解析幾何

解析幾何學目次

平面部

第一章

軌跡及其方程式

第二章

直線

第三章

平圓

第四章

坐標各法

第五章

拋物線

第六章

橢圓

第七章
雙曲線

第八章

二次之軌跡

第九章

高等平曲線

立體部

第一章

空間之點

第二章

空間之平面

第三章

空間之直線

第四章

旋轉曲面

敍

解析幾何學。英文原字爲 Analytic Geometry. 盖幾何學之一分科。而學微分積分所必經之階級也。此學,創於法蘭西人狄斯愷特。(Descartes) 其法,以三坐標 (Coödinates) 爲主。而一切幾何學上之理。悉以代數學之解析法馭之。在歐洲各國。早已成爲專門學科。其間著名學者。德有敖士,(Gauss) 樸魯客,(Plucker) 黎曼,(Riemann) 赫塞,(Hesse) 喀萊,(Klein) 法有達博,(Darboux) 哈爾飛 (Halphen) 英有奈端,(Newton) 硜雷,(Caylay) 凱威斯達,(Cylvester) 等。而近日英文書中。尤以英人査理斯密,(Charles Smith) 及美人溫特渥斯 (Wentworth) 所著書爲最善。丁未春,余既譯斯密氏書。而以它事遷延。遲遲末脫藁。又患病數月。不能操作。然以敦促者之迫。將力疾二三月足成之已。鄭君家斌,商部高等實業學堂高材生也。是年伏臘節前一日。以所譯溫特渥斯氏書。謀刻於科學會編譯部。會余居海上。執閱藁

中華民國二十八年春 ……
……
……1940……

之役。尋繹浹旬。視其條目。察其順序。實較斯密氏書便於初學。而鄭君譯筆。亦極精細。惟所譯學語。與科學會前此所譯各書。稍有出入。因復請於鄭君。許由鄙人更改。乃費匝月力。爲之校閱一過。且將所譯學語。移爲一律。付諸梓人。是書之刻。殆斯學漢文本之嚆矢與。而余所譯斯密氏本。亦可割棄巳。

戊申正月　　連江陳文

識於上海

例　言

一本書爲美國大數學家溫特渥斯所著。乃美國敎授高等學生用書。特精心翻譯。以備我國高等學堂之用。

一本書平面部爲章九。爲節一百四十。立體部爲章四。爲節四十。由淺入深。體例井然。

一本書習問共有九百四十餘題。每設一問。新理層出。且每章必標以總習題。溫故知新。用意尤善。

一本書行文悉仿西式。誠以數學一科。立式引例。均以橫行爲便。故本書從之。

一所用學語。悉依科學會譯例。與科學會前此所譯各書一律。

一數目與代量之字。均照原本。取其字畫簡便也。

一學習本書。必於算術,代數,幾何,三角,諸學。均已習過。方能領會。

一本書斟酌再四。諒無大謬可指。然千慮不無一失。苟海內大雅。匡其未逮。爲譯者所厚望。

譯者識

解析幾何學

平面部

第一章

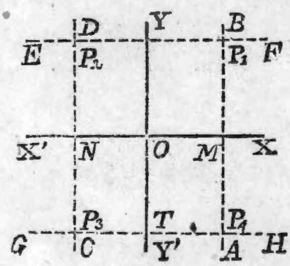
軌跡及其方程式

坐標之直線法

(Rectilinear system of Coördinates).

1. 取 XX′ 與 YY′ (圖一) 為二定直線。直交於 O 點。則此二線分平面為四部分。其一部分。各名之曰**象限**。(Quadrants) 其在 OX 與 OY 間者為

圖一



第一象限。其在 OY 與 OX′ 間者為第二象限。其在 OX′ 與 OY′ 間者為第三象限。其在 OY′ 與 OX 間者為第四象限。

如所設點之位置距YY′為3單位。距XX′為4單位。且所測之距離。各與定直線平行。即知每象限各有一點。於各象限自YY′距3單位作一線。與YY′平行。再自XX′距4單位作一線與XX′平行。因得交點P_1,P_2,P_3,P_4為各點之位置。

2. 欲分P_1,P_2,P_3,P_4四點之方位置。使不混淆。則有一例。曰,方向相反者必記以異號。準三角法。距離自YY′向右測者為正。向左者為負。距離自XX′向上者為正。向下者為負。

則 P_1點之位置記以$+3, +4$。

P_2點之位置記以$-3, +4$。

P_3點之位置記以$-3, -4$。

P_4點之位置記以$+3, -4$。

3. XX′與YY′二定直線。謂之**坐標之軸**。(Axes of Coördinates) XX′名為**橫軸**。(Axis of Abscissas) 或X軸。YY′名為**縱軸**。(Axis of Ordinates) 或Y軸。交點O名為**原點**。(Origin).

前節所論定點位置之二距離。謂之該點之

坐標。(Coördinates) 點之距離向 YY′ 者，謂之該點之**橫坐標。**(Abscissa) 其距離向 XX′ 者，謂之該點之**縱坐標。**(Ordinates).

橫坐標恒代以 x。縱坐標恒代以 y。凡點，俱將其坐標之值書於括號內。而橫坐標之值。恒書於前。

如 P_1 (圖一) 即為 (3, 4) 點。P_2 為 (−3, 4) 點。P_3，為 (−3, −4) 點。P_4 為 (3, −4) 點。約言之，點之坐標為 x 與 y。即為 (x, y) 點。

4. 依此法定點之位置于平面上。是謂**坐標之直線法**而坐標所謂直交或斜交者。因坐標如軸之有直交角與斜交角也。本書之首三章，均用直交坐標。

習　題　一

1. 問原點之坐標為何。
2. 設 a 與 b 為定長度。問以下各點所在之象限為何。

   $(-a, -b)$, $(-a, b)$, (a, b), $(a, -b)$.
3. 設點之 (i) 橫坐標為正，(ii) 為負；(iii) 縱坐標為正，(iv) 為負，問各點在何象限.

4. 設 (i) 點之橫坐標 $=0$. (ii) 點之縱坐標 $=0$. 問各點在於何線.

5. 有 (x, y) 點向 x 軸平行移動。問坐標內。何坐標之值仍爲常數。

6. 求作以下各點。$(3, -3)$, $(-1, -3)$, $(-4, 4)$, $(3, 0)$, $(0, 4)$, $(0, -1)$, $(0, 0)$。

【注】 凡點旣設有坐標。則于紙上測得點之相當位置。即能畫出。且先畫得二軸. 然後依 § 1 至 § 3 之法畫之。

7. 求作一三角形。其三頂點爲 $(2, 4)$, $(-2, 7)$, $(-6, -8)$ 各點。

8. 求作一四邊形。其四頂點爲 $(7, 2)$, $(0, -9)$, $(-7, -1)$, $(-6, 4)$, 各點.

9. 作出以下四點 $(2, 1)$, $(4, 3)$, $(2, 5)$, $(0, 3)$. 並以直線聯之。問爲何種圖形。

10. 求作一四邊形。其四頂點爲 $(-3, 6)$, $(-3, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 6)$ 並問此爲何種四邊形。

11. 設有正方形之邊爲 a。兩對角線相交之處即爲坐標之原點。問 (i) 如二軸與正方形之邊平行。(ii) 如二軸與兩對角線相密合。何爲其各頂點之坐標。

答 (i) $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$.

(ii) $\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(0, \frac{a}{2}\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{a}{2}\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(0, -\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)$.

12. 設有等邊三角形之邊爲 a。其一頂點爲原點。又其一邊與 x 軸密合。問何爲其三頂點之坐標。

答 $(0, 0), (a, 0); \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$.

13. 設聯 $(5, 3)$ 與 $(5, -3)$ 兩點爲直線。問線之方向如何。

14. 設聯兩點爲直線。而爲原點所平分。其一點之坐標爲 a 與 b。問次點之坐標爲何。

弧度 (Circular Measure)

5. 解析幾何學之角。恒以度分秒顯之。然有時以用弧度爲便。

弧度之方程式爲

$$角=\frac{弧}{半徑}$$

式內之角既與弧相比。則亦可以弧量其角。而以等於半徑之弧爲單位。

設半徑=1. 則前方程式爲

$$角=弧$$

準幾何理。圜單位之周$=2\pi$. 然圜周內分360°.

則弧度爲. $360°=2\pi$ 單位。

而所餘之角度。可照此法相比而得其單位。

習 題 二

1. 設角為 1°, 45°, 90°, 180°, 270°, 求其弧度之值。

答 $\frac{\pi}{180}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

2. 設于弧度法其角單位之弧,等于平圓之半徑。問該之度分秒數為何。

答 57° 17′ 45″

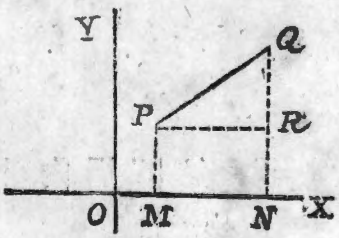
二點之距離

(Distance Between Two Points)

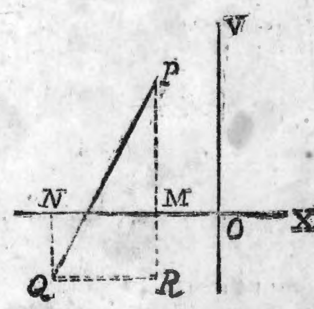
6. 求所設二點間之距離

取 P 與 Q (圖二)為所設二點。x_1 與 y_1 為 P 之坐標。x_2 與 y_2 為 Q 點之坐標。並設 d=PQ= 所求之距離。

圖二



圖三



作 PM, QN 與 OY 平行。PR 與 OX 平行。

則　　$OM=x_1$,　　$MP=y_1$,

　　$ON=x_2$,　　$NQ=y_2$,

　　$PR=x_2-x_1$　　$QR=y_2-y_1$.

準幾何理。

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

如是　$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$　　[1]

既 $(x_1-x_2)^2=(x_2-x_1)^2$ 是以無論何點爲 (x_1, y_1) 或爲 (x_2, y_2). 而所得之距離無異。

7. 無論二點位於何象限。大都以[1]方程式總之。如 P 點在第二象限。Q 點在第三象限。(圖三)可見 $x_2-x_1=RQ$. 與 y_2 既爲負. y_2-y_1 爲二負數之和。而等於 RP 全線。惟冠以一號。

習　題　三

求二點之距離。

1. 由 $(-2, 5)$ 點至 $(-8, -3)$ 點。
2. 由 $(1, 3)$ 點至 $(6, 15)$ 點。
3. 由 $(-4, 5)$ 點至 $(0, 2)$ 點。
4. 由 $(0, 0)$ 點至 $(-6, -8)$ 點。

5. 由 (a, b) 點至 $(-a, -b)$ 點。

求以下三角形各邊之距離。

6. 其頂點爲 $(15, -4)$, $(-9, 3)$ $(11, 24)$ 各點

7. 其頂點爲 $(2, 3)$, $(4, -5)$ $(-3, -6)$ 各點。

8. 其頂點爲 $(0, 0)$, $(3, 4)$, $(-3, 4)$ 各點。

9. 其頂點爲 $(0, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, -b)$ 各點。

10. 設四邊形之頂點爲 $(5, 2)$, $(3, 7)$, $(-1, 4)$, $(-3, -2)$. 求各邊之距離。及求其兩對角線之距離。

11. 設有直線之長度爲 13。其一端爲 $(-4, 8)$ 點。次端之縱坐標爲 3。問橫坐標爲何。

12. 設有距離爲 11. 其一點爲 $(7, -2)$. 問其次點 (x, y) 之坐標合於何方程式。

13. 設 (x, y) 點之距 $(2, 3)$ 點與距 $(4, 5)$ 點相等。問其方程式爲何。

14. 設量之值。與一長度之平方相關。則該長度無爲正爲負之分。何故。試說明之。

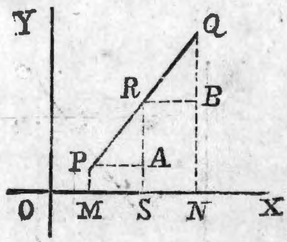
線之分段 (Division of a Line)

8. 求平分所設二點相連之直線。

取 P 與 Q (圖四)爲 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 所設二點。並取 x 與 y 爲 PQ 中點 R 之坐標。

題意乃本 (x_1, y_1) 點與 (x_2, y_2) 點。而求 x 與 y 之值。

圖 四



作 PM, RS, QN 與 OY 平行。並作 PA, RB 與 OX 平行。

則正△PRA＝正△RQB(因兩正三角形之斜邊與一銳角相等)。

是以 $PA=RB$, 與 $AR=BQ$.

並 $MS=SN$.

準代法, $x-x_1=x_2-x$; 與 $y-y_1=y_2-y$.

如是 $$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2} \qquad [2]$$

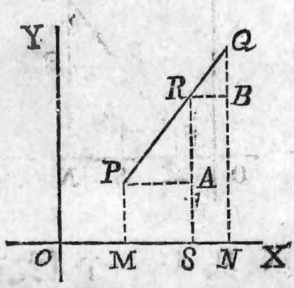
9. 設比 $m:n$. 求分所設二點相連之直線為二段。

取 P 與 Q (圖五)為 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 所設二

點。取 R 爲所求之點。而令 PR : RQ = m : n. 並取 x 與 y 爲 R 之坐標。

照圖四法作出各線。

圖五



PRA 與 RQB 兩正△之各角既互相等。則正△PRA 與正△RQB 相似。是以

$$\frac{PA}{RB}=\frac{PR}{RQ}=\frac{m}{n} \text{ 與 } \frac{AR}{BQ}=\frac{PR}{RQ}=\frac{m}{n}.$$

用線之數値代之。則得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n}, \text{ 與 } \frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{m}{n}.$$

化之得

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n};\quad y=\frac{my_2+ny_1}{m+n} \qquad [3]$$

設 $m=n$. 則 [3] 方程式。可變爲 [2] 方程式。

習題四

問以下各中點之坐標爲何。

1. 在 $(5, 3)$ 點與 $(7, 9)$ 點間者.
2. 在 $(-6, 2)$ 點與 $(4, -2)$ 點間者。
3. 在 $(5, 0)$ 點與 $(-1, -4)$ 點間者。
4. 設有三角形之頂點爲 $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$ 求其各邊之中點爲何。
5. 設有直線之中點爲 $(6, 4)$ 線之一端爲 $(5, 7)$ 點。問其次端之坐標爲何。
6. 設有直線爲原點所平分。線之一端爲 $(-a, b)$ 點。其次端坐標爲何。
7. 正三角形斜邊之中點至三頂點。其距離皆相等。試證明其故。
8. 平行四邊形兩對角線。必互相平分。試證明其故。
9. 設二點位于第二象限之內，則其 x, y 之值。與[2]方程式相通。試證之。
10. 設 PQ 直線不向內割而向外割。其比等於 $m:n$. 將 §9 例題化之如何。
11. 設聯 $(3, -1)$ 與 $(10, 6)$ 二點爲直線。問以比 $3:4$ 分該直線。其點之坐標爲何。

12. 設三分 (2, 3) 與 (4, −5) 所聯之直線。問近于 (2, 3) 點之該三分點爲何。

13. 有直線 AB 引長至 C 點而令 $BC=\frac{1}{2}AB$. 如 A 與 B 爲 (5, 6) 與 (7, 2) 二點。問何爲 C 點之坐標。

14. 有直線 AB 引長至 C 點而令 $AB:BC=4:7$. 如 A 與 B 爲 (5, 4) 與 (6, −9) 二點。問 C 點之坐標爲何。

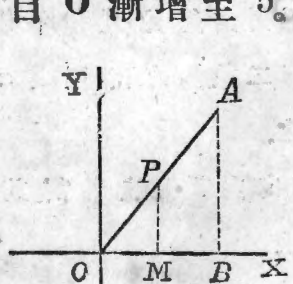
15. 有平行四邊形之三頂點爲 (1, 2), (−5, −3), (7, −6). 問第四頂點爲何。

常數與變數

(Constants and Variables)

10. 取 A (圖六)爲 (3, 4) 點。則 $OA=\sqrt{9+16}=5$。今取 P 點自 O 移動至 A。而成 OA 直線。並取 P 之坐標爲 x 與 y。取 z 爲 P 點在任何位置 OP 之長度。則 z 必自 O 漸增至 5。

圖六



P 點既漸自 O 經過 OA 至 A。則 z 漸增之

數值。必在 0 與 5 之間。如 P 有一位置。令 z 等於 2。則 P 亦有一相異之位置。令 z 等於 2·000001。且 z 於未到 2·000001 之前。必經過幾許數值于 2 與 2·000001 之間。

準此法。則 P 點之坐標 x 與 y。亦皆逐漸變易其位置。x 則自 0 漸增至 3。y 則自 0 漸增至 4。今將前題之各長度區爲兩類。

(1)長度之數值爲有常者。如 A 點之坐標與 OA 距離是也。(2)長度之數值爲逐漸加增者。如 P 點之坐標(x 與 y)與 OP 或 z 之距離是也。

在何種問題其量合於第一類者。爲常數量。亦可簡曰常數。

量之合于第二類者。爲變數量。亦可簡曰變數。

11. 二變數恒相依而變。此變數變易其數值。則他變數亦必變易其數值。其第二變數恒謂之第一變數之函數。亦曰因變數。第一變數則名爲自變數兩變數既有此相關。則其一變

附屬變數

獨立變數

常數與變數

數爲因變數。其他一變數即爲自變數。

如在 §10. z 若變易。則 x 與 y 皆同時變易。而 x 與 y 之數值皆因 z 之同數值而變。是謂 x 與 y 皆爲 z 之函數。亦皆曰因變數。而 z 則名爲自變數。

12. 變數恒以 x, y, z 等末字母代之。常數恒以 a, b, c 等首字母代之。或以 x_1, y_1, x_2, y_2 等末字母加以答號者代之。

習題五

1. 有 P 點 (x, y) 自 Q 點 (x_1, y_1)。常依 a 距離轉運。求指出何者爲常數。何者爲變數。並問 x, y 數值之總變易爲何。

2. 有 Q 點 (x, y) 首向 y 軸平行移動。次向 x 軸平行移動。又次向二軸等斜移動。求指出各次之常數與其變數。

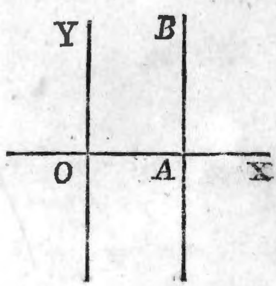
方程式之軌跡
(Locus of an Equation)

13. 取 $x-4=0$ 方程式。可見點之橫坐標爲

4. 自 OY (圖七) 向右距離 4 數。作 AB 線與 OY 平行。而 AB 線內諸點之坐標。皆與本方程式相符。

此 AB 線,即用幾何法以代 $x-4=0$ 方程式。反言之, $x-4=0$ 方程式,亦可謂以代數法代 AB 線。

圖七



在解析幾何學內。AB 線謂之 $x-4=0$ 方程式之**軌跡**。反言之。$x-4=0$ 方程式,亦可謂之 AB 線之**方程式**。

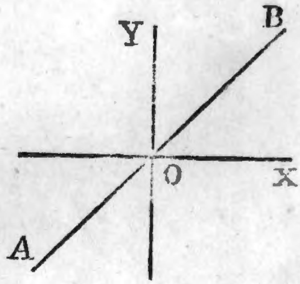
AB 線之方向。均向上下伸至無竆。設 P 爲 AB 線內之點。向 y 軸平行移動。則 x 內一切點俱爲常數值而等於 4;如 y (方程式內所不見) 則爲變數。經過若干正負數值,以至於無限。

14. 有 $x-y=0$ 或 $x=y$ 方程式。其各點之橫坐標俱與其縱坐標相等。

設過原點 O (圖八)作 AB 直線。平分第一與第三象限各爲二等分。可見線之各點皆與本方程式相符。

x 之數值	y 之數值
0	0
1	1
2	2
-1	-1
類推	類推

圖八

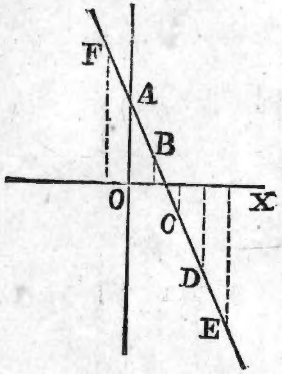


則 AB 線爲 $x-y=0$ 方程式之軌跡。而本方程式亦只代 AB 線。

15. 有 $2x+y-3=0$ 方程式。其 x 與 y 諸數值俱無定限。欲得兩變數之諸數值。必任定一變數爲何數值。自式內可得餘一變數之相當數值。

設先定 x 爲任何數值。則可得 y 之相當數值。如下。

圖 九



x 之數值	y 之數值
0	3
1	1
2	-1
3	-3
4	-5
-1	5
-2	7
-3	9
-4	11
類推	類推

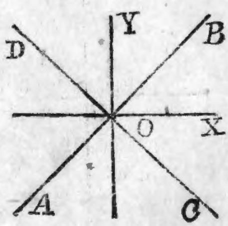
依所得 x 與 y 諸數值作出諸點。(圖九)可見各點之坐標均與本方程式相符。如設 x 諸數值之在于 0 與 1, 1 與 2, 等點之間。則所得諸點。亦必列於 A 與 B, B 與 C, 等線之間。自此而觀。是諸點皆同列於此直線之內。因無論求得任何二點。則向二點作一直線。而線內諸點之坐標。皆與本方程式相符。故 AB 爲 $2x+y-3=0$ 方程式之軌跡。

16. 總上所論之方程式。皆爲一次式。今稍論及二次式於下。設有 $x^2-y^2=0$ 方程式。化之得 $y=\pm x$ 可見 x 之每一數值。必有 y 之二數

值。而皆與 x 相等。惟有異號而已。今先定 x 之任何數值。則得 y 之相當數值於下。

x 之數值	y 之數值
0	0
1	1, -1.
2	2, -2.
3	3, -3.
-1	-1, 1.
-2	-2, 2.
-3	-3, 3.

圖十



依所得 x 與 y 諸數值作出諸點。再以 § 14 之例題較之。即知本方程式之軌跡，含有 AB, CD (圖一十) 二線。俱過原點平分四象限各爲二等分。

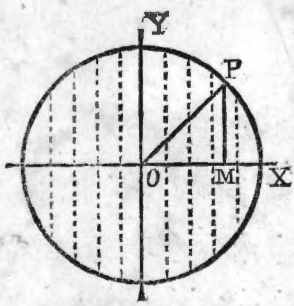
17. 上節 $x^2-y^2=0$ 方程式。又可分爲 $(x-y)(x+y)=0$. 則本方程式可適合於 $x-y=0$ 與 $x+y=0$. 然 $x-y=0$ 式之軌跡爲 AB (圖八)。已見於 § 14 其 $x+y=0$ (或 $x=-y$) 式之軌跡。即可推得爲 CD 線。以其線內各點之坐標均互相等。惟號相異。故也。故本方程式 $x^2+y^2=0$, x^2-y^2 即代 AB 與 CD (圖一十)二線。

18. 再設 $x^2+y^2=25$ 方程式。化之得

$y=\pm\sqrt{25-x^2}$。如 $x<5$。則 y 有二數值。異號而互相等。如 $x=5$，則 $y=0$. 如 $x>5$. 則 y 諸數值均爲虛數。意謂點之橫坐標大於 5。則無一點之坐標可適合於本方程式也。

設 x 諸數值皆單位相異。則得 x 與 y 諸數值如下。並作出諸點。經過諸點即可畫得(圖十一)之曲線。

此種軌跡。亦可照下法作得。任取 P 點。(圖十一)令其坐標 $x=OM$. $y=MP$. 而與 $x^2+y^2=25$



圖十一

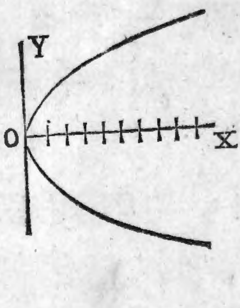
x 之同數		y 之數同
0	. . . .	± 5.
1	. . . .	± 4.9.
2	. . . .	± 4.6.
3	. . . .	± 4.
4	. . . .	± 3.
5	. . . .	0.
-1	. . . .	± 4.9.
-2	. . . .	± 4.6.
-3	. . . .	± 4.
-4	. . . .	± 3.
-5	. . . .	0.

方程式相符。次聯 OP 線。則 $x^2+y^2=\overline{OP}^2$. 是以 OP=5. 若 P 爲以 O 爲圓心，5 爲半經所作得<u>圓周</u>之任何點，則其坐標必能與本方程式相符。若 P <u>不爲</u>圓周之點。則其坐標必<u>不能</u>與

本方程式相符。故該圓周即爲本方程式之軌跡。

19. 有 $y^2=4x$ 方程式。各點之坐標既適合於本方程式。使皆不位於直線或於圓周之內。則各點必位於一種曲線之內。欲作此線。必先求得與本方程式相符之若干點。(點以相距愈近爲愈佳)次經過各點。畫出曲線。

今將諸點之坐標列下。可見 x 每一正數值。必有 y 之兩數值。號異而數相等。若 x 之數值爲負號。則 y 之數值爲虛數。蓋 y 軸向左。則無一點可與本方程式相符也。



圖十二

x 之數值	y 之數值
0	0.
1	±2.
2	±2.83.
3	±3.46.
4	±4.
5	±4.47.
6	±4.90.
7	±5.29.
8	±5.66.
9	±6.
−1	幻

觀(圖十二)所得之曲線。乃自原點向 y 軸之右伸出。並無定限。且在依 x 軸上下對稱。此即

爲本方程式之軌跡。乃一曲線所謂**拋物線**(Parabola)也。

20. 盡明上文之例題。則得以下兩要義。亦爲習解析幾何學之根本。

I. 凡代數方程式含有 x 與 y 者;皆有 x 與 y 之無限數值與之相符。蓋 x 與 y 均爲變數。可相依令其諸數值常與方程式相符也。

II. 書內之字母 x 與 y. 亦可用以代一點之坐標。然該點非有一定位置。以 x 與 y 皆爲變數故也。雖然 x 與 y 亦不能苟且妄置於某位置。蓋必須令 x 與 y 之數值與本方程式相符也。今 x 與 y 之諸數值既與方程式接續相符。則該點亦必接續移動乃成一線或數線。

該點移動。令其坐標與方程式相符。其所得之一線或數線。名爲**方程式之軌跡**.反言之.方程式既爲線內各點之坐標所符。則該方程式。名爲**線之方程式**。

方程式含有 x 與 y 二變數者。即爲線之代數式。

於解析幾何學皆以方程式代軌跡。並以方程式考察軌跡之性質。

習　題　六

定以下各方程式之軌跡.並作出之.(其軌跡為直線或為圓周)

1. $x-6=0.$
2. $x+5=0.$
3. $y=-7.$
4. $x=0.$
5. $y=0.$
6. $x+y=0.$
7. $x-2y=0.$
8. $2x+3y+10=0.$
9. $9x^2-25=0.$
10. $4x^2-y^2=0.$
11. $x^2-16y^2=0.$
12. $x^2+y^2=36.$
13. $x^2+y^2-1=0.$
14. $x(y+5)=0.$
15. $(x-2)(x-3)=0.$
16. $(y-4)(y+1)=0.$
17. 有 $5x^2-17x-12=0$ 方程式。問幾何學之意若何.

(注意) 須將方程式解為兩個二項因子。

18. 有 $y^2+3y=0$ 方程式。問幾何學之意若何.
19. 設 $xy+4x=0$ 方程式。問其軌跡所成之兩直線為何.
20. 有 $4x-3y-22=0$ 方程式.問 $(2,-5)$ 點是否在其軌跡內.

(注意) 觀點之坐標.是否與方程式相符便得。

21. 有 $y^2=9x$ 方程式。問 $(4, -6)$ 點是否在其軌跡內。

22. 有 $16x^2+9y^2+15x-6y-18=0$ 方程式。問 $(-1, -1)$ 點是否在其軌跡內。

23. 有 $x^2+y^2=100$ 方程式。問其軌跡是否經過 $(-6, 8)$ 點。

24. 問以下諸方程式內。何者之軌跡經過原點。

(1) $3x+2=0$. (2) $3x-11y+7=0$.

(3) $x^2-16y^2-10=0$. (4) $ax+by+c=0$.

(5) $3x=2y$. (6) $3x-11y=0$.

(7) $x^2-16y^2=0$. (8) $ax+by=0$.

25. 有 $3x-4y-7=0$ 方程式。其界線內一點之橫坐標爲 9. 問縱坐標之數值爲何。

答 5.

26. 設 $y^2-4x=0$ 方程式。其軌跡內一點之縱坐標爲 -6. 問應爲何點。

答 $(9, -6)$ 點

27. 設 $7x+y-14=0$ 方程式。令其所作之線與 x 軸相割。問應爲何點。

答 $(2, 0)$ 點

軌跡之交點

(Intersections of Loci)

21. 解析幾何學所用**曲線**(Curve)之義。乃任何形之軌跡。並括直線在內之總名也。

自原點至曲線與二軸相交之點,之距離。謂之曲線之**截線**。(Intercepts)

22. 設一方程式。求曲線之截線。

在 x 軸內曲線之截線。即爲曲線交 x 軸點之橫坐標。而該點之縱坐標 $=0$。故欲求該點之截線。必置本方程式之 $y=0$。化之得 x 之實數值。即爲所求之截線。

如方程式爲多次者。則 x 之實數值必多。而曲線必交 x 軸若干點。與 x 諸實數值相埒。

凡 x 之虛數值必無截線。然有時亦可稱爲虛截線。

依法置本方程式之 $x=0$。化之即得 y 軸內之截線。而 y 之實數值亦爲所求之截線。

23. 設二方程式。求其兩曲線相交諸點。

交點既在于兩曲線之間。則其坐標必與二方程式相符。故欲求交點之坐標。必取 x 與 y 變數爲未知量。而化二方程式。

如兩方程式皆爲第一次。則 x 與 y 只有數值一雙。而得一交點。

如一方程式或兩方程式爲一次以上者。則 x 與 y 必有數值數雙。而得交點甚多。與 x, y 之實數值相埒。

如 x 與 y 所得之數值爲虛。則無相當之交點。

24. 曲線經過原點。改其方程式爲至純式必無常數項(即無項不有 x 與 y)。

因 (0, 0) 點爲曲線之一點。則其方程式必適合於 $x=0$. 與 $y=0$ 二數值。設改方程式爲至純式之後。若數值含有常數。則必不能與本方程式相符。故本方程式必無一常數項。

25. 方程式若無常數項。其軌跡必過原點。

因 $x=0, y=0$ 二數值必與本方程式相符。故 (0, 0) 點必爲軌跡之一點。

習 題 七

求以下諸曲線之截線.

1. $4x+3y-48=0.$ **2.** $5y-3x-30=0.$

3. $x^2+y^2=16.$ **4.** $9x^2+4y^2=16.$

5. $9x^2-4y^2=16.$ **6.** $9x^2-4y^2=16.$

7. $a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2$.
8. $x-3=0$.
9. $x^2-9=0$.
10. $x^2-y^2=0$.
11. $y^2=4x$.
12. $x^2+y^2-4x-8y=32$.
13. $x^2+y^2-4x-8y=0$.
14. $(x-5)^2+(y-6)^2=20$.

求以下諸曲線之交點.

15. $3x-4y+13=0$, $11x+7y-104=0$.

16. $2x+3y=7$, $x-y=1$.

17. $x-7y+25=0$; $x^2+y^2=25$.

18. $3x+4y=25$, $x^2+y^2=25$.

19. $x+y=8$. $x^2+y^2=34$.

20. $2x=y$, $x^2+y^2-10x=0$.

21. 有三角形各邊之方程式爲 $2x+9y+17=0$, $7x-y-38=0$, $x-2y+2=0$. 求其頂點之坐標.

22. 有三角形各邊之方程式爲 $5x+6y=12$, $3x-4y=30$, $x+5y=10$. 求各邊之長度.

23. 有三角形各邊之方程式爲 $x=0$, $y=0$, $4x+3y=12$. 求各邊之長度.

24. 有四邊形爲 $x-a=0$, $x+a=0$, $y-b=0$, $y+b=0$. 直線所包含問其各頂點爲何.並爲何種四邊形.

25. 問 $5x+4y=20$ 直線是否與 $x^2+y^2=9$ 平圓相割.

26. 求 $3x-4y=0$ 直線之一部分藏于 $x^2+y^2=25$ 平圓內之長度.

27. 問以下諸曲線。何者之坐標經過原點。

(1) $7x-2y+4=0.$　(2) $7x-2y=0.$

(3) $y^2-x^2=4y.$　(4) $ax+by=0.$

(5) $ax+by+c=0.$　(6) $x^2-y+a=a+xy.$

28. 變易 $4x+2y-7=0$ 方程式。令其軌跡經過原點。

軌跡之作法

(Construction of Loci)

26. 有某方程式。設知其軌跡爲直線。則作其界線。必甚容易。法求得任何二點。並測其位置。即以界尺經過二點。而作得該直線。

設知方程式之軌跡爲圖周。則求得圓周之中心與其半徑。即用一規而作得全軌跡。

設方程式之軌跡。旣非直線。又非圓周。則用下法可作得種種方程式之軌跡。

27. 設有方程式。求作其軌跡。

作軌跡法之次序列下。

1. 化方程式爲 x 或 y.

2. 取某變數各數值。使毋與他各數值相差太甚。

3. 求首變數之各相當數值。

4. 畫二軸以一合宜準度。測坐標而作諸點。

5. 經過諸點畫一接續曲線。

(討論) 觀下列各例題。將方程式畧為考察。因稍知曲線之形狀。與其於二軸之位置等事。用以為作曲線之助。使不致紊亂。此種考察。謂之方程式之討論 (Discussion)

(註一) 用此法以作軌跡。以點相距愈近為妙。蓋點愈近則曲線愈密。而軌跡之位置愈眞也。

(註二) 作曲線之準度。無有一定尺寸。然用 $\frac{1}{10}$ 寸濶邊之小方形紙。名為"坐標紙." 以畫各種曲線甚覺便利。

28. 求作 $9x^2+4y^2-576=0$ 方程式之軌跡。

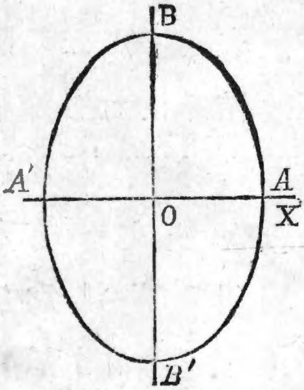
化本方程式。得 y 與 x 之數値式為。

$$y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{64-x^2}. \qquad (1)$$

$$x=\pm\frac{2}{3}\sqrt{144-y^2} \qquad (2)$$

取 x 諸數値皆單位相差。即可得 y 之相當數値於下。x 之每一正或負數値。則 y 必有互等異號之相當二數値。次將相當諸點作出。並經過諸點畫一曲線。因得圖十三之全軌跡。

圖 十 三



x 之數值	y 之數值
0	$\pm 12.$
± 1	$\pm 11.91.$
± 2	$\pm 11.62.$
± 3	$\pm 11.13.$
± 4	$\pm 10.39.$
± 5	$\pm 9.36.$
± 6	$\pm 7.93.$
± 7	$\pm 5.80.$
± 8	$\pm 0.$
± 9	幻

(討論) 自 (1) 與 (2) 方程式觀之。如 $x=0$. 則 $y=\pm 12$。又如 $y=0$. 則 $x=\pm 8$。故曲線在 x 軸內之截線爲 $+8$ 與 -8。而在 y 軸內之截線則爲 $+12$ 與 -12。此等截線即圖十三之 OA, OA′ 與 OB, OB′ 諸長度也。

設取 x 之正或負數值較 8 大。並代于 (1) 方程式之內。即得 y 之相當數值爲虛數。可知 OA 與 OA′ 爲曲線之極大橫坐標。準此法則。(2) 方程式顯明曲線必無一點之縱坐標較 $+12$ 與 -12 大。易明。

自 0 至 $+8$ 或自 0 至 -8 限內。x 之數值

愈大。則 y 之相當數值愈小。其故若何。

自(1)方程式內。x 之各數值在 0 與 ± 8 限內者。必有 y 之相當異號二數值。而 x 之各數值在 0 與 ± 8 限內。俱有二曲線點。皆自 x 軸等距。故曲線依 x 軸上下對稱如法在(2)方程式得曲線依 y 軸左右對稱。因得全曲線爲密曲線。而有四等象限弧依 0 原點甚爲對稱。是名橢圓。(Ellipse)

29. 求作 $4x-y^2+16=0$ 方程式之軌跡。

化本方程式。得 y 與 x 之同值式爲

$$y=\pm 2\sqrt{x+4} \tag{1}$$

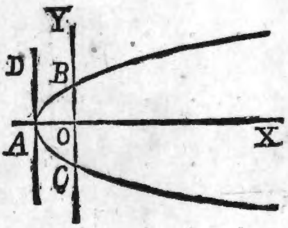
$$x=\mp\frac{y^2-16}{4} \tag{2}$$

取 x 之諸數值。即可自(1)同值式得 y 之相當數值。或取 y 之諸數值。即可自(2)同值式得 x 之相當數值。然在本例題。取 y 之諸數值較爲便利。因乘方較開方易也。

取 y 之諸數值。自 0 至 $+10$。與自 0 至 -10。皆單位相差。準前例題各法。即得若干同數值

於下。並得(圖十四)之曲線。

圖 十 四



y 之數值	x 之數值
± 0	−4.
± 1	−3.75.
± 2	−3.
± 3	1.75.
± 4	0.
± 5	2.25.
± 6	5.
± 7	8.25.
± 8	12.
± 9	16.25.
±10	21.

(討論) 自(1)與(2)方程式觀之。可得以下各條理。在 x 軸之截線為 OA=−4。

在 y 軸之截線為 OB=+4, 與 OC=−4。

如過 A 點作一 AD 直線垂於 OX。其全曲線必統在 AD 線之右。

該曲線依 OX 軸對稱。並向右伸出無一定限。且當伸出之際。其曲線逐漸向 OX 退開。

此曲線名為**拋物線** (Parabola) A 點為拋物線之**頂點** (Vertex) AX 為其**軸**。(Axis)

30. 求作 $y=$ 正弦 x 方程式之軌跡。

設令 x 之諸數值為 0°, 10°, 20°, 30° 等。則 y 之相當數值必為該角度之原正弦。今列之於下。

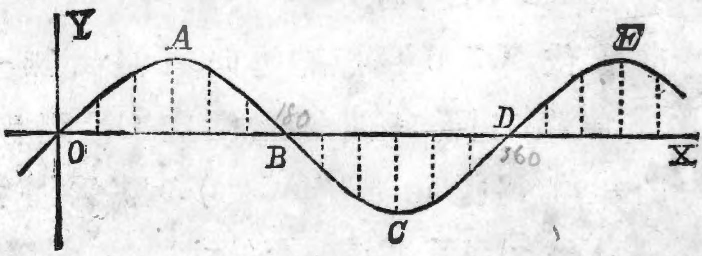
$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

x 之數値	y 之數値	x 之數値	y 之數値
0°	0	50°	0.77.
10°	0.17.	60°	0.87.
20°	0.34.	70°	0.94.
30°	0.50.	80°	0.98
40°	0.64.	90°	1.

設續取 x 之數値自 90° 至 180° 而 y 之數値則自表由下而上。(如 $x=100°$, $y=0.98$. 餘類推.若自 180° 至 360°. 則 y 之數値,與 0° 至 180° 之數値無異。惟將正號變爲負號耳。

圖 十 五



法將 x 與 y 皆以單位推算。準弧度法。凡 57·3° 角與單位差等。(見 § 5) 惟如此計算。則覺太煩。故不如取 60° 角＝一單位。觀圖十五之曲線。即以一生的米突代一單位。

(注) 生的末突者，法量也，等於 ·39371 英寸。

(討論) 該曲線經過原點。每間 180° 曲線必與 x 軸相割。然無一定之正或負角度。故曲線自原點之兩傍伸至無窮。其縱坐標之極大數值，恒接續爲 $+1$ 與 -1，前者之數值，與 90° 角相當每隔 360° 必復爲 $+1$ 數值。後者之數值，與 270° 角相當。亦每隔 360° 復爲 -1 數值。此種曲線有如浪形者。然此名爲**正弦曲線**。(Sinusoid)

習題八

求作以下各方程式之軌跡.

1. $3x-y-2=0.$
2. $y=2x.$
3. $x^2=y^2.$
4. $x^2+y^2=25.$
5. $x^2-y^2=25.$
6. $4x^2-y^2=0.$
7. $4x^2+9y^2=144.$
8. $y^2-16x=0.$
9. $y^2+16x=0.$
10. $x^2-2x-10y-5=0.$
11. $y^2-2y-10x=0.$
12. $(x-3)^2+(y-2)^2=25.$
13. $y^2-1=0.$
14. $y=x^3.$
15. $xy=12.$
16. $x=$ 正弦 $y.$

17. $y=2$ 正弦 x.

18. $y=$正弦 $2x$.

19. $y=$餘弦 x.

20. $y=$正切 x.

21. $y=$餘切 x.

22. $y=$正割 x.

23. $y=$餘割 x.

24. $y=$正弦 $x+$餘弦 x.

曲線之方程式

(Equation of a Curve)

31. 凡幾何狀為點所合。則必能限該點於定線而為其軌跡。並成一方程式常與該點之坐標適合因得一例。曰.

設為一點所合之幾何狀。則能求得該軌跡之方程式。

習題九

1. 有一點自 x 軸移動。較自 y 軸遠三倍。問其軌跡之方程式為何。 $y=3x$

2. 有點移動。令其橫坐標常等於 (i) $+6$, (ii) -6, (iii) 0. 問其軌跡之方程式為何。

3. 有點移動。令其縱坐標常等於 (i) $+4$, (ii) -1, (iii) 0. 問其軌跡之方程式為何。

4. 有點移動。令其自 $x=3$ 直線之距離。常與 2 相等。問其軌跡之方程爲何。

5. 有點移動。令其自 $y=5$ 直線之距離。常等於 3。問其軌跡之方程式爲何。並作其軌跡。

6. 有點移動。令其自 $x+4=0$ 直線之距離。常與 5 相等。問其軌跡之方程式爲何。並作其軌跡。

7. 有點 (i) 自 $x=0$ 與 $x=-6$ 兩平行線。(ii) 自 $y=7$ 與 $y=-3$ 兩平行線。其距離相等。問該點軌跡之方程式各爲何。

8. 有點自原點與 (6, 0) 點之距離常相等。問其軌跡之方程式爲何。

求點之軌跡之方程式。其距離如下。

9. 自 (4, 0) 與 (−2, 0) 二點相等。

10. 自 (0, −5) 與 (0, 9) 二點相等。

11. 自 (3, 4) 與 (5, −2) 二點相等。

12. 自 (5, 0) 與 (0, 5) 二點相等。

13. 有點移動。常令其自原點之距離。與 10 相等。求其軌跡之方程式。

14. 有點移動。令其自 (4, −3) 點之距離常等於 5。求其軌跡之方程式。並作該軌跡。問爲何種曲線。是否經過原點。

15. 設一點自 $(-4, -7)$ 點之距離。常與 8 相等。問其軌跡之方程式爲何。

16. 設以原點之坐標爲中心。以 5 爲半徑。作一平圓。自平圓之外一點移動。令距圓周之遠近。常等于 4。問其軌跡之方程式爲何。

17. 有 A 石高出水面。距 BC 直線岸爲三英里。設一輪舟進行。令自該石之距離。與自平岸之距離常相等。問其軌跡之方程式爲何。

18. 有 A 點自 BC 線之距離爲 6。設一 P 點移動。令其自 A 與 AB 之距離常相等。問其軌跡之方程式爲何。

19. 設一點移動。令其自 x 軸之距離。較自原點者常少一半。求其軌跡之方程式。

20. 設一點移動。令其自 $(a, 0)$ 與 $(-a, 0)$ 二定點之距離之平方之和爲 $2K^2$ 常數。求其軌跡之方程式。

21. 有點移動。令其自 $(a, 0)$ 點與 $(-a, 0)$ 之距離之平方之較爲 K^2 常數。求其軌跡之方程式。

習題一十(總問)

1. 設將 $x=-5$ 諸點作出。問其位置如何。

2. 設 (i) $y=4x-3$, (ii) $3x-2y=0$ 方程式。如 $x=2$. 求作 (x, y) 點。

3. 有直方形之各頂點爲 (a, b), $(-a, b)$, $(-a, -b)$, 與 $(a,$

$-b)$ 等點。求其各邊與對角線之長度。並顯明各頂點自原點之距離皆相等。

4. 設[1]方程式之一點爲原點。問二點之距離成爲何式。

5. 有 (x, y) 點自 $(4, 6)$ 點之距離與 8 相等。求其方程式。

6. 有 (x, y) 自 $(2, 3)$ 與 $(4, 5)$ 二點之距離相等。求其方程式。

7. 有點自 $(2, 3)$, $(4, 5)$ 與 $(6, 1)$ 各點之距離皆相等。求其點並問其公距離爲何。

8. 證明直方形之對角線互相等。

9. 證明平行四邊形之對角線互爲平分。

10. 有平行四邊形之三頂點爲 $(5, 3)$, $(7, 10)$, $(13, 9)$ 各點。問餘一頂點之坐標爲何。

11. 有三角形各頂點之坐標爲 $(3, 5)$, $(7, -9)$, $(2, -4)$。求其各邊中點之坐標。

12. 三角形之重心。在聯頂點與底邊中點之線。近於該線之三分點。今設三角形之頂點爲 $(2, 3)$, $(4, -5)$, $(-3, -6)$ 各點。求其重心所在。

13. 設三角形之頂點爲 $(5, -3)$, $(7, 9)$, $(-9, 6)$ 各點。求自重心至原點之距離。

14. 設四邊形之頂點爲 $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(9, 11)$, $(0, 3)$ 各點。設聯對邊之中點爲二直線。問該二直線交點之坐標爲何。

15. 任取一四邊形。聯對邊各中點爲二直線。證明該二直線互爲平分。

16. 有直線分爲三部分。線之一端爲 $(3, 8)$ 點。所分之鄰點爲 $(4, 13)$ 點。問何爲次端之坐標。

17. 聯 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 二點爲直線。並分之爲四部分。求其各分點之坐標。

18. 解明方程式與其軌跡相關之理。

19. 求作二直線。令其軌跡之方程式爲 $x^2-7x=0$.

20. 問 $(2, -5)$ 點是否在 $4x^2-9y^2=36$ 方程式之軌跡之內。

21. 有點在 $x^2+y^2+20x-70=0$ 方程式內之縱坐標爲 1。問何爲該點之橫坐標。

22. 求 $x^2+y^2-5x-7y+6=0$ 曲線內之截線。

求兩曲線之公點。

23. $x^2+y^2=100$ 與 $y^2-\dfrac{9x}{2}=0$.

24. $x^2+y^2=5a^2$ 與 $x^2=4ay$.

25. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 與 $x^2+y^2=a^2$.

26. 設 $(6, 0)$, $(0, -8)$, $(-4, -2)$ 爲頂點。求三角形各邊之長度。

27. 有點自相交二定垂線內之一線移動。常遠于自他垂線六倍。求其軌跡之方程式。

28. 有點移動。令其自 A 定點之距離。常倍于自 AB 定線之距離。求其軌跡之方程式。

29 一定點自一定直點线之距離為 a。設有[illegible]

動。令其距離常二倍於自該定線之距離。求其軌跡之方程式。

第二章

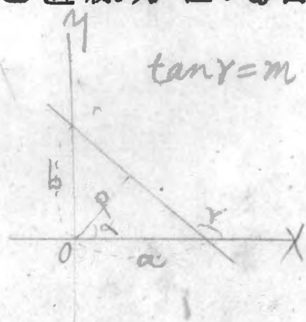
直線

直線之方程式

(Equation of the Straight Line)

32. **紀法** (Notation) 本章之直線方程式。皆用以下各紀法。目.

tan r = m



a=在 x 軸上之截線.

b=在 y 軸上之截線.

r=x 軸與直線間之角.

tan r

m=正切 r.

p=自原點至直線之垂線.

