數理學講義録の内

代數學講義

全

理學士

田中三四郎先生講述

東京數理學會

藏版

代數學講義

目　　次

終

代數學講義

理學士　田中三四郎述

第一章

緒論

1. **代數學**トハ算術ノ如ク數ヲ論ズル學科ナリ.即代數學ノ重ナル目的ハ數ニ係ル問題ノ解法ヲ簡明ナラシメ且之ヲ廣ク同種類ノ問題ニ適用セシムルニアリ而シテ此目的ヲ達スルニハ數ノ上ニ施スヘキ演算ヲ表示スルニ符號ヲ以テシ又數ヲ代表スルニ文字ヲ以テス.而シテ符號トハ重ニ算術ニ於テ用フル如キ＋－×÷等ノモノニシテ文字ハ多ク羅馬字 a b c,・・・A B C・・・ノ如キ或ハ希臘字 α β γ・・・等ヲ用フ尙又通例ノ數字 1 2 3・・・ヲモ併用ス之等ノ文字ヲ以テ數ヲ表ス所以ハ算術ノ如ク格段ナル數ニ就キテ論ズル代リニ一般ノ數ニ就テ論シ而シテ數ノ間ノ相互ノ關係及計算法ヲ簡明ナラシムルニアリ.代數學ニ於テ文字ハ任意ノ數ヲ表ハシ得ベシト雖モ一ツノ演算中ハ同シ文字ハ一定ノ値ヲ有スルモノトス.

2. **代數式**トハ代數記號即演算ノ符號ヲ以テ文字及數字ヲ聯結シタルモノヲ云フ.例ヘバ $a+b-c+5$ ハ一ツノ代數式ナリ.**根號** √ ヲ含メル式ヲ**無理式**ト云フ.但此事ハ後ニ論スベシ.根號ヲ含マザル式ヲ**有理式**ト云フ.

文字ヲ以テ割ルコヲ示サザル有理式ヲ**整式**ト云フ.

整式ニアラザル有理式ヲ**分數式**ト云フ.

例ヘハ $\sqrt{x}+a$ ノ如キハ無理式ト謂フベキモノナリ又前ニ示セシ $a+b-c+5$ ノ如キハ有理式ニシテ又カヽル式ハ整式ト云フナリ.

而シテ $\dfrac{2a+5bx}{3g}$ ハ有理式ナレ共整式ニアラズ即分數式ナリ.

＋又ハ－ナル符號ニテ結ビツケラレタル代數式ノ各部ヲ**項**ト云フ.

例ヘバ $3a+2b+5$ ニ於テ $3a, 2b$ 及 5 ハ夫々一ツノ項ナリ. 即此ノ式ハ三ツノ項ヨリ成立テリ.

＋又ハ－ナル符號ヲ有セザル整式ヲ**單項式**ト稱ス. 例ヘバ $2a$, $3a$ ノ如シ 而シテ $a+b$ ノ如キハ單項式ニアラズ.

多クノ單項式ヲ＋－ヲ以テ連結シタル整式ヲ**多項式**ト云フ.

二ツノ項即二ツノ單項式ヨリ成レル多項式ヲ**二項式**ト云フ. 又三ツノ項ヨリ成レル多項式ヲ**三項式**ト云フ. 其他モ之ニ準ズ. 例ヘバ $a+b$ ハ二項式ニシテ $a+b+2c$ ノ如キ $ab+ac+cd$ ノ如キ何レモ三項式ナリ.

次ノ圖ハ代數式ノ系統ヲ明カニ表セルモノナリ.

代數式
有理式　無理式
整式　分數式
單項式　多項式

3. 二ツ以上ノ數ヲ掛ケ合セテ得タル結果ヲ**積**ト稱ス. コヽニ於テ算術ト[illegible]ニ關スル一ツノ緊要ナル區別ヲ示サヽル可

カラズ. 算術ニ於テハ 2 ト 3 トノ積ヲ 2×3 ト記スルモ代數學ニテハ a ト b トノ積ヲ $a\times b$ 或ハ $a.b$ ト書シ又單ニ ab ト書ス. 今 $a=5$ $b=3$ ナレバ ab ハ $a\times b$ 即 $5\times3=15$ ヲ表ス. 然ルニ算術ニテ 53 ト書ケバ五十三ヲ表ス.

4. 積ヲ得ル爲メニ掛ケ合セタル數ノ各々ヲ其積ノ**因數**ト云フ 例ヘバ $2ab$ ノ因數ハ 2 ト a ト b ナリ.

5. 代數式ノ因數ノ一ツガ數字ニテ表ハサレシトキコノ因數ヲ**係數**ト云フ. 例ヘバ $5ab$ ノ 5 ハ ab ノ係數ナリ. 然レモ係數トハ尚之ヲ汎キ義ニ用フルコトアリ. 例ヘバ ax ニ於テ x ノ係數ヲ a ト云フガ如シ. 尚又 $5ax$ ニ於テ x ノ係數ハ $5a$ ナリ.

注意 係數若シ一ナルトキハ通常之ヲ省畧ス. 即 $1a$ ト記セズシテ單ニ a ト記スルガ如シ.

6. 同ジ數ヲ幾度モ掛ケ合セタル積ヲ其數ノ**冪**ト稱ス. 而シテ或數例ヘバ a ヲ二度カケタルモノ即 $a\times a$ ハ之ヲ a^2 トカキ之ヲ a ノ**平方**又ハ a ノ**二乘冪**ト云フ. 同樣ニ $a\times a\times a$ ハ a^3 ト記シ之ヲ a ノ**三乘冪**或ハ a ノ**立方**ト云フ. 一般ニ a^n ハ a ノ n **乘冪**ト云フ例ヘバ a^6 ハ a ノ六乘冪ト云フ. 玆ニ冪ヲ表ス數例ヘバ a^2 ノ a ノ肩ニカキタル數 2 ヲ**指數**ト云フ. 例ヘバ b^3 ノ指數ハ 3 ナリ

注意 指數一ナルトキハ之ヲ記サズ即 a^1 ハ a ト書クナリ.

7. 玆ニ初學者ニ向テ注意スルコトアリ. 即係數ト指數ノ區別ヲ明ニ了解セラレンコトナリ. 今一二ノ例ヲ擧ゲン.

(例一) 若シ $a=5$ ナレバ $3a=3\times a=3\times5=15$ ナリ.

而シテ　　　$a^3=a\times a\times a=5\times 5\times 5=125$

(例二)　若シ　$b=3$　ナレバ　$4b^2=4\times b\times b=4\times 3\times 3=36$

然ルニ　$2b^4=2\times b\times b\times b\times b=2\times 3\times 3\times 3\times 3=162$

(例三)　今 $a=4$ $x=1$ ナレバ　$5x^4$　ノ値如何

(解)　x ノ代リニ 1 ヲ置キ a ノ代リニ 4 ヲ置ケバ

$5xa=5\times 1\times 1\times 1\times 1=5$　何トナレバ 1 ヲ何度カケ合セテモ矢張リ 1 ナルガ故ナリ.

8. 積ノ因數若シ零ニ等シキトキハ他ノ因數ハ如何ナリトモ其全体ノ積ハ零トナル. 例ヘバ $x=0$ ナル𬼂ハ aby ハ何ナリトモ $abxy$ ハ 0 トナル. 玆ニ注意スベキハ指數 0 ニ等シキトキハ 0 トナルヿナキヿナリ. 即 a^0 ハ 0 ニハアラズコレハ後章ニ至リテ説明スベシ.

9. 與ヘラレタル式ノ平方根トハ其平方即二乘羃ガ與ヘラレタル式ニ等シキ所ノ數ヲ云フ. 例ヘバ 4 ノ平方根ハ 2 ナリ. コレ $4=2^2$ ナルヲ以テナリ. 或數 a ノ平方根ヲ表スニ　$\sqrt[2]{a}$ 或ハ單ニ $\sqrt{a}$ ト書ク與ヘラレタル式ノ立方根, 四乘根, 等トハ夫々其三乘羃, 四乘羃ガ元トノ式ニ等シキ所ノ數ヲ云フ. 立方根ヲ表スニ $\sqrt[3]{}$ ヲ用ヒ四乘根ヲ表スニ $\sqrt[4]{}$ ヲ用フ. 例ヘバ　$\sqrt[3]{27}=3$　$\sqrt[4]{16}=2$　**記號 $\sqrt{}$ ヲ根號**(ラヂカル)ト云フ. 而シテ $\sqrt[4]{}$ ハラヂカル四ト呼フ. 以下類推セヨ.

10. **$=$, $>$, $<$ 等ノ意義**　**等號**ニハ相等シキコトヲ示ス. 而シテ之ヲ用ヒテ相等シキコトヲ示シタル式ヲ**等式**ト稱ス. 例ヘバ　$2+3=5$　ハ等式ナリ.　$>$ 或ハ $<$ ナル記號ハ**不等號**ト稱シコレヲ用ヒタル式ヲ**不等式**ト云フ.　例ヘバ　$a>b$　トアレバ

a ハ b ヨリ大ナルヲ示シ. 又　$a<b$　トアレバ　a ハ b ヨリ小ナルヲ示ス. 又 $\because$ ハ「何トナレバ」ト云フ語ニ代用シ. $\therefore$ ハ「ソレ故ニ」ナル語ニ代用ス.

例題　〔讀者次ノ問題ヲ自解スベシ〕

若シ　$a=7$　$b=2$　$c=1$　$x=5$　$y=3$　ナレバ次ノ式ノ値如何

(1)　$14x$　　(2)　x^3　　(3)　$3ax$

(4)　$5by$　　(5)　b^5　　(6)　$3b^2$

(7)　$2xa$　　(9)　$6c^4$　　(10)　$9b^4$

(1)　ノ答　$14x=14\times x=14\times 5=70$　　(3)　ノ答　$3ax=3\times a\times x=3\times 7\times 5=105$　以下類推セヨ

(11)　$\frac{3}{5}x^2$　　(12)　$\frac{1}{2}y$　　(11) ノ答　$\frac{3}{5}x^2=\frac{3}{5}\times x\times x=\frac{3\times 5\times 5}{5}=15$　　(12) ノ答　$\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}\times 3=\frac{3}{2}$

11. 例題ヲ解クニ當リ次ニ擧クル事項ニ注意セヨ.

(1)　各行ノ演式ハ如何ニシテ其前ヨリ來ルカヲ明示スルヿ. 又必要ノ時ニハ其説明ヲ略記スルコト.

(2)　符號ニハ互ニ相等シキ數ヲ連結スル𬼂ニノミ用フベシ.

12. **括弧**　( )　{ }　[ ] 及ヒ括線——ノ用ハ算術ニ於ケルト同シ事ナリ. 例ヘハ　$(a+b)c$ ハ a ト b トノ和ニ c ヲ掛ケルト云フヿヲ表スモノニテ　$(a-b)(a+b)$ ハ a ト b トノ差ニ a ト b トノ和ヲ掛ケルト云フヿヲ表ス.　又 $a-\overline{b+c}$ ハ a ヨリ b ト c トノ和ヲ引クヿヲ示ス.

13. 代數式ノ各ノ項ハ恰モ括弧内ニアルガ如ク之ヲ全体トシテ扱フベシ. 即乘除ヲ先キニシテ後引キ算, 加ヘ算ヲ施スヲ要ス.

例ヘバ　$(a+cd)-(d\div g\times y)$ ハ a ニ c ト d トノ積ヲ加ヘソレヨリ d ヲ g ニテ割リ之ニ y ヲカケタルモノヲ引クガ如シ.

(例1.)　$a=5,\ b=4,\ x=3,\ y=2$ ナルトキ次ノ式ノ値ヲ計算セヨ.

$$\frac{3}{10}ab-7x^2-\frac{9}{4}ay^2+2b^3$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{10}ab-7x^2-\frac{9}{4}ay^2+2b^3 &= \frac{3}{10}5\times4-7\times3^2-\frac{9}{4}\times5\times2^2+2\times4^3\\ &=6-63-45+128\\ &=26\end{aligned}$$

(例2.)　$a=5,\quad b=0,\quad x=7,\ y=1$　ナル片　$\frac{3}{5}x^2-a^2y+7abx\frac{5}{2}y^3$ ノ値ヲ求ム.

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}x^2-a^2y+7abx-\frac{5}{2}y^3 &= \frac{3}{5}\times7^2-5^2\times1+0-\frac{5}{2}\times1^3\\ &= \frac{3}{5}\times49-25-\frac{5}{2}\\ &= 1\frac{9}{10}\end{aligned}$$

例　題

(1)　$a=1\quad b=2\quad c=3$　トシテ次ノ三ツノ式ノ値ヲ求ム

(i)　$a+12b-5c$　(ii)　$7abc-b+c$　(iii)　$3(bc+ca+ab)$

(2)　a ト b ト c ノ和ヲ書キ表セ.

(3)　a ト b ト c ノ積ヲ書キ表セ.

(4)　a ト b ノ和ヨリ c ヲ引ケル式ヲ書ケ.

(5)　5 ト a ト b ノ積ヨリ a ノ立方ト d ノ平方ヲ引キタル式ヲ書ケ

14. 文字ヲ以テ數ヲ表スコトハ一般ノ數ニ就テ論ゼントスルガ故ナリ　又數量ニ關スル規則ヲ簡明ニ表示スルヲ得ルノ便利アリ. 例ヘバ矩形ノ面積ハ巾ト長サノ積ニ等シキコヲ表スニ. 今巾ヲ a トシ長ヲ b トセバ面積ハ次ノ如クシテ表スコトヲ得ベシ.

$$\text{矩形面積}\quad =ab$$

又例ヘバ一ツノ數ヲ二ツノ數ニテ順々ニ割ルハ始メノ數ヲ後ノ二ツノ數ノ積ニテ割[illegible]ニ等シト云フ規則ヲ代數記號ニテ書キ表スニ.

$a\div b\div c\ =\ a\div bc$　ト書クガ如シ. コレ實ニ便利ナル書キ方ト云ハザル可カラズ.

(例)　絹一尺ニ付 p 錢ニテ a 尺ヲ買ヒ之ヲ一尺ニ付キ q 錢ニテ賣ル片ハ利益幾何.　(解) 一尺 p 錢ナレバ p 尺ニテハ pa 錢ナリ. 今コノ價ニテ買ヒタルモノヲ 一尺ニ付キ q 錢ニテ賣リタル故其利益ハ $aq-pa$ 錢ナリ.

第二章
負　數

15. 算術ノ演算ニ於テ＋及ビ－ノ號符ヲ以テ數ヲ連ヌルコトアルハ讀者ノ知ラルヽ所ナルベシ. 例ヘバ　$3+\frac{3}{2}+8-2$　ノ如キ式ノ値ヲ求ムル場合ニハ＋ノ符號ガ前ニアル數ハ之ヲ加ヘ－ノ符號ガ前ニアル數ハ引クベキコヲ示ス. 又最初ノ數字3ハ減クベキ數ニハアラズシテ加フベキ數ナルコハ既ニ了知スル所ナルベシ. 代數學ニ於

テモ之ト同様ノ記シ方ヲ用ユ. 例ヘバ $7a+3b-4c-2d$ ノ式ニ於テハ $7a$ 及 $3b$ ハ加ヘ $4c$ 及ビ $2d$ ハ引クベキコトヲ示セリ.然ルニ算術ニ於テハ加フベキ項ノ和ハ常ニ引クベキ項ノ和ヨリ大ナリ若シ之ニ反シタル場合アルトキハ其結果ハ全ク算術上ノ意義ヲ有セズ然レ𪜈代數學ニ在テハ引クベキ項ノ和ガ加フベキ項ノ和ヨリ大ナルヿアルノミナラズ引クベキ項ノミ存在スルモ尙適當ノ意味ヲ有ス之ニ依テ代數學上ノ數量ヲ二類ニ分チ 數ノ前ニ＋(プラス)ノ符號ヲ有スルヲ正數ト云ヒ－(マイナス)ノ符號ヲ有スル數ヲ負數ト云フ. カク區別ヲナスト雖𪜈實際ニ於チル加法及ビ減法ノ演算ニ關係ヲ及ボスコトナシ 次ニ一二ノ例ヲ舉ケテコノ正數負數ノ觀念ヲ明ニセントス.

(例1.) 或人商業ヲナシ金百圓ノ利益ヲ得其後金七十圓ヲ損失シタリトセバ其人ノ純粹ノ利益ハ金三十圓ナルベシ. 然レ𪜈其人最初ニ金七十圓ノ利益ヲ得其後金百圓ヲ損シタルトセバ此商業ニ於テ其人ハ金三十圓ヲ損失シタルヿ明ナリ. 今之ヲ代數字上ノ演算ニテ表ス片ハ次ノ如シ.

三十圓ヲ利セシ場合　　100－70圓＝＋30圓

三十ヲ損セシ場合　　70－100圓＝－30圓

此第二番目ノ式ニ於ケル－30ハ即負數ニシテ第一ノ片ニ於ケル＋30トハ反對ノ意義ヲ有ス即 ＋30ハ己レノ財嚢中ニ入ルベキ金高ニシテ－30ハ即己ノレ負債トナリシ金高ヲ表セリ.

(例2.) 或人直線形ノ道ヲ前方ニ百間步行シ次ニ後方ニ七十間退步シタリトセバ甚人ハ始メ出發シタル所ヨリ三十間前ノ方ニアルベシ.

然レ𪜈始メ其人前方ヘ七十間步行シ次ニ後ノ方ヘ百間退步シタリトセバ其人ハ出發點ヨリ反對ノ後方ヘ三十間ノ距離ニ在ルベシ. 今前ト同シク代數學上ノ演算ニテ表セバ.

100間－ 70間＝＋30間

70間－100間＝－30間

コノ片ニハ ＋30 ト －30 ハ反對ノ方向ニシテ其長サ相等シキヲ示セリ. 斯クノ如ク今東方ニ行クベキ里數ヲ數フルニ ＋4 トアレバ其處ヨリ東ヘ四里ノ義ニシテ －4 トアレバ反對ニ西方ヘ四里ノ義トナル. 斯クノ如ク同シ種類ノ名數ニテモ反對ノ性質アルヲ區別スルハ代數學カ算術ヨリ一步進ミタル學科ナル所以ナリ.

16. 前ニ云ヒシヿニヨレバ數量ノ正反對ノ性質ヲ示スヿノ符號ハ別ニ新符號ヲ用ヰルヿヲ要セズシテ知リ得ベシ.即「加ヘル」或ハ「減ズル」ヿノ符號＋－ヲ以テ其ノマヽ充分ニ前述ノ如ク反對ノ性質ヲ表シ得ベシ.故ニ代數學ニ於テ＋及－ハ算術ニ於ケル意味ノ外尙之レヲ押シ廣メスル意義ヲ有ス. 即代數學ニテハ＋及－ヲ夫々加法及減法ノ符號ニ用フルノ外尙數量ノ正反對ナル性質ヲ區別スルニ用フ. 符號＋ハ式ノ始メニアル時及單ニ＋ノ數一ツアル片ニハ通常コレヲ畧シテ單ニ數ノミヲ記ス.即 $+a+b-c$ ヲ只 $a+b-c$ ト記シ. $+4$ ヲ單ニ 4 ト書クガ如シ. 故ニ數ノ前ニ符號ノナキ片ハ常ニ＋ナル符號アルモノト心得ベシ. 但 $+a+b$ ヲ ab トハカクベカラズコレハ a ニ b ヲ掛クルヿヲ表スガ故ナリ.同樣ニ $4+5$ ヲ 45 ト書ケハコレハ四ニ五ヲ加フルコトヲ表サズシテ四十五ヲ表スニ至ル故大ナル誤リ

トナレバナリ.

17. 正數負數ノ大サヲ其性質即チ符號ニ拘ラズシテ考ヘタルモノヲ其ノ**絕對値**ト稱ス. 例ヘバ $+5$ モ -5 モ其絕對値ハ相等シト云フナリ.

第三章

加法〔即寄セ算〕及減法〔即引キ算〕

18. 二ツ或ハ二ツ以上ノ數ヲ一ツニ合スル片其結果ヲ求ムル方法ヲ加法又ハ寄セ算ト云フ. 而シテ其結果ヲ**和**ト稱ス.

19. 二ツノ數ノ和ハ二ツノ數ヲ如何ナル順序ニ加フルモ異ルコトナシ. 例ヘバ $2+5=7$ ニシテ又 $5+2=7$ ナリ. 一般ニ

$$a+b=b+a$$

ナリ. 加號ヲ以テ示セル和ハツマリ一ツノ多項式ナレバ加フル處ノ各ノ數ヲ其項ト云フヲ得ベシ. $a+b$ ニ於テ a 及 b ハ各コノ多項式即ノ項ナリ. 項ノ數三ツアル片ニモ又上ノ如ク云フヲ得ベシ. 即

$$a+b+c=a+c+b=b+c+a=b+a+c=c+a+b=c+b+a$$

コノ定理ハ項ノ數ヲ幾何ニ大クスルモ眞ナリ. 此定理ヲ**交換定則**ト云フ.

20. 符號ヲ以テ示サレタル和ノ中ニ多クノ項ガアルトキハ此レ等ノ項ヲ任意ノ群ニ分チテ最初ニ各ノ群ノ和ヲ求メ而シテ後此レ等ノ和ヲ加ヘテ以テ總テノ和ヲ求メ得ベシ. 今群ヲ示スニ括弧ヲ以テシ一ツノ例ヲ擧ゲンニ

$$1+2+3+4=(1+2)+(3+4)=3+7=10$$

一般ニ $a+b+c+d=(a+b)+(c+d)=a+(b+c+d)=(a+b+c)+d=a+(b+c)+d.$

項數ノ大小ニ關セズ之ヲ前ノ如ク任意ノ群ニ分チテ計算スルヿヲ得.

21. 減法又ハ引キ算トハ加法ノ反對ニシテ詳シク云ヘバ甲ナル數ヨリ乙ナル數ヲ減スルトハ甲ニ等シカラシメンガ爲メ乙ナル數ニ加フベキ數ヲ求ムルヿナリ. 茲ニ云ヒシ甲ナル數ヲ被減數ト云ヒ乙ナル數ヲ減數ト云フ而シテ求ムベキ數ハ差ナリ.

22. 引キ算ニ於テ減數ト差トハ之ヲ交換スルヿヲ得.

例ヘバ $7-5=2$ ナルト同時ニ $7-2=5$ ナリ.

一般ニ $a-b=c$ ナルト同時ニ $a-c=b$ ナリ.

而シテ引キ算ニ於テハ減數ト差トノ和ハ減セラルヽ數ニ等シキガ故今 b ヲ減ズル數トシ a ヲ減セラルヽ數トスレバ次ノ式ヲ得.

$$(a-b)+b=a$$

23. 一ツノ被減數ヨリ多クノ數ヲ引クニハ順次ニ引キ算ヲ行フモ可ナリ. 又最初ニ減數同士ヲ加ヘ置キコノ和ヲ被減數ヨリ引クモ可ナリ. 例ヘバ $20-6-2=(20-6)-2=14-2=12.$

トナスルモ可ナレドモ又 $20-(6+2)=12.$

トナスモ可ナルガ如シ.

一般ニ $a-b-c=a-(b+c).$

減數多クアル場合モ同樣ナリ.

又之ト反對ニ多クノ項ヨリ成レル所ノ和ヲ或數ヨリ引クニハコレ等

ノ項ヲ次第ニ引クト同ジ事ナリ.

即 $a-(b+c)=a-b-c.$ 又 $a-(b+c+d)=a-b-c-d.$

24. $9+(14-6)$ ハ 9 ニ 14 ヨリ 6 ヲ減シタル 8 ヲ加フベキヿヲ示ス. 今 9 ニ 14 ヲ加フル𪜈ハ 6 ダケ加ヘ過ギルヿトナルベシ故ニ此和 $9+14$ ヨリ 6 ヲ減セザル可カラズ即

$$9+(14-6)=9+14-6.$$

コレヲ一般ニ書ケバ $a+(b-c)=a+b-c.$

之レ大ニ記憶スベキヿナリ. 即或ル數ニ二ツノ數ノ差ヲ加フルニハ此數ニ被減數ヲ加ヘタルモノヨリ減數ヲ引ケバ可ナリ.

25. $15-(7-4)$ ハ 15 ヨリ 7 ガ 4 ヲ超過スルダケ即 3 ヲ減ズベキヿヲ示セリ.今 15 ヨリ 7 ヲ引クトキハ $15-7$ トナル.コレハ 4 ダケ引キ過ギル故ニコレニ 4 ヲ加ヘザル可カラズ.依テ

$$15-(7-4)=15-7+4 \quad =12.$$

トナル.一般ニ $a-(b-c)=a-b+c.$

之レ亦大ニ記憶スベキヿナリ. コノ式ヲ言葉ニテ示セバ. 或ル數ヨリ二ツノ數ノ差ヲ引クニハ此數ヨリ被減數ヲ引キタルモノニ減數ヲ加フレバ可ナリ.

