汪奠基著

科學叢書

# 邏輯與數學邏輯論

商務印書館發行

科學叢書

# 邏輯與數學邏輯論



中華民國十六年十二月初版

（圖）每册定價大洋貳元伍角
外埠酌加運費匯費

著作者　汪奠基

發行兼印刷者　上海寶山路　商務印書館

發行所　上海及各埠　商務印書館

The Science Series

LOGIC AND MATHEMATICAL LOGIC

By

WANG TIEN CHI

Ist ed., Dec., 1927

Price: $2.50, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.

SHANGHAI, CHINA



一一四三分

# 邏輯與數學邏輯論

本書重要說明:

我想用一部極簡單的歷史敍論法,將邏輯形式原理與它的進化發展,一一分別標明,所以試編這部"邏輯與數學邏輯論。"其內容約爲二部:

第一部　邏輯學

(一) 第一二兩篇說明邏輯普通觀念和科學作用的分別,所謂形式邏輯的基本方法,完全以亞里士多德式的精神爲歸。

(二) 第三四篇則爲邏輯問題的歷史研究,表示人類智慧認識方法的批評進化與邏輯哲學問題的傾向。

第二部　數學邏輯

(三) 本部第一二三各篇完全發揮近代邏輯革新的原理,同時與第一部批評的傾向合而爲一科學邏輯的新形式表現。對於數學演繹的基本原理特別詳明,結果認數學科學思想握哲學思想的權能。

十五年九月十號,北京。

# 邏輯與數學邏輯論

## 目　錄

## 第二部 數學邏輯原理

# 第一部

# 形式邏輯

# 第一篇　形式邏輯導言

## 第一章　邏輯通論

### 一　邏輯定名與其功用

我們先說形式邏輯爲思想或認識的工具。這種工具對於人類是否完全可能？哲學界續續不斷底爭點，差不多都從這個問題發端。由歷史上知道從前的哲學家都想到科學中必然有一種特別科學總各科學之祕密而爲一切需要的工具。從蘇格拉第與柏拉圖(Socrate et Platon)的辯證哲學(Dialectique)到亞里士多德的分析論(Analytique)，都是研究這個問題的答覆。在斯多葛派學者(Stoïcisme)特定名爲"邏輯。"同時如哀畢呂的"經典法論，"亦爲此類思想運動之最著者。中世紀來所謂邏輯研究，成爲各科學之官能，降及十六七世紀後，進而有所謂方法論的研究。如是哲學家科學家，各自謀其辯證之方法與思想工具的應用。結果

在我們知慧與科學的完備上,哲學與認識的演進上,令我們思想界無法否認其:"惟邏輯方法爲可能。"

雖然,二三世紀來,邏輯革命之聲,在在皆是。所謂"機關論"(Organum)已不能首列其席,而"新機關論"(Novum Organum)亦難安於作則;不過這種反聲進步,實在只算一種理性或論理的批評進化,爲人類思想的自然表現。譬如說邏輯不是一種"藝術或科學,"謂人之理性,爲自然存在於思想中者;這都是從思想中作思想的批評,對於邏輯本身,沒有重要底貢獻。實際專對這種異論,很能簡單底答覆:"邏輯並不是要給人以理性,而是示人以善用理性的方法。" 邏輯眞正的精神,只有表現其能逼近理性之前,而不能滿足於暴棄之行。所以只有科學家哲學家對於求知上,認邏輯研究爲必要;而下儒俗學之士,尋常幾皆疏忽其作用。因爲人類求知的心理,不能演爲一致;所以一般應用道理中,不知道雜入多少非論理的錯誤。這種錯誤在粗俗精神習慣裏成了不可解的邏輯,而在普通科學精神的觀察中,因此也常常有比例的加入;所謂文化生活的社會上,許多不可能的非理性勢力,不可言的非正確判斷,幾乎都是這種不可思議的普遍,使人人非理非法底自然承認。所謂"通俗"之論,正是邏輯批評最難着手的深處。因爲通俗的

性質,往往不能通分於各個人類,而亦不足適應於眞精神的要求;卽於人生哲學方面,已不成其爲法,然而因爲成了"通俗公例,"所以巴斯加兒(Pascal)說:"人生哲學(道德之原理)要在我們善於思想。" 就是說,通俗之中,必然有邏輯的應用。

## 二　邏輯與人生哲學的比觀

道德上的善惡與邏輯上的眞僞本不同類,然而前者能受邏輯的判斷;道德上的眞僞與邏輯上的好壞亦不同類,然而它又能受邏輯的分辨。道德上的事件都是非進取的,而邏輯的精神,雖不能創造完全智慧底人類,却能促進與發展人類思想的進步。它由善惡眞僞的觀察上,能引導精神,隨入正路;又由生命或科學,或推理,或事實之估定,或估定事實之發展的各個範圍裏,找出錯誤的原因來。其行動與判斷,完全由眞理試驗中比較出來;如果能得到十分滿足的結果,或作道德的標示,或作科學的定律,都是絕對的論理功用。我們社會中,知識界,假如說到沒有邏輯的一字,那麽,一定是不要眞理,肯定錯誤;如此世界,其實現底可能,一定超過我們論理空間。在我們自己的經驗過程上數來,這是意外的,不久的;在人類中只有最大底或然偶現可能。再假如眞理本身爲個體的無窮,邏輯本身又爲個體的差別,

那我們又一定不知道所謂眞理的存在,簡而言之,邏輯一字亦必不能認識;這至少是我們不可能底空間。

我們的空間是邏輯的,進而言之,是科學的。我們的事事物物,一往一來,一起一伏,一加乘一減除,環天象,繞地面,長年戰禍,終日勤勞,種種機械的動,許多幾何的形,上下左右,古今前後,如整數之序列,如時間之接續,皆歷歷陳於各個人們的腦際,無論其若何無算,終於有限底安排。這都不是心靈記憶的作用,實在是形式邏輯的原理。再如觀念之追隨,定量之正確,觀察之精深,推理之堅固,以及普通知識之觀察,指導,完備,修正,由推理到想像,由官感與記憶到理性本身,也都不是心理學的範圍所能包括;而人生哲學,更不能單獨過問了。但是它與邏輯的接近很多,它用邏輯解決問題的地方,不獨像其它科學樣完全倚爲方法,還具一種特別情形,直認爲論理的根據。因爲邏輯問題中包含我們智慧預料的各種問題。人爲道德動物,其條件須有知識存在;其所預料的總集合中又須爲邏輯所有。所以說"善於思想,即爲道德之原理。"而善於思想的條件,當不能出邏輯所有預料之外。人類同非理性的爭鬬,有頂戴眞理屈服懷疑的可能,皆恃眞正邏輯的工具爲其科學攻取的利器。因爲意志勇敢強健,需用眞理支持一切,

精神如果沒有深澈地信仰,則必失之於顛;從是疑信無關,生死不省的現象,漸演爲不知所以然的進步,與不知所以然的競爭;我們社會上往往說是:"這眞豈有此理,"正是此類的驚駭　從邏輯的科學上看,我們不是認識權力的嗎? 那麼,就應該知道使用權力征服奇異。我們又不是認識仇敵的嗎? 那麼,也就應該知道據理力爭,掃除阻礙。邏輯的認識爲完全底實際底,專爲出奇攻敵,不是數學家只認數學的證明,演說家只有類推的比喻,也更不是詩人用數學的演算,數學家做詩人的修辭。它的習用處理,對任何物爲有效,對任何理亦爲適合,因爲它研究一切知識的方法,又包所有特殊的方法,它不只是告訴我們在什麼物體上應用,還告示我們在什麼程度上,什麼時間上就應該用的。這裏自然表現邏輯爲各科學之科學。譬如數學物理,自然科學,實業,商業,都是部分的應用知識佔有,而邏輯則專爲我們預備一切應用的可能;一層用理性作徵求科學的工具,一層用科學作完備理性的工具。這都只是惟一邏輯的原動所能。

## 三　邏輯爲各科學的演合與其對各科學的關係

這樣看來,邏輯成了各科學公理的演合,與包容萬有現象的公同宇宙了。自然,譬如社會的事變無窮,如

果沒有邏輯習慣,撇去微末,拮起通點,又何從解決社會問題? 所謂通點,又是什麼意義? 在人生哲學,社會科學之中,實在很不容易回答,惟有舉出眞正演繹精神的科學爲例。如普通算學的加法定律,我們說五加七等於十二,八加四也等於十二,三加九也還是等於十二;假如加減乘除合起來,求十二的演算可以推到無窮。我們把這許多求十二的式子列起來,知道任何等式之左邊等於其右,而任何等式之左邊亦必等於其它任何等式之右邊,換言之,任何兩等式之同邊相等,而任何兩等式之異邊亦必相等。同其同爲同,而異同其同亦必爲同,是卽我所謂"通點,"邏輯定律名之曰:"齊一律。" 凡是等於十二的數爲邏輯必然結果,而求所以等於十二的演算,則爲各科學分類的研究,故曰:一切科學爲一般眞理的法式。

完全研究這個問題,就是邏輯的方法論。在我們所謂形式邏輯之外,而爲實用邏輯的對象。但是形式與實用之分,不過爲研究上相對的便利,並非絕對須如此劃別,因爲實用方面的原素,自然要與形式方面的方法相接,而形式方面的研究,亦自然爲實用上一般應用的假定。我們要知道科學原理與邏輯對象的勾結有如鐵圜相連,非常堅固。譬如閉眼摸着鐵鍊,總覺得各

圜節處處不斷,而由節節生節的結點,表現鐵鍊的存在是連環的,這種存在就是邏輯在科學中的實體表現。假如鍊子的各節全截斷了,部分的眞實仍就存在,所謂"鍊子"就沒有了。所以科學本身與理論都是眞實的分子,而在普遍與實驗上,就要邏輯聯和,因爲邏輯的科學是無錯誤的。

## 四 科學眞實與邏輯思想律的範圍

所謂科學,都有一定的實體;其所研究的定律,就是它的對象。譬如數學科學方面的幾何學,其實體爲容積與形體二者;天文學的實體,則爲星辰之類;生物學的實體,則爲生命現象之類;心理學的實體,則爲心理現象之類。而實體的表現,又不是本身絕對底可能,所以各科學還有一定的外形。我們要研究對象的定律,不在實體上,而在外形集合的方法上。這種集合的方法,就是關係的存在。由某種科學方法到其它某種科學方法,都有自然的變動。而變動的主因,又不出邏輯原動之外,譬如幾何家研究一種公律,而又證明某項定理,與物理家發明一種定律,而又造成某項物理的現象兩都不同。因爲科學實體彼此相異,其對象的研究,當然有幾何物理之別。假使我們自己同時是幾何學家與物理學家,研究這方面的定律,一定不能同時用那方面的

定律去實行。不過要知道各科學外形的差別,不能阻止到精神上的合作。好比精神上證明三角形三角之和等於二直角,與精神上發現物體下墜,地心吸力,或生命現象的種種定律,又都是相通的。因爲對象的變換,不能及於精神自然。這裏又是邏輯超科學個體之上的原因。

在各個特殊性質上所有解釋,都應該服屬對象上獨立的定律。這些定律的發引,爲思想本身所造:"一方面就所應用的對象上抽象之;一方面更限定不同類的應用;"這又是邏輯雙方作用的存在。所謂思想形式科學的稱號,卽自此始。

形式科學的應用,在科學界是獨立的,在人類知識中是不可少的,譬如個體上的考察,個體與個體間的考察;現象的表現,以及現象與現象間的表現,都是形式思想定律所認定的。好比兩件不同的事物之間所表的方程式樣,說X等於Y的可能,就是一個邏輯基本原理的結果。我們從這種原理上去找知識的對象,始能在事物上有判斷的可能。這裏無形中使邏輯家自然底前進一步:由亞里士多德式的形式而入於正確科學演繹的數學形式。這種形式思想,不只是變換大,而且施行得穩。把我們知識轉弄得非常靈活週到,對於自然

試驗,都可以特別底分解。譬如 U V W 三件定因,彼此表現起來,就有自然現象的方程式,我們說每兩個相因爲一因,好比第一因 X 爲 U 的函數,由 V W 相因表現之;第二因 Y 爲 V 的函數,由 U W 相因表現之;第三因 Z 爲 W 的函數,由 U V 相因表現之。其結果則爲三方程式的:

$$X=F_1(U, V, W)\quad Y=F_2(U, V, W)\quad Z=F_3(U, V, W)$$

假使 XYZ 都是已知的現象,那由三方程式中可以推到 U V W 的值,但是 XYZ 的現象只有同我們人的關係可以認識,假使用K表明我們精神的結合,x y z 代表所表現於我們的現象,結果又有三種方程式可能:

$$X=F(x, K)\quad Y=F(y, K)\quad Z=F(z, K).$$

這些式中假使 XYZ 都非一未知量K的函數,也就不能知道 XYZ 爲何。再又反過來決定K還是同一不可能。所以必然的條件,要使K爲已知量,換言之,精神所結合的應該都是"自己所知的,"然後 U V W 的未知現象,始得求證。所以宇宙之自然,惟有意識本身可以理會,而各事物分明與明白的實在上所有可能的理性,證明凡本身固有的意識,如同所謂分明與實在的條件一斑。因此 X Y Z 的現象成了已知量的函數:"精神的結合與其所有表現是也。"這裏包三種邏輯原

理的存在:

(1)由現象的表現能結論到現象的本身;

(2)各種不同抽象的結果,可以視爲相當;

(3)觀念的邏輯聯和,相通於事物的實際聯和。

我們上面的三個方程式,把這些原理表明得很清楚。

這樣看來,宇宙現象的研究,不是亞里士多德形式邏輯的分析組合可以包得盡,也不是自然科學的歸納試驗能完全解釋得明白;必得所謂"數學邏輯"的形式科學,爲之先導其源,建立一種證驗的定律,作我們眞正語言思想的方法。這個重要的發展,是近代邏輯最關科學研究的新點,而二十世紀來所謂科學之科學一語,惟有數學邏輯可以負擔。

## 第二章　形式邏輯各種研究及其對象

前面關於邏輯普通觀察把研究邏輯重要的事件說過了。那麼,我們在研究邏輯原理本身之前,不妨把它對於哲學科學及各種思想的概念,敍述一段,然後更知道邏輯是種什麼科學。

### 一　邏輯與心理學的分別及其定義

研究邏輯的形式科學,不要把它同心理學的定義

相混了。心理學專在各種研究的物象之中,找我們思想"所以然的結構,"而對於智能與表現的作用上所有問題,不能完全解決。譬如知道所以然的結構,時而導入眞理,又時而墜入錯誤。同時可以問到爲什麼到某點上爲眞,又爲什麼到某點上爲錯?在什麼條件上達到眞,又在什麼條件上除去錯?我們人類思想所有進行與各種價值問題,皆非心理學所能範圍,要研究這種問題的原則與方法,卽是所謂邏輯的對象。

凡是思想,知識,科學,皆不能專屬心理定律,因爲還有一大部分是社會勢力所及。譬如在個體與個體間彼此的反動,和羣衆中公共的接洽,往往都是社會上或由社會的結果產生的。所以心理學以及其它實證科學,只有使我們知道怎樣思想,怎樣判斷,怎樣推理,又怎樣認識,爲我們建出思想的定律來。邏輯則不然,它要求我們應該怎樣成其爲思想,應該怎樣適當地判斷或推理,而又怎樣正確地認識法;它建出方法來使我們一定要隨着它求純正思想;換言之,達到眞理。它在社會學與心理學之前,如同醫學或衞生學在生理學之前一樣:"一以專求生命的定律;一以建立維持身體與保佑生活的方範。"故曰:邏輯爲建淸高思想方法的各種研究之集合的科學。分析起來,就說是一方面爲達到

眞理的目的;一方面爲求證思想活動是否有效。是卽米爾(Stuart Mill)"證驗的科學。"

## 二 邏輯不同的概念

(甲) 到了這個定義,自然有所謂邏輯與哲學的關係。因爲推理價値的審度與應該達到眞理的思想活動問題,就是一個哲學的普通研究。第一個"眞理的定義"先要求出來,然後再有能合此定義的研究,則必爲完全先天的推理條件所能達到。所以邏輯在這點觀察上,絕對與試驗不相依其發展全部,應在先天理性中。因爲把眞理就意象方面限定,或者限定所以然的眞理,都只有思想眞正的概念足以成功。試驗方面不能得出這種完全的概念來;所以哲學家終久脫不盡哲學的邏輯,或者他們由直覺上先定出思想普汎與必然的定律,然後卽就此實行固定眞理,拿出推理的規範來;那麼,邏輯完全成了斷定和絕對的知識,足有實體形上的思想與定律的認識。亞里士多德卽爲此類之邏輯概念。

亞氏以前的哲學家,認普通觀念爲精神上實體自然與絕對事物之直接的直覺。在普通觀念的定義上,可以有這種概念對象的根本認識。如果到定義上就能隨推理以達於概念的實際連接,而實際連接之中,還

有直覺的存在。所以概念就是實體,而思想與概念間所有之關係,當然亦爲實體的關係;因此抽象的思想定律,皆爲實體界之物理定律。亞里士多德研究精神中觀念的抽象連合,與試驗以外的抽象推理,遂得出所謂:"形式演繹法"來。這種方法的確定,在十七世紀以前的科學方法中,成了絕對與固定底原理。直至加利來,培根,笛卡兒(Galilée, Bacon, Déscartes)的時代,各科學家都極端批評亞氏的思想,謂抽象思想不能得出所以然的知識;惟有恃加利來培根的試驗與歸納,或笛卡兒派數學觀念的形量和數目的直覺對象所有之具體思想,始能滿足知識的眞理認識。

(乙) 復興時代的科學思想,超過形式和抽象研究之外,而亞氏邏輯方法,非惟不能給以實際底眞理,卽在思想包攝中,亦不能完全有所範圍。從前形而上學的實體研究,不過幾種記號的象徵,用邏輯來精密連接,作普通抽象觀念的形式表現。在這裏的邏輯實用,當然只有先作眞理的形式展覽,再由歸納與直覺入於試驗底眞理。然則亞里士多德的邏輯爲無用了。是又不然。康德出而首定邏輯爲形式部,正與其它實際思想原理和定律的試驗邏輯相並立。這種劃分,演成近代邏輯兩大分類的研究:"純粹思想與普通必然理性之

先天研究的形式邏輯;各類知識實在認識之科學方法研究的實用邏輯。" 前者爲後者之必然底基本。因爲一爲先天理性的存在,一爲後天科學的批評。科學之科學,或哲學科學的定義,即從此提出,而邏輯研究之眞面目與亞里士多德派的演繹,遂完全異標其形;其表現之最著者,爲一般數學家的新形式論。

(丙) 我們說過理性不是一種空機關,而是對認識的推理。所謂認識,就是在各種物象之間建出一定底關係來,所以邏輯不只是純粹思想與理性定律的科學,或推理應有底方法,還是最普汎關係間建出思想對象的科學。各種物象或各種物象的性質之間特殊底關係,皆爲智慧作用與思想活動的產生。譬如由數量的觀點;建出物體間列數和位置的關係然;由特殊抽象上,思想的對象,能忘其所有之特殊性;而於列數性,幾何性,物理性之類,與其它的對象,又能成爲普通關係。所以物象如此,只是思想的一形式,一名辭,一概念而已。其同類的抽象,爲標辭 (Proposition),或判斷本身意義以外的關係。所謂標辭間的關係,即各種演繹推理。那麼,我們又從實體研究上到了形式邏輯來了。所以形式邏輯定義,變而爲思想對象間最普汎關係的科學。亞里士多德的邏輯,可算是此類思想之草創,而十九世紀

中及近代之數學家波來,石拓德,斑洛 (Boole, Schröder, Peano), 則爲此種正確科學形式之完成者,以標辭名辭爲數學關係之解釋,發展形式邏輯爲分析數學之首篇,分析數學爲形式邏輯之內質,而爲數學哲學思想之賴布尼支 (Leibniz) 充足其普汎科學之願望。

從近世紀來,科學哲學家都在各種科學程序之中特別注意,將所謂科學原理的精確與明晰,推理的嚴整,思想的發展,都一一就邏輯工作爲純正之標定;由是形式邏輯離所謂理想哲學的研究,而爲試驗或推理之習用的工具。培根的新機關,笛卡兒的方法論,與孔德(A. Comte) 的實證哲學,在二十世紀的今日,完全檢得它們假定上眞理的結果。同時美國心理學派之思維,判斷,推理的心理研究,法國社會學派之歷史變遷,與社會生命的思想進化組織論,從思想具體與實際的方略中,直接抽出善導的方法與證驗的結果。亞里士多德的工作,在這種邏輯概念之下,雖不能認爲無用,實際已全變其原理之方式,和形式之定義矣。我們且先看形式邏輯的舊原理,然後進而及於新形式論,以證實此說。

# 第二篇　形式邏輯原理

## 第一章　形式邏輯普通原理

### 亞里士多德時之概念及思想律

亞里士多德研究事實的表現,不只詳察其當然,還細究其所以然,他對於各種事實,都要由偶然分解到必然。第一個條件,就是找出某種情形之下得認精神爲必要;換言之,首先須在形式中考定科學。這種形式,就是科學事實包容的抽象體,卽所謂邏輯的對象。

邏輯就是推理定律與科學條件的斷定(Dètermination)。在知識中,亞里士多德分成形與質兩體,而視形體爲一種固有定律的存在;這種存在,立於確定的概念或普通觀念的實體(Réalité)中,如果個體與本質能斷定,則其存在之本身亦必完全決定,因爲它服屬基本定律的矛盾原理:"在同一關係中,同一屬性(Attribut 又名表格)不能同時屬於一主格(Sujet)而又不屬於此主格。"

譬如:"人爲理性的,"不能同時想到:"人爲非理性的。"兩表格矛盾,則彼此卽不相合,而在同一主格中亦不能互存。因此得出第二律的齊一原理:"是其所是。"表明一種觀念與其分組的性質必然恆等,而部分之間亦爲齊一。例如人與理性動物爲恆等,而人與動物,與理性亦互爲齊一。因爲一物卽其本身所在,集其性質爲全體,分其性質爲個體。所以第三律認爲:"凡物是則是,不是則不是,"卽無中間的可能。因爲兩矛盾概念不能互相存在,在肯定與否定之間,不容間位存在。如甲必須爲乙或非乙,不能同時乙而又非乙。不過不容間位律在三律中有所謂例外的表現。如冷熱本相反,然而有溫的現象發生。這種矛盾是外現的,因謂冷熱的度是量的問題,非邏輯相反。十度的水熱,熱於零度的,這種熱由十到百千度沒有冷熱的邏輯變動。又如有主格爲道德,表格爲三角形,說爲:"道德是三角形或非三角形。"然而道德是人性的,旣非此,亦非彼,實在的。但是標辭不合理的表示中,可以說:"道德是三角形或非三角形"的解答爲"是非三角形。"道德與三角形無關係,而邏輯意義上非三角形範圍較大,不僅包三角形的形,同時包非形的事物,道德亦包在此中。

亞里士多德的邏輯是一種條件的理性分析,在這

些條件之中,應該有充足推理的可能,使結論成爲必然的表現。在事實上,無須乎知道一般需要中怎樣推理的方法,卻要知道應該怎樣建出推理式子,使連接關係能顯爲直接的,而無排斥或拒絕的必然性。這裏自然可以分爲:"思想之工具,"與科學組織中這些工具的價値和重要點。

所謂思想的工具是什麼? 卽概念,標辭,推理是也。用概念的方法將意識或官感的直覺原素,由單體引入複體;用標辭的方法聯絡兩概念的關係;再用推理的方法由一標辭聯入其它一標辭或其它許多標辭中。形式邏輯的對象,就在此三原素中。再者,這些方法還只有內質無矛盾的爲有效,因爲要在概念中的初級觀念,標辭中概念間的關係,推理中標辭間的關係和種種矛盾間產生的結果上,始爲形式邏輯範圍所有。所以先從概念邏輯說起,正是亞里士多德的基本觀念如此。

## 第一節　概念邏輯

### 一　矛盾與因果的經驗概念

凡是所謂實體與可能的概念,只包思想的獨一原素,而無所謂矛盾存在。普通概念,都包多數原素,譬如"人"的概念,包有兩手類,能笑,理性動物……諸原素。而"道德"的概念,則又包慈善,公正……諸原素。凡概

念之正確與否,必須視所包之原素間有無矛盾爲定。兩矛盾原素,卽兩概念在意識中彼此相斥相攻而又不相認。所以矛盾概念不能在意識中實行,卽令有可能的,則必爲觀念混淆的原因;我們思想之中,往往有因觀念混淆而不能實現充足的觀念。一個觀念可以由文字引起,可以由觀念的若干原素引入完全觀念的;所以觀念的一部分是空的,有如白紙然。賴布尼支說:"思想中有一種空白與無着的事件,只有用名字來代替。"我們所以能墮入矛盾的,就是這種無着的觀念所致。可惜人的精神又不常在這些觀念中注意,它是否絕對不能實現,也沒有特別試用,所以在邏輯原理上說,矛盾觀念就是不能實行而又不可存在的觀念。只有在名字或觀念的片斷中可以實現。

要決定概念的價值,一定要分析所有概念,在分析中,無論何種觀念,都不能歸於無有,因爲無限小的觀念,不能自行消滅,其存在之最合法式者,爲正確概念。但是我們人類的思想與宇宙的現象,不是完全由分析就可以除去矛盾;因爲矛盾內質有不可以去的,不過借分析指明,爲之減除混淆觀念。譬如哲學家——培根,米爾——所謂原因經驗的概念,以原因爲一種必然與充足的條件,而又對於結果上無作用,無限定,無能率;換言

之,凡事皆有原因,而同時又沒有什麼;這種同類概念,就是矛盾的。

二　又如心理上無意識現象的概念,好比一種憂愁發現,一方面因爲痛苦的感受,同時一方面因爲無意識並沒有一點感受,這當然還是包一種矛盾在內。

三　再還有普通感覺性的混淆觀念,如顏色,聲音,熱,都是矛盾的;因爲顏色如憂愁然,都是心理現象的一種感覺,如果承認顏色是物體的本質,就是沒有意識的憂愁,不能表現的表現,不能得見的幻象;把意識與感覺分開,而同時又變換爲物體的客觀性,這自然是矛盾的存在。

四　運動與自由意志的概念

以外還有不可知其爲矛盾與否的概念,如運動的概念,由無窮定有窮,以一動體經過任何有限空間距離,都要經過無限點。又自由意志的概念,一方面自由行動,應由理性限定,一方面卻又不能限定;因爲自由行動如果由理性限定,則必理性自理性,而行動卻不能出乎所謂行動之外。在無限定中所得的反行動之可能,與在有限定中所得的行動理性之性質,二者間怎樣可以聯合? 這些矛盾的內質,我們還不能完全明白。

## 第二節　判斷邏輯

## 一　形式邏輯只注意於觀念的連誼以語言補充之

我們要肯定兩事物間相類,相異,相共,相續,相因的關係,就有一個判斷存在。判斷就是一標辭,其語辭所有的關係,爲觀念或概念的組合,精神上雖不能有觀念間主觀關係的陳述,然而由自然客觀性上,能敍出事物間客體的關係來。十九世紀米爾邏輯稱爲實在論者,就在此處。但是形式邏輯完全以研究思想作用的本身爲首重(主),對於客觀性的事體不能注意;換言之,只有注意概念上的對象,在各種事物間所存在的關係,由邏輯用概念間存在的包攝或排除的關係代替。這種關係,就是兩觀念的賦與或表格性 (Attribution) 的關係,而語言的眞正應用亦卽在此處。先化所有表格相承的關係,約爲主格,然後由所謂判斷理會全部的實相。譬如說:"孔子是聖人,"成了一個表格判斷,標辭描出思想實在的作用,一方面孔子,一方面聖人,所成的關係恰是相承而起,由一個動詞"是"字肯定。再如果說:"甲是不等於乙,"與前標辭完全不同,因爲這裏"是"字所表的關係,使兩集合成一表格的"類"(不等於乙),而不知道思想實在的作用。所以在思想中判斷的表格有形容性質者,與實體或量之類的性質全不相同。

## 二　觀念的連誼爲內包與外延

形式邏輯所注意的觀念,就是普通抽象或類分的概念,每個概念表明物體或個體具有公共形態,性質,或異體的類分　集所有性質組成概念的"內包,"集所有性質包具的物體或個體成爲概念的"外延."　所謂定言判斷,就用"是"字的連辭,在兩概念間肯定一關係爲:"甲是乙."　這個關係有兩種不同的觀點:從內包上看,甲的概念包乙的表格,換言之,乙爲甲的內包之一;從外延上看,甲體(類分)所有的集合,爲乙體(類分)所有的集合之一,換言之,甲概念的外延包於乙概念的外延之中。前者如:人爲兩手類,理性的,能笑的……後者如:亞洲人,歐洲人,海洋洲人等都是人　概念愈爲普通,觀念的包括愈少,譬如梅花樹比樹少,而樹的觀念不能包括梅花樹的所有性質　在萬物之中,如生存可能之類,外延爲無窮,而內包則幾近於零　反之,由普通下降,則所得的各個新屬觀念,能充實其內包,而外延漸及於最小。如個體絕對有限的觀念:孔子,孟子,墨子的觀念之類,外延等於一,內包則爲無數　由最普通觀念看,能在最多之中認識很少;由非普通的觀念看:又能於最少之中認識很多。所以內包外延,兩兩正相反。

## 三　分析與組合判斷

從內包外延的關係判斷中,得出其它兩種判斷法,即康德所謂分析判斷與組合判斷是也。分析判斷云者,其屬性所有的觀念,必包於主格之中;組合判斷云者,其屬性所有的觀念,能另爲加入主格包有的原素中。前者如:(甲加乙的)物體有(丙的)面積;後者如:(甲加乙的)某物體爲(丙的)白。這種區分並不是絕對的。如果發現某某性質爲某一定主格所固有時,即成爲組合判斷;而此性質復由是成爲主格內包的固有部分,原判斷因此又變爲分析了。兩種之中,組合判斷由試驗引伸而出,因爲有時屬性不爲主格所有,惟恃試驗以定其與否。分析判斷無須乎用試驗,因爲它的屬性就在主格之中,不必就試驗測其是否屬於主格,形式邏輯之主要原理,即由此發引。如所謂齊一律是也:"一物是其所是。"由是得三種規範:(1)就齊一原理合乎形式邏輯者,凡此判斷必明言屬性包於主格之中;(2)不就齊一原理出乎形式邏輯者,凡此判斷必明言屬性不包於同一主格之中,如言此物是熱,判斷須有試驗的證明;(3)就矛盾原理而爲無理性者,凡此判斷必言明屬性在主格上爲矛盾,如三角形之各角等於三直角。

這些規範正所謂形式適合,我們能夠合理底利用,就可以行其所能,由爲什麼要做,一直認到應該如此做

爲止;好比幾何學的公理然,並不是前人善於觀察,只因爲公理的同一理性可以適合幾何推理的無上條件。邏輯所有方法,都由齊一原理推出,但是齊一原理雖說是:"如果一物爲某一物,則此物終爲此一物而不能復爲其它一物,"卻又沒有說出:"是此一物或非此一物。"其它的方法亦與此同類。如不容間位律的原理:"凡存在爲完全或不完全,空間爲有窮或無窮,"都是由齊一律矛盾原理所推演的。前面講的概念分析和矛盾內質的形式與此皆爲邏輯方法的要點。因爲概念由分析能知其是否包含矛盾,再由概念的分析,又可以知道判斷中概念的屬性形容是否包在此概念之內,或在此概念之外,或者與此概念相矛盾。這些分析的方法,正是前面幾種規範所認定的。

## 第三節 推理邏輯

推理有二,在精神方法上由齊一律以外的定律從特殊到普汎上推理者名爲歸納法;精神只與本身相合,從普汎到特殊上推理者名爲演繹法。歸納推理,把證驗的關係建在普遍定律之中,只就一定的空間時間爲準,結果歸納存在,必須超過無限觀察,其精神自然有與本身結合之外另行結合的必要。但是形式邏輯只要精神相合於本身而已,對於定律的原理,須有試驗加入

者——同因生同果,——則爲齊一律所不能,故形式邏輯的推理,以演繹爲首重,普通歸納法成爲次要,因其獨立爲第二部方法邏輯的專論。

演繹推理有二:一曰直接演繹,一曰間接演繹。

(I) 直接演繹,即是肯定凡判斷無用於第三名辭與中間判斷,而能直接得出結論者。間接演繹則不然,在第一判斷與結論之中,必須有第三名辭與一中間判斷相拼,始成爲完全結論。直接演繹由兩種方法組成:對置與換置是也(L'Opposition et La Conversion)。

(A) 對置即由一標辭的眞假,結論其它一反對標辭的眞假。所謂反對標辭,即由兩標辭同樣名辭的組織,而能各自異其量,質,或由兩標辭相合,而有反對名辭者也。

凡標辭的量皆由主格外延所定,如果主格全在外延上,標辭則爲普汎的:"凡人皆有死。"如果只在外延一部分上,則爲特殊的:"有人能爲善。"再如果一標辭的主格爲本名,或公名,或複名者,爲單稱標辭,如:"孔子是聖人,孔子的後人不是聖人,""這般官吏都是頑固子弟。"所謂單稱標辭,都能認爲全稱標辭,因爲主格包所有外延而有。

凡標辭的質皆由肯定表格形於主格內包之中所

定:"孔子是聖人;"或者由否定表格超於主格內包之外所定:"孔子不是罪人。"

凡標辭都同時有一量一質,推而爲四種標辭如下:

(一)全稱肯定標辭A:凡人皆有死;

(二)全稱否定標辭E:凡事皆不全;

(三)特稱肯定標辭I:有人專爲賊;

(四)特稱否定標辭O:有事不成功。

兩標辭量質同時相異的(A O或E I)名爲矛盾標辭:凡人皆有死,有人爲不死;凡事皆不全,有事能成全。在矛盾對置的標辭中,由判斷之一的眞理,可以直接推得其它的錯誤,反之亦然,由判斷之一的錯誤,可以推出其它的眞理。卽爲轉換原理或不容間位原理的存在:一物是其是或非其非,無所謂中間性質。一眞就有一假,一假也就有一眞。如果凡人皆有死爲眞,則有人能不死爲假;如果凡事皆不全爲假,則有事能成全爲眞。

兩標辭只有量的相差者(AI或EO)名爲差等標辭:凡人皆有死,有人是死;凡事皆不全,有事不全。這裏得出四種差等的關係只有兩種結論:

(甲)如果全稱爲眞,特稱亦眞:凡人皆有死,有人是死;

(乙)如果全稱爲假,則結論沒有;因爲特稱可以眞

或假:如果凡人爲賊是假,有人爲賊就是眞;凡人不死是假,有人不死亦必爲假;

(丙)如果特稱標辭爲眞,亦沒有結論;因爲全稱標辭可眞可假:有人是死爲眞,凡人是死亦爲眞;有人爲聖人爲眞,則凡人爲聖人爲假;

(丁)如果特稱爲假,全稱亦必爲假:如果有人不死爲假,則凡人不死自然更假。簡單表此四種關係如下:

如A爲眞,I爲眞;如A爲假,I爲無定;如E爲眞,O亦然;如E爲假,O爲無定;如I爲眞,A爲無定;如I爲假,A亦然;如O爲眞,E爲無定;如O爲假,E亦然。

兩標辭由質的差別上得出兩種不同性質的:"在全稱上者名爲大反對,在特稱上者名爲小反對。" 前者如:凡人皆有死,凡人皆不死;後者如:有人專爲賊,有人不是賊。大反對的標辭有兩項及一結論,如果一爲眞,則一爲假:如果凡人皆有死爲眞,則凡人皆不死爲假。如果一爲假,必不能結論其它之眞假:如果凡人皆不死爲假,則凡人非不死爲眞;如果凡人皆爲聖人爲假,則凡人皆非聖人亦爲假。簡而言之:如A爲眞,E爲假;如E爲眞,A爲假;如A爲假,E爲無定,如E爲假,A爲無定。

小反對標辭亦爲兩項及一結論:如果一爲假,可以結論其它一爲眞;如果某人能爲善爲假,則某人不能爲

善爲眞。如果一爲眞,則不能結論其它之眞假:如果有人爲聖人爲眞,有人不能爲聖人亦爲眞;有人是死爲眞。有人不死爲假。簡而言之:如果 I 爲假,O 爲眞;如果 O 爲假,I 爲眞;如果 I 爲眞,O 爲無定;如果 O 爲眞,I 亦爲無定。

所謂對置標辭直接可能的結論,卽在此而已。

(B) 換置又是如何施行的?