α=x 軸與 p 垂線間之角,

總上六量皆爲常數。a, b, 與 m 皆具自 $-\infty$ 至 $+\infty$ 之任何數值。p 具自 0 至 $+\infty$ 之任何數值。r 具自 $0°$ 至 $180°$ 之任何數值。α 具自 $0°$ 至 $360°$ 之任何數值。

m 常數之數値。所以指明線之方位。因名之曰線坡。(Slope)

33. 求過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 所設二點之直[redacted]之方程式。

取 A (圖十六)爲 (x_1, y_1) 點。B 爲 (x_2, y_2) 點。並取 P 爲過 A 與 B 所作直線之任何點。而 x 與 y 爲該點之坐標。作 AC, BD, PM, 與 OY 平行。並作 AEF 與 OX 平行。

因 APF, ABE 兩三角形相似。是以

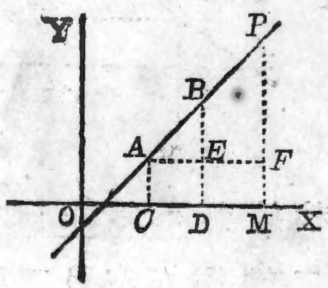
$$\frac{PF}{AF}=\frac{BE}{AE}.$$

今 $PF=y-y_1$, $AF=x-x_1$, $BE=y_2-y_1$, $AE=x_2-x_1$.

是以 $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad [4]$$

即爲所求之方程式也。

圖十六



觀圖之 FAP 角 $=r$, 是以[4]方程式之各邊皆等於正切 r 或 m。式之第一邊含有 x 與 y 兩變數。表明其 $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ 分數。仍爲常數值而與 m 相等。

34. 設 (x_1, y_1) 爲直線內之點。與線坡 m。求其方程式。

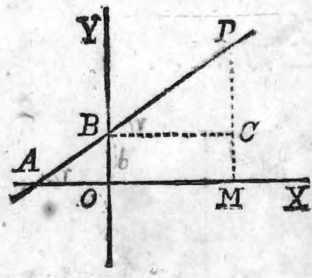
作一圖形與圖十六相彷。惟除去B點與BED線。則得

$$m=\frac{PF}{AF}=\frac{y-y_1}{x-x_1},$$

$$y-y_1=m(x-x_1). \tag{5}$$

即所求之方程式也。

圖十七



35. 設 b 截線與 r 角。求直線之方程式。

取直線割二軸於 A 與 B 二點(圖十七)。在線

內任取 P 爲 (x, y) 點。作 PM 與 OY 平行。BC 與 OX 平行。

則 $OB=b$，$PBC=\alpha$，$BC=x$，$PC=y-b$。

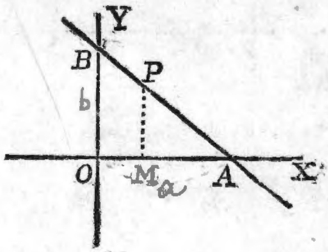
是以 $$m=\frac{y-b}{x},$$

如是 $$y=mx+b。\qquad [6]$$

即爲所求之方程式。

36. 設 a 與 b 二截線。求直線之方程式。

圖十八



取直線割二軸於 A 與 B 二點(圖十八)。在線內任取 P 爲 (x, y) 點。則 $OA=a$，$OB=b$。作 PM 垂於 OX。而 PMA, BOA 兩三角形相似。是以

$$\frac{PM}{BO}=\frac{MA}{OA}=\frac{OA-OM}{OA},$$

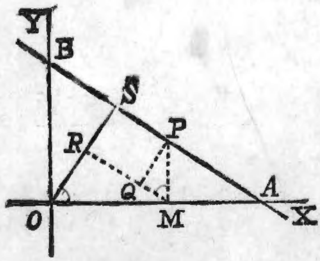
或 $$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}=1-\frac{x}{a}.$$

如是 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1.$ [7]

即爲所求之方程式。是謂直線之**配合方程式**. (Symmetrical Equation).

37. 設直線自原點之 P 距離。與 α 角。求其方程式。

圖十九



取 AB (圖十九)爲直線。P 爲線內之任何點。作 OS 垂於 AB 而過 AB 於 S。並作 PM 垂於 OX, MR 與 AP 平行而遇 OS 於 R。及 PQ 垂於 AB。

則 $p=OS=OR+QP,\ \alpha=XOS=PMQ.$

今 $OR=OM$ 餘弦 $\alpha=x$ 餘弦 α,

與 $QP=PM$ 正弦 $\alpha=y$ 正弦 α.

是以 $OR+QP=p=x$ 餘弦 $\alpha+y$ 正弦 α,

或 x 餘弦 $\alpha+y$ 正弦 $\alpha=p.$ [8]

$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$

是謂直線之**法線方程式**。(Normal Equation)

餘弦 α 與正弦 α 二係數。乃定明線之方向。而 p 爲該線自原點之距離。

習題十一

求經過二點之直線方程式。

1. (2, 3) 與 (4, 5),
2. (4, 5) 與 (7, 11).
3. (−1, 2) 與 (3, −2).
4. (−2, −2) 與 (−3, −3).
5. (4; 0) 與 (2, 3).
6. (0, 2) 與 (−3, 0).
7. (2, 5) 與 (0, 7).
8. (3, 4) 與 (0, 0).
9. (3, 0) 與 (0, 0).
10. (3, 4) 與 (−2, 4).
11. (2, 5) 與 (−2, −5).
12. (m, n) 與 $(-m, -n)$.

設有以下之點及角。求直線之方程式。

13. (4, 1) 與 $\gamma=45°$.
14. (2, 7) 與 $\gamma=60°$.
15. (−3, 11) 與 $\gamma=45°$.
16. (13, −4) 與 $\gamma=150°$.
17. (3, 0) 與 $\gamma=30°$.
18. (0, 3) 與 $\gamma=135°$.
19. (0, 0) 與 $\gamma=120°$.
20. (2, −3) 與 $\gamma=0°$.
21. (2, −3) 與 $\gamma=90°$.

求以下直線之方程式。設有。

22. $b=2,\ \gamma=45°$.
23. $b=5,\ \gamma=45°$.
24. $b=-4,\ \gamma=45°$.
25. $b=-4,\ \gamma=30°$.

26. $b=-4,\ \gamma=0°$.

27. $b=-4,\ \gamma=60°$.

28. $b=-4,\ \gamma=90°$.

29. $b=-4,\ \gamma=120°$.

30. $b=-4,\ \gamma=135°$.

31. $b=-4,\ \gamma=150°$.

32. $b=-4.\ \gamma=180°$.

33. $a=4,\ b=3$.

34. $a=-6,\ b=2$.

35. $a=-3,\ b=-3$.

36. $a=5,\ b=-3$.

37. $a=-10,\ b=5$.

38. $a=1,\ b=-1$.

39. $a=n,\ b=-n$.

40. $a=n,\ b=4n$.

41. $p=5,\ \alpha=45°$.

42. $p=5,\ \alpha=120°$.

43. $p=5,\ \alpha=240°$.

44. $p=5,\ \alpha=300°$.

45. 設三角形之頂點爲 $(2,\ 1),\ (3,\ -2),\ (-4,\ -1)$ 各點.求其各邊之方程式.

46. 設三角形之頂點爲 $(2,\ 3),\ (4,\ -5),\ (-3,\ -6)$ 各點.求其各邊之方程式.

47. 自上題三角形.求其各中線之方程式.

48. 有四邊形之頂點爲 $(0,\ 0),\ (1,\ 5),\ (7,\ 0),\ (4,\ -9)$ 各點.求其各邊與對角線之方程式.

求直線之方程式.設有

49. $a=7\frac{1}{2},\ \gamma=30°$.

50. $a=-3,\ (x_1,\ y_1)$ 爲 $(2,\ 5)$.

51. $p=6,\ \gamma=45°$.

52. $p=6,\ \gamma=135°$.

設以下之方程式.併爲配合式.

53. $3x-2y+11=0$ 與 $y=7x+1$.

54. $3x+5y-13=0$ 與 $4x-y-2=0$.

55. 有 $Ax+By=C$ 方程式。改爲配合式。並 $y=mx+b$. 求本 A, B, C 及 m. 爲 a 與 b 之數值。

設以下之方程式。併爲 $y=mx+b$ 式。並以其線坡及在 y 軸之截線。求作各圖。 y=5x-13 ∴m=5 b=-13

56. $y+13=5x$ 與 $y+19=7x$.

57. $3x+y+2=0$ 與 $2y=3x+6$.

58. 有 $Ax+By=C$ 方程式。改爲 $y=mx+b$ 式。並 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 式。求本 A, B, C, 及 a. 爲 m 與 b 之數值。

59. 有三角形之邊爲 $2x+9y+17=0$, $y=7x-38$, $2y-x=2$ 各線。求其頂點。

60. 有直線過原點與 $3x-2y+4=0$, $3x+4y=5$ 二線之交點。求其方程式。並求二點間之距離。

61. 有線過 (x_1, y_1) 而與二軸等斜。求其方程式。

62. 設平行四邊形之各邊爲 $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ 各線。求其對角線之方程式。

63. 顯明 $y=2x+3$, $y=3x+4$, $y=4x+5$ 各線。皆自一點經過。

(注意) 先求二線之交點。觀其坐標是否與所餘各線相符。

64. 設三角形之頂點爲 $(0, 0)$, $(x_1, 0)$, (x_2, y_2). 求其中線之方程式。並證其相過於一點。

65. 設 $y=mx$ 經過 $(1, 4)$ 點。問 m 之數值爲何。

66. 有 $y=mx+3$ 線。經過 $y=x+1$ 與 $y=2x+2$ 二線之交點。求定明其 m 之數值。

67. 設 $y=6x+b$ 線。經過 $(2, 3)$ 點。求 b 之數值。

68. 設 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 各點。皆在於一直線之內。問合爲何狀。

(注意) 取 [4] 方程式。代該線經過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 二點。則 (x_3, y_3) 必合。

69. 設 (i) (x_1, y_1) 爲 $(0, 0)$, (ii) $m=0$, (iii) $m=\infty$. 試論 [5] 方程式如何。

70. 設 (i) $b=0$, (ii) $m=0$, (iii) $m=\infty$, (iv) $m=0$ 與 $b=0$. 試論 [6] 方程式如何。

71. 設 (i) $a=b$, (ii) $a=0$, (iii) $a=\infty$, (iv) $b=\infty$. 試論 [7] 方程式如何。

一次之總方程式

(General Equation of the First Degree)

38. 設任何 $P(x_1, y_1)$ 點與 O 原點相連。則

$\frac{x_1}{OP}=$ 餘弦 XOP, $\frac{y_1}{OP}=$ 正弦 XOP, 與

$OP=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

凡二實數量。皆爲該二數量之平方之和之平方根所分。其得數爲某角之餘弦與正弦。

39. 含 x 與 y 二變數之一次方程式之軌跡。恒爲直線。

凡含 x 與 y 之方程式。可變之爲

$$Ax+By=C. \qquad [9]$$

式中之 C 爲正或爲圈。

以 $\sqrt{A^2+B^2}$ 分 [9] 式各項。得

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (1)$$

自 §38 觀之。則 (1) 式 x 與 y 之係數。爲餘弦 α 與 正弦 α 之數值。而末項爲 (§37) P 之正數值。則 (1) 式爲法線式。其軌跡則爲直線。

系一　凡變各純方程式爲法線式。將本方程式變爲[9]式。而以 x 與 y 二係數之平方之和之平方根。分其各項。 $\Delta P_1RP \backsim \Delta P_1QP_2$

系二　欲作 (1) 式之軌跡。置 (A, B) 點。而與原點相連。並自該線作（取） OS 與 (1) 式末項相等。過 S 作 OS 之垂線。即爲 (1) 式或 [9]式之軌跡。

40. 含 x 與 y 之一次方程式之軌跡。謂之**一次之軌跡** (Locus of the First Order)

$Ax+By+C=0$　　$A(x_2-x_1)=-B(y_2-y_1)$　　$-\frac{A}{B}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$Ax_1+By_1+C=0$　　$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$　　$-\frac{A}{B}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$

$Ax_2+By_2+C=0$　　$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y}{x_2-x_1}$

$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)=0$

習題十二

改以下之方程式爲法線式.並定出p之數值(即各軌跡自原點之距離).

1. $3x-2y+11=0.$
2. $3x+5y-13=0.$
3. $4x-y-2=0.$
4. $2x+3y=7.$
5. $y+13=5x.$
6. $y+19=7x.$
7. $ex+cy+n=0.$
8. $ny+cx-\gamma=0.$

改以下之方程式爲 [6], [7], [8] 式內之一式.並以常數之號.定出各軌跡自何象限經過.

9. $y=\frac{1}{3}x-9.$
10. $3x+2=2y.$
11. $4y=5x-1.$
12. $4y=3x+24.$
13. $5x+3y+15=0.$
14. $5x+4y-20=0.$
15. $y=6x+12.$
16. $y+2=x-4.$
17. $x+\sqrt{3}y+10=0.$
18. $x-\sqrt{3}y-10=0.$
19. 改 [7] 方程式爲 [6] 方程式.並求 m 本 a 與 b 之數值.
20. 設 [9] 方程式有以下各條.試論之.

    (i) $A=0.$　(ii) $B=0.$　(iii) $C=0.$

    (iv) $A=\infty.$　(v) $A=C=0.$　(vi) $A=B.$

    (vii) $A=B,\ C=0.$　(viii) $A=-B,\ C=0.$
21. 設有 $4x-5y=C$ 線 (i) 自原點經過. (ii) 自 (2, 0) 點經過.問 C 之數值爲何.

22. 定明 A, B 與 C 之數值能令 $Ax+By=C$ 線自 (3, 0) 與 (0, −12) 二點經過。

（注意）因所設二點之坐標。既與方程式相符即得 $3A=C$ 與 $-12=C$。

23. 用上題之法。自 [9] 式裁爲 [4] 式。

24. 設 [4] 式與 [9] 式同代一線。問 A, B, C 於 x_1, y_1, x_2, y_2 項之數值爲何。

25. 有 [4] 式。求 m 與 b 於 x_1, y_1, x_2, y_2 項之數值。

角 (Angles)

41. 求 $y=mx+b$ 與 $y=m'x+b'$ 二線所成之角。

取 AB 與 CD 遞代二直線。而相遇於 P 點（圖二十）。

設 APC 角 $=\Phi$。準幾何學。則 $\Phi=\gamma-\gamma'$，又準三角法

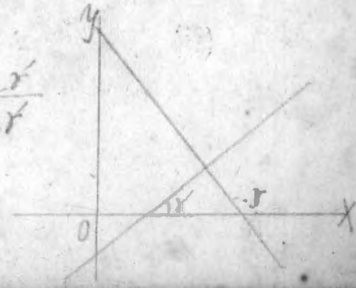
$$\text{正切}\,\Phi=\frac{m-m'}{1+mm'}. \qquad [10]$$

即爲所求 Φ 之同數值。

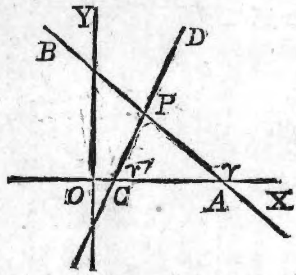
$\tan(\gamma-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan\phi=\tan(\gamma-\gamma')=\frac{\tan\gamma-\tan\gamma'}{1+\tan\gamma\tan\gamma'}$

$\therefore \tan\phi=\frac{m-m'}{1+mm'}$



圖二十



系一　設二線互相平行。故 $m=m'$。反言之。設 $m=m'$。$\Phi=0$. 而二線為互相平行。

系二　設二線為正交。正切 $\Phi=\infty$. 故 $1+mm'=0$. 或 $m'=-\frac{1}{m}$。反言之。設 $1+mm'=0$。$\Phi=90°$。而二線為正交。

42.　有直線過 (x_1, y_1) 點。而與 $y=mx+b$ 線 (i) 為平行。(ii) 為正交。求其方程式。

取求之線坡在 (i) 為 m。在 (ii) 為 $-\frac{1}{m}$, 而各線皆自 (x_1, y_1) 點經過。

準 (§ 34). 則所求之方程式為

$$\text{(i)}\quad y-y_1=m(x-x_1).$$

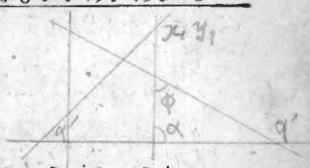
$$\text{(ii)}\quad y-y_1=-\frac{1}{m}(x-x_1).$$

習題十三

求以下諸直線之方程式.

1. 過 (3,-7) 點與 $y=3x-5$ 線平行.
2. 過 (5, 3) 點與 $\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}x=1$ 線平行.
3. 過 (0, 0) 點與 $y-4x=10$ 線平行.
4. 過 (5, 8) 點與 x 軸平行.
5. 過 (5, 8) 點與 y 軸平行.
6. 過 (3, −13) 點與 $y=4x-7$ 線正交.
7. 過 (2, 9) 點與 $7y+23x-5=0$ 線正交.
8. 過 (0, 0) 點與 $x+2y=1$ 線正交.
9. 與 $5x-7y+1=0$ 線正交.而立於橫坐標 $=1$ 之點.

43. 有直線過所設 (x_1, y_1) 點。與所設 $y=mx+b$ 線成 Φ 角。求其方程式。



設

$$y-y_1=m'(x-x_1)$$

為所求之方程式。而式內之 m' 尚未定出。

既所求之線可處於 PQ 或 PR (圖二一)。則

自 (§41) 得 正切 $\Phi=\frac{m'-m}{1+mm'}$, 或 $\frac{m-m'}{1+mm'}$.

$\tan\phi+mm'\tan\phi=m'-m$

$m'(1-m\tan\phi)=\tan\phi+m$

故
$$m'=\frac{m\pm\text{正切}\,\Phi}{1\mp m\,\text{正切}\,\Phi}.$$

$\tan\phi=\tan(\alpha'-\alpha)=\frac{\tan\alpha'-\tan\alpha}{1+\tan\alpha'\tan\alpha}=\frac{m'-m}{1+m'm}$ or $=\frac{m-m'}{1+m'm}$

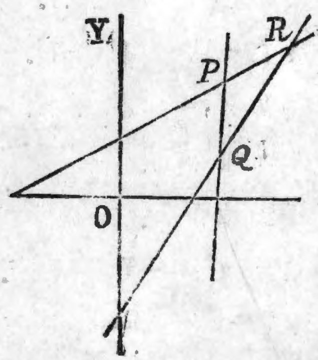
$\tan\phi + m m' \tan\phi = m - m'$ $m'(1+m\tan\phi) = m - \tan\phi$

$m' = \frac{m-\tan\phi}{1+m\tan\phi}$

即得所求之方程式爲

$$y-y_1=\frac{m\pm\text{正切}\,\Phi}{1\mp m\,\text{正切}\,\Phi}(x-x_1)\qquad [11]$$

而有(如圖二一)二直線與所設狀相符。



圖二十一

習　題　十　四

1. 求 $x+2y+1=0$ 與 $x-3y-4=0$ 二線所成之角。

二方程式之線坡爲 $-\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{3}$, 設 $m=-\frac{1}{2}$. $m'=\frac{1}{3}$. 即得正切 $\Phi=-1$. $\Phi=135°$. 設 $m=\frac{1}{3}$. $m'=-\frac{1}{2}$. 則正切 $\Phi=1$. $\Phi=45°$. 顯明其結果皆合。

求以下二線所成角之正切。

2. $3x-4y=7$ 與 $2x-y=3$.

3. $2x+3y+4=0$ 與 $3x+4y+5=0$.

4. $y-nx=1$ 與 $2(y-1)=nx$.

求以下二線所成之角。

5. $x+y=1$ 與 $y=x+4$.

6. $y+3=2x$ 與 $y+3x=2$.

7. $2x+3y+7=0$ 與 $3x-2y+4=0$.

8. $6x=2y+3$ 與 $y-3x=10$.

9. $x+3=0$ 與 $y-\sqrt{3}x+4=0$.

10. 設 $\Phi=0^\circ$. 與 $\Phi=90^\circ$. 試論 [11] 方程式如何。

【注】 下設四題.學者直接求得其式。後以 [11] 式證其結果。

求直線之方程式。

11. 過 $(3, 5)$ 點與 $2x-3y+5=0$ 線成 45° 角。

12. 過 $(-2, 1)$ 點與 $2y=6-3x$ 線成 30° 角。

13. 過 $y=2x-1$ 線,其 $x=2$ 之點。並與原線成 30° 角。

14. 過 $(1, 3)$ 與 $x-2y+1=0$ 線成 30° 角。

15. 設 (i) $AB'=A'B$. (ii) $AA'=-BB'$. 證

$$Ax+By+C=0,\ A'x+B'y+C'=0$$

二方程式所代之線 (i) 為平行。(ii) 為直交。

16. 設 $3x+4y+6=0$ 方程式。顯明 (i) $3x+4y+K=0$ 總方程式皆與所設式平行。(ii) $4x-3y+K=0$ 總方程式皆與所設式直交。

17. 改以下過 (x_1, y_1) 點之線式。與 $y=mx+b$ 線 (i) 平行。(ii) 直交。

(i) $y-mx=y_1-mx_1$.

(ii) $my+x=my_1+x_1$.

18. 作三方程式。與 $2x+3y+1=0$ 線平行。並作三方程式與原線直交。

19. 證 Φ 角在于

$$Ax+By+C=0 \text{ 與 } A'x+B'y+C'=0$$

二線間之方程式為 正切 $\Phi=\dfrac{A'B-AB'}{AA'+BB'}$.

20. 自下所設各線。擇互相平行與互相直交之線。並指明何者為非平行非直交之線。

(i) $2x+3y-1=0$.　　(ii) $3x-2y=20$.

(iii) $4x+6y=0$.　　(iv) $12x=8y+7$.

(v) $x-y=2$.　　(vi) $5(x+y)-11=0$.

(vii) $x=8$.　　(viii) $y+10=0$.

21. 自第十九題之方程式。裁為第十五題所設平行線與直交線之狀。

求直線之方程式。

22. 過 (5, 7) 點與 $2x+3y+6=0$ 線平行。

23. 過 $3x+2y-59=0$ 與 $5x-7y+6=0$ 二線之交點．與 $2x+y-1=0$ 線平行。

24. 過 (5, 3) 點．而與 (−2, 7) 及 (−4, −5) 二點相連之線平行。

25. 自原點為 d 距離．而與 $y=mx+b$ 平行。

26. 割 y 軸之截線爲 b. 而與 $Ax+By+C=0$ 直交。

27. 過 (a, b) 點. 而與 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 直交。

28. 過 $(a, 0)$ 與 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 成 $45°$ 角。

29. 設三角形之頂點爲 $(2, 1)$, $(3, -2)$, $(-4, -1)$ 各點。顯明該三角形爲正三角形。

30. 有三角形之頂點爲 $(-1, -1)$, $(-3, 5)$, $(7, 11)$ 各點。求其高度之方程式。並證其高度皆相遇於一點。

31. 設聯 $(5, 2)$ 點至 $x+2y-11=0$ 與 $9x-2y-59=0$ 二線之交點爲直線。求立於該線中點之垂線方程式。

32. 有三角形之頂點爲 $(5, -7)$, $(1, 11)$, $(-4, 13)$. 求立於各邊中點之垂線方程式。並證各垂線皆相遇於一點。

33. 有三角形各邊之方程式爲

$$x+y+1=0,\ 3x+5y+11=0,\ x+2y+4=0.$$

求 (i) 立於各邊中點之垂線方程式。(ii) 各垂線相交之公點之坐標。(iii) 該點自三角形頂點之距離。

34. 顯明過 (a, b) 及 (c, d) 之直線. 與過 $(b, -a)$ 及 $(d, -c)$ 之直線直交。

35. 有直線過 (x_1, y_1) 點. 而與 $Ax+By+C=0$ 線成 p 角。求其方程式。

$3x-4y+1=0$ $16x+12y+52=0$ $=\sqrt{\frac{225}{25}}=\sqrt{9}=3$
$9x-12y+3=0$
$y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ $25x=-55$
$y-1=-\frac{4}{3}(x+4)$ $\therefore x=-\frac{11}{5}$ $y=\frac{7}{5}$
$4x+3y+13=0$ [1] $d=\sqrt{(-\frac{11}{5}+4)^2+(\frac{7}{5}-1)^2}$

距離 (Distances)

44. 求自 $(-4, 1)$ 點至 $3x-4y+1=0$ 線之距離。 答 3.

自所設點至所設線之垂線之長度。即所求之距離。法先求得垂線之方程式。即與所設線求二線之交點。即得自所設點至該交點之距離。

將是法化上問題。並習題十五之首五題。

45. 求自 (x_1, y_1) 點至 x 餘弦 $\alpha+y$ 正弦 $\alpha=p$ 線之距離。

設 x 餘弦 $\alpha+y$ 正弦 $\alpha=p'$ (1)

與所設線平行。並過所設 (x_1, y_1) 點。即得

x_1 餘弦 $\alpha+y_1$ 正弦 $\alpha=p'$.

是以 x_1 餘弦 $\alpha+y_1$ 正弦 $\alpha-p=p'-p$.

但 $p'-p$ 等於所求之距離。是以自 (x_1, y_1) 點至 x 餘弦 $\alpha+y$ 正弦 $\alpha=p$ 之距離。乃於 x 餘弦 $\alpha+y$ 正弦 $\alpha=p$ 式,以 x_1 代 x. y_1 代 y 而得。

系一　自公式所得之距離。其號之正或負。皆憑該點與原點在線之對邊或同邊而斷。

系二　設線之方程式爲 $Ax+By=C$。與 d 爲自 (x_1, y_1) 至該線之距離。則得

$$d=\frac{Ax_1+By_1-C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad [12]$$

故求自 (x_1, y_1) 點至 $Ax+By=C$ 之距離。則在 $Ax+By-C$ 式，以 x_1 代 x, y_1 代 y, 而以 $\sqrt{A^2+B^2}$ 分其結果。

(例題)．設 $(-1, 3)$ 點與 $2x+4=3y$ 線式。求自該點至該線式之距離。

置本方程式如[9]式。即得

$$-2x+3y=4$$

如是 $$d=\frac{-2(-1)+3\times3-4}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}=+\frac{7}{13}\sqrt{13}.$$

該點與原點皆在線之對邊。設獨求 d 之長度。則可略去其號。

習題十五

1. 求自 $(1, 13)$ 至 $3x=y-5$ 線之距離。

2. 求自 (8, 4) 至 $y=2x-16$ 線之距離。

3. 求自原點至 $3x+4y=20$ 線之距離。

4. 求自 (2, 3) 至 $2x+y-4=0$ 線之距離。

5. 求自 (3, 3) 至 $y=4x-9$ 線之距離。

6. 證明自 (x_1, y_1) 點至 $y=mx+b$ 之距離爲

$$d=\pm\frac{y_1-mx_1-b}{\sqrt{1+m^2}}.$$

其正號或負號乃憑 b 之爲正或爲負而用。

7. 求自 $3x+4y+15=0$ 線至以下各點之距離。(3, 0), (3, −1), (3, −2), (3, −3), (3, −4), (3, −5), (3, −6), (3, −7), (0, 0), (−1, 0), (−2, 0), (−3, 0), (−4, 0), (−5, 0), (−6, 0).

8. 求自 (1, 3) 至以下各線之距離。

$3x+4y+15=0.$ $3x+4y-5=0.$

$3x+4y+10=0.$ $3x+4y-10=0.$

$3x+4y+5=0.$ $3x+4y-15=0.$

$3x+4y=0.$ $3x+4y-20=0.$

求以下之距離。

9. 自 (2, −5) 點至 $y-3x=7$ 線。

10. 自 (4, 5) 點至 $4y+5x=20$ 線。

11. 自 (2, 3) 點至 $x+y=1$ 線。

12. 自 (0, 1) 點至 $3x-3y=1$ 線。

13. 自 (−1, 3) 點至 $3x+4y+2=0$ 線。

14. 自原點至 $3x+2y-6=0$ 線。

15. 自 $(2, -7)$ 點至 $(-4, 1)$ 與 $(3, 2)$ 相連之線。

16. 自 $y=7x$ 線至 $y=3x-4$ 與 $y=5x+2$ 二線之交點。

17. 自原點至 $a(x-a)+b(y-b)=0$ 線。

18. 自 (a, b) 與 $(-a, -b)$ 二點至 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 線。

19. 自 (a, b) 點至 $ax+by=0$ 線。

20. 自 (h, k) 點至 $Ax+By+C=D$ 線。

求以下兩平行線間之距離。

21. $3x+4y+15=0$ 與 $3x+4y+5=0$.

22. $3x+4y+15=0$ 與 $3x+4y-5=0$.

23. $Ax+By=C$ 與 $Ax+By=C'$.

24. $Ax+By=C$ 與 $-Ax-By=C'$.

25. $y=5x-7$ 與 $y=5x+3$.

26. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ 與 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{2}$.

27. 有點自 $3x+4y-12=0$ 與 $4x+3y-24=0$ 二線之距離相等。顯明該點之軌跡藏有二直線。求其方程式。並作四線之圖形。

28. 有點移動。令其自所設二直線之距離之和爲常數。顯明該點之軌跡爲一直線。

面　積 (Areas)

46. 設三角形之項點，求其面積。

法一　設 PQR 爲三角形(圖二二)，並設 PQR 之項點爲 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 各點。作 PM, QN, RL 各垂線。則

$$\text{PQR 面積}=\text{PQNM}+\text{RLNQ}-\text{PMLR}. \tag{1}$$

準幾何學　$\text{PQNM}=\frac{1}{2}\text{NM}(\text{MP}+\text{NQ})$

$$=\frac{1}{2}(x_1-x_2)(y_1+y_2).$$

照法得　$\text{RLNQ}=\frac{1}{2}(x_2-x_3)(y_3+y_2).$

$$\text{PMLR}=\frac{1}{2}(x_1-x_3)(y_3+y_1).$$

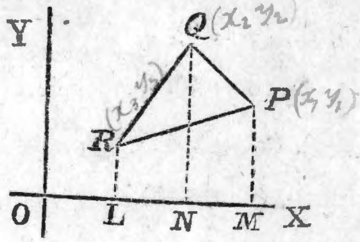
代諸數值於 (1) 式，得

$$\text{PQR 面積}=\frac{1}{2}[(x_1-x_2)(y_2+y_1)+(x_2-x_3)(y_3+y_2)-(x_1-x_3)(y_3+y_1)].$$

$$=\frac{1}{2}[-x_2y_1+x_1y_2-x_3y_2+x_2y_3-x_1y_3+x_3y_1].$$

是以面積$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)].$ [13]

圖二十二



法二　因三角形之面積。等於其底與高之積之半。則該題問可以下法得之。

(i) 求任何底之長。

(ii) 求該底之方程式。

(iii) 求自對頂點至底之距離。

(iv) 以底之半乘該距離。

習 題 十 六

求三角之面積。其頂點為以下各點。

1. (0, 0), (1, 2), (2, 1).　　**2.** (3, 4), (−3, −4), (0, 4).

3. (2, 3), (4, −5), (−3. −6).　　**4.** (8, 3), (−2. 3), (4, −5).

5. $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$.

6. 將三角形之面積方程式。與習題十一第六十八題化得之結果相較。其結果之幾何學意義為何。

設以下各點為圖形之頂點。求其面積。

7. (3, 5), (7, 11), (9, 1).

8. (3, −2), (5, 4), (−7, 3).

9. (−1, 2), (4, 4), (6, −3).

10. (0, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

11. (2, −5), (2, 8), (−2, −5).

12. (10, 5), (−2, 5), (−5, −3), (7, −3).

13. (0, 0), (5, 0), (9, 11), (0, 3).

14. $(a, 1)$, $(0, b)$, $(c, 1)$.

15. (a, b), (b, a), (c, c).

16. (a, b), (b, a), $(c, -c)$.

17. 有三角形之頂點為 $(3, 0)$, $(0, 3\sqrt{3})$, $(6, 3\sqrt{3})$. 求其角與面積。

問以下各線所藏之面積為何.

18. $x=0,\ y=0,\ 5x+4y=20.$

19. $x+y=1,\ x-y=0,\ y=0.$

20. $x+2y=5,\ 2x+y=7,\ y=x+1.$

21. $x+y=0,\ x=y,\ y=3a.$

22. $y=3x,\ y=7x,\ y=c.$

23. $x=0,\ y=0,\ x-4=0,\ y+6=0.$

24. $3x+y+4=0,\ 3x-5y+34=0,\ 3x-2y+1=0.$

25. $x-5y+13=0,\ 5x+7y+1=0,\ 3x+y-9=0.$

26. $x-y=0,\ x+y=0,\ x-y=a,\ x+y=b.$

求以下各線所藏之面積。

27. $x=0,\ y=0,\ y=mx+b.$

28. $x=0,\ y=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

29. $x=0,\ y=0,\ \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0.$

30. $y=3x-9,\ y=3x+5,\ 2y=x-6,\ 2y=x+14.$

31. 有三角形。乃自 $(2, 11)$ 點至 $y=5x-6$ 線。其 $x=4$ 與 $x=7$ 各點而成。問其面積爲何。

習題十七(總問)

1. 哉[6]方程式爲[7]方程式。

2. $y=mx+b$ 方程式之用。無 $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ 方程式之廣。因其不能代一直線與 y 軸平行也。試更詳言之。

定出以下各線之 a, b, r, p 與 α 數值。

3. $x=2.$

4. $x=y.$

5. $y+1=\sqrt{3}(x+2).$

6. $x+\sqrt{3}y=2.$

7. $x-\sqrt{3}y=2.$

8. $\sqrt{3}x-y=2.$

9. 設有圖形爲 $3x-y+9=0,\ 3x=y-1,\ 5x+3y=18,\ 5x+3y=2$ 各線所成。求其對角線之方程式。並問爲何種四邊形。

10. 求在 $9x=y+1$ 與 $9x=y-7$ 兩平行線間之距離。

11. 有四邊形之頂點爲 $(3, 12), (7, 9), (2, -3), (-2, 0)$. 求各邊之方程式及其面積。

12. 有四邊形之頂點為 $(6, -4)$, $(4, 4)$, $(-4, 2)$, $(-8, -6)$. 證其與各鄰邊中點相連各線成一平行四邊形。並求該平行四邊形之面積。

求直線之方程式。過 $(3, 4)$ 點。並

13. 與 x 軸直交。

14. 與 x 軸成 45° 角。

15. 與 $5x+6y+8=0$ 線平行。

16. 在 y 軸截得 -10 距離。

17. 過 $(1, -4)$ 與 $(-5, 4)$ 中間之點。

18. 與 $(3, 4)$ 及 $(-1, 0)$ 相連之線為直交。

求以下各線之方程式。

19. 有線與 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 相連之線平行, 並過 (x_3, y_3) 點。

20. 有線過 $(8, 3)$, $(4, 3)$, $(-5, -2)$ 各點。

21. 有線過 $2x+5y+8=0$ 與 $3x-4y-7=0$ 二線之交點。並垂於後者之線。

22. 有線與 $4x-y=0$ 線直交。並過所設線其坐標為 2 之點。

23. 有線與 $3x+4y=0$ 線平行。並過 $x-2y-a$ 與 $x+3y-2a=0$ 二線之交點。

24. 有線過 $(4, 3)$ 點。令所設點平分二軸間所藏之部分。

25. 有線過 (x_1, y_1) 點。令所設點平分二軸間所藏之部分。

26. 有線過 $(4, 3)$ 點。與在第二象限之二軸。合成一面積為 8 之三角形。

27. 有線過 $(4, 3)$ 點。與在第四象限之二軸。合成一面積為 8 之三角形。

28. 有線過 $(-4, 3)$ 點。令所設點分在二軸間之部分為 $5:3$ 比。

29. 有線分 $(-3, 7)$ 與 $(5, -4)$ 間之距離為 $4:7$ 比。並與該二點相連之線直交。

30. 有二線過 $(3, 5)$ 點與 $2x-3y-7=0$ 線成 45° 角。

31. 有二線過 $(7, -5)$ 點。與 $6x-2y+3=0$ 線成 45° 角。

32. 有線與 $(7, -1)$ 及 $(-3, 5)$ 二點相連之線成 45° 角。並在 x 軸截得距離為 5。

33. 有二線經過原點。並三分 $x+y=1$ 線於二軸間之部分。

34. 有二線與 $4x+5y+11=0$ 線平行。而自該線之距離為 3。

35. 有 $y=2x+4$ 與 $-y=3x+6$ 二線間之角之平分線。

(注意) 角內平分線上之各點。其自該角二邊為等距離。

36. 有 $2x-5y=0$ 與 $4x+3y=12$ 二線間之角之平分線。

37. 有二線經過 $(3, 12)$ 點。而自 $(7, 2)$ 點之距離與 $\sqrt{58}$ 相等。

38. 有二線經過 $(-2, 5)$ 點。而各自 $(3, -7)$ 與 $(-4, 1)$ 二點為等距離。

求兩線間所藏之角。

39. $y+3=2x$ 與 $y+3x=2$.

40. $y=5x-7$ 與 $5y+x-3=0$.

求以下之距離。

41. 自 $3x+2y+4=0$ 與 $2x+5y+8=0$ 二線之交點至 $y=5x+6$ 線。

42. 自 (h, k) 點至 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 線。

43. 自原點至 $hx+ky=c^2$ 線。

44. 自 $(a, 0)$ 點至 $y=mx\frac{a}{m}$ 線。

求以下各線所含之面積。

45. $x=y,\ x+y=0,\ x=c.$

46. $x+y=k,\ 2x=y+k,\ 2y=x+k.$

47. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ y=2x+b,\ x=2y+a.$

48. 有 $y=4x+7$ 線。與自原點至所設線。其縱坐標為 -1 及 19 之點之相連線。

49. 有三角形之各邊為 $x-5y+11=0$, $11x+6y-1=0$, $x+y+4=0$ 線。而聯其各邊之中點線。

50. 有四邊形之頂點為 $(0, 0)$, $(0, 5)$, $(11, 9)$, $(7, 0)$. 求其面積。

51. 在 $5x-4y-28=0$ 線內。問何點自 $(1, 5)$ 與 $(7, -3)$ 二點為等距離。

52. 證明正方形之對角線為互相直交。

53. 證明三角形二邊中點相連之線。與第三邊平行。

54. 有 $xy=0$ 方程式.其幾何學意義爲何。

55. 顯明 $(3a, 0), (0, 3b), (a, 2b)$ 三點乃在一直線之內。

56. 顯明 $5x+3y-7=0,\ 3x-4y-10=0,\ x+2y=0$ 三線.皆相遇於一點。

57. 問 a 爲何數值。方令 $3x+2y-2=0,\ 2x-y-3=0,\ ax+2y-3=0$ 三線相遇於一點。

問以下各方程式代有何直線。

58. $x^2+(a-b)x-ab=0.$

59. $xy+bx+ay+ab=0.$

60. $x^2y=xy^2.$

61. $14x^2-5xy-y^2=0.$

證明以下設題之點之軌跡爲一直線。並求其方程式。

62. 有三角形頂點之軌跡。設底與面積爲常數。

63. 有點自 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 二點爲等距離之軌跡。

64. 有點自 $Ax+By+C=0$ 線爲 d 距離之軌跡。

65. 有點移動之軌跡。令點自二軸之距離之和。恒爲常數並與 k 相等。

66. 有點移動之軌跡。令點自 $Ax+By+C=0$ 與 $A'x+B'y+C'=0$ 二線之距離之和。恒爲常數。並與 K 相等。

67. 有三角形頂點之軌跡。設底與餘二邊之平方之較。

第三章

平圓

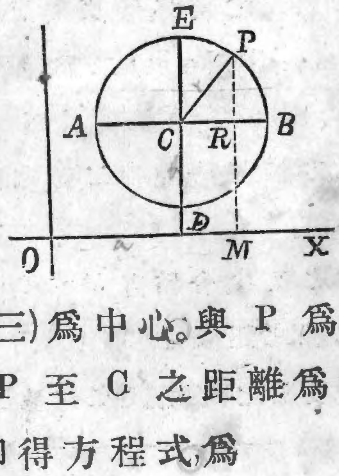
平圓之方程式

(Equations of the Circle)

47. 一動點自一定點之距離爲常數。則該點之軌跡。謂之**平圓**。(Circle) 定點曰**中心**。(Centre) 常距離曰**半徑**。(Radius)

48. 設 (a, b) 中心。與 r 半徑。求平圓之方程式。

圖二十三



取 C (圖二三)爲中心。與 P 爲圓周之任何 (x, y) 點。而自 P 至 C 之距離爲常數。並恒等於 r。觀 (§ 6) 即得方程式爲

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad [14]$$

設作 CR 與 OX 平行。而遇 P 之縱坐標。則自圖可見 CPR 正三角形之二正角邊爲 $\mathrm{CR}=x-a$, $\mathrm{PR}=y-b$。

設取原點在於中心。則 $a=b=0$. 而平圓之方程式爲

$$x^2+y^2=r^2. \qquad [15]$$

此爲平圓之至純方程式。蓋最常用之式也。

設取原點置於平圓之 A 點。而取 AB 直徑爲 x 軸。則中心爲 $(r, 0)$ 點。自 [14] 式以 r 代 a, 以 0 代 b, 化之得

$$x^2+y^2=2rx. \qquad [16]$$

問該方程式何以並無常數項。

49. 含 x 與 y 二變數之二次方程式內。無[redacted]項。與其 x^2 及 y^2 之係數相等。則軌跡爲平圓。

凡此類之方程式。均可併爲下式。

$$x^2+y^2+2\mathrm{D}x+2\mathrm{E}y+\mathrm{F}=0. \qquad (1)$$

是以 $(x^2+2\mathrm{D}x+\mathrm{D}^2)+(y^2+2\mathrm{E}y+\mathrm{E}^2)=\mathrm{D}^2+\mathrm{E}^2-\mathrm{F}$,

或 $$(x+D)^2+(y+E)^2=(D^2+E^2-F).\qquad(2)$$

觀 [14] 式則可知 (2) 式之軌跡乃一平圓。而 $(-D, -E)$ 為其中心。與 $\sqrt{D^2+E^2-F}$ 為其半徑。

系一 設 $D^2+E^2>F$. 則半徑為實。即可作得該平圓。設 $D^2+E^2=F$. 則半徑為圈。而該軌跡為 $(-D, -E)$ 點。設 $D^2+E^2<F$. 則半徑為虛。而其式並無軌跡。

50 任何 (h, k) 點在 $x^2+y^2=r^2$ 平圓之外，或上，或內。皆憑 $h^2+k^2>, =,$ 或 $<r^2$ 為斷。

因一點在平圓之外，或上，或內。皆憑其自中心之距離 $>, =,$ 或 $<$ 半徑也。

習題十八

求平圓之方程式。

1. 取 B 點(圖二三)為原點。與 BA 為 x 軸。
2. 取 D 點(圖二三)為原點。與 DE 為 y 軸。
3. 取 E 點(圖二三)為原點。與 ED 為 y 軸。

作以下各平圓之方程式。

4. 有 $(5, -3)$ 中心。與 10 為半徑。
5. 有 $(0, -2)$ 中心。與 11 為半徑。

6. 有 $(5, 0)$ 中心。與 5 爲半徑。

7. 有 $(-5, 0)$ 中心。與 5 爲半徑。

8. 有 $(2, 3)$ 中心。與 10 爲直徑。

9. 有 (h, k) 中心。與 $\sqrt{h^2+k^2}$ 爲半徑。

10. 定出 $x^2+y^2-10x+12y+25$ 平圓之中心與其半徑。

因該方程式可作爲 $(x-5)^2+(y+6)^2=36$,

是以 $a=5,\ b=-6,\ r=6.$

定出以下各平圓之中心及其半徑.

11. $x^2+y^2-2x-4y=0.$

12. $3x^2+3y^2-5x-7y+1=0.$

13. $x^2+y^2-8x=0.$

14. $x^2+y^2+8x=0.$

15. $x^2+y^2-8y=0.$

16. $x^2+y^2+8y=0.$

17. $6x^2-2y(7-3y)=0.$

18. $x^2+y^2=9k^2.$

19. $(x+y)^2+(x-y)^2=8k^2.$

20. $x^2+y^2=a^2+b^2.$

21. $x^2+y^2=k(x+k).$

22. $x^2+y^2=hx+ky.$

23. 有 $x^2+y^2+\mathrm{D}x+\mathrm{E}y+\mathrm{C}=0$ 與 $x^2+y^2+\mathrm{D}'x+\mathrm{E}'y+\mathrm{C}'=0$ 二平圓.問如何方能同心。

24. 問 $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ 方程式之幾何學意義爲何。

25. 求平圓之截線。

(i) $x^2+y^2-8x-8y+7=0,$

(ii) $x^2+y^2-8x-8y+16=0,$

(iii) $x^2+y^2-8x-8y+20=0.$

設各式之 $y=0$ 則得 (i) 式爲 $x^2-8x+7=0.$ 而 $x=1$ 與

7. 在 (ii) 式得 $x^2-8x+16=0$. 而 $x=4$. 在 (iii) 式得 $x^2-8x+20=0$. 而 $x=\pm\sqrt{-4}$.

再設各式之 $x=0$. 則得 y 之數值與上所得 x 之數值相倣。

其幾何學意義列之於下。

(i) 式之平圓割 x 軸於 $(1, 0)$ 與 $(7, 0)$ 二點。割 y 軸於 $(0, 1)$ 與 $(0, 7)$ 二點。

(ii) 式之平圓切 x 軸于 $(4, 0)$ 點。並切 y 軸於 $(0, 4)$ 點。

(iii) 式之平圓則並不與二軸相遇。

因 (iii) 式之 x 與 y 爲虛數故也。

求以下各平圓之中心與半徑。及在二軸之截線。

26. $x^2+y^2-5x-7y+6=0$.

27. $x^2+y^2-12x-4y+15=0$.

28. $x^2+y^2-4x-8y=0$.

29. $x^2+y^2-6x+4y+4=0$.

30. $x^2+y^2+22x-18y+57=0$.

31. 有 $x^2+y^2+Dx+Ey+C=0$ 平圓. 如何 (i) 能與 x 軸相切. (ii) 能與 y 軸相切. (iii) 並不與二軸相遇.

32. 顯明 $x^2+y^2+10x-10y+25=0$ 平圓切於二軸。並全圓在於第二象限。再作一方程式。令該平圓與二軸相切。而全位於第三象限.

33. 問 $3x+y=25$ 直線割 $x^2+y^2=65$ 平圓于何點。

34. 求 $x^2+y^2=4$ 與 $y=2x-4$ 兩軌跡之公點。

35. 有 $x^2+y^2=25$ 平圓之弦方程式爲 $y=2x+11$. 求該弦之長度。

36. 有弦之方程式爲 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. 而平圓之方程式爲 $x^2+y^2=r^2$. 求該弦之長度。

37. 求過 $x^2+y^2-6x-8y=-21$ 之中心。而與 $x+2y=4$ 正交之直線方程式。

38. 有 $x^2+y^2=130$ 平圓之弦。過橫坐標爲 9 與坐標爲負之點。並與 $4x-5y-7=0$ 直線平行。求其方程式。

39. 有 $x^2+y^2=277$ 平圓之弦。過 $(3, -5)$ 點並爲該點所平分。問其方程式爲何。

40. 有平圓過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 二點。求其中心之軌跡。

41. 問諸平圓過 $(5, 3)$ 與 $(-7, -6)$ 二點。其所有中心之軌跡爲何。

求以下各平圓之方程式。

42. 過 $(4, 0)$, $(0, 4)$, $(6, 4)$ 諸點。

43. 過 $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(0, -6)$ 諸點。

44. 過 $(-6, -1)$, $(0, 0)$, $(0, -1)$ 諸點。

45. 過 $(0, 0)$, $(-8a, 0)$, $(0, 6a)$ 諸點。

46. 過 $(2, -3)$, $(3, -4)$, $(-2, -1)$ 諸點。

47. 過 $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$ 諸點。

48. 過 $(10, 4)$ 與 $(17, -3)$ 二點。並其半徑 $=13$.

49. 過 $(3, 6)$ 點。並與二軸相切。

50. 自原點 4 距離與各軸相切。

51. 自原點 a 距離與各軸相切。

52. 過原點並割二軸爲 a, b 長度。

53. 過 $(5, 6)$ 點.並有一中心在於 $y=7x-3$, $4y-3x=13$ 二線之交點。

54. 過 $(10, 9)$ 與 $(5, 2-3\sqrt{6})$ 二點。並有一中心在於 $3x-2y-17=0$ 線之內。

55. 過原點.並自 $x=y$, $x+y=0$ 兩線內割 a 等長度.