上ニ云ヘルヿニヨリテ次ノ式ヲ知リ得べシ.

(1.) $a+(b-c+d-f)=a+b-c+d-f.$ (**23** ニ云ヒシ事ニヨル).

(2.) $a-(b-c+d-f)=a-b+c-d+f$ (本條ニ云ヘル事ニヨル).

之ニヨリテ符號＋ヲ前ニ有スル括孤ハ唯之ヲ省クヿヲ得. 之ニ反シテ符號－ヲ前ニ有スル括孤ヲ去ルニハ括孤ノ内ノ數ノ前ニアル符號

ノ＋ヲ－ニカヘ－ヲ＋ニカヘルヲ要ス.

今一例ヲ擧グレバ. $10+(9-8+7-6)=10+9-8+7-6=12.$

$$10-(9-8+2-1)=10-9+8-2+1=8.$$

式中ニアル符號＋ヲ－ニ換ヘ－ヲ＋ニ換ヘルヿヲ項ノ符號ヲ變ズルト云フ.

25. 代數式中ニ於テ上ノ如ク加法及減法ヲナスべキ場合ニ＋ノ符號ヲ有スル項ハ一所ニ集メ－ノ符號ヲ有スルモノヲ一所ニアツメテ運算スルヲ簡便ナリトス.例ヘバ $7-2+6-3$ ヲ $7+6$ ト -2 ト -3 ノ群ニ分チ計算スレバ

$$7-2+6-3 = 7+6-2-3 = 7+6-(2+3) = 14-5=9$$

一般ニ $a+b-c-d=b+a-d-c=b+a-c-d=a+b-d-c$ 等.何レニスルモ可ナリ故ニ運算ノ都合ヨキ様ニ配置スレバ可ナリ.

例ヘバ $7+6-2-3=7-2-3+6=7-2+6-3=6-3+7-2$ 等何レノ場所ニ項ヲ置クモ可ナリ. 而シテ其結果ハ勿論同一ナリ. 即上ノ場合ニテハ何レモ答ハ 8 トナル.

前ニモ云ヒシ通リ. 式ノ初メノ項ノ前ニ符號ナキ𪜈ハ＋ナル符號アルモノトシテ取扱フべキモノトス. 更メテ云フ𪜈ハ初項ニ限リ其前ニ置クべキ符號＋ヲ畧スルモノトス. 故ニ項ノ順序ヲカヘテ元トノ初項ヲ他ノ位置ニ移ス𪜈ハ之ト同時ニ其項ノ數字ノ前ニハ＋ノ符號ヲツケザルべカラズ. 又之ト反對ニ符號＋ヲ有スル項ヲ移シテ初項ニスル𪜈ハ之ト同時ニ符號＋ヲ略スルモノトス. 但－ノ符號ノ𪜈ハ之ヲ畧スルヿナシ.

26. 一ツノ項ノ中ニ含マレタル文字ト他ノ項ノ中ニ含マレタル文字トガ彼是相同シク.且其指數モ彼是同ジキハ此二項ハ**同類項**ナリト云フ.例ヘバ $3a$ ト $7a$ ハ同類項ナリ.又 $5a^2b$ ト $2a^2b$ 及 $3ab^3$ ト $5ab^3$ 等ハ各同類項ナリ.

27. 加ヘ合スベキ諸項ノ中同類項アルキハ之ヲ集メテ一項トナスベシ.是ニ三ツノ場合アリ.

第一 同符號ヲ有スル諸々ノ同類項ヲ加ヘ合スニハ其數字係數ノ算術的ノ和ニ其共有ノ符號ヲツケ而シテ共有ノ文字ヲ書キ添フベシ. 例ヘバ $3a+4a=7a$

$$-2a-5a=-7a.$$

今數字係數ナキ項ハ其處ニ 1 ガアルモノトシテ取扱フベキコ勿論ナリ. 例ヘバ $a^2b+3a^2b=4a^2b$

$$-xy^3-3xy^3=4xy^3.$$

第二 異符號ヲ有スル二ツノ同類項ヲ加フルニハ其數字係數ノ算術的ノ差ニ其數字係數ノ大ナル方(詳シク云ヘバ絶對値ノ大ナル方)ノ符號ヲツケ.而シテ共有ノ文字ヲ書キ添フベシ.

例ヘバ (1) $5a-2a=3a.$ (3) $-5a+2a=-3a.$

(2) $a-2a=-a.$ (4) $-3a+5a=2a.$

(1) ノ例ニテハ $5a$ ニ $-2a$ ヲ加ヘタルナリ. 即 $5a+(-2a)=3a$ ニシテ又 (2) ノ例ニテハ a ニ $-2a$ ヲ加ヘタルナリ. 即 $a+(-2a)=-a$ 以下同様ナリ.

第三 同類項中ニ正ナル者負ナル者等數多アルキハ正項ハ悉ク第一ノ方法ニテ集メテ一ツノ項トナシ負ノ項ハ又悉ク第一ノ方法ニヨリテ集メ一ツノ項トナシ而シテ得タル二ツノ項ヲ第二ノ方法ニヨリテ合一スベシ.

例ヘバ $8a,-9a,-a,3a,4a,-11a,a,$ ノ和ヲ求ム.

正ノ項ノ係數ノ和ハ 16 ナリ. 又負ノ項ノ係數ノ和ハ 21 ナリ. コノ二ツノ差ハ 5 ニシテ負ノ項ノ係數大ナルガ故ニ負ノ符號ヲツケルベシ.即答ハ -5 ナリ.

然レモコノ規則ハ之ヲ嚴ニ固守スルヲ要セズ. 蓋シ各項ハ任意ノ順序ニ加ヘ又ハ引クコヲ得ルヲ以テ最モ便利ナル順序ニ撰フコヲ得ルヲ以テナリ.

又第三ニ於ケル演算ハ別々ニナサズシテ心算ニテ一度ニナスコヲ得ル様ニ習熟スベシ. 尤モ此心算ニ便ナランガ爲メ同類項ガ縱行ニ並ブ様ニ列記スルコ次ノ例ノ如クナスベシ. コレ通例用フル方法ナリ

(例一) $3a-5b+2c$ ト $2a+3b-c$ トノ和ヲ求ムベシ.

之ヲ次ノ如ク書キテ演算スルナリ.

$$\begin{array}{r}3a-5b+2c\\2a+3b-c\\\hline 5a-2b+c\end{array}$$

線ノ下ニ表セルガ答ナリ.

(例二) $c+2a-3b,\ e+d-4c,\ 3c-2d-a+e,$ ヲ加ヘヨ.

前ノ如ク同類項ガ縱行ニ並ブ様ニナス然ルキハ

$$\begin{array}{rrrrr}2a&-3b&+c&&\\&&-4c&+d&+e\\-a&&+3c&-2d&+e\\\hline a&-3b&0&-d&+2e\end{array}$$

即答ハ $a-3b-d+2e$ ナリ.

此例ノ如ク同類項ガ同シ縱行ニ並ブ様ニナスキ成ルベク錯雜セザル

様ニ注意シ又同類項ナキ行ハ之レヲ定位ニ存スベシ.

(例題) $a+b+2c$ ト $a-b-2c$ ト $-2a$ トヲ加ヘ合スヘシ.

答 0.

28. 是ヨリ頁數ヲモ含メル引キ算ニ關スル演算ニ就テ一層詳述セントス.

先ツ引キ算ハ加法ノ反對ナリ. 故ニ前ニモ說ケルガ如ク次ノ各式ハ讀者ノ直チニ了解スル所ナラム.

(1) $9-(+7)=9-7=2$ (2) $4-(+7)=4-7=-3$

(3) $9-(-7)=9+7=16$ (4) $-9-(+7)=-9-7=-16$

(5) $-9-(-7)=-9+7=-2$ (6) $-4-(-7)=-4+7=3.$

之ト同様ニ $a-(+b)=a-b$

$a-(-b)=a+b$

依テ引キ算ノ規則ヲ得ベシ.

一ツノ項ヲ他ノ項ヨリ引クニハ其符號ヲカヘテ之ヲ引カントスル式ニ書キ添フベシ.

(例1) $-a$ ヨリ $-b$ ヲ引ケ. $-a-(-b)=-a+b$ 或ハ之ヲ $b-a$ ト書スベシ.

(例2) $-b$ ヨリ a ヲ引ケ. $-b-(a)=-b-a$ コレヲ「エビシ」ノ順ニ列ブレバ $-a-b$.

29. 式ノ引キ算ヲナス法ハ次ノ如シ.

第一 減セラルヽ方ノ式ノ下ニ引ク可キ數ヲカケ.

第二 同類項アレバ上下相並ブ様ニスベシ.

第三 次ニ引クベキ式ノ符號ヲ胸中ニテ變シ同類項ヲ合一スヘシ.

(例一) $5x^2+xy-3y^2$ ヨリ $2x^2+8xy-7y^2$ ヲ引ケ.

$$\begin{array}{r} 5x^2+xy-3y^2 \\ 2x^2-8xy-7y^2 \\ \hline 3x^2-7xy+4y^2 \end{array}$$

即結果ハ線ノ下ニ表セルモノナリ

(例二) x^4-2x^3-9x+4 ヨリ $2x^4-3x^2+7x-8$ ヲ引ケ.

$$\begin{array}{r} x^4-2x^3\qquad-9x+4 \\ 2x^4\qquad-3x^2+7x-8 \\ \hline -x^4-2x^3+3x^2-16x+12 \end{array}$$

30. **注意** 玆ニ代數學ニ云フ差ト算術ニテ云フ差トノ異レルヲ知ルベシ. 算術ニテ差ト云ヘバ二數ノ內ノ大ナル方ヨリ小ナル方ヲ引キテ得タル結果ナリ 代數學ニテハ小ナルモノヨリ大ナルモノヲ引クモ差ヲ得.

a 及 b ノ算術的ノ差ヲ表スニ $a\sim b$ ナル記號ヲ用ヰルコアリ.

a 及 b ノ代數的ノ差即 $a-b$ ガ正數ナレバ a ハ b ヨリ大ナリト云フ, 又コノ差ガ負數ナレバ b ガ a ヨリ大ナリト云フ, 故ニ例ヘバ 1 ハ -3 ヨリ大ナリ. 又 0 ニテモ -1000 ヨリ大ナリ. 又 -10 ハ -20 ヨリ大ナリ. コレヨク注意スベキコトトナス.

例題

(1) 4 ト -1 トノ差ト 5 ト -4 トノ和ト何レガ大ナルカ.

(2) $a=3, b=-2, c=-1$ ナルトキ $a+(-b)+c$ 及 $a-(-b)+c$ ノ値ヲ求ム.

(3) 次ノ三ツノ多項式ヲ寄セ合ス可シ.

$$2b^2+3c^2-a^2$$
$$4a^2-8b^2+2c^2$$
$$7b^2-3a^2-9c^2$$

(4) $15a-27b+8c$ ヨリ $10a+3b+4c$ ヲ引ケ.

(5) $4a-3b+15c$ ヨリ $25a-16b-18c$ ヲ引ケ.

(6) $3a-7a^3+5a^2$ ヲ $2+8a^2-a^3$ ト $2a^3-3a^2+a-2$ トノ和ヨリ引クベシ.

31. 括弧用法. 括弧ノ用法ハ前ニ屢說キタレ共茲ニ一括シテ之ヲ擧グベシ, 之レ初學者ノ誤リ易キ點ナレバナリ.

(1) 括弧ノ前ナル符號ガ+ナル時ハ括弧內ノ諸項ノ符號ヲ變化スル丅ナクシテ其儘其括弧ヲ省クヲ得.

(例) $a+(b-c+d)=a+b-c+d.$

(2) 括弧ノ前ノ符號ガーナル時ハ其括弧內ノ諸項ノ符號ヲ悉ク變フレバ其括弧ハ省クヿヲ得.

(例) $a-(b-c+d)=a-b+c-d.$

(3) 幾重モ括弧アル時ニハ(1) (2)ノ法則ニヨリテ一時ニ一双ツヽ取リ去ルベシ.

(例)
$$\begin{aligned} a-\{b+[c-(d-e)]\} &= a-\{b+[c-d+e]\} \\ &= a-\{b+c-d+e\} \\ &= a-b-c+d-e. \end{aligned}$$

コノ例ノ如ク內部ニアル括弧ヨリ取リ去ルガ便利ナリ.

第四章

單項式ノ掛ケ算及割リ算

第一 掛ケ算

32. 正數ト負數ニ對シテノ稱ナルガ故固ヨリ通常ノ數ナリ, 故ニ正數ニ正數ヲ乘ズルハ算術ニ於ケル通例ノ掛ケ算ニ異ナラズ. 負數ニ正數ヲ掛ケル場合ハ算術ニハナキコトナリ, 故ニ玆ニ其定義ヲ新ニ設ケザル可カラズ.

負數ヲ掛ルトハ其絕對値ヲ掛ケ得タル積ノ符號ヲ變ズルコトナリ.

算術ニ於テノ掛算ヲ畧述セバ, 3 ニ 4 ヲ乘ズルトハ 3 ヲ四度寄セルコトニシテ, 即 $3+3+3+3=12$ ナリ. 又 $\frac{5}{7}$ ニ $\frac{3}{4}$ ヲ乘ズルハ $\frac{5}{7}$ ヲ四分シタルモノヲ三ツトルコトナルヲ以テ $\frac{5\times3}{7\times4}$ ナリ. 代數學ニ於テ負數ニ正數ヲ掛ケルモ同樣ノコトナリ. 例ヘバ

$$-a\times4=(-a)+(-a)+(-a)+(-a)=-4a=-(a\times4).$$

今代數學ニ於テ乘數ノ簡單ナル種々ノ場合ヲ列擧セン

$$(+a)\times(+b)=+ab$$
$$(-a)\times(+b)=-ab$$
$$(+a)\times(-b)=-ab$$
$$(-a)\times(-b)=+ab$$

即二ツノ數ノ積ヲ求ムルニハ, 其絕對値ノ積ヲ求メ, 其符號ハ二ツノ數ノ符號ガ共ニ正數ナルカ又ハ共ニ負數ナルトキハ正號ニシテ二ツノ數ノ內何レカ一方ガ負ニシテ他ガ正ナル時ハ負號ナリ. 之レヲ簡

單ニ次ノ如ク述ブ讀者宜シク記憶スベシ.

"同號ハ $+$(プラス)ヲ生シ異號ハ $-$(マイナス)ヲ生ズ"

コレヲ**符號ノ定則**ト云フ.

33. 掛算ニ於テ被乘數ト乘數トヲ交換スルモ積ノ値ハ變ルヿナシ. 即例ヘバ　$4\times3=3\times4$

一般ニ　$a.b=b.a$

ナリ, 故ニ唯積ノミヲ着目スル場合ニハ被乘數乘數ノ區別ヲナスヿ不必要ナリ.

因子ガ數多アル場合ニモ同様ナリ.

即例ヘバ三ツノ因數ニ於テ $abc=bca=cba=acb=bac=cab$ ナルヿヲ証スルハ容易ナリ. 此規則ヲ**乘法ノ交換ノ定則**ト云フ.

34. 積ノ因數ハ之レヲ任意ニ結合スルコトヲ得.

例ヘバ　$a.b.c.d=a(bc)d=(ab)(cd)$

コノヿハ第**33**條ニヨリテ明ナルベシ, 之レヲ**乘法ノ結合ノ定則**ト云フ.

35. 第**6**條ニヨリ　$a^2=aa$　$a^3=aaa$　$a^4=aaaa$ 等ナリ.

故ニ　$a^2\times a^3=aa\times aaa=a^5=a^{2+3}$

又　$a^5\times a=aaaaa\times a=aaaaaa=a^6=a^{5+1}$

今更ニ之レヲ一般ニ論ズレバ, m 及 n ヲ任意ノ正ノ整數トシテ

$a^m=a\times a\times a\cdots(a$ ヲ m 個$)$ 又 $a^n=a\times a\times a\cdots(a$ ヲ n 個$)$

依テ　$a^m\times a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots}_{a\text{ヲ}m\text{個}}\underbrace{\times a\times a\times a\cdots}_{a\text{ヲ}n\text{個}}=a^{m+n}$

即　$a^m\times a^n=a^{m+n}$

依テ次ノ規則ヲ得.

"同シ文字ノ二ツノ羃ノ積ノ指數ハ其因數ノ指數ノ和ニ等シ".

之レヲ**指數ノ定則**ト云フ.

36. 次ニ簡單ナル掛ケ算ノ例ヲ擧グベシ.

(例一)　$5ab=6abc$ ヲ掛ケヨ.

$5ab\times6abc=5\times6\times a\times a\times b\times b\times c=30a^2b^2c.$

(例二)　$3a^2b^2=6ab^3c$ ヲ掛ケヨ.

$3a^2b^2\times6ab^3c=18a^2\times a\times b^2\times b^3\times c=18a^3b^5c.$

(例三)　$2a^2b^3\times(-6a^3b^2)=-2\times6a^2\times a^3b^3\times b^2=-12a^5b^5.$

注意 斯クノ如キ單項式ノ運算ニ於テハ一々上ノ如ク記セズシテ心算ニテナスベシ. 即チ先ヅ積ノ符號ヲ書キ次ニ數字係數ノ積ヲ書キ而ル後文字ノ積ヲ書ク可シ尤モ文字ハ「エビシ」ノ順ニ配列スルヲ通例トス.

(例四)　$-\sqrt{3}a^2b$ ノ平方ヲ求ム.

$(-\sqrt{3}a^2b)^2=(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})a^4b^2=3a^4b^2$

第二　割リ算

37. 割リ算ハ掛ケ算ノ反對ナリ, 即 a ヲ b ニテ割ルトハ b ニ掛ケテ a トナルベキ數ヲ求ムルヿナリ. 之ヲ詳言スレバ a ヲ b ニテ割ルトハ b ニ如何ナル數ヲ掛クレバ a トナルヤヲ求ムル法ナリ.

38. 割リ算ハ掛ケ算ノ反對ニシテ掛ケ算ニテハ積ハ因子ノ順序

ニ關セザルガ故ニ割リ算ニ於テモ連續シテ割ルコハ任意ノ順序ニ行フヲ得.

例ヘバ　$a\div b\div c=a\div c\div b.$

今之レヲ細說センニ割算ノ定義ニヨリ a ヲ b ニテ割リ又之ヲ c ニテ割ルコハ c ニ如何ナル數ヲ乘ズレバ $a\div b$ トナルベキカヲ知リ然ル後又 b ニ如何ナル數ヲ乘ズレバ a トナルベキカヲ知ラントスルノ意ナリ故ニ次ノ如シ.　$(a\div b\div c)\times c=a\div b$

此式ノニノ兩邊ニ b ヲ乘ズレバ

$$(a\div b\div c)\times c\times b=(a\div b)\times b=a$$

但シ第33條ニヨリ　$(a\div b\div c)\times b\times c=a\cdots\cdots\quad(1)$

兩邊ヲ c ニテ除スレバ　$(a\div b\div c)b=a\div c$

又兩邊ヲ b ニテ除スレバ　$a\div b\div c\quad=a\div c\div b$

即前ノ規則ヲ証セリ.

39. 或ル數ヲ兩數ニテ順次ニ除スルコハ一度ニ兩數ノ積ニテ除スルニ等シ. 例ヘバ $a\div b\div c=a\div(bc)$ ナリ. ($a\div(bc)$ ノ代リニ通常 $a\div bc$ ト書ク, 然シ乍ラ $a\div bc$ ヲ $a\div b\times c$ ト同一ニナス可カラズ.)

此證明ハ第34條ニヨリ前ノ如ク證シ得ベシ.

即　$a\div b\div c=a\div b\div c\times(bc)\div(bc)$

$=a\div b\div c\times c\times b\div bc$

$=a\div(bc).$

連續シテ幾度モ割ルキニ其順序ガ任意ナルノミナラズシテ或ハ掛ケ或ハ割ル場合ニモ其順序ハ任意ナリ. 此事ハ第33條及38條ヨリ

自然ニ來ルベキコナリ. 例ヘバ　$a\times b\div c=a\div c\times b$

何トナレバ　$a\times b\div c=a\div c\times c\times b\div c$

$=a\div c\times b\times c\div c$

$=a\div c\times b.$

40. 今 $a=1\times a$ ナルガ故

$$a\div b=1\times a\div b=1\div b\times a=a\times(1\div b)=a\times\frac{1}{b}$$

故ニ b ヲ以テ除スルコハ即 $\frac{1}{b}$ ヲ乘ズルコナリ.

之ヲ以テ又　$a\times b\div c=a\times(b\div c)$ ナリ.

41. $a^3\times a^2=a^{3+2}=a^5$ ナルガ故

$$a^5\div a^3=a^3\times a^2\div a^3=a^2=a^{5-3}$$

一般ニ $m\,n$ ヲ任意ノ正ノ整數トシ, 今 $m>n$ ナリトセバ

$$a^m\div a^n=a^{m-n}$$

何トナレバ　$a^{m-n}\times a^n=a^m$ ナレバナリ.

是又指數ノ一ツノ定則ナリ.

42. 掛算ノ法則ニヨリ $a\times(-b)=-ab$ ナリ.

故ニ　$(-ab)\div(-b)=a\times(-b)\div(-b)=a$

及ビ　$(-ab)\div a=a\times(-b)\div a=-b$

又　$(-a)(-b)=+ab=(+a)(+b)$ ナルコヲ知レリ,

故ニ　$(+ab)\div(-a)=(-a)(-b)\div(-a)=-b$

$(+ab)\div(+a)=(+a)(+b)\div(+a)=+b$

之ニヨリテ見ルニ被除數ト除數ノ符號ガ何レモ相等シキトキハ其商ノ符號ハ＋ナリ, 又一方ガ負ニシテ一方ガ正ナルキハ其商ノ符號ハ

負ナリ，故ニ符號ノ定則ハ掛算ノ時ト異ルヿナシ.

(例一) $-a^3b^6 \div ab^2 = -a^2b^4$.

(例二) $-2a^5bc^7 \div -3a^4bc^3 = +\frac{2}{3}ac^4$.

注意 上ノ例ニ於テ商ノ數字係數ハ $\frac{2}{3}$ トナレリ，然レ𪜈文字ガ分母トナレル分數 $\frac{b}{a}$ ノ如クナラザルモノハ**整商**ト云フ.

(例三) $10a^m \div 5a^n = 2a^{m-n}$. (但 $m>n$ トス)

例 題

(1) $10a$ ヲ $-2a$ ニテ除セ.

(解) $10a \div -2a = -10 \div 2 \times a \div a = -5$.

(2) $3a^2b^3$ ヲ $-2ab^3$ ニテ除セ.

(解) $3a^2b^3 \div -2ab^3 = -\frac{3}{2}a^2 \div a \times b^3 \div b^3 = -1\frac{1}{2}a$. ($-\frac{3}{2}a$ ト書クモ可ナリ)

(3) $-7a^5b^3c^4$ ヲ $-3a^2b^2c^2$ ニテ除セ.

(解) $-7a^5b^3c^4 \div -3a^2b^2c^2 = +7 \div 3a^5 \div a^2b^3 \div b^2c^4 \div c^2 = \frac{7}{3}a^3bc^2$.

(4) $-2a^3bc^5 = -3ab^7c^2$ ヲ乘シ其結果ヲ $8a^3b^6c^6$ ニテ除セ.

(解) $-2a^3bc^5 \times -3ab^7c^2 \div 8a^3b^6c^6 = +6a^4b^8c^7 \div 8a^3b^6c^6 = \frac{3}{4}ab^2c$.

第 五 章

多項式ノ掛ケ算

43. 是ヨリ多項式ノ掛ケ算ニ就テ講セントス. コレノ根原ノ法則トモ云フベキ次ノ法則ヲ說カン.

a 及 b ヲ或數トシ c ヲ正ノ整數トセバ次ノ事アリ.

$$(a+b)c = ac+bc \qquad \text{(A)}$$

如何ニモ今例ヘバ c ヲ 3 ナリトセバ $a+b$ ニ 3 ヲ掛ケルハ $a+b$ ヲ三度加ヘ合スヿナルガ故

$$\begin{aligned}(a+b)\times 3 &= (a+b)+(a+b)+(a+b)\\ &= a+b+a+b+a+b\\ &= a+a+a+b+b+b\\ &= 3a+3b.\end{aligned}$$

即 $(a+b)^3 = 3a+3b$ ナリ.

