向恆與返回來時的擺錘方向相反; 由此項運動所發生之抵抗力以及擺錘之線所受之抵抗力均能使擺錘所受之抵抗力較之在下墜物體方面所觀察到者爲大.按上述的附註內所敍之擺錘試驗,倘物體之密度與水之密度相等, 則當其在空氣內經過一等於其半徑之道路時,即失去其運動之 $\frac{1}{3342}$. 但按本章內之理論,其所失去之運動當爲 $\frac{1}{4586}$; 不過在這裏,我們係假定水之密度與空氣之密度相比,如 860:1. 從可知擺錘試驗方面所得之抵抗力較之下墜試驗方面所得者爲大,其比爲 4:3, 其理由則上已說明了.但擺錘在空氣內,水內及水銀內振動時

所受之抵抗力，以同樣的方法爲同樣的原因所增加，故此項抵抗力之比可以準確至相當程度；此可由擺錘試驗及下墜物體之試驗以知之。我們可以得一個結論，即，物體在稀薄的中介物內運動時，其所受抵抗力，在尋常狀況下，與中介物之密度相比．既得此後，即可推知，將任何種類之球在任何流體內拋出時，其所失去的運動之部分爲何如。

今設 D 爲球之徑，V 爲開始時之速度，T 爲一時間，在此時間內球以 V 在眞空內運動時所作之道路與 $\frac{8}{3}D$ 相比，如球之密度與中介物之密度相比。今將球於流體內拋出，則在任何時間 t 內，其所失之速度爲 $\frac{tV}{T+t}$，其所餘下之部分爲 $\frac{TV}{T+t}$，而其所作之道路，與其在眞空內於此時間中以速度 V 所作之道路相比，如

$$2{,}302585093 \log.\frac{T+t}{T} : \frac{t}{T}.$$

倘運動之速度較小，則所受抵抗力亦可較小，因爲在此狀況下球狀的物體較之圓柱狀的物體之

運動較爲方便.但如速度較大則抵抗力亦可較大,因爲流體之彈性及壓榨不能隨速度之平方而增加.不過這些比較上都是小事,我們可不論.

倘將空氣,水,水銀等流體稀薄至於無限,因而成爲流動性無限的中介物,則其對於拋出的球之抵抗力仍不能多所減小.蓋以上所說的抵抗力,係由物質之惰性所發生,此項惰性爲物質所固有,與物質之量恆相比.不過由黏韌性及部分間之摩擦所產生的抵抗力則可減小一些;此項減小不能影響物質之量,所以其惰性力亦不能減小而上所述之抵抗力仍不變.欲使此項抵抗力減小,必須減少空間內物質之量.由此看來,在天空內向各方向可以自由運動的星球,既無速度減小之現象,則天空中當沒有物質性的流體存在;至於極稀薄的星氣及光線,自然沒有計算在內.

從可知物體於流體內運動時,能引起流體之運動;此項運動之來源,由於流體對於物體前部之壓力超過物體本身之後部所受之壓力.就其與物

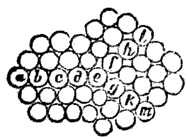
質之密度爲比而論，稀薄的流體內之此項現象，不能較之空氣，水，水銀內爲少．此項壓力之超過，不僅能發生流體內之運動，兼能使物體之速度減小。所以任何流體內之抵抗力與由物體所引起的運動相比；雖然以太爲極稀薄的體，但就其密度之比而言，亦不能使其抵抗力特小於空氣，水，水銀等流體。

第八章

論流體內之傳達運動

§62. 定理. 壓力在流體內傳布時，祇有流體之部分在一直線上，乃能使其成爲直線的.

