國立西北農學院

農田水利研究部

研究報告之三

粘滯流體之動力

祁開智

民國三十三年八月

粘滯流體之動力

祁開智

目次

標　題

I. 總論

本文係繼前文而作,目的在討論一粘滯流體繞一阻體流動時,在動力方面所引起之問題,所謂粘滯流體係指一均匀不可壓縮並無限廣袤之實際流體,所謂阻體係指一範圍

有限大小及形狀均不變之物體。阻體對於觀察者假設係固定，與流體間假設有一相對運動，其大小方向為 $\vec{v}_\infty$。流動狀態假設為安定者。由此說明，可知吾人所欲討論者，為一空間問題，亦即實際上最普通之問題。

研究此問題時，吾人將取穿過阻體沿 $\vec{v}_\infty$ 之直線為笛卡坐標之x軸。（圖 1 ）同時亦以之為圓球坐標之極軸，或圓柱坐標之旋轉軸。坐標中其他各軸，可依右手制選擇之。流區之內界，自為阻體之表面 σ；至其外界，當先以阻體中任意一點為原點，作一半徑為 a 之球面 Σ，稱為控制球面。此控制面為流體之暫時外界，最後令 $a\to\infty$，則球面變為流體之實際外界。

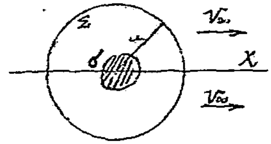


圖 1

吾人在此文中所取觀點，與前文仍保持一貫，即以渦度為最主要之量，認其在流區內，係作連續分佈。又在 σ 上，完全粘附之特性，在 Σ 上，漸趨於 $\vec{v}_\infty$ 之特性，亦均仍舊。惟動力學與運動學性質不同，討論方法自各異，即以邊界條件而言，前文中所述者，因限於當時需要，用於此文時，亦欠完備，故粘滯流體之動力學，仍須從頭討論之。

1. 邊界條件之補充

根據完全粘附條件，前文中曾推得渦度之切線分量，有 $\vec{n}\times\vec{q}+\vec{n}\cdot\nabla\vec{v}=0$ 一關係。並曾利用之以求流速之解。至渦度之法線分量，則謂未加限制，非真無限制也，蓋當時尚不需不需此類限制也。至在動力學中，此限制不僅需要，實亦為一

*"粘滯流體之運動學" 本部研究報告第一號

最重要之特性。令 $\vec{n}\cdot\vec{q}$ 代表此分量，因

$$\vec{n}\cdot\vec{q}=\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{v}=\vec{n}\cdot\nabla v\times\vec{\tau}+v\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{\tau}$$

故在阻體表面上 $\quad \vec{n}\cdot\vec{q}=\vec{\tau}\times\vec{n}\cdot\nabla v$

但 $\quad \nabla v=\vec{n}'\frac{\partial v}{\partial n'}$

n' 為與等快面（$v=$ 常數之面）垂直之單位法線。根據 $v=0$ 一條件，吾人知阻體之表面，亦為一等快面。故 n' 在阻體上，係與其表面垂直，即係與 n 取同一方向。由此特性，得

$$\vec{n}'\cdot\vec{\tau}\times\vec{n}=0$$

故 $\quad \vec{\tau}\times\vec{n}\cdot\nabla v=\vec{\tau}\times\vec{n}\cdot\vec{n}'\frac{\partial v}{\partial n'}=0$

即在阻體表面上 $\quad \vec{n}\cdot\vec{q}=0 \qquad (1.1)$

因之吾人得下列之重要定理：

"粘滯流體中之渦綫，不能在阻體表面上開始或終了。"

（定理 1）

此實為初料所未及者，因通常以阻體表面為一不連續面，渦綫可在其上開始或終了也。

將此結果與 $n\times q=\vec{n}\cdot\nabla\vec{v}$ 一結果相併，得

$$\vec{q}=\vec{n}\vec{n}\cdot\vec{q}-\vec{n}\times\vec{n}\times\vec{q}=\vec{n}\times\vec{n}\cdot\nabla\vec{v}=\vec{n}\times\vec{\tau}\,\vec{n}\cdot\nabla v$$

因 $\vec{n}$ 與 $\vec{\tau}$ 互相垂直，$\vec{n}\times\vec{\tau}$ 亦為單位向量，故

$$|q|=\left|\frac{\partial v}{\partial n}\right| \quad 或 \quad q^2=\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 \qquad (1.2)$$

關於外界上之條件，前文中所言者至為寬疏，只須流速趨於一極限足矣。在動力學中，除承認此條件外，尚需對流速趨近極限之快慢加以限制，方可解決吾人之問題。

C.W. Ossen* 在研究各種旋轉體之阻力時，曾假設在粘滯

* Ossen: Neue Methoden und Ergibnisse in der Hydrodyuamik. Leipzig, 1927.

流動中,離阻體較遠處之流速,與在無窮遠處之流速 v_∞,無甚區別,意即流速趨近於極限,甚為迅速。此假設之實驗根據,雖不甚完備,但其在數學方面,所生化繁為簡之效至大,且距所推得之結果,亦無甚疵瑕,實一極方便之假設也。現吾人對於流體之外界決計採用 Ossen 之假設,即當粘滯流體繞一阻體流動時,在離阻體較遠處,可令 $\vec{v}=\vec{v}_\infty$,因 $\vec{v}_\infty$ 為一不變流速,此假設自亦可釋為在遠處 $\vec{v}$ 之導數甚小,可視為一初級之微量,(Small quantity of first order) 其高次方可以不計也。

2.動力微分方程之選擇

粘滯流體動力學中之基本方程式,自為 Navier—Stokes 方程式,此方程式在安定狀態下,通常寫為

$$\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{v}$$

式中 ρ 代表流體之密度,μ 代表其粘滯係數。依此寫法,所用之從變數,當認為流速 $\vec{v}$ 及壓力 p。以此二者為變數,直接求運動方程式之漸近解,並用以討論粘滯流體之動力者,Ossen 以後,頗不乏人。惟在最普通情形下,運算繁複,諸多不便,今決捨之不用,另作選擇。選擇時,吾人應注意粘滯流動與理想流動之主要區別,為旋渦之存在與否。此區別以運動學而言,為在粘滯流動中,渦度 $\vec{\zeta}$ 不為零;以動力學而言,為在粘滯流動中,Bernoulli 原理不復適用,即總能量 $p+\rho v^2/2$ 隨地而變。吾人可逆料粘滯流動之特徵,將視此二者之特性而定。依此指示,吾人另得二從變數,其一為渦度 $\vec{\zeta}$,其二為總能量在某一點與在無窮遠之差 $\not{p}$,即

$$\not{p}\equiv(p+\rho v^2/2)-(p_\infty+\rho v_\infty^2/2) \quad (1.3)$$

為方便起見,$\not{p}$ 可稱為能差函數。

以此二者為從變數則 Navier－Stokes 方程式變為

$$\rho\vec{v}\times\vec{q}=\nabla\beta+\mu\nabla\times\vec{q}\qquad(1\cdot0)$$

式中 $\vec{v}$ 可視作微分方程之係數,即取此觀點,用此方程式作計算仍不方便,因其中同時含有兩從變數也。變通之法係將此式化為兩個二次偏微分方程。吾人現須自求者,僅為 β 之微分方程,取 (1·0) 之散量,因 $\nabla\cdot\vec{v}=0$,先得

$$\nabla^2\beta=\rho\nabla\cdot\vec{v}\times\vec{q}$$

將同式用 v 造無向積,並將 $v\cdot\nabla\times q$ 展開為 $q^2-\nabla\cdot\vec{v}\times\vec{q}$,得能量方程式

$$\vec{v}\cdot\nabla\beta=\mu\nabla\cdot\vec{v}\times\vec{q}-\mu q^2\qquad(1\cdot4)$$

由二式消去 $\nabla\cdot v\times q$,得 β 之微分方程為

$$\nabla^2\beta-\frac{\rho}{\mu}\vec{v}\cdot\nabla\beta=\rho q^2\qquad(1\cdot5)$$

至 $\vec{q}$ 之微分方程,可由 (1·0) 式之轉量求得之。其結果為

$$\nabla^2\vec{q}-\frac{\rho}{\mu}\vec{v}\cdot\nabla\vec{q}=-\frac{\rho}{\mu}\vec{q}\cdot\nabla\vec{v}\qquad(1\cdot6)$$

多數書中,已有此式,惟未見充分利用耳。

(1·0)(1·5)(1·6)三式為以後討論之基礎,今總稱之為動力方程式,其形式雖仍不簡單,但為吾人目的計,已足用矣。

在阻體表面上,因 $v^2=0$,總能量與壓力實際上無區別,各式化為

$$\nabla p+\mu\nabla\times\vec{q}=0\qquad(1\cdot7)$$

$$\nabla^2 p=0\qquad(1\cdot8)$$

$$\nabla^2\vec{q}+\frac{\rho}{\mu}\vec{q}\cdot\nabla\vec{v}=0\qquad(1\cdot9)$$

式 (1·8) 係將 $\nabla^2\frac{v^2}{2}$ 展開為 $v\nabla^2v+(\nabla v)^2$ 後應用 $q^2=(\nabla v)^2$ 一關係而得。

在離阻體較遠處 $\vec{v}-\vec{v}_\infty$, β, $\vec{q}$,及三者之各級導數均為初級之微量,其各種相乘之積,自為高級之微量,將式中各項之數量紀先決定之,次將同級之項歸併,吾人得以初級微

量為限,各微分方程之形式為

$$\rho\vec{v}_\infty\times\vec{q} = \nabla p + \mu\nabla\times\vec{q} \tag{1.10}$$

$$\nabla^2 p - \frac{\rho}{\mu}\vec{v}_\infty\cdot\nabla p = 0 \tag{1.11}$$

$$\nabla^2\vec{q} - \frac{\rho}{\mu}\vec{v}_\infty\cdot\nabla\vec{q} = 0 \tag{1.12}$$

最後之二式均係線微分方程,且每式只含有一從數變,不難用通常方法解之,化為二次微分方程之方便處,由此亦可見一班矣。

3.微方分程之漸近解

吾人次一問題,為解(1·11)(1·12)兩微分方程式。如用笛卡坐標,令 $p = p_0 e^{\frac{\rho V_\infty x}{2\mu}}$, $\vec{q} = \vec{q}_0 e^{\frac{\rho V_\infty x}{2\mu}}$。則兩式可化為所謂標準形式。依法微分,並消去共同因子,得 p_0 及 $\vec{q}_0$ 之微分方程為

$$\nabla^2 p_0 - k^2 p_0 = 0 \qquad \left(k = \frac{\rho V_\infty}{2\mu}\right) \tag{1·13}$$

$$\nabla^2\vec{q}_0 - k^2\vec{q}_0 = 0 \tag{1·14}$$

二式之適用仍只限於離阻體較遠之區域,吾人所欲求之解,其精確程度,自亦只限於此,故稱之謂漸近解。今試先解

$\nabla^2 p_0 - k^2 p_0 = 0$

以阻內任意一點為原點,用圓球坐標 r, θ, φ,則原微分方程變為

$$\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial p_0}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p_0}{\partial\varphi^2}\right\} - k^2 p_0 = 0 \tag{1·13a}$$

其解之正常形式(Normal form)為

$$p_0 = \sum_n\sum_m Y_n^m Z$$

Y_n^m 代表n級m次之球面函數,即

$$Y_n^m = p_n^m(\cos\theta)(a_n^m \cos m\phi + b_n^m \sin m\phi)$$

如令 $R = kr$，Z 之微分方程則為

$$\frac{d^2Z}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{dZ}{dR} - \left[1 + \frac{n(n+1)}{R^2}\right]Z = 0 \qquad (1\cdot 13b)$$

此微分方程可有若干解，惟在無窮遠處（$r = R = \infty$）β_0 必須為零，故吾人所應取之解只能為 $Z_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{K_{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{R}}$，$K_{n+\frac{1}{2}}$ 即所謂"第二種貝色變函數"（Modified Bessel's Function of the second kind）*，其級數展開式為

$$K_{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2R}}e^{-R}\left\{1 + \sum_{i=1}^{n+1}\frac{n(n+1)\{n(n+1)-2\}\cdots\{n(n+1)-i(i-1)\}}{i!\;2^i\;R^i}\right\}$$

因吾人所需者僅為漸近解，不必將每項算入，故今將 $K_{n+\frac{1}{2}}$ 寫為

$$K_{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2R}}e^{-R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}$$

得

$$Z_n = \frac{e^{-R}}{R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}$$

$$\beta_0 = \frac{e^{-R}}{R}\sum Y_n^m\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}$$

因 $x = r\cos\theta$ 最後得

$$\beta = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum Y_n^m$$

$$= \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^m(a_n^m \cos m\phi + b_n^m \sin m\phi) \qquad (1\cdot 15)$$

欲解 $\nabla^2 q - \frac{1}{\nu} v_\infty \cdot \nabla q = 0$ 一式，最簡單之法，自係將 q 化為笛卡分量，每一分量所滿足之微分方程，與 β 所滿足者相同，其解可由 β 之解立即推得之。此法簡則簡矣，但為吾人目