換置者,卽由一標辭中抽出一新標辭之謂也。換言之,轉換各名辭:使主格爲表格,表格爲主格,而仍不變標辭之性質。

在什麼條件上換置是可能的?普通規矩一定要先認明兩名辭外延在標辭中所佔的範圍,不然,結論超過前提,卽不能由齊一原理檢證其合理與否。

我們知道主格外延總有所指,而表格則隨標辭之性質爲異:"如標辭爲肯定的,則表格攝其外延之一部:"人皆有死,表明人有的是死了。"如標辭爲否定的,則表格攝其外延之全部:"人不是軟體動物,表明人並不是軟體動物之類。從此推得四種方法:

(一) 全稱肯定的方法 A:凡全稱肯定能換爲特稱否定,如:"凡人皆有死,"變爲"有死的是人;"這就是亞里士多德所謂"偶爾部分中不完全的換置。"

(二) 特稱肯定的方法I,凡特稱肯定的換置無甚改變,如:"某人爲聖人,某聖人爲人,"兩名辭爲特稱者仍爲特稱,所謂純粹,完全,簡單的換置。

(三) 全稱否定的方法E,全稱否定的換置亦無甚改變,如:"人不是神,神不是人,"主格爲全稱者變爲否定表格時仍爲全稱,表格爲全稱者變爲全稱主格時亦能爲全稱。

(四) 特稱否定的方法O,特稱否定的換置爲不可能,因爲主格特稱不能換爲全稱表格,而表格如爲全稱者,則能換爲特稱主格無疑。但是主格特稱者變爲否定表格時不能有全稱的外延。所以標辭之:"有人不是數學家,"不能換爲標辭之:"有數學家不是人。"O的換置,還可以用換位法以相當之I標辭代替。如:"有人沒有錢"(O),等於:"有人是窮,"從此換爲:"有些窮的是人。"　不過這還是無所謂換置,因爲兩標辭之中的名辭(有錢與窮)並不相同。

總之,一爲有限換置,二與三爲簡單換置,四爲否辭換置,或換位換置。

(II) 間接演繹或名演繹推理

邏輯的直接演繹,雖然可以視爲一種推理,然而還不算是眞正推理方法,謂爲推理工具的部分之一可也。

因爲推理的定義,凡一標辭"必然"推出其它一標辭,其所推出之結論標辭,必然爲間接標辭所有之演繹推引的結論。所以推理之必然性,卽凡表格必屬於主格,因爲第三格之聯合,使主格表格同時相爲維繫,能具此種推理的特性,邏輯上名之爲三段法。

一 三段法與演繹

推理中普通應用的形式,卽爲形式演繹或三段法,許多邏輯家認爲與科學歸納法相對,邏輯論理的爭端和錯誤,卽就此下種,其實歸納不過三段式之試驗的結論。眞正三段論卽人類思想語言中所有推理之普遍形式,但是有許多邏輯家又把三段式當爲演繹法的專式,聽到演繹一字,卽認爲三段論之原形,這更是錯誤之尤。形式演繹與所謂科學演繹,完全爲三段論的形體結構,其區別顯著者,在科學演繹中有所謂直覺原素的加入,如普通試驗與數學演繹是也。因爲如此,所以科學推理在形式邏輯的包攝中無須特別的證明,而在邏輯研究的通式上,就能表明科學的推理,我們要除去形式中事實的錯誤,就是三段式的方法可能。

二 三段式的定義及其通式

亞里士多德定三段式爲:"一種演詞,在若干事件論定之中,能斷得其它一事件之結論,且在此論定的事

件上,更只能有此一結論。" 是三段式之範圍已具一切推理之普汎性。

然則所謂三段式的結構如何? 卽是一必然標辭(結論)的產生由所認爲眞實標辭(大前提)中抽出的結果,而以第三標辭(小前提)爲其中間牽連的關係;換言之,三段式之結構由三名辭組成:有一名辭(大辭)必爲它一名辭(小辭)之表格,因爲它爲第三名辭(中辭)之必然的表格。而此第三名辭本身又爲小辭之必然表格。如:死爲孔子之必然表格,因爲它爲"人"的必然表格,而人又爲孔子之必然表格是也。孔子所以有死的性質,因爲他有人的性質,而凡人又都有死的性質故也。再來三段式可以證明物體的存在,或者物體的類分屬於其它物體的某一類分的存在。因爲物體或類分屬於物體的一類分,而此一類分本身又屬於此類之某一類分中,如孔子爲死的類分之一,因爲他爲人的類分,而人的本身又爲死的類分之一:死連累於人,因而又連累於孔子。三段式之正形爲三標辭之總式:

標辭
- 大前:凡人(中辭)皆有死(大辭);
- 小前:孔子(小辭)是人(中辭);
- 結論:所以孔子(小辭)有死(大辭)。

## 三　三段式的規則

前面就是三段式的普通式,我們推理之中都能具這種形式,然而失眞的地方則又幾乎無算,所以形式之中不能不先求免去實體形式的錯誤,邏輯家研究三段式之演繹可能,而又能永合於實效者,必爲八種規範的保證所認:前四種關於名辭之規範,後四種關於標辭之規範。

(一) 三段式必須包三名辭,旣不能多,亦不能少。此即三段式之定義,因爲它由第三名辭(中辭)連合兩極端名辭(大小辭)的關係,假如只有兩名辭的配合,必不能得出第三標辭的差別來,也就不成爲間接推理。假如在三名辭以上,則凡另有的附加名辭必然無用,而與其它原定名辭亦無甚關係。

(二) 結論不能包中名辭。因爲結論在說明大小辭之關係,所以只有包大小辭而已。再者,此一標辭只能具二辭,故決無中名辭的地位。但是它能在前提各標辭中,然而所包的形式有時並非中辭之正義。

(三) 兩極端名辭在結論中不能有大於前提之外延。因爲結論只能作前提有效的結果,如一名辭在前提中爲特殊,在結論中不能爲普汎,不然,結論超過前提,即不能爲正確結果。換言之,斷定"若干"爲"所有"是不合理的。進而言之,名辭的外延不同,則非原名辭。而

與第一條相反,故為無效。

(四)中辭至少必有一次為普遍。因為中辭如果在前提中兩次都是特稱的,換言之,只有外延部分的表現,而此部分又為無定者,則不能肯定部分的相當。譬如說:"若干人是有錢的,若干人是可憐的,"兩標辭中的結論只能推到"若干人"為人類之部分耳。而三段式有效的條件名辭不能齊一,則三段式無用,故凡不合第四條者必反乎第一條。

(五)如果兩前提都為兩肯定,結論不能為否定。兩肯定前提蓋亦多矣,然不能都有結論。如果有結論者則不能為否定,因為用同一中辭連合兩極端名辭,不能證明彼此之間有所分離,而在部分上亦然。

(六)如果兩前提為否定,則無結論。因為兩極端名辭都不能連合第三名辭,所以不能斷論彼此相接,亦不能判定彼此分離。可以如此者,亦可以如彼:如日本與孔子之徒的名辭都不接於法蘭西的名辭,而彼此又能連合。中國人與基督之徒的名辭亦不接於土耳其的名辭,而彼此亦不能連合。

(七)結論追行前提中最弱的部分。換言之,特殊的或否定的。有兩點分別:第一,前提之一為肯定它一為否定者,結論為否定。因為前提如果有一表明兩極

端之一由中辭連合;有一表明中辭不能連合其它一端者,則兩極端名辭必不相合。第二,前提之一為普遍,它一為特殊,結論必為特殊。因為如果"有的"兩端之一包中辭所有性質,而此中辭又能連合其它一端名辭,則僅限於"此處的"第一端連於第二端。

（八）兩特稱前提不能有結論。有三點分別:第一,或兩前提都為特稱肯定,有時認中名辭連兩極端名辭之一,又有時認為由其它一極端名辭能連於中辭。但是中辭在這些地方與小辭相合的,是否都能與其合於大辭的地方相似,我們不可得而知;所以兩極端名辭之間是否彼此相合,我們亦不得而定。第二,或兩前提都為特稱否定,依第六條亦已知其無結論。第三,或一為特稱肯定,一為特稱否定,如果有的中辭連於兩端之一而又有不連於它一端者,即不能結論到:有地方甲包乙的,都是丙不能連乙的地方。

這八條規範,差不多是三段式最重要的元素關係,研究邏輯推理的演繹法,即不能舍此別求。現在再看三段式的形與式如何。

## 第二章　三段法

### 一　三段式之式與形

邏輯家由各標辭之量與質上,研究出三段式各種不同的樣式,名之曰式(modes)。這是中世紀的邏輯家求證的。他們列出四種標辭,作一切可能的配合;其法每三三相配,總得六十四樣,然後復由此數中消去不合理者,或前後相同者;以前八規範爲選擇的標準,得一結果表爲:

| | | | |
|---|---|---|---|
| AAA | eaa (七) | iaa (七) | oaa (七) |
| aae (五) | EAE | iae (五七) | oae (七) |
| AAI | eai (七) | IAI | oai (七) |
| aao (五) | EAO | iao (五) | OAO |
| aea (七) | eea (六七) | iea (七) | oea (六七) |
| AEE | eee (六) | iee (七) | oee (六七) |
| aei (七) | eei (六七) | iei (七) | oei (六七) |
| AEO | eeo (六) | IEO | oia (八七) |
| aia (七) | eia (七) | iia (八七) | oie (八七) |
| aie (五) | eie (七) | iie (五八七) | oii (八七) |
| AII | eii (七) | iii (八) | oio (八) |
| aio (五) | EIO | iio (五八) | ooa (六七八) |
| aoa (七) | eoa (六七) | ioa (八七) | ooe (六七八) |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| aoe | (七) | eoe | (六七) | ioe | (八七) | ooi | (六七八) |
| aoi | (七) | eoi | (六七) | ioi | (八七) | ooo | (六八) |
| AOO | | eoo | (六) | ioo | (八) | | |

表中大楷字表明有效式,小楷表明不合理者,數目字爲八條中所犯之條目。

總看只十二式爲有效,但是 AAI, AEO, EAO 三式還是無用的,因爲有 AAA, AEE, EAE 三式,則凡限於以特稱結論代用普通結論者,皆爲自然合理的推證。所以實際只有九種式,若以代數式爲算,僅能推用一式而已。亞里士多德認第一式爲科學方範,或亦已窺見其一斑。

要知道這各式的配合,還僅是抽象的表現,假如三段式純就此類推,則仍可入於非理性的論證。故邏輯家又研究出中名辭在各前提中所有位置法的"形"(figure)。形有四種可能,但是亞里士多德只認爲有三。第一形中:"中辭爲大前提之主格,小前提之表格;"第二形中:"中辭爲兩前提之表格;"第三形中:"則又都爲其主格;"而第四形中即第一形之反:"在大前提爲表格,小前提爲主格。"

由中辭位置,能於前提中決定各形之表現,同時其

它各名辭亦能同樣因之決定。因爲大辭在定義上已列入大前提中,而小前提則只包小辭。前提中對中辭位置完全自由,故使用上極爲便利。

形與式之間的差別可以說是:"凡式皆爲標辭之配合,而形則爲名辭之配合。" 三段式注意四形的硏究,只在復興以後始入於形式邏輯.法國拉捨利邪(Lachelier)的邏輯討論,謂三段式本無四形之效,我以爲從形式一字看,則以四形論據爲能及於變。

我們說過,形中六十四式只有九式有效,而四形中各式可能的配合,則又爲數二百五十有六,此數中有效者更只有十九式。凡是有效者,皆能就普通數學演算法證明,如分析法與組合法之直接演繹以及非法改造(Reduction á L' Absurd)之間接演繹皆是 各式之中,由組合法所得之有效式,定爲各式之特別規範。僅分述於下。

二　四形之規範及其改造

第一形

(甲) 小前提應該肯定。因爲如果否定,結論亦必否定,而大前提必爲肯定;因此大名辭在結論中爲全稱者,在大前提爲特稱,即不合換位與第三規範.

(乙) 大前提應該普汎。因爲小前提既爲肯定,表

格——此形中之中辭——爲特稱;因此中辭在別一前提中必爲普汎;換言之,大前提對於主格必須普汎。其能合理之四式爲: Babara, Celarent, Darii, Ferio。

第二形

(甲)前提之一必爲否定。中辭在前提中至少有一次普汎,因爲兩都爲表格,必須有一爲否定;由第六規範知道不能兩都爲否定。再者結論必爲否定。

(乙)大前提必爲普汎。因爲結論既爲否定表格必爲普汎,而在前提中此辭必爲普汎。因爲在大前提中爲大辭故也。其合理之四式爲: Camestres, Baroco, Cesare, Festino。

第三形

(甲)小前提必須肯定。與第一形之甲條相同。

(乙)結論必須特稱。因爲小前提爲肯定,而表格爲特稱,故在結論中亦必特稱。其能合理之六式爲: Darapti, Dotisi, Disamis, Felapton Ferison, Bocardo。

第四形

(甲)如果大前提爲肯定,則小前提爲普汎。因爲大前提既由假定立爲肯定,其表格必爲特稱,而此形中此辭爲中辭。在大前提中既爲特稱,在小前提中當爲普汎。

(乙) 如果結論爲否定,大前提爲普汎。因爲結論在假定上爲否定,必有一普汎表格。此辭在前提應爲同一量,而第四形之中,此辭爲大前提之大辭,故爲普汎。其合理之五式爲: Bramantip, Camenes, Dimaris, Fesapo, Fresison。

各式之分析證明,則在"改造"中,因爲舊式邏輯只用第一形改造其它各形,在第一形中的四式,都是中辭完全存在的。而此外之各形各式,都能改造爲第一形之四式,其方法卽由前有各字所指定之配合轉換之。但其中第二形之 Baroco 及第三形之 Bocardo 不能改造爲第一形,能由非法改造爲 Babara, 卽是以一前提及結論之矛盾辭爲前提,而推演別一前提之矛盾。因爲如果兩前提的眞理必然連累於結論的眞理,則結論的錯誤亦必連累於前提之一的錯誤。所以承認一爲眞,就應該推出其它一的錯誤。我們就 Baroco 來實行改造:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (1) Baroco | 凡大爲中 | | 結論的否辭爲: | 凡小爲大 |
| | 某小非中 | (2) | 大前提爲: | 凡大爲中 |
| | 某小非大 | | 小前提的否辭爲: | 凡小爲中 |

(2)變爲 Babara 的三段式,此三段式如果有效,則 Baroco 亦爲有效。同樣改造 Bocardo 爲:

(1)Bocardo $\begin{cases}\text{某中非大}\\ \text{凡中爲小}\\ \text{某小非大}\end{cases}$ (2) 結論的否辭爲: 凡小爲大 / 小前提爲: 凡中爲小 / 大前提的否辭爲:凡中爲大

所以(2)還是爲 Babara 的三段式,證明 Bocardo 亦爲合理。此卽所謂間接改造是也。

有三段式的樣式,使我們配合三段式之標辭,促成眞理的判斷;有三段式的形,使我們進而知道表現眞實的價値;有三段式各形的改造與非法改造,使我們知道由不完全的推理進而入完全科學的方式。這四種分形,其所以各自存在者,因爲有特別推理的表現:第一爲用以證明一事物之本質者,第二爲用以得見兩事物間之分別者,第三爲用以證明一種普汎規範中所有例外點,第四則用以發現凡種之中所有不同的類。由此知道亞里士多德所以認第一形爲眞理者,因爲在種中分別類,只要證明其特性所在或多數之間的分別,卽爲滿足。

因爲如此,所以三段式的原理與普通演繹推理的相同,都是齊一原理作用。邏輯家有時定爲"肯定全分與否定全分" (Diotum de Omni et Nulo) 原理,卽是"凡能肯定其全者,亦必能肯定其分;凡能否定其全者,亦必能否定其分。" 三段式之原理,卽爲此類的眞形:

換言之,所限於個體者,即爲其全體之範圍:"凡人皆有死,所以一人(孔子)也有死。"

附註:前面改造式之符號,當頭羅馬字,指明可以改造爲第一形的相同之推測式,S表明字前標辭可用簡單換位,P表明前辭可用有限換位,M表前標辭可以換位置,K表明不能直接改造,餘均無義。

複合三段式

一　不完全三段式的分別

以外還有所謂不完全三段式,或名複合三段式,邏輯通認爲三段正式之引伸,無甚關緊要,如普通語言或證明之中有暗示以三段式之關節者,此三段式之名爲歇前推理(Enthymene),例如:煤氣有重量,因爲凡物質有重量。

凡三段式與三段式可以合成重複三段式。有時前三段式爲後三段式之起點者,名爲"斷後三段式"(Prosyllogisme),例如:凡人爲哺乳類,孔子是一人,所以孔子是一哺乳類,聖人是孔子,所以聖人是哺乳類。

又有所謂連環體,即是三段式之前一辭連接後一辭者。例如:人爲兩手類,兩手類爲動物,動物爲生物,生物爲物,故人爲物。

二　假言選言三段式及改造之特點

假言三段式者,卽大前提有假言標辭之三段式。選言三段式者,卽大前提之兩表格彼此相擇,如:"甲為乙或丙之類。" 兩種三段式產生所謂正定或負定式(Modus Ponens et Tollens),其例如假言三段式之:

| | |
|---|---|
| 如果是白天裏,就是明亮的 | 正定式:此時是白天裏,所以是亮的; |
| | 負定式:此時不是亮的,所以非白天裏。 |

選言三段式之:

| | |
|---|---|
| 是白天裏,或是黑夜裏 | 正負式:是 $\begin{array}{c}\text{白天}\\ \text{黑夜}\end{array}$ 裏,所以不是 $\begin{array}{c}\text{黑夜}\\ \text{白天}\end{array}$ 裏; |
| | 負正式:不是 $\begin{array}{c}\text{白天}\\ \text{黑夜}\end{array}$ 裏,所以是 $\begin{array}{c}\text{黑夜}\\ \text{白天}\end{array}$ 裏。 |

在假言三段式的推理中,有所謂雙肢體(Dilemme)的演繹;其所不同者,卽大前提中之前件或後件為無定式,而小前提中後件的肯定或否定為此無定式各邊之連續肯定或否定。其例亦有正定負定之別。如:

正定式之:某大將曾囑其兵士,勿許敵兵逃過戰線曰:"如你離開此地,或者你讓敵兵逃過,你就該死,"於今你離開了此地,你又讓敵兵逃了,所以你該死。

負定式之:如果囚犯逃了,必是由門或窗子走的:但是他不能由門走,也不能由窗子走,所以他沒有逃。

這種推論,完全是爭論的發端。譬如在第一點:某

兵士並沒有離其定守位置,也沒有故意讓兵逃過,然而有因爲沒有看見的時候逃過了的。第二點:某囚犯逃了,可以不由門也不由窗,而由地下窟洞逃的。

這許多非正式的三段式,由可能的改造上,都能轉換爲正式的;而選言與假言二者,使三段式的普通規則能應用於各方面。實際上結論的必然推證,都是同一理性,不過此二者與正式三段式的分別有時間的不可能性。第一,二,三,四形中所有由主格到表格的關係,皆在時間存在以外;而選言假言則不同,完全表明時間中各現象各情境相續或同時的關係。如果寒暑表降到零度,就要結冰;如果沒有結冰,即是在零度以上。物體必然是靜或動,物體不能同時靜又動。此皆選言假言之必然性。

# 第三章　歸納形式

## 一　歸納推理

演繹法爲普遍眞理之特殊性,歸納法則爲特殊眞理之普遍性。這兩種推理互相對照。用歸納法推測,即是由一個或許多特殊眞理之中,推出一普遍眞理;即是由普汎固定的關係建出時間空間有限的關係;即是由若干變更結果上指出永遠的原因;即是由若干現象

表現中取出一種定律;由若干偶現的眞理上推出一種原理;即是轉變事實爲定律,視特殊點爲普汎之演繹點。因爲如此,所以通常以歸納法爲演繹法之反,演繹推理由前件包含之中選取結論,歸納推理則由前件包攝之中抽象結論;它專從事實的範圍上,求定律的擴大;所以從少中能抽出多,因爲它的結論不只在前提之中超過特殊與普遍間所有的差等 所以歸納推理的標題,都在經驗知識中存在。如果精神上不能發覺事實間因果限定的關係,則惟試驗足以知其間不相接的所以然。但是專恃無限事實的增加,經驗知識還只有達到特殊獨立的眞理,而不能爲普遍的定律,到了組合判斷之中,能把因果關係找着了,則永遠普遍的性質可以尋出,因爲凡因果關係,皆爲固定的,不變的;故分析判斷能由試驗上給特殊眞理以普遍可能

演繹與歸納的分別在三段式的形式下有如:

歸納之:
- 輕氣爲液化體;
- 輕氣爲一種煤氣;
- 所以凡煤氣爲液化體。

演繹之:
- 凡輕氣爲液化體;
- 煤氣有的是輕氣;
- 所以煤氣有的是液化體。

演繹推理的普遍結論,必自小前提普遍中得來,如果小前提爲特殊,則結論必爲特殊。而歸納推理則能於特殊小前提中得出普遍結論。再如:

演繹之:
- 孔子爲人;
- 人是有死的;
- 所以孔子有死。

歸納之:
- 孔子爲人;
- 孔子有死;
- 所以人是有死的。

其比較之簡式爲:

演繹:
- 孔子——人,
- 孔子——死人,
- 孔子死。

歸納:
- 孔子——人,
- 孔子死——人,
- 人——死。

歸納推理的形式,普通能定爲下列簡單定理之:

"大前提:M總爲P;小前提:S有時爲M等於Sx總爲M;結論:Sx總爲P。"

二　伯海納與米爾等的論據

因爲如此,所以許多科學家以爲三段式的前提暗

藏歸納原理者,即為歸納推理。如伯海納(C. Bernard)之言曰:"以我試驗家的眼光看來,歸納與演繹無甚分別;人類精神,由假定的發覺中,自然有一種原理的觀念或感覺表現;決不能在三段式的推理以外實行推理;換言之,總是由普汎到特殊。到了歸納的時候,以為是由特殊到原理,其實還是推演;不過因為試驗家在黑暗中研究,總是以所假定的原理或暫時肯定的來步步更變;然後就所集合的事實作為標的,進而推及更普遍更確定的原理。結果所得的實在,就是我們的演繹。"

這樣看來,由假定推及試驗的檢證(Vérification),歸納原理全為演繹的侵取。邏輯家米爾斯賓塞不以這種學理為然,反對以演繹附屬歸納。如組合判斷的推理式:"凡物體皆有重量,空氣為物體,故空氣有重量。"自然,我們知道結論已在第一前件中測定了。對於所有物體普遍的重量性不能一定,而對於各物體個別的重量又要知道必為一定。如果說空氣的重量性,在取決普遍重量性的事實以前不能定,則"凡物體皆有重量"的標辭亦必有所疑惑,而對於結論更不能有效。所以普遍標辭不能為特殊點之證明,如果外延的各點先不能證定,則其本身亦不能視為眞實。所以米爾說:"從普遍到特殊的地方,沒有可以證明的,因為普遍原

理其所以能推測特殊事件者必先假定此原理爲已知的事件。” 空氣有重量性之保證爲木,石,水,鐵之類的試驗體。組合標辭之普通性,不過爲特殊單簡事物的登記,與對於其它事物的簡式。推理中如果惟有組合標辭,則無非徒有演繹其形,實際就是眞歸納法。因爲組合判斷,沒有外延,也沒有內包,祇有單簡事實,不能入於其它之判斷的外延或內包中,祇有本身及其附屬物之範圍,以外則一無所有。所以求眞理必須加入分析判斷。譬如從凡物體皆有重量的標辭起,推出若干物體有重量,其中就要有分析標辭之“凡全包其分”的存在。從同一自然之全稱肯定,推測其部分肯定,卽是從本身推測其判斷。這不過是演繹的形式與外表。眞正的演繹,必須有分析判斷的應用。故米爾之論,尙不足以滿足科學邏輯之批評。

普通歸納推理,包兩種原則: (1) 從事實到定律的歸納; (2) 從定律到特殊事實的演繹。並不是完全從特殊到特殊的本原推測,因爲一事實本身不能推出事件,也更不能證明事件,其所以能推證的,因爲先有定律的幫助。一事之本身,如果能證明其它一事,則必能證明無限相似的事實。不過這一事的本身又怎樣能得證的? 小孩子被火燒了指頭,結論到:“火燒”的標辭,這

是不是一種概論？ 又是不是眞從特殊推到特殊事件？歸納邏輯家用觀念聯瑣論的解答,實難充分其說。所以因果律變爲歸納原理的基本所在,米爾邏輯的新創見,亦即在是。

## 三 歸納範圍的兩大觀念

歸納範圍包兩大觀念的組合:"物理關係與道德關係是也。" 從此分別設立自然現象定律的物理歸納,與建定人類自由行動定律的道德歸納。物理歸納爲絕對的,其結論爲固定的;道德歸納則時爲絕對,時爲相對,其肯定又復時爲定言,時爲假言。有某種前件,就有某種後件。對於人類集合的定律爲定言肯定,而對於個體則爲假言肯定。因爲一方面有"自由"的存在,人類全能屬於不變的定律,如物理律然,而個體則能有修正之必要;譬如一人對所有人皆知道的東西不能作僞。如果到了單獨事件,就個人利益起見,當然可以隨便造假。所以道德歸納,只有"限於"集合的事件,而"防於"個別的行爲。因爲個人可以不作人的行動,而羣衆則不能減去人類的定律。

這裏還有一種形上的數學歸納。如生存連續的各種觀念,在分析數學中,引伸爲數量最重要的科學,所謂無窮小的微積演算,正是歸納量性關係中形質關係

的歸納,其表示歸納方法之邏輯應用,則爲數學公律是也。

(1)類推性

歸納中重要推理,有所謂"類推"或"相類"的原理,譬如兩事物或兩觀念的具體或抽象,能由比較相推,而無混淆之患者,名爲類推。如液體與流體,水與氣,家與國的問題和組織。類推的可能,隨思想範圍確定。

類推卽相似推理,如歸納爲歸納推理然,由同類已知之事件類推其同類未知者,由所現之一關係推及未現之它一關係。卽是因演繹所生之歸納法。譬如算學類推原理:同量中大辭超過中辭,中辭又超過小辭:

$$a+q=m=b-q.\ \text{或者:}\ m=\frac{a+b}{2}.$$

幾何類推之:大辭在中辭上,中辭又在小辭上:

$$\frac{a}{m}=\frac{m}{b}.$$

調和類推之:同一分數中,大辭超過中辭,中辭又超過小辭:

$$a+\frac{a}{q}=m=b-\frac{b}{q}.$$

這個或者說是適合於歸納上之演繹法亦可。譬如說凡已知之有毒蛇皆爲胎生,歸納到有毒與胎生的兩個性别,從此推演到某有毒類爲胎生,或某胎生有毒。類推與歸納之分别,惟外延相異,因爲它不在因果觀念上,

而在個體,秩序,連續,與各事件聯和之中。在具體眞理範圍中的,與在抽象眞理中的相同;在歸納實質有限關係上,由類推能代以相和的關係;在其附屬關係上,能代以相互的關係;在其結果關係上,能代以相存的關係。眞正歸納,從原因相似,結論到結果相似;類推歸納,則從結果相似,結論到原因相似。復由小部分的相類又推到大部分的相類。歸納擴大其外延,類推則充溢其內包。所謂"內實歸納法"(induction intensive)是也。凡相似必有一關係,而類推則爲其關係之關係。

康德分別歸納類推的定義,一爲:"許多主體中之一事件,卽一事件在所有之中的歸納;"一爲:"許多主體中之許多事件,卽在各個之中所餘的類推。"歸納本身因爲據有一定原理來發展因果關係,所以能確實肯定;類推則惟修正非絕對證明的個體定律與各點間的差別,故爲無定之假定。在齊一原理上,不能相當於所推之類別,因爲類推並非齊一;在理論抽象上,亦不能有歸納作用的可能,惟有推及具體的標題。歸納能達到事物不變之中,而類推則惟出於偶然,其結論多爲或然程度,如果相似的關係愈近於不同之個體,則其類推的結論愈及於或然。

康德所謂純智原理中,有一爲試驗類推,因爲試驗

的可能,惟有知覺必然連續的表現上,因此又分三種類推的定律爲:(1)實體永存原理:實體在變象之中,不增亦不減;(2)現象的連接:凡現象之來,皆隨其一定之因果律;(3)同存原理:凡實體在空間同時得見者,則其行動必爲交互存在。

(2)假定性

假定原理,爲類推所演,其判斷之推測,爲未知關係同已知關係類推之或然判斷。所謂"假設""臆說""猜度"之義也。如果類推不能援以實在,則惟恃假言原理爲科學推理的進程中最富足與最大淵源的發現工具,加利來之定律,牛頓之吸力,達爾文之種原論,安斯坦之相對論,皆爲假定的發現;故曰,假定者,先決之歸納法也。卽是兩事件由同一定律產生的假設,其兩結果爲同一前件與屬一族類之組合。假定在多少事件中屬於所設之同一公共定律者,爲"理論"(Theorie)。其在多少定律中屬於同一最高定律者,名爲"法式"(Systeme)。理論卽是特殊的假定,法式則爲普通的假定,如巴斯德之細黴論,牛頓之法式。

假定推理爲歸納推理之一,由四種方法組成:(1)研究一任何未知之事實或定律;(2)發現此未知之前因;(3)假設前因各種結果的演繹,(4)檢證所有的結果。

假定的重要,如同類推原理,極爲普通;在各種知識中公用,而於所謂科學之外,亦能實現其能。醫家,律師,商人,經濟家,政治家,步步用類推法以造成邏輯方法的假定.

假定普通規則有四:

(一)假定只能在基本類推上,不能於偶爾相似或簡單的名字相近之中建立;

(二)假定要能解釋所有已知的事件,其或然程度應與所解之事件的數量相同;

(三)假定不能與眞理相矛盾,其不合眞理者,必爲錯誤,因爲一眞理不能與一眞理相反;

(四)假定單獨認定的不能充足;因爲一問題之別解發現時,仍須能由原假定檢證出來。

這裏所謂假定,都爲歸納範圍的研究。以外應注意到演繹假定,它在假言標辭,或定理,或問題的標定上佔重要位置。這兩種分別不能相混,歸納假定能在有定結果中標出或然的原因;而演繹假定則不然,如果有了前件,後件始能實在。換言之,爲一種演繹原理,用以檢證事件歸納者也。

歸納推理之特性,即帶有思想自由的行動,其偉大生產力,即是專在未知世中爆發,正如歐洲人所謂"天

下之神祕在於無所不能,"在試驗之前,只有以想像發現的假定爲進程。如果假定到了可能,就同已知事實相合,同時其它的假定亦必可能。所以人類與自然的關係發生於歸納與假定之中。由假定提出問題,由歸納施以審察。我們所能提出的問題,正是自然可以回答的。然而所答的正面雖能相合,其實並不就認自然的肯定爲準,只因爲一時沒有否定,如果再由假定的能力,還可以隨處研究出來。

(3)形式歸納性

邏輯上還有所謂形式歸納者,爲一種歸納證明的外現,用以裝飾演繹促成三段式者也。在亞里士多德列數舉例的推理中,佔一重要歸納位置。卽先列舉全體之部分的組合,然後肯定各部分之所肯定。例如水星,金星,火星等,皆隨直線運行,而水星,金星,火星等,皆我們所認識之行星系;所以凡我們所認識之行星系皆隨直線運行。這本來是從特殊到普遍的形式,然而只算得口語形式僅在複數性中代用集合名稱,無須精神思想,當亦無所謂從特殊到普遍的進步,與重複律相應,而不能爲眞正推理,因爲他對於原有肯定上不能加以外延的判斷,其實用則表示實際歸納無有,只能成爲演繹方法的三段式證明:"特殊眞理之完全列數包在普通

眞理的外延中。" 而且完全列數舉例,實際上誠不可能。譬如在無窮之中,即無列數的明白事件,而科學問題的實在歸納,幾全在增加其列數之不完全的可能,以爲假定類推的邏輯研究。

四 歸納原理與判斷的分別

以上所講的歸納推理,都是形式邏輯範圍內的研究;從此應該知道所謂歸納原理與歸納判斷的分別。歸納原理的判斷是普遍的,譬如說:凡同因必生同果,而同果則必出自同因之類。此類判斷爲惟一的,管理一切事件。而歸納判斷則爲無限,爲求過去或將來的特殊關係;如:凡石頭擲向空中,則將下墜;昨日太平洋各口岸海潮大漲;正與歸納原理的判斷立於過去與未來之間的現存固定定律中者完全不同。

歸納原理的判斷出於因果原理。所謂因的觀念連累於永久與固定的存在,一因終爲一因,有能因其它一因以生變更者,然而本身終於永久。至於眞因與獨因,則根本不能變更,此時是則是,此時存則存,此時行則行;其進程的連續表現,即是齊一原理,或定律所在。譬如甲終爲甲,而三分之二的比例終等於三分之二。

# 第三篇　邏輯原理歷史批評論派

## 第一章　演繹批評論派史

### 一　概念或類分的批評

形式邏輯的普通概念和重要的幾種分派,第一篇已然論過。它的原理在第二篇裏亦略爲盡述;換言之,我們對於所謂亞里士多德派的邏輯,從此知道它的結構之所以然。現在要講形式邏輯歷史上消極批評的積極進化論。這一方面表示人類思想的擴大;一方面顯出求眞理的逼近。本來智能的基本方法包思維,判斷,推理三種作用。思維的研究,在亞里士多德以前的哲學家,卽已內定其對象;當時辯證哲學與詭辯哲學之爭,釀成邏輯概念論據的:實在論,名目論,概念論三大派別。謹爲分述如次。

#### I　從希臘辯證思想到中世紀學院派

概念論的對象研究,源於希臘最古的辯證思想。

蘇格拉第的思想,極力反對詭辯學者的無客觀眞理論;以爲先作成概念,可以達到事物實質的定義。如果要達到一對象的定義,必先就各方面完全考證,調和外現的矛盾,分別動靜的本性與外遇。詭辯者認概念只在語言修辭中,蘇格拉第則認概念的形構,爲科學之究竟;換言之,詭辯者以概念爲獨立存在,使"實在"應於非理解的事件,而與試驗並不相接。反之,蘇格拉第則以試驗爲概念之檢察;一概念接合其它概念,必由試驗定其關係,邏輯區分的意義亦由是而立。譬如從種降及類的多元性,用定義限定各個特殊體,因此概念的屬性得以認識,所謂觀念間的流變,亦因此劃定。故由種分類,由類反種,其交互關係能視爲由一至衆,由衆及一之生命運動的邏輯聯瑣。

柏拉圖出,遂承蘇格拉第概念論的思想,更爲擴大其範圍。認眞正科學,即是概念的科學;而實在的實體,就是概念中物體表現的本質。所以邏輯的研究,不只爲精神定律,並且是實在所有。柏拉圖的邏輯顯然與形而上學相接。故謂思想自由判斷的可能,必須概念間有連接關係。他不承認絕對相等與概念絕對分離的事件。因爲彼此的概念如果不相連,則無思想與演詞的可能。再者,思想與演詞的可能,又皆出於種的連

合,所以柏拉圖認眞假的產生,界於若干事物連合與否之間。如果凡事物皆可由連合而混同,則又爲動靜無別,等於不等。所以概念的存在,爲知識之必然條件。

對於認識的對象研究,使哲學都有全歸柏拉圖觀念的思想。要求各科學概念的總括科學,就是亞里士多德的邏輯產生。亞氏學於柏拉圖,而能集蘇格拉第之大成,亦認科學眞對象爲實體存在,求普遍中的特殊,因而發現證明的普通方法。故謂概念爲三段推理的科學條件,創造的原理與證驗的形式。邏輯不遠於自然,而亦不遠於具體抽象。精神首動即在感覺,由感覺成試驗;換言之,因比較與抽象始於個體概念,得出"本質的類別;"復由定義的可能,確定"固有底差異;"更因差異的發生,名爲種別表現之"偶然性。"所謂"五種"通性:"種,類,差,質,偶然性,"竟成爲邏輯之最大問題。

到斯多葛派的邏輯概念,遂與本體論完全分離,他們的思想要使邏輯密接語言文法;由是形而上學一變而爲形式科學矣。在哲學上說,成了哲學首篇。斯多葛派分邏輯爲連續演詞的修辭學與剖分問答詞的辯證學兩部。在我們看,第二部爲眞正邏輯的,合第一部語言,文法,詩,詞,樂譜的研究,把邏輯範圍的概念愈爲擴大。斯多葛派論概念之源,與亞里士多德頗相似,不過

結果斯多葛派爲名目論據。謂實體存在爲物質的,感覺爲一切認識之源,由感覺生記憶,由許多相似記憶生試驗,又再由試驗的標準上經過精神作用直達概念。他們以爲凡感覺成功概念,必經過"類推,相似,對置,配合,換位"幾種科學基本方法。概念所以出自感覺的,正因爲在斯多葛派不承認實在的表示;普遍中沒有實際存在,只有抽象可能;所謂區分,無非形式價值,沒有本體的負擔;換言之,概念爲精神上一種主觀的意象,由定義以總其成。

這種思想在哀畢居 (Epicure) 派認爲過於獨斷,他們否認定義的可能。謂不知對象的限定,亦不能限定所不知;知道對象來限定時,又不知道用定義去認識,這不過就已有的物象於直覺上加入定義,所以用不着在物象的內包上加定義。再者,要完全限定,卽等於完全無定,因爲從限定上推及無窮。因此證明認識無須定義,其故因語言中無定義的說話;譬如說:"人,"我們不用說:"理性動物,有死,能思想,有科學;"說"狗,"亦不用說"四足能吠。" 類不見得屬於完全底種,因爲種包所有類,它並不是種的一部分;譬如人不成生類,只是生類的片斷。這種懷疑思想,忽略邏輯的功用不少,幸而波黑非波哀斯(Porphyre et Boëce)的思想勢力,使亞里士多德的

邏輯得因以發展,更爲形式抽象其體,遂握中世紀全部哲學思想權。

波哀斯區分邏輯內部三種研究,以分類爲思想對象的範疇。就對置,區分,定義,研究概念,分得相反概念類的"白與黑;"矛盾對置概念類的"白與非白;"相對對置概念類的"倍與半"以及不鈞合概念類的"地球,衣服,火。"再區分中之種的類,全的分,字的義,體的表,表的體,表的表等等研究,實包概念邏輯之普通事件。

到了中世紀,邏輯概念問題,完全承繼希臘學派的思想,其最著者,爲實在論派,名目論派,概念論派的爭論。關於"五種"概念的異說,計有十三派之多,實際不外柏拉圖派與亞里士多德派的範圍。十一世紀末,羅塞南(Roscelin)謂種與類皆爲字之表示,概念惟能於精神中存在,只有個體與具體的實在。他不承認有獨立劃分的可能,而各部的類,都爲字的事件。這種名目論的思想,與安塞門(Anselme)的本體論正相反。安氏要建出眞理本身的世界,謂物的眞理同時爲眞理本身的果,與其認識的眞理之因;換言之,在普汎特殊事件中,有一獨立存在。此即實在論的根本假定。所以基諾門(Guillaume)謂個體之間,根本無甚差別,其不同者,惟意外的差性。實際無個體存在,而爲普汎的實在。這裏的實

在論又有不同的概念邏輯;因此阿伯拉(Abelard)起而調和名目與實在的概念,創中立的概念論說,欲以免除名目論與實在論的攻擊,同時追尋柏拉圖與亞里士多德的概念系統。謂普汎性只在判斷與表格性中表現,在此表現前的事件爲字或個體事物。譬如說:"人,"就感覺上說,此字爲一個體,如果把它表爲孔子,就在判斷中有普汎性。此正所謂概念論據之端。

頓斯哥(Dunsscot)的個位原理論,認個體非消極而爲積極相和的普通性質中產生的,其本質則爲個體的表現。如人出自動物,因爲此中有人類的生命;孔子出自人,因爲此中有孔子的特生體。後者卽爲個體之形別所在,而無形物亦有個體存在。頓斯哥的概念論,合實在論與概念論兩派思想,而爲邏輯的形而上學與神學的研究;因爲當時亞拉伯派與學院派的學理只在科學中找原則,而不在自然中去研究。十三世紀後,實在論受極大的批評,新名目論者屋干(Occan)反對頓斯哥普汎中個體實在的分別爲形式而非眞實。謂造物中假使非實在的分別,卽無形式不同的存在。凡實在事物,卽爲一個體的事物。所以凡科學必負於個體上,而認識則產於感覺;從感覺生記憶,從記憶生試驗,而爲科學與藝術的普汎事件。此本與亞里士多德的思想相

同,不過亞氏謂感覺本身能直接達到普汎,屋干則認感覺只能關於個體上,惟抽象始能及於普汎性。屋干從此超過學院派思想,而另創新方法,用普汎表明個體。科學的對象,無須乎實在,只要判斷中同一概念表明的各個體實際存在,即爲滿足。加以十四十五兩世紀中人道主義者,反對學院派邏輯語言,十六世紀哥柏尼克(Copernic)與賴若拉(Leonard de Vinci)輩出,認知識爲試驗之引伸,科學如歷史的事變。所謂近世科學方法的"新機關論,""方法論,"遂因而產生。

II　從十七世紀到十九世紀

培根的思想,以爲尋常邏輯不只及於自然科學的應用;換言之,對一切科學歸納方法皆能相應。邏輯能變更,則科學概念必轉變。從前講到種,類,差異,就相信實在的眞有;再討論到關係抽象的事件,又信爲得到事物發生的普通定律。培根認爲我們並非對物之性質研究,是要認識所有產生結果的原因。我們智能出自官感與試驗,然而不能恃尋常觀念與語言,使精神徒耗於形式抽象,一方面用抽象代實際,用複合代單純;又一方面使思想無分析的推證,因而停止其可能的工作。培根的主要觀念,在任何自然中,應該能分割其元素,又重建其眞相;換言之,用試驗由分析到組合。我們不能

直接認識:金,氣,水,因爲這都是單純自然的——濃厚,稀薄,輕重,冷熱,等等——配合。由這些有限單純的自然可以找到事物,發覺其形,換言之,現存的條件。培根以爲物性獨立存在,配合所有性質,卽成物之本身;由是人之權力,爲無限可能。這裏第一證明培根不認種類的實在,亦不認中世紀所謂形式;第二證明他發覺的形體爲單純自然的條件存在。所以培根同時爲名目論者,又爲實在論者。

笛卡兒的邏輯概念較培根更爲科學。他否認中世紀學院派思想,而亦不注意於"五種"論之實在。他要找出發覺與發明的方法,認定惟普汎數學可能。因爲數學基本發於"明白"與"分明"的觀念,能促進單純眞理至於複雜眞理,且終循演繹必然的連續。因爲笛卡兒認數學爲知識的中間,宇宙形描有如數的存在;普通無事物創造的必要,而亦無思想的失敗。此卽其名目論據。又謂科學對象爲由自身明白與分明的單純意念(Notion simple)結成複合的事件;這些意念或觀念皆爲實在的——單純意念與其關係,表明單純自然,所以認識能明白分明,卽爲眞實,故笛氏之實在論,實大別於學院派思想。斯賓拉沙(Spinoza)比笛卡兒更進一步的實在,謂意象爲混亂之源,普通觀念卽爲混淆的意象,我們

直覺的實在,並不在時間秩序的現象演繹中,而是個體本質的抽象實體(Realité abstraite);換言之,演繹概念,不在時間連續上,而在理智上,正與柏拉圖的概念實在論相合。

霍布士繼培根思想爲名目論之發展,以試驗爲記憶,科學亦因之爲記憶。洛克(Locke)次之,謂概念成於抽象,而定於語言,其概念論證,結果同歸於霍布士的思想。至柏克萊(Berkeley)否認抽象與普汎概念,建立近世新名目論,所謂概念論與名目論,遂得區分矣。

賴布尼支與笛卡兒的概念,本有密接思想;他承認笛氏基本原理的數學化,否決中世邏輯。以爲欲達完全科學觀念,必自科學普汎證明始;欲達普汎證明,必須"發現所有概念合成的原始概念,限定各概念間可能底配合。" 賴布尼支認爲表明這些單純概念與其所有配合,只有用記號所具的絕對值,能組成普汎語言,一一達到單純配合;然後就單純概念剖分實質,必無矛盾發見;結果分解概念的配合,如同在數學上實行演算。因爲凡單純概念,皆爲"實在定義"的固有,所表明者,卽爲可能的眞實。所以賴布尼支的觀念界非閉關的整個,而爲無窮小配成的集合;其哲學演算,超實在而上;其宇宙成形,如同續續秩序的創造。從前種類之分,在賴

布尼支只認爲造物之端,並無絕對的單純;換言之,在知識上暫時與比例的相對變換。

康德的思想源於賴布尼支,其邏輯概念,則反前二十世紀的實用科學方法的邏輯定義。謂邏輯非科學的機關論,而爲純粹,抽象,形式的科學,無關於認識的對象。所以邏輯不能限定科學方法,只是思想最抽象最普通式的一種數學。除去心理學一部分的方法,以及其它認識相關的對象,邏輯只有三段推理與分析思想的事件。思想的形式與內質彼此獨立,所思者繫於形,所應者及於物。這種學理與黑格兒(Hegel)的邏輯概念正相反,黑格兒要把認識的形,質,心,物,使之相當,謂邏輯爲客體或主體抽象的純粹科學;凡物能與思想相當,所以"邏輯爲形體最普汎存在的科學。" 概念,判斷,推理不只是精神的行動,還有客觀的價值。

哈密圖據康德定義,認邏輯爲"思想定律的科學。"故定概念爲:"性質或普通性質,一點或許多點的認識或觀念,在這些性質點間客體對象的多元性能以適合。" 凡成功概念必經四個時期:(1)物體多元性的知覺與記憶;(2)物體間各性質比較異同;(3)對於相似性中意識集合的注意;(4)對於所注意的相似性上認識的組合。結果有命名的可能,謂爲第五期亦可。哈密

圖概念的邏輯論完全根據內包研究:量,質,不完全,外延關係等等,與中世學院派的內包論相合。謂性質的性質爲物之性質;表格爲主格之表格。是一部邏輯完全爲內包所有。

米爾的"眞理邏輯"出,完全否認形式科學一語,謂邏輯爲事實與實在的科學,只恃抽象與普汎不能成功;是概念純屬枉然。如柏克萊哈密圖的思想,以爲在精神中除字以外的事件,惟有一具體意象。思想的對象並不是人,馬,三角,而是一人,一馬,一三角。概念只有字的表現,我們不能用非思想的對象建出概念的邏輯;所以概念的內包,外延,量,亦不能獨立存在,只有名字表定物體與包攝屬性(denotation et connotation)。譬如:"人,"表定中國人,德國人,美國人,法國人等等;包攝有人的生命,兩手,理性等等應用名字。米爾的邏輯原理如此決定,所以定義的原則全歸於字的事實,邏輯因此立於基本的科學眞理上。

