中等算學月刊

第四卷　第九期

要　目

中華民國二十五年十一月出版

中等算學月刊社發行

中華民國郵政局特准掛號認為新聞紙類

中華民國內政部登記證警字佰壹肆貳號

武漢社址
武昌珞珈山
國立武漢大學

中等算學月刊

第四卷　第九期

南京社址
南京·南捕廳
鍾英中學

目　次

中華民國二十五年十一月號

東方雜誌

特價三個月

優待舊定戶　廣徵新定戶

創刊三十餘年來第一次的盛舉

東方雜誌自從民國紀元前八年（一九〇五年）創刊以來，現在已有三十三年的歷史。在這三十三年中，除了滬戰期間停刊數月外，從不曾間斷過。本誌始終站在客觀的與進步的立場上，擔任介紹新知與傳佈文化的重要任務。到了現在，因為國難的日趨嚴重，對於本國情形的了解，國際形勢的正確認識以及新知的獲得，是更覺需要迫切了，因此本誌所負的任務，也更加重大起來。現在除一方面積極改進編輯方式，充實內容，以盡本誌應盡的責任外，另一方面為擴大本誌的服務範圍起見，特自本年十月十五日起，舉行特價三個月，廣徵定戶。

本誌每半月出版一冊，每冊篇幅約一百三四十面，內有影寫版精印東方畫報十六面，特大號篇幅加多一兩倍。平時定閱本誌，除郵費不計外，平均每冊只合國幣一角五分，以本誌的質量而取費低廉如此，在國內定期刊物中無可與比。現在特價期內，每冊只約合國幣一角二分，使讀者的擔負愈益減低。期於原有定戶之外，廣徵新定戶。本誌定戶之多，在國內固屬首屈一指，較之先進諸國通行的雜誌，尚未免瞠乎其後，但國人閱讀雜誌的興趣和需要，以及本國雜誌努力改進的程度，正可於本誌此舉覘之。尚祈愛護本誌的新舊定戶：已定閱者提前續定，未定閱者即日惠訂，早日造成本國雜誌銷數的最新紀錄，那就是我們最所盼望的了！

本誌內容

- 東方畫報
- 東方論壇
- 論著
- 各國著名雜誌論文摘要
- 婦女與家庭
- 文藝
- 現代史料
- 時事日誌

特價辦法

(1)特價期限，自本年十月十五日起，至二十六年一月十五日止。

(2)凡在特價期內，定閱本誌全年二十四期者，國內連郵費只收國幣二元八角（原定價三元六角）；定閱半年十二期者，國內連郵費只收國幣一元五角（原定價一元九角）。國外定閱，除照上列特價外，每冊另加郵費二角。

(3)舊定戶之未滿期者，於特價期內提前續定，亦得照特價計算。

商務印書館發行

三角方程式解法舉例

段 桂 棠

> 三角方程式，除幾種標準形狀，解法有一定規則，已見坊間三角教本外，其餘形狀紛雜，無從蒐集，解法亦見機而作，並無定規．三角教本中於此等處舉例恆不多，以故學者恆感困難．大抵運用公式熟練者，易於爲力，否則一籌莫展，比比皆然．段君此作雖未能完全(其實完全二字決難做到)，然頗有可供參考者．尤以通解之形狀，每因解法不同而異，核驗及討論，於斯爲尙．Hobson 氏之平面三角(商務有龔文凱譯本，原文有翻印本，武漢大學西書流通社出售)，於此頗詳，足爲讀者楷模．段君原稿，題爲"單獨三角方程式之解法核驗及討論"，微覺未妥，因改爲今名，內容亦稍有删改，從段君之意也．　　——編者識．

例 1． 試解 $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$.

[解]　題式可書爲 $\sin x+\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{2}$，或 $\sqrt{1-\sin^2 x}=\sqrt{2}-\sin x$，平方移項即得

$$2\sin^2 x-2\sqrt{2}\sin x+1=0.$$

解之得

$$\sin x=1/\sqrt{2},\qquad 而\ x=n\pi+(-1)^n\pi/4.$$

核驗：

$\sin\left[n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}$，　$\cos\left[n\pi+(-1)^n\right]\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 或 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$，視 n 爲偶或奇． 代入原式，知 n 爲奇數時不合，而正當之解爲 $x=2n\pi+\pi/4$.

[別解]　原式兩端平方而整理之，得

$$1+\sin 2x=2,\qquad 即\ \sin 2x=1.$$

$$\therefore\quad 2x=n\pi+(-1)^n\pi/2,\qquad 而\ x=\tfrac{1}{2}[n\pi+(-1)^n\pi/2].$$

核驗： $n=$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	……
$\sin x+\cos x=$	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$,	$-\sqrt{2}$,	$-\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$,	$-\sqrt{2}$,	$-\sqrt{2}$,	$\sqrt{2}$,	……

由是知 n 必爲偶數 $4m$ 及奇數 $4m+1$ 時，始合原式．

$$n=4m\text{ 時},\qquad x=\tfrac{1}{2}(4m\pi+\pi/2)=2m\pi+\pi/4,$$

$$n=4m+1\text{ 時},\quad x=\tfrac{1}{2}(4m\pi+\pi-\pi/2)=2m\pi+\pi/4.$$

故正解仍爲 $x=2m\pi+\pi/4$，與上解同．

［三解］ 欲防增根，除非不用平方． 今以 $\sqrt{2}$ 除原式之兩端，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=1,\qquad \text{卽}\quad \cos\frac{\pi}{4}\sin x+\sin\frac{\pi}{4}\cos x=1.$$

由是　　$\sin(x+\pi/4)=1,$　　　而 $x=2n\pi+\pi/4.$

若用公式 $\sin x=\sin[n\pi+(-1)^n x]$，則解答應爲

$$x+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2},\ \text{而}\ x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4};$$

驟觀之似與前異． 然若遞令 $n=2m$ 及 $2m+1$，則皆得 $x=2m\pi+\pi/4$，與前無不相同矣．

［四解］ 因 $\sin x+\cos x=\sin x+\sin(\pi/2-x)$

$$=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\therefore\quad \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1,\qquad x-\frac{\pi}{4}=2n\pi,\qquad \text{而}\quad x=2n\pi+\frac{\pi}{4}.$$

或將原式左端書爲 $\cos(\pi/2-x)+\cos x$ 而化之卽得同樣結果．

例 2． 試解 $\sin x-\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$．

［解］ 兩端同乘以 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，得

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{2},\qquad \text{卽}\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \frac{\pi}{4}+x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3},\ \text{而}\ x=2n\pi+\frac{5\pi}{12}\ \text{或}\ (2m+1)\pi+\frac{\pi}{12},(m=n+1).$$

核驗:

若 $x=2n\pi+\frac{5\pi}{12}$，則 $\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$；

若 $x=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{12}$，則 $\sin x-\cos x=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

由是知二者皆爲正解。

［別解］ 若將

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{2} \qquad \text{寫作} \quad \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2},$$

則見 $x-\pi/4=n\pi+(-1)^n\pi/6$，與上解形異而實同。 蓋

$$n=2m \text{ 時}, \qquad x=2m\pi+(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{4})\pi=2m\pi+\frac{5\pi}{12},$$

$$n=2m+1 \text{ 時}, \qquad x=(2m+1)\pi+(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6})\pi=(2m+1)\pi+\frac{\pi}{12}.$$

又若如例 1［四解］將原式左端盡寫作 sin 或 cos，亦得與上同樣之結果。

例 3. 試解 $\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{2}=2$.

［解］ 設 $x=6y$，則 $\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{2}=\cos 2y-\sin 3y=1-2\sin^2 y-3\sin y+4\sin^3 y$.

以 z 代 $\sin y$，則原式可書爲

$$f(z)\equiv 4z^3-2z^2-3z-1=0.$$

因 z 之絕對値小於 1，而此方程式在 -1 至 1 之間無實根，故本題無解。

編者按此題之無解，一瞥卽可知之。 以 $|a|$ 表 a 之絕對値，則見

$$\left|\cos\frac{x}{3}-\sin\frac{x}{2}\right|\leq\left|\cos\frac{x}{3}\right|+\left|\sin\frac{x}{2}\right|\leq 1+1=2,$$

其無解也明甚。

例 4. 試解 $a\sin x+b\cos x=c$,并討論之。

[解] 以$\sqrt{a^2+b^2}$除式之兩端得

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (1)$$

因 $a/\sqrt{a^2+b^2}$ 及 $b/\sqrt{a^2+b^2}$ 之值均不大於 1,而兩者平方之和為 1,故可求得一定銳角 φ,使 $\sin\varphi/\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=b/\sqrt{a^2+b^2}$. 如是則(1)變為

$=a$.

$$\cos(x-\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

因 $\cos$ 之絕對值不大於 1,故欲題式有解,必須$(c/\sqrt{a^2+b^2})^2\leq 1$,或 $c^2\leq a^2+b^2$.

若 $c^2=a^2+b^2$,則 $c/\sqrt{a^2+b^2}=1$,而 $x-\varphi=2n\pi$, $x=2n\pi+\varphi$ 為正解。

若 $c^2<a^2+b^2$,則 $c/\sqrt{a^2+b^2}<1$,故可求得一銳角 α,使 $\cos\alpha=c/\sqrt{a^2+b^2}$. 由是 $x-\varphi=2n\pi\pm\alpha$ 而 $x=2n\pi+\varphi\pm\alpha$ 為正解。

例 1 及例 2 皆為本題之特例。

若設 $a/\sqrt{a^2+b^2}=\cos\theta$, $b/\sqrt{a^2+b^2}=\sin\theta$,則(1)式變為

$$\sin(x+\theta)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

亦可求解。設 $c/\sqrt{a^2+b^2}=\sin\beta$,則 $x=n\pi+(-1)^n\beta-\theta$ 為正解。但此解不如用餘弦時之簡單耳。

[別解] 因

$$\sin x=2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x=\frac{2\tan\frac{1}{2}x}{\sec^2\frac{1}{2}x}=\frac{2\tan\frac{1}{2}x}{1+\tan^2\frac{1}{2}x},$$

$$\cos x=2\cos^2\tfrac{1}{2}x-1=\frac{2}{1+\tan^2\frac{1}{2}x}-1=\frac{1-\tan^2\frac{1}{2}x}{1+\tan^2\frac{1}{2}x},$$

以 t 代 $\tan\frac{1}{2}x$,則題式可變為

$$(b+c)t^2-2at-(b-c)=0.$$

$$\therefore \qquad t=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}.$$

欲題式有解，必須 $a^2+b^2\geq c^2$，如前解所云。 以反函數記此解答，則得

$$x=2\tan^{-1}\left(\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}\right).$$

與前解形異而實同。 特例若 $b+c=0$，則取上號時，$x=2\tan^{-1}(\infty)=(2n+1)\pi$。若取下號，則因 $b=-c$, $b^2=c^2$，而$\sqrt{a^2+b^2-c^2}=a$，因之 $x=2\tan^{-1}(0/0)$，似爲不定。 此時應有如下之處理：

$$\frac{a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}=\frac{a^2-(a^2+b^2-c^2)}{(b+c)(a+\sqrt{a^2+b^2-c^2})}=\frac{c-b}{a+a}=\frac{c}{a},$$

而 $x=2\tan^{-1}(c/a)$爲一解。 其實當 $b+c=0$，$b=-c$，題式變爲

$$a\sin x-c\cos x=c,\quad 即\ 2a\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x=c(1+\cos x)=2c\cos^2\tfrac{1}{2}x.$$

由是

$$\cos\tfrac{1}{2}x(a\sin\tfrac{1}{2}x-c\cos\tfrac{1}{2}x)=0,$$

$$x=(2n+1)\pi \qquad 或 \qquad x=2\tan^{-1}(c/a).$$

例 5。 試解 $1+\cos x+\cos 2x+\cos 3x=0$。

［解］ 因 $1+\cos 2x=2\cos^2x$，$\cos x+\cos 3x=2\cos 2x\cos x$，題式變爲

$$2\cos^2x+2\cos 2x\cos x=0,\quad 或\ \cos x(\cos x+\cos 2x)=0.$$

若 $\cos x=0$，則 $x=2n\pi\pm\pi/2$，亦可書爲 $x=(2n+1)\pi/2$。

若 $\cos x+\cos 2x=0$，則有二法解之：

(i) $\cos x+\cos 2x=2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x=0$，由是得 $x=(2n+1)\pi/3$ 或$(2n+1)\pi$。

(ii) $\cos x+\cos 2x=2\cos^2x+\cos x-1=0$，由是得$(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$，而$\cos x=\frac{1}{2}$或$-1$。 因之 $x=2n\pi\pm\pi/3$ 或$(2n+1)\pi$。

(i) 中所得二解，有相同時。蓋 $x=(2n+1)\pi/3$ 中在 $2n+1$ 爲 3 之倍數時，皆含於 $x=(2n+1)\pi$之中也。除去此等相同之解，所餘概包含於 $x=2n\pi\pm\pi/3$ 中，

故(i),(ii)之解全同而本題之解爲

$$x=(2n+1)\pi/2,\qquad 2n\pi\pm\pi/3,\qquad (2n+1)\pi.$$

核驗： 均合。

例 6. 試解 $\sin 9x+\sin 5x+2\sin^2 x=1$.