* 可參考 Whittaker and Watson: Modern Analysis pp 373-374

的討，並不適宜，蓋吾人不能以獲得一解為止，尚須因之以作進一步之討論，若用此法，共將得六組之係數，其間有若干種關係存在。欲其可資應用，勢必將此種種關係一一決定，其繁難程度，有不可想像者。作者最後發現如不將 $\vec{q}$ 化為笛卡分量而化為圓柱分量，則一切均較簡單，因此法甚為特別，茲從詳述之：

令 $$\vec{q} = \vec{i}q_x + \vec{\rho}_1 q_{\rho_1} + \vec{\phi}_1 q_\phi$$

$\vec{i}$ 係沿 $\vec{v}_\infty$，其方向不變；ρ, ϕ 為在與此方向垂直平面內之極坐標，$\vec{\rho}_1, \vec{\phi}_1$ 為其單位向量。因

$$\vec{\rho}_1 = \vec{j}\cos\phi + \vec{k}\sin\phi, \qquad \vec{\phi}_1 = -\vec{j}\sin\phi + \vec{k}\cos\phi$$

得此二向量之導數中不等於零者，為

$$\frac{\partial \vec{\rho}_1}{\partial \phi} = \vec{\phi}_1 \qquad \frac{\partial \vec{\phi}_1}{\partial \phi} = -\vec{\rho}_1$$

以圓球坐標 r, θ, ϕ 為變數，將 $\nabla^2 i q_x$，$\nabla^2 \vec{\rho}_1 q_\rho$ 及 $\nabla^2 \vec{\phi}_1 q_\phi$ 用

$$\nabla^2 a\vec{A} = a\nabla^2\vec{A} + 2\nabla a \cdot \nabla\vec{A} + \vec{A}\nabla^2 a$$

一式展開之，並將單位向量之各種導數代入，得

$$\nabla^2 i q_x = i\nabla^2 q_x$$

$$\nabla^2 \vec{\rho}_1 q_{\rho_1} = \vec{\rho}_1 \nabla^2 q_\rho + \frac{2\vec{\phi}_1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial q_\rho}{\partial \phi} - \vec{\rho}_1 \frac{q_\rho}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\nabla^2 \vec{\phi}_1 q_\phi = \vec{\phi}_1 \nabla^2 q_\phi - \frac{2\vec{\rho}_1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} - \vec{\phi}_1 \frac{q_\phi}{r^2\sin^2\theta}$$

將三式加之，代入 $\nabla^2\vec{q} - k^2\vec{q} = 0$ 一式中，令每一分量等於零，得

$$\nabla^2 q_x - k^2 q_x = 0$$

$$\nabla^2 q_\rho - \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} - \frac{q_\rho}{r^2\sin^2\theta} - k^2 q_\rho = 0 \quad (1\cdot 14a)$$

$$\nabla^2 q_\phi + \frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial q_\rho}{\partial \phi} - \frac{q_\phi}{r^2\sin^2\theta} - k^2 q_\phi = 0 \quad (1\cdot 14b)$$

q_x 之微分方程與 β 之微分方程完全相同，其解自為

$$q_x = \frac{e^{R(\cos\theta - 1)}}{R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum_n\sum_m P_n^m\left(a'^m_n\cos m\phi + b'^m_n\sin m\phi\right) \qquad (1\cdot 16)$$

至q_ρ及q_ϕ兩微分方程，因q_ρ與q_ϕ之互相夾雜，似覺棘手；但若改用複變數，則此類微分方程，不難迎刃而解。將q_ϕ式以i $(=\sqrt{-1})$相乘後與q_ρ式相加，令

$$w = q_\rho + i q_\phi$$

則得w之微分方程為

$$\nabla^2 w + \frac{2i}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{w}{r^2 \sin^2\theta} - k^2 w = 0$$

或 $$\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\sin\theta\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + 2i\frac{\partial w}{\partial \phi} - w\right)\right\} - k^2 w = 0$$

吾人所需之解，其形式自必為

$$w = Z(r)\,\Theta(\theta)\,e^{im\phi}$$

將此式代入微分方程中，並將Z及Θ兩從變數用通常方法分離之，以λ為分離常數，並令$x = \cos\theta$，$R = kr$，得

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left\{\lambda - \frac{(m+1)^2}{1-x^2}\right\}\Theta = 0$$

$$\frac{d^2 Z}{dR^2} + \frac{2}{R}\frac{dZ}{dR} - \left(\frac{\lambda}{R^2} + 1\right)Z = 0$$

Θ一式為副Legendre多項式(associated legendre's polynomials)之微分方程，以$n(n+1)$為λ之特殊值，其解為

$$\Theta = P_n^{m+1}(x)$$

至Z一式，使$\lambda = n(n+1)$後，與前(1·13 b)相同，其解仍為

$$Z_n = \frac{e^{-R}}{R}\left\{1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}$$

將各解併之，得w之解為

$$w = \sum_n\sum_m C_n^m P_n^{m+1} e^{im\phi}$$

令 $$C_n^m = A_n^m - i B_n^m$$

與$e^{im\phi}$相乘後，將虛實兩部分開之，最後復以$e^{R\cos\theta}$乘之，得

$$q_\xi = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi + B_n^m\sin m\phi) \quad (1\cdot17)$$

$$q_\phi = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^{m+1}(-B_n^m\cos m\phi + A_n^m\sin m\phi) \quad (1\cdot18)$$

此q_ξ及q_ϕ之漸近解也。可注意者即兩解中只含有兩組係數，又P之上指數非m而為m+1，其比較簡單之原因，即在於此。茲將求得之四漸近解綜列於下，以便查閱：

$$\beta = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^m(a_n^m\cos m\phi + b_n^m\sin m\phi) \quad (1\cdot15)$$

$$q_x = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^m(a_n'^m\cos m\phi + b_n'^m\sin m\phi) \quad (1\cdot16)$$

$$q_\xi = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi + B_n^m\sin m\phi) \quad (1\cdot17)$$

$$q_\phi = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\sum\sum P_n^{m+1}(-B_n^m\cos m\phi + A_n^m\sin m\phi) \quad (1\cdot18)$$

4. 漸近解中之條件

上列四解，並非各不相干或毫無限制者。蓋其間尚有若干條件須經滿足也。此條件計有三種，茲分別討論之：

一為式(1·10)所含之條件，即在解之適用範圍內，

$$\rho\vec{v}_\infty\times\vec{q} = \nabla\beta + \mu\nabla\times\vec{q}$$

用圓球坐標及圓球分量，並以R(=kr)代替r，此條件相當於三無向條件，

$$-2Rq_\phi\sin\theta = \frac{R}{\mu}\frac{\partial\beta}{\partial R} + \frac{1}{\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}q_\phi\sin\theta - \frac{\partial q_\theta}{\partial\phi}\right\} \quad (1\cdot10a)$$

$$-2Rq_\phi\cos\theta = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\beta}{\partial\theta} + \left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial q_r}{\partial\phi} - \frac{\partial Rq_\phi}{\partial R}\right\} \quad (1\cdot10b)$$

$$2R(q_r\sin\theta + q_\theta\cos\theta) = \frac{1}{\mu\sin\theta}\frac{\partial\beta}{\partial\phi} + \left\{\frac{\partial Rq_\theta}{\partial R} - \frac{\partial q_r}{\partial\theta}\right\} \quad (1\cdot10c)$$

將圓球分量以圓柱分量表示之，得

$$q_r = q_x\cos\theta + q_\xi\sin\theta = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}L$$

$$q_\theta = -q_x \sin\theta + q_y \cos\theta = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\} M$$

$$q_\phi = q_\phi \qquad = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\} N$$

又 $$\bar{\beta} \qquad = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\} J$$

式中 L, M, N, J 代表含有球面函數之部分,內中不含R。

今試以(1·10a)式為例,將條件所示之結果計算之:

$$\frac{\partial\bar{\beta}}{\partial R} = e^{R(\cos\theta-1)} J\left[\left\{\frac{1}{R}(\cos\theta-1)-\frac{1}{R^2}\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}+\frac{1}{R}O\left(\frac{1}{R^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial q_\theta \sin\theta}{\partial\theta} = e^{R(\cos\theta-1)}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\left\{-N\sin^2\theta+\frac{1}{R}\frac{\partial N\sin\theta}{\partial\theta}\right\}$$

$$\frac{\partial q_\theta}{\partial\phi} = \frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\frac{\partial M}{\partial\phi}$$

消去共同因子 $e^{R(\cos\theta-1)}$ 得(1·10a)式之條件為

$$-2\sin\theta\, N\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\} = \frac{J}{\alpha}\left[\left\{(\cos\theta-1)-\frac{1}{R}\right\}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}+O\left(\frac{1}{R^2}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\sin\theta}\left\{1+O\left(\frac{1}{R}\right)\right\}\left\{\left(-N\sin^2\theta+\frac{1}{R}\frac{\partial N\sin\theta}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial M}{\partial\phi}\right\}$$

吾人可想像式中 $O\left(\frac{1}{R}\right)$ 等,均為 $\frac{1}{R}$ 之級數,如是則式中各項可依 $\frac{1}{R}$ 之冪排列之。因式中關係對於任何R均適用,故 $\frac{1}{R}$ 每冪之係數,必均為零。依此法得 $\frac{1}{R^0}$ 之係數所應滿足之條件為

$$-2N\sin\theta = \frac{J}{\alpha}(\cos\theta-1) - N\sin\theta$$

即 $$-N\sin\theta = \frac{J}{\alpha}(\cos\theta-1)$$ 或 $$-q_\phi\sin\theta = \frac{\beta}{\alpha}(\cos\theta-1)$$

以後各冪之係數,自當有類似之條件,但不必一一具算,因吾人原解之精確程度只盡於此也。

其餘二條件,可用同樣方法計算之,計算後得最低係數所應滿足之條件為

$$q_\phi(1+\cos\theta) = -\beta/\mu\sin\theta$$

及 $$L\sin\theta = -M(1+\cos\theta)$$

因 $$\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$-q_\phi\sin\theta = \frac{\beta}{\mu}(\cos\theta-1)$ 與 $q_\phi(1+\cos\theta) = -\frac{\beta}{\mu}\sin\theta$
並無區别,故(1·10)式之三條件,實際上只得兩結果,即

$$q_\phi\sin\theta = \frac{\beta}{\mu}(1-\cos\theta) \quad 或 \quad q_\phi(1+\cos\theta) = -\frac{\beta}{\mu}\sin\theta \qquad (1·19)$$

$$q_r\sin\theta = -q_\theta(1+\cos\theta) \quad 或 \quad q_r(1-\cos\theta) = -q_\theta\sin\theta \qquad (1·20)$$

二為 $\nabla\cdot\vec{q}=0$ 所含之條件,用圓球分量及圓球坐標,此條件為

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}R^2 q_r + \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial q_\theta\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial q_\phi}{\partial\phi}\right) = 0$$

用上節所述方法計算之,得最低係數所應滿足之條件為

$$(\cos\theta-1)q_r - \sin\theta\, q_\theta = 0$$

或 $$(1-\cos\theta)q_r = -q_\theta\sin\theta$$

此即(1·20)式所示者。故 $\nabla\cdot\vec{q}=0$ 並不產生新關係,將各種結果並論之,吾人得下列之定理:

"在所設之精確範圍內,四解間共有二關係,即(1·19)(1·20)兩式所示者。" (定理2)

由(1·20)一式,吾人可推得在精確範圍內,圓球分量與圓柱分量之關係為

$$\begin{aligned} q_r &= q_z \\ q_\theta &= -q_\varrho \\ q_\phi &= q_\phi \end{aligned} \qquad (1·21)$$

其簡單性有非初料所及者。或以為兩種分量間之關係既如

是簡單，若在開始時即用圓球分量，豈不更較直接，殊不知用圓球分量，則(1·12)一微分方程複雜萬分，直無法求得其解，欲直接者反將不達矣。

β, q_x, q_ζ, q_ϕ 四量之間既有二關係，吾人自可以任意二量為主量，將其他各量化為此二量之函數。惟此二主量之選擇，對於以後計算，關係至大；如何選擇最為方便，是應細加考慮者。現吾人決計選擇 q_ζ 及 q_ϕ 二者為主量，最大原因，係因此二量共只有兩組之係數，其他任何二量，均無同樣特性；至算法之難易等等，猶其餘事也。

以 q_ζ 及 q_ϕ 為準，其他各量可按下法化之

$$\beta=\mu\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}q_\phi=\mu\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}q_\phi \tag{1·22}$$

$$q_x=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}q_\zeta=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}q_\zeta=q_r$$

式中以 $\sin\theta$ 為分母，並不引起問題，因 q_ζ 及 q_ϕ 之解中所含者為 P_n^{m+1}，其值為 $\sin^{m+1}\theta\frac{d^{m+1}P_n(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^{m+1}}$，而 m 之值，最小為零；故 P_n^{m+1} 中均有 $\sin\theta$ 一因子，可與分母中之 $\sin\theta$ 相消也。*