56. 外接一三角形。其各邊爲 $y=0$, $y=mx+b$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 各線。

57. 有 $(0, 0)$ 與 (x_1, y_1) 二點相連線爲直徑。

58. 有 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 二點相連線爲直徑。

59. 有 $y=mx$ 與 $x^2+y^2=2rx$ 相遇點之相連線爲直徑。

60. 有 $x^2+y^2=r^2$ 與 $(x-a)^2+y^2=r^2$ 兩平圓之公弦爲直徑。

切線及法線

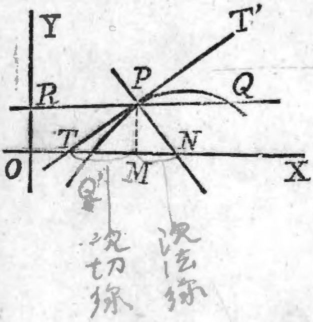
(Tangents and Normals)

51. 取 QPQ′ 爲任何曲線(圖二四)。設 QPR 割線繞 P 點而轉。俟 Q 點逐漸行近 P 點。則此

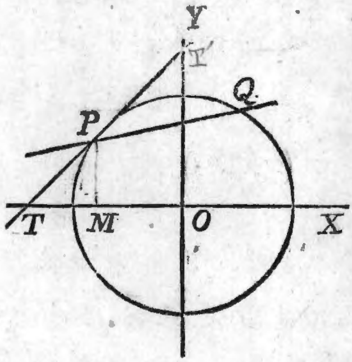
limiting position

割線之 TT′ 居有限位置。是謂在曲線 P 點之切線。(Tangents)

圖二十四



圖二十五



TT′ 切線乃切曲線於 P 點。而 P 點謂之**切點**。(Point of Contact)

自 P 作 PN 直線。與 TT′ 切線直交。此線謂之在曲線 P 點之**法線**。(Normal)

設 OX, OY 為曲線之二軸。並取 M 為 P 點縱坐標之末端。設 P 點之切線及法線。與 x 軸相遇於 T 及 N 點。則 TM 謂之 P 點之**次切線**。(Sublangent) 而 MN 謂之**次法線**。(Subnormal)

(註) 次切線 =P 點之橫坐標－切線之截線。

次法線＝法線之截線 －P 點之橫坐標。

52. 求於 $x^2+y^2=r^2$ 平圓 (x_1, y_1) 切點之切線方程式。

取 P (圖二五)爲 (x_1, y_1) 點。Q 爲任何 (x_2, y_2) 點。皆在平圓之上。則 PQ 割線之方程式爲

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{1}$$

然 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 二點。既同在平圓之上。則得

$$x_1^2+y_1^2=r^2,$$
$$x_2^2+y_2^2=r^2,$$

相減爲 $(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)=0.$

分爲因子。得 $(x_2-x_1)(x_2+x_1)+(y_2-y_1)(y_2+y_1)=0.$

準移項及除法。得

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}.$$

代之於(1)式內。則割線方程式成爲

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{x_2+x_1}{y_2+y_1}.$$

今取 Q 與 P 密合。或 $x_2=x_1$, $y_2=y_1$. 則割線成爲 P 點之切線。而方程式爲

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{x_1}{y_1},$$

或
$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$

既 $x_1^2+y_1^2=r^2$，故得

$$x_1x+y_1y=r^2 \qquad [17]$$

即爲所求之方程式。

53. 求過 (x_1, y_1) 點之法線方程式。

切線之斜度爲 $-\frac{x_1}{y_1}$，

是以法線之斜度爲 $\frac{y_1}{x_1}$ (§41, 系二).

故法線之方程式爲 (§34)

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1),$$

歸之得

$$y_1x-x_1y=0, \qquad [18]$$

是以法線經過心點。

54. 求於 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 平圓 (x_1, y_1) 切點之切線及法線之方程式。

依 §52 之法，(x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 在平圓之上，其方程式爲

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2,$$

$$(x_2-a)^2+(y_2-b)^2=r^2.$$

相減與分因子之後，得

$$(x_2-x_1)(x_2+x_1-2a)+(y_2-y_1)(y_2+y_1-2b)=0,$$

如是 $$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{x_2+x_1-2a}{y_2+y_1-2b}.$$

故經過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 之割線方程式為

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{x_2+x_1-2a}{y_2+y_1-2b}.$$

取 $x_2=x_1$，與 $y_2=y_1$ 歸之得

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2. \qquad [19]$$

[19] 方程式可自 [17] 式置 $-a$ 於 x 因子之左，與置 $-b$ 於 y 因子之左，而得。

依 §53 之法，得法線之方程式為

$$(y_1-b)(x-x_1)-(x_1-a)(y-y_1)=0. \qquad [20]$$

55. 求 $y=mx+c$ 直線切於 $x^2+y^2=r^2$ 平圓之狀。

I. 設該線與平圓相切，則自原點至該線之垂線，必等於該平圓之 r 半徑。垂線之長度既為 $\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}$ (§45)，是以所求之狀為

$$c^2=r^2(1+m^2)。$$

II. 自兩方程式

$$y=mx+c,\quad x^2+y^2=r^2,$$

消去 y. 得 x 方程為

$$(1+m^2)x^2+2mcx=r^2-c^2。$$

因得其兩根為

$$x=-\frac{mc}{1+m^2}\pm\frac{\sqrt{r^2(1+m^2)-c^2}}{1+m^2}。$$

設兩根為實與非相等。則線必割平圓。設兩根為相等。則線必切平圓。設兩根為虛。則線並不與平圓相遇。

若 $\sqrt{r^2(1+m^2)-c^2}=0$. 則兩根必相等。即 $c^2=r^2(1+m^2)$. 與上法所得相合。

設以 $r\sqrt{1+m^2}$ 數值代於 $y=mx+c$ 方程式內之 c 即得切線與平圓相切之廣用式。為

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}。\qquad [20]$$

習 題 十 九

1. 試解 [21] 方程式雙號之意義。

2. 設法線經過心點。栽 $x^2+y^2=r^2$ 平圓之切線與法線之方程式。

3. 求在 $x^2+y^2=r^2$ 平圓 (4, 6) 切點之切線與法線之方程式。並求切線,法線,次切線,次法線,與切線在二軸間之部分,各長度。

4. 有直線切 $x^2+y^2=r^2$ 平圓於 (x_1, y_1) 點。求次切線,次法線,與該線在二軸間之部分,各長度。

5. 問於 $x^2+y^2=250$ 平圓。橫坐標爲 9, 與縱坐標爲負,之切點。其切線之方程式爲何。

6. 求於 $x^2+y^2=10$ 平圓。公橫坐標 $=1$ 切點之切線方程式。

7. 過 $x^2+y^2=25$ 平圓橫坐標互等於 3 各切點。作諸切線。證諸切線合成一斜方形。並求其面積。

8. 有次切線在一平圓之某點爲 $5\frac{1}{3}$。其次法線爲 3。問平圓之方程式爲何。

求切線之方程式。

9. 切 $x^2+y^2=232$ 於橫坐標 $=14$ 之點。

10. 切 $(x-2)^2+(y-3)^2=10$ 於 (5, 4) 點。

11. 切 $x^2+y^2-3x-4y=0$ 於原點。

12. 切 $x^2+y^2-14x-4y-5=0$ 於橫坐標 $=10$ 之點。

問直線切於 $x^2+y^2=r^2$ 平圓之切線方程式爲何。

並

13. 經過 $(r, 0)$ 切點。

14. 與 $Ax+By+C=0$ 線平行。

15. 與 $Ax+By+C=0$ 線正交。

16. 與 x 軸成 45° 角。

17. 經過 $(h, 0)$ 外點。

18. 與二軸成一 r^2 面積三角形。

19. 求自 $(10, 5)$ 點至 $x^2+y^2=100$ 平圓所作之切線方程式。

20. 求切於 $x^2+y^2+10x-6y-2=0$ 平圓。並與 $y=2x-7$ 線平行之切線方程式。

21. 求在 $x^2+y^2-14x-4y=5$ 平圓 $(10, 9)$ 點之次切線與次法線各長度。

22. 問爲 x 餘弦 $\alpha+y$ 正弦 $\alpha=p$ 直線所切之平圓(中心在原點)方程式爲何。並問切點之坐標爲何。

23. 問 $Ax+By-C=0$ 線。如何方能切 $x^2+y^2=r^2$ 平圓。並切 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 平圓。

24. 求直線經過原點而切於 $x^2+y^2=ax+by$ 之方程式。

證明以下各平圓與直線相切。並求其切點。

25. $x^2+y^2+ax+by=0$ 與 $ax+by+a^2+b^2=0$.

26. $x^2+y^2-2ax-2by+b^2=0$ 與 $x=2a$.

27. $x^2+y^2=ax+by$ 與 $ax-by+b^2=0.$

28. 問平圓(中心在原點)切於 $y=3x-5$ 直線之方程式爲何。

29. 問 $y=mx+10$ 線之 m 之數值。如何。方能與 $x^2+y^2=100$ 平圓相切。顯明 $y=mx-10$ 線。亦得同答題。並詳其理。

30. 定明 $3x-4y+c=0$ 線之 c 之數值。與 $x^2+y^2-8x+12y-44=0$ 平圓相切。並詳其雙答題。

31. 有半徑 $=10$ 之平圓切 $4x+3y-70=0$ 線於 $(10, 10)$ 切點。問其方程式爲何。

32. 有中心爲 $(5, 3)$ 點之平圓與 $3x+2y-10=0$ 線相切問其方程式爲何。

33. 有平圓經過 $(5, 9)$ 點。而切 $4x+3y+3=0$ 線於 $(-3, 3)$ 點。問其方程式爲何。

34. 問 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 線如何方與 $x^2+y^2=r^2$ 平圓相切。

35. 有三角形之邊爲 $x=0,\ y=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$ 問內作之平圓。其方程式爲何。

36. 當二平圓兩中心之距離,等於其兩半徑之和或較。則二平圓互相切。求證。

$$x^2+y^2=(r+a)^2, \qquad (x-a)^2+y^2=r^2.$$

二平圓爲互相切。並求公切線之方程式。

37. 當二平圓公弦之長度 $=0$, 則二平圓互相切。求

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 與 $(x-b)^2+(y-a)^2=r^2$ 公弦之長度.

並證明當 $(a-b)^2=2r^2$. 則該二平圓爲互相切.

習題二十(總問)

求以下各平圓之半徑與中心。

1. $3x^2-6x+3y^2+9y-12=0$.

2. $7x^2+3y^2-4y-(1-2x)^2=0$.

3. $y(y-5)=x(3-x)$.

4. $\sqrt{1+a^2}\,(x^2+y^2)=2b(x+ay)$.

求平圓之方程式。

5. 中心爲 $(0, 0)$. 半徑 $=9$.

6. 中心爲 $(7, 0)$. 半徑 $=3$.

7. 中心爲 $(-2, 5)$. 半徑 $=10$.

8. 中心爲 $(3a, 4a)$. 半徑 $=5a$.

9. 中心爲 $(b+c, b-c)$. 半徑 $=c$.

10. 經過 $(a, 0)$, $(0, b)$, $(2a, 2b)$ 各點。

11. 經過 $(0, 0)$, $(0, 12)$, $(5, 0)$ 各點。

12. 經過 $(10, 9)$, $(4, -5)$, $(0, 5)$ 各點。

13. 切各軸自原點爲 -7 距離。

14. 與二軸相切。並半徑 $=r$。

15. 中心爲 (a, a). 並自各軸割弦 $=b$.

16. 中心爲 $(0, 0)$. 並切 $y=2x+3$.

17. 中心爲 $(1, -3)$. 並切 $2x-y=4$.

18. 有中心在 $5x-7y-8=0$ 線內.並與 $2x-y=0$, $x-2y-6=0$ 各線相切.

19. 經過原點.並有

$$x^2+y^2-6x-10y-15=0,$$

$$x^2+y^2+2x+4y-20=0$$

二平圓之公點.

20. 有中心在 $5x-3y-7=0$ 線內.並經過前題二平圓之公點.

21. 與 x 軸相切.並經過

$$x^2+y^2+4x-14y-68=0,$$

$$x^2+y^2-6x-22y+30=0$$

二平圓之公點.

22. 求平圓經過 $(9, 6)$, $(10, 5)$, $(3, -2)$ 各點之中心與半徑.

23. 有平圓經過 $(2, 0)$, $(8, 0)$, $(5, 9)$ 各點.問自中心至 $(0, -11)$ 與 $(-16, 1)$ 相連直線之距離爲何.

24. 問自 $x^2+y^2-4x+8y=0$ 平圓之中心.至 $4x-3y+30=0$ 線之距離爲何.

25. 問 $y=5x+2$ 線之何部分藏於 $x^2+y^2-13x-4y-9=0$ 平圓之內.

26. 有直線經過 $x^2+y^2=25$ 平圓。橫坐標 $=4$, 縱坐標爲負,之點。而與 $y=3x-5$ 平行。求截弦之長度。

27. 過 $x^2+y^2=r^2$ 平圓內之 (x_1, y_1) 點。作弦而適爲該點所平分。問其方程式爲何。

28. 問 $A(x^2+y^2)+Dx+Ey+C$ 方程式內之係數有何關係。

(i) 令平圓與 x 軸相切。

(ii) 令平圓與 y 軸相切。

(iii) 令平圓與二軸相切。

29. 問 $y=mx+c$ 直線如何能與 $x^2+y^2=2rx$ 平圓相切。

30. 問 $3x+4y=K$ 線內之 K 之數值。如何方能與 $y^2=10x-x^2$ 平圓相切。

31. 有平圓經過原點。並自 $x=y$, $x+y=0$ 線割 a 等長度。求平圓之方程式。

32. 有四平圓之公半徑 $=a\sqrt{2}$, 並自各軸割弦與 $2a$ 相等。求四平圓之方程式。

33. 有平圓之直徑。即爲 $x^2+y^2=r^2$, $(x-a)^2+y^2=r^2$ 二平圓之公弦。求平圓之方程式。

求直線之方程式。

34. 過 $(0, 0)$ 與 $x^2+y^2=a(x+y)$ 平圓之中心。

35. 過 $x^2+y^2=25$ 與 $x^2+y^2+6x-8y=0$ 二平圓之中心。

36. 過 $(0, 0)$ 並與 $x^2+y^2-6x-12y+41=0$ 平圓相切。

37. 與 $x+\sqrt{3}(y-12)=0$ 平行。並切 $x^2+y^2=100$.

38. 過 $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ 與 $x^2+y^2-14x-16y+100=0$ 二平圓之公點。

39. 證前題二平圓之公弦。與其二中心相連之直線爲直交。

40. 有三角形。乃自 $x^2+y^2=169$ 平圓上。橫坐標爲 -12 及 $+7$, 與二縱坐標爲正之點所作之兩半徑。並過二同點之弦,而成。求其面積。

41. 證半圓內所作之角爲直角。

42. 證平圓之半徑與弦爲直交者。必平分該弦。

43. 設聯 $x^2+2x+y^2=0$, $x^2+2y+y^2=0$ 兩平圓之中心爲直線。求其在 x 軸之斜度。

44. 設自一點作 $x^2+y^2-2x-6y+6=0$, $x^2+y^2-22y-20x+50=0$ 兩平圓之切線。而各等於 $4\sqrt{6}$。試定明其點。

45. 有平圓切 $6x+7y+9=0$, $7x+6y+3=0$ 兩直線。並切後者之線於 $(3, -4)$ 點。求平圓之方程式。

求以下各軌跡之方程式。並釋之。

46. 有 r 半徑,並過 (x_1, y_1) 點之平圓。求其中心之軌跡。

47. 有 r' 半徑之平圓。並切 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 平圓。求其中心之軌跡。

48. 自各點作 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 平圓之切線。皆爲 t 長度。求各點之軌跡。

49. 過所設平圓之 A 定點作弦。求該弦之中點之軌跡。

50. 有M點分所設平圓A定點所作之AC弦.爲 AM:MC$=m:n$比。求該點之軌跡。

51. 有點自A,B二定點之距離。爲$m:n$常比。求該點之軌跡。

52. 有點自A,B二定點之距離。其平方之和爲常數。並與K^2相等。求該點之軌跡。

53. 有點自A,B二定點之距離。其平方之較爲常數。並與K^2相等。求該點之軌跡。

54. 有d常長度之線之中點移動。令該線之兩端常切二定直交線。求該線之中點之軌跡。

55. 有三角形之定底爲常長度。並其頂角爲常數。求該頂點之軌跡。

56. 有三角形之AB一邊,爲常長度與定位置。其AC次邊爲常長度。但繞A點而轉。求BC第三邊中點之軌跡。

57. 有弦之長度爲常數。求該弦兩端上切線之交點之軌跡。

58. 設A與B爲二定點。有P點移動。令PA$=n\times$PB.求P點之軌跡。

第四章

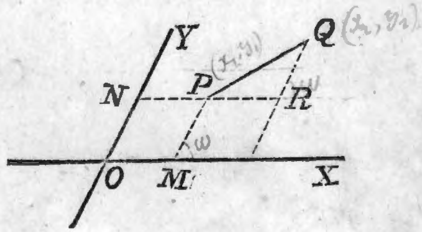
坐標各法

直線法

(Rectilineal System)

56. 欲得點之方位置。定其屬於任何定線或定點。則用**坐標之法** (System of Coördinates) 總前所用之**直線法**。惟用直交兩軸。或直交坐標。然所以恒用直交者。取其便也。如兩軸所交。屬於斜角。則兩軸與兩坐標。皆謂之**斜交**。(Oblique)

圖二十六



取 OX, OY (圖二六) 爲二軸而互成一 $XOY = \omega$ 銳角。設作 PN 與 OX 平行。PM 與 OY 平行。則 P 之坐標爲

$PQ^2=(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2-2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos PRQ$
$= \quad '' \quad + \quad '' \quad -2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos(180^\circ-w)$
$= \quad '' \quad + \quad '' \quad +2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos w$

$$NP=OM=x, \quad MP=y.$$

斜交坐標之異於直交坐標者。獨二軸內之交角耳。故前者之方程式。非與直角之性質相關者。必可用於斜交兩軸。如 [2], [3], [4], [7] 等方程式。皆可用於斜交。與直交無異。是以爲直線法之通用公式。

在斜交兩軸。於(圖二六)得 [1] 式之代式爲

$$PQ=\sqrt{\overline{PR}^2+\overline{RQ}^2-2PR\times RQ \text{ 餘弦 } PRQ},$$

是以

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1) \text{ 餘弦 } \omega}$$

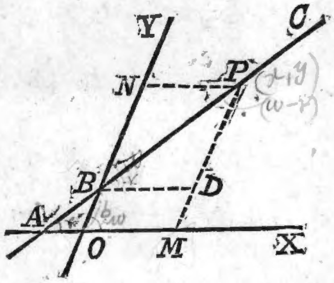
$\because \cos(180^\circ-w)=-\cos w$

設式內之 $\omega=90^\circ$ 則該式即改爲 [1] 式。

57. 設 $OB=b$ (圖二七)截線與 $XAC=r$ 角。求屬於 OX, OY 斜交兩軸之 AC 直線方程式。

取 P 爲線內之任何 (x, y) 點。作 BD 與 OX 平行。而遇 PM 於 D。

圖二十七



準三角法

$$\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{BD}}=\frac{\text{正弦}\gamma}{\text{正弦}(\omega-\gamma)}, \text{或} \frac{y-b}{x}=\frac{\text{正弦}\gamma}{\text{正弦}(\omega-\gamma)}。$$

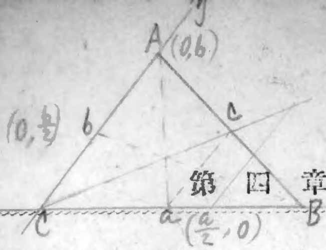
設置 $m=\dfrac{\text{正弦}\gamma}{\text{正弦}(\omega-\gamma)}$。即得其結果與 [6] 式相仿。而為

$$y=mx+b.$$

由此得 $m=$ 斜交兩軸與 AC 線所成角之正弦比。即 $m=$ 正弦 XAP ÷ 正弦 PBY。當 $\omega=90°$ 而 m 即與正切 XAP 相等。

58. 斜交坐標之用甚少。以其公式較直交坐標雜也。然有時推解題問。較直交坐標更為簡捷。如下題所設。即其例也。

證三角形之中線相遇於一點。



$\frac{y}{x}=\frac{\frac{b}{2}}{\frac{a}{2}}$ ∴ $\frac{y}{x}=\frac{b}{a}$ ∴ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$

∴ $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$

設三角形之三邊以 a, b, c 代之。而取 a 與 b 兩邊代爲二軸。則得各邊與各中線之方程式如下。

各邊之方程式爲 $y=0,\ x=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$。

各中線之方程式爲

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,\quad \frac{x}{a}+\frac{2y}{b}-1=0,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

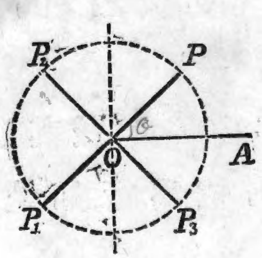
於是將各中線之方程較之。設自第一方程式減去第二式。則得第三式。是以三中線必同經過一點。

坐標之極距法

(Polar System of Coördinates)

59. 次於直線法。而爲坐標法所常用者。曰**極距法**。(Polar System)

圖二十八



取 O (圖二八)爲定點。OA 爲定直線。P 爲任何點。並聯 OP 線。

若知 OP 距離。與 OP 及 OA 所成之角。即知 P 點之位置。

即如以 OP 距離爲 ρ。AOP 角爲 θ。若推得 ρ 與 θ。即得 P 之位置。

O 定點謂之極。(Pole) OA 定直線謂之極軸。(Polar Axis) ρ 與 θ 謂之 P 之極坐標。(Polar Coördinates) ρ 爲帶徑。(Radius Vector) θ 爲變角。(Direction 或 Vectorial Angle)

initial line (主線)

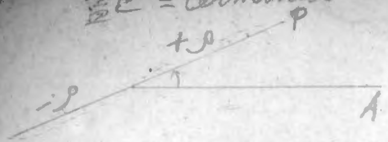
平面上各點。均可全用 ρ 自 0 至 ∞ 間之正數值。與 θ 自 0 至 360° 間之正數值。或準孤度法。自 0 至 2π) 定其方向。但恒兼用 ρ 與 θ 之負數值。而本下列之例。

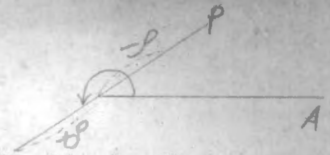
(i) 自右至左而量之 θ 爲正。逆其方向而量之 θ 爲負。

轉

(ii) ρ 之爲正或負。憑其順向 θ 盡邊之方位。或逆向其方位爲斷。如是則任何定點皆有四法顯之。

盡邊 = terminal





(例題) 設 POP′ 直線平分第一與第三象限。而在該直線取 P, P′ 二點。皆自 O 取 OP 同距離與 a 相等。則

$\rho=a$, $\theta=\frac{\pi}{4}$　$\rho=-a$, $\theta=\frac{5}{4}\pi$　$\rho=-a$, $\theta=-\frac{3}{4}\pi$

P 爲 $(a, \frac{1}{4}\pi)$ 點。或 $(-a, \frac{5}{4}\pi)$ 點。或 $(-a, -\frac{3}{4}\pi)$ 點。或 $(a, -\frac{7}{4}\pi)$ 點。

$\rho=a$, $\theta=\frac{7}{4}\pi$

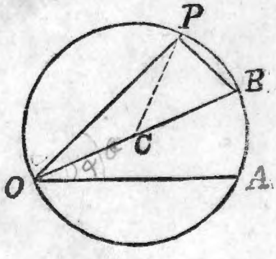
P_1 爲 $(a, \frac{5}{4}\pi)$ 點。或 $(-a, \frac{1}{4}\pi)$ 點。或 $(a, -\frac{3}{4}\pi)$ 點。或 $(-a, -\frac{7}{4}\pi)$ 點。

60. 求平圓之極方程式。

(i) 取 O 極爲中心(圖二八)。設以 r 爲半徑。則極方程式爲 $\rho=r$。

(ii) 取 O 極在於圓周(圖二九)。並取 OB 直徑與原線 OA 成 α 角。取 P 爲平圓之任何 (ρ, θ) 點。聯 BP 線。

圖二十九



則　　　　$OP = OB$ 餘弦 BOP。

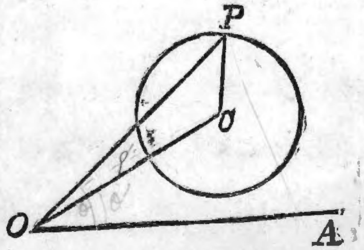
或　　　　$\rho = 2r$ 弦餘 $(\theta - \alpha)$。　　　　[22]

設取 OB 爲原線。則方程式成爲

$$\rho = 2r \text{ 餘弦 } \theta. \qquad [23]$$

(iii) 取 O 極爲任何點。並以 (ρ', θ') 點爲中心。

圖三十



$PC^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OC}^2 - 2\overline{OP} \times OC \cos COP$

自 OCP 三角形(圖三十)。即得

$\overline{OP}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{PC}^2 - 2 \ldots \times PC \cos COP$

$$\overline{OP}^2 - 2OP \times OC \times \text{ 餘弦 } COP + \overline{OC}^2 - \overline{CP}^2 = 0,$$

或　　　　$\rho^2 - 2\rho\rho'$ 餘弦 $(\theta - \theta') + \rho'^2 - r^2 = 0.$　　　　[24]

此爲平圓之通用極方程式。

習　題　二　一

1. 求在圖二八自 P 點至二軸之距離。

2. 證屬於斜交兩軸，而本於二截線之直線方程式與[7]式相同。

3. 設 P_2OP_3 (圖二八)直線平分第二與第四象限。問 P_2 與 P_3 二點之極坐標爲何。並將各點之同數值盡行取出。

4. 作以下各點於紙上。而取 $a=1$ 英寸。

$(a,\ 0)$, $\left(a,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(a,\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-a,\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-a,\ -\frac{\pi}{2}\right)$,

$\left(2a,\ \frac{\pi}{6}\right)$, $(2a,\ \pi)$, $\left(a\,\text{餘弦}\,\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(a,\ \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(3a,\ \frac{2\pi}{3}\right)$,

$\left(-3a,\ \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(4a,\ \text{正切}^{-1}\frac{4}{3}\right)$, $\left(4a,\ \text{正切}^{-1}\frac{3}{4}\right)$.

【註】 高等數學正切$^{-1}\frac{4}{3}$之意義。曰角之正切爲$\frac{4}{3}$.

5. 自 [24] 方程式取 ρ_1, ρ_2 爲 ρ 之二數值。證 $\rho_1\rho_2=\rho'^2-r^2$. 設極在平圓之外或內。問該方程式之幾何理各爲何。

6. 過平圓內 P 定點作一 PB 弦。于是繞 P 而轉。求其中點之軌跡。

【註】 如此等題問。極方程式之用乃廣。

7. 設 p 爲自極至直線之距離。α 爲 p 與極軸間之角。證該線之極方程式爲 ρ 餘弦$(\theta-\alpha)=p$.

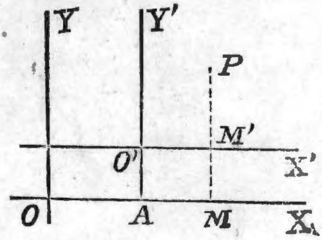
坐標之變形

(Transformation of Coördinates)

61. 曲線自原二軸既有一方程式。然恒可易爲他二軸而變其式。因成一新式。是謂**坐標之變形**。

62. 變原點至 (h, k) 點。而二軸之方向不變。

圖三十一



取 OX, OY 爲舊二軸。O'X', O'Y' 爲新二軸。並 (x, y), (x_1, y_1) 同爲P點之坐標。而遞屬於舊與新二軸。

則(圖三一)

$OA=h$, $AO'=k$, $OM=x$, $MP=y$, $O'M'=x'$, $M'P=y'$.

$$x=OA+AM=OA+O'M'=x'+h.$$

$$y=MM'+M'P=AO'+M'P=y'+k.$$

無論坐標之爲直交與斜交。其相關之理皆等。

$=0$

故求自原點變至 (h, k) 點。而新二軸與舊二軸平行之曲線方程式。即以上設之數值代 x 與 y。

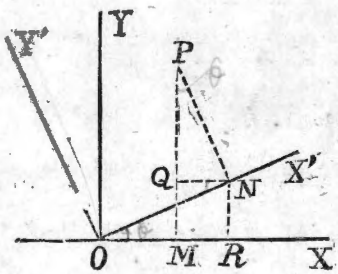
既代得之後。可將式內之 x' 與 y'。改爲 x 與 y。由此可直以 $x+h$ 代 x。$y+k$ 代 y。

設欲自新二軸變 (x, y) 點至舊二軸。即以 $x-h$ 代 x。與 $y-k$ 代 y。

63. 變曲線自一直交二軸至他直交二軸之方向。而原點仍不變。

取 (x, y) 爲 P 點。屬於 OX, OY 舊二軸。並取 (x', y') 同爲 P 點。而屬於 OX′, OY′ 新二軸。(圖三二)。

圖三十二



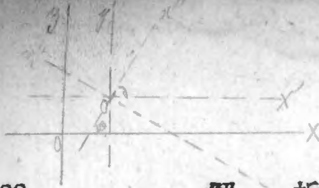
則 $OM=x$, $MP=y$, $ON=x'$, $NP=y'$.

取 XOX′ 角 $=\theta$。作 NQ, NR 遞與 PM, OX 直交。

由此得 $NPQ=QNO=RON=\theta$。

故 $OM=OR-RM=OR-NQ=ON$ 餘弦 $\theta-PN$ 正弦 θ.

或 $x=x'$ 餘弦 $\theta-y'$ 正弦 θ。



與 $PM=MQ+QP=RN+QP=ON$ 正弦 $\theta+PN$ 餘弦 θ。

或 $y=x'$ 正弦 $\theta+y'$ 餘弦 θ。

是以欲求曲線屬於新二軸之方程式。即以

x 餘弦 $\theta-y$ 正弦 θ 代 x。

x 正弦 $\theta+y$ 餘弦 θ 代 y。

64. 變曲線自一直交二軸至他直交二軸之方向。並變其原點。

過新原點作二軸與舊二軸平行。于是旋該二軸過所求之角。

設 (h, k) 爲屬於舊二軸之新原點。θ 爲舊 x 軸與新 x 軸間之角。即得本新坐標之任何 P 點之 x 與 y 之數值。

$$x=h+x' \text{ 餘弦 } \theta-y' \text{ 正弦 } \theta,$$
$$y=k+x' \text{ 正弦 } \theta+y' \text{ 餘弦 } \theta。$$

凡作此等變形。當留心 $h, k,$ 與 θ 之號。

65. 變曲線自一直交二軸至斜交二軸之方向。而原點仍不變。

取 α, β 爲 OX', OY' (圖三三) 新二軸與 OX

(2) $y=PM=PQ+NR$
$=PN\cos N\hat{P}R+ON\sin NOR$
$\because N\hat{P}Q=\beta-90^\circ$
$\therefore 90^\circ+N\hat{P}Q=\beta$

$\sin(90^\circ+A)=\cos A$
$\sin(90^\circ+N\hat{P}Q)=\cos N\hat{P}Q$
$\sin\beta=\cos N\hat{P}Q$

所成正方向之角。並取 P 點之舊坐標爲 x, y。而新坐標爲 x', y'。于是自 ORN, PQN 二正三角形。得其公式爲

$\because x=OM=OR-MR$
$=OR-QN=x'\cos\alpha-PN\sin N\hat{P}Q$
$\because \beta-90^\circ=N\hat{P}Q$
$\beta=90^\circ+N\hat{P}Q$

$$x=x' \text{ 餘弦 } \alpha+y' \text{ 餘弦 } \beta。$$
$$y=x' \text{ 正弦 } \alpha+y' \text{ 正弦 } \beta。$$

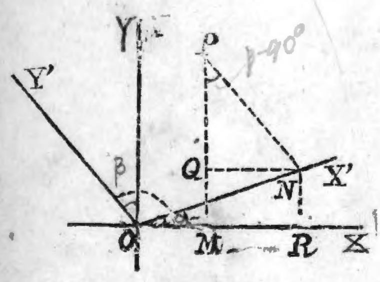
$\cos(90^\circ+A)=-\sin A$

設令 $\beta=\alpha+90^\circ$. 試考察之。

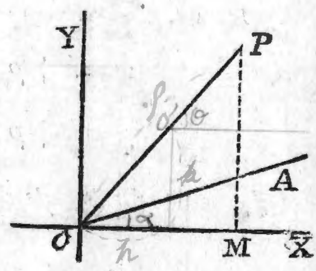
66. 自曲線之直交方程式。變爲極方程式。

取 x, y 爲任何 P 點之直交坐標。與 ρ, θ 爲其極坐標。

圖三十三



圖三十四



(i) 取直交兩軸之原點爲極。並取極軸與 x 軸密合。

則(圖三四)

$$OM=OP \text{ 餘弦 } MOP,$$
$$PM=OP \text{ 正弦 } MOP.$$

或 $x=\rho$ 餘弦 θ,

$y=\rho$ 正弦 θ.

(ii) 設極爲 (h, k) 點，即得

$x=h+\rho$ 餘弦 θ,

$y=k+\rho$ 正弦 θ.

$OM=ON+NM$
$=ON+O'M$

(iii) 設極與原點密合，惟 OA 極軸與 x 軸成 α 角，即得

$x=\rho$ 餘弦 $(\theta+\alpha)$,

$y=\rho$ 正弦 $(\theta+\alpha)$.

(iv) 設極爲 (h, k) 點，並極軸與 x 軸成 α 角，

$x=h+\rho$ 餘弦 $(\theta+\alpha)$,

$y=k+\rho$ 正弦 $(\theta+\alpha)$.

67. 自曲線之極方程式，變爲直交方程式。

自 §66 (i) 與 (ii) 式之結果，(獨此二式稍爲要緊)，即得

自乘相加
$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta$

在 (i) 式 $\rho^2=x^2+y^2$. 正切 $\theta=\dfrac{y}{x}$.

在 (ii) 式 $\rho^2=(x-h)^2+(y-k)^2$. 正切 $\theta=\dfrac{y-k}{x-h}$.

68. 凡自此二軸遷至彼二軸。方程式之[illegible]數不變。

因變易二軸。其新方程式。乃代

$$ax+by+c \text{ 與 } a'x+b'y+c'$$

各式之 x 與 y 而得。

然此等式皆爲第一次。設復還方程式之 x 與 y。而方程式之次數。並不能升。因亦不能降。若能降其次數。則其次數亦能升。而還原有之二軸。是以還其原有之方程式。

習題二二

1. 當原點變至 $(1, -2)$ 點。問 $y^2-4x+4y+8=0$ 方程式成爲何式。

易 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 平圓之方程式。將原點變。

2. 至平圓之中心。
3. 至平直徑之左端。
4. 至企直徑之上端。
5. 設二軸旋過 α 角。問 $x^2+y^2=r^2$ 方程式成爲何式。
6. 設二軸旋過 -45° 角。問 $x^2-y^2=a^2$ 方程式成爲何式。
7. 有曲線屬於直交二軸之方程式爲 $x-xy-y=0$. 今易

該式至新二軸。則其原點爲 $(-1,1)$ 點。並新 y 軸平分舊二軸所成之角。求證。

8. 設極在原點。極軸與 x 軸密合。求變以下之方程式至極坐標。

(i) $x^2+y^2=a^2$. (ii) $x^2-y^2=a^2$.

9. 變 $x^2=4ay$ 方程式至縱橫極坐標。(i) 設極在原點。(ii) 設極在 $(a, 0)$ 點。

10. 設原點與極密合。極軸與 x 軸密合。求變以下之方程式至直交二軸。

(i) $\rho=a$. (ii) $\rho=a$ 餘弦 θ. (iii) ρ^2 餘弦 $2\theta=a^2$.

變原點至所設新原點。而易以下之方程式。

11. $x+y+2=0$. 新原點爲 $(-2, 0)$.

12. $2x-5y-10=0$. 新原點爲 $(5, -2)$.

13. $3x^2+4xy+y^2-5x-6y-3=0$. 新原點爲 $(\frac{1}{2}, -4)$.

14. $x^2+y^2-2x-4y=20$. 新原點爲 $(1, 2)$.

15. $x^2-6xy+y^2-6x+2y+1=0$. 新原點爲 $(0, -1)$.

16. 旋二軸過 45° 角。而易 $x^2-y^2+6=0$ 方程式。

17. 旋二軸過 45° 角。而易 $(x+y-2a)^2=4xy$ 方程式。

18. 易 $9x^2-16y^2=144$ 方程式至斜交二軸。而令新 x 軸與舊 x 軸成正切 $^{-1}-\frac{3}{4}$ 負角。並新 y 軸與舊 x 軸成正切 $^{-1}\frac{3}{4}$ 正角。

習題二三(總問)

1. 設二軸成 $60°$ 角。求自 $(-2b, b)$ 點至原點之距離。

2. 設二軸成 ω 角。求自 $(1, -1)$ 點至 $(-1, 1)$ 點之距離。

3. 設二軸成 ω 角。求自 $(0, 2)$ 點至 $(3, 0)$ 點之距離。

定明以下所設極坐標二點間之距離。

4. (a, θ) 與 (b, Φ).

5. (a, θ) 與 $(a, -\theta)$.

6. (a, θ) 與 $(-a, -\theta)$.

7. $(2a, 30°)$ 與 $(a, 60°)$.

8. 顯明 (ρ, θ), $(-\rho, \pi+\theta)$, $(-\rho, \theta-\pi)$ 等極坐標。皆代一同點。

9. 易 $8x^2+8xy+4y^2+12x+8y+1=0$ 方程式至 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 新原點。

10. 易 $6x^2+3y^2-24x+6=0$ 方程式至 $(2, 0)$ 新原點。

11. 設變原點至 $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 點。並旋二軸過 Φ 角。而令正切 $\Phi=-\frac{b}{a}$. 易 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 方程式。

12. 易 $17x^2-16xy+17y^2=225$ 方程式至二軸。而令該二軸平分舊二軸。

設極軸與 x 軸密合。或與 x 軸平行。並極在所設坐標之點。易以下直交方程式至極方程式。

13. $x^2+y^2=8ax$. 極爲 $(0, 0)$.

14. $x^2+y^2=8ax$. 極爲 $(4a, 0)$.

15. $y^2-6y-5x+9=0$. 極爲 $(\frac{5}{4}, 3)$.

16. $x^2-y^2-4x-6y-54=0$. 極爲 $(2, -3)$.

17. $(x^2+y^2)^2=k^2(x^2-y^2)$. 極爲 $(0, 0)$.

設原點在極並 x 軸與極軸密合。易以下極方程式至直交方程式。

18. ρ^2 正弦 $2\theta=2a^2$.

19. $\rho=k$ 正弦 2θ.

20. ρ(正弦 $3\theta+$ 餘弦 $3\theta)=5k$ 正弦 θ 餘弦 θ.

21. 問一直交二軸應旋過何角。方令新 x 軸經過 $(5, 7)$ 點。

22. 有直線之直交方程式爲 $Ax+By+C=0$. 問二軸應旋過何角。方令

(i) 藏 x 之項隱去.

(ii) 藏 y 之項隱去.

23. 設自此斜交二軸變至彼斜交二軸。並不變原點。裁以下之方程式。

$$x=\frac{x'\,正弦(\omega-\alpha)}{正弦\,\omega}+\frac{y'\,正弦(\omega-\beta)}{正弦\,\omega}.$$

$$y=\frac{x'\text{正弦}\alpha}{\text{正弦}\omega}+\frac{y'\text{正弦}\beta}{\text{正弦}\omega}.$$

【注】 在此公式之ω爲舊二軸所成之角.而α與β爲新二軸與舊二軸所成之正方向角.

24. 自前題之公式歸爲§65之公式.

第五章

拋物線

拋物線之方程式

(The Equation of the Parabola)

69. 一點自定點之距離。與其自定直線之距離恆等。此一點之軌跡。名爲**拋物線**。(Parabola)

其定點謂之**焦點**。(Focus) 如F 定直線謂之**準線**。如CE (Directrix)

過心與準線直交之直線。謂之拋物線之**軸**。(Axis) 如DAF

軸與準線之交點。謂之軸之**足**。(Foot) 如D

軸內有點。在心與準線間之半。是爲曲線內之一點。而此點謂之拋物線之**頂點**。(Vertex) 如A

自曲線任何點至心相連之直線。謂之該點之**通半徑**。(Focal Radius)

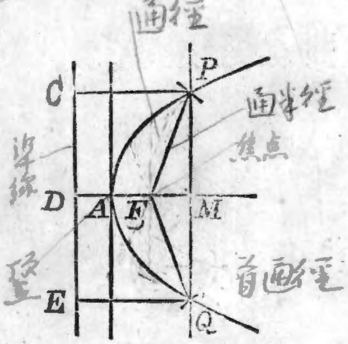
過心而以曲線爲限之直線。謂之**通徑**。(Focal Chord)

垂軸之通徑。謂之首通徑。(Latus Rectum 或 Parameter)

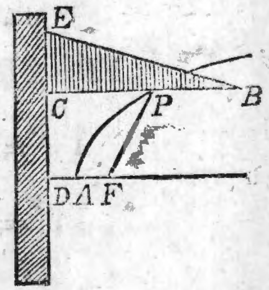
70. 有焦點與準線。求作拋物線。

I. 以面法作之。 取 F (圖三五)爲焦點。CE 爲準線。作 FD 軸。並將 FD 平分於 A。則 A 爲曲線之頂點。在軸內任何 M 點作一垂線。即以 F 爲中心。DM 爲半徑。而割該垂線於 P 與 Q。則 P 與 Q 爲曲線之二點。因 FP=DM=P 與 Q 自 CE 之距離。照法可得曲線之各點。點既求足。即過諸點畫一曲線。

圖三十五



圖三十六



II. 以動法作之。 置界尺之一邊與 DE (圖三六)準線密合。再置 BCE 三角板之 CE 邊與界尺邊相切。取一線之長度等於 BC。繫一端

於B，並繫次端於F，用P鉛筆點緊貼該線於三角版，乃將 BCE 板向準線漸移，而 P 點即畫成一拋物線，因移動之際，常有 PF=PC 也。

71. 設拋物線之軸為 x 軸，與頂點為原點，求拋物線之直交方程式。

取 F (圖三七)為焦點，CE 為準線，DFX 為軸，A 為頂點與原點，並命 $2p$ 為已知 FD 距離。

取 P 為曲線之任何點，則其坐標為

$$AM=x, \quad MP=y。$$

作 PC 與 CE 正交，則準曲線之定義，

$$FP=PC=DM。$$

是以 $$\overline{FP}^2=\overline{DM}^2。$$

今 $$\overline{FP}^2=\overline{MP}^2+\overline{FM}^2=y^2+(x-p)^2。$$

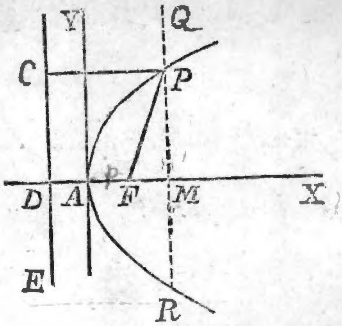
與 $$\overline{DM}^2=(x+p)^2。$$

是以 $$y^2+(x-p)^2=(x+p)^2。$$

如是 $$y^2=4px。 \qquad [25]$$

此為拋物線之主要方程式。

圖三十七



72. 既 [25] 方程式之 y^2 與 p 爲正。則 x 必常爲正。是以曲線全位於 y 軸之正邊。

試考 [25] 方程式。即顯明曲線 (i) 經過原點。(ii) 在依 x 軸對稱。(iii) 向右伸出無限。(iv) 自 x 軸退開無限。

73. 任何 (h, k) 點在 $y^2=4px$ 抛物線之外。或上。或內。皆憑 k^2-4px 爲正、或圈、或負、爲斷。

取 Q 爲 (h, k) 點。並取其縱坐標遇曲線於 P。

設 $k^2-4ph=0$。則 (h, k) 點充 [25] 方程式。故 Q 與 P 密合。

設 k^2-4ph 爲正。或 $k^2>4ph$。既 $\overline{PM}^2=4ph$。則 $\overline{QM}^2>\overline{PM}^2$。或 $QM>PM$。故 Q 在曲線之外。

設 k^2-4ph 爲負。即可如法證明Q在曲線之內。

74. 設 $x=p$。$y=\pm 2p$。但 y 之二同數値合成首通徑。故首通徑 $=4p$。

系一 自 $y^2=4px$ 方程式。可知

$$x:y=y:4p。$$

首通徑爲任何橫坐標與其相當縱坐標連比例之末率。

75. 設 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 爲抛物線上之任何二點。即得

$$y_1^2=4px_1。\quad y_2^2=4px_2。$$

故 $$y_1^2:y_2^2=x_1:x_2。$$

在抛物線任何二點之縱坐標之平方。其互相比如其橫坐標相比。

76. 求 $y=mx+c$ 直線遇 $y^2=4px$ 抛物線之點。

取該二方程式爲聯立式。並將 x 消去。即得。

$$y^2=4p\frac{y-c}{m}。\qquad (1)$$

$y_1^2=4px_1$　$y_2^2=4px_2$　$y_2^2-y_1^2=4p(x_2-x_1)$

$(y_2-y_1)(y_2+y_1)=4p(x_2-x_1)$　$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4p}{y_2+y_1}$

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4p}{2y}=\frac{2p}{y}$

如是　$$y=\frac{2p}{m}\pm\frac{2p}{m}\sqrt{\frac{p-mc}{p}}。\qquad(2)$$

自 (2) 式可知 $y=mx+c$ 與 $y^2=4px$ 共有二分點，二合點，或無點，皆憑 $p-mc=0$ $>$, $=$, 或 <0 為斷。

系一　設 $p-mc=0$，或 $c=p\div m$，則 $y=mx+c$ 為切線。即 $$y=mx+\frac{p}{m}。\qquad(3)$$
為 $y^2=4px$ 本線坡之切線也。

習題二四

1. 顯明 $y^2=4px$ 抛物線之任何點，自焦點之距離與 $p+x$ 相等。
2. 取曲線之軸與準線為二軸。求抛物線之方程式。
3. 取曲線之軸為 x 軸，與焦點為原點。求抛物線之方程式。
4. 自抛物線之焦點至準線之距離 $=5$。作其方程式。
   (i) 設取原點在於頂點。
   (ii) 設取原點在於焦點。
   (iii) 設取軸與準線為二軸。
5. 自焦點至抛物線頂點之距離為 4。作前題三事之方程式。

6. 問 $y^2=18x$ 拋物線之何點。其縱坐標等於橫坐標三倍。

7. 求以下拋物線之首通徑。

$$y^2=6x,\quad y^2=15x,\quad by^2=ax.$$

求以下拋物線與直線之公點。

8. $y^2=9x,\ 3x-7y+30=0.$

9. $y^2=3x,\ x-4y+12=0.$

10. $y^2=4x,\ x=9,\ x=0,\ x=-2.$

11. $y^2=4x,\ y=6,\ y=-8.$

12. 問 $y^2=4px$ 拋物線經過 $(9,\ -12)$ 點之 p 之數值爲何。

13. 問 $y^2=32x$ 拋物線之何點。其縱坐標等於橫坐標四倍。

14. 設拋物線之方程式爲 $y^2=8x$, 問 (i) 拋物線之軸。(ii) 拋物線之準線。(iii) 拋物線之首通徑。(iv) 過橫坐標 $=8$ 點之通徑。(v) 過頂點與首通徑負端之弦。各方程式爲何。

15. 設拋物線之方程式爲 $y^2=16x$. 求 (i) 過橫坐標爲 4 及 9. 與縱坐標爲正之弦。(ii) 過頂點與首通徑二端之平圓各方程式爲何。

16. 設一點自 $y^2=4px$ 拋物線之焦點之距離。等於首通徑。問該點之橫坐標爲何。

17. 有等邊三角形。作於 $y^2=4px$ 拋物線內。令一頂點居於原點。問其一邊之長度爲何。

18. 有拋物線之倍縱坐標 $=8p$. 證明自其兩端至項點所作之直線爲互相直交.

解釋如何作拋物線,設有

19. 準線與頂點.

20. 焦點與頂點.

21. 軸,頂點,與首通徑.

22. 軸,頂點,與曲線上之一點.

23. 軸,焦點,與首通徑.

24. 定明以下拋物線相關之大小及位置.

(i) $y^2=4px$, (ii) $y^2=-4px$,

(iii) $x^2=4py$, (iv) $x^2=-4py$.