［解］ 因 $\sin 9x+\sin 5x=2\sin 7x\cos 2x$, $2\sin^2 x=1-\cos 2x$，題式變爲

$$2\sin 7x\cos 2x-\cos 2x=0,\quad 或\quad \cos 2x(2\sin 7x-1)=0.$$

若 $\cos 2x=0$，則 $2x=2n\pi\pm\pi/2$ 而 $x=n\pi\pm\pi/4$. 或書爲 $x=(2n+1)\pi/4$ 亦可，且較佳，因祇具一加號，易於核驗也。

若 $2\sin 7x-1=0$，則 $7x=n\pi+(-1)^n\pi/6$ 而 $x=\frac{1}{7}[n\pi+(-1)^n\pi/6]$。

故本題之解爲 $x=(2n+1)\pi/4$ 及 $x=\frac{1}{7}[n\pi+(-1)^n\pi/6]$，核驗均合。

例 7. 試解 $\tan x+\tan(\pi/4+x)=2$.

［解］ 題式卽

$$\tan x+\frac{1+\tan x}{1-\tan x}=2,\qquad 卽\qquad \tan^2 x-4\tan x+1=0.$$

解之得 $\tan x=2\pm\sqrt{3}$，而 $x=n\pi+5\pi/12$ 或 $x=n\pi+\pi/12$。

［別解］ 題式左端可書爲

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin(\pi/4+x)}{\cos(\pi/4+x)}=\frac{\sin x\cos(\pi/4+x)+\cos x\sin(\pi/4+x)}{\cos x\cos(\pi/4+x)}.$$

此式分子等於 $\sin(\pi/4+2x)$，分母則等於 $\frac{1}{2}[\cos(\pi/4+2x)+\cos(\pi/4)]$，代入題式而化簡之，卽得

$$\sin(\pi/4+2x)-\cos(\pi/4+2x)=\cos(\pi/4).$$

但 $\cos(\pi/4+2x)=\sin(\pi/4-2x)$，化入上式變爲乘積得

$$2\cos(\pi/4)\sin 2x=\cos(\pi/4).$$

由是 $\sin 2x=\frac{1}{2}$，$2x=n\pi+(-1)^n\pi/6$ 而 $x=\frac{1}{2}(n\pi+(-1)^n\pi/6)$。此解與上解並無不同，因

$$n=2m \text{ 時}，\quad x=\tfrac{1}{2}(2m\pi+\pi/6)=m\pi+\pi/12,$$

$$n=2m+1 \text{ 時}，\quad x=\tfrac{1}{2}(2m\pi+\pi-\pi/6)=m\pi+5\pi/12.$$

例 8. 試解 $\tan(x+\varphi)=a\tan x$，x 爲未知數。

［解］ 最簡之法卽化爲 $\tan x$ 之二次方程而解之。由題式得

$$\tan x+\tan\varphi=a\tan x(1-\tan x\tan\varphi),$$

卽

$$a\tan\varphi\tan^2 x-(a-1)\tan x+\tan\varphi=0.$$

$$\therefore\quad \tan x=\frac{a-1\pm\sqrt{(a-1)^2-4a\tan^2\varphi}}{2a\tan\varphi}.$$

今 $(a-1)^2-4a\tan^2\varphi=(a-1)^2-4a(\sec^2\varphi-1)=(a+1)^2-4a\sec^2\varphi\geq 0$ 爲本題有解之條件。換言之，若 $a>0$，則 $\sec^2\varphi\leq(a+1)^2/4a$ 時，本題始有解。若 $a<0$，則本題恆有解。又 a 不能等於 1，否則 φ 必須等於 $n\pi$，而題式變爲恆等。

特例當 $(a-1)^2=4a\tan^2\varphi$ 時，$2a\tan\varphi=(a-1)\sqrt{a}$，此時 a 必須爲正數，而

$$\tan x=1/\sqrt{a},\quad \therefore\ x=\tan^{-1}(1/\sqrt{a}).$$

本題之通解乃爲

$$x=\tan^{-1}\left[\frac{a-1\pm\sqrt{(a-1)^2-4a\tan^2\varphi}}{2a\tan\varphi}\right].$$

［別解］ 以 $\tan x$ 除題式之兩端（因 φ 值未定，可設 $\tan x\neq 0$），得

$$\frac{\tan(x+\varphi)}{\tan x}=a,\qquad \therefore\quad \frac{\tan(x+\varphi)+\tan x}{\tan(x+\varphi)-\tan x}=\frac{a+1}{a-1}.$$

左端分子分母同乘以 $\cos(x+\varphi)\cos x$ 而化簡之，得

$$\frac{\sin(2x+\varphi)}{\sin\varphi}=\frac{a+1}{a-1},\qquad \therefore\quad x=\tfrac{1}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{a+1}{a-1}\sin\varphi\right)-\varphi\right];$$

亦爲本題之解。 此較前解較簡單，但不便於討論。

例 9。 試解 $\tan(x-\alpha)\cos 2x-\frac{1}{3}=\sin 2x$.

[解] 兩端乘以 $\cos(x-\alpha)$而移項，得

$$\sin(x-\alpha)\cos 2x-\cos(x-\alpha)\sin 2x=\frac{1}{3}\cos(x-\alpha),$$

卽
$$-\sin(x+\alpha)=\frac{1}{3}\cos(x-\alpha)$$

由是
$$\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x+3\sin\alpha\cos x+3\cos\alpha\sin x=0$$

$$\therefore\quad \frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{\cos\alpha+3\sin\alpha}{3\cos\alpha+\sin\alpha},\ 卽\ \tan x=-\frac{1+3\tan\alpha}{3+\tan\alpha}$$

因得
$$x=\tan^{-1}\left[-\frac{1+3\tan\alpha}{3+\tan\alpha}\right].$$

例 10。 試解 $\lambda\cos^2 x+(2\lambda^2-\lambda+1)\sin x-3\lambda+1=0$，並討論之。

[解] 以 $1-\sin^2 x$ 代 $\cos^2 x$ 而整理之，得

$$\lambda\sin^2 x-(2\lambda^2-\lambda+1)\sin x+2\lambda-1=0,$$

卽
$$(\lambda\sin x-1)(\sin x-2\lambda+1)=0.$$

$$\therefore\quad \sin x=1/\lambda,\qquad 或\quad \sin x=2\lambda-1.$$

由後式知 $0<\lambda<1$，但不合於前式。由前式則 $\lambda>1$ 或 $\lambda<-1$，但不適於後式，故本題之解應如下表所示：

當	$\lambda\leq-1$	$-1<\lambda\leq0$	$0<\lambda\leq1$	$\lambda\geq1$
$\sin x=$	$1/\lambda$	無解	$2\lambda-1$	$1/\lambda$

當 $\lambda=1$ 時，$\sin x$ 之兩值相等，此時 $x=n\pi+(-1)^n\pi/2$。

正項調和級數之總和之上下限

T. K. S.

調和級數 n 項(相繼者)之總和不能用 n 之初等代數函數表示，是乃周知之事實。然其總和之上下限如何？論之者則鮮也。此篇之目的即在根據初等代數學以求正項調和級數總和之兩種上下限及其類似者。

調和級數之一般形為

$$\frac{1}{a+b},\ \frac{1}{a+2b},\ \frac{1}{a+3b},\ \cdots,\ \frac{1}{a+nb},\ \cdots \qquad \text{(H)}$$

此處 a, b 乃不相關之二數。 設 a, b 皆為正數；則(H)表示一般之正項調和級數。今即就此假定下之(H)論之。

以 S_n 表示其最初 n 項之總和：

$$S_n=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a+3b}+\cdots+\frac{1}{a+nb}.$$

則

$$bS_n=\frac{b}{a+b}+\frac{b}{a+2b}+\frac{b}{a+3b}+\cdots+\frac{b}{a+nb}. \qquad (1)$$

$$\therefore \qquad n-bS_n=\left(1-\frac{b}{a+b}\right)+\left(1-\frac{b}{a+2b}\right)+\cdots+\left(1-\frac{b}{a+nb}\right)$$

$$=\frac{a}{a+b}+\frac{a+b}{a+2b}+\cdots+\frac{a+(n-1)b}{a+nb},$$

$$n+bS_n=\left(1+\frac{b}{a+b}\right)+\left(1+\frac{b}{a+2b}\right)+\cdots+\left(1+\frac{b}{a+nb}\right)$$

$$=\frac{a+2b}{a+b}+\frac{a+3b}{a+2b}+\cdots+\frac{a+(n+1)b}{a+nb}.$$

因 $a>0,\ b>0$，故

$$\frac{\frac{a}{a+b}+\frac{a+b}{a+2b}+\frac{a+2b}{a+3b}+\cdots+\frac{a+(n-1)b}{a+nb}}{n}>\sqrt[n]{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a+2b}\cdot\frac{a+2b}{a+3b}\cdots\cdot\frac{a+(n-1)b}{a+nb}}.$$

即

$$\frac{n-bS_n}{n} > \sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}}.$$

$$n-bS_n > n\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}}.$$

∴ $$\frac{n}{b}\left\{1-\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}}\right\} > S_n. \qquad (2)$$

又

$$\frac{\frac{a+2b}{a+b}+\frac{a+3b}{a+2b}+\cdots+\frac{a+(n+1)b}{a+nb}}{n} > \sqrt[n]{\frac{a+2b}{a+b}\cdot\frac{a+3b}{a+2b}\cdots\frac{a+(n+1)b}{a+nb}}.$$

即 $$\frac{n+bS_n}{n} > \sqrt[n]{\frac{a+(n+1)b}{a+b}}.$$

∴ $$S_n > \frac{n}{b}\left\{\sqrt[n]{\frac{a+(n+1)b}{a+b}}-1\right\}. \qquad (3)$$

由(2)及(3),故

(I) $$\frac{n}{b}\left\{1-\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}}\right\} > S_n > \frac{n}{b}\left\{\sqrt[n]{\frac{a+(n+1)b}{a+b}}-1\right\}.$$

與(I)類似者,有:

(I_1) $$\frac{1}{a+b}+\frac{n-1}{b}\left\{1-\sqrt[n-1]{\frac{a+b}{a+nb}}\right\} > S_n > \frac{n}{b}\left\{\sqrt[n]{\frac{a+(n+1)b}{a+b}}-1\right\}.$$

(I_2) $$\frac{1}{a+b}+\frac{n}{b}\left\{1-\sqrt[n]{\frac{a+b}{a+(n+1)b}}\right\}-\frac{1}{a+(n+1)b} > S_n > \frac{n}{b}\left\{\sqrt[n]{\frac{a+(n+1)b}{a+b}}-1\right\}.$$

(I_3) $$\frac{n}{b}\left\{1-\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}}\right\} > S_n > \frac{n-1}{b}\left\{\sqrt[n-1]{\frac{a+(n+1)b}{a+2b}}-1\right\}+\frac{1}{a+b}.$$

(I_4) $$\frac{n}{b}\left\{1-\sqrt[n]{\frac{a}{a+nb}}\right\} > S_n > \frac{n}{b}\left\{\sqrt[n]{\frac{a+(n+2)b}{a+2b}}-1\right\}+\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+(n+1)b}.$$

(I_5) $$\frac{n-1}{b}\left\{1-\sqrt[n-1]{\frac{a+b}{a+nb}}\right\}+\frac{1}{a+b} > S_n > \frac{n-1}{b}\left\{\sqrt[n-1]{\frac{a+(n+1)b}{a+2b}}-1\right\}+\frac{1}{a+b}.$$

$$(\mathrm{I}_6)\qquad \frac{1}{a+b}+\frac{n}{b}\left\{1-\sqrt[n]{\frac{a+b}{a+(n+1)b}}\right\}-\frac{1}{a+(n+1)b}>\mathrm{S}_n$$

$$>\frac{n}{b}\left\{\sqrt[n]{\frac{a+(n+2)b}{a+2b}}-1\right\}+\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+(n+1)b}.$$

$$(\mathrm{I}_7)\qquad \frac{1}{a+b}+\frac{n}{b}\left\{1-\sqrt[n]{\frac{a+b}{a+(n+1)b}}\right\}-\frac{1}{a+(n+1)b}>\mathrm{S}_n$$

$$>\frac{n-1}{b}\left\{\sqrt[n-1]{\frac{a+(n+1)b}{a+2b}}-1\right\}+\frac{1}{a+b}.$$

$$(\mathrm{I}\ )\qquad \frac{n-1}{b}\left\{1-\sqrt[n-1]{\frac{a+b}{a+nb}}\right\}+\frac{1}{a+b}>\mathrm{S}_n$$

$$>\frac{n}{b}\left\{\sqrt[n]{\frac{a+(n+1)b}{a+2b}}-1\right\}+\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+(n+1)b}.$$