三為在表面上 $\vec{n}\cdot\vec{q}=0$ 所含之條件。$\vec{n}\cdot\vec{q}=0$ 一特性，乍視之似無法利用，蓋吾人之解，並不適用於阻體表面也。實

* 在平面問題中情形則不然，該處僅有 β 及 q_ζ 二量，其漸近解為

$$\beta=\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{\sqrt{R}}\sum a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta$$

$$q_\zeta=\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{\sqrt{R}}\sum A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta$$

用本節中之方法，得二者之關係為

$$\beta=\mu\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}q_\zeta$$

由式知欲避免使 β 在 $\theta=0$ 處，變為無窮大，則需有

$$\sum A_n=0$$

一條件以限制 q_ζ 之解。此條件在求動力及力矩時，均需利用，實為平面問題中最主要之一結果。

則不然，因 $\nabla\cdot\vec{q}=0$ 吾人可用散量定理在流區內積分，得

$$\int_{\tau}\nabla\cdot\vec{q}\,d\tau=\int_{\sigma}\vec{n}\cdot\vec{q}\,d\sigma+\int_{\Sigma}\vec{n}\cdot\vec{q}\,d\sigma=0$$

即
$$\int_{\Sigma}\vec{n}\cdot\vec{q}\,d\sigma=0 \qquad (1\cdot 23)$$

因在 σ 上 $\vec{n}\cdot\vec{q}$ 已自為零也，在 Σ 上 $\vec{n}$ 係沿控制球面之半徑，故 $\vec{n}\cdot\vec{q}=q_r$，最後令控制球面之半徑 a 趨於無窮大，得第三種條件為

$$\lim_{a\to\infty}a^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}q_r\sin\theta\,d\theta\,d\phi=0$$

或
$$\lim_{R\to\infty}R^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}q_r\sin\theta\,d\theta\,d\phi=0$$

因 $q_r=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}q_s=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\sum\sum P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi+B_n^m\sin m\phi)$

故此條件為

$$\lim_{R\to\infty}Re^{-R}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}e^{R\cos\theta}(1+\cos\theta)\sum_n\sum_m P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi+B_n^m\sin m\phi)\,d\theta\,d\phi=0$$

令所需之積分為 I，先向 ϕ 積分，得

$$I=2\pi\int_0^{\pi}e^{R\cos\theta}(1+\cos\theta)\sum_n P_n' A_n^0\,d\theta$$

因 $P_n'=\sin\theta\frac{dP_n}{d\cos\theta}$，$\sin\theta d\theta=-d\cos\theta$ 令 $\cos=x$ 得

$$I=2\pi\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1+x)\sum_n\frac{dP_n}{dx}A_n^0\,dx$$

$$=2\pi\sum_n A_n^0\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1+x)\frac{dP_n}{dx}\,dx$$

式中之積分，未免生疏，惟因與此類似之積分，以後將屢見不鮮，茲特將此類積分之求法及其所代表函數之特性，在此就便說明之。

吾人已知*

$$\int_{-1}^{1} e^{Rx} P_n \, dx = \sqrt{\frac{2\pi}{R}} I_{n+\frac{1}{2}}(R)$$

$I_{n+\frac{1}{2}}$ 代表虛變數之貝色函數（Bessel function with purely imaginary argument）其漸近展開式為+

$$I_{n+\frac{1}{2}}(R) = \frac{e^R}{\sqrt{2\pi R}}\left\{1+\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i \frac{n(n+1)\{n(n+1)-2\}\cdots\{n(n+1)-i(i-1)\}}{i!\;\; 2^i\;\; R!}\right\}$$

令令 $\quad S_n(R) \equiv \int_{-1}^{1} e^{Rx} P_n \, dx$

於是得 $S_n(R)$ 之漸近展開式為

$$S_n(R) = \frac{e^R}{R}\left[1 - \frac{n(n+1)}{2R} + \frac{n(n+1)\{n(n+1)-2\}}{8R^2} - \cdots\cdots\right] \qquad (1A)$$

為吾人目的計，級數之首三項即已足用矣。

P_n之種種特性，比較熟悉，吾人可利用其循環公式（Recurrence formulae），以求S_n之循環公式。先取

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1) P_n(x)$$

一式，得

$$\int_{-1}^{1} e^{Rx}(P'_{n+1} - P'_{n-1})\,dx = (2n+1)\int_{-1}^{1} e^{Rx} P_n \,dx = (2n+1) S_n$$

將左邊之項分部積分之第一循環公式

$$S_{n-1} - S_{n+1} = (2n+1)\, S_n / R \qquad (1B)$$

次取 $\quad (2n+1)\, x P_n(x) = (n+1) P_{n+1}(x) + n P_{n-1}(x)$

得 $\quad (2n+1)\int_{-1}^{1} e^{Rx} x P_n \, dx = (n+1)\int_{-1}^{1} e^{Rx} P_{n+1}\, dx + n\int_{-1}^{1} e^{Rx} P_{n-1}\, dx$

$$= (n+1) S_{n+1} + n S_{n-1}$$

*參考 whittaker and watson: Modern analpis p. 398

\+ 同上 p. 373

但 $\int_{-1}^{1} e^{Rx} x P_n dx = \frac{dS_n}{dR}$ 故得第二循環公式為

$$\frac{dS_n}{dR} = \frac{(n+1)S_{n+1} + nS_{n-1}}{2n+1}$$

利用第一循環公式此式可寫為

$$\frac{dS_n}{dR} = S_{n+1} + \frac{nS_n}{R} = S_{n-1} - (n-1)\frac{S_n}{R} \tag{1C}$$

(1A)(1B)(1C)三公式,對於吾人目的已經足用,其他特性,不必具述。

欲求 $\int_{-1}^{1} e^{Rx}(1+x)\frac{dP_n}{dx}dx$,先作分部積分,得

$$\int e^{Rx}(1+x)\frac{dP_n}{dx}dx = 2e^{Rx} - \left\{R\left(S_n + \frac{dS_n}{dR}\right) + S_n\right\}$$
$$= 2e^{Rx} - \left\{R(S_n + S_{n+1}) + (n+1)S_n\right\}$$

將 S_n 之漸近展開式代入,併項後得

$$\int e^{Rx}(1+x)\frac{dP_n}{dx}dx = \frac{n(n+1)}{R}e^{R}\left[1 - \frac{n(n+1)}{4R} + \cdots\cdots\right]$$

故 $\lim\limits_{R\to\infty} R^2 \iint q_r \sin\theta \, d\theta \, d\phi = \lim\limits_{R\to\infty} Re^{-R} 2\pi \sum\limits_n A_n^0 \frac{n(n+1)}{R} e^{R}\left[1 - \frac{n(n+1)}{4R} + \cdots\right]$

$$= 2\pi \lim_{R\to\infty} \sum_n n(n+1) A_n^0 \left[1 - \frac{n(n+1)}{4R^2} + \cdots\cdots\right]$$
$$= 2\pi \sum_n n(n+1) A_n^0$$

由是得第三種條件為

$$\sum_n n(n+1) A_n^0 = 0 \tag{1·24}$$

以上三種條件,為在最普通情形下漸近解所應滿足之條件,以後種種結論,均係直接或間接根據此種條件,故其重要性實不亞於漸近解本身也。

5.漸近解之討論

渦度之漸近解求得矣,吾人自欲尋問其中所含之意義

意義二字,所涉範圍甚廣,其答案每因個人所注意之問題不同而有異。令先擇其比較簡單者,略舉一二稱之為意義亦無不可。至漸近解與動力之關係,頗形複雜,當於以後單獨討論之。

a. 旋渦之阻尼　粘滯流體繞阻體流動時,在阻體附近,產生有極顯著之旋渦。至離阻體較遠處,則旋渦逐漸消滅,是由於粘滯性所生之阻尼作用(Damping action)。此種作用在吾人之漸近解中,可於 $e^{R(\cos\theta-1)}$ 一因子求之。故此因子當稱為阻尼因子,如 ℓ 代表阻離之一種長度,則 $R=\frac{\rho V_\infty}{2\mu}r=\frac{\rho V_\infty \ell}{2\mu}\left(\frac{r}{\ell}\right)$　$\frac{\rho V_\infty \ell}{\mu}$ 即瑞諾指數(Reynold's number),故阻離率係與瑞諾指數成正比;指數愈大,阻尼亦愈大,此與邊層學說論邊層厚度時所言者,含義正同。惟須注意者,吾人之阻尼因子,以方向而論極不對稱。令 θ 係由阻體之後方起量,如是則由阻體後方移至前方時,$\cos\theta-1$ 之值由 0 逐漸降至 -2。因指數函數之特性,使旋渦在阻體後方所受之阻尼特小;在前方所受之阻尼特大。於是前方之流動,幾為無轉流動,後方則雖在極遠處,猶留有可察之旋渦,此即所謂"航跡"(Wake)者也。追溯 $e^{R\cos\theta}$ 之來,係因渦度微分方程中有 $V_\infty\frac{\partial\vec{\zeta}}{\partial x}$ 一項,航跡之成因,實暗藏於此項也。

b. 追隨旋渦之存在　prandtl* 在其最早之機翼論中,嘗假設機翼前進時,在其後方產生有與前進方向平行之旋渦,稱為追隨旋渦(Trailing vortices)。此種旋渦之存在,實驗方面,不難証實;在理論方面,由吾人之漸近解,亦可得一根據。吾人嘗推得渦度之各分量,闢有

* L. Prandtl: Tragflügeltheorie I. 轉載於 Vier Abhandlungen Zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen, 1927

$$(\cos\theta - 1)\xi_r - \sin\theta\,\xi_\theta = 0$$

一關係，今試取任意一子午平面，以研究渦綫之特性，在此平面內，渦度之兩分量為ξ_r及ξ_θ，渦綫之微分方程為

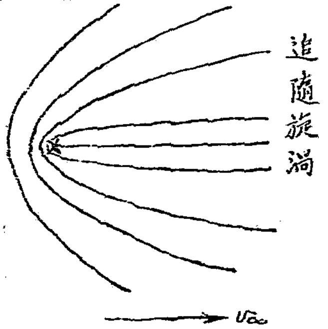
$$\frac{dr}{\xi_r} = \frac{r\,d\theta}{\xi_\theta} \quad 或 \quad \frac{dr}{r\,d\theta} = \frac{\xi_r}{\xi_\theta}$$

但 $\frac{\xi_r}{\xi_\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - 1}$，故在較遠處，渦綫之微分方程為

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - 1}$$

解之得 $$r = \frac{b}{1 - \cos\theta} \qquad (1{\cdot}25)$$

b為積分常數。此式所代表者，為一組之同焦拋物綫，以原點，即以阻體所在之處，為其焦點。各曲綫之形狀，有如右圖所示。（圖2）由圖知在子午平面內，阻體前之渦綫，多與前進方向垂直，至阻體後，則改為與前進方向平行。其形狀與 Prandtl 所想像之馬蹄形極相似。惟其分佈係遍於流區，非若 Prandtl 所想像者之簡單耳。



圖二　　X=阻體

C. 有向速位之散量　通常討論旋渦流動時，以有向速位之散量為零（$\nabla\cdot\vec{A}=0$），係假設在流體中並無阻體，旋渦之存在，亦只限於一有限區域。在此情形下，欲証明速位之解，雖有此特性，毫不困難。但吾人之流體中，置有阻體，旋渦又假設係作連續分佈，有向速位是否仍能保持此特性，頗成問題。有向速位之微分方程，是否仍適用，因此亦成問題。故須將通常証明之法，逐步重行檢討之。

由　$4\pi\vec{A} = \int \frac{\vec{\xi}}{r}\,d\tau$　一式，用積分變換法，得

$$4\pi \nabla\cdot\vec{A} = \int_P \frac{\vec{r}\cdot\vec{g}}{r^3} d\tau = \int_\sigma \frac{\vec{n}\cdot\vec{g}}{r} d\sigma + \int_\Sigma \frac{\vec{n}\cdot\vec{g}}{r} d\sigma$$

故 $\nabla\cdot\vec{A}$ 是否為零，全視流區之邊界條件而定。依吾人之邊界條件，在 σ 上 $\vec{n}\cdot\vec{g}=0$，但在 Σ 上 $\vec{n}\cdot\vec{g}=g_r \neq 0$，$\nabla\cdot\vec{A}$ 之值，須根據漸近解積分後，取其極限，方可決定。即

$$4\pi \nabla\cdot\vec{A} = \lim_{a\to\infty} a^2 \iint \frac{g_r}{r} \sin\theta\, d\theta\, d\phi \qquad (1\text{-}26)$$

欲求此積分，吾人須注意 P 為控制球内之一點，與球面間之距離為 r，設 P 與原點間之距離為 r_0，則

$$r^2 = r_0^2 + a^2 - 2r_0 a\cos\phi$$

因 $r_0 < a$，可先將 $\frac{1}{r}$ 展開為

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\sum\left(\frac{r_0}{a}\right)^n P_n(\cos\phi) = \frac{1}{a} + \frac{r_0\cos\phi}{a^2} + \cdots + \frac{r_0^n}{a^{n+1}}P_n + \cdots$$