今設 a,b,c,d,e 諸部分在一直線上，則壓力可由 a 傳至於 e, 但在其斜方向內之部分 f 及 g 亦能被 e 所斜推動，前者亦必將其所受之壓力傳至於其前的部分 h 及 k, 因爲必須如是，f 與 g 乃能忍受其所受之壓力. h 與 k 又必須傳其所受之壓力至 l,m 二部分乃能忍受其本身所受之壓力，等等，以至於無限. 如是，壓力傳至不在直線上的部分時，必分散向斜方向傳出，以至於無限. 此項斜方向內之壓力又復分散傳至各斜方向；如

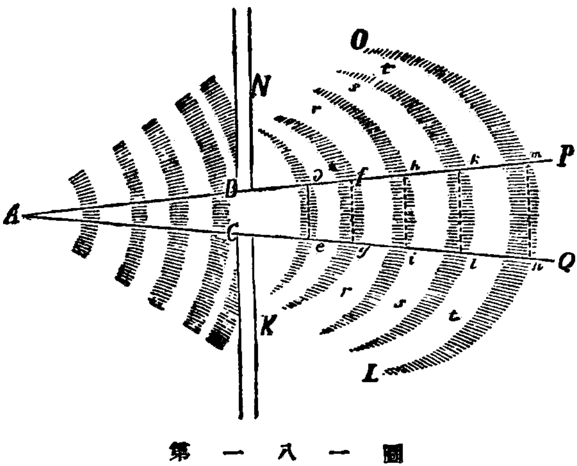


第一八〇圖

是可儘分散下去.此即所欲證者.

系.　倘有由已知點出發在流體內傳布的壓力之一部分,爲一障礙物所阻,則其未被阻的部分即在障礙物外面之空間內傳布.此可如下明之.

今設壓力由 A 點傳布,並沿一直線.設 $NBCK$ 爲一障礙物,中有一孔 BC; 壓力至此障礙物即被阻,其通過 BC 孔之部分,則以圓錐體形仍向外傳



第一八一圖

布,此形爲 APQ. 今用 de, fg, hi, 等諸平面將此圓錐形分割成爲諸段; 如是則 ABC 圓錐形因壓力

之前進能對於 $degf$ 圓錐形部分之面 de 施壓力，此圓錐部分重復對於其前的 $fgih$ 部分之 fg 面施壓力，等等，以至於無限．按運動第三律，$degf$ 之另一面 fg 亦被 $fgih$ 部分所壓，與其本身之壓後者相等．所以在 Ade 及 $fghi$ 中間之 $degf$，兩面俱受壓迫，故祇有各方面所來的壓力相等，乃能保持其形狀不變．因之，該部分向 df 及 eg 兩面之擴張力，與 de 及 fg 兩面所受之壓力同其強，倘該兩面沒有流體將其抵住，則該部分卽會向該兩面推出．如是，該部分對於 df 及 eg 兩面外之流體必施以一種壓力，此壓力與 $fghi$ 所受者相等．所以由 df 及 eg 兩面所傳出之壓力，向 NO 及 KL 二空間傳布時，不能較之由 fg 面向 PQ 傳出時爲弱．此卽所欲證者．

§ 63. 定理． 在流體內能傳布的運動，恆出離其直線的道路而向不動的空間．

第一事． 設運動由 A 點傳出（圖 181），經 BC 孔而入於 $BCQP$ 錐形空間仍循直線進行，此

項直線係以 A 爲心散發出去。我們現在假定，此項運動係靜水面上之波形運動。今如 de, fg, hi, kl 等等爲各波之最高處，其間有凹處將其隔開。因爲水在波之凸起處較高，故水必由此項凸起之兩端 e,g,i,l 以及 d,f,h,k 等等諸點向低處 KL 及 NO 流動。又因波中間之凹處較 KL,NO 部分更低，故後者處之水亦向前者處流動。由第一種運動，凸處之水向兩旁流動，而由第二種運動則凹處亦向兩旁擴充，故均能與 KL 及 NO 相傳達。同時，由 A 向 PQ 之波運動，使每一凸起的水向前推進入於其前的凹處，其速度自不能超過下降的速度。又因兩旁的水向 KL 及 NO 下流，其速度亦必如是，故波之向 KL 及 NO 推進，其速度與由 A 向 PQ 直線進行的速度相等。如是，兩旁的空間依次爲波 $rfgr$, $shis$, $tklt$, $vmnv$, 等等所侵入。此即所欲證者。