切線及法線

(Tangents and Normals)

U. 求在 $y^2=4px$ 拋物線任何 (x_1, y_1) 點之切線及法線之方程式.

取 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 爲拋物線上之任何二點.則過二點之割線之方程式爲

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \tag{1}$$

既 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 在 $y^2=4px$ 曲線上,即得

$(y-y_1)y_1=2p(x-x_1)$ $yy_1=2px+2px_1$

$yy_1-y_1^2=2px-2px_1$ $yy_1=2p(x+x_1)$

$yy_1-4px_1=2px-2px_1$ $m=\frac{2p}{y_1}$

$\therefore y-y_1=-\frac{y_1}{2p}(x-x_1)$

$$y_1^2=4px_1,\quad y_2^2=4px_2。$$

如是
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4p}{y_2+y_1}。$$

代之於(1)式。則割線之方程式成爲

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{4p}{y_2+y_1}。\qquad (2)$$

$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{4p}{2y_1}=\frac{2p}{y_1}$

今取 (x_2, y_2) 與 (x_1, y_1) 密合。則 (2) 式成爲在 (x_1, y_1) 之切線之方程式。乃置 $y_2=y_1$。去其分數。並有 $y_1^2=4px_1$。即得在 (x_1, y_1) 之切線之方程式。

$$y_1y=2p(x+x_1)。\qquad [26]$$

法線經過 (x_1, y_1)。並與切線直交。故其方程式。準 [26] 與 § 42。得

$$y-y_1=-\frac{y_1}{2p}(x-x_1)。\qquad [27]$$

78. 設在 [26] 方程式置 $y=0$。即得

$$x=-x_1。\text{或 TA=AM (圖三八)。}$$

是以次切線自項點平分爲二。TM

設在 [27] 式置 $y=0$。即得

$$x=x_1+2p,\ \text{或}\ x-x_1[=\text{MN}]=2p\ (\text{圖三八})。$$

$yy_1=2p(x+x_1)$ 令 $y=0$
則 $x+x_1=0$ $x=-x_1$
$-y_1=-\frac{y_1}{2p}(x-x_1)$ $2p=(x-x_1)$ $x=2p+x_1$

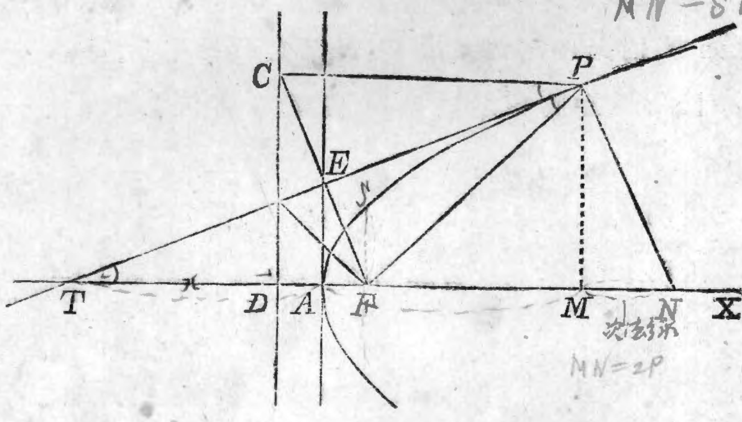
MN FS

故次法線爲常數。並等於半首通徑。

系一 此等性質合爲作拋物線上切線之純法。如在拋物線 P 點(圖三八)作一切線。PT 自 P 作 PM 縱坐標。取 $AT=AM$。並作 PT。是爲準 §78 而在 P 之切線也。或取 $MN=FD$。並作 PN。則 PT 在 P 與 PN 直交。而爲在 P 之切線。

圖三十八

TM=次切線
MN=SF



79. 在 FPT 三角形(圖三八)即得

$$FT=FA+AT=p+x,$$

$$FP=PC=DM=DA+AM=p+x。$$

是以 $$FT=FP。$$

故

FPT 角 $=$ PTF 角 $=$ TPC 角。或

在抛物線任何點之切線。與曲線軸及至切點之通半徑所成之角皆等。

習題二五

1. 自抛物線任何點之法線。平分通半徑及過該點與軸平行之直線所成之角爲二部分。

(注) 抛物線返光鏡即爲該性質。有光線自焦點發出。而射入返光鏡。則光線必返成一線。與返光鏡軸平行。

2. 自所設抛物線之所設點。解釋如何作一切線與一法線。

3. 證明 FC (圖三八)與 PT 直交。

4. 證明 $y=mx+\dfrac{p}{m}$ 切線切 $y^2=4px$ 抛物線於 $\left(\dfrac{p}{m^2}, \dfrac{2p}{m}\right)$ 點。

5. 證明在 $y^2=4px$ 抛物線。本線坡之法線之方程式爲 $y=mx-mp(2+m^2)$。

6. 問過 $y^2=4px$ 抛物線。橫坐標爲 20。與縱坐標爲正，之點之切線及法線之方程式爲何。

7. 問過 $y^2=12x$ 抛物線首通徑兩端之切線及法線之方程式爲何。並求圖上包含之面積。

8. 過 $y^2=10x$ 抛物線。橫坐標爲 7，與縱線爲正之點。作

一切線及一法線。求切線·法線·次切線·與次法線之長度。

9. 有 $y^2=20x$ 拋物線之切線。與 x 軸成 $45°$ 角。定明其切點。

10. 顯明 F 焦點(圖三八)自 P, T, N 各點爲等距離。準此理有何捷法以作切線及法線。

11. 設 F 爲拋物線之焦點。與 Q, R 二點。爲切線割準線與首通徑引長之點。證明 $FQ=FR$。

12. 證明過首通徑兩端所作之切線爲互相直交。

13. 求頂點與焦點自 $y=mx+\frac{p}{m}$ 切線之距離。

14. 求在 $y^2=4px$ 拋物線 (x_1, y_1), (x_2, y_2) 二點之切線之交點。

15. 有 $y^2=4px$ 拋物線之切線。割二軸爲相等截線。問其方程式爲何。切點爲何。各截線之數值爲何。

16. 問過 x 軸之何點。作 $y^2=4px$ 拋物線之二切線。與過頂點之切線。成一正三角形。

17. 問在 $y^2=4px$ 拋物線何點。有法線等於次切線之二倍。

18. 問在 $y^2=4px$ 拋物線何點。有法線等於次切線與次法線之較。

19. 求 $y^2=5x$ 拋物線之切線,與 $3x-2y+7=0$ 直線平行之方程式。並求其切點。

20. 求切於 $y^2=12x$ 抛物線與 $y=3x-4$ 線成 45° 角之直線方程式。並求其切點。

21. 求切於 $y^2=16x$ 抛物線,並過 $(-4, 8)$ 點之直線方程式。

22. 設在抛物線 P 點之法線。重遇曲線於 Q 點。求 PQ 之長度。

23. 準割線法。證明在 $y^2=4px-4p^2$ 抛物線 (x_1, y_1) 點之切線方程式,爲

$$y_1y=2p(x+x_1)-4p^2.$$

24. 求在 $y^2-8x-6y-63=0$ 抛物線。公橫坐標 $=-1$ 點之切線及法線之方程式。

25. 問以下各抛物線之切線總方程式爲何。

(i) $y^2=-4px$, (ii) $x^2=4py$, (iii) $x^2=-4py$.

習題二六(總問)

(注) 設無指出二軸之方向。則取抛物線之軸,與頂點之切線爲二軸。

問抛物線之方程式爲何。

1. 設取軸與準線爲二軸。並焦點爲 $(12, 0)$ 點。

2. 設取軸與在頂點之切線爲二軸。並 $(25, 20)$ 爲在曲線之點。

3. 設取同上之二軸。並焦點爲 $(-4\frac{1}{4}, 0)$ 點。

6. $y^2=4dx$

4. 設軸與 x 軸平行。頂點爲 $(5, -3)$ 點。並首通徑 $=5\frac{1}{3}$。

5. 設軸爲 $y=-7$ 線。頂點之橫坐標 $=3$, 並有 $(4, -5)$ 點。

6. 設曲線經過 $(0, 0)$, $(3, 2)$, $(3, -2)$ 各點。

7. 設曲線經過 $(0, 0)$, $(3, 2)$, $(-3, 2)$ 各點。

8. 問 $2y^2=3x$ 拋物線之首通徑爲何。其準線之方程式爲何。與經過橫坐標 $=6$ 點之通徑方程式爲何。

9. 設 $y^2=4px$ 拋物線之 p 漸減無限。求其形狀之變動。

10. 求 $y^2+4x-6y-16=0$ 拋物線之截線。

11. 有等邊三角形之一頂點與焦點密合。其別點則位於 $y^2=4px$ 拋物線上。求一邊之長度。

12. 有拋物線之首通徑 $=8$, 求

(i) 過其正端之切線方程式。

(ii) 自焦點至該切線之距離。

(iii) 在該點之法線方程式。

13. 問過 $y^2=8x$ 拋物線。$x=2$, $y>0$. 與 $x=18$, $y<0$ 二點之弦方程式。

14. 有 $y^2=4px$ 拋物線之弦爲 (x_1, y_1) 設點所平分。求弦之方程式。

15. 問 $x+y=12$ 線,遇 $y^2+2x-12y+16=0$ 拋物線於何點。

16. 問 $3y=2x+8$ 線,遇 $y^2-4x-8y+24=0$ 拋物線於何點。

17. 求自原點至 $(y-b)^2=4p(x-a)$ 拋物線之切線方程式。

18. 求 $y^2+2x+4=0$ 拋物線在二軸之位置。並定明其首通徑,頂點,焦點與準線。

19. 問自原點至 $y^2=4a(x-a)$ 拋物線首通徑之端,所作法線之距離爲何。

求拋物線之方程式。

20. 設切線之方程式爲 $4y=3x-12$.

21. 設通半徑 $=10$. 並其方程式爲 $3y=4x-8$.

22. 設曲線一點之通半徑 $=r$. 並切線之長度 $=t$.

23. 設曲線一點之通半徑 $=r$. 並法線之長度 $=n$.

24. 設曲線一點之切線長度 $=t$. 並法線之長度 $=n$.

25. 設曲線一點之通半徑 $=r$. 並次切線 $=s$.

26. 有二拋物線有同頂點。並同 $4p$ 首通徑。但其二軸互爲直交。問其通徑之長度爲何。

27. 過 $y^2=12x$ 拋物線。縱坐標爲 2, 3, 6 三點。作諸切線。驗明該切線過焦點所成三角形之外接平圜。

28. 有 $y^2=4px$ 拋物線之切線,與 x 軸成 $30°$ 角。問其割軸於何點。

29. 問 $y^2=4px$ 拋物線之何點。爲切線之長度。等於切點之橫坐標四倍。

30. 有切線與法線之合數。等於切點縱坐標之方之二倍。求切點與切線向 x 軸之斜度。

31. 有拋物線之二切線爲互相直交。求其次切線之合數。

32. 證明以通半徑爲直徑之外作平圜。與過頂點所作之切線相切。

33. 證明以通徑爲直徑之外作平圜。與準線相切。

求中點之軌跡。

34. 爲拋物線所有之縱坐標。

35. 爲所有之通半徑。

36. 爲所有之通徑。

37. 爲所有經過頂點之弦。

38. 爲所有過於軸足之弦。

有 $y^2=4px$ 拋物線之二切線與 x 軸成 θ, θ' 角求其交點之軌跡。

39. 設餘切 $\theta+$ 餘切 $\theta'=k$.

40. 設餘切 $\theta-$ 餘切 $\theta'=k$.

41. 設正切 θ 正切 $\theta'=k$.

42. 設正弦 θ 正弦 $\theta'=k$.

43. 有平圜過一所設點。並切一所設直線。求其中心之界線軌跡。

第六章

橢圓

橢圓之本性

(Simple Properties of the Ellipse)

80. 一點自二定點之距離之和為常數。該點之軌跡謂之橢圓。(Ellipse)

二定點謂之焦點。(Foci) 自曲線任何點至焦點之距離。謂之通半徑。(Focal Radius)

$PF+PF'=2a$ $FF'=2C$

常數和命為 $2a$。並二焦點間之距離為 $2c$。

$\frac{c}{a}=e$

$\frac{c}{a}$ 分數謂之離心率。(Eccentricity) 而以 e 字代之。是以 $c=ae$。 $2a>2c$

左橢圓內 $a>c$。即 $e<1$。

設 $a=c$。則軌跡為二焦點相連之有限直線。

設 $a<c$, 觀定義。即可見並無軌跡。

81. 有二焦點與 $2a$ 常數和。求作橢圓。

1. 以動法作之。 設二定針於紙上橢之圓

$\overline{A' \; F \; X \; O \; F \; A}$

焦點。取一線之長度與 $2a$ 相等。而繫於該二定針上。即以鉛筆迫線令緊。常使線直。乃漸移鉛筆而動。筆點即畫成橢圓。因任至何位置。其自筆點至二焦點之距離之和。必恒等於所用線之長度。故也。

II. 以點法作之。 取 F, F′ 為二焦點。則 $FF'=2c$。

平分 FF′ 於 O。並自 O 作 $OA=OA'=a$。

則 $A'A=2a$。$F'A'=FA$。

$$A'F+A'F'=A'F+FA=2a,$$

$$AF'+AF=AF'+F'A'=2a.$$

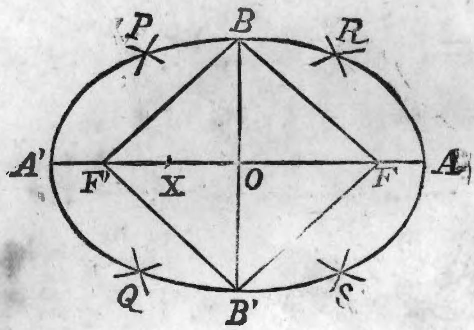
是以 A 與 A′ 為曲線之點。

在 F 與 F′ 間取 X 任何點。於是以 F 為中心。AX 為半徑。再以 F′ 為中心。A′X 為半徑。作二弧相交於 P, Q。而為曲線內之二點。若互易二半徑。則再得 R, S 二點。

點既求足。即過諸點畫一曲線。

$BF+BF'=2a$ $BF=BF$ $\therefore BF=a$ $BF'=a$

圖三十九



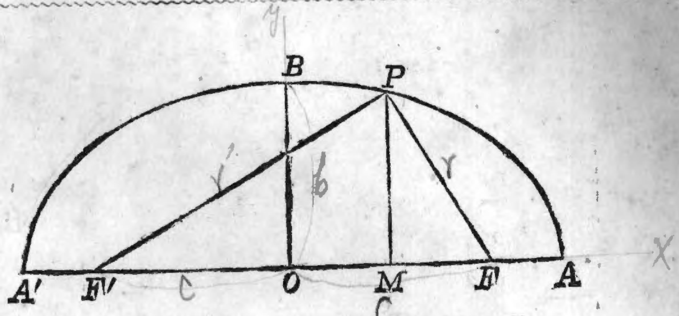
82. AA′ 線爲**長軸**。(Transverse Axis 或 Major Axis) A 與 A′ 爲**頂點**。(Vertices) O 爲此曲線之**中心**。(Centre)

其與長軸正交於 O 之 BB′ 線爲**短軸**。(Conjugate Axis 或 Minor Axis) 而命其長度爲 $2b$。

顯明 B 與 B′ 自二焦點爲等距離。$BF=a$。$BO=b$。與 $a^2=b^2+c^2=b^2+a^2e^2$。 $\because c=ae$

83. 設二焦點與 $2a$ 常數和。求橢圓之方程式。

圖四十



取過二焦點之 AA′ 線(圖四十)為 x 軸。與二焦點中間之 O 點為原點。取 P 為曲線之任何 (x, y) 點。並命 r, r' 為 P 之通半徑。則自曲線之定義。並自 F′PM, FPM 二正三角形。得

$om = x$, $pm = y$

$PF'^2 = PM^2 + F'M^2$

$r'^2 = y^2 + (x+c)^2$

$$r'^2 = y^2 + (c+x)^2. \qquad (1)$$

$PF^2 = PM^2 + MF^2$

$r^2 = y^2 + (c-x)^2$

$$r^2 = y^2 + (c-x)^2. \qquad (2)$$

$r'^2 + r^2 = 2y^2 + 2c^2 + 2x^2$

$(r'-r)(r'+r)$

準加法 $$r'^2 + r^2 = 2(x^2 + y^2 + c^2). \qquad (3)$$

$r'^2 - r^2 = 4cx$

準減法 $$r'^2 - r^2 = 4cx. \qquad (4)$$

$r' + r = 2a$

$r' - r = \frac{2cx}{a}$

但 $$r' + r = 2a. \qquad (5)$$

$2r = 2a - \frac{2cx}{a}$

$= \frac{2a^2 - 2cx}{a}$

$r = \frac{(a^2 - cx)}{a}$

準除法 $$r' - r = \frac{2cx}{a}. \qquad (6)$$

準減法 $$r = a - \frac{cx}{a} = [a - ex]. \qquad (7)$$

$c = ea$

$\frac{a^2 - aex}{a}$

準加法 $$r' = a + \frac{cx}{a} = [a + ex]. \qquad (8)$$

$= (a - ex)$

$r = (a - ex)$

$r' = \frac{ex + a^2}{a}$

$a - ex + a^2$

$r = ex + a$

$r^2 + r'^2 = (a - ex)^2 + (a + ex)^2$

$= 2a^2 + 2e^2x^2$

$= 2(a^2 + e^2x^2)$

$2(y^2+c^2+x^2)=2\left(a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2\right) \therefore a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$

$a^2y^2+a^2c^2+a^2x^2=a^4+c^2x^2$

$a^2y^2+(a^2-c^2)x^2=a^2(a^2-c^2)$

$b^2=a^2-c^2$

$$r'^2+r^2=2\left(a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}\right)。 \tag{9}$$

$y=0$
$x=\pm a$
$x=0$
$y=\pm b$
$\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1$
$\frac{p^2}{a^2}+\frac{(-q)^2}{b^2}=1$

代之於(3)式。並有 $b^2=a^2-c^2$。(§ 82).

則 $$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2。$$

或 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。 \tag{28}$$

系一　設長軸在 y 軸之上。與短軸在 x 軸之上。則橢圓之方程式為

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1。 \tag{10}$$

84. 自橢圓方程式求其形狀。

在 x 軸之截線為 $+a$ 與 $-a$。在 y 軸之截線為 $+b$ 與 $-b$。

，方程式內獨有 x 與 y 變數之平方。故方程式設為 (x, y) 點所合。則亦必能為 $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ 各點所合。是以得以下各條。

(i). 曲線依 x 軸對稱。

(ii) 曲線依 y 軸對稱。

(iii) 曲線依 O 中心對稱。並各弦之過中心者。皆為中心所平分。(此所以解釋 O 之為中心也。)

既$\left(\frac{x}{a}\right)^2$與$\left(\frac{y}{b}\right)^2$之和爲1。故無一平方能過於1。是以$x$之極大數值爲$+a$。與極小數值爲$-a$。若$y$之相當數值則爲$+b$與$-b$。是以曲線全藏於直方形之內。其邊爲$x=\pm a$。$y=\pm b$。

85. 當半長短軸變化。求橢圓形狀之變化。

取a爲常數。與b爲變數。 $\frac{c}{a}=e$

(i) 設b漸增。則c漸損。(因$c^2=a^2-b^2$) e亦漸損。二焦點則向中心漸進。又橢圓則漸進爲平圓。

(ii) 設$b=a$。則$c=0$。e亦$=0$。二焦點與中心密合。橢圓則成爲平圓。而具a半徑。與[28]方程式成爲平圓之方程式。 $x^2+y^2=a^2$。

(iii) 設b漸損至0(a仍爲常數)。c則漸增至a。e則漸增至1。曲線則漸進至長軸。而終與長軸密合。同時得一方程式爲$y=0$。

86. 取(x_1, y_1)與(x_2, y_2)爲在$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$橢圓之二點。即得

$$y_1^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_1^2), \qquad y_2^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_2^2)。$$

$a-x_1=MA$

$a+x_1=A'O+OM=A'M$

$h^2+k^2>x^2+y^2$

除之。並分為因子。得

$$y_1^2 : y_2^2 :: (a-x_1)(a+x_1) : (a-x_2)(a+x_2)。$$

即橢圓任何二縱坐標之平方。其互相比。如其所分長軸二段之積相比。

87. 自 §83 可知 (h, k) 點在 [28] 方程式橢圓之上。為

$$\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1=0。$$

照 §73 法即可顯明 (h, k) 點在曲線之外或內。皆憑 $\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}-1$ 為正或負而斷。

88. 設 A, B, C 皆有同號。則各方程式為

$$Ax^2+By^2=C。 \qquad (1)$$

者。皆可改為

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。 \text{ 或 } \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1。$$

故 (1) 各方程式。乃代一橢圓。而其半長短軸為 $\sqrt{\frac{C}{A}}$ 與 $\sqrt{\frac{C}{B}}$。長軸之位於 x 軸或 y 軸。乃憑 A 之較 B 為小或大而定。

$\frac{x^2}{\frac{C}{A}}+\frac{y^2}{\frac{C}{B}}=1$ $\frac{C}{A}>0$ $\frac{C}{B}>0$ $\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{C}{A}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{C}{B}}\right)^2}=1$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{c^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}$ $y=\frac{b}{a}(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{b^2}{a}$

$\frac{2b^2}{a}=\frac{4b^2}{2a}$ $l\cdot 2a=4b$ $l:2b=2b:2a$

$2a:2b=2b:l$

89. 過心與長軸正交之弦。謂之**首通徑**。

(Latus Rectum)

欲求其長度。在橢圓方程式置 $x=c$。

則 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-c^2)=\frac{b^4}{a^2}$。 $y=\pm\frac{b^2}{a}$。

是以首通徑 $l=\frac{2b^2}{a}=\left[\frac{4b^2}{2a}\right]$。

自該方程式成一比例爲

$2a:2b::2b:$ 首通徑。

首通徑爲長軸與短軸連比例之末率。

90. 凡以橢圓之長軸爲直徑之平圓謂之**輔助圓**。(Auxiliary Circle)

其方程式爲

$$x^2+y^2=a^2$$

凡以短軸爲直徑之平圓。謂之**小補助圓**。

(Minor Auxiliary Circle) 其方程式爲

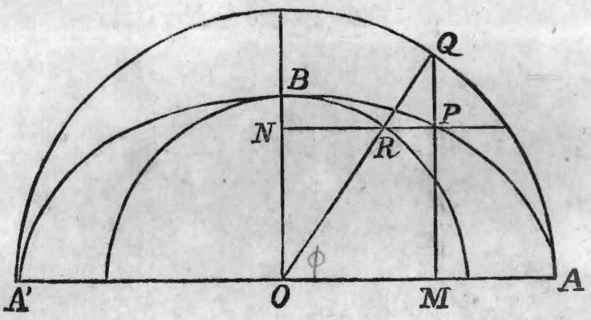
$$x^2+y^2=b^2.$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2}$ $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$x^2+y'^2=a^2$ $y'^2=a^2-x^2$ $y'=\pm\sqrt{a^2-x^2}$

$\frac{y}{y'}=\frac{2b}{2a}$ $\therefore y:y'=b:a$

圖四十一



設 P (圖四一)爲一橢圓之任何點。並引長 MP 縱坐標遇輔助圓於 Q。則 Q 點曰與 P 點相當。

QOM 角。謂之 P 點之**離心角**。(Eccentric Angle) 並以 Φ 字記之。

91. 取 y, y' 遞代橢圓與輔助圓上之點之縱坐標而皆與 x 同橫坐標相當。則自二曲線之方程式。得

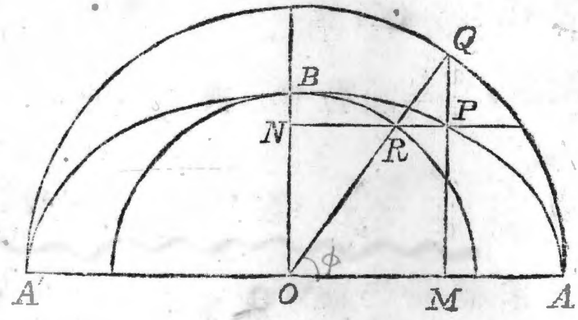
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \quad y'=\pm\sqrt{a^2-x^2}.$$

如是 $$y:y'=b:a。$$

橢圓與輔助圓之縱坐標與公橫坐標相當者。其互相比。如橢圓之半短軸及半長軸之常比。

92. 當橢圓設有二軸。則用 §91 之要素。可以至易之點法作一橢圓如下。

圖四十二



作長軸與短軸兩輔助圓(圖四二)。並作任何半徑 ORQ 割二平圓於 R 與 Q。過 Q。作線與 BO 平行。並過 R 作線與 OA 平行。則二線所交之 P 點爲橢圓上之一點。因有

$$MP : MQ = OR : OQ。$$

小圓半徑　大圓半徑

或 $$MP : y' = b : a。$$

自該比例並 §91 之比例一閱。可知 $MP = y$。故 P 爲橢圓上之一點。如法可得任何若干點。

系一　自圖四二。即得

$$\left.\begin{array}{l} x = OM = OQ\ 餘弦\ \Phi = a\ 餘弦\ \Phi, \\ y = MP = ON = OR\ 正弦\ \Phi = b\ 正弦\ \Phi。\end{array}\right\} \quad (1)$$

(1) 方程式乃本離心角。表明橢圓任何點之坐標。因亦可爲橢圓之方程式。設自 (1) 式化爲公方程式。則有

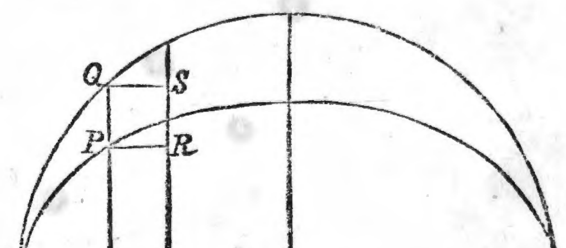
$$\frac{x}{a}=\text{餘弦}\,\Phi,\ \text{與}\ \frac{y}{b}=\text{正弦}\,\Phi。$$

是以 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\text{餘弦}^2\Phi+\text{正弦}^2\Phi=1。$$

93. 求橢圓之面積。

分 OA′ (圖四三)半長軸爲任何數等分。過所分任何 M, N 二鄰點作二縱坐標。並取 M 之縱坐標。遇橢圓於 P。及遇輔助圜於 Q。過 P,

圖四十三



Q 作線與 x 軸平行。而遞遇次縱坐標於 R, S。則 (§ 91)

$\square PMNR = MN \cdot PM$ $\square QMNS = MN \cdot QM$

$$\frac{\text{MPRN 直方形之面積}}{\text{MQSN 直方形之面積}}=\frac{\text{MP}}{\text{MQ}}=\frac{b}{a}.$$

由此可得各雙之相當直方形,皆有同比例.

是以準比例之理,

$$\frac{\text{橢圓內直方形之和}}{\text{平圓內直方形之和}}=\frac{b}{a}.$$

無論直方形如何多數,此相關比例皆無不通,設愈增直方形之數,則多數直方形面積之和,其一,則愈近橢圓一象限之面積,其二,則愈近平圓一象限之面積,再詳言之,此二象限即二級數直方形之和之限,是以準限數之理,

$$\frac{\text{橢圓象限之面積}}{\text{平圓象限之面積}}=\frac{b}{a}.$$

以 4 乘該比例之二項,

$$\frac{\text{橢圓之面積}}{\text{平圓之面積}}=\frac{b}{a},$$

但平圓之面積 $=\pi a^2$,是以 $\frac{b}{a}\times\pi a^2=\pi ab$

橢圓之面積 $=\pi ab$. [29]

習題二七

問以下橢圓方程式內之 $a, b, c,$ 與 e 爲何.

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$

2. $x^2+2y^2=2.$

3. $3x^2+4y^2=12.$

4. $Ax^2+By^2=1.$

5. 求 $3x^2+7y^2=18$ 橢圓之首通徑。

6. 設首通徑等於橢圓短軸之半。求橢圓之離心率。

問橢圓之方程式爲何。設

7. 二軸爲 12 與 8.

8. 長軸 $=26$. 二焦點之距離 $=24$.

9. 二軸之和 $=54$. 二焦點之距離 $=18$.

10. 首通徑 $=\frac{64}{5}$. 離心率 $=\frac{3}{5}$.

11. 短軸 $=10$. 自焦點至頂點之距離 $=1$.

12. 曲線經過 $(1, 4)$ 與 $(-6, 1)$ 二點。

13. 長軸 $=20$. 短軸 $=$ 二焦點間之距離。

14. 曲線內一點二通半徑之和 $=$ 二焦點間距離之三倍。

15. 設長軸爲一焦點分成二段。證明半短軸爲其中率。

16. 設中心與二焦點分長軸爲四等分。問二軸之比例爲何。

17. 問橢圓之何點爲橫坐標與縱坐標相等。

求以下軌跡之交點。

18. $3x^2+6y^2=11$ 與 $y=x+1$.

19. $2x^2+3y^2=14$ 與 $y^2=4x$.

20. $x^2+7y^2=16$ 與 $x^2+y^2=10$.

21. 設平分 $x^2+y^2=r^2$ 平圓各縱坐標。求平分諸點之軌跡。

22. 有 AB 直線移動。令 A 與 B 二點常切二定直交直線。顯明 AB 內任何 P 點能作一橢圓。並求其方程式。

23. 設 C 爲圈。問 $Ax^2+By^2=C$ 之軌跡爲何。並問該軌跡何時爲虛。

24. 證明 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 橢圓之橫坐標。比 $x^2+y^2=b^2$ 小輔助圓之相當橫坐標如 $a:b$.

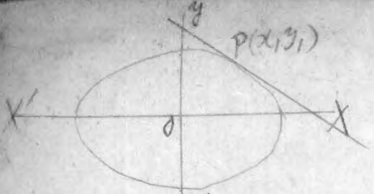
25. 準 §92 法求作一橢圓。

26. 設有 c 與 b. 求作一橢圓。

27. 設有二焦點與曲線之一點。求作橢圓之二軸。

28. 設有長軸(其大小及位置)及橢圓之一點。求作短軸與二焦點。

29. 自 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 橢圓。內作一正方形。求各邊之方程式。並正方形之面積。



切　線　及　法　線

(Tangents and Normals)

94. 設有 (x_1, y_1) 切點。求一橢圓之切線及法線之方程式。

取橢圓之方程式。

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2.$$

及直線過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 二點之方程式。

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

照 §52 法。即得割線過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 之方程式,爲

$\begin{cases} b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2 \\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2 \end{cases}$ $b^2(x_1^2-x_2^2)+a^2(y_1^2-y_2^2)=0$ $b^2(x_1^2-x_2^2)=a^2(y_2^2-y_1^2)=0$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}.$$

$-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_2+y_1)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

今取 $x_2=x_1$. $y_2=y_1$. 則該弦成爲切線。而

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}.$$

成爲
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

即可改爲 $\frac{yy_1-y_1^2}{b^2}+\frac{x_1x-x_1^2}{a^2}=0$

$\frac{yy_1}{b^2}+\frac{x_1x}{a^2}=\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}=1$

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1。 \qquad [30]$$

自上方程式。有切線本切點坐標之線坡數值為

$$-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

法線既過 (x_1, y_1) 而與切線直交。是以得其方程式(準 §42 法)為

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1). \qquad [31]$$

95. 求次切線與次法線。

自 [30] 與 [31] 取 $y=0$。于是化各方程式為 x。即得

在 x 軸切線之截線 $=\frac{a^2}{x_1}$。

$\frac{a^2-b^2}{a^2}$

在 x 軸法線之截線 $=\frac{c^2}{a^2}x_1=e^2x_1$。 [§83]

如是得切線與法線之數值。(如 §51). 即得

$x_2=x_1$
$y_2=x_1$

次切線 $=\frac{x_1^2-a^2}{x_1}$, $\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1-x_1=\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1-\frac{a^2x}{a^2}$ [32]

次法線 $=-\frac{b^2}{a^2}x_1$ $=-\frac{b^2}{a^2}x_1$ [33]

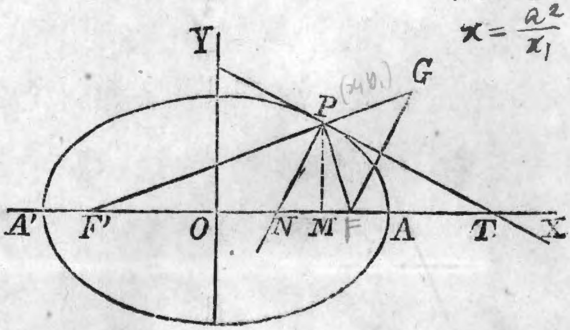
96. 設諸橢圓有公長軸。在一公橫坐標之

諸點。作諸橢圓之切線。則諸切線必相遇於 x 軸。

因諸橢圓之 a 與 x_1 數值爲常數。是以(準§95) 切線自 x 軸割相同截線。 $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

$x=\frac{a^2}{x_1}$

圖四十四



97. 橢圓上任何點之法線。平分該點二通半徑所成之角。

P 點(圖四四)二通半徑之數值。自 §83 得

$$PF=a-ex_1, \quad PF'=a+ex_1.$$

設法線過 P 而遇 x 軸於 N。則 $ON=e^2x_1$(§95).

OF=c

是以 $NF=c-e^2x_1=ae-e^2x_1=e(a-ex_1)$.

$NF'=c+e^2x_1=ae+e^2x_1=e(a+ex_1)$.

是以 $NF:NF'=PF:PF'$.

$NF:NF'=(a-ex_1):(a+ex_1)$

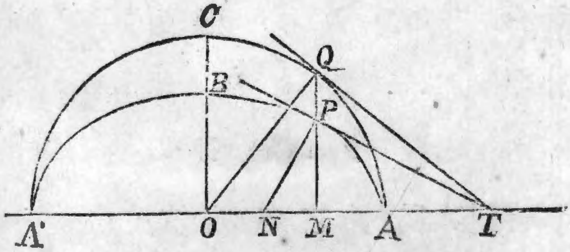
即法線分 PFF′ 三角形之 FF′ 邊爲二分。與餘二邊有比例。是以(準幾何學) $\angle FPN = \angle F'PN$。

PT 切線。既與法線直交。則必平分一通半徑。與次通半徑引長線所成之 FPG 角。

98. 過一橢圓之設點。作一切線與一法[illegible]

I. 取 P (圖四五)爲所設點。作輔助圓。並作 MP 縱坐標。引長而遇平圓於 Q。作平圓之 QT 切線而遇 x 軸於 T。及聯 PT 爲直線。則 PT 爲橢圓之切線 (§ 96)。作 PN 與 PT 直交。而 PN 即爲在 P 點之法線。

圖四十五



II. 作二通半徑。並平分其所成之角。則平分線爲在 P 點 (§ 97) 之切線及法線。

99. 求橢圓本線坡之切線方程式。

設求得

$$y=mx+c。\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

直線切

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \tag{2}$$

橢圓之狀。則此題問可以化出。

自 (1) 與 (2) 二式消去 y。並化為 x。即得 x 之二數值。

$b^2x^2+a^2(mx+c)^2=a^2b^2$

$(b^2+a^2m^2)x^2+2mca^2x+a^2c^2-a^2b^2=0$

$$x=\frac{-ma^2c\pm ab\sqrt{m^2a^2+b^2-c^2}}{m^2a^2+b^2}.$$

$x=\frac{-mca^2}{b^2+a^2m^2}\pm\frac{\sqrt{m^2c^2a^4-(b^2+a^2m^2)(a^2c^2-a^2b^2)}}{b^2+a^2m^2}$

設 $m^2a^2+b^2-c^2=0$. 或 $c=\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$。則二數值必相等。

自 (1) 方程式。設 x 之二數值相等。則 y 之二數值亦必相等。

是以 $c=\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$。則橢圓為線所割之二點必相密合。

故

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2} \tag{34}$$

直線切橢圓為 m 之各數值。

100. 求橢圓二切線互相直交之交點之軌跡。

取二切線之方程式為

$$y=mx+\sqrt{m^2a^2+b^2}. \tag{1}$$

$y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{\frac{1}{m^2}a^2+b^2}$

$$y=m'x+\sqrt{m'^2a^2+b^2}.\quad (2)$$

其所合之狀為

$$mm'=-1\text{。 或 } m'=-\frac{1}{m}.$$

設以 m' 本 m 之數值。代於 (2) 方程式之 m'。則二切線之方程式為

$y=-\frac{1}{m}x+\sqrt{\frac{1}{m^2}a^2+b^2}$

$my=-x+\sqrt{a^2+m^2b^2}$

$my+x=\sqrt{a^2+m^2b^2}$

$$y-mx=\sqrt{m^2a^2+b^2},\quad (3)$$

$$my+x=\sqrt{a^2+m^2b^2}.\quad (4)$$

(3) 與 (4) 二式。皆合切線交點之 x 與 y 之坐標。但必先消去 m 變數。則可求得二式之相關常數。

$m^2y^2+2mx+x^2=a^2+m^2b^2$

$y^2-2mx+m^2x^2=a^2+m^2b^2$

若將二方程式之方相加。則其結果為

$$(1+m^2)x^2+(1+m^2)y^2=(1+m^2)(a^2+b^2),$$

或

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

$\sqrt{a^2+b^2}=$半徑

是以所求之方程式為一平圓。是謂橢圓之準圓 (Director Circle)

習題二八

1. 問在 $2x^2+3y^2=35$ 橢圓.橫坐標 $=2$ 點之切線及法線之方程式為何.

2. 問在 $4x^2+9y^2=36$ 橢圓。橫坐標 $=-\frac{3}{2}$ 點之切線及法線之方程式爲何。

3. 求在 $x^2+4y^2=20$ 橢圓 $(2, 2)$ 切點之切線及法線之方程式．並求次切線及次法線。

4. 顯明 $y=x+\sqrt{\frac{5}{6}}$ 線．切於 $2x^2+3y^2=1$ 橢圓。

5. 求 $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ 直線能切 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 橢圓相符之狀。

6. 自一橢圓 $(3, \frac{12}{5})$ 點之次切線爲 $-\frac{16}{3}$．離心率 $=\frac{4}{5}$．問橢圓之方程式爲何。

7. 問在 $9x^2+64y^2=576$ 橢圓之切線。與 $2y=x$ 線平行之方程式爲何。

8. 求在 $3x^2+5y^2=15$ 橢圓之切線。與 $4x-3y+1=0$ 線平行之方程式爲何。

9. 問切線在 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 橢圓之何點。而在二軸之斜度相等。

10. 過 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 橢圓之何點。能作一切線及一法線。並與 x 軸爲底。成一二等邊三角形。

11. 過 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 橢圓一點。並過 $x^2+y^2=a^2$ 輔助圓之相當點。作各法線。問次法線之比例爲何。

12. 問 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 橢圓之何點有次切線與切點之橫坐標相等。

13. 求在 $16x^2+25y^2=400$ 橢圓 $(3, 4)$ 點之切線方程式。

14. 設過 $4x^2+9y^2=36a^2$ 橢圓二首通徑之各端。作諸切線。問其方程式爲何。

15. 問自橢圓中心。至與長軸成 Φ 角之切線之距離爲何。

16. 有三角形。乃自前題之切線與坐標而成。問其面積爲何。

17. 自輔助圜割短軸引長之點。作橢圓之切線。求其切點。

18. 有過中心之弦。證明過該弦二端所作之切線爲平行。

19. 求自一焦點至一切線所作垂線足之軌跡。

習題二九(總問)

1. 設有 $36x^2+100y^2=3600$ 橢圓。求在 $(8, \frac{18}{5})$ 點所作二通半徑之方程式及長度。

2. 問 $(2, 1)$ 點在 $2x^2+3y^2=12$ 橢圓之內或外。

求橢圓之離心率。

3. 設方程式爲 $2x^2+3y^2=12$.

4. 設 FBF′ 角 $=90°$ (見圖三九).

5. 有 $4x^2-8x+9y^2-36y+4=0$ 與 $4(x-1)^2+9(y-2)^2=36$. 顯明何式之橢圓。其中心爲 $(1, 2)$. 二半軸爲 3 及 2.

求橢圓之切線之方程式.

6. 設二切線在二軸成等截線。

7. 設二切線互與 BF 平行。(圖三九)

8. 設二切線互與 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 線平行。(a 與 b 爲二半軸)

9. 求本切點之 Φ 離心角之切線方程式。

10. 求自橢圓中心至 (x_1, y_1) 切點之切線之距離。

11. 求自橢圓中心至其與 x 軸成 Φ 角之切線之距離。

12. 有點之橫坐標爲在該點之法線所分。問分爲何比。

13. 設在一橢圓 (x_1, y_1) 點作一法線。問其分長軸爲二段之積爲何。

14. 求 PN 之長度。(圖四四)

15. 定明離心角在首通徑之端之數值。

16. 證明一橢圓之 b 半短軸。爲自二焦點至一切線之距離連比例之中率

17. 證明一橢圓之 b 半短軸。爲一法線與自中心至相當切線連比例之中率。

定明以下各點之軌跡。並作出之。

18. 有一切線。藏於二頂點所作切線間之部分之中點。

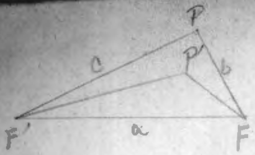
19. 有自 $(x-a)^2+y^2=r^2$ 平圓之一點至 y 軸所作之垂線中點。

20. 有經過 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 橢圓之短軸正端所作之弦之中點。

21. 有三角形之頂點其底爲 $2c$。及餘二邊之和爲 $2s$

22. 有三角形之頂點。其底爲 $2c$。及在底二角之正切之積爲 k.

23. 有一橢圓之右焦點準切線之配合點。



$PF'-PF=K$
$P'F'-P'F=K$
$PF'-PF=2a$
$F'F=2c$

第七章

雙曲線

雙曲線之本性

(Simple Properties of the Hyperbola)

101. 一點自二定點之距離之較爲常數。該點之軌跡。名爲**雙曲線**。(Hyperbola)

二定點謂之**焦點**。(Foci) 自曲線任何點至焦點相連之線謂之**通半徑**。(Focal Radius)

常數較命爲 $2a$。並二焦點間之距離爲 $2c$。

$\dfrac{c}{a}$ 分數謂之**離心率**。(Eccentricity) 而以 e 字代之。是以 $c=ae$。

既三角形二邊之較。常小於第三邊。故在雙曲線必有

$a+c>b$
$a>b-c$

$$2a<2c。\quad 或\quad a<c,\quad 或\quad e>1。$$

102. 有二焦點與 $2a$ 常數較。求作雙曲線。

I. 以動法作之。 取一界尺(圖四六)緊繫其

$PF'-PF=2a$
$F'B-(PF+BP)=2a$
$F'B-BP+BP-(PF+BP)=2a$
$PF'-PF=2a$

一端於 F′ 焦點。命其繞 F′ 活動旋轉。再取一線緊繫於界尺之他端。而使線之長度。有 $2a$，小於界尺。並緊繫線之他端於 F 焦點。乃以 P 鉛筆點。迫線緊貼於界尺。即繞 F′ 旋轉界尺。

P 點乃畫成雙曲線之一支。若互易界尺與線之端。照法可畫成雙曲線之次支。

II. <u>以點法作之</u>　取 F, F′ 為二心(圖四七)。則

$$FF'=2c.$$

平分 FF′ 於 O，並自 O 作 $OA=OA'=a$。

則　$AA'=2a$，$FA=F'A'$.

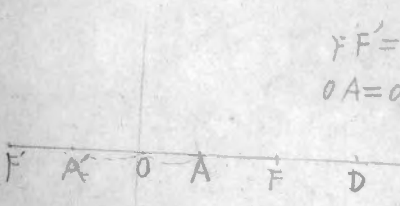
$$AF'-AF=AF'-A'F'=AA'=2a.$$

$$A'F-A'F'=A'F-AF=AA'=2a.$$

是以 A 與 A′ 為曲線之二點。

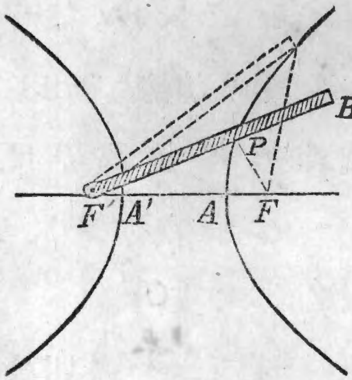
$FF'=2c$　以F为心 AD为半径 圆

$OA=OA'=a$

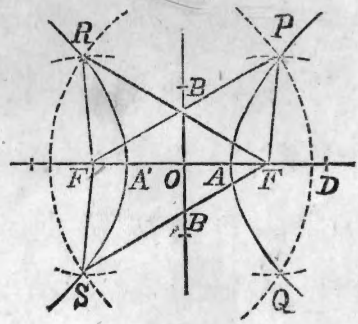


$F'P=A'D \quad FP=AD$
$F'P-FP=A'D-AD=A'A=2a$

第四十六圖



第四十七圖



自引長之 FF′ 線任取 D 點於是以 F 爲中心 AD 爲半徑再以 F′ 爲中心 A′D 爲半徑作二弧相交於 P, Q 而爲曲線內之二點若互易二半徑則再得 R, S 二點

照法求足各點即過諸點畫一曲線

過 O 作 BB′ 與 FF′ 直交在 BB′ 線各點自二焦點之距離之較既爲 O 是以曲線必不能割 BB′ 線

此軌跡有二分段或二支依 BB′ 線對稱而二支稱爲右支 (right-hand) 與左支 (left-hand)

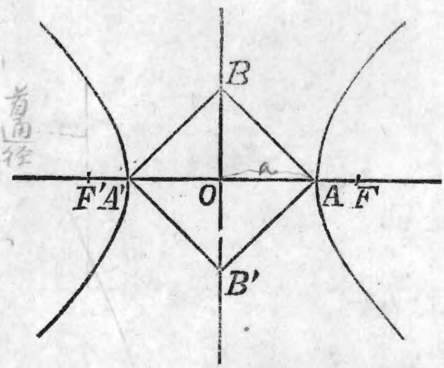
103. 在二焦點中間之 O 點爲**中心** (Centre)

一線過二焦點而遇曲線之 A, A′ 二點。謂之**頂點**。(Vertices)

AA′ 線為**橫軸**。(Transverse Axis)

橫軸與 $2a$ 常數較相等。而為中點所平分。(§ 102).

圖四十八

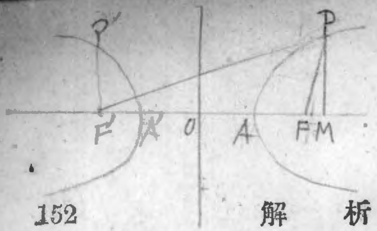


過 O 與 AA′ 直交之 BB′ 線。必不與曲線相遇。(§ 102). 設 B, B′ 二點自 A, A′ 二頂點之距離。各等於 c。則 BB′ 名為**屬軸**。(Conjugate Axis) 而命為 $2b$。

既 AOB 三角形等於 AOB′ 三角形。則 OB＝OB′＝b。即屬軸為中點所平分。

在 AOB 三角形。OA＝a。OB＝b。AB＝c。故

$$c^2=a^2+b^2。$$



$F'P-FP=2a$ $\quad =PM^2+(F'O+OM)^2$

$r'-r=\pm 2a$ $\quad =y^2+(c+x)^2$

$\Delta F'PM$ $\quad \Delta FPM$

$F'P^2=PM^2+F'M^2$ $\quad FP^2=PM^2+FM^2$

$=PM^2+(OM-$

過心與橫軸直交之弦，謂之首通徑。(Latus Rectum)

【注】 既 a 與 b 等於正三角形之二邊，則 a 不能較 b 或大或小，故長軸與短軸二名詞，不合用於雙曲線。

104. 照橢圓法內 (§ 83). 用 $r'-r=\pm 2a$ 代 $r'+r=2a$，並以 b^2 代 c^2-a^2，即得雙曲線之方程式，為

$r'^2-r^2=(c+x)^2-(x-c)^2$

$r'^2+r^2=2y^2+(c+x)^2+(x-c)^2$　$\therefore r'-r=\pm 2a$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad [35]$$

$r'+r=\pm\frac{(c+x)^2-(x-c)^2}{2a}$

橢圓與雙曲線之方程式所異者獨 b^2 之號。橢圓之方程式易為雙曲線之方程式，以 $-b^2$ 代 $+b^2$ 便得。故

$=\frac{4cx}{2a}$

自橢圓之任何公式，以 $+b^2$ 代 $-b^2$，或 b 代 $b\sqrt{-1}$，即易為雙曲線之相當公式。

在任何 (x, y) 點二通半徑之 r, r' 長度，為

$$r=\pm(ex-a), \quad r'=\pm(ex+a).$$

式內之(+)號為右支，(−)號為左支。

105. 考察 [35] 方程式，則有以下各條。

(i) 曲線割 x 軸於 $(a, 0)$ 與 $(-a, 0)$ 二實點。

(ii) 曲線並不割 y 軸，虛截線為 $\pm b\sqrt{-1}$.