然後再逐項積分。第一項之積分為零，計算法與上節中求第三條件所用者相同。以後各項之積分頗為複雜，但為吾人目的計，實不必細為計算，只須求其數量級足矣。

假定將 $P_n(\cos\phi)$ 用 Legendre 多項式之加法*展開，則

$$g_r P_n(\cos\phi) = e^{R(\cos\theta - 1)} F(\theta, \phi; \theta_0, \phi_0)$$

θ.ϕ 表示 a 之方向，ϕ_0，θ_0 表示 r_0 之方向。因 $e^{R(\cos - 1)}$ 中不含 ϕ，可先 ϕ 積分得

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} g_r P_n(\cos\phi)\sin\theta\, d\theta\, d\phi = C_n(\theta_0\, \phi_0)\, e^{-R}\int_0^\pi e^{R\cos\theta} F(\theta,\theta_0,\phi_0)\sin\theta\, d\theta$$

C_n 為積分常數，其内不含 R，是須認清者。$F(\theta;\theta_0,\phi_0)$ 可用 Legendre 各級多項式展開，展開後再逐項積分，因 S_n 之最

* 粘滯流體之運動學　　公式 (36)

低項為$\frac{\varrho R}{R}$,逐項積分後每項之值自不能低於$\frac{\varrho R}{R}$。由是得

$$\iint g_r P_n(\cos\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = O\left(\frac{1}{R}\right) = O\left(\frac{1}{a}\right)$$

將此結果代入(1·26)式中,取其極限,得每項之值均為零。故

$$\nabla\cdot A = 0 \tag{1·27}$$

因之吾人有下列之定理:

"在吾人所設之流動情形下,有向速位之散量$\nabla\cdot\vec{A}$<B 為零,$\nabla^2\vec{A} = -\vec{g}$ 一微分方程仍適用。" (定理3)

II. 完全粘附與動力

粘滯流動之一般特性介紹完畢矣。吾人可開始討論動力一問題。動力者,流體流動時,因動量之交換,對阻體所作用之力也。討論此問題,可采兩種不同觀點:一只注意阻體之表面,一則注意流體之全部,在本標題內所取者,第一種觀點也。

流體作用於阻體之力,發生於二者之接觸表面上,其標準形式為

$$F = \int_\sigma \vec{n} p\, d\sigma - \mu\int_\sigma \vec{n}\cdot\vec{\vec{T}}\, d\sigma \tag{2·1}$$

$\vec{n}$為由表面向阻體內指之單位法綫。式中第一積分所表示者,為壓力p所生之力,第二積分所表示者,為粘滯應力所生之力。$\vec{\vec{T}}$為形變率張量,其笛卡分量為

$$\begin{array}{ccc}
2\frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial x} \\
\frac{\partial V_y}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial y} & 2\frac{\partial V_y}{\partial y} & \frac{\partial V_y}{\partial z}+\frac{\partial V_z}{\partial y} \\
\frac{\partial V_z}{\partial x}+\frac{\partial V_x}{\partial z} & \frac{\partial V_z}{\partial y}+\frac{\partial V_y}{\partial z} & 2\frac{\partial V_z}{\partial z}
\end{array}$$

令$\vec{n}$之笛卡分量為l, m, n,則

$$\vec{n}\cdot\vec{\tau} = \vec{i}\left\{2l\frac{\partial v_x}{\partial x}+m\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\right\}$$
$$+\vec{j}\left\{l\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)+2m\frac{\partial v_y}{\partial y}+n\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right\}$$
$$+\vec{k}\left\{l\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+m\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)+2n\frac{\partial v_z}{\partial z}\right\}$$

用向量符號表示之,則為

$$\vec{n}\cdot\vec{\tau} = 2\vec{n}\cdot\nabla\vec{v}+\vec{n}\times\nabla\times\vec{v} = 2\vec{n}\cdot\nabla\vec{v}+\vec{n}\times\vec{q} \qquad (2\cdot2)$$

但在阻體表面上,因完全粘附之特性,曾推得

$$\vec{n}\times\vec{q}+\vec{n}\cdot\nabla\vec{v} = 0$$

故 $$\vec{n}\cdot\vec{\tau} = -\vec{n}\times\vec{q} \qquad (2\cdot3)$$

由此吾人得一定理,

"阻體表面之粘滯應力,全視其上之渦度而定"

(定理4)

用此定理則

$$\vec{F} = \int_\sigma \vec{n}\,p\,d\sigma + \mu\int_\sigma \vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma \qquad (2\cdot4)$$

此亦即吾人討論動力時所採用之形式也。

假若動力微分方程能順利解決,p,$\vec{q}$二者自均可化為位置之函數,積分後即可得動力之最後公式。此種辦法在通常情形下,現已証明為不可能,致動力之最後公式完全絕望,於是吾人乃建議一退一步之問題,用(2·4)式以計算動力,需同時知壓力及渦度與位置之關係,是否亦可單獨用壓力或單獨用渦度,以計算動力?如可,則動力之計算,自比較當初遠為簡便。因欲求最後形式,只須於壓力與渦度二者之中,任知其一足矣。此問題之答案顯為正面,蓋在表面上,壓力與渦度有

$$\nabla p + \mu\nabla\times q = 0 \qquad (1\cdot7)$$

一關係存在,惟如何能直接利用此關係,而不需先求其解,殊覺缺乏耳。吾人解決此問題所用之方法,可稱為分部積分法,因其在最簡單情形下,與通常所謂分部積分(Integration by parts)正相同也。

1. 動力之壓力式

欲單獨用壓力以求動力,自須將 $\int_\sigma \vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma$ 一項化為壓力之函數。在作此變化前,吾人須先證明一數學定理,定理曰:

"如有一具有內外兩界之區域P,外界係由一球面Σ造成,內界係由一形狀不拘之表面造成。如有一有向函數$\vec{W}$,函數本身及其首次導數,在此區域內,均具有連續性及單值性(Single-valuedness)則

$$\int_\sigma \vec{n}\times\vec{W}\,d\sigma = \int_\sigma \vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{W}\,d\sigma \qquad (2.5)$$

r為自任球心量起之半徑向量。"

欲證明此定理,可由向量分析中

$$\nabla\times(\vec{B}\times\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\vec{B} - \vec{A}\nabla\cdot\vec{B} - \vec{B}\cdot\nabla\vec{A} + \vec{B}\nabla\cdot\vec{A}$$

開始令 $\vec{B}=\vec{r}$ 因 $\vec{A}\cdot\nabla\vec{r}=\vec{A}$, $\nabla\cdot\vec{r}=3$ 得

$$\nabla\times(\vec{r}\times\vec{A}) = -2\vec{A} - \vec{r}\cdot\nabla\vec{A} + \vec{r}\nabla\cdot\vec{A}$$

乘以$d\tau$,在P內積分,因

$$\int_P \nabla\times(\vec{r}\times\vec{A})\,d\tau = \int_{\sigma+\Sigma} \vec{n}\times\vec{r}\times\vec{A}\,d\sigma$$

$$\int_P \vec{r}\cdot\nabla\vec{A}\,d\tau = -\int_P \vec{A}\nabla\cdot\vec{r}\,d\tau + \int_{\sigma+\Sigma} \vec{A}\vec{n}\cdot\vec{r}\,d\sigma$$

$$= -3\int_P \vec{A}\,d\tau + \int_{\sigma+\Sigma} \vec{A}\vec{n}\cdot\vec{r}\,d\sigma$$

得 $\int_{\sigma+\Sigma} \vec{n}\times\vec{r}\times\vec{A}\,d\sigma = \int_P \vec{A}\,d\tau - \int_{\sigma+\Sigma} \vec{A}\vec{n}\cdot\vec{r}\,d\sigma + \int_{\sigma+\Sigma} \vec{r}\nabla\cdot\vec{A}\,d\tau$

即 $$\int_P \vec{A}\,d\tau + \int_P \vec{r}\,\nabla\cdot\vec{A}\,d\tau = \int_{\sigma+\Sigma} \vec{r}\,\vec{n}\cdot\vec{A}\,d\sigma \qquad (2\cdot6)$$

最後取 $A=\nabla\times W$, 因 $\nabla\cdot\vec{A}=\nabla\cdot\nabla\times\vec{W}\equiv 0$, $\int_P \vec{A}d\tau=\int_P \nabla\times\vec{W}d\tau=\int_{\sigma+\Sigma} n\times\vec{W}d\sigma$

得 $$\int_{\sigma+\Sigma} \vec{n}\times\vec{w}\,d\sigma = \int_{\sigma+\Sigma} \vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{W}\,d\sigma \qquad (2\cdot7)$$

或 $$\int_\sigma \vec{n}\times\vec{w}\,d\sigma - \int_\sigma \vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{W}\,d\sigma = \int_\Sigma \vec{n}\times\vec{w}\,d\sigma - \int_\Sigma \vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{W}\,d\sigma.$$

Σ 根據假設為一球面,在其上 $\vec{r}=\vec{r}_1 a=\vec{n}a$,用球面坐 r,θ,ϕ 得在Σ上

$$\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{W} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}W_\phi\sin\theta - \frac{\partial W_\theta}{\partial\phi}\right)$$

故 $$\int_\Sigma \vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{W}\,d\sigma = a^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\vec{r}_1\frac{\partial}{\partial\theta}(W_\phi\sin\theta)\,d\theta\,d\phi - a^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\vec{r}_1\frac{\partial W_\theta}{\partial\phi}\,d\theta\,d\phi$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi\vec{r}_1\frac{\partial}{\partial\theta}W_\phi\sin\theta\,d\theta - a^2\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}r\frac{\partial W_\theta}{\partial\phi}\,d\phi$$

將每項之後一積分作分部積分,得

$$\int_0^\pi\vec{r}_1\frac{\partial}{\partial\theta}(W_\phi\sin\theta)\,d\theta = \vec{r}_1W_\phi\sin\theta\Big|_0^\pi - \int_0^\pi W_\phi\sin\theta\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial\theta}\,d\theta$$
$$= -\int_0^\pi W_\phi\sin\theta\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial\theta}\,d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\vec{r}_1\frac{\partial W_\theta}{\partial\phi}\,d\phi = \vec{r}_1W_\theta\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}W_\theta\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial\phi}\,d\phi = -\int W_\theta\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial\phi}\,d\phi$$

因 $\sin\theta\Big|_0^\pi=0$、又依單值假設 $W_\theta\Big|_0^{2\pi}=0$ 但

$$d\vec{r}_1 = \vec{\theta}_1\,d\theta + \vec{\phi}_1\sin\theta\,d\phi$$

即 $$\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial\theta}=\theta_1 \qquad \frac{\partial\vec{r}_1}{\partial\phi}=\vec{\phi}_1\sin\theta$$

代入原積分中,得

$$\int_\Sigma\vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{W} = -a^2\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi\vec{\theta}_1W_\phi\sin\theta\,d\theta + a^2\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}\vec{\phi}_1W_\theta\sin\theta\,d\phi$$
$$= a^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(-\vec{\theta}_1W_\phi+\vec{\phi}_1W_\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$
$$= \int_\Sigma(-\vec{\theta}\,W_\phi+\vec{\phi}_1W_\theta)\,d\sigma \qquad (2\cdot8)$$

將 $\int_{\Sigma}\vec{n}\times\vec{w}\,d\sigma$ 中之 $\vec{n}\times\vec{w}$ 展開之,得

$$\vec{n}\times\vec{w}=\vec{r}_1\times\vec{w}=\vec{\varphi}_1 w_\theta-\vec{\theta}_1 w_\phi$$

與前積分結果相比較,得在 Σ 上

$$\int_{\Sigma}\vec{n}\times\vec{w}\,d\sigma-\int_{\Sigma}\vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{A}\,d\sigma=0 \qquad (2\cdot 9)$$

故在 σ 上 $$\int_{\sigma}\vec{n}\times\vec{w}\,d\sigma-\int_{\sigma}\vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{A}\,d\sigma=0$$

即 $$\int_{\sigma}\vec{n}\times\vec{w}\,d\sigma=\int_{\sigma}\vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{A}\,d\sigma \qquad (2\cdot 5)$$

Q. E. D.

此定理將一函數之積分,化為其導數之積分,即通常分部積分法所示者也。

將此定理應用於吾人在本節初所設之問題,甚為直接。只須取 Σ 為吾人之控制球面,σ 為阻體之表面,$\vec{A}$ 為渦度 $\vec{q}$,得

$$\int_{\sigma}n\times\vec{q}\,d\sigma=\int_{\sigma}\vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla\times\vec{q}\,d\sigma$$

但在 σ 上 $$\nabla p+\mu\nabla\times\vec{q}=0$$

故 $$\mu\int_{\sigma}\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma=-\int_{\sigma}\vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla p\,d\sigma$$

代入 (2·4) 得

$$\vec{F}=\int_{\sigma}\vec{n}p\,d\sigma-\int_{\sigma}\vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla p\,d\sigma=\int_{\sigma}(\vec{n}p-\vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla p)\,d\sigma \qquad (2\cdot 10)$$

此動力之壓力式也。

自邊層~~學說~~觀點言之,此式含有特殊之意義。自邊層學說主要假設之一,為在邊層內沿與阻體表面垂直之方向壓力不變*。邊層既係附着於阻體之表面,此當釋為在阻體表面

* W. Tollmien: Grenzschichttheorie; Handbuch der experimentalphysik, Band IV, 1. Teil, 頁 249.

