NOVI COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOM. XIX.

pro Anno MDCCLXXIV.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
MDCCLXXV.

SVMMARIVM DISSERTATIONVM,

QVAS CONTINET

NOVORVM COMMENTARIORVM

TOMVS XIX.

a 2 MATHE-

MATHEMATICA.

I.

De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} dz$$

casu quo post integrationem ponitur

$$z = 1.$$

Auctore L. Eulero pag. 5.

In hac Dissertatione Illustr. *Eulero* propositum est, binorum insignium theorematum demonstrationem ex principiis calculi integralis adornare, ad quae theoremata consideratio arcuum circularium, qui eundem habent vel sinum, vel tangentem, iam dudum ipsum perduxerat. Possunt vero haec theoremata ita enunciari, vt valor formulae integralis supra propositae, si I°. signa superiora adhibeantur, statuatur esse $= \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$; tum vero II°. si signa inferiora in vsum vocentur, adfirmetur esse $= \frac{\pi}{n \text{ Tang.} \frac{m\pi}{n}}$, integratione a termino $z = 0$ vsque ad $z = 1$, instituta et designante π semiperipheriam circuli cuius radius $= 1$. Occurrunt quidem eorundem Theorematum demonstrationes in *Calculo Integrali* Illustr. Auctoris, quum vero subsidia integrationis ex alio Eiusdem opere, *Introductione* nimirum in *Analysin infinitorum*, petantur; hoc loco integrationem formularum ita perficiendam existimauit, vt simul principia quibus illa innititur, succincte complecteretur; tum vero pro casu quo post integrationem ponitur $z = 1$, singularia artificia quibus summatio seriarum absoluitur, dilucide exponenda iudicauit.

Antequam formulae integralis propositae integratio suscipiatur, formulae hae integrales simpliciores $\int \frac{z^{m-1}\, dz}{1 + z^n}$ et $\int \frac{z^{m-1}\, dz}{1 - z^n}$, euoluendae, vbi quidem ante omnia fractio $\frac{z^{m-1}}{1 + z^n}$ in suas fractiones simplices partiales resoluenda est. Ad hoc autem perficiendum, necessum est, vt denominatores $1 + z^n$ et $1 - z^n$, in suos factores simplices reales et imaginarios resoluantur. Prior scilicet $1 + z^n$, casu tantum quo n numerus impar, vnum factorem habet realem $1 + z$, caeterum omnes sunt imaginarii, et bini eorum semper in hac forma continebuntur $1 - 2z \operatorname{cos.} \Phi + z^2$. Tum vero $\operatorname{cos.} \Phi$ ita accipi debet, vt fiat $\operatorname{cos.} n\Phi = -1$ et $\operatorname{sin.} n\Phi = 0$, ideoque

que quum anguli quorum cofinus $= -1$, fiant π, 3π, 5π, 7π etc. pro ϕ hinc fequentes deducentur valores $\frac{\pi}{n}$, $\frac{3\pi}{n}$, $\frac{5\pi}{n}$ etc. Pofterior $1 - z^n$, factorem femper habet realem $1 - z$, praeterea cafu n numeri paris $1 + z$, reliqui vero factores femper funt imaginarii fub ifta forma $1 - 2z \operatorname{cof.} \phi + z^2$ comprehenfi. Tum autem ita ϕ accipi debet, vt fiat $\operatorname{cof.} n\phi = 1$, ita vt habeantur pro ϕ huiusmodi valores $\frac{0\pi}{n}$, $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{4\pi}{n}$, $\frac{6\pi}{n}$ etc. Inuentis factoribus denominatorum fimplicibus, pro fractionibus partialibus ex illis oriundis, quaeri debet numerator, quod hunc in modum perficitur: fit fractio partialis $\frac{\alpha}{z - f}$, facileque demonftrabitur cafu $z = f$, effe $\alpha = \frac{z^m - f z^{m-1}}{1 + z^n}$, at hoc in cafu tum numerator quem denominator euanefcit, erit ergo

$$\alpha = \frac{m z^{m-1} - (m-1) f z^{m-2}}{n z^{n-1}},$$

vnde pofito $z = f$, $\alpha = \frac{1}{n} f^{m-n}$. Inuentis fractionibus partialibus reliquum eft, vt integratio inftituatur et poft integrationem ponatur $z = 0$, ex quo quum integrale euanefcere debeat, valor conftantis adiiciendae innotefcet. Hoc igitur modo Illuftr. Auctor inuenit binas illas formulas

$$\frac{z^{m-1}\, dz}{1 + z^n}, \quad \frac{z^{m-1}\, dz}{1 - z^n},$$

integratas exhibere valores integrales partim Logarithmicos, partim etiam qui arcus circulares inuoluunt. Dum autem ad integrationem formulae propofitae poſitae propius accedit Illuſtr. *Eulerus*, primum generatim conſiderat formulas

$$\frac{z^{m-1} + z^{\mu-1}}{1 + z^n} dz \quad \text{et} \quad \frac{z^{m-1} - z^{\mu-1}}{1 - z^n} dz,$$

exiſtente $m + \mu = n$, pro his ſcilicet formulis integralia logarithmica ſe deſtruent, ita vt ſola remaneant, quae arcus circulares inuoluunt. Denique ſi pro his formulis integratis, poſt integrationem ponatur $z = 1$, integralia per binas progreſſiones ſinuum ex arcubus in arithmetica progreſſione, exprimentur, quarum progreſſionum ſummationes ſingularia requirunt artificia, quibus abſolutis, iſta obtinetur concluſio, quod formulae integralis valor, ſignis adhibitis ſuperioribus ſit $\frac{\pi}{n \,\text{ſin.}\, \frac{m\pi}{n}}$ et ſignis inferioribus $\frac{\pi}{n \,\text{Tang.}\, \frac{m\pi}{n}}$.

II.

De valore formulae integralis

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^{\mu}$$

caſu, quo poſt integrationem ponitur $z = 1$.

Auctore L. Eulero pag. 30.

Ex conſideratione arcuum circularium, qui eundem habent vel ſinum vel tangentem, iam olim

olim inuenit Illustr. huius dissertationis Auctor, designantibus m et n numeros quoscunque, esse

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}+\frac{1}{3n-m}\text{ etc.}=\frac{\pi}{n\,\text{sin.}\,\frac{m\pi}{n}}\text{ et}$$

$$\frac{1}{m}-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{3n-m}\text{ etc.}=\frac{\pi}{n\,\text{Tang.}\,\frac{m\pi}{n}}$$

tum vero easdem quoque series oriri ex euolutione formularum integralium in priori Dissertatione consideratarum, si quidem post integrationem ponitur $z=1$. Quod si loco n adhibeatur 2λ et m ponatur $=\lambda-\omega$, prodibit

$$\frac{1}{\lambda-\omega}+\frac{1}{\lambda+\omega}-\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda+\omega}\text{ etc.}$$

$$=\frac{\pi}{2\lambda\,\text{cos.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}=\int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z}$$

et

$$\frac{1}{\lambda-\omega}-\frac{1}{\lambda+\omega}+\frac{1}{3\lambda-\omega}-\frac{1}{3\lambda+\omega}+\frac{1}{5\lambda-\omega}-\frac{1}{5\lambda+\omega}\text{ etc.}$$

$$=\frac{\pi}{2\lambda}\,\text{Tang.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}=\int\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\cdot\frac{dz}{z}.$$

In hac igitur Dissertatione Illustr. Auctori propositum est, vt ostendat quomodo ex valoribus harum formularum integralium cognitis, illi deriuari queant, qui respondent formulis integralibus in fronte huius Dissertationis propositis, quod nouo et singulari artificio perficit. Posito nimirum

$$\frac{\pi}{2\lambda\,\text{cos.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}=S\text{ et }\frac{\pi}{2\lambda}\,\text{Tang.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}=T,$$

tam in his valoribus, quam formulis integralibus quibus aequantur, non solum quantitatem z sed etiam ω, tamquam variabilem spectat, vnde primum differentiando posita sola z variabili, colligitur

$$\left(\frac{dS}{dz}\right) = \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{1}{z},$$

tum vero denuo differentiando, posita sola littera ω variabili, erit

$$\left(\frac{ddS}{dz\,d\omega}\right) = \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{1}{z}\, lz,$$

ex quo vicissim integratione ita instituta, vt sola z habeatur pro variabili, deducitur

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, lz = \frac{\pi\pi.\ \text{fin.}\ \frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda\ \text{cof.}\ \frac{\pi\omega^2}{2\lambda}},$$

Simili modo ex altera formula colligitur

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda\,\text{cof.}\,\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}} = -\int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, lz;$$

Si nunc ponatur $\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = S'$ et $\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = T'$, idem ratiocinium prosequendo, obtinebitur

$$\left(\frac{dS'}{d\omega}\right) = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{2}{\text{cof.}\,\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}} - \frac{1}{\text{cof.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right) = \int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}}\, \frac{dz}{z}\, lz^2$$

$$\left(\frac{dT'}{d\omega}\right) = \frac{\pi^3}{8\lambda^3}\, \frac{2\ \text{fin.}\ \frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\text{cof.}\,\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}} = \int \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, lz^2$$

fimilique modo pertingere licet ad formulas integrales, quae lz^3 vel altiores potestates ipsius lz inuoluunt. Sufficit vero heic obseruasse, esse in genere

$$\int \frac{\mp z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 \mp z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, lz^{\nu} = \left(\frac{d^{\nu}S}{d\omega^{\nu}}\right), \text{ posito } S = \frac{\pi}{2\lambda\,\text{cof.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}},$$

acci-

accipiendum vero est signum superius si fuerit ν numerus par, inferius autem si impar. Simili ratione erit

$$\int \frac{+ z^{\lambda-\omega} \mp z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z}\, l\, z^{\nu} = \left(\frac{d^{\nu} T}{d\omega^{\nu}}\right),\ \text{posito}$$

$$T = \frac{\pi}{2\lambda}\ \text{Tang.}\ \frac{\pi\omega}{2\lambda},$$

heicque signum + valebit pro ν numero pari, − vero pro ν numero impari. Inuentio igitur valorum pro formulis propositis reducitur ad successiuas euolutiones differentialium

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right),\ \left(\frac{d.dS}{d\omega^2}\right),\ \left(\frac{d^3 S}{d\omega^3}\right)\ \text{etc.}\ \left(\frac{dT}{d\omega}\right),\ \left(\frac{d\,dT}{d\omega^2}\right),\ \left(\frac{d^3 T}{d\omega^3}\right)\ \text{etc.}$$

Deinde si in seriebus, quibus S et T aequantur, variabilitas ipsius ω spectetur, consequemur quoque per successiuas differentiationes, valores ipsorum $\left(\frac{dS}{d\omega}\right)$ $\left(\frac{d\,dS}{d\omega^2}\right)$ etc., vbi quidem obseruare conuenit, generatim haberi

$$\left(\frac{d^{\nu}S}{d\omega^{\nu}}\right) = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots 1 \Big(\frac{1}{(\lambda-\omega)^{\nu+1}} \mp \frac{1}{(\lambda+\omega)^{\nu+1}}$$

$$- \frac{1}{(3\lambda-\omega)^{\nu+1}} \pm \frac{1}{(3\lambda+\omega)^{\nu+1}} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^{\nu+1}} \mp \frac{1}{(5\lambda+\omega)^{\nu+1}}\ \text{etc.} \Big)$$

et signa superiora valent si ν numerus impar, inferiora vero si ν numerus par. Eadem ratione erit

$$\left(\frac{d^{\nu}T}{d\omega^{\nu}}\right) = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots 1 \Big(\frac{1}{(\lambda-\omega)^{\nu+1}} \pm \frac{1}{(\lambda+\omega)^{\nu+1}}$$

$$+ \frac{1}{(3\lambda-\omega)^{\nu+1}} \pm \frac{1}{(3\lambda+\omega)^{\nu+1}} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^{\nu+1}} \pm \frac{1}{(5\lambda+\omega)^{\nu+1}}\ \text{etc.} \Big)$$

de signis eadem regula valet, ac supra.

Quemadmodum valores formularum integralium iam propositarum, per continuam differentiationem formularum S et T eliciuntur, ita per integrationem earundem formularum, dum in $d\omega$ ductae supponuntur, aliarum formularum integralium valores exhibentur, cuius rei specimen Illustr. Auctor in Additamento Dissertationi praesenti subiuncto exponit. Nam si ponatur

$$\frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} = V$$

vbi praeter variabilem z etiam ω vt variabilis consideratur, per naturam formularum integralium duas variabiles inuoluentium erit $\int S\, d\omega = \int \frac{dz}{z} l\, V\, d\omega$, vbi in integralibus $\int S\, d\omega$, $\int V\, d\omega$, sola ω vt variabilis tractatur, tum vero in integratione $\int \frac{dz}{z} \int V\, d\omega$, sola z vt variabilis spectatur. Ex hoc igitur principio consequitur esse

$$\int S d\omega = l\,\mathrm{Tang.}\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda} = \int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z\, lz}$$

similique modo

$$\int T d\omega = -l\,\mathrm{cos.}\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \int - \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z\, lz}$$

quibus aequari debent expressiones ex seriebus deductae

$$l\,\frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)\ etc.}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega)\ etc.} \quad \text{et}$$

$$l\,\frac{\lambda\lambda}{\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\frac{9\lambda\lambda}{9\lambda\lambda-\omega\omega}\cdot\frac{25\lambda\lambda}{25\lambda\lambda-\omega\omega}\ \text{etc.}$$

Casuum particularium euolutiones, quae ab Illustr. Auctore propositae sunt, Lectores rerum Mathematicarum

ticarum

ticarum curiosi ex ipsa Dissertatione haurire non intermittent.

III.

Noua Methodus quantitates integrales determinandi.

Auctore L. Eulero pag. 66.

Refert Illustr. huius Dissertationis Auctor, dum saepius sibi occurrissent formulae integrales, quae per logarithmum quantitatis variabilis erant diuisae, se nunquam perspicere potuisse, ad quodnam genus quantitatum essent referendae. De simplicissima quidem formula huius generis $\int \frac{dz}{lz}$ constabat, eam a termino $z = 0$ ad $z = 1$ integratam, infinite magnum exhibere. Nunc vero Illustr. Auctori successit euolutio plurium huiusmodi formularum $\int \frac{P\,dz}{lz}$, quae posito post integrationem $z = 1$, valores finitae magnitudinis sortiuntur. Inter simpliciores istarum est haec $\int \frac{(z-1)\,dz}{lz}$, cuius valorem primum quantitatem finitae magnitudinis, deinde reapse ipsi $l\,2$ aequalem, singulari ratiocinio heic ostendit Illustr. Auctor, quo eodem ratiocinio quoque ostendi potest esse $\int \frac{(z^m - 1)\,dz}{lz} = l(n+1)$. Verum quum hoc ratiocinium per quantitates infinite paruas procedat, Illustris Auctor de planiori Methodo sollicitus erat, quam Methodum ipsi suppeditauit consideratio functionum binas variabiles inuoluentium. Scopus autem huius Dissertationis praecipuus is est; vt Methodus ista perspicue explicetur. Ex natura functionum, quae binas variabiles z et u inuoluunt, colligitur, quod si P aliqua huiusmodi fuerit functio, sitque

$$\int P\,dz = S, \text{ tum esse } \int dz\left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right),$$

similique modo vlterius procedendo

$$\left(\frac{ddS}{du^2}\right) = \int dz\left(\frac{ddP}{du^2}\right);\ \left(\frac{d^3S}{du^3}\right) = dz\left(\frac{d^3P}{du^3}\right) \text{ etc.}$$

Hoc principium pro praesenti negotio, vtile euadit, quando functio P ita est comparata, vt casu particulari, quo post integrationem ipsi z certus valor vtpote $z = a$, tribuitur, $S = \int P\,dz$ abeat in functionem solius variabilis u, tum enim integrationes supra memoratae locum habebunt, modo post singulas ponatur $z = a$. Simili quoque modo ex natura functionum binas variabiles inuoluentium, deducitur quod sit $\int S\,du = \int dz \int P\,du$, vbi in integralibus $\int S\,du$, $\int P\,du$ variabilitas solius u spectatur; tum vero in integrali $\int dz \int P\,du$ variabilitas solius z. Hae vero integrationes repeti quoque possunt, vt sit $\int du \int S\,du = \int dz \int du \int P\,du$ et $\int du \int du \int S\,du = \int dz \int du \int du \int P\,du$. Quodsi nunc P eiusmodi sit functio variabilium z et u, vt formulae integralis $\int P\,dz$ valor, certo casu puta $z = a$, commode exhiberi queat per quantitatem S, quae sit functio solius variabilis u; pro eodem casu $z = a$, formularum integralium $\int dz \int P\,du$, $\int dz \int du \int P\,du$, valores determinari possunt, modo formulae $\int S\,du$,

$\int du$

$\int du \int S\,du$ integrationem admittant. Vſum et adplicationem binorum horum principiorum Illuſtr. Auctor variis exemplis illuſtrauit et pro priori ſtatuendo

$$P = \frac{z^{n-u-1} \pm z^{n+u-1}}{1 \pm z^{2n}},$$

integrationes illae prodeunt, quas in Diſſertatione praecedenti contemplatus erat. Pro poſteriori ſtatuendo $P = z^u$, inuenitur

$$\int S\,du = l(u+1) = \int \frac{z^u\,dz}{lz}$$

vbi addi debet conſtans C, cuius valor intelligitur infinitus, ob $\frac{z^u}{lz}$ infinitum dum ponitur $z = 1$. At quum valor ipſius C non dependeat ab u, C eundem retinebit valorem quicquid ſit u, ideoque habebitur:

$$\int \frac{z^m\,dz}{lz} = l(m+1) + C \text{ et } \int \frac{z^n\,dz}{lz} = l(n+1) + C,$$

hincque

$$\int \frac{(z^m - z^n)\,dz}{lz} = l\,\frac{m+1}{n+1}.$$

Aſcendendo ad alteram integrationem fiet $\int du \int P\,du = \frac{z^u}{lz^2}$, ideoque $\int du \int S\,du = (u+1)(l(u+1)-1) + Cu + D = \int \frac{z^u\,dz}{lz^2}$, hinc tribus huiusmodi integralibus coniunctis elidi poſſunt conſtantes C et D. Deinde ſi ponatur

P =

$$P = \frac{z^{n-u-1} \pm z^{n+u-1}}{1 \pm z^{2n}}$$

prodibunt formulae integrales, quas Illuſtr. *Eulerus* in Additamento prioris Diſſertationis fuſius contemplatus erat. Praecipue vero heic occupatus eſt in eo, vt principii iam ſtabiliti adplicationem faciat, ad formulas integrales $\int \frac{P\,dz}{z}$, $\int P\,du$, atque $\int \frac{Q\,dz}{z}$, $\int Q\,du$, dum ſcilicet ponitur

$$P = z \operatorname{cof.} u + z^2 \operatorname{cof.} 2u + z^3 \operatorname{cof.} 3u + z^4 \operatorname{cof.} 4u + \text{etc. et}$$
$$Q = z \operatorname{fin.} u + z^2 \operatorname{fin.} 2u + z^3 \operatorname{fin.} 3u + z^4 \operatorname{fin.} 4u + \text{etc.}$$

Relationes autem iſtae horum integralium inueniuntur, vt ſit

$$\int \frac{P\,dz}{z} = -\int Q\,du;\ \int \frac{dz}{z} \int \frac{P\,dz}{z} = -\int du \int P\,du;$$
$$\int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{P\,dz}{z} = +\int du \int du \int Q\,du \text{ etc.}$$

nec non

$$\int \frac{Q\,dz}{z} = +\int P\,du;\ \int \frac{dz}{z} \int \frac{Q\,dz}{z} = -\int du \int Q\,du;$$
$$\int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{Q\,dz}{z} = -\int du \int du \int P\,du \text{ etc.}$$

Tum vero ſi illi valores integralium deſiderentur, quos conſequuntur poſito $z = 1$, in formulis integralibus, vbi ſolus angulus u pro variabili habetur, ante integrationes iam ſtatuere licebit $z = 1$, ex quo fiet

$$P = \frac{\operatorname{cof.} u - 1}{2(1 - \operatorname{cof.} u)} = -\tfrac{1}{2},\ Q = \tfrac{1}{2} \operatorname{cot.} \tfrac{1}{2} u;$$
$$\int P\,du = A - \tfrac{1}{2} u;\ \int du \int P\,du = B + Au - \tfrac{1}{4} u^2$$
$$\int du \int du \int P\,du = C + Bu + \tfrac{1}{2} A u^2 - \tfrac{1}{12} u^3 \text{ etc.}$$

nec non

$$\int Q\,du = l \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2} u;\ \int du \int Q\,du = \int du\, l \operatorname{fin.} \tfrac{1}{2} u,$$

cuius

cuius integralis euolutio non conſtat. Pro formulis variabilem z inuoluentibus, colligitur

$$\int\frac{dz}{z}\int\frac{Pdz}{z}=-\int\frac{Pdz}{z}lz;\ \int\frac{dz}{z}\int\frac{dz}{z}\int\frac{Pdz}{z}=+\int\frac{Pdz}{z}lz^2 \text{ etc.}$$

poſito nimirum $z=1$, ita vt hinc valores integralium

$$\int\frac{Pdz}{z}lz^m \text{ vel } \int\frac{Qdz}{z}lz^m$$

per arcum u expreſſos aſſignari liceat, caſu quo poſt integrationem ponitur $z=1$.

IV.

Demonſtratio Theorematis Newtoniani, de Euolutione poteſtatum binomii, pro caſibus quibus exponentes non ſunt numeri integri.

Auctore L. Eulero pag. 103.

Theorema binomiale, quod quantitatem $(a+b)^n$ euolutam exhibet, fundamentum conſtituit totius Analyſeos ſublimioris, ideoque tanto magis operae pretium eſt, vt eius veritas pro quocunque valore exponentis n ſolide demonſtretur. Modus autem quo Summus *Newtonus* ad hoc Theorema eſt perductus, eius veritatem nonniſi pro exponente n numero integro patefacit; ita vt dubium eſſe queat, an idem Theorema quoque valeat pro exponente n, ſiue numero fracto, ſeu negatiuo, ſeu adeo irrationali.

nali. Dantur enim eiusmodi caſus, vbi formula quaepiam vera eſt, quoties exponens n numerus integer poſitiuus ſupponitur, at a veritate multum abludit, ſi n ſtatuatur numerus fractus; cuius rei inſigne ſpecimen heic exhibuit Illuſtr. *Eulerus*. Hoc igitur incommodum perpendens, demonſtrationem huius Theorematis ex analyſi infinitorum petitam olim tradiderat, quam tamen a vitio petionis principii haud prorſus immunem eſſe, iam agnoſcit; ſiquidem ipſa analyſis infinitorum Theoremate binomiali innititur. Et licet vel maxime haec demonſtratio ex analyſi infinitorum ita adornari poſſet, vt veritas eius pro caſu exponentis n numeri integri tantummodo ſupponatur; tamen negari nequit demonſtrationem ex meris Analyſeos finitorum principiis deductam, eſſe praeoptandam. Huiusmodi autem demonſtrationem in Tomo VIII. Nouor. Commentar. exhibuit Illuſtr. Academiae noſtrae ſocius *Aepinus*, in qua demonſtratione vix quicquam deſideratur, niſi ſi forſan quod in eliciendis valoribus coefficientium pro ſerie, cui $(1+x)^n$ ſupponitur aequalis, multum inductioni ſit tribuendum.

Quae ab Illuſtr. *Eulero* heic proponitur demonſtratio, ita procedit, vt non tam quaeratur quomodo quantitas $(1+x)^n$ euoluenda ſit; ſed potius quinam ſit valor ſeriei

$$1 + nx + \frac{n(n-1)}{1.\,2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}x^3 \text{ etc.}$$

de qua quidem ſerie conſtat, eam caſu n numeri integri, aequalem eſſe $(1+x)^n$, generatim vero huius

huius feriei valorem indicandum iudicat Illuftr. Auctor, figno $[n]$. Quodfi nunc duo talia figna $[m]$ $[n]$ in fe inuicem ducantur, et productum exprimi fupponatur per feriem

$$1 + A x + B x^2 + C x^3 \text{ etc.}$$

coefficientes A, B, C per litteras m et n determinari euidens eft, patetque modum quo haec determinatio fit, ab indole litterarum m et n non pendere, ideoque eundem effe fiue m, n fupponantur integri, fin fracti. At fi m, n numeri integri, eft omnino

$$[m][n] = (1 + x)^{m+n} = [m + n],$$

vnde generatim quoque

$$[m][n] = [m + n], \quad [m][n][p] = [m+n+p] \text{ et } [n]^i = [i n].$$

Hinc colligitur $[n] = [i\,n]^{\frac{1}{i}}$, vnde veritas Theorematis pro cafu n numeri fracti innotefcit, fi i ita affumatur vt $i\,n$ euadat numerus integer, eft enim

$$[in] = (1 + x)^{in} \text{ hinc } [in]^{\frac{1}{i}} = (1 + x)^n = [n].$$

Si n denotet numerum negatiuum, fit $n = -m$, tumque ob

$$[m]\,[n] = [m + n] = [m - m] = [0] = 1, \text{ fit}$$

$$[n] = \frac{1}{[m]} = \frac{1}{(1 + x)^m} = (1 + x)^{-m} = (1 + x)^n.$$

V.

Problema Diophantaeum singulare.

Auctore L. Eulero pag. 112.

Problema cuius resolutionem heic tradit Illustr. *Eulerus*, illud est, quo duo quaeruntur numeri, quorum productum vtrouis siue auctum siue minutum euadat quadratum. Quum igitur hos numeros fractos esse oporteat, statuantur $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, ex quo colligitur vtramque hanc expressionem $xy \pm xz$ et $xy \pm yz$ quadrato aequari, vnde vtraque huius erit formae $aa+bb\pm 2ab$, ideoque xy fit $=aa+bb$ $=cc+dd$, tum vero remanet vt $\frac{abcd}{aa+bb}$ fiat quadratum. Si pro m, n tales accipiantur numeri vt sit $mm+nn=1$, erit $c=ma+nb$ et $d=na-mb$, tum vero si ponatur $m=\frac{pp-qq}{pp+qq}$; $n=\frac{2pq}{pp+qq}$, quaestio eo reducitur vt expressio

$$aabbp^4-2ab(aa-bb)p^3q+2aabbppqq-2ab(aa-bb)pq^3+aabbq^4$$
$$+(aa-bb)^2ppqq$$

euadat quadratum, modo $aa+bb$ fuerit quadratum, quod facile obtinetur, ponendo

$$p=4ab(aa-bb) \text{ et } q=a^4+6aabb+b^4.$$

Verum quum ex simplicissimis valoribus ipsorum a et b, valde magni prodeant pro fractionibus $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, inquirendum iudicauit Illustr. *Eulerus* an non solutiones in numeris minoribus inuenire liceat. Et licet prima quidem tentamina, quibus superiorem solutiolutionem contrahi poſſe exiſtimauerit, non ſucceſſerint, aliam tamen deinde inuenit ſolutionem valde planam et facilem. Scilicet ponendo numeros quaeſitos A, B reſpectiue aequales fractionibus $\frac{aa+bb}{2ab}$ et $\frac{cc+dd}{2cd}$, quaeſtio eo reducitur, vt hae fractiones $\frac{aa+bb}{abcd}$, $\frac{cc+dd}{abcd}$ euadant quadrata. Si igitur ſupponantur numeratores quadratis aequari, remanet tantum vt productum $abcd$ fiat quadratum. Conditione qua $aa+bb$, $cc+dd$ ſupponuntur quadrata ſolutio quidem limitatur, at haec conditio ſimul ad ſimpliciſſimos valores deducere videtur. Poſitis iam

$$a=pp-qq;\; b=2pq;\; c=rr-ss,\; d=2rs,$$

fieri debet

$$abcd=2pq(pp-qq)\,2rs(rr-ss)$$

ita vt quaeſtio reducatur ad problema iam notum, quo duo triangula rectangula in numeris quaeruntur, quorum areae inter ſe ſint aequales.

VI.

De Tabula Numerorum Primorum vsque ad Millionem et vltra continuanda; in qua ſimul omnium numerorum non primorum minimi diuiſores exprimantur.

Auctore L. Eulero pag. 132.

Continet haec Diſſertatio expoſitionem modi, quo Tabula numerorum primorum vsque ad millies mille, vel vltra ſi placuerit, labore haud ita operoſo conſtrui queat. Si enim in huiusmodi Tabula omnes numeri ordine recenſerentur, non ſolum eius conſtructio nimis euaderet operoſa ſed etiam in volumen valde magnum excreſceret; hoc vero incommodum vt euitetur omnes numeri ex hac Tabula excludendi ſunt, quorum diuiſores ſponte innoteſcunt, quales ſunt praeter numeros pares, qui per 3 vel 5 diuiſibiles ſunt. In hanc igitur Tabulam alii non referuntur numeri, niſi quorum diuiſores ſint, vel 7, vel 11 vel 13 vel alii numeri primi maiores, cuiusmodi vsque ad triginta numerantur octo. Numeri igitur hac Tabula comprehenſi, hac forma generali exhiberi poſſunt $30q + r$, vbi q deſignat numerum quemcunque, r vero non niſi octo valores recipere poteſt,

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Quod

Quod ſi nunc in forma quarta huiusmodi Tabula ſit conſtruenda, in qualibet pagina quinquaginta valores litterae q in prima columna verticali locum invenire poterunt, huicque columnae adiungi debent octo a latere, quae reſpondent octo valoribus litterae r. Quoniam itaque quaelibet pagina continet quinquaginta valores litterae q, vnaquaeque autem q valeat 30, cenſendum eſt quamlibet paginam continere 1500 numerus, illis etiam comprehenſis, qui in Tabula non comparent. Hinc ſi Tabula vsque ad millies mille ſit conſtruenda, 666 paginis abſolvetur, quod volumen pro nimis magno haberi non debet.

Si in genere quaerendi ſint numeri formae $30\,q + r$, qui per numerum primum quemcunque datum P ſint diuiſibiles, notandum eſt quod ſi vnus quispiam innotuerit valor ipſius q ſatisfaciens, omnes alios hinc deriuari poſſe, pro dato nimirum valore ipſius r. Nam ſi poſito $q = a$, fiat $30\,a + r$ diuiſibilis per P, erit quoque $30\,q + r$ diuiſibilis per P, ſi pro q aſſumatur aliquis valorum $a + \mathrm{P}$, $a + 2\,\mathrm{P}$, $a + 3\,\mathrm{P}$ etc. vel $a - \mathrm{P}$, $a - 2\,\mathrm{P}$, $a - 3\,\mathrm{P}$ etc. Si itaque pro qualibet columna verticali prima, conſtet areola, cui numerum P tamquam diuiſorem inſcribi oportet, tum per omnes paginas ſequentes areolae, quibus idem numerus inſcribendus eſt; facillime definientur. In eo igitur praecipuus labor verſatur, vt propoſito numero P, pro ſingulis reſiduis r, definiantur minimi numeri q, qui formulam $30\,q + r$ diuiſibilem producant per P, nam his numeris inventis

ventis, reliqui valores ipſorum q, continua additione numeri P inuenientur. Quomodo vero inueſtigatio iſta minimorum numerorum q, propoſitis diviſoribus ſeptem iſtis numeris

$$7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29$$

pro ſingulis reſiduis r, ſit inſtituenda, id Illuſtr. Auctor ſeptem Problematibus oſtendit quibus tamen recenſendis non eſt vt immoremur, quia deinceps totam hanc inueſtigationem octo problematibus generalibus comprehenſus eſt. Haec autem problemata ita enunciantur; propoſito diuiſore primo

$$30a \pm 1;\ 30a \pm 7;\ 30a \pm 11;\ 30a \pm 13$$

pro ſingulis reſiduis r, omnes inuenire quotos q, vt formula $30\,q + r$ fiat diuiſibilis, per aliquem diuiſorum propoſitorum. Vt idea ſolutionis horum problematum conſtet, ſeligamus illud quo ponitur diuiſor primus huius formae $30\,a + 11$. Quum itaque minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit

$$30.\ 30\,a\,a + 30.\ 22\,a + 121$$

pro hoc numero erit

$$q = 30\,a\,a + 22\,a + 4 \text{ et } r = 1.$$

Iam pro reliquis numeris per $30\,a + 11$ diuiſibus, quia tantum numeri deſiderantur impares, ad numerum ſupra inuentum continuo addatur

$$60.\,a + 22 = 2\,a^{(q)} + 22^{(r)},\ \text{ſiue } (2\,a + 1)^{(q)} - 8^{(r)}$$

hocque modo iſta conficietur Tabella

q	r
$30.aa + 22.a + 4$	1
$30.aa + 24.a + 4$	23
$30.aa + 26.a + 5$	15
$30.aa + 28.a + 6$	7
$30.aa + 30.a + 6$	29
$30.aa + 32.a + 7$	21
$30.aa + 34.a + 8$	13
etc.	etc.

hinc vero ſeligantur illi quoti q, qui reſpondent octo reſiduis aſſumtis 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Reſidua enim eiusmodi vt 15, 21, 5, 27, 3, 25, ſponte liquet, numeros exhibere per 5 aut 3 diuiſibiles, qui ex Tabula excluſi ſunt. Singulis his octo Problematibus Illuſtr. *Eulerus* Tabulas ſubiunxit, quae minimos exhibent quotos pro diuiſoribus formae propoſitae, millionario minoribus, ad ſingula octo reſidua relatos. Tum vero ex octo his Tabulis, Tabulam generalem ſubſidiariam confecit, qua pro omnibus diuiſoribus primis a 7 vsque ad 1000, minimi quoti ſingulis octo reſiduis reſpondentes, exhibentur. Hoc autem praeſtito, opera ipſa Tabulas conficiendi in eo conſiſtet, vt procedendo a numeris primis minoribus ad maiores, pro quouis ex Tabula ſubſidiaria exquiratur quotus q, qui pro reſiduo r exhibet numerum minimum formae $30.q+r$ per propoſitum diuiſibilem. Quodſi hic diuiſor dicatur D, in columna verticali quaeratur valor ipſius q, tumque in eadem linea horizontali, ſub reſiduo r

 illa

illa inuenietur areola cui inſcribi debet diuiſor propoſitus D. Reliquae autem areolae eodem diuiſore implendae inuenientur, ſi pro q ſucceſſiue adhibeantur, $q + D$, $q + 2D$, $q + 3D$ etc. Areolae quae diuiſore non impletae ſunt, ſignentur littera p, quae ſignificabit numerum huic areolae reſpondentem eſſe primum. Vſus autem huiusmodi Tabulae facilis eſt, nam propoſito numero quocunque, quem examinare quis voluerit, vtrum primus ſit nec ne, et quosnam habeat diuiſores, diuidet iſtum numerum per 30, quotusque dabit valorem litterae q, reſiduum vero erit r. In prima igitur columna verticali quaeratur numerus q, et a latere inuenietur areola ſub reſiduo r, quae oſtendet vtrum numerus ſit primus, vel quemnam habeat minimum diuiſorem. Vt conſtructio ipſius Tabulae eo facilius procedat, totus labor inter plures perſonas diſtribui poſſet, in ſeptem ex: cauſſa penſa, ita vt primum a 0 ad 5000, ſecundum hinc ad 10000, tertium ab hoc termino ad 15000, quartum ab hoc ad 20000, quintum ad 25000, ſextum ad 30000 et denique ſeptimum ad finem porrigeretur. Quo autem melius perſpiceretur idea huius laboris, Tabulam adnectendendam iudicauit Illuſtr. *Eulerus*, qua valores ipſius q a 33300 ad 33400 comprehenduntur, ideoque illi numeri, qui millies mille proxime ſunt minores.

VII.

VII.

De resolutione Polygonorum rectilineorum. Dissertatio Prima.

Auctore A. I. Lexell pag. 184.

Cum iam diu regulae pro resolutione triangulorum, Geometris familiares fuerint, mirari licet, cur non reliquarum figurarum rectilinearum resolutionem adgressi sunt; quod sine dubio ea de caussa factum est, quia resolutio reliquarum figurarum ad communes Trigonometriae regulas facile reducitur. Interim tamen ad promouendos fines Geometriae vtile erit, si pro hac resolutione regulae exhiberi queant generales et a praeceptis Trigonometriae independentes, quo in negotio Auctor huius Dissertationis praeeuntem habet Cel. *Lambert*, qui ideam Tetragonometriae seu doctrinae de resolutione quadrilaterorum primus exhibuit. Quum pro quolibet Polygono praeter parter eius principales, latera et angulos quibus includitur, considerari quoque possint lineae diagonales et anguli, quos hi siue inter se, seu cum lateribus Polygoni constituunt facile intelligitur, si singularum harum partium quis rationem habere voluerit, rem fore valde difficilem et operosam; quare Auctor noster considerationem tantum partium principalium suscipiendam iudicauit, imprimis quod tota haec inuestigatio ad bina principia aeque generalia, ac facilia, reuocari queat. Sunt vero ista bina Theoremata:

Si Polygoni rectilinei anguli externi dicantur $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots \lambda$ et *latera ipsis interiacentia respectiue designentur per* a, b, c, d ... l *erit*

I. $a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) + c.\sin.(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + l \sin.(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \lambda) = 0$

II. $a \cos.\alpha + b \cos(\alpha+\beta) + c.\cos.(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + l \cos.(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \lambda) = 0$

vbi quidem $\sin.(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \lambda)$ poni potest 0 et $\cos.(\alpha + \beta + \gamma \ldots + \lambda) = 1$.

Per combinationem binorum horum Theorematum, omnes eae aequationes inuenientur, quae resolutioni vniuscuiusque Polygoni inseruiunt, id quod Auctor noster exemplo Tetragoni, Pentagoni, Hexagoni et Heptagoni ita illustrauit, vt simul haud obscurum esse possit quomodo res pro alio quocunque Polygono sit perficienda. Vt vero applicatio aequationum sic inventarum ad resolutionem Polygonorum fieri queat, praeprimis nosse oportet, quaenam quaestiones pro vnoquoque Polygono resoluendae occurrant. Notum autem est in vnoquoque Polygono requiri, vt si laterum numerus sit n, partes cognitae habeantur $2n-3$, ex quibus partibus saltem $n-2$ latera occurrere oportet. Nam si tantum $n-3$ latera haberentur cognita, problema non esset determinatum, siquidem vnus Polygoni angulus, semper ex reliquis determinatur. In aequatione igitur pro resolutione Polygoni, semper $2(n-1)$ occurrent partes, et prouti inter has partes vel omnia habeantur latera, vel tantum

tantum $n-1$, bina solutionum habebimus genera. In priori vbi n occurrunt latera et $n-2$ anguli, quaeri potest vel quodpiam laterum, datis reliquis numero $n-1$, et angulis numero $n-2$, vel quispiam angulorum, datis omnibus lateribus et angulis numero $n-3$. In posteriori genere ex datis lateribus numero $n-1$ et angulis numero $n-2$, quaeritur quispiam angulorum. Praeter haec autem bina genera, habetur adhuc tertium vbi ex angulis $n-1$ et lateribus $n-2$ quaeritur quodpiam laterum, distinguendum autem est hoc genus a prioribus, quia heic omnes Polygoni anguli reapse sunt cogniti. Quaestiones ad vnamquamque classem pertinentes, in ordines redigi possunt, si attendatur ad situm, quem partes omissae inter se tenent; quum igitur pro prima classe bini anguli in aequatione non reperiantur, solutionum ordines varios habebimus, prouti inter hos duos angulos vnum, bina, trina, etc. latera interiacent; hocque modo pro numero laterum siue impari $2m+1$, siue pari $= 2m$, consequemur m ordines. In Secunda classe vnum latus, vnusque angulus ex aequatione exsulant, igitur solutionum ordines cognoscentur ex situ, quem tenet angulus omissus respectu lateris omissi; hincque pro numero laterum impari $2m+1$, haec classis dabit $m+1$ ordines, pro numero autem pari $2m$, tantum m ordines. In Tertia classi respiciendum solummodo est, ad situm lateris quaerendi, respectu lateris omissi. Solutiones vero sub vnoquoque ordine primae classis contentae reperientur, si attendatur ad latera et angulos, qui respectu angulorum omissorum eundem tenent situm, et quidem si numerus laterum fuerit impar $2m+1$, vnusquisque ordo $2m+1$ diuersas praebebit solutiones, vnde solutionum numerus $m(2m+1)$; sin vero fuerit numerus laterum par, duo casus iterum erunt secernendi, prouti scilicet hic numerus sit vel pariter par, vel impariter par. Pro priori casu posito numero hoc $=4m+2$, $2m$ ordines primae classis praebebunt $4m+2$ solutiones, vnusque $2m+1$ solutiones, hinc omnes coniunctim $(4m+1)(2m+1)$ solutiones. Pro numero laterum pariter pari $4m$, $2m-1$ ordines dabunt $4m$ solutiones, vnus vero tantum $2m$, hinc omnes iunctim $2m(4m-1)$. Pro secunda classe posito numero laterum impari $2m+1$, ordines m dabunt $2m$ solutiones, vnus vero m solutiones tantum, hinc omnes iunctim $m(2m+1)$. Posito numero laterum pari, vnusquisque ordo praebet tot solutiones, quot anguli sunt Polygoni demto vno, hincque omnes iunctim pro numero laterum impariter pari $(4m+1)(2m+1)$ et pro numero pariter pari $2m(4m-1)$. Hincque regula iam deducitur generalis, siue numerus laterum fuerit par seu impar, si exprimatur per N semper esse numerum solutionum ad binas priores classes pertinentium $N(N-1)$. Hinc pro triangulo habebuntur 6, pro Tetragono 12, pro Pentagono 20, pro Hexagono 30; sicque vlterius. Ad finem huius Dissertationis subiunxit Cl. Auctor solutiones nonnullorum Problematum ex doctrina combinationum, quae cum hoc argumento quandam habent affinitatem.

tem. Sunt vero iſta Problemata: pro quolibet Polygono determinare numerum diagonalium, qui poſito numero laterum N erit $\frac{N(N-3)}{2}$; inueſtigare numerum angulorum in quolibet Polygono ſiue laterum ſeu diagonalium, qui erit $= \frac{N(N-1)(N-2)}{2}$ tum vero inuenire quot modis data puncta quorum numerus eſt M, ita lineis rectis iungi poſſunt, vt oriatur Polygonum numero laterum N. Numerus autem horum modorum erit

$$= \frac{M}{2\,N}.(M-1)(M-2)(M-3)\ldots(M-N+2)(M-N+1)$$

hinc ſi $M=N$, fiet $= \frac{1}{2}(N-1)(N-2)(N-3)\ldots 2.\ 1.$

PHYSICO-

PHYSICO-MATHEMATICA.

I.

Commentatio phyſico mechanica generalior principii de coëxiſtentia vibrationum ſimplicium haud perturbatarum in ſyſtemate compoſito.

Auctore D. Bernoulli pag. 239.

Principium hoc, de quo in variis diſſertationibus, Commentariis noſtris et Berolinenſibus inſertis, profundiſſimae iam extant Cel. Auctoris disquiſitiones, idem in hac diſſertatione aliquot exemplis atque ipſo experientiae teſtimonio confirmat. Omnia corpora ſonora infinite multos ſonos et infinite multos modos correſpondentes peragendi vibrationes ſuas inuoluere et in qualibet vibrationum diuerſa ſpecie inflexiones partium corporis diuerſo modo fieri, Cel. Auctor exemplo a chordis muſicis deſumpto oſtendit; in eiusmodi enim chorda ſaepe ſimul duo pluresue ſoni re ipſa auditu percipiuntur; ita, vt attentus muſicus, praeter ſonum fundamentalem eiusque duodecimam, tertiam quoque maiorem octauae duplicis ſiue decimam ſeptimam ſimul ſonantem diſtinguere queat, nec niſi nimia cum ſono fundamentali conſonantia impediatur, quominus et ipſam octa-

vam

vam cum octaua duplice ſubaudiat. Porro ſi lamina chalybea longiuſcula, cuiusmodi plures combinatae ludum muſicum gallice carillon dictum efformant, e filo ſuſpenſa percutiatur; plerumque pro re nata quatuor pluresue ſoni diuerſi, diſtincti atque pleni; immo in choro muſico ſinguli ſoni, non tenore ſolum, ſed et modificatione inſtrumenti diſcrepantes, etſi ſimul ſonantes et in eodem aëre ad aurem propagati, diſtincte tamen e longinquo auribus percipiuntur, manifeſto indicio, innumeras vibratiunculas in qualibet particula aërea excitatas minime ſeſe perturbare, ſed ſingulas, ac ſi vnaquaeque ſola eſſet, ſuam illibatam tueri indolem. Sonos laminarum eiusmodi chalybearum ingenioſa methodo ſcrutatus eſt Cel. Auctor; analoga ei, qua *Newtonus* radios diverſicolores examini ſuo ſubmiſit; cum ſcilicet intellexiſſet, laminam inter vibrandum figuram aſſumere anguiformem, quae axem in diuerſis punctis interſecet totidemque quaſi *nodos* efficiat: methodum hinc deduxit ſagaciſſimus Vir, ex eiusmodi lamina percuſſa inter plures, quos edit, ſonos datum quendam ſolum, ſuppreſſis ceteris omnibus, eliciendi; quaelibet ſcilicet vibrationum ſpecies et quilibet ſonus iſti ſpeciei debitus determinatum ſuum habet eiusmodi nodorum numerum; ita, vt pro ſimpliciſſima vibratione et ſono fundamentali duo, pro ſequente tres et ita porro nodi ſint orituri, quorum poſitiones calculo definire Cel. Auctor iam olim docuit. Si ergo v. c. ſonum, ordine ſuo tertium adeoque vibrationibus quatuor nodos formantibus debitum, ſolum ex lamina percuſſa elicere placeat; notetur iſte ſonus in monochordo; tum lamina in ſingulis quaternis nodis digitis comprimatur et percutiatur quo facto ea eundem, ſi experimentum omni cura inſtituatur, ſonum eſt editura. Hiſce praemiſſis Cel. Auctor vſum principii ſui latiſſime patentem in abſtruſiſſimis huius argumenti quaeſtionibus euoluendis comprobat, et in hac theoria plene contineri oſtendit, quicquid catenae ſuſpenſae, et chordae tenſae ſiue vniformiter ſiue inaequaliter craſſae, motibus ſuis reciprocis, proprium habent; vbi notandum eſt, vibrationes illas in ſyſtemate coëxiſtentes alias eſſe aliis tardiores; in chordis vero vniformiter craſſis vibrationem cuiuscunque ordinis exacte ſubmultiplam eſſe vibrationis fundamentalis; vnde intelligitur, ſi omnes omnium ordinum vibrationes *ſimul* incipiant, chordas vniformes pro qualibet curua initiali poſt quamuis vibrationem fundamentalem ad ſtatum quietis momentaneae reduci; quam proprietatem primus animaduertit Ill. *D'Alembert*; cui tamen theorematì hanc addit conditionem Cel. Auctor, vt radius oſculi ſeu curuaturae pro quouis puncto pro infinito id eſt infinities maiore, quam longitudo chordae, poſſit aſſumi; vnde omnes variationes, quae per ſaltum fiunt, excluduntur. Poſſunt vero etiam vibrationes diuerſorum ordinum *non ſimul* incipere; quem caſum quoque complectitur principium Bernoullianum, vnde Cel. Auctor ſolutionem inde petitam multo generaliorem exiſtimat ea, quae a ſummis Geometris eſt allata. Inprimis vero inſignis illius

illius eſt vſus in ſoluendis quaeſtionibus eiusmodi ad ſiſtemata corporum numero finitorum quotcunque pertinentibus, quae non videntur alia methodo pertractari poſſe; quod argumentum Cel. Auctor exemplo eoque ſimpliciſſimo illuſtrat, dum ſcilicet conſiderat pendulum bimembre, in quo duo corpora filo intermedio connexa, ſuperne altero filo ſuſpenduntur motibusque reciprocis agitantur, quorum phaenomena hic acutiſſima analyſi indagantur.

II.

Commentatio phyſico-mechanica ſpecialior de motibus reciprocis compoſitis, multifariis, nondum exploratis, qui pendulis bimembribus facilius obſeruari poſſunt, in confirmationem principii ſui de coëxiſtentia vibrationum ſimpliciorum.

Auctore Dan. Bernoulli pag. 260.

Praeſens diſſertatio plenam continet euolutionem vibrationum penduli eiusmodi bifili, duobus penduſculis onuſti, cuius modo mentionem fecimus. Breuitas partim, partim quoque commoditas, quo ſcilicet experimenta, calculos theoriae confirmatura, euaderent faciliora, ſuaſerunt, vt Cel. Auctor caſum

 ſum

ſum ſimpliciſſimum eligeret et ſimul quoque pendulum illud bifilum ſtatueret aequimembre. Duo itaque elementa ſuperſunt, a quorum variis conditionibus vibrationes penduli abſolutae variantur; nempe 1°. *relatio inter maſſas binorum corporum* et 2de *diſtantiolae illae* ad quas ambo illa ponduſcula in primo motus abſoluti momento concipiuntur diducta: Singulae huius penduli vibrationes abſolutae componuntur ex duabus oſcillationibus regularibus binorum iſtorum corporum; pro vtraque aſſignari poteſt longitudo penduli ſimplicis iſochroni; et ratio inter longitudines duorum horum pendulorum ſimplicium pendet a relatione inter maſſas ponduſculorum; poſita ſcilicet maſſa corporis ſuperioris $= m$; inferioris $= \mu$ erunt duae illae longitudines quaeſitae $= l \mp l \sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$ vbi ſignum ſuperius pro oſcillationibus celerioribus, inferius pro tardioribus valet, et l deſignat longitudinem fili vtriusque. Si itaque ſtatuatur $l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} : l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \alpha^2 : \beta^2$, vbi $\alpha < \beta$; tempora oſcillationum ſimplicium erunt commenſurabilia, quae autem ſi denotentur per t et T; fingatur in genere $T = n\,t$. His poſitis Cel. Auctor diuerſarum hypotheſium euentus percurrit, prouti n fuerit numerus aut rationalis isque vel integer vel fractus aut irrationalis; et ſingulis caſibus phaenomena totius vibrationis abſolutae inueſtigat, oſtenditque, quomodo experimentis haec theoria vlterius poſſit confirmari; vbi etſi negari non poteſt, inter perpetuas rerum omnium variationes motibus iſtis poſt magnum eorum numerum ab alienis impedipedimentis physicis vix euitabiles anomalias inductum iri; experimentatoris tamen intelligentis oculos emicantia veritatis vestigia haud effugient. In fine dissertationis Cel. Auctor notatu maxime dignum affert exemplum de singulari oscillationis genere in bilance obseruatae, quod ipsis Cel. Auctoris verbis hic recensebimus:

Cum aliquando in libra, maiori eaque subpigra, alteram lancem forte fortuna ad latus diducerem moxque rursus dimitterem, accidit vtique, vt protinus hinc inde oscillaret nec ab initio lanx opposita de loco moueretur; mox autem et haec quoque agitari sensimque maiores oscillationes formare, dum e contrario lanx prior motum suum oscillatorium gradatim perderet tandemque fere quiesceret; hoc ipso momento altera maximum motionis gradum, initiali lancis sociae fere aequalem, attingebat: tunc ordine contrario eaedem mutationes repetebantur, vsque dum prima lanx motum suum primitiuum integrum resumeret sociaque quieti ad momentum redderetur; haec autem oscillationum communicatio ac reciprocatio diu satis se manifestabat. Atque huius motus oscillatorii a Cel. *Bernoullio* hic descripti determinatio, dubium est nullum, quin sit maxime ardua et singularia prorsus postulet Analyseos artificia.

III.
De Oſcillationibus minimis penduli quotcunque ponduſculis onuſti.

Auctore L. Eulero pag. 285.

Initio huius diſſertationis Ill. Auctor hoc argumentum a primis inde mechanicae principiis repetit; conſiderat ſcilicet pendulum tenuiſſimum ſiue grauitatis expers, cui penduſcula quotcunque data in datis a ſe inuicem interuallis fuerint alligata, et motus qualiscunque oſcillatorius initio impreſſus; tum pro determinato aliquo ſitu, quem elapſo quodam tempore hoc pendulum eſt habiturum, Ill. Auctor vires acceleratrices inueſtigat, quibus ſingula illa ponduſcula ſollicitantur; vnde per notas mechanicae leges totidem adipiſcitur aequationes differentiales ſecundi gradus, quibus motus determinatio continetur. Vix autem in reſoluendis his aequationibus, quae pro quantiscunque etiam oſcillationibus valent, pedem proferre liceret; niſi excurſus penduli ſtatuantur quam *minimi*; hac vero conditione etſi inuentae aequationes haud parum contrahuntur, nec niſi vnicam continent variabilium dimenſionum; earum tamen reſolutio adeo non eſt obuia, vt potius non niſi plane ſingularibus ſuccedat calculi artificiis, quae Cel. Auctor hic dilucide exponit; vbi ſimul euincitur, principium Bernoullianum, quo omnes huiusmodi oſcillationes ex duabus vel pluribus motibus oſcil-

oſcillatoriis ſimplicibus et regularibus componi ſtatuuntur, in primis motus principiis eſſe fundatum.

Cum vero haec Ill. Auctoris reſolutio vix ad plura, quam quatuor, ponduſcula felici ſucceſſu poſſit adhiberi; alia eaque maxime elegans methodus hoc problema perfectiſſime reſoluendi adiungitur; quae vero iam hac ſingulari difficultate premitur, vt vix vllo modo ad caſum determinatum, quo penduli ſtatus initialis praeſcribitur, poſſit, ſi vel tria tantum ſint ponduſcula, adaptari. Sub finem diſſertationis Ill. Auctor in ſpecie eum caſum euoluit, quo omnia ponduſcula et omnia eorundem interualla ſupponuntur aequalia, eumque ad aequationem ordinis *n* perducit, cuius ſi elici poſſent radices, completa huius caſus haberetur reſolutio.

IV.

De motu oſcillatorio binarum lancium ex libra ſuſpenſarum.

Auctore L. Eulero pag. 302.

Singulare hoc motus oſcillatorii genus ab Ill. *Bernoullio* obſeruatum ſupra iam in Summario diſſertationis ſecundae Ill. *Bernoulli* deſcripſimus. In hac, de qua agimus, diſſertatione Ill. *Eulerus* id operam dat, vt motus huius ſingularis admirabilia phaenomena, quibus euoluendis ſubſidia analytica ad motus

tus oſcillatorios definiendos a Geometris adhiberi ſolita vix ſufficere videntur, e primis inde motuum principiis perſcrutetur omnesque eius circumſtantias ſollicite expendat. Prima, quae in obſeruationis expoſitione ſe offert, circumſtantia eſt ea, vt libra dicatur fuiſſe *ſubpigra*; vnde centrum grauitatis iugi infra centrum motus eſt ſtatuendum. Conſiderat itaque Ill. Auctor libram iam circa centrum ſuſpenſionis in motu conſtitutam ita, vt ſub certis angulis iugum a poſitione horizontali, vtraque vero lanx a verticali deflectat; Locum vtriusque lancis per coordinatas orthogonales ſupra linea horizontali per centrum motus ducta conſtitutas deſignat, et vires acceleratrices inueſtigat, quibus vtraque lanx in directione vtriusque coordinatae ad motum ſollicitatur, quaeque partim a grauitate, partim a tenſionibus filorum oriuntur; vnde igitur per principia mechanica iam quatuor obtinentur aequationes differentio-differentiales; quibus inuentis motum quoque iugi conſiderat, cuius acceleratio angularis quintam ſuppeditat; quibus quinque aequationibus tota determinatio motuum et iugi et lancium continetur; ſiquidem eae totidem incognitis ſcilicet praeter binas tenſiones filorum inclinationi iugi et binis angulis, quibus vtraque lanx a linea verticali deflectit, ad quoduis tempus definiendis adeoque vero tam iugi quam lancium ſitui aſſignando, ſufficiunt. Transcenderet vero harum aequationum reſolutio vires analyſeos, niſi iſtos angulos quam *minimos* ſtatuere et omnem huius argumenti disquiſitionem ad oſcillationes

lationes

lationes *minimas* reſtringere vellemus. Hac vero conditione admiſſa, Ill. Auctori ſolutionem difficillimi huius problematis feliciter ad finem perducere licuit; ex qua iam intelligitur, phaenomena a Ill. *Bernoullio* obſeruata non niſi in lancibus *ſubpignis* locum habere poſſe; ſi vero centrum grauitatis iugi cum centro motus congrueret, iugo nullum plane motum oſcillatorium impreſſum iri, nec vllum fore, quamdiu iugum, inclinatum licet, quieſcit, inter vtriusque lancis oſcillationes commercium; de aliis vero lancibus, in quibus centrum grauitatis adeo altius eſt puncto ſuſpenſionis, plane non eſt quaeſtio; ſiquidem iugum vel minima inclinatione ſubuertitur. His itaque expeditis Ill. Auctor in phaenomena horum motuum adcuratius inquirit; orditur a caſu ſimpliciſſimo, quo iugum in ſitu horizontali immobile relinquitur, lancibus autem ambabus qualiscunque motus imprimitur; fiet, vt et iugum et lances regulari motu oſcillatorio neutiquam ſeſe inuicem turbante ſeorſim ferantur; vnde hic caſus in obſeruatione Bernoulliana certe locum non obtinuit. Supponit itaque Ill. Auctor, iugo ſub initium experimenti certam quandam inclinationem fuiſſe inductam eamque tum ſibi libere permiſſam; in qua hypotheſi iterum tres caſus ſunt diſtinguendi; aut enim, dum haec inclinatio iugo conciliaretur, binae lances interim quieuerunt, aut alterutri tantum aut ambabus ſimul aliquis motus imprimebatur. Hos ſingulos caſus Ill. Auctor ad examen reuocat; primo caſu ambas lances perpetuo

 in

in quiete, oſcillante licet iugo, perſeueraturas docet theoria; ſecundo altera lanx nullum plane motum conciperet, certe quamdiu oſcillationes lancis ad motum concitatae pro minimis haberi poſſunt; reſtat ergo tertius caſus, in quo fortaſſis obſeruatio Bernoulliana locum habere videri debet; quod vt pateſceret, Ill. Auctor libram hac ratione motam in determinato quodam exemplo perſequitur et poſitionem tam iugi, quam lancium ad ſingula ſemiminuta ſecunda aſſignat; neque vllibi vlla admirabilium iſtorum phaenomenorum, de quibus diximus, alternae ſcilicet oſcillationis et quietis lancium, veſtigia deprehendit. Facile itaque hinc intelligitur, aliquam librae circumſtantiam in hac diſſertatione non fuiſſe in computum adductam, quae in libra, circa quam Ill. *Bernoullius* obſeruationem inſtituit locum obtinuit; nec latere Ill. Auctorem haec differentia potuit, ſiquidem hic contemplatus eſt libram non niſi circa centrum motus ſui mobilem; quod ipſum ergo centrum tanquam immobile eſt ſpectatum; dum in libra Bernoulliana, non ex hoc centro, ſed ex ſcapo ſuſpenſa, ipſum illud motus centrum cum tota libra eſt mobile et ex impulſu alterutrius lancis reipſa ad motum ſollicitatur.

Hunc igitur caſum Ill. Auctor peculiari diſſertatione complectitur

V.

V.

Explicatio motus oſcillatorii mirabilis in libra maiore obſeruati.

Auctore L. Eulero pag. 325.

Ad ſolutionem praeſentis problematis iam per ea, quae in praecedente diſſertatione ſunt expoſita, via egregie ſternitur; ſola enim expreſſio pro acceleratione angulari iugi lancis iam ex *trutina* ſuſpenſae adeoque reſultans inde aequatio differentio-differentialis diuerſam a priori formam induet. Ill. Auctor tamen hoc negotium iterum a primis principiis repetit, et propoſitam quaeſtionem ad quinque aequationes differentiales ſecundi gradus reuocat, quibus ſub conditione oſcillationum *minimarum* reſoluendis ſublimia Analyſeos artificia adplicat. His feliciter expeditis origo mirabilis illius phaenomeni, alternae ſcilicet quietis et oſcillationis binarum lancium, ſtatim manifeſtis ſe prodidit indiciis; ſi enim deflexionem vnius lancis a linea verticali per η, eam alterius per ϑ deſignemus; expreſſiones horum angulorum ſequentes formas ſunt adeptae; $\eta = P + Q$; et $\vartheta = P - Q$, vbi litterae P et Q quantitates indicant cum tempore certa lege variabiles; ſi igitur, durantibus librae oſcillationibus, euadat $P = Q$, lanx prior ad maximas excurſiones, poſterior ad quietem perueniet; vbi vero temporis ſucceſſu deinceps fiet

$P = -Q$; commutata erit ſcena, quieſcet prior lanx, altera maximos adepta gradus oſc llationis ſuae; quae viciſſitudo, vsque dum omnis motus fuerit exſtinctus, ſtatis recurret temporibus; ita, vt motus illi obſeruati, etſi prima fronte videntur inextricabiles, iam pleniſſime ex hac theoria poſſint explicari. Ceterum cum ſolutio completa ſex quantitates arbitrarias per integrationem ingreſſas inuoluat; facile intelligitur, infinitam motuum varietatem et complura ſingularia phaenomena hic locum habere poſſe; vnde Ill. Auctor pro dato ſtatu initiali euolutionem aliquot caſuum ſpecialium in fine ſubiungit.

VI.

De motu turbinatorio chordarum muſicarum; vbi ſimul vniuerſa theoria tam aequilibrii, quam motus corporum flexibilium ſimulque etiam elaſticorum breuiter explicatur.

Auctore L. Eulero pag. 340.

In motibus chordarum vibrantium infinitam dari varietatem, omnes earundem theoriae a Geometris allatae abunde teſtantur; hoc tamen non obſtante datur motus vibratorii genus, quod iſtae theoriae, quamuis late pateant, non ſunt complexae,

cum

cum ſcilicet motus oſcillatorii non, vt communiter ſupponi ſolet, in eodem ſemper plano peraguntur, ſed ſingula chordae vibrantis puncta motu quaſi *turbinatorio* circa axem reuoluuntur; cuiusmodi motus in craſſioribus chordis adeo oculis diſtingui poſſunt. Circa hoc igitur motus oſcillatorii genus penitius euoluendum praeſens verſatur Ill. Auctoris diſſertatio, in qua vniuerſa theoria de filorum et perfecte flexibilium et elaſticorum aequilibrio et motu ad ſummum perfectionis gradum euecta merito eſt cenſenda. Ceterum cum haec diſſertatio meris abſoluatur calculis analyticis: Geometras grauiſſimi huius argumenti curioſos ad eam ipſam ablegamus.

PHYSICA.

I.

Deſcriptio Phalli quinquanguli ſeu fungi Sinenſium *Mo - ku - ſin.*

Auctore Reuer. P. Cibot S. I. pag. 373.

Transmiſſam a Reuer. P. *Cibot* e Soc. I. Misſionario Pekinenſi deſcriptionem Fungi apud Sinas prouenientis, gallico ſermone exaratam, Academia dignam cenſuit, quae Commentariis ſuis inſeratur, tanto magis, quo rarius producta naturalia in penetralibus Chinae genita Phyſiophilis innoteſcunt et quo curioſior variis momentis deſcripta viſa eſt ſpecies, quam ad *Phallos* botanicorum pertinere opinamur, nouamque huius generis minime adhucdum numeroſi acceſſionem ſtatuimus, a forma *ſtipitis pentagona, capituloque quinqueualui* praecipue determinandam. Applauſum quoque mereri videtur opinio auctoris de fungorum poſſibili multiplicatione per artificiale ſolum certis ſpeciebus proprium, et de proprietate radicum putridarum certae arboris productioni peculiarium inter fungos ſpecierum fauente. Nollemus tamen inde quidquam pro generatione aequiuoca, et contra corporum organicorum ortum e ſemine, vel ouo vel qualicunque ſtamine proprio concludi. Etenim in artificiali fungorum productione hoc tantummodo prae-

ſtari

ſtari poſſe putamus, vt ſolum laetiori incremento et multiplicationi peculiarium ſungorum adaptatum praebeatur atomariis fungorum ſeminibus in ima atmoſphaera obuolitantibus; non vero, hoc ipſum ſolum geniali virtute ſuos fungos ſponte producere poſſe, ſanus hodie quisquam exiſtimabit. Neque hoc auctoris noſtri ſententia eſſe videtur, licet a Chinenſium forte philoſophia haud abhorreat. — Certo vero certius eſt fungorum multas ſpecies ſub determinatae arboris vmbra ſolum e putreſcentibus arboris ramulis frondeque paratum inuenire, cui praeſertim addictae et adaptatae ſunt, imo multas certarum radicum vel arborum quaſi paraſiticas eſſe; Idque adeo in propatulo cuiuis adtentius inſpicienti erit, vt etiam apud plebem ruthenicam complures Agaricorum Boletorumque ſpecies ab arbore, ſub qua praecipue prouenire et colligi ſolent, v. gr. Quercu, Populo, Betula, Pinu, cet. denominatae fuerint et vulgo appellentur; idemque apud alias gentes, fungorum licet minus curioſas, obtinet.

II.

De ſtructura Veſiculae ſelleae Leonis.

Auctore C. F. Wolff pag. 379.

Inter eas partes, quae in corpore leonis imprimis notabiles viſae ſunt, et quae in ſua ſtructura aliquid ſingulare habent, etiam veſicula ſellea referenda da eſt, cuius interna cauitas tot plicis multifariis inſtructa, in tot loculamenta cellasque per ipſas illas plicas diuiſa eſt, vt non vnam cauitatem, ſeu receptaculum, ſed potius congeriem multarum cauitatum et folliculorum hanc leoninam veſiculam eſſe dixeris. Eo magis autem haec ſtructura Anatomicorum attentionem excitauit, quo minus ſimile quid in homine et in aliis animalibus obſeruatur, et quo facilius ex eadem calidum illud leonis temperamentum aliquo modo explicari poſſe videtur. Totius igitur veſiculae, praeſertim vero internae eius ſtructurae et plicarum, quae varii generis ſunt, deſcriptio in hac diſſertatione exhibetur, iconeque illuſtratur, quae minutiſſime omnia exprimit, quaecunque in illa obſeruari potuerunt.

Ductum cyſticum ſolum, qui ſolus in homine cauernoſus eſt, aequalem intus et plicis priuatum eſſe videbis. Collum autem et partem corporis fere dimidiam inſignibus pulcherrimisque plicis plenam reperies. Maxime notabilis eſt in alio loco tanta plicarum conglomeratio, quibus tota cauitas veſiculae adeo occupatur, vt nonniſi exiguum foraminulum, quod acum vix admittit, ſuperſit, et quibus igitur veſicula fellea in duos quaſi ſaccos ſeparatos diuiditur, ſolo illo foramine inter ſe communicantes. Plicae ipſae variae figurae et fabricae ſunt. Alibi ſimplices dantur ſemilunares et diſtinctae, alibi multae in vnum glomerem compoſitae ſunt. Vt veſicula plicis intus, ita plicae porro rugis in ſuis ſuperficiebus exornantur, quo tota illius facies

facies interna criſpa efficitur. Fundus tamen ſolis, quas dixi rugis, nullis veris plicis gaudet, et generatim maxima plicarum copia in parte veſiculae poſteriori poſita eſt. Iconem explicatio comitatur eorum, quae in icone continentur, ex qua vel ſola lector ideam veſiculae felleae leonis haurire poterit.

III. IV et VI.
Equus Hemionus, Tetrao arenaria et Lacerta apoda,
deſcribente P. S. Pallas p. 394. ſeq. et pag. 435.

Abſoluto itinere Cl. Auctor nouas animalium ſpecies, quas per borealem Aſiam obſeruauit, ſucceſſiue illuſtrare pergit, atque praeſenti Commentariorum Volumini inſerit Quadrupedis, Auis atque Amphibii, quae imprimis memoriae digna ſunt viſa, hiſtoriam.

Quadrupes, noua eſt Solidipedum minime numeroſo generi acceſſio, intermedium inter Equum et Aſinum animal, ſed quod humano generi non magis, quam Africana Zebra, ſeruire hactenus didicit. Credit illud antiquioribus Zoologis, Aristoteli, Theophrasto, atque Aeliano aliqualiter notum atque Muli foecundi ſeu Hemioni, quo ipſe vtitur noſter, nomine indicatum fuiſſe. Recentiores, praeſertim Ill. Viri Linnévs et Bvffo-

 nivs

NIVS *Comes*, deſcriptionis accuratioris defectu, cum Onagro ſeu fero Aſino confuderunt *Hemionum*, a quo tamen multis notis differt. Soli illum MESSERSCHMIDIVS et GMELINVS *ſen.* in patriae Mongoliae confiniis curioſius inſpexerant, neuter vero, vti nec Miſſionarii apud Sinas, deſcriptionem eius ſatis accuratam dederunt. Pleniſſimam igitur Hemioni hiſtoriam atque delinationem verbis pariter et caeſtro exaratam propoſuit Auctor, cum Anatome, curatisque proportionum menſuris, quibus omnibus de ſpecie huius animalis dubitatio eximitur, quod magnitudine et interna ſtructura proxime ad Caballum accedit, caput eodem, imo et Aſino longius habet, aurium proportione et cauda vaccina cum Zebra, anguſtis veſtigiis formaque vngularum cum Aſino, ſtatura reliqua et elegantia membrorum magis cum hybrido Mulo conuenit; ſed propriam et priuam habet conformationem dorſi arcuatam et ſimul carinatam, inſignemque ſub naribus cartilaginum prominentiam verruciformem. Non deſperat Auctor etiam hanc Equi ſpeciem cicurari et, ſi detur opera, in humanos vſus domeſticam reddi poſſe, quod ob celeritatem curſus ſummam, qua pollet hoc animal, optabile vtique eſſet.

Tetrao, quam *arenariam* cognominauit Auctor, media inter *Katam* Arabum ſeu Alchatam ornithologis dictam, et Tetraonem paradoxam alibi noſtro deſcriptam, in deſertis Tataricis auſtralioribus circa Caſpium lacum patentibus, inter arenoſos maxime colles, obſeruata eſt. Videtur, quod Auctor poſt exara-

exaratam typo deſcriptionem monet, eadem eſſe, quam HASSELQVISTIVS in itinere Palaeſtino nomine *Tetraonis orientalis* imperfectius deſcripſit. Et quandoquidem is ſuam in ſaltibus Natoliae, et forſitan in Aegypto quoque, hybernis menſibus obſervari dicat, veroſimillimum eſt has aues e deſertis ſupra Mare Caſpium poſitis boreali bruma in tepidas Aſiae minoris regiones depelli.

Mirum et ambiguae ſtructurae eſt *Amphibium*, quod tertio loco deſcribit noſter et *Lacertam apodam* appellat. Singula enim ſtructurae externae atque internae membra Lacertis ita ſimile illud reddunt, vt pedibus additis Lacertam omnibus numeris abſolutam ſiſteret. Verum anticis artubus plane caret, licet cicatrix eorum quaſi locum indicet et ruga inde longitudinalis per latera dorſales ſquamas a ventralibus dirimat prorſus vt in Angue ventrali CATESBAEO delineata, quae forte affinis Lac. apodae noſtrae deprehendetur; poſticorum autem pedum minima tantum rudimenta adſunt, quibus tamen oſſa linearia, iliacorum ſuccedanea, reſpondent, quemadmodum etiam ſterni vicariam compagem oſſeo - cartilagineam Anatome huius Amphibii detexit. Superfluum foret ſingula hic denuo exponere, quum Auctor in exordio deſcriptionis ſummariter enumerauerit ea, quibus anomalam hancce ſpeciem cum Lacertis conuenire curioſiore inſpectione atque diſſectione didicit.

Subiecit Auctor, occaſione *Vermium* in ventriculo Lacertae apodae repertorum, qui cum *Trichuridibus* a *Cel.* ROEDERERO in ſingulari humanae

 gentis

gentis epidemia obſeruatis omnino conueniunt, binas alias vermium ſpecies, quae cum iſtis, nonnullisque Taeniarum ſpeciebus hamoſa roſtri armatura conueniunt.

V.

Obſeruationes in Gado Lota inſtitutae.

Auctore I. T. Koelreuter. p. 424.

In vulgatiſſimo piſce, Lota Gallorum, aliqua obſeruauit Cl. Auctor, quae excerpta Commentariis Academiae inſeri digniſſima viſa ſunt. Equidem pleraque minutiores ſtructurae inconſtantias concernunt, ea tamen et ipſa vtilitate non carent ſua; vti v. gr. ex obſeruato numero vertebrarum variabili diſcimus, non eſſe, vt Ichthyologi recentiſſimi contenderunt, conſtantiſſimum hunc numerum. Maxime vero momentoſa eſt obſeruatio Auctoris Cl. circa plenarium ductus aërei in veſica natatoria Lotae defectum, plexusque vaſorum ſingulari diſtributione veſicam illam pingentium. E quibus ſumma cum veri ſpecie concludit noſter: peculiari hocce apparatu a natura peragi ſecretionem vel liberationem aëris ſanguine ſubacti, eandemque in omni natatilium genere locum habere; dum iis quoque piſcibus, qui aëreo ductu in oeſophagum inſerto inſtructam veſicam natatoriam habent, is ductus, quippe valuula ad oſtium oeſophageum oppoſita clauſus, non ad introſuſcipiendum

dum ex oeſophago aërem extraneum, ſed ad ſuperfluum ſecretionis inteſtinum aërem emittendum, deſtinatus videatur.

VII.

Acerina; piſcis, ad percae genus pertinens, deſcriptus;

Auctore A. I. Güldenſtaedt p. 455.

Piſcis Ichthyologis huc vsque ignotus, ſed in hac diſſertatione ſecundum ſitum, numerum, figuram, proportionem atque colorem partium externarum internarumque deſcriptus, et dimenſionibus atque icone, cuius ſquamae vitio Chalcographi iuſto latiores ſunt, repraeſentatus, ad *Percae* genus, ab Ichthyologis neotericis determinatum, pertinet et proxime ad *Percam cernuam* LINNAEI accedit, a qua primo intuitu capite longo et roſtro producto differt. *Acerina* hic piſcis dicitur, quum veroſimile ſit, hanc veterum denominationem magis ad noſtrum piſcem, mare nigrum inhabitantem, quam ad *Percam cernuam*, quae in mari nigro deficit, pertinere, prouti Ichthyologi eandem non niſi dubitantes inter Synonyma *Percae cernuae* receperunt.

VIII.

Sex auium deſcriptiones;

Auctore A. I. Güldenſtaedt p. 563.

Sex auium ſpecies, quarum ab Ornithologis nulla mentio facta eſt, in montoſis et campeſtribus inter mare caſpium et nigrum obſeruatae proponuntur, ad genera *Linneana* referuntur, nominibus triuialibus imbuuntur, ab adfinibus rite ſeparantur, ſecundum oeconomiam et mores, nec non ſecundum figuram, numerum, colorem et proportionem partium externarum, addita ſexus differentia, deſcribuntur, atque iconibus magnitudinem naturalem repraeſentantibus illuſtrantur.

Harum prima *Loxia Rubicilla*, quae magnitudine et colore proxime ad *Enucleatorem*, roſtro ad *Coccothrauſtem* accedit, colore trunci coccineo, albido et cineraſcente lepide variegato, remigibus rectricibusque nigris roſeo fimbriatis a congeneribus diſtinguenda; ad alueos glareoſos torrentium Caucaſi habitans et baccis Hippophaës Rhamnoidis victitans.

Secunda auis *Tanagra Melanictera* dicitur, cui magna ſimilitudo eſt cum *Fringilla triſti*; attamen ab illa pariter ac ab congeneribus ſeparatur: colore corporis ſupra ferrugineo, ſubtus flauo; alis caudaque fuſcis; et pileo maris nigro a fronte vsque ad nucham extenſo. Habitat illa in promontoriis caucaſicis caficis in dumetis Rhamni Paliuri, inter ramos illius nidificat et feminibus eiusdem victitat.

Tertia auis nomine *Mufcicapae Melanoleucae* imbuta eft, quae fimillima *Motacillae Leucomelae* in Tomo XIV. Commentariorum propofitae. Illa differt a congeribus: colore corporis albo; gula, capiftro et alis nigris; rectricibus albis, apice nigris. In fruticetis ad fluuiorum ripas per aeftatem in Georgia campeftri degit.

Quarta, *Motacilla Erythrogaftra* appellata, *Motacillae Phoenicuro* fummopere analoga eft. Diftinguitur a congeneribus: roftro et pedibus atris, criffo et cauda caftaneis; mare corpore et alis nigris, pileo et alarum fpeculo albo; femina corpore toto et alis cinereis. Aeftate in Hippophaëtis Caucafi peracta, cum prole ibidem progenita adulta auftrum verfus migrat.

Quinta auis dicta eft *Scolopax Subarquata*, quae ftatura *Phaeopi*, quo dimidio minor, roftro arcuato, pedibus nigris, dorfo cinereo, gula, pectore et abdomine ruffo et fufco vndulatis, criffo albo maculis fufcis picto, a congeneribus dignofcenda. Hofpitatur haec migratoria auis per aeftatem ad littora maris cafpii et fluuii Tanais, fed vix vltra oftium fluuii Choper adfcendens.

Sexta auis *Scolopax cinerea* denominata eft, quae *Scolopace Totano* aliquantum minor, roftro recuruo, colore fupra cinereo, infra albo et pedibus fufco-rubentibus facile a congeneribus feparanda, quibus

quibus *Recuruiroſtram Auocettam* affinitate intermedia adiungit. In inundatis ad margines lacuum ſalſorum circa mare caſpium obuiorum per aeſtatem frequens haec migratoria auis adeſt, quae per hyemem auſtraliora petit.

IX.

Quatuor Fucorum ſpecies deſcriptae ab I. Lepechin pag. 476.

Species Fucorum quatuor, in mari Albo lectas, hac in diſſertatione proponit Auctor. Harum duae foliis intus cauis euidenter ab omnibus huc vsque notis differunt, et nouum ordinem in Fucorum familia ſibi vindicare videntur. A cauitate interna foliorumque figura denominationes quoque petitae ſunt; et alter FVCVS TVBVLOSVS; alter vero SACCATVS dicti ſunt. Prior *caule tereti-ramoſo, ramis oppoſitis vel alternis, foliis longis tubuloſis*; poſterior autem *caule plano ramoſo ramis oppoſitis, foliis ouato oblongis tumidis intus cauis definiuntur*. Reliquae duae, quae ſequuntur, ſpecies, folia plana gerunt, et Noſtro ſub nominibus fuci DICHOTOMI et fuci GRAMINIFOLII veniunt. Alter eorum definitur quod ſit *Fucus acaulos, frondibus dichotomis, membranaceis, ligulatis vndique proliferis*; alter vero quod ſit *caule tereti, ſubdiuiſo, tubuloſo, foliis linearibus duplici ſerie poſitis, planis membranaceis.*

IX.

IX.

Minera argenti cornea chemice examinata et deſcripta

ab E. Laxmann pag. 482.

Oſtenſis in limine huius diſſertationis non ſolum variis illis ſententiis, quas de minera hac rariſſima fouerunt mineralogi, ſed etiam potioribus illis momentis quae ad hiſtoriam illius naturalem pertinere poſſunt; variae obſeruationes, tam notas characteriſticas, quam geneſin eius ſpectantes, ſequuntur. Inter illas attentionem merentur: odor ille ſpecificus, non ingratus, debilis, mixturam vitriolico argillaceam vel margaceam indicans, cuius nulla apud Autores mentio occurrit; vt et methodus liquandi, quae prorſus eadem, ac Docimaſtae de *minera argenti vitrea* praeſcribunt. Ratione geneſeos minera cornea, a praedicta *vitrea* ſcilicet deriuatur, cuius variae aetates, ex factis permultis obſeruationibus mineralogicis in ipſis fodinis ordine naturali deſcribuntur. Pertinet itaque rariſſima illa *minera cornea* autorum ad tertiam aetatem *minerae argenti plumbei coloris* Agricolae, quam recentiores *vitream* nominarunt; eſtque argentum hic, in mineris nimirum puris, nec acido ſalis communis, nec alcali, nec ferro ſed ſulphure mineraliſatum, quod variis experimentis metallurgicis abunde demonſtratur.

ASTRONOMICA.

I.

Commentatio Hypothetica de periculo, a nimia Cometae appropinquatione metuendo.

Auctore L. Eulero pag. 499.

In Astronomia vix proponi potest quaestio maioris momenti, quam ea, qua disquiritur, de periculo quod telluri nostrae metuendum sit a nimia Cometae cuiusdam appropinquatione ad eam. Quamuis autem occasione notissimi istius Cometae, qui Anno 1759. apparuit, varia ab Astronomis tradita fuerunt, pro explicandis perturbationibus, quas Cometae ab actionibus Planetarum patiuntur; ea tamen vix ad praesentem quaestionem adplicari poterunt, in qua supponitur Cometam tam prope ad tellurem accedere, vt eius actio forsan ipsam actionem Solis exsuperare possit. Pro hac igitur quaestione enodanda, Illustr. *Eulerus* in praesenti Dissertatione casum hypotheticum considerauit, quo Cometa in ipso plano Eclipticae incedens et motu rectilineo ad Solem pergens, orbitam telluris in eiusmodi loco intersecare supponitur, vt tellus simul in hoc loco reperiatur ac Cometa ad eum perueniret, si nimirum ante mutuum occursum, nulla esset horum

horum Planetarum actio inter se; accedente igitur actione mutua telluris et Cometae, quaeritur quasnam mutationes, tam terra quam Cometa inde sint passuri. Traditis igitur formulis generalibus, pro perturbationibus tam motus terrae, quam Cometae, Illustr. Auctor hunc motum seposita primum actione mutua Cometae et telluris considerat, vbi quidem neglecta excentricitate orbitae telluris, hanc orbitam vt circulum contemplatur, cuius radius aequetur distantiae mediae telluris a sole, et motum terrae in hoc circulo vniformem, aequalem scilicet motui medio, supponit. *Motus* vero Cometae maioris facilitatis caussa, vt rectilineus consideratur, qualis suppositio eo magis admitti debet, quod obliquitas cursus hoc in negotio vix quicquam turbet. Pro Cometa igitur in hac linea recta incedente, investigari debent, celeritas quam ad certam a Sole distantiam habet et tempus quo ab hac distantia, ad Eclipticam pertingeret, mutua actione Terrae et Cometae plane neglecta, in hoc autem loco Eclipticae conflictus oriretur terrae et Cometae, quem tamen ob mutuam actionem fortassis euitabunt. His praemissis, dum actio telluris et Cometae mutua in computum ducitur, certa constituenda est epocha, a qua hanc actionem satis fieri sensibilem censeri debet, et quum massae Cometarum prae massa Solis, valde sint exiguae, haec epocha proxime ante ipsum tempus coniunctionis terrae et Cometae constitui debet, quemadmodum heic ab Illustr. *Eulero* epocha duobus circiter diebus ante coniunctionem constitui-tur. Tempore huius epochae stabilito, quum aequationes differentiales quibus perturbationes exprimuntur, ita sint comparatae, vt solita methodus appropinquandi ad eas adplicari non queat, Illustr. *Eulerus* aliam viam sibi non superesse iudicauit, quam vt tam motum terrae quam Cometae per exigua temporis interualla prosequeretur. Scilicet si tam locus terrae, quam Cometae determinetur per coordinatas orthogonales ad certam directionem fixam relatas, et pro ipso tempore epochae non solum valores harum coordinatarum constiterint, sed etiam celeritates tam Cometae, quam terrae secundum directiones coordinatarum cognitae habeantur; inquirendum est quinam valores elapso minimo tempore ab hac epocha, non solum coordinatis, sed etiam celeritatibus tribuendi sint, id quod facile praestatur. Nam si coordinatae telluris pro tempore epochae dicantur X et Y, Cometae vero x et y, celeritates que pro tellure exprimantur per $\frac{dX}{d\tau}$, $\frac{dY}{d\tau}$ et pro Cometa per $\frac{dx}{d\tau}$, $\frac{dy}{d\tau}$, elapso minimo tempore $d\tau$ dum valores coordinatarum iam supponuntur esse X', Y', x', y', habebitur

$$X' = X + dX + \tfrac{1}{2} ddX; \quad Y' = Y + dY + \tfrac{1}{2} ddY;$$

$$x' = x + dx + \tfrac{1}{2} ddx; \quad y = y + dy + \tfrac{1}{2} ddy \text{ et}$$

$$\frac{dX'}{d\tau} = \frac{dX}{d\tau} + \frac{ddX}{d\tau}; \quad \frac{dY'}{d\tau} = \frac{dY}{d\tau} + \frac{ddY}{d\tau}; \quad \frac{dx'}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} + \frac{ddx}{d\tau};$$

$$\frac{dy'}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} + \frac{ddy}{d\tau}$$

vbi quidem valores differentialium secundi gradus, ex aequationibus pro perturbationibus allatis elici debent.

Pro

Pro valore autem interualli $d\tau$ obſeruandum eſt, illum eo minorem accipi debere, quo propior Cometa telluri fit, quoniam in maxima appropinquatione actio Cometae in tellurem valde ſenſibilis fieri poteſt. Ad praeſcriptum igitur huius Methodi, Illuſtr. *Eulerus* pro caſu hypothetico a ſe conſiderato, in quo maſſa Cometae maſſam terrae aequare ſupponitur, motum tam telluris quam Cometae, per interualla continuo minora, a duobus ante coniunctionem diebus, vsque ad coniunctionem proſequitur; tum vero poſt coniunctionem dum Cometa a tellure recedit, interuallis continuo maioribus aſſumtis, eundem motum examinat. Concluſiones vero ex his calculis deductas ſingulari Tabula complexus eſt, ex qua primo intuitu liquet, quomodo motus terrae et Cometae ob mutuam actionem afficiatur. Et de tellure quidem liquet, Cometam in motu eius angulari vix quidquam turbare, diſtantiam vero terrae a Sole ob actionem Cometae aliquantulum augeri. De Cometa autem conſtat eius receſſum a terra, ipſi acceſſui fere eſſe ſimilem, vnde eorum opinio penitus refellitur, qui exiſtimarunt Cometam, dum ad tellurem proxime accedit, in ſatellitem abire poſſe. In vniuerſum autem hinc colligitur, nec Cometam, nec tellurem in motu ſuo nimis magnam perturbationem pati; ſed potius poſt mutuum occurſum eorum motum haud multum diſcrepantem fore ab eo, qui locum habuiſſet, ſi nullus contigiſſet occurſus; id quod potiſſimum inde euenit, quia in receſſu Cometae, effectus qui in acceſſu producebatur, qua maximam partem destruatur; hoc vero facile elucescit, si status telluris et Cometae post cessantem actionem mutuam, comparetur cum eo statu in quo vterque versatus fuisset eodem tempore, si actio mutua plane locum non habuisset. Cognito autem loco et motu, fine Planetae seu Cometae post mutuam actionem, definiri quoque potest motus, quo vterque deinceps circa Solem reuoluatur; vbi quidem pro praesenti casu, ratione motus terrae colligitur, in excentricitate vix vllam sensibilem produci mutationem, semiaxem autem orbitae telluris parte sua bimillesima augeri, ex quo in tempore periodico producetur augmentum septem horarum. Quod autem orbitam Cometae attinet, eius excentricitas ab vnitate vix tantillum differet, semiaxis autem transuersus haberetur aequalis 4658750 semidiametris terrae, hincque tempus periodicum colligeretur 2716 annorum, quod seposita actione mutua plane esse debuisset infinitum.

II.
De differentia inter parallelum Lunae verum et apparentem.

Auctore A. I. Lexell pag. 549.

Notum est, Astronomos differentiam inter ascensiones rectas binorum astrorum, ita obseruare solere, vt binorum filorum micrometri, vel reticuli

culi normaliter ſe decuſſantium, vnum ita diſponant, vt ab aſtro praecedente radi videatur, tum vero appulſus aſtrorum ad alterum filum priori normale notent; interuallum enim temporis inter momenta appulſus praelapſum, ſi debito modo in angulum horarium conuertatur, dabit differentiam inter Aſcenſiones rectas binorum Aſtrorum. In hac igitur Methodo ſupponitur, quod aſtrum praecedens motu ſuo circulum parallelum circa polum aequatoris deſcribere videatur, quod quidem cum veritate non plane conciliari poteſt, ſi aſtrum praecedens, tempore inter binos appulſus effluxo, declinationis ſuae, vel Parallaxis ſi aliquam habuerit, vel etiam refractionis, ſenſibilem patiatur mutationem. Dum itaque, comparatio inſtituitur Lunae cum aliqua ſtella fixa, ſi Luna ſtellam praecedat, hoc obſeruandi modo adhibito, differentia aſcenſionum rectarum limbi Lunae ad filum normale adpellentis et ſtellae fixae non niſi aliqua adhibita correctione inuenitur; quia nimirum filum quod a limbo Lunae raditur, non prorſus coincidit, cum circulo maximo, qui normalis eſt, ad circulum declinationis Lunae, tempore quo alteruter limbus Lunae per filum normale tranſit. Angulum iſtum inter parallelum Lunae verum et adparentem, quatenus a mutatâ Parallaxi altitudinis producitur, primus determinauit Celeb. *Mayerus* formula ſatis concinna, cuius tamen demonſtrationem reticuit; hanc vero formulam minus exactam reputans Cel. *de la Lande*, aliam in eius locum ſubſtituit, quae ipſi verior viſa eſt. In hac igitur

igitur Differtatione Clar. Auctori id propofitum eft, vt non folum de angulo ex mutata Parallaxi oriundo, fed etiam de eo, qui ex mutata declinatione et refractione producitur, rigorofe inquireret. In hoc autem negotio, quum variatio Parallaxeos, praeprimis in altitudinibus Lunae non nimis exiguis potisfimum trahat momentum, angulum Paralleli Lunae veri et apparentis, primum ea fub hypothefi inueftigandum iudicauit, qua ratio Parallaxeos tantum habetur, declinatio autem Lunae plane fupponitur invariabilis et refractionis nulla prorfus habetur ratio. Ratiociniis igitur Geometricis et omni rigore veris, colligit fore *Tangentem huius anguli, aequalem Tangenti parallaxeos afcenfionis rectae pro Luna ductae in finum declinationis adparentis*, ex qua formula dum valor pro Tangente parallaxeos afcenfionis rectae euoluitur, deducitur alia quae cum Mayeriana proxime confentit; ita vt illa a *Mayero* allata ad veritatem proxime accedat, quod omnino fecus eft cum formula Cel. *de la Lande*, haec enim cum formula Auctoris noftri omnino conciliari nequit; difcrimine quidem tam magno exiftente, vt ex formula Cel. *de la Lande* angulus duplo maior nonnunquam reperiatur, quam ope formulae ab Auctore allatae, immo vt formula Cel. *de la Lande* angulum hunc exhibeat euanefcentem, cum effe debeat maximus. Quamuis autem de veritate formulae ab Auctore allatae, nullum fuboriri poffit dubium, propter rigorofas demonftrationes quibus munita eft, ne tamen infignis Aftronomi Cel. *de la Lande* opinioni, nimis tribu-

tribuant Aſtronomiae cultores; quae circa demonſtrationem ab illuſtri hoc Aſtronomo pro ſua formula ſtabilienda, allatam, merito deſiderantur, Auctor huius diſſertationis perſpicue expoſuit. Tranſitu deinde facto ad illam hypotheſin, qua etiam declinatio ſupponitur variabilis, formulam ſatis exhibet concinnam, qua valor anguli inter parallelum Lunae verum et apparentem exhibetur, conſiderata variabilitate tam Parallaxeos, quam declinationis; vbi quidem iterum ſepoſita variatione declinationis, eadem pro iſto angulo inuenitur expreſſio, quam ſupra inuenerat. Denique angulum quoque inueſtigat ex mutata refractione oriundum, vbi pro hoc angulo prodit formula, quae vix cum illa, quam tradit Cel. *de la Lande* in ſua Aſtronomia, conciliari poterit.

III.

Nonnulla loca Lunae, ex obſeruationibus circa occultationes fixarum a Luna, Anno 1774. Petropoli, et alibi inſtitutis, determinata.

Auctore A. I. Lexell pag. 580.

Quum anno 1774. appulſus Lunae ad inſigniores quasdam ſtellas Hyadum, Petropoli et aliis in locis ſaepius obſeruare licuerit, Cl. Auctor huius Diſſertationis operae pretium duxit computo harum obſeruationum inſtituto, determinationes locorum Lunae inde eruere. Obſeruationes vero in computum ductae ſequentes ſunt:

Immerſio	α Tauri	Stockholmiae	D. 22. Ian.	$6^h.\ 0'.26''\frac{1}{2}$	Styl. Nou.
Emerſio	- ·	ibidem		7. 15. 51	
Immerſio	α Tauri	Petropoli	22. Ian.	7. 2. 52	
Emerſio	- -	ibidem		8. 20. 44	
Immerſio	γ Tauri	Stockholmiae	18. Febr.	6. 39. 51	
Emerſio	- -	ibidem		7 19. 33	
Immerſio	α Tauri	Pariſiis a *Meſſier*	14. Apr.	6. 26. 0	
Emerſio	- -	- - - -		7. 35. 59	
Immerſio	α	ibidem ab *Athelmi*		$6.\ 25.54''\frac{1}{2}$	
Emerſio	- -	- - -		7. 35. 53	
Immerſio	eiusdem	Verſaliis		6. 25. 1	
Emerſio	- -	ibidem		$7.\ 35.\ 10\frac{1}{2}$	
Immerſio	α	Geneuae		6. 47. 56	
Emerſio	- -	ibidem		$7.\ 50.\ 36\frac{1}{2}$	
Immerſio	α	Mediolani		7. 3. 7	
Emerſio	- -	ibidem		8. 10. 42	
Immerſio	α	Petropoli		8. 28. 34	
Emerſio	- -	ibidem		9. 3. 20	
Immerſio	2 θ Tauri	Petropoli	d. 28. Aug.	$11.\ 48.45\frac{1}{2}$	
Emerſio	- -	ibidem		12. 32. 29	
Immerſio	γ Tauri	Pariſiis	d. 24. Sept.	$14.\ 22.31\frac{1}{2}$	
Emerſio	- -	ibidem		$14.\ 43.\ 37\frac{1}{2}$	
Immerſio	γ	Petropoli		16. 59. 53	
Immerſio	γ Tauri	Pariſiis	d. 18. Nou.	5. 55. 25	
Emerſio	- -	ibidem		$6.\ 52.47\frac{1}{2}$	dubia
Immerſio	γ	Petropoli		8. 8. 37	

Emerſio

Emersio - -	ibidem d. 18. Nou.	$9^h.14'.5''$	
Immersio 1 θ Tauri	Parisiis	11. 5.28	
Emersio - -	ibidem	11. 20.43½	
Immersio α Tauri	Parisiis	15. 35.11	
Immersio eiusdem	Petropoli	17. 41.30	dubia

Ex his obseruationibus pro locis Lunae sequentes elicitae sunt conclusiones

Coniunctio Lunae Temp. med. Paris. Anno 1774			Longit. Lunae	Latit. Lunae Austr.
cum α Tauri	d. 22. Ian.	$5^h.54'.24''$	$2^s.6^\circ.38'.7'',0$	$4^\circ.53'.15''$
γ Tauri	18. Febr.	5. 41. 39	2. 2. 38. 40, 4	4. 56. 13
α Tauri	14. Apr.	5. 47. 19	2. 6. 37. 51, 0	5. 0. 22
2 θ Tauri	28. Aug.	10. 56. 19	2. 4. 48. 52, 0	5. 13. 25
γ Tauri	24. Sept.	15. 0. 41	2. 2. 39. 16, 8	5. 9. 56
γ Tauri	18. Nou.	7. 4. 3	2. 2. 39. 34, 3	4. 58. 0
1 θ Tauri	- - -	11. 16. 27	2. 4 48. 42, 6	4. 59. 10
α Tauri	- - -	14. 52. 4	2. 6. 38. 44, 0	4. 59. 49.

Pro differentiis meridianorum vero colligitur ex obseruationibus d. 22. Ian. inter Stockholmiam et Petropolin $-48'.58''$, quae nonnullis secundis dubia esse potest, quia de temporibus veris obseruationum aliquantillum esse possit dubium. Ex obseruationibus d. 14. Aprilis habetur differentia meridianorum inter obseruatorium Parisiense

et Mediolanum	$0^\circ.27'.22''$
Geneuam	0. 15. 14
Petropolin	1. 51. 55

quae conclusiones non nisi vno vel altero secundo dubiae esse poterunt. Ex obseruationibus circa γ Tauri d. 18. Nou. concluditur differentia meridiano-

i 2 rum

rum inter obſeruatorium Pariſienſe et Petropolitanum $1^h. 51'. 57''$. Sub finem huius Diſſertationis Auctor varias ſubiecit cantelas, ad quas in computo huiusmodi obſeruationum attendi debet, quae cuius ſint pretii, apud Aſtronomos eſto iudicium.

IV.

Experimenta acu magnetica Petropoli inſtituta.

Auctore W. L. Krafft pag. 543.

Magnetis bina illa celebratiſſima phaenomena, declinatio et inclinatio, etſi, theoriam magneticam ſi ſpectes, neutrum ſibi potiori prae altero iure phyſicorum attentionem vindicare poſſe videtur, minime tamen eandem adhuc experta ſunt experimentatorum induſtriam; vix enim pro tribus quatuorue locis inclinatio acus magneticae ea praeciſione eſt definita, quam ob acus inclinatorias ad inſignem perfectionis gradum iam euectas in huiuscemodi obſeruationibus hodie merito ſperare licet. Eo vtiliorem igitur operam Auctor collocaſſe cenſendus eſt in obſeruanda acu inclinatoria, cum ſex abhinc annis eadem obſeruatio hic loci multa cura iam fuerit inſtituta, ita, vt comparatione facta, annuae variationis, ſi qua ineſt inclinationi, quaedam certe veſtigia inde dignoſci queant. Principio diſſertationis Auctor fundamenta, quibus vſus inſtrumenti inclinatorii et methodus eius ope quantitatem inclinationis

tionis magneticae definiendi innititur, ex primis mechanicae principiis repetit eamque ad obſeruationes ſuas, duabus acubus inſtitutas, adplicat. Inſignis vtiliſſimo huic inſtrumento perfectio conciliaretur, ſi commodior methodus pateret, ſitum centri grauitatis acus reſpectu centri oſcillationis et quidem pro acu viribus magneticis iam imbuta definiendi, quam conſueta illa, quae polorum magneticorum inuerſione abſoluitur. Deduxit Auctor ex obſeruationibus ſuis, inclinationem acus magneticae 16 poll. 7 lin. decim. pedis Lond. longae $= 75°. 37'$. Petropoli ad finem anni 1774. annuam vero eius vatiationem, ſi modo vniformis ſit, exiſtimat heic loci ſtatui poſſe, $= 18$. minut. prim. quod quidem iudicium vlterioribus obſeruationibus, quas Auctor non negliget, emendabitur. Ad idem tempus acus quatuor pollices longa a ſeptentrione ad occidentem declinauir angulo $= 4°. 50'$ vnde ſequi videtur, in his regionibus declinationem ſubinde hiſce quidem temporibus fieri maiorem.

V.

Duarum Eclypſium Solis die $\frac{15}{26}$. Octobris 1772 et d. $\frac{11}{22}$. Martii 1773 obſeruationes factae in vrbe Dmitriewsk a Petro Inochodzow pag. 623.

Praeſtanti tubo Achromatico Dollondiano 12 pedum obſeruauit Inoch. prioris Eclypſis finem $1^h.22'.58''\frac{1}{2}$;

 poſte-

posterioris vero initium $18^h. 43'. 39''$ temporis veri. E quibus obseruationibus deducitur differentia meridianorum inter Parisios et Dmitriewsk $2^h. 52'. 11''$. Eleuationem poli huius loci inuenit $50°. 5'. 6''$.

VI.
De Differentia Meridianorum Petropolitani et Pekinensis.

Auctore P. Hallerstein pag. 630.

Refert P. *Hallerstein* se obseruationes antecessoris sui Pat. *Ingnatii Koegler* circa eclipses Satellitum Iouis, comparasse cum illis, quae a Cel. de *l'Isle* in Obseruatorio Petropolitano institutae erant, ex qua comparatione inuenit pro differentia meridianorum obseruatorii Petropolitani et Collegii Pekinensis $5^h. 44'. 16''$; quae tamen conclusio ipsi non nisi inter quatuor aut quinque secunda certa videbatur, ob insignem discrepantiam Tuborum, quibus hae obseruationes institutae erant. Postmodum vero quum resciuisset consilium quod Cel. *Hell* dedit, pro comparandis huiusmodi obseruationibus, idem sequutus, superiorum obseruationum denuo facta comparatione pro differentia meridianorum inuenit $5^h. 44'. 20''$, qui numerus potior ipsi videtur, quam is quem prius inuenerat. Verum in tanta conclusionum discrepantia, vbi dissensus vsque ad sex minuta prima assurgit, certitudo vix maior quam decem scrupulo-

rum

rum ſecundorum exſpectari poterit. Propius quidem ſcopum attigiſſe videtur P. *Hallerſtein*, ſi ſumto primum medio ex comparatione immerſionum et emerſionum, certos ſibi ſtatuiſſet limites, pro eliminandis obſeruationibus, quae vltra eosdem a medio declinarent. Hinc ſi is ſtatuatur regula vt eliminandae ſint obſeruationes, quae plus quam duobus minutis primis a medio differunt, quum ex immerſionibus habeatur medium ſumendo differentia meridianorum $5^h. 44'. 15''$, concludendae erunt pro immerſionibus concluſio prima, ſecunda et vltima, his igitur reiectis, ſi denuo medium ſumatur, elicietur medium $5^h. 44'. 16''$. Simili ſtabilita regula pro emerſionibus, eliminandae ſunt concluſiones prima et vltima ex reliquis vero fiet medium ſumendo $5^h. 44'. 24''$. Concluſiones vero ſine dubio adhuc tutiores inuenientur, ſi omnes illae eliminentur comparationes, quae plus quam minuto primo a mediis diſcrepant.

VII.

Eclipſes Satellitum Iouis Anno 1774. Petropoli in ſpecula Aſtronomica obſeruatas, recenſuit.

A. I. Lexell pag. 636.

Continet haec diſſertatio catalogum earum obſeruationum, quae circa Eclipſes Satellitum Iouis, anno 1774. Petropoli inſtitutae ſunt.

VIII.

VIII.

Epitome obſeruationum meteorologicarum Petropoli anno 1774. ſecundum Calendarium correctum inſtitutarum.

Auctore I. A. Euler pag. 639.

Altitudo Barometri maxima fuit 29, 21 poll. duodec. pedis pariſini menſe Decembri; minima 26, 98; vbi Cel. Auctor obſeruat, altitudinem Barometri hoc anno maximam, prorſus et omnium fuiſſe maximam, quae vnquam Petropoli obſeruatae fuerunt; porro recenſet variationes quasdam Barometri *ſubitaneas*. Gradus frigoris maximi fuit 191° diu. de l'Islianae, d. 20 Febr. calor vero maximus ad 106° pertigit d. 8. Iulii; frigus ergo mitius, et calor etiam minor fuit hoc anno, quam binis annis proxime praecedentibus; hiems vero quantum frigoris vi hoc anno remiſit, tantundem diuturnitate compenſauit; 25 enim dies frigidiores gradu 150 hoc anno plures fuerunt, quam binis praeterlapſis. Subiungit Cel. Auctor obſeruationes ventorum et reliquorum coeli phaenomenorum.

INDEX

INDEX.
DISSERTATIONVM.

Mathematica.

Phyſico-Mathematica.

Physica.

Astronomica.

Eius-

MATHE-

MATHEMATICA.

DE
VALORE FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} dz$$

CASV QVO POST INTEGRATIONEM PONITVR $z = 1$.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Hic mihi propositum est, duo insignia theoremata, ad quae iam dudum ex consideratione arcuum circularium, qui vel eundem habent sinum vel tangentem, fueram perductus, ex ipsis principiis calculi integralis demonstrare; duo autem illa theoremata ita se habent

$$\text{I. } \int \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1 + z^n} dz = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$$

$$\text{II. } \int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1 - z^n} dz = \frac{\pi}{n \operatorname{tang.} \frac{m\pi}{n}}$$

ſi quidem integratio a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extendatur, vbi π denotat ſemiperipheriam circuli, cuius radius $= 1$. Has quidem formulas iam integratas dedi in *Calculo integrali*, verum ibi ſubſidia integrationis ſcilicet reſolutionem denominatoris $1 + z^n$, tum vero etiam reſolutionem ipſius fractionis in fractiones partiales ex mea *introductione in analyſin infinitorum* petiui; nunc autem, ne opus ſit haec adminicula aliunde conquirere, in ipſa integratione omnia principia, quibus innititur, ſuccincte complectar, inprimis autem reductio ad caſum, quo poſt integrationem ponitur $z = 1$, peculiaria artificia circa ſummationem ſerierum poſtulat, quae etiam in ſequentibus dilucide ſum expoſiturus, quae tractatio eo maioris momenti videtur, quod ſimilis integratio etiam in his formulis multo latius patentibus ſuccedit, cuiusmodi ſunt:

$$\int \frac{z^{m-1} \pm z^{n-m-1}}{1 \pm z^n} dz\, (l\,z)^{\mu}$$

ſi quidem exponens μ numeros integros denotet, quemadmodum alia occaſione fuſius explicabo.

Problema 1.

§. 2. Formulam differentialem $\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$ integrare, vbi ſcilicet eſſe debet $m < n$.

Solutio.

Hic igitur denominator $1 + z^n$ in ſuos factores ſimplices reſolui debet; vbi vero ante omnia

notan-

notandum eſt, ſi n fuerit numerus impar, vnum factorem fore $1 + z$, pro reliquis factoribus imaginariis, bini contineantur in hac forma

$$pp - 2pz \operatorname{coſ.} \Phi + zz,$$

quae poſito nihilo aequalis praebet

$$z = p(\operatorname{coſ.} \Phi \pm \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \Phi):$$

Iisdem igitur caſibus ipſe denominator $1 + z^n$ euaneſcere debet. Cum igitur ſit:

$$z = p(\operatorname{coſ.} \Phi \pm \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} \Phi, \text{ erit}$$
$$zz = pp(\operatorname{coſ.} 2\Phi \pm \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} 2\Phi)$$
$$z^3 = p^3(\operatorname{coſ.} 3\Phi \pm \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} 3\Phi) \text{ et}$$
$$z^n = p^n(\operatorname{coſ.} n\Phi \pm \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} n\Phi)$$

hoc igitur duplici valore loco z^n ſubſtituto fiet

$$\text{I. } 1 + z^n = 1 + p^n \operatorname{coſ.} n\Phi + p^n \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} n\Phi = 0$$
$$\text{II. } 1 + z^n = 1 + p^n \operatorname{coſ.} n\Phi - p^n \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} n\Phi = 0$$

quarum aequationum ſumma praebet

$$2 + 2p^n \operatorname{coſ.} n\Phi = 0,$$

differentia vero earundem

$$2p^n \sqrt{-1} \operatorname{ſin.} n\Phi = 0,$$

ex poſteriore ſequitur $\operatorname{ſin.} n\Phi = 0$, ex priore vero

$$1 + p^n \operatorname{coſ.} n\Phi = 0,$$

id quod fieri nequit in rationalibus, niſi ſit $p = 1$, et $\operatorname{coſ.} n\Phi = -1$ quo ipſo fit $\operatorname{ſin.} n\Phi = 0$, vti conditio ex poſteriore poſtulat: omnes autem anguli quorum Coſinus eſt $= -1$ ſunt

$$\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi \text{ etc.}$$

quibus ergo angulus $n\Phi$ aequari poteſt; vnde ſequentes pro Φ obtinebimus valores:

$$\frac{\pi}{n},\ \frac{3\pi}{n},\ \frac{5\pi}{n},\ \frac{7\pi}{n}\ \text{etc.}$$

ex quibus tot capi debent, donec denominator reſultet $1+z^n$, quemadmodum ex ſingulis caſibus facile iudicatur

I. ſi $n=1$ erit $\Phi=\pi$, hincque $1+z=1+z$

II. ſi $n=2$ erit $\Phi=90^\circ$, hincque $1+zz=1+zz$

III. ſi $n=3$ erit $\Phi=60^\circ$ et $=180^\circ$ hinc $1+z^3=(1+z)(1-z+zz)$

IV. ſi $n=4$ erit $\Phi=45^\circ$ et $=135^\circ$ hinc $1+z^4=(1-z\sqrt{2}+zz)(1+z\sqrt{2}+zz)$

V. ſi $n=5$ erit $\Phi=36$ et $=108$ et $=180$, hincque

$$1+z^5=(1+z)(1+2z\cos.72^\circ+zz)(1-2z\cos.36^\circ+zz).$$

Cum igitur ingenere denominatoris $1+z^n$ vnus factor duplex ſit

$$1-2z\cos.\Phi+zz$$

ſi quidem angulo Φ debitos tribuamus valores, fractio $\frac{z^{m-1}}{1+z^n}$ fractionem inuoluet partialem huius formae

$$\frac{A+Bz}{1-2z\cos.\Phi+zz},$$

vbi totum negotium redit ad coefficientes A et B determinandos Hi autem facilius reperientur ſi factores contemplemur ſimplices imaginarios, qui ſunt

I°. $z-\cos.\Phi-\sqrt{-1}\sin.\Phi$

II°. $z-\cos.\Phi+\sqrt{-1}\sin.\Phi$

tum enim fractio propoſita tales inuoluet fractiones partiales

$$\frac{\mathfrak{A}}{z-\cos.\Phi-\sqrt{-1}\sin.\Phi}\quad\frac{+\mathfrak{B}}{z-\cos.\Phi+\sqrt{-1}\sin.\Phi}.$$

Iam

Iam pro coefficiente α inueniendo ſtatuatur

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n} = \frac{\alpha}{z - \operatorname{cof.}\Phi - \sqrt{-1}\,\operatorname{fin.}\Phi} + R$$

vbi R complectitur omnes reliquas fractiones partiales; ſit autem breuitatis ergo

$$\operatorname{cof.}\Phi + \sqrt{-1}\,\operatorname{fin.}\Phi = f,$$

vt habeamus

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n} = \frac{\alpha}{z-f} + R,$$

ſeu multiplicando per $z-f$

$$\frac{z^m - f z^{m-1}}{1+z^n} = \alpha + R(z-f),$$

indeque capiendo $z = f$ habebimus

$$\alpha = \frac{z^m - f z^{m-1}}{1+z^n}, \text{ caſu } z = f.$$

Hoc autem caſu tam numerator quam denominator euaneſcit; erit ergo

$$\alpha = \frac{m z^{m-1} - (m-1) f z^{m-2}}{n z^{n-1}},$$

et poſito iterum $z = f$

$$\alpha = \frac{f^{m-1}}{n f^{n-1}} = \frac{1}{n} f^{m-n}.$$

Cum igitur ſit

$$f = \operatorname{cof.}\Phi + \sqrt{-1}\,\operatorname{fin.}\Phi$$

erit

$$f^{m-n} = \operatorname{cof.}(m-n)\Phi + \sqrt{-1}\,\operatorname{fin.}(m-n)\Phi,$$

hinc-

hincque

$$\alpha = \tfrac{1}{n}(\text{cos.}(m-n)\Phi + \sqrt{-1}\,\text{sin.}(m-n)\Phi) \text{ et}$$
$$\beta = \tfrac{1}{n}(\text{cos.}(m-n)\Phi - \sqrt{-1}\,\text{sin.}(m-n)\Phi);$$

quibus valoribus inuentis, binae nostrae fractiones partiales erunt

$$\frac{\alpha}{z - \text{cos.}\Phi - \sqrt{-1}\,\text{sin.}\Phi} + \frac{\beta}{z - \text{cos.}\Phi + \sqrt{-1}\,\text{sin.}\Phi},$$

quae ad eandem denominationem perductae dant

$$\frac{(\alpha+\beta)z - (\alpha+\beta)\text{cos.}\Phi + (\alpha-\beta)\sqrt{-1}\,\text{sin.}\Phi}{1 - 2z\,\text{cos.}\Phi + zz}$$

seu loco α et β valores inuentos substituendo

$$\frac{\frac{2z}{n}\text{cos.}(m-n)\Phi - \frac{2\,\text{cos.}\Phi}{n}\text{cos.}(m-n)\Phi - \frac{2}{n}\text{sin.}\Phi\,\text{sin.}(m-n)\Phi}{1 - 2z\,\text{cos.}\Phi + zz}$$

hacque fractione partiali cum supra posita

$$\frac{A + Bz}{1 - 2z\,\text{cos.}\Phi + zz}$$

comparata, colligimus

$$A = -\tfrac{2}{n}\text{cos.}\Phi\,\text{cos.}(m-n)\Phi - \tfrac{2}{n}\text{sin.}\Phi\,\text{sin.}(m-n)\Phi$$
$$= -\tfrac{2}{n}\text{cos.}(m-n-1)\Phi \text{ et}$$

$$B = \tfrac{2}{n}\text{cos.}(m-n)\Phi;$$

cum autem sit

$$\text{sin.}\,n\Phi = 0 \text{ et } \text{cos.}\,n\Phi = -1$$

erit $\text{cos.}(m-n)\Phi = -\text{cos.}\,m\Phi$, et $\text{sin.}(m-n)\Phi = -\text{sin.}\,m\Phi$, ideoque

$$A = \tfrac{2}{n}\text{cos.}(m-1)\Phi \text{ et } B = -\tfrac{2}{n}\text{cos.}\,m\Phi,$$

consequenter ex hac fractione partiali nascitur integrale

$$B\,l\sqrt{(1 - 2z\,\text{cos.}\Phi + zz)} + \frac{A + B\,\text{cos.}\Phi}{\text{sin.}\Phi}\text{A tang.}\frac{z - \text{cos.}\Phi}{\text{sin.}\Phi}$$

vbi

vbi ſi loco A et B valores ſubſtituantur, erit hoc integrale

$$-\frac{2}{n}\operatorname{cof.} m\Phi\, l\sqrt{(1-2z\operatorname{cof.}\Phi+zz)}+\frac{2}{n}\operatorname{fin.} m\Phi \operatorname{A tang.}\frac{z-\operatorname{cof.}\Phi}{\operatorname{fin.}\Phi}+C$$

quae conſtans ex termino $z=0$ definita praebet integrale hoc determinatum

$$-\frac{2}{n}\operatorname{cof.} m\Phi\, l\sqrt{(1-2z\operatorname{cof.}\Phi+zz)}+\frac{2}{n}\operatorname{fin.} m\Phi \operatorname{A tang.}\frac{z\operatorname{fin.}\Phi}{1-z\operatorname{cof.}\Phi}$$

vbi tantum opus eſt loco Φ debitos ſuos valores ſcribere, indeque omnia integralia partialia iunctim ſumere. Praeterea vero caſibus, quibus denominator $1+z^n$ factorem habet $1+z$ quod euenit, ſi n fuerit numerus impar; pars integralis inde oriunda adiici debet, quae ita inuenitur: ſtatuatur

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n}=\frac{\alpha}{1+z}+R,$$

vnde fit

$$\frac{z^{m-1}+z^m}{1+z^n}=\alpha+R(1+z),$$

factoque $z=-1$ prodit

$$\alpha=\frac{z^{m-1}+z^m}{1+z^n}$$

quia autem hoc caſu tam numerator quam denominator euaneſcit, loco vtriusque ſuum differentiale ponatur, fietque

$$\alpha=\frac{(m-1)z^{m-2}+mz^{m-1}}{nz^{n-1}}$$

vbi numerator $z^{m-2}(m-1+mz)$ poſito $z=-1$, abit in $-(-1^m)$ et denominator in $+n$ adeoque $\alpha=\frac{-(-1)^m}{n}$;

 pars

pars igitur integralis hinc nata erit $\frac{-(-1^m)}{n} l(1+z)$ casibus igitur vbi m est numerus par, hoc integrale erit $-\frac{1}{n} l(1+z)$: sin autem m est numerus impar fit illud $+\frac{1}{n} l(1+z)$. Quod si iam loco Φ substituamus suos valores

$$\frac{\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \quad \frac{5\pi}{n}, \quad \frac{7\pi}{n}$$

integrale quaesitum erit

$$\int \frac{z^{m-1} dz}{1+z^n} = -\frac{2}{n} \operatorname{cos}.\frac{m\pi}{n} l \sqrt{1-2z\operatorname{cos}.\Phi+zz} + \frac{2}{n} \operatorname{sin}.\frac{m\pi}{n} \text{A tang.} \frac{z \operatorname{sin}.\frac{\pi}{n}}{1-z\operatorname{cos}.\frac{\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n} \operatorname{cos}.\frac{3m\pi}{n} l \sqrt{1-2z\operatorname{cos}.\Phi+zz} + \frac{2}{n} \operatorname{sin}.\frac{3m\pi}{n} \text{A tang.} \frac{z \operatorname{sin}.\frac{3\pi}{n}}{1-z\operatorname{cos}.\frac{3\pi}{n}}$$

$$-\frac{2}{n} \operatorname{cos}.\frac{5m\pi}{n} l \sqrt{1-2z\operatorname{cos}.\Phi+zz} + \frac{2}{n} \operatorname{sin}.\frac{5m\pi}{n} \text{A tang.} \frac{z \operatorname{sin}.\frac{5\pi}{n}}{1-z\operatorname{cos}.\frac{5\pi}{n}}$$

etc. etc.

quibus insuper casu, quo n fit numerus impar, adiungi debet

$$\frac{-(-1^m)}{n} l(1+z).$$

Scholion.

§. 3. Ne opus sit integrationem formulae

$$\int \frac{(A+Bz)\,dz}{1-2z\operatorname{cos}.\Phi+zz}$$

aliunde repetere, resoluatur numerator $A+Bz$ in has partes

$$-B\cos.\Phi + Bz \text{ et } A + B\cos.\Phi,$$

atque ex priore manifesto oritur integrale

$$B\, l \sqrt{1 - 2z\cos.\Phi + zz};$$

pro altera autem parte cum sit

$$\int \frac{dz\,\sin.\Phi}{1 - 2z\cos.\Phi + zz} = \text{Arc. tang.}\, \frac{z\sin.\Phi}{1 - z\cos.\Phi},$$

altera pars huius integralis

$$(A + B\cos.\Phi)\int \frac{dz}{1 - 2z\cos.\Phi + zz} \text{ fiet}$$

$$\frac{A + B\cos.\Phi}{\sin.\Phi}\, \text{Arc. tang.}\, \frac{z\sin.\Phi}{1 - z\cos.\Phi}$$

sicque illius formulae integratio ita se habebit

$$\int \frac{(A + Bz)\,dz}{1 - 2z\cos.\Phi + zz} = B\, l \sqrt{1 - 2z\cos.\Phi + zz} + \frac{A + B\cos.\Phi}{\sin.\Phi}\, \text{Arc. tang.}\, \frac{z\sin.\Phi}{1 - z\cos.\Phi}$$

quod integrale iam euanescit posito $z = 0$ ita, vt constantis additione non sit opus.

Problema.

§. 4. Formulam differentialem $\frac{z^{m-1}dz}{1 - z^n}$ integrare, vbi scilicet esse debet $m < n$.

Solutio.

Hic obseruandum est, denominatorem semper factorem habere $1 - z$; tum vero, quoties n fuerit numerus par, etiam factor aderit $1 + z$, reliqui autem factores simplices omnes erunt imaginarii, quorum bini talem constituunt factorem duplicem

$$pp - 2pz\cos.\Phi + zz,$$

 qui

qui cum euanescat posito vel

$$z = p\,(\operatorname{cos}.\,\Phi + \sqrt{-1}\,\operatorname{sin}.\,\Phi)$$

vel $z = p\,(\operatorname{cos}.\,\Phi - \sqrt{-1}\,\operatorname{sin}.\,\Phi)$,

iisdem casibus ipse denominator $1 - z^n$ euanescet; tum autem erit

$$z^n = p^n\,(\operatorname{cos}.\,n\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\operatorname{sin}.\,n\,\Phi),$$

ideoque denominator fiet,

$$1 - p^n\,(\operatorname{cos}.\,n\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\operatorname{sin}.\,n\,\Phi)$$

qui cum euanescere debeat, fieri oportet

$$\text{I}^\circ.\ 1 - p^n \operatorname{cos}.\,n\Phi = 0 \quad \text{et} \quad \text{II}^\circ.\ p^n \sqrt{-1}\,\operatorname{sin}.\,n\Phi = 0,$$

ex quo concludimus

$$\operatorname{sin}.\,n\,\Phi = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{cos}.\,n\,\Phi = \pm 1;$$

vt autem fiat

$$1 - p^n \operatorname{cos}.\,n\,\Phi = 0,$$

capi debet

$$\operatorname{cos}.\,n\,\Phi = + 1,$$

eritque $p = 1$, ita vt factor duplex sit

$$1 - 2\,z \operatorname{cos}.\,\Phi + z\,z.$$

Loco $n\,\Phi$ igitur omnes arcus sumi possunt, quorum Cosinus $= + 1$ qui sunt

$$0\,\pi,\ 2\,\pi,\ 4\,\pi,\ 6\,\pi,\ 8\,\pi \text{ etc.}$$

valoresque anguli ipsi Φ erunt

$$\frac{0\,\pi}{n},\ \frac{2\,\pi}{n},\ \frac{4\,\pi}{n},\ \frac{6\,\pi}{n} \text{ etc.}$$

et factores simplices denominatoris hinc oriundi erunt

$$z - \operatorname{cos}.\,\Phi \pm \sqrt{-1}\,\operatorname{sin}.\,\Phi.$$

Pona-

Ponamus breuitatis gratia

$$f = \text{cof.}\, \Phi \pm \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \Phi$$

ita, vt f geminum valorem inuoluat, et factor fimplex erit $z-f$; ftatuatur ergo fractio partialis hinc oriunda $= \frac{\alpha}{z-f}$; ponaturque

$$\frac{z^{m-1}}{1+z^n} = \frac{\alpha}{z-f} + \text{R},$$

et per $z-f$ multiplicando erit

$$\frac{z^m - f z^{m-1}}{1+z^n} = \alpha + \text{R}\,(z-f),$$

hinc fumto $z=f$ inuenitur

$$\alpha = \frac{z^m - f z^{m-1}}{1-z^n}.$$

Cafu autem $z=f$ tam numerator quam denominator fimul euanefcunt, ideoque loco vtriusque differentiale capi debet, reperiturque $\alpha = -\frac{1}{n} f^{m-n}$; cum autem fit

$$f = \text{cof.}\, \Phi \pm \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, \Phi, \text{ erit}$$

$$f^{m-n} = \text{cof.}\, (m-n)\,\Phi \pm \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, (m-n)\,\Phi$$

fiue ob

$$\text{fin.}\, n\Phi = 0, \ \text{cof.}\, n\Phi = 1, \ \text{cof.}\, (m-n)\Phi = \text{cof.}\, m\Phi \text{ et}$$

$$\text{fin.}\, (m-n)\,\Phi = \text{fin.}\, m\,\Phi \text{ erit}$$

$$f^{m-n} = \text{cof.}\, m\,\Phi \pm \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, m\,\Phi$$

ex quo duplici factore imaginario hae duae oriuntur fractiones partiales

$$-\frac{1}{n} \cdot \frac{\text{cof.}\, m\,\Phi + \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, m\,\Phi}{z - \text{cof.}\,\Phi - \sqrt{-1}\, \text{fin.}\,\Phi} - \frac{1}{n}\, \frac{\text{cof.}\, m\,\Phi - \sqrt{-1}\, \text{fin.}\, m\,\Phi}{z - \text{cof.}\,\Phi + \sqrt{-1}\, \text{fin.}\,\Phi},$$

quae contrahuntur in hanc

$$-\frac{2}{n}\,\frac{(z\cos.m\Phi-\cos.\Phi\cos.m\Phi-\sin.\Phi\sin.m\Phi}{1-2z\cos.\Phi+zz};$$

hinc igitur pars integralis nascitur

$$-\frac{2}{n}\int\frac{z\,dz\cos.m\Phi-dz\cos.\Phi\cos.m\Phi-dz\sin.\Phi\sin.m\Phi}{1-2z\cos.\Phi+zz},$$

cuius integrale erit

$$-\frac{2}{n}\cos.m\Phi\, l\sqrt{-2z\cos.\Phi+zz}+\frac{2}{n}\sin.m\Phi\ \text{Angl. tang.}\frac{z-\cos.\Phi}{\sin.\Phi}+C$$

seu constante definita; hocce nanciscimur integrale determinatum

$$-\frac{2}{n}\cos.m\Phi\, l\sqrt{1-2z\cos.\Phi+zz}+\frac{2}{n}\sin.m\Phi\ \text{Angl. tang.}\frac{z\sin.\Phi}{1-z\cos.\Phi}$$

casu igitur quo $\Phi=0$ erit hoc integrale $=-\frac{2}{n}l(1-z)$ cuius autem tantum semissis sumi debet $=-\frac{1}{n}l(1-z)$ casibus autem, quibus n est numerus par et $\Phi=\pi$, haec producitur pars integralis

$$-\frac{2}{n}\cos.m\pi\, l(\sqrt{1+2z+zz}),$$

cuius autem iterum tantum semissis

$$-\frac{1}{n}\cos.m\pi\, l(1+z)$$

capi oportet; vbi notandum, si m sit numerus par, fore $\cos.m\pi=-1$; consequenter integrale quaesitum sequenti modo exprimetur

$\int z^{m-1}$

$$\int \frac{z^{m-1}dz}{1-z^n} = -\tfrac{1}{n}l(1-z)$$

$$-\tfrac{1}{n}\operatorname{cos}.\tfrac{2m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2z\operatorname{cos}.\tfrac{2\pi}{n}+zz}+\tfrac{2}{n}\operatorname{sin}.\tfrac{2m\pi}{n}\,\mathrm{A\,tang}.\frac{z\operatorname{sin}.\frac{2\pi}{n}}{1-z\operatorname{cos}.\frac{2\pi}{n}}$$

$$-\tfrac{1}{n}\operatorname{cos}.\tfrac{4m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2z\operatorname{cos}.\tfrac{4\pi}{n}+zz}+\tfrac{2}{n}\operatorname{sin}.\tfrac{4m\pi}{n}\,\mathrm{A\,tang}.\frac{z\operatorname{sin}.\frac{4\pi}{n}}{1-z\operatorname{cos}.\frac{4\pi}{n}}$$

$$-\tfrac{1}{n}\operatorname{cos}.\tfrac{6m\pi}{n}\, l\sqrt{1-2z\operatorname{cos}.\tfrac{6\pi}{n}+zz}+\tfrac{2}{n}\operatorname{sin}.\tfrac{6m\pi}{n}\,\mathrm{A\,tang}.\frac{z\operatorname{sin}.\frac{6\pi}{n}}{1-z\operatorname{cos}.\frac{6\pi}{n}}$$

etc. etc.

Problema.

§. 5. Formulae differentialis

$$\frac{z^{m-1}+z^{\mu-1}}{1+z^n}\,dz$$

integrale inuenire: existente $m+\mu=n$, ita tamen, vt tam m quam μ sint numeri positiui.

Solutio.

Hic igitur nil aliud opus est, nisi vt termini integrales formulae $\int\frac{z^{m-1}dz}{1+z^n}$ supra inuenti geminentur, dum altera vice loco m scribitur μ, cum sit pro terminis logarithmicis $\frac{m\pi}{n}+\frac{\mu\pi}{n}=\pi$ erit

$$\operatorname{cos}.\tfrac{\mu\pi}{n}=-\operatorname{cos}.\tfrac{m\pi}{n};\ \operatorname{cos}.\tfrac{3\mu\pi}{n}=-\operatorname{cos}.\tfrac{3m\pi}{n}$$
$$\operatorname{cos}.\tfrac{5\mu\pi}{n}=-\operatorname{cos}.\tfrac{5m\pi}{n}\ \text{etc.}$$

vnde

vnde patet, omnes terminos logarithmicos ſe inuicem deſtruere. Porro vero pro arcubus circularibus cum ſit

$$\text{ſin.}\frac{\mu\pi}{n} = \text{ſin.}\frac{m\pi}{n};\quad \text{ſin.}\frac{3\mu\pi}{n} = \text{ſin.}\frac{3m\pi}{n}\ \text{etc.}$$

hi termini duplicabuntur ita, vt integrale quaeſitum proditurum ſit

$$\frac{4}{n}\,\text{ſin.}\frac{\mu\pi}{n}\,\text{A tang.}\frac{z\,\text{ſin.}\frac{\pi}{n}}{1-z\,\text{coſ.}\frac{\pi}{n}} + \frac{4}{n}\,\text{ſin.}\frac{3\mu\pi}{n}\,\text{A tang.}\frac{z\,\text{ſin.}\frac{3\pi}{n}}{1-z\,\text{coſ.}\frac{3\pi}{n}}$$

$$+\frac{4}{n}\,\text{ſin.}\frac{5\mu\pi}{n}\,\text{A tang.}\frac{z\,\text{ſin.}\frac{5\pi}{n}}{1-z\,\text{coſ.}\frac{5\pi}{n}} + \text{etc.}$$

quorum terminorum, ſi i denotet numerum quemcunque imparem, forma generalis erit

$$\frac{4}{n}\,\text{ſin.}\frac{im\pi}{n}\,\text{A tang.}\frac{z\,\text{ſin.}\frac{i\pi}{n}}{1-z\,\text{coſ.}\frac{i\pi}{n}}$$

terminos autem eousque continuare oportet, quoad numerus non ſuperet exponentem n, ita, vt, ſi n fuerit numerus impar, vltimus terminus contineat $i = n$; ſin autem n ſit numerus par, valor futurus ipſius i ſit $i = n - 1$.

Corollarium.

§. 6. Cum caſus $n = 1$ hinc excludatur, caſu $n = 2$ integrale erit

$2\,\text{ſin.}\frac{m\pi}{2}\,\text{A tang.}\,z$: Caſu $n = 3$ integrale erit

$\frac{4}{3}\,\text{ſin.}\frac{m\pi}{3}\,\text{A tang.}\frac{z\sqrt{3}}{2-z}$, et caſu $n = 4$ erit integrale

$\text{ſin.}\frac{m\pi}{4}\,\text{A tang.}\frac{\sqrt{2}-z}{z} + \text{ſin.}\frac{3m\pi}{4}\,\text{A tang.}\frac{z}{\sqrt{2}-z}.$

Proble-

Problema.

§. 7. Formulae differentialis praecedentis integrale assignare, casu quo $z = 1$; quandoquidem superius integrale ita est sumtum, vt euanescat posito $z = 0$.

Solutio.

Cum integralis quaesiti quaelibet pars hanc habeat formam

$$\frac{4}{n} \sin. \frac{i m \pi}{n} \text{ A tang. } \frac{z \sin. \frac{i\pi}{n}}{1 - z \cos. \frac{i\pi}{n}}$$

haec forma posito $z = 1$ abit in hanc

$$\frac{4}{n} \sin. \frac{i m \pi}{n} \text{ A tang. } \frac{\sin. \frac{i\pi}{n}}{1 - \cos. \frac{i\pi}{n}}$$

iam vero est

$$\frac{\sin. \frac{i\pi}{n}}{1 - \cos. \frac{i\pi}{n}} = \cot. \frac{i\pi}{2n} = \text{tang.} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2n}\right),$$

ideoque

$$\text{A tang. } \frac{\sin. \frac{i\pi}{n}}{1 - \cos. \frac{i\pi}{n}} = \frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2n},$$

vnde generatim pars integralis erit

$$\frac{4}{n} \sin. \frac{i m \pi}{n} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{2n}\right) = \frac{2\pi}{n} \sin. \frac{i m \pi}{n} - \frac{2 i \pi}{n n} \sin. \frac{i m \pi}{n}$$

integrale ergo quaesitum per binas sequentes progressiones exprimitur

$$\frac{2\pi}{n}\left(\sin. \frac{m\pi}{n} + \sin. \frac{3 m \pi}{n} + \sin. \frac{5 m \pi}{n} + \ldots\ldots + \sin. \frac{i m \pi}{n}\right)$$
$$- \frac{2\pi}{n n}\left(1.\sin. \frac{m\pi}{n} + 3.\sin. \frac{3 m \pi}{n} + 5.\sin. \frac{5 m \pi}{n} + \ldots\ldots + i \sin. \frac{i m \pi}{n}\right)$$

 vbi

vbi fi breuitatis gratia fcribamus $\frac{m\pi}{n} = \vartheta$, erit integrale iftud commodius expreffum ita

$$\frac{2\pi}{n}(\sin.\vartheta + \sin.3\vartheta + \sin.5\vartheta + \ldots\ldots + \sin.i\vartheta)$$
$$-\frac{2\pi}{nn}(1.\sin\vartheta + 3\sin.3\vartheta + 5\sin.5\vartheta + \ldots\ldots + i\sin.i\vartheta)$$

vbi, quoties n fuerit numerus impar, erit $i = n$, fin autem n numerus par erit $i = n - 1$.

Cum igitur totum negotium huc redeat, vt hae duae feries fummentur; ftatuamus

$$s = \sin.\vartheta + \sin.3\vartheta + \sin.5\vartheta + \ldots\ldots + \sin.i\vartheta \text{ et}$$
$$t = 1.\sin\vartheta + 3.\sin.3\vartheta + 5\sin.5\vartheta + \ldots\ldots + i\sin.i\vartheta$$

ita vt noftrum integrale fit

$$\frac{2\pi}{n}s - \frac{2\pi}{nn}t$$

pro priore ferie cum fit

$$2\sin.\vartheta\sin.i\vartheta = \operatorname{cof.}(i-1)\vartheta - \operatorname{cof.}(i+1)\vartheta, \text{ erit}$$
$$2s.\sin.\vartheta = \operatorname{cof.}0.\vartheta - \operatorname{cof.}2\vartheta - \operatorname{cof.}4\vartheta - \operatorname{cof.}6\vartheta - \ldots \operatorname{cof.}(i+1)\vartheta$$
$$+\operatorname{cof.}2\vartheta + \operatorname{cof.}4\vartheta + \operatorname{cof.}6\vartheta + \ldots.$$

ita vt fit $2s.\sin.\vartheta = 1 - \operatorname{cof.}(i+1)\vartheta$, ergo

$$s = \frac{1}{2\sin.\vartheta} - \frac{\operatorname{cof.}(i+1)\vartheta}{2\sin.\vartheta}.$$

Pro altera autem ferie, fpectemus primum angulum ϑ vt variabilem, et cum fit

$$d.\operatorname{cof.}i\vartheta = -id\vartheta\sin.i\vartheta \text{ erit } \int id\vartheta\sin.i\vartheta = -\operatorname{cof.}i\vartheta;$$

quo notato reperietur

$$\int t\,d\vartheta = -\operatorname{cof.}\vartheta - \operatorname{cof.}3\vartheta - \operatorname{cof.}5\vartheta - \ldots\ldots - \operatorname{cof.}i\vartheta$$

quae feries multiplicetur per $2\sin.\vartheta$ et cum fit

$$2\sin.\vartheta\operatorname{cof.}i\vartheta = -\sin.(i-1)\vartheta + \sin.(i+1)\vartheta, \text{ erit}$$
$$2\sin.\vartheta\int t\,d\vartheta = -\sin.(i+1)\vartheta;$$

quo-

quocirca habebimus

$$\int t\, d\vartheta = -\frac{\sin.(i+1)\vartheta}{2\sin.\vartheta}, \text{ hincque}$$

$$t = -\frac{(i+1)\cos.(i+1)\vartheta}{2\sin.\vartheta} + \frac{\sin.(i+1)\vartheta\cos.\vartheta}{2\sin.\vartheta^2}$$

quibus valoribus inuentis integrale noſtrum ita ſe habebit

$$\frac{\pi}{n\sin.\vartheta} - \frac{\pi\cos.(i+1)\vartheta}{n\sin.\vartheta} + \frac{\pi(i+1)\cos.(i+1)\vartheta}{nn\sin.\vartheta} - \frac{\pi\sin.(i+1)\vartheta\cos.\vartheta}{nn\sin.\vartheta^2}.$$

cum nunc ſit vel $i = n-1$, vel $i = n$, prout n fuerit numerus par vel impar, vtrumque caſum ſeorſim euoluamus.

I. Si n ſit numerus par, erit $i = n-1$, et $i+1 = n$, et quia $\vartheta = \frac{m\pi}{n}$ erit $(i+1)\vartheta = m\pi$; hinc

$$\sin.(i+1)\vartheta = 0, \text{ et } \cos.(i+1)\vartheta = \pm 1;$$

quocirca formula noſtra erit $= \frac{\pi}{n\sin.\vartheta}$, conſequenter integrale quaeſitum hoc caſu erit $\frac{\pi}{\sin.\frac{m\pi}{n}}$.

II. At ſi ſit $i = n$, ideoque $(i+1) = n+1$, erit angulus

$$(i+1)\vartheta = (n+1)\frac{m\pi}{n} = m\pi + \frac{m\pi}{n} = m\pi + \vartheta,$$

vnde fit

$$\cos.(i+1)\vartheta = \pm\cos.\vartheta, \text{ et } \sin.(i+1)\vartheta = \pm\sin.\vartheta$$

quibus valoribus ſubſtitutis formula euadet

$$\frac{\pi}{n\sin.\vartheta} \mp \frac{\pi\cos.\vartheta}{n\sin.\vartheta} \pm \frac{(n+1)\pi\cos.\vartheta}{nn\sin.\vartheta} \mp \frac{\pi\cos.\vartheta}{nn\sin.\vartheta}$$

quae contrahitur in $\frac{\pi}{n\sin.\vartheta} = \frac{\pi}{n\sin.\frac{m\pi}{n}}$.

Consequenter, siue n sit numerus par, siue impar erit

$$\int \frac{z^{m-1} + z^{\mu-1}}{1 + z^n} dz = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}.$$

Corollarium 1.

§. 8. Si ergo fuerit $m + \mu = n$, et post integrationem ita institutam, vt integrale euanescat posito $z = 0$, capiatur $z = 1$, semper fiet

$$\int \frac{z^{m-1} + z^{\mu-1}}{1 + z^n} dz = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}.$$

Corollarium 2.

§. 9. Cum per seriem infinitam sit

$$\frac{1}{1 + z^n} = 1 - z^n + z^{2n} - z^{3n} + z^{4n} - z^{5n} + \text{etc.}$$

nostrae formulae integrale in genere erit

$$+\frac{z^m}{m} - \frac{z^{m+n}}{m+n} + \frac{z^{m+2n}}{m+2n} - \frac{z^{m+3n}}{m+3n} + \frac{z^{m+4n}}{m+4n} - \text{etc.}$$
$$+\frac{z^\mu}{\mu} - \frac{z^{\mu+n}}{\mu+n} + \frac{z^{\mu+2n}}{\mu+2n} - \frac{z^{\mu+3n}}{\mu+3n} + \frac{z^{\mu+4n}}{\mu+4n} - \text{etc.}$$

vnde posito $z = 1$ sequentis seriei infinitae summatio habebitur

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}} = \begin{cases} +\frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \frac{1}{m+4n} - \text{etc.} \\ +\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+n} + \frac{1}{\mu+2n} - \frac{1}{\mu+3n} + \frac{1}{\mu+4n} - \text{etc.} \end{cases}$$

vel

vel ob $n = m + \mu$ huius

$$\frac{\pi}{(m+\mu)\sin.\frac{m\pi}{m+\mu}} = \begin{array}{l} +\frac{1}{m} - \frac{1}{2m+\mu} + \frac{1}{3m+2\mu} - \frac{1}{4m+3\mu} + \text{etc.} \\ +\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu+m} + \frac{1}{3\mu+2m} - \frac{1}{4\mu+3m} + \text{etc.} \end{array}$$

Exempla.

I. Si $m = 1$ et $\mu = 1$ erit

$$\frac{\pi}{2} = \begin{array}{l} +1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} \\ +1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.} \end{array} \text{ ideoque}$$

$$\frac{\pi}{4} = +1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

II. Si $m = 1$ et $\mu = 2$ erit $m + \mu = 3$ et $\sin.\frac{m\pi}{m+\mu} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ideoque

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \begin{array}{l} +1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{16} + \text{etc.} \\ +\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \text{etc.} \end{array} \text{ siue}$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \text{etc.}$$

III. Si $m = 1$ et $\mu = 3$ erit $\mu + m = 4$ et $\sin.\frac{m\pi}{m+\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ideoque

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \begin{array}{l} +1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{21} + \text{etc.} \\ +\frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \frac{1}{19} - \frac{1}{23} + \text{etc.} \end{array} \text{ seu}$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = +1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{etc.}$$

Addatur huic series exemplo I inuenta prodibitque

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 2 - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - \frac{2}{15} + \frac{2}{17} - \text{etc. siue}$$

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \text{etc.}$$

vbi termini positiui in forma $8a + 1$; negatiui vero in forma $8a - 1$ continentur.

Problema.

§. 10. Formulam integralem

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{\mu-1}}{1 - z^n} dz$$

existente $m + \mu = n$ integrare.

Solutio.

Cum igitur a formula integrali:

$$\int \frac{z^{m-1} dz}{1 - z^n} \text{ haec formula } \int \frac{z^{\mu-1} dz}{1 - z^n}$$

subtrahi debeat, primi logarithmi se destruunt; id quod ob

$$\frac{2m\pi}{n} + \frac{2\mu\pi}{n} = 2\pi,$$

et hinc ob

$$\cos. \frac{2m\pi}{n} = \cos. \frac{2\mu\pi}{n}$$

etiam de secundis valet; pro tertiis idem euenit, quia

$$\frac{4m\pi}{n} + \frac{4\mu\pi}{n} = 4\pi,$$

et hinc quia

$$\cos. \frac{4m\pi}{n} = \cos. \frac{4\mu\pi}{n};$$

atque hoc modo omnes logarithmi plane se destruent; arcus vero circulares, quia

$$\sin. \frac{2\mu\pi}{n} = -\sin. \frac{2m\pi}{n} \text{ et } \sin. \frac{4\mu\pi}{n} = -\sin. \frac{4m\pi}{n},$$

omnes manifesto duplicabuntur; vnde integrale quaesitum per meros arcus circulares exprimitur; eritque

$\int z^{m-1}$

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{\mu-1}}{1-z^n}\, dz = \frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{2m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{z \text{ ſin.} \frac{2\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{2\pi}{n}}$$

$$+ \frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{4m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{z \text{ ſin.} \frac{4\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{4\pi}{n}} + \frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{6m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{z \text{ ſin.} \frac{6\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{6\pi}{n}}$$

$$+ \frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{8m\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{z \text{ ſin.} \frac{8\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{8\pi}{n}} -$$

vnde, ſi i denotet numerum parem quemcunque, ſinguli hi termini in hac forma generali continebuntur

$$\frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{im\pi}{n} \text{ Arc. tang.} \frac{z \text{ ſin.} \frac{i\pi}{n}}{1 - z \text{ coſ.} \frac{i\pi}{n}}.$$

Has autem formulas eo vsque continuari oportet, quamdiu i non ſuperet exponentem n; quare ſi n ſit numerus par, vltimus valor erit $i = n$, ſin autem n ſit impar vltimus ille valor erit $i = n - 1$. Caeterum notaſſe iuuabit, totum hoc integrale euaneſcere ſumto $z = 0$.

Problema.

§. 11. Praecedentis formulae integralis valorem inueſtigare pro caſu quo ponitur $z = 1$.

Solutio.

Cum omnium partium forma generalis hoc caſu abeat in hanc

$$\frac{4}{n} \text{ſin.} \frac{im\pi}{n} \text{ A tang.} \frac{\text{ſin.} \frac{i\pi}{n}}{1 - \text{coſ.} \frac{i\pi}{n}},$$

Eſt

Eſt vero, vti ante iam vidimus

$$\frac{\text{ſin.}\,\frac{i\pi}{n}}{1-\text{coſ.}\,\frac{i\pi}{n}} = \cot\,\frac{i\pi}{2n} = \text{tang.}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{i\pi}{2n}\right)$$

vnde iſte arcus erit

$\frac{\pi}{2}-\frac{i\pi}{n}$, ideoque tota forma

$$\frac{2\pi}{n}\,\text{ſin.}\,\frac{im\pi}{n}-\frac{2i\pi}{nn}\,\text{ſin.}\,\frac{im\pi}{n}.$$

Ponamus breuitatis gratia $\frac{m\pi}{n}=\vartheta$, vt habeamus hanc formulam

$$\frac{2\pi}{n}\,\text{ſin.}\,i\vartheta-\frac{2i\pi}{nn}\,\text{ſin.}\,i\vartheta$$

quod ſi iam loco i ſucceſſiue ſcribamus numeros 2, 4, 6, 8 etc. vsque ad vltimum i, qui eſt vel n, vel $n-1$, valor integralis quaeſitus per has duas ſeries exprimetur

$$\frac{2\pi}{n}(\text{ſin.}\,2\vartheta+\text{ſin.}\,4\vartheta+\text{ſin.}\,6\vartheta+\ldots\ldots+\text{ſin}\,i\vartheta)$$
$$-\frac{2\pi}{nn}(2\,\text{ſin.}\,2\vartheta+4\,\text{ſin.}\,4\vartheta+6\,\text{ſin.}\,6\vartheta+\ldots\ldots+i\,\text{ſin.}\,i\vartheta)$$

ſtatuamus igitur vt ſupra

$$t=2\,\text{ſin.}\,2\vartheta+4\,\text{ſin.}\,4\vartheta+6\,\text{ſin.}\,6\vartheta+\ldots\ldots+i\,\text{ſin.}\,i\vartheta$$
$$s=\text{ſin.}\,2\vartheta+\text{ſin.}\,4\vartheta+\text{ſin.}\,6\vartheta+\ldots\ldots+\text{ſin.}\,i\vartheta$$

ita vt valor quem quaerimus futurus ſit

$$\frac{2\pi}{n}s-\frac{2\pi}{nn}t.$$

Iam ſeriem priorem multiplicemus per 2 ſin. ϑ, et cum ſit

$2\,\text{ſin.}\,\vartheta\,\text{ſin}\,i\vartheta=\text{coſ.}(i-1)\vartheta-\text{coſ.}(i+1)\vartheta$ erit

$$2s.\text{ſin.}\,\vartheta=\text{coſ.}\,\vartheta-\text{coſ.}\,3\vartheta-\text{coſ.}\,5\vartheta-\text{coſ.}\,7\vartheta\ldots\ldots-\text{coſ.}(i+1)\vartheta$$
$$+\text{coſ.}\,3\vartheta+\text{coſ.}\,5\vartheta+\text{coſ.}\,7\vartheta$$

ſeu

ſeu $2 s . \sin. \vartheta = \cos. \vartheta - \cos. (i+1)\vartheta$ ergo

$$s = \frac{\sin. \vartheta}{2 \sin. \vartheta} - \frac{\cos. (i+1)\vartheta}{2 \sin. \vartheta}.$$

Altera ſeries multiplicetur per $d\vartheta$ et cum ſit $\int (i\, d\vartheta \sin. i\vartheta = -\cos. i\vartheta)$ prodibit integrando

$$\int t\, d\vartheta = -\cos. 2\vartheta - \cos. 4\vartheta - \cos. 6\vartheta - \ldots\ldots - \cos. i\vartheta$$

quae denuo multiplicata per $2 \sin. \vartheta$ ob

$2 \sin. \vartheta \cos. i\vartheta = \sin. (i+1)\vartheta - \sin. (i-1)\vartheta$ praebet

$$\begin{aligned} 2 \sin. \vartheta \int t\, d\vartheta = \sin. \vartheta - \sin. 3\vartheta - \sin. 5\vartheta - \sin. 7\vartheta - \ldots - \sin. (i+1)\vartheta \\ + \sin. 3\vartheta + \sin. 5\vartheta + \sin. 7\vartheta \end{aligned}$$

hinc per $2 \sin. \vartheta$ diuidendo fit

$$\int t\, d\vartheta = -\tfrac{1}{2} - \frac{\sin. (i+1)\vartheta}{2 \sin. \vartheta},$$

vnde colligimus

$$t = -\frac{(i+1)\cos. (i+1)\vartheta}{2 \sin. \vartheta} + \frac{\sin. (i+1)\vartheta \cos. \vartheta}{2 \sin. \vartheta^2}.$$

His igitur valoribus s et t inuentis integrale quaeſiſitum erit

$$\frac{\pi \cos. \vartheta}{n \sin. \vartheta} - \frac{\pi \cos. (i+1)\vartheta}{n \sin. \vartheta} + \frac{\pi (i+1)\cos. (i+1)\vartheta}{n\, n \sin. \vartheta} - \frac{\pi \sin. (i+1)\vartheta \cos. \vartheta}{n\, n \sin. \vartheta^2}$$

cum nunc ſit $\vartheta = \frac{m\pi}{n}$, duo caſus euoluendi ſuperſunt, alter quo n eſt numerus par et $i = n$, alter vero quo n eſt numerus impar et $i = n - 1$.

I. Si $i = n$, erit $(i+1)\vartheta = m\pi + \frac{m\pi}{n} = m\pi + \vartheta$, vnde ob $\sin. m\pi = 0$ erit

$\cos. (i+1)\vartheta = \cos. m\pi \cos. \vartheta$, et $\sin (i+1)\vartheta = \cos. m\pi \sin. \vartheta$,

quibus ſubſtitutis habebimus $\frac{\pi \cos. \vartheta}{n \sin. \vartheta}$

reliqua ſcilicet membra ſe mutuo deſtruunt ita, vt valor quaeſitus ſit $\frac{\pi \cos. \vartheta}{n \sin. \vartheta} = \frac{\pi}{n \tang. \vartheta}$.

II. Si $i = n - 1$ ideoque $i + 1 = n$ erit $(i+1)\vartheta = m\pi$ et $\operatorname{coſ.}(i+1)\vartheta = \operatorname{coſ.} m\pi$, at $\operatorname{ſin.}(i+1)\vartheta = 0$, vnde formula noſtra fiet $\frac{\pi \operatorname{coſ.} \vartheta}{n \operatorname{ſin.} \vartheta}$, vbi ſcilicet reliqui termini praeter hunc ſeſe mutuo deſtruxerunt. Vnde patet, ſiue exponens n fuerit par, ſiue impar, vtroque caſu valorem integralis quaeſiti eſſe $= \frac{\pi}{n \operatorname{tang.} \frac{m\pi}{n}}$.

Corollarium 1.

§. 12. Si ergo fuerit $m + \mu = n$, et poſt integrationem ita inſtitutam, vt integrale euaneſcat poſito $z = 0$, capiatur $z = 1$, ſemper fiet

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{\mu-1}}{1 - z^n} dz = \frac{\pi}{n \operatorname{tang.} \frac{m\pi}{n}}.$$

Corollarium 2.

§. 13. Cum per ſeriem infinitam ſit

$$\frac{1}{1-z^n} = 1 + z^n + z^{2n} + z^{3n} + z^{4n} + z^{5n} + \text{etc.}$$

integrale noſtrae formulae erit in genere

$$\frac{z^m}{m} + \frac{z^{m+n}}{m+n} + \frac{z^{m+2n}}{m+2n} + \frac{z^{m+3n}}{m+3n} + \text{etc.}$$

$$- \frac{z^\mu}{\mu} - \frac{z^{\mu+n}}{\mu+n} - \frac{z^{\mu+2n}}{\mu+2n} - \frac{z^{\mu+3n}}{\mu+3n} - \text{etc.}$$

vnde poſito $z = 1$, ſequentis ſeriei infinitae ſummatio habebitur

$\frac{\pi}{n \operatorname{tang.}}$

$$\frac{\pi}{n\,\text{tang.}\frac{m\pi}{n}} = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} + \frac{1}{m+3n} + \frac{1}{m+4n} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu+n} - \frac{1}{\mu+2n} - \frac{1}{\mu+3n} - \frac{1}{\mu+4n} - \text{etc.} \end{cases}$$

quae ſeries a ſuperiori tantum ratione ſignorum diſcrepat; vel cum ſit $n = m + \mu$ erit

$$\frac{\pi}{(m+\mu)\,\text{tang.}\frac{m\pi}{m+\mu}} = \begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{1}{2m+\mu} + \frac{1}{3m+2\mu} + \frac{1}{4m+3\mu} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2\mu+m} - \frac{1}{3\mu+2m} - \frac{1}{4\mu+3m} - \text{etc.} \end{cases}$$

Exempla.

I. Quia hae duae ſeries ſe mutuo deſtruunt caſu $\mu = m$, hoc caſu fiet

$$\frac{\pi}{2\,m\,\text{tang.}\frac{\pi}{2}} = 0.$$

II. Sumamus $m = 1$ et $\mu = 2$ colligiturque

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{16} + \frac{1}{19} + \text{etc.} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{11} - \frac{1}{14} - \frac{1}{17} - \text{etc.} \end{cases}$$ ſiue

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

ſi ergo hanc ſeriem per 2 multiplicemus, habebimus

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} + \frac{2}{4} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} - \frac{2}{8} + \frac{2}{10} - \text{etc.}$$

ſupra autem (§. 9.) inueneramus

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

hinc, ſi ab illa ſerie hanc ſubtrahamus, prodibit

$$0 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \frac{3}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{3}{14} + \text{etc.}$$

quae ita commode in periodos distribuitur:

$$
\begin{array}{l}
\left[+\frac{1}{1}-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right] \\
0=\left[+\frac{1}{7}-\frac{3}{8}+\frac{3}{10}-\frac{1}{11}\right] \\
\left[+\frac{1}{13}-\frac{3}{14}+\frac{3}{16}-\frac{1}{17}\right] \\
\text{etc.}
\end{array}
$$

vnde sequitur fore,

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\text{etc.}=3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\text{etc.}\right)$$

Scholion.

§. 14. Aequalitas harum duarum serierum eo magis est notatu digna, quod eius veritas non parum abstrusa videtur: rem igitur sequenti modo tentemus. Ponamus pro priore

$$s=\frac{z}{1}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}-\frac{z^{11}}{11}+\frac{z^{13}}{13}-\frac{z^{17}}{17}+\text{etc.}$$

eritque differentiando

$$\frac{ds}{dz}=1-z^4+z^6-z^{10}+z^{12}-z^{16}+z^{18}\text{etc.}=\frac{1-z^4}{1-z^6}$$

vnde fit

$$s=\int\frac{(1-z^4)\,dz}{1-z^6}$$

in quo integrali poni debet $z=1$; qua forma cum problemate postremo comparata fit $m=1$; $\mu=5$ et $n=6$; ita vt sit $m+\mu=n$; hinc ergo colligitur

$$s=\frac{\pi}{6\,\text{tang.}\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Pro altera serie ponamus

$$s=\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^8}{8}-\frac{z^{10}}{10}+\frac{z^{14}}{14}-\text{etc.}$$

vt

vt, posito $z = 1$ fieri debeat $s = 3t$; erit ergo differentiando

$$\frac{dt}{dz} = z - z^3 + z^7 - z^9 + z^{13} - z^{15} + z^{19} - \text{etc.} = \frac{z - z^3}{1 - z^6}$$

vnde fit

$$t = \int \frac{(z - z^3)\,dz}{1 - z^6};$$

qua aequatione cum problemate vltimo comparata, ob $m = 2$; $\mu = 4$; $n = 6$ positoque $z = 1$ prodit

$$t = \frac{\pi}{6 \text{ tang. } \frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}},$$

quocirca erit $3t = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$, hincque

$$s = 3t = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

DE VALORE FORMVLAE INTEGRALIS

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^{\mu}$$

CASV QVO POST INTEGRATIONEM PONITVR $z = 1$.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Ex consideratione innumerabilium arcuum circularium, qui communem habent vel sinum vel tangentem, iam olim summationem duarum serierum infinitarum deduxi, quae ob summam generalitatem maxime memoratu dignae videbantur. Si enim literae m et n numeros quoscunque denotant; posita diametri ratione ad peripheram vt 1 ad π, illae duae summationes hoc modo se habebant:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} \text{ etc.} = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$$

et

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \text{etc} = \frac{\pi}{n \tang. \frac{m\pi}{n}}$$

atque

atque ex his duabus ſeriebus iam tum temporis elicueram ſummationes omnium ſerierum illarum, quarum denominatores ſecundum poteſtates numerorum naturalium progrediuntur, quemadmodum in introductione in analyſin infinitorum et alibi fuſius expoſui. Nunc autem eaedem ſeries me perduxerunt ad integrationem formulae in titulo expreſſae, quae eo magis attentione digna videtur, quod huiusmodi integrationes aliis methodis neutiquam exſequi liceat.

§. 2. Statim autem patet: has duas ſeries infinitas oriri ex euolutione quarundam formularum integralium, ſi poſt integrationem quantitati variabili certus valor, veluti vnitas tribuatur; ita prior ſeries deducitur ex euolutione huius formulae integralis

$$\int \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1 + z^n} dz$$

poſteriore vero ex euolutione iſtius

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1 - z^n} dz$$

ſi quidem poſt integrationem ſtatuatur $z = 1$. Deinceps autem ex ipſis principiis calculi integralis demonſtraui, valorem integralis prioris harum duarum formularum, ſi quidem ponatur $z = 1$, reduci ad hanc formulam ſimplicem

$$\frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$$

integrale autem poſterius, eodem caſu $z = 1$, ad iſtam

$$\frac{\pi}{n \tang. \frac{m\pi}{n}}$$

ita,

ita, vt ex ipſis calculi integralis principiis certum ſit eſſe

$$\int \frac{z^{m-1} + z^{n-m-1}}{1 + z^n} dz = \frac{\pi}{n \sin. \frac{m\pi}{n}}$$

$$\int \frac{z^{m-1} - z^{n-m-1}}{1 - z^n} dz = \frac{\pi}{n \operatorname{tang.} \frac{m\pi}{n}}$$

ſi quidem poſt integrationem ita inſtitutam, vt integrale euaneſcat poſito $z = 0$, ſtatuatur $z = 1$.

§. 3. Quo iam hanc duplicem integrationem ad formam propoſitam reducamus, faciamus $n = 2\lambda$ et $m = \lambda - \omega$, vnde binae illae ſeries infinitae hanc induent formam

$$\frac{1}{\lambda-\omega} + \frac{1}{\lambda+\omega} - \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} + \frac{1}{5\lambda+\omega} - \text{etc.}$$

et

$$\frac{1}{\lambda-\omega} - \frac{1}{\lambda+\omega} + \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} - \frac{1}{5\lambda+\omega} + \text{etc.}$$

harum igitur ſerierum prioris ſumma erit

$$\frac{\pi}{2\lambda \sin. \frac{\pi(\lambda-\omega)}{2\lambda}} = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{cof.} \frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

poſterioris vero ſumma erit

$$\frac{\pi}{2\lambda \operatorname{tang.} \frac{\pi(\lambda-\omega)}{2\lambda}} = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{cotang.} \frac{\pi\omega}{2\lambda}} = \frac{\pi \operatorname{tang.} \frac{\pi\omega}{2\lambda}}{2\lambda}.$$

Quod ſi ergo breuitatis gratia ponamus

$$\frac{\pi}{2\lambda \operatorname{cof.} \frac{\pi\omega}{2\lambda}} = S, \quad \text{et } \frac{\pi}{2\lambda} \operatorname{tang.} \frac{\pi\omega}{2\lambda} = T,$$

habe-

habebimus ſequentes duas integrationes

$$\int \frac{z^{\lambda - \omega} + z^{\lambda + \omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z} = S, \text{ et}$$

$$\int \frac{z^{\lambda - \omega} - z^{\lambda + \omega}}{1 - z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z} = T.$$

§. 4. Circa has binas integrationes ante omnia obſeruo, eas perinde locum habere, ſiue pro literis λ et ω accipiantur numeri integri, ſiue fracti. Sint enim λ et ω numeri fracti quicunque, qui euadant integri, ſi multiplicentur per α, quo poſito fiat $z = x^{\alpha}$, eritque $\frac{dz}{z} = \frac{\alpha dx}{x}$, et poteſtas quaecunque $z^{\vartheta} = x^{\alpha\vartheta}$; prior igitur formula erit

$$\int \frac{x^{\alpha(\lambda - \omega)} + x^{\alpha(\lambda + \omega)}}{1 + x^{2\alpha\lambda}} \cdot \frac{\alpha dx}{x}$$

vbi, cum iam omnes exponentes ſint numeri integri, valor huius formulae poſito poſt integrationem $x = 1$, quandoquidem tunc etiam fit $z = 1$, a praecedente eo tantum differt, quod hic habeamus $\alpha\lambda$ et $\alpha\omega$ loco λ et ω, ac praeterea hic adſit factor α, quocirca valor iſtius formulae erit

$$\alpha . \frac{\pi}{2\alpha\lambda \operatorname{coſ.} \frac{\pi\omega}{2\lambda}} = \frac{\pi}{2\lambda \operatorname{coſ.} \frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

qui ergo valor eſt $= S$ prorſus vt ante; quae identitas etiam manifeſto eſt in altera formula, vnde patet, etiamſi pro λ et ω fractiones quaecunque accipiantur, integrationem hic exhibitam nihilo minus locum eſſe habituram; quae circumſtantia probe

 notari

notari meretur, quoniam in ſequentibus literam ω tanquam variabilem ſumus tractaturi.

§. 5. Poſtquam igitur binae iſtae formulae integrales literis S et T indicatae fuerint integratae, ita, vt euaneſcant poſito $z = 0$, integralia ſpectari poterunt non ſolum vt functiones quantitatis z, ſed etiam vt functiones binarum variabilium z et ω, quandoquidem numerum ω tanquam quantitatem variabilem tractare licet, quin etiam exponentem λ pro quantitate variabili habere liceret; ſed quia hinc formulae integrales alius generis eſſent prodituræ, atque hic contemplari conſtitui, ſolam quantitatem ω, praeter ipſam variabilem z, hic vt quantitatem variabilem ſum tractaturus.

§. 6. Cum igitur ſit

$$S = \int \frac{z^{\lambda - \omega} + z^{\lambda + \omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z}$$

in qua integratione ſola z vt variabilis ſpectatur, erit vtique ſecundum ſignandi morem iam ſatis vſu receptum

$$\left(\frac{dS}{dz}\right) = \frac{z^{\lambda - \omega} + z^{\lambda + \omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{1}{z}$$

haec iam formula denuo differentietur, poſita ſola litera ω variabili, eritque

$$\left(\frac{ddS}{dz\,d\omega}\right) = \frac{-z^{\lambda - \omega} + z^{\lambda + \omega}}{1 + z^{2\lambda}} \cdot \frac{1}{z}\, lz$$

quae formula ducta in dz, ac denuo integrata ſola z habita pro variabili, dabit

$\int dz$

$$\int dz\left(\frac{ddS}{dz\,d\omega}\right)=\int-\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}lz$$

vbi notetur eſſe

$$S=\frac{\pi}{2\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

ita, vt hinc deducamus

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right)=\frac{\pi\pi\,\text{ſin.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}},$$

hoc igitur valore ſubſtituto nanciſcimur hanc integrationem

$$\int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}lz=\frac{\pi\pi\,\text{ſin.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}.$$

§. 7. Quod ſi iam altera formula ſimili modo tractetur, cum ſit

$T=\frac{\pi}{2\lambda}\,\text{tang.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}$ erit

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right)=\frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}$$

ex formula autem integrali erit

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right)=\int-\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}.\frac{dz}{z}lz$$

vnde colligimus ſequentem integrationem

$$\int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}lz=\frac{-\pi\pi}{4\lambda\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}.$$

§. 8. Quoniam literas S et T etiam per ſeries expreſſas dedimus, erit etiam per ſimiles ſeries

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} - \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} - \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} - \text{etc.}$$
$$= \frac{\pi\,\pi\,\text{fi}.\,\frac{\pi\omega}{\lambda}}{4\lambda\lambda\,\text{cof}.\,\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}.$$

Similique modo etiam pro altera ſerie

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} + \text{etc.}$$
$$= \frac{\pi\,\pi}{4\lambda\lambda\,\text{cof}.\,\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}$$

ſicque ſummas harum ſerierum quoque duplici modo repraeſentauimus, ſcilicet per formulam euolutam quantitatem π inuoluentem, tum vero etiam per formulam integralem; quae ita eſt comparata, vt eius integrale nulla methodo adhuc conſueta aſſignari poſſit.

§. 9. Applicemus has integrationes ad aliquot caſus particulares: ac primo quidem ſumamus $\omega = 0$, quo quidem caſu prior integratio ſponte in oculos incurrit, at poſterior praebet:

$$\int \frac{2z^\lambda}{1-z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} lz = -\frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda}, \text{ ſiue}$$

$$\int \frac{z^{\lambda-1}\,dz\,lz}{1-z^{2\lambda}} = -\frac{\pi\pi}{8\lambda\lambda}$$

hincque ſimul iſtam ſummationem adipiſcimur

$$\frac{1}{\lambda\lambda} + \frac{1}{\lambda\lambda} + \frac{1}{9\lambda\lambda} + \frac{1}{9\lambda\lambda} + \frac{1}{25\lambda\lambda} + \frac{1}{25\lambda\lambda} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda}$$

ſiue

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8}$$

id, quod iam dudum a me eſt demonſtratum.

§. 10.

§. 10. Hic ſtatim patet, perinde eſſe, quinam numerus pro λ accipiatur; ſit igitur $\lambda = 1$, et habebitur iſta integratio

$$\int \frac{dz\, lz}{1 - z^2} = -\frac{\pi\pi}{8},$$

ex qua ſequentia integralia ſimpliciora:

$$\int \frac{dz\, lz}{1 - z} \quad \text{et} \quad \int \frac{dz\, lz}{1 + z}$$

deriuare licet, ope huius ratiocinii; ſtatuatur

$$\int \frac{z\, dz\, lz}{1 - zz} = P,$$

et poſito $zz = v$, vt ſit $z\, dz = \frac{dv}{2}$ et $lz = \frac{1}{2} lv$ prodibit

$$\frac{1}{4} \int \frac{dv\, lv}{1 + v} = P,$$

ſi ſcilicet poſt integrationem fiat $v = 1$ quippe quo caſu etiam fit $z = 1$; ſic igitur erit

$$\int \frac{dv\, lv}{1 - v} = 4P,$$

nunc prior illa formula addatur ad inuentam eritque

$$\int \frac{dz\, lz + z\, dz\, lz}{1 - zz} = P - \frac{\pi\pi}{v}$$

haec autem formula ſponte reducitur ad hanc:

$$\int \frac{dz\, lz}{1 - z} = P - \frac{\pi\pi}{8},$$

modo autem vidimus eſſe:

$$\int \frac{dv\, lv}{1 - v} \text{ ſiue } \int \frac{dz\, lz}{1 - z} = 4P, \text{ ita, vt ſit } 4P = P - \frac{\pi\pi}{8},$$

vnde manifeſto fit $P = -\frac{\pi\pi}{25}$, ex quo ſequitur fore:

$$\int \frac{dz\, lz}{1 - z} = -\frac{\pi\pi}{6};$$

ſimili modo erit

$$\int \frac{dz\, lz - z\, dz\, lz}{1 - zz} = -P - \frac{\pi\pi}{8} = -\frac{\pi\pi}{12}.$$

quae, ſupra et infra per $1-z$ diuidendo, praebet

$$\int\frac{dz\,lx}{1+z}=-\frac{\pi\pi}{12}$$

quare iam adepti ſumus tres integrationes memoratu maxime dignas

$$\text{I. } \int\frac{dz\,lz}{1+z}=-\frac{\pi\pi}{12}$$

$$\text{II. } \int\frac{dz\,lz}{1-z}=-\frac{\pi\pi}{6}$$

$$\text{III. } \int\frac{dz\,lz}{1-zz}=-\frac{\pi\pi}{8}$$ quibus adiungi poteſt

$$\text{IV. } \int\frac{z\,dz\,lz}{1-zz}=-\frac{\pi\pi}{24}.$$

§. 11. Quemadmodum igitur hae formulae ex ipſis calculi integralis principiis ſunt deductae, ita etiam earum veritas per reſolutionem in ſeries facile comprobatur; cum enim ſit

$$\frac{1}{1+z}=1-z+zz-z^3+z^4-z^5+\text{etc.},$$

et ingenere

$$\int z^n\,dz\,lz=\frac{z^{n+1}}{n+1}lz-\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2}$$

qui valor poſito $z=1$ reducitur ad $\frac{1}{(n+1)^2}$, patet fore

$$\int\frac{dz\,lz}{1+z}=-1+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{25}+\text{etc.}=-\frac{\pi\pi}{12}$$ ſiue

$$1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}-\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{12}$$

ſimili modo ob

$$\frac{1}{1-z}=1+z+zz+z^3+z^4+\text{etc.}$$ erit

$$\int\frac{dz\,lz}{1-z}=-1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{16}-\tfrac{1}{25}-\text{etc.}=-\frac{\pi\pi}{6},$$ ſeu

$$1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{16}+\tfrac{1}{25}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{6},$$

tum

tum vero ob

$$\frac{1}{1-zz} = 1 + zz + z^4 + z^6 + z^8 + \text{etc. erit}$$

$$\int \frac{dz\,lz}{1-zz} = -1 - \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{25} - \tfrac{1}{49} - \tfrac{1}{81} - \text{etc.} = -\tfrac{\pi\pi}{8}, \text{ fiue}$$

$$1 + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{49} + \tfrac{1}{81} = \tfrac{\pi\pi}{8}.$$

Eodem modo etiam

$$\int \frac{z\,dz\,lz}{1-zz} = -\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{36} - \tfrac{1}{64} - \text{etc.} = -\tfrac{\pi\pi}{24}$$

fiue $\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{36} + \tfrac{1}{64} + \text{etc.} = \tfrac{\pi\pi}{24}$

quae quidem fummationes iam funt notiffimae. Neque tamen quisquam adhuc methodo directa oftendit effe

$$\int \frac{dz\,lz}{1+z} = -\tfrac{\pi\pi}{12},$$

§. 12. Ponamus nunc $\omega = 1$, et noftrae integrationes has induent formas

$$1^\circ.\ \int \frac{-z^{\lambda-2}(1-zz)\,dz\,lz}{1+z^{2\lambda}} = \frac{\pi\pi \sin.\frac{\pi}{2\lambda}}{4\lambda\lambda \cos.\frac{\pi^2}{2\lambda}} \quad \text{et}$$

$$2^\circ.\ \int \frac{-z^{\lambda-2}(1+zz)\,dz\,lz}{1-z^{2\lambda}} = +\frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda \cos.\frac{\pi^2}{2\lambda}}$$

vnde pro diuerfis valoribus ipfius λ, quos quidem binario non minores accipere licet, fequentes obtinentur integrationes

I°. fi $\lambda = 2$ erit

$$1^\circ.\ \int \frac{-(1-zz)\,dz\,lz}{1+z^4} = \frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}}$$

$$2^\circ.\ \int \frac{-(1+zz)\,dz\,lz}{1-z^4} = +\frac{\pi\pi}{8} \quad \text{fiue} \quad \int \frac{-dz\,lz}{1-zz} = +\frac{\pi\pi}{8}$$

II°. fi $\lambda = 3$ habebimus

$$1.\ \int\frac{-z(1+zz)dz\,lz}{1+z^6}=\frac{\pi\pi}{54},\ \text{et}$$

$$2.\ \int\frac{-z(1+zz)dz\,lz}{1-z^6}=\int\frac{-z\,dlz}{1-zz+z^4}=\frac{\pi\pi}{27}.$$

Hae autem duae formulae ponendo $zz=v$ abibunt in sequentes

$$1.\ \int\frac{-dv(1-v)lv}{1+v^3}=\frac{2\pi\pi}{27}\ \text{etc.}$$

$$2.\ \int\frac{dv\,lv}{1-v+vv}=-\frac{4\pi\pi}{27}.$$

III°. Sit $\lambda=4$, et consequemur

$$1^\circ.\ \int\frac{-zz(1-zz)dz\,lz}{1+z^8}=\frac{\pi\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}}{16(2+\sqrt{2})}=\frac{\pi\pi\sqrt{2-\sqrt{2}}}{32(2+\sqrt{2})}\ \text{et}$$

$$2^\circ.\ \int\frac{-zz(1+zz)dz\,lz}{1-z^8}=\int\frac{-zz\,dz\,lz}{(1-zz)(1+z^4)}=\frac{\pi\pi}{16(2+\sqrt{2})}$$

quae postrema forma reducitur ad hanc

$$\int-\frac{dz\,lz}{1-zz}+\int\frac{(1-zz)dz\,lz}{1+z^4}=\frac{\pi\pi}{8(2+\sqrt{2})}$$

est vero $\int\frac{-dz\,lz}{1-zz}=\frac{\pi\pi}{8}$ vnde reperitur

$$\int\frac{dz\,lz(1-zz)}{1+z^4}=-\frac{\pi\pi(1+\sqrt{2})}{8(2+\sqrt{2})}=-\frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}}$$

qui valor iam in superiori casu $\lambda=2$ est inuentus.