此種關係，我們不難用試驗在靜水方面經驗到。

第二事．今設 $de, fg, hi, kl, mn,$ 等等爲衝動，由 A 點在一有彈性的中介物內傳布出去．試設想此項衝動之傳布，在於中介物之緊縮及擴張，其最稠密之部分係在一球面上，此球面之中心點爲 A；二衝動間之相隔亦相等．今卽用 $de, fg, hi, kl,$ 等表此項最稠密之部分，係經過 BC 孔而傳出者．因爲中介物在此項處所較之在 KL, NO 空間方面爲密，故中介物必向此項處所推進，猶之向其中間之較稀薄處推進一樣．如是，稀薄的處所恆向稠密之處，稠密之處所則恆向稀薄的方面，故中介物卽在此項運動中．但不斷的衝動之來源，係由於較密的部分恆向其中間較稀薄的部分推進而衝動之速度，在向 KL, ON 空間方面與此大約相等，故該項衝動之向 KL, ON 空間推進，其速度恆與由 A 出發前進之速度相等．因之，整個空間 $KLON$ 可被侵入．此卽所欲證者．

在聲浪方面，可以經驗到此項事實．蓋如聲浪由山後傳出或由窗戶傳入房內時，房內各處均可

聽到，不會被對窗的牆壁所反射回去，這是我們用官覺所可知道者.

第三事. 今設有一任何種類之運動由 A 出發傳布經過 BC 孔.其傳達之方法，祇能由接近 A 之部分向其前面之部分壓迫，如是發生運動而傳出. 又因被壓迫的部分能流動向受壓迫較少之面擴張，故此項部分必向 KL, ON 以及 PQ 各方向前進.因此，經過 BC 孔後，該項運動即開始擴張出去，猶如由開始點及中心點一樣的傳布.此即所欲證者.

§ 64. 定理. 凡顫動的物體，在有彈性的中介物內，其衝動的運動恆以直線向各方向散發；在無彈性的中介物內，能引起圓形的運動.

第一事. 顫動的物體之各部分均交互的向前及後退，故能對於其近旁之中介物部分施以壓迫推動，因而使其緊縮，繼則復使其伸張. 所以與顫動物體相接近的中介物之部分能交互的前進及後退，如顫動物體本身之顫動部分一樣，同時，並

將其此項運動再傳至其接近的部分等等，以至於無限．因爲此種作用，故不獨與顫動的物體直接相接近的中介物之部分能發生一密一疏的交互狀況，而且此種運動能傳出去至中介物之較遠的部分．如是，顫動物體四周之中介物部分，不是同時前進或後退者（因爲如果如此則不能發生一疏一密的狀況），而爲交互的互相接近或疏遠，故其距離常變動，在密時較相接近，疏時即相離．換言之，即在一時候內，有若干部分前進，若干部分則後退．此種交互狀況可直傳至無限．前進而密的部分發生衝動的作用，此項衝動即由顫動物以直線傳達出去．因爲物體顫動時，其發生衝動係在相距等久的時間內，故其傳達亦有等距的現象．雖然物體之顫動係有一定方向，但其在中介物內所傳出的衝動，按之前節，係向各方向傳出，故顫動體本身成爲一中心，而其傳達則循同心的球面散發出．

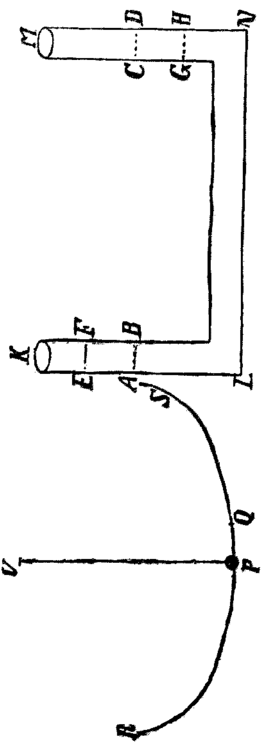
這個事實我們可用手指在水內之顫動以明之．我們可看到所發生的波，不僅在顫動的方向內，