上沿法綫方向壓力不變，即在 σ 上 $n\cdot\nabla p=0$，故在此情形下之動力為

$$\vec{F}=\int_{\sigma}\vec{n}p\,d\sigma \qquad (2\cdot10a)$$

因之吾人有下列之定理：

"在邊層學說適用之範圍內，動力全係由壓力所產生。"

（定理5）

此定理亦可用為決定在某一問題中，邊層學說是否適用之準則。

2.動力之渦度式

在另一方面，動力亦可單獨用渦度計算。欲達到此目的，吾人須先証明又一定理，定理曰：

"如有一區域 P，及一無限函數 f，同具有前定理中所設之特性，則

$$\int_{\sigma}\vec{n}f\,d\sigma=-\frac{1}{2}\int_{\sigma}\vec{r}\times\vec{n}\times\nabla f\,d\sigma \qquad (2\cdot11)$$

証明此定理之法，與前所用者大同小異，由

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{B}\cdot\nabla\vec{A}+\vec{A}\cdot\nabla\vec{B}+\vec{B}\times\nabla\times\vec{A}+\vec{A}\times\nabla\times\vec{B}$$

一式，取 $\vec{B}=\vec{r}$ 因 $\vec{A}\cdot\nabla\vec{r}=\vec{A}$，$\nabla\times\vec{r}=0$ 得

$$\nabla(\vec{r}\cdot\vec{A})=\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}+\vec{A}+\vec{r}\times\nabla\times\vec{A}$$

在 P 中積分，因

$$\int_{P}\nabla(\vec{r}\cdot\vec{A})\,d\tau=\int_{\sigma+\Sigma}\vec{n}\,\vec{r}\cdot\vec{A}\,d\sigma$$

$$\int_{P}\vec{r}\cdot\nabla\vec{A}\,d\tau=-3\int_{P}\vec{A}\,d\tau+\int_{\sigma+\Sigma}\vec{A}\,\vec{n}\cdot\vec{r}\,d\sigma$$

得

$$\int_{\sigma+\Sigma}\vec{n}\,\vec{r}\cdot\vec{A}\,d\sigma=-2\int_{P}\vec{A}\,d\tau+\int_{\sigma+\Sigma}\vec{A}\,\vec{n}\cdot\vec{r}\,d\sigma+\int_{P}\vec{r}\times\nabla\times\vec{A}\,d\tau$$

即

$$2\int_{P}\vec{A}\,d\tau-\int_{P}\vec{r}\times\nabla\times\vec{A}\,d\tau=-\int_{\sigma+\Sigma}\vec{r}\times\vec{n}\times\vec{A}\,d\sigma \qquad (2\cdot12)$$

最後取 $\vec{A}=\nabla f$，因 $\nabla\times\vec{A}=0$，$\int_{P}\vec{A}\,d\tau=\int_{\sigma+\Sigma}\vec{n}f\,d\sigma$，得

$$2\int_\sigma \vec{n} f\, d\sigma + \int_\sigma \vec{r}\times\vec{n}\times\nabla f\, d\sigma = 2\int_\Sigma \vec{n} f\, d\sigma + \int_\Sigma \vec{r}\times\vec{n}\times\nabla f\, d\sigma \qquad (2.13)$$

在 Σ 上 $\quad \vec{r}\times\vec{n}\times\nabla f = a\,\vec{n}\times\vec{n}\times\nabla f = \left(\vec{\theta}_1 \frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\vec{\phi}_1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)$

故 $\quad \int_\Sigma \vec{r}\times\vec{n}\times\nabla f\, d\sigma = a^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\vec{\theta}_1 \frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\vec{\phi}_1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial\phi}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\phi$

$$= -a^2\int_0^{2\pi} d\phi\int_0^{\pi}\vec{\theta}_1\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\, d\theta - a^2\int_0^{\pi} d\theta\int_0^{2\pi}\vec{\phi}_1\frac{\partial f}{\partial\phi}\, d\phi$$

惟 $\quad \int_0^{\pi}\vec{\theta}_1\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\, d\theta = \vec{\theta}_1 f\sin\theta\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f\,\frac{\partial\vec{\theta}_1\sin\theta}{\partial\theta}\, d\theta$

$$= -\int_0^{\pi} f\left(\vec{\theta}_1\cos\theta + \frac{\partial\vec{\theta}_1}{\partial\theta}\sin\theta\right) d\theta$$

$$= -\int_0^{\pi} f\left(\vec{\theta}_1\cos\theta - \vec{r}_1\sin\theta\right) d\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\vec{\phi}_1\frac{\partial f}{\partial\phi}\, d\phi = \vec{\phi}_1 f\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f\,\frac{\partial\vec{\phi}_1}{\partial\phi}\, d\phi = +\int_0^{2\pi} f\left(\vec{r}_1\sin\theta + \vec{\theta}_1\cos\theta\right) d\phi$$

代入原式得

$$\int_\Sigma \vec{r}\times\vec{n}\times\nabla f\, d\sigma = -2a^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\vec{r}_1 f\sin\theta\, d\theta\, d\phi = -2\int_\Sigma \vec{n} f\, d\sigma$$

故 $\quad \int_\Sigma \vec{n} f\, d\sigma + \int_\Sigma \vec{r}\times\vec{n}\times\nabla f\, d\sigma = 0 \qquad (2\cdot14)$

於是得 $\quad \int_\sigma \vec{n} f\, d\sigma = -\frac{1}{2}\int_\sigma \vec{r}\times\vec{n}\times\nabla f\, d\sigma$。 $\qquad (2\cdot11)$

Q. E. D.

取 $\quad f = p \quad$ 因 $\quad \nabla p + \mu\nabla\times\vec{q} = 0 \quad$ 得

$$F = \frac{\mu}{2}\int \vec{r}\times\vec{n}\times\nabla\times\vec{q}\, d\sigma + \mu\int \vec{n}\times\vec{q}\, d\sigma$$

$$= \mu\int\left(\frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{n}\times\nabla\times\vec{q} + \vec{n}\times\vec{q}\right) d\sigma \qquad (2\cdot15)$$

此動力之渦度式也。就理論言之，此式與壓力式并無軒輊。惟

為實用目的計,壓力式則顯為應採用之公式,因實驗所量得者為壓力而非渦度也。應用此式時,除須知表面上壓力之值外,尚須知其在表面附近之變化率,後者目前尚無實驗結果可資利用,致不能舉一實例細作計算,殊覺為憾也。

3.圓球之阻力

圓球在流體中所受之動力,為一空間問題,與本文中所設之情形適合,自可用上所求得之二式以作計算。此動力僅為一阻力,計算時只須取沿 $\vec{U}_\infty$ 方向之分力足矣。以球心為原點,用球面坐標,一如前文中所述者。因 $\vec{i}\cdot\vec{n}=\cos\theta$,
$\vec{i}\cdot\vec{r}\,\vec{n}\cdot\nabla p=-\cos\theta\, r\frac{\partial p}{\partial r}$ 故以壓力為準則阻力為

$$F_x=a^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta\left(p-a\frac{\partial p}{\partial r}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$=-2\pi a^2\int_0^{\pi}\left(p-a\frac{\partial p}{\partial r}\right)\cos\theta\sin\theta\, d\theta \qquad (2\cdot16)$$

在此情形下之渦度只有一分量 q_ϕ

$$\vec{n}\times\vec{q}=-r_1\times\phi_1 q_\phi=+\theta_1 q_\phi;\quad \vec{i}\cdot\vec{n}\times\vec{q}=+\vec{i}\cdot\vec{\theta}_1 q_\phi=-q_\phi\sin\theta$$

$$\nabla\times\vec{q}=\frac{r_1}{\sin\theta}\frac{\partial q_\phi\sin\theta}{\partial\theta}-\frac{\theta_1}{r}\frac{\partial q_\phi r}{\partial r}$$

$$\vec{r}\times\vec{n}\times\nabla\times\vec{q}=-a\, r_1\times r_1 r\,\nabla\times\vec{q}=-\theta_1\frac{\partial q_\phi r}{\partial r}$$

$$\vec{i}\cdot\vec{r}\times\vec{n}\times\vec{\nabla}\times q=+\sin\theta\frac{\partial q_\phi r}{\partial r}=+\sin\theta\left(r\frac{\partial q_\phi}{\partial r}+q_\phi\right)$$

故以渦度為準則

$$F_x=\mu a^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\theta\left(\frac{1}{2}q_\phi+\frac{r}{2}\frac{\partial q_\phi}{\partial r}-q_\phi\right)\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$=\pi\mu a^2\int\left(-q_\phi+a\frac{\partial q_\phi}{\partial r}\right)\sin^2\theta\, d\theta \qquad (2\cdot17)$$

欲再行化簡,吾人當依照前文中所言,將渦度以 P_n' 展開之,即 $\quad q_\phi=\sum_n R_n P_n'$

代入積分中,因各級 P_n' 間之正交性,積分後得

$$F_x = \frac{4}{3}\pi\mu a^2\left(-R_1' + a\frac{dR_1'}{dr}\right)_{r=a} \qquad (2\cdot18)$$

由此可知阻力之值完全視 R_1 之特性,與其他 R_n 毫無關係。根據 stokes 之解

$$R_1' = -\frac{3}{2}V_\infty\frac{a}{r^2}$$

由之得 $\quad \left.\frac{dR_1'}{dr}\right| = +3V_\infty\frac{a}{r^3}$

故 $\quad \left(a\frac{dR_1'}{dr} - R_1'\right)_{r=a} = \frac{9}{2}V_\infty/a$

代入式中得 $\quad F_x = \frac{4}{3}\pi\mu a^2\cdot\frac{9}{2}V_\infty/a = 6\pi\mu a v_\infty$

此即 Stokes 定律也。

(2·18)式仍可化簡,吾人已推得在任何一阻體之表面上

$$\nabla^2\vec{q} + \frac{\rho}{\mu}\vec{q}\cdot\nabla\vec{v} = 0$$

在圓球問題中, $\vec{q} = \vec{\phi}_1 q_\phi$, $\vec{v} = \vec{r}_1 v_r + \vec{\theta}_1 v_\theta$, 由是得

$$\nabla^2\vec{q} = \frac{\vec{\phi}_1}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial q_\phi}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial q_\phi}{\partial\theta} - \frac{q_\phi}{\sin^2\theta}\right\}$$

$$\vec{q}\cdot\nabla\vec{v} = \vec{\phi}_1\left\{v_r\frac{\partial q}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial q}{\partial\theta}\right\}$$

在球面上 $\quad v_r = v_\theta = 0$ 故 $\vec{q}\cdot\nabla\vec{v} = 0$, 於是得

$$\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial q_\phi}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial q_\phi}{\partial\theta} - \frac{q_\phi}{\sin^2\theta} = 0$$

將 $q_\phi = \sum_n R_n P_n'$ 代入此式中,得在球面上

$$\sum_n\left(\frac{d}{dr}r^2\frac{dR_n'}{dr} - n(n+1)R_n'\right)P_n' = 0$$

但此式無論 θ 為何,均應為零,故每一 P_n' 之係數必須為零。於是得

$$\frac{d}{dr}r^2\frac{dR_1'}{dr} - 2R_1' = 0 \quad \text{等等}$$

或 $\quad r^2\frac{d^2R_1'}{dr^2} + 2\left(r\frac{dR_1'}{dr} - R_1'\right) = 0$ 等等

由R_1之式得 $\left(r\frac{dR_1'}{dr}-R_1'\right)_{r=a}=-\frac{1}{2}a^2\frac{d^2R_1'}{dr^2}\Big|_{r=a}$ (2·19)

