Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 45

Übungsaufgaben

Aufgabe 45.1.*

Es sei M eine Menge mit n Elementen. Bestimme die Anzahl der Relationen auf M, die

(1) reflexiv
(2) symmetrisch
(3) reflexiv und symmetrisch

sind.

Aufgabe 45.2. Sei G eine Gruppe. Betrachte die Relation $\sim$ auf G, die durch

$$x \sim y \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ oder } x = y^{-1}$$

erklärt ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 45.3. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ lebe eine Kolonie von Flöhen, und jeder Flohsprung geht fünf Einheiten weit (in beide Richtungen). Wie viele Flohpopulationen gibt es? Wie kann man einfach charakterisieren, ob zwei Flöhe zur gleichen Population gehören oder nicht?

Aufgabe 45.4. Wir betrachten die Produktmenge $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Wir fixieren die Sprünge

$$\pm(2,1) \text{ und } \pm(1,3)\,,$$

und sagen, dass zwei Punkte $P = (a,b)$, $Q = (c,d) \in M$ äquivalent sind, wenn man ausgehend von P den Punkt Q mit einer Folge von diesen Sprüngen aus erreichen kann (und dabei in M bleibt). Dies ist eine Äquivalenzrelation. Man bestimme die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation und für jede Äquivalenzklasse genau einen besonders einfachen Vertreter. Man gebe auch einen Algorithmus an, der zu einem $(a,b) \in M$ diesen äquivalenten Vertreter findet.

Aufgabe 45.5. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten die folgende Relation auf $\mathrm{Mat}_n(K)$.

$$M \sim N, \text{ falls es eine invertierbare Matrix } B \text{ gibt mit } M = BNB^{-1}.$$

Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 45.6. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die Relation auf V, die durch

$$v \sim w, \text{ falls es ein } \lambda \in K, \lambda \neq 0, \text{ mit } v = \lambda w \text{ gibt}$$

eine Äquivalenzrelation ist. Was sind die Äquivalenzklassen?

Aufgabe 45.7.*

Es sei M die Menge der zweimal stetig differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Definiere auf M eine Relation durch

$$f \sim g \text{ falls } f(0) = g(0), \, f'(0) = g'(0) \text{ und } f''(1) = g''(1).$$

a) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.

b) Finde für jede Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation einen polynomialen Vertreter.

c) Zeige, dass diese Äquivalenzrelation mit der Addition von Funktionen verträglich ist.

d) Zeige, dass diese Äquivalenzrelation nicht mit der Multiplikation von Funktionen verträglich ist.

Aufgabe 45.8. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und betrachte die Menge $C^1(I, \mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ ist differenzierbar }\}$. Für $f, g \in C^1(I, \mathbb{R})$ definieren wir

$$f \sim g, \text{ falls es ein } c \in \mathbb{R} \text{ gibt mit } f(x) = g(x) + c \text{ für alle } x \in I.$$

Liegt eine Äquivalenzrelation vor? Wenn ja, beschreibe die Äquivalenzklassen.

Aufgabe 45.9. Sei B ein Blatt Papier (oder ein Taschentuch). Man versuche, sich die folgenden Äquivalenzrelationen auf B und die zugehörige Identifizierungsabbildungen vorzustellen (möglichst geometrisch).

(1) Die vier Eckpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(2) Alle Randpunkte sind untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.

(3) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(4) Jeder Punkt des linken Randes ist äquivalent zu seinem horizontal gegenüber liegenden Punkt am rechten Rand und jeder Punkt des oberen Randes ist äquivalent zu seinem vertikal gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(5) Jeder Punkt des Randes ist äquivalent zu seinem punktsymmetrisch (bezüglich des Mittelpunktes des Blattes) gegenüber liegenden Punkt, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(6) Sei K ein Kreis (d.h. eine Kreislinie) auf dem Blatt. Alle Kreispunkte seien untereinander äquivalent, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(7) Es gebe zwei Punkte $P \neq Q$, die untereinander äquivalent seien, ansonsten sind die Punkte nur zu sich selbst äquivalent.
(8) Sei H die horizontale Halbierungsgerade des Blattes. Zwei Punkte sind genau dann äquivalent, wenn sie achsensymmetrisch zu H sind.

Aufgabe 45.10. Zeige, dass die auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in Beispiel 45.16 eingeführte Relation

$$(a,b) \sim (c,d), \text{ falls } a+d = b+c\,,$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 45.11. Zeige, dass die auf $\mathbb{Z}$ in Beispiel 45.16 eingeführte Addition und Multiplikation wohldefiniert sind.

Aufgabe 45.12. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum und $m \in \mathbb{N}$. Betrachte auf der Produktmenge V^m die folgende Relation.

$$(v_1, \ldots, v_m) \sim (w_1, \ldots, w_m), \text{ falls } \langle v_1, \ldots, v_m \rangle = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$$

Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist. Man gebe eine Bijektion zwischen der zugehörigen Quotientenmenge und der Menge der Unterräume von V der Dimension $\leq m$ an. Zeige ferner, dass zwei Tupel $(v_1, \ldots, v_m)$ und $(w_1, \ldots, w_m)$ genau dann in dieser Relation zueinander stehen, wenn es eine invertierbare $m \times m$-Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \operatorname{Mat}_m(K)$ gibt mit

$$v_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} w_j$$

für alle i.

