**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2019/2020**

# Bündel, Garben und Kohomologie

## Vorlesung 25

### Garbenkohomologie

Definition 25.1. Zu einer Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen auf einem topologischen Raum $X$ nennt man den rechtsabgeleiteten Funktor zum globalen Auswertungsfunktor $\Gamma(X,-)$ die $n$-te *Garbenkohomologie* von $\mathcal{G}$ auf $X$. Sie wird mit

$$H^n(X,\mathcal{G}) := R^n\Gamma(X,\mathcal{G})$$

bezeichnet.

Korollar 25.2. *Es sei $X$ ein topologischer Raum. Dann erfüllt die Garbenkohomologie folgende Eigenschaften.*

(1) *Die $H^n(X,-)$ sind (für jedes $n \in \mathbb{N}$) additive Funktoren von der Kategorie der Garben auf $X$ in die Kategorie der abelschen Gruppen.*
(2) *Es liegt ein natürlicher Isomorphismus $H^0(X,\mathcal{G}) \cong \Gamma(X,\mathcal{G})$ vor.*
(3) *Zu einer kurzen exakten Garbensequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

*gibt es eine lange exakte Kohomologiesequenz*

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow$$
$$H^1(X,\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{H}) \longrightarrow H^2(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \ldots .$$

*Beweis.* Dies ist ein Spezialfall von Satz 24.7. □

Es ist im Allgemeinen schwierig, Kohomologiegruppen zu berechnen. Wir listen einige grundsätzliche Berechnungsmöglichkeiten auf.

(1) Verschwindungssätze: Man zeigt, dass für gewisse Räume, gewisse Garben und gewisse Indizes die Kohomologiegruppen 0 sind. Wenn in der langen exakten Kohomologiesequenz an gewissen Stellen eine 0 steht, so bedeutet dies, dass zuvor eine surjektive Abbildung und danach eine injektive Abbildung steht.
(2) Statt mit injektiven Garben kann man mit anderen azyklischen (beispielsweise welken) Garben arbeiten.
(3) Interpretation von $H^1$ als klassifizierende Gruppe für gewisse geometrische Objekte (Picardgruppe).

(4) Wenn die Garben Moduln auf einem beringten Raum sind, so besitzen auch die Kohomologiegruppen die Struktur von Moduln über dem globalen Schnittring $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ (siehe Lemma 25.5). Wenn dieser ein Körper ist (was insbesondere für zusammenhängende projektive Varietäten der Fall ist), so sind die Kohomologiegruppen sogar Vektorräume. Im endlichdimensionalen Fall sind die Dimensionen wichtige Invarianten.
(5) Vergleich der Kohomologie auf $X$ mit der Kohomologie auf einer offenen Teilmenge.
(6) Vergleich mit anderen Kohomologietheorien: ?ech-Kohomologie, singuläre Kohomologie, simpliziale Kohomologie.

Lemma 25.3. *Eine welke Garbe $\mathcal{G}$ auf einem topologischen Raum $X$ ist azyklisch, d.h. es ist $H^n(X, \mathcal{G}) = 0$ für $n \geq 1$.*

*Beweis.* Nach Lemma 23.13 gibt es eine Einbettung von $\mathcal{G}$ in eine injektive Garbe $\mathcal{I}$, wir betrachten die zugehörige kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{G} \longrightarrow 0\,.$$

Nach Lemma 23.16 ist $\mathcal{I}$ eine welke Garbe. Dann ist nach Lemma 23.15 (2) auch die Quotientengarbe $\mathcal{I}/\mathcal{G}$ welk. Die lange exakte Kohomologiesequenz ergibt unter Verwendung von Satz 24.8 einerseits

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{G}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}/\mathcal{G}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

und andererseits

$$0 \longrightarrow H^n(X, \mathcal{I}/\mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X, \mathcal{G}) \longrightarrow 0$$

für $n \geq 1$. Aus dem ersten Ausschnitt folgt wegen der Surjektivität (siehe Lemma 23.15 (1)) von

$$\Gamma(X, \mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}/\mathcal{G}),$$

dass $H^1(X, \mathcal{G}) = 0$ ist. Dies gilt für alle welke Garben. Daher gilt aufgrund des zweiten Ausschnittes, angewendet für $n = 2$, auch $H^2(X, \mathcal{G}) = 0$, u.s.w. $\square$