二　判斷或標辭的批評

I　標辭意義與希臘判斷學說

我們說過,邏輯分智能基本作用爲思維,判斷,推理。判斷的意思,就是肯定兩觀念間相合與否的關係。譬如聽到由語辭組合的標辭是一件事;聽到聯合或分解

的語辭又是一件事;"物質不滅,人類永遠,"與語辭之"物質," "不滅," "人類," "永遠," 又是一件事;所以集合之或分解之,其意義之差別,完全以判斷作用爲主,還有標辭中語辭意義和價値分合肯定的心理自然,也都是精神權力的去取。哲學家對此亦不能拒絕。但是判斷論的歷史進化上又顯有與此大不相同者,最初的哲學家,對於思想條件,皆完全否認判斷之可能。波達哥哈(Protagoras)說:天下事完全爲動的,無所謂普汎有效底科學,只有同等底議論。我們對於某人無反對拒絕之必要,因爲凡事都有兩相反底議論存在,所以兩判斷也都可能。大概辯證學家的論據,有三種標辭爲:(甲)什麼都沒有;(乙)如果有的,都是不認識的;(丙)假令認識,也都不能通於論說。完全眞與完全假,都是相等底事件;由一到多,由主格到表格,都不能相接。

到蘇格拉第柏拉圖的時代,始由概念論與觀念論建出判斷論的可能性。柏拉圖第一步研究物之本性,作科學認識的對象,所以邏輯與形而上學由自然中混合了。判斷就是回答觀念中理智關係的聯合,眞理卽爲實在;判斷肯定其所是,卽爲"是;"表明實在的"是"就是"眞,"否則爲"假。" 到亞里士多德時,邏輯成功生存的科學,與思想對象的實在相接。觀念與感覺的現象也

並不相離,實卽其實體表現與形式現存的原因,而判斷能於此形式中表現其實際底關係。到了亞里士多德以後,判斷論隨邏輯本身一變而爲純粹形式的硏究,所謂科學性質,完全歸在精神方面,只有部分底配合增補,哲學史家名之曰"學院派,"我們前篇判斷的形式原則,由此派演出者不少。侯復興時代起,形式邏輯的改造,由培根與笛卡兒的科學方法中,變爲推理之新原理。他們不承認科學爲已成之學,而注意找發明科學的工具和方法。

### II　十七世紀各派之比較

霍布士(Hobbes)是十七世紀最大的名目論者,他的判斷原理包在概念論中,謂普通觀念皆爲文字的自由組織;所以判斷的施行,旣不在事物上,亦不在觀念中,而在文字聯和的表現上。事之眞假,隨我們條件中關係事物名字集合的意義之好壞而定。譬如標辭所有的意義,認表格爲事物之名字,而主格亦爲其一;名字實在,標辭就是眞的。例如:"凡人皆爲生物"爲眞,因爲生物之名爲人名之名的名。又"凡人皆爲九頭鳥"爲假,因爲九頭鳥之名不能爲人名之名的名。所以主格與表格彼此皆物之名,而眞假則又皆爲人之意志的自由法度。這裏與笛卡兒謂判斷爲自由意志之行動的理論

相應。笛卡兒的判斷論出自錯誤的解釋。一種觀念無所謂眞假,智能所得的觀念,沒有什麼否定肯定。然則所謂肯定與判斷的原理究竟何在? 即所謂"自由"而已。惟自由始能成其爲事,或不成其爲事;智能只在觀察中有所瞥見,另外則無所能。故笛卡兒的哲學由"疑"起;因爲疑爲自由行動之精神。斯賓拉沙(Spinoza)則完全否認知識中有自由意志的疑團。他以爲眞理有之則有,不能疑到事物表現的眞理上去。判斷並不能自由,因爲眞實就是實在觀念的部分,若以觀念爲能畫盡事物之表現,或黑牌上模形的存在,這是極大的錯誤。意志與智能,都是惟一底事件。這裏顯分爲兩極端的判斷論,由英之洛克(Locke)出而折衷之,謂判斷非自由,亦非必然 觀念之來,視其關係爲之肯定,就算是思想的工作。所謂知識,無非是我們兩觀念中相連,相應,相斥,相反的種種知覺而已 賴布尼支的判斷論反對笛卡兒的原理,無形中與洛克相合。謂眞理終立於觀念相應或相斥之中,然而對於眞理的認識,又不能永爲相應或相斥的感覺所有;因爲只有經驗上眞理可作爲試驗,而實際事物與理性,在我們試驗中連續存在的還不知道。假使只能聽到而不能得見,則相應相斥的感覺必然無有。

### III 康德哈客圖米爾三大論宗

自然,形式邏輯的大改造家要算康德。他的判斷評論,完全在純理批評中,差不多都抛去舊有邏輯定義。純理批評第一部上說:"邏輯家對於判斷的普通定義說是:'兩概念間的關係表現,'這我眞不滿意。我不說它在定言判斷與假言和選言判斷上不能應用——因爲這些判斷不只是連累概念間的關係,還有判斷本身的關係——實在並沒有標定用些什麼'關係'來說。換言之,是不完全,不分明的定義。"我們在判斷表現之間的關係,不能與觀念聯合的定律間所有的關係相混。觀念聯和完全爲主觀,隨個體變更;判斷則爲客觀的,能引所有知識到客觀知覺的個體上;換言之,引起各種複合現象到意識之個體中,得爲客觀性的"試驗。"邏輯爲研究知識客觀或不同實體的抽象,對於判斷物質與對於概念包攝相當。其所注意的判斷差別,即在簡單形式關係上。那麼在有定的現象中,應用智能範疇判斷的形式爲何?如果抽象普通判斷的包攝,考察智能的形式,則得判斷中思想結構的四種分別,每種中包三種稱名爲:

(一) 量性判斷:凡此判斷皆爲全稱或特稱;康德加一單稱(Singulier);

(二) 量質判斷:凡此判斷皆爲肯定或否定;康德加一無定(Indefini);

(三) 關係判斷:凡此判斷皆爲定言,假言,或選言;

(四) 樣式判斷:凡此判斷皆爲或然,實然,或必然。

在各種判斷中由主格到表格的關係,爲分析與組合的關係。如"凡物體有容積"爲一分析判斷,因爲除去所在的空間或位置的定點,則不能限定它;而"凡物體爲不可入性"亦爲分析判斷,因爲不可入性的定義,要有物體與幾何固體的分別。再來"凡物體皆有重量"爲組合判斷,因爲表明所佔有的空間絕對反對其它的加入。所以判斷之分析與組合,完全以主格定義爲證;而同一判斷之分析與組合,能依主格定義之選擇爲分。第二篇論判斷原理中已畧言之。

現在再看哈密爾(Hamilton)的判斷論。哈氏邏輯仍不以舊式標辭的說明爲然,認邏輯家的責任,在於就語言中表明思想一切暗藏的內質。因爲標辭中不只是主格在思想裏有一種量性關係,同時還有附體或表格的作用。譬如說:"人爲動物,"就想到:"凡人都爲若干動物,"因爲人以外還有其它的動物。要肯定人的動物,就要:

(一) 知道"人"的概念只佔"動物"的概念一部分,

(二) 確實決定其佔有之位置,所以表格的思想限量與主格的限量恰相當。

這就是哈密圖所謂"表格定量論" (quantification du Predicat)。從此標辭種類由四變爲八:

第一:全全肯定:主表格都在外延上。如:凡三角都爲三邊;

第二:全分肯定:主格全稱,表格特稱。如:凡三角爲一種形;

第三:分全肯定:主格特稱,表格全稱。如:有一種形爲三角;

第四:分分肯定:主表格都爲特稱。如:有幾種等邊形都爲幾種三角形;

第五:全全否定:主格的外延拒絕表格的外延。如:三角形非四方形;

第六:全分否定:主格的外延拒絕表格外延的一部分。如:三角形有的不是等邊形;

第七:分全否定:主格的一部分拒絕表格所有的外延。如:有的等邊形完全不是三角形;

第八:分分否定:主格的一部分外延拒絕表格一部分外延。如:有三角形不是等邊形之一。

這種判斷論的實利有二:(一)能簡單對置的方法;

(二) 把實際上所有標辭歸為主格表格間的方程式。因為彼此外延相等,各前提決定了,就可以使推理譜成方程式;消去概念中連接的相等與相當的數學三段式,與所謂三段形式性質的概念連合——人,動物——之間的差別。表格定量論,即是新分析的基本原理,能使邏輯科學得一種完全分析,而又使推理得一種單純原素。後日坡來蔣風的數學理想邏輯觀念即源於此。

無疑,邏輯判斷論,不只是康德哈密爾們的批評價值。十九世紀中最大之邏輯改造家在經驗派的米爾。他的判斷論推翻舊日所有定義。前幾世紀以為邏輯對象不在事實與所以然之中,而在思想定律與適合本身的條件上。簡言之,邏輯只在注意觀念與關係。到米爾完全相反:"撇去概念,並否認其在思想中的存在與其為科學的對象。"所謂純粹形式概念科學的"推斷邏輯"(Logique de la conséquence)正與事物對象無分形質的"真理邏輯"相反(Logique de la vérité)。米爾的思想超前二十世紀學院派的意識,視邏輯如柏拉圖亞里士多德時之生存的科學,密接實在的認識,以服屬事物自然研究。同時回到坡達哥哈的理論上,減除普汎存在。米爾的主意,判斷不在概念中而在事實上。凡肯定皆非觀念間的適合,而是現象間的關係。凡標辭

皆非事物觀念的決定,而是事物本身的決定。譬如說"火爲熱之因"並不是說"我之火的觀念爲我之熱的觀念"的因,實即"自然現象"的火爲熱的"現象"的因(參看法譯邏輯第一卷第一部第五章第一節)。判斷的觀念不能與判斷的眞理的觀念相離,因爲判斷總在斷定若干事物的眞實。說出判斷就說出所肯定的實體信念。再者,從事理上判斷不能爲兩概念間之聯和,因爲概念的構成,爲假定判斷先有,用概念解明判斷,即是由結果解釋原因。如果說判斷能在兩概念間或一事物與一概念間建立一定的關係,則在判斷之先,精神應有一種普通觀念的預見。但是語言上不可能,因爲凡概念皆爲相續的判斷所成。說:"雪是白的,"一定不會想到"白物之類;"如果不是雪,就沒有想到白物的必要;因爲是雪而有白的感覺,作爲我之因故也。無疑,到了判斷或決定"雪爲白色,"以及其它白色物時,無形中想到"白物之類包雪及其它各物。"不過這種概念是後來的,並非各項判斷之前的存在,所以不能視爲判斷的解釋。應該用原因解釋結果的,反用結果解釋原因了(參看米爾邏輯法譯第一卷一部五章三節)。這裏證明語辭彼此包攝之歐來(Euler)式的圖表构示亦爲無效。如:凡人皆有死,並不說人類包在死的種之一,也並沒有說

人的觀念包死的表格,事實上只肯定表格由人字概括者與死的表格皆爲有定的集合;而由人字概括的表格還有一定的物理心理現象 說到人皆有死的時候,就說到處處由人字概括的物理心理各種現象相遇,一定有所謂死的物理心理現象存在 米爾的判斷卽是肯定事實本身,肯定現象的存在,相承,因果,相類之觀念聯合的定律解釋.

要而言之,米爾的意思,認判斷在事實上而不在概念間,凡是字皆有其意義以接合所成之試驗,到了恰合文字之可否,就是逼近事物;譬如肯定"人之死,"就是在人所有的現象與死所有的現象間,建出兩相接的現象來。這種判斷論的原理名爲經驗判斷論.

三 推理或演繹式的批評

一部形式邏輯研究的精神,就在所謂推理論中;邏輯對於科學方法的重要點,亦卽在是. 邏輯家名之曰間接推理,演繹法,三段論,皆爲同一原理而異標其號者,它的歷史研究,差不多是一部人類科學思想方法最大的問題 現在批評的敍述,對所謂三段式的派別評論,當然不能詳細寫出. 關於普通三段式的組織,第二篇已經說明了,我們知道那就是亞里士多德派演繹精神所在,包十七世紀以前形式邏輯的思想;換言之,學院派

的勢力範圍。培根笛卡兒以後,由科學研究的方法中揭出形式邏輯的另一面目,與舊式邏輯截然建成三段論之新價值。現在所要研究者,正此類之比較耳。

I　三段論之史觀:亞里士多德至十七世紀

邏輯歷史的三段論,使我們知道中世紀學院派,的部分研究,完全離亞里士多德的實際科學方法,而入於無謂之形式主義。譬如亞里士多德三段式之中辭研究,實在是科學證明的原因推演;所謂推理論,就是一部自然科學的討論。在十七世紀前的亞里士多德派,愈爲研究而愈出諸乎正道,到復興時代的科學哲學家,都要找出科學新概念的實在和對象,所以盡推理之演繹部分推而改造,是卽經驗理性兩派邏輯時代。培根笛卡兒爲其首出。

培根的思想要用自然哲學改造所有科學,所以創作"新機關論,"以對學院派之邏輯觀;立試驗原則的歸納法,以對舊式三段論。他說:"三段式不能發現科學原理,也更不能別爲立證,因爲它不是自然中間的公理;它的投合不在事物之間,因爲它是由標辭組合而成。"標辭爲文字之結構,而文字僅爲意念之代表;意念本身如果是推理的基礎,由文字結合於事務者只有偶然得以堅定,我們眞理產生,不能靠這種作用發現,必由試驗

解釋自然,復由試驗構成公理的歸納推理。三段式的舊形式,不能達到科學原理,而在演繹上亦不能同自然精密相合。因爲這兩種缺乏,所以只有通常觀念的肯定,而無科學眞理的發現。洛克同意於此論,謂三段式只應爲理性之惟一工具,與達到認識之惟一方法,然而可怪者多少人從來沒有學到三段推理,而能推得很正確很明瞭的結果;學過三段推理者,倒反不見得純用三段式作推論。實際上有人以爲三段式只算是辯證家蒙糊其演詞的混淆方法,這是一個錯誤點,因爲推理結果所有的觀念,只要知覺到觀念間的適合與否,即足以知道所有錯誤與其結論之不合理者,藉三段式並不能有所掩飾。三段式固然可以包錯誤的推理,然而其它的方法還可以發現錯誤。換言之,專就許多形式是不能夠用的。譬如有人要用眼鏡分別物體,就不能說不用眼鏡的人卽不能分別物體(參看洛克悟性論一卷四篇十七章四節)。總而言之,洛克以三段式對我們理性上無用;其規範實不足以保證精神;其推理方法亦不能發現新證明;其作用僅及於排列所有知識理性而已,它一無所加。譬如用第三觀念來比較兩種觀念,說甲包乙或不包乙,用丙來連接應證其是否實在:"如甲包於丙中,而丙又在乙中,就結論到甲在丙中。""如果甲

包在丙中,而丙不包在乙中,就又結論甲不包乙。" 這種推論,普通不見得能習用。所以貢底牙克(Condillac)說:"凡推理都是一種演算,並不是由普汎到特殊,由多數到少數,或由包攝到所包攝的,而是由同到同,以變更其記號而已。三段式之原理爲齊一的,其方法爲更替代用之代數法。我們語言的組織完全爲分析的,能以代數語言簡單使用之,譬如推理中彼此判斷結合的形質,完全代數語言的功用。"

這種批評與笛卡兒派的理性批評相合。笛氏思想要就數學分析來改造科學,與培根派之經驗歸納論取同一方向,謂三段式的邏輯,過於精神上的複雜研究,陳明眞理則可,而發明則未也;所以對科學上不能得出眞的原理,只能用以演說所不知的外表。三段式的推理,所以有時解釋到事務之外,而不能判斷其所不知之事物。邏輯演繹的這種弱點,使哲學家處處只說出外觀的眞實,讓科學家絕對的超前,正是笛卡兒演繹方法改造的着實原因。他否認三段式之科學利益,謂爲只有表明結論的可能,眞正的原理,惟有直覺精神能直接發明。自然的簡單,包在複合事物之中,由必然的連續,接合於單純自然之間。對於眞理不是形式的,而是直覺與精神活動的分析演繹。要推理方法善,必須能簡

單而又自然,所以第一個要在明白與分明的觀念上推論,由官感得來的混淆概念,或普通無定無際的觀念,決不能在精神上有什麼特殊表現的可能。這裏把舊有的三段法都用"明白與分明"的教訓推翻了。法國王門學派的邏輯(La logique de porte royal)皆爲此種精神之研究。

雖然,三段論並不完全見棄於科學家,試看賴布尼支的邏輯,則知經驗理性兩派皆有所極端,而亞氏認爲眞正科學推理之形式,由賴布尼支發揮之後,始得以保全。他說推理的三段式在習用中具一種精美的價值,所謂學院派的創造,眞正應用起來,實有所混亂。然而三段式本身的發現,誠爲人類精神之特標,其重要者爲一種數學推理的普通性,惜無人眞正認識。只要知道應用,就知道它操必勝之可能(參看法譯新悟性論四篇十七章四節)。賴布尼支的思想完全以他"配合法"的數學原理研究邏輯推理的形與式,以及其它簡單規定的原則,與科學家邏輯家反對數學同邏輯原理相通的見點不同。我們在數學邏輯的歷史上可以明白解釋;簡而言之,演繹法的數學應用實由此時起。

## II 康德米爾斯賓塞等的批評

到了康德,形式邏輯愈向新的路上發展,三段推理

的四種形別,都能約成一個普通原理;所謂理性推測,皆能就此原則表明之:"凡由規範的條件所征服者,必然服屬於此條件。" 如:凡人皆有死;孔子是人;所以孔子有死。大前提列出一種普通規範來,小前提卽於此條件之下拿出孔子來作證。康德就此劃分定言,假言,選言三段式之別。在定言三段式之中,又區分爲兩種推理:純全推理與複雜推理是也。純全者,卽由三標辭達到一必然結論;複雜者,卽由三標辭以上,加入所有直接的結果(如對置至換位之類),以求其合理的結論。如:

凡腐敗物必不單純,

因此單純的就不腐敗;

人魂是單純的,

所以人魂不腐敗。

此卽複雜推理。依康德的思想,正與亞里士多德的略同。認第一形爲純正重要,而第二三四均爲複雜次要。於第二形之:

精神爲不可分的,—— 因此可分的必非精神,

物質皆爲可分,—— 所以物質非精神。

這種輕重的分別,與康德同時之朗白(Lambert)則持以爲非。謂三段式之各形,各具特殊原理與作用(參看頂前面三段式之式與形的結論),而不能以第二三

四各形約為第一形。推理所用的形,都隨事物自然與問題的情境來取用,其中差別存在,當不能因換置而同。法國近代邏輯家拉捨利耶由此發展,進而否認第四形之存在,謂三段式之三形,非惟自由配合而已,實基於自身的正確原理,沒有所謂直接推理。等差,換位,對置,都是三形之三段推理的分別,凡推演所用之原理,都是各形所有的直接基本。第一形在等差上,第二形在換位上,第三形在對置上,正如亞里士多德之所證明誠無第四形的必要。

三段式的推理根本改造,還不只是這種部分的批評研究,實際在經驗科學的理論中,已將亞里士多德的思想,源源本本,形質俱換,試將米爾斯賓塞玻來莫爾De Morgan諸家學理,略一考察,即足以證明演繹推理之新形式論的思想方法。

米爾說邏輯為證驗的科學。怎麼叫證驗?由若干事實的理性,證驗到某一事實的眞理,則此事實名為證驗的事實。證驗的意思不僅相信一事一物的本身為明白,還要由已認為眞理的事物得證其為明白。譬如在事實聯和的關係中,若有一事現,有一事隱,則視其所隱者為眞為實,因為所隱者實與所現的相接,故日眞理為推理之檢證的可能。如甲為乙,乙為丙,丙為丁,丁

爲戊之類,結論到甲爲戊是也。這種理論根據的實在,成功米爾三段論的新端緒。我們且就其重要者略爲分述如次。

普通說三段式的證明,決不能超乎前提包有之外,是三段式無所證明而亦無所求證。譬如說:

凡人皆有死;

又說:孔子是人;

因此說:他是有死。

這並不成爲推理,因爲肯定大前提,就肯定結論了;所謂結論,不過是其部分之一,並沒有推進一層思想,只算是就原地方轉過一週;也並沒有從已知到未知,實即從已知到已知,故亦無所謂新推測,無非證驗之謊辭耳(Petition de principe)。米爾說:如果心理作用上把個體包爲類別的或類屬於種上,則三段式之存在,必逃不出"眞正無用"的罪名! 要想救此難點,必須另行改造推理所有的方法。

"孔子是有死"的標辭,當然能成推理,因爲這種標辭表明其它若干事件的認識;但是實際上能否由此結論其:"凡人皆有死的標辭"? 米爾說:不能。我們先注意:

堯,舜,禹,湯,文,武……從前活的都死了,

如果由此能結論到:

凡人皆有死,

那我們就此可以推到結論的:

孔子是有死的。

然而普通標辭的加入,在證驗上並沒有一點增損;那麼,普通標辭的實在,究竟在什麼地方? 無疑,在我們所有特殊觀察和所已知的死事上建定。但是用以證明普通標辭的這些地方,又是否能推證到孔子是有死的? 我們又能否由此直接到普通標辭去呢? 這種問題沒有解決,實際上種種推理又都過去了,所以說三段式無用。凡動物如此推演,如同小孩子怕火燒樣,終不知道說到普通標辭的:"凡火燒。" 我們自己由本身繼續論到所有別的人,或由一人論到一人,總沒有立出對人或自然上普通觀察的斷定來。自己具有很多特殊事實的人,無須乎求到普通標辭去,可以自用認識作斷。譬如:

"老軍官到一地方看,就有安排軍隊秩序的計畫……用不着記住某種軍隊位置與地勢相關係的定理。"

又如滿斯非德告訴一位很有經驗新任殖民地督軍的人說:

"你將來坐堂審判時,下出你的判詞,決不要用什麼理性。" 滿斯非德假定判斷可以公正,而理性幾乎皆足敗事。譬如有志之士,做出許多不經事業,終竟不識其所以。若幾何學然,我們推理都是由特殊到特殊;在證明之前的定理,並不能爲所證明的標辭,只有特殊底證明,由同一條件作無限次求證,然後始有可能。結果,米爾推理的眞理到了:

"凡推演皆由特殊到特殊。"

這個結論並非謂不能用普通標辭,譬如從某點到其它一點,自然是:"選擇適當底道路。" 推理亦然,由所必經的程序,達到應有的標點,復由前有特殊底觀察,證明特殊底情形。由徑可通的,隨大道自然直上;換言之,由普通標辭也可以過去。所以我們每次的經過,都是推演出來的;然則推演者乃卽由大道婉轉進取之謂。人類所見的事物,多而且變,幸賴語言之便,能約計複雜標辭爲簡單標辭,遇事須待考察檢別時,卽將簡單的直接用來作證。如遇凡人皆有死的標辭,同時就能見到孔子是有死。是推演爲判讀註釋之謂。我們的單簡標辭,都是建立普通標辭的試驗品;由一單簡標辭,檢證另一單簡標辭,得出第三單簡標辭,所以推理卽是就普通與特殊標辭同時的事物觀察,由已知到未知,成爲雙

歸納之演繹的概論。各個特殊標辭的試驗建定了,記爲普通標辭的應用公式,如同審判官對於法律與立法的形式然:"承審時的解釋不能與原文相謬。" 所謂推演,即解釋與應用所有公式之謂。三段式的規範,就是這種解釋的規則。我們的試驗能證明一件新事,還可以證明同類無限的新事,推演實就是我們推理中"各系安全的保證," 與免除推理不善的歸納法。所以說:凡推理皆爲歸納法。

米爾的這種結論,引起很大底科學方法爭論:因爲純正科學(數學)的推理,並不是歸納法的使用,實在是由必然底先天定義和自然底公理,試行連絡真實以接合眞理。我們自然科學方法,都以其實在"絕對非試驗範圍的研究"爲指導。然則"推理皆爲歸納"一語又是否正確? 米爾要解釋這個困難,研究出四種回答來:

(一) 無所謂演繹科學;凡試驗科學,都可以由簡單試驗變爲演繹科學,譬如許多眞理獨有的經驗,由甲記乙,乙記丙;丁記戊,戊記庚,丙記辛,科學家把第一級連到第二級,找出丙記丁的事實來,於是由演繹從甲找到庚,其實就是歸納推演的程序;凡科學推理都由此變爲演繹的。

(二) 數學眞實都是可以論駁的;因爲它的眞理

皆為假設的意像,如幾何之點,線,面,皆無眞實存在,用心理以外的試驗,則一無所有。

(三) 故數學定義皆為假設;其結論之眞實,全在各種條件假定上。

(四) 其所有公理,不過為經驗之概論而已。譬如:兩直線不能包成一空間的公理,實為官感證驗所得之歸納結果。由我們內觀的信仰承認,不用試驗可以成功;換言之公理之源在我們精神中,並不在事物上,在我們以內而不在我們以外。是卽端來 (H. Taine)所謂:"遠於試驗,卽出於別方。"

這種解釋在班來(A. Bain)亦認為合理,他以為對個體實用的推理,在羣衆個體中,當然能相推,同時以公理普遍論之,所餘者亦得由假定證定之。

雖然,米爾之演繹論,並不能要得所有邏輯家同意,如法國哈比邪(Rabier)則謂米爾由特殊到特殊的推理為不可能。譬如兩連續現象 A 與 B,如 A 之連續為 B,而 B 之新生無所謂普通標辭,當亦無須乎"證驗"的觀念,因此亦無用乎推理。眞正推理在"定律的觀念"上,換言之在普汎標辭的存在;推理先要在所有類分中,然後由此條件及於特殊點。所以全稱標辭非獨同時具特稱的可能,而且為特稱辭之惟一可能的基本所在。

斯賓塞的原理與此同一出發點,然所論則時有過甚。故其理論結果,完全否決三段式之價值:"我們並不用三段式推理!" 三段式是一種心理的不可能,其所施行的方法不是達到結論,而是由所施行的清理結論耳。思想發現結論的自然進行,不是三段式可以表現的。因爲我們人的知覺爲兩事物表現間直接認識的一種關係,推理則爲兩事物間間接設立的一種有限的關係。這種設立又怎樣可能?如果兩事物間的關係不能直接認識,則惟用已知中間物由精神方面使之相接。所以推理只是建設已定的各關係間有限的關係;那麼,舊三段式就有改造之必要。如:

凡有角動物皆爲反芻;

此動物有角;

故此物爲反芻。

尋常認爲只有三名辭,其實不然。所講的動物與所有的動物不能爲"同一"表格,而是"相似"的表格,從此三段式有四名辭而非止於三:第一關係在"組成一有角動物的表格"與"組成一反芻動物的表格"之間;第二在"組成此動物有角的表格,"與"組成此反芻動物的表格"之間。推理的作用,在求出由第二關係到第一關係間所有的同點。其式如:"甲乙間的普通關係,爲次

甲次乙間的個體關係,"實在表明邏輯直覺。三段式的公理變爲:"凡一事物與同一事物能共存者則彼此共存於其間。" 三段式卽是相類之適應底比例。結論的或然數,完全視比例關係的相類程度爲轉移,如果推理的事物上與比較的關係都能自然相等,而所有關係又皆爲同一強度,則推理爲完全確實。如空間,時間,數,力,以及其它所有同類同量相等的關係,都能就此認定;所謂數學結論的必然與特別眞實卽由此產生。斯賓塞之三段論,根本在相類程度的直覺推理中,求逼近事物彼此無限中間的關係。其近於純正科學之基本,較米爾更深一層。

這種批評的觀點,幾全在分析演算中立足,十九世紀中間,英國數學哲學家的邏輯思想,從哈密圖表格定量論發展後,數學分析的方程論一躍而爲形式邏輯推演的原理。他們都要把思想所有暗藏的內包,一一明白發現;作這種形式演繹的運動者以莫剛坡來等數理哲學家爲特出。他們運動改造的結果,產生二十世紀數學邏輯的發展

III　莫剛坡萊的新推理論

莫剛爲哈密圖之門弟子而另樹一幟者。謂邏輯推理爲純粹形式,不注意知識之實質,其對象則爲研究

思想行動的定律,精神本身與事物本身仍非其範圍;換言之,只有精神同事物間的關係與事物同精神上之關係的認識。普通三段式的:"甲爲乙;乙爲丙,故甲爲丙,"與所謂"甲等於乙,乙等於丙,故甲等於丙"的意義完全不同。其連辭一爲純粹形式關係,一爲已成物質化合的眞理。邏輯可能,惟有建立普通關係,所謂相當相等的推理中主格的連辭,値作特殊點,而三段式則完全爲關係的配合耳。如 m 與 n 爲兩單名辭, L 爲其間存在或不存在的關係;要表明爲肯定關係者如:

$$(1)\quad m\cdot\cdot Ln$$

表明同一關係的否定,如:

$$(2)\quad m\bullet Ln$$

是(1)表明 m 爲思想對象之一與 n 處於同一關係 L 中;換言之, m 爲 n 的"多數關係 Ls 之一。原式(2)表明 m 爲思想對象之一與 n 不在同一關係的 L 中,換言之, m 不是 n 的"多數關係的 Ls" 之一。這裏證明表格本身可以爲關係之主格,而同一標辭中只有關係配合而已。如:

$$(3)\quad m\cdot\cdot L(Xn)$$

表明: m 爲 n 的"多數關係 Xs" 之一的 Ls 之一;所以能思想到 m 爲 n 的"X 之一 L。" 其肯定式表爲:

(4)　$m\cdot\cdot(Lx)n$ 或 $m\cdot\cdot Lxn$。

還有反關係的"$L^{-1}$"表明(1)式之反爲:

$$n\cdot\cdot L^{-1}m$$

卽是 m 爲 n 之 ls 之一時,則 n 爲 m 的 $L^{-1}$ 之一。如果 m 不是 n 的任何關係之一,則 m 在若干非 L 關係的 n 中反關係以小 l 表之,如有:$m\cdot Ln$ 可以寫爲: $m\cdot\cdot ln$。我們可以單簡的舉例證明如次:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{m同n在L關係中} & m\cdot\cdot Ln\\ \text{n同u在x關係中} & n\cdot\cdot xu\\ \text{所以m同u在Lx的配合關係中} & \therefore m\cdot\cdot Lxu,\end{array}\right.$$

又

$$\left.\begin{array}{ll}\text{m同n不在L關係中} & m\cdot Ln\\ \text{n同u在x關係中} & n\cdot\cdot xu\\ \text{所以m同u在非lx的配合關係中} & \therefore m\cdot\cdot lxu\end{array}\right.$$

又

$$\left.\begin{array}{ll}\text{m同n在L關係中} & m\cdot\cdot Ln\\ \text{n不同u在x關係中} & n\cdot xu\\ \text{所以m同u在L與非x的配合關係中} & \therefore m\cdot\cdot Lx^{-1}u\end{array}\right.$$

(式中非 x 卽爲,x′ 或簡寫爲小 x),

又

m同n不在L關係中　$m \cdot Ln$

n同u不在x關係中　$n \cdot xu$

所以m同u在非l與非x之配合關係中　$\therefore m \cdot\cdot L^{-1}x'u$ 或 $m \cdot\cdot lxu$

這些關係配合的三段式,中名辭位置沒有定置。譬如:

$$m \cdot\cdot Ln \text{ 與 } Ln \cdot\cdot m$$

的形相當,欲換形必先能換其關係。第一形直接換置,第四形則爲轉變換置,第二形爲"關係於"中辭的換置,而第三形則又爲中辭"關係的"換置。

坡來的象徵邏輯,更爲系統的研究,合數學代數原理爲邏輯代數演繹精神的創造,成功新科學的邏輯方程式論。所謂形式邏輯的數學分析與演繹推理的演算,把三段式的形式標辭與三段式的級次方程,列爲同一概論的邏輯公式。從賴布尼支以來,所想像的普遍數學觀,用一部"思想律"與一部"數學分析"的機械方法表得淸淸白白。凡是象徵推理的邏輯值,只有"零"與"一"的存在,換言之或假(0)或眞(1)而已。故其演算之結果亦惟零與一的二值。其理論新著者有:

$$X^2 = X$$

的方程式論,因爲基本上:

$$0^2=0 \qquad 1^2=1$$

這種演算的根據,一方面爲邏輯理論,一方面爲或然數學,把三段推理的級次配合演爲很實際的記號消去法。我們不能詳細說明所有原理(參看本書第二部第二篇第一二章),且就其例以明其演算代用之大端。

如捨利若(Senior)之富貴定義曰:

"富貴爲變換的事件,其定量有限,既可取樂,亦足生憂。"

用坡來記號表明之:以X代富貴,m代定量,V代變換事件,a代樂事,b代憂事;得式爲:

$$(1) \quad X=mV\{ab+a[1-b]+b[1-a]\}$$

$$或 \quad X=mV\{a+b[1-a]\}$$

式中(1-b)(1-a)爲ab之反,換言之,不憂不樂。現在將原方程式中無用的記號消去。第一消去b時X變爲如何? 先將各項移在一邊,則:

$$x-mV(a+b-ba)=0;$$

使b=1,第一邊變爲

$$x-mV;$$

又使b=0則變爲:

$$x-mVa,$$

因此有;

$$(2)\quad (x-mV)(x-mVa)=0$$

$$\text{或}\quad x-xmVa-xmV+mVa=0$$

從此推得:

$$X=\frac{mVa}{mV+mVa-1}$$

將原式第二邊展開得爲:

$$x=mVa+\frac{0}{0}mV(1-a)$$

式中 $\frac{0}{0}$ 一爲無定之意。即是說:"富貴爲有限量的事件,可以變換,可以作樂,同時有限事件的餘數,可以變換亦可以不作樂。

第二如果就 m 來說,不論 m 到 b 的關係如何,只求 X, V, a 三者的關係,得證爲:

$$(3)\quad x-m(xV+xVa-Va)=0$$

從此又推得:

$$m=\frac{x}{xV+xVa-Va}$$

其展開式爲:

$$m=xVa+xV(1-a)+\frac{1}{0}x(1-V)a+\frac{1}{0}x(1-V)[1-a]$$

$$+[1-x]Va+\frac{0}{0}[1-x]V[1-a]+\frac{0}{0}[1-x][1-V]a$$

$$+\frac{0}{0}[1-x][1-V][1-a]$$

這個式子的意思表明:有限量的事件爲變換的富

貴與樂逸的產生;變換的富貴與無結果的樂逸,再加非富貴的無限事件,都爲有變換而無樂逸的產生,或者無變換而有樂逸的結果,再或者同時無變換而又無樂逸的產生。

在(3)式中使V等於一得

$$x-xm-Xma+ma$$

又使V等於零得爲:x,

用一邊來乘其它一邊,使之等零,則得:

$$x[x-xm-xma+ma]=0$$

或者　$x-xm=0$

因此得證爲:

$$x=\frac{0}{1-m}=\frac{0}{0.}m$$

卽是:凡富貴爲有限量的事件。如果消去方程式其它記號,與此相同。

這些演算只是就單元標辭(propositions primaires)解釋的,還有非事物或事物觀念的複元標辭(propositions secondaries)的眞假判斷:"如果太陽發光,則是日必佳"之類的演算,其方法又大不相同。在這許多不同之中,有一個相同的關係爲"時間"的:如果X標辭爲眞,Y標辭亦爲眞。譬如X標辭眞的時候爲x,則"1－x"爲X標辭假時的表現,其它配合倣此。

有了這類標辭的元素,去考察標辭的本身,就可分為:

(甲) X標辭為眞,則x等於一為正式;

(乙) X標辭為假,則x等於零為正式;

(丙) 或X或Y標辭為眞,則其正式為:

$$x[1-y]+y[1-x]=1:$$

(丁) 如果Y標辭為眞X標辭亦為眞,即是假定一未定時間之一Y為眞,故以V表之,而"Vx"表x未定時間之一,其正式為y等於"Vx;"

(戊) 表明標辭同時為選言與條件者,應分為三種:

(a) 如果X或Y為眞,Z為眞;

(b) 如果X為眞Y或Z為眞;

(c) 如果X或Y為眞,Z與W合而為眞或假;

這三種正式分列於次:

(a) $x[1-y]+[1-x]y=vz.$

(b) $x=v\{y[1-z]+z[1-y]\}$

(c) $x[1-y]+y(1-x)=v\{zw+(1-z)(1-w)\},$

再總看起來,單元複元的標辭,都在同一形式定律中而異其解釋。

IV 將風的批評及其論式

要而言之,坡來邏輯代數,完全在條件與契約的保證上,其門弟子蔣風(Jevons)謂爲不適通常思想的邏輯;即如加號連辭,實爲邏輯無用之表現。譬如謂:

$$X = m + n$$。

爲下列諸元素配合關係:

X爲秦始皇,m爲焚書坑儒,n爲併吞六國,統一天下之君也,

則前式應譯爲:

秦始皇爲焚書坑儒,併吞六國,統一天下之君也。

原式雖合理,而加號實無所用於其間。再就坡來消去法之數學原則反換之;原方程式中兩邊減去n,得:

$$X - n = m$$

其結論爲非理之:秦始皇因爲非併吞六國統一天下之君而爲焚書坑儒。(參看蔣風純邏輯(Pure Logic)第十五章一七七頁——一八三頁)然而這種解釋在邏輯性質上,零與一的值可以救正之。

蔣風的邏輯演繹,完全就此處着手改造。先求出齊一律的特殊點,分爲:"單齊一,""分齊一,""限齊一"三種研究。所謂單齊一在舊邏輯中完全忽略了。而在推理之中非常易見,如標辭之:木星爲行星中之最大者,英皇后爲印度女王;等邊三角形爲等角三角形之類的

主格與表格,完全標示同樣個體,即尋常等號所表之:

$$A=B$$

所謂分齊一者,如哺乳類皆爲脊椎動物的標辭,其表格所有之外延大於主格,即尋常等號之:

$$A=AB。$$

所謂限齊一者,如金爲可鍛性的標辭,其相等只有一定限制與一定條件之下爲可能,如果以 A 代固體狀,B 代金,C 代可鍛性,則 B 等於 C 只在 A 的限制條件上,所以表等號正式爲:

$$AB=AC。$$

又如果說:鐵不是流體,以 A 代鐵,B 代流體,則原標辭之否定式以小 b 表之:

$$A=Ab。$$

由是結論到單齊一分齊一限齊一之否辭式爲:

$$a=b,\quad a=ab,\quad ab=bc.。$$

蔣風就此研究間接推理的:

第一點:中國都城等於北京;

北京等於世界最多穢土的城;

所以中國都城等於世界最多穢土的城。

以徵號譜之爲:

$$A=B,\quad B=C,$$

$A=C$。

第二點:歐洲最高山等於白頭山;

白頭山等於蓋雪的山;

所以歐洲最高山等於蓋雪的山。

以徵號譜之爲:

$A=B,\quad B=BC,$

$A=BC$

第三點:曹達母等於曹達金屬,

金屬等於金屬電導體;

所以曹達母等於金屬電導體。

以徵號譜之爲:

$A=AB,\quad B=BC$

$A=ABC$

第四點:等邊三角形等於等邊等角三角形,

等角三角形等於等角等邊三角形;

所以等邊三角形等於等角三角形。

以徵號表之爲:

$A=AB,\quad B=AB,$

$A=B$

第五點:鉀等於鉀之金屬;

鉀等於水上浮體的鉀,

所以鉀之金屬等於水上浮體的鉀。

以徵號表之爲:

$$B=AB,\quad B=CB$$

$$AB=CB$$

第一點爲兩單齊一的推理,第二點爲一單齊一與一分齊一的推理,第三點爲兩分齊一所得之分齊一推理,第四點爲兩分齊一所得之單齊一推理,第五點則爲兩分齊一所得之限齊一推理。蔣風的演繹論由是建立,推而及於所有配合,其原理之應用,能由機械方法演算,故有邏輯機器(Machine Logique)之發明,曾推理中之新事件。

## 第二章 歸納批評論派史

演繹推理的三段論從十七世紀至十九世紀純正科學的批評發展以來,漸漸接近研究必然觀念與普通觀念的結果。所謂三段式的推理,時而爲數學證明之結合,時而爲精神特別的行動;人類智慧上進的表現與心理的更換,無形中把科學性質假設的本能,一變而超乎亞里士多德派惟一演繹邏輯眞理要求之外,合爲:原理與定律的"歸納演繹邏輯。"

不知道演繹邏輯眞理作用的形式邏輯家,往往就

試驗科學的方法批評一般底演繹推理。其結論將歸納認爲求眞之惟一工具,與演繹劃分爲二。這種理性的錯誤和不適當的存在,就米爾以後的形式邏輯,本可以完全推翻;再加以近代數學歸納的研究和數學邏輯的發展,更可以發明二者相互間眞理的結構。研究這個問題的形式新論,就是純正科學同邏輯基本的考察,是所謂數學邏輯的創造。我們現在只就試驗科學的歸納獨立方法比較說明,換而言之,歷史上批評進化的研究。

## 一　歸納與三段式的關係

演繹推理的方法,即是由某種普通標辭中取出一種特殊或不普通的標辭。但是所謂普通標辭又怎樣產生而爲其它標辭之基本使用的?如果把許多先天論派的論據推開,直接承認固有的明白性;那麼,普通標辭的存在,只有就觀察中所供給的特殊事實,聯合成功。這樣看來,我們在普汎中取出特殊新事件以前,已經能從特殊到普汎。所以歸納研究,在亞里士多德的演繹邏輯中已然具一種眞形,不過他移到三段論中的歸納推理是:結論各部分"所有"的證明;正與培根所推證的:肯定"若干部分上的觀察"完全不同。亞里士多德爲"由同求同,"培根則爲"由若干求所有。"譬如亞里士

多德的三段歸納式:

凡無膽汁動物必然長壽;

人,馬,騾都爲無膽汁動物;

所以人,馬,騾都長壽。

或者是:

人,馬,騾生存很久;

無膽汁動物爲人,馬,騾;

所以凡無膽汁動物生存很久。

在這種歸納推理中,試問一普通定律本身如果非其它比較更普汎定律的結果,而在證明之中又只能視爲事實或特殊比例的根據,然則何以用三段式證明普通定律?