$r'^2+r^2=\frac{(cx+a^2)^2+(cx-a^2)^2}{a^2}=\frac{2c^2x^2+2a^4}{a^2}$

$\therefore \frac{2c^2x^2+2a^4}{a^2}=2y^2+(c+x)^2+(x-c)^2=2y^2+2c^2+2x^2$

$2c^2x^2+2a^4=2a^2y^2+2c^2a^2+2a^2x^2$ 若 $x=0$ 則 $x^2=a^2$

$2(c^2-a^2)x^2-2a^2y^2=2a^2(c^2-a^2)$ $x=\pm a$ ∴ 与 y 軸不相

$2b^2x^2-2a^2y^2=2a^2b^2$

$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

(iii) 曲線並無一段位於 $x=+a$ 與 $x=-a$ 二直線之間。

(iv) 自該二線之外曲線向右及向左伸出無限。

(v) 橫坐標愈大則縱坐標亦愈大。

(vi) 曲線依 x 軸對稱。

(vii) 曲線依 y 軸對稱。

(viii) 各弦之過中心者皆爲中心所平分。(此所以解釋二焦點中間點之爲中心也)。

106. 雙曲線之橫軸與屬軸若互相等則此雙曲線謂之**等邊雙曲線** (Equilateral Hyperbola) 其方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ 若 $a=1$

$$x^2-y^2=a^2 \qquad [36]$$

則 $x^2-y^2=1$

等邊雙曲線之與尋常雙曲線相關猶助圓與橢圓之相關。

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $y=mx$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{m^2x^2}{b^2}=1$ $b^2x^2-a^2m^2x^2=a^2b^2$

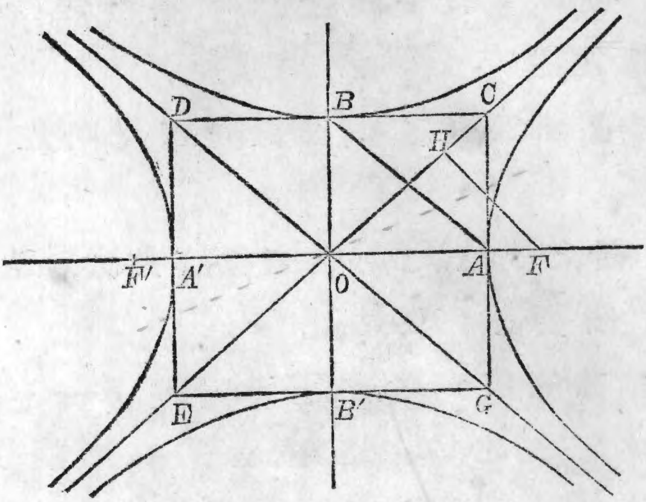
$x^2(b^2-a^2m^2)=a^2b^2$ $x^2=\frac{a^2b^2}{b^2-a^2m^2}$ $\therefore x=\pm\frac{ab}{(b^2-a^2m^2)^{\frac{1}{2}}}$

$b^2>a^2m^2$ 則 x 為實

$b^2<a^2m^2$ 則 x 為虛

$b^2=a^2m^2$ 則 $x=\infty$

圖四十九



107. 此雙曲線之 AA′ 橫軸與 BB′ 屬軸。互為彼雙曲線之 BB′ 橫軸與 AA′ 屬軸。

是以易[35]式內 a^2 與 b^2 之號。即得彼雙曲線之方程式為

$x=0$ 則 $y=\pm b$
$y=0$ 則 $x=$ 虛

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\text{ 或 }\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^3}=-1。\qquad(1)$$

此二雙曲線。是為相屬。(Conjugate)

108. 過 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 雙曲線中心之 $y=mx$ 直線。而遇該曲線於二點。則二點之橫坐標為

$$x_1=\frac{+ab}{\sqrt{b^2-m^2a^2}},\quad x_2=\frac{-ab}{\sqrt{b^2-m^2a^2}}。$$

$b^2=a^2m^2$ $m^2=\frac{b^2}{a^2}$ $m=\pm\frac{b}{a}$ $y=\pm\frac{b}{a}x$

{非代數 $y=\frac{x+1}{x}=1$ 若 $x=\infty$ 則 $y=1$}

故二點爲實,爲虛,或爲位於無窮,憑 $b^2-m^2a^2$ 之爲正,爲負,或爲圈,即憑 m^2 之小於,大於,或等於,$\frac{b^2}{a^2}$ 而斷。

如是

過中心之直線,遇一雙曲線於虛點,則該線遇相屬雙曲線於實點,反之亦然。

109. 過有限之點,而遇曲線於二無窮點之直線,謂之漸近線。(Asymptote)

自 §108 見

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

雙曲線有二實漸近線,皆過曲線之中心,而其方程式爲 $y=+\frac{b}{a}x$ 與 $y=-\frac{b}{a}x$,或

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \qquad [37]$$

習題三十

問雙曲線之方程式爲何。設

1. **橫軸 =16, 屬軸 =14,**

2. **屬軸 =12, 二焦點間之距離 =14,**

3. 二焦點間之距離＝橫軸之二倍,

4. 橫軸 $=8$, 與一點爲 $(10, 25)$,

5. 二焦點間之距離 $=2c$, 離心率 $=\sqrt{2}$,

6. 證明雙曲線之首通徑等於 $\frac{2b^2}{a}$, 並 $2a:2b::2b:$ 首通徑,

7. 有雙曲線之方程式爲 $9x^2-16y^2=144$, 求二軸,二焦點間之距離,離心率,與首通徑,

8. 作一雙曲線之方程式。與 $9x^2-16y^2=144$ 雙曲線相屬。並求其二軸,二焦點間之距離,與其首通徑。

9. 設自中心至焦點之距離。爲一雙曲線之頂點所平分。求二軸之比。

10. 證明 (x, y) 點在雙曲線之外,或上,或內。憑 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1$ 之爲負,爲圈,或爲正而斷。

11. 求等邊雙曲線之離心率。

12. 求 $25x^2-9y^2=225$ 雙曲線與 $25x+12y=45$ 直線之公點。

13. 雙曲線之二漸近線。爲 CDEG 直方形(圖四九)之二對角線。

14. 求 $16x^2-9y^2=144$ 雙曲線之二焦點及二漸近線。

15. 等邊雙曲線之二漸近線爲互相直交。故等邊雙曲線。又稱爲直交雙曲線。

16. 二相屬雙曲線共有同漸近線。

17. 求自焦點至一漸近線之垂線長度。

$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$ $y=\frac{b^2x_1}{y_1a^2}x$ ∴ $y-y_1=-\frac{y_1a^2}{x_1b^2}$

$y=mx+c$ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$ $(b^2-a^2m)x^2-2mca^2x=a^2b^2+a^2$

$D=\sqrt{4m^2c^2a^4+4(a^2b^2+a^2c^2)(b^2-a^2m^2)}=2a\sqrt{m^2c^2a^2+(b^2+c^2)(b^2-a^2m^2)}$

18. 證明一雙曲線任何二縱坐標之平方相比，如其外分橫軸爲二段之積相比.

切線及法線

(Tangents and Normals)

【注】 下列六節之結果，皆可照橢圓相當例題法作出，而上五節亦可準 §104 (94) 而得。

110. 切線在 (x_1, y_1) 之線坡爲 $\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$，及其方程式爲

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1. \qquad [38]$$

111. 法線在 (x_1, y_1) 之方程式爲

$$y-y_1=-\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1). \qquad [39]$$

112. 次切線 $=\frac{x_1^2-a^2}{x_1}$. 次法線 $=\frac{b^2x_1}{a^2}$.

113. 直線之方程式爲

$$y=mx\pm\sqrt{m^2a^2-b^2}$$

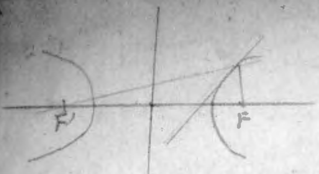
者，乃一切線爲 m 之各數值。(§99).

114. 雙曲線之準圓之方程式爲 $x^2+y^2=a^2-b^2$。(§100).

$m^2c^2a^2+b^4-b^2a^2m^2+b^2c^2-a^2c^2m^2=0$ $c^2=b^2-a^2m^2$

$c=\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$ $y=mx\pm\sqrt{b^2-a^2m^2}$

$x^2+y^2=a^2+b^2$ $x^2+y^2=a^2-b^2$



115. 雙曲線任何點之切線及法線,平分該點之二通半徑所成之角。(§ 97).

習 題 三 一

1. 求在 $16x^2-9y^2=122$ 雙曲線 $(4, 4)$ 點之切線及法線之方程式。並求次切線及次法線之長度。
2. 顯明在等邊雙曲線切點之次法線.與橫坐標相等。
3. 有等邊雙曲線一點之切線及法線之方程式爲 $5x-4y=9$, $4x+5y=40$. 問雙曲線之方程式爲何。與切點之坐標爲何。
4. 問雙曲線之何點,爲次切線等於次法線。
5. 設一曲線點。作雙曲線之切線及法線。
6. 設一橢圓與一雙曲線。共有相同二焦點。證明二曲線交點所作之切線互爲直交。
7. 證明雙曲線之漸近線。爲無窮二支之切線有限位置。
8. 證明等邊雙曲線內之法線長度。與切點自中心之距離相等。
9. 有 $x^2-y^2=a^2$ 等邊雙曲線。求自原點至首通徑端之切線之距離。
10. 問何相合之狀能令 $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ 直線切 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 雙曲線。

11. 問雙曲線之準圓爲虛之時。

12. 求自雙曲線之焦點至一切線所作垂線之足之軌跡。

習題三二(總問)

1. 引長過雙曲線一焦點之縱坐標。而割二漸近線於 P 與 Q。求 PQ 與 P 及 Q 自中心之距離。

2. 有 $9x^2-16y^2=144$ 雙曲線。問在公橫坐標爲 8 點之通半徑爲何。並在何點之通半徑互相等。

3. 問雙曲線一點之通半徑之和。與該點之橫坐標。有何相關。

4. 證明在等邊雙曲線。各縱坐標爲其足自曲線二頂點之距離連比例之中率。故設有二軸。求作等邊雙曲線之法。

5. 在等邊雙曲線。一點自中心之距離。爲其二通半徑連比例之中率。

6. 在等邊雙曲線。自曲線任何點至二頂點作線。而平分其所成之角。證平分線與漸近線平行。

7. 設 e, e' 爲二相屬雙曲線之離心率.

證明 $$\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e'^2}=1.$$

8. 過雙曲線之正頂點。作一切線。問其割相屬雙曲線於何點。

9. 有互相直交之二通半徑。證其互交數之和爲常數。

10. 過等邊雙曲線一點之縱坐標之足。作一切線。而切於以橫軸爲直徑之外作平圓。問該切線與點之縱坐標有何相關。

11. 在一等邊雙曲線。求自屬軸正端所作之切線之方程式。

12. 問自雙曲線屬軸內之何點。作切線爲互相直交。

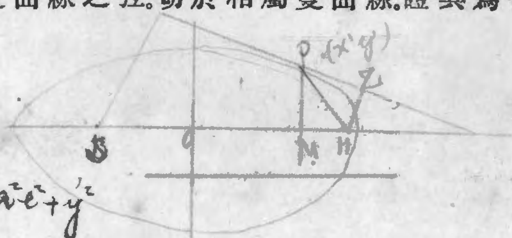
13. 問有何相合之狀，令所作正方形之邊。必與雙曲線之二軸平行。及頂點皆全位於曲線之上。

14. 有 $16x^2-9y^2=144$ 雙曲線之弦。而爲 $(12,\ 3)$ 點所平分。求其方程式。

15. 有 $16x^2-9y^2=144$ 雙曲線之切線。與 $y=4x-3$ 線平行。求其方程式。

16. 自任何雙曲線之任何點。作二垂線垂於二漸近線。求此二垂線之積。

17. 有雙曲線之弦。切於相屬雙曲線。證其爲切點所平分。



$x = ae \quad y = 0$

$\overline{PH}^2 = PM^2 + MH^2$

$= y'^2 + (ae - x')^2$

$= x'^2 - 2aex' + a^2e^2 + y'^2$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 即 $y^2 = b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$b^2 = a^2 - e^2a^2$

$y^2 = \frac{a^2 - a^2e^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (1 - e^2)(a^2 - x^2)$

$PH^2 = x'^2 - 2aex' + a^2e^2 + (1+e^2)(a^2 - x'^2)$

$= x'^2 - 2aex' + a^2e^2 + a^2 - x'^2 - e^2a^2 + e^2x'^2$

$= a^2 - 2aex' + e^2x'^2 = (a - ex')^2$

$\therefore PH=a-ex$ S之坐標 $x=-2a$ $y=0$
$SP=a+ex'$ $\therefore PH+SP=2a$ $x=a-e$ $y=0$
$HZ=-\frac{\frac{ex'}{a}-1}{\sqrt{\frac{x'^2}{a^4}+\frac{y'^2}{b^4}}}=\frac{ab^2(a-ex')}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}}=b\sqrt{\frac{a-ex'}{a+ex'}}$ $Sy^2=b^2\frac{a+ex'}{a-ex'}$

第八章

二次之軌跡

(Loci of the Second Order)

116. 二次方程式所代之軌跡。(即非一次者.)是謂**二次之軌跡**。

前數章所論平圓,拋物線,橢圓,雙曲線。皆二次之軌跡也。今考四曲線之外。尚有無他二次之軌跡。更言之。即定明二次方程式。代有何種軌跡也。

因作二次之總方程式。爲

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

並取式內之縱橫軸爲直交。因縱橫軸設爲斜交。可變爲直交縱橫軸之方程式。而並不改變方程式之次數。或方程式所代軌跡之自然性也。(§ 68).

117. 求二次總方程式代一次二軌跡之狀。

取 (1) 式化爲 y 變數。即得

$$y=-\frac{Cx+E}{2B}\pm\frac{1}{2B}\sqrt{Lx^2+Mx+N}. \qquad (2)$$

式內之 $L=C^2-4AB$。$M=2(CE-2BD)$。$N=E^2-4BF$。

設 Lx^2+Mx+N 爲完全之方。則(2)或(1)式爲一次之二軌跡。

今準代數學。得 Lx^2+Mx+N 爲完全方之狀爲

$$M^2-4LN=0.$$

或以 L, M, 及 N 之數值代之。得

$$4(CE-2BD)^2-4(C^2-4AB)(E^2-4BF)=0.$$

或

$$F(C^2-4AB)+AE^2+BD^2-CDE=0. \qquad (3)$$

在(3)方程式之左邊之量。常以 Δ 命之。且此式謂之方程式之**判定式**。(Discrimuant)

當 $\Delta=0$。則(1)方程式代一次之二軌跡。若化(1)式爲 x 與 y 之二純方程式。即得其二軌跡。

有中心曲線。Σ 不爲圈.
(Central Curve)

118. 過一點之各弦。俱爲該點所平分。此點謂之曲線之中心。

軌跡之分爲**有中心** (Central) 或**無中心**。(Non-central) 憑其有,或無,已定之中心而定。平圓,橢圓,及雙曲線,皆屬第一類。拋物線則屬第二類。

119. (1)方程式屬於軌跡中心。求所代之有中心軌跡之方程式。

取原點易至 (h, k) 點。而擇 h 與 k 之數值。令含 x 與 y 一方之各項消去。取 $x+h$ 與 $y+k$ 代於(1)式之 x 與 y。而 A, B, 與 C 之係數仍不變。即可作該變化之方程式,爲

$$Ax^2+By^2+Cxy+D'x+E'y=R, \qquad (4)$$

式內之 $D'=2Ah+Ck+D,$

$E'=2Bk+Ch+E,$

$R=-[Ah^2+Bk^2+Chk+Dh+Ek+F]。$

h 與 k 之數值,能令 D' 與 E' 消去。化

$$2Ah+Ck+D=0,$$

$$2Bk+Ch+E=0,$$

二方程。即得 h 與 k 之數值,爲

$$h=\frac{CE-2BD}{4AB-C^2}, \quad k=\frac{CD-2AE}{4AB-C^2}.$$

設 $4AB-C^2$ 不爲圈。以 Σ 命之。而 h 與 k 之
只為一
數値爲有限及單並(4)方程式。可作爲

$$Ax^2+By^2+Cxy=R. \tag{5}$$

自(5)式可見 (x, y) 設爲其軌跡之一點。則 $(-x, -y)$ 亦爲其軌跡之點。即 (h, k) 新原點,爲跡軌之中心。故

當 Σ 不爲圈。則(1)方程式可改爲(5)式。並代有中心曲線。

當 $\Sigma=0$。則 h 與 k 之數値爲無限。並(1)式之軌跡無已定中心。故

當 $\Sigma=0$。則(1)式不能改爲(5)式。並代無中心曲線。

若 R 之數值。可併爲下列有用之式。並顯明 R 與 Δ 同消去。

$$R=-[Ah^2+Bk^2+Chk+Dh+Ek+F].$$

$$=-\tfrac{1}{2}[(2Ah+Ck+D)h+(2Bk+Ch+E)k+Dh+Ek+2F]$$

$$=-\tfrac{1}{2}(D'h+E'k+Dh+Ek+2F).$$

$$=-\tfrac{1}{2}(Dh+Ek+2F)$$

$$=-\tfrac{1}{2}\frac{2BD^2-CDE+2AE^2-CDE+2F(C^2-4AB)}{C^2-4AB}。$$

$$=\frac{\Delta}{\Sigma}。$$

120. 改(5)式爲已知之式。而令 xy 項消去。

欲消去 xy 項。可易直交縱橫軸之方向。旋過一 θ 角。使原點不變。於是定明 θ 之數值。而令含有 xy 之新項與圈相等。

取(§63)之數值。

$$x\text{餘弦}\,\theta-y\text{正弦}\,\theta,$$

$$x\text{正弦}\,\theta+y\text{餘弦}\,\theta,$$

代於(5)方程式之 x 與 y。則(5)方程式成爲

$$Px^2+Qy^2+C'xy=R.$$

式內之 $P=A\text{餘弦}^2\theta+B\text{正弦}^2\theta+C\text{正弦}\,\theta\,\text{餘弦}\,\theta,$ (6)

$$Q=A\text{正弦}^2\theta+B\text{餘弦}^2\theta-C\text{正弦}\,\theta\,\text{餘弦}\,\theta, \quad (7)$$

$$C'=2(B-A)\text{正弦}\,\theta\,\text{餘弦}\,\theta+C(\text{餘弦}^2\theta-\text{正弦}^2\theta). \quad (8)$$

置 $C'=0$。準三角法。

$$(A-B)\text{正弦}\,2\theta-C\,\text{餘弦}\,2\theta=0。\tag{9}$$

或
$$\text{正切}\,2\theta=\frac{C}{A-B}。\tag{10}$$

既任何實數,正數,或負數。爲角在圈與 π 間之正切。則(10)方程式。爲 θ 在圈與 $\frac{1}{2}\pi$ 間之數值適合。

照此變化。(5)方程式可改爲

$$Px^2+Qy^2=R,\tag{11}$$

式內之討論。可自次節得之。

系一 本 A, B, C 之 P 與 Q 數值可自下法得之。

自(6)與(7)二式。準加法並減法。

$$P+Q=A+B,\tag{12}$$

$$P-Q=(A-B)\,\text{餘弦}\,2\theta+C\,\text{正弦}\,2\theta。\tag{13}$$

(9)方程式可列爲

$$0=(A-B)\,\text{正弦}\,2\theta-C\,\text{餘弦}\,2\theta。\tag{14}$$

將(13)與(14)自乘相加得

$$(P-Q)^2=(A-B)^2+C^2,\tag{15}$$

或
$$P-Q=\pm\sqrt{(A-B)^2+C^2}。\tag{16}$$

$C\cos 2\theta = (A-B)\sin 2\theta$

$\cos 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{C}(A-B)$

$P-Q=(A-B)\frac{\sin 2\theta}{C}(A-B)+C\sin 2\theta=\frac{[(A-B)^2+C^2]}{C}\sin 2\theta$

如是自(12)與(16)二式。得

$$P=\tfrac{1}{2}[A+B\pm\sqrt{(A-B)^2+C^2}],\qquad(17)$$

$$Q=\tfrac{1}{2}[A+B\mp\sqrt{(A-B)^2+C^2}].\qquad(18)$$

而 P 與 Q 皆常為實數值。

系二 將(12)之方.減(15)。得

$$4PQ=4AB-C^2=\Sigma.\qquad(19)$$

故 P 與 Q 之有同號或異號。憑 Σ 之為正或為負而斷。

系三 凡用(17)與(18)二公式。其根前之號。乃一至要之問題。今以(14)之數值。代於(13)之餘弦 2θ 之內。即得

$$P-Q=\frac{[(A-B)^2+C^2]\text{ 正弦 }2\theta}{C}.$$

既分數之分子常為正號。則 P−Q 必與 C 同號。即取(16)式內之上號或下號。憑 C 之為正或為負而斷。

故取(17)與(18)式內之(+)號或(−)號。憑 C 之為正,或為負,而斷。

121. 凡(11)方程式所代軌跡之自然性。乃

$\frac{x^2}{Q}+\frac{y^2}{P}=\frac{R}{PQ}$ 与 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 同

即 $\frac{P}{R}x^2+\frac{Q}{R}y^2=1$ 或 $\frac{x^2}{\frac{R}{P}}+\frac{y^2}{\frac{R}{Q}}=1$

依 P, Q, 與 R 之號。因大分爲二類。視 Σ 之爲正,或爲負,而定。並每類再分爲三端。

類一. Σ 爲正。 $\Sigma>0$

準(19)式。在此類 P 與 Q 必有同號。

端一 設 R 與 P, Q 同號。則準 § 88。其軌跡 $Px^2+Qy^2=R$ 爲一橢圓,而有 $\sqrt{\frac{R}{P}}$ 及 $\sqrt{\frac{R}{Q}}$ 爲其二半軸。

設 P=Q。則軌跡爲一平圖。

端二 設 R 與 P, Q 異號。則無 x 與 y 之實數值與(11)式相合。是故無有實軌跡。

端三 設 R=0。則軌跡爲 (0, 0) 單點。

類二. Σ 爲負.

準(19)式。在此類. P 與 Q 必有異號。

端一 設 R 與 P 同號。準除法。使(11)方程式爲[34]方程式。是以軌跡爲一雙曲線。有橫軸在於 x 軸。並有二半軸爲

$$a=\sqrt{\frac{R}{P}},\quad b=\sqrt{\frac{R}{-Q}}.$$

$\frac{x^2}{\frac{R}{P}}+\frac{y^2}{\frac{R}{Q}}=1$ 入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$Q=0 \quad Q=Q' \quad P'x^2-Q'y^2=0 \quad (\sqrt{P}x+Q'y)(\sqrt{P}x-Q'y)=$

端二 設 R 與 Q 同號。準除法。使(11)方程式爲(§ 107)之(1)方程式。是以軌跡爲一雙曲線。有橫軸在於 y 軸。

端三 設 R=0. 則軌跡爲二直線。而相交於原點。並其方程式,爲 $y=\pm\sqrt{\dfrac{P}{-Q}}x$。

$\Sigma=C^2-4AB \quad y=-\dfrac{Cx+E}{2B}\pm\dfrac{1}{2B}\sqrt{\Delta x^2+Mx+N} \quad L=C^2-4AB$

無中心曲線 $\Sigma=0$.

$(CE-2BD)^2-(C^2-AB)(E^2-4BE)=0 \quad M=2(CE-2BD)=0$

(Non-central Curves)

$\therefore y=\dfrac{Cx+E}{2B}\pm\dfrac{1}{2B}\sqrt{E^2-4BF} \quad y=\dfrac{Cx+E}{2B}+\dfrac{1}{2B}\sqrt{E^2-4BF} \quad y=-\dfrac{Cx+E}{2B}-\dfrac{1}{2B}$

122. 當 Δ 與 Σ 皆爲圈。定明(1)式之軌跡。

$E^2-4BF>0$

$E^2-4BF<0$

設 $\Delta=\Sigma=0$。則自(§ 117) Δ 之第一式有

$$CE-2BD=0. \tag{20}$$

故 $\qquad L=M=0$ $\qquad$ (§ 117)

與(2)式成爲

$$2By+Cx+E\mp\sqrt{E^2-4BF}=0. \tag{21}$$

該式代二平行直線,二密合直線,或無軌跡。憑 $E^2-4BF>, =,$ 或 <0 而斷。

當 $4AB-C^2=0$, C 若不爲圈。則 A 或 B 皆不爲圈。C 若爲圈。則 A 或 B 皆必爲圈。既 $A=B=C=0$。則(1)式不爲二次式。

當 $C=B=0$。化(1)式為 x。並舉上設之狀。即得代(21)式之相當方程式為

$$2Ax+Cy+D\mp\sqrt{D^2-4AF}=0。\qquad(22)$$

其軌跡亦為二平行直線。

故當 Δ 與 Σ 皆為圈。則(1)方程式代二平行直線,二密合直線,或無界線。

系一 自 $\Sigma=0$ 與(20)間。將 B 消去。即得

$$CD-2AE=0。\qquad(23)$$

照法自 $\Sigma=0$ 與(23)。將 A 消去。亦得(20)。

自此等結果。h 與 k 之數值。可自下條知之。

(i) 當 $\Delta=\Sigma=0$。h 與 k 皆為無限。反之亦然。

(ii) h 與 k 之數值皆為無限。

123. 當 Σ 為圈。與 Δ 不為圈。定明(1)式之軌跡。

照 §120 法,令(1)式含有 xy 項消去。即旋二軸過 θ 角。即得

$$\text{正切 } 2\theta=\frac{C}{A-B}。\qquad(24)$$

方程式。而定出角之同數值。

設 P, Q, U, V 遞代 x^2, y^2, x, y 新係數。而 P 與 Q 之數值。與 §120 所列之 P 與 Q 者相仿。與

$$U = D餘弦\theta + E正弦\theta。 \tag{25}$$

$$V = -D正弦\theta + E餘弦\theta。 \tag{26}$$

既 $C^2 = 4AB$。自 (17) 與 (18) 內。若 C 爲正。即得

$$P = A + B,\ Q = 0.$$

若 C 爲負。即得

$$P = 0,\ Q = A + B.$$

並將 (1) 式爲

$$Qy^2 + Ux + Vy + F = 0。 \tag{27}$$

再以 Q 除各項。得

$$y^2 + \frac{U}{Q}x + \frac{V}{Q}y + \frac{F}{Q} = 0。$$

或 $$y^2 + \frac{V}{Q}y + \frac{V^2}{4Q^2} + \frac{U}{Q}\left(x + \frac{F}{U} - \frac{V^2}{4QU}\right) = 0。$$

或 $$\left(y + \frac{V}{2Q}\right)^2 = -\frac{U}{Q}\left(x + \frac{4QF - V^2}{4UQ}\right)。 \tag{28}$$

設取 $\left(-\frac{4QF - V^2}{4UQ},\ -\frac{V}{2Q}\right)$

爲新原點。則 (28) 方程式成爲

$-\frac{V}{2Q}$ $-\frac{4FQ - UV^2}{4QU}$

$$y^2 = -\frac{U}{Q}x,。$$

該式代一拋物線。其軸與 x 軸密合。並曲線位於新原點之正邊或負邊。憑 U 與 Q 之爲異號，或爲同號而斷。(§ 71).

拋物線之頂點爲原點。與首通徑等於曲線方程式內 x 之係數。

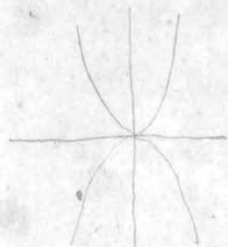
設 $U=0$。則 (27) 式代二平行直線。

當 C 爲正。則總方程式成爲　P=A+B, Q=0

$$Px^2+Ux+Vy+F=o。\tag{29}$$

變原點至

$$\left(-\frac{U}{2P},\ -\frac{4PF-U^2}{4VP}\right)$$



點。則 (29) 式成爲

$$x^2=-\frac{V}{P}y。$$

該式代一拋物線。而有 y 軸爲其軸。並位於新原點之正邊或負邊。憑 V 與 P 之爲異號，或爲同號而斷。

P 或 Q 之數值若不爲圈。則爲 A+B。其 U 與 V 之數值。可自 (25) 及 (26) 二式得之。

【註】 本式之原係數。亦可得 U 與 V 之數值如下。

準三角法。自(24)式得

$$\text{正切}\,\theta=\frac{-(A-B)\pm\sqrt{(A-B)^2+C^2}}{C}。$$

式內舉 $4AB=C^2$ 之狀，若 C 爲負，即得 $\tan\theta=\frac{B-A}{C}\pm\frac{A+B}{C}$

$$\text{正切}\,\theta=-\frac{2A}{C}。$$

若 C 爲正，即得

$$\text{正切}\,\theta=\frac{2B}{C}。$$

如是 C 若爲負。

$$\text{正弦}\,\theta=\frac{2A}{\sqrt{4A^2+C^2}}，\text{餘弦}\,\theta=\frac{-C}{\sqrt{4A^2+C^2}}。$$

與 C 若爲正。

$$\text{正弦}\,\theta=\frac{2B}{\sqrt{4B^2+C^2}}，\text{餘弦}\,\theta=\frac{C}{\sqrt{4B^2+C^2}}。$$

乃以數值代於(25)及(26)二式，若 C 爲負，即得

$$U=\frac{2AE-CD}{\sqrt{4A^2+C^2}}，V=-\frac{2AD+CE}{\sqrt{4A^2+C^2}}。\tag{30}$$

若 C 爲正，即得

$$U=\frac{2BE+CD}{\sqrt{4B^2+C^2}}，V=\frac{CE-2BD}{\sqrt{4B^2+C^2}}。\tag{31}$$

設 $C=A=0$，則所設之方程式爲(27)式。其軌跡爲一拋物線，設 $C=B=0$，則所設方程式爲(29)式。其軌跡亦爲一拋物線。

124. 總結以上之理，列表如下。

二次總方程式所代之軌跡。 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ex+F=0$。			
類	狀		軌跡
I 有中心之軌跡	Σ 為正．	Δ 不為圈．	橢圓．或無軌跡．
	Σ 為正．	$\Delta=0$.	點．
	Σ 為負．	Δ 不為圈．	雙曲線．
	Σ 為負．	$\Delta=0$.	二相交直線．
II 無中心之軌跡	$\Sigma=0$.	Δ 不為圈．	拋物線．
	$\Sigma=0$.	$\Delta=0$.	二平行直線． 一直線． 或無軌跡．

可見除上列各章所習讀之軌跡外，並無別種二次軌跡。

125. 例題 (Examples)

1. 定明

$$5x^2+5y^2+2xy-12x-12y=0 \qquad (1)$$

軌跡之自然性，變其方程式，並作出之。

有 $A=5$。$B=5$。$C=2$。$D=-12$。

$$E=-12。F=0。$$

如是 $\Sigma=96$。$\Delta=1152$。

故方程式乃代一橢圓。或無實軌跡。

$$R=\Delta\div\Sigma=12。h=1。k=1。$$

是以軌跡屬於新平行二軸。而過 (1, 1) 中心之方程式。爲

$$5x^2+2xy+5y^2=12。\qquad (2)$$

令式內之 xy 項消去。有

$$正切\ 2\theta=\frac{C}{A-B}=\frac{2}{0}=\infty。$$

如是 $2\theta=90°$。或 $\theta=45°$。

$$P=\tfrac{1}{2}[A+B+\sqrt{(A-B)^2+C^2}\,]=6。$$

$$Q=\tfrac{1}{2}[A+B-\sqrt{(A-B)^2+C^2}\,]=4。$$

(準 §120 用 P 與 Q 之數值之(+)號。

故準 §120。而橢圓屬於其兩軸之方程式。爲

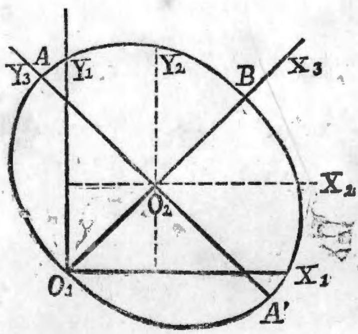
$$6x^2+4y^2=12。或\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}=1。\qquad (3)$$

如是 $a=\sqrt{3}$。$b=\sqrt{2}$。與 a 位於 y 軸之上。

欲作方程式。先作O_1X_1, O_1, Y_1二軸(圖五十)。並置(1, 1)中心。過O_2點作O_2X_2, O_2Y_2第二縱橫軸。再過O_2作O_2X_3, O_2Y_3第三縱橫軸。而令$X_2O_2X_3$等於$45°$角。

取$O_2A'=O_2A=\sqrt{3}$。並$O_2O_1=O_2B=\sqrt{2}$。故有BO_1與AA'爲二軸之橢圓。即所求之軌跡也。

圖五十



軌跡屬於O_1X_1, O_1Y_1二軸之方程式爲(1)式。其屬於O_2X_2, O_2Y_2之方程式爲(2)。並屬於O_2X_3, OY_3之方程式爲(3)。然作此軌跡。可無須作O_2X_2, O_2Y_2第二縱橫軸。

2. 定明

$$x^2+y^2-5xy+8x-20y+15=0 \qquad (1)$$

軌跡之自然性。變其方程式並作出之。

有 $\Sigma=-21$。$\Delta=-21$。

是以軌跡爲一雙曲線。

$R=\Delta\div\Sigma=1$。$h=-4$。$k=0$。

故第一次變之方程式爲

$$x^2+y^2-5xy=1 \tag{2}$$

第二次變

$\theta=45^\circ$。$P=-\frac{3}{2}$。$Q=\frac{7}{2}$。 $\therefore -\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}y^2=1$

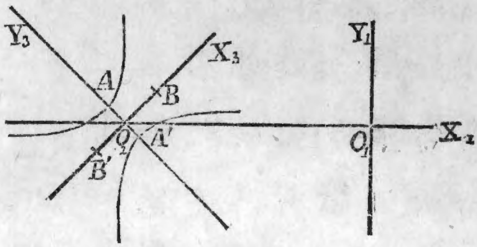
故曲線屬於其二軸之方程式爲

$$3x^2-7y^2=-2.$$

自式內可見 $a=\sqrt{\frac{2}{7}}$。$b=\sqrt{\frac{2}{3}}$。與 a 或橫軸。位於 y 軸之上。

欲作方程式。先作 O_1X_1, O_1Y_1 二軸。並置(−4, 0)中心。過該點作 O_2X_3, O_2Y_3 第三縱橫軸。而令 $X_1O_2X_3=45^\circ$。於是取 $O_2A'=O_2A=\sqrt{\frac{2}{7}}$。與 $O_2B=O_2B'=\sqrt{\frac{2}{3}}$。並作雙曲線。而有 AA′ 與 BB′ 遞爲其橫軸與屬軸。

圖五十一



3. 定明

$$x^2+2xy-y^2+8x+4y-8=0。\qquad (1)$$

軌跡之自然性。變其方程式，並作出之。

有 $\Sigma=-8$, $\Delta=-176$。故軌跡爲一雙曲線。

$R=22$, $h=-3$, $k=-1$.

故第一次變之方程式爲

$$x^2+2xy-y^2=22。\qquad (2)$$

$\theta=22\frac{1}{2}°$, $P=\sqrt{2}$, $Q=-\sqrt{2}$.

故曲線屬於其二軸之方程式爲

$$\sqrt{2}\,x^2-\sqrt{2}\,y^2=22。\qquad (3)$$

軌跡爲等邊雙曲線，而其橫軸位於 x 軸之上。(習者試作其軌跡)。

4. 定明

$$x^2+y^2-2xy+2x-y-1=0。\qquad (1)$$

軌跡之自然性。變其方程式，並作出之。

有 $\Sigma=0$, Δ 不為圈。

是以軌跡為拋物線。

$\theta=45°$, $P=0$, $Q=2$, $U=\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $V=-\frac{3}{2}\sqrt{2}$。

旋二軸過 45° 角。故方程式成為

$$2y^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x-\frac{3}{2}\sqrt{2}\,y-1=0,$$

或 $$y^2-\frac{3}{4}\sqrt{2}\,y+\left(\frac{3}{8}\sqrt{2}\right)^2=\frac{1}{4}\sqrt{2}\,x+\frac{25}{32}。$$

或 $$\left(y-\frac{3}{8}\sqrt{2}\right)^2=-\frac{1}{4}\sqrt{2}\left(x-\frac{25}{16}\sqrt{2}\right)。\qquad(2)$$

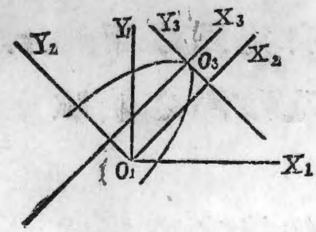
過平行二軸。其原點為 $\left(\frac{25}{16}\sqrt{2},\ \frac{3}{8}\sqrt{2}\right)$。則 (2) 式成為

$$y^2=\frac{1}{4}\sqrt{2}\,x。\qquad(3)$$

其軌跡為一拋物線。而首通徑為 $\frac{1}{4}\sqrt{2}$。

欲作方程式。先作 O_1X_1, O_1Y_1 原縱橫軸。於是作 O_1X_2, O_1Y_2 第二縱橫軸。而令 $X_1O_1X_2=45°$，置 O_3 新原點。為 $\left(\frac{25}{16}\sqrt{2},\ \frac{3}{8}\sqrt{2}\right)$。並過該點作

圖五十二



O_3X_3, O_3Y_3 第三縱橫軸。即可作(3)式之軌跡。

5. 定明

$$x^2-4xy+4y^2-6x+12y=0$$

軌跡之自然性。

有 $\Sigma=0$ 與 $\Delta=0$。

分方程式之因子，或化方程式爲 x 或 y，即得

$$x-2y=0, \quad x-2y-6=0$$

二線之方程式。

故其軌跡爲二平行直線。

6. 定明

$$y^2-xy-6x^2-3x+y=0$$

軌跡之自然性。

有 Σ 爲負，與 $\Delta=0$。

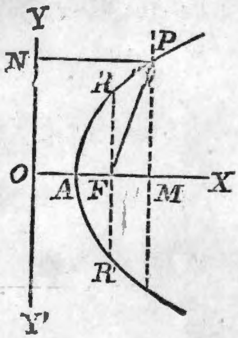
故軌跡爲二相交直線。其方程式爲

$$y+2x+1=0, \text{ 與 } y-3x=0.$$

○126. 一點自定點之距離。與其自定直線之距離有常比例。該點之軌跡。名爲圓錐線. (Conic)

○127. 求圓錐線之方程式。

圖五十三



取 F 爲定點。與 YY′ 爲定直線。過 F 作 XO 與 YY′ 直交。並取 OX 與 OY 爲其二軸。取 p 命爲 OF 距離。與 e 爲常比例。則 $FP \div NP = e$。P 爲曲線內任何 (x, y) 點。

今 $\overline{FP}^2 = \overline{FM}^2 + \overline{MP}^2$.

但 $FP = e \times NP = ex$,

$FM = x - p$, $MP = y$.

是以 $e^2x^2 = (x-p)^2 + y^2$,

或 $$(1-e^2)x^2 + y^2 - 2px + p^2 = 0, \tag{1}$$

而爲所求之方程式。

系一 在(1)方程式。乃二次之方程式。

$\Sigma = 4(1-e^2)$。與 $\Delta = 4p^2e^2$。

故當定點在定直線之外。Δ 不爲圈。

設 $e<1$, $\Sigma>0$. 則圓錐線爲橢圓。

設 $e=1$, $\Sigma=0$. 則圓錐線爲拋物線。

設 $e>1$, $\Sigma<0$. 則圓錐線爲雙曲線。

當定點在定直線之內。$\Delta=0$。

設 $e<1$, $\Sigma>0$, 則圓錐線爲 $(0, 0)$ 點。

設 $e=1$, $\Sigma=0$, 則圓錐線爲直線。

設 $e>1$, $\Sigma<0$. 則圓錐線爲二相交直線。

設 $e=0$, 準 §49 則圓錐線爲平圓,或爲一點。憑 p 之不爲圈或爲圈。而斷。

習題三三

定明以下軌跡之自然性。變其方程式。並作出之。

1. $3x^2+2y^2-2x+y-1=0.$

2. $3x^2+2xy+3y^2-16y+23=0.$

3. $x^2-10xy+y^2+x+y+1=0.$

4. $x^2+xy+y^2+x+y-5=0.$

5. $y^2-x^2-y=0.$

6. $1+2x+3y^2=0.$

7. $y^2-2xy+x^2-8x+16=0.$

8. $x^2-2xy+y^2-6x-6y+9=0.$

9. $y^2-2x-8y+10=0.$

10. $4x^2+9y^2+8x+36y+4=0.$

11. $52x^2+72xy+73y^2=0.$

12. $9y^2-4x^2-8x+18y+41=0.$

13. $y^2-xy-5x+5y=0.$

$y=a^x$, $y=a^{-x}$, $x=a^{-1}y$

第九章

高等平曲線

(Higher Plane Curves)

128. 曲線共有二大類。代數曲線及越曲線是也。**代數曲線** (Algebraic Curve) 者。其線式只含有代函數也。超 **越曲線** (Transcendental Curve) 者。其線式所含超乎代函數之外也。如 $y=a^x$, $y=$正切x, $y=(a-x)$正切$(\frac{1}{2}\pi x\div a)$, $y=$正弦^{-1}x 等。皆爲越曲線。越曲線與各種代數曲線。其出乎二次者。均謂之高等平曲線。

任取 $F(x,y)$ 記號。爲 x 與 y 之有理整函數。在于三次或三次以上者。設 $F(x,y)$ 分爲 x 與 y 之純因子,或平方因子。則 $F(x,y)=0$ 之軌跡。爲一次或二次內之線。若 $F(x,y)$ 不分爲 x 與 y 之有理因子。則 $F(x,y)=0$ 之軌跡。爲高等平曲線。如 $y^3-x^3=(y-x)(y^2+xy+x^2)=0$ 之軌跡。爲 $y-x=0$ 直線。與 $y^2+xy+x^2=0$ 橢圓。又如 y^4+

$\tan 2\theta=\frac{C}{A-B}=\frac{0}{0}=\infty$

$P=\frac{1}{2}(1+1+\sqrt{1})=\frac{3}{2}$ $Q=\frac{1}{2}$

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$; $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

$(x'\sin 45° + y'\cos 45°)^2 + (x'\cos 45° - y'\sin 45°)(x'\sin 45° + y'\cos 45°)$

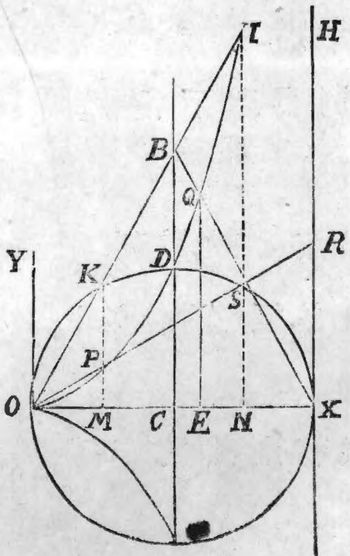
$+(x'\cos 45° - y'\sin 45°)^2 = (\frac{x'}{\sqrt2}+\frac{y'}{\sqrt2})^2 + (\frac{x}{\sqrt2}-\frac{y}{\sqrt2})(\frac{x}{\sqrt2}+\frac{y}{\sqrt2}) + (\frac{x}{\sqrt2}$

$=2\cdot\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=0$ $\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2$

$x^2y^2+2y^2-2x^4-5x^2-3=(y^2+2x^2+3)(y^2-x^2-1)=0$ 之軌跡。為 $y^2+2x^2+3=0$ 楕圓。與 $y^2-x^2-1=0$ 雙曲線。若 $y^3-ax+x^2=0$ 之軌跡。則為三次之高等平曲線。

129. 戴奧哥盧之曲線 (The Cissoid of Diocles) 任取 XH (圖五四) 為 XSO 平圓之切線。在 OX 直徑之項點。自 O 點至 XH 線任取一 OR 直線。割平圓於 S 點。而令 OP=RS。當 OR 自 O 點

圖五十四



$y=\frac{(x+1)^2}{x}=x+2+\frac{1}{x}$ 设 $y=y_1+y_2$ $y_1=x+2$ $y_2=\frac{1}{x}$

運轉。而P點所得之軌跡。即爲戴奧哥盧之曲線。

若求屬於OX與OY直交二軸之方程式。法取 $OM=x$, $MP=y$, 並 $OC=CX=CD=r$.

今 $$MP:OM::NS:ON. \tag{1}$$

既 $OP=RS$; $OM=XN$.

故 $ON=OX-XN=OX-OM=2r-x$.

與 $NS=\sqrt{ON\times XN}=\sqrt{(2r-x)x}$.

用此數值代於(1)式內。則得方程式,爲

$$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{(2r-x)x}}{2r-x}, \text{ 或 } y^2=\frac{x^3}{2r-x} \tag{40}$$

考[40]式,則得以下各條。

(i) 該曲線位於 $x=0$ 與 $x=2r$ 二線之內。

(ii) 曲線依 x 軸對稱。

(iii) 曲線必經過該垂於 OX 之直徑之二項點。

(iv) 曲線有兩無限支線。其 $x=2r$ 即爲漸近線。

系一 若求極方程式。取 $\theta=XOP$, 與 $\rho=OP$.

則 $\quad$ 餘弦 $\theta=\frac{\text{OX}}{\text{OR}}$ 或 $\frac{\text{OS}}{\text{OX}}$.

故 $\rho=\text{OP}=\text{SR}=\text{OR}-\text{OS}=\frac{2r}{\text{餘弦}\,\theta}-2r$ 餘弦 θ

$$=2r\frac{\text{正弦}^2\theta}{\text{餘弦}\,\theta}.$$

是以 $\rho=2r$ 正弦 θ 正切 θ.

而為所求之極方程式。

系二 在(圖五四)取 $\text{CB}=2r$. 並作 BX 線割曲線於 Q 點。既 $\text{CX}=\frac{1}{2}\text{CB}$. 則 $\text{EX}=\frac{1}{2}\text{EQ}$. 但自曲線之方程式得

$$\overline{\text{EQ}}^2=\frac{\overline{\text{OE}}^3}{\text{EX}}=\frac{\overline{\text{OE}}^3}{\frac{1}{2}\text{EQ}},\text{ 是以 }\overline{\text{EQ}}^3=2\overline{\text{OE}}^3.$$

取 c 為任何所設立方體之邊。再取 c_1 令

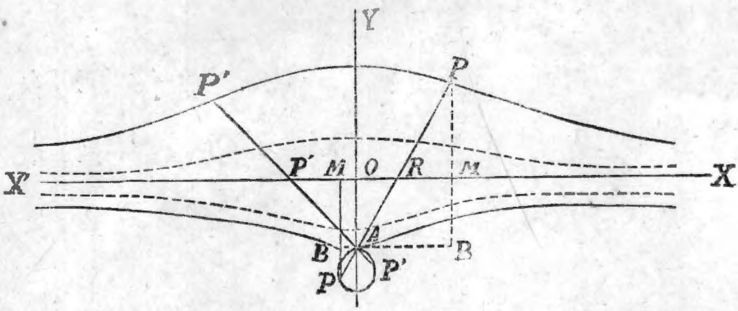
$$\text{OE}:\text{EQ}::c:c_1,\text{ 或 }\overline{\text{OE}}^3:\overline{\text{EQ}}^3::c^3:c_1^3.$$

但 $\quad \overline{\text{EQ}}^3=2\overline{\text{OE}}^3$, 是以 $c_1^3=2c^3$.