Bemerkung 25.4. Es sei $G$ eine topologische Gruppe und $X$ ein topologischer Raum. Wir betrachten die Garbe der stetigen Abbildungen nach $G$, also $C^0(-, G)$, mit

$$C^0(U, G) = \{f : U \to G \text{ Abbildung} \mid f \text{ stetig}\}.$$

Es gibt eine natürliche Inklusion von Garben

$$C^0(-, G) \subseteq \text{Abb}\,(-, G)$$

und somit eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow C^0(-, G) \longrightarrow \text{Abb}\,(-, G) \longrightarrow \text{Abb}\,(-, G)/C^0(-, G) \longrightarrow 0\,.$$

Hierbei ist die Abbildungsgarbe in der Mitte welk, da man ja jede Abbildung auf eine größere Menge fortsetzen kann. Daher ist

$$H^1(X, \text{Abb}\,(-, G)) \,=\, 0$$

nach Lemma 25.3 und somit beginnt die lange exakte Kohomologiesequenz mit

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C^0(X, G) \longrightarrow \text{Abb}\,(X, G) \longrightarrow \Gamma\big(X, \text{Abb}\,(-, G)/C^0(-, G)\big) \\ \longrightarrow H^1(X, C^0(-, G)) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Jede erste Kohomologieklasse zu $C^0(-, G)$ wird also durch ein globales Element der Quotientengarbe Abb $(-, G)/C^0(-, G)$ repräsentiert, und zwei solche Repräsentanten definieren genau dann die gleiche Klasse, wenn ihre Differenz von einer Abbildung von $X$ nach $G$ herrührt. Wie bei jeder Quotientengarbe wird gemäß Lemma 5.9 (1) ein globales Element durch eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Schnitte $f_i \in \Gamma(U_i, \text{Abb}\,(-, G))$ (also Abbildungen $f_i \colon U_i \to G$) repräsentiert mit der Eigenschaft, dass die Differenzen $f_i - f_j|_{U_i \cap U_j}$ von der Untergarbe herkommen, also stetige Funktionen auf $U_i \cap U_j$ sind. Ein solches Element rührt nach Lemma 5.9 (2) genau dann von links her (und geht auf die triviale Kohomologieklasse), wenn es eine Funktion $f \colon X \to G$ mit der Eigenschaft gibt, dass die Differenzen $g_i := f_i - f|_{U_i}$ für alle $i$ stetig sind. In diesem Fall ist auf $U_i \cap U_j$

$$g_i - g_j \,=\, f_i - f - (f_j - f) \,=\, f_i - f_j.$$

Wenn es umgekehrt eine solche Familie von stetigen Funktionen $g_i$ auf $U_i$ gibt, deren Differenzen mit den vorgegebenen Differenzen übereinstimmen, so kann man daraus über

$$f \,:=\, f_i - g_i$$

auf $U_i$, da dies eine verträgliche Bedingung ist, eine globale Funktion auf $X$ definieren. Die erste Kohomologiegruppe der Garbe der stetigen Funktionen ist somit genau dann trivial, wenn es zu jeder Familie $(U_i, f_i)$ mit $f_i - f_j$ stetig eine Familie $(U_i, g_i)$ mit stetigen Funktionen $g_i$ und den gleichen Differenzen gibt.

Lemma 25.5. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $\mathcal{M}$ ein $\mathcal{O}_X$Modul. Dann sind die Garbenkohomologien $H^n(X, \mathcal{M})$ in natürlicher Weise $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$-Moduln.*

*Beweis.* Jedes Element $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ definiert einen $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus

$$f \colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M},$$

wobei auf jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die Restriktion von $f$ auf $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ durch Multiplikation als Skalar wirkt, also

$$\Gamma(U, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{M}),\ s \longmapsto fs.$$

Die Multiplikation mit $f$ ist insbesondere ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Aufgrund der Funktorialität (siehe Korollar 25.2) der Garbenkohomologie induziert dies einen Gruppenhomomorphismus

$$H^n(f)\colon\; H^n(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{M}).$$