一般ニ $(a+b)c = (a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)+\cdots\cdot c$回ニ至ル

$$\begin{aligned}&= a+b+a+b+a+b+a+b+\cdots\cdots\\ &= a+a+a+\cdots\cdot c\text{ 回ニ至ル } +b+b+b+\cdots\text{至} c \text{ 回}\\ &= ac+bc.\end{aligned}$$

除法ハ乘法ノ反對ナルガ故ニ上述ノ如ク a ト b トノ和ニ c ヲ乘スルハ a ニ c ヲ乘シタル積ト b ニ c ヲ乘シタル積ノ和ニ等シト云フガ如ク，a ト b トノ和ヲ c ニテ除スルハ a ヲ c ニテ除シタル商ト b ヲ c ニテ除シタル商トノ和ニ等シト云フヿヲ得ベシ.

即 $(a+b)\div c = a\div c + b\div c$.

依テ又 $(a+b)\times c\div d = \{(a+b)\times c\}\div d$

$$\begin{aligned}&= (ac+bc)\div d = ac\div d + bc\div d\\ &= a\times\frac{c}{d} + b\times\frac{c}{d}\end{aligned}$$

即前ニ擧ゲタル(A)式ハ，其 c ニ相當スル數ハ分數ニテモ理ニ合スル

コヲ知リ得タリ。

又(A)式ハ c ニ相當スル數ノ負數ナル時ニモ適スルコヲ證セントス。

$(a+b)c=ac+bc$ ニ於テ c ヲ $-c$ トスル時ハ

$$(a+b)(-c)=-(a+b)c=-\{+(a+b)c\}.$$

コノ $\{\ \}$ 內ハ A ニテ示セル式ニヨリ $ac+bc$ トナルヤ明ナリ。

依テ $(a+b)\times(-c)=-(ac+bc)$.

是ハ又 $\qquad =-ac-bc$

$$=a(-c)+b(-c).$$

即(A)式ハ ab 及 c ノ總テノ數(即正數ニテモ負數ニテモ分數ニテモ)ニ適合スルモノナリ.

上ニ述ベシ規則ヲ**配分ノ定則**ト云フ.

44. **注意** 前條ニ依テ $(a+b)\times\frac{1}{c}=(a\times\frac{1}{c}+b\times\frac{1}{c}$ 然ルニ $(a+b)\times\frac{1}{c}$ ハ $(a+b)\div c$ ト同シ事ナリ, ヨリテ $(a+b)\div c=a\div c+b\div c$.

之レニヨリテ兩代數式ノ和ヲ c ニテ除シタルモノハ各別ニ c ニテ除シタル商ノ和ニ等シキコヲ知ル。之レ後ニ論スル除法ニ要スル原則ナリ.

45. 多項式ト單項式トノ積

43條ニヨリ. $\qquad (x+y)z=xz+yz \qquad (1).$

(1)式ハ x,y,z ガ如何ナル數ニテモ適合スルガ故ニ今 x ノ代リニ $(a+b)$ ヲ置キ換フレバ次ノ如シ.

$$\{(a+b)+y\}z=(a+b)z+yz$$

$$=az+bz+yz$$

故ニ $\qquad (a+b+y)z=az+bz+yz. \qquad (2).$

(2)式ニ於テ y ノ代リニ $c+d+e$ ヲ置キカフレバ

$$\{a+b+(c+d+e)\}z=az+bz+(c+d+e)z.$$

故ニ $\qquad (a+b+c+d+e)z=az+bz+cz+dz+ez.$

斯ク論ズレバ一般ニ次ノ如クナルヲ知ルベシ.

$$(a+b+c+d+e+f+\cdots\cdot)z=az+bz+cz+dz+ez+fz+\cdots\cdot$$

是レニヨリテ或多項式ニ單項式ヲ乘セル積ハ其多項式ノ各項ニ單項式ヲ各別ニ乘シタル積ノ和ニ等シ.

46. 兩ツノ多項式ノ積

如何ナル多項式モ之ヲ $a+b+c+d+\cdots\cdot$ ノ如キ形ニ書クコトヲ得.

例ヘバ $3x^2y-\frac{8}{5}xy^2-6xyz$ ハ $3x^2y+(-\frac{8}{5}xy^2)+(-6xyz)$ ニ等シク, 而シテ $3x^2y$ ヲ a トシ $-\frac{8}{5}xy^2$ ヲ b トシ $-6xyz$ ヲ c トスル時ハ即 $a+b+c$ ナル形トナル, 故ニ任意ノ代數式ニ就テ或ル定理ノ眞ナルコヲ證明スルニハ唯之ヲ $a+b+c+\cdots\cdot$ ナル式ニ就テ證明スレバ可ナリ.

借今多項式ニ多項式ヲ掛ケルコ即掛ケ算ノ一般ノ場合ヲ論スルニ

$(a+b+c+\cdots\cdot)\times(x+y+z+\cdots\cdot)$ ニ就テ論セハ可ナルコ前述ノ如シ.

今便利ノ爲メ $x+y+z+\cdots\cdot=s$ トナシ然ル時**45**條ニヨリ.

$$(a+b+c+\cdots\cdot)\times s=as+bs+cs+\cdots\cdot$$

$$=sa+sb+sc+\cdots\cdot$$

$$=(x+y+z+\ldots.)a+(x+y+z+\ldots.)b+(x+y+z+\ldots.)c+\cdots\cdot$$

$$=ax+ay+az+\cdots\cdots+bx+by+bz+\cdots\cdots+cx+cy+cz+\cdots\cdots$$

之ヲ以テ，二ツノ多項式ヲ乘ケ合セシ積ハ其一ツノ式ノ各項ニ他ノ式ノ各項ヲ一ツ々々掛ケテ得ル總テノ積ノ和ニ等シ.

乘法ノ演算ハ便利ノ爲メ下ノ如ク爲ス.

$$\begin{array}{l}
a^2+2ab+b^2 \\
\underline{a^2-2a^3b-b^2} \\
a^4+2a^3b+a^2b^2 \\
\quad -2a^3b-4a^2b^2-2ab^3 \\
\qquad\quad -a^2b^2-2ab^3-b^4 \\
\hline
a^4 \qquad\quad -4a^2b^2-4ab^3-b^4
\end{array}$$

即被乘數ノ下ニ乘數ヲ書キ被乘數ノ各項 a^2, $+2ab$, $+b^2$ ニ乘數ノ第一項 a^2 ヲ掛ケ其積ヲ一横列ニ記ス. 次ニ被乘數ノ各項ニ乘數ノ第二ノ項 $-2ab$ ヲ掛ケ其積ヲ前ニ横記セル積ノ同積項ノ相重ナラシムルガ如ク横記シ，次ニ被乘數ノ各項ニ乘數ノ第三ノ項 $+b^5$ ヲ掛ケ其積ヲ又前ノ二横列ノ同類項ト重ナルガ如ク下ニ横記スベシ而シテ此ノ各部ノ積ヲ加ヘ合スベシ. 而シテ同類項ハ同シ縱行ニアルヲ以テ加ヘ合スコト容易ナリ.

次ニ重要ナル二三ノ例ヲ擧グ

(例一)　$(a+b)^2$ ヲ求ム　$(a+b)^2=(a+b)(a+b)$

$$\begin{array}{l}
a+b \\
\underline{a+b} \\
a^2+ab \\
\underline{\quad +ab+b^2} \\
a^2+2ab+b^2
\end{array}
\qquad \text{即}\quad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

(例二)　$(a+b)(a-b)$ ヲ求ム

$$\begin{array}{l}
a+b \\
\underline{a-b} \\
a^2+ab \\
\underline{\quad -ab-b^2} \\
a^2 \qquad -b^2
\end{array}
\qquad \text{依之}\quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

(例三)　$(a+b+c)^2$ ヲ求ム.

$$\begin{array}{l}
a+b+c \\
\underline{a+b+c} \\
a^2+ab+ac \\
\quad +ab \qquad +b^2+bc \\
\underline{\qquad +ac \qquad +bc+c^2} \\
a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^4
\end{array}
\qquad \text{依之}\ (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^3+2ab+2ae+2bc$$

以上擧ケタル三ツノ例ニ於ケル結果ハ代數學ニ於テ甚タ要用ナルモノナリ. 之レヲ**乘法ノ三公式**ト云フ.

(例四)　$3x^2-xy+2y^2$ ニ $3x^2+xy-2y^2$ ヲ乘セヨ.

$$\begin{array}{l}
3x^2-xy+2y^2 \\
\underline{3x^2+xy-2y^2} \\
9x^4-3x^3y+6x^2y^2 \\
\quad +3x^3y-x^2y^2+2xy^3 \\
\underline{\qquad\quad -6x^2y^2+2xy^3-4y^4} \\
9x^4 \qquad\quad -x^2y^2+4xy^3-4y^4
\end{array}$$

47. 同シ文字ノ種々ノ羃ヲ含メル多クノ項ヨリ成レル式ニ於テ指數ノ大ナル羃ヲ含メル項ヲ左端ニ置キ，其次ノ最大指數ヲ有スル項ヲ其次ニ置キ以下逐次斯クノ如ク配列シ該文字ヲ含マザル項アルトキハ其項ヲ右端ニ置クトキハ此式ハ該文字ノ**遞降羃**ノ順ニ排列サレタリト云フ. 例ヘバ x^3+ax^2+bx+c, ハ x ノ遞降羃ニ排列サレタルモノナリ.

同樣ニシテ　$c+bx+ax^2+x^3$ ノ如ク指數ノ大サニ就テノ順序ヲ右

ヨリ始メテ配列シタルトキ即前ト反對ニ配列セシトキハ之ヲ**遞昇羃**ノ順ニ配列サレタリト云フナリ.

相乘スベキ兩式ヲ供ニ遞降羃或ハ供ニ遞昇羃ノ順ニ配列シテ運算ヲナス𪜈ハ, 運算ノ際ニ同類項ハ自然ニ縱ニ並ブヿトナリテ甚都合宜シ, 故ニ若シ兩式ガ斯クノ如キ配列ニアラザル𪜈ハコレヲ列ベ變ヘテ斯カル都合ヨキ形トナス可シ.

48. n 個ノ文字ノ連乘積 (因數ガ二ツヨリ多クアル𪜈ハ其積ヲ連乘積ト云フ) ナル項ヲ **n 次ノ項** ト云フ. 例ヘバ $2ab$ ハ二次, $2abc$ ハ三次, $5abcd$ ハ四次又 $5a^2bc$ 即 $5aabc$ ハ矢張リ四次, $4a^2b^3c$ 即 $4aabbbc$ ハ六次ノ項ナリ.

即項ノ次數ハ其文字因數指數ノ和ニ等シ. (但指數ナキ文字ハ 1 ナル指數有リト見ル可キモノナリ, 即 $a^1=a$ ナリ.)

代數式ノ次數ハ式中ノ最高次ナル項ノ次數ヲ以テスルナリ. 又式ノ次數ヲ數フルニ或ル殊別ナル文字ニ就テスルヿアリ, 例ヘバ x^3+px^2+qx+r ハ x ニ就テ三次ノ式ト云フ. 而シテ $ax^2y+bxy+cy^2$ ノ如キハ x 及ビ y ニ就テ三次ノ式ト云フ.

一ツノ式ノ項ガ悉ク同シ次數即同次ナル項ノ𪜈ニハ, コレヲ**同次式**ト云フ, 例ヘハ $a^3+3a^2b+7b^3$ ハ a 及ビ b ニ就テ各項皆三次ナルガ故之レ同次式ナリ, 即三次ノ同次式ナリ.

49. 同次式ノ積ハ亦同次式トナル. (其次數ハ高クナルト雖)

何トナレバ積ノ名項ハ凡ヘテ乘式ノ各項ヲ被乘式ノ各項ニ乘シタルモノナルヿ明ナリ. 又各項ノ積ノ次數ハ其各項ノ次數ノ和ナルヿモ

明カナリ. 故ニ被乘式モ乘式モ同次式ナル𪜈ハ其各項ノ積ハ何レモ同次ナリ, 故ニ全体モ又同次ナラザル可カラズ.

例ヘバ $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ト $a^2+2ab+b^2$ ノ積ト兩式ノ各項ハ一方ハ三次ニテ一方ハ二次ナル同次式ナルガ故五次式ノ各項ヨリ成レルヿ明カナリ, 故ニ積ハ五次ノ同次式ナリ.

コノ定理ハ二ツノ同次式ノ掛ケ算ノ𪜈注意スベキヿナリ, 若シ演算ニテ得タル積ガ同次式トナラザル𪜈ハ, 其演算ニハ必ズ誤リアリト知ルベシ.

二ツ以上ノ同次式ノ積モ亦同次式ナルヿハ推シテ知ルベシ.

50. 前ニ得タル掛ケ算ノ結果ノ中次ノ三件ハ甚ダ緊要ナルモノナリ.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\cdots\cdots\cdots(1).$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2\cdots\cdots\cdots(2).$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

此事ヲ言葉ニテ云ヒ表セバ

(1) 二數ノ和ノ平方ハ二數ノ平方ノ和ニ二數ノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ.

(2) 二數ノ差ノ平方ハ二數ノ平方ノ和ヨリ二數ノ積ノ二倍ヲ減シタルモノニ等シ.

(3) 二數ノ和ト差トノ積ハ二數ノ平方ノ差ニ等シ.

上ニ舉ケタル (1) (2) (3) ノ三ツノ式ノ如ク凡テ記號ニテ表ハセル一般ニ通スル結果ヲ**公式**ト云フ. 公式ヲ言葉ニテ述ブレバ**法則**トナルナリ. 今前ノ三ツノ公式ヨリ得ラルヽ種々ノ結果ヲ示サン.

(例一) (1)式ニ於テbノ代リニ$-b$ヲ置キ換フレバ下ノ結果ヲ得.

$$\{a+(-b)\}^2=a^2+2a(-b)+(-b)^2$$

即 $$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

故ニ(2)ノ公式ハ其實(1)ノ公式ヲモ含有セルモノナリ.

(例二) (1)ノ式ニ於テ b ノ代リニ $b+c$ ヲ置キ換フレバ

$$\{a+(b+c)\}^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$$

即 $$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

即第46條例三ニ得タル結果ヲ得タリ.

(例三) 公式(3)ヲ應用シテ次ノ式ノ結果ヲ容易ニ求メ得ベシ

$$(a^2+2b)(a^2-2b)$$

コレハ公式(3)ニ於テ a ノ項ガ a^2 トナリ b ノ項ガ $2b$ トナリシノミ故ニ(3)式ニヨリ直チニ $(a^2+2b)(a^2-2b)=(a^2)^2-(2b)^2$

$$=a^4-4b^2.$$

(例四) $$(x+y-z)(y+z-x)=(y-z+x)(y+z-x)$$
$$=\{(y-z)+x\}\{(y+z)-x\}$$
$$=\{(y-z)(y+z)-x(y-z)+x(y-z)-x^2$$

(3)ノ公式ヲ用ヒテ $$=y^2-z^2-xy+xz+xy-xz-x^2$$
$$=y^2-z^2-x^2.$$

例題

(1) 次ノ各式ノ積ヲ書ケ. (i) $xy+3y^2$ ト $xy-3y^2$.

(ii) $4a^2-b^2$ ト $4a^2+b^2$

(2) 次ノ各式ノ平方ヲ書ケ.

(i) $a+5b$

(ii) $-3xy-2y^2$

(iii) $2x-3y$

51. $x+a$ ニ $x+b$ ヲ掛ケル時ハ下ノ如キ結果トナル

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$$

コレ甚ダ緊要ナル公式ナリ.

コノ公式ニヨリテ二ツノ二項式ノ積ヲ直チニ書キ下シ得ベシ.

$$(x+3)(x+5)=x^2+(3+5)x+3\times5$$
$$=x^2+13x+15.$$

又 $$(x-3)(x-5)=x^2+(-3-5)x+(-3)\times(-5)$$
$$=x^2-8x+15.$$
$$(x-3)(x+5)=x^2+(-3+5)x+(-3)\times(+5)$$
$$=x^2+2x-15.$$

52. $(x+a)(x+b)(x+c)$ ノ積ヲ求ムレバ次ノ如シ.

先ツ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

依テ $(x+a)(x+b)(x+c)=\{x^2+(a+b)x+ab\}(x+c).$

$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+$$

$abc.$ (コレハ實際計算シテモ得ベケレド, 又 $x^2+(a+b)x+ab$ ニ始メ x ヲ乘ケ, 次ニ $x^2+(a+b)x+ab$ ニ c ヲ乘ケタル積ヲ加ヘルコトニヨリテ直チニ書キ下シ得.

斯クノ如キ演算ハ心算ニテナシ，直チニ答ヲ書キ下ス様ニナスベシ．

54. 多項式ヲ以テ多項式ヲ除スル法ハ次ノ例ニ就テ知ルベシ．

今 $8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3$ $+2a+b$ ニテ割ラントス．

先ツ第一ニ被除數ト除數ノ雙方ヲ或ル公通ナル文字ノ遞降羃又ハ遞昇羃ニ排列スルヿヲ要ス，然ルニ此両式ハ已ニ a ノ遞降羃ノ順ニ排列シアルガ故ニ之ヲ列ベ變ヘルノ必要ナシ，偖テ被除數ニ於ケル a ノ最高羃ヲ含ム初項 $8a^3$ ヲ除數ノ初項 $2a$ ニテ割リテ $4a^2$ ヲ得，之レヲ商ノ第一項トス．次ニ除數ニ此 $4a^2$ ヲ掛ケテ $8a^3+4a^2b$ ヲ得，之レヲ被除數ヨリ引キテ $4a^2b+4ab^2+b^3$ ヲ得，之レヲ第一ノ剩除ト名ツク．次ニ此式ノ初項 $4a^2b$ ヲ除數ノ初項 $2a$ ニテ割リテ $2ab$ ヲ得，之レヲ商ノ第二項トス．除數ニ此 $2ab$ ヲ掛ケテ $4a^2b+2ab^2$ ヲ得，之レヲ第一ノ剩除ヨリ引キテ $2ab^2+b^3$ ヲ得，之レヲ第二ノ剩除ト名ツク．次ニ此式ノ初項 $2ab^2$ ヲ除數ノ初項 $2a$ ニテ割リテ b^2 ヲ得，之レヲ商ノ第三項トス．次ニ除數ニ此 b^2 ヲ掛ケテ $2ab^2+b^3$ ヲ得，之レヲ第二ノ剩除ヨリ引キテ零ヲ得，コレニテ演算ハ終レリ．即要スル所ノ商ハ $4a^2+2ab+b^2$ ナリ．

$$
\begin{array}{r|l}
2a+b & 8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3\ (4a^2+2ab+b^2 \\
 & \underline{8a^3+4a^2b} \\
 & \quad 4a^2b+4ab^2+b^3 \\
 & \quad \underline{4a^2b+2ab^2} \\
 & \qquad 2ab^2+b^3 \\
 & \qquad \underline{2ab^2+b^3}
\end{array}
$$

同様ニ計算シテ

$$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc.$$

又 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

及 $(a-b)^3=a^3-3a^23+3ab^2-b^3.$

此等ノ公式モ亦重要ナルモノナリ．

一般ニ三ツノ多項式ノ積ヲ計算スルニハ先ツ第一ノ式ニ第二ノ式ヲ掛ケ其積ニ第三ノ式ヲ乘ズベシ，而シテ多項式ノ順序ハ適宜タルベシ．(積ハ順序ニヨリテ變ズルヿナケレバナリ)．

第 六 章

多項式ノ割リ算

53. 今除法ノ最モ一般ノ塲合ヲ示サントス，即多項式ヲ他ノ多項式ニテ除スル法ナリ．先ツ多項式ヲ單項式ニテ割ル塲合ヲ考フルニコレハ已ニ **43** 條ニ於テ乘ケ算ノ𪜈同時ニ說キタルガ故讀者ノ理解セル所ナルベシ，即次ノ公式アリ．

$$(a+b+c+d+\cdots)\div x=a\div x+b\div x+c\div x+d\div x+\cdots$$

(例一) $a^2b^3+2ab^2$ ヲ ab ニテ除ルヿ．

$$(a^2b^3+2ab^2)\div ab=a^2b^3\div ab+2ab^2\div ab$$

$$=ab^2+2b.$$

(例二) $15a^3+5a^2b+9b^2-3b^3$ ヲ $-3a^2b^2$ ニテ割レ．

$$\frac{15a^3+5a^2b+9b^2-3b^3}{-3a^2b^2}=\frac{-5a}{b^2}-\frac{5}{3b}-\frac{3}{a^2}+\frac{b}{a^2}.$$

上ノ計算ノ意味ヲ式ニテ表セバ次ノ如シ.

$$8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3=(8a^3+4a^2b)+4a^2b+4ab^2+b^3$$
$$=(8a^3+4a^2b)+(4a^2b+2ab^2)+(2ab^2+b^3)$$
$$=4a^2(2a+b)+2ab(2a+b)+b^2(2a+b).$$

ニシテ

$$=(2a+b)(4a^2+2ab+b^2).$$

而シテ實際ノ演算ニハ前頁ニ擧ケタル如クス.

依テ多項式ヲ多項式ニテ割ル法則ヲ得ルコ下ノ如シ.

第一 被除數及除數ノ雙方ヲ或ル公通ノ文字ノ遞降羃（或ハ遞昇羃）ノ順ニ排列スベシ.

第二 被除數ノ初項ヲ除數ノ初項ニテ割リテ商ノ初項ヲ索ムベシ.

第三 除數ニ商ノ初項ヲ掛ケテ得タル積ヲ被降數ヨリ減ズベシ.

第四 第三ニ於テ得タル剩除ヲ恰モ新タナル被除數ノ如クニ看做シテ前ト同樣ノ算法ヲ續ケ行フベシ.

尙次ニ二三ノ例ヲ示ス.

(例一) $3x^3-7x^2+3x-2$ ヲ $2-x$ ニテ割レ. x ノ遞降羃ニ排列セン爲メ除數ノ順ヲ變ヘテ $-x+2$ トス, 被除數ノ方ハ x ノ遞降羃トナリ居レリ, 依テ演算ヲ施セバ商ハ $-3x^2+x-1$ ナリ.

$$\begin{array}{r}
-x+2)\,3x^3-7x^2+3x-2\,(-3x^2+x-1\\
\underline{3x^3-6x^2}\\
-x^2+3x-2\\
\underline{-x^2+2x}\\
x-2\\
\underline{x-2}
\end{array}$$

(例二) $a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4$ ヲ a^2+b^2 ニテ割レ.

$$\begin{array}{r}
a^2+b^2)\,a^4-a^3b+2a^2b^2-ab^3+b^4\,(a^2-ab+b^2\\
\underline{a^4+a^2b^2}\\
-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\\
\underline{-a^3b-ab^3}\\
+a^2b^2+b^4\\
\underline{+a^2b^2+b^4}
\end{array}$$

此例ニ於テ商ノ第一項 a^2 ヲ除數ニ乘シ $a^4+a^2b^2$ ヲ得タリ,而シテ之ヲ被除數ヨリ減スルニ當リ被除數ノ同類項ト同シ縱列ニスル爲メ a^2b^2 ヲ被除數ノ $2a^2b^2$ ノ項ノ直下ニ置キタリ.割算ノ時常ニ斯クスベシ.

(例三) $a^4+a^2b^2+b^4$ ヲ a^2-ab+b^2 ニテ割レ.

$$\begin{array}{r}
a^2-ab+b^2)\,a^4+a^2b^2+b^4\,(a^2+ab+b^2\\
\underline{a^4-a^3b+a^2b^2}\\
a^3b+b^4\\
\underline{a^3b-a^2b^2+ab^3}\\
a^2b^2-ab^3+b^4\\
\underline{a^2b^2-ab^3+b^4}
\end{array}$$

此例ニ於テ被除數ハ a^3 ト a ノ項ガ欠ケタルガ故ニ此項ノアルベキ處ハ明ケテ書ケリ, 而シテ商ノ各項ヲ除數ニ乘セシ各積ノ同類項ト縱行ニ列ブ樣ニセリ, 是亦記憶スベキコナリ.

(例四) $a^3+b^3+c^3-3abc$ ヲ $a+b+c$ ニテ除レ.