而且不久即傳至手指之四圍，以同心圓形圍着手指向各方向傳布出去．這裏，波之重代替了彈力．

第二事． 設中介物無有彈性，則爲顫動物體之部分所壓的中介物之部分不能緊縮而稠密，所以運動卽向中介物最易退讓的一面傳出，卽是，向顫動物體一時力所不及之處．將一物體在一任何中介物內拋出時，其狀況亦是如此．在物體之前的中介物固被壓而退讓，但並不能退至於無限，而以圓形運動侵入物體之留下的空間．故不論顫動的物體向何方向運動，但退讓出來的中介物恆侵入物體所遺下之空間，而作圓形的運動，倘物體仍返其原處，則中介物仍即讓出而亦返其原處．顫動的物體雖不必爲堅固的，而可有韌性，但其大小並不會因此而有改變，因爲他的顫動並不能對於其周圍之中介物施以緊縮作用，僅能使其退讓而已．所以其結果，則使中介物讓出其處所而侵入物體所遺下之空間．此即所欲證者．

系． 所以好多人相信火焰之部分能發生壓力，

此項壓力並可籍中介物之力以直線傳出，這實在是無稽之想.倘有此項壓力，則必非由火焰之部分所發生，而當由火焰全部之擴張以求之.



第一八三圖

§ 65. 定理. 今設水在一管之兩旁垂直的股 KL, MN 內上下運動. 今試作一擺錘，其懸點與振動點間之距離等於管內水長之半. 如是則水上下運動之時間，等於擺錘左右擺之時間.

我量水之長，係沿管之軸及其股，並設其與該項軸之和相等. 水與管壁相摩擦而發生之抵抗力，我姑且不計算.今設 AB 與 CD 爲水在股內所達之平均高；當 KL 內水升至 EF 高時，MN

內水即降至 GH. 又設 P 爲擺錘之錘，VP 爲其線，V 爲懸點，$SQPR$ 爲擺錘所作之擺線，其最低點在 P，而 PQ 弧則等於 AE 高. 使水之運動交互的增加及減少的力，即爲一股內水之重量超出他股內水之重量之餘重. 所以 KL 內水如升至 EF 而 MN 內水降至 GH，則該項力等於 $EABF$ 水重之倍，故其與全部水重相比，如 $EA:VP$，或如 $PQ:PR$. 又，能使重量 P 於 Q 點被加速或遲緩的力與其全重量相比，如 PQ 與 PR 相比. 因之，水與擺錘之運動的力(能作成相等的道路 AE 及 PQ) 與運動的重量相比. 倘水與擺錘在開始時靜止着，則此項力之作用，能使二者在相等的時間內作相等的運動，而且同時前進及後退. 此即所欲證者.

系 1. 不問其運動之強弱如何，水之交互的上升下降有等時性.

系 2. 設管內水之長爲 $6\frac{1}{9}$ *Par.* 尺，則水在一秒鐘內下降，其上升時間亦如之，以至於無限. 從可知長爲 $3\frac{1}{18}$ 尺的擺錘，其振動時間爲一秒.

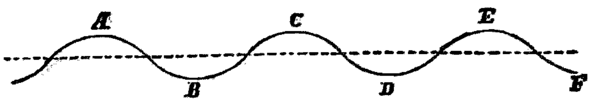
系 3.　設水之長增加或減小，則此項交互運動之時間亦增加或減小，其比爲長之平方根。

§ 66. 定理.　波之速度與其寬之平方根相比。

此可由下節知之。

§ 67. 問題.　試求波之速度。

試作一擺錘，其懸點及振動點間之距離與波之寬相等，如是則波經過其寬所須之時間，很近似



第一八三圖

的等於該擺錘完成一次振動所須之時間。

所謂波之寬，係指波方面二凹處或二凸處之最低或最高點間之距離。今如 $ABCDEF$ 爲靜水之面，此面經相繼的波動而成爲起伏；設 A, C, E 等爲凸點，B, D, F 等爲波之凹處。因爲波之運動是在於水之起伏，故其 A, C, E 諸點一時雖爲最高點，但以後則又成爲最低點；又因使水起伏的運動力，能使高點降爲最低，最低點升至最高者，實爲

所起來的水之重量,故此項起伏,亦卽與水管中交互運動之狀況相似,其關於時間之定律亦相同.所以倘最高點間之距離及最低點間之距離等於擺錘長之倍,則在一振動的時間內,最高點卽轉而成爲最低點,在第二振動的時間以後,復又上升爲最高點.故一波之傳達時間,爲二次振動,此卽是說,擺錘之二次振動時間,等於波經過其寬所須之時間.所以倘擺錘之長等於波之寬,則在此時間內擺錘作一次振動.