因此關係阻力之公式簡化為

$$F_x=-\frac{2}{3}\pi\mu a^4\frac{d^2R_1'}{dr^2}\Big|_{r=a}$$

亦即吾人關於圓球阻力一問題所能推得最簡單之公式也。

用 Stokes之解 $\frac{d^2R_1'}{dr^2}\Big|_{r=a}=-9V_\infty/a^3$ 仍得

$$F_x=6\pi\mu a V_\infty$$

如不用渦度而用壓力,可將壓力用P_n展開之,得

$$p=\sum R_nP_n$$

代入(2·16)式積分後得

$$F_x=\frac{4}{3}\pi a^2\left(a\frac{dR_1}{dr}-R_1\right)_{r=a} \qquad (2·20)$$

將展開式代入(1·8)式中,依前所用同樣理論,得在球面上

$$r^2\frac{d^2R_1}{dr^2}+2\left(r\frac{dR_1}{dr}-R_1\right)=0$$

故用壓力時,阻力之最後公式為

$$F_x=-\frac{2}{3}\pi a^4\frac{d^2R_1}{dr^2}\Big|_{r=a} \qquad (2·21)$$

將Stokes之解 $p=p_0-\frac{3}{2}\frac{\mu a V_\infty}{r^2}$ 代入,仍得Stokes定律。

III. 漸近解與動力

以上係就阻體表面之特性,以討論動力,現將改取第二種觀點,即就流體全部之特性,以討論同一問題。此中所用方

法多係根據流體在離阻體極遠處之特性，故當視為一漸近方法，使此方能應用成功者，吾人之漸近解也。其重要性自不言可喻矣。

1.動力之混合積分式

欲應用漸近解，吾人將用一比較特別之積分式。取運動方程式

$$\rho\vec{V}\times\vec{q}=+\nabla\beta+\mu\nabla\times\vec{q}$$

以 $d\tau$ 乘之，然後向流區 P 積分，得

$$\rho\int_P\vec{V}\times\vec{q}\,d\tau=\int_P\nabla\beta\,d\tau+\mu\int_P\nabla\times\vec{q}\,d\tau$$

$$=\int_{\sigma+\Sigma}\vec{n}\beta\,d\sigma+\mu\int_{\sigma+\Sigma}\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma$$

$$=\int_\sigma\vec{n}\beta\,d\sigma+\mu\int_\sigma\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma+\int_\Sigma\vec{n}\beta\,d\sigma$$

$$+\mu\int_\Sigma\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma$$

因 $\beta\equiv(\rho\frac{V^2}{2}+p)-(\rho\frac{V_\infty^2}{2}+p_\infty)$，而在 σ 上 $V^2=0$ 故

$$\int_\sigma\vec{n}\beta\,d\sigma=\int_\sigma\vec{n}p\,d\sigma-\int_\sigma\vec{n}(\rho\tfrac{V_\infty^2}{2}+p_\infty)d\sigma=\int_\sigma\vec{n}p\,d\sigma$$

但 $\int_\sigma\vec{n}p\,d\sigma+\mu\int_\sigma\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma$ 為阻體所受之力 $\vec{F}$，故得

$$\vec{F}=\rho\int_P\vec{V}\times\vec{q}\,d\tau-\int_\Sigma\vec{n}\beta\,d\sigma-\mu\int_\Sigma\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma \quad (3\cdot1)$$

因式中同時含體分及面積二者，故稱之為混合積分式。此式雖係根據運動方程式，用積分變換法求得者，但與通常所謂動量定律之式並不相同，且其所言者，亦僅對於粘滯流體適用。因在 σ 上 $V^2=0$，為粘滯流體獨有之特性也。

後文將証明式中第一項所代表者為擧力，第二項所代表者為阻力，第三項不產生任何力。今先將第三項之值，用漸近解証明其為零，証畢後即可將其擯棄矣。

用圓球坐標及圓球分量得在Σ上

$$\vec{n}\times\vec{q}=\vec{r}_1\times\vec{q}=\vec{\phi}_1 q_\theta-\vec{\theta}_1 q_\phi=-(\vec{\phi}_1 q_\varrho+\vec{\theta}_1 q_\phi)$$

化為笛卡分量得

$$-\vec{n}\times\vec{q}=-\vec{i}\sin\theta q_\phi+\vec{j}(\cos\theta\cos\phi q_\phi-\sin\phi q_\varrho)+\vec{k}(\cos\theta\sin\phi q_\phi+\cos\phi q_\varrho)$$

i 分量之積分為

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\sin\theta\sum\sum P_n^{m+1}(-B_n^m\cos m\phi+A_n^m\sin m\phi)R^2\sin\theta d\theta d\phi$$

$$=2\pi Re^{-R}\int_0^{\pi}e^{R\cos\theta}\sin\theta\sum -B_n^0P_n^1\sin\theta d\theta$$

$$=-2\pi Re^{-R}\sum B_n^0\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}dx$$

用分部積分法，得

$$\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}dx=\frac{1}{R}\left\{e^{Rx}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}e^{Rx}\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}dx\right.$$

$$=\frac{n(n+1)}{R}\int_{-1}^{1}e^{Rx}P_n dx=\frac{n(n+1)}{R}S_n=\frac{n(n+1)}{R^2}e^{R}\left(1-\frac{n(n+1)}{2R}+\cdots\right)$$

因 $\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}+n(n+1)P_n=0$ 為 P_n 之微分方程也。

令 $R\to\infty$ 得 i 分量之極限為

$$-\lim_{R\to\infty}2\pi Re^{-R}\sum\frac{n(n+1)}{R^2}e^R B_n^0=-2\pi\sum B_n^0\lim_{R\to\infty}\frac{n(n+1)}{R}=0 \quad (3\cdot1a)$$

j 分量之積分為

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\cos\theta\cos\phi\sum\sum P_n^{n+1}(-B_n^m\cos m\phi+A_n^m\sin m\phi)R^2\sin\theta d\theta d\phi$$

$$-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\sin\phi\sum\sum P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi+B_n^m\sin m\phi)R^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$=-\pi R e^{-R}\int_0^{\pi} e^{R\cos\theta}\sum P_n^2 B_n^1(\cos\theta+1)\sin\theta\, d\theta$$

$$=-\pi R e^{-R}\sum B_n^1\int_{-1}^{1} e^{Rx}(1+x)\, P_n^2\, dx$$

$$=-\pi R e^{-R}\sum B_n^1\int_{-1}^{1} e^{Rx}(1+x)(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}\, dx$$

但依 P_n 之微分方程

$$(1+x)(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}=2x(1+x)\frac{dP_n}{dx}-n(n+1)(1+x)P_n$$
$$=-2(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}+2(1+x)\frac{dP_n}{dx}-n(n+1)(1+x)P_n$$

故 $$\int_{-1}^{1} e^{Rx}(1+x)P_n^2\, dx=-2\int_{-1}^{1} e^{Rx}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}dx+2\int_{-1}^{1} e^{Rx}(1+x)\frac{dP_n}{dx}dx-n(n+1)\int_{-1}^{1} e^{Rx}(1+x)P_n\, dx.$$

右邊各項積分之值前均已求得,故

$$\int_{-1}^{1} e^{Rx}(1+x)P_n^2\, dx=-2\frac{n(n+1)}{R}S_n+2\left[2e^{Rx}-\{R(S_n+S_{n+1})+(n+1)S_n\}\right]$$
$$-n(n+1)\left\{(S_n+S_{n+1})+nS_n/R\right\}$$
$$=\frac{e^R}{2R^2}n(n+1)\left\{n(n+1)-2\right\}+\cdots \qquad (3\cdot 1 b)$$

令 $R\to\infty$,得 j 分量之極限亦為零。

同同樣方法求得 K 分量之積分為

$$\pi R e^{-R}\sum A_n^1\int_{-1}^{1} e^{Rx}(1+x)P_n^2\, dx$$

故 K 分量之極限亦為零,將三結果併之得

$$\lim_{a\to\infty}\int_S \vec{n}\times\vec{q}\, d\sigma=0 \qquad (3\cdot 2)$$

此即吾人所欲証明者也。

2.粘滯流體之阻力

A.阻力之面積分 $-\int_{\Sigma}\vec{n}p\,d\sigma$ 所代表者為阻力,即該項僅有①沿 $\vec{i}$ 方向之分量不等於零,因

$$\vec{n}=\vec{i}\cos\theta+\vec{j}\sin\theta\cos\phi+\vec{k}\sin\theta\sin\phi$$

$$p=\mu\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}q_\phi$$

得
$$-\int_{\Sigma}\vec{n}p\,d\sigma=\mu\Big[\vec{i}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\cos\theta(1+\cos\theta)q_\phi\,d\theta\,d\phi+\vec{j}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\phi(1+\cos\theta)q_\phi\,d\theta\,d\phi$$
$$+\vec{k}\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\sin\theta\sin\phi(1+\cos\theta)q_\phi\,d\theta\,d\phi\Big]$$

i 分量之積分為

$$\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\cos\theta(1+\cos\theta)\sum\sum P_n^{m+1}(-B_n^m\cos m\phi+A_n^m\sin m\phi)R^2\,d\theta\,d\phi$$

$$=\frac{2\pi}{k^2}Re^{-R}\int e^{R\cos\theta}\cos\theta(1+\cos\theta)\sum -P_n^{1}B_n^{0}\,d\theta$$

$$=-\frac{2\pi}{k^2}Re^{-R}\sum B_n^0\int_{-1}^{1}e^{Rx}x(1+x)\frac{dP_n}{dx}\,dx$$

$$=+\frac{2\pi}{k^2}Re^{-R}\sum B_n^0\Big[\frac{n(n+1)S_n}{R}-\{2e^{Rx}-(R(S_n+S_{n+1})+(n+1)S_n\}\Big]$$

$$=-\frac{2\pi}{k^2}Re^{-R}\sum B_n^0\frac{n(n+1)}{R}e^{R}=-\frac{2\pi}{k^2}\sum n(n+1)B_n^0$$

故
$$\lim_{a\to\infty}\int_{\Sigma}i\cdot n\,p\,d\sigma=\frac{2\pi}{k^2}\sum n(n+1)B_n^0 \qquad (3\cdot 2a)$$

j 分量之積分為

$$\int_0^{\pi}\!\!\int_0^{2\pi}\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\sin\theta\cos\phi(1+\cos\theta)\sum\sum P_n^{m+1}(-B_n^m\cos m\phi+A_n^m\sin m\phi)a^2\,d\theta\,d\phi$$

$$= \frac{\pi}{k^2} R e^{-R} \int_0^{\pi} e^{R\cos\theta} \sin\theta (1+\cos\theta) \sum -B_n' P_n^2 \, d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{k^2} R e^{-R} \sum B_n' \int_{-1}^{1} e^{Rx} (1+x) P_n^2 \, dx$$

$$= -\frac{\pi}{k^2} R e^{-R} \sum B_n' \frac{e^R}{2R^2} n(n+1)\left\{n(n+1)-2\right\}$$

$$= -\frac{\pi}{k^2} \frac{1}{R} \sum n(n+1)\left\{n(n+1)-2\right\} B_n'$$

故 $\lim\limits_{a\to\infty} \int_\Sigma \vec{j}\cdot\vec{n}\beta \, d\sigma = -\frac{\pi}{k^2}\sum n(n+1)\left\{n(n+1)-2\right\} B_n' \lim\limits_{R\to\infty} \frac{1}{R} = 0$ (3.2b)

用同樣方法,得 K 分量之積分為

$$\frac{\pi}{k^2} R e^{-R} \sum A_n' \int_{-1}^{1} e^{Rx} (1+x) P_n^2 \, dx$$

其極限亦為零。將三結果併之,得

$$-\lim_{a\to\infty} \int_\Sigma \vec{n}\beta \, d\sigma = \vec{i}\mu \frac{2\pi}{k^2} \sum n(n+1) B_n^0 \tag{3.3}$$

故所代表者為一阻力。

上結果可用另一法求之,其法雖較繁長,但不須要先知 β 之漸近解,自某一方面言之,較上法為可取,而尤以在平面問題中為然,茲介紹於下:—

前已証明在球面上

$$\int_\Sigma \vec{n} f \, d\sigma = -\frac{1}{2}\int_\Sigma r \times n \times \nabla f \, d\sigma = -\frac{a}{2}\int r_1 \times n_1 \times \nabla f \, d\sigma \tag{2.14}$$

將此式應用於 β,得

$$\int_\Sigma \vec{n}\beta \, d\sigma = -\frac{a}{2}\int_\Sigma \vec{r}_1 \times \vec{r}_1 \times \nabla\beta \, d\sigma \tag{3.4}$$

但在 Σ 上 $\quad \rho \vec{V}_\infty \times \vec{q} = \nabla\beta \pm \mu \nabla \times \vec{q}$ 故

$$-\int_{\Sigma}\vec{n}\beta\,d\sigma=-\frac{\mu a}{2}\int_{\Sigma}\vec{r}_1\times\vec{r}_1\times\nabla\times\vec{q}\,d\sigma+\frac{\rho a}{2}\int_{\Sigma}\vec{r}_1\times\vec{r}_1\times\vec{V}_0\times\vec{q}\,d\sigma \quad (3\cdot5)$$

今試將右邊之二積分別計算之

a. $\vec{r}_1\times\vec{r}_1\times\nabla\times\vec{q}=\vec{\theta}_1\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial r}q_\phi-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial q_r}{\partial\phi}\right\}+\frac{\vec{\phi}_1}{r}\left\{\frac{\partial q_r}{\partial\theta}-\frac{\partial r q_\theta}{\partial r}\right\}$

$$=\frac{\partial}{\partial r}r(\vec{\theta}_1 q_\phi-\vec{\phi}_1 q_\theta)+\frac{\vec{\phi}_1}{r}\frac{\partial q_r}{\partial\theta}-\frac{\vec{\theta}_1}{r\sin\theta}\frac{\partial q_r}{\partial\phi}$$

$$a\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}r(\vec{\theta}_1 q_\phi-\vec{\phi}_1 q_\theta)a^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi=a^3\frac{d}{dr}r\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\vec{\theta}_1 q_\phi-\vec{\phi}_1 q_\theta)\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$=-a^3\frac{d}{dr}r\iint\vec{n}\times\vec{q}\sin\theta\,d\theta\,d\phi=-a\frac{d}{dr}r\int\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma$$