此次ノ例ノ如ク二字以上即チ a, b, c ノ三字ヲ含ムトキハ, 兩式ヲ a ノ遞昇羃ニナスノミナラス, b ヲ c ノ前項ニ記スコヲ要ス. 故ニ殘式ヲモ亦タ a ノ遞降羃ニナスノミナラス, b ヲ c ノ前項ニ

置クヲ要ス.

$$
\begin{array}{l}
a+b+c)\,a^3-3abc+b^3+c^3\,(a^2-ab+b^2-ac-bc+c^2 \\
\qquad \underline{a^3+a^2b+a^2c} \\
\qquad\quad -a^2b-a^2c-3abc+b^3+c^3 \\
\qquad\quad \underline{-a^2b-ab^2-abc} \\
\qquad\qquad\quad ab^2-a^2c-2abc+b^3+c^3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{ab^2 \qquad\qquad +b^3+b^2c} \\
\qquad\qquad\qquad -a^2c-2abc-b^2c+c^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-a^2c-abc-ac^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -abc+ac^2-b^3c+c^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-abc \qquad -b^2c-bc^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +ac^2+bc^2+c^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+ac^2+bc^2+c^3}
\end{array}
$$

又此例ハ括弧ヲ用ヒ a ノ同羃ノモノヲ各ニ項ト考フルトキハ大ニ簡便ナリ.

即次ノ如クス.

$$
\begin{array}{l}
a+(b+c)\big)\,a^3-3abc+(b^3+c^3)\big(a^2-a(b+c)+(b^2-bc+c^2) \\
\qquad \underline{a^3+a^2(b+c)} \\
\qquad\quad -a^2(b+c)-3abc+(b^3+c^3) \\
\qquad\quad \underline{-a^2(b+c)-a(b+c)^2} \\
\qquad\qquad\qquad a(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3) \\
\qquad\qquad\qquad \underline{a(b^2-bc+c^2)+(b^3+c^3)}
\end{array}
$$

此法ハ少シク乘ケ算及引キ算ニ熟セザレバ爲シ難キモノナリ. 例ヘバ第二ノ殘式ノ第一項 $a(b^2-bc+c^2)$ ヲ得ルガ如キハ $-3abc$ ヨリ $-a(b+c)^2$ ヲ減ゼシモノニシテ

$-3abc-\{-a(b+c)^2\}=-3abc+a(b+c)^2=a(b^2-bc+c^2)$ ヲ得タルナリ.

54. 除法ノ定義ノ擴張

割リ切レザル場合ヲモ含ム除法ノ定義ハ下ノ如シ.

或ル代數式 A ヲ代數式 B ニテ除スルトハ B×C ガ A ニ等シキ樣ナル代數式 C ヲ求ムルカ又ハ A ト B×C トノ差ハ或ル殊別ナル文字ニ就テ除數 B ヨリモ次數ノ低キ如キ代數式 C ヲ求ムルコナリ.

例ヘバ　$x^2+3ax-a^2$ ヲ $x+a$ ニテ割ルコ次ノ如シ.

$$
\begin{array}{l}
x+a\big)\,x^2+3ax-a^2\big(x+2a \\
\qquad \underline{x^2+ax} \\
\qquad\qquad 2ax-a^2 \\
\qquad\qquad \underline{2ax+2a^2} \\
\qquad\qquad\quad -3a^2
\end{array}
$$

依テ答ハ　商 $x+2a$ ト剩餘 $-3a^2$　或ハ之ヲ次ノ如ク記ス.

$$(x^2+3ax-a^2)\div(x+a)=x+2a+\frac{-3a}{x+a}.$$

斯ク剩餘アル場合ニハ式ニ於ケル項ノ配列方ヲ變ズレバ除法ニヨリテ得ル所ノ式モ亦變ズルコアリ.

即今上ノ例ヲ

$$
\begin{array}{l}
a+x\big)\,-a^2+3ax+x^2\big(-a+4x \\
\qquad \underline{-a^2-ax} \\
\qquad\qquad 4ax+x^2 \\
\qquad\qquad \underline{4ax+4x^2} \\
\qquad\qquad\quad -3x^2.
\end{array}
$$

即前ノ例ニテハ x ニ就テ遞降羃ノ順ニ配列シテ演算セシモノニシテ，今ノ例ニテハ a ニ就テ遞降羃ノ順ニ配列シテ演算セシモノナリ.

而シテ答ニ二様ヲ得ルト雖モ何レモ正シキモノナリ。

例題

(1) x^2-9y^2 ヲ $x+3y$ ニテ除セ.

解 $(x^2-9y^2)\div(x+3y)=x-3y$

(2) $3x^2-4xy-4y^2$ ヲ $2y-x$ ニテ除セ.

解
$$\begin{array}{r}
-x+2y\,\big)\,3x^2-4xy-4y^2\,\big(-3x-2y \\
\underline{3x^2-6xy\qquad\quad} \\
+2xy-4y^2 \\
\underline{+2xy-4y^2}
\end{array}$$

(3) $1-5x^4+4x^5$ ヲ $1-x$ ニテ除セ.

答 $1+x+x^2+x^3-4x^4$

(4) $1-6x^5+5x^6$ ヲ $1-2x+x^2$ ニテ除セ.

答 $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$

(5) $1-x^8$ ヲ $1-x^2$ ニテ除セ.

解 $(1-x^8)\div(1-x^2)=\{1-(x^2)^4\}\div(1-x^2)=1+x^2+(x^2)^2+(x^2)^3$
$=1+x^2+x^4+x^6$

(6) $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$ ヲ x^2+xy+y^2 ニテ除セ.

答 x^3+y^3

第七章

一次方程式（未知數一ツノ）

55. 等號ヲ以テ二ツノ式ノ相等シキコトヲ示セル式ヲ**等式**ト云フ．而シテ相等シト示セル各ノ式ヲ**邊**又**節**ト云フ．而シテ其相等シト云フヿガ式中ニ含マレタル文字ノ値ノ如何ニ關ラズシテ成立ツトキハ之ヲ**恒等式**ト稱ス．等式中ノ文字ガ或ル特別ナル値ヲ持ツトキニノミ其兩邊ノ相等シキ式ハ之レヲ**方程式**ト稱ス.

例ヘバ $a+b=c$ トアレバ之レ一ツノ等式ニシテ $=$ ノ左ニアルヲ**左邊**ト稱シ右ニアルヲ**右邊**ト稱ス.

又 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ハ一ツノ恒等式ニシテ a 及 b ガ如何ナル數値ヲ有スルモ常ニ其左邊ハ右邊ニ相等シ.

又 $x+3=5$ ナル式アリトセバ之レハ一ツノ方程式ナリ，何トナレバ此式中 x ハ 2 ヨリ外ノ値ニテハ此等式ハ成立ツ能ハザレバナリ.

（恒等式ト方程式トヲ區別スル爲メニ恒等式ノ等號ニハ $\equiv$ ナル符號ヲ $=$ ノ代リニ用フルヿノ意味ハ“全ク相等シ”ナル語ヲ表スモノト知ルベシ.）

56. 方程式ノ中ニハ必ス索ム可キ數ヲ代表スル文字アリ，此文字即索ムベキ數ヲ**未知數**ト稱ス. $x+2=5$ ニ於テ x ハ即未知數ナリ.

又タトヒ文字ヲ以テ示サレタルモ其ノ性質上與ヘラレタル數ト見ナスベキ數ヲ**既知數**ト云フ. $x+a=b$ ニ於テ a ト b ハ與ヘラレ

タル數ヲ代表スルモノトセバ a ト b ハ既知數ニシテ x ハ未知數ナリ.

代數學ニ於テ既知數ヲ表スニハ羅馬字ノ初メノ部分ヲ以テ表ス，即 a b c…等ヲ以テ既知數ヲ表ス. 又未知數ハ羅馬字ノ終リノ部分ノ文字 x y z 等ヲ以テ表ス. 但コレハ一ツノ規約ニシテ是非共カクセザル可ラザルニハアラザレ共，方今世界一般ニ用フル所ノモノタリ.

57. 方程式ヲ**解**クトハ，其兩邊ヲ相等シカラシムル如キ未知數ノ値ヲ其方程式ガ表ス關係ヨリシテ求メ出スヿヲ云フ. 而シテ未知數ノ斯クノ如キ値ハ方程式ニ**適合**スルト云ヒ，コレヲ方程式ノ**根**ト云フ.

或ル方程式ノ根ガ悉ク或ル他ノ方程式ノ根ト相同シキトキニハ彼此二ツノ方程式ハ**同値**ナリト云フ.

58. 唯一ツノ未知數例ヘバ x ノミヲ含メル整方程式ニ於テ x ノ冪ガ 1 ナルトキハ之レヲ**一次方程式**ト云ヒ，x ノ最高冪ガ x^2 ナルトキハ之ヲ**二次方程式**ト云ヒ，同樣ニ**三次，四次**…ノ方程式ノ意味遂テ斯クノ如シ.(整方程式トハ未知數ニ就テ整式ナル方程式ノヿナリ.)

59. 方程式ヲ解クニ當リテ次ノ公理ハ要用ナルモノナリ.

(1) 相等シキ數ニ同シ數或ハ相等シキ數ヲ加フレバ其和ハ相等シ 相等シキ數ヨリ同シ數或ハ相等シキ數ヲ引ケバ其差ハ相等シ.

(2) 相等シキ數ニ同シ數或ハ相等シキ數ヲ乘スレバ其積ハ相等シ，相等シキ數ヲ零ニアラザル同シ數或ハ相等シキ數ニテ割レバ其商ハ相等シ.

附言. 公理トハ証明ヲ要セズシテ自ラ明カナル理ヲ云フ.

60. 等式ノ一ツノ邊ノ項ハ之レノ符號ヲ變シテ他ノ邊ニ移スヿヲ得. 何トナレバ今一ツノ等式 $a+b=c$ アリトセバ今此式ノ兩邊ヨリ b ヲ減ズルトキハ其差ハ公理(1)ニヨリテ相等シ.

$a+b-b=c-b$ 即 $a=c-b$

最初ノ式トコノ終リノ式トヲ比較スレバ本條ノ理アルヤ明ナリ.

斯ク等式ニ於テ或ル項ノ符號ヲ變ヘテ之ヲ一ツノ邊ヨリ他ノ邊ニ移スヿヲ**移項**スト云フ.

61. 等式ノ各項ノ符號ヲ悉ク變ズルモ其等式ハ矢張リ成立スルモノナリ. 何トナレバ各項ノ符號ヲ悉ク變ズルヿハ兩邊ニ -1ヲ掛ケルト同シヿナリ，而シテカクスルモ **95** 條ノ公理ニヨリ等シキヿヲ害スルヿナケレバナリ. 例ヘバ $ax+b=c$ トアレバ 又 $-ax-b=-c$ トスル事ヲ得ルナリ.

62. 是レヨリ未知數一ツノ一次方程式ヲ解ク方法ヲ示サントス

(例一) $3x-7=x+19$ ヲ解ケ.

右邊ノxヲ左邊ニ移項シ,左邊ノ-7ヲ右邊ニ移項セバ (60條ニヨリ)

$$3x-x=19+7$$

同類項ヲ合スレバ $2x=26$

兩邊ヲ x ノ係數 2 ニテ割レバ $x=13$

$x=13$ ハ求ムル所ノモノナリ　即 $x=13$ ナラザレバ上ノ方程式ヲ滿足スルヿ能ハザルナリ．

注意　方程式ヲ解キタル𪜈ハ其結果即未知數ノ値ガ元トノ方程式ニ適合スルヤ否ヤヲ驗メサザル可カラズ

今ノ例　$3x-7=x+19$

ニ於テ $x=13$ ナル𪜈ハ　　$3\times13-7=13+19$

即之レヲ演算スレバ　　$32=32$

トナリ，原方程式ノ兩邊ハ同數トナル．依テ $x=13$ ハ正シキ答ナリ．

（例二）　$7x-5=10x-13$　ヲ解ケ．

移項シテ　$7x-10x=5-13$

同類項ヲ合スレバ　$-3x=-8$

兩邊ヲ x ノ係數ナル -3 ニテ割レバ　$x=\frac{8}{3}$

驗メシ　$x=\frac{8}{3}$ ナル𪜈ハ　$7\times\frac{8}{3}-5=10\times\frac{8}{3}-13$

此等式ノ兩邊ニ 3 ヲ掛ケテ分數ノ分母ヲ拂フモ前ノ公理ニヨリ差支ナシ，ヨリテ斯クスレバ　$56-15=80-39$

即　$41=41$

トナリテ　$x=\frac{8}{3}$ ハ正シキ答ナリ．

（例三）　$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=8$　ヲ解ケ．

コノ式ニ於ケル割リ算ノ痕跡ヲ去ランガ爲メ，兩邊ニ $3\times4\times6$ ヲ掛ケル𪜈ハ　$4\times6\times x+3\times6\times x+3\times4\times x=8\times3\times4\times6$

即　$24x+18x+12x=576$

同類項ヲ合スレバ　$54x=576$

兩邊ヲ x ノ係數 54 ニテ割レバ　$x=\frac{576}{54}$　即 $x=10\frac{2}{3}$ ヲ得．

此例ニ於テ始メ割リ算ノ痕跡ヲ去ラン爲メ（分母ヲ拂ハン爲メ）ニ $3\times4\times6$ ヲ方程式ノ兩邊ニ掛ケタリ．此目的ヲ達スルヿヲ得バ必ズシモ $3\times4\times6$ ニ限ラズ他ノ數ヲ掛クルモ可ナリ．一般ニ分母トナレル數ノ最小公倍數ヲ求メ，コレヲ兩邊ニ掛クルヲ以テ便トス．今 3 ト 4 ト 6 ノ最小公倍數ヲ求メテ 12 ヲ得．コレヲ元方程式ノ各項ニ掛ケル𪜈ハ

$4x+3x+2x=96$　即　$9x=96$　依テ　$x=10\frac{2}{3}$ ヲ得．

驗メシ　$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}=8$

1x ニ其値 $10\frac{2}{3}$ 即 $\frac{32}{3}$ ヲ代入セバ　$\frac{\frac{32}{3}}{3}+\frac{\frac{32}{3}}{4}+\frac{\frac{32}{3}}{6}=8$

或ハコレヲ書キ直シテ　$\frac{32}{9}+\frac{32}{12}+\frac{32}{18}=8$

コレヲ演算シテ　$8=8$

ヲ得．依テ $x=10\frac{2}{3}$ ナル答ハ正シキモノナリ．

（例四）　$4(3x-2)-2(4x-3)=3(4-x)$　ヲ解ケ．

掛ケ算ヲ實行シテ，　$(12x-8)-(8x-6)=12-3x$

括弧ヲ外ツセバ　$12x-8-8x+6=12-3x$

移項スレバ　$12x-8x+3x=12+8-6$

同類項ヲ合スレバ　$7x=14$

x ノ係數 7 ニテ割リテ　$x=2$

驗メシ　$x=2$ ヲ元トノ方程式ニ代入スレバ

$4(3\times2-2)-2(4\times2-3)=3(4-2)$

即之レヲ演算シテ　$6=6$ ヲ得, 依テ $x=2$ ハ正シキ答ナリ.

前記諸例ニヨリテ一未知數ヲ有スル一次方程式ヲ解クコ即方程式ノ根ヲ索ムル方法ヲ得, 即下ノ如シ.

與ヘラレタル方程式カ分數ノ形ナレバ之ヲ整式ニ變ズベシ, 又括弧等ニテ指示セル演算ハ整式ニ變スル前又ハ其後ニ為シ次ニ未知數ヲ含ム項ヲ悉ク一邊ニ集メ他ノ項ハ之ヲ悉ク他邊ニ集ムベシ, 次ニ同類項ヲ加ヘ而シテ未知數ノ係數ニテ兩邊ヲ除スベシ.

問　題

次ノ方程式ヲ解クベシ

(1) $3x+15=x+25.$　　答 $x=5.$

(2) $2x-3=3x-7.$　　答 $x=4.$

(3) $3x+4=5(x-2).$　　答 $x=7.$

(4) $2x+3=16-(2x-3).$　　答 $x=4.$

(5) $8(x-1)+17(x-3)=4(4x-9)+4.$　　答 $x=3.$

(6) $15(x-1)+4(x+3)=2(7+x).$　　答 $x=1.$

(7) $5x-6(x-5)=2(x+5)+5(x-4).$　　答 $x=5.$

(8) $8(x-3)-(6-2x)=(x+2)-5(5-x).$　　答 $x=3.$

(9) $7(25-x)-2x=2(3x-25).$　　答 $x=15.$

(10) $3(169-x)-(78+x)=29x.$　　答 $x=13.$

(11) $5x-17+3x-5=6x-7-8x+115.$　　答 $x=13.$

(12) $7x-39-10x+15=100-33x-126.$　　答 $x=5.$

(13) $\frac{x}{4}+\frac{x-5}{3}=10.$　　答 $x=20.$

(14) $\frac{x-5}{10}+\frac{x+5}{5}=5.$　　答 $x=15.$

(15) $\frac{x-2}{2}+\frac{x+10}{9}=5.$　　答 $x=8.$

(16) $\frac{x+19}{5}=3+\frac{x}{4}.$　　答 $x=16.$

(17) $\frac{x-4}{7}=\frac{x-10}{5}.$　　答 $x=25.$

(18) $\frac{x-1}{8}=1+\frac{x+1}{18}.$　　答 $x=17.$

(19) $\frac{4(x+2)}{5}=7+\frac{5x}{13}.$　　答 $x=13.$

(20) $\frac{x+4}{14}+\frac{x-4}{6}=2.$　　答 $x=10.$

(21) $ax+b=c.$ 解 $ax=c-b.$ 此式ノ兩邊ヲ a ニテ割リ $x=\frac{c-b}{a}$

---

63. 係數ニ小數ヲ有スル方程式ヲ解クニハ, 其小數ヲ分數ニテ表シ前ノ如クシテ解クヲ得ベシ. 然レドモ全ク小數ノマヽニテ演算スル方却テ便ナル場合多シ.

64. 方程式ヲ解ク途中ニ於テ未知數ガ消エ失セルコ適マアリ. 斯カル方程式ハ唯見懸ケ上方程式タルニ過ギズ, 其實恒等式ナルカ或ハ不正ノモノナルナリ.

例ヘバ　$2(x+3)=\frac{24+8x}{4}$　ヨリシテ　$8x+24=24+8x$

即 $12=12$ ヲ得. 即恒等式ナリ.

又　$6(x+3)=21+6x$　ヨリシテ　$6x+18=21+6x$

依テ 18=21 ヲ得. 故ニ此方程式ハ不正ノモノナリ.
是ヨリ一次方程式ヲ應用シテ解キ得ル問題ニ就テ説カントス

第八章

一次方程式應用問題

65. 一次方程式ニヨリテ解クヿヲ得ベキ問題ノ解方ヲ示スニ當リ，先ツ其豫備トシテ問題中ノ事實ヲ文字ト符號トヲ以テ書キ表スヿヲ述ベン.

(例一) xヨリaダケ大ナル數ヲ書キ表セ.

5ヨリ2多キ數ハ $5+2$ ナリ. 7ヨリ3多キ數ハ $7+3$ ナリ.
斯カルガ故ニxヨリaダケ大ナル數ハ $x+a$ ナリ.

(例二) xヨリaダケ小ナル數ヲ書キ表セ.

前例ト同樣ノ理ニヨリ. $x-a$ ハ xヨリaダケ小ナル數ナリ.

(例三) 9ヲ二ツノ部分ニ分ツニ一部ヲxトセバ他ノ部分ハ $9-x$ ナリ.

(例四) 二數ノ差ガ5ニシテ大ナル數ガxナレバ小ナル數ハ$x-5$ ナリ.

(例五) 18ヲ二ツノ因數ニ分解スルニ一ツノ因數ガxナリトセバ他ノ因數ハ $\frac{18}{x}$ ナリ.

(例六) 相連續セル三ツノ數ヲ書ケ. 初メノ數ヲxトセバ次ノ數ハ $x+1$ 其次ノ數ハ $x+2$ ナリ.

或ハ中央ノ數ヲyトスレバ yノ直グ前ノ數ハyヨリ1ダケ小ナル數即 $y-1$ ニシテyノ直グ次ノ數ハyヨリ1ツ多キ數即$y+1$ ナリ.
故ニ求ムル三ツノ數ハ $y-1, y, y+1$ ナリ.

(例七) 偶數ノ一般ナル形ヲ書キ表セ.

偶數トハ2ノ整數倍ノ數ナリ.故ニ今nヲ任意ノ整數トセバ $2n$ ハ一般ノ偶數ヲ表スベシ.

(例八) 奇數ノ一般ナル形ヲ書キ表セ.

奇數ハ偶數トノ差ガ1ナルモノナリ. 故ニ今nヲ任意ノ整數トセバ $2n+1$ 又ハ $2n-1$ ハ何レモ奇數ヲ表スベシ.

(例九) 相連續セル三個ノ偶數ヲ書ケ,但中央ノ偶數ヲ $2n$ トセヨ.

$2n$ ノ直グ前ノ偶數ハ $2n$ ヨリ2少キ數即 $2n-2$ ニシテ, $2n$ ノ直グ次ノ數ハ $2n$ ヨリ2多キ數即 $2n+2$ ナリ. 故ニ求ムル處ノ三ツノ數ハ
$2n-2, 2n, 2n+2,$ ナリ.

(例十) 甲ノ所有金 a圓, 乙ノ所有金b圓ナル𪜈甲ガ乙ヘx圓ヲ與ヘタリトセバ其時ノ甲ノ所有ハ $a-x$ 圓ニシテ乙ノ所有ハ $b+x$ 圓ナリ.

(例十一) 一尺ノ代價l圓ナルモノアリトセバx尺ノ代價ハlx圓ナルベシ.

(例十二) a間b尺 ヲ尺ニ直セ. 一間ハ六尺ナルガ故 a間b尺ハ $6a+b$尺 ナリ.

(例十三) A,B,Cノ三人アリ Aハa圓ヲ有シBハAヨリモb圓多ク所有ス,而シテCハA,B兩人ノ所有金ノ合計ノn倍ヲ有スト云フ

依テBCノ所有金如何.

B ノ所有金　$a+b$ 圓.

C ノ所有金ハ　A,B 二人ノ所有金ノ合計即 $(a+b+a)$ ノ n 倍ナルガ故　$(2a+b)n$ 圓ナリ.

(例十四)　或ル人現時ノ年齢 n 年ナリトセバ今ヨリ a 年前ニハ彼レノ年齢ハ　$n-a$ 年　b 年後ニハ　$n+b$ 年ナリ.

(例十五)　$a\ b\ c$ ヲ或ル基數ナリトシ, a ハ首位ノ數字　b ハ十位ノ數字, c ハ一位ノ數字ナリトセバ, 其數ハ　$100a+10b+c$　ナリ.

(例十六)　父子アリ子ノ現今ノ年齢ハ b 年ナリト云フ, 又父ノ年齢ハ今ヨリ a 年ノ後ニハ子ノ年齢ノ二倍ニナルト云フ, 父ノ現年ノ年齢ハ如何.

a 年ノ後ニ子ノ年齢ハ $a+b$ 年ナリ. 其時ノ父ノ年齢ハ題意ニヨリ　$2(a+b)$ 年ナリ, 故ニ現今ノ父ノ年齢ハ

$2(a+b)-a$　即　$2a+2b-a$　即　$a+2b$　年ナリ.

66. 一次方程式應用問題解法

前條ニ述ベタル原理ヲ應用シテ種々ノ問題ヲ解クコヲ得ベシ.

其方法ハ　x ヲ以テ未知數即所要ノ數ヲ代表シ, 問題中ニ與ヘラレタル條件ヲ式ニテ書キ下ダシ, 斯クシテ得タル方程式ヲ解キテ未知數ノ値ヲ求メ之レヲ適當ニ解釋シ以テ答トナス.

(例一)　二數ノ和ハ 28 ニシテ其差ハ 4 ナルトキハ二數ノ値如何.

今 x ヲ以テ二數ノ中小ナル數トセバ　$x+4$ ハ大ナル方ノ數ナリ.

而シテ其和ハ　$x+(x+4)$ ニシテコレガ題意ニヨリ 28 ニ等シ.

ヨリテコノコトヲ式ニテ書キ下ダセバ

$$x+x+4=28$$

即　$$2x+4=28.$$

コノ式ヲ前章ノ方法ニヨリテ解ケバ

$$2x=24$$

$$x=12.$$

即小ナル數ト定メタル x ハ 12 ナリ, ヨリテ大ナル方ノ數ハ　$x+4$

即　$12+4=16$　ナリ.

驗メシ　小ナル數 12 ト大ナル數 16 トノ和ハ 28 トナリ, 又其差ハ　4 トナリテ誤リナキヲ知ル.