亞里士多德在"分析論"第一書第二節裏回答上述三段歸納,謂爲:由中辭(無膽汁動物)證大辭(長壽)以小辭爲中間。(或人或馬或騾,各種無膽汁動物)兩前提有了,然則將何以結論其普遍的結論? 亞里士多德說:小前提的兩辭爲同一外延;故能用換位檢證,而在結論中可以將大前提的主格易爲小前提的表格,其外延仍相等。故謂三段歸納,爲小前提換置的力量。而前式小前提已具完全歸納:假定"若干"相當於"所有,"而爲列數之完全式。同樣有時只就某種觀察歸定一種定

律者,則爲培根式之邏輯問題,包中世紀所謂試驗方法。亞里士多德的"分析論,"承認三段式第一形爲科學方法,因爲由此可以决定許多預備作用。譬如由事物或個體的定數,可以視爲全類的一切表現:"一方面爲歸納作用的本身,一方面仍不出齊一原理的根據。"

## 二　十七世紀的歸納邏輯

培根以前及其同時的科學改造家,都認科學索究方法爲"推理與試驗的兩條路向。"推理本來可以信奉,然而不能信實;作爲習用理性的觀察則可,不能爲超觀察的事物眞理原因之用。這卽是加利來 (Galilée, 1564—1642)里諾納(Leonard de Vinci, 1445—1519)諸家試驗科學方法的歸納。里諾納說:"自然本始於推理而終於試驗,然而我們應該從反向走起,用試驗解釋自然,檢察其變更所有的情境,爲之精擇其普通規範。我們眞正方式,卽歸納所賜。"加利來的定律發現,完全根據這種檢證方法得來。他說:我們證驗成例的事實,可以用旁證證明之;如果證驗現存的事實,則惟試驗可以達到,如果"明白"與"見到"的試驗有了,無須乎特別否認錯誤推理,由一試驗卽足消滅千萬推測,由千萬推測不能非難一試驗,這是自然的道理!

雖然,這種實際精神,在科學發展上,不能伴着邏輯

圓滿的結果。所以理論上的歸納法在近世科學中最新奇的表現,其功績應在培根而不在加利來者,正因爲他的邏輯勝利,超一定的實用程度。

培根說:人類所應有的目標,就是對於自然的管理,科學與權能,爲其惟一事件,昧於因者,則不能明其果,勝自然惟有服自然。觀望中的事由,即爲施行中的方式。人而由權能得稱爲自然之總裁;由科學得稱爲自然之解釋。故科學與權能皆爲觀察中之模範。這樣看來,認識科學的目的,不算全能,必須找到所有認識的方法。專恃一種智慧,如同赤手空拳,什麼東西都不能做,勢必用機能工具,就官感不精的細密,通達自然精微的細密。所以知與能兩件,第一要有知的工具,然後知的本身始得爲能的工具。惟一的工具自然是邏輯。然而邏輯在發現上是無用的,它對於決定錯誤比發現眞理爲有力;譬如三段式只有迎合情感方面而不能到事物本身去,因其結構爲標辭之集合;而標辭則爲普通意念裝形之文字的結合。如果意念不淸白,事實不專定,則所豎者無一堅強把握。如:實質,性質,行動,情慾,重輕,疎密,等等意念然,與所謂定理之形式完全異質。培根分試驗與歸納爲二:"一爲由試驗到試驗者;一爲由試驗到定理者。" 而定理的本身又能引起新試驗。謂試驗方

法的普通原理分為八種:

(一) 試驗變更的地方: (甲) 物質上的(如用破布造紙何以不用絲造?) (乙) 效果上的(如日光強度能由鏡增高,月光是否同然?) (丙)物質之量上的(一斤重的彈丸從塔頂下墜,經過一定時間,兩斤重的時間是否相等?);

(二) 試驗產生或延長的結果;如重複(火酒為酒之蒸溜的產生,如果蒸溜火酒時又為如何?), 如外漲(磁能吸鐵,如果使之同化於鐵中又為如何?);

(三) 轉換的地方, (甲) 如由自然到藝術, (乙) 由一術到其它一術, (丙) 由藝術之一部到其它一部;

(四) 試驗反轉鏡能增高熱之強度,能否增高冷之強度?);

(五) 強行其所研究之性質(磁力經過一定場圍所授之變態直至其力之平均無有而止);

(六) 試驗之應用;此為轉變自然定律到若干有效事物上的作用;

(七) 試驗之連結 (增加實質效用以連接其它一實質效用);

(八) 試驗之偶獲; (如所成試驗,不認為由若干觀念引出的,必認為非試驗所成者;如甑內之蒸溜是也)。

再到歸納法去看,其原理顯立為三表:

I 現存表;各地方標記已定之現存的現象,其所求的原因亦在是,由各點分析與比較發覺之;換言之,無論物質之差別若何,先比較所有已知事實,在所研究之形式與定律中,處處皆遇其自然的存在,如凡物質之中能遇其熱之自然者。

II 沒存表;各地方注明所要找的現象,如現存表中已有之同類現象,而此間尙缺其表現者,分析與比較,應該發覺其出於彼而沒於此的原因。

III 級次表;各地方標立所有現存表現之現象的差別;分析與比較,應該發覺其相通程度之變數的表現。

這三種表把歸納引爲研究一自然與其所考察的自然之表現,與其所考察的自然之無有,與其所考察的自然程度之增減。由這些試驗的標定,給我們精神與事實相措相比。其最完備處,培根另立出二十七種重要事實的類別。"新機關"第二部,專注於此類之考求,以外還有兩路交向的"十形試驗",亦爲試驗重要方法。有如智能懸於兩大理論之間,而於兩自然中不識何者爲其眞實原因;十形例證,指明兩自然之一與其它一間難解的惟一交互點。問題由此分別,應該承認有一爲投出它一之原因;換言之,在一切假定表現與輪流替換的情形中,用試驗分去其一以斷定其它,由十形試驗定

律證明者,為非理性證明之眞式。

現在結論培根歸納法的普通性質。培根並不要人人都用許多觀察預備歸納判斷,他要人都由善作底試驗實行判斷;他不預備列舉所有事實,而要在所有事實之間選擇;他不專在求積而在省約。無疑,他要人做許多觀察,然而注意形質比觀察的數在上;他所要的觀察數與其所有的變更同量,正所以使之能去其附象,因而抽出根本地普汎。三表之發現,卽是減除想像原因與主體以外的情境,使之於眼前惟存有益事實與眞實條件,以及所研究之現象的原因或定律。這種科學方法的實用,在笛卡兒賴布尼支及王門學派的邏輯研究中發展得非常圓滿。

笛卡兒的歸納法立於類推原理中,其近於亞里士多德歸納推理較培根式為多,故其使用數學證明時,完全用列數為例。他說:"我要證明理性的精靈為非實體時,用不着就完全列數舉明;譬如用若干類的實體為證,卽足以知精靈非其所有,如果要由舉例證明圓周與其它之形相等者其面積則為最大,我們用不着到所有的形上考察,只就若干形來證驗卽能斷定。從此由歸納以結論所有的形。" 卽是眞正歸納法。

## 三　十八十九世紀英國歸納派

十八世紀中歸納問題作爲歸納法的邏輯原理或基本的使用,其表現則爲牛頓之科學哲學方法,要求知道:"凡同果必出自同因。" 這種純粹邏輯結果,爲後日悅德(Reid)歸納原理之:"必然原則與偶然原則"兩大分論。謂爲:"自然秩序中將有的或者類於已有的情境。"而霍葉哥納(Royer-Collard)更逼近爲"確定定律管理宇宙"與"普通定律管理宇宙"的兩原理。由第一原理我們從歷時的一點,結論其它所有;由第二原理,則從空間的一點結論,其它所有。所以歸納原理,使我們永遠確信物界與自然相關接,與相類的相對。霍氏的發展非常重要,譬如在當時,試驗實不過爲有限的研究,而霍氏之第一二原理則爲歸納最大之精神表現。從前許多方法論,皆限於事物觀察上,即試驗亦無不然,到霍氏原理出,試驗始可超觀察極限之外。至十九世紀中,復由所謂英國歸納派的邏輯批評增進,其立論之重而足舉者有:黑塞,懷威爾,米爾之流。謹爲分述其義如次。

黑塞(Herschel)爲一科學哲學家,對於科學普通概念與培根的思想相近,其精確程度,則更爲進步。他承認知識的來源,惟試驗能求其自然,我們的認識,只有在事物與變遷關係的聯合中,從前名現象表現的常形與定態爲原因,其發現的秩序則爲事物的觀察。由觀察

上精神能使發覺的關係入於擴大的關係,復進而爲擴大的理論。但是在觀察事物的質量混和中,"本原與偶然的情境,""一而不變與動而一瞥者,"應該特別分開。現因與實因的解釋明白了,始能得出正確知識的因果關係。黑塞以前的歸納論,把這種重要情形的記號沒有表明,而時間的間隔無意中分斷。其實原因一失,結果卽無;若無其它原因插入,則此事不復再生。原因強度變更時的增減,結果亦隨同量增減之,因爲結果與原因爲比例,各處原因惟有直接行動而無間接連斷,所以因沒果沒。黑塞研究限定羣象中原因的結果關係所有性質,成一部自然哲學的科學方法根據;其結胎爲後日米爾試驗方法的因果律新論。

懷威爾(Whewell)的"新新機關論"(Novum organumrenovatum)爲增進培根歸納法之專書,其科學普通論據,皆爲歸納之總匯;認知識中最簡而又不可分之元素爲事實與觀念二種。由感覺給以事實,由精神供其觀念。二者就心神分而爲單行,實則相依不離;因爲感覺連接事物表現與思想的情形,不能無觀念的時間,空間,數量,原因等等存在;這些連接與個體普通原理沒有,則感覺對於事物全無所用。再者感覺沒有,則觀念成了空象;譬如沒有物體,則無所謂空間的視覺;沒有事變,

則亦無所謂時間的表現;再沒有數目的事物,則更不知道數量的存在。這些物體事變數目;皆連累於感覺。感覺觀念的對偶,爲科學哲學之基本,使我們由此懂明自然進步與方法之表現。科學由觀念連合現象成爲系統.其進步則爲"能於極近觀察的事實中,應用愈趨明白愈趨峒悉的觀念;"其方法則爲"能調置所有新眞理,就意像觀念以解釋事實。"

這些觀念,就是科學之精;如幾何的空間觀念,直接間接發生無限特殊概念而爲積量科學之線,面,體,直線,弧線,三角,等邊三角,弧三角,圓,橢圓,方,球面,圓錐,圓筒,柱等等幾何定義的對象,而此類概念都具必然眞理,關係於空間,以表示其本性,如直線與平行定理然。又譬如機械科學中之力的因果律,其反動等於原動。這裏證明科學定理的必然性,爲觀念自然與基本的伸張,非所謂經驗歷程。因爲試驗不能得出必然性,定理的表現,都爲明白與存在的條件,所以知識無形中有一種形上的科學。從此有明白與分明的概念,而此概念確實普遍聯合產生的事實,就是所謂科學。故凡科學之結構必爲:"概念解釋與事實聯和兩同時工作成功。" 觀念就是現象中應用的思想顯明的形式,如空間,時間,數,因,相類等等觀念是也。概念則爲此類觀念之特別變

形,如圓,方數,等速力等等是也。各概念連累於觀念之必然與普汎的引伸關係即爲定理。所以觀察的方法爲科學發現之始。

然而概念解釋與事實的觀察,不過爲智能材料與科學感覺的預備而已,其成功還在歸納檢驗。歸納者,乃定律之發現或現象原因之研究;爲用確實概念,作事實之實際聯和者。非純粹聯和事實之集合,亦非聯合事實的觀念;而是由分別事實中,就精神引入聯和事實的智慧行動。懷威爾因而定歸納爲三度:

(一) 爲觀念之選擇;

(二) 爲概念之建定;

(三) 爲形量之定度。

前二者爲引起第三者特別歸納的"量之應用歸納。" 其法分爲弧式,中比式,最小方數式,餘數式。弧式即畫一弧以表直軸之所有觀察量,而各量之變量爲橫軸之表現,其形之規則與否,由眼見即足以明辨。中比式即取所有觀察量之多數的算學中項,以消去其不合法式者。最小方數式即限定不完全觀察之部分或全部數目引伸之或然定律;因爲數學推演得出中項最大的或然爲其最小或然之和的平方。餘數式,即多數定律同時應用於一點上,變更所有觀察之量以配合其

所能,由定量觀察與已知定律減去所有定量以求其餘數之定律。

這都是現象的定律研究,歸納法還不僅如此。在自然與事物實際連接的相類與量性關係上,懷威爾研究出"原因歸納"法來;其原理建立在物質與原因的觀念上。實際,此法與其定律歸納無甚差別。總而言之,與黑塞的方法同爲發明的歸納法,而與繼起之同一歸納邏輯的米爾之證驗科學完全相異。從懷滅爾的科學思想律以後,歸納作用的本質,有許多不明白的。如果科學的發現,完全視爲精神上所有觀念的應用能及於感覺上有限事實的存在,那就要知道所得的標辭,皆爲定律的必要;然而又怎樣能決定這些標辭的效用?試驗的證明,又爲何種方法所幫助?所以米爾把這種批評擔起;求出所謂證驗的科學邏輯。

米爾的歸納定義爲其演繹推理的同理,故曰"歸納者發現與證明普通標辭之方法也"無疑,從特殊到特殊的推演,卽是所謂歸納作用。但是"如果觀察的明白,使我們能斷論若干未知事件,則就同一明白,能使我們得出相似的結果以確定其全類。"(邏輯法譯卷一,三百十九頁所以研究怎樣證明普通標辭,卽是研究歸納與分析歸納。正是米爾由特殊到特殊中抽出由

特殊到普汎的推理過程。要明白這種過程的實在,須分解其原則之設施。

科學家的歸納,在結論特殊事件中的眞實,必能對一切相似的事件中仍爲眞實;換言之,如果一類分個體的眞實,爲全類分的眞實,或有限數目的眞實,則在各次相似情形中亦皆爲眞實。此類作用,實關係一種原理或公律。如果相信出於特殊事件中的,能重出於相似的所有事件中,則必確信其在自然中有所謂並行事件,假使能通其一者復能通其恰恰相似的各種情境,則與其同一情境的表現應爲同次。這又何以足徵呢?因爲自然的"協一"(Uniformite)爲其部分協一之和,其存在爲各現象協一區分之組合的複雜事實。此正所謂歸納原理或公律,爲一切部分歸納之簡式。如此立論,勢必發生一種矛盾詞,如果實際上歸納推理由特殊到普汎的進程,必須自然協一的信仰爲有效,則此信仰必能引伸特殊的歸納,而無信仰的特殊又必爲無效無値。

雖然,我們原始的歸納性不能離開,所謂由特殊到特殊的推理,在任何歸納上構成而無用原理檢驗。同類同情的特殊事件,在視察中能成自然底機械推測,又能包所有同一理性的現象表現,久而久之,其特殊包藏穩固後,由適應事件上,更爲相當底增加,中間無一失錯

事件發現,由是精神能自然底聯成普通定律。自然協一的信仰,由證驗相應的協一完成其理。這種精選迎合的習慣,使我們實信地探索,跳出特殊定律;由"特殊到特殊推理"而入由"特殊到普汎"的進程,就自然協一原理的過渡,而亦無矛盾發覺。

這正是米爾所謂普汎因果律的原理。在自然協一中,最重要而又具極大科學負擔者爲"層層協一。"凡是層出的規式,必具因果關係,那麼,在科學意義上什麼叫因? 自然秩序中一現象發生,必爲其前象之連接表現,或羣衆所有前象的接生。如果將所有前象分析之,則見其爲一而不變。一而能由此一以變彼一,故曰一事之因,爲其前件之後毗連不變而進者。這並非完全定義,如果前件與後件在時間秩序中不變而爲因果之表示,則必有以日間爲夜間之因,夜間又爲日間之因的形式,因爲彼此都爲層出不變的規式。但是精神上否認以此結果爲適當;層出中不變性的存在,應該接入其它的性質,而爲前件之無條件式。日夜層出不窮不變,用不着說彼此爲因,其故因此類底層出,本身服屬一種條件:日出於天際的現象,卽是光明承繼黑暗,有這種現象發生,則爲日間代夜間,如果不發生,則日夜之層出割斷。所以地平上日現,則太陽與地球間直綫位置之

不透明體無有,而此體即爲其條件。不然,則日間不能產生。所以要定現象原因爲下列之:

"前件或前件之連合,其現象爲不變與無條件的後件。"

因果律由是建定,證驗式亦因之容易分析。各現象之前,都隨帶一團變景,即一現象本身亦應爲相似一團的變景所有,所以層出不已底聯絡前件後件,應該限定事實爲何,因此得出三種必然作用:

心神之分解;

事實之分現;

情境之變遷。

這三種意義,總集爲科學結論的兩大事件;

"觀察與試驗。"

米爾分試驗研究的方法爲五種:

求同法,(Méthode de Concordance)

求異法,(Méthode de Différence)

同異交得法,(Méthode-Unie de Concordance et de Différence)

求餘法,(Méthode des résidus)

共變法,(Méthode des Variations)

謹就此略爲分述如次:

I 求同法。如甲爲一因,假定其能限定許多結果,如果在變境中能遇到甲之動因或產生甲之動因,而在各處除甲因之外又無其它相同點,則在試驗中發生的任何結果皆爲甲因之結果。譬如有甲乙丙的合成事件,結果爲次甲次乙次丙;又一方面甲件撇去乙丙,接於戊庚兩件,其結果爲次甲次戊次庚。再將全式總結起來,其推理爲如何?先知次乙次丙皆非甲因之果,因爲它們在第二試驗裏都不曾由甲發生;卽次戊次庚亦非其果,因爲第一試驗中也都不曾由它發生。然而無論如何,甲的實果,則應出於兩試驗之中,所以這裏只有一個次甲的情形足以代此條件。次甲的現象不能爲乙丙的結果,亦不能爲戊庚所有,因爲它發生於乙丙戊庚之外,所以只爲甲之結果,卽是甲爲所求之因。其所根據的原則卽其證驗法式的:

> “如果一現象發生的各件,只能在某種情形中相合者,則其中由一件到別一件所有變更的情形應行排除,其所保留之一件必爲所求之因。”

II 求異法,爲前法之反,乃試驗科學的重要研究。其法在求各關係的事件中,其相似的兩點與所研究的現象表現有無不同。如果要發現動因所有結果,就要在所檢證的若干彙聚之“甲乙丙”的現象中取出甲來,

先列明所有產生的結果,然後就甲沒有的時候比較其乙丙之結果。如果"甲乙丙"的結果爲"次甲次乙次丙,"而乙丙之結果又爲次乙次丙,則甲之結果無疑而爲次甲。如果反而求次甲之因,則必選"次甲次乙次丙"所能產之前件爲"甲乙丙,"再求次乙次丙中無次甲者,如果得其前件爲乙丙,則必知次甲之因爲甲,故甲因爲其所求。其證驗法式的原則爲:

> "如果一事件之後件有了,它一件又沒有,則其間之差別,惟就固定底前件中比較區分,凡前有的公共前件都應被排除之外,而能出於此一件中又復沒於彼一件內者則爲所求之的因。"

譬如:一刀刺及當胸,由求異法本能的應用得斷其傷口爲其死亡之原因;因爲一秒鐘前的生命在各情境中都相同,惟此一傷口的差異。再如飲之行動,爲渴的停止原因,亦爲求異法所知。試驗中求證與反證,皆此法之應用。

III 同異交得法。有時候不能求得所在的兩點,則由前面求同法兩次求之,能發現包甲件或次甲件的地方有異於不包此二者的存在。若以包次甲的各點中相比較,則又知其全同於甲,如是者任何多次皆無它因;是由求同法證明甲與次甲間的連接。若以此連接

證明,換爲求異法直接得出之原因,必須先在甲乙丙中排去甲件之後,再看次甲是否亦爲無有。假使先考定各處有次甲的與所包之各甲件的相同,再求各處無次甲的亦與不包甲件的相同。則由求同法在無甲無次甲之間所建的連接關係與在有甲有次甲之間所建的相同。所以每一甲出,次甲亦出;置甲於一邊,則次甲亦無有;所以由甲乙丙能得次甲次乙次丙,由乙丙得次乙次丙,皆爲求異法所有之正負點。其實此法即前兩法之原則合行並證,故有去而不論者。

IV 求餘法。如次甲次乙次丙之複果爲甲乙丙的產生;如果知道乙爲次乙之因,丙爲次丙之因,再求其果中餘下之次甲的原因,則必排除次乙次丙之乙丙原因,因爲它不能同時發生次甲。所以後件與各前件中假使沒有其它未知前件,則甲與次甲之間的合成,只有,"甲爲其所求之甲"。其原則爲:

> "一現象情境能於已定前件中表現者,則各前件必排去此現象餘件之產生,而此餘件即爲各前件之餘件的結果。"

V 共變法,此法與前有各法不同。各種存在原因的定律,有時不能排去,亦不能孤立,但是在不能完全排去前件之中可以更動其自然。如果前件甲中更動

的,總有次甲更動的存在,其它次乙次丙之後件相同;反之,如果次甲中的更動爲甲之若干前有的更動,無論其它所有後件如何,可以直斷次甲爲甲之全有或部分的結果,或者至少連接甲因若干情形而有。如熱雖不完全排去物體,但是可以更動量之增減;從此就試驗或觀察方法得出"熱之增減性,隨物體伸縮而定。"結論爲"熱的結果之一,能增加物體之積。"其原則定爲:

"一現象變時,如果除一能變外,其它皆不變者,則所有不變的應行排除,而所餘之一前件爲其的因"

共變法只有在各條件表現的關係上應用,無須有正確測算的量。譬如軍事史上謂:"兵士愈信服其首領,則其勇力愈大。"我們對於"信服""勇力"都不能有所測度。然而共變法的確證,同時得徵其爲實在。演繹科學中即依此作成試驗科學之變化。

總而言之,五種歸納性,——實即四種——與演繹頗能相接,都是用前件建設後件;不過演繹實行建設的可能性與結論全在一切已有的認識範圍中,而歸納實行的,則爲自由底檢證,故必須同事實相切合。因此歸納相應有兩個關鍵:

(1) 先由已知事實適當底建設:"普通原理,與構成的定律,"再用一二自由底分析同一假定互爲接合

證驗,實行類推;

(2) 由事實的證驗作假定的檢察,同時可以就自然發動或人造的事件確定之。

這種關鍵,在推理上使假言判斷先暫後永,皆爲事實的比較分析,其全功卽爲求同,求異,求餘,共變之應用。

米爾以後歸納推理的發展,就事實研究的有科學結果,就形式研究的有哲學成效。若蔣風者流,更就分析演繹之機械方法,發展所謂形式歸納,完全根據特殊物質的抽象爲推論,故其接近眞正邏輯精神而爲純正科學觀點的發展,實較諸米爾更有不同。其形式歸納則爲限定所有類分連累的定律,或已定各名辭配合的普通標辭所有條件。如甲與乙兩名辭,其配合有如"甲乙""次甲乙""甲次乙""次甲次乙"爲兩名辭及其否定方面的連合;歸納法能於此間求得甲與乙.次甲與次乙各配合所有之定律。蔣風認爲"有限名辭或事物的定律"亦爲有限,所以他先研究有定名辭配合的定律,然後求其形式之眞理。(參看科學原理第七章(The Principles of Sciences)如甲乙兩名辭之邏輯關係,可以就甲等於甲乙或甲等於乙的標辭表明。(參看前章演繹論中論蔣風的批評)不過所謂歸納的名辭配合,其級進數往往過大;例如三項配合的級數爲二百五十六,四項

則爲六五,五九六,而五項又爲四,二九四,九六七,二九六,到六項更大爲一八,四四六,七四四,〇七三,七〇九,五五一,六一六;因此形式歸納除極簡單點外,幾皆爲不適用。

四　二十世紀的歸納問題

歸納邏輯的研究,到十九世紀末二十世紀來,把科學方法的基本,完全就純正科學的"歸納演繹,"從純粹試驗部分中補入理性象徵的可能。從多少底絕對證驗上,援以相對判斷的或然;換言之,從望遠鏡中窺以顯微鏡之視察,從能近眞理上更爲逼近眞理的可能。故米爾派之試驗歸納的因果原則,又不免多少接受些新勢力的批評,正與其對於培根式之增補勢力相當。這即是近代數學邏輯派之關係邏輯問題的發現,和一般或然論派的數學哲學家之數學歸納原理的研究,如邦加赫羅素耿斯(Keynes)之流是也。

歸納法並不能只視爲"一種"推理的存在,譬如在各種前題合組外,並不能認爲絕對不關其它所有前提。假如要研究其它各前提的產生,則歸納實際當不只一種原理,或一種分析情形。譬如一歸納推理的前提中包有其它歸納的結論存在者,名爲第二歸納;反之如一歸納推理中不能找出其它歸納底實際與或然的前提者,則名爲第一歸納。從前邏輯家的歸納推理,只涉及

第二歸納的一種研究,而無所謂第一歸納的基本分析。米爾之因果原理,視第一歸納爲無關重要,反認爲或然性中之最大者。即如許多批評米爾歸納法者,亦惟就因果律之歸納基本而論。殊不知在科學歸納中,就米爾的原方式,第一歸納爲必然底經過,而歸納的一切眞實和或然性的極限定立,皆視第一歸納的眞實和或然爲轉移。眞實與或然之異,不只在程度上,實是本質上的差別;因爲眞實爲絕對,或然則爲相對。如果一標辭爲實在,——與無限的或然——假使對眞實沒有誤斷,則決不能認爲疑事。反之,如果斷定一標辭爲或然程度,則能由某種事件使其或然程度因之增減,不過所有或然性終不能去。所以任何標辭之或然性,皆爲各項新聞集合之某某相對的關係所有,即是耿斯所謂:"此標辭對於此集合的關係。"所以簡單列數的歸納法不能分析或然性之內包。在純正科學觀點上完全不足,而由無窮或然性到眞實之間的差別,可以成功混淆概念。耿斯最近的邏輯研究,把或然演算明白認爲形式歸納與類推的邏輯方法,實在是新知識的補增,新證驗的完成。一方面爲科學事件的演算,一方面更及於社會問題。

這種新歸納論的或然邏輯分析,把推理方法分爲

實在推理與或然推理。前者爲:"如果前提都眞實,則結論亦必眞實之"連累式"(implication),後者爲:"如果甲之集合標辭與乙標辭之間無其它新加入時,如果甲爲眞實,乙僅爲丙度上之或然眞實;此時甲仍爲前提之集合,乙亦仍爲其結論。"在這種推理之間的關係存在,名爲推理之"或然式。"因此有所謂實在前提與或然前提的交互推理。譬如有限前提集合之或然性甲,由實在推理斷其結論甲之或然;如果前提能合於"甲乙"之或然,則由或然推理,能相對底判此或然之或然爲乙。

這種歸納之中包一個數學"函數"的原理,如兀等於三一四一六與y等於對數x之類。簡言之,甲與乙之間的常數是實在的,或者甲之類分與乙之類分相當;其間容接以羅素所謂"關係"的存在。無論是甲乙某種物理的存在,或化學的配合,或自然的組織,或分類的關係,皆有其一定的關係R,其原理之形式標辭,爲個體類分與種類類分的有定公式:"凡連累於眞實標辭者爲眞實;凡爲眞實標辭所連累者亦爲眞實,反之亦然。"羅素證明這個公理,說出許多連累的標辭來,如謂:"此眞則彼眞,""彼眞的此亦眞,"或者"此眞的彼假,"此假的彼眞。"這許多推理的原則,都與算學歸納的基數定義有關係,此處不能盡述。

現在再看邦加赫之數學歸納語。原來數學中所有歸納,卽是一種特殊演繹之變形。譬如說:"凡完全數(一數等於其生數之和:六等於一加二加三之類)必爲偶數。" 此定理之實在證明不能求出,惟能列舉各例以明之。如已知之九個完全數(最後的爲二十七位)皆爲偶數,却是不能保證此九個之外的數是否皆爲偶數或奇數。有時由許多例證認爲實在的,而又由一新例證認爲非眞實。如物理學上假定之試驗的成功與新事實之衝突發現然。此例正如非黑馬(Fermat)承認:

$$2^{2n}+1$$

終爲基數標題是也。其實只有到 n 等於四爲眞而 n 等於五,六,十二,二十三,三十六,(最後之數爲二十億以上之值)則不眞。然而 n 再等於其它之數,則又不知其眞假。此類歸納名爲亞氏歸納法。還有所謂暗示歸納法,如甲乙丙丁之直角四邊形,其對角線皆相等,推而及於所有平行四邊形之類,此皆習見之歸納數學檢證。邦加赫所謂數學歸納,其原則爲算學的基本論,他名之爲循環推理或完全歸納法。其法立爲兩大原則:

(甲) 檢證其對於一量之特殊值爲眞的定理;

(乙) 證明此定理如果對於 n 值爲眞,則對於 n 加一或減一之值亦必爲眞。

由是合兩原則全部推理的檢證與其假定的證明,結論其對 n 起之任何值爲眞,而於是理推之無限,演爲普汎原理矣。舉例以明之如次:

求證

$$(1+x)^n>1+nx.$$

n 爲大於一之整數, X 爲正數;先就 n 等於二的標題檢證之,卽是:

$$(1+x)^2>1+2x.$$

由是得數學上等式爲:

$$(1+x)^2=1+2x+x^2$$

實際上明知道

$$1+2x+x^2>1+2x$$

所以得證其爲:

$$(1+x)^2>1+2x$$

C. Q. F. D.

再求證其如果對 n 爲眞,則對 n 加一亦爲眞,因爲由假定上有下列之:

$$(1+x)^n>1+nx.$$

以一加 x 來倍乘各邊,得爲:

$$(1+x)^{n+1}>(1+nx)(1+x)$$

再者:

$$(1+nx)(1+x)=1+nx+x+nx^2=1+(n+1)x+nx^2$$

所以在前面不等式之$(1+nx)(1+n)$中代以其值之

$$(1+x)^{n+1}>1+(n+1)x+nx^2$$

則證明爲:

$$1+(n+1)x+nx^2>1+(n+1)x$$

所以推得:

$$(1+x)^{n+1}>1+(n+1)x$$

C. Q. F. D.

循環推理的歸納,邦加赫認爲演繹之特殊精神;只要是一種行動的作用能够成功,我們就可以隨其同一無限可能的精神,肯定其無窮次之可能;精神上就有一種直接可能的直覺,與試驗物理的歸納不同;因爲這種歸納無所確定,只有靠着宇宙普通的自然爲底,而此類自然全在我們本身之外。若循環歸納則惟有精神本身的實質肯定,其在數學範圍中的應用,與米爾求同法在試驗科學中的相當,如所謂假言求證者,亦不過此法之一部。

# 第四篇　證明的論理形式

## 第一章　推理證明的科學結構

形式邏輯的原理和一般評論的主張,都在第二三篇裏略爲述過。現在要根據這般評論主張的發展,把形式邏輯重要的演繹歸納論拿來就科學哲學新趨向的思想上,重標的論,作爲新舊邏輯兩岸的過橋。使學者中橋佇望,勢合一流,或不至有邏輯與數學乾燥之感!

所謂推理的本性,完全以純正科學爲其精神;其方式活用,隨時變更。譬如代數演算中,單簡相等的標辭,以代數記號寫出:"由一相等推得其它相等,"完全適合數學基本演算定義。這種組織在數學邏輯中頗佔重要地位,因爲不只推得形式的相當,同時能證明一物體包含的固有性質。但是數學推理中,很多非法的結論,不過這些非法結論,雖然有很大的批評,然而由證明的標辭,假設非理的推論,差不多在自然科學中也有許多

應用。因爲由假的證出事實,不能視爲同歸於假。譬如級數論中證明所謂"e"數爲無理,同時就證明如果等於整數或分數,即得出結論的:

"一整數包在零與一之間;"

從此再不能另行推理。這種推演的方法,只有數學或一部分的直覺論者,可以試行,若亞氏三段式的能力,由十七世紀及今,早經笛卡兒米爾所否認。

凡動物是要死的;

凡人爲動物;

所以凡人是要死的。

或者我們早就知道人是要死的,這個標辭什麼都不用證明;就或者我們有不知道的由三段式的簡單,也演不出可以知道的元素。所以說:三段式不能使我們得出一點新知識。

所以推理在知識方面的靈敏活潑,實際另有原理。三段式不過其一耳。

數學推證有時完全分析,有時又成組合。分析所以發現隱藏的眞理;組合所以轉證其它發明的眞理。三段式的分析標辭,完全靠定義的眞實,而組合標辭,則爲觀察或其它方法證明的。就是分析的,只能使我們認識到已知事物;組合的,亦不能給我們實際底眞理。

所以無論什麼地方,不能有確實眞理發現,因爲它的結論就在它原理中所有的;肯定結論,實即其原理變形的肯定。

要知道推理並非配合原理的巧技,而是配合物體與應用原理於配合之上的工具。推理的眞正能力亦即在是。譬如由已知物體能創出新物體,由新生物體中用配分法又得新物體,即此輾轉,以至無窮,科學邏輯家名之曰"形造原理"(Principe de Formateur)。

數學中形造原則最簡單的可能性,能加一單體於任何數上,充成一新數。所以如此遞進的數,都爲無窮創化。由數學推理的歸納性,足以證明。其最顯著者爲分析與幾何原理。其所以能構成無限新物體與所以能擴張至無窮的原故,均爲此類形造的發動。其說有如次述。

分析數學爲函數論的研究。以一變數 x 爲其動因,換言之,一量能有若干不同值,如果每值能使之應對它量 y 的值,就名 y 爲 x 的函數。譬如方形,x 立方都爲其函數。凡式皆包 x,如 x 爲已知,即能計算其値爲 x 的一函數。因之 x 有多數函數存在:和,較,積,商是也。或者汎說一句:"凡算學演算可能的事件,都備爲 x 的函數。"就是這種形造原理的內助,能找出無限新函

數。分析數學大部分外延的研究,能得到許多最特殊最不同的函數式。譬如分析上無窮連續的數,在紙上不能表明只有"隨同數遞進"可以指證。這種方法,能演算各數的包含值,從此又能認識相隨之中所有的排列。在相隨的排列中有各項漸漸增大的數,而各項之和則漸漸極近於準數換言之,凡準數能假定級數相隨的各項而自爲其函數;再者級數和亦爲函數,因此又得一新函數式。如新原理立新物象,較算學上往返推演的,誠更爲有趣。

就幾何方面看,譬如眞正推理的直覺論者,全用幾何原理的形式爲根據,因爲它集合抽象點的研究,如在初步幾何對象的;直線,平面,圓;同時能依同一原理成功許多新原理和新物體。由兩點可以引成一直線,所以在一圓與其平面之外的一點能成一直線,而與圓界各點亦能引成直線,集合這所引的直線,構成圓形底面的圓錐形面積。即是造成的新物體。現在再看線與面之間的關係,除直線與一平面平行者外,凡線與面總能相遇。所以看到任何面,都能劃斷上面所成之圓錐形的直線。由是在平面中,各點的集合成功一弧線,名之爲圓錐曲線。這還是一個新物體的研究。就這些簡單例證,實在可以觀察到幾何形造原理的功用。笛卡

兒的解析幾何,更為弧與面之擴大的創造,就一點的二度或三度幾何,能使之相通於二或三的羣,即是這一點到三個直角平面的距離,而各數的關係在平面者限定一弧,在空間者限定一面積。這種限定弧與面積的新法,可以推到無限事件。

然而反論上可以說此類推理仍無創造的實在,因為只能就已知物件作不同樣的配合! 實際這到不盡然。譬如拿許多造房子的磚石,配設成房子,不能說沒有房子的新事件。一科學的原理包科學全部而有,是實在的;然而不能說各科學的原理就不是新的事件。譬如一塊大石頭裏的神像,從雕刻家未着手以前和着手雕成以後的表現,不能說大石頭裏的像不是新物體。由凡人有死證得孔子有死,與由兩點間直線證得弧與面積,雖同為"推理,"然而價值完全為金石之分。

推理證明的真式如何?

