Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 6

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1. Es sei $F(x) \in K[x]$ ein Polynom in einer Variablen. Parametrisiere den Graph zu F durch Polynome.

Aufgabe 6.2. Bestimme für die parametrisierte Kurve

$$x = -3t^2 + 4t - 2 \text{ und } y = 2t^2 + 5t - 3$$

eine Kurvengleichung.

Aufgabe 6.3.*

Sei K ein Körper. Betrachte die durch

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\, t \longmapsto (t+t^2, t^3) = (x,y),$$

definierte Parametrisierung. Bestimme eine (nichttriviale) algebraische Gleichung, die für alle Bildpunkte dieser Abbildung erfüllt ist. Man gebe auch einen Punkt in der affinen Ebene an, der nicht auf der Bildkurve liegt.

Aufgabe 6.4.*

Sei K ein Körper. Betrachte die durch

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\, t \longmapsto \big(t^2+1,\, t^3-t\big)$$

definierte polynomiale Abbildung. Bestimme eine (nichttriviale) algebraische Gleichung, die für alle Bildpunkte dieser Abbildung erfüllt ist.

Das in der folgenden Aufgabe beschriebene Phänomen kann über einem algebraisch abgeschlossenen Körper nicht auftreten.

Aufgabe 6.5. Man gebe ein Beispiel für eine polynomiale Parametrisierung

$$\varphi\colon\ \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^1 \longrightarrow C \subset \mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$$

an, wobei C der Zariski-Abschluss des Bildes sein soll und wobei unendlich viele Punkte von C nicht im Bild liegen.

Aufgabe 6.6. (Punkte)

Beweise Lemma 6.8.

Aufgabe 6.7.*

Bestimme für die Abbildung

$$\mathbb{A}^1_K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\, t \longmapsto \left(\frac{t^2+1}{t}, \frac{t+1}{t} \right),$$

eine algebraische Gleichung der Bildkurve. Führe eine Probe durch.

In den folgenden Aufgaben wird auf den Begriff der differenzierbaren Kurve Bezug genommen, wie er in der Analysis 2 behandelt wird.

Aufgabe 6.8. Man gebe ein Beispiel für eine nicht-algebraische (nicht polynomiale) differenzierbare Kurve im $\mathbb{R}^2$, deren Bild aber mit einer algebraischen Kurve übereinstimmt.

Aufgabe 6.9. Zeige, dass die (Bahn der) archimedische Spirale

$$f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (t \cos t\,,\, t \sin t\,),$$

nicht algebraisch ist.

Aufgabe 6.10. Es sei $C = V(F) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ eine rational-parametrisierbare Kurve. Zeige, dass es auch nicht-algebraische differenzierbare Parametrisierungen der Kurve gibt.

Aufgabe 6.11. Man gebe eine differenzierbare Kurve

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

an, deren Bild genau das Achsenkreuz ist.

Aufgabe 6.12. Sei $\varphi\colon \mathbb{A}^2_K \to \mathbb{A}^2_K$ eine polynomiale Abbildung und sei C eine ebene rationale Kurve. Es sei ferner vorausgesetzt, dass C durch φ nicht auf einen einzigen Punkt abgebildet wird. Zeige, dass dann $\overline{\varphi(C)}$ ebenfalls eine rationale Kurve ist.

Aufgabe 6.13.*

Es sei $p \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmtes Ereignis A bei der Durchführung eines Experiments eintritt, und entsprechend sei $1-p$ die Wahrscheinlichkeit, dass es nicht eintritt. Das Experiment werde zweimal unabhängig voneinander durchgeführt. Die möglichen Gesamtereignisse $(A,A),(A,\neg A),(\neg A,A),(\neg A,\neg A)$ haben dann eine von p abhängige Wahrscheinlichkeit. Diese Abhängigkeit fassen wir als die polynomiale Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^4,\, p \longmapsto \left(p^2,\, p(1-p),\, (1-p)p,\, (1-p)^2\right) = (x,\, y,\, z,\, w)\,,$$

auf.

(1) Zeige, dass die Abbildung injektiv ist.
(2) Beschreibe das Bild der Abbildung vollständig durch polynomiale Gleichungen.

Aufgabe 6.14.*

Es sei $p \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmtes Ereignis A bei der Durchführung eines ersten Experiments eintritt und sei $q \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit, mit der ein bestimmtes Ereignis B bei der Durchführung eines zweiten Experiments eintritt. Die beiden Experimente werden unabhängig voneinander durchgeführt. Die möglichen Gesamtereignisse

$$(A,B),(A,\neg B),(\neg A,B),(\neg A,\neg B)$$

haben dann eine von p und q abhängige Wahrscheinlichkeit. Diese Abhängigkeit fassen wir als die polynomiale Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{A}_K^2, \mathbb{A}_K^4 \longmapsto (p,q)\,(pq,\, p(1-q),\, (1-p)q,\, (1-p)(1-q))& \\ = (x,\, y,\, z,\, w)\,,&\end{aligned}$$

auf.