(例二)　60 ヲ大小二數ニ分テ其大ナルモノヽ三倍ガ　100 ヲ超過スル數ハ恰モ小ナル數ノ八倍ガ　200 ニ不足スル數ト相等シ, 兩數各々如何.

x ヲ以テ大ナル方ノ數ヲ表セバ　$60-x$ ハ小ナル方ノ數ヲ表ハス

大ナル數ノ三倍ハ $3x$ ニシテ　100 ヲ超過スル數ハ

$$3x-100$$

ナリ. 又小ナル數ノ八倍ハ　$8(60-x)$ ニシテ其 200 ニ不足スル數ハ　$$200-8(60-x).$$

故ニ題意ヲ式ニテ表ハセバ次ノ如シ.

$$3x-100=200-8(60-x)$$

依テコレヲ解キテ x ノ値ヲ索メンニ

$$3x-100=200-480+8x$$

$$480-100-200=8x-3x$$

$$5x=180.$$

$$\therefore\ x=36.$$

即 x ハ 36 ニシテ假定ニヨリ大ナル數ヲ表ス

ヨリテ小ナル數ハ　$60-x$　即　$60-36=24$　ナリ.

(例三)　金 47 圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ分配セリ，然ルニ甲ハ乙ヨリ 10 圓多ク又乙ハ丙ヨリ 8 圓多クトレリト云フ，依テ各々ノ所得幾何ナリシカ.

今 x ヲ以テ丙ノ得タル金額トセバ

乙ノ得タル金額ハ　$x+8$　圓…………(1)

甲ノ得タル金額ハ　$x+8+10$ 圓…………(2)

依テ題意ニヨリ.

$$\overset{\text{丙}}{x}+\overset{\text{乙}}{(x+8)}+\overset{\text{甲}}{(x+8+10)}=47$$

$$x+x+8+x+8+10=47$$

$$3x+26=47$$

$$3x=21$$

$$x=7.$$

即丙ノ所得ハ 7 圓ナリシナリ此ノ 7 ナル x ノ値ヲ (1) (2) 兩式ニ代入セバ夫々乙及甲ノ所得高ヲ得ベシ.　即　乙ノ所得高ハ 15 圓，甲ノ所得高ハ　25 圓　ナリ.

(例四)　或人　28「ポンド」4「シルリング」ニテ鵞鳥ト鴨トヲ買ヘリ今鵞鳥一羽ノ價ハ 7「シルリング」又鴨一羽ノ價 3「シルリング」ニ

シテ鳥ノ全數 108 羽ナリシト云フ，然ラバ各幾羽ヅヽヲ買ヒタルカ.

「ポンド」ト「シルリング」ハ複名數ナル故斯クノ如キ問題ハ同名數ニテ表スヿ必要ナリ而シテ本例ノ如キハ金額ヲ「シルリング」ニテ表スヲ便利ナリトス.

x ヲ鵞鳥ノ數トスレバ　$108-x$ ハ鴨ノ數ナリ.

鵞鳥一羽ノ價ハ　7「シルリング」ナルヲ以テ　x 羽ノ價ハ　$7x$「シルリング」ナリ.

又鴨一羽ノ價ハ 3「シルリング」ナルヲ以テ　$(108-x)$　羽ノ價ハ $3(108-x)$「シルリング」ナリ.

故ニ其全体ノ價ハ

$7x+3(108-x)$「シルリング」

然ルニコノ金額ハ題意ニヨリ　28「ポンド」4「シルリング」　即コレヲ「シルリング」ニテ表セバ　1「ポンド」ハ　20「シルリング」ナル故　即チ　564「シルリング」ナリ.

故ニ題意ヲ式ニテ表ハセバ

$$7x+3(108-x)=564$$

$$7x+324-3x=564$$

$$4x=240$$

$$x=60$$

即鵞鳥ノ數ハ　60 羽ナリ.

依テ鴨ノ數ハ　$108-x=108-60=48$　ナリ.

(例五)　甲乙二人アリ現今ノ甲ノ年齢ハ乙ノ年齢ノ二倍ナリ然ル

ニ今ヨリ十年以前ニハ甲ノ年齡ハ乙ノ年齡ノ四倍ナリシト云フ，甲乙現今ノ年齡各々幾何ナルカ.

乙ノ年齡ヲx歲トスレバ甲ノ年齡ハ $2x$ 歲ナリ.

十年以前ニハ乙ト甲ノ年齡ハ各々 $x-10$ 及ビ $2x-10$ 歲ナルベシ

故ニ $$2x-10=4(x-10)$$

$$2x-10=4x-40$$

$$2x=30$$

依テ $x=15$

故ニ乙ハ 15 歲ニシテ 甲ハ其二倍 30 歲 ナリ.

注意 代數學ニ於テ用ヰル文字ハ不名數ヲ表スモノナルガ故ニ上ノ例ニ於ケルガ如ク，乙ノ年齡ヲx歲トス等ト云ヒシモ一層委シク云ヘバ"xハ乙ノ年齡ニ於ケル年ノ數ナリ."トノ事ニシテxハ決シテ乙ノ年齡ヲ表スモノニアラズ.

初學者ハ往々此等區別ヲ等閑ニシ動モスレバ"甲ノ所得ヲxトス"等ト言フコアリ,而シテ只xトノミアリテハ甲ノ所得高ノ單位不明トナル,從テxノ意味ハ漠然トナリテ知ルニ由ナキニ至ルコアリ，コレヨク注意スベキコナリ.

(例六) 鶴ト龜トノ數合ハセテ五十八アリ．其足ノ數ハ百五十本アリト云フ鶴ノ數及龜ノ數各幾何.

今鶴ノ數ヲxトスレバ鶴ノ足ノ數ハ $2x$ ナリ.

然ルトキハ龜ノ數ハ $58-x$ ニシテ龜ノ足ノ數ハ從テ $4(58-x)$ ナリ.

依リテ題意ヲ式ニテ書キ下セバ次ノ方程式トナル.

$$2x+4(58-x)=150$$

$$2x+232-4x=150$$

$$232-150=4x-2x$$

$$2x=82$$

$$x=41.$$

依テ鶴ノ數四十一 從テ龜ノ數ハ $58-41$ 即十七ナリ.

注意 此問題ハヨク算術ニアル問題ナリ．又此問題ヲ解クニハ必ズシモ代數學ニテナスニ及バズ，猶又此レニ限ラズ他ノ上ニ述ベシ例ノ如キモ亦算術ニテ解クヲ得ベシ. 然レモコノ事ハ毫モ代數學ノ眞價ヲ上下スルニ足ラザルモノナリ. 初學者ノ往々未ダ深ク代數學ヲ學バザルモノガコレ等ノ事實ヲ以テ代數學ノ價値ヲ疑フモノアルハ誤リナリト云フベシ. 何トナレバ算術ニテ解カントスルトキハ甚ダ複雜ニシテ且難澁ナル殆ンド解クコ能ハザル如キ問題モ代數學ニ依レバ之レヲ簡明ニ併モ正確ニ解キ得レバナリ.

(例七) 一升三十錢ノ酒六斗ニ一升二十二錢ノ酒幾何ヲ加フルトキハ平均一升二十五錢ノ酒ヲ得ベキカ.

所要ノ一升二十二錢ノ酒ノ升數ヲxトス.

然レバ一升三十錢ノ酒六斗即六十升ノ價ハ 1800 錢ナリ.

又一升二十二錢ノ酒x升ノ價ハ $22x$ 錢 ナリ.

又一升二十五錢ノ混合酒$(x+60)$升ノ價ハ $25(x+60)$ 錢

依テ次ノ式ヲ得.

$$1800+22x=25(60+x)$$

即 $$1800+22x=1500+25x$$

$$1800-1500=25x-22x$$

$$3x=300$$

$$x=100.$$

依テ 一升二十二錢ノ酒100升即一石ヲ混ズベシ.

(例八) 一升a錢ノ酒n升ニ一升b錢ノ酒幾何升ヲ混合スルトキハ平均一升c錢ノ酒ヲ得ベキカ.

此問題ニ就テ注意スベキハ cガaトbトノ間ノ値ヲトル數ナラザル可カラザルヿナリ. 又a,b,c,nナル文字ハ已知數ヲ表スモノナリ.

今 $a>c$ $c>b$ トシテ解答センニ其方法ハ前ノ例ト異ルコトナシ.

所要ノ一升b錢ノ酒ノ升數ヲxトス

然レバ一升a錢ノ酒n升ノ價ハ an

又一升b錢ノ酒x升ノ價ハ bx 錢

此合計ハ $(an+bx)$ 錢

又一升c錢ノ酒ノ升數ハ $(n+x)$ 錢

一升c錢ノ酒$(n+x)$升ノ價ハ$c(n+x)$錢ナリ.

故ニ次ノ式成立ス.

$$an+bx=c(n+x)$$

即 $$an+bx=cn+cx$$

xヲ含ム項ヲ一方ニ集メ $an-cn=cx-bx$

$$n(a-c)=(c-b)x$$

$$x=\frac{n(a-c)}{c-b}$$

依テ答ハ一升b錢ノ酒ヲ $\frac{n(a-c)}{c-b}$ 升ヲ 混スベシ.

注意(一) 本題ハ例七ニ於ケル如キ問題ヲ任意ノ數ニ就テ解シタルモノナルガ故, 本文ノ答ヲ以テ此種ノ問題ノ總テノ答解ヲ與ヘタルモノト云フベシ.

例ヘバ $a=50$ $b=30$ $c=40$ $n=5$ トセバ

$$x=\frac{n(a-c)}{c-b}=\frac{5(50-30)}{40-30}=\frac{5\times 20}{10}=10.$$

即例八ノ問題 a,b,c,n ノ箇所ニ夫々 50, 30, 40, 5 等ノ文字アルトキハ其答トシテ"一升30錢ノ酒ヲ10升即チ一斗ヲ混ズベシ"ナル答ヲ得ベキモノナリ.

此一事ヲ見テモ如何ニ代數學ガ必用ナルカヲ知ルニ足ルベシ.

注意(二) 嚮キニ $a>c$ $c>b$ナリト假定セリ. 然レモ問題ガ成立ツ爲メニハ cガ只 aトbトノ間ニアル數ナリセバ可ナリ. 故ニ必ズシモ $a>c, c>b$ ナルヲ要セズシテ $a<c, c<b$ ナルモ可ナリ.

今 $a<c, c<b$ トシテ方程式ヲ解クトキハ

$$x=\frac{n(c-a)}{b-c}$$

ヲ得ベシ, 然ルニ $\frac{n(c-a)}{b-c}$ ハ 分數ノ分母子ニ同シ數 -1 ヲ乘シテモ其値ヲ變ゼザル故, カクスルトキハ $\frac{n(a-c)}{c-b}$ トナリ. 即 $\frac{n(c-a)}{b-c}=\frac{n(a-c)}{c-b}$ ナルガ故, 茲ニ得タル答ハ aトbトノ大小ニ

關ハラズ常ニ眞ナリ.

上ニ得タル公式ヲ言葉ニテ云ヒ表ハセバ "升數ノ與ヘラレタル液一升ノ値ト混合スベキ一升ノ價トノ差ニ與ヘラレタル升數ヲ乘ケ之レヲ混合液一升ノ價ト升數ノ求メラレタル液一升ノ價トノ差ニテ割リテ以テ求ムル所ノ升數ヲ得ベシ."

(例九) 一ツノ工事アリ甲ハ之レヲ 12 時間ニテ成就シ得ベク, 乙ハ之ヲ 4 時間ニテ成就シ得ベシト云フ. 今甲此工事ニ着手シ若干時ヲ經テ乙之レニ代リテ爲セシニ甲ノ着手ヨリ 7 時間ニテ之ヲ成就シタリト云フ, 然ルトキハ甲ノ働キシ時間如何.

甲ノ働キシ時間即所求ノ時間ヲ x 時間トセバ

乙ノ働キシ時間ハ $7-x$ 時間ナリ.

甲ハ此仕事ヲ 12 時間ニテ成就スルガ故, 一時間ニハ全工事ノ $\frac{1}{12}$ ヲナスベシ. 故ニ甲ガナセシ部分ハ全工事ノ $\frac{x}{12}$ ナリ.

又乙ハ此工事ヲ 4 時間ニテ成就スルガ故一時間ニハ全工事ノ $\frac{1}{4}$ ヲナスベシ, 依テ乙ガナセシ部分ハ全工事ノ $\frac{1}{4}(7-x)$ ナリ.

而シテ甲ト乙トニテ此工事ヲ完成セシニヨリ次ノ式ヲ書キ得ベシ

$$\frac{x}{12}+\frac{1}{4}(7-x)=1.$$

分母ヲ拂フ爲メ 12 ヲ兩邊ニカクレバ

$$x+3(7-x)=12$$

即 $x+21-3x=12$

即 $-2x=-9$

故ニ $x=4.5$

故ニ甲ノ働キシ時間ハ四時間半ナリ.

驗メシ 甲ノ爲シタル部分ハ $\frac{1}{12}\times4.5$ 即 $\frac{3}{8}$ ナリ, 乙ノ爲シタル部分ハ $\frac{1}{4}(7-4.5)$ 即 $\frac{5}{8}$ ナリ, 而シテコノ兩部分ノ和ハ $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}$ 即 1 トナル, 依テコノ答ノ本題ニ適スルヲ知ルベシ.

注意 問題ヲ解キテ答ヲ得タルトキハ常ニ之レヲ驗メシ見ルハ甚タ要用ナルコトナリ.

問題

次ノ問題ヲ自解スベシ.

(1) 如何ナル數ヨリ 24 ヲ減ズレバ其差ハ原數ノ四分ノ一トナルカ. 答 三十二.

(2) 二數アリ其和ハ 41 其差ハ 9 ナリ, 各數ヲ求ム. 答 二十五, 十六.

(3) 或ル數ノ六分ノ一ト九分ノ一トノ和十五ニ等シト云フ其數如何. 答 54.

(4) 或ル數ノ五分ノ一ハ其四ノ一ヨリ少ナキコト三ナリト云フ其數如何. 答 60.

(5) 二ツノ連續セル數ニ於テ小サキ數ノ四分ノ一ハ大ナル數ノ五分ノ一ヲ超過スルコト一ナリト云フ其數如何. 答 24, 25.

(6) 三ツノ連續セル數ヲ夫々十, 十七, 二十六ニテ割リタル商ノ和十ナリト云フ, 三連續數各如何ナルカ. 答 50, 51, 52.

(7) 甲乙二人等額ノ金員ヲ所持セリ今乙ハ甲ニ其所持金ノ $\frac{5}{11}$ ヲ

與ヘシニヨリ甲ハ乙ノ殘金ノ半分ヨリ六圓多ク所持スト云フ，兩人最初所持セシ金額何程ナルカ．　答 33圓，35圓．

(8) 甲ノ所持金ノ五分ノ二ハ乙ノ所持金ニ等シク，乙ノ所持金ノ九分ノ七ハ丙ノ所持金ニ等シ，而シテ三人ノ所持金ノ和ハ七百七十圓ナリト云フ，三人ノ所持金各如何．

答 甲450圓，乙180圓，丙140圓．

(9) 或ル人馬ヲ元價ノ半分ニ二十三圓ヲ增シタル價ニテ賣リ三十八圓ヲ得タリト云フ，其元價如何．　答 30圓．

(10) 或ル室ノ幅ハ長サノ$\frac{3}{2}$ニ等シク幅ヲ三尺增シ長サヲ三尺減ズルトキハ正方形トナルベシト云フ，長サ幅各如何．

答 十八尺十二尺．

(11) 一斤ニ付x圓ナルトキハa斤ノ八分ノ三ノ價ヲ表ハス式如何．

答 $\frac{8}{3}ax$圓．

(12) 連續スル四ツノ數ノ第二數ガnナルトキハ此四ツノ數ノ和及積ヲ問フ．　答 和$4n+2$　積$n(n-1)(n+1)(n+2)$．

(13) 五時間ニa里進ム人ト一時間ニb里進ム人ト同時ニ反對ノ方向ニ發足シc時間經テ相距ル里數如何．

答 $\frac{a}{5}+bc$ 即 $c(\frac{a}{5}+b)$．

(14) 父子アリ父ハ42歲ニシテ子ハ8歲ナリ然ラバ今ヨリ幾年ノ後父ノ年ガ子ノ年ノ三倍ニナルカ．　答 九年．

(15) 甲乙二人アリ，甲ノ年ハ60歲ニシテ乙ノ年ハ40歲ナリト云フ依テ甲ノ年ガ乙ノ年ノ二倍ナリシハ今ヨリ何年以前ナルカ．

答 二十二年前．

(16) 或人ニ年齡ヲ問ヒシニ答テ云ハク我ニ一子アリ二年前ニハ我年ハ子ノ年ニ四倍シタレ共今ヨリ三年ノ後ハ我年ハ子ノ年ニ三倍スベシト，此人ノ年齡如何．　答 四十二歲．

(17) 上茶十斤ト下茶八斤トヲ買ヒ代金十二圓七十八錢ヲ拂ヘリ而シテ上茶一斤ノ價ハ下茶一斤ノ價ノ二倍ヨリ十五錢少ナシト云フ．各一斤ノ價如何．　答 87錢，51錢

(18) 甲乙丙三種ノ砂糖アリ．甲種九斤ト乙種五斤ト丙種十八斤トヲ買ヒ三圓二十七錢五厘ヲ拂ヘリ，而シテ一斤ニ付キ甲種ハ乙種ヨリ二錢五厘高ク乙種ハ丙種ヨリ三錢五厘高シト云フ各一斤ノ價ヲ問フ．　答 甲14錢　乙11錢5厘　丙8錢．

(19) 一ツノ竿ヲ水中ニ立テタルニ全長ノ三分ノ一ハ泥中ニ入リ全長ノ五分ノ一ハ水中ニ在リ而シテ水面ヲ出ヅルコト尙一尺四寸ナリト云フ，竿ノ長サ如何．　答 三尺．

(20) 酒一樽アリ貯藏中ニ漏リテ三分ノ一ヲ減損ス其後二升五合注出セシニ全尙樽ノ四分ノ一ヲ存ス全樽ノ量ヲ問フ．　答 六升

(21) 或人袋中ニ金若干ヲ有セリ初メ其半分ヲ費シ次ニ殘リノ三分ノ一ヲ費セシニ尙袋中ニ八圓ヲ餘セリト云フ，最初袋中ニ在リシ金額ヲ問フ．　答 二十四圓．

(22) 金六圓ヲ以テ鷄卵ヲ買フニ若シ其相場二割高カケレバ買ヒ得ラルヽ卵ノ數八十個少ナカルベシト云フ，依テ鷄卵二十個ノ價ヲ問フ．　答 二十五錢．

(23) 或人某地ニ行クニ一時間三十六町ノ速サニテ歩マバ定刻ヨリ二時間後ルベキニヨリ毎時六十三町走ル車ニ乘リシニ一時間早ク到着セリト云フ其地ヨリノ距離ヲ問フ.　　答　7里.

67. 問題ノ負ナル答ニ就テノ解釋

或ル問題ノ要件ヲ代數式ニ書キ表ハシテ得ル所ノ一ツノ方程式ヲ解ク際時トシテハ其未知數ノ値トシテ負數ヲ見出スヿアリ，此ノ如キ値ハ固ヨリ自身ニ如何ナル意義ヲモ有セザルヲ以テ問題ハ不能トナルベシ，然ルニ斯ク不能トナルニ種々ノ情況アリ而シテ若シ其問題ガ全ク成立スベカラザルモノナルトキハ負ナル答ハ其ノマヽ棄ツルノ外ナシト雖ドモ又時トシテハ此ノ如キ結果ヲ得タルハ唯問題ヲ方程式ニ置クニ當リテ計ラズモ其問題ニ不適當ナル假定ヲ設ケタルニ因ルコトアリ，或ハ又問題ノ設ケ方ニ或ル過失アルコトアリ，此等ノ場合ニ於テハ其方程式ノ置キ方ヲ直スカ或ハ問題ノ設ケ方ニ適當ノ修正ヲ加フルトキハ負數ノ代リニ正數ノ答ヲ得ルニ至ルベシ，コノコトヲ負ナル答ヲ解釋スト云フナリ.

負ナル答ノ解釋ハ常ニ次ノ原則ニ依ルモノトス.

或ル方程式ガ負ナル根ヲ有スルトキ此根ヲ正數ニ直シタルモノハ元トノ方程式中ニ於テ x ヲ $-x$ ニ置キ換ヘテ得ル所ノ方程式ニ適合スベシ.

例ヘハ次ノ方程式アリ.　　$6+3x=1+2x$　　(1)

コノ方程式ノ根ハ -5 ナル負數ナリ.　今方程式ノ(1)ノ中ニ於テ x ヲ $-x$ ニテ置キ換フルトキハ次ノ方程式ヲ得.

$$6+3\times(-x)=1+2x(-x)\qquad(2)$$

扨テコノ方程式ハ必ズ5ヲ根トナスベシ,其故ハ -5 ハ方程式(1)ノ根ナルヲ以テ方程式(1)ニ就テ次ノ等式アルベシ.

$$6+3\times(-5)=1+2\times(-5)$$

而シテ此等式ハ即方程式(2)ガ $x=5$ ニテ驗証セラルヽコトヲ示スモノナレバナリ.

上述ノ論法ハ勿論一般ニ通ズルモノナレバ一次ヨリ高キ次數ノ方程式ニモ適用セラルベシ.

今次ニ二三ノ例ヲ設ケテ問題ノ負ナル答ヲ解釋スル方法ヲ示スベシ.

(例一)　父ノ年齡41歲ニシテ子ノ年齡ハ15歲ナリ今日ヨリ幾年ノ後父ノ年ガ子ノ年ノ三倍ニナルベキカ.

求ムル處ノ年數ヲ x トセバ今ヨリ x 年ノ後ニハ父ノ年齡ハ $41+x$ 歲ニシテ子ノ年齡ハ $15+x$ 歲ナリ.

然ルニ父ノ年齡ハ子ノ年齡ノ三倍トナルヲ要スル故次ノ式アリ.

$$41+x=3(15+x)$$

而シテ此方程式ヲ解ケバ答トシテ -2 ヲ得,即負數ニシテ問題ノ如キ問ヒ方ニテハ問題ハ不能ナリ.

然レドモ若シ前ノ方程式ニ於テ x ノ代リニ $-x$ ヲ置キ換フレバ次ノ方程式ヲ得,

$$41-x=3(15-x)$$

而シテコノ方程式ノ答ハ前ニ論シタルコトニヨリテ2ナルヿ明カナリ,然ルニ此方程式ハ次ノ問題ヨリ得ベキ所ノモノナリ.

"父ノ年齡41歲ニシテ子ノ年齡ハ15歲ナリ. 今ヨリ幾年前ニ父ノ年齡ハ子ノ年齡ノ三倍ナリシカ".

偖其答ガ2年ナルハ即今ヨリ二年前ニ父ノ年齡ガ子ノ年齡ノ三倍ナリシコトヲ示スモノニシテ果シテ當時ニ在テハ父ハ三十九歲子ハ十三歲ナリ, 即三十九ハ十三ノ三倍ナリ.

故ニコノ例題ニ於テ前ニ得タル負ノ答ハ父ノ年齡ガ子ノ年齡ノ三倍トナルハ問題ニ云フガ如ク未來ニアラズシテ過去ニアルノ意ヲ示シ, 其負ナル答ノ絕對値ハ問フ所ノ時期ヨリ現今ニ至ルマデノ年數ヲ表ハセリ.

此ノ故ニ若シ答ナル數ノ前ニアル負ノ符號ハ過去ノ年數ヲ示スモノニシテ未來ノ年數ニアラズト解釋セバ前ニ得タル負ノ答ハ其ノマヽニ此問題ノ答ナリト見ナスコトヲ得ベシ.

今更ニ同シ問題ヲ廣意義ニ設ケテ取扱フベシ.

'現今父ノ年齡ハ a 歲ニシテ子ノ年齡ハ b 歲ナリ, 然ラバ何レノ時期ニ父ノ年齡ハ子ノ年齡ノ三倍ニ等シキカ".

求ムル處ノ時期ハ未來ニアルカ過去ニアルカヲ知ラズ, 故ニ先ツコレヲ未來ニアリトシ, x ヲ以テ現今ヨリ求ムル所ノ時期ニ至ル間ノ年期ヲ表ハストキハ問題ノ方程式ハ次ノ如シ.

$$a+x=3(b+x) \qquad (1)$$

若シ又父ノ年齡ガ子ノ年齡ニ等シキ時期ハ過去ニアリトシ, 此時ヨリ現時ニ至リタル年數ヲ x 年トセバ問題ノ方程ハ次ノ如シ.

$$a-x=3(b-x) \qquad (2)$$

然ルニ方程式 (1) 及 (2) ハ x ト $-x$ トノ交換ニヨリ互ニ其一方ヨリ他ノ一方ヲ出スヿヲ得ベシ, 故ニコノ二ツノ方程式ノ答ハ相等シクシテ且ツ反對ノ符號ヲ有スベシ, 即チ若シ一方ノ根ガ $-n$ ノ如キ負數ナレバ他ノ方程式ノ根ハ $+n$ ノ如キ正數ナルベシ, 故ニコノ問題ヲ解クニハ前ノ二ツノ方程式ノ中何レカ一ツヲ存シ置キ而シテ若シ其方程式ガ負ナル答ヲ出サバ此答ノ符號ヲ變ジタルモノハ他ノ方程式ニ適合スルコトニ注意スレバ可ナリ.