§. 13. Nihil autem impedit, quo minus etiam faciamus $\lambda=1$, dummodo integralia ita capiantur vt euanescant, posito $z=0$, tum autem reperiemus

$$1^\circ.\ \int\frac{-(1-zz)dz\,lz}{z(1+zz)}=\infty\ \text{et}$$

$$2^\circ.\ \int\frac{-(1+zz)dz\,lz}{z(1-zz)}=\infty$$

vnde hinc nihil concludere licet. Ceterum etiam nostrae series supra inuentae manifesto declarant, earum

rum ſummas eſſe infinitas, quandoquidem primus terminus vtriusque $\frac{1}{(\lambda-\omega)^2}$ fit infinitus, ſumto vti fecimus $\lambda = 1$ et $\omega = 1$.

§. 14. His caſibus euolutis, vlterius progrediamur ac ponamus formulas integrales inuentas

$$\int \frac{-z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} lz = S' \text{ et}$$

$$\int \frac{-z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} lz = T'$$

ita vt ſit

$$S' = \frac{\pi\pi \sin. \frac{\pi\omega}{2\lambda}}{4\lambda\lambda \cos. \frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}, \text{ et } T' = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda \cos. \frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}$$

atque vt ante iam differentiemus ſolo numero ω pro variabili habito; quo facto ſequentes nanciſcimur integrationes

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^2 = (\frac{dS'}{d\omega}), \text{ et}$$

$$\int \frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\lambda+\omega}}{1-z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^2 = (\frac{dT'}{d\omega}).$$

Hunc in finem ponamus breuitatis ergo angulum $\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \Phi$ vt ſit

$$S' = \frac{\pi\pi \sin. \Phi}{4\lambda\lambda \cos. \Phi^2} = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda} \cdot \frac{\sin. \Phi}{\cos. \Phi^2} \text{ et}$$

$$T' = \frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda} \cdot \frac{1}{\cos. \Phi^2}, \text{ ac reperiemus}$$

$$d \frac{\sin. \Phi}{\cos. \Phi^2} = \frac{\cos. \Phi^2 + 2\sin. \Phi^2}{\cos. \Phi^3} d\Phi = \frac{1+\sin. \Phi^2}{\cos. \Phi^3} d\Phi$$

vbi eſt $d\Phi = \frac{\pi d\omega}{2\lambda}$; vnde colligimus

$$\left(\frac{dS'}{d\omega}\right)=\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{1+\sin.\frac{\pi\omega^2}{2\lambda}}{\cos.\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}}\right)=\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{2}{\cos.\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}}-\frac{1}{\cos.\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right)$$

ſimili modo ob $T'=\frac{\pi\pi}{4\lambda\lambda}\cdot\frac{1}{\cos.\Phi^2}$, erit

$d.\frac{1}{\cos.\Phi^2}=\frac{2\,d\Phi\sin.\Phi}{\cos.\Phi^3}$, hincque

$$\left(\frac{dT'}{d\omega}\right)=\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\cdot\frac{2\sin.\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\cos.\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}}.$$

conſequenter integrationes hinc natae erunt

$$\int\frac{z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}(lz)^2=\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left(\frac{2}{\cos.\frac{\pi\omega^3}{2\pi}}-\frac{1}{\cos.\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right)$$

$$\int\frac{z^{\lambda-\omega}-z^{\quad+\omega}}{1-z^{2\lambda}}\frac{dz}{z}(lz)^2=\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\frac{2\sin.\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\cos.\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}}.$$

§. 15. Si iam eodem modo ſeries §. 8. inventas denuo differentiemus, ſumta ſola ω variabili, perueniamus ad ſequentes ſummationes

$$\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\left\{\frac{2}{\cos.\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}}-\frac{1}{\cos.\frac{\pi\omega}{2\lambda}}\right\}=+\frac{2}{(\lambda-\omega)^3}+\frac{2}{(\lambda+\omega)^3}-\frac{2}{(3\lambda-\omega)^3}-\frac{2}{(3\lambda+\omega)^3}$$
$$+\frac{2}{(5\lambda-\omega)^3}+\frac{2}{(5\lambda+\omega)^3}-\text{etc.}$$

$$\frac{\pi^3}{8\lambda^3}\cdot\frac{2\sin.\frac{\pi\omega}{2\lambda}}{\cos.\frac{\pi\omega^3}{2\lambda}}=\frac{2}{(\lambda-\omega)^3}-\frac{2}{(\lambda+\omega)^3}+\frac{2}{(3\lambda-\omega)^3}-\frac{2}{(3\lambda+\omega)^3}+\frac{2}{(5\lambda-\omega)^3}-\text{etc.}$$

§. 16. Si iam hic ſumamus $\omega=0$ et $\lambda=1$, prior integratio hanc induit formam

$$\int\frac{2\,dz\,(lz)^2}{1+zz}=\frac{\pi^3}{8}=\frac{2}{1^3}+\frac{2}{1^3}-\frac{3}{3^3}-\frac{2}{3^3}+\frac{2}{5^3}+\frac{2}{5^3}-\frac{2}{7^3}-\frac{2}{7^3}+\text{etc.}$$

ita vt ſit

$$\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\text{etc.}=\frac{\pi^3}{32}$$

quem-

quemadmodum iam dudum demonſtraui. Altera autem integratio hoc caſu in nihilum abit. Ex priori vero integrali

$$\int \frac{dz\, lz^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16},$$

alia deriuare non licet, vti ſupra fecimus ex formula

$$\int \frac{dz\, lz}{1-zz} = -\frac{\pi\pi}{8},$$

propterea quod hic denominator $1+zz$ non habet factores reales.

§. 17. Sumamus igitur $\lambda = 2$ et $\omega = 1$, ac prior integratio dabit

$$\int \frac{(1+zz)\, dz\, (lz)^2}{1+z^4} = \frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}};$$

ſeries autem hinc nata erit

$$\frac{2}{1^3} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} + \frac{2}{11^3} - \text{etc.}, \text{ ita vt ſit}$$

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} = \frac{3\pi^3}{64\sqrt{2}}$$

quae ſuperiori addita praebet

$$\frac{1}{1^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{15^3} + \frac{1}{17^3} - \frac{1}{23^3} = \frac{\pi^3(8+2\sqrt{2})}{128\sqrt{2}}:$$

Altera vero integratio hoc caſu dat

$$\int \frac{dz\, (lz)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16}$$

quae cum paragrapho praecedenti perfecte congruit, quemadmodum etiam ſeries hinc nata eſt

$$\frac{2}{1^3} - \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} - \frac{2}{11^3} + \frac{2}{13^3} \text{ etc.}$$

§. 18. Quo autem facilius ſequentes integrationes per continuam differentiationem elicere valeamus,

mus, eas in genere repraesentemus: et cum pro priore sit

$$S = \frac{\pi}{2\lambda \cos. \frac{\pi\omega}{2\lambda}}$$

integrationes hinc ortae ita ordine procedent:

$$\text{I. } \int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} = S.$$

$$\text{II. } \int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} lz = \left(\frac{dS}{d\omega}\right)$$

$$\text{III. } \int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^2 = \left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right)$$

$$\text{IV. } \int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^3 = \left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right)$$

$$\text{V. } \int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^4 = \left(\frac{d^4S}{d\omega^4}\right)$$

$$\text{VI. } \int \frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^5 = \left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right)$$

$$\text{VII. } \int \frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1 + z^{2\lambda}} \frac{dz}{z} (lz)^6 = \left(\frac{d^6S}{d\omega^6}\right)$$

etc. etc. etc.

§. 19. Pro his differentiationibus continuis ω facilius absoluendis, ponamus breuitatis ergo $\frac{\pi}{2\lambda} = \alpha$, vt sit

$$S = \frac{\alpha}{\cos. \alpha\omega};$$

tum vero sit

$$\sin. \alpha\omega = p \text{ et } \cos. \alpha\omega = q,$$

erit-

eritque

$$dp = \alpha q\, d\omega \quad \text{et} \quad dq = -\alpha p\, d\omega;$$

Praeterea vero notetur esse

$$d.\,\frac{p^n}{q^{n+1}} = \alpha\, d\omega \left\{ \frac{n\, p^{n-1}}{q^n} + \frac{(n+1)\, p^{n+1}}{q^{n+2}} \right\}.$$

His praemissis ob $S = \alpha.\frac{1}{q}$ erit

$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \alpha\,\alpha.\frac{p}{qq}$, deinde

$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \alpha^3 \left(\frac{1}{q} + \frac{2pp}{q^3}\right)$, porro

$$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = \alpha^4 \left(\frac{5p}{qq} + \frac{6p^3}{q^4}\right)$$

$$\left(\frac{d^4S}{d\omega^4}\right) = \alpha^5 \left(\frac{5}{q} + \frac{28pp}{q^3} + \frac{24p^4}{q^5}\right)$$

$$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = \alpha^6 \left(\frac{61p}{qq} + \frac{180p^3}{q^4} + \frac{120p^5}{q^6}\right)$$

$$\left(\frac{d^6S}{d\omega^6}\right) = \alpha^7 \left(\frac{61}{q} + \frac{662pp}{q^3} + \frac{1320p^4}{q^5} + \frac{720p^6}{q^7}\right)$$

$$\left(\frac{d^7S}{d\omega^7}\right) = \alpha^8 \left(\frac{1385p}{qq} + \frac{7266p^3}{q^4} + \frac{10920p^5}{q^6} + \frac{5040p^7}{q^8}\right)$$

hi autem valores ob $pp = 1 - qq$ ad sequentes reducuntur:

$$S = \alpha.\frac{1}{q}$$

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \alpha\,\alpha\,p.\frac{1}{qq}$$

$$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \alpha^3 \left(\frac{1.2}{q^3} - \frac{1}{q}\right)$$

$$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = \alpha^4 p \left(\frac{1.2.3}{q^4} - \frac{1}{qq}\right)$$

$$\left(\frac{d^4S}{d\omega^4}\right) = \alpha^5 \left(\frac{1.2.3.4}{q^5} - \frac{20}{q^3} + \frac{1}{q}\right)$$

$$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = \alpha^6 p \left(\frac{1.2.3.4.5}{q^6} - \frac{60}{q^4} + \frac{1}{qq}\right)$$

$$\left(\frac{d^6S}{d\omega^6}\right) = \alpha^7 \left(\frac{1\ldots6}{q^7} - \frac{840}{q^5} + \frac{182}{q^3} - \frac{1}{q}\right).$$

§. 20. Has posteriores formas reperire licet ope horum duorum lemmatum

$$\text{I. } d.\frac{1}{q^{n+1}} = \alpha\, d\omega \frac{(n+1)p}{q^{n+2}}; \quad \text{II. } d.\frac{p}{q^{n+1}} = \alpha\, d\omega \left\{\frac{n+1}{q^{n+2}} - \frac{n}{q^{n}}\right\}$$

hinc enim reperiemus

$$S = \alpha \tfrac{1}{q}$$

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \alpha\alpha.\, \frac{p}{qq}$$

$$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \alpha^3 \left(\frac{2}{q^3} - \frac{1}{q}\right)$$

$$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = \alpha^4 \left(\frac{2.3\,p}{q^4} - \frac{p}{qq}\right)$$

$$\left(\frac{d^4S}{d\omega^4}\right) = \alpha^5 \left(\frac{2.3.4}{q^5} - \frac{20}{q^3} + \frac{1}{q}\right)$$

$$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = \alpha^6 \left(\frac{2.3.4.5\,p}{q^6} - \frac{3.20\,p}{q^4} + \frac{p}{qq}\right)$$

$$\left(\frac{d^6S}{d\omega^6}\right) = \alpha^7 \left(\frac{2.3.4.5.6\,p}{q^7} - \frac{840}{q^5} + \frac{182}{q^3} - \frac{1}{q}\right)$$

$$\left(\frac{d^7S}{d\omega^7}\right) = \alpha^8 \left(\frac{2\ldots7\,q}{q^8} - \frac{5.840}{q^6} + \frac{3.182}{q^4} - \frac{p}{qq}\right).$$

§. 21. Ipsae autem series his formulis respondentes

$$S = \frac{1}{\lambda-\omega} + \frac{1}{\lambda+\omega} - \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} + \frac{1}{5\lambda+\omega} - \text{etc.}$$

$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} - \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} - \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} - \frac{1}{(5\lambda+\omega)^2} - \text{etc.}$$

$$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \frac{1.2}{(\lambda-\omega)^3} + \frac{1.2}{(\lambda+\omega)^3} - \frac{1.2}{(3\lambda-\omega)^3} - \frac{1.2}{(3\lambda+\omega)^3} + \frac{1.2}{(5\lambda-\omega)^3} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = \frac{1.2.3}{(\lambda-\omega)^4} - \frac{1.2.3}{(\lambda+\omega)^4} - \frac{1.2.3}{(3\lambda-\omega)^4} + \frac{1.2.3}{(3\lambda+\omega)^4} + \frac{1.2.3}{(5\lambda-\omega)^4} - \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^4S}{d\omega^5}\right) = \frac{1.2.3.4}{(\lambda-\omega)^5} + \frac{1.2.3.4}{(\lambda+\omega)^5} - \frac{1.2.3.4}{(3\lambda-\omega)^5} - \frac{1.2.3.4}{(3\lambda+\omega)^5} + \frac{1.2.3.4}{(5\lambda-\omega)^5} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = \frac{1.2.3.4.5}{(\lambda-\omega)^6} - \frac{1.2.3.4.5}{(\lambda+\omega)^6} - \frac{1.2.3.4.5}{(3\lambda-\omega)^6} + \frac{1.2.3.4.5}{(3\lambda+\omega)^6} + \frac{1.2.3.4.5}{(5\lambda-\omega)^6} - \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^6S}{d\omega^5}\right) = \frac{1\ldots6}{(\lambda-\omega)^7} + \frac{1\ldots6}{(\lambda+\omega)^7} - \frac{1\ldots6}{(3\lambda-\omega)^7} - \frac{1\ldots6}{(3\lambda+\omega)^7} + \frac{1\ldots6}{(5\lambda-\omega)^7} - \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^7S}{d\omega^7}\right) = \frac{1\ldots7}{(\lambda-\omega)^8} - \frac{1\ldots7}{(\lambda+\omega)^8} - \frac{1\ldots7}{(3\lambda-\omega)^8} + \frac{1\ldots7}{(3\lambda+\omega)^8} + \frac{1\ldots7}{(5\lambda-\omega)^8} - \text{etc.}$$

etc. etc. etc.

Circa

Circa hos autem valores probe meminiſſe opportet, eſſe

$\alpha = \frac{\pi}{2\lambda}$, $p = \text{ſin.}\,\alpha\omega = \text{ſin.}\frac{\pi\omega}{2\lambda}$ et $q = \text{coſ.}\,\alpha\omega = \text{coſ.}\frac{\pi\omega}{2\lambda}$.

§. 22. Eodem modo expediamus valores ſeu formulas integrales alterius generis, pro quibus eſt

$$T = \frac{\pi}{2\lambda}\,\text{tang.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}$$

vnde continuo differentiando oriuntur ſequentes integrationes

$$\text{I.}\ \int \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z} = T$$

$$\text{II.}\ \int \frac{-z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z}\,lz = \left(\frac{dT}{d\omega}\right)$$

$$\text{III.}\ \int \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z}\,(lz)^2 = \left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right)$$

$$\text{IV.}\ \int \frac{-z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z}\,(lz)^3 = \left(\frac{d^3T}{d\omega^3}\right)$$

$$\text{V.}\ \int \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z}\,(lz)^4 = \left(\frac{d^4T}{d\omega^4}\right)$$

$$\text{VI.}\ \int \frac{-z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z}\,(lz)^5 = \left(\frac{d^5T}{d\omega^5}\right)$$

$$\text{VII.}\ \int \frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z}\,(lz)^6 = \left(\frac{d^6T}{d\omega^6}\right).$$

§. 23. Ponatur iterum $\frac{\pi}{2\lambda} = \alpha$; ſin. $\alpha\omega = p$, et coſ $\alpha\omega = q$, vt ſit

$$T = \frac{\alpha p}{q},$$

quae

quae formula secundum lemmata §. 20. continuo differentiata dabit

$$T = \alpha . \frac{p}{q}$$

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \alpha \alpha . \frac{1}{qq}$$

$$\left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right) = \alpha^3 \frac{2p}{q^3}$$

$$\left(\frac{d^3T}{d\omega^3}\right) = \alpha^4 \left(\frac{6}{q^4} - \frac{4}{qq}\right)$$

$$\left(\frac{d^4T}{d\omega^4}\right) = \alpha^5 \left(\frac{24p}{q^5} - \frac{8p}{q^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^5T}{d\omega^5}\right) = \alpha^6 \left(\frac{120}{q^6} - \frac{120}{q^4} + \frac{16}{qq}\right)$$

$$\left(\frac{d^6T}{d\omega^6}\right) = \alpha^7 \left(\frac{720p}{q^7} - \frac{480p}{q^5} + \frac{32p}{q^3}\right)$$

$$\left(\frac{d^7T}{d\omega^7}\right) = \alpha^8 \left(\frac{5040}{q^8} - \frac{6720}{q^6} + \frac{2016}{q^4} - \frac{64}{qq}\right).$$

§. 24. Series autem infinitae, quae hinc nascuntur, erunt

$$T = \frac{1}{\lambda-\omega} - \frac{1}{\lambda+\omega} + \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} - \frac{1}{5\lambda+\omega} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{1}{(\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda-\omega)^2} + \frac{1}{(3\lambda+\omega)^2} + \frac{1}{(5\lambda-\omega)^2} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right) = \frac{1.2}{(\lambda-\omega)^3} - \frac{1.2}{(\lambda+\omega)^3} + \frac{1.2}{(3\lambda-\omega)^3} - \frac{1.2}{(3\lambda+\omega)^3} + \frac{1.2}{(5\lambda-\omega)^3} - \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^3T}{d\omega^3}\right) = \frac{1.2.3}{(\lambda-\omega)^4} + \frac{1.2.3}{(\lambda+\omega)^4} + \frac{1.2.3}{(3\lambda-\omega)^4} + \frac{1.2.3}{(3\lambda+\omega)^4} + \frac{1.2.3}{(5\lambda-\omega)^4} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^4T}{d\omega^4}\right) = \frac{1.2.3.4}{(\lambda-\omega)^5} - \frac{1.2.3.4}{(\lambda+\omega)^5} + \frac{1.2.3.4}{(3\lambda-\omega)^5} - \frac{1.2.3.4}{(3\lambda+\omega)^5} + \frac{1.2.3.4}{(5\lambda-\omega)^5} - \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^5T}{d\omega^5}\right) = \frac{1.2.3.4.5}{(\lambda-\omega)^6} + \frac{1.2.3.4.5}{(\lambda+\omega)^6} + \frac{1.2.3.4.5}{(3\lambda-\omega)^6} + \frac{1.2.3.4.5}{(3\lambda+\omega)^6} + \frac{1.2.3.4.5}{(5\lambda-\omega)^6} + \text{etc.}$$

$$\left(\frac{d^6T}{d\omega^6}\right) = \frac{1\ldots 6}{(\lambda-\omega)^7} - \frac{1\ldots 6}{(\lambda+\omega)^7} + \frac{1\ldots 6}{(3\lambda-\omega)^7} - \frac{1\ldots 6}{(3\lambda+\omega)^7} + \frac{1\ldots 6}{(5\lambda-\omega)^7} - \frac{1\ldots 6}{(5\lambda+\omega)^7} + \text{etc.}$$

§. 25. Operae pretium erit, hinc casus simplicissimos euoluere, qui oriuntur ponendo $\lambda = 1$ et $\omega = 0$, ita vt sit $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $p = 0$ et $q = 1$, vnde habebimus

Pro

Pro ordine priore	Pro ordine posteriore
$S = \frac{\pi}{8}$	$T = 0$
$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = 0$	$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{\pi\pi}{4}$
$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \frac{\pi^3}{8}$	$\left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right) = 0$
$\left(\frac{d^3 S}{d\omega^3}\right) = 0$	$\left(\frac{d^3 T}{d\omega^2}\right) = \frac{\pi^4}{8}$
$\left(\frac{d^4 S}{d\omega^4}\right) = \frac{5\pi^5}{32}$	$\left(\frac{d^4 T}{d\omega^4}\right) = 0$
$\left(\frac{d^5 S}{d\omega^5}\right) = 0$	$\left(\frac{d^5 T}{d\omega^5}\right) = \frac{\pi^6}{4}$
$\left(\frac{d^6 S}{d\omega^6}\right) = \frac{61\pi^7}{128}$	$\left(\frac{d^6 T}{d\omega^6}\right) = 0$
$\left(\frac{d^7 S}{d\omega^7}\right) = 0$	$\left(\frac{d^7 T}{d\omega^7}\right) = \frac{17\pi^8}{16}$
etc.	etc.

§. 26. Hinc ergo, omissis valoribus euanescentibus, ex priore ordine habebimus sequentes formulas integrales cum seriebus inde natis

$$\int \frac{dz}{1+zz} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{dz(lz)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16} = \frac{2}{1^3} - \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} - \frac{2}{11^3} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{dz(lz)^4}{1+zz} = \frac{5\pi^5}{64} = \frac{24}{1^5} - \frac{24}{3^5} + \frac{24}{5^5} - \frac{24}{7^5} + \frac{24}{9^5} - \frac{24}{11^5} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{dz(lz)^6}{1+zz} = \frac{61\pi^7}{256} = \frac{720}{1^7} - \frac{720}{3^7} + \frac{720}{5^7} - \frac{720}{7^7} + \frac{720}{9^7} - \text{etc.}$$

etc. etc. etc.

§. 27. Ex altero autem ordine pro eodem casu oriuntur

$$\int \frac{-dz\,lz}{1-zz} = \frac{\pi\pi}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{-dz(lz)^3}{1-zz} = \frac{\pi^4}{16} = \frac{6}{1^4} + \frac{6}{3^4} + \frac{6}{5^4} + \frac{6}{7^4} + \frac{6}{9^4} + \frac{6}{11^4} + \frac{6}{13^4} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{-dz(lz)^5}{1-zz} = \frac{\pi^6}{8} = \frac{120}{1^6} + \frac{120}{3^6} + \frac{120}{5^6} + \frac{120}{7^6} + \frac{120}{9^6} + \frac{120}{11^6} + \frac{120}{13^6} + \text{etc.}$$

etc. etc. etc.

§. 28. Quemadmodum ex primo integrali ordinis posterioris deduximus has formulas

$$\int \frac{dz\, lz}{1-z} = -\frac{\pi\pi}{6} \quad \text{et} \quad \int \frac{dz\, lz}{1+z} = -\frac{\pi\pi}{12};$$

similes quoque formulae integrales ex sequentibus deduci possunt; cum enim sit

$$\int \frac{dz\,(lz)^3}{1-zz} = -\frac{\pi^4}{16},$$

ponamus esse

$$\int \frac{z\,dz\,(lz)^3}{1-zz} = P, \text{ eritque } \int \frac{dz\,(lz)^3}{1-z} = P - \frac{\pi^4}{16}$$

et $\int \frac{dz\,(lz)^3}{1+z} = -P - \frac{\pi^4}{16}$

nunc vero statuatur $zz = v$, vt sit $z\,dz = \frac{1}{2}dv$, et $lz = \frac{1}{2}lv$, ideoque $lz^3 = \frac{1}{8}lv^3$, quibus substitutis erit

$$P = \frac{1}{16}\int \frac{dv\,(lv)^3}{1-v} = \frac{1}{16}\left(P - \frac{\pi^4}{16}\right),$$

vnde fit

$$16\,P = P - \frac{\pi^4}{16} \text{ ideoque } P = -\frac{\pi^4}{240}$$

sicque has duas habebimus integrationes nouas

$$\int \frac{dz\,(lz)^4}{1-z} = -\frac{\pi^4}{15}, \text{ et}$$

$$\int \frac{dz\,(lz)^3}{1+z} = -\frac{7\pi^4}{120}$$

hinc autem per series erit,

$$\int \frac{-dz\,(lz)^3}{1-z} = +\frac{\pi^4}{15} = 6\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{8^4} + \text{etc.}\right) \text{ et}$$

$$\int \frac{-dz\,(lz)^3}{1+z} = +\frac{7\pi^4}{120} = 6\left(1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} - \frac{1}{8^4} + \text{etc.}\right.$$

§. 29. Porro $\int \frac{dz\,(lz)^5}{1-zz} = -\frac{\pi^6}{8}$ ponamus esse

$$\int \frac{z\,dz\,(lz)^5}{1-zz} = P,$$

vt hinc obtineamus

$$\int \frac{dz\,(lz)^5}{1-z} = P - \frac{\pi^5}{8}, \text{ et } \int \frac{dz\,(lz)^5}{1+z} = -P - \frac{\pi^6}{8}$$

nunc igitur ſtatuamus $zz = v$, eritque

$$P = \frac{1}{64}\int \frac{dv\,(lv)^5}{1-v} = \frac{1}{64}\left(P - \frac{\pi^6}{8}\right., \text{ vnde fit}$$

$$P = -\frac{\pi^6}{504},$$

nouaeque integrationes hinc deductae ſunt

$$\int \frac{dz\,(lz)^5}{1-z} = -\frac{8\pi^6}{63}, \text{ et}$$

$$\int \frac{dz\,(lz)^5}{1+z} = -\frac{31\pi^6}{252}$$

at vero per ſeries reperitur

$$\int \frac{dz\,(lz)^5}{1-z} = -\frac{8\pi^6}{63} = -120\left(1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.}\right.$$

et

$$\int \frac{dz\,(lz)^5}{1+z} = -\frac{31\pi^6}{252} = -120\left(1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.}\right.$$

ita vt ſit

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^6} + \text{etc.} = \frac{\pi^6}{945} \text{ et}$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} - \frac{1}{6^6} + \frac{1}{7^6} - \frac{1}{8^6} + \text{etc.} = \frac{31\pi^6}{30240} = \frac{31\pi^6}{32\cdot 945}.$$

§. 30. Conſideremus etiam caſus, quibus $\lambda = 2$ et $\omega = 1$ ita vt ſit $\alpha = \frac{\pi}{4}$, et $\alpha\omega = \frac{\pi}{4}$ hinc $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, vnde pro vtroque ordine ſequentes habebimus valores

Pro ordine priore

$$S = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$
$$\left(\frac{dS}{d\omega}\right) = \frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}}$$
$$\left(\frac{ddS}{d\omega^2}\right) = \frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}}$$
$$\left(\frac{d^3S}{d\omega^3}\right) = \frac{11\pi^4}{128\sqrt{2}}$$
$$\left(\frac{d^4S}{d\omega^4}\right) = \frac{57\pi^5}{512\sqrt{2}}$$
$$\left(\frac{d^5S}{d\omega^5}\right) = \frac{361\pi^6}{2048\sqrt{2}}$$
$$\left(\frac{d^6S}{d\omega^6}\right) = \frac{2763\pi^7}{8192\sqrt{2}}$$
$$\left(\frac{d^7S}{d\omega^7}\right) = \frac{24611\pi^8}{32768\sqrt{2}}$$

etc.

Pro ordine posteriore

$$T = \frac{\pi}{4}$$
$$\left(\frac{dT}{d\omega}\right) = \frac{\pi\pi}{8}$$
$$\left(\frac{ddT}{d\omega^2}\right) = \frac{\pi^3}{16}$$
$$\left(\frac{d^3T}{d\omega^3}\right) = \frac{\pi^4}{16}$$
$$\left(\frac{d^4T}{d\omega^4}\right) = \frac{5\pi^5}{64}$$
$$\left(\frac{d^5T}{d\omega^5}\right) = \frac{\pi^5}{8}$$
$$\left(\frac{d^6T}{d\omega^6}\right) = \frac{61\pi^7}{256}$$
$$\left(\frac{d^7T}{d\omega^7}\right) = \frac{17\pi^8}{32}$$

etc.

§. 31. Hinc igitur sequentes integrationes, cum seriebus respondentibus resultant; ac primo quidem ex ordine primo

$$\int\frac{(1+zz)\,dz}{1+z^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \text{etc.}$$
$$\int\frac{-(1-zz)\,dz\,lz}{1+z^4} = \frac{\pi\pi}{8\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \text{etc.}$$
$$\int\frac{(1+zz)\,dz\,(lz)^2}{1+z^4} = \frac{3\pi^3}{32\sqrt{2}} = \frac{2}{1^3} + \frac{2}{3^3} - \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} + \frac{2}{11^3} - \frac{2}{13^3} - \text{etc.}$$
$$\int\frac{-(1-zz)\,dz\,(lz)^3}{1+z^4} = \frac{11\pi^4}{128\sqrt{2}} = \frac{6}{1^4} - \frac{6}{3^4} - \frac{6}{5^4} + \frac{6}{7^4} + \frac{6}{9^4} - \frac{6}{11^4} - \frac{6}{13^4} + \text{etc.}$$
$$\int\frac{(1+zz)\,dz\,(lz)^4}{1+z^4} = \frac{57\pi^5}{512\sqrt{2}} = \frac{24}{1^5} + \frac{24}{3^5} - \frac{24}{5^5} - \frac{24}{7^5} + \frac{24}{9^5} + \frac{24}{11^5} - \frac{24}{13^5} - \text{etc.}$$
$$\int\frac{-(1-zz)\,dz\,(lz)^5}{1+z^4} = \frac{361\pi^6}{2048\sqrt{2}} = \frac{120}{1^6} - \frac{120}{3^6} - \frac{120}{5^6} + \frac{120}{7^6} + \frac{120}{9^6} - \frac{120}{11^6} - \frac{120}{13^6} + \text{etc.}$$
$$\int\frac{(1+zz)\,dz\,(lz)^6}{1+z^4} = \frac{2763\pi^7}{8192\sqrt{2}} = \frac{720}{1^7} + \frac{720}{3^7} - \frac{720}{5^7} - \frac{720}{7^7} + \frac{720}{9^7} + \frac{720}{11^7} - \frac{720}{13^7} - \text{etc.}$$
$$\int\frac{-(1-zz)\,dz\,(lz)^7}{1+z^4} = \frac{24611\pi^8}{32768\sqrt{2}} = \frac{5040}{1^8} - \frac{5040}{3^8} - \frac{5040}{5^8} + \frac{5040}{7^8} + \frac{5040}{9^8} - \frac{5040}{11^8} - \frac{5040}{13^8} + \text{etc.}$$

etc.

§. 32.

§. 32 Eodem modo integrationes alterius ordinis cum feriebus erunt

$$\int \frac{dz}{1+zz} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{-dz\, lz}{1-zz} = \frac{\pi\pi}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{dz\,(lz)^2}{1+zz} = \frac{\pi^3}{16} = \frac{2}{1^3} - \frac{2}{3^3} + \frac{2}{5^3} - \frac{2}{7^3} + \frac{2}{9^3} - \frac{2}{11^3} + \frac{2}{13^3} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{-dz\,(lz)^3}{1-zz} = \frac{\pi^4}{16} = \frac{6}{1^4} + \frac{6}{3^4} + \frac{6}{5^4} + \frac{6}{7^4} + \frac{6}{9^4} + \frac{6}{11^4} + \frac{6}{13^4} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{dz\,(lz)^4}{1+zz} = \frac{5\pi^5}{64} = \frac{24}{1^5} - \frac{24}{3^5} + \frac{24}{5^5} - \frac{24}{7^5} + \frac{24}{9^5} - \frac{24}{11^5} + \frac{24}{13^5} - \text{etc.}$$

$$\int \frac{-dz\,(lz)^5}{1-zz} = \frac{\pi^6}{8} = \frac{120}{1^6} + \frac{120}{3^6} + \frac{120}{5^6} + \frac{120}{7^6} + \frac{120}{9^6} + \frac{120}{11^6} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{dz\,(lz)^6}{1+zz} = \frac{61\pi^7}{256} = \frac{720}{1^7} - \frac{720}{3^7} + \frac{720}{5^7} - \frac{720}{7^7} + \frac{720}{9^7} - \frac{720}{11^7} + \text{etc.}$$

$$\int \frac{-dz\,(lz)^7}{1-zz} = \frac{17\pi^8}{32} = \frac{5040}{1^8} + \frac{5040}{3^8} + \frac{5040}{5^8} + \frac{5040}{7^8} + \frac{5040}{9^8} + \frac{5040}{11^8} + \text{etc.}$$

etc.

Hae autem feries funt eae ipfae, quas iam fupra §§. 26 et 27. fumus confecuti.

§. 33. Praeterea autem ii cafus imprimis notari merentur, quibus formulae integrales in formas fimpliciores refolui poffunt. Haec autem refolutio tantum fpectat ad fractionem

$$\pm \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^n},$$

omiffo factore $\frac{dz}{z}(lz)^\mu$; ad quod oftendendum fumamus primo $\lambda = 3$ et $\omega = 1$, vnde fit $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $p = \text{fin.}\, \frac{\pi}{4}$, et $q = \text{cof.}\, \frac{\pi}{6}$, tum autem, in priori ordine occurrunt alternatim fequentes fractiones

1. $\frac{zz(1+zz)}{1+z^6} = \frac{zz}{1-zz+z^4}$,

 quae

quae posito $zz = v$ abit in $\frac{v}{1 - v + vv}$ ergo cum sit $\frac{dz}{z} = \frac{1}{2}\frac{dv}{v}$ et $lz = \frac{1}{2} lv$,

hinc talis forma

$$\frac{1}{2^{2i+1}} \int \frac{dv\,(lv)^{2i}}{1 - v + vv}$$

integrari poterit casu scilicet $v = 1$.

II. $- \frac{zz(1 - zz)}{1 + z^6} = + \frac{2}{3(1 + zz)} - \frac{(2 - zz)}{3(1 - zz + z^4)}$, quae posito $zz = v$ abit in $\frac{-2}{3(1 + v)} + \frac{2 - v}{3(1 - v + vv)}$ quae ergo forma ducta in $\frac{dz}{z}(lz)^{2i+1}$ vel in

$$\frac{1}{2^{2i+2}} \frac{dv}{v} (lv)^{2i+1}$$

semper integrari potest posito $v = 1$.

§. 34. Eodem casu ordo posterior sequentes suppeditat resolutiones

I. $\frac{zz(1 - zz)}{1 - z^6} = \frac{zz}{1 + zz + z^4} = \frac{v}{1 + v + vv}$,

quae in $\frac{dz}{z}(lz)^{2i}$ vel in $\frac{1}{2^{2i+1}} \frac{dv}{v} (lz)^{2i}$ ducta semper est integrabilis

II. $\frac{-zz(1 + zz)}{1 - z^6} = \frac{-2}{3(1 - zz)} + \frac{2 + zz}{3(1 + zz + z^4)}$,

quae facto $zz = v$ fit

$$\frac{-2}{3(1 - v)} + \frac{2 + v}{3(1 + v + vv)}$$

quae ergo formulae in $\frac{dv}{v}(lv)^{2i+1}$ ductae fiunt integrabiles; quia autem in hac resolutione numeratores per z vel v dividere non licet, alia resolutione est opus, quae reperitur

$zz-$

$\frac{-zz(1+zz)}{1-z^6} = \frac{-2zz}{3(1-zz)} - \frac{zz(1+2zz)}{3(1+zz+z^4)}$ siue

$\frac{-2v}{3(1-v)} \frac{-v(1+2v)}{3(1+v+vv)}$

quae formulae ductae in $\frac{dz}{z}(lz)^{2i+1}$ vel in $\frac{1}{2^{2i+2}}\frac{dv}{v}(lv)^{2i+1}$ integrationem quoque admittunt.

§ 35. Porro manente $\lambda = 3$ sumatur $\omega = 2$, vt sit $\alpha = \frac{\pi}{6}$; $p = \sin.\frac{2\pi}{3}$ et $q = \cos.\frac{\pi}{3}$ et ex ordine priore orientur sequentes reductiones.

I°. $\frac{z(1+z^4)}{1+z^6} = \frac{2z}{3(1+zz)} + \frac{z(1+zz)}{3(1-zz+z^4)}$,

vnde multiplicando per $\frac{dz}{z}lz^{2i}$ oriuntur formulae integrationem admittentes casu $z = 1$.

II. $\frac{-z(1-z^4)}{1+z^6} = -\frac{z(1-zz)}{1-zz+z^4}$

quae per $\frac{dz}{z}(lz)^{2i+1}$ multiplicata integrari poterit casu $z = 1$; ex ordine vero posteriori sequentes prodibunt reductiones.

I. $\frac{z(1-z^4)}{1-z^6} = \frac{z(1+zz)}{1+zz+z^4}$,

quae ducta in $\frac{dz}{z}(lz)^{2i}$ fit integrabilis.

II. $\frac{-z(1+z^4)}{1-z^6} = \frac{-2z}{3(1-zz)} - \frac{z(1-zz)}{3(1+zz+z^4)}$,

quae formulae in $\frac{dz}{z}(lz)^{2i+1}$ ductae fiunt integrabiles.

§. 36. Operae iam erit pretium haec integralia actu euoluere, quare ex §. 33. eiusque numero I nanciscimur sequentes integrationes

1°. $\frac{1}{2}\int\frac{dv}{1-v+vv} = \alpha\frac{1}{q} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

2°. $\frac{1}{8}\int\frac{dv(lv)^2}{1-v+vv} = \alpha^3\left(\frac{2}{q^3} - \frac{1}{q}\right) = \frac{5\pi^3}{324\sqrt{3}}$.

deinde

deinde vero ex eiusdem § numero II vbi etiam haec reductio locum habet

$$-\frac{zz(1-zz)}{1+z^6}=-\frac{2zz}{3(1+zz)}-\frac{zz(1-2zz)}{3(1-zz+z^4)}=-\frac{2v}{3(1+v)}-\frac{v(1-2v)}{3(1-v+vv)}$$

quae ducta in $\frac{1}{4}\cdot\frac{dv}{v}lv$ dabit

$$-\frac{1}{6}\int\frac{dv\,lv}{1+v}-\frac{1}{12}\int\frac{dv(1-2v)lv}{1-v+vv}=\alpha\alpha\frac{p}{qq}=\frac{\pi\pi}{54}$$

quarum formularum prior integrationem admittit, est enim

$$\int\frac{dv\,lv}{1+v}=-\frac{\pi\pi}{12}$$

vnde inuenitur posterior

$$\int\frac{dv(1-2v)lv}{1-v+vv}=-\frac{\pi\pi}{18}.$$

§. 37. Ex §. 34 eiusque numero I sequitur

1°. $\frac{1}{2}\int\frac{dv}{1+v+vv}=\frac{\alpha p}{q}=\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

2°. $\frac{1}{8}\int\frac{dv(lv)^2}{1+v+vv}=\alpha^3\frac{2p}{q^3}=\frac{\pi^3}{81\sqrt{3}}$

deinde vero ex numero II fit

$$-\frac{1}{6}\int\frac{dv\,lv}{1-v}-\frac{1}{12}\int\frac{dv(1+2v)lv}{1+v+vv}=\alpha\alpha.\frac{1}{qq}=\frac{\pi\pi}{18}$$

supra autem inuenimus esse

$$\int\frac{dv\,lv}{1-v}=-\frac{\pi\pi}{6}$$

quo valore substituto fit

$$\int\frac{dv(1+2v)lv}{1+v+vv}=-\frac{\pi\pi}{9}$$

maxime igitur operae pretium est visum has postremas integrationes euoluisse.

§. 38. Quod si ambae formulae integrales

$$\int\frac{dv(1-2v)lv}{1-v+vv}\quad\text{et}\quad\int\frac{dv(1+2v)lv}{1+v+vv}$$

in

in ſeries conuertantur reperitur

$$\int \frac{dv(1-2v)lv}{1-v+vv} = -1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{9} + \frac{1}{16} - \frac{1}{25} - \frac{2}{36} - \frac{1}{49} + \text{etc. et}$$

$$\int \frac{dv(1+2v)lv}{1+v+vv} = -1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \frac{1}{25} + \frac{2}{36} - \frac{1}{49} + \text{etc.}$$

vnde has duas ſummationes attentione noſtra non indignas aſſequimur

$$\text{I.}\quad 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{2}{36} + \frac{1}{49} - \frac{1}{64} - \frac{2}{81} - \frac{1}{100} \text{ etc.} = \frac{\pi\pi}{18}$$

$$\text{II.}\quad 1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{2}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} - \frac{2}{81} + \frac{1}{100} \text{ etc.} = \frac{\pi\pi}{9}$$

quarum prior a poſteriore ablata praebet

$$\frac{2}{4} + \frac{2}{16} - \frac{4}{36} + \frac{2}{64} + \frac{2}{100} \text{ etc.} = \frac{\pi\pi}{18},$$

cuius duplum perducit ad hanc

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{2}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \frac{2}{36} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{9}$$

quae quoniam cum ſecunda congruit, veritas vtriusque ſummationis ſatis confirmatur; quod ſi vero ſecunda a duplo primae ſubtrahatur, remanebit iſta ſeries memorabilis

$$1 - \frac{3}{4} - \frac{2}{9} - \frac{3}{16} + \frac{1}{25} + \frac{6}{36} + \frac{1}{49} - \frac{3}{64} - \frac{2}{81} - \frac{3}{100} + \text{etc.} = 0$$

quae in periodos 6 terminos complectentes diſtributa, manifeſtum ordinem in numeratoribus declarat, quippe qui ſunt $1-3-2-3+1+6$.

Additamentum.

§. 39. Quemadmodum ſuperiores integrationes per continuam differentiationem formularum S et T deduximus, ita etiam per integrationem alias et prorſus ſingulares integrationes impetrabimus; ſi enim

enim vt ſupra fuerit $S = \int \frac{T\,dz}{z}$, exiſtente T formula illa

$$+ \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}},$$

quae praeter z etiam exponentem variabilem ω inuoluere concipitur, erit per naturam integralium duas variabiles inuoluentium

$$\int S\, d\omega = \int \frac{dz}{z} \int T\, d\omega,$$

vbi inpriore formula integrali $\int S\, d\omega$, vbi z pro conſtanti habetur, ſtatim ſcribi poteſt $z = 1$; hoc igitur lemmate praemiſſo, quia eſt

$$\int T\, d\omega = \frac{z^{\lambda-\omega} \pm z^{\lambda+\omega}}{1 \pm z^{2\lambda}\, l\, z},$$

ambas formulas ſupra tractatas nempe S et T hoc modo euoluamus, et quia vtramque triplici modo expreſſam dedimus; primo ſcilicet per ſeriem infinitam; ſecundo, per formulam finitam: ac tertio per formulam integralem, etiam quantitates, quae pro integralibus $\int S\, d\omega$ et $\int T\, d\omega$ reſultabunt, erunt inter ſe aequales.

§. 40. Incipiamus a formula S, et cum per ſeriem fuerit

$$S = \frac{1}{\lambda-\omega} + \frac{1}{\lambda+\omega} - \frac{1}{3\lambda-\omega} - \frac{1}{3\lambda+\omega} + \frac{1}{5\lambda-\omega} + \frac{1}{5\lambda+\omega} - \text{etc.}$$

erit

$$\int S\, d\omega = -l(\lambda-\omega) + l(\lambda+\omega) + l(3\lambda-\omega) - l(3\lambda+\omega) - \text{etc.} + C$$

quam conſtantem ita definire decet, vt integrale euaneſcat poſito $\omega = 0$, quo facto erit

$\int S\, d\omega$

$$\int S\,d\omega = l\frac{\lambda+\omega}{\lambda-\omega} + l\,\frac{3\lambda-\omega}{3\lambda+\omega} + l\,\frac{5\lambda+\omega}{5\lambda-\omega} + l\,\frac{7\lambda-\omega}{7\lambda+\omega} + \text{etc.}$$

quae expreſſio reducitur ad ſequentem

$$\int S\,d\omega = l\,\frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)(9\lambda+\omega)\ \text{etc.}}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega)(9\lambda-\omega)\ \text{etc.}}$$

Deinde quia per formulam finitam erat

$$S = \frac{\pi}{2\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}},\ \text{erit}\ \int S\,d\omega = \int\frac{\pi\,d\omega}{2\lambda\,\text{coſ.}\,\frac{\pi\omega}{2\lambda}},$$

vbi ſi breuitatis gratia ponatur $\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \Phi$, vt ſit

$d\omega = \frac{2\Phi\lambda}{\pi}$ erit $\int S\,d\omega = \int\frac{d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi}$;

quia igitur nouimus eſſe

$$\int\frac{d\vartheta}{\text{ſin.}\,\vartheta} = l\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\vartheta$$

ſumamus ſin. $\vartheta = \text{coſ.}\,\Phi$ ſiue $\vartheta = 90^\circ - \Phi = \frac{\pi}{2} - \Phi$
eritque $d\vartheta = -d\Phi$ vnde fit

$$\int\frac{-d\Phi}{\text{coſ.}\,\Phi} = l\,\text{tang.}\,(\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\Phi),$$

quoniam autem eſt

$$\Phi = \frac{\pi\omega}{2\lambda}\ \text{erit}\ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Phi = \frac{\pi(\lambda-\omega)}{4\lambda},$$

vnde noſtrum integrale erit

$$\int S\,d\omega = -l\,\text{tang.}\,\frac{\pi(\lambda-\omega)}{4\lambda} = +l\,\text{tang.}\,\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda}$$

ex tertia autem formula integrali

$$S = \int\frac{z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z},\ \text{colligitur fore}$$

$$\int S\,d\omega = \int\frac{-z^{\lambda-\omega} + z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z\,l z}$$

quod integrale a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extendi aſſumitur; ſicque tres iſti valores

lores inuenti inter ſe erunt aequales. Ac ne ob conſtantes forte addendas vllum dubium ſuperſit, ſingulae iſtae expreſſiones ſponte euaneſcunt caſu $\omega = 0$.

§. 41. Conſideremus hinc primo aequalitatem inter formulam primam et ſecundam: et quia vtraque eſt logarithmus, erit

$$\text{tang.}\ \frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda} = \frac{(\lambda+\omega)(3\lambda-\omega)(5\lambda+\omega)(7\lambda-\omega)\ \text{etc.}}{(\lambda-\omega)(3\lambda+\omega)(5\lambda-\omega)(7\lambda+\omega)\ \text{etc.}}$$

cum igitur huius fractionis numerator euaneſcat caſibus, vel $\omega = -\lambda$, vel $\omega = +3\lambda$, vel $\omega = -5\lambda$, vel $\omega = +7\lambda$ etc. euidens eſt iisdem caſibus quoque tangentem fieri $= 0$; denominator vero euaneſcit caſibus vel $\omega = \lambda$, vel $\omega = -3\lambda$ vel $\omega = +5\lambda$ vel $\omega = -\lambda$ etc. quibus ergo caſibus tangens in infinitum excreſcere debet, id quod etiam pulcherrime euenit. Ceterum haec expreſſio congruit cum ea, quam iam dudum inueni et in introductione expoſui.

§. 42. Productum autem iſtud infinitum per principia alibi ſtabilita ad formulas integrales reduci poteſt ope huius lemmatis latiſſime patentis

$$\frac{a(c+b)(a+k)(c+b+k)(a+2k)(c+b+2k)\ \text{etc.}}{b(c+a)(b+k)(c+a+k)(b+2k)(c+a+2k)\ \text{etc.}} = \frac{\int z^{c-1}\,dz\,(1-z^k)^{\frac{b-k}{k}}}{\int z^{c-1}\,dz\,(1-z^k)^{\frac{a-k}{k}}}$$

ſi quidem poſt vtramque integrationem fiat $z = 1$. Noſtro igitur caſu erit $a = \lambda + \omega$, $b = \lambda - \omega$, $c = 2\lambda$ et $k = 4\lambda$ vnde valor noſtri producti erit

$$\frac{\int z^{2\lambda-1}\,dz\,(1-z^{4\lambda})^{\frac{-3\lambda-\omega}{4\lambda}}}{\int z^{2\lambda-1}\,dz\,(1-z^{4\lambda})^{\frac{-3\lambda+\omega}{4\lambda}}}=\text{tang.}\,\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda}$$

formulae autem istae integrales concinniores euadant statuendo $z^{2\lambda}=y$, tum enim erit

$$\text{tang.}\,\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda}=\frac{\int dy\,(1-yy)^{\frac{-3\lambda-\omega}{4\lambda}}}{\int dy\,(1-yy)^{\frac{-3\lambda+\omega}{4\lambda}}}$$

quae expressio vtique omni attentione digna videtur. Denique ex formula integrali inuenta erit quoque

$$\int\frac{-z^{\lambda-\omega}+z^{\lambda+\omega}}{1+z^{2\lambda}}\,\frac{dz}{z\,lz}=l\,\text{tang.}\,\frac{\pi(\lambda+\omega)}{4\lambda}.$$

§. 43. Operae erit pretium, etiam aliquot casus particulares euoluere: sit igitur primo $\lambda=2$ et $\omega=1$ ac per expressionem infinitam erit

$$\int S\,d\omega=l\,\frac{3.5}{1.7}.\frac{11.13}{9.15}.\frac{19.21}{17.23}.\frac{27.29}{25.31}.\frac{35.37}{33.39}.\frac{\text{etc.}}{\text{etc.}}$$

deinde per expressionem finitam habebimus

$$\int S\,d\omega=l\,\text{tang.}\,\frac{3\pi}{8}$$

at per formulam integralem

$$\int S\,d\omega=\int\frac{-(1-zz)}{1+z^4}.\frac{dz}{lz}.$$

Tum vero ex aequalitate duarum priorum expressionum

$$\text{tang.}\,\frac{3\pi}{8}=\frac{3.5}{1.7}.\frac{11.13}{9.15}.\frac{19.21}{17.23}\text{ etc.}$$

hincque per binas formulas integrales

$$\text{tang.}\,\frac{3\pi}{8}=\frac{\int dy\,(1-yy)^{-\frac{7}{8}}}{\int dy\,(1-yy)^{-\frac{5}{8}}}.$$

§. 44. Ponamus nunc esse $\lambda = 3$ et $\omega = 1$ ac per expressionem infinitam erit

$$\int S\, d\omega = l\, \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{8}{7} \cdot \tfrac{10}{11} \cdot \tfrac{14}{13} \cdot \tfrac{16}{17} \cdot \tfrac{10}{19} \cdot \tfrac{22}{23} \text{ etc.}$$

secundo, per expressionem finitam

$$\int S\, d\omega = l \operatorname{tang.} \tfrac{\pi}{3} = l \sqrt{3} = \tfrac{1}{2} l\, 3,$$

ita, vt futurum sit

$$\sqrt{3} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 5} \cdot \frac{8 \cdot 10}{7 \cdot 11} \cdot \frac{14 \cdot 16}{13 \cdot 17} \text{ etc.}$$

huiusque producti valor per formulas integrales erit

$$\frac{\int dy (1 - yy)^{-\frac{5}{6}}}{\int dy (1 - yy)^{-\frac{3}{2}}}.$$

Denique formula integralis praebebit

$$\int S\, d\omega = \int \frac{-z(1 - zz)}{1 + z^6} \frac{dz}{lz}.$$

§. 45. Eodem modo etiam euoluamus alteram formulam T cuius valor per seriem erat

$$T = \frac{1}{\lambda - \omega} - \frac{1}{\lambda + \omega} + \frac{1}{3\lambda - \omega} - \frac{1}{3\lambda + \omega} + \frac{1}{5\lambda - \omega} - \frac{1}{5\lambda + \omega} + \text{etc.}$$

vnde fit

$$\int T\, d\omega = -l(\lambda - \omega) - l(\lambda + \omega) - l(3\lambda - \omega) - l(3\lambda + \omega) - \text{etc.}$$

quae expressio vt euanescat posito $\omega = 0$, erit

$$\int T\, d\omega = l\, \frac{\lambda\lambda}{\lambda\lambda - \omega\omega} \frac{9\lambda\lambda}{9\lambda\lambda - \omega\omega} \frac{25\lambda\lambda}{25\lambda\lambda - \omega\omega} \text{ etc.}$$

deinde vero cum per formulam finitam fuerit

$T = \frac{\pi}{2\lambda} \operatorname{tang.} \frac{\pi\omega}{2\lambda}$ erit

$\int T\, d\omega = \int \frac{\pi\, d\omega}{2\lambda} \operatorname{tang.} \frac{\pi\omega}{2\lambda}$ vbi posito $\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \Phi$ erit

$\int T\, d\omega = \int d\Phi \operatorname{tang.} \Phi = -l \operatorname{cos.} \Phi$ ita vt sit

$$\int T\, d\omega = -l \operatorname{cos.} \tfrac{\pi\omega}{2\lambda};$$

cuius

cuius valor casu $\omega = 0$ fit sponte $= 0$ denique per formulam integralem habebimus

$$\int T\, d\omega = -\frac{z^{\lambda-\omega} - z^{\lambda+\omega}}{1 - z^{2\lambda}} \cdot \frac{dz}{z\,lz}$$

integrale itidem a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extendi debet.

§. 46. Iam comparatio duorum priorum valorem hanc praebet aequationem

$$\frac{1}{\operatorname{cos}.\frac{\pi\omega}{2\lambda}} = \frac{\lambda\lambda}{\lambda\lambda - \omega\omega} \cdot \frac{9\lambda\lambda}{9\lambda\lambda - \omega\omega} \cdot \frac{25\lambda\lambda}{25\lambda\lambda - \omega\omega} \cdot \frac{49\lambda\lambda}{49\lambda\lambda - \omega\omega} \text{ etc.}$$

$$\operatorname{cos}.\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \left(1 - \frac{\omega\omega}{\lambda\lambda}\right)\left(1 - \frac{\omega\omega}{9\lambda\lambda}\right)\left(1 - \frac{\omega\omega}{25\lambda\lambda}\right)\left(1 - \frac{\omega\omega}{49\lambda\lambda}\right) \text{ etc.}$$

vel si factores singuli iterum in simplices euoluantur, erit

$$\operatorname{cos}.\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \frac{\lambda+\omega}{\lambda} \cdot \frac{\lambda-\omega}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda+\omega}{3\lambda} \cdot \frac{3\lambda-\omega}{3\lambda} \cdot \frac{5\lambda+\omega}{5\lambda} \cdot \frac{5\lambda-\omega}{5\lambda} \text{ etc.}$$

quae formula cum reductione generali supra allata comparata dat, $a = \lambda + \omega$, $b = \lambda$, $c = -\omega$ et $k = 2\lambda$ vnde colligimus

$$\operatorname{cos}.\frac{\pi\omega}{2\lambda} = \frac{\int z^{-\omega-1}\, dz\,(1 - z^{2\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\int z^{-\omega-1}\, dz\,(1 - 1^{2\lambda})^{\frac{\omega-\lambda}{2\lambda}}}.$$

Vt autem exponentes negatiuos $z^{-\omega-1}$ euitemus, superius productum ita repraesentemus

$$\operatorname{cos}.\frac{\pi\omega}{2\omega} = \frac{\lambda-\omega}{\lambda} \cdot \frac{\lambda+\omega}{\lambda} \cdot \frac{3\lambda-\omega}{3\lambda} \cdot \frac{3\lambda+\omega}{3\lambda} \text{ etc.}$$

eritque facta comparatione $a = \lambda - \omega$, $b = \lambda$ $c = +\omega$ et $k = 2\lambda$ sicque per formulas integrales erit

cos.

$$\operatorname{cof.} \frac{\pi\omega}{2\lambda} = \frac{\int z^{\omega-1} dz (1-z^{2\lambda})^{-\frac{1}{2}}}{\int z^{\omega-1} dz (1-z^{2\lambda})^{\frac{-\lambda-\omega}{2\lambda}}}$$

quae expreſſio ad ſimpliciorem formam reduci nequit.

§. 47. Sit nunc etiam $\lambda = 2$ et $\omega = 1$ eruntque ternae noſtrae expreſſiones

I. $\int T\, d\omega = l \frac{4}{3} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{100}{99} \cdot \frac{196}{195}$ ſiue

$\int T\, d\omega = l \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{10.10}{9.11} \cdot \frac{14.14}{13.15}$ etc.

II. $\int T\, d\omega = -l \operatorname{cof.} \frac{\pi}{4} = +\frac{1}{2} l\, 2$ ita, vt ſit

$\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{10.10}{9.11} \cdot \frac{14.14}{13.15}$ etc.

quod productum per formulas integrales ita exprimitur

$$\frac{\int dz (1-z^4)^{-\frac{1}{2}}}{\int dz (1-z^4)^{-\frac{3}{4}}} = \sqrt{2}$$

III. $\int T\, d\omega = \int \frac{-(1+zz)}{1-z^4} \frac{dz}{z} = \int \frac{-dz}{(1-zz)\, l z}$

quod ergo integrale a termino $z = 0$, vsque ad $z = 1$ extenſum praebet eundem valorem $+\frac{1}{2} l\, 2$, cuius aequalitatis ratio vtique difficillime patet.

§. 48. Sit denique vt ſupra $\lambda = 3$ et $\omega = 1$ ac ternae formulae ita ſe habebunt

I. $\int T\, d\omega = l \frac{9}{8} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{225}{224}$ etc. $= l \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{9.9}{8.10} \cdot \frac{15.15}{14.16} \cdot \frac{21.21}{20.22}$ etc.

II. $\int T\, d\omega = -l \operatorname{cof.} \frac{\pi}{6} = -l \frac{\sqrt{3}}{2} = +l \frac{2}{\sqrt{3}}$ ita vt ſit

$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{9.9}{8.10} \cdot \frac{15.15}{14.16} \cdot \frac{21.21}{20.22}$

ideo-

ideoque per binas formulas integrales

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\int dz\,(1 - z^6)^{-\frac{1}{3}}}{\int dz\,(1 - z^6)^{-\frac{1}{5}}}$$

III. $\int T\, d\omega = \int \frac{-(1 + zz)}{1 - z^6} \frac{dz}{lz}$

quae posito $zz = v$ abit in hanc

$$\int T\, d\omega = \int \frac{-dv\,(1 + v)}{(1 - v^3)\, lv}.$$

Hinc igitur patet hac methodo plane noua perueniri ad formulas integrales, quas per methodos adhuc cognitas nullo modo euoluere vel saltem inter se comparare licuit.

NOVA METHODVS QVANTITATES INTEGRALES DETERMINANDI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum mihi saepius occurrissent formulae differentiales, quae per logarithmum quantitatis variabilis erant diuisae, veluti $\frac{P\,dz}{lz}$, nunquam perspicere potui, ad quodnam genus quantitatum earum integralia sint referenda, quin etiam maxime difficile videbatur eorum valores saltem vero proxime assignare. Quod quidem ad formulam integralem simplicissimam huius generis $\int\frac{dz}{lz}$ attinet, facile patet, si eam ita integrari concipiam, vt euanescat posito $z=0$, tum vero statuatur $z=1$, quantitatem infinite magnam esse prodituram; quod si enim variabilis z iam proxime ad vnitatem accesserit, vt sit $z=1-u$, existente ω quantitate infinite parua, tum ob $dz=-du$ et $lz=l(1-u)=-u$ haec formula erit $\int\frac{du}{u}$, cuius valor vtique fit infinitus. At vero dantur omnino huiusmodi formulae integrales $\int\frac{P\,dz}{lz}$, quae, etiamsi ponatur $z=1$, tamen valores finitae magnitudinis sortiuntur: quod determinasse

naſſe eo magis operae pretium videtur, quod nulla adhuc cognita eſt via iſtos valores inueſtigandi.

§. 2. Conſideremus exempli gratia hanc formulam ſatis ſimplicem $\int \frac{(z-1)dz}{lz}$, quae memorata lege integrata valorem finitum habere facile oſtendi poteſt: Poſito enim $\frac{z-1}{lz} = y$, vt formula noſtra fiat $\int y\,dz$, ideoque exprimat aream curuae, pro abſciſſa z applicatam habentis $= y$, iſta area a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extenſa vtique valorem finitum non multo maiorem quam $\frac{1}{2}$ repraeſentabit; poſita enim abſciſſa $z = 0$, fiet etiam applicata $y = 0$, at ſumta $z = 1$ pro applicata $y = \frac{z-1}{lz}$ tam numerator quam denominator euaneſcit, ergo eorum loco ſubſtitutis ſuis differentialibus fiet $y = z = 1$. Pro abſciſſis autem mediis ponamus $z = e^{-n}$, exiſtente e numero, cuius logarithmus hyperbolicus eſt vnitas, erit

$$y = \frac{e^{-n} - 1}{-n} = \frac{e^n - 1}{n e^n},$$

quae, ſi n fuerit numerus valde magnus, vt abſciſſa z fiat minima, applicata erit proxime $y = \frac{1}{n}$; qui ergo valor multo maior erit quam abſciſſa z; forma ſcilicet huius curuae ſimilis erit figurae adiectae, vbi A P denotat abſciſſam z et P M applicatam y, abſciſſae vero A B $= 1$ reſpondet applicata B C $= 1$ qua curua deſcripta eius area A M C B non multum ſuperabit aream trianguli A B C quae eſt $= \frac{1}{2}$. Tab. I. Fig. 1.

§. 3. Nuper autem, in aliis inuestigationibus occupatus, praeter expectationem inueni, hanc aream aequalem esse logarithmo hyperbolico binarii, ita vt ea per fractiones decimales sit $l\,2 = 0{,}6931471805$; sequenti autem ratiocinio huc sum perductus: Cum reuera sit $l\,z = \frac{z^0 - 1}{0}$, quia differentiando vtrinque prodit $\frac{dz}{z} = \frac{dz}{z}$, et sumto $z = 1$ vtraque expressio euanescit, loco o scribo $\frac{1}{i}$, denotante i numerum infinitum, eritque $l\,z = i\,(z^{\frac{1}{i}} - 1)$, hincque applicata

$$y = \frac{z - 1}{i\,(z^{\frac{1}{i}} - 1)} = \frac{1 - z}{i\,(1 - z^{\frac{1}{i}})},$$

et formula integralis $\int \frac{(1 - z)\,dz}{i\,(1 - z^{\frac{1}{i}})}$. Nunc igitur statuo $z^{\frac{1}{i}} = x$, vt fiat $z = x^i$, vbi notetur pro vtroque integrationes termino $z = 0$ et $z = 1$ etiam fore $x = 0$ et $x = 1$; quia igitur hinc fit $dz = i x^{i-1} dx$, formula integralis euadit

$$\int \frac{x^{i-1}\,dx\,(1 - x^i)}{(1 - x)},$$

quam ergo integrari oportet a termino $x = 0$ vsque ad terminum $x = 1$.

§. 4. Spectemus nunc i vt numerum valde magnum, et fractio $\frac{1 - x^i}{1 - x}$ resoluitur in hanc progressionem geometricam

$1 + x$

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \ldots x^{i-1}$$

cuius ſinguli termini in $x^{i-1}dx$ ducti et integrati praebent hanc ſeriem

$$\frac{x^i}{i} + \frac{x^{i+1}}{i+1} + \frac{x^{i+2}}{i+2} + \frac{x^{i+3}}{i+3} + \ldots\ldots + \frac{x^{2i-1}}{2i-1}$$

quae vtique euaneſcit facto $x = 0$. Nunc igitur ſumatur $x = 1$ et valor quaeſitus noſtrae formulae integralis erit

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+2} + \frac{1}{i+3} + \ldots\ldots + \frac{1}{2i-1}$$

vbi quidem litera i denotat numerum infinite magnum, ita vt numerus horum terminorum ſit revera infinitus. Nihilo vero minus, quia ſinguli termini ſunt infinite parui, haec ſeries ſummam habebit finitam, quam ſequenti modo ad ſeriem ordinariam reducere licet.

§. 5. Series inuenta ſpectari poteſt tanquam differentia inter binas ſequentes progreſſiones harmonicas

$$A = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2i-1}$$

$$B = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{i-1}$$

quandoquidem differentia $A - B$ ipſam ſeriem inventam exhibet; quia autem numerus terminorum ſeriei A eſt $2i - 1$, ſeriei vero $B = i - 1$, ille duplo maior eſt quam hic, quocirca, vt ſeriem regularem obtineamus, ſingulos terminos ſeriei B per ſaltum a ſeriei A termino ſecundo, quarto, ſexto, octauo etc. auferamus, quo pacto ſimul ad finem vtriusque peruenietur, eritque

$$A - B = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \text{etc.}$$

in infinitum, cuius ergo valor eſt $l\,2$, ita vt nunc quidem ſolide ſit demonſtratum, formulae integralis propoſitae $\int \frac{(z-1)\,dz}{lz}$ caſu $z = 1$ valorem reuera eſſe $= l\,2$.

§. 6. Simile ratiocinium etiam ad formulam integralem generaliorem $\int \frac{(z^m - 1)\,dz}{lz}$ accommodari poteſt, ac tandem reperietur caſu $z = 1$ eius valorem fore $l\,(m+1)$; quia igitur pari modo erit

$$\int \frac{(z^n - 1)\,dz}{lz} = l\,(n+1),$$

ſi hanc ab illa ſubtrahamus, prodit ſequens integratio

$$\int \frac{(z^m - z^n)\,dz}{lz} = l\,\frac{m+1}{n+1}$$

ſi ſcilicet integratio a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extendatur.

§. 7. Quia autem haec demonſtratio per quantitates infinitas et infinite paruas procedit, merito aliam methodum planam et conſuetam deſideramus, quae ad easdem ſummas perducere valeat; quae quidem inueſtigatio maxime ardua videbitur. Interim tamen, cum nuper conſideratio functionum duas variabiles inuoluentium me ad integrationem formularum differentialium prorſus ſingularium perduxiſſet, quae aliis methodis fruſtra tentantur, ex eodem prin-

principio quoque integrationes hic exhibitas deriuandas esse intellexi. Hanc igitur methodum tanquam fontem prorsus nouum, ex quo integrationes, aliis methodis inaccessas, haurire liceat, clare et perspicue explicabo, cui negotio istam disquisitionem praecipue destinaui.

Lemma I.

§. 8. Si P fuerit functio quaecunque duarum variabilium z et u, ac ponatur $\int P\,dz = S$, vt etiam S sit functio binarum variabilium z et u, tum erit

$$\int dz \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right).$$

Demonstratio.

Cum in integratione formulae $\int P\,dz$ sola z vt variabilis spectetur, erit $\left(\frac{dS}{dz}\right) = P$, quae formula denuo differentiata sola u pro variabili habita praebet $\left(\frac{ddS}{du\,dz}\right) = \left(\frac{dP}{dv}\right)$, quae in dz ducta et integrata producit $\left(\frac{dS}{du}\right) = \int dz \left(\frac{dP}{du}\right)$ quandoquidem ex principiis calculi integralis est

$$\int dz \left(\frac{ddS}{dz\,du}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right) \text{ q. e. d.}$$

Corollarium I.

§. 9. Eodem modo per huiusmodi differentialia vbi tantum u pro variabili spectatur vlterius progredi licet, vnde sequentes oriuntur integrationes

$$\left(\frac{ddS}{du^2}\right) = \int dz \left(\frac{ddP}{du^2}\right) \text{ et}$$

$$\left(\frac{d^3S}{du^3}\right) = \int dz \left(\frac{d^3P}{du^3}\right)$$

etc. etc.

Corol-

Corollarium 2.

§. 10. Quod ſi ergo formula $\int P\, d z$ fuerit integrabilis, ita vt eius integrale S exhiberi poſſit, tum etiam omnes iſtae formulae integrales

$$\int d z \left(\frac{d P}{d u}\right), \int d z \left(\frac{d d P}{d u^2}\right), \int d z \left(\frac{d^3 P}{d u^3}\right) \text{ etc.}$$

integrationem admittent, atque adeo ipſa integralia exhiberi poterunt.

Scholion.

§. 11. Ex his quidem formulis ſi in genere tractentur, parum vtilitatis in calculum integralem redundat. At ſi functio P ita fuerit comparata, vt integrale $\int P\, d z$, caſu ſaltem particulari, quo poſt integrationem variabili z certus quidam valor puta $z = a$ tribuitur, commode exhiberi poteſt, vt hoc caſu quantitas S abeat in functionem ſolius variabilis u ſatis ſimplicem, tum integrationes memoratae perinde locum habebunt, ſi quidem poſt ſingulas integrationes ponatur $z = a$, atque hinc ad eiusmodi integrationes plerumque peruenitur, quas aliis methodis vix, ac ne vix quidem perficere liceat: atque hinc oritur

Primum principium integrationum.

§. 12. Si P eiusmodi fuerit functio binarum variabilium z et u, vt valor integralis $\int P\, d z$ ſaltem caſu certo $z = a$ commode exprimi queat, qui valor ſit $= S$, functio ſcilicet ipſius u tantum; tum etiam ſequentia integralia ſi quidem poſt integrationem

tionem pariter ſtatuatur $z = a$ commode exhiberi poterunt ſcilicet

$$\int P\,dz = S$$
$$\int dz \left(\frac{dP}{du}\right) = \left(\frac{dS}{du}\right)$$
$$\int dz \left(\frac{ddP}{du^2}\right) = \left(\frac{ddS}{du^2}\right)$$
$$\int dz \left(\frac{d^3P}{du^3}\right) = \left(\frac{d^3S}{du^3}\right)$$
$$\int dz \left(\frac{d^4P}{du^4}\right) = \left(\frac{d^4S}{du^4}\right)$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Exemplum I.

§. 13. Si fuerit $P = z^u$, erit quidem in genere

$$\int P\,dz = \frac{z^{u+1}}{u+1};$$

vnde caſu $z = 1$ hic valor ſatis ſimplex naſcitur $\frac{1}{u+1}$, ita vt ſit $S = \frac{1}{u+1}$, cum deinde per differentiationes continuas, dum ſola u pro variabili habetur, prodeat

$$\left(\frac{dP}{du}\right) = z^u\, lz, \text{ tum vero } \left(\frac{ddP}{du^2}\right) = z^u\,(lz^2), \text{ porro}$$
$$\left(\frac{d^3P}{du^3}\right) = z^u\,(lz)^3,\ \left(\frac{d^4P}{du^4}\right) = z^u\,(lz)^4, \text{ etc.}$$

hinc ſequentes obtinentur valores integrales, ſi quidem poſt ſingulas integrationes ſtatuatur $z = 1$

$$\int z^u\,dz = \frac{1}{u+1}$$
$$\int z^u\,dz\,lz = -\frac{1}{(u+1)^2}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^2 = +\frac{1.2}{(u+1)^3}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^3 = -\frac{1.2.3}{(u+1)^4}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^4 = +\frac{1.2.3.4}{(u+1)^5}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^5 = -\frac{1.2.3.4.5}{(u+1)^6}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^6 = +\frac{1\ldots\ldots 6}{(u+1)^6}$$
$$\int z^u\,dz\,(lz)^7 = -\frac{1\ldots\ldots 7}{(u+1)^8}$$

 vnde

vnde concludimus generaliter fore

$$\int z^u\,dz\,(lz)^n = \pm \frac{1.\,2.\,3.\,4\,\ldots\,n}{(u+1)^{n+1}}$$

vbi signum $+$ valet si n sit numerus par, alterum vero $-$ si n sit numerus impar. Hae quidem integrationes iam aliunde satis sunt notae, id quod mirum non est, quoniam tam simplicem formulam pro P assumsimus: breuiter igitur repetamus eos casus, quos iam nuper expediui.

Exemplum 2.

§. 14. Si fuerit $P = \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}}$

iam dudum demonstraui, formulae $\int P\,dz$ valorem integralem casu quo post integrationem ponitur $z = 1$, esse $S = \frac{\pi}{2n\,\mathrm{cos.}\frac{\pi u}{2n}}$

hinc ergo cum sit $\left(\frac{dP}{du}\right) = -\frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}}\,lz$

tum vero $\left(\frac{ddP}{du^2}\right) = +\frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}}\,(lz)^2$

et $\left(\frac{d^3P}{du^3}\right) = -\frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}}\,(lz)^3$

etc. etc.

ex

ex cognito valore S ſequentes nacti ſumus integrationes

I. $\int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} dz = S = \frac{\pi}{2n \operatorname{coſ.} \frac{\pi u}{2u}}$

II. $\int \frac{-z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} dz\, lz = \left(\frac{dS}{du}\right)$

III. $\int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} dz\, (lz)^2 = \left(\frac{ddS}{du^2}\right)$

IV. $\int \frac{-z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} dz\, (lz)^3 = \left(\frac{d^3S}{du^3}\right)$

V. $\int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} dz\, (lz)^4 = \left(\frac{d^4S}{du^4}\right)$

etc. etc.

Exemplum 3.

§. 15. Si fuerit $P = \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}$

ſimili modo demonſtraui valorem formulae integralis $\int P\,dz$, caſu quo poſt integrationem ponitur $z = 1$, fore

$S = \frac{\pi}{2n} \operatorname{tang.} \frac{\pi u}{2n}$;

atque hinc ſequentes integrationes pro eodem caſu $z = 1$ fuerunt deductae

$$\text{I.}\quad \int \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}\, dz = S = \frac{\pi}{2n} \text{ tang. } \frac{\pi u}{2n}$$

$$\text{II.}\quad \int \frac{-z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}\, dz\, lz = \left(\frac{dS}{du}\right)$$

$$\text{III.}\quad \int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}\, dz\, (lz)^2 = \left(\frac{ddS}{du^2}\right)$$

$$\text{IV.}\quad \int \frac{-z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}\, dz\, (lz)^3 = \left(\frac{d^3 S}{du^3}\right)$$

$$\text{V.}\quad \int \frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1 - z^{2n}}\, dz\, (lz)^4 = \left(\frac{d^4 S}{du^4}\right)$$

etc. etc.

Scholion.

§. 16. Quo igitur vberiores fructus ex hoc principio expectare queamus, praecipuum negotium huc redit; vt eiusmodi functiones binarum variabilium z et u pro P inuestigemus, ita vt valor formulae integralis saltem certo quodam casu puta $z = 1$ succincte assignari possit, quemadmodum in allatis exemplis fieri licuit. Quemadmodum autem hoc principium ex continua differentiatione est deductum, ita eodem modo continua integratio ad vsum nostrum accommodari poterit.

Lemma II.

§. 17. Si P fuerit functio duarum variabilium z et u, ac ponatur $\int P\, dz = S$ vt etiam S sit functio duarum variabilium z et u, tum erit $\int S\, du$ $= \int d$

$= \int dz \int P\,du$, vbi in integralibus formulis $\int P\,du$ et $\int S\,du$ sola u pro variabili habetur, in formula autem $\int dz \int P\,du$ sola z.

Demonstratio.

Ponatur $\int S\,du = V$, vt sit $S = (\frac{dV}{du})$, ideoque $(\frac{dV}{du}) = \int P\,dz$ eritque $(\frac{ddV}{dz\,du}) = P$; vnde, per du multiplicando et integrando, erit $(\frac{dV}{dz}) = \int P\,du$, ex quo sequitur $V = \int dz \int P\,du = \int S\,du$. q. e. d.

Corollarium 1.

§. 18. Hoc modo etiam integratio repeti potest; vnde orietur talis aequatio $\int du \int S\,du = \int dz \int du \int P\,du$; hinc autem plerumque parum vtilitatis expectari potest, nisi forte istae integrationes commode succedant.

Corollarium 2.

§. 19. Quod si ergo formula $\int P\,dz$ fuerit integrabilis, scilicet $= S$ altera hinc deducta $\int dz \int P\,du$ eatenus tantum integrari poterit, quatenus integrale $\int S\,du$ integrare licet.

Secundum principium integrationum.

§. 20. Si P eiusmodi fuerit functio duarum variabilium z et u, vt formulae integralis $\int P\,dz$ valor certo saltem casu puta $z = a$ commode exhiberi queat, ita, vt hoc casu quantitas S fiat functio solius variabilis u; tum etiam pro eodem casu $z = a$

huius formulae integralis $\int dz \int P\,du$ valor assignari poterit, si modo formulam $\int S\,du$ integrare licuerit.

Exemplum I.

§. 21. Sumamus $P = z^u$, eritque $\int P\,dz = \frac{z^{u+1}}{u+1}$; quae formula casu $z = 1$ abit in $\frac{1}{u+1}$, quod ergo loco S scribatur. Tum vero quia est

$$\int P\,du = \int z^u\,du = \frac{z^u}{lz}, \text{ et quia}$$

$$\int S\,du = l(u+1), \text{ erit } \int \frac{z^u\,dz}{lz} = l(u+1);$$

si quidem post illam integrationem ponatur $z = 1$. Quia autem omnis integratio additionem constantis postulat, hic potius statui oportebit

$$\int \frac{z^u\,dz}{lz} = l(u+1) + C;$$

atque hic quidem facile intelligitur, hanc constantem C esse debere infinitam, quoniam in formula integrali fractio $\frac{z^u}{lz}$ posito $z = 1$ fit infinita, ita vt hinc parum pro instituto nostro sequi videatur.

Corollarium I.

§. 22. Quoniam autem haec constans C non a variabili u pendet, ea retinebit eundem valorem, quicunque numeri determinati pro u accipiantur. Sumamus

mamus igitur primo $u = m$, tum vero etiam $u = n$, vt habeamus iſtos valores

$$\text{I. } \int \frac{z^m\, dz}{lz} = l(m+1) + C \text{ et}$$

$$\text{II. } \int \frac{z^n\, dz}{lz} = l(n+1) + C$$

quarum altera ab altera ſubtracta relinquet iſtam integrationem notatu digniſſimam

$$\int \frac{(z^m - z^n)\, dz}{lz} = l\frac{m+1}{n+1}$$

quemadmodum iam ſupra ex longe aliis principiis demonſtrauimus.

Corollarium. 2.

§. 23. Si ad alteram integrationem aſcendamus, quia eſt $\int P\, du = \frac{z^u}{lz}$, erit $\int du \int P\, du = \frac{z^u}{(lz)^2}$; tum vero ob

$\int S\, du = l(u+1) + C$, erit $\int du \int S\, du = (u+1)(l(u+1)-1) + Cu + D$

ſicque habebimus

$$\int \frac{z^u\, dz}{(lz)^2} = (u+1)(l(u+1)-1) + Cu + D$$

vbi conſtantes C et D non ab u pendent; quare vt eas eliminemus tres caſus determinatos euoluamus

$$\text{I. } \int \frac{z^m\, dz}{(lz)^2} = (m+1)l(m+1) - m - 1 + Cm + D$$

II.

$$\text{II. } \int \frac{z^n\, dz}{(l\, z)^2} = (n+1)l(n+1) - n - 1 + Cn + D$$

$$\text{III. } \int \frac{z^k\, dz}{(l\, z)^2} = (k+1)l(k+1) - k - 1 + Ck + D$$

eritque $\text{I} - \text{III} = (m+1)l(m+1) - (k+1)l(k+1) + k - m + C(m-k)$

et $\quad \text{II} - \text{III} = (n+1)l(n+1) - (k+1)l(k+1) + k - n + C(n-k)$

hincque deducimus

$$(\text{I}-\text{III})(n-k) - (\text{II}-\text{III})(m-k) = \begin{array}{l} (m+1)(n-k)l(m+1) \\ -(k+1)(n-k)l(k+1) + (k-m)(n-k) \\ -(n+1)(m-k)l(n+1) - (k-n)(m-k) \\ +(k+1)(m-k)lk+1) \end{array}$$

atque hinc deducimus sequentem integrationem

$$\int \frac{dz\,((n-k)z^m - (m-k)\,z^n + (m-n)\,z^k)}{(l\,z)^2} =$$

$$\begin{array}{l} +(m+1)\,(n-k)\,l\,(m+1) \\ -(n+1)\,(m-k)\,l\,(n+1) \\ +(k+1)\,(m-n)\,l\,(k+1). \end{array}$$

Corollarium 3.

§. 14. Operae pretium erit aliquot casus euoluere, vbi quidem numeros m, n et k inter se inaequales accipi conuenit, quia aliter omnes termini se destruerent.

I. Sit igitur $m = 2$, $n = 1$ et $k = 0$ erit

$$\int \frac{(z-1)^2\, dz}{(l\,z)^2} = 3\,l\,3 - 4\,l\,2 = l\tfrac{27}{16}$$

II. Sit $m = B$, $n = 1$ et $k = 0$ eritque

$$\int \frac{(z^3 - 3\,z + 2)\,dz}{(l\,z)^2} = \int dz\,(z-1)^2(z+2 = 4l4 - 6l2 = 2l2 = l4$$

III.

III. Sit $m=3$, $n=2$ et $k=0$ et erit

$$\int\frac{(2z^3-3zz+1)dz}{(lz)^2}=\int\frac{dz(z-1)^2(2z+1)}{(lz)^2}=8l4-9l3=l\frac{4^8}{3^9}$$

IV. Sit $m=3$, $n=2$ et $k=1$ et prodit

$$\int\frac{(z^3-2zz+z)dz}{(lz)^2}=\int\frac{zdz(z-1)^2}{(lz)^2}=4l4-6l3+2l2=l\frac{2^{10}}{3^6}.$$

Corollarium 4.

§. 25. In his caſibus notatu dignum occurrit, quod numerator in formulis integralibus factorem habet $(z-1)^2$, quod ideo neceſſario vſu venit, ne valores integralium euadant infiniti. Quia enim denominator $(lz)^2$ euaneſcit caſu $z=1$, ſi ponamus $z=1-\omega$ exiſtente ω infinite paruo, erit

$$lz=-\omega \text{ et } (lz)^2=+\omega\omega.$$

Neceſſe ergo eſt vt in numeratore adſit factor, qui caſu $z=1-\omega$ itidem praebeat $\omega\omega$, quod euenit ſi ibi factor fuerit $(z-1)^2$.

Scholion.

§. 26. Integratio, quam in corollario primo ſumus nacti, ideo omni digna videtur attentione, quod valores integrales inde nati caſu $z=1$ nullo adhuc modo aſſignare potuerim, etiamſi tam ſimpliciter per logarithmos exprimantur. At vero integrationes, in Corollario ſecundo inuentae, etiamſi multo magis arduae videantur, tamen ex prioribus ope reductionum cognitarum non difficulter deriuari poſſunt; id quod pro vnico caſu oſtendiſſe ſufficiet. Ponamus

$$\int \frac{dz(z-1)^2}{(lz)^2} = \frac{p}{lz} + \int \frac{q\,dz}{lz}$$ eritque differentiando

$$\frac{dz(z-1)^2}{(lz)^2} = \frac{dp}{lz} - \frac{p\,dz}{z(lz)^2} + \frac{q\,dz}{lz}$$

vnde aequatis terminis seorsim vel per $(lz)^2$ vel per lz diuisae habebimusque has duas aequalitates

$$(z-1)^2 = -\frac{p}{z} \text{ et } dp = -q\,dz$$

ex quarum priore oritur $p = -z(z-1)^2$, hincque

$$\frac{dp}{dz} = -3zz + 4z - 1 \text{ ideoque } q = 3zz - 4z + 1$$

ita vt sit

$$\int \frac{dz(z-1)^2}{(lz)^2} = \frac{-z(z-1)^2}{lz} + \int \frac{(3zz-4z+1)dz}{lz}$$

hic autem prius membrum posito $z = 1$ sponte euanescit; posito enim $z = 1 - \omega$ vt sit $lz = -\omega$, erit $p = -\omega\omega(1-\omega)$ ideoque $\frac{p}{lz} = \omega(1-\omega) = 0$ ob $\omega = 0$, posterius vero membrum in has partes discerpi potest

$$3\int \frac{(zz-z)dz}{lz} - \int \frac{(z-1)dz}{lz}$$

prioris autem partis integrale est $3\,l\frac{3}{2}$, posterioris vero $-1.\,l\,2$; sicque totum hoc integrale erit

$$3\,l\tfrac{3}{2} - l\,2 = 3\,l\,3 - 4\,l\,2 = l\tfrac{27}{16}$$

prorsus vti inuenimus. Hoc igitur modo si in genere statuamus

$$\int \frac{V\,dz}{(lz)^2} = \frac{p}{lz} + \int \frac{q\,dz}{lz}$$ erit differentiando

$$\frac{V\,dz}{(lz)^2} = \frac{dp}{lz} - \frac{p\,dz}{z(lz)^2} + \frac{q\,dz}{lz}$$

vnde istae duae fluunt aequalitates

$$p = -Vz \quad \text{et } q = -\frac{dp}{dz}.$$

Iam

Iam vt terminus $\frac{p}{lz}$ euanefcat pofito $z = 1$, numerator p factorem habere debet $(z-1)^2$; qui ergo etiam factor effe debet quantitatis V. Sit igitur

$V = \frac{U(z-1)^2}{z}$ eritque $p = -U(z-1)^2$, vnde fit

$$dp = -dU(z-1)^2 - 2Udz(z-1) = (z-1)(dU(z-1) - 2Udz),$$

hincque fit

$$q\,dz = (z-1)(2\,U\,dz - dU(z-1));$$

quia ergo q factorem habet $z-1$ formula $\int\frac{q\,dz}{lz}$ femper in partes refolui poteft, quarum integralia per corollarium primum affignare licet, fi modo U fuerit aggregatum ex quotcunque poteftatibus ipfius z; vnde fequens deducitur theorema.

Theorema.

§. 27. Si fuerit

$$P = A\,z^\alpha + B\,z^\beta + C\,z^\gamma + D\,z^\delta + \text{etc.}$$

ita, vt fumma coefficientium

$$A + B + C + D \text{ etc.} = 0 \text{ tum erit}$$

$$\int\frac{P\,dz}{lz} = A\,l(\alpha+1) + B\,l(\beta+1) + C\,l(\gamma+1) + D\,l(\delta+1)$$

fi quidem poft integrationem ftatuatur $z = 1$.

Demonftratio.

Cum hoc ipfo cafu, quo poft integrationem ponitur $z = 1$ fit

$$\int\frac{z^n\,dz}{lz} = l(n+1) + \Delta$$

denotante Δ illam conftantem infinitam integratione ingreffam erit

$$A\int\frac{z^{\alpha}\,dz}{lz}=A\,l(\alpha+1)+A\,\Delta$$

eodemque modo

$$B\int\frac{z^{\beta}\,dz}{lz}=B\,l(\beta+1)+B\,\Delta$$

etc. etc.

si haec integralia omnia in vnam summam colligantur erit

$$(A+B+C+D+\text{etc.})\,\Delta=0\,,$$

hincque erit integrale quaesitum

$$\int\frac{P\,dz}{lz}=A\,l(\alpha+1)+B\,l(\beta+1)+C\,l(\gamma+1)+D\,l(\delta+1)\,\text{etc.}$$

q. e. d.

Corollarium 1.

§. 28. Quia supponimus

$$A+B+C+D+\text{etc.}=0$$

euidens est formulam

$$P=A\,z^{\alpha}+B\,z^{\beta}+C\,z^{\gamma}+D\,z^{\delta}+\text{etc.}$$

factorem habere $z-1$ quemadmodum iam ante notauimus.

Corollarium 2.

§. 29. Quia est

$$(z-1)^n=z^n-\tfrac{n}{1}z^{n-1}+\tfrac{n(n-1)}{1.\,2}z^{n-2}-\tfrac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3}z^{n-3}$$

hoc valore loco P posito, erit $A=1$ et $\alpha=n$; deinde $B=-\frac{n}{1}$ et $\beta=n-1$; porro $C=\frac{n(n-1)}{1.\,2}$ et $\gamma=n-2$; etc.

hinc

hinc igitur erit

$$\int \frac{(z-1)^n dz}{lz} = l(n+1) - \frac{n}{1} ln + \frac{n.n-1}{1.2} l(n-1) - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3} l(n-2)$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} l(n-3) + \text{etc.}$$

ſi modo exponens n fuerit nihilo maior, vel ſaltem vnitate non minor, quia alioquin caſu $z = 1$ fractio $\frac{(z-1)^n}{lz}$ fieret infinita; hoc autem non obſtante area ſupra conſiderata fiet finita, ita vt ſufficiat dummodo ſit $n > 0$.

Exemplum 2.

§. 30. Sit $P = \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}}$ erit $\int P dz = \frac{\pi}{2 n \operatorname{cof.} \frac{\pi u}{2n}}$;

ſi quidem poſt integrationem ponatur $z = 1$ quem ergo valorem literae S tribuimus. Nunc ſpectata z vt conſtante erit

$$\int P du = \frac{1}{1+z^{2n}} (\int z^{n-u-1} du + \int z^{n+u-1} du)$$

ideoque

$$\int P du = - \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{(1+z^{2n}) lz} \text{ vnde fiet}$$

$$\int S du = \int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1 + z^{2n}} \frac{dz}{lz};$$

cum igitu ſit $\operatorname{cof.} \frac{\pi u}{2n} = \operatorname{fin.} \frac{\pi(n-u)}{2n}$ erit

$$\int S du = \int \frac{\pi du}{2 n \operatorname{fin.} \frac{\pi(n-u)}{2n}};$$

 hinc

hinc si ponamus

$$\frac{\pi(n-u)}{2n} = \Phi, \text{ erit } d\Phi = -\frac{\pi du}{2n}, \text{ ideoque}$$

$$\int S\, du = -\int \frac{d\Phi}{\sin.\Phi} = -l\,\text{tang.}\tfrac{1}{2}\Phi,$$

quocirca habebimus

$$\int S\, du = -l\,\text{tang.}\frac{\pi(n-u)}{4n},$$

ita vt posito post integrationem $z = 1$ assecuti simus hanc integrationem

$$\int \frac{-z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1+z^{2n}} \frac{dz}{lz} = -l\,\text{tang.}\frac{\pi(n-u)}{4n} = +l\,\text{tang.}\frac{\pi(n+u)}{4n}.$$

Exemplum 3.

§. 31. Sit $P = \dfrac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{1-z^{2n}}$ erit

$$\int P\, dz = \frac{\pi}{2n}\,\text{tang.}\frac{\pi u}{2n} = S$$

vnde fit

$$\int S\, du = -l\,\text{cos.}\frac{\pi u}{2n},$$

hinc cum sit

$$\int P\, du = -\frac{z^{n-u-1} - z^{n+u-1}}{(1-z^{2n})\,lz}$$

nanciscimur sequentem integrationem, si quidem integrale a termino $z = 0$ vsque ad terminum $z = 1$ extendatur

$$\int \frac{z^{n-u-1} + z^{n+u-1}}{1-z^{2n}} \frac{dz}{lz} = +l\,\text{cos.}\frac{\pi u}{2n}.$$

Haec quidem duo posteriora exempla iam ante fusius expediui; vnde iis magis euoluendis non immoror: sed ad sequens problema progredior.

Pro-

Problema.

Si proponantur hae duae series infinitae

$$P = z\,\text{cof.}\,u + z^2\,\text{cof.}\,2u + z^3\,\text{cof.}\,3u + z^4\,\text{cof.}\,4u + z^5\,\text{cof.}\,5u + \text{etc. et}$$

$$Q = z\,\text{fin.}\,u + z^2\,\text{fin.}\,2u + z^3\,\text{fin.}\,3u + z^4\,\text{fin.}\,4u + z^5\,\text{fin.}\,5u + \text{etc.}$$

quae binas variabiles z et u inuoluunt, inuenire relationes inter formulas integrales $\int\frac{P\,dz}{z}$, $\int P\,du$ et $\int\frac{Q\,dz}{z}$, $\int Q\,du$ aliasque formulas integrales per continuam integrationem inde natas.

Solutio.

§. 32. Cum vtraque series fit recurrens, reperitur per formulas finitas

$$P = \frac{z\,\text{cof.}\,u - zz}{1 - 2z\,\text{cof.}\,u + zz} \quad\text{et}\quad Q = \frac{z\,\text{fin.}\,u}{1 - 2z\,\text{cof.}\,u + zz}$$

vnde fit

$$\int\frac{P\,dz}{z} = \int\frac{dz\,\text{cof.}\,u - z\,dz}{1 - 2z\,\text{cof.}\,u + zz} = -l\sqrt{1 - 2z\,\text{cof.}\,u + zz}$$

et $\int Q\,du = \int\frac{z\,du\,\text{fin.}\,u}{1 - 2z\,\text{cof.}\,u + zz} = +l\sqrt{1 - 2z\,\text{cof.}\,u + zz}$

ita vt fit

$$\int\frac{P\,dz}{z} = -\int Q\,du;\ \text{tum vero etiam erit}$$

$$\int\frac{Q\,dz}{z} = \int\frac{dz\,\text{fin.}\,u}{1 - 2z\,\text{cof.}\,u + zz} = \text{A tang.}\,\frac{z\,\text{fin.}\,u}{1 - z\,\text{cof.}\,u};$$

at fi ifte arcus differentietur fumto folo angulo u variabili, erit

$$\frac{1}{du}\,\text{A tang.}\,\frac{z\,\text{fin.}\,u}{1 - z\,\text{cof.}\,u} = \frac{z\,\text{cof.}\,u - zz}{1 - 2z\,\text{cof.}\,u + zz}$$

ita vt fit $\int\frac{Q\,dz}{z} = \int P\,du$.

§. 33. Verum eaedem relationes facilius ex ipfis feriebus deriuantur: Cum enim fit

$P = z$

$P = z\cos. u + z^2\cos. 2u + z^3\cos. 3u + z^4\cos. 4u$ etc. erit

$\int \frac{P\,dz}{z} = \frac{z\cos. u}{1} + \frac{zz\cos. 2u}{2} + \frac{z^3\cos. 3u}{3}$ etc.

et $\int P\,du = \frac{z\sin. u}{1} + \frac{zz\sin. 2u}{2} + \frac{z^3\sin. 3u}{3}$ etc.

et quia eſt

$Q = z\sin. u + zz\sin. 2u + z^3\sin. 3u +$ etc. erit

$\int \frac{Q\,dz}{z} = \frac{z\sin. u}{1} + \frac{zz\sin. 2u}{2} + \frac{z^3\sin. 3u}{3}$ etc.

et $\int Q\,du = -\frac{z\cos. u}{1} - \frac{z^2\cos. 2u}{2} - \frac{z^3\cos. 3u}{3}$ etc.

vnde manifeſtum eſt fore

$\int \frac{P\,dz}{z} = -\int Q\,du$ et $\int \frac{Q\,dz}{z} = \int P\,du$.

§. 34. Quo hoc modo vlterius progredi liceat ſtatuamus breuitatis gratia

$P' = \frac{z\cos. u}{1} + \frac{z^2\cos. 2u}{2} + \frac{z^3\cos. 3u}{3}$ etc. et $Q' = \frac{z\sin. u}{1} + \frac{z^2\sin. 2u}{2} + \frac{z^3\sin. 3u}{3}$ etc.

$P'' = \frac{z\cos. u}{1^2} + \frac{z^2\cos. 2u}{2^2} + \frac{z^3\cos. 3u}{3^2}$ etc. et $Q'' = \frac{z\sin. u}{1^2} + \frac{zz\sin. 2u}{2^2} + \frac{z^3\sin. 3u}{3^2}$ etc.

$P''' = \frac{z\cos. u}{1^3} + \frac{zz\cos. 2u}{2^3} + \frac{z^3\cos. 3u}{3^3}$ etc. et $Q''' = \frac{z\sin. u}{1^3} + \frac{zz\sin. 2u}{2^3} + \frac{z^3\sin. 3u}{3^3}$ etc.

$P'''' = \frac{z\cos. u}{1^4} + \frac{zz\cos. 2u}{2^4} + \frac{z^3\cos. 3u}{3^4}$ etc. et $Q'''' = \frac{z\sin. u}{1^4} + \frac{zz\sin. 2u}{2^4} + \frac{z^3\sin. 3u}{3^4}$ etc.

etc. etc. etc. etc.

et hinc comparationes ante inuentae continuabuntur

$P' = \int \frac{P\,dz}{z} = -\int Q\,du, \quad Q' = \int \frac{Q\,dz}{z} = \int P\,du.$

$P'' = \int \frac{P'\,dz}{z} = -\int Q'\,du, \quad Q'' = \int \frac{Q'\,dz}{z} = \int P'\,du.$

$P''' = \int \frac{P''\,dz}{z} = -\int Q''\,du, \quad Q''' = \int \frac{Q''\,dz}{z} = \int P''\,du.$

$P'''' = \int \frac{P'''\,dz}{z} = -\int Q'''\,du, \quad Q'''' = \int \frac{Q'''\,dz}{z} = \int P'''\,du.$

etc. etc. etc. etc. etc. etc.

vnde

vnde plures insignes relationes deduci possunt.

§. 35. Maxime autem notatu dignae et ad nostrum institutum accommodatae sunt eae relationes, vbi formulae integrales, in quibus sola z est variabilis, reducuntur ad alias formulas integrales, in quibus sola u est variabilis, cuiusmodi sunt, quae sequuntur

$$P' = \int \frac{P\,dz}{z} = -\int Q\,du$$
$$P'' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{P\,dz}{z} = -\int du \int P\,du$$
$$P''' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{P\,dz}{z} = +\int du \int du \int Q\,du$$
$$P'''' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{P\,dz}{z} = +\int du \int du \int du \int P\,du$$
$$P^{V} = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{P\,dz}{z} = -\int du \int du \int du \int du \int Q\,du$$

etc.

Similique modo pro altero genere

$$Q' = \int \frac{Q\,dz}{z} = +\int P\,du$$
$$Q'' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{Q\,dz}{z} = -\int du \int Q\,du$$
$$Q''' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{Q\,dz}{z} = -\int du \int du \int P\,du$$
$$Q'''' = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{Q\,dz}{z} = +\int du \int du \int du \int Q\,du$$
$$Q^{V} = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{Q\,dz}{z} = +\int du \int du \int du \int du \int P\,du$$

etc.

§. 36. Quod si iam nostrarum serierum, siue, quod eodem redit, quantitatum

$$P,\ P',\ P'',\ P''',\ P''''\ \text{etc. et}\ Q',\ Q'',\ Q''',\ Q''''\ \text{etc.}$$

eos tantum valores desideremus, quos adipiscuntur

 posito

posito $z = 1$, hoc commodi assequimur, vt in formulis integralibus vbi solus angulus u pro variabili habetur, statim ante integrationes ponere liceat $z = 1$, hoc autem facto erit

$$P = \frac{\cos. u - 1}{2 - 2\cos. u} = -\tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sin. u}{2 - 2\cos. u} = \tfrac{1}{2}\cot. \tfrac{1}{2}u$$

tum vero porro

$$\int P\,du = A - \tfrac{1}{2}u$$

$$\int du \int P\,du = B + Au - \tfrac{1}{4}uu$$

$$\int du \int du \int P\,du = C + Bu + \tfrac{1}{2}Auu - \tfrac{1}{12}u^3$$

$$\int du \int du \int du \int P\,du = D + Cu + \tfrac{1}{2}Buu + \tfrac{1}{6}Au^3 - \tfrac{1}{48}u^4$$

at pro formulis, vbi est q, calculus non tam concinne succedit; erit enim

$$Q = \tfrac{1}{2}\cot. \tfrac{1}{2}u$$

$$\int Q\,du = l\sin. \tfrac{1}{2}u$$

$$\int du \int Q\,du = \int du\, l\sin. \tfrac{1}{2}u$$

quae formula cum omnem integrationem respuat, vix vlterius progredi licet; interim tamen erit

$$\int du \int du \int Q\,du = \int du \int du\, l\sin. \tfrac{1}{2}u$$

$$\int du \int du \int du \int Q\,du = \int du \int du \int du\, l\sin. \tfrac{1}{2}u.$$

§. 37. Quod ad priores formulas variabilem z inuoluentes attinet, per notas reductiones elicitur

$$\int \frac{P'dz}{z} = \int \frac{dz}{z} \int \frac{Pdz}{z} = lz \int \frac{Pdz}{z} - \int \frac{Pdz}{z}\,lz$$

vbi prius membrum $lz \int P\,dz$ euanescit posito $z = 1$, tum vero

$$\int \frac{dz}{z} \int \frac{P'dz}{z} = \int \frac{dz}{z} \int \frac{dz}{z} \int \frac{Pdz}{z} = + \int \frac{Pdz}{z} \frac{(lz)^2}{2}$$

quibus expressionibus vlterius exhibitis colligimus fore

P' =

$$P' = \int \frac{P\,dz}{z} \qquad Q' = \int \frac{Q\,dz}{z}$$
$$P'' = -\int \frac{P\,dz}{z}\, lz \qquad Q'' = -\int \frac{Q\,dz}{z}\, lz$$
$$P''' = +\int \frac{P\,dz}{z}\, \frac{(lz)^2}{1.\,2} \qquad Q''' = +\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{(lz)^2}{1.\,2}$$
$$P^{IV} = -\int \frac{P\,dz}{z}\, \frac{(lz)^3}{1.\,2.\,3} \qquad Q^{IV} = -\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{(lz)^3}{1.\,2.\,3}.$$

§. 38. Ex his igitur ſequentium formularum integralium valores aſſignare poſſumus caſu quo $z = 1$

$$P = -\tfrac{1}{2}$$
$$P' = \int \frac{P\,dz}{z} = -l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$$
$$P'' = -\int \frac{P\,dz}{z}\, lz = -B - Au + \tfrac{1}{4}uu$$
$$P''' = +\int \frac{P\,dz}{z}\, \frac{(lz)^2}{1.\,2} = \int du \int du\; l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$$
$$P^{IV} = -\int \frac{P\,dz}{z}\, \frac{(lz)^3}{1.\,2.\,3} = D + Cu + \tfrac{1}{2}Buu + \tfrac{1}{6}Au^3 - \tfrac{1}{48}u^4$$
$$P^{V} = +\int \frac{P\,dz}{z}\, \frac{(lz)^4}{1.\,2.\,3.\,4} = \int du \int du \int du \int du\; l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$$

etc.

Eodemque modo

$$Q = \tfrac{1}{2}\,\text{cot.}\,\tfrac{1}{2}u$$
$$Q' = \int \frac{Q\,dz}{z} = A - \tfrac{1}{2}u$$
$$Q'' = -\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{lz}{1} = -\int du\; l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$$
$$Q''' = +\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{(lz)^2}{2} = -C - Bu - \tfrac{1}{2}Auu + \tfrac{1}{12}u^3$$
$$Q^{IV} = -\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{(lz)^3}{6} = \int du \int du \int du\; l\,\text{ſin.}\,\tfrac{1}{2}u$$
$$Q^{V} = +\int \frac{Q\,dz}{z}\, \frac{(lz)^4}{24} = E + Du + \tfrac{1}{2}Cuu + \tfrac{1}{6}Bu^3 + \tfrac{1}{24}Au^4 - \tfrac{1}{240}u^5$$

etc.

§. 39. Cum igitur ſit

$$P = \frac{z\,\text{coſ.}\,u - zz}{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz} \quad \text{et} \quad Q = \frac{z\,\text{ſin.}\,u}{1 - 2z\,\text{coſ.}\,u + zz}$$

 hacte-

hactenus id ſumus aſſecuti, vt harum duarum formularum integralium

$$\int \frac{dz\,(\cos. u - z)}{1 - 2z\cos. u + zz}(lz)^n \text{ et } \int \frac{dz\,\sin. u}{1 - 2z\cos. u + zz}(lz)^n$$

valores caſu $z = 1$ commode per angulum u aſſignare valeamus, ſi modo conſtaret, quo facto quantitates A, B, C, D determinari oporteat, id quod vix alio modo niſi per ipſas ſeries, vnde hae quantitates ſunt natae, fieri poſſe videtur.

§. 40. Omiſſis igitur formulis integralibus, quae quantitatem Q inuoluunt, quippe quarum integratio minus ſuccedit, alteras tantum conſideremus, et poſito ſtatim $z = 1$ vbi fit $P = -\frac{1}{2}$ ita vt ſit

$$\cos. u + \cos. 2u + \cos. 3u + \cos. 4u = -\frac{1}{2}$$

ſi per du multiplicemus et integremus, habebimus

$$Q' = \frac{\sin. u}{1} + \frac{\sin. 2u}{2} + \frac{\sin. 3u}{3} + \frac{\sin. 4u}{4} + \frac{\sin. 5u}{5} \text{ etc.} = A - \frac{1}{2}u$$

quae conſtans nihilo aequalis videri poteſt, quia poſito $u = 0$ ſumma ſeriei euaneſcere videtur; at ſumto angulo u infinite paruo ſeries praebebit

$$u + u + u + u + u + u + \text{etc. in infinitum}$$

notum autem eſt, talem ſeriem ſummam finitam habere poſſe, vnde hoc caſu omiſſo ſtatuamus $u = \pi$, ſeu potius $u = \pi + \omega$ prodibitque haec ſeries exiſtente ω angulo infinite paruo

$$-\omega + \omega - \omega + \omega - \omega + \omega - \omega + \text{etc.}$$

vbi quia ſigna alternantur, nullum eſt dubium, quin ſumma ſeriei euaneſcat, quae cum eſſe debeat $A - \frac{\pi}{2}$ euidens

euidens eſt, fieri conſtantem $A = \frac{1}{2}\pi$, ita, vt iam habeamus

$$Q' = \frac{\sin. u}{1} + \frac{\sin. 2u}{2} + \frac{\sin. 3u}{3} + \frac{\sin. 4u}{4} + \frac{\sin. 5u}{5} \text{ etc.} = \frac{\pi - u}{2}.$$

Hoc modo conſtantem determinandi Illuſtr. *Daniel Bernoulli* primus eſt vſus, qui praeterea multa praeclara circa indolem harum ſerierum annotauit.

§. 41. Multiplicemus porro hanc vltimam ſeriem per $-du$, et integratio dabit

$$P'' = \frac{\cos. u}{1^2} + \frac{\cos. 2u}{2^2} + \frac{\cos. 3u}{3^2} + \frac{\cos. 4u}{4^2} + \text{etc.} = B - \frac{\pi u}{2} + \frac{uu}{4}$$

ad quam conſtantem inueniendam ponamus primo $u = 0$ fietque

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \text{ etc.} = B$$

Cuius ſeriei ſummam iam pridem primus demonſtraui eſſe $= \frac{\pi\pi}{6}$; verum ſi haec veritas nobis eſſet ignota, egregia illa methodo a magno *Bernoullio* adhibita vtamur ac ponamus $u = \pi$ eritque

$$-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} \text{etc.} = B - \frac{\pi\pi}{2} + \frac{\pi\pi}{4} = B - \frac{\pi\pi}{4}$$

ambae hae ſeries additae dabunt

$$\frac{2}{2^2} - \frac{2}{4^2} + \frac{2}{6^2} - \frac{2}{8^2} \text{ etc.} = 2B - \frac{\pi\pi}{4}$$

cuius duplum praebet

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} = 4B - \frac{\pi\pi}{2} = B$$

vnde colligitur $B = \frac{\pi\pi}{6}$ ita vt ſit

$$P'' = \frac{\cos. u}{1^2} + \frac{\cos. 2u}{2^2} + \frac{\cos. 3u}{3^2} + \frac{\cos. 4u}{4^2} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{\pi u}{2} + \frac{uu}{4}.$$

§. 42. Eodem modo vlterius progrediamur, et denuo per du multiplicando et integrando adipiſcimur

$$Q^{III} = \frac{\sin. u}{1^3} + \frac{\sin. 2u}{2^3} + \frac{\sin. 3u}{3^3} + \frac{\sin. 4u}{4^3} + \text{etc.} = C + \frac{\pi\pi u}{6} - \frac{\pi uu}{4} + \frac{u^3}{12}$$

vbi si statuatur $u = 0$, summa seriei manifesto euanescit, prodiret enim posito $u = \omega$

$$\frac{\omega}{1^2} + \frac{\omega}{2^2} + \frac{\omega}{3^2} + \frac{\omega}{4^2} + \text{etc.} = \frac{\omega\pi\pi}{6}$$

quae ob $\omega = 0$ fit $= 0$ sicque erit $C = 0$ ideoque

$$Q^{III} = \frac{\sin. u}{1^3} + \frac{\sin. 2u}{2^3} + \frac{\sin. 3u}{3^3} + \frac{\sin. 4u}{4^3} \text{ etc.} = \frac{\pi\pi u}{6} - \frac{\pi uu}{4} + \frac{u^3}{12}.$$

§. 43. Ducatur haec series in $-du$ et integratio praebebit

$$P^{IV} = \frac{\cos. u}{1^4} + \frac{\cos. 2u}{2^4} + \frac{\cos. 3u}{3^4} + \frac{\cos. 4u}{4^3} \text{ etc.} = D - \frac{\pi\pi uu}{12} + \frac{\pi u^3}{12} - \frac{u^4}{48}$$

hinc sumto $u = 0$ fiet

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} \text{ etc.} = D$$

nunc vero fiat etiam $u = \pi$ fietque

$$-\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4} \text{ etc.} = D - \frac{\pi^4}{48}$$

hae autem ambae series additae dant

$$\frac{2}{2^4} + \frac{2}{4^4} - \frac{2}{6^4} - \frac{2}{8^4} + \text{etc.} = 2D - \frac{\pi^4}{48}$$

quae octies sumta vt numeratores fiant $= 2^4$ praebebit

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = 16D - \frac{\pi^4}{6}$$

vnde oritur $D = \frac{\pi^4}{90}$ quae est eadem summa seriei

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \text{ etc.}$$

quam iam dudum inueneram, habebimus iam

$$P^{IV} = \frac{\cos. u}{1^4} + \frac{\cos. 2u}{2^4} + \frac{\cos. 3u}{3^4} + \frac{\cos. 4u}{4^4} = \frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^2 u^2}{12} + \frac{\pi u^3}{12} - \frac{u^4}{48}.$$

§. 44. Multiplicando iterum per du et integrando consequimur

$Q^V =$

$$Q^{V} = \frac{\sin. u}{1^5} + \frac{\sin. 2u}{2^5} + \frac{\sin. 3u}{3^5} + \frac{\sin. 4u}{4^5} + \text{etc.} = E + \frac{\pi^4 u}{90} - \frac{\pi^2 u^3}{36} + \frac{\pi u^4}{48} - \frac{u^5}{240}$$

vbi vti in casu penultimo constans E iterum fit $= 0$ ita vt habeamus

$$Q^{V} = \frac{\sin. u}{1^5} + \frac{\sin. 2u}{2^5} + \frac{\sin. 3u}{3^5} + \frac{\sin. 4u}{4^5}\ \text{etc.} = \frac{\pi u^4}{90} - \frac{\pi^2 u^3}{36} + \frac{\pi u^4}{48} - \frac{u^5}{240}.$$

§. 45. Multiplicemus denuo per $-du$ prodibitque integrando

$$P^{VI} = \frac{\cos. u}{1^6} + \frac{\cos. 2u}{2^6} + \frac{\cos. 3u}{3^6} + \frac{\cos. 4u}{4^6}\ \text{etc.} = F - \frac{\pi^4}{90} \cdot \frac{uu}{2} + \frac{\pi\pi}{6} \cdot \frac{u^4}{24} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u^5}{120} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{720}$$

vbi ad constantem determinandam ponatur $u = 0$ eritque

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = F$$

tum vero sumatur $u = \pi$ et fiet

$$-\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} - \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} - \text{etc.} = F - \frac{\pi^6}{480},$$

quae additae dant

$$\frac{2}{2^6} + \frac{2}{4^6} + \frac{2}{6^6} + \frac{2}{8^6} + \text{etc.} = 2F - \frac{\pi^6}{480},$$

quae multiplicetur per 32 vt omnes numeratores fiant $64 = 2^6$ et orietur

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = 64F - \frac{\pi^6}{15} = F$$

vnde colligitur $F = \frac{\pi^6}{945}$ ita vt sit

$$P^{VI} = \frac{\cos. u}{1^6} + \frac{\cos. 2u}{2^6} + \frac{\cos. 3u}{3^6} + \frac{\cos. 4u}{4^6} + \text{etc.} = \frac{\pi^6}{945} - \frac{\pi^4}{90} \cdot \frac{u^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{u^4}{24} - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{u^5}{120} + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^6}{720}.$$

§. 46. Has series vlterius continuare superfluum foret, cum lex progressionis iam satis sit manifesta, praecipue si in subsidium vocentur summationes potestatum reciprocarum parium, quas olim vsque ad potestatem trigesimam supputatas dedi. Quod, quo clarius perspiciatur istas summas sequenti modo repraesentemus

$\frac{1}{1^2} +$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}\text{ etc.}=\alpha\pi\pi \quad \text{vt sit } \alpha=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{ etc.}=\beta\pi^4 \quad \text{vt sit } \beta=\frac{1}{90}$$
$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}\text{ etc.}=\gamma\pi^6 \quad \text{vt sit } \gamma=\frac{1}{945}$$
$$\frac{1}{1^8}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}\text{ etc.}=\delta\pi^8 \quad \text{vt sit } \delta=\frac{1}{9450}$$

etc. etc. etc.

atque his positis sequentes habebimus integrationes pro casu scilicet $z=1$

$$Q^{I}=\int\frac{dz\,\sin.u}{1-2z\cos.u+zz}=\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{2}u=\text{A tang.}\frac{\sin.u}{1-\cos.u}$$
$$P^{II}=-\int\frac{dz(\cos.u-z)}{1-2z\cos.u+zz}\,\frac{lz}{1}=\alpha\pi\pi-\tfrac{1}{2}\pi u+\tfrac{1}{2}\,\frac{uu}{2}$$
$$Q^{III}=+\int\frac{dz\,\sin u}{1-2z\cos.u+zz}\,\frac{(lz)^2}{2}=\alpha\pi\pi\frac{u}{1}-\tfrac{1}{2}\pi\,\frac{uu}{2}+\tfrac{1}{2}.\,\frac{u^3}{6}$$
$$P^{IV}=-\int\frac{dz(\cos.u-z)}{1-2z\cos.u+zz}\,\frac{(lz)^3}{6}=\beta\pi^4-\alpha\pi\pi.\,\frac{uu}{2}+\tfrac{1}{2}\pi.\,\frac{u^3}{6}-\tfrac{1}{2}.\,\frac{u^4}{24}$$
$$Q^{V}=+\int\frac{dz\,\sin.u}{1-2z\cos.u+zz}\,\frac{(lz)^4}{24}=\beta\pi^4.\,\frac{u}{1}-\alpha\pi\pi.\,\frac{u^3}{6}+\tfrac{1}{2}\pi.\,\frac{u^4}{24}-\tfrac{1}{2}.\,\frac{u^5}{120}$$
$$P^{VI}=-\int\frac{dz(\cos.u-z)}{1-2z\cos.u+zz}\,\frac{(lz)^5}{120}=\gamma\pi^6-\beta\pi^4.\,\frac{uu}{2}+\alpha\pi\pi.\,\frac{u^4}{24}-\tfrac{1}{2}\pi.\,\frac{u^5}{120}+\tfrac{1}{2}.\,\frac{u^6}{720}$$
$$Q^{VII}=+\int\frac{dz\,\sin.u}{1-2z\cos.u+zz}.\,\frac{(lz)^6}{720}=\gamma\pi^6.\,\frac{u}{1}-\beta\pi^4\frac{u^3}{6}+\alpha\pi\pi.\,\frac{u^5}{120}-\tfrac{1}{2}\pi.\,\frac{u^6}{720}+\tfrac{1}{2}.\,\frac{u^7}{5040}$$

etc. etc. etc.

§. 47. Operae pretium erit, aliquos casus, quibus angulo u datus valor tribuitur, ob oculos exponere. Ponamus igitur $u=0$ quo casu formulae nostrae alternatim euanescunt, reliquae vero praebebunt

$$-\int\frac{dz}{1-z}\,lz=\alpha\pi\pi=\frac{\pi\pi}{6}$$
$$-\int\frac{dz}{1-z}\,\frac{(lz)^3}{6}=\beta\pi^4=\frac{\pi^4}{90}$$
$$-\int\frac{dz}{1-z}\,\frac{(lz)^5}{120}=\gamma\pi^6=\frac{\pi^6}{945}$$

his affines sunt formulae, quae oriuntur ex positione

$u=\pi$

$u = \pi$ vbi iterum abeunt alternae ſinum u inuolventes et remanebunt ſequentes

$$\int \frac{dz}{1+z}\, lz = -\frac{\pi\pi}{12} = -\tfrac{1}{2}\,\alpha\,\pi\pi$$

$$\int \frac{dz}{1+z}\,\frac{(lz)^3}{6} = -\frac{7\,\pi^4}{720} = -\tfrac{7}{8}\,\beta\,\pi^4$$

$$\int \frac{dz}{1+z}\,\frac{(lz)^5}{120} = -\tfrac{31}{32}\,\gamma\,\pi^6$$

$$\int \frac{dz}{1+z}\,\frac{(lz)^7}{720} = -\tfrac{127}{128}\,\delta\,\pi^8.$$

§ 48. Hic notatu dignum occurrit, quod valores alterni, quos hic omiſimus, etiam euaneſcant poſito $u = \pi$; deinde non minus notatu dignum eſt, easdem formulas quoque euaneſcere poſito $u = 2\pi$, ſola prima excepta, quippe quae etiam non euaneſcit poſito $u = 0$; reliquae vero, ſcilicet tertia, quinta, ſeptima etc. certe euaneſcunt caſibus $u = 0$ et $u = \pi$, quin etiam $u = 2\pi$. Quod quo clarius appareat, has formulas per factores repraeſentemus eritque tertiae valor

$$= \tfrac{1}{12}\, u\,(\pi - u)(2\pi - u),$$

quintae vero valor reperitur

$$\tfrac{u}{120}(\pi - u)(2\pi - u)(4\pi\pi + 6\pi u - 3uu),$$

quod etiam in ſequentibus vſu venit. Ingenere autem obſeruari meretur, omnes noſtras formulas ſola prima excerpta eosdem ſortiri valores, ſiue ponatur $u = 0$ ſiue $u = 2\pi$, quippe quibus tam idem ſinus quam coſinus reſpondet. Videtur quidem eundem conſenſum locum habere debere ſi ponatur $u = 4\pi$ et $u = 6\pi$, verum Illuſtr. *Bernoullius* iam luculenter oſtendit, angulum u in his valoribus non vltra

 qua-

quatuor rectos augeri posse. Huiusmodi autem anomalia etiam in omnibus vulgaribus seriebus quibus arcus exprimuntur occurrit, atque adeo in *Leibniziana*, in qua est

$$u = \frac{\text{tang.}\, u}{1} - \frac{(\text{tang.}\, u)^3}{3} + \frac{(\text{tang.}\, u)^5}{5} - \frac{(\text{tang.}\, u)^7}{7} + \frac{(\text{tang.}\, u)^9}{9} - \text{etc.}$$

angulum u non vltra 180 gr. augere licet. Si enim poneremus $u = 180^\circ + u$ foret vtique tang. $u =$ tang. u neque tamen series illa exprimeret arcum $\pi + u$ sed tantum arcum u, cuiusmodi phaenomena etiam in aliis similibus seriebus locum habent. Quod autem prima series hinc plerumque excipi debeat, ratio in eo est sita, quod in formula integrali posito $u = 0$ denominator fiat $(1 - z)$ qui casu $z = 1$ euanescit ideoque formula in infinitum excrescit, id quod in sequentibus, quae per lz sunt multiplicatae, non amplius euenit, quia $\frac{lz}{1-z}$ casu $z = 1$ non amplius fit infinitus sed tantum $= -1$ et si maior potestas logarithmi adsit fit adeo $= 0$.

§. 49. Ponamus nunc etiam $n = 90^\circ$, seu $u = \frac{\pi}{2}$, vt sit cos. $u = 0$ et sin. $u = 1$ hocque casu omnes formulae generales sequentes obtinebunt valores

$$\int \frac{dz}{1+zz} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int \frac{z\,dz}{1+zz}\, lz = -\frac{\pi\pi}{48}$$

$$\int \frac{dz}{1+zz} \frac{(lz)^2}{2} = \frac{\pi^3}{32}$$

$$\int \frac{z\,dz}{1+zz} \frac{(lz)^3}{6} = -\frac{7\pi^4}{90 \cdot 128}.$$

§. 50. Consideremus etiam casum $u = 60$ gr. siue $u = \frac{\pi}{3}$ vt sit cos. $u = \frac{1}{2}$ et sin. $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et formulae generales perducent ad sequentia integralia

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dz}{1 - z + zz} = \frac{\pi}{3}$$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{dz(1 - 2z)}{1 - z + zz}\, lz = \frac{\pi\pi}{36}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dz}{1 - z + zz}\,\frac{(lz)^2}{2} = \frac{5\pi^3}{162}.$$

Simili modo si ponamus $u = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ vt sit cos. $u = -\frac{1}{2}$ et sin. $u = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sequentes integrationes istis affines prodibunt

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dz}{1 + z + zz} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dz(1 + 2z)}{1 + z + zz}\, lz = -\frac{\pi\pi}{18}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int\frac{dz}{1 + z + zz}\,\frac{(lz)^2}{2} = \frac{2\pi^3}{81}$$

sicque pro lubitu numerus huiusmodi integrationum specialium augeri poterit.

§. 51. Quemadmodum istae integrationes memorabiles ex priore serie nostra P posito $z = 1$ sunt deductae, ita eodem modo alteram seriem Q pertractemus. Cum igitur sit

$$Q = \text{sin.}\, u + \text{sin.}\, 2u + \text{sin.}\, 3u + \text{sin.}\, 4u \text{ etc.} = \tfrac{1}{2}\text{cot.}\, \tfrac{1}{2}u$$

si per $-du$ multiplicemus et integremus, reperitur series

$$P' = \frac{\text{cos.}\, u}{1} + \frac{\text{cos.}\, 2u}{2} + \frac{\text{cos.}\, 3u}{3} + \frac{\text{cos.}\, 4u}{4} + \text{etc.} = \tfrac{1}{2} - l\,\text{sin.}\, \tfrac{1}{2}u + A$$

pro qua constante determinanda ponatur $u = \pi$ vt sit

$$-1 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} - \text{etc.} = A$$

quocirca sit $A = -l2$ ita, vt habeamus

$$P' = \frac{\text{cos.}\, u}{1} + \frac{\text{cos.}\, 2u}{2} + \frac{\text{cos.}\, 3u}{3} + \frac{\text{cos.}\, 4u}{4} + \text{etc.} = -l2\,\text{sin.}\, \tfrac{1}{2}u$$

pro quo valore fcribamus breuitatis gratia $u\Delta:u$ fi quidem eum fpectamus tanquam certam ipfius u functionem ita vt fit $P' = \Delta:u$.

§. 52. Multiplicando porro per du et integrando nancifcimur hanc feriem

$$Q'' = \frac{\sin. u}{1^2} + \frac{\sin. 2u}{2^2} + \frac{\sin. 3u}{3^2} + \frac{\sin. 4u}{4^2} \text{ etc.} = \int du\,\Delta:u = \Delta':u$$

vbi haec formula integralis inuoluet certam conftantem quam facile definire licet ex cafu $u=0$ quia enim feries euanefcit, fieri debet $\Delta':0=0$ ficque integratio plene determinatur.

§. 53. Si eodem modo vlterius progrediamur multiplicando per $-du$, prodibit haec feries

$$P''' = \frac{\cos. u}{1^3} + \frac{\cos. 2u}{2^3} + \frac{\cos. 3u}{3^3} + \frac{\cos. 4u}{4^3} = -\int du\,\Delta' : = \Delta'':u.$$

Iam ad conftantem, quae in hac expreffione continetur, definiendam fit 1° $u=0$ eritque

$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}$ etc. $=\Delta'':0$ 1°. fit $u=\pi$ et fiet

$-\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}$etc. $=\Delta'':\pi$ quibus additis prodit

$\frac{2}{2^3}+\frac{2}{4^3}+\frac{2}{6^3}+\frac{2}{8^3}+$etc.$=\Delta''0+\Delta'':\pi$ hacque quatuor fumta erit

$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+$etc. $=4\,\Delta'':0+4\Delta'':\pi=\Delta'':0$ vnde oritur

$$3\,\Delta'':0+4\,\Delta'':\pi=0$$

ex qua conftans in formulam noftram integralem

$$\Delta'':u=-\int du\,\Delta' u$$

ingreffa determinari debet.

§. 54. Multiplicemus denuo per du et integremus prodibitque

$$Q^{IV} = \frac{\sin. u}{1^4} + \frac{\sin. 2u}{2^4} + \frac{\sin. 3u}{3^4} + \frac{\sin. 4u}{4^4} + \text{etc.} = \int du\,\Delta'':u = \Delta''':u$$

atque

atque haec functio $\Delta''' : u$ ita debet determinari, vt euanescat sumto $u = 0$ siue vt fiat $\Delta''' : 0 = 0$. Eodem modo vlterius progrediendo fiet

$$P^{V} = \frac{cos. u}{1^5} + \frac{cos. 2u}{2^5} + \frac{cos. 3u}{3^5} + \frac{cos. 4u}{4^5} = -\int du \Delta''' : u = \Delta'''' : u$$

huiusque functionis indoles sequenti modo determinabitur: ponatur scilicet vt hactenus $u = 0$ et $u = \pi$ eritque

$\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{5^5} + \text{etc.} = \Delta^{IV} : 0$ et

$-\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} - \frac{1}{5^5} + \text{etc.} = \Delta^{IV} : \pi$ hinc addendo

$\frac{2}{2^5} + \frac{2}{4^5} + \frac{2}{6^5} + \frac{2}{8^5} + \text{etc.} = \Delta^{IV} : 0 + \Delta^{IV} : \pi$ et multiplicando per 16

$\frac{1}{1^5} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{4^5} + \text{etc.} = 16\, \Delta^{IV} : 0 + 16\, \Delta^{IV} : \pi = \Delta^{IV} : 0$

sicque fieri debebit $15\, \Delta^{IV} : 0 + 16\, \Delta^{IV}\, \pi = 0$ etc.

§. 55. Hinc igitur sequentes adipiscemur integrationes pro casu $z = 1$

I. $-\int \frac{dz (cos. u - z)}{1 - 2z\, cos. u + zz} = -l\, 2\, \text{sin.} \tfrac{1}{2} u = \Delta : u$

II. $\int \frac{dz\, sin. u}{1 - 2z\, cos. u + zz} lz = \int du\, \Delta u = \Delta' : u$

III. $-\int \frac{dz (cos. u - z)}{1 - 2z\, cos. u + zz} \frac{(lz)^2}{2} = -\int du\, \Delta' u = \Delta'' : u$

IV. $\int \frac{dz\, sin. u}{1 - 2z\, cos. u + zz} \frac{(lz)^3}{6} = \int du\, \Delta'' u = \Delta''' u$

V. $-\int \frac{dz (cos. u - z)}{1 - 2z\, cos. u + zz} \frac{(lz)^4}{24} = -\int du\, \Delta''' u = \Delta^{IV} u$

VI. $\int \frac{dz\, sin. u}{1 - 2z\, cos. u + zz} \frac{(lz)^6}{120} = \int du\, \Delta^{IV} u = \Delta^{V} u$

etc. etc. etc. etc.

Has autem expressiones facile quousque libuerit continuare licet, si modo integratio cuiusque integralis

rite

rite instituatur; conditiones autem, quas impleri oportet, sequenti modo referri possunt

$\Delta' : 0 = 0$	$3\Delta'' : 0 + 4\Delta'' : \pi = 0$
$\Delta''' : 0 = 0$	$15\Delta^{IV} : + 16\Delta^{IV} : \pi = 0$
$\Delta^{V} : 0 = 0$	$63\Delta^{VI} : 0 + 64\Delta^{VI} : \pi = 0$
$\Delta^{VII} : 0 = 0$	$255\Delta^{VIII} : 0 + 255\Delta^{VIII} : \pi = 0$
etc. etc.	etc. etc.

caeterum quia posteriores integrationes absoluere non licet, hinc parum vtilitatis exspectare possumus.

§. 56. Caeterum methodus, qua hic sumus vsi, ad constantes per quamque integrationem ingressas determinandas, a celeberrimo *Bernoullio* primum est adhibita atque eo maiori attentione digna est aestimanda, quod eius ope summationes meae serierum reciprocarum potestatum obtineri possunt, quandoquidem credideram, eas non aliter nisi ex consideratione infinitorum arcuum qui vel eodem sinu vel cosinu gaudent, demonstrari posse.

DE-

DEMONSTRATIO THEOREMATIS NEVTONIANI DE EVOLVTIONE POTESTATVM BINOMII PRO CASIBVS QVIBVS EXPONENTES NON SVNT NVMERI INTEGRI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Theorema hoc, ita repraesentari solitum

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}.a^{n-1}b + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 \text{ etc.}$$

quatenus latissime patere; et sub exponente n, omnes plane numeros possibiles complecti censetur, fundamentum constituit vniuersae analyseos sublimioris; vnde eius veritatem solidissime demonstrari necesse est. Modus autem, quo ad hoc theorema est perventum, dum quantitas $a+b$ aliquoties in se invicem multiplicari solet, ita est comparatus, vt pro exponente n alii numeri non prodeant, nisi qui sint integri positiui, siquidem continuo multiplicando per eandem quantitatem $a+b$ aliae potestates oriri nequeunt, nisi quarum exponentes indicent factorum numerum, qui non numerus integer omnino esse nequit. Interim tamen vix quisquam dubitasse videtur,

detur, quin, ſi haec formula vera fuerit pro omnibus numeris integris loco n aſſumtis, eadem quoque vera ſit futura pro omnibus plane numeris ſiue fractis, ſiue adeo irrationalibus; quae concluſio quanquam hoc caſu locum habet, id tamen ob alias rationes vſu venit, quandoquidem eiusmodi caſus exhiberi poſſunt, quibus formula quaepiam vera deprehenditur, quoties exponens n fuerit numerus integer poſitiuus, eadem autem neutiquam locum habere poſſit, ſimulac eidem exponenti valores fracti tribuantur.

§. 2. Quo hoc exemplo illuſtremus, propoſita ſit ſequens ſeries

$$\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2})}{1-a^3}$$
$$+\frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2}).(1-a^{n-3})}{1-a^4}+\text{etc.}$$

cuius valor quoties exponens n fuerit numerus integer poſitiuus, ſemper huic ipſi exponenti n aequalis deprehenditur, neque tamen hinc concludere licet, hanc aequalitatem ſubſiſtere, dum pro n alii numeri accipiuntur; haec autem proprietas locum quoque habet ſumendo $n=0$, tum enim ob $a^n=1$ ſtatim primus terminus euaneſcit, vna cum omnibus ſequentibus, quippe qui factorem habent $1-a^n=0$ ita vt hoc caſu noſtra ſeries fiat $=0$, hoc eſt ipſi exponenti $n=0$ aequalis; tum vero ſumto $n=1$ primus terminus fit $\frac{1-a}{1-a}=1$ at ſecundus terminus ob $1-a^{n-1}=0$ euaneſcit vna cum omnibus ſequentibus

tibus, ita vt hoc casu $n = 1$ ipsa series fiat $= 1$. Consideremus adhuc casum $n = 2$, quo primus terminus fit $\frac{1-a^2}{1-a} = 1 + a$, at secundus terminus praebet $\frac{(1-a^2).(1-a)}{1-a^2} = 1 - a$, tertius vero cum omnibus sequentibus, ob factorem $1 - a^{n-2} = 0$ euanescet, ex quo summa nostra seriei erit $= 2$ hoc est ipsi n aequalis. Statuamus adhuc $n = 3$ et primus terminus dabit $\frac{1-a^3}{1-a} = 1 + a + a^2$ secundus vero terminus praebet

$$\frac{(1-a^3).(1-a^2).(1-a)}{1-a^3} = 1 - a - aa + a^3,$$

quartus autem terminus et sequentes omnes quia continent factorem $1 - a^{n-3} = 0$ euanescunt, vnde nostra series hoc casu $n = 3$ euadit $= 3$. Similique modo ostendi potest, quicunque numerus integer loco n accipiatur, seriem nostram eidem numero aequalem esse prodituram; quilibet autem facile perspiciet, si caperetur $n = \frac{1}{2}$ hanc seriem maxime esse discrepaturam a valore $\frac{1}{2}$.

§. 3. Cum igitur de hac formula

$$n = \frac{1-a^n}{1-a} + \frac{(1-a^n).(1-a^{n-1})}{1-a^2} + \frac{(1-a^n).(1-a^{n-1}).(1-a^{n-2})}{1-a^3} + \text{etc.}$$

affirmare liceat, eam semper veram esse, quoties n fuerit numerus integer positiuus; neque vero haec aequalitas pro aliis numeris locum habeat, merito quoque dubitare licebit, an nostrum theorema

$$(a+b)^n = a^n + \tfrac{n}{1}.\, a^{n-1} b + \tfrac{n}{1}.\, \tfrac{n-1}{2}.\, a^{n-2} b^2 + \tfrac{n}{1}.\, \tfrac{n-1}{2}.\, \tfrac{n-2}{3}.\, a^{n-3} b^3 \text{ etc.}$$

 gene-

generaliſſime veritati ſit conſentaneum, etiamſi certiſſimus, id verum eſſe, quoties exponens n fuerit numerus integer poſitiuus. Quamobrem eo magis vtique neceſſe eſt, vt iſta veritas rigoroſa demonſtratione corroboretur. Equidem olim demonſtrationem ex analyſi infinitorum petitam tradideram; ſed quia ipſa haec analyſis noſtro theoremate innititur, eam tanquam petitionem principii penitus reiiciendam nunc agnoſco; ab hoc vitio autem immunem demonſtrationem dedit Illuſtr. Academiae noſtrae Socius *Aepinus* in Tomo VIII. Nouor. Commentar., vbi pro formula $(x+1)^n$ aſſumens ſeriem generalem:

$$A x^n + B x^{n-1} + C x^{n-2} + \text{etc.}$$

methodo maxime ingenioſa elicuit valores aliquot coefficientium A, B, C, D etc. et ex eorum conſenſu cum ſerie *Neutoniana*, ſine dubio rite concludere potuit, etiam reliquos omnes regulae fore conformes; interim tamen egregia iſta demonſtratio plurimum inductione innititur, praeterea vero etiam notari conuenit ſecundum coefficientem B ex hac methodo determinationem non accepiſſe, ſed ex aliis conditionibus haud parum abſconditis et abſtruſis repetiiſſe. Vnde meam demonſtrationem Geometris eo gratiorem fore confido, quod in ea nihil plane inductioni tribuitur.

§. 4. Ante omnia autem cum ſit $a+b=a(1+\frac{b}{a})$ eritque quoque $(a+b)^n=a^n(1+\frac{b}{a})^n$ ſicque totum negotium reducitur ad euolutionem huius poteſtatis

$(1+\frac{b}{a})$

$(1+\frac{b}{a})^n$, quae porro ponendo $\frac{b}{a}=x$ redit ad hanc $(1+x)^n$, quam nouimus, quoties exponens n fuerit numerus integer positiuus, aequalem fore huic seriei

$$1+\frac{n}{1}.x+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.x^2+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.x^3+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3}.\frac{n-3}{4}.x^4 \text{ etc.}$$

verum si n non fuerit numerus integer positiuus, valorem huius seriei tanquam incognitum spectemus, eiusque loco hoc signo $[n]$ vtamur, ita vt iam in genere habeamus

$$[n]=1+\frac{n}{1}.x+\frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}.x^2 \text{ etc.}$$

de qua etiam nunc plus non nouimus, quam casu, quo n est numerus integer positiuus, fore $[n]=(1+x)^n$ reliquis autem casibus quinam valores huic signo $[n]$ conueniant, sequenti modo inuestigemus: Vnde demum patebit, etiam in genere fore $[n]=(1+x)^n$ quicunque numeri pro exponente n accipiantur, quo pacto proposito nostro plene satisfecerimus.

§. 5. Ad hanc inuestigationem instituendam duas huiusmodi series seu duo talia signa $[n]$ et $[m]$ in se inuicem multiplicemus vt seriem obtineamus huic producto $[m].[n]$ aequalem, quam facile patet huiusmodi forma expressum iri:

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5 \text{ etc.}$$

cuius coefficientes A, B, C, D, E etc. quemadmodum per binas literas m et n determinentur vt pateat; ipsam multiplicationem saltem inchoemus

$$[m] = 1 + \tfrac{m}{1}.\,x + \tfrac{m}{1}.\,\tfrac{m-1}{2}.\,x^2 + \text{etc.}$$

$$[n] = 1 + \tfrac{n}{1}.\,x + \tfrac{n}{1}.\,\tfrac{n-1}{2}.\,x^2 + \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l} [m].[n] = 1 + \tfrac{m}{1}.\,x + \tfrac{m}{1}.\,\tfrac{m-1}{2}.\,xx \text{ etc.} \\ \hline \qquad\qquad + \tfrac{n}{1}.\,x + \tfrac{m}{1}.\,\tfrac{n}{1}.\,xx \text{ etc.} \\ \qquad\qquad\qquad\quad + \tfrac{n}{1}.\,\tfrac{n-1}{2}.\,xx \text{ etc.} \end{array}$$

Quod si iam hoc productum inchoatum cum forma assumta

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 \text{ etc.}$$

qua idem productum exprimi ponimus, comparemus, statim intelligitur, fore

$A = m + n$ et $B = \frac{m}{1}.\frac{m-1}{2} + \frac{m}{1}.\frac{n}{1} + \frac{n}{1}.\frac{n-1}{2}$ siue

$B = \frac{mm - m}{2} + mn + \frac{nn - n}{2}$ vnde fit

$B = \frac{m+n}{1}.\frac{m+n-1}{2}.$

§. 6. Quemadmodum hic duos primos coefficientes A et B, per literas m et n determinare licuit, ita manifestum est, si superior multiplicatio vlterius continuaretur, inde etiam sequentes coefficientes C, D, E etc. per easdem literas m et n definiri posse, quamuis calculus mox ita fieret molestus, vt maximum laborem requireret. Interim tamen hinc tuto concludere possumus omnes plane coefficientes A, B, C, D, E etc.; certo modo per binas literas m et n determinari debere; etiamsi ipsam rationem, qua quisque per has literas definitur, ad huc ignoremus, hic autem imprimis obseruari conuenit, hanc compositionis rationem non ab indole literaterarum m et n pendere; ſed perinde ſe eſſe habituram, ſiue hae literae m et n denotent numeros integros ſiue alios numeros quoscunque. Hoc ratiocinium non vulgare probe notetur, quoniam ei tota vis noſtrae demonſtrationis innititur.

§. 7. Hinc facilis nobis via aperitur, veros valores omnium coefficientium A, B, C, D, E etc. inueniendi, dum ſcilicet literas m et n tanquam numeros integros ſpectamus, quandoquidem hinc eaedem determinationes oriuntur ac ſi quoscunque alios numeros denotarent. Spectatis autem literis m et n vt numeris integris vtique habebimus $[m] = (1+x)^m$ et $[n] = (1+x)^n$, vnde harum formularum productum erit $[m].[n] = (1+x)^{m+n}$ iam vero haec poteſtas euoluitur in hanc ſeriem:

$$1 + \frac{m+n}{1}.x + \frac{m+n}{1}.\frac{m+n-1}{2}.x^2 + \frac{m+n}{1}.\frac{m+n-1}{2}.\frac{m+n-2}{3}.x^3$$

nunc igitur ſi literas m et n in genere ſpectemus hanc ſeriem iſto ſigno $[m+n]$ indicari oportet, vnde hanc inſignem veritatem nanciſcimur, ſemper eſſe $[m].[n] = [m+n]$ quicunque etiam numeri loco iſtarum literarum adhibeantur.

§. 8. Cum igitur binae huiusmodi formulae $[m]$ et $[n]$ in ſe inuicem ductae praebeant ſimplicem formulam eiusdem indolis, ita etiam plures eiusmodi formulae in ſe inuicem ductae ad ſimplicem reuocabuntur, habebimus ſcilicet ſequentes reductiones

$$[m].[n] = [m+n]$$
$$[m].[n].[p] = [m+n+p]$$
$$[m].[n].[p].[q] = [m+n+p+q] \text{ etc.}$$

 hinc

hinc ſi omnes iſti numeri m, n, p, q etc. inter ſe capiantur aequales ſcilicet $= m$ obtinebimus ſequentes reductiones poteſtatum

$$[m]^2 = [2m];\ [m]^3 = [3m];\ [m]^4 = [4m];\ \text{etc.}$$

vnde generaliter erit $[m]^a = [am]$; denotante a numerum quemcunque integrum.

§. 9. His praenotatis denotet litera i numerum quemcunque integrum poſitiuum ac ſtatuamus primo $2m = i$ vt ſit $m = \frac{i}{2}$ ac poſtremarum formularum prima dabit $[\frac{i}{2}]^2 = [i]$ quia autem i eſt numerus integer, erit $[i] = (1 + x)^i$ (vide §. 4.) ſicque erit $[\frac{i}{2}]^2 = (1 + x)^i$ vnde radicem quadratam extrahendo ſit $[\frac{i}{2}] = (1 + x)^{\frac{i}{2}}$ ſicque iam tantum ſumus conſecuti, vt theorema Neutonianum etiam verum ſit caſibus, quibus exponens n eſt huiusmodi fractio $\frac{i}{2}$.

§. 10. Simili modo ſi ponamus $3m = i$ vt ſit $m = \frac{i}{3}$, altera formularum ſuperiorum praebet $[\frac{i}{3}]^3 = [i] = (1 + x)^i$ hinc radicem extrahendo nanciſcimur $[\frac{i}{3}] = (1 + x)^{\frac{i}{3}}$ ſicque theorema noſtrum etiam verum eſt ſi exponens n fuerit huiusmodi fractio $\frac{i}{3}$, atque hinc in genere manifeſtum fore $[\frac{i}{a}] = [1 + x]^{\frac{i}{a}}$ ita vt iam demonſtratum ſit, theorema noſtrum verum eſſe, ſi pro exponente n fractio quaecunque $\frac{i}{a}$ accipiatur, vnde veritas iam eſt euicta pro omnibus numeris poſitiuis loco exponentis n accipiendis.

§. 11. Supereſt igitur tantum, vt veritas quoque oſtendatur pro caſibus, quibus exponens n eſt numerus negatiuus. Hunc in finem in ſubſidium vocemus reductionem primo inuentam $[m].[n]=[m+n]$ vbi denotet m, numerum poſitiuum ſiue integrum ſiue fractum ita vt ſit vti modo oſtendimus $[m]=(1+x)^m$, deinde vero ſtatuatur $n=-m$ eritque $m+n=0$ ideoque $[0]=(1+x)^0=1$, quibus ſubſtitutis formula ſuperior ſuppeditat $(1+x)^m$. $[-m]=1$ vnde colligimus $[-m]=\frac{1}{(1+x)^m}=(1+x)^{-m}$ ſicque etiam demonſtratum eſt theorema Neutonianum verum quoque eſſe, ſi exponens n fuerit numerus negatiuus quicunque atque adeo hoc theorema nunc quidem firmiſſimis rationibus eſt confirmatum.

PROBLE-

PROBLEMA DIOPHANTAEVM SINGVLARE.

Auctore

L. EVLERO.

Problema.

Inuenire duos numeros, quorum productum vtrouis siue auctum siue minutum fiat quadratum.

Solutio.

§. 1. Cum ambo numeri quaesiti necessario sint fracti, ponatur vna $\frac{x}{z}$ et altera $\frac{y}{z}$ et conditiones Problematis postulant, vt sit

$$1^\circ.\ \frac{xy}{zz} \pm \frac{x}{z} = \square.\quad 2^\circ.\ \frac{xy}{zz} \pm \frac{y}{z} = \square$$

quae ergo formulae etiam per zz multiplicatae debent esse quadrata; vnde hae conditiones suut adimplendae

$$1^\circ.\ xy \pm xz = \square$$

$$2^\circ.\ xy \pm yz = \square.$$

§. 2. Cum iam sit $aa + bb \pm 2ab = \square$ ex hoc fonte solutionem peti conueniet, quia autem duae huiusmodi conditiones proponuntur, ponamus duplici modo esse tam $xy = aa + bb$ quam $xy = cc + dd$, ita

ita vt ſit $aa+bb=cc+dd$, id quod infinitis modis euenire poteſt, vnde pro priore conditione faciamus $xz=2ab$ et $yz=2cd$, quo pacto ambae conditiones adimplentur, quare cum inde habeamus

$$x=\frac{2ab}{z} \quad \text{et} \quad y=\frac{2cd}{z}$$

erit nunc

$$xy=\frac{4abcd}{zz}=aa+bb=cc+dd,$$

vnde deducimus

$$zz=\frac{4abcd}{aa+bb} \text{ ſiue } \frac{zz}{4}=\frac{abcd}{aa+bb}$$

ita vt haec formula $\frac{abcd}{aa+bb}$ reddi debeat quadratum, praeterea vero etiam neceſſe eſt vt ſit

$$cc+dd=aa+bb.$$

§. 3. Incipiamus ab hac poſtrema conditione, ac denotent literae m et n eiusmodi numeros, vt ſit $mm+nn=1$, id quod facile praeſtatur, ac capiatur

$$c=ma+nb \text{ et } d=na-mb$$

tum enim erit

$$cc+dd=(aa+bb)(mm+nn)=aa+bb$$

hinc igitur altera conditio poſtulat vt ſit

$$\frac{zz}{4}=\frac{ab((ma+nb)(na-mb))}{aa+bb}=\square$$

vel etiam

$$\frac{zz}{4}=\frac{ab(am+bn)(bm-an)}{aa+bb}$$

quandoquidem poſtremus factor $bm-an$ idem dat quadratum ac praecedens $(na-mb)$.

§. 4. Notum autem eſt literis m et n hos valores tribui debere

$$m = \frac{pp - qq}{pp + qq} \text{ et } n = \frac{2pq}{pp + qq}$$

tum enim fit $mm + nn = 1$, hinc autem erit

$$am + bn = \frac{a(pp - qq) + 2bpq}{pp + qq} \text{ et } bm - an = \frac{b(pp - qq) - 2apq}{pp + qq},$$

quae formulae in ſe inuicem multiplicatae praebent:

$$ab(pp - qq)^2 + \frac{2(bb - aa)pq(pp - qq)}{(pp + pp)^2} - \frac{4abppqq}{(pp + qq)^2}$$

cuius fractionis numeratorem breuitatis gratia deſignemus litera S, ita vt ſit

$$S = abp^4 + 2(bb - aa)p^3q - 6abppqq - 2(bb - aa)pq^3 + abq^4$$

quo valore notato erit

$$\frac{zz}{4} = \frac{abS}{(aa + bb)(pp + qq)^2} \text{ ſiue}$$

$$\tfrac{1}{4}(aa + bb)(pp + qq)^2 zz = abS.$$

§. 5. Hinc igitur facta ſubſtitutione erit

$$abS = aabbp^4 - 2ab(aa - bb)p^3q - 6aabbppqq$$
$$+ 2ab(aa - bb)pq^3 + aabbq^4$$

quae formula, cum tam primum quam poſtremum membrum ſint quadrata, commode ad quadratum reduci poterit, ita vt litteris a et b pro lubitu aſſumtis valores idonei pro p et q erui poſſint, tum vero vt etiam formula

$$\tfrac{1}{4}(aa + bb)(pp + qq)^2 zz$$

fiat quadratum: neceſſe eſt litteras a et b ita aſſumi vt $aa + bb$ fiat quadratum, quo facto radicem quadratam extrahendo habebitur:

$$\tfrac{1}{2}(pp + qq)z\sqrt{aa + bb} = \sqrt{abS}.$$

§. 6.

§. 6. Statuamus igitur ſecundum praecepta cognita

$$V\,abS = abpp - (aa - bb)pq + abqq$$

tum autem erit

$$abS = aabbp^4 - 2ab(aa-bb)p^3q + 2aabbppqq - 2ab(aa-bb)pq^3 + aabbq^4 + (aa-bb)^2ppqq$$

quod quadratum ſi cum formula ſuperiori comparetur, membra prima, ſecunda et vltima ſe mutuo tollunt, reliqua vero per pqq diuiſa hanc ſuppeditant aequationem

$$-6aabbp + 2ab(aa-bb)q = 2aabbp - 2ab(aa-bb)q + (aa-bb)^2p$$

quae reducitur ad hanc formam

$$4ab(aa-bb)q = (a^4 + 6aabb + b^4)p$$

vnde concluditur $\frac{q}{p} = \frac{a^4 + 6aabb + b^4}{4ab(aa-bb)}$ quae fractio ſi deprimi nequeat, quod quidem nunquam euenire poteſt, ponatur

$$p = 4ab(aa-bb) \text{ et } q = a^4 + 6aabb + b^4.$$

§. 7. Sumtis igitur numeris a et b ita vt $aa+bb$ fiat quadratum, hae formulae nobis praebent idoneos valores pro literis p et q, quibus inventis erit

$$\tfrac{1}{2}(pp+qq)z\sqrt{aa+bb} = V\,abS = abpp - (aa-bb)pq + abqq$$

hincque

$$z = \frac{2V\,abS}{(pp+qq)\sqrt{aa+bb}}$$

tum vero ipſi numeri quaeſiti erunt

$$\frac{x}{z} = \frac{2ab}{zz} \text{ et } \frac{y}{z} = \frac{2cd}{zz} = \frac{2(ma+nb)(na-mb)}{zz}$$

 vbi

vbi litteris m et n hi tributi sunt valores

$$m = \frac{pp - qq}{pp + qq} \quad \text{et} \quad n = \frac{2pq}{pp + qq}:$$

hic perinde est siue valor posterior prodeat negatiuus siue positiuus, semper enim positiuus locum habebit valor, quandoquidem terminus yz producto xy tam addi quam subtrahi debet.

§. 8. Quia $aa + bb$ debet esse quadratum, casus simplicissimus quo hoc contingit est $a = 4$ et $b = 3$, tum enim erit

$$\sqrt{aa + bb} = 5,\ ab = 12 \ \text{et} \ aa - bb) = 7,$$

ex his igitur porro deducimus

$p = 336$, $q = 1201$, deinde $VabS = 12(pp + qq) - 7pq$, hincque

$$z = \frac{24(pp + qq) - 14pq}{5(pp + qq)} = \frac{24}{5} - \frac{14pq}{5(pp + qq)}$$

denique vero pro y inueniendo erit

$$(ma + nb) = \frac{4(pp - qq) + 6pq}{pp + qq} \ \text{et} \ (mb - na) = \frac{3(pp - qq) - 8pq}{pp + qq},$$

quibus valoribus substitutis erit

$$\frac{x}{z} = \frac{24}{zz} \ \text{et} \ \frac{y}{z} = \frac{2(4m + 3n)(4n - 3m)}{zz}$$

pro his formulis autem euoluendis notetur esse:

$$pp = 112896,\ qq = 1442401,\ pq = 403536$$

vnde elicitur

$$pp + qq = 1555297,\ \frac{5z}{2} = \frac{15838812}{1555297} \ \text{hinc} \ z = \frac{2.15838812}{5.1555297}$$

porro $m = -\frac{1329505}{1555297}$, $n = \frac{807072}{1555297}$ vnde fit $4m + 3n = -\frac{2896804}{1555297}$ et $4n - 3m = \frac{7217803}{1555297}$ hinc ergo colligimus $\frac{x}{z} = \frac{6.25(1555297)^2}{(15838812)^2}$ et $\frac{y}{z} = \frac{2896804.25.7217803}{2.15838812^2}$.

§. 9.

§. 9. Cum hi numeri ſint tam immenſi; accuratius inquiramus, an non ſolutionem in numeris minoribus eruere liceat, et quo calculum paulisper contrahamus, incipiamus ab aequatione

$$\frac{zz}{4} = \frac{ab(am+bn)(bm-an)}{aa+bb}, \text{ vbi eſt}$$

$$m = \frac{pp-qq}{pp+qq} \text{ et } n = \frac{2pq}{pp+qq}$$

haecque formula quadratum efficienda tam negatiue quam poſitiue accipi poteſt; ſtatuamus iam $a = nb$ et $p = qr$ vt primo ſit

$$m = \frac{rr-1}{rr+1} \quad \text{et } n = \frac{2r}{rr+1},$$

tum vero haec formula ad quadratum reduci debeat

$$\tfrac{1}{4}zz \pm \frac{nbb((n(rr-1)+2r)(rr-1-2nr))}{(nn+1)(rr+1)^2} \text{ ſiue } \frac{zz(rr+1)^2}{4bb}$$

$$= \pm \frac{n((n(rr-1)+2r)(rr-1-2nr)}{nn+1} = \square,$$

hic autem primo obſeruamus caſu $r = 1$ hanc formulam euadere $= -\frac{4nn}{nn+1}$, ſiue etiam $+\frac{4nn}{nn+1}$ quae ergo erit quadratum dummodo $nn+1$ fuerit quadratum, praeterea vero notaſſe iuuabit, ſumto $r = n$ hanc formulam fieri

$$= -nn(nn+1)$$

cuius negatiuum iterum ſit quadratum, ſi modo $nn+1$ ſit quadratum, cum igitur duos iam habeamus caſus, quibus haec formula ſit quadratum, ex iis alios caſus ſecundum praecepta cognita eliciamus.

Euolutio prima.

§. 10. Cum vtroque caſu $nn+1$ debeat eſſe quadratum ponamus:

$$\frac{zz(rr+1)^2(nn+1)}{4bb} = TT \text{ vt ſit}$$

$$TT = n((2r + n(rr-1)(2nr-(rr-1))$$

quae formula quia euadit quadratum posito $r=1$, statuamus

$r = 1+v$ eritque $rr-1 = 2v+vv$ vnde oritur

$$TT = n((2+2(n+1)v+nvv)(2n(n-1)v-vv))$$

quae formula euoluta praebet

$$TT = 4nn+4n(nn+2n-1)v+4n(nn-1)vv+2n(nn-2n-1)v^3-nnv^4$$

statuatur ergo

$$T = 2n+(nn+2n-1)v+fvv, \text{ ideoque}$$

$$TT = 4nn+4n(nn+2n-1)v+(nn+2n^2-1)^2vv+2f(nn+2n-1)v^3$$
$$+ffv^4 \qquad\qquad +4nfvv$$

vbi duo membra priora mutuo se tollunt, capiamus igitur f ita, vt etiam tertia membra se destruant, vnde fieri debet

$$4n(nn-1) = (nn+2n-1)^2+4nf \text{ siue}$$

$$-n^4-2nn-1 = -(nn+1)^2 = 4nf \text{ ideoque}$$

$$f = -\frac{(nn+1)^2}{4n};$$

iam cognito valore f reliqua membra per v^3 diuisa dant

$$2n(nn-2n-1)-nnv = 2f(nn+2n-1) = ffv$$

vnde colligitur

$$v = \frac{2n(nn-2n-1)-2f(nn+2n-1)}{ff+nn}$$

hinc autem valor ipsius v multo magis fieret complicatus, quia in hac formula numerus n ad octauam potestatem exsurgit.

Euolu-

Euolutio ſecunda.

§. 11. Ponamus nunc $r = n + v$, eritque

$$TT = n((n(nn+1) + 2(nn+1)v + nvv)(nn+1-vv),$$

ideoque euoluendo

$$TT = nn(nn+1)^2 + 2n(nn+1)^2 v - 2n(nn+1)v^3 - nnv^4.$$

Ponatur igitur

$$T = n(nn+1) + (nn+1)v + fv^2,$$

cuius quadratum dat

$$TT = nn(nn+1)^2 + 2n(nn+1)^2 v + 2n(nn+1)fvv + 2(nn+1)fv^3 + ffv^4$$
$$+ (nn+1)^2 vv$$

vbi duo membra priora iam ſe deſtruunt, vt igitur etiam termini vv ſe deſtruant ſumi debet $f = -\frac{(nn+1)}{2n}$, tum vero bina membra poſteriora per v^3 diuiſa praebent

$-2n(nn+1) - nnv = 2(nn+1)f + ffv$ vnde fit

$$v = -\frac{2n(nn+1) - 2(nn+1)f}{ff+nn}$$

quae formula loco f valorem ſubſtituendo praebet:

$$v = \frac{-4n(nn+1)(n-1)}{5n^4+2nn+1}$$

vnde fit

$r = \frac{n(n^4+2nn+5)}{5n^4+2nn+1} = \frac{p}{q}$ hinc cum ſit $n = \frac{a}{b}$ erit

$p = a^4 + 2aabb + 5b^4$ et $q = 5a^4 + 2aabb + b^4$.

§. 12. Quod ſi ergo hic vt ſupra ſumatur $a = 4$ et $b = 3$, reperietur

$p = 949 = 13 \cdot 73$ et $q = 1649 = 97 \cdot 17$

qui numeri cum ſint maiores iis, quos ſupra inue-

nimus

nimus, videntur maiores numeros quaesitos producere; quia autem vterque est impar, reductio quaepiam locum inueniet: interim tamen ad numeros minores non peruenitur.

§. 13. Si formulae hic pro TT inuentae signa inuertamus vt prodeat:

$$TT = nnv^4 + 2n(nn+1)v^3 - 2n(nn+1)^2 v - nn(nn+1)^2$$

ac ponamus

$$T = nvv + (nn+1)v + f,$$

erit sumto quadrato

$$TT = nnv^4 + 2n(nn+1)v^3 + 2nfvv + 2(nn+1)fv + ff \\ + (nn+1)^2 vv$$

vbi prima et secunda membra se destruunt, ac pro tertiis fiat $f = -\frac{(nn+1)^2}{2n}$, iam inuento hoc valore fiat etiam

$$v = \frac{ff + nn(nn+1)^2}{-2n(nn+1)^2 - 2f(nn+1)}$$

et substituto pro f valor inuentus $-\frac{(nn+1)^2}{2n}$ reperitur $v = \frac{5n^4 + 2nn + 1}{4n(1-nn)}$, hincque porro

$r = \frac{n^4 + 6nn + 1}{4n(1-nn)} = \frac{p}{q}$, quia igitur $n = \frac{a}{b}$ erit

$\frac{p}{q} = \frac{a^4 + 6aabb + b^4}{4ab(bb-aa)}$.

Quae solutio eosdem praebet valores, quos per primam euolutionem eruimus, ex quo concludi posse videtur, simpliciores solutiones huius Problematis vix expectari posse.

§. 14. Imprimis autem hic casus omni attentione dignus occurrit, quo $v=0$, vbi formula TT sponte fit quadratum, scilicet $nn(nn+1)^2$ ita vt hoc casu prodeat

$$\frac{zz(rr+1)^2(nn+1)}{4bb}=nn(nn+1)^2$$

seu radice quadrata extracta

$$\frac{z(rr+1)\sqrt{nn+1}}{2b}=n(nn+1);$$

cum autem sit $v=0$, ob $r=n+v$ erit $r=n$ vnde colligitur

$$z=\frac{2bn(nn+1)}{(nn+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2bn}{\sqrt{nn+1}}=\frac{2ab}{\sqrt{aa+bb}},$$

porro ob $r=n=\frac{a}{b}$ erit $p=a$ et $q=b$, $c=ma+nb$ et $d=na-mb$ existente

$$m=\frac{aa-bb}{aa+bb} \quad \text{et} \quad n=\frac{2ab}{aa+bb}$$

quocirca erit $c=a$ et $d=b$, vnde bini numeri quaesiti erunt,

vnus $=\frac{x}{z}=\frac{2ab}{zz}=\frac{aa+bb}{2ab}$; alter $\frac{y}{z}=\frac{2cd}{zz}=\frac{aa+bb}{2ab}$,

ita vt ambo nostri numeri sint inter se aequales, meminisse autem oportet formulam $aa+bb$ quadratum esse debere.

§. 15. Quanquam autem haec solutio satis est simplex, tamen indoli quaestionis propositae minus satisfacere est censenda, propterea quod duos numeros aequales exhibet, cum nostrum Problema manifesto duos numeros inaequales postulet, interim tamen deducimur ad solutionem huius quaestionis: *Invenire*

venire numerum quadratum, qui radice sua siue auctus siue minutus producat quadratum.

Quod si ergo radix huius quadrati vocetur $= z$, erit vti modo inuenimus $z = \frac{aa+bb}{2ab}$, dummodo $aa+bb$ fuerit quadratum, capiatur ergo $a = pp-qq$ et $b = 2pq$, vt fiat $aa+bb = (pp+qq)^2$, hincque solutio nostra praebet $z = \frac{(pp+qq)^2}{4pq(pp-qq)}$, vnde pro z sequentes valores simpliciores eruuntur

I°. $\frac{25}{24}$, II°. $\frac{169}{120}$, III°. $\frac{289}{240}$, IV°. $\frac{625}{336}$, V°. $\frac{841}{840}$, VI°. $\frac{1681}{720}$ etc.

§. 16. Etsi autem hic casus parum ad propositum nostrum conferre videtur, tamen eius consideratio attenta mox eiusmodi binos numeros suppeditauit ipsi Problemati proposito satisfacientes, cuiusmodi sunt hi duo numeri

$$A = \frac{841}{840} \quad \text{et} \quad B = \frac{1369}{840}$$

tum enim erit

$$AB \pm A = A(B \pm 1), \text{ vbi}$$

$$B + 1 = \frac{2209}{840} = \frac{47^2}{840} \quad \text{et} \quad B - 1 = \frac{529}{840} = \frac{23^2}{840}$$

vterque autem valor in $A = \frac{29^2}{840}$ ductus manifesto praebet quadrata: Eodem modo reliquae conditiones $AB \pm B = B(A \pm 1)$ ob $A + 1 = \frac{1681}{840} = \frac{41^2}{840}$ et $A - 1 = \frac{1}{840}$ vtraque in $B = \frac{37^2}{840}$ ducta pariter quadrata exhibent.

§. 17. Nunc igitur multo magis mirari oportet, cur istam solutionem satis simplicem ex analysi supra allata nullo modo elicere licuerit, quin etiam hi duo numeri nequidem in formulis nostris supra vsurpatis scilicet $\frac{x}{z} = \frac{2ab}{zz}$ et $\frac{y}{z} = \frac{2cd}{zz}$ contineri videntur, cum nostri numeratores in

factores

factores resolui nequeant, denominatores autem non sint quadrata, hac autem circumstantia probe perpensa, facile agnoscimus, solutionem problematis nostri longe alio modo esse aggrediendam, vt huiusmodi solutiones simpliciores eliciamus, atque hinc clare perspicimus, quanti sit momenti huiusmodi Problemata idoneo modo ad calculum reuocare, hancque ob rem sequentem solutionem satis planam hic subiungamus.

Solutio plana Problematis propositi.

§. 18. Denotent litterae A et B binos numeros quaesitos, ita vt hae formulae

$$AB \pm A = A(B \pm 1) \text{ et } AB \pm B = B(A \pm 1)$$

debeant esse quadrata; hunc in finem tribuamus his numeris sequentes formas

$$A = \frac{aa + bb}{2ab} \text{ et } B = \frac{cc + dd}{2cd},$$

sic enim prodibit

$$A \pm 1 = \frac{(a \pm b)^2}{2ab} \text{ et } B \pm 1 = \frac{(c \pm d)^2}{2cd}$$

quare vt ambae illae formulae fiant quadrata, pro priore necesse est, vt sit $\frac{cc + dd}{4abcd}$ quadratum, pro altera autem, vt haec forma $\frac{aa + bb}{4abcd}$ sit quadratum.

§. 19. Quo igitur his conditionibus satisfaciamus, statuamus tam

$$aa + bb = \square \text{ et } cc + dd = \square,$$

tum vero necesse est vt etiam productum $abcd$

 fiat

fiat quadratum, quae quidem positio iam est limitata, dum istis conditionibus etiam aliis modis satisfieri posset, at vero simplicissimas solutiones suppeditare videtur: Hunc igitur in finem ponamus

$$a=pp-qq,\ b=2pq,\ c=rr-ss \text{ et } d=2rs$$

vt fiat

$$aa+bb=(pp+qq)^2 \text{ et } cc+dd=(rr+ss)^2$$

ita vt sit

$$A=\frac{(pp+qq)^2}{4pq(pp-qq)} \text{ et } B=\frac{(rr+ss)^2}{4rs(rr-ss)}$$

tum vero superest vt

$$abcd=2pq(pp-qq).\ 2rs(rr-ss),$$

siue haec formula

$$pq(pp-qq).\ rs(rr-ss)$$

fiat quadratum, hic vero casus manifesto ad problema satis notum deducitur, quo duo triangula rectangula in numeris quaeruntur, quorum areae sint inter se aequales; quaeruntur igitur duo numeri, vterque formae $xy(xx-yy)$ quorum productum sit quadratum, vnde in sequenti Tabella simpliciores numeros huius formae exhibeamus per factores expressos, vbi quidem factores quadratos omittamus:

x	y	$xy(x+y)(x-y)$
2	1	2. 3
3	2	2. 3. 5
4	1	3. 5
4	3	3. 7
5	2	2. 3. 5. 7
5	4	5.
6	1	2. 3. 5. 7
6	5	2. 3. 5. 11
7	2	2. 5. 7
7	4	3. 7. 11
7	6	2. 3. 7. 13
8	1	2. 7
8	3	2. 3. 5. 11
8	5	2. 3. 5. 13
8	7	2. 3. 5. 7
9	2	2. 7. 11
9	4	5. 13
10	1	2. 5. 11
10	3	2. 3. 5. 7. 13
11	2	2. 11. 13
11	4	3. 5. 7. 11
11	10	2. 3. 5. 7. 11
12	1	3. 11. 13
13	2	2. 3. 5. 11. 13
13	8	2. 3. 5. 7. 13
13	12	3. 13
14	1	2. 3. 5. 7. 13
14	11	2. 3. 7. 11
14	13	2. 3. 7. 13

§. 20. Haec tabula nobis iam aliquot ſolutiones ſuppeditat, quarum prima et ſimpliciſſima oritur ſumendo $p = 5$, $q = 2$, et $r = 6$, $s = 1$ vnde oritur

$$A = \tfrac{29^2}{840} = \tfrac{841}{840} \quad \text{et} \quad B = \tfrac{37^2}{840} = \tfrac{1369}{840}$$

qui ſunt ipſi numeri ſupra memorati; in noſtra autem tabella occurrunt quoque iſti numeri $x = 8$ et $y = 7$ eosdem factores 2. 3. 5. 7 continentes, hinc igitur formemus numerum

$$C = \frac{(xx + yy)^2}{4xy(xx - yy)} \text{ erit } C = \tfrac{113^2}{3360} \text{ vbi } 3360 = 4.840$$

quemadmodum igitur ambo numeri A et B quaeſito ſatisfecerunt, ita etiam hi duo numeri A et C eodemque modo etiam iſti B et C ſeorſim ſatisfacient.

§. 21. Porro etiam iidem factores 2. 3. 5. 11 reperiuntur caſibus $x = 6$ et $y = 5$ item $x = 8$ et $y = 3$ ſumtis ergo $p = 6$, $q = 5$, $r = 8$ et $s = 3$, naſcuntur iſti numeri ſatisfacientes

$$A = \tfrac{61^2}{1320} \text{ et } B = \tfrac{73^2}{5280} \text{ vbi } 5280 = 4.1320$$

ſimili modo inſuper plures alias ſolutiones ex tabula iſta peti licet.

