Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

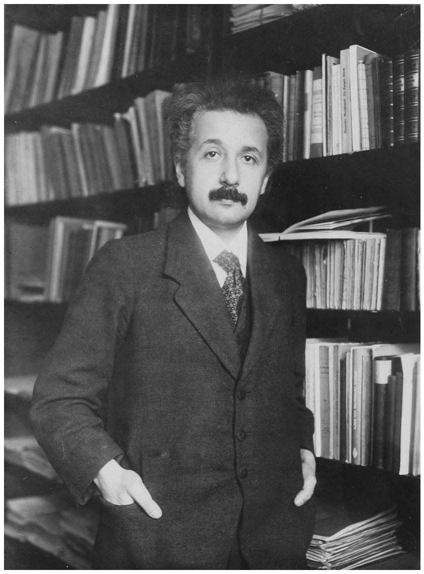
Mathematik für Anwender II

Vorlesung 45

Minkowski-Räume

Auf einer Abendgesellschaft wurde Einstein von der Gastgeberin gebeten, die Relativitätstheorie zu erklären. „Madame“, sagte er, „ich spazierte eines heißen Tages auf dem Lande mit einem blinden Freund und sagte, daß ich gern einen Trunk Milch haben würde“. - „Milch“?, sagte mein Freund, „Trinken verstehe ich, aber was ist Milch“? - „Eine weiße Flüssigkeit“ antwortete ich. - „Flüssigkeit verstehe ich; aber was ist weiß“? - „Die Farbe einer Schwanenfeder“. - „Feder verstehe ich, aber was ist ein Schwan“? - „Ein Vogel mit einem gebogenen Hals“. „Hals verstehe ich, aber was ist gebogen“? - Darauf verlor ich die Geduld, ergriff seinen Arm und und streckte diesen geradeaus: „das ist gerade“, sagte ich, und dann bog ich seinen Arm am Ellenbogen ein: „das ist gebogen“. „Ah“! sagte der Blinde, „jetzt weiß ich, was Sie mit Milch meinen“!

Wir besprechen, wie man mit einer gewissen Bilinearform einen theoretischen Rahmen für die spezielle Relativitätstheorie angeben kann, in dem viele relativistische Phänome einfach beschrieben werden können. Die empirischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie gehören zur Physik und können hier nicht behandelt werden.



Albert Einstein (1879-1955)

Hermann Minkowski (1864-1909)

Definition 45.1. Ein reeller Vektorraum der Dimension n mit einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$ vom Typ $(n-1, 1)$ heißt *Minkowski-Raum*.

Die Minkowski-Räume liefern ein einfaches Modell für die *spezielle Relativitätstheorie*,[1] man spricht auch von einem Einstein-Minkowski-Raum und die Bilinearform darauf heißt auch *Minkowski-Form* oder *Lorentz-Form*. Die klassische Raum-Zeit-Welt ist von der Form $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, wobei die dreidimensionale Komponente den Raum und die eindimensionale Komponente die Zeit repräsentiert. Darin ist grundsätzlich jede Bewegung von einem Punkt zu einem anderen möglich, solange der zweite Punkt zeitlich später als der erste Punkt ist. Entsprechend repräsentieren die Punkte in einem vierdimensionalen Minkowski-Raum die relativistischen Weltpunkte (die Ereignisse); eine Trennung in Raum und Zeit ist Beobachter-abhängig; die Theorie liefert auch eine Definition, was ein Beobachter ist, siehe unten. Eine besondere Rolle spielt die Menge der Vektoren

$$\{v \in V \mid \langle v, v \rangle = 0\},$$

die in diesem Zusammenhang der *Lichtkegel* heißt. Gemeint ist damit die Menge aller Lichtstrahlen, die in einem Weltpunkt eingehen und ausgehen. Dieser Lichtkegel ist gemäß der speziellen Relativitätstheorie Beobachter-unabhängig (absolut), und eben dies wird durch die Minkowski-Räume modelliert. Man erlaubt grundsätzlich jede Dimension, die wesentlichen Phänomene sind schon bei $n = 2, 3$ sichtbar. Die bezüglich der Standardbasis des

[1]Die allgemeine Relativitätstheorie wird mathematisch durch pseudoriemannsche Mannigfaltigkeiten beschrieben, bei denen die hier besprochenen Minkowski-Räume die lokale Situation wiedergeben. Wichtige Stichworte sind Gravitation, Äquivalenzprinzip, Feldgleichung, gekrümmter Raum.