今假リニ求ムル所ノ時期ヲ未來ニアリトシテ定メタル方程式 (1) ヲ取リ之ヲ解クトキハ次ノ如シ.

$$x=\frac{a-3b}{2}$$

若シ此公式ノ與フル所ノ x ノ値ガ正數ナルトキハ即若シ $a>3b$ ナルトキハ年數ハ未來ニ向テ數ヘザル可カラズ, 然レモ若シ又 $a<3b$ ナルトキハ x ノ値ハ負ニシテ而シテ其符號ヲ換ヘタルモノハ方程式 (2) ニ適スベキモノナルヲ以テ即此場合ニハ x ノ絕對値ガ表ハス所ノ年數ヲ過去ニ遡リテ算ヘザルベカラズ.

コノ故ニ若シ見出シタル所ノ年數ガ正數ナレバ之レヲ未來ニ向テ算ヘ負數ナレバ之レヲ過去ニ向テ算フルモノト約定スレバ前ノ公式ハ如何ナル場合ニ於テモ此問題ノ答ヲ得ベシ, 而シテ其答ナル數ノ符號ハ唯何レノ方向ニ年數ヲ算フベキカヲ示スノミ.

(例二) 一直線上ニ ABC ナル三點アリテ B 點ハ他ノ二點ノ間ニアリ. AB ノ表サハ二尺ニ等シク又 AC ノ長サハ五尺ニ等シ, 今 A C 二點ヲ結ビ付クル直線ノ延長線上ニ於テ一點 M ヲ求メ此點ヨ

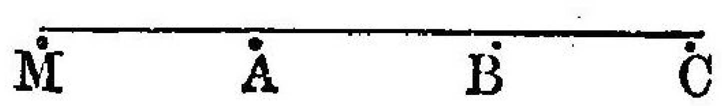
リB點マデノ距離ヲ同シM點ヨリA及Cノ各點マデノ距離ノ比例中項ニ等シカラシメントスM點ノ位置如何.

M點ハC點ヨリ右ニアルカ又ハA點ヨリ左ニ在リ得ベシ,然レドモ問題ニハ其二ツノ位置ノ何レヲM點ニ與フベキカヲ示サヽルヲ以テ先ツ之レヲCヨリ右ニアリト假定シAMナル距離ヲxニテ表ハセバ題意ニヨリ次ノ方程式ヲ書キ得ベシ.

$$(x-2)^2=x(x-5) \qquad (1)$$

コレ即問題ノ方程式ニシテ之レヲ解クトキハ $x=-4$ ヲ得.

然ルニ此負ノ答ハ即チM點ノ位置ニ就テ設ケタル假想ノ誤テルコトヲ示スナリ. 故ニ次ノ圖ノ如クM點ハA點ヨリ左ニ在リト假定シ,AMノ距離ヲxニテ表スベシ.



然ルトキハ問題ノ方程式ハ次ノ如シ.

$$(x+2)^2=x(x+5) \qquad (2).$$

然ルニ若シ(1)式ニ於テxヲ$-x$ニ換フレバ次ノ如シ.

$$(-x-2)^2=-x(-x-5)$$

$$即 \quad (x+2)^2=x(x+5)$$

即(2)ノ式ト同シキ式ヲ得タリ,故ニ方程式(2)ノ根ハ方程式(1)ノ根ト相等シクシテ符號ハ反對ナリ即 $+4$ ニ等シカルベシ,故ニM點ハA點ノ左ニ於テ此點ヨリ四尺ノ距離ニアリ.

此問題ニ於テハ負ナル答ハM點ヲA點ヨリ右ニアリトシタル假定

ノ誤マテルコトヲ示セリ. 且コノ負根ノ絕對値ハ丁度AMノ距離ヲ表ハシ,而シテ其符號此距離ヲAヨリ左ニ計ルベキコト即方程式ヲ作リシトキノ假定ノ方向ノ反對ノ方向ニ計ルベキコトヲ示スモノナリ.

故ニ此問題ニ於テモ尙ホ負數 -4 ヲ以テ問題ノ答解ヲ與フルモノト見ナシ得ベシ;何トナレバ其負ナル符號ハ單ニAMナル距離ヲA點ヨリ何レノ方向ニ計ルベキカヲ示スノミナレバナリ.

「デガルト」ノ法則. 前記ノ二問題ニ於ケル未知數ハ皆反對ノ方向ニ計リ得ベキ量ノ場合ナリ,即第一ノ問題ニ於テハ未來ト過去トニ計リ得ベキ年數ニシテ第二ノ問題ニ於テハ一ツノ直線上ニトリタル定點ノ右ト左ニ計リ得ベキ長サナリ而シテ其何レノ場合ニ於テモ見出シタル根ノ符號ハ即チ未知ノ量ヲ何レノ方向ニ計ルベキカヲ示セリ,今此等ノ結果ヲ推シ擴メテ次ノ法則ヲ立ツルヿヲ得.

"凡ソ問題ノ未知數ガ反對ノ兩方向ニ計リ得ヘキモノナルトキ若シ方程式ノ根ガ負數ナレバ其根ノ絕對値ハ即問題ノ答ナリ,而シテ其符號一ハ問題ヲ方程式ニ置クトキ假定シタル未知數ノ方向ト反對ニ之ヲ計ルヘキコトヲ示スナリ." コレヲ「デカルト」ノ法則ト云フ.

但シ此法則ハ一般ニ証明スルコト能ハズ,殊ニ一次ヨリ高キ次數ノ方程式ヲ得ヘキ問題ニ於テハ往々之レヲ適用シ得ザル場合アリ.

一次方程式ヲ得ヘキ問題ニ於テ此法則ノ適用シ得ラルヽ場合ハ未知ノ量ヲ順次ニ反對ノ方向ニ計リテ得ル所ノ二ツノ方程式ノ差異ガ只互ニxヲ$-x$ニ換ヘタルダケノトキニアリ,前ニ解キタル二問題ハ

皆實ニ此要件ヲ具ヘタリ．然レ氏常ニカクノ如クナリトハ云ヒ難シ次ニカヽル場合ノ例題ヲ擧ゲテ之レヲ說明セン．

(例三)　鳥ト兎トアリ其頭數合計 27 又其足數ハ合計 120 ナリ鳥ト兎ノ數各幾何ナルカ．

兎ノ數ヲ x トスレバ鳥ノ數ハ $27-x$ ナリ，而シテ兎ハ四足動物ニシテ鳥ハ二足ノ動物ナル故,題意ニヨリ次ノ方程式アリ，

$$4x+2(27-x)=120.$$

依テ　$2x+54=120$

故ニ　$x=33$

即兎ノ數ハ 33. ナリ從テ鳥ノ數ハ 27−33 即 $\underline{-6}$

鳥ノ數トシテ −6 ヲ得タリ．然レトモ本題ノ如キ場合ニ於テコノ負數ニ附スベキ意味ナシ，即本題ハ不合理ノ問題ナリ．現ニ 27 頭悉ク兎ナリト見ナスモ足數ハ 108 ナルベクシテ本題ニ與ヘタル足數ヨリ少ナキヲ見ルナリ．

68. 不能ナル問題.

時トシテハ問題ニ與ヘラレタルコトヨリシテ方程式ヲ作リ其根ヲ求メタル片不合理ノ答ヲ得ルコトアリ，今例ヲ擧ケテ之レヲ說明セン．

(例一)　二桁ノ整數アリ其整數ヲ構成スル數字ノ和ハ 8 ナリ又數字ヲスレ換フレバ(一位ノ數字ト十位ノ數字トヲスレ換フルコト)元トノ數ノ四倍ニ等シト云フコノ數ヲ問フ．

x ヲ一位ノ數字トスレバ十位ノ數字ハ $8-x$ ニ等シ故ニ題意ニヨリ次ノ方程式アリ．

$$10x+(8-x)=4\{(10(8-x)+x\}$$

即　$9x+8=320-36x$

依テ　$45x=312$

依テ　$x=6\frac{14}{15}.$

即一位ノ數字ノ値トシテ $6\frac{14}{15}$ ノ如キ數ヲ得タルハ本題ニ適スル整數ナキヲ表スモノナリ．即本題ハ不合理ナル問題ナリシヲ知ル,而シテコレヲ解釋スルコト前條ノ如クナス能ハス，即此問題ハ不能ナリ．

問　　題

(1)　次ノ問題ヲ如何ニ訂正スベキカ．

前

明治三十年ニ甲ハ四十歲乙ハ二十五歲ナリ幾年後ニ甲ノ年齡ガ乙ノ年齡ノ二倍トナル可キカ．

ナリシカ

(2)　次ノ問題ハ不合理ナルコトヲ示スベシ．

鷄ト龜トノ數合ハセテ 58 アリ其足ノ數ハ 102 本アリト云フ，鷄ノ數及龜ノ數各幾何

(3)　拾圓金貨貳拾圓金貨ノ兩種合ハセテ七十六個ヲ以テ金壹千六百圓ノ支拂ヲナサントス各種ノ金貨幾何ツヽヲ要スルカ．

(4)　甲乙ノ間ニ金若干圓ノ貸借アリ，今他ヨリ甲ニ五百圓．乙ニ百圓ヲ與ヘ甲乙ハ此金ノ中ヲ以テ貸借ヲ濟マシタル後甲ノ所持金ハ乙ノ所持金ノ二倍トナレリト云フ．貸借ノ金高如何．又何レガ貸方ニテ何レガ借方ナルカ．

第九章
聯立一次方程式

69. 二ツ或ハ二ツ以上ノ未知數ヲ有スル所ノ唯一ツノ方程式ニ於テハ其方程式ニ適合スル未知數ノ値ハ幾種モアリテ限リナキモノナリ,何トナレバ其未知數ノ或ル一ツニ任意ノ値ヲ與フレバコレニ應シテ他ノ未知數モ種々ノ値ヲトリ得可ケレバナリ.

例ヘバ二ツノ未知數x及yヲ有スル一ツノ式 $5x+3y=34$ ヲ考フルニ 此式 $5x+3y=34$ ヲxニ就テ解ケバ

$$x=\frac{34-3y}{5}.$$

今 $y=1$ トスレバ $x=\frac{34-3\times1}{5}=6\frac{1}{5}$

$y=2$ トスレバ $x=\frac{34-3\times2}{5}=5\frac{3}{5}$

$y=3$ トスレバ $x=\frac{34-3\times3}{5}=5$

$y=4$ トスレバ $x=\frac{34-3\times4}{5}=4\frac{2}{5}$

………… ……………

………… ……………

逐テ斯クノ如ク一般ニaヲyノ値トシテ試ミルニ $x=\frac{34-3a}{5}$ ハ此式ニ適合スルヤ明ナリ,即コノ式ニ適合スル所ノ未知數ノ値ハ其數限リナシ.

然ルニ二ツノ方程式例ヘバ $5x+2y=34$ 及 $4x-7y=10$ ノ如キアリテ此二ツノ方程式ニ同時ニ適合スル値ハ如何ニト云フニ斯カル片ニハ上ノ如ク多クノ値ヲ得ルコトナリ,定マリタル値ノミニアラザレバ二ツノ方程式ガ同時ニ滿足スルコトナキモノナリ.

二ツ以上ノ方程式ガ其含メル各未知數ノ同シ値ニテ同時ニ滿足スベキモノナル片ハ此等ノ方程式ヲ**聯立方定式**ト稱ス.

70. 是レヨリ二未知數ヲ有スル聯立一次方程式ノ解法ヲ説カントス,例ヘバ前ニ擧ケタル二ツノ方程式

$$5x+2y=34 \qquad (1)$$

$$4x-7y=10 \qquad (2)$$

ヲ一組ノ聯立方程式トスレバコレヲ解クニハ

(1) 式ノ兩邊ニ 4 ヲ掛クレバ

$$20x+8y=136 \qquad (3)$$

(2) 式ノ兩邊ニ 5 ヲ掛クレバ

$$20x-35y=50 \qquad (4)$$

今コノ (3) 式ヨリ (4) 式ヲ邊々相減ズレバxノ項ハ消去セラレテ次ノ方程式ヲ得 $43y=86$

依テ $y=2$

yノ此値ヲ (1) ノ式ニ代入スレバxノミヲ含ム一次方程式ヲ得

$$5x+4=34$$

即 $5x=30$

依テ $x=6$ (y値ヲ (2) 式ニ代入スルモ同シ結

果ヲ得ベシ)

即　$y=2$　$x=6$　ハ(1)(2)ナル兩式ヲ同時ニ滿足スベキ根即(1)(2)ナル一組ノ聯立方程式ノ根ナリ. 今其果シテ然ルヤ否ヤヲ驗メサンニ

(1)式　$$5x+2y=34$$

ニ於テ $x=6$ $y=2$ ヲ代入セバ　左邊ハ $30+4$ 即 34 トナリテ正シク滿足スルヲ見ル.

又(2)式　$$4x-7y=10$$

ニxトyトノ同ジ値即 $x=6$ $y=2$ ヲ置キ換フレバ　左邊ハ $24-14$ 即 10 トナリテ又正シク此方程式ヲ滿足スルヲ見ル.

上ニハxヨリモyノ方ヲ先キニ求メタリ然レ𪜈xヨリ先キニ求ムルモ其結果ハ同シ唯方程式ノ形ニヨリ便宜上x或ハyヲ先キニ索ムルヲ可トス.

上ノ方程式ニ於テxヲ先キニ索メント欲セバ(1)式ノ兩邊ニ7ヲ掛ケ(2)式ノ兩邊ニ(2)ヲ掛ケベシ, カクスルモ方程式ハ同値ヲ妨ゲズ然ル𪜈ハ　(1)式ハ　$35x+14y=238$

(2)式ハ　$8x-14y=20$

此二ツノ式ノ對應スル邊ヲ夫々加フレバyヲ含マザル一ツノ方程式トナル,即　$$43x=258$$

依テ　$$x=6$$

xノコノ値ヲ(1)ノ式又ハ(2)ノ式ニ代入スル𪜈ハyノ値トシテ2ヲ得ベシ.

玆ニ示セル解キ方ハ通例**加減法**ト稱スル方法ニシテ其方法ヲ擧グレバ次ノ如シ.

與ヘラレタル二ツノ方程式ニ夫々其一未知數ノ係數ノ絶對値ヲ相等シクナス樣ナル數ヲ掛ケ，而シテ得タル二方程式ヲ加ヘ或ハ減シテ其未知數ノ現ハレザル,即他ノ未知數ノミヲ含ム方程式ヲ得ベシ,而ル𪜈ハ第七章ノ方法ニヨリ解クコトヲ得.

斯クノ如ク未知數ノ現ハレザル樣ニスルコトヲ其未知數ヲ與ヘラレタル方程式ヨリ**逐出**ス(又ハ與ヘラレタル方程式間ニ**消去**ス)ト云フ.

二ツノ方程式ノ間ニ一ツノ未知數(共通ノ)係數ノ絶對値ヲ相等シクセントセバ夫々相對スル係數ヲ互ニ乘ズレバ可ナリ. 又若シ其乘ズベキ兩數ニ公約數アル𪜈ハ之レヲ省キタル數ヲ以テスベシ.

次ニ聯立方程式ヲ解ク第二ノ法ヲ說明スベシコノ方法ハ通例置換法ト云フ法ニシテ,一方ノ方程式ヨリシテ一ツノ未知數ヲ他ノ未知數ヲ含メル式ニテ表ハシ,コノ値ヲ以テ他ノ方程式ニ於ケル此未知數ニ置キ換フベシ.

此方法ニヨリテ一組ノ聯立方程式例ヘバ

$$8x+7y=37 \qquad (1)$$

$$2x+3y=13 \qquad (2)$$

ヲ解カンニ(2)ノ方程式ヨリシテ $x=\dfrac{13-3y}{2}$ ヲ得,之レヲ(1)式ニ代入シテ

$$\frac{8(13-3y)}{2}+7y=37$$

即 $4(13-3y)+7y=37$

即 $52-12y+7y=37$

依テ $15=5y$

$\therefore\ y=3$

此yノ値ヲ(1)或ハ(2)ノ何レカ一方ニ入レテ $x=2$ ヲ得.

或ハ(2)ノ方程式ヨリ $y=\dfrac{13-2x}{3}$ ヲ得,之レヲ(1)ノ方程式ニ入レテxノミヲ含ム方程式ヲ作リ以下前ト同樣ニシテ初メニxヲ求メ次ニyヲ求ムルモ可ナリ.

$x=2$, $y=3$ ヲ(1),(2)兩式ニ入レテ驗メシヲ行ヘバ

$$8\times2+7\times3=37$$

$$2\times2+3\times3=13$$

ニシテ正シキヲ見ルベシ.

次ニ第三ノ解法トシテ所謂等置法ヲ說カン.

此方法ハ各ノ方程式ヨリシテ一ツノ未知數ヲ他ノ未知數ヲ以テ表ハシ斯クシテ得タル二ツノ式ヲ相等シク置クナリ.

今コノ方法ニ依リテ上ノ聯立方程式ヲ解カンニ,(1)ノ方程式ヨリシテ $x=\dfrac{37-7y}{8}$ 又(2)ノ方程式ヨリシテ $x=\dfrac{13-3y}{2}$ ヲ得.コノ二ツノxノ値ヲ相等シト置キテ

$$\frac{37-7y}{8}=\frac{13-3y}{2}.$$

分母ヲ拂フ爲メ兩邊ニ8ヲ掛クレバ

$$37-7y=4(13-3y)$$

即 $37-7y=52-12y$

$$12y-7y=52-37$$

$$5y=15$$

依テ $y=3$

已ニ $y=3$ ヲ求ムレバ上ノxノ方ヲ得ベキ式 $x=\dfrac{37-7y}{8}$ 又ハ $x=\dfrac{13-3y}{2}$ ニyノ方ヲ代入セバ $x=2$ ヲ得.

或ハ(1)ノ方程式ヨリ $y=\dfrac{37-8x}{7}$ ヲ得,又(2)ノ方程式ヨリ $y=\dfrac{13-2x}{3}$ ヲ得,之レヲ相等シト置キテ

$$\frac{37-8x}{7}=\frac{13-2x}{3}$$

コレヲ解キテ $x=2$ ヲ得,コレヨリ前ト同樣ニシテ $y=3$ ヲ得ベシ.

今尙聯立一次方程式ノ解法ニテ解キ得ル二三ノ例ニ就テ說カン.

(例一) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=8 \qquad (1)$$

$$\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=13 \qquad (2)$$

與ヘラレタル方程式ノ左邊ハ何レモxトyトニ就テ整式ニアラズ然レモ今若シ $\dfrac{1}{x}$ ト $\dfrac{1}{y}$ トヲ未知數ト看做ストキハ一次方程式ト同樣ニシテ解キ得ベシ.(コノ方程式ハxトyニ就テハ一次方程式ト云フコト能ハザルナリ,何トナレバ分母ヲ拂ヘバxトyニ就テハ二次方程式トナルベシ).

(1)式ニ5ヲ掛クレバ $\dfrac{15}{x}+\dfrac{20}{y}=40 \qquad (3)$

(2)式ニ3ヲ掛クレバ $\dfrac{15}{x}+\dfrac{18}{y}=39 \qquad (4)$

(3) 式ヨリ (4) 式ヲ減ズレバ　$\frac{2}{y}=1$

依テ　$y=2$

(1) 式ニ y ノ値ヲ置キカフレバ

$$\frac{3}{x}+\frac{4}{2}=8$$

卽　$\frac{3}{x}=8-2=6$

依テ　$3=6x$

卽　$x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

之レニヨリ　$y=2$　$x=\frac{1}{2}$ ヲ以テ答トス.

(例二)　次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$(x+1)(y+5)=(x+5)(y+1) \qquad (1)$$

$$xy+x+y=(x+2)(y+2) \qquad (2)$$

(1) 式ノ括弧ヲ去レバ　$xy+5x+y+5=xy+x+5y+5$

依テコレヲ書キ直シテ　$4x-4y=0$

4 ニテ割レバ　$x-y=0$　(3)

(2) 式ノ括弧ヲ去レバ　$xy+x+y=xy+2x+2y+4$

卽　$-x-y=4$　(4)

今(3)式ト(4)式ヲ相加フレバ　$-2y=4$

$\therefore$　$y=-2$

y コノ値ヲ(3)式ニ代入セバ　$x=-2$.

驗メシ　$y=-2$, $x=-2$ ヲ與方程式ニ入ルレバ卽次ノ如シ.

$(-2+1)(-2+5)=(-2+5)(-2+1)$　ニシテ(1)

式ハ驗証セラレ, 又 (2) 式モ　$(-2)\times(-2)+(-2)+(-2)=(-2+2)(-2+2)$　コノ式ノ兩邊トモ零ナリト驗証セラル, 卽答ハ正シキモノナリ.

(例三)　次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$bx+ay=2ab \qquad (1)$$

$$ax+by=a^2+b^2 \qquad (2)$$

(此式中 x 及 y ハ未知數ニシテ a, b ハ已知數ヲ表スモノナルコ已ニ述ベシガ如シ)

(1) 式ニ b ヲ掛クレバ　$b^2x+aby=2ab^2$　(i)

(2) 式ニ a ヲ掛クレバ　$a^2x+aby=a^3+ab^2$　(ii)

(i) ヨリ (ii) ヲ減ズレバ　$(b^2-a^2)x=ab^2-a^3$

$$\therefore \quad x=\frac{ab^2-a^3}{b^2-a^2}=a$$

茲ニ得タル x ノ値ヲ (1) 式ニ代入セバ

$$ab+ay=2ab$$

卽　$ay=ab$

$\therefore$　$y=b$

依テ　$x=a$　$y=b$　ヲ以テ答トス.

驗メシ　茲ニ得タル答卽　$x=a$, $y=b$　ヲ (1)式ニ當テ箝メテ見ルニ, 卽　$ba+ab=2ab$　ニシテ卽同一式ヲ得タリ, 依テ(1)式ニ就テハ此答ハ正シキモノナリ, 今又 (2) 式ニ就テ驗メサンニ

$a\times a+b\times b=a^2+b^2$　トナリテ之レ亦同一式ニシテ此答ノ正シキヲ知ル.

(例四)　次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$x-y=a-b \qquad (1)$$

$$ax-by=2(a^2-b^2) \qquad (2)$$

(1) 式ニ b ヲ掛クレバ　$bx-by=ab-b^2$　(i)

(2) 式ノ括弧ヲ去レバ　$ax-by=2a^2-2b^2$　(ii)

(i) 式ヨリ (ii) 式ヲ邊々減ズレバ　$(b-a)x=b^2+ab-2a^2$

$$\therefore \quad x=\frac{b^2+ab-2a^2}{b-a}=b+2a$$

玆ニ得タル x ノ値ヲ (1) 式ニ代入セバ

$$b+2a-y=a-b$$

即

$$-y=-a-2b$$

兩邊ニ -1 ヲ掛クレバ　$y=a+2b$

依テ　$x=b+2a,\ y=a+2b$ ヲ以テ答トス.

此答ノ驗メシハ讀者自ラ試ミラルベシ.

注意(一)　一般ニ二ツノ未知數ヲ含ム二ツノ聯立方程式ヨリ未知數即根ヲ計算シ得ル爲メニハ其二ツノ方程ハ各自獨立ニ成立ツモノナラザル可カラズ. 今之レニ就キ例ヲトリテ說明セン.

例ヘバ玆ニ一組ノ式　$4x+6y=12$　(1)

$$2x+3y=6 \qquad (2)$$

アリトセン二今 x ヲ逐出サンガ爲メニ (2) 式ニ 2 ヲ掛クル片ハ

$4x+6y=12$　即 (1) 式ト同シ方程式ヲ得タリ. ヨリテ (1) 式ヨリコノ方程式ヲ邊々相減シテ x ヲ逐出サントスレバ y モ共ニ逐出サレ跡ニハ只 $0=0$ ナル同一式ノ殘ルノミナリ, 即コノ二ツノ方程式 (1) 及 (2) ハ只見掛上異ルノミニテ其實ハ異ルコトナキ方程式ナルガ故, コレヨリシテ x ト y ヲ定ムルコト能ハザルハ本章ノ始メニ說キシコトニテ明カナルベシ.