蓋:

$$(n-1)-b\left(\mathrm{S}_n-\frac{1}{a+b}\right)=\frac{a+b}{a+2b}+\frac{a+2b}{a+3b}+\cdots+\frac{a+(n-1)b}{a+nb},$$

$$\frac{(n-1)-b\left(\mathrm{S}_n-\frac{1}{a+b}\right)}{n-1}>\sqrt[n-1]{\frac{a+b}{a+nb}},$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{a+b}+\frac{n-1}{b}\left\{1-\sqrt[n-1]{\frac{a+b}{a+nb}}\right\}>\mathrm{S}_n. \tag{4}$$

$$(n-1)+b\left(\mathrm{S}_n-\frac{1}{a+b}\right)=\frac{a+3b}{a+2b}+\frac{a+4b}{a+3b}+\cdots+\frac{a+(n+1)b}{a+nb},$$

$$\frac{(n-1)+b\left(\mathrm{S}_n-\frac{1}{a+b}\right)}{n-1}>\sqrt[n-1]{\frac{a+(n+1)b}{a+3b}},$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{a+b}+\frac{n-1}{b}\left\{\sqrt[n-1]{\frac{a+(n+1)b}{a+2b}}-1\right\}<\mathrm{S}_n. \tag{5}$$

$$n-b\left(\mathrm{S}_n-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+(n+1)b}\right)=\frac{a+b}{a+2b}+\frac{a+2b}{a+3b}+\cdots+\frac{a+nb}{a+(n+1)b},$$

$$\frac{n-b\left(\mathrm{S}_n-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+(n+1)b}\right)}{n}>\sqrt[n]{\frac{a+b}{a+(n+1)b}},$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{a+b}+\frac{n}{b}\left\{1-\sqrt[n]{\frac{a+b}{a+(n+1)b}}\right\}-\frac{1}{a+(n+1)b}>\mathrm{S}_n. \qquad (6)$$

$$n+b\left(\mathrm{S}_n-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+(n+1)b}\right)=\frac{a+3b}{a+2b}+\frac{a+4b}{a+3b}+\cdots+\frac{a+(n+2)b}{a+(n+1)b},$$

$$\frac{n+b\left(\mathrm{S}_n-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+(n+1)b}\right)}{n}>\sqrt[n]{\frac{a+(n+2)b}{a+2b}},$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{a+b}+\frac{n}{b}\left\{\sqrt[n]{\frac{a+(n+2)b}{a+2b}}-1\right\}-\frac{1}{a+(n+1)b}<\mathrm{S}_n. \qquad (7)$$

由(4)與(3)，(6)與(3)，(2)與(5)，(2)與(7)，(4)與(5)，(6)與(7)，(6)與(5)，(4)與(7)分別得(I_1)，(I_2)，(I_3)，(I_4)，(I_5)，(I_6)，(I_7)，(I_8)也。

對於$x>0$，由

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

可知

$$e^x>1+x.$$

$\therefore$ $a>0$，$b>0$ 時，

$$e^{\frac{b}{a+b}}>\frac{a+2b}{a+b},$$

$$e^{\frac{b}{a+2b}}>\frac{a+3b}{a+2b},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{\frac{b}{a+nb}}>\frac{a+(n+1)b}{a+nb}.$$

邊邊相乘，遂得

$$e^{b\,\mathrm{S}_n}>\frac{a+(n+1)b}{a+b}.$$

$$\therefore \qquad \mathrm{S}_n>\frac{1}{b}\{log(a+\overline{n+1}\,b)-log(a+b)\}. \qquad (8)$$

對於$x<3$，由

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{x}{3}\right)+\frac{x^4}{4!}\left(1-\frac{x}{5}\right)+\cdots$$

可知

$$e^{-x}>1-x.$$

$\therefore$ $a>0,\ b>0$ 時，

$$e^{-\frac{b}{a+b}}>\frac{a}{a+b},$$

$$e^{-\frac{b}{a+2b}}>\frac{a+b}{a+2b},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$e^{-\frac{b}{a+nb}}>\frac{a+(n-1)b}{a+nb}.$$

邊邊相乘，

$$e^{-bS_n}>\frac{a}{a+nb}.$$

$\therefore$
$$S_n<\frac{1}{b}\{log(a+nb)-log\,a\}. \tag{9}$$

故

(II) $\frac{1}{b}\{log(a+nb)-log\,a\}>S_n>\frac{1}{b}\{log(a+\overline{n+1}\,b)-log\,(a+b)\}.$

又，

$$e^{-\frac{b}{a+2b}-\frac{b}{a+3b}-\cdots-\frac{b}{a+nb}}>\frac{a+b}{a+2b}\cdot\frac{a+2b}{a+3b}\cdot\cdots\cdot\frac{a+(n-1)b}{a+nb},$$

$$e^{-b\left(S_n-\frac{1}{a+b}\right)}>\frac{a+b}{a+nb},$$

$$\frac{1}{a+b}-S_n>\frac{1}{b}\{log(a+b)-log(a+nb)\}.$$

$$S_n<\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b}\{log(a+nb)-log(a+b)\}. \tag{10}$$

故又得

$$(\mathrm{II}_1)\quad \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b}\{log(a+nb)-log(a+b)\}>S_n>\frac{1}{b}\{log(a+\overline{n+1}\,b)-log(a+b)\}.$$

由此可知 S_n 之值與

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b}\{log(a+nb)-log(a+b)\}. \qquad (a)$$

或

$$\frac{1}{b}\{log(a+\overline{n+1}\,b)-log(a+b)\}. \qquad (b)$$

之差常小於$\frac{1}{a+b}$• 蓋

$$log(a+nb)<log(a+\overline{n+1}\,b),$$

$$\frac{1}{b}\{log(a+nb)-log(a+b)\}<\frac{1}{b}\{log(a+\overline{n+1}\,b)-log(a+b)\}.$$

$$\left|\left[\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b}\{log(a+nb)-log(a+b)\}\right]-\left[\frac{1}{b}log(a+\overline{n+1}\,b)-log(a+b)\right]\right|<\frac{1}{a+b}$$

也。故(a)及(b)皆可視爲差誤小於$\frac{1}{a+b}$之 S_n 之值。

更因

$$e^{b\left(S_n+\frac{1}{a}\right)}>\frac{a+(n+1)b}{a},$$

$$S_n>\frac{1}{b}\{log(a+\overline{n+1}\,b)-log\,a\}-\frac{1}{a}• \qquad (11)$$

由(11), (10)及(11), (9)分別得:

$$(\mathrm{II}_2)\quad \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b}\{log(a+nb)-log(a+b)\}>S_n>\frac{1}{b}\{log(a+\overline{n+1}\,b)-log\,a\}-\frac{1}{a}.$$

$$(\mathrm{II}_3)\quad \frac{1}{b}\{log(a+nb)-log\,a\}>S_n>\frac{1}{b}\{log(a+\overline{n+1}\,b)-log\,a\}-\frac{1}{a}.$$

且類似此者尙可得也。

幾何證題各法*

余介石

幾何圖形性質，可分兩種：

(一)數量性　如線段與角的大小等是。

(二)位置性　如三點是否在一直線上，或三直線是否過一點等是。

初等幾何，係從數量的比較入手，所研究的問題，多屬於第一類，本文所論，亦以此爲限。

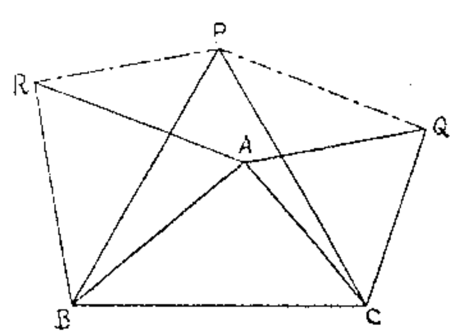
幾何証題，較代數演算爲難，中學生皆有同感，其故乃因一種圖形性質，應從何處着手推證，并無定則可尋，而在代數中何種問題，當用何種定理與公式，每易一望而知也。故本文卽揭示各種結論之主要證法，然有需注意者，卽所謂證某種問題宜用某法者，不過只是闡明重要而常用之線索，爲舉一反三之助，讀者必須熟玩深思，多演問題，方可期得心應手之效。

(I) 證等量的方法。

(一)使求證之等量爲全等三角形之相當元素。

[例]　自$\triangle ABC$各邊上，各作一等邊三角形$\triangle ABR$, $\triangle CAQ$在原三角形外，又$\triangle BCP$與原三角形一部相合如右圖，試證

$$PR=QA,\quad PQ=RA.\quad etc,$$



[解析]　取全等三角形$\triangle RBP$與$\triangle QPC$卽可證明。

[證]　因　$\angle PBR=\angle RBA-\angle PBA=\frac{2}{3}rt.\angle-\angle PBA$

$$=\angle PBC-\angle PBA=\angle ABC$$

* 本稿多取材於拙著新標準高中平面幾何學(中華書局出版)。

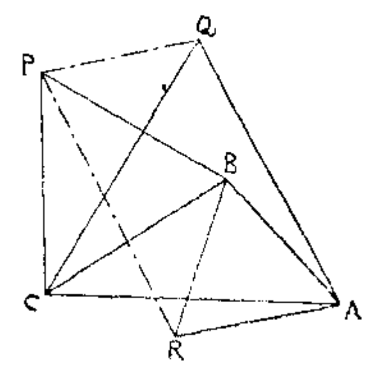
且　　　　　$RB=AB$, $PB=CB$, 故　$\Delta RBP\cong\Delta ABC$.

同理，　　　　$\Delta QPC\cong\Delta ABC$, 即　$\Delta RBP\cong\Delta QPC$.

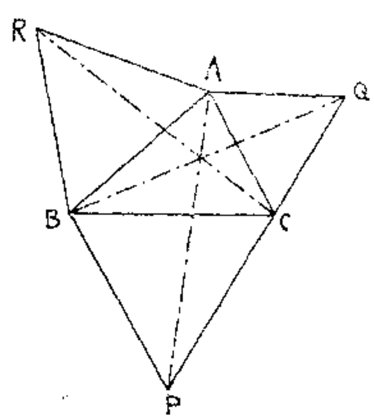
$\therefore$　　$PR=QA$,　　$PQ=RA$.

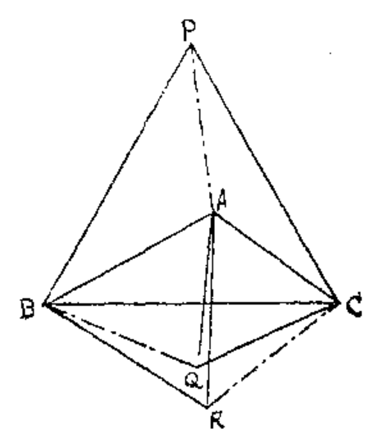
［注意］ 本題中 ΔABC 依 B 點作 $\frac{2}{3}rt.\angle$的旋轉，則達於 ΔRBP 之位置；又依 C 點作 $\frac{2}{3}rt.\angle$之旋轉，則合於 ΔQPC. 因旋轉以變更等量位置，是幾何學一重要方法。

［註］ 如只向外作一等邊三角形如右圖，則可令此邊的對頂爲 A，則仍有上題之關係，證法亦同。



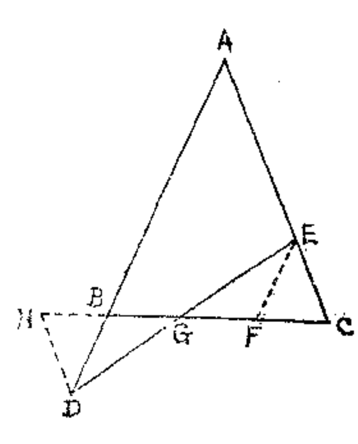
如所作三個等邊三角形均向外，或均不向外，則 $AP=BQ=CR$.





（二）添作輔助線，以顯出全等三角形。

［例］ 已知 ΔABC 中 $AB=AC$. 在 AC 上取 E，在 AB 的延線上取 D，使 $CE=BD$，而聯 DE，求証 BC 平分 DE.



［解析］ 設 DE 交 BC 於 G，欲證 $DG=GE$；宜作輔助線，以補成二個全等

三角形。因 $\angle BGD=\angle CGE$，所以宜作 $\angle GEF=\angle GBD$.

［證］ 作 $EF\parallel AD$，則 $\angle ECF=\angle ABC=\angle EFC$.

故 $EF=EC$. 但 $EC=BD$，卽得 $EF=BD$.

又 $\angle BGD=\angle FGE$, $\angle GDB=\angle GEF$，所以

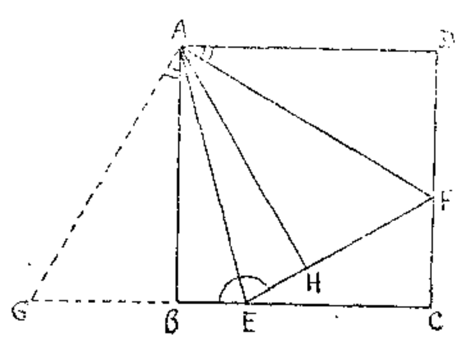
$$\triangle BGD\cong\triangle FGE,\quad 而\quad DG=GE.$$

［注意］ 本法主旨，在將 BD 平行移動至 FE 位置，以作補助線。

［註］ 由上所述，可知亦可平行移動 CE 至 DH. 換言之，卽作 $\angle GDH=\angle GEC$ 以補成全等三角形也。

(三)有時全等三角形條件不足，則須藉適宜之輔助圖，以補足全等條件。

［例］ 自正方形 ABCD 的頂點 A，作一角等於 $\frac{1}{2}rt.\angle$，其二邊與 BC 交於 E，與 DC 交於 F. 聯 EF，試證自 A 至 EF 之距離，等於這正方形之邊長。



［解析］ 設 $AH\perp EF$，如 $AM=AB$，則 $rt.\triangle ABD\cong rt.\triangle AHE$，故須補足一相等元素之條件，始可證明。今將 $rt.\triangle ADF$ 作直角之旋轉至 $rt.\triangle ABG$ 位置，則得 $\triangle AGE\cong\triangle AFE$.