$\mathbb{R}^n$ durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegebene Minkowski-Form heißt *Minkowski-Standard-Form*. Gemäß dem Trägheitssatz von Sylvester kann man jede Minkowski-Form bezüglich einer geeignet skalierten Orthogonalbasis (einer *Minkowski-Basis*) auf diese Gestalt bringen.

Definition 45.2. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Ein Vektor $v \in V$ mit

$$\langle v, v \rangle = 0$$

heißt *lichtartig*, ein Vektor $v \in V$ mit

$$\langle v, v \rangle < 0$$

heißt *zeitartig* und ein Vektor $v \in V$ mit

$$\langle v, v \rangle > 0$$

heißt *raumartig*.

Achtung, diesen Eigenschaften definieren keine Untervektorräume, die Summe von zwei raumartigen Vektoren muss im Allgemeinen nicht wieder raumartig sein.

Nicht alle Vektoren bzw. (linearen) Bewegungsvorgänge in dieser Raum-Zeit-Licht-Welt sind für einen (materiellen) Beobachter realisierbar, im Gegenteil gehört die folgende Einschränkung wesentlich zu diesem Weltmodell.

Definition 45.3. Es sei V ein Minkowski-Raum mit einer Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Die Vektoren $v \in V$ mit

$$\langle v, v \rangle = -1$$

heißen *Beobachtervektoren* oder *Vierergeschwindigkeit eines Beobachters*.

Der Begriff Beobachter suggeriert eine physikalische Interpretation; man kann sich darunter eine Person vorstellen, wichtig ist aber, dass dies keinen subjektiven Gehalt hat. Der Beobachter hat eine Uhr, einen Meterstab und einen Winkelmesser im Gepäck und jeder Beobachter, der die gleiche Bewegung durchführt, kommt zu den gleichen Messungen. Statt mit der Bedingung $= -1$ wird ein Beobachtervektor häufig auch durch die Bedingung $= -c$ angesetzt, wobei c die Lichtgeschwindigkeit repräsentiert. Diese ist aber nur eine Umskalierung.

Die zuletzt genannten Beobachtervektor sind insbesondere zeitartig, da jeder Beobachter älter wird, die Zeit bewegt sich also auch für einen „räumlich ruhenden" Beobachter. Die Gerade $\mathbb{R}v$ ist ein Untervektorraum der Dimension 1, auf dem die eingeschränkte Form negativ definit ist. Es sei $U \subseteq V$ der dazu (bezüglich der Minkowski-Form) senkrechte Untervektorraum. Dies ist ein dreidimensionaler Raum, auf dem die eingeschränkte Form positiv definit ist. Dieser Untervektorraum ist der Raum V_v für diesen Beobachter (oder V_B, wenn B den Beobachter bezeichnet) und $\mathbb{R}v$ ist seine Zeitachse. Für einen Beobachter besteht also eine Zerlegung des Gesamtraumes der Form $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, nur diese Zerlegung hängt eben vom Beobachter ab. Man spricht auch von dem *Bezugssystem* des Beobachters. Die positiv definite Einschränkung der Minkowski-Form auf seine Raumkomponente ist ein Skalarprodukt, mit dem der Beobachter Längen und Winkel misst und auch in seinem Raum eine Orthonormalbasis fixieren kann. Für einen Beobachter mit der erlaubten Vierergeschwindigkeit v gibt es also insbesondere eine Orthogonalbasis e_1, e_2, e_3, v mit

$$\langle e_j, e_j \rangle \, = \, 1$$

und

$$\langle v, v \rangle \, = \, -1.$$

Bezüglich einer solchen Minkowski-Basis wird die Minkowski-Form einfach durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

als Gramsche Matrix beschrieben. Ein Großteil der relativistischen Phänome zeigt sich in diesem Modell beim Basiswechsel von zwei solchen Basen (bei einem *Wechsel des Bezugssystems*), wobei der wesentliche Punkt der Wechsel der Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente ist.