即 c_1 為一立方體之邊。其體積較所設立方體加倍。照法取 $\text{CB}=mr$. 即得立方體之邊。其體積較所設立方體為 m 倍。

130. 尼哥米德之曲線 (The Conchoid of Nicomedes) 尼哥米德之曲線。乃一P點之軌跡。令點自 XX′ 定線之距離爲常數。而從經過 P 點與 A 定點之線量度。則 A 點爲極。(Pole) XX′ 爲準線。(Directrix) RP 常距離爲首通徑。(Parameter) 而記以 b 字母。

圖 五 十 五



作尼哥米德曲線之法。經過 A 點任作 AP 線。而割 XX′ 於 R。自 XX′ 兩傍度 $RP=b$, 照法置 P′ 等點。過諸點即畫得該曲線。

若求該曲線。屬於 XX′, 與過 A 點垂於 XX 之直線之方程式。取

$$OM=x, \quad MP=y, \quad AO=a.$$

令 $\quad AB:BP::RM:MP,$

與 $\quad RM=\sqrt{RP^2-MP^2}=\sqrt{b^2-y^2}.$

是以 $x:y+a::\sqrt{b^2-y^2}:y.$

是以 $x^2y^2=(y+a)^2(b^2-y^2).$ [41]

此即爲該曲線之兩支線。並列 [40] 式之討論於下。

(i) 本曲線位於 $y=b$ 與 $y=-b$ 兩線之間。

(ii) 本曲線依 y 軸對稱。

(iii) x 軸爲本曲線各支之漸近線。

設 $b>a$. 下支有一卵形與圖上載者相仿。

設 $b=a$. 則下支經過 A 點有如圖上所載。惟 A 點下無該卵形。

設 $b<a$. 則曲線之上下兩支皆與圖之虛線相似。

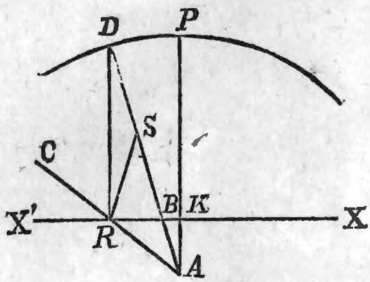
設 $a=0$. 則本曲線變爲平圓。

系一 設 A 爲極。AY 爲極軸。則得

$$\rho=AR'\pm R'P'=a\text{ 正割 }\theta\pm b.$$

此即爲本曲線之極方程式。

圖五十六



系二 任取 CAP 角(圖五六)分爲三等分。在 AC 任取一 AR 長度。過 R 點作 BK 線垂於 AP。並取 KP=2AR。即以 A 爲極。XX′ 爲準線。KP 爲首通徑。作一尼哥米德之曲線。

自 R 點作 XX′ 之垂線而交曲線於 D 點。則 DA 線即分 RAP 角爲三等分。

因平分 DB 於 S 點。則

$$RS=SD=\tfrac{1}{2}KP=AR.$$

是以 $\angle RAS=\angle RSA=2\angle RDS=2\angle DAP.$

是以 $\angle DAP=\tfrac{1}{3}\angle RAP.$

131. 白奴利之曲線 (The Lemniscate of Bernoulli)白奴利之曲線。乃自直交雙曲線之中心。作線垂於其切線。而所得交點之軌跡也。

若求該曲線之方程式。依下法便得。

在 $x^2-y^2=a^2$ 等邊雙曲線 (x_1, y_1) 點之切線方程式,為

$$x_1x-y_1y=a \tag{1}$$

自原點至(1)式之垂線方程式,為

$$y=-\frac{y_1}{x_1}x,\ \text{或}\ \frac{x}{x_1}=-\frac{y}{y_1} \tag{2}$$

用(2)式之一段乘(1)式各項。而化(1),(2)為 x_1 與 y_1, 即得 $x^2+y^2=\dfrac{a^2x}{x_1}=-\dfrac{a^2y}{y_1}$.

是以 $x_1=\dfrac{a^2x}{x^2+y^2},\ y_1=-\dfrac{a^2y}{x^2+y^2}$.

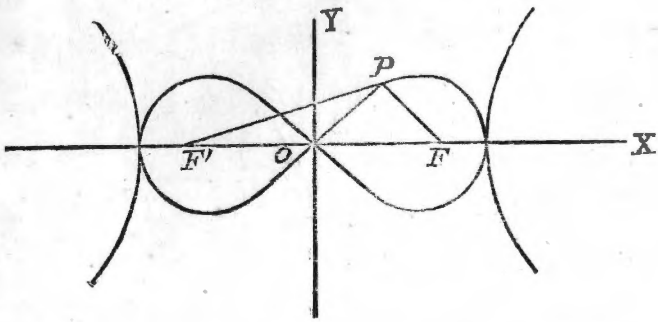
但 (x_1, y_1) 點既在雙曲線上。則有 $x_1^2-y_1^2=a^2$. 準替代法。故得

$$(x^2+y^2)=a^2(x^2-y^2). \tag{42}$$

即為所求之方程式。

自 [42] 觀之。可見本曲線依兩軸對稱。在(圖五七)即為本曲線之形狀。

圖五十七



系一 用ρ餘弦θ代於x，與ρ正弦θ代於y，並知餘弦$^2\theta$－正弦$^2\theta$＝餘弦2θ，即得[41]式爲

$$\rho^2=a^2\text{餘弦}2\theta. \qquad (2)$$

而爲本曲線之極方程式。

系二 自(2)式．$\rho=\pm a\sqrt{\text{餘弦}2\theta}$.

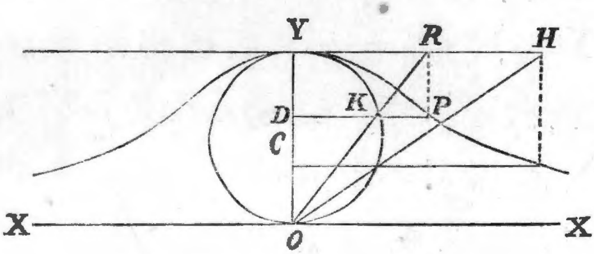
當$\theta=0$．則$\rho=\pm a$．若θ自$0°$漸增至$45°$．則ρ自$\pm a$漸變至± 0．因畫得第一與第三象限兩部分。若θ自$135°$漸增至$180°$則ρ自± 0漸變至$\pm a$．而得第二與第四象限兩部分。是以

(i) 本曲線成二卵形。而相遇於O極。

(ii) 在曲線O點之切線。即爲等邊雙曲線之漸近線。

132. 渥尼西之曲線 (The Witch of Agnesi) 取 YH 爲 OKY 平圓之切線。而在 OY 直徑之頂點。自 O 點至 YH 任取 OR 線。而割平圓於 K 點。即於 K 點引長 DK 縱坐標。令 DP=YR。則 P 點之軌跡。即爲**渥尼西之曲線。**

圖 五 十 八



若求其方程式。取 OX 切線與 OY 直徑爲二軸。再取 $OY=2r$, 與 P 爲軌跡內任何點。則 $OD=y$, $DP=x$, 與

$$OD:OY::DK:DP(=YR). \tag{1}$$

或 $$y:2r::\sqrt{y(2r-y)}:x.$$

是以 $$x^2y=4r^2(2r-y). \tag{43}$$

即爲所求本曲線之方程式。

系一 旣 $x=\pm 2r\sqrt{(2r-y)\div y}$. 則得以下各條。

(i) 本曲線依 y 軸對稱。

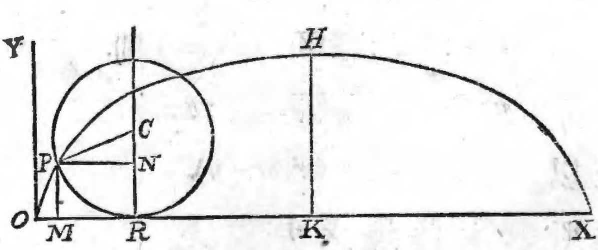
(ii) 本曲線位於 $y=0$ 與 $y=2r$ 兩線之間。

(iii) x 軸爲本曲線各無限支線之漸近線。

系二 自(I)式得平圓及本曲線之相當横坐標。與平圓之縱坐標及直徑有比例。

133. 擺線. (The Cycloid) 有 RPC 平圓。依 OX 直線輾過。其周上一 P 點所得之軌跡。即爲擺線。該曲線有無限支線。但名其每一支線曰擺線。OX 直線則名爲**底**. (Base)。RPC 輾圜曰**母圜**. (Generatrix) P 點曰**母點**. (Generating Point) 設 OK=KX. 則 KH 垂線曰**軸** (Axis) 而 H 則爲**最高點**。(Highest Point).

圖五十九



若求擺線之方程式。先取 OX 底爲 X 軸。而以 O 點爲原點。(即曲線與底線相遇之處)。取 r

爲 RPC 毋圓之半徑。並取 θ 爲 PCR 角。則 PR 弧等於 OR。以其自 OR 輾成也。與 $\theta=\text{PR}$ 弧 $\div r$, 並以 x 與 y 爲 P 母點之坐標。則

$$x=\text{OM}=\text{OR}-\text{MR}=\text{PR}\text{ 弧 }-\text{PN}=r\theta-r\text{ 正弦 }\theta.$$

$$y=\text{MP}=\text{RC}-\text{NC}=r-r\text{ 餘弦 }\theta.$$

是以

$$\left.\begin{aligned}x&=r(\theta-\text{正弦 }\theta)\\ y&=r(1-\text{餘弦 }\theta)\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

取 (1) 方程式爲擺線之聯立方程式。

將方程內之 θ 消去。于第二式得

$$\text{餘弦 }\theta=\frac{r-y}{r},\ \text{是以 正弦 }\theta=\pm\frac{\sqrt{2ry-y^2}}{r}.$$

與 正矢 $\theta=[1-\text{餘弦 }\theta]=\frac{y}{r}$, 或 $\theta=\text{正矢}^{-1}\frac{y}{r}$.

用 θ 與正弦 θ 之數值。代入 (1) 方程式之第一式內。則得

$$x=r\text{ 正矢}^{-1}x\frac{y}{r}\mp\sqrt{2ry-y^2}. \qquad [44]$$

此即爲擺線通常之式。

在正弦 θ 之數值與 [43] 之方程式內。其用

(+)(−)兩號。皆憑 $\theta <$ 或 $> \pi$ 爲斷。即憑母點之在第一或第二半支線爲斷也。

自 $y=r(1-$餘弦$\theta)$ 式可知軌跡位於 $y=0$ 與 $y=2r$ 兩線之間

在 [44] 式,因 $y=0$. 則 $x=0,\ \pm 2\pi r,\ \pm 4\pi r, \cdots\cdots$; 故該軌跡自 OY 左右。有無限支線。皆與 OHX 相似。

134. 取 O 最高點(圖六十)爲原點。並取 OX 與底平行而爲 x 軸。則 OY 擺線軸爲 y 軸。再取 θ 爲 HCK 角。

當 P 點在 O 點之際。K 點則在 Y 點。而 KH 弧$=$YH。故

$$x=\text{OM}=\text{YH}+\text{BP}=r\theta+r\,\text{正弦}\,\theta.$$

$$y=-\text{MP}=-\text{NC}+\text{BC}=-r+r\,\text{餘弦}\,\theta.$$

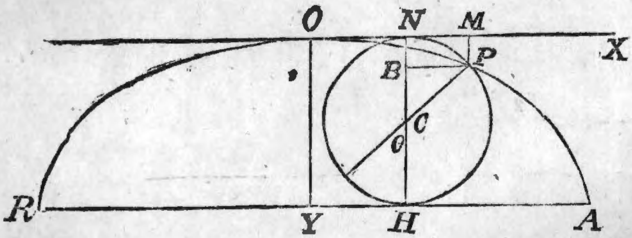
則方程式,爲

$$\left.\begin{aligned} x&=r(\theta+\text{正弦}\,\theta) \\ y&=r(\text{餘弦}\,\theta-1) \end{aligned}\right\}, \qquad (1)$$

或 $$x=r\,\text{正矢}^{-1}\left(\frac{-y}{r}\right)\pm\sqrt{-2ry-y^2}. \qquad (2)$$

創擺線者爲嘉利奧。ROA 支線之長度較母

圖 六 十



圓之半徑加八倍。而 ROA 之面積則較母圓之面積加三倍。

習題三四

1. 證戴奧哥盧之曲線。乃自原點作線垂於 $y^2=-8rx$ 拋物線之切線,而所得交點之軌跡。

準 §76. $y^2=-8rx$ 拋物線之切線方程式,爲

$$y=mx-\frac{2r}{m}. \tag{1}$$

並自 (0, 0) 點至該切線之垂線式,爲

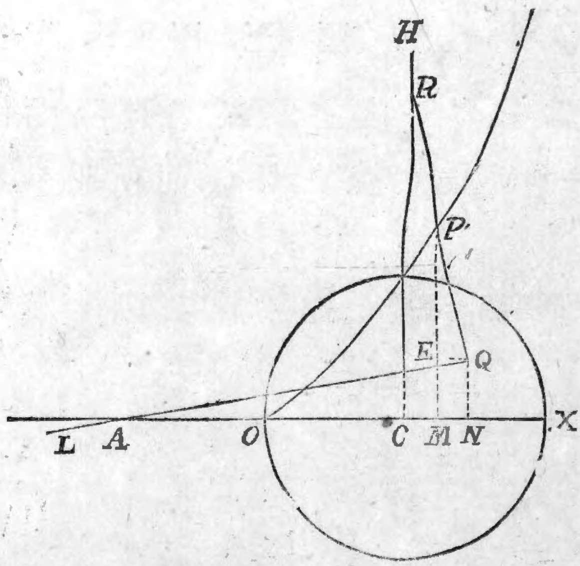
$$y=-\frac{1}{m}x, \quad \text{是以} \quad m=-\frac{x}{y} \tag{2}$$

將 (1) 與 (2) 式之 m 消去。則得

$$y^2=\frac{x^3}{2r-x}.$$

2. 自任何平圓(圖六一)之 C 中心。作 CH 線垂於 OX 直徑。並自 OX 引長。而令 OA=OC $=r$, 取 LQR 爲直交形界尺。而 QR 等於 $2r$, 當界尺之 R 端向 CH 移動。而令 LQ 經過 A 點。證明 QR 之中點 P 所得之軌跡。即爲戴奧哥盧之曲線。

圖六十一



取 OX 爲 x 軸。O 爲原點。AQR 爲界尺之任

何位置。則 $OM=x$, $MP=y$.

$$EQ=MN=CM=x-r,\ AN=2OM=2x.$$

$$\overline{EP}^2=\overline{PQ}^2-\overline{EQ}^2=r^2-(x-r)^2=2rx-x^2. \quad (1)$$

$$y=MP=NQ+EP. \quad (2)$$

$$NQ:AN::EQ:EP,$$

或 $$NQ:2x::x-r:\sqrt{2rx-x^2}. \quad (3)$$

自(1),(2),與(3)等式得

$$y=\frac{2x(x-r)}{\sqrt{2rx-x^2}}+\sqrt{2rx-x^2},\ 或\ y^2=\frac{x^3}{2r-x}.$$

此法乃創自奈端。用常動之理。亦得戴奧哥盧之曲線。

3. 自圖五四證 NS 與 ON。在于 OM 與 NI 之間。為二中率比例。即證

$$OM:NS::ON:NI.$$

$$\overline{NS}^2=NX\times ON=OM\times ON.$$

OI 直線既經過 K 點。故

$$\angle OIN=\angle YOI=\tfrac{1}{2}OK\ 弧=\tfrac{1}{2}SX\ 弧$$
$$=\angle SOX,$$

是以 $NS:ON::ON:NI$, 等.

4. 設在白奴利之曲線。(圖五七). $OF'=OF=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. 證 $EP\times F'P$ 爲常數。P 爲曲線內之任何點。則該曲線。可自一點至二定點之距離之常積。而得其軌跡也。

5. 求作 $y=a^x$ 或 $x=$ 對$_a y$ 對數曲線。證明各對數曲線。皆經過 (0, 1) 點。並有 x 軸爲其漸近線。

6. 有平圓輾於直線。其半徑之任何點所得之曲線爲**半徑擺線**。(Trochoid) 設 r 爲平圓之半徑。b 爲母點自中心之距離。與 θ 爲 PCR 角如 §133 者。顯明半徑擺線之方程式,爲

$$\left.\begin{aligned} x&=r\theta-b\,\text{正弦}\,\theta \\ y&=r\ \ -b\,\text{餘弦}\,\theta \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

設 $b<r$, 則該半徑擺線名爲**長擺線**。(Prolate Cycloid) 若 $b>r$ 則名爲**短擺線**。(Curtate Cycloid) 若 $b=r$. 則該曲線即名擺線。

螺 線 (Spirals)

135. 當變角漸增或漸損於無限之際。而一

點之帶徑亦同時漸增或漸損則該點所得之軌跡。謂之**螺線**。

帶徑轉運一周所得螺線之部分。謂之**匝螺線**。(Spire)

設平圓之中心為極。並當 $\theta=2\pi$, 其半徑為 ρ 同數值。則該平圓。謂之**度圜**. (Measuring Circle)

136. 亞基默德之螺線. (The spiral of Archimedes) 動點之帶徑與其變角有常比例。即

$$\rho=c\theta$$

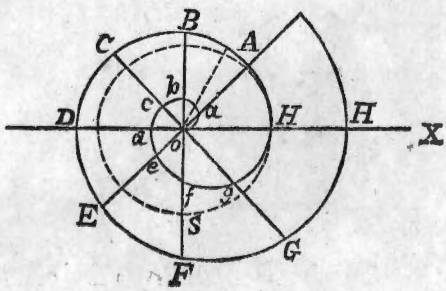
是為亞基默德螺線之軌跡。

自(1)方程式,

當 $\theta=0,\ \frac{1}{4}\pi,\ \frac{2}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{6}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi,\ 2\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\cdots\cdots$

$\rho=0,\ \frac{1}{4}\pi c,\ \frac{2}{4}\pi c,\ \frac{3}{4}\pi c,\ \pi c,\ \frac{5}{4}\pi c,\ \frac{6}{4}\pi c,\ \frac{7}{4}\pi c,\ 2\pi c,\ \frac{9}{4}\pi c,\cdots$

圖六十二



作亞基默德螺線之法。先作得 OH′, OA, OB,……OG 等半徑線。皆含有 $\frac{1}{4}\pi$ 角。於各半徑線取 $Oa=\frac{1}{4}\pi c$, $Ob=\frac{2}{4}\pi c$, $Oc=\frac{3}{4}\pi c$, ……, $OH=2\pi c$, 即過諸點畫得 OabcdefgH 第一匝螺線。若將二匝螺線之距離。自帶徑量度而等於 $2\pi c$, 則可得任何數之匝螺線。如取 aA, bB, cC, dD, eE, fF, gG, HH′ 各等於 $2\pi c$, 則得第二匝螺線各點。餘可類推。其帶徑線可隨意加增。用以置本曲線之點。

匝螺線從半徑線之距離。處處相等者。曰平行。圖內之 HRS 曰度圓。OH 或 $2\pi c$ 即爲其半徑。

137. 雙曲線螺線 (The Reciprocal, 或 Hyperbolic Spiral) 點之帶徑與其變角成反比例。即

$$\rho\theta=c. \tag{1}$$

是爲**雙曲線螺線**。

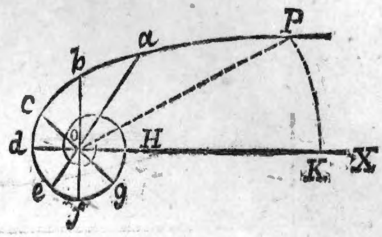
自 (1) 方程式,得 $\rho=c\div\theta$.

當 $\theta=0$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, π, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$, 2π,…… ……

$\rho=\infty,\ 8\frac{c}{2\pi},\ 4\frac{c}{2\pi},\ \frac{8}{3}\frac{c}{2\pi},\ 2\frac{c}{2\pi},\ \frac{8}{5}\frac{c}{2\pi},\ \frac{4}{3}\frac{c}{2\pi},\ \frac{8}{7}\frac{c}{2\pi},\ \frac{c}{2\pi},\ \ldots\ldots$

則度圓之半徑爲 $c\div2\pi$. 而圓周爲 c.

圖六十三



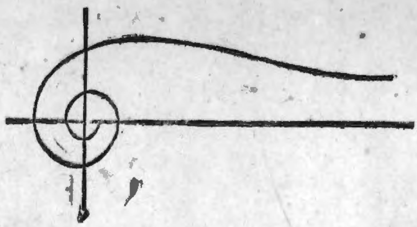
作本曲線之法。先作得 OX, Oa, Ob, Oc, Od, Oe, Of, Og 等半徑線。皆含有 $\frac{1}{4}\pi$ 角。於各半徑線取 Oa=8×OH, Ob=4×OH, Oc=$\frac{8}{3}$×OH, Od=2×OH 等. 即過諸點畫得該曲線。照法可得任何數之匝螺線。自(1)式當 θ 進至 ∞。則 ρ 即進至 O。即謂本曲線續漸向極進行。惟永不能至該極點。

既 $\rho\theta=c$. 可知任何 P 點之帶徑所作之 PK 弧爲常數。且與 c 相等。今使 ρ 進至無窮。則該弧終進至一位置而爲 OX 之垂線。故該線在 c 距離之上與 OX 平行。而 OX 爲該無窮支線之漸近線。

138. 歷竇螺線. (The Lituus) 點之帶徑之平方與其變角成反比例。即

$$\rho^2\theta=c. \tag{1}$$

是爲**歷竇螺線**。



圖六十四

該螺線作法。學者可自方程式作得。並顯明

(i) 當 θ 增至無窮。而曲線續漸向極進行。然並不能至該極點。

(ii) 極軸爲該無限支線之漸近線。

139. 對數螺線 (The Logarithmic Spiral) 當變角以算術比例漸增。而點之帶徑則以幾何比例漸增。即

$$\rho=a^\theta. \quad 或 \quad \theta=對_a\rho. \tag{1}$$

是爲**對數螺線**。

當 $\theta=0$, 則 $\rho=1$. 故對數螺線必過 (1, 0) 點。

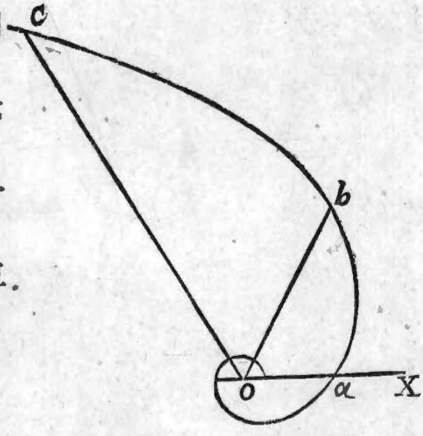
作對數螺線法。任取 $a=2$. 則 $\rho=2^\theta$.

當 $\theta=0,\ 1(=57{\cdot}3^\circ),\ 2(=114{\cdot}6^\circ),\cdots\cdots\cdots,\ 2\pi.$

$\rho=1,\ 2\qquad\qquad,\ 4\qquad\qquad,\cdots\cdots\cdots,\ 77{\cdot}88.$

在(圖六五)取 $XOb=57{\cdot}3^\circ$, $XOc=114{\cdot}6^\circ$, $Oa=1$, $Ob=2$, $Oc=4$. 則 a, b, c 爲螺線之三點。當 θ 加增時。ρ 則加增甚速。惟 θ 爲無窮。ρ 亦爲無窮。當 θ 自 O 漸損。ρ 則自單位漸損。然 θ 進至負無窮之時。而 ρ 則進至圈。故曲線漸進至極點。而永不能遇之。

圖六十五.



140. 拋物線螺線 (The Parabolic Spiral) 有 $y^2=4px$ 方程式。自 AH 平圓之 A 點置 x 諸數值(圖六六)。並將平圓各半徑引長。而置 y 之相當數值。則點所得之軌跡。爲拋物線螺線。

求該螺線之方程式。將 OA 半徑。以 r 記之。並取 P 爲任何點。則

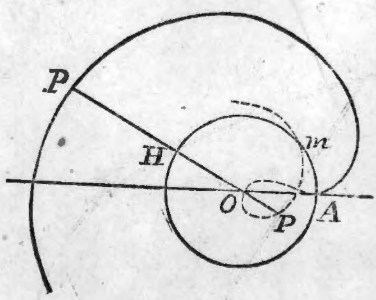
$$x = \mathrm{A}m\mathrm{H} = r\theta.$$

$$y = \mathrm{HP} = \mathrm{OP} - \mathrm{OH} = \rho - r.$$

將 x 與 y 各數值代於 $y^2 = 4px$ 方程式內。即得極方程式,爲

$$(\rho - r)^2 = 4pr\theta.$$

圖六十六



該螺線起自 A 點。爲二支線。其一支線爲 y 之正數值。有無限螺線全在平圓之外。次支線經過極點。成一線孔。而當 $\rho = -r$, 與 $\theta = r \div p$ 之際。則該支線亦過平圓之外。

立體解析幾何學

第一章

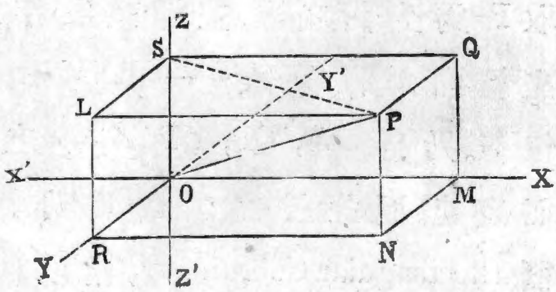
空間之點

(The Point in Space)

141. 空間一點之位置。可以三平面相遇之一點定之。其三平面謂之**三坐標面**。(Coördinate planes) 三坐標面互相交之線。謂之**三坐標軸**。(Coördinate Axes) 其公點謂之原點。(Origin)

取 XOY, YOZ, ZOX (圖六八)爲三平面。面界無限。互爲直角而交于 XX′, YY′, ZZ′, 三線。其三坐標面遞名爲 xy 面。yz 面。zx 面。其 XX′,

圖六十八



YY′, ZZ′ 三軸。則遞名爲 x 軸。y 軸。z 軸。與其 O 公點名爲原點。

三坐標面分四周各方位爲八部分。謂之**八直體角**。(Octants) 今列其名目如下。

O—XYZ 爲第一直體角。

O—YX′Z 爲第二直體角。

O—X′Y′Z 爲第三直體角。

O—Y′XZ 爲第四直體角。

O—XYZ′ 爲第五直體角。

O—YX′Z′ 爲第六直體角。

O—X′Y′Z′ 爲第七直體角。

O—Y′XZ′ 爲第八直體角。

是謂八直體角。而第五直體角。適在第一直體角之下。

任取 P 爲空間之點。並過該點作三平面。遞與三坐標面平行。則成 P—ORNM 矩形棱體。P 點之位置。乃自 LP, QP, NP 各線之長度與其方向而定也。而此三線。名爲 P 點之 x, y, z **短形坐標**。(Rectangular Coördinates) 常以 (x, y, z) 記之。

坐標有 OX, OY, OZ 之方向者爲正。故坐標有 OX′, OY′, OZ′ 之方向者爲負。

如 x 坐標之爲正或負。憑其自 yz 平面向右或向左伸張而斷。y 坐標之爲正或負。則憑其自 zx 平面向前或向後而斷。z 坐標之爲正或負。則憑其自 xy 平面向上或向下而斷。故直體角內之點。應以其坐標之號定之。第一直體角。旣有三軸之正方向爲其各邊。則在第一直體角內之點之三坐標。皆爲正號。設

在第一直體角內之點爲 (a, b, c)。則

在第二直體角內之相當點爲 $(-a, b, c)$。

在第三直體角內之相當點爲 $(-a, -b, c)$。

在第四直體角內之相當點爲 $(a, -b, c)$。

在第五直體角內之相當點爲 $(a, b, -c)$。

在第六直體角內之相當點爲 $(-a, b, -c)$。

在第七直體角內之相當點爲 $(-a, -b, -c)$。

在第八直體角內之相當點爲 $(a, -b, -c)$。

$(x, y, 0)$ 點。則在于 xy 平面。

$(x, 0, 0)$ 點。則在于 x 軸。

(0, 0, 0) 點。則在于原點。

OM, OR, OS 或 OM, MN, NP 各線。皆可取爲P點之三坐標。因其遞同有 LP, QP, NP 之長度與方向也。欲作 P 點 (x, y, z)。取 $\mathrm{OM}=x$。作 MN 與 OY 平行。而取 $\mathrm{MN}=y$。並作 NP 與 OZ 平行。而取 $\mathrm{NP}=z$。

142. 自原點至一點所作之線。稱爲該點之帶徑。(Radius Vector) 如 $\mathrm{OP}(=\rho)$ 爲 P 點之帶徑。在圖六八之矩形棱體。得

$$\overline{\mathrm{OP}}^2=\overline{\mathrm{OM}}^2+\overline{\mathrm{MN}}^2+\overline{\mathrm{NP}}^2。$$

設以 x, y, z 記 P 點之三坐標。即得

$$\rho^2=x^2+y^2+z^2. \qquad [44]$$

即一點帶徑之平方。等于其矩形坐標各平方之和。

143. 二不相交直線間之角。即爲與該二不相交直線平行之任何二相交直線之角。

如 §141 (圖六八)其與 OP 平行之任何線。遞與 x, y, z 軸成 XOP, YOP, ZOP 等角。

凡線與三坐標軸之正方向所成諸角。謂之

該線之**方向角**。(Direction Angles) 而諸角之餘弦。謂之該線之**方向餘弦**。(Direction Cosines)

線之方向角。均常爲正。並不過 π。或 180°。

144. 命 OP (圖六八)或與 OP 平行之任何線之方向角。爲 α, β, γ。並取 x, y, z 爲 P 點之三坐標。與 $\rho=OP$。則顯得

$$x=\rho\cos\alpha, \quad y=\rho\cos\beta, \quad z=\rho\cos\gamma. \tag{45}$$

將[45]方程式方而加之。並代於[44]方程式內。得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{46}$$

即線之方向餘弦各平方之和等於單位。

系一 設于[45]方程式內。不論 x, y, z 之爲何數值。而以 ρ 或 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 分各數值。其得數即爲 (x, y, z) 點之帶徑之方向餘弦。

故任何三實數量。各爲其平方之和之方根所分。其得數即爲某線之方向餘弦。

習題三五

1. 設 x 爲正。x 爲負。y 爲正。y 爲負。z 爲正。z 爲負。問 (x, y, z) 點在何直體角之內。

2. 設 $(-2, 4, 6)$, $(2, 4, -3)$, $(-2, 4, -1)$, $(-2, -3, -1)$, $(-2, -3, 3)$, $(2, -3, 1)$, $(2, -1, -3)$ 點。問在何直體角之內。並求作各點之位置。

3. 設 $(a, 0, 0)$, $(0, 0, c)$, $(0, b, 0)$ 點。問在何線之內。

4. 設 $(a, b, 0)$, $(a, 0, c)$, $(0, b, c)$ 點。問在何平面之內。

5. 求 $(3, 4, 5)$, $(2, -3, -1)$, $(7, -3, -5)$ 各點帶徑之長度。並求各點帶徑之方向餘弦。

6. 有線之方向餘弦。與 1, 2, 3 相比。求其方向餘弦之數值。並問線之方向爲何。

7. 有線之方向餘弦。與 A, B, C 相比。問何爲該線之方向。並問何爲該線之方向餘弦之數值。

8. 有線之二方向角爲 60° 與 45°。問其第三之方向角度爲何。設爲 60° 與 30°, 與 135° 與 60°。問其第三之角度各爲何。

145. 射影 (Projections) 從一點作垂線。遇于一正線上之足點。或過一點作垂線。與平面上一正線相交之點。俱名爲該點于此正線上之

射影。如 M, R, S (圖六八) 均爲 P 點遞在於 $x, y,$ z 軸上之射影。

凡正線兩端間射影所截別線之部分。名爲有限正線在於別一正線上之射影。如 OM, OR, OS (圖六八)。均爲 OP 線遞在于 x, y, z 軸上之射影。

即任何點之三坐標皆爲其帶徑在於三軸上之射影。

146. 任何 PQ 線。若遞爲平行線。則其射影皆相等。蓋以諸射影俱爲平行線。而括於過 P 與 Q 諸平行面之內也。凡直線之射影。在于別一直線上而經過前線之一端者。必等于其長度與二線交角之餘弦之積。

故任何有限直線。在於任何別一直線上之射影。等於其長度。與二線間交角之餘弦相乘。

147. 取 AD (圖六九,七十) 爲直線。與 ABCD 爲空間任何折線。而連 A 與 D 二點。並取 A′, B′, C′, D′ 爲 A, B, C, D 在 OX 上之射影。而 OX 爲其正方向。命 RAD 角爲 Φ。AB, BC, CD 等線

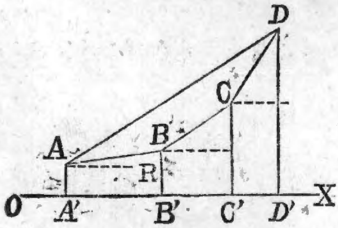
之長度為 l_1, l_2, l_3。及諸線與 OX 之正方向所成之交角為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$。則在圖六九。得

$$A'D' = A'B' + B'C' + C'D'.$$

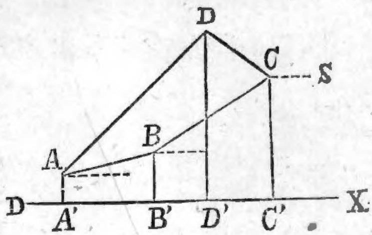
是以

$$AD\cos\Phi = l_1\cos\alpha_1 + l_2\cos\alpha_2 + l_3\cos\alpha_3 \qquad [47]$$

圖六十九



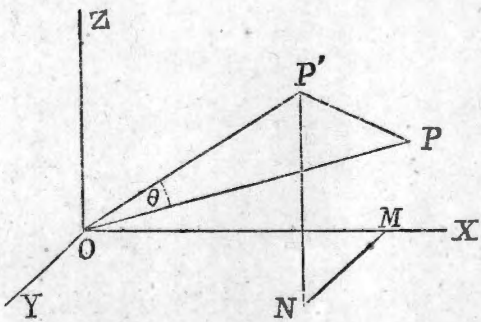
圖七十



即任何兩點相連之任何折線。其各段在於所設線上之射影之和。等於該二點相連之直線。在於原所設線上之射影。

148. 本二直線之方向餘弦求其交角。

圖七十一



取 OP 與 OP′，遞與空間任何所設二直線相平行。並取 θ 命二線所含之角。與 α, β, γ 及 α', β', γ' 遞爲二線之方向角。再取 OM, MN, NP 爲 P′ 點之三坐標。則 OP′ 在 OP 上之射影。等於 OM, MN, NP′ 在 OP 上諸射影之和。即

$$OP' \cos\theta = OM \cos\alpha + MN \cos\beta + NP' \cos\gamma。$$

但 $OM = OP'\cos\alpha',\ MN = OP'\cos\beta',\ NP' = OP'\cos\gamma'$。

故 $OP'\cos\theta = OP'\cos\alpha'\cos\alpha + OP'\cos\beta'\cos\beta$

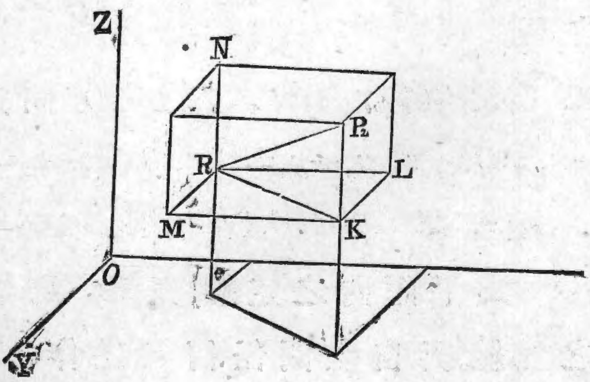
$$+ OP'\cos\gamma'\cos\gamma。$$

或 $$\cos\theta = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma', \qquad [48]$$

而爲所求之公式。

149. 本二點之坐標求其距離。

圖 七 十 二



取 P_1 爲 (x_1, y_1, z_1) 點。與 P_2 爲 (x_2, y_2, z_2) 點。過 P_1 與 P_2 二點作平面。與三坐標面平行。即成一矩形棱體。而其對角線爲 P_1P_2。並其邊爲 P_1L, LK, KP_2。俱遞與 x, y, z 軸平行。

則 $$\overline{P_1P_2}^2=\overline{P_1L}^2+\overline{LK}^2+\overline{KP_2}^2。\tag{1}$$

然 P_1L 乃爲 P_1 與 P_2 自 yz 平面二距離之較。是以 $P_1L=x_2-x_1$。照法得 $LK=y_2-y_1$。與 $KP=z_2-z_1$。設命 P_1P_2 距離爲 D。代于(1)式。得

$$D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad [49]$$

是爲所求之公式。

系一 既 P_1L, LK, KP_2 等於 P_1P_2 在于三坐標軸上之射影。自[49]式可知

任何線之平方。等於其在三軸上諸射影各平方之和。

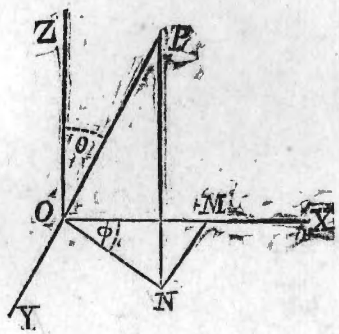
系二 設 α, β, γ 爲 P_1P_2 線之方向角。即得

$$x_2-x_1=D\cos\alpha,\quad y_2-y_1=D\cos\beta,\quad z_2-z_1=D\cos\gamma。$$

150. 極坐標 (Polar Coördinates) 取 XOY 爲定平面。OX 爲平面內之定線。與 OZ 爲平面上 O 定點之垂線。乃自空間任何 P 點作 OP 線。並

過 OP 線作一平面。垂於 XOY 面。而交後平面于 ON 線。則有 OP 距離及 ZOP, MON 二角。以定 P 點之位置。而為該點之極坐標。OP 線為**帶徑**。(Radius Vector) 命之以 ρ。其 ZOP 與 MON 二角。則為**二變角**。(Vectorial Angles) 遞以 θ 及 Φ

圖七十三



命之。故 P 點可以 (ρ, θ, Φ) 記之。蓋 Φ 所以定 ZON 平面。θ 所以定 OP 線在該平面之位置。ρ 則定 P 點在 OP 線之位置。

系一 設 XOY 為正角。則 P 點之矩形坐標為 OM, MN, NP。今本 P 點之極坐標以顯之。

$$x = OM = ON \cos\Phi = OP \sin\theta \cos\Phi = \rho \sin\theta \cos\Phi.$$

$$y = MN = ON \sin\Phi = OP \sin\theta \sin\Phi = \rho \sin\theta \sin\Phi.$$

$$z = NP = OP \cos\theta = \rho \cos\theta.$$

由此可得

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z},\quad \tan\Phi=\frac{y}{x}.$$

151. 自一點至平面之垂線足點。謂之該點在平面上之**射影**。(Projection) 其垂線謂之點之**射影線**。(Projector) 如(圖七三) N 爲 P 點在 xy 平面上之射影。而 PN 則爲射影線。

凡直線二端射影相連之部分。謂之該有限直線在平面上之射影。直線與其在平面上之射影所成之角。謂之該線於此平面之斜度。凡有限線之射影。恒等于線之長度。與其斜度之餘弦相乘。如 ON＝OP cos NOP.

凡曲線各點之射影軌跡。謂之該曲線在平面上之射影。故圓柱各點射影線之軌跡。謂之**射影圓柱**。(Projecting Cylinder) 因此一正線射影之軌跡。爲**射影平面**。(Projecting Plane)

習題三六

1. 有 $(1, 2, 3)$ 與 $(2, 3, 4)$ 二點。$(2, 3, 4)$ 與 $(3, 4, 5)$ 二點。$(1, 2, 3)$ 與 $(3, 4, 5)$ 二點。求其距離。

2. 證明 $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ 三點相連所成之三角形。乃為等邊三角形。

3. 有線之射影長度。其在於三坐標軸上。遞為 $3, 4, 5$。求該線之長度。

4. 求 $(-3, -4, 5)$ 點之帶徑之方向餘弦。

5. 問何線之方向餘弦。與 $3, -2, -5$ 相比。並求諸方向餘弦之數值。

6. 有二直線之方向餘弦。遞與 $1, 2, 3$ 及 $2, 3, 6$ 相比。求二線間之交角。

7. 有二直線之方向餘弦。遞與 $1, 2, 3$ 及 $5, -4, 1$ 相比。求二線間之交角。

8. 求 $(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$ 點之極坐標。

9. 求 $(4, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ 點之矩形坐標。

10. 設有 (x, y, z) 點平分 (x_1, y_1, z_1) 與 (x_2, y_2, z_2) 所連之線。證明

$$x=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\tfrac{1}{2}(y_1+y_2),\ z=\tfrac{1}{2}(z_1+z_2).$$

11. 設連 (x_1, y_1, z_1) 與 (x_2, y_2, z_2) 為直線。而 (x, y, z) 點分之成 $m_1 : m_2$ 比。證明

$$x=\frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_2+m_1},\quad y=\frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_2+m_1},\quad z=\frac{m_2z_1+m_1z_2}{m_2+m_1}.$$

12. 有點分 (3, −2, 4) 與 (1, 3, −2) 所連之線為 1:3 比。求其三坐標。

13. 求分 (−2, −3, −1) 與 (−5, −2, 4) 所連之線為 5:2 比之點。

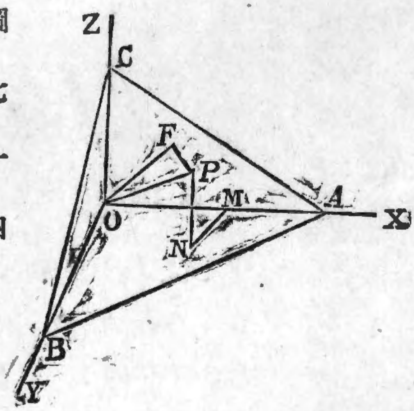
第二章

空間之平面

(The Plane in Space)

152. 本一平面之垂線自原點之長度。及其方向餘弦。求此平面之方程式。

圖七十四



自 O 原點。取 OF 爲 ABC 平面之垂線。而以 p 命其長度。並取 α, β, γ 爲其方向餘弦。在平面內取 P 爲任何點。OP 爲該點之帶徑。與 OM, MN, NP 爲其 x, y, z 三坐標。如是 OP 在 OF 上之射影。等於 OM, MN, NP 在 OF 上諸射影之

和。但平面與 OF 直交。p 爲 OP 在 OF 上之射影。及 OM, MN, NP 在 OF 諸射影。遞爲 $x\cos\alpha$, $y\cos\beta$, $z\cos\gamma$。故

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p. \tag{50}$$

而爲所求之方程式。[50] 方程式名爲平面之法線式。

系一 設平面與三坐標面之一面正交。如取 xy 平面爲例。則 OF 位於 xy 平面之內。故 $\gamma=\frac{1}{2}\pi$, 而 $\cos\gamma=0$。如是 [50] 方程式。成爲

$$x\cos\alpha+y\cos\beta=p. \tag{1}$$

系二 設平面與三坐標面之一面平行。如取 yz 平面爲例。則 OF 位於 x 軸。故 $\cos\alpha=1$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=0$. 如是 [50] 方程式。成爲

$$x=p. \tag{2}$$

系三 OF 既與 ABC 平面正交。及 OX 與 YOZ 正交。則 A—BC—O 兩面角 =FOX 角。照法 B—CA—O=FOY。及 C—BA—O=FOZ。

153. 含三變數之各一次方程式。其軌跡乃一平面。

含 x, y, z 三變數之各一次方程式。有一總式以括之。即

$$Ax+By+Cz=D. \tag{1}$$

而式內之 D 爲正。

再以 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 分(1)式各項。得

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y$$

$$+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{2}$$

式內 x, y, z 之係數。乃爲一線之方向餘弦(§144. 系一)。如(2)式有似于 §152 之[50]式。故(2)或(1)式之軌跡爲一平面。

系一 自原點至(1)平面之垂線長度。等于(2)方程式之末項。與該垂線之方向餘弦。遞爲(2)式 x, y, z 之係數。而此方向餘弦。皆與 A, B, C 相比。

故作(1)方程式。畫 (A, B, C) 點之帶徑。而垂於自 O 原點至該線爲 $\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ 距離之平面。即爲(1)式之軌跡。

系二 將任何純方程式。改爲法線式。必令其爲 $Ax+By+Cz=D$ 之式。式內之 D 爲正。並以 $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ 分其各項。

系三 設純方程式只含有二變數。則其軌跡與相當之坐標面正交。設只有一變數。則其軌跡與相當之坐標軸正交。

154. 本一平面。之在三軸上之截線。求此平面之方程式。

遞取 a, b, c 命一平面在三軸上之截線。而其方程式爲

$$Ax+By+Cz=D, \tag{1}$$

令 $y=z=0$。是以 $x=a$。則(1)式成爲

$$Aa=D, \text{ 或 } A=D\div a。$$

令 $x=z=0$。是以 $y=b$。則(1)式成爲

$$Bb=D, \text{ 或 } B=D\div b。$$

令 $x=y=0$。是以 $z=c$。則(1)式成爲

$$Cc=D, \text{ 或 } C=D\div c.$$

代諸數值於(1)式。並以 D 分之。即得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \tag*{[51]}$$

爲所求之方程式。[51]方程式。名爲平面之配合方程式。

155. 求任何兩平面間之角。

含於
$$A'x+B'y+C'z=D',$$
$$Ax+By+Cz=D,$$

兩平面間之角。顯然與自原點至該二平面之兩垂線所含之角相等。準(§222,系一)。該二垂線之方向餘弦。遞爲

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},\ \frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$
$$\frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

代諸數值於[48]式。得

$$\cos\theta=\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}. \qquad [52]$$

式內之 θ。等於二平面間所含之角。

系一 設二平面互爲平行。則 $\theta=0$。而 $\cos\theta=1$. 置 $\cos\theta=1$ 於[52]式。消去分數。方而遷項。並合之。即得

$$(AB'-BA')^2+(AC'-CA')^2+(BC'-CB')^2=0.$$

因各項爲平方。是以皆爲正。此式之各項當與圈等。方能相合。而

$$AB'=BA',\ AC'=CA',\ BC'=CB',$$

或 $$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}.$$

故二平面爲平行。其方程式內之 x, y, z 係數成比例。反亦如之。

系二 設二平面互爲正交。則 $\cos\theta=0$。故

$$AA'+BB'+CC'=0.$$

反亦如之。

156. 求一所設點自所設平面之垂線距離。

取 $$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p \tag{1}$$

爲所設平面之方程式。與 (x_1, y_1, z_1) 爲所設點。

並取

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p' \tag{2}$$

平面。過 (x_1, y_1, z_1) 點。而與所設平面平行。即得

$$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma=p'. \tag{3}$$

故 $$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-p=p'-p。$$

但 $p'-p$ 互等於(1)與(2)兩平面間之距離。而爲所求之距。

故欲求任何點自

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$$

平面之距離。即代所設點之三坐標於

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p$$

式內之 x, y, z。

系一 設平面之方程式爲 $Ax+By+Cz=D$。並命 d 爲 (x_1, y_1, z_1) 點自該平面之距離。因得

$$d=\frac{Ax_1+By_1+Cz_1-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

然公式所得距離。其爲正或負。憑所設點與原點之在平面對邊。或在平面原邊而斷。若只求其距離。則可略去其號。

習題三七

1. 問 $3y+4z=2$, $x+8z-7=0$, $x-2y=2$, $x=mz+p$, $y=nx+q$ 各與何坐標面正交。並問 $x=5$, $y=-7$, $y=4$, $z=-2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ 之軌跡各爲何。

2. 求改 $3x-2y+z$, 與 $5x-4y+z=4$ 爲法線式。並問何爲各平面自原點之距離。何爲各垂線之方向餘弦。且各平面位於何直體角。

3. 求 $3x-2y+4z-12=0$, $6x-4y-3z+24=0$, $5x+7y+5z+35=0$ 各在於三軸上之截線。並問各平面位於何直體角。試將各方程式。改爲配合式。

4. 有平面自原點之距離爲 7。與一直線正交。其方向餘弦。與 $2, -3, \sqrt{3}$ 有比。問爲何方程式。

5. 有平面在三軸之截線。遞爲 $4, -3, -7$。又爲 $-1, -2, -5$。又爲 $\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}$。問其方程式各何爲。

6. 有平面經過 $(1, 2, 3)$, $(0, 4, -1)$, 與 $(1, -1, 0)$ 三點。求其方程式。

7. 求 $2x+z-y=3$ 與 $z+x+2y=5$ 二平面間之交角。

8. 求 $3z+5x-7y=-1$ 與 $3z-2x-y=0$ 二平面間之交角。

9. 求 $Ax+By+Cz=D$ 平面。與三坐標面所成各角。

10. 求自 $(2, -3, 0)$ 至 $\sqrt{3}z+2x-3y=4$ 平面之距離。

11. 有 $(1, -1, 3)$ 與 $(3, 3, 3)$ 二點。顯明在 $5x+2y-7z+9=0$ 平面爲相對。並爲等距離。

12. 設於圖六八。令 $OM=a$, $OR=b$, $OS=c$。求平面經過 M, P, R 三點之方程式。並求自 S 垂於該平面之長度。

13. 證明 $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ 平面。經過 (x_1, y_1, z_1) 點。並與 $Ax+By+Cz=D$ 平面平行。

14. 有平面經過 $(3, 4, -1)$ 點。並與 $2x+4y-z=2$ 平行。求其方程式。

15. 設 $Ax+By+Cz=D$ 平面。令其經過 (x_1, y_1, z_1) 點。(x_2, y_2, z_2) 點。並令其與 $A'x+B'y+C'z=D'$ 平面正交。問其相合之三方程式爲何。

16. 有平面經過 $(1, 1, 1)$ 與 $(2, 0, -1)$ 二點。並與 $x+y-z=3$ 平面正交。求其方程式。

17. 設 $Ax+By+Cz=D$ 平面。令其經過 (x_1, y_1, z_1) 點。(x_2, y_2, z_2) 點。(x_3, y_3, z_3) 點。問其相合之三方程式爲何。

18. 求過 $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 3, 1)$ 三點之平面方程式。並求該平面自原點之長度。

19. 有平面經過 $(2, 3, -1)$ 點。而與 $3x-4y+7z=0$ 平行。求其方程式。

20. 有平面經過 $(1, 2, 3)$ 點。與 $x+2z=1$, $y+5z=1$ 各平面正交。求其方程式。

第三章

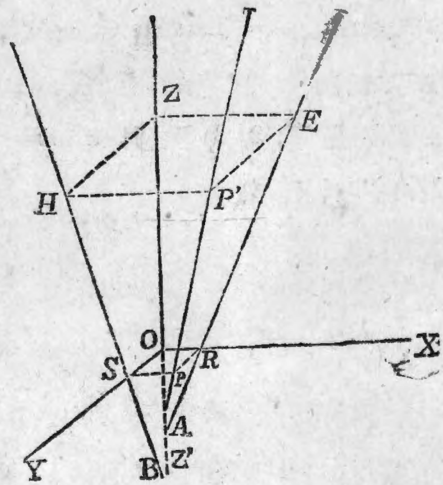
空間之直線

(The Straight Line in Space)

157. 求直線之方程式。

二平面相交線上任何點之三坐標。本與平面之方程式相合。故 x, y, z 一次之任何聯立方程式。乃代一直線。而相交二平面。即

圖七十五



以指明直線也。蓋直線在於三坐標面上射線之軌跡。本為射影平面。而二射影平面之

程式。即可取爲直線之方程式也。設取 PP′ 任何直線。在于 xz 與 yz 二坐標面上之射影平面。遞爲 PP′ER 與 PP′HS。並取該射影平面之方程式爲

$$\begin{cases} x=mz+p, & (1) \\ y=nz+q. & (2) \end{cases}$$

則(1)與(2)可爲直線之方程式也。

系一 取 RE 與 SH。遞爲 PP′ 線在于 xz 與 yz 平面上之射影。然 RE 旣位於 PP′RE 平面之內。則(1)方程式。表明 RE 內各點之 x, z 二坐標之關係。而(1)式即爲 RE 屬於 ZZ′ 與 OX 二軸之方程式也。因得(2)式。乃爲 SH 射影屬於 ZZ′ 與 OY 二軸之方程式也。

故 $m=\tan ZAE=$ RE 線坡,

$p=$ OR $=$ RE 在 OX 上之截線,

$n=\tan ZBH=$ SH 線坡,

$q=$ OS $=$ SH 在 OY 上之截線.