［證］ 延長 CB 至 G，使 $BG=DF$，則得 $rt.\triangle AGB\cong rt.\triangle ADF$，故 $AG=AF$，又因 $\angle GAB=\angle FAD$，故得

$$\angle GAE=\angle GAB+\angle BAE=\angle FAD+\angle BAE=\angle BAD-\angle EAF$$
$$=rt.\angle-\tfrac{1}{2}rt.\angle=\tfrac{1}{2}rt.\angle=\angle EAF.$$

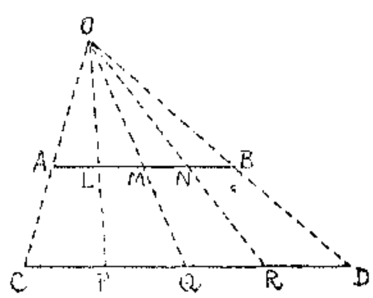
$$\therefore\quad \triangle AGE\cong\triangle AFE,\quad 而\quad \angle AEB=\angle AEH.$$

$$\therefore\quad rt.\triangle ABE\cong rt.\triangle AHE,\quad 因之\quad AH=AB.$$

［注意］ 輔助形之 $\triangle AGE$ 與 $\triangle AFE$，以 AE 爲軸成對稱形。此亦爲證法之一

重要線索。

(四)利用比例的理。



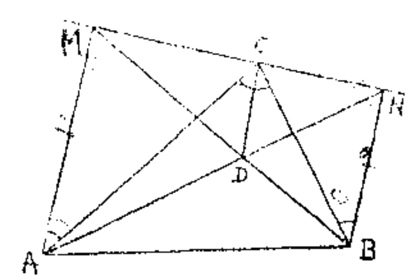
[例] AB 與 CD 二線段平行，聯 AC 與 BD 交於 O. 設 L, M, N 等爲 AB 上等分點，試證 OL, OM, ON 必等分 CD.

[解析] 因 AL＝LM, 故如 CP＝PQ, 則必 AL：CP＝LM：PQ.

[證] 因 AB // CD, 故 AL：CP＝OL：OP＝LM：PQ.

又 AL＝LM, 故 CP＝PQ. 同理可證其他。

(五)有時常利用平行線與截線所成各組等角，以證角的相等。



[例] 自 $\triangle ABC$ 中 A 與 B 二頂點，作 $\angle C$ 之外分角線上垂線 AM 和 BN. 聯 AN 交 BM 於 D, 試證 CD 爲 $\angle C$ 之內分角線。

[解析] 如 CD 爲內分角線，則必 $CD\perp MN$, 亦卽是 CD // AM // BN. 故必 $\angle DCA=\angle MAC$, $\angle DCB=\angle NBC$. 因此必 $\angle MAC=\angle NBC$, 而 $rt.\triangle CMA \backsim rt.\triangle CNB$.

[證] 因 $\angle ACM=\angle BCN$, 故 $rt.\triangle AMC \backsim rt.\triangle BNC$.

$\therefore$ $\angle MAC=\angle NBC$, 且 AM：BN＝MC：CN.

又因 AM // BN, 故 $\triangle ADM \backsim \triangle BDN$, 而 AD：DN＝AM：BN

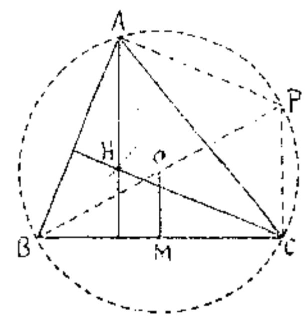
$\therefore$ AD：DN＝MC：CN, 而得 CD // AM // BN.

故 $\angle DCA=\angle MAC$, $\angle DCB=\angle NBC$, 卽有 $\angle DCA=\angle DCB$.

(六)證甲量倍於乙量時，常將甲量折半，或倍乙量。

[例] 求證三角形垂心與一頂點之距離，等於自其外接圓心到該頂點對邊上

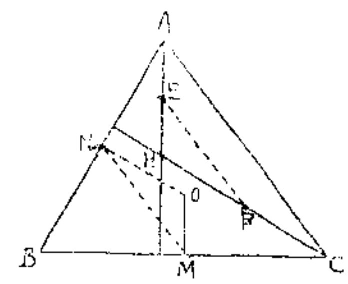
距離之二倍。



［解析］　右圖中，H 為 ΔABC 的為垂心，O 為外接圓心，作直徑 BP，則 $PC=2\cdot OM$，且與 AH 平行。故如 $AH=2\cdot OM$，則將得一平行四邊形 AHCP.

［證］　因 $PC/\!/AH$, $PA/\!/CH$, 故得▱AHCP, 而 $PC=AH$.

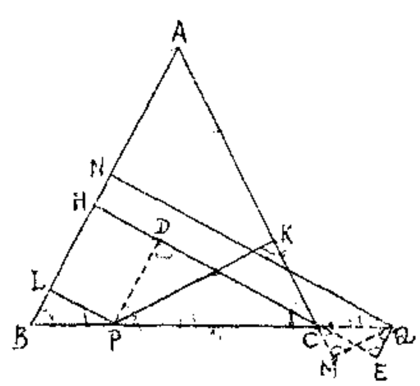
但就 $rt.\Delta BCP$ 易知 $PC=2\cdot OM$, 即 $AH=2\cdot OM$.



［注意］　本證法要點，在二倍 OM，而平行移到至 PC.

［註］　又一證法為平分 AH 於 E, CH 於 F, 而就 $\Delta ONM\equiv\Delta HFE$, 以證 $OM=HE$.

（七）欲證一量等於二量和差，常將這和差補出。



［例］　ΔABC 中 $AB=AC$, 試證底邊 BC 上任一點 P 至二等腰上距離的和為一定；自底邊的延長線上任一點至二腰上距離之差為一定，而此定量，即為自腰至對頂之距離。

［解析］　設 P 為 BC 上任意一點，作 $PL\perp AB$, $PK\perp AC$, 又 $CH\perp AB$. 如 $PL+PK=CH$, 則可在 CH 上取一點 D，使 $HD=PL$, $DC=PK$.

如合上條件，則 PLHD 為一長方形，而 $rt.\Delta PDC\equiv rt.\Delta CKP$.

［證］　作 $PD\perp CH$，則得長方形 PLHD，而 $HD=PL$.

又　$\angle DPC=\angle ABC=\angle KCP$, 故 $PK=CD$.

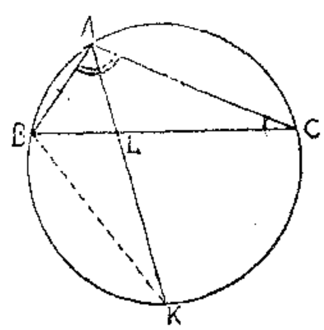
$$\therefore\quad PL+PK=CD+DH=CH.$$

依同法可證如Q在BC延長線上,作 $QN\perp AB$, $QM\perp AC$,則由Q至CH之垂線QE,可證得 $QN-QM=CH$.

[注意] PL由平行移動至DH,而PK則由一反摺至CD.

(ii) 證等比及等積綫段法.

(一)作適當配合,使以諸線段爲邊之三角形相似.



[例] $\triangle ABC$ 中,AL 平分 $\angle BAC$,其延長線交此三角形之外接圓於另一點K,求證

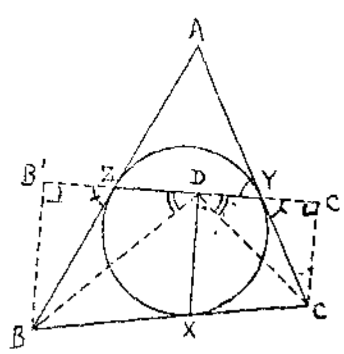
$$AB : AK = AL : AC.$$

[解析] 取相似三角形 $\triangle ABK$ 與 $\triangle ALC$,即可證明.

[證] 聯BK,則 $\angle BKA=\angle LCA$, $\angle BAK=\angle LAC$.

故 $\triangle ABK \backsim \triangle ALC$, 而 $AB : AK = AL : AC$.

(二)有時須藉輔助形,以補足相似條件.



[例] $\triangle ABC$ 各邊與其內接圓切於X,Y,Z如右.自X作 $XD\perp YZ$,試證

$$ZD : DY = ZB : YC.$$

[解析] 就圖易見 $\angle BZD=\angle CYD$.故如欲證的比例式成立,則必 $\triangle BDZ \backsim \triangle CDY$.在此可作輔助形 $rt.\triangle BB'Z$ 及 $rt.\triangle CC'Y$ 證得 $\angle BDB'=\angle CDC'$ 以補足相似條件.

[證] 作 $BB'\perp YZ$ 和 $CC'\perp YZ$,則因 $\angle B'ZB=\angle AZY=\angle C'YC$,故 $rt.\triangle BB'Z \backsim rt.\triangle CC'Y$,且 $BB' : CC' = BZ : CY$.

但 $BZ=BX$, $CY=CX$, 而 $BB' /\!/ XD /\!/ CC'$,故

$$BB' : CC' = BX : CX = B'D : C'D,\ 而\ rt.\triangle BB'D \backsim rt.\triangle CC'D.$$

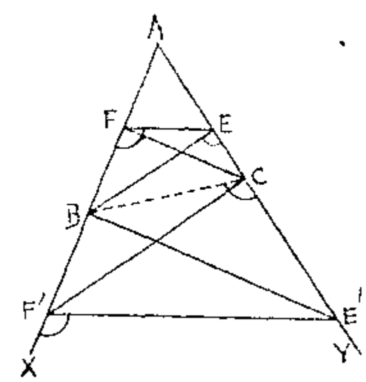
即得 $\angle BDB'=\angle CDC'$,是以 $\triangle BDZ \backsim \triangle CDY$.

$\therefore\quad ZD : DY = ZB : YC.$

(III) 證平行綫法.

(一)利用平行線性質,如錯角相等,同側內角相等。

［例］ 自 $\angle XAY$ 二邊上各取一點 B 及 C. 自 B 作 $BE \perp AY$, $BE' \perp AX$; 自 C 作 $CF \perp AX$, $CF' \perp AY$, 試證 $EF \parallel E'F'$.



［解析］ 如有 $EF \parallel E'F'$, 則必

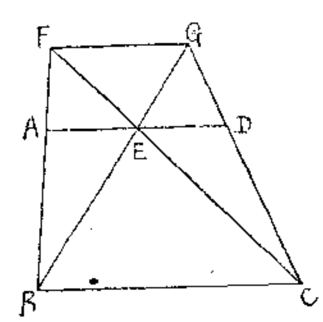
$\angle EFB = \angle E'F'X.$

［證］ 因 $\angle BFC = \angle CEB = rt.\angle$, 故 B, F, E, C 共在一圓周上, 而 $\angle EFB = \angle BCE'$. 同理, 可知 B, C, E', F' 共圓, 而 $\angle XF'E' = \angle BCE'$.

$\therefore\quad \angle EFB = \angle XF'E'$ 而 $EF \parallel E'F'$.

(二)利用比例線段之理。

［例］ BCGF 四邊形的 BG 與 CF 二對角線交於 E, 過 E 作 $AD \parallel BC$, 試證如 $AE = ED$, 則這四邊形為一梯形。



［證］ 因 $AD \parallel BC$, 故

$FA : FB = AE : BC,$

$GD : GC = ED : BC.$

但 $AE = ED$, 故 $FA : FB = GD : GC$, 卽得 $FG \parallel BC$.