Wenn v ein Beobachtervektor ist, so ist nach Definition auch $-v$ ein Beobachtervektor. Dieser Beobachter bewegt sich in die entgegengesetzte Zeitrichtung. Insgesamt zerfällt die Menge aller Beobachtervektoren in zwei Schalen, wobei wir eine als die Zukunftsschale auszeichnen. Ebenso zerfällt der Lichtkegel in zwei Kegel, den Zukunfts- und den Vergangenheitskegel. Zwei Beobachter heißen *gleichgerichtet*, wenn sie der gleichen Schale angehören, also beide in die Zukunft (oder in die Vergangenheit) weisen.

Lemma 45.4. *Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Zu jedem Beobachtervektor $v \in V$ ist*

$$V \, = \, \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^{\perp}$$

eine direkte Summenzerlegung, wobei die Einschränkung der Minkowski-Form auf $\mathbb{R}v$ negativ definit und die Einschränkung der Minkowski-Form auf $V_v = (\mathbb{R}v)^{\perp}$ positiv definit ist. Dabei besteht V_v aus raumartigen Vektoren.

(2) *Für zwei gleichgerichtete Beobachtervektoren $v, w \in V$ ist*

$$\langle v, w \rangle < 0.$$

(3) *Für zeitartige Vektoren $v, w \in V$ ist*

$$\langle v, w \rangle^2 \geq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 45.4, Aufgabe 45.11 und Aufgabe 45.13. □

Die Bedingung, dass die Beobachtergeschwindigkeiten $\langle v, v \rangle = -1$ erfüllen müssen, ist eine große Einschränkung an mögliche Bewegungsvorgänge. Wenn eine Minkowski-Basis fixiert ist, so ist $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor genau dann, wenn

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - t^2 = -1$$

(und $t \geq 0$, das ergibt sich aus der Zukunftsrichtung) ist.

Beispiel 45.5. In einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum soll etwas vom Punkt $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix}$ zum Punkt $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ s \end{pmatrix}$ gleichmäßig bewegt werden. Im klassischen Ansatz ist einfach der Verbindungsvektor

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix}$$

zu wählen. Dieser ist aber im Allgemeinen kein Beobachtervektor und der anvisierte Bewegungsvorgang ist dann nicht realisierbar. Wenn $y_1^2+y_2^2+y_3^2-t^2$ negativ ist, was inhaltlich bedeutet, dass ein zeitartiger Vektor vorliegt, so kann man den Vektor aber zu einem Beobachtervektor

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{-\left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}$$

umskalieren. Es beschreibt dann

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ r \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ u \end{pmatrix}$$

ein Bewegungsvorgang, der für $x = 0$ im Punkt P startet und für $x = \sqrt{- \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ t \end{pmatrix} \right\rangle}$ im Punkt Q endet und der physikalisch durchführbar ist.

Bemerkung 45.6. Zu einer Vierergeschwindigkeit v eines Beobachters B mit der Zerlegung

$$V = V_v \oplus \mathbb{R}v$$

nennt man die Punkte der Form $sv + V_v$ mit einem fixierten $s \in \mathbb{R}$ den Raum zum Zeitpunkt s. Die Punkte daraus heißen gleichzeitig für den Beobachter B. Für einen anderen Beobachter C mit der Vierergeschwindigkeit w sind diese Punkte nicht gleichzeitig. Sein Gleichzeitigkeitskonzept beruht auf seine, von w abhängige Zerlegung der Welt V in seine Raum- und Zeitkomponente. Wenn beispielsweise die zweite Vierergeschwindigkeit bezüglich einer Minkowski-Basis des ersten Beobachters durch $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ gegeben ist, so ist

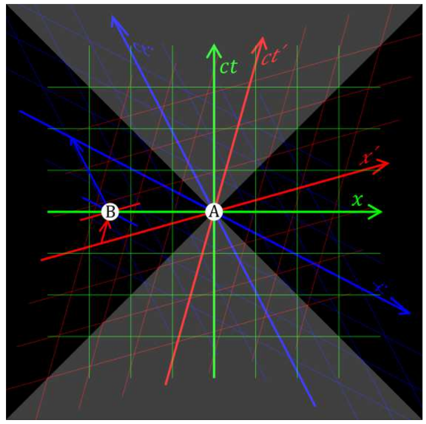
$$\frac{15}{4} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis der Raumkomponente des zweiten Beobachters. Die für den ersten Beobachter gleichzeitigen Ereignisse $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind für den zweiten Beobachter nicht gleichzeitig, da der erste Vektor die gleiche Beschreibung besitzt und der zweite Vektor gleich

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{75}{16} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

ist. Seine Zeitkomponente bezüglich des zweiten Beobachtervektors ist also $-\frac{3}{4}$.