我們從前面各篇細數下來,所有研究和討論的方法,都只是為一個邏輯推理的認識;換言之,求知的路程。所謂觀念,名辭,判斷,標辭,種種規範,總算極近似的限定了。然而限定之中,不能完全整個的限定。所以許多"原始意念""原始標辭" (Notion première proposition primitive) 終不能限定;如定義的定義,表成一個連續函

數的變量。我們標辭推理不能就此同一連續進行。凡是推理的事件,皆爲標辭的根據;最初限定字義時拿出對象來,再用字判斷時,其判斷標辭亦必爲有限。如此,理論上已有純正科學定理定義的原則存在,所謂演繹推理的正式步驟即在於斯。

我們說過推理的實在以標辭爲主幹。標辭分類的研究,本來極爲複雜,我們暫分爲:相對,絕對,普通或定律的三種。譬如:

(1) 白馬,黃狗,好花,美味,此三角形有兩等邊;

(2) 法王路易十六被殺,中國宋教仁被刺了;

(3) 如果一三角形有兩等邊,則有兩等角。

第一爲相對事實,因爲白,黃,好,美,此三角等能在某地方眞,同時也能在某地方假;在各個特殊地方,由觀察上可以決定事實的眞假。第二爲絕對事實,因爲被殺被刺的標辭或眞或假,沒有其它的可能。第三爲一普通標辭或定律。因爲它表明兩事實之間的一種連接件,如果第一件A眞則第二件B眞。換言之,前件連接後件,或簡單爲:

"A件接B件;"或再爲:"A件連累B件。"

以連累一語表AB的關係,同時表明A眞B眞的種種可能,在推理上開一新配合式。班斯(Peirce)謂其法能由

已知到未知,爲推理之簡單科學式。譬如假定A眞,A連累B時,B亦必眞,結論到A眞所以B眞。不過我們應有的條件是:

(1)　要前件爲眞;

(2)　前件連累後件是眞時,則必能肯定後件。

正如我們幾何學的:"如果一三角形有兩等邊就有兩等角;"在我們紙上的三角,如用規一測卽得兩等邊時,則無用量角,可決定其有兩等角。此處正是"推理"的存在。

在幾何科學中,有許多定律無證明的推理,實際上仍爲"連累"的存在。譬如有的普通標辭的本性與前不盡同者,有的只能就若干條件或事件上爲眞者,如謂:

"能畫一直角的三角形"

這種標辭名爲"可能性"的定律結果,可以引出同類許多重大的實現。如果把它用否定式表明,可以寫爲:

"A不連累B"

因爲可以說是"一三角形的事實,不連累於無直角的形。"譬如A與B的兩個事件,可以就連累的可能配合得:

A眞,B眞;A眞,B假;

A假,B眞;A假,B假。

再就"相反,"與"矛盾"的種種推證上看,可以活動許多標辭的證明。我們最好還是以解析幾何爲例。如證明:

"兩平行直線與第三直線平行者則三直線彼此互爲平行;"

先須知此標辭前有之已證標辭:

(1) 於一直線上能引許多垂直面;

(2) 如果兩直線完全平行,則垂直此線之面亦必垂直於彼;

(3) 如果兩直線垂於同一平面,彼此必互爲平行。

因爲這三個開元標辭有了,所以我們要證明的標辭,可以分爲前件假定與後件肯定的:

$\alpha$ 兩平行直線與第三直線平行者;

$\beta$ 則三直線彼此互爲平行。

現在就幾何上"構設"的事件,以a, b, c三直線表全辭意義。得五種先件的:

(一) a爲一直;(二) b爲一直;(三) c爲一直;

(四) a與b都平行;(五) a與c都平行。

再就前面已證普通標辭(1)假定一平面P有下列關係之:

(六) P爲垂於a之平面。

有了(六)的"新設"標辭,我們可以就已證之普通標辭(2)推為:

"a是一直,b是一直,a與b都平行,P垂於a,所以P垂於b。"

這裏的新事件又有:

(七) P垂於b。

同樣推之:

a為一直,c為一直,a與c都平行,P垂於a,所以P垂於c。

這裏的新事件又有:

(八) P垂於c。

結果已證普通標辭(3)推得:

b為一直,c為一直,P而垂於b亦垂於c,所以b與c都平行。

這裏的:"b與c都平行"的標辭,正可以說是:"C. Q. F. D."總合起來,眞正推證的演繹法,實在就是"A連累B"的一種基本關係。前件假定的A可以分作若干假定的一二三四五,再由這些部分假定之一或多數,連合前有假定而為一新設假定六七八之類。如是者類而推之,構而成之,終以普通標辭為檢證之實,結果最後推理,為其後件之正定。

一種幾何或其它科學的機械證明,很有非自然的特性;換言之,對於某對象間的自然不注意,而證明之後仍合乎自然。再如字義的變更,原理上不變;所以依原理的證明為眞,而結果與新字義亦為眞。如在投射幾何中"點"字改"面"字"面"字又改"點"字亦為眞;如"兩點連成一直"置為"兩平面交切成一直。"在"三點經過平面"上換為"三平面的交點"等等標辭,反之亦眞。不過平面與點的關係應該能合乎普通標辭;猶之前面平行與平面與直線與垂直等等對象的自然可以不問,然而對於普通標辭(1)(2)(3)的公理關係應該是眞的。

我們在簡單推證(inférence)與證明(démonstration)之間應該有所分別,因為尋常邏輯與普通語言均有所混亂。譬如證明"兩平行直線與第三直線平行者,則三直線彼此互為平行"則必使用(1)(2)(3)普通標辭為證。換言之,由三普通標辭推演我們求證的標辭。所以說:"適合普通標辭由一事實到一事實,"之謂。邏輯上往往把推證當為證明,所以認演繹非由定律到定律,亦非由事實到事實,而是由"定律到事實,"正與自然科學所謂"由事實到定律"的歸納法對立。其實演繹內中經過的方式,很有程度的意義,亞里士多德派邏輯把普通標辭與特稱標辭分得非常輕忽的地方,正因為視

前面"可能性"的存在爲特殊點,所以結論演繹爲"由普通到特殊"的錯誤觀察。因爲:

凡人皆有死;

有人都爲黃頭髮,

在實際上兩都爲普通或全稱,亞里士多德以第一爲全稱,第二爲特稱,實不知第二爲可能性底眞標辭。第一個表明:

如果有生物爲人,他就是有死的;

第二個表明:

有生物爲一人,不能肯定其非黃頭髮;

就頂前面連累的說法可以分別證爲:

一某爲一人,連累於一某有死;

一某爲一人,不連累於一某非黃頭髮。

普通與特殊的分別,在邏輯家還有以相對意義爲準者,換言之,以外延或種類觀點爲算。譬如:凡人皆有死的普通標辭,在:凡動物皆有死的普通標辭之下,當然比較特殊。正如甲的對象集合,屬於乙的對象集合中,而不能有反說的眞理。即是甲類分只能包在乙類分之中。所以甲物的性質小於乙物的包含,即人包於動物類中之實。三段式的證明,恰以此爲原則:"從普通標辭到減小底普通標辭。"　然此惟限於推理之一,謂演繹法

全部爲如此推證,則失之過疎。

我們再就配合的普通標辭來說。譬如前面證明的標辭與所用以作證的普通標辭,皆有多數事實組成的假定。其方式正若:

如果A B C D都爲實在,則E爲眞實。仍名爲A B C D連累於E。

複合事件A B C D爲四事件單簡個別的同時表現。近代邏輯家名之爲各事件之積 其故因算學上如諸因數之一爲零時,則其積爲無有;此處四者之一如果A爲不可能性,(零)則A B C D的複合事件亦爲不可能;正與算學積同一性質。我們尋常語言中,具此類性質的連接字"與""同"等等皆爲其實現所在。有時在後件正定中的表現,正爲前件假定的簡語 例如說"A B C D連累E與F,"實際上爲"A B C D連累E, A B C D連累E"的雙辭。因此邏輯積的事件,可以分成許多其它的事件。

因爲如此,有的標辭性質又能適合算學加法的意義,但是外延推論上,更就加的內質而爲選言的攝取。以連接字"或"表之,名爲邏輯和。

譬如有標辭爲:

A連累於B或C,(B或C寫爲B+C或者B⌣C)

原式能寫爲A與非B連累C或者A與非C連累B。要就代數演算法,可以推得許多方程式的演算,因爲這種推理,包一種數學歸納的普通標辭。第一使我們有物體類分的注意:某某物體屬於某某類分,或者某某物體標定的類分包攝其它某某類分;某某物體或某某類分的物體能經過某某試驗,表明某某性質就成了某某其它的類分。由是類分的注意,使推理成眞正的"思想試驗。"而想像的配合,使精神成活動的創造。

類分的概念,本試驗與定義的可能,使推理的證明,完全爲目錄的包攝"小孩子爲大人的類,大人爲人的類,人爲動物的類,動物爲生物的類,生物又爲物的類,"如此等等,其式接於三段論理;其形爲有定函數,複雜的組織;其法爲靜處動置。以包攝,連絡,交切等等相應於類分的普通表現。復就包攝與所包攝的爲之思想連絡,作純粹邏輯的推理;或以三段式表明,或以象徵邏輯爲用,組成所謂"形式邏輯"之眞理。

這種眞理的法式自然在類分的演算上,但是它都服於形式邏輯的定律或公理;換言之,"思想定律"對於事物集合的有效性,表明所有類分的可能。

## 第二章　近代邏輯與哲學

我們就二十世紀的科學觀察看,雖然不能說科學哲學界的活動完全在邏輯與數學革新創造的精神上,然而新形式邏輯與分析數學的基本原理,從此作科學與哲學思想的尊嚴主席,則完全無疑。一方面從亞里士多德到康德黑格兒;一方面從游克立到牛頓拉抗儒,所謂科學之科學的邏輯,科學之純正科學的數學,實在只是從賴布尼支到所洛,羅素;從笛卡兒到嗣多易柏的眞實表現。希臘至中世紀邏輯的形式論,脫不出柏拉圖的觀念思想,而學院派的傳授,更爲概念部分的研求,其勢力範圍直至十九世紀中,中間雖曾經過賴布尼支一派純正科學思想的批評,然而普通與抽象概念間的辭或包攝關係,(Predication et inclusion)終不能與所謂:數量,空間,運動的科學定義發生關係。十六七八的三個世紀中,演繹法基本問題沒有科學哲學的注意,所以研究一切演繹形式的數學方法,絕對與形式邏輯演繹不相接。一般哲學家除加利來笛卡兒外,都樂於以形質邏輯與量性邏輯相對待。數學家除賴布尼支學派於十八世紀中略事注意外,直至卡斯芒(Grassmann)哈密圖坡來始有革新運算的幾何代數,而十九世紀中及今,所有數學家完全注意於數學的邏輯分析,與其原理的研究,所以邏輯從亞里士多德的形式進而爲數學科

學的實質,而數學本身,因之在方法與原理上,成了純粹邏輯的科學。這兩個思想潮流,從很遠大的分流會合於此,其勢洶洶,實在足以盡科學基本原理而爲之洗刷一新。更以數學邏輯原理爲其指揮,復統科學哲學思想而爲之新理性化之。他們分工的步驟,完全在原始觀念的無限定與原始標辭的無證明上根本改造;換言之,折毀從前哲學思想的結構,來另繪新圖,就科學工程修造,譬如數學方面對於定理聯續的考證,證明方法的分析,推理中包藏假定或公律的研究,演繹理論同具的原理或公理等等;或就分析演算發展,或就演繹假定式建設,所謂微積,幾何,機械學統就函數論根本淘汰,更爲之深究其理;而以集合論與羣論的科學一理貫通。至於邏輯方面,則同時否認亞里士多德的形式條件範圍,以代數象徵原理與方法,適合概念判斷原理,建成類分與標辭的演算(Calcul de classe et de proposition)同時思想精神的活動,又從概念包羅關係之外的科學與日常生活的關係上建出與函數相接的關係演算(Calcul de relation)。於是邏輯的類分演算分割爲集合論之一部,而關係演算則一躍而爲羣論與函數論之基本所在。用邏輯新形式演繹的事件,證諸數學理論的所有,無處不能用作分析考證或證明的數學邏輯事件;換言之,數

學應用邏輯原理與關係的演算,而邏輯成功數學的卷首。數學基本觀念上:抽象,普汎,嚴格的種種特性從空間或數量的性質,達到完全關係觀念的邏輯發展。

現在雖不能把這種原理的根本統述,然而第一步遇見的純理碑坊,不能不細爲觀察其結構之精。因爲要從基本觀念改造着手,所以先要把抽象眞理之源的數學公理,原理,證明,都引入邏輯的抽象,同時使空間或時間的性質,專就一種"關係"的觀念發展,這就是班洛的首創,羅素懷提海的成功。他們把整數序數的普汎性統就歸納範圍爲之"概念"論證,換言之,一部算學演算,完全發展邏輯抽象的權能,如加法乘法的類分與個體論,把形式邏輯的應用都擴張了。不過這種新形式邏輯,並不是亞里士多德的思想,實際上舊式邏輯只限於狹小概念的:"由主格到表格,"而忘其標辭應用於個體中的概念,換言之,關係的存在。數學邏輯的無限綜合,把思想定律的辭頭 (Expression) 分割入微。羅素的關係演算完全出自於斯,他先立個體標辭作基本分析之證,然後區別一主格具許多表格與許多主格包許多關係以及在同一主格所有的表格與關係,種種其它錯綜的連續存在;再結合基本觀念的"圖叙"(Description)與類分原理,爲之告成所謂"非充分象徵論"的大邏輯。

如此，一方面不只是邏輯完全立於純理的抽象，使理性顯為任何適合的可能，它一方面使數學就理性的調和，偏於邏輯普遍的必然，超過從前所謂專門術之自然。

二十世紀的邏輯，為理性之最抽象的形體，其範圍涉各科學之自然而為哲學的中心。結果理性與物界接觸，而所謂自然哲學實即邏輯的實用方法，因為理性本身的愛戴不偏理性派而偏柏拉圖派。所以可能界的通諜，在邏輯與數學，而不在因果性與空間或時間上。這種可能的限定，也並不如斯賓拉沙的勢力，更不是賴布尼支的偏狹，它的行路實為無限方向，忘去現存界的觀點，約理性同行，如遇着大海孤嶼，重現新可能的現存影像。從前所謂基本經驗的理性，從此抽得"超羣""擺脫"的自然。這時候我試驗的條件，我時間的一刻，我空間的一點，都在一精確工巧的圖案中；而此圖案的觀點，即此空間在世界集合中的真形。這個要程的回顧中，許多驚奇的表現，獨立理性的要求，不獨在哲學思想的進化中，實在是物理界新負的責任。柏拉圖的"觀念論"亞里士多德的"機關論，"笛卡兒的"哲學原理，"賴布尼支的"單元性論，"皆為此類科學精神的哲學解釋。然而因為自然哲學不能先於一部物理的事件，所以結果以波來的"思想律，"石拓德的"代數邏輯"班洛的"數

學方式"羅素懷提海的"數學原理"開導新經,謂科學功能決不在求必要與需要的戥秤,亦不只在適合物質與其無止境的價値增加之上,而在對根本概念上所有原始觀念的探討。譬如柏拉圖幾何敎育的"假定,"把絕對的"第一觀念"爲其目標,笛卡兒的尋掘"金石,"都是要從物象的兩個反向上運動。

由前面說話中,已經看到數學立於邏輯基盤,不過尋常數學家,仍不能就此創作,只有數學哲學家能以邏輯方法分解整數概念,這正如物理學雖然在試驗上建定,其實普通物理家只知道物質的事變,並不知道感覺試驗的基本;至於物理哲學家,則以事實函數爲形式函數之函數,以非感覺的實體爲感覺事實的函數,其未知量的變換,完全形式邏輯的可能;哲學問題上的擴張與其內容的專重,統合自然科學而化之。十九世紀末與二十世紀的哲學趨向,可謂與物理學相引;其精神發揮與試驗處理,皆爲數學與邏輯原理的普汎存在。我們第二部新邏輯,正可以詳述其原理之一般。

# 第　二　部

# 數學邏輯原理

# 第一篇　邏輯之新形式論

## 第一章　數學與邏輯的重要

形式邏輯的進步，就是純正科學進步的新問題發展。在我們東方的哲學思想，沒有所謂形式邏輯，所以演繹推理的問題，竟出乎數學研究的負擔之外。近三十年來，歐洲數學歷史家與科學哲學史家，從畢達哥（Pythagor）與柏拉圖的數論觀念論起歷歷搜索及今，陳列人類知識發展與科學深考的方法；合而爲一古今數學邏輯相演之大觀。這種眞理相因的事變，就是各個時代知識發現的特標；其重要進程，有三個最大的分期；而各個分期又復各號其眞理之差別：第一由耶蘇前六世紀及於後十六世紀之算學形上論的邏輯形式期；第二爲十七世紀及十九世紀初葉之數學形式論的邏輯演繹期；第三爲十九世紀中及二十世紀之數學分析論的形式邏輯原理期。這三個時期的分別，本來沒有

什麼定論。第一二期對於本篇只有歷史的比較值,我們可以略去其詳,第三期卽本篇之主題,換言之,所謂數學邏輯的新形式論是也。我們爲求學者明白此科根本觀念及其重要原理起見,所以先論數學與邏輯的基本和關係。

## 一　二十世紀科學進步的情形

科學方法在二十世紀上起了很大兩個戰爭:一爲數學分析家的數學化;一爲科學邏輯論者的數學邏輯化。數學化的方法論者,純粹以物理數學基本原理,由演算精神操一切科學認識而爲之數學原理化之;換言之,以數學方法爲科學方法。數學邏輯化的方法論者,總全部科學精神,由數學演繹原理爲之盡各科學以邏輯數學原理化之。其所謂"數學邏輯,"卽爲操各科學原理的眞實表現。前者如邦加赫魏葉斯塔斯(Weierstrass)黑葉芒墨海葉(Meray)客難(Klein)諸大數學家之流;後者如石拓德班洛羅素諸大數學哲學家是也。他們兩方面的數學哲學原理批評,雖然明具不同的觀點,然而惟一的趨向,都是往邏輯推理的逼近上進。把他們的數學定義,重要的考察一點,就足以明白各派推證的方法。

## 二　數學定義

什麼是數學？這個問題不獨哲學家對答不來，就是大如高斯(Gauss)深如邦加赫的數學家，也不能定出以一生萬的定義。因為數學原理之抽象性與純全性，在哲學家的理性主義不能範圍，科學家的經驗主義亦不能形容。再如所謂全稱共相，分析組合，能似其一而不能全其是。從前的：

"量性；量之度量；研究秩序與度量；以及研究數與形的科學"等等；

皆非數學眞理本身的全形確解。量，度量，數，形，種種普通觀念，不惟不足以成數學的發明，實在還引起許多非數學的定義。例如就數學純正定義說：

"凡量能增減；"

而幾何學上兩點間之距離，皆有增減可能，若謂此亦為"量，"則與用數學普通方法來權量：愛情痛苦，喜笑怒罵，以及其它具有增減可能之道德表現，為同一失笑！這種定義引伸的解釋，使我們思想與精神上，要求數學定義的邏輯需要，到了逼近科學眞理的可能，則所謂純正演繹的形式精神，更為操必然勝利之左券。因為數學並不專為物質的科學，宇宙萬有表現，雖能就數學原理而為物理的聯和，然而物體總和的觀念對於數學共同的創造只算是部分的意義；且而較諸物理，則為間接的

研究,所以數學哲學的根據說,因此一躍而爲權力的思想矣。

班斯說:"數學爲意像結構的研究——時爲實際的實用——結果把意像間各元素部分存在的關係,都明白地發覺了。同時在各方面把未知量也都完全找出。" 這種定義所包的對象,簡直非尋常知識所能極限。而更爲普汎者有羅素之新說:"純數學即爲形式標辭的集合,如P連累於q,P與q爲含同一可變數的標辭,而且只有邏輯常數。" 更淸楚是他解釋的:

"數學科學,不知道用什麼來講,也更不知道所講的眞實。"

這裏的深意:因爲我們對於物質的觀念無定,所以說不知道用什麼講;再因爲眞理的求得,乃依假定的眞理而定,所以說不知道所講的眞實。班斯的思想,認數學能有存在與發生的觀念,其立脚精神,以客觀對象爲體;而與羅素處同一精神者則爲撇去:"数量問題"的發揮,專以分析數學之演繹精神爲科學原理的求證。所以經驗派與實驗派的邏輯論者並起,正爲逼近普汎眞理的運動。杜威在他"科學判斷本性"的論文上說:一切科學只有數學專注於絕對普汎的標辭。因此數學的必然解釋,即是專爲一切科學習用工具。從前笛卡

兒賴布尼支們想創的"普遍數學,"(Mathématique Universelle) 在這種新數學思潮中,更標其先進之特幟。我們從解析幾何與微分演算的發現上追索下來,二十世紀的全部科學精神實已早有規模散見。

## 三　數學與邏輯的協和

我們在舊式邏輯著作中,處處可以看出亞里士多德培根一派的:科學之科學的形式邏輯語。然而人類知識與思想方法,究竟在什麼地方同邏輯形式或本身發生關係? 在培根康德,黑格爾米爾諸大家,亦不能有明白圓滿的論定。其最稱完備者,終不出一三段論的推理問題。殊不知人類思想,不會由一種形式定律可以完全制裁的,因為三段原理能合於齊一律的規定,而不能盡許於數學演繹之所能,譬如:

$$a=a,\quad a+d=d+a,\quad ad=da\cdots\cdots$$

與同一性質演變之:

$$(a+d)^2=a^2+2ad+d^2\quad (a+d)(a-d)=a^2-d^2\cdots\cdots$$

完全不同精神,對於眞理的推論和發明,與邏輯所謂演繹的結構完全相當,不過一為標辭考證,一為概念考證耳。例若方程論與幾何證明之演繹法,其所以異於三段論與所謂邏輯推理者亦正在是。一般科學哲學家,只知道認明眞理的逼近為超形式的逼近之上。數學

原理的精神方法,能推及邏輯論證的本身;從純正科學觀點看,此爲必然勝利無疑。譬如推測式中三名辭的研究,實有數學消去法之基本原理在;三名辭的系統中,消去中名辭,等於方程式中消去一未知量然。把邏輯推理變爲徵號演算,一方面使精神拘束的種種運思,都能分析成類,復就配置關係上,爲之形式表明眞實。這種特點在笛卡兒賴布尼支的思想中,已窺見其用,因爲能使運算相通於思想的實際,更能使數學形式演算,進而爲邏輯方法的證明。我們要研究抽象眞理與絕對眞理的可能,須用這種演繹科學爲算;它的純正確實,普遍證明,與由分而合,由單而複,種種連鎖關係和分析原理,在物理科學生物科學社會科學等等上比較爲絕對的統括。在理論研究上佔着自然論理的先入性,與幾何證明的直覺性。卽是高出尋常科學一步進路。再與其它學科具同等方法者,有第二步之:觀察,試驗,比較,求證,種種檢察實驗的工具。一方面就理論上發現宇宙間最純化而又普汎的眞理;它方面復由是而爲之試驗考察其正確存在。數學邏輯所以超越其它科學而爲各科學眞理之解決者亦卽在是。十九世紀及今,哲學科學家都以此爲自然科學哲學之基本,而任何根本重要問題的發現,都是數學邏輯與其它科學相關係的

問題。一種民族理智思想與教育發展的關係,都能以此科爲度量。因爲它不惟具理論之特長,其最大者,實由其總試驗科學之大體與實用科學方法,而爲理性層出不盡之“科學假定的實際問題,”與新舊交替不已之“哲學發生的問題解決”之主幹。我們在歐洲文化中看來,由數學與邏輯的精神上,不知道發現了多少美善精良,也更不知光明了多少歷史的進步！一方面替我們人類標出無上智慧可能的權力,一方面從普汎中復顯爲國家教育精神的豐滿特徵。

總而言之,數學與邏輯原理的協和,使思想精神對各科學格外理性底探索,而一切思想哲學,完全被新理性素注射一過。我們再就數學邏輯產生的問題詳細看來,便可以明白二十世紀思想律的新發展。

## 第二章　爲什麼有所謂數學邏輯

### a　數學上直覺問題的爭點

數學的邏輯問題上產生出數學方法的兩種批評來。這兩種批評的態度,彼此相反。起點上都歸數學唯心論派,而見點則一爲“智慧的直覺論,”一爲“形式主義論。”　換言之,前者認數學眞理爲直覺的;後者認數學眞理爲邏輯的。由直覺論進而有數學經驗論;由形

式論進而產生近代的數學邏輯論。這兩派互相把持的勢力,在哲學科學上都不相上下。從十七世紀賴布尼支霍布士與加利來笛卡兒對立的精神到於今班洛(Peano)羅素與侯羅非邪(Renouvier)邦加赫諸大數理家還是不分勝敗的問題和爭點。我們從歷史的研究上,且看他們彼此的立脚點。

(甲)數學唯心論的直覺論者說:我們數學的理性和實在,並不只借純粹思想的法則,重要的在加入所抽得的特別對象(直覺得的)與能考察的元素。所謂形式邏輯,不過專注於思想的空範圍;與一切對象譜入的圖案。它雖然是知識的方計,實在只算是一種器具,決不能得出一點新知識來。至於數學適相反,能使我們知道事物,又可以從這種事物上講到特殊的對象去,如數,量,位置等等。由數量位置種種關係以外看,又完全是抽象與普汎的。譬如在最小的具體性質間先都由這些關係建成關係,然後再就各關係的結構上定出特殊的形體。所以在數學原理中,必須插入直覺的元素。這種元素在形式邏輯上完全沒有。數學本體對象的建設,就是抽象於本體與對象的。而對於物體性質,無論其抽象如何,皆能建定。

加利來與笛卡兒首先發表這種意見,他們很攻擊

中世紀學院派只認識一個三段論證的推理。在所有發現中,他們都證明必要形式邏輯以外的元素加入始能有完全眞理;明言之,要直覺的元素。本體與關係的重要,不僅用一推理,就能演出其它的本體與關係來。要使我們的確能認識,必用精神上完全與形式邏輯或推理不同的方法。

這種精神特點又是什麼東西呢?由哲學家考察起來,分直覺爲兩大派,一派爲有形或感覺的直覺,由一切官感給我們以一定對象的認識,卽是經驗的知識。一派爲無形或智慧——理性——的直覺。這一派說理性連接於邏輯作用,於推理亦然;不過要由直覺的元素供給,所以完全爲感覺的。總而言之,前者爲後天的,後者爲先天的。

(乙)數學唯心論的非直覺論者說;這種直覺論的數學,我們實在不敢承認爲適當的理性,數學惟一的發展在理性的正確觀念上,這種發展的成功,又在精神定律之後,卽是在形式邏輯定律上。所以數學純粹是思想的功夫。其所以能組成功的,也就是惟一理性的定律,只有一個形式邏輯的原動,並沒有其它的元素。

邏輯能把直接單純的意念,配成理性的連續,又再組成羣聚與類分的意念,從此推演出數,序,量的意念來。

在理性的自然上,譬如只單拿形體,可以消去其它的連續,而對象仍為存在。這完全是數學科學的可能,除此數學形式外,理性的存在,必難乎眞實。

這種理性之中,所謂定義,公律,整歸納 (induction complete),都不過是造成功的配合;其所據以造成的理性,就是由它根本定律(或形式邏輯的)最小元素合創的。數學的進步,就在這些理性配合上無限底增加。賴布尼支說:"數學是用邏輯的原理。"近代邏輯家把形式邏輯完全引到"演算邏輯,"上,就是為要分配這種思想的發展,也就是我們現代數學邏輯討論的問題。

b　賴布尼支的"通性論與普遍數學論"

前面直覺問題的爭論都是形而上學的起點。由純粹數學見點來看,直覺派的邏輯問題,是很實際的,也很容易承認的。但是數學邏輯的邏輯數學問題,從歷史上具來十分專門特性,實在比直覺理性的理論要深入一層的研究。眞正要明白為什麼有數學邏輯,我們非確實懂得賴布尼支科學哲學思想的通性論與普遍數學論的原理不可。

要有從外界到內界,從形式到眞義的方法,第一個問題就要提出"通性"原則來(Caracteristique Universelle)。什麼是通性原理呢?是將科學所有意念假定都歸到

一個邏輯的系統,同時能認定邏輯連續的科學眞理。凡字記,圖記,雕記各種性質,都是一種"實性"的存在,能直接表現事物或事物的觀念,而無須用字或文字或音節來標明。在這些實性的自身之間,賴布尼支依通性原則,創出表明觀念與表明推理的兩種特差來。第一種的屬於埃及古文中國文字以及天文學的徵號,化學的記號之類;第二種的性質,就是對於這些字形記號所有的通性表現,卽是很重要的思想。然而在第一種上賴布尼支並不曾完全圓滿底說明。對於第二種所選的例證是算學上的號碼,代數上的記號。他說算學與代數,就是通性的標本。通性本原的差別,如代數與化學之間所謂記號,天文家的徵號與算學家的號碼。再到實性的另一方法上表明通性,又知道凡通性都能用算學與代數演算上類推的方法實行推演或證明。因此代數記號,就是通性的想像化身。

賴布尼支祇代數例證中指明記號的方法很有用,所以認爲在演繹思想上它能獨立。數學的發展和富足的關係,正因爲能在算學號碼與代數記號上找到利便的"徵號"(Symbole)。至於幾何學適相反,所以相對上少前進的發現,因爲缺乏由自然表現的形與眞正幾何的創造,所能的不過在分析上應用數與度量的兩種

抽象。賴布尼支說:"數學進步,第一因其使用基本徵號時,能表現各量與其關係。" 他由這種思想,研究到更深入的徵號更重要的演繹科學,就得到通性最好的"微積分"演算的發明。我們現代微積演算的象徵,即是通性最大而又最著名的標本。

賴布尼支這種科學哲學的思想,能保持他在數學上圓滿的發明,因為他一切的思像發揮,完全關係邏輯的研究。所謂邏輯,就是他的通性應用或特別的支部。凡是性質變遷的配合與複雜的關係,單簡觀念化成記號的表現與複合觀念化成記號而復通於元素的自然,都是用邏輯的組織分配成功的。譬如:

$$x+y=z;$$

一方面是數學徵號的通性組成;一方面為形體性質適合的條件,與印於想像的配合;都是概念通於邏輯的連續。因此記號與觀念的組合,必須隨邏輯類推,不獨通性在直覺情形之下轉釋思想,還有形式邏輯的定律引導,邏輯抽象定律,有兩種重要作用:一為使物理與形式轉變;一為演算者自然服從的想像機械。

賴布尼支通性論應用的方法,在形而上學的比在數學的更感困難。在數學上所以容易成功的,因為有數與形的自然,由演算方法,可以無形中將語言缺乏的

補足;到了形而上學中這種救助歸私人所有,只能勉强在推理和定義的形式上補充一二。賴布尼支想把演繹法供給的,完全用邏輯演算代替數學,專在證驗中找方法。所以他說笛卡兒的方法論,沒有眞正完全的分析,在形而上學中試行證明的,也總是失敗;正因爲他的邏輯方法不足。邏輯的法則能用有形的方法與法式的機械變換表明(如在代數上的),凡是推理都歸於記號的配合;簡言之,都歸於演算。賴布尼支從此又找到了霍布士一種最正確而又精深的思想:"推理就是演算。" 這並不只是演算一步步地追着演繹法,實際是由它指出種種不錯誤的情形,同時用適當固定的法則所抽象的徵號來代替推理。

這樣看來,通性就應該用基本底"邏輯代數" (L'algèbe de la logique),在理性上構成演算,使知識層次應用的方式,都能由推理實行求證。賴布尼支把演算的邏輯價值,認爲能判斷種種爭論。謂普通語言中無用的推理,往往引起許多非邏輯非數學的混淆;但是在惟一確定不變的記號演算上,無論如何,可以達到目的;好意壞意,總在眞實結論中。如果到了眞正的解釋,就如同在方程式上解決一樣。這種邏輯的演算,不只能用以除掉錯誤(直覺與機械——眼與手),實在可以發現

眞理;還不只是證明或檢證已知眞理的工具,也是實在發明的工具。

賴布尼支的邏輯演算思想,以為理性不獨是推理幫助,並可以直用推理代替。一切標辭與觀念實在的連續,都可以用代數法配換,所以演繹法就是象徵底記號與法式的解釋,一言以蔽之曰:"通性成功的。"也卽是形式邏輯的想像。他不怕把演繹歸到純粹形式機械,只要得出唯一的邏輯關係而已。這實在是他象徵思想的數學手段。他拒絕名目論說;謂眞理與錯誤的適合在我們思想而不在事物;決不是名目論者所謂意志的錯誤。這有兩種原理:一方面凡是由理性底眞理(如數學之類)發出的定義,都是自由的;通性底眞理也是相等的自由。又一方面我們推理不能超過任何記號或字;記號的選擇是自由的,凡關於記號的結論與根據選擇的結論,也都是自由的。賴布尼支切實地回答這種錯誤說:"如果記號都是自由的,在記號之間表明標辭或組織標辭的關係,就不是自由的。"要視其能通於事物表明的關係與否始能定眞實或錯誤。在記號連接之中,存在的眞理,是按實在的連接與觀念或對象的必然而定,並不靠我們來定的;最好說是凡存在於記號與事物相似的關係中的,都是根本數學底意義類

推的,換言之,比例的或關係的相等。記號的選擇與字的定義可以自由,但是沒有記號與字的自由連接。在這種連接之中,惟一只有眞實的錯誤。所以類推不只在對象與記號之間,還在記號的各個系統之間,同時用以表明眞實。

這種重要底證明,可以在數學上完全借用。賴布尼支又證明代數的法式,都離寫用的記號與字而獨立因爲它的眞理在普通法則與形式轉換上安置,并不在"有形"自然所表現的性質上。同樣算學眞理,也都離所用的號碼而獨立,於列數方法亦然。譬如十的數與10的號碼之間,只有自由的關係,引伸十數的條件選擇,做我們列數的基本。結果數能轉譯成號碼是自由的,是根據列數基本的選擇。

以上都是通性論的普通原理;現在再來講普通科學或普遍的數學論。

賴布尼支視邏輯所有的意義比以前亞里士多德與中世紀學院派的邏輯,格外寬放得多。他說邏輯如:思想工具,不只是亞氏分析上證明與判斷的工具,實在是笛卡兒派方法的發明工具。賴布尼支從此根本地加入所謂自省底工具,因爲要好好思想,應該要有:"精神存在,"並且要知道記憶所已得的根本知識,用以推

演其它新件的配合。在賴布尼支的普通邏輯根本分爲兩部組織:第一眞實方法,用以證明已發現的眞理,而又檢證懷疑與爭論的標辭。第二則用以發現新眞理;都由確實而逼近無錯的方法,在前進與系統的秩序中由摸索偶獲底發現。第一個是數學定理的種種情形,建設科學的眞理,同時拿邏輯的同一嚴重同一連續爲用;第二個是指示解決問題,用各種方法引到已知標辭的解法上,如同幾何學的求證,一方面由原理到結論,由因到果;一方面從標定的結論到研究的原理,從已知的果到未知的因。前者爲進步的,組合的,後者爲退步的,分析的。因此邏輯的眞正區分,據賴布尼支最好是組合與分析的辨別。在這種意義中,同時了解數學上的組合分析。所以就是數學方法的概括,組成普通科學方法。

我們從賴布尼支這種邏輯思想上看,可以直接知道他邏輯的數學形式;換言之,把邏輯歸於演算原理,能成普通數學觀念的表現。實際上他的邏輯概念,就在數學概念的反動上,正所以在數學科學範圍中收入幾種邏輯方法。這是他的邏輯數學新外延的負擔,現在再看邏輯與數學之間眞正存在的關係。

首先討論數學與邏輯間形式的類推。在舊式邏

輯研究的區分上,知道有三種相通的對象:概念,判斷,推理是也。這三種原理在我們普通觀察上,概念與判斷的很難認爲有數學對象。其能視爲相近數學的只有推理的三段式。但是賴布尼支對三種原理都由數學上找出同樣的區分來了。故特別就代數上定出:

(1) 單簡名辭都是字,複雜名辭都是法式;用記號演算的方法(和,積,)成了字的配合;

(2) 標辭是相等的(或方程式),或不等的,與比例的;簡言之,肯定兩法式之間的關係;

(3) 推理或結果,都是演算或轉換的事件,從此推演其它多少關係。

反之,適合邏輯上同樣的類推;單簡概念,用字表明;複合的就用"法式"表明;標辭則用關係表明(同義之類);再推理又用演算或法式的轉換表明。因此如果代數是邏輯的,邏輯於根本性質上就是一種代數。

然而這不過就外界與形式相關的說,如果要深知道邏輯與數學的切實關係,應該決定數學的對象如何。凡是特別科學名爲數學的(算學,幾何,機械學以及依數學調和實用的),都是笛卡兒賴布尼支所謂普遍數學;換言之,量的普通科學。這種科學就名爲"算學邏輯,"(古義(Logistique)卽演算的科學,非今之數學邏輯,因爲

它用別種方法作演算諸量的工具。(如用已知方法演算未知之類代數所以只是一部分的:"算學的概論發展:"因爲數的科學無定。總而言之非邪特(Viéte)的特殊算學邏輯與列數的算學邏輯相對或相合,還是承認代數爲通性的,能應用於邏輯範圍與一切演繹形式推理上。正是賴布尼支普遍數學的起點。所以他說:"數學是想像邏輯。"想像的對象有量性與性質,或量與形:"由量與形可以識別事物相等與不等;由量性與性質,可以知道相似與相差。"

在賴布尼支的普遍數學觀上,所謂數學就是數學邏輯;是附屬於"配合"(Combinatoire)原理的。(配合是一種數學工具,在一定的條件上,能組成確定對象的如號碼數,字母……)可能配合,這種工具在賴布尼支視爲數學與邏輯演算的通點)所謂配合原理就是邏輯的一種。邏輯與配合原理不同的,因爲邏輯對象(諸概念)都是理想與抽象的,而配合原理則爲直覺的。如果純粹邏輯在通性上能叫爲想像,就可以得到配合範圍;反之如果配合具體的抽象名辭,則須在配合關係上始能包純粹邏輯。總之彼此聯合能組成"形的科學"與抽象關係的普通科學。

普遍數學的發現把一切數學科學範圍都歸爲它

的原理,都做它最普汎底定義定理。而邏輯演算與幾何演算,就是它的基本方法。這實在是賴布尼支最大的功勞,數學與邏輯相混,至少是科學邏輯的發現。在邏輯與數學之間,不獨是形式類推或並行的原理,實在是細分恆等的原理。最明白地是普遍數學組成關係的普通科學,而各科學關係,由形式與本質的分別上,凡特殊理論,各具基本公理與定理;再在細微的演算上公理都組成運算的方法,其簡便有如代數。在舊式代數上看,不過為數量的邏輯,完全只有相等的關係。賴布尼支則別創新法,在"適合"與"相似"的(Congruence et Similitude)種種關係上,建立恆等代數與包攝代數,同舊式代數邏輯相接合,共同發展。他說由總適合可以推演分適合。但是多數分適合,不能斷為一總適合。在賴布尼支決定有地方可能,只要在三項上的適合

$$ABC = A'B'C'$$

推為兩項適合的三連接適合:

$$AB = A'B', \qquad BC = B'C', \qquad AC = A'C'$$

可以連三適合為前面總適合式了。

至於相似原理,則用同一記號指明兩關係;譬如由半徑R到正弦S又到正弦V(弧的倒正弦X是$1-\mathrm{Cos}\,x$)就用下面方法表之:

$$R;\overset{\backsim}{S};V$$

如果 p, m, n 之間有同樣的關係就寫爲:

$$r;\ \overset{\backsim}{S};\ V \backsim m;\ \overset{\backsim}{n};\ P$$

這表明r,s,v之間的關係全相似於m, n, p之間的關係。這種適合都視代數爲算,由法式與配合的形式性質安定,而全稱普遍數學遂變爲實在的形式邏輯定律的科學,思想的通式;簡而言之;數學歸邏輯。

我們再到別方面看,形式邏輯的發展如果能與數學同時符合的地方,邏輯又歸數學了。因爲實際推理的形式,卽保存普遍價值與演繹的必然。所以賴布尼支不停止地研究形式推理;然而又要直接加入邏輯的形式作證驗,使之不歸三段式的形式。從此演繹推理的嚴明,由前提到結論,都適合普通法則;與以前所建的形式相同,幷且能離所注意的關係連續而獨立。賴布尼支說:"借邏輯形式的正確,最好把推理歸到演算上,換言之,空去邏輯關係的實在連續,使之只注意形式聯合與必然的連續。" 因此他先用無定義底徵號代替含義底名辭,再由條件底記號代替所關係的原理。所謂推演的列序式:卽得配合與轉換的形式法則。總而言之,就是"通性"構成形式邏輯的想像,也就是由它連合數學與邏輯而又中間以混和的力量。

這就是賴布尼支數學邏輯的普通原理,他的邏輯演算與幾何方法可以不講,因爲只有歷史的價值,與近代相較,以前都名爲邏輯的數學論,或古代數學邏輯論。

## 第三章　爲什麼有新數學邏輯的產生

第二章所講的數學邏輯,就是我們二十世紀的新數學邏輯嗎? 我們所謂數學邏輯是否就算這種單簡底問題解決了呢? 如果承認現在底數學邏輯完全是賴布尼支的思想,爲什麼數學邏輯的問題在十八世紀沒有驚動科學界的論點? 如果不承認,又爲什麼有新數學邏輯的產生? 要回答這些問題,大概可就下面幾點釋之:

(1) 亞里士多德派的邏輯根本太狹;

(2) 賴布尼支的普遍數學邏輯也不完備;

(3) 現代新數學邏輯補救的方法。

且分別詳言於下。

(1) 亞里士多德派的邏輯根本太狹。

亞里士多德的邏輯何以太狹呢? 因爲它僅是一種"類分的邏輯,"(Logique de classe),所謂思想定律的三種原理,同一律,矛盾律,不容間位律,不過拿各個底本身來類分名辭的所有;換言之,概念都是孤立的,只在確定

底秩序中,依其所能包容與所能連累的來包容或連累之;再換言之,主格與表格彼此互用。這惟在內包研究上有效,於實際的外延——表格性上——都疎忽了。因爲這種概念的類分,在內包秩序中,對於最普遍底意義不過建出合解底條件,然而仍有過於不切實的。

我們要用思想,就應該服從這些條件與類分的秩序,這是一定的。如果否認它,就否認思想了;簡言之,要服從亞里士多德的邏輯法則。此外還要服從其它的條件或其它的法則。在亞里士多德的邏輯中只建出一種適合底條件,從思想觀點看,如果推到太遠,就不能確定眞實。實際上用孤立名辭,決不能考出什麽事件;必先由標辭着想,始能得到新底發現。凡思想能成一標辭,換言之,爲名辭的集合;連絡集合,更成複合名辭。故新形式邏輯要用所謂標辭邏輯補充從前類分的舊式邏輯。在複合名辭上構成類分的運算,或同一類推的運算。因爲要使演繹眞理可能,更使一切演繹方法都成正確推理,必須實行知道怎樣標辭的細分,能連累於類分關係。

再一方面看,舊式邏輯所講的標辭,只有專注於包攝(Inclusion)關係;即是凡概念間的關係,都用一個關係動詞的"是"字表記之;所謂關係也就止如此。總之,惟

一的關係就是從表格到主格從形容到所形容的。而於這些關係旁邊,再沒有連累量性的,譬如語言中關於前詞,連接詞,以及語尾各處所表明的關係,如果想連成邏輯上有用的思想,對量性都應該注意。在亞里士多德的邏輯上,思想與語言的分析完全不够,所以一定要進一步底追求。

舊式邏輯不只顯出無味的人造,還有不能自足的表現。它把標辭的分解都當爲"天主是善"的形容法式。譬如下面的話:

我剛從段家店來;

變爲:

我是"段家店來的。"

這看出它忽略思想與實在的關係,亦不知標定地方久遠的關係。還有同樣用動詞的"是"表明爲"是的。"譬如:

甲是相似於乙;

甲是比乙大或小;

甲是乙的父;

甲是乙的地方;

諸如此類,實在的連辭並不由一"是的"可以表明關係。所表明的關係正要辭句的集合。如果改變標辭的證

明,不能拿"相似於乙"來做主格,實在只是一乙,還要說:"乙相似於甲。" 這正是舊式邏輯太狹的明證。

(2) 賴布尼支的普通數學邏輯也不完備。

賴布尼支看見這種不完備的舊式邏輯,以爲必使普通研究的理論,都困於亞氏或學院派的範圍中,所以他從數學與文法兩方面精深底研究。但是結果他自己還是脫不出亞氏法則的限制。我們從數學或文法上看,他的新邏輯方法仍舊犯同一錯誤,不過加進數學普遍材料,比較遠到一層觀察。若謂爲眞正完備思想方法的數學邏輯又實在不够。

賴布尼支演算的公律或原理可約爲兩大觀點:

一　我們一切觀念,都由最小數的單純觀念組合成功,其集合的形體表現,就是"人類思想的步驟。"

二　這些單純觀念的複合概念,由一致與對稱底配合,同算學上乘法的類推一樣。

這兩個公律,第一個能把單純觀念的數認爲比賴布尼支所相信的數更大。但是如果這種假設能行,再拿到哲學普遍語言所計劃的實際價值上看,又沒有很大底理論。如此,所以單純觀念的數,比自然的便要少,惟其比配合式的更少。

到這一點來,第二公律完全顯出錯誤的,首先因爲

邏輯乘法,不只在演算上容易受概念的更動,(因爲也有注意加法的,表明循環交互,以連接詞或字釋之)惟其否定的更容易更動。賴布尼支在否定計算上都得出錯誤來了,他也不能解釋單純觀念與彼此之間相同的怎樣能用複合觀念配合,發生矛盾剷除的道理。

並不止如此,賴布尼支在經歷中,至少逆料出否定的獨立點;對邏輯加法意念亦然;都離外延而獨立。所以必要底元素,先須組織舊式邏輯代數。其所成功的幾點,還是與舊式邏輯相接,換言之,他的邏輯代數完全在亞氏的邏輯內包上(就三段式而言),這種範圍極端底狹小。對精神所有觀念,它只能包普汎概念或類分的部分(即普通觀念或抽象觀念) 再從各觀念中看,所能得的關係,舊式邏輯也只能研究:"包攝的關係。"(再還有相等的關係,也可以由此限定。)

一　從邏輯見點看,它歸入表格判斷的研究。結果只包一表格與一主格所有。

二　再回到數學見點上,它在集合重要理論中,有包攝與排除的關係。

三　還有就文法見點看的,它的範圍與前面研究動詞是字的標辭連辭相同。不過賴布尼支把它彼此分列互乘,彼此隔斷;所以外延結果畢竟不能增加。這

因爲它排除所有前置詞,關係詞,婉曲詞的原故。賴布尼支對於語言思想的複雜變更,有時雖然用關係詞來概括,自己還是承認這種理論爲離邏輯原理獨立的導言。可惜他的試驗不成,所餘下的理論,完全草創,故相近兩世紀之久,無人能繼續研究,至十九世紀第二半期,才有人把他邏輯代數的形式建定。所謂關係邏輯亦從此發現。但是還不能說邏輯爲事實的科學,它的價值還有一大部分要研究。能做這種研究的數學邏輯家完全在科學純正見點上就數學普汎的方法,求出邏輯眞正定律的原理。

(3) 現代新數學邏輯補救的方法

我們對於亞里士多德的邏輯狹點和賴布尼支數學邏輯的缺點,現在可以明白了。關於這兩家的改革家到底如何着手呢? 回答這個問題,就是我們數學邏輯眞正產生的價值。各改革家的奢望和最大的目的,要造出一種反動的邏輯,與所謂性質量性諸觀點根本不同;塗去從前不合理底思想,到絕對普汎上處置一切。譬如相似代用的原理,要能同樣駕御其它的種種,同時用數學推理的與用普通或形容的概念推理的也要一樣。想明白這種特現的思想,我們先要找出一個眞正底起點。