§. 22. Quo autem plures huiusmodi ſolutiones exhibere queamus, faciamus

$$pq(pp - qq) = rs(rr - ss)$$

quod cum in genere non niſi operoſe effici queat, caſum magis particularem accipiamus et ſtatuamus $r = p$, vt fieri debeat

$$q(pp - qq) = s(pp - ss),$$

vnde

vnde elicimus

$$pp = qq + qs + ss,$$

quare ſtatuamus $p = q + \frac{m}{n} s$, vt fiat

$$q + \frac{2mq}{n} + \frac{mms}{nn} \text{ ſiue } nnq + nns = 2mnq + mms,$$

vnde colligitur $\frac{q}{s} = \frac{mm - nn}{nn - 2mm}$: Sumamus igitur

$$q = mm - nn \text{ et } s = nn - 2mn \text{ eritque}$$

$$p = r = mm - nn + mn - 2mm = -mm - nn + mn,$$

vbi litteras m et n pro lubitu tam negatiuas quàm poſitiuas accipere licet; haec ergo ſolutio ita ſe habebit: Sumto numero n negatiuo habebimus

$p = mm + mn + nn$	$r = mm + mn + nn$
$q = mm - nn$	$s = nn + 2mn$

vnde iam innumerabiles ſolutiones naſcuntur, inde vero habebitur

$$a = pp - qq, \quad b = 2pq, \quad c = rr - ss \text{ et } d = 2rs$$

vnde numeri quaeſiti reperientur

$$A = \frac{(pp + qq)^2}{4pq(pp - qq)} = \frac{aa + bb}{2ab} \text{ et } B = \frac{cc + dd}{2cd} = \frac{(rr + ss)^2}{4rs(rr - ss)}.$$

§. 23. Cum haec ſolutio tantopere diſcrepet a prima, quam dedimus, operae pretium erit inueſtigare, quomodo haec etiam in illa contineatur. Poſueramus autem ipſos numeros quaeſitos $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, tum vero ſtatuimus

$$xy = aa + bb = cc + dd$$

hinc vero deduximus $\frac{zz}{4} = \frac{abcd}{aa + bb}$ ita vt eſſe debeat primo

$$aa + bb = cc + dd, \text{ tum vero } \frac{abcd}{aa + bb} = \square;$$

iam

iam tribuamus tam litteris a et b, quam c et d communem factorem et statuamus $a=fp$ et $b=fq$ tum vero $c=gr$ et $d=gs$, eritque

$$aa+bb=ff(pp+qq) \text{ et } cc+dd=gg(rr+ss),$$

quae formulae cum sibi debeant aequari, fiat

$$pp+qq=gg \text{ et } rr+ss=ff$$

sic enim fiet $xy=ffgg$, praeterea vero esse debebit

$$\tfrac{1}{4}zz=\frac{ffpq.ggrs}{ffgg} \text{ siue } \tfrac{1}{4}zz=pqrs=\Box:$$

Quamobrem statuamus

$$p=\alpha\alpha-\beta\beta,\ q=2\alpha\beta \text{ atque } r=\gamma\gamma-\delta\delta \text{ et } s=2\gamma\delta$$

vt fiat

$$pp+qq=(\alpha\alpha+\beta\beta)^2=gg \text{ et } rr+ss=(\gamma\gamma+\delta\delta)^2=ff$$

vnde erit

$$f=\gamma\gamma+\delta\delta \text{ et } g=\alpha\alpha+\beta\beta$$

et nunc habebitur

$$\tfrac{1}{4}zz=4\alpha\beta(\alpha\alpha-\beta\beta).\gamma\delta(\gamma\gamma-\delta\delta),$$

ita vt hoc productum

$$\alpha\beta(\alpha\alpha-\beta\beta).\gamma\delta(\gamma\gamma-\delta\delta)$$

debeat esse quadratum, quae est eadem formula quam in solutione posteriore quadratum efficere debuimus. Cui conditioni quando erit satisfactum, numeri quaesiti ita se habebunt:

$$\frac{x}{z}=\frac{2ab}{zz}=\frac{aa+bb}{2cd}=\frac{cc+dd}{2cd}$$

$$\frac{y}{z}=\frac{2cd}{zz}=\frac{aa+bb}{2ab}.$$

quae sunt eaedem formulae, quibus solutio posterior est superstructa.

§. 24.

§. 24. Hic etiam generalius potuissemus statuere

$$pp + qq = Ngg \text{ et } rr + ss = Rff$$

vnde fit

$$xy = aa + bb = cc + dd = Nffgg$$

tum vero vt ante debet esse

$$\frac{zz}{4} = \frac{ffgg \cdot pqrs}{Nffgg} = \frac{pqrs}{N}$$

ita vt debeat esse $\frac{pqrs}{N}$ siue $Npqrs = \Box$;

sumamus exempli gratia $N = 5$ et cum esse debeat

$$5(pp + qq) = 25gg = (2p - q)^2 + (p + 2q)^2$$

sumamus

$$2p - q = \alpha\alpha - \beta\beta \text{ et } p + 2q = 2\alpha\beta$$

ac reperietur

$$p = \frac{2(\alpha\alpha + \alpha\beta - \beta\beta)}{5}, \; q = \frac{4\alpha\beta - \alpha\alpha + \beta\beta}{5}$$

simili modo quia debet esse $5rr + ss = 25ff$, habebitur

$$r = \frac{2(\gamma\gamma + \gamma\delta - \delta\delta)}{5} \text{ et } s = \frac{4\gamma\delta - \gamma\gamma + \delta\delta}{5}$$

et iam superest vt $5pqrs$ reddatur quadratum, similique modo solutionem generaliorem reddere licebit.

§. 25. Quoniam autem solutio nostri problematis perducta est ad inuentionem duorum triangulorum rectangulorum, quorum areae inter se teneant rationem quadraticam, adiungamus hic aliquot solutiones quaestionis latius patentis, quo scilicet quaeruntur duo triangula rectangula, quorum areae datam inter se teneant rationem puta vt α et β ita vt esse debeat $pq(pp-qq) : rs(rr-ss) = \alpha : \beta$.

 Cui

Cui conditioni ſatisfiet ſequentibus octo formulis

	p	q	r	s
I.	$\alpha+\beta$	$2\alpha-\beta$	$\alpha+\beta$	$2\beta-\alpha$
II.	3α	$2\beta-\alpha$	3β	$2\alpha-\beta$
III.	$2\alpha+\beta$	$\beta-\alpha$	$\alpha+2\beta$	$\beta-\alpha$
IV.	$\alpha+2\beta$	3β	3β	$\beta+2\alpha$
V.	$\beta-2\alpha$	6α	$2\beta+4\alpha$	$\beta+4\alpha$
VI.	$\beta+4\alpha$	$\beta-8\alpha$	3β	$8\alpha-\beta$
VII.	$\beta+2\alpha$	6α	$2\beta+4\alpha$	$\beta-4\alpha$
VIII.	$\beta+8\alpha$	$\beta-4\alpha$	3β	$8\alpha+\beta$

Vbi notaſſe iuuabit, ſi qui horum numerorum prodeant negatiui, eos tuto in poſitiuos verti poſſe, tum vero pro vtroque triangulo maiores numeros literis p et r; minores vero literis q et s tribui oportere.

§. 26. Pro noſtro igitur Problemate tantum opus eſt, vt loco α et β numeri quadrati accipiantur, id quod exemplo illuſtraſſe ſufficiet.

Sumamus igitur $\alpha = 9$ et $\beta = 4$ ac ſequentes octo ſolutiones obtinebuntur:

I°.	$p=14$, $q=13$	$r=13$ et $s=1$
II°.	$p=27$, $q=1$	$r=14$ et $s=12$
III°.	$p=22$, $q=1$	$r=17$ et $s=5$
IV°.	$p=23$, $q=21$	$r=22$ et $s=12$
V°.	$p=54$, $q=14$	$r=40$ et $s=28$
VI°.	$p=68$, $q=40$	$r=68$ et $s=12$
VII°.	$p=54$, $q=22$	$r=44$ et $s=32$
VIII°.	$p=76$, $q=32$	$r=76$ et $s=12$.

Quae

Quae ſolutiones ob communes diuiſores reducuntur ad ſequentes ſimpliciores:

I°.	$p=14$, $q=13$	$r=13$ et $s=1$
II°.	$p=27$, $q=1$	$r=14$ et $s=12$
III°.	$p=22$, $q=1$	$r=17$ et $s=5$
IV°.	$p=23$, $q=21$	$r=22$ et $s=12$
V°.	$p=27$, $q=7$	$r=20$ et $s=14$
VI°.	$p=17$, $q=10$	$r=17$ et $s=3$
VII°.	$p=27$, $q=11$	$r=22$ et $s=16$
VIII°.	$p=19$, $q=8$	$r=19$ et $s=3$

hinc igitur facile quotcunque ſolutiones deſiderentur deducere licet.

DE TABVLA NVMERORVM PRIMORVM, VSQVE AD MILLIONEM ET VLTRA CONTINVANDA; IN QVA SIMVL OMNIVM NVMERORVM NON PRIMORVM MINIMI DIVISORES EXPRIMANTVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Si omnes numeros, ab vnitate vsque ad millies mille ordine recenſere, et vnicuique ſuum diuiſorem, vel notam numeri primi adſcribere vellemus: tam labor quam volumen, huiusmodi tabulas continens, in immenſum excreſceret; quamobrem conveniet, omnes eos numeros, quorum diuiſores minimi ſponte patent, prorſus praetermittere, vnde non ſolum omnes numeros pares ſed etiam eos, qui vel per 3 vel per 5 ſunt diuiſibiles, excludemus, quippe quorum minimi diuiſores ſponte ſe produnt. Alios igitur numeros in noſtram tabulam non referemus praeter primos, niſi quorum minimi diuiſores ſint vel 7 vel 11 vel 13 vel alii numeri primi maiores; cuiusmodi numeri vsque ad triginta ſunt tantum octo iſti:

1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29.

§. 2.

§. 2. Omnes ergo numeri, quos in noſtram tabulam referemus, in hac forma generali $3qq + rr$ erunt contenti, vbi r denotat octo illos numeros modo memoratos, pro q vero ſucceſſiue ſcribamus omnes plane numeros naturales 0, 1, 2, 3, 4 etc. donec valor formulae $30q$ vsque ad vnum millionem excreſcat, quod fit, ſumendo $q = 33333$ vel etiam vltra, ſi limitem vnius millionis transgredi voluerimus.

§. 3. Quod ſi iam talem tabulam in quarto expedire voluerimus; in qualibet pagina commode poterimus quinquaginta valores litterae q in prima cuiusque columna a ſummo ad imum deſcendendo exprimere, cui dextrorſum octo columnas adiungemus pro octo valoribus litterae r ſicque tantum opus erit ſingulis areolis in octo iſtis columnis, quae cuilibet valori litterae q reſpondent, vel minimos diuiſores numeri $30q + r$ vel notam numeri primi, quae nobis erit littera p, inſcribere; ſic enim propoſito quocunque numero N diuidatur ille per 30 et quotus ex diuiſione reſultans ſit $= q$ reſiduum vero reſtans $= r$, tum hi numeri q et r in noſtris tabulis quaerantur et areola vtrique conueniens oſtendet minimum diuiſorem huius numeri N vel characterem p, ſi fuerit numerus primus.

§. 4. Si ſingulae igitur paginae contineant quinquaginta valores litterae q, quibus octo memoratae columnae ſint adiunctae, quaelibet pagina extendetur ad $30 \cdot 50 = 1500$ numeros ſicque vsque ad vnum millionem opus erit 666 paginis, quare

cum

cum vna ſcheda in quarto praebeat octo paginas, numerus ſchedarum erit 83 circiter, vnde naſcitur volumen non nimis magnum et aliquot calculatores ſufficient ad totum opus breui temporis ſpatio exſequendum.

§. 5. Singulae igitur paginae huius operis ita erunt diſpoſitae, vti ſpecimen annexum oſtendit, in quo primam paginam repraeſentamus, cuius prima columna litterae q ſubiacens eius valores a 0 vsque ad 49 exhibet, cui ad dextram adiunctae ſunt octo illae columnae in fronte gerentes totidem reſidua 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, tum vero ſimili modo ſequens pagina in prima columna continebit numeros 50. 51 . . . . . 99 tertia vero a 100 vsque ad 149 etc. vbi ſemper octo columnae ſequentes eadem octo reſidua referunt ſicque totum negotium huc redit, vt in ſingulas areolas, quarum quaelibet pagina continet 400, vel diuiſores debitos vel litteram p vtpote notam numeri primi inſeramus, quem in finem ſequentia ſubſidia explicare neceſſe erit.

q	1	7	11	13	17	19	23	29
0		p	p	p	p	p	p	p
1	p	p	p	p	p	7	p	p
2	p	p	p	p	7	p	p	p
3	7	p	p	p	p	p	p	7
4	11	p	p	7	p	p	11	p
5	p	p	7	p	p	13	p	p
6	p	11	p	p	p	p	7	11
7	p	7	13	p	p	p	p	p

q	1	7	11	13	17	19	23	29
8	*p*	13	*p*	11	*p*	7	*p*	*p*
9	*p*	*p*	*p*	*p*	7	17	*p*	18
10	7	*p*	*p*	*p*	*p*	11	17	7
11	*p*	*p*	11	7	*p*	*p*	*p*	*p*
12	19	*p*	7	*p*	13	*p*	*p*	*p*
13	17	*p*	*p*	13	11	*p*	7	*p*
14	*p*	7	*p*	*p*	19	*p*	*p*	*p*
15	11	*p*	*p*	*p*	*p*	7	11	*p*
16	12	*p*	*p*	17	7	*p*	*p*	*p*
17	7	11	*p*	*p*	17	23	13	7
18	*p*	*p*	19	7	*p*	13	*p*	*p*
19	*p*	*p*	7	11	*p*	19	*p*	*p*
20	*p*	*p*	13	*p*	*p*	*p*	7	17
21	*p*	7	*p*	*p*	*p*	11	*p*	*p*
22	*p*	23	11	*p*	*p*	7	*p*	13
23	*p*	17	*p*	19	7	*p*	23	*p*
24	7	*p*	17	*p*	11	*p*	*p*	7
25	*p*	*p*	*p*	7	13	*p*	*p*	19
26	11	*p*	7	13	*p*	17	11	*p*
27	*p*	19	*p*	*p*	*p*	*p*	7	*p*
28	29	7	23	*p*	*p*	*p*	*p*	11
29	13	*p*	*p*	*p*	*p*	7	19	29
30	17	*p*	*p*	11	7	*p*	13	*p*
31	7	*p*	*p*	23	*p*	13	*p*	7
32	31	*p*	*p*	7	*p*	11	*p*	23
33	*p*	*p*	7	17	19	*p*	*p*	*p*
34	*p*	13	*p*	*p*	17	*p*	7	*p*
35	*p*	7	*p*	*p*	11	*p*	29	13
36	23	*p*	*p*	*p*	*p*	7	*p*	*p*

q

q	1	7	11	13	17	19	23	29
37	11	p	19	p	7	p	11	17
38	7	31	p	p	13	19	p	7
39	p	11	p	7	p	29	p	11
40	p	17	7	p	p	23	p	p
41	p	p	17	11	29	p	7	p
42	13	7	31	19	p	p	p	p
43	p	p	p	p	p	7	13	p
44	p	p	11	31	7	13	17	19
45	7	23	p	29	p	37	p	7
46	1	19	13	7	11	p	23	p
47	17	13	7	p	p	p	p	p
48	11	p	p	p	31	p	7	13
49	p	7	p	p	p	p	p	p

§. 6. Ponamus igitur in genere quaerendos esse omnes numeros formae $30q+r$ qui per datum numerum primum P sint diuisibiles ita vt in areolas his numeris respondentes ipse numerus P inscribi debeat, nisi forte eidem areolae iam numerus minor fuerit inscriptus. Sumamus autem pro residuo $r=\alpha$ formulam $30q+\alpha$ diuisibilem fieri per propositum numerum primum P casu quo $q=\alpha$ ita vt numerus $30a+\alpha$ diuisionem per P admittat, tum igitur manifestum est formulam $30q+\alpha$ etiam diuisibilem fore sumendo $q=a+n$P vnde hoc commodum nanciscimur, vt si in quapiam columna pro residuo α numerus $30q+\alpha$ diuisibilis fuerit per P casu $q=a$; tum omnes valores ipsius q eadem indole gaudentes futuri sint $a+$ P; $a+2$ P; $a+3$ P; $a+4$ P; $a+5$ P etc. iuxta quos igitur

tur areolis reſpondentibus ſub reſiduo α diuiſor iſte primus P inſcribi debebit, quod ergo negotium per omnes paginas ſequentes facillime abſoluetur. Dummodo igitur pro qualibet columna prima areola conſtet, cui numerum primum P inſcribi oportet, tum per omnes paginas ſequentes areolae, quibus idem numerus inſcribi debet, facillime definiuntur.

§. 7. Sumto autem numero primo quocunque P, minimus numerus, cuius minimus diuiſor eſt $= P$ eſt ſemper P P, in cuius igitur areola omnium primo numerus P inſcribendus erit; ita ſi proponatur diuiſor 7, is in noſtra tabula primum occurret apud numerum $49 = 30.1 + 19$ vbi eſt $q = 1$ et $r = 19$; at ſi diuiſor proponatur 11, minimus numerus, cui is in noſtra tabula reſpondebit, erit $11^2 = 121$, pro quo erit $q = 4$ et $r = 1$ ſicque in prima columna vbi $r = 1$ apud $q = 4$ occurret numerus 11, qui deinceps pro eadem columna conueniet omnibus valoribus, qui ſunt $4 + 11 = 15$; 26; 37; 48; 59 etc. vsque ad finem totius tabulae.

§. 8. Praecipuus igitur labor in hoc conſiſtet, vt propoſito numero quocunque P pro ſingulis reſiduis r definiantur minimi numeri q, qui formulam $30q + r$ diuiſibilem producant per P; haec autem inueſtigatio eo modo eſt inſtituenda, quemadmodum in ſequenti Problemate docebimus, vbi pro diuiſore P ſumemus 7 quippe qui eſt minimus diuiſor, qui in noſtra tabula occurrere poteſt, propterea quod numeri primi minores 2, 3 et 5 ſunt excluſi.

Problema I.

Pro singulis octo valoribus litterae r *inuenire minimos valores litterae* q, *quibus formula* $30q + r$ *per* 7 *fiat diuisibilis.*

Solutio.

Sit *primo* $r = 1$ et formula $30q + 1$ diuisibilis esse debet per 7, ponatur ergo $30q + 1 = 7A$ eritque $A = 4q + \frac{2q+1}{7}$, ita $2q + 1$ diuisibilis esse debet per 7, quod manifesto fit si $q = 3$, omnes ergo valores ipsius q erunt

3, 10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66 etc.

Sit *secundo* $r = 7$ et formula $30q + 7$ diuisibilis manifesto fit si $q = 0$, eius ergo sequentes valores sunt

7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56 etc.

vnde singulis areolis in nostra tabula numerum 7 inscribamus praeterquam primae areolae, quae continet notam *p*.

Sit *tertio* $r = 11$ et fiat $30q + 11 = 7A$ eritque $A = 4q + 1 + \frac{2q+4}{7}$, vbi ergo est $q = 5$ eiusque sequentes valores

12, 19, 26, 33, 40, 47 etc.

Sit *quarto* $r = 13$ et fiat $30q + 13 = 7A$ eritque $A = 4q + 1 + \frac{2q+6}{7}$ vbi ergo $q = 4$ et sequentes eius valores

11, 18, 25, 32, 39, 46, 53 etc.

Sit

Sit *quinto* $r = 17$ vt formula $30q + 17$ divisibilis esse debeat per 7, ideoque ponamus eam $= 7A$ fietque $A = 4q + 2 + \frac{2q+3}{7}$; quocirca q esse debet $= 2$ et valores sequentes erunt

9, 16, 23, 30, 37, 44, 51 etc.

Sit *sexto* $r = 19$ et fiat $30q + 19 = 7A$ ideoque $A = 4q + 2 + \frac{2q+5}{7}$, manifesto hinc fit $q = 1$ sequentes autem valores erunt

8, 15, 22, 29, 36, 43, 50 etc.

Sit *septimo* $r = 23$ fietque $30q + 23 = 7A$ hinc $A = 4q + 3 + \frac{2q+2}{7}$ debet ergo esse $q = 6$ et sequentes valores

13, 20, 27, 34, 41, 48 etc.

Sit *octauo* $r = 29$ et $30q + 29 = 7A$ ita, vt $A = 4q + 4 + \frac{2q+1}{7}$ hincque manifesto $q = 3$ et sequentes valores

10, 17, 24, 31, 38, 45 etc.

Corollarium 1.

Quia areola, quae respondet numeris $[{q = 1 \atop r = 19}]$, prima est, cui diuisor 7 est inscribendus; omnes praecedentes numeri in nostra tabula relati erunt primi, ideoque eorum areolas charactere p impleri oportet.

Corollarium 2.

Quia igitur pro omnibus octo residuis r minimos quotos q assignauimus, quibus formula $30q+r$

 per

per 7 diuiſibilis euadit, vnde ſimul omnes ſequentes valores ipſius q facillime innoteſcunt, eos ſequenti modo conſpectui exponamus, quo facilius omnes areolae numero 7 implendae per omnes tabulas ſequentes agnoſcantur

$r =$	1	7	11	13	17	19	23	29
$q =$	3	7	5	4	2	1	6	3
ſequentes $q =$	10	14	12	11	9	8	13	10
ſequentes $q =$	17	21	19	18	16	15	20	17
ſequentes $q =$	24	28	26	25	23	22	27	24
generaliter	$3+7n$	$7+7n$	$5+7n$	$4+7n$	$2+7n$	$1+7n$	$6+7n$	$3+7n$
		etc.			etc.			etc.

Problema 2.

Propoſito diuiſore 11 *pro ſingulis reſiduis* r *inuenire minimos quotos* q, *quibus formula* $30q + r$ *per* 11 *ſit diuiſibilis.*

Solutio.

Cum minimus numerus hunc diuiſorem gerens ſit $121 = 30.4 + 1$, prima areola, in qua iſte diuiſor 11 occurret, erit $\left[{}^{q}_{r} = {}^{4}_{1}\right]$, omnes praecedentes areolae adhuc vacuae charactere p ſunt replendae nunc igitur pro ſingulis reſiduis r quotos minimos q quaeramus.

1°. Si

1°. Si $r = 1$ modo vidimus fore $q = 4$ ideoque ingenere $q = 4 + 11\,n$.

2°. Sit $r = 7$ et ponatur $30\,q + 7 = 11$ A erit

$$A = 2\,q + \frac{8\,q + 7}{11} = 3\,q - \frac{3\,q + 7}{11}$$

vnde fit $q = 6$ et in genere $q = 6 + 11\,n$.

3°. Si $r = 11$ ponatur $30\,q + 11 = 11$ A vnde $q = 0$ minimus autem erit $0 + 11$.

4°. Si $r = 13$ ponatur $30\,q + 13 = 11$ A vnde erit

$$A = 2\,q + 1 + \frac{8\,q + 2}{11}$$

esse igitur debet $q = 8$ et in genere $q = 8 + 11\,n$.

5°. Si $r = 17$ ponatur $30\,q + 17 = 11$ A vnde erit

$$A = 2\,q + 1 + \frac{8\,q + 6}{11}$$

quod diuisibile fit per 11 ponendo $q = 2$ vel cum hic non sit minimus erit $q = 13$ et in genere $q = 13 + 11\,n$.

6°. Si $r = 19$ ponatur $30\,q + 19 = 11$ A vnde fit

$$A = 2\,q + 1 + \frac{8\,q + 8}{11}$$

vnde esse debet $q = 10$ et in genere $q = 10 + 11\,n$.

7°. Si $r = 23$ ponatur $30\,q + 23 = 11$ A vnde fit

$$A = 2\,q + 2 + \frac{8\,q + 1}{11}$$

vbi esse debet $q = 4$ et in genere $q = 4 + 11\,n$.

8°. Si $r = 29$ ponatur $30\,q + 29 = 11$ A hincque fit

$$A = 2\,q + 2 + \frac{8\,q + 7}{11}$$

quocirca esse debet $q = 6$ et in genere $q = 6 + 11\,n$.

Hos igitur valores ita conſpectui exponamus pro diuiſore 11

	r	1	7	11	13	17	19	23	29
	$q =$	4	6	11	8	13	10	4	6
ſequ.	$q =$	15	17	22	19	24	31	15	17
ſequ.	$q =$	26	38	33	30	35	42	26	28
ſequ.	$q =$	37	49	44	41	46	53	37	39

etc. etc. etc.

Problema 3.

Propoſito diuiſore 13 *pro ſingulis reſiduis* r *inueni-re quotos* q, *vt formula* $30q + r$ *diuiſibilis fiat per* 13.

Solutio.

Cum minimus numerus in noſtra tabula, qui diuiſorem 13 adſcriptum habebit, ſit $13^2 = 169 = 30.5 + 19$, omnia loca vacua charactere p ſunt replenda. Pro reliquis reſiduis aliam viam ineamus; cum enim $30.5 + 19$ minimus ſit numerus diuiſore 13 ſignandus, omnes maiores continebuntur in hac forma $30.5 + 19 + 13n$, quia autem numeri pares excluduntur, pro n ſumi debent tantum numeri pares, ita, vt tantum multipla 26 addi debeant, vbi notandum, ſi numeri prodeant maiores quam 30, tum vnitatem accedere ad primum membrum $30q$ quod hic eſt 30.5; habebimus ſcilicet duas columnas priorem pro q, alteram vero pro r, quae quaſi monetas diuerſae ſpeciei referunt, quarum triginta ſub ſpecie r contentae faciunt vnitatem pro altera ſpecie q.

Hoc notato, quia pro primo caſu habuimus $q = 5$ et $r = 19$ continuo hic 26 addamus vti ſequens ſchema declarabit.

Hoc

q	-	r
5	-	19 26
6	-	15 26
7	-	11 26
8	-	7 26
9	-	3 26
9	-	29 26
10	-	25 26
11	-	21 26
12	-	17 26
13	-	13 26
14	-	9 26
15	-	5 26
16	-	1 26
16	-	27 26
17	-	23

Hae operationes ſcilicet eo vsque ſunt continuandae donec ſub columna r omnia reſidua occurrant; tum igitur vnicuique valor reſpondens q habebitur; hinc igitur ſequens ſchema conſtituatur.

Pro diuisore 13

	$r =$	1	7	11	13	17	19	23	29
	$q =$	16	8	7	13	12	5	17	9
sequ.	$q =$	29	21	20	26	25	18	30	22
sequ.	$q =$	42	34	33	39	38	31	43	35

etc. etc. etc.

Scholion.

Non autem opus est superiores operationes eo vsque continuare, donec octo nostra residua omnia occurrant, sed sufficit quatuor tantum nosse; ex quolibet enim casu $q = a$ et $r = \alpha$ etiam casus quo $r = 30 - \alpha$ facile deducitur; cum enim sit $30a + \alpha$ diuisibile per 13; erit $30(a+1) - 30 + \alpha$ etiam diuisibile; hincque etiam eius negatiuum $-30(a+1) + 30 - \alpha$; addatur 30. 13 vt habeatur $30(12 - a) + 30 - \alpha$ diuisibile per 13, ergo si fuerit $r = 30 - \alpha$ erit $q = 12 - a$. Hinc igitur quia primo erat $a = 5$ et $\alpha = 19$, nunc pro $r = 30 - 19 = 11$ erit $q = 7$. Deinde erat $\alpha = 7$ et $a = 8$, hinc pro casu $r = 30 - 7 = 23$ erit $q = 4$ siue $q = 17$. Porro vbi $\alpha = 29$ erat $a = 9$; hinc si $r = 1$ sit $q = 3$ siue $q = 16$. Eodem modo vbi $\alpha = 17$ erat $a = 12$ hinc si $r = 13$ fiet $q = 0$ hoc est $q = 13$.

Problema 4.

Proposito diuisore $= 17$ *pro singulis residuis* r *inuenire quotos* q, *vt formula* $30q + r$ *diuisibilis fiat per* 17.

Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuisore signandus sit $17^2 = 289 = 30 \cdot 9 + 19$ pro eo erit $q = 9$

et

et $r = 19$ atque omnes praecedentes areolae adhuc vacuae littera p erunt replendae. Nunc igitur si q et r vt nomina duarum specierum spectemus, quarum prior continet triginta posterioris; primus noster numerus per 17 diuisibilis erit $9^{(q)} + 19^{(r)}$, cui si continuo addamus $2.17 = 34$ hoc est $1^{(q)} + 4^{(r)}$, operationes sequentes praebebunt valores

q	-	r
9	-	19
10	-	23
11	-	27
13	-	1
14	-	5
15	-	9
16	-	13
17	-	17
18	-	21
19	-	25
20	-	29
22	-	3
23	-	7
24	-	11

vnde sequens schema perficitur.

Pro diuisore 17

r	1	7	11	13	17	19	23	29
q	13	23	24	16	17	9	10	20
q	30	40	41	33	34	26	27	37
q	47	57	58	50	51	43	44	54

etc. etc etc.

Problema 5.

Proposito diuisore pro singulis residuis r *inuenire quotos* q, *vt formula* 30 q + r *diuisibilis fiat per* 19.

Solutio.

Minimus numerus hoc diuisore signandus erit $361 = 30 . 12 + 1$ ita vt sit $q = 12$ et $r = 1$; hinc formulae $12^{(q)} + 1^{(r)}$ continuo addatur numerus $2 . 19 = 38 = 1^{(q)} + 8^{(r)}$ siue $2^{(q)} - 22^{(r)}$, vnde sequentes nascuntur operationes

q	-	r
12	-	1
13	-	9
14	-	17
15	-	25
17	-	3
18	-	11
19	-	19
20	-	27
22	-	5
23	-	13
24	-	21
25	-	29
27	-	7
28	-	15
29	-	23
31	-	1

vnde sequens schema conficitur.

Pro

Pro diuisore 19

$r=$	1	7	11	13	17	19	23	29
$q=$	12	27	18	23	14	19	29	25
$q=$	31	46	37	42	33	38	48	44
$q=$	50	65	56	61	52	56	67	63

etc. etc. etc.

Problema 6.

Proposito diuisore 23 *pro singulis residuis* r *inuenire quotos* q, *vt formula* $30q + r$ *diuisibilis fiat per* 23.

Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuisore 23 signandus sit $23^2 = 529 = 30.17 + 19$ erit $q = 17$ et $r = 19$. Nunc igitur formulae $17^{(q)} + 19^{(r)}$ continuo addamus numerum $46 = 1^q + 16^{(r)}$ siue $2^{(q)} - 14^{(r)}$ vt sequitur

q		r
17	-	19
19	-	5
20	-	21
22	-	7
23	-	23
25	-	9
26	-	25
28	-	11
29	-	27
31	-	13
32	-	29
34	-	15
36	-	1
37	-	17
39	-	3
40	-	19

vnde hoc schema conficitur.

Pro diuisore 23

$r =$	1	7	11	13	17	19	23	29
$q =$	36	22	28	31	37	17	23	32
$q =$	59	45	51	54	60	40	46	55

etc. etc. etc.

Problema 7.

Proposito diuisore 29 *pro singulis residuis* $= r$ *invenire quotos* q, *vt formula* $30q + r$ *diuisibilis fiat per* 29.

Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuisore signandus sit $29^2 = 841 = 30 . 28 + 1$ erit $q = 28$ et $r = 1$. Nunc igitur ad $28^{(q)} + 1^{(r)}$ continuo addamus $58^{(r)} = 1^{(q)} + 28^{(r)}$ siue $2^{(q)} - 2^{(r)}$ vti sequitur

q	-	r
28	-	1
29	-	29
31	-	27
33	-	25
35	-	23
37	-	21
39	-	19
41	-	17
43	-	15
45	-	13
47	-	11
49	-	9
51	-	7
53	-	5
55	-	3
57	-	1

vnde

vnde ſequens ſchema pro diuiſore 29 conficitur

$r=$	1	7	11	13	17	19	23	29
$q=$	28	51	47	45	41	39	35	29
$q=$	57	80	76	74	70	68	64	58

etc. etc. etc.

Scholion.

Pro ſequentibus diuiſoribus talia Problemata generalius tractari poſſunt ſicque totum negotium noſtrum conficietur, quando ſequentia octo problemata ſoluemus.

Problema generale I.

Propoſito diuiſore primo $30a+1$ pro ſingulis reſiduis r omnes quotos q inuenire, vt formula $30q+r$ diuiſibilis fiat per numerum $30a+1$.

Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $900aa+60a+1$ erit $q=30aa+2a$ et $r=1$. Nunc igitur ad hunc numerum $(30aa+2a)^{(q)}+1^{(r)}$ continuo addamus duplum diuiſorem $60a+2=2a^{(q)}+2^{(r)}$ ſiue $(2a+1)^{(q)}-28^{(r)}$ vti ſequitur

q	-	r
$30aa+2a$	-	1
$30aa+4a$	-	3
$30aa+6a$	-	5
$30aa+8a$	-	7
$30aa+10a$	-	9
$30aa+12a$	-	11
$30aa+14a$	-	13

q		r
$30aa + 16a$	-	15
$30aa + 18a$	-	17
$30aa + 20a$	-	19
$30aa + 22a$	-	21
$30aa + 24a$	-	23
$30aa + 26a$	-	25
$30aa + 28a$	-	27
$30aa + 30a$	-	29
$30aa + 32a + 1$	-	1

Nunc igitur ſingula noſtra reſidua in linea verticali exponamus et ſingulis quotos reſpondentes q adſcribamus

r	q
1	$30aa + 2a + n(30a + 1)$
7	$30aa + 8a + n(30a + 1)$
11	$30aa + 12a + n(30a + 1)$
13	$30aa + 14a + n(30a + 1)$
17	$30aa + 18a + n(30a + 1)$
19	$30aa + 20a + n(30a + 1)$
23	$30aa + 24a + n(30a + 1)$
29	$30aa + 30a + n(30a + 1)$.

Scholion.

Quod ſi tabulam numerorum primorum vsque ad vnum millionem continuare velimus, maiores diviſores primi in ea occurrere non poſſunt, quam 1000; vnde tantum opus eſt noſtra ſchemata pro omnibus numeris primis millenario non maioribus exten-

extendere; hinc diuisores primi in formula $30a+1$ contenti in adiuncta tabula referuntur

Numeri primi formae $30a+1$	Numeri a
31	1
61	2
151	5
181	6
211	7
241	8
271	9
331	11
421	14
541	18
571	19
601	20
631	21
661	22
691	23
751	25
811	27
991	33
1021	34

Nunc igitur pro singulis his diuisoribus schemata nostra vti incepimus adiungere poterimus.

TABVLA

exhibens minimos quotos q pro diuiſoribus primis formae $30a + 1$ ad ſingula octo reſidua relatos.

Tabula generalis.

a	Diuiſor	1	7	11	13	17	19	23	29
1	31	32	38	42	44	48	50	54	60
2	61	124	136	144	148	156	160	168	180
5	151	760	790	810	820	840	850	870	900
6	181	1092	1128	1152	1164	1188	1200	1224	1260
7	211	1484	1526	1554	1568	1596	1610	1638	1680
8	241	1936	1984	2016	2032	2064	2080	2110	2160
9	271	2448	2502	2538	2556	2592	2610	2646	2700
11	331	3652	3718	3762	3784	3828	3850	3894	3960
14	421	5908	5992	6048	6076	6132	6160	6216	6300
18	541	9756	9864	9936	9972	10044	10080	10152	10260
19	571	10868	10982	11058	11096	11172	11210	11286	11400
20	601	12040	12160	12240	12280	12360	12400	12480	12600
21	631	13272	13398	13482	13524	13608	13650	13734	13860
22	661	14564	14696	14784	14828	14916	14960	15048	15180
23	691	15916	16054	16146	16192	16284	16330	16422	16560
25	751	18800	18950	19050	19100	19200	19250	19350	19500
27	811	21924	22086	22904	22248	22356	22410	22518	22680
33	991	32736	32934	33066	33132	33264	33330	33462	33660

Problema generale II.

Propoſito diuiſore primo $30q - 1$ pro omnibus reſiduis r inuenire quotos q, vt formula $30q + r$ diuiſibilis ſit per $30a - 1$.

Solutio.

Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $30 \cdot 30aa - 2 \cdot 30a + 1$; erit $q = 30aa - 2a$ et $r = 1$ nunc igitur ad hanc formulam $(30aa - 2a)^{(q)} + 1^{(r)}$ continuo addatur numerus $60a - 2 = 2a^{(q)} - 2^{(r)}$ ſiue $(2a - 1)^{(q)} + 28^{(r)}$, vnde ſequitur

q	-	r
$30aa - 2a$	-	1
$30aa + 0a - 1$	-	29
$30aa + 2a - 1$	-	27
$30aa + 4a - 1$	-	25
$30aa + 6a - 1$	-	23
$30aa + 8a - 1$	-	21
$30aa + 10a - 1$	-	19
$30aa + 12a - 1$	-	17
$30aa + 14a - 1$	-	15
$30aa + 16a - 1$	-	13
$30aa + 18a - 1$	-	11
$30aa + 20a - 1$	-	9
$30aa + 22a - 1$	-	7

Hinc igitur quoti q ſingulis reſiduis r reſpondentes erunt

r	q
1	$30aa - 2a + n(30a - 1)$
7	$30aa + 22a - 1 + n(30a - 1)$
11	$30aa + 18a - 1 + n(30a - 1)$
13	$30aa + 16a - 1 + n(30a - 1)$
17	$30aa + 12a - 1 + n(30a - 1)$
19	$30aa + 10a - 1 + n(30a - 1)$
23	$30aa + 6a - 1 + a(30a - 1)$
29	$30aa + 0a - 1 + n(30a - 1)$.

Cum igitur diuiſor noſter $30a - 1$ contineatur in forma $30q + 29$ exiſtente $a = q + 1$; ex noſtra tabula excerpantur ordine omnes numeri primi formae $30q + 29$ et pro ſingulis capiatur $a = q + 1$ hincque ſequens prodit.

Tabula generalis

a	Diuiſor	1	7	11	13	17	19	23	29
1	29	28	51	47	45	41	39	35	29
2	59	116	163	155	151	143	139	131	119
3	89	264	335	323	317	305	299	287	269
5	149	740	859	839	829	809	799	779	749
6	179	1068	1211	1187	1175	1151	1139	1115	1079
8	239	1904	2095	2063	2047	2015	1999	1967	1919
9	269	2412	2627	2591	2573	2537	2519	2483	2429
12	359	4296	4583	4535	4511	4463	4439	4391	4319
13	389	5044	5355	5303	5277	5225	5199	5147	5069
14	419	5852	6187	6131	6103	6047	6019	5963	5879
15	449	6720	7079	7019	6989	6929	6899	6839	6749
16	479	7648	8031	7967	7935	7871	7839	7775	7679
17	509	8636	9043	8975	8941	8873	8839	8771	8669
19	569	10792	11247	11171	11133	11057	11019	10943	10829
20	599	11960	12439	12359	12319	12239	12199	12119	11999
22	659	14476	15003	14915	14871	14783	14739	14651	14519
24	719	17232	17807	17711	17663	17567	17519	17423	17279
27	809	21816	22463	22355	22301	22193	22139	22031	21869
28	839	23464	24135	24023	23967	23855	23799	23687	23519
31	929	28768	29511	29387	29325	29201	29139	29015	28829

Pro-

Problema generale III.

Propoſito diuiſore primo $30a+7$, pro ſingulis reſiduis r inuenire quotos q, vt formula $30q+r$ diuiſibilis fiat per $30a+7$.

Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $30.30aa+30.14a+49$, pro eo erit $q=30aa+14a+1$ et $r=19$. Nunc igitur ad formulam $(30aa+14a+1)^{(q)}+19^{(r)}$ continuo addatur numerus $60a+14=2a^{(q)}+14^{(r)}$ ſiue $(2a+1)^{(q)}-16^{(r)}$ vnde ſequitur

q		r
$30aa+14a+1$	-	19
$30aa+16a+2$	-	3
$30aa+18a+2$	-	17
$30aa+20a+3$	-	1
$30aa+22a+3$	-	15
$30aa+24a+3$	-	29
$30aa+26a+4$	-	13
$30aa+28a+4$	-	27
$30aa+30a+5$	-	11
$30aa+32a+5$	-	25
$30aa+34a+6$	-	9
$30aa+36a+6$	-	23
$30aa+38a+7$	-	7.

Et hinc pro ſingulis reſiduis r quoti q ita colliguntur

r	q
1	$30aa + 20a + 3 + n(30a + 7)$
7	$30aa + 38a + 7 + n(30a + 7)$
11	$30aa + 30a + 5 + n(30a + 7)$
13	$30aa + 26a + 4 + n(30a + 7)$
17	$30aa + 18a + 2 + n(30a + 7)$
19	$30aa + 14a + 1 + n(30a + 7)$
23	$30aa + 36a + 6 + n(30a + 7)$
29	$30aa + 24a + 3 + n(30a + 7)$

Cum diuiſor noſter in forma $30q + 7$ contineatur, excerpantur ex tabula noſtra ordine omnes numeri primi huius formae ac pro ſingulis erit $a = q$ hincque ſequens conſtruatur

Tabula

Tabula generalis.

a	Diuisor	1	7	11	13	17	19	23	29
0	7	3	7	5	4	2	1	6	3
1	37	53	75	65	60	50	45	72	57
2	67	163	203	185	176	158	149	198	171
3	97	333	391	365	352	308	313	384	345
4	127	563	639	605	588	554	537	630	579
5	157	853	947	905	884	842	821	936	873
9	277	2613	2779	2705	2668	2594	2557	2760	2649
10	307	3203	3387	3305	3264	3182	3141	3366	3243
11	337	3853	4055	3965	3920	3830	3785	4032	3897
12	367	4563	4783	4685	4636	4538	4489	4758	4611
13	397	5333	5571	5465	5412	5306	5253	5544	5385
15	457	7053	7327	7205	7144	7022	6961	7296	7113
16	487	8003	8295	8165	8100	797[illegible]	7905	8262	8067
18	547	10083	10411	10265	10192	10046	9973	10374	10155
19	577	11213	11559	11405	11328	11174	11097	11520	11289
20	607	12403	12767	12605	12524	12362	12281	12726	12483
24	727	17763	18199	18005	17908	17714	17617	18150	17859
25	757	19253	19707	19505	10404	19202	19101	19656	18353
26	787	20803	21275	21065	20960	20750	20645	21222	20907
29	877	25813	26339	26105	25988	25754	25637	26280	25929
30	907	27603	28147	27905	27784	27542	27421	28086	27723
31	937	29453	30015	29765	29640	29390	29265	29952	29577
32	967	31363	31943	31685	31556	31298	31169	31878	31491
33	997	33333	33931	33665	33532	33266	33133	33864	33465

Problema generale IV.

Propofito diuifore primo $30a - 7$, pro fingulis refiduis r inuenire quotos q, vt formula $30q + r$ fiat diuifibilis per $30a - 7$.

Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuifore fignandus fit $30.30aa - 30.14a + 49$ erit $q = 30a^2 - 14a + 1$ et $r = 19$; hinc ad numerum $(30aa - 14a + 1)^{(q)} + 19^{(r)}$ continuo addatur forma $60a - 14 = 2a^{(q)} - 14^{(r)}$ feu $(2a - 1)^{(q)} + 16^{(r)}$ vnde calculus ifte oritur

q	-	r
$30aa - 14a + 1$	-	19
$30aa - 12a + 1$	-	5
$30aa - 10a$	-	21
$30aa - 8a$	-	7
$30aa - 6a - 1$	-	23
$30aa - 4a - 1$	-	9
$30aa - 2a - 2$	-	25
$30aa + 0a - 2$	-	11
$30aa + 2a - 3$	-	27
$30aa + 4a - 3$	-	13
$30aa + 6a - 4$	-	29
$30aa + 8a - 4$	-	15
$30aa + 10a - 4$	-	1
$30aa + 12a - 5$	-	17
$30aa + 14a - 5$	-	3
$30aa + 16a - 6$	-	19

Hinc

Hinc igitur quoti ordine disponantur pro ſingulis noſtris reſiduis r vti ſequitur

r	q
1	$30aa + 10a - 4 + n(30a - 7)$
7	$30aa - 8a - 0 + n(30a - 7)$
11	$30aa + 0a - 2 + n(30a - 7)$
13	$30aa + 4a - 3 + n(30a - 7)$
17	$30aa + 12a - 5 + n(30a - 7)$
19	$30aa - 14a + 1 + n(30a - 7)$
23	$30aa - 6a - 1 + n(30a - 7)$
29	$30aa + 6a - 4 - n(30a - 7)$

Cum igitur diuiſor noſter $30a - 7$ pertineat ad formam $30q + 23$, ex tabula noſtra ordine excerpantur omnes numeri primi formae $30q + 13$ eritque pro ſingulis $a = q + 1$ hincque ſequens *tabula generalis* conficiatur

a	Diuiſor	1	7	11	13	17	19	23	29
1	23	36	22	28	31	37	17	23	32
2	53	136	104	108	125	139	93	107	128
3	83	296	246	268	279	301	229	251	284
4	113	516	448	478	493	523	425	455	460
6	173	1136	1032	1078	1101	1147	997	1043	1112
8	233	1996	1856	1918	1949	2011	1809	1871	1876
9	263	2516	2358	2428	2463	2533	2305	2375	2480
10	293	3096	2920	2998	3037	3115	2861	2939	3056
12	353	4436	4224	4318	4365	4181	4153	4247	4388
13	383	5206	4996	5068	5119	522	4889	4991	5144
15	443	6896	6630	6748	6693	6575	6541	6659	6836
17	503	8836	8534	8668	8734	8869	8433	8567	8768
19	563	11016	10678	10828	10903	11053	10565	10715	10940
20	593	12196	11840	11998	12077	12235	11721	11879	121[illegible]6
22	653	14736	14344	14518	14605	14779	14213	14387	14648
23	683	16096	15686	15868	15959	1614[illegible]	15549	15731	16004
25	743	18996	18550	18748	18847	19045	18401	18599	18896
26	773	20536	20072	20278	20381	20587	19917	20123	20430
29	863	25516	24998	25228	2534[illegible]	25573	24825	25055	25400
32	953	31036	30464	30718	30845	31099	30273	30527	30908
33	983	32996	32406	32668	32799	33061	32209	32471	32864

Problema generale V.

Propoſito diuiſore $30a + 11$ primo, inuenire pro ſingulis reſiduis r, quotos q, vt formula $30q + r$ fiat diuiſibilis per $30a + 11$.

Solutio.

Cum minimus hoc diuiſore ſignandus numerus ſit $30 \cdot 30aa + 30 \cdot 22a + 121$, pro eo erit

$q =$

$q = 30aa + 22a + 4$ et $r = 1$. Nunc igitur ad formulam $(30aa + 22a + 4)^{(q)} + 1^{(r)}$ continuo numerum $60a + 22 = 2a^{(q)} + 22^{(r)}$ siue $(2a + 1)^{(q)} - 8^{(r)}$ reddamus, vti sequitur

q	-	r
$30aa + 22a + 4$	-	1
$30aa + 24a + 4$	-	23
$30aa + 26a + 5$	-	15
$30aa + 28a + 6$	-	7
$30aa + 30a + 6$	-	29
$30aa + 32a + 7$	-	21
$30aa + 34a + 8$	-	13
$30aa + 36a + 9$	-	5
$30aa + 38a + 9$	-	27
$30aa + 40a + 10$	-	19
$30aa + 42a + 11$	-	11
$30aa + 44a + 12$	-	3
$30aa + 46a + 12$	-	25
$30aa + 48a + 13$	-	17.

et hinc pro singulis residuis r quoti q colliguntur sequenti modo:

r	q
1	$30aa + 22a + 4 + n(30a + 11)$
7	$30aa + 28a + 6 + n(30a + 11)$
11	$30aa + 42a + 11 + n(30a + 11)$
13	$30aa + 34a + 8 + n(30a + 11)$
17	$30aa + 48a + 13 + n(30a + 11)$
19	$30aa + 40a + 10 + n(30a + 11)$
23	$30aa + 24a + 4 + n(30a + 11)$
29	$30aa + 30a + 6 + n(30a + 11)$.

 Cum

Cum nunc diuiſor ille $30a+11$ in forma $30q+11$ contineatur, excerpantur ordine ex tabula noſtra omnes numeri, ac pro ſingulis erit $a=q$.

Tabula generalis.

a	Diuiſor	1	7	11	13	17	19	23	29
0	11	4	6	11	8	13	10	4	6
	41	56	64	83	72	91	80	58	66
2	71	168	182	215	196	229	210	172	186
3	101	340	360	407	380	427	400	346	366
4	131	572	598	659	624	685	650	580	606
6	191	1216	1254	1343	1292	1381	1330	1228	1266
8	251	2100	2150	2267	2200	2317	2250	2116	2166
9	281	2632	2688	2819	2744	2875	2800	2650	2706
10	311	3224	3286	3431	3348	3493	3410	3244	3306
13	401	5360	5440	5627	5520	5707	5600	5386	5466
14	431	6192	6278	6479	6364	6565	6450	6220	6306
15	461	7084	7176	7391	7238	7483	7360	7114	7206
16	491	8036	8134	8363	8232	8461	8330	8068	8166
17	521	9048	9152	9395	9256	9499	9360	9082	9186
21	641	13696	13824	14123	13952	14251	14080	13738	13866
23	701	16380	16520	16847	16660	16987	16800	16426	16566
25	761	19304	19456	19811	19608	19963	19760	19354	19506
27	821	22468	22632	23015	22796	23179	22960	22522	22686
29	881	25872	26048	26459	26224	26635	26400	25930	26106
30	911	27664	27846	28271	28028	28453	28210	27724	27906
31	941	29716	29704	30143	29892	30331	30080	29578	29766
32	971	31428	31622	32075	31816	32269	32010	31492	31686

Proble-

Problema generale VI.

Propoſito diuiſore $30a - 11$, pro ſingulis reſiduis r inuenire quotos q, vt formula $30q + r$ diuiſibilis fiat per $30a - 11$.

Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $30.30aa - 30.22a + 121$, erit $q = 30aa - 22a + 4$ et $r = 1$ vnde ad numerum $(30aa - 22a + 4)^{(q)} + 1^{(r)}$ continuo addi debemus formulam $60a - 22 = 2a^{(q)} - 22^{(r)}$ ſeu $(2a - 1)^{(q)} + 8^{(r)}$, vti ex ſequente calculo conſtat

q	-	r
$30aa - 22a + 4$	-	1
$30aa - 20a + 3$	-	9
$30aa - 18a + 2$	-	17
$30aa - 16a + 1$	-	25
$30aa - 14a + 1$	-	3
$30aa - 12a - 0$	-	11
$30aa - 10a - 1$	-	19
$30aa - 8a - 2$	-	27
$30aa - 6a - 2$	-	5
$30aa - 4a - 3$	-	13
$30aa - 2a - 4$	-	21
$30aa - 0a - 5$	-	29
$30aa + 2a - 5$	-	7
$30aa + 4a - 6$	-	15
$30aa + 6a - 7$	-	23
$30aa + 8a - 7$	-	1.

Quotos autem hinc pro ſingulis noſtris reſiduis ordine hic diſponamus

r	q
1	$30aa - 22a + 4 + n(30a - 11)$
7	$30aa + 2a - 5 + n(30a - 11)$
11	$30aa - 12a - 0 + n(30a - 11)$
13	$30aa - 4a - 3 + n(30a - 11)$
17	$30aa - 18a + 2 + n(30a - 11)$
19	$30aa - 10a - 1 + n(30a - 11)$
23	$30aa + 6a - 7 + n(30a - 11)$
29	$30aa - 0a - 5 + n(30a - 11)$.

Cum nunc diuiſor noſter $30a - 11$ ſit formae $30q + 19$, ex tabula noſtra excerpantur omnes numeri primi huius formae, et pro ſingulis erit $a = q + 1$, vnde conſtruitur ſequens tabula

a	Diuiſor	1	7	11	13	17	19	23	29
1	19	12	27	18	23	14	19	29	25
3	79	208	271	234	255	218	239	281	265
4	109	396	483	432	461	410	439	497	475
5	139	644	755	690	727	662	699	773	745
7	199	1320	1479	1386	1439	1346	1399	1505	1465
8	229	1748	1931	1824	1885	1778	1839	1961	1915
12	349	4060	4339	4176	4269	4106	4199	4385	4315
13	379	4788	5091	4914	5015	4838	4939	5141	5065
14	409	5576	5903	5712	5821	5630	5739	5957	5875
15	439	6424	6775	6570	6687	6482	6599	6833	6745
17	499	8300	8699	8466	8599	8366	8499	8867	8665
21	619	12772	13267	12978	13143	12854	13019	13349	13225
24	709	16756	17323	16992	17181	16850	17039	17417	17275
25	739	18204	18795	18450	18647	18302	18499	18893	18745
26	769	19712	20327	19968	20173	19814	20019	20429	20275
28	829	22908	23571	23184	23405	23018	23239	23681	23515
29	859	24596	25283	24882	25101	24710	24939	25397	25225
31	919	28152	28887	28458	28703	28274	28519	29009	28825
34	1009	33936	34743	34272	34541	34070	34339	34877	34675

Problema generale VII.

Propoſito diuiſore $30a + 13$, pro ſingulis reſiduis r inuenire quotos q, vt formula $30q + r$ diviſibilis fiat per $30a + 13$.

Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuiſore ſignandus ſit $30.30aa + 30.26a + 169$, pro quo erit $q = 30aa + 26a + 5$ et $r = 19$ nunc igitur ad formulam $(30aa + 26a + 5)^{(q)} + 19^{(r)}$ con-

 tinuo

tinuo addatur numerus $60a + 26 = 2a^{(q)} + 26^{(r)}$ siue $(2a + 1)^{(q)} - 4^{(r)}$, vnde iste nascitur calculus:

q	-	r
$30aa + 26a + 5$	-	19
$30aa + 28a + 6$	-	15
$30aa + 30a + 7$	-	11
$30aa + 32a + 8$	-	7
$30aa + 34a + 9$	-	3
$30aa + 36a + 9$	-	29
$30aa + 48a + 10$	-	25
$30aa + 40a + 11$	-	21
$30aa + 42a + 12$	-	17
$30aa + 44a + 13$	-	13
$30aa + 46a + 14$	-	9
$30aa + 48a + 15$	-	5
$30aa + 50a + 16$	-	1
$30aa + 52a + 16$	-	27
$30aa + 54a + 17$	-	23
$30aa + 56a + 18$	-	19.

Nunc autem pro singulis residuis r quoti q ita colliguntur, vti sequitur:

r	q
1	$30aa + 50a + 16 + n(30a + 13)$
7	$30aa + 32a + 8 + n(30a + 13)$
11	$30aa + 30a + 7 + n(30a + 13)$
13	$30aa + 44a + 13 + n(30a + 13)$
17	$30aa + 42a + 12 + n(30a + 13)$
19	$30aa + 26a + 5 + n(30a + 13)$
23	$30aa + 54a + 17 + n(30a + 13)$
29	$30aa + 36a + 9 + n(30a + 13)$.

Cum

Cum nunc diuiſor $30a+13$ ſit formae $30q+13$, ex tabula noſtra excerpantur ordine numeri primi illic expoſitae, eritque $a=q$, vnde ſequens tabula generalis conſtruitur:

a	Diuiſor	1	7	11	13	17	19	23	29
0	13	16	8	7	13	12	5	17	9
1	43	96	70	67	87	84	61	101	75
2	73	236	192	187	221	216	177	245	201
3	103	436	374	367	415	408	353	449	387
5	163	1016	918	907	983	972	885	1037	939
6	193	1396	1280	1267	1357	1344	1241	1421	1305
7	223	1836	1702	1687	1791	1776	1657	1865	1731
9	283	2896	2726	2707	2839	2820	2669	2933	2763
10	313	3516	3328	3307	3453	3432	3265	3557	3369
12	373	4936	4712	4687	4861	4836	4637	4985	4761
14	433	6596	6336	6307	6509	6480	6249	6653	6393
15	463	7516	7238	7207	7423	7392	7145	7577	7299
17	523	9536	9222	9187	9431	9396	9117	9605	9291
20	613	13016	12648	12607	12893	12852	12525	13097	12729
21	643	14296	13910	13867	14167	14124	13781	14381	13995
22	673	15636	15232	15187	15501	15456	15097	15725	15321
24	733	18496	18056	18007	18349	18300	17909	18593	18153
27	823	23236	22742	22687	23071	23016	22577	23345	22851
28	853	24936	24424	24367	24765	24708	24253	25049	24537
29	883	26696	26166	26107	26519	26460	25989	26813	26283

Problema generale VIII.

Propoſito diuiſore $30a-13$ pro ſingulis reſiduis r inuenire quotos q formulam $30q+r$ diuiſibilem reddentes per $30a-13$.

Solutio.

Solutio.

Cum minimus numerus hoc diuisore signandus sit $30 \cdot 30aa - 30 \cdot 26a + 169$, erit $q = 30aa - 26a + 5$ et $r = 19$, vnde ad numerum $(30aa - 26a + 5)^{(q)} + 19^{(r)}$ continuo addi debet formula $60a - 26 = 2a^{(q)} - 26^{(r)}$ seu $(2a - 1)^{(q)} + 4^{(r)}$ vti sequens calculus declarat

q	-	r
$30aa - 26a + 5$	-	19
$30aa - 24a + 4$	-	23
$30aa - 22a + 3$	-	27
$30aa - 20a + 3$	-	1
$30aa - 18a + 2$	-	5
$30aa - 16a + 1$	-	9
$30aa - 14a + 0$	-	13
$30aa - 12a - 1$	-	17
$30aa - 10a - 2$	-	21
$30aa - 8a - 3$	-	25
$30aa - 6a - 4$	-	29
$30aa - 4a - 4$	-	3
$30aa - 2a - 5$	-	7
$30aa + 0a - 6$	-	11
$30aa + 2a - 7$	-	15
$30aa + 4a - 8$	-	19.

Quo-

Quotos autem hinc pro ſingulis noſtris reſiduis r ordine hic exponamus

r	q
1	$30aa - 20a + 3 + n(30a - 13)$
7	$30aa - 2a - 5 + n(30a - 13)$
11	$30aa + 0a - 6 + n(30a - 13)$
13	$30aa - 14a + 0 + n(30a - 13)$
17	$30aa - 12a - 1 + n(30a - 13)$
19	$30aa - 26a + 5 + n(30a - 13)$
23	$30aa - 24a + 4 + n(30a - 13)$
29	$30aa - 6a - 4 + n(30a - 13)$.

Cum diuiſor ille $30a - 13$ in forma $30q + 17$ ſit contentus, ex tabula prima excerpantur ordine numeri primi formulae $30q + 17$, eritque pro ſingulis $a = q + 1$ hincque ſequens *tabula generalis* conſtruatur.

a	Diuiſor	1	7	11	13	17	19	23	29
1	17	13	23	24	16	17	9	10	20
2	47	83	111	114	92	95	73	76	104
4	107	403	467	474	424	431	381	388	452
5	137	653	735	744	680	689	625	634	716
6	167	963	1063	1074	996	1007	929	940	1040
7	197	1333	1451	1464	1372	1385	1293	1306	1224
8	227	1763	1899	1914	1808	1823	1817	1732	1868
9	257	2253	2407	2424	2304	2321	2201	2218	2372
11	317	2413	3603	2624	3476	3497	3349	3370	3560
12	347	4083	4291	4314	4152	4175	4013	4036	4244
16	467	7363	7643	7674	7456	7487	7279	7300	7580
19	557	10453	10787	10824	10564	10601	10341	10378	10712
20	587	11603	11955	11994	11720	11759	11485	11524	11876
21	617	12813	13183	13224	12936	12977	12689	12730	13100
22	647	14083	14471	14514	14212	14255	13953	13996	14384
23	677	15513	15819	15864	15548	15593	15277	15322	15728
27	797	21333	21811	21864	21492	21545	21173	21226	21704
28	827	22963	23459	23514	23128	23183	22797	22852	23348
29	857	24653	25167	25224	24824	24881	24481	24538	25052
30	887	26403	26935	26994	26580	26639	26225	26284	26816
32	947	30083	30651	30714	30272	30335	29893	29956	30524
33	977	32013	32599	32664	32208	32273	31817	31882	32468

Scholion generale.

Quoniam diuiſores primos maiores in tabulam numerorum primorum introduci non conuenit, niſi omnes minores iam fuerint expediti, omnino neceſſe eſt, vt ex octo tabulis praecedentibus vna tabula maxime

xime generalis conficiatur, in qua pro omnibus diuiſoribus primis ordine diſpoſitis minimi quoti q exhibeantur ſingulis noſtris octo reſiduis reſpondentes, quorum areolae ſingulis illis diuiſoribus ſignari debent.

TABVLA AVXILIARIS VNIVERSALIS

pro omnibus diuiſoribus primis a 7 vsque ad 1000 continuatis, minimos quotos q exhibens ſingulis octo reſiduis reſpondentes.

Diuiſores	Reſidua 1	7	11	13	17	19	23	29
7	3	7	5	4	2	1	6	3
11	4	6	11	8	13	10	4	6
13	16	8	7	13	12	5	17	9
17	13	23	24	16	17	9	10	20
19	12	27	18	23	14	19	29	25
23	36	22	28	31	37	17	23	32
29	28	51	47	45	41	39	35	29
31	31	38	42	44	48	50	54	60
37	53	75	65	60	50	45	72	57
41	56	64	83	72	91	80	58	66
43	96	70	67	87	84	61	101	75
47	83	101	114	92	95	73	76	104
53	136	104	118	125	139	93	107	128
59	116	163	155	151	143	139	131	119
61	124	136	144	148	156	160	168	180
67	163	203	185	176	158	149	198	171
71	168	182	215	196	229	210	172	186

 Diui-

Diuisores	1	7	11	13	17	19	23	29
73	236	192	187	221	216	177	245	201
79	208	271	234	255	218	239	281	265
83	296	246	268	279	301	229	251	284
89	264	335	323	317	305	299	287	269
97	333	391	365	352	308	313	384	345
101	342	360	407	380	427	400	346	366
103	436	374	367	415	408	353	449	387
107	403	467	474	424	431	381	388	452
109	396	483	432	461	410	439	497	475
113	516	448	478	493	523	425	455	460
127	563	639	605	588	554	537	630	579
131	572	598	659	624	685	650	580	606
137	653	735	744	680	689	625	634	716
139	644	755	690	727	662	699	773	745
149	740	859	839	829	809	799	779	749
151	760	790	810	820	840	850	870	900
157	853	947	905	884	842	821	936	873
163	1016	918	907	983	972	885	1037	939
167	96[illegible]	1063	1074	996	1007	929	940	1040
173	1136	1032	1078	1101	1147	997	1043	1112
179	1068	1211	1187	1175	1151	1139	1115	1079
181	1092	1128	1152	1164	1188	1200	1224	1260
191	1216	1254	1343	1292	1381	1330	1228	1266
193	1396	1280	1267	1357	1344	1241	1421	1305
197	1333	1451	1464	1372	1385	1293	1306	1224
199	1320	1479	1386	1439	1346	1399	1505	1465
211	1484	1526	1554	1568	1596	1610	1638	1680
223	1836	1702	1687	1791	1776	1657	1865	1731
227	1763	1899	1914	1808	1823	1817	1732	1868

Diui-

Diuisore	1	7	11	13	17	19	23	29
229	1748	1931	1824	1885	1778	1839	1961	1915
233	1796	1856	1918	1949	2011	1809	1871	1876
239	1904	2095	2063	2047	2015	1999	1967	1919
241	1936	1984	2016	2032	2064	2080	2112	2160
251	2100	2150	2267	2200	2317	2250	2116	2166
257	2253	2407	2424	2304	2321	2201	2218	2372
263	2516	2358	2428	2463	2533	2305	2375	2480
269	2412	2627	2591	2573	2537	2519	2483	2429
271	2448	2502	2538	2556	2592	2610	2646	2700
277	2613	2779	2705	2668	2594	2557	2760	2649
281	2632	2688	2819	2744	2875	2800	2650	2706
283	2896	2726	2707	2839	2820	2669	2933	2763
293	3096	2920	2998	3037	3115	2861	2939	3056
307	3203	3387	3305	3264	3182	3141	3366	3243
311	3224	3286	3431	3348	3493	3410	3244	3306
313	3516	3328	3307	3453	3432	3265	3557	3369
317	3413	3603	3624	3476	3497	3349	3370	3560
331	3652	3718	3762	3784	3828	3850	3894	3960
337	3853	4055	3965	3920	3830	3785	4032	3897
347	4083	4291	4314	4152	4175	4013	4036	4244
349	4060	4339	4176	4269	4106	4199	4385	4315
353	4436	4224	4318	4365	4181	4153	4247	4388
359	4296	4583	4535	4511	4463	4439	4391	4319
367	4563	4783	4685	4636	4538	4489	4758	4611
373	4936	4712	4687	4861	4836	4637	4985	4761
379	4788	5091	4914	5015	4838	4939	5141	5065
383	5206	4966	5068	5119	5221	4889	4991	5144
389	5044	5355	5303	5277	5225	5199	5147	5069
397	5333	5571	5465	5412	5306	5253	5544	5385

Diuifores	1	7	11	13	17	19	23	29
401	5360	5440	5627	5520	5707	5600	5386	5466
409	5576	5903	5712	5821	5630	5739	5957	5875
419	5852	6187	6131	6103	6047	6019	5963	5879
421	5908	5992	6048	6076	6132	6160	6216	6300
431	6192	6278	6479	6364	6565	6450	6220	6306
433	6596	6336	6307	6509	6480	6249	6653	6393
439	6424	6775	6570	6687	6482	6599	6833	6745
443	6896	6630	6748	6693	6575	6541	6659	6836
449	6720	7079	7019	6989	6929	6899	6839	6749
457	7053	7327	7205	7144	7022	6961	7296	7113
461	7084	7176	7391	7238	7483	7360	7114	7206
463	7516	7238	7207	7423	7392	7145	7577	7299
467	7363	7643	7674	7456	7487	7279	7300	7580
479	7648	8031	7967	7935	7871	7839	7775	7679
487	8003	8295	8165	8100	7970	7905	8262	8067
491	8036	8134	8363	8232	8461	8330	8068	8166
499	8300	8699	8466	8599	8366	8499	8867	8665
503	8836	8534	8668	8734	8869	8433	8567	8768
509	8636	9043	8975	8941	8873	8839	8771	8669
521	9048	9152	9395	9256	9499	9360	9082	9186
523	9536	9222	9187	9431	9396	9117	9605	6291
541	9756	9864	9936	9972	10044	10080	10152	10260
547	10083	10411	10265	10192	10046	9973	10374	10155
557	10453	10787	10824	10564	10601	10341	10378	10712
563	11016	10678	10828	10903	11053	10565	10715	10940
569	10792	11247	11171	11133	11057	11019	10943	10829
571	10868	10982	11058	11096	11172	11210	11286	11400
577	11213	11559	11405	11328	11174	11097	11520	11289
587	11603	11955	11994	11720	11759	11485	11524	11876

Diui-

Diuisores	1	7	11	13	17	19	23	29
593	12196	11840	11998	12077	12235	11721	11879	12116
599	11960	12439	12359	12319	12239	12199	12119	11999
601	12040	12160	12240	12280	12360	12400	12480	12600
607	12403	12767	12605	12524	12362	12281	12726	12483
613	13016	12648	12607	12893	12852	12525	13097	12729
617	12813	13183	13224	12936	12977	12689	12730	13100
619	12772	13267	12978	13143	12854	13019	13349	13225
631	13272	13398	13482	13524	13608	13650	13734	13860
641	13696	13824	14123	13952	14251	14080	13738	13866
643	14296	13910	13867	14167	14124	13781	14381	13995
647	14083	14471	14514	14212	14255	13953	13996	14384
653	14736	14344	14518	14605	14779	14213	14387	14648
659	14476	15003	14915	14871	14783	14739	14651	14519
661	14564	14696	14784	14828	14916	14960	15048	15180
673	15636	15232	15187	15501	15456	15097	15725	15321
677	15513	15819	15864	15548	15593	15277	15322	15728
683	16096	15686	15868	15959	16141	15549	15731	16004
691	15916	16054	16146	16192	16284	16330	16422	16560
701	16380	16520	16847	16660	16987	16800	16426	16566
709	16756	17323	16992	17181	16850	17039	17417	17275
719	17232	17807	17711	17663	17567	17519	17423	17279
727	17763	18199	18005	17908	17714	17617	18150	17859
733	18496	18056	18007	18349	18300	17909	18593	18153
739	18204	18795	18450	18647	18302	18499	18893	18745
743	18996	18550	18748	18847	19045	18401	18599	18896
751	18800	18950	19050	19100	19200	19250	19350	19500
757	19253	19707	19505	19404	19202	19101	19656	19353
761	19304	19456	19811	19608	19963	19760	19354	19506
769	19712	20327	19968	20173	19814	20019	20429	20275

Diui-

Diuiſores	1	7	11	13	17	19	23	29
773	20536	20072	20278	20381	20587	19917	20123	20430
787	20803	21275	21065	20960	20750	20645	21222	20907
797	21333	21811	21864	21492	21545	21173	21226	21704
809	21816	22463	22355	22301	22193	22139	22031	21869
811	21924	22086	22194	22248	22356	22410	22518	22680
821	22468	22632	23015	22796	23179	22960	22521	22686
823	23236	22742	22687	23071	23016	22577	23345	22851
827	22963	23459	23514	23128	23183	22797	22852	23348
829	22908	23571	23184	23405	23018	23239	23681	23515
839	23464	24135	24023	23967	23855	23799	23687	23519
853	24936	24424	24367	24765	24708	24253	25049	24537
857	24653	25167	25224	24824	24881	24481	24538	25052
859	24596	25283	24882	25101	24710	24939	25397	25225
863	25516	24998	25228	25343	25573	24825	25055	25400
877	25813	26339	26105	25988	25754	25637	26280	25929
881	25872	26048	26459	26224	26635	26400	25930	26106
883	26696	26166	26107	26519	26460	25989	26813	26283
887	26403	26935	26994	26580	26639	26225	26284	26816
907	27603	28147	27905	27784	27542	27421	28086	27723
911	27664	27846	28271	28028	28453	28210	27724	27906
919	28152	28887	28458	28703	28274	28519	29009	28825
929	28768	29511	29387	29325	29201	29139	29015	28829
937	29453	30015	29765	29640	29390	29265	29952	29577
941	29716	29704	30143	29892	30331	30080	29578	29766
947	30083	30651	30714	30272	30335	29893	29956	30524
953	31036	30464	30718	30845	31099	30273	30527	30908
967	31363	31943	31685	31556	31298	31169	31878	31491
971	31428	31622	32075	31816	32269	32010	31492	31686
977	32013	32599	32664	32208	32273	31817	31882	32468

Diui-

Diuisores	1	7	11	13	17	19	23	29
983	32996	32406	32668	32799	33061	32209	32471	32864
991	32736	32934	33066	33132	33264	33330	33462	33660
997	33333	33931	33665	33532	33266	33133	33864	33465
1009	33936	34743	34272	34541	34070	34339	34877	34675

Problema.

Tabulam numerorum primorum quousque libuerit continuare, quae ſimul omnium numerorum non primorum diuiſores minimos exhibeat.

Solutio.

Ante omnia in ſingulis paginis quotquot erit opus lineae illae tam verticales quam horizontales quae in pagina hic annexa cernuntur, erunt ducendae; Qui labor, cum per ſe eſſet immenſus, eum commodiſſime in typographia exſequi licebit; vbi omnes paginae talibus retibus ſignatae breui temporis ſpatio excudi poterunt. Quin etiam, cum ſingulae paginae in ſuprema linea horizontali octo noſtra reſidua 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 referant, ea ſtatim in omnibus paginis ſimul typo exprimi conveniet. Deinde quia primae columnae verticales quotos q ordine numerorum naturali procedentes complectuntur eorumque quinquaginta ſingulis paginis inſeri debent, horum numerorum binae poſtremae notae etiam in typographia adiungi poterunt: dum alternatim numeri 00, 01, 02, 03, 04, 05 vsque ad 49, tum vero 50, 51, 52, 53 etc. vsque ad 99 in his primis columnis repraesentuntur, quibus deinceps centuriae seu notae praecedentes facili negotio calamo praefiguntur; vbi quidem sufficiet, hoc in solo supremo loco notasse. Quibus praeparatis singuli diuisores primi 7, 11, 13, 17 etc. ordine areolis suis per omnes paginas inscribantur. A septenario igitur erit incipiendum, qui, cum in prima columna residuum referente primum quoto $q = 3$ adscribi debeat, sequentes quoti continuo septenario augendi pariter numero 7 designari debebunt, qui labor facile per omnes sequentes tabulas continuabitur; similique modo pro reliquis 11, 13, 17 etc. hoc opus absoluetur. Deinde eodem modo diuisor 11 per omnes paginas pro singulis residuis areolis debitis inscribatur, si quidem adhuc erunt vacuae; tum vero pari modo negotium pro omnibus sequentibus diuisoribus primis instituatur; scilicet si ad diuisorem quemcunque primum qui sit D fuerit peruentum, pro eo tabula praecedens generalis minimos praebet quotos q, singulis octo residuis r respondentes; quibus notatis in singulis columnis eae areolae hoc diuisore D signentur, quae respondebunt quotis $q + D$, $q + 2D$, $q + 3D$, $q + 4D$ etc. donec ad finem perueniatur; vbi autem iste diuisor D primum in his tabulis occurret, omnes areolae praecedentes signo numerorum primorum p impleantur: ita si hae tabulae non vltra vnum millionem extendi debeant, vltimus diuisor primus erit 997 et vltimus quotus $q = 33333$; sicque totum hoc negotium ad finem erit perductum. Tum igitur si numerus quicunque

M mil-

M millionem non ſuperans examinandus proponatur, is per 30 diuiſus praebeat quotum $= q$ et reſiduum $= r$; quibus binis valoribus in tabula quaeratur areola reſpondens, et numerus ibi ſignatus oſtendet minimum diuiſorem iſtius numeri: ſin autem in ea areola reperiatur littera p, id erit ſignum, propoſitum numerum M eſſe primum.

Quo autem hoc opus, quod vtique multum temporis poſtularet, ſi ab vna perſona abſolui deberet, facilius exſequi liceat, totum laborem plures perſonae commode inter ſe partiri poterunt, dum quilibet certum penſum abſoluendum ſuſcipiet. Ita cum hae tabulae, ſi quidem ad vnum millionem ſint extendendae, vsque ad quotum $q = 33400$ continuari debeant, totus labor in ſeptem penſa diſtribui poterit, quorum primum a $q = 0$ vsque ad 5000, ſecundum ab hoc termino vsque ad $q = 10000$, tertium ab hoc vsque ad $q = 15000$, quartum ab hoc termino vsque ad $q = 20000$, quintum ab hoc vsque ad $q = 25000$, ſextum ab hoc termino vsque ad $q = 30000$ et ſeptimum ab hoc termino vsque ad finem porrigetur. Hoc pacto, quia ſingulae paginae quinquaginta valores ipſius q complectuntur, in quolibet penſo habebuntur centum paginae adimplendae.

Poſteriora quidem penſa continuo plus laboris requirent: quia in iis plures diuiſores occurrunt. Quo hoc clarius appareat, ponamus penſum aliquod incipere a valore $q = A$, et quia ſemper a diuiſoribus minimis ordine procedi opportet, pro quolibet diui-

 ſore

fore D ante omnia quaeratur eius multiplum proxime minus quam A, quod fit mD; tum iftud multiplum mD addatur ad valores omnes ipfius q in noftra tabula diuifori D refpondentes. Sicque habebuntur totidem areolae quibus ifte diuifor primus D erit infcribendus; fequentes autem areolae facillime obtinentur, dum illi primi valores ipfius q continuo ipfo diuifore D augentur. Harum regularum ope duas vltimas paginas huiusmodi tabularum expediuimus, quae valores ipfius q a termino 33300 vsque ad 33400 complectuntur.

Scholion.

Quanquam ope tabulae noftrae auxiliaris omnes diuifores primi haud difficulter in tabulam numerororum primorum inferuntur: tamen, quando iam ad diuifores primos maiores fuerit peruentum, etiam alio modo eorum infertio in hanc tabulam perfici poterit; id quod imprimis pro diuiforibus maximis laborem mirifice diminuit. Sit enim A diuifor quicunque primus maior quam 100, qui, quia primum infcribitur areolae numero A A refpondenti, deinceps tantum pro huiusmodi productis A B locum inueniet, vbi alter factor B dum ipfe maior quam A nullum habet diuiforem ipfo numero A minorem. Quare cum A $>$ 100, numerus B non maior erit quam 10000; vnde, nifi is fuerit primus, diuiforem habebit centenario minorem, qui ergo tabulae infcribi deberet non autem numerus A; quam ob rem ifte diuifor A tum tantum erit infcribendus, quando factor

11	13	17	19	23	29
67	307	7	13	23	29
p	463	*p*	11	337	7
11	7	*p*	*p*	47	*p*
7	17	101	*p*	277	*p*
479	*p*	11	*p*	7	13
23	433	*p*	*p*	19	*p*
p	53	*p*	7	11	131
p	*p*	7	109	809	17
673	13	73	373	*p*	7
467	7	19	179	*p*	23
7	11	59	29	409	*p*
17	227	*p*	*p*	7	*p*

Pro fing
areolis inf

q	1	7	11	13	17	19	23	29
33300	19	p	13	347	p	7	p	p
01	11	13	71	p	7	127	11	107
02	7	p	83	17	19	29	p	7
03	p	11	p	7	17	p	79	11
04	191	229	7	p	29	p	23	p
05	73	821	31	11	13	p	7	199
06	p	7	19	13	p	p	89	17
07	41	p	p	31	541	7	p	p
08	61	383	11	29	7	37	223	p
09	7	17	23	59	p	331	41	7
10	181	p	17	7	11	641	13	p
11	p	233	7	19	31	13	163	p
12	11	911	p	23	p	17	7	p
13	97	7	13	83	37	31	17	19
14	53	11	p	p	p	7	73	11
15	p	19	503	601	7	151	257	13
16	7	107	p	11	499	p	191	7
17	23	281	p	7	53	p	19	41
18	p	193	7	p	13	11	499	83
19	19	199	11	13	79	73	7	p
20	29	7	p	p	17	157	p	37
21	p	59	149	47	11	7	p	29
22	13	p	p	479	7	163	p	137
23	7	953	107	37	43	223	11	7
24	p	599	p	7	47	13	653	p
25	31	11	7	p	173	p	p	11
26	p	17	13	43	433	19	7	p
27	487	7	17	11	139	167	23	283
28	67	467	37	p	109	7	p	13
29	p	691	73	p	7	11	71	307
30	7	47	11	19	p	991	17	7
31	p	113	577	7	13	29	p	233
32	p	31	7	13	11	p	p	19
33	17	757	101	p	29	p	7	47
34	11	7	41	p	p	p	11	353
35	13	53	79	23	83	7	37	197
36	p	11	31	17	7	p	13	11
37	7	p	p	29	17	13	p	7
38	19	37	p	7	617	p	53	p
39	p	71	7	p	p	263	p	p
40	23	13	p	p	19	11	7	17
41	p	7	11	67	23	p	p	13
42	p	191	89	p	31	7	941	p
43	p	17	47	p	7	43	p	71
44	7	701	17	p	13	23	107	7
45	11	p	97	7	p	19	11	p
46	p	181	7	p	p	17	p	p
47	269	11	907	p	p	p	7	11
48	13	7	563	p	p	173	31	769
49	29	23	43	11	311	7	13	523

q	1	7	11	13	17	19	23	29
33350	17	p	67	307	7	13	23	29
51	7	p	p	463	p	11	337	7
52	157	43	11	7	p	p	47	p
53	37	13	7	17	101	p	277	p
54	p	89	479	p	11	p	7	13
55	p	7	23	433	p	p	19	p
56	11	41	p	53	p	7	11	131
57	19	421	p	p	7	109	809	17
58	7	11	673	13	73	373	p	7
59	47	p	467	7	19	179	p	23
60	p	17	7	11	59	29	409	p
61	13	397	17	227	p	p	7	p
62	p	7	569	241	29	11	13	p
63	23	31	11	73	p	7	67	p
64	p	839	p	41	7	19	17	61
65	7	197	13	571	11	p	p	7
66	p	13	419	7	43	p	p	79
67	11	p	7	p	p	23	11	13
68	p	67	29	19	103	137	7	p
69	61	7	127	31	p	p	p	11
70	971	p	181	17	13	7	p	19
71	149	97	p	11	7	491	p	p
72	7	19	59	p	p	41	37	7
73	p	p	233	7	31	11	23	p
74	13	337	7	131	p	251	19	17
75	359	37	41	103	p	31	7	p
76	19	7	p	113	11	13	p	163
77	p	17	p	p	p	7	137	89
78	11	p	13	p	7	439	11	p
79	7	13	p	109	p	p	31	7
80	p	11	p	7	229	17	887	11
81	p	61	7	23	p	67	17	p
82	353	p	19	11	193	37	7	23
83	p	7	p	157	13	19	43	p
84	17	p	p	13	283	7	367	p
85	p	547	11	p	7	p	29	31
86	7	p	p	p	71	43	953	7
87	13	101	p	7	11	p	73	p
88	79	53	7	937	17	p	13	p
89	11	983	61	p	p	13	7	19
90	37	7	47	p	67	23	p	701
91	311	11	13	p	29	7	41	11
92	59	13	43	139	7	73	p	347
93	7	p	p	11	p	p	19	7
94	p	17	p	7	241	p	127	37
95	19	23	7	29	601	11	89	59
96	71	271	11	83	13	47	7	p
97	p	7	29	13	19	17	p	223
98	p	p	31	p	11	7	17	359
99	113	p	p	p	7	p	47	41

tor B fuerit numerus primus. Hinc igitur propoſito huiusmodi diuiſore primo A, pro B excerpantur ex noſtra tabula omnes numeri primi maiores quam A, eo vsque, donec productum A B ſuperet vnum millionem; hisque omnibus productis in tabula noſtra inſcribi debebit numerus A, vtpote minimus eorumdiuiſor primus. Quo autem haec operatio facilius ad formam noſtram numerorum generalem $30q+r$ reuocari poſſit, ponamus eſſe $A=30a+\alpha$ et $B=30b+\beta$, et quia productum erit $30^2ab+30a\beta+30b\alpha+\alpha\beta$, vbi ſit $\alpha\beta=30x+y$, hoc productum in forma $30q+r$ continebitur, ſumendo $q=30ab+a\beta+b\alpha+x$ et $r=y$, conſequenter areolae huic formae reſpondenti inſcribi debebit diuiſor primus A; quod quo exemplo illuſtremus, proponatur numerus $A=907$ et excerpantur ex noſtra tabula prima pro B ſequentes numeri primi

B		B		B	
$30^{(b)}$	$11^{(\beta)}$	$33^{(b)}$	$1^{(\beta)}$	$35^{(b)}$	$1^{(\beta)}$
30	19	33	7	35	11
30	29	33	19	35	13
31	7	33	23	35	19
31	11	33	29	36	7
31	17	34	1	36	11
31	23	34	11	36	13
32	7	34	13	36	17
32	11	34	19	36	33
32	17	34	29	36	29
32	23				

Pro ſingulis igitur productis hinc natis diuiſor 907 areolis inſcribi debet.

Scholion.

Ex binis poſtremis tabulis iam omnes numeri inter limites 999000 et 1002000 examinari poſſunt, vtrum ſint primi nec ne: et caſu poſteriore ſimul eorem diuiſores minimi innoteſcunt. Patet igitur, intra hoc interuallum omnino 228 numeros primos contineri, ex quibus eos, qui vnum millionem ſuperant, operae pretium erit hic exhibere, quandoquidem alia via nondum patet, tam ingentes numeros primos aſſignandi.

Numeri primi vno millione maiores.

1000003	1000429	1000999	1001467
1000009	1000453	1001003	1001491
1000033	1000457	1001017	1001501
1000037	1000507	1001023	1001519
1000039	1000537	1001027	1001527
1000081	1000541	1001041	1001531
1000099	1000547	1001069	1001549
1000117	1000577	1001087	1001551
1000121	1000579	1001089	1001563
1000133	1000589	1001093	1001569
1000151	1000609	1001107	1001587
1000159	1000619	1001123	1001591
1000169	1000621	1001141	1001593
1000171	1000633	1001153	1001621
1000183	1000639	1001159	1001629
1000187	1000651	1001173	1001639
1000193	1000667	1001177	1001659
1000199	1000669	1001191	1001669

1000211	1000679	1001197	1001683
1000213	1000691	1001219	1001687
1000231	1000697	1001237	1001713
1000249	1000721	1001267	1001723
1000253	1000723	1001279	1001743
1000261	1000763	1001291	1001783
1000273	1000777	1001303	1001797
1000289	1000793	1001311	1001801
1000291	1000801	1001321	1001807
1000303	1000829	1001323	1001809
1000313	1000847	1001327	1001821
1000333	1000849	1001347	1001831
1000357	1000859	1001353	1001839
1000367	1000861	1001369	1001909
1000379	1000889	1001381	1001911
1000381	1000907	1001387	1001933
1000393	1000919	1001389	1001941
1000397	1000921	1001401	1001947
1000403	1000931	1001411	1001953
1000409	1000969	1001431	1001977
1000423	1000973	1001447	1001981
1000427	1000981	1001459	1001983
			1001989.

DE

DE RESOLVTIONE POLYGONORVM RECTILINEORVM. DISSERTATIO PRIMA.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

I.

Cum a multo inde tempore quae ad reſolutionem triangulorum pertinent, a Geometris dilucide fuerint expoſita, mirari omnino conuenit, cur non vlterius progreſſi ſunt ad reſolutionem nimirum quadrilaterorum et reliquorum Polygonorum. Quod autem communi doctrina Trigonometriae contenti, reſolutionem caeterorum Polygonorum non ſuſceperint, id ea imprimis de cauſſa factum eſſe arbitror, quod reſolutio vniuscuiusque Polygoni ad Trigonometriae regulas reuocari poſſit, Polygonum iſtud in triangula ope diagonalium reſoluendo. Quamuis autem haec reſolutio ab iis, qui principiis Trigonometriae probe imbuti ſunt, facili negotio abſoluatur, tamen ad promotionem ſcientiae pertinere cenſendum eſt, ſi regulae tradantur pro huiusmodi reſolutione generales et a praeceptis Trigonometriae independentes, quam ob rationem multum laudandum eſſe exiſtimo conſilium Cel. *Lambert* qui primus quantum

quantum conſtat, in libro qui inſcribitur: Beyträge zur Mathematik II. Theil, ideam exhibuit Tetragonometriae ſeu doctrinae de reſolutione quadrilaterorum rectilineorum, quam deinceps laudabili induſtria exſecutam eſſe vidimus a Cl. *Iohanne Tob. Mayero* in Diſſertatione quadam Geometrica, Göttingae anno proxime praeterito, euulgata. Interim tamen diffiteri non poſſum, quin reſolutio Pentagonorum vel Polygonorum plurium adhuc laterum ſi eodem modo perficeretur, operoſos et diffuſos valde requireret labores, quapropter qui huiusmodi reſolutionem ſuſcipere vult, de eo praeprimis ſollicitus eſſe debet, vt totam hanc doctrinam ad principia pauciſſima et ſua ſimplicitate maxime conſpicua reuocare queat.

2. Reſolutio autem Polygonorum duplici modo ſuſcipi poteſt, in quouis enim Polygono praeter eas partes, quae ad ipſum eius circuitum pertinent, angulos et latera quibus includitur, conſiderari quoque poſſunt lineae diagonales per quas Polygonum iſtud in triangula reſoluitur, nec non anguli, quos hae lineae diagonales cum ipſis lateribus Polygoni conſtituunt. Quare polygonorum reſolutio vel ita inſtruetur, vt tantum ad partes eius principales, angulos nimirum et latera ipſius circuitum conſtituentia adtendatur, vel etiam in hac reſolutione, conſideratio non modo partium iſtarum principalium ſed linearum quoque diagonalium et angulorum inter has diagonales et latera polygoni, adhiberi poterit. Facile autem liquet ob multiplicem combinationem diagonalium et angulorum ad ipſas pertinentium,

 tam

tam inter ſe, quam cum partibus principalibus Polygoni, poſteriorem iſtum reſolutionis modum valde late patere et pro modico ſatis numero laterum Polygoni, ſolutiones numero plurimas ſuppeditare, quas omnes qui recenſere voluerit, taedioſum non minus quam diffuſum ſuſciperet laborem. De priori vero reſolutionis ſpecie, qua partes circuitum Polygoni includentes, ſolum conſiderantur, ex infra dicendis patebit, eam pro vnoquoque Polygono ad totidem reuocari poſſe aequationes, quot lateribus ipſum Polygonum conſtat, hasque aequationes ope duorum Theorematum aeque elegantium ac late patentium facili negotio elici poſſe; quo ipſo praeſtito iure meritoque contendere licet, reſolutionem Polygoni quotcunque demum fuerit laterum ad difficiliores operationes Analyticas non perducere, quam quibus ipſa Trianguli reſolutio abſoluitur. Praemiſſis etenim binis his Theorematibus generalibus, quae pro omnibus Polygonis aeque valent, per debitam eorum inter ſe combinationem, omnes inuenientur aequationes, quas haec reſolutionis ſpecies requirit, ſicque pro Tetragono quatuor omnino huiusmodi aequationes inuenientur, pro Pentagono quinque, pro Hexagono ſex et in genere pro Polygono numero laterum exiſtente $= n$, aequationes quoque numero n elicientur. Haec ipſa autem in ſequentibus vberius explicabimus, dum hiſce Theorematibus demonſtratis, oſtenderimus quomodo iſta eorum combinatio inſtitui debeat per quam aequationes ad vnumquodque Polygonum pertinentes eliciuntur, nec non quo-

quomodo ope harum aequationum, omnes solutionum casus facile expediri possunt.

3. Theoremata igitur ista fundamenti loco substernenda, ita habentur expressa:

Si polygoni rectilinei anguli externi dicantur α, β, γ, δ, ε . λ *et latera ipsis interiacentia respectiue designentur per* a, b, c, d, e ... l *erit*:

I. $a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) + c \sin.(\alpha+\beta+\gamma) + d \sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots$
$+ l \sin.(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \lambda) = 0$

II. $a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos(\alpha+\beta+\gamma) + d \cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots$
$+ l \cos(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \lambda) = 0.$

Demonstratio.

Repraesentet figura rectilinea A B C D E F G Heptagonum et productis lateribus C B, D C, D E, E F dum lateri A G producto occurrant in H, I, M, O; liquet esse angulum Tab. I. Fig. 2.

$BAH = \alpha$; $HBA = \beta$; $ICH = \gamma$; $LDI = \delta$; $MEO = \varepsilon$;
$OFG = \zeta$; $FGO = \eta$,

tumque latera

A B, B C, C D, D E, E F, F G respectiue indigitari litteris a, b, c, d, e, f, g. Tum vero habebitur:

ang. $CHK = BAH + HBA = \alpha + \beta$
$DIK = CHK + ICH = \alpha + \beta + \gamma$
$360° - DMN = LDI + DIK = \alpha + \beta + \gamma + \delta$
$360 - EOM = 360° - DMN + OEM = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$
$360 - FGO = 360 - EOM + OFG = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta$
$360° = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta.$

 Iam

Iam si ex punctis B, C, D, E, F in A G perpendiculares ducantur B a, C b, D l, E i, F g et ex punctis B, C, E, F ipsi A G parallelae quae rectae D l in b, c, e, f occurrant, fiet

$bl = BA. \sin. BAH = a \sin. \alpha$

$bc = BC. \sin. CBb = BC. \sin. CHK = b \sin. (\alpha + \beta)$

$Dc = CD. \sin. DCc = CD. \sin. DIK = c \sin. (\alpha + \beta + \gamma)$

$De = DE. \sin. DEe = DE. \sin. DMN = -d \sin. (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

$ef = EF. \sin. EFf = EF. \sin. EOM = -e \sin. (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$

$fl = FG. \sin. FGO = -f \sin. (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta)$.

Quum igitur sit:

$$lb + bc + cD - De - ef - fl = 0,$$

erit quoque

$$a \sin. \alpha + b \sin. (\alpha + \beta) + c \sin. (\alpha + \beta + \gamma) + d \sin. (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \\ + e \sin. (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + f \sin. (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta) = 0,$$

cui aequationi si placet adiici poterit terminus

$$g \sin. (\alpha + \beta + \gamma \ldots + \zeta + \eta),$$

quippe qui per se euanescit, existente

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta = 360^\circ.$$

Porro habebimus quoque

$Aa = BA. \cos. BAH = a \cos. \alpha$

$ab = BC. \cos. CBc = -BC. \cos. CHK = -b. \cos. (\alpha + \beta)$

$bl = CD. \cos. DCc = -CD. \cos. CIK = -c. \cos. (\alpha + \beta + \gamma)$

$li = DE. \cos. DEe = -DE. \cos. DMN = -d. \cos. (\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

$ig = EF. \cos. EFf = -EF. \cos. EON = -e. \cos. (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon)$

$Gg = FG. \cos. FGO = f \cos. (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta)$ denique

$AG = g = g \cos. (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta + \eta)$.

Verum

Verum enim vero eſt

$$Aa - ab - bl - li - ig + Gg + AG = 0$$

fiet igitur harum linearum valoribus introductis

$$a \cos\alpha + b \cos(\alpha+\beta) + c \cos(\alpha+\beta+\gamma) + d \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots + g \cos(\alpha+\beta+\gamma \ldots \zeta+\eta) = 0.$$

Demonſtratio haec noſtra licet Heptagono ſolum ſit adcommodata, tamen facile conſtat, demonſtrationem eodem modo adornari poſſe, quodcunque propoſitum fuerit Polygonum, ita vt in genere ſtatuere liceat, pro quocunque Polygono cuius anguli externi ſunt, α, β, γ, δ, ... λ et latera ipſis interiacentia a, b, c, d . . . . l, eſſe

I. $a \sin.\alpha + b \sin(\alpha+\beta) + c \sin.(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + l \sin.(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \lambda) = 0$

II. $a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos.(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + l \cos.(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \lambda) = 0.$

Interim haud ſuperuacaneum erit aliam adhuc adiungere demonſtrationem, quae pro numero laterum Polygoni quocunque valet.

Demonſtratio II.

4. Huius demonſtrationis vis in eo conſiſtet, vt probemus Theoremata noſtra veritati eſſe conſentanea pro Polygono quocunque numero laterum $n+1$, ſi generaliter vera ſint pro quocunque Polygono numero laterum n, ſic enim veritas horum Theorematum pro Polygono quotcunque laterum rite ſibi conſtabit, modo pro Triangulo inconcuſſa maneat. Propoſitum itaque ſit Polygonum A B C D E F G H numero laterum $n+1$, et ducta diago- Tab. I. Fig. 3.

 nali

nali F H per quam triangulum G F H resecatur, ostendemus propositiones supra allatas locum habere pro Polygono A B C D E F G H, si vera fuerint pro Polygono A B C D E F H et pro triangulo F G H. Hunc in finem producta concipiantur latera Polygoni E F, F G, A H et diagonalis H F, tumque dicantur pro Polygono A B C D E F H anguli externi

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots . \lambda, \mu = KFH, \nu = FHM$$

et latera eiusdem Polygoni

$$a, b, c, d \ldots . l, m = HF, n = AH.$$

Pro Polygono autem A B C D E F G H sint anguli externi

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots . \lambda, \mu' = KFG, \pi = LGH, \nu' = GHM$$

latera vero

$$a, b, c, d \ldots . l, m' = FG; p = GH; n = AH.$$

Porro si dicatur angulus $IFG = \Phi$, fiet $180° - \Phi = \mu - \mu'$ ex quo colligitur $\mu' = \mu + \Phi + 180°$, hinc vero obtinebimus

$$\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu') = -\text{cof.}\Phi\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu) + \text{fin.}\Phi\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu)$$

$$\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu') = -\text{cof.}\Phi\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu) - \text{fin}\,\Phi\,\text{fin}\,(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu)$$

$$\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu'+\pi) = -\text{cof.}(\Phi+\pi)\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu) + \text{fin.}(\Phi+\pi)\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu)$$

$$\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu'+\pi) = -\text{cof.}(\Phi+\pi)\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu) - \text{fin.}(\Phi+\pi)\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu).$$

Ex quibus valoribus colligimus

$$m'\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu') + p\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu'+\pi) =$$
$$-\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu)\,(m'\,\text{cof.}\Phi + p\,\text{cof.}(\Phi+\pi)) + \text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \mu)\,(m'\,\text{fin.}\Phi + p\,\text{fin.}(\Phi+\pi));$$

m' fin.

$$m' \text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu')+p\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi) =$$
$$-\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)(m'\text{cof.}\Phi+p\,\text{cof.}(\Phi+\pi))-\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots\mu)$$
$$(m'\text{fin.}\Phi+p\,\text{fin.}(\Phi+\pi)).$$

At pro triangulo G F H eſt

$m'\text{cof.}\Phi+p\,\text{cof.}(\Phi+\pi)=-m$ et $m'\text{fin.}\Phi+p\,\text{fin.}(\Phi+\pi)=0$

quas propoſitiones heic ceu ex Elementis cognitas aſſumere licet, fiet igitur

$$m'\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu')+p\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi)=m\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu) \text{ et}$$
$$m'\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu')+p\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi)=m\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu).$$

Dum igitur habetur pro Polygono A B C D E F H

$$a\,\text{fin.}\alpha+b\,\text{fin.}(\alpha+\beta)+c\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots+m\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)=0$$
$$a\,\text{cof.}\alpha+b\,\text{cof.}(\alpha+\beta)+c\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots+m\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu)+n=0$$

erit itidem pro Polygono A B C D E F G H

$$a\,\text{fin.}\alpha+b\,\text{fin.}(\alpha+\beta)+c\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots+m'\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots\mu')$$
$$+p\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi)=0$$
$$a\,\text{cof.}\alpha+b\,\text{cof.}(\alpha+\beta)+c\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma)\ldots+m'\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots\mu')$$
$$+p\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi)+n=0$$

vbi quidem in priori aequatione adiici poterit terminus

$n\,\text{fin.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi+\nu)$ et in poſteriori, loco n ſcribi $n\,\text{cof.}(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu'+\pi+\nu)$.

Hinc itaque perſpicitur aequationes noſtras locum inuenturas pro Polygono numero laterum $n+1$, ſi generaliter valeant pro Polygono numero laterum n et pro triangulo. Nullum autem eſt dubium, quin pro triangulo ſeu ſimpliciſſima figura rectilinea verae ſint, oportet igitur eas ſimiliter pro quadri-

quadrilatero, hincque pro Pentagono, tumque Hexagono, immo in genere Polygono quotcunque laterum perfecte veras esse.

5. Quum per figuram rectilineam in genere intelligatur spatium lineis rectis vndiquaque terminatum, quaeritur merito an nostra Theoremata etiam valeant pro iis figuris rectilineis, in quibus anguli externi occurrunt, qui binos angulos rectos exsuperant, quos igitur *gibbos* seu conuexos adpellare licebit. Scilicet ex demonstrationibus allatis, iam quidem perspicue intelligitur, pro Polygonis quae in Geometria praeprimis considerari solent, quorum omnes anguli externi sunt *concaui* seu duobus rectis minores, haec Theoremata perfecte valere, vtrum vero aeque feliciter adplicari possint ad Polygona in quibus anguli externi conuexi occurrunt, res nondum ad liquidum perducta esse videtur. Vt autem constet etiam pro huiusmodi Polygonis veritatem nostrorum Theorematum indubiam manere, casus nonnullos simpliciores huiusmodi Polygonorum contemplabimur. Consideremus igitur quadrilaterum A B C D, cuius angulus internus A C D est gibbus seu duobus rectis maior, in hoc autem quadrilatero si productis lateribus A B, B C, A D, litterae α, β, γ, δ adhibeantur ad sequentes designandos angulos:

Tab. I. Fig. 4. n. 1.

$$\alpha = a\text{AB};\ \beta = b\text{BC};\ \gamma = 360^\circ - c\text{CD};\ \delta = d\text{DC}$$

latera autem A B, B C, C D, D A respectiue exprimantur litteris a, b, c, d, patebit omnino esse

α sin.

$a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) + c \sin.(\alpha+\beta+\gamma) + d \sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0$ et
$a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos.(\alpha+\beta+\gamma) + d \cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0$.

Id igitur heic tantum probandum relinquitur, pro angulo externo ex binis lateribus B C, C D formato non ſumi debere angulum D C c, ſed eius complementum ad 360°, id quod ſequenti modo perſpicuum reddetur. Concipiamus per punctum A ductas eſſe lineas A α, A β, A γ quae cum data recta M A N angulos conſtituunt aequales iis, quos A B, B C, C D productae ſi opus ſit, faciunt cum recta A D, vbi quidem obſeruare conuenit, vt quae lineae A B reſpectu A D ſurſum tendenti, ducitur parallela A α, ſupra lineam M A N cadat, quae vero lineis B C, C D deorſum tendentibus aguntur parallelae A β, A γ infra lineam M A N cadere debeant. Hoc facto generatio angulorum externorum pro quadrilatero A B C D commode explicari poteſt per motum rotatorium rectae A M circa punctum A, primus ſcilicet angulus externus $\alpha = a$ A B generabitur, dum A M in ſitum A α peruenerit, deinde angulus externus $\beta = b$ B C orietur quando A α ſitum A β occupauerit, exiſtente b B C $= \alpha$ A β, porro angulus γ producetur dum A β in eundem ſenſum rotando in ſitum A γ perducta fuerit et denique angulus δ habebitur, quando recta A γ rotando primitiuum locum A M occupauerit. Naturae vero rei conueniens eſt, vt hanc rotationem ſeu ſitus mutationem ſupponamus in eundem ſemper fieri ſenſum, quo ſuppoſito omnino liquet eſſe angulum Tab. I. Fig. 4. n. 2.

$$\gamma = \beta \text{ A M} + 180° + \text{N A } \gamma = 360° - \beta \text{ A } \gamma.$$

Iro

Pro quadrilatero vero isthoc A B C D, notare convenit summam omnium angulorum externorum non quatuor angulis rectis, sed duplo eorum aequari, est enim

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=MA\alpha+\alpha A\beta+\beta AM+MA\gamma+\gamma AM,$$

quare quum

$$MA\alpha+\alpha A\beta+\beta AM=360^\circ \text{ itemque}$$

$$MA\gamma+\gamma AM=360^\circ,$$

patet omnino esse

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2.360^\circ.$$

6. Consideremus quoque quadrilaterum A B C D cuius bina latera A B, C D se decussant in
Tab. I. Fig. 5. n. 1. puncto E, productis autem lateribus A D, A B, B C si α, β, γ, δ adhibeantur ad sequentes angulos exprimendos:

$$\alpha=aAB;\ \beta=360^\circ-bBC;\ \gamma=360^\circ-cCD \text{ et } \delta=CDd,$$

fiet iterum

$$a\sin.\alpha+b\sin.(\alpha+\beta)+c\sin.(\alpha+\beta+\gamma)+d\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0$$

tumque

$$a\cos.\alpha+b\cos.(\alpha+\beta)+c\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+d\cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=0,$$

quarum aequationum demonstrationes heic adponere nihil attinet, quum earum ratio ex praecedentibus facile intelligatur. Quod vero pro angulis externis quos lineae A B, B C itemque B C, C D inter se faciunt, non sumi debeant anguli b B C et c C D, sed eorum complementa ad quatuor rectos, simili modo ac supra explicari potest. Ducta scilicet linea

nea recta MN per punctum eius A ducantur lineae Fig. 5. n. 2.
$A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$ quae cum MN angulos conſtituunt reſpectiue aequales iis, quos AB, CD et BC productae cum recta AD faciunt; vbi quidem de ſitu linearum $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$ obſeruandum, quod $A\alpha$ ad partem ſuperiorem ipſius MAN cadat, dum AB reſpectu AD ſurſum tendit, $A\beta$ vero et $A\gamma$ deorſum tendent, quia BC, CD deorſum ducuntur. Tum vero intelligitur eſſe

$$\alpha = a\mathrm{AB} = \mathrm{MA}\alpha;\ \beta = 360^\circ - \mathrm{CB}b = \alpha\mathrm{AN} + \mathrm{NA}\beta$$
$$\gamma = 360^\circ - c\mathrm{CD} = \beta\mathrm{AM} + 180^\circ + \mathrm{NA}\gamma \text{ et } \delta = \mathrm{CD}d = \gamma\mathrm{AM}$$

ita vt omnino ſit

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta = \begin{matrix}\mathrm{MA}\alpha + \alpha\mathrm{AN} + \mathrm{NA}\beta + \beta\mathrm{AM}\\ +180^\circ + \mathrm{NA}\gamma + \gamma\mathrm{AM}\end{matrix} = 2.\ 360^\circ.$$

Quae autem nunc de quadrilateris monuimus, eodem tenore quoque demonſtrantur de figuris quinque, ſex et plurium laterum, modo iſte ſenſus voci anguli externi tribuatur, quem eidem tribuendum eſſe iam oſtendimus; hocque obſeruato nullum eſt dubium Theoremata noſtra generaliter vera eſſe pro omnibus figuris rectilineis. Notare autem heic conuenit, ſummam omnium angulorum externorum in figura quacunque rectilinea aequalem eſſe vel quatuor angulis rectis, vel multiplo cuidam quatuor angulorum rectorum. Et quidem pro dato numero n laterum Polygoni, obſeruauimus iſtud multiplum quatuor angulorum rectorum, cui anguli externi aequantur, vsque ad numerum $n-2$ increſcere, eum vero exſuperare non poſſe, ſicque pro triangu-

 lo

lo valor angulorum externorum erit 360°, pro Tetragono vel 360°, vel 2.360°, pro Pentagono vel 360°, vel 2.360°, vel 3.360° et ſic in caeteris. Huius autem dicti veritatem rigoroſa demonſtratione heic firmam reddere, ad inſtitutum noſtrum non pertinet.

7. Pro Polygono regulari vbi perfecta tam laterum, quam angulorum inter ſe obtinet aequalitas, poſito numero laterum Polygoni n, noſtrae aequationes in has ſequentes abibunt:

$$\sin.\alpha + \sin.2\alpha + \sin.3\alpha + \sin.4\alpha \ldots + \sin.(n-1)\alpha = 0$$
$$\cos.\alpha + \cos.2\alpha + \cos.3\alpha + \cos.4\alpha \ldots + \cos.(n-1)\alpha = 0.$$

Aliunde autem conſtat prioris progreſſionis ſummam eſſe

$$= \frac{\sin.\frac{n\alpha}{2}\sin.\frac{(n-1)}{2}\alpha}{\sin.\frac{1}{2}\alpha} \text{ poſteriorisque } = \frac{\sin.\frac{1}{2}n\alpha\cos.\frac{1}{2}(n-1)\alpha}{\sin.\frac{1}{2}\alpha},$$

oportet igitur vtramque hanc expreſſionem nihilo aequari, de quo quidem nullum remanet dubium, ſi conſideremus factorem communem harum expreſſionum $\sin.\frac{1}{2}n\alpha = \sin.180^{\circ} = 0$, ob $n\alpha = 360^{\circ}$. Licet autem vtraque haec expreſſio ſeorſim euaneſcat, id tamen nihil impedit, quo minus ratio prioris ad poſteriorem finita ſit, quippe quae $= -\text{Tang.}\frac{1}{2}\alpha$.

8. Ex binis noſtris Theorematibus ſupra allatis, bina quoque alia aliquanto generaliora deduci
Tab. I. poſſunt. Si nimirum per Polygoni ABCDEFGH
Fig. 3. punctum A ducatur recta quaecunque O A P et dicatur angulus B A O, quem haec recta cum latere Poly-

Polygoni A B conſtituit Φ, tumque vt ante anguli externi Polygoni litteris, α, β, γ, $\delta \ldots \nu$ lateraque litteris a, b, c, $d \ldots n$ deſignentur, erit

I. $a \sin.\Phi + b \sin.(\Phi+\beta) + c \sin.(\Phi+\beta+\gamma) + d \sin.(\Phi+\beta+\gamma+\delta) \ldots$
$$+ n \sin.(\Phi+\beta+\gamma \ldots + \nu) = 0$$

II. $a \cos.\Phi + b \cos.(\Phi+\beta) + c \cos.(\Phi+\beta+\gamma) + d \cos.(\Phi+\beta+\gamma+\delta) \ldots$
$$+ n \cos.(\Phi+\beta+\gamma \ldots + \nu) = 0.$$

Pro his aequationibus demonſtrationes tradi quidem poſſent, ſimiles illis quibus ſupra §. 3 et 4 vſi ſumus, vt tamen rem in compendium mittamus, placet haec Theoremata ex binis ſupra demonſtratis deducere, quod ſic commode fiet. Quia ang. B A N $=$ B A O $\mp$ N A O, ſi dicatur N A O $= \psi$ erit $\alpha = \Phi \mp \psi$, ideoque $\Phi = \alpha \pm \psi$, heic vero ad ſignorum diuerſitatem attendere nihil attinet, quare ſufficiet ſtatuiſſe $\Phi = \alpha + \psi$ vti figura allata poſtulat. Quum igitur in genere ſit

$$\sin.(\Phi+\omega) = \sin.(\alpha+\omega)\cos.\psi + \cos.(\alpha+\omega)\sin.\psi \text{ et}$$
$$\cos.(\Phi+\omega) = \cos(\alpha+\omega)\cos.\psi - \sin.(\alpha+\omega)\sin.\psi,$$

liquet priorem iſtam expreſſionem

$$a\sin.\Phi + b\sin.(\Phi+\beta) + c\sin.(\Phi+\beta+\gamma) + d\sin.(\Phi+\beta+\gamma+\delta) \ldots$$
$$+ n\sin.(\Phi+\beta+\gamma \ldots + \nu)$$

in ſequentes reſolui

$$\cos.\psi(a\sin.\alpha + b\sin.(\alpha+\beta) + c\sin.(\alpha+\beta+\gamma) + d\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots$$
$$+ n\sin.(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \nu))$$
$$+ \sin.\psi(a\cos.\alpha + b\cos.(\alpha+\beta) + c\cos.(\alpha+\beta+\gamma) + d\cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \ldots$$
$$+ n\cos.(\alpha+\beta+\gamma \ldots \nu)),$$

 tum-

tumque posteriorem expressionem

$$a\,\text{cos.}\,\Phi + b\,\text{cos}\,(\Phi+\beta) + c\,\text{cos.}\,(\Phi+\beta+\gamma) + d\,\text{cos.}\,(\Phi+\beta+\gamma+\delta)\ldots + n\,\text{cos.}\,(\Phi+\beta+\gamma\ldots+\nu)$$

in has resolui

$$\text{cos.}\,\psi(a\,\text{cos.}\,\alpha + b\,\text{cos.}(\alpha+\beta) + c\,\text{cos.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{cos.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\ldots + n\,\text{cos.}\,(\alpha+\beta+\gamma\ldots\nu))$$
$$-\text{sin.}\,\psi(a\,\text{sin.}\,\alpha + b\,\text{sin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{sin.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{sin.}\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\ldots + n\,\text{sin.}\,(\alpha+\beta+\gamma\ldots+\nu)).$$

Quare quum vtraque pars ex qua tam prior quam posterior expressio componitur, euanescat, omnino euidenter cognoscimus vtramque hanc expressionem nihilo aequari. Si $\Phi = 0$ has consequemur aequalitates:

$$b\,\text{sin.}\,\beta + c\,\text{sin.}(\beta+\gamma) + d\,\text{sin.}(\beta+\gamma+\delta)\ldots + n\,\text{sin.}(\beta+\gamma+\delta\ldots+\nu) = 0 \quad \text{et}$$
$$a + b\,\text{cos.}\,\beta + c\,\text{cos.}(\beta+\gamma) + d\,\text{cos.}(\beta+\gamma+\delta)\ldots + n\,\text{cos.}(\beta+\gamma+\delta\ldots+\nu) = 0,$$

quae ex prioribus illis §. 3. allatis immediate colliguntur, modo loco litterarum a, b, c, d etc. litterae b, c, d, e etc. tumque loco litterarum α, β, γ, δ etc. litterae β, γ, δ, ε etc. sufficiantur.

9. Diximus supra per combinationem binorum nostrorum Theorematum omnes istas aequationes facile inueniri, quae resolutioni vniuscuiusque Polygoni inseruiunt; vt vero eo clarius quisque perspicere queat, quomodo haec combinatio sit instituenda, eandem aliquot exemplis illustrabimus; vbi quidem a simplicissimis Polygonorum speciebus initium facere, conducet. Pro triangulo igitur ABC cuius anguli externi aAB, bBC, cCA litteris
Tab. I. Fig. 6.

α, β,

α, β, γ et latera AB, BC, CA litteris a, b, c exprimantur, noſtra Theoremata binas has ſuppeditant aequationes:

$$a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) = 0;\ a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c = 0.$$

Quum ex poſteriori harum aequationum deducatur

$$c = - a \cos.\alpha - b \cos.(\alpha+\beta)$$

ſumendo vtrinque quadrata obtinebimus:

$$cc = a^2 \cos.\alpha^2 + b^2 \cos.(\alpha+\beta)^2 + 2ab \cos.\alpha \cos.(\alpha+\beta)$$

eſt vero per priorem aequationem

$$a^2 \sin.\alpha^2 + b^2 \sin.(\alpha+\beta)^2 + 2ab \sin.\alpha \sin.(\alpha+\beta) = 0$$

hincque fiet:

$$cc = \begin{matrix} a^2\cos.\alpha^2 + 2ab\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta) + b^2\cos.(\alpha+\beta)^2 \\ + a^2\sin.\alpha^2 + 2ab\sin.\alpha\sin.(\alpha+\beta) + b^2\sin.(\alpha+\beta)^2 \end{matrix} = a^2 + b^2 + 2ab\cos.\beta$$

quia nimirum eſt

$$\cos.\alpha \cos.(\alpha+\beta) + \sin.\alpha \sin.(\alpha+\beta) = \cos.\beta.$$

Prima igitur aequatio reſolutioni trianguli inſeruiens iſthaec erit:

$$\text{I. } cc = aa + bb + 2ab \cos.\beta.$$

Reliquae duae ſequentes habentur:

$$\text{II. } a\sin.\alpha + b\sin.(\alpha+\beta) = 0;\ \text{III. } a\sin.\alpha - b\sin.\gamma = 0,$$

quarum ſecunda per ipſum Theorema noſtrum primum exprimitur, tertia vero ex hoc Theoremate deducitur in locum ipſius $\sin.(\alpha+\beta)$ ſubſtituendo $-\sin.\gamma$, quippe quum ſit $\gamma = 360^\circ - \alpha - \beta$. Patet autem has tres aequationes ſufficere ad omnes quaeſtiones reſoluendas, quibus ex datis tribus partibus

bus trianguli, quarta quaecunque inueſtiganda eſt. Si ex datis tribus lateribus trianguli a, b, c inueſtigandus ſit aliquis angulorum, vel ſi ex datis duobus lateribus a, b cum angulo interiacente ſit quaerendum latus oppoſitum, vel ſi datis duobus lateribus, quorum vnum angulo dato opponitur, alterum ipſi adiacet, ſit quaerendum reliquum latus angulo dato quoque adiacens; ſolutio perficietur ope aequationis noſtrae *primae*. Si vero ex datis duobus lateribus cum angulo interiacente, ſit quaerendus alteruter reliquorum angulorum, vel ex datis duobus lateribus cum angulo vni ipſorum oppoſito, ſit quaerendus angulus interiacens; quaeſtionis reſolutio ex aequatione *ſecunda* deducetur. Demum ſi ex datis duobus lateribus et angulo vni ipſorum oppoſito, quaerendus ſit angulus alteri oppoſitus, huic quaeſtioni reſoluendae inſeruiet aequatio *tertia*, quae itidem adhiberi poteſt pro iſta quaeſtione, qua ex angulis binis et latere quodam trianguli, quodpiam reliquorum laterum inueſtigandum eſt.

10. Pergamus iam ad conſiderandum quadrilaterum, cuius anguli externi a A B, b B C, c C D, d D A litteris α, β, γ, δ reſpectiue deſignentur, latera vero A B, B C, C D, D A eodem ordine litteris a, b, c, d indigitentur, pro iſto igitur quadrilatero noſtra Theoremata has ſuppeditant aequationes: (Tab. I. Fig. 7.)

$$a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) + c \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 0$$

$$a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos.(\alpha+\beta+\gamma) + d = 0.$$

Ex

Ex poſteriori harum aequationum conſequimur

$$d = -a\cos.\alpha - b\cos.(\alpha+\beta) - c\cos.(\alpha+\beta+\gamma),$$

hinc ſumtis quadratis,

$$dd = a^2\cos.\alpha^2 + b^2\cos.(\alpha+\beta)^2 + c^2\cos.(\alpha+\beta+\gamma)^2 + 2ab\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta) + 2ac\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$+ 2bc\cos.(\alpha+\beta)\cos.(\alpha+\beta+\gamma),$$

huic autem aequationi addatur quadratum prioris aequationis, quo facto prodibit:

$$dd = a^2+b^2+c^2+2ab(\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin.(\alpha+\beta))$$
$$+2ac(\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+\sin.\alpha\sin.(\alpha+\beta+\gamma))$$
$$+2bc(\cos.(\alpha+\beta)\cos.(\alpha+\beta+\gamma)+\sin.(\alpha+\beta)\sin.(\alpha+\beta+\gamma))$$
$$= a^2+b^2+c^2+2ab\cos.\beta+2ac\cos.(\beta+\gamma)+2bc\cos.\gamma$$

ita vt noſtra aequatio *prima* ſit:

I. $dd = a^2+b^2+c^2+2ab\cos.\beta+2ac\cos(\beta+\gamma)+2bc\cos.\gamma.$

Porro ex aequatione noſtra poſteriori colligitur

$d+c\cos.(\alpha+\beta+\gamma) = -a\cos.\alpha - b\cos.(\alpha+\beta)$, ſeu ob $\alpha+\beta+\gamma = 360^\circ-\delta$

$d+c\cos.\delta = -a\cos.\alpha - b\cos.(\alpha+\beta)$,

ſumtis igitur quadratis prodibit

$$dd+2dc\cos.\delta+cc\cos.\delta^2 = a^2\cos.\alpha^2+b^2\cos.(\alpha+\beta)^2+2ab\cos.\alpha\cos.(\alpha+\beta),$$

ex prima vero aequatione fit

$$cc\sin\delta^2 = a^2\sin.\alpha^2+b^2\sin.(\alpha+\beta)^2+2ab\sin.\alpha\sin.(\alpha+\beta),$$

vnde has aequationes addendo colligimus.

II. $dd+2dc\cos.\delta+cc = aa+2ab\cos.\beta+bb,$

quae eſt aequatio *ſecunda* reſolutioni Tetragoni inſerviens. *Tertia* aequatio eſt iſta primitiua:

III. $a\sin.\alpha+b\sin.(\alpha+\beta)+c\sin.(\alpha+\beta+\gamma) = 0$

et *quarta* demum

IV. $a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) - c \sin.\delta = 0$,

quae ex priori elicitur loco $\sin.(\alpha+\beta+\gamma)$ adhibendo $-\sin.\delta$, ob $\delta = 360^\circ - (\alpha+\beta+\gamma)$. Qua autem ratione ope harum quatuor aequationum omnes quaestiones ad resolutionem quadrilateri respectu angulorum et laterum quibus includitur, pertinentes, resolui debeant; iam fusius ostendere praetermittimus, quia nondum ostendimus quot et quaenam huiusmodi quaestiones resoluendae occurrunt, de quo infra ex instituto agemus.

11. Pro Pentagono sequentes binas adipiscimur aequationes:

$$a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) + c \sin.(\alpha+\beta+\gamma) + d \sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0 \quad (A)$$
$$a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos.(\alpha+\beta+\gamma) + d \cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) + e = 0,$$

quarum posterior vel ita exprimatur

$$-e = a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos.(\alpha+\beta+\gamma) + d \cos.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \quad (B)$$

vel sic

$$-e - d \cos.\varepsilon = a \cos.\alpha + b \cos.(\alpha+\beta) + c \cos.(\alpha+\beta+\gamma) \quad (C).$$

Ex priore autem dum pro $\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$ substituitur $-\sin.\varepsilon$, consequimur

$$d \sin.\varepsilon = a \sin.\alpha + b \sin.(\alpha+\beta) + c \sin.(\alpha+\beta+\gamma) \quad (D).$$

Sumtis iam quadratis aequationum (B), (C), nec non aequationum (A) (D) additisque quadratis ex (B), (A) et (C), (D) has obtinebimus aequationes:

$$\text{I. } ee = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab \cos.\beta + 2ac \cos.(\beta+\gamma) + 2ad \cos.(\beta+\gamma+\delta)$$
$$+ 2bc \cos.\gamma + 2bd \cos.(\gamma+\delta) + 2cd \cos.\delta$$

$$\text{II. } e^2 + d^2 + 2ed \cos.\varepsilon = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos.\beta + 2ac \cos.(\beta+\gamma) + 2bc \cos.\gamma,$$

quae

quae ſunt aequationes *prima* et *ſecunda* pro reſolutione Pentagoni. Plenariam quadratorum euolutionem et reliquas reductiones, quibus ad has aequationes pertingimus, heic exponere nihil attinet, quum harum operationum ratio ex praecedentibus ſatis intelligatur. Reliquae tres aequationes pro reſolutione Pentagoni ſequentes habentur:

III. $a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}\,(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}\,(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{ſin.}\,(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0$

IV. $a\,\text{ſin}\;\alpha + b\,\text{ſin}\;(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) - d\,\text{ſin.}\,\varepsilon = 0$

V. $a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}\,(\alpha+\beta) - c\,\text{ſin.}\,(\delta+\varepsilon) - d\,\text{ſin.}\,\varepsilon = 0$

quarum *tertia* eſt ipſa noſtra aequatio primitiua (A), *quarta* vero et *quinta* ex hac deriuantur, ſubſtituendo primum pro ſin. $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, $-$ ſin. ε tum vero etiam pro ſin. $(\alpha+\beta+\gamma)$, $-$ ſin. $(\delta+\varepsilon)$, quum nempe ſit

$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 360° - \varepsilon$ et $\alpha+\beta+\gamma = 360° - \delta - \varepsilon$.

12. Pro Hexagono primitiuae noſtrae aequationes ſequentes ſunt:

$$a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}\,(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$
$$+ e\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = 0 \quad (A)$$

$$a\,\text{coſ}\,\alpha + b\,\text{coſ.}(\alpha+\beta) + c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$
$$+ e\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = -f \quad (B).$$

Prior vero his quoque binis modis exprimatur:

$$a\,\text{ſin.}\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = e\,\text{ſin.}\zeta \quad (C)$$
$$a\,\text{ſin.}\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) = d\,\text{ſin.}(\varepsilon+\zeta) + e\,\text{ſin.}\zeta \quad (E).$$

Poſteriori item binae hae tribuantur formae:

$$a\,\text{coſ}\,\alpha + b\,\text{coſ}\,(\alpha+\beta) + c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) + d\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = -e\,\text{coſ.}\zeta - f \quad (D)$$
$$a\,\text{coſ.}\alpha + b\,\text{coſ.}(\alpha+\beta) + c\,\text{coſ.}(\alpha+\beta+\gamma) = -d\,\text{coſ.}(\varepsilon+\zeta) - e\,\text{coſ.}\zeta - f \quad (F).$$

 Addi-

Additis nunc quadratis aequationum (A), (B) ac (C), (D) tumque (E), (F) et facta debita reductione has tres adipiscemur aequationes pro resolutione Hexagoni:

$$\text{I. } ff = aa + bb + cc + dd + ee$$
$$+ 2ab\cos.\beta + 2ac\cos.(\beta+\gamma) + 2ad\cos.(\beta+\gamma+\delta) + 2ae\cos.(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$
$$+ 2bc\cos.\gamma + 2bd\cos.(\gamma+\delta) + 2be\cos(\gamma+\delta+\varepsilon) + 2cd\cos.\delta + 2ce\cos.(\delta+\varepsilon)$$
$$+ 2de\cos.\varepsilon$$

$$\text{II. } ff + ee + 2ef\cos.\zeta = aa + bb + cc + dd$$
$$+ 2ab\cos\beta + 2ac\cos.(\beta+\gamma) + 2ad\cos.(\beta+\gamma+\delta)$$
$$+ 2bc\cos.\gamma + 2bd\cos.(\gamma+\delta) + 2cd\cos.\delta,$$

$$\text{III. } ff + ee + dd \qquad = aa + bb + cc$$
$$+ 2ef\cos.\zeta + 2fd\cos.(\zeta+\varepsilon) + 2ed\cos.\varepsilon \quad + 2ab\cos.\beta + 2ac\cos.(\beta+\gamma) + 2bc\cos.\gamma.$$

Quibus insuper adiungantur hae tres sequentes:

$$\text{IV. } a\sin.\alpha + b\sin.(\alpha+\beta) + c\sin.(\alpha+\beta+\gamma) + d\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$
$$+ e\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) = 0,$$

$$\text{V. } a\sin.\alpha + b\sin.(\alpha+\beta) + c\sin.(\alpha+\beta+\gamma) + d\sin.(\alpha+\beta+\gamma+\delta) - e\sin.\zeta = 0,$$

$$\text{VI. } a\sin.\alpha + b\sin.(\alpha+\beta) + c\sin.(\alpha+\beta+\gamma) - d\sin.(\varepsilon+\zeta) - e\sin.\zeta = 0.$$

Et his quidem sex aequationibus, quaestiones de resolutione Hexagoni, quae nostri nunc sunt instituti perfecte resolui possunt.

13. Haec exempla abunde quidem sufficiunt, ad ostendendum, qua ratione pro Polygono quotcunque fuerit laterum, aequationes eidem resoluendo inseruientes inuestigandae sunt et ex sola quidem inspectione exemplorum modo allatorum, facile diiudicari poterit, quaenam sit forma harum aequationum pro quibusuis Polygonis. Sic pro Heptagono, cuius angulos externos ponamus esse, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots \eta$ et

et latera $a, b, c, d \ldots g$, has ſeptem aequationes nullo negotio conſequemur:

$$\text{I.}\quad gg = aa + bb + cc \ldots + ff$$
$$+ 2ab\,\text{coſ.}\,\beta + 2ac\,\text{coſ.}(\beta+\gamma) + 2ad\,\text{coſ.}(\beta+\gamma+\delta) \ldots + 2af\,\text{coſ.}(\beta+\gamma \ldots + \zeta)$$
$$+ 2bc\,\text{coſ.}\,\gamma + 2bd\,\text{coſ.}(\gamma+\delta) \ldots\ldots\ldots + 2bf\,\text{coſ.}(\gamma+\delta \ldots + \zeta)$$
$$+ 2cd\,\text{coſ.}\,\delta + 2ce\,\text{coſ.}(\delta+\varepsilon) + 2cf\,\text{coſ.}(\delta+\varepsilon+\zeta)$$
$$+ 2de\,\text{coſ.}\,\varepsilon + 2df\,\text{coſ.}(\varepsilon+\zeta) + 2ef\,\text{coſ.}\,\zeta$$

$$\text{II.}\quad gg + ff = aa + bb \ldots + ee$$
$$+ 2gf\,\text{coſ.}\,\eta \quad + 2ab\,\text{coſ.}\,\beta + 2ac\,\text{coſ.}(\beta+\gamma) \ldots + 2ae\,\text{coſ.}(\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$
$$+ 2bc\,\text{coſ.}\,\gamma + 2bd\,\text{coſ.}(\gamma+\delta) + 2be\,\text{coſ.}(\gamma+\delta+\varepsilon)$$
$$+ 2cd\,\text{coſ.}\,\delta + 2ce\,\text{coſ.}(\delta+\varepsilon) + 2de\,\text{coſ.}\,\varepsilon.$$

$$\text{III.}\quad gg + ff + ee \qquad = aa + bb + cc + dd$$
$$+ 2gf\,\text{coſ}\,\eta + 2ge\,\text{coſ.}(\eta+\zeta) + 2ef\,\text{coſ.}\,\zeta \quad + 2ab\,\text{coſ.}\,\beta + 2ac\,\text{coſ.}(\beta+\gamma) + 2ad\,\text{coſ.}(\beta+\gamma+\delta)$$
$$+ 2bc\,\text{coſ.}\,\gamma + 2bd\,\text{coſ.}(\gamma+\delta) + 2cd\,\text{coſ.}\,\delta.$$

$$\text{IV.}\quad a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + f\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma \ldots + \zeta) = 0$$

$$\text{V.}\quad a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) \ldots + e\,\text{ſin.}(\alpha+\beta \ldots + \varepsilon) - f\,\text{ſin.}\,\eta = 0$$

$$\text{VI.}\quad a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) \ldots + d\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) - e\,\text{ſin}(\eta+\zeta) - f\,\text{ſin.}\,\eta = 0$$

$$\text{VII.}\quad a\,\text{ſin.}\,\alpha + b\,\text{ſin.}(\alpha+\beta) + c\,\text{ſin.}(\alpha+\beta+\gamma) - d\,\text{ſin.}(\eta+\zeta+\varepsilon) - e\,\text{ſin.}(\eta+\zeta) - f\,\text{ſin.}\,\eta = 0.$$

Simili vero modo pro Polygonis plurium adhuc laterum procedere licet, ita vt praeter prolixitatem et laborem has aequationes litteris conſignandi, hoc negotium nullam prorſus aliam pariat difficultatem.

14. De aequationibus his noſtris in genere obſeruare conuenit, quod illae quas ſingula Polygoni latera ingrediuntur, ſecundae ſint dimenſionis, dum ipſa quadrata horum laterum inuoluunt; iſtae vero aequationes in quibus vnum Polygoni latus deſideratur, primae ſunt dimenſionis ſeu lineares, qua-

 propter

propter resolutio posteriorum harum aequationum pro faciliori habetur quam illarum priorum, quatenus nimirum de aliquo latere Polygoni inuestigando quaestio instituitur. Deinde notare quoque iuuat, pro numero laterum Polygoni pari, totidem aequationes vnius classis occurrere ac alterius, numerus scilicet aequationum singularum classium dimidium numerum laterum Polygoni adaequabit; at si numerus laterum Polygoni sit impar, aequationes lineares vna plures habentur, quam aequationes secundae dimensionis, omnium scilicet numero, numerum laterum Polygoni exaequante. Aequationes autem istae lineares primitiuae, quae cos. α, cos. $(\alpha+\beta)$ etc. inuoluunt, sub ista forma propositae ad resolutionem Polygonorum aptae non sunt, quum has aequationes omnia latera omnesque anguli Polygoni ingrediantur; quare si ex iisdem quodpiam latus vel aliquis angulus determinari deberet, plura cognitu necessaria supponerentur, quam quae ad vniuscuiusque Polygoni perfectam determinationem requiruntur. Tum vero hae aequationes solutionibus aptae euadunt, quando per earum combinationem cum aequationibus primitiuis linearibus, quae Sinus inuoluunt, eruuntur istae aequationes secundi dimensionis, in quibus omnia quidem Polygoni latera occurrunt, numerus autem angulorum binario deficit a numero omnium angulorum Polygoni.

15. Antequam perspicue intelligi possit, qua ratione resolutio Polygonorum per aequationes in praecedentibus expositas, absoluatur; necessarium est vt dilu-

dilucide modum explicemus, quo omnes harum resolutionum casus enumerari et distincte recenseri possunt. Ex primis autem Geometriae Elementis cognoscitur, vnumquodque Polygonum perfecte esse determinatum, si in ipso partium principalium cognitarum numerus ternario deficiat a numero omnium harum partium, id est Polygonum perfecte habebitur determinatum, si non plures quam tres partes principales habeantur incognitae, hincque si numerus laterum dicatur n, partes cognitas numero $2n-3$ adesse oportet; vbi tamen perspicuum est, eum casum excipi, quo omnes anguli externi Polygoni dantur, quippe quum vnus horum angulorum, semper ex reliquis determinetur, dum omnium summa aequatur vel quatuor rectis, vel multiplo cuidam quatuor rectorum. Si itaque praeter omnes angulos externos Polygoni, latera numero $n-3$ cognoscantur, tenendum est ipsum Polygonum hinc perfecte non esse determinatum, sed insuper requiri vt reliquorum trium laterum quodpiam cognitum sit, ita vt quouis casu pro plenaria cuiusuis Polygoni determinatione, saltem $n-2$ latera cognita esse oporteat. Si iam aliquis angulus vel quoddam latus Polygoni determinari debeat, intelligitur eam inuestigationem perfici ope aequationis, quam $2n-2$ partium principalium Polygoni ingrediuntur et in ista aequatione vel omnia Polygoni latera, vel saltem omnia vno tantum excepto occurrere debere. Nam pro eo etiam casu, quo omnes anguli Polygoni cogniti supponuntur, quia simul $n-2$ latera

cognita

cognita eſſe oportet; perſpicitur omnino $n-1$ latera aequationem ingredi debere; at tamen iſtam ſolutionum ſpeciem qua omnibus angulis Polygoni cognitis latus quodpiam quaerendum eſt, a reliquis ſolutionum ſpeciebus ſeorſim conſiderare conueniet. Prouti nunc aequationem pro ſolutione Polygoni inſeruientem, vel omnia latera ingrediuntur, vel vnum in ea deſideratur, binas ſolutionum claſſes adipiſcemur; quarum *prior* continet quaeſtiones pro quibus ſoluendis inſeruit aequatio omnia Polygoni latera et angulos numero $n-2$ complectens, *poſterior* autem in ſe comprehendet ſolutiones, quibus expediendis inſeruit aequatio in qua vnum Polygoni latus, vnusque item angulus deficit, quatenus nimirum quaeſtio eſt de quopiam angulorum determinando. His vero adiungi poteſt *tertia* claſſis ſolutionum etiam abſoluendarum ope aequationis, in qua vnum latus vnusque item angulus deficit, dum nimirum aliquod laterum quaeritur; pro his autem caſibus ſponte patet omnes Polygoni angulos pro cognitis eſſe habendos, quam ob cauſſam hanc tertiam ſolutionum claſſem a duabus prioribus merito diſtinguendam eſſe cenſuimus.

16. Quaeſtiones ad vnamquamque claſſem pertinentes, in certos iterum ordines redigi poſſunt, ſi attendatur ad ſitum partium omiſſarum inter ſe, ſic pro *prima* ſolutionum claſſe, alium conſequemur ſolutionum ordinem pro caſu quo bini anguli ex aequatione excluſi ſibi ſunt proximi, alios ordines pro caſibus, quibus angulos omiſſos, vel vnus, vel

duo,

duo, vel tres reliquorum angulorum interponuntur. In hac autem distinctione casuum vlterius progredi necessum non est, quam pro numero quidem laterum impari $= 2m + 1$, vbi angulos omissos anguli m interiacent, nam si longius quis progredi vellet, casus antea considerati manifesto recurrerent; simili ratione pro numero laterum pari $= 2m$, finem diuisionis ordinum facere oportet, vbi ad eum peruentum fuerit, quo angulos omissos, anguli $m - 1$ interiacent. Pro *secunda* classe distributio solutionum in ordines perficietur, dum attentio adhibetur ad angulum et latus omissum, ideoque diuersi ordines emergent, prouti angulus omissus lateri omisso vel fuerit adiacens, vel inter angulum et latus, reliquorum laterum vnum, aut duo, aut tria etc. interiaceant. De limitibus autem huic distributioni in ordines praescribendis, similis habetur regula ac pro classe priori, scilicet si numerus laterum fuerit impar, $= 2m + 1$ vltimus ordo erit is, pro quo latus et angulum omissum, m latera interiacent, pro numero autem laterum pari $= 2m$, vltimus ordo erit is, quo latus et angulum omissum $m - 1$ latera interiacent. *Tertia* demum classis nullam parit difficultatem, pro ea enim omnes anguli vt cogniti spectari possunt, quare in solutionum enumeratione heic tantum respiciendum est ad situm, quem teneat latus inuestigandum respectu lateris omissi.

17. His igitur in genere obſeruatis ad caſus deſcendamus ſpeciales, vbi quidem quia omnes quaeſtiones circa reſolutionem trianguli iam ſatis cognitae ſunt, initium faciamus a reſolutione quadrilateri
Tab. I. A B C D. Pro hoc itaque quadrilatero ad primam
Fig. 7. quaeſtionum claſſem omnes eae pertinent, quarum ſolutio abſoluitur aequatione, quam omnia Tetragoni latera a, b, c, d binique anguli ingrediuntur; haec vero claſſis in duos diſpeſcitur ordines prouti bini anguli omiſſi vel ſibi fuerint proximi, vel inuicem oppoſiti. Ad priorem ordinem, quo excluſi cenſentur anguli α et δ ſequentia referenda ſunt Problemata:

I. Datis lateribus a, b, c, d et angulo β, inuenire angulum γ.

II. Datis lateribus a, b, c et angulis β, γ inuenire latus d, quod angulis omiſſis interiacet.

III. Datis lateribus a, c, d et angulis β, γ inuenire latus b, quod angulis datis interiacet.

IV. Datis lateribus a, b, d et angulis β, γ inuenire latus c, quod vni angulorum datorum adiacet; liquet autem ſolutionem eodem redire ſiue quaeratur latus c, ſeu datis lateribus b, c, d inueſtigandum ſit latus a. Solutiones autem horum quatuor Problematum adornantur ope aequationis I^{mae} §. 10.

Ad ſecundum ordinem prioris claſſis, quo excluſi ſupponuntur anguli α et γ, ſequentia bina problemata pertinent.

V.

V. Ex datis lateribus *a*, *b*, *c*, *d* et angulo β, inuenire angulum δ, quaeſtio autem eodem redit ſi dato angulo δ, quaerendus ſit β.

VI. Ex datis lateribus *a*, *b*, *c* et angulis β, γ invenire latus *d*, vbi perinde eſt quodnam laterum ſit inueſtigandum. Horum problematum ſolutiones perficiuntur per aequationem II^{dam} §. 10.

Quaeſtiones *ſecundae* claſſis iterum in binos diſpeſcuntur ordines, prouti latus omiſſum et angulus excluſus ſibi vel adiacent, vel vnum latus ipſis interiecerit. Ad priorem ordinem ſi omiſſum intelligatur latus *d* cum angulo δ, tria pertinent Problemata:

VII. VIII. IX. quibus, ex datis lateribus *a*, *b*, *c* et binis angulorum α, β, γ, quaeritur tertius angulus vel γ, vel β, vel α. Solutiones horum Problematum deducuntur ex aequatione III^{ia} §. 10.

Denique ad poſteriorem ordinem omiſſo latere *d* et angulo γ, ſequentia referenda ſunt Problemata:

X. XI. XII. quibus, ex datis lateribus *a*, *b*, *c* et binis angulorum α, β, δ, quaeritur vel δ, vel β, vel α, quorum Problematum ſolutiones ope aequationis IV^{tae} §. 10. adornantur.

Praeter haec vero Problemata pro ſolutione quadrilateri, adhuc bina occurrunt ad *tertiam* claſſem referenda, nimirum

XIII. quo, datis omnibus angulis quadrilateri et lateribus *a*, *b* ſibi adiacentibus, quaeritur latus *c*.

 XIV.

XIV. quo, datis itidem omnibus angulis quadrilateri et lateribus *a*, *c* ſibi oppoſitis, quaeritur latus *b*. Pro his vero Problematibus ſolutiones ope aequationum III et IV. §. 10. expedientur.

Hac igitur ratione vt ſperamus, dilucide ſatis explicauimus omnia Problemata, quae ſoluenda occurrunt pro Tetragono, quatenus reſpectus habetur ad eius partes principales, latera nimirum et angulos quibus includitur. Si bina Problemata ad tertiam claſſem referenda ſeponantur, ſolutionum numerus pro binis prioribus claſſibus numero duodenario abſoluetur, quarum ſex ad vnamquamque claſſem referuntur.

18. In ſolutione Pentagoni problemata *primae* claſſis ea dicuntur, in quibus conſideratio binorum angulorum excluditur, vnde pro hac claſſe bini exorientur ordines, prouti ſcilicet anguli omiſſi vel inuicem fuerint proximi dum eidem lateri adiacent, vel bina ipſis interponantur latera. Pro priori ordine haec habebimus Problemata:

Propoſitis omnibus Pentagoni lateribus et tribus angulis β, γ, δ, *quarum partium ſemper ſeptem quaevis vt cognitae ſpectantur, inuenire*

I. latus *e*; II. latus *a*; III. latus *b*; IV. angulum γ; V. angulum β,

horum problematum ſolutiones ex aequatione I^mae^ §. 11. deducuntur.

Pro ſecundo ordine iſta ſunt Problemata:

Pro-

Propositis omnibus Pentagoni lateribus, angulis autem tribus β, γ, ε *et supposito quod harum partium septem quaeuis cognitae sunt, inuenire*

VI. latus b; VII. latus a; VIII. latus e; IX. angulum β; X. angulum ε,

solutiones deducuntur ex aequatione II[da] §. 11.

Secundae vero classis Problemata pro Pentagono ad tres reducuntur ordines, pro primo etenim ordine latus omissum angulo omisso est adiacens, pro secundo inter angulum omissum et latus exclusum, aliud interiacet latus et demum pro tertio ordine inter partes omissas bina numerantur latera. Problemata primi ex hac classe ordinis ita enunciantur:

Propositis quatuor lateribus a, b, c, d *et quatuor angulis* α, β, γ, δ, *si praeter latera terni anguli cogniti habeantur*, inuenire:

XI. angulum α; XII. angulum β; XIII. angulum γ; XIV. angulum δ,

solutio autem absoluetur per aequationem tertiam §. 11. Pro secundo ordine sequentia habebuntur Problemata:

Propositis quatuor lateribus a, b, c, d *et quatuor angulis* α, β, γ, ε, *quaerere quempiam horum angulorum, dum reliquae partes vt cognitae spectantur*

XV. angulum α; XVI. angulum β; XVII. angulum γ; XVIII. angulum ε,

solutio petenda est ex aequatione IV. §. 11.

Tertii ordinis non nisi duo problemata oriuntur sequentia:

XIX. *Datis Pentagoni lateribus excluso* e, *et angulis* α, β, δ *quaerere angulum* ε vel

XX. *Datis iisdem lateribus et angulis* α, β, ε *quaerere angulum* δ.

Horum problematum solutiones per aequationem quintam §. 11. expedientur.

Ex tertia classe bina adipiscemur Problemata:

XXI. *quo datis Pentagoni angulis et lateribus* a, b, c *quaeritur latus* d.

XXII. *quo ex datis itidem angulis et lateribus* a, b, d *quaeritur latus* c

haec autem problemata per alterutram trium vltimarum aequationum §. 11. solui poterunt. Exclusis problematibus tertiae classis, si quisquam concluderet numerum problematum ad binas classes priores pertinentium ad 40 assurgere, quod quinque occurrant solutionum ordines et vnaquaeque solutio octo contineat partes Pentagoni, is valde falleretur, nam ex his partibus plurimae sunt, inter quas pro aliis atque aliis solutionibus perfecta intercedit paritas. Vt hoc exemplo illustremus, pro ordine primo prioris classis ex datis Pentagoni lateribus et angulis γ, δ eodem modo determinabitur angulus β, quo ex iisdem lateribus et angulis β, γ determinatur angulus δ, id quod cum ex ipsa rei natura admodum perspicuum est, tum euidenter quoque de-

declaclaratur per aequationem noſtram *primam* §. 11, quippe quum rationes quibus anguli β et δ huic inſunt aequationi in perfecta ſint paritate. Tum vero quoque inter modos, quibus latera *a*, *d* vel *b*, *c* eidem aequationi inſunt, paritas habetur manifeſta.

19. Pro Hexagono problemata primae claſſis in tres ſubdiuiduntur ordines, prouti binos angulos omiſſos vel vnum, vel duo, vel tria interiacent latera. Ad primum horum ordinum referenda ſunt Problemata, *quibus per aequationem quam omnia Hexagoni latera et anguli* β, γ, δ, ε *ingrediuntur*, *determinari debet*

I. latus *f*; II. latus *a*; III. latus *b*; IV. latus *c*; V. angulus ε; VI. angulus δ

hoc autem praeſtabitur in ſubſidium vocata aequatione I. §. 12.

Ad ſecundum ordinem pertinent Problemata, *quibus ex aequatione quam omnia Hexagoni latera et anguli* β, γ, δ, ζ *ingrediuntur*, determinatur

VII. latus *a*; VIII. latus *b*; IX. latus *f*; X. ang. ζ; XI. ang. δ; XII. ang. γ

huic vſui inſeruit aequatio II. §. 12.

Tertius ordo huius claſſis continet problemata, *quibus per aequationem quam polygoni latera et anguli* β, γ, ζ, ε *ingrediuntur*, *quaeri debent*

XIII. latus *b*; XIV. latus *a*; XV. angulus β,

quem in finem adhibenda eſt aequatio III. §. 12.

Secun-

Secunda classis problematum simili modo in tres subdiuiditur ordines, prout nimirum angulus omissus lateri excluso vel adiacet, vel inter angulum et latus, vnum aut duo latera interiacent. Pro primo huius classis ordine Problemata oriuntur, *quibus ex aequatione complectente omnia Hexagoni latera praeter* f, *omnesque angulos praeter* ζ, *quaeruntur*

XVI. angulus α; XVII. angulus β; XVIII. angulus γ; XIX. angulus δ; XX. angulus ε,

quorum solutio ab aequatione IV. §. 12. pendet. Ad secundum huius classis ordinem spectant Problemata, *quibus ex aequatione quam omnia latera excepto* f, *et omnes anguli praeter* ε *ingrediuntur*, *quaeritur*

XXI. angulus α; XXII. angulus β; XXIII. angulus γ; XXIV. angulus δ; XXV. angulus ζ

vbi solutio inuenitur ope aequationis V^{tae} §. 12. Tertius demum ordo secundae classis in se comprehendet Problemata, *quibus ex aequatione quam latera* a, b, c, d, e *et anguli* α, β, γ, ε, ζ *ingrediuntur*, *determinari debent*

XXVI. angulus α; XXVII. angulus β; XXVIII. angulus γ; XXIX. angulus ε; XXX. angulus ζ,

quod perficietur adhibendo aequationem VI^{tam} §. 12. Ad tertiam classem tria pertinent problemata:

XXXI. *quo datis lateribus* a, b, c, d *quaeritur* latus *e*

XXXII. *quo ex lateribus* a, b, c, e *quaeritur* d

XXXIII. *quo ope laterum* a, b, d, e *inuestigandum* est *c*,

quae

quae Problemata per aequationem IV^{tem} vel V^{tam} et VI^{tam} §. 12. folui poffunt. Si tertiae claffis Problemata feponantur, quae ad binas priores claffes pertinent, numerantur 30, pro Pentagono autem numerus Problematum ex his claffibus erat 20, pro Tetragono 12, dum pro triangulo fex tantum huius generis oriuntur Problemata. Quod fi igitur in genere numerus laterum Polygoni exprimatur per n, hinc per inductionem colligere poterimus numerum omnium Problematum ad binas claffes priores pertinentium effe $= n(n-1)$. Vt autem pateat, hoc omnino in genere verum effe, cafus Polygonorum adhuc magis compofitorum contemplabimur, pro quibus iftam folutionum enumerationem ita adornabimus, vt adplicari poffit ad Polygona quotcunque laterum.

20. In recenfendis folutionibus cuiuscunque Polygoni, id imprimis agitur, vt numerus fingulorum ordinum fub binis prioribus claffibus contentorum exponatur, tumque vt in folutiones ex vnoquoque ordine deducendas inquiratur. Hoc autem pofterius facillime perficietur pro prima quidem folutionum claffe, fi attendatur ad latera et angulos quorum eadem eft ratio in aequationibus; tum autem anguli vel latera pari modo aequationi cuidam huius claffis infunt, quando eundem fitum refpectu angulorum omifforum tenent. Sic bina latera quae angulis omiffis adiacent dummodo in contrarias accipiuntur plagas, pro hac claffe in perfecta funt paritate. Pro fecundae claffis ordinibus, fi numerus la-

terum Polygoni fuerit par, tot habebuntur ſolutiones, quot anguli vnicuique aequationi inſunt, at ſi numerus laterum Polygoni impar ſit $= 2m + 1$, vltimus ordo huius claſſis, quo angulus omiſſus lateri omiſſo opponitur, non niſi m ſolutiones ſuppeditabit, quippe quum pro hoc ordine angulorum in aequatione contentorum tot habeantur paria. Sit igitur propoſitum Polygonum numero laterum impari $2m + 1$; dum autem heic ſpeciatim loquuturi ſumus de *Endecagano*, quae de hoc Polygono dicentur, ſimili ratione ad alia quaecunque Polygona numero laterum impari, adplicari poterunt. Exprimantur iam latera *Endecagoni* per a, b, c, $d \ldots l$ et anguli eius externi per A, B, C, D . . . L. Ad primam itaque ſolutionum claſſem eae referuntur, quas bini anguli huius Polygoni non ingrediuntur, et quoniam euidens eſt vnum eorum pro arbitrio ſemper aſſumi poſſe, ponamus angulum L ſemper eſſe omiſſum, quo ſuppoſito numerus ordinum huius claſſis determinabitur ex vario ſitu, quem alter angulus tenere poterit reſpectu anguli L. Conſequemur igitur quinque ordines, prouti nimirum omiſſi concipiuntur anguli:

I°. K, L; II°. I, L; III°. H, L; IV°. G, L; V°. F, L

ſi enim vlterius progrediamur, conſtabit ſitum anguli E reſpectu anguli L ſimilem eſſe ac anguli F, tumque angulum D reſpectu L ſitum tenere ſimilem illi, quem tenet G reſpectu ipſius L et ſic in ſequentibus, quare hinc nullae nouae oriuntur ſolutiones.

tiones. In genere pro numero laterum $2m + 1$ hac ratione m emergent ordines.

Pro I°. ordine exclusis angulis K, L paritas intercedit

angulos A, I; B, H; C, G; D, F;
latera a, k; b, i; c, h; d, g; e, f;

angulus vero E et latus l paria non agnoscunt pro hoc ordine; est igitur omnium solutionum numerus tam ex angulis quam lateribus $= 11$, et in genere pro numero laterum $2m + 1$, totidem quoque per hunc ordinem ex angulis et lateribus habebuntur solutiones.

Pro II°. ordine exclusis angulis L, I paritas habetur inter

angulos A, H; B, G; C, F; D, E
latera l, k; a, i; b, h; c, g; d, f

angulus autem K et latus e paribus destituuntur, erit ergo solutionum numerus ex hoc ordine denuo 11, seu in genere $= 2m + 1$.

Pro III°. ordine omissis angulis L, H paritas intercedit

angulos A, G; B, F; C, E; I, K;
latera l, i; a, h; b, g; c, f; d, e

quibus accedunt angulus D et latus k, quorum non occurrunt paria, solutionum igitur numero ex hoc ordine existente 11, seu in genere $2m + 1$.

Pro ordine IV°. omissis angulis L, G paritas habetur pro

 angu-

angulis A, F; B, E; C, D; H, K

lateribus k, i; l, h; a, g; b, f; c, e

angulus autem I et latus d paribus destituuntur, vnde solutionum numerus iterum fiet 11, seu in genere $2m + 1$.

Pro V^{to} ordine omissis angulis L, F paritas oritur inter

angulos A, E; B, D; K, G; I, H;

latera k, h; l, g; a, f; b, e; c, d

his accedunt angulus C et latus e, quae paria non agnoscunt, ex quo solutionum numerus denuo fit 11, seu in genere $2m + 1$. Quum igitur singuli ordines praebeant $2m + 1$ solutiones, numerus autem ordinum sit m, patet primam classem continere $m(2m + 1)$ solutiones.

21. Pro secunda classe ordines habebimus si de Endecagono sermo sit sex, in genere autem $m + 1$. Scilicet si ponatur latus l continuo excludi, numerus ordinum aestimabitur ex vario situ, quem angulus omissus respectu lateris l habere potest; hinc planum euadit pro Endecagono sex oriri ordines prouti praeter latus l, omissus fuerit angulus

I°. L; II°. K; III°. I; IV°. H; V°. G; VI°. F,

vlterius autem procedendo perueniemus ad angulos, qui respectu lateris l similem tenent situm ac quispiam horum propositorum. Simili modo in genere constat pro Polygono numero laterum $2m + 1$, numerum ordinum huius classis aequalem esse $m + 1$.

Quin-

Quinque priores ordinum iam propoſitorum tot praebent ſolutiones, quot anguli ingrediuntur aequationes ad ipſos pertinentes, id eſt pro Endecagano 10 in genere autem $2m$; vltimus autem ordo quo angulus omiſſus lateri omiſſo opponitur, dimidium numerum ſolutionum hoc eſt pro Endecagono 5 vel in genere m ſolutiones ſuppeditabit, quare ex his ſecundae claſſis ordinibus collectim ſumtis conſequemur $2m^2 + m = m(2m+1)$ ſolutiones; at prima claſſis ſuppeditauerat quoque $m(2m+1)$ ſolutiones, ideoque numerus ſolutionum ex binis his claſſibus erit $2m(2m+1) = n(n-1)$, ſi ponatur numerus laterum $= 2m+1 = n$. De ſolutionibus tertiae claſſis, quae ſeorſim conſiderandae ſunt, heic in genere monuiſſe ſufficiat pro numero laterum impari $2m+1$, easdem numero m exprimi, at ſi numerus laterum fuerit par $= 2m$, quaeſtiones ad hanc claſſem referendae uumero m occurrent.

22. Si numerus laterum Polygoni fuerit par, bini habebuntur caſus, maioris perſpicuitatis gratia ſeorſim contemplandi, prouti nimirum numerus iſte fuerit vel impariter, vel pariter par. Conſideremus itaque primo Polygonum numero laterum impariter pari praeditum et in exemplum adhibeamus Decagonum, cuius latera dicantur $a, b, c, d \ldots k$ et anguli A, B, C, D... K, et pro prima quidem ſolutionum claſſe ſtatim patet quinque inueniri ordines, prouti omiſſi cenſentur anguli:

I°. K, I; II°. K, H; III°. K, G; IV°. K, F; V°. K, E.

In genere pro numero laterum $4m + 2$, hoc modo $2m + 1$ inuenientur ordines.

Pro I°. ordine decagoni sequentia habemus paria
angulor. A, H; B, G; C, F; D, E
laterum k, h; a, g; b, f; c, e

accedunt latera i et d, quae paria non habent, hinc solutionum numerus fiet 10, et in genere $4m+2$.

Pro II. ordine exclusis angulis K, H paria occurrunt
angulor. A, G; B, F; C, E
laterum i, h; k, g; a, f; b, e; c, d

accedunt anguli I, D tam inter se, quam cum reliquis dispares, ex quo solutionum numerus 10, seu in genere $4m + 2$.

Pro III. ordine exclusis angulis K, G paritas habetur
angulor. I, H; A, F; B, E; C, D
later. i, g; k, f; a, e; b, d

accedunt latera h, c paribus destituta, solutionum numerus fit 10, in genere $4m + 2$.

Pro IV. ordine omissis angulis K, F paria habemus
angulor. I, G; A, E; B, D
laterum h, g; i, f; k, e; a, d; b, c

quibus adnumerantur anguli C, H inter se dispares, hinc solutionum numerus 10, seu in genere $4m+2$.

Pro

Pro V^{to} ordine omiſſis angulis K, E ſibi inuicem oppoſitis, occurrunt anguli et latera, ex quibus duplici modo paria formari poſſunt, ſeu occurrunt paria inter ſe congrua et quidem angulorum

$$\mathrm{I.}\left.\begin{matrix}\mathrm{I},\ \mathrm{F}\\ \mathrm{A},\ \mathrm{D}\end{matrix}\right\}\ \mathrm{II.}\left.\begin{matrix}\mathrm{H},\ \mathrm{G}\\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}\end{matrix}\right\}\ \text{tum vero laterum I.}\left.\begin{matrix}h,\ f\\ a,\ c\end{matrix}\right\}\ \mathrm{II.}\left.\begin{matrix}i,\ e\\ k,\ d\end{matrix}\right\}$$

quibus paribus accedit par laterum b, g, quod aliud ſibi congruum non agnoſcit, numerus igitur ſolutionum pro hoc ordine erit $= 5$; leui autem adhibita attentione conſtat pro ſuppoſitione generali numeri laterum $= 4m + 2$, hunc ordinem $2m + 1$ largiri ſolutiones, ſcilicet angulorum bina quaeuis ſemper occurrent paria congrua, totidemque paria congrua laterum, vnico tamen remanente laterum pari, quod aliud ſibi congruum non habet, idque ea complectetur latera, quae ab angulis omiſſis vtrinque aequaliter diſtant. Quatuor ordines priores huius claſſis pro decagono praebebant 40 ſolutiones, quibus ex vltimo ordine accedunt quinque; at in genere pro numero laterum $4m + 2$, liquet $2m$ ordines priores ſuppeditare $2m(4m + 2)$ ſolutiones, hisque ex vltimo ordine accedere $2m + 1$ ſolutiones, ita vt Problematum ad claſſem primam referendorum numerus ſit

$$= 2m(4m + 2) + 2m + 1 = (4m + 1)(2m + 1).$$

Quod ſecundam attinet claſſem, illa nullam parit difficultatem, habentur enim pro hac claſſe $2m + 1$ ordines, quorum vnusquis $4m + 1$ largitur ſolu-

tiones,

tiones, totidem ſcilicet, quot anguli ingrediuntur aequationes ad hanc claſſem pertinentes. Solutionum igitur ex hac claſſe ortarum numerus erit $(2m+1)(4m+1)$, hincque prima et ſecunda claſſis coniunctim praebebunt ſolutiones $(4m+1)(4m+2) = n(n-1)$, exiſtente numero laterum Polygoni $= 4m+2 = n$.

23. Pro numero laterum pariter pari, in exemplum proferamus Dodecagonum cuius latera dicantur a, b, c, d . . . m et anguli externi A, B, C, D . . . M. Pro hoc igitur Polygono tam prima, quam ſecunda claſſis ſolutionum ſex ſub ſe comprehendet ordines, et in genere pro Polygono quocunque, numero laterum exiſtente $4m$, ordines ad vnamquamque claſſem pertinentes habebuntur $2m$. Ordines Dodecagoni ſub prima claſſe contenti ſequentes numerantur, prouti omiſſi cenſentur anguli

I°. M, L; II°. M, K; III°. M, I; IV°. M, H; V°. M, G; VI°. M, F.

Pro ſingulis autem his ordinibus paria angulorum et laterum, cum angulis vel lateribus ſeparatim occurrentibus, ita ſuccincte repraeſentare licebit:

Pro

Pro ordine	Paria angulor. et laterum	Anguli et lat separ.	Numer. ſolut.
I.	A, K; B, I; C, H; D, G; E, F	. . . .	12
	m, *k*; *a*, *i*; *b*, *h*; *c*, *g*; *d*, *f*	*l*, *e*	
II.	A, I; B, H; C, G; D, F	L, E	12
	l, *k*; *m*, *i*; *a*, *h*; *b*, *g*; *c*, *f*; *d*, *e*	. . . .	
III.	L, K; A, H; B, G; C, F; D, E	. . . .	12
	l, *i*; *m*, *h*; *a*, *g*; *b*, *f*; *c*, *e*	*k*, *d*	
IV.	L, H; A, G; B, F; C, E	K, D	12
	k, *i*; *l*, *h*; *m*, *g*; *a*, *f*; *b*, *e*; *c*, *d*	. . . .	
V.	K, I; L, H; A, F; B, E; C, D	. . . .	12
	k, *h*; *l*, *g*; *m*, *f*; *a*, *e*; *b*, *d*	*i*, *c*	
	Paria dupla	Par ſimplex	6
VI.	$\left.\begin{matrix}L, G\\A, E\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}K, H\\B, D\end{matrix}\right\}$	C, I	
	$\left.\begin{matrix}i, h\\b, c\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}k, g\\a, d\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}l, f\\m, e\end{matrix}\right\}$		

In genere autem pro numero laterum Polygoni $4m$, facile colligitur vnumquemque priorum $2m-1$ ordinum praebere $4m$ ſolutiones, vltimum vero prc quo anguli omiſſi inuicem ſunt oppoſiti, non ſuppeditare niſi $2m$ ſolutiones; quum ſcilicet ex lateribus inueniantur $2m$ paria, quorum bina quaeuis inter ſe congruunt, ita vt pro inueſtigatione laterum tantum m quaeſtiones inter ſe diuerſae occurrant, pro angulis vero habebuntur $2m-1$ paria inter quae vnum, quod cum nullo alio congruit, hinc ex angulis reſultabunt m quaeſtiones diuerſae, ſicque tam ex angulis, quam lateribus pro hoc vl-

 timo

timo ordine $2m$ prodibunt ſolutiones. Quum igitur ex $2m-1$ prioribus ordinibus naſcantur $4m(2m-1)$ ſolutiones, coniunctim cum vltimo ordine numerus ſolutionum ex tota prima claſſe erit

$$= 4m(2m-1) + 2m = 2m(4m-1).$$

Quod vero ſecundam attinet claſſem, facile perſpicitur ſingulos eius ordines ad tot perducere ſolutiones, quot in Polygono habentur anguli vno excepto, quapropter ex tota hac claſſe orientur $2m(4m-1)$ ſolutiones perinde ac ex prima, ſicque ex binis claſſibus omnino habebuntur $4m(4m-1)$ quaeſtiones pro huiusmodi Polygono reſoluendae. Vnde noſtra iterum confirmatur regula: pro vnoquoque Polygono quaeſtionum ad binas priores claſſes ſpectantium numerum eſſe $n(n-1)$, exprimente n numerum laterum Polygoni. Sicque per ſingulos caſus eundo, huius regulae veritatem exacte demonſtratam dedimus.

24. Vt eo luculentius perſpiciatur, quomodo haec diſpertitio ſolutionum pro quocunque Polygono ſatis commode inſtitui queat, placet eandem exemplo quodam vberius illuſtrare. Ponamus igitur pro Heptagono omnes caſus ſolutionum eſſe deſcribendos, et pro iſto polygono latera exprimi litteris, $a, b, c \ldots g$, angulos vero indigitari per A, B, C ... G. Quo obſeruato ſcribantur hae partes prouti ſe ordine excipiunt, ſequentem in modum:

$$\mathrm{A}a\ \mathrm{B}b\ \mathrm{C}c\ \mathrm{D}d\ \mathrm{E}e\ \mathrm{F}f\ \mathrm{G}g\ \mathrm{A}a\ \mathrm{B}b\ \mathrm{C}c\ \mathrm{D}d.$$

Primum

Primum igitur liquet pro prima ſolutionum claſſe, ordines inueniri tres, prouti omiſſi concipiuntur anguli:

$$\text{I.}\ \left.\begin{matrix}G,\ F\\ G,\ A\end{matrix}\right\}\quad \text{II.}\ \left.\begin{matrix}G,\ E\\ G,\ B\end{matrix}\right\}\quad \text{III.}\ G,\ D$$

nam caſus quo G, A excluduntur nullo reſpectu diſpar eſt ab eo, quo G, F omiſſi concipiuntur. Pro *primo* ordine ſi excluſi cenſeantur anguli G, F, patet ſequentes partes Polygoni reſpectu horum angulorum ſimiliter diſpoſitas eſſe:

angulos A, E; B, D et latera g, e; a, d; b, c

latus autem f quod angulis omiſſis interponitur et angulus C paribus deſtituuntur, quocirca concluditur pro hoc ordine ſeptem diuerſas oriri quaeſtiones. Pro *ſecundo* ordine excluſis angulis G, E, conſtat partes Polygoni, quae reſpectu horum angulorum eundem tenent ſitum, eſſe ſequentes:

angulos A, D; B, C et latera f, e; g, d; a, c

at angulus F qui intermedius eſt inter omiſſos et latus b, quod ab vtroque hoc angulo numeratur tertium, caeteris partibus diſſimiles erunt, ſicque pro hoc ordine iterum ſeptem emergent ſolutiones. Pro *tertio* ordine reſpectu angulorum omiſſorum G, D partes Polygoni ſequentes eundem tenent ſitum:

anguli F, E; A, C et latera f, d; g, c; a, b,

latus autem e ab vtroque angulo G et D numeratur ſecundum, angulusque item B, qui ſecundus eſt, tam a G quam D, paria non habent, hinc ex

 hoc

hoc denuo ordine septem prodibunt solutiones. Pro secunda classe quatuor habebuntur ordines prouti praeter angulum G omissum concipiatur

$$\text{latus} \begin{matrix} f \\ g \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} e \\ a \end{matrix}\Big\} \begin{matrix} d \\ b \end{matrix}\Big\} \; c.$$

Pro tribus prioribus ordinibus leui adhibita attentione constat determinationes reliquorum angulorum nullam inter se praeferre similitudinem; at pro quarto ordine, quo omissum statuitur latus c; manifestum est angulos A, F; B, E; C, D in perfecta esse paritate, ideoque pro hoc ordine tres tantum habebuntur solutiones, cum trium priorum vnusquisque sex omnino praebeat.

25. Haec igitur sunt principia ex quibus solutio cuiusuis Polygoni adornatur, quatenus respiciendum solummodo est ad latera et angulos quibus comprehenditur. Postquam enim ex Theorematibus generalibus ad Polygonum propositum adplicatis, deductae fuerint aequationes ad istud Polygonum pertinentes, enumeratio Problematum quae pro dicto Polygono locum habebunt, ratione in superioribus praescripta institui debet, tumque ostendendum est, quaenam aequationum inuentarum pro vnoquoque Problemate soluendo adhiberi debeat. Quod autem reliquum operis est, in eo consistit, vt pro singulis Problematibus, aequationes ita euoluantur, vt solutionibus euadant accommodatae; id est vt quantitates incognitae per istas aequationes commode determinari queant. Huiusmodi autem euolutio, prae-

praeterquam quod nullam pariat difficultatem, exemplis melius illuftrari poteft, quam certis regularum praeceptis ftabiliri. In genere tamen obferuare convenit, determinationem laterum Polygoni per Problemata primae claffis ad aequationes deducere quadraticas fiue puras, feu affectas; hoc eft fi latus incognitum dicatur x, eius determinatio abfoluetur vel per aequationem $x^2 = P$, pofito quod P fit quantitas cognita ex cognitis Polygoni lateribus et angulis certo modo compofita; vel per aequationem $x^2 + Px = Q$, vbi P et Q iterum funt quantitates cognitae ex partibus Polygoni cognitis conflatae. Determinatio angulorum incognitorum per Problemata huius claffis, inftituetur per aequationem vel huius formae: $\text{cof.}\,\phi = R$, vel iftius $\text{cof.}\,\phi = R\,\text{fin.}\,\phi + S$, defignante ϕ angulum incognitum, R vero et S quantitates cognitas latera et angulos Polygoni involuentes. Denique inueftigatio angulorum per Problemata fecundae claffis ad huiusmodi perducet aequationes:

$$\text{Tang.}\,\phi = R,\quad \text{fin.}\,\phi = R \quad \text{vel} \quad \text{fin.}\,\phi = R\,\text{cof.}\,\phi + S,$$

defignantibus iterum R, S quantitates quaspiam cognitas. Sic per aequationem tertiam pro Tetragono §. 10. habetur

$$\text{Tang.}\,\alpha = -\frac{(b\,\text{fin.}\,\beta + c\,\text{fin.}\,(\beta+\gamma))}{a + b\,\text{cof.}\,\beta + c\,\text{cof.}\,(\beta+\gamma))},$$

per aequationem vero quartam

$$\text{fin.}\,\delta = \frac{a\,\text{fin.}\,\alpha + b\,\text{fin.}\,(\alpha+\beta)}{c}.$$

 Tum

Tum vero per aequationem tertiam pro Tetragono elicitur:

$$\text{ſin.}\,\beta = -\frac{\text{coſ.}\,\beta\,(b\,\text{ſin.}\,\alpha + c\,\text{ſin.}\,(\alpha+\gamma)) - a\,\text{ſin.}\,\alpha}{b\,\text{coſ.}\,\alpha + c\,\text{coſ.}\,(\alpha+\gamma)}$$

vel potius ſi placet

$$\text{ſin.}\,(\alpha+\beta) = -\frac{c\,\text{coſ.}\,(\alpha+\beta)\,\text{ſin.}\,\gamma - a\,\text{ſin.}\,\alpha}{b + c\,\text{coſ.}\,\gamma}.$$

26. Diximus ſupra in reſolutione Polygonorum reſpectum quoque haberi poſſe ad lineas eius diagonales, et angulos harum diagonalium cum lateribus Polygoni, hanc autem reſolutionis ſpeciem multo latius patere, quam illam priorem iam a nobis adumbratam. Interim tamen videtur haec quoque reſolutio ad certa principia generalia reuocari poſſe, quamuis omnium ſolutionum euolutio haud parum euadat prolixa. Pro iſthac vero reſolutione id imprimis agendum eſt, vt certa ſolutionum conſtituantur genera, quae deinde in ſuas claſſes et ordines ſibi ſubordinatos commode diſtribui poterunt. Sic ſi attendatur ad vnicam tantum diagonalem Polygoni eiusque angulos cum lateribus Polygoni, duo genera ſolutionum conſtitui poſſunt; quorum prius eas complectitur quaeſtiones quas haec linea diagonalis ingreditur, poſterius autem ſolutiones inuoluere cenſendum eſt, quae non ipſam diagonalem, ſed angulos tamen eius cum lateribus Polygoni inuoluunt. Prius genus in varias ſubdiuidi poteſt claſſes prouti cum hac linea diagonali, vnum vel duo, vel tria vel adeo omnia Polygoni latera ſolutionem ingrediantur. Haec autem conditio ſem-

per

per quidem praefcribitur, vt faltem vnum Polygoni latus cum diagonali in folutione occurrat; nam ex folis angulis figurae cuiuscunque rectilineae, linea quaedam ad eam pertinens, fiue latus fuerit feu diagonalis minime determinari poteft. Pro folutionibus pofterioris generis, fimili ex principio diftributio in claffes perficienda videtur, attendendo nimirum ad numerum laterum Polygoni, quae folutionem ingrediuntur. Haec autem partitio quae pro vnico Polygoni diagonali haud parum complicata eft, multo intricatior euadet, fi ad binas, tres vel plures Polygoni diagonales fimul attendendum fit; nec adhuc quidem mihi liquet quomodo ita in genere adumbrari poffet, vt ad vnumquodque Polygonum facilis eius effet adplicatio.