Wir müssen zeigen, dass die Zuordnung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \times H^n(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{M}),\ (f, c) \longmapsto H^n(f)(c),$$

eine Modulstruktur auf $H^n(X, \mathcal{M})$ festlegt. Da ein Gruppenhomomorphismus vorliegt, ist die Additivität im Modul gesichert. Wegen der Funktorialität geht die 1 auf die Identität (zuerst als Garbenhomomorphismus und dann in der Kohomologie) und wegen der Verträglichkeit mit der Verknüpfung ist

$$H^n(fg) \,=\, H^n(f) \circ H^n(g).$$

Für globale Ringelemente $f, g$ ist die Skalarmultiplikation (auf der Ebene der Modulgarben) mit $f + g$ gleich der Summe der Skalarmultiplikationen zu $f$ und zu $g$. Da die $H^n$ additive Funktoren sind, gilt daher auch

$$H^n(f + g) \,=\, H^n(f) + H^n(g).$$

□

## Kohomologie auf Schemata

Wir betrachten nun die Kohomologie von Garben auf Schemata.

Lemma 25.6. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein integres Schema mit dem Funktionenkörper $K$, den wir als konstante Garbe $\mathcal{K}$ auf $X$ auffassen. Dann ist*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \,=\, \Gamma(X, \mathcal{K}/\mathcal{O}_X)/\operatorname{bild}\left(K \to \Gamma(X, \mathcal{K}/\mathcal{O}_X)\right).$$

*Beweis.* Da $X$ insbesondere irreduzibel ist, ist die konstante Prägarbe $\mathcal{K}$ zu $K$ eine Garbe. Wegen Lemma 11.16 gibt es einen injektiven Garbenhomomorphismus

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{K}$$

und somit eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}/\mathcal{O}_X \longrightarrow 0\,.$$

Die zugehörige lange exakte Kohomologiesequenz lautet

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}/\mathcal{O}_X) \longrightarrow \\ H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}) \longrightarrow \cdots. \end{aligned}$$

Als konstante Garbe ist $\mathcal{K}$ welk und somit nach Lemma 25.3 azyklisch und insbesondere gilt

$$H^1(X, \mathcal{K}) \,=\, 0.$$

Also ist $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ der Kokern der zuvor stehenden Abbildung. □

Lemma 25.7. *Es sei $R$ ein Integritätsbereich und* $\operatorname{Spek}(R) = (X, \mathcal{O}_X)$ *das zugehörige integre affine Schema. Dann ist*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0.$$

*Beweis.* Wir betrachten die kurze exakte Sequenz von $R$-Moduln

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow K \longrightarrow K/R \longrightarrow 0$$

und die zugehörige, nach Lemma 14.9 exakte Sequenz von quasikohärenten Garben

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \widetilde{K} \longrightarrow \widetilde{K/R} \longrightarrow 0$$

Insbesondere gilt

$$\widetilde{K/R} = \widetilde{K}/\mathcal{O}_X$$

und $\widetilde{K}$ ist die konstante Garbe zum Funktionenkörper. Die globale Auswertung dieseer Garbensequenz ergibt die Ausgangssequenz. Aus Lemma 25.6 folgt die Aussage. □

Beispiel 25.8. Wir betrachten die punktierte affine Ebene

$$U = \mathbb{A}^2_K \setminus \{(0,0)\}$$

über einem Körper $K$ und wollen $H^1(U, \mathcal{O}_U)$ mit Hilfe von Lemma 25.7 verstehen. Der Funktionenkörper ist $K(X,Y)$, wir bezeichnen die zugehörige konstante Garbe mit $\mathcal{Q}$. Die lange exakte Kohomologiesequenz beginnt

$$0 \longrightarrow K[X,Y] \longrightarrow K(X,Y) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{Q}/\mathcal{O}_U) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_U) \longrightarrow 0\,.$$