(1) Zeige, dass die Abbildung injektiv ist.
(2) Beschreibe das Bild der Abbildung vollständig durch polynomiale Gleichungen.

Aufgabe 6.15. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \supseteq D(s) \longrightarrow \mathbb{A}_K^3,\, (s,t) \longmapsto \left(s,\, \frac{t^2}{s},\, t\right) = (x,y,z).$$

Bestimme eine algebraische Gleichung F für das Bild. Untersuche die Abbildung auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Vergleiche diese Abbildung mit den in Aufgabe 6.25 diskutierten Abbildungen.

Aufgabe 6.16. Es sei K ein Körper und $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über K in n Variablen und $K[X_1, \ldots, X_n, Z]$ der Polynomring in $n+1$ Variablen. Zu $F \in K[X_1, \ldots, X_n]$ sei $\hat{F} \in K[X_1, \ldots, X_n, Z]$ die Homogenisierung (bezüglich Z) und zu $G \in K[X_1, \ldots, X_n, Z]$ sei $\tilde{G}$ die (durch $Z \mapsto 1$ gegebene) Dehomogenisierung von G. Zeige, dass $\tilde{\hat{F}} = F$, aber nicht $\hat{\tilde{G}} = G$ gelten muss.

Aufgabe 6.17. Es sei K ein Körper und $K[X_1, \ldots, X_n, Z]$ der Polynomring über K in $n+1$ Variablen. Es seien $G, H \in K[X_1, \ldots, X_n, Z]$ homogene Polynome vom gleichen Grad. Für die Dehomogenisierungen (bezüglich Z) gelte $\tilde{G} = \tilde{H}$. Zeige, dass dann $G = H$ ist.

Aufgabe 6.18.*

Es sei K ein Körper und $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über K in n Variablen und $K[X_1, \ldots, X_n, Z]$ der Polynomring in $n+1$ Variablen. Zeige, dass die Homogenisierung (bezüglich Z) mit der Multiplikation verträglich ist.

Aufgabe 6.19. Es sei K ein Körper und $K[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring über K in n Variablen und $K[X_1, \ldots, X_n, Z]$ der Polynomring in $n+1$ Variablen. Beschreibe die Dehomogenisierung (bezüglich Z) als einen Einsetzungshomomorphismus.

Aufgabe 6.20. Formuliere und beweise eine Division mit Rest-Aussage für homogene Polynome in zwei Variablen über einem Körper.

Aufgabe 6.21.*

Es seien

$$F = X^4 + 9X^3Y + 7X^2Y^2 + XY^3 + 8Y^4$$

und

$$G = X^3 + 5X^2Y.$$

Finde homogene Polynome $Q, R \in Q[X, Y]$ mit

$$F = GQ + R.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.22. (3 Punkte)

Bestimme den Flächeninhalt der durch die reelle Kurve

$$V(y^2 - x^3 - x^2) \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

eingeschlossenen Schlaufe.

Die folgenden Aufgaben erfordert eventuell den Einsatz eines Computers.

Aufgabe 6.23. (6 Punkte)

Bestimme für die Abbildung

$$\mathbb{A}^1_K \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\, t \longmapsto (t^2 + t^3, 2t^2 - t^4),$$

eine algebraische Gleichung der Bildkurve.

Aufgabe 6.24. (6 Punkte)

Bestimme für die Abbildung

$$\mathbb{A}^1_K \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{A}^2_K,\, t \longmapsto \left(\frac{t^2-1}{t}, \frac{t+3}{t} \right),$$

eine algebraische Gleichung der Bildkurve. Führe eine Probe durch.

Aufgabe 6.25. (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden Abbildungen

$$(s,t) \longmapsto (s^2, t^2, st) = (x,y,z) \text{ und } (s,t) \longmapsto (s, st^2, st) = (x,y,z)\,.$$

Zeige, dass das Bild der beiden Abbildungen die gleiche algebraische Gleichung F erfüllt. Untersuche die Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Welche Abbildung liefert eine „bessere“ Beschreibung von $V(F)$?

Aufgabe 6.26. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $F \in K[X,Y]$ ein irreduzibles Polynom. Die Nullstellenmenge $V(F)$ sei unendlich. Zeige, dass dann $V(F)$ eine irreduzible affin-algebraische Menge ist.

Man gebe auch ein Beispiel, dass diese Aussage in drei Variablen falsch ist.