式內所需之積分前已求得即

$$\int\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma=\frac{\pi n(n+1)}{4a^2R}\left\{-\vec{i}\,2\sum B_n^0+\vec{j}\,\frac{1}{2}\sum\{n(n+1)-2\}B_n^1\right.$$

$$\left.+\vec{k}\,\frac{1}{2}\sum\{n(n+1)-2\}A_n^1\right\}=\frac{C}{R}+O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

故 $\frac{d}{dr}r\int\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma=\frac{d}{dR}R\int\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma=\frac{d}{dR}\left(C+O\left(\frac{1}{R}\right)\right)=O\left(\frac{1}{R^2}\right)$

取其極限，得

$$\lim_{a\to\infty}a\frac{d}{dr}r\int\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma=\frac{1}{R}\lim_{R\to\infty}R\,O\left(\frac{1}{R^2}\right)=0$$

$\frac{1}{r}\left(\vec{\phi}_1\cdot\frac{\partial q_r}{\partial\theta}-\frac{\vec{\theta}_1}{\sin\theta}\frac{\partial q_r}{\partial\phi}\right)$ 一項可用分部積分法計算之

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\vec{\phi}_1\frac{\partial q_r}{\partial\theta}\sin\theta\,d\theta\,d\phi=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\vec{\phi}\frac{\partial q_r}{\partial\theta}\sin\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\phi\left\{\vec{\phi}_1 q_r\sin\theta\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}q_r\frac{\partial\vec{\phi}_1\sin\theta}{\partial\theta}d\theta\right.$$

$$=-\int_0^{2\pi}d\phi\int\vec{\phi}_1 q_r\cos\theta\,d\theta=-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\vec{\phi}\,q_r\cos\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{\theta}_1}{\sin\theta}\frac{\partial q_r}{\partial\phi}\sin\theta\,d\theta\,d\phi=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}\vec{\theta}_1\frac{\partial q_r}{\partial\phi}d\phi=\int_0^{\pi}d\theta\left\{\vec{\theta}_1 q_r\Big|_0^{2\pi}-\int q_r\frac{\partial\vec{\theta}_1}{\partial\phi}d\phi\right.$$

$$=-\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}\vec{\phi}_1 q_r\cos\theta\,d\phi=-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\vec{\phi}_1 q_r\cos\theta\,d\theta\,d\phi$$

故 $\int_{\Sigma}\frac{1}{r_1}\left(\Phi_1\frac{\partial g_r}{\partial\theta}-\frac{\theta_1}{\sin\theta}\frac{\partial g_r}{\partial\phi}\right)d\sigma=0$

將諸結果合併之得

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\mu}{2}a\int_{\Sigma}\vec{r}_1\times\vec{r}_1\times\nabla\times\vec{q}\,d\sigma=0 \qquad (3\cdot 30a)$$

b. $\vec{v}_\infty\times\vec{q}=v_\infty(\vec{r}_1\cos\theta-\vec{\theta}_1\sin\theta)\times(\vec{r}_1 q_r+\vec{\theta}_1 q_\theta+\vec{\Phi}_1 q_\phi)$

$=v_\infty\cos\theta(\vec{\Phi}_1 q_\theta-\vec{\theta}_1 q_\phi)-\sin\theta(-\vec{\Phi}_1 q_r+\vec{r}_1 q_\phi)$

故 $\vec{r}_1\times\vec{r}_1\times\vec{v}_\infty\times\vec{q}=v_\infty\vec{\theta}_1\cos\theta\, q_\phi+v_\infty\vec{\Phi}_1(-\cos\theta\, q_\theta-\sin\theta\, q_r)$

但 $q_\theta=-q_\varsigma \qquad q_r=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}q_\varsigma$

故 $\vec{r}_1\times\vec{r}_1\times\vec{v}_\infty\times\vec{q}=v_\infty\vec{\theta}_1\cos\theta\, q_\phi-v_\infty\vec{\Phi}\, q_\varsigma$

$=-\vec{i}\,v_\infty\sin\theta\cos\theta\, q_\phi+\vec{j}\,v_\infty(\cos^2\theta\cos\phi\, q_\phi+\sin\phi\, q_\varsigma)+\vec{k}\,v_\infty(\cos^2\theta\sin\phi\, q_\phi$
$-\cos\phi\, q_\varsigma)$

現所需計算者為各分量之積分

i 分量之積分為

$$-\iint\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\sin\theta\cos\theta\sum\sum P_n^{m+1}(-B_n^m\cos m\phi+A_n^m\sin m\phi)a^2\sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

$$=-\frac{2\pi}{k^2}Re^{-R}\int_0^\pi e^{R\cos\theta}\sin\theta\cos\theta\sum -P_n^1 B_n^0\sin\theta\, d\theta$$

$$=+\frac{2\pi}{k^2}Re^{-R}\sum B_n^0\int_0^1 e^{Rx}x(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}dx$$

$$=\frac{2\pi}{k^2}Re^{-R}\sum B_n^0\frac{d}{dR}\int e^{Rx}(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}dx$$

$$=\frac{2\pi}{k^2}Re^{-R}\sum n(n+1)B_n^0\frac{dS_n/R}{dR}$$

$$=\frac{2\pi}{k^2}e^{-R}\sum n(n+1)B_n^0\frac{e^R}{R}=2\pi\frac{v_\infty}{K^2}\sum n(n+1)B_n^0/R$$

$$\therefore\ \lim_{a\to\infty}\frac{\varsigma a}{2}\int_{\Sigma}\vec{i}\cdot\vec{r}_1\times\vec{r}_1\times\vec{v}_\infty\times\vec{q}\,d\sigma=\lim_{a\to\infty}\pi\frac{\varsigma a v_\infty}{K^2}\sum n(n+1)B_n^0/R$$

$$=\lim_{a\to\infty}2\pi\mu\frac{\varsigma a}{k^2}\sum n(n+1)B_n^0$$

$$=2\pi \frac{e^{-2R}}{R^2}\sum n(n+1)\,B_n^0 \tag{3.5b}$$

j 分量之積分為

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\cos^2\theta\cos\phi\sum\sum P_n^{m+1}(-B_n^m\cos m\phi+A_n^m\sin m\phi)a^2\sin\theta d\theta d\phi$$

$$+\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\sin\phi\sum\sum P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi+B_n^m\sin m\phi)a^2\sin\theta d\theta d\phi$$

$$=\pi\frac{Re^{-R}}{R^2}\int_0^{\pi}e^{R\cos\theta}\sum P_n^2 B_n^1(1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta$$

$$=\pi\frac{Re^{-R}}{R^2}\sum B_n^1\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1-x^2)P_n^2\,dx$$

$$=\pi\frac{Re^{-R}}{R^2}\sum B_n^1\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1-x^2)^2\frac{d^2P_n}{dx^2}\,dx$$

$$=\pi\frac{Re^{-R}}{R^2}\sum B_n^1\left\{2\int_{-1}^{1}e^{Rx}x(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}-n(n+1)\int e^{Rx}(1-x^2)P_n dx\right\}$$

但 $\int_{-1}^{1}e^{Rx}x(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}dx=n(n+1)\left(\frac{dS_n/R}{dR}\right)=n(n+1)\left(\frac{1}{R}\frac{dS_n}{dR}-\frac{S_n}{R^2}\right)$

$$=n(n+1)\left\{(n-1)S_n/R^2+\frac{S_{n+1}}{R}\right\}$$

又 $\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1-x^2)P_n dx=S_n-\frac{d^2S_n}{dR^2}=-n(n-1)\frac{S_n}{R^2}+2\frac{S_{n+1}}{R}$

故 $\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1-x^2)P_n^2 dx=2n(n+1)\left\{(n-1)S_n/R^2\right\}+n(n+1)\left\{n(n+1)\frac{S_n}{R^2}\right\}$

$$=(n-1)n(n+1)(n+2)\frac{S_n}{R^2}=(n-1)n(n+1)(n+2)\frac{e^R}{R^3}$$

代入原式得

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\rho a V_\infty}{2}\int_\Sigma \mathrm{j}\cdot\vec{n}_1\times\vec{n}_1\times\vec{i}\times\vec{q}\,d\sigma=\lim_{a\to\infty}\frac{\rho a V_\infty}{2}\frac{\pi Re^{-R}}{R^2}\sum B_n^1(n-1)n(n+1)$$

$$(n+2)\frac{e^R}{R^3}=\lim_{R\to\infty}\frac{\pi\mu}{R^2}\sum B_n^1(n-1)n(n+1)(n+2)\frac{1}{R}=0 \tag{3.5c}$$

同樣方法得K分量之積分為

$$-\pi\frac{Re^{-R}}{R^2}\sum A'_n\int_{-1}^{1}e^{Rx}(1-x^2)P_n^2\,dx$$

故 $\lim\limits_{a\to\infty}\frac{\rho a V_0}{2}\int_\Sigma K\cdot r_1\times r_1\times V_\infty\times q\,d\sigma=0$ (3·6)

將所有各結果總計之最後得

$$-\lim_{a\to\infty}\int_\Sigma \vec{n}\beta\,d\sigma=\vec{i}\,\frac{2\pi\mu}{R^2}\sum n(n+1)B_n^0 \qquad (3\cdot3)$$

與前所求得者正相同。

B.阻力之體積分　利用能量微分方程

$$\vec{v}\cdot\nabla\beta=\mu\nabla\cdot\vec{v}\times\vec{q}-\mu q^2$$

可將阻力化為渦度之體積分,將式乘以 $d\tau$, 在流區內積分,並用積分變換得

$$\int_{\sigma+\Sigma}\beta\,\vec{n}\cdot\vec{v}\,d\sigma=\mu\int_{\sigma+\Sigma}\vec{n}\cdot\vec{v}\times\vec{q}\,d\sigma-\mu\int_P q^2\,d\tau$$

$$=-\mu\int_{\sigma+\Sigma}\vec{v}\cdot\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma-\mu\int_P q^2\,d\tau$$

在 σ 上 $v=0$, 在 Σ 上 $\vec{v}=\vec{v}_\infty$ 故此式可變為

$$\int_\Sigma\beta\,\vec{n}\cdot\vec{v}_\infty\,d\sigma=-\mu\int_\Sigma\vec{v}_\infty\cdot\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma-\mu\int_P q^2\,d\tau$$

或 $-\vec{v}_\infty\cdot\int_\Sigma(\vec{n}\beta+\mu\vec{n}\times\vec{q})\,d\sigma=+\mu\int_P q^2\,d\tau$

但根據已經求得之結果,知

$$\lim_{a\to\infty}\int\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma=0$$

$$-\lim_{a\to\infty}\int\vec{n}\beta\,d\sigma=\vec{i}\,F_x,$$

故取極限後得　$v_\infty F_x=\mu\int_P q^2\,d\tau$

即　$F_x=\frac{\mu}{v_\infty}\int_P q^2\,d\tau$ (3·7)

此阻力之體積分也。式中不特証明阻力係完全由流體中實有之旋渦所產生，並同時將其符號完全確定。因 q^2 不能為負，式中所示之力恒為一正力。即以阻體為靜止時，阻體為一與 $\vec{v}_\infty$ 方向相同之力。事實上確係如此，自不待言也。

此式亦可應用於圓球問題。取 Stokes 之解，得

$$q^2 = \frac{9}{4} v_\infty^2 \frac{a^2}{r^4} \sin^2\theta$$

$$\int q^2 d\tau = \frac{9}{4} v_\infty^2 a^2 \int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{r^4} r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{9}{4} 2\pi v_\infty^2 a^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta$$

$$= \frac{9}{4} 2\pi v_\infty^2 a^2 \frac{1}{a} \cdot \frac{4}{3} = 6\pi a v_\infty^2$$

$$F_x = \frac{\mu}{v_\infty^2} \cdot 6\pi a v_\infty^2 = 6\pi \mu a v_\infty$$

此求 Stokes 定律之又一法也。

3. 粘滯流體之舉力

A. 舉力之體積分　欲証明 $\rho \int_p \vec{v} \times \vec{q} \, d\tau$ 一項係代表舉力，即與 $\vec{v}_\infty$ 方向垂直之力，吾人除須應用本文中之結果外，尚須應用前文中之流速公式

$$\vec{v} = \vec{v}_\infty + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{r} \times \vec{q}_0}{r^3} d\tau_0$$

故

$$\rho \int_p \vec{v} \times \vec{q} \, d\tau = \rho \int_p \vec{v}_\infty \times \vec{q} \, d\tau - \frac{\rho}{4\pi} \int_p d\tau \, \vec{q} \times \int_p \frac{\vec{r} \times \vec{q}_0}{r^3} d\tau_0$$

$$= \rho \vec{V}_\infty \int_p \vec{q} \, d\tau - \frac{\rho}{4\pi} \iint_{pp} \frac{\vec{q} \times \vec{r} \times \vec{q}_0}{r^3} d\tau d\tau_0$$