【注意】 (1)式在空中之軌跡爲 PP′ER 平面。若在 xz 平面內之軌跡。則爲 RE 線。照法(2)式在空間之軌跡爲 PP′HS 平

面。而其平面軌跡。則爲 SH。(1) 與 (2) 式在空間之聯立軌跡。則爲 PP′ 線。

系二 自 (1) 與 (2) 式內。消去 z。即得

$$y=\frac{n}{m}x+\left(q-\frac{np}{m}\right).$$

而其間軌跡爲 PP′ 在于 xy 平面上之射影平面。若其在於 xy 平面內之軌跡。即爲 PP′ 在於該平面上之射影。

系三 自 (1) 與 (2) 式內。令 $z=0$。即得

$$x=p,\quad y=q.$$

故 PP′ 線穿 xy 平面於 $(p, q, 0)$ 點。

如法可得直線穿 xz 與 yz 平面之點。遞爲

$$\left(\frac{np-mq}{n},\ 0,\ -\frac{q}{n}\right),\ \left(0,\ \frac{mq-np}{m},\ -\frac{p}{m}\right).$$

158. 求一正線之配合方程式。

取 α, β, γ 爲任何正線之方向角。(x_1, y_1, z_1) 爲線內之定點。與 (x, y, z) 爲線之任何次點。並取 r 爲二點間之距離。本 §149 系二。即得

$$x-x_1=r\cos\alpha,\ y-y_1=r\cos\beta,\ z-z_1=r\cos\gamma. \qquad (1)$$

如是 $$\frac{x-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y-y_1}{\cos\beta}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma}. \qquad [53]$$

該式即爲正線經過 (x_1, y_1, z_1) 點之配合方程式。

系 設[53]式經過 (x_2, y_2, z_2) 第二點。則其三坐標必與[53]式相合。故

$$\frac{x_2-x_1}{\cos\alpha}=\frac{y_2-y_1}{\cos\beta}=\frac{z_2-z_1}{\cos\gamma}. \tag{2}$$

若以(2)式之相當各項。除[53]式之各項。即得

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad [54]$$

該式即爲正線經過 (x_1, y_1, z_1) 與 (x_2, y_2, z_2) 二點之方程式。

159. 設以 $\sqrt{L^2+M^2+N^2}$ 除

$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N} \tag{1}$$

任何方程式之分母。則該分母即爲直線之方向餘弦(§144, 系一)。而其方程式爲[53]式。

故改(1)式爲配合式。法以各分母平方之和之方根。除式之各分母。

系 (1)式之軌跡。乃爲經過 (x_1, y_1, z_1) 點。而

與 (L, M, N) 點之帶徑平行之直線。

160. 求
$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N}$$
與
$$\frac{x-x_2}{L'}=\frac{y-y_2}{M'}=\frac{z-z_2}{N'}$$
二線間之交角。

本 §159 該二線之方向餘弦。遞爲
$$\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},\ \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},\ \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}};$$
$$\frac{L'}{\sqrt{L'^2+M'^2+N'^2}},\ \frac{M'}{\sqrt{L'^2+M'^2+N'^2}},$$
$$\frac{N'}{\sqrt{L'^2+M'^2+N'^2}}.$$

代諸數值於[48]式。即得
$$\cos\theta=\frac{LL'+MM'+NN'}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}\sqrt{L'^2+M'^2+N'^2}}. \qquad [55]$$

系一 設該二線爲平行。$\frac{L}{L'}=\frac{M}{M'}=\frac{N}{N'}$。反亦如之。

系二 設該二線爲正交。
$$LL'+MM'+NN'=0。$$
反亦如之。

161. 求
$$\frac{x-x_1}{L}=\frac{y-y_1}{M}=\frac{z-z_1}{N} \quad (1)$$
線至
$$Ax+By+Cz=D \quad (2)$$
平面之斜度。

自 (x_1, y_1, z_1) 至平面之垂線方程式爲
$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}. \quad (3)$$

然 (1) 線至 (2) 平面之斜度。顯爲 (1) 與 (3) 二線間交角之餘角。設命該斜度爲 v。則 $\sin v=\cos\theta$。θ 者。(1) 與 (3) 二線間之交角也。故
$$\sin v=\frac{AL+BM+CN}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{L^2+M^2+N^2}} \quad [56]$$

系一　設線與平面平行。$\sin v=0$. 是以 $AL+BM+CN=0$. 反亦如之。

系二　設線與平面正交。$\sin v=1$. 是以 $\frac{L}{A}=\frac{M}{B}=\frac{N}{C}$. 反亦如之。

系三　設 (1) 線位於 (2) 平面之內。則
$$AL+BM+CN=0,$$
與
$$Ax_1+By_1+Cz_1=D.$$
反亦如之。

習題三八

1. 定明 $x+y-z+1=0$ 與 $4x+y-2z+2=0$ 二平面相交線之位置。方向餘弦。與方向角。

自該二方程式。相繼將 y 與 z 消去。即得 $3x-z+1$ 與 $2x-y=0$。或 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{3}$。

試觀後式。可知該線經過 $(0, 0, 1)$ 點。而與 $(1, 2, 3)$ 點之帶徑平行。若以 $\sqrt{14}$ 除 1, 2, 3 各分母。即求得其方向餘弦。而方向角則可求自方向餘弦。

2. 定明 $x-2y=5$ 與 $3x+y-7z=0$ 相交線之位置與方向餘弦。

既得 $\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-\frac{15}{7}}{1}$。可知該線經過 $(5, 0, \frac{15}{7})$ 點。而與 $(2, 1, 1)$ 之帶徑平行。

3. 定明 $5x-4y=1$, $3y-5z=2$ 線之位置。

4. 有 $x=3$, $y=4$ 線。$y=4$, $z=-5$ 線。$x=-2$, $z=3$ 線。問其位置各爲何。

5. 有正線經過 $(1, 2, 3)$ 與 $(3, 4, 1)$ 點。求其方程式。

6. 求前題直線穿過三坐標面之點。

7. 有直線之二射影平面爲 $x+y=4$ 與 $2x-5z=-2$。求其第三射影平面。

8. 有直線經過 $(2, 1, -1)$ 與 $(-3, -1, 1)$ 點。求其在於三坐標面上射影之方程式。

9. 題明 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$ 與 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$ 二線互爲直角。

10. 題明 $4x=3y=-z$ 線與 $3x=-y=-4z$ 線正交。

11. 求 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$ 與 $\frac{x}{3}=\frac{y}{-4}=\frac{z}{5}$ 二線間之交角。

12. 求 $y=5x+3,\ z=3x+5$ 線與 $y=2x,\ z=x+1$ 線間之交角。

13. 求 $y=2x+2,\ z=2x+1$ 線與 $y=4x+1,\ z=x+5$ 線間之交角。

14. 有 $$3x+2y+z-5=0,\ x+y-2z-3=0$$
線與 $$8x-4y-4z=0,\ 7x+10y-8z=0$$
線。題明其互爲直角。

15. 有線經過 $(-2,\ 3,\ -1)$ 點。而與 $y=-2x+1,\ z=3x-4$ 線平行。求其方程式。

16. 有線經過 $(3,\ -7,\ -5)$ 點。其方向餘弦與 $-3,\ 5,\ -6$ 有比。求其方程式。

17. 有線經過 $(2,\ -4,\ -6)$ 點。而垂於 $3x-6y+2z=4$ 平面。求其方程式。

18. 求 $\frac{x-4}{3}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-5}{-4}$ 線至 $2x-4y+3z=1$ 平面之斜度。

19. 改 $x=mz+p,\ y=nz+q$ 方程式爲配合式。而求準 m 與 n 之方向餘弦。

20. 有 $$x=mz+p,\ y=nz+q$$
線與 $$x=m'z+p',\ y=n'z+q'$$

線。題明其交角之公式爲

$$\cos\theta=\frac{mm'+nn'+1}{\sqrt{m^2+n^2+1}\sqrt{m'^2+n'^2+1}}.$$

21. 設 $mm'+nn'+1=0$。證明前題之二線互爲正交。反亦如之。並證明設 $m=m'$。與 $n=n'$。則二線互爲平行。反亦如之。

22. 設二線之射影互爲平行。證明該二線亦爲平行。反亦如之。

第 四 章

旋 轉 曲 面

(Surfaces of Revolution)

162. 前數章所論。含三變數之一次方程式。凡有一式。則代一平面。有二式則代一直線。故有三式。亦可顯明其軌跡公共之點。如圖六八。設 $OM=a$, $OR=b$, $OS=c$。則 $x=a$, $y=b$, $z=c$ 三方程式。所以定 P 點之位置。而即為該點之三方程式。因得定理曰。

凡有 $f(x, y, z)=0$ 式之任何一方程式。乃代一曲面。有二此等之方程式。則代一曲線。有三方程式。則定一點或多數點之位置。

(i) 設空去兩變數。如 $f(x)=0$ 方程式。然 $f(x)=0$ 可作為

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots(x-a_n)=0. \qquad (1)$$

而式內之 a_1, a_2, a_3,……a_n 為 $f(x)=0$ 之 n 根數。則(1)式之軌跡。乃 $x=a_1$, $x=a_2$, $x=a_3$, ……, $x=a_n$

等 n 數平行面也。照法則 $f(y)=0$ 與 $f(z)=0$ 兩方程式。乃代遞與 y, z 軸正交諸平面也。

(ii) 設空去一變數。如 $f(x, y)=0$ 方程式。則 $f(x, y)=0$ 在 xy 平面內之軌跡。乃為一平曲線也。設於曲線內之任何 P 點。作線與 z 軸平行。則在該線內各點之 x, y 坐標。皆與 P 點之 x, y 坐標相等。而合於 $f(x, y)=0$ 方程式。故 $f(x, y)=0$ 在空間之軌跡。乃常與 z 軸平行之正線所生之平面。且沿 $f(x, y)=0$ 之平面軌跡移動也。即 $f(x, y)=0$ 在空間之軌跡為圓柱曲面。其質皆與 z 軸平行。其準線則為 $f(x, y)=0$ 之平面軌跡。

照法則 $f(x, z)=0$ 與 $f(y, z)=0$ 遞代圓柱曲面。其質遞與 y, x 軸平行。

(iii) 設方程式為 $f(x, y, z)=0$。自該式取 $x=a$, $y=b$。則 z 方程式之根數。乃表明軌跡內諸點。而該軌跡則位于一過 (a, b, c) 點與 z 軸平行之直線上。但諸根之數有定限。則在該線上軌跡諸點之數。亦為定限。故含 a, b 異數值諸點

之軌跡。必爲曲面而非實體。

(iv) 二聯立方程式。與其軌跡相交線諸點之坐標相合。即所以代二曲面之相交曲線也。

(v) 三聯立方程式。其二方程式代一曲線。而曲線爲第三方程式之曲面所截。故獨與所截諸點之坐標相合。而三方程式。即所以定諸點也。

系一 自 (ii) 觀之。可知 $x^2+y^2=r^2$。即爲圓柱之方程式。而 z 軸爲其軸。r 爲其半徑。且

$$y^2=4px,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ 與\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

皆爲圓柱曲面之方程式。其質皆與 z 軸平行。而其準線。乃遞代拋物線,橢圓,與雙曲線。

系二 設 $F(x, y)=0$。爲 $f(x, y, z)=0$ 與 $f_1(x, y, z)=0$ 二方程式消去 z 變數之方程式。則 $F(x, y)=0$ 在空間之軌跡。乃二方程式所代曲線之 xy 平面上之射影圓柱也。$F(x, y)=0$ 之平面軌跡。即爲該曲線在于 xy 平面上之射影。而曲線與其射影相等。

若於二方程式消去 x, y 二變數。而所得方程程。可照法類推。而得其詳。

163. 曲面與三坐標面之相交線為曲面踪線。(The Traces of a Surface)

設 $f(x, y, 0)=0$。乃表明一方程式。得自 $f(x, y, z)=0$。而記以 $z=0$。則 $f(x, y, 0)=0$ 之平面軌跡。顯為 $f(x, y, 0)=0$ 曲面在于 xy 平面上之踪線。

164. 一曲線旋繞定軸所成之曲面為**旋轉曲面**。旋繞之曲線,謂之**母線**。(Generatrix) 定軸謂之**旋轉軸**。(Axis of Revolution) 平面經過旋轉軸所成之剖面。謂之**子午剖面**。(Meridian Section) 由定義。得次之規則。

(1) 平面與旋轉軸正交所成之各剖面。即為平圓。其中心在旋轉軸內。

(2) 任何子午剖面與母線相等。

165. 求旋轉曲面之總方程式。

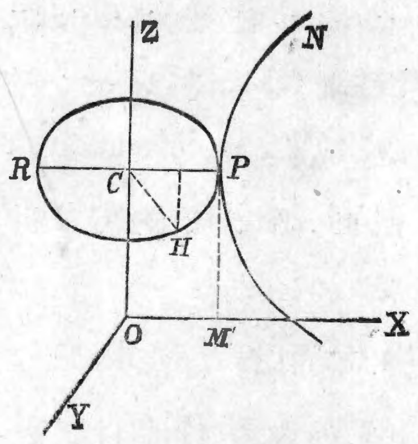
取 z 軸為旋轉軸。與 P 為 xz 平面所成子午剖面內之任何點。並取 PHR 為過 P 點與 z 軸

正交之剖面。而命該平圓剖面之 CH 或 CP 半徑為 r。

自該平圓剖面內諸點。得 $x^2+y^2=r^2$。與 $z=$MP。r^2 準 z 之數值。可自 zx 平面所成子午剖面。方程式內之 x 代 r 而得。因以 $f(z)$ 命 r^2 之數值。即得

$$x^2+y^2=f(z). \qquad [57]$$

圖七十六

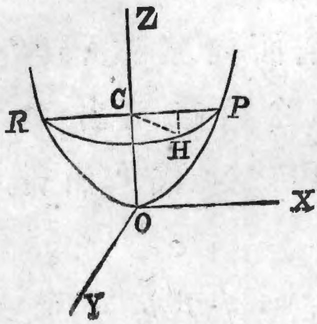


是式顯明 PHR 剖面內諸點之 x, y, z 三坐標之關係。然P點乃在NP子午剖面內之任何點。故[57]式為旋轉曲面之總方程式。而 z 軸為其旋轉軸。

166. 旋轉拋物面 (Paraboloid of Revolution) 拋

物線旋繞其軸所成之曲面爲旋轉拋物面。

圖七十七



自 xz 平面內子午剖面之方程式爲

$$x^2=4pz,$$

故 $$r^2=4pz=f(z).$$

將 r^2 之數值。代於[57]式。即得

$$x^2+y^2=4pz. \quad [58]$$

而爲旋轉拋物面之方程式。

設於[58]式。令 $x=m$。即得

$$y^2=4pz-m^2. \quad (1)$$

是式爲拋物面內剖面。在於 yz 平面上之射影方程式。其剖面與 yz 平面平行。並自 yz 平面爲 m 距離。因無論 m 爲何數值。(1)式之平面軌跡皆拋物線。故在拋物面內與 yz 平面平行之任

何剖面。皆爲拋物線。再於[58]式。令 $y=n$ 即得

$$x^2=4pz-n^2. \tag{2}$$

自(2)式可知與 xz 平面平行諸剖面。亦皆爲拋物線。自定義觀之。可知與 xy 平面平行之剖面皆爲平圓。

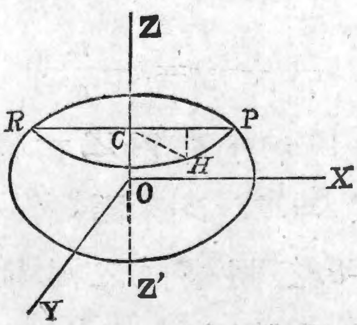
167. 旋轉楕圓面 (Ellipsoid of Revolution) 楕圓旋繞其一軸所成之曲面爲旋轉楕圓面。自短軸旋繞所得者爲**扁楕圓面**。(Oblate) 長軸旋繞所得者爲**長楕圓面**。(Prolate)

(i) 設自短軸旋繞。則 xz 平面內子午剖面之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

故
$$r^2=a^2\left(1-\frac{z^2}{b^2}\right)=f(z).$$

圖七十八



將 r^2 之數值。代於[57]式。即得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \qquad [59]$$

而爲扁橢圓面之方程式。

系一　設 $a=b$。則[59]式成爲

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \qquad (1)$$

而爲一球面之方程式。其半徑爲 a。

系二　設於[59]式。取 $x=m$。即得

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1-\frac{m^2}{a^2}. \qquad (2)$$

(2)式乃代 yz 平面內之一橢圓。一點。或無軌跡。憑 $n^2<,=,$ 或 $>a^2$ 而斷。故曲面乃位於 $x=a$ 與 $x=-a$ 二切平面之間。而與 yz 平面平行諸剖面。皆爲橢圓。

設於[59]式。取 $y=n$。即得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{n^2}{a^2}. \qquad (3)$$

(3)式乃代 zx 平面內之一橢圓。一點。或無軌跡。憑 $n^2<,=,$ 或 $>a^2$ 而斷。故曲面乃位於 $y=a$ 與 $y=-a$ 二切平面之間。而與 zx 平面平行諸剖面。皆爲橢圓。

設於[59]式。取 $z=q$。即得

$$x^2+y^2=a^2\left(1-\frac{q^2}{b^2}\right). \tag{4}$$

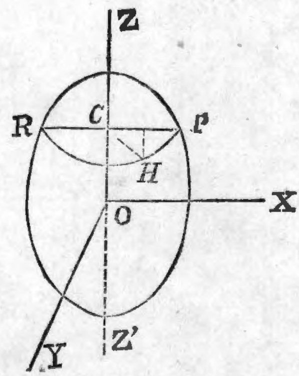
(4)方程式乃代 xy 平面內之一平圓。一點。或無軌跡。憑 $q^2<,=,$ 或 $>b^2$ 而斷。故曲面乃位於 $z=b$ 與 $z=-b$ 二切平面之間。而與 xy 平面平行諸剖面。皆爲平圓。

(ii) 設自長軸旋繞。則 xz 平面內子午剖面之方程式爲

$$\frac{z^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1,$$

故
$$r^2=b^2\left(1-\frac{z^2}{a^2}\right)=f(z).$$

圖七十九



將 r^2 之同數。代於[57]式。即得

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1. \qquad [60]$$

而爲長楕圓面之方程式。

設於[59]式。將 a 與 b 互易。即得[60]式。故互易[59]所討論內各式之 a 與 b。即可推得[60]之討論。

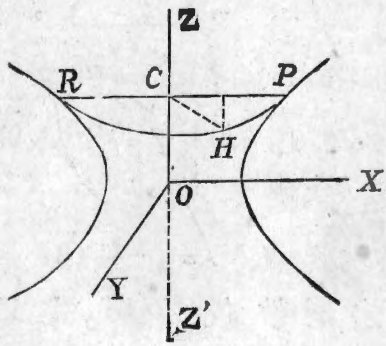
168. 旋轉雙曲面 (Hyperboloid of Revolution) 雙曲線旋繞其一軸所成之曲面爲旋轉雙曲面。

(i) 設於(59)式。取 $-b^2$ 代於 b^2。即得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1. \qquad [61]$$

而爲雙曲線旋繞其屬軸之旋轉雙曲面方程式。

圖八十



設於[61]式。取 $x=m$。即得

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1-\frac{m^2}{a^2}. \tag{1}$$

是式無論 m 爲何數值。其平面軌跡皆爲雙曲線。故與 yz 平面平行之任何剖面。皆爲雙曲線。而該雙曲線之長軸與 y 或 z 軸平行。乃憑 $m^2<$ 或 $>a^2$ 而斷。若 $m^2=a^2$。則(1)式成爲

$$y=\pm\frac{a}{b}z.$$

故[61]式以 $x=\pm a$ 平面所成之剖面。各爲二相交直線。

設於[61]式。取 $y=n$。即得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1-\frac{n^2}{a^2}. \tag{2}$$

故與 xz 平面平行之任何剖面。皆爲雙曲線。而該雙曲線之長軸與 x 或 z 軸平行。乃憑 $n^2<$ 或 $>a^2$ 而斷。且以 $y=\pm a$ 平面所成之剖面。各爲二相交直線。

設於[61]式。取 $z=q$。即得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1+\frac{q^2}{b^2}. \tag{3}$$

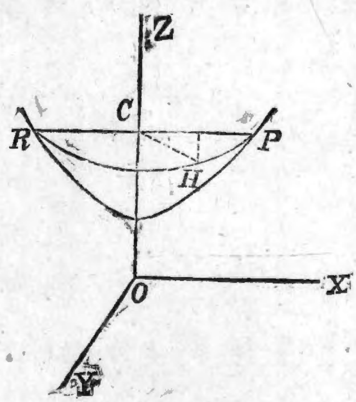
是式無論 q 爲何數值。其平面軌跡皆爲平圓。若 $q=0$。則軌跡爲至小之平圓。而爲雙曲面在於 xy 平面上之踪。因名該至小平圓曰**原圓**。(Circle of the Gorge)

(ii) 設於[60]式。取 $-b^2$ 代於 b^2。即得

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=-1. \qquad [62]$$

是爲<u>雙曲線旋繞其長軸之旋轉雙曲面方程式</u>。

圖八十一



[62]式平行剖面之討論。均可類推而得。學者試一一考之。

169. 曲面內各弦經過一點。而各爲該點所平分。該點謂之曲面之**中心**。(Centre)

曲面有中心者謂之**有中心曲面**。(Central Surface) 旋轉橢圓面與旋轉雙曲面皆爲有中心曲面。因於其方程式內。設 (x', y', z') 爲曲面內之任何一點。而 $(-x', -y', -z')$ 亦爲曲面內之一點。但二點相連之弦爲原點所平分。是以該原點爲曲面之中心。

170. 旋轉圓錐面 (Cone of Revolution) 一直線與旋轉軸相交。並旋繞該軸,所成之曲面爲旋轉圓錐面。

自 xz 平面內子午剖面之方程式爲

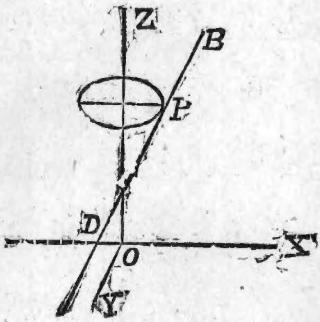
$$z=mx+c,$$

是以 $$r^2=\left(\frac{z-c}{m}\right)^2-(z).$$

如是 $$m^2(x^2+y^2)=(z-c)^2 \qquad [63]$$

即爲旋轉圓錐面之方程式。

圖八十二



是式之 c。乃圓錐之頂點自原點之距離。而式之 $m=\tan XDB$。

設 $c=0$。則 [63] 式成爲

$$m^2(x^2+y^2)=z^2. \tag{1}$$

自(1)式可見圓錐顯爲有中心之曲面。

設於(1)式。取 $y=n$。即得

$$\frac{z^2}{n^2m^2}-\frac{x^2}{n^2}=1.$$

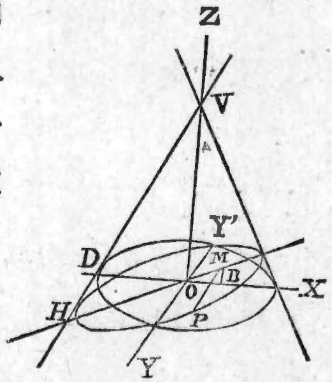
是式無論 n 爲何數值。其平面軌跡皆爲雙曲線。故與 zx 平面平行之圓錐諸剖面。皆爲雙曲線。照法可推得其與 yz 平面平行諸剖面。亦皆爲雙曲線。設取 $y=0$。則 $z=\pm mx$。是式之軌跡爲二相交直線。故圓錐之任何剖面。與其軸平

行者爲雙曲線。而含軸之任何剖面爲二相交直線。

171. 欲表明其非與軸平行之任何圓錐剖面之原性。可求該任何剖面屬於其平面二軸之方程式。

取 PHN 爲 VDY'N 圓錐內經過 y 軸之任何剖面。則該剖面與 xz 平面正交。是以該剖面就 xz 平面對稱。今遞以該剖面之 ON 與 OY 爲 x, y 二軸。取 (x, y, z) 爲 P 點屬於三坐標面。與 (x', y') 爲 P 點屬於 ON 與 OY。並取 XON$=\Phi$ 與 ODV$=\theta$。作 PM 與 ON 正交。則 PM 與 xz 平面正交。

圖八十三



即得

$y=y'$, $\text{OB}=\text{OM}\cos\Phi$, 或 $x=x'\cos\Phi$;

$\text{BM}=\text{OM}\sin\Phi$, 或 $z=x'\sin\Phi$.

代 x, y, z 諸數值於[63]式內。即得

$$\tan^2\theta(x'^2\cos^2\Phi+y'^2)=(x'\sin\Phi-c)^2.$$

脫去式內諸撇號並解之。得

$$y^2\tan^2\theta+x^2(\cos^2\Phi\tan^2\theta-\sin^2\Phi)+2cx\sin\Phi-c^2=0.$$

代 $\cos^2\Phi\tan^2\Phi$ 於 $\sin^2\Phi$。即得

$$y^2\tan^2\theta+x^2\cos^2\Phi(\tan^2\theta-\tan^2\Phi)+2cx\sin\Phi-c^2=0. \qquad [64]$$

是爲 NPH 圓錐剖面屬於 ON 與 OY 二軸之方程式。

取 c 在 0 與 ∞ 間諸數值。與 Φ 在 0° 與 90° 間諸數值。可見[64]式。除與圓錐軸平行之圓錐剖面外。無論任何圓錐剖面。均可以是式代之。

[64]方程式之討論。

是式之 $\Sigma=4\cos^2\Phi\tan^2\theta(\tan^2\theta-\tan^2\Phi)$,

$$\Delta=4c^2[\cos\Phi^2\tan^2\theta(\tan^2\theta-\tan^2\Phi)+\tan^2\theta\sin^2\Phi].$$

(i) 先取 c 不與圈相等。

令 $\Phi<\theta$。則 $\tan^2\Phi<\tan^2\theta$。而 Σ 爲正。與 Δ 不

為圈。故圓錐剖面為橢圓。

令 $\Phi=\theta$。則 $\tan^2\Phi=\tan^2\theta$。而 $\Sigma=0$。與 Δ 不為圈。故圓錐剖面為抛物線。

令 $\Phi>\theta$。則 $\tan^2\Phi>\tan^2\theta$。而 Σ 為負。與 Δ 不為圈。故圓錐剖面為雙曲線。

故剖面若非經過圓錐之頂點。則剖面為橢圓為抛物線。或為雙曲線。憑該剖面與圓錐底面所成角,之小於,等於,或大於圓錐底面與斜面所成角,而斷。

(ii) 設 $c=0$。$\Delta=0$。則剖面經過頂點。故橢圓剖面易為一點。抛物剖面易為一直線。與雙曲剖面易為二相交直線。

設 $\Phi=0$。則剖面與圓錐軸正交。而[64]式成為

$$y^2+x^2=c^2\cot^2\theta.$$

是式之軌跡乃為平圓。

設 $c=\infty$。則圓錐成為圓柱。

習題三九

1. 問 $x^3+3x^2-6x-8=0$, $y^3-2y^2-5y+6=0$, $z^2+mz=0$ 各方程式在空間之軌跡爲何。

2. 問 $y^2=8x$, $4x^2+9y^2=36$, $9z^2-16y^2=144$, $(2a-z)(y^2-b^2)=0$, $z^2+x^2=r^2$ 各式在空間之軌跡爲何。

3. 有 $x^2+3y^2-2z^2=8$, $x^2+2y^2+3z^2=16$ 二曲線。求其各射影圓柱之方程式。

4. 有 $x^2+y^2+2z^2=16$, $9(x^2+y^2)+4z^2=36$ 二曲線。求其各射影之方程式。

5. 有 $4x^2+9y^2+4z^2=37$ 橢圓。而 $z=\frac{1}{2}$。求其二半軸與離心率。

6. 求 $x^2+y^2+4z^2=25$, $7(x^2+y^2)-4z^2=79$ 各曲線之原性。

7. 求 $2x^2+5y^2-7z^2=9$, $x^2+3y^2=8z$ 各曲面之蹤線。

8. 設 z 軸爲旋轉軸。與 $z=\pm 3x+5$ 爲一蹤線。求旋轉曲面之方程式。並求其在 xy 平面上之蹤線。

9. 設旋轉圓錐面之一蹤線爲 $x^2+y^2=9$; 其頂點爲 $(0, 0, 5)$。求其方程式。

10. 設旋轉拋物面之一蹤線爲 $2x^2=3z+5$。求其方程式。

11. 設旋轉拋物面之一蹤線爲 $y^2=8x$。求其方程式。

12. 設 z 軸爲旋轉軸。與一蹤線爲 $2y=\pm z+6$。求旋轉圓錐面之方程式。並求其頂點。

13. 設 z 軸爲旋轉曲面之軸。與其一跡線爲 $9x^2+4z^2=36$。求其方程式。

14. 設 z 軸爲旋轉曲面之軸。與其一跡線爲 $16y^2+9z^2=144$。求其方程式。

15. 設 z 軸爲旋轉曲面之軸。與其一跡線爲 $9z^2-4y^2=-36$。求其方程式。

16. 設 z 軸爲旋轉曲面之軸。與其一跡線爲 $z^2x=1$。又一跡線爲 $z^3=2y^2$。求其各方程式。

17. 設圓錐之斜面與其軸成45°角。自頂點下一平面截圓錐軸於5。而與一圓錐剖面成60°角。求該剖面之二半軸。

坐標變換法

(Transformation of Coördinates)

172. <u>變三坐標之原點。而不變三軸之方向。</u>

取 (m, n, q) 爲屬於舊三坐標軸之新原點。並取 x, y, z 爲任何P點之舊坐標。與 x', y', z' 爲其新坐標。則顯爲

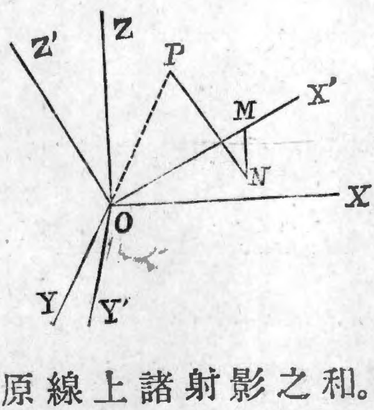
$$x=m+x',\ y=n+y',\ z=q+z'.$$

故求軌跡屬於新平行三軸之方程式。設其原點爲 (m, n, q)。則以 $m+x$ 代 x。$n+y$ 代 y。$q+z$ 代 z。

173. 變三軸之方向。而不變原點。

取 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ 遞爲 OX′, OY′, OZ′ 新三軸屬於 OX, OY, OZ 舊三軸之方向角。並取 x, y, z 爲任何 P 點之舊坐標。與 x', y', z' 爲其新坐標。作 PN 與 X′OY′ 平面正交。NM 與 OX′ 新軸正交。則 $OM=x'$, $MN=y'$, 與 $NP=z'$。於是 OP 在 OX 上之射影 $(=x)$。等於 OM,

圖八十四



MN, 與 NP 在原線上諸射影之和。故

$$x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3. \tag{1}$$

照法可得

$$y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3, \tag{2}$$

與

$$z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3. \tag{3}$$

是以變三軸之方向而不變原點。遞以(1),(2),(3)方程式內諸數值代於 x, y, z。

然 x, y, z 諸數值在 x', y', z' 內。各為一次。故無論三坐標軸如何變換。而方程式之次數總不變。(見 §68)

174. 二次曲面 (Quadrics) 含有三變數之二次方程式之軌跡謂之二次曲面。

二次曲面之總方程式為

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+K=0. \tag{1}$$

自(1)式取 $z=q$。即得

$$Ax^2+Dxy+By^2+(Eq+G)x+(Fq+H)y+(Cq^2+Iq+K)=0. \tag{2}$$

然(2)式在 xy 平面內之軌跡為圓錐形。且無論 q 為何數值。而 A, D, B 係數皆同。故(1)式曲面內與 xy 平面平行諸剖面。皆為相似圓錐形。設變三坐標軸。令新 xy 平面。為曲面諸平行剖

面之一平面。但方程式之次數不變。是以

任何曲面諸平行剖面。皆爲相似圓錐形。

175. 變三坐標軸。可改§174之(1)總方程式爲下列二式之一。

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=S. \tag{1}$$

$$Px^2+Qy^2=Uz. \tag{2}$$

【註】 設變三軸之方向。該總方程式可盡易爲下式。

$$Px^2+Qy^2+Rz^2+G'x+H'y+I'z-K=0. \tag{1}$$

此種變法與§120所論相仿。

(i) 設P, Q, R三係數內。無一爲圈。仿§119法。變其原點。即得

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=S. \tag{2}$$

(ii) 設諸係數內有一爲圈。例如R爲圈。變其原點。即得

$$Px^2+Qy^2=Uz. \tag{3}$$

設諸係數內有二爲圈。先變原點。次易三軸之方向。(1)式即可改爲(3)式。

無論P, Q, R, S爲何號或何數值。(1)方程式均代有中心曲面。(2)式之軌跡則爲無中心。設使(2)式諸軌跡。爲有中心。則原點易至中心。而

方程式內之 z 一乘方。將必滅去。然無 $q+z$ 狀可代於 z。而將 z 消去。

故(2)式乃代無中心曲面。

176. 有中心曲面 (Central Quadrics) 自 §175 之(1)式內。設 P, Q, R, S 諸係數中無一爲圈。即得

$$\frac{x^2}{S\div P}+\frac{y^2}{S\div Q}+\frac{z^2}{S\div R}=1.$$

是式可書爲以下各狀。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{A}$$

或

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{B}$$

或

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{C}$$

憑 $S\div P$, $S\div Q$, $S\div R$ 之全爲正號。或二正一負。或一正二負而斷。[設全爲負號。則無實軌跡。]

設(1)式之 S 爲圈。即得

$$Px^2+Qy^2+Rz^2=0.$$

設(1)式之 P, Q, R 有一爲圈。準 §162 之(ii)。則其軌跡爲圓柱曲面。

177. 考論(A)式。即發明其軌跡之性質如下。

(i) 軌跡在各坐標面上之踪線。皆爲橢圓。

(ii) 凡與各坐標面平行諸剖面。皆爲相似橢圓。

(iii) 其曲面乃含於 $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$ 切平面之間。

(A)式之曲面謂之橢**圓面**。(Ellipsoid) 設 $a=b$。則橢圓面爲偏形或長形橢圓面。憑 $a>$ 或 $<c$ 而斷。

一變數橢圓。其中心藏於 z 軸內。其二軸爲曲面在 yz 與 zx 平面上踪線之弦。設向 xy 平面平行移動。即顯成一橢圓面。

178. 考論(B)式。即得其軌跡之性質如下。

(i) 軌跡在 xy 平面上之踪線爲一橢圓。若在 yz 與 zx 二平面上。則爲雙曲線。而其長軸。則遞位於 y 軸與 x 軸之上。

(ii) 凡與 xy 平面平行諸剖面。皆爲橢圓。其與 yz 或 zx 平面平行諸剖面。則皆爲雙曲線。若至小之橢圓剖面。則爲在 xy 平面上之踪線。

面該橢圓之二半軸爲 a 與 b。

(B) 式之軌跡。謂之旋繞屬軸之雙曲面。

設 $a=b$。則 (B) 式之軌跡爲旋轉雙曲面。

一變數橢圓。其中心向 z 軸移動。其二軸爲曲面在 yz 與 zx 平面上踪線之弦。並與 xy 平面平行。亦顯成一雙曲線。

179. 考論 (c) 式。即得其軌跡之性質如下。

(i) 軌跡在 yx 與 zx 平面上之踪線。皆爲雙曲線。其長軸皆在 x 軸之上。

(ii) 凡與 zy 平面平行諸剖面。皆爲橢圓。且曲面無有位於 $x=\pm a$ 切平面間之部分。

(iii) 凡與 yx 成 zx 平面平行諸剖面。皆爲雙曲線。其長軸皆與 x 軸平行。

(c) 式之軌跡。謂之旋繞長軸之雙曲面。

180. 設 (D) 式之係數全爲正號。或全爲負號。則其軌跡爲 (0, 0, 0) 點。設二係數爲負號。一係數爲正號。若以 -1 除之。則二係數易爲正號。一系數易爲負號。今專考論之。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (D')$$

自該式考得其軌跡之性質如下。

(i) 凡與 yz 或 zx 平面平行諸剖面。皆爲雙曲線。其長軸皆與 z 軸平行。

(ii) 凡與 xy 平面平行諸剖面。皆爲橢圓。而在該平面上之踪爲一點。

(iii) 界線在 yz 與 zx 平面上之踪線。各爲二正線相交於原點。

(iv) 凡過 z 軸諸剖面。皆爲二正線相交於原點。

設任取

$$y=mx \qquad (1)$$

爲過 z 軸之平面。

自 (1) 與 (D′) 二式。消去 y 雙數。即得

$$z=\pm\frac{cx}{ab}\sqrt{b^2+a^2m^2}. \qquad (2)$$

既 (1) 與 (D′) 之交點。與 (1) 與 (2) 之交點相同。即可顯其爲二正線經過原點。

故 (D′) 之軌跡乃爲圓錐面。其軸爲 z 軸。與其

準線爲一橢圓。設 $a=b$。則 (D′) 式成爲旋轉圓錐面。

181. 無中心曲面 (Non-Central Quadricc) 自 § 175 之 (2) 式內。設 P, Q, U 諸係數中。無一爲圈。即得

$$\frac{x^2}{U\div P}+\frac{y^2}{U\div Q}=z.$$

是式可書爲以下各狀。

$$\frac{x^2}{l}+\frac{y^2}{l'}=z, \tag{E}$$

或

$$\frac{x^2}{l}-\frac{y^2}{l'}=z, \tag{F}$$

憑 P 與 Q 之同號或異號而斷。

考論 (E) 式。即發明其軌跡之性質如下。

(i) 凡與 xy 平面平行諸剖面。皆爲橢圓。而曲面位於 $z=0$ 切平面之上。

(ii) 凡與 yz 或 zx 平面平行諸剖面。皆爲拋物線。且在於該平面上之踪線。亦爲拋物線。而 z 軸爲其公軸。與凹形向上。

考論 (F) 式。即得其軌跡之性質如下。

(i) 界線在 yz 與 zx 平面上之踪線。皆爲拋物線。其軸皆位於 z 軸之上。與其凹形皆背向。

(ii) 凡與 yz 或 zx 平面平行諸剖面。皆爲拋物線。其凹形皆背向。

(iii) 凡與 xy 平面平行諸剖面。皆爲雙曲線。其長軸皆與 x 軸或 y 軸平行。憑 z 之爲正號或負號而斷。且在該平面上之踪線。乃爲二相交正線。

(終)

答　題

平　面　部

習　題　三

1. 取 $x_1=-2$, $y_1=5$, $x_2=-8$, $y_2=-3$. 代之於[1]式。即有

$$d=\sqrt{(-6)^2+(-8)^2}=\sqrt{100}=10.$$

在(圖三). P 與 Q 二點可代本題。設不用[1]式相助。即隱去代數號。得

$$QR=NO-MO=8-2=6,$$

$$PR=PM+MR=5+3=8,$$

是以 $\overline{PR}^2=\overline{QR}^2+\overline{PR}^2=36+64=100$, 及 $PQ=10$.

2. 13.

3. 5.

4. 10.

5. $2\sqrt{a^2+b^2}$.

6. 25, 29, $20\sqrt{2}$.

7. $2\sqrt{17}$, $5\sqrt{2}$, $\sqrt{106}$.

8. 5, 5, 6.

9. a, b, $\sqrt{a^2+b^2}$.

10. $\sqrt{29}$, 5, $2\sqrt{10}$, $4\sqrt{5}$; $2\sqrt{10}$, $3\sqrt{13}$.

11. 8 或 -16.

12. $(x-7)^2+(y+2)^2=121$.

13. $(x-2)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y-5)^2$, 式可併爲 $x+y=7$.

習　題　四

1. (6, 5).

2. $(-1, 0)$.

3. $(2, -2)$.

4. $(3, -1)$, $(\frac{1}{3}, -\frac{11}{3})$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3})$.

5. (7, 1).

6. $(a, -b)$.

7. 取原點之坐標。在於二足邊之交點。並取 x 軸與 y 軸在於二足邊之方向。設以 a 與 b 命二足邊之長度。則三頂點之坐標爲 (0, 0), $(a, 0)$ 與 $(0, b)$。

10. RB 與 BQ 之長度現爲 $x-x_2$ 與 $y-y_2$.

11. (6, 2).

12. $(\frac{8}{3}, \frac{1}{3})$.

13. (8, 0).

14. $(7\frac{3}{4}, -31\frac{3}{4})$.

15. (13, −1), (−11, 5), (1, −11).

習題七

1. 12, 16.

2. −10, 6.

3. ±4, ±4.

4. $\pm\frac{4}{3}$, ±2.

5. $\pm\frac{4}{3}$, 虛.

6. $\pm\frac{4}{3}$, −4.

7. $\pm b$, $\pm a$.

8. 3 在 x 軸.

9. ±3 在 x 軸.

10. 軌跡經過原點。

11. 軌跡經過原點.

12. $\begin{cases} \text{在 } x \text{ 軸. } 8 \text{ 與 } -4. \\ \text{在 } y \text{ 軸. } 4\pm4\sqrt{3}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \text{在 } x \text{ 軸. } 0 \text{ 與 } 4. \\ \text{在 } y \text{ 軸. } 0 \text{ 與 } 8. \end{cases}$

14. 軌跡不割二軸.

15. (5, 7).

16. (2, 1).

17. (3, 4) 與 (−4, 3).

18. (3, 4).

19. (5, 3) 與 (3, 5).

20. (0, 0) 與 (2, 4).

21. (5, −3), (6, 4), (−4, −1).

22. $\sqrt{61}$, 5, $2\sqrt{26}$.

23. 3, 4, 5.

24. $\begin{cases}(a, b)(-a, b),\\(-a, -b)(a, -b).\end{cases}$

25. 無.

26. 10.

習　題　九

1. 取 x 與 y 爲動點之變坐標。則點之各方位爲 $y=3x$. 是以 $y=3x$. 或 $y-3x=0$ 即所求之方程式。問該方程式之軌跡。是否經過原點。

2. $x-6=0$, $x+6=0$, $x=0$.

3. $y-4=0$, $y+1=0$, $y=0$.

4. 在(圖甲). $x=3$ 線爲 AB 線。問如何作此線。變數點之軌跡。有二直線與 AB 平行。而皆自 AB 之距離爲 2。取 CD, EF 爲二平行線。(x, y) 爲變數點。則 CD 各點爲 $x=3+2=5$. 與 EF 各點爲 $x=3-2=1$. 是以 CD 線之方程式爲 $x-5=0$. 與 EF 之方程式爲 $x-1=0$. 二方程式之合數爲 $(x-5)(x-1)=0$. 故該方程式合 CD 與 EF 各線之點。是以 $(x-5)(x-1)=0$, 或 $x^2-6x+5=0$. 即所求之方程式也。

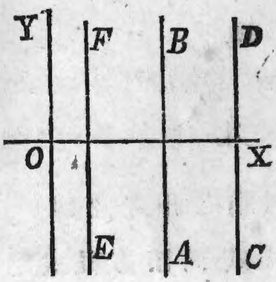
5. $y^2-10y+16=0$. 二平行直線。

6. $x^2+8x-9=0$.　二平行直線。

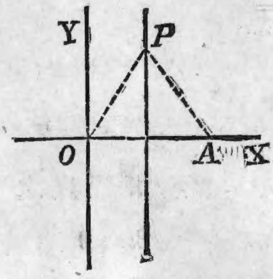
7. $x+3=0$, $y-2=0$.

8. 自幾何學證之。凡各點自所設二點爲等距離。則各點必位於所設二點相連直線之中點垂線。該垂線即所求之軌跡。其方程式爲 $x=3$.

甲 圖



乙 圖



若以解析幾何學法化該題問。取 O (圖乙)為原點。A 為 (6, 0) 點。並取 P 代任何點自 O 與 A 為等距離之位置。x 與 y 為其坐標。

於是自所設狀

$$PO=PA.$$

是以 $$x^2+y^2=(x-6)^2+(y-0)^2,$$

或 $$x^2+y^2=x^2-12x+36+y^2,$$

如是 $$x=3.$$

即為所求軌跡之方程式。

9. $x-1=0.$

10. $y-2=0.$

11. $x-3y-1=0.$

12. $x-y=0.$

13. $x^2+y^2=100.$ 乃一平圓。有原點為中心。及10為半徑。

14. 自 (x, y) 點至 $(4, -3)$ 點之距離。與 5 相等。而方程式為 $(x-4)^2+(y+3)^2=25.$

15. $(x+4)^2+(y+7)^2=64.$

16. $x^2+y^2=81.$

17. 作 AO 與 BC 直交(圖丙)。取 AO 爲 x 軸。與 BC 爲 y 軸。則 A 爲 (3, 0) 點。

即 P 代船之任何位置。x 與 y 爲 OM 與 PM 坐標。聯 PA 爲線。並作 PQ 與 BC 直交。而遇 PQ 於 Q。於是自所設狀

$$PA=PQ=OM.$$

是以 $$\overline{PA}^2=\overline{OM}^2.$$

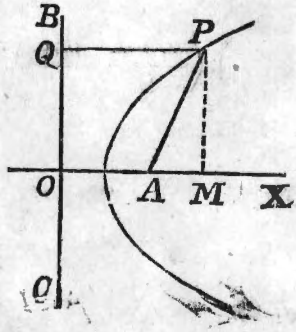
今 $\overline{PA}^2=\overline{AM}^2+\overline{PM}^2=(x-3)^2+y^2$, 與 $\overline{OM}^2=x^2$. 代之

得 $$(x-3)^2+y^2=x^2,$$

如是 $$y^2=6x-9.$$

丙

圖



此軌跡爲拋物線。學者試討論該方程式。

18. 設取 BC 爲 y 軸。自 A 至 BC 之垂線爲 x 軸。而 $y^2=12x-36$, 即所求之方程式。

19. $x^2-3y^2=0$. 二直線。

20. $x^2+y^2=k^2-a^2$. 一平圓。

21. $4ax\pm k^2=0$. 二直線。

習 題 一 十

4. $d=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

5. $(x-4)^2+(y-6)^2=64$.