（待　續）

代數課外習題選解

（二續）

鴻　之

21. x, y, z 之整對稱式 $f(x, y, z)$ 爲一個齊一次式

$$\varphi\equiv\varphi(x, y, z)\equiv lx+my+nz$$

所整除時，此一次式經任意多回的二文字之交換

$$(y, z),\qquad (z, x),\qquad (x, y)$$

而成之諸一次式，共有六種不同之形式（φ 亦在內），以 $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_5$ 表之，則 $f(x, y, z)$ 又必爲此等一次式之積 $\varphi\,\varphi_1\,\varphi_2\cdots\varphi_5$ 所整除。

［證］ 由假設

$$f(x, y, z)\equiv\varphi(x, y, z)g(x, y, z), \tag{1}$$

式中 $g(x, y, z)$ 爲 x, y, z 之整式。今設 φ_1 爲 φ 中施行 (y, z) 交換後而成之式，

$$\varphi_1(x, y, z)=\varphi(x, z, y)=lx+mz+ny,$$

再於(1)式兩端施行同樣之交換，得

$$f(x, z, y)\equiv\varphi(x, z, y)g(x, z, y).$$

f 既爲 x, y, z 之對稱式，故對於二文字之交換其值不變，故上式又可書爲

$$f(x, y, z)\equiv\varphi_1(x, y, z)g_1(x, y, z). \tag{2}$$

由(1)，(2)兩式，得 $\varphi\cdot g=\varphi_1\cdot g_1$；但 φ_1 不能整除 φ，故必能整除 g，卽

$$g(x, y, z)\equiv\varphi_1(x, y, z)h(x, y, z),$$

內 $h(x, y, z)$ 爲 x, y, z 之整式。將此結果代入(1)式，卽得

$$\therefore\quad f(x, y, z)=\varphi(x, y, z)\varphi_1(x, y, z)h(x, y, z).$$

次於(1)中施行 (z, x) 之交換，而令 $\varphi_2(x, y, z)\equiv\varphi(z, y, x)$，則依同理有

$$f(x, y, z)\equiv\varphi_2(x, y, z)g_2(x, y, z)\equiv\varphi(x, y, z)\varphi_1(x, y, z)h(x, y, z).$$

φ_2既不能整除φ或φ_1，必整除h，設$h(x, y, z)=\varphi_2(x, y, z)k(x, y, z)$，則

$$f(x, y, z)\equiv\varphi(x, y, z)\varphi_1(x, y, z)\varphi_2(x, y, z)k(x, y, z).$$

如是繼續進行，可證$f(x, y, z)$能被$\varphi\,\varphi_1\,\varphi_2\cdots\varphi_5$之積所除盡。

（注意）　由上理可知x, y, z之整對稱式，若被$x+y$或x所整除，則亦必能被$(x+y)(y+z)(z+x)$或xyz所整除。此理對於因數分解甚爲有用。

22. 試分解$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$爲因子之積。

［解］　此爲x, y, z之對稱齊五次式，且$y=-z$時，

$$(x-z+z)^5-x^5+z^5-z^5\equiv0,$$

故$y+z$爲其因子之一。由前題之理，知$(y+z)(z+x)(x+y)$可以整除題式，又商式必爲對稱齊二次式。故對於適宜之L, M,

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5\equiv(y+z)(z+x)(x+y)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}$$

成立。比較x^4y, x^3y^2之係數，得$L=5$, $L+M=10$。由是$L=M=5$，而

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=5(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy).$$

23. 試分解

$$f(x, y, z)=8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3$$

爲因子之積。

［解］　$f(x, y, z)=\{2(x+y+z)\}^3-(y+z)^3-\{(z+x)^3+(x+y)^3\}.$

今$\{2(x+y+z)\}^3-(y+z)^3$中含有$2(x+y+z)-(y+z)=2x+y+z$之因子，$(z+x)^3+(x+y)^3$中亦含有$z+x+x+y=2x+y+z$之因子，故$f(x, y, z)$之一因子爲$2x+y+z$.

由21題之理，知$2y+z+x$及$2z+x+y$皆爲其因子，而

$$f(x, y, z)=L(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y).$$

比較x^3之係數，得$2L=6$，故$L=3$而

$$8(x+y+z)^3-(y+z)^3-(z+x)^3-(x+y)^3=3(2x+y+z)(2y+z+x)(2z+x+y).$$

24. n 爲正整數時，試證

$$f(x,y,z)\equiv(x+y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-(z+x)^{2n}-(x+y)^{2n}+x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}$$

必爲

$$g(x,y,z)\equiv(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$$

所整除。

［證］ 本証明之方式，乃先求 $g(x,y,z)$ 之因數，而後証明 $f(x,y,z)$ 亦含此等因數。 於 $g(x,y,z)$ 中令 $x=0$，

$$g(o,y,z)\equiv(y+z)^4-(y+z)^4-z^4-y^4+y^4+z^4\equiv0.$$

故 g 中含 x 爲一因數。 但 g 爲 x,y,z 之對稱齊次式，故必爲 xyz 之積所整除。由是

$$g(x,y,z)\equiv \mathrm{L}xyz(x+y+z).$$

欲求 L 之值，可令 $x=1$，$y=1$，$z=-1$ 代入，即得 $\mathrm{L}=12$，而

$$g(x,y,z)=12xyz(x+y+z).$$

次於 $f(x,y,z)$ 中令 $x=0$，得

$$f(o,y,z)\equiv(y+z)^{2n}-(y+z)^{2n}-z^{2n}-y^{2n}+y^{2n}+z^{2n}\equiv0.$$

故 f 中亦含 x 爲一因數。 且 f 亦爲 x,y,z 之對稱齊次式，故可以 xyz 之積整除。又若令 $x=-y-z$，則

$$f(-y-z,y,z)\equiv-(y+z)^{2n}-(-y)^{2n}-(-z)^{2n}+(y+z)^{2n}+y^{2n}+z^{2n}\equiv0.$$

是即 f 又含有 $x+y+z$ 爲一因數。由是 g 之因數，f 中皆有之，故 f 爲 g 所整除。

（注意） $n=2$ 時，$f(x,y,z)=g(x,y,z)$. $n=1$ 時，$f(x,y,z)$ 雖爲二次式，但恆等於0；故本題於此兩種情形下，亦均成立。

25. 任意一個 x,y,z 之整交代式 $f(x,y,z)$ 必爲 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 所整除。

［證］ 交代式經任意二文字交換後，變號不變值，故

$$f(x,y,z)\equiv-f(x,z,y),$$

即 $$f(x,y,z)+f(x,z,y)\equiv 0.$$

今若令 $y=z$，則上式變爲 $2f(x,y,y)=0$，由是知 $y-z$ 爲 $f(x,y,z)$ 之一因子。同理，$z-x$ 及 $x-y$ 皆爲其因子；故 $f(x,y,z)$ 可被 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 之積所整除。

(注意) $(y-z)(z-x)(x-y)$ 亦爲 x,y,z 之交代式，通常以 x,y,z 之最簡交代式名之。又 $f(x,y,z)$ 爲交代式時，經除以最簡交代式後，所得之商，必爲對稱整式。何則，設

$$f(x,y,z)\equiv(y-z)(z-x)(x-y)\varphi(x,y,z),$$

則經 (y,z) 之交換後，得

$$f(x,z,y)\equiv(z-y)(y-x)(x-z)\varphi(x,z,y).$$

兩邊各乘 -1 而整理之，則因 $-f(x,z,y)=f(x,y,z)$，得

$$f(x,y,z)=(y-z)(z-x)(x-y)\varphi(x,z,y).$$

由是 $\varphi(x,z,y)=\varphi(x,y,z)$ 而 φ 爲 x,y,z 之整對稱式。

26. 試分解 $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$ 爲因子之積。

[解] 此式顯爲一交代式，由上題知其含有 $y-z$, $z-x$, 及 $x-y$ 各因子，且以 $(y-z)(z-x)(x-y)$ 除後所得之商，爲對稱齊二次式。故必可求得 L, M, 使

$$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5\equiv(y-z)(z-x)(x-y)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(yz+zx+xy)\}.$$

比較 x^4y 及 x^3y^2 之係數，得 $-L=-5$, $L+M=10$, 故 $L=5$, $M=-5$ 而

$$(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5=5(y-z)(z-x)(x-y)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy).$$

27. 試分解

$$(y^2-z^2)(1+xy)(1+xz)+(z^2-x^2)(1+yz)(1+yx)+(x^2-y^2)(1+zx)(1+zy)$$

爲因子之積。

[解] 此式顯爲 x,y,z 之交代式，但非齊次式耳。由上理，以 $(y-z)(z-x)(x-y)$

除後所得之商，應爲三次對稱整式。以 $f(x,y,z)$ 代題式，則

$$f(x,y,z)\equiv(y-z)(z-x)(x-y)\{L(x^3+y^3+z^3)+M(x^2y+x^2z+y^2z+y^2x+z^2x+z^2y)$$
$$+Nxyz+P(x^2+y^2+z^2)+Q(yz+zx+xy)+R(x+y+z)+S\}.$$

比較係數，因左方缺少 x^5y 及 x^4y^2 之項，故 $L=M=0$。由 x^3y^2z 之係數知 $N=1$。由 x^4y 及 x^3y^2 之係數，知 $P=Q=0$。更由 x^3y 及 x^2y 之係數，知 $R=1$，$S=0$。故

$$(y^2-z^2)(1+xy)(1+xz)+(z^2-x^2)(1+yz)(1+yx)+(x^2-y^2)(1+zx)(1+zy)$$
$$\equiv(y-z)(z-x)(x-y)(xyz+x+y+z).$$

28. 試證 Euler 氏公式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^r}{\prod\limits_{i\neq j}(a_i-a_j)}=\begin{cases}0; & (r<n-1)\\ 1, & (r=n-1)\\ \Sigma a_i. & (r=n)\end{cases}$$

［證］公式之左方實際展開之，乃

$$\frac{a_1^r}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)}+\frac{a_2^r}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)}$$
$$+\cdots+\frac{a_i^r}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$$
$$+\cdots+\frac{a_n^r}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})}.$$

此式對於任二個 a 之交換，顯然不變其值，故爲 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 等 n 個 a 之對稱式。今以 F 表之，再取 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 之最簡交代式，卽連乘積

$$\begin{aligned}Q\equiv(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)\cdots(a_1-a_n)&\\ (a_2-a_3)(a_2-a_4)\cdots(a_2-a_n)&\\ (a_3-a_4)\cdots(a_3-a_n)&\\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots&\\ (a_{n-1}-a_n)&\end{aligned}$$

爲公分母。 通分相加後，以 P 表其分子，則

$$F \equiv P/Q.$$

設 q 爲 Q 之次數，則

$$q=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\tfrac{1}{2}n(n-1).$$

又在未通分前，F 中各分數之分子及分母次數分別爲 r 及 $n-1$，故通分後 P 之次數爲

$$p=r+\{q-(n-1)\}=q+\{r-(n-1)\}. \qquad (1)$$

此處 F 及 Q 既各爲 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 之對稱式及交代式，故 P 必爲交代式。因之 P 可被 Q 整除，卽 F 化簡後可變爲整式也。

(i) $r<n-1$ 時，由(1)知 $p<q$，卽 P 之次數小於 Q 之次數。但 P 可被 Q 所整除，故此時 $P\equiv 0$ 而 $F=0$。

(ii) $r=n-1$ 時，由(1)知 $p=q$，卽 P, Q 之次數相同。故 P/Q 必爲一常數，其值與諸 a 無關，以 R 表之。今

$$P=a_1^{n-1}(a_2-a_3)(a_2-a_4)\cdots(a_2-a_n)(a_3-a_4)\cdots(a_3-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)+\cdots$$

$$RQ=R(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n).$$

比較 $a_1^{n-1}a_2^{n-2}a_3^{n-3}\cdots a_{n-1}$ 之係數，知 $R=1$. 故 $F=1$。

(iii) $r=n$ 時，由(1)知 $p=q+1$，故 F 爲一次對稱式，卽

$$F=L(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n).$$

而

$$P=L(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)\cdot Q.$$

但此時

$$P=a_1^n(a_2-a_3)(a_2-a_4)\cdots(a_2-a_n)(a_3-a_4)\cdots(a_3-a_n)\cdots(a_{n-1}-a_n)+\cdots.$$

比較 $a_1^n a_2^{n-2}a_3^{n-3}\cdots a_{n-1}$ 之係數，知 $L=1$，而 $F=\Sigma a_i$.

綜上之結果，Euler 氏公式成立無疑。

29. 設 a, b, c 爲不等之三數，且 $abc\neq 0$，試証

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=\frac{1}{abc}.$$

［證］ 於 Euler 氏公式中，設 $n=3$，$r=2$，則 $r=n-1$，而

$$\frac{a_1^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)}+\frac{a_2^2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)}+\frac{a_3^2}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}=1.$$

於此恆等式中，令 $a_1=1/a$, $a_2=1/b$, $a_3=1/c$，則得

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}=1.$$

兩端以 abc 除之，卽得所求證之式。

30. 化簡

$$\mathrm{F}(x)\equiv\frac{(a+p)(a+q)}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{(b+p)(b+q)}{(b-c)(b-a)(x+b)}+\frac{(c+p)(c+q)}{(c-a)(c-b)(x+c)}.$$

［解］ 就 a,b,c 言，F 爲對稱式；就 p,q 言亦然。今設 $\mathrm{F}(x)=\mathrm{P}(x)/\mathrm{Q}(x)$：

$$\mathrm{P}(x)\equiv-(b-c)(a+p)(a+q)(x+b)(x+c)-(c-a)(b+p)(b+q)(x+c)(x+a)$$
$$-(a-b)(c+p)(c+q)(x+a)(x+b);$$

$$\mathrm{Q}(x)\equiv(b-c)(c-a)(a-b)(x+a)(x+b)(x+c).$$

此中 $\mathrm{Q}(x)$ 顯爲 a,b,c 之交代式。 因 $\mathrm{F}(x)$ 爲 a,b,c 之對稱式，故 $\mathrm{P}(x)$ 必爲 a,b,c 之交代式，可被 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 所整除。 又因 $\mathrm{P}(p)=\mathrm{P}(q)=0$，故

$$\mathrm{P}(x)\equiv \mathrm{L}(b-c)(c-a)(a-b)(x-p)(x-q).$$

由比較係數知 $\mathrm{L}=1$. 故得

$$\mathrm{F}(x)\equiv\frac{(x-p)(x-q)}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

(待 續)

