**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2015/2016**

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I

## Arbeitsblatt 25

### Die Pausenaufgabe

Aufgabe 25.1. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist.

### Übungsaufgaben

Aufgabe 25.2. Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & -3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 25.3. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.4. Bestimme, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

über dem Körper mit fünf Elementen trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 25.5.*

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper $K$ und

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen und es sei

$$\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

die Produktabbildung. Zeige, dass $\varphi$ genau dann trigonalisierbar ist, wenn dies für alle $\varphi_i$ gilt.

Aufgabe 25.6. Es sei $\varphi \colon V \to V$ ein trigonalisierbarer Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen $K$-Vektorraum $V$ und sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\varphi)$ ebenfalls trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.7. Es sei $K$ ein Körper und es sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und

$$\varphi^*\colon V^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung. Zeige, dass $\varphi$ genau dann trigonalisierbar ist, wenn $\varphi^*$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.8. Es sei $K$ ein Körper und es sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass $\varphi$ genau dann trigonalisierbar ist, wenn $\varphi$ bezüglich einer geeigneten Basis durch eine untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{n-1} & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & a_n \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 25.9. Zeige dass die Hintereinanderschaltung von zwei diagonalisierbaren Abbildungen im Allgemeinen nicht trigonalisierbar sein muss.

Aufgabe 25.10. Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige folgende Eigenschaften.

(1) Der Nullraum $0 \subseteq V$ ist $\varphi$-invariant.
(2) $V$ ist $\varphi$-invariant.
(3) Eigenräume sind $\varphi$-invariant.
(4) Seien $U_1, U_2 \subseteq V$ $\varphi$-invariante Unterräume. Dann sind auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ $\varphi$-invariant.
(5) Sei $U \subseteq V$ ein $\varphi$-invarianter Unterraum. Dann sind auch der Bildraum $\varphi(U)$ und der Urbildraum $\varphi^{-1}(U)$ $\varphi$-invariant.

Aufgabe 25.11. Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $v \in V$. Zeige, dass der kleinste $\varphi$-invariante Unterraum von $V$, der $v$ enthält, gleich

$$\langle \varphi^n(v),\, n \in \mathbb{N} \rangle$$

ist.

Aufgabe 25.12. Es sei $K$ ein Körper, $V$ ein $K$-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei

$$U \subseteq V$$

ein $\varphi$-invarianter Unterraum von $V$. Zeige, dass zu einem Polynom $P \in K[X]$ der Raum $U$ ebenfalls $P(\varphi)$-invariant ist.

Aufgabe 25.13. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $V$, bezüglich der die Matrix zur linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine obere Dreiecksmatrix sei. Zeige, dass die erzeugten Untervektorräume

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle$$

$\varphi$-invariant für jedes $i$ sind.

Aufgabe 25.14. Es sei $\pi \in S_n$ eine Permutation und $M_\pi$ die zugehörige Permutationsmatrix über einem Körper $K$. Zu $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ sei

$$V_J = \langle e_j, \, j \in J \rangle \subseteq K^n.$$

a) Zeige, dass $V_J$ genau dann $M_\pi$-invariant ist, wenn $\pi(J) \subseteq J$ ist.

b) Zeige, dass es $M_\pi$-invariante Unterräume geben kann, die nicht von der Form $V_J$ sind.

Aufgabe 25.15. Bestimme die Minimalpolynome der (links oben) Untermatrizen zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.16. Es sei $V$ ein endlichdimensionaler $K$-Vektorraum. Zeige, dass es Fahnen in $V$ gibt.

Aufgabe 25.17. Es sei $V$ ein $n$-dimensionaler $K$-Vektorraum über einem Körper $K$. Es sei

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1} \subset V_n = V$$

eine Fahne in $V$. Zeige, dass es eine bijektive lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

derart gibt, dass diese Fahne die einzige $\varphi$-invariante Fahne ist.

Aufgabe 25.18. Es sei $K$ ein endlicher Körper mit $q$ Elementen und $V$ ein zweidimensionaler $K$-Vektorraum. Bestimme die Anzahl der Fahnen in $V$.

Aufgabe 25.19. Es sei $K$ der Körper mit drei Elementen und $V$ ein dreidimensionaler $K$-Vektorraum. Bestimme die Anzahl der Fahnen in $V$.

Aufgabe 25.20.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix über einem Körper $K$.

a) Zeige, dass es eine zu $M$ ähnliche Matrix gibt, in der mindestens ein Eintrag gleich 0 ist.

b) Zeige, dass es nicht unbedingt eine zu $M$ ähnliche Matrix geben muss, in der mindestens zwei Einträge gleich 0 sind.

Aufgabe 25.21. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus auf einem endlichdimensionalen $K$-Vektorraum $V$. Zeige, dass $\varphi$ genau dann eine Streckung ist, wenn die beschreibende Matrix unabhängig von den gewählten Basen ist.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.22. (4 Punkte)

Trigonalisiere die komplexe Matrix

$$\begin{pmatrix} 2+i & 3 \\ 5i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 25.23. (4 Punkte)

Entscheide, ob die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 8 \\ 6 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar ist.

Aufgabe 25.24. (3 Punkte)

Bestimme, ob die reelle Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

trigonalisierbar ist oder nicht.

Aufgabe 25.25. (4 Punkte)

Es sei $M$ eine reelle $2 \times 2$-Matrix, die über $\mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist. Zeige, dass $M$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 25.26. (4 Punkte)

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

eine Matrix über $\mathbb{Q}$, deren Spur gleich 0 sei. Zeige, dass es eine zu $M$ ähnliche Matrix $N$ der Gestalt

$$N = \begin{pmatrix} 0 & r \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

gibt.