6. $x+y=7$.

7. $(\frac{13}{3}, \frac{8}{3})$; $\frac{5}{3}\sqrt{2}$.

8. 取直方形之二邊爲二軸。並取 a 與 b 代其長度。則直方形之頂點爲 $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, b), $(0, b)$ 各點。

9. 取一頂點爲原點。與一邊 a 爲 x 軸。則 $(0, 0)$ 與 $(a, 0)$ 爲二頂點。取 (b, c) 爲第三頂點。則 $(a+b, c)$ 代第四頂點。

10. $(11, 2)$, $(-1, 4)$, $(15, 16)$.

11. $(5, -2)$, $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{9}{2}, -\frac{13}{2})$.

12. $(1, -\frac{8}{3})$.

13. $\sqrt{17}$.

14. $(\frac{7}{2}, \frac{7}{2})$.

16. $(6, 23)$.

17. $\left(\frac{x_1+3x_2}{4}, \frac{y_1+3y_2}{4}\right)$, $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, $\left(\frac{3x_1+x_2}{4}, \frac{3y_1+y_2}{4}\right)$.

21. 3 或 -23.

22. $\begin{cases} 3 \text{ 與 } 2 \text{ 在 OX.} \\ 6 \text{ 與 } 1 \text{ 在 OY.} \end{cases}$

23. $(8, 6)$ 與 $(8, -6)$.

24. $(2a, a)$ 與 $(-2a, a)$.

25. $(a, 0)$ 與 $(-a, 0)$.

26. 10, $2\sqrt{26}$, $2\sqrt{13}$.

27. 取二定線爲二軸。則方程式爲 $y=6x$, 或 $x=6y$.

28. 取 A 爲原點。與 AB 爲 x 軸。則方程式爲 $x^2-3y^2=0$.

29. 取定線與自定點至該線之垂線。遞爲 x 與 y 二軸。則所求方程式爲 $x^2+(y-a)^2=4y^2$.

習題十一

1. $x-y+1=0.$

2. $2x-y-3=0.$

3. $x+y-1=0.$

4. $x-y=0.$

5. $3x+2y+12=0.$

6. $2x-3y+6=0.$

7. $x+y-7=0.$

8. $4x-3y=0.$

9. $y=0.$

10. $y=4.$

11. $5x-2y=0.$

12. $nx-my=0.$

13. $x-y-3=0.$

14. $\sqrt{3}x-y+7-2\sqrt{3}=0.$

15. $x-y+14=0.$

16. $\sqrt{3}x+3y+12-13\sqrt{3}=0.$

17. $\sqrt{3}x-3y-3\sqrt{3}=0.$

18. $x+y-3=0.$

19. $\sqrt{3}x+y=0.$

20. $y+3=0.$

21. $x-2=0.$

22. $x-y+2=0.$

23. $x-y+5=0.$

24. $x-y-4=0.$

25. $x-\sqrt{3}y-4\sqrt{3}=0.$

26. $y+4=0.$

27. $\sqrt{3}x-y-4=0.$

28. $x=0.$

29. $\sqrt{3}x+y+4=0.$

30. $x+y+4=0.$

31. $x+\sqrt{3}y+4\sqrt{3}=0.$

32. $y+4=0.$

33. $3x+4y-12=0.$

34. $x-3y+6=0.$

35. $x+y+3=0.$

36. $3x-5y-15=0.$

37. $x-2y+10=0.$

38. $x-y-1=0.$

39. $x-y-n=0.$

40. $4x+y-4n=0.$

41. $x+y-5\sqrt{2}=0.$　　42. $x-y\sqrt{3}+10=0.$

43. $x+y\sqrt{3}+10=0.$　　44. $x-y\sqrt{3}-10=0.$

45. $x+7y+11=0,\ x-3y+1=0,\ 3x+y-7=0.$

46. $x-7y=39,\ 9x-5y=3,\ 4x+y=11.$

47. $17x-3y=25,\ 7x+9y=-17,\ 5x-6y-21=0.$

48. $5x-y=0,\ 5x+6y-35=0,\ 3x-y=21,\ 9x+4y=0,\ y=0,$
$14x+3y=29.$

49. $x-y\sqrt{3}-7\frac{1}{2}=0.$　　50. $y=x+3.$

51. $y=x\pm 6\sqrt{2}.$　　52. $y=-x\pm 6\sqrt{2}.$

53. $\dfrac{x}{-\frac{11}{3}}+\dfrac{y}{\frac{11}{9}}=1.$　　55. $a=\dfrac{C}{A}$, 或 $-\dfrac{b}{m}$, $b=\dfrac{C}{B}.$

58. $m=-\dfrac{A}{B}$, 或 $-\dfrac{b}{a}$, $b=\dfrac{C}{B}.$　　59. $(5,-3),(6,4),(-4,-1).$

60. $9x+2y=0,\ \frac{1}{6}\sqrt{85}.$　　61. $y\pm x=y_1\mp x_1.$

62. $(d-c)x-(b-a)y=ad-bc,\ (d-c)x+(b-a)y=bd-ac.$

64. $2y_2x+(x_1-2x_2)y-x_1y_2=0,\ y_2x+(2x_1-x_2)y-x_1y_2=0,$
$y_2x-(x_1+x_2)y=0.$

65. $m=4.$　　66. $m=3.$　　67. $b=-9.$

68. $\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, 或 $x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)=0.$

習　題　十　二

1. $-\frac{3}{13}\sqrt{13}x+\frac{2}{13}\sqrt{13}y=\frac{11}{13}\sqrt{13}$; $p=\frac{11}{13}\sqrt{13}.$

2. $\frac{3}{34}\sqrt{34}x+\frac{5}{34}\sqrt{34}y=\frac{13}{34}\sqrt{34}$; $p=\frac{13}{34}\sqrt{34}.$

3. $p=\frac{2}{17}\sqrt{17}$.

4. $p=\frac{7}{13}\sqrt{13}$.

5. $p=\frac{1}{2}\sqrt{26}$.

6. $p=\frac{19}{10}\sqrt{2}$.

7. $p=\dfrac{n}{\sqrt{e^2+c^2}}$.

8. $p=\dfrac{r}{\sqrt{n^2+c^2}}$.

9. 第四象限.

10. 第二象限.

11. 第四象限.

12. 第二象限.

13. 第三象限.

14. 第一象限.

15. 第二象限.

16. 第四象限.

17. 第三象限.

18. 第四象限.

19. $m=-\dfrac{b}{a}$.

21. 0; 8.

22. $C=12$, $A=4$, $B=-1$.

24. $A=(y_2-y_1)$, $B=-(x_2-x_1)$. $C=(x_1y^2-x_2y_1)$.

25. $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $b=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2-x_1}$.

習 題 十 三

1. $3x-y-16=0$.

2. $3x-4y-3=0$.

3. $4x-y=0$.

4. $y-8=0$.

5. $x-5=0$.

6. $x+4y+49=0$.

7. $7x-23y+193=0$.

8. $y=2x$.

9. $35y+49x-79=0$.

習題十四

2. 正切 $\Phi=-\frac{1}{2}$. 3. 正切 $\Phi=\frac{1}{18}$. 4. 正切 $\Phi=\dfrac{n}{n^2+2}$.

5. $90°$. 6. $135°$. 7. $90°$. 8. $0°$. 9. $30°$.

11. $y=5x-10,\ x+5y=28.$

12. $y=5x+11,\ x+5y-3=0.$

13. $y-3=m'(x-2)$, 與 $m'=-(8\pm5\sqrt{3})$.

14. $y-3=m'(x-1)$, 與 $m'=\dfrac{8\pm5\sqrt{3}}{11}$.

22. $2x+3y-31=0.$ 23. $62x+31y-1115=0.$

24. $y=6x-27.$ 25. $y=mx\pm d\sqrt{1+m^2}.$

26. $Bx=A(y-b).$ 27. $ax-by=a^2-b^2.$

28. $(a\pm b)y+(b\mp a)(x-a)=0.$

30. $x-3y+26=0,\ 5x+3y+8=0,\ 2x+3y-9=0.$

31. $x-6=0.$

32. $2x-9y+12=0,\ 10x-4y+63=0,\ 18x-40y+111=0.$

33. $\left.\begin{cases} x-\ y-\ 6=0\\ 2x-\ y-\ 2=0\\ 5x-3y-10=0\end{cases}\right\}$ 遇於 $(-4,\ -10)$ 點. 距離 $=\sqrt{85}$.

35. $y-y_1=\dfrac{-A\pm B\ 正切\ \Phi}{B\pm A\ 正切\ \Phi}(x-x_1).$

習 題 十 五

1. $\frac{1}{2}\sqrt{10}$.　**2.** $\frac{4}{5}\sqrt{5}$.　**3.** 4.　**4.** $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.　**5.** 0.

學者須作下二題之所設線·並顯明距離之變號·

7. $-\frac{24}{5}$, $-\frac{20}{5}$, $-\frac{16}{5}$, $-\frac{12}{5}$, $-\frac{8}{5}$, $-\frac{4}{5}$, 0, $+\frac{4}{5}$, $-\frac{15}{5}$, $-\frac{12}{5}$, $-\frac{9}{5}$, $-\frac{6}{5}$, $-\frac{3}{5}$, 0, $+\frac{3}{5}$.

8. -6, -5, -4, 3, 2, 1, 0, -1.

9. $\pm\frac{9}{5}\sqrt{10}$.　**10.** $\frac{20}{41}\sqrt{41}$.　**11.** $2\sqrt{2}$.

12. $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$.　**13.** $-\frac{11}{5}$.　**14.** $\frac{6}{13}\sqrt{13}$.

15. $-\frac{31}{5}\sqrt{2}$.　**16.** $\mp\frac{4}{5}\sqrt{2}$.　**17.** $\sqrt{a^2+b^2}$.

18. $\frac{\pm ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{\mp 3ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.　**19.** $\sqrt{a^2+b^2}$.

20. $\pm\frac{Ah+Bk-(D-C)}{\sqrt{A^2+B^2}}$.　**21.** 2.　**22.** 4.

23. $\pm\frac{C-C'}{\sqrt{A^2+B^2}}$.　**24.** $\frac{C+C'}{\sqrt{A^2+B^2}}$.　**25.** $\frac{5}{13}\sqrt{26}$.

26. $\pm\frac{3ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

習 題 十 六

1. $1\frac{1}{2}$.　**2.** 12.　**3.** 29.　**4.** 40.

5. ab.　**7.** 26.　**8.** 35.　**9.** $19\frac{1}{2}$.

10. $\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)$.　**11.** 26.　**12.** 96.　**13.** 41.

14. $\frac{1}{2}(a-c)(b-1)$.　**15.** $\frac{1}{2}(a-b)(a+b-2c)$.

16. $\frac{1}{2}(a^2-b^2)$. 17. $60°, 60°, 60°;\ 9\sqrt{3}$. 18. 10.

19. $\frac{1}{4}$. 20. $1\frac{1}{3}$. 21. $9a^2$.

22. $\dfrac{2c^2}{21}$. 23. 24. 24. 36.

25. 16. 26. $\frac{1}{2}ab$. 27. $\dfrac{b^2}{2m}$.

28. $\frac{1}{2}ab$. 29. $\dfrac{C^2}{2AB}$. 30. 56. 31. $10\frac{1}{2}$.

習題十七

3. $2,\ \infty,\ 90°,\ 2,\ 0°$. 4. $0,\ 0,\ 45°,\ 0,\ 135°$.

5. $\frac{1}{3}\sqrt{3}-2,\ 2\sqrt{3}-1,\ 60°,\ \dfrac{2\sqrt{3}-1}{2},\ 150°$.

6. $2,\ \frac{2}{3}\sqrt{3},\ 150°,\ 1,\ 60$. 7. $2,\ -\frac{2}{3}\sqrt{3},\ 30°,\ 1,\ 60°$.

8. $\frac{2}{3}\sqrt{3},\ 60°,\ 1,\ 300°$. 9. $11x+y=0,\ x-5y+20=0$.

10. $\frac{4}{41}\sqrt{82}$.

11. $3x+4y-57=0,\ 3x+4y+6=0,\ 12x-5y-39=0,$

$12x-5y+24=0$. 面積 $=63$.

12. 43. 13. $x=3$.

14. $x-y+1=0,\ x+y-7=0$.

15. $5x+6y-39=0$. 16. $14x-3y-30=0$.

17. $4x-5y+8=0$. 18. $x+y-7=0$.

19. $\dfrac{y-y_3}{x-x_3}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

20. $y=3,\ 13y=5x-1,\ 9y=5x+7$.

21. $92x+69y+102=0$.

22. $x+4y=34$.

23. $3x+4y-5a=0$.

24. $3x+4y=24$.

25. $y-y_1=-\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$.

26. $4y=x+8$.

27. $4y=9x-24$.

28. $9x-20y+96=0$, $5x-4y+32=0$.

29. $88x-121y+371=0$.

30. $5x-y-10=0$, $x+5y-28=0$.

31. $2x+y-9=0$, $x-2y-17=0$.

32. $4x+y-20=0$, $x-4y-5=0$.

33. $2x=y$, $2y=x$.

34. $4x+5y+11\pm 3\sqrt{41}=0$.

35. $y=(7\mp 5\sqrt{2})(x+2)$.

36. $\frac{2x-5y}{\sqrt{29}}=\pm\frac{4x+3y-12}{5}$.

37. $7x-3y+15=0$, $3x+7y-93=0$.

38. $8x+7y-19=0$, $16x+3y+17=0$.

39. $135°$.

40. $90°$.

41. $-\frac{31\sqrt{26}}{143}$.

42. $\pm\frac{bh+ak-ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

43. $\frac{c^2}{\sqrt{h^2+k^2}}$.

44. $\pm\frac{a}{m}\sqrt{1+m^2}$.

45. c^2.

46. $\frac{k^2}{6}$.

47. $\frac{2a^2+5ab+2b^2}{6}$.

48. $17\frac{1}{2}$.

49. $6\frac{17}{48}$.

50. 59.

51. $(10, 5\frac{1}{2})$.

54. xy 代二軸.

57. $a=5$.

58. $x+a=0,\ x-b=0$.

59. $x+a=0,\ y+b=0$.

60. 二軸與 $x=y$.

61. $2x-y=0,\ 7x+y=0$.

62. 設以 h 命為三角形之高度。並取底為 x 軸。則軌跡為 $y=h$ 直線。

63. 軌跡之方程式為 $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$. 此為平分 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 相連之線。並與該線直交之直線方程式,

64. $Ax+By+C\pm d\sqrt{A^2+B^2}=0$ 代二平行線。

65. $x+y=K$.

66. $\dfrac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}+\dfrac{A'x+B'y+C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}=K$.

67. 取 b 命為底。k^2 為餘二邊之平方之常數較。並取底為 x 軸。底之中點為原點。則軌跡之方程式,為 $2bx=\pm k^2$.

習題十八

1. $x^2+y^2=-2rx$.

2. $x^2+y^2=2ry$.

3. $x^2+y^2=-2ry$.

4. $(x-5)^2+(y+3)^2=100$.

5. $x^2+(y+2)^2=121$.

6. $(x-5)^2+y^2=25$.

7. $(x+5)^2+y^2=25$.

8. $(x-2)^2+(y-3)^2=25$.

9. $x^2+y^2-2hx-2ky=0$.

11. $(1, 2),\ \sqrt{5}$.

12. $(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}),\ \frac{1}{6}\sqrt{62}$.

13. $(4, 0),\ 4$.

14. $(-4, 0),\ 4$.

15. $(0, 4),\ 4$.

16. $(0, -4)$, 4.

17. $(0, \frac{7}{8})$, $\frac{7}{8}$.

18. $(0, 0)$, 3K.

19. $(0, 0)$, $\sqrt{a^2+b^2}$.

20. $(0, 0)$, $\sqrt{a^2+b^2}$.

21. $\left(\frac{k}{2}, 0\right)$, $\frac{k}{2}\sqrt{5}$.

22. $\left(\frac{h}{2}, \frac{K}{2}\right)$, $\frac{\sqrt{h^2+K^2}}{2}$.

23. 當 $D=D'$ 與 $E=E'$, 更言之。當二方程式之常數項獨異。

24. 因 $r=0$. 故方程式代 (a, b) 點。此爲無窮小平圓之方程式。而有該點爲其中心。

26. $\begin{cases} (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}),\ \frac{5}{2}\sqrt{2}; \\ \text{在 OX, } 3 \text{ 與 } 2; \\ \text{在 OY, } 6 \text{ 與 } 1. \end{cases}$

27. $\begin{cases} (6, 2),\ 5; \\ \text{在 OX, } 6\pm\sqrt{21}; \\ \text{在 OY, 虛點.} \end{cases}$

28. $\begin{cases} (2, 4),\ 2\sqrt{5}; \\ \text{在 OX, } 0 \text{ 與 } 4; \\ \text{在 OY, } 0 \text{ 與 } 8. \end{cases}$

29. $\begin{cases} (3, -2),\ 3; \\ \text{在 OX, } 3\pm\sqrt{5}; \\ \text{在 OY, } -2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} (-11, 9),\ \sqrt{145}; \\ \text{在 OX, } -3 \text{ 與 } -19; \\ \text{在 OY, } 9\pm2\sqrt{6}. \end{cases}$

31. $\begin{cases} \text{(i) } D^2=4c. \\ \text{(ii) } E^2=4c. \\ \text{(iii) } 4C>D^2 \text{ 與 } E^2. \end{cases}$

32. $x^2+y^2+10x+10y+25=0$.

33. $(7, 4)$ 與 $(8, 1)$.

34. $(2, 0)$ 與 $(\frac{6}{5}, -\frac{8}{5})$.

35. $\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

36. $2\left(r^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

37. $2x-y-2=0$.

38. $4x-5y-71=0$.

39. $3x-5y-34=0$.

40. 取 (x, y) 爲所求軌跡之任何點。則 (x, y) 自 (x_1, y_1) 之距離必常等於其自 (x_2, y_2) 之距離。

是以　$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2,$$

如是　$$2x(x_1-x_2)+2y(y_1-y_2)=(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2).$$

顯明該方程式代一直線。而垂於 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 相連線之中點。

41. $8x+6y+17=0.$

42. 第一法　將各點之坐標。代於平圓總方程式。則有三方程式之狀。並化之即得 a, b 與 r 之數值。

第二法　聯 $(4, 0)$ 與 $(0, 4)$. 並與 $(6, 4)$ 爲直線。於是作二線中點之垂線。其相交之點即爲平圓之中心。與自中心至任何所設點之距離爲半徑。

答. $x^2+y^2-6x-6y+8=0.$

43. $x^2+y^2-8x+6y=0.$

44. $x^2+y^2+6x+y=0.$

45. $x^2+y^2+8ax-6ay=0.$

46. $x^2+y^2+8x+20y+31=0.$

47. $x^2+y^2-9x-5y+14=0.$

48. $$\begin{cases}(x-5)^2+(y+8)^2=169,\\(x-22)^2+(y-9)^2=169.\end{cases}$$

49. $$\begin{cases}x^2+y^2-30(x+y)^2+225=0,\\x^2+y^2-6(x+y)+9=0.\end{cases}$$

50. $x^2+y^2-8x-8y+16=0.$

51. $x^2+y^2\mp 2ax\mp 2ay+a^2=0$

52. $x^2+y^2=ax+by.$

53. $(x-1)^2+(y-4)^2=20.$

54. $x^2+y^2-14x+4y-5=0.$

55. $x^2+y^2\pm\sqrt{2}\,ay=0.$

$x^2+y^2\pm\sqrt{2}\,ax=0.$

56. $m(x^2+y^2)-ab=(ma-b)x+(mb-a)y.$

57. $x^2+y^2=x_1x+y_1y.$

58. $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$

59. $(1+m^2)(x^2+y^2)-2r(x+my)=0.$

60. $x^2-ax+y^2=r^2-\dfrac{a^2}{2}.$

習題十九

1. 雙號乃與幾何學相關。二切線有同方向者。則能常與所設平圓相切。

3. $2x+3y=26,\ 3x-2y=0;\ 3\sqrt{13},\ 2\sqrt{13},\ -9,\ -4,\ \frac{13}{3}\sqrt{13}.$

4. $\dfrac{x_1^2-r^2}{x_1},\ -x_1,\ \dfrac{r^3}{x_1y_1}$

5. $9x-13y=250.$

6. $x\pm 3y=10.$

7. $104\frac{1}{6}.$

8. $x^2+y^2=25\frac{1}{3}.$

9. $14x\pm 6y=232.$

10. $3x+y=19.$

11. $3x+4y=0.$

12. $\begin{cases}3x+7y=93,\\ 3x-7y=65.\end{cases}$

13. $x=r.$

14. $Ax+By\mp r\sqrt{A^2+B^2}=0.$

15. $Bx-Ay\mp r\sqrt{A^2+B^2}=0.$

16. $x-y\pm r\sqrt{2}=0.$

17. 二切線之方程式爲 $(h^2-r^2)y^2=r^2(x-h)^2.$

18. $x+y=\pm r\sqrt{2}.$

19. $\begin{cases} x=10, \\ 3x+4y=50. \end{cases}$

20. $y=2x+13\pm 6\sqrt{5}.$

21. $-21,\ -3\frac{6}{7}.$

22. $\begin{cases} x^2+y^2=p^2, \\ (p\text{ 餘弦 }\alpha,\ p\text{ 正弦 }\alpha). \end{cases}$

23. $\begin{cases} \text{當 } C=r\sqrt{A^2+B^2}. \\ \text{當 } \dfrac{Aa+Bb-C}{\sqrt{A^2+B^2}}=\pm r. \end{cases}$

24. $ax+by=0.$

25. $(-a,\ -b).$

26. $(2a,\ b).$

27. $(0,\ b).$

28. $x^2+y^2=\frac{5}{9}.$

29. $m=0.$

30. $c=-36\mp 20\sqrt{6}.$

31. $\begin{cases} (x-2)^2+(y-4)^2=100, \\ (x-18)^2+(y-16)^2=100. \end{cases}$

32. $(x-5)^2+(y-3)^2=\frac{121}{13}.$

33. $(x-1)^2+(y-6)^2=25.$

34. $\dfrac{1}{r^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}.$

35. $(x^2+y^2)(a+b+\sqrt{a^2+b^2})^2$

$-2ab(a+b+\sqrt{a^2+b^2})(x+y)+a^2b^2=0.$

36. $x=a+r.$

37. $[4r^2-2(a-b)^2]^{\frac{1}{2}}.$

習 題 二 十

1. $\frac{1}{2}\sqrt{29},\ (1,\ -\frac{3}{2}).$

2. $\frac{1}{3}\sqrt{11},\ (-\frac{4}{3},\ \frac{2}{3}).$

3. $\frac{1}{2}\sqrt{34},\ (\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}).$

4. $b,\ \left(\dfrac{b}{\sqrt{1+a^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{1+a^2}}\right).$

5. $x^2+y^2=81.$

6. $(x-7)^2+y^2=9.$

7. $(x+2)^2+(y-5)^2=100.$

8. $x^2+y^2-2a(3x+4y)=0.$

9. $x^2+y^2+2b^2+c^2=2[(b+c)x+(b-c)y]$.

10. $3ab(x^2+y^2)+2ab(a^2+b^2)=(5a^2+2b^2)bx+(5b^2+2a^2)ay$.

11. $x^2+y^2-5x-12y=0$.

12. $x^2+y^2-14x-4y-5=0$.

13. $x^2+y^2+14x+14y+49=0$.

14. $x^2+y^2\mp 2rx-2ry+r^2=0$,

$x^2+y^2\pm 2rx+2ry+r^2=0$.

15. $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2-\dfrac{b^2}{4}=0$.

16. $x^2+y^2=\frac{9}{5}$.

17. $5(x^2+y^2)-10x+30y+49=0$.

18. $\begin{cases}(x-3)^2+(y-1)^2=5,\\ (x+\frac{17}{6})^2+(y+\frac{19}{6})^2=\frac{5}{4}.\end{cases}$

19. $x^2+y^2-30x-52y=0$.

20. $x^2+y^2+50x+88y-50=0$.

21. $\begin{cases}x^2+y^2-36x-\overset{46}{64}y+324=0,\\ 25x^2+25y^2-80x-494y+64=0.\end{cases}$

22. (6, 2), 5.

23. -15.

24. -10.

25. $\frac{3}{2}\sqrt{26}$.

26. $\sqrt{10}$.

27. $x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$.

28. (i) $D^2=4AC$, (ii) $E^2=4AC$, (iii) $D^2=E^2=4AC$.

29. $r^2=2rmc+c^2$.

30. $K=40$, 或 -10.

31. $x^2+y^2=\pm ay\sqrt{2}$，或 $=\pm ax\sqrt{2}$.

32. $x^2+y^2\pm 2a(x\pm y)=0$.

33. $2(x^2-dx+y^2-r^2)+a^2=0$.

34. $x-y=0$.

35. $4x+3y=0$.

36. $(18\pm 2\sqrt{41})x-5y=0$.

37. $x\mp\sqrt{3}\,y\pm 20=0$.

38. $x+y-10=0$

40. $\frac{1}{2}(35+24\sqrt{30})$.

43. 135°.

44. $(7,\ -5)$ 與 $(-6\frac{7}{29},\ 9\frac{26}{29})$.

45. $\begin{cases} (x+4)^2+(y+10)^2=85, \\ \left(x-\dfrac{514}{169}\right)^2+\left(y+\dfrac{670}{169}\right)^2=\dfrac{85}{169^2}. \end{cases}$

46. $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$ 平圓.

47. $(x-a)^2+(y-b)^2=(r+r')^2$,

或 $(x-a)^2+(y-b)^2=(r-r')^2$ 平圓.

48. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2+t^2$ 平圓.

49. 取 A 爲原點. 並取平圓之半徑 $=r$, 則軌跡爲 $x^2+y^2=rx$ 平圓.

50. 取 A 爲原點. 並取平圓之半徑 $=r$, 則軌跡爲 $x^2+y^2=\dfrac{2mrx}{m+n}$.

51. 取 A 爲原點. AB 爲 x 軸. 並取 $AB=a$. 則軌跡爲 $(m^2-n^2)(x^2+y^2)-2am^2x+a^2m^2=0$ 平圓.

52. 取 AB 爲 x 軸. AB 之中點爲原點. 並取 $AB=2a$. 則軌跡爲 $2(x^2+y^2)=k^2-2a^2$ 平圓.

53. 用前題之同記號. 則軌跡爲 $4ax=\pm k^2$ 直線.

54. 取二定線爲二軸. 則軌跡爲 $4(x^2+y^2)=d^2$ 平圓.

55. 取底爲 x 軸. 底之中點爲原點. 並取底之長度 $=2a$. 與頂點之常數角 $=\theta$. 則軌跡爲 x^2+y^2-2a 餘弦 $\theta\ y=a^2$ 平圓.

56. 取 A 爲原點。AB 爲 x 軸。並取 $AB=a$, $AC=b$. 則軌跡爲 $(x-\frac{1}{2}a)^2+y^2=\frac{b^2}{4}$.

57. $x^2+y^2=\frac{4r^4}{4r^2-l^2}$ 平圓。其 l 爲弦之長度。

58. 軌跡爲一平圓。

習　題　二　二

1. 以 $x+1$ 代 x, 與 $y-2$ 代 y. 併之得 $y^2=4x$.

2. $x^2+y^2=r^2$.　　　　3. $x^2+y^2=2rx$.

4. $x^2+y^2=-2ry$.　　　　5. $x^2+y^2=r^2$.

6. $2xy=a^2$.　　　　7. $x^2-y^2+2=0$.

8. (i) $\rho=\pm a$, (ii) ρ^2 餘弦 $2\theta=a^2$.

9. (i) $\rho=4a$ 正切 θ 正割 θ, (ii) $(a+\rho$ 餘弦 $\theta)^2=4a\rho$ 正弦 θ.

10. (i) $x^2+y^2=a^2$, (ii) $x^2+y^2=ax$, (iii) $x^2-y^2=a^2$.

11. $x+y=0$.　　　　12. $2x-5y+10=0$.

13. $12x^2+16xy+4y^2+1=0$.　　　　14. $x^2+y^2=25$.

15. $x^2-6xy+y^2=0$.　　　　16. $xy=3$.

17. $y^2=2a(x\sqrt{2}-a)$.　　　　18. $4xy=25$.

習　題　二　三

1. $b\sqrt{3}$.　　　　2. 4 正弦 $\frac{1}{2}\omega$.

3. $\sqrt{13-12\text{ 餘弦 }\omega}$　　　　4. $\sqrt{a^2+b^2-2ab\text{ 餘弦}(\theta-\Phi)}$.

5. $2a$ 正弦 θ.

6. $2a$ 餘弦 θ.

7. $a\sqrt{5-2\sqrt{3}}$.

9. $2x^2+2xy+y^2=1$.

10. $2x^2+y^2=6$.

11. $y=0$.

12. $9x^2+25y^2=225$.

13. $\rho=8a$ 餘弦 θ.

14. $\rho=\pm 4a$.

15. ρ^2 正弦^2 $\theta-5\rho$ 餘弦 $\theta=\frac{25}{4}$

16. $\rho^2=49$ 正割 2θ.

17. $\rho^2=k^2$ 餘弦 2θ.

18. $xy=a^2$.

19. $(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=2kxy$.

20. $x^3-y^3+(3x-3y-5k)xy=0$.

21. 正切$^{-1}\dfrac{7}{5}$.

22. (i) 正切$^{-1}\left(-\dfrac{A}{B}\right)$, (ii) 正切$^{-1}\dfrac{B}{A}$.

習題二四

2. $y^2=4p(x-p)$.

3. $y^2=4p(x+p)$.

4. (i) $y^2=10x$, (ii) $y^2=10x+25$, (iii) $y^2=10x-25$.

5. (i) $y^2=16x$, (ii) $y^2=16x+64$, (iii) $y^2=16x-64$.

6. (0, 0), (2, 6).

7. 6, 15, $\dfrac{a}{b}$.

8. (4, 6) 與 (25, 15).

9. (12, 6).

10. $x=9$ 線遇拋物線於 (9, 6) 與 (9, -6). $x=0$ 線經過頂點. $x=-2$ 線不遇拋物線.

11. $y=6$ 線遇拋物線於 (9, 6). $y=-8$ 線遇拋物線於 (16, -8).

12. $p=4$.

13. (0, 0), (2, 8).

14. (i) $y=0$, (ii) $x=-2$, (iii) $x=2$, (iv) $4x\pm 3y-8=0$.

(v) $y=-2x$.

15. (i) $4x-5y+24=0$, (ii) $x^2+y^2-20x=0$.

16. $3p$.　　17. $8p\sqrt{3}$.

24. 各首通徑$=4p$. 公頂點在於原點。x軸爲(i)與(ii)之軸。y軸爲(iii)與(iv)之軸。(i)拋物線全位於原點之右。(ii)全在於左。(iii)全在於上。(iv)全在於下。因命各拋物線之名於下。

(i) 爲右 X 拋物線。　(iii) 爲上 Y 拋物線。

(ii) 爲左 X 拋物線。　(iv) 爲下 Y 拋物線。

習題二五

6. $x-4y+20=0$, $4x+y-90=0$.

7. 切線$\begin{cases} x-y+3=0, \\ x+y+3=0; \end{cases}$　法線$\begin{cases} x+y-9=0, \\ x-y-9=0. \end{cases}$

諸線包含一正方形。其面積$=72$.

8. 切線$=\sqrt{266}$, 法線$=\sqrt{95}$, 次切線$=14$, 次法線$=5$.

9. $(5, 10)$.　　13. $\dfrac{p}{m\sqrt{1+m^2}}$, $\dfrac{-p}{m}\sqrt{m^2+1}$.

14. $[\sqrt{x_1x_2},\ \frac{1}{2}(y_1+y_2)]$.

15. $x+y+p=0$, $(p, -2p)$ 切點,截線$=-p$.

16. 切線方程式爲 $y\sqrt{3}=\pm x\pm 3p$. 所求之點爲 $(-3p, 0)$.

17. 二點之坐標爲 $x=\dfrac{p}{8}(1\pm\sqrt{17})$, $y=\pm p\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}}$.

18. $(0,\ 0)$ 與 $(3p,\ \pm 2p\sqrt{3})$ 二點.

19. $9x-6y+5=0,\ (\frac{5}{9},\ \frac{5}{3})$.

20. $x-2y+12=0;\ (12,\ 12)$.

$4x+2y+3=0,\ (\frac{3}{4},\ -3)$.

21. $y=x(\pm\sqrt{2}-1)+4(\pm\sqrt{2}+1)$.

22. $\dfrac{4\sqrt{p(p+x_1)^3}}{x_1}$.

24. 準割線法得切線在 $(x_1,\ y_1)$ 之方程式為

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{4}{y_1-3}.$$

切點為 $(-1,\ 11)$ 與 $(-1,\ -5)$. 故切線為

$$x-2y+23=0.$$

與
$$x+2y+11=0.$$

25. $\begin{cases} \text{(i)}\ y_1y=-2p(x+x_1), \\ \text{(ii)}\ x_1x=\ \ 2p(y+y_1), \\ \text{(iii)}\ x_1x=-2p(y+y_1). \end{cases}$

習 題 二 六

1. $y^2=24x-144$. 2. $y^2=16x$. 3. $y^2=-17x$.

4. $\begin{cases} 2y^2-11x+12y+73=0, \\ 2y^2+11x+12y-37=0. \end{cases}$ 5. $(y+7)^2=4(x-3)$. 6. $3y^2=4x$.

7. $2x^2=9y$. 8. $\frac{3}{2},\ 8x+3=0,\ 8x\pm 15y+3=0$.

10. $\begin{cases} 4 \text{ 在 } OX; \\ 8 \text{ 與 } -2 \text{ 在 } OY. \end{cases}$

11. $4(2\pm\sqrt{3})p.$

12. $\begin{cases} \text{(i) } y=x+2, \\ \text{(ii) } -2\sqrt{2}, \\ \text{(iii) } x+y-6=0. \end{cases}$

13. $x+y-6=0.$

14. $y-y_1=\dfrac{2p}{y_1}(x-x_1).$

15. (8, 4), (2, 10).

16. (2, 4), (11, 10).

17. $y=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2+4ap}}{2a}x.$

18. $\begin{cases} \text{一左 X 拋物線.} \\ \text{首通徑} =2. \\ \text{頂點, } (-2,\ 0). \\ \text{焦點, } (-\frac{5}{2},\ 0). \\ \text{準線, } x=-\frac{3}{2}. \end{cases}$

19. $-2a\sqrt{2}.$

20. $y^2=-9x.$

21. $y^2=8x.$

22. $y^2=\dfrac{4r^2-t^2}{r}x.$

23. $y^2=\dfrac{n^2}{r}x.$

24. $y^2=\dfrac{2n^2}{\sqrt{n^2+t^2}}x.$

25. $y^2=2(2r-s)x.$

26. $4p\sqrt{2}.$

27. 平圓之方程式爲 $(x-3)^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}.$

28. $(-3p,\ 0).$

29. $\left(\dfrac{p}{3},\ \pm\frac{2}{3}p\sqrt{3}\right).$

30. $\begin{cases} (p,\ \pm 2p); \\ 45^\circ \text{ 與 } 135^\circ. \end{cases}$

31. $4p^2.$

34. $y^2=px$ 拋物線.

第 35 至 38 之軌跡爲拋物線.各首通徑皆有所設拋物線之首通徑之半.若所設拋物線爲 $y^2=4px$. 則軌跡之方程式爲

35. $y^2=2px-p^2.$

36. $y^2=2px-2p^2.$

37. $y^2=2px$.　　33. $y^2=2px$.

39. $y=px$ 直線.　　40. $y^2-4px=p^2k^2$ 拋物線.

41. $kx=p$ 直線.　　42. $(x-p)^2+y^2=\frac{p^2}{K^2}$ 平圓。

43. 取所設線爲 y 軸。與過所設點之垂線爲 x 軸。並取自點至線之距離 $=a$. 則軌跡爲 $y^2=2a\left(x-\frac{a}{2}\right)$ 拋物線。

習 題 二 七

1. $5, 4, 3, \frac{3}{5}$.　　2. $\sqrt{2}, 1, 1, \frac{1}{2}\sqrt{2}$.　　3. $2, \sqrt{3}, 1, \frac{1}{2}$.

4. $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}, \sqrt{\frac{B-A}{AB}}, \sqrt{\frac{B-A}{B}}$, 當 $A<B$.

5. $\frac{6}{7}\sqrt{6}$.　　6. $e=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

7. $4x^2+9y^2=144$.　　8. $25x^2+169y^2=4225$.

9. $16x^2+25y^2=3600$.　　10. $16x^2+25y^2=1600$.

11. $25x^2+169y^2=4225$.　　12. $3x^2+7y^2=115$.

13. $x^2+2y^2=100$.　　14. $8x^2+9y^2=8a^2$.

16. $2:\sqrt{3}$.　　17. $x=y=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

18. $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}), (-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3})$.　　19. $(1, 2), (1, -2)$.

20. $(3, 1), (3, -1), (-3, 1), (-3, -1)$.

21. 軌跡之方程式爲 $x^2+4y^2=r^2$.

22. 取二定線爲二軸。並取 $AP=a$, $BP=b$, AP 與 x 軸間之銳角 $=\Phi$. 即得.

$$x=a\text{餘弦}\Phi,\ y=b\text{正弦}\Phi.$$

是以P作一橢圓。其方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

23. $y=\pm x\sqrt{-\frac{A}{B}}$ 二直線。當 y 為虛。則軌軌亦為虛。即當A與B共有同號。

29. 各邊之方程式為

$$x=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad y=\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

$$\text{面積}=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}.$$

習題二八

1. $\begin{cases}4x\pm 9y=35,\\4x\pm 9y=6.\end{cases}$

2. $\begin{cases}2x\mp 3y\sqrt{3}+12=0,\\6x\sqrt{3}\mp 4y+5\sqrt{3}=0.\end{cases}$

3. $\begin{cases}x+4y=10,\\4x-y-6=0;\\-8,\ -\frac{1}{2}.\end{cases}$

5. $\frac{a^2}{m^2}+\frac{b^2}{n^2}=1.$

6. $9x^2+25y^2=225.$

7. $2y=x\pm 10.$

8. $4x-3y\pm\sqrt{107}=0.$

9. $x=\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

10. 與第9答題相同。

11. $b^2:a^2$.

12. $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{b}{\sqrt{2}}.$

13. $y=4,\ 3x+2y=17.$

14. $\pm\sqrt{5}x\pm 3y=9a$ 方程式代四切線。

15. $a\sqrt{1-e^2\text{餘弦}^2\Phi}$.

16. $\frac{1}{2}(a^2$餘割Φ正割$\Phi-c^2$餘切$\Phi)$.

17. 二首通徑之各端。

19. 化該方程之法。與§100相仿。所求之軌跡為$x^2+y^2=a^2$補助圓。

習題二九

1. $\begin{cases} x=8,\ 40y=9x+72; \\ \frac{18}{5},\ \frac{82}{5}. \end{cases}$

2. 在內.

3. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

4. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$.

5. $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{13}}$.

6. $x+y=\pm\sqrt{a^2+b^2}$.

7. $bx+cy\mp b\sqrt{a^2+c^2}=0$.

8. $bx+ay\mp ab\sqrt{2}=0$.

9. $\dfrac{x}{a}$餘弦$\Phi+\dfrac{y}{b}$正弦$\Phi=1$.

10. $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2-e^2x_1^2}}$.

11. $a\sqrt{1-e^2\text{餘弦}^2\Phi}$.

12. $c^2:b^2$.

13. $a^2-e^2x_1^2$.

14. $\sqrt{(1-e^2)(a^2-e^2x_1^2)}$.

15. 正切$\Phi=\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}=\dfrac{b}{c}$.

18. 軌跡為引長短軸。

19. $4\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+b^2x^2=\dfrac{a^2b^2}{4}$ 橢圓。中心為$\left(0,\ \dfrac{b}{2}\right)$. 二半軸為$\dfrac{a}{2}$與$\dfrac{b}{2}$.

自21—23取三角形之底為x軸。與其中點為原點。

21. $(s^2-c^2)x^2+s^2y^2=s^2(s^2-c^2)$ 橢圓.

22. $kx^2+y^2=kc^2$ 橢圓.

23. $(x+c)^2+y^2=4a^2$ 平圓.

習 題 三 十

1. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{49}=1.$ 2. $\frac{4x^2}{25}-\frac{y^2}{36}=1.$

3. $3x^2-y^2=3a^2.$ 4. $625x^2-84y^2=10,000.$

5. $2x^2-2y^2=c^2.$

7. $a=4,\ b=3,\ c=5,\ e=\frac{5}{4}$, 首通徑 $=\frac{9}{2}$.

8. $16y^2-9x^2=144$. 橫軸 $=6$. 屬軸 $=8$. 二焦點間之距離 $=10$.
首通徑 $=\frac{32}{3}$.

9. $a:b=1:\sqrt{3}$. 11. $e=\sqrt{2}$. 12. $(5,\ -6\frac{2}{3})$.

14. 二焦點爲 $(5,\ 0)$ 與 $(-5,\ 0)$. 漸近線爲 $y=\pm\frac{4}{3}x$.

17. b.

習 題 三 一

1. $16x-9y=28,\ 9x+16y=100$; $\frac{9}{4},\ \frac{64}{9}$.

3. $x^2-y^2=9,\ (5,\ 4)$.

4. 四點代以 $x=\frac{\pm a^2}{\sqrt{a^2-b^2}},\ y=\frac{\pm b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

9. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. 10. $\frac{a^2}{m^2}-\frac{b^2}{n^2}=1.$

11. 當 a 小於 b. 12. $x^2+y^2=a^2$ 平圓.

習題三二

1. $2be,\ ae^2$.

2. 14 與 6；$(-3,\ \pm 3\sqrt{3})$.

3. 通半徑之和 $=2ex$.

8. $(a,\ b\sqrt{2}),\ (a,\ -b\sqrt{2})$.

10. 長度相等.

11. $y=x\sqrt{2}+a$.

12. $(0,\ \pm\sqrt{a^2-b^2})$.

13. $b^2>a^2$.

14. $64x-9y-741=0$.

15. $y=4x\pm 8\sqrt{2}$.

16. $\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

習題三三

1. $72x^2+48y^2=35$ 橢圓.

2. $4x^2+2y^2=1$ 橢圓.

3. $32x^2-48y^2=9$ 雙曲線.

4. $9x^2+3y^2=32$ 橢圓.

5. $4x^2-4y^2+1=0$ 雙曲線.

6. $y^2=-\frac{8}{3}x$ 拋物線.

7. $y^2=2x\sqrt{2}$ 拋物線.

8. $y^2=3x\sqrt{2}$ 拋物線.

9. $y^2=2x$ 拋物線.

10. $4x^2+9y^2=36$ 橢圓.

11. $(0,\ 0)$ 點.

12. $4x^2-9y^2=36$ 雙曲線.

13. $y=x,\ y=-5$ 二直線.

立體解析幾何學之答題

習題三五

2. 第二；第五；第六；第七；第三；第四；第八.

5. $5\sqrt{2}$; $\sqrt{14}$; $\sqrt{83}$; $0{\cdot}3\sqrt{2}$, $0{\cdot}4\sqrt{2}$, $0{\cdot}5\sqrt{2}$;

$\frac{1}{7}\sqrt{14}$, $-\frac{3}{14}\sqrt{14}$, $-\frac{1}{14}\sqrt{14}$; $\frac{7}{83}\sqrt{83}$, $-\frac{3}{83}\sqrt{83}$, $-\frac{5}{83}\sqrt{83}$.

6. $\frac{1}{14}\sqrt{14}$, $\frac{1}{7}\sqrt{14}$, $\frac{3}{14}\sqrt{14}$. 直線與 (1, 2, 3) 點之帶徑平行.

7. 與 (A, B, C) 點之帶徑平行。

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

8. 60° 或 120°; 90°; 60° 或 120°.

習題三六

1. $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$.

3. $5\sqrt{2}$.

4. $-\frac{3}{10}\sqrt{2}$, $-\frac{2}{5}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

5. 與 (3, −2, −5) 點之帶徑平行諸直線.

$$\frac{3}{38}\sqrt{38},\ -\frac{1}{19}\sqrt{38},\ -\frac{5}{38}\sqrt{38}.$$

6. $\cos^{-1}\frac{13}{49}\sqrt{14}$.

7. 90°.

8. $(4, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{6}\pi)$.

9. $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.

12. $(\frac{5}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{2})$.

13. $(-\frac{29}{7}, -\frac{16}{7}, \frac{18}{7})$.

習題三七

4. $2x-3y+\sqrt{3}z=28$.

5. $\frac{x}{4}-\frac{y}{3}-\frac{z}{7}=1$, $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=-1$, $2x-\frac{3}{2}y+6z=0$.

6. $6x+y-z=5$.

7. $\cos^{-1}\frac{1}{6}$.

8. $79^\circ\ 52'$.

9. $\cos^{-1}\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos^{-1}\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

$$\cos^{-1}\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

10. $2{\cdot}25$.

12. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=1$; $\frac{-2abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}}$.

14. $2x+4y-z=23$.

16. $3x-y+2z=4$.

18. $x+y+z=6$; $2\sqrt{3}$.

19. $3x-4y+7z+13=0$.

20. $2x+5y-z=9$.

習題三八

3. 該線經過 (1, 0, −1) 點並與 (4, 5, 3) 點之帶徑平行.

5. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-2}$.

6. (4, 5, 0), (0, 1, 4), (−1, 0, 5).

7. $2y+5z=10$.

8. $2x-5y+1=0,\ 2x+5z+1=0,\ y+z=0$.

11. $\cos^{-1}-0{\cdot}1$.

12. $14°57'45''$.

13. $\cos^{-1}\frac{11}{18}\sqrt{2}$.

15. $y=-2x-1,\ z=3x+5$.

16. $\frac{x-3}{-3}=\frac{y+7}{5}=\frac{z+5}{-6}$.

17. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-6}=\frac{z+6}{2}$.

18. $\sin^{-1}\frac{2}{29}$.

19. $$\frac{x-p}{\frac{m}{\sqrt{1+m^2+n^2}}}=\frac{y-q}{\frac{n}{\sqrt{1+m^2+n^2}}}=\frac{z}{\frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}}}.$$

是式之各分母遞與 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 相等.

習題三九

1. $x=-4$, $x=-1$, $x=2$ 諸平面;

$y=-2,\ y=1,\ y=3$ 諸平面；

$z=0,\ z=-m$ 諸平面.

2. 第一之答題。軌跡為抛物圓柱形。其質均與 z 軸平行。與其在 xy 平面上之踪線。為 $y^2=8x$ 抛物線。

3. $5x^2+13y^2=56,\ 5z^2-y^2=8,\ x^2+13z^2=32.$

4. $x^2+y^2=\frac{4}{7},\ z=\pm\frac{3}{7}\sqrt{42}$；故在 $z=\pm\frac{3}{7}\sqrt{42}$ 平面內之曲線為二平圓。其中心皆在於 z 軸之中。與其半徑各為 $\sqrt{\frac{4}{7}}$.

5. $a=3,\ b=2,\ e=\frac{1}{3}\sqrt{5}.$

6. 二平圓其半徑各為 $\sqrt{13}.$

8. $9(x^2+y^2)=(z-5)^2$； $x^2+y^2=\frac{25}{9}.$

9. $25x^2+25y^2-9z^2+90z=225.$

10. $x^2+y^2-\frac{8}{3}z-\frac{5}{2}=0.$

11. $y^2+z^2-8x=0.$

12. $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2-3z=9$； $(0,\ 0,\ -6).$

13. $9(x^2+y^2)+4z^2=36.$

14. $16(x^2+y^2)+9z^2=144.$

15. $4(x^2+y^2)-9z^2=36.$

16. $x^2z^4+y^2z^4=1,\ x^2+y^2-\frac{1}{2}z^2=0.$

17. $a=5\sqrt{3},\ b=\frac{5}{2}\sqrt{6}.$

(終)

江

n

直。

5. $a=5$, b

6. 二平圓之

8. $9(x^2+y^2)=$

9. $25x^2+25y^2-$

10. $x^2+y^2-\frac{3}{2}z-\frac{5}{2}=$

11. $y^2+z^2-8x=0.$

12. $x^2+y^2-\frac{1}{4}z^2-3z=9$

13. $9(x^2+y^2)+4z^2=36.$

14. $16(x^2+y^2)+9z^2=144.$

15. $4(x^2+y^2)-9z^2=36.$

16. $x^2z^4+y^2z^4=1$, $x^2+y^2-\frac{1}{2}z^3=0.$

17. $a=5\sqrt{3}$, $b=\frac{5}{2}\sqrt{6}.$

→(終)←