賴布尼支的邏輯代數,在當時能明白知道的人並不多,所以他的思想眞正注意的地方,因爲自己沒有完全成功,結果幾乎沒有人研究,好在他普遍數學的功效太深,所以邏輯代數的思想於無形中進步了。遂產生坡來的數論分析思想。我們二十世紀的數學邏輯遂從此發軔,而賴布尼支的勢力,亦因此愈加擴大。

我們知道舊式邏輯與賴布尼支的數學邏輯,都失敗於概念考察。要想把概念的考察代用以標辭的考察,使由標辭配合的與由孤立名辭配合的一樣,應該用什麼方法呢? 坡來先研究出演繹運算不合理,遂注意三段式所用的演算,設法重消去中名辭;必使在三名辭系統中消去中名辭時,如同在兩未知量的方程式中消去一未知量無異。概括這種要點,可以說是凡演繹運算的確實推理,能歸到:"認定名辭任何數的系統,消去所應去的中名辭,再在所要求的元素間,用前提來決定所有連累的關係。"

形式邏輯應該變爲"消去法"的通論。如代數學在方程式的理論中,我們現在雖已使之與消去法的理論對立,但是消去法決不能負擔關於量一方面的。結果是否能使之由此演算發展,以至量性關係的與性質關係的一樣? 在概念與標辭上關係的又能否與數目

和列數的關係所關的一樣? 這一定的,因爲數學家只持算他的推理,只要適合徵號的運算;從具體事物所表現的考察,遂做成徵號上完全通釋的抽象。

在這種新的演算中,又用什麼方法實行呢? 如果與代數演算相同,我們仍然不能知道先天的。但是要想把它設起式子來。就要把演繹中,精神方面所拘束的種種運算,統行分析用徵號來表明;所配置的關係,在徵號間仍然能表現,換言之,所謂限定運算,必要徵號都通於思想的實際運算。從坡來石拓德的思想發生以後,實行這種研究的是班洛,羅素,古第哈,懷提海。

在形式邏輯中最重要的是推理原理。換言之,三段論的研究。我們要想眞正改革形式邏輯,從此處着手,是第一步功夫。所以班洛們開首就變三段式的形,使之絕對適合思想所在。把完全三段式定爲"假言"的通式,這就是演繹事變中最實在而又最活動的成功。譬如說:

若是甲爲眞,
乙爲眞;
若是乙爲眞,
丙爲眞;

假言三段式的理論,不過定律的集合。隨這些定律,在

我們思想的關節中,用連接詞"若是"與否詞"不"來配合一切,就是改造的根本文章。還有"與""或"的連接詞,同樣也插入假言三段式中,與前兩種同一重要。這兩種辭與代數上×與+(乘加)的記號意義一樣。

一個定爲乘法邏輯,與代數的乘法同一性質;表明"配分律"與"變換律,"又一個定爲加法邏輯,也與代數加法同一性質,表明"聯瑣律"與"變換律,"隨即定出兩種徵號"○,"與"1"的兩類別。第一個表明所有不可能或誤錯的標辭;第二個表明眞實標辭。引出這種徵號,形式邏輯的改造家因之用很合法的思想實行處置,有時脫離所標定的前提,仍能達到完全適當的結論。這種方法是自動的,可消去中名辭。

這些實用底法則,與代數方程式上關於未知量與未知量的消去法純粹符合的。所以邏輯新方法的演算,與代數演算如出一轍。比賴布尼支的實在深入一層。現在我們凡是在語言中連續於思想的,一定可以明白說出。總而言之,安定確實名辭或標辭,就可以推演所有底關係。這裏的關係無論是已知或未知,再或者沒有認明的,都包在此中。至於亞里士多德的邏輯,只能推演已知底關係。所以新形式邏輯實在是發明的方法,根本引起絕對新底思想來解釋種種關係存在。

一直到現在,雖然說是有這種新數學方法的新邏輯原理,然而根本上還是發展賴布尼支的思想,內中自然有補正或完全更動的;但是結果終止於包攝邏輯的範圍。這都只能認爲救正舊形式邏輯思想之一。現在還要進到第二個救正方法去,把舊習邏輯缺點與賴布尼支數學邏輯的邏輯導言思想都改換了。簡言之,一直到邏輯運算方法完全不用"是"的連辭,或獨一動詞是字。到這裏來了,邏輯就變成最複雜而又最困難底事件。我們在第二篇原理中,可以節要證明,現代數學邏輯補救法,亦散見於各原理中。總之數學邏輯家實際底方法,可以用下面的話概括爲:

"凡是歸於演繹科學勢力下,發展和說明的種種事件都要直接說明。先由分析關係所研究的實行展開之,完備之;最後再研究供給我們的新關係,又來實行就包攝邏輯中所鑒定的關係上,將這些新關係用演繹聯合。"

實際在包攝邏輯中,並不會有相等與包攝關係上"點的集合論,"在分析中所遇的理論同集合論漸漸發展,成爲基本要點。再一方面在包攝邏輯上的邏輯函數論,一切變數,都只有 0 與 1 的兩值。所以約成下面的:

$$X^2 = X, \qquad XX = X$$

這明白底表示對於 X 值適合的是"0"與"1"二值。

應該超過這些關係的極限到分析所定的極限去，再到幾何極限，機械學極限，然後到數學物理，如此類推；換言之，應該凡是公理，公律，原理，都與一切科學上不同的發展相別，按照眞實存在的關係來消滅之。又要不是假裝定義或定理。所以能使科學完全發展的，只有惟一形式邏輯公理幫助。

因此我們在一切理性索究的場圍中，所有鑒定的意念，沒有一點普通形式主義的部位。所以邏輯單純的演繹法，能從此意念上超至其它的意念，全不用直覺救助。凡屬科學就是邏輯的原動。到這種數學邏輯，才是眞正達到笛卡兒賴布尼支普遍數學的希望，眞在普汎和永遠的科學與哲學上建定的。

我們還有幾點要知道，從賴布尼支思想路上所發展的邏輯數學和演算邏輯，有邏輯方程式的存在，於代數方程式以外，還有數學邏輯系統的包含與解析幾何本體的解釋；換言之，純代數上的意義與純幾何上的方法。這就是馬易姆(Maimon)與葉果羅(Yergonne)派的代數分析與幾何分析種種論證，也是我們新數學邏輯運動中最有力量的幫助。不過葉果羅的見點要以幾

何的直覺爲根據限定主格與表格觀念的原始關係。他說考察兩種觀念之間不同的情形,先要彼此比較,然後才能在它範圍中得出相關的表現。其關係有如:

(1)　排除的:　=H

(2)　相交的:　=X

(3)　恆等的:　=I

包含的關係有兩種爲:

(4)　S連於P的:　=C

(5)　S包P的:　=O

這五種關係每兩種相配合。可以得出二十五種新關係來,不過配合的結果:結論與前提一樣。所以有人說它與亞里士多德的三段式還是一樣,在我們眞正數學邏輯的原理上,不是完全合理的,與歐萊的圖表同一出發。

# 第二篇　數學邏輯原理的演算

前篇講過數學邏輯的產生和要點,現在把它的原理略爲敍出,換言之,說明其所以異於舊邏輯的對象與所以較舊邏輯爲完備的方法。

亞里士多德的形式邏輯,既無標定的原理,亦無所謂自然公律;這種缺點,我們現在研究起來,知道是邏輯不滿足中之最大者,如十九世紀末,數學分析家與卡斯芒(Grassmann)派幾何演算論者的發展,皆謂邏輯改造首在原理。因爲形式邏輯的演繹,爲推理的中間,完全在無限定的第一意念與無證明的第一標辭上(Notion Première indefinisable et Proposition Première indémontrable)。其存在的結果,自然要把原理和第一意念縮成最小可能數。不過這些原理的創造,在哲學上往往顯爲僻論,其實也不過是一種心理直覺;從眞理中看來,當然用它可以把舊邏輯不可推論的與推論不合的困難都減去了。我們試讀班洛的"數學定義篇"與巴多

哇(Padoa)的"邏輯演繹論,"即能明晰此類眞義。由各殊的原理集合,可以發生同一系統結果;其所需用的方法,就是羅素派發現的功績。我們先就簡單的:標辭,類分,關係三種演算原理爲之簡別敍出。

## 第一章 邏輯之標辭演算

數學邏輯所謂標辭,即舊式邏輯所謂判斷。所謂類分,即是概念。數學家認判斷爲知識中的首重,概念次之。譬如"人"的概念,如果沒有:人爲理性動物;凡人能笑等等標辭存在,則人的概念爲無意識。所以標辭演算必先於類分。

標辭邏輯爲數學邏輯最重要原理。照坡來與石拓德們的數論舊理想看來,凡爲簡單概念,皆從類分應用或初級標辭起,然後由此組成復合概念或標辭,遂爲第二級或絕對標辭的邏輯標辭所在。古第哈說:"標辭演算原理,爲一切推理之神經樞,乃坡來發現中最有光明者。它能在數學本身,處置普通概念;所以他認:數學沒有根本性質專注於量與數的觀念。"這就是數學革命的第一個宣言,數學邏輯的第一部綱要。因爲數學所有說明,對於各種運算方法,都爲獨立存在;而在各種物質上,都能完全應用。譬如所研究的變性,完全法

式方面的實行,這種法式由數的特性上先就一問題的普通解釋表明,再由幾何解法經過,然後再由力學光學的問題試察。坡來的變換,只在邏輯範圍中輾轉作證;而班洛羅素則在科學範圍上發展,其遠因為卡斯芒派;所以邏輯不只專注於事物間的關係,實在還注意事實間的關係。譬如由標辭表明的事實為:

如果太陽完全蝕了,

星辰就變為明顯的。

坡來的標辭演算,完全據代數方程為準;換言之,其立論仍為舊式邏輯所限制的。我們先就他研究的要點,遠遠地寫出,作為近代標辭研究之先導。

我們知要道坡來的邏輯代數論是建在"零"〇與'一"1的兩個重要概念上。如果想構成標辭的方程式,必須這兩個徵號,都能與標辭相關切,而又為"時間上的眞理;"單標辭如果無所謂形容而又為肯定的,則必能應用於所有時間;如果是否定的,則不能有時間的應用。一形容標辭,只能為一有限時間的應用。徵號的"1"表明非形容眞理,即為所有時間的眞實;徵號的"〇"為非形容否定,凡在時間上的事件,全不眞實。譬如Y表明一標辭,y表明此標辭的時間標辭為時間的眞實。如果以x加y兩標辭約為總括時間之和,則此時X與Y

必爲眞實無疑。因爲時間上使彼此分明了。再用 x 減 y 總括其所餘時間,因爲 y 時間是 x 時間中減下的,與謂爲假定 x 包 y 的時間相同。再來說 x 等於 y,即是 X 與 Y 都爲眞實。而 x 與 y 之積,是指時間的部分,這時候 X 與 Y 也都是同時眞實的。

現在認 x 爲概述時間的,卽此時 X 爲眞;若 1－x 亦認爲概述時間的,則 X 爲錯誤的。同樣以 x(1－y) 概述時間,則知 X 爲眞,Y 爲錯誤。餘都類推。

要表明標辭的 X 爲眞,(無限制,無形容)則寫爲:

$$x=1;$$

反之要表明其錯誤,則寫爲:

$$X=0。$$

如果表明:"或 X 標辭爲眞,或 Y 爲眞。" (不能同時)必先說"因爲 X 爲眞,Y 爲假,"用 x (1－y) 表明之,反之則用 y(1－x) 表之。演算式則列爲:

$$x(1-y)+y(1-x)=1。$$

在假言與選言標辭上,都很容易代用。譬如有條件標辭於無定時間 m 時表明第一標辭爲眞實,而第二標辭 y 因之亦同爲眞實。其式有如:

$$y=mx$$

m 在一切可能的地方都爲特性號。又如:"凡人或皆

爲智或皆爲愚,"如果以x等人,y等智,z等愚;對人適當的標辭不能同時智而又愚,所以標辭方程式爲:

$$x=m\{y(1-z)+z(1-y)\},$$

原標辭換爲簡式,得:

$$x=m(y+z).$$

結果所表明的意義卽:人完全爲智愚的有定類別;換言之,人類爲若干智者與愚者組合而成。

再拿一個特稱否定標辭來看,例如"若干人都非智者,"先將它約定爲"若干人""都"與"非智者;"以y代人,x代智者,m代無定類分包含所形容的若干個體。對於若干人就有my,於對於非智者就有m(1-x)得方程式爲:

$$my=m(1-x)$$

這就是初級標辭的徵號。在這種解釋中,各記號所表明的意義,邏輯與代數的盡同一值。眞正推論的必要條件有三種:

(甲)固定的解釋,在徵號上立定;

(乙)形式運算的解法或證明,根據已成定律與運算記號的意義爲之推證;

(丙)結論上的解釋與原始標定的情形相合。

這種條件在二十世紀的邏輯演算上,實完全不同。

於今所謂標辭演算的主要關係,就有兩標辭之間的連累關係 (La relation d'implication)。 卽是:不可限定的第一意念。依羅素的方法寫爲:

$$P \supset Q$$

讀爲:"P 連累 Q,"P 與 Q 都爲標辭;原式表明:"如果 P 爲眞, Q 爲眞;"或者"P 是假的,Q 也是假的,"或者"P 不能眞而 Q 爲假,"再或者"或是P 爲假,或是 Q 爲眞"這些相當的斷言,只有解釋 P 連累 Q 的意念,而不能限定連累的所有。

羅素的標辭演算,根本在"齊一原理"上,所以如果 P Q …… 爲標辭,就寫爲:

$$P \supset P, \quad Q \supset Q$$

或者是:

$$P \supset Q \supset \cdot P \cup P, \quad P \supset Q \cdot \supset \cdot Q \supset Q$$

這卽是他所謂:"一標辭連累於本身"。

現在講兩標辭或多數標辭的邏輯積 (Produit—logique)。先認它爲不可限定的意念。取數學意義,更爲抽象其體;名爲積者,卽邏輯各標辭的同時肯定。其存在的條件,必 P Q …… 都爲眞實。普通數學邏輯列定爲:

$P \frown Q$ 或 $PQ$

譬如有相當或相等的兩標辭,由前義定爲:

$$P = Q \cdot = \cdot P \supset Q \cdot Q \supset P.$$

這種等式的意思就說是:"[P等於Q], 即P連累Q與Q累連P。"

又如:

$$P \supset Q \cdot = \cdot P = PQ$$

表明"一連累式相當於其前件與前後件之積。"

羅素專爲標辭演算,找出十個定理,爲一般推理的原則。謹爲列舉於次:

(一) 如果P連累Q, 於是P連累Q;換言之,無論P與Q爲何,而[P連累Q]爲一標辭;

(二) 如果P連累Q, 則P連累P;換言之,無論其所連累何物爲一標辭;其式如:

$$P \supset Q \cdot \supset \cdot P \supset P$$

(三) 如果P連累Q, 則Q連累Q;換言之,無論其爲何物所連累爲一標辭;其式如:

$$P \supset Q \cdot \supset \cdot Q \supset Q$$

(四) 如果有一眞實連累於P連累Q, 如果假定P眞,則正定Q亦眞,並且可以單獨的肯定:

按此原理不能用徵號表明,譬如寫爲: $P \cdot P \supset Q \cdot \supset \cdot Q$ 仍爲不可解的,因爲不能分開肯定Q;不然,要在本原理之外另有方法消去 $P \cdot P \supset Q$ 的假定始能證明。

(五) 如果P連累P與Q連累Q,則PQ之積連累

P,P與Q的同時肯定連累於P的肯定,名爲化單原理;(Principe de Simplification)其式如;

$PQ \supset P$

(六) 如果P連累Q,與Q連累R,則P連累R,名爲三段原理;其式如:

$P \supset Q \cdot Q \supset R \cdot \supset \cdot P \supset R$

(七) 如果Q連累Q與R連累R,又如果P連累於Q連累R,則PQ之積連累R;名爲雙置原理,或爲輸入原理,(Principe d'importation)其式如:

$P \cdot \supset \cdot Q \supset R : \supset \cdot PQ \supset R$

(八) 如果P連累P與Q連累Q,又如果PQ之積連累R,則P連累於Q連累R;名爲單置原理亦名輸出原理(Principe d' exportation)其式如:

$PQ \supset R \cdot \supset : P \cdot \supset \cdot Q \supset R$。

(九) 如果P連累Q與P連累R,則P連累QR之積(P與Q的同時肯定)名爲單配合原理;(Principe de Composition)其式如:

$P \supset Q \cdot P \supset R \cdot \supset \cdot P \supset QR$

(十) 如果P連累P與Q連累Q,則"「P連累Q連累P」連累P"名配還原理Principe de Reduction,其式如:

$P \supset Q \cdot \supset \cdot P : \supset P$

如果P連累Q連累P則P爲眞,譬如說P或P非Q卽是P。再有兩個新徵號要知道的是:

V與Λ

卽是眞與假的表明;與前面坡來所用之零與一有相通點,且更爲普遍。如:

$\Lambda \supset x$ 與 $x \supset V$

x爲任何標辭;換言之,"假的連累所有;而眞的則爲所有連累,"此所謂僻論之尤者。其故因爲眞的前提能推及假的結論;而假的前提反能得出眞的結論。

我們要表明P的否定以P′表之,由是得限邏輯和(Somme logique)的相當式爲:

$P \smile Q = (P'Q')'$

"肯定「P或Q」,就是否定非P與非Q的同時眞理。"因此可以證明矛盾原理的:

$(PP')'$

"P與非P不能同時兩都眞實。"以及不容間位原理的:

$P \smile P'$

"或者P是眞的,或者非P是眞的。"從此推得雙否定的原理:

$(P')' = P$

"非P的否定爲P。"

由這些演算原理可想到舊式邏輯原理所謂"思想定律的"缺乏！在一班哲學家有用齊一原理或矛盾原理的單純律統一思想的更是奇怪！要知道形式邏輯,並不是普通那麼簡單。

要想證明標辭惟一的否定,先還要承認第一標辭。如換位原理的:

$$P \supset Q \cdot \supset \cdot Q' \supset P'$$

"若是P連累Q,非P連累非Q,"從此更可以推出上面的雙否定律。而肯定原理的演算得列爲:

$$P = (P = V), \quad P' = (P = \Lambda)$$

還有證明許多僻論的形式如:

$$P = Q \cdot \smile \cdot P = Q'$$

原式表明爲:"凡標辭有兩值:眞與假是也。"凡標辭眞的相當,假的亦相當;每一假標辭連累於所有標辭(眞或假);每一眞標辭爲所有標辭(眞或假)所連累。

## 第二章　邏輯之類分演算

邏輯的類分演算,在坡來與石拓德都認爲先於標辭演算,前面已經說過;因爲受舊式邏輯所範圍。從羅素的關係論發表後,邏輯家都認爲次於標辭演算,我以爲夾帶歷史性的便利,把坡來的類分略爲叙出,讀者可

以借此順流而進。

自然;邏輯如果眞想豐富而又精確,在數學中也能成一種比較的科學,非有特別創造方法,使判斷,概念等等非數學推理的理論,都同演繹推理一同超出解析幾何法式範圍之外不可。這種思想,就是類分演算的分析思想。第一有所謂邏輯變數的發現,由此就變數輸入中,組成邏輯關係的法式與就坐標式的選擇,組成幾何關係的法式相同。至於邏輯常數値,就用前面零與一表明之。譬如任何對象的類分以Y表之,得代數式之:

$$O \times Y \text{ 或 } OY = O;$$

$$1 \times Y \text{ 或 } 1Y = 1.$$

這很容易解釋徵號的意義:"O與Y之積,爲兩共通元素所成的類分。" 要Y任何數爲不變,必須O所表的類分爲無有。卽所謂:"邏輯無有。" 同樣1與Y之積,表明Y爲任何不變的Y,則1與Y的配合必不高出Y的外延,就此表明所有類分集合。卽所謂:"邏輯全稱"是也。

有O與1的兩種徵號,可以使邏輯演算的普通方法格外豐富,眞實虛僞的標辭,可不用推理表出;從此卽超出亞里士多德概念配合的限制,發展到形式邏輯的

眞點。

邏輯的加法乘法卽類分間初級運算法。乘法邏輯類分的共通性,卽內包加法。如X表哺乳類分,Y表水生動物類分,則X Y之積爲水生動物哺乳類。所謂邏輯加法卽爲外延加法,假定類分彼此相加而無共通性。坡來的加法爲選言原理。如X表哺乳類分,Y表魚類分,而X與Y之和的配合,卽哺乳類與魚類的集合。

再就負號——減——原理看看,由減法能得出凡類分所注意的類分增加。例如X表明"人"則"1-X"表明"非人。" 恆等原理在不容間位原理底下,能就下列方程式表明之:

$$X(1-X)=O$$

這就推到變形方程,可以用邏輯乘法基本性質的定律作證。賴布尼支已經發現數學代數關於邏輯代數的特殊性。卽是所謂:"二元律" (Loi de Dualité) 的方程式:

$$X^2=X$$

實際上卽是說邏輯積爲包同一對象的兩類分配合;如人與兩手類的類分,實卽相當於其元素之一。如果X等於Y則:

$$XY=X=Y.$$

而對於XX或$X^2$的積自是相同。使$X^2$等於X,則直接證得:

$$X(1-X)=O$$

因爲邏輯方程式基本的$X^2$等X或$X^2$負X等零,爲一種矛盾定律的形式證明。方程式的意義表明:一類分,同時X又非X,則爲無有的事件;換言之,無有存在。

坡來的思想以爲徵號配合間的可能,只要能把這種"數形演算學"的基本固定了,則不愁不能直達徵號配合的直覺表現。要緊的是變換的結論,如同三角上虛數的應用然。坡來的邏輯能在某點上知道理性範圍超過想像之外,與亞里士多德的相較,代數又超算學而上。

在全稱詞中,類分須標定特別界綫,譬如有"選徵號"X (Symbol électif) 配爲邏輯函數的F(X),用下列方程表爲:

$$F(X)=aX+b(1-X)$$

原式將a與b兩係數決定了,由此再將X代以O與1的徵號,得:

$$F(1)=a+b(1-1)=a;$$

$$F(O)=a+b(1-O)=b,$$

由此推得下式;

$$F(X)=F(1)X+F(O)(1-X).$$

原方程式的擴大,即是X函數的展開式(L'expansion)

由同一方法,可以找X與Y兩變數函數。其式如:

$$F(X,Y)=F(1,1)XY+F(1,O)X(1-Y)+F(O,1)(1-X)Y+F(O,O)(1-X)(1-Y).$$

在形式邏輯上展開式的演算,把亞里士多德的缺點都補足了,其最精確者,則爲代數消去法的借用。

現在再就最近的類分演算看,邏輯函數的意義在羅素與古第哈們的演算中與坡來的不同,他們把數學函數更加擴大,本身則包肯定標辭與標辭間所有的關係,換言之,包方程式而有。譬如正弦X在數學爲函數,而正弦X等於一則爲方程式;然而邏輯上兩都爲函數。邏輯函數的變値隨其變數包有的意義爲定。例如有:

"某國之都城"

的邏輯函數,其變值爲:

"巴黎,倫敦,柏林,北京……,"

隨其變數之:

"法國,英國,德國,中國……,"

的意義而定。若以徵號寫定,與數學的同形,如:

$$\psi(x),\chi(x,y),\psi(x,y,z)\cdots\cdots$$

一函數爲個體對象即成一個體;邏輯的變數函數,普通

視為有限與個體函數不同值的變數。這些變數函數,就是函數的函數。或名為:"二次函數。"此處研究,引出很多論點和僻論。我們初步上不必敘述,讀者參看羅素"數學原理"第十章可也。

邏輯函數有名為"標辭函數"的(Fonction Propositionnelle)。這種函數就是在一標辭的變數值上代以徵號。例如"y的都城"為一邏輯函數,而非標辭函數。但是邏輯函數的:

X"為中國的都城"

又為一標辭函數。因為本標辭所有的值皆表明X。對於X等於北京為眞,對於其它諸值為假。同樣邏輯函數的:

"北京為Y的都城,"

也是一標辭函數。對於Y等於中國為眞,對於其它都為假。再還有邏輯函數的:

"X為Y的都城,"

仍為一標辭函數。這就對於:

$\left\{\begin{array}{l}X\\Y\end{array}\right.$ 等於 $\begin{array}{l}\text{巴黎}\\\text{法國}\end{array}$　　$\left\{\begin{array}{l}X\\Y\end{array}\right.$ 等於 $\begin{array}{l}\text{倫敦}\\\text{英國}\end{array}$

$\left\{\begin{array}{l}X\\Y\end{array}\right.$ 等於 $\begin{array}{l}\text{柏林}\\\text{德國}\end{array}$　　$\left\{\begin{array}{l}X\\Y\end{array}\right.$ 等於 $\begin{array}{l}\text{北京……}\\\text{中國……}\end{array}$

諸辭爲眞,而對於其它爲假。這樣看來,所謂標辭函數的本身並非標辭,因爲它非眞非假,而爲不完全的標辭。其本身一無所是,惟有將變數代用常數的時候,才有眞假標辭之可言。是即標辭的設計,或名之爲"標辭模"(mouleà proposition)。

各處的標辭函數都有"眞假"兩値,有一函數之變值爲眞,則其它一必爲假;所以標辭函數不只是"變性,"普通還有"變値。"包數學家所認的方程式。一方程式與所謂"等式"不同;方程式的等式,只對於變數値的定式爲眞,再來一未知量的方程,只有對於方根未知量之値爲眞。所以方程式不是標辭而是標辭函數:"不能肯定,只能視爲或然的;是我們檢證的條件,錯誤與否的分辨。"方程式限定根數,與標辭函數限定外延皆爲同一事件;可以說是一方程式由其根組成外延的集合。

一概念卽一變數標辭函數,其外延卽此函數所有之個體集合。所以凡概念限定其外延的集合或類分;而所有概念的關係,由類分間相通的關係解釋之。這種定義可以就類分概念的標辭函數表明,還可以就標辭複合概念表明。譬如有函數:"X愛國"相當於"愛國主義"的概念;X"不食肉"相當於"素食者。"在抽象科學中亦然:"X數除盡二十四,"或"二十四能用X除,"相

當於"二十四的除數"概念;"X數除一與X之外不能用其它整數除"相當於"素數"概念。用標辭的形式定概念,使概念又相當於標辭,這並非實際的事實,因為標辭函數實非標辭。謂個體屬於某概念,即是檢得相通的標辭函數。

現在知道在邏輯演算中,概念皆由其外延的類分代表,而概念的邏輯,又皆由石拓德所謂類分演算代替。這並不是偶爾思想設計;而是觀念中實體關係的表白。謂個體屬於某概念,即是說它屬於相通的類分。

有這些解釋,可以引進兩種無定意念,作標辭與類分演算的邏輯轉換法。第一為包攝關係;換言之,個體與類分間的關係,以希臘ε字表之,讀為:"是一。"如:

$x \varepsilon a$

表明$x$"是一a;"即是"個體$x$包於類分a中"

凡概念通於一類分,然而類分不能全通於一概念。所以類分的注意,比概念的更普通。

第二由類分通於一標辭函數,特別的能通於概念。譬如一標辭函數$\varphi(x)$以"$x \ni \varphi$"指明此函數限定的類分。換言之,$x$值的集合證定此類分,而個體的集合能包含於概念之中。此式可以讀為:"凡$x$合於$\varphi$"或者是"凡$x$如$\varphi$則眞。"此處的徵號譯為"其,它,如……"在文法上

爲關係代名辭而非關係,因爲:$x\ni\varphi$ 非一標辭,$\ni$ 在口頭上亦不能定。如:

$$x\ni(x>5)$$

簡單讀爲"$x$ 大於五",再如:

$$x\ni(x^2+px+q=O)$$

讀爲"方程式 $x^2+Px+q=O$ 之方根。" 由是得知有時 $\ni$ 爲 $\varepsilon$ 之反義,後者用以轉換類分(a)成爲標辭函數($x\varepsilon a$);前者則爲轉換標辭函數($\varphi$)成功類分($x\ni\varphi$)。此兩徵號彼此相消;換言之,其式有如:

$$x\ni(x\varepsilon a)=a \quad (P_P) \qquad \text{(第一標辭)}$$

'$x$ 的類分證得'$x$ 爲一a"是 a 類分,"而

$$x\varepsilon(x\ni\varphi)=\varphi(x)$$

"謂 $x$ 類分能證得 $\varphi$ 卽是肯定 $\varphi(x)$。" (Pp)

前面 $x$ 爲變數,可以換用一任何個體 K 得爲:

$$K\varepsilon(x\ni\varphi)=\varphi(K).$$

"如果 K 爲 $\varphi$ 類相通的個體,則 K 的函數爲眞。" 簡捷原則,有如下列定理之:"

$$xy\varepsilon a\cdot=\cdot x\varepsilon a\cdot y\varepsilon a \qquad (Df) \qquad \text{(定義)}$$

自然對於任何個體 $x,y,z$………皆眞,而以……

$$a,b,c\ \varepsilon\ cls$$

表明類分觀念的表現。或者說是類分的類分亦無不

當(所以類分定義有如:"凡類分u有一函數$\psi$, 以u爲其外延。" 徵號表明爲:

$$CLS = u \ni [\exists \varphi \ni (u = x \varepsilon \varphi)]$$

$\exists$ 爲:"有"與"存在"的意思,參看後面);

在類分與標辭函數之間,還有許多相接的關係;如:

$$\varphi(x) =_x \psi(x) \cdot \supset \cdot x \ni \varphi = x \ni \psi \qquad (P_P)$$

$$a = b \cdot \supset \cdot xa =_x x\varepsilon b \qquad (P_P)$$

兩函數相等,則其類分相通者亦等;兩類分相等,則其標辭函數亦相等。

再來類分包含的連累關係,可以限定爲:凡a爲一b:

$$a \supset b = : x\varepsilon a \cdot \supset_x \cdot x\varepsilon b \qquad (Df)$$

"a連累b"可以譯爲全稱肯定。直得:

$$a \supset b \cdot \supset : x\varepsilon a \cdot \supset_x x\varepsilon b$$

由雙置原理:

$$a \supset b \cdot x\varepsilon a : \supset_x \cdot x\varepsilon b$$

"如果凡爲a爲b, 又如果x爲一a則x爲一b。" 就是單稱三段式。凡類分等式與肯定標辭的相同,而由包攝換等號,亦能相通:

$$a = b \cdot = : a \supset b \cdot b \supset a \qquad (Df)$$

$$a = b = : x\varepsilon a \cdot =_x \cdot x\varepsilon b$$

邏輯乘法的類分演算可以就標辭演算法類推。如:

$$a\frown b\cdot=\cdot x\ni(x\varepsilon a\cdot x\varepsilon b) \qquad \text{(Df)}$$

"a 與 b 的類分積,爲其個體的同時集合:" 原等式相當於:

$$x\varepsilon(a\frown b)\cdot=\cdot x\varepsilon a\cdot x\varepsilon b$$

"謂 x 爲 a 與 b,卽是同時肯定 x 爲一 a 與 x 爲一 b。"

邏輯加法的類分定爲:

$$a\smile b\cdot=\cdot x\ni(x\varepsilon a\cdot\smile\cdot x\varepsilon b)$$

"a 與 b 類分的邏輯和爲 a 或 b, 的 x 集合。" 原等式相當於:

$$x\varepsilon(a\smile b)\cdot=:x\varepsilon a\cdot\smile\cdot x\varepsilon b$$

"謂 x 爲"a 或 b" 卽是指定 x 爲一 a 或 x 爲一 b."

這兩種定義的數有限,而對於類分則無限。假使要注意無限的類分,則必以一普通定義爲算:

$$u\varepsilon cls, cls\cdot\supset\cdot\frown{}'u=x\ni(y\varepsilon u\cdot\supset_y x\varepsilon y) \qquad \text{(Df)}$$

$$u\varepsilon cls, cls.\supset\cdot\smile{}'u=x\ni[\exists u\frown y\ni(x\varepsilon y)] \qquad \text{(Df)}$$

"u 爲類分的類分,其邏輯積爲屬於 u 的 y 類分所有之 x 類分;其邏輯和爲屬於 u 之若干 y 類分所有之 x 類分。"

附注: $(u\varepsilon cls\cdot\supset\cdot cls'u=cls\frown u\,\check{}\,(x\varepsilon u)$.

表明: x 爲一類分,名爲 u 的類分,凡類分包在 u 內。

又如:　$\exists u \frown y \ni (x \varepsilon y).$

原式表明有一類分u名爲y,其形爲x ε y;或者在u中有x類;或者x屬於若干u。)

否定原理的類分演算,亦可用標辭定爲:

$$a' \cdot = \cdot x \ni (x \varepsilon' a)$$

ε'爲ε之否定,原式之a的否定爲x非a的集合。由是得:

$$x \varepsilon a' \cdot = \cdot x \varepsilon' a$$

"謂x爲「非a」卽是說x非a。"

現在再看標辭邏輯通於類分中兩特別項的"眞,假"形式如何。先定爲下列各式之演算:

$$\varphi(x) = \Lambda \cdot \supset \cdot \Lambda = x \ni \varphi(x) \qquad \text{(Df)}$$

$$\varphi(x) = V \cdot \supset \cdot V = x \ni \varphi(x) \qquad \text{(Df)}$$

如果φ(x)函數皆假或皆眞,則類分Λ與V爲合證於φ(x)之x的集合式:

如果使:

$$x \varepsilon \varphi(x) = a,$$

則得:

$$\varphi(x) = \Lambda \cdot \supset \cdot a = \Lambda$$

$$\varphi(x) = V \cdot \supset \cdot a = V$$

同時能得出下列之:

$\psi(x) = x\varepsilon a$

從此有:

$x\varepsilon a = \Lambda \cdot \supset \cdot a = \Lambda$

$x\varepsilon a = V \cdot \supset \cdot a = V$

兩式對 a 等於眞假與 a 爲一類分的意義極正確。由是推得兩形式相當之:

$\Lambda \supset \varphi(x) \cdot = \cdot \Lambda \supset a$

$\varphi(x) \supset V \cdot = \cdot a \supset V.$

無論 a 爲何,第二邊亦爲眞。無有的類分包於 a 中,故無論 $\psi(x)$ 如何第一邊爲眞;再還有連累式的:

$x\varepsilon a \cdot \supset \cdot a \neq \Lambda$

$x\varepsilon a \cdot a = \Lambda : \supset \cdot x\varepsilon\Lambda$

此爲單三段式的類推;因爲 $\Lambda$ 包於任何類分中,所以包在非 a 中的有如:

$x\varepsilon\Lambda \cdot \Lambda \supset a' : \supset \cdot x\varepsilon a'$

因而推得連累式之:

$x\varepsilon a \cdot a = \Lambda \cdot \supset \cdot x\varepsilon a'.$

從此由換位法得:

$x\varepsilon a \cdot x\varepsilon a \cdot \supset \cdot a \neq \Lambda$

或者簡單之,如:

$x\varepsilon a \cdot \supset \cdot a \neq \Lambda$ C. Q. F. D.

這樣看來標辭方法的所有,都適用於類分演算,譬如乘法與加法的形式性,也有同一可能:

互換律; Loi Commutative $ab=ba$　$a\smile b=b\smile a$

聯瑣律; Associative　$a(bc)=(ab)c$　$a\smile(b\smile c)=(a\smile b)\smile c.$

分配律; Distributive　$a(b\smile c)=ab\smile ac$　$a\smile bc=(a\smile b)(a\frown c).$

重複律; Tautologie　$a=aa$　$aa\smile a,$

吸一律; Absorption　$a\smile ab=a$　$a(a\smile b)=a,$

齊一律; Identité　$a\supset a$　$a=a$

其它如三段原理,矛盾原理,不容間位原理皆可以一一證明。再者分配律的直接證明,必須有雙置與單置原理存在,實用換位法依次證出。我們試舉齊一律的前提爲例:

(換位)　$ab\supset ab\cdot\supset\cdot a(ab)'\supset b'$

(,,,,)　$ac\supset ac\cdot\supset\cdot a(ac)':\supset c'$

(乘　)　$a(ab)'\cdot a(ac)':\supset\cdot b'c'$

　　　　$a(ab)'(ac)':\supset\cdot b'c'$

(換位),　$a(b\smile c)\supset\cdot ab\smile ac.$

由此得知配分原理在類分中不能單獨求證,必須借用換位或雙置與單置原理構成演算。石拓德由是推得直接配分的公律,以乘法表明爲:

$$bc=\Lambda\cdot\supset\cdot a(b\smile c)\supset ab\smile ac$$

即是b與c兩類分無共通元素。現在可以知道:

$$aV=a(b\smile b')=ab\smile ab',\quad V\smile b=(a\smile b)(a'\smile b).$$

因爲包攝的:

$$ab\smile ab'\supset a$$

由化單與單配合原理可以證明。確定反包攝爲;

$$a\supset ab\smile ab'$$

"凡a爲「a與b」或「a與非b」"。此即所謂"一分二原理(Principe de Dichotomie)。尋常說:"凡a爲b或非b"可以譯爲;

$$a\supset b\smile b'.$$

此又相當於;

$$a\supset\Lambda.$$

變爲等式之;

$$a=a(b\smile b').$$

這又不是一分二的原理,必須由此轉入下列之;

$$a=ad\smile ab'$$

換言之,肯定包攝之:

$$a(b\smile b')\supset ab\smile ab.'$$

總結所有定義,所謂類分就是數學所謂"集合"或"倍乘性"類分演算,即是集合論的數論部。十九世紀末,數論的新創與幾何的相對數理,實皆此科之根本原

則。而狄苙圻喬治剛多,易柏(Dedekin, Cantor, Hilbert)皆以此建功。

我們的類分演算徵號,還沒有說完。譬如標辭存在的表現,班洛以ꟻ代之;

$$a\varepsilon cls\cdot\supset:\exists a\cdot=\cdot a\neq\Lambda \qquad (Df)$$

"a爲類分,ꟻa表明a非無有;換言之,有a在。"(或至少有一a)此處應該明辨,所謂邏輯存在,並非在個體上,而是類分的;卽凡一類分存在,至少有一個體。存在的記號就理論上無用,而於實際則非常要緊,只有類分能用,標辭則不能。如果要表明一標辭函數φx不假,寫爲:

$$\exists x\varepsilon\varphi x$$

"有x類,如函數φ爲眞。"可以用否定表存在的定義爲;

$$a\varepsilon cls\cdot\supset:\exists' a\cdot=\cdot a=\Lambda$$

$$\varphi x=\Lambda\cdot=\cdot\exists' x\varepsilon\varphi x$$

ꟻ記號的演算,爲x記號的引伸。如:

$$\exists ab\cdot\supset:\exists a\cdot\exists b.$$

實際上是:

$$a=\Lambda\cdot\smile\cdot b=\Lambda:\supset\cdot ab=\Lambda$$

由此就換位法得:

$$ab\neq\Lambda\cdot\supset:a\neq\Lambda\cdot b\neq\Lambda.$$

卽所求證之定式。同樣再有:

$$\exists(a \smile b) \cdot = : \exists a \cdot \smile \cdot \exists b.$$

因爲:

$$a = \Lambda \cdot b = \Lambda : \supset \cdot a \smile b = \Lambda$$

反之:

$$a \smile b = \Lambda \cdot \supset : a = \Lambda \cdot b = \Lambda$$

所以:

$$a \smile b = \Lambda \cdot = : a = \Lambda \cdot b = \Lambda$$

從此就換位法推得:

$$a \smile' b \neq \Lambda \cdot = : a \neq \Lambda \cdot \smile \cdot b \neq \Lambda$$

亦即所求證之定式。

現在看看 $\exists$ 的"消去法。" 如果在連累式中,假定上所包的變數,不能在正定中表明者,則實際此連累式已離變數而獨立。所以能消去變數,仍使假定爲存在式,得如:

$$\varphi(xy) \cdot \supset_{xy} \cdot \psi(x) : = : \exists y \ni \varphi(x,y) \cdot \supset_{x} \cdot \psi x$$

"無論 x 與 y 爲何, x 與 y 函數 $\varphi$ 連累於 x 函數 $\psi$; 換言之, 如 y 得證 x 與 y 的函數 $\varphi$, 則無論 x 爲何, 得 $\psi$ 函數爲 x。" 在連累式中消去 y, 因爲新假定與 y 爲獨立。此爲雙置與單置原理之應用。結果有下列之相當式:

$$\varphi x,y \supset_{x,y} \psi(x) \cdot = \cdot \varphi(x,y) \psi'(x) =_{x,y} \Lambda$$

$$= : \psi'(x) \cdot \supset x \cdot \varphi(x,y) =_{y} \Lambda : = : \varphi(x,y) \neq_{y} \Lambda \cdot \supset_{x} \cdot \varphi x$$

而:

$$\varphi(x,y) \neq_y \Lambda \cdot = \cdot \exists y \ni \varphi(x,y).$$

此處推理爲單置原理的換用:

$$\varphi(x,y)\psi' x =_{xy} \Lambda \cdot = : \psi' x \cdot \supset_x \cdot \varphi(x,y) =_y \Lambda$$

只就一 y 作等號之指數。連累式全在 x 値者,則第二數無須 x 的變數,全 y 亦爲眞。我們可以就一簡單例證舉明如下;

$$x > y \cdot y > z : \supset_{x,y,z} \cdot x > z$$

y 數在正定中沒有,連累式卽對此數爲獨立。而假定的兩項都由 y 證出。可以用連累轉換列爲;

$$\exists y \ni (x \cdot > y \cdot y > z) \cdot \supset_{x,z} x > z.$$

此處 y 並非外形變數。

現在再把 $\varepsilon$ 與 $\supset$ 的兩重要關係,特別比較看看。譬如舊三段式的

凡人是有死的;

孔子是人;

所以孔子是有死的。

這三個"是"字在語言中不甚分明,卽舊式邏輯家亦未能申辯。其實大前提的連辭爲 $\supset$,而小前提與結論則爲 $\varepsilon$,此班洛之最大發現。因爲 $\supset$ 爲兩"類分"間第一連累第二的關係;而 $\varepsilon$ 爲由個體到類分的部分關係。

就徵號正確意義上應列爲:

$$a\supset b\cdot x\varepsilon a\cdot\supset\cdot x\varepsilon b.$$

而與尋常所謂:

$$a\supset b\cdot c\supset a\cdot\supset\cdot c\supset b$$

完全有科學理論之別。再者演算中 $\supset$ 爲轉化的,而 $\ni$ 爲非轉化的。譬如:

$x\varepsilon y\cdot y\varepsilon z$ 不能斷定爲 $x\varepsilon z$.