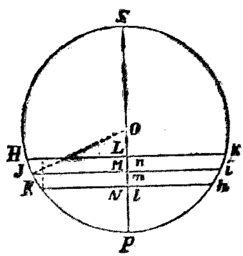
系 1.　所以 $3\frac{1}{18}$ 尺(*Par.*)寬的波,經過其寬所須之時間爲一秒鐘.在一分鐘內,所經過者約 $183\frac{1}{3}$ 尺,一點鐘所經過者約爲 11000 尺.

系 2.　大或小的波之速度,其增加或減小與其寬之平方根相比.這裏,我們假定水之部分以直線上升或下降;這可說與事實不甚相符,因爲實際上其所經道路爲圓弧.所以這裏所得之結果,祇能視爲近似的.

§ 68. 定理.　倘衝動力在流體內傳布,則流體

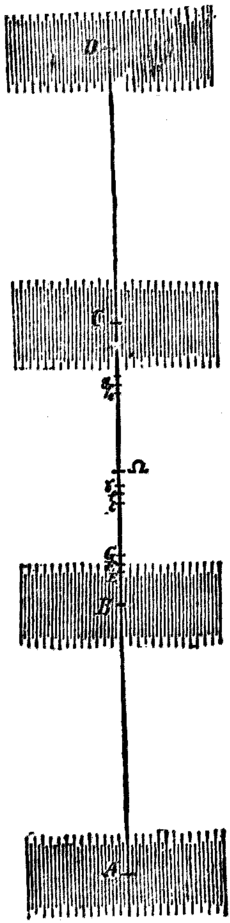
之各部分以最短的交互運動前進及後退，而且其加速及遲緩，恆按照擺錘振動之定律.

今設 AB, BC, CD 等等爲相繼的諸衝動力間之距離，ABC 爲其進行的方向，E, F, G 爲三個中介物內之物理的點，中介物係靜止着，而此三點則以等距分配在 AC 線上.又設 Ee, Ff, Gg 爲極短而相等的道路，該項點作交互運動時，其後退及前進須經過之；$\epsilon, \varphi, \gamma$ 則爲任意的處在其間的三點，EF, FG 爲物理的線，或中介物之線的部分，亦在該項點之間，但漸漸過去落在 $\epsilon\varphi, \varphi\gamma$, 及 ef, fg 處.今作 $PS=Ee$, 將其於 O 平分之，並以之爲中心，以 OF 爲半徑作圓 $SJPi$. 整個的圓周所表者爲一振動之全部時間；其上之部分所表者則爲與之相比的該項時間之部分.經過其時間之一部 PH 或 $PHSh$ 後，即作 HL 垂線垂於 PS 上，(或作 hl 垂於



第一八四圖

PS 上),而如設 $E\epsilon = PL$ (或 $= Pl$),則物理點 E 即落在 ϵ 點.如是則每個點 E 由 E 經過 ϵ 到 e, 復由此經過 e 而回至 E, 其所作振動一如擺錘之振動，其加速及遲緩之程度全相同.所欲證明者，是中介物之該項物理點，必爲此種運動所推動.今試設想一中介物，爲一某種原因所推動而作此項運動；則可研究其所得結果如何.



第一八五圖

試於圓周上取相等的弧 HJ, JK, 或 hi, ik, 其與全圓周相比，猶如 EF,FG 二相等

的線，與 BC 空間相比。今作垂線 JM 與 KN 或 im 與 kn，則因 E, F, G 點相繼爲相似的運動所推動，其一往一返所成之振動之時間等於衝動由 B 至 C 所須之時間，故如以 PH 或 $PHSh$ 表 E 點開始運動以後之時間，以 PJ 或 $PHSi$ 表 F 點開始運動以後之時間，以 PK 或 $PKSk$ 表 G 之時間，則

$$\text{在往時}\quad E\epsilon=PL,$$

$$\text{在往時}\quad F\varphi=PM,$$

$$\text{在往時}\quad G\gamma=PN,$$

$$\text{在返時}\quad E\epsilon=Pl,$$

$$\text{在返時}\quad F\varphi=Pm,$$

$$\text{在返時}\quad G\gamma=Pn,$$

因而 $$\epsilon\gamma=GE-LN,$$

以及 $$\epsilon\gamma=GE+ln=GE+LN.$$

但 $\epsilon\gamma$ 爲 EG 部分之伸張之寬，於 $\epsilon\gamma$ 處所發生者，此項伸張與該部分在往時所作之平均伸張相比，如 $GE-LN:GE$，而與返時者相比，則如 GE