AUFGABE 45.13.*

Betrachte auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ die Relation

$$(a, b) \sim (c, d), \text{ falls } ad = bc \text{ ist}.$$

a) Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeige, dass es zu jedem (a, b) ein äquivalentes Paar (a', b') mit $b' > 0$ gibt.

c) Es sei M die Menge der Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation. Wir definieren eine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{Z} \longrightarrow M, \, z \longmapsto [(z, 1)].$$

Zeige, dass φ injektiv ist.

d) Definiere auf M (aus Teil c) eine Verknüpfung + derart, dass M mit dieser Verknüpfung und mit $[(0, 1)]$ als neutralem Element eine Gruppe wird, und dass für die Abbildung φ die Beziehung

$$\varphi(z_1 + z_2) \, = \, \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$$

für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.

AUFGABE 45.14. Es seien M_1 und M_2 Mengen und $\sim_1$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_1 und $\sim_2$ sei eine Äquivalenzrelation auf M_2. Betrachte die Relation $\sim$ auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$, die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ und } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt},$$

definiert ist. Zeige, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

Zeige ferner, dass auf $M_1 \times M_2$ die durch

$$(a_1, a_2) \sim (b_1, b_2), \text{ falls } a_1 \sim_1 b_1 \text{ oder } a_2 \sim_2 b_2 \text{ gilt},$$

definierte Relation keine Äquivalenzrelation ist.

AUFGABE 45.15. Es sei M eine Menge und $P \subseteq \mathfrak{P}(M)$. Dann heißt P eine *Partition* von M, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für alle $A \in P$ gilt $A \neq$.
(2) Für $A, B \in P$, $A \neq B$, gilt $A \cap B =$.
(3) Die Elemente von P bilden eine Überdeckung von M, d.h. jedes Element von M liegt in mindestens einem Element von P.

Beweise, dass die Quotientenmenge $M/\sim = \{[x] : x \in M\}$ zu einer Äquivalenzrelation $\sim$ eine Partition der Menge M ist.

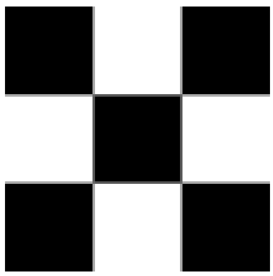
Aufgabe 45.16. Sei M eine Menge und $P \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine Partition. Zeige, dass P durch

$$x \sim y, \text{ falls es ein } A \in P \text{ gibt mit } x \in A \text{ und } y \in A\,,$$

eine Äquivalenzrelation auf M induziert. Berechne diese Relation für die Partition $\{\{1\}, \{2,3,4\}, \{5,6\}, \{7\}\}$ der Menge $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

Aufgabe 45.17. Es sei M eine Menge und $(R_i)_{i \in I}$ eine Familie von Äquivalenzrelationen auf M. Zeige, dass durch den Durchschnitt $R := \bigcap_{i \in I} R_i$ wieder eine Äquivalenzrelation auf M definiert ist. Gilt dies auch für $\bigcup_{i \in I} R_i$?

Aufgaben zum Abgeben



Aufgabe 45.18. (2 Punkte)

Betrachte die Schachfiguren Turm, Läufer, Pferd und Esel zusammen mit ihren erlaubten Zügen auf einem 8×8-Schachbrett. Ein Esel darf dabei pro Zug einen Doppelschritt nach vorne, nach hinten, nach rechts oder nach links machen. Jede dieser Figuren definiert eine Äquivalenzrelation auf den 64 Feldern, indem zwei Felder als äquivalent angesehen werden, wenn das eine Feld von dem anderen Feld aus mit dieser Figur in endlich vielen Zügen erreichbar ist. Beschreib für jede dieser Schachfiguren die zugehörige Äquivalenzrelation und ihre Äquivalenzklassen. Wie sieht es auf einem 3×3-Schachbrett aus?

Aufgabe 45.19. (2 Punkte)

Wir betrachten für je zwei Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{N}$ die symmetrische Differenz

$$A \triangle B \,=\, (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Wir setzen

$$A \sim B\,,$$

falls $A \triangle B$ endlich ist. Zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ definiert wird.

Aufgabe 45.20. (2 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Betrachte die Relation R auf G, wobei xRy bedeutet, dass es einen inneren Automorphismus κ_g gibt mit $x = \kappa_g(y)$. Zeige, dass diese Relation eine Äquivalenzrelation ist.

Die Äquivalenzklassen zu dieser Äquivalenzrelation bekommen einen eigenen Namen:

Zu einer Gruppe G nennt man die Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation, bei der zwei Elemente als äquivalent (oder *konjugiert*) gelten, wenn sie durch einen inneren Automorphismus ineinander überführt werden können, die *Konjugationsklassen*.

Aufgabe 45.21. (2 Punkte)

Es sei S_3 die Gruppe der bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, 2, 3\}$ in sich selbst. Bestimme die Konjugationsklassen dieser Gruppe.

Aufgabe 45.22. (3 Punkte)

Es sei $\mathrm{GL}_n(K)$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K. Zeige, dass für zueinander konjugierte Matrizen M und N aus $\mathrm{GL}_n(K)$ die folgenden Eigenschaften bzw. Invarianten übereinstimmen: Die Determinante, die Eigenwerte, die Dimension der Eigenräume zu einem Eigenwert, die Diagonalisierbarkeit, die Trigonalisierbarkeit.

Aufgabe 45.23. (2 Punkte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge mit der induzierten Metrik. Betrachte die Relation R auf U, wobei xRy bedeutet, dass es eine stetige Abbildung

$$\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \gamma(t),$$

mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf U ist.

Abbildungsverzeichnis