Wir vergleichen nun Geschwindigkeiten von Beobachtern untereinander.



Zwei Ereignisse A und B in einem zweidimensionalen Minkowskiraum, die für den Beobachter, dessen Raumachse mit x und dessen Zeitachse mit ct bezeichnet ist, gleichzeitig sind, aber nicht für den zweiten Beobachter mit den Achsen x' und ct'.

Definition 45.7. Es sei V ein Minkowski-Raum und seien B und C Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten v und w. Dann nennt man den Vektor

$$v_{BC} = -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w$$

den *Geschwindigkeitsvektor* von C relativ zu B. Man nennt

$$\rho_{BC} = \sqrt{1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}}$$

die *Relativgeschwindigkeit* der beiden Beobachter.

Der relative Geschwindigkeitsvektor ist ein Vektor. Beachte, dass nach Lemma 45.4 (3) $\langle v, w \rangle \geq 1$ und daher die Relativgeschwindigkeit eine wohldefinierte nichtnegative reelle Zahl ist, die durch 1 beschränkt ist. Die Relativgeschwindigkeit ist symmetrisch in v und w, hingegen ist

$$v_{CB} = -w - \frac{1}{\langle v, w \rangle} v$$

im Allgemeinen von v_{BC} verschieden. Da die Lichtgeschwindigkeit zu 1 normiert ist, sollte man sich diese Relativgeschwindigkeiten klein vorstellen. Bei $v = w$ ist die Relativgeschwindigkeit gleich 0.

Lemma 45.8. *Es sei V ein Minkowski-Raum und seien B und C gleichgerichtete Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten v und w. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Der Relativgeschwindigkeitsvektor v_{BC} steht senkrecht auf v.*
(2) *Der Relativgeschwindigkeitsvektor v_{BC} ist raumartig und es gilt*

$$\| v_{BC} \| = \| v_{CB} \| = \rho_{BC} = \rho.$$

(3) *Es ist*

$$\langle v, w \rangle = -\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

(4) *Es ist*

$$w = \frac{v}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{v_{BC}}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

die Zerlegung von w in die Raum- und die Zeitkomponente von B.

(5) *Der Zeitkoeffizient von w bezüglich B ist $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$.*

Beweis. (1) Es ist

$$\langle v, v_{BC} \rangle = \left\langle v, -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle = \langle v, -v \rangle + \left\langle v, -\frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle = 1 - 1 = 0,$$

so dass diese Vektoren orthogonal zueinander sind. Somit gehört v_{BC} zur Raumkomponente zu B.

(2) Es ist

$$\begin{aligned} \langle v_{BC}, v_{BC} \rangle &= \left\langle -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w, -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle \\ &= \left\langle v + \frac{1}{\langle v, w \rangle} w, v + \frac{1}{\langle v, w \rangle} w \right\rangle \\ &= \langle v, v \rangle + 2 \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, w \rangle} + \frac{1}{\langle v, w \rangle^2} \langle w, w \rangle \\ &= 1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}. \end{aligned}$$

Nach Teil (1) (oder nach Lemma 45.4 (3)) ist dieser Ausdruck nichtnegativ. Die Quadratwurzel davon ist die Relativgeschwindigkeit ρ.

(3) Dies folgt direkt aus der Definition

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{1}{\langle v, w \rangle^2}}$$

durch eine einfache Umstellung, wenn man berücksichtigt, dass

$$\langle v, w \rangle < 0$$

ist.

(4) Aus

$$v_{BC} = -v - \frac{1}{\langle v, w \rangle} w$$

und (3) ergibt sich

$$w = -\langle v, w \rangle v - \langle v, w \rangle v_{BC} = \frac{v}{\sqrt{1-\rho^2}} + \frac{v_{BC}}{\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Nach Teil (1) gehört v_{BC} zur Raumkomponente zu B.

(5) Aus (4) ist direkt ablesbar, dass der Zeitkoeffizient von w bezüglich B gleich $\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}$ ist.

$\square$

Das in der fünften Aussage des vorstehenden Lemmas formulierte Prinzip heißt *Zeitdilatation*. Ein Beobachter beobachtet für einen weiteren Beobachter eine längere Zeit als dieser in seinem Bezugsystem.

Abbildungsverzeichnis