中學算學教學之理論及實際

汪 桂 榮

(二) 教 材 論

歐美各國對於中學算學教材改進之情形

自十九世紀末葉起，歐美各國對於中學算學教材之改進，漸加注意。1871 年英國有幾何教學改進委員會之組織，該會至 1897 年改爲算學會。1892 年美國教育會指定十人委員會改進中學教材，其附設之五人委員會，專研究算學教材。該會於 1895 年又指定中學升學需要委員會。1901 年英之潘來教授提倡中學算學應注重直觀方法及實用教材。翌年美之毛爾(Moore)教授提倡實用教材及融合制度，法之譚那來(Tannery)教授提倡實用教材及函數觀念。1905 年德之克萊因(Klein)教授亦提倡直觀教材及函數觀念。一時中等算學改進運動，遂風起雲湧，美國算學界尤爲活躍。1903 年新英蘭(New England)算學教師會，馬來蘭(Maryland)算學教師會，及美國中央算學科學教師會相繼成立。1904 年美國東北算學教師會亦成立。1907 年各地算學及科學教師組織美國算學科學教師會，並指定十五人委員會專事研究中學幾何教材。1916 年美國算學會指定中學算學需要委員會，由大學教授六人及中學教師七人組織之。1923 年該會更有中學升學需要委員會之組織，對於中學算學教材，均有詳細之研究及規定。由此可見教材改進問題，由大學教授努力提倡，中學教師專心研究，大學依據標準擬定入學試題，中學依據標準研究教材組織，雙方合作，始易收良好之結果。

我國對於中學算學教材之規定

自民國二十一年教育部正式頒布中學課程標準後，次年江蘇省教育廳更進一步而規定中學算學教學進度表；近年根據標準而編輯之算學教本，逐漸增加，從此

研究改進算學教材，不難得良好結果。惜各大學入學算學試題，逐漸加深，且無一定標準，因之中學方面為謀畢業生升學之便利，乃增加鐘點，補充教材，勉强注入，學生難以消化，殊不合教育原理。欲圖改進，非大學教授提倡指導不為功，入學試題，尤應劃一標準。總之大學考試一日不合理化，中學教材永無改進之可能，此誠急待解決最根本極重要之一問題。所望各大學教授，羣起作中等算學改造運動，若英之潘來，美之毛爾，法之譚那來，德之克萊因；如是則至少可得兩種利益。一，我國大學算學系畢業生，大都均為中學教師，大學教授而能稍注意於中學算學教學法，則可造成良好師資。二，大學教授能稍注重中學算學教材，則出題時有相當標準，而中學方面亦可安心造成良好基礎，對於大學教育亦有幫助也。

中學算學教材最近之趨勢

關於算學教材最近之趨勢，先綜合論之如次：

I. 內容方面。

1. 減少太抽象之理論，增加實用教材。
2. 減少太嚴密之論理，注重學習心理。
3. 注重理解能力，不重死代公式。
4. 注重函數觀念。
5. 多插歷史教材。

II. 組織方面。

1. 採用心理次序。
2. 多用歸納步驟。
3. 採用融合精神。
4. 多用分析手續。
5. 多採單元制度。
6. 常用圓周編制。

7。條理力求清楚。

8。解說力求簡明。

Ⅲ。練習方面。

1。多用引起思考之問題。

2。多量練習。

3。分配適當。

4。注重解題方法。

5。注重複習。

6。多留自動餘地。

7。注重個性差別。

8。注重測驗。

再就初高中算學各科分別論之如次：

Ⅰ。初中方面。

1。算術。

a. 使學者明白計算原理。*b*. 注重合乎國情之應用題，但太專門者不宜有。*c*. 減少太繁雜無用之習題。*d*. 注重速算及略算。*e*. 注重驗算。*f*. 多用圖解幫助思想。*g*. 酌加代數幾何觀念。*h*. 稍講統計。

2。代數。

a. 起首說明文字使用，引起學者充分興趣。*b*. 減少太抽象之理論。*c*. 減少太繁雜之習題。*d*. 注重基本練習。*e*. 注重實用問題。*f*. 多用圖解。*g*. 注重函數觀念。*h*. 多與各科連絡。

3。實驗幾何。

a. 採用實驗方法。*b*. 注重自動研究。*c*. 應用歸納步驟。*d*. 注重實用教材。*e*. 多與算術代數連絡。

4。證明幾何。

a. 使學者認識証明幾何之意義與需要。 *b*. 証明開始之訓練。 *c*. 定義用歸納敘述，并多用問題，使學者透澈了解。 *d*. 定義在用時始介紹。 *e*. 注重實用的計算題。 *f*. 減少與系統無關係之定理。 *g*. 多用分析法。 *h*. 圖形表示力求清楚。 *i*. 極限定理，不必嚴格証明。 *j*. 定理，計算題，軌跡，作圖採混合式編制。 *k*. 軌跡及作圖只講大概。

5. 數值三角。

a. 用歸納法說明三角函數之意義。 *b*. 僅講正弦，餘弦及正切，其他函數從略。 *c*. 避免大於 90° 之三角函數。 *d*. 注重真數解三角形。 *e*. 解題時注重原理及方法，形式公式一概不用。 *f*. 與算術代數幾何充分連絡。 *g*. 恆等式及方程式，只述大概。

Ⅱ. 高中方面。

1. 平面三角。

a. 起首卽講三角函數之應用，引起學者興趣。 *b*. 注重解三角形，証恆等式及解方程式之方法。 *c*. 減少太繁雜之習題，注重實用題。 *d*. 略講高等三角。 *e*. 略講測量術。

2. 平面幾何。

a. 注重幾何基礎。 *b*. 証定理，求軌跡及作圖，特別注重方法。 *c*. 計算題注重算法，不注重公式。 *d*. 難定理分爲數定理，難題用適當習題在前導引。 *e*. 充分應用代數法。 *f*. 導入近世幾何觀念，但不作高深之探討。 *g*. 不避用三角。 *h*. 注重函數觀念。

3. 立體幾何。

a. 減少與系統無關之定理。 *b*. 增加實用數値題。 *c*. 引用代數方法。 *d*. 極限不必嚴格証明。 *e*. 注重運動觀念及函數觀念。 *f*. 圖形表示力求清楚。 *g*. 充分說明平面立體之異同關係。

4. 高等代數。

a. 注重代數基礎。 b. 以函數爲中心觀念。 c. 減少理論，增加實用教材。 d. 增加圖解。 e. 不避用三角。

5. 解析幾何。

a. 注重用代數方法研究圖形性質，不專注重錐線之理論方面。 b. 以方法爲中心，組織教材。 c. 注重插繪曲線。

我國中學算學教材中的問題

I. 關於初中者：

關於初一算學，支配最宜研究。學生在初小高小均讀算術，其中幾何觀念極少。到中學後，希望多得新知識，但仍爲算術，仍爲加減乘除比例百分等，頗難引起學生之興趣，此其一。

美國初中算學，大都採混合制度，歐洲各國，則取分科合教制度，此爲二十世紀中學算學教材改進中最要之點。我國初中算學尚未充分連絡，此其二。

美國初中祇授實驗幾何，歐洲中學亦先讀實驗幾何，次讀先實驗後証明幾何，最後方讀嚴格之證明幾何。我國初中對於實驗幾何，似未重視，此其三。

數值三角爲初中學生最感興趣最有實用之學程，但一般初中似未重視，於時間寬裕時始略授三角，且幷非數值三角，此其四。

各校初中算學，大部尙偏重於難題之注入。於教材內容之研究及組織之改革，一般教本中似未達完善之境，此其五。

II. 關於高中普通科者：

因大學入學試驗關於算學方面偏重冷僻問題，於是高深理論之教材盡量注入，學生只知記憶，而各種能力，態度，習慣，理想，皆不能逐漸養成，此其一。

部頒標準，對於平面幾何及高等代數，似稍偏重，對於不升學及不讀理科之學生，似覺嫌多，此其二。

部頒標準及各大學入學試驗，對於立體幾何比較看輕，似於空間懸想及實用方

面，未見注重，此其三。

歐美各中學均稍授微積分大意，較之高深幾何及代數，用處似覺稍大，此爲克萊因教授所盡力提倡者，此其四。

部頒標準中，課程支配似太零星，此其五。

因圖會考及升學之效率，有設算學複習課程之必要。歐洲各國中學最後一年算學均爲複習，爲最有興趣且最重要之學程，此其六。

Ⅲ. 關於高中師範科者：

高中師範科學生，因受家境淸寒關係，不能入普通科，但對於算學有興趣者頗多，如何方可發展其能力，此其一。

高中師範科算學教材，僅偏於實用，似非所宜，此其二。

各校對於部頒標準，均嫌太緊，是否內容太多，抑係因未有適當之師範算學教本，此其三。

除算術幾何外，關於三角，代數，解析幾何，似宜採取如初等算學分析之教本，併爲一種課程，此其四。

Ⅳ. 關於高中職業科者：

各職業高中課程標準尚未頒布，各校無一定辦法，此其一。

工科算學似以在高一教完爲當，此其二。

工科應否授微積大意，此其三。

商科農科算學課程如何釐訂，此其四。

解決之辦法

Ⅰ. 初一上學期理論算術三小時，實驗幾何二小時。因歐美各國中學授實驗幾何甚早且易，頗足引起學生興趣。學生到中學後，可早得新的知識。再則中學算學以形數雙方並進爲佳；實驗幾何中多爲數值計算，與理論算術頗多連絡。

初一下學期實用算術三小時，初步代數二小時。實用算術中比例百分及利息

等算法，引用等量公理，學習比較便利。

初二初三代數與幾何並進，或採混合制，充分連絡。

初三下學期之數值三角，充分與幾何中之比例及代數中之對數連絡。又同時算學復習學程，將三年所授作一有系統的整理，俾得融會貫通。

II. 高中入學考試，力避冷僻難題，注重基本運算。如是可以促進初中算學教材之合理化，實用化及訓練化。初中方面恪守教材範圍，應於高中學習者，不宜提前講授。

希望中國數學會及中等算學研究會從速指定委員會，討論中學教材，使有一定標準與範圍，然後再加研究改進。江蘇省教廳所定進度表，根據最近趨勢而編成，大體尚妥，似可取爲借鏡。

就近年各大學理工學院入學試題之情形，對於投考學生，似應補充下列各點：

1. 三角。三角形之性質，補助角，消去法，及三角級數。

2. 幾何。三角形及圓之性質，極大極小，軌跡及作圖，近世幾何大意。

3. 高等代數。方程式論，消元法，整數論，連分數，級數求和，不等式，行列式，無窮級數及虛數論。

4. 解析幾何。斜坐標，錐線幾何性質，極點極線，相似，反形及立體解析幾何大意。

高中必修教材，宜就基本方面整理，使有條不紊，然後充分加以練習。理論方面，似可稍略。習題分口答，課中練習及課後練習三種，後者再分必做任做二種，使學者有自動選擇之可能，并宜注重個性差別。

必修之高中代數，時間可酌量減少，以便加入微積分大意教材。

高三下學期設立算學複習學程，將以前所學作有系統之整理，融會而貫通之，必要時得稍加補充教材。

III. 師範科算學教材，力求合理化，不必太深。除算術幾何分授外，其餘可合爲初等分析課程，以函數爲中心觀念。對於算學有興趣之學生，領導其組織課外研

究會，或開設選科。

IV. 職業科算學教材，宜注重實用，但亦不可忽略各種能力，態度，習慣及理想之養成。

工科算學以在高一授完為宜，上學期平面三角三小時，平面及立體幾何三小時；下學期代數三小時，解析幾何三小時。土木科之球面三角，可附於大地測量中。微積分可以不教，故組織教材時，宜注意避免微積分。

農科商科除實用算學外，亦宜稍加普通訓練。幾何及初等分析宜略講授。

中學算學之中心單元及教學梯子

凡學程開始講授時，必須說明本學期本學程之目的何在，內容如何以及學習方法。將每一學程分為若干中心單元，使學者習完一單元後，心中存有一中心思想，如何者須記憶，何者為主要問題及如何解決等。如是則教學必得效果，學者循序漸進，如登梯然，每上一步，眼界亦隨之高一步，而無學過即忘之弊矣。

此種單元組織，一方面顧及學習心理，他方面又顧及算學之理論系統。每大單元再分為若干小單元。新式算學教本，於此漸加注意。江蘇教廳編製進度表時，即於此再三注意，茲轉述各科中之大單元如下：—

I. 初中算術。

1. 整數四則。 2. 分數四則。 3. 小數四則。
4. 複名數四則。 5. 比例。 6. 百分。
7. 利息。 8. 統計大意。

II. 初中代數。

1. 整式四則。 2. 一次方程。 3. 分式四則。
4. 簡易分式方程。 5. 根式四則。 6. 簡易根式方程。
7. 虛數及雜數。 8. 二次方程。

III. 實驗幾何。

1. 線段及角度量法。 2. 垂直，平行及圓。 3. 簡易作圖法。
4. 平面圖形面積。 5. 相似形及相合形。 6. 立體體積。

IV. 證明幾何。

1. 證明之根據及方法。 2. 直線形。 3. 圓。 4. 比例。
5. 軌跡及作圖。 6. 面積。 7. 正多角形及圓。

V. 數值三角。

1. 銳角三角函數之意義。 2. 直角三角形解法。
3. 對數大意。 4. 簡易恆等式及方程式。

VI. 高中三角。

1. 三角函數之一般定義。 2. 普通三角形解法。
3. 三角恆等式證明法。 4. 三角方程式解法。

VII. 高中平面幾何。

1. 定理證法。 2. 軌跡問題。 3. 作圖問題。
4. 計算問題。

VIII. 高中立體幾何。

1. 空間之直線與平面。 2. 多面體。 3. 球。

IX. 高中代數。

1. 一次函數。 2. 分式函數。 3. 根式函數。
4. 二次函數。 5. 不等式。 6. 比，比例及變。
7. 初等級數。 8. 指數及對數。 9. 排列，配合，幾率。
10. 一元高次函數。 11. 多元一次函數。 12. 無窮級數。