式中兩次積分之值，可依下法決定之：將向量積展開得

$$\iint_{pp} \frac{\vec{q} \times \vec{r} \times \vec{q}_0}{r^3} d\tau d\tau_0 = \iint_{pp} \frac{\vec{r}\,\vec{q} \cdot \vec{q}_0}{r^3} d\tau d\tau_0 - \iint_{pp} \frac{\vec{q}_0\,\vec{r} \cdot \vec{q}}{r^3} d\tau d\tau_0$$

欲定右邊第一項之值，吾人須注意此積分之值不能因 $d\tau$。

與 $d\tau$ 之認定方法不同而有異。故知將 $d\tau_0$ 與 $d\tau$ 全部對換積分之值仍不變。惟 $\vec{r}$ 之方向原係由 $d\tau$ 至 $d\tau_0$，對換後有 $d\tau_0 d\tau = d\tau d\tau_0$ $\vec{q}_0\cdot\vec{q} = \vec{q}\cdot\vec{q}_0$，至 $\vec{r}$ 之大小雖未變，其方向則顛倒而 $\vec{r}$ 變為 $-\vec{r}$，故得

$$\iint \frac{\vec{r}\,\vec{q}\cdot\vec{q}_0}{r^3}\,d\tau\,d\tau_0 = -\iint \frac{\vec{r}\,\vec{q}_0\cdot\vec{q}}{r^3}\,d\tau\,d\tau_0 = -\iint \frac{\vec{r}\,\vec{q}\cdot\vec{q}_0}{r}\,d\tau\,d\tau_0$$

即

$$\iint \frac{\vec{r}\,\vec{q}\cdot\vec{q}_0}{r^3}\,d\tau\,d\tau_0 = 0 \qquad (3\cdot 8a)$$

欲定第二項之值，須注意 $\vec{q}_0$ 只隨 $d\tau_0$ 而變，$\vec{q}$ 只隨 $d\tau$ 而變，$\vec{r}$ 則同時隨二者而變，故

$$\iint_{PP} \frac{\vec{q}_0\,\vec{r}\cdot\vec{q}}{r^3}\,d\tau_0\,d\tau = \int_P \vec{q}_0\,d\tau_0 \int_P \frac{\vec{r}\cdot\vec{q}}{r^3}\,d\tau$$

但 $\int_P \frac{\vec{r}\cdot\vec{q}}{r^3}\,d\tau = 4\pi\nabla\cdot\vec{A}$ 其值前已証明為零，故

$$\iint \frac{\vec{q}_0\,\vec{r}\cdot\vec{q}}{r^3}\,d\tau_0\,d\tau = 0 \qquad (3\cdot 8b)$$

根據以上兩結果得擧力之體積分為

$$\vec{L} = \rho\vec{V}_\infty \times \int \vec{q}\,d\tau \qquad (3\cdot 9)$$

Prandtl 在其機翼論中*，曾採用與上所述相似之方法，以研究流體動力一問題。惟其所討論者，顯非粘滯流體，其積分區域以及最後結果，均與吾人不同。讀者細加比較便知矣。

B. 擧力之面積分　擧力除可用渦度之體積分表示外，亦可化為渦度之面積分，使吾人之漸近解對於擧力一問題，仍可直接應用。欲達到此目的，吾人利用前已証明之積分變換式

$$\int_P \vec{A}\,d\tau + \int_P \vec{r}\,\nabla\cdot\vec{A}\,d\tau = \int_{\sigma+\Sigma} \vec{r}\,\vec{n}\cdot\vec{A}\,d\sigma$$

* Prandtl: Tragflügeltheorie I. 詳見前

取 $\vec{A}=\vec{q}$，因 $\nabla\cdot\vec{q}=0$，又在 σ 上，$\vec{n}\cdot\vec{q}=0$，故

$$\int_P \vec{q}\,d\tau=\int_\Sigma \vec{r}\,\vec{n}\cdot\vec{q}\,d\sigma$$

於是舉力之面積分為

$$L=\rho\vec{V}_\infty\times\int_\Sigma \vec{r}\,\vec{n}\cdot\vec{q}\,d\sigma \qquad (3\cdot10)$$

現試用吾人之近漸解以求此面積分之值：

$$\text{在}\Sigma\text{上},\ \vec{r}=\vec{n}a,\quad \vec{n}\cdot\vec{q}=q_r=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}q_\rho$$

故

$$\int_\Sigma \vec{r}\,n\cdot q\,d\sigma=\vec{i}a^3\iint\cos\theta(1+\cos\theta)q_\rho\,d\theta\,d\phi+\vec{j}a^3\iint\sin\theta\cos\phi(1+\cos\theta)q_\rho\,d\theta\,d\phi+\vec{k}a^3\iint\sin\theta\sin\phi(1+\cos\theta)q_\rho\,d\theta\,d\phi$$

i 分量不產生舉力，不必其算。j 分量之積分為

$$a^3\iint\frac{e^{R(\cos\theta-1)}}{R}\sin\theta\cos\phi(1+\cos\theta)\sum\sum P_n^{m+1}(A_n^m\cos m\phi+B_n^m\sin m\phi)\,d\theta\,d\phi$$

$$=\frac{R^2e^{-R}}{k^3}\pi\int_0^\pi e^{R\cos\theta}\sin\theta(1+\cos\theta)\sum P_n^2A_n^1\,d\theta$$

$$=\frac{\pi R^2e^{-R}}{k^3}\sum A_n^1\int_{-1}^1 e^{Rx}(1+x)P_n^2\,dx=\frac{\pi R^2e^{-R}}{k^3}\sum A_n^1\frac{e^R}{2R^2}n(n+1)\{n(n+1)-2\}$$

其極限為

$$\frac{\pi}{2k^3}\sum n(n+1)\{n(n+1)-2\}A_n^1 \qquad (3\cdot10a)$$

用同樣方法得 k 分量之極限為

$$\frac{\pi}{2k^3}\sum n(n+1)\{n(n+1)-2\}B_n^1 \qquad (3\cdot10b)$$

將此結果代入（　）式得舉力之兩分量為

$$L_y=-\frac{\rho V_\infty\pi}{2k^3}\sum n(n+1)\{n(n+1)-2\}B_n^1=-\frac{\mu\pi}{k^2}\sum n(n+1)\{n(n+1)-2\}B_n^1 \quad (3\cdot11a)$$

$$L_z=+\frac{\rho V_\infty\pi}{2k^3}\sum n(n+1)\{n(n+1)-2\}A_n^1=+\frac{\mu\pi}{k^2}\sum n(n+1)\{n(n+1)-2\}A_n^1 \quad (3\cdot11b)$$

其所表示者,舉力與漸近解係數間之關係也。由

$$\vec{L}=\rho\vec{V}_\infty\times\int_p\vec{q}\,d\tau$$

一式,利用完全粘附特性,復可將舉力化為流速 $\vec{v}$ 之面積分,得

$$L=\rho\vec{V}_\infty\times\int_\Sigma\vec{n}\times\vec{v}\,d\sigma \qquad (3\cdot12)$$

並可用此討論 Kutta-jonkowoki 舉力公式,在粘滯流動中之意義。但此種討論,將超出渦度觀點以外,故決定略去。

4.綜論

由以上種種結果,吾人自得下列之結論,卽

"粘滯流體對於阻體所作用之動力,全係由流體中實有之旋渦所產生"。 (定理6)

故動力與旋渦實有不可分離之關係。就數學方法言之,阻力及舉力均可用兩種不同方式表示。其一為面積分,以動力為流區外界上之旋渦所產生。其二為體積分,以動力為流體內部之旋渦所產生。用第一種方式,得動力與漸近解中渦度係數之關係為

係數	$\mu\frac{2\pi}{k^2}\sum n(n+1)A_n^0$,	$\mu\frac{2\pi}{k^2}\sum n(n+1)B_n^0$,	$\frac{\mu\pi}{k^2}\sum n(n+1)\{n(n+1)-2\}A_n^1$,	$-\frac{\mu\pi}{k^2}\sum n(n+1)\{n(n+1)-2\}B_n^1$
動力	0	阻力	z方向舉力	y方向舉力

由表知動力僅視解中之首二次係數而定,與其高次係數無關。且動力每一分力,只相當於一種係數,毫無混雜情事。惟分力有三,而首二次係數則共有四,其中有一係數無相當之分力,自只得為零。而實際上所以為零者,在 σ 上 $\vec{n}\cdot\vec{q}=0$ 一條件使然也。此條件之必需性,亦可想見矣。

用第二種方式則動力可寫為

$$\vec{F}=\frac{\mu\vec{V}_\infty}{V_\infty^2}\int_p q^2\,d\tau+\rho\vec{V}_\infty\times\int_p\vec{q}\,d\tau \qquad (3\cdot13)$$

此式對於渦度與阻力及舉力之關係,表示更為明顯。簡言之,即阻力與旋渦之方向無關,每一旋渦均產生阻力,故有旋渦,即有阻力,渦度愈增,阻力愈大。舉力則不然,僅與 $\vec{V}_\infty$ 垂直之旋渦產生舉力,其所生舉力之方向,又隨旋渦之方向而變。相反之旋渦,產生相反之舉力,結果互相抵消。故雖有旋渦,可無舉力。增加舉力或減少阻力之法,自為將不產生舉力及產生相反舉力之旋渦,儘量減少。最理想之旋渦分佈狀態,為使所有旋渦,均取同一方向,且此方向係與 $\vec{V}_\infty$ 或阻體前進之方向垂直。最理想之機翼,亦即能產生此種分佈之機翼也。

附言

本文所討論之動力學,除應用動力方程式外,特別着重粘滯流體之各種邊界特性,所得之結果,當不致有問題。惟因篇幅有限,若干有關之問題,雖有成稿可用,亦難一一陳述。特在此處附及之。

1.文中諸結果,應用於混亂流動或激動時,只須所討論者為平均流動,不必特別加以改正,蓋各種邊界條件,對於激流均適用,漸近解亦適用於激流之平均部分也。

2.平面流動內問題,其性質與本文內所述相同者,均經用樣方法,一一計算。所得結果,大部分均可由本文中所得之結果,化為特殊情形後推得之。

3.阻體所受之力距,在平面以及空間,亦經根據完全粘附以及漸近特性,一一計算。所得結果,比較複雜,應用時尚有不便,暫不欲發表。所可言者,即在計算中,吾人之漸近解並未引起任何困難也。

—完—

错誤改正表

頁	排	错	正
2	7	之力軸	之x軸
3	5	n為與	$\vec{n}$為與
3	16	$n\times q=\cdots$	$\vec{n}\times\vec{q}=\cdots$
3	23,24	C.W.Ossen Hydrodyuamik	C.W. Oseen Hydrodynamik
4	13	$\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\nabla P+\mu\nabla'\vec{v}$	$\rho\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}=-\nabla P+\mu\nabla^2\vec{v}$
5	8	用$\vec{v}$造矢向積,並將$v\cdot\nabla\times q$展開	用$\vec{v}$造矢向積,並將$\vec{v}\cdot\nabla\times\vec{q}$展開
5	24	一関係而得。	一関係而得者。
6	16	故称之謂	故称之為
7	16	$\nabla^2 q-\frac{\rho}{\mu}v_\infty\cdot\nabla\vec{q}=0$	$\nabla^2\vec{q}-\frac{\rho}{\mu}\vec{v}_\infty\cdot\nabla\vec{q}=0$
15	14	$\int_{-1}^{1}P^{Rx}(\cdots)$	$\int_{-1}^{1}e^{Rx}(\cdots)$
15	註*	Modern analpis	Modern analysis
17	9	代表阻剖之一種	代表阻體之一種
18	9	即以阻體	即阻體
18	22	有量速位	有向速向
19	18	可先ϕ積分	可先向ϕ積分
19	19	$\int_0^\pi e^{R\cos\theta}=(\theta,\theta_0,\phi)\sin\theta d\theta$	$\int_0^\pi e^{R\cos\theta}F(\theta,\theta_0,\phi)\sin\theta d\theta$
20	6	之散量$\nabla\cdot\vec{A}<B$	之散量$\nabla\cdot\vec{A}$仍
21	6	$\vec{n}\cdot\vec{T}=\cdots$	$\vec{n}\cdot\vec{T}=$
21	24	$\nabla P+\mu\nabla\times q=0$	$\nabla P+\mu\nabla\times\vec{q}=0$
24	12	$\int_\sigma n\times\vec{q}\,d\sigma=\cdots$	$\int_\sigma\vec{n}\times\vec{q}\,d\sigma=\cdots$
25	12	及一矢限函数f	及一矢向函数f
41	16	代入(　)式	代入(3·10)式
42	5	$L=\rho\vec{v}_\infty\times\int_\Sigma\vec{n}\times\vec{v}\,d\sigma$	$\vec{L}=\rho\vec{v}_\infty\times\int_\Sigma\vec{n}\times\vec{v}\,d\sigma$
42	6	Kutta-jonKowoKi	Kutta-jouKowski
45	19	用様方法	用同様方法

372278