注意(二)　次ノ如キ二ツノ式　$2x+3y=6$　(1)

$$4x+6y=15 \qquad (2)$$

ヲ考フルニ (1) ノ方程式ニ 2 ヲ掛クル片ハ, $4x+6y=12$ ヲ得. コレヲ (2) ノ方程式ト比較シテ考フルニ其左邊ハ互ニ相等シクシテ, 右邊ハ一方ハ 12, 他方ハ 15 ニシテ即コノ二方程式ヲ聯立方程式ト見ナストキハ, $12=15$ ナル結果トナル, コレ實ニ不合理ノコトナリ. 故ニコノ二方程式ハ聯立スル能ハザルモノニシテ, 從テ解クコト能ハザル所ノモノナリ.

一般ニ二ツノ未知數ヲ含メル二ツノ聯立一次方程式ヲ解カントシテ一ツノ未知數ヲ逐出ス法ヲ行フト同時ニ他ノ未知數モ逐出サルヽトキハ, 此二ツノ方程式ハ其實一ツノ方程式ナルカ, 然ラザレバ聯立スル能ハザル所ノモノナリ.

問　題

次ノ各方程式ヲ解ケ.

(1)　$7x+4y=1$,　$9x+4y=3$　答　$x=1$.　$y=-\frac{3}{2}$

(2)　$3x+5y=19$;　$5x-4y=7$　答　$x=3$　$y=2$

(3)　$x-11y=1$,　$111y-9x=99$　答　$x=100$　$y=9$

(4)　$8x-21y=5$,　$6x+14y=-26$　答　$x=-2$, $y=-1$.

(5)　$\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$,　$\frac{x}{4}-\frac{2y}{3}=3$　答　$x=4$　$y=-3$

(6) $\frac{x}{3}-\frac{y}{6}=\frac{1}{2}$, $\frac{x}{5}-\frac{3y}{10}=\frac{1}{2}$ 答 $x=1 \quad y=-1$

(7) $\frac{x}{3}+3y+14=0$, $\frac{x}{5}+5y+4=0$ 答 $x=-54\frac{3}{8}, y=1\frac{3}{8}$

(8) $\frac{x}{5}+5y=-4$, $\frac{y}{5}+5x=4$ 答 $x=\frac{5}{6}, y=-\frac{5}{6}$

(9) $\frac{x+2}{3}+4y=2$, $\frac{y+5}{11}-\frac{x+1}{2}=1$ 答 $x=-2, y=\frac{1}{2}$

(10) $\frac{2x+3y}{5}+\frac{y+6}{7}=2$, $\frac{2x-5y}{3}+\frac{x+7}{4}=1$ 答 $x=1, y=1$

(11) $\frac{x}{2}-\frac{1}{3}(y-2)-\frac{1}{4}(x-3)=0$, $x-\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{3}(x-2)=0$
答 $x=3\frac{2}{7}, y=6\frac{5}{7}$

(12) $\frac{x-2}{3}-\frac{y+2}{4}=0$, $\frac{2\times-5}{5}-\frac{11-2y}{7}=0$ 答 $x=5, y=2$

(13) $\frac{9}{x}-\frac{4}{y}=2$, $\frac{18}{x}+\frac{8}{y}=10$ 答 $x=2\frac{4}{7}, y=2\frac{2}{3}$

(14) $x+\frac{3}{y}=\frac{7}{2}$, $3x-\frac{2}{y}=\frac{26}{3}$ 答 $x=3, y=6$

注意 此クノ如キ問題ニ於テハ，未知數ヲ x ト $\frac{1}{y}$ ノ二ツニ考ヘテ解キ始ムルヲ良シトス．

(15) $b^2x-a^2y=0$, $bx+ay=a+b$ 答 $x=\frac{a}{b} \quad y=\frac{b}{a}$

(16) $ax+by=2ab$, $bx-ay=b^2-a^2$ 答 $x=b \quad y=a$

---

71. 代數學ニ於テハ普通ノ文字ノ外ニ文字ノ右肩ニ ($'$) ヲ附シタルモノ，例ヘバ a' (エープライムト讀ム), b' (ビープライム) ノ如キモノ幷ビニ文字ノ右脇ニ數字ヲ附シタルモノ，例ヘバ a_1, b_1 ノ如キモノヲ用フルコトアリ．コレ斯クノ如キ記シ方ヲ用フルトキハ甚ダ便利ナルコトアレバナリ．

今未知數 x 及 y ヲ含メル二ツノ聯立一次方程式ノ一般ノ形ハ次ノ如ク書クヲ得ベシ． 即 $a_1x+b_1y=c_1$ (1)

$a_2x+b_2y=c_2$ (2).

斯クノ如キ記シ方ハコノ二ツノ方程式ヲ記憶スルニ便利ナルベシ．

今コノ聯立方程式ヲ解カンニ

(1) 式ニ b_2 ヲカクレバ $a_1b_2x+b_2b_1y=b_2c_1$

(2) 式ニ b_1 ヲカクレバ $a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2$

茲ニ得タル二式ヲ引キテ $(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$

$$\therefore \quad x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$$

此 x ノ値ヲ (1) 式ニ入ルレバ $a_1\frac{b_2c_1-b c_2}{a_1b_2-a_1b_2}+b_1y=c_1$

分母ヲ拂ヘバ $a_1(b_2c_1-b_1c_2)+b_1(a_1b_2-a_2b_1)y=c_1(a_1b_2-a_2b_1)$

即 $a_1b_2c_1-a_1b_1c_2+b_1(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1b_2c_1-a_2b_1c_1$

項ヲ轉シテ $b_1(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1b_2c_1-a_2b_1c_1-a_1b_2c_1+a_1b_1c_2=a_1b_1c_2-a_1b_1c_1$

依テ y ノ係數ニテ割レバ $y=\frac{a_1b_1c_2-a_2b_1c_1}{b_1(a_1b_2-a_2b_1)}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

之レニヨリテ $x=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$ $y=\frac{a_1c_2-a_1c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

ヲ以テ答トス，是レ即二ツノ未知數ヲ含メル一般ノ**聯立一次方程式ノ根ノ公式**ナリ．

問題

前條(71條)ノ公式ヲ用ヒテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1)	$3x+4y=10$,	$4x+y=9$	答 $x=2$ $y=1$
(2)	$x+2y=13$,	$3x+y=14$	答 $x=3$ $y=5$
(3)	$4x+7y-29=0$,	$x+3y-11=0$	答 $x=2$ $y=3$
(4)	$2x-y-9=0$,	$3x-7y=19$	答 $x=4$ $y=-1$
(5)	$5x+6y=17$,	$6x+5y-16=0$	答 $x=1$ $y=2$
(6)	$x-\frac{7}{5}y=0$,	$7x+5y=74$	答 $x=7$ $y=5$
(7)	$x=\frac{5}{8}y$,	$13x=8y+1$	答 $x=5$ $y=8$

72. 71條ニ於ケル公式ニ於テ $a_1b_2-a_2b_1=0$ ナルニアラザレバ,x 及 y ニハ定マリタル値アリ. 而シテ若シ $a_1b_2-a_2b_1=0$ ナルコトアリシトセバ(與ヘラレタル問題ヲ解クニ際シテ)コレヨリ.

$$a_1b_2=a_2b_1$$

ヲ得,兩邊ヲ a_1b_1 ニテ割レバ $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}$

コノ分數ノ値ヲ k トスレバ 71條ニ於ケル(2)式ハ

$$a_1kx+b_1ky=c_2$$

$$\therefore\ a_1x+b_1y=\frac{c_2}{k}$$

コレヲ(1)式ニ比較スレバ $\frac{c_2}{k}=c_1$ ナル アラザレバ (1)(2)兩式ハ矛盾スルコト明ナリ故ニ解クコト能ハズ.

若シ $\frac{c_2}{k}=c_1$ ナルトキハ $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}$ ナリ.

然ルトキハコノ方程式ハ同一ノ關係ヲ表スヲ以テ實際一ツノ方程式アルノミト同一ナリ. 故ニ xy ノ 値ハ**不定**ナリ,或ハ xy ノ値ノ如何ニカヽハラズコノ關係アルベシ.

之レニ依テ又二ツノ一次聯立方程式

$$a_1x+b_1y=c_1$$

$$a_2x+b_2y=c_2$$

ガ xy ノ値ノ如何ニ拘ハラズ成立ツ爲メニハ其係數ノ間ニハ次ノ如キ關係ナカル可ラズ $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}$

73. 三ツノ未知數ヲ含メル三ツノ聯立方程式ヲ解クニハ先ツ二ツノ方程式ヲトリ一ツノ未知數ヲ逐ヒ出スベシ,而シテ殘レル一方程式ト前ニ用ヒタル中ノ一方程式トヲ以テ同ジ未知數ヲ逐ヒ出スベシ,斯クスルトキハ二ツノ未知數ヲ含メル二ツノ方程式ヲ得ルヲ以テ更ニ之レヨリ此迄說キタル方法ニヨリテ二ツノ未知數ノ値ヲ求メ,コノ値ヲ與ヘラレタル方程式ノ中ニ代入シテ他ノ未知數ノ値ヲ求ムルナリ.

四ツ以上ノ未知數ヲ含メル聯立方程式ヲ解クニモ之レニ準シテ其方程式ヲ二ツヅヽ取リテ漸次ニ未知數ヲ逐出スベシ.

但時トシテハ機敏ナル方法ヲ以テ簡便ニ解キ得ルコトアリ,例二ノ如シ.

注意 聯立方程式ノ數ハ未知數ノ數ダケアルニアラザレバ之レ

ヲ解クコト能ハズ.

(例一) 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$6x+2y-5z=13 \qquad (1)$$

$$3x+3y-2z=13 \qquad (2)$$

$$7x+5y-3z=26 \qquad (3).$$

今 y ヲ逐ヒ出スベキ未知數ニ撰ベバ

(1) ニ 3 ヲ掛ケ (2) ニ 2 ヲ掛ケ相引ケバ (1) ト (2) ノ間ニ y ハ逐出サル

$$\begin{array}{r} 18x+6y-15z=39 \\ 6x+6y-\ \ 4z=26 \\ \hline 12x\qquad -11z=13 \end{array} \qquad (4)$$

又(1)ニ 5 ヲ掛ケ (3)ニ 2 ヲ掛ケ相引ケバ (1)ト(3) ノ間ニ y ハ逐出サル

$$\begin{array}{r} 30x+10y-25z=65 \\ 14x+10y-\ \ 6z=52 \\ \hline 16x\qquad -19z=13 \end{array} \qquad (5)$$

(4) ニ 4 ヲ掛ケ (5) ニ 3 ヲ掛ケ相引ケバ

$$\begin{array}{r} 48x-44z=52 \\ 48x-57z=39 \\ \hline 13z=13 \end{array}$$

$$\therefore z=1.$$

$z=1$ ヲ (4) 式ニ代入シテ $x=2$

$z=1$ $x=2$ ヲ (1) 式ニ代入シテ $y=3$

即 $x=1$, $y=3$, $z=1$ ハ (1) (2) (3) ナル聯立一次方程式ノ根ナリ.

(例二) 多少ノ經驗ヲ經バ與ヘラレタル聯立方程式ヲ適宜ニ組合セテ其解キ方ヲ一層簡單ニナシ得ルコトアリ, 今例一ニ於ケル方程式ヲ用ヒテ其例ヲ示サム.

前例ニ於テ (1) ト (2) ヲ加ヘテ (3) ヲ引ケバ

$$2x-4z=0$$

即 $x=2z$ ヲ得.

(1) ト (2) ニ之レヲ代入シテ y ト z ニ於ケル二ツノ簡易ナル方程式ヲ得, 即次ノ如シ $6(2z)+2y-5z=13$

或ハ $2y+7z=13$ ....(i)

及ビ $3(2z)+3y-2z=13$

或ハ $3y+4z=13$ ....(ii)

依テ (i) (ii) ヨリ $z=1$ $y=3$ ヲ求メ得.

然ルニ $x=2z$

ナルガ故 $x=2$

(例三) 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\frac{x}{2}-1=\frac{y}{6}+1=\frac{z}{7}+2 \qquad (1)$$

$$\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=13 \qquad (2)$$

茲ニ (1) ナル式ハ其實二ツノ方程式ヲ與ヘラレタルト同シ, ソハ (1)

ニヨリテ次ノ式ヲ書キ得レバナリ.

$$\frac{x}{2}-1=\frac{y}{6}+1$$

$$\frac{x}{2}-1=\frac{z}{7}+2$$

ヨリテ (1) (2) ナル方程式ヲ與ヘシコトハ次ノ三ツノ方程式ヲ與ヘシコトヽ同シ.

$$\frac{x}{2}-1=\frac{y}{6}+1 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{x}{2}-1=\frac{z}{7}+2 \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=13 \qquad \text{(iii)}$$

依テ (i) (ii) (iii) 式ヨリ x, y, z ノ値ヲ見出サン

(i) (ii) (iii) 式ノ分母ヲ拂ヘバ夫々次ノ如シ.

$$3x-y=12 \qquad \text{(a)}$$

$$7x-2z=42 \qquad \text{(b)}$$

$$2y+3z=78 \qquad \text{(c)}$$

(b) ト (c) ヨリ z ヲ逐ヒ出セバ

$$21x+4y=282$$

a ノ兩邊ヲ 4 倍シ $\quad 12x-4y=48$

相引ケバ $\quad 33x \quad =330$

$$\therefore \quad x=10$$

$$\therefore \quad y=18$$

x ノ値ヲ (b) 式ニ代入シテ

$$z=14$$ ヲ得.

例四 次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=1 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=3 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=5 \qquad (3)$$

如斯未知數ヲ分母ニ有スル方程式ニ於テハ $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ヲ各未知數ト見テ解クヲ可トス, 決シテ分母ヲ拂フコトヲナスベカラズ, 若シ分母ヲ拂ヒテ解カントスルトキハ一次方程式ニナラズ甚ダシキ手數ヲ要スルコトアルベシ.

(1) 式ト (2) 式ヲ加フレバ

$$\frac{2}{z}=4 \quad \text{ヨリテ} \quad \frac{1}{z}=2 \quad \therefore z=\frac{1}{2}$$

(1) 式ト (3) 式ヲ加フレバ

$$\frac{2}{y}=6 \quad \text{ヨリテ} \quad \frac{1}{y}=3 \quad \therefore y=\frac{1}{3}$$

(2) 式ト (3) 式ヲ加フレバ

$$\frac{2}{x}=8 \quad \text{ヨリテ} \quad \frac{1}{x}=4 \quad \therefore x=\frac{1}{4}$$

問題

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ 2x+4y+z=7 \\ 3x+2y+9z=14 \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+4y+3z=17 \\ 3x+3y+z=16 \\ 2x+2y+z=11 \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ 2x+3y-z=5 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x+y+z=16 \\ x+2y+z=9 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=9 \\ y=2 \\ z=-4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 2x-3y+z=1 \\ 3x-y+2z=9 \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} 3x+2y-z=20 \\ 2x+3y+6z=70 \\ x-y+6z=41 \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=5 \\ y=6 \\ z=7 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} x-\dfrac{y}{5}=6 \\ y-\dfrac{z}{7}=8 \\ z-\dfrac{x}{2}=10 \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=8 \\ y=10 \\ z=14 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} \dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{3}=\dfrac{x+y}{2} \\ x+y+z=27 \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=3 \\ y=9 \\ z=15 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=36 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=28 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3y}+\dfrac{1}{2z}=20 \end{cases}$ 答 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{8} \\ y=\dfrac{1}{12} \\ z=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

第十章

聯立一次方程式應用問題

74. 第八章ニ說ケル問題ノ多クハ二ツノ未知數ヲ含ミタリ,然レトモ其關係甚ダ簡單ナリシヲ以テ容易ニ未知數ノ一ツヲ他ノ未知數ニテ著ハシ,其結果未知數一ツノ一次方程式ヲ得テ之レヲ解ケリ.然レトモ未知數間ノ關係稍複雜ナル問題ニ於テハ次ニ例示スルガ如ク,聯立方程式ヲ作リ之レヲ解クヲ便ナリトス,然シテ玆ニ注意ス可キハ已ニ述ベタル如ク,問題ニ於テ求ムル未知數ノ數ダケ方程式ノ數ヲ要スルコトナリ,即聯立方程式トナル所ノ問題ヲ解クニ際シテ問ヒノ演述ハ常ニ求メラルベキ數量ノ數丈ケ獨立シタル關係ノ方程式ヲ得ラルヽ如クナラザル可カラズ.

(例一) 二數ノ差ハ 11 ニシテ其和ノ五分ノ一ハ 9 ナリト云フ二數各如何.

x ヲ大ナル方ノ數トシ,y ヲ小ナル方ノ數トセバ

題意ニヨリ $x-y=11$ ………(1)

及 $\dfrac{x+y}{5}=9$

即 $x+y=45$ ········(2)

(1) (2) ノ聯立方程式ヨリ x,y ヲ求ムレバ可ナリ.

(1) ト (2) ヲ邊ル相加ヘテ　$2x=56$　$\therefore\ x=28$

(1) ト (2) ヲ邊ル相減シテ　$2y=34$　$\therefore\ y=17$

故ニ問題ニ於テ問フ所ノ數ハ　28 及 17　ナリ.

(例二)　甲乙二人アリ,甲ノ所持金ノ二倍ハ乙ノ所持金ノ三倍ヨリ36圓少シ,而テ今甲若シ乙ニ20圓ヲ其所持金中ヨリ與フレバ兩人ノ所持金相等シクナルベシト云フ,依テ問フ兩人ノ所持金如何ナルカ.

甲ノ所持金ヲ x 圓トシ乙ノ所持金ヲ y 圓トスレバ

題意ニヨリ. $\begin{cases} 2x=3y-36 & (1) \\ x-20=y+20 & (2). \end{cases}$

此二ツノ聯立方程式ヲ解ケバ可ナリ.

(1)及(2)式ヲ移項シテ次ノ(3)及(4)式ヲ得.

$$2x-3y=-36 \qquad (3)$$

$$x-y=40 \qquad (4)$$

(4)ニ2ヲ掛ケ之レヲ(1)ヨリ減ズレバ

$$y=116$$

$y=116$ ヲ　(4)ニ代入シテ

$$x-116=40$$

即　$x=116+40=156$

依テ　甲ノ所持金　156圓, 乙ノ所持金116圓ヲ以テ答トス.

驗メシ　156圓ノ二倍　ハ　312圓,

116圓ノ三倍　ハ　382圓,

$348-36=312$

$156-20=136$

$116+20=136$.

依テ上ノ答ハ正シキモノナリ.

(例三)　甲乙二人ノ所有金合セテ 50 圓ヲ有ス然ルニ甲ハ其所有金ノ半ヲ失ヒ乙ハ其所有金ノ三分ノ二ヲ失ヒシヲ以テ二人ノ中ニ唯20圓ヲ殘セリト云フ, 依テ問フ甲乙ノ初メノ所有金各幾何ナリシカ.

甲ノ所有金ヲ x 圓トシ　乙ノ所有金ヲ y 圓トスレバ

題意ニヨリ.　$x+y=50$ ············(1)

及ビ　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=20$

即　$3x+2y=120$ ············(2)

(1)式ニ 2 ヲ掛ケ (2) 式ヨリ相減ズレバ

$$x=20$$

x ノ値ヲ (1) 式ニ代入スレバ

$$20+y=50$$

$$\therefore\ y=30$$

即甲ノ所有金 20 圓, 乙ノ所有金 30 圓ヲ以テ答トス.

(例四)　A, B 二人アリ共ニ 15 日ニシテ一ツノ仕事ヲ終ヘ得ベシ, 今 A B 共ニ 6 日間工作シテ後 A ハ工作ヲ止メ B ノミニテ殘リヲ 24 日ヲ經テ之レヲ終ヘタリト云フ, 問フ A ノミニテハ全業ヲ幾日ニテ終リ得可キカ.

A ノ全業ヲ爲ス日數ヲ x トシ, B ノ全業ヲナス日數ヲ y トスレ

バ各一日ニテハ全業ノ$\frac{1}{x}$及ビ$\frac{1}{y}$ヲナシ得ベシ.

題意ニヨリ $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$$

又 $$6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)+\frac{24}{xy}=1$$

第二ノ式ヲ簡單ニセバ $$\frac{6}{x}+\frac{6}{y}+\frac{24}{y}=1$$

即 $$\frac{6}{x}+\frac{30}{y}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots (i)$$

第一ノ式ニ 30 ヲ掛クレバ $$\frac{30}{x}+\frac{30}{y}=\frac{30}{15}\cdots\cdots\cdots\cdots(ii)$$

(ii) ヨリ (i) ヲ減ジテ $$\frac{24}{x}=1$$

即 $$\frac{1}{x}=\frac{1}{24}$$

兩邊ニ $24x$ ヲ掛ケテ $$x=24$$

即 A ノミニテハ 24 日ヲ要ス.

(例五) 或人一年ニ 120 圓ノ所得アリ，其一部ハ $3\frac{1}{2}$分利ノ株ヨリ，又一部ハ 4 分利ノ株ヨリ收入ス，若シ $3\frac{1}{2}$分利ノ株相場 108 圓又 4 分利ノ株相場 120 圓ノ時悉皆賣拂フ時ハ 3672 圓ノ元金ヲ得ベシト云フ；兩種ノ株數各幾何ナルカ．但各株ノ額面 100圓ナリ.

一部ノ株數ヲ x トシ他ノ部ノ株數ヲ y トス.

題意ニヨリ $$100x\frac{3\frac{1}{2}}{100}+100y\frac{4}{100}=120$$

$$108x+120y=3672$$

第一ノ式ヲ簡單ニスレバ $$3\frac{1}{2}x+4y=120$$

分母ヲ拂ヘバ(兩邊ニ 2 ヲ掛ケルコト)

$$7x+8y=240\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

第二ノ式 $$108x+120y=3672\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) 兩邊ニ15ヲ掛ケ $$105x+120y=3600\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) ヨリ (3) ヲ相減ズレバ $$3x=72$$

$$\therefore\quad x=24$$

x ノ値ヲ (1) ニ代入スレバ

$$7\times24+8y=240$$

即 $$8y=72$$

$$\therefore\quad y=9$$

答 $3\frac{1}{2}$分利付ハ 24 株, 4 分利付ハ 9 株ナリ.

(例六) 分數アリ. 分母ト分子ノ差ハ 12 ナリ，若分母ト分子ニ 5 ヲ加フル時ハ$\frac{3}{4}$トナルベシト云フ原トノ分數幾何.

x ヲ分子ノ數トシyヲ分母ノ數トスレバ通常ノ分數ハ分子ハ分母ヨリ小ナリ.

題意ニヨリ $$y-x=12\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x+5}{y+5}=\frac{3}{4}$$

第二ノ式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$4x+20=3y+15$$

移項スレバ $$4x-3y=-5\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)式ニ 3 ヲ掛ケ $$-3x+3y=36\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2) ト (3) ヲ邊々相加フレバ

$$x=31$$

x ノ値ヲ(1)式ニ代入セバ　$y-31=12$

即 $y=12+31=43$

即原分數 $\frac{x}{y}$ ハ $\frac{31}{43}$ ナリ.

(例七)　佛國鐵道ニ於テハ切符ノ代價ハ乘客旅行ノ遠近ニ比例シ手荷物ハ25「キログラム」迄ハ無賃ニシテ之レヨリ以上ハ矢張リ旅行ノ遠近ニ從テ一「キログラム」毎ニ賃錢ヲ要ス.今50「キログラム」ノ荷物ヲ携ヘ200「マイル」旅行セバ25「フランク」ヲ費シ,又35「キログラム」ノ荷物ヲ携ヘ150「マイル」旅行セバ$16\frac{1}{2}$「フランク」ヲ費ストスレバ100「キログラム」ノ荷物ヲ携ヘ100「マイル」ノ旅行ハ幾「フランク」ヲ要スルカ.

一人一「マイル」ノ乘車賃金ヲx「フランク」トシ又一「キログラム」一「マイル」送ル荷物賃金ヲy「フランク」トスレバ

題意ニヨリ　$200x+200(50-25)y=25$

$150x+150(35-25)y=16\frac{1}{2}$

始メノ式ノ兩邊ヲ25ニテ除シ括弧ヲ去レバ

$$8x+200y=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

第二ノ式ノ兩邊ヲ3ニテ除シ括弧ヲ去レバ

$$50x+500y=\frac{11}{2} \quad\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

(i)ニ5ヲ掛ケテ　$40x+1000y=5 \quad\cdots\cdots\cdots(\text{iii})$

(ii)ニ2ヲ掛ケテ　$100x+1000y=11 \quad\cdots\cdots\cdots(\text{iv})$

(iv)ヨリ(iii)ヲ減ズレバ　$60x=6$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{10}$$

x ノ値ヲ(i)式ニ代入スレバ

$$8\times\frac{1}{10}+200y=1$$

即　$200y=\frac{2}{10}$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{1000}$$

故ニ 100「マイル」ノ乘車賃金ハ　$\frac{1}{10}\times100=10$「フランク」

又 100「キログラム」ノ100「マイル」ノ荷物賃金ハ

$$\frac{1}{1000}\times(100-25)\times100=7\frac{1}{2}$$

故ニ總費用ハ　$10+7\frac{1}{2}=17\frac{1}{2}$

即 17「フランク」半ヲ要ス.