Es ist $U = D(X) \cup D(Y)$. Wir betrachten Schnitte von $\Gamma(U, \mathcal{Q}/\mathcal{O}_U)$ der Form $(D(X), X^\alpha Y^\beta; D(Y), 0)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Der Schnitt wird also auf $D(X)$ durch die rationale Funktion $X^\alpha Y^\beta$ und auf $D(Y)$ durch die rationale Funktion 0 festgelegt. Da die Differenz, also einfach $X^\alpha Y^\beta$, zur Strukturgarbe auf dem Durchschnitt $D(X) \cap D(Y) = D(XY)$ gehört, liegt in der Tat ein Schnitt der Quotientengarbe vor, vergleiche Lemma 5.9. Wir bestimmen, abhängig von $\alpha$ und $\beta$, ob dieser Schnitt im Bild liegt, was äquivalent zur Frage ist, ob dieser Schnitt ein triviales Element in der ersten Kohomologie definiert. Dass es von links herkommt bedeutet, dass es eine rationale Funktion $q \in K(X,Y)$ gibt, das mit dem Schnitt übereinstimmt, und das bedeutet wiederum, dass die Differenz auf $D(X)$ bzw. $D(Y)$ von der Strukturgarbe herkommt, es muss also gleichzeitig $q - X^\alpha Y^\beta \in \Gamma(D(X), \mathcal{O}_U)$ und $q - 0 \in \Gamma(D(Y), \mathcal{O}_U)$ sein. Die zweite Bedingung bedeutet

$$q = \frac{h}{Y^n}$$

und die erste Bedingung bedeutet

$$\frac{h}{Y^n} - X^\alpha Y^\beta = \frac{g}{X^m}.$$

Es geht also um die Frage, ob die Gleichung

$$X^\alpha Y^\beta = \frac{h}{Y^n} - \frac{g}{X^m}$$

eine Lösung (mit $g,h \in K[X,Y]$ und $m,n \in \mathbb{N}$ besitzt). Wenn $\alpha \geq 0$ oder $\beta \geq 0$ ist, so ist dies möglich. Wenn hingegen $\alpha, \beta < 0$ sind, so ist dies nicht möglich, da ja die rechte Seite gleich $\frac{hX^m - gY^n}{X^m Y^n}$ ist. Multiplikation mit $X^m Y^n$ zeigt die Unmöglichkeit, da das Ideal $(X^m, Y^n)$ nur Monome enthält, die Vielfache der einzelnen Erzeuger sind.

Beispiel 25.9. Wir knüpfen an Beispiel 16.9 an, d.h. wir betrachten auf dem Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ mit $n \geq 2$ und die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow R^n \longrightarrow (X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow 0\,.$$

Die Einschränkung der zugehörigen Garbensequenz auf den punktierten Raum $U = \mathbb{A}_K^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ ist

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} = \widetilde{\operatorname{Syz}(X_1, \ldots, X_n)} \longrightarrow \mathcal{O}_U^n \longrightarrow \mathcal{O}_U \longrightarrow 0\,.$$

Die Auswertung dieser Garbensequenz auf $U$ ergibt

$$0 \longrightarrow \operatorname{Syz}(X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow R^n \longrightarrow R \longrightarrow H^1(U, \mathcal{S}) \longrightarrow H^1(U, \mathcal{O}_U^n) \longrightarrow\ .$$

Da das Bild der Abbildung $R^n \to R$ nach wir vor das maximale Ideal, ist diese Abbildung nicht surjektiv und es folgt, dass $H^1(U, \mathcal{S}) \neq 0$ ist.

Lemma 25.10. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein integres Schema mit dem Funktionenkörper $K$. Es sei $\mathcal{O}_X^\times$ die Garbe der Einheiten auf $X$ und es sei $\mathcal{U}$ die konstante Garbe zu $K^\times$. Dann ist*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^\times) = \Gamma\big(X, \mathcal{U}/\mathcal{O}_X^\times\big) / \operatorname{bild}\big(K^\times \to \Gamma\big(X, \mathcal{U}/\mathcal{O}_X^\times\big)\big).$$

*Beweis.* Siehe Aufgabe 25.10. □

Wir erwähnen ohne Beweis die folgenden wichtigen Sätze.

Satz 25.11. *Sei $X$ ein noethersches Schema. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(1) *$X$ ist ein affines Schema.*
(2) *Für jede quasikohärente Garbe $\mathcal{F}$ auf $X$ ist $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$*
(3) *Für jede kohärente Idealgarbe $\mathcal{I}$ auf $X$ ist $H^1(X, \mathcal{I}) = 0$.*

Satz 25.12. *Es sei $X$ ein noetherscher topologischer Raum der Dimension $d$. Dann ist $H^i(X, \mathcal{G}) = 0$ für $i > d$ und jede Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen.*

## Abbildungsverzeichnis