$+LN:GE$. 又因

$$LN:KH=JM:OP \quad (1),$$

$$KH:EG=PHShP:BC$$

$$=OP:V \quad (2)$$

(這裏我們用 V 以代一圓之半徑，此圓之周係與 BC 距離相等)，故可得

$$LN:EG=JM:V \quad (3).$$

從可知 EG 部分之伸張，或物理點 F 在 $\epsilon\gamma$ 處之伸張與其在 EG 處之平均伸張相比，如

$$V-JM:V(\text{在往時})$$

$$V+JM:V(\text{在返時}).$$

其彈力與 EG 處之平均彈力相比，如

$$\frac{1}{V-JM}:\frac{1}{V}(\text{在往時})$$

$$\frac{1}{V+JM}:\frac{1}{V}(\text{在返時}).$$

由此可知，在往時，E 與 G 點之彈力相比，如

$$\frac{1}{V-HL}:\frac{1}{V}$$

以及
$$\frac{1}{V-KN}:\frac{1}{V}.$$

此二力之差與中介物之平均彈力相比，如

$$\frac{1}{V-HL}-\frac{1}{V-KN}:\frac{1}{V}$$

$$=\frac{HL-KN}{V^2-V(HL+KN)+HL\cdot KN}:\frac{1}{V}.$$

今如假定 HL 與 KN 較之 V 爲無限小，則此二比可成爲

$$\frac{HL-KN}{V^2}:\frac{1}{V}$$

$$=HL-KN:V.$$

因 V 爲已知，故力之差與 $HL-KN$ 相比，或因

$$HL-KN:HK=OM:OJ=OM:OP,$$ 即

$$HL-KN=\frac{HK\cdot OM}{OP}(HK \text{ 與 } OP \text{ 爲常數}),$$

故該項差與 OM 相比．今如將 Ff 於 Ω 平分之，則力之差與 $\Omega\varphi$ 相比．仿此，在物理的線 $\epsilon\gamma$ 退回時，ϵ 與 γ 所固有之彈力，其差與 $\Omega\varphi$ 相比．但此項差即爲 ϵ 之彈力超過 γ 之彈力之餘，故亦即爲

使 $c\gamma$ 線在往時能加速,在返時則遲緩的力,故 $c\gamma$ 之加速的力與距振動之平均處所 Ω 相比.又按第一編 § 78, 時間可用 PJ 弧以表之;故中介物之線的部分能按照預定的定律,即按照擺錘之定律運動;凡構成中介物之一切線的部分亦均如此.此即所欲證者.

系. 由此可知,傳達出去的衝動力之數等於一顫動物體之振動數,而且前者在傳達出去時亦不會增加.蓋物理的線 $c\gamma$ 回至其原處時,即靜止下來,倘非顫動體之繼續的衝動,或由物體所發出之衝動,則不會再繼續前進;故如顫動體之衝動停止,則此項線之運動亦即停止.

§ 69. 定理. 在彈性的中介物內傳布的衝動之速度,其相比等於彈力之平方根之正,及密度之平方根之反二者之合.不過須假定彈力與稠密之度相比.