X. 解析幾何。

1. 坐標及描跡。 2. 直線及圓。 3. 二次曲線。

（教 材 論 畢）

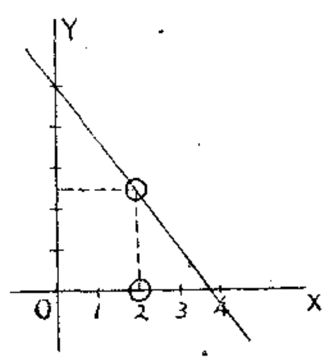
算學遡遊記

Helen Abbot Merrill 著 范寄萍譯

(十二) 不定方程式

諸位知道含x的一次方程式，常有一個解答；含x的二次方程式，常有兩個相等或不等的解答。如此猜下去，假定你會解三次方程式，那麼大約是有三個解答了。

諸位也都知道，一個含有x,y的方程式，必須再有第二個方程式和牠聯立起來；纔能得到一組定解。但是對於單獨一個含x,y的方程式，也可以做點事情，這便是描牠的圖解了。所謂圖解，實在就是適合方程式的許多組x,y全體的圖像。例如方程式$4x+3y=15$。就我們對於圖解的知識，知道每給x與一值，便可得y的相當值，照平常的方法描出這些點(x,y)，都在一直線上。將這線仔細地畫好之後，在x軸上離開原點距離爲x的地方，做一條垂直x軸的線，這線被圖解所截得的一段長度，便是y的相當值。在圖中可見令x爲2時，y的值在2與3之間。



現在有一個有趣而且重要的問題：這條線上有多少點的x,y是整數呢？換言之，線上有多少點的位標是整數呢？因爲3與15有一公因數3，所以如果x爲3的倍數，y顯然是一個整數。這樣，$x=0$，± 3，± 6，± 9，等等時，y有整值。這些特殊的點，可用$(3n, 5-4n)$來表示牠們的位標。這個方程式的整數解，連正帶負，由此看來，爲數是無限的。但有時解答不單限於整數，而且要是正數。例如某童買些每個値3分的蘋果同每個値4分的橘子，一共用了一角五分，求每種買了幾個。這題的答案，僅有一組，你們能看出來嗎？

許多有趣味的問題，寫成方程式後，常發見方程式不夠數目，得不到確定的解

答——如一式含兩未知數，兩式含三未知數，等等——但是因爲對於解答下了限制，要是整數，有時而且要正整數，解答的數目當然減少。更有限定只要最小正整數的，解答便只有一組了。

在指示如何尋求整數解答之先，有幾件簡單事實要請你們注意。這類方程式所以名爲不定方程式，乃是因爲並無一組特殊解答，而且一般有無窮多組解答的緣故。

在上面所用的方程式 $4x+3y=15$ 中，$3y$ 和 15 兩項都可以 3 整除，所以結論是 $4x$ 也被 3 整除時，才可有整數解。現在假設有方程式 $10x+5y=17$。這方程式決沒有整數解，因爲左端可被 5 整除，如有整數解，那麼 17 必也被 5 整除，這是不對的。再有一法可證明此事，就 y 解之：

$$y=\frac{17-10x}{5}=\frac{17}{5}-2x,$$

x 無論取何整值，y 總是分數。如果精確地作出圖解，所得直線決不會通過方格紙上格子的角點，因爲這些角點所表示的，都是整數。所以一般說起來，方程式 $ax+by=c$ 中，若 a,b 有一不含在 c 中的公因數，便沒有整數解；但若 a,b 無公因數，那麼總有整數解答。

我現在要解一個不定方程式，遇見同類的方程式，你們可以很容易地應用這法去解牠。例如求方程式 $4x-7y=53$ 的整數解。

x 的係數較小，就 x 解之，

$$x=\frac{53+7y}{4}=13+y+\frac{1+3y}{4}.$$

因 x,y 都要是整數，所以 $\frac{1}{4}(1+3y)$ 必也是整數，以 z 表之，便得

$$\tfrac{1}{4}(1+3y)=z, \qquad 或 \quad 1+3y=4z.$$

如前對於較小係數之未知數解之，得

$$y=\frac{4z-1}{3}=z+\frac{z-1}{3}.$$

再令 $\frac{1}{3}(z-1)=u$,則 $z-1=3u$,或 $z=3u+1$.

u 取整值時,z 必是整數,因之 x,y 都是整數。下面是許多可能解答中的幾組,你們可以覆驗:

$u=$	0	1	2	3	4	…	…		-1	-2
$z=$	1	4	7	10	…	…	…		-2	-5
$y=$	1	5	9	13	…	…	…		-3	-7
$x=$	15	22	29	36	…	…	…		8	1

當 u 值變化時,你能看出 z,y,x 怎樣變化嗎? 這一切的整數解,顯然的可以寫成一種公式的形狀,如 $u=n$,則 $z=3n+1$, $y=4n+1$, $x=7n+15$. n 任取正負整值,x,y 的整值都可求出。

當然有的時候常常很容易的看出來 z 或 u 取某特別值,可以使一個分數式有整數值。例如 $y=1$ 時 $\frac{1}{4}(1+3y)$ 爲整數,$z=4$ 時 $\frac{1}{3}(z-1)$ 爲整數。不過上面所舉的解法,無論你預先看出結果也好,看不出也好,總是可以用的。

例如要分式 $\frac{1}{4}(3x+5)$ 取整數值,很易看出 $x=1$ 是可以的,又 x 必須是奇數,所以 5,9,等等都是 x 可以取的值。

在所舉的解法中,你們可以看見每做一步,分母必見減小若干,因此分子上未知數的係數漸小,最後一定可以小到 1。

習　　題

下面的習題,起首幾個很易容,稍後較難,最後一題很要費你們一點時間。

1. 一人走進郵局,說,"我要些二分郵票,和十倍多的一分郵票,給你一元錢,剩下的都找給五分郵票."他所吩咐的話,怎樣纔能辦得到呢?

2. 某人攜 200 元的支票去兌現,說要若干張一元鈔票和十倍多的二元鈔票,其餘的可用五元鈔票支付。錢莊付現人當如何應付他的請求呢?

3. 某珠寶商用 \$1000 購得寶石 100 粒,鑽石每粒值 \$100,藍寶石每粒值 \$30,

土耳其玉每件值 $5. 問他每種各買了若干?

4. 求一二位數,其值爲其數字和的 7 倍。

5. 分母爲 3 與 5,總和爲 $2\frac{1}{15}$ 的正分數,共有若干組?

6. 一分式之分子分母皆爲二位數,數字相同而次序相反,其值爲$\frac{4}{7}$,試求之。

7. 某三位數之值,比其數字和大 180;若倒寫之,則比數字和大 378. 求此數。

8. 試求二整數,其平方之差,恰爲其差的 5 倍。

9. 兩個二位數,數字相同而次序相反,其差爲 54,試求之。

10. 將小於 200 的某數分爲四份,第一份加 7,第二份減 6,第三份乘以 5,第四份除以 4,結果都相等。求此數。

11. 有油一桶,計 126 斤。某人用 2 斤罐,3 斤罐,5 斤罐各若干次,將桶內的油都倒出來;但每次倒出時,必須裝滿罐子。他用 3 斤罐倒出來的油量,是用 2 斤罐所倒出來的 5 倍。問三種罐子各倒出油若干?

12. 求兩個整數 p,q,使適合 $31p+73q=1$.

依照平常方法,$p=\frac{1}{31}(1-73q)=-2q+\frac{1}{31}(1-11q)$,令 $\frac{1}{31}(1-11q)$ 爲 r,則

$$q=\frac{1}{11}(1-31r)=-2r+\frac{1}{11}(1-9r),\text{ 或 }=-3r+\frac{1}{11}(1+2r).$$

用後式時,r 的係數比前式小得多。通常一個分式,都有這樣兩種寫法,最好是用係數小的。所以本題便用後一式,而令 $\frac{1}{11}(1+2r)=s$,因之 $r=\frac{1}{2}(11s-1)$ 而 s 取奇數值時,r 必爲整數。你們可將此解答完全做出。

答數中有兩組是: $p=33$, $q=-14$; $p=-40$, $q=17$.

13. 某次愛國運動大遊行,全城各校男女學生都被請參加,每校學生都要列成長隊,各排人數必須相等。這些學校學生人數都不滿 1000,而且沒有兩校人數相同的。有三個學校排隊時,經過的情形如次:最初兩人一排,結果多出一人;隨即變三人一排,結果多出二人;四人一排時多出三人;五人一排時多出四人;六人一排時多出五人;最後七人一排,纔恰好不多不少。其餘各校排隊時,兩人一排,遞增至六人一排,結果每次總是多出一人;不過到七人一排時,和以前一樣,一個不多。

試問有多少學校？每校有學生若干？

14. 五個水手對於一堆椰子，有同等的權利。在他們要平均分配的前一晚上，有一水手怕得不着他的份兒，偸偸地到堆前一看，知道如果將一個椰子給與所畜的猴，餘下的剛好可被5整除。因此他擲一個椰子給猴子後，把他應得的五分之一運走。一會兒第二個水手也决意要將他那一份拿到手。他也給猴子一個椰子，這樣剛好使餘下的椰子可以分做5份，然後把他所以爲五分之一的那一份運走。同樣的事情做了五次，每個水手都給猴子一個椰子，再運走其餘的五分之一。到早晨大家聚在一處來均分這堆椰子的時候，當然每個人極力裝出若無其事的神色，堆中的椰子數，却恰好可以5整除。試問原堆中有椰子若干？

假如將椰子換成花生，這段故事也許更可令人相信，否則那些水手定然都是力舉千鈞的壯夫了。

試猜此謎時，可將5改爲2或3或4。方法是一樣的，不過數目小時，計算工作也少些，可以更明白一點。

× × × × × ×

問　題　欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，以供讀者之研究，藉收觀摩之效．凡本刊讀者，均可提出問題，及解決本欄內所提出之問題．無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表．數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登．茲將投稿規約列下，幸讀者注意焉：

1. 來函務請書明姓名住址，以便有必要時可通信問答．
2. 提出問題如有出處者，請於題末示知出處所在．
3. 提出人對於所提問題，如已有解答者，請將解答一併惠下
4. 提出問題如過於簡易，或迹近嬉戲者，本欄恕不發表，當於通訊欄內奉答，必要時或函覆．
5. 解題答案，請照本欄樣式書寫，萬勿過於潦草．
6. 所用圖形，請用黑色墨汁精確作好，附帶寄下．
7. 來函請寄武昌珞珈山國立武漢大學劉乙閣教授收．

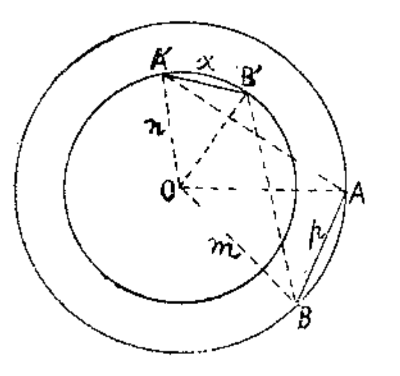
問題已解決者

45·1　只用圓規求作已知三線段之第四比例項。

解(廣州梁憲釗)

設已知三線段 m, n, p 均不相等，求作 x 使 $m:n=p:x$.

［作法］ 以 m, n 為半徑作同心圓 $O(m)$ 及 $O(n)$. 於 $O(m)$ 之周上任取一點 A 為心，p 為半徑，作弧交 $O(m)$ 於 B. 次取適當之半徑，以 A，B 為心作弧，各截 $O(n)$ 於 A′，B′ 兩點如圖所示。如是則 A′B′ 即為所求作之 x.



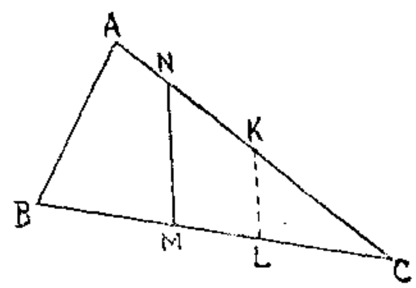
［證］ 因 $\Delta OAA' \equiv \Delta OBB'$ (s. s s.)，故 $\angle AOA' = \angle BOB'$，因之 $\angle AOB = \angle A'OB'$ 而 $\Delta OAB \backsim \Delta OA'B'$. $\therefore$ $OA : OA' = AB : A'B'$，即 $m:n=p:x$.