27. Qui attente confiderauerit modum, quo euolutio folutionum pro quouis Polygono perficienda eft, facile perfpiciet eam ad ifta Problemata referri poffe, quae ad doctrinam de combinationibus pertinent; quare quum circa refolutionem Polygonorum aliae quoque occurrant quaeftiones, quarum folutiones ex hac doctrina petendae funt, de praecipuis quibusdam earum nonnulla monuiffe haud pigebit. A Geometris quaeftionem propofitam fuiffe conftat, quot diagonales in vnoquoque Polygono duci queant, huius autem quaeftionis folutio facillime expedietur, fi confideremus quot omnino in vniuerfum duci poffint lineae rectae, bina quaeuis puncta Polygoni iungendo; fi enim a numero omnium harum linearum

nearum ſubtrahatur numerus laterum Polygoni, reſiduum dabit numerum linearum diagonalium. Poſito igitur numero laterum Polygoni $= n$, patet ex quouis eius puncto A ad reliqua B, C, D etc. quorum numerus eſt $n - 1$, duci quoque poſſe $n - 1$ lineas rectas, ſimiliter ex angulo B ad puncta C, D, E etc. duci poterunt $n - 2$ lineae rectae et lineae ex puncto C ad puncta D, E etc. ducendae habebuntur $n - 3$; ex quo colligitur numerum omnium harum linearum rectarum eſſe ſummam progreſſionis arithmeticae vnitate creſcentis, cuius primus terminus eſt 1 et vltimus $n - 1$, hincque $= \frac{n(n-1)}{2}$. Ex hac igitur ſumma ſubtrahatur ſumma laterum Polygoni n, reſtabit ſumma linearum diagonalium $= \frac{n(n-3)}{2}$, ſicque pro quadrilatero conſequemur 2 diagonales, pro Pentagono 5, pro Hexagono 9 etc. vti vnicuique ad ipſas quoque figuras attendenti, haud dubium eſſe poterit. Deinde iſta quoque proponi poteſt quaeſtio, quot in vnoquoque Polygono dentur anguli ſiue laterum, ſiue diagonalium? Facile autem liquet ad hanc quaeſtionis reſolutionem id tantum requiri, vt inueſtigetur quotnam anguli conſtituantur circa punctum quodcunque A Polygoni; ſi enim numerus horum angulorum multiplicetur per numerum laterum Polygoni, habebitur numerus omnium angulorum ad Polygonum pertinentium. At circa punctum A in polygono n laterum, inuenientur omnino $\frac{(n-2)\,n-1)}{2}$ anguli; tot ſcilicet habebuntur, quot modis litterae B, C, D ..G reliqua

reliqua puncta Polygoni indigitantes inter se combinari possunt, binas quasuis earum iungendo, harum autem combinationum numerus est $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, existente numero litterarum B, C, D ... G $= n - 1$. Consequitur ergo in figura rectilinea numero laterum n praedita, esse numerum omnium angulorum siue laterum seu diagonalium $= \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ et si inde subtrahantur anguli, quos latera Polygoni inter se constituunt, quorum numerus est n, habebitur numerus angulorum, quos diagonales siue inter se, seu cum lateribus constituunt $= \frac{n^2(n-3)}{2}$.

28. Denique haec quaestio haud parum curiosa proponi potest, quot modis data quaeuis puncta A, B, C, D ... L quorum numerus est n, lineis rectis ita iungi possunt, vt inde oriatur Polygonum numero laterum n praeditum? Si nimirum quatuor proponantur puncta A, B, C, D, patet per eorum coniunctionem tria omnino quadrilatera produci posse A B C D, A B D C, A C D B; prouti scilicet ordo quo litterae A B C D se insequuntur, immutetur. In hoc igitur Problemate id agitur, vt datis litteris A, B, C, D ... K, L quorum numerus est n, quaeratur, quot dentur variationes pro ordine, quo hae litterae se insequuntur; intelligitur autem ordinem litterarum eundem manere, quaecunque earum prima censeatur; ita vt hae combinationes A B C D, B C D A, C D A B, D A B C, nec non D C B A, C B A D, B A D C, A D C B ratione or-

 Gg dinis

dinis litteras intercedentis pro identicis ſint habendae. Quum igitur poſitio vniuscuiusque litterae heic non ſpectetur, modo eundem ordinem reſpectu reliquarum teruet; ponamus A eſſe in vnoquoque ordine primam, tum autem liquet perinde eſſe ſiue A cum reliquis illo modo A, B, C, D...K, L, ſiue hoc A, L, K...C, B iungatur, ideoque ſi numerus omnium permutationum pro litteris, B, C, D...K, L quaeratur, dimidium huius numeri exprimet numerum variationum pro ordine inter litteras A, B, C, D...K, L; inter permutationes enim litterarum B, C...K, L binae quaeuis dantur quae ipſi A iunctae, vnam eandemque variationem ordinis inter A, B, C...K, L producunt. At pro litteris B, C, D...K, L earum numero exiſtente $n-1$, numerus omnium permutationum eſt $=(n-1)(n-2)(n-3)\ldots2.1$, ideoque numerus qui exprimit variationes ordines inter latera Polygoni numero n, erit $=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)\ldots3.2.1}{2}$. Idem vero etiam ſequenti ratione demonſtrari poteſt. Ponamus m deſignare numerum, qui exprimit variationes ordinis inter litteras A, B, C, D...K, L et omnes harum litterarum factas eſſe permutationes; euidens itaque erit ad eundem ordinem eas referri debere permutationes, quibus litterae A, B, C, D...K, L ſi in orbem diſponantur, eundem inter ſe ſeruent ſitum, cuiusmodi ſunt:

A, B, C...I, K, L; B, C, D...K, L, A; C, D, E...L, A, B; etc.
L, K, I...C, B, A; A, L, K...D, C, B; B, A, L...E, D, C; etc.

Leui

Leui autem adhibita attentione conſtat, ad vnumquemque ordinem hoc modo $2n$ permutationes referendas eſſe; nam ſeruato ordine litterarum inter ſe, littera A numerari poteſt vel prima, vel ſecunda, vel tertia vel nſima; idque duplici ratione. Fiet igitur $2nm$ aequalis numero omnium permutationum, quae cum litteris A, B, C . . . K, L inſtitui poſſunt, hoc eſt

$$2nm = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 2.1,$$

vnde conſequitur

$$m = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3.2.1$$

prorſus vt modo inuenimus. Suppoſuimus heic numerum punctorum A, B, C, D . . . K, L aequare numerum laterum Polygoni, at ſi numerus punctorum $= m$ maior ſit numero laterum n, quaeſtio aliquanto generalior euadit, quae tamen aeque feliciter expediri poteſt, dum nempe quaeritur quot modis iungendo puncta A, B, C, D . . . K, L formari poſſit Polygonum numero laterum n conſtans? Si ſcilicet quaeratur numerus omnium combinationum inter litteras A, B, C, D . . . K, L quarum n ſimul ſumi oportet, hicque numerus multiplicetur per eum, qui exprimit variationes ordinis pro qualibet combinatione; habebitur numerus qui indigitabit quot modis ex datis punctis A, B, C, D . . . K, L exiſtente eorum numero m, conſtrui poſſit Polygonum numeri n. At numerus combinationum eſt

$$= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots (m-n+2)(m-n+1)}{n(n-1)(n-2) \ldots 3.2.1},$$

 quare

quare fiet numerus modorum quibus ex punctis A, B, C ... K, L construitur Polygonum

$$=\frac{m}{2n}(m-1)(m-2)(m-3)\ldots(m-n+2)(m-n+1),$$

quod etiam alio modo facile euinci poterit. Hinc intelligitur ex quatuor punctis, quadruplici modo triangula construi posse, ex quinque punctis decem, ex sex punctis viginti et sic in sequentibus. Ex quinque autem punctis quadrilatera construi possunt quindecim, ex sex 45, ex septem 105 etc.

PHYSI-

PHYSICO-
MATHEMATICA.

COMMENTATIO PHYSICO - MECHANICA GENERALIOR PRINCIPII DE COEXISTENTIA VIBRATIONVM SIMPLICIVM HAVD PERTVRBATARVM IN SYSTEMATE COMPOSITO.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Non haesito principium, de quo hic sermo est et quod in Commentariis Academiae Berolinensis demonstraui, inter vtilissima referre theoremata physico - mechanica, etiamsi summis quibusdam Geometris visum fuerit non posse integram, de chordis vniformiter crassis vibrantibus, theoriam exinde deduci, cui tamen sententiae ego nunquam assentire potui firmiter persuasus, omnem hanc theoriam in hoc solo positam esse, vt vibrationes singulorum ordinum inferiorum exacte sint submultiplae, duratione sua, vibrationum chordae fundamentalium. Ponamus autem ad momentum chordam tensam curuaturas admittere, quas principium meum non possit exacte suppeditare,

tare, nemo tamen inficias ibit, tales ſuppeditare, quae ab omni curuatura data, in tota chordae longitudine, *infinite parum* differant: id etenim apodictice demonſtraui; velim igitur mihi ſignificetur, quid per diſcrimen *infinite parum* in hoc negotio intelligi debeat, et quidem in argumento, quo ipſae vibrationes ſupponi debent infinite paruae, ita vt ſolutionem abſolute geometricam pro vibrationibus vtcunque ſenſibilibus nequidem admittat: ſi ſolutionem pure geometricam in his contendas, motum vibratorium determinabis in perfecta quiete, quia nec minimae vibrationes ſunt perfectae inter ſe iſochronae. At probe gnarus quam inutile ſit cum aliis de rebus diſputare, quae vnice ab idea *infiniti* ſiue *abſoluti* ſiue *relatiui* pendent ſimulque ambiguam inuoluunt quaeſtionem, quo vsque iſtud infinitum cum argumento ſubſtrato phyſico in ſingulis partibus elementaribus conſiſtere poſſit; horum, inquam, gnarus, nolui litem, qua nodus in ſcirpo quaeritur, vrgere maluique ad argumenta, quae dicuntur *ad hominem*, confugere; igitur problema propoſui de vibrationibus chordae inaequaliter craſſae, cuius ſolutio generalis adhuc deſideratur quidem, at quod diuerſas admittit ſolutiones particulares, viſurus quaenam inter methodos noſtras fertiliorem habitura eſſet ſegetem, at vero intra eosdem, ſua quisque methodo vſus, ſubſtitimus cancellos, niſi quod mea, ſynthetica potius quam pure analytica, methodus, corollaria prodiderit ſpecialiſſima, quae ſubterfugerunt methodos, quas opinantur, fertiliores. Tolle modo omnem

omnem de infinito amphiboliam, quod in honorem ſtudii mathematici dixerim, fallere neſcii, et omnem inter nos tolles controuerſiam.

§. 2. Sed quam egregie ipſa experientia docet atque confirmat coëxiſtentiam vibrationum in chorda tenſa, dum quaeuis vibratio ſimplex ſeorſim organo auditus diſtincte percipitur; experimentum volo notiſſimum, quod nondum fuerat explicatum, cum in vna eademque chorda ſaepe ſimul duo pluresue ſoni percipiuntur, inter quos eminent ſonus fundamentalis eiusque duodecima; imo muſicus attentus ſubaudit atque diſtingnit tertiam maiorem octauae duplicis ſiue decimam ſeptimam ſimul ſonantem; ſonant vtique et ipſa octaua cum octaua duplice qui vero ſoni ob nimiam conſonantiam difficulter a ſono fundamentali dignoſcuntur. Mire placuit phaenomeni explicatio mea Magno *Eulero*, quam eandem prorſus reiecit ſagaciſſimus geometra de la *Grange*. Exemplum afferam ſimpliciſſimum vt clarius pateat quod res eſt.

Sit p aequalis ſemicirculo, cuius radius vnitate expreſſus eſt; ponatur longitudo chordae $= l$; ſumatur in chorda abſciſſa x; ſit pro ſono fundamentali maxima elongatio chordae ab axe $= \alpha$ et pro ſono tertii ordinis $= \beta$; ſit denique pro abſciſſa x, applicata $= y$; erit aequatio ad curuam chordae pro ſolo ſono fundamentali $y = \alpha \sin. \frac{x}{l} p$ et pro eiusdem duodecima $y = \beta \sin. \frac{3x}{l} p$; pro ambabus vibrationibus coëxiſtentibus habes itaque $y = \alpha \sin. \frac{x}{l} p + \beta \sin. \frac{3x}{l} p$

fac $\beta = 0$ solum audies sonum fundamentalem; pone e contrario (quod haud difficulter obtinetur, vt constat per experimenta musica) $\alpha = 0$, percipies solam duodecimam: denique si sensibilis sit ratio inter α et β, ambo soni simul percipiuntur; praeminebit alteri sonus, pro quo maiores et fortiores militant elongationes: haec indicat theoria nostra, confirmat experientia; quid dubium mouere possit vel vllam haesitationem, nullus videre possum.

§. 3. Ab exemplo in chordis musicis sumpto progrediamur ad aliud, difficiliores quidem ac sublimiores calculos postulans, quod vero plures sonos coëxistentes eosque admodum distinctos sed valde dissonos auribus offert. Scilicet in arte musica adhibere etiam solent laminas chalybeas variae dimensionis, quae combinatae ludum efformant gallice *carillon* dictum; huiusmodi laminae prismaticae longiusculae, e filo suspensae, percutiantur, plerumque pro re nata tres, quatuor pluresue sonos, diversos, distinctos, atque plenos simul edunt. Dedimus autem, Illustris *Eulerus* et ego, integram horum sonorum et vibrationum, quibus quisque sonus debetur, theoriam, cui multas superaddidi obseruationes experimentales, quibus abstrusa haec theoria egregie confirmata fuit. Viam ingressus sum plane similem cum ea, quam calcauerat *Newtonus* in aurea theoria sua de coloribus; modum ostendi quo ad lubitum sonus quisque supprimi possit ita, vt vnus solus retineatur. Postquam enim intellexissem laminam inter vibrandum figuram assumere anguiformem,

formem, quae axem diuersis in punctis, in quibus *nodi* formantur, intersecet, protinus animaduerti innumeras admittendas esse, in eadem lamina percussa, vibrationum species, quarum quaeuis suum habeat nodorum numerum determinatum; pro simplicissima vibratione, quae sono responderet fundamentali, duos orituros esse nodos, pro sequente tres, dein quatuor etc. Facile autem intelligitur, si lamina duobus extremis digitis eo in loco prehendatur, vbi nodus est, cuicunque vibrationi nodus iste repondeat, fore vt a lamina percussa solus sonus, isti vibrationi debitus, edatur, suppressis caeteris omnibus, nisi fortasse nodus iste communis sit duobus pluribusue vibrationum ordinibus; Casus iste praesertim obtinetur, si lamina in medio, vbi nempe centrum grauitatis est, prehendatur; punctum enim medium nodum sistit omnibus et singulis ordinibus, quorum nodi sunt numero impares, communem; sic soli ordines nodorum parium supprimuntur in hoc casu specialissimo, manent impares omnes: Igitur lamina in alio nodo digitis premenda est, vt vnicus prodeat sonus purus, clarus, medullosus atque firmatus, praeter quem nihil percipiatur, quam strepitus aliquis suffocatus. Ad hoc requiritur, vt singuli nodi pro quouis ordine eorumque positiones calculo subducantur, quod olim feci; his positionibus cognitis, cuiusuis experimenti euentus praesagiri poterit. Si quaestio fuerit verbi gratia de vibrationibus quatuor nodos formantibus, a quibus sonus edatur ordine suo tertius, in quocunque

Hh 2 nodo

nodo aut in quibusuis nodis binis simul aut etiam ternis vel nenique singuli quaternis lamina digitis comprimatur atque percu iatur sonus vnicus semperque idem orietur, si omni accuratione experimentum fuerit institutum; hunc sonum notaui in monochordio eundemque etiam distincte percepi, cum lamina e filo suspensa percuteretur, etsi multos alios sonos tunc haberet permixtos. An non huiusmodi experimenta veluti apodictice demonstrant, coëxistentiam plurium sonorum prouenire a coëxistentia plurium vibrationum, nequaquam se inuicem perturbantium? Adde his experimentis plurima alia, quae allegaui in Exercitatione de sonis, qui a tibiis pneumaticis formantur, Commentariis Academiae Parisinae inserta, vbi principiorum meorum felicissimum vsum in plurimis nouis problematibus soluendis mechanico-musicis abunde ostendi simulque experimentis confirmaui. Sed quid profundioribus opus est in re per se clara? an non e longinquo in choro Musico singuli soni, vtut simul sonantes, distincte percipiuntur, qui non solum tenore suo sed et modificatione instrumento propria, valde inter se diversi sunt? An non haec omnia in eodem aere intermedio propagantur? An non in quauis particula aerea, vbicunque fuerit posita, innumerae simul excitantur vibratiunculae, quarum quaeuis suam perpetuo conseruat indolem, quam si sola esset. Video certo idem hic accidere aëri tremulo, quod obseruatur in camera obscura de materia aetherea, dum infiniti radii ex omni plaga aduentantes atque per

mini-

minimam aperturam tranſeuntes ſinguli obiecta externa nitidiſſime interne depingunt absque perturbatione, oculisque diſcernuntur qualia ſunt, prouti auribus ſoni ſimul percipiuntur varii, vnusquisque tenoris vibrationibus ſuis ſimplicibus debiti. At taedet plura de re nimis manifeſta diſputare.

§. 4. Relicta hac controuerſia, liceat ſaltem quaedam de praeſtantia methodi noſtrae commentari. Sit ſyſtema qualecunque ex pluribus corporibus, certa lege mobilibus, compoſitum, quae a ſitu ſuo naturali paululum diſtracta moxque ſibi relicta motibus reciprocis inter ſe diuerſiſſimis agitentur atque tunc quaeſtio ſit determinandi hosce motus in ſingulis corporibus. Non puto quaeſtionem hanc generalem vnquam ante me fuiſſe tractatam; ego quidem, cum ante hos 40 annos de motibus reciprocis catenae ſuſpenſae ſimulque de pluribus corporibus e filo flexili ſuſpenſis eorumque vibrationibus vel oſcillationibus agerem in Commentariis veteribus Academiae, modum oſtendi, quo oſcillationes ſynchronae, quas regulares et permanentes ab eo tempore vocaui, ſingulorum corporum ſimul vibrantium, ſuasque vibrationes eodem inſtanti incipientium atque finientium determinarentur; problema iſtud tot ſemper radices habet quot ſunt corpora in ſyſtemate atque docet configurationem ſitus initialis corporum, vt inde vibrationes ſynchronae fiant, ſimplices, regulares atque permanentes: Cum vero praeter hos caſus ſaepius inſpicerem motus oſcillatorios in variis corporibus filo flexili connexis et ſuſpenſis, dici non poteſt, quam varios, vagantes, anormes, inconſtantes illos tunc conſpexerim, ita vt tum temporis, quo nouum adhuc erat argumentum, exiſtimarem fruſtra operam impendi in illorum indaginem geometrico mechanicam; nec dabito quin idem ſenſerint hac de re vel praeſtantiſſimi huius ſaeculi geometrae, quia nulla huius quaeſtionis ſolutio comparuerat, cum tandem obſeruaſſem atque demonſtraſſem motus reciprocos in ſingulis corporibus ſemper componi ex oſcillationibus omnibus, quas ſyſtema admittit, ſimplicibus et regularibus, quarum determinationem praemiſeram. Hoc autem problema poſtremum omnibus numeris eſt determinatum, pure geometricum nec vlli controuerſiae obnoxium, quotcunque fuerint corpora, qualiscunque eorum maſſa, vbicunque ſint poſita et quibuscunque demum vinculis, inflexionem admittentibus, inter ſe connexa. Haec cum ita ſint absque vlla exceptione pro quocunque corporum numero, vera etiam erunt, ſi numerus iſte ſtatuatur infinitus et quidem *complete* vera, hinc apparet in theoria noſtra contineri, quicquid catenae ſuſpenſae, chordae tenſae ſiue vniformiter ſiue inaequaliter craſſae, motibus ſuis reciprocis, proprium habent. Denique notandum eſt, praefatas vibrationes in ſyſtemate coëxiſtentes, alias aliis eſſe tardiores, chordas autem vniformiter craſſas eius eſſe indolis, vt quaeuis vibratio, cuiuscunque ſit ordinis, exacte ſubmultipla ſit, vibrationis tardiſſimae fundamentalis; igitur omnes omnium ordinum vibrationes, ſi ſimul incipiant ſimul

mul etiam finient cum vibratione tardiſſima, vnde intelligitur qui fiat, vt ſolae chordae vniformes egregia gaudeant proprietate, quam Illuſtris Geometra, D. *D'Alembert* primus in illis ſagaciſſime animaduertit, ſcilicet quod pro qualicunque curuatura initiali, poſt quamuis vibrationem *fundamentalem* quaevis chordae puncta in ſtatum quietis momentaneae reducantur, cui ego theoremati plane conſentio, modo nullum ſit, in curuatura aſſumta, punctum, quod contradictionem implicet cum hypotheſi, qua ſingulae motiunculae pro *infinite paruis* habentur. In hanc hypotheſin impingunt omnes variationes quae fiunt per ſaltus; oportet, meo iudicio, vt radius oſculi pro quouis puncto poſſit pro infinite magno haberi, id eſt, infinities maiore, quam, verbi gratia, longitudo chordae. Haec quidem pro vibrationibus plurium ordinum coëxiſtentium, quae ſingulae quietem offerunt momentaneam, quoties vibratio fundamentalis ad eam perducta eſt; at vero caſus iſte vnicus eſt inter infinitos; etenim vibrationes diuerſorum ordinum poſſunt non ſimul incipere et ne tunc quidem deficit principium noſtrum, ita vt hoc titulo ſolutio noſtra poſſit pro multo generaliori haberi, quam quae a ſummis Geometris impertita fuit; Indicat enim methodus noſtra fore, vt ſingulae vibrationes vnius eiusdemque ordinis abſoluantur et reciprocentur eodem modo ac ſi nulli alii vibrationi ſint permixtae. Hinc oritur theorema generalius.

Quis-

Quiscunque fuerit status chordae vniformis tensae pro dato quouis temporis instanti, tam ratione incuruationis chordae quam ratione motus absoluti in singulis particulis, is idem status situ inuerso recurret post quoduis interuallum vnius vibrationis simplicis fundamentalis vel in eodem situ post quasuis duas vibrationes fundamentales.

Hinc illa affinitas, quam praesens argumentum habet cum theoria serierum *recurrentium*. Inde etiam plurima deduxi consectaria pro chordis inaequaliter crassis, notatu pariter digna, quae vix a sublimioribus calculis expectanda fuissent absque synthesi nostra.

§. 5. Redeo ad systemata corporum numero finitorum quotcunque; quae non puto aliter quam methodo nostra pertractari posse, vtpote quae necessario praeuiam determinationem singularum radicum in aequatione algebraica cuiuscunque dignitatis postulant. In hoc latissimo campo nullae quaestiones ancipites occurrunt; nulla hic lis est; solutio horum problematum *in abstracto* facilis est, vtcunque prolixa aut difficilis saepe sit methodi applicatio *in concreto*. Ipsa vero methodus in hoc consistit, vt in systemate singula corpora ab axe aequilibrii diducta putentur atque proportio elongationum ab axe, secundum principia mechanica, inquiratur ea lege, vt vires acceleratrices corporum versus axem sint ipsis elongationibus proportionales: hoc praestito fiet vtique, vt singulae systematis partes simul oscillationes suas perficiant, si simul eas inchoarint, atque

hoc

hoc modo oscillationes simplices, synchronae, permanentes fiant. Verum aequatio finalis, qua corporum singulae elongationes ab axe determinantur, tot habebit dimensiones, quot sunt corpora, vnde sequitur totidem simul fore radices, quarum quaeuis singularem systematis configurationem initialem sistit simulque diuersam longitudinem penduli simplicis isochroni exhibet: quaelibet etiam configuratio seruabit pro vnico corpore diductionem arbitrariam, ad quam caeterae diductiones determinabuntur. Sic rursus erit problema determinatum, vt quaeratur quaenam in quauis configuratione seorsim sumta diductio arbitraria seligenda sit, vt pro coëxistentibus singulis vibrationibus ab initio diductio cuiusuis corporis absoluta datam obtineat magnitudinem. Hinc denique patet, quod in omni systemate, vtcunque eius partes a situ aequilibrii fuerint deductae, motus absolutus inde oriturus definiri possit.

§. 6. Systemata corporum, diuersis vinculis connexorum, innumera concipi possunt; in aliis motus reciproci singulorum ordinum ita rapide se subsequuntur, vt oculorum aciem effugiant, cuiusmodi esse solent chordae musicae tensae, quibus etiam corpora annexa esse possunt: ad hunc censum quoque pertinent laminae elasticae earumque motus tremuli a percussione siue etiam campanae aut tympana, de quibus posterioribus solus Incomparabilis *Eulerus* agere ausus est. Hosce motus tremulos auris, non oculus, diiudicat, si modo plusquam triginta vibrationes intra minutum secundum perficiantur,

tur. Quia vero phaenomena, in diuerſitate ſonorum coëxiſtentium, obſeruata aliter ab aliis explicantur, argumentum noſtrum malo dilucidare, a motibus reciprocis in ſyſtemate, qui oculis diſtincte cum omnibus variationibus obſeruari poſſunt. Huic fini egregie inſeruiunt pendula multifila, ſi ſcilicet plura corpora, filis intermediis connexa, ſuſpendantur motibusque reciprocis agitentur: tunc, pro diuerſis circumſtantiis, tam varii coëxiſtentes motus in ſingulis corporibus apparent, vt non aliter quam ad legem principii noſtri explicari poſſe videantur: ſi verbi gratia, tria corpora plumbea vncis paruulis inſtructa ad commodiorem ſuſpenſionem, duobus filis intermediis connexa, atque corpus ſupremum filo tertio ſuſpendatur, tumque ſingula corpora pro lubitu a ſitu ſuo naturali paululum diducantur tandemque totum ſyſtema ſimul ſibi relinquatur, tunc plerumque in ſingulis corporibus agitationes hinc inde oriuntur tam irregulares omnique titulo tam variabiles ac incerti, vt ab omni lege mechanica ſolutas dixeris. Attamen, ex datis corporum maſſis, eorundemque diſtantiis a puncto ſuſpenſionis ac denique diductionibus primitiuis, ſitus ſingulorum corporum pro quouis momento temporis deſiderato praedici poteſt, ſecundum theoriam noſtram. Sed et plura puncta cardinalia, oculis facile diſcernibilia, ita determinari poſſunt, vt totam theoriam hanc exacte per experimenta confirment. At calculus, pro pluribus corporibus filo connexis ac ſuſpenſis, operoſus nec euitabilis requiritur; imprimis negotium

tium faceſſit taedioſa ſingularum radicum inueſtigatio in aequatione, quae cuiuslibet corporis elongationem ab axe, pro oſcillationibus ſimplicibus et perfecte ſynchronis in ſyſtemate formandis, indicat. Methodum docuiſſe generalem contentus, ſolum commentabor caſum ſimpliciſſimum pro duobus corporibus, ſcopo noſtro non male congruum.

§. 7. Sit pendulum bimembre $a\,c\,d$ (fig. 1 et 2); Tab. II. corpus ſuperius in c, inferius in d; putentur haec corpora a ſitu ſuo naturali diducta in b et e; Data elongatione $b\,c$ quaeritur elongatio $e\,d$ hac lege, vt ambo corpora oſcillationes ſimplices et regulares, iſochronas ac ſynchronas faciant? Plurima iam paſſim pertractaui argumenta, quae ſingula hanc quaeſtionem, ceu ſimplex corollarium, in ſe continent; tota autem eius ſolutio in eo conſiſtit vt, ſecundum leges mechanicas, determinentur vires acceleratrices pro ambobus corporibus in b et e poſitis, eaeque viis ſimul perficiendis $b\,c$ et $e\,d$ proportionales fiant: his veſtigiis inſiſtendo ſequens oritur aequatio.

Sit longitudo fili $a\,c = l$; $c\,d = \lambda$; maſſa corporis in $c = m$; in $d = \mu$; elongatio $b\,c = \alpha$; $e\,d = f\,d + e\,f = \alpha + \beta$: his poſitis fit,

$$\beta\beta + \frac{(l-\lambda).(m+\mu)}{l\mu}\alpha\beta = \frac{\lambda(m+\mu)}{l\mu}\alpha\alpha \text{ hinc}$$

$$\beta = \frac{(m+\mu).(\lambda-l)\alpha \mp \alpha\sqrt{((m+\mu)^2.(\lambda-l)^2 + 4(m+\mu)\mu l\lambda)}}{2\mu l}.$$

Igitur aequatio duas habet radices, quia ſcilicet duo ſunt corpora, quae ambae radices ſemper ſunt reales; ſignum autem ſuperius, quantitati radicali prae-fixum, valet pro configuratione prima; inferius pro ſecunda.

Poſtquam ſic determinata fuit ratio inter β et α, licet etiam determinare longitudinem penduli ſimplicis iſochroni cum vibrationibus ſimplicibus penduli bimembris pro vtraque claſſe. Si nempe praefata longitudo penduli ſimplicis iſochroni ponatur $= P$, reperitur

$$P = \frac{m l \lambda}{m\lambda + \mu\lambda - \frac{\beta}{\alpha} \times \mu l}$$

atque ſi pro $\frac{\beta}{\alpha}$ ſubſtituatur valor eius modo inuentus ſimulque, breuitatis gratia, ponatur $m + \mu = M$ et $\lambda - l = L$, prodit tandem

$$P = \lambda + \frac{2\mu l \lambda}{ML \pm \sqrt{(MMLL + 4\mu MlL + 4\mu Mll)}}.$$

§. 8. Inſeruient praemiſſae formulae ad veram indolem totius argumenti noſtri detegendam: Etenim, quae dicta ſunt in praecedente paragrapho, vnice inſeruiunt ad quamuis vibrationum ſpeciem ſeorſim explicandam, accipiendo ſignum ſuperius pro configuratione prima et inferius pro ſecunda; quod ſi vero ambas vibrationum ſpecies ſimul exiſtere velimus, tunc amplitudines $b\,c$ in vtraque figura vtcunque diuerſas aſſumere licebit easque ita eligere, vt ab initio, diductiones abſolutae amborum corporum ab axe, quaeuis datam magnitudinem obtineat poſteaque ambo corpora ſecundum legem vtriusque configurationis ſimul oſcillent, ſic variatio ſitus abſoluta ſingulis momentis in vtroque corpore innoteſcet,

teſcet, ſi vtraque oſcillatio ſeorſim, vna poſt alteram conſideretur, deindeque loco axis recti *a c d* ſumatur figura paululum inflexa *a b e*, ſuper qua inflexio figurae ſecundae conſtruatur. Conſtructio haec figura tertia explicatur, in qua configuratio *a b e d c a* plane eadem eſt cum figura prima, iisdem litteris circumſcripta; poſt modum arculus $b' c'$ figurae ſecundae ad ſiniſtram poſitus, translatus eſt in ſitum $b' b$ figurae tertiae; ſic a combinata oſcillatione ſitus corporis ſuperioris in figura tertia, pro aſſumto temporis momento, erit in puncto b': ſimiliter pro inferiori corpore arculus $d' e'$ figurae ſecundae ad dextram poſitus, translatus eſt in ſitum $e\ e'$ figurae tertiae, quia ſcilicet ab oſcillatione primae configurationis punctum *d* translatum fuit in *e*: Denique ſi in configuratione tertia coniungantur puncta *a* et b' pariter ac puncta b' et *e* rectis $a\ b'$ et $b'\ e'$ habebimus ſitum penduli bimembris, pro dato temporis puncto, in $a\ b'\ e'$.

Caeterum notari meretur, quod ſi in configuratione prima filum inferius *e b* producatur vsque in *o*, vbi axem interſecat, futurum ſit, vt longitudo *o d* fiat aequalis longitudini penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus ſimplicibus penduli compoſiti tardioris, prouti in configuratione ſecunda longitudo analoga $o' d'$ denotat longitudinem penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus ſimplicibus penduli compoſiti celerioris. Nec minus notatu dignum eſt, quod generaliter ambo pendula ſimplicia, vtrique oſcillationum ſpeciei reſpondentia, ſimul

 ſumta

ſumta ſemper ſint aequalia longitudini amborum filorum $l + \lambda$ ſiue $= a\,d$ vel $a\,d'$ pro duabus prioribus figuris; reperio enim, quod ſit $a\,o$ figurae primae aequalis $o'\,d'$ figurae ſecundae. Egregia haec proprietas deducitur ex valore vtroque penduli ſimplicis iſochroni in fine paragraphi praecedentis expoſito. Eſt nempe in figura prima

$$o\,d = \lambda + \frac{2\mu l \lambda}{ML + \sqrt{(MMLL + 4\mu MlL + 4\mu Mll)}},$$

ſimulque in fig. ſecunda

$$o'\,d' = \lambda + \frac{2\mu l \lambda}{ML - \sqrt{(MMLL + 4\mu MlL + 4\mu Mll)}}.$$

Inde deducitur quod ſit ſumma vtriusque valoris, nempe $o\,d + o'\,d' = l + \lambda$, ſi pro L reſtituatur valor eius aſſumtus $\lambda - l$. Video hic veſtigia naturae ſpecioſa ſimplicitate conſpicuae.

§. 9. Deſcendam ad exempla ſpecialiora: Sint ambo fila inter ſe aequalia ſiue $l = \lambda$, fiet in paragrapho ſeptimo pro figura prima et ſecunda

$e\,f = \beta = \pm a \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}$ atque $e\,d = \alpha + \beta = a \pm a \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}$.

Si vero, quod licet, quaeuis configuratio ſeorſim ſumatur, poterunt amplitudines vel diductiones $b\,c$ atque $b'\,c'$ inaequales accipi; ponatur itaque $b\,c = \alpha$ et $b'\,c' = \alpha'$; tunc erit in figura prima

$e\,d = \alpha + \alpha \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}$ et in figura ſecunda

$e'\,d' = a' - a' \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}$:

Ergo, vi conſtructionis §. 8. indicatae, fiet pro figura tertia diſtantia abſoluta $b'\,c = \alpha + \alpha'$ pro corpore

pore ſuperiore; verum pro inferiore corpore obtinetur diſtantia abſoluta

$$e' d = e d - e e' = a + a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} - e e';$$

eſt vero per conſtructionem, $e e'$ in figura tertia aequalis $d' e'$ in figura ſecunda ſiue $= a' - a'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}$ et quoniam in figura tertia arculus $e e'$ ad ſiniſtram axis $a d$, in figura autem ſecunda ad dextram ſumitur, facienda nunc erit

$$e e' = -a + a'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}};\ \text{hinc}$$

$$e d = a + a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} + a' - a'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = a + a' + a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} - a'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}$$

atque ſic tandem pro figura tertia inuenimus

$$b c' = a + a' \text{ atque } e' d = a + a' + a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} - a'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}:$$

Igitur ex datis duabus oſcillationibus elementaribus determinare licet oſcillationem reſultantem compoſitam configuratione tertia repraeſentatam.

§. 10. Facile nunc erit reſpondere ad quaeſtionem vniuerſam, nempe vt pro motu reciproco abſoluto figurae tertiae determinentur ambae oſcillationes elementares, ex quibus componitur. Conſideretur itaque, in figura tertia $a\ b'\ c$ tanquam poſitio initialis penduli bimembris ponaturque diſtantia initialis $b' c = \alpha$ et $e' d = b$ ac quaerantur quantitates a et a'. Sic habebimus, vi paragraphi praecedentis,

$$a + a' = \alpha \text{ et } a + a' + a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} - a'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = b.$$

Ope

Ope harum duarum aequatiuncularum elementarium inuenitur

$$a' = \frac{a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} + b - a}{2\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}}$$

$$a' = \frac{a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} + a - b}{2\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}}.$$

Cognitis in figura prima et ſecunda diductionibus primitiuis $b\ c$ et $b'\ c'$, a quibus vnitis reſultet data configuratio initialis tertia, inſeruiet paragraphus ſeptimus ad determinandas, in ambabus figuris primis, diductiones corporis inferioris, vt iam monui in paragrapho praecedente; erit ſcilicet

$$ed = a + a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} + \tfrac{1}{2}b + \frac{b-a}{2\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}} \text{ ſimulque}$$

$$e'd' = a' - a'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = -\tfrac{1}{2}a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} + \tfrac{1}{2}b + \frac{a-b}{2\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}}.$$

Valent hae formulae, quoties ambo fila ſunt inter ſe aequalia, quaecunque caeterum ſit ratio inter maſſas corporum ſuſpenſorum.

Tum etiam, pro ambobus definiendis pendulis ſimplicibus iſochronis cum ambabus oſclillationibus elementaribus, vtemur duabus formulis in fine paragraphi octaui expoſitis, faciendo $l = \lambda$ atque adeo $L = 0$ ſimulque, ſi lubeat, reſtituendo pro M valorem eius $m + \mu$. Hoc modo oritur, pro figura prima, longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſiue $od = l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$ atque pro figura ſecunda, $o'd' = l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$.

Iam

Iam igitur integra relatio inter oſcillationes elementares (quarum quaeuis eſt ſimplex, permanens, inuariabilis legibusque cognitis penduli ſimplicis ſubiecta) et motus reciprocos abſolutos ad normam figurae tertiae inde reſultantes; qui videri poterunt valde anomali et plerisque in caſibus nunquam in ſtatum primitiuum recurrunt.

§. 11. Si longitudo vtriusque fili l quaeratur vt oſcillationes principales, ſecundum leges configurationis primae, quouis minuto ſecundo abſoluantur, faciendum erit $l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = 440$ lin. vnde habetur $l = \frac{440\sqrt{(m+\mu)}}{\sqrt{(m+\mu)}+\sqrt{\mu}}$ lin., fuerit, verbi gratia, $m = 16$ vnciis et $\mu = 9$ vnc. erit $l = 275$ lin. ſiue $l = 1$ ped. 10 poll. 11 lin. Simul autem oſcillationes celeriores, pro lege configurationis ſecundae, perficientur quouis ſemiminuto ſecundo eritque pendulum ſimplex iſochronum cum hiſce oſcillationibus elementaribus $= 110$ lin. In genere, ſi animus ſit pro data configuratione tertia primitiua determinare tempora oſcillationum elementarium pro configuratione prima et ſecunda, ex quibus motus reciproci abſoluti componantur, haec tempora vnice conficientur a maſſis amborum corporum et longitudinibus filorum nec elongationes initiales $b' c$ et $e' d$ in figura tertia quicquam conferent ad determinanda tempora oſcillationum ſimplicium in duabus primis figuris; at vero praefatae elongationes $b' c$ et $e' d$, figurae tertiae, determinant amplitudines $b c$ et $b' c'$ vna cum amplitudinibus $e\ d$ et $e'\ d'$ in figura prima ac ſecunda. Quamuis porro oſcillationes ambae generatrices in duabus figuris primis ſint plane ſimplices et permanentes et vnaquaeuis earum motum perficiant ſecundum easdem leges quibus pendulum ſimplex mouetur, attamen motus reciproci abſoluti in figura tertia plerumque, pro variis circumſtantiis, mirum in modum variantur, dum ambo corpora ab initio in b' et e' poſita omni titulo a motu corporis penduli ſimplicis recedunt atque excurſiones faciunt modo maiores modo minores easque temporibus inaequalibus perficiunt nec accelerationes aut retardationes admittunt, quae ſint diſtantiis corporum ab axe proportionales. His tamen non obſtantibus ſpinis, motus integer corporum pro configuratione tertia ope vtiliſſimi principii noſtri exacte determinari poteſt pro quocunque temporis momento: Requirit autem methodus noſtra, vt ex datis filorum longitudinibus, corporum ſuſpenſorum maſſis eorumque ab axe diductionibus initialibus determinentur omnes et ſingulae oſcillationes ſyſtematis propoſiti ſimplices ac permanentes, a quarum concurſu motus reciproci abſoluti ſemper deduci poterunt, qui datis circumſtantiis ſoli conueniant, cum ſit problema noſtrum plane determinatum quotcunque fuerint corpora; igitur quidni determinatum erit, ſi numerus corporum cenſeatur infinitus: Solutio autem problematis determinati aut fallax eſt aut problema, pro tota eius extenſione, complectitur. Si vero reſtrictionem ſuſpiceris in ſolutione mea de vibrationibus chordarum tenſarum, ab initio

tio certa lege incuruatarum, illa necessario consistet in insufficiente enumeratione vibrationum simplicium Taylorianarum, ex quibus vibrationes componantur absolutae.

Ergo darentur vibrationes simplices Taylorianae in vna eademque chorda, quae simul incipiant simulque terminentur et quarum tempora non forent submultipla temporis vnius vibrationis fundamentalis, quam nemo fouebit sententiam. Non insistam liti nec enim aliud intendi hisce pagellis, quam vt viam praepararem, quae nos ad pleniorem principii nostri applicatioem conduceret in problemate soluendo mechanico, simplicissimo quidem sed nondum explorato, quantumuis plurimis proprietatibus geometrarum attentione digno. De hoc proxima agam occasione.

COMMENTATIO PHYSICO-MECHANICA SPECIALIOR

DE

MOTIBVS RECIPROCIS COMPOSITIS.

MVLTIFARIIS NONDVM EXPLORATIS QVI IN PENDVLIS BIMEMBRIBVS FACILIVS OBSERVARI POSSINT IN CONFIRMATIONEM PRINCIPII SVI DE COEXISTENTIA VIBRATIONVM SIMPLICIORVM.

Auctore

DANIELE BERNOVLLI.

§. 1.

Praemissa huius argumenti nostri explanatione vtar in hac altera parte ad motus reciprocos in pendulis bimembribus determinandos; facillimus vtique est casus iste specialis nec tamen, quantum scio, adhuc examinatus ratione inaequalitatum et apparentium irregularitatum, quae in motibus reciprocis pendulorum compositorum latent veramque eorum indolem constituunt, nisi solicite segregatae fuerint oscillationes solitariae simplices et regulares ab innumeris motibus reciprocis, quos pendula composita naturaliter perficiunt. Pendula autem quod seligam bifila

bifila iisque solis insistam etiamsi methodus nostra ad quemuis filorum corporumque connexorum numerum applicari possit, moueor partim a calculorum breuitate partim vt argumentum tanto magis inclarescat simulque experimenta in confirmationem foecundissimi principii nostri instituenda tanto fiant faciliora magisque conspicua: imo sufficiet pro instituto nostro considerasse pendula aequimembria, ambobus scilicet sumtis filis inter se aequalibus, vnde formulae in prima nostra dissertatione praeliminari expositae admodum contrahuntur. His omnibus factis restrictionibus duo super erunt elementa a quorum variatione arbitraria variantur motus reciproci absoluti in proposito pendulo; *primum* positum est in proportione massae corporis superioris ad massam inferioris, a qua sola proportione pendet ratio inter pendula simplicia cum duabus oscillationibus regularibus, ex quibus motus reciproci absoluti componuntur, isochrona; *alterum* elementum pro lubitu variabile consistit in distantiolis, ad quas ambo corpora diducta fuerunt in primo motus absoluti momento, a quarum variatione plurimae iniiciuntur motiunculis absolutis variationes. In prima Commentatione §. 10. posui diductionem initialem pro corpore superiori $= a$ et pro inferiori $= b$, vbi notandum est quod, si ab initio ambo corpora ad partes oppositas respectu axis verticalis posita fuerint, possit distantiola a pro corpore superiori semper pro affirmatiua accipi mutato saltem signo diductioni corporis inferioris praefixo. De vtroque elemento

 seorsim

ſeorſim quaedam monebo retentis literis et figuris in prima Commentatione adhibitis atque explicatis.

§. 2. Initium faciam ab maſſis, vnde pendent longitudines pendulorum ſimplicium iſochronorum cum ambabus oſcillationibus regularibus ex quibus motus reciproci abſoluti componantur. Vidimus autem §. 9. praecedentis Commentationis has pendulorum ſimplicium longitudines eſſe, pro oſcillationibus tardioribus $= l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$ et pro oſcillationibus celerioribus $= l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$. Patet ex iſtis formulis eam ſemper proportionem maſſis m et μ aſſignari poſſe vt praefatae longitudines quamcunque datam proportionem obtineant atque, ſi proportio haec ſumatur vt numerus quadratus maior ad numerum quadratum minorem, fore vt tempora oſcillationum ſimplicium ſint vt numerus integer ad numerum integrum, ſecus fore haec tempora incommenſurabilia: fuerit tempus vnius oſcillationis ſimplicis tardioris pro configuratione prima $= T$ ac tempus vnius oſcillationis celerioris ad modum figurae ſecundae $= t$, ponaturque $T = nt$; dico aliter atque aliter, pro diuerſitate numeri n, ſe habituros motus reciprocos abſolutos ad modum figurae tertiae. Diuerſos euentus percurram prouti fuerit n vel numerus integer vel fractus vel irrationalis.

§. 3. Ponatur pro n numerus integer, fiet vt ambo corpora, poſt ſingula temporis interualla T, ſimul extremitatem oſcillationis attingant et in ſtatum quietis momentaneae perueniant ſimulque no-

vam

vam inchoarent oſcillationem ſimplicem. Nec tamen exinde ſequitur fore vt ambo corpora, motu abſoluto verſus axem regrediantur; fieri enim poteſt, vt incipientes nouae oſcillationes ſimplices, hoc temporis momento, in diuerſas partes eant atque corpus alterutrum motu abſoluto etiamnum paululum recedat ab axe, ſiue inferius ſit corpus ſiue ſuperius; interea tamen ſtatus iſte quietis momentaneae, qui in vtroque corpore, pro ambabus oſcillationibus ſimplibus ſimul continget, oculorum intentorum aciem non effugiet, quandoquidem et ipſe motus abſolutus hoc temporis momento ceſſabit; Probe hic obſeruandum eſt inſigne diſcrimen in motibus reciprocis abſolutis contingere, prouti numerus integer n fuerit vel par vel impar; in priori enim caſu perfecte ſingulae recurrent circumſtantiae poſt quaeuis demum bina interualla 2 T, in poſteriori poſt ſingula ſimplicia interualla T; atque haec obſeruatio pariter formanda eſt de duobus punctis qualibuscunque in chorda vniformi vibrante pro ratione vibrationum ſimplicium, quae motus reciprocos chordae abſolutos conſtituunt; etenim in his motibus reciprocis pariter fieri poteſt, vt a ſtatu perfectae quietis momentaneae totius chordae, alia puncta extrorſum alia introrſum moueantur; ſingula chordae puncta equidem, poſt ſingulas vibrationes fundamentales, periodicos ſtatus quietis momentaneae ſimul obtinent, at minime ſimul, in omni caſu, excurſiones ſuas abſoluunt motu ſuo abſoluto nec in vllo puncto motiunculae reciprocae abſolutae leges obſeruant motuum ſim-

ſimplicium iſochronorum, qui proprie vibrationes aut oſcillationes dicuntur. Quod ſi vero numerus integer n fuerit impar, fiet vt poſt ſingula temporis interualla T, ambo corpora ſimul pro momento quieſcant, configurationemque initialem reſumant ſimulque etiam axem verticalem tranſeant, quamuis a momento communis quietis ad diuerſas ire poſſint partes, alterum ſcilicet accedere ad axem alterum recedere; motus denique reciproci abſoluti minime fient ſecundum notiſſimas iſochroniſmi leges, dum durante vna eademque oſcillatione fundamentali corpora nunc progreſſiua, nunc retrograda nunc ſtationaria eſſe poſſint atque idem in ſingulis chordae irregulariter vibrantis punctis contingere poteſt.

Quod ſi pro n accipiatur numerus non integer, veluti $\frac{13}{6}$ aut $\frac{15}{7}$, periodi in motibus reciprocis abſolutis non niſi poſt plures oſcillationes fundamentales recurrent; veluti poſt ſex aut ſeptem huiusmodi oſcillationes atque in his caſibus, vt de motibus reciprocis inde reſultantibus recte iudicare poſſimus rurſus diſpiciendum erit an denominator in his fractionibus ad minimos terminos reductis, ſit numerus par vel impar: Sed in poſteriori caſu attendendum erit ad numeratorem an ſit numerus par vel impar; etenim aliter ſe res habebit pro numero $\frac{15}{7}$ aliter pro $\frac{16}{7}$ haec manifeſta fient; ſi non ſolum ad periodos pro quietis momentaneae concurſu ſed et pro configuratione ſyſtematis, his momentis reſpondente, animum attendamus;

Deni-

Denique ſi fuerit n numerus irrationalis, nulla vnquam fiet reſtitutio perfecta neque ratione concurſus in quiete momentanea neque ratione configurationis in ſyſtemate, etiamſi ambas oſcillationes ſimplices liberrime fieri et continuari ſupponas ſine fine; attamen pro quouis momento dato in vtroque corpore et ſitus et velocitas determinari poterunt ad mentem theoriae noſtrae, vti infra videbimus.

§ 4. Deſcendamus ad exempla particularia, retinendo hypotheſin aequalitatis inter ambo fila, vtrumque aequale l.

(a) Ponatur corpus ſuperius $m = 16$ et inferius $\mu = 9$; fiet $\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{3}{5}$; hinc longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus ſimplicibus tardioribus $= l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{8}{5}\,l$ ac pro oſcillationibus celerioribus $= l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{2}{5}\,l$; hinc prius alterius quadruplum eſt; vnde $T = 2\,t$ et $n = 2$.

(b) Inuertantur corpora atque nunc ſupponatur $m = 9$ et $\mu = 16$; habebitur $\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{4}{5}$; hinc longitudo penduli iſochroni tardioris $= \frac{9}{5}\,l$ et celerioris $= \frac{1}{5}\,l$; vnde $T = 3\,t$ et $n = 3$.

(c) Manente maſſa corporis ſuperioris, apparet pendulum ſimplex iſochronum cum oſcillationibus ſimplicibus primi generis tanto maius fore quanto maior ſumitur maſſa corporis inferioris et tanto minus pro oſcillationibus ſimplicibus ſecundi generis atque ſic duplici titulo fore vt numerus n increſcat. Si maſſa corporis inferioris μ fuerit admodum magna,

 erit

erit propemodum pendulum pro prioribus oſcillationibus $= 2\,l$ et pro oſcillationibus ſecundi generis admodum paruum numerusque n proueniet permagnus. Si e contrario maſſa μ ſtatuatur perexigua, fient ambo pendula ſimplicia iſochrona proxime inter ſe aequalia et numerus n parum vnitate maior. Attamen pendulum ſimplex iſochronum cum oſcillationibus ſimplicibus primi generis ſemper excedet pendulum alterum, quod conuenit oſcillationibus ſecundi generis et numerus n ſemper vnitatem paululum excedet. Sequitur exinde, ambo puncta interſectionis o et o' in duabus primis figuris fore proxime ad puncta media c et c' poſita, primum paullo ſuperius alterum paullo inferius, nec id fieri poteſt quin, pro oſcillationibus ſimplicibus vtriusque generis, corpus inferius arcus deſcribat longe maiores quam corpus ſuperius, quod adeoque tantum non quieſcere debet, ne nimium recedamus, reſpectu ad corpus inferius, ab hypotheſi qua ſingulae oſcillationes admodum exiguae ſupponuntur.

§. 5. Poſtquam, pro dato pendulo compoſito, longitudines pendulorum ſimplicium requiſitas determinauimus; ſupereſt, vt ab datis diductionibus initialibus $b'\,c$ et $e'\,d$ in figura tertia, (quas in prima noſtra commentatione literis a et b denotauimus) inquiramus in ſemi amplitudines $b\,c$ et $b'\,c'$ pro ambabus figuris primis, quas vocauimus α et α'; Indicaui hos valores paragrapho decimo primae commentationis: tranſcribam valores paulo magis concinnatos nempe

$\alpha =$

$\alpha = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(b-a)\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$ atque $\alpha' = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(b-a)\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$. Cognitis valoribus α et α' arculorum $b\,c$ et $b'\,c'$, innoteſcent etiam arculi inferiores $e\,d$ et $e'\,d'$ per paragraphos 7 et 9; erit nempe, pro caſu amborum filorum inter ſe aequalium,

$$e\,d = \alpha + \alpha\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} \text{ et } e'\,d' = \alpha' - \alpha'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}}.$$

Atque hoc modo determinauimus, pro data configuratione initiali motuum reciprocorum abſolutorum, ambas figuras ſimplices generatrices. Inde talia conſequuntur corollaria.

(a) Si, pro configuratione tertia, fiat $a = (b-a)\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}}$, proueniet $\alpha' = 0$; $\alpha = a$; atque ſic figura tertia plane eadem erit cum figura prima, ad cuius ſimplicem normam fient motus reciproci abſoluti, euaneſcentibus oſcillationibus ſimplicibus ſecundi ordinis figura ſecunda expreſſis.

(b) Sin altera quantitas α ponatur $= 0$, tunc fiet $\alpha' = a$; euaneſcent oſcillationes ſimplices primi ordinis, ac ſolae retinebuntur oſcillationes ſecundi ordinis et configuratio tertia plane eadem erit cum ſecunda.

(c) Indicant etiam formulae noſtrae, quod, ſi diſtantia initialis b in figura tertia ſumatur maior quam $a(1+\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}})$, fiat, in figura ſecunda, $b'\,c'$ negatiua ita vt ſi in figura prima poſita ſit $b\,c$ ad ſiniſtram, altera $b'\,c'$ ponenda ſit ad dextram.

(d) Si pro figura tertia ponatur diductio initialis $b'\,c = e'\,d$ ſiue $a = b$ ita vt filum inferius ab initio motus abſoluti ſit verticaliter poſitum, fiet $\alpha = \alpha'$ $= \frac{1}{2} a$, quaecunque fuerit proportio inter maſſas m et μ, atque tunc erit

$$e\,d\,(\text{fig. } 1.) = \tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} a \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}}$$

ſimulque ad partes contrarias

$$e'\,d'\,(\text{fig. } 2.) = \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} a \sqrt{\tfrac{m+\mu}{\mu}}.$$

§. 6. Vtar praeſertim poſtremo hoc corollario, partim ob ſimplicitatem calculorum, partim vt in experimentis inſtituendis certi ſimus de exacta ſimultaneitate, qua ambo corpora motum ſuum incipere debent; quod ſi enim ſolum corpus ſuperius, extremis digitis ad latus diducatur, filum inferius ſua ſponte ad ſitum verticalem ſe componet ipſoque momento dimiſſionis neceſſe eſt, vt ambo corpora exacte ſimul moueri incipiant. Progredior ad pauca exempla ſimpliciſſima, inſtituto noſtro accommoda omnique titulo determinata. *Exemplum primum.* Sit longitudo $l = \lambda = 275$ lin. Pariſ. maſſa corporis ſuperioris $= 16$ ſemiunciis, maſſa corporis inferioris $= 9$ ſemiunciis; quoniam vero hae maſſae in vno puncto concentratae ponuntur, erunt longitudines filorum a centris corporum dimetiendae; tum putetur corpus ſuperius in figura tertia ad diſtantiam 4 poll. ſiue 48 lin. diductum in punctum b', ita vt ſit diſtantia $a = b'c = 48$ lin. cui quoque diſtantia initialis inferioris corporis $b = e'd$ aequalis in hoc exemplo ponitur.

His

His positis fit quantitas $\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = \frac{5}{3}$. Erit quoque pro figura prima

$$b\,c = a = \tfrac{1}{2}\,a = 24 \text{ lin. (§. 5.) simulque}$$

$$e\,d = a + a\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = \tfrac{8}{3}\,a = 64 \text{ lin. (§. 5.).}$$

Pro figura autem secunda habebitur

$$b'\,c' = a' = \tfrac{1}{2}\,a = 24 \text{ lin.}$$

vt ante, verum distantia inferior

$$e'\,d' = a' - a'\sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = -\tfrac{2}{3}\,a = -\,16 \text{ lin.}$$

vbi signum negatiuum indicat, hanc distantiam ad alteram partem axis $a\,d'$ esse accipiendam. Denique pendulum simplex isochronum cum oscillationibus regularibus figurae primae respondentibus fit $= \frac{8}{5}\,l$ $= 440$ lin. (§. 4.) ac pro figura secunda simile pendulum isochronum longitudinem obtinet 110 lin. Igitur oscillationes simplices regulares tardiores formabuntur ad quaeuis minuta secunda, celeriores ad quaeuis semi-minuta secunda. Sic itaque omnia determinauimus, quae ad ambas oscillationes simplices et regulares, ad ductum duarum primarum figurarum, pertinent, ex quarum combinatione integer motus absolutus, pro figura tertia, deduci poterit secundum praecepta, paragrapho octauo primae commentationis, exhibita: Etenim motus in pendulo simplici facile determinantur: rem prosequar, pro praesenti exemplo, post quaeuis semi-minuta secunda. Ab initio corporis superioris distantia ab axe ad sinistram est $= 2\,a = 48$ lin. post semi-minutum secundum corpus istud superius perficiet, pro figura prima versus dextram semiofcillationem $= a = 24$ lin. et pro figura secunda ofcillationem integram $= 2\,a = 48$ lin. pariter versus dextram; atque adeo pro figura tertia spatium describet 72 lin. sic itaque tunc positum erit ad dextram axis a quo distabit 24 lin. hoc ipso momento stationarius erit motus ofcillatorius figurae secundae atque retrogradi incipiet, dum ratione alterius motus ofcillatorii figurae primae maxima sua velocitate versus dextram gaudebit: igitur corpus finito primo semi-minuto secundo etiamnum versus dextram moueri perget motu composito ex duobus motibus simplicibus obviam euntibus, quorum alter retardatur alter acceleratur; sic vnus alterum mox destruet; interea autem, quod me calculus deinceps indicandus docuit, corpus illud etiamnum spatiolum 3 lin. versus dextram motu suo absoluto perficiet, tuncque distabit ab axe 27 lineis eoque ipso momento velocitas absoluta nulla est et corpus incipiet retrogredi, absit itaque vt motus absolutos corporis pro ofcillationibus regularibus habeamus; malim eos nomine generaliori *motuum reciprocorum* designare, qui non possunt aliter, vt videtur, quam ad mentem theoriae nostrae describi. Porro tempus, quo corpus superius, motu suo absoluto, vltimum spatiolum trium linearum describit, est aequale dimidio minuto secundo multiplicato per rationem arcus $14^\circ.\ 28'.\ 40''$ ad 90° vel paulo minus quam $\frac{1}{12}$ minuti secundi atque adeo tempus elapsum integrum $= \frac{7}{12}$ minuti secundi etc. quo ipso temporis puncto incipit corpus

pus retrogredi verſus ſiniſtram tuncque motum ſervat ad finem vsque alterius ſemi-minuti ſecundi, quo momento poſitum erit in ipſo axe verticali; quoniam enim integrum minutum ſecundum elapſum eſt, posquam motus incepit, corpus integram oſcillationem $2a$ ſiue 48 lin. verſus dextram interea reſpectu primae figurae perfecit dum reſpectu alterius figurae duas abſoluit oſcillationes atque ſic in locum vnde venerat rediit: hoc temporis puncto motus corporis erit iterum veluti ſtationarius, quia ſimul pro vtraque oſcillatione ſimplici limen attigit; mox igitur corpus de nouo motum abſolutum incipiet verſus dextram atque inuerſo ordine motuque priori contrario tandem poſt duo minuta ſecunda in locum primitiuum redibit, id eſt poſt $\frac{5}{12}$ minuti ſecundi iterum maximam ſuam habebit elongationem ab axe, 27 linearum indeque tempore $\frac{1}{12}$ minuti ſecundi redibit in locum, qui ab axe 24 lin. diſtat ad dextram, vnde finito quarto ſemi-minuto ſecundo in punctum primitiuum redibit motusque ſuos reciprocos porro continuabit eadem lege.

§. 7. Atque ſic totum definiuimus motum in corpore ſuperiori; figura quarta vno intuitu rem explicabit. Sit $mn = 48$ lin. $np = 24$ lin. $pq = 2$ lin. Denotet n locum corporis pro filo verticali; m ſitum corporis initialem; ſitque tempus vnius ſemi-minuti ſecundi $= t$, dico tempore t corpus peruenturum in punctum p; ſequente tempore t deſcriptum ſpatiolum $pq + qn$; in puncto n fore ad momentum ſtationarium indeque tertio tempore t inverſo

verſo motu percurſurum ſpatium $pq + qp$ ac denique quarto tempore t deſcripturum ſpatium pm; tempuſculum autem quo percurritur ſpatiolum pq erit proxime $= \frac{1}{6}t$ ſiue $\frac{1}{12}$ minuti ſecundi. Haec cum ita ſint, non video quid pro motu abſoluto intelligi debeat per vnicam oſcillationem; ſi enim per primam oſcillationem integram intelligere velis ſpatium deſcriptum mp erit pro ſecunda oſcillatione integra ſumendum ſpatium $pq + qm$; ſic quidem tempora forent aequalia, ſpatia deſcripta inaequalia; ſi vero aſſumas motus integros et inuerſos, ſcilicet mq et qm, tunc ſpatia erunt aequalia at tempore inaequalia. Mihi itaque non vt oſcillationes ſed vt motus reciproci ſunt, qui aliquando ſuas formant periodos recurrentes, aliquando non formant aut tardiſſime formant. Idemque dixerim de punctis in chordis vibrantibus ſiue aequaliter ſiue inaequaliter craſſis.

Verum, quod nunc potiſſimum volo, in hoc conſiſtit, vt theoria noſtra ad *experimenta* reuocetur, quibus accurate confirmetur; facillimum autem erit
Tab. II. obſeruare punctum extremum q (fig. 4.) poſteaque arcum aſcenſus nq comparare cum arcu deſcenſus mn; indicat theoria hos arcus rationem inter ſe habituros vt 27 ad 48 ſiue vt 9 ad 16 ipſumque corpus ſuperius viam integram mq deſcripturum tempore $\frac{7}{12}$ vnius minuti ſecundi: tum porro docet theoria, corpus retrogreſſurum verſus ſiniſtram atque elapſis $\frac{5}{12}$ minuti ſecundi peruenturum in ipſum punctum n, vbi nouus fieri debeat regreſſus verſus dextram;

dextram; punctum autem secundi regressus iterum accurate obseruari poterit et examinari an fiat in ipso puncto n: postmodum corpus secunda vice peruenire debet ad punctum q ibique tertius fieri regressus; interuallum autem temporis inter secundum et tertium regressum iterum proxime erit $\frac{5}{12}$ minuti sec. Denique post vltimum interuallum temporis $\frac{5}{12}$ min. sec. corpus spatium integrum $q\,m$ per fecerit oportet imminente quarto et vltimo periodi primae regressu. Quo accuratius institutum fuerit istud experimentorum genus, tanto magis, vt nullus dubito, euentus conueniet cum theoria.

§. 8. Prosequamur nunc etiam motus reciprocos pro eodem exemplo in corpore inferiori: Distantia inferioris corporis ab axe ad sinistram ab initio iterum est $= 2\,q = 48$ lin. post semi-minutum secundum descripserit hoc corpus versus dextram spatium $e\,d$ (fig. 1.) $= \frac{8}{9}\,a = 64$ lin. (§. 6.) pro lege oscillationum simplicium tardiorum simulque pro lege altera versus sinistram spatium $2\,e'\,a'$ (fig. 2.) $= \frac{4}{9}\,a = 32$ lin. ergo vtroque motu composito spatium percurretur versus dextram intra semi-minutum secundum, quod erit $= 32$ lin. Caeterum ab initio vel etiam quoties corpus inferius in situm primitiuum redit, quietem momentaneam obtinet intensiorem, quam in pendulis simplicibus, quia non solum pro vtroque oscillationum simplicium genere velocitates euanescunt sed et ambae velocitates nascentes sunt contrariae et aequales. Sequente semi-minuto secundo corpus, pro lege oscillationum simplicium tar-

 dio-

diorum, iterum defcribet verfus dextram 64 lin. et pro lege altera 32 lin. pariter verfus dextram; ergo fpatium defcriptum a motu compofito = 96 lin. elapfis ambobus femi-minutis fecundis corpus inferius ftationarium eft, retrogredi incipit ac tertio femi-minuto fecundo iterum percurrit verfus finiftram 96 lin. pariterque quarto femi-minuto fecundo 32 lin.; atque fic ad fitum primitiuum redit. Igitur excurfiones integrae erunt 128 lin. alternatim ad dextram atque finiftram, nec hic vllum erit punctum regreffus intermedium, motus abfolutus tamen valde differt a motu penduli fimplicis; maximus receffus ab axe ad finiftram eft 48 lin. ad dextram vero 80 lin. Vnicum allegabo *experimentum*, fed apodicticum, quod in eo confiftit vt videatur num reuera maxima elongatio corporis ab axe fit 80 lin. Inde iterum confirmabitur theoria.

Comparentur nunc motus abfoluti pro vtroque corpore in praefenti exemplo: In vtroque perfecta erit periodus recurrens poft duo minuta fecunda, corpus autem fuperius quatuor manifeftos faciet itus reditusque, intermedios multo minores duobus extremis, corpus inferius duos faltem faciet motus reciprocos et inuerfo ordine perfecte inter fe aequales. Porro corpus fuperius maiores formabit ab axe difceffus ad finiftram quam ad dextram; contrarium accidit in corpore inferiori: Denique poft duo femi-minuta fecunda corpus fuperius erit in ipfo axe pofitum, inferius autem eo ipfo momento ab axe erit remotiffimum, idemque continget poft fex, decem etc. femi-minuta fecund.

§. 9.

§. 9. *Exemplum ſecundum.* Inuertamus nunc corpora ita vt ſuperius ſit $= 9$ ſemiunciis ac inferius $= 16$ ſemiunciis, caetera vero omnia eadem permaneant; quae in priori exemplo; ſola pendula ſimplicia iſochrona cum oſcillationibus regularibus, ad normam duarum figurarum primarum orituris, mutantur; fiet nempe longitudo iſtius penduli pro figura prima

$$= l + l\sqrt{\tfrac{\mu}{m+\mu}} = \tfrac{9}{5}\,l$$

et pro figura ſecunda

$$= l - l\sqrt{\tfrac{\mu}{m+\mu}} = \tfrac{1}{5}\,l \text{ (§. 4. not. (b))}$$

atque hoc modo tempore vnius oſcillationis regularis tardioris tres perficientur oſcillationes regulares celeriores. Sic facile eſt praeuidere fore vt in motibus reciprocis compoſitis omnia poſt quamuis oſcillationem ſimplicem tardiorem perfecte reſtituantur; nec tamen propterea meo ſaltem iudicio, motus ille pro vna oſcillatione erit habendus, quandoquidem quiuis motus compoſitus, qui ab vna extremitate ad alteram perficitur, manifeſte ex tribus motibus reciprocis conſtat, vti mox videbimus. Commodiſſime tempus vnius oſcillationis regularis tardioris diuidemus in tres partes aequales ſimulque in anteceſſum obſeruabimus, vti in mechanica demonſtratur, quod ſi integra penduli excurſio ſit $= 2\,\alpha$, primo triente deſcribatur ſpatium $\frac{1}{2}\alpha$, ſecundo ſpatium α, tertioque iterum ſpatium $\frac{1}{2}\alpha$, ſimulque quouis triente temporis integra abſoluatur oſcillatio celerior, cuius excurſio $= 2\,\alpha'$ vel $= 2\,\alpha$, quandoquidem hic iterum fit $a' = \alpha$. Videamus nunc motum compositum pro corpore superiori ad normam figurae tertiae, in qua $b' b = b c = \alpha = 24$ lin.

Excursio integra corporis superioris pro motu composito fit $= 4\alpha = 96$ lin. primo triente temporis describetur spatium absolutum $2\frac{1}{2} = \alpha = 60$ lin. (nempe spatium $\frac{1}{2}\alpha$ ab oscillatione regulari tardiori et spatium 2α a celeriori, vtrumque versus dextram) secundo triente inde describet spatium $\alpha - 2\alpha = -\alpha$, id est, regredietur per spatium 24 lin. tertio autem triente iterum describit motu progressiuo spatium $2\frac{1}{2}\alpha$ finito scilicet primo triente corpus superius distabit a situ initiali 60 lin. tertio triente 96 lin. Hos situs diuersos indicat figura 5, vbi iterum $m n = 48$ lin. $n r$ pariter $= 48$ lin. deinde $n p = n s = 12$ lin. atque sic erit corpus post primum temporis interuallum in p; post secundum in s ac post tertium in r.

Verum notetur, corpus superius, cum perueniet post primum temporis trientem in situm p, gaudere etiamnum aliqua velocitate versus dextram atque sic peruenire posse ad punctum q, parum quidem distans, antequam velocitas absoluta tota euanescat; In hoc puncto q positum est punctum regressus, quod solum in *experimento* recte obseruari potest: a vero puncto q regreditur corpus vsque in t (facta $s t = p q$) indeque secundus fit regressus versus dextram: sic proprie secundo temporis triente corpus viam describit $p q t s$, quae est aequalis 24 lin. $+ 2 p q$; inuenio autem paruulam distantiam

$p q =$

$pq = 24$ lin. $\times(-\text{cos}. 65°. 54' + \text{cos}. 60°) = 24$ lin. $\times 0.09167 = 2\frac{1}{5}$ lin.

Igitur si sumatur $nq = nt = 14\frac{1}{5}$ lin. regressus fiet in punctis q et t, haecque si cum experimento accurate instituendo conueniant, iterum theoriam nostram confirmabunt. Ambobus autem regressus punctis q et t ipsa quoque puncta extrema r et m annumeranda sunt.

§. 10. Faciamus nunc quoque calculum pro inferiori corpore ad modum, quem iniuimus pro primo exemplo in paragrapho octauo Hic rursus requiritur ante omnia, vt in figura prima ex data $bc = \alpha$ determinetur

$$ed = \alpha + \alpha \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = \frac{9}{4}\alpha = 54 \text{ lin.}$$

simulque in figura secunda

$$e'd' = \alpha - \alpha \sqrt{\frac{m+\mu}{\mu}} = -\frac{1}{4}\alpha = 6 \text{ lin.};$$

igitur excursio integra $2ed = 108$ lin. atque $2e'd' = -12$. Si iterum tempus oscillationis simplicis tardioris diuidatur in tres partes aequales, describet corpus inferius pro oscillatione tardiore, durante primo triente, 27 lin. durante secundo triente 54 lin. et durante tertio triente 27 lin. ac, pro oscillatione celeriori, perficiet iisdem temporis interuallis successiue 12 lin. versus sinistram, tum rursus 12 lin. versus dextram ac denique 12 lin. versus sinistram; hinc vtroque motu coniuncto primo triente percurret corpus versus dextram spatium 27 lin. — 12 lin. vel 15 lin. secundo triente pariter versus dextram spatium 54 lin. + 12 lin. siue 66 lin. ac tertio triente te itidem verſus dextram 27 lin. — 12 lin. vel 15 lin. atque tunc motu contrario ſingula recurrent, nec vlla in corpore inferiori erunt puncta regreſſus, niſi in punctis extremis. Filum inferius vtroque ſitu extremo erit verticaliter poſitum pariter atque in medio excurſionis; ſic quidem corpus ipſum, motibus ſuis reciprocis, vtrinque aequalibus, in medio velociſſimis oſcillationes mentitur ſimplices perinde ac ſi in pendulo fierent ſimplici; attamen velocitates in omnibus locis intermediis longe aliter ſe habent nec enim in noſtro argumento vires acceleratrices pro motu abſoluto ſunt diſtantiis ab axe proportionales; ſunt tamen, in hoc exemplo, motus integri reciproci iſochroni, ſiue maiores ſiue minores excurſiones efficiantur. Vnica quidem lex eſt iſochronismi in vno corpore; at in pluribus corporibus in ſe inuicem agentibus haec lex infinitis modis variari poteſt, quia non licet variare diſtantiam initialem ab axe pro vno corpore, quin ſimul varietur in reliquis corporibus.

§. 11. Videmus in hoc altero exemplo omnia perinde aequaliter ſe habere ab vtraque axis parte, ſecus, ac in primo exemplo, in quo elongationes ſuperioris corporis ad ſiniſtram indicatae per mn (fig. 4.) notabiliter excedunt elongationes ad dextram expreſſas per nq; eſt enim $mn : nq = 48 : 27 = 16 : 9$, vti demonſtrauimus §. 7. dum e contrario in inferiori corpore elongationes ad ſiniſtram ſunt multo minores elongationibus ad dextram in ratione 48 ad 80 ſiue 3 ad 5: perinde autem poſt quasuis binas

nas oſcillationes fundamentales in primo exemplo recurrunt, in ſecundo poſt quasuis ſingulas huiusmodi oſcillationes: atque idem contingit quoties numerus oſcillationum ſimplicium tardiorum ſubmultiplus eſt numeri celeriorum eodem tempore abſolutarum oſcillationum; verum quando ratio inter hos ambos numeros minus ſimplex eſt, plures atque plures requiruntur oſcillationes, vt perfecta fiat rerum omnium reſtitutio. Liceat vnicum ſuperaddere caſum, quo ambo pendula ſimplicia, cum oſcillationibus vtriusque generis iſochrona, vel potius tempora horum pendulorum parum a ratione multipla recedunt.

Exemplum tertium. Ponatur ea, inter maſſas *m* et μ, ratio vt duodecim oſcillationes tardiores, ad normam figurae primae, perficiantur eodem tempore, quo viginti quinque abſoluuntur oſcillationes celeriores ſecundum leges figurae ſecundae. Sic quidem ab initio motus reciproci abſoluti parum ab exemplo noſtro primo §. 6. abludent. Durante prima oſcillatione tardiore corpus ſuperius iterum perveniet proxime vsque ad punctum *q* figurae quartae, veruntamen id paullulum praeteribit, poſt ſecundam oſcillationem ſimilem, proxime peruenict in punctum primitiuum *m*, nec tamen id prorſus attinget; excurſiones laterales ad ſiniſtram, qualis eſt *m n*, ſenſim decreſcent atque excurſiones ad dextram, qualis eſt *n q*, increſcent, vsque dum maximae fiant a latere dextro, minimae a latere ſiniſtro, in ratione 16 ad 9, quae ab initio fuerat vt 9 ad

16;

16; haec maxima variatio periodice continget post quasuis duodenas oscillationes tardiores, diuque ista reciprocatio subsistit, si modo motus reciproci libere fiant atque accurata instituantur experimenta. Quod dein pertinet ad motum corporis inferioris, dico similes reciprocationes inter maximas et minimas elongationes, ab vtroque latere, orituras sed ordine inverso. Vidimus nimirum, §. 8, quod si tempora pro vtroque oscillationum simplicium genere fuerint praecise in ratione dupla, maximum recessum ab axe fore ad sinistram 48 lin. et ad dextram 10 lin. hancque legem per totum experimenti decursum esse substituram. Nunc vero in praesenti exemplo, ab initio increscent discessus ab axe ad sinistram, decrescent ad dextram; aequales fient post sex oscillationes tardiores et post totidem oscillationes sequentes maximae erunt ad latus sinistrum minimae ad dextrum; finita hac prima periodo, recurrent mutato latere, eaedem motuum reciprocorum leges post singulas duodenas oscillationes simplices tardiores atque variationes. Haec omnia si experimentis, sed accurate instituendis, respondeant, non solum theoriam confirmabunt, sed et haud parum momenti illi superaddent.

§. 12. Vereor equidem, ne perpetuae rerum omnium variationes veris motuum reciprocorum legibus nimiam iniiciant moram, quam vt hi motus post magnum eorum numerum integri seruentur ab impedimentis physicis; nullus tamen dubito quin experimenta vestigia veritatis sint manifestatura, quae intelli-

intelligentibus ſufficiant. Ego quidem memini, me forte fortuna ſimiles motuum reciprocationes in duobus corporibus, ſed aliter connexis, olim obſeruaſſe tantoque magis fuiſſe miratum, quod tunc temporis vſum principii de coëxiſtentia vibrationum ſimplicium regularium, nondum cogitaſſem. Obſeruatio, de qua loquor, haec eſt.

Cum aliquando in libra, maiori eaque ſubpigra, alteram lancem forte fortuna ad latus diducerem moxque rurſus dimitterem, accidit vtique vt protinus hinc inde oſcillaret nec ab initio lanx oppoſita de loco moueretur: mox autem et haec quoque agitari ſenſimque maiores oſcillationes formare, dum e contrario lanx prior motum ſuum oſcillatorium gradatim perderet tandemque fere quieſceret; hoc ipſo momento altera maximum motionis gradum, initiali lancis ſociae fere aequalem, attingebat: tunc ordine contrario eaedem mutationes repetebantur, vsque dum prima lanx motum ſuum primitiuum integrum reſumeret ſociaque quieti ad momentum redderetur; haec autem oſcillationum communicatio ac reciprocatio diu ſatis ſeſe manifeſtabat.

§. 13. Ex paucis allatis liquet, quam fertile ſit argumentum noſtrum, cum vel minimus ſurculus innumeros offerat fructus, inter quos paucos decerpſi lectu facillimos. Si plura quam duo corpora ſuſpenſa conſiderare lubeat, res quidem in abſtracto foret aeque facilis, conceſſa radicum in altioribus aequationibus extractione, at ſimul nimis in concreto laborioſa; Ipſa interim argumenti natura praeter eam, quam docuimus methodum, nullam aliam admittere videtur: manifeſtum etiam eſt hanc methodum omnia comprehendere, quae rei ipſi inſunt, quiscunque fuerit corporum numerus ſiue finitus ſiue infinitus, qualis foret in catenis ſuſpenſis vel etiam in chordis muſicis tenſis.

Caeterum paſſim in hoc ſchediasmate mentionem feci punctorum regreſſuum; haec autem ex eo determinantur, vt, pro oſcillationibus ſimplicibus vtriusque generis, puncta quaerantur in quibus motus ſint contrarii cum velocitatibus aequalibus, ſi tempora ſumantur eadem; hinc ambo ſpatia, vtroque pendulo ſimplici deſcripta, innoteſcunt; ſumma vel differentia ſpatiorum deſcriptorum dabit in pendulo compoſito locum abſolutum. Si porro ſuper vtraque excurſione integra in ambabus oſcillationibus ſimplicibus tanquam ſuper diametro conſtruatur circulus in eoque abſcindatur arcus qualiscunque, arcus iſte exprimet tempus inſumtum, ſinus verſus huius arcus indicabit ſpatium hoc tempore deſcriptum et ſinus ipſe dabit velocitatem corporis pro aſſumta oſcillatione ſimplici.

Tab. II. Sint nempe (fig. 6 et 7.) $afcd$ et $a'f'c'd'$ duo circuli radiis ao et $a'o'$ deſcripti ſintque radii ao et $a'o'$ aequales elongationibus initialibus corporis ſuperioris ab axe pro vtraque oſcillationum ſimplicium claſſe ſiue $ao = \alpha$ atque $a'o' = \alpha'$. Conſiderantur hic viae a corporibus oſcillando deſcriptae tanquam lineae rectae ob inſignem, quae ſupponi-

tur

tur in oſcillationibus, paruitatem. Sint porro tempora, quibus integrae oſcillationes $a\,c$ et $a'\,c'$ perficiuntur aequalia t et t' et velocitates in punctis mediis o et $o' = c'$ et c'. Peruenerit inter oſcillandum corpus eodem temporis interuallo ex punctis a et a' in puncta e et e', ex quibus erigantur perpendiculares $e\,b$ atque $e'\,b'$: erunt velocitates in punctis e et $e' = \frac{e\,b}{o\,j}\,c$ et $\frac{e'\,b'}{o'\,j'}\,c'$, quae affirmatiuae vel negatiuae pro re nata erunt accipiendae; habebimus quoque tempora pro percurſis ſpatiis $a\,e$ et $a'\,e$ aequalia $\frac{a\,f\,b}{a\,f\,c}\,t$ et $\frac{a'\,f'\,b'}{a'\,f'\,c'}\,t'$, haecque tempora pro motu abſoluto ſemper ſtatuenda ſunt inter ſe aequalia. Sit nunc quadrans circuli, cuius radius vnitate exprimitur, $= q$, ponaturque ſpatium $a\,e = x$; ſpatium $a'\,e' = x'$, erit arcus $a\,f\,b$ exprimendus per α multiplicatum per arcum cuius ſinus verſus eſt x, id eſt, per α Arc. ſin. verſ x atque ſemicirculus $a\,f\,c$ per $2\,\alpha\,q$, hocque modo fit $\frac{o\,f\,b}{a\,f\,c} = \frac{\text{Arc. ſin. verſ.}\,x}{2\,q}$ pariterque $\frac{a'\,f'\,b'}{a'\,f'\,c'} = \frac{\text{Arc. ſin. verſ.}\,x'}{2\,q}$; vnde, ob praefatam temporum aequalitatem vel potius identitatem, obtinemus t Arc. ſin. verſ. $x = t'$ Arc. ſin. verſ. x': quia porro velocitates in punctis e et e' debent eſſe inter ſe contrariae et aequales, habebitur quoque $\frac{\surd(2\,a\,x - x\,x)}{a}\,c = \frac{-\surd(2\,a'\,x' - x'\,x')}{a'}\,c'$, praefatis ambabus aequationibus facillime tentando ſatis fiet et inuenientur valores x atque x' quod nunc exemplo paragraphi ſexti explicabo, in quo facienda eſt $\alpha = \alpha'$; $t = 2\,t'$; $c = \frac{1}{2}\,c'$, quia ſcilicet velocitates maximae c et c' ſunt vt $\surd\frac{\alpha\,\alpha}{2\,P}$ ad $\surd\frac{\alpha'\,\alpha'}{2\,P'}$, ſi per P et P' intelligantur,

 pro

pro vtraque oſcillationum ſimplicium claſſe, longitudines pendulorum ſimplicium iſochronorum, id eſt, vt 1 ad 2 in praeſenti exemplo. Hinc ſequitur, ob aequalitatem radiorum $a\,o$ et $a^I\,o^I$, fore arcum $a\,f\,b$ aequalem dimidio arcui $a^I f^I b^I$ ſimulque $b\,e$ ſiue ſin. Arc. $a\,f\,b = 2\,b^I\,e^I$ ſiue aequalem 2 ſin. Arc. $a^I\,f^I\,b^I$ negatiue ſumto, cui vtrique conditioni ſatis fit, ſumendo arcum $a\,f\,b = 104^{\circ}.\ 28^I.\ 40^{II}$. Sic fiet $a\,e = 1.\ 25000\,\alpha = \frac{5}{4}\,\alpha = 30$ lin. ſimulque $a^I\,e^I = 1,\ 87500\,\alpha = 45$ lin. hi duo valores nos docent, corpus ſuperius ab initio vsque ad primum punctum regreſſus deſcribere ſpatium 30 lin. oſcillatione ſua ſimplici tardiore atque 45 lin. oſcillatione ſua celeriori, adeoque motu ſuo compoſito 75 lin. Haec omnia exacte conueniunt cum paragrapho ſexto.

Sed hoc exemplum facillime per prima elementa geometrica ſoluitur, poſtquam demonſtrauimus, poſitis radiis $a\,o$ et $a^I\,o^I$ inter ſe aequalibus, quod ſit $b\,e = 2\,b^I\,e^I$ ſimulque arcus $a\,f\,b =$ dimidio arcui $a^I\,f^I\,b^I$ ſiue $f\,b = \frac{1}{2}\,c^I\,b^I$ vnde ſtatim, absque vlla appropinquatione, inuenitur exacte $o\,e$ ſiue ſinus arc. $f\,b = \frac{1}{4}$ rad. $= \frac{1}{4}\,\alpha = 6$ lin. adeoque $a\,e = \frac{5}{4}\,\alpha = 30$ lin. vt ante.

DE

DE OSCILLATIONIBVS MINIMIS PENDVLI QVOTCVNQVE PONDVSCVLIS ONVSTI.

Auctore

L. EVLERO.

Problema.

Si filo tenuiſſimo ſiue grauitatis experti quotcunque ponduſcula A, B, C, D in datis a ſe inuicem interuallis fuerint alligata, idque ex puncto O ſuſpenſum et vtcunque ad motum concitatum oſcillationes minimas peragat, eius ſtatum et motum ad quoduis tempus definire.

Solutio.

§. 1. Ex puncto ſuſpenſionis O ducatur recta verticalis O V, et quicunque motus pendulo primum fuerit impreſſus elapſo tempore $= t$ pendulum teneat ſitum in figura expreſſum O A B C D etc. et ex ſingulis ponduſculis ad verticalem O V agantur normales A P, B Q, C R, D S etc. Iam quia ſingula ponduſcula dantur, eorum maſſae ſeu pondera deſignentur litteris A, B, C, D etc. et quia eorum interualla etiam dantur ponamus diſtantias Tab. III. Fig. 1.

$$O A = a; \; A B = b; \; B C = c; \; C D = d \text{ etc.}$$

 Porro

Porro pro ſingulis ponduſculis ſtatuantur coordinatae

$OP = x$; $OQ = x'$; $OR = x''$; $OS = x'''$ etc.

$PA = y$; $QB = y'$; $RC = y''$; $SD = y'''$ etc.

Tum vero ductis verticalibus Aq, Br; Cs etc. vocentur anguli quibus ſingula interualla a ſitu verticali declinant

$AOp = p$; $BAq = q$; $CBr = r$; $DCs = s$ etc.

ex quibus illae coordinatae ita determinantur vt ſit

$x = a\cos.p$	$y = a\sin.p$
$x' = a\cos.p + b\cos.q$	$y' = a\sin.p + b\sin.q$
$x'' = a\cos.p + b\cos.q + c\cos.r$	$y'' = a\sin.p + b\sin.q + c\sin.r$
$x''' = a\cos.p + b\cos.q + c\cos.r + d\cos.s$	$y''' = a\sin.p + b\sin.q + c\sin.r + d\sin.s$
etc.	etc.

§. 2. His poſitis, pro motu determinando vocetur

tenſio fili $OA = P$

tenſio fili $AB = Q$

tenſio fili $BC = R$

tenſio fili $CD = S$

atque hinc, ſi tempus t in minutis ſecundis exprimatur eiusque differentiale dt pro conſtante habeatur, altitudo autem ex qua grauia vno minuto ſecundo libere delabuntur notetur littera g, principia mechanica ſequentes ſuppeditant aequationes

$\frac{ddx}{2g\,dt^2}$

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{P\cos.p}{A} + \frac{Q\cos.q}{A} \qquad \frac{ddy}{2g\,dt^2} = -\frac{P\sin.p}{A} + \frac{Q\sin.q}{A}$$
$$\frac{ddx'}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{Q\cos.q}{B} + \frac{R\cos.r}{B} \qquad \frac{ddy'}{2g\,dt^2} = -\frac{Q\sin.q}{B} + \frac{R\sin.r}{B}$$
$$\frac{ddx''}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{R\cos.r}{C} + \frac{S\cos.s}{C} \qquad \frac{ddy''}{2g\,dt^2} = -\frac{R\sin.r}{C} + \frac{S\sin.s}{C}$$
$$\frac{ddx'''}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{S\cos.s}{D} \qquad \frac{ddy'''}{2g\,dt^2} = -\frac{S\sin.s}{D}$$
etc. etc. | etc. etc.

harum aequationum numerus, qui duplo maior eſt quam numerus pendulorum, ſufficit tam ad ſingulas tenſiones P, Q, R, S etc. quam ad angulos p, q, r, s etc. determinandos pro quouis tempore t.

§. 3. Haec ita ſe habent in genere quantaecunque etiam fuerint oſcillationes, quo autem caſu vix vlterius progredi licet, quam ob rem cogimur inueſtigationes noſtras tantum ad eos caſus accommodare, quibus oſcillationes ſunt quam minimae, vti in problemate enunciatur. Quin igitur hoc caſu omnes anguli p, q, r, s eſſe debent quam minimi, pro eorum coſinibus ſcribere licebit vnitatem; pro ſinibus autem ipſos angulos p, q, r, s etc. Hinc igitur ſingulae abſciſſae et applicatae ſortientur valores

$$x = a \qquad y = ap$$
$$x' = a+b \qquad y' = ap+bq$$
$$x'' = a+b+c \qquad y'' = ap+bq+cr$$
$$x''' = a+b+c+d \qquad y''' = ap+bq+cr+ds$$
etc. | etc.

Quia igitur abſciſſae hoc caſu fiunt conſtantes, earum differentialia euaneſcent; ex quibus naſcentur ſequentes aequationes:

$$0 = A$$

$$o = A - P + Q;\quad o = B - Q + R;\quad o = C - R + S;\quad o = D - S$$

ex quibus ſtatim ſingulae tenſiones facillime definiuntur, ſcilicet

$S = D$; $R = C + D$; $Q = B + C + D$ et $P = A + B + C + D$; etc.

hinc ad calculum contrahendum ponamus breuitatis gratia

$$\frac{P}{A} = 1 + \frac{B + C + D}{A} = \alpha \text{ hinc erit } \frac{Q}{A} = \frac{B + C + D}{A} = \alpha - 1$$

$$\frac{Q}{B} = 1 + \frac{C + D}{B} = \beta \qquad \frac{R}{B} = \frac{C + D}{B} = \beta - 1$$

$$\frac{R}{C} = 1 + \frac{D}{C} = \gamma \qquad \frac{S}{C} = \frac{D}{C} = \gamma - 1$$

$$\frac{S}{D} = 1 \qquad = \delta \qquad \text{etc. etc. etc.}$$

§. 4. Quod ſi iam pro applicatis y, y', y'' itemque pro tenſionibus P, Q, R, S etc. ſuos ſcribamus valores, adipiſcemur ſequentes aequationes differentiales ſecundi gradus:

I. $\frac{a\,ddp}{2g\,dt^2} = -\alpha p + (\alpha - 1)q$

II. $\frac{a\,ddp + b\,ddq}{2g\,dt^2} = -\beta q + (\beta - 1)r$

III. $\frac{a\,ddp + b\,ddq + c\,ddr}{2g\,dt^2} = -\gamma r + (\gamma - 1)s$

IV. $\frac{a\,ddp + b\,ddq + c\,ddr + d.\,dds}{2g\,dt^2} = -\delta s = -s.$

Sicque totum negotium ad reſolutionem harum aequationum differentio-differentialium reducitur, quae vtique artificia prorſus ſingularia poſtulat.

§. 5. Quia in omnibus his aequationibus variabiles p, q, r, s etc tantum vnicam tenent dimenſionem, euidens eſt, his aequationibus ſatisfieri poſſe,

ſi

ſi inter quantitates p, q, r, s certae rationes conſtantes ſtatuantur. Sit igitur

$$p = \mathfrak{A}z;\; q = \mathfrak{B}z;\; r = \mathfrak{C}z;\; s = \mathfrak{D}z$$

ſic enim illae aequationes ſequentes induent formas:

I. $\frac{\mathfrak{A}a\,ddz}{2g\,dt^2} = -\alpha\mathfrak{A}z + (\alpha-1)\mathfrak{B}z$

II. $\frac{(\mathfrak{A}a+\mathfrak{B}b)\,ddz}{2g\,dt^2} = -\beta\mathfrak{B}z + (\beta-1)\mathfrak{C}z$

III. $\frac{(\mathfrak{A}a+\mathfrak{B}b+\mathfrak{C}c)\,ddz}{2g\,dt^2} = -\gamma\mathfrak{C}z + (\gamma-1)\mathfrak{D}z$

IV. $\frac{(\mathfrak{A}a+\mathfrak{B}b+\mathfrak{C}c+\mathfrak{D}d)\,ddz}{2g\,dt^2} = -\delta\mathfrak{D}z + = -\mathfrak{D}z$

quae aequationes cum omnes inter ſe conuenire debeant, ſingulas ad hanc formam reuocemus;

$$\frac{ddz}{2g\,dt^2} = -\frac{z}{k}$$

quo valore in ſingulis ſubſtituto nanciſcemur ſequentes quatuor aequationes inter meras quantitates conſtantes, ſcilicet

I. $-\frac{\mathfrak{A}a}{k} = -\alpha\mathfrak{A} + (\alpha-1)\mathfrak{B}$

II. $-\frac{\mathfrak{A}a-\mathfrak{B}b}{k} = -\beta\mathfrak{B} + (\beta-1)\mathfrak{C}$

III. $-\frac{\mathfrak{A}a-\mathfrak{B}b-\mathfrak{C}c}{k} = -\gamma\mathfrak{C} + (\gamma-1)\mathfrak{D}$

IV. $-\frac{\mathfrak{A}a-\mathfrak{B}b-\mathfrak{C}c-\mathfrak{D}d}{k} = -\mathfrak{D}$.

§. 6. Ex his iam aequationibus determinare licebit coëfficientes aſſumtos $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc. Ex prima enim erit

$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha-1}(\alpha - \frac{a}{k})$; ex ſecunda erit

$\mathfrak{C} = \frac{1}{\beta-1}(\beta\mathfrak{B} - \frac{\mathfrak{A}a-\mathfrak{B}b}{k})$ ſiue $\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{B}}{\beta-1}(\beta - \frac{b}{k}) - \frac{\mathfrak{A}}{\beta-1}\frac{a}{k}$

eodem modo ex tertia elicimus

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{C}}{\gamma-1}(\gamma - \frac{c}{k}) - \frac{\mathfrak{B}}{\gamma-1}\frac{b}{k} - \frac{\mathfrak{A}}{\gamma-1}\frac{a}{k}$$

 Qui

Qui valores in quarta substituti producent aequationem algebraicam, ex qua quantitatem incognitam k determinari opportebit; vbi aequatio tot inuoluat radices, quot dantur ponduscula: ita vt pro k totidem diuersi valores sint prodituri. Quarta autem aequatio quae hic est vltima hac forma repraesentatur:

$$\mathfrak{A}a + \mathfrak{B}b + \mathfrak{C}c + \mathfrak{D}d - \mathfrak{D}k = 0.$$

§. 7. Substituamus nunc successiue valores ex prioribus aequationibus inuentos in posterioribus; et quia erat

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A}}{\alpha - 1}\left(\alpha - \frac{a}{k}\right) \text{ fiet}$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{A}}{(\alpha - 1)(\beta - 1)}\left(\alpha - \frac{a}{k}\right)\left(\beta - \frac{b}{k}\right) - \frac{\mathfrak{A}}{\beta - 1}\frac{a}{k}$$

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{A}}{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)}\left(\alpha - \frac{a}{k}\right)\left(\beta - \frac{b}{k}\right)\left(\gamma - \frac{c}{k}\right) - \frac{\mathfrak{A}}{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}\left(\alpha - \frac{a}{k}\right)\frac{b}{k} - \frac{\mathfrak{A}}{\gamma - 1}\frac{a}{k} - \frac{\mathfrak{A}}{(\beta - 1)(\gamma - 1)}\left(\gamma - \frac{c}{k}\right)\frac{a}{k}$$

qui valores ad sequentes formas reducuntur

$$(\alpha - 1)\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \alpha - \frac{a}{k}$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1)\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} = \alpha\beta - \frac{a(\alpha + \beta - 1) - \alpha b}{k} + \frac{ab}{kk}$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = \alpha\beta\gamma - \frac{a(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha - \beta - \gamma + 1) - \alpha b(\beta + \gamma - 1) - c\alpha\beta}{k} + \frac{ab(\beta + \gamma - 1) + ac(\alpha + \beta - 1) + bc.\alpha}{kk} - \frac{abc}{k^3}.$$

§. 8. Quod si iam istos valores in aequatione inuenta substituamus, pro determinatione quantitatis k prodibit aequatio quarti gradus, ad quam commodius inueniendam illam aequationem multiplicemus per $\frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)}{\mathfrak{A}k}$ vt habeatur ista aequatio:

$$\frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)a}{k} + \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\mathfrak{B}b}{\mathfrak{A}k} + \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\mathfrak{C}c}{\mathfrak{A}k} + \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\mathfrak{D}d}{\mathfrak{A}k} - \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1)\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} = 0$$

facto

facto autem calculo aequatio ista biquadratica ita reperietur expressa:

$$\alpha\beta\gamma . k^4 - \alpha\beta\gamma(a+b+c+d)k^3 + \left.\begin{array}{l} + ab.\beta\gamma \\ + bc.\alpha\gamma \\ + cd.\alpha\beta \\ + ac.\gamma(\alpha+\beta-1) \\ + bd.\alpha(\beta+\gamma-1) \\ + ad(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma-\alpha-\beta-\gamma+1) \end{array}\right\} kk$$

$$\left.\begin{array}{l} - bcd.\alpha \\ - abc.\gamma \\ - abd(\beta+\gamma-1) \\ - acd(\alpha+\beta-1) \end{array}\right\} k + abcd = 0$$

vbi obseruasse iuuabit, primo litteras a, b, c, d semper denotare distantias positiuas; tum vero litteras α, β, γ, esse numeros positiuos atque adeo vnitate maiores. Hinc enim ratio intelligi poterit, cur omnes quatuor radices huius aequationis prodituræ sint reales: eas autem omnes esse positiuas permutatio signorum declarat.

§. 9. Ipsi resolutioni huius aequationis hic non immoramus, quandoquidem si numerus ponduscolorum esset maior a tali inuestigatione prorsus abstinere cogeremur: designemus igitur quatuor huius aequationis radices litteris k, k', k'' et k''' ex quarum singulis peculiares valores pro litteris $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ colligemus, quos pariter hoc modo designemus $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ $\mathfrak{D}'$; $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}''$ et $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{B}'''$, $\mathfrak{C}'''$, $\mathfrak{D}'''$; vbi quidem patet, litteras $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ arbitrio nostro

 peni-

penitus relinqui; ita vt hoc modo quatuor habeamus quantitates pro lubitu accipiendas.

§. 10. Prosequamur igitur nostrum calculum pro sola radice k, cui respondent coëfficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, quandoquidem quod pro hac radice fuerit compertum facillime quoque ad reliquas radices applicatur. Cum igitur statuissemus hanc aequationem differentialem secundi gradus $\frac{ddz}{2g\,dt^2} = \frac{z}{k}$, ita vt sit $\frac{ddz}{dt^2} + \frac{2gz}{k} = 0$ si ponamus $\frac{2g}{k} = \lambda\lambda$ vt sit $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{k}}$ si quidem k semper est quantitas realis positiua, notum est post duplicem integrationem prodire $z = f$ sin $(\lambda t + \vartheta)$: vbi ϑ est angulus ab arbitrio nostro pendens. altera autem constans arbitraria f sine restrictione vnitati aequalis poni potest: propterea quod coëfficiens $\mathfrak{A}$ iam est arbitrarius. Hinc igitur ad quodvis tempus t singuli anguli p, q, r, s ita determinabuntur, vt sit

I. $p = \mathfrak{A}\,\text{sin.}(\lambda t + \vartheta)$; $q = \mathfrak{B}\,\text{sin.}(\lambda t + \vartheta)$; $r = \mathfrak{C}\,\text{sin.}(\lambda t + \vartheta)$ et $s = \mathfrak{D}\,\text{sin.}(\lambda t + \vartheta)$

similique modo si ex reliquis radicibus, k', k'', k''' ponamus

$$\lambda' = \sqrt{\tfrac{2g}{k'}},\ \lambda'' = \sqrt{\tfrac{2g}{k''}},\ \lambda''' = \sqrt{\tfrac{2g}{k'''}}$$

praeter illam solutionem adhuc habebimus tres sequentes

II. $p = \mathfrak{A}'\,\text{sin}(\lambda' t + \vartheta')$; $q = \mathfrak{B}'\,\text{sin}(\lambda' t + \vartheta')$; $r = \mathfrak{C}'\,\text{sin.}(\lambda' t + \vartheta')$; $s = \mathfrak{D}'\,\text{sin.}(\lambda' t + \vartheta')$

III. $p = \mathfrak{A}''\,\text{sin.}(\lambda'' t + \vartheta'')$; $q = \mathfrak{B}''\,\text{sin.}(\lambda'' t + \vartheta'')$; $r = \mathfrak{C}''\,\text{sin}(\lambda'' t + \vartheta'')$ $s = \mathfrak{D}''\,\text{sin.}(\lambda'' t + \vartheta'')$

IV.

IV. $p = \mathfrak{A}''' \sin.(\lambda''' t + \vartheta''')$; $q = \mathfrak{B}''' \sin.(\lambda''' t + \vartheta''')$; $r = \mathfrak{C}''' \sin.(\lambda''' t + \vartheta''')$; $s = \mathfrak{D}''' \sin.(\lambda''' t + \vartheta''')$.

§. 11. Singulae autem hae quatuor ſolutiones maxime ſunt particulares: propterea quod duas tantum conſtantes arbitrarias inuoluunt, ſcilicet $\mathfrak{A}$ et ϑ, dum ſolutio generalis ob quatuor aequationes differentio-differentiales octo conſtantes arbitrarias complecti deberet. Qualis igitur motus ſingulis reſpondeat operae pretium erit accuratius inueſtigare; ac primo quidem quoniam pro qualibet caſu quatuor anguli p, q, r, s eandem perpetuo inter ſe ſeruant rationem, motus erit maxime regularis et pendulum perinde oſcillations ſuas pereget ac ſi eſſet ſimplex; atque quia elapſo tempore $t = \frac{2\pi}{\lambda}$ ſi loco t ſcribamus $t + \frac{2\pi}{\lambda}$ ſinguli anguli in eundem ſtatum reuertuntur, ideoque pendulum interea duos oſcillationes abſolviſſe cenſetur, ſicque tempus vnius oſcillationis erit $= \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi \sqrt{k}}{\sqrt{2g}}$, quod adeo tempus in minutis ſecundis exprimitur. Eodem modo pro ſecunda radice k' erit tempus vnius cuiusque oſcillationis $= \frac{\pi \sqrt{k'}}{\sqrt{2g}}$; pro tertia radice $= \frac{\pi \sqrt{k''}}{\sqrt{2g}}$ et pro quarta $\frac{\pi \sqrt{k'''}}{\sqrt{2g}}$.

§. 12. Cum igitur hae quatuor ſolutiones ſimplices problemati noſtro ſatisfaciant, quoniam in aequationibus differentio-differentialibus ad quas nos ſolutio perduxit ſingulae quantitates p, q, r, s vbique vnam tantum dimenſionem tenent, ſolutiones illae particulares quomodocunque inter ſe combinentur problemati pariter satisfacient, vnde sequens solutio generalis conficitur:

$$p = \mathfrak{A}\,\text{fin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{A}'\,\text{fin.}(\lambda' t + \vartheta') + \mathfrak{A}''\,\text{fin.}(\lambda'' t + \vartheta'') + \mathfrak{A}'''\,\text{fin.}\,\lambda''' t + \vartheta''')$$
$$q = \mathfrak{B}\,\text{fin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{B}'\,\text{fin.}(\lambda' t + \vartheta') + \mathfrak{B}''\,\text{fin.}(\lambda'' t + \vartheta'') + \mathfrak{B}'''\,\text{fin.}(\lambda''' t + \vartheta''')$$
$$r = \mathfrak{C}\,\text{fin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{C}'\,\text{fin.}(\lambda' t + \vartheta') + \mathfrak{C}''\,\text{fin.}(\lambda'' t + \vartheta'') + \mathfrak{C}'''\,\text{fin.}(\lambda''' t + \vartheta''')$$
$$s = \mathfrak{D}\,\text{fin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{D}\,\text{fin.}(\lambda' t + \vartheta') + \mathfrak{D}''\,\text{fin.}(\lambda'' t + \vartheta'') + \mathfrak{D}'''\,\text{fin.}(\lambda''' t + \vartheta''')$$

in his enim formulis octo occurrunt constantes arbitrariae, scilicet quatuor coëfficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$ quippe per quos reliqui determinantur; tum quatuor anguli ϑ, ϑ', ϑ'', ϑ''', quemadmodum gemina integratio quatuor illarum aequationum postulat. Hinc igitur patet, principium Illustriss. D. *Bernoulli*, quo omnes huiusmodi oscillationes ex duobus vel pluribus motibus oscillatoriis simplicibus et regularibus componi statuit, omnino in primis motus principiis esse fundatum atque adeo ex iis immediate deduci posse.

§. 13. Ope harum igitur formularum ad quodvis tempus t singuli illi anguli p, q, r et s assignari hincque status penduli definiri poterit. Quin etiam horum angulorum variationes momentaneae celeritates praebebunt, quibus status penduli quouis temporis momento dt immutatur. Cum enim formulae

$$\frac{dp}{dt}, \quad \frac{dq}{dt}, \quad \frac{dr}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dt}$$

exprimant celeritates angulares, quibus isti anguli tempusculo dt augentur, hae celeritates ita se habebunt

$\frac{dp}{dt}$

$$\frac{dp}{dt} = \lambda\mathfrak{A}\,\mathrm{cos.}(\lambda t+\vartheta) + \lambda'\mathfrak{A}'\,\mathrm{cos.}(\lambda' t+\vartheta') + \lambda''\mathfrak{A}''\,\mathrm{cos.}(\lambda'' t+\vartheta'') + \lambda'''\mathfrak{A}'''\,\mathrm{cos.}(\lambda''' t+\vartheta''')$$

$$\frac{dq}{dt} = \lambda\mathfrak{B}\,\mathrm{cos.}(\lambda t+\vartheta) + \lambda'\mathfrak{B}'\,\mathrm{cos.}(\lambda' t+\vartheta') + \lambda''\mathfrak{B}''\,\mathrm{cos.}(\lambda'' t+\vartheta'') + \lambda'''\mathfrak{B}'''\,\mathrm{cos.}(\lambda''' t+\vartheta''')$$

$$\frac{dr}{dt} = \lambda\mathfrak{C}\,\mathrm{cos.}(\lambda t+\vartheta) + \lambda'\mathfrak{C}'\,\mathrm{cos.}(\lambda' t+\vartheta') + \lambda''\mathfrak{C}''\,\mathrm{cos.}(\lambda'' t+\vartheta'') + \lambda'''\mathfrak{C}'''\,\mathrm{cos.}(\lambda''' t+\vartheta''')$$

$$\frac{ds}{dt} = \lambda\mathfrak{D}\,\mathrm{cos.}(\lambda t+\vartheta) + \lambda'\mathfrak{D}'\,\mathrm{cos.}(\lambda' t+\vartheta') + \lambda''\mathfrak{D}''\,\mathrm{cos.}(\lambda'' t+\vartheta'') + \lambda'''\mathfrak{D}'''\,\mathrm{cos.}(\lambda''' t+\vartheta''')$$

ſicque omnia ſumus adepti, quae circa ſolutionem huius problematis deſiderari poſſunt.

Corollarium.

§. 14. Maxima igitur difficultas in reſolutione aequationis algebraicae ex qua omnes valores litterae k determinari oportet, occurrit; praecipue ſi pendulum pluribus penduſculis fuerit oneratum. Tum vero etiam quemadmodum pro ſingulis valoribus ipſius k coëfficientes $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ definiri commode queant nondum ſatis liquet pro pluribus quam quatuor ponduſculis. Quo igitur hanc inueſtigationem faciliorem reddamus, differentias inter binas aequationes ſe inſequentes (§. 5.) exhibitas conſideremus

I $\quad -\frac{\mathfrak{A}a}{k} = -\alpha\mathfrak{A} + (\alpha-1)\mathfrak{B}$ ſiue $0 = \mathfrak{A}(\frac{a}{k}-\alpha) + (\alpha-1)\mathfrak{B}$

I–II. $\frac{\mathfrak{B}b}{k} = -\alpha\mathfrak{A} + \mathfrak{B}(\alpha+\beta-1) - \mathfrak{C}(\beta-1)$

II–III. $\frac{\mathfrak{C}c}{k} = -\beta\mathfrak{B} + \mathfrak{C}(\beta+\gamma-1) - \mathfrak{D}(\gamma-1)$

III–IV. $\frac{\mathfrak{D}d}{k} = -\gamma\mathfrak{C} + \gamma\mathfrak{D}$

vnde

vnde facile patet quomodo hae aequalitates sint continuandae, si ponduſculorum numerus fuerit maior.

§. 15. Supra litterae $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ ex prima $\mathfrak{A}$ determinauimus; nunc autem a postrema incipientes singulas ex vltima $\mathfrak{D}$ deriuemus, vnde fit vt ſequitur

$$\gamma\mathfrak{C} = \mathfrak{D}(\gamma - \tfrac{d}{k})$$
$$\beta\mathfrak{B} = \mathfrak{C}(\beta + \gamma - 1 - \tfrac{c}{k}) - \mathfrak{D}(\gamma - 1)$$
$$\alpha\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\alpha + \beta - 1 - \tfrac{b}{k}) - \mathfrak{C}(\beta - 1)$$

vnde reperimus

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = \frac{1}{\gamma}(\gamma - \tfrac{d}{k})$$
$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = \frac{1}{\beta\gamma}(\gamma - \tfrac{d}{k})(\beta + \gamma - 1 - \tfrac{c}{k}) - (\tfrac{\gamma - 1}{\beta})$$
$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{D}} = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}(\gamma - \tfrac{d}{k})(\beta + \gamma - 1 - \tfrac{c}{k})(\alpha + \beta - 1 - \tfrac{b}{k}) - \frac{\gamma - 1}{\alpha\beta}(\alpha + \beta - 1 - \tfrac{b}{k}) - \frac{\beta - 1}{\alpha\gamma}(\gamma - \tfrac{d}{k})$$

qui valores in prima aequatione ſubſtituti producent iſtam aequationem:

$$0 = -\frac{1}{\alpha\beta\gamma}(\alpha - \tfrac{a}{k})(\alpha + \beta - 1 - \tfrac{b}{k})(\beta + \gamma - 1 - \tfrac{c}{k})(\gamma - \tfrac{d}{k}) + \frac{\gamma - 1}{\alpha\beta}(\alpha - \tfrac{a}{k})(\alpha + \beta - 1 - \tfrac{b}{k}) + \frac{\beta - 1}{\alpha\gamma}(\alpha - \tfrac{a}{k})(\gamma - \tfrac{d}{k}) + \frac{\alpha - 1}{\beta\gamma}(\beta + \gamma - 1 - \tfrac{c}{k})(\gamma - \tfrac{d}{k} - \frac{(\alpha - 1)(\gamma - 1)}{\beta}$$

quae aequatio manifeſto aſcendit ad quartum ordinem, ex qua incognitae k quatuor valores inueſtigari oportet: hocque modo operatio inſtitui facile poterit, si ponduſculorum numerus fuerit maior.

Scho-

Scholion.

§. 16. Quamuis autem haec ſolutio ſit maxime elegans, et problemati perfectiſſime ſatisfaciat, tamen maximae occurrunt difficultates, ſi eam ad caſum determinatum applicare voluerimus. Quod ſi enim pro ſtatu initiali vbi $t = 0$ ſingulis angulis p, q, r, s datos valores tribuere velimus, ſimulque ſingulis ponduſculis datas celeritates angulares, ad octo aequationes perueniemus, quae ſimiles erunt duabus aequationibus ex angulo p natis: ſi enim requiratur vt initio fuerit angulus $p = f$ eiusque celeritas angularis $= i$ hae duae obtinentur aequationes:

$$f = \mathfrak{A} \sin \vartheta + \mathfrak{A}' \sin. \vartheta' + \mathfrak{A}'' \sin. \vartheta'' + \mathfrak{A}''' \sin. \vartheta''' \text{ et}$$
$$i = \lambda \mathfrak{A} \cos. \vartheta + \lambda' \mathfrak{A}' \cos. \vartheta' + \lambda'' \mathfrak{A}'' \cos. \vartheta'' + \lambda''' \mathfrak{A}''' \cos. \vartheta'''$$

ſimilesque binae aequationes obtinebuntur pro reliquis ponduſculis. Nunc igitur requiritur vt ex his octo aequationibus octo illae conſtantes arbitrariae

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}',\ \mathfrak{A}'',\ \mathfrak{A}''' \text{ et } \vartheta,\ \vartheta',\ \vartheta'',\ \vartheta'''$$

definiantur, quem ſane laborem vix quisquam exſequetur: ſi modo corpuſculorum numerus ternarium ſuperauerit; quamobrem iam dudum non dubitaui asſeuerare, ſolutionem hanc quantumuis elegantem et perfectam plane eſſe ineptam, vt ad caſus determinatos, quibus penduli ſtatus initialis praeſcribitur ad aptari poſſit. Ex quo manifeſto ſequitur, ſi problema ita proponatur, vt ſi pendulo datus ſtatus et motus initio imprimatur, motus deinceps ſecuturus definiri debeat, longe aliam ſolutionem requiri, quae proinde ab hac maxime diſcrepare debebit.

EVOLVTIO CASVS

quo omnia pondufcula funt aequalia eorumque interualla etiam aequalia $= a$; ponatur autem breuitatis gratia $\frac{a}{k} = u$.

§. 17. Sit primo ponduſculorum numerus $= 2$ erit $\alpha = 2$ et $\mathfrak{E} = 1$, vnde aequationes ex §. 13. erunt

$$0 = -\mathfrak{A}(2-u) + \mathfrak{B} \text{ et } \mathfrak{B}u = -2\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B};$$

ex poſteriore ſequitur

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}(2-u)}{2}$$

qui valor in priore ſubſtitutus dat

$$0 = -\frac{\mathfrak{B}(2-u)^2}{2} + \mathfrak{B} \text{ ſiue } (2-u)^2 - 2 = 0$$

vnde ſtatim deducitur

$$2 - u = \pm\sqrt{2} \text{ ideoque } u = 2 \mp \sqrt{2} = \frac{a}{k},$$

tum vero $\mathfrak{A}$ per $\mathfrak{B}$ ita exprimitur vt ſit $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}(2-u)}{2}$ vbi $\mathfrak{B}$ pro lubitu accipi poteſt. Quare ſi bini valores ipſius k ſint k et k', hisque reſpondeant litterae $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{B}'$ ſolutio in his aequationibus continebitur poſito $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{k}}$ et $\lambda' = \sqrt{\frac{2g}{k'}}$

$$p = \mathfrak{A}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{A}'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \vartheta') \text{ et}$$
$$q = \mathfrak{B}\,\text{ſin.}(\lambda t + \vartheta) + \mathfrak{B}'\,\text{ſin.}(\lambda' t + \vartheta').$$

§. 18. Sit ponduſculorum numerus $= 3$, eritque $\alpha = 3$, $\mathfrak{E} = 2$ et $\gamma = 1$, vnde aequationes noſtrae erunt

$$0 = -\mathfrak{A}(3-u) + 2\mathfrak{B} \text{ ſiue } 0 = \mathfrak{A}(3-u) - 2\mathfrak{B}$$
$$\mathfrak{B}u = -3\mathfrak{A} + 4\mathfrak{B} - \mathfrak{C}$$
$$\mathfrak{C}u = -2\mathfrak{B} + 2\mathfrak{C}$$

ex

Ex hac fit $\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{C}(2-u)}{2}$ tum vero experiore;

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{C}(2-u)(4-u)}{6} - \frac{\mathfrak{C}}{3} = \frac{\mathfrak{C}}{6}(6 - 6u + uu)$$

vnde aequatio prodit

$$\frac{(2-u)(3-u)(4-u)}{6} - \frac{(3-u)}{3} - (2-u) = 0 \text{ siue}$$

$$6 - 18u + 9uu - u^3 = 0$$

cuius ergo dabuntur tres radices, ideoque valores pro k, k', k'', ex quibus tota solutio facile conficitur.

§. 19. Sit pondusculorum numerus $= 4$, erit $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$, vnde nostrae aequationes erunt

$$0 = \mathfrak{A}(4-u) - 3\mathfrak{B}$$

$$\mathfrak{B}u = -4\mathfrak{A} + 6\mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}$$

$$\mathfrak{C}u = -3\mathfrak{B} + 4\mathfrak{C} - \mathfrak{D}$$

$$\mathfrak{D}u = -2\mathfrak{C} + 2\mathfrak{D}.$$

Ex vltima fit

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{D}(2-u)}{2}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{D}(2-u)(4-u)}{6} - \frac{\mathfrak{D}}{3} = \frac{\mathfrak{D}}{6}(6 - 6u + uu)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{D}}{24}(24 - 36u + 12uu - u^3)$$

qui valores substituti hanc praebent aequationem

$$u^4 - 16u^3 + 72uu - 96u + 24 = 0$$

cuius quatuor radices quaeri oportet.

§. 20. Sit numerus pondusculorum $= 5$, erit $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$, $\delta = 2$, $\varepsilon = 1$, et aequationes nostrae erunt

0 =

$$\frac{0 = \mathfrak{A}(5-u) - 4\mathfrak{B}}{\begin{aligned} \mathfrak{B}u &= -5\mathfrak{A} + 8\mathfrak{B} - 3\mathfrak{C} \\ \mathfrak{C}u &= -4\mathfrak{B} + 6\mathfrak{C} - 2\mathfrak{D} \\ \mathfrak{D}u &= -3\mathfrak{C} + 4\mathfrak{D} - \mathfrak{E} \\ \mathfrak{E}u &= -2\mathfrak{D} + 2\mathfrak{E} \end{aligned}}$$

hic ex tribus posterioribus colligimus

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{E}}{2}(2-u)$$

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{E}}{6}(6 - 6u + uu)$$

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{E}}{24}(24 - 36u + 12uu - u^3)$$

tum vero inuenitur

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{E}}{120}(120 - 240u + 120uu - 20u^3 + u^4)$$

quibus valoribus substitutis aequatio sequens resultat

$$u^5 - 25u^4 + 200u^3 - 600uu + 600u - 120 = 0.$$

§. 21. Hinc generaliter si numerus ponduscu-lorum fuerit $= n$, aequatio ex qua u definiri debet per legitimam inductionem colligitur fore

$$0 = 1 - \frac{nu}{1^2} + \frac{n(n-1)uu}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)u^3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)u^4}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} \text{ etc.}$$

deinde vero si coëfficientium $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ vltimus fuerit $\mathfrak{N}$ singuli sequenti modo determinabuntur

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}} = 1 - \frac{n-1}{1^2 \cdot 2}u + \frac{(n-1)(n-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3}u^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}u^3 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^3 \cdot 5}u^4 \text{ etc.}$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{N}} = 1 - \frac{n-2}{1^2 \cdot 2}u + \frac{(n-2)(n-3)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3}uu - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}u^3 + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5}u^4 \text{ etc.}$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{N}} = 1 - \frac{n-3}{1^2 \cdot 2}u + \frac{(n-3)(n-4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3}uu - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}u^3 + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5}u^5 \text{ etc.}$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{N}} = 1 - \frac{n-4}{1^2 \cdot 2}u + \frac{(n-4)(n-5)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3}uu - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4}u^3 + \frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5}u^5 \text{ etc.}$$

etc. etc. etc.

Tantum

Tantum igitur reſtat methodus, cuius ope illius aequationis n radices elici queant, quippe quibus inuentis ſolutio completa huius caſus habebitur.

§. 22. Aequatio illa ordinis n, ex qua valores litterae u definire oportet etiam hoc modo concinnius referri poteſt

$$0 = u^n - \frac{n^2}{1} u^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1 \cdot 2} u^{n-2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-3} + \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} u^{n-4} \text{ etc.}$$

hinc autem coëfficientes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. etiam hoc modo exhiberi poſſunt

$$\pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{N}} = u^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1} u^{n-2} + \frac{n(n-1)^2(n-2)}{1 \cdot 2} u^{n-3} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-4} \text{ etc.}$$

$$\mp 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{N}} = u^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1} u^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)^2(n-3)}{1 \cdot 2} u^{n-4} - \frac{(n-1)(n-2)^2(n-3)^2(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-5} \text{ etc.}$$

$$\pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-2) \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{N}} = u^{n-3} - \frac{(n-2)(n-3)}{1} u^{n-4} + \frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{1 \cdot 2} u^{n-5} - \frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)^2(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-6} \text{ etc.}$$

$$\mp 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-3) \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{N}} = u^{n-4} - \frac{(n-3)(n-4)}{1} u^{n-5} + \frac{(n-3)(n-4)^2(n-5)}{1 \cdot 2} u^{n-6} - \frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)^2(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3} u^{n-7} \text{ etc.}$$

etc. etc.

vbi ſignorum ambiguorum ſuperiora ſunt accipienda ſi n fuerit numerus impar, inferiora autem ſi par.

DE MOTV OSCILLATORIO
BINARVM LANCIVM EX LIBRA SVSPENSARVM.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Omnino ſingulare atque maxima attentione dignum videtur illud oſcillationum genus, cuius nuper mentionem fecit Illuſtriſſimus *Bernoullius*, his verbis:

Cum aliquando in libra, maiori eaque ſubpigra, alteram lancem forte fortuna ad latus diducerem, moxque rurſus dimitterem, accidit vtique, vt protinus hinc inde oſcillaret, nec ab initio lanx oppoſita de loco moueretur: mox autem et haec quoque agitari ſenſimque maiores oſcillationes formare, dum e contrario lanx prior motum ſuum oſcillatorium gradatim perderet tandemque vere quieſceret; Hoc ipſo momento altera maximum motionis gradum, initiali lancis ſociae fere aequalem, attingebat; tunc ordine contrario, eaedem mutationes repetebantur, vsque, dum prima lanx motum ſuum primitiuum integrum reſumeret ſociaque quieti ad momentum redderetur: haec autem oſcillationum communicatio ac reciprocatio diu ſatis ſeſe manifeſtabat:

Non

Non dubito quin determinatio motus iſtius oſcillatorii omnibus geometris maxime ardua videatur, neque enim video, quemadmodum ſubſidia quibus hactenus ad alia oſcillationum genera euoluenda feliciter vſi ſunt, ad genus hocce expediendum, cum ſucceſſu adhiberi queant; quamobrem ad prima motus principia confugiendum eſſe, cenſeo, vt omnia commemorata motus Phaenomena, quae vtique ſummopere admirabilia videntur rite explicari queant. Hanc igitur inueſtigationem hic ſuſcipere conſtitui, operam imprimis daturus, ne vllam circumſtantiam quae quicquam ad hunc motum conferre valeant ſim praetermiſſurus.

§. 2. Ac primo quidem libra ſeu bilanx, in qua illuſtris Auctor motus illos mirabiles obſeruauit, ſubpigra perhibetur; vnde perſpicuum eſt, centrum grauitatis iugi infra punctum ſuſpenſionis ſeu centrum motus ſitum fuiſſe. Deinde etiam facile intelligitur, motum ab vna lance cum altera communicari non potuiſſe, niſi iugum aliquam inclinationem fuerit paſſum, quam ob rem, vt in motus tam ipſius iugi quam binarum lancium rite inquiram, ad quodcunque tempus ab initio elapſum, quod ſit $= k$, et in minutus ſecundis exprimatur, conſiderabo ſitum tam iugi quam lancium.

§. 3. Sit igitur C punctum ſuſpenſionis, ſeu centrum motus, circa quod iugum in plano verticali eſt mobile, et per hoc punctum C ducatur recta horizontalis $p\,q$, itemque verticalis $C\,c$. Hoc autem Tab. III. Fig. 2.

autem instanti iugum reperiatur in situ inclinato A C B, ac ponatur angulus inclinationis $ACp = BCq = \omega$: ipsum vero iugum hic tanquam lineam rectam A C B repraesento, ex cuius extremitatibus A et B lances sint suspensae. Vocemus igitur longitudinem brachiorum $CA = CB = a$ et massam seu pondus ipsius iugi cum trutina, examine, et omnibus partibus quae cum eo firmiter sunt connexae $= M$; eius autem centrum grauitatis cadat in punctum G infra C situm ad interuallum $CG = c$, quod ergo a verticali Cc declinabit angulo $GCc = \omega$. Praeterea vero sit momentum inertiae totius iugi respectu centri grauitatis $G = Mkk$, quod scilicet reperitur, si singulae iugi particulae per quadrata distantiarum suarum a centro grauitatis G multiplicentur et in vnam summam colligantur; vnde momentum inertiae respectu centri motus C erit $= M(kk + cc)$.

§. 4. Nunc porro assumamus ambas lances ex ipsis iugi extremitatibus A et B esse suspensas, quare ducantur inde verticales Aa et Bb, quem situm lances tenerent, si nullam haberent inclinationem; hic autem ambas lances, tanquam simplicia pondera, ope filorum grauitatis expertium ex punctis A et B suspensa, considero, et longitudinem vtriusque fili $AP = BQ$ vocemus $= b$, pondus autem lancis vtriusque $= L$. Nunc autem porro lanx A P declinet a verticali Aa angulo $PAa = \eta$ et angulo $QBb = \vartheta$.

§ 5.

§. 5. Nunc ex punctis P et Q ad axem nostrum horizontalem per C ductum ducamus perpendicula Pp et Qq, atque vt horum locorum P et Q rationem in calculum introducamus, vocemus pro vtroque quasi coordinatas $Cp = x$ et $pP = y$; tum vero $Cq = x'$ et $qQ = y'$, quas autem per elementa iam ante introducta determinari opportet.

§. 6. Hunc infinem pro lance P in verticalem Pp productam ex A ducamus normalem Ar, et quia $AP = b$ et angulus $APr = \eta$ erit Tab. III. Fig. 3.

$$Ar = b \text{ fin. } \eta \text{ et } Pr = b \text{ cof. } \eta.$$

Deinde ex triangulo $AC\alpha$ vbi $CA = a$ et angulus

$$AC\alpha = \omega \text{ erit } A\alpha = a \text{ fin. } \omega \text{ et } C\alpha = a \text{ cof. } \omega,$$

vnde pro puncto P binae coordinatae erunt

$$Cp = x = C\alpha + Ar = a \text{ cof. } \omega + b \text{ fin. } \eta \text{ et}$$
$$Pp = y = Pr - A\alpha = b \text{ cof. } \eta - a \text{ fin. } \omega.$$

Eodem modo pro altera lance, fi ex C agantur verticalis $B\beta$ et horizontalis Bs, erit $B\beta = a$ fin. ω et $C\beta = a$ cof. ω, deinde $Bs = b$ fin. ϑ et $Qs = b$ cof. ϑ vnde colligimus Fig. 4.

$$Cq = x' = C\beta - \beta q = a \text{ cof. } \omega - b \text{ fin } \vartheta \text{ et}$$
$$Qq = y' = Qs + B\beta = b \text{ cof. } \vartheta + a \text{ fin. } \omega.$$

§ 7. Iam pro motu determinando confiderentur vires quibus ambae lances follicitantur, quae quidem primo a grauitate deorfum vrgentur vi $= L$; praeterea vero fuftinent tenfionem filorum AP et BQ. Sit igitur pro lance P tenfio fili $AP = P$, quae refoluta dat vim verticalem fecundum $Pp = P$ cof. η et et vim horizontalem ſecundum p C $=$ P ſin. η; ita vt lanx P ſurſum vrgeatur ſecundum Pp vi $=$ P coſ. η $-$ L, ex quibus viribus motus huius lancis per ſequentes duas aequationes differentio differentiales definitur:

$$\text{I. } \frac{ddx}{2gdt^2} = -\frac{P\,\text{ſin.}\,\eta}{L} \text{ et II. } \frac{ddy}{2gdt^2} = \frac{L - P\,\text{coſ.}\,\eta}{L}.$$

§. 8. Simili modo altera lanx ob tenſionem Q ſurſum vrgetur vi $=$ Q coſ. ϑ, ſecundem directionem horizontalem vero Cq vi $=$ Q ſin. ϑ; ſicque deorſum vrgebitur vi $=$ L $-$ Q coſ. ϑ; vnde principia motus iterum duas aequationes nobis ſuppeditant

$$\text{III. } \frac{ddx'}{2gdt^2} = \frac{Q\,\text{ſin.}\,\theta}{L} \text{ et IV. } \frac{ddy'}{2gdt^2} = \frac{L - Q\,\text{coſ.}\,\theta}{L}$$

vbi g denotat altitudinem, ex qua grauia vno minuto ſecundo delabuntur.

§. 9. Cum igitur motum vtriusque lancis expediuerimus, contemplemur nunc etiam motum ipſius iugi, qui cum ſit gyratorius, quaeramus vires acceleratrices, quae tendant ad angulum P C A $= \omega$ augendum; vbi primo occurrit proprium iugi pondus $=$ M, quod, quia in centro grauitatis G collectum eſt putandum, producet momentum ad angulum ω imminuendum, eritque propterea $= -$ M c ſin. ω. Deinde vero iugum vrgetur a tenſione vtriusque fili, et a tenſione A P oritur momentum ad angulum ω diminuendum tendens, pro quo inueniendo notetur eſſe angulum C A $a = 90° - \omega$; ergo quia P A $a = \eta$ erit totus angulus C A P $= 90° - \omega + \eta$, cuius ſinus eſt $=$ coſ. $(\omega - \eta)$, ex quo momentum hinc oriundum erit $-$ P a coſ. $(\omega - \eta)$. Ab altera autem

parte,

parte, quia eſt angulus $CB\beta = 90° + \omega$ et $QBb = \vartheta$ erit $CBQ = 90° + \omega - \vartheta$, cuius ſinus $= \text{coſ.}(\vartheta - \omega)$. Momentum igitur hinc natum, quia tendit ad angulum ω augendum, erit $= + Q a \text{ coſ.}(\vartheta - \omega)$; ſicque omnia momenta in iugum agentia iunctim erunt

$$- M c \text{ ſin.}\omega - P a \text{ coſ.}(\omega - \eta) + Q a \text{ coſ.}(\vartheta - \omega)$$

quod momentum per momentum inertiae $= M(kk + cc)$ diuiſum praebet accelerationem angularem, quae ſecundum principia motus hanc aequationem ſuppeditat:

$$\text{V.} \quad \frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = - \frac{M c \text{ ſin.}\omega - P a \text{ coſ.}(\omega - \eta) + Q a \text{ coſ.}(\vartheta - \omega)}{M(kk + cc)}.$$

Quae quinque aequationes totam problematis ſolutionem complectuntur.

§. 10. Quo autem pateat, quasnam res ex quinque his aequationibus determinare opporteat, primum ſtatim apparet, ante omnia ambas tenſiones P et Q definiri debere; tum vero ex tribus aequationibus quae relinquentur tantum opus eſt vt noſtros angulos η, ϑ et ω eliciamus. His enim inventis, ad datum quoduis tempus t verum ſitum tam iugi quam ambarum lancium poterimus aſſignare. Sicque tota iſta ſublimis quaeſtio perfecte erit ſoluta; ſaltem ſi quae obſtacula occurrant, id non mechanicae ſed ſoli analyſi erit tribuendum.

§. 11. Statim autem perſpicitur, omnem operam nequicquam impedi et inutiliter collocari, quamdiu tres noſtri anguli η, ϑ, ω ad quantitates notabiles exſurgere poſſent; quam ob rem, vti in plerisque aliis oſcillationum generibus, hos angulos quaſi infinite paruos ſtatuere conueniet, vt eorum ſinus

 ipſis

ipſis angulis, coſinus vero vnitati aequales reputari queant; ſicque noſtra inueſtigatio tantum ad oſcillationes quam minimas reſtringetur. Tum vero coordinatae x et y, item x' et y' ſequenti modo exprimentur:

$$x = a + b\eta \quad \text{et} \quad x' = a - b\vartheta$$
$$y = b - a\omega \qquad\quad y' = b + a\omega.$$

§. 12. His obſeruatis quinque noſtrae aequationes ſequentes induent formas:

$$\text{I.}\ \frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{P\eta}{L};\quad \text{II.}\ -\frac{a\,dd\omega}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{P}{L}$$
$$\text{III.}\ -\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = +\frac{Q\vartheta}{L};\quad \text{IV.}\ +\frac{a\,dd\omega}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{Q}{L}$$
$$\text{V.}\ \frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{Mc\omega - Pa + Qa}{M(kk+cc)};$$

ex quarum aequationum ſecunda et quarta ſtatim colligimus ambas tenſiones P et Q; erit enim

$$P = \frac{La\,dd\omega}{2g\,dt^2} + L \ \text{et}\ Q = L - \frac{La\,dd\omega}{2g\,dt^2}.$$

§. 13. Subſtituamus igitur hos valores in tribus reliquis aequationibus, quae euadent

$$\text{I.}\ \frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta - \frac{a\eta\,dd\omega}{2g\,dt^2}\quad \text{III.}\ -\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = \vartheta - \frac{a\vartheta\,dd\omega}{2g\,dt^2}$$
$$\text{V.}\ \frac{M(kk+cc)\,dd\omega + 2La\,a\,dd\omega}{2g\,dt^2} = -Mc\omega$$

ex quibus iam tres angulos η, ϑ et ω determinare oportet.

§. 14. Quia poſtrema aequatio ſolam variabilem ω cum tempore t inuoluit, ab eius reſolutione inchoëmus. Hunc in finem ponamus breuitatis gratia $\frac{M(kk+cc)+2Laa}{Mc} = f$ vt fiat $\frac{f\,dd\omega}{2g\,dt^2} + \omega = 0$,

vnde

vnde patet oſcillationes iugi ſimiles fore pendulo ſimplici cuius longitudo $= f$, vnde iſta aequatio integrata dabit $\omega = \mathfrak{C}\, \text{ſin.} (\gamma + t \sqrt{\tfrac{2g}{f}})$, vbi $\mathfrak{C}$ et γ ſunt conſtantes per duplicem integrationem ingreſſae; quam ob rem tempus ſingularum oſciliationum quibus iugum agitabitur in minutis ſecundis expreſſum erit $= \pi \sqrt{\tfrac{f}{2g}}$. Cum igitur ſit $f = c + \tfrac{kk}{c} + \tfrac{2Laa}{Mc}$, patet, ſi libra non eſſet ſubpigra, ſeu ſi centrum grauitatis G in ipſo centro motus C eſſet ſitum, ob $c = 0$ fore $f = \infty$, ideoque iugum nullum motum oſcillatorium eſſe recepturum.

§. 15. Cum igitur ſit $\frac{dd\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{\omega}{f}$ iſte valor duas reliquas aequationes ita transformabit

I. $\frac{bdd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta + \frac{a\eta\omega}{f}$; III. $\frac{bdd\vartheta}{2g\,dt^2} = -\vartheta - \frac{a\vartheta\omega}{f}$.

Quia autem angulus ω eſt quaſi infinite paruus, poſtrema harum aequationum membra ſaltem in principio praetermittere licebit; vnde vtriusque lancis motus pariter congruet cum oſcillationibus penduli ſimplicis cuius longitudo $= b$. Hincque per quantitates finitas reperietur

I. $\eta = \mathfrak{A}\, \text{ſin.} (\alpha + t \sqrt{\tfrac{2g}{b}})$ II. $\vartheta = \mathfrak{B}\, \text{ſin.} (\beta + t \sqrt{\tfrac{2g}{b}})$

hi autem valores tantum vt vero proximi ſunt ſpectandi.

§. 16. Quo igitur hos binos motus accuratius definiamus, loco ω in ipſis aequationibus differentialibus ſuum valorem ſubſtituamus; quod quo facilius fieri poſſit, ſit breuitatis gratia

$\sqrt{\tfrac{2g}{f}} = \lambda$ vt fiat $\omega = \mathfrak{C}\, \text{ſin.} (\gamma + \lambda t)$, et habebimus has aequationes:

$$\frac{b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta + \frac{a\eta\mathfrak{C}\,\text{fin.}(\gamma+\lambda t)}{f}$$

$$\frac{b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = -\vartheta - \frac{a\vartheta\mathfrak{C}\,\text{fin.}(\gamma+\lambda t)}{f}$$

atque hic etiam faciamus $\sqrt{\frac{2g}{b}} = \mu$, vt prima membra harum aequationum fiant

$$\frac{dd\eta}{\mu\mu dt^2} \text{ et } \frac{dd\vartheta}{\mu\mu dt^2}.$$

§. 17. Iam pro priore aequatione ponamus reuera esse

$\eta = \mathfrak{A}\,\text{fin}(\alpha+\mu t)+p$, eritque $d\eta = \mathfrak{A}\mu dt\,\text{cof.}(\alpha+\mu t)+dp$ et $dd\eta = -\mathfrak{A}\mu\mu dt^2\,\text{fin.}(\alpha+\mu t)+ddp$,

quo valore substituto erit

$$\frac{ddp}{\mu\mu dt^2} = -p + \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}\,\text{fin.}(\alpha+\mu t)\,\text{fin.}(\gamma+\lambda t)}{f}.$$

Nunc autem notetur esse

$$\text{fin.}(\alpha+\mu t)\,\text{fin.}(\gamma+\lambda t)$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{cof}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \tfrac{1}{2}\text{cof.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda)).$$

Ponatur

$$p = \tfrac{1}{2}M\,\text{cof.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) + \tfrac{1}{2}N\,\text{cof.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$

et facta substitutione prodibit sequens aequatio

$$-\frac{M(\mu-\lambda)^2}{2\mu\mu}\text{cof.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \frac{N(\mu+\lambda)^2}{2\mu\mu}\text{cof.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$
$$= -\tfrac{1}{2}M\,\text{cof.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \tfrac{1}{2}N\,\text{cof.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$
$$+\frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f}\text{cof.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda)) - \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f}\text{cof.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$

Aequentur nunc seorsim tam cosinus differentiae quam cosinus summae, ac obtinebuntur hae aequalitates:

$$0 = \frac{M(\mu-\lambda)^2}{2\mu\mu} - \tfrac{1}{2}M + \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f} \text{ et}$$

$$0 = \frac{N(\mu+\lambda)^2}{2\mu\mu} - \tfrac{1}{2}N - \frac{a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2f}$$

ex quibus reperietur

$$M = \frac{\mu\mu a \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\lambda(2\mu - \lambda)f} \quad \text{et} \quad N = \frac{\mu\mu a \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{\lambda(2\mu + \lambda)f}$$

quocirca angulus η ita accuratius exprimetur vt sit,

$$\eta = \mathfrak{A}\,\text{sin.}(\alpha + \mu t) + \frac{\mu\mu a \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu - \lambda)f}\,\text{cos.}\,(\alpha - \gamma + t(\mu - \lambda)) + \frac{\mu\mu a \mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu + \lambda)f}\,\text{cos.}(\alpha + \gamma + t(\mu + \lambda)).$$

§. 18. Eodem modo tractemus alteram aequationem, quae est

$$\frac{dd\vartheta}{\mu\mu\, dt^2} = -\vartheta - a\vartheta\,\mathfrak{C}\,\text{sin.}\,(\gamma + \lambda t)$$

quae aequatio a praecedente non differt, nisi quod ibi erat $+a$ hic est $-a$, ita vt tantum loco a nunc scribendum sit $-a$. Deinde vero, quia hic agitur de angulo ϑ, loco litterarum $\mathfrak{A}$ et α hic scribere debemus $\mathfrak{B}$ et β, vnde huius anguli valor correctus erit

$$\vartheta = \mathfrak{B}\,\text{sin.}(\beta + \mu t) - \frac{\mu\mu a \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu - \lambda)f}\,\text{cos.}\,(\beta - \gamma + t(\mu - \lambda)) - \frac{\mu\mu a \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu + \lambda)f}\,\text{cos.}\,(\beta + \gamma) + t(\mu + \lambda)).$$

Erat vero $\omega = \mathfrak{C}\,\text{sin.}\,(\gamma + \lambda t)$.

§. 19. In his formulis probe distingui conueniet quantitates cognitas et incognitas; cognitae autem sunt, praeter distantias a, b et c vna cum ponderibus L et M quantitates inde formatae f et numeri λ et μ: incognitae igitur erunt sequentes sex $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ et α, β, γ; tot scilicet constantes arbitrariae ob duplicem integrationem trium aequationum differentio-differentialium introduci debebant, vt solutio generalis prodiret; quod etiam natura rei postulat. Nam si status initialis quomodocunque fuerit datus, is

non

non ſolum per tres angulos η, ϑ et ω determinatur, ſed etiam ad motum, qui ſiue iugo ſiue vtrique lanci imprimi potuit eſt attendendum, vnde ſex conditionibus pro quouis caſu erit ſatisfaciendum.

§. 20. Hunc infinem neceſſe eſt, vt etiam celeritates angulares, quae tribus noſtris angulis praeſenti tempore t conueniunt exprimamus; quae ita ſe habebunt

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu\mathfrak{A}\operatorname{cof.}(\alpha+\mu t) - \frac{\mu\mu(\mu-\lambda)a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu-\lambda)f}\operatorname{fin.}(\alpha-\gamma+t(\mu-\lambda))$$
$$- \frac{\mu\mu(\mu+\lambda)a\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu-\lambda)f}\operatorname{fin.}(\alpha+\gamma+t(\mu+\lambda))$$
$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu\mathfrak{B}\operatorname{cof.}(\beta+\mu t) + \frac{\mu\mu(\mu-\lambda)a\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu-\lambda)f}\operatorname{fin.}(\beta-\gamma+t(\mu-\lambda))$$
$$+ \frac{\mu\mu(\mu+\lambda)a\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{2\lambda(2\mu+\lambda)f}\operatorname{fin.}(\beta+\gamma+t(\mu+\lambda))$$

ac denique

$$\frac{d\omega}{dt} = \lambda\mathfrak{C}\operatorname{cof.}(\gamma+\lambda t)$$

hocque modo tota ſolutio huius problematis difficillimi feliciter ad finem eſt perducta.

§. 21. Iam obſeruauimus, ſi centrum motus C in ipſo centro grauitatis exiſteret, tum fore $f=\infty$ hincque $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}} = 0$, ſicque iugum nullum plane motum oſcillatorium recipere poſſe; quandoquidem in omni ſitu foret in aequilibrio. Vnde etiam ambae lances ita ſeorſim oſcillare poſſent, vt neutrius motus ab altera perturbetur, id quod etiam noſtrae formulae manifeſto declarant; quoniam partes poſteriores, quae ob motum iugi ſunt adiectae euaneſcerent; tum enim anguli η et ϑ ſimpliciter per formulas $\mathfrak{A}\operatorname{fin.}(\alpha+\mu t)$ et $\mathfrak{B}\operatorname{fin.}(\beta+\mu t)$ exprimerentur,

rentur, ſicque vtriusque motus admodum penduli ſimplicis oſcillationes peragere poſſet, neque earum motus vllo modo in ſe inuicem influeret; hoc autem intelligendum eſt quamdiu iugum maneret in quiete, etſi in ſtatu inclinato. Vt primum autem motum acceperit, quia nullae vires adſunt eum reprimentes, angulus ω mox tantopere increſceret, vt non amplius pro minimo haberi poſſet; hoc igitur caſu ne formulae quidem quas inuenimus locum habere poſſent. At ſi centrum grauitatis G adeo ſupra centrum motus C eſſet poſitum, ita vt interuallum $GC = c$ foret negatiuum, etiam quantitas z negatiua euaderet, numerus autem λ imaginarius; quam ob cauſam omnis motus oſcillatorius penitus excluderetur, quandoquidem iugum a minima inclinatione prorſus prolaberetur.

§. 22. Vt igitur ea Phaenomena quae ab Illuſtri *Bernoulli* commemorantur ſe manifeſtare posſent, omnino requiritur, vt centrum grauitatis G infra centrum motus C cadat, hoc eſt vt libra ſit *ſubpigra*. Interim tamen, quoniam interuallum $CG = c$ ſemper valde exiguum eſſe ſolet, euidens eſt, longitudinem f ſemper fore praegrandem, hincque numerum λ valde paruum; dum contra numerus $\mu = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ plerumque eſt valde notabilis, niſi forte lances P et Q per breuiſſima fila ſuſpendantur quod autem nunquam fieri ſolet, hanc ob rem in genere hic aſſumere licet, numerum λ ſemper multo minorem eſſe quam μ.

§. 23. Vt iam in phaenomena motus accuratius inquiramus, primum obferuo, qualiscunque fitus et motus ambabus lancibus fuerit impreffus; fi ipfum iugum in quiete relinquitur, idque in fitu fuo horizontali, ita vt initio fuerit tam $\omega = 0$ quam $\frac{d\omega}{dt} = 0$, ob $t = 0$, fore tam $\mathfrak{C}$ fin. $\gamma = 0$ quam $\lambda \mathfrak{C}$ cof. $\gamma = 0$, id quod fieri nequit, nifi fit $\mathfrak{C} = 0$; pofito autem $\mathfrak{C} = 0$, prodiret $\eta = \mathfrak{A}$ fin. $(\alpha + \mu t)$ et $\vartheta = \mathfrak{B}$ fin. $(\beta + \mu t)$, exiftente $\omega = \mathfrak{C}$ fin. $(\gamma + \lambda t)$ quae tres formulae nullo modo in fe inuicem influunt. Hoc igitur cafu tam iugum quam vtraque lanx feorfim motu ofcillatorio regulari ferretur, neque vllius motus a reliquis perturbaretur; quod cum in phaenomenis memoratis non vfu venerit, id manifefto eft indicio, iugum primo motus initio vel non fuiffe in quiete, vel quandam inclinationem accepiffe, id quod etiam ab impulfu, quem altera lanx initio accepiffe fertur neceffardo euenire debuit.

§. 24. Ponamus igitur primo initio iugum ita de fitu fuo naturali fuiffe depulfum, vt tum fuerit angulus $\omega = m$, neque vero praeterea vllum motum accepiffe; quo pofito primo initio vbi $t = 0$ erat $m = \mathfrak{C}$ fin. γ, tum vero $\frac{d\omega}{dt} = \lambda \mathfrak{C}$ cof. $\gamma = 0$, vnde colligimus $\gamma = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ et $\mathfrak{C} = m$. Ipfum autem iugum deinceps ofcillationes peraget regulares et conformes pendulo fimplici, cuius longitudo $f = c + \frac{kk}{c} + \frac{2\Gamma aa}{Mc}$, vnde fit $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}}$, ita vt etiam fit $f = \frac{2g}{\lambda\lambda}$.

§. 25. Nunc igitur hos valores $\mathfrak{C} = m$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ et $f = \frac{2g}{\lambda\lambda}$ in formulis pro angulis η et ϑ inuentis substituamus, eritque

$$\eta = \mathfrak{A}\,\text{fin.}(\alpha + \mu t) + \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cof.}(\alpha - \tfrac{\pi}{2} + t(\mu - \lambda))$$
$$+ \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{cof.}(\alpha + \tfrac{\pi}{2} + t(\mu + \lambda))$$

et $$\vartheta = \mathfrak{B}\,\text{fin.}(\mathfrak{E} + \mu t) - \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cof.}(\mathfrak{E} - \tfrac{\pi}{2} + t(\mu - \lambda))$$
$$- \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{cof.}\ \mathfrak{E} + \tfrac{\pi}{2} + t(\mu + \lambda)$$

Cum autem fit

$$\text{cof.}(\alpha + t(\mu - \lambda) - 90^\circ) = \text{fin.}(\alpha + t(\mu - \lambda)) \text{ et}$$
$$\text{cof}\ \alpha + t(\mu + \lambda) + 90^\circ = -\text{fin.}(\alpha + t(\mu + \lambda))$$

erit aliquanto concinnius

$$\eta = \mathfrak{A}\,\text{fin.}(\alpha + \mu t) + \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{fin.}(\alpha + t(\mu - \lambda))$$
$$- \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{fin.}(\alpha + t(\mu + \lambda))$$

et $$\vartheta = \mathfrak{B}\,\text{fin.}(\mathfrak{E} + \mu t) - \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{fin.}(\mathfrak{E} + t(\mu - \lambda))$$
$$+ \frac{\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{fin.}(\mathfrak{E} + t(\mu + \lambda))$$

vnde porro pro vtroque motu angulari deducimus

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu\mathfrak{A}\,\text{cof.}(\alpha + \mu t) + \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cof.}(\alpha + t(\mu - \lambda))$$
$$- \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu\mu a \mathfrak{A} m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{cof.}(\alpha + t(\mu + \lambda))$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu\mathfrak{B}\,\text{cof.}(\mathfrak{E} + \mu t) - \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cof.}(\mathfrak{E} + t(\mu - \lambda))$$
$$+ \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu\mu a \mathfrak{B} m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cof.}(\mathfrak{E} + t(\mu + \lambda)).$$

EVOLVTIO CASVS

quo primo initio ambae lances in situ verticali quieuerunt, dum iugum ad angulum ACP $= m$ fuit inclinatum.

§. 26. Cum igitur initio fuerit tam $\eta = 0$ et $\vartheta = 0$ quam $\frac{d\eta}{dt} = 0$ et $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, posito $t = 0$ pro determinatione constantium habebimus has quatuor aequationes:

$$\text{I.}\quad 0 = \text{sin.}\,\alpha + \frac{\lambda\mu\mu a m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{sin.}\,\alpha - \frac{\lambda\mu\mu a m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{sin.}\,\alpha$$

$$\text{II.}\quad 0 = \text{sin.}\,\beta - \frac{\lambda\mu\mu a m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{sin.}\,\beta + \frac{\lambda\mu\mu a m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{sin.}\,\beta$$

$$\text{III.}\quad 0 = \text{cos.}\,\alpha + \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu a m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cos.}\,\alpha - \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu a m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{cos.}\,\alpha$$

$$\text{IV.}\quad 0 = \text{cos.}\,\beta - \frac{\lambda(\mu - \lambda)\mu a m}{4g(2\mu - \lambda)}\,\text{cos.}\,\beta + \frac{\lambda(\mu + \lambda)\mu a m}{4g(2\mu + \lambda)}\,\text{cos.}\,\beta$$

quae ad sequentes formas simpliciores reducuntur

$$\text{I.}\quad 0 = \text{sin.}\,\alpha + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}\,\text{sin.}\,\alpha$$

$$\text{II.}\quad 0 = \text{sin.}\,\beta - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}\,\text{sin.}\,\beta$$

$$\text{III.}\quad 0 = \text{cos.}\,\alpha - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}\,\text{cos.}\,\alpha$$

$$\text{IV.}\quad 0 = \text{cos.}\,\beta + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}\,\text{cos.}\,\beta$$

quibus aequationibus pluribus modis satisfieri posse videtur: aliquos igitur percurramus.

§. 27. Sumamus $\alpha = 0$ et $\beta = 0$, vt binis prioribus satisfiat; ac posteriores erunt

$$\text{III.}\quad 0 = 1 - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

$$\text{IV.}\quad 0 = 1 + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

quibus nullo modo satisfieri potest, cum eorum summa

ſumma ſit $o = 2$. Idem euenit ſi ſumamus $\alpha = 90°$ et $\beta = 90°$, quo binis poſterioribus ſatisfiat; ac priores euadent

$$\text{I. } o = 1 + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

$$\text{II. } o = 1 - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

quarum ſumma iterum daret $2 = o$, id quod eſt abſurdum. Tale autem abſurdum etiam in genere occurrit, cum

$$\text{I ſin. } \beta + \text{II ſin. } \alpha = o = 2 \text{ ſin. } \alpha \text{ ſin. } \beta;$$

eodemque modo

$$\text{III coſ. } \beta + \text{IV coſ. } \alpha = o = 2 \text{ coſ. } \alpha \text{ coſ. } \beta$$

quod vtrumque ſimul fieri nequit.

§. 28. Verum, quoniam has aequationes ex principalibus vel per $\mathfrak{A}$ vel per $\mathfrak{B}$ diuidendo elicuimus, eos factores quibus totum negotium confici debet e medio ſuſtulimus. Nullo ſcilicet alio modo huic caſui ſatisfieri poteſt, niſi ſtatuendo tam $\mathfrak{A} = o$ quam $\mathfrak{B} = o$, vnde intelligimus, hoc caſu ambas lances perpetuo in quiete eſſe permanſuras, neque vllum motum eſſe recepturas, etiamſi interea iugum inclinationes ſuas perpertuo abſoluat.

EVOLVTIO CASVS
quo primo initio vna lanx P a ſitu verticali ad angulum $PAa = n$ diducitur, altera lance in quiete relicta, dum iugum ad angulum $ACP = m$ fuerit inclinatum.

§. 29 Hoc igitur caſu poſito $t = o$ eſſe oportet $\eta = n$, $\vartheta = o$, $\frac{d\eta}{dt} = o$ et $\frac{d\vartheta}{dt} = o$, vnde ſequenquentes quatuor obtinemus aequationes iam ad formam ſimpliciſſimam perductas:

$$\text{I. } n = \mathfrak{A} \text{ ſin. } \alpha + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)} \text{ ſin. } \alpha$$

$$\text{II. } 0 = \mathfrak{B} \text{ ſin. } \beta - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a \mathfrak{B} m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)} \text{ ſin. } \beta$$

$$\text{III. } 0 = \text{coſ. } \alpha - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)} \text{ coſ. } \alpha$$

$$\text{IV. } 0 = \text{coſ. } \beta - \frac{\lambda\lambda\mu\mu a m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)} \text{ coſ. } \beta$$

vbi quidem tertia per $\mathfrak{A}$ quarta autem per $\mathfrak{B}$ multiplicanda eſt intelligenda; vnde patet, ſi fuerit $\mathfrak{B} = 0$, tam ſecundae quam quartae aequationi ſimul ſatisfieri; tum autem, quia ipſe angulus ϑ euaneſceret, vtcunque reliquis aequationibus ſatisfieret, et altera lanx Q nunquam ad motum eſſet peruentura, vnde concludimus, fieri poſſe, vt altera lanx perpetuo in quiete perſeueret. Pro motu autem lancis P aequationibus I et III ſatisfieri oportet.

§. 30. Tertiae autem aequationi, quoniam pars poſterior prae prima eſt quaſi infinite parua, ſatisfieri nequit, niſi ſit coſ. $\alpha = 0$, hoc eſt $\alpha = 90^\circ$; tum autem pro prima erit

$$n = \mathfrak{A} + \frac{\lambda\lambda\mu\mu a \mathfrak{A} m}{2g(4\mu\mu - \lambda\lambda)}$$

vnde deducitur valor litterae $\mathfrak{A}$, qui proxime erit $= n$, ita vt pro motu primae lancis habeamus hanc aequationem:

$$\eta = n \text{ ſin. } (90^\circ + \mu t) + \frac{\lambda\mu\mu a m n}{4g(2\mu - \lambda)} \text{ ſin. } (90^\circ + t(\mu - \lambda))$$
$$- \frac{\lambda\mu\mu a m n}{4g(2\mu + \lambda)} \text{ ſin. } 90^\circ + t(\mu + \lambda))$$

$\frac{d\eta}{dt}$

$$\frac{d\eta}{dt} = \mu n \operatorname{cof.}(90^\circ + \mu t) + \frac{\lambda(\mu-\lambda)\mu\mu a m n}{4g(2\mu-\lambda)} \operatorname{cof.}(90^\circ + t(\mu-\lambda)) - \frac{\lambda(\mu+\lambda)\mu\mu a m n}{4g(2\mu+\lambda)} \operatorname{cof.}(90^\circ + t(\mu+\lambda))$$

vbi notetur esse

$\operatorname{fin.}(90^\circ + \mu t) = \operatorname{cof.}\mu t$ et $\operatorname{fin.} 90^\circ + t(\mu \pm \lambda) = \operatorname{cof.} t(\mu \pm \lambda)$;
$\operatorname{cof.}(90^\circ + \mu t) = -\operatorname{fin.}\mu t$ et $\operatorname{cof.}(90^\circ + t(\mu \pm \lambda) = -\operatorname{fin.} t(\mu \pm \lambda)$.

Vnde patet, motum huius lancis non amplius esse regularem, sed eo magis a motu penduli simplicis esse recessurum, quo maiores fuerint coëfficientes binorum postremorum terminorum. Quin etiam iste motus perturbatus ita repraesentari poterit, secundum principium Celeberrimi *Bernoulii*, vt sit permistus ex triplici oscillationum genere, quorum primi tempus vnius oscillationis sit $= \frac{\pi}{\mu}$, secundi vero $= \frac{\pi}{\mu-\lambda}$ et tertii $= \frac{\pi}{\mu+\lambda}$; haec scilicet permixtio oritur ex motu oscillatorio iugi.

§. 31. Hinc igitur iterum discimus, quomodocunque tam ipsum iugum quam altera lanx initio ad motum fuerint concitati, nullum plane motum in altera lance generari posse, id quod memorato experimento aduersari videtur. Verum probe notandum est, nos hic tantum de oscillationibus minimis loqui, vnde neutiquam asseuerare possumus, talem communicationem in maioribus oscillationibus locum habere non posse. Quoniam enim angulos η, ϑ et ω tam paruos assumsimus, vt loco eorum sinuum ipsos angulos, loco cosinuum vero ipsam vnitatem scribere liceret, euidens est, si ipsos sinus et cosinus in calculum introducere voluissemus, inde vtique ingens

gens diſcrimen oriturum fuiſſe, neque vero etiam hunc motum ex theoria definire licuiſſet. Videamus igitur etiam, quales motus ſint produturi, ſi etiam alteri lanci initio motus quicunque fuerit impreſſus.

EVOLVTIO CASVS

quo initio praeter inclinationem iugi ad angulum $ACp = m$ vtraque lanx ad quandum inclinationem diducitur, ſcilicet lanx P ad angulum $PAa = n$ et lanx Q ad angulum $QBb = n'$.

§. 32. Hic ſcilicet aſſumimus, neutri lanci initio motum fuiſſe inpreſſum, ita vt fuerit tam $\frac{d\eta}{dt} = 0$ quam $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$, ad quod vtique calculus accommodabitur, ſtatuendo tam $\alpha = 90^\circ$ quam $\beta = 90^\circ$. Tum vero ob inclinationes initiales erit vt ante vidimus $\mathfrak{A} = n$ et $\mathfrak{B} = n'$, vnde pro motu vtriusque lancis impetramus has aequationes:

$$\eta = n \operatorname{cof.} \mu t + \frac{\lambda\mu\mu a m n}{4g(2\mu - \lambda)} \operatorname{cof.} t(\mu - \lambda) - \frac{\lambda\mu\mu a m n}{4g(2\mu + \lambda)} \operatorname{cof} t(\mu + \lambda) \text{ et}$$

$$\vartheta = n' \operatorname{cof.} \mu t - \frac{\lambda\mu\mu a m n'}{4g(2\mu - \lambda)} \operatorname{cof.} t(\mu - \lambda) + \frac{\lambda\mu\mu a m n'}{4g(2\mu + \lambda)} \operatorname{cof.} t(\mu + \lambda).$$

§. 33. Quo has formulas magis contrahamus, ponamus breuitatis gratia $\lambda\mu\mu\frac{a}{4g} = i$; tum igitur habebimus tam pro motu lancium quam iugi

$$\eta = n \operatorname{cof.} \mu t + \frac{imn}{2\mu - \lambda} \operatorname{cof} t(\mu - \lambda) - \frac{imn}{2\mu + \lambda} \operatorname{cof.} t(\mu + \lambda)$$

$$\vartheta = n' \operatorname{cof.} \mu t - \frac{imn'}{2\mu - \lambda} \operatorname{cof.} t(\mu - \lambda) + \frac{imn'}{2\mu + \lambda} \operatorname{cof.} t(\mu + \lambda) \text{ et}$$

$$\omega = m \operatorname{cof.} \lambda t$$

hinc-

hincque pro celeritatibus angularibus habebimus

$$\frac{d\eta}{dt} = -\mu n \sin.\mu t - \frac{(\mu-\lambda)imn}{2\mu-\lambda}\sin.t(\mu-\lambda) + \frac{(\mu+\lambda)imn}{2\mu+\lambda}\sin.t(\mu+\lambda)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\mu n' \sin.\mu t + \frac{(\mu-\lambda)imn'}{2\mu-\lambda}\sin.t(\mu-\lambda) - \frac{(\mu+\lambda)imn'}{2\mu+\lambda}\sin.t(\mu+\lambda)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\lambda m \lambda t.$$

§ 34. Hinc igitur patet, litteras m n et n' deſignare maximas digreſſiones, ad quas tam iugum quam ambae lances a ſtatu aequilibrii diuagari posſunt, quod quidem de ipſo iugo omni rigore eſt verum. Pro lancibus autem vtique fieri poteſt, vt ob partes poſteriores maxima digreſſio fiat modo aliquanto maior modo minor quam n et n', quae irregularitas eo erit maior, quo maior fuerit motus iugi ſeu angulus n; tum vero etiam potiſſimum pendebit a numero i, qui eo erit maior, quo longius fuerit iugum, cuius ſemiſſis eſt $= a$; quam ob cauſam in minoribus bilancibus irregularitas talis minus percipi poterit.

§. 35. Quo indolem harum formularuum clarius illuſtremus, quoniam numerus $\mu = \sqrt{\frac{2g}{b}}$ plerumque multo maior eſt, quam $\lambda = \sqrt{\frac{2g}{f}}$, ſumamus exempli gratia $\lambda = 1$ et $\mu = 3$, vt tempus vnius oſcillationis iugi fiat $= \pi''$, lancium vero, quatenus motus eſt regularis $= \frac{\pi''}{3}$; tum igitur erit $i = \frac{9a}{4g}$, vbi g eſt circiter 16 pedum anglicorum; vnde ſi eſſet $a = 2$ pedum, foret $i = \frac{9}{32}$. Sed vt calculus commodius reddatur, ſumamus $i = \frac{1}{4}$; tum vero angulos m, n et n' ponamus circiter 10 graduum, ſeu in partibus radii $m = n = n' = \frac{1}{6}$, quibus valoribus ſubſtitutis noſtrae formulae erunt

$$\eta = \tfrac{1}{6}\,\mathrm{coſ.}\,3\,t + \tfrac{1}{720}\,\mathrm{coſ.}\,2\,t - \tfrac{1}{1008}\,\mathrm{coſ.}\,4\,t$$

$$\vartheta = \tfrac{1}{6}\,\mathrm{coſ.}\,3\,t - \tfrac{1}{720}\,\mathrm{coſ.}\,2\,t + \tfrac{1}{1008}\,\mathrm{coſ.}\,4\,t$$

$$\omega = \tfrac{1}{6}\,\mathrm{coſ.}\,t$$

$$\frac{d\,\eta}{d\,t} = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{ſin.}\,3\,t - \tfrac{1}{360}\,\mathrm{ſin.}\,2\,t + \tfrac{1}{252}\,\mathrm{ſin.}\,4\,t$$

$$\frac{d\,\vartheta}{d\,t} = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{ſin.}\,3\,t + \tfrac{1}{360}\,\mathrm{ſin.}\,2\,t - \tfrac{1}{252}\,\mathrm{ſin.}\,4\,t$$

$$\frac{d\,\omega}{d\,t} = -\tfrac{1}{6}\,\mathrm{ſin.}\,t.$$

§. 36. Quia tempus t exprimitur in minutis ſecundis, hic autem vt angulus ſpectatur: patet, vnum minutum ſecundum aequiualere angulo 57° circiter. Vnde ſi ſtatum librae cum lancibus per interualla ſemi-minuti ſecundi examinare velimus, loco t ſucceſſiue ſcribamus angulos $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, 120 etc. et ad quoduis momentum ternos angulos ω, η et ϑ in ſequenti tabula referamus, vbi fractionem $\frac{1}{6}$ pro decem gradibus computemus, vnde fit $\frac{1}{720} = 5'$ et $\frac{1}{1008} = 3\frac{1}{2}'$

t	ω		η		ϑ	
0	10°	0′	+ 10°	$1\frac{1}{2}$′	+ 9°	$58\frac{1}{2}$′
$\frac{1}{2}$	8°	40′	+ 0°	$4\frac{1}{4}$′	− 0°	$4\frac{1}{4}$′
$1\frac{1}{2}$	5°	0′	− 10°	$\frac{3}{4}$′	− 9°	$59\frac{1}{4}$′
2	0°	0′	− 0°	$8\frac{1}{2}$′	+ 0°	$8\frac{1}{2}$′
$2\frac{1}{2}$	− 5°	0′	+ 9°	$59\frac{1}{4}$′	+ 10°	$\frac{3}{4}$
3	− 8°	40′	+ 0°	$4\frac{1}{4}$′	− 0°	$4\frac{1}{4}$′
$3\frac{1}{2}$	10°	0′	− 9°	$58\frac{1}{2}$′	− 10°	$1\frac{1}{2}$′
4	8°	40′	+ 0°	$4\frac{1}{4}$′	− 0°	$4\frac{1}{4}$′
$4\frac{1}{2}$	5°	0′	+ 9°	$59\frac{1}{4}$′	+ 10°	$\frac{3}{4}$′
5	0°	0′	− 0°	$8\frac{1}{2}$′	+ 0°	$8\frac{1}{2}$
$5\frac{1}{2}$	− 5°	0′	− 10°	$\frac{3}{4}$	− 9°	$59\frac{1}{4}$′
6	− 8°	40′	+ 0°	$4\frac{1}{4}$′	− 0°	$4\frac{1}{4}$′
$6\frac{1}{2}$	10°	0′	+ 10°	$1\frac{1}{2}$′	+ 9°	$58\frac{1}{2}$′.

Ex hac autem tabula manifeſto apparet, irregularitatem motus lancium tam eſſe exiguam, vt in praxi vix percipi poſſe; neque enim vnquam numero t maior valor tribui poſſe videtur.

§. 37. Cum igitur nullum plane veſtigium appareat, vnde tam mirabilia phaenomena in motu lancium oriri potuiſſent, dum ambae lances alternatim motum oſcillatorium concepiſſe, tum vero iterum conquieuiſſe perhibentur, fateri cogimur, a longe alia cauſa illud phaenomenon memoratum productum fuiſſe, ſiue ea in maioribus motibus ſit quaerenda, ſiue in eo, quod puncta A et B, vnde lances ſuſpenduntur, in eadem recta cum centro motus C ſita aſſumſimus. Neque tamen apparet, quomodo ex tantilla mutatione, quam in his punctis concipere licet, tam enorme difcrimen oriri potuerit; praecipue cum methodus, qua hic fumus vfi, nulli plane dubitationi locum relinquat.

§ 38. His omnibus accuratius perpenfis, haud difficulter perfpicere licet, a motu iugi ideo nullum motum ofcillatorium lancibus induci poffe, quia eius extremitates A et B tantum verticaliter moventur, vnde etiam lancibus nullus motus obliquus imprimi poteft. Vera ergo caufa, cur calculus nofter a memoratis phaenomenis diffideat, in eo eft fita, quod centrum motus C tanquam fixum fpectauimus; ftatim autem atque ipfum hoc punctum C aliquem motum horizontalem conciperet, etiam puncta A et B pari motu ferrentur, vnde vtique lances ad motum gyratorium concitari deberent. Haec autem circumftantia manifefto in libris locum habet, quippe quae non ex ipfo centro motus C, fed ex puncto multo altiori, fcilicet ex fcapo feu trutina fufpendi folent; atque ex hoc iam perfpicuum eft, a rudi illa impulfione, qua altera lanx concitata perhibetur toti librae circa iftud punctum fufpenfionis motum fuiffe impreffum, ob quem vtique extremitates iugi A et B non tantum verticaliter, fed etiam horizontaliter agitari debuerint, ita vt hoc motu pofteriori lances vtrique motum ofcillatorium accipere debuerint. Quin etiam hinc iam ratio perfpicitur, cur lances alternis vicibus modo quieuerint modo ofcillarint. Pleniorem autem cafus euolutionem alia occafione accuratius pertractare conabor.

EXPLI-

EXPLICATIO
MOTVS OSCILLATORII
MIRABILIS IN LIBRA MAIORE OBSERVATI.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Cum nuper in caufam huius phaenomeni, quod illuftris *Bernoullius* commemorat inquififfem, et folum librae iugum circa fuum centrum mobile affumfiffem, luculenter demonftraui, hinc motum iftum mirabilem nullo modo oriri potuiffe. Nullum igitur plane eft dubium, quin caufa iftius phaenomeni in motu ofcillatorio totius librae ex fcapo fufpenfae fit quaerendum, quandoquidem talis motus a rudi illa concuffione toti librae imprimi debuit. Quoniam igitur agitationes folius iugi vix quicquam in motu ofcillatorio lancium immutare valent, vti in fuperiore differtatione oftendi, hic iugum cum trutina firmiter connexum affumo, vt totum librae fyftema exceptis lancibus tanquam corpus rigidum fpectari poffit.

§. 2. Sit igitur O punctum fufpenfionis, circa quod tota libra eft mobilis, per quod ducatur recta horizontalis $a\,O\,b$, tum vero etiam verticalis $O\,o$; atque Tab. III. Fig. 5.

atque elapso post initium tempore $= t$, quod semper in minutis secundis exprimo, teneat corpus librae situm vtcunque inclinatum O A B, vbi A et B sunt puncta ex quibus lances suspenduntur; ita vt recta A B situ aequilibrii foret horizontalis, recta vero O C, ad eam perpendiculariter ducta, verticalis, in qua ergo dabitur centrum grauitatis totius librae G. Ductae concipiantur etiam rectae O A et O B, quae vocentur $OA = OB = a$, et anguli $OAB = OBA = \alpha$; ita vt sit $OC = a$ sin. α et $AC = BC = a$ cos. α: distantia autem centri grauitatis G a puncto suspensionis O ponatur $OG = c$. Praeterea sit massa seu pondus totius librae, lancibus exceptis $= M$, eiusque momentum inertiae Mkk, ita vt $\frac{kk}{c}$ foret longitudo penduli simplicis isochroni, si sola libra circa punctum O oscillaret. Ad commoditatem autem calculi vocemus insuper $OC = e = a$ sin. α et $AC = BC = f = a$ cos. α. Denique lances vt pondera simplicia ex punctis A et B suspensa spectemus, quorum massa sit $= L$; filorum autem longitudo $AP = BQ = b$.

§. 3. Praesenti autem statu ponatur declinatio librae seu angulus $GOo = \Phi$, eruntque anguli $AOa = \alpha - \Phi$ et $BOb = \alpha + \Phi$; vbi rectae Aa et Bb intelligendae sunt verticales. Hinc igitur erit

$Aa = a$ sin. $(\alpha - \Phi) = e$ cos. $\Phi - f$ sin. Φ et

$Oa = a$ cos. $(\alpha - \Phi) = f$ cos. $\Phi + e$ sin. Φ;

ex altera autem parte

$Bb = a$ sin. $(\alpha + \Phi) = e$ cos. $\Phi + f$ sin. Φ et

$Ob = a$ cos. $(\alpha + \Phi) = f$ cos. $\Phi - e$ sin. Φ.

§. 4.