第一事. 設中介物爲等質的,其中衝動力間之距離爲相等的,但其中之一的運動則較其餘爲

強．如是則相似的部分之緊縮及伸張與該項運動相比，不過此種相比性却並不很準確，倘緊縮及伸張不很大，則可很近似的不差，在物理上亦可說已夠用．運動的彈力與緊縮及伸張相比；在同時間內所產生的相等部分之速度，則與該項力相比．故相當的衝動之相等相當的部分同時在空間內經過其一往一返之運動，其速度與所經之道路相比；而且在一往一返時間內恆繼續經過其寬的衝動，陸續的前進至在其前的地位，而因其間之相距均等，故其速度在一中介物及他中介物內亦相等．

第二事． 倘距離或寬在其一中介物較之其他中介物內爲大，則可假定其相當的部分在一往一返時所作之道路與寬恆相比．如是則其緊縮及伸張均相等．故如中介物爲等質的，則運動的彈力亦即相等．爲此項力所推動的物質其比如寬相比，而在其內往返的空間，其比亦如之．從可知往返所須之時間，其比等於物質之平方根之正及空間之平方根之正二者之合；因而與空間本身亦相比．但

在一往一返的時間內，衝動所經過者爲其寬，即與時間相比的道路，故其速度相等。

第三事．在密度及彈力均相等的中介物內，一切衝動之速度均相等．倘將密度或彈力增加，則運動的力以彈力爲比而增加，所運動的物質以密度爲比增加．發生與前相同的運動之時間，即以密度之平方根增加，以彈力之平方根減小．所以速度之相比，等於密度之平方根之反，及彈力之平方根之正二者之合．此即所欲證者．

由下節之證法內，此定理之無誤更可顯然明白．

§ 70. 問題．　一中介物之密度及彈力爲已知；今求衝動之速度．

我們試設想，中介物爲一在其上的重量所壓，猶如空中大氣之被壓一般．設 A 爲等質的中介物之高，其重量與在其上的物體之重量相等，其密度與被壓縮的中介物之密度相等，衝動卽在後者內傳布．

設再設想一擺錘，其懸點與振動點間之距離爲 A；當衝動經過一道路（此道路等於以 A 爲半徑的圓周）時，此擺錘作成一次一往一返的振動．如 § 68 內之證法，可知任意的物理線 EF 在各個振動內經過 PS 道路時，在最外點 P 與 S 被一彈力所推動；此彈力與其重量相等．此線作各個振動時所須之時間，等於其在 PS 長的擺線上振動所須之時間，因爲相等的力能推動相等的物體經過相等的空間．因振動時間與擺錘長之平方根相比，而擺錘之長則等於全擺線之半，故一振動之時間與擺錘（其長爲 A）振動之全時間相比，如 $\sqrt{\frac{1}{2}PS}:\sqrt{A}$，即是，如 $\sqrt{PO}:\sqrt{A}$．但在 P 與 S 點推動 EG 線的彈力，與全部彈力相比，如 $HL-KN:V$，或因 K 與 P 相合故如 $HK:V$．又因在 EG 之上施壓迫的重量與前者之重量相比，如 A 與 EG 長相比，故經組合後，即可得在 P 與 S 點施於 EG 的力與該線之重量之比爲 $HK\cdot A:V\cdot EG$，或如 $PO\cdot A:V^2$（因爲已知 $HK:EG=PO:V$）．

因相等的物體經過相等的道路所須之時間與力之平方根成反比，故在重量作用下的一振動之時間，其相比如$\sqrt{V^2}:\sqrt{PO\cdot A}$，其與長爲 A 的擺錘之一次振動時間相比，如$\sqrt{V^2}:\sqrt{PO\cdot A}$及$\sqrt{PO}:\sqrt{A}$ 二者之合，即是，如$V:A$.

但在一往一返的一次振動之時間內，衝動所經過之道路等於其寬，故其經過 BC 道路的時間與一往一返所成的一次振動之時間相比，如 $V:A$，即是，如 BC 與一圓周相比，此圓之半徑爲 A.

又，衝動經過 BC 道路所須之時間與其經過等於該圓周之長的道路所須時間相比，亦是如此．所以，在這樣的一次振動之時間內，衝動能經過該圓周之長．

系 1. 衝動之速度，等於重物以等加速度運動下墜時經過 $\frac{1}{2}A$ 所可達到者．

蓋在此項時間內，衝動能以下墜內所能達到之速度經過一道路，與 A 相等，所以在一往一返的振動時間內，其所經過之道路與以 A 爲半徑的

圓之周相等,因爲下墜時間與振動時間相比,如圓之半徑與其周相比.

系 2. 因 A 與流體之彈力成正比,與其密度成反比,故衝動之速度,其比等於密度之平方根之反,彈力之平方根之正二者之合.