因爲 y 爲類分,而 x 爲個體,z 爲類分,而類分的 y 爲個體;因此 z 爲 y 上類推的類分之一類分。在它普通元素中不能合 x 爲一。故一個體的類分,與惟一個體單類分的存在,應該特別分明。如果 x 爲個體,則其惟一元素用"$\iota x$"表定類分。讀爲:"相等於 x。"如:$y=x$ 爲關係 y 的條件,其集合證得:$y\ni(y=x)$,即是 x 爲惟一個體的類分,換言之,爲 $\iota x$ 的存在。所以:

$$\iota x=y\ni(y=x)$$

$$\therefore\quad y\varepsilon(\iota x)\cdot=\cdot y=x.$$

反之,如果 a 爲單類分,則其惟一個體所成之類分以其反號之"$\overline{\iota}x$"表定之,讀爲;"只一 a。"簡言之,$\iota$ 爲轉換個體成單類分;$\overline{\iota}$ 爲轉換單類分成個體。其相當的兩等式爲:

$$a=\iota x\qquad x=\overline{\iota}a.$$

再就容易限定與個體不同的"一。" 我們尋常數學並沒有限定個體,不過就同類中略事範圍。譬如m與n爲兩同一個體;如第二屬於全有類分,則第一爲部分的。寫爲:

$$m \equiv n \cdot = \cdot m \varepsilon a \cdot \supset_a \cdot n \varepsilon a.$$

謂m與n相當,卽認爲凡包m的類分亦必包n的,式中連辭⊃可以省去,能就等號代替;因爲由:

$$m \varepsilon a' \cdot = \cdot m \varepsilon' a.$$

直得:

$$m \varepsilon a \cdot \supset_a \cdot n \varepsilon a : = : m \varepsilon' a' \cdot \supset_a \cdot n \varepsilon' a' : = : n \varepsilon a' \cdot \supset_a \cdot m \varepsilon a'.$$

最後的含意中,a爲任何類分,能以a代替,寫爲:

$$n \varepsilon a \cdot \supset_a \cdot m \varepsilon a$$

如此由:

$$m \varepsilon a \cdot \supset_a \cdot n \varepsilon a$$

可以互相推演成爲:

$$n \varepsilon a \cdot \supset_a \cdot m \varepsilon a,$$

$$m \varepsilon a \cdot =_a \cdot n \varepsilon a.$$

個體同一與類分相等;完全邏輯上的分別。m與n的個體,都與"ɩm," "ɩn"的單類分不同,所以前面原式以≡特別指明如:

$$x \equiv y \cdot = \cdot \varphi x = \varphi \varphi y$$

函數 $\varphi$ 能通於 a 的外延類分,結果;

$$x \equiv y \cdot = : x \varepsilon a \cdot \supset_a y \varepsilon a$$

由此又定 $\iota$ 的記號為:

$$\iota x = y \varepsilon (y \equiv x)$$

$$\therefore \quad y \varepsilon \iota x \cdot = \cdot y \equiv x$$

前一式表明 $\iota x$ 為 y 的類分集合,相當於 $\alpha$. 即是包一 x 元素者。還能推得個體與類分相等之間的相當,如:

$$x \equiv y \cdot = \cdot \iota x = \iota y$$

這表明 x 與 y 的相當為"等於 x""等於 y"的類分相等。再來個體獨一元素的相當,等於類分的相當。所以:

$$a = b \cdot = \cdot \iota a \equiv \iota b.$$

這裏可以限定 0 與 1 的數目,作為類分之類分,因為基數本為其類分之通性,可以用外延代替,如類分之集合然。如果"x 為一類分,n 為一整數,則"$x \varepsilon n$"表明 x 類分有 n 數的元素。" 就此知 0 數為無有類分的類分。可以寫為:

$$a \varepsilon cls \cdot \supset : a \varepsilon o \cdot = \cdot a = \Lambda$$

如果謂 a 類分有零數,即認為無有。再 a 的集合演算得證零之定義為:

$$o = \iota \Lambda \qquad \text{(Df)}$$

"零為包含惟一無有的類分。"

前面定過1爲單類分的類分,可以寫爲:

$$a\varepsilon cls \cdot \supset \therefore a\varepsilon 1 \cdot = : a \neq \Lambda : x,y\varepsilon a \cdot \supset_{x,y} \cdot x \equiv y$$

由是得證一之定義爲:

$$1 = cls \frown u\ni(u \neq \Lambda : x,y\varepsilon u \cdot \supset_{x,y} \cdot x \equiv y). \quad (Df)$$

"一爲非無有u類分的類分,其任何兩元素爲恆等數."

所以凡整數能由循環定義證爲:

$$n\varepsilon N \cdot \supset \cdot n+1 = cls\varepsilon u\ni(u \neq \Lambda : x\varepsilon u \cdot \supset_x \cdot u\iota' x\varepsilon n). (Df)$$

"n爲一整數N,由定義n加一爲非無有類分u的類分,如果x爲u的類分一元素,則類分u不等於x而有n數."由是用零的函數,很容易定成一的定義,以n代零即得。

## 第三章　邏輯之關係演算

有標辭與類分演算,可以組成所謂"邏輯代數"(L'algebre de la logique)的原理,坡來與石拓德的功績全在於斯。他們的思想雖然超出舊式邏輯之上,然而實際並不能包演繹全部理論精神,只限於普通關係,包攝,含意,連累,相當的種種研究,把一般形式性的數學關係和其它的重要關係都失去了。要補救這種缺點,班洛與羅素創出所謂關係邏輯的關係演算。

邏輯的關係問題,比前有之標辭類分更爲重要。其演算原理則爲二者之類推。不過把ε與⊃之間的

差別,特爲分辨。譬如石拓德與班斯的推理,往往用此二記號把個體與類分總括爲諸個體對偶之和,而於一關係中,不能推得其它某某特殊關係。羅素同班洛的演算,完全就函數意義,爲之限定"關係配換"的原理,更以"名目論"的觀點,就數學概念爲之普汎"關係定義"的特點。

關係演算,可以就數學兩進法爲證,亦可以用邏輯兩分法爲例。因爲凡關係能在個體與類分的"對存"中結出關係來;世,鄉,戚,友,物類,形,色,皆可用基本關係檢證。譬如用"一"表明對存集合中的全稱共相關係,又用"零"表明對存無效時的特別虛僞關係;由是關係意義成了邏輯外延研究的新形式論,而數學上"展開""消去"諸法,皆能直接使用無疑。

凡一關係必在兩項或多項之間存在,項位的肯定,卽得某關係之肯定,譬如有兩元關係爲:

$$xRy$$

讀爲x有y的關係,或者x與y有R關係。原式表明在x與y兩個體間有一種關係存在。如果m與n, u與v有此關係,亦得列爲:

$$mRn,\quad uRv,\cdots\cdots$$

關係演算的第一公理:"如果R爲一關係,則 xRy 爲x

與y所有値之一標辭。" 自然,此標辭對若干爲眞,又對若干爲假。

第二公理爲:"反關係有其反換置。" 譬如說x有y的關係,而y有x關係時則爲其反換關係,名爲"反換置"(converse)。如多爲少之反,前爲後之反,夫爲妻之反。齊一的反換置爲齊一,複雜的反換置爲複雜。徵號寫爲:

$R^c$ (讀R反換)

如果有:

$$R = R^c$$

則R爲對稱關係,否則爲非對稱關係(Symétrique et non Symétrique)。如果R與$R^c$爲矛盾,則R爲"無對稱關係,"(asymétrique)換言之xRy不能有yRx的關係。譬如"表兄弟"爲對稱,"兄弟"爲非對稱,(因爲x爲y之兄,y可以爲x之弟或妹),而與"丈夫"則爲無對稱。

現在還有由$R^c$到R的"轉換"關係;這種轉換只有一個,徵號表明爲:

$Cnv{}^{\backprime}R$ 或 ${}^{c}R$

由是得證:

$$R^c = {}^{c}R$$

此二者一反一轉,皆爲關係"換置"之演算。其轉換的

公理有如下列之:

$E!\,cnv\,'P$

任何關係P有一反轉關係,所以兩相等的關係相當於其相等之反換關係:

$P=Q\cdot\equiv\cdot P^c=Q^c$

任何關係必爲其反換之反換,以cc或cnv'cnv表明爲:

$^{cc}'P=P$ 或 $cnv'cnv'P=P$

第三個公理:"凡關係有其關係之否定。"換言之,否認x有y的關係,則必認定x有y的負關係R',而R與R'爲同樣存在,徵號爲:

$(xRy)'=xR'y$

凡否定關係與正定的可以相換。我們容易證明否定的反換相當於反換的否定。

這裏牽連到關係配合的乘法積的關係。譬如有兩任何關係R與S,如果在x,y與z諸個體之間有:

$xRy,\ ySz$

兩關係存在,則x與z之間有一複合關係,表明爲"關係積"之新結合:S/R.從此得一公理爲:

"兩關係之關係積爲一關係。"

換言之如果x與y之間有一關係,y與z又有一關係,則x與z必有一關係,由前兩關係一律的限定。這種作

用在尋常思想中很普汎底表明,譬如親屬之間的關係,可以供給許多變證。如果x是y的兄弟,y是z的父親,x就是z的叔或伯。叔伯的關係就是父親兄弟的關係積;普通名之曰:"伯叔皆父親之兄弟。"[2]

注意:凡關係積非轉換的,如邏輯積然。普通沒有:

$$R|S = S|R$$

因爲胞兄弟的父親不是叔伯,而是父親。

凡兩關係積爲其關係之平方數;如:

$$R^2 = R|R \qquad (\mathrm{Df})$$

$$R^3 = R^2|R \qquad (\mathrm{Df})$$

凡關係積之反換爲其因數倒列之反換積:

$$\mathrm{Cnv}'(R|S) = S^c|R^c$$

關係積合於聯項律的演算:

$$(P|Q)|R = P|(Q|R)$$

關係積能在關係加法中,合於配分律的演算;

$$P|(Q \smile R) = (P|Q) \smile (P|R)$$

$$(P \smile Q)|R = (P|Q) \smile (Q|R)$$

又能於關係乘法中爲:

$$P|(Q \frown R) \subset (P|Q) \frown (P|R),$$

$$(P \frown Q)|R \subset (P|R) \frown (Q|R)$$

注意此處 ⊂ 徵號爲"包於""在內"的意義。我們還可以

用證明方法,任求其合理的存在。如第一式之證明,設有x,y與z之關係為:

$$
\begin{aligned}
x\{P \mid (Q \frown R)\}y \,.\, \equiv &: (\exists z) \,.\, xPz \,.\, z(Q \frown R)y : \\
\equiv &: (\exists z) \,.\, xPz \,.\, zQy \,.\, zRy : \\
\supset &: (\exists z) \,.\, xPz \,.\, zQy : (\exists z) \,.\, xPz \,.\, zRy : \\
\supset &: x(P \mid Q)y \,.\, x(P \mid R)y : \\
\supset &: x\{(P \mid Q) \frown (P \mid R)\}y
\end{aligned}
$$

第二式的證明與此相同。

由這種種關係相合的概念看來,凡一關係都可以限定所有類分,故用類分以定類分,無若以關係為算。如果關係的意義標定,則其首項與次項,前件與後件必能分曉(referent et relatum)。譬如x與y有R關係,名x為y之"前類分件,"y為x之"屬類分件。"第一以$\overrightarrow{R}$記號表之,第二以$\overleftarrow{R}$記號表之。由是$\overrightarrow{R}$與$\overleftarrow{R}$的關係可以合得R的關係。又由$\overrightarrow{R}$到R的關係為"Sg"由$\overleftarrow{R}$到R的關係為"gS"皆為矢形(Sagitta)左右向之表示。譬如R關係為父子之表現,則:

$\overrightarrow{R}$'y=y的父親,

$\overleftarrow{R}$'x=x的兒子;

如果B為由少至多的關係,則:

$\overleftarrow{R}$'y＝比 y 少的數

$\overleftarrow{R}$'x＝比 x 大的數。

因此得證下列定義爲:

$$\overrightarrow{R} = \hat{\alpha}\hat{y}\{\alpha = \hat{x}(xRy)\} \qquad \text{(Df.)}$$

$$\overleftarrow{R} = \hat{\beta}x\{\beta = \hat{y}(xRy)\} \qquad \text{(Df.)}$$

$$sg = \hat{A}\hat{R}(A = \overrightarrow{R}) \qquad \text{(Df.)}$$

$$gs = \hat{A}\hat{R}(A = \overleftarrow{R}) \qquad \text{(Df.)}$$

由是得證矢形關係之:

$$sg\text{'}R = \overrightarrow{R}, \qquad g^{s}\text{'}R = \overleftarrow{R}.$$

而前類分件與屬類分件的關係得定爲:

$$\overrightarrow{R}\text{'}y = \hat{x}(xRy),$$

$$\overleftarrow{R}\text{'}x = \hat{y}(xRy),$$

因此得一相當之普通換位式:

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{S} \cdot \equiv \cdot \overleftarrow{R} = \overleftarrow{S} \cdot \equiv \cdot R = S$$

$$\supset \cdot \equiv \therefore a\overrightarrow{R}y \cdot \equiv_{a,y} \cdot a\overrightarrow{S}y \therefore$$

$$\equiv \therefore a = \hat{x}(xRy) \cdot \equiv_{a,y} \cdot a = \hat{x}(xSy) \therefore$$

$$\equiv \therefore (y) \therefore a = \hat{x}(xRy) \cdot \equiv_{a} \cdot a = \hat{x}(xSy)$$

$$\equiv \therefore (y) : \hat{x}(xRy) = \hat{x}(xSy) \therefore$$

$$\equiv \therefore (y) \therefore (x) : xRy \cdot \equiv \cdot xSy . \therefore$$

$$\therefore (x,y) : xRy \cdot \equiv \cdot xSy . \therefore$$

$$\therefore R = S :: \supset \cdot \text{Prop.}$$

集合所有前類分件,名爲關係之"前圍 (Domain)。"反之集合關係所有屬類分件,名爲"後圍 (Codomain)。前圍與後圍之邏輯和,名爲關係之"場圍(Champ, fields)。譬如有"父親"的關係;其前圍爲父輩之集合,後圍則爲子輩(兒女)之集合。這是不能相當的。至於場圍則包兩集合之邏輯和而爲"人"之集合。再如"夫婦"的關係:其前圍爲一切已婚男子之集合,後圍則爲已婚女子之集合,場圍卽"成人"之集合。

前圍徵號爲"D'R"的關係,後圍爲"ᗡ'R"的關係,場圍關係則如:C'R是也。我們就此推得

$$D'R = \hat{x}\{(\exists y)\cdot xRy\}$$

$$\text{ᗡ}'R = \hat{y}\{(\exists x)\cdot xRy\}$$

$$C'R = \hat{x}\{(\exists y): xRy \cdot \vee \cdot yRx\}$$

就此又能定前後場圍的形式演算:

$$D = \hat{\alpha}\hat{R}\{\alpha = \hat{x}\{(\exists y \cdot xRy\}\} \qquad (Df)$$

$$\text{ᗡ} = \hat{\beta}\hat{R}\{\beta = \hat{y}\{(\exists x)\cdot xRy\}\} \qquad (Df)$$

$$C = \hat{\gamma}\hat{R}\{\gamma = \hat{x}\{(\exists y): xRy \vee \cdot yRx\}\cdot \qquad (Df)$$

凡一關係其前件每類分通於後一件者名爲"一致關係,"如果每一後件通於一前件者則爲反換一致,因此一致關係的反換亦能一致者名爲雙一致。要表明這種係關,英文語言中有此分明意義爲:複一單,單一複,

單一單。徵號表明為 Cls→I, I→Cls, I→I. 即是說多數前件通於一後件(此後件亦通於前件)之間的關係,一前件通於多數後件之間的關係,與一前件後件間的關係。

這種形式,可以譜成數學上"一"的定義之相當關係,而不能限為一的定義,因為實際只是個體間對稱轉化的關係。其象徵有如:凡 R 之一致關係,無論 x 如何,xRy·與 xRz 連累於 y 相當於 z

$$R = Rel \frown R \ni (xRy \cdot xRz \cdot \supset_z \cdot y \equiv z).$$

或者 $R :=: R \sqsupset (xRy, xRz : \subset y = z).$

這就是關係的眞"形式性"。由此推得下列兩定理:

(甲) 一致關係與其反換關係積為對稱與轉化關係,

(乙) 反之,凡對稱與轉化關係非無有,能視為一致與其反換之演算的關係積。

因此更推得新邏輯關係的運算。如果在 a 類分的 x, y, z 諸元素間有對稱與轉化關係,即得 b 的一致意念,而在 x y z 與 b 的元素之間,就有雙一致的 S 關係在;例如 R 關係相當於 S 關係與其反換關係積。換言之:

$$xRy :=: (xSb \cdot ySb = xSb \times bS^{\smile} y)$$

好比 a 類分中所有直線,彼此皆有平行間對稱與轉化的關係 R。於是 b 的意念為其"方向,"表明一致關係平行直線者。謂 x 與 y 為平行直線,相當於肯定 x 與 y

有同一方向,由是構成方向的抽象概念;我們的原理變為:

"一集合對象間,有一致與轉化關係者,則諸對象中有一共通元素;而此關係之肯定,相當於集合對象中共通元素齊一的肯定。"

據共通元素所有對象的類分包攝右,可以視各對象為相等。因此兩對象或多數的相等,必關係類分底抽象概念;而在這種類分上,由一"羣"的轉換相應,可以從一對象過到其它所有對象,其共通元素仍為不變。

譬如有a的函數f,以f記號置於a類分中任何元素x之前,使之相通於b類分中限定之一x元素f(x)。如果a類分中x與y對象間有對稱轉化關係存在,則x函數的抽象可以視為等於y的抽象函數。譬如說兩直線平行的,可以說一直線之方向等於其它一直線的方向。抽象原理就此推定為:

"x與y為任何元素,如果x為a類分的元素,而此二元素間有對稱與轉化的關係R,則有一類分b與一函數f包下列性質之:

(一) 無論a的x為何元素,f(x)為b的一元素;

(二) 無論b的m為何元素,a的x元素至少有一為:

f(x) = m;

(三) x與y既爲a的任何元素,而f(x)=f(y)的等函數,只能在x與y有R關係時爲可能。"

從此知道b與f都是a與R的有定函數。如前例中a類分爲直線,R關係爲平行,f函數爲方向,而b類分爲直線之方向。譬如從截線適合數的關係,得出長度的類分;從形或立體的相當,得出幾何面積體積的類分。其對於"重量,""質量,""氣候,""熱量,""序數""基數"種種類分選擇,皆有適合關係表現。

這種演算把類分間各元素的關係表現,推得非常靈活,包數學相通的函數意義而有,與刪多派之集合論實互爲發明。

# 第三篇　數學邏輯實用演算

普通數學科學家視象徵邏輯的原理和方法,如同極抽象底研究,有人直認爲:"勞而寡功。"論理上看,這實在是很可笑底觀察,與拿游克立的幾何空間,評羅巴齊衞斯基和黑葉芒,拿亞西墨牛頓的機械物理非安斯坦和敏可衞斯基的說話同一笑話!本篇爲發展前篇總論,以類分關係,爲窮搜遠討之方法,逼近"象徵"意義的演算,然後就此以達於數學之"基數與序數"論。

## 第一章　數學邏輯與或然演算

在某項有限集合中,對於個體或其它任何無定事件,施行普通或不定底判斷,這種判斷名爲"變數判斷。"凡變數判斷的未定者爲任何元素;在邏輯上可以爲主格,可以爲表格,也可以爲動字,或者用一足詞表明亦可。譬如有一判斷爲:

"在$x$的時間y地方下雨"。

原判斷爲未定,其故不因主要(下雨)意義無定,因爲時間與地方的所指爲"變數"($x$•y)。

我們用語言更換,可以把變數置爲判斷之主格;如:

"$x$ 時間"或"y 地方已經下過雨。"

這種說法只在文法上的構造可能,與我們邏輯觀念不甚相合。然而因爲這種轉換可能,所以推理的普遍性無有防害。如 $x$ 爲個體或無定件,其變數判斷之:

"$x$ 爲一a"

終爲一有限範圍的表現。因此變數判斷,可以視爲一定類分中個體的主格互相關係之單稱 (Singuliers) 判斷的集合。這些單稱判斷爲有限,固定;換言之,必眞或必假。但是組合各單稱的普通判斷,則可眞或可假:"與單稱必眞判斷相合時爲眞;與單稱必假判斷相合時爲假"。譬如在 $x$ 若干値爲眞,在其它若干値又爲假。而在 $x$ 所有値上同樣又可以爲眞,或假;對於"變數性"亦不改其質。此即前篇所論之零與一的値。

要在變値判斷的普遍中,將所有"無定値"明白與正確底觀念完全斷定,必須先將所有個體或事件上判斷之眞或假的"數目"統計起來,結果實在:"相合底事件(眞的)數目,比不合底事件(假的)數目較大。"這種"相對眞理,"即是變數判斷的"或然性。"反之,凡判斷等於一的

名爲"絕對眞理。" 所以變數判斷就是"或然判斷。"而變數判斷的演算,卽是數學上或然演算。

或然演算是數學邏輯的部分,數學家誤以爲是數學的科學發展;其實它的基本學理,完全邏輯的推演,用數學眞理實難限定。所謂邏輯的代數應用,正以此種演算爲首證。所以或然演算爲邏輯原理,卽是變數判斷的邏輯;如同解析幾何之終於幾何,數學物理之終於物理是也。

從前數學家把或然演算的定義和基本推論的根據,都就偶然游戲的事變考察。思想同語言的誤會由此發生;因爲"事變"不能有多少或然;有則產生,無則不生。說出事變"不生,"在字學上完全失眞,因爲旣謂之事變,就是"有"的。事變不是"眞"或"假,"凡是眞假,就是用判斷肯定一切,或者肯定此事變的本身。數學家認或然演算爲偶然事變的實用;根本對或然的邏輯不明白。拉卜拉斯(Laplace)說:"或然性在我們認識與無知的兩部分關係上。" 卽是我們判斷的基本性質之一,能解釋智能認識的判斷,與知識不完全底現實情境中的關係。譬如說:

"$x$ 是一a"

我們所知道的 $x$; 是一集合個體,結果實卽此集合的本

身;不知道的 $x$,究爲此集合中什麼特殊或有限個體的存在? 判斷只能找出無定,或部分有定,或普通限定的或然。所謂事變,自然無普通之可言,只有我們對事變的概念所構成的普通與無定判斷。

現在可以將或然演算的基本定義,就前面的概念定出。這些定義在或然性的主觀與邏輯判斷上,表明一種數學解釋。如果一或然性本身,不完全有可測之幾何量,即可用定義以測定此或然。這裏定義的結果,使數目表明的量,能代用非量的意識,而不以數的應用爲計;簡言之,或然性的測量與氣候的標度相同,其數度相通者,完全自由底刻定。

凡一判斷絕對的或然,即是眞的數目與眞的或假的數目之比;換言之,判斷的就是有意義或能實用的。絕對或然,對於 $x$ 值的選擇無限亦無定,其變性範圍爲"1"的所有;換言之,在個體集合或普通可能中。這個集合是有定的:其內包有限,各元素之單個亦有限;再者內中彼此分離,亦不能有部分底重疊或交互底結補。在這些條件之下,偶然適應的集合已完全限定。現在假定此條件充足,則得下兩種表現:

(1)或是:集合 1 的元素爲有窮

(2)或是:集合 1 的元素爲無窮

如果是無窮,其數(整數)爲 n; 先將 a, b, c… 各類分的對應個體 ia, ib, ic, … 標定,則得:

il = n, io = o

現在對於判斷:

$x$ 是 一a

的或然性爲何? 可能偶現的數目爲 n, 適應的偶現爲 ia;換言之,集合 1 的個體數正是 a;所以求得或然數爲:

ia : n = ia : il

如果 il 的數爲無窮,或者 ia 的數爲有窮,則得:

ia : il = 0

如果 ai 爲無窮,就可以確實的限定 ia 與 il 兩數之比的有窮或無窮數。

凡是無窮數的集合都連續表現:如幾何形之點的連續集合;時間組合中之瞬刻集合。在這些無窮集合間,很容易估定其計數關係:"如同這些集合構成的各形間各量的關係。" (長度,面積,體積或時間。)

我們現在選定或然記號,爲之邏輯演算如次。

有單簡判斷 S 的或然,列爲:

P(S).

這在舊式語言中表明 S 事變的或然,同時以 S 標辭肯定其存在。 專用:

$$V(S)$$

表明偶現數目中S標辭爲眞;反之:

$$V(S')$$

表明偶現數目中S′標辭爲眞;即是S在此處爲假。因此或然的定義可以釋爲:

$$(1)\qquad P(S)=\frac{V(S)}{V(S)+V(S')}$$

無疑P(S)與V(S)的函數都爲"數。"這個式子以及其它類推的式子皆爲數學公式,其記號則爲算學的;所以尋常底代數規則都能應用。

同理得S′的或然式如下:

$$(2)\qquad P(S')=\frac{V(S')}{V(S)+V(S')}$$

這就是使S′眞,或使S假的或然式。如果將(1)(2)相加,則得下列等式之:

$$P(S)+P(S')=\frac{V(S)+V(S')}{V(S)+V(S')}=1$$

從此直接推得:

$$P(S')=1-P(S)$$

我們知道所謂或然式終爲一分數式,即是0與1之間的值。在什麼偶現中的或然可以達到此二值?如果:

$$V(S)=0,\ P(S)=0$$

又如果:

$$V(S')=0,\ P(S)=1$$

所以一標辭沒有適應底偶現時,其或然式等零,因爲它不能眞。如果它否定沒有適應底偶現時,其或然式等一,因爲它不能假,卽總是眞;有時亦名爲"實在。" 但是這種實在不能與確實判斷相當式的:S=1的實在相混。不過確實判斷的實在無程度之殊,亦無連續表現;如果不總是眞(等一)就總是假(等零)。而變數判斷的實在,則在或然最高程度上;如果不總是眞,也幾乎可以總是的。這裏使邏輯眞理之類的最高或然,程度上絕對實在表現的,統行革去了。

由此得證:

$$P(0)=0,\quad P(1)=1.$$

補題。兩集合沒有共通元素者,其算學和數等於邏輯和數。

因爲邏輯和爲各集合元素之集數;如果一元素能與它元素相通,或相共,則在邏輯和中只有一次;因此一包二,二而一。如果兩集合沒有共通元素,則所有組合的單個無一可省者,其邏輯和所有之數爲其算學和之數。這個補題對元素兩兩無共通點的任何數爲有效。這種集合爲"分割集合。" 凡多數分割集合的邏輯和有其算學和之數。其式表爲:(以$\smile$表邏輯和,+表算學

的,然並非絕對的)

$$V(a \smile b \smile c \smile \cdots\cdots) = V(a) + V(b) + V(c) + \cdots\cdots$$

現在看a與b兩任何集合(非分割的)的普通點:

先證明等式之:

$$V(a \smile b) = V(a) + V(b) - V(ab)$$

展開邏輯和得:

$$a \smile b = ab' + a'b + ab.$$

第二邊爲分割和數,所以有:

$$V(a \smile b) = V(ab') + V(a'b) + V(ab).$$

再來分別得出:

$$V(a) = V(ab) + V(ab'),$$

$$V(b) = V(ab) + V(a'b).$$

將此二等式各邊相加:

$$V(a) \smile V(b) = 2V(ab) + V(ab') + V(a'b)$$

從此得:

$$V(ab') \smile V(a'b) \smile V(ab) = V(a) + V(b - V(ab)$$

結果仍得證爲:

$$V(a \smile b) = V(a) + V(b) - V(ab)$$

C. Q. F. D.

由這些結果,又證得:

$$V(s) \smile V(S') = V(S + S') = V(1)$$

卽是組合類分1的單個數。(所謂類分1卽是前篇的V記號,零則爲Λ記號,此處仍就坡來的演算表明。)

現在或然式可以簡單如下:

$$P(S)=\frac{V(S)}{V(1)}, \qquad P(S')=\frac{V(S')}{V(1)}$$

由是檢證爲:

$$P(S)+P(S')=1$$

$$\frac{V(S)}{V(1)}+\frac{V(S')}{V(1)}=1$$

或者是:

$$V(S')=V(1)-V(S),$$

這正與前面所有等式相合:

$$V(S)\smile V(S')=V(1)$$

前面爲無條件的限定一標辭的絕對或然。現在再來用條件的假定限定標辭。

有a標辭相關於b標辭,在a眞的假定中爲b眞的或然,或者在相合的條件中a爲眞者,名爲相對或然。

就或然的定義看,相對或然卽是b眞的偶現數與a眞的總數之比。在a眞的條件上,凡屬b可能的偶現集合爲何?無疑卽是a眞的偶現集合。但假定適應的偶現集合又爲何?卽是a眞b亦眞的偶現集合;換言之,a與b同時眞的偶現。這種集合爲a與b同時

肯定的"邏輯積,"所以相對或然式得為:

$$\frac{V(ab)}{V(a)}.$$

這自然在V(ab)中不能代入V(b),亦不知道b集合在a集合中是否連續;換言之,是否a眞時b眞? 不過偶現的適應集合終為偶現的可能集合所有。再者ab集合亦必為a集合所有。所謂b關於a的或然即是標辭或然的:

"如果a為眞,b為眞"

以邏輯推理表之為:

$$a \supset b$$

這種或然結果表明:如果a是眞的,b可以是眞的。因此得定其或然式如下:

$$P(a \supset b) = \frac{V(ab)}{V(a)}$$

原式第一邊卽是b相關於a的或然。

b相關於a的或然有兩端值:"0與1"。由此二值相應於兩特殊事件的標記。如:

$$P(a \supset b) = 0$$

證明a與b兩標辭終不能同時眞。換言之,必須:

$$V(ab) = 0, \text{或 } ab = 0$$

再一方面有:

$$P(a \supset b) = 1,$$

必須有:

$$V(ab) = V(a).$$

如果a與b的集合都爲有窮,ab集合爲a集合所有;則:

$$(ab = a) = (a \supset b)$$

的時候不能有:

$$V(ab) = V(a).$$

前有各式,反換亦爲實在;換言之,如果a⊃b則得:

$$P(a \supset b) = 1$$

即是 (a⊃b) 的包攝終爲眞實。 然而有一例外點,如果同時有下列條件之:

$$V(ab) = 0, V(a) = 0.$$

這裏的或然成了無定式之:

$$P(a \supset b) = \frac{0}{0}.$$

其"實值"爲何? 如果:

$$V(a) = 0, \text{則 } a = 0.$$

因此無論爲何,必須有:

$$ab = 0, \therefore V(ab) = 0.$$

但是結果總是:

$$a \supset b$$

所以在這裏:

$$P(a \supset b) = 1$$

再看a=1的偶現中,有:

$$P(1 \supset b) = \frac{V(b)}{V(1)} = P(b)$$

a 等於一表明 a 的假定終爲眞,所以結果關於始終爲眞的標辭b的或然等於其絕對或然。

反之,絕對或然可以視爲一眞假定的相對或然,所以一有效的條件相當於無有條件,而在相關的或然演算中,條件本身沒有存在。譬如:

$$(1 \supset b) = (b = 1)$$

得結果:

$$P(b = 1) = P(b).$$

現在再到普通去證明。如果:

$$P(a \supset b) = \frac{V(ab)}{V(a)}$$

以V(1)除分數的兩項,得:

$$P(a \supset b) = \frac{V(ab):V(1)}{V(a):V(1)} = \frac{P(ab)}{P(a)}.$$

所以b相關於a的或然,等於ab與a絕對或然之比。

現在再來測計各項單標辭函數的邏輯函數或然;換言之,知道單標辭或然,演算其所組之複標辭的或然。

先求邏輯和的或然演算,假定其和爲分割的(不連),不能同時兩都眞實。由定義得:

$$(1)\quad P(a \smile b \smile c \smile \cdots\cdots) = \frac{V(a \smile b \smile c \smile \cdots\cdots)}{V(1)}$$

由前補題得:

$$P(a \smile b \smile c \smile \cdots\cdots) = \frac{V(a) \smile V(b) \smile V(c) \smile \cdots\cdots}{V(1)}$$

$$= \frac{V(a)}{V(1)} + \frac{V(b)}{V(1)} + \frac{V(c)}{V(1)} + \cdots\cdots V(a)\,(+V(b) + V(c) + \cdots\cdots$$

反之,由兩不相拒的標辭,就定義得:

$$(2)\quad P(a \smile b) = \frac{V(a \smile b)}{V(1)}$$

亦由前補題得:

$$P(a \smile b) = \frac{V(a) + V(b) - V(ab)}{V(1)}$$

$$= \frac{V(a)}{V(1)} + \frac{V(b)}{V(1)} - \frac{V(ab)}{V(1)} = P(a) + P(b) - (ab).$$

自然,a 與 b 兩標辭都相拒的地方,得爲:

$$ab = 0 \quad \therefore \quad P(ab) = 0$$

由是.

$$P(a \smile b) = P(a) \smile P(b)$$

再就前式以三標辭不相拒的推得:

$$P(a \smile b \smile c) = P(a \smile b) + P(c) - P[(a \smile b)\,c]$$

$$= P(a \smile b) + P(c) - P(ac \smile bc).$$

以和數 $(ac \smile bc)$ 式展用爲:

$$P(ac \smile bc) = P(ac) + P(bc) - P(abc)$$

結果得:

$$P(a \smile b \smile c) = P(a) + P(b) + P(c)$$
$$- P(ab) - P(ac) - P(bc) + P(abc)$$

由是理可推至4, 5, …… n標辭。譬如n標辭的普通式爲:

$$P(\Sigma a) = \Sigma P(a) - \Sigma P(ab) + \Sigma P(abc) - \cdots\cdots - (-1)^n p(\Pi a)$$

用數學歸納法很容易證明(指明如果對n爲眞,對n+1亦爲眞。)

總之用單標辭的或然函數,可以求其邏輯和之或然,亦可以求其邏輯積之或然。

現在研究邏輯積的或然演算,即是許多標辭的同時肯定。凡這些標辭,假定爲獨立的;換言之,其眞理無所依靠,其或然亦無所從屬。

定理。多數獨立標辭邏輯積的或然等於其相應底絕對或然之積(算學的。)

用a與b兩標辭來證明定理。先假定彼此可能的偶現集合不同;如a的有$n_1$偶現,其中有$m_1$適應的偶現;b的有$n_2$偶現,其中有$m_2$適應的偶現。由定義得知:

$$P(a) = \frac{m_1}{n_1}, \qquad P(b) = \frac{m_2}{n_2}.$$

再來找直接演算P(ab)的。要得到ab同時肯定的可能偶現集合,自然要將a可能底偶現配合於b可能底偶現;而在各組合偶現都有同一或然數,因爲兩標辭彼

此都爲獨立;其配合偶現數卽是$n_1 n_2$.

再一方面要得到ab同時肯定的適應偶現集合,就應該將a適應底偶現配合於b適應底偶現,其配合偶現數爲$m_1 m_2$。由定義上ab之積的或然爲:

$$\frac{m_1 m_2}{n_1 n_2}=\frac{m_1}{n_1}\times\frac{m_2}{n_1}=P(a)\times P(b)$$

所以有等式之:

$$P(ab)=P(a)\times P(b).$$

如果$n_1$ $n_2$換爲n我們的推理仍無改變;所以有:

$$P(ab)=\frac{m_1 m_2}{n_2}=\frac{m_1}{n}\times\frac{m_2}{n}=P(a)\times P(b).$$

如果兩集合數目上相等的使之相當,亦無改變;因爲要得ab可能底偶現集合,就應該將原集合的偶現配合於其它的偶現中,並且與本身相配,結果終爲$n_2$的組合偶現。所以此集合爲集合1;其簡單或然爲:

$$P(a)=\frac{V(a)}{V(1)},\quad P(b)=\frac{V(b)}{V(1)}$$

複雜或然爲:

$$P(ab)=\frac{V(a)}{V(1)}\times\frac{V(b)}{V(1)}=P(a)\times P(b)$$

此卽證明定理。獨立標辭任何數亦可以展開。

現在再來看非獨立標辭或在普遍情形中(標辭或爲獨立或非獨立)邏輯積的或然演算法。

先有a與b兩標辭,其算學等式爲:

$$P(ab)=\frac{V(ab)}{V(1)}=\frac{V(a)}{V(1)}\times\frac{V(ab)}{V(a)}=P(a)\times P(a\supset b).$$

反之,同一或然式等於a的絕對或然與b相關於a的相對或然之積。在這兩式之中,可以視b的或然依於a的或然。反之亦然。

原定理對於3, 4, ……n標辭無論獨立與否皆爲有效。其普通式如:

$$P(abc\cdots\cdots)=\frac{V(a)}{V(1)}\times\frac{V(ab)}{V(a)}\times\frac{V(abc)}{V(ab)}\times\cdots\cdots$$

$$=P(a)\times P(a\supset b)\times P(ab\supset c)\times\cdots\cdots$$

在a, b, c…n次有1, 2, 3,… n不同式,而對n次有n可能的排列。

這個定理很明白:要a b c眞,必須a眞, b眞, c眞,……所以要a b c的或然眞必須要或然在:

1, a眞; 2, a眞的, b眞; 3, a與b眞的c眞……

這正是獨立標辭的同時肯定,所以其或然爲各或然之積。

現在就馬可葛爾(Calculus of equivalent statements)的演算,採取或然的簡單記號。

凡B的或然相關於A者以b表之加一指數a. A的絕對或然原爲相關於1的或然,所以用a加一指數1表之。凡複合標辭放在括弧之間。

否定的A′的絕對或然記爲:$a_1'$ 而 $a_1'=1-a_1$.