討論。 若 $p>2m$，則可將比例式改成 $m:p=n:x$，本作法仍可用。 特例若

$m=n$，則 p 卽爲所求；若 $m=p$ 則 n 卽爲所求。此時根本不須作。

（以同法解者有揚州中學楊承祉君。）

45·2　求作一直線(a)平行於一已知直線，(b)垂直於一已知直線，使其平分一已知三角形之面積。



解(前人)

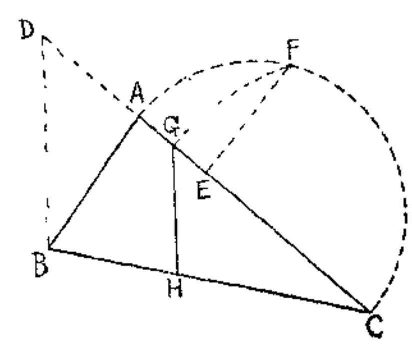
自已知三角形 ABC 中 AC 之中點 K 作線平行於所設直線，交 BC 於 L．次自 C 於 CB 上截取 CM，使 $CM^2=CL\cdot CB$．作 MN∥KL，則 MN 卽爲所求之線。

［証］ $\Delta CMN:\Delta CAB=CM\cdot CN:CA\cdot CB=CM/CB:CA/CN$．因 $CM/CB=CL/CM$(作圖)$=CK/CN$(因 ΔCLK 與 ΔCMN 相似)，故得

$$\Delta CMN:\Delta CAB=CK/CN:CA/CN=CK:CA=1:2,$$

又 MN 亦平行於所設直線，故爲所求。

(b)之解法同上，僅須作 KL 與所設直線垂直而已。



解二(武昌中華大學附中高之準)

自任一頂點 B 作線平行於所設直線交 CA 之延線於 D．以 AC 爲直徑規半圓，自 CD 之中點 E 作 EF⊥AC 交圓周於 F．再自 C 於 CA 上取 CG＝CF，作 GH 平行所設直線，則 GH 卽爲所求。

［證］ $\Delta CGH:\Delta CAB=CG\cdot CH:CA\cdot CB=(CG/CA)(CH/CB)$．因 $CH/CB=CG/CD$，又 $CG^2=CF^2=CE\cdot CA$，故有

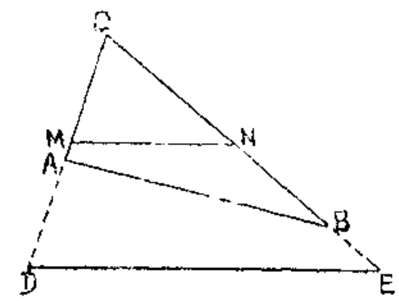
$$\Delta CGH:\Delta CAB=CG^2:CA\cdot CD=CE\cdot CA:CA\cdot CD=CE:CD=1:2,$$

故 GH 爲所求。(b)之解法相同，但作 BD 垂直於所設直線可矣。

（揚州中學楊承祉君解法與此略有不同，係作 $CG^2=CD\cdot CM$，M 爲 CA 之中點。

但 CD • CM 與 CE • CA 同爲 $\frac{1}{2}$CA • CD，故兩解實際相同，不另錄。）

解三（泰興黃橋中學范挹淸）



設 ABC 爲已知三角形，DE 爲已知直線。

(a)若 MN 爲所求作之線，則在圖中延長 CA，CB 使與 DE 交於 D，E 之後，立見 ΔCMN 與 ΔCDE 相似，而

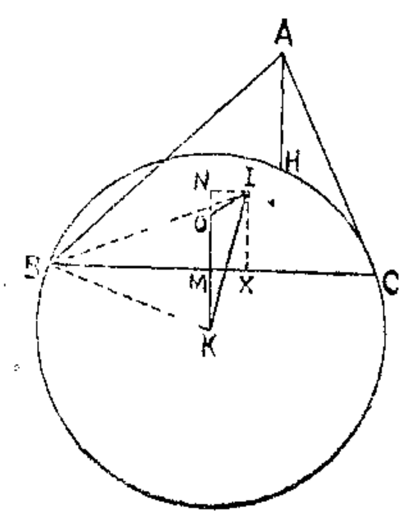
$$\Delta CMN : \Delta CDE = CM^2 : CD^2.$$

但 $\Delta CMN = \frac{1}{2}\Delta CAB$，$\Delta$CDE 及 CD 均爲定量，故 CM 爲可作，而問題可解。(b)之解法與解二同；不另錄。

45•3　設 I，H 爲 ΔABC 之內心及垂心，R，r 爲其外接圓及內切圓半徑，r_2 r_3 爲對 B，C 兩角之傍切圓半徑，T 爲其面積，又設 K 爲 ΔBHC 之外心，求證

$$IK^2 = (R+r)^2 + r^2 - 2T^2/r_2 r_3.$$

證（揚州中學楊承祉）



因 ΔBHC 之外接圓爲 ΔABC 外接圓關於 BC 之對稱圓，故 OK$\perp$BC 於 M 而 OM$=$MK. 作 IX$\perp$BC，IN$\perp$OK，則

$$\begin{aligned} IK^2 &= IN^2 + NK^2 = MX^2 + (r+OM)^2 \\ &= r^2 + 2r\cdot OM + (OC^2 - MC^2) + MX^2 \\ &= r^2 + 2r\cdot OM + R^2 - BX\cdot CX \\ &= R^2 + r^2 - (s-b)(s-c) + 2r\cdot OM. \end{aligned}$$

又 $IK^2 = IO^2 + OK^2 + 2OK\cdot ON$

$$= R^2 - 2Rr + 4OM^2 + 4OM(r - OM) = R^2 - 2Rr + 4r\cdot OM.$$

由此兩式消去 $r\cdot OM$，再用 $T = r_2\cdot(s-b) = r_3(s-c)$ 之關係，卽得所求之證。

（泰興黃橋中學范挹淸君證法大致相同，不另錄。）

又證（提出人陳紹德）

聯 BI, BK，則易見 $BK=R$, $BI=r\csc(\frac{1}{2}B)$, $\angle IBK=\angle CBK+\angle IBC=(\frac{1}{2}\pi-A)+\frac{1}{2}B$，故得

$$IK^2=BI^2+BK^2-2BI\cdot BK\cos IBK=r^2\csc^2(\tfrac{1}{2}B)+R^2-2Rr\csc(\tfrac{1}{2}B)\sin(A-\tfrac{1}{2}B).$$
$$=R^2+r^2+r^2\cot^2(\tfrac{1}{2}B)-2Rr[\sin A\cot(\tfrac{1}{2}B)-\cos A].$$

但 $r\cot(\frac{1}{2}B)=BX=s-b$, $2R\sin A=a$, $\cos A=1-2\sin^2(\frac{1}{2}A)=1-2(s-b)(s-c)/bc$,

故 $$IK^2=(R+r)^2+(s-b)^2-a(s-b)-4Rr(s-b)(s-c)/bc.$$

又 $(s-b)^2-a(s-b)=(s-b)(s-b-a)=(s-b)(c-s)$, $4Rr/bc=a/s$，代入上式得

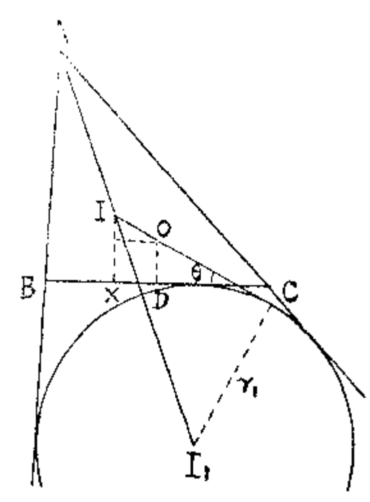
$$IK^2=(R+r)^2-(s-b)(s-c)(1+a/s)=(R+r)^2-(s-b)(s-c)[2-(s-a)/s]$$
$$=(R+r)^2+(s-a)(s-b)(s-c)/s-2(s-b)(s-c)=(R+r)^2+r^2-2T^2/r_2r_3.$$

45·4　用上題中記號，並設 r_1 爲對 A 角之傍切圓半徑，試證若 ΔABC 之外心及內心聯線切於對 A 角之傍切圓，則有 $T(r_2-r_3)=r_1r_2r_3(1-2r/R)^{\frac{1}{2}}$.

證(提出人陳紹德)

題設 OI 聯線切於 I_1 圓，故由圖見

$$\sin OII_1=r_1/II_1.$$



但 $r_1=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$, $II_1=4R\sin\frac{A}{2}$,

$$\therefore\ \sin OII_1=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \qquad (1)$$

設 OI 與 BC 所成之角爲 θ，則由圖見

$$\sin\theta=\frac{IX-OD}{OI}=\frac{r-R\cos A}{\sqrt{R^2-2Rr}}$$

$$=\frac{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-\cos A}{\sqrt{1-2r/R}}=\frac{\cos B+\cos C-1}{(1-2r/R)^{\frac{1}{2}}},\quad\left(\begin{array}{l}\text{因}\quad\cos A+\cos B+\cos C\\=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\end{array}\right)$$

$$\cos\theta=\frac{CX-CD}{OI}=\frac{(s-c)-a/2}{R(1-2r/R)^{\frac{1}{2}}}=\frac{b-c}{2R(1-2r/R)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sin B-\sin C}{(1-2r/R)^{\frac{1}{2}}}.$$

即 $$\sin\theta=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}-1}{(1-2r/R)^{\frac{1}{2}}},\qquad\cos\theta=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}}{(1-2r/R)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (2)$$

今 $\angle OII_1=\frac{1}{2}A+B-\theta=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}(B-C)-\theta$, 故

$$\sin OII_1=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B-C}{2}-\theta\right)=\cos\left(\frac{B-C}{2}+\theta\right)=\cos\frac{B-C}{2}\cos\theta-\sin\frac{B-C}{2}\sin\theta$$

將(2)中各值代入化簡，卽得 $\sin OII_1=\sin\frac{1}{2}(B-C)/(1-2r/R)^{\frac{1}{2}}$，與(1)比較，

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{(1-2r/R)^{\frac{1}{2}}}=\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}，卽\ (1-2r/R)^{\frac{1}{2}}=\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}.$$

但 $\tan(\frac{1}{2}B)=r_2/s$, $\tan(\frac{1}{2}C)=r_3/s$, 又 $T=rs$, $T^2=rr_1r_2r_3$，故上式化為

$$\left(1-\frac{2r}{R}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{r_2-r_3}{s}=\frac{T^2(r_2-r_3)}{rs\,r_1r_2r_3}=\frac{T(r_2-r_3)}{r_1r_2r_3}.$$

由是立得本題之證。

提出之問題

49·1　三角形之外接圓及垂心為已定，則垂趾三角形必切於一定圓，試證之(廣州梁憲釗提)。

49·2　求證任意三角形之頂角平分線，與其對邊之垂直平分線不能在三角形內相交(上海市立敬業中學周天翔提)。

49·3　用比較試驗法，求證

$$1+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n(2n+1)}+\cdots$$

為收歛級數(河南省立南陽中學張永昭提)。

49·4　已知圓內四點，求作一內接四邊形，使每邊各過一點(長沙高中廖山濤提)。

49·5　已知直線 AD, BC 均垂直於 AC，且 B 與 D 在 AC 之兩側：求自 BC 上一已知點 P 作一直線 PEF，交 AC 於 E, AD 於 F，且使 EF 等於一定長(武昌中華大學劉忠同提)。

讀 者 通 訊

廣州東關華西路啓沃坊梁憲釗君來函：本卷第一期所發表"算學瑣談"一文，其第四節理論，余細讀之，似有補充之必要，例如$\sqrt{10x+21}=x+5$，如文中所言，必謂$\sqrt{10x+21}$當爲實數而$x>-21/10$. 然此方程式之根爲$\pm 2i$，代入原式，兩邊均爲虛數。又如$\sqrt{3x+5}+2\sqrt{3-x}=7$，當謂各根式應爲實數，而$3x+5>0$, $3-x>0$, $7>\sqrt{3x+5}$. 自前兩式得$3>x>-\frac{5}{3}$，其x亦適合後一式，故原方程式之根，當在3與$-5/3$之間。然實際之根爲$\pm 4i$，不能與討論相合，而又非客根。基此兩點，足見該節理論應補充之，卽先設"根式不取虛數值，根值亦限於實數"。是以對於其例三所舉出之理論，應先察其中(1)之根是否虛數。今$x=\frac{1}{4}(a\pm\sqrt{a^2+8b^2})$爲實數，故其理論可用，其條各例亦然。

答。尊論誠是。謹按任何中等代數教本，不特"限定無理方程式之根爲實根"，且限定"根式表實數"。例如$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=2\sqrt{3x-1}$，或$\sqrt{x-1}+x=\sqrt{2x-1}$之根，顯然爲零。然普通因零值使根式爲虛，摒而不用。其困難似在根式限於主值(正值)，因是聯帶上必須使根式內之式爲正。如根式內未知數表虛數，則非另定複虛數根式之主值不可。此種細節，不宜於初學，特各種教科書皆存而不論，自是缺點，不獨堅白先生之稿爲然也。 (介)

南昌石頭街54號張炎言君來函：近閱 Hobson 平面三角第一章第十一節，論圓弧之長度，其所述理論，甚爲艱深，又無詳細插圖，直令後學無法了解。按該書承各先進備加讚許，推爲三角標準書，故購者甚多，而如後學同樣感覺困難者，當亦不少。如蒙詳細指導，載於貴刊，則不勝感激矣。

答。Hobson 氏此書，誠爲三角英文本中最善之一種，然陳義頗高，初非爲初學者說法。如此等理論處，必俟理解抽象之能力稍進，始可閱讀。最好請教貴校算學教師，當面講授，遠勝於文字之註釋。但無論如何，此書決非第一次讀三角時所宜用。許多算學理論，在抽象思考力成熟後，極易領悟，以前縱費氣力，亦得不着益處，此其一例也。 (正)