Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 70

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 70.1. Es sei

$$L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge und $N = L(M)$. Es sei

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Zeige

$$\int_M (f \circ \varphi)\, d\lambda^n \;=\; \int_N f\, (\det\, L)^{-1}\, d\lambda^n.$$

Aufgabe 70.2. Es sei M ein Messraum mit einer Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ und sei

$$f_n\colon\ M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen mit der Grenzfunktion

$$f\colon\ M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Zeige, dass $S^o(M_n; f_n)$ eine Ausschöpfung von $S^o(M; f)$ ist.

Aufgabe 70.3. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f_n = 1 - \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}_+)$. Es sei f die Grenzfunktion. Zeige die Beziehung

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} S(f_n) \;=\; S(f) \setminus \Gamma_f.$$

Aufgabe 70.4. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welches $x \in [0,1]$ besitzt die zugehörige zweistufige (maximale) untere Treppenfunktion zu f den maximalen Flächeninhalt? Welchen Wert besitzt er?

Aufgabe 70.5. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn

$$\liminf \left((x_n)_{n \in \mathbb{N}} \right) = \limsup \left((x_n)_{n \in \mathbb{N}} \right).$$

Aufgabe 70.6. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und sei

$$y_n := \inf \left(x_k,\, k \geq n \right) .$$

a) Zeige, dass die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wachsend ist.

b) Zeige, dass die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\liminf \left((x_n)_{n \in \mathbb{N}} \right)$ punktweise konvergiert.

Aufgabe 70.7. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und sei

$$f_n \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass dann auch die Funktionen

$$\liminf \left((f_n)_{n \in \mathbb{N}} \right) \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, x \longmapsto \liminf \left((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \right),$$

und

$$\limsup \left((f_n)_{n \in \mathbb{N}} \right) \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, x \longmapsto \limsup \left((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \right),$$

messbar sind.

Aufgabe 70.8. Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei

$$f_n \colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

$(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen. Zeige, dass

$$\int_M \sum_{n=0}^{\infty} f_n \, d\mu \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \int_M f_n \, d\mu$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 70.9. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer integrierbaren Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die das Integral nicht das Supremum über alle Treppenintegrale zu unteren Treppenfunktionen ist.

Aufgabe 70.10. (5 (2+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1],\ x \longmapsto x^2.$$

Berechne für $n = 1, 2, \ldots, 5$ das Supremum der Integrale zu den folgenden einfachen Funktionen.

a) Die Funktionen $g \leq f$, die auf den n Teilintervallen $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ (mit $k = 0, \ldots, n-1$) konstant sind.

b) Die Funktionen $h \leq f$, die nur die Werte $\frac{k}{n}$ annehmen.

Aufgabe 70.11. (4 Punkte)

Bestimme für die Funktionenfolge

$$f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f_n(x) = x^n,$$

die zugehörigen Integrale, den Grenzwert der Integrale, die Grenzfunktion und das Integral der Grenzfunktion.

Aufgabe 70.12. (4 Punkte)

Bestimme die Häufungspunkte der Folge $x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$. Was ist der Limes inferior, was der Limes superior?

Aufgabe 70.13. (8 Punkte)

Bestimme den Limes inferior und den Limes superior der Funktionenfolge $f_n(x) = \sin(nx)$ auf $[0, \pi]$.

Aufgabe 70.14. (5 Punkte)

Zeige, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz ohne die Voraussetzung über die Existenz einer Majorante $h \geq |f_n|$ nicht gilt.