現在再看前面定理,可譯爲下式之:

$$(ab)_1=a_1b_a=b_1a_b$$

$$(abc)_1=a_1b_ac_{ab}$$

$$(abcd)_1=a_1b_ac_{ab}d_{abc}$$

如此類推及於無限可能。

第一式可以就等式(列數的)

$$a_1b_a=b_1a_b$$

寫爲比例式之:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_b}{b_a}$$

再特殊上如果有:

$$a_1=b_1$$

則必有:

$$a_b=b_a$$

反之亦然。又假使:

$$b_a=1,$$

換言之,如果包攝的:

$$A\supset B$$

爲眞,則必有:

$$\frac{a_1}{b_1}=a_b,$$

即是a關於b的或然等於其絕對或然之比。

現在使兩獨立標辭之積的式子接合於兩任何標辭之積的式子。如:

$$P(AB)=P(A)\times P(B)$$

$$P(AB)=P(A)\times P(A\supset B)$$

要這兩式相等,應該P(A)兩因數相等,即是要有:

$$P(B)=P(A\supset B).$$

要使B能離A而獨立,則須其絕對或然等於與A相關之或然。這裏很明白,謂B的或然離A而獨立,正如謂在A條件之下爲眞,或去此條件亦爲眞;這個條件可以限定B關於A的獨立,可以寫爲:

$$b_a=b_1$$

如果以此條件爲獨立的定義,可以推到多數獨立標辭之積的通式。如在兩標辭的:

$$(ab)_1=a_1b_a$$

如果假定:

$$b_a=b_1$$

則得:

$$(ab)_1=a_1b_1$$

這就是獨立或然的公式。可以推及3, 4, …… n 標辭的獨立可能。譬如C標辭離A與B標辭而獨立,又

離 A B 而獨立,則其式如:

$$c_{ab}=c_1$$

所以得積式爲:

$$(abc)_1=(ab)_1\times c_{ab}=a_1b_1\times c_{ab}=a_1b_1c_1.$$

如此類推,及於無限可能。

我們知道B標辭離 A 標辭獨立者,無論是否屬於 A 條件之下,爲同一或然;所以無論 A 眞或假,亦爲同一或然。因此相關於A的或然等於相關 A′ 的或然;換言之在:

(1) 如果A眞, B亦眞;

(2) 如果A假, B亦眞

的兩標辭應該爲同一或然。其式爲:

$$b_a=b_{a'}.$$

有等式之:

$$a_1b_a=b_1a_b,\quad a'_1b_{a'}=b_1a'_b;$$

得出:

$$b_a=\frac{b_1a_b}{a_1}\qquad\qquad b_{a'}=\frac{b_1a'}{a'_1}$$

各邊相除得:

$$\frac{b_a}{b_{a'}}=\frac{a_b}{a_1}:\frac{a'_b}{a'_1}.$$

再第一式得:

$$\frac{b_a}{b_1} = \frac{a_b}{a_1}$$

由假定上得:

$$b_a = b_1;$$

所以有:

$$a_b = a_1$$

表明如果B離A而獨立,則A離B而獨立。但是知道:

$$a'_1 = 1 - a_1 \qquad a'_b = 1 - a'_b$$

所以亦有:

$$a'_1 = a'_b.$$

結果得:

$$b_a = b_{a'}$$

C. Q. F. D.

反之,如果承認結果式,則推得等式之:

$$\frac{a_b}{a_1} = \frac{a'_b}{a'_1} = \frac{1-a_b}{1-a_1}$$

從此得:

$$a_b - a_1 a_b = a_1 - a_1 a_b$$

或者是:

$$a_b = a_1'$$

同樣證明到:

$$(b_a = b_{a'}) = (a_b = a_1)$$

則相應求得:

$$(a_b - a_{b'}) = (b_a - b_1) = (a_b - a_1).$$

如此,下列四等式相當:

$$a_b = a_1;\quad b_a = b_1;\quad b_a = b_{a'};\quad a_b = a_{b'};$$

表明A與B標辭彼此都爲獨立。

現在再將原因或然的規則,求立爲反比或然的式子。

如有X事變,有A, B, C,不同的因,彼此相拒。由此因的關係知道X的或然。現在要求知道有X事變時,其或然何以爲其原因之一的:A.(或者B,或者其它)

假定A相關於X的或然爲$a_x$或然,則普通式爲:

$$a_1\chi_a = \chi_1 a\chi$$

從此推得:

$$a_x = \frac{a_1\chi_a}{\chi_1}$$

知道$a_1$與$\chi_a$試求$\chi_1$。有邏輯關係的:

$$X \supset A + B + C + \cdots\cdots$$

其故因X事變只能有A, B, C……諸因,如果有X,就應該A, B, C……之一出現。故包攝式相當於等式之:

$$X = AX + BX + CX + \cdots\cdots$$

取兩邊的或然,注意a, b, c……偶現爲彼此相拒,推之$a\chi$, $b\chi$, $c\chi$,……亦然。

$$\chi_1 = (a\chi)_1 + (b\chi)_1 + (c\chi)_1 + \cdots\cdots$$

$$\chi_1=a_1\chi_a+b_1\chi_b+c_1\chi_c+\cdots\cdots$$

所以得下式之:

$$a_\chi=\frac{a_1\chi_a}{a_1\chi_a+b_1\chi_b+c_1x_c+\cdots\cdots}$$

同樣得:

$$b_\chi=\frac{b_1\chi_b}{a_1\chi_a+b_1x_b+c_1\chi_c+\cdots\cdots}$$

這個式子用已知或然 $\chi_a, \chi_b, \chi_c, \cdots\cdots$ 可以推定反比或然之 $a_\chi, b_\chi, c_\chi, \cdots\cdots$

在特殊上 $a, b, c, \cdots\cdots$ 絕對或然都相等,只有:

$$a_\chi=\frac{\chi_a}{\chi_a+\chi_b+\chi_c+\cdots\cdots}$$

$$b_\chi=\frac{\chi_b}{\chi_a+\chi_b+\chi_c+\cdots\cdots}$$

a 因關於 $\chi$ 果的或然,等於 $\chi$ 關於 a 的或然用 $\chi$ 或然關於其它可能的或然因之和來除。這種演算把哲學上因果律原理與斷定派的思想完全革動。讀者參看坡來的"思想律"第十七章可也。

## 第二章　數之邏輯觀

十九世紀末葉,數與無窮論,在邏輯哲學界,演成很重大底數學哲學問題。前面種種演算與第一篇的各個原理,皆爲此項問題的表現。從前魏葉斯塔斯(Weierstrars) 派認分析數學的內組,完全在數與整數觀念上,其結果把純數學的基本,完全立於數的觀念上,忘却數學是形式科學的。至於數之邏輯觀點則不然;能就邏輯,心理,經驗種種意義上,根據眞理限定,其說之重要者有如次述各義

(1) 數的意義

注意 我這裏所謂數的意義,卽含所謂數的經驗解釋。凡人皆有自然數:

1, 2, 3, 4, 5, …… n

的概念存在。譬如在蒙養試驗時期中,小孩子一無數之抽象概念,教以數數的方法,完全藉所謂自然數的存在,始成功數數的試驗。

凡試驗中有能發生數的概念者,以"羣"或物象的類分(元素)爲主體;因爲它們的自然,實在是自由的(任何的)。不過惟一底條件,要只取個體上的物象;換言之,要能在試驗中有不變的存在:旣不相混,亦不散亂。能實行這種比喻而不患失者,如教以數:手指,馬,牛,羊,木,石各種不同底事實,同時還能有自然事件的表現。數學哲學家都認此類自然爲眞正"數的所有。"

數的初步試驗,有兩種不同的存在:基數與序數是也。

要限定基數,先須從試驗方法起。

譬如有兩標定的物象類分爲:

$(a)=(a_1\ a_2 a_3 \cdots\cdots)\cdots\cdots(1)$

$(b)=(b_1\ b_2\ b_3 \cdots\cdots)\cdots\cdots(2)$

我們先找(1)(2)各元素的"聯合,"或由第一個有形底聯合第二個的元素;或由記號上無形底精神聯合。如果第一與第二的各元素都能找出聯合,而無所謂例外的加入;如 $a_1$ 聯合於 $b_1$, $a_2$ 聯合於 $b_2$ 之類,在這兩類分元素間,就有"交互一致底相通。"我們名爲(a)與(b)兩類分"相當"的類分。用學數式子寫爲:

$(a)=(b)\cdots\cdots(3)$

凡是物象類分之間能相當者必能適合下面三種要素:

(A)轉換性:(a)=(a)

卽是(a)的各元素聯合於本元素。

(B)對稱性:如果(a)=(b),則(b)=(a).

ab兩元素在心理上有對稱的處置,離兩元素聯合的秩序而獨立。

(C)換置性:如果(a)=(b)與(b)=(c)就得(a)=(c).

如果想到a元素聯合於b元素,b元素又聯合於c元素,a與c的元素自然在思想中聯合了。這種性質就是邏輯的三段式。

再於這種性質上加入下面的:

(D)如果一類分(b)包含(a)的所有元素之外,多幾點元素,則(a)與(b)的兩類分不相當。譬如有類分的:

$(a)=(a_1\ a_2\ a_3\cdots\cdots)$

$(b)=(ha_1\ a_2\ a_3\cdots\cdots)$

這就說是(b)所包的元素比(a)只多h一元素。如果有:

$(a)=(b)$,

則在這兩類分之間,必有交互一致底相通;此處h就相通於(a)類分的一定元素ai,由h與ai兩交互類分中得出:

$(a_1\ a_2\ a_3\cdots\cdots a_{i-1}\ a_{i+1}a_{i+2}\cdots\cdots$

在這兩類分之間現在又來加入$a_i$相通於$a_h$的固定元素,再由$a_i$與$a_h$兩交互類分抽出的,還是相當的類分;隨後都可以如此類推。我們如果能繼續抽出,在標定有形物體類分上可以抽盡;換言之,在複合底類分中,可以歸到惟一物體$a_r$;而這個$a_r$上可以與其它包含的類分相當:

$(a)=a_ra_s)$.

這個結論是很奇怪的,因爲我們由前面的理性看來,實在是不合理。譬如在元素聯合上,第一個$a_r$無論如

何,與第二個 $a_r$ $\dot{a}_s$ 不能有相當底元素,只能有一聯合而已,結果終有一餘元不能聯合。但是這個推理有效底類推:是(b)類分超過(a)類分一元素的,所以(D)的性質有下面定義的另一方法:

定義:如果(a)與(b)爲兩類分,(a)類分是相當於(b)類分中所包的一類分,而不與(b)的一致,換言之,是(b)的一部分。這就名爲(b)類分"勝於"(a)類分。我們普通寫爲:

$$(b) > (a)$$

現在可以把(D)的性質定爲:

(D′)如果(a)與(b)兩類分此勝於彼的,兩類分就都不相當。或者我們竟値照(c)的性質更簡單的定爲:

一類分不能使之相當於其部分之一。

現在來處置兩任何類分的有形物體,得出下面的:

(E)標定(a)與(b)兩類分,或者彼此間相當,或者彼此間有一勝於其它的;換言之,相當於其它之一部分的。這就是建定(D)的同一原理,我們在(a)與(b)的兩類分中各抽一元素

$$a_1; \quad b_1;$$

再來聯合它們想像底元素,就有"餘類分"的問題發生;但是能多重複這種演算,在兩類分中終有一可歸於盡,

好比(a)類分沒有了,其它的(b)類分同時可歸於盡,也可以不盡,因此得出:

$$(a)=(b)\text{或者是}(b)>(a).$$

我們再用(a)(b)(c)的類分看看:

$$(a)>(b)\text{與}(b)>(c),$$

就有$(a)>(c)$;

如果是:

$$(a)>(b),(b)=(c)$$

也就有

$$(a)>(c)$$

這種性質完全是勝於的性質。

補題:

(F)如果(a)與(b)兩類分

$$(a)>(b),$$

就不能知道有

$$(b)>(a).$$

如果眞正有了,卽是有

$$(a)>(a).$$

這與(D)的性質相反:我們參看(A)的性質,就可以明白。

這個補題的意思,是類分之間勝於的關係適合於(F)

的換置性,而不適於對稱與轉換性。

前面的標辭,使我們能表明物象的類分或羣爲"類分的類分;"因此有;

(1)　一類分同時屬於相當底類分的同一類分。

(2)　一類分C同時一部分不能在類分的同一類分中相遇。

這種表明,可以建出類分記號的抽象價値,屬於類分的同一類分中;換言之,相通於類分中任何類分的實體所有的思想,能同樣分存於類分的其它一任何類分中。這種概念就是一類分物象的基數。故(a)與(b)類分的相當,轉換爲相等的

(a)的元素的數=(b)的元素的數。

這種相等的意義,恰是指明所講底抽象問題。並且得出抽象概念的恆等"="類分{(a)(b)……}的類分上相通的基數。

數的標定都在邏輯的方法上,而同時抽象與相等的意義可以明白。譬如標定物體的某一類分,精神上總可以建出這個類分元素的抽象概念來,如類分的(張三,李四,……)就有人的抽象概念;諸平行直線的類分,就有方向概念之類是也。故凡類分元素抽象概念的組織,如果有這種心理底意義,在類分各元素中的通性上,就

有一種冒似底結構;彷彿各類分是通性與個體不同性之和的想像。好比"人,,的概念可以得出"張三,李四"之類。這種冒似底結構在相等的意義上,還是同樣底解釋。二物體相等,在它們本身都沒有一點意義;只能關於某類分上這兩物體可以相合的,始能表明若干事件的意義。所謂兩物體的相等,都是關於一類分中重要底抽象概念,各類分元素中的恆等性;換言之,相等就如"恆等與差等之和"(Somme d'une identité et d' une diversité)。我們前面所講的轉換性,對稱性,換置性;在相等上都表明抽象與聯consequence邏輯方法的基本存在。反之,任何物體之間的關係,都能適合這個條件,可以視爲相等。因爲相等,是限定標準物象分類的式子。由此可以決定知道物體的聯合必在惟一與同一類分的關係中。

這裏我們有下面的注意點:

視相等如同一類分之間 a, b 兩物體的關係。在抽象上統看起來,可以視 a 的抽象函數等於 b 的抽象函數;譬如說兩半徑相等,可以說兩半徑的長度彼此相等。這個判斷就是相等的式子,但是它的價值與邏輯所謂"重言"(Tautologie)不同,這能使我們注意到尾隨的重要推演。至於所謂重言的相等就不能了。

現在再講序數原理。

要限定序數可以拿下面的試驗做起點:

有定物體的一類分,可以在思想中列序起來,(或在空間裏位置之,或用單簡的記號表明之)想到它的各元素:如第一個之後連續其它的一個,除去最後一個不計外,其餘彼此都是連續標定;因此得出凡一類分的列序中(或名級次)有下列的:

(1) 標定兩任何元素,這個連續那個,則這個先於那個。

(2) 如果元素 c 續於 b, b 續於 a, c 也相等的續於 a。

(3) 除去最後底元素外,凡 a 的元素有一直接次件 (Subséquant) 為 b, 因此沒有其它的元素續於先於 a 的。

(4) 除去第一元素以外,凡元素有個直接前件,而此前件也就是次件。

注意下面的兩列序類分或級次:

$$(a) = (a_1\ a_2\ a_3 \cdots\cdots a_n \cdots\cdots)$$

$$(b) = (b_1\ b_2\ b_3 \cdots\cdots b_n \cdots\cdots)$$

要找彼此間交互一致相通的列序組織,則用下面的方法:

(1) 在(a)的第一元素 $a_1$ 上相通於(b)的第一元素 $b_1$;

(2) 如果(a)與(b)的兩元素相通,次件也相通。

這個條件的證明很容易。譬如$a_1$的次件$a_2$必相通於$b_1$的次件$b_2$,因此$a_3$的結果也相通於$b_3$的;如此類推,得出(a)與(b)之間的列序完全相通了。如果兩類分不是"相當的;"換言之,如果是:

$$(b) > (a)$$

就是(a)的元素列序只是(b)的一部分相通,而(b)的元素除相通於(a)的最後各元素外,其餘就是沒有相通的餘元。此處還可以說是兩級次之中有"部分"的列序相通點。

現在再拿三個任何級次來看看:

$$(a) = (a_1\ a_2\ a_3 \cdots\cdots a_n \cdots\cdots)$$

$$(b) = (b_1\ b_2\ b_3 \cdots\cdots b_n \cdots\cdots)$$

$$(c) = (c_1\ c_2\ c_3 \cdots\cdots c_n \cdots\cdots)$$

而$a_n$是(a)的任何元素,只要假設類分中各個都為超於部分上的:

$$(a_1\ a_2\ a_3 \cdots\cdots a_n)$$

在這種假定中有(a)與(b)級次中(完全或部分的)有限列序的相通。而$a_n$的元素相通於(b)的有定$b_n$元素。再來(a)與(c)之間兩級次(完全或部分的)有限列序的相通,也可以同樣得出,即是$a_n$的相通於$c_n$的。如果比

較起來,在(b)與(c)的級次中,也有相通的列序完全或部分的),所以 cn 的元素也通於 bn 的。由此得出下面定義:

兩級次元素之間有一相通的列序存在,則各元素都相等。其關係連續於相等性(轉換的,對稱的換置的)。

我們可以把級次數的類分元素用分類列序之;譬如相等的同列中各元素都歸一類,就前面已有三級次用 $K_1\ K_2\ K_3 \cdots\cdots K_n$ 的類分法分出如下:

| $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ | $K_n$ | |
|---|---|---|---|---|
| $(a)=a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $\cdots\cdots a_n$ | $\cdots\cdots$ |
| $(b)=b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $\cdots\cdots b_n$ | $\cdots\cdots$ |
| $(c)=c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $\cdots\cdots c_n$ | $\cdots\cdots$ |

類分 $K_n$ 的元素抽象概念名爲(a)級次中 $a_n$ 元素,(b)級次中 $b_n$ 元素與(c)級次中 $c_n$ 元素的列序號數。

現在再回頭看看基數與序數的比較。

在每個列序 n 上表明 $a_n$ 的位置是級次的 $a_1\ a_2\ a_3 \cdots\cdots a_n \cdots\cdots$ 相通於基數的;換言之,表明類分的物類數:($a_1\ a_2\ a_3 \cdots\cdots a_n$)在基數中已經看過,表明類分相當的類分,譬如(A……F)的性質,在($K_1\ K_2\ K_3 \cdots\cdots K_n$)類分的類分中成爲列序的級次存在的:

| $K_1$ | $K_2$ | …… | $K_n$ | |
|---|---|---|---|---|
| $(a_1)$ | $(a_1a_2)$ | …… | $(a_1a_2\cdots\cdots a_n)$ | …… |
| $(b_1)$ | $(b_1b_2)$ | …… | $(b_1b_2\cdots\cdots b_n)$ | …… |
| $(c_1)$ | $(c_1c_2)$ | …… | $(c_1c_2\cdots\cdots c_n)$ | …… |

基數就是表明 $K_n$ 各類分的物體之數相通於序數的;換言之,是表明$K_n$的位置爲級次的:

$$K_1\ K_2\ K_3\cdots\cdots K_n\cdots\cdots$$

這樣看起來,我們限基數與序數時可以彼此借用。而對於相通的概念因此也可以明白。現在再把 $(c_n)$ 的各基數與相通的 $(n_o)$ 序數聯合起來,可以組成類分的式子:

$$(1_c\ 1_o),\ (2_c\ 2_o)\ (3_c\ 3_o)\cdots\cdots(n_c\ n_o)$$

在$(n_c\ n_o)$的類分中,可以由抽象中得出抽象n數的概念,是基數與序數相通的共同記號。

(II) 數的無窮級次

前面數的分解,就物象兩類分級次的試驗將其:

羣,相通,次第……

種種基本概念引爲數之抽象概念解釋,因此各數的基本性質,顯爲試驗的標辭 (Proposition expérimentales)。然則我們試問:

(1) 在什麼程度上或什麼意義上,試驗能合證這

些同類標辭?

(2) 又在什麼程度上試驗對於建定數的概念與其附帶底性質爲必要的?

第一點的觀察如次:

尋常在實際物象與一羣物體中運算,事實上只能達到不十分大的數目;譬如一人每日專以十時計數,至五十年僅能近十億,(1,000,000,000)實際試驗的數目愈大,則其需要之時間愈久。從此推知實際數目有大而難檢證者,非多數人的工作不足告成。如算學性質的大數,卽在人類社會中亦無從試證。然而大的國家預算案,往往超過一億,在數的基本應用性質上,則又無若何疑難;是知所謂數的認識,並不在物體類分的純粹與粗俗演算試驗中。

在一般野蠻動物的智慧中,以所能達到的數目爲最大者,殊不知人類的數目級次,無所謂最大的存在。我們的精神用意像試驗作實際試驗的幫助,故能顯有無限次的反覆,使之建成想像上的無窮級次數。所以算學一方面固然立於有形物體類分的試驗,它方面仍以想像試驗精神爲其配合的萬能。

現在看第二點:

在什麼程度上,有形物體或其物羣中必須用計算?

凡算學事件是否能就簡單思想完全創立,而無用外界的事件作證? 我們知道物體上考證的自然,與初步試驗所有的數目概念並無關係;就是視覺,聽覺,觸覺之類的試驗亦無甚重要;所以承認簡單心理試驗的使用,亦更無甚困難。譬如一人之盲,聾,啞,失神經者,如果賦有充分抽象的能力,必能想得物體;即令沒有正確情形的想像,必能用純粹意像上的抽象與聯瑣來計算思想物體的類分。前面具體物象的初級試驗,完全能就此種心理試驗代用。

這裏涉及想像派的論點,他們認初級試驗上所能限定數目的定義,並不全在物體客觀性與其所注意的類分上;而所謂試驗者,不過思想本身的運算定律,或者說是聯瑣與邏輯抽象的運算律。因此數之基本標辭,並不在"事實"(後天)的發表,而是必然眞理(先天)的;即言之,是在精神的構造與作用,康德黑格爾的邏輯意像,與米爾的邏輯經驗爭端從此發軔。

現在再看數之無窮級次的構造如何。

要建定無窮級次的數,用一抽象與聯瑣的邏輯公理,還不足以表明基本標辭:必須有一"存在公律"肯定無限反復的無限聯瑣可能:"標定一任何數,總有一數爲其隨數。" 譬如幾何直線中所有之點,正爲其類分表

現的關係。現在可以分別所謂有窮與無窮的概念如下:

(1) 於一類分中先後分取其元素,結果取盡此類分的存在,卽是類分有窮的表現;

(2) 凡一無窮類分,能使之相當於其各分之一。標定數之級次如:

$$1, 2, 3, 4, \quad \cdots\cdots n \cdots\cdots,$$

與減去第一數之級次亦爲相當:

$$2, 3, 4, 5 \cdots\cdots n', \cdots\cdots$$

因爲兩級次之間能加入相通的:

$$n' = n + 1.$$

譬如一截線,一直線,平面的一任何形,或空間的一任何體,都能使之相當於其部分之一。所以凡無窮級次標出,則知其一部分相當於全部(所有,)。再如果一類分A包一列數級次S,則在S與其部分之一間有一相通,同時於S之外,能使之相通於A的各元素,因此證明A相當於其部分之一。復次如A爲一任何類分,能於此中任取一元素1,再取第二元素2如此類推;如果選取的數爲有限,而類分已盡者,則此類分相通於有窮級次之(1, 2, 3 ……n);如果不然,彷彿A類包一"列數類分"(Classe numerable)相通於無窮級次之(1, 2, 3, ……),則此

類分相當於其部分之一。

這種演繹式包極精細思想,結果不僅有很大數目選取的可能,並爲自由選取的無窮數可能。在我們人類,這種可能超過一切,只能據有限數以確定當然(先天連續選取的法則。所以一類分與其無窮類分之一所有相通的可能,使我們對於無窮與有窮類分之間的區別性判然明白。而剛多派之無窮基數乘冪論與伯海斯端(Bernstein)的證明,皆爲級次有窮與無窮的眞理。

一無窮類分視爲順列級次者,必須其元素之排列有如下述條件:

(1) 有一級次之兩元素,其一續於它一(此元先於彼元,)

(2) 如果c元續於b元,b元續於a元,則c元亦續於a元。

有時無窮級次中(有窮級次亦然)元素(最後的)無直接隨數,而另一元素(非首元)亦無直接前數,則此級次數既無首元素亦無終元素。級次之:

$$1, 2, 3, 4, \cdots\cdots n \cdots\cdots$$

爲沒有終元素者;而級次之:

$$\cdots\cdots \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}\, 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

無首元亦無終元。

剛多所謂整順列級次者(Série bien ordonée) 必須適合下列之:

(3) 凡級次有一首元素,而所包之部分的級次亦必有一首元素。

此條證明有直接隨數存在。所以有下列定理之:

在一整順列級次中,凡元素非最後者,有一直接隨數存在。

如一整順列級次中 a 元素非終元,則有一首元 b 整列於後,而 b 卽爲 a 之直接隨數。

但是下說定理又不能如此;如級次之:

$$1,\ 1\frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \cdots\cdots 2\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{2}, 3,$$

各元素都有一直接隨數,而:

$$\cdots\cdots 2\frac{1}{4},\ 2\frac{1}{2}, 3$$

的一部分又無首元存在。

比邪黑 (Pieri) 的定理,在這裏能分別級次之有窮與無窮:

如果一級次與其反列爲整順列集合者爲有窮。

譬如有一整順列級次爲:

$$S = a_1\, a_2\, a_3 \cdots\cdots;$$

如果非有窮,則包列數級次之:

$$s = a_1 a_2 a_3 \cdots\cdots a_n \cdots\cdots$$

此級次後,通於n值者能有其它元素或無其它元素,而s終爲S之一部分。如果取S的元素同如s的,則在反列中S級次所得者非整順列,因爲它包的(s)部分中有"無首元"者。

現在再看數學歸納與剛多的大無窮原理。

有一任何關係R,附屬於$x$數;如果此關係證得$x$等於一,則必證得$x$等於n而同一關係對於普通:

$$x = 1, 2, 3, \cdots\cdots n \cdots\cdots$$

都有效。記號列爲:如果

$$R(1) = 0$$

又如果:

$$R(n) = 0$$

則推得:

$$R(n+1) = 0$$

而有:

$$R(m) = 0$$

此處m表明任何大數。

這就是數學歸納的原理,其應用在人類思想的可能條件中頗稱重要;如前節物體想像類分的推理,完全爲數學歸納的邏輯可能。無論有窮或無窮級次的類分,

數學歸納的假定者足爲其自然構造的可能。其表示如:

1, 2, 3, 4……n……

譬如我們思想本身的反思級次:

A, A的思想, A的思想的思想,如此遞進……

又如標定:

$R(x)=0$

則凡$x$數成一類分;而數學歸納定爲班洛式之:

如果一類分c包s級次的首元($x=1$);又如果假定上c包S的一任何元素($x=n$),則推得c包S的隨元數($x=n+1$),因而c類分包S所有元素矣。

這個原理使數之級次分,別於其它所有可能的整順列級次,如:

$$1,\ 1\frac{1}{2},1\frac{3}{4},1\frac{7}{8},\ \ldots\ldots$$

自然有整順列級次能適合班洛式之公律,使之與自然數的級次有雙一致的相通 (Correspondence bi-univoque) 然而所注意的前式,則不能適合;因而導入序數普通概念,注意無窮序數,是爲剛多大無窮論之起點。其原理概括爲:

如有整順列級次S不適於班洛公律,則在任何次n上必包含隨元數,無論大小如何,在S同類元素中只成

S的一部分;因此有首元 ω;其隨元必爲 $\omega+1$, 如此類推及於無窮。所以有:

$$S=1,2,3,\cdots\cdots\omega,\omega+1,\omega+2\cdots\cdots2\omega,2\omega+1\cdots\cdots$$

可以想像其爲無窮矣。

ω 表明級次的首元,此元隨於自然數,(有窮)可以視爲無窮序數之最小者。如果級次中有一隨於

$$\omega,2\omega,3\omega\cdots\cdots,$$

則此元素可以表明爲: $\omega^2$; 因此知道級次亦能包具下列元素之:

$$\omega^3,\omega^4,\omega^5,\cdots\cdots\omega^{\omega}\ \omega^{2\omega}\cdots\cdots\omega^{\omega^{\omega}}\cdots\cdots$$

所謂大無窮的數,正如幾何直線形之各點的級次所在,如 ω 相通於 1,2,3…… 級次的極限點;2ω 相通於 $\omega+1$, $\omega+2$,…… 級次之極限點;而 $\omega^2$ 則爲 ω, 2ω, 3ω …… 之極限點。

結論。現在由理論觀察,知道數學能就邏輯解決無窮與連續的問題,並能於空間時間運動上成穩固而又可能的哲學。

無窮與連續的實在理論,在二十世紀都是很新的方法。譬如實行用無窮合數(Collection infinie) 與用有窮整數合數相當,可以就整數合數與其部分之間,建出兩相通的元素。在有窮整數與偶數間有一相通的關係,

因爲有窮數的關係互相通,所以無窮合數的整數或數,必等於其部分的數。從前數學家對這種解釋,認爲不脫矛盾,故無論是否實現的或其它的無窮,皆一一加以否證。實際想證明無窮是否矛盾,必須認數學歸納爲一切數之所屬。因爲我們日常生活的數,完全具有歸納體。在歸納體的數中認定:"一任何數有 n 數,其合數部分,不能同於全 n 數的。"如果凡數都具有歸納體,而與其它合數又包含一部分同數的,其結果必遇矛盾。如果沒有歸納體的,則又可以消去矛盾。因此知道惟無窮數中始無矛盾之可言。這正是剛多算學無窮的結晶處。從前哲學上不能解決的問題,於今數學邏輯家一一檢證殆盡!

## 第三章　結論

### 數學邏輯的重要

從前邏輯標準的集合,完全在幾個有限的動詞換置上活動,因此演繹的各種元素,成了專待動字配合的模形;思想精神,都限於形式絕對範圍。

數學邏輯原理,完全以純數學方法限定標辭的集合。如在一任何形式標辭集合中,都絕對表明變數名辭與邏輯常數。這種思想超連續與無窮數外,由運動的數

學理論與其它連續轉換論中,尋出兩相關繫的基本觀念:

(1)函數;(2)變數。

由這兩種觀念的自然,推演無限的邏輯配合;使標辭換置;有如數學連續與無窮的形式構造。

我們在近代哲學書上,還可以找出因果形式的:

"同因產生同果"

的論證;但是現在確實知道:

"同因不能產生同果。"

實際上在確定原因間,有一常數關係,結果卽從此生出,故謂果爲因之函數。而此常數體,實卽無窮性的因果律,尋常重複因存的假定,現在完全沒有。而這種函數觀念的常數關係,可使數學勢力愈加嚴重,同時結附無窮性的根據。

要懂明數學函數關係的重大,應該先知道數學演繹法的究竟。學數證明與所謂歸納推理,皆爲演繹形式原理的適合;因爲演繹的實用,須超乎本體而入於形論。正如邏輯三段標辭的:

凡人皆有死;

曹操是一人;

所以曹操有死。

很明白的就是以曹操代用秦檜或其它任何人置於曹操的位置上,仍不變失其眞。所以普汎上能定爲:

如果凡人皆有死;

如果某甲是人;

所以某甲有死。

這爲前式推演的假言式,即是標辭的概稱;還可以據理遠推,因爲我們所說的演繹法,完全不以所論的"凡人"與"有死"爲實。可以更擴大底說是:

如果任何乙類同人爲丙類的;

如果甲爲乙類同人之一;

則甲爲丙類同人之一。

這種說明在純粹邏輯形式上將證明"曹操是有死"的同一形式簡單了。

我們如果要有純數標辭,或數學邏輯標辭,須先將任何演繹法照所施行的普通方法類推;即言之,如改換名辭之一,就用一變數代替。從此無定對象加入,而純粹邏輯標辭因以發現。簡言之:一標辭除邏輯常數外,別無其它常數的包含,所以:

如果標辭中包有能用變數代替的,即一邏輯常數。最正確底是分邏輯常數爲:

在任何演繹中,用變數代名辭,於一定數目上,常數仍

存於演繹包有的羣中;即有概括者,亦在常數的同羣中,此羣即"邏輯常數"的羣。

邏輯常數都是純粹形式組織成的,在第二篇中已有所述:凡形式標辭爲一標辭,不能包邏輯常數以外的常數。而前面曹操有死的演繹,約成:

若是某甲爲一乙;

假如凡乙爲丙;

則某甲爲一丙。

此處常數爲"爲一""凡""假如。"完全純粹形式概念。

這種理論根據爲普遍數學的變數函數;演繹法任何相當的標定:以形式效用爲實,其起點即以代用演繹名辭爲變數始,直至無邏輯常數以外的常數爲止。反之,凡演繹能在邏輯常數的變數上推演;在變數上表明固有值,使假定變爲眞實。

這種運算概括的結果,使演繹元素與根據特別推論的元素分開了,因此純數必專注於絕對演繹元素,用純全方法,求純數學標辭。譬如說:

這有一件;

那有一件;

總共有兩件。

還不算純數學標辭;其故因在"特別"認定的事件上;要:

認定這任何一件;

再又那任何一件;

就有兩件整的。

這算是眞純數學標辭。自然是根據特別體,認爲假定的考證,可以肯定;並不只是假定連累正定,因爲假定眞所以正定眞,與純數學上肯定不同。

假定形式底討論爲:"如果任何一體證得某某假定,同時必能證得某某正定。" 因此純數學完全爲假定的存在,專注於導入任何無定體;換言之,只在變數而已。故凡適當演繹,在假言標辭的形式中都屬於純數學;但純數學自身又不能肯定假定,亦不得肯定正定;然而此二者終能表明邏輯常數名辭。

現在發生的問題是:爲什麼要演繹全歸於形式的?羅素先生回答:

(a)　最容易概括所有可能的眞理;

(b)　用 $x$, y…… 的無定字,能成經濟演繹。

在曹操身上推論時,所有結果只適用於曹操一人;要知道秦檜或別人的若干事件,必須重行若干次推理。在 $x$, y…… 上實行推論時,能於結果中同時推及所有 $x$, y……,而 $x$, y…… 可以證得假定。正如科學中概論動機,遺到數學方法理論來了。

純數學的性質決不討論屬於某某個體的事實;也用不着知道在現實界爲何如;只要在變數方面,能考定,任何體所有假定。這裏把"連累"的關係無形中建成假定與正定間眞實的邏輯常數。而連累的基本,在於標辭的眞實。如果標辭前提,到連累上不得眞實結論,則必非眞正前提關係的存在,而同一假定的眞實亦不可得:

前提與必然的眞實,很關重要;因爲可以知道前提與假定間的分明。譬如:

荊軻是一人;

所以荊軻終有死。

標辭的"荊軻是一人"爲一前提;但是說到:

如果荊軻是一人;

"於是乎"荊軻就有死。

標辭的"荊軻是一人"只爲一假定。同樣再說:

若是從甲推乙

又從乙推丙;

於是從甲推丙

標辭的"從甲推乙與從乙推丙"爲一假定,但是全標辭又不是假定。因爲我的肯定,實際就是眞實。此類標辭卽爲演繹法之一。在數學推理上演繹有雙關作用:

第一:如前提的;

第二:如得前提結論的。

如謂演繹法非眞,則用以得結論的必非正式結論。若從此找不着其它的演繹,則就此更正前提的錯誤。

要知道我們人類有能力認識標辭。數學知識的分析結論,對知識理論上不完全無用。反對經驗論派的,要明白數學知識需用的前提,全不在感覺事實上作根據。普通標辭都超過感覺知識的界限,因爲感覺只限於個體上。如果特點與普遍的擴張上,全用歸納法處理,就要承認歸納本身不能由試驗方法證明。羅素很明白說:無論歸納法基本原理如何,明白底是:

第一:歸納原理爲普汎的;

第二:無飾詞(Sans Cercle vicieux)不能使其本身用歸法證明。

我們可以假設歸納原理多少有下列情形之:

標定兩任何體必於一定地方相接;如果沒有此項標定,或者能有別的地方包此二體之一更能包其它的所有。

這不是適合歸納原理的法式,只算是認歸納爲普汎原理的存在,包含或然性的意念。再明白的是感覺試驗,不能證明某原理,亦不能發現或然。因爲這只是與

或然同樣的原理適合,尋常說能成功的,在相信將來或者可以成功。所以歸納知識與推理得來的相同,都要先天與普汎底邏輯原理幫助。現在要配成歸納原理,必須轉換歸納爲演繹;歸納就是用一定前提表知歸納原理的演繹變相。

# 本書參考用書一覽

## 第一部邏輯學用書

凡加一*記號者爲本書重要參考. 加一‡記號者爲研究邏輯之普通參考用書. 無記號者爲次要.


*Bain. A. Logique inductive et déductive. (Trad. franc. Paris Alcan 1875)

Baldwin. J. M. 1. Le médiat et l'immédiat. (Trad. franc. Paris Alcan. 1921)

—— 2. La pensée et les choses, logique fonctionnelle. (Paris Doin 1908)

—— 3. Le jugement et la connaissance. (1906)

‡Bosanquet, M. The essentials of logic.

‡Bradley. Principles of logic. (London 1883)

Brochard. 1. De l'erreur. (P. A. 1870)

*—— 2. Etudes de philosophie. (P. A. 1912)

Brunschvicg. L. Le modalité du jugement. (P. A. 1897)

Casteleyn, A. Logique. Cours de philosophie.

Chovet. Rapports de l'induction et déduction. (Revue de Phil. 1908)

Condillac. 1. Logique. (1792)

—— 2. Langage du calcul. (1798)

*Couturat, L. La logique de Leibniz. (P. A.)

‡Creighton, Z. E. An introductory logic.

*D[illegible]euf, Z. 1. Essai de logique scientifique. (Liège Desoer 1865)

—— 2. Logique Algorithmique. (Liège 1877)

‡De Morgan, A. Formal logic. (London Taylor 1847)

Dewey, J. 1. Studies in logical Theory. (1903)

—— 2. Essays in experimental logic. (Th. Univ. of Chicago Press, VII. 1916)

—— 3. Comment nous pensons. (Trad. franc. P. Flammarion 1925)

*Dorolles. Pourquoi le syllogisme a-t-il été Considérée Comme le type de la déduction. (Rev. du mois 1910)
Duhamel. Les méthodes dans les sciences de raisonnement. Vol I. (P. G. Villars)
‡Encyclopædia of the philosophical sciences. Vol. II. Logic.
Enriques, F. Les problemes de la science et la logique. (Trad. franc. P. A. 1909)
*Fornel de la Laurance. M. de. Logique générale et Appliquée. (P. Delagrave)
‡Fowler. Inductive logic.
*Franck, A. Esquisse d'une histoire de la logique.
*Goblot, E. Traité de logique. (P. Ar. Colin 1920)
Gratry, P. La logique. (1870)
‡Hamilton, W. Lecture on logic. (Edinburgh 1860)
‡Hegel. Logique. (Trad. franc. Véra)
‡Hermant, P. et A. Vant de Wæle. Les principales theories de la logique Contemporaine. (P. A. 1909)
Hibbin, J. G. Logic deductive and inductive. (1905)
*Janet et Séailles. Histoire de la philosophie. (P. Delagrave)
‡Jevons, W. S. 1. Pure logic. (Lond. Stanford. 1864)
—— 2. The principles of science. (Lond. Macmillan. 1879)
—— 3. Studies in deductive logic. (1880)
—— 4. Elementary lessons in logic. (1904)
Jones, A. L. Logic inductive & deductive.
Joyce, S. J. Principles of logic. (London)
‡Kant, E. Logique. (Trad franc. 1840)
Lachelier, J. 1. Etudes sur le syllogisme. (P. A. 1906)
—— 2. Du fondement de l'induction. (1871)
‡La logique de Port-Royal. (Ed. Fouillée)
*Liard, L. 1. Logique (P. Masson 1894)
—— 2. Les Logiciens anglais contemporains. (P. A. 1878)
Luquet, G. H. Essai d'une logique systématique et simplifiée. (P. A. 1913)
Mach, E. La connaissance et l'erreur. (Trad. franc. P. Flammarion 1903)

Maritain, J. Petite logique. Elem. de philosophie. (P. Téqui. 1923)

Mellone, M. An introd. Text-book of logic.

Mercier, D. J. Logique (C. P.) (Louvain)

Milhand, G. 1. Essai sur les conditions et les limites de la certitude logique.

—— 2. Le rationnel.

‡Mill, Stuard. 1. Système de logique inductive et deductive. (Trad. fran. P. A.)

—— 2. Philosophie de Hamilton. (Tr. fr.)

Navill. E. La logique de l'hypothèse. (P. A. 1880)

Noël, G. 1. La logique de Hegel. (1897)

—— 2. Les frontières de la logique. (R. Néo-Scolastique 1910)

Paulhan, Fr. La logique de la contradiction. (P. Alcan. 1911)

Peillanbe. Le concept. (P. Doin 1895)

‡Pfänder, A. Logik.

*Rabier. Logique (P. Delagrave)

Regnaud, P. Précis de logique evolutionniste. (P. A. 1897)

‡Renouvier, Ch. Logique générale et logique formelle. (Essai C. gen. I. P. Colin)

*Rey, A. Cours de Phil. Logique. (P. Rieder)

Ribot. 1. La logique des sentiments. (P. A.)

—— 2. Evolution des idées générales. (P. A.)

Rodier. Les fonctions du syllogisme. (in année phil. 1908. 2)

Rougier, L. La structure des théories deductives. (P. A. 1921)

‡Schèller. Formal logic.

‡Sigwart, C. Logik.

Sloman et Wallon. La logique subjective de Hegel. (P. 1854)

‡Spencer, H. Principles de psychologie. (Trad. franc.)

Sortais. Nature du syllogisme inductif. (R. de phil. 1909. 7)

Veitch, J. Institutes of logic (1885)

Walton. Manual of logic.

*Waddington, Ch. Essai de logique. (P. Durand 1857)

‡Wundt. Logik. 3 Vol. 1906-08.

# 第二部數學邏輯用書


Admson, E. The logique copula and quantification of the predicate (Lond. Nutt 1897)

Bentham, G. Outline of new system of logic. (London. Hunt 1827)

*Bernstein, B. A set of four independent postulates for Boolian algebras. (Trans., Amer. Math. Soc., 17, 1916)

*Boole, G. The mathematical analysis of logic. (Cambridge. Macmillan 1847)

*—— An investigation of the laws of thought. (Lond. Walton, 1854)

*—— On the theory of probabilities. (Phil. Mag. Roy. soc. Lond. No 152, 1862)

‡Brunschvicg L. Les etapes de la philosophie mathématique. (P. A. 1912)

*Burali-Forti, C. Logica mathematica. (Milano. Hoepli 1894)

‡Cantor, G. Théorie des ensembles Transfinis. (Trad. franc. P. Hermann. 1899)

Castillon, G. F. Sur un nouvel algorithme logique. (Berlin Acad. mem. 1803)

*Conturat, L. Les principes des mathématiques. (P. A. 1905)

—— La logique de l'algèbre. (P. G. V. 1905)

De Morgan. Syllabus of a proposed system of logic. (Lond. Walton, 1869)

Dufumier, H. La philosophie des mathem. de MM. Russell et Whitehead. (R. M. M. 20 1912)

*Frege, G. Grundgesetze der arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet. (Jena. Pohle)

*Huntington, E V. Sets of independent postulates for the algèbra of logic. (Trans. Amer. Math. Soc. 5. 1904)

*Johnson, W. E. 1. The Logical Calculus. (Wind, N. S. 1, 1892)

—— 2. Sur la théorie des équations logique. (Bibb. cong. int. de phil. Paris 1900, 3)

Ladd-Franklin, C. On the algebra of logic. (in studies in logic by J. Hopkins University)

‡Lewis, C. I. A survey of symbolic logic. (University of California press, Berkeley 1918)

Löwenheim, L. Ueber das auflösungsproblem in logischen Klassenkalkul. (sitzber. math. gesell. Berlin, 7, 1908)

*MacColl, H. The calculus of equivalent statements. (Proc. Lond. math. society 1877-78-80-96-97-98.)

—— Symbolical reasoning. (Mind, 1880-97-1900-02-03-05-06.)

*—— Symbolic logic and its applications. (Lond. Longmans 1906)

MacFarlane, A. Principles of the algebra of logic. (Edinburgh. Douglas 1879)

Mitchell, O. H. On a new algebra of logic. (in studies in logic by J. Hopkins Univ.)

‡Padoa. A. La logique déductive danssa dernière phase de developpement. (P. G. V. 1912)

*Peano, G. Notations de logique mathématique. (Torino, Bacca, 1894)

*—— Formulaire de mathématique. 5 Vol.

*Peirce, C. S. Description of a notation for the logic of relatives. (Mem. Amer. acad. arts. and sci. 9, 1870)

*—— On the algebra of logic. (Am. J. of math. 1880)

*—— The logic of relatives. (in studies in logic by J. Hopkins Univ. P. 126-82)

Reymond. A. Logique et mathématiques. (1908)

*Russell, B. A. W. Principles of mathematics.

‡—— Cambridge Univ. press. 1903)

‡S Whitehead. Principia mathematica (2e ed 1926)

*Schröder, E. Der operationskreis des logikkalkuls. (Leibpzig, Teubner, 1873)

‡—— Algebra der logik (Leipzig. 1905)

Venn, J. Symbolic logic. (Lond. 2ed. 1894)

Whitehead, A. N. A treatise of universal algebra. (Comb. Univ. press. 1898