§ 71. 問題. 試求衝動間之距離.

我們試求與一已知時間相當的物體之振動數,此物體之顫動即爲發生衝動之原因,然後用此數以除該時間內衝動所經過之道路.如是所得之數即爲其寬.

§ 72. 附註. 最後的諸定理,適用於光及聲之運動.光之傳達係循直線,不能由單純的一衝動所發生.聲出於顫動的物體,即爲空氣內所傳布出的衝動.此項衝動可於對方的物體內引起顫動,即爲其明證;不過聲浪本身須重而深.發聲物體邊上所發之聲能引起顫動,這是普通所知道的事實.由聲音之速度,亦可得其證明.

雨水之比重與水銀之比重相比約爲 $1:13\frac{2}{3}$,

倘後者在氣壓表內達到 30 英寸高，則空氣之比重與雨水之比重相比，約爲 1:870; 所以空氣之比重與水銀之比重相比，約爲 1:11890. 又因水銀之高爲 30 英寸，故空氣之高(其重能壓緊在下面的大氣)約爲 356700 英寸或 29725 英尺. 在以前的問題 (§ 70) 之證法內，我們曾用 A 以表此高. 以 29725 英尺爲半徑所作之圓，其周爲 186768 英尺. 擺錘之長倘爲 $39\frac{1}{5}$ 英寸，則由一往一返所合成之振動，須二秒鐘乃能完成，故長爲 29725 英尺的擺錘須於 $190\frac{3}{4}$ 秒內乃能完成該項振動. 在此時間內，聲浪能經過 186,768 英尺; 在一秒鐘內能經過 979 英尺.

不過在此項計算方面，關於空氣各部分之厚薄一層，我並沒有計入. 空氣之重與水之重相比，約如 1:870, 而鹽之密度約爲後者密度之倍. 今如假定，空氣之微粒與水或鹽之微粒之密度相等，其稀薄之狀況，係由其中間之空間所致，則空氣微粒之徑與二微粒中心之距離相比，約如 1:9 或 1:10,

與二微粒間距離相比,如 1:8 或 1:9.

所以,聲浪一秒鐘所經過之 979 英尺上,尙須增加 $\frac{979}{9}=109^{-}$ 英尺,故聲浪於一秒鐘內約可經過 1088 英尺.此外則空氣內之水蒸氣,其緊張力與空氣者不同,故其所能傳之聲亦不同,所以在空氣之傳聲方面,差不多沒有參加的部分.今設此項部分靜止着,則運動藉純空氣之傳達,能較速進行,其度與所少的物質量之平方根相比.故如大氣由十分純空氣一分蒸氣所成,則速度之增加爲 $\sqrt{11}:\sqrt{10}$, 約如 21:20, 較十一分盡爲純空氣時稍大.以上所得聲之速度,必須以此項比例增加之.故一秒鐘內速度約爲 1142 英尺.在春秋兩季必係如此.因爲空氣於此兩季內因適當的溫度之作用而稀薄,故其彈性亦卽增加.在冬季時,空氣因寒而緊縮,其彈力減小,故運動必以密度之平方根爲比較遲.在夏季時必稍速.

在試驗上,我們曾經證明聲在一秒鐘內可行 1142 英尺.

既知聲之速度後，即可求振動間之距離．少維安(*Sauveur*)曾用試驗證明一五尺(*Par.*)長的管所作之聲浪等於一弦所作者，此弦之振動數爲一秒鐘 100 次．所以一秒鐘內聲之 100 次振動所經過之空間約爲 1070 尺(*Par.*)，而一振動所佔之空間約爲 10,7 尺，即，等於管之一倍．因此發聲管內所作聲之振動其寬約爲管長之倍．

同時，我們又可知道，何以發聲物體之運動停止，則聲亦即停止；我們並可知道，何以在離發聲物較遠處不能較之在近處所聽到者爲較長．由所得之原則，亦可明白聲經語管能放大之理．每種交互運動當其被反射時能被同一的原因所增強；所謂同一原因，即發生此的原因．在管內運動之消失較遲，其被反射較強，因爲管對於聲之散發有阻礙力，故每次反射時能引起新運動而增加原來之運動．

此爲聲浪方面之主要的現象．