§. 4. Porro pro praesenti statu declinet altera lanx P a situ verticali angulo $PAa = \eta$; altera vero lanx Q angulo $QB\beta = \vartheta$; vnde, si ex punctis P et Q verticales agantur Pp et Qq, ob vtramque longitudinem $AP = BQ = b$ habebimus

$ap = b \sin.\eta$ et $Pp = Aa + b\cos.\eta = e\cos.\Phi - f\sin.\Phi + b\cos.\eta$,

et ex altera parte

$bq = b\sin.\vartheta$ et $Qq = Bb + b\cos.\vartheta = e\cos.\Phi + f\sin.\Phi + b\cos.\vartheta$;

§. 5. Nunc pro motu determinando statuantur pro binis punctis P et Q coordinatae orthogonales

$$Op = x = e\sin.\Phi + f\cos.\Phi + b\sin.\eta \text{ et}$$
$$Pp = y = e\cos.\Phi - f\sin.\Phi + b\cos.\eta;$$

et ex altera parte

$$Oq = x' = f\cos.\Phi - e\sin.\Phi - b\sin.\vartheta \text{ et}$$
$$Qq = y' = e\cos.\Phi + f\sin.\Phi + b\cos.\vartheta.$$

His positis ponatur tensio fili $AP = P$ et fili $BQ = Q$; quibus lances P et Q propemodum sursum trahuntur, dum ob propriam grauitatem deorsum vrgentur vi $= L$. At tensio P praebet vim directe sursum trahentem $= P\cos.\eta$, et vim horizontalem dextrorsum $= P\sin.\eta$: pro altera vero lance tensio Q praebet vim verticalem sursum vrgentem $= Q\cos.\vartheta$ et horizontalem dextrorsum $= Q\sin.\vartheta$.

§. 6. Definitis istis viribus, quibus lances sollicitantur, principia motus pro lance P suppeditant has duas aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{P\sin.\eta}{L} \text{ et II. } \frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{L - P\cos.\eta}{L}$$

pro

pro altera autem lance Q habebimus has:

III. $\frac{ddx'}{2gdt^2} = \frac{Q\,\text{fin.}\,\vartheta}{L}$ et IV. $\frac{ddy'}{2gdt^2} = \frac{L - Q\,\text{cof.}\,\vartheta}{L}$

atque ex his quatuor aequationibus motus vtriusque lancis determinari debet.

§. 7. Iam motum angularem ipfius librae aggrediamur; ac primo quidem momenta omnium virium quibus follicitatur refpectu puncti fufpenfionis O colligi debent. Hic igitur primo occurrit proprium librae pondus M, quod in centro grauitatis G vnitum producit momentum $= M\,O\,G\,\text{fin.}\,\Phi = M\,c\,\text{fin.}\,\Phi$. Deinde vero tenfio P momentum producit $= P\,a\,\text{fin.}\,O\,A\,P$. Eft vero hic angulus $O\,A\,P = 90^\circ + \alpha - \Phi + \eta$ cuius finus $= \text{cof.}\,(\alpha - \Phi + \eta)$, ita vt hoc momentum fit

$$P\,a\,\text{cof}\,(\alpha - \Phi + \eta) = P\,(f\,\text{cof.}\,(\eta - \Phi) - e\,\text{fin.}\,(\eta - \Phi)).$$

Quod momentum pariter ac primum tendit ad angulum Φ imminuendum. Ex altera parte tenfio Q momentum exerit $= Q.\,O\,B\,\text{fin.}\,O\,B\,Q$: eft vero angulus $O\,B\,Q = 90^\circ + \alpha + \Phi - \vartheta$, cuius finus eft $\text{cof.}\,(\alpha + \Phi - \vartheta) = \text{cof.}\,\alpha.\,\text{cof.}\,(\Phi - \vartheta) - \text{fin.}\,\alpha\,\text{fin.}\,(\Phi - \vartheta)$ vnde iftud momentum erit

$$Q.\,(f\,\text{cof.}\,(\Phi - \vartheta) - e\,\text{fin.}\,(\Phi - \vartheta)),$$

quod ad declinationem Φ augendam tendit. Hinc igitur per principia motus deducitur haec aequatio:

$$\text{V.}\ \frac{dd\Phi}{2gdt^2} = -\frac{Mc\,\text{fin.}\,\Phi - P(f\,\text{cof.}\,(\eta - \Phi) - e\,\text{fin.}\,(\eta - \Phi)) + Q(f\,\text{cof.}\,(\Phi - \vartheta) - e\,\text{fin.}\,(\Phi - \vartheta))}{Mkk}.$$

§. 8. Nunc igitur ternos noftros angulos declinationis η, ϑ et Φ tanquam infinite paruos fpectemus

ctemus, vt eorum cofinus vnitati, finus vero ipfis angulis aequales reputari queant; tum igitur erit

$$x = e\Phi + f + b\eta; \quad y = e - f\Phi + b$$
$$x' = f - e\Phi - b\vartheta; \quad y' = e + f\Phi + b$$

et nunc quinque noftrae aequationes induent fequentes formas:

$$\text{I. } \frac{e\,dd\Phi + b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{P\eta}{L}; \quad \text{II. } \frac{-f\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{P}{L}$$

$$\text{III. } \frac{-e\,dd\Phi - b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = \frac{Q\vartheta}{L}; \quad \text{IV. } \frac{+f\,dd\Phi}{2g\,dt^2} = 1 - \frac{Q}{L}$$

$$\text{V. } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{Mc\Phi - P(f - e(\eta - \Phi)) + Q(f - e(\Phi - \vartheta))}{Mkk}.$$

§. 9. Ex his aequationibus primo tenfiones P et Q definiri opportet, id quod commodiffime fit ex aequatione fecunda et quarta, vnde, quia membra priora $\frac{f\,dd\Phi}{2g\,dt^2}$ funt quafi infinite parua erit $P = L$ et $Q = L$, qui valores proxime veri pro reliquis aequationibus fufficiunt, ita vt nobis relinquantur tres fequentes aequationes:

$$\text{I. } \frac{e\,dd\Phi + b\,dd\eta}{2g\,dt^2} = -\eta; \quad \text{III. } -\frac{e\,dd\Phi - b\,dd\vartheta}{2g\,dt^2} = \vartheta \text{ et}$$

$$\text{V. } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{Mc\Phi - 2Le\Phi + Le(\Phi + \vartheta)}{Mkk}$$

hic ergo ternae noftrae variabiles η, ϑ et Φ maxime inter fe funt permixtae, ita vt non parum difficultatis in earum feparatione occurrat.

§. 10. Quoniam autem in his aequationibus ternae variabiles vbique vnicam dimenfionem habent, recurramus ad eam methodum, qua iam faepius optimo cum fucceffu fum vfus, fcilicet, conftituatur talis aequatio differentialis secundi gradus $\frac{ddz}{2g\,dt^2} = -\frac{z}{h}$, qua motus penduli simplicis longitudinis $= h$ exprimitur, ac statuamus $\eta = Az$; $\vartheta = Bz$ et $\Phi = Cz$ fietque

$$\frac{dd\eta}{2g\,dt^2} = -\frac{Az}{h}; \quad \frac{dd\vartheta}{2g\,dt^2} = -\frac{Bz}{h} \text{ et } \frac{dd\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{Cz}{h},$$

quibus valoribus in nostris aequationibus substitutis et littera z per diuisionem sublata nanciscimur sequentes aequationes:

$$\text{I. } -\frac{Ce}{h} - \frac{Ab}{h} = -A; \quad \text{III. } \frac{Ce}{h} + \frac{Bb}{h} = B$$

$$\text{V. } -\frac{C}{h} = -\frac{MCc - 2LCe + Le(A+B)}{Mkk}.$$

§. 11. Ex harum aequationum duabus prioribus statim elicimus

$$A = \frac{-Ce}{b-h} \quad \text{et } B = \frac{-Ce}{b-h};$$

qui valores in quinta substituti praebent

$$-\frac{CMkk}{h} = -C(Mc + 2Le) - \frac{2CLee}{b-h}$$

quae reducitur ad hanc

$$+hh(Mc + 2Le) - h(Mbc + 2Lbe + 2Lee + Mkk) + Mbkk = 0$$

cuius binas radices ponamus breuitatis gratia esse vnam $h = p$ et alteram $h = q$, ita vt p vel q sequenti forma sit expressum

$$\frac{\frac{1}{2}b(Mc + 2Le) + Lee + \frac{1}{2}Mkk}{Mc + 2Le}$$

$$\frac{\pm\sqrt{(\frac{1}{4}bb(Mc+2Le)^2 + b(Mc+2Le)Lee - \frac{1}{2}b(Mc+2Le)Mkk + LLe^4 + LMeekk + \frac{1}{4}M^2k^4)}}{Mc + 2Le}$$

§. 12. Cum igitur sit $\frac{ddz}{2g\,dt^2} = -\frac{z}{h}$, erit vti constat

$$z = \sin.(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{h}}),$$

vnde

vnde quia prodit $A = B = \frac{Ce}{b-b}$ ſolutio ita ſe habebit:

$$\Phi = C \sin.(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}) \text{ et } \eta = \vartheta = \frac{Ce}{b-b} \sin.(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}).$$

Nunc autem ſi loco b ſcribamus binos valores inventos p et q, motus inde oriundos etiam coniungere licet, vt motus prodeat oſcillatorius ex binis ſimplicibus mixtus, qui vt fiat generalis, pro altero loco conſtantium C et γ ſcribamus D et δ; ſicque obtinebitur ſequens ſolutio generalior

$$\Phi = C \sin.(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{p}}) + D \sin.(\delta + t\sqrt{\tfrac{2g}{q}}) \text{ et}$$

$$\eta = \vartheta = \frac{Ce}{p-\gamma} \sin.(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{p}}) + \frac{De'}{q-b} \sin.(\delta + t\sqrt{\tfrac{2g}{q}}).$$

§. 13. Quanquam autem ob quatuor conſtantes arbitrarios C, γ et D, δ infinita varietas motuum, quos libra cum lancibus recipere poteſt, contineatur: tamen alia motuum genera non complectitur, niſi in quibus ambae lances aequali motu cientur. Haec igitur ſolutio neutiquam pro completa haberi poteſt; tamen vtique vſu venire poteſt vt ambae lances motu diuerſo agitentur, quemadmodum in phaenomeno obſeruato reuera accidit. Quin etiam ipſa analyſis declarat, hanc ſolutionem non eſſe generalem, ob id ipſum quod tantum quatuor conſtantes arbitrarias contineat. Quia enim tres habebamus aequationes differentiales ſecundi gradus, integratio completa adeo ſex quantitates arbitrarias inuoluere debet, ad quam eliciendam nouis artificiis erit opus; quod igitur negotium omni cura ſuſcipiamus.

RESOLVTIO GENERALIS problematis propositi.

§. 14. Omni attentione igitur perpendamus tres aequationes differentiales secundi gradus, quibus solutio continetur

I. $\frac{e\,dd\Phi + b\,dd\eta}{2\,g\,dt^2} + \eta = 0$

III. $\frac{e\,dd\Phi + b\,dd\vartheta}{2\,g\,dt^2} + \vartheta = 0$

V. $\frac{Mkk\,dd\Phi}{2\,g\,dt^2} + (Mc + 2\,Le)\Phi - Le(\eta + \vartheta) = 0$

vbi, quia in duabus prioribus anguli η et ϑ tantum permutantur, statuamus $\eta = s + u$ et $\vartheta = s - u$, vt prodeat summa $\eta + \vartheta = 2\,s$ et $\eta - \vartheta = 2\,u$, vnde conficietur

I + III. $\frac{e\,dd\Phi + b\,dds}{2\,g\,dt^2} + s = 0$ et

I − III. $\frac{b\,ddu}{2\,g\,dt^2} + u = 0$

quae postrema aequatio, quia vnicam variabilem u cum tempore t inuoluit, statim praebet integrale

$u = E\,\sin.(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2\,g}{b}})$;

quod in praecedente solutione erat praetermissum.

§. 15. Pro duabus reliquis aequationibus fiat vt supra $\Phi = Cz$ et $s = Az$ existente $\frac{ddz}{2\,g\,dt^2} = -\frac{z}{b}$ ideoque $z = \sin.(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2\,g}{b}})$ eritque $\frac{dd\Phi}{2\,g\,dt^2} = -\frac{Cz}{b}$ et $\frac{dds}{2\,g\,dt^2} = -\frac{Az}{b}$

quibus substitutis nanciscemur sequentes duas aequationes

$-\frac{Ce}{b} - \frac{Ab}{b} + A = 0$ et

$-\frac{CMkk}{b} + C(Mc + 2\,Le) - 2\,ALe = 0$

ex

ex quarum priore fit $A = \frac{Ce}{b - o}$. Sicque reſtabit haec vnica aequatio

$$-\frac{Mkk}{b} + Mc + 2Le - \frac{2Lee}{b - b} = 0.$$

§. 16. Quo hanc aequationem commodiorem reddamus, ponamus breuitatis gratia

$$\frac{Mkk}{Mc + 2Le} = m \text{ et } \frac{2Lee}{Mc + 2Le} = l$$

et noſtra aequatio hanc induet formam:

$$-\frac{m}{b} + 1 - \frac{l}{b - b} = 0$$

quae reducitur ad hanc formam quadraticam

$$bb - b(b + l + m) + bm = 0$$

cuius binae radices erunt

$$b = \tfrac{1}{2}(b + l + m) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(b + l + m)^2 - bm}$$

quae etiam ita exprimi poſſunt

$$b = \tfrac{1}{2}(b + l + m) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(l + m - b)^2 + bl}$$

vnde patet quantitatem poſt ſignum radicale poſitam ſemper eſſe poſitiuam, et quidem maiorem quam $\frac{1}{4}(l + m - b)^2$; quare ſi hanc radicem quadratam ponamus $= \frac{1}{2}(l + m - b) + \omega$, erunt bini valores ipſius b, quos iterum deſignemus literis p et q iſti

$$p = l + m + \omega \text{ et } q = b - \omega.$$

§. 17. Quod ſi iam iſtos valores inuentos retenta primo littera b ſubſtituamus reperiemus hos valores

$$\Phi = C\,\text{ſin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}) \text{ et } s = \frac{Ce}{b - b}\,\text{ſin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}).$$

Erat vero $u = E\,\text{ſin.}(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}})$ vnde porro colligimus

$$\eta = \frac{Ce}{b-b}\,\text{fin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}) + E\,\text{fin.}(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}})$$
$$\vartheta = \frac{Ce}{b-b}\,\text{fin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}) - E\,\text{fin.}(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}}).$$

§. 18. Hinc igitur folutionem completam obtinebimus, fi loco b fucceffiue fcribamus tam p quam q. et valores inde refultantes in vnum fummam colligamus. Dum autem pro b fcribimus q, loco conftantium C et γ fcribamus D et δ; quo facto folutio completa ita fe habebit

I. $\Phi = C\,\text{fin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{p}}) + D\,\text{fin.}(\delta + t\sqrt{\tfrac{2g}{q}})$

II. $\eta = \frac{Ce}{p-b}\,\text{fin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{p}}) + \frac{De}{q-b}\,\text{fin.}(\delta + t\sqrt{\tfrac{2g}{q}}) + E\,\text{fin.}(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}})$

III. $\vartheta = \frac{Ce}{p-b}\,\text{fin.}(\gamma + t\sqrt{\tfrac{2g}{p}}) + \frac{De}{q-b}\,\text{fin.}(\delta + t\sqrt{\tfrac{2g}{q}}) - E\,\text{fin.}(\varepsilon + t\sqrt{\tfrac{2g}{b}})$

quae formulae fex conftantes arbitrarias inuoluunt, fcilicet C, γ; D, δ; E, ε; in quo character veritatis confpicitur.

§. 19. Ex his valoribus iam fatis eft perfpicuum, mirandum illud phaenomenon, quo ambae lances alternatim quiefcere et moueri funt obferuatae, vtique euenire poffe. Cum enim ambo anguli η et ϑ talibus formulis definiantur $\eta = P + Q$ et $\vartheta = P - Q$, vbi literae P et Q cum tempore certo modo varientur, fi eueniat vt quodam tempore fiat $Q = P$ angulus η maximum obtineret valorem, ϑ vero ad nihilum redigeretur, vnde prior lanx notabilem habebit motum gyratorium, pofterior vero quafi quiefcet. Deinceps vero veniet tempus quo erit $Q = -P$, ac tum prior lanx ad quietem redigetur, pofterior vero maximas peraget ofcillationes: quae viciffitudo faepius occurret ftatis temporibus, donec motus fuerit prorfus ſus extinctus. Omnes autem circumſtantiae talis motus reciproci a conſtantibus arbitrariis pendebunt, ita vt etiam hic infinita varietas locum habere poſſit.

§. 20. Accuratius autem hanc ſolutionem perpendamus, ſimulque mutationem momentaneam ſingulorum angulorum Φ, η et ϑ ſiue eorum celeritates angulares definiamus; quod, quo facilius fieri poſſit ponamus breuitatis gratia

$\sqrt{\frac{2g}{p}} = \mu$; $\sqrt{\frac{2g}{q}} = \nu$ et $\sqrt{\frac{2g}{b}} = \lambda$ vt habeamus

$$\Phi = C\,\text{ſin.}(\gamma + \mu t) + D\,\text{ſin.}(\delta + \nu t)$$

$$\eta = \frac{Ce}{p-b}\,\text{ſin.}(\gamma + \mu t) + \frac{De}{q-b}\,\text{ſin.}(\delta + \nu t) + E\,\text{ſin.}(\varepsilon + \lambda t)$$

$$\vartheta = \frac{Ce}{p-b}\,\text{ſin.}(\gamma + \mu t) + \frac{De}{q-b}\,\text{ſin.}(\delta + \nu t) - E\,\text{ſin.}(\varepsilon + \lambda t)$$

vnde pro celeritatibus reperiemus

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mu C\,\text{coſ.}(\gamma + \mu t) + \nu D\,\text{coſ.}(\delta + \nu t)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\mu Ce}{p-b}\,\text{coſ.}(\gamma + \mu t) + \frac{\nu De}{q-b}\,\text{coſ.}(\delta + \nu t) + \lambda E\,\text{coſ.}(\varepsilon + \lambda t)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\mu Ce}{p-b}\,\text{coſ.}(\gamma + \mu t) + \frac{\nu De}{q-b}\,\text{coſ.}(\delta + \nu t) - \lambda E\,\text{coſ.}(\varepsilon + \lambda t).$$

§. 21. In talibus igitur librae agitationibus tres motus oſcillatorii ſimplices inter ſe permiſcentur, quorum primus reſpondet pendulo ſimplici longitudinis $= p$, quod ſingulas oſcillationes ſuas peraget tempore $= \frac{\pi}{\mu}$ min. ſec. Alter motus ſimplex reſpondet pendulo longitudinis $= q$, quod ſingulas oſcillationes peragit tempore $\frac{\pi}{\nu}$ ſec. tertius vero motus conuenit cum pendulo longitudinis b, quod ſingulas oſcillationes facit tempore $= \frac{\pi}{\lambda}$ ſec. Vbi quidem notandum, motum ipſius librae tantum ex duobus prioribus

ribus generibus componi, dum in lancibus omnes tres motus inter ſe permiſceri poſſunt, vnde ſine dubio maxima irregularitas in his motibus, atque adeo admirabilia phaenomena locum habere poſſunt.

§. 22. Quoniam ſex habemus conſtantes arbitrarias, ſolutionem noſtram ad omnes ſtatus initiales accommodare poterimus, quando ſcilicet pro tempore $t = 0$ tam ipſi anguli Φ, η et ϑ quam etiam eorum celeritates $\frac{d\Phi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ et $\frac{d\vartheta}{dt}$ vtcunque dantur; tum igitur jucundum erit ſingulos caſus per experimenta comprobare. Quia autem in hac ſolutione iugo librae peculiarem motum non tribuimus, ſi experimenta inſtituere voluerimus, ſcapum ſeu trutinam cum lingula ſeu examine firmiter connectere debemus. Tales igitur aliquos caſus pro ſtatu initiali dato euoluamus.

EVOLVTIO CASVS

quo initio erat $\Phi = 0$; $\eta = \alpha$ et $\vartheta = 0$

$\frac{d\Phi}{dt} = 0$; $\frac{d\eta}{dt} = 0$ et $\frac{d\vartheta}{dt}$.

§. 23. Poſito igitur $t = 0$ ſequentibus ſex conditionibus erit ſatisfaciendum

I. $0 = C \sin. \gamma + D \sin. \delta$

II. $\alpha = \frac{Ce}{p-b} \sin. \gamma + \frac{De}{q-b} \sin. \delta + E \sin. \varepsilon$

III. $0 = \frac{Ce}{p-b} \sin. \gamma + \frac{De}{q-b} \sin. \delta - E \sin. \varepsilon$

IV. $0 = \mu C \cos. \gamma + \nu D \cos \delta$

V. $0 = \frac{\mu Ce}{p-b} \cos \gamma + \frac{\nu De}{q-b} \cos. \delta + \lambda E \cos. \varepsilon$

VI. $0 = \frac{\mu Ce}{p-b} \cos. \gamma + \frac{\nu De}{q-b} \cos. \delta - \lambda E \cos. \varepsilon.$

§. 24

§. 24. Hic euidens eſt, tribus poſterioribus conditionibus ſatisfieri his tribus determinationibus:

$$1^\circ.\ \gamma = 90;\quad 2^\circ.\ \delta = 90;\quad 3^\circ.\ \varepsilon = 90$$

hincque tres priores aequationes euadent

$$\text{I.}\quad o = C + D$$

$$\text{II.}\quad \alpha = \frac{Ce}{p-b} + \frac{De}{q-b} + E \text{ et}$$

$$\text{III.}\quad o = \frac{Ce}{p-b} + \frac{De}{q-b} - E$$

ex quarum prima fit $D = -C$. Deinde, quia II + III dat

$$\alpha = \frac{2Ce}{p-b} + \frac{2De}{q-b} = \frac{2Ce}{p-b} - \frac{2Ce}{q-b}$$

inde fit $\alpha(p-b)(q-b) = 2Ce(q-p)$ vnde colligitur

$$C = \frac{\alpha(p-b)(q-b)}{2e(q-p)} \text{ et } D = -\frac{\alpha(p-b)(q-b)}{2e(q-b)}$$

Denique ob II − III ſeu $\alpha = 2E$ erit $E = \frac{1}{2}\alpha$.

§. 25. Si igitur pro $\frac{\alpha(p-b)(q-b)}{2e(q-p)}$ ſcribamus C, pro motu ſecuturo habebimus ſex ſequentes determinationes:

$$\text{I.}\quad \Phi = C \operatorname{cof.} \mu t - C \operatorname{cof.} \nu t$$

$$\text{II.}\quad \eta = \frac{Ce}{p-b} \operatorname{cof.} \mu t - \frac{Ce}{q-b} \operatorname{cof.} \nu t + \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{cof.} \lambda t$$

$$\text{III.}\quad \vartheta = \frac{Ce}{p-b} \operatorname{cof.} \mu t - \frac{Ce}{q-b} \operatorname{cof.} \nu t - \tfrac{1}{2} \operatorname{cof.} \lambda t$$

$$\text{IV.}\quad \frac{d\Phi}{dt} = -\mu C \operatorname{fin.} \mu t + \nu C \operatorname{fin.} \nu t$$

$$\text{V.}\quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{\mu Ce}{p-b} \operatorname{fin.} \mu t + \frac{\nu Ce}{q-b} \operatorname{fin.} \nu t - \tfrac{1}{2}\alpha\lambda \operatorname{fin.} \lambda t$$

$$\text{VI.}\quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\mu Ce}{p-b} \operatorname{fin.} \mu t + \frac{\nu Ce}{q-b} \operatorname{fin.} \nu t + \tfrac{1}{2}\alpha\lambda \operatorname{fin.} \lambda t$$

vnde ad quoduis tempus t tam ſtatus librae cum lanci-

lancibus, quam ſinguli motus angulares definiri poterunt.

§. 26. Ponimus exempli gratia $b = 4$, $l = 3$ et $m = 1$, fietque $p = 6$ et $q = 2$; tum vero ſumamus $e = 2$, eritque

$$\mu = \sqrt{\tfrac{g}{3}};\ \nu = \sqrt{g};\ \lambda = \sqrt{\tfrac{g}{2}} \text{ et } C = \tfrac{\alpha}{4}.$$

Pro hoc ergo caſu determinationes noſtrae erunt

I. $\Phi = \frac{1}{4}\alpha \cos. t\sqrt{\frac{g}{3}} - \frac{1}{4}\alpha \cos. t\sqrt{g}$

II. $\eta = \frac{1}{4}\alpha \cos. t\sqrt{\frac{g}{3}} + \frac{1}{4}\alpha \cos. t\sqrt{g} + \frac{1}{2}\alpha \cos. t\sqrt{\frac{g}{2}}$

III. $\vartheta = \frac{1}{4}\alpha \cos. t\sqrt{\frac{g}{3}} + \frac{1}{4}\alpha \cos. t\sqrt{g} - \frac{1}{2}\alpha \cos. t\sqrt{\frac{g}{2}}$

IV. $\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\frac{g}{3}} \sin. t\sqrt{\frac{g}{3}} + \frac{1}{4}\alpha\sqrt{g} \sin. t\sqrt{g}$

V. $\frac{d\eta}{dt} = -\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\frac{g}{3}} \sin. t\sqrt{\frac{g}{3}} - \frac{1}{4}\alpha\sqrt{g} \sin. t\sqrt{g} - \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{g}{2}} \sin. t\sqrt{\frac{g}{2}}$

VI. $\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{4}\alpha\sqrt{\frac{g}{3}} \sin. t\sqrt{\frac{g}{3}} - \frac{1}{4}\alpha\sqrt{g} \sin. t\sqrt{g} + \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{g}{2}} \sin. t\sqrt{\frac{g}{2}}.$

EVOLVTIO CASVS
quo initio erat

$$\Phi = \alpha;\ \eta = 0;\ \vartheta = 0$$
$$\frac{d\Phi}{dt} = 0;\ \frac{d\eta}{dt} = 0;\ \frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

§. 27. Quia hic iterum tres celeritates ſunt nullae, habebimus vt ante $\gamma = \delta = \varepsilon = 90$, vnde tres priores conditiones dant

I. $\alpha = C + D$

II. $0 = \frac{Ce}{p-b} + \frac{De}{q-b} + E$

III. $0 = \frac{Ce}{p-b} + \frac{De}{q-b} - E.$

Quia nunc II - III dat $0 = 2E$ erit $E = 0$; tum vero

vero erit ex II^{dae} $D = -\frac{C(q-b)}{p-b}$, qui valor in prima ſubſtitutus praebet

$$\alpha = C - \frac{C(q-b)}{p-b} = \frac{C(p-q)}{p-b}, \text{ ideoque } C = \frac{\alpha(p-b)}{p-q} \text{ et}$$

$$D = -\alpha \frac{q-b}{p-q},$$

ſicque formulae noſtrae fient

$$\text{I.} \quad \Phi = \frac{\alpha(p-b)}{p-q} \operatorname{coſ.} \mu\, t - \frac{\alpha(q-b)}{p-q} \operatorname{coſ.} \nu\, t$$

$$\text{II.} \quad \eta = \frac{\alpha e}{p-q} \operatorname{coſ.} \mu\, t - \frac{\alpha e}{p-q} \operatorname{coſ.} \nu\, t$$

$$\text{III.} \quad \vartheta = \frac{\alpha e}{p-q} \operatorname{coſ.} \mu\, t - \frac{\alpha e}{p-q} \operatorname{coſ.} \nu\, t$$

ex quibus celeritates angulares facile deducuntur.

§. 28. Hoc igitur caſu quia $\eta = \vartheta$ ambae lances eundem motum oſcillatorium recipient, quemadmodum in noſtra prima ſolutione particulari vſu venit. Hoc igitur caſu tam motus librae ipſius quam vtriusque lancis ex duplici motu ſimplici erit compoſitus, qui hic neceſſario certo quodam modo coniunctus deprehenditur; ita vt iſte motus modo magis modo minus fiat irregularis: prouti tempora oſcillationum vtriusque generis plus vel minus a ſe invicem diſcrepabunt. Superfluum autem foret plures huiusmodi caſus euoluere, cum iam ſatis ſuperque ſit demonſtratum, motus illos mirabiles, vtcunque primo aſpectui inextricabiles videantur, cum noſtra theoria ex primis mechanicae principiis deducta perfectiſſime conuenire.

DE
MOTV TVRBINATORIO CHORDARVM MVSICARVM;
VBI SIMVL VNIVERSA THEORIA TAM AEQVILIBRII QVAM MOTVS CORPORVM FLEXIBILIVM SIMVLQVE ETIAM ELASTICORVM BREVITER EXPLICATVR.

Auctore

L. EVLERO.

§. 1.

Etsi Geometrae in chordis infinitam motus varietatem num quidem agnouerunt, atque adeo felici cum successu determinauerunt: omnes tamen istos motus perpetuo in eodem plano fieri assumserunt, ita vt non solum tota chorda quouis momento in eodem plano sit sita, sed etiam singula eius puncta per lineas rectas in eodem plano motum suum peragant. Fieri autem vtique potest, vt chorda quouis momento non tota in eodem plano reperiatur, neque etiam singula eius puncta in directum moueantur, sed per lineas curuas vtcunque circa axem reuoluantur, cuiusmodi motum adeo in chordis grassioribus oculis percipere licet. Talem igitur motum hic *turbinatorium* vocabo, eiusque symptomata ex primis motus principiis determinabo; vbi quidem commo-

commode eueniet, vt omnes huius generis motus, quantumuis abſtruſi et complicati videantur, aeque facile definiri queant atque ii, qui in eodem plano abſoluuntur. Quin etiam veritas principii *Bernoulliani* hinc elucebit: dum etiam omnes iſti motus ex pluribus ſimplicibus compoſiti deprehenduntur, ita vt hoc principium adhuc multo latius pateat quam Illuſtriſſ. Inuentor illud extendit.

§. 2. Etiamſi autem prima motus principia ſtatim ad hos caſus euoluendos applicari queant, quatenus ſcilicet omnes iſtiusmodi motus tanquam infinite parui ſpectantur: tamen plurimum ad augmentum ſcientiae conferet, ſi quaeſtionem in latiori ſenſu accipiamus, atque in genere, primo quidem in ſtatum aequilibrii fili perfecte flexilis, quod a viribus quibuscunque in ſingulis elementis ſollicitetur inquiramus, hincque deinceps formulas pro eius motu quocunque eliciamus, quemadmodum haec inveſtigatio pro caſu quo totum filum perpetuo in eodem plano verſatur duplici modo a me iam dudum eſt praeſtitum. Hic autem iſtud problema multo latius ſum extenſurus, vt etiam ad fila non in eodem plano conſtituta, ſimulque ad vires quascunque non in eodem plano agentes, pateat; quod quidem a nemine adhuc, quantum mihi conſtat, eſt factum.

Problema generale prius.

Si filo perfecte flexili in ſingulis elementis vires quaecunque fuerint applicatae, determinare ſtatum aequilibrii, in quo iſtud filum conquieſcet.

 Solutio.

Solutio.

Tab. IV. Fig. 1. §. 3. Quoniam igitur neque filum neque vires sollicitantes in eodem versantur plano, constituamus ternos axes fixos O A, O B et O C inter se normales, quorum duo priores O A et O B in plano tabulae iaceant, tertius vero O C ad eos sit perpendicularis. Sit iam Z punctum quodcunque fili E Z z F, vnde primo ad planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y, tum vero ex Y ad axem O A agatur normalis, et vocentur pro isto fili puncto Z ternae coordinatae $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Tum vero sit elementum fili $Zz = ds$, eritque $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, atque omnes vires, quibus hoc elementum sollicitatur, resoluantur secundum directiones trium axium nostrorum fixorum: sitque vis secundum directionem Z P axi O A parallelam agens $= P\,ds$; deinde vis secundum directionem Z Q axi O B parallelam agens $= Q\,ds$; ac tertio vis secundum directionem Z R axi O C parallelam agens $= R\,ds$. Sicque erit summa omnium virium elementarium portioni fili E Z applicatarum $= \int P\,ds$; similique modo summa omnium virium elementarium $Q\,ds = \int Q\,ds$, viriumque elementarium $R\,ds$ summa $= \int R\,ds$.

§. 4. Cum nunc totum filum sit in aequilibrio, simulque perfecte flexile, necesse est vt omnia harum virium momenta, quae filum E Z circa punctum Z gyrari conarentur se mutuo destruant. Quare, cum filum in omnes plagas gyrari possit, notum

notum eſt, omnes iſtos motus gyratorios etiam ad ternos axes ZP, ZQ, ZR reduci poſſe, ac pro ſtatu aequilibrii ſufficere, vt ſingula momenta reſpectu cuiusque horum axium ſe deſtruant. Conſideremus ergo primo axem ZP; eiusque reſpectu tantum vires $Q\,ds$ et $R\,ds$ momenta producere valent; ad quae inuenienda, ſi ratiocinium eodem modo inſtituatur, vti in caſu pro eodem plano feci, totum momentum ex viribus $Q\,ds$ reſultans erit $\int dz \int Q\,ds$: momentum vero ex viribus $R\,ds$ reſultans erit $\int dy \int R\,ds$. Haec autem momenta, vti ſtatum figurae attente perpendenti facile patebit, in plagas contrarias ſunt directa, vnde pro ſtatu aequilibrii requiritur vt ſit $\int dz \int Q\,ds = \int dy \int R\,ds$. Eodem modo, vt momenta reſpectu axis ZQ ſe deſtruant, neceſſe eſt vt ſit $\int dz \int P\,ds = \int dx \int R\,ds$. Ac denique deſtructio momentorum reſpectu tertii axis ZR poſtulabit hanc aequationem: $\int dx \int Q\,ds = \int dy \int P\,ds$; quibus colligendis ſtatus aequilibrii tres ſequentes poſtulat conditiones:

I. $\int dz \int Q\,ds = \int dy \int R\,ds$; II. $\int dz \int P\,ds = \int dx \int R\,ds$
III. $\int dx \int Q\,ds = \int dy \int P\,ds$.

§. 5. Praeterea vero pro noſtro inſtituto imprimis etiam neceſſe eſt, vt tenſionem, qua filum noſtrum in puncto Z tenditur cognoſcamus. Quam quaeſtionem ſi eodem modo tractemus, quo pro caſu in eodem plano ſumus vſi, facile perſpiciemus, totam tenſionem per ſequentem formulam exprimi debere:

$$\frac{dx}{ds}\int P\,ds + \frac{dy}{ds}\int Q\,ds + \frac{dz}{ds}\int R\,ds$$

hic

Hic quidem noſtram figuram iam ſatis lineis et litteris onuſtam nolui pluribus lineis ducendis magis perplexam reddere: ſed potius conducet eam diſſertationem, qua conſenſum geminae methodi pro ſtatu aequilibrii corporum flexibilium adhibitae demonſtraui, debita attentione perlegere: hoc enim modo facile erit, omnia ratiocinia, quibus ibi ſum vſus ad praeſentem caſum accommodare. Quin etiam haud difficulter noſtra ſolutio ad fila vtcunque elaſtica extendi poterit, quod, etiamſi non ad praeſens inſtitutum noſtrum pertineat: tamen maxime dignum videtur, vt hic breuiter doceatur.

§. 6. Quando ſcilicet noſtro filo elaſticitas quaecunque tribuitur, non amplius illa momenta virium, quae pro ſingulis axibus Z P, Z Q et Z R inuenimus, nihilo aequalia ſunt ſtatuenda, ſed vi elaſticae, qua filum inflexioni circa quemque horum axium reſiſtit aequari debebit. Hunc in finem pro axe Z P conſideretur fili E Z proiectio in planum Q Z R facta, quod ſcilicet axi Z P erit normale; eiusque quaeratur curuatura in puncto Z, quippe cui elaſticitas proportionalis erit cenſenda. Quia igitur indoles huius proiectionis per binas coordinatas y et z exprimitur, erit radius oſculi in puncto Z

$$= \frac{(dy^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{dy\, ddz - dz\, ddy},$$

cui, cum curuatura ſit reciproce proportionalis, pro inflexione circa axem Z P habebimus huiusmodi aequationem:

$\int dz$

$$\int dz \int Q ds - \int dy \int R ds = \frac{D(dy\,ddz - dz\,ddy)}{(dy^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

similique modo pro binis reliquis axibus habebimus tales aequationes:

$$\int dz \int P ds - \int dx \int R ds = \frac{E(dx\,ddz - dz\,ddx)}{(dx^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ et}$$

$$\int dx \int Q ds - \int dy \int P ds = \frac{F(dy\,ddx - dx\,ddy)}{(dy^2 - dx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

vbi litterae D, E, F exprimunt vires elasticas absolutas, quibus filum cuique inflexioni reluctatur; quae ergo litterae tam quantitates variabiles quam constantes denotare possunt, si quidem filum non vbique habeat eundem elasticitatis gradum. Hoc igitur modo quasi praeter opinionem istud argumentum de statu aequilibrii filorum tam perfecte flexibilium quam elasticorum ad summum perfectionis gradum perduximus.

Problema generale alterum.

Si filo perfecte flexili in singulis elementis vires quaecunque fuerint applicatae, determinare motum, quem istud filum, vtcunque fuerit impulsum, deinceps prosequetur.

Solutio.

§. 7. Maneant omnia vti in praecedente problemate sunt constituta, vbi $P\,ds$, $Q\,ds$ et $R\,ds$ refe-

referunt omnes vires elementares ſingulis fili elementis applicatas, et quomodocunque hoc filum initio fuerit ad motum concitatum, elapſo tempore t habeat ſitum in figura repraeſentatum. Quo poſito ſi longitudo fili indefinita E Z ponatur $= s$, euidens eſt ternas coordinatas x, y et z puncto Z reſpondentes vt functiones ſpectari debere binarum variabilium s et t. Porro quemcunque motum elementum Z z habuerit, eum reſolui conueniet ſecundum ternas directiones Z P, Z Q et Z R: ac tum celeritas ſecundum Z P erit $= (\frac{dx}{dt})$, et celeritates pro duabus reliquis directionibus Z Q et Z R erunt ſimili modo

$$(\frac{dy}{dt}) \text{ et } (\frac{dz}{dt}) \text{ vnde deducuntur accelerationes}$$

$$(\frac{ddx}{dt^2}),\quad (\frac{ddy}{dt^2}) \quad \text{et } (\frac{ddz}{dt^2}),$$

ad quas producendas requiruntur vires acceleratrices ſecundum easdem directiones Z P, Z Q et Z R quae, denotante g altitudinem lapſus in vno minuto ſecundo, erunt

$$\frac{1}{2g}(\frac{ddx}{dt^2});\quad \frac{1}{2g}(\frac{ddy}{dt^2});\quad \frac{1}{2g}(\frac{ddz}{dt^2}).$$

§. 8 Quod ſi iam maſſula elementi $Zz = ds$ deſignetur $= S\,ds$, vbi S vel eſt quantitas conſtans, ſi ſcilicet filum fuerit vbique aeque craſſum, vel quantitas variabilis, et quidem functio quaepiam ipſius s tantum, ſi craſſities fili fuerit variabilis, vires motrices quibus elementum Z z ſecundum easdem directiones ſollicitari debet erunt

$$\frac{S\,ds}{2g}(\frac{ddx}{dt^2}),\ \frac{S\,ds}{2g}(\frac{ddy}{dt^2}) \text{ et } \frac{S\,ds}{2g}(\frac{ddz}{dt^2}),$$

quam

quam ob rem necesse est, vt istae vires motrices producuntur a viribus supra memoratis, quibus totum filum actu vrgeri ponimus, ita, vt summa omnium illarum virium aequiualens esse debeat summae istarum. Cum autem, si corpori cuicunque duplicis generis vires fuerint applicatae, quae sibi aequiualeant, manifestum est, si vires vnius generis corpori modo contrario applicentur, tum corpus fore in aequilibrio. Hoc igitur principio vtentes nostro filo in singulis elementis vires illas motrices secundum directiones contrarias applicemus, quod fiet si loco litterarum P, Q et R scribamus istas, P', Q' et R', existentibus

$$P' = P - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddx}{dt^2}\right);\ Q' = Q - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right);\ R' = R - \frac{S}{2g}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

hocque modo totum filum in aequilibrio erit constitutum.

§. 9. His igitur notatis pro motu quaesito nostri fili habebimus sequentes tres aequationes

$$\text{I. } \int dz \int Q'ds = \int dy \int R'ds$$
$$\text{II. } \int dz \int P'ds = \int dx \int R'ds$$
$$\text{III. } \int dx \int Q'ds = \int dy \int P'ds.$$

Praeterea vero si tensio fili ponatur $= T$, erit etiam pro hoc casu

$$T = \left(\frac{dx}{ds}\right)\int P'ds + \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q'ds + \left(\frac{dz}{ds}\right)\int R'ds$$

sicque omnia quae ad motum filorum perfecte flexibilium pertinent succincte hic sunt comprehensa.

§. 10. Quin etiam, si filum non fuerit perfecte flexile, sed inflexioni circa ternos axes vtcunque reluctetur, maneant vt ante elaſticitates abſolutae circa hos axes, litteris D, E, F expreſſae, ſiue eae ſint conſtantes ſiue vtcunque variabiles a ſola ſcilicet variabili s pendentes, et formulae pro motu erunt

$$\int dz \int Q' ds - \int dy \int R' ds = \frac{D(dyddz - dzddy)}{(dy^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int dz \int P' ds - \int dx \int R' ds = \frac{E(dxddz - dzddx)}{(dx^2 - dz^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int dx \int Q' ds - \int dy \int P' ds = \frac{F(dyddx - dxddy)}{(dy^2 - dx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

vbi quidem monendum eſt, cuique radio oſculi id ſignum $\pm$ tribui oportere, prout vires ſollicitantes poſtulant. Atque hoc modo vniuerſa theoria de aequilibrio et motu filorum tam perfecte flexibilium quum elaſticorum, quae quidem adhuc deſiderabatur, ad ſummum perfectionis gradum eſt euecta.

§. 11. Mirum hic merito videtur, quod iſtae ſolutiones tribus aequationibus contineantur, dum in eodem plano totum negotium vnica aequatione conficitur. Cum enim hic tres occurrunt coordinatae x, y, z, dum in eodem plano duae tantum adſunt, plus vna aequatione inſuper adiicienda non opus eſt ad ſolutionem determinandam. At ſi rem accuratius perpendamus, facile reperiemus, tres aequationes inventas ita a ſe inuicem pendere, vt quaelibet in duabus reliquis iam contineatur, ita vt reuera tota ſolutio

lutio tantum duabus confiftat aequationibus: ad quod oftendendum ternas aequationes inuentas differentiemus atque fequente ordine difponamus

$$\text{I. } dy\int P\,ds - dx\int Q\,ds = 0$$

$$\text{II. } dz\int Q\,ds - dy\int R\,ds = 0$$

$$\text{III. } dx\int R\,ds - dz\int P\,ds = 0$$

atque iam euidens eft, fi prima multiplicetur per dz, fecunda per dx, ac tertia per dy, tum productorum iftorum fummam fore

$$\text{I}\,dz + \text{II}\,dx + \text{III}\,dy = 0$$

ficque manifeftum eft, quamlibet harum aequationum iam in duabus reliquis contineri, ita vt tota folutio duabus tantum aequationibus abfoluatur, quemadmodum rei natura poftulat.

§. 12. Quodfi autem hoc idem criterium ad ternas aequationes noftras pro filis elafticis datas accommodemus, id neutiquam locum habere reperiemus. Quare, cum iftud criterium in ipfa rei natura fit fundatum, recte concludimus, in illis vitium quoddam latere, neque effectum vis elafticae ita fecundum ternas noftras directiones refolui poffe, vti fecimus, dum pro quolibet plano tantum curuaturam proiectionis verae curuae fumus contemplati. Neque vero etiam theoria elafticitatis in huiusmodi filis ita eft explorata, vt hypothefis qua fumus vfi certis principiis inniti cenferi queat; quin potius cogimur eam penitus reiicere atque in veram conftitutionem fuperiorum aequationum accuratius in

 quirere;

quirere. Quae inueſtigatio, cum non parum ardua videatur, maximum ſubſidium nobis ſuppeditabit illud ipſum criterium, quod iam nouimus in illis aequationibus locum habere debere.

Emendatio formularum tam pro aequilibrio quam motu filorum elaſticorum datarum.

Tab. IV. Fig. 2. §. 13. Hic igitur ante omnia ad veram curvaturam quae filo in M inducitur eſt reſpiciendum, vbi imprimis planum, in quo duo elementa proxima fili erunt ſita conſiderare debemus, quandoquidem duo elementa non in directum poſita certum planum determinant, in quo ſitus erit radius oſculi; tum autem diſpiciendum erit, ſubquonam angulo iſtud planum ad terna noſtra plana principalia A O B, A O C et B O C ſit inclinatum. Primum igitur attendamus ad verum radium oſculi, qui curuaturam fili in puncto M metitur, et qui per analyſin non parum taedioſam ſequenti formula expreſſus reperitur:

$$\frac{ds^3}{\sqrt{(dyddx - dxddy)^2 + (dzddy - dyddz)^2 + (dxddz - dzddx)^2}}$$

cuius formulae denominator ſi breuitatis gratia ponatur $= \omega$, coſinus angulorum, ſub quibus planum curuaturae ad terna plana principalia inclinatur erunt

Pro plano A O B coſinus $= \frac{dyddx - dxddy}{\omega}$

Pro plano B O C coſinus $= \frac{dzddy - dyddz}{\omega}$

Pro plano A O C coſinus $= \frac{dxddz - dzddx}{\omega}$

quo-

quorum cosinuum quadrata in vnam summam collecta faciunt vnitatem, vti natura rei postulat.

§. 14. Quod si iam fili, dum ad inuentam curuaturam cogitur, elasticitas absoluta designetur littera G, ita vt elasticitas qua huic inflexioni reluctatur sit G, denotante r ipsum radium osculi, tum ternae aequationes pro aequilibrio nostri fili elastici erunt sequentes, quas ergo in locum earum quae supra sunt datae substitui oportebit

$$\text{I. } \int dy \int P\,ds - \int dx \int Q\,ds = \frac{G(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^3},$$

$$\text{II. } \int dz \int Q\,ds - \int dy \int R\,ds = \frac{G(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^3},$$

$$\text{III. } \int dx \int R\,ds - \int dz \int P\,ds = \frac{G(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^3}.$$

Pro motu autem tantum opus est loco litterarum P, Q, R scribi P′, Q′, R′. Quod autem ad tensionem fili attinet, si T denotet vim qua punctum M secundum tangentem versus E tenditur, ea erit

$$T = -\left(\frac{dx}{ds}\right)\int P\,ds - \left(\frac{dy}{ds}\right)\int Q\,ds - \left(\frac{dz}{ds}\right)\int R\,ds$$

vbi iterum loco P, Q, R, scribendo P′, Q′, R′ tensio in statu motus obtinetur.

§. 15. Quo autem certiores fiamus, has formulas recte se habere, eas secundum criterium supra datum examinemus; hunc infinem eas differentiemus et obtinebimus sequentes tres aequationes

$$\text{I. } dy \int P\,ds - dx \int Q\,ds = \frac{G(dy\,d^3x - dx\,d^3y)}{ds^3} - \frac{3G\,dds(dy\,ddx - dx\,ddy)}{ds^4}$$

$$\text{II. } dz \int Q\,ds - dy \int R\,ds = \frac{G(dz\,d^3y - dy\,d^3z)}{ds^3} - \frac{3G\,dds(dz\,ddy - dy\,ddz)}{ds^4}$$

$$\text{III. } dx \int R\,ds - dz \int P\,ds = \frac{G(dx\,d^3z - dz\,d^3x)}{ds^3} - \frac{3G\,dds(dx\,ddz - dz\,ddx)}{ds^4}.$$

Quod

Quod ſi iam prima ducatur in dz, ſecunda in dx et tertia in dy, et producta in vnam ſummam colligantur, tam ex parte ſiniſtra quam dextra omnia membra ſe mutuo deſtruere deprehenduntur. Hoc igitur criterium, quoniam locum non eſſet habiturum, ſi vllae aliae formulae in loco dextro collocarentur, nobis firmiſſimum praebet documentum, formulas noſtras iam veritati prorſus eſſe conſentaneas, etiamſi fortaſſe difficile fuerit rationem harum formularum a priori perſpicere.

Applicatio horum principiorum ad chordas motu turbinatorio agitatas.

§. 16. Sit igitur propoſita chorda E F in punctis E et F fixa, cuius longitudo ſit $EF = a$; chorda autem ipſa eius ſit generis, cuius ſi longitudo $= b$ pondus ſeu maſſa ſit B; ita vt noſtrae chordae maſſa ſit $\frac{Ba}{b}$. Tum vero corda haec tenſa ſit a vi $ET = T$, cui ergo tenſio chordae in puncto E erit aequalis. Iam quicunque motus chordae initio fuerit impreſſus, elapſo tempore $= t$ chorda figuram habeat E Z F, vtcunque extra planum tabulae exiſtens, cuius ſumta portione quacunque $EZ = s$, ex puncto Z in planum tabulae demittatur perpendiculum Z Y, hincque ad axem E F ducatur normalis Y X, et curua per omnia puncta Y ducta erit proiectio chordae in planum tabulae facta; at ex X erigatur perpendiculum $XV = YZ$, eritque punctum V in proiectione ad planum, quod per

per lineam E F plano tabulae perpendiculariter insistit, facta; tum vero pro puncto Z vocentur ternae coordinatae $EX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, eritque etiam $XV = z$, ita vt x et y sint coordinatae pro proiectione E Y F, atque x et z coordinatae pro proiectione E V F. Vbi notetur, quemadmodum ex ipsa chordae figura E Z F dantur binae proiectiones E Y F et E V F, ita vicissim ex binis proiectionibus veram chordae figuram E Z F determinari, sicque ad quoduis tempus sufficiet vtramque proiectionem assignasse.

§. 17. Nunc quia calculum nostrum expedire non licet, nisi pro oscillationibus quam minimis, binae coordinatae y et z tanquam infinite paruae sunt spectandae, vtut refragari videatur. Hinc ergo, quia etiam differentialia dy et dz prae dx quasi euanescunt, elementum chordae erit $ds = dx$, atque adeo abscissa $EX = x$ ipsi arcui $EZ = s$ aequalis est censenda. Quoniam hanc chordam vbique eiusdem crassitiei assumimus erit elementi ds massula $= \frac{B\,ds}{b}$, quae cum supra designata fuerit per $S\,ds$ erit hic $S = \frac{B}{b}$. Praeterea vero hic quoque, quia ab ipsa grauitate chordae mentem abstrahere conuenit, ternae illae vires P, Q, R erunt nullae: interim tamen formula $\int P\,ds$, quoniam omnes vires secundum directionem E F sollicitantes designat, tensionem in se complectitur, quae, quia in partem contrariam vergit, erit $\int P\,ds = -T$; bina autem reliqua integralia $\int Q\,ds$ et $\int R\,ds$ reuera erunt ni-

 hilo

hilo aequalia. Quod autem ad accelerationes attinet, quoniam durante motu punctum Z eandem perpetuo seruat distantiam a puncto E, pro eo abscissa $EX = x$ constans manebit, vnde erit $\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = 0$ tum vero etiam $\left(\frac{ddx}{ds^2}\right) = 0$, quod inde patet, quod sit $dx = ds$, ideoque $\frac{dx}{ds} = 1$, consequenter $\left(\frac{ddx}{ds^2}\right) = 0$. Sicque solae vires acceleratrices secundum binas reliquas directiones y et z relinquuntur, ex quibus pro motu nostrae chordae colligimus

$$P' = 0 \text{; } Q' = -\frac{B}{2bg}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } R' = -\frac{B}{2bg}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

quibus valoribus substitutis sequentes impetrabimus aequationes ex §. 11. si modo loco P, Q, R intelligantur P', Q', R'

$$\text{I. } -T\,dy + \frac{B}{2bg}\,ds\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 0$$

$$\text{II. } -\frac{B}{2bg}\,dz\int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) + \frac{B}{2bg}\,dy\int ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = 0$$

$$\text{III. } -\frac{B}{2bg}\,ds\int ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + T\,dz = 0$$

quarum sufficit sumsisse primam ac tertiam, siquidem secunda in his iam continetur; atque hinc ob $dx = ds$ binas sequentes nanciscimur aequationes:

$$\frac{2Tbg}{B}\,\frac{dy}{ds} = \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et}$$

$$\frac{2Tbg}{B}\,\frac{dz}{ds} = \int ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right).$$

§. 18. Ponamus nunc breuitatis gratia coëfficientem constantem $\frac{2Tbg}{B} = cc$, vt habeamus istas aequationes:

$$\frac{cc\,dy}{ds} = \int ds\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } \frac{cc\,dz}{ds} = \int ds\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

quae

quae denuo differentiatae per ds diuidendo largiuntur nobis has aequationes

$$cc\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) \text{ et } cc\left(\frac{ddz}{ds^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

in quibus determinatio omnium plane motuum quos chorda recipere valet continetur. Vtraque autem earum eandem resolutionem admittit, quam pro motu chordae in eodem plano dedimus. Atque hic manifestum est determinationem binarum variabilium y et z a se inuicem neutiquam pendere, ita vt vtraque seorsim sine vllo respectu ad alterum habito definiri queat; quae circumstantia sine dubio maximi est momenti, dum omnes motus turbinatorios aeque facile definire licebit, atque eos qui in eodem plano absoluuntur.

§. 19. Antequam autem solutionem generalem tradamus, haud incongruum erit, omnes motus regulares et simplices euoluere, qui in nostram chordam cadere possunt, et quoniam resolutio pro vtraque plane est eadem, sufficiet calculum pro altera instituisse. Sit igitur f longitudo penduli simplicis, cuius motui variationes ipsius y respondent, eritque vti constat $\frac{1}{2g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -\frac{y}{f}$, quae bis integrata praebet $y = E \sin. (\alpha + t\sqrt{\frac{2g}{f}})$, vbi, quia arcus s pro constante est habitus, is quomodocunque in constante E contineri poterit. Cum autem sit $\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{2gy}{f}$ erit etiam

$$cc\left(\frac{ddy}{ds^2}\right) = -\frac{2gy}{f}; \text{ erat autem}$$

$$cc = \frac{2Tbg}{B}, \text{ vnde fit } \frac{ddy}{ds^2} = -\frac{By}{Tbf}.$$

Posito igitur

$\frac{Tbf}{B} = ee$, vt habeamus $\frac{ddy}{ds^2} = -\frac{y}{ee}$

eritque integrale completum

$y = F \sin. (\beta + \frac{s}{e})$,

vbi littera F ob tempus t hic constans sumtum tanquam functio ipsius t spectari potest. Quare vt ambae expressiones ad identitatem reuocentur sumamus

$E = C \sin. (\beta + \frac{s}{e})$ et $F = C \sin. (\alpha + t \sqrt{\frac{2g}{f}})$

eritque ex binis valoribus coniunctis

$y = C \sin. (\alpha + t \sqrt{\frac{2g}{f}}) \sin. (\beta + \frac{s}{e})$.

§. 20. Hac aequatione integrali inuenta eam ad casum nostrae chordae accommodemus; ac primo quidem necesse est, vt posito $s = 0$, hoc est in termino E fiat pro omni tempore $y = 0$, cui ergo aequationi vt satisfiat statui opportet $\beta = 0$. Porro vero etiam in altero termino F vbi $s = a$ semper esse opportet $y = 0$, vnde fieri necesse est $\sin. \frac{a}{e} = 0$, id quod infinitis modis euenire potest, scilicet si $\frac{e}{a} = i\pi$, denotante i numerum integrum quemcunque, vnde colligimus $e = \frac{a}{i\pi}$. Erat vero $e = \sqrt{\frac{Tbf}{B}}$ quocirca hinc colligitur longitudo penduli simplicis $f = \frac{Baa}{ii\pi\pi Tb}$, hinc erit $\sqrt{\frac{2g}{f}} = \frac{i\pi}{a} \sqrt{\frac{2Tbg}{B}} = \frac{i\pi c}{a}$, quibus valoribus substitutis aequatio nostra erit

$y = C \sin. (\alpha + \frac{i\pi c}{a} t) \sin. \frac{i\pi s}{a}$.

§. 20. Primo initio ergo vbi erat $t = 0$ habebimus $y = C \sin. \alpha \sin. \frac{i\pi s}{a}$, quare si hinc elabatur

tantum

tantum tempus t, vt fit $\frac{i\pi ct}{a} = 2\pi$ ideoque $t = \frac{2a}{ic}$, tum chorda in priſtinum ſtatum reſtituitur, hocque tempore chorda binas vibrationes peregiſſe cenſetur, vnde ſequitur tempus vnius $= \frac{a}{ic}$ in minutis ſecundis expreſſum; vnde patet, eandem chordam innumerabiles motus regulares recipere poſſe, dum ſcilicet loco i omnes numeri integri ſubſtituuntur. Numerus autem vibrationum, quas chorda ſingulis minutis ſecundis edet erit $= \frac{ic}{a}$, qui ergo numerus ſonum muſicum deſignat. Sicque eadem chorda innumerabiles ſonos edere valet, inter quos maxime eminet fundamentalis, caſui $i = 1$ reſpondens, qui ergo erit $= \frac{c}{a}$: reliqui vero ſoni his numeris exprimentur $\frac{2c}{a}$, $\frac{3c}{a}$, $\frac{4c}{a}$, $\frac{5a}{a}$, quemadmodum quidem iam inuulgus conſtat.

§. 22. Pari prorſus modo pro eodem tempore t eademque abſciſſae x reperitur, altera ordinata

$$z = C' \text{ſin.} \left(\alpha' + \frac{i'\pi ct}{a}\right) \text{ſin.} \frac{i'\pi s}{a}$$

pro qua tempus vnius vibrationis erit $\frac{a}{i'c}$, et ſonus inde oriundus $= \frac{i'c}{a}$; ſicque vtraque ordinata y et z ſeorſim motu regulari cietur. Ex ambabus autem coniunctis naſcetur duplex ſonus, ſiquidem numeri i et i' fuerint inaequales, quorum alter altero praeualebit, prouti coëfficientes C et C' plus vel minus a ſe inuicem diſcrepant. At ſi ambo numeri i et i' fuerint aequales ſonus tantum ſimplex audietur, qui erit $= \frac{ic}{a}$, ex quo hic motus chordae etiam merito pro ſimplici haberi poteſt, circa quem ſequentia

 notaſſe

notasse iuuabit. 1°. Si praeter $i' = i$ etiam fuerit $\alpha' = \alpha$ erit $y : z = C : C'$, hoc est vbique in eadem ratione; vnde patet singula chordae puncta z per lineas rectas moueri, totumque chordae motum in eodem plano ad tabulam sub certo angulo inclinato fieri, eumque idcirco non esse turbinatorium 2°. At si praeter $i' = i$ fuerit $C' = C$, sed anguli α et α' differant angulo recto, ita vt sit

$$\text{sin.}\,(\alpha' + \tfrac{i'\pi c}{a}\,t) = \text{cos.}\,(\alpha + \tfrac{i\pi c}{a}\,t)$$

tum erit $yy + zz$ quantitas constans. Vnde patet, hoc casu omnia chordae puncta in circulis circa axem E F reuolui, ac tempus vnius reuolutionis fore $= \frac{2ic}{a}$. 3°. Sin autem tam coëfficientes C et C' quam anguli α et α' fuerint inaequales, manente $i' = i$, tum singula chordae puncta in ellipsibus circa axem E F reuoluentur. His igitur duobus posterioribus casibus motus reuera erit turbinatorius, et quia sonus inde tantum simplex oritur recte inter motus simplices refertur 4°. Verum si etiam numeri i et i' fuerint inaequales, ita vt simul duo soni generentur, tum singula chordae puncta in aliis lineis curuis circa axem A M reuoluentur, quae pro inaequalitate horum numerorum magis minusue erunt complicatae, et ad altiores gradus linearum pertinebunt.

§. 23. Tribuamus nunc numeris i et i' successiue omnes valores 1, 2, 3, 4, 5 quos recipere possunt, et quia omnes formulae inde oriundae quomodocunque inter se coniungi possunt obtinebimus

pro

pro vtraque ordinata y et z sequentes valores generales

$$y = A\,\text{fin.}\left(\alpha + \tfrac{\pi c}{a}t\right)\text{fin.}\tfrac{\pi s}{a} + B\,\text{fin.}\left(\beta + \tfrac{2\pi c}{a}t\right)\text{fin.}\tfrac{2\pi s}{a}$$
$$+ C\,\text{fin.}\left(\gamma + \tfrac{3\pi c}{a}t\right)\text{fin.}\tfrac{3\pi s}{a} + D\,\text{fin.}\left(\delta + \tfrac{4\pi c}{a}t\right)\text{fin.}\tfrac{4\pi s}{a}\ \text{etc.}$$

et

$$z = A'\,\text{fin.}\left(\alpha' + \tfrac{\pi c}{a}t\right)\text{fin.}\tfrac{\pi s}{a} + B'\,\text{fin.}\left(\beta' + \tfrac{2\pi c}{a}t\right)\text{fin.}\tfrac{2\pi s}{a}$$
$$+ C'\,\text{fin.}\left(\gamma' + \tfrac{3\pi c}{a}t\right)\text{fin.}\tfrac{3\pi s}{a} + D'\,\text{fin.}\left(\delta' + \tfrac{4\pi c}{a}t\right)\text{fin.}\tfrac{4\pi s}{a}\ \text{etc.}$$

Cum igitur hic duplo plures occurrant constantes arbitrariae, quam si motus fieret in eodem plano, etiam multo maior multiplicitas motus locum habere potest, quam in eodem plano; inde autem perpetuo oriuntur soni ex pluribus simplicibus mixti, prorsus vt Celeberr. *Bernoullius* in motibus qui in eodem plano peraguntur obseruauit; hinc igitur eius theoria maxime ingeniosa infinities ampliorem extensionem adipiscitur, dum simul etiam ad omnes plane motus turbinatorios accommodari potest.

Constructio generalis quibus chordae concitari possunt.

§. 24. Quanquam formulae pro binis ordinatis y et z supra datae, si quidem in infinitum continuentur, omnes plane motus possibiles in se complecti censeri queant: tamen inde neutiquam eos casus resoluere licet, quibus chordae initio tam figura quam motus quicunque fuerit impressus. Pro his igitur casibus omnino necesse est, vt integralia completa

pleta binarum illarum aequationum differentio-differentialium scilicet

$$\left(\frac{d\,d\,y}{d\,t^2}\right) = c\,c\left(\frac{d\,d\,y}{d\,s^2}\right) \text{ et } \left(\frac{d\,d\,z}{d\,t^2}\right) = c\,c\left(\frac{d\,d\,z}{d\,s^2}\right)$$

exhibeantur, id quod per functiones arbitrarias perinde praestari potest, ac pro motibus in eodem plano est factum. Denotent igitur characteres Γ et Δ functiones quascunque quantitatum ipsis subiunctarum atque habebimus sequentes determinationes

$$y = \Gamma : (ct+s) - \Gamma : (ct-s) \text{ et } z = \Delta : (ct+s) - \Delta : (ct-s)$$

vbi istae functiones per lineas curuas quascunque siue continuas siue vtcunque pro arbitrio ductas repraesentari possunt, dummodo per continuam replicationem super axe ita continuentur, vt omnibus abscissis interuallo $= 2a$ a se inuicem discrepantibus vbique aequales respondeant applicatae. Hoc modo pro vtraque functione liberum nobis relinquitur, super axe cuius longitudo $= 2a$ lineam quamcunque describere, dummodo applicatae in vtroque termino fuerint inter se aequales; quae conditio ideo est necessaria, vt, si super eodem axe continuato eaedem curuae replicentur, eae inter se cohaereant. Praeterea vero etiam in descriptione harum curuarum cauendum est, ne vsquam earum tangentes ad axem fiant normales, vel adeo in antecedentia vergant.

§. 25. His circa istas functiones praenotatis manifestum est, si tempus t augeatur portione $\frac{2a}{c}$, ita vt loco ct scribendum sit $ct + 2a$, tum vtramque quantitatem y et z pristinum valorem esse recupecuperaturam, ita vt perpetuo poſt tempus $= \frac{2a}{c}$ tota chorda in eundem ſtatum reuertatur. Quia igitur interea duas vibrationes peregiſſe eſt cenſenda, patet, cuiusque vibrationis tempus fore $= \frac{a}{c}$, vti ſupra iam inuenimus. Fieri quidem poteſt, vt hoc tempus euadat vel duplo vel triplo vel vtcunque aliquoties minus, quando ſcilicet ambae functiones ita fuerint comparatae, vt non ſolum pro abſciſſis interuallo $= 2a$ diſtantibus easdem ordinatas referant, ſed eaedem iam reuertantur poſt interualla minora $\frac{2a}{2}$, $\frac{2a}{3}$, $\frac{2a}{4}$, $\frac{2a}{5}$ etc. Hocque modo intelligitur, quemadmodum eadem chorda ad plures ſonos diuerſos edendos concitari poſſit, qui autem ſemper ſecundum numeros 1, 2, 3, 4, 5 etc. progrediuntur, omnino vti praecedens euolutio declarauit.

§. 26. Imprimis autem hic operae pretium erit, eam chordae figuram, quam poſt tempus $\frac{a}{c}$ accipiet inueſtigare, quem in finem loco ct ſcribamus $ct + a$; tum autem ponamus ordinatas noſtras euadere y' et z' eritque

$$y' = \Gamma:(ct + a + s) - \Gamma:(ct + a - s) \text{ et}$$
$$z' = \Delta:(ct + a + s) - \Delta:(ct + a - s).$$

Quia autem per conditionem generalem eſt

$$\Gamma:(ct + a + s) = \Gamma:(ct - a + s) = \Gamma:(ct - (a - s))$$

ſimilique modo

$$\Delta:(ct + a + s) = \Delta:(ct - (a - s)) \text{ fiet}$$
$$y' = \Gamma:(ct - (a - s)) - \Gamma:(ct + (a - s)) \text{ et}$$
$$z' = \Delta:(ct - (a - s)) - \Delta:(ct + (a - s))$$

 Quod

Quod ſi autem hi valores negatiue capiantur, perfecte conuenient cum iis, quae caſu priore abſciſſae $a-s$ reſpondebant. Vnde intelligimus, perpetuo elapſo tempore $=\frac{a}{c}$ chordam recepturam eſſe figuram priori aequalem, ſed contrario modo deſcriptam. Ita ſi nunc figura chordae fuerit E M N F, elapſo tempore $=\frac{a}{c}$, quo vna vibratio contigiſſe cenſetur, eius figura erit F $m n e$ priori ſcilicet aequalis, ſed duplici modo inuerſa: non ſolum enim ad alteram axis partem cadit, ſed etiam, quae figura termino E reſpondebat nunc termino F reſpondebit. Hanc igitur ob cauſam pro toto chordae motu determinando ſufficiet, omnes figuras aſſignaſſe, quas ab initio vsque ad tempus $t=\frac{a}{c}$ recipiet, quoniam poſt hoc tempus priſtinae figurae ſiue ſitu inuerſo ſiue directo recurrent.

Tab. IV. Fig. 3.

Tab. IV. Fig. 4. §. 27. Ad hanc conſtructionem faciliime expediendam in quopiam axe capiantur portiones D E, E F, F G, G H etc. longitudini chordae $=a$ aequales, et ſuper binis D E F conſtituatur pro lubitu curua quaecunque $d q t f$, cuius applicatae extremae D d, F f ſint inter ſe aequales. Tum vero eadem figura ſuper ſequente axis portione F, G, H repetatur; ob rationes autem modo expoſitas vna repetitio ſufficere poteſt. Tum enim pro tempore quocunque elapſo $=t$ (quod ſemper minus eſſe poteſt quam $\frac{2a}{c}$) a puncto E abſcindatur ſpatium E F $=ct$, et a puncto T vtrinque reſcindantur interualla T P et et $TQ = x$, atque in punctis P et Q ducantur applicatae Pp et Qq, quarum differentia $Pp - Qq$ dabit alterutram ordinatam y vel z: pro vtraque enim duplex huiusmodi scala pro lubitu constitui potest. Nihil quoque refert, quantumuis amplae hae scalae constituantur; si enim differentiae inter binas applicatas Pp et Qq nimis fiant magnae, eas per numerum satis grandem diuidi conueniet, quo ordinatae y et z intra iustos terminos contineantur: vt scilicet excursiones chordae pro minimis haberi queant.

§. 28. Talibus igitur binis scalis pro lubitu delineatis, ex vna proiectio chordae in planum tabulae facta E Y F (fig. 1.) ex altera vero proiectio in plano perpendiculari facta E V F (fig. 2.) construetur; ex quibus coniunctis vera chordae figura ad tempus propositum innotescet. Hinc igitur simul figura chordae initialis deriuari potest; vbi quidem haud difficulter perspicitur, eandem figuram initialem innumeris modis ex binis scalis resultare posse: quaecunque enim forma vni semissi ef tribuatur, semper altera semissis ed ita describi potest, vt inde data figura initialis conficiatur. Vnde patet, semper has geminas scalas ita formari posse, vt inde non solum data figura chordae initialis, sed etiam motus qui singulis eius punctis imprimi potuerit obtineatur, prorsus vti circa motus chordae in eodem plano factos fusius ostendi. Quemadmodum enim omnes chordae figurae in binas proiectiones resolui possunt, ita etiam eius motus per resolutionem in binas istas proiectiones transferri potest.

SVPPLEMENTVM

continens analysin, pro incuruatione fili in singulis punctis inuenienda.

Tab. IV. Fig. 5. §. 29. Consideretur fili elementum quodcunque Zz, pro cuius terminis Z et z sint vt supra ternae coordinatae

$$OX = x,\ XY = y \text{ et } YZ = z;\ Ox = x + dx,$$
$$xy = y + dy \text{ et } yz = z + dz.$$

In plano autem tabulae sit elementum

$$Yy = du = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

cuius in plano tabulae ducantur tangentes proximae YT et yt, quibus ipsius fili tangentes ZT et zt occurrant in punctis T et t. Quo facto binae istae tangentes ZT et zt definient planum, in quo bina fili elementa proxima incuruantur; vnde elementum tT productum designabit interfectionem plani istius cum plano tabulae. Quare si ex Y in hanc rectam demittatur perpendiculum YS, iungaturque recta ZS, angulus ZSY metietur inclinationem vtriusque plani; tum vero bina fili elementa proxima a se inuicem declinabunt angulo TZt, qui si vocetur $= d\omega$, erit radius osculi in puncto $Z = \frac{ds}{d\omega}$.

§. 30. Nunc primo ad positionem tangentium YT et yt in plano tabulae inueniendam sit angulus

XYT

$XYT = \Phi$, ita vt sit tang. $\Phi = \frac{dz}{dy}$, eiusque differentiale $d.\Phi$ exprimet angl. TYt Porro quia recta ZT tangit filum in puncto Z, erit YT subtangens $= \frac{zdu}{dz}$: ipsa vero tangens $ZT = \frac{zds}{dz}$. Hinc igitur pro situ proximo erit

$$yt = \frac{zdu}{dz} + d.\frac{zdu}{dz} = \frac{zdu}{dz} + du + zd.\frac{du}{dz},$$

vnde fit

$$Yt = \frac{zdu}{dz} + zd.\frac{du}{dz};$$

Eodem modo erit tangens proxima

$$zt = \frac{zds}{dz} + d.\frac{zds}{dz} = \frac{zds}{dz} + ds + zd.\frac{ds}{dz},$$

vnde fit

$$Zt = \frac{zds}{dz} + zd.\frac{ds}{dz}.$$

Quare si in plano tabulae ex T in Yt agatur normalis Tu, erit

$$tu = zd.\frac{du}{dz};$$

similique modo si ex T in tangentem Zt agatur normalis Tv, erit

$$vt = zd.\frac{ds}{dz}.$$

At vero ad hanc normalem Tv ducendum, cum iam ducta sit Tu in Yt, ex hoc puncto u demitti debet in Zt perpendiculum uv, vt habeatur triangulum Tuv ad u rectangulum, ex quo colligetur

$$Tv^2 = Tu^2 + uv^2.$$

§. 31. Vt haec elementa facilius inueniri queant, statuamus

$dx = p\,dz$ et $dy = q\,dz$, eritque

$du = dz\sqrt{pp+qq}$ et $ds = dz\sqrt{1+pp+qq}$.

His positis in plano tabulae habebimus

$$YT = z\sqrt{pp+qq},$$

et cum sit tang. $\Phi = \frac{p}{q}$, erit angulus elementaris

$$TYt = d\Phi = \frac{q\,dp - p\,dq}{pp+qq},$$

vnde fit lineola

$$Tu = \frac{z(q\,dp - p\,dq)}{\sqrt{pp+qq}};$$

Tum vero erit

$$tu = \frac{z(p\,dp + q\,dq)}{\sqrt{pp+qq}};$$

hincque colligitur spatiolum

$$Tt = z\sqrt{dp^2 + dq^2}.$$

Nunc quia triangulum Ttu simile est triangulo YTS ob

$$YT = z\sqrt{pp+qq}$$

reperietur perpendiculum

$$YS = \frac{z(q\,dp - p\,dq)}{\sqrt{dp^2 + dq^2}}.$$

§. 32. Nunc ad elementa extra planum tabulae geminas flectamus acies: et quia est

$$ZT = z\sqrt{1+pp+qq},$$

eius-

eiusque incrementum

$$vt = \frac{z(p\,dp + q\,dq)}{\sqrt{1+pp+qq}};$$

Quoniam iam inuenimus

$$Tt = z\sqrt{dp^2 + dq^2},$$

ex triangulo rectangulo Tvt erit

$$Tv = z\sqrt{\frac{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}{1+pp+qq}}.$$

Hinc igitur cum radius osculi nostri fili pro elemento Zz, quem vocemus $= r$ sit $r = \frac{ds}{d\omega}$, hic vero sit $d\omega = \frac{Tv}{ZT}$, erit $r = \frac{ZT.ds}{Tv}$; vnde valoribus substitutis colligimus

$$r = \frac{dz(1+pp+qq)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}}.$$

§. 33. Vt autem ipsum planum in quo fit ista fili incuruatio, quod simpliciter planum curuaturae vocemus, accuratius cognoscamus, iam nouimus, eius intersectionem cum plano tabulae esse rectam tTS, ad quam si ex S perpendicularis ducatur ZS, triangula tTv et TZS manifesto sunt similia, vnde fiet $Tt : Tv = TZ : ZS$, hincque

$$ZS = \frac{Tv.TZ}{Tt} = \frac{z\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}}{\sqrt{dp^2 + dq^2}};$$

Ante autem iam inuenimus rectam

$$YS = \frac{z(q\,dp - p\,dq)}{\sqrt{dp^2 + dq^2}};$$

quare si ϑ denotet inclinationem plani curuaturae ad ad planum tabulae, quia vt vidimus eſt $\vartheta = ZSY$, erit

$$\operatorname{cof.} \vartheta = \frac{YS}{ZS} = \frac{q\,dp - p\,dq}{\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2}}.$$

§. 34. Nunc igitur tantum ſupereſt, vt loco litterarum p et q aſſumtos valores

$$p = \frac{dx}{dz} \quad \text{et} \quad q = \frac{dy}{dz}$$

reſtituamus: atque ſi nullum horum differentialium pro conſtante aſſumamus habebimus

$$1^\circ.\ dp = \frac{dz\,ddx - dx\,ddz}{dz^2} \quad 2^\circ.\ dq = \frac{dz\,ddy - dy\,ddz}{dz^2}.$$

Tum vero quia eſt $\frac{p}{q} = \frac{dx}{dy}$ erit differentiando

$$\frac{q\,dp - p\,dq}{qq} = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dy^2},$$

hincque

$$q\,dp - p\,dq = \frac{(dy\,ddx - dx\,ddy)}{dz^2};$$

quibus valoribus ſubſtitutis obtinebimus

$$\sqrt{\frac{dz^2}{1 + pp + qq}} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dz}} = \frac{ds}{dz}$$

atque

$$\sqrt{dp^2 + dq^2 + (q\,dp - p\,dq)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(dz\,ddx - dx\,ddz)^2 + (dz\,ddy - dy\,ddz)^2 + (dy\,ddx - dx\,ddy)^2}}{dz^2}$$

ex quibus conficitur radius oſculi

$$r = \frac{ds^3}{\sqrt{(dz\,ddx - dx\,ddz)^2 + (dz\,ddy - dy\,ddz)^2 + (dy\,ddx - dx\,ddy)^2}}$$

quae expreſſio prorſus congruit cum ea, quae ſupra fuit allata. Vbi adhuc notandum eſt, iſtam formu-

lam

Iam pro radio osculi ope cuiusdam artificii alibi explicandi ad hanc simpliciorem reduci posse;

$$r = \frac{d s^2}{\sqrt{(d d x^2 + d d y^2 + d d z^2 - d d s^2)}}$$

At vero pro inclinatione plani curuaturae ad planum tabulae, quod supra secundum axes principales O A, O B, O C per angulum A O B designauimus, eius cosinus hinc colligitur

$$= \frac{d y d d x - d x d d y}{\sqrt{((d z d d x - d x d d z)^2 + (d z d d y - d y d d z)^2 + (d y d d x - d x d d y)^2)}}$$

hincque per analogiam eiusdem plani curuaturae inclinationis ad planum B O C cosinus erit

$$= \frac{d z d d y - d y d d z}{\sqrt{((d z d d x - d x d d z)^2 + (d z d d y - d y d d z)^2 + (d y d d x - d x d d y)^2)}}$$

ac denique inclinationis ad planum C O A cosinus erit

$$\frac{d x d d z - d z d d x}{\sqrt{((d z d d x - d x d d z)^2 + (d z d d y - d y d d z)^2 + (d y d d x - d x d d y)^2)}}$$

qui cosinus etiam conueniunt cum supra allegatis.

§. 35. Caeterum hic nefas esset praetermittere insigne subsidium, quo etiam vis elastica simili modo secundum alias directiones resolui potest, et quo tam vires simplices quam motus resoluere consueuimus. Cum enim ad curuaturam inuentam nostro filo inducendam requiratur certum virium momentum, quod in ipso plano curuaturae agat, et quod per radium osculi r huiusmodi formula $\frac{G}{r}$ exprimi posse constat: vbi littera G elasticitatem absolutam denotat, qua filum incuruationi secundum istam plagam resistit, siue ea sit constans siue variabilis,

 nunc

nunc ex ipſa tractatione huius argumenti didicimus, quomodo hoc ipſum momentum virium ſecundum terna plana A O B, B O C, C O A reſolui queat, ſcilicet haec vis elaſtica $\frac{G}{r}$ per primum coſinum multiplicata dabit vim inde reſultantem

Pro plano A O B $= \frac{G(dyddx - dxddy)}{ds^3}$.

Simili modo pro plano B O C $= \frac{G(dzddy - dyddz)}{ds^3}$

et pro plano A O C $= \frac{G(dxddz - dzddx)}{ds^3}$

prorſus vti ſupra obſeruauimus. Nunc igitur multo facilius erit iſtam reſolutionem hactenus plane incognitam per rationes ſolidas et certas confirmare, vnde ipſi ſcientiae ac theoriae elaſticitatis haud contemnendum augmentum accedit.

PHYSI-

PHYSICA.

 FVNGVS

FVNGVS SINENSIVM MO-KV-SIN DESCRIPTVS.

a Rev. P. CIBOT apud Sinas Miſſionar. Academ. Socio.

Extra me poſitum eſt euoluere libros, quibus in Europa Fungorum hiſtoria hodie illuſtrata eſt, vt certior eſſe poſſim illam ſpeciem, de qua ſum acturus, vere incognitam eſſe Botanicis. Itaque, ſi forte praeuenerint alii, quae hic referam ad illuſtranda vel ſaltem confirmanda ea ſeruient, quae iam ſunt propoſita. Ex autopſia enim haec ſcribo.

Fungus quem *Mo - ku - ſin*, ſeu vulgato magis nomine *Kuei - pi - ki - tſu* chinenſes appellant, locis vmbroſis, depreſſis, humidis, calida praeſertim poſt pluuias tempeſtate naſcitur. Incrementum intra duodecim fere horarum ſpatium abſoluit, perfectusque ſtatim flacceſcere incipit, curuatur, in ſe recumbit et putredinem ſentit; attamen hoc illi rarius accidit, quandoquidem Inſecta varia eiusdem ſubſtantiae auidiſſima vix terra emergentem fungum plerumque obſident et ante perfectum vegetationis ſtadium fere totum abſumunt.

In Fungo, quem deſcripturus ſum, tres diſtinctae partes obſeruandae veniunt, *volua* ſcilicet ſeu receptaculum quo ſuſtinetur, *ſtipes* ſeu corpus fungi, eiusque *cacumen* ſiue mucro valuatus.

Tab. V. *Receptaculum* (A A.) vna cum radiculis (B B.) quibus ſupra putridas Mori radices (C C.) firmatur, ſubſtantia conſtat molli, tenella, alba, compactae ſatis texturae. *Stipes* fungi pentagonus, baſi receptaculo quaſi vaginatus, illud angulis tantum prismatis exilique apice contingit, ideoque dum maturescit aeque facile defluit ac fructus maturi pedunculus ab arboris ramo.

Forma ſtipitis, qui et corpus fungi conſtituit (E E.) vbique pentaëdro-priſmatica eſt; longitudo tres quatuorue pollices, diameter quinque vel ſex lineas menſurae chinenſis aequare ſolet. Per totam longitudinem cauus eſt (*f f.*); color a baſi eleganter carneus vel exalbido-rubens, mucronem verſus ſenſim ſaturatior; ſubſtantia tenerrima, leuis, fungoſa, cauernoſaque, vt in ſegmentis apparet.

Mucro vel cacumen (G G.) quinis conniuet laciniis, quae angulis ſtipitis reſpondent, ſuntque teretiuſculae, acuminatae (I.), coloris ſaturate rubri. Hic vero rubor initio palleſcit, propter ſuccum glutinoſum, vireſcentem, qui exſudans interualla canaliculorum replet, et demum in ſpeciem vernicis ſiccatur.

Chinenſium Libri fungum, *Mo-ku-ſin* dictum, inteſtina vel excrementa gallinarum eſſe perhibent, iisue comparant. Eaque comparatio quoad foetorem fungi aptiſſima mihi viſa eſt, inque omnes mihi

mihi oblatos quadrat, nisi quod perfecto incremento adhuc foetidiores magisque nauseosos deprehenderim.

Eadem Chinensium volumina admodum diuersa tradunt quoad fungi nostri qualitates. Patet inde variis in regionibus Imperii Sinici eundem prouenire, multoque alibi maiorem dari illis, quos Pekini vidimus, quin et colore formaque variabilem. Ex antiquiorum recentiorumque scriptis collatis elucet: fungum *Mo - ku - sin* multis in locis ad cibum tuto posse adhiberi, alibi nociua qualitate infamem se reddere, imo interdum praesentissimi veneni vim exserere, idque iisdem vulgo in regionibus, vbi esculentus nascitur. Sequitur hinc, a natura soli, constitutione tempestatum, animalculisque forsan venenatis, quae fungum nostrum sectantur et obsident pendere vel innoxiam eius vel deleteriam virtutem. Eandem forte ob rationem varia est natura noxae, quam dicitur inferre, remediorumque contra venenum eiusdem laudatorum. Idem fere in Occidentaribus mundi plagis (Europa) obseruari solet: vno enim loco sine noxa comeduntur fungi, qui alibi veneno atrociores se gesserunt; fungorumque species bene multae in transalpinis regionibus salubres ad mensas adhibentur, quae in Gallia passim nocent. Affirmant Chinenses: certissimum esse experimentum, quo fungi nociui a salubribus distingui possint, si medulla siccata scirpi palustris minoris aquae, quibus fungi bulliunt, incoquatur; quae si nigro colore inquinabitur, certissimum erit venenosi fungi indicium; sin vero pura persistat, vel cocturae saltem

tem colorem induat, absque omni periculo ferculum fore promittit.

Libri porro fungum *Mo-ku-ſin* tanquam praeſtans in vlceribus cancroſis remedium laudant; aduſti fungi cineres vlceri toties inſpergere iubent, donec expurgata fuerit malignitas omnis. Medici Chinenſes internis quoque remediis admiſcent, quorum expoſitio cognitionem Theoriae medicae Sinenſium posceret, in Europa adhucdum ignoratae.

Collectaneorum opus ampliſſimum, cui titulus *Ku-kin-tu-ſchu*, docet iis in locis, vbi fungus *Mo-ku-ſin* cibum praebet innoxium, abundantem eius meſſem quotannis obtineri poſſe, ſi antiquas putridasque Mori radices locis humidis, auſtro oppoſitis, ſpiſſaque vmbra arborum opacatis defodi cures. Fauet incremento eorum, copioſioremque prouentum reddit, ſi terra fimo pinguis ſit, vel radices defoſſae foliis mori putridis obruantur, diligentiusque aqua perfundatur locus. Concedamus iam huic artificiali fungorum productioni aëris conditionem, caloremque auſtralium Chinae regionum, vbi a multis inde ſaeculis hac methodo vtuntur, fauere, vix tamen dubito induſtriam Europaeorum faciles modos inuenturam, quibus vtile iſtud artificium ſibi proprium reddere poſſint.

Non ſolis Phyſiophilis hanc Sinenſium antiquitus exercitam artem propono, ſed omnibus, qui fungos eſculentos, in culinae quoque vſum, ſimili aliqua methodo excitare cupient. Explorari primo deberet,

deberet, cuiusnam arboris vel fruticis radicibus haec vel illa fungi ſpecies praeſertim gaudeat; quorum ope tunc eadem ratione cultura fungorum exerceri poſſet, qua Chinenſes in radicibus Mori operantur ad producendum fungum noſtrum. Botanici huius gentis affirmant cuiuslibet arboris radices nunquam niſi certae ſpeciei fungos generare, cuiuis autem arbori ſuam eſſe fungi ſpeciem propriam; in quo me non illibenter conſentientem habent. Memini enim quondam in auſtralioribus Galliae vidiſſe fungos forma et colore ſingulares, putridis innatos radicibus, quorumque apud auctores nullum inueni veſtigium. Memini fungos varios ſub certis ſemper arboribus occurrere. Sed per vitae genus vrbanum, quo hic Pekini ſumus adſtricti, perque negotia quibus obruimur, non vacat, vt ipſe hanc Chinenſium opinionem propriamque ſimul hypotheſin experimentis confirmare poſſim; itaque Phyſiophilos Europae his ſaltem excitare volui, vt in eam inquirant. Quo, licet alium non praeſtiterint vſum, quam vt noua producant magnificentiae et liberalitatis ſummi Numinis argumenta, operae ſane dignum feciſſe videbuntur. Attamen generi humano forſan et hoc inde naſcetur emolumenti, vt facilis diſcatur methodus, fungos certae ſpeciei, in cibo ſalubriores producendi. Et quamuis in hoc praeſertim ſeruiretur ruſticis, tamen et hi laboribus aſſiduis ſuis mereri videntur, vt eorum commodis eruditi prodeſſe velint, doceantque qua methodo leues iſtas domeſticae vitae delicias procurare ſibi poſſint. Forſan plantarum quoque variarum facultas in his non minor erit, quam arborum, quod curioſorum experimentis relinquo; hoc ſolum moniturus: eosdem fungos, qui in equino ſtercore creſcere amant, etiam in pratis prouenire; ſententiaque Chinenſium ramos quoque arborum putridos, ſi terra obruantur, iisdem, quibus radices, fungis ortum praebere.

Coronidem imponat obſeruatio alia non leuis, nec incurioſa. Fungus noſter *Mo-ku-ſin*, priusquam e terra pullulat, minutus latet intra receptaculum ſeu voluam ſuam (L.) figura tunc oualem, radicula petiolatam. Diſſecta haec volua (M.) aliquoties exhibuit mihi paruulum fungi primordium, in mucoſo liquore natans, qui creſcente fungo abſumitur, perfectoque eius incremento plane deficit, relicta tantum quaſi vernicis tinctura intra capſulam. Videtur haec obſeruatio, de qua certiſſimus ſum, probare, per inuentum Cel. MICHELII antiquam opinionem, qua fungi pro meris excreſcentiis declarantur, penitus refutari; neque minus nos admonet, quo plus in ſcrutanda rerum natura occupabimur, eo plus in Creatoris admirationem efferri debere, quo non poterit non augeri debitus in corde mortalium erga perfectiſſimum Numen amor.

DE

DE STRVCTVRA VESICVLAE FELLEAE LEONIS.

Auctore

C. F. WOLFF.

Singulares illae plicae, quae intra veſiculam felleam leonis inueniuntur, anatomicorum oculos nullo modo fugerunt, quin facile vſum earum in acuenda bile perſpexerint, easque inter caeteras partes peculiari attentione dignas iudicauerint. Quare praeter cor leonis et muſculos, praecipuis actionibus inſeruientes, (quae in tomis Commentarior. praecedentibus deſcripſi,) etiam hanc veſiculam felleam, maxime vero plicas, quibus interna eius ſuperficies inſtructa eſt, inter eas partes retuli, quas, occaſione data, paulo diligentius in hoc animali inquirerem et delinearem.

In ſitu veſiculae felleae, in eius figura externa et in modo, quo ex tunicis ſuis componitur, pauca reperi, quae ſingularia eſſent, et diuerſa a veſicula hominis et aliorum animalium. Attamen non eminet fundo ſuo ante marginem anteriorem hepatis, pauloque, quam in aliis animalibus proportione minor eſſe videtur, et praeterquam, quod ſolito modo tota ſua ſuperficie ſuperiori hepatis ſuperficiei inferiori adhaereat, duobus quoque ligamen- Veſiculae habitus externus.

 tis

tis transuersalibus, de media vesicula, eiusque facie inferiori exeuntibus, eidem hepatis faciei adnectitur. Denique in sua substantia firmior et crassior est, saltim in plurimis locis, quod quidem non tam tunicis ipsis, quam potius crassiori densiorique cellulosae substantiae debetur, quae tunicis in iis locis interest, easque a se inuicem distendit. Et in his locis vesicula fellea inflexa esse solet. Ob crassitiem substantiae, ob molem totius vesiculae minorem, ob multitudinem et magnitudinem plicarum cauitas interna minor est, quam in homine et in aliis animalibus. Atque haec fere omnia sunt, praeter plicas, quae singularia in hac cystide leonina deprehendi.

Interna vesiculae structura generatim.

Aperta vesicula, sectione longitudinali a ductu choledocho per superficiem vesiculae inferiorem vsque in eius fundum ducta, plicae apparent, imprimis parieti superiori, qui hepati applicatus est, et lateribus insidentes adeo, vt extremitatibus suis in superficie inferiori concurrant. Collum vesiculae (Tab. VI. *k. l.*) et corporis pars posterior angustior (*l m.*) maxime illis abundant, anterior amplior (*m. n.*) et fundus (*n. n*) nonnisi rugis gaudent; plicisque eminentioribus et acutis omnino carent. Duplex harum plicarum genus obseruatur. Aliae simplices sunt, veluti (*x.* C. Q. V.) et cum valuulis venarum et cordis semilunaribus maxime conueniunt, dum altero suo margine crassiori, magis vel minus conuexo, parietibus vesiculae insident, altero acuto eminent, et in extremitatibus suis arctiores sunt quam

quam in parte media. Aliae vero magis compositae et quasi conglomeratae sunt ex simplicibus, veluti (*y. y. z.*). Denique tota interna superficies vesiculae, plicaeque ipsae, tum simplices tum compositae in suis superficiebus plane obsitae sunt rugulis, vel etiam plicis minimis, serpentinis alibi, alibi retiformibus; et saepe in his ipsis aliae minores obseruantur, vt tota vesica egregie intus crispa et plicata appareat. Dumque hae plicae, vario situ et directione inter se positae sunt, loculamenta inter eas formantur variae figurae et capacitatis, veluti (S et W.) ex quibus praecipue ea notabilia sunt, quae inter plicas compositas continentur (I et L.) quaeque tanquam propria receptacula considerari possunt; siquidem circumquaque fere clausa sunt, et nonnisi duobus orificiis gaudent, altero, quo bilis, quae ex fundo vesiculae aduenit, in illud intrare, altero, quo porro exire possit. Quae inter plicas simplices continentur (*z.* B. M.) cellae sunt tantummodo, plerumque tamen satis profundae. Praeter haec plura alia in structura interna vesiculae occurrunt, non minus notabilia, veluti singulare hoc structurae genus, vbi tunicae vesiculae interiores ab exterioribus recedunt, eoque cauitatem illius angustiorem efficiunt, ipsasque plicas, quas dixi, conglomeratas producunt. Haec in speciali singularum partium descriptione explicabo.

Solent vesiculam felleam humanam praeter ductum cysticum in collum, corpus et fundum diuidere. Haec leonina praeter cysticum ductum (*k. k.*) et

Peculiaris leoninae vesiculae diuisio.

et fundum (*n. n.*) in collum (*k. l*) in partem corporis posteriorem (*l. m.*) plicatam angustioremque, et anteriorem (*m. n.*) ampliorem conuenienter diuidi potest. Illa enim copiosissimis non modo, quibus repleta est, et multiformibus conglomeratisque plicis et loculamentis, inde formatis, toto coelo ab anteriori, quae amplior et plicis priuata, eoque maiori cauitate donata est, differt, sed etiam insigni plica orbiculari (*z.*) ab eadem distinguitur. Vt quaeuis singularia et notatu digna in structura vesiculae eo facilius notentur, diuersas has partes secundum ordinem pertractabo.

Ductus cystici structura.

Ductus cysticus (*k. k.*), aliter atque in homine et in fele, laeui intus et aequali superficie gaudet, nec nisi striis passim longitudinalibus (*q. q.*) praeditus est. In homine vesicula fellea ipsa plicis omnino caret; obsoletissimis rugulis retiformibus et villis villosae tunicae gaudet. In supremo eius collo plicae duae vel tres reperiri solent simplices transuersales. Inde ductus cysticus totus eiusmodi lamellis transuersalibus et septis, trabeculisque, vti vocari solent, repletus est, inter quas cellulae irregulares continentur. Contrarium igitur in leone obtinet, vbi cystis ipsa plicis insignibus stipata, ductus iisdem priuatus est. Orificium tamen, quo ductus hepaticus in cysticum et choledochum aperitur (*o.*) peculiari tenui valuula munitur (*p.*) adeo posita, vt margo conuexus ductus versus hepaticum (*i.*) et cysticum, concauus choledochum (*h.*) respiciat. Huic valuulae in pariete ductus opposito tubercuberculum refpondet, quod concauitatem valuulae adeo replet, vt fluidum ex ductu hepatico vel cyftico in choledochum facillime tranfire, minus facile ex hepatico vel choledocho in cyfticum et difficillime ex cyftico vel choledocho in hepaticum venire poffit.

Structura colli veficulae.

Veficulae collum (*k. l.*) rugis potius quam plicis exornatum eft (*r. s. t.*) fed fatis eminentibus, egregie crifpis, ferpentinis, maximam partem transverfalibus. Cauitas autem huius partis veficulae externo ambitui haud refpondet, fed multo, quam ob craffitiem tunicarum effe deberet, anguftior eft. In latere dextro enim (*b.*) tunicae interiores (*a.*) ab exterioribus recedunt, fpatiumque inter eas denfa tela cellulofa repletur. Eo efficitur, vt cauitas colli veficulae non amplior fit quam ductus cyfticus, quamuis illud externo ambitu hunc multo fuperet.

Tunicae interiores ab exteriobus peculiari ftructura recedentes, plicasque conglomeratas efficientes.

Recedunt vero etiam in aliis locis tunicae interiores ab exterioribus et imprimis duo, praeter iam defcriptum, notabilia exempla occurrunt in parte corporis pofteriori, quorum quod prius (*v.*) fequitur, in latere veficulae finiftro (D.), quod hoc porro excipit iterum in dextro latere eft (E et F.). Ex fitu horum locorum alterno vfus qui inde refultat, facile intelligitur. Non folum enim anguftiorem haec loca reddunt cauitatem veficulae et viam, quam bilem tranfire oportet, fed ferpentinam quoque eandem et longiorem efficiunt, quo fit, vt diutius haec in fuo itinere commorata craffior ſior euadat atque acrior. Sed praeterea alius huius ſtructurae vſus eſt peculiaris. Firmantur et nituntur his locis plicae compoſitae, quas conglomeratas dixi, veluti inter (D) et (*v.* E.) ſeries plicarum conglomeratarum (*x. y. y.* A. C.) quaſi ſuſpenſa eſt. His nempe ea fabrica eſt, vt ſimili receſſione tunicarum interiorum, vaſculoſae nempe vna cum neruea et villoſa ab exterioribus, muſculoſa et extima ad aliquod ſpatium, magis vel minus longum et latum formentur. Sed in his ipſis locis neruea cum villoſa a ſubiecta vaſculoſa iterum recedendo plicas ſimplices producit, quae igitur omnes vaſculoſae ſoli, ab externis diſtanti, tanquam baſi communi inſident, eiusque ope tanquam in vnam molem conglomerantur. Haec nunc eadem vaſculoſae tunicae pars, quae connexas plicas ſimplices tenet, in extremitatibus ſuis, fundum veſiculae et ductum choledochum reſpicientibus plica acuta terminatur, veluti plica (*x.*) poſterius, anterius plica (C.); lateribus ſuis autem illis locis adhaeret, vbi ſimpliciter tunicae interiores ab exterioribus recedunt, veluti (*v.* D. E. R.), iisque igitur a muſculoſa et extima ſeparata tenetur.

Quae in parte corporis veſiculae poſteriori occurrunt. 1) Series plicarum conglomeratarum.

Eiusmodi ſeries plicarum, in vnam molem conglomeratarum ſingularis (*x.* C.) proxime poſt collum in prima parte corporis veſiculae occurrit, qua ipſa collum a corpore diſtinguitur. Ea in extremitate ſua, collum reſpiciente plica inſigni ſemilunari (*x.*) in altera, quae verſus fundum reſpicit, ſimili plica (C.) terminatur. Inter illam et parie-

tes

tes colli cauitas continetur in quam bilem intrantem commorari oportet. Tota plicarum ſeries ob receſſionem vaſculoſae tunicae, cui plicae inſident, ab exterioribus adeo cauitatem veſiculae in hac regione occupat, vt reliqua huius capacitas vix pennae anſerinae craſſitiem aequet. Plicae ipſae (*y*. *y*. etc.) marginibus ſuis acutis verſus fundum veſiculae ſpectant, adeo vt exitum bilis remorentur, excepta prima earum (*x*.) quae verſus ductum reſpicit. Extremitatibus ſuis autem ſingulae hae plicae eiusmodi locis (*v*. E) et (D) innituntur, vbi ob receſſionem tunicarum interiorum ab exterioribus ſubſtantia veſiculae craſſior eſt; vti etiam baſis, cui ſingulae plicae inſident, tunica vaſculoſa ab exterioribus diſtat, interpoſita celluloſa, adeoque ſubſtantiam ſimiliter in eo loco craſſiorem reddit.

Poſt hanc anguſtiorem veſiculae partem inſignis folliculus ſequitur (I.) a parietibus veſiculae ipſis factus, poſterius plica (C.) anterius autem partibus veſiculae, vbi tunicae interiores ab exterioribus recedunt, (G et F.) iisque interpoſita parua plica (H.) terminatus. Hic circumquaque fere clauſus eſt et verſus ductum choledochum orificio, quod dicta plica terminalis (C.) efficit in canalem aperitur, a ſerie illa plicarum (*v*. C.) formatum, verſus fundum veſiculae autem nonniſi anguſtiſſimo orificio apertus eſt, vix acum admittente, a minima illa plica (H.) formato et prope parietem veſiculae inferiorem ſito. Ope huius orificii minimi (H) folliculus ille (I.) vnaque cum hoc tota poſterior caui- tatis

2. Duo folliculi inſignes.

3. Exiguo foramine inter ſe communi-

cantes, quo ſimul tota veſicula in duas cauitates diuiditur.

tatis veſiculae pars ad ductum cyſticum vsque, cum parte cauitatis veſiculae anteriori (H. *n. n*) communicat. Neque alia praeter hoc foraminulum communicatio inter partem veſiculae anteriorem et poſteriorem datur; adeo vt tota cauitas veſiculae in duos quaſi ſaccos, ſolo illo anguſto foraminulo inter ſe communicantes, diuiſa ſit. Paries internus huius folliculi plicis ſimplicibus longitudinaliter poſitis (K.) quaeque ipſae in ſuis ſuperficiebus rugas transverſas habent, exornatus eſt. Deſcriptum folliculum alius excipit (L) omnibus notis illi ſimilis. Hic poſterius eodem minimo oſtiolo (H), quo prior, terminatur, eodemque cum priori communicat, anterius autem plica ſemilunari (N.) clauditur. Plicae, quibus parietes huius folliculi inſtructi ſunt, (M.) diſtinctiores prioribus magisque regulares et pulchriores ſunt.

4. Canalis anguſtior.

Deinde pars ſequitur, vbi iterum, vti in ſerie illa plicarum (*x. y. y.* A. C.) tunicae interiores ab exterioribus recedentes, cauitatem veſicuiae anguſtiorem reddunt, canalemque efficiunt breuiorem quidem ſed etiam ſatis anguſtum, qui in icone apertus et extenſus repraeſentatur (*o.*) Paries tamen internus in hac veſiculae parte (*o.*) non adeo eminentibus plicis ſed rugulis potius acutis (P.) ad ductum canalis transuerſalibus ornatus eſt. Poſterius anteriusque ille canalis plicis inſignibus (N et Q.) terminatur. Earum poſterior (N.) verſus ductum cyſticum, anterior verſus fundum ſuo margine acuto reſpicit.

Huic

Huic anteriori alia (V.) refpondet, quae vna cum illa receptaculum (S.) includit rugulis transverfalibus (T.) inftructum. Denique magna plica fimplex (Z.) quae totam veficulae cauitatem ambit, partem folliculofam veficulae terminat, eamque a parte anteriori et fundo diftinguit. Inter hanc et plicam (V.) vltimum diuerticulum particulare (W.) continetur, rugulis egregiis (X.) reticulatis et transverfalibus intus ornatum.

5. Receptaculum.

Finis partis folliculofae, plica terminatae.

In fundo veficulae et in tota parte corporis anteriori nullae tunicarum interiorum ab exterioribus receffiones occurrunt, plicaeque nullae formantur; neque vlla peculiaris parietum craffities obfervatur. Proinde cauitas huius partis anterioris multo maior eft et quafi diuerfum a parte pofteriori, quae alia etiam ftructura gaudet, et folliculofa eft, faccum efficit. In hoc facco tantummodo rugae craffiores obtufioresque obferuantur, vario modo difpofitae. Alibi retiformes exiftunt (η.); alibi fere circulares (θ). In aliis locis transuerfales magis (λ. λ.), vel etiam longitudinales (ξ.) reperiuntur.

Pars corporis veficulae anterior et fundus.

Si quae forte funt, quae in hac defcriptione aut difficilius intelliguntur, aut omiffa vel neglecta funt, haec in fequenti indicatione eorum, quae in icone continentur, minutius explicabuntur.

Indicatio eorum, quae in icone continentur.

Icon Tabula VI. expreffa veficulam felleam repraefentat, in parte ab hepate auerfa longitudinaliter

liter diſſectam et explicitam, vt interna ſtructura appareat. In ea ſunt:

a. a. a. a. Diſſectae veſiculae margo, qui in ſitu naturali dexter eſt.

b. b. b. Partes ſuperficiei veſiculae externae.

c. c. c. Margo veſiculae diſſectae, in ſitu etiam naturali, ſiniſter.

d. Pars ſuperficiei externae, membrana externa obductae.

e. Ligamentum veſiculae laterale dextrum.

f. Ligamentum ſimile ſiniſtrum, cum veſiculae membranis reflexum. Haec ligamenta duplicatura tunicae externae veſiculae inuoluta ex huius ſuperficie inferiori oriuntur, indeque lateraliter ſecedunt, et hepatis ſuperficiei inferiori applicantur.

g. Duplicatura tunicae externae veſiculae, qua ligamentum inuoluitur.

h. Ductus choledochi pars aperta, laeuis intus.

i. Pars ductus hepatici integri.

k. k. Ductus cyſticus apertus.

k. l. Collum veſiculae felleae apertum.

l. m. Corporis veſiculae pars poſterior, folliculoſa; anguſtior, quae prae caeteris partibus copioſiſſimis, iisque multiformibus, et paſſim conglomeratis plicis et cellulis loculamentisque inſtructa eſt.

m. n.

m. n. Pars corporis vesiculae anterior, longe praecedenti amplior, merisque tantum rugis ornata.

o. Orificium ductus hepatici in cysticum aperti.

p. Plica tenuis, quae reditui bilis in vesiculam felleam aliquo modo obstare videtur, certius autem vetat, quo minus bilis, ex cystide in ductum choledochum itura, in hepaticum ductum refluat.

q. q. Plicae et striae longitudinales, quibus ductus cysticus intus instructus est.

r. s. t. Cauitus tota colli vesiculae, rugulis transversis copiosissimis ornata. *r* rugae transuersae serpentinae. *s* aliae breuiores, magis rectae. *t.* aliae directionibus variis.

v. Pars tunicae, seu substantiae, qua vesicula fellea constat. Ea in hoc loco admodum crassa est, et plus quam dimidiam partem totius latitudinis colli vesiculae occupat. Reliqua angustior colli pars intus caua est, totamque hanc colli cauitatem indicant litterae *r. s. t.*

w. Inflexio vesiculae felleae, et quasi terminus inter collum et corpus, in externa superficie apparens.

x. C. Corporis vesiculae felleae pars prima, plicis acutis eminentibus transuersis instructa. Hoc spatium *x.* C. similiter totam cauitatem huius partis vesiculae refert. Partes laterales vesiculae in hac regione D et E substantia solida cellulosa et tunicata occupantur. Simili crassitie paries quoque gaudet hepati applicatus, adeo vt pars plicata *x*. C. eleuata existat, et cauitas in hac regione nonnisi angustus canalis sit, praecipue in parte media.

x. Prima plicarum, terminalis, quae margine suo versus ductum choledochum spectat et colli cauitatem a cauitate corporis distinguit.

y. *y*. Secunda et reliquae plicae, marginibus suis acutis versus fundum vesicae respicientes.

z. Rugulae, plicis insidentes.

A. Plica notabilior.

B. Rugae eminentes, quibus illa exornata est.

C. Plica magna, qua haec pars plicata eleuatior a folliculo I. distinguitur, rugulis variis ornata.

D et E. Partes laterales vesiculae quae solida substantia in hac regione repletae sunt solamque partem mediam exiguam, propiorem superficiei inferiori, cauam relinquunt. Inter has partes solidas plicae *x*. *y*. *y*. A. C. quasi expansae tenentur.

F et G. Eadem substantia solida vtrinque magis intra cauitatem in hoc loco producta, adeo vt cauitas vesiculae relicta vix acum permiserit.

H. Similis substantia solida, a pariete vesiculae, hepati applicato, versus oppositum inferiorem

rem producta, adeo tamen, vt inter hanc productionem et parietem inferiorem ſpatium ſimilineae circiter relinquatur. Haec productio H. igitur vna cum lateralibus illis productionibus F et G. et pariete veſiculae inferiori canaliculum efficit, breuem quidem, ſed anguſtiſſimum quoque, vix acum admittente, quo folliculus I. cum folliculo L., in ſimulque tota cauitatis veſiculae pars poſterior H. *h.* cum anteriori H. *n.* communicat, et qui, niſi a productione H. relictus eſſet, tota veſiculae cauitas in duas partes, perfecte ſeparatas, diuiſa eſſet.

I. Profunda cauitas, ſeu folliculus, vbi tum paries ſuperior, tum inferior veſiculae a meris eius tunicis efficiuntur. Iſteque folliculus poſterius plica terminali C. anterius anguſto illo orificio terminatur quod inter partes F. G. H. relinquitur.

K. Plicae longae eminentes ramificatae fundo folliculi, ſeu parieti ſuperiori veſiculae, inſidentes.

L. Alter eiusmodi folliculus, orificio anguſto H. a priori diſtinctus, anterius plica N. et lateraliter ſubſtantia veſiculae ſolida terminatus.

M. Plicae longae. imbricatim fundo folliculi inſidentes, rugulisque in ſuis ſuperficiebus ornatae.

N. Plica inſignis, altera, qua conſtat, lamina parietem folliculi L. efficiens, altera paralle-

la

la ſuperficiei veſiculae in partem eleuatam O. continuata.

O. Pars interior eleuata, parieti ſuperiori inſidens. Spatium inter ſuperficiem O. et parietem ſuperiorem veſiculae ſubſtantia ſolida celluloſa repletum eſt.

P. Rugae et ſtriae, quibus haec eleuatior pars O. notata eſt.

Q. Plica ſimilis illi N. cuius altera lamina in ſuperficiem O. altera in cauitatem *S* continuantur.

R. Pars ſolida, ſimilis illis D et E, quae dimidiam cauitatem veſiculae in hoc loco occupat, et a pariete inferiori vsque in ſuperiorem producitur. Inter hanc et parietem D. membrana O. et plicae N et Q. expanſae tenentur.

S. Cauitas inter plicam Q et V. comprehenſa, minus tamen profunda, quam folliculi I et L. cum tunicae interiores ab exterioribus in hoc loco aliquantum remotae et per craſſiorem telam celluloſam ſeparatae exiſtant.

T. Rugae in hac cauitate.

V. Plica magna ſimplex, qua cauitas S. a profundiori cauitate W. diſtinguitur.

W. Cauitas profundior, in quo loco ſcilicet tunicae veſiculae contiguae ſibi incumbunt, cauitatemque adeo veſiculae maiorem efficiunt.

X.

X. Rugulae, quibus haec veſiculae pars ornata eſt, hinc inde reticulares.

Z. Magna plica circularis, qua tota veſiculae cavitas in partem anguſtiorem plicatam, folliculoſamque et latiorem, ad fundum quaſi pertinentem, plicis eminentioribus priuatam diſtinguitur.

α. Lamina altera, qua haec plica efficitur, quae nempe tunica veſiculae interna villoſa eſt.

β. Altera plicae huius lamina, eiusdem tunicae continuatio.

γ. Tunicae nerueae pars, ſimiliter plicam ingredientis.

δ. Membranae externae veſiculae pars, ſuper plicatam internarum tunicarum partem recta expanſa.

ξ. Rugae in parte veſiculae anteriori ampliori, variis directionibus ductae.

η. Retiformes.

θ. Fere circulares.

λ. λ. Transuerſales.

EQVVS HEMIONVS,

MONGOLIS DSHIKKETAEI DICTVS,

DESCRIBENTE

P. S. PALLAS.

Equorum tres hucusque ſpecies Zoologi norunt, Caballum videlicet, cum Aſino, per Aſiam temperatam et Africam feros et vbique domeſticos; tertiamque Zebram, pulcherrimum atque peculiare monſtriferae Africae productum. Quartam addo, nomine barbaro iam dudum celebrem, ſed reapſe Zoologis hactenus fere penitus ignotum et obſcurum Animal, quod hominis auram fugiens in deſertiſſimas Aſiae mediae ſolitudines receſſit, neque forte vllibi nunc datur, niſi in vaſtiſſimis Magnae Tatariae ſubmontanis campis, inter Indos, Seres atque Sibiriam late patentibus. Nomen illi conuenire poſſe credo *Hemioni*, quod Graeci antiquiores non ſolum Mulis hybridis, ſed et huic animali, iam iſtis, ni fallor, temporibus vtcunque cognito, indiderunt. Sic enim ARISTOTELES haud dubie de illo erit intelligendus vbi (*Hiſt. animal. Lib. VI. cap.* 36.) narrat: "eſſe in Syria quos Mulos, vel Semaſinos „('ημίονυσ) appellant, genus diuerſum ab illo, quod „coïtu equi et Aſinae generatur, ſed ſimili facie, „prout Aſini ſylueſtres ſimilitudine quadam nomen

„vrba-

„vrbanorum accepere. Et quidem, pergit, vt Aſi- „ni illi feri (ὄνοι ἄγριοι), ſic muli iſti praeſtant „celeritate. Procreant eiusmodi mulae ſuo in ge- „nere, cuius rei argumento ſunt illae, quae tem- „pore Pharnacae, patris Pharnabazis in terram Phry- „giam venerunt et adhuc exſtant; tres tamen ex „nouenis, quot numero olim fuiſſe aiunt, ſeruan- „tur hoc tempore.„ Et alio item loco Stagirita (*ibid. cap.* 24.): " In terra Syria, ait, ſupra Phoe- „nicen mulae et coëunt et pariunt omnes; ſed id „genus diuerſum eſt, quanquam ſimile.„ Itemque PLINIVS (*hiſt. natur. Lib. VIII. cap.* 44.) tradit a THEOPHRASTO proditum, vulgo parere Mulos in Cappadocia, ſed eſſe animal ibi ſui generis. Denique AELIANI (*de Animal. Lib. XVI. cap.* 9) huc videtur referri poſſe locus, vbi ſcribit: "In India „Equorum ferorum et Aſinorum ſimiliter greges „ſunt, et Aſinos Equae facillime admittunt et ru- „bros Mulos (ἡμιόνους πυῤῥούς) pariunt ad curren- „dum praeſtantiſſimos, ſed contrectationis impatien- „tes, quos compedibus captos ad Praſiorum regem „adducunt. Ex iis, qui bimi comprehenduntur, „domari poſſunt: contra veruli ab immanibus et „carniuoris feris nihil differunt„.

Noua haec Equini nominis progenies primum innotuit per *Diligentiſſimum* MESSERSCHMIDIVM, qui tertia huius ſaeculi decade per Sibiriam iuſſu PETRI *Magni* peregrinabatur; praeterque iſtum et GMELINVM, viginti poſt annis illius veſtigia legentem; nemo Physiophilus vnquam animal hocce rarissimum contemplatus est.

Primus itaque MESSERSCHMIDIVS hanc speciem differte ab Asino et Caballo distinxerat, atque nomine *Muli dauurici*, *foecundi Aristotelis*, *Cappadocici Eresii* in *Xenio Isidis sibiricae*, quod MStum extat, salutauit; et hoc idem in *Catalogum Musei Petropolitani* (*) transiit, a BVFFONIO perperam pro synonymo Asini feri habitum (*Hist. natur. Edit.* 8 *vol.* 24. *p.* 6. *not.*). Descriptio autem animalis, quam ad tria cadauera exarauerat MESSERSCHMIDIVS, periit, praeter Anatomica quaedam, et integram praesertim, verbosissimam Osteologiam in *Hodegetico* eiusdem *MSto* consignatam. GMELINVS, quum in Dauuria peregrinaretur, Hemionos nostros institutis venationibus frustra petierat (†); quam vero postea, procuratis per *Celeberrimum Collegam* eius MÜLLERVM hyemali tempore Hemionis, Ircutiae concinnauerat descriptio inter ineditas eius chartas adhucdum

---

(*) *Xen. Isid. Sibir. MStum* sic habet: „Mulus dauuricus „foecundus Aristotelis, Cappadocicus Eresii. *Czigithai* „Mongolorum in Dauuria; *Ksching* Tangutis; *Kitschœrœh* vel *Dshœngli-Kitschœrœh* Indis cis Gangem; „an Ebraeorum *Pœrœd* 2. Sam. 18. 1. Reg. 1. Arabibus *Hœmar-iwaschi*; *Char-Kurœh* Persis; Tataris „Muhammedanis *Kolan*, forsan et *Chatscher*? perperam *Stepnoi kon* seu Equus campestris Russorum; Iuba „breuissima et ductu spinae mediano in mustelina pelle „nigris; auribus et cauda asininis„. Haec MESSERSCH.

(†) *Reise durch Sibirien II. Theil p.* 107. Vbi breuissima descriptio, sed fida, e relatione Mongolorum traditur.

dum latet, neque si prodeat, Zoologis satisfacere posset, quippe breuis et imperfecta, vti pleraeque Optimi Viri, de Botanica praeclare meriti, in Zoologicis vero incuriosi, animalium adumbrationes esse solebant. Adeoque res ad me peruenit integra, quum in Sibiriam profectus sum. *Missionarii* enim e Societate Iesu, qui Mongoliae deserta variis occasionibus peragrarunt et videndi Hemionos opportunitate vsi sunt, vix vllam, praeter nomen, eorundem notitiam reliquerunt (*).

Per totum igitur quadriennium, quo australes Rossiae atque Sibiriae fines Tatariae magnae desertis conterminos relegi, nullum non moueram lapidem, nullisque sumtibus peperceram, vt praemiis pariter ac fauore excitarem venatores gentiles ad procurandum, e desertis extra fines Imperii Rossici positis, specimen et Hemioni, et Onagri. Ast omnia incassum fuere, donec vere Anni 1772. extremae Davuriae campos, ab Onone et Arguno fluuiis versus Mongoliam desertam patentes peragrarem In eadem illa raris mortalibus habitata regione, vbi antea Hemionus MESSERSCHMIDIO oblatus, et vnde pro GMELINO missus fuerat, mihi quoque rarissimum hocce animal eminus videre atque describere contigit. Solaque fere Argunensia deserta nunc sunt,

 vbi

(*) Mulos feros, Chinensibus *Te - lo - tse* eodem significatu dictos, memoratos inuenias in Opere DU HALDII *Vol. IV. p. 34.* Conferantur et *Allgemeine Samlung der Reisen Vol. VII. p. 75. et 592.*

vbi hodie intra limites Sibiriae adhuc obſeruari ſoleant Hemioni, dum aucta orientalis huius regionis populoſitate diffugere et in auſtraliore Mongolorum eremo ſecuritatem quaeſiuere, vnde nunc rarius in Dauuriam Roſſicam euagantur. Praeſertim illos obſeruatum eſt amare planitiem aridam et herboſam circa Lacum ſalſuginoſum exſiccatum, quem *Tareinôor* appellant, in ipſis Mongoliae Chinenſis finibus poſitum, patentesque inde vsque ad *Abagaitu* collem intermontanos campos, qui famoſo illo deſerto Gobëenſi vsque ad Indiam extenſo, Hemionisque imprimis abundanti continuantur. Reliquus enim tractus Dauuriae Roſſicae vel rupibus excelſis nimis horridus, iugisque niualibus munitus, vel ſyluis impeditus eſt; qualia loca Hemioni non adeunt neque amant.

In Argunenſibus itaque campis fere quotannis adhuc, non quidem, vti prius, gregatim, niſi annona in arido vel ignibus ambuſto deſerto premente, ſed tamen ſparſim et a gregibus quaſi aberrantes apparent Hemioni. In apricis Mongoliae vero, praeſertim vaſtiſſima illa planitie glareoſa, quam *Gobi* appellant, magnis incedere gregibus autoptae mihi retulerunt itineratores. Itaque Mongolis, eorumque linguam callentibus Dauuriae Tunguſis notiſſimum ſunt animal, cui nomen *Dſhikketæi*, quod Auritum ſignificat, indiderunt. Eodem nomine transfugis e Songaria Calmaccis notum eſſe didici, quorum in priſtina patria inquilinum itidem. Animal et a feris Aſinis (*Chulàn*), feriſque Caballis (*Takija*) diſtinctiſſimum

mum habetur. Haud vero certo dixerim, an Tatariae vaſtitiem magis ad Occidentem ſitam frequentet; certe Kirgiſis Nomadibus, ſaltem Occidentalibus, quantum reſcire potui, nulla eſt appellatio, qua diſtinctum deſignent. Neque determinate ſatis de Onagris Perſiae Syriaeue locuti ſunt peregrinatores, vt liqueat annon Hemioni quoque in his dentur regionibus.

Amant noſtri praeſertim paſcua aprica, ſicca, ſed herbis laeta ſolidis, montanis, quibus Dauuria Mongoliaque tota, tanquam alpina regio, abundat. Ad aquas raro accedere dicuntur, patientiſſimique ſitis eſſe, quae in deſerto, quod colunt, ſaepe per centena ſtadia aquis, praeſertim dulcibus, deſtituto, ſumme neceſſaria erat facultas.

Onagrum et Equiferum in ſeruitutem redegit hominum audax induſtria, et in mitiſſima atque vtiliſſima iumenta conuertere calluit. Hemionum vero noſtrum, pariter atque Zebram Africae, nullus vnquam mortalium domare potuit, licet equitationis amantiſſimi Nomades Aſiae experimentum educandi pullos plus ſimplici vice tentarint. Non tamen deſperandum eſſe puto, tenerrima aetate captis atque concluſo loco aptius, quam inter Nomadum mappalia, educatis et adſuefactis pullis, aliquando fieri poſſe domeſticam, fraenique patientem hanc ſpeciem; quae tunc celeritate curſus certe Equos cuiuscunque gentis, celerrimosque Syriae vel Arabiae Mulos vincet. Suadet hoc eadem in Onagris,

gris , quorum millenarii greges per Aſiae temperatioris Eremum oberrant , paſtoralibus Tataris experta feritas , quam tamen antiqui ita facile domare norant , vt etiam , ad generandos Mulos praeſtantiſſimos, Onagros manſuefactos praeſertim adhibitos fuiſſe VARRONIS , COLVMELLAE , PLINIIque teſtimoniis conſtet ; imo VARRO ſcriptum reliquerit (*de re ruſt. Lib. II. cap. 6.*) , "ad (Mulorum) ſeminationem maxime idoneum eſſe Onagrum , quod e fero fiat „manſuetus facile , et e manſueto ferus nunquam„.

A Mongolica gente , Tunguſisque ſola potiſſimum venatione felicibus propter aeſtumatiſſimas inter hos barbaros , Equiferisque praelatas carnes et corium aptum ocreis , crebro occiduntur Hemioni. Eſt autem difficillima eorum venatio ; non ſolum enim viſu eximio pollent , ſed etiam ſecunda aura hominis non viſi effluuia per plura ſtadia ſentiunt , prouidiſſimique ad fugam ſe componunt. Celeritas autem eorum tanta , tamque fere incredibilis dicitur eſſe , vt alipedes equos facili opera longiſſime poſt ſe relinquant , imo Antilopibus , propter pernicitatem celebratis , velocius currant. Hanc admirandam ob celeritatem indomitamque feritatem adeo celebres apud Aſiae populos facti ſunt , vt etiam in prouerbium ceſſerint , et Tibetani Deum igneum , quem *Chammo* appellant , Hemiono effixerint inequitantem. Propter eandem venationibus , quas Mongoli magna equitum manu inſtituere ſolent , raro includuntur , ſed potiſſimum ex inſidiis , a latente poſt tumulum vel in foſſa qualicunque venatore tunc , quum aquatum

tum ad riuos vel lacunas accurrunt, vel loca falſuginoſa adeunt Natri vorandi cauſa, ſclopis caeduntur. Narrant tamen venatores, tempeſtate pluuia atque turbulenta Hemionos quaſi ſtupere, vel hebeſcere ſenſibus, ita vt venatorem minus perſentiſcant. Mares adulti, qui gregibus Equarum plus minus numeroſis duces ſunt, praeſertim cautos atque vxoriae cohortis prouidos cuſtodes ſe praebent, non ſolum zelotypia ſumma equas ab alienis gregibus arcentes, iunioresque mares, quum adoleuerunt, e turma depellentes, ſed etiam pericula quaeuis explorantes. Conſpecto venatore, qui forte ſub aduerſo vento humi ſtratus adrepere gregi parat, dux gregis tanquam rem inſolitam miratus, ſolus magno circuitu facto ſemel iterumque, imo quandoque ad tertiam vsque vicem propius dicitur accurrere, inſpecturus quid rei ſit; quo optima ſaepe venatoribus potiundae praedae offertur occaſio. Sed perſpecto periculo ſumma tandem celeritate reuertitur, expectantemque gregem equarum in fugam pellit.

Capite ſemper ceruinum fere in morem elato, ſurrectisque auribus incedunt Hemioni; fugientes adhuc magis in altum proiiciunt caput, eriguntque caudam. Hinnitus grauior, magisque ſonorus obſeruatur, quam equorum. Greges conſtant, praeter admiſſarium ducem, equabus ſaepe pullisque vigenis, vel vltra. Plerumque tamen multo parciores eſſe ſolent, ita vt Hemionos multos quinae, imo pauciores ſaepe ſequantur vxores. Mares iuniores, cum adoleuere, a patribus grege tandem abacti, e lon-

 ginquo

ginquo ſequuntur vel ſolitarii errant, donec equas itidem iuniores ſui generis a grege alienare, vel aberrantes ſibi adiungere queant. *Oeſtri* tempore etiam feminei pulli, quae veneris nondum patientes ſunt; ab admiſſario duce grege dicuntur expelli ſolere. Fama eſt Hemionos domeſticas quoque aliquando Equas abducere, iisque ad Venerem abuti; quod tamen non ſatis fidis teſtimoniis mihi confirmatum eſt, licet vero ſimillima res videatur in tanta totius fabricae affinitate et magnitudinis fere paritate, quae Hemionum adhuc aptiorem copulae cum Equabus noſtris reddit, quam eſt Aſinus, cuius tamen proles ex Equa, vti Equi ex Aſina, vulgatiſſimis Equiſonum experimentis confirmata eſt.

Coëunt Hemioni medio et ſub finem Auguſti; illo enim tempore in diſſecta femella MESSERSCHMIDIVS foetum magnitudine Muris in altero vteri cornu reperit. Dicuntur autem vere parere, ſolitarios plerumque pullos. Et hi tertio anno exacto parentibus fere aequales puberesque fiunt, obſeruantibus iſtarum regionum Nomadibus.

Pugnant inter ſe praeſertim morſu Hemioni; quod et Equis ſpontaneis ſolemne eſt. Attamen vngula pariter ferire callent, quod in Hemioni pullo obſeruatum fuit, quem Ruſſus aliquis in Davuriae finibus militiam faciens in tenera aetate ceperat, quique ob immanem feritatem vix per menſem viuus ſeruari potuit. Hybernum vellus pallidius aeſtiuo gerunt, gryſeo-exalbidum, ſubhir-

tum,

tum; pilis sesquipollicaribus, in dorso crispulis vel vndatis constans. Hoc primo statim vere, maturius paulo quam in Caballis domesticis, defluit sensim, succedente sub exitum Maii aestiuo pilo breui, strictissimo, eleganter laeuigato, qualis in Equis bene curatis esse solet.

Habui pro descriptione, quam hic sisto, praeter pelles complures, Hemioni femellam integram, circiter triennem, quae d. 26 Maii 1772. ad Lacum Tarei Dauuriae occisa fuerat. Ab aestu vernali summo tum regnante iam initium corruptionis senserat, vt Descriptio et Anatome, praesertim in loco omnibus vitae commodis destituto, sub tentorio, in nuda terra, non sine taedio, nausea et labore confici potuerit. Impedimento in posteriore adhuc fuere vulnera animali inflicta. Attamen quantum potui omnia accuratissime lustraui; id vnum dolens, quod in deserta regione, solus, sine auxilio tum constitutus, non sufficerim lanienae Equi simul pro accuratissima partium comparatione instituendae; quem in finem itaque accuratissima Ill. BVFFONII descriptione Equi tunc sum vsus. *Icon*, ad integrum cadauer parata (Tabula VII.), animal accuratissime exprimit, illo corporis situ, quem Tungusi autoptae viuo animali maxime naturalem esse adsueuerabant. Sequitur DESCRIPTIO. Tab. VII.

Hemiono *Magnitudo* et *facies* Muli vulgaris, sed omnibus momentis pulchrior. *Caput* equino maius, altiusque seu magis compressum; *frons* plana, facie anguſtata in roſtrum deſcendente; latera capitis planiuſcula, praeſertim inter oculos et parotides, vbi diameter verticalis maxima; interuallum ramorum mandibulae excauatum.

Oris labia laxa, maxime ſuperius, tenuiſſime piloſa, margine fuſceſcente, extus veſtito pilis rigidis, cano albis, inflexis. Commiſſura oris, etiam intus, ſubtiliſſime piloſa; buccae interius fuſcae, papillis punctatae. — *Dentes* in vniuerſum triginta octo, adeoque binis pauciores quam in Caballo: *Primores* vtrinque ſex, *medii* (in noſtro ſpecimine congeniti) quatuor ceſtriformes, lati, acie detriti, lacunaque notati, ſubparalleli; *laterales* (nouati) minores, oblique truncati, obtuſi, valde conuergentes, ſitu omnes vt in Equo, ſuperiores erecti, inferiores pronati. *Canini* in vtroque ſexu nulli; apparuit tamen in cranio femineo alueoli veſtigium, in maxillae ſuperioris medio, inter molares et primores, interuallo. *Molares* corona equinis ſimillimi, in vtraque maxilla vtrobique tantum tres perfecti, pone quos propullulabat quartus, quintique alueolus adapertus in cranio depurgato apparebat; quorum MESSERSCHMIDIVS in maſculi cranio veſtigium nullum commemorat. — *Dens acceſſorius* ante molares ſuperiores vtrinque minutus, conoideo-obtuſus, vix 4'''. altitudine, de quibus apud eundem obſeruatorem mentio nulla. — *Palati* rugae 17. anticae latae, magisque deletae, poſticae prominentiores et latiores.

Nares

Nares intus et margine fuſceſcentes, equinarum ſimiles, patulae; cartilago vtrinque ſub naribus verrucae obtuſae, magnae inſtar protuberat. *Pili* nigricantes, longi, ſparſi circa os et nares, quorum longiſſimi (ad 2''.) in labio inferiore, mento et externo margine narium.

Oculi mediocres, diametro longitudinali obliqua. *Palpebrarum* margines, areaque triangularis ante canthum priorem nuda, fuſca. *Cilia* tantum in ſuperiore palpebra, ab ipſo margine paululum remota, neque ad canthos perducta, nigra, confertiſſima, longitudine 7'''. — *Pili* aliquot nigri, in quibus duo longiſſimi (2''. 3''') proſtrati, infra canthum anticum oculi per zygoma ſparſi. — *Periophthalmium* album, opacum, latitudine 7'''. vsque ad pupillam fere extenſile, lunula in medio marginali, nigricante notatum. *Albugo* circa corneam fuſconigreſcit; *Irides* obſcure cinereae, rugis radiatae; *Pupillae* oblongae, directione diametri oculi obliquae, vel canthis reſpondentes.

Aures equinis multo maiores, pulchre arrectae, acutae, extus corpori concolores, margine verſus apicem, ipſoque apice interius fuſcae, intus villo per ambitum largo, ſubcriſpo et exalbido conniuentes, in cauitate nuda ſcamnatae porcis diſtiche villoſis, duobus ſecundum exteriorem marginem parallelis, vno interiori vicino.

Collum gracile et teretius equino, compreſſum. *Iuba* ab occipite ad ſcapulas aequabilis, erecta, equi-na multo mollior et qualis in equino pullo ſolet eſſe, fuſca, ſummitatibus pilorum (ad $3''$. $6'''$. aequantium) gryſeis. *Vertex* inter oculos et aures totus villo molli, breui, iubae concolore, loco *capronae*, cuius altitudo ſumma $1''$. $3'''$.

Truncus longiuſculus, compreſſus, pectore maxime carinato-gibbo, dorſo rectiuſculo, leuiter *arcuato*, caeterum angulato, fere vt in Aſino.

Artus neruoſi, pulcri, longi atque graciles, femoraque macilenta, vt in Mulis. *Calli* loco *area* in latere brachii interno repanda, oualis, ſuperius acuta, nigra, nuda, epidermide duriuſcula tecta (dum forte callus vna cum pilo defluxerat). Huius longitudo $2''$. $7'''$. latitudo $1''$. $6\frac{1}{2}'''$ aequat. In poſticis pedibus calli veſtigium omnino nullum. — *Bulbus* pedis ſupra vngulam laeuis, inermis, poſtice pilis longioribus, in penicillum confluentibus ſubbarbatus. In anticis ad penicillum interius macula nigra, exterius litura fuſca remotior; in poſticis ſupra penicilli baſin liturae duae obſoletae. — *Vngulae* nigrae, duriſſimae, laeues, oblongae, fere dimidiato-conicae, dorſo conuexo-ſubangulatae, ſubtus cauae; *chelidon* dura, hiulca, didyma; margo vngularum pluries inciſus.

Cauda vaccinae ſimilis, *tenore* tenui, tereti, ab ano ad medium ſubtus longitudinaliter nudo; veſtita *ſetis* a baſi ad medium breuioribus, ſtrictis, corpori concoloribus, ſubtus fuſcis; hinc in extremitatem flocceſam ſetis longioribus (ad $9''$.), nigris.

Villus

Villus hybernus, quem in pellibus vidi, bipollicaris, ſubhirtus et in tergore vndulatus, camelini fere inſtar mollis, inferne cinereo-fuſceſcens, extus gryſeus. *Aeſtiuus pilus* (vix $3\frac{1}{2}'''$.) breuis, elegantiſſime laeuigatus, paſſim pulcre vorticoſus, nullibi (vt eſt in Zebra) contrarius. — *Sutura* pilis adſcendenti-diuergentibus diſcors, per frontem longitudinalis; *Alia* a medio ſupercilio antrorſum vergens, pilis longioribus. — *Vortices*: vtrinque obſoletus ad iubam pone occiput; ſub initio colli ſutura breuis, deſcendens, dextrorſum intorta in vortices duos approximatos; duo vortices ſub baſi colli, non exacte oppoſiti, confluentes in ſuturam a medio fere collo per ſternum longitudinalem; dein magnus vtrinque ante commiſſuram ſcapulae; porro alius vtrinque inſignis diuergens in latere thoracis, ad armos; ſupra quem diſcordia pilorum cruciformis. Alius item vortex ante flexuram armorum; vorticulus in ipſo angulo cubiti, ſutura ad medium brachium deſcendens; vortex vtrinque ante vbera; alius ante femora in hypochondriis, aliusque inſignis ante trochanterem, a quo diſcordia pilorum per foſſam antefemoralem deſcendens, inter quam et vorticem antefemoralem occurſu pilorum ſutura transuerſa hypochondrii oritur.

Color extremo roſtro nudiuſculo albidus, hinc ad capronam fulueſcens, in ceruice gryſeo-albidus, in trunco ſuperius toto dilutiſſime gryſeo-fulueſcens (quod Galli vocant *Iſabel griſâtre*), verſus latera dilutior, dilutiſſimus per artus anteriores anterius, et

poſticos

poſticos exterius; albidus in clunibus, artubus intus et trunco ſubtus. *Lorum* ſeu linea ſpinalis teſtaceo-nigra a iuba vsque in caudam longitudinaliter decurrens, ſupra lumbos lateſcens et ſublanceolata, verſus caudam adtenuata, et vsque in floccum caudae producta. *Pili* ſetoſi, vngularum coronam cingentes nigricant.

Vber nudum, nigreſcens, *papillis* binis, brevibus, craſſis, obtuſis. *Plica* transuerſa cutis inter femora, pone vber, remotiuscula. *Vulua* (ſub ano haemiſphaerico) oblonga, bilabiata, labiis tumidulis, extus fuſcis, ſubpiloſis, longitudine 3''. 6'''. a quarum commiſſura rhaphe nuda nigra inter femora decurrit. Intra commiſſuram labiorum inferam *ſinus* laxus, rugoſus, nigricans, in quo *caruncula* compreſſa, inter *duas* maiores, rugoſo-hiulcas.

Menſurae proportionum, ſi vnquam in Zoologia, certe iis in generibus neceſſariae, in quibus ſpecies adeo inter ſe ſimiles a Natura ſunt redditae, vt quaſi ad vnum omnes ectypum efformatae videri poſſint. Itaque minutioſus in tradendis iis eſſe debeo, omnesque ita exegi, vt cum *Buffonianis* Caballi menſuris comparari queant. — *Pondus* partitim ſtatera ſuſpenſi animalis quingentas ſexagenas Libras medicas aequauit.

Longitudo ab interuallo aurium ad vsque anum - - - -	5'. 1''. 3'''.
—— capitis ſigillatim - - -	1. 8. 6.
—— a ſummo labio ad anum - -	6. 7. 10.

Altitu-

Altitudo animalis anterior a ſpina interſcapulari ad calcem menſurata -	$3'$.	$9''$.	$9'''$.
Eadem poſtice a lumbari ſpina ad calcem	4.	3.	6.
Interuallum inter antica brachia ad pectus, multo minor quam in equo -	0.	4.	0.
Circumferentia roſtri pone nares -	1.	1.	6.
—— oris ab angulo ad angulum per labium ſuperius - - - - -	0.	8.	8.
Latitudo labii ſuperioris ſub naribus -	0.	3.	11.
Diſtantia inter angulos maxillae inferioris	0.	2.	4.
—— narium inter ſe antico ſinu -	0.	2.	1.
—— —— poſtico ſinu - - -	0.	2.	$6\frac{1}{2}$.
—— ab apice labii ad canthum oculorum	1.	0.	7.
—— a cantho poſtico ad aurem -	0.	4.	5.
Diameter frontis inter ſupercilia - -	0.	6.	8.
—— oculi a cantho ad canthum - -	0.	1.	6.
Apertura oculi - - - -	0.	0.	9.
Diſtantia canthorum oculi filo per frontem planam ducto - - -	0.	6.	10.
—— —— recta axi - - -	0.	5.	6.
Circumferentia capitis ante oculos -	2.	0.	5.
—— capitis ad initium gulae et ante aures - - - - -	2.	1.	9.
—— —— paulo pone oculos maxima -	2.	3.	6.
Longitudo narium - - - -	0.	1.	8.
—— aurium ad occiput - -	0.	7.	2.
—— externae aperturae - - -	0.	6.	8.
Circumferentia aurium baſi - -	0.	5.	4.
—— in medio a margine ad marginem	0.	3.	10.

Diſtantia aurium filo per gulam ab aperturis circumducto - - -	1'.	6''.	3'''.
—— aurium per verticem - -	0.	4.	3.
Altitudo capitis a ſumma orbita ad angulos maxillae inferioris - -	0.	9.	0.
—— roſtri, medio inter oculos et nares	0.	7.	2.
Longitudo colli - - - - -	1.	5.	0.
Circumferentia colli ad caput - -	1.	10.	9.
—— —— ad humeros - -	2.	3.	2.
Latitudo colli in medio a iuba ad tracheam transuerſa - - - - -	0.	8.	6.
Circumferentia thoracis ad armos -	3.	8.	6.
—— trunci in medio - - -	4.	2.	0.
—— —— ad femora (*) - - -	4.	0.	0.
Longitudo tenoris caudae - -	1.	4.	1.
——flocci caudam exſuperantis - -	0.	8.	2.
Circumferentia tenoris baſi - -	0.	5.	3.
Longitudo humeri - - -	0.	9.	5.
———— brachii - - - -	1.	2.	2.
Diſtantia callorum brachii ſupra flexuram	0.	5.	1.
A cubiti flexura ad calcem - -	2.	4.	6.
Longitudo cruris ſ. gambae - -	0.	9.	4.
A flexura gambae ad veſtigium -	1.	3.	1.
Ab articulo bulbi pedis ad vngulae marginem - - - - -	0.	7.	10.
Longitudo pedunculi vngulae - -	0.	4.	0.

Lon-

(*) Notandum ad has menſuras, animal ab interna putredire iam inflatum fuiſſe, nec tumorem omnem, licet inciſione paruula facta, ſubſediſſe.

Longitudo vngulae ſeu veſtigii - -	0.	4.	3.
Eiusdem latitudo - - - - -	0.	3.	0.
—— altitudo anterius - - -	0.	3.	0.
Circumferentia vngulae ad coronam -	0.	8.	10½.
——— per ambitum - - -	0.	11.	8.
——— pedunculi vngulae - -	0.	4.	9.
——— bulbi pedis - - -	0.	7.	3.
——— gambae anticae - - -	0.	5.	0.
——— articuli eiusdem - -	0.	8.	8.
——— brachii ad eandem flexuram -	0.	7.	2.
——— brachii ſuperius - -	1.	1.	3.
Longitudo femoris - - -	1.	3.	0.
Latitudo eiusdem ſumma - - -	1.	0.	0.
—— tibiae - - - - -	0.	6.	7.
Longitudo tibiae - - - -	1.	0.	10.
—— gambae ſeu cruris poſtici - -	1.	2.	5.
A flexura tibiae ad veſtigium - -	2.	3.	0.
A calcanei flexura ad calcem - -	1.	3.	0.
Longitudo pedunculi vngulae - -	0.	4.	2.
Ab articulo phalangis ad vngulae marginem - - - - -	0.	7.	11.
Vngulae poſticae altitudo - - -	0.	3.	6.
—— longitudo per veſtigium - -	0.	4.	3.
—— latitudo ſumma - - -	0.	3.	0.
—— circumferentia per ambitum -	0.	11.	10.
Circumferentia vngulae ad coronam -	0.	8.	5.
—— pedunculi vngulae - - -	0.	5.	1.
—— bulbi pedis - - - -	0.	7.	7.
—— gambae ſiue cruris - -	0.	5.	7.
—— tibiae ad flexuram - - -	1.	3.	0.

Circumferentia femoris ad corpus - - 1'. 9''. 5'''.
Diſtantia vberum a vulua - - - - 1. 0. 0.

Partium internarum ſcrutinium ſequentia notatu digniora exhibuit: *Hepar* trilobum, lobo dextro maximo, intermedio minore tripartito (cuius dexterior portio bicrenata), lobuloque inſuper acceſſorio papillari ex interiori facie prominente. *Cyſtis* bilaria plane nulla. *Lien* magnus, oblongo ſubtriangularis, planus, ventriculo per ſuſpenſorium latum adnexus. *Pancreas* diffuſum.

Situs coli atque *coeci*, ſine vlla notabili differentia, vt in Equo ſe habuit. *Ventriculi* figura magis oblonga, quam in Equo, arcu maiore ex adverſo oeſophagi obſolete impreſſo, hinc verſus pylorum magis ventricoſo. *Oeſphagus* diametro pollicis. *Inteſtinum tenue* longitudine $22\frac{1}{2}$ vlnarum ruthenicarum ſeu quinquaginta circiter pedum pariſinorum, lumine inaequali, a circumferentia 4''. ad 6''. 10''' variante. *Coecum* ingens, celluloſum, equino ſimillimum, longitudine ſesquitripedali, octoque pollicum diametro. *Colon* itidem equini adinſtar cellulis criſpatum, longum 9 pedes cum dimidio, diametro plus quam quadripollicari. *Rectum* cellulis deſtitutum, $5\frac{1}{2}$ pedum longitudine.

Renes erant pugno maiores. *Vterus* bicornis, cuius *vagina* longitudine 12 pollices aequabat. *Vrethrae* orificium a labiis vuluae introrſum ad 5''. 6'''. remotum, digitum facile admittens, valuula cutacea, perampla contectum. *Vteri* orificium digito patu-

patulum, collum 5''. intus rugis longitudinalibus porcatum; *Cornua* non valde elongata. MESSERSCHMIDIVS poſt xx Auguſti femellam Hemioni disſecans in altero cornu inuenit *foetum* (vt eius verbis vtar) "mure domeſtico fere maiorem, ſuis membranis inuolutum. *Chorion* libere fluctuans, nullis „condylomatibus vel placentis, neque in chorio, „neque in vteri parietibus vllibi conſpicuis. *Ouarium* eius lateris erat ouo columbino ſubpar„ (auctum certe corpore luteo) "reniforme, durum, compactum; cum tuba Fallopiana tortuoſe ad vterum „procurrente et carunculae maioris ope in interno „vterini cornu cauo praecluſa. Ex ouario per longitudinem diſſecto eximi nudis digitis potuerunt „ouula fere quina, piſo aequalia, membranacea, „diaphana, humore limpido, flaueſcente ſcatentia, „quae aquae feruenti iniecta momento citius coagu„labantur in duritiem albuminis gallinacei, cum ali„qua tamen mucciditate„. Haec MESSERSCHMIDIVS.

Thoracis cauum peramplum. *Pulmo* vterque bilobus; dextro acceſſorius *lobus impar* praelongus, retroflexus, cum ſiniſtro quoque pulmone continua ſubſtantia cohaerens adeoque vere intermedius et mediaſtinus. *Cor* vt in Aſino, maximum, mole caput pueri decennis aequans, longitudine pariter atque diametro baſeos circiter ſpithamali, conico-acutum. — *Thymus* glandula circa manubrium ſterni parenchymate diffuſa, cordis vaſa atque tracheam obtegit.

SCELETI oſſa equinis admodum ſimilia, ita vt vix deſcriptione indigeant; imprimis differt cranium, quod itaque cum equino accuratius conferam. *Frons*, in Hemioni cranio, cum roſtro in continuo plano rectilineo pergit; *bregmata* conuexiora, *criſta* occipitalis atque *condyli* prominentiores quam in Equo; *maxilla* inferior multo latior, angulo circulari quidem, ſed pleniore. *Orbitae* circulares, ſed antice inciſura et crena lacera ad foramen ſupraciliare. *Cerebri cauerna* vix ouo anſerino capacior, diametro longitudinali 3''. 5'''. tranſuerſali 2''. 6'''. Occipitales *condyli* quaſi collo eleuati proprio, cuius circumferentia 7''. *Facies taurina* vel bubalina potius, quam D'AVBENTONO obſeruante equinum cranium inuerſum ab occipitali latere inſpicientibus offert, ob inſignem illam prominentiam condylorum, proceſſus hyoïdeos ſubaequantium, in Hemiono paululum deformata. — Reliqua vix differre viſa ſunt. Cranii totius, cum maxilla plano cuidam impoſiti, altitudo verticalis ad criſtam occipitalem erit 10''. longitudo a ſumma criſta ad marginem alueolarem maxillae ſuperioris 18''. 7'''. baſis trianguli, quam conſtituit longitudo maxillae inferioris, a dentibus primoribus ad conuexitatem angulorum, 11''. 7'''.

Latitudo cranii maxima inter poſticos margines orbitarum - - -	0'. 6''. 8'''.
—— minima inter frontales inciſuras orbitarum - - - - -	0. 4. 7½.

Diſtan-

Diſtantia inter angulos maxillae inferioris	$0'$.	$2''$.	$8'''$.
—— inter condylorum collum - -	0.	4.	2.
Subtenſa maxillae inferioris a ſummis dentibus ad condylos ſummos -	1.	2	1.
Altitudo ramorum maxillae ab angulis ad condylos - - - - -	0.	6.	9.
—— ad proceſſus coronoideos - -	0.	8.	2.
Diſtantia ramorum mandibulae ad angulos	0.	3.	$7\frac{1}{2}$.
Latitudo oſſis maxillae infer. ſumma ad angulos - - - - -	0.	4.	1.
—— —— ad baſin condylorum - -	0.	2.	$3\frac{1}{2}$.
Diameter orbitarum - - -	0.	2.	$1\frac{1}{3}$.
Latitudo oſſium naſi ad frontem - -	0.	4.	11.
—— —— verſus extremitatem - -	0.	2.	4.
Oſſium naſi pars vltra ſinum prominens	0	2.	0.
Longitudo maxillae ſup. vltra hiatum narium	0.	4.	9.
Altitudo oſſis occipitalis a foramine ouali ad marginem criſtae - -	0.	2.	6.
Diameter foraminis oualis verticalis -	0.	1.	$1\frac{3}{4}$.
—— —— tranſuerſus inter condylos -	0.	1.	$\frac{3}{4}$.
—— cranii inter hiatus zygomaticos minima - - - - - -	0.	3.	1.
—— —— inter proceſſus coronoideos maxima - - - - - -	0.	3.	$9\frac{1}{2}$.
Diſtantia inter molares poſtremos -	0.	2.	4.
—— —— anticos - - - -	0.	1.	4.
Latitudo iſthmi maxillae inferioris -	0.	1.	$2\frac{3}{4}$.
Arcus alueolaris dentium primorum -	0.	3.	6.
Latitudo dentium primorum ſimul -	0.	3.	11.
—— —— mediorum ſupra - -	0.	0.	8.

Eorun-

Eorundem craſſities - - - -	0′.	0″.	$4\frac{1}{4}$‴.
——— altitudo - - - -	0.	0.	8.
Dentium molarium poſteriorum latitudo	0.	1.	2.
Latitudo primorum molarium ſuperius -	0.	1.	7.
—— —— inferius - - -	0.	1.	$3\frac{1}{4}$.
Craſſities molarium ſumma ſuperius -	0.	0.	11.
—— —— inferius - - - -	0.	0.	7.
Altitudo molarium extra alueolos -	0.	0.	6.

Vertebrae in vniuerſum 55. *Thoracis* 18. ſubaequales; et *coſtae* vtrinque totidem, quarum ſeptem verae, reliquae ſpuriae. *Lumbares* vetebrae quinque, quarum tertia proceſſibus transuerſis latiſſima; *Os-ſacrum* ſeptempartitum; *caudae* vertebrae 18. a prima (1″, $1\frac{1}{2}$‴.) ſenſim breuiores. Extremorum oſſa ab equinis vix diuerſa. *Carpus* octo oſſiculorum, diuerſae molis et figurae, geminata ſerie ſibi incumbentium. *Tarſus* ex oſſiculis ſenis, calcaneo, aſtragalo, ſcaphoide, cuboide et duobus innominatis, a ſtructura ruminantium alienis, vt in Equo, compoſitus. Extremitatum menſurae ſupra traditae ſunt; taedioſum foret minutas in forma oſſium differentias ſectari, quae ſaepe vix in oculos cadunt.

Omnes vt breuiter colligam differentias, *mole capitis* inter Caballum et Aſinum medius eſt Hemionus, ſed longius habet vtroque. Eiusdem et *aurium* proportione circiter cum Zebra conuenit. *Dorſi* formam plane ſingularem obtinet, angulatam quidem, vti Aſino, ſed arcuatam ſimul, qualis in nullo congenerum animalium obſeruatur. *Trunci* reliqua

liqua circumcaesura, *vngulis*que similior Asino, *artuum* proportione magis cum Caballo conuenit. *Caudam* etiam asinina magis depilem gerit, fere qualis in Zebra est, sed longiorem et vaccinae similem. *Colore* constanti differt ab omnibus, *loro* spinali quidem Asini, sed nulla trabe transuersim cruciato, diuersus. Tota forma vtique magis cum hybrido Mulo, quam cum congeneribus speciebus, consentit, a quo, nisi cauda et forma spinae, admodum parum differre videretur. Sed ex omnibus satis apparet peculiarem esse et a citatis omnibus distinctissimam speciem, quae per se propagatur et ita propria est Asiae, vti Zebra Africae, quum contra communes vtrique terrae videantur esse Caballus et Asinus.

TETRAO ARENARIA,

DESCRIBENTE

P. S. PALLAS.

Intactum ornithologis Tetraonem mihi videor describere, qui tamen notabili similitudine affinis est *Alchatae* Pyreneas Caucaseasque Alpes incolenti, inter quam et *Tetraonem*, quam alibi (*) descripsi, *paradoxam* quasi medium locum occupat. Nostra non, vti prior, in locis montosis viuit, sed posterioris ad exemplum arenosis tantum desertis delectatur. Ast licet arenas ad Irtin et in Dauuria peragrauerim vastissimas, nunquam tamen in Sibiria hanc obseruaui speciem, quae demum in sabuletis fluctuantibus, medio deserto inter Rhymnum et Volgam extensis, circaque Volgam versus Astrachaniam late patentibus, copiosissime oblata est, quando deserta illa An. 1773. aestate, sequentique vere perlustraui. Semina scilicet Astragalorum maiora praesertim pro victu eligit, qualia sunt alopecuroidis, Ciceris et physodis inter arenosos colles in laudata regione copiosissime prouenientium, perque totam aestatem superfluum Tetraonibus nostris pabulum praebentium. Neque dubito defectui Astragalorum tribuendum esse, quod in orientalioribus Tatariae magnae arenis,

(*) Reise durch Rußland Tom. II. pag. 712.

arenis, vbi horum parcior eſt prouentus, non occurrant, ſaltim quousque haec deſerta a Curioſis explorata nunc ſunt.

Primo vere adſunt Tetraones arenariae; an vero in praedictis deſertis hybernent, non pro certo affirmauerim. Forſan Alaudarum atque Perdicum adinſtar illis annis, quae tepidam cum exili niue hyemen in regionibus iſtis ferunt, remanere, rigidiore bruma verſus Caucaſo vicina loca inque calidiorem Perſiam migrare ſolent. Obſeruaui ſemper per paria volantes, et incubationis quoque tempore, quod in Iunium cadit, Mas ſemper cum ſocia frequentat aquas, quarum haec ſpecies maxime auida eſt. Solent autem matutino praeſertim tempore, verſusque meridiem et occidente ſole ad hydreumata in deſerto a Nomadibus effoſſa, lacunasque aquatum venire, vbi ſiticuloſiſſimae toto pectore incumbunt ripis, vt lympha continuo tractu hauſta, Columbarum adinſtar, impleantur. Eoque ſolo fere tempore accedentem venatorem non ſentiunt, alioquin cautiſſimae, nec niſi inter volandum occidendae. Propter eandem ſiticuloſitatem nunquam longe ab aquis recedunt, ſed in vicinia nidulantur, certumque praebent per torridas illas ſolitudines peregrinantibus indicium vicinitatis aquarum. Nuſpiam copioſiores mihi occurrerunt, quam circa arenas ſcaturiginoſas ad *Burlu-chuduk*, et in locis, quae ob venarum aquae et hydreumatum copiam Quadraginta et Centum fontes (*Dytſchin* et *Soon chuduk*) a Calmuccis appellantur; et in genere, quo propius Volgae fluuio eo frequentiores, frequentes etiam in deserto Cumano, contra in aridissimis et squalidis campis versus Rhymnum nullae occurrunt. *Volant* ob alarum formam et magnitudinem leniter et continenter, columbarum fere instar, quas aliquantum et habitu referunt. Inter volandum (sedentes vero nunquam) stridulam et amoenam edunt *vocem*, Pratincolae fere similem, qua longius exaudiri possunt, et propter quam forte a Tataris ad Achtubam dispalantibus, qui Caucasea sunt progenies, nomen *Dsherak* meruerunt. *Oua* pariunt columbinis maiora, albo-pallida, quae initio Iunii in dissectis feminis matura inueni. *Nidum* vero, licet diligenter quaesitum, venatores nostri nunquam inuenerunt.

Tab. VIII. *Magnitudine* haec Tetrao Perdicem superat, *habitu* Alchatam refert. *Rostrum* quam in Perdice tenuius, prorsus vt in Alchata, cinereo-coerulescens, apice nigricante. *Lingua* angusta, canaliculata, apice integerrima. *Palpebrae* nudae, pallidae, marginibus subpapillosis, flauescentibus. *Supercilia* plumosa, tecta.

Caput albido-cinereum in MASCVLIS, vertice vsque in ceruicem gryseo-flauescenti nebuloso. *Gula* ferrugineo-fulua, colore versus latera colli diffuso diluto, trianguloque atro submedio collo terminata. *Collum* ingulumque totum, in hoc sexu, cano albida, plumis vestita singularibus truncatis, densio-

denſioribus, elaſticis, nitidis, columbarum ſimilibus. *Ceruix* inferior, dorſum totum aduſque caudam, alarumque baſes plumis teſtaceo-albidis, annulo ſingulis fuſco terminali, maculam ouatam luteſcentem cingente, notatis variantur. Inter pectus et iugulum *circulus* ater, hinc *pectus* albidum; ſed *abdomen*, femora, criſſum atra. *Subcaudales* albae, ſtrigis aliquot transuerſis nigris.

Alae magnae, acutiſſimae, *ſubtus* cum tectricibus, pennisque hypochondriorum ſubalaribus albae. Supra *tectrices* primariae remigibus concolores, caneſcentes; *ſecundariae* extus luteo-fulueſcentes, efficientes quaſi ſpeculum alare huius coloris, baſi fuſcente teſtaceoque nebuloſae. *Remiges* primariae, praeſertim quinae extimae, acutiſſimae, compoſitis alis cauda vix breuiores; *ſecundariae* 11-21, vt et primariae omnes, fuſco-caneſcentes, baſi oblique albae, pleraeque apice exterius leuiter ſinuatae; *intimae* 22-27. dilutiſſime teſtaceo cinereoque vndulatae; extremo caneſcenti-cinereae, duae margine exteriore, reliquae apice exterius toto luteae.

Cauda acuta; *rectrices* ſedecim, intermediae duae fulueſcentes, taeniolis transuerſis fuſcis; reliquae fuſco gryſeoque crebro faſciatae, apice albae.

FEMINA paulo maior Mare hucusque deſcripto, a quo differt *colore* per totum corpus pallide flaueſcente, in capite, collo, iuguloque nigro

 guttato

guttato, in dorſo *faſciolis* tranſuerſis ſagittatis, crebris variegato; *Pectus* illi pariter albidum, circulo nigro iugulum diſtinguente obſoletiore; *Gula* flauedine vix vlla tincta, lunula transuerſa nigra minus conſpicua; abdomen atque criſſum etiam huic *atra*, ſubcaudales plumae extremo albae. Notabile quoque feminis plumas circa collum iugulumque molliores eſſe quam in mare, acutas, et vndique diuerſas. *Alae* obſoletius, caeterum vt in mare, coloratae.

Pedes Tetraoni arenariae, pariter vt Alchatae, exiles; *Tibiae* breuiculae, anticae fere ad digitos vsque plumis pallidis, fuſco punctatis veſtitae; *Digiti* breues, diſcreti, nudi, ſubtus calloſi, praeſertim tubere tali haemiſphaerico; *plicae* inter anticos digitos craſſae, dimidios fere digitos connectentes; *poſticus* a calce remotior, verruciformis, *vngue* ſubulato, introrſum vergente, ceu calcare, prominulus; anticorum *vngues* craſſi, obtuſi, nigri.

Pondus huius auis ſupra Libram medicam inter binas ternasque fere vncias variat. *Menſurae* ſequentes adnotari merentur:

Longitudo a ſummo roſtro ad vropygium	$0'$.	$10''$.	$0'''$.
—— caudae - - - - -	0.	9.	3.
—— roſtri vsque ad oris angulos -	0.	0.	$8\frac{1}{3}$.
—— vlnae alarum - - - -	0.	9.	0.
—— expanſarum alarum - - -	2.	2.	10.
—— tibiae - - - - -	0.	1.	0.
—— digitorum anticorum medii cum $4'''$. vngue - - - - -	0.	1.	0.
—— extimi cum $3'''$. vngue - -	0.	0.	$8\frac{1}{2}$.

Longi-

Longitudo intimi cum vngue pari	-	o.	o.	7.
—— poſtici vnguis fere ſeſſilis	- -	o.	o.	2.

Prolobum in omnibus vacuum inueni, mediocri capicite. *Ventriculus* oui columbini mole, apice bilobus, intus nucis facile capax, adeoque tenui ſubſtantia debiliter triturans Aſtragalorum ſemina emollita, cum glarea multa permixta. *Inteſtinum* ſpithamas fere ſeſquitres adaequat; *coeca* bina ſpithamalia, digitali longitudine ab ano remota. *Teſtes* adhuc initio Iunii maſculis turgidiſſimi, lutei, vt facile appareat omnium Tetraonum in noſtris terris hanc ſpeciem tardiſſime prurire atque pullos educare.

OBSER-

OBSERVATIONES IN GADO LOTA INSTITVTAE,

Auctore

I. T. KOELREVTER.

Gadus Lota (*) adeo notus inter Europaeos eſt piſcis, vt deſcriptione quidem non egeat; Attamen aliqua in conſideratione eius obſeruaui, quae Ichthyologorum induſtriam ſuffugerunt, et in philoſophicam praeſertim piſcium cognitionem redundant. Itaque ea breuiter e deſcriptione Lotae hic excerpſiſſe, ideo haud inutile viſum eſt, quod ea deſcriptores hodiernos admonere poterunt, ne in externa obiectorum deſcriptione et in ſuperficie quaſi haerentes intimius naturae examen negligant, quod ad Phyſiologicos nobilioresque Zoographiae vſus ducere paſſim poteſt et plerumque etiam in tritiſſimis atten-

(*) Gadus (*Lota*) dipterygius cirratus, maxillis aequalibus. LINN. *Syſt. nat. ed. XII. p. 440. n. 14. Fn. Suec. 315.*

Gadus ſ. Silurus cirro in mente vnico *Art. gen. 22. Syn. 38. Sp. 107.*

Muſtela fluuiatilis, GESN. *Hiſt. piſc. Tigur. 1558. p. 209.* cum fig. *Aldrov. Ichth. 648. 577. Ionſt. piſc. 146. t. 28. f. 6 et 168. t. 29. f. 10. Salv. piſc. 213. Schonev. ichth. 49. Charl. onom. 159. Will. ichth. 125. Raj. piſc. 67, 68.*

attentos ſcrutatores non ſine inuenti cuiusdam vel vtilis vel curioſi praemio dimittit. Primum itaque externarum partium peculiaribus quibusdam momentis inhaerebo, anatomica notatu digniora in fine adnexurus.

Plane ſingulare primum eſt, quod in Lota ſaepius obſeruare mihi licuit, poſt mortem non tantum opercula cum membrana brachioſtega valde diduci et item os tanto rictu hiare, vt vsque in fauces proſpectus liber pateat; ſed etiam dorſum in ſtatu exanimi ſolito magis depreſſum, quaſi opiſtho tonicum, inferiorem contra corporis ambitum magis arcuatum et ventricoſum deprehendi, quam in viuo piſce fuerat; id quod in aliis huiusmodi aquatilibus ſub iisdem circumſtantiis euenire haud ſolet.

Narium foramina in Lota quaterna, eaque valde inter ſe remota adſunt: harum oculis proxima a margine orbitae duarum linearum interuallo diſtant, ſubrotunda nec membrana tecta. Pari ab his diſtantia anterius paulloque ſuperius ſita ſunt alia, anguſtiora illis, et ad marginem poſteriorem *membranula* lineari, tres quatuorue lineas longa inſtructa, quam quis facile barbulam vocaret, ſi in piſce viuente, aquae immiſſo, erectam ac fluctuantem eam viderit. Haecce duo narium vtrinque foramina aquae peruia inuicem ſunt.

Sub capitis cute varii latent *ſinus* muciferi, quorum vnus vtrinque ſuper oculum lineae lateralis verſus principium excurrit atque illud excipit. Si

 in

in hunc, cute antea eum in finem cultello diſſecta, aerem inflaueris, facile omnes reliqui eiusdem lateris, ſubinde etiam alterius ſimul diſtenduntur. *Linea lateralis*, quam ſquamae valde exiguae, aggregatae, caeteriſque multo minores conſtituunt, toto ſuo decurſu de via recta parum declinat. Latent ſub hac linea, ab eius principio ad tertiam totius piſcis longitudinis partem, oſſicula decem (fortaſſis et plura, vlterius enim haud proſecutus ſum) ſeu canaliculi dimidiati, muciferi, a primo ad vltimum magnitudine ſenſim decreſcentes. Primus isque maximus, ſc. $2\frac{1}{2}$ lin. longus, antice obtuſus ac latus, poſtice vero acuminatus et anguſtus, ſinus cuiusdam muciflui, ſibique contigui extremo reſpondet, cauitasque ipſorum vtrique communis eſt.

Errant qui in Lota *pinnam dorſalem* tantum vnicam eamque interruptam, vt in Lucioperca, conſtituunt. Etenim prior pinna, quae breuis eſt, *re vera diſtincta* apparet a ſecunda ad caudam vsque extenſa; cutis videlicet ſquamoſa, praetereaque nihil, ſpatiolum inter vtramque intercedens occupat. Inter caudam et ſecundam dorſi itemque ani pinnam interſtitium proprie nullum eſt.

Quantum denique numerus radiorum in pinnis Lotae variare ſoleat, e ſequenti comparatione trium inuiduorum, quae diſſecui, patet:

Primae	Pector.	21.	ventr.	7.	dorſ.	$\frac{13}{82}$	ani	75.	Caudae	42.
Alteri	——	21.	——	7.	——	$\frac{10}{74}$	—	59.	——	46.
Tertiae	——	19.	——	7.	——	$\frac{13}{75}$	—	71.	——	45.

Proce-

Procedo ad internas partes, quarum in tribus ſpeciminibus inter decem et 12 pollices longitudine aequantibus comparationem inſtitui.

Hepar aliquantum inconſtantis, quoad lobos, figurae et proportionis eſſe ſolet. Coloris eſt pallide rubicundi, et per dimidium fere caui abdominis exporrigitur, ſuper ventriculum, appendicum pyloricarum radices ac inteſtinorum partem expanſum. Figura eius in genere quodammodo flabelliformis eſt, anguſto ſcilicet principio circa diaphragma incipit, et prout abdomen ampliatur ipſum quoque latitudine creſcit. Margo eius inferior circularis, eumque verſus tenuatur ſubſtantia. In hypochondrio dextro ſubſtantia hepatis ſino rotundato quaſi exſciſſa eſt, duodeni tantum colique flexuram excipiente. Summitas viſceris anterior lobulo oblongo aucta, qui non in omnibus praeſens eſt. Siniſtra portio in lobum grandiorem, ſub poſtica ventriculi facie ſitum, dextra in minorem, ſub coli flexura reconditum terminata. In tertio, quod diſſecui, ſpecimine potior hepatis portio in ſiniſtro hypochondrio erat recondita: dexter ſcilicet lobus acuminatus, mediae magnitudinis; intermedius ſive anterior minimus; ſiniſter omnium maximus ac bipartitus, lobulo interiore aut ſuperiore obtuſo, exteriore longiore et acuminato; nec praeter hos vllus. In eodem *Vermiculi* nonnulli albicantes filiformes, a dimidia linea ad dimidium pollicem longi, altero extremo craſſiores, altero tenuiores rugisque transuerſis notati, conuexae hepatis ſuperficiei con-

 voluti

voluti inhaerebant, quos pro Gordio marino *Lin.* agnoſco. Extrema tantum viſceris membrana coërceri, eaque facillime extricari mihi videbantur, relictis quaſi lacunis in ipſo parenchymate exſculptis, quae pro nido fuerant. Vnus etiam alterue vermiculorum inter meſenterii partem, appendices pylori connectentem, delitescebat, folliculo quaſi proprio inuolutus. Viuentes ii vermiculi hirudinum more pro lubitu vel contrahi vel extendi poterant, tumque ipſorum extremitates modo rotundatae, modo acuminatae viſae; ſed guttula ſpiritus vini ſuperfuſa eos momento citius necabat.

Veſicula fellis Lotae arcui duodeni ſubſtrata, aequalisque fere vbique latitudinis, ductum ſuum cyſticum breuiſſimum diſtantia aliquot linearum a proximis pylori appendicibus in duodenum immittit. In verminoſo illo hepate cyſtis rubicunda et bile vacua inuenta eſt.

Oeſophagus ſupra pollicem longus, 4 lin. circiter latus, teres, ſubſtantiae magis compactae, rugisque longitudinalibus albentibus et notabilioribus diſtinctus, quam *ventriculus.* Et *is* quidem duplam fere oeſophagi longitudinem habet, diametroque dimidium axeos paullo ſuperat, ſaccum efformans ampliorem, oblongum ac fere membranaceum, in quo partes laruarum aquaticarum, ariſtae piſcium, teſtarumque comminuta fragmenta reperiri ſolent.

Pylorus ſacculum minorem refert, in omnes partes 5 lineas circiter diametro aequantem, qui textu-

textura compactiore et craſſiore a ventriculo facile dignoſcitur. Ad principium colli eius anguſtioris, iugum valuulofum, non in omnibus tamen valde conſpicuum, apparet. *Appendices* pyloricae in vno ſpecimine foemineo 25. binis ſaepe circa baſin inter ſe concretis, in alio eiusdem ſexus 29. quinque oſtiis communibus in inteſtinum hiantes, quorum duo proxime ſub pylori valuula, reliqua tria paullo inferius in triangulum poſita; in tertio 46. inque verminoſa iſta Lota, itidem foemella 40. numeratae fuerunt. Et in hac quidem omnes quatuor communibus oſtiis proxime ſub duodeni principio inſerebantur. Aderat in eadem Faſciola barbata LINN. quam in *Nouis Commentariis Petrop. Tom. XV. p.* 499 *et* 513. nouo nomine generico *Acanthocephalum* vocaui, et internae duodeni tunicae ex oppoſito papillae ductus cyſtici inhaerebat.

Hinc excipit *Duodenum* ab initio amplum ſatis, rugisque deſtitutum, quibus contra ieiunum erat inſtructum; totus praeterea inteſtinorum tractus, imprimis vero duodeni pars inferior, glandulis minimis innumeris ſcatere mihi videbatur, quae in ipſo duodeno ita conſpicuae erant, vt albentia veluti puncta per inteſtini tunicas pellucerent.

Lien pallide rubicundus, oblongus, planus ſere ac tenuis, circa ouarii dextri ſummitatem inteſtino recto, meſenterio mediante, leuiter adnexus aderat.

Ouaria (Nouembri) maxima, oblonga, ouulis minutiſſimis, pallide flaueſcentibus referta. Dextrum

 ſiniſtro

ſiniſtro multo maius; vtrumque circa inteſtini recti finem coadunatur in vnum, communique pone anum ouiductus oſtio gaudet, quod immaturis adhuc ouis externe haud conſpicuum eſt.

Renes duo, ſupra diaphragma mole maximi, infra hoc ad imum abdominis vsque ſuper apophyſes vertebrarum transuerſas rariori textu decurrendo, circa veſicae aereae extremitatem in vnum corpus coaleſcunt et, aucta ibi valde ſubſtantia, totum caui abdominis angulum, vlterius productum, replent.

Veſica vrinaria capax, rugoſa, vna parte eaque longiore libera, altera veſicae aereae, renum extremo atque peritonaeo, (quod per totam aluum eſt argentei coloris, punctis nigricantibus rariſſimis adſperſi), arcte adhaeret. Fundus eius in *vno* ſpeciminum noſtrorum recremento rubicundo, renum ſubſtantiae haud abſimili refertus, ſeptoque in duos ſinus quaſi diuiſus, quorum dexter ſiniſtro multo amplior et profundior erat. In *altero* lineari-oblonga, fundoque leuiter incurua, extus peramplo patebat orificio. *Tertio* denique varie anfractuoſa et turgida fuit. *Vrethra* ita breuis, vt fere nulla; eiusque orificium ab ouiductus oſtio lineae circiter interuallo diſtat, ani principio proximum.