例題ノ答ニ於ケル試メシハ諸者自ラ之レヲ試ムベシ.

問題

(1) 茶六貫目ト砂糖七貫目ノ價合セテ四十圓五十錢ニシテ,茶七貫目ト砂糖六貫目ノ價合セテ四十四圓ナリト云フ;各一貫目ノ價如何.

答茶五圓,砂糖一圓五十錢

(2) 馬六頭ト牛七頭ノ價合セテ二百五十圓ニシテ馬十一頭ト牛十三頭ノ價合セテ四百六十一圓ナリト云フ, 各一頭ノ價如何.

答 馬二十三圓, 牛十六圓

(3) 甲乙丙丁ノ四人アリ其所持金合セテ二百九十圓アリ,而シテ甲ハ丙ノ二倍, 乙ハ丁ノ三倍, 又丙丁合セテ甲ヨリ五十圓少ナシト云

フ，各所持金如何.

答 甲百四十圓，乙六十圓，丙七十圓，丁二十圓

(4) 乙ノ歳ノ四倍ハ甲ノ歳ヨリ多キコト二十歳ニシテ甲ノ歳ノ三分ノ一ハ乙ノ歳ヨリ二歳小ナリ，兩人ノ年齢如何.

答 甲三十六歳，乙十四歳

(5) 或ル分數ノ分子ヨリ1ヲ引キ其分母ニ2ヲ加フレバ$\frac{1}{2}$トナリ，其分子ヨリ7.其分母ヨリ2ヲ引ケバ$\frac{1}{3}$トナルト云フ;其分數如何.

答 $\frac{15}{26}$

(6) 二個ノ數字ヨリ成リタル數アリ，其數ト之レノ數字ノ順序ヲ逆ニシタル數トノ和ハ110ニシテ其數字ノ差ハ6ナリト云フ; 原トノ數ヲ問フ.

答 28. 82

(7) 或ル人廿錢銀貨若干ト五錢銀貨若干ヲ所持ス;今其廿錢銀貨ノ數ト五錢銀貨ノ數トヲ取リ換ヘルトキハ金額一圓十五錢トナリ，又廿錢銀貨ヲ二錢銅貨ニ五錢銅貨ヲ二厘錢ニ取リ換ヘルトキハ七錢トナルト云フ;其人ノ所持スル金額如何.

答 八十五錢

(8) 袋中ニ白黑ノ球各々若干ヲ有ス，今白球ノ數ノ半分ハ黑球ノ數ノ三分ノ一ニ等シク，全數ノ二倍ハ黑球ノ數ノ三倍ヨリ四個多キコトヲ知ル，白黑ノ球ノ數各々如何.

答 白八個，黑十二個

(9) 大人十人ト小兒八人トノ給金合セテ三圓七十錢ナリ.大人四人ノ給金若シ小兒六人ノ給金ヨリ十錢多ク受取ルトセバ，大人小兒各一人ノ給金如何.

答 大人二十五錢 小兒十五錢

(10) 二人ノ旅行者二十七里ヲ隔テタル兩所ヨリ同時ニ出發セリ;

今此二人同シ方向ニ行クトキハ十八時間ニテ追及シ相向テ行クトキハ六時間ニテ出會フト云フ，兩人一時間ノ速サ各幾何ナルカ.

答 三里，一里半

(11) 或ル金額ヲ年六分ノ利ニテ若干年間貸ストキハ其利子元金ヲ超過スルコト百圓ナリ，若シ又其金額ヲ年三分ノ利ニテ前ノ年數ノ四分ノ一ノ間貸ストキハ其利子ノ元金ヨリ少ナキコト四百二十五圓ナリト云フ; 元金如何.

答 五百圓

(12) 或人金二万圓ヲ有ス，其一部ヲ以テ五分利附公債証書額面百圓ニ就キ八十五圓ノ相場ニテ若干枚ヲ買ヒ，其殘リヲ年四分ノ利ニテ預ケタリ.之レニ依リテ此人一千五十六圓ノ歳入ヲ得ルト云フ;公債証書額面ノ總高ヲ問フ.

答 一萬五千圓

(13) 父其財産ヲ一男一女ニ分與スルアリ.其財産ハ五分利附公債証書ト一割二分ノ配當ヲ受クベキ鐵道株券トヨリ成ル; 此人男子ニ公債証書四分ノ一ト鐵道株券三分ノ二トヲ與ヘ，其殘ハ盡ク女子ニ與ヘタリ，由テ，二子ノ受クル所額面ニ於テハ同一ナレ共歳入ニ於テハ男子ハ女子ヨリ 700圓多シト云フ依テ女子ノ歳入ヲ問フ.

答 一千九百五十圓

(14) 男十五人女十二人小兒十八人ノ一日ノ賃錢合シテ9圓ナリ，而シテ男六人ノ賃錢ハ女八人ノ賃錢ヨリ12錢多シト云フ然ラバ女一人ノ賃錢如何.

答 25錢

(15) 三位ノ數アリ，其數字ノ和ハ11ニシテ其尾位ノ數ハ首位ノ數ノ二倍ナリ，今若シ其數字ノ位置ヲ轉倒セバ元トノ數ヨリ297大ナル

數トナルベシト云フ．元數如何．　答　326

(16) 或學校ノ試驗ニ於テ受驗者ノ四分ノ一ハ落第セリ，而シテ及第點ハ總受驗者ノ平均點數ヨリ11點少ナクシテ落第者ノ平均點數ニ二倍スト云フ，及第點ヲ問フ．

75 參考ノ爲問題答案ノ書キ方數例ヲ示サム

問　題

(1) $x+a, x+b$ 及 $x+c$ ノ連乘積ノ結果ヲ推シテ $a-x, a-y$ 及 $a-z$ ノ連乘積ヲ直チニ記セ

(2) $75a^2b^3c^5-15a^3b^4c^3$ ヲ $5a^2bc^2$ ニテ除スベシ．

(3) $ab-3(a-1)(b-1)+3(a-2)(b-2)-(a-3)(b-3)=0$ ナルコトヲ示セ．

(4) $a+b+c$ ヲ以テ $a^3+b^3+c^3-3abc$ ヲ除シタル結果ヲ推シテ除法ヲ用ヒズシテ $x^3+y^3-1+3xy$ ヲ $x+y-1$ ニテ除シタル商ヲ求ム．

(5) 或ル士官其隊卒ヲ厚サ十二列ノ中空ナル正方形ニ排列セリ，而シテ其人員ハ1296ナリト云フ，一邊ノ人員如何．

(6) 5時ト6時トノ間ニ於テ時計ノ兩針相重ナル時刻ヲ問フ．

答　案

(1) $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+\overset{ac}{\cancel{ad}}+bc)x+abc$

然ルニ

$(a-x)(a-y)(a-z)=\{a+(-x)\}\{a+(-y)\}\{a+(-z)\}$

上ノ結果ニ倣ヒテ

$=a^3+\{(-x)+(-y)+(-2)\}a^2+\{(-x)(-y)+(-x)(-z)+(-y)(-z)\}a+)-x)(-y)(-z)$

$=a^3+(-x-y-z)a^2+(+xy+xz+yz)a-xyz$

$=\underline{\underline{a^3-(x+y+z)a^2+(xy+xz+yz)a-xyz}}$

(2) $5a^2bc^2\overline{)75a^2b^3c^5-15a^3b^4c^3}(\underline{\underline{15b^2c^3-3ab^3c}}$

0

答　$15b^2c^3-3ab^3c$

(3) $ab-3(a-1)(b-1)+3(a-2)(b-2)-(a-3)(b-3)$

$=ab-3(ab-3(ab-a-b+1)+3(ab-2a-2b+4)-(ab-3a-3b+9)$

$=ab-3ab+3a+3b-3+3ab-6a-6b+12-ab+3a+3b-9$

$=ab-ab-3ab+3ab+3a-6a+3a+3b-6b+3b-3+12-9$

同類項ヲ合スレバ

$\underline{\underline{=0}}$

(4) $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a+b+c}=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ ナリ

故ニ　$\dfrac{x^3+y^3-1+3xy}{x+y-1}=\dfrac{x^3+y^3+(-1)^3-3xy(-1)}{x+y+(-1)}$

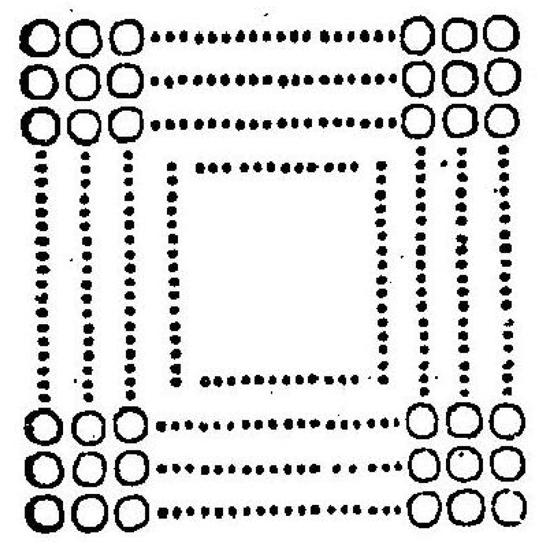
$=x^2+y^2+(-1)^2-xy-x(-1)-y(-1)$

$=x^2+y^2+1-xy+x+y$

$=\underline{\underline{x^2+y^2-xy+x+y+1}}$

(5) 一邊ノ人員ヲ x 人トスレバ一列内ニ入ル毎ニ二人ヲ減ズルコト明カナリ故ニ中空ノ邊ハ $x-24$ ナリ．

故ニ　$x^2-(x-24)^2=1296$



$x^2-x^2+48x-576=1296$

$48x=1872$

$\therefore$

$x=39$

答　三十九人

(6)　5時ノ時ニ在リテ短針ガ長針ニ先ツコト25分(此分ハ時間ノ分ノ意ニアラズ時間ヲ表スベキ時計ニ畫セル區劃ヲ云フ)ナルガ故ニ5時後x分ニシテ兩針相重ナルモノトセバ長針ガx分進ム間ニ短針ハ$x-25$ノ場所ヲ進ム可シ,然ルニ長針ノ速サハ短針ノ速サノ12倍ナルガ故ニ次ノ方程式ヲ得ルナリ

$$x=12(x-25)$$

即　$$11x=300$$

$$\therefore \quad x=\frac{300}{11}=27.\frac{3}{11}\text{ 分.}$$

依リテ所求ノ時刻ハ

五時二十七分ト十一分ノ三ナリ

第十一章
因數

76. 此章ニ於テ有理整式ノ因數ヲ求ムル方法ノ或ル簡單ナル場合ヲ說カントス(式ノ因數トハ其式ヲ割リ切リ得ベキ有理整式ヲ指スコトト知ルベシ)

77. 單項ナル因數

或ル文字ガ一ツノ式ノ各項ニ通シテ何レニモ存在スル片ハ其文字ハ其式ノ因數ナリ.

例ヘバ　$ab+ac$　ノ一ツノ因數ハ a ナリ. 今 a ニテコノ式ヲ割ルトキハ其商ハ　$b+c$　トナル

依テ　$$ab+ac=a(b+c)$$

而シテ　$ab+ac$　ヲ　$b+c$　ニテ割リ切リ得ルコト明カナリ. 故ニ $b+c$ モ亦上ノ式ノ因數ナリ.

其他　a^2b+ab^2　ニ於テ　ab　ハ此式ノ一ツノ因數ナルヲ見ル, ab ニテコノ式ヲ割リテ其商 $a+b$ ヲ得,依テ　$a+b$ モ a^2b+ab^2　ヲ割リ切リ得ルヤ論ナシ故ニ　$a+b$　モ亦上式ノ一ツノ因數ナリ.

次ニ　$$3xy^2+6x^2y=3xy(y^2+2x)$$

ナルガ故　$3xy$　并ニ　y^2+2x　ハ各　$3xy^3+6x^2y$　ノ因數ナリ.

78. 既知ノ公式ニ比較シテ索メ得ベキ因數

與ヘラレタル代數式ガ掛ケ算ニ於ケル公式ノ結果ト同形ナルコトアリ此場合ニハ其式ノ因數ハ其公式ニヨリテ直チニ書キ下スコトヲ得ベシ. 次ニ之レヲ說示セン.

78. 公式

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

ハ巳ニ知ル所ノモノナリ.

故ニ二數ノ平方ノ和ニ其積ノ二倍ヲ加ヘテ成ル所ノ三項式ハ其二數ノ和ノ平方ニ等シク又二數ノ平方ノ和ヨリ其積ノ二倍ヲ減シテ成ル

三項式ハ其二數ノ差ノ平方ニ等シ.

(例一.) $x^2+6xy+9y^2$ ハ x 及 $3y$ ノ平方ノ和ニ x ト $3y$ トノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノナリ.

故ニ $x^2+6xy+9y^2=(x+3y)^2$

(例二.) $4a^2+4a+1$ ハ $2a$ 及 1 ノ平方ノ和ニ $2a$ ト 1 トノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノナリ.

故ニ $4a^2+4a+1=(2a+1)^2$

(例三.) $a^2-10ab+25b^2$ ハ a 及 $5b$ ノ平方ノ方ヨリ a ト $5b$ トノ積ノ二倍ヲ引キタルモノナリ.

故ニ第二ノ公式ニヨリ.

$$a^2-10ab+25b^2=(a-5b)^2$$

(例四.) $a^3-4a^2b^2+4ab^4=a(a^2-4ab^2+4b^4)$

故ニ $a^3-4a^2b^2+4ab^4$ ノ因數ハ下ノ如シ

$$a\{a^2-2a(2b^2)+(2b^2)^2\}=a(a-2b^2)^2$$

(例五.) $9x^2-2y^2$

今 $(\sqrt{2})^2=2$ ナルガ故

$$9x^2-2y^2=(3x)^2-(\sqrt{2}y)^2$$

$$=(3x+\sqrt{2}y)(3x-\sqrt{2}y)$$

注意 $3x+\sqrt{2}y$, $3x-\sqrt{2}y$ ハ文字ニ就キ考ヘテ有理式ナリ.

(例六.) $9a^3-4ab^2=a\{(3a)^2-(2b)^2\}$

$$=a(3a+2b)(3a-2b)$$

(例七.) $x^4-y^4=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

$$=(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$$

(例八.) $(x-y)^2-z^2=(x-y+z)(x-y-z)$

問題

上ノ例ニ倣ヒ次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

(1) a^2-25y^4　　(2) $1-100x^2$

(3) a^2-5　　(4) x^2-3y^2

(5) x^4-16y^4　　(6) $81a^4x^4-y^4$

(7) x^3y-4xy^3　　(8) $25xyz^2-20x^3y^3$

(9) $(a-2b+c)^2\pm(a-c)^2$　　(10) $(3x^2+x-2)^2\pm(x^2-x-2)^2$

次ノ各式ヲ因數ニ分解シテ其値ヲ計算セヨ.

(11) $(575)^2-(425)^2$　　(12) $(753)^2-(253)^2$

(13) $(121)^2-(263)^2$　　(14) $(1121)^2-(639)^2$

注意 一般ニ $(a-b)^2=(b-a)^2$ ナルガ故上ノ結果即 $a(a-2b)^2$ ハ又 $a(2b-a)^2$ トモ書キ換ヘ得ベシ.

凡テ一ツノ式ガ二ツノ因數ノ積ニ等シキトキハ，其式ハ其二因數ノ符號ヲ悉ク變ジタルモノヽ積ニモ等シ.

問題

上ノ例ニ倣ヒテ次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ

(1) $16x^2+8x+1$.

(2) $9x^2-6x+1$

(3) $1-8x^2+16x^4$

(4) $4x^2-12xy+9y^2$

(5) $9x^4+24x^2y^2+16y^4$

(6) $3a^2+6ab+3b^2$

(7) $(x+y)^2+2(x+y)z+z^2$

---

79. 公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

ニ依リ 二ツノ數ノ平方ノ差ハ其二數ノ和ト差トノ積ニ等シ.

次ニ數例ヲ示サム.

(例一) x^2-9 ヲ因數ニ分解センニ

$x^2-9=x^2-3^2$ ナルヲ以テ上ノ公式ニヨリ

$=(x+3)(x-3)$

(例二) $x^2-4y^2=x^2-(2y)^2$

$=(x+2y)(x-2y)$

80. 乘ケ算ニ於テ得ル公式

$$x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$$

$$x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$$

モ亦應用セラルヽコトアリ.

今其例ヲ擧ゲンニ

(例一) $8a^3+64b^3=(2a)^3+(4b)^3$

$=(2a+4b)(4a^2-8ab+16b^2)$

(例二) $x^3y^3-\frac{1}{8}z^3=(xy-\frac{1}{2}z)(x^2y^2+\frac{1}{2}xyz+\frac{1}{4}z^2)$

(例三) $a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

問題

(1) x^3+8y^3

(2) $8x^3-y^3$

(3) a^3-8b^6

(4) $27x^3-\frac{1}{8}x^3y^3$

(5) $8a^3y^6+1$

(6) a^6-64

(7) $(x+2y)^3+(y+2x)^3$

---

81. 乘ケ算ニテ得ル次ノ結果

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

ニ比較シテ答ヘラレタル代數式ノ因數ヲ見出スコトヲ得ル場合アリ

例ヘバ次ノ如シ.

(例一) $x^2+11x+30$ ヲ因數ニ分解スルコト.

今因數ヲ $x+a, x+b$ トスレバ $ab=30, a+b=11$ ナラザル可カラズ,

依テ二數ノ積 30 ニシテ其和 11 ナルモノヲ求ムルヲ要ス, 偖二數

ノ積ガ 30 ナルベキ數ハ.

1 ト 30

2 ト 15

$\left.\begin{array}{l}3\ \text{ト}\ 10\\5\ \text{ト}\ 6\end{array}\right\}$ ノ外ナシ

此中最後ノ5ト6ハ其和11ナルガ故

$$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$$

ナルヲ知ル.

(例二) $x^2-8x+15$ ヲ因數ニ分解スルコト.

前例ノ如ク二數ノ積ハ15ニシテ其和−8ナルモノヲ索ムルコトヲ要ス. 扨二數ノ和ハ負ニシテ其積ハ正ナル故此二數ハ共ニ負ナルモノナラザル可カラズ. 仍テ15ヲ負ノ二因數ニ分解セシカ

$\left.\begin{array}{l}-15\ \text{ト}\ -1\\-3\ \text{ト}\ -5\end{array}\right\}$ ノ何レカナリ.

然ルニ後ノモノハ其和丁度−8トナル故ニ

$$x^2-8x+15=(x-3)(x-5).$$

(例三) $x^2+3x-18$ ヲ因數ニ分解スルコト.

此例ニ於テハ二數ノ積ガ −18 ニシテ其和ハ3ナルモノヲ索ムルヲ要ス. 扨二數ノ積ガ負ナル故二數ノ中一ツハ正號一ツハ負號ノ數ナラザルベカラズ,仍テ18ヲ二因數ニ分解シテ其差ガ3ナルニハ6ト3ナラザル可カラズ,而シテ二數ノ和ハ正ナルベキガ故(何トナレバ與ヘラレタル三項式ノ中央ノ項正ナル故)6ヲ正トシ3ヲ負トシテ

$$x^2+3x-18=(x+6)(x-3)$$

〔若シ與ヘラレタル代數式ガ

$$x^2-3x-18$$

ナリシナラバ6ヲ負トシ3ヲ正トシテ

$$x^2-3x-18=(x-6)(x+3)〕.$$

(例四) $18+3xy-x^2y^2$ ヲ因數ニ分解スルコト.

$$18+3xy-x^2y^2=-(x^2y^2-3xy-18)$$
$$=-\{(xy)^2-3(xy)-18\}$$
$$=-(xy-6)(xy+3)$$
$$=(6-xy)(xy+3).$$

問題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

(1) a^2+4a+3 (2) $x^2-9x+14$

(3) $x^2+8x+12$ (4) $x^2-19x+90$

(5) $x^2-21x+80$ (6) $x^2-14xy+49y^2$

(6) ノ答 $(x-7y)(x-7y)$

(7) $x^2-3x-10$ (8) $x^2+12x-28$

(9) $t^2-16t-260$ (10) x^4+10x^2+24

(11) x^3-5x^2-24x

82. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

ナリ,故ニ一般ニ px^2+qx+r ナル形ノ式ガ二因數 $ax+b$ ト $cx+d$ トノ積ナルトキハ $ac=p$, $bd=r$, $ad+bc=q$ ナリ. 與ヘラレタル代數式ガ簡單ナル場合ニハ視察ニヨリテ此等ノ關係ニ適合スル $a,b,c,$…

aノ値ヲ索メ以テ因數ニ分解シ得ベシ.(例一). $7x^2-19x-6$ ヲ因數ニ分解センニ

先ツ初メノ $7x^2$ ハ $7x$ ト x トノ積, 又終リノ項ノ 6 ハ 3 ト 2 トノ積或ハ 1 ト 6 トノ積ナルガ故試ミニ

$$(7x\quad 3)\,(x\quad 2)$$

ト書ク, 但シ 3 ト 2 トハ反對ノ符號ヲ有セザル可カラズ.

是等ノ數ハ第一項ト等三項トニハ $7x^2$ ト -6 ヲ生ズベケレ圧中項即第二項ニハ $7\times2-3\times1$ トナリテ正當ナル係數ヲ生ゼシムルコト能ハズ.

次ニ $(7x\quad 2)\,(x\quad 3)$

ヲ試ムベシ. $7\times3-2\times1=19$ ナルヲ以テ若シ負數ガ超過スル樣ニ符號ヲ附スル圧ハ適當ナルモノトナル, 依テ

$$7x^2-19x-6=(7x+2)\,(x-3)$$

ナルベキヲ知ル. (讀者暗算ニテ之レヲ檢セヨ)

實際ノ場合ニ於テハ此等ノ手數ヲ悉ク書クベキ要ナク學者ハ容易ニ種々ノ場合ヲ速カニ繰返シ且ツ不適當ナル結合ハ直チニ排除シ得ベキヲ見ルベシ.

因數分解ニ際シ次ニ揭グル注意ハ特ニ緊要ナルコナリ.

第一 三項式ノ第三項式ガ正ナラバ其因數ノ第二項ハ共ニ同符號(正ト正或ハ負ト負)ヲ有シ且ツ其符號ハ三項式ノ中央ノ項ノ符號ト一同ナリ.

第二 三項式ノ第三項ガ負ナラバ其因數ノ第二項ハ反對ノ符號ヲ

有ス.

(例二.) 次ノ二式ヲ因數ニ分解セン

$$14x^2+29x-15\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$14x^2-29x-15\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

各々ノ場合ニ於テ最初ノ試メシトシテ

$$(7x\quad 3)\,(2x\quad 5)$$

ト書クベシ, 但シ 3 ト 5 トハ反對ノ符號ヲ有セザル可カラズ.

$7\times5-3\times2=29$ ナルヲ以テ此上ハ唯各數字ニ適當ノ符號ヲ附スレバ可ナリ. 而シテ

(1) ニ於テハ正數ガ超過セザル可カラズ

(2) ニ於テハ負數ガ超過セザル可カラズ

依テ $14x^2+29x-15=(7x-3)\,(2x+5)$

$14x^2-29x-15=(7x+3)\,(2x-5)$

(例三.) 次ノ二式ヲ因數ニ分解セン.

$$5x^2+17x+6\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$5x^2-17x+6\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ニ於テハ 6 ヲ生ズベキ因數ハ共ニ正ナリ

(2) ニ於テハ 6 ヲ生ズベキ因數ハ共ニ負ナリ

故ニ (1) ニ於テハ $(5x+\quad)\,(x+\quad)$ ト書クベシ

又 (2) ニ於テハ $(5x-\quad)\,(x-\quad)$ ト書クベシ

然ルニ $5\times3+1\times2=17$ ナルヲ以テ次ノ結果ヲ得ベシ.

$$5x^2+17x+6=(5x+2)\,(x+3)$$

$$5x^2-17x+6=(5x-2)(x-3)$$

(例四) $9x^2-48xy+64y^2=(3x-8y)(3x-8y)$

$=(3x-8y)^2.$

(例五) $6+7x-5x^2=-(5x^2-7x-6)$

$=-(5x+3)(x-2)$

$=\ (5x+3)(2-x).$

問　　題

次ノ各式ヲ因數ニ分解スベシ