Maxime memorabile conformationis momentum in *Veſica aërea* Lotae obſeruaui. Ea quidem ſimplex eſt, inferne ſubcylindrica, ſuperne ventricoſa, et ſummitate in crura duo breuia, obtuſa et ampla diuiſa, ideoque quaſi cordata, ſed per totam

caui

caui abdominis longitudinem extenſa. Pars inferior ſubcylindrica, primum anguſtior, verſus extremitatem ſenſim ampliatur, amplitudine apophyſium transuerſarum in vertebris latitudini ſiue nexui cum coſtis exacte reſpondente. In facie viſceribus obuerſa ventris veſicae, 10 lin. circiter a baſi crurum diſtantia, non exacte in medio, ſed paullo dexterius, circulus notari meretur pellucidus, piſi magnitudine, in quo tunica exterior veſicae deficit. Huic circello inſeruntur vaſa duo, ni fallor arterioſa ab aortae maiori ramo ſuper dextrum veſicae crus excurrente, ramulosque cum hepati, tum ventriculo ac meſenterio ſubminiſtrante, prouenientia (*). Fallunt igitur ac falluntur maxime, qui vaſa iſta ſanguinea pro ductu aereo, qualem tamen nullum vsquam emittit veſica Lotae, explorato et aperto habuerunt et deſcripſerunt. Haec ipſa bina vaſa ſanguinea, ſtatim poſt ingreſſum in veſicam, in arbuſculas circiter ſex, denſas, e circulo iſto pellucido, velut e centro radiatim excurrentes, per infimas ramificationum ſubtiliſſimarum gradus iterum, iterumque ſubdiuiſas, ac plane elegantiſſimas diſpertiuntur.

Apparatus iſte plane ſpecificus, ac fabrica ipſius veſicae aereae maxime ſingularis, aperte quaſi teſtantur, naturam hic momentoſum moliri opus, ſecernendo ſc. aërem euolutum e ſanguine, cui fixus antea inhaerebat, ac ſuperfluam illius quantitatem reſor-

(*) In Perca fluuiatili venae duae cum arteriola intermedia obſeruantur.

resorbendo, fixamque iterum sanguinis massae reddendo. Vtrumque fieri debere probat 1.) ille ipse apparatus, tam ratione distributionis vasorum sanguineorum, quam cuilibet secretionis organo propriam semper ac ab omni alia, vulgari inprimis mere nutriente, longe diuersissimam Physiologi optime agnoscunt, quam etiam respectu diuersitatis tunicarum, glandularum aliarumque partium, hanc aëris officinam saepius componentium. Exempla hac in re commemoranda sunt inter alia Ophidion barbatum L. Silurus Clarias L. Gadus Merluccius L. apud *Willughb. p.* 112. 127. 174. et Scomber Amia L. siue Leccia Ital. ex obseruatione *Fracassati in Malpigh. Oper. omm. Lugdb.* 1687. *Tom II. p.* 144. 2.) Ductus pneumatici aliorum piscium, fluuiatilium potissimum eoque vere gaudentium, structura, quippe quae pro vario valuularum (*a*) quibus altera illius extremitas circa Oesophagum vel ventriculum instruitur, situ ac conformatione aëris secreti non tantum quidem, quantum forte alias necesse esset, sed sub certis vel aquae in qua degunt, vel aëris externi conditionibus mutatis, superabundantem eius partem, bullarum sub forma, facile eructari quidem sinit, exteriori autem aditum omnino prohibet. Praesentia aëris in vesica piscium, ductu isto pneumatico reuera carentium, iugem mutuamque ipsius secretionem aeque ac diminutionem necessario

(*a*) Vid e. g. Cyprini rutili Anatomen in *Nou. Comm. Petrop. Tom. XV. p.* 501.

cessario praesupponens. Piscium autem maximam gregem, pelagicorum inprimis, quos inter Gadi, Blennii, Spari, Labri, Sciaenae, Scombri, Siluri aliique iis maxime affines, numerandi, clausam penitus habere vesicam; minorem longe ductu aëreo instructam; minimamque, vel cetacei ordinis, vel abysso plerumque adscriptam vesica natatoria plane carere, analogia duce contendere ausim. Largam sane hic obseruationum omni attentione dignissimarum messem assiduos anatomiae comparatae, nimium quantum semper neglectae, cultores in posterum esse facturos, persuasum mihi est, remque totam ad liquidum perduci facile posse, ab iis, quibus multigenos pelagi pisces secandi data erit occasio, mediterraneo mihi nunc, proh dolor! plane denegata. Primam istius secretionis notionem vesica Percae fluuiatilis ac Luciopercae, simili vasorum sanguineorum apparatu insignium: immo ipsius Gadi Callariae ac Lotae folliculus aëreus, in quibus singulis ductum pneumaticum, adhibita omni licet industria, inuenire non poteram, iam ante hos septendecim annos, tunc temporis Petropoli degenti mihi suppeditauit; inque aliorum quoque piscium conformationem studiosius postea inquirendo, ac varia huc spectantia momenta probe computando, veritatis eius tandem penitus conuictus sum. En igitur nouum in physiologicis, ac prorsus singulare secretionis genus, quod in hunc vsque diem si non plane ignoratum, certe a nemine rationibus solidioribus illustratum atque confirmatum est.

Caeterum quod ad ſubſtantiam veſicae aëreae in Lota attinet, tunica eius exterior, praeſertim ad ſubcylindricam partem albida, magisque opaca eſt, quam ad ventrem; hac vero ſeparata interior diaphana, perlarum ac argenti colore reſplendens, in conſpectum venit. De caetero veſica aërea vertebris, earumque apophyſibus ita arcte adhaeret, vt integra inde ſeparari haud queat.

In binis, quas diſſecui, cauitas abdominis abſoluebatur *coſtis* vna et viginti, quarum quatuor ſuperiores cum ipſis 3, 4, 5 et 6 vertebrarum corporibus, ſequentes autem cum 17 transuerſis, valdeque prominentibus earum apophyſibus coniunctae erant. *Vertebrae* trunci in his 23, caudae 39 numerantur; At in tertia numerus priorum aeque ac poſteriorum vna maior fuit.

Notanda denique ſupereſt *rimae* pone brachiarum vltimam in fauces patens; quatuorque faucium *tubercula* ſeu areolae oſſeae, denticulis obſitae ac mobiles, quarum mutuo ac continuo attritu cibi interpoſiti comminuuntur. Harum duae ſuperiores, ſubrotundae, muſculo teguntur lineari, robuſto, ac pollicem circiter longo, cuius principium vtrumque tertiae, quartae et quintae potiſſimum vertebrae latus excipit; duo inferiores autem, oblongae, illisque parallelae muſculo mouentur ex angulo branchiarum antico orto.

LACER-

LACERTA APODA
DESCRIPTA,

Auctore

P. S. PALLAS.

In vniuerſo Corporum organicorum Imperio pulcherrimum contemplatori ſpectaculum offerunt Affinitates naturales, quarum vinculis Conditor vbique fere ſpecies et genera, immo ordines quoque naturales et ſummas claſſes inter ſe concatenauit, maximeque diſſimilia, addendo hinc, demendo illinc, mutando, molliterque aſſimilando diſſentientia, extinctis quaſi per gradus vmbris, continua fecit. Hanc in cogitantis atque comparantis animi delectamentum emicantem harmoniam eadem diligentia affectauit Natura, ac pulcritudinem vniuerſi, rerumque omnium in hoc globo creatarum in delicias ſenſuum vbique luxuriantem. Et ſi quidquam, certe haec duo maxime Creationis momenta homuncionum gloriolae, totius noſtri globi fines in ſe concentrantium fauerent, ſi barbarus homo aeque pulcritudine naturae moueretur, ac politiorum mortalium vbique modica manus; aut ſi non harmonica illa rerum naturalium concatenatio penitioris atque ſublimioris eſſet indaginis. Hinc non finem huiusmodi precariam, ſed cauſam potius conſenſus naturae quaeſiuerunt recentiorum aliqui, haud tamen hucusque adtigiſſe dicendi ſunt, licet *Ill.* LINNEVS eiusque diſcipulus *Nobiliſſ.* ALSTROEMERIVS magnam vtique ſpeciem veritatis praebuerint opinioni, qua contenditur: initio rerum tot modo animalia vel plantas, quot ordines naturales vel ſumma genera exſtant, creata fuiſſe, quorum adulteriis in prima mundi infantia ſenſim prognatus ſit, quem nunc perpetuum videmus, affinium et congenerum ſpecierum numerus. Quae ſi vere in rerum Natura vnquam exſtitit, per adulteria atque hybridorum propagationem, ſpecierum multiplicatio; nullam rationem video, quare ab antiquiſſimis, quorum ſcripta monumenta exſtant, ſaeculis plane ceſſauerit et non potius ad noſtra vsque tempora continuata, imo, propter auctum numerum ſpecierum e diuerſis connubiis productarum, harumque tanto maiorem analogiam et aequalitatem, frequentior etiam facta ſit, ita vt hodie vulgo videres nouas enaſci ſpecies, quae diſtinctae perſiſtant et in nouam ſtirpem multiplicarentur. At ſi noſtro aeuo adulteriis etiam maxime affinium animalium, et praeſertim hybridorum in nouas ſpecies propagationi obſtacula nouimus; quaenam olim cauſa eadem obſtacula ſuſtulit, quando deficientibus, ſecundum iſtam hypotheſin, ſpeciebus intermediis, ſtationariae paucae in vaſto Naturae campo diſpoſitae multo maiori adhuc gradu diſſimilitudinis a ſe inuicem abhorrebant? — Mihi potius videtur, et obſeruationes variae confirmant, plerumque illas ſpecies, quae inter ſe quammaxime ſunt ſimiles, tanto maiori antipathia et horrore ef-

fluuio-

fluuiorum mutuo a promifcuis adulteriis arceri. Et licet induftria humana hybrida produxerit multa, quorum nonnulla foecunda effe et ambiguam ftirpem propagare non folum concedo, fed etiam confirmo; ea tamen experientia docet fucceffu generationum ad alterutrius parentis formam et habitum fenfim redire, copulisque cum primaria ftirpe pronioribus plane deleri. Adeoque cum iis potius fentio, qui putant fpecierum numerum ab initio rerum talem, qualis nunc exftat, conditum fuiffe, cafteque a Natura feruari, et affinitates earundem in Creationis fchemate ftabilitas fuiffe, vt totius harmonica effet pulcritudo, quam in fingularum fpecierum forma et ornatu, immo in partibus indiuiduorum fingulis miramur.

Luculenta interim affinitatis huius naturalis exempla Zoologia praefertim hodierna iam nunc detexit; innumera vero, haud minus admiranda, nepotes manent. Non inter poftrema huius naturae inuenta collocari merebitur *Reptile, in quo aliquamdiu dubius haefi, an ad Serpentes vel Lacertas effet referendum.* Primo adfpectu quilibet Anguem appellauerit; fed praeter gracilem corporis longitudinem, pedumque organicorum defectum, nihil admodum habet quod Angui, vel quod non Lacertae conuenire poffit. *Capitis* proportio et forma, *dentes* in ore obtufi, *lingua* perfecte lacertina, *oculi* vt in Lacertis palpebrarum ope claufiles, *aurium* externi meatus valde confpicui; *fquamarum* dein compofitio annularis, nulla abdominalium, quae in anguibus numerantur, diſtinctione, *tractus* per latera longitudinalis, mollior, in antico initio quaſi cicatrice pedis notatus, *pedunculus* vtrinque ad anum exſertus, ſubdidactylus, *caudae* fragilitas, longitudo, circumcaeſura prismatica, verticilli; *interna* denique ante omnia *ſtructura*, rudimenta *ſterni* oſſiumque *peluis*, Anguibus plane denegata, *coſtae* robuſtae, non in caudam, imo vix vſque ad anum productae, quum Serpentibus etiam per caudam continuentur, *vertebrarum* caudae conformatio hinc dependens, totiusque *ſceleti* conſiſtentia magis oſſea; *pulmo* itidem, vt Lacertam decet, duplex, *inteſtinorum* ſitus atque conuolutio, ab omni parte Lacertam eſſe pronunciant, nullumque inter Serpentes exemplum analogiae agnoſcunt. Quandoquidem etiam Anguis bipes *Linnéi*, qui ad noſtrum Reptile affinitatis gradu proximo accedit, licet pedibus ſit magis conſpicuus, tamen defectu aurium et conſtructione reliqua a Lacertis longius abhorret. Liceat itaque LACERTAM *apodam* quamvis paradoxo nomine appellare miram ſpeciem, cuius formam et fabricam hic minutius perluſtrabimus, non multo minus ambiguam, quam eſt *Sirenis* dictae *Lacertinae*, per GARDENIVM detectae, de qua mihi tamen nondum ſatis liquere videtur, quum Lacertarum Americae copioſiſſimarum cuiusdam Laruam eſſe potius haereat ſuſpicio (*), quam pedum poſteriorum defectus ſolus non diluit.

In

(*) *Act. angl. vol. LIV. pag. 191.*

In Reptili noſtro: *Caput* lacertinum, magnum, corpore craſſius, tetraëdrum, roſtro conico, decliui, obtuſo. *Oris* margines loricati, acie arguta conniventes; *dentes* in marginibus maxillarum (*Tab. IX. fig.* 2.) obtuſi, inferiores craſſiores, in vtraque maxilla anterius, retrorſumque ſenſim minores; minimi in antica parte maxillae ſuperioris, vbi deficiunt inferiori; praeterea *palatum* tuberculis trium parium longitudinalibus, tuberculoſis, oſſi innatis exaſperatum. *Lingua* (*Tab. X. fig.* 1. *a.*) omnino lacertina, carnoſa, plana, bifida, laciniis fuſcis mollibus. — *Nares* ſimplices, patulae. — *Oculi* in area depreſſa laterali capitis, *palpebris* clauſiles, quarum *inferior* lata, ruga calyculata, *ſuperior* ad ſupercilium obtuſe prominulum deliteſcens, anguſtiſſima. — *Aurium* aperturae pone rictum longiſſimum patulae, inſignes, tympano, vti Lacertis, reſpondentes. *Loricae* capitis oſſeae, duriſſimae, cranio adnatae, figura et diſpoſitione ea, quae Lacertis eſſe ſolet. Tab. IX. Fig. 1.

Corpus a capite ad anum aequali craſſitie teres, ſupra conuexum, ventre planiuſculo; totum cataphractum eſt *ſquamis* magnis, planis, obſolete reniformibus, oſſeis et ſupra oſſeam laminam epidermide corneola incruſtatis, quae per ordines annulares, ſeriesque longitudinales reſpondent. In regione pedum anticorum incipit *foſſa* longitudinalis mollior, minutis ſquamis obſita, quae dilatationi corporis, cui loricae iſtae plane repugnant, fauet inque ipſo initio quaſi cicatricem ſiſtit, vbi pedes anticos collocandos fuiſſe, quaſi nutu indicauit Natura. In ſtatu

Tab. IX. ſtatu naturali, quum aluus neque eſca, nec ouario repletus eſt, foſſa illa in rugae veluti ſpeciem collapſa apparet, lorica dorſali ventralem margine paene contingente. Eandem foſſam poſtice ad inciſuram ani terminat vtrinque *pedunculus* minimus, planus, ſquamulis quatuor imbricatus, apice obſolete bifidus: digitis ſubacutis; quem pedum poſticorum rudimentum eſſe nemo dubitauerit.

Squamae corporis *ſubtus* paulo maiores in decem ſeries digeſtae ſunt, annulosque paulo vltra centum, non numeratis pluribus gulam protegentibus, quarum ordo minus ſtrictus eſſe ſolet. *Dorſalium* ſquamarum ſeries longitudinales 13. quorum foſſae laterali proximae minores. Verſus caudam hae ſquamae ſtria longitudinali, ſenſim argutiore, angulis caudae reſpondente porcatae ſunt, quae in ventralibus plane non apparent. *Sciſſura ani* tota abdominis latitudine ſemicircularis, rugis ſub ſquamarum margine labiata, intra quas medius *anus*, et vtrinque *ſinus* coecus ſebaceus apparet.

Cauda corpore multo longior, proportione ab omni inter Serpentes exemplo aliena, ab ano ſenſim adtenuata, tota imbricata *ſquamis* reniformibus, aequaliter decreſcentibus, media ſtria argute carinatis, perque verticillos et ſeries longitudinales ita reſpondentibus, vt cauda tota euadat prismatico-angulata. Numerus angulorum hinc quoque idem eſt, qui ſerierum in quas longitudinaliter ordinantur ſquamae; adeoque in maiori parte caudae 18, in extremitate

(alter-

(alternis ordinibus eliſis) 12 anguli numerantur. Tab. IX. Propter duritiem ſquamarum cauda quoque tota duriſſima, argutis adeo aciebus, maxime verſus apicem, porcata, vt cultri inſtar vulnerent.

Longitudo Lacertae huius apodae, quae toto corpore *colore* uniformi pallide flaueſcente, interdum ſubvireſcente inſignis eſt, tripedali maior eſſe ſolet. *Proportiones* e ſpecimine maiori apponere viſum eſt; itaque

Longitudo a ſummo roſtro ad anum -	$1'$.	$6''$.	$0'''$.
—— caudae - - - - -	2.	4.	0.
—— capitis ad poros vsque auditiuos -	0.	1.	$8\frac{1}{2}$.
—— rictus oris - - - - -	0.	1.	5.
Circumferentia capitis ad baſin - -	0.	3	10.
—— corporis ante anum - - -	0.	3.	5.
—— caudae ad anum - - - -	0.	3.	2.
Diſtantia narium ab apice roſtri - -	0.	0.	$2\frac{1}{3}$.
—— —— inter ſe - - - -	0.	0.	$3\frac{1}{2}$.
—— oculorum a naribus - - -	0.	0.	5.
—— aurium a poſtico cantho oculorum	0.	0.	9.
Fiſſurae palpebrarum - - - -	0.	0.	4.
Capitis altitudo ſolida - - - -	0.	0.	$1\frac{2}{3}$.
—— latitudo ad aures - - -	0.	1.	2.
Longitudo pedunculorum ad anum - -	0.	0.	$1\frac{2}{3}$.
Latitudo ani inter pedunculos - -	0.	1.	8.

Venio iam ad ea, quae cultri auxilio obſervari poſſunt et omnia ex eodem, cuius menſuras praemiſi, ſpecimine exponam. — *Linguae* formam, quatenus externe apparet, ſupra deſcripſi. *Apex* eius Tab. X. Fig. 1.

 (*fig.*

Tab. X. Fig. 1. (*fig.* 1. *a.*) laeuis eſt, *hypogloſſis* vero (*a.*) tota craſſior, tenuiſſimis confertisque villis quaſi molliter tophoſa; eaque poſtice circumſcriptione ſubbiloba terminatur, ſinu fouens aperturam *glottidis* (*b.*) papillari forma prominentem et inſtar rimae conniuentem. *Faux* pone linguam tota (*b* — *c.*) rugis exilibus parallelis, in *oeſophagum* (*c.*) continuatis, longitudinaliter ſtriata eſt; apertura oeſophagi 1''. 4'''. diſtat a glottide, vltra quam hypogloſſis 5'''. et progloſſis bifida tantundem fere prolongantur. — *Os*
Fig. 5. *hyoïdeum* (*fig.* 5.) ſubcartilagineum, poſticis cornibus muſculis circa baſin maxillae tumentibus circumflexum, antrorſum verſus hypogloſſidem tricorne, tracheae ſuccubum; totum ceteroquin muſculis, etiam
Fig. 4. ab ipſa lingua continuis adnexum *iugo* oſſeo (*fig.* 4.), quod, ſterni ſuccedaneum, primas coſtas, cor includentes, amplectitur, et baſin cordis protegit, ipſum compoſitum e lamina lunata, arcuata, ſubcartilaginea (*a.*); oſſiculis duobus teretiuſculis, claviculas referentibus (*b b.*), extremo continuatis cartilagini quaſi ſcapulam exprimenti (β β.); interiectisque lamellis duobus ouali-ſublunatis, ſemicartilagineis (*c c*) interſtitia explentibus.

Fig. 1. *Cor* (*fig.* 1.) inter primas coſtas omne cavum explet, *pericardio* tendinoſae naturae incluſum, ouatum, ſupra depreſſum, vbi longitudinaliter eidem incumbunt ſiniſterior oeſophagus (*e.*), dexterior trachea (*k.*), mediaque iſtis inſtrata, perque coſtales ramos ſpinae vertebrarum adſtricta *Arteria magna* (*t t.*), quae vsque ad caudam deſcendit, praeterque ramos iſtos

iſtos pinnatim exeuntes, extremo ad meſenterium (*u u.*), teſtes, renes atque caudam diſtribuitur. Cordis *ventriculus* vnicus, qui carnoſa ſubſtantia perquam craſſa conſtat, et anguſtum quidem cauum, ſed per ambitum cauernis, quas lacertorum interualla relinquunt, auctum exhibet. *Auricula* ipſo corde maior, depreſſo-oblonga, aortae cuculli adinſtar circumpoſita, intus ſepto ſemibipartita. Tab. X. Fig. 1.

Pulmones (*l l.*) a corde incipiunt et vtrinque oeſophago, ventriculique anteriori parti longitudinaliter accumbunt: *Siniſter* maior (5''. 6'''. longus), laxiore membrana verſus ſpinam adnexus; *dexter* minor, breuiorque (4''. 5'''.) propter ſpatium hepati, cui adcubat, neceſſarium, membrana etiam ſtrictiore longitudinaliter adnatus. Vterque pulmo non vltra 5'''. ab anteriore extremitate, qua ſubacuti ſunt, *tracheae* bronchos breuiſſimos recipit; vterque, ſed praeſertim ſiniſter, poſtica extremitate veſicularis, inflatus; at maiori parte parenchymate elegantiſſime cauernoſo infarcti ſunt.

Oeſophagus (*e.*) tripollicari longitudine ſtrictus, deinde ſenſim in *ventriculum* (*f.*) dilatatus, qui poſtice capacior, nihilque, niſi amplitudine, ab oeſophago diſcretus, quinque circiter pollicum longitudinem explet. *Pylorus* (*g.*) acutiſſimo angulo inflectitur, vnde pergunt *inteſtina* capacia, in gyros compoſita, laxiorique meſenterio ambituoſe adnexa, vt in Lacertis, nunquam vero in Serpentibus eſſe ſolent. Totius inteſtini a meſenterio ſeparati longitudo a pyloro ad anum 1 pedem et

 nouem

Tab. X. Fig. 1. nouem pollices aequat. Extremum inteſtinum ſemipedali longitudine recto curſu ad anum deſcendit (*b* — *i.*), inſigni ſtrictura (*b*) a reliquo tractu diſtinctum, et lumine $7'''$. patens, quum tenuis inteſtini amplitudo vix $5 - 6'''$. excedat.

Hepar (*n.*) a dextris ventriculo longitudinaliter accumbit et ſuccumbit, lineare, plano-conuexum, antrorſum verſus oeſophagum adtenuatum, poſtica extremitate lateſcens, vbi a ventrali margine hiatu cyſtifero triangulari (*o*) exciſum eſt, vltra quem apex in acumen decreſcit. Totius hepatis longitudo $5''$. latitudo ſumma $9'''$. explet. *Cyſtis* fellea (*o.*) inſignis, initio duodeni infunditur.

Lien (*q.*) ampulliformis meſenterio (*u.*) medio inter meſaraicorum vaſorum truncos ſitu inhaeret. *Pancreas* exiguum (*p.*) ventriculi extremitati poſticae dexterius accubat, incluſum duplicatura meſenterii, quod et ventriculum et inteſtinalem canalem totum ſpinae vertebrarum longitudinaliter adnectit. *Glandulae* lymphaticae atque meſaraicae, vt in amphibiis omnibus, plane nullae.

Teſtes (*r, r.*) ante renum initia ſpinae vtrinque appoſiti, oblongi, $10'''$. longitudine, poſiti extra *peritonaeum* abdomen obueſtiens, quod praeſertim verſus poſteriora aterrimo colore infectum eſt.

Renes (*s, s.*) itidem ſpinae dorſi extra peritonaeum longitudinaliter adiacent, tripollicares, anterius acuminati, poſtice prope anum obtuſo fine complanati, toto parenchymate in lobulos transuerſim ſubdiuiſi.

In

In *Sceleto*, praeter *iugum*, quod ſupra deſcripſi, compoſitum, prioribus coſtis laxe circumpoſitum et ſolis muſculis inhaerens, variis conformationis momentis ſimilitudo ſumma cum Lacertis confirmatur. Praecipua ſunt 1.) quod vertebrae colli adſint diſtinctae, coſtis deſtitutae; 2.) quod coſtae robuſtae ſint, non ariſtis piſcium ſimiles, ſed craſſae, oſſeae, extremo truncatae, nulla licet cartilagine auctae, vnde quaſi deficere aliquid in illis videtur, dum praeruptae in carnibus terminantur; 3.) quod in regione ani vertebrae aliquot confertiores ſpeciem quandam oſſis ſacri aemulantur, cuius proceſſibus adligatae vtrinque haerent trabeculae duae oſſeae, imperfectae peluis rudimentum referentes et pedunculos externos ſeu pedum poſticorum veſtigia ſuſtinentes; 4.) quod vertebrae caudae proceſſuum numero totaque ſtructura, vt et coſtarum defectu a ſolita Serpentum conformatione plane abhorreant. Tab. X. Fig. 2. 3.

Cranium (vt ſingula adtingam) ſolidioris multo compagis eſt, quam in Serpente, formaque tota, duritie et contignatione vt in Lacertis maioribus ſe habet. Cerebri *cauerna* minima inter geminos parietes verticales, e trabecula perpendiculari (*a a.*) et aſſerculis ſinguli duobus oſſeis compactos, antice tota patet, et effundit neruos, in organa varios per hiatus tendentes. *Scutum* bregmaticum ſimplex, poſtice in cornua duo robuſta (*b b.*) diuaricatum, quae ab olla cerebri disiuncta committuntur oſſi vtrinque difformi, quod tympani cauum continet, et cui infra mandibula non condylo, ſed cauitate cotyloidea adarticulatur.

Tab. X. Fig. 2. 3. culatur. *Mandibula* e quatuor offibus conftat, quorum duo pofteriora ramos conftituunt, anticisque arcubus dentatis harmonia lacera coadunantur (*c.*). *Dentes* nulla incuneatione firmati, fed offe folido maxillis continui videntur, intus infigni poro excavati. — *Squamae* caput tegentes ipfa cranii offa incruftant, et in fronte anterioreque fcuti bregmatici parte adeo funt inolitae, vt nulla vi, nifi fractis offibus, feparari queant.

Vertebrae colli diftinctae tres: harum prima fiue *Atlas* cranio laxioribus ligamentis mobilior inarticulatur, et proceffum fpinalem fupra infraque habet nullum, fed laterali vtrinque crure fequentis corpus includit. — *Secunda* vertebra (*d.*) vere compofita eft e duabus in vnam coalitis et communi crifta lata, loco proceffus fpinalis, fupra inftructis, infra tamen proceffibus duobus diftinctis (licet corpora in folidum connata fint) prominentibus. Haec vertebra proceffu odontoïdeo nullo atlantem fubintrat, vnde epiftrophaeus proprie deficere videtur. — *Tertia* vertebra, nifi quod fimplex eft, proceffu fpinali lato, et fubtus fubulato priori fimillima eft. Hae colli vertebrae ftrictim cöarticulatae ridigiffimum efficiunt collum, quod longitudinem $5\frac{1}{2}$ lin. omnino aequat.

Dorfi feu trunci *vertebrae* 57. proceffibus fpinalibus latis vltimae colli vertebrae fimiles funt (*e–f.*), fubtus vero fpinam nullam exferunt, leui tantum corporum carina fubangulatae. — *Coftarum* totidem paria

paria; primum enim par articulatione ſua inter vltimam colli, primamque trunci vertebram, vltimum (*fig.* 3. *d d.*), quod omnium minimum et quaſi ſpurium eſt, inter penultimam et vltimam trunci vertebras (*e. f.*) intercalatur. Robuſtae ſunt, vt dixi, omnes, valde arcuatae, extremitate dorſali craſſae, compreſſae, altera, quae muſculis inſeritur, quaſi truncatae, nullo tamen cartilaginis veſtigio. Anteriores paulo minores ſunt, ceterum ſimiles reliquis; poſtremae iſtae duae rectiuſculae, neque apice truncatae (*d d.*). Motu in articulo eodem, quo quadrupedum thoraces, gaudent. Tab. X. Fig. 2. 3.

Vertebrae, quas ad *ſacrum* refero, quia inter ſe immobili articulatione cohaerent, transuerſisque proceſſibus ſuis, trabeculis pelui ſuccedaneis firmamentum praebent, duae ſunt numero (*g.*), inter ſe ſimillimae, quarum prior vltimae trunci coſtiferae vertebrae committitur. Corpore, dorſalique proceſſu ſimillimae ſunt vertebris trunci, ſed laterales ſeu transuerſos proceſſus habent magnos, latos, planos, extremo truncatos, poſterior quidem paulo minorem, quibus vtrinque margine per ligamenta adnectitur *trabecula* (*a a.*), quam modo dixi. — Ea quidem rectiuſcula, altera extremitate, qua firmatur, planiuſcula medioque ſtrictiore ſatis refert clauiculae humanae humeralem extremitatem; altera extremitate quaſi rhombica eſt, et extus inſigni tuberculo notata, cui inſidet *apex* cartilagineus (*b.*) minimus, pedunculum externum vtcunque ſuffulciens. Situs naturalis trabecularum (*a a*) antrorſum obliquus eſt, ſeu coſtis vltimis

Tab. X. Fig. 3. vltimis contrarius, simul extrorsum diuergens; satis mobiles autem videntur.

Vertebrarum caudae incertus est numerus, praesertim quum, propter fragilitatem caudae summam, multa indiuidua ea parte truncata occurrere soleant. Integerrimis vltra CXX. numeraui. Harum *prima* (*h*.) processibus transuersis latis sacri vertebris simillima et adproximata est, sed mobilior, et eo maxime diuersa, quod (adinstar reliquarum maiorum caudae vertebrarum omnium) processu longissimo, bicruri radice orto, teretiusculo instructa sit. Succedentibus caudae vertebris processus transuersi angustiores, gradatimque antrorsum obliquati, omnium vero coarticulatio satis rigida; et postremis processus omnes, vt vulgo, penitus obsolescunt.

Pauca sunt, quae de vitae genere moribusue *Lacertae apodae*, sic satis minutiose descriptae, addere possum. Patria eius sunt conualles herbidae, arenosae, Elaeagno aliisue fruticibus inumbratae deserti sabulosi Naryn inter Rhymnum et Volgam satis ardenti sub coelo siti. Rarius etiam ad Sarpam riuum occurrit; sed frequentior in eodem, ex quo Sarpa fluit, deserto Kumano versus ipsum Kumam fluuium dicitur esse et a studioso NIC. SOKOLOF ibi pariter, circaque Terekum lecta fuit. Solet ab accolis harum regionum proprie *Sheltopusik* appellari, quod tamen nomen etiam *Colubro petolario*, in praeruptis ad australem Volgam haud infrequenti et in magnam molem excrescenti, vulgo applicaplicatur. — Lacerta noſtra apoda inter fruteta latitare amat, et praetereuntes ſaepe ſubita ſua fuga terret, dum antris ſeſe condit. Venatur potiſſimum Lacertam agilem, aliasque Lacertas minores, quadrupedes, quarum oſſa et integra capita (corporibus iam in putrilaginem reſolutis) in ventriculo noſtrae ſemper inueni.

Dum vero diſſectae Lacertae apodae ventriculum diſcinderem, in naturam praedae deglutitae inquiſiturus, inueni chymo innatantes VERMICVLOS formae admirandae et ad nullum bene genus referendos, quorum ſpecimen *fig. Tab. X. ſexta* expresſum eſt. Suggeſſit ſtatim memoria, ſimiles fere vermes a *Celeberr.* quondam ROEDERERO in viſceribus morbo, qui Goettingae annis 1760 et 61. epidemicus fuit, mucoſo defunctorum, repertos et a discipulis eius Cls. WAGLERO et WRISBERGIO deſcriptos (*) fuiſſe. Et omnino quidem, locos horum euoluens, video alteram ſpeciem obſeruatorum a ROEDERERO vermiculorum, vel, vt appellauit, *Trichuridum*, quam WAGLERVS "in lineam ſpiralem „*contortam*, magis cineream, rigidam, elaſticam„ dixit, plane non a vermibus intra ventriculum Lacertae Tab. X. Fig. 6.

(*) Conf. De Morbo mucoſo, Liber ſingularis, quem ediderunt I. G. ROEDERER, et CAR. GOTL. WAGLER. *Gott.* 1762. 4. *pag.* 41. *tab.* 3. *fig.* 4. *b.* et HENR. AVG. WRISBERG obſeruationum de Animalculis infuſoriis Satura. *Goett.* 1765. 8. *pag.* 6. *not.*

Tab. X. Fig. 6. certae apodae repertis diuerſos fuiſſe; quum contra altera, *recta* WAGLERO, flaccida, albaque dicta Aſcaridibus omnino proxime affinis videatur et a priore, quam hic curatius perluſtrabimus, toto genere certiſſime differat.

Rectiſſime cum *Cel.* ROEDERERO citati auctores hanc vermium inteſtinalium ſpeciem pro noua, nullique ante illos deſcripta habuerunt. Miror autem veram eorum ſtructuram, quae parum conuexa lente facile perſpicitur, adeo euaſiſſe Cell. Viris, vt etiam caudam appellauerint, vbi *caput* vermis quaerendum eſſe, ſtructura illius *tuberculi* probat, quo Trichuridum caudam terminari Cl. WRISBERGIVS quoque aſſeruit (†). Hoc, quod *figura* noſtra ad *a.* expreſſum eſt, microſcopio inſpectum (A.) ſimillimam roſtro Taeniae conformationem exhibet. *Diſcus* nempe, media *foueola* excauatus, quam hic oris conniuentis locum deſignare perſpicuum eſt, per marginem radiatim diuergentes *vncinuli* coronant, quibus vermis pro lubitu ventriculi tunicis adfigitur. Sed in Taenia, praeſertim cucurbitina et hydatigena (**), proboſcidem ſimilem radiatam quatuor papillae

(†) *Loc. cit. p. 12.*

(**) Caput Taeniae hydatigenae atque cucurbitinae in *Diſſ. de infeſtis viuentibus intra viuentia p. 40.* inque *Elencho Zoophytorum p. 403.* et in *Miſcell. Zoolog. p. 169. 170.* vindicaui; viderunt et alii recentiores. Solus *Ill.* LINNEVS neque in canicidiis inuenit, neque videntibus etiamnum credit; facillime apparet tamen ſi Taeniam, praeſertim pillae circumſtant, quorum in noſtris vermiculis nihil apparet, ſed filum a diſco tenuiſſimum pergit. Idque, licet inſigne, non tamen ſolum eſt nec primarium diſcrimen, quo vermes hi noſtri a Taeniis generice diſtinguuntur. Etenim forma externa, cute elaſtica et paene dicam cornea, articulorum oſculorumque defectu et interna pariter ſtructura abludunt. Tab. X. Fig. 6.

Filum (*a* – *c*.) varie curuatum, quod a diſco vncinulato (A.) continuatur, elatere et craſſitie equinam ſetam aemulatur, et in pollicarem circiter longitudinem aequabili tenuitate pergit. Hinc lentiſſime craſſeſcit in ſpiram (*c*.) magis minusue explicatam, in plerisque vero mortuis (non enim viuentes deprehendi) in modum Trochi perſpectiui contortam, cuius extimus et maximus anfractus craſſiorem totius corporis partem conſtituit, vnde in rectum exporrectum denique adtenuatur in *caudam* acumine vncinatam (*b*), ſubaſperam, in variis varie rugoſam vel vulneratam, plerisque vero, quos inueni, vermibus plane truncam. Craſſior pars corporis, maxime quae in ſpiram contorta eſt, obſoletis *rugis* quaſi nodoſa apparet in omnibus. *Cutis*, quae totum corporis tubum conſtituit, tota gryſeo-palleſcentis, in multis ſubfuſci eſt coloris atque rigiditate, non minus quam elaſticitate Inſectorum molliorum corneolas cruſtas, vel duriorem epidermidem humanam refert. *Interanea*, licet caute diſſecauerim complures, non adeo diſtincta inuenire potui,

ſertim cucurbitinam, in canibus frequentem, cum ea parte muci inteſtinalis, cui filum inſeritur, caute abradas et mucum in aqua macerando ſolutum abluas.

Tab. X. Fig. 6. tui, vti a *Clar.* WRISBERGIO in Trichuridibus generatim deſcribuntur. Crediderim Illum e rectiori et molliori ſpecie vermium, quos ſub Trichuridis nomine comprehenderat Praeceptor, viſcera iisdem magis perſpicua deſcripſiſſe, quae horum cum Aſcaridibus affinitatem confirmant. In noſtra vero, quam *Trichuridi ſpirali* ROEDERERI per omnia ceteroquin ſimilem eſſe video, nonniſi parenchymatoſum ductum continuum, corporis craſſiorem partem opplentem videre potui; in quo non minus, quam conſiſtentia cutis, rigiditate corporis et defectu annulorum, cum *Gordiis* proxime conuenit. Sed ore et cauda ab iis quoque differt, quas tamen partes etiam in ſpeciebus variis Gordiorum inconſtantes eſſe perſpexi. Vnde niſi Gordiis adnumerare velis vermem noſtrum, nouo erit opus nomine; quandoquidem *Trichuridis* (ſeticaudae) appellatio, ideae falſa ſuperſtructa, ſeruari nequit; ab Aſcaridibus autem, quibus adnumeratus fuit in nouiſſima *Ill.* LINNEI *Mantiſſa* (*p.* 543.), magis alienus eſſe videtur.

Addam hic breuem indicationem vermium inteſtinalium, qui ſtructura oris analogiam cum *praedicta ſpecie* ſummam habent. — *Prior* ſit, quem olim primus in *Diſſ.* citata *de infeſtis viuentibus*, cet. et denuo in *Zoophytorum Elencho* ſub nomine *Haerucae* deſcripſi; *Ill.* LINNEVS poſtea nomine *Faſciolae barbatae* (*) indigitaſſe videtur; nuperrime vero *Cel.* KOELREVTERVS (†) *Acanthocephali* ſub titulo propoſuit.

(*) *Faun. ſuec. Ed. II. n.* 2077.

(†) *Nov. Commentar. Petrop. Vol. XV. pag.* 500. *tab.* 26. *fig.* 5.

posuit. Hanc nunquam maiorem inueni illo specimine, quod naturali magnitudine *Tab. IX. fig.* 2. expressum est, et ex intestinis Ranae temporariae oblatum. In Piscium intestinis (occurrunt autem copiose in Lucio, Cernua, Perca, Gadis atque Truttis variis,) raro pollicarem magnitudinem adtingunt. Viui molles sunt, lineares, depressi, obsolete rugosi, albi, punctis linearibus duplici ordine transuersis opacis in parenchymate transparentibus, propter quam structuram Taeniis eos adnumerare haud dubitaui. In aqua pura statim turgescunt et moriuntur, referuntque vermem cylindricum, laeuissimum, subdiaphanum, rigidiusculum, qualem *figura* proposita refert. *Rostrum*, quod viui retrahunt et quo intestinorum tunicis, Taeniaeque piscium simul habitanti lubenter affiguntur, cylindraceo turgidulum est, totumque minutissimis aculeis reclinatis muricatum (*fig.* 2. A.), vnde infixum aegrius euellitur. Tab. IX. Fig. 2.

Alteram nuper in intestino tenui Suis inueni vermium speciem, cuius figuram in eadem *Tab. IX.* (*fig.* 3.) addo. Recens colore Ascaridis et consistentia Lumbrici fuit, sed in spirituoso liquore satis rigida est facta. *Corpus* a crassiore extremitate (*a.*) sensim gracilescit et per dimidium circiter longitudinis filiforme pergit, obtusa papilla (*b.*) tanquam ano terminatum. Eadem crassior pars in rugas annulares contrahitur, quae longitudinalibus deinde sulcis decussantur, et versus tenuiorem partem sensim Fig. 3.

 euane-

euanefcunt. *Roftrum* (*a.* A.) ad craffioris extremitatis obtufum finem pro lubitu vermis exferi retrahique poteft, breuiffimum, cylindraceum, truncatum, ordinibus duobus *vncinulorum*, in fingulo ordine circiter denum, coronatum, ita vt inferior corona ampliori fit circuitu. *Difcum* roftri obfident *papillulae* folidae fenae (A.), *centralem* circumftantes, in qua tamen oris apertura haud apparet. *Corium*, quo tubus ipfius vermis conftat, craffum eft, intus mufculofis fibris denfum. *Canalis* alimentarius longitudinalis, glandulofus, inteftinula ab anteriore extremitate duo breuia, medulla fpinalis gangliis concatenata, aliaque intus diftincte apparent. De quibus hic fufior effe nolo; id tantum moniturus, nullam vermium inteftinalium fpeciem fupra defcriptis, in ventriculo Lacertae apodae repertis, magis affinem videri.

ACERI-

A C E R I N A;
PISCIS, AD *PERCAE* GENVS PERTINENS, DESCRIPTVS,

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

Acerina, nomen proprium piſcis alicuius a PLINIO *Medico* vſitatum, atque ab acutiſſimis Ichthyologis, BELLONIO, GESNERO et ARTEDIO, ceu Synonimon *Percae fluuiatilis minoris* ſeu *Cernuae* LINNAEI non niſi dubitanter vſurpatum, piſci, Ichthyologis hucusque ignoto, *Percae Cernuae* maximopere adfini, nunc ſecundum regulas artis deſcribendo, imponatur. Analogia inter *Acerinam* et *Cernuam*, quoad numerum, ſitum, figuram et colorem partium, ſumma; ſed in earum proportione, et praeſertim in ea capitis ad truncum facile elucet inter hoſce fratres germanos differentia. Longitudo trunci ſuperat longitudinem capitis *Cernuae* ter, *Acerinae* vix bis. Longitudo roſtri, ſeu ſpatii inter cantum anteriorem oculi et oris apicem, *Cernuae* ter, *Acerinae* bis ſumenda, ad exprimendam integram capitis cuiuslibet dimenſionem. Magnitudine *Acerina Cernuam* vix excedit. *Acerinae* in fluuiis occurrentes vulgo digitales, ſed in mari obuiae ſpithameae. Caro alba, ſapidiſſima, oſſiculis plurimis bifurcis ſtipata, et diaeta animalis, *Acerinae*

cum

cum *Cernua* communis. *Acerina*, ciuis *Ponti Euxini* et *paludis maeoticae*, ob nuptias celebrandas *Borysthenem* et *Tanain*, fluuiosque minores ad illos abeuntes, migratorie menſibus brumalibus petit, mihique has aquas frequentanti obuiam iuit; ſed *Boryſthenem* vix vltra oſtium fluuii *Desna*, *Tanain* vix vltra oſtium fluuii *Woroneſch* adſcendit, ac praeſertim locis arenoſis allicitur. An reliquos in *Pontum Euxinum* ſeſe exonerantes fluuios plane reſpuat, non affirmem; attamen probabiliter putem cum nec *Comes* MARSILIVS in ſuo *Danubio pannonico-myſico* noſtrum piſcem habeat; nec *Cel.* SCHAEFFERVS *Pentadi primae piſcium bauarico-ratisbonenſium*, quam noſter ſuo iure intrare debuiſſet, inſeruerit; nec ego in *Phaſi* per *Colchidem* tranſeunte inuenerim. Silentium Auctorum non ſemper abſentiam animalium indubitanter reddere, patet interim ex RZACZYNSKI exemplo, qui nec in ſua *hiſtoria naturali Poloniae*, *Boryſthenis* piſces enumerante, noſtram *Acerinam* propoſuit. Incolis ad *Tanain* circa vrbem *Woroneſch*: *Birtſchok*: circa vrbem *Tſcherkask*: *Baltſchok*; et incolis ad *Boryſthenem*: *Babir* ruſſice ſalutatur *Acerina*. *Cernua* autem, quae ſuperius in iisdem fluuiis frequentior eſt, in quibus inferius, quousque ab *Acerina* viſitantur, fere deficit, incolis ruſſice: *Ierſch* dicitur. *Cernuae* iconem, quae antea minus bona in operibus GESNERI, IONSTONI, WILLOVGHBAEI et MARSILII exſtabat, optimam dedit *Cel.* SCHAEFFERVS in *Pentade* iam citata. *Acerinae*
Tab. XI. icon nunc datur, indiuiduum magnitudine naturali maxi-

maxima ſiſtens, vt pateat conferenti, in quo conveniant, iterumque in quo differant adfines hae ad *Percae* genus, ab *ill. Equ. aur. a* LINNE et ARTEDIO ſancitum, pertinentes ſpecies; idemque vt eo magis eluceat, additur

DESCRIPTIO ACERINAE.

Statura compreſſo - oblonga, latitudine quinquies, craſſitie ſepties a longitudine ſuperata.

Caput cathetoplateum, productum, dimidiae trunci longitudini aequale; ſinubus coecis ad nares, in vertice et ad baſeos latera cauernoſum; roſtro parum decliui et apice rotundato; inteſtitio inter oculos anguſto; occipite acute ſerrato; temporibus planis, ſerie perpendiculari denticulorum deſcendo increſcentium exaſperatis.

Rictus anguſtus, antrorſum ſpectans, quo aperto mandibula ſuperior e vagina quaſi protruditur, quae, ore clauſo, labio ſtrictiuſculo ante mandibulam inferiorem prominet.

Nares medium inter roſtri apicem et oculum occupantes, aperturis vtrinque duplicibus; anteriore minore, valuula ſemitecta et a poſteriore ſat remota.

Oculi magni, laterales, vertici proximi, prominuli; *iride* ſupra fuſca, infra argentea, ſed limbo interno tenui toto argenteo; *pupilla* circulari, nigra.

Opercula branchiarum plana, margine arcuata, integerrima, aperturam branchiarum vtrinque ſolitariam bene obtegentia; *membrana branchiostega* vtrinque septem radiata.

Truncus oblongo compressus; *dorsum* rotundatum, canescens; *pectus* et *abdomen* valde planum, albicans; *latera* vix conuexa, maculis rotundatis, nigris, dispersis, supra lineam lateralem frequentioribus, infra illam rarissimis picta; *linea lateralis* dorso parallela et propior quam ventri, per medium inter dorsum et lineam musculorum interstitialem decurrens.

Squamae omnem truncum, excepto pectore, obtegentes, difficillime decedentes, imbricatae, rotundatae, mediocres, in dorso et lateribus punctis fuscis irroratae, in abdomine illis carentes, subasperae, sed minime pungentes, propter crenas tenuissimas et obtusissimas earum limbum constituentes; accedit vtrinque, pone aperturam branchiarum, supra pinnam pectoralem, squama magna triquetro-acuminata, apice pungens, superficie laeuis.

Pinna dorsalis vnica, seu, si mauis, duae confluentes in vnam, omne fere dorsum occupans; *radiis* 30. 31 vel 32. quorum quatuor primi increscentes, reliqui decrescentes; eorumque anteriores 17 vel 18. spinosi, simplices et membrana albida, fusco maculata coniuncti; reliqui inermes, apice ramosi et membrana albida, immaculata copulati.

Pinnae pectorales vtrinque solitariae, proxime ad angulum inferiorem aperturae branchiarum sitae, inter se oppositae, oblongo-acuminatae, albae; *radiis* 25. tenuibus, ramosis.

Pinnae

Pinnae ventrales duae, proxime pone et infra pinnas pectorales ſitae, inter ſe parallelae, trapezoideae, albae; *radiis* ſex ſtipatae; quorum primus breuior, ſimplex et ſpinoſus, reliqui ramoſi et inermes.

Pinna ani ſolitaria, fini caudali pinnae dorſalis oppoſite et aliquot lineas pone anum ſita, alba, figura et magnitudine ventralibus analoga; *radiis* 7. 8 vel 9. quorum duo primi valde craſſi, ſpinoſi et ſimplices; reliqui tenues, inermes et ramoſi; omnes longitudine ſubaequales.

Cauda verticalis, albida, bifurca, cruribus aequalibus, acuminatis; *radiis* 17. exceptis lateralibus minoribus.

Dimenſiones partium externarum ſecundum pedem *londinenſem* duodecimalem ita:

	poll.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae extremum	8	2.
—— —— —— —— ad foramen anterius narium - - - - - -	—	6.
—— —— —— —— ad foramen poſterius narium - - - - - -	—	9.
—— —— —— —— ad cantum anteriorem oculorum - - - -	1	2.
—— —— —— —— ad aperturam branchiarum - - - - - -	2	4.
—— —— —— —— ad initium Pinnae dorſalis - - - - - -	2	6.
—— —— —— —— ad extremum pinnae dorſalis - - - - -	5	11.

	poll.	lin.
Longitudo ab apice roſtri ad caudae radicem	6	6.
—— —— —— —— ad radicem Pinnae pectoralis - - - - - -	2	5.
—— —— —— —— ad radicem Pinnae ventralis - - - - - -	2	8.
—— —— —— —— ad anum - - -	4	4.
—— —— —— —— ad initium Pinnae ani - - - - - -	5	—
—— —— —— —— ad extremum Pinnae ani - - - - -	5	7.
Diameter oculorum - - - - -	—	6.
—— inter oculos - - - -	—	$4\frac{1}{2}$.
—— perpendicularis capitis inter oculos	1	1.
—— —— trunci ad P. dorſalis initium	1	8.
—— —— —— ad P. dorſalis extremum - - - - -	—	7.
—— tranſuerſalis capitis ad oculos -	—	10.
—— —— trunci maximus ad P. ventrales - - - - -	1	1.
—— —— —— ad anum - - -	—	8.
Longitudo ſquamarum maximarum - -	—	$1\frac{1}{2}$.
Latitudo earundem - - - - -	—	2.

Externarum partium deſcriptioni iam exhibitae addam quaedam de internis.

Cauitas oris omnino edentula; ſed in ipſis faucibus areolae quatuor, duae ſuperiores ſeu intermediae et ſubrotundae, duae laterales et lineares, *denti-*

denticulis minimis retrorſum ſpectantibus aſperae; *lingua* adnata.

Branchiae vtrinque quatuor, quarum pars concaua tuberculis, in arcu primo ſeu anteriori acuminatis et elongatis, in reliquis ſubaequalibus et obtuſis vtrinque pectinatae.

Cordis corpus vniloculare, pyramidato-triquetrum; *auricula* corpore duplo amplior, ſemilunata, baſi corporis incumbens; *aorta* baſi ventricoſa; *pericardium* tenuiſſimum.

Diaphragma tendineum.

Hepar latum, vix vltra ventriculum deſcendens, quadraticum, obſolete bipartitum; lobulo ſiniſtro minori, acuminato; dextro maximo quadrato; *veſica fellea* minuta, in medio ſuperficiei inferioris hepatis abſcondita.

Lien ſubrotundus, atro-rubens, ad ventriculi fundum ſitus.

Ventriculus oblongo incuruatus, fundo obtuſiuſculo; *appendices* ad pylorum tres, papilliformes, vix tres lineas in indiuiduis ſpithamaeis longitudine excedentes, ſubaequales. *Inteſtinum* ſemel reflexum, pinguedine pauca obuolutum, longitudini trunci aequale.

Veſiculae ſpermaticae et *ouaria* duplicia, linearia, ad totum abdomen vtrinque decurrentia, albida.

Peritonaeum argenteum, ad veſicam aëream, non alibi, punctis fuſcis irroratum.

Veſica aërea ſimplex, ampla, per totam abdominis longitudinem ſpinae dorſali adhaerens; *ductu pneumatico* e gula extremitatem anteriorem petente.

Renes ſpinae dorſi adglutinati, ſanguinolenti, difformes, in *veſiculam vrinariam* oblongam, ante anum obuiam ſeſe exonerantes.

Vertebrae ſpinae dorſalis quadraginta et *coſtae* vtrinque quindecim.

SEX AVIVM DESCRIPTIONES;

Auctore

A. I. GVELDENSTAEDT.

In *Caucaſo* et in adfinibus ad ſeptentrionem meridiemque iugi huius alpini ſitis regionibus ſubmontanis atque compeſtribus, per annos aliquot iusſu AVGVSTISSIMAE peregrinator ad corpora naturalia attentus dum fui, opportunitate vſus ſum, aues haud paucas *Ornithologis* huc vsque ignotas videndi, obtinendi, denominandi, deſcribendi atque depingendi. Earum aliquas viderunt etiam et orbi litterato in *Commentariis* noſtris *academicis* et in *itinerariis* iam communicauerunt, eundem in finem maris *Caſpii* et fluuii *Wolgae* littora viſitantes *Collegae* coniunctiſſimi. Ex harum penu ſunt: *Sterna caſpia*, *Ardea caſtanea*, *Alauda mutabilis* ſeu *tatarica*, *Charadrius gregarius*, *Pelecanus pygmaeus*, *Larus Ichthyaetus*, *Grus Leucogeranus* et *Tetrao arenarius*; de his, cum ſcitu neceſſaria iam dicta ſint, ſileo et denominationes atque deſcriptiones meas ſupprimo. Ex aduerſariis exhibeam nunc eas tantummodo aues, quarum antea, ni fallor, prorſus nulla mentio facta eſt. Sex auium ſpecies, ad genera ab *ill. Equite aurato a* LINNE in *ſyſtematis naturae* editione duodecima ſtabilita reductas, ſiſtam.

I.

I. *LOXIA RVBICILLA.*

Auis, quam ſub hoc nomine propono, magnitudine, habitu et colore proxime ad *Enucleatorem*, roſtro ad *Coccothrauſtem* accedit, et inter haſce duas ſpecies congeneres quaſi media. Colore ſuauiſſimo coccineo, albido et cineraſcente lepide variegato *Rubicilla* antecellit *Enucleatorem*, colore miniato fuſco vndulato oculos minus afficientem. Roſtri craſſitie *Coccothrauſti* cedit *Rubicilla.* Auis noſtra indigena alpium *caucaſicarum* aëre frigidiuſculo pariter ac *Enucleator* delectatur; praeſertim ad alveos glareoſos torrentium in *Caucaſo* occurrentium degit et baccas *Hippophaës Rhamnoidis*, ad illos copioſiſſime creſcentis, gulae indulgens auidiſſime legit, eandemque diſſeminat. Familiae numeroſiſſimae *Rubicillarum* gregatim volitare et vocem *Pyrrhulae* imitare ſolent. *Sexus* differentia vix vlla, niſi quod rubedo feminae minus ſpecioſa ſit. *Icon* Tab. XII. ſtaturam et habitum magnitudine naturali exprimit, reliqua ex *deſcriptione* patent, quam nunc dabo.

Roſtrum incraſſato-conicum; capite dimidio breuius, a fronte ſex, a rictu octo lineas longum; baſi latiſſimum, diametro perpendiculari ſex, et transuerſali quinque linearum; apice acuminatum; *mandibula* ſuperior fuſca, apice recto vix vltra inferiorem prominens; inferior albida, lateribus tantiſper introrſum flexa. *Lingua* integra, truncata. *Nares* baſilares, capiſtro fuſco tectae. *Oculi* fuſci.

Caput

Caput ſupra, *gula*, *collum ſubtus* et *pectus* intenſe coccinea, leucoſticta, maculis acutis triquetris; *abdomen* et *ani regio* dilute roſea, albido vndulata; *caudae tectrices inferiores* roſeo-fuſcae. *Collum ſupra* et *dorſum* caneſcens cum roſei tinctura; *tectrices caudae ſuperiores* fuſco-roſeae. Baſis plumarum omnium, quae in ſitu naturali obtecta et partem maximam totius plumae conſtituit, intenſe cinerea.

Alae complicatae quoad pollicem vnum cauda breuiores; *remigibus* et *tectricibus* primariis fuſcis, marginibus obſolete roſeis, tectricibus axillae dorſo concoloribus.

Cauda tres pollices et ſex lineas longa, integra; *rectricibus* duodecim, aeneo-nigris, extima vtrinque exteriore margine albida, reliquis margine roſeo adumbratis.

Femora ad genua vsque plumoſa, cana; *tibiae* et *digiti*, quorum tres antici et vnus poſticus, nigri coloris; *vngues* digitorum incurui, acuminati, nigri, anteriorum ſubaequales, poſtici maximus.

Longitudo auiculae extenſae ab apice roſtri ad caudae extremum octo pollicum pedis *londinenſis* duodecimalis, qui in omnibus meis deſcriptionibus pro menſura adhibetur.

II. *TANAGRA MELANICTERA.*

Auis hoc nomine imbuenda ſummopere habitu, coloribus et differentia ſexuali accedit ad *Car-*

duelem Americanam BRISSONII, ſeu ad *Fringillam triſtem* LINNAEI, cuius hiſtoriam *Cel.* EDWARDS in ſuis ſpicilegiis hiſtoriae naturalis *tomo* 2. *capite* 274. et *tabula* 274. exhibuit. Magnitudine *Tanagra Melanictera Fringillam triſtem* aliquantum ſuperat et *Emberizae Miliariae* aequalis eſt. Inſuper *Tanagra Melanictera* ſat euidenter differt a *Fringilla triſti* ſtructura et colore roſtri, pileo nigro maris multo ampliori vsque ad nucham procedente, rectricibus ac remigibus earumque tectricibus vniformiter cinereo-fuſcis, non albo terminatis. *Mas* et *femina Tanagrae Melanicterae* omnino iisdem coloris varietatibus inter ſe differunt, quibus femina et mas *Fringillae triſtis* inter ſe diſcrepant. Habitat auicula noſtra in ſubmontanis promontorii vtriusque, et ſeptentrionalis et meridionalis *Caucaſi*, circa thermas ad fluuium *Terek* obuias et in *Georgia* circa *Tefliſium* a me obſeruata. Vulgo in dumetis *Rhamni Paliuri* occurrit, ſub ramis ſpinoſiſſimis *Accipitribus* acceſſum prohibentibus ſecure nidificans atque prolem ſeminibus eiusdem arbuſculi, quibus fere vnice victitat, enutriens. Solitarie volitantes vocem, eae *Pari maioris* analogam, edunt. *Iconem maris* tab.
Tab.X.III XIII. et *feminae* tab. XIV. exhibeo, vt magnitudo
Tab.XIV. naturalis, ſtatura et ſexus differentiae pateant, quae in deſcriptione ſubſequente verbis et numeris exprimere tentabo.

Roſtrum conicum, acuminatum, capite brevius, a fronte ſex, a rictu oris octo lineas longum, rectum, liuidum; *mandibula ſuperior* ad baſin obſo-

obſolete trigona, ad apicem acuminata et vtrinque ſubemarginata; *mandibula inferior* lateribus inflexo-coarctata, vt in *Emberizis* eſſe ſolet, apice etiam ſubemarginata. *Vibriſſae* ad rictum oris breues. *Nares* ſubfrontales, rotundae. *Lingua* cylindrico-ſagittata, apice lacera. *Oculi* fuſci.

Caput ſupra a fronte vsque ad nucham et ad latera atrum; *collum ſupra* et *dorſum* brunneo-ferrugineum; *vropygium* luteſcenti-ferrugineum; auis tota *ſubtus* vniformiter flauiſſima.

Alae complicatae caudae medium attingentes, fuſcae, albido longitudinaliter ſtriatae; *remiges* fuſcae, marginibus albidis; *tectrices* ſuperiores remigibus concolores, inferiores autem albido-flauae.

Cauda ſubforcipata, tres pollices longa; *rectrices* duodecim, fuſcae, marginibus albido-flauicantibus.

Femora ad genu vsque plumoſa, abdominis colore imbuta; *tibiae* et *digiti* liuido-incarnati coloris; digitorum tres antici, inter ſe liberi, quartus poſticus, medio reliquis ſubaequalibus aliquantum longiore; *vngues* incurui, acuti, ſubaequales, fuſci.

Longitudo totius auis ab apice roſtri ad caudae extremum ſeptem pollicum, quinque linearum.

Haec huc vsque omnia de *mare*. *Femina*, quae omni figura, proportione et colore extremitatum cum *mare* exacte conuenit, differt coloribus capitis et trunci; illa nimirum ſupra tota a fronte ad caudam vsque fordide oliuaceo - ferruginea fufco maculata, fubtus tota ex albido - flaua.

III. *MVSCICAPA MELANOLEVCA.*

Mufcicapa Melanoleuca noftra ftatura, magnitudine et coloribus cum *Motacilla Leucomela* in Tomo XIV. *Commentariorum* exhibita mire conuenit. Differentia primaria in eo ponenda, quod dorfum *Mufcicapae Melanoleucae* album, *Motacillae Leucomelae* autem nigrum fit. Alia adhuc difcrepantia in rectricibus occurrit. Auis haec migratoria, infectivora habitat per aeftatem in *Georgia* campeftri ad fluuiorum ripas fruticetis obfitas, circa *Tiflifium* ad
Tab. XV. *Cyri* ripas a me obferuata. Ex *icone* hic adiecta patet clare magnitudo naturalis, figura et color maris, idemque magis diftincte ex defcriptione, quam nunc communico.

Roftrum fubulatum, capiti longitudine fubaequale, a fronte fex, a rictu nouem lineas longum, atrum; *mandibula fuperior* bafi obfolete trigona, apice tantillum incurua et vtrinque emarginata. *Vibriffae* ad rictum breues, patentes. *Nares* bafilares, oblongae, capiftro femitectae. *Lingua* fagittata, roftro vix breuior, nigra, apice bifida. *Oculi* fufci.

Capiftrum, *caput* infra vsque ad medium collum et ad latera vsque ad fupercilia atrum; fed *caput* fupra et *dorfus* totum niueum, pectore leuiffime flauefcente; bafi obtecta pennarum omnium fufca.

Alae

Alae totae ſupra infraque atrae, apicis margine remigum ſecundariarum obſolete albido; complicatae vltra mediam caudam procedentes.

Cauda integra, duos pollices et ſex lineas longa; *rectrices* duodecim, albae, apice nigrae, eoque magis quo interiores, attamen nec in medio pari nigredo ad medietatem accedit.

Femora vsque ad genu plumoſa, fuſco et albido annulata; *tibiae* decem lineas longae, atrae, laeues; *digiti* pariter atri, quarum tres antici, quartus poſticus, omnes nigri, medio reliquis ſubaequalibus aliquantum longiore; *vngues* incurui, acuti, nigri, ſubaequales.

Longitudo auis extenſae ab apice roſtri ad caudae extremum ſex pollicum, trium linearum.

In *femina* ea, quae in mare nigra, fuſca; et quae in mare alba, ſordide cinerea ſunt.

IV. *MOTACILLA ERYTHROGASTRA.*

Quanta de *Muſcicapa Melanoleuca* et *Motacilla Leucomela* affinitas depraedicata, tanta etiam depraedicanda de *Motacilla Erythrogaſtra* noſtra, et *Motacilla Phoenicuro* LINNAEI. Mares ſat facile; ſed feminas vtriusque ſpeciei, a ſuis maribus toto coelo coloribus diuerſas et non niſi abdomine et cauda ſubanalogas, difficillime ex deſcriptione diſtingues. Femina *Motacillae Erythrogaſtrae* coloribus etiam multum aemulatur *Motacillam Oenanthen*, et cum eadem magnitudine conuenit, qua *Phoenicurum* nonnihil ſuperat.

perat. Morbus et vitae genere *Motacilla Erythrogastra* aues congeneres imitatur: cursitat ad fluuiorum ripas; arbusculis insidens caudam motitat inquietissima, attamen non timida; volans pipit more *Motacillae albae*; mas feminae strenuus custos et comes fidelis; insectis victitat, pullosque, in nidis herbaceis inter *Hippophaës* ramos, cuius baccas etiam appetit, tuto occultatos enutriunt. Migratoria auis nostra per aestatem habitat cum *Loxia Rubicilla* ad alueos glareosos torrentium *Caucasicorum*, quos, hyeme insectis infesto superueniente, fine Octobris deserit, clima mitius, insectis pro cibo abundans, Tab. XVI. austrum versus quaesitura. Figura tabulae XVI. Tab. XVII. sistit *marem* et figura tabulae XVII. *feminam Motacillae Erythrogastrae* magnitudine, figura et colore naturali. Ad *maris descriptionem* accedam.

Rostrum triquetro - subulatum; apice subincurvo, integerrimo; colore atro; a fronte quinque, a rictu octo linearum longitudine. *Vibrissae* ad rictum detritae. In cauitate oris lutea *lingua* bifida. *Nares* basilares, rotundae, peruiae. *Oculi* fusci.

Vertex vsque in *nucham* et alarum *speculum* alba, fuliginoso - sordida; *capistrum*, *gula*, *genae* et *tempora*, *collum* et *interscapulium* aterrima; *pectus* et totum *corpus subtus* atque *crissum* vtrinque intense castanea.

Alae complicatae vltra medietatem caudae vix procedentes, aterrimae, speculo albo quadratico, quod remiges 3 — 10. quae medio albae sunt, efficiunt.

Cauda

Cauda tres pollices et duas lineas longa, integra, *rectricibus* duodecim vropygio concoloribus.

Femora vsque ad genu plumofa, abdominis colore tincta, fed ipfo genu atro; *tibiae* et *digiti*, quorum tres antici et inter fe liberi, quartus pofticus, nigri coloris; *vngues* incurui, acuti, fubaequales, digitis concolores.

Longitudo totius auiculae extenfae a roftri apice ad caudae extremum feptem pollicum.

De *femina* dicenda habeo fequentia: *roftrum* et *pedes* atra, vt in mare; *criffum* et *cauda* caftanea, vt in mare, fed dilutiora, apicibus rectricum et intermediis duobus rectricibus totis fufcefcentibus; *reliqua* tota quanta *auis* cinerea, fupra intenfior, infra dilutior et in abdomine cum aliqua ruffefcentis mixtura; *magnitudo* cum mare eadem.

V. *SCOLOPAX SVBARQVATA.*

Subarquata ob roftrum gracile capite multo longius commode *Scolopacibus* LINNAEI adnumeratur, quae ob roftrum gracile deorfum arcuatum ad *Numenios* BRISSONII pertinet. Magnitudine, habitu et colore proxime accedit ad *Cinclum Dominicenfem*, nec non ad *Calidrem naeuiam* BRISSONII; differt autem euidentiffime roftro longiore et arcuato. Auis huius migratoriae, per aeftatem circa mare *Cafpium* obuiae et verfus *Tanain* vsque ad oftium fluuii *Choper* adfcendentis, ad ripas arenofas fluuiorum infecta atque vermiculos legentis et curfitantis flatu-

ſtaturam atque magnitudinem naturalem exprimit
T. XVIII. *icon* appoſita; color et reliqua ſcitu neceſſaria enunciantur in deſcriptione, quae ſequitur.

Roſtrum gracile, teretiusculum, capite fere duplo longius, vnius pollicis et octo linearum, modice deorſum arcuatum, atrum; *mandibula ſuperior* ſulco e naribus procedente vltra medium exarata; apice obtuſiuſculo, laeuiſſimo; *mandibula inferior* canaliculata, tantillum ſuperiore breuior. *Lingua* longa, fere apicem roſtri attingens, ſagittata, integerrima. *Nares* baſilares, lineares, peruiae. *Oculi* fuſci.

Orbitae margo albidus; *lora* fuſca. *Caput* atque *collum* ſupra et *interſcapulium*, cum *alis nothis* fuſca, albido-ferrugineo, quo limbi pennarum adumbrantur, vndulata. *Dorſum* cinereum; *gula*, *tempora*, *collum inferius*, *pectus* et *abdomen* ruffo-ferruginea, gula albicante, pectore et abdomine fuſco, quo pennae terminantur, vndulata. *Ani* regio, *vropygium* et *caudae tectrices* ſuperiores et inferiores alba, maculis fuſcis oblongis, infra rarioribus picta.

Alae cauda aliquantum longiores, bifurcatae, totae cinereae, faſciola transuerſa obſoleta, albicante; *remiges* primores 1 — 10. decreſcentes, fuſco-cinereae, rachidibus albidis; ſecundariae 11 — 20. aequales, obtuſae, emarginatae, cinereae, apice albidae; reliquae valde elongatae, acuminatae, vireſcenti-cinereae, marginibus albicantibus; *tectrices* remigum quatuor primorum fuſcae, reliquae cinereae, apice

apice albido; tectrices axillae et diſci alarum dilute cinereae; alae ſubtus et *hypochondria* niuea.

Cauda breuis, duos pollices longa, rotunda; *rectrices* duodecim fuſco-cinereae, rachidibus marginibusque albicantibus.

Femora ferruginea, fere vsque ad genua plumoſa; pars femorum nuda, *tibia* et digiti nigra; *digiti* tres antici, quorum intermedius longitudini tibiae aequalis et lateralibus nulla membrana adnexus; quartus poſticus, breuis; *vngues* parui, acutiuſculi, nigri.

Longitudo totius auis extenſae a roſtri apice ad caudae extremum octo pollicum et ſex linearum.

VI. *SCOLOPAX CINEREA.*

Nomine hoc volo auem, quae magnitudine, colore et corporis pedumque habitu, excepto roſtro, ad *Canutum*, cuius *iconem Cel.* EDWARDS *Tomo* 2. *tabula* 276. dedit, magis quam ad aliam vllam; roſtro autem proxime ad auem gallice *le Corlieu* et anglice *the Barker* a *Cel.* ALBINO dictam et *Tomo* 2. *tabula* 71 repraeſentatam, quae me ſentiente a *Limoſa griſea* BRISSONII diuerſiſſima eſt, accedit. Adnumeranda illa proprie *Limoſis* BRISSONII, praeſertimque *Limoſae griſeae* propter colorem ſummopere analoga eſt. Differt autem a *Limoſa griſea* BRISSONII ſeu *Scolopace Totano* LINNAEI *Scolopax cinerea* noſtra, quod minor ſit; quod pedes in proportione corporis multo breuiores habeat; quod vro-

pygium cinereum, non album, ſit; quod rectricibus cinereis vnicoloribus; non albis fuſco faſciatis inſtructa ſit. Per aeſtatem habitat haec migratoria auis, quae affinitatem, inter genera *Scolopacis* et *Recuruiroſtrae* ſtrictiorem reddit, ad mare *caſpium*, circa oſtium fluuii *Terek* a me obſeruata; ibidem prolificat; in inundatis et praeſertim ad margines lacuum ſalſorum gregatim degit et inſecta pro victu quaerit. Sexus differentia, quantum comperire po-
Tab. XIX. tui, externa nulla. *Icon* ſiſtit magnitudinem naturalem et figuram partium, deſcriptio reliqua cum colore; en! illam.

Roſtrum capite duplo longius, ſeu vnum pollicem et decem lineas longum, gracile, teretiuſculum, ſubdepreſſum, ſurſum tendens; apice mandibulae ſuperioris laeui, tantillum deorſum incuruato, acutiuſculo; colore nigro. *Nares* baſilares, lineares, peruiae. *Oculi* fuſci.

Tota auis ſupra cinerea, pennis in medio fuſco pictis, quae macula fuſca in capite et collo linearis, in interſcapulio oblonga, in vropygio transverſa; *tota auis infra* alba, a gula ad pectus cinereo-ſtriata, a pectore ad caudae tectrices inferiores niuea.

Alae cinereae, faſcia transuerſali obſolete albida; *remiges* primores fuſcae, rachide primae alba; ſecundariae cinereae, quarum eae, quae primoribus proximae ſunt, apice albido gaudent, reliquae autem carent.

Cauda

Cauda alas complicatas vix excedens, duos pollices et tres lineas longa, integra; *rectrices* duodecim cinereae totae, ſed vtrinque extima albido cinereoque varia.

Pedes fuſco-rubentes; *femora* ſupra genu quoad tres lineas denudata; *tibiae* roſtro dimidio vix longiores; *digiti* tres antici, baſi ſubpalmati, quorum medius tibiae longitudine aequalis, quartus poſticus; *vngues* in digitis omnibus obuii, ſubaequales, acutiuſculi, nigri.

QVATVOR FVCORVM SPECIES DESCRIPTAE.

ab

I. LEPECHIN.

Plantas marinas, quas fucos dicunt, effinxit Natura tenaces et coriaces, non raro corneas aut membranaceas, exclusit que in omnibus huc vsque notis cauum internum euidentius, nisi illas bullas aut folliculos velis, qui in diuersis fucorum speciebus obseruantur, ipsorum que fructificationi inseruiunt. Ast mare Album, inter varias fucorum species, quas mare Mediterraneum in suo gremio fouet, aut quibus mare Kamtschatcam alleuens abundat, vel denique quae Oceano septentrionali indigenae sunt; producit duas species, quae euidenti cauo instruuntur, et quasi medium inter Fucos atque vluas constituunt; horum alterum *tubulosum*, *saccatum* alterum nominare placet.

FVCVS TVBVLOSVS.

Fucus caule tereti ramoso, ramis oppositis vel alternis, foliis tubulosis.

DE-

DESCRIPTIO.

Radix eſt nulla, niſi orbiculum paruum velis, quo ſaxis aliis que corporibus marinis affigitur. Ex orbiculo hoc ſurgit caulis teres, ſat firmus ad inſtar chordae muſicae, qui modo per aliquot lineas eleuatur, modo ſtatim in ramos mox oppoſitos, mox alternos, ex omnibus plagis caulis emergentes, finditur. Caulis atque rami teretem ſuam figuram ſeruant fere ad extrema, vbi complanati euadunt, atque in folia bifurca abeunt. Interna ipſorum ſubſtantia tenui perforatur canali, qui cum dilatione extremorum ipſe quoque dilatatur.

Ex ipſo caule ramis que vndique protruduntur folia tubuloſa, aliquando oppoſita, ſaepe alterna, non raro bina terna ve vni loco inſerta, tantiſper vndulata, quae omnia ſeſſilia ſunt, tenui que principio orta ſenſim ſenſimque dilatantur, et ad apices iterum in acumen exeunt. Folia inferiora tam caulis, quam ramorum minora ſunt, media longiſſima, apicem vero terminantia mediocria.

Cauitas interna foliorum inaequalis eſt et viſcido vndique illinitur.

Sed quo modo propagatio ſpeciei in hoc fuco contingat, nullus indicare valeo; an forſan illa fiat per teneriora ramenta, quae in iunioribus ſuperficiem foliorum occupant, in adultis vero ad inſtar pilorum, hinc inde ſparſorum viſuntur? Color totius plantae pulchre rubet: magnitudo ſaepe octo pollicum. Creſcrit copioſe in profundis maris Albi, et praecipue ad frequentes inſulas ſinus Candalanſcoy (Кандалакская губа). Vſum oeconomicum incolae norunt nullum. Tab. XX. fucum noſtrum magnitudine naturali ſiſtit. litt. (*a*) extremitatem ramorum complanatam oſtendit, litt. (*b*) cauitatem internam in foliis abruptis monſtrat.

Fuco deſcripto proxime Natura iunxit fucum

SACCATVM
qui eſt.

Fucus caule plano, inflato, ramoſo; ramis oppoſitis, foliis ouato oblongis, tunicis, intus cauis.

DESCRIPTIO.

Hic Fucus itidem adglutinatur corporibus marinis aut lapillis per ſpeciem radicis tuberculatae, cuius ambitus eſt rotundus. Ex hac protuberantia ſurgit caulis tenuis, teres, ſolidus fili emporetici craſſitie, duas lineas longus, qui dein complanatur; latior atque cauus redditur. Inde per aliquot lineas ſimplex, ſimplicia quoque emittit folia ex ouato oblonga, tumida, inflata, intus caua, margine vndique colloſo, petiolata, petiolis tubuloſis. Sed caulis ſtatim finditur in ramos oppoſitos, cauli analogos, qui gerunt folia caulinis ex amuſſim ſimilia, oppoſita, ramos per ſua paria terminantia. Color totius fuci ruber eſt: longitudo V. pollicum Fructificatio perfici videtur vt in praecedenti. Locus Oſtium maris Albi circa tres inſulas; vbi ad inſtar glomerum integros inueſtit lapides. T. XXI. magnitudine naturali

turali fucum defcriptum reprefentat, litt. (*a*) cauitatem internam foliorum monftrat.

Sequuntur duae fpecies, quae folia plana gerunt, earum primam proponere placet fub nomine.

FVCI DICHOTOMI.

Fucus acaulos frondibus dichotomis, membranaceis, ligulatis, vndique proliferis.

DESCRIPTIO.

Radix eft nulla fed frons ipfa lapidibus aliisque corporibus marinis adfigitur et fuperficie fua inferiore exprimit figuram illius corporis, cui adhaeret. Illa frondis pars, quae caulem mentitur, ex latiori principio paullulum anguftatur, et quafi collum interceptum efficit; inde fenfim fenfimque latefcit, et emenfis 14 vel 15 lineis finditur in frondes, vt plurimum per dichotomiam diuifas, interius anguftas, medio dilatatas, extremitate iterum attenuatas; quae extremitates denuo in nouas proles vel dichotomas, vel ternas diftinguuntur. Omnes frondes ex vtroque latere emittunt ligulas fibi fimiles dentibus longioribus modo fimplicibus, compofitis modo inftructas, inter quas rudimenta nouarum ligularum iacent. Neruus omnino nullus, fubftantia membranacea firma pellucida, color amoene rubens; magnitudo ad fummum pedis dimidii. In littus maris Albi, quod incolis Terfcoy audit, copiofe nofter

fucus

fucus eiicitur ; et ab ouibus auide, ob teneram ſuam ſubſtantiam , conſumitur. Tab. XXII. magnitudine naturali fucum dihotomum ſiſtit.

Nota: Fucus membranaceus rubens anguſtifolius, marginibus ligulis armatus. Rai Syn. 47. 33. Fucus humilis membranaceus acaulos elegantiſſimus ruber, capillis longis fimbriatus. Moriſ. hiſt. 13. p. 646. Fucus frondibus membranaceis proliferis ciliatis Ill. *Linn.* et Hudſ. angl. 472. n. 31. vt et deſcriptio a Clariſſ. *Gmel.* in h. f. p. 176. ad fucum Ciliatum data, cum noſtro fuco conuenire videntur; ſed Icon, per quem dictum fucum Gmelinus l. c. Tab. XXI. fig. 1. expreſſit, toto coelo a noſtro Fuco differt: propius vero eiusdem tabulae figurae tertia, quae fucum Ligulatum *Gmelini* ibid. p. 178. deſcriptum repreſentat, ad noſtrum fucum Dichotomum accedit. Interim fructificationis modus in fuco Dichotomo obſeruandus, ad aliam omnino ſectionem ipſum relegare ſuadet. Quamuis non eſt inficiendum iuniores fucos in modo ſui propagandi imponere poſſe; videtur enim illa perfici per proles frondium deciduas, quae omnino teneriores ſunt, et colore magis diluto gaudent: ſed iidem adultiores facti, fructificationis organa oſtendunt in globulis nigricantibus, ſeſſilibus, magnitudine ſeminis milii, inter dentes per vtrumque latus ligularum diſpoſitis. Hinc iure vindicat ſibi locum in familia fucorum globuliferorum, et exinde concluditur fucum Dichotomum nobis dictum vel prorſus eſſe nouum, vel inſufficienter ab Auctoribus deſcriptum.

FVCVS

FVCVS GRAMINIFOLIVS.

Fucus caule tereti, Subdiuiſo, tubuloſo, foliis linearibus duplici ſerie poſitis, planis membranaceis.

DESCRIPTIO.

Radix nulla eſt, ſed caulis teres tenui oritur principio et ſenſim ſenſimque robora ſumit ita, vt extremum ipſius multo ſit validius. Breui ab exortu ſuo non raro diuiditur in ramos ſibi ſimiles, ſaepe et ſimplex ſeparatam efficit frondem. Ab initio fit ſolidus, ſed quo vlterius pergit, eo magis pulpoſus euadit et intus perforatur canali. Caulis et rami veſtiuntur foliis planis, tenerioribus, linearibus oppoſitis denſis, duplici ſerie ſitis, quae ad apicem in faſciculum colliguntur et caulem atque ramos terminant. Propagationem huius fuci eodem modo contingere, quo in omnibus fucis membranaceis fieri aſſolet, probabile videtur. Nulla enim tubercula, neque alia corpuſcula globulifera detegere potui, licet diuerſae aetatis fucos examinandi poteſtas fuerit. Color totius fuci cinnabarinus, magnitudo non raro pedis 1. Locus mare Album. Tab. XXIII. fuci deſcripti frondem ſimplicem magnitudine naturali ſiſtit.

MINERA ARGENTI CORNEA CHEMICE EXAMINATA ET DESCRIPTA.

Auctore

E. LAXMANN.

Praeterlapſa equidem iam illa tempora ſunt, in quibus ſperma Ceti Camphoramque (*a*) ad inflammabilia foſſilia retulerunt, et Bezoar in terra creſcere, vti Boracem in animalibus (*b*), crediderunt mineralogi: ceſſarunt illi quoque dies, in quibus Naphta cum Succino lapidibus annumerabantur, et Cinnabaris a Mercurio genere ſeparabatur (*c*). Certe noſtrum Seculum, etiam ratione ad Regnum minerale habita, feliciſſimum nominare poſſumus. Multorum quippe corporum ſubterraneorum genuina cognitio nobis innotuit, de quibus veteres, vel plane nullam, vel erroneam et ſuperficialem ſolummodo notitiam habebant. Omnino recentioribus noſtri aevi

(*a*) Libauii Singularii Lib. III. Aluari Alfonſi Barbae: El arte de los Metales.

(*b*) Sigfrid Aron Forſii Minerographia.

(*c*) Encelius de re Metallica. Schwenckfeldii Catalogus foſſil. Sileſiae. Dezalier d'Argentwille Hiſtoire naturelle.

vi Mineralogis conſummatiſſimis, vt illuſtris de *Linné* verbis vtar, ſempiterna ab omnibus aequis Cenſoribus debetur gloria, quod infinito labore et ſudore montium et naturae abyſſum penetrarunt (*d*). Hi Malachitem a Iaſpide et Lapide nephritico ſeparant, minerisque cupri annumerant; Lapidem Lazuli vero e medio minerarum huius metalli removent, et inter lapides Zeoliti generis collocant. Hi Lapidem calaminarem et Galenam ſterilem ſic dictam, non terras inanes, ſed veras Zinci mineras eſſe oſtendunt, et ſexcenta alia. Interea tamen non omnem adhuc ex vaſtiſſimo Regni mineralis campo ſuſtulerunt lapidem; varii nempe adhuc naeui in deſcriptionibus praeſertim illorum foſſilium occurrunt, quae vel ob pretium raritatemque ipſorum examini pyroſophico ſubiicere non potuerunt vel hypotheſi aliqua ſeducti, ab anteceſſoribus mutuo acceperunt, mineralogi. Horum e numero noſtra quoque eſt Minera argenti cornea, cuius poſt Kentmannum (*e*) fere omnes mentionem faciunt, licet pauciſſimis videre licuit. Operae-pretium ergo eſſe putaui, rariſſimis eius fruſtis muſaeum orbare, ipſaque iuſto examini metallurgico ſubiicere, et quicquid per analyſin chemicam nec non multorum annorum experientiam mineralogicam didici, rerum naturalium

Ppp 2 ſcruta-

(*d*) *Linn.* Syſt. Nat. Tom. III. Praefat.

(*e*) *Geſnerus* de omni rerum foſſilium genere cum Nomenclatura Kentmanni.

ſcrutatoribus, quos hucusque principia argenti cornei naturalis latuerunt, communicare.

Nomen minerae noſtrae quod attinet, ideo cornea appellata eſt, quoniam cultro raſa, colorem glabri apicis cornu bouini fuſci vel cinerei oſtendit. Antiquis mineralium deſcriptoribus, quantum ego quidem ſcio, incognita fuiſſe videtur, quippe ante nominatum Kentmannum, neque nomen neque vlla eius mentio, niſi cineream argenti mineram Plinii velis (*f*), in ſcriptis illorum occurrit.

Patriam hucusque agnoſcit ſolam Saxoniam et in Sibiria tractum Kolywanenſem. Prima eius fruſta *Mariebergae* inuenta ſunt, poſtea eadem minera *Iohan Georgenſtadii*, et nuperrime, narrante *Brünnichio*, *Oberſchoenae* detecta eſt. Nunquam vero magna copia, ſed rariſſime ſemper in conſpectum venit. In Sibiria vero e ſuperiori parte argentifodinae illae incomparabilis, cui a ſerpentibus nomen (Smeinogorskoi rudnik) ab anno 1745 vsque ad annum 1768 adeo maxima copia haec minera, auro argentifero natiuo vberrime comitata, obuenit, vt totam iſtam ſuperiorem partem (*g*) nominati montis, venam cumulatam magnam complectentis, ſola hac minera, interrex-

(*f*) *Plinii* Hiſt. nat. Lib. XXXIII. Cap 6.

(*g*) In *Faucibus* puta a Commiſſione Imperiali Praeſide Generale *Bejero* anno 1745. habita, Denominatis (Commiskoi rosnos коммиской разносъ) vt et anno 1748. in *puteis* primo et ſecundo numero notatis, qui nunc *fauces* illas magnas (bolſchoi rosnos большой разносъ) conſtituunt, praecipue eruebatur.

tertextis paucis aliis, conſtare diceres: quam metallicultores ibidem, pro plumbo natiuo corrupto, argento largiter permixto, vel ſpecie quadam Minerae argenti vitreae, habuerunt, et vulcano pro excoquendo argento tradiderunt. Nunc vero omnibus fere ſuperioribus locis fodinae ditiſſimae iam exhauſtis, argentum quoque corneum rarius eſſe incepit, nec niſi in fiſſuris fibrisque Spati *pendentis* et Cornei *jacentis* in conſpectum venire ſolet.

Si datas ab antiquioribus autoribus huius minerae deſcriptiones examinemus, primo intuitu viſerimus, illos ferme omnes ſolummodo ſemipelluciditatis, coloris cornei et ductilitatis mentionem feciſſe, paucosque inſuper liquabilitatem ſolo igne candelae obſeruaſſe, et ſic relictis reliquis qualitatibus laudandam ideam ſuperficialem ſuppeditaſſe. Recentioribus ergo, anteceſſorum deſcriptionibus non contentis, magis de interno habitu partibusque conſtitutiuis, quam de externa facie ſolicitis, varias vias incedentibus, omnes illae ambiguitates adſcribendae, quae in nuperrima huius minerae hiſtoria occurrunt. Ex his namque *Linnaeus*, *Cramerus*, *Wallerius*, *Cartheuſerus* aliique varii iuniores argentum hic pauco ſulphure arſenicoque mineraliſatum vel laruatum eſſe contendunt. *Cronſtedius*, chemicam viam nimis ſtricte incedens, occaſione experimentandi deſtitutus, hypotheſi veritati ſimillima fiſus, ab effectu in laboratoriis metallurgicis vſitatiſſimo ad effectum officinae naturae concludens, vnicum acidum ſalis communis hanc mineram conſtituere dixit. *Lehmannus*

 de

de principiis eius haeſitans, audita theoria Cronſtediana, etiam praedictum acidum vel arſenicum asſumenda eſſe putauit. *Scopoli* cum hocce acido ferrum combinauit (*h*). *Iuſti* feruida imaginatione inſpiratus, vti Annaebergae Auſtriae inferioris nouas argenti mineras alcali mineraliſatas finxit, ita hic quoque praeter ſulphur et Arſenicum alcali quoddam addidit. Omnium tamen miſerrime de minera noſtra ſomniauit *Iugel* nunc iterum ea ipſa in Geometria ſua ſubterranea peius dicens, quae iam ante ducentos annos melius dixerunt rudes metallorum foſſores, dum illam, lapidem durum, coti ſimilem, in flauo et coeruleo Corneo obuium, eſſe ſtatuit (*i*).

Differentiis autorum praecipuorum ſic breuiter expoſitis, ad ipſam deſcriptionem minerae noſtrae tranſeo, colorem, figuram, duritiem, odorem aliasque eius qualitates conſiderans.

Color *externus* in variis fruſtis varius, ab ipſo enim micante albido, quem griſeo perlatum nominare poſſum, per omnes variationes cinerei in flaveſcentem, virideſcentem, violaceumque vergentis vsque in fuſco nigreſcentem ſaturatur. *Internus* color *raſurae* faciem cornu bouini cinereo fuſci vel fuſco plumbei aemulatur; *fracturae* vero plerumque medium inter griſeum et fuſcum tenet absque vllo nitore.

Quoad

(*h*) Principia Mineralogiae ſyſtematicae et practicae pag. 211.
(*i*) Johann Gottfried Jugel Geometria Subterranea oder die Markſcheidekunſt S. 113.

Quoad figuram externam minera noſtra amorpha eſt vocanda, fruſtula enim cryſtallina cubica vti famoſum illud Freibergenſe rariſſime occurrunt et in Sibiriae fodina inter maximam eius copiam nunquam viſa ſunt. Pura interdum in Ochra plumbi mineris ſcatente, cum Spato huius metalli, Coeruleo montano cryſtallino, Cupro natiuo aliisque, in glebis varie formatis, inuenitur: interdum fiſſuras fibrasque tam *pendentis* quam *jacentis* auro argentoque natiuis ornata replet: ſaepiſſime vero et vulgariter lamellis Spati particulisque Cornei ſubtiliſſime et fere inconſpicue intertexta eruitur, et ſub nomine minerae argenti ſpataceae vel corneae liquatur. Ratione internae figurae ſiue texturae omnino metallis auro, argento aliisque excepto ferro ſimilis eſt. Magnitudine vero ope Microſcopii *Dollondiani* maxime aucta, ob ſemipelluciditatem a metallis differt, nec aliter, ac ſi ex innumeris diaphanis globulis conſtaret, qui cuticula opaca veſtiti ſunt, et in lamella cultro abſciſſa tenui, elegantes vndulatas figurationes oſtendit, quarum iconem figura a Tab. XXIII. exhibet. T. XXIII.

Superficies in fruſtis puris interdum ſcabriuſcula apparet cum debili quodam nitore, plerumque autem, quaſi farina aſperſa vel tunica quadam ipſa minera fragiliore induta eſſet, obuenit.

Flectitur noſtra minera et ducitur ſub malleo eodem modo ac minera argenti vitrea flecti et duci ſolet, cui duritie parum cedit, eodem fere gradu, quo

quo haec metalla mollia ſtannum puta plumbumque, hac qualitate ſuperat.

Pelluciditate varia plerumque vero valde debili gaudet. Tenues eius lamellae, vti laminae cerae flauae decuplo craſſiores translucent; pellucida vero eius fruſta albo coruo rariora eſſe ſolent.

Ratione qualitatis liqueſcendi adhuc easdem leges ſancte ſeruat, quas iam ante ducentas annos Kentmannus in ſuo fruſtulo detexit: parua nempe eius fruſta candelae admota liqueſcunt cum odore ſulphuris, maioribus vero eodem ignis gradu opus eſſe videtur, quem plumbum liquefactum poſtulat.

Grauitas ſpecifica ad argentum puriſſimum, hoc eſt ex luna cornua reductum, plerumque ſe ita habet vt 140 ad 200.

Inter omnes vero illas notas, quibus haec minera ab omnibus aliis diſtinguitur, nulla conſtantior eſt, quam odor eius ſpecificus, non ingratus, debilis, mixturam aliquam vitriolico argillaceam vel margaceam indicans. Hanc notam, quam Autores ſilentio tranſierunt in omnibus tam ſaxonicis quam ſibiricis fruſtis ſemper praeſentem inueni, et non ſolum in puris, ſed etiam in mineris tenuiſſime inſperſis (*k*) intertextisque certiſſimam. Videtur hic odor

(*k*) In fruſtulis enim illis rariſſimis *Iohan Georgenſtadienſibus*, ob virides cryſtalliſationes micaceas notatu dignis, ad inſtar fuci cinerei tenuiſſime licet inſperſa occurrit, odorem nihilominus tamen valde ſenſibilem prodit.

odor quoque ratione ad durationem habita valde conſtans eſſe, quippe in veterrimis Saxoniae et primis Sibiricis fruſtis aeque ſenſibilis occurrit ac in illis qui nuperrime effoſſa ſunt (*l*).

Reſpectu copiae argenti ex hac minera, non vnam fouent ſententiam autores, quod neque mirandum, quoniam cum tunicis tenuiſſimis nulla certa experimenta inſtituere potuerunt. Ego per centies et plus repetita experimenta didici, mineram puram ex centum libris fere ſeptuaginta libras argenti puri dare, eodemque modo tractandam eſſe, quam autores in arte docimaſtica de minera argenti vitrea praeſcribunt.

Supereſt iam, vt meum qualecunque de hac minera iudicium in medium proferam.

Ab communi illa rerum creatarum ſorte, quod nimirum generantur, ad maturitatem perueniunt, ſeneſcunt et iterum in prima principia reſoluuntur, quo ipſo rurſus ad nouam geneſin quaſi recta via reuoluuntur, varias mineras foſſilia varia excipienda eſſe docent nonnulli Auctores. Imprimis vero de mine-

(*l*) Fruſtulum egregium praedictis cryſtalliſationibus viridibus parallelopipedis micaceis ornatum, a beato Chriſtiani olim Conſiliario Collegiorum Barnauliae accepi, quod inſignis ille metallurgus, cui omnem auri argentique culturam kolyuanenſem debemus, adhuc iuuenis ante 40 annos Saxonia ſecum tulit, hunc odorem ſpecificum ſenſibiliter adhuc exhalantem.

mineris argenti veris vitream puta rubramque magnus mineralogus *Henkelius* affirmauit illas nunquam fatiſcere vt loquuntur metallurgi vel minui et reſolui poſſe, ſed ſemper immutatas permanere, acuoque edaci pertinaciter reluctari (*m*). Certe primo huic poſt Agricolam mineralogiae parenti nunquam contradicerem, niſi res ipſa loqueretur. Mineram argenti rubram a fortiſſimo hoc naturae dente rodi et in puluerem vitriolico arſenicalem verti, iam plures obſeruarunt mineralogi (*n*). Quod vero minera argenti vitrea, huic quoque legi ſubiecta, illud in ipſa illa ab ſerpentibus inclyta fodina didici. Inueni ſcilicet omnes illas ab Autoribus allatas huius minerae varietates, fuſcam nimirum, flauam, cineream et virideſcentem, nihil aliud eſſe, quam vnam eandemque mineram, tempore et aetate ſolummodo vel maturitate, vt ita dicam, differentem.

Duriuſcula illa fruſta violaceo plumbea, quae cum Galena et pyrite cupreo vel ſubſtantia quadam alia, glan-

(*m*) *Henkels* Pyrithologia oder Kieshiſtorie S. 685. Quod tamen non de illis, quae adhuc in gremio venarum ſuarum latent, ſed tantum de illis contendit vir magnus, quae in muſaeis aſſeruantur vt ex ſequentibus paginis l. c. liquet.

(*n*) Pura illa Minerae argenti rubrae fruſta, (non de paruis Pyriti intertextis granulis ſed de magnis rubris homogeneis glebis loquor), quae argento vitreo cryſtalliſato obvolutae ſunt, vti Freibergii occurrere ſolent, ſenſim fatiſcere et puluere vitriolico obduci video, licet in muſaei ſatis ſicci arcis vitreis ſeruantur.

glandularum ſiue macularum modo ipſis immixtis, adhuc immutatis nitentibus, venas ſuas ex aſſe replent, et quaſi vnum corpus ſolidum conſtituunt, pro ea varietate habui, quam natura in ſua officina, ad debitam huius minerae maturitatem, in mollitie nempe et colore plumbi conſiſtentem, perducere adhuc non potuit. In eiusmodi venulis metallicis enim, quae ambobus lateribus *pendenti* puta et *iacenti* arctiſſime conglutinatae ſunt, aëri aquisque ſubterraneis nullus acceſſus conceditur, et conſequenter nulla fatiſcentia vel reſolutio et mollitio locum habere poteſt.

Cum autem praedicta duo elementa ſalibus comitantibus venas penetrant, ſiue id longitudine temporis, ſiue terrae motu, ſiue quacunque alia cauſſa fiat, variae ſolutiones, deſtructiones, regenerationesque producuntur. Partes nimirum illae galenaceae, pyritoſae, calcareae aliaeque, menſtruorum vi magis ſubiectae, ſoluuntur, et minera noſtra, quae in priori varietate cum his heterogeneis lateribusque ſuis in vnum corpus ſolidum, durum conglutinata erat, nunc iam cauernoſa (druſig) purior, ductilior et mollior ſaturato colore plumbi inter latera ſua aeri aquisque expoſita iacet; eſtque nihil aliud, quam frequentiſſimum vetuſtiſſimumque illud, argentum rude plumbeo colore Auctorum, quod recentiores mineram argenti vitream, licet minori iure, vocant. Hanc, quam tempori ſolummodo debemus varietatem, maturum argentum vitreum dicerem.

Si poſt plura ſecula, vt loquuntur Metallarii, ſero venerit foſſor metallicus, non amplius mineram ſuam ſaturato plumbeo colore et nitore praeditam inuenerit, ſed vel pallidam, nitoreque ad partem orbatam, vel cineraceam in fuſcum, flauum viridemque colorem vergentem, cum aliqua debili pelluciditate, nec non odore ſpecifico, quem ſupra deſcripſi, vt putares naturam ſubtiliſſimam aliquam ſolutionem ſulphuris, argentum hic mineraliſantis incepiſſe, quae cum pauca volatiliſatione metalli et diminutione grauitatis ſpecificae coniuncta eſt. Hanc temporis quoque filiam, quae Autoribus *minera cornea* audit et inter omnes argenti mineras rariſſime occurrit, pro tertia huius minerae varietate permatura haberem.

Haec iam ſeneſcens argenti minera ſenſim metallo ſuo orbatur, quod in vicinitate iam nudum occurrit. Color eius pallidus vel fuſcus nigreſcit et amiſſa tenacitate in fragilem, carboni ſimilem, manus inquinantem maſſam permutatur. Haec varietas, quam autores, nunc mineram argenti nigram nunc mineram vitream fragilem, vocare ſolent, mihi vltima minerae noſtrae aetas eſſet.

Pallide plumbeae illae minerae ſiue argenti vitrei mollis tenuem lamellulam, illa tamen duplo craſſiorem quam Figura *a.* monſtrat, magnitudine aucta exhibet Figura *b.* Eſt illa quoad partem pellucida et ex eiusmodi corpuſculis globuloſis compoſita ac de minera cornea iam dixi. Figura *c.* lamellumellulam eiusdem minerae Freibergae ortae repraesentat. Luna cornua autem, quae arte producitur sub Microscopio visa, ex homogeneis partibus constare videtur, quasi cerae flauae frustulum esset.

Ex hac breui historia fatorum argenti rudis plumbei coloris videtur mineram nostram corneam non solum eiusdem prosapiae esse, iisque fere ac illud constare principiis constitutiuis, sed etiam illos autores non errasse qui illam subdiaphanam substantiam sulphure potissimum mineralisatam esse statuunt et mineram vitream albam (Weisses Glaserz) vocant, quod etiam ex institutis cum ipsa plurimis experimentis vberius patebit, quorum nonnulla coronidis loco hic sequuntur.

Accepi minerae nostrae purissimae, subtilissime rasae semiunciam, et vnciis duabus olei vitrioli concentratissimi superinfusis, ex retorta vitrea probe loricata, applicato recipiente proportionatam aquae copiam continente, omnibusque obseruandis obseruatis, ex fortissimo igne arenae distillaui. Hanc operationem eum in finem institui, vt aliquid acidi salis communis acciperem, si hoc, vt nonnulli volunt, mineralisatum esset. Accepi autem, iusto adhuc ignis gradu adhibito, nihil, aucto vero ad vehementem vsque, ipsum oleum, odore sulphureo impraegnatum transiit. Luna cornua factitia autem optime edulcorata ex altera eiusmodi retorta, in vno furno becheriano, eodem igne iisdem cautelis tractata, primo dedit portionem acidi salis communis, quod argentum acido nitri solutum egregie praecipitabat et cum hocce acido lege artis permixtum aurum ſoluebat: poſtea quoque ipſum purum oleum, relicta calce, euehebatur.

Nullo ſic acido ſalis per diſtillationem inuento, putaui illud via ſublimationis inueniri poſſe. Accepi igitur Mercurii Viui vnciam vnam, quam cum ſemiuncia minerae noſtrae puriſſimae in mortario vitreo trituraui. Durante trituratione per totas duodecim horas, nulla tamen amalgamatio nullusque legitimus aethiops inſequi voluit, ſed minera in ſubtiliſſimas lamellulas nigricantes detrita ſuperficiem mercurii ſolummodo obueſtiebat.

Peracta operatione aliquid cinnabarini fuſci cum multo mercurio in collo vitri apparuit. Ad mercurium ſublimatum corroſiuum vero quod attinet, quem expectaui, nec vllum quidem eius veſtigium adfuit, quod neceſſario adeſſe deberet, ſi acido ſalis muriatici argentum mineraliſatum fuiſſet.

Praeſentiam vero ſulphuris, praeter praedictam cinnabarificationem, ex hepateſcenti huius minerae qualitate, ſatis cognoui, vt ex ſequentibus breuiter expoſitis liquet.

1. Partes nimirum anaticae minerae noſtrae purae ſubtiliſſime raſae et ſalis tartari bene permixtae, crucibulo haſſiaco commiſſae, et in aperto igne tractatae, vt de hepate ſulphuris, excepta ſola agitatione, monent auctores, candefactae mediocriter intumeſcebant, aucto vero ignis gradu, in maſſam compactam coeruleo cineream, ſuperficie glabra, ſubſidebant; quae poſt refrigene-

gerationem affuſa aqua diſtillata tempore duodecim horarum ſoluebatur. Solutio hac, aquae limpidiſſimae ſimilis, inſtillato acido nitri, cum turbatione et efferueſcentia fuſco opalina in luteum vergens euaſit, prodito nauſeoſo odore ipſius hepatis, quem nominatum alcali cum ſulphure natiuo e monte ſulphureo *argunenſi* ſimul paratum exhalabat.

2. Eadem minera cornea cum ſpato adhaerente praedicto modo liquata, in maſſam nigro cineream abibat, cuius aquoſa ſolutio flaueſcens, limpida affuſo acido nitri cum efferueſcentia et turbatione colore fuſco opalino tingebatur, praeſentiamque aliquam hepatis indicabat.

3. Minera argenti vitrea pura cryſtallina Freibergenſis qualis in Spato albo occurrere ſolet iisdem enchiridiis tentata, nigro coerulea coagulata fundum crucibuli petebat: ſolutio vero aquoſa in viridem colorem vergens cum nominato acido turbabatur, fuſcumque hepar absque ſenſibili ebullitione largiebatur.

4. Eadem argenti minera vitrea pura non cryſtallina, ratione coloris et mollitiei a plumbo vendibili difficillime dignoſcenda eiusdem fodinae, eodem modo vti dictum fuſa, maſſam nigram colore fuliginis praebebat, cuius ſolutio aquoſa, eleganter oliuacea, limpida, addito acido nitri cum efferueſcentia et turbatione, fuſcum lac ſulphuris tunica veſtitum dedit odore valde ſenſibili hepatico.

5. Mi-

5. Minera Kolywanenſis vitrea ſatis adhuc dura, colore violaceo, maculis rubicundis pyritoſis parvis interſperſis, cuius iam ſupra pag. 490. mentionem feci, praedictarum minerarum modo tractata, in maſſam fuſco hepatico colore ornatam liquabatur; quae aqua ſoluta ſolutionem cinereo virideſcentem limpidam dedit, affuſo acido nitri vehementer efferueſcentem, opalino fuſcam, cuticula veſtitam, hepar ſulphuris redolentem.

Inuento ſic ſulphure in omnibus memoratis mineris, quas naturam cognationis vinculo coniunxiſſe videmus, etiam cum Luna cornua factitia probe edulcorata idem periculum feci: haec autem modo illarum fundum crucibuli non petebat, nec coagulabatur, ſed poroſa cauernoſaque manebat. Alcali vero, ſuperfuſa aqua diſtillata, ſoluto, argentum pulcherrimum varie ramoſum quaſi dendriticum apparebat.

ASTRO-

ASTRONOMICA.

COMMENTATIO HYPOTHETICA

DE PERICVLO, A NIMIA COMETAE APPROPINQVATIONE METVENDO.

Auctore

L. EVLERO.

Cum haec quaestio sine dubio maximi sit momenti, neque tamen ob summas calculi difficultates quicquam certi adhuc definiri potuerit, laborem haud ingratum me susscepturum esse arbitror, si hypothetice casum finxero, quo cometa proxime ad terram esset accessurus; atque omnes mutationes, quos tam terra quam cometa in motu forent passuri, accuratius determinavero. Quod quo facilius exsequi liceat, cometam in ipso plano eclipticae moueri assumam, vt saltem difficultates calculi ex diuersitate planorum oriundas remoueam. Hunc in finem ante omnia formulas generales pro motu tam cometae quam terrae quatenus in se inuicem agunt perpendi conueniet.

§. 1. Sit igitur S centrum solis pro fixo habendum, eiusque massa sit $= A$; tum vero ad tempus quodcunque $= t$ reperiatur centrum terrae in T, cometa vero in Z, ac ponatur massa terrae $= B$, cometae autem $= C$: vbi ex parallaxi solis nuper ac- T. XXIV. Fig. 1.

curatiſſime determinata compertum eſt eſſe propemodum $A : B = 360000 : 1$. Iam ponantur diſtantiae a Sole $ST = u$ et $SZ = v$; at diſtantiae terram inter et cometam $TZ = w$. Et aſſumta directione fixa $S♈$, quae in plano eclipticae ad initium arietis tendat, ad eam ex T et Z perpendicula demittantur TX et Zx, vocenturque coordinatae pro terra $SX = X$ et $XT = Y$; at pro cometa $Sx = x$ et $xZ = y$. Praeterea ponantur anguli $♈ST = \Phi$ et $♈SZ = \omega$, vt hinc obtineamus coordinatas

$$SX = X = u \operatorname{cof.} \Phi \text{ et } XT = Y = u \operatorname{fin.} \Phi.$$

Tum vero

$$Sx = x = v \operatorname{cof.} \omega \text{ et } xZ = y = v \operatorname{fin.} \omega,$$

hincque duplici modo erit

$$TZ = w = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2};$$

deinde vero etiam

$$w = \sqrt{uu + vv - 2uv \operatorname{cof.} (\omega - \Phi)}.$$

§. 2. His conſtitutis erit vis qua ſol terram attrahit $= \frac{A}{uu}$, vnde oritur vis ſecundum $XS = \frac{AX}{u^3} = \frac{A \operatorname{cof.} \Phi}{uu}$ et vis ſecundum $TX = \frac{AY}{u^3} = \frac{A \operatorname{fin.} \Phi}{uu}$. Deinde quia cometa ad ſolem vrgetur vi $\frac{A}{vv}$, hinc naſcentur vires ſecundum

$$xS = \frac{Ax}{v^3} = \frac{A \operatorname{cof.} \omega}{vv} \text{ et ſecundum } Zx = \frac{Ay}{v^3} = \frac{A \operatorname{fin.} \omega}{vv}.$$

Porro quia terra trahitur verſus cometam in Z vi $= \frac{C}{ww}$, hinc oritur vis ſecundum

$$SX = \frac{C(x - X)}{w^3} = \frac{C(v \operatorname{cof.} \omega - u \operatorname{cof.} \Phi)}{w^3}, \text{ et vis ſecundum}$$

$$XT = \frac{C(y - Y)}{w^3} = \frac{C(v \operatorname{fin.} \omega - u \operatorname{fin.} \Phi)}{w^3}.$$

Vicis-

Viciſſim autem cometa ad terram vrgetur vi $= \frac{B}{ww}$, vnde naſcitur vis ſecundum

$$xS = \frac{B(x - X)}{w^3} = \frac{B(v\,cof.\,\omega - u\,cof.\,\Phi)}{w^3} \text{ et ſecundum}$$

$$Zx = \frac{B(y - Y)}{w^3} = \frac{B(v\,fin.\,\omega - u\,fin.\,\Phi)}{w^3}.$$

His igitur viribus coniunctis terra ſollicitabitur his viribus acceleratricibus:

$$\text{vi ſecundum } XS = \frac{A\,cof.\,\Phi}{uu} - \frac{C(v\,cof.\,\omega - u\,cof.\,\Phi)}{w^3}$$

$$\text{vi ſecundum } TX = \frac{A\,fin.\,\Phi}{uu} - \frac{C(v\,fin.\,\omega - u\,fin.\,\Phi)}{w^3}$$

cometa autem ſollicitabitur

$$\text{vi ſecundum } xS = \frac{A\,cof.\,\omega}{vv} + \frac{B(v\,cof.\,\omega - u\,cof.\,\Phi)}{w^3} \text{ et}$$

$$\text{vi ſecundum } Zx = \frac{A\,fin.\,\omega}{vv} + \frac{B(v\,fin.\,\omega - u\,fin.\,\Phi)}{w^3}.$$

§. 3. Quia vero etiam ſol ad terram trahitur vi ſecundum $ST = \frac{B}{uu}$, quae reſoluta dat ſecundum directionem SX vim $\frac{B\,cof.\,\Phi}{uu}$ et ſecundum directionem XT vim $\frac{B\,fin.\,\Phi}{uu}$, pari modo etiam ſol ad cometam vrgetur vi $\frac{C}{vv}$, quae reſoluta dat pro directione Sx vim $\frac{C\,cof.\,\omega}{vv}$ et pro directione xZ vim $\frac{C\,fin.\,\omega}{vv}$. Quare cum ſolem in quiete ſtatuamus, has vires mutatis ſignis inſuper ad vires quibus terra et cometa ſollicitantur adiici oportet, vnde pro terra habebuntur vires ſequentes:

$$\text{ſecundum } XS \text{ vim } \frac{(A+B)\,cof.\,\Phi}{uu} - \frac{C(v\,cof.\,\omega - u\,cof.\,\Phi)}{w^3} + \frac{C\,cof.\,\omega}{vv}$$

$$\text{ſecundum } TX \text{ vim } \frac{(A+B)\,fin.\,\Phi}{uu} - \frac{C(v\,fin.\,\omega - u\,fin.\,\Phi)}{w^3} + \frac{C\,fin.\,\omega}{vv}.$$

At vero cometa vrgebitur ſequentibus viribus:

$$\text{ſecundum } xS \text{ vi } \frac{(A+C)\,cof.\,\omega}{vv} + \frac{B(v\,cof.\,\omega - u\,cof.\,\Phi)}{w^3} + \frac{B\,cof.\,\Phi}{uu}$$

 ſecun-

secundum Zx vi $\frac{(A+C)\,\text{fin.}\,\omega}{vv} + \frac{B(v\,\text{fin.}\,\omega - u\,\text{fin.}\,\Phi)}{w^3} + \frac{B\,\text{fin.}\,\Phi}{uu}$
quae vires iam sunt acceleratrices, ita vt non opus sit eas per massas in quas agunt diuidere.

§. 4. His igitur viribus inuentis pro motu terrae sequentes binas adipiscimur aequationes:

$$\frac{ddX}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+B)\,\text{cos}.\,\Phi}{uu} + \frac{C(v\,\text{cos}.\,\omega - u\,\text{cos}.\,\Phi)}{w^3} - \frac{C\,\text{cos}.\,\omega}{vv}$$
$$\frac{ddY}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+B)\,\text{fin}.\,\Phi}{uu} + \frac{C(v\,\text{fin}.\,\omega - u\,\text{fin}.\,\Phi)}{w^3} - \frac{C\,\text{fin}.\,\omega}{vv}$$

simili autem modo pro motu cometae habebimus sequentes duas aequationes:

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+C)\,\text{cos}.\,\omega}{vv} - \frac{B(v\,\text{cos}.\,\omega - u\,\text{cos}.\,\Phi)}{w^3} - \frac{B\,\text{cos}.\,\Phi}{uu}$$
$$\frac{ddy}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+C)\,\text{fin}.\,\omega}{vv} - \frac{B(v\,\text{fin}.\,\omega - u\,\text{fin}.\,\Phi)}{w^3} - \frac{B\,\text{fin}.\,\Phi}{uu}.$$

In his aequationibus differentio-differentialibus elementum temporis dt assumtum est constans, et secundum regulas in Mechanica traditas g denotat altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo, si quidem tempora in minutis secundis exprimere velimus; qui computus cum hic foret nimis prolixus, mox aliam temporum mensuram introducemus, ex motu scilicet terrae medio petitam.

§. 5. Quoniam autem hic coordinatas orthogonales X, Y et x, y ideo in calculum induximus, vt principia motus in Mechanica tradita, quae ad certas directiones fixas respiciunt, applicare licuerit, nunc in gratiam calculi astronomici eas iterum elidi conueniet; quem in finem pro terra sequentibus combinationibus vtamur:

I.

$$\text{I. } \frac{ddX\,cos.\Phi + ddY\,sin.\Phi}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+B)}{uu} + \frac{C(v\,cos.(\omega-\Phi)-u)}{w^3} - \frac{C\,cos.(\omega-\Phi)}{vv}$$

$$\text{II. } \frac{ddY\,cos.\Phi - ddX\,sin.\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{C\,v\,sin.(\omega-\Phi)}{w^3} - \frac{C\,sin.(\omega-\Phi)}{vv}.$$

Simili modo pro cometa adhibeamus ſequentes combinationes:

$$\text{I. } \frac{ddx\,cos.\omega + ddy\,sin.\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+C)}{vv} - \frac{B(v-u\,cos.(\omega-\Phi))}{w^3} - \frac{B\,cos.(\omega-\Phi)}{uu}$$

$$\text{II. } \frac{ddy\,cos.\omega - ddx\,sin.\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{B\,u\,sin.(\omega-\Phi)}{w^3} - \frac{B\,sin.(\omega-\Phi)}{uu}.$$

§. 6. Verum ad literas X, Y, x et y penitus extrudendas notemus eſſe

$$X\,coſ.\Phi + Y\,ſin.\Phi = u \quad \text{et} \quad Y\,coſ.\Phi - X\,ſin.\Phi = o,$$

hinc differentiando erit

$$dX\,coſ.\Phi + dY\,ſin.\Phi - X\,d\Phi\,ſin.\Phi + Y\,d\Phi\,coſ.\Phi = du$$

hincque

$$dX\,coſ.\Phi + dY\,ſin.\Phi = du. \quad \text{Deinde}$$

$$dY\,coſ.\Phi - dX\,ſin.\Phi - Y\,d\Phi\,ſin.\Phi - X\,d\Phi\,coſ.\Phi = o, \text{ ergo}$$

$$dY\,coſ.\Phi - dX\,ſin.\Phi = +u\,d\Phi,$$

Ac denuo differentiando fiet

$$ddX\,coſ.\Phi + ddY\,ſin.\Phi - dX\,d\Phi\,ſin.\Phi + dY\,d\Phi\,coſ.\Phi = ddu,$$

ergo

$$ddX\,coſ.\Phi + ddY\,ſin.\Phi = ddu - u\,d\Phi^2. \quad \text{Porro}$$

$$ddY\,coſ.\Phi - ddX\,ſin.\Phi = ud\Phi + dY\,a\Phi\,ſin.\Phi + dx\,d\Phi\,coſ.\Phi$$

ſiue

$$ddY\,coſ.\Phi - ddX\,ſin.\Phi = u\,dd\Phi + 2\,du\,d\Phi.$$

His igitur valoribus ſubſtitutis pro motu terrae has duas obtinebimus aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddu - u\,d\Phi^2}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+B)}{uu} + \frac{C(v\,cos.(\omega-\Phi)-u)}{w^3} - \frac{C\,cos.(\omega-\Phi)}{vv}$$

$$\text{II. } \frac{u\,dd\Phi + 2\,du\,d\Phi}{2g\,dt^2} = \frac{C\,v\,sin.(\omega-\Phi)}{w^3} - \frac{C\,sin.(\omega-\Phi)}{vv}.$$

§. 7.

§. 7. Simili modo pro cometa cum ſit

$$x\,\text{coſ.}\,\omega + y\,\text{ſin.}\,\omega = v \quad \text{et} \quad y\,\text{coſ.}\,\omega - x\,\text{ſin.}\,\omega = 0$$

erit differentiando

$$dx\,\text{coſ.}\,\omega + dy\,\text{ſin.}\,\omega = dv \quad \text{et} \quad dy\,\text{coſ.}\,\omega - dx\,\text{ſin.}\,\omega = v\,d\omega$$

ac denuo differentiando

$$ddx\,\text{coſ.}\,\omega + ddy\,\text{ſin.}\,\omega = ddv - v\,d\omega^2 \quad \text{et}$$

$$ddy\,\text{coſ.}\,\omega - ddx\,\text{ſin.}\,\omega = v\,dd\omega + 2\,dv\,d\omega$$

vnde motus cometae his ſequentibus aequationibus exprimetur:

$$\frac{ddv - v\,d\omega^2}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+C)}{vv} - \frac{B(v - u\,\text{coſ.}(\omega - \Phi)}{w^3} - \frac{B\,\text{coſ.}(\omega - \Phi)}{uu}$$

$$\frac{v\,dd\omega + 2\,dv\,d\omega}{2g\,dt^2} = -\frac{B\,u\,\text{ſin.}(\omega - \Phi)}{w^3} - \frac{B\,\text{ſin.}(\omega - \Phi)}{uu}.$$

Sicque omnia reducuntur ad binas diſtantias u et v et binos angulos Φ et ω, quae ad quoduis tempus determinari oportet.

§. 8. Quod ſi vero omnia potius per ipſas coordinatas X, Y et x, y exprimere malimus, ita vt ſit

$$u = \sqrt{X^2 + Y^2};\ v = \sqrt{xx + yy} \ \text{et} \ \omega = \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2};$$

tum vero pro angulis

$$\text{coſ.}\,\Phi = \frac{X}{u},\ \text{ſin.}\,\Phi = \frac{Y}{u},\ \text{coſ.}\,\omega = \frac{x}{v},\ \text{ſin.}\,\omega = \frac{y}{v}$$

aequationes immediate ex principiis mechanicis deductae dabunt primo pro terra

$$\frac{ddX}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+B)X}{u^3} + \frac{C(x - X)}{w^3} - \frac{Cx}{v^3}$$

$$\frac{ddY}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+B)Y}{u^3} + \frac{C(y - Y)}{w^3} - \frac{Cy}{v^3}$$

ſimilique modo pro motu cometae

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+C)x}{v^3} - \frac{B(x - X)}{w^3} - \frac{BX}{u^3}$$

$$\frac{ddy}{2g\,dt^2} = -\frac{(A+C)y}{v^3} - \frac{B(y - Y)}{w^3} - \frac{BY}{u^3}.$$

§. 9.

§. 9. Praemiſſis igitur his formulis generalibus, quibus tam motus terrae quam cometae ob actionem mutuam perturbatur, vtrumque motum ſeorſim neglecta actione mutua euoluamus, et curſum cometae in plano eclipticae ita inſtituimus, vt, vbi per orbitam terrae eſt tranſiturus, ibi ſimul ipſam terram offendat, et quaſi contingat. Ante vero quam hoc eueniat, cum cometa iam terrae ita apropinquauerit, vt actio mutua iam ſatis notabilis euadat ac fortaſſe actionem Solis ſuperet, tum nobis erit inueſtigandum, quantam mutationem vterque motus ſit ſubiturus, vt inde Phaenomena definire liceat, quae tam ante quam poſt hanc coniunctionem apparere debeant.

§. 10. Primo igitur cum inaequalitates motus terrae ex excentricitate oriundae nihil ad hanc inueſtigationem conferant, ipſam terram in circulo circa ſolem motu vniformi circumferri aſſumamus, cuius circuli radius ſit diſtantia media terrae a ſole $= a$; tum vero tempore t circa ſolem conficiat angulum $= \vartheta$, quem pro tempore vnius diei nouimus eſſe $= 59'.8''$ ſiue in partibus radii ſpatium $= 0,017204$: poſito ſcilicet ſinu toto $= 1$. Quamobrem reiectis terminis ab actione cometae ortis habebimus primo eius diſtantiam a ſole $u = a$, tum vero pro tempore t angulum $\Phi = \vartheta$; quibus valoribus ſubſtitutis formulae (§. 6.) datae ob $dd\Phi = dd\vartheta = 0$, quia motus eſt vniformis, erunt

prima $-\frac{a\,d\vartheta^2}{2g\,dt^2} = -\frac{A+B}{aa}$ altera vero $0 = 0$.

 Hinc

Hinc igitur loco temporis t angulum seu arcum ϑ in calculum introducere poterimus, dum ex ista aequalitate obtinemus: $2g\,dt^2 = \frac{a^3\,d\vartheta^2}{A+B}$; quare si hunc valorem introducamus, et aequationes generales per $2g\,dt^2$ multiplicemus, eae sequentes formas induent:

$$\text{I. } ddu - ud\Phi^2 = -\frac{a^3\,d\vartheta^2}{uu} + \frac{a^3 C\,d\vartheta^2(v\,\text{cos.}(\omega-\Phi)-u)}{w^3\,(A+B)} - \frac{a^3 C\,d\vartheta^2\,\text{cos.}(\omega-\Phi)}{vv\,(A+B)}$$

$$\text{II. } udd\Phi + 2dud\Phi = \frac{a^3 C v\,d\vartheta^2\,\text{sin.}(\omega-\Phi)}{w^3\,(A+B)} - \frac{C a^3\,d\vartheta^2\,\text{sin.}(\omega-\Phi)}{vv\,(A+B)}.$$

Quia autem massa C prae massa solis A est quam minima, ponamus breuitatis gratia fractionem $\frac{C}{A+B} = m$, vt habeamus has aequationes:

$$\text{I. } ddu - ud\Phi^2 = -\frac{a^3 d\vartheta^2}{uu} + \frac{ma^3 d\vartheta^2(v\,\text{cos.}(\omega-\Phi)-u)}{w^3} - \frac{ma^3 d\vartheta^2\,\text{cos.}(\omega-\Phi)}{vv}$$

$$\text{II. } udd\Phi + 2dud\Phi = \frac{ma^3 d\vartheta^2\,\text{sin.}(\omega-\Phi)}{w^3} - \frac{ma^3 d\vartheta^2\,\text{sin.}(\omega-\Phi)}{vv}.$$

§. 11. At si ipsas coordinatas X et Y in calculo retinere velimus, aequationes supra §. 8. exhibitae, si etiam per $2g\,dt^2$ multiplicentur induent has formas:

$$ddX = -\frac{a^3 X\,d\vartheta^2}{u^3} + \frac{ma^3 d\vartheta^2(x-X)}{w^3} - \frac{ma^3 x\,d\vartheta^2}{v^3}$$

$$ddY = -\frac{a^3 Y\,d\vartheta^2}{u^3} + \frac{ma^3 d\vartheta^2(y-Y)}{w^3} - \frac{ma^3 y\,d\vartheta^2}{v^3}$$

hae scilicet aequationes erunt euoluendae, postquam actio mutua terram inter et cometam sensibilis fieri coeperit; ante vero hunc terminum, quamdiu motus terrae adhuc fuerit vniformis, ob $u = a$ et $\Phi = \vartheta$, erit $X = a\,\text{cos.}\,\vartheta$ et $Y = a\,\text{sin.}\,\vartheta$, hincque porro $\frac{dX}{d\vartheta} = -a\,\text{sin.}\,\vartheta$ et $\frac{dY}{d\vartheta} = a\,\text{cos.}\,\vartheta$; vbi istae formulae $\frac{dX}{d\vartheta}$ et $\frac{dY}{d\vartheta}$ denotant celeritates terrae secundum directionem coordinatarum; vnde ipso momento, quo terra per directionem fixam S ♈ transit, quandoquidem in hoc loco actionem cometae incipere statuemus, erit

$$X = a, \quad Y = 0 \text{ et } \frac{dX}{d\vartheta} = 0 \text{ et } \frac{dY}{d\vartheta} = a.$$

§. 12. Nunc vero pro motu cometae in plano eclipticae, quo calculus simplicior reddatur, ponamus cometam recta versus solem cursum suum tendere, quoniam obliquitas cursus ad nostrum institutum nihil confert. Hoc modo remota actione terrae angulus ♈ S Z $= \omega$ erit constans puta $= \alpha$, vnde aequationes pro cometa (§. 7.) erunt

$$\frac{ddv}{2g\,dt^2} = -\frac{A+C}{vv} \text{ et } 0 = 0,$$

vnde si loco $2g\,dt^2$ valorem supra stabilitum substituamus habebimus

$$ddv = -\frac{a^3\,d\vartheta^2\,(A+C)}{vv\,(A+B)};$$

quia vero massa A prae B et C est quasi infinita, erit

$$\frac{A+C}{A+B} = 1, \text{ ideoque } ddv = -\frac{a^3\,d\vartheta^2}{vv},$$

qua aequatione motus cometae per lineam rectam Z S exprimitur. Eam igitur per $2dv$ multiplicemus et integremus, atque ob $d\vartheta$ constans obtinebimus

$$dv^2 = \frac{2a^3\,d\vartheta^2}{v}, \text{ siue } \frac{dv^2}{d\vartheta^2} = \frac{2a^3}{v} + C,$$

vbi $\frac{dv}{d\vartheta}$ denotat celeritatem, qua cometa a sole recederet. Verum ex theoria cometarum constat, eos ita moueri ac si ex distantia infinita motum incepissent; vnde patet, constantem hanc esse $= 0$; quare cum cometam ad solem accedere assumamus eius celeritas erit $\frac{dv}{d\vartheta} = -\sqrt{\frac{2a^3}{v}}$.

T. XXIV. Fig. 2. §. 13. Pro motu autem penitus determinando ex hac aequatione deducimus $d\vartheta = -\frac{dv\sqrt{v}}{\sqrt{2a^3}}$, cuius integrale est $\vartheta = C - \frac{2v\sqrt{v}}{3\sqrt{2a^3}}$. Ad constantem autem determinandam ponamus initio, quo terra transiit per directionem fixam S♈ in puncto B (quoniam hoc tempore actionem mutuam incipere deinceps statuemus) cometam fuisse in C, existente distantia $SC = c$, ac tempus quo ex C in Z vsque perueniet erit $\vartheta = \frac{2c\sqrt{c} - 2v\sqrt{v}}{3\sqrt{2a^3}}$. Quare si iam ponatur $v = SO = a$, habebimus tempus, quo cometa ex C vsque ad eclipticam in O pertingit $= \frac{2c\sqrt{c} - 2a\sqrt{a}}{3\sqrt{2a^3}}$.

§. 14. Cum igitur angulus BOC positus sit $= \alpha$, tempus quo terra ex B ad eundem locum O perueniet erit $\vartheta = \alpha$; necesse igitur est vt fiat

$$\alpha = \frac{2c\sqrt{c} - 2a\sqrt{a}}{3\sqrt{2a^3}},$$

vnde colligimus

$$2c\sqrt{c} = 3\alpha\sqrt{2a^3} + 2a\sqrt{a} = (3\alpha\sqrt{2} + 2)a\sqrt{a}$$

hincque nanciscimur ipsam distantiam

$$SC = c = a\left(\frac{3\alpha}{\sqrt{2}} + 1\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Quocirca si initio statuamus terram fuisse in B, existente distantia $SB = a$: simul vero cometam fuisse in C, existente angulo $BSC = \alpha$, et distantia

$$SC = c = a\left(\frac{3\alpha + \sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

tum tam terra quam cometa ob motum proprium, neglecta scilicet mutua perturbatione, elapso tempore $= \alpha$ simul peruenient in idem punctum O, ibique

que idcirco conflictum exercerent, quem autem fortaſſe ob actionem mutuam euitabunt, propterea quod vtriusque motus ob mutuam actionem non mediocriter immutabitur.

§. 15. Quod ſi igitur aſſumamus, actionem mutuam terrae et cometae tum demum fieri ſenſibilem, cum terra verſata fuerit in puncto B, cometa autem in puncto C, quod temporis momentum tanquam epocham accipiamus, vnde vtrumque motum deinceps proſequamur; hinc elapſo tempore $= \vartheta$ cometa peruenerit in Z, ita vt ſit diſtantia $SZ = v$, et angulus $\Upsilon SZ = \omega$. Vt ſupra ergo demiſſo perpendiculo Zx, poſitisque coordinatis $Sx = x$ et $Zx = y$, aequationes pro motu cometae inter coordinatas x et y erunt ſequentes, ſiquidem fractionem minimam ponamus $\frac{B}{A+B} = n$

$$ddx = -\frac{a^3 x\, d\vartheta^2}{v^3} - \frac{n a^3\, d\vartheta^2 (x - X)}{w^3} - \frac{n a^3\, d\vartheta^2\, X}{u^3} \text{ et}$$

$$ddy = -\frac{a^3 y\, d\vartheta^2}{v^3} - \frac{n a^3\, d\vartheta^2 (y - Y)}{w^3} - \frac{n a^3\, d\vartheta^2\, Y}{u^3}$$

pro quarum aequationum reſolutione notandum eſt, initio, quo cometa adhuc haeſit in C, exiſtente diſtantia $SC = c$ et angulo $\Upsilon SC = \alpha$, fore coordinatas $x = c \operatorname{coſ.} \alpha$ et $y = c \operatorname{ſin.} \alpha$. Deinde cum ſupra inuenerimus $\frac{dv}{d\vartheta} = -\frac{a\sqrt{2a}}{\sqrt{v}}$, erunt celeritates laterales pro initio

$$\frac{dx}{d\vartheta} = \frac{dv}{d\vartheta} \operatorname{coſ.} \alpha = -a \operatorname{coſ.} \alpha \sqrt{\frac{2a}{c}} \text{ et } \frac{dy}{d\vartheta} \operatorname{ſin.} \alpha = -a \operatorname{ſin.} \alpha \sqrt{\frac{2a}{c}}$$

ſupra vero pro eadem epocha iam pro terra dedimus

$$X = a;\; Y = 0;\; \frac{dX}{d\vartheta} = 0;\; \frac{dY}{d\vartheta} = a.$$

 §. 16.

§. 16. Nunc angulum α tantum accipiamus, vt tum demum actio mutua terrae et cometae euadat sensibilis, id quod ob summam paruitatem terrae et cometae respectu solis non ante contingere statuamus, quam duobus circiter diebus ante coniunctionem in O, quamobrem statuamus angulum

$$BSC = \alpha = 2\,(59'.\ 8'') = 1^\circ.\ 58'.\ 17'',$$

cuius valor in partibus radii est 0, 034408; hinc igitur colligetur distantia

$$SC = c = \left(\frac{\alpha x}{\sqrt{2}} + 1\right)^{\frac{2}{7}} a = 1,048086.\,a$$

vnde fit $OC = 0,048086.\,a$, existente angulo

$$BSC = 1^\circ.\ 58'.\ 17''.$$

Hinc igitur pro initio huius epochae habebimus

$$x = 1,047472.\,a \text{ et } y = 0,036054.\,a$$

porro $\frac{dx}{d\vartheta} = -1,380581\,a$; $\frac{dy}{d\vartheta} = -0,047520\,a$.

§. 17. Constituta igitur hac epocha, vbi terra et cometa primum in se inuicem agere concipiuntur, si ponamus hinc elapsum esse tempus $= \vartheta$, primo pro motu terrae sequentes binas nacti sumus aequationes:

$$ddX = -\frac{a^3 X d\vartheta^2}{u^3} + \frac{m a^3 d\vartheta^2 (x - X)}{w^3} - \frac{m a^3 x d\vartheta^2}{v^3}$$

$$ddY = -\frac{a^3 Y d\vartheta^2}{u^3} + \frac{m a^3 d\vartheta^2 (y - Y)}{w^3} - \frac{m a^3 y d\vartheta^2}{v^3}.$$

Pro motu cometae autem istas binas:

$$ddx = -\frac{a^3 x d\vartheta^2}{v^3} - \frac{n a^3 d\vartheta^2 (x - X)}{w^3} - \frac{n a^3 X d\vartheta^2}{u^3}$$

$$ddy = -\frac{a^3 y d\vartheta^2}{v^3} - \frac{n a^3 d\vartheta^2 (y - Y)}{w^3} - \frac{n a^3 Y d\vartheta^2}{u^3}.$$

Has

Has autem aequationes non ſolum nullo modo integrare licet, ſed etiam ſolita methodus appropinquandi inde petita, quod perturbationes tanquam minimae ſpectari queant, hic locum habere nequit; quandoquidem hic euenire poteſt, vt actio mutua terrae et cometae adeo ſuperet actionem ſolis, cum ſcilicet ſatis prope ad ſe inuicem acceſſerint. Quamobrem alia via non ſupereſt, niſi vt per gradus ſatis exiguos vtrumque motum ex ipſis formulis differentio-differentialibus proſequamur, dum elemento temporis $d\vartheta$ ſucceſſiue valores ſatis exiguos tribuemus vt hinc nullus error ſit metuendus.

Praeparatio harum aequationum ad calculum ſequentem.

§. 18. Primum hic neceſſe eſt omnia elementa quae in has formulas ingrediuntur ad menſuras determinatas magisque cognitas reduci. Primo igitur diſtantiam terrae mediam $= a$ per ſemidiametros terreſtres exprimamus, quoniam haec menſura maxime idonea videtur ad diſtantiam cometae a terra definiendam. Hinc ex parallaxi ſolis nuper inuenta ſtatuamus $a = 24000$ ſemidiametris terrae. Deinde cum fractio $n = \frac{B}{A+B}$ ſit ſatis exacte $\frac{1}{350000}$, tribuamus cometae etiam maſſam terrae aequalem, vt ſit quoque $m = \frac{1}{350000}$, atque hinc per logarithmos habebimus

$$la^3 = 13,1406336, \quad l\,m\,a^3 = l\,n\,a^3 = 7,5843311.$$

Porro autem menſura temporis, quam hic introduximus

mus per angulum ϑ, qui respondet motui medio terrae, nimis est incommoda et non satis clara; eius ergo loco potius conueniet tempus ab epocha nostra elapsum per dies naturales exprimere, quorum numerum ponamus $= \tau$. Tum igitur ob motum diurnum $= 59'. 8'' = 0,017204$ erit $\vartheta = 0,017204\,\tau$ ideoque

$$d\vartheta = 0,017204\, d\tau.$$

Quod si nunc breuitatis gratia ponamus

$$a^3 d\vartheta^2 = \Delta\, d\tau^2 \quad \text{et} \quad m a^3 d\vartheta^2 = n a^3 d\vartheta^2 = \delta\, d\tau^2$$

habebimus

$$l\Delta = 9,6118924 \quad \text{et} \quad l\delta = 4,0555899:$$

quibus valoribus substitutis quatuor nostrae aequationes erunt:

$$ddX = -\frac{\Delta X d\tau^2}{u^3} + \frac{\delta(x - X) d\tau^2}{w^3} - \frac{\delta x d\tau^2}{v^3}$$

$$ddY = -\frac{\Delta Y d\tau^2}{u^3} + \frac{\delta(y - Y) d\tau^2}{w^3} - \frac{\delta x d\tau^2}{v^3}$$

$$ddx = -\frac{\Delta x d\tau^2}{v^3} - \frac{\delta(x - X) d\tau^2}{w^3} - \frac{\delta X d\tau^2}{u^3}$$

$$ddy = -\frac{\Delta Y d\tau^2}{v^3} - \frac{\delta(y - Y) d\tau^2}{w^3} - \frac{\delta Y d\tau^2}{u^3}$$

vbi membra postrema ob nimiam paruitatem tuto omitti possunt: media enim membra eatenus tantum in sensum veniunt, quatenus distantia continuo diminuitur.

§. 19. Haec etiam mensura temporis nobis multo clariorem ideam et mensuram celeritatum suppeditat quam ante, vbi verbi gratia $\frac{dX}{d\vartheta}$ exprimebat spatium quod hac celeritate percurri posset tempo-

tempore $\vartheta = 1$, ſiue per angulum $\vartheta = 57^\circ. 17'$. cui reſpondet tempus circiter 60 dierum. Nunc igitur easdem celeritates exprimemus per formulas

$$\frac{dX}{d\tau}, \frac{dY}{d\tau}; \frac{dx}{d\tau} \text{ et } \frac{dy}{d\tau},$$

quae formulae exprimeent ſpatia, quae his celeritatibus tempore vnius diei percurrentur, haecque ſpatia in ſemidiametris terrae dabuntur. His igitur nouis menſuris introductis, pro initio noſtrae epochae nanciſcemur ſequentes menſuras penitus determinatas in ſemidiametris terrae expreſſas

$$X = 24000; \; Y = 0; \; \frac{dX}{d\tau} = 0, \; \frac{dY}{d\tau} = 412,896$$

$$x = 25139,328; \; y = 865,296$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -570,036 \text{ et } \frac{dy}{d\tau} = -19,621$$

his igitur praemiſſis ſequens problema principale perpendamus.

Problema.

§. 20. *Si ad tempus τ dierum ab epocha elapſum dentur diſtantiae* X *et* Y *pro terra, et* x, y *pro cometa; tum vero etiam celeritates $\frac{dX}{d\tau}$ et $\frac{dY}{d\tau}$ pro terra, atque $\frac{dx}{d\tau}$ et $\frac{dy}{d\tau}$ pro cometa, inuenire pro tempore $\tau + d\tau$ dierum ab epocha elapſo valores earundem litterarum qui ſint* X' Y' x' y', *vna cum celeritatibus* T XXIV. Fig. 3.

$$\frac{dX'}{d\tau}, \frac{dY'}{d\tau}, \frac{dx'}{d\tau}, \frac{dy'}{d\tau}.$$

Solutio.

Cum $d\tau$ ſit elementum quod pro minimo haberi queat, erit ex natura differentialium

 $X' =$

$$X' = X + dX + \tfrac{1}{2}ddX\,;\quad Y' = Y + dY + \tfrac{1}{2}ddY$$
$$x' = x + dx + \tfrac{1}{2}ddx\,;\quad y' = y + dy + \tfrac{1}{2}ddy$$

deinde vero pro celeritatibus

$$\frac{dX'}{d\tau} = \frac{dX}{d\tau} + \frac{ddX}{d\tau}\,;\quad \frac{dY'}{d\tau} = \frac{dY}{d\tau} + \frac{ddY}{d\tau}$$
$$\frac{dx'}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau} + \frac{ddx}{d\tau}\,;\quad \frac{dy'}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} + \frac{ddy}{d\tau}$$

vbi valores differentiales secundi gradus ex nostris aequationibus supra datis elici debent. Primo igitur ex elementis datis quaeri debent distantiae $ST = u$ et $SZ = v$, quod commodissime fiet per angulos $BST = \Phi$ et $BSZ = \omega$, quos quidem per se nosse iuuabit: hic autem reperientur ex his formulis

tang. $\Phi = \frac{Y}{X}$ et tang. $\omega = \frac{y}{x}$, quibus inuentis erit

$$u = \frac{X}{cos.\,\Phi} = \frac{Y}{sin.\,\Phi} \quad \text{et} \quad v = \frac{x}{cos.\,\omega} = \frac{y}{sin.\,\omega}.$$

Deinde pro distantia $TZ = w$ inuenienda ducatur axi parallela TV, quae erit $x - X$, et $VZ = y - Y$; tum vero ponatur angulus $VTZ = \psi$, qui designabit longitudinem cometae ex terra visi eritque tang. $\psi = \frac{y - Y}{x - X}$; atque hinc obtinebitur ipsa distantia

$$TZ = w = \frac{x - X}{cos.\,\psi} = \frac{y - Y}{sin.\,\psi}\,;$$

His autem valoribus definitis ex superioribus aequationibus habebimus

$$ddX = -\frac{\Delta X d\tau^2}{u^3} + \frac{\delta(x - X)d\tau^2}{w^3}$$
$$ddY = -\frac{\Delta Y d\tau^2}{u^3} + \frac{\delta(y - Y)d\tau^2}{w^3}$$
$$ddx = -\frac{\Delta x d\tau^2}{v^3} - \frac{\delta(x - X)d\tau^2}{w^3}$$
$$ddy = -\frac{\Delta y d\tau^2}{v^3} - \frac{\delta(y - Y)d\tau^2}{w^3},$$

§. 22.

§. 21. Hic autem non amplius elementum $d\tau$ pro infinite paruo habemus, ſed potius ei valorem ſatis exiguum dabimus, quem tam paruum ſufficit aſſumi, vt interea membra noſtrarum aequationum nullam mutationem ſenſibilem ſubeant. Atque hic facile intelligitur, ſtatim ab initio pro $d\tau$ integri vnius diei interuallum tuto aſſumi poſſe, ita vt ſit $d\tau = 1$; deinceps vero, cum cometa multo propius ad terram acceſſerit, interualla $d\tau$ paullatim diminui conueniet, prouti ex circumſtantiis facile erit diiudicare.

§. 22. Hoc igitur modo ab ipſa noſtra epocha ſucceſſiue per gradus progrediamur, atque pro primo quidem ſpatium vnius diei aſſumere licebit. Atque hac ratione ad quoduis tempus ab epocha noſtra elapſum poterimus tam ſitum terrae et cometae quam vtriusque motum aſſignare; quam ob rem calculum pro iſtis temporis interuallis hic apponamus.

Calculus pro ipſa epocha, vbi $\tau = 0$.

§. 23. Elementa igitur pro hoc calculo erunt:

$X = 24000,000$	$Y = 0,000$
$x = 25139,328$	$y = 865,296$
$x - X = 1139,328$	$y - Y = 865,296$
$dX = 0\, d\tau$	$dY = 412,896.\, d\tau$
$dx = -570,036.\, d\tau$;	$dy = -19,621.\, d\tau$

 vnde

vnde ſtatim habemus $\Phi = 0$ et $u = a = 24000$; tum vero $\omega = 1^\circ.\ 58'.\ 17'$ et $v = c = 25154,08$. Primo igitur tantum quaeratur angulus ψ cum diſtantia w hoc modo:

$a\,l(y-Y) = 2,9371647$	ad $l(x-X) = 3,0566489$
ſubtr. $l(x-X) = 3,0566489$	add. lſec. $\psi = 10,0988986$
$l$tang. $\psi = 9,8805158$	$l\,w = 3,1555475$
ideoque $\psi = 37^\circ.\ 13\tfrac{1}{4}'$	ideoque $w = 1430,697$

Nunc membra noſtrarum aequationum ita computentur

$l\,\Delta = 9,6118924$	$l\,\Delta = 9,6118924$	$l\,\delta = 4,0555899$
$l\,X = 4,3802112$	$l\,x = 4,4003537$	$l(x-X) = 3,0566489$
$= 3,9921036$	$4,0122461$	$7,1122388$
$l\,u^3 = 3,1406336$	$l\,v^3 = 3,2018252$	$l\,w^3 = 9,4666425$
$l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8514700$	$l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8104209$	$l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 7,6455963$
	$l$tang. $\omega = 8,5368175$	$l$tang. $\psi = 9,8805158$
hinc $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,103$	$l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3472384$	$l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 7,5261121$
et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 6,463$	ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,004$
	et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,222$	et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,003$

hinc igitur colligitur

$ddX = -7,099\,d\tau^2$	$ddx = -6,467.\,d\tau^2$
$ddY = +0,003\,d\tau^2$	$ddy = -0,225.\,d\tau^2$

quocirca habebimus

$$X' = 24000 + 0.\,d\tau - 3,549.\,d\tau^2$$
$$Y' = 0 + 412,896.\,d\tau + 0,001.\,d\tau^2$$
$$x' = 25139,328 - 570,036.\,d\tau - 3,233.\,d\tau^2$$
$$y' = 865,296 - 19,621.\,d\tau - 0,112.\,d\tau^2$$

deinde

deinde

$$d X' = 0,00 . d\tau - 7,099 . d\tau^2$$
$$d Y' = 412.896 . d\tau + 0,003 . d\tau^2$$
$$d x' = - 570,036 . d\tau - 6,467 . d\tau^2$$
$$d y' = - 19,621 . d\tau - 0,225 . d\tau^2 .$$

Calculus pro tempore $\tau = 1\ d$ poſt epocham.

§. 24. Sumto igitur $d\tau = 1$ elementa huius calculi erunt

$X = 23996,451$	$Y = 412,897$
$x = 24566,059$	$y = 845,563$
$x - X = 569,608$	$y - Y = 432,666$
$dX = -7,099\ d\tau$	$dY = 412,899\ d\tau$
$dx = -576,503\ d\tau$	$dy = -19,846\ d\tau$

ſuper his igitur elementis calculus ita inſtituatur

$a\ l\ Y = 2,6158417$	$a\ l\ y = 2,9271460$	$a\ l(y-Y) = 2,6361527$
ſubtr $l\ X = 4,3801469$	ſ. $l\ x = 4,3903354$	ſ. $l\ (x-X) = 2,7555761$
l tang. $\Phi = 8,2356948$	l tang. $\omega = 8.5368106$	l tang. $\psi = 9,8805766$
ergo $\Phi = 59'. 8''$	ergo $\omega = 1°. 58'. 17$	ergo $\psi = 37°. 13\frac{1}{5}'$
ad $l\ X = 4,3801469$	ad $l\ x = 4,3903354$	ad $l(x-X) = 2,7555761$
l ſec. $\Phi = 10,0000642$	l ſec. $\omega = 10,0002571$	l ſec. $\psi = 10,0989130$
$l\ u = 4,3802111$	$l\ v = 4,3905925$	$l\ w = 2,8544891$
ergo $u = 24000$	ergo $v = 24580,600$	ergo $w = 715,302$

 ad $l\ \Delta$

ad $l\,\Delta = 9,6118924$	ad $l\,\Delta = 9,6118924$	ad $l\,\delta = 4,0555899$
$l\,X = 4,3801469$	$l\,x = 4,3903354$	$l\,(x-X) = 2,7555761$
$3,9920393$	$4,0022278$	$6,8111660$
ſ $l\,u^3 = 3,1406333$	ſ $l\,v^3 = 3,1717775$	$l\,w^3 = 8,5634673$
$l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8514060$	$l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8304503$	$l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 8,2476987$
$l\,\text{tang.}\,\Phi = 8,2356948$	$l\,\text{tang.}\,\omega = 8,5368106$	$l\,\text{tang.}\,\psi = 9,8805766$
$l\,\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,0871008$	$l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3672609$	$l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 8,1282753$
ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,102$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 6,768$	ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,018$
et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,122$	et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,233$	et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,013.$

Annotatio. Membra poſtrema litera δ affecta continent perturbationem ex actione mutua ortam, quatenus ſcilicet naſcitur ex diſtantia cometae a terra tempore $\tau = 1$ diei. Quod ſi ergo hinc progrediamur per tempus $\frac{1}{2}d$, ſtatuendo $d\tau = \frac{1}{2}$, in fine huius temporis diſtantia illa ad ſemiſſem reducetur, vnde quadruplo maior perturbatio naſceretur. Quamobrem cum labente hoc interuallo $d\tau = \frac{1}{2}d$ perturbatio continuo fiat maior, conuenit medium ſumere, quod quadruplo maius erit quam inuentum, ſicque ſtatuamus

$$\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,036 \text{ et } \frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,026$$

quocirca habebimus

$$ddX = -7,066.\,d\tau^2 \quad ddx = -6,804.\,d\tau^2$$
$$ddY = -0,096.\,d\tau^2 \quad ddy = -0,259.\,d\tau^2$$

hincque oriuntur ſequentes valores:

$$X' = 23996,451 - 7,090.\,d\tau - 3,533.\,d\tau^2$$
$$Y' = 412,897 + 412,899.\,d\tau - 0,048.\,d\tau^2$$
$$x' = 24566,059 - 576,503.\,d\tau - 3,402.\,d\tau^2$$
$$y' = 845,563 - 19,846.\,d\tau - 0,129.\,d\tau^2$$

porro

porro

$$dX' = -7,099.\,d\tau - 7,066.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412,899.\,d\tau - 0,096.\,d\tau^2$$
$$dx' = -576,503.\,d\tau - 6,804.\,d\tau^2$$
$$dy' = -19,846.\,d\tau - 0,259.\,d\tau^2$$

hinc autem ſumi debet $d\tau = \frac{1}{2}$, vnde producitur.

Calculus pro tempore $\tau = 1\frac{1}{2}\,d$ poſt epocham.

§. 25. Sumto igitur $d\tau = \frac{1}{2}$ et $d\tau^2 = \frac{1}{4}$, ſequentia habebuntur elementa:

$X = 23992,019$	$Y = 619,334$
$x = 24276,957$	$y = 835,608$
$x - X = 284,938$	$y - Y = 216,274$
$dX = -10,632.\,d\tau$	$dY = +412,850.\,d\tau$
$dx = -579,904.\,d\tau$	$dy = -19,976.\,d\tau$

et hinc calculus vti ſupra ſequenti modo inſtituitur:

$a\,lY = 2,7919249$	$a\,ly = 2,9220026$	$a\,l(y-Y) = 2,3350043$
$lX = 4,3800669$	ſubtr. $lx = 4,3851942$	ſ. $l(x-X) = 2,4547504$
$l$tang. $\Phi = 8,4118580$	$l$tang. $\omega = 8,5368084$	l tang. $\psi = 9,8802539$
ergo $\Phi = 1^\circ.\,28'.\,43$	ergo $\omega = 1^\circ.\,58'.\,17''$	ergo $\psi = 37^\circ.\,12'$
ad $lX = 4,3800669$	ad $lx = 4,3851942$	ad $l(x-X) = 2,4547504$
l ſec. $\Phi = 10,0001429$	l ſec. $\omega = 10,0002569$	l ſec. $\psi = 10,0987979$
$lu = 4,3802098$	$lv = 4,3854511$	$l\omega = 2,5535483$
ergo $u = 24000$	ergo $v = 24291,320$	ideoque $w = 357,724$

ad $l\Delta$

ad $l\Delta$	$=9{,}6118924$	ad $l\Delta$	$=9{,}6118924$	ad $l\delta$	$=4{,}0555899$
lX	$=4{,}3800969$	lx	$=4{,}3854511$	$l(x-X)$	$=2{,}4544700$
	$3{,}9919593$		$3{,}9973435$		$6{,}5100599$
ſubtr. lu^3	$=3{,}1406294$	ſ. lv^3	$=3{,}1563533$	ſ. lu^3	$=7{,}6606449$
$l\frac{\Delta X}{u^3}$	$=0{,}8513299$	$l\frac{\Delta x}{v^3}$	$=0{,}8409902$	$l\frac{\delta(x-X)}{w^3}$	$=8{,}8494150$
$l$tang. Φ	$=8{,}4118588$	$l$tang. ω	$=8{,}5368084$	l tang. ψ	$=9{,}8802539$
$l\frac{\Delta Y}{u^3}$	$=9{,}2631887$	$l\frac{\Delta Y}{v^3}$	$=9{,}3777986$	$l\frac{\delta(y-Y)}{w^3}$	$=8{,}7296689$
ergo $\frac{\Delta X}{u^3}$	$=7{,}101$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3}$	$=6{,}934$	ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3}$	$=0{,}071$
et $\frac{\Delta Y}{u^3}$	$=0{,}183$	et $\frac{\Delta y}{v^3}$	$=0{,}239$	et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3}$	$=0{,}054$

iſta ergo perturbatio reſpondet tempori $\tau = 1\frac{1}{2}\,d$: at vero tempori $\tau = 1\frac{1}{4}\,d$ ſumendo $d\tau = \frac{1}{4}$, perturbatio fiet quadruplo maior, vnde medium ſumendo iſtos valores duplicemus ſtatuendo

$$\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0{,}142 \quad \text{et} \quad \frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0{,}108$$

vnde colligimus

$$ddX = -6{,}957.\,d\tau^2 \qquad ddx = -7{,}076.\,d\tau^2$$
$$ddY = -0{,}075.\,d\tau^2 \qquad ddy = -0{,}347.\,d\tau^2$$

quocirca oriuntur

$$X' = 23992{,}019 - 10{,}632.\,d\tau - 3{,}478.\,d\tau^2$$
$$Y' = 619{,}334 + 412{,}850.\,d\tau - 0{,}037.\,d\tau^2$$
$$x' = 24276{,}957 - 579{,}904.\,d\tau - 3{,}538.\,d\tau^2$$
$$y' = 835{,}608 - 19{,}976.\,d\tau - 0{,}173.\,d\tau^2$$

deinde

$$dX' = -10{,}632.\,d\tau - 6{,}957.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412{,}850.\,d\tau - 0{,}075.\,d\tau^2$$
$$dx' = -579{,}904.\,d\tau - 7{,}076.\,d\tau^2$$
$$dy' = -19{,}976.\,d\tau - 0{,}347.\,d\tau^2$$

vbi

vbi iam sumi debet $d\tau = \frac{1}{4}$, vnde oritur

Calculus pro tempore $\tau = 1\frac{3}{4}\, d$ post epocham.

§. 26. Sumto igitur $d\tau = \frac{1}{4}$ et $d\tau^2 = \frac{1}{16}$ sequentia habebuntur elementa:

$X = 23989,144$	$Y = 722,544$
$x = 24131,760$	$y = 830,603$
$x - X = 142,616$	$y - Y = 108,059$
$dX = -\ 12,371.\, d\tau$	$dY = +\ 412,831.\, d\tau$
$dx = -581,673\ d\tau$	$dy = -\ 20,063.\, d\tau$

hincque sequens calculus

$a\, l y$	$= 2,8588643$	$a\, l y$	$= 2,9193935$	$a\, l(y-Y)$	$= 2,0336609$
$l\, X$	$= 4,3800147$	$l\, x$	$= 4,3825890$	$l(x-X)$	$= 2,1541683$
l tang. Φ	$= 8,4788496$	l tang. ω	$= 8,5368045$	l tang. ψ	$= 9,8794926$
ergo Φ	$= 1^\circ.\, 43'.\, 31''$	ergo ω	$= 1^\circ.\, 58'.\, 17''$	ergo ψ	$= 37^\circ.\, 9'$
ad $l\, X$	$= 4,3800147$	ad $l\, x$	$= 4,3825890$	ad $l(x-X)$	$= 2,1541683$
l sec. Φ	$= 10,0001976$	l sec. ω	$= 10,0002569$	l sec. ψ	$= 10,0985105$
$l u$	$= 4,3802123$	$l v$	$= 4,3828459$	$l w$	$= 2,2526788$
hinc u	$= 24000$	hinc v	$= 24146,00$	hinc w	$= 178,928$
ad $l\, \Delta$	$= 9,6118924$	ad $l\, \Delta$	$= 9,6118924$	ad $l\, \delta$	$= 4,0555899$
$l\, X$	$= 4,3800147$	$l\, x$	$= 4,3825890$	$l(x-X)$	$= 2,1541683$
	$3,9919071$		$3,9944814$		$6,2097582$
$\int.\, l u^3$	$= 3,1406369$	$\int.\, l v^3$	$= 3,1485377$	$\int.\, l w^3$	$= 6,7580364$
$l\, \frac{\Delta X}{u^3}$	$= 0,8512702$	$l\, \frac{\Delta x}{v^3}$	$= 0,8459437$	$l\, \frac{\delta(x-X)}{w^3}$	$= 9,4517218$
l tang. Φ	$= 8,4788496$	l tang. ω	$= 8,5368045$	l tang. ψ	$= 9,8794926$
$l\, \frac{\Delta Y}{u^3}$	$= 9,3301198$	$l\, \frac{\Delta y}{v^3}$	$= 9,3827482$	$l\, \delta(y-Y)$	$= 9,3312144$

 ergo

ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,100$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,014$	ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,283$
et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,214$	et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,241$	et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,214.$

Nunc iterum valores tertiae columnae $\frac{\delta(x-X)}{w^3}$ et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3}$ duplicentur, siquidem ponatur $d\tau = \frac{1}{8}$, hincque habebimus

$$ddX = -6,534.\,d\tau^2 \qquad ddx = -7,666.\,d\tau^2$$
$$ddY = +0,213.\,d\tau^2 \qquad ddy = -0,669.\,d\tau^2$$

hincque nanciscimur

$$X' = 23989,144 - 12,371.\,d\tau - 3,267.\,d\tau^2$$
$$Y' = 722,544 - 412,831.\,d\tau + 0,106.\,d\tau^2$$
$$x' = 24131,760 - 581,673.\,d\tau - 3,833.\,d\tau^2$$
$$y' = 830,603 - 20,063.\,d\tau - 0,334.\,d\tau^2$$

deinde

$$dX' = -12,371.\,d\tau - 6,534.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412,831.\,d\tau - 0,213.\,d\tau^2$$
$$dx' = -581,673.\,d\tau - 7,666.\,d\tau^2$$
$$dy' = -20,063.\,d\tau - 0,669.\,d\tau^2$$

vnde iam aggrediamur sequentem calculum.

Calculus pro tempore $\tau = 1\frac{7}{8}d$ post epocham.

§. 27. Sumto igitur $d\tau = \frac{1}{8}$ et $d\tau^2 = \frac{1}{64}$ sequentia elementa prodibunt:

$X = 23937,546$	$Y = 774,146$
$x = 24058,992$	$y = 828,090$
$x - X = 71,446$	$y - Y = 53,944$
$dX = -13,188.\,d\tau$	$dY = +412,804.\,d\tau$
$dx = -582,631.\,d\tau$	$dy = -20,147\,d\tau$

calcu-

calculus igitur ad modum praecedentis ita procedit

$a\,l\,Y = 2,8888229$	$a\,l\,y = 2,9180775$	$a\,l(y-Y) = 1,7319431$
$l\,X = 4,3799857$	$l\,x = 4,3812774$	ſ. $l\,(x-X) = 1,8539799$
$l\,\mathrm{tang.}\,\Phi = 8,5088372$	$l\,\mathrm{tang.}\,\omega = 8,5368001$	$l\,\mathrm{tang.}\,\psi = 9,8779632$
ideoque $\Phi = 1°.50'.54''$	ideoque $\omega = 1°.58'.17''$	ergo $\psi = 37°.\,3'.\,9''$
ad $l\,X = 4,3799857$	ad $l\,x = 4,3812774$	ad $l(x-X) = 1,8539799$
$l\,\mathrm{sec.}\,\Phi = 10,0002260$	$l\,\mathrm{sec.}\,\omega = 10,0002569$	$l\,\mathrm{sec.}\,\psi = 10,0979467$
$l\,u = 4,3802117$	$l\,v = 4,3815343$	$l\,w = 1,9519266$
hinc $u = 24000,03$	hinc $v = 24073,23$	hinc $w = 89,521$
ad $l\,\Delta = 9,6118924$	ad $l\,\Delta = 9,6118924$	ad $l\,\delta = 4,0555899$
add. $l\,X = 4,3799857$	$l\,x = 4,3812774$	$l(x-X) = 1,8539799$
$3,9918781$	$3,9931698$	$5,9095698$
ſ. $l\,u^3 = 3,1406351$	ſ. $l\,v^3 = 3,1446029$	ſ. $l\,w^3 = 5,8557798$
$l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8512430$	$l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8485669$	$l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,0537900$
$l\,\mathrm{tang.}\,\Phi = 8,5088372$	$l\,\mathrm{tang.}\,\omega = 8,5368001$	$l\,\mathrm{tang.}\,\psi = 9,8779632$
$l\,\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,3600802$	$l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3853670$	$l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 9,9317532$
ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,100$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,056$	ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 1,132$
et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,229$	et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,243$	et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,854$

Nunc adhuc duplicentur valores $\frac{\delta(x-X)}{w^3}$ et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3}$ vt fit

$$ddX = -4,836.\,d\tau^2 \qquad ddx = -9,320\,d\tau^2$$
$$ddY = +1,479.\,d\tau^2 \qquad ddy = -1,951\,d\tau^2$$

hincque colligimus

$$X' = 23987,546 - 13,188.\,d\tau - 2,418.\,d\tau^2$$
$$Y' = 774,146 + 412,804.\,d\tau + 0,739.\,d\tau^2$$
$$x' = 24058,992 - 582,631.\,d\tau - 4,660.\,d\tau^2$$
$$y' = 828,090 - 20,147.\,d\tau - 0,975.\,d\tau^2$$

 deinde

deinde

$$dX' = -13,188.\,d\tau - 4,836.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412,804.\,d\tau + 1,479.\,d\tau^2$$
$$dx' = -582,631.\,d\tau - 9,320.\,d\tau^2$$
$$dy' = -20,147.\,d\tau - 1,951.\,d\tau^2$$

vbi pro calculo ſequente ſumi debet $d\tau = \frac{1}{16}$.

Calculus pro tempore $\tau = 1\frac{15}{16}\,d$ poſt epocham.

§. 28. Elementa igitur huius calculi ita ſe habebunt

$X = 23986,713$	$Y = 799,943$
$x = 24022,560$	$y = 826,837$
$x - X = 35,847$	$y - Y = 26,884$
$dX = -13,490.\,d\tau$	$dY = +412,896.\,d\tau$
$dx = -583,213.\,d\tau$	$dy = -20,269.\,d\tau$

quibus inuentis calculum ſequenti modo proſequamur

$a\,l\,Y = 2,9030590$	$a\,l\,y = 2,9174147$
ſubtr. $l\,X = 4,3796707$	ſubtr. $l\,x = 4,3806092$
l tang. $\Phi = 8,5230883$	l tang. $\omega = 8,5368055$
ideoque $\Phi = 1^\circ\, 54'.36''$	ideoque $\omega = 1^\circ.\, 58'.\, 17''$
l ſec. $\Phi = 10,0002413$	l ſec. $\omega = 10,0002569$
ad $l\,X = 4,3799707$	ad $l\,x = 4,3806092$
$l\,u = 4,3802120$	$l\,v = 4,3808661$
hinc $u = 24000,04$	hinc $v = 24036,22$

ad

ad $l\,\Delta$ $= 9,6118924$	ad $l\,\Delta$ $= 9,6118924$
add. $l\,X$ $= 4,3799707$	add. $l\,X$ $= 4,3806092$
$3,9918631$	$3,9925016$
f. $l\,u^3$ $= 3,1406360$	f. $l\,v^3$ $= 3,1425983$
$l\,\frac{\Delta X}{u^3}$ $= 0,8512271$	$l\,\frac{\Delta x}{v^3}$ $= 0,8499033$
l tang. $\Phi = 8,5230883$	l tang. $\omega = 8,5368055$
$l\,\frac{\Delta Y}{u^3}$ $= 9,3743154$	$l\,\frac{\Delta y}{v^3}$ $= 9,3867088$
ergo $\frac{\Delta X}{u} = 7,099$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,078$
et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,237$	et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,243.$

Si hinc vlterius progredientes ſumeremus $d\tau = \frac{1}{32}$, termini litera δ affecti fierent quadruplo maiores; at ſi ſumeremus $d\tau = \frac{1}{16}$ hi termini adeo in immenſum excreſcerent. Verum ſi minimum $d\tau$ vlterius augeamus, hi termini adeo euaderent negatiui, et effectus in contrarium vergeret; vnde ſi ſumamus $d\tau = \frac{1}{8}$, vt fiat $\tau + d\tau = 2\frac{1}{16}$, iſti termini modo inuentis aequales prodibunt, ſed ſigno contrario affecti. Quamobrem poſito $d\tau = \frac{1}{8}$ totus effectus actionis mutuae ad nihilum redigetur, vnde pro ſequente calculo hos terminos penitus negligere opportebit, quam ob cauſam in hoc calculo tertiam columnamne quidem adiecimus; erit autem

$ddX = -7,099.\,d\tau^2$	$ddx = -7,078.\,d\tau^2$
$ddY = -0,237.\,d\tau^2$	$ddy = -0,243.\,d\tau^2$

ex quibus valoribus eliciuntur ſequentes:

$$X' = 23986,713 - 13,490.\,d\tau - 3,549.\,d\tau^2$$
$$Y' = 799,943 + 412,896.\,d\tau - 0,118.\,d\tau^2$$

 $x' = $

$$x' = 24022,560 - 583,213.d\tau - 3,539.d\tau^2$$
$$y' = 826,827 - 20,269.d\tau - 0,121.d\tau^2$$
$$dX' = - 13,490.d\tau - 7,099.d\tau^2$$
$$dY' = + 412,896.d\tau - 0,237.d\tau^2$$
$$dx = - 583,213.d\tau - 7,078.d\tau^2$$
$$dy = - 20,269.d\tau - 0,243.d\tau^2.$$

Calculus pro tempore $\tau = 2\frac{1}{10}d$ poſt epocham.

§. 29. Nunc igitur in praecedentibus valoribus ſtatui debet $d\tau = \frac{1}{8}$ et prodibunt ſequentia elementa:

$X = 23984,972$	$Y = 851,552$
$x = 23949,603$	$y = 824,291$
$x - X = -35,369$	$y - Y = -27,261$
$dX = -14,377.d\tau$	$dY = +412,867.d\tau$
$dx = -584,098.d\tau$	$dy = -20,298.d\tau$

hinc ſequens calculus

$a\ l\ y = 2,9302112$	ad $l\ y = 2,9160805$	$l(y-Y) = (-)1,4355418$
ſ. $l\ X = 4,3799391$	ſ. $l\ x = 4,3792983$	ſ. $l(x-X) = (-)1,1548622$
$l$tang. $\Phi = 8,5502721$	$l$tang. $\omega = 8,5367822$	$l$tang. $\psi = (+)9,8869190$
ergo $\Phi = 2^\circ.\ 2'.\ 0''$	ergo $\omega = 1^\circ.58'\ 17$	ergo $\psi = 37^\circ.37'.23''$
ad $l\ X = 4,3799391$	ad $l\ x = 4,3792983$	ad $l(x-X) = (-)1,5486229$
l ſec. $\Phi = 10,0002735$	l ſec. $\omega = 10,0002569$	l ſec. $\psi = (+)10,1012458$
$l\ u = 4,3802126$	$l\ v = 4,3795552$	$l\ w = (-)1,6498686$
hinc $u = 24000,07$	hinc $v = 23963,77$	hinc $w = 44,654$

ad $l\ \Delta$

ad $l\,\Delta$	$=9{,}6118924$	ad $l\,\Delta$	$=9{,}6118924$	ad $l\,\delta$	$=(+)\,4{,}0555899$
$l\,X$	$=4{,}3799391$	$l\,x$	$=4{,}3792983$	$l(x-X)$	$=(-)\,1{,}5486228$
	$3{,}9918315$		$3{,}9911907$		$(-)\,5{,}6042127$
ſ. $l\,u^3$	$=3{,}1406378$	ſ. $l\,v^3$	$=3{,}1386656$	ſ. $l\,w^3$	$=(+)\,4{,}9496058$
$l\,\frac{\Delta X}{u^3}$	$=0{,}8511937$	$l\,\frac{\Delta x}{v^3}$	$=0{,}8525251$	$l\,\frac{(x-X)}{w^3}$	$(-)\,0{,}6546069$
$l$tang. Φ	$=8{,}5502771$	$l$tang. ω	$=8{,}5367822$	$l$tang. ψ	$=9{,}8869190$
$l\,\frac{\Delta Y}{u^3}$	$=9{,}4014708$	$l\,\frac{\Delta y}{v^3}$	$=9{,}3893073$	$l\,\frac{(y-Y)}{w^3}$	$=(-)\,0{,}5415259$
ergo $\frac{\Delta X}{u^3}$	$=7{,}099$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3}$	$=7{,}121$	ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3}$	$=-4{,}514$
et $\frac{\Delta Y}{u^3}$	$=0{,}252$	et $\frac{\Delta y}{v^3}$	$=0{,}245$	et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3}$	$=-3{,}479.$

Vti hic effectus in tertia columna inuenti labente tempore continuo fiunt minores, et ſumto interuallo $d\tau=\frac{1}{16}$ adeo fiunt quadruplo minores, pro hoc interuallo hos effectus ad dimidium reduci conueniet, ita vt fiat

$$\frac{\delta(x-X)}{w^3}=-2{,}257 \quad \text{et} \quad \frac{\delta(y-Y)}{w^3}=-1{,}739$$

vnde nanciſcimur

$$ddX=-9{,}356\,d\tau^2 \qquad ddx=-4{,}864.\,d\tau^2$$
$$ddY=-1{,}991\,d\tau^2 \qquad ddy=+1{,}494.\,d\tau^2$$

vnde deducuntur ſequentes

$$X'=23984{,}972-14{,}377.\,d\tau-4{,}678\,d\tau^2$$
$$Y'=851{,}552+412{,}867.\,d\tau-0{,}996.\,d\tau^2$$
$$x'=23949{,}603-584{,}098.\,d\tau-2{,}423.\,d\tau^2$$
$$y'=824{,}291-20{,}298.\,d\tau+0{,}747.\,d\tau^2$$

d X'

$$d X' = - 14,377\, d\tau - 9,356 . d\tau^2$$
$$d Y' = + 412.867 . d\tau + 1,991 . d\tau^2$$
$$d x' = - 584,089 . d\tau - 4,864 . d\tau^2$$
$$d y' = - 20,298 . d\tau - 1,494 . d\tau^2 .$$

Calculus pro tempore $\tau = 2\frac{1}{8}\, d$ poſt epocham.

§. 30. In vltimis igitur formulis inuentis ſumamus $d\tau = \frac{1}{16}$ et obtinebimus

$X = 23984,055$	$Y = 877,352$
$x = 23913,088$	$y = 823,026$
$x - X = - 70,967$	$y - Y = - 54,326$
$d X = - 14,961\, d\tau$	$d Y = + 412,743\, d\tau$
$d x = - 584,402\, d\tau$	$d y = - 20,205\, d\tau$

hinc ſequens calculus

$a\, l Y = 2,9431739$	$a\, l y = 2,9154135$	$a\, l(y-Y) = 1,7340077$
ſubtr. $l X = 4,3799226$	ſ. $l x = 4,3786356$	ſ. $l(x-X) = 1,8510564$
l tang. $\Phi = 8,5632513$	l tang. $\omega = 8\ 5367779$	l tang. $\psi = 9,8829513$
ergo $\Phi = 2°. 5'. 42''$	ergo $\omega = 1°. 58'. 17$	ergo $\psi = 37°. 22'. 16''$
ad $l X = 4,3799226$	ad $l x = 4,3786356$	ad $l(x\ X) = 1,8510564$
l ſec. $\Phi = 10,0002904$	l ſec. $\omega = 10,0002569$	l ſec. $\psi = 10,0997838$
$l u = 4,3802130$	$l v = 4,3788925$	$l w = 1,9508402$
hinc $u = 24000,10$	hinc $v = 32927,24$	hinc $w = 89,298$

ad $l\Delta$

ad $l\,\Delta = 9,6118924$	ad $l\,\Delta = 9,6118924$	ad $l\,\delta = 4,0555899$
add. $l\,X = 4,3799226$	add. $l\,x = 4,3786356$	$l\,(x-X) = 1,8510564$
$3,9918150$	$3,9905280$	$5,9066463$
s. $l\,u^3 = 3,1406390$	s. $l\,v^3 = 3,1366775$	$l\,w^3 = 5,8525206$
$l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8511760$	$l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8538505$	$l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,0541257$
l tang. $\Phi = 8,5632513$	l tang. $\omega = 8,5367779$	l tang. $\psi = 9,8829513$
$l\,\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,4144273$	$l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3906284$	$l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 9,9370770$
ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,099$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,142$	ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = -1,133$
et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,260$	et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,246$	et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = -0,865$

quod si iam sumamus interuallum $d\tau = \frac{1}{8}$, effectus tertiae columnae ad semissem redigi opportet, vnde fiet:

$$ddX = -7,665.\,d\tau^2 \qquad ddx = -6,576.\,d\tau^2$$
$$ddY = -0,692.\,d\tau^2 \qquad ddy = +0,186.\,d\tau^2$$

vnde colliguntur sequentes valores;

$$X' = 23984,055 - 14,961.\,d\tau - 3,832.\,d\tau^2$$
$$Y' = 877,352 + 412,743.\,d\tau - 0,346.\,d\tau^2$$
$$x' = 23913,088 - 584,402.\,d\tau - 3,288.\,d\tau^2$$
$$y' = 823,026 - 20,205.\,d\tau + 0,093.\,d\tau^2$$
$$dX' = -14,961.\,d\tau - 7,665.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412,743.\,d\tau - 0,692.\,d\tau^2$$
$$dx' = -584,402.\,d\tau - 6,576.\,d\tau^2$$
$$dy' = -20,205.\,d\tau + 0,186.\,d\tau^2$$

Calculus pro tempore $\tau = 2\frac{1}{4}\,d$ post epocham.

§ 31. Posito igitur $d\tau = \frac{1}{8}$ sequentia elementa prodibunt:

 X =

$X = 23982,125$	$Y = 928,940$
$x = 23839,987$	$y = 820,501$
$x - X = -142,138$	$y - Y = -108,439$
$dX = -15,919.d\tau$	$dx = +585,224.d\tau$
$dY = +412,656.d\tau$	$dy = -20,182.d\tau$

quibus inuentis sequens calculus instituatur

$a\,lY = 2,9679877$	$a\,ly = 2,9140791$	$a\,l(y-Y) = 2,0351856$
f. $lX = 4,3798876$	subtr. $lx = 4,3773059$	f. $l(x-X) = 2,1527102$
$l$tang. $\Phi = 8,5881001$	$l$tang. $\omega = 8,5367732$	l tang. $\psi = 9,8824754$
ergo $\Phi = 2^\circ.13'.6''$	ergo $\omega = 1^\circ.58'.17''$	ergo $\psi = 37^\circ.20'.25''$
ad $lX = 4,3798876$	ad $lx = 4,3773059$	ad $l(x-X) = 2,1527102$
l sec. $\Phi = 10,0003256$	l sec. $\omega = 10,0002569$	l sec. $\psi = 10,0996069$
$lu = 4,3802132$	$lv = 4,3775628$	$lw = 2,2523171$
hinc $u = 24000,11$	hinc $v = 23854,04$	hinc $w = -178,780$
ad $l\Delta = 9,6118924$	ad $l\Delta = 9,6118924$	ad $l\delta = 4,0555899$
$lX = 4,3798876$	$lx = 4,3773059$	$l(x-X) = 2,1527102$
$3,9917800$	$3,9891983$	$6,2083001$
subtr. $lu^3 = 3,1406396$	f. $lv^3 = 3,1326884$	f. $lw^3 = 6,7569513$
$l\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8511404$	$l\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8565099$	$l\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 9,4513488$
$l$tang. $\Phi = 8,5881001$	$l$tang. $\omega = 8,5367732$	l tang. $\psi = 9,8824754$
$l\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,4392405$	$l\frac{\Delta Y}{v^3} = 9,3932861$	$l\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 9,3338242$
ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,098$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,186$	ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = -0,283$
et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,275$	et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,247$	et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = -0,215.$

Effectus

Effectus tertiae columnae iam iterum ad semissem reducantur, siquidem deinceps ponere velimus $d\tau = \frac{1}{4}$, sicque obtinebimus

$$ddX = -7,239 . d\tau^2 \quad ddx = -7,045 . d\tau^2$$
$$ddY = -0,382 . d\tau^2 \quad ddy = -0,140 . d\tau^2$$

vnde obtinebimus sequentes valores:

$$X' = 23982,125 - 15,919 . d\tau - 3,619 . d\tau^2$$
$$Y' = 928,940 + 412,656 . d\tau - 0,191 . d\tau^2$$
$$x' = 23839,987 - 585,224 . d\tau - 3,522 . d\tau^2$$
$$y' = 820,501 - 20,182 . d\tau - 0,070 . d\tau^2$$
$$dX' = - 15,919 . d\tau - 7,239 . d\tau^2$$
$$dY' = +412,656 . d\tau - 0,382 . d\tau^2$$
$$dx' = -585,224 . d\tau - 7,045 . d\tau^2$$
$$dy' = - 20,182 . d\tau - 0,140 . d\tau^2 .$$

Calculus pro tempore $\tau = 2\frac{1}{2}d$ post epocham.

§. 32. Ponendo in formulis modo inuentis $d\tau = \frac{1}{4}$ hosce obtinebimus valores:

$X = 23977,919$	$Y = 1032,092$
$x = 23693,461$	$y = 815,452$
$(x-X) = -284,458$	$y-Y = -216,640$
$dX = - 17,792 . d\tau$	$dY = + 412,561 . d\tau$
$dx = -586,685 . d\tau$	$dy = - 20,216 . d\tau$

super his igitur elementis calculus ita instituatur

$a\,l\,Y = 3,0137383$	$a\,l\,y = 2,9113985$	$a\,l(y-Y) = (-)2,3357386$
$\text{l.}\,l\,X = 4,3798113$	$\text{l.}\,l\,x = 4,3746285$	$\text{l.}\,l(x-X) = (-)2,4540181$
$l\,\text{tang.}\,\Phi = 8,6339270$	$l\,\text{tang.}\,\omega = 8,5367700$	$l\,\text{tang.}\,\psi = 9,8817205$
ergo $\Phi = 2^\circ . 27' . 52''$	ergo $\omega = 1^\circ . 58' . 17''$	ergo $\psi = 37^\circ . 17' . 10''$

 ad $l\,X$

ad $l\,X = 4,3798113$	ad $l\,x = 4,3746285$	$l\,(x-X) = 2,4546181$
l sec. $\Phi = 10,0004025$	l sec. $\omega = 10,0002569$	l sec. $\psi = 10,0989420$
$l\,u = 4,3802138$	$l\,v = 4,3748854$	$l\,w = 2,5529601$
ergo $u = 24000,14$	ergo $v = 23707,511$	ergo $w = -357,240$

ad $l\,\Delta = 9,6118924$	ad $l\,\Delta = 9,6118924$	ad $l\,\delta = 4,0554899$
$l\,X = 4,3798113$	$l\,x = 4,3746285$	$l(x-X) = 2,4540181$
$3,9917037$	$3,9865209$	$6,5095080$
f. $l\,u^3 = 3,1406414$	$l\,v^3 = 3,1246562$	$l\,w^3 = 7,6588803$
$l\,\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8510623$	$l\,\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8618647$	$l\,\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 8,8506277$
l tang. $\Phi = 8,6339270$	l tang. $\omega = 8,5367700$	l tang. $\psi = 9,8817205$
$l\,\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,4849893$	$l\,\frac{\Delta y}{v^3} = 9,3986347$	$l\,\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 8,7323482$
ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,097$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,276$	ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = 0,071$
et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,305$	et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,250$	et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = 0,054$

hinc sumto dimidio valorum $\frac{\delta(x-X)}{w^3}$ et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3}$ obtinebimus

$$ddX = -7,132.\,d\tau^2 \quad\Big|\quad ddx = -7,241.\,d\tau^2$$
$$ddY = -0,332.\,d\tau^2 \quad\Big|\quad ddy = -0,223.\,d\tau^2$$

vnde etiam sequentes deducuntur

$$X' = 23977,919 - 17,792.\,d\tau - 3,566.\,d\tau^2$$
$$Y' = 1032,092 + 412,561.\,d\tau - 0,166.\,d\tau^2$$
$$x' = 23693,461 - 586,685.\,d\tau - 3,620.\,d\tau^2$$
$$y' = 815,452 - 20,216.\,d\tau - 0,111.\,d\tau^2$$
$$dX' = -17,792.\,d\tau - 7,132.\,d\tau^2$$
$$dY' = +412,561.\,d\tau - 0,332.\,d\tau^2$$
$$dx' = -586,685.\,d\tau - 7,241.\,d\tau^2$$
$$dy' = -20,216.\,d\tau - 0,223.\,d\tau^2.$$

Calcu-

Calculus pro tempore $\tau = 3\,d$ poſt epocham.

§. 33. Poſito $d\tau = \frac{1}{2}$ huius calculi elementa ita ſe habebunt

$X = 23968,132$	$Y = 1238,331$
$x = 23399,214$	$y = 805,316$
$x - X = -568,918$	$y - Y = -433,015$
$dX = -21,358.\,d\tau$	$dY = +412,395.\,d\tau$
$dx = -590,305.\,d\tau$	$dy = -20,372.\,d\tau$

quibus inuentis calculum ita proſequamur

a $lY = 3,0928368$	a $ly = 2,9059663$	$l(y-Y) = (-)2,6365020$
ſ. $lX = 4,3796341$	ſ. $lx = 4,3692012$	ſ. $l(x-X) = (-)2,7550497$
$l$tang. $\phi = 8,7132027$	$l$tang. $\omega = 8,5367651$	l tang. $\psi = 9,8814523$
ergo $\phi = 2^\circ.\ 57'.\ 27''$	ergo $\omega = 1^\circ.58'.\ 16''$	ergo $\psi = 37^\circ.\ 16'.\ 32''$
ad $lX = 4,3796341$	ad $lx = 4,3692012$	ad $l(x-X) = 2,7550497$
l ſec $\phi = 10,0005790$	l ſec. $\omega = 10,0002569$	l ſec. $\psi = 10,0992300$
$lu = 4,3802131$	$lv = 4,3694581$	$lw = 2,8542797$
ergo $u = 24000,11$	ergo $v = 23413,05$	ergo $w = -714,957$
ad $l\Delta = 9,6118924$	ad $l\Delta = 9,6118924$	ad $l\delta = 4,0555899$
$lX = 4,3796341$	$lx = 4,3692012$	$l(x-X) = 2,7550497$
$3,9915265$	$3,9810936$	$6,8106396$
ſ. $lu^3 = 3,1406511$	ſ. $lv^3 = 3,1083743$	ſubtr. $lw^3 = 8,5628391$
$l\frac{\Delta X}{u^3} = 0,8508754$	$l\frac{\Delta x}{v^3} = 0,8727193$	$l\frac{(x-X)}{w^3} = 8,2478005$
$l$tang. $\phi = 8,7132027$	l tang $\omega = 8,5367651$	l tang. $\psi = 9,8814528$
$l\frac{\Delta Y}{u^3} = 9,5640781$	$l\frac{\Delta y}{v^3} = 9,4094844$	$l\frac{(y-Y)}{w^3} = 8,1292533$
ergo $\frac{\Delta X}{u^3} = 7,094$	ergo $\frac{\Delta x}{v^3} = 7,460$	ergo $\frac{\delta(x-X)}{w^3} = -0,017$
et $\frac{\Delta Y}{u^3} = 0,366$	et $\frac{\Delta y}{v^3} = 0,257$	et $\frac{\delta(y-Y)}{w^3} = -0,013$

vbi iterum effectus actionis mutuae ad semissem reducuntur, quo obseruato fit

$$ddX = -7,102\, d\tau^2 \quad ddx = -7,452.\, d\tau^2$$
$$ddY = -0,372\, d\tau^2 \quad ddy = -0,251.\, d\tau^2$$

vnde sequentes nanciscimur valores

$$X' = 23968,132 - 21,358.\, d\tau - 3,551\, d\tau^2$$
$$Y' = 1238,331 + 412,395.\, d\tau - 0,186.\, d\tau^2$$
$$x' = 23399,214 - 590,305.\, d\tau - 3,726.\, d\tau^2$$
$$y' = 805,316 - 20,372.\, d\tau - 0,125.\, d\tau^2$$
$$dX' = -21,358.\, d\tau - 7,102.\, d\tau^2$$
$$dY' = +412,395.\, d\tau - 0,372.\, d\tau^2$$
$$dx' = -590,305.\, d\tau - 7,452.\, d\tau^2$$
$$dy' = -20,372.\, d\tau - 0,251.\, d\tau^2.$$

Calculus pro tempore $\tau = 4\, d$ post epocham.

§. 34. Calculi huius elementa posito $d\tau = 1$ ita erunt comparata

$X = 23943,223$	$Y = 1650,540$
$x = 22805,183$	$y = 784,819$
$x - X = -1138,040$	$y - Y = -865,721$
$dX = -28,460.\, d\tau$	$dY = +412,023.\, d\tau$
$dx = -597,757\, d\tau$	$dy = -20,623.\, d\tau$

hincque calculum sequenti modo prosequamur. Et quia actio mutua penitus cessare est censenda, tantum superest, vt valores Φ, u, ω, v, ψ, w definiamus

a l Y

$a\,lY = 3{,}2176260$	$a\,ly = 2{,}8947694$	$a\,l(y-Y) = 2{,}9373780$
subtr $lX = 4{,}3791826$	s. $lx = 4{,}3580335$	s. $l(x-X) = 3{,}0561576$
$l\,\text{tang.}\,\Phi = 8{,}8384434$	$l\,\text{tang.}\,\omega = 8{,}5367359$	$l\,\text{tang.}\,\psi = 9{,}8812204$
ergo $\Phi = 3^\circ.\ 56'.\ 37''$	ergo $\omega = 1^\circ.\ 58'.\ 16$	ergo $\psi = 37^\circ.\ 15'.\ 40''$
ad $lX = 4{,}3791826$	ad $lx = 4{,}3580335$	ad $l(x-X) = 3{,}0561576$
$l\,\text{sec.}\,\Phi = 10{,}0010287$	$l\,\text{sec.}\,\omega = 10{,}0002581$	$l\,\text{sec.}\,\psi = 10{,}0991489$
$lu = 4{,}3802113$	$lv = 4{,}3582916$	$lw = 3{,}1553065$
hinc $u = 24000{,}01$	hinc $v = 22818{,}74$	hinc $w = -1429{,}903.$

§. 35. Quo haec quae his calculis inuenimus clarius ob oculos ponamus, omnia in sequenti tabella referamus in septem distributa columnas. I^a. Columna continet tempora ab epocha elapsa in diebus et horis expressa, scilicet valores literae τ. II^a. Longitudinem terrae ex sole visam, seu angulum Φ. III. Distantiam terrae a sole in semidiametris terrae expressam, seu literam u. IV. Longitudinem cometae heliocentricam, seu angulam ω. V. Distantiam cometae a sole, seu literam v. VI. longitudinem cometae geocentricam, seu angulum ψ. VII. Distantiam cometae a terra itidem in semidiametris terrae seu literam w.

Tabula

Tabula
motum tam terrae quam cometae exhibens

τ	Φ	u	ω	v	ψ	w
D. h.	g. m. s.		g. m. s.		S. g. m. f.	
0. 0	0. 0. 0	24000,00	1.58.17	25154, 08	1. 7.12.57	1430,697
1. 0	0.59. 8	24000,01	1.58.17	24580, 60	1. 7.13.11	715,302
1.12	1.28.43	24000,02	1.58.17	24291, 32	1. 7.11.57	357,724
1.18	1.43.31	24000,03	1.58.17	24146, 00	1. 7. 9. 3	178,928
1.21	1.50.54	24000,04	1.58.17	24073, 23	1. 7. 3. 9	89,521
1.22½	1.54.36	24000,04	1.58.17	24036, 22	1. 7. 0. 3	44,808
2. 1½	2. 2. 0	24000,06	1.58.17	23963, 77	7. 7.37.23	44,657
2. 3	2. 5.42	24000,10	1.58.17	23927, 24	7.17.22.16	89,298
2. 6	2.13. 6	24000,12	1.58.17	23854, 04	7. 7.20.25	178,780
2.12	2.27.52	24000,14	1.58.17	23707, 51	7. 7.17.10	357,240
3. 0	2.57.27	24000,10	1.58.16	23413, 05	7. 7.16.32	714,957
4. 0	3.56.37	24000,01	1.58.16	22818, 74	7. 7.15.40	1429,903

§. 36. Non obſtantibus leuiuſculis erroribus, quos in talibus calculis euitare non licet, concluſiones maximi momenti hinc tuto deducere poſſumus. Primo enim motus cometae reſpectu terrae manifeſto diſtingui debet in acceſſum et receſſum. Acceſſus durat vsque ad dies 2 quo cometa continuo propius ad terram accedit, ac fortaſſe vsque ad contactum appropinquaret, quo caſu vtique colliſio contingeret effectum maxime funeſtum producens. Verum aſſumamus cometam non prorſus ad contactum vsque appropinquaſſe, id quod quam minima facta mutatione in noſtra hypotheſi eueniſſet. Semota igitur colliſione intelligimus, cometam fere pari motu tu iterum a terra recedere quo accesserat, neque adeo in cursu suo multum turbari. Vnde statim eorum opinio manifesto reuellitur, qui putarunt, talem cometam ad terram proxime accedentem in satellitem vel lunam abire posse. Quin potius euidens est, neque terram neque cometam in motu suo hinc enormem perturbationem perpeti, sed potius vtrumque cursum suum sine admodum notabili mutatione esse prosecuturum. Interim tamen nullum est dubium, quin ob maximam vicinitatem phaenomena satis notabilia tam in aestu maris quam in statu Atmosphaerae se sint oblatura. Sed quoniam ista vicinitas quasi tantum per momentum durat, vix vllum inde periculum metuendum videtur.

§. 37. Deinde etiam ex hoc calculo patet, omnem effectum qui in accessu cometae ad terram fuerit productus in recessu fere maximam partem iterum destrui; quandoquidem tam situs quam motus terrae et cometae postquam actio mutua cessavit non multum discrepat ab eo qui remota actione mutua locum habuisset. Quo autem hanc ipsam mutationem accuratius determinemus, comparemus vtriusque statum, quo tam terra quam cometa quarto die vbi actio mutua cessasse est censenda versabantur cum eo statu in quo remota actione mutua fuissent reperti, vt hinc deinceps motum vtriusque futurum determinare queamus.

§. 38. Primo igitur si terra motum suum sine vlla alteratione continuasset, etiamnunc foret $u = 24000$, et elapſo tempore $\tau = 4$ foret angulos $\Phi = 3^\circ. 56'. 33'$ vnde prodit

$X = 24000 \operatorname{coſ}.\Phi$ et $Y = 24000 \operatorname{ſin}.\Phi$ h. e.

$X = 23943,733$ et $Y = 1650,239$.

Pro celeritatibus vero habebimus

$dX = -24000 d\Phi \operatorname{ſin}.\Phi$ et $dY = +24000 d\Phi \operatorname{coſ}.\Phi$.

Supra autem vidimus eſſe $d\Phi = 0,017204\, d\tau$, ſicque erit

$\frac{dX}{d\tau} = -0,017204.\ 24000 \operatorname{ſin}.\ \Phi = -28,391$

$\frac{dY}{d\tau} = +0,017204.\ 24000 \operatorname{coſ}.\ \Phi = +411,928$

qui valores quo facilius cum iis quos vltimus calculus ſuppeditauit conferri queant hic coniunctim repraeſentemus

Remota actione mutua	Accedente actione mutua
$X = 23943,733$	$X = 23943,223$
$Y = 1650,239$	$Y = 1650,540$
$\frac{dX}{d\tau} = -28,391$	$\frac{dX}{d\tau} = -28,460$
$\frac{dY}{d\tau} = +411,928$	$\frac{dY}{d\tau} = +412,023.$

§. 39. Pro motu autem cometae ſupra inuenimus hanc aequationem

$\frac{dv}{d\vartheta} = -\sqrt{\frac{2a^3}{v}}$ et $\vartheta = \frac{2c\sqrt{c} - 2v\sqrt{v}}{3\sqrt{2a^3}}$

vbi inuenimus eſſe

$c\sqrt{c} = \frac{(3\alpha + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} a\sqrt{a}.$

Quare cum ſumſerimus

$a = 24000$ et $\alpha = 1^\circ.\ 58'.\ 17'' = 0,034408$

nunc

nunc vero fit

$$2 v \sqrt{v} = (3 \alpha \sqrt{2} + 2) a \sqrt{a} - 3 \vartheta \sqrt{2} a^2$$

hic capiamus pro quatuor diebus

$$\vartheta = 2 \alpha \text{ erit } 2 v \sqrt{v} = 2 a \sqrt{a} - 2 \alpha a \sqrt{2 a}$$

vnde in numeris fit $v \sqrt{v} = 3446680$, hincque porro $l \sqrt{v} = 2,1791337$ et $l v = 4,3582674$ hincque $v = 22817,470$ vnde colligitur

$x = v \operatorname{cof.} \alpha = 22803,963$ et $y = v \operatorname{fin.} \alpha = 784,925$.

Tum vero pro celeritatibus ob

$\frac{dv}{d\vartheta} = \sqrt{\frac{2a^3}{v}} = 34809,532$ erit $l \frac{dv}{d\tau} = 2,7773275$

fietque

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{dv}{d\tau} \operatorname{cof.} \alpha = -598,512,$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \frac{dv}{d\tau} \operatorname{fin.} \alpha = -20,601.$$

Quod fi igitur iftos valores comparemus cum iis quos cometa habuiffet eodem tempore fublata actione mutua, comparatio ita fe habebit.

Sublata actione mutua	Accedente actione mutua
$x = 22803,963$	$x = 22805,180$
$y = 784,925$	$y = 784,819$
$\frac{dx}{d\tau} = -598,512$	$\frac{dx}{d\tau} = -597,757$
$\frac{dy}{d\tau} = -20,601$	$\frac{dy}{d\tau} = -20,623.$

§. 40. Nunc igitur quaeftio huc redit, quanam lege tam terra quam cometa motum fuum deinceps fint profecuturi, poftquam actio mutua ceffauit. Quae quaeftio cum latiffime pateat, eam generatim in fequenti problemate complectamur.

Problema.

Si ad datum tempus cognitus fuerit tam locus quam motus siue planetae siue cometae, determinare eius orbitam et motum quo deinceps circa solem reuoluetur.

Solutio.

T. XXIV. Fig 4. §. 41. Elapso tempore τ dierum planeta siue cometa versatur in Y, vnde ad rectam S ♈ ex sole ad initium arietis ductam demittatur perpendiculum Y X et vocentur coordinatae

$$SX = x \quad \text{et} \quad XY = y.$$

Praeterea vero ponatur distantia a Sole $SY = u$ et angulus ♈ $SY = \Phi$, ita vt sit $uu = xx + yy$ et $\tang. \Phi = \frac{y}{x}$; tum vero vicissim $x = u \cos. \Phi$, $y = u \sin. \Phi$. Quibus positis principia motus sequentes suppeditant aequationes:

$$\text{I. } \frac{ddx}{d\tau^2} = -\frac{\Delta x}{u^3} \quad \text{et II. } \frac{ddy}{d\tau^2} = -\frac{\Delta y}{u^3}$$

vbi si omnes distantiae in semidiametris terrae exprimantur inuenitur litera Δ ita vt sit $l\Delta = 9,6118924$ siquidem distantia media terrae a sole assumatur 24000 semidiametris terrae.

§. 42. Iam pro statu planetae initiali qui ad datum tempus vt cognitus spectatur fuerit $x = a$, $y = b$; tum vero pro motu $\frac{dx}{d\tau} = \alpha$, $\frac{dy}{d\tau} = \beta$; vnde pro eodem initio erat $u = \sqrt{aa + bb}$ et $\tang. \Phi = \frac{b}{a}$. Statuamus autem breuitatis gratia pro initio $u = f$ et $\Phi = \vartheta$, ita vt sit $f = \sqrt{aa + bb}$ et $\tang. \vartheta = \frac{b}{a}$. Hinc porro fiat

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\tau^2} = \alpha\alpha + \beta\beta = \zeta\zeta.$$

Dein-

Deinde cum fit

$$u\,du = x\,dx + y\,dy \text{ erit } \frac{u\,du}{d\tau} = a\alpha + b\beta = g;$$

vbi notetur esse

$$dx^2 + dy^2 = du^2 + uu\,d\Phi^2.$$

§. 43. Nunc aggrediamur aequationes nostras differentiales secundi gradus et haec combinatio I. $2dx$ + II. $2dy$ dat

$$\frac{2dx\,ddx + 2dy\,ddy}{d\tau^2} = -\frac{2\Delta(x\,dx + y\,dy)}{u^3} = -\frac{2\Delta\,du}{uu}$$

cuius integrale est

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\tau^2} = \frac{2\Delta}{u} + C.$$

Pro quae constante determinanda quia in statu initiali fit

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\tau^2} = \zeta\zeta \text{ et } u = f \text{ erit } C = \zeta\zeta - \frac{2\Delta}{u}$$

ita vt habeamus

$$\frac{dx^2 + dy^2}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2\Delta}{f} + \frac{2\Delta}{u}.$$

§. 44. Consideretur nunc ista combinatio: I. x + II. y, quae dat

$$\frac{x\,ddx + y\,ddy}{d\tau^2} = -\frac{\Delta(xx + yy)}{v^3} = -\frac{\Delta}{u};$$

cui addatur aequatio modo inuenta integralis, eritque

$$\frac{x\,ddx + dx^2 + y\,ddy + dy^2}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2\Delta}{f} + \frac{\Delta}{u}.$$

Cum autem fit

$$x\,ddx + dx^2 = d.\,x\,dx \text{ et } y\,ddy + dy^2 = d.\,y\,dy$$

habebimus

$$\frac{d.\,x\,dx + d.\,y\,dy}{d\tau^2} = \frac{d.\,u\,du}{d\tau^2} = \zeta\zeta - \frac{2\Delta}{f} + \frac{\Delta}{u}$$

quae multiplicata per $2\,u\,d\,u$ et integrata praebet

$$\frac{u\,u\,d\,u^2}{d\,\tau^2} = C + 2\,\Delta\,u - \frac{2\,\Delta\,u\,u}{f} + \zeta\,\zeta\,u\,u$$

vbi cum initio fuerit $u = f$ et $\frac{u\,d\,u}{d\,\tau} = g$, constans ita definitur vt sit $C = g\,g - \zeta\,\zeta\,f\,f$, vnde obtinebimus

$$\frac{u\,u\,d\,u^2}{d\,\tau^2} = g\,g - \zeta\,\zeta\,f\,f + 2\,\Delta\,u - \frac{2\,\Delta\,u\,u}{f} + \zeta\,\zeta\,u\,u$$

quae est altera aequatio integralis duas tantum continens variabiles.

§. 45. In hac formula notetur fore

$$g\,g - \zeta\,\zeta\,f\,f = -(a\,\beta - b\,\alpha)^2$$

vnde si statuamus $a\,\beta - b\,\alpha = h$, aequatio inuenta, posito adhuc breuitatis ergo $\frac{2\,\Delta}{f} - \zeta\,\zeta = F$, hanc induet formam:

$$\frac{u\,u\,d\,u^2}{d\,\tau^2} = -h\,h + 2\,\Delta\,u - F\,u\,u$$

vnde radice extracta reperitur

$$d\,\tau = \frac{\pm\,u\,d\,u}{\sqrt{-h\,h + 2\,\Delta\,u - F\,u\,u}}.$$

Vbi notari oportet, signorum ambiguorum valere superius si planeta a sole remoueatur, siue si motus a perihelio computetur: sin autem ad solem accedat, siue si motus ab aphelio computetur vti moris est pro Planetis, inferius signum capi debebit. Notum autem est huius formulae integrale partim algebraice partem per arcum circuli exprimi posse, ita vt hinc ad quoduis tempus τ distantia u per notas tabulas astronomicas assignari possit.

§. 46. Quoniam ex hac aequatione ratio $\frac{d\,u}{d\,\tau}$ constat ex aequatione integrali primum inuenta, ob

$$d\,x^2 + d\,y^2 = d\,u^2 + u\,u\,d\,\Phi^2$$

etiam

etiam ratio $\frac{d\Phi}{d\tau}$ colligi poſſet. Verum hoc facilius ex iſta combinatione I y — II x fieri poteſt, ex qua fit $\frac{y\,ddx - x\,ddy}{d\tau^2} = 0$ cuius integrale eſt $\frac{y\,dx - x\,dy}{d\tau} = C$ ex ſtatu autem initiali concluditur $= b\alpha - a\beta = -b$ ita vt ſit $\frac{x\,dy - y\,dx}{d\tau} = b$. Cum vero ſit

$$x = u \operatorname{coſ.} \Phi \text{ et } y = u \operatorname{ſin.} \Phi$$

hincque

$$dx = du \operatorname{coſ.} \Phi - u\,d\Phi \operatorname{ſin.} \Phi \text{ et } dy = du \operatorname{ſin.} \Phi + u\,d\Phi \operatorname{coſ.} \Phi$$

erit $x\,dy - y\,dx = uu\,d\Phi$

ſicque aequatio noſtra erit

$$\frac{uu\,d\Phi}{d\tau} = b \text{ ſiue } d\Phi = \frac{b\,d\tau}{uu}$$

quare loco $d\tau$ valore ſubſtituto habebimus

$$d\Phi = \frac{\pm\, b\,du}{u\sqrt{-bb + 2\Delta u - Fuu}}.$$

§. 47. Ad hanc formulam ſimpliciorem reddendam ponamus $u = \frac{1}{z}$ vt fiat $\frac{du}{u} = -\frac{dz}{z}$ ac reperietur

$$d\Phi = \frac{\pm\, b\,dz}{\sqrt{-bbzz + 2\Delta z - F}}.$$

Nunc poſt ſignum radicale ſecundum membrum $2\Delta z$ elidamus, ponendo $z = s + \frac{\Delta}{bb}$ ac prodibit

$$d\Phi = \frac{\mp\, b\,ds}{\sqrt{-bbss + \frac{\Delta\Delta}{bb} - F}}$$

vbi ponatur

$$\frac{\Delta\Delta}{bb} - F = nnbb \text{ ita vt}$$

$$n = \sqrt{\frac{\Delta\Delta}{b^4} - \frac{F}{bb}} = \frac{1}{bb}\sqrt{\Delta\Delta - Fbb}$$

et

et impetremus

$$d\Phi = \frac{\mp ds}{\sqrt{nn - ss}} \text{ cuius integrale manifesto est}$$

$$\Phi = C \mp A \sin. \frac{s}{n}, \text{ vel etiam } \Phi = C \pm A \cos. \frac{s}{n}$$

vbi iterum constans ex statu initiali determinari debet, pro quo fit $\Phi = \vartheta$. Deinde ob $u = f$ erit $z = \frac{1}{f}$ et $s = \frac{1}{f} - \frac{\Delta}{bb}$, vnde pro initio fit

$$\vartheta = C \pm A \cos. \frac{bb - \Delta f}{nfbb}, \text{ ideoque } C = \vartheta \mp A \cos. \frac{bb - \Delta f}{nfbb}.$$

Quare si iste arcus cuius cosinus $\frac{bb - \Delta f}{nfbb}$ ponatur $= \eta$ erit

$$C = \vartheta \mp \eta, \text{ ideoque } \Phi = \vartheta \mp \eta \pm A \cos. \frac{s}{n}.$$

Quare cum sit $z = \frac{1}{u}$ et $s = \frac{1}{u} - \frac{\Delta}{bb}$ erit

$$\Phi = \vartheta \mp \eta \pm A \cos. \frac{bb - \Delta u}{nbbu}.$$

§. 48. Sumamus hic signum superius valere, quia casu contrario mutatio facile instituitur, et cum sit

$$\Phi - \vartheta + \eta = A \cos. \frac{bb - \Delta u}{nbbu}$$

ponamus breuitatis gratia

$$\Phi - \vartheta + \eta = \omega \text{ eritque } \cos. \omega = \frac{bb - \Delta u}{nbbu}$$

vnde colligitur $u = \frac{bb}{nbb \cos. \omega + \Delta}$. Fiat nunc $\frac{bb}{\Delta} = c$ vt prodeat $u = \frac{c}{1 + nc \cos. \omega}$; fiat porro $nc = -e$, vt sit $e = -\frac{1}{\Delta} \sqrt{\Delta^2 - Fbb}$, sicque habebitur $u = \frac{c}{1 - e \cos. \omega}$, ex qua formula intelligitur orbitam esse ellipsin cuius semiparameter $= c$ et excentricitas $= e$, angulus vero ω anomalia vera.

§. 49.

§. 49. Quodsi ergo sumamus $\omega = 0$, reperietur distantia aphelii a sole $= \frac{c}{1-e}$: at sumto $\omega = 180°$ fit distantia perihelii a sole $= \frac{c}{1+e}$, vnde axis transversus orbitae colligitur $= \frac{2c}{1-ee}$, et semiaxis transversus $= \frac{c}{1-ee} = \frac{\Delta}{f}$. Tum vero erit $\Phi = \vartheta + \eta - \omega$, vbi est cos. $\omega = \frac{u-c}{eu}$; vnde cum initio vbi $u = f$ fiebat $\omega = \eta$, hic angulus η commodius ita definietur, vt sit

cos. $\eta = \frac{f-c}{ef}$, existente $c = \frac{hh}{\Delta}$ et $e = -\frac{1}{\Delta}\sqrt{(\Delta^2 - Fhh)}$.

§. 50. Superest autem adhuc vt positionem lineae adsidum respectu axis S ♈ determinemus. Hunc in finem statuamus planetam in suo aphelio, vbi vt vidimus fit $u = \frac{c}{1-e}$, et angulus Φ ipsam dabit inclinationem lineae absidum ad rectam S ♈. Posito autem $u = \frac{c}{1-e}$ fiet cos. $\omega = 1$, ideoque $\omega = 0$, vnde fit $\Phi = \vartheta - \eta$.

§. 51. Colligamus nunc breuiter omnia quae ad determinationem orbitae sunt inuenta, et ex datis quantitatibus principalibus a, b et α, β, quaeramus primo angulum ϑ, vt sit tang. $\vartheta = \frac{b}{a}$, hincque porro distantia

$f = \sqrt{aa + bb} = a$ sec. ϑ. Praeterea capiatur

$h = a\beta - b\alpha$ et $\zeta\zeta = \alpha\alpha + \beta\beta$

vnde definiatur $F = \frac{2\Delta}{f} - \zeta\zeta$. Quibus elementis constitutis erit orbitae ellipticae semi-axis transuersus $= \frac{\Delta}{F}$, semiparameter $c = \frac{hh}{\Delta}$ et excentricitas

$e = -\frac{1}{\Delta}\sqrt{\Delta^2 - Fhh}$.

 Deinde

Deinde quaeratur angulus η, vt ſit $\cos.\eta = \frac{f-c}{ef}$, hincque erit longitudo lineae abſidum ſiue angulus ſub quo ea ad rectam fixam ♈ S inclinatur $= \vartheta - \eta$; ſicque omnia innoteſcunt quae ad nouam orbitam determinandam requiruntur.

Determinatio orbitae terrae poſt cometae actionem.

§. 52. Ex §. 38. poſtquam actio cometae ceſſauit habebimus

$$a = 23943,223 \qquad \alpha = -\ 28,460$$
$$b = \ 1650,540 \qquad \beta = +\ 412,023$$

vnde ſupra iam inuenimus

$$\vartheta = 3^\circ.\ 56'.\ 37'' \text{ et } f = 24000,01$$

Hinc erit

$$h = \alpha\beta - b\alpha = 9912134,37 \text{ ideoque}$$
$$l h = 6,9961672 \text{ et } l h h = 13,9923344.$$

Porro quaeratur

$$\zeta\zeta = \alpha\alpha + \beta\beta = 170572,97 \text{ denique}$$
$$\frac{\Delta}{f} = 170483,04 \text{ vnde colligitur}$$
$$F = \frac{2\Delta}{f} - \zeta\zeta = 170393,11 \text{ et } l F = 5,2314519.$$

Praeterea

$$c = \frac{hh}{\Delta} = 24012,76 \text{ et } e = +\sqrt{1 - \frac{Fhh}{\Delta\Delta}} = +0,0044$$

ſiue excentricitas tam eſt parua, vt ob errores calculi ineuitabiles ne definiri quidem queat; ita vt terra etiamnunc in circulo moueri ſit cenſenda, vnde

etiam

etiam nulla datur linea absidum, cuius positionem inuestigari oportet. Postremo autem erit semiaxis transuersus $\frac{\Delta}{F} = 24012,70$.

§. 53. Postquam igitur actio mutua cessauit, terra adhuc in circulo reuoluetur, cuius radius $= \frac{\Delta}{F} = 24012,70$, cum ante assumserimus circulum cuius radius $= 24000$ semidiametris terrae. Nunc igitur tempus periodicum aliquantillum augebitur in ratione sesquiplicata axium transuersorum: hoc est in ratione $1 : \frac{24015}{24000}$ seu vt $1 : 1\frac{30}{48000}$. Augebitur igitur tempus periodicum sui parte $\frac{1}{1231}$, quod est augmentum circiter 7 horar., quod discrimen profecto satis est exiguum, dum ex tali occursu subuersio totalis metuenda videretur.

Determinatio orbitae cometae post actionem mutuam.

§. 54. Applicemus nunc etiam nostrum problema generale ad determinationem motus cometae, quo cessante actione mutua deinceps feretur, atque ex §. 39. habebimus pro hoc casu

$$a = 22805,180 : b = 784,819$$
$$\alpha = -597,757 : \beta = -20,623$$

vnde iam in postremo calculo deduximus $f = 22818,74$ et angulum $\vartheta = 1^\circ.\ 58'.\ 16''$. Porro vero reperimus

$h = a\beta - b\alpha = -1180,33$, ideoque $lh = (-)3,0720034$ et $lhh = 6,1440068$. Porro $\zeta\zeta = \alpha\alpha + \beta\beta = 357738,64$ et $\frac{\Delta}{f} = 179308,45$, vnde fit $F = \frac{2\Delta}{f} - \zeta\zeta = 878,26$

hincque fit $\frac{\Delta}{F} = 4658750,00$. Praeterea vero

$$c = \frac{hh}{\Delta} = 0,0003405 \text{ et } e = +\sqrt{(1 - \frac{Fhh}{\Delta\Delta})} = 1$$

tam parum enim ab vnitate diſcrepat, vt error vltra decimam figuram fractionis decimalis demum occurrat. Denique fiet

$$\text{coſ. } \eta = \frac{f - c}{ef} = 1 \text{ ideoque } \eta = 0.$$

§. 55. Hinc igitur patet, poſt actionem mutuam orbitae cometae ſemiaxem transuerſum fore

$$\frac{\Delta}{F} = 4658750$$

cum ante fuiſſet infinitus. Sicque cometa nunc habebit tempus periodicum, quod reperietur diuidendo iſtum ſemiaxem transuerſum per 24000 vnde prodit 194; quocirca periodus cometae erit $= 194\sqrt{194}$ annis $= 2716$. Deinde cum ſit ſemiparameter $c = 0,0003405$ patet, hanc orbitam a linea recta vix diſcrepare, id quod etiam inde intelligitur quod ſit excentricitas $e = 1$. Denique cum prodierit $\eta = 0$ linea abſidum cometae inclinabitur ad directionem fixam S ♈ ſub angulo $\vartheta = 1°.58'.17''$ prorſus vt ante actionem mutuam. Secundum hypotheſin autem quam fecimus hic cometa recta in Solem ſe eſſet immerſurus rediturus igitur nunquam inde foret. Hoc igitur modo omnia ſunt expedita quae ſuper caſu propoſito deſiderarii poſſunt. Hinc igitur manifeſtum eſt id quod iam ſupra innuimus, ambos effectus actionis mutuae cum in acceſſu tum in receſſu ortos ſe mutuo fere penitus deſtruere.

DE

DE DIFFERENTIA INTER PARALLELVM LVNAE VERVM ET APPARENTEM.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

§. 1.

Ad determinandam differentiam aſcenſionum rectarum pro duobus aſtris extra meridianum, Aſtronomi ita procedere conſueuerunt, vt duorum filorum micrometri vel reticuli Tubo cuidam applicati, normaliter ſe decuſſantium, vnum verſus Polum aequatoris dirigant, alterum vero ita conſtituant, vt ab aſtro praecedente deſcribi videatur; tum enim ſi ad pendulum notentur momenta, quibus haec aſtra ad filum quod Polum reſpicit, adpellunt, et interuallum temporis quod haec momenta intercedit, in angulum horarium debite conuertatur, invenietur differentia aſcenſionum rectarum pro binis aſtris. Verum enimuero in hac procedendi Methodo ſupponitur, quod aſtrum praecedens, motu ſuo circulum parallelum circa Polum aequatoris deſcribere videatur, quod quidem perfecte locum habere nequit, niſi huius aſtri eadem maneat declinatio, tumque hoc aſtrum Parallaxi et refractione plane nihil adficiatur. Dum igitur comparatio inſtituitur Lunae cum aliqua ſtella fixa et Luna ſtellam praecedit, ſi filum micrometri ita diſponatur, vt Luna alterutro ſuo limbo hoc filum radere videatur; tenendum eſt directionem hanc fili reſpici debere vt tangentem lineae quam Luna motu ſuo diurno deſcribere videtur, neque tamen hanc lineam eſſe parallelam illi quae circulum parallelum a ſtella deſcriptum tangit. Hinc autem etiam fit, vt filum parallelo apparenti Lunae normale non ad ipſum Polum dirigatur, ſeu quod idem eſt non tangat circulum declinationis per punctum quo bina fila Micrometri ſe decuſſant, ductum; quam ob cauſſam appulſui ſtellae ad filum hoc verticale aliqua adplicanda eſt correctio, vt habeatur momentum quo ſtella in eodem circulo horario erat ac centrum Lunae pro certo momento adnotato. Quum autem motus apparens Lunae ob tres diuerſas adficiatur cauſſas, variabilitatem nimirum Parallaxis, declinationis et refractionis, de ſingulis ſeorſim agamus, vbi quidem a Parallaxi initium ducendum eſſe videtur, tum quia eius effectus maxime notabilis eſſe ſolet, cum quod ſatis concinne et eleganter exprimi poſſit.

2. Ad differentiam inter parallelum Lunae verum et adparentem, inter Aſtronomos primus animum aduertit Celeb. *Mayerus*, qui in ſuis Diſſertationibus Coſmographicis formulam tradidit, pro angulo, quem linea motu apparenti diurno Lunae deſcripta facit cum circulo minori, cuius diſtantia a Polo aequatoris aequalis eſt declinationi Lunae apparen-

parenti pro tempore obſeruationis. Quum vero *Mayerus* in ſatis perplexam et diffuſam huius formulae demonſtrationem incidiſſet, eandem penitus ſupprimendam eſſe ratus eſt; hinc autem factum eſt vt Cel. *de la Lande*, dum in ſua Aſtronomia Tom. III. §. 2539. huius formulae mentionem facit, eandem vitii et erroris cuiusdam ſuſpicetur et in eius locum aliam ſubſtituat, quae ipſi exacta videbatur. Atqui re bene penſitata facile perſpicitur, formulam *Mayeri* ſi non rigore Geometrico veram eſſe, ſaltem quam proxime ad veritatem accedere, cum contra formula Cel. *de la Lande* toto coelo a veritate aberret. Licet autem iam alii quoque vindicias formulae *Mayerianae* ſuſceperint, tamen et quae mihi hac de re ſe obtulerunt meditationes, communicare conſtitui; imprimis quum explicationem huius quaeſtionis ita perficiam, vt nihil omnino quod ad ſummum pertinet rigorem, deſideretur.

3. Dum motum Lunae apparentem ob mutabilitatem Parallaxeos contemplaturi erimus, conuenit vt animum primo abſtrahamus a varabilitate declinationis et effectu, quem refractio in Lunam exſerit, ſupponamus nimirum Lunam declinatione vera quam certo tempore habet, circulum parallelum deſcribere circa Polum aequatoris et inueſtigabimus, quamnam directionem Luna ob parallaxin qua afficitur, motu ſuo apparente ſequi videatur, declinatione vera Lunae pro inuariabili ſpectata et effectu refractionis plane neglecto. Sit igitur P Z meridianus loci in quo obſeruatio inſtituta eſt, P polus aequatoris, Z punctum T. XXIV. Fig. 5.

punctum meridiani, quod cum centro telluris et loco obseruatoris in directum iacet, certo autem momento obseruato, sit L locus centri Lunae verus et M locus eius apparens ob parallaxin, vbi puncta M, L inuenientur sita super circulo maximo per Z transeunte; tum vero minimo temporis interuallo elapso, sit l locus Lunae verus et m locus apparens, ductis igitur arcubus circulorum maximorum P L, P M, P l, P m et M m, liquet id nobis propositum esse, vt quantitas anguli P M m inuestigetur; facile enim patet filum Micrometri, quod a limbo Lunae raderetur, si Lunae declinatio inuariabilis foret et effectus refractionis in censum non veniret, esse tangentem arcus M m, ideoque hoc filum cum circulo declinationis apparente P M constituere angulum $=$ P M m.

4. In genere autem si in triangulo Sphaerico M P m, data supponuntur latera P M, P m cum angulo intercepto M P m, constat esse

$$\cot. PMm = \frac{\cos. Pm \sin. PM - \sin. Pm \cos. PM \cos. MPm}{\sin. Pm \sin. MPm}$$

quare si angulus M P m supponatur euanescens, ita vt eius Cosinus fiat $= 1$ et pro sinu scribere liceat ipsum hunc angulum, praetereaque differentia arcuum P M et P m sit euanescens, transmutabitur nostra formula pro cot. P M m in hanc sequentem:

$$\cot. PMm = \frac{\sin.(PM - Pm)}{\sin. Pm \sin. MPm}, \text{ siue in istam}$$

$$\cot. PMm = \frac{PM - Pm}{MPm \sin. PM},$$

tenendum autem est, hanc formulam esse exacte veram,

ram, eamque ex principiis calculi differentialis omnino rigorose demonstrari posse, quod tamen a nostro praesenti instituto alienum est. Facilitatis autem gratia in triangulis Z P L, Z P M designemus P Z, P L, P M, Z L, Z M respectiue per litteras b, a, a', c, c', tumque angulos Z P L, Z P M, Z L P, Z M P exprimamus litteris A, A', C, C', quo notato fiet

$$\text{cot. P M } m = \frac{d\,a'}{d\,A'\,\text{sin.}\,a'}.$$

5. Vt formulae pro cot. P M m propositae euolutio rite institui queat, ex doctrina parallaxium quaedam ad hoc negotium spectantia praemittenda erunt. Parallaxi igitur Lunae horizontali aequatorea per π expressa, denotet ε rationem diametri telluris pro loco spectatoris ad diametrum aequatoris, eritque vt constat $\text{sin. M L} = \varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin. M Z}$. Quare quum habeatur

$$\text{sin. M L} = \frac{\text{sin. P L sin. M P L}}{\text{sin. P M Z}}, \text{ fiet}$$

$\varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin. M Z sin. P M Z} = \text{sin. P L sin. M P L}$, et quia est $\text{sin. M Z sin. P M Z} = \text{sin. P Z sin. Z P M}$, consequemur $\varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin. P Z sin Z P M} = \text{sin. P L sin. M P L}$, seu introductis symbolis

(I.) $\varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin.}\,b\,\text{sin. A}' = \text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,(A' - A)$, hinc ob

$$A' = A' - A + A$$

$$\varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin.}\,b\,(\text{sin.}\,(A' - A)\,\text{cos. A} + \text{cos.}\,(A' - A)\,\text{sin. A}) = \text{sin.}\,a\,\text{sin.}\,(A' - A)$$

vnde deducitur

(II.) $$\text{Tang.}\,(A' - A) = \frac{\varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin.}\,b\,\text{sin. A}}{\text{sin.}\,a - \varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin.}\,b\,\text{cos. A}}.$$

Porro ex triangulis Z P L, Z P M habemus:

$$\text{cot. } PZL = \frac{\text{sin. } PZ \text{ cos. } PL - \text{cos. } PZ \text{ sin. } PL \text{ cos. } ZPL}{\text{sin. } PL \text{ sin. } ZPL}$$
$$= \frac{\text{sin. } PZ \text{ cos. } PM - \text{cos. } PZ \text{ sin. } PM \text{ cos. } ZPM}{\text{sin. } PM \text{ sin. } ZPM}$$

quibus valoribus aequatis fiet:

$$\text{cot. } PZ \text{ sin. } (ZPM - ZPL) + \text{cot. } PM \text{ sin. } ZPL = \text{cot. } PL \text{ sin. } ZPM, \text{ seu}$$

$$\text{cot. } b \text{ sin. } (A' - A) = \text{cot. } a \text{ sin. } A' - \text{cot. } a' \text{ sin. } A, \text{ hincque}$$

$$\text{cot. } a' = \text{cot. } a \frac{\text{sin. } A'}{\text{sin. } A} - \text{cot. } b \frac{\text{sin. } (A' - A)}{\text{sin. } A},$$

est vero per formul. (I.)

$$\text{sin } (A' - A) = \varepsilon \text{ sin. } \pi \frac{\text{sin. } b \text{ sin. } A'}{\text{sin. } a},$$

quare facta substitutione prodit

$$\text{cot. } a' = \frac{\text{sin. } A'}{\text{sin. } A} \left(\text{cot. } a - \frac{\varepsilon \text{ sin. } \pi \text{ cos. } b}{\text{sin. } a}\right), \text{ siue}$$

$$\text{cot. } a' = \text{cot. } a \frac{\text{sin. } A'}{\text{sin. } A} \left(1 - \frac{\varepsilon \text{ sin. } \pi \text{ cos. } b}{\text{cos. } a}\right) \text{ (III.).}$$

6. Si pro formula hac tertia differentialia vtrinque sumantur consequemur:

$$-\frac{d a'}{\text{sin. } a'^2} = \text{cot. } a \left(1 - \frac{\varepsilon \text{ sin. } \pi \text{ cos. } b}{\text{cos. } a}\right) \left(\frac{d A' \text{ cos. } A'}{\text{sin. } A} - \frac{d A \text{ sin. } A' \text{ cos. } A}{\text{sin. } A^2}\right)$$

tumque ob

$$\text{cot. } a \left(1 - \frac{\varepsilon \text{ sin. } \pi \text{ cos. } b}{\text{cos. } a}\right) \frac{\text{sin. } a'}{\text{sin. } A} = \frac{\text{cos. } a'}{\text{sin. } A'} \text{ fiet}$$

$$-\frac{d a'}{\text{sin. } a'} = \text{cos. } a' \left(\frac{d A' \text{ cos. } A'}{\text{sin. } A'} - \frac{d A. \text{ cos. } A}{\text{sin. } A}\right); \text{ vnde prodit}$$

$$\frac{d a'}{d A' \text{ sin. } a'} = \text{cos. } a' \left(\frac{d A}{d A'} \text{ cot. } A - \text{cot. } A'\right).$$

Atqui per formul. (I.) habemus:

$$(d A' - d A) \text{ cos. } (A' - A) = d A'. \frac{\varepsilon \text{ sin. } \pi \text{ sin. } b \text{ cos. } A'}{\text{sin. } a}, \text{ hincque}$$

$$d A' - d A = d A' \text{ Tang. } (A' - A) \text{ cot. } A', \text{ et}$$

$$\frac{d A}{d A'} = 1 - \text{Tang. } (A' - A) \text{ cot. } A', \text{ nec non}$$

$\frac{d A}{d A'}$

$\frac{dA}{dA'}$ cot. A − cot. A′ = cot A − Tang. (A′ − A) cot. A cot. A′ − cot. A′, quae expressio manifesto aequalis est ipsi Tang. (A′ − A), est enim

$$\text{Tang.}\,(A' - A)(1 + \cot. A \cot. A') = \cot. A - \cot. A'.$$

Consequemur itaque

$$\frac{d\,a'}{d\,A'\,\text{sin.}\,a'} = \text{Tang.}\,(A' - A)\,\text{cos.}\,a'\text{, ideoque}$$

$$\cot.\,P\,M\,m = \text{Tang.}\,(A' - A)\,\text{cos.}\,a'\text{,}$$

quae formula hanc regulam valde concinnam suppeditat, quod sit Cotangens anguli quaesiti, aequalis Tangenti parallaxeos ascensionis rectae pro Luna, ductae in Sinum declinationis apparentis; est autem haec expressio rigore etiam Geometrico vera. Si pro Tang. (A′ − A) introducatur eius valor formula (II.) allatus habebimus, designato breuitatis gratia angulo 90° − P M m per ψ;

$$\text{Tang.}\,\psi = \frac{\varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin.}\,b.\,\text{sin.}\,A\,\text{cos.}\,a'}{\text{sin.}\,a - \varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin.}\,b.\,\text{cos.}\,A}.$$

In qua formula, quum denominatoris posterius membrum prae priori esse soleat valde paruum, si illud plane negligatur, adproximando fiet

$$\text{Tang.}\,\psi = \frac{\varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin.}\,b.\,\text{sin.}\,A\,\text{cos.}\,a'}{\text{sin.}\,a},$$

siue etiam si placet

$$\text{Tang.}\,\psi = \varepsilon\,\text{sin.}\,\pi\,\text{sin.}\,b.\,\text{sin.}\,A\,\cot.\,a',$$

vel etiam ob angulum ψ valde paruum

$$\psi = \varepsilon\,\pi\,\text{sin.}\,b.\,\text{sin.}\,A\,\cot.\,a\,,$$

quae formula est illa ipsa quam pro hoc instituto Celeb. *Mayerus* exhibuit. Si tamen scrupulosius adproximationem quis inſtitutere velit, quod quidem in praxi valde ſuperfluum eſſet, ſtatuere debebit

$$\text{Tang.}\,\psi = \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin}\,b.\,\text{ſin.}\,A\,\frac{\text{coſ.}\,a'}{\text{ſin.}\,a}\left(1 + \frac{\varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,b.\,\text{coſ.}\,A}{\text{ſin.}\,a}\right)$$

et quum proxime ſit

$$\text{coſ.}\,a' = \text{coſ.}\,a - \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,a(\text{coſ.}\,b\,\text{ſin.}\,a - \text{coſ.}\,a\,\text{ſin.}\,b.\text{coſ.}\,A)$$

prodibit:

$$\text{Tang.}\,\psi = \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,A\,\text{cot.}\,a\,\Big(1 - \varepsilon\,\text{ſin.}\,\pi\Big(\text{coſ.}\,b\,\frac{\text{ſin.}\,a^2}{\text{coſ.}\,a} - \Big(\text{ſin.}\,a\,\text{ſin.}\,b + \frac{\text{ſin.}\,b}{\text{ſin.}\,a}\Big)\,\text{coſ.}\,A\Big)\Big)$$

eſt tamen haec formula magis perplexa, quam vt commode eius vſus adhiberi queat. Interim tamen eadem aliqua attentione digna eſt, quia valorem Tang. ψ exhibet pro caſu quo declinatio Lunae ſupponitur $= 0$, ſeu $a = 90$, tum enim fiet ex formula hac

$$\text{Tang.}\,\psi = -\varepsilon^2\,\text{ſin.}\,\pi^2\,\text{ſin.}\,b.\text{coſ.}\,b.\text{ſin.}\,A = -\frac{\varepsilon^2\,\text{ſin.}\,\pi^2}{2}\,\text{ſin.}\,2\,b\,\text{ſin.}\,A.$$

7. Quoniam angulus $A' - A$ pro Luna vix vnquam 60 minuta prima ſuperare poterit, ideoque tanto magis angulus ψ infra 60 minuta ſubſiſtat, arcus angulo ψ reſpondens ipſius Sinui vel tangenti poni poteſt aequalis; facile patet ſi in triangulis ZPL, ZPM praeter PZ cognitus ſupponatur, alteruter arcuum PL et PM, cum alterutro angulorum ZPL, ZPM, pro angulo ψ ſequentem formulam ſemper proxime veram eſſe

$$\psi = \varepsilon\,\pi\,\text{ſin.}\,b.\,\text{ſin.}\,A\,\text{cot.}\,a,$$

vbi quidem pro A ſcribere licebit A' et pro a, a'. Porro quia eſt

Tang.

$$\text{Tang.}\,\psi = \text{Tang.}(A' - A)\,\text{cof.}\,a' = \text{Tang.}\,MPL\,\text{cof.}\,PM,$$

fi pro Tang. M P L adhibeatur fin. M P L, tumque perpendatur effe

$$\text{fin.}\,MPL : \text{fin.}\,ML :: \text{fin.}\,PLZ : \text{fin.}\,PM,$$

fiet proxime

$$\psi = ML\,\text{fin.}\,PLZ\,\text{cot.}\,PM,$$ eft vero $ML = \varepsilon\pi\,\text{fin.}\,ZM$,

quare obtinebimus

$$\psi = \varepsilon\,\pi\,\text{fin.}\,MZ\,\text{fin.}\,PLZ\,\text{cot.}\,PM,$$

fiue introductis fymbolis

$$\psi = \varepsilon\,\pi\,\text{fin.}\,c'\,\text{fin.}\,C\,\text{cot.}\,a',$$

in qua formula etiam fine vllo errore fenfibili loco C adhiberi poterit C', quin etiam loco ipforum c' a', in vfum vocari poffunt c et a. Vltima haec formula inferuit determinando angulo ψ, quando altitudo Lunae vel apparens vel vera, et angulus eius parallacticus fiue apparens, feu verus pro cognitis habentur.

8. Si productus concipiatur arcus P L vsque dum arcui circuli maximi, qui parallelum Lunae apparentem in M tangit, occurrat in m, liquet ex praecedentibus effe T. XXIV. Fig. 6.

$$\text{cot.}\,PMm\,\text{cot.}\,MPm = \text{cof.}\,PM,$$

quam ob cauffam erit omnino angulus $PmM = 90°$, fiue arcus Pm ad Mm erit normalis. Quum itaque fit

$$\text{fin.}\,\psi = \text{cof.}\,PMm = \text{fin.}\,MPm\,\text{cof.}\,Pm,$$ fiet

$$\text{fin.}\,\psi = \text{fin.}\,(A' - A)\,\text{cof.}\,a'$$

 proxi-

proxime, quum P m a P M vix ſenſibiliter differat; interim ſi valorem ipſius ſin. ψ adhuc accuratius expreſſum quis deſideret, perpendet eſſe

$$\text{coſ. P } m = \frac{\text{coſ. P M}}{\text{coſ. M } m} = \text{coſ. P M } (1 + \tfrac{\text{ſin. M } m^2}{2})$$

proxime, eſt vero

$$\text{ſin. M } m^2 = \text{ſin. P M}^2 \text{ ſin. M P } m^2 \text{, ideoque prodibit:}$$

$$\text{ſin. } \psi = \text{ſin. } (A' - A) \text{coſ. } a' (1 + \tfrac{1}{2} \text{ſin. } a'^2 \text{ ſin. } (A' - A)^2)$$

quae formula ne in decimis quidem partibus ſcrupuli ſecundi a vero aberrare poterit. Denique ex conſideratione trianguli Sphaerici rectangu i L m M, elicitur

$$\text{Tang. L M } m = \frac{\text{cot. M L } m}{\text{coſ. M L}} \text{, quum itaque ſit}$$

$$\frac{1}{\text{coſ. L M}} = \sqrt{(1 + \text{Tang. M L}^2)} = 1 + \tfrac{1}{2} \text{Tang. M L}^2 \text{,}$$

quando M L eſt arcus valde paruus, fiet

$$\text{Tang. L M } m = \text{cot. P L Z } (1 + \tfrac{1}{2} \text{Tang. M L}^2)$$

proxime, ex quo ſequens habetur formula

$$\text{Tang. L M } m = \text{cot. C } (1 + \tfrac{1}{2} \varepsilon^2 \text{ ſin. } \pi^2 \text{ ſin. } c^2)$$

cuius ope ex data diſtantia vera Lunae a puncto Z, cum angulo parallactico C facile elicitur angulus L M m, cuius ope porro inuenietur angulus ψ, at commodius tamen idem negotium perfici videtur, per formulam in §. ſuperiori traditam.

9. Formulae in ſuperioribus allatae abunde quidem ſufficiunt pro vſu Aſtronomico ad exhibendum valorem anguli ψ, at tamen operae pretium erit, paulo altius hanc inueſtigationem repetere; ita vt in indolem lineae curuae, quam Luna parallaxi adfecta,

adfecta, motu diurno describere videtur, inquiramus, vbi tamen suppositur erimus declinationem veram Lunae constantem. Ista autem inuestigatio eo magis curiosa videtur, quod non solum haec linea curva admodum facile construi queat, sed etiam vix tantillum discrepet a circulo quodam minori, qui certo quodam puncto meridiani pro Polo assumto describitur. Ante omnia igitur in id erimus intenti, vt aequationem quandam pro hac curua exhibeamus, quae aequatio commodissime adornari potest, si adhibeatur ad exprimendam relationem inter quantitates variabiles angulum Z P M et arcum P M, tumque quantitates constantes, arcus Z P, P L et ε sin. π. Ex formula autem (I.) § 5. sequitur esse

$$\text{sin. } A' \text{ cos. } A = \frac{\varepsilon \text{ sin. } \pi \text{ sin. } b. \text{ sin. } A'}{\text{sin. } a} + \text{sin. } A \text{ cos. } A',$$

vnde si breuitatis gratia statuatur

$$\frac{\varepsilon \text{ sin. } \pi \text{ sin. } b}{\text{sin. } a} = \lambda, \text{ fiet sin. } A'^2 \text{ cos. } A^2 = \lambda^2 \text{ sin. } A'^2$$

$$+ 2 \lambda \text{ sin. } A \text{ sin. } A' \text{ cos. } A' + \text{sin. } A^2 \text{ cos. } A'^2, \text{ hincque}$$

$$\text{sin. } A'^2 = \lambda^2 \text{ sin. } A'^2 + 2 \lambda \text{ sin. } A \text{ sin. } A' \text{ cos. } A' + \text{sin. } A^2,$$

nec non

$$1 = \lambda^2 + 2 \lambda \frac{\text{sin. } A}{\text{sin. } A'} \text{ cos. } A' + \frac{\text{sin. } A^2}{\text{sin. } A'^2}.$$

Deinde quum sit per formul. (III.) § 5.

$$\text{cot. } a' = \frac{\text{sin. } A'}{\text{sin. } A} \left(\frac{\text{cos. } a - \varepsilon \text{ sin. } \pi \text{ cos. } b}{\text{sin. } a}\right) \text{ posito } \frac{\text{cos. } a - \varepsilon \text{ sin. } \pi \text{ cos. } b}{\text{sin. } a} = \mu$$

erit $\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. } A'} = \mu$ Tang. a', introducto igitur pro $\frac{\text{sin. } A}{\text{sin. } A'}$ hoc valore; obtinebimus

$$1 = \lambda^2 + 2 \lambda \mu \text{ cos. } A' \text{ Tang. } a' + \mu^2 \text{ Tang. } a'^2,$$

qua

qua aequatione relatio inter quantitates noſtras variabiles angulum A' et arcum a' definitur, vnde haec aequatio naturam curuae a Luna deſcribendae exprimere cenſenda eſt. Caeterum loco anguli Z P M et arcus P M, quaeri poſſet relatio inter alias partes trianguli Z P M, vti angulum P Z L et arcum Z M, vel binos arcus Z M, P M, cuiusmodi tamen aequationibus recenſendis, nihil eſt vt heic immoremur.

10. Si ex aequatione pro curua noſtra, eius conſtructionem quisquam deducere vellet, eadem
T. XXIV. omnino parum elegans emergeret, quae tamen aliun-
Fig. 7. de admodum concinna deducitur. Quum enim ſit

$$\text{ſin. } LM = \varepsilon \text{ ſin. } \pi \text{ ſin. } ZM \text{, erit}$$

$$\text{ſin. } ZM - \text{ſin. } LM : \text{ſin. } ZM + \text{ſin. } LM :: 1 - \varepsilon \text{ ſin. } \pi : 1 + \varepsilon \text{ ſin. } \pi \text{, ſeu}$$

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2}(ZM - LM) : \text{Tang.} \tfrac{1}{2}(ZM + LM) :: 1 - \varepsilon \text{ ſin. } \pi : 1 + \varepsilon \text{ ſin. } \pi .$$

Concipiamus nunc productum eſſe arcum Z M in l, vt ſit $Ml = ML$, et Polo P interuallo P L deſcribi circulum minorem A L B, fiet omnino

$$ZM - LM = ZL \text{ et } ZM + LM = ZM + Ml = Zl,$$

ex quo erit

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2} ZL : \text{Tang.} \tfrac{1}{2} Zl = 1 - \varepsilon \text{ ſin. } \pi : 1 + \varepsilon \text{ ſin. } \pi$$

ſeu in ratione conſtanti. Similiter ſi arcus L Z ad alteram partem meridiani productus concipiatur vsque dum circulo minori A L B in Λ occurrit ſitque Λ μ effectus parallaxeos, eiusque duplum Λ λ; demonſtrabitur eſſe

$$\text{Tang.} \tfrac{1}{2} Z\Lambda : \text{Tang.} \tfrac{1}{2} Z\lambda :: 1 - \varepsilon \text{ ſin. } \pi : 1 + \varepsilon \text{ ſin. } \pi ,$$

quare

quare erit quoque

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}ZL.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}Z\Lambda : \text{Tang.}\tfrac{1}{2}Zl.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}Z\lambda$$

in ratione conſtanti. Atqui eſt productum

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}ZL\ \text{Tang.}\tfrac{1}{2}Z\Lambda$$

conſtans, quippe quod aequatur

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}AZ.\text{Tang.}\tfrac{1}{2}BZ,$$

cuius propoſitionis veritatem tamquam aliunde cognitam heic praeſupponere licebit; erit igitur quoque productum

$$\text{Tang.}\tfrac{1}{2}Zl.\ \text{Tang.}\tfrac{1}{2}Z\lambda$$

conſtans, ex quo omnino inferri poteſt omnia puncta l reperiri in circulo minori alb, cuius polus incidit in meridianum AZP. Ipſe autem hic circulus minor facile deſcribetur, dum in ipſo meridiano definiuntur parallaxes $A\alpha$, $B\beta$, earumque duplis Aa, Bb ſumtis, biſecetur arcus aPb in p, polo enim p et interuallo $pa = pb$ deſcribendus eſt ille circulus alb. Caeterum infra quoque oſtendemus, quo modo per calculum exhiberi queant tangentes arcuum Pp et pa, quibus cognitis deſcriptio circuli alb eſt in poteſtate. Deſcriptis vero circulis minoribus ALB, alb, quodcunque punctum M curuae $\alpha M\beta$ facile determinatur, ducto enim circulo ZLl ſi arcus interceptus Ll biſecetur in M, erit hoc punctum M ad curuam quaeſitam $\alpha M\beta$. In noſtra figura arcum $Z\Lambda\lambda$ non quidem expresſimus, quum tamen ipſa res conceptu ſit facillima, vnusquisque hunc arcum nullo negotio, imaginatione ſibi repraeſentare poterit.

11. Quamuis supra quidem satis fuse ostenderimus, quomodo ducenda sit tangens lineae nostrae curuae $\alpha M \beta$, quippe quum haec imprimis res ad quaestionem nostram Astronomicam pertinebat; haud tamen praeter rem erit exponere, quomodo haec tangentis inuentio ex ipsa aequatione fundamentali pro linea nostra curua, deducatur. Pro tangente igitur curuae $\alpha M \beta$ ad punctum M inuestigando, quaeri debet huius expressionis $\frac{d a'}{d A' \, \text{sin.}\, a'}$ valor, quippe quum haec quantitas aequalis sit cotangenti anguli, quem Tangens curuae ad punctum M cum arcu P M facit, vel etiam si per M ductus concipiatur
T. XXIV. Fig. 6. arcus circuli maximi M N normalis ipsi P M in M et arcus $M m$, qui curuam tangit erit

$$\text{Tangens } N M m = \text{Tang. } \psi = \frac{d a'}{d A' \, \text{sin.}\, a'}.$$

Ex aequatione autem nostra

$$1 = \lambda^2 + 2 \lambda \mu \, \text{Tang.}\, a' \cos.\, A' + \mu^2 \, \text{Tang.}\, a'^2 \text{ elicitur}$$

$$\frac{d a'}{d A' \, \text{sin.}\, a'} = \frac{\lambda \, \text{sin.}\, A' \cos.\, a'}{\mu \, \text{Tang.}\, a' + \lambda \cos.\, A'},$$

de qua expressione iam facile ostendi potest, eam cum formula nostra in superioribus tradita plane conuenire; scilicet id agitur vt demonstremus esse

$$\text{Tang.}\,(A' - A) = \frac{\lambda \, \text{sin.}\, A'}{\mu \, \text{Tang.}\, a' + \lambda \cos.\, A'};$$ quum vero sit

$$\mu \, \text{Tang.}\, a' = \frac{\text{sin.}\, A}{\text{sin.}\, A'}$$

erit

$$\frac{\lambda \, \text{sin.}\, A'}{\mu \, \text{Tang.}\, a' + \lambda \cos.\, A'} = \frac{\lambda \, \text{sin.}\, A'^2}{\text{sin.}\, A + \lambda \, \text{sin.}\, A' \cos.\, A'} = \frac{\lambda}{\text{sin.}\, A (1 + \cot.\, A'^2) + \lambda \cot.\, A'}.$$

Atqui est

$$\text{Tang.}\, A' = \frac{\text{sin.}\, A}{\cos.\, A - \lambda}, \text{ hinc } \cot.\, A' = \frac{\cos.\, A - \lambda}{\text{sin.}\, A} \text{ et}$$

$$1 + \cot.\, A'^2 = \frac{1 - 2 \lambda \cos.\, A + \lambda^2}{\text{sin.}\, A^2},$$ vnde

vnde obtinetur

$$\frac{\lambda\, \sin. A'}{\mu\, \mathrm{Tang}. a' + \lambda \cos. A'} = \frac{\lambda \sin. A}{1 - \lambda \cos. A}$$

eſt vero vti ſupra demonſtrauimus §. 5.

$$\mathrm{Tang}. (A' - A) = \frac{\lambda \sin. A}{1 - \lambda \cos. A},$$

vnde liquet propoſitum, ſeu quod ſit

$$\frac{d a'}{d A' \sin. a'} = \mathrm{Tang}.\, \psi = \mathrm{Tang}. (A' - A) \cos. a'.$$

Si euaneſcat angulus Z P L, quo caſu etiam euaneſcit angulus Z P M ſeu fit ſin. $A' = 0$, expreſſio noſtra $\frac{d a'}{d A' \sin. a'}$ quoque euaneſcet, ſeu curua α M β in punctis α, β ad Meridianum erit normalis.

12. Si quaeratur valor anguli Z P L, pro quo angulus N M m euadat maximus, ad hanc quaeſtionem ſoluendam, ſequenti modo procedere licet. Quum eſſe debeat Tang. $(A' - A) \cos. a'$ maximum, differentiando elicietur;

$$\frac{d A' - d A}{\cos. (A' - A)} = d a' \,\mathrm{Tang}.\, a' \sin. (A' - A),$$

at ſupra §. 6. vidimus eſſe

$$d a' = d A' \sin. a' \cos. a' \,\mathrm{Tang}. (A' - A),$$

facta itaque ſubſtitutione fiet

$$d A' - d A = d A' \sin. a'^2 \sin. (A' - A)^2, \text{ hinc}$$

$$1 - \frac{d A}{d A'} = \sin. a'^2 \sin. (A' - A)^2 = \mathrm{Tang}. (A' - A) \cot. A',$$

itidem per §. 6. Hinc deducimus

$$1 + \cot. a'^2 = \mathrm{Tang}. A' \sin. (A' - A) \cos. (A' - A) \text{ et ob}$$

$$\cot. a' = \frac{\mu \sin. A'}{\sin. A}, \quad \frac{1}{\sin. A'^2} + \frac{\mu^2}{\sin. A^2} = \frac{\sin. (A' - A) \cos. (A' - A)}{\sin. A' \cos. A'}; \text{ ſiue}$$

$$1 + \cot. A'^2 + \frac{\mu^2}{\sin. A^2} = \frac{\sin. (A' - A) \cos. (A' - A)}{\sin. A' \cos. A'}.$$

Quum igitur ſit

$$\operatorname{cof.}(A' - A) = \operatorname{fin.}(A' - A)\,\frac{(1 - \lambda \operatorname{cof.} A)}{\lambda \operatorname{fin.} A};$$

$$\operatorname{cof.} A' = \operatorname{fin.} A'\,\frac{(\operatorname{cof.} A - \lambda)}{\operatorname{fin.} A} \text{ et } \operatorname{fin.}(A' - A) = \lambda \operatorname{fin.} A',$$

fiet per debitam reductionem

$$\frac{1 + \lambda^2 + \mu^2 - 2\lambda \operatorname{cof.} A}{\operatorname{fin.} A^2} = \frac{\lambda(1 - \lambda \operatorname{cof.} A)}{\operatorname{cof.} A - \lambda},$$

qua aequatione euoluta peruenitur ad aequationem tertii gradus ſequentem:

$$\operatorname{cof.} A^3 + \tfrac{1}{\lambda} \operatorname{cof.} A^2 - \frac{(1 + 4\lambda^2 + \mu^2)}{\lambda^2} \operatorname{cof.} A + \frac{2 + \lambda^2 + \mu^2}{\lambda} = 0,$$

cuius aequationis ſaltem vnam radicem realem eſſe oportet; valde autem probabile videtur non niſi vnicam radicem realem fore; verum vlterius examen huius aequationis calculos omnino requireret operoſiores, quam vt hic adferri mereantur. Interim tamen haud obſcure liquet angulum A proxime ad 90° accedere, ſeu eſſe valorem coſ. A quam minimum.

13. Si per puncta α, β deſcriptus concipiatur circulus minor, is quidem cum linea noſtra curua $\alpha\, M\, \beta$ proxime coincidet, nihilo tamen minus ex ipſa aequatione pro linea $\alpha\, M\, \beta$ intelligitur eandem a circulo minori differre, quod luculentius patebit, ſi quaeratur circulus minor qui cum curua noſtra, ad datum punctum *M* eandem habet curuaturam. Nam ſi arcus circuli maximi inter hunc circulum minorem et eius polum dicatur radius curuedinis pro noſtra curua, et in expreſſione huius arcus ſeu radii curuaturae ex indole noſtrae curuae deducenda, quantitates tantum conſtantes reperiantur, id indicio erit,

erit, curuam noſtram reapſe eſſe circulum minorem; quod ſi vero valor huius radii curuaturae quantitates variabiles inuoluat, inde cognoſcetur curvam propoſitam cum circulo minori non prorſus conuenire. Heic autem tamquam ex doctrina calculi differentialis cognitam aſſumere licebit expreſſionem pro radio curuaturae curuae in ſuperficie ſphaerica deſcriptae; ſi ſcilicet hic radius curuaturae dicatur r, angulus vero $90^\circ - \mathrm{P\,M}\,\alpha$ indicetur per ψ, erit retentis reliquis denominationibus ſupra adhibitis:

$$\text{Tang.}\, r = \frac{d\,a'\,\text{ſin.}\,a'}{d\,(\text{coſ.}\,\psi\,\text{ſin.}\,a')} \text{ vel}$$

$$\text{cot.}\, r = \text{coſ.}\,\psi\,(\text{cot.}\,a' - \tfrac{d\,\psi}{d\,a'}\,\text{Tang.}\,\psi)$$

vbi ex §. 11. notare iuuat eſſe

$$\text{Tang.}\,\psi = \frac{\lambda\,\text{ſin.}\,A'\,\text{coſ.}\,a'}{\mu\,\text{Tang.}\,a' + \lambda\,\text{coſ.}\,A'} = \frac{d\,a'}{d\,A'\,\text{ſin.}\,a'}.$$

Hinc itaque elicitur:

$$\frac{1}{\text{coſ.}\,\psi^2} = 1 + \text{Tang.}\,\psi^2 = \frac{\mu^2\,\text{Tang.}\,a'^2 + 2\lambda\mu\,\text{Tang.}\,a'\,\text{coſ.}\,A' + \lambda^2\,\text{coſ.}\,A'^2 + \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{coſ.}\,a'^2}{(\mu\,\text{Tang.}\,a' + \lambda\,\text{coſ.}\,A')^2}$$

et quum ſit per aequationem noſtrae curuae

$$1 = \mu^2\,\text{Tang.}\,a'^2 + 2\,\lambda\,\mu\,\text{Tang.}\,a'\,\text{coſ.}\,A' + \lambda^2$$

expreſſio iſta in hanc abit

$$\frac{1}{\text{coſ.}\,\psi^2} = \frac{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2 + \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{coſ.}\,a'^2}{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2} = \frac{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2}{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2},$$

ex quo colligitur

$$2\,\mathrm{L}\,\text{coſ.}\,\psi = \mathrm{L}(1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2) - \mathrm{L}(1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2),$$

hincque ſumtis differentialibus prodibit:

$$d\,\psi\,\text{Tang.}\,\psi = \frac{\lambda^2\,d\,A'\,\text{ſin.}\,A'\,\text{coſ.}\,A'}{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2} - \frac{\lambda^2\,d\,A'\,\text{ſin.}\,A'\,\text{coſ.}\,A'\,\text{ſin.}\,a'^2}{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2} - \frac{\lambda^2\,d\,a'\,\text{ſin.}\,a'\,\text{coſ.}\,a'\,\text{ſin.}\,A'^2}{1 - \lambda^2\,\text{ſin.}\,A'^2\,\text{ſin.}\,a'^2}$$

siue

$$\frac{d\psi}{d a'} \text{Tang.}\, \psi = \frac{\lambda^2\, d A' \text{sin.} A' \text{cos.} A'}{d a'(1-\lambda^2 \text{sin.} A'^2)(1-\lambda^2 \text{sin.} A'^2 \text{sin.} a'^2)} - \frac{\lambda^2 \text{sin.} a' \text{cos.} a' \text{sin.} A'^2}{1-\lambda^2 \text{sin.} A'^2 \text{sin.} a'^2}$$

$$= \frac{\lambda \text{cos.} A' \text{cos.} a'}{\text{sin.} a' (1-\lambda^2 \text{sin.} A'^2 \text{sin.} a'^2)(\mu \text{Tang.} a' + \lambda \text{cos.} A')} - \frac{\lambda^2 \text{sin.} a' \text{cos.} a' \text{sin.} A'^2}{1-\lambda^2 \text{sin.} A'^2 \text{sin.} a'^2}.$$

Tum vero fiet

$$\text{cot.}\, a' - \frac{d\psi}{d a'} \text{Tang.}\, \psi = \text{cot.}\, a' \Big(1 + \frac{\lambda^2 \text{sin.} a'^2 \text{sin.} A'^2}{1-\lambda^2 \text{sin.} A'^2 \text{sin.} a'^2}$$

$$- \frac{\lambda \text{cos.} A'}{(1-\lambda^2 \text{sin.} A'^2 \text{sin.} a'^2)(\mu \text{Tang.} a' + \lambda \text{cos.} A')}\Big) = \frac{\mu}{(1-\lambda^2 \text{sin.} A'^2 \text{sin.} a'^2)(\mu \text{Tang.} a' + \lambda \text{cos.} A')},$$

denuoque

$$\text{cot.}\, r = \text{cos.}\, \psi \left(\text{cot.}\, a' - \frac{d\psi}{d a'} \text{Tang.}\, \psi\right)$$

$$= \frac{\mu}{(1-\lambda^2 \text{sin.} A'^2 \text{sin.} a'^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ ob cos.}\, \psi = \frac{\mu \text{Tang.} a' + \lambda \text{cos.} A'}{\sqrt{(1-\lambda^2 \text{sin.} A'^2 \text{sin.} a'^2)}}.$$

Euidens itaque est radium curuaturae pro nostra curva non esse constantem, quippe quum sit

$$\text{Tang.}\, r = \frac{(1-\lambda^2 \text{ sin. } A'^2 \text{ sin. } a'^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu};$$

at casibus quo λ est quantitas valde parua, assumi potest $\text{Tang.}\, r = \frac{1}{\mu}$ vel etiam exactius si placet

$$\text{Tang.}\, r = \frac{1}{\mu}(1 - \tfrac{3}{2}\lambda^2 \text{ sin. } A'^2 \text{ sin. } a'^2).$$

Pro punctis vero α, β vbi curua meridianum secat, ob $\text{sin. } A' = 0$ fiet

$$\text{Tang.}\, r = \frac{1}{\mu} = \frac{\text{sin.}\, a}{\text{cos.}\, a - \varepsilon \text{sin.} \pi \text{cos.} b} \text{ seu cot.}\, r = \text{cot.}\, a \left(1 - \frac{\varepsilon \text{sin.} \pi \text{cos.} b}{\text{cos.}\, a}\right)$$

pro vtroque igitur puncto α, β radius curuaturae eiusdem habetur magnitudinis, neque tamen ideo arcus r, dimidio ipsius $\alpha P \beta$ aequalis habetur, vti infra videbimus.

14.

14. Quoniam constructio curuae $\alpha M \beta$ ita perficitur, vt ducto per Z quocunque arcu circuli maximi, qui circulos minores $A L B$, $a l b$ in L et l intersecat, arcus interceptus $L l$ bisecetur in puncto M, quod continuo reperietur in curua $\alpha M \beta$; iam omnino operae pretium erit inuestigare, tum polum p circuli minoris $a l b$ siue quantitatem arcus Pp, cum etiam arcum pa seu distantiam poli p a circulo minori $a l b$. Est vero ex proprietatibus parallaxeos: T. XXIV. Fig. 7.

$$\text{Tang. } A\alpha = \frac{\varepsilon \sin. \pi \sin. ZA}{1 - \varepsilon \sin. \pi \cos. ZA} \text{ et Tang. } B\beta = \frac{\varepsilon \sin. \pi \sin. ZB}{1 - \varepsilon \sin. \pi \cos. ZB},$$

vbi breuitatis gratia pro $\varepsilon \sin. \pi$ scribamus γ, et quum sit

$$pa = PA + Pp + Aa \text{ tumque } pb = PA - Pp + Bb$$

obtinebimus

$$pa = PA + \tfrac{1}{2}(Aa + Bb) = PA + A\alpha + B\beta, \text{ nec non}$$
$$Pp = \tfrac{1}{2}(Bb - Aa) = B\beta - A\alpha.$$

Consequemur proinde

$$\text{Tang.}(B\beta + A\alpha) = \frac{\gamma \sin. ZB(1 - \gamma \cos. ZA) + \gamma \sin. ZA(1 - \gamma \cos. ZB)}{1 - \gamma(\cos. ZA + \cos. ZB) + \gamma^2(\cos. ZA \cos. ZB - \sin. ZA \sin. ZB)}$$

siue

$$\text{Tang.}(B\beta + A\alpha) = \frac{2\gamma \sin. PA(\cos. PZ - \gamma \cos. PA)}{1 - 2\gamma \cos. PA \cos. PZ + \gamma^2(\cos. PA^2 - \sin. PA^2)}$$

tumque

$$\text{Tang. } pa = \text{Tang.}(PA + B\beta + A\alpha) = \frac{(1 - \gamma^2)\sin. PA}{(1 + \gamma^2)\cos. PA - 2\gamma \cos. PZ}.$$

Similiter fiet

$$\text{Tang. } Pp = \text{Tang.}(B\beta - A\alpha) = \frac{\gamma \sin. ZB(1 - \gamma \cos. ZA) - \gamma \sin. ZA(1 - \gamma \cos. ZB)}{1 - \gamma(\cos. ZA + \cos. ZB) + \gamma^2(\cos. ZA \cos. ZB + \sin. ZA \sin. ZB)}$$

$$= \frac{2\gamma \sin. PZ(\cos. PA - \gamma \cos. PZ)}{1 - 2\gamma \cos. PZ \cos. PA + \gamma^2(\cos. PZ^2 - \sin. PZ^2)}.$$

Vel

Vel etiam hoc modo idem negotium absolui potest, ob

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,a : \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,A :: 1 + \gamma : 1 - \gamma \text{ et}$$

$$\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,b : \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,B :: 1 + \gamma : 1 - \gamma$$

habebimus

$$\text{Tang.}\,p\,a = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(Z\,b + Z\,a) = \frac{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}(\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,B + \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,A)}{1 - (\frac{1+\gamma}{1-\gamma})^2\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,B\,\text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}\,Z\,A} =$$

$$\frac{(1-\gamma^2)(\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}ZB\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}ZA + \text{cof.}\,\tfrac{1}{2}ZB\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}ZA)}{(1+\gamma^2)(\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}ZB\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}ZA - \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}ZB\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}ZA) - 2\gamma(\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}ZB\,\text{cof.}\,\tfrac{1}{2}ZA + \text{fin.}\,\tfrac{1}{2}ZB\,\text{fin.}\,\tfrac{1}{2}ZA)}$$

$$= \frac{(1-\gamma^2)\,\text{fin.}\,PA}{(1+\gamma^2)\,\text{cof.}\,PA - 2\gamma\,\text{cof.}\,PZ}.$$

Porro vero fiet

$$\text{Tang.}\,p\,Z = \text{Tang.}\,\tfrac{1}{2}(Z\,b - Z\,a) = \frac{(1-\gamma^2)\,\text{fin.}\,PZ}{(1+\gamma^2)\,\text{cof.}\,PZ - 2\gamma\,\text{cof.}\,PA}.$$

Ex quo pro $\text{Tang.}\,P\,p = \text{Tang.}\,(p\,Z - P\,Z)$ prorfus idem deducitur valor quem fupra inuenimus.

15. Praeterea vtile forfan quoque erit valores arcuum $P\,a$, $P\,b$, vel $P\,\alpha$, $P\,\beta$ cognofcere, fiet vero

$$\text{Tang.}\,P\,\alpha = \text{Tang.}\,(P\,A + A\,\alpha) = \frac{\text{fin.}\,PA - \gamma\,\text{fin.}\,PZ}{\text{cof.}\,PA - \gamma\,\text{cof.}\,PZ}$$

$$\text{Tang.}\,P\,\beta = \text{Tang.}\,(P\,B + B\,\beta) = \frac{\text{fin.}\,PA + \gamma\,\text{fin.}\,PZ}{\text{cof.}\,PA - \gamma\,\text{cof.}\,PZ}$$

$$\text{Tang.}\,P\,a = \text{Tang.}\,(P\,\alpha + A\,\alpha) = \frac{\text{fin.}\,PA - 2\gamma\,\text{fin.}\,PZ + \gamma^2\,\text{fin.}\,(2\,PZ - PA)}{\text{cof.}\,PA - 2\gamma\,\text{cof.}\,PZ + \gamma^2\,\text{cof.}\,(2\,PZ - PA)}$$

$$\text{Tang.}\,P\,b = \text{Tang.}\,(P\,\beta + B\,\beta) = \frac{\text{fin.}\,PA + 2\gamma\,\text{fin.}\,PZ - \gamma^2\,\text{fin.}\,(2\,PZ - PA)}{\text{cof.}\,PA - 2\gamma\,\text{cof.}\,PZ + \gamma^2\,\text{cof.}\,(2\,PZ - PA)}.$$

Denique iam liquet radium curuaturae pro puncto α vel β non effe aequalem ipfi $\tfrac{1}{2}(P\,\alpha + B\,\beta)$, nam fi hoc ponatur, effet quoque

$$\text{Tang.}\,(P\,\alpha + P\,\beta) = \text{Tang.}\,2\,r, \text{ atqui eft}$$

Tang.

$$\text{Tang.}(P\alpha + P\beta) = \frac{2\,\text{fin.}\,PA\,(\text{cof.}\,PA - \gamma\,\text{cof.}\,PZ)}{\text{cof.}\,PA^2 - \text{fin.}\,PA^2 - 2\gamma\,\text{cof.}\,PA\,\text{cof.}\,PZ + \gamma^2}$$ et

$$\text{Tang.}\,2\,r = \frac{2\,\text{fin.}\,PA\,(\text{cof.}\,PA - \gamma\,\text{cof.}\,PZ)}{\text{cof.}\,PA^2 - \text{fin.}\,PA^2 - 2\gamma\,\text{cof.}\,PA\,\text{cof.}\,PZ + \gamma^2\,\text{cof.}\,PZ^2},$$

hincque colligitur

$$\text{cot.}(P\alpha + P\beta) = \text{cot.}\,2\,r + \frac{\gamma^2\,\text{fin.}\,PZ^2}{2\,\text{fin.}\,PA\,(\text{cof.}\,PA - \gamma\,\text{cof.}\,PZ)},$$

vbi cot. $(P\alpha + P\beta)$ erit maior vel minor quam cot. $2\,r$, prouti fuerit cof. $PA - \gamma$ cof. PZ quantitas pofitiua vel negatiua. Cafu, quo cof. $PA - \gamma$ cof. PZ euanefcit, euanefcet quoque tam Tang. $(P\alpha + P\beta)$ quam Tang. $2\,r$, feu erit $\frac{1}{2}(P\alpha + P\beta) = r = 90^\circ$.

16. Miffis vero iam his contemplationibus, quae ad Geometriam quidem fpectant, in Aftronomicis autem exigui funt vfus; examinemus nunc formulam a Celeb. *de la Lande* allatam, de qua fupra diximus, quod cum veritate confiftere nequeat. Formula autem haec per denominationes a nobis adhibitas ita habetur expreffa $\psi = \pi\,\text{cof.}\,c'\,\text{fin.}\,C'\,\text{cof.}\,C'$, de qua quidem ftatim liquet eam nequaquam convenire cum formula noftra §. 7. exhibita, $\psi = \pi\,\text{fin.}\,c'\,\text{fin.}\,C'\,\text{cot.}\,a'$; quippe quum effe nequeat cot. $a' = \text{cot.}\,c'\,\text{cof.}\,C'$, nifi pro cafu fpeciali quo ftatuitur angulus $PZL = 90^\circ$. Ratiocinium vero quo Celeb. *de la Lande* fuam formulam ftabilire voluit, hunc fere in modum procedit: Si ZLM fuerit circulus verticalis, defignante L locum Lunae verum et M apparentem, tumque ducantur arcus $M\mu$, Mm defignantes parallelos Lunae apparentem et verum, vbi puncta μ, m fita fupponuntur in circulo verticali $Z\mu m$ priori ZLM proximo; id heic propo- T. XXIV. Fig. 8.

 fitum

ſitum eſt vt inueſtigetur angulus $\mu\,M\,m$. At in triangulo $\mu\,M\,m$ eſt

ang. $\mu\,M\,m : \mu\,m :: \text{ſin.}\,M\,\mu\,m : M\,m$ ideoque ob

ſin. $M\,\mu\,m = \text{coſ.}\,Z\,M\,P$ quam proxime,

$$\mu\,M\,m = \tfrac{\mu\,m}{M\,m}\,\text{coſ.}\,Z\,M\,P,$$

hinc vero ſi Polo Z interuallo Z M deſcribatur arcus circuli paralleli $M\,\nu$ ob

$M\,m : m\,\nu :: 1 : \text{ſin.}\,Z\,M\,P$ colligitur

$$\mu\,M\,m = \tfrac{\mu\,m}{m\,\nu}\,\text{ſin.}\,Z\,M\,P\,\text{coſ.}\,Z\,M\,P.$$

Porro exiſtimat Celeb. Vir eſſe $\frac{\mu\,m}{m\,\nu} = \pi\,\text{coſ.}\,Z\,M$, contendit enim $\mu\,m$ aequari variationi parallaxeos in altitudinem, quod etiamſi falſum eſt, haud forſan inutile erit perſpexiſſe, quomodo quis in huiusmodi paralogismum incidere queat. Deſcriptis igitur Polo P et interuallo P L arcu circuli minoris $L\,l$, nec non Polo Z et interuallo Z L, arcu $L\,\lambda$, et ductis arcubus P L, P M, liquet eſſe differentiale parallaxeos

$= d.\,Z\,M - d.\,Z\,L = \mu\,\nu - l\,\lambda$, at ob $L\,M = \pi\,\text{ſin.}\,Z\,M$ proxime, fiet

$d.\,L\,M = \mu\,\nu.\,\pi\,\text{coſ.}\,Z\,M$, hinc $\mu\,\nu.\,\pi\,\text{coſ.}\,Z\,M = \mu\,\nu - l\,\lambda$,

quod ſi nunc quis ſibi perſuadeat eſſe $l\,\lambda = m\,\nu$, inde quoque concludet fore

$$\mu\,\nu - l\,\lambda = \mu\,m = \mu\,\nu.\,\pi\,\text{coſ.}\,Z\,M,$$

hincque angulum

$$\mu\,M\,m = \tfrac{m\,\mu}{\mu\,\nu}\,\text{ſin.}\,Z\,M\,P\,\text{coſ.}\,Z\,M\,P = \pi\,\text{coſ.}\,Z\,M\,\text{ſin.}\,Z\,M\,P.\text{coſ.}\,Z\,M\,P.$$

Praeci-

Praecipuum igitur vitium huius demonſtrationis in eo latet, quod ſuppoſitum fuerit $\mu\, m$ aequalem eſſe variationi parallaxeos altitudinis, quod nequaquam verum eſſe poteſt niſi ſtatuatur $l\lambda = m\nu$, qui tamen arcus haud parum inter ſe differunt, eſt enim

$$l\lambda : m\nu :: \text{cot. } ZPM : \text{cot. } ZPL,$$

quod hunc in modum demonſtratur: ob

$$\text{coſ. } ZL = \text{coſ. } ZP . \text{coſ. } PL + \text{ſin. } ZP . \text{ſin. } PL . \text{coſ. } ZPL$$

fiet

$$l\lambda \,\text{ſin. } ZL = d.\, ZPL . \text{ſin. } PZ . \text{ſin. } PL . \text{ſin. } ZPL,$$

ideoque

$$l\lambda = d.\, ZPL . \text{ſin. } PL . \text{ſin. } PLZ,$$

ſimili vero modo ſi habeatur arcus PM pro inuariabili fiet

$$m\nu = d.\, ZPM . \text{ſin. } PM . \text{ſin. } PMZ, \text{ hincque } \frac{l\lambda}{m\nu} = \frac{d.\, ZPL}{d.\, ZPM},$$

at per formulam noſtram (III.) §. 5. conſtat eſſe

$$\text{ſin. } ZPL = \delta \text{ ſin. } ZPM,$$

vbi δ quantitatem prorſus inuariabilem deſignabit, modo PM fuerit conſtans, hinc itaque deducetur

$$d.\, ZPL . \text{cot. } ZPL = d.\, ZPM . \text{cot. } ZPM,$$

ex quo fiet

$$\frac{l\lambda}{m\nu} = \text{cot. } ZPM . \text{Tang. } ZPL.$$

Praeterea nec id omnino cum veritate conciliari poteſt, quod ſupponatur in demonſtratione Celeb. *de la Lande*

$$Mm : \mu m :: \text{coſ. } ZMP : \mu Mm,$$

 nam

nam exactius habetur

$$\mu M m : \mu m :: \text{cof. } Z M P : M \mu.$$

17. Nunc vero videamus quomodo ratiociniis rite subductis, ad formulam nostram supra commemoratam pertingere liceat. Ob

$$d.\, L M = \mu \nu - l \lambda, \text{ tumque fin. } L M = \varepsilon \text{ fin. } \pi \text{ fin. } Z M$$

fiet $d.\, L\, M. \text{cot. } L\, M = d.\, Z\, M. \text{cot. } Z\, M$, vnde

$$\mu \nu - l \lambda = \mu \nu \text{ cot. } Z M \text{ Tang. } L M \text{ nec non}$$

$$l \lambda = \mu \nu \frac{\text{fin. } Z L}{\text{fin. } Z M \text{ cof. } L M}. \text{ Porro fiet}$$

$$\text{Tang. } \mu M \nu = \frac{\mu \nu}{M \nu} = \frac{\mu \nu}{l \lambda} \cdot \frac{l \lambda}{L \lambda} \cdot \frac{L \lambda}{M \nu} = \frac{\text{fin. } Z M \text{ cof. } L M. \text{Tang. } Z L P \text{ fin. } Z L}{\text{fin. } Z L \text{ fin. } Z M}$$

$$= \text{Tang. } Z L P. \text{ cof. } L M, \text{ hincque deducitur}$$

$$\text{Tang. } \mu M m = \text{Tang.} (\mu M \nu - m M \nu) = \text{Tang.} (\mu M \nu - Z M P)$$

$$= \frac{\text{Tang. } Z L P \text{ cof. } L M - \text{Tang. } Z M P}{1 + \text{Tang. } Z L P \text{ Tang. } Z M P \text{ cof. } L M} = \frac{\text{fin. } Z M P. \text{cof. } P L M + \text{fin. } P L M. \text{cof. } Z M P. \text{cof. } L M}{\text{fin. } Z M P. \text{fin. } P L M. \text{cof. } L M - \text{cof. } Z M P. \text{cof. } P L M}$$

cuius expressionis denominator $= \text{cof. } L P M$, numerator vero

$$= \text{cot. } P M. \text{ fin. } L M. \text{ fin. } P L M = \text{fin. } L P M. \text{ cof. } P M,$$

ideoque consequimur vt antea

$$\text{Tang. } \mu M m = \text{Tang. } \psi = \text{Tang. } L P M. \text{ cof. } P M.$$

18. Vt constet quantum formula a Celeb. *de la Lande* allata, a veritate aberrare possit, adhibeamus exemplum ab ipso ad illustrationem suae formulae adductum, quo statuebatur parallaxis Lunae $54'. 2''$, eius distantia a meridiano seu angulus horarius $= 75^\circ$, et declinatio borealis $= 5^\circ. 36'$. Calculo igitur facto pro Parisiis inueni Parallaxin ascensionis rectae pro Luna $34'. 37''$ et parallaxin declinationis

nationis 39'. 45'', seu declinationem Lunae apparentem 4°. 56'. 15'', vnde obtinetur angulus $\psi = 2'. 59''$, quem Celeb *de la Lande* per suam formulam inuenerat 6'. 28'' adeoque plus quam duplo maiorem vera, nisi si forsan in ipsum calculum Celeb. Viri aliquis irrepserit error. Hinc vero facile quoque intelligitur Tabellam a Celeb. hoc Astronomo allatam pro valoribus anguli ψ nequaquam consistere posse, dum pro distantia Lunae a meridiano 90°, angulum ψ exhibeat euanescentem, quum tamen certum sit, eius valorem hoc casu ad maximum proxime accedere.

19. Examinemus nunc quoque quaenam diversitas oriatur inter parallelum Lunae verum et apparentem propter variabilitatem in declinatione Lunae. Et quidem si supponamus Lunam parallaxi omnino non adfici, facillimum erit angulum quem parallelus verus cum apparente constituit assignare, nam si ratio inter variationem horariam Lunae in declinationem et angulum horarium Lunae exprimatur littera δ, ita vt sit $\frac{d\,a}{d\,A} = \delta$, fiet hic angulus $= \frac{d\,a}{d\,A\,\textit{sin.}\,a} = \frac{\delta}{\textit{sin.}\,a}$. Si igitur supponere velimus esse quoque $\frac{d\,a'}{d\,A'} = \delta$, fiet similiter $\frac{d\,a'}{d\,A'.\,\textit{sin.}\,a'} = \frac{\delta}{\textit{sin.}\,a'}$, at tamen rigorose non statui potest $d\,a' = d\,a$, neque $d\,A = d\,A'$, quam ob rem, haud abs re erit vt inquiramus in valorem anguli ψ, pro casu quo non solum angulus $Z\,P\,L = A$, sed etiam declinatio $= 90 - P\,L$ supponitur variabilis. Quia igitur habemus

ε fin. π fin. b. fin. $A' =$ fin. a. fin. $(A' - A)$ erit

$$L. \text{fin.}\, A' + L.\, \varepsilon\, \text{fin.}\, \pi\, \text{fin.}\, b = L\, \text{fin.}\, a + L.\, \text{fin.}\, (A' - A),$$

hincque differentiando

$$d A'.\, \text{cot.}\, A' = d a\, \text{cot.}\, a + (d A' - d A)\, \text{cot.}\, (A' - A),$$

vnde pofito $d a = \delta.\, d A$ confequitur fore

$$\frac{d A}{d A'} = \frac{\text{fin.}\, A}{\text{fin.}\, A' (\text{cof.}\, (A' - A) - \delta\, \text{cot.}\, a\, \text{fin.}\, (A' - A))}.$$

Tum autem quum fit

$$\text{cot.}\, a' = \text{fin.}\, (A' - A) \frac{(\text{cof.}\, a - \varepsilon\, \text{fin.}\, \pi\, \text{cof.}\, b)}{\varepsilon\, \text{fin.}\, \pi\, \text{fin.}\, b.\, \text{fin.}\, A},$$ fiet

$$L \text{cot}\, a' = L\, \text{fin.}\, (A' - A) - L\, \text{fin.}\, A + L (\text{cof.}\, a - \varepsilon\, \text{fin.}\, \pi\, \text{cof.}\, b) - L\, \varepsilon\, \text{fin.}\, \pi\, \text{fin.}\, b$$

et fumtis differentialibus

$$-\frac{d a'}{\text{fin.}\, a'\, \text{cof.}\, a'} = (d A' - d A)\, \text{cot.}\, (A' - A) - d A.\, \text{cot.}\, A - \frac{d a\, \text{fin.}\, a}{\text{cof.}\, a - \varepsilon\, \text{fin.}\, \pi\, \text{cof.}\, b}$$

ex quo colligitur

$$-\frac{d a'}{d A'\, \text{fin.}\, a'} = \text{cof.}\, a' \left(\text{cot.}\, (A' - A) - \frac{d A}{d A'} \left(\frac{\text{fin.}\, A'}{\text{fin.}\, A.\, \text{fin.}\, (A' - A)} + \frac{\delta\, \text{fin.}\, a}{\text{cof.}\, a - \varepsilon\, \text{fin.}\, \pi\, \text{cof.}\, b}\right)\right)$$

$$= \text{cof}\, a' \left(\text{cot.}\, (A' - A) - \frac{d A}{d A'} \left(\frac{\text{fin.}\, A'}{\text{fin.}\, A.\, \text{fin.}\, (A' - A)} + \frac{\delta\, \text{fin.}\, A'.\, \text{Tang.}\, a'}{\text{fin.}\, A}\right)\right).$$

Subftituto igitur pro $\frac{d A}{d A'}$ valore ipfius, prodibit

$$-\frac{d a'}{d A'\, \text{fin.}\, a'} = \text{cof.}\, a' \left(\text{cot.}\, (A' - A) - \frac{1 + \delta\, \text{Tang.}\, a'\, \text{fin.}\, (A' - A)}{\text{fin.}\, (A' - A) (\text{cof.}\, (A' - A) - \delta\, \text{cot.}\, a\, \text{fin.}\, (A' - A))}\right)$$

quae ad hanc concinniorem reducitur formam

$$\frac{d a'}{d A'\, \text{fin.}\, a'} = \text{cof.}\, a' \left(\frac{\text{fin.}\, (A' - A) + \delta\, (\text{cot.}\, a\, \text{cof.}\, (A' - A) + \text{Tang.}\, a')}{\text{cof.}\, (A' - A) - \delta\, \text{cot.}\, a\, \text{fin.}\, (A' - A)}\right)$$

vbi quidem fponte liquet pofito $\delta = 0$, fore

$$\frac{d a'}{d A'\, \text{fin.}\, a'} = \text{Tang.}\, (A' - A)\, \text{cof.}\, a'.$$

Si

Si vero ab angulo ψ supra inuento, eam subtrahamus partem quae a variabilitate parallaxeos resultat, inuenietur pars ex variabilitate declinationis oriunda, pro cuius tangente omnino sine sensibili errore adhiberi poterit $\frac{\delta}{sin.\, a'}$, saltem pro vsu Astronomico hic valor satis exactus haberi debet.

20. Denique si ratio habenda sit mutationis quam refractio astri subit, ob quam parallelus eius apparens a vero aliquantum differre potest; angulum quem parallelus apparens cum vero constituit, sequentem in modum definire licebit. Ante omnia vero monendum est, nos heic per parallelum astri verum, non eum intelligere, quem describeret si nulla plane adficeretur refractione, sed istum, quem descripturum esset ab aliquo puncto, si effectus refractionis esset constans; praeterea vero iam mentem omnino abstrahimus a mutationibus ex Parallaxi et declinatione oriundis, ita vt supponamus astrum nullam plane agnoscere Parallaxin et eandem constanter retinere declinationem. His suppositis designet P Z meridianum alicuius loci, Z M L, Z m λ circulos verticales sibi proximos, in quibus L, l exhibent loca quaecunque astri vera et M, m adparentia ob effectum scilicet refractionis, tum autem polo Z interuallis Z M, Z L describantur arcus circulorum minorum M n, L λ, sumatur $n\,\mu = l\,\lambda$ et ducantur arcus circulorum maximorum m M, μ M, l L, nec non P M, P L; quo facto omnino liquet angulum paralleli veri, cum apparente eum esse, quem arcus μ M cum m M constituit, si nimirum refractio T. XXIV. Fig. 9.

ctio fuisset constans, locus astri in verticali $Z m \lambda$ fuisset μ, quum iam ob mutatam refractionem astrum reperiatur in m.

21. Ob cos. $ZL =$ cos. ZP cos. $PL +$ sin. ZP. sin. PL. cos. ZPL, fiet retentis denominationibus antea adhibitis

$$l\lambda \text{ sin. } c = d\text{A. sin. } b \text{ sin. } a \text{ sin. A} \quad \text{hincque}$$

$$l\lambda = d\text{A. sin. } a. \text{ sin. C.} \quad \text{Porro fiet}$$

$$\text{ang. L Z} \lambda = d\text{A.} \frac{\text{sin. } a \text{ cos. C}}{\text{sin. } c},$$

ita vt sit

$$\text{L}\lambda = \text{ang. L Z}\lambda.\text{sin.}c = d\text{A.sin.}a.\text{cos.C et } \frac{l\lambda}{\text{L}\lambda} = \text{Tang.C},$$

hinc vero obtinetur

$$\frac{\mu n}{\text{M} n} = \frac{\mu n}{\text{L}\lambda} \cdot \frac{\text{L}\lambda}{\text{M} n} = \frac{l\lambda}{\text{L}\lambda} \cdot \frac{\text{L}\lambda}{\text{M} n} \text{ ob } \mu n = l\lambda,$$

ideoque fiet

$$\frac{\mu n}{\text{M} n} = \text{Tang. } \mu \text{M} n = \frac{\text{Tang. C. sin. } c}{\text{sin. } c'}, \text{ est enim } \frac{\text{L}\lambda}{\text{M} n} = \frac{\text{sin. ZL}}{\text{sin. ZM}}.$$

At vero si variabilitas refractionis $= \mu m$ exprimatur per dr, fiet

$$mn = \mu n - \mu m = l\lambda - \mu m = d\text{A sin. } a \text{ sin. C} - dr,$$

hincque

$$\frac{mn}{\text{M} n} = \text{Tang. } m \text{M} n = \frac{(d\text{A sin. } a \text{ sin. C} - dr)\text{ sin. } c}{d\text{A. sin. } a \text{ cos. C. sin. } c'}$$

ex quo prodit

$$\text{cot. } \mu \text{M} m = \text{cot. } (\mu \text{M} n - m \text{M} n) =$$

$$\frac{d\text{A}}{dr} \frac{\text{sin. } a \text{ sin. } c' \text{ cos. C}}{\text{sin. } c} \left(1 + \frac{\text{Tang. C}^2 \text{ sin. } c^2}{\text{sin. } c'^2}\right) - \frac{\text{sin. } c. \text{ Tang. C}}{\text{sin. } c'} =$$

$$\frac{d\text{A}}{dr} \frac{\text{sin. } a. \text{ cos. C}}{\text{sin. } c. \text{ sin. } c'} (\text{sin. } c'^2 + \text{Tang. C}^2 \text{ sin. } c^2) - \frac{\text{sin. } c. \text{Tang. C}}{\text{sin. } c'}.$$

Quod

Quod si in hac aequatione loco sin. c' substituatur sin. $c - r$ cos. c, designante r refractionem, ita vt sit

$$\text{sin.}\, c'^2 = \text{sin.}\, c^2 - 2\, r\, \text{sin.}\, c\, \text{cos.}\, c \text{ proxime, fiet}$$

$$\text{cot.}\, \mu\, M m = \frac{d\, A}{d\, r} \left(\frac{\text{sin.}\, a\, \text{sin.}\, c}{\text{sin.}\, c'\, \text{cos.}\, C} - 2\, r \frac{\text{sin.}\, a\, \text{cos.}\, C.\, \text{cos.}\, c}{\text{sin.}\, c'} \right) - \frac{\text{sin.}\, c\, \text{Tang.}\, C}{\text{sin.}\, c'}$$

et si in denominatoribus loco sin. c' substituatur sin. c $- r$ cos. c, vel si expressio multiplicetur per $\frac{1 + r\, \text{cot.}\, c}{\text{sin.}\, c}$, negligendo altiores potestates ipsius r consequemur:

$$\text{cot.}\, \mu\, M m = \frac{d\, A}{d\, r} \left(\frac{\text{sin.}\, a}{\text{cos.}\, C} + r \frac{\text{sin.}\, a\, \text{cot.}\, c}{\text{cos.}\, C} - 2 r\, \text{sin.}\, a\, \text{cot.}\, c\, \text{cos.}\, C \right)$$
$$- \text{Tang.}\, C\, (1 + r\, \text{cot.}\, c)$$
$$= \frac{d\, A}{d\, r} \left(\frac{\text{sin.}\, a}{\text{cos.}\, C} - r \frac{\text{sin.}\, a\, \text{cot.}\, c\, \text{cos.}\, 2\, C}{\text{cos.}\, C} \right) - \text{Tang.}\, C\, (1 + r\, \text{cot.}\, c),$$

quae expressio sine dubio proxime ad veritatem accedit. Interim tamen si in hac formula quoque terminum per r affectum negligere vellemus, prodiret

$$\text{Tang.}\, \mu\, M m = \frac{d\, r\, \text{cos.}\, C}{d\, A\, \text{sin.}\, a - d\, r\, \text{sin.}\, C}.$$

Ex his autem formulis intelligitur, eam quam pro hoc instituto proposuit Celeb. *de la Lande* in sua Astronomia §. 2547. nequaquam cum veritate consistere posse.

22. Pro computo formularum modo allatarum sufficit quidem, si ratio ipsius $d\, r$ ad $d\, A$ ex Tabulis refractionum assignari queat, quaerendo enim rationem ipsius $d\, c$ ad $d\, A$, Tabulae hae exhibebunt rationem ipsius $d\, r$ ad $d\, c$, vti notum est; interim tamen pro inuenienda ratione $d\, r : d\, A$ in vsum vocari poterit hypothesis a *Bradlejo* adoptata, qua sup-

 poni-

ponitur $r = \mu$ Tang. $(c - \beta r)$, deſignantibus μ, β numeros conſtantes et c diſtantiam veram aſtri a Zenith. Quia autem arcus r eſt valde paruus etiam ſtatuere licebit Tang. $r = \nu$ Tang. $(c - \beta r)$, hinc vero colligitur ſumtis differentialibus

$$\frac{d r}{\text{ſin.}^2 r} = \frac{d c - \beta d r}{\text{ſin.}^2 (c - \beta r)}, \text{ vnde confit}$$

$$\frac{\text{ſin.}^2 (c - \beta r) + \beta\, \text{ſin.}^2 r}{\text{ſin.}^2 r\, \text{ſin.}^2 (c - \beta r)} d r = d c, \text{ eſt vero}$$

$$d c = d\, \text{A. ſin. } a \text{ ſin. C ex quo fiet}$$

$$\frac{d A}{d r} = \frac{\text{ſin.}^2 (c - \beta r) + \beta\, \text{ſin.}^2 r}{\text{ſin. } a.\text{ſin. C. ſin.}^2 r\, \text{ſin.}^2 (c - \beta r)}$$

qui valor iam in formulis pro cot μ M m exhibitis ſubſtitui poteſt. Interim quum ſic in formulas valde intricatas incideremus praeſtabit omnino pro vſu Aſtronomico, rationem ipſius $d r$ ad d A immediate ex Tabulis eruere.

23. Cognito angulo ψ quem parallelus aſtri verus, cum adparente conſtituit, facillime aſſignari poteſt correctio, qua vera differentia aſcenſionum
T. XXIV. Fig. 10. rectarum pro aſtris, ex obſeruata deducitur. Sit enim P M circulus horarius verus, tempore quo praecedens aſtrum obſeruatum fuit in filo horario tangente circulum maximum M Q S, qui cum P L M facit angulum $= \psi$, ponamus vero aſtrum ſequens tranſire hoc filum in Q et polo P interuallo P Q deſcribatur arcus Q R, erit igitur $\frac{R Q}{\text{ſin. } P Q}$ correctio differentiae aſcenſionum rectarum pro aſtris, atqui eſt R Q $=$ M Q ſin. ψ ex quo colligitur angulus R P Q $= \frac{M Q.\text{ſin. } \psi}{\text{ſin. } P Q}$. Hinc ſi differentia declinationum

tionum pro aſtris obſeruata, id eſt arcus M Q dicatur D et declinatio aſtri ſequentis $= \alpha$, fiet R P Q $= \frac{D. \text{ſin.} \psi}{\text{coſ.} \alpha}$, ex circumſtantiis autem facile colligitur vtrum haec correctio pro differentia aſcenſionum rectarum adfirmatiue an negatiue adhiberi debeat. At vero differentia declinationum vera habebitur $=$ R M $=$ Q M coſ. $\psi =$ D coſ. ψ, ideoque ob angulum ψ ſemper quam minimum, differentia declinationum vera ab obſeruata vix ſenſibiliter diſcrepabit.

NONNVLLA LOCA LVNAE
EX OBSERVATIONIBVS CIRCA OCCVLTATIONES FIXARVM A LVNA, ANNO 1774. PETROPOLI ET ALIBI INSTITVTIS, DETERMINATA.

Auctore

AND. IOH. LEXELL.

Quum coniunctionem Lunae cum ſtellis fixis, quae Hyades appellantur, anno 1774. heic Petropoli et alibi, ſaepius accurate obſeruare licuerit; operae pretium duxi, harum obſeruationum calculum inſtituere, vt inde vera momenta coniunctionum Lunae cum fixis occultatis eruerem, ſicque loca Lunae quantum fieri poteſt, exacte determinarem. Dum igitur concluſiones ex his calculis deductas heic expoſiturus ſum, primum breuem expoſitionem ipſarum obſeruationum praemittam, vbi quidem pro Petropoli omnes obſeruationes circa occultationes fixarum hoc anno a me factas recenſebo, licet nonnullae earum computo ſubiectae non fuerint, quem tamen laborem ſuſcipere non detractabo, dum his obſeruationibus correſpondentes alibi factae mihi innotuerint.

Obſerua-

Obſeruationes circa occultationes fixarum a Luna, Anno 1774. Petropoli factae.

St. Nou.	Temp. ver. obſ.
Die 22. Ian. Immerſio α Tauri circa partem Lunae obſcuram. - -	$7^h.\ 2'.\ 52''$
Obſeruatio haec videtur certiſſima. Stella interuallo circiter $5''$ limbo Lunae adhaerere viſa eſt.	
Emerſio eiusdem Stellae ad limbum Lunae lucidum. - - -	8. 20. 44
Haec quoque obſeruatio mihi ſatis certa videbatur, ſaltem plusquam trium ſecundorum errorem ipſi ineſſe non ſuſpicor.	
Die 14. Apr. Immerſio Stellae α Tauri in regione Lunae obſcura. - -	8. 28. 34
Obſeruatio certiſſima, ſtella quinque ſecundis limbo Lunae adhaerebat.	
Emerſio ſtellae ad limbum Lunae lucidum. - - - - - -	9. 3. 20
Pro emerſione heic illud momentum exhibeo, quo ſtella primum mihi ſe conſpicienda praebuit, licet limbo Lunae adhuc erat coniuncta, a quo momento ad plenam emerſionem, tria effluxere ſcrupula ſecunda.	
Die 15. Apr. Occultatio ſtellae *ni fallor* 115 Flamſtedii in Tauro ad limbum Lunae obſcurum. - - - -	9. 32. 0

St. Nou.	Temp. ver. obſ.
Ad ſemiſſem ſecundi certa. Stella circa immerſionem ſaltem 12 aut 15 ſcrupulis ſecundis limbo inhaeſit, et quaſi per ipſum limbum conſpiciebatur.	
Emerſio obſeruata eſt. - - -	$10^h. 25'. 3''$
Erat autem ſtella a limbo Lunae iam aliquantum remota, ita vt veram emerſionem ſemiminuto primo citius contigiſſe ſuſpicer.	
Die 16. Apr. Occultatio ſtellae 7 magnitudinis in ♊ a Luna.	
Immerſio ſtellae contigit. - -	10. 21. 33
Stella antequam penitus diſpareret, in ipſum limbum quaſi intrare, et quaſi per ipſum limbum perlucere videbatur. A momento quo limbo Lunae iungebatur ad totalem immerſionem ſemiminutum primum fere effluxit.	
Circa emerſionem ſtellam videre non potui, ante. - - - -	$10^h. 53'. 44''$
Tum autem ab ipſo limbo Lunae tantum diſtabat, vt veram emerſionem fere minuto primo ante contigiſſe aeſtimauerim.	
Maii d. 22. Stellam *m* Virginis in limbum Lunae obſcurum immergentem vidi. - - - - - -	13. 2. 20

St. Nou.	Temp. ver. obſ.
Emerſio contigit ad limbum lucidum, et Luna horizonti valde propinqua, ideoque ei non inuigilaui.	
Die 28. Aug. Stella 2 θ Tauri circa limbum Lunae lucidum immergebat.	$11^h. 48'. 45''\frac{1}{2}$
Licet haec immerſio ad limbum lucidum fieret, tamen valde certa mihi videtur, nec ad ſummum plusquam trium ſcrupulorum ſecundorum errorem illi ineſſe poſſe exiſtimo.	
Emerſio contigit ad limbum obſcurum. - - - - - - -	12. 32. 29.
Obſeruatio inſtantanea.	
Stella 1 θ Tauri a Luna non occultata fuit, minima tamen eius diſtantia a limbo Lunae vix minutum primum cum dimidio ſuperauit. Coelum circa hanc obſeruationem valde ſerenum et defaecatum erat.	
Die 24. Sept. Immerſionem ſtellae γ Tauri poſt limbum Lunae lucidum obſeruauit Cel. *Rumovski*. - - -	$16^h. 59'. 49''$
Eadem immerſio ex meo iudicio.	16. 59. 53.
Ex momento Penduli a me deſcripto, ſequitur quidem momentum verum obſeruationis $17^h. 0'. 53''$, verum tam ex obſeruatione Cel. *Rumovski*, quam calculo patet erro-	

St. Nou.

St. Nou.	Temp. ver. obſ.
re computatoris ſecundorum, momentum Penduli male fuiſſe aſſignatum. Differentias aſcenſionum rectarum inter limbum Lunae ſequentem et ſtellam multoties quidem obſeruaui, verum has obſeruationes heic adferre nihil attinet.	
Die 18. Nou. Immerſio ſtellae γ Tauri poſt limbum Lunae lucidum a Cl *Islenieff.* - - - - - -	$8^h. 8'. 33''$
a Celeb. *Rumovski.* - - - - -	8. 34
Eandem immerſionem ego fieri exiſtimaui. - - - - -	8. 37
Vndecim quidem ſcrupulis ſecundis tardius, aliquod indicium ſtellae videre exiſtimaui, verum illuſionem opticam fuiſſe perſuaſus ſum.	
Emerſionem ad limbum Lunae obſcurum vidit Cl. *Islenieff.* - -	9. 14. 5
Cel. *Rumovski.* - - - - -	14. 20

Quum emerſionis momentum a me obſeruatum, momento Cel. *Rumovski* adhuc poſterius ſit valde erroneum eſſe oportet. Durante hac obſeruatione frigus erat intenſiſſimum qua de cauſſa meae obſeruationes ob hebetudinem oculorum factae ſunt dubiae.

St. Nou.	Temp. ver. obſ.
Die 18. Nou. Immerſio α Tauri ad limbum Lunae lucidum. - - -	$17^h. 41'. 30''$
Haec obſeruatio aliquantum dubia, quia Luna nubibus per interualla tegebatur, nec tamen plus quam 10 ſcrupulorum ſecundorum errorem illi ineſſe poſſe exiſtimo.	
Circa emerſionem Luna nubibus obtegebatur, ſtellam igitur non vidi, niſi tempore.	$18^h. 28'. 22''$

quo a limbo Lunae aliquantum diſtabat, per calculum autem concludere potui, veram emerſionem fere vno minuto primo antea contingere debuiſſe.

His obſeruationibus nunc quoque ſubiungere placet illas, quae circa tranſitus Lunae per Hyades hoc anno alibi inſtitutae fuerunt et ab Auctoribus Celeberrimis benigne mecum communicatae ſunt.

St. Nou.	Temp. ver. obſ.
Die 22. Ian. Immerſio α Tauri Stockholmiae obſeruata fuit a Celeb. *Wargentin.* - - - - - -	$6^h. 0'. 26''\frac{1}{2}$
Emerſio eiusdem ſtellae. - -	7. 15. 51
Die 18. Febr. Immerſio γ Tauri Stockholmiae a Celeb. *Wargentin.* - -	6. 39. 51
Emerſio eiusdem ſtellae. - -	7. 19. 33
Die 14. Apr. Immerſio α Tauri Pariſiis a Celeb. *Meſſier.* - - - -	6. 26. 0
Emerſio. - - - - -	7. 35. 59

St. Nou.	Temp. ver. obſ.
Immerſio α Tauri item Pariſiis in Obſeruatorio Scholae Militaris a Cel. *Anthelmi.* - - - - -	$6^h. 25'. 54'',4$
Emerſio. - - - - - -	7. 35. 53
Immerſio eiusdem ſtellae Verſaliis a Cel. *Mechain.* - - - -	6. 25. 1
Emerſio - - - - - -	7. 35. $10\frac{1}{2}$
Immerſio α Tauri Geneuae a Cel. *Mallet.* - - - - - - -	6. 47. 56
Emerſio. - - - - - -	7. 56. $36\frac{1}{2}$
Immerſio eiusdem ſtellae Mediolani a Cel. *de la Grange.* - - -	7. 3. $6\frac{2}{3}$
Emerſio ibidem. - - - -	8. 10. $41\frac{2}{7}$
Die 24. Sept. Immerſio γ Tauri Pariſiis a Cel. *Meſſier.* - - - -	14. 22. $31\frac{1}{2}$
Emerſio. - - - - - - -	14. 43. $37\frac{1}{2}$
Nou. d. 18. Immerſio γ Tauri Pariſiis a Cel. *Meſſier.* - - - -	5. 55. 25
Emerſio ibidem, dubia ob Lunam nubibus tectam. - - - -	6. 52. $47\frac{1}{5}$
Immerſio 1 θ Hyadum ab eodem Cel. Aſtronomo. - - - - - -	11. 5. 28
Emerſio eiusdem ſtellae. - -	11. 20. $43\frac{1}{5}$
Immerſio α Tauri a Cel. *Meſſier* obſeruata. - - - - - -	15. 35. 11
Emerſionem obſeruare non licuit ob coelum nubibus tectum.	

Antequam ad concluſiones ex obſeruationibus nunc allatis deducendas progredior, haud praeter rem erit,

erit, vt Elementa tam pro locis ſtellarum, quam Lunae ob oculos ponam. Priora autem ex Catalogo ſtellarum fixarum Bradleyano, habita ratione praeceſſionis, aberrationis et nutationis, ſequentem in modum deduxi:

Loca Stellarum pro Anno 1774.

Die	Nom. Stellae	Aſcenſ. rect.	Declin. Bor.	Longit. Stellae	Latit. Auſtr.
22. Ian.	α Tauri	65°.44'.52'',3	16°. 2'. 8'',5	2ˢ.6°.38'. 7'',0	5°.28'.50'',1
14. Apr.	- - -	65. 44. 36, 2	16. 2. 6, 4	2. 6. 37. 51, 0	5. 28. 49, 2
18. Nou.	- - -	65. 45. 38, 4	16. 2. 18, 4	2. 6. 38. 52, 4	5. 28. 46, 9
24. Sept.	γ Tauri	61. 45. 3, 3	15. 3. 54, 9	2. 2. 39. 16, 8	5. 45. 15, 1
18. Nou.	- - -	61. 45. 20, 2	15. 3. 56, 7	2. 2. 39. 33, 3	5. 45. 16, 3
28. Aug.	2 θ Tauri	63. 57. 13, 9	15. 21. 5, 1	2. 4. 48. 29, 0	5. 51. 39, 7
18. Nou.	1 θ Tauri	63. 56. 17, 9	15. 26. 38, 2	2. 4. 48. 35, 3	5. 46. 2, 2

Elementa pro locis Lunae ex Tabulis Lunaribus Cel. Mayeri deducta.

Temp. med. Pariſ.		Aſcenſ. rect. ☉	Longit. ☽	Latit. ☽ Aus.
Ian. 22.	5ʰ. 32'	305°. 9'.50''	2ˢ.6°.27'.32'',2	4°.53'. 6'',7
	6. 32	305. 12. 28	2. 6. 57. 10, 1	4. 53. 53, 0
Febr. 18.	6	332. 18. 39	2. 2. 48. 2, 8	4. 56. 42, 0
	7 —	332. 21. 3	2. 3. 17. 45, 1	4. 57. 36, 5
Apr. 14.	6. 33	22. 59. 58	2. 7. 0. 50, 8	5. 1. 7, 0
	7. 33	23. 2. 16	2. 7. 30. 44, 2	1. 47, 7
Aug. 28.	10 —	157. 21. 24	2. 4. 20. 59, 1	5. 13. 15, 8
	11 —	157. 23. 40	2. 4. 51. 3, 2	5. 13. 39, 9
Sept. 24.	14 —	181. 51. 29	2. 2. 8. 37, 0	5. 9. 36, 2
	15 —	181. 53. 44	2. 2. 39. 9, 8	5. 10. 6, 0
Nou. 18.	6 —	234. 13. 11	2. 2. 6. 29, 5	4. 57. 33, 0
	7 —	234. 15. 48	2. 2. 37. 11, 6	4. 57. 53, 3
	11 —	234. 26. 13	2. 4. 39. 57, 7	4. 59. 1, 3
	12 —	234. 28. 49	2. 5. 10. 33, 9	4. 59. 15, 0
	15 —	234. 36. 38	2. 6. 42. 22, 3	4. 59. 45, 6
	16 —	234. 39. 15	2. 7. 12. 55, 9	4. 59. 54, 1

Temp. med. Paris.	Parall. ☽ aequat.	Diamet. ☽	mot. hor. in Longit.	mot. hor. in Latit.	aequat. tempor.
Ian. 22. 5^h. 32'	54'.14'',8	29'.33'',9	29'.38'',2	46'',0	+ 12'.15''
6. 32	- - - -	- - - -	- - - -	- -	+ 12. 16
Febr. 18 6 —	54. 23, 9	29. 38, 9	29. 41, 0	54, 3	+ 14. 17
7 —	- - - -	- - -	- - - -	- -	- - - -
Apr. 14. 6. 33	54'.22'',8	29. 38, 3	29'.53'',0	41, 0	+ 7
7 33	54. 21, 8	- - - -	- - - -	40, 0	+ 6
Aug. 28. 10 —	54. 45, 0	29. 50, 3	30. 5, 4	25, 0	+ 47
11 —	- - - -	- - - -	- - - -	- -	+ 46
Sept 24. 14 —	55. 5, 0	30. 1, 2	30. 31, 9	31. 0	— 8. 19
15 —	- - - -	- - - -	- - - -	- -	— 8. 20
Nou. 18. 6 —	54. 59, 1	29. 58, 0	30. 43, 0	21, 5	— 14. 24
7 —	- - - -	- - - -	- - - -	- -	— 14. 23
11 —	54. 54, 7	29. 55, 7	30. 37, 9	13, 6	— 14. 21½
12 —	- - - -	- - - -	- - - -	- -	— 14. 20½
15 —	54. 51, 4	29. 53, 7	30. 33, 9	8. 0	— 14. 19
16 —	- - - -	- - - -	- - - -	- -	— 14. 18

De occultatione α Tauri d. 22. Ianuarii.

Pro immerſionibus et emerſionibus huius ſtellae Stockholmiae et Petropoli obſeruatis calculus ſequentia praebuit elementa

	Paral. Longit.	Latit. appar.	Semidiam. ☽ appar.	Differ. appar. Long. Stellae et ☽
Pro Immerſione Stockholmiae	7'. 31'', 5	5° 32'.37'', 7	14'. 56'', 3	14'. 31'', 0
Emerſione ibidem - -	24, 2	5. 31. 17, 5	14. 57, 2	14. 49, 1
Immerſione Petropoli -	33, 8	5. 31. 13, 9	14 57, 0	14. 49, 5
Emerſione ibidem - -	8. 9, 3	5. 30. 29, 0	14. 57, 2	14 55, 9

Hinc ſequentes deducuntur expreſſiones pro tempore vero coniunctionis Lunae cum Palilicio:

Pro meridiano Stockholmienſi

ex immerſione: $6^h\ 45'.4'' + 2,10\,\delta - 0,53.y - 0,11\,\pi$

emerſione: $6.\ 45.\ 2 - 2,06\,\delta + 0,33.y + 0,20\,\pi$

Pro

Pro meridiano Petropolitano

ex immersione $7^h. 34'. 1'' + 2,06.\delta - 0,33.y - 0,20\pi$

emersione $7. 34. 0 - 2,04.\delta + 0,22.y - 0,15.\pi$

vbi δ significat correctionem semidiametri Lunae, y correctionem Latitudinis Lunae australis, et π correctionem Parallaxeos aequatoreae. Ex binis conclusionibus pro Stockholmia colligimus medium sumendo Tempus coniunctionis $6^h. 45'. 3'' - 0,10y$

subtrahendo autem vnam conclusionem ab altera, hanc obtinebimus aequationem:

$$2'' + 4,16.\delta - 0,86.y - 0,31.\pi = 0.$$

Similiter pro Petropoli fiet medium sumendo tempus coniunctionis

$$7^h. 34'. 1'' - 0,06.y - 0,17.\pi$$

et subtrahendo posteriorem conclusionem a priori fiet

$$1 + 4,10.\delta - 0,55.y - 0,05.\pi = 0.$$

Ex his aequationibus inuentis vix quidquam de vero valore ipsius y statui potest, nisi valor reliquarum correctionum δ et π fuerit definitus. Interim quum ex occultatione α Tauri die 14. Aprilis probabiliter colligi posse videatur, esse $\delta = -3$, statuamus saltem pro praesenti obseruatione $\delta = -2$; de valore autem ipsius π quum nihil certi definire valeam statuam eum $= 0$, hinc prodibit ex aequatione Stockholmiensi $-86.y = 632$ ideoque $y = -7'', 3$, ex aequatione vero Petropolitana $-55.y = 720$ ideoque $y = -13'', 1$. Ponamus igitur esse $y = -9''$. Quo facto ex conclusionibus pro immersione deducetur differentia meridianorum inter Stockholmiam et Petropolin 48'. 55''; ex conclusionibus vero pro emersione colligetur 48'. 59'' et ex momentis mediis 48'. 58''. Hinc si Longitudo pro Stockholmia ponatur a Parisiis 1^h. 2'. 53'' prodirent sequentes valores pro Longitudine Petropolis 1^h. 51'. 48'', 1^h. 51'. 51'' et 1^h. 51'. 52''. Contra vero si Longitudo Petropolis statuatur 1^h. 51' 57'' fieret Longitudo Stockholmiae 1^h. 3'. 2', vel 1^h. 2'. 58'', vel 1^h. 2'. 59''. Licet ipsa momenta obseruationum saltem pro immersione exactissime videntur assignata, fieri tamen vtique potest, vt conclusiones de differentia meridianorum pro minus tutis sint habendae, ob nonnullam incertitudinem circa reductionem momentorum obseruatorum ad tempus verum. Saltem hoc de obseruationibus meis agnoscere debeo. Nam cum die 21. Ian. per altitudines Solis correspondentes verum momentum meridiei determinassem; decem effluxere dies, priusquam aliquam obseruationem pro determinando tempore vero instituere licuit, ex quo vtique fieri potest vt hoc interuallo decem dierum motus Penduli non praecise talis fuit, qualem ego supposui. His perpensis, retentis Longitudinibus pro Stockholmia et Petropoli, quae hucusque stabilitae fuerunt, fiet tempus coniunctionis verum pro Parisiis ex obseruatione Stockholmiensi 5^h. 42'. 11'' et ex obseruatione Petropolitana 5^h. 42'. 5'', sine sensibili igitur errore statui poterit 5^h. 42'. 9'' siue tempore medio 5^h. 54'. 24'', quo tempore erat Longitudo Lunae 2^s. 6°. 38'. 7'',0, cum ex Tab. Mayerianis

nis fit $2^s. 6^\circ. 38'. 36'', 0$, vnde correctio Tabularum quoad Longitudinem $-29''$. Latitudinis correctionem inuenimus $-9''$, vbi quidem praecise definiri non poteſt vtrum haec correctio vnice Latitudini Lunae ſit tribuenda, nam fieri vtique poſſet, vt Latitudo ipſius α Tauri haud prorſus exacte ſit determinata.

De occultatione γ Tauri d. 18. Febr.

Pro immerſione huius ſtellae Stockholmiae obſeruata, habetur Parall. Longitud. $12'. 17'', 3$; Latit. Lunae apparens $5^\circ. 32'. 33'', 9$, Semidiam. Lunae apparens $14'. 59'', 6$ et differentia apparens in Longit. ſtellae et Lunae $7'. 55'', 9$. Similiter pro emerſione inuenitur: Parall. Longit. $16'. 45'', 4$, Latit. ☽ apparens $5^\circ. 32'. 37'', 9$; Semidiameter ☽ apparens $14'\ 59'', 3$ et differentia apparens inter Longitudines ſtellae et Lunae $8'. 1'', 8$. Hinc autem colliguntur pro tempore coniunctionis ſequentes expreſſiones ad meridianum Stockholmienſem

ex immerſione $6^h. 31'. 3'' + 3,90\delta + 3,33.y + 1,74.\pi$

emerſione $6. 29. 27 - 3,83\delta - 3,25.y - 2,74.\pi$

hinc medium $6. 30. 15 + 0,03\delta + 0,04.y - 0.50.\pi$.

Deinde ſubtrahendo poſteriorem concluſionem a priori fit:

$$96 + 7,73\,\delta + 6,58.y + 4,48.\,\pi = 0,$$

vbi ſi ponatur $\pi = 0$ et $\delta = -2$, fit $658.y = -8050$ ideoque $y = -12'', 2$, qui valor non multum a vero recedere poteſt, niſi ſi forſan ipſam π correctionem

nem admittat ſenſibilem. Fx tempore coniunctionis Stockholmienſi $6^h. 30'. 15''$ elicitur tempus coniunctionis verum ad meridianum Pariſinum $5^h. 27'. 22''$ et medium $5^h. 41'. 39''$ exiſtente Longitudine Lunae $2^s. 2^\circ. 38'. 40'',4$ quae ex Tabulis *Mayeri* habetur $2^s. 2^\circ. 38'. 58'',1$, vnde fit correctio Tabulorum *Mayeri* $= - 18''$. De correctione Latitudinis idem monitum valet ac pro priori obſeruatione.

De occultatione α Tauri d. 14. Aprilis.

Pro obſeruationibus huius occultationis per calculum ſequentia elicuimus elementa

	Paral. Longit ☽	Latitud. ☽ apparens	Semidiam. ☽ apparens	Differ. Longit. appar.
Pro immerſione Pariſiis	34'. 17'',0	5°. 29'. 2'',9	14'. 57'',4	15'. 1'',4
emerſione ibidem	39. 27, 7	5. 31. 42, 6	14. 55, 0	14. 42, 1
Pro immerſione Verſalii	34. 12, 1	5. 28. 59, 3	14. 57, 4	15. 1, 5
emerſione - - -	39. 26, 5	5. 31. 38, 9	14. 55, 0	14. 42, 0
Pro immerſione Mediolani	39. 10, 6	5. 27. 18, 0	14. 56, 2	14. 55, 6
emerſione ibidem	42. 59, 2	5. 30. 26, 2	14. 53, 7	14. 52, 6
Pro immerſione Geneuae	37. 32, 1	5. 27. 27, 4	14. 56, 8	14. 57, 2
emerſione ibidem	41. 59, 9	5. 30. 27, 1	14. 54, 2	14. 52, 9
Pro immerſione Petropoli	34. 17, 2	5. 40. 21, 6	14. 53, 2	9. 26, 9
emerſione ibidem	34. 28, 8	5. 41. 52, 8	14. 52, 2	7. 8, 7

Hinc pro tempore vero coniunctionis Lunae cum α Tauri, ſequentes deducuntur concluſiones.

Pro obſeruatorio Cel. *Meſſier*

ex immerſione $5^h. 47'. 20'' + 2,02\,\delta - 0,03.y - 1,30.\pi$

ex emerſione $5. 47. 13 - 2,05\,\delta + 0,39.y - 1,24.\pi$

medium $5. 47. 16 + 0,18.y - 1,27.\pi$

et

et ſubtrahendo poſteriorem concluſionem a priori, ſequens obtinetur aequatio

$$7 + 4{,}07.\delta - 0{,}42.y - 0{,}06.\pi = 0.$$

Pro Verſaliis

ex immerſione	$5^h.46'.29''$	$+2{,}02\delta - 0{,}03.y - 1{,}30.\pi$
ex emerſione	$5.\ 46.\ 27$	$-2{,}05\delta + 0.40.y - 1{,}24.\pi$
medium	$5.\ 46.\ 28$	$+0{,}18.y - 1{,}27.\pi$

et ſequens aequatio

$$2 + 4{,}07\delta - 0{,}43.y - 0{,}06.\pi = 0$$

Pro Mediolano

ex immerſione	$6^h.14'.25''$	$+2{,}03\delta + 0{,}21.y - 1{,}35.\pi$
emerſione	$6.\ 14.\ 31$	$-2{,}03\delta + 0{,}22.y - 1{,}47.\pi$
medium	$6.\ 14.\ 28$	$+0{,}22.y - 1{,}41.\pi$

aequatio autem prodit

$$-6 + 4{,}06\delta - 0{,}01.y + 0{,}12.\pi = 0$$

Pro Geneua

ex immerſione	$6.\ 2.\ 35$	$+2{,}03\delta + 0{,}19.y - 1{,}31.\pi$
emerſione	$6.\ 2.\ 24$	$-2{,}03\delta + 0{,}22.y - 1{,}44.\pi$
medium	$6.\ 2.\ 30$	$+0{,}20.y - 1{,}38.\pi$

aequatio hinc habetur iſta

$$11 + 4{,}06\delta - 0{,}03.y + 0{,}13.\pi = 0$$

Pro Petropoli

ex immerſione	$7.\ 38.\ 42$	$+3{,}19\delta - 2{,}47.y - 3{,}05.\pi$
emerſione	$7.\ 39.\ 45$	$-4{,}20\delta + 3{,}69.y + 1{,}45.\pi$
medium	$7.\ 39.\ 14$	$-0{,}50\delta + 0{,}61.y - 0{,}80.\pi$

et aequatio hinc colligitur

$$63 - 7{,}39\delta + 6{,}16.y + 4{,}50.\pi = 0.$$

Dum aequationes inuentae inter ſe comparantur facillimum eſt perſpicere, eas minime inter ſe con-

conſentire ; ſcilicet aequationem ex obſeruatione Verſalienſi deductam minime conſentientem reddi poſſe cum Pariſina, aequationem autem pro Mediolano inuentam adhuc magis diſcrepare a Geneuenſi. Sepoſitis igitur concluſionibus, quae ex obſeruationibus Mediolanenſibus et Verſalienſibus deductae ſunt, ex Pariſinis, Geneuenſibus et Petropolitanis ſequenti modo deducuntur valores correctionum δ et y, nam de π ex his obſeruationibus nihil definire licet. Ex aequatione pro Geneua ſepoſitis correctionibus y et π, quae vix quicquam in illa aequatione mutant, colligitur $406\,\delta = 1100$ ideoque $\delta = -2,7$, deinde ſi in aequatione pro Petropoli negligantur correctiones δ et π, fiet $y = -10''$, qui valor ſaltem proxime ad veritatem accedit, ſubſtituto igitur hoc valore in aequatione Pariſina et neglecta correctione π, prodit $407.\delta = 1120$ ideoque $\delta = -2'',8$ Hoc igitur valore in aequatione pro Petropoli ſubſtituto, colligitur neglecta correctione π; $616\,y = -83692$ vnde fit $y = -13'',5$. Sin autem iam hic valor in aequatione Pariſina adhibeatur fiet $\delta = -3''$, ſupponamus igitur eſſe $\delta = -3''$ fietque ex aequatione Petropolitana $616.y = -8517$, ſeu $y = -13'',8$. Si nunc hae correctiones in expreſſiones ſupra inuentas pro temporibus coniunctionum introducantur, illae in ſequentes numeris abſolutis expreſſas abibunt:

pro

pro obſeruatorio Cel. *Meſſier*		5^h.	$47'$.	$14''$
ex vtraque obſeruatione				
pro Verſaliis	ex immerſione	5.	46.	23
	ex emerſione	5.	46.	28
pro Mediolano	ex immerſione	6.	14.	16
	ex emerſione	6.	14.	34
pro Geneua	ex immerſione	6.	2.	26
	ex emerſione	6.	2.	27
pro Petropoli	ex immerſione	7.	39.	7
	ex emerſione	7.	39.	7.

Hinc pro differentiis meridianorum ſequentes prodeunt concluſiones: inter obſeruatorium Pariſiienſe et

Verſalios	0^h.	$0'$.	$49''$	vel	$44''$
Mediolan.	0.	27.	4	vel	$22''$
Geneuam	0.	15.	14	vel	15
obſ. Petropolit.	1.	51.	55.		

Similiter inter Petropolin et Geneuam habebitur differentia meridianorum 1^h. $36'$. $41''$, ideoque ſi ſtatuatur Longitudo Petropolis ab obſeruatorio Pariſino 1^h. $51'$. $57''$ fieret Longitudo Geneuae ab obſeruatorio Pariſino $15'$. $16''$ quae vix a ſupra inuentis discrepat. Si obſeruatio Petropolitana ſeponatur, ex reliquis inter ſe comparatis differentiae meridianorum ſatis accurate determinari poterunt etiamſi correctiones δ et y plane eſſent ignotae, ſic nullum eſt dubium, quin ex concluſionibus Pariſinis et Verſalienſibus colligantur differentiae meridianorum $51''$ et $46''$, inter obſeruatoria Cel. *Meſſier* et Cel. *de la Grange* habebitur ex immerſione $27'$. $5''$ et ex emerſione $27'. 18''$, neglecta plane correctione y. Patet igitur obſeruationes Verſaliis et Mediolani inſtitutas cum Pariſina et Geneuenſi non bene conciliari poſſe, quod autem praeſertim obſeruationem Mediolanenſem attinet, haud veriſimilitudine deſtitui videtur, quod momentum pro immerſione mihi communicatum viginti ſcrupulorum ſecundorum correctionem admittat, ita vt loco $7^h. 3'. 6''\frac{1}{2}$ legendum ſit $7^h. 3'. 26''\frac{1}{2}$, ſic enim fiet ex immerſione tempus coniunctionis $6^h. 14'. 36''$, cum ex emerſione erat $6^h. 14'. 34''$. Diſcrepantia inter obſeruationes Cel. *Meſſier* et *Mechain*, ſi alias Longitudo Verſalii in Ephemeridibus Aſtronomicis (Connoiſſance des temps) bene ſit determinata, ex aliquali incertitudine circa determinationem temporis veri, prouenire neceſſe eſt, nam de momento immerſionis in obſeruatione Cel. *Meſſier* dubium vix duo ſcrupula ſecunda excedere poteſt. Nec ad ſaluam reddendam obſeruationem D. *Mechain* multum valet, ſi dicatur Cel. *Meſſier* immerſionem ipſius Palilicii nonnullis ſecundis citius obſeruare debuiſſe, quam ex momento aſſignato ſequitur. De obſeruationibus in obſeruatorio Scholae Militaris inſtitutis tenendum eſt, quod hae obſeruationes bene conſentiant, cum illis quas Cel. *Meſſier* inſtituit, reſpectu temporis, quo Aldebaran a Luna fuit occultata, atqui ex momentis immerſionum et emerſionum inter ſe comparatis, non ſequitur differentia meridianorum niſi 6 ſcrupulorum ſecundorum, quae tamen eſſe deberet $9''$. Quicquid autem ſit inde pro determinanda vera Lon-

gitudine

gitudine Lunae nullus error ſenſibilis producetur, ſupponam igitur ceu ex obſeruatione Cel. *Meſſier* ſequitur, coniunctionem Lunae cum Palilicio contigiſſe Temp. vero obſeruatorii Pariſini $5^h. 47'. 12''$ ideoque Tempore medio $5^h. 47'. 19''$, quo tempore erat Longitudo Lunae $2^s. 6°. 37'. 51''$, ex Tabulis autem *Mayeri* habetur $2^s. 6°. 38'. 5'', 7$ vnde colligitur correctio harum Tabularum $- 15''$. Latitudinis autem correctionem ſupra inuenimus $- 13'', 8$, id eſt Latitudinem Lunae auſtralem hac quantitate eſſe minuendam, modo alias Latitudo Stellae exacte habeatur determinata. De differentia meridianorum inter obſeruatoria Petropolitanum et Pariſinum tenendum, quod etiamſi concluſio heic inuenta vnius vel alterius ſecundi correctionem admitteret, tamen hinc probabile reddi obſeruatorium Petropolitanum a Pariſino minus diſtare, quam $1^h. 52'$. Longitudo autem pro obſeruatorio Petropolitano heic inuenta $5''$ correctionem vix admittere poterit, niſi valor Parallaxeos aequatoreae heic adhibitus decem ſcrupulis ſecundis ſit augendus, quod minime veriſimile videtur.

De occultatione 2 ϑ *Tauri* d. 28. Auguſti.

Pro immerſione huius ſtellae Petropoli ex calculo deduxi Parallaxin Longit. $19'. 9'', 7$, Latit ☽ apparentem $6°. 2'. 45'', 7$; ſemidiametrum ☽ apparentem $14'. 58'', 5$ et differentiam appar. Longit. Stellae et Lunae $10'. 6'', 5$. Pro emerſione vero colligitur Parall. Longit. $18'. 59'', 1$; Latit. ☽ appar. $6^s. 1'. 35'',5$; femidiamet. ☽ apparens $14'. 59'',8$ et differentia Longit. apparens $11'. 18'',0$. Hinc vero habentur fequentes expreffiones pro tempore coniunctionis Petropolitano

ex immerfione	$12^h. 47'. 8''$	$+2,98.\delta-2,20\,y-1,29\,\pi$
ex emerfione	$12. 47. 48$	$-2,67.\delta+1,77.y+2,24.\pi$
medium	$12. 47. 28$	$+0,15.\delta-0,21.y+0,47.\pi$

et fubtrahendo priorem conclufionem a pofteriori fequens elicitur aequatio

$$40 - 5,65.\delta + 3,97.y + 3,53.\pi = 0.$$

In hac aequatione fi ponatur $\pi = 0$; $\delta = -2$, fiet $397.y = -5130$ ideoque $y = -12'',9$, tum vero fiet tempus coniunctionis pro Petropoli $12^h. 47'. 30''$, hinc tempus verum coniunctionis pro obferuatorio Parifino $10^h. 55'. 33''$ et medium $10^h. 56'. 19''$ quo tempore effe debuit Longitudo Lunae $2^s. 4^\circ. 48'. 29'',0$, at ex Tabulis Cel. *Mayeri* eft $2^s. 4^\circ. 49'. 12'',4$ effet igitur correctio Tabularum *Mayeri* $-43''$ modo de Longitudine ftellae omnimoda adeffet certitudo, quod quidem vix fupponere licet, nam pro hac ftella numeri Bradleyani circa afcenfionem rectam, ab illis quos affignauit Cel. *la Caille* fere integro minuto primo difcrepant. Tutiffimum igitur erit correctionem Longitudinis Lunae pro hac obferuatione ftatuere tantum $-20''$, potiori errore in Longitudinem ftellae deriuato.

De

De occultatione γ *Tauri* d. 24. Sept.

Pro obſeruationibus huius occultationis calculus ſequentia praebuit elementa

	Paral. Longit.	Latit. ☽ appar.	Semidiam. ☽ appar.	Differ. Longit. appar.
Pro immerſione Pariſiis	8′. 35″, 7	5°. 43′. 7″, 2	15′. 12″, 0	15′. 7″, 6
Pro emerſione ibidem	3. 6, 5	5. 40. 36, 6	15. 12, 8	14. 33, 6
Pro immerſione Petropoli	14. 40, 8	5. 46. 50, 5	15. 10, 7	15. 10, [illegible]

Hinc emergent expreſſiones pro tempore coniunctionis

Pariſiis ex immerſione $15^h. 9'. 9'' + 2{,}00.\delta + 0{,}28.y + 0{,}47.\pi$

emerſione $15. 8. 54 - 2{,}07.\delta - 0{,}64.y - 0{,}46.\pi$

medium $15. 9. 1 \quad - 0{,}18.y$

ſubtrahendo prodit aequatio $15 + 4{,}07.\delta + 0{,}92.y + 0{,}93.\pi$

Petropoli ex immerſione $17^h. 0'. 51'' + 1{,}99.\delta - 0{,}21.y - 0{,}66.\pi$.

Si ſtatuatur $\pi = 0$ et $\delta = -2$, fiet ex aequatione pro Pariſiis $92y = -686$ hincque $y = -7''{,}4$, quae tamen determinatio pro omnimode exacta haberi nequit ob exiguum coefficientem ipſius y; interim tamen non multum a vero nos aberraturos confido, ſi ſtatuamus $y = -10$, tum autem ex concluſionibus pro immerſione habebitur differentia meridianorum inter obſeruatorium Cel. *Meſſier* et Petropolitanum $1^h. 51'. 42'' - 0{,}49.y - 1{,}13.\pi = 1^h. 51'. 47''$, ideoque differentia meridianor. inter obſeruatoria Pariſinum et Petropolitanum $1^h. 51'. 49''$, quae tamen nimis parua videtur. Pro Petropoli momentum a me obſeruatum adhibui, quodſi autem momentum Cel. *Rumovski* in vſum vocetur, Longitudo obſeruatorii Petropolitani adhuc quatuor ſecundis minor euaderet. Quicquid ſit, hinc ſaltem confirmatur Longitudinem

tudinem obſeruatorii Petropolitani aliquanto minorem eſſe quam $1^h. 52'$. Tempus coniunctionis verum pro Pariſiis fiet $15^h. 9'. 1''$, medium $15^h. 0'. 41''$, exiſtente Longitudine Lunae $2^s. 2^\circ. 39'. 16'', 8$ quae ex Tabulis Cel. *Mayeri* habetur $2^s. 2^\circ. 39'. 30'', 6$; ita vt hinc eliciatur correctio Tabularum pro Longitudine $-14''$, Latitudinis correctione ſuppoſita $-10''$.

De occultationibus γ, $1\,\theta$ *et* α *Tauri* die 18. Nou.

Pro obſeruationibus harum occultationum ſequentes inuenti ſunt valores

	Paral. Longit. ☽	Latit. ☽ appar.	Semidiam. ☽ appar.	Differ. Longit. apparens
Pro ſtella γ Immerſio Pariſiis	$27'. 29'', 1$	$5^\circ. 44'. 37'', 7$	$15'. 0'', 5$	$15'. 4'', 4$
Emerſio ibidem	28. 17, 6	5. 42. 38, 8	15. 3, 0	14. 53, 6
Immerſio Petropoli	16. 32, 1	5. 44. 13, 8	15. 5, 2	15. 7, 6
Emerſio ibidem	12. 54, 8	5. 42. 3, 8	15. 7, 0	14. 50, 7
Pro ſtella $1\,\theta$ Immerſio Pariſiis	8. 35, 5	5. 31. 32, 3	15. 9, 3	4. 26, 0
Emerſio ibidem	6. 28, 9	5. 30. 57, 1	15. 9, 5	1. 29, 8
Pro ſtella α Immerſio Pariſiis	29. 45, 1	5. 27. 23, 5	15. 6, 6	15. 6, 9
- - Petropoli	33. 30, 1	5. 38. 14, 3	15. 2, 2	11. 44, 9

Hinc pro ſtella γ ſequentes oriuntur expreſſiones pro tempore coniunctionis

Pariſiis ex immerſione $7^h. 18'. 33'' + 1,97.\delta + 0,09.y + 1,05.\pi$

ex emerſione $7. \ 18. \ 58 - 2,00.\delta - 0,35.y + 0,73.\pi$

hinc colligitur aequatio $25 - 3,97.\delta - 0,44.y - 0,32.\pi$

Petrop. ex immerſione $9. \ 10. \ 28 + 1,98.\delta + 0,14.y + 0,69.\pi$

emerſione $9. \ 10. \ 19 - 2,00.\delta - 0,42.y + 0,12.\pi$

et aequatio hinc reſultat $9 + 3,98.\delta + 0,56.y + 0,57.\pi$.

Iam facile quidem liquet aequationes ex obſeruationibus Pariſinis et Petropolitanis deductas nullo modo inter

inter ſe conciliari poſſe, et aequatio quidem ex obſeruationibus Pariſinis deducta nullo modo locum habere poteſt, niſi ipſi y valor enormis tribuatur; nam ſi ſtatuatur $\delta = -2$ fieret $y = +75''$, qualis correctio Latitudinis omni deſtituitur probabilitate. Neceſſum igitur eſt vt obſeruatio emerſionis γ quae Pariſiis ob nubes impedita fuit, aliquantum ſit erronea; quamuis enim Cel. *Meſſier* hunc errorem non niſi duorum ſcrupulorum ſecundorum aeſtimaverit, tamen calculus euidenter commonſtrat, plusquam viginti ſcrupulis ſecundis antea emerſionem contingere debuiſſe. Ex aequatione Petropolitana poſito $\pi = 0$ et $\delta = -3$ deducitur $y = +5$, de quo tamen valore nihil certi ſtatui poteſt, nam ſi ponatur $\delta = -2$, fieret $y = -2''$, igitur ſine errore ponere liceret $y = 0$. Comparatis inter ſe obſervationibus pro immerſione colligitur differentia meridianorum inter Pariſios et Petropolin $1^h.\ 51'.\ 57''$. Fit autem ex vtraque obſeruatione tempus verum coniunctionis pro obſeruatorio Pariſino $7^h.\ 18'.\ 26''$ et medium $7^h.\ 4'.\ 3''$, exiſtente Longitudine Lunae $2^s.\ 2^\circ.\ 39'.\ 33'',3$; quae quum ex Tabulis *Mayeri* ſit $2^s.\ 2^\circ.\ 39'.\ 16'',0$, erit correctio Tabularum $+17''$. Ex occultatione $1\ \theta$, pro obſeruatorio Cel. *Meſſier*, ſequenti modo exprimetur tempus coniunctionis Lunae cum hac ſtella

ex immerſione $11^h.\ 30'.\ 58'' + 6,76.\delta + 6,47.y + 4,14.\pi$

ex emerſione $11.\ 30.\ 29 - 20,03.\delta - 19\ 93.y - 11,35.\pi$

hinc colligitur aequatio $29 + 26,79.\delta + 26,40\,y + 15,49.\pi = 0$

ſumatur huius aequationis quarta pars, vt habeatur

$$7 + 6,67.\delta + 6,60.y + 3,87.\pi = 0$$

ſubtrahatur haec expreſſio a primo valore pro tempore coniunctionis et prodibit tempus coniunctionis

$$11^h.\ 30'.\ 51'' + 0,09.\delta - 0,13.y + 0,23.\pi,$$

vbi coefficientes correctionum δ, y, π iam tam ſunt exigui, vt tuto negligi queant. Caeterum ſi in aequatione ſuperiori ponatur $\delta = -3''$, fiet $y = +2''$ circiter, ideoque et heic ſine errore poni poteſt correctio Latitudinis Lunae $= 0$. Fit autem tempus medium coniunctionis Lunae cum ſtella 1 θ ad meridianum obſeruatorii Pariſini $11^h.\ 16'.\ 27''$ Temp. medio, exiſtente Longitudine Luna $2^s.\ 4^\circ.\ 48'.\ 35'',3$, at ex Tabulis *Mayeri* eſt $2^s.\ 4^\circ.\ 48'.\ 21'',6$, hinc correctio Tabularum $+14''$. Denique ex occultatione ipſius α Tauri, habetur Tempus coniunctionis

pro Pariſiis $15^h.\ 6'.\ 27'' + 1,98.\delta + 0,19.y - 1,00.\pi$
pro Petropoli $16.\ 58.\ 48 + 2,53.\delta - 1,59.y + 0,09.\pi$

hae igitur expreſſiones dant differentiam meridianorum

$$1^h.\ 52'.\ 21'' + 0,55.\delta - 1,78.y + 1,09.\pi,$$

ex quo ſequeretur ſi haec differentia meridianorum reapſe ſit $1^h.\ 51'.\ 55''$, correctionem ipſius y eſſe ſaltem $13''$, quum vero ex binis prioribus obſeruationibus conſtet correctionem pro Latitudine Lunae eſſe multo minorem, probabile videtur hanc Latitudinis correctionem ipſi Latitudini ſtellae eſſe tribuendam. Interim tamen ſi ſtatuamus correctionem Latitudinis pro Luna eſſe $+5''$, id eſt Latitudinem Lunae Auſtralem tot ſecundis eſſe augendam; diminui debebit Latitudo ipſius α Tauri $8''$. Tempus coniunctionis pro

Pariſiis

Pariſiis autem inuenietur $15^h. 6'. 22''$ et medium $14^h. 52'. 4''$, exiſtente Longitudine Lunae $2^s. 6^\circ. 38'. 52'', 4$, quae ex Tabulis *Mayeri* habetur $2^s. 6^\circ. 38'. 19'', 8$, vnde colligitur correctio Tabularum $+ 32'', 6$. Ex occultatione γ Tauri haec correctio deducebatur $+ 17''$, ex occultatione vero $1\,\theta$ Tauri $+ 14''$, medio igitur inter has tres determinationes ſumto, erit correctio Longitudinis $+ 21''$, quam correctionem ita diſtribuere licebit per tres obſeruationes, vt ſtatuamus pro tempore coniunctionis Lunae cum γ fuiſſe correctionem $+ 18''$, pro tempore coniunctionis cum $1\,\theta$ $+ 21''$, et pro tempore coniunctionis cum α Tauri $+ 24''$. Nam quod ſtella α Tauri primae magnitudinis proprium motum haud parum ſenſibilem habeat; id non ſolum valde probabile eſt, ſed etiam aliis atque aliis obſeruationibus, Aſtronomis confirmari viſum eſt.

Concluſiones in ſuperioribus inuentae, commode ſequentem in modum vno obtutu repraeſentari poterunt

Coniunctio Lunae Tempore medio Pariſino A. 1774.		Longitudo Lunae	Corr. Tabb. *Mayeri*	Latit. ☽ Auſtr.	Corr. Tabb. *Mayeri*
cum α Tauri d 22. Ian.	$5^h. 54'. 24''$	$2^s. 6^\circ. 38'. 7'', 0$	$- 29''$	$4^\circ. 53'. 15''$	$- 7''$
γ Tauri d. 18. Febr.	5. 41. 39	2. 2. 38. 40, 4	$- 18$	4. 56. 13	$- 12$
α Tauri d. 14. Apr.	5. 47. 19	2. 6. 37. 51, 0	$- 15$	5. 0. 22	$- 14$
$2\,\theta$ Tauri d. 28. Aug.	10. 56. 19	2. 4. 48. 52, 0	$- 20$	5. 13. 25	$- 13$
γ Tauri d. 24. Sept.	15. 0. 41	2. 2. 39. 16, 8	$- 14$	5. 9. 56	$- 10$
γ Tauri d. 18. Nou.	7. 4. 3	2. 2. 39 34, 3	$+ 18$	4. 58 0	$+ 5$
$1\,\theta$ Tauri - - - -	11. 16. 27	2. 2. 48. 42, 6	$+ 21$	4. 59. 10	$+ 5$
α Tauri - - - -	14. 52. 4	2. 6. 38. 44, 0	$+ 24$	4. 59. 49	$+ 5$

Etſi hae correctiones maiores non ſunt, quam vt fidem facile inuenire queant, tamen illis omnimodam certitudinem vindicare nolo; ſiquidem in locis

 ſtella-

ſtellarum determinandis aliquanta aberratio admitti poſſit, vt taceam Longitudines et Latitudines ſtellarum ex aſcenſionibus rectis et declinationibus exacte determinari non poſſe, niſi obliquitas eclipticae perfecte habeatur cognita, de quo tamen elemento inter Aſtronomos non omnimodus eſt conſenſus. In his autem calculis obliquitatem eclipticae a Cel. *de la Lande* adoptatam adhibui; quae ſi minus exacta ſit, inde Latitudines praecipue ſtellarum aliqua adficientur correctione, quae tamen vix decem ſcrupula ſecunda excedere poterit.

Antequam finem huic disquiſitioni imponam, nonnulla conſectaria ex calculis allatis deducenda heic adiungam, quae Aſtronomis haud ingrata fore exiſtimo.

I. Concluſiones quae ex obſeruationibus eclipſium Solis, et occultationibus fixarum deriuantur, omnimodam certitudinem ſibi non vindicant, niſi quatenus de veris valoribus parallaxeos Lunae, diametrorum Lunae et Solis, nec non Latitudinis Lunae plena adſit certitudo. Quod autem valorem ſemidiametrorum attinet, fieri poteſt vt correctio illis tribuenda tantum ſit apparens, id eſt ob inflexionem radiorum luminis fieri poteſt, vt in calculo minor ſit adhibenda quantitas diametrorum, quam quae ipſis reuera competit. Haec autem correctio ob inflexionem nequaquam accurate determinari poteſt, antequam aliunde verae quantitates diametrorum exacte conſtent, quo in negotio aliquanta adhuc inter Aſtronomos eſt ſententiarum diuerſitas. Caeterum

rum raros valde oportet eſſe caſus, quibus eiusmodi ſuppetunt obſeruationes circa occultationes fixarum, vt ex iis ternae illae correctiones diametri Lunae, Latitudinis et Parallaxeos determinari poſſent. Pro hoc enim inſtituto primum adeſſe oportet obſeruationes immerſionis et emerſionis ex quibus elicitur aequatio, quae praecipue correctione ſemidiametri Lunae adficitur, dum correctiones Latitudinis et parallaxeos valde exiguis coefficientibus iſtam aequationem ingrediuntur, qualis eſt illa aequatio pro 14. Aprilis, Geneuae ex occultatione α Tauri

$$11 + 4{,}06.\delta - 0{,}03.y + 0{,}13.\pi = 0$$

ex hac enim aequatione, δ, neglectis plane correctionibus y et π, ſaltem proxime determinari poteſt. Deinde adeſſe oportet aequationem, in qua y coefficiente poſitiuo ſatis magno adficitur, qualis eſt illa pro Petropoli die 14. Aprilis

$$63 - 7{,}39.\delta + 6{,}16.y + 4{,}50.\pi = 0.$$

Porro ſi fieri poſſit requireretur aequatio, in qua y coefficiente negatiuo ſenſibili adficeretur, δ et π iisdem ſignis adfectis, ac in aequatione priori; ſic enim ope harum trium aequationum, modo alioquin obſeruationes exacte fuerint inſtitutae, correctiones δ, y, π certiſſime definire licebit.

II. Quamuis hoc per obſeruationes die 14. Aprilis praeſtare non licuit, tamen id lucrati ſumus, vt correctionem δ ſaltem cum praeciſione ſemiſſis ſecundi determinare valuerimus. Quamuis enim hanc correctionem ſtatuerimus $- 3''$, fieri vtique poteſt ſi in obſeruatione Cel. *Meſſier* pro immerſione adſit error 2 ſcrupulorum ſecundorum, et in obſéruatione Cel. *Mallet* error vnius ſecundi, vt haec correctio ſtatui debeat $-2'', 5$. Quodſi igitur valor diametri Lunae quem ex Tabulis *Mayeri* deduxi, ſit prorſus exactus, ſtatuere liceret effectum inflexionis radiorum, vel ſi placet refractionis in atmoſphaera Lunae, eſſe 3 ſcrupulorum ſecundorum, vel ſaltem $2'', 5$. Sin autem haec diameter aliquantam diminutionem patiatur, vnius ex cauſſa minuti ſecundi vti Cel. *de la Lande* ſtatuit, hic effectus inflexionis erit tantum $2\frac{1}{2}$ vel 2 ſcrupulorum ſecundorum. Interim tamen integram hanc correctionem δ in illis caſibus adhiberi non poſſe exiſtimo, vbi minor aliqua ſtella ad limbum Lunae lucidum immergit, multoque minus quando circa limbum lucidum emergit; in priori enim caſu fieri poteſt, vt lumen ſtellae iuſto citius exſtinguatur, in poſteriori vero vt nimis tarde ſtella in conſpectum prodeat. Immo vix quidem definire audeo, an obſeruationibus etiam exactisſime inſtitutis, valor ipſius δ pro occultationibus omnium ſtellarum prodire debeat idem; certe ſi experientiam conſulamus, ſtellae quo minores ſunt et debilioris luminis, eo diutius limbo Lunae obſcuro inhaerere videntur, ita vt pro ſtellis minoribus effectus inflexionis radiorum videatur eſſe maior, quam pro ſtellis maioribus.

III. Quaecunque etiam adſit incertudo circa reliqua Elementa Lunae, tamen ſi adſint obſeruationes immerſionis et emerſionis pro aliqua occultatione

tione fixae, ope illarum verum tempus coniunctionis Lunae cum fixa, saltem proxime hoc est sine aberratione quinque minutorum secundorum determinari potest. Nam si in expressionibus pro tempore coniunctionis, δ, y, π coefficientibus adficiantur exiguis, medium capere licebit ex conclusionibus pro immersione et emersione. Sic pro die 14. Aprilis medium sumendo, colligitur tempus coniunctionis Lunae cum α Tauri Parisiis $5^h. 47'. 16''$, neglectis correctionibus y et π; quae determinatio vix magis quam quinque scrupulis secundis esse potest dubia. Si autem δ, y, π coefficientibus adficiantur magnis, eo modo procedendum est, ac supra tempus coniunctionis Parisinum Lunae cum 1 θ Tauri, pro die 18. Nou. quaesiuimus. Quum igitur Longitudo Lunae sit elementum de quo imprimis quaeritur, praecipueque in eo elaborandum sit, vt Tabulae Lunares quoad Longitudinem euadant exactae; facile hinc perspicitur, quanti sint vsus pro hoc instituto occultationes fixarum a Luna.

IV. Quoniam correctio Latitudinis Lunae plerumque multo maior esse solet, quam correctiones semidiametri Lunae et Parallaxeos, imprimis operae pretium est, vt ista correctio determinetur; quod fieri potest si in aequatione quam correctiones δ, y, π ingrediuntur, δ et π plane negligantur, sic enim valor ipsius y saltem proxime verus inuenietur. Hunc autem in vsum adhiberi debet aequatio, qua y coefficiente satis magno adficitur, nam errores certe enormes committeret, qui valorem ipsius y quae-

quaerere vellet ope aequationum, in quibus y valde exiguum habet coefficientem. Vti ſi quis ex aequatione pro occultatione α Tauri d. 14. Aprilis Geneuae obſeruata, quaerere vellet valorem ipſius y, non poſſet non valde dubium huius correctionis inuenire valorem. Contra vero ex aequatione Petropolitana neglectis etiam correctionibus δ et π inuenitur $y = -10''$, quae a vera non multum recedere poterit.

V. Negari quidem nequit, quin eiusmodi adſint caſus, vbi ex obſeruationibus circa occultationes fixarum inter ſe comparatis vix quicquam certi de differentiis meridianorum definiri poteſt, ſcilicet dum in expreſſionibus pro tempore coniunctionis, δ, y et π pro binis locis, valde diuerſos habent coefficientes, nec aliunde has correctiones definire licet. Huiusmodi autem incommodum certitudini Methodi, qua per huiusmodi obſeruationes differentiae meridianorum determinandae ſunt, prorſus nihil derogare cenſendum eſt. Dantur vero et plurimi alii caſus, vbi ex talibus obſeruationibus minus tutae deducuntur concluſiones, etiamſi ob incertitudinem circa correctiones modo dictas, nullum dubium oriri queat; neceſſum igitur eſt vt pro his caſibus incertitudo ipſis obſeruationibus vnice ſit tribuenda. Sic ſi inter ſe comparentur concluſiones pro coniunctione α Tauri cum Luna die 14. Aprilis ad meridianos Pariſinum et Mediolanenſem ex immerſione repertae, habebitur differentia meridianorum

$$27'.\ 5'' + 0,24.\ y,$$

quae

quae cum vera $27'. 20''$ omnino conciliari nequit, nisi y ſtatueretur $65''$, quod omni probabilitate deſtituitur. Id igitur tantum remanet, vt credamus momentum pro immerſione Mediolanenſi a me adhibitum viginti ſcrupulis ſecundis eſſe augendum.

VI. In praecedenti Tomo noſtrorum Commentariorum dum de coniunctione Palilicii cum Luna die 1. Nouemb. 1773. agebam, adfirmaui in comparatione loci Lunae cum ſtellis fixis, rationem etiam eſſe habendam perturbationum, quibus Luna a reliquis Planetis praeter tellurem adficitur; verum re melius penſitata in eam deueni ſententiam, quod hae perturbationes omnino negligi debeant, dum locus Lunae cum ſtella fixa comparatur. Scilicet dum de loco Lunae quaeſtio eſt, intelligitur eius locus Geocentricus, patet autem locum Lunae reſpectu fixarum e tellure viſum non mutari, ſi telluri et Lunae ſimul eaedem ad ſenſum perturbationes ex actionibus Planetarum oriundae tribuantur. Secus autem res ſe habet in Eclipſibus Solaribus, tum enim loco Lunae eaedem perturbationes ſunt tribuendae, quae loco Solis adplicantur, ſiquidem alias locus Lunae promoueretur vel retrocederet, ea quantitate qua locus telluris ob actiones planetarum mutatur.

EXPERIMENTA ACV MAGNETICA PETROPOLI INSTITVTA.

Auctore

W. L. KRAFFT.

Acus magneticae inclinatio ex Clar. *Malleti* obſeruatione, praeſtantibus inſtrumentis inſtituta, initio anni 1769. Petropoli 73°. 45′ eſt inuenta. Interiecto ſex annorum interuallo ſuſpicari merito licuit, ſi qua ſenſibilis variatio annua, qualem in acu declinatoria dudum prodidit experientia, magnetis quoque inclinationem adficiat, fore, vt ea, captis de nouo experimentis, indicio iam non ambiguo ſeſe ſit manifeſtatura. Antiquioribus obſeruationibus, quae in Cel. *de l'Islii* diario recenſentur, adeo vaga ineſt incertitudo, vt quis fruſtra in iis annuae variationis veſtigia quaereret: obſtitit ſine dubio feliciori in inclinationis theoria ſucceſſui inſtrumentorum imperfectio; hoc autem obſtaculo Cel. mathematicorum, *Euleri* et *Bernoullii*, ſtudiis feliciſſime remoto, ad penitiorem virium magneticarum cognitionem experimentis perficiendam vix quidquam eſt optabilius, quam vt plura capiantur in diuerſis terrae regionibus, et frequentiora in iisdem acus inclinatoriae experimenta. Acuum diuerſitas ne quid diſcriminis obſeruationi Cl. *Malleti* et meae intuliſſe

tuliſſe videatur; acu ſum, quam ille adhibuerat, eadem vſus; etſi detrimentum in itinere, quo Cl. *Mallet* id inſtrumentum in Laponiam transportauit, captum dum reſarciretur; centrum grauitatis huius acus diuerſam a priori poſitionem eſt adeptum. Reliqua inſtrumenti indoles in Comment. Tomo XIV. legitur relata. Ipſam autem methodum, qua ope eiusmodi acus vera inclinatio magnetica determinatur, quaeque in Actis Berolin. ad annum 1755. vberius deſcripta eſt, breuiter et diſtincte ex ipſis principiis repetitam, quo ſequentia clarius perſpiciantur, hic ante oculos ponere conuenict.

Acus deſcripto modo conſtructa *tribus viribus* ad motum ſollicitatur.

I. *Prima vis* naſcitur *a proprio acus pondere*, ſi quidem centrum grauitatis G cum centro oſcillationis O non perfecte coincidat. Conf. in Comm. Tom. XIV. Tab. I. fig. 3. Sit hoc pondus, cui etiam, demto indice, pondus annuli accenſetur, $= A$; diſtantia inter centra grauitatis et oſcillationis $= OG = g$; angulus $AOG = \gamma$ et inclinatio obſeruata $EOP = \vartheta$; quibus poſitis vis huius cuſpidem P eleuantis momentum habebitur $= A\,g.\,\text{ſin.}\,(\vartheta + \gamma)$.

II. *Secunda vis* oritur *a ponduſculo indicis annexi* I, quod ſi ponatur $= M$; interuallum $OI = d$; et poſitio indicis ſeu angulus $AOI = \eta$; oritur hinc momentum vis cuſpidem P deprimentis $= M\,d.\,\text{ſin.}\,(\eta - \vartheta)$.

III. *Tertia* denique vis eſt *vis magnetica.* Huius vt eruatur momentum, repraeſentet tabula planum meridiani magnetici M E R, a quo circulus verticalis M U R, in quo acus eſt mobilis, declinet angulo E R U $= \omega$. Exprimat, ductis ad centrum O horizontalibus E O et U O, angulus E O S veram inclinationem magneticam $= \alpha$ in ipſo meridiano magnetico; angulus vero U O P inclinationem in circulo verticali M U R obſeruatam $= \vartheta$; ſit porro circuli maximi per S et P ducti arcus S P $= \Phi$ et quantitas vis magneticae, qua acus eſt imbuta, $=$ V. Acus itaque in verticali M P R conſtituta ſollicitabitur in directione obliqua plani P O S vi $=$ V. ſin. Φ; ſiquidem effectus obliquitatis incidentiae eſt in ratione ſimplici et directa ſinus incidentiae; quam primariam magnetiſmi legem elegantibus et ingenioſis experimentis extra omne dubium poſuit Cel. *Lambertus*, in diſſertatione Actorum Berolin. Tomo XXII. ad annum 1766. inſerta Analyſe de quelques experiences faites ſur l'aiman. Iſta ergo vis obliqua in korizontalem et verticalem, id eſt *convertricem* et *inclinatricem* reſoluta praebet momentum vis inclinatricis, cuſpidem P deprimentis

T. XXIV. Fig. 2.

$$= \text{V. ſin. } \Phi \text{ coſ. } SPR.$$

In triangulo autem ſphaerico S P R habetur

$$\text{ſin } SPR = \frac{\text{coſ. } \alpha. \text{ ſin. } \omega}{\text{ſin. } \Phi} \text{ et}$$

$$\text{tang. } SPR = \frac{\text{coſ. } \alpha. \text{ ſin. } \omega}{\text{ſin. } \alpha. \text{ coſ. } \vartheta - \text{ſin. } \vartheta. \text{ coſ. } \alpha. \text{ coſ. } \omega}$$

vnde ſtatim habetur

$$\text{ſin. } \Phi. \text{ coſ. } SPR = \text{ſin. } \alpha. \text{ coſ. } \vartheta - \text{coſ. } \alpha. \text{ ſin. } \vartheta. \text{ coſ. } \omega$$

ita,

ita, vt vis magneticae inclinatricis, qua acus sollitatur, momentum sit

$= V(\text{sin.}\,\alpha.\,\text{cos.}\,\vartheta - \text{cos.}\,\alpha.\,\text{sin.}\,\vartheta.\,\text{cos.}\,\omega)$

quorum momentorum ex vtraque parte aequalitas pro statu aequilibrii posito

$\frac{A\,g}{M\,d} = m$; et $\frac{V}{M\,d} = n$ praebet

$m\,\text{sin.}(\vartheta+\gamma) = \text{sin.}(\eta-\vartheta) + n(\text{sin.}\,\alpha.\text{cos.}\,\vartheta - \text{cos.}\,\alpha.\text{sin.}\,\vartheta.\text{cos.}\,\omega)$

atque hinc

$\text{tang.}\,\vartheta = \frac{\text{sin.}\,\eta + n.\text{sin.}\,\alpha. - m.\text{sin.}\,\gamma}{\text{cos.}\,\eta + n.\text{cos.}\,\alpha.\,\text{cos.}\,\omega + m.\,\text{cos.}\,\gamma}.$

Hisce iam explicatis ad ipsa experimenta progredior.

Acum descriptam sub initio anni 1775. valida, quantum potui, vi magnetica imbui et sequentia tria experimenta institui.

I. In ipso meridiano magnetico, vbi $\omega = o$

η	Inclin. obseru. $= \vartheta$
0	+ 32°. 40'
90	+ 81. 30
180	+ 131. 15
270	− 27. 15.

Erit ergo ob $\omega = o$,

$\text{tang.}\,\vartheta = \frac{\text{sin.}\,\eta + n.\,\text{sin.}\,\alpha - m.\,\text{sin.}\,\gamma}{\text{cos.}\,\eta + n.\,\text{cos.}\,\alpha + m.\,\text{cos.}\,\gamma}$

quae formula ad has obseruationes adplicata praebet adproximando, vt scilicet discrepantia calculi ab obseruationibus vbique euadat minima,

$n.\,\text{sin.}\,\alpha - m.\,\text{sin.}\,\gamma = 0,8508$

$n.\,\text{cos.}\,\alpha + m.\,\text{cos.}\,\gamma = 0,2800.$

II. In ipso meridiano magnetico, sed acu ita conuersa, vt cuspis borealis versus austrum dirigeretur, adeoque $\omega = 180$.

η	ϑ
0	$+\ 46^\circ.\ 45'$
90	$+\ 97.\ 15$
180	$+\ 146.\ 0$
270	$+\ 212.\ 33.$

Pro hoc itaque experimento erit

$$\text{tang. } \vartheta = \frac{\text{sin. } \eta + n.\text{ sin. } \alpha - m.\text{ sin. } \gamma}{\text{cos. } \eta - n.\text{ cos. } \alpha + m.\text{ cos. } \gamma}$$

et simili adproximatione ex his obseruationibus colliguntur sequentes valores:

$$n.\text{ sin. } \alpha - m.\text{ sin. } \gamma = 0,8490$$
$$-n.\text{ cos. } \alpha + m.\text{ cos. } \gamma = -0,2300.$$

III. In plano ad meridianum magneticum normali, vt sit $\omega = 90$

η	ϑ
0	$+\ 38^\circ.\ 50'$
90	$+\ 88.\ 40$
180	$+\ 138.\ 40$
270	$+\ 278.\ 52$

cum hoc casu sit

$$\text{tang. } \vartheta = \frac{\text{sin. } \eta + n.\text{ sin. } \alpha - m.\text{ sin. } \gamma}{\text{cos. } \eta + m.\text{ cos. } \gamma}$$

elicitur hinc

$$n.\text{ sin. } \alpha - m.\text{ sin. } \gamma = 0,8510$$
$$m.\text{ cos. } \gamma = 0,0249.$$

Prodiit

Prodiit autem ex experimento

1^{mo}. $n.\ \text{cof.}\ \alpha + m.\ \text{cof.}\ \gamma = \quad 0,2800$

$II^{do.} - n.\ \alpha\ \text{cof.} + m.\ \text{cof.}\ \gamma = -0,2300$

vnde fit

$n.\ \text{cof.}\ \alpha = 0,2550$; et $m.\ \text{cof.}\ \gamma = 0,0250$;

qui vltimus valor vix difcrepat ab eo, quem modo inuenimus. His ergo inuentis pro omnibus allatis obferuationibus generatim habebitur

$$\text{tang.}\ \vartheta = \frac{\text{fin.}\ \eta + 0,1500}{\text{cof.}\ \eta + 0,0250 + 0,2550\ \text{cof.}\ \omega}$$

quae formula quantum confentiat cum ipfis obferuationibus, ex fequenti tabula perfpicitur:

			Ex calculo
I.	$\omega = 0$;	$\eta = 0$;	$\vartheta = + 33°. 36'$
		$= 90$;	$\vartheta = + 81. 23$
		$= 180$;	$\vartheta = + 130. 16$
		$= 270$;	$\vartheta = - 27. 15.$
II.	$\omega = 90$;	$\eta = 0$;	$\vartheta = + 39°. 40'$
		$\eta = 90$;	$\vartheta = + 89. 14$
		$\eta = 180$,	$\vartheta = + 138. 55$
		$\eta = 270$;	$\vartheta = + 279. 28$
III.	$\omega = 180$;	$\eta = 0$;	$\vartheta = + 47°. 50$
		$\eta = 90$;	$\vartheta = + 97. 6$
		$\eta = 180$;	$\vartheta = + 145. 20$
		$\eta = 270$;	$\vartheta = + 213. 7$

vnde perfpicitur, calculi ab obferuationibus difcrepantiam vix vnum gradum fuperare, quamobrem valoribus

loribus inuentis ad determinationem inclinationis magneticae ſatis tuto vti licebit. Cum itaque ſit

$n.\cos.\alpha = 0,2550$; et $m.\cos.\gamma = 0,0250$; erit

$n = \frac{0,2550}{\cos.\alpha}$ et $m = \frac{0,0250}{\cos.\gamma}$

quibus valoribus in aequatione

$n.\sin.\alpha - m.\sin.\gamma = 0,8500$

ſubſtitutis colligitur

$0,2550.\,\mathrm{tang}.\,\alpha - 0,0250.\,\mathrm{tang}.\,\gamma = 0,8500.$

Ex qua igitur aequatione inclinatio magnetica ſtatim innoteſceret, modo quantitas anguli γ fuerit cognita. Ad hunc vero angulum qui quidem in inſtrumento exactiſſime elaborato deberet eſſe nullus, definiendum nulla alia adhuc patet via, niſi vt acus inclinatoriae poli inuertantur, contrarium ſcilicet magnetismum ipſis inducendo, et eaedem prorſus obſeruationes repetantur; hinc enim analoga priori pro inclinatione magnetica obtinetur aequatio, quam quidem quantitas γ adhuc ingreditur, ſed ob n quantitatem iam negatiuam ſigno contrario, ac ante, adfecta, ita, vt duarum aequationum hoc modo inuentarum combinatione quantitas illa incognita γ prorſus ex calculo eliminetur Polis igitur inuerſis ſequentes inſtitui obſeruationes, quas iam breuiter recenſuiſſe ſufficiet.

I. $\omega = 0$

η	ϑ
0	$-\ 54°.\ 38'$
90	$-\ 151.\ 15$
180	$-\ 137.\ 30$
270	$+\ 264.\ 30$

hinc colligimus

$n.\sin.\alpha - m.\sin.\gamma = -1,1103$

$n.\cos.\alpha + m.\cos.\gamma = -0,2011$

II.

II. $\omega = 180$.

η	ϑ	
0	$180°. + 139°. 30'$	hinc habetur
90	$180. + 163. 20$	$-n.\text{cos}.\alpha + m.\text{sin}.\gamma = +0,2550$
180	$180. + 55. 30$	$n.\text{sin}.\alpha - m.\text{sin}.\gamma = -1,0801$
270	$-83°. 30'$	

adeoque $n.\text{cos}.\alpha = -0,2275$; $m.\text{cos}.\gamma = +0,0275$ cum vero vltimus hic valor nullam subire variationem debuisset; statuatur sumto medio

$$m.\ \text{cos}.\ \gamma = 0,0262\ ;$$

vnde simili modo sequens colligitur aequatio

$$0,2275.\ \text{tang}.\ \alpha + 0,0262.\ \text{tang}.\ \gamma = 1,0952$$

quae cum priori combinata praebet

$$0,4825.\ \text{tang}.\ \alpha = 1,9452$$

adeoque $\alpha = 76°. 4'$.

Quo autem instituto meo, quantum fieri licet, exacte satisfacerem; acum plane nouam omni, qua potui, circumspectione construi curaui.

Experimenta acu recens constructa instituta.

I. In ipso meridiano magnetico, vbi $\omega = 0$.

	η	inclinat. obseru. $= \vartheta$
I.	0	$+ 16°. 43'$
II.	90	$+ 86. 7$
III.	180	$+ 160. 10$
IV.	270	$+ 277. 40.$

 Hinc

Hinc colligitur

ex aequatione	$n.$ ſin. $\alpha - m$ ſin γ	$m.$ coſ. $\gamma + n.$ coſ. α
1^{ma}. et 11^{da}	0, 32833	0, 09094
I. et III	0, 32640	0, 09026
I. et IV	0, 32702	0, 08661
II. et III	0, 32789	0, 09091
II. et IV	0, 33060	0, 09110
III. et IV	0, 32768	0, 09150

ex quibus habentur valores medii

$$n \text{ ſin. } \alpha - m. \text{ ſin. } \gamma = + 0,32799$$
$$m. \text{ coſ. } \gamma + n. \text{ coſ. } \alpha = + 0,09022.$$

II. In ipſo meridiano magnetico, ſed acu converſa, vt ſit $\omega = 180$.

η	ϑ
0	$+ 19°. 25'$
90	$+ 93. 15$
180	$+ 163. 0$
270	$+ 263. 45.$

Hinc prodit

ex aequatione	n ſin. $\alpha - m.$ ſin. γ	$m.$ coſ. $\gamma - n.$ coſ. α
1^{ma}. et 11^{da}	0, 32591	− 0, 07529
I. et III	0, 32745	− 0, 07103
I. et IV	0, 32648	− 0, 07376
II. et III	0, 32880	− 0, 07545
II. et IV	0, 31709	− 0, 07479
III. et IV	0, 32822	− 0, 07357
ſiue ſumto medio	0, 32566	− 0, 07398

et

et cum valor $n.$ fin. $\alpha - m.$ fin. γ hic inuentus a priori tantillum, quantitate scilicet 0, 00233, discrepet; sumamus medium inter vtrumque vt sit

$$n. \text{ fin. } \alpha - m. \text{ fin. } \gamma = 0,32682$$

porro ex praemissis colligitur

$$m. \text{ cos. } \gamma = 0,00812 \text{ ; et } n. \text{ cos. } \alpha = 0,08210$$

ita, vt pro hoc instrumento et ad tempus institutae obseruationis in genere sit

$$\text{tang. } \vartheta = \frac{\text{fin. } \eta + 0,32682}{\text{cos. } \eta + 0,00812 + 0,08210. \text{ cos. } \omega}.$$

III. In plano ad meridianum magneticum normali, vbi $\omega = 90$

η	ϑ
0	$+ 17°. 50'$
90	$+ 89. 45$
180	$+ 161. 40$
270	$+ 270. 45$

quibus obseruationibus quam exacte satisfaciant valores modo inuenti; ex sequenti tabula perspicitur:

Inclinationes computatae

η	$\omega = 0$	$\omega = 90$	$\omega = 180$
0	$16°. 45'$	$17°. 58'$	$19°. 26'$
90	86. 5	89. 39	93. 12
180	160. 10	161. 46	163. 4
270	277. 45	270. 42	263. 44.

Valores autem isti, de quorum praecisione dubitare iam non licet, pro definienda vera inclinatione magnetica hanc suppeditant aequationem:

$0,08210. \text{tang.}\, \alpha - 0,00812. \text{tang.}\, \gamma = 0,32682.$

Inuerſis autem polis, ſequentes obſeruatae ſunt inclinationes:

I. In meridiano magnetico, $\omega = 0$

η	ϑ
0	$-\ 19^\circ.\ 15'$
90	$+\ 96.\ 45$
180	$+\ 196.\ 25$
270	$+\ 266.\ 30$

hinc eadem, ac ante, methodo inuenimus

$$n.\ \text{ſin.}\, \alpha - m.\ \text{ſin.}\, \gamma = -0,31991$$

et $n.\ \text{coſ.}\, \alpha + m.\ \text{coſ.}\, \gamma = -0,08131.$

II. In ipſo meridiano magnetico, ſed acu conuerſa, vt ſit $\omega = 180^\circ$

η	ϑ
0	$-\ 16^\circ.\ 22'$
90	$+\ 81.\ 50$
180	$+\ 199.\ 25$
270	$-\ 85.\ 48$

quae obſeruationes praebent

$$n.\ \text{ſin.}\, \alpha - m.\ \text{ſin.}\, \gamma = -0,32000$$
$$m.\ \text{coſ.}\, \gamma - n.\ \text{coſ.}\, \alpha = +0,09700$$

vnde ex praemiſſis colligitur

$$m.\ \text{coſ.}\, \gamma = 0,00784 \text{ et } n.\ \text{coſ.}\, \alpha = -0,08915.$$

Propius vero ad veritatem accedemus, ſi quia formula $m.\ \text{coſ.}\, \gamma$, quae polorum acus magneticae inverſione

versione inuariata manere debuisset, quantitate 0,00028 iam fuerit imminuta, sumto medio statuamus

m cos. $\gamma = 0, 00798$; n. cos. $\alpha = - 0, 08915$

qui valores obseruationibus optime satisfaciunt; habebitur enim in genere

$$\text{tang. } \vartheta = \frac{\text{sin. } \eta - 0,3200}{\text{cos. } \eta + 0,00798 - 0,08915 . \text{cos. } \omega}$$

vnde istae inclinationes iam ex calculo ita se habebunt:

η	$\omega = 0$	$\omega = 180$
0	$\vartheta = - 19^\circ. 13'$	$\vartheta = - 16^\circ. 16'$
90	+ 96. 49	+ 81. 52
180	+ 196. 32	+ 199. 31
270	+ 266. 28	− 85. 48.

Ex his ergo valoribus iam sequens resultat aequatio finalis

$0, 08915. \text{ tang. } \alpha + 0, 00798. \text{ tang. } \gamma = 0,31995$

et cum antea fuerit

$0, 08210 \text{ tang. } \alpha - 0, 00798. \text{ tang. } \gamma = 0,32682$

concluditur hinc

$0, 17125. \text{ tang. } \alpha = 0, 64677$

adeoque $\alpha = 75^\circ. 10'$.

Quodsi igitur inter has duas determinationes, duabus acubus plane diuersis obtentas, sumamus medium: colligitur

Ad finem anni 1774. *Petropoli acus magneticae* 16 *poll.* 7. *lin. decim. pedis Londin. longae inclinatio* $75^\circ. 37'$.

 Haec

Haec inclinatio ſuperat 1°. 52′ eam, quae ſex abhinc annis hic a Cel. *Malleto* eſt obſeruata; quod incrementum ſi ſingulis annis ſtatuamus fuiſſe vniforme; prodiret hinc variatio inclinationis magneticae annua Petropoli + 18⅔ minut. primor.

Declinatio acus magneticae

Menſe Decembri 1774. ope acus quatuor pollices longae inuenta eſt 4°. 50′ a ſeptentrione verſus occidentem; vnde hic loci declinatio iam creſcere videtur; erat enim teſtante diario Cel. *Des l'Islii*

anno 1726	- -	3°. 15′	ex obſ. Cel. *Mayeri*
1727	- -	2°. 35′	ex obſ. Cel. *de l'Islii*
1730	- -	4°. 40′	
1741	- -	3°. 56′	

Cel. *Braunius* in Nou. Comm. Tom. IX. pag. 42. ait ſe anno 1758. reperiſſe declinationem magnetis, vt fere ſemper, 4°. 30′ N. W. quae omnia haud obſcura praebent periodicae alicuius variationis, temporis ſucceſſu probandae, indicia.

DVARVM

DVARVM ECLIPSIVM SOLIS DIE $\frac{15}{26}$. OCTOBRIS 1772 ET D. $\frac{11}{22}$. MARTII 1773. OBSERVATIONES FACTAE IN VRBE DMITRIEWSK.

a *PETRO INOCHODZOW.*

Motum penduli diebus obſeruationes has praecedentibus et proxime inſequentibus ope altitudinum Solis correſpondentium explorani, quarum concluſiones hic exhibere neceſſum eſt.

Die $\frac{11}{22}$. Octobr. 1772. Merid. ex alt. correſp.		$0^h.0'.11'',3$
	correct. merid.	+ 17,5
	Meridies verus	0. 0. 28,8
Die $\frac{15}{26}$. Octobr. merid. ex alt. correſp.		0. 0. 42
	correct.	+ 17,2
	Merid. ver.	0. 0. 59,2
Die $\frac{20}{31}$. Octobr. merid. ex alt. correſp.		0. 1. 19,5
	correct.	+ 18,3
	Merid. ver.	0. 1. 37,8

E quibus acceleratio diurna $7'',6$

Die $\frac{15}{26}$. Octobr. Initium Eclipſeos ob nubes aliquantum ſero obſeruaui, finis tamen licet per nubeculas obſeruatas eſt $1^h.23'.58''$, ſeu in temp. vero $1^h.22'.58'',5$.

Die

Die $\frac{11}{22}$. Mart. 1773. mer. ex alt. Solis corr.		$0^h.1'.10''$, 3
	correctio	− 19,64
	merid. verus	0. 0. 50,66
Die $\frac{13}{24}$. merid. ex altitud. corresp.		0. 0. 58, 5
	correctio	− 19,54
	merid. correctus	0. 0. 18,96

Die $\frac{11}{22}$. Mart. Ante ortum Solis coelum circa horizontem erat maxime nubilum, ita vt omnem abiiciebam ſpem obſeruandi ingreſſus diſci lunaris in ſolem; caſu tamen felici nubes erant remotae, initium Eclypſeos bene obſeruare potui $18^h.43'.41''$, ſeu in tempore vero $18^h.43'.39''$.

Erant vero in margine Solis, vbi ingrediebatur Luna, duae paruae maculae, quarum ſequentem Luna texit $18^h.46'.52''$, aut in tempore vero $18^h.46'.50''$.

Ambae hae Eclypſes obſeruatae tubo Dollondiano 12 pedum.

Mox deinde fit nubilum et nix parca, denique circa medium Eclypſeos ſole trans nubes viſo ſequentes obſeruationes quadrantis ope inſtitui.

I. Obſeruatio tubus in altitudine $17°.36'.40''$

	Temp. hor.	Temp. verum
Limbus Solis apparenter inferior	h. m. s.	h. m. s.
ad filum horizont. - -	19. 44. 17	19. 44. 14,7
Cornu inferius ad filum vertic.	44. 31	44. 28,7
—— ſuperius - - - -	46. 4	46. 1,7
Limbus Lunae ad fil. vert.	46. 24	46. 21,7
Limb. ☉lis ad fil. vert. - -	47. 0	46. 57,7

II.

II. Obseru. alt. tub. $18^{\circ}.16'.40''$

	Temp. hor. h. m. s.	Temp. verum h. m. s.
Limbus ☉ infer. ad fil. horiz.	19.49.51	19.49.48,6
Cornu inferius ad fil. horiz.	50. 9	50. 6,6
Limbus ☽ ad fil. h. - -	50.35	50.32,6
Cornu superius ad fil. vert.	52.15	52.12,6
Limb. ☽ ad f. v. - - -	52.23	52.20,6
Cornu inferius ad f. v. - -	52.45	52.42,6
Limb. ☉ ad f. v. - - -	53. 1	52.58,6

III. Obseru. alt. tub. $18^{\circ}.56'.40''$

Limb. ☉ ad fil. horiz. - -	19.55.26	19.55.23,6
Cornu inferius ad f. v. - -	55.40	55.37,6
Limbus ☽ ad f. h. - -	56 17	56.14,6
Cornu inferius ad f. h. - -	57.33½	57.31
—— superius ad f. v. - -	58. 8	58. 5,6
idem ad f h. - - - -	58.13	58.10,6
Limb. ☉ ad fil. vert. - -	58.20	58.17,6

IV. Obseru. alt. tub. $19^{\circ}.56'.40''$

Limb. ☉ inf. ad f. h. - -	19.59.57	19.59 54,5
Cornu infer. ad f v. - ·	20. 0.15	20. 0.12,5
Limb. ☽ ad f. h. - - -	0.50	0.47,5
Cornu superius fit nunc inferius.		
Cornu nunc infer. ad f. h. -	2.19	2.16,5
—— —— super. ad idem -	2.38	2.35,5

V. Obſeru. alt. tub. 21°. 56′. 40″

	Temp. hor. h. m. s.	Temp. verum h. m. s.
Limb. ⊙ inf. ad f. h. - -	20. 13. 39	20. 13. 36,4
—— praeced. ad f. v. - -	13. 57	13. 54,4
Cornu nunc ſuper. ad f. v.	14. 23	14. 20,4
Limbus ☽ ad f. h. - -	14. 43	14. 40,4
Cornu nunc infer. ad f. h.	16. 7	16. 4,4
idem ad f. v. - - - - -	16. 18	16. 15,4
Corn. nunc ſuper. ad f. h. -	17. 11	17. 8,4

VI. Obſeru. alt. tub. 22°. 36′. 40″

Limb. ⊙ praeced. ad f. v. -	20. 20. 33	20. 20. 30,3
—— infer. ad f. h. - - -	20. 38	20. 35,3
Limb. ☽ ad f. v. - - -	21. 15	21. 12,3
Cornu nunc ſuper. ad f. v.	21. 23	21. 20,3

Rurſus nubes tegunt coelum et ningit; finem Eclypſis ob eandem cauſſam obſeruare non licuit.

Has obſeruationes Cel. *Lexell* methodo ſua in Commentariis expoſita computare voluit. Ex fine Eclypſis Solis die $\frac{15}{26}$. Octobr. 1772. obſeruato deducitur tempus coniunctionis verum Solis et Lunae pro vrbe Dmitriewsk

$$0^{\circ}.\ 50'.\ 32'' - 2,28\,\delta + 1,53\,y - 1,23\,\pi$$

ſignificantibus δ, y, π correctionibus ſummae ſemidiametrorum Solis et Lunae, latitudinis Lunae et parallaxis eius aequatoreae. At pro Tyrnauia habentur ex obſeruato initio et fine ſequentes expreſſiones pro tempore coniunctionis:

22ʰ.

$$22^h.\ 59'.\ 34'',8 + 4,42\,\delta - 4,09.y + 3,78\,\pi$$
$$22.\ 59.\ 17,3 - 3,89\,\delta + 3,49.y - 1,59\,\pi.$$

Vnde sequens colligitur aequatio

$$17'',5 + 8,31\,\delta - 7,58.y + 5,37\,\pi = 0$$

sumta iam quinta parte huius aequationis, quae est

$$3'',4 + 1,66\,\delta - 1,52.y + 1,07\,\pi = 0,$$

eaque addita ad posteriorem expressionem pro tempore coniunctionis, hanc nouam colligimus

$$22^h.\ 59'.\ 21'' - 2,23\,\delta + 1,97.y - 0,52\,\pi,$$

quae subtracta ab illa pro Dmitriewsk dat differentiam meridianorum

$$1^h.\ 51'.\ 11'' - 0,44.y - 0,70\,\pi;$$

hincque si correctiones y et π plane negligantur $1^h.\ 51'.\ 11''$. Est vero longitudo Tyrnauiae a Parisiis $1^h.\ 0'.\ 55''$. Quare erit illa pro Dmitriewsk $2^h.\ 52'.\ 6''$.

Interim tamen vt appareat quanta probabilitate haec determinatio praedita sit, pro aequatione Tyrnauiensi statuantur tres hypotheses.

I. $\delta = 0,\ \pi = 0$ ex quo erit $y = 2$
II. $\delta = -3,\ \pi = -5$ vnde $y = -5$
III. $\delta = -3,\ \pi = +5$ — $y = +2$.

Pro prima hypothesi est differentia meridianorum inter Dmitriewsk et Tyrnauiam $1^h.\ 51'.\ 10''$, pro secunda $1^h.\ 51'.\ 16''$, pro tertia $1^h.\ 51'.\ 7''$. Quum igitur inter has conclusiones sit discrepantia $9''$, statuamus vbi supra inuenimus esse differentiam meridianorum inter Parisios et Dmitriewsk $2^h.\ 52'.\ 6''$.

Vbi quidem, quia obseruatio in Dmitriewsk per nubes capta est, fieri potest vt haec longitudo inuenta 5 vel adeo 10 scrupulorum secundorum augmentum admittat.

Ex initio Eclypsis die $\frac{11}{22}$. Martii 1773. in Dmitriewsk obseruato colligitur tempus verum coniunctionis Solis et Lunae

$$20^h.\ 22'.\ 40'' + 2,19\,\delta + 0,35.y + 0,26\,\pi.$$

At ex obseruato initio Eclypsis in Pekin colligitur tempus coniunctionis

$$25^h.\ 6'.\ 32'' + 2,54\,\delta - 1,32.y - 0,31\,\pi.$$

Hinc prodit differentia meridianorum

$$4^h.\ 43'.\ 52'' + 0,35\,\delta + 1,67.y - 0,57\,\pi,$$

vbi si correctiones δ, y, π plane negligantur et longitudo domus Iesuitarum Pekini supponatur esse 7^h. $36'$. $20''$ a Parisiis, prodibit differentia meridianorum inter Parisios et vrbem Dmitriewsk 2^h. $52'$. $28''$. Caeterum ex aequatione pro Pekin inuenta, quae est

$$11 + 5,21\,\delta - 2,88.y + 2,00\,\pi = 0,$$

constat si ponatur esse $\delta = -3$ fore $y = -2$, posito $\pi = 0$; hi igitur valores adhibiti in expressione pro differentia meridianorum, dabunt 4^h. $43'$ $54''$ adeoque inter Parisios et Dmitriewsk 2^h. $52'$. $26''$.

Caeterum fieri quidem potest vt longitudo domus Iesuitarum a nobis nimis magna sit assumta, licet vix plus quam quinque scrupulorum secundorum diminutionem pati posse videatur. Quod autem

tem conclusio pro longitudine vrbis Dmitriewsk nunc inuenta cum priori non prorsus consentiat, exinde oriri potest, quod circa initium Eclypseos obseruandum tanta exactitudo locum habere non soleat, ac circa obseruatum finem. Quare si harum conclusionum probabilitates ita aestimentur vt prior triplo probabilior sit posteriori, fiet medio iuxta hanc aestimationem capto, longitudo Dmitriewsk ab obseruatorio Parisino $2^h. 52'. 11''$; ita vt circiter $5''$ error deriuatur in priorem determinationem et quindecim in posteriorem. Quicquid autem sit, probabile videtur hanc determinationem vix magis quam quinque scrupulis secundis esse dubiam.

Varias etiam obseruationes Eclypsium Satellitum Iouis institui; verum in praesenti paucae mihi sunt ad manus ipsis correspondentes alibi locorum habitae, cum quibus immediate comparare possim; ideoque ad proximum Commentariorum volumen deferendum est. Vt autem interea de latitudine vrbis Dmitriewsk constet, eam ex multis altitudinibus tam Solis quam fixarum meridianis reperi $50°. 5'. 6''$.

AD ILLVSTRES ACADEMICOS PETROPOLITANOS
DE
DIFFERENTIA MERIDIANORVM
PETROPOLITANI ET PEKINENSIS.

Auctore

P. *HALLERSTEIN.*

Differentiam meridianorum Petropolitani et Pekinensis tuto et accurate constitui vestra potissimum et nostra interest Clarissimi Viri, et quod ego in hac re tentaui, vobis debeo, vobis defero censendum, corrigendum, definiendum.

Anno 1754. cum obseruationes Astronomicas, quas antecessor meos Pater *Ignatius Koegler* fecerat, et sparsim notatas reliquerat (obiit is anno 1746. Martii 30, cui sequente mense Aprili successi) colligerem, ordinarem, conscriberem, optimo fato aduenit eodem anno Pekinum Carauana Russica, quae nobis dono, et munificentia Illustris Academiae complures tomos attulit, in quibus praeter alia monumenta literaria et doctissimas lucubrationes, etiam Immersiones et Emersiones Satellitum Iouis obseruatae a Cl. Viro D. *de l'Isle* in obseruatorio Imperiali Petropolitano magno numero.

Habe-

Habebam ego Immerſiones et Emerſiones Satellitum Iouis obſeruatas in hoc Collegio Pekini a P. *Koegler* inde ab anno 1713 ad 1745. non minore numero, harum cum aliquas vtrinque obſeruatas inter ſe comparare tentaſſem, et viderem differentias inde exiſtentes admodum variare, facile intellexi, cum non poſſem habere obſeruationes quam optimas, curandum habere combinationes quam plurimas, ex quibus ſi non poſſem elicere veram differentiam noſtrorum meridianorum, elicerem ſaltem aliquid prope verum.

Ergo obſeruationes vtrinque factas ab anno 1726. vsque ad annum 1742. combinaui inter ſe, quotquot aliquo modo potui, combinaui autem tribus diuerſis modis immediate, vt vocant, et mediate et exiuerunt pro differentia noſtrorum meridianorum Petropolitani et huius Collegii Pekinenſis numeri medii tres; $5^h. 44'. 15''$ et $5^h. 44'. 16''$ et $5^h. 44'. 17'$ atque hi numeri ſunt, qui poſtliminio impreſſi ſunt in libro obſeruationum Pekinenſium Viennae in lucem edito. Nec mihi diſplicebant, quod ſatis arcte inter ſe haererent, et adeo viderentur non admodum longe a vero abeſſe, nihil tamen certi definire auſus ſum, niſi inter 4 aut 5 ſecunda.

Nam cum obſeruationes, quae hos numeros dederunt, factae fuiſſent teleſcopiis vtrinque admodum diuerſis, Petropoli magnis, Pekini paruis, neceſſe erat differentiis inde ortis correctionem aliquam adhi-

adhibere, quae cum legem certam nullam haberet, fieri non poterat, quin etiam differentiae correctae aliquid incertitudinis secum traherent.

Post aliquot annos audieram ac deinde ipse legi in Astronomia Cl. Dni *de la Lande* consilium Patris *Maximiliani Hell* Societatis nostrae Astronomi Caesarei Viennae; ommissis correctionibus huiusmodi, et nulla habita ratione diuersitatis telescopiorum qualiumcunque, dum iidem vtrinque obseruatores iisdem constanter vtantur telescopiis, differentias ortas ex comparatione Immersionum vtrinque obseruatarum combinandas cum differentiis ortis ex comparatione Emersionum, et duorum mediorum numerorum vtrinque erutorum differentiam pro ratione multitudinis Immersionum et Emersionum ex aequo distribuendam atque ita constituendam vltimam et veram differentiam Meridianorum, quod scilicet, qui tardius videt Immersionem, citius Emersionem videret, et contra. Miratus aliquantum consilium hoc tam obuium tam sero prodiuisse, resumptis calculis numeros illos, ex quibus superiores tres differentias erueram, eosdem omnes, omissis correctionibus, tales quales ex obseruationibus vtrinque factis prodiverunt, in duas series descripsi, quarum vna continebat 37 differentias ortas ex comparationibus Immersionum vtrinque obseruatarum, altera 53 alias ortas ex comparationibus Emersionum, medius numerus, quem dabant Immersiones pro differentia Meridianorum Petropolitani et Pekinensis exiit 5^h. $44'. 14''$.

$44'. 14''. 58'''$ et medius, quem dabant Emerſiones, extitit $5^h. 44'. 23''. 24'''$ horum differentiam $8''. 26'''$ inter vtrumque diſtribui ſic: $90 : 8''. 26''' :: 37 : 3''. 28'''$ haec $3''. 28'''$ ſubtraxi ex numero maiore $5^h. 44'. 23''. 24'''$ et remanſit pro differentia Meridianorum numerus $5^h. 44'. 19''. 56'''$ iterum autem feci: $90 : 8''. 26''' :: 53 : 4''. 58'''$ et iſta $4''. 58'''$. addidi ad numerum minorem $5^h. 44'. 14''. 58'''$, et extitit numerus idem $5^h. 44'. 19''. 56'''$ hoc eſt $5^h. 44'\ 20''$ pro differentia vera Meridianorum noſtrorum obſeruatorii Petropolitani, et huius Collegii Pekinenſis.

Iſte numerus, licet nihil haberet, quo ſe tueri poſſet, praeter multitudinem obſeruationum, ex quibus exiuit; multo mihi tamen potior viſus et tutior, quam tres illi ſuperiores, qui propter comparationem teleſcopiorum parum certam et nonnihil arbitrariam neceſſario continerent aliquid plus, minus: iſte contra velut ſponte ſua, ſine vllo artificio ſe obtuliſſet; vt adeo ſperarem eum propius quam tres illos ſuperiores, et ſatis prope verum conſtiturum, haec mea interim eſt coniectatio, quam vobis, Viri doctiſſimi, diſcutiendam et emendandam commendo, quem in finem addidi hic tabellam numerorum:

Imm. 37.	Imm.	Em. 53.	Em.
$5^h.41'.48''$	44. 25	$5^h.42'.11''$	44. 33
42. 0	$5^h.44'.30''$	42 40	44. 33
42. 29	44. 34	42. 43	44. 33
42. 45	44. 35	42. 54	$5^h.44'.35''$
43. 6	44. 36	43. 6	44. 36
43. 8	44. 36	43. 18	44. 41
43. 10	44. 40	43. 31	44. 43
43. 15	44. 40	43. 34	44. 46
43. 32	44. 44	43. 34	44. 47
43. 47	44. 48	43. 39	44. 47
5. 43. 55	44. 49	5. 43 40	44. 55
43. 59	5. 45. 1	43. 42	44. 57
44. 2	45. 2	43. 45	44. 58
44. 4	45. 32	43. 48	5. 45. 2
44. 4	45. 33	43. 56	45. 5
44. 7	45. 43	44. 0	45. 6
44. 16	46. 10	44. 6	45. 7
44. 23	47. 1	44. 7	45. 13
44. 25		44. 10	45. 16
		44. 10	45. 18
		5. 44. 11	45. 22
		44. 12	45. 28
		44. 12	45. 45
		44. 13	5. 45. 50
		44. 17	45. 56
		44. 25	46. 17
		44. 27	

Immerſionum 37 numerus medius		$5^{h}.44^{\prime}.14^{\prime\prime}.58^{\prime\prime\prime}$
Emerſionum 53 numerus medius		5. 44. 23. 24
Numerorum mediorum differentia		8. 26
igitur $60 : 8^{\prime\prime}. 26^{\prime\prime\prime} :: 37 :$	- - - —	3. 28
Medium numerorum mediorum		5. 44. 19. 56
item $90 : 8. 26 :: 53 :$	- - - +	4. 58
Medium numerorum mediorum		5. 55. 19. 56
hoc eſt	- - - -	5. 44. 20.

ECLIPSES SATELLITVM IOVIS

ANNO 1774, PETROPOLI IN SPECVLA ASTRONOMICA OBSERVATAS, RECENSVIT.

AND. IOH. LEXELL.

De his obseruationibus eadem momenda habeo, quae in Tomo praecedenti, de obseruationionibus pro Anno 1773. fuere monita. Ne autem pro singulis obseruationibus nomen Auctoris repetere opus sit, obseruationes a Cel. D. *Rumovski* factas littera R, quas instituit Cl. *Islenieff* littera I, measque littera L indicabo.

		Temp. ver. Petrop. Styl. Nou.
Emersio III. Satellitis Iouis. Obseruatio aliquantum dubia. L. - -	Ian.	6^D. 4^h. 30'. 4''
Emersio I. Satellitis. Obseruatio dubia. L. - - - - - -		11. 7. 56. 39
Immersio I. Satell. Obseruatio non prorsus bona. L. - -	Iulii	12. 12. 13. 11
Immersio I. Obseruatio dubia. L -		28. 11. 27. 53
Immersio I. Obseruatio bona. L	Aug.	4. 13. 23. 17
Emersio II. R - - - -		11. 11. 34. 58
- - - - L - - - -		11. 11. 35. 33
Immersio I. Obseruatio dubia. L -		20. 11. 41. 38

III.

		Temp. ver. Petrop. Styl. Nou.
III. Satellitis Immersio R	Aug. 23.	$11^{h}.23'.15''$
- - - I - - -		11. 23. 8
- - - L - - -		11. 22. 9
Emersio R - - -		12. 53. 19
I - - -		12. 53. 57
L - - -		12. 56. 50
Immersio I. Satellitis. Obseruatio bona. L. - - -	Sept. 3.	15. 33. 29
Immersio I. Obseruatio bona L.	12.	11. 58. 36
Immersio I. Obseruatio bona. L.	Sept. 21.	8. 23. 43
Immersio III. R - -	Octob. 5.	11. 40. 44
L - - - -		11. 40. 6
Immersio I. R - - - -		12. 17. 45
L - - - -		12. 16. 5
Immersio I. Satellit. L -	Octob. 28.	12. 30. 49
Immersio II. - - L - - - -		14. 29. 31
Emersio I. R - - -	Nou. 15.	7. 23. 31
Emersio II. R. Ioue e nube emergente, Satelles videtur multo debiliori lumine quam reliqui - - -		11. 21. 23
Emersio III. L. obseruatio dubia -	17.	13. 20. 26
Emersio III. R. - - -	24.	17. 22. 2
Emersio I. R. - - -	27.	16. 41. 46.

De obſeruatione Cel. *Rumovski* die 5. Octobr. aliquod dubium eſt, quia ipſi non licuit poſt peractam obſeruationem in motum Penduli inquirere, quod Pendulum deinceps die 16. Octob. plane ſubſtitit. Igitur motum Penduli talem ſuppoſuit, qualis diebus obſeruationem praecedentibus inuentus fuit. Pro immerſione quidem I. Satellitis inter meam et Cel. *Rumovski* obſeruationem valde magnus eſt diſſenſus, interim vix mihi perſuadere poſſum, vt meae obſeruationi error inſit fere duorum minutorum primorum.

EPITO-

EPITOME OBSERVATIONVM METEOROLOGICARVM PETROPOLI ANNO MDCCLXXIV.

SECVNDVM CALENDARIVM CORRECTVM INSTITVTARVM.

Auctore
IOANNE ALBERTO EVLER.

I. Barometrum.

1. Barometri altitudines maximae, minimae et mediae, vna cum variatione maxima et ſtatu medio, pro ſingulis menſibus anni 1774.

	Altitudo maxima		Altitudo minima		Variatio	Medium	Altitudo media
Menſe	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	die hora	Dig. p. c.	Dig. p. c.	Dig. p. c.
Ianuar.	28. 24	31. ante merid.	26. 98	19. VI. a. m.	1. 26	27. 61	27. 78
Februar.	28. 45	4. meridie	27. 30	6. XI p. m.	1. 15	27. 87	27. 84
Mart.	28. 78	23. IX. a. m.	27. 53	2. VI. a. m.	1. 25	28. 15	28. 20
April.	28. 69	9. III. p. m.	27. 76	25. VI. a. m.	0 93	28. 22	28. 27
Maii	28. 70	11. IX a. m.	27. 70	17 VI. a m.	1. 00	28. 20	28. 27
Iunii	28. 39	2. VI. p. m.	27. 68	12. X. a. m.	0. 71	28. 04	28. 07
Iulii	28. 54	27. II. p. m.	27. 82	18. IX a m	0. 72	28. 18	28. 07
Auguſt	28. 59	20 meridie	27. 68	4. VI. a. m.	0. 91	28. 14	28. 15
Sept.	28. 57	25. IX. a. m.	27. 75	9. VI. a. m.	0. 82	28. 16	28. 28
Octobr.	28. 78	29. poſt merid.	27. 43	13. VI. a. m.	1. 35	28. 10	28. 13
Nouembr.	28. 78	27. III. p. m	27. 67	16. V. a. m.	1. 11	28. 22	28. 14
Decembr.	29. 21	8. poſt merid.	27. 50	23. VI. a. m.	1. 71	28. 35	28. 33
Anno 1774.	29. 21	Menſe Decembris	26. 98	Menſe Ianuarii	2. 23	28. 10	28. 13

2. Nu-

2. Numerus dierum quibus altitudo Barometri ſuperabat terminos quosdam circa altitudinem 28. poll.

Menſe	ſupra 28. 10 Dies, horae	ſupra 28. 05 Dies, horae	ſupra 28. 0 Dies, horae	ſupra 27. 95 Dies, horae	ſupra 27. 90 Dies, horae	per dimidium menſis ſupra Dig. p. c.
Ian.	2. 18	3. 3	3. 12	6. 21	10. 6	27. 83
Febr.	5. 15	7. 12	8. 15	9. 18	11. 0	27. 82
Mart.	19. 0	20. 15	21. 6	22. 18	24. 18	28. 20
April.	23. 3	24. 9	25. 9	26. 12	28. 21	28. 28
Maii	25. 15	27. 9	28. 0	28. 12	28. 21	28. 29
Iunii	14. 3	18. 15	21 18	23. 12	24. 15	28. 08
Iul.	9. c	13. 18	21. 9	23. 3	27. 12	28. 04
Aug.	17. 3	18. 18	21. 9	24. 6	26. 18	28. 15
Sept.	25. 3	26. 18	27. 9	27. 21	28. 3	28. 31
Oct.	17. 12	18, 18	21. 18	22. 6	23. 9	28. 15
Nou.	14. 15	15. 15	18. 0	20. 12	22. 0	28. 08
Dec.	20. 18	21. 18	22. 18	23. 18	25. 3	28. 28
Anno 1774	194. 3	217. 0	241. 3	259 15	281. 6	28. 13

Duae priores figurae altitudinum barometricarum pollices integros deſignant, quorum duodecim pedem regium pariſinum conſtituunt, poſteriores vero partes centeſimas vnius pollicis. Tum vero monendum eſt a. m. ſignificare *ante meridiem*, p. m. vero *poſt meridiem*.

Colligitur ex his binis tabulis, pro toto anno.

1. Altitudo maxima barometri 29. 21: menſe Decembris die 8. per horas pomeridianas, a meridie vsque ad mediam noctem. Thermom. Delisl. 161. Coelum obductum. Vent. N—O.

2. Al-

2. Altitudo minima barometri 26. 98: menſe Ianuatii die 19. hora 6 mane. Thermom. Delisl. 149. Coelum obductum, et ventus vehementiſſimus ex regione S.

3. Variatio maxima 2. 23 vel $2\frac{23}{100}$ pollicum.

4. Medium inter maximam altitudinem et minimam 28. 10.

5. Altitudo Barometri media inter omnes obſervatas, ſiue ſumma omnium altitudinum per numerum earum diuiſa 28. 13 prorſus vti anno praecedente 1773. inuenta fuit.

6. Ex ſecunda tabula patet, mercurium in tubo barometri ſe ſuſtentaſſe ſupra

$28\frac{10}{100}$ poll. per dies $194\frac{1}{8}$
$28\frac{5}{100}$ poll. per dies 217
28 poll. per dies $241\frac{1}{8}$
$27\frac{95}{100}$ poll. per dies $259\frac{1}{8}$ et ſupra
$27\frac{90}{100}$ poll. per dies $281\frac{1}{4}$.

Vnde concluditur mercurium ſe ſuſtentaſſe per interuallum dimidii anni vel $182\frac{1}{2}$ dierum ſupra altitudinem $28\frac{13}{100}$ poll. quae altitudo ergo prorſus conuenit cum media. Comparatione autem inſtituta cum concluſionibus, quae ex obſeruationibus praeteritis duobus annis 1772 et 1773. factis erutae fuerunt, deprehendimus ſtatum barometri hoc 1774. anno multo quidem altiorem fuiſſe illo 1772 anni, paulo vero inferiorem proxime praecedenti 1773 anni.

Caeterum animaduertere hic libet, altitudinem Barometri maximam pro hoc 1774 anno, prorfus et omnium maximam fuiſſe, quae hucusque Petropoli obſeruatae fuerunt.

Sequuntur iam obſeruationes nonnullae deſcenſuum et aſcenſuum Barometri ſubitaneorum.

Menſe Ianuario.

d. 15. hora 9. p. m. 28. 14
d. 17. hora 4. a. m. 27. 55.

Ergo interuallo temporis 31 horarum, deſcendit barometrum $\frac{59}{100}$ poll. Coelum nubibus obductum, nix copioſa et ventus ex oriente.

d. 17. hora 9. p. m. 27. 74
d. 19. hora 6. a. m. 26. 98.

Hinc per tempus 33 horarum, inſuper barometrum deſcendit $\frac{76}{100}$ poll. Coelum obductum, nix copioſa et procella e regione N—O, tum vero e S—O

d. 19. hora 6. a. m. 26. 98
d. 20. hora 6. a. m. 27. 64.

Conſequenter tempore 24 horarum barometrum iterum aſcendit $\frac{66}{100}$ poll. Coelum nubiloſum et procella primo e meridie tum vero ex occidente.

Menſe Februario.

d. 4. meridie 28. 45
d. 5. hora 9. p. m. 27. 38.

Deſcendit igitur mercurius in tubo barometri inter-

vallo

vallo 33 horarum, per ſpatium $1\frac{7}{100}$ poll. Coelum obductum, nix et procella e S—W.

d. 14 hora 3. p. m. 28. 32

d. 15. hora 7. p. m. 27. 65.

Interuallo ergo 28 horarum deſcendit mercurius in barometro per $\frac{67}{100}$ poll. Coelum plane obductum, nix copioſa et ventus e regione S—W.

d. 23. hora 3. p. m. 28. 17

d. 25. hora 9. a. m. 27. 46.

Hinc tempore 42 horarum deſcenſus fuit $\frac{71}{100}$ poll. Coelum obductum, nix et procella ex occidente.

Menſe Aprili.

d. 7. hora 6. a. m. 28. 00

d. 8. hora 6. a. m. 28. 55.

Per interuallum temporis 24 horarum aſcendit barometrum per $\frac{55}{100}$ poll. Coelum ſerenum et ventus lenis ex N—O. Tum porro aſcendit mercurius et die 9 hora 3. p. m. attigit altitudinem 28. 69

d. 16. hora 2. p. m. 28. 60

d. 18. hora 4. p. m. 27. 89.

Tempore igitur 50 horarum deſcendit mercurius in barometro per ſpatium $\frac{71}{100}$ poll. Coelum plane obductum. Pluuia et procella e regione S—O.

Menſe Iulio.

d. 25. hora 6. a. m. 27. 85

d. 27. hora 2. p. m. 28. 54.

Conſequenter interuallo 56 horarum aſcenſus fuit $\frac{69}{100}$ poll. Coelo exiſtente ſereno et vento leniter flante ex occidente.

Menſe Octobri.

d. 1.	hora o. a. m. vel media nocte		28. 24.
d. 2.	hora 6. a. m.		27. 62.
d. 3.	meridie		27. 42.

Ergo per interuallum 30 horarum deſcenſus fuit $\frac{62}{100}$ poll. tum porro leniori gradu deſcendit amplius per ſpatium $\frac{20}{100}$ poll. tempore 30 horarum. Coelum obductum, pluuia et procella e regione S—W

d. 3.	meridie	27. 42
d. 5.	hora 9. p. m.	28. 40.

Interuallo igitur 57 horarum aſcendit barometrum per $\frac{98}{100}$ poll. Coelum obductum, pluuia, nix, boreas

d. 9.	hora 9. a. m.	28. 20
d. 11.	meridie	27. 58.

Tempore ergo 51 horarum deſcendit per $\frac{62}{100}$ poll. Coelum obductum et ventus ex occidente

d. 13.	hora 6. a. m.	27. 43
d. 14.	hora 9. p. m.	28. 05.

Conſequenter tempore 39 horarum aſcendit iterum per $\frac{62}{100}$ poll. Pluuia copioſa et eurus

d. 22.	hora o. a. m. vel media nocte	28. 43
d. 24.	hora 6. a. m.	27. 70.

Hinc

Hinc per interuallum temporis 54 horarum descensus fuit $\frac{71}{100}$ poll. Pluuia cadente et procella spirante ab occidente.

Mense Nouembri.

d. 27. hora 3. p. m. 28. 78
d. 30. hora 6. p. m. 27. 77.

Ergo interuallo temporis 75 horarum, descensus barometri fuit $\frac{101}{100}$ poll. Coelum obductum, nix copiosa, vento leniter spirante primum ab oriente, tum ex regione S—O, denique e septentrione.

Mense Decembri.

Plures obseruati fuerunt descensus et ascensus notabiliores, quocirca malui omnes variationes barometricas hoc mense annotatas in figura hic adiecta repraesentare et ante oculos ponere: vbi etiam pro quauis die altitudinem Thermometri maximam et minimam, id est statum caloris et frigoris, nec non directionem venti et constitutionem coeli adiunxi.

II. Thermometrum.

1. Thermometri altitudines minimae et maximae pro fingulis menfibus anni 1774. fecundum Calendarium Gregorianum.

Menfe	Altitudo minima		Altitudo maxima		Differentia
	Gradus	die hora	Gradus	die hora	Gradus
Ianuar.	190	15. VIII. a. m.	149	19. VI. a. m.	41
Februar.	191	10. VII. a. m.	144	26. II. p. m.	47
Mart.	182	13. VI. a. m.	142	30. II. p. m.	40
April.	171	8. VI. a. m.	124	28. II. p. m.	47
Maii	147	11. VI. a. m.	108	26. II. p. m.	39
Iunii	138	13. VI. a. m.	108	6, 22, 23 II. p. m.	30
Iulii	130	20. VI. a. m.	106	8. II. p. m.	24
Auguft.	139	21. VI. a. m.	113	12. II. p. m.	26
Septembr.	149	26. VI. a. m.	114	5. II. p. m.	35
Octobr.	162	31. VII. a. m	134	10. II. p. m.	28
Nouembr.	185	19. VIII. a. m.	148	2. II. p. m.	37
Decembr.	187	30. VII. a. m.	149	21. IX. p. m.	38
Anno 1774.	191	Menfe Febr.	106	Menfe Iulio	85

De Thermometri conftructione et expofitione, plura in Tomo praecedente horum Commentariorum leguntur; quare hic eadem repetere fuperfluum foret.

2. Sta-

2. Status frigoris et caloris.

Menſe	Dies frigidiores gradibus						Dies calidiores gradibus					
	190	180	170	160	150	140	110	120	130	140	150	160
Ianuar.	1	10	21	30	31	31					1	7
Februar.	1	6	9	13	20	28					15	20
Mart.		2	4	18	30	31					15	28
April.			1	7	18	29			5	14	25	30
Maii						12	1	13	22	31	31	31
Iunii						—	5	19	28	30	30	30
Iulii						—	9	27	31	31	31	31
Auguſt.						—		10	31	31	31	31
Septembr.						20		7	11	24	30	30
Octobr.				2	13	29				12	28	31
Nouembr.		5	16	26	30	30					1	8
Decembr.		4	11	23	31	31					1	15
Anno 1774.	2	27	62	119	173	241	15	76	128	173	239	292

Ex tabula priori intelligitur, per totum annum fuiſſe:

Altitudinem Thermometri minimam, ſeu gradum frigoris maximi 191 grad. Deslisl. menſe Februarii die 10, hora matutina VII^{a}. Barometro tunc temporis momento $27\frac{6}{10}$; Coelo nebuloſo exiſtente et vento leniter flante ex plaga N—W. Hic ergo gradus frigoris maximi multo minor fuit praecedentibus annis; quibus ſcilicet ſemper gradum 200^{um} ſuperauit.

Altitu-

Altitudinem Thermometri maximam, ſeu gradum caloris maximi 106 grad. Deslisl. die 8^{va} menſe Iulii et quidem hora 11^{da} poſt meridiem. Barometrum $28\frac{7}{100}$; coelum ſerenum; malacia. Binis praeteritis annis calor maximus deprehenſus fuit 104 graduum, ideoque paulo maior hoc anno.

Vnde variatio Thermometri maxima per totum annum fuit tantum 85 graduum ſecundum Therm. Deslisl. ideoque 14 grad. minor anno praecedente 1773, et 19 grad. minor anno 1772, vbi obſeruata fuit haec variatio maxima 104 grad.

Per tabulam poſteriorem deprehendimus, hoc anno 1774, fuiſſe dies 173 quibus frigus ſuperabat gradum 150, vel congelationis aquae naturalis; inter quos 119 reperiuntur dies frigidiores gradu 160. et 62 frigidiores gradu 170. Vnde patet hyemem hoc anno quoad durationem multo rigidiorem fuisſe annis praecedentibus, vbi tantum 148 et 144 dies frigidiores gradu 150 enumerabantur, quamquam frigus maximum decem gradibus minus fuit iſtis annis.

Deinde intelligitur ex hac ſecunda Tabula hoc 1774 anno 239 dies fuiſſe calidiores gradu 150, porro 173 dies calidiores gradu 140, inter quos 128 dies fuerunt quibus calor ſuperabat gradum 130 et 76 dies quibus ſuperabat gradum 120. Vnde intelligitur ſummam caloris et hoc anno minorem fuiſſe binis annis praeterlapſis, vbi dies numerabantur 256 et 267, quibus caloris gradus ſuperabat

perabat 150. Haec omnia luculenter patent ex comparatione noſtrae ſecundae tabulae hic traditae, cum illis ſimilibus, quas in Tom. XVIII et XVII. dedimus

Speciatim frigus obſeruatum fuit intra gradus.

		dies
190 et 200	die 15. Ian. et die 10 Februarii	2
180 et 190	die 5. 6. 11–13. 16. 21–23. Ian. die 1. 2. 8. 9. 11. Febr. die 13. 14. Mart. die 18. 19. 25. 27. 28. Nou. et die 5. 13. 27. 30. Decembr. - - - - -	25
170 et 180	die 3. 4. 7–10. 14. 19. 20. 24. 31. Ian. d. 3. 4. 7. Febr. d. 10. 23. Mart. d. 8. Apr. d. 8. 12–17. 20. 22. 24. 26. Nou. et die 10. 11. 12. 17. 24. 26. 29. Dec. -	35
160 et 170	die 1. 2. 17. 18. 25. 27–30. Ian. d. 5. 12. 13. 14. Febr. d. 6–9. 11. 12. 18. 19. 20. 22. 24. 25. 27. 28. Mart. d. 1. 2. 6. 7. 9. 10. Apr. d. 30. 31. Oct. d. 4–7. 9. 10. 11 21. 23. 29. Nou. et die 4. 6–9. 14. 16. 18. 20. 23. 25. 28. Dec. - - - - -	57

Calor autem deprehenſus fuit intra gradus.

		dies
110 et 100	die 26. Maii d. 6. 7. 22. 23. 24. Iun. d. 7–10. 12. 15. 16. 17. 28. Iulii - - - - - -	15

		dies
120 et 110	die 4-8. 23. 24. 25. 27-30. Maii d. 2 — 5. 8. 9. 19. 20. 21. 25. 27-30. Iun. d. 1. 4. 5. 6. 11. 13. 14. 18. 21-27. 29. 30. 31. Iul. d. 1. 8. 10. 11. 12. 24. 28-31. Aug. et die 1 — 7. Sept. - -	61
130 et 120	die 20. 21. 27. 28. 30. April. d. 1. 2. 3. 13—16. 22. 31. Maii d. 1. 10. 13—18. 26. Iun. d. 2. 3. 19. 20. Iul. d. 2—7. 9. 13—23. 25. 26. 27. Aug. d. 8. 9. 10. 19. Sept. - - - - - -	52

III. Ventus et Ventorum Directiones.

	Malacia	Vent lenis	Vent. fortis	Procellosus	Nord	N.-O	Ost	S-O	Sud	S-W	West	N-W	Variabilis
Menfe	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies	dies
Ian.	5	17	6	3	8	8	2	1	1	4	1	4	2
Febr.	1	11	12	4	5	1	—	—	2	5	5	8	2
Mart.	1	18	9	3	5	9	—	—	2	2	2	9	2
Apr.	6	15	5	4	1	9	—	1	2	3	5	8	1
Maii	5	11	11	4	3	1	2	3	5	1	9	3	4
Iunii	10	6	11	3	1	4	2	—	4	1	4	10	4
Iul.	7	12	8	4	2	2	6	2	3	2	5	6	3
Aug.	9	12	7	3	—	1	5	4	6	4	5	4	2
Sept.	2	16	10	2	5	9	3	1	5	3	1	2	1
Oct.	5	8	13	5	7	2	4	2	1	3	6	4	2
Nou.	3	16	9	2	7	9	4	1	—	1	2	4	2
Dec.	2	12	11	6	7	5	1	2	1	1	2	12	—
Anno 1774	56	154	112	43	51	60	29	17	32	30	47	74	25

Vnde

Vnde patet hunc annum non ventoſiorem fuiſſe anno praeterlapſo 1772: minus ventoſum vero anno proxime praecedente 1773: quamquam differentia non ſit ſenſibilis; malaciae obſeruatae fuerunt frequentius menſibus Iunii et Auguſti, ac procellae frequentius deprehenſae fuerunt menſibus Decembris et Octobris.

Porro perſpicitur hoc anno vti et praecedente, maxime regnaſſe ventum e regione N—W, et quidem menſibus Decembris et Iunii; tum vero ventum e plaga N—O, deinde boream et zephyrum.

In ſpecie autem hoc anno procellae flabant e regione.

		dies
Nord	die 21 Martii; die 13 Decembris. - -	2
N—O	die 19 Iulii et die 6 Decembris. - .	2
S—O	die 18 Apr. die 12 Iulii; die 12 Aug.	3
Sud	die 2 Ian. die 18 Febr. die 27 Apr. die 27 Maii die 1 et 7 Sept. - - - -	6
S—W	die 21 et 24 Apr. d. 13 Aug. d. 22 Decembris. - - - - - - -	4
Weſt	die 1 et 19 Ian. d. 5 Febr. d. 17 et 19 Maii; d. 30 Iunii d. 25 Iulii; die 4 Aug. d. 1. 11. 12 et 23 Octobr. d. 8 et 9 Nou. die 19 Decembr. - - - -	15
N—W	die 6 et 24 Febr. die 11 et 14 Mart. die 20 Maii; die 12 et 17 Iunii; die 3 Iulii; die 24 Octobr. die 30 et 31 Dec.	11

IV. Conſtitutio coeli.

Menſe	coelum ſerenum dies	coelum obductum dies	Nebuloſum dies	Pluuia dies	Nix dies
Ianuar.	10	16	6	—	13
Februar.	4	16	5	3	12
Mart.	12	12	6	1	10
April.	13	5	3	8	—
Maii	16	2	2	13	—
Iunii	11	2	3	11	—
Iulii	9	5	5	12	—
Auguſt.	9	6	2	12	—
Septembr.	6	9	3	8	—
Octobr.	2	21	5	15	7
Nouembr.	5	9	3	—	17
Decembr.	1	14	5	—	17
Anno 1774	98	117	48	83	76

Numerus dierum ſerenorum ergo hoc anno multo minor fuit quam annis binis praeterlapſis, vbi eorum 127 et 102 numerabantur. Deinde cum anno praecedente 1773 pluuia per dies 96 et nix per dies tantum 57 cecidit: patet hoc anno numerum dierum quibus pluit paulo minorem et eorum quibus ninxit notabiliter maiorem fuiſſe.

V. Reliqua phaenomena.

Grando decidit diebus 3: die ſcilicet 25 et 28 Septembris, vt et die 28 Decembris.

Toni-

Tonuit 17es; die 8, 24 et 27, Maii, die 5, 6, 8, 9 et 26 Iunii; porro die 7, 9, 10, 12, 15, 16, 17 Iulii, deinde die 12 Auguſti ac denique die 9 Septembris.

Aurorae boreales obſeruatae fuerunt 48; et quidem 21 perlucidae, d. 11 Ian. d. 3 Febr. d. 20, 21, 30 Martii, d. 2, 4, 23 April. die 7 Maii, porro d. 21, 29 Auguſti, d. 10, 18, 24, 25, 30 Sept. d. 18, 28 Oct. d. 3. 7 Nouembr. denique d. 28 Decembris. At 27 aurorae boreales debiliores annotabantur d. 10 Ian. d. 9, 14, 16, 27, 31 Martii; d. 1, 3, 5, 7, 13 Aprilis; d. 1, 2, Maii; d. 11, 13 Aug. d. 11, 13, 27 Sept. d. 2, 8, 14, 20 Octobr. d. 5, 24, 26 Nou. et d. 1, 26 Decembris.

Parhelia obſeruata fuerunt 5; ſcilicet d. 14 Ian. d. 1 Febr. et d. 4, 25, 27 Decembris.

Flumen Neua a glacie liberabatur die 21 Aprilis et die 7 Nouembris vbique glacie obducebatur.

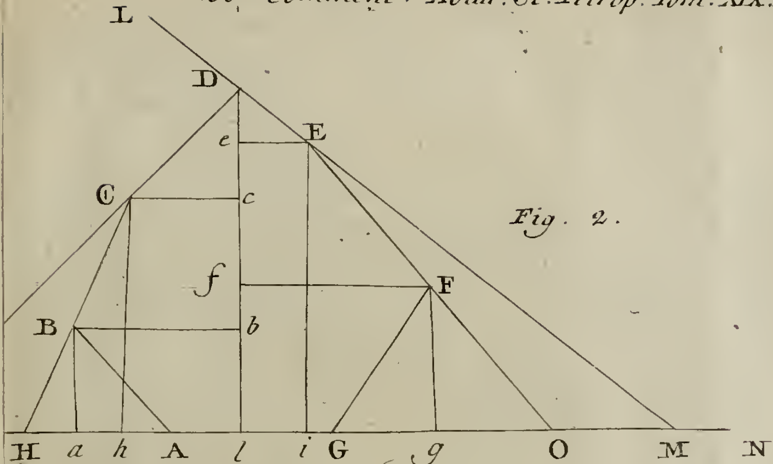


Fig. 2.

Fig. 4.

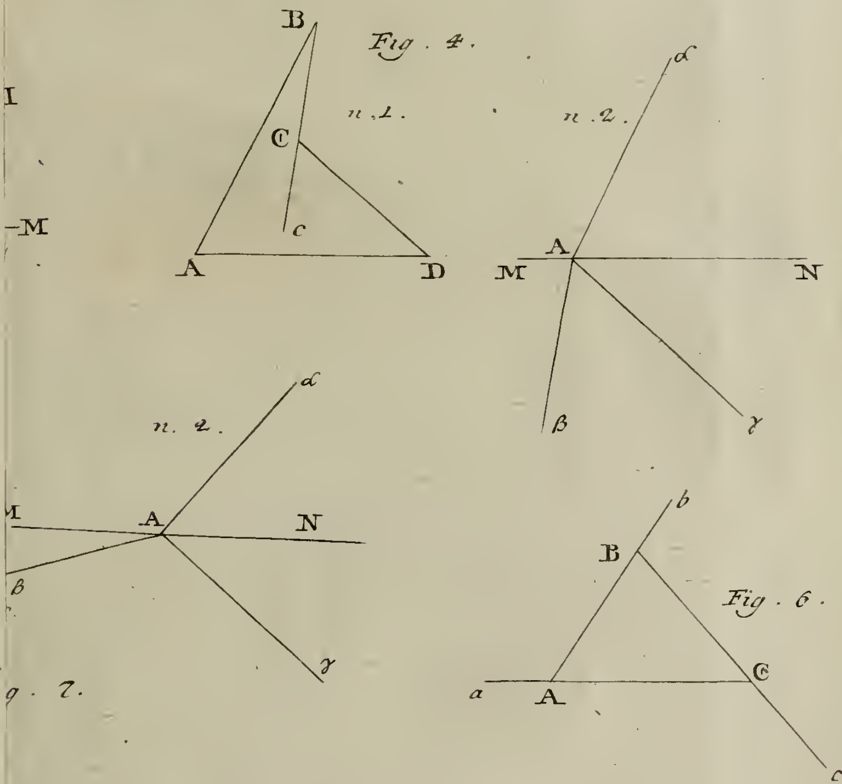


Fig. 6.

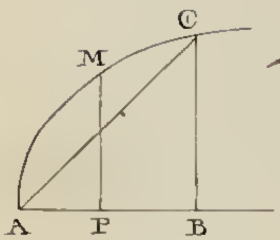


Fig. 1.

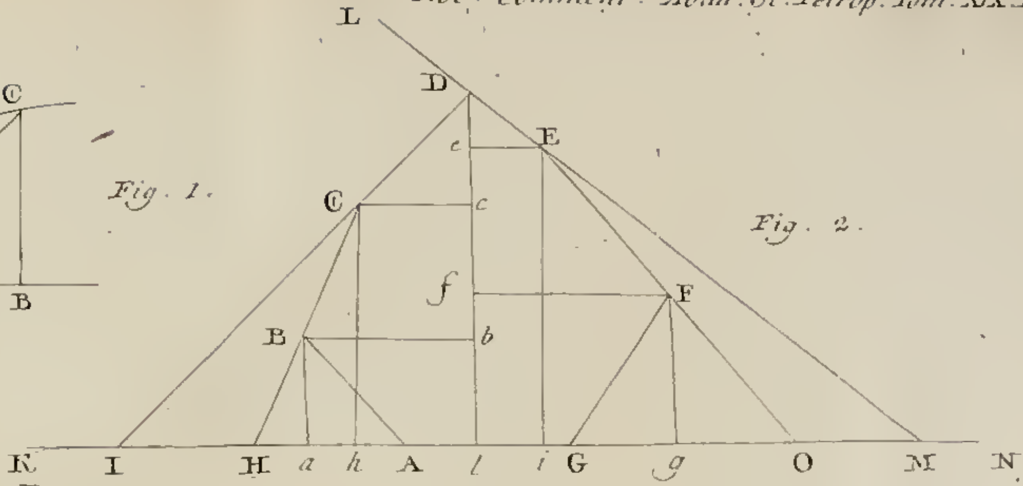


Fig. 2.

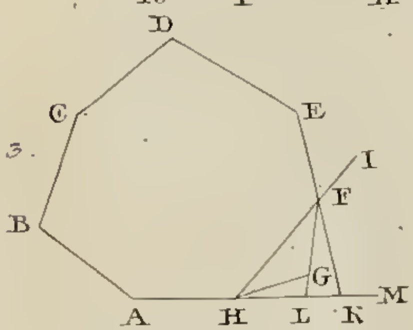


Fig. 3.

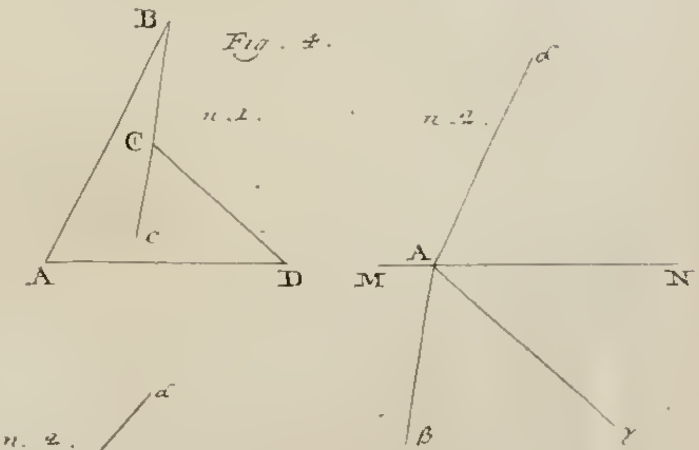


Fig. 4.

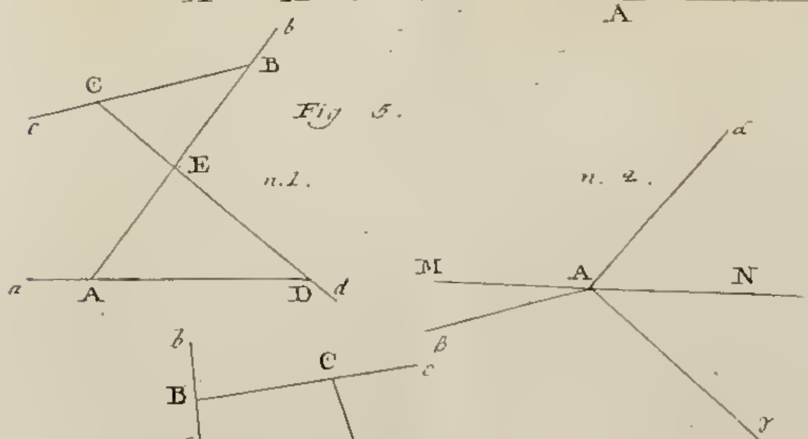


Fig. 5.

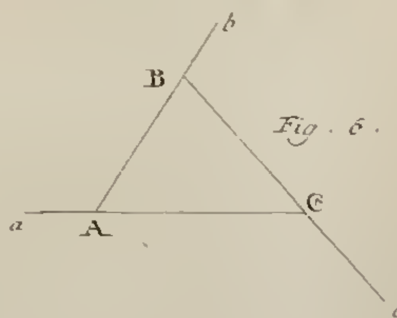


Fig. 6.

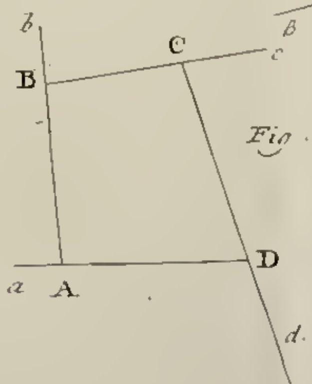


Fig. 7.

Fig. 2.

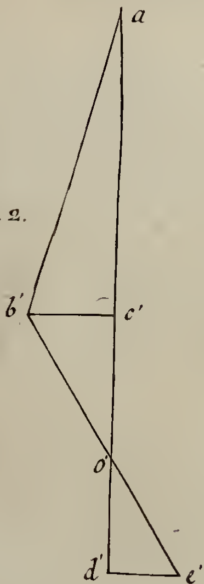
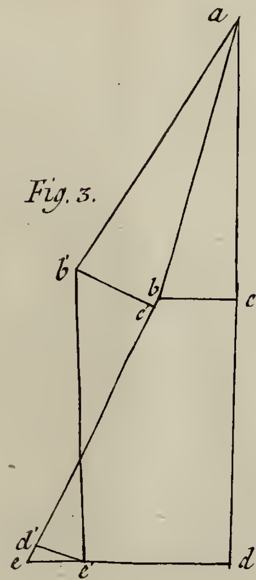


Fig. 3.



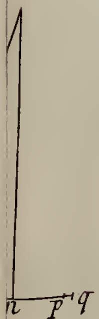
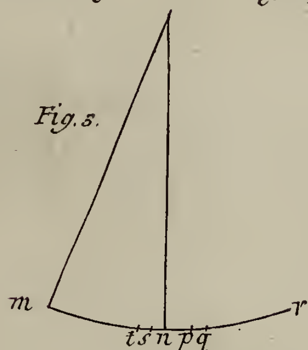


Fig. 5.



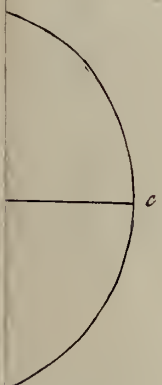
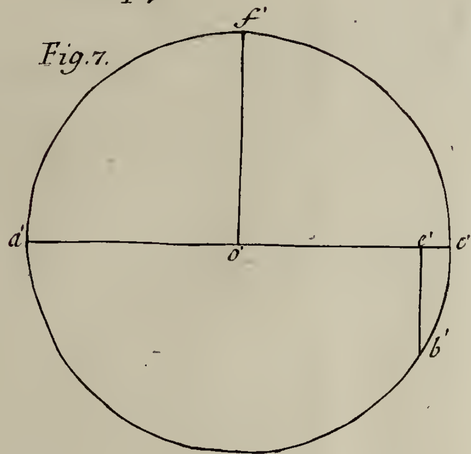


Fig. 7.



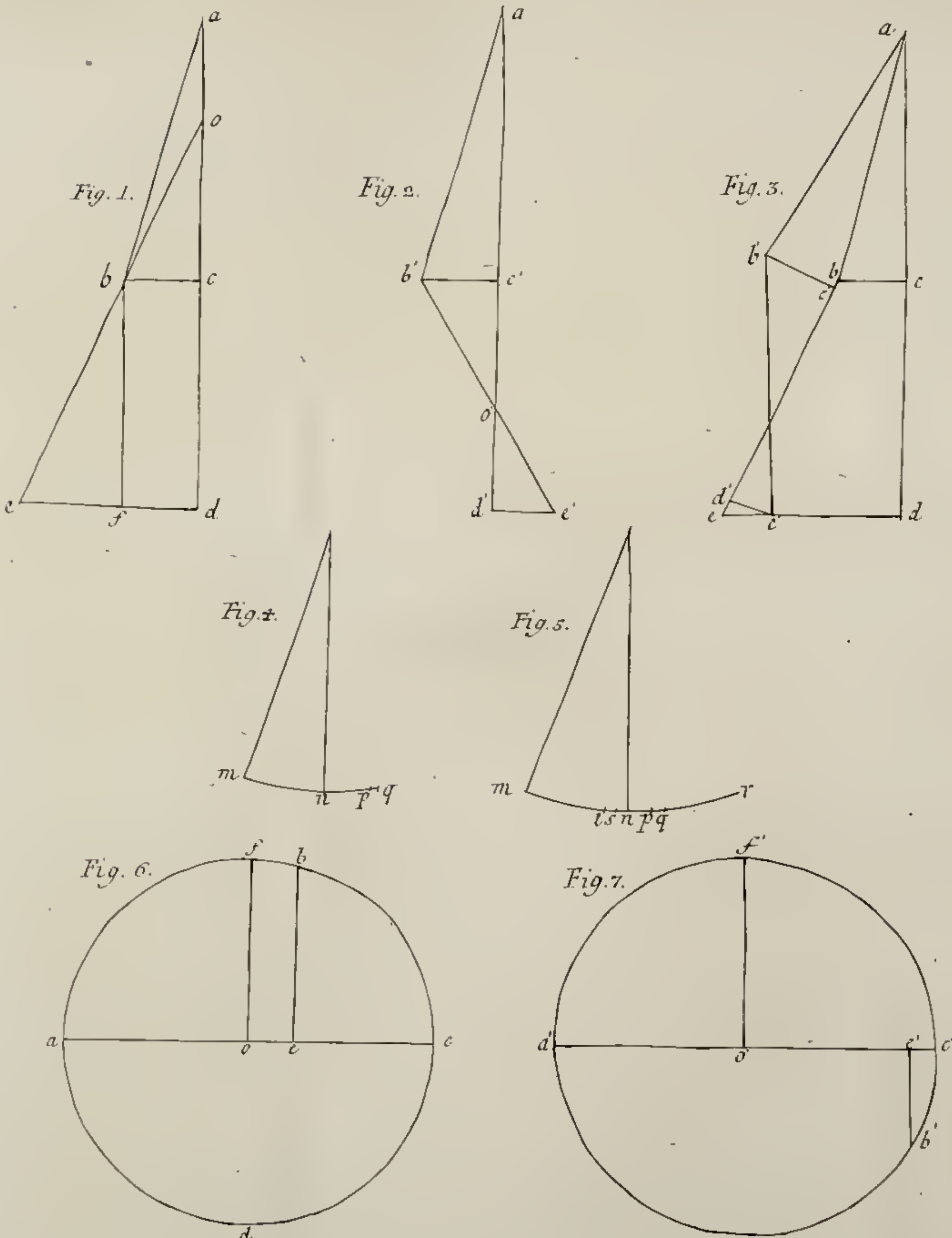


Fig. 1.
a
o
b
c
e
f
d
Fig. 2.
a
b'
c'
o'
d'
e'
Fig. 3.
a
b'
b
c
d'
e
d
Fig. 4.
m
n
p
q
Fig. 5.
m
r
t s n p q
Fig. 6.
f
b
a
o
e
c
d
Fig. 7.
f'
d'
o'
e'
c'
b'

Fig. 2.

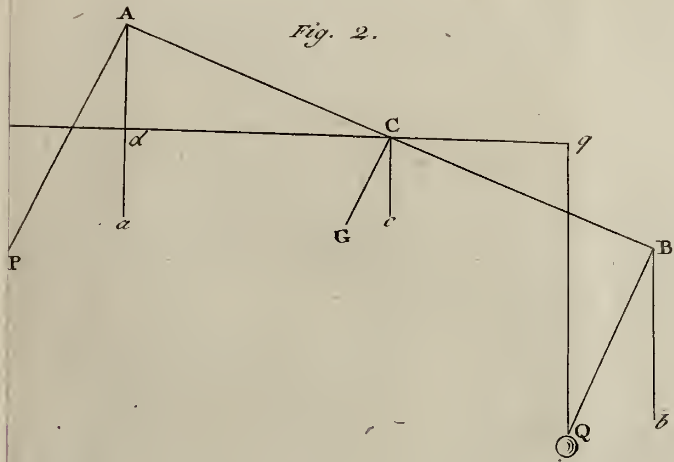


Fig. 4.

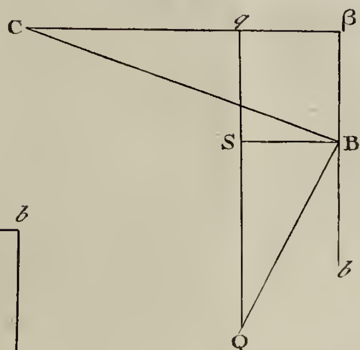


Fig. 5.

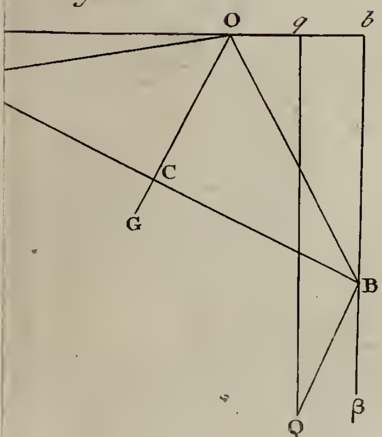


Fig. 1.

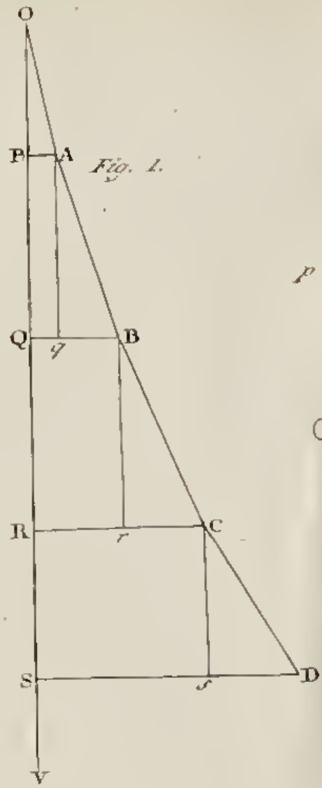


Fig. 2.

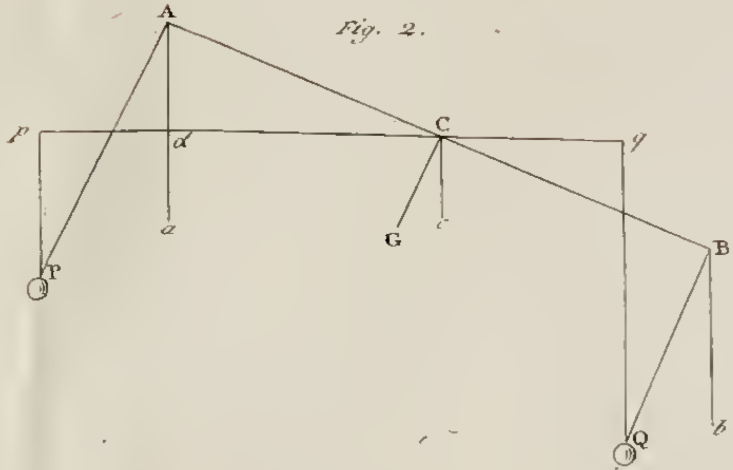


Fig. 3.

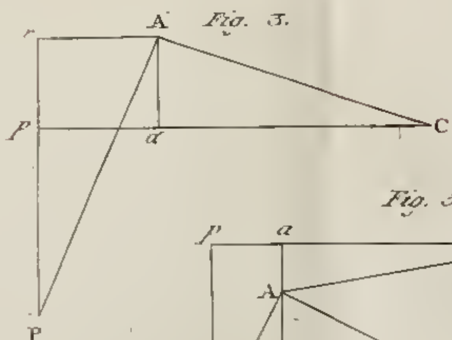


Fig. 4.

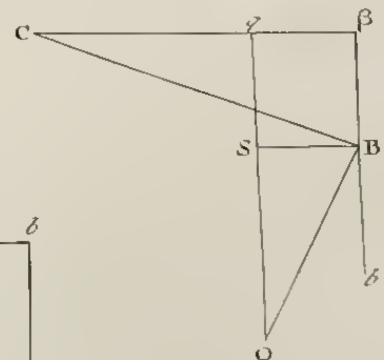
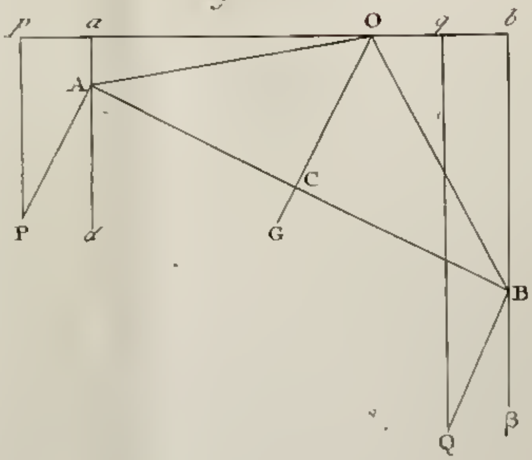


Fig. 5.



Comment. Acad. Sc. Petrop. Tom. XIX. Tab. IV.

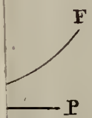


Fig. 2.

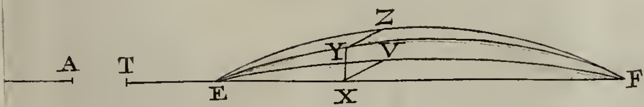


Fig. 3.

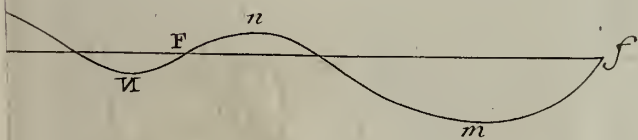


Fig. 4.

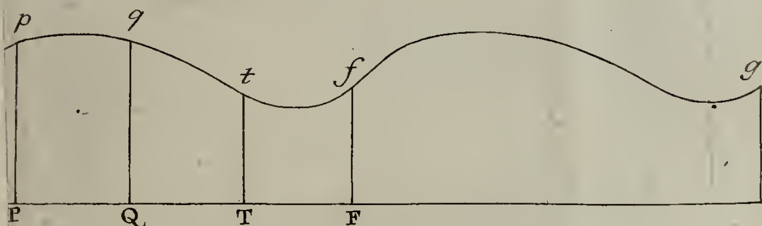


Fig. 5.

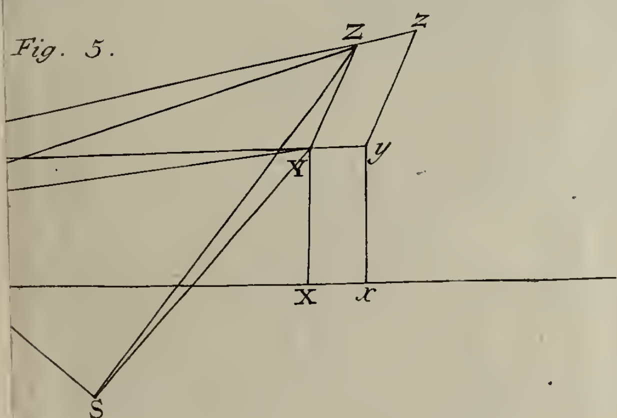


Fig. 1.

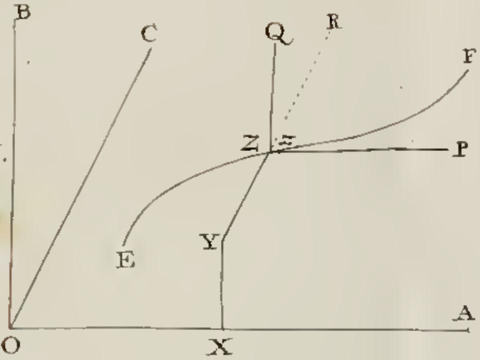


Fig. 2.

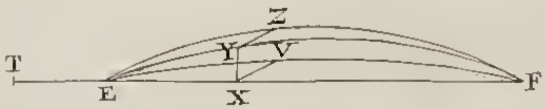


Fig. 3.

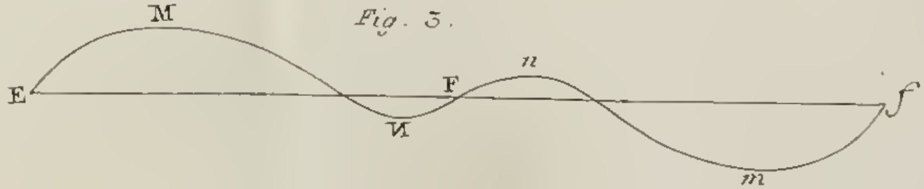


Fig. 4.

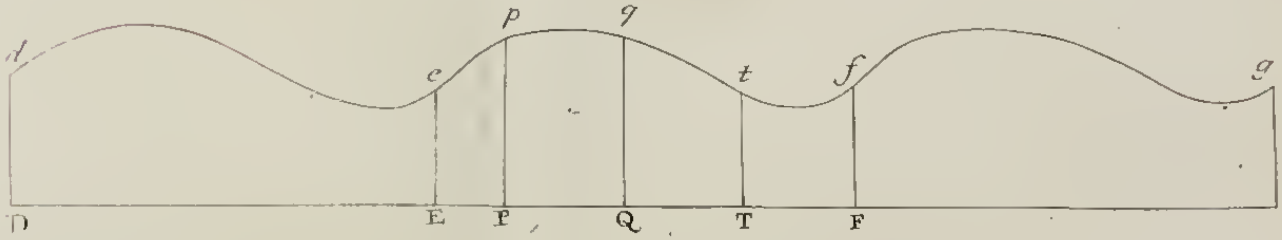
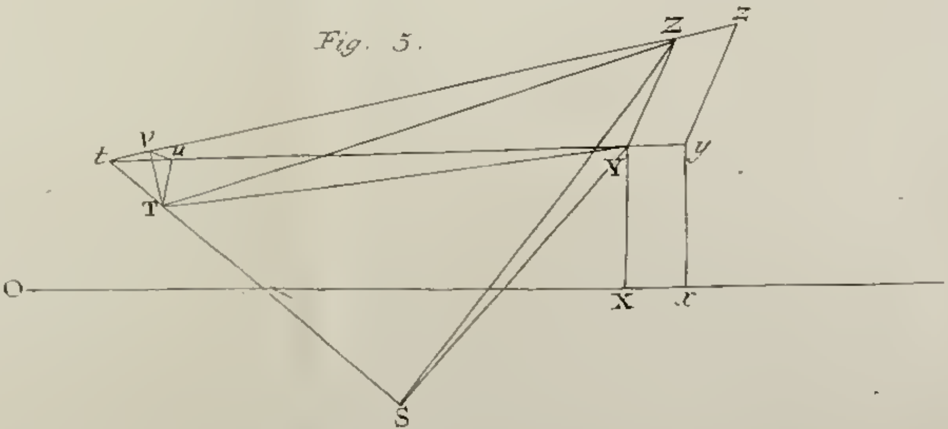
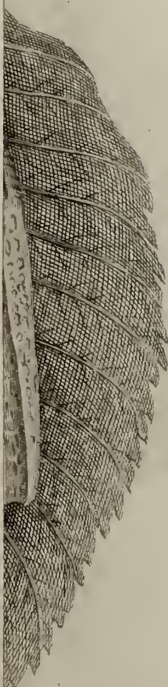
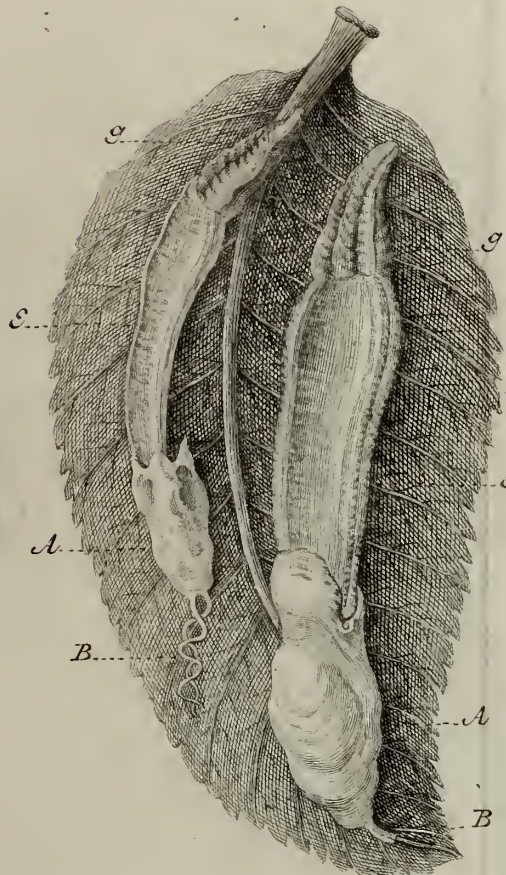


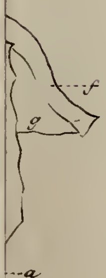
Fig. 5.

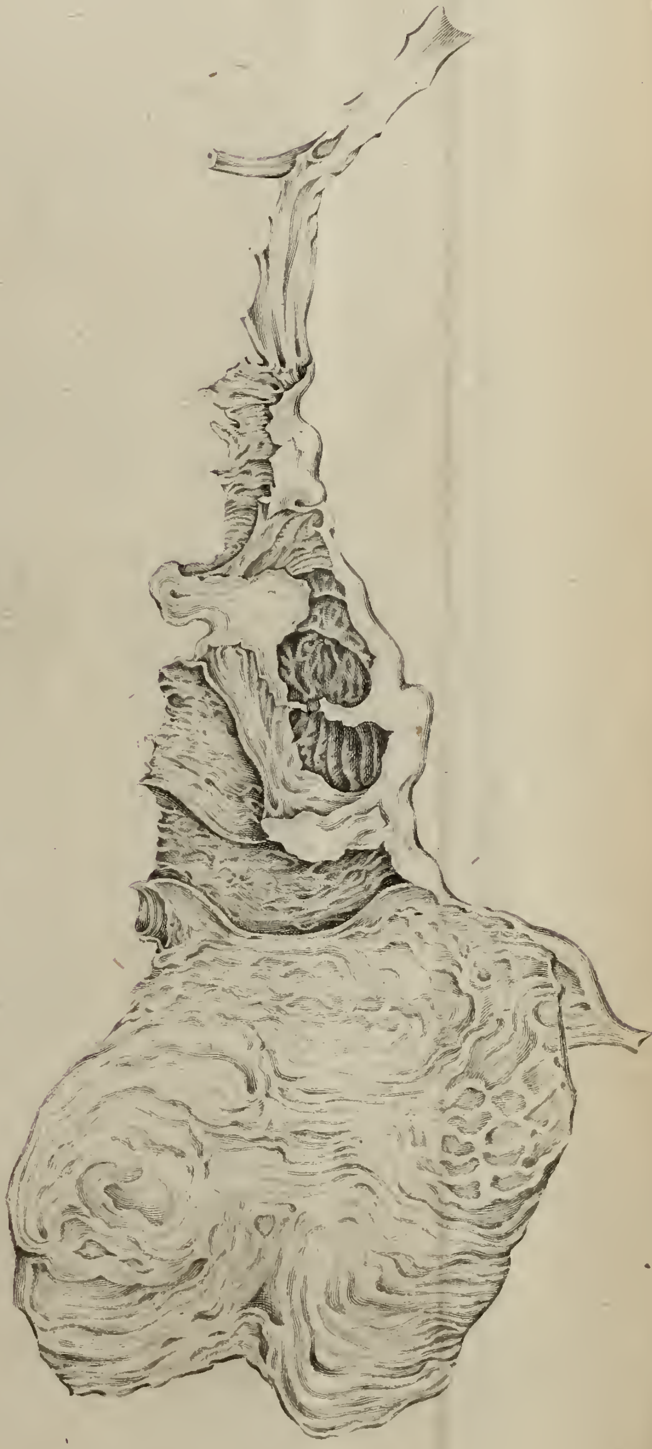




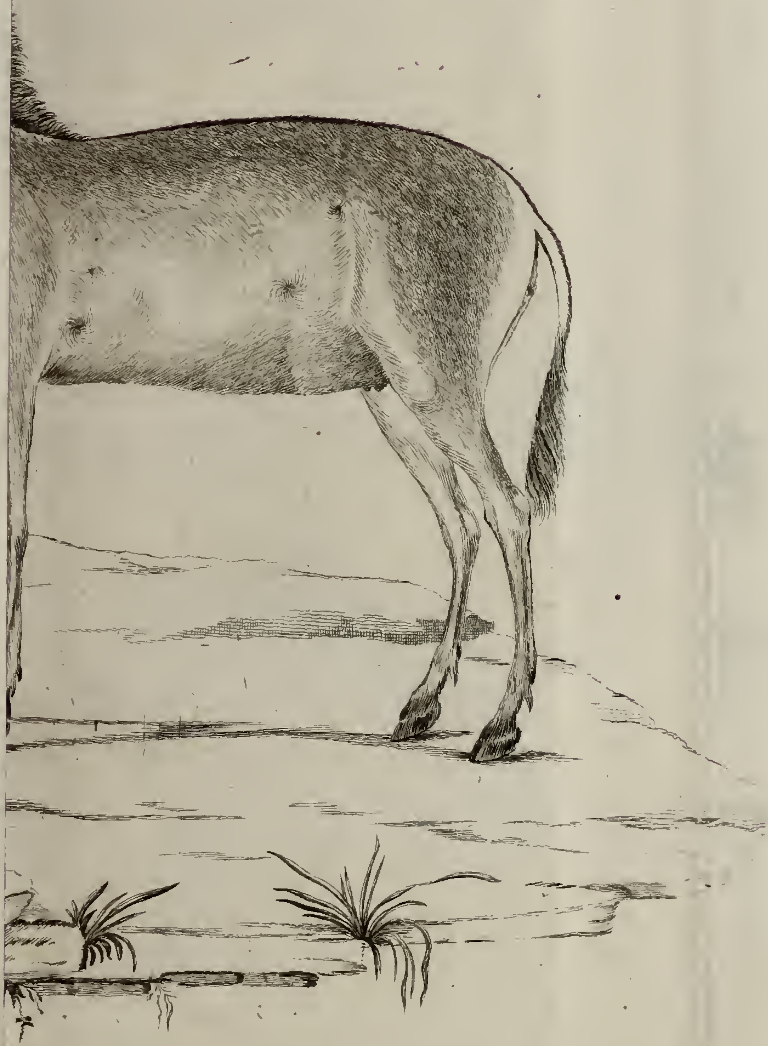

g
g
ε
ε
A
A
B
B


C
C
M
L
I
f
F
g
E
g
E
A
B
A
B


f
g
a

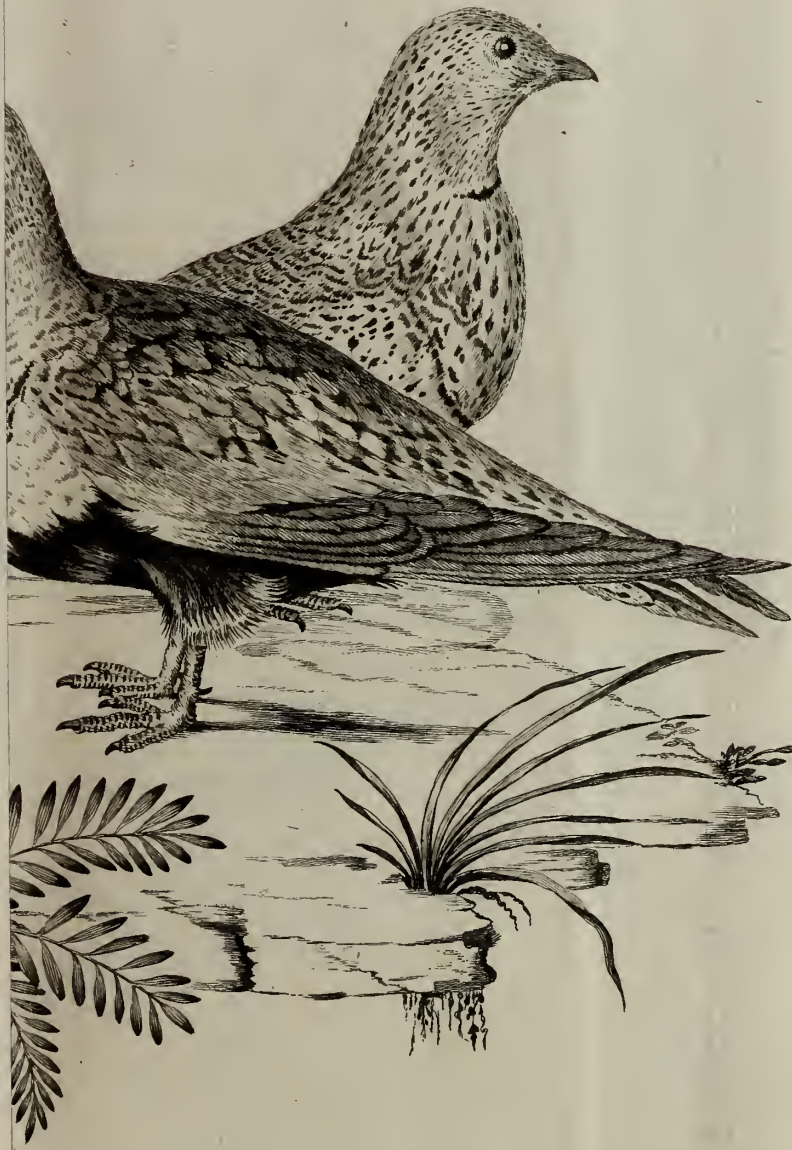


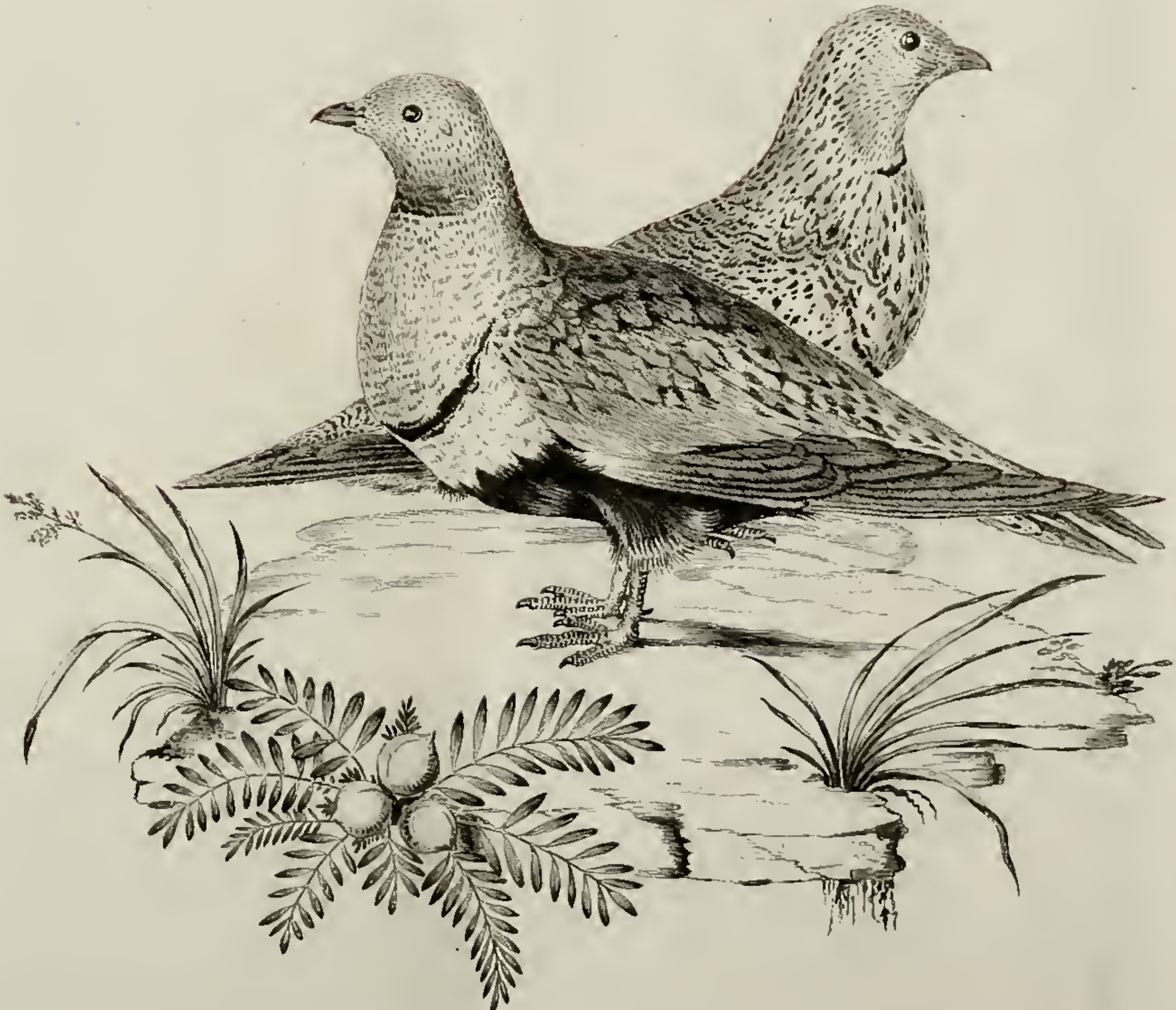

h
i
o
p
k
q
a
q
c
k
n
a
b
v
t
w
s
x
y
z
l
d
D
c
B
A
a
K
C
I
E
b
G
F
O
H
L
M
Q
P
N
T
S
V
c
R
X
b
a
W
m
z
β
γ
δ
α
ζ
f
g
η
λ
a
ϑ
a
λ
ξ
n
λ
n



S Hemionus

EQUUS *Hemionus*





Tetrao Arenaria

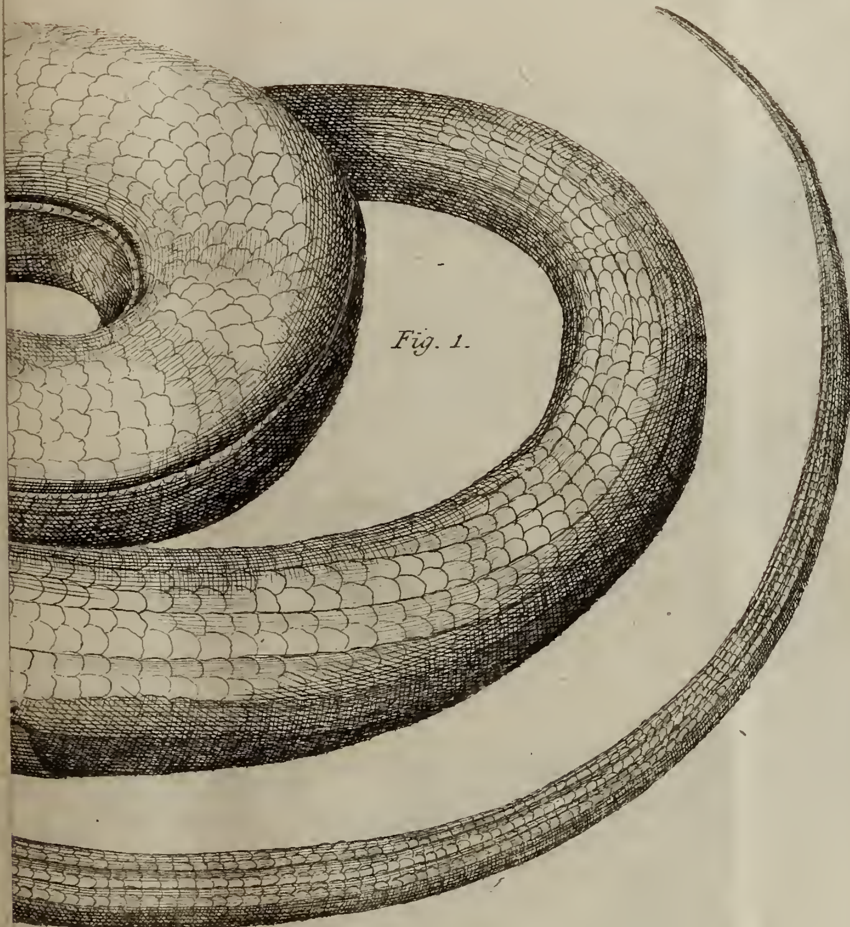


Fig. 1.

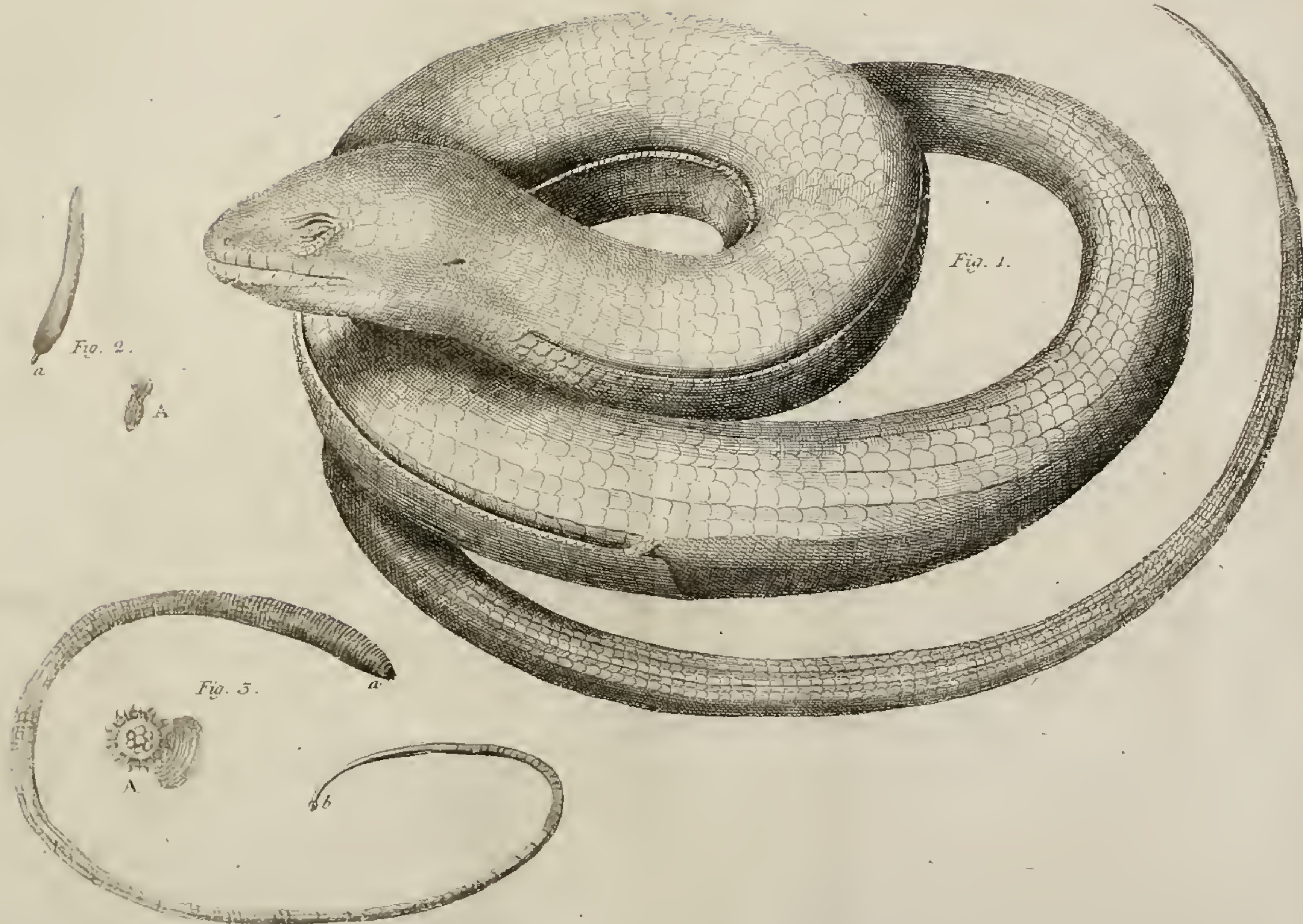


Fig. 1.
Fig. 2.
a
A
Fig. 3.
a
A
b

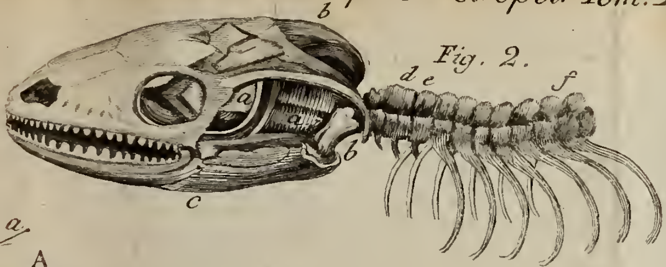


Fig. 2.

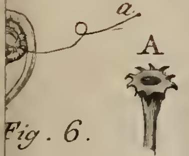
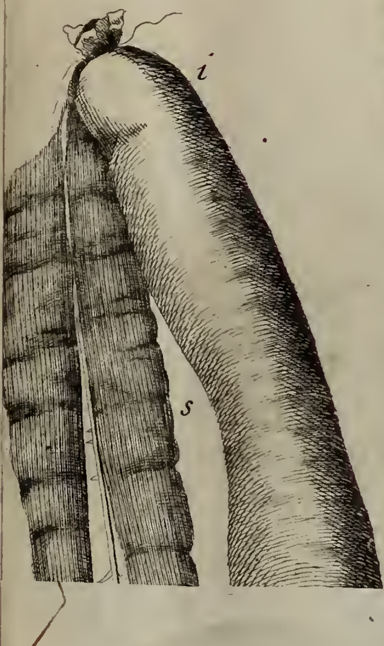


Fig. 6.



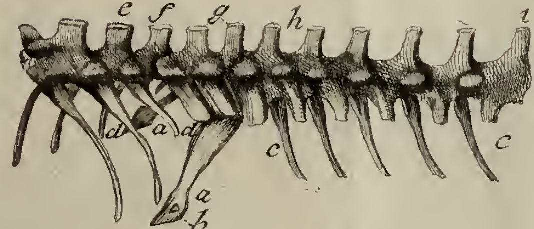


Fig. 3.

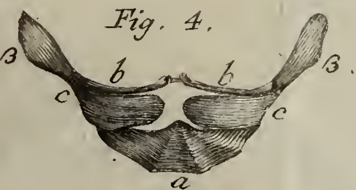


Fig. 4.

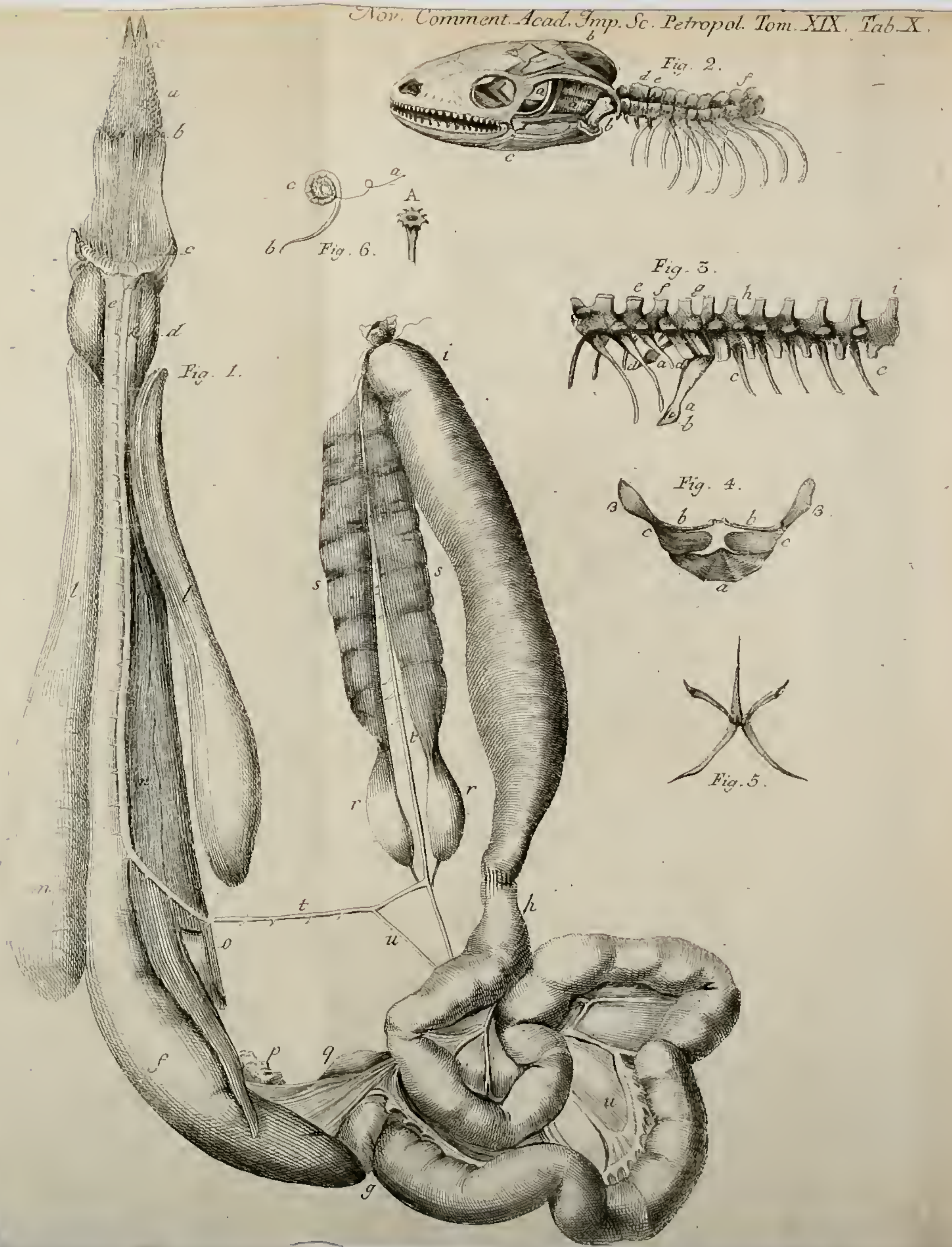
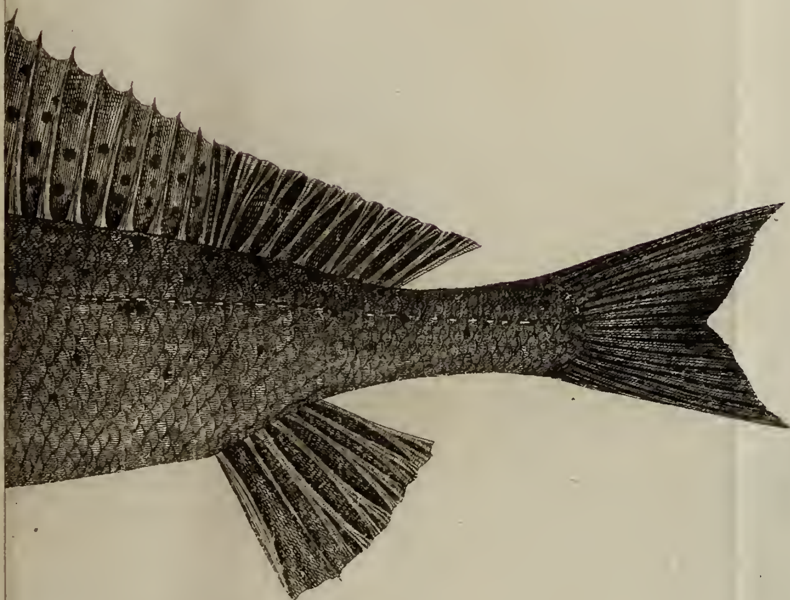
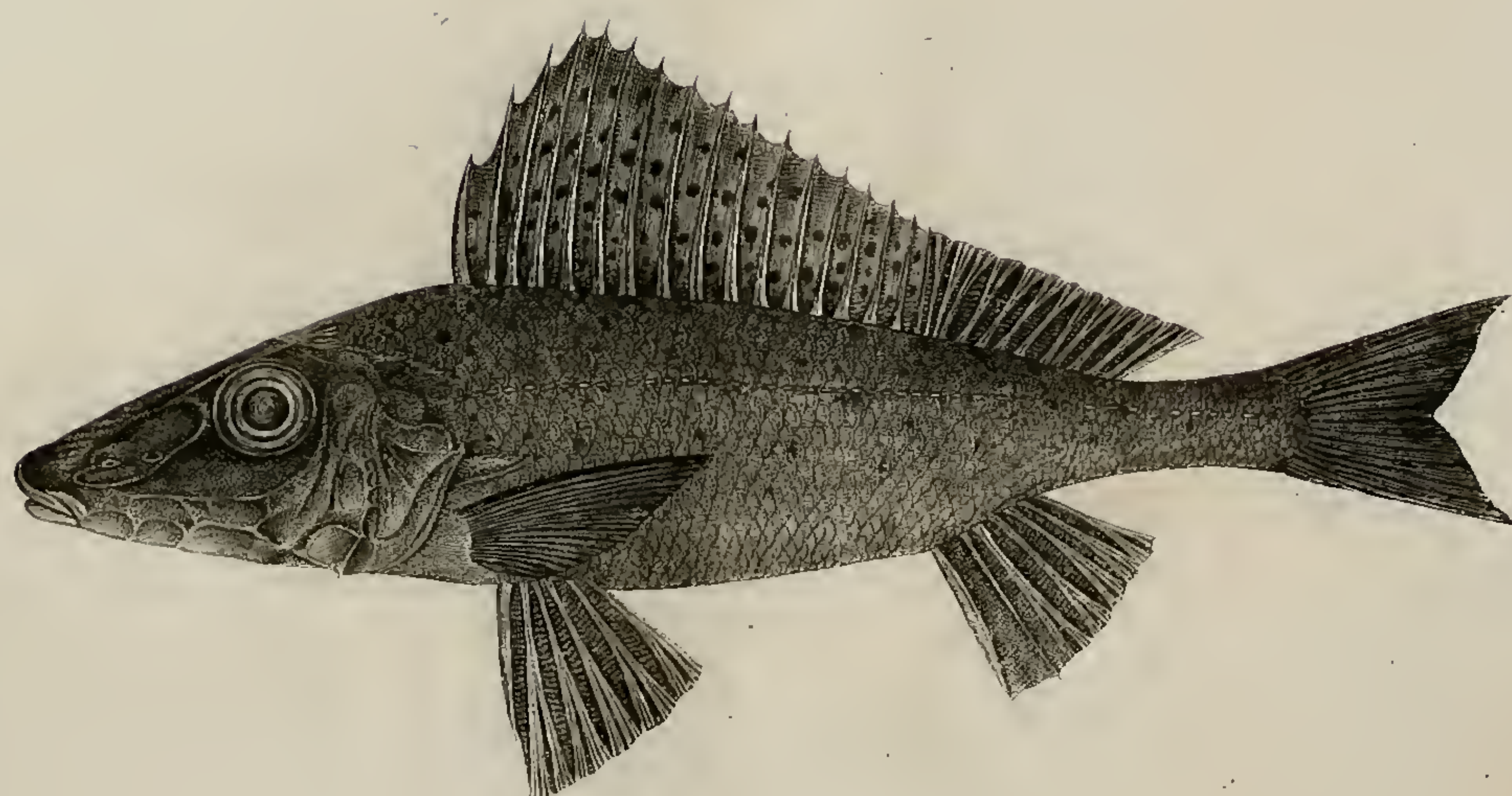
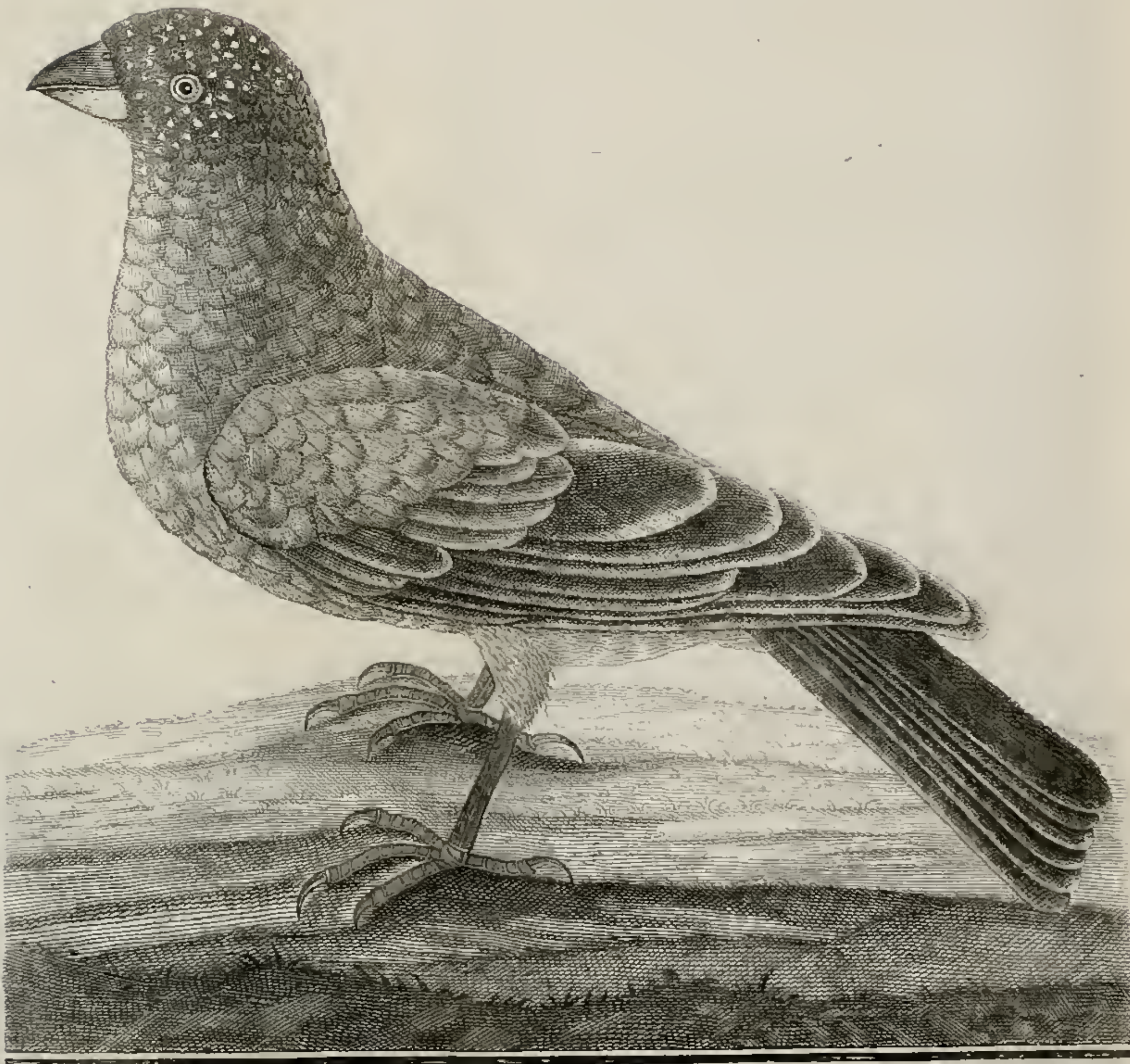
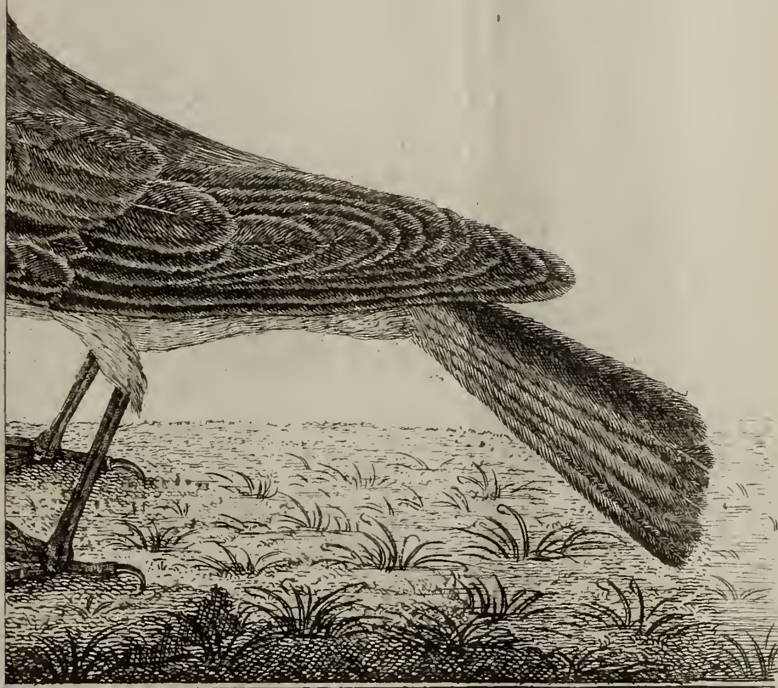


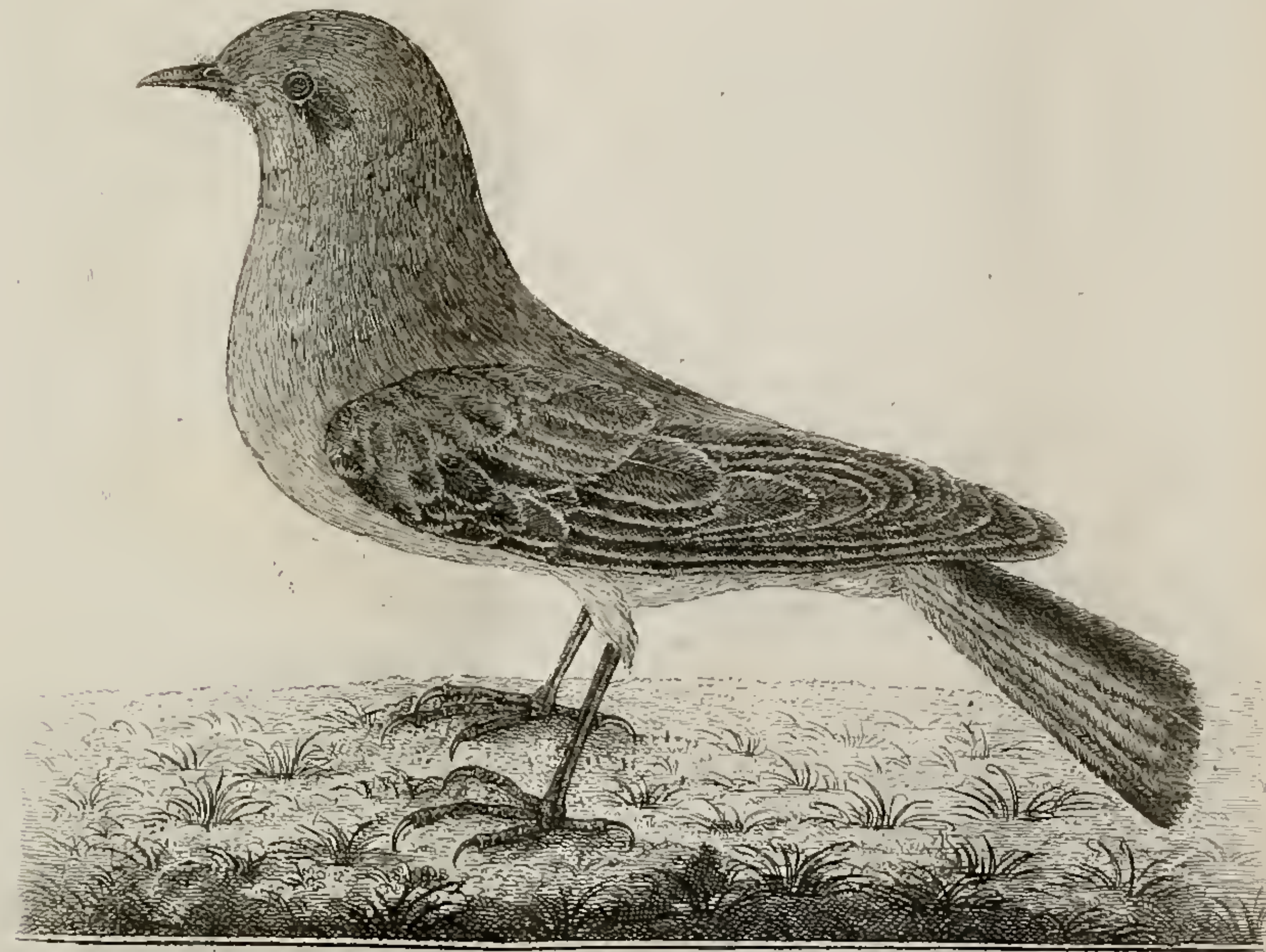
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
A.

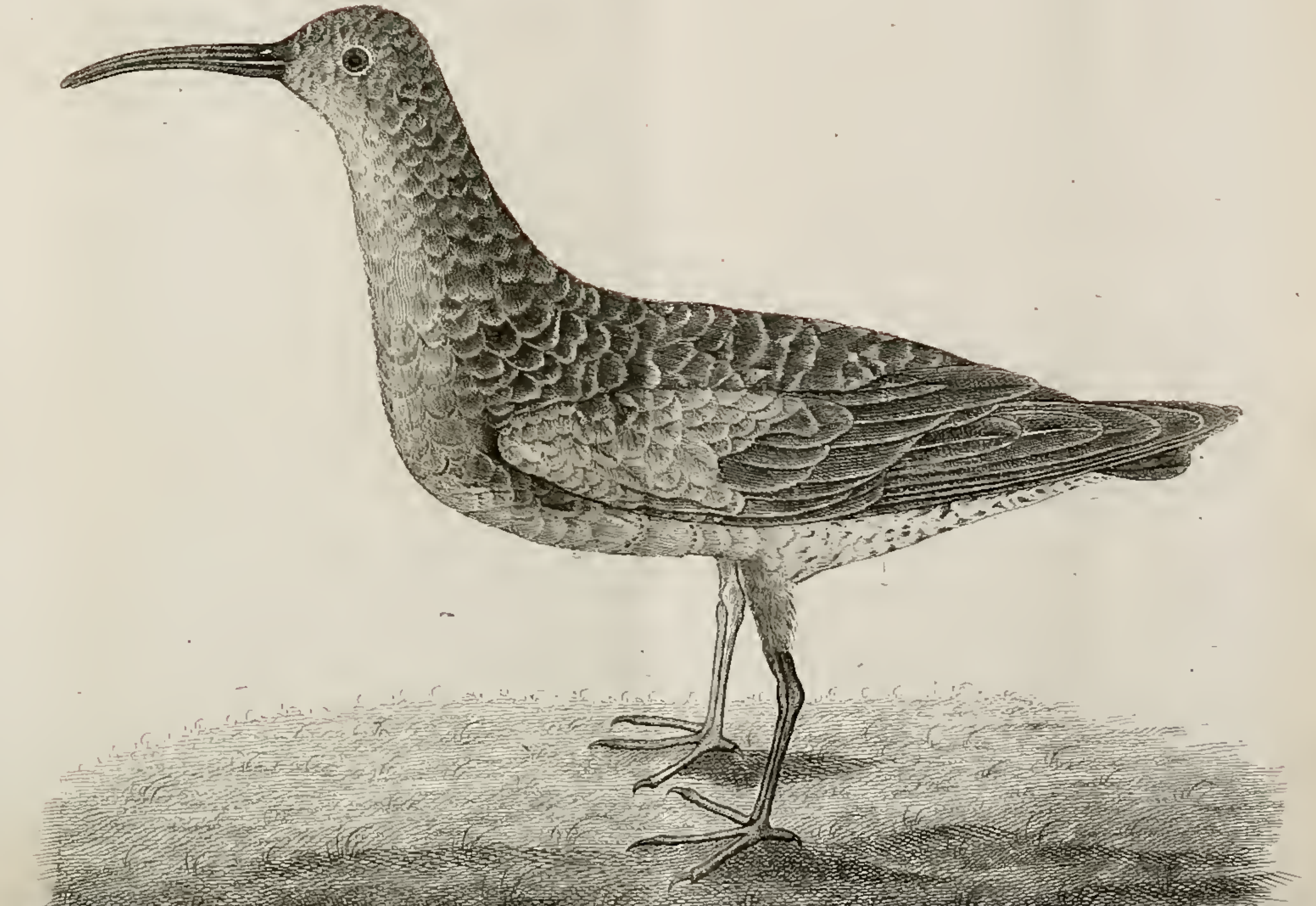


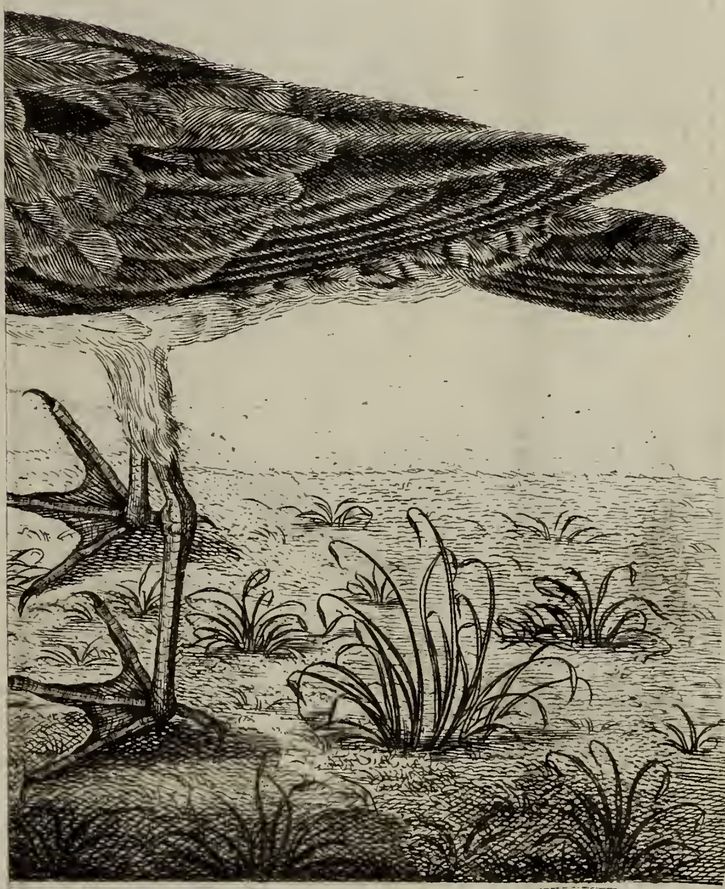


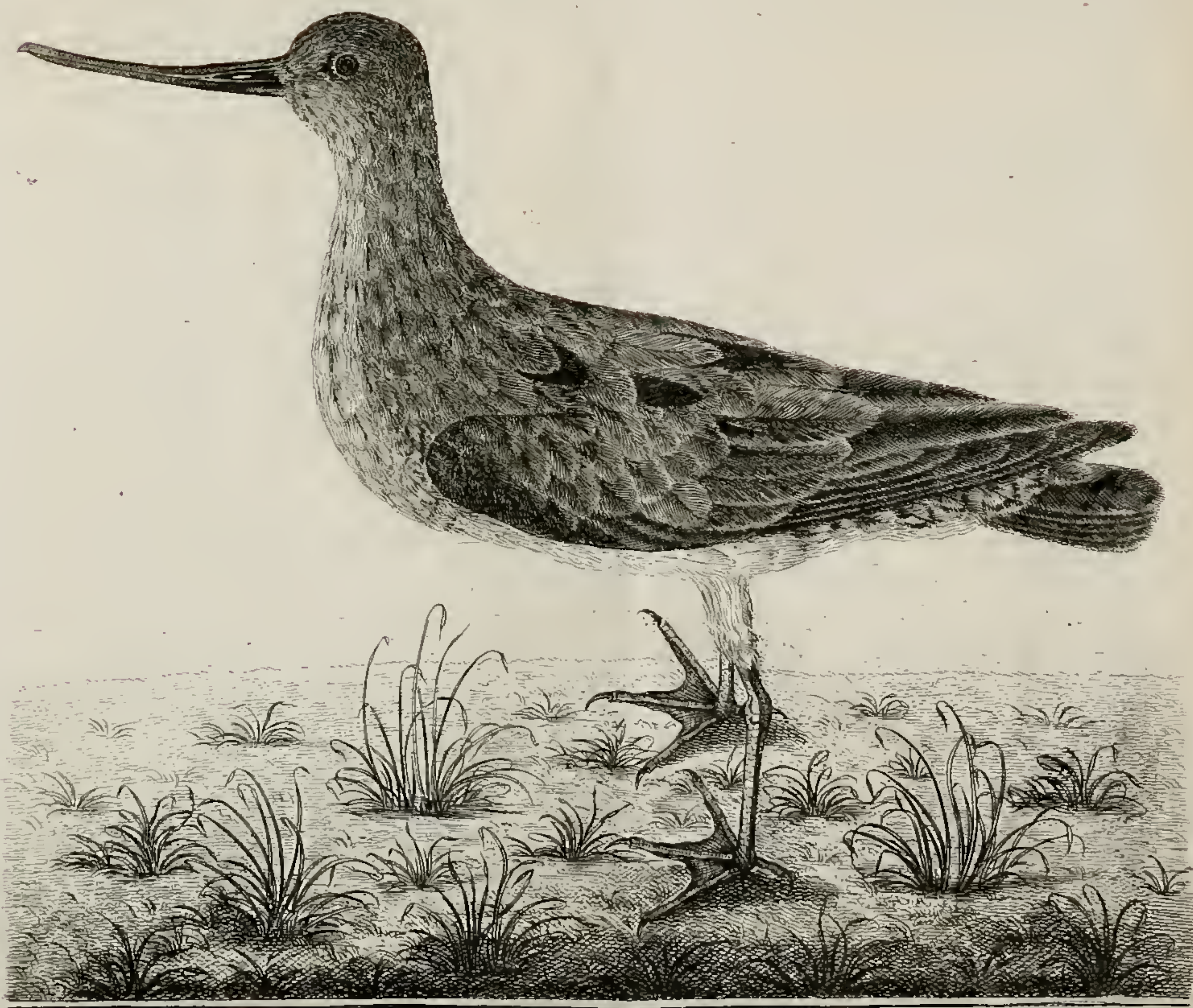


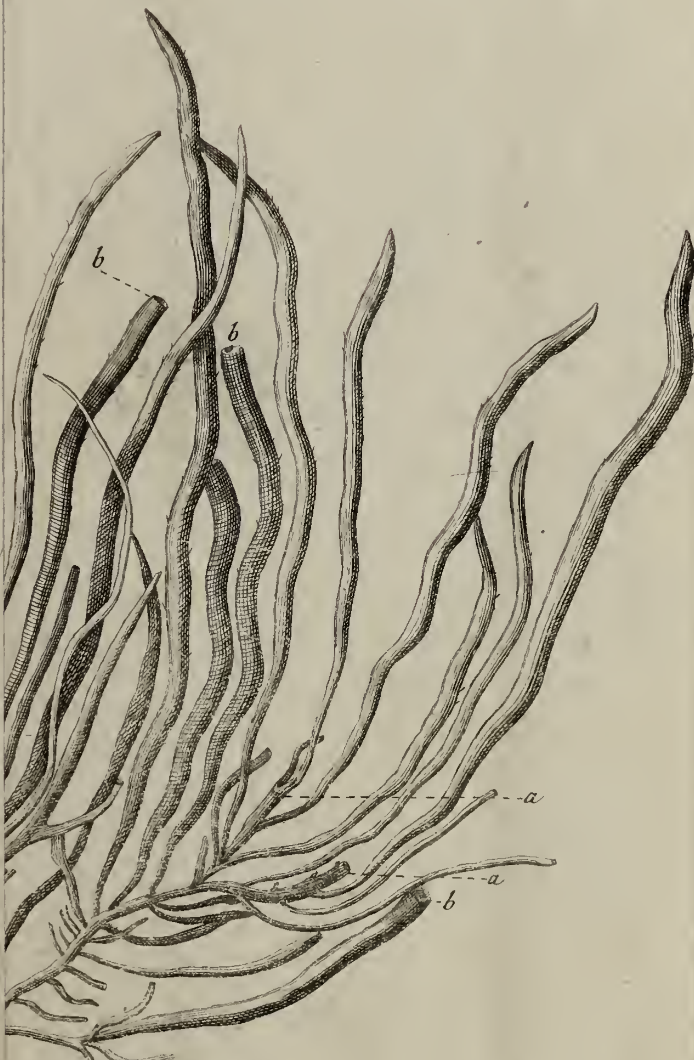


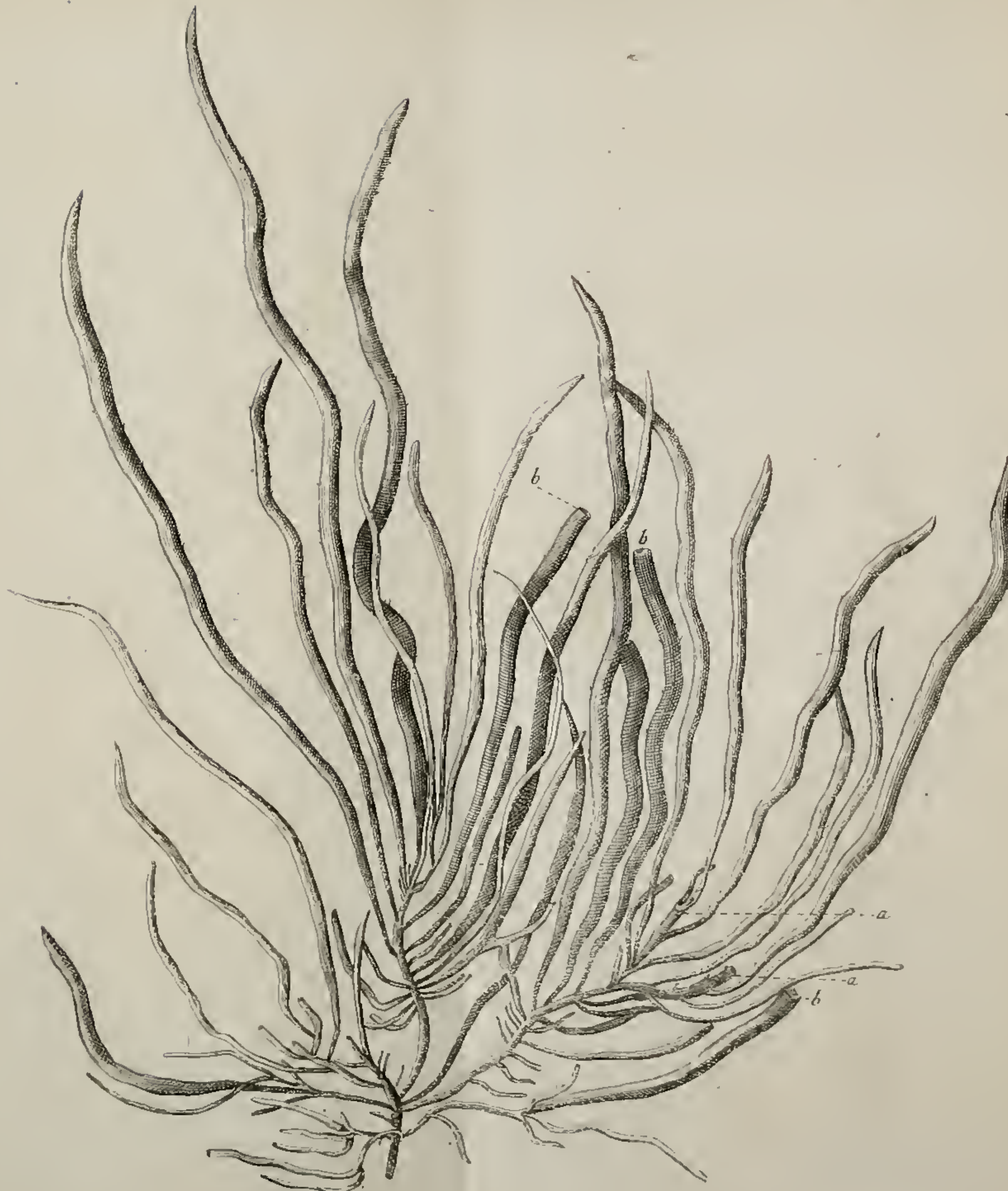






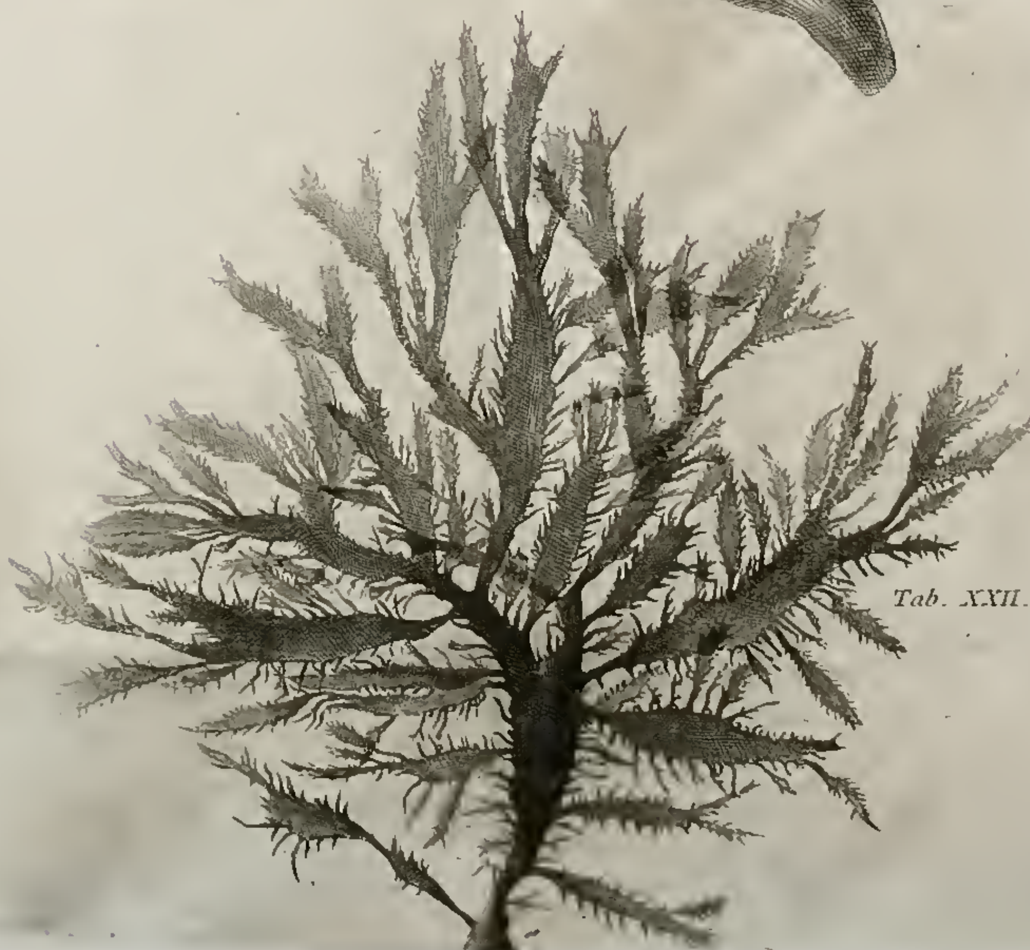



b
b
a
a
b


b
b
a
a
b

a. c.

Tab. XXI.



Tab. XXII.

a.
c.

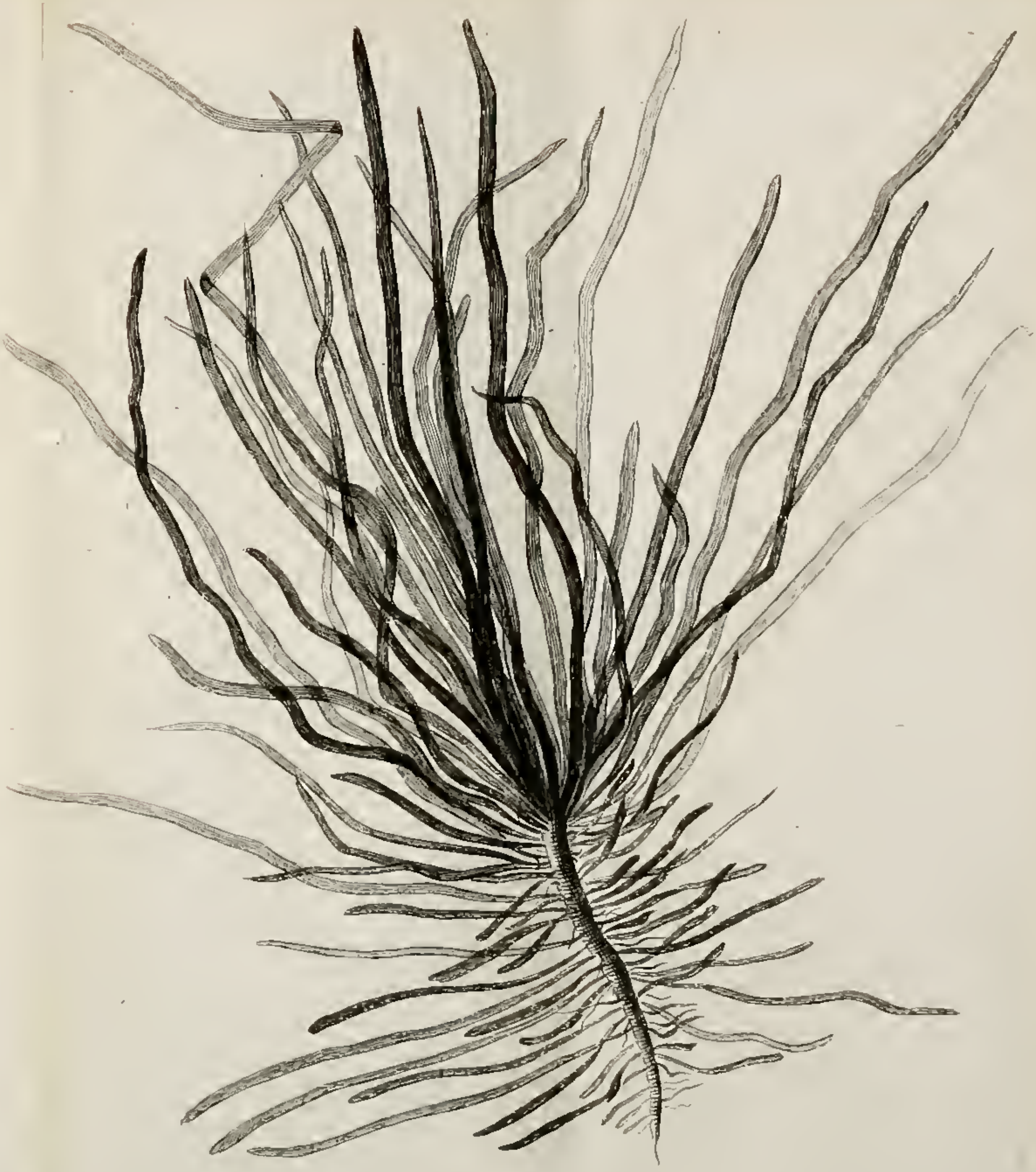
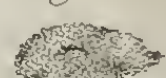
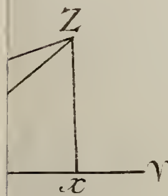


Fig. b.

Fig. a.



c.



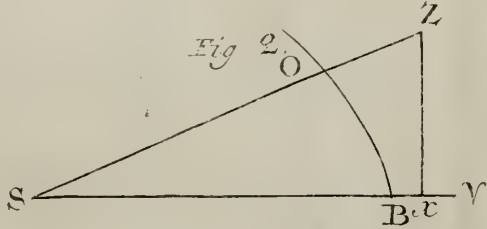
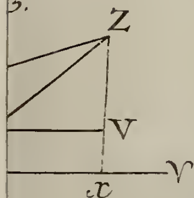


Fig 2.



3.

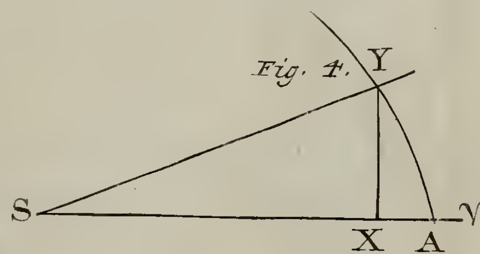


Fig. 4.

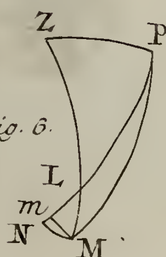


Fig. 6.

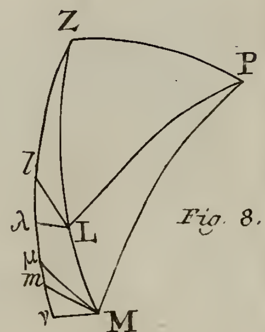
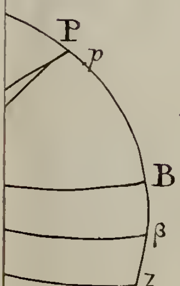
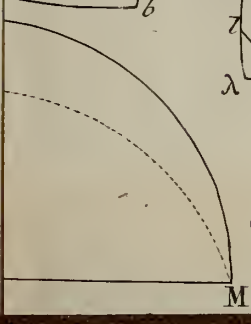


Fig. 8.





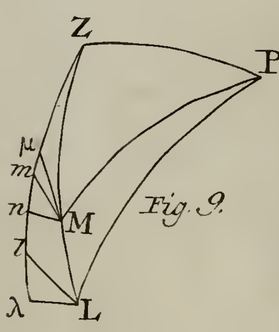


Fig. 9.

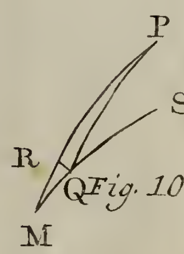


Fig. 10.

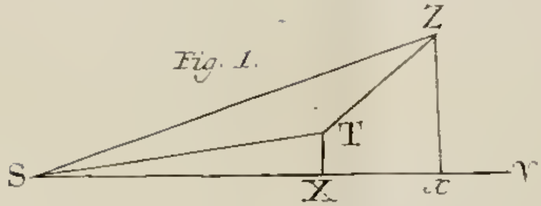


Fig. 1.

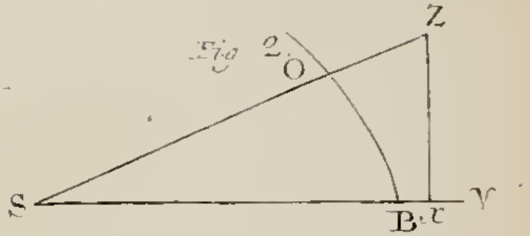


Fig. 2.

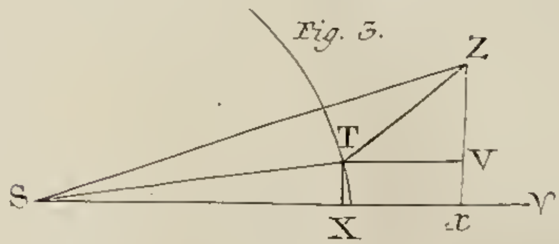


Fig. 3.

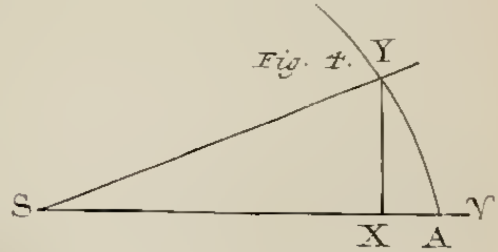


Fig. 4.

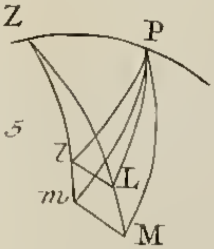


Fig. 5

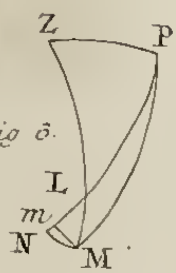


Fig. 6.

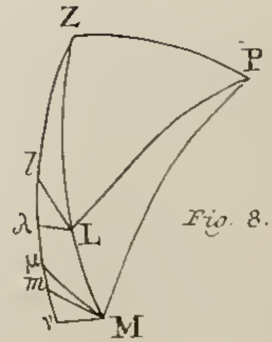


Fig. 8.

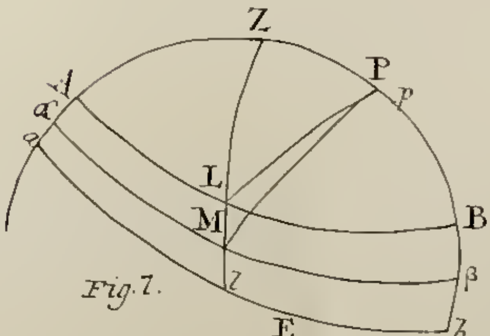


Fig. 7.

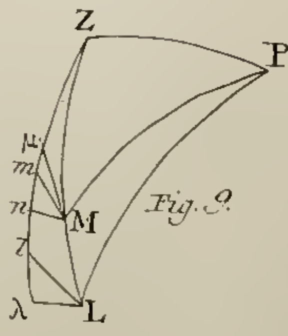


Fig. 9.

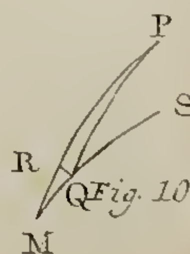


Fig. 10.

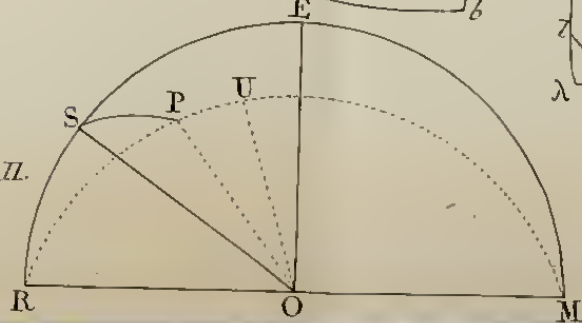
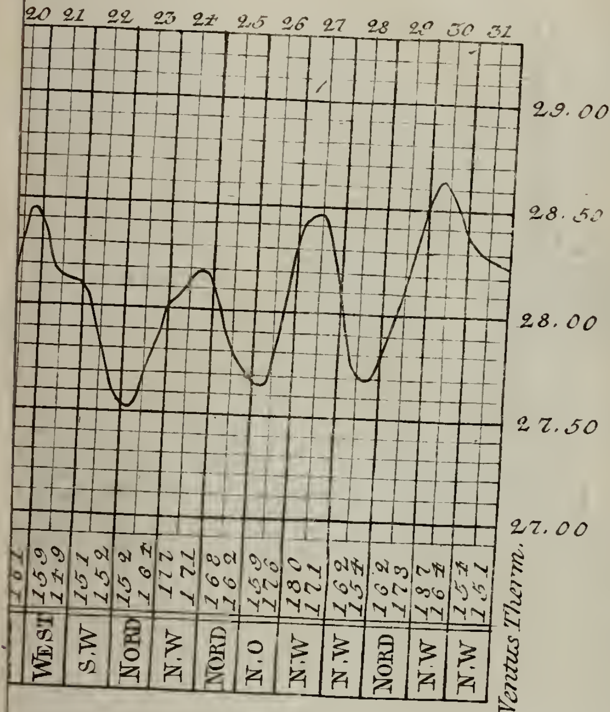


Fig. 11.

nment. Acad. Sc. Petropol. Tom. XIX. Tab. XXV.

nsem Decembris A. 1774, observatarum.

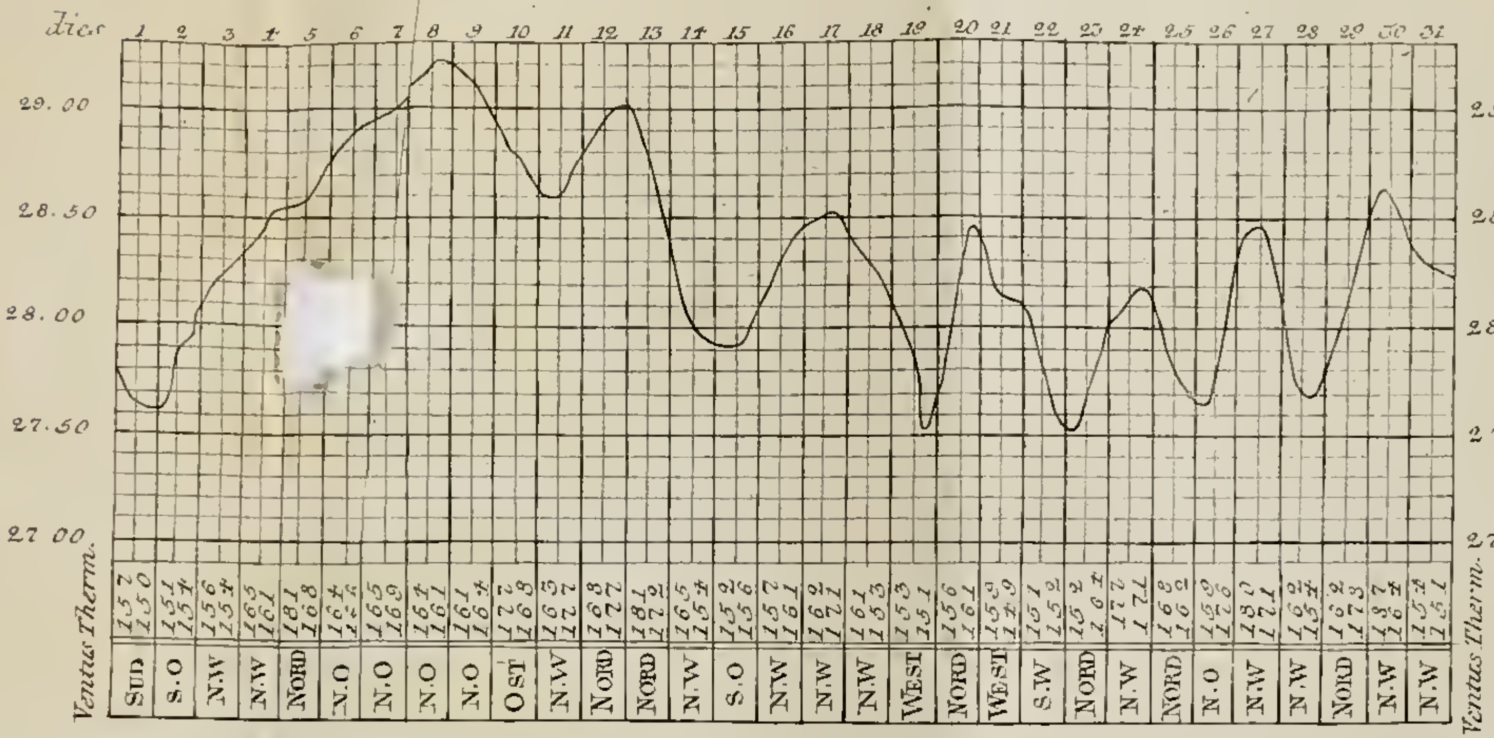


4.15.16.17.18.19.21.22.23.28.31.

.15.16.19.

С. Максимовъ

Tabula Variationum Barometri Petropoli, per mensem Decembris A. 1774. observatarum.



Malacia die 3. 12.

Ventus lenis die 4. 5. 7. 8. 14. 15. 16. 21. 24. 25. 26. 27.

Ventus fortis die 1. 2. 9. 10. 11. 17. 18. 20. 23. 28. 29.

Procellosus die 6. 13. 19. 22. 30. 31.

Coelum plane serenum die 5 et plane obductum die 8. 9. 12. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 21. 22. 23. 28. 31.

Nebulosum die 6. 12. 17. 27. 28.

Nix die 3. 6. 7. 11. 12. 14. 18. 22. 23. 25. 26. 30. Nix copiosa die 1. 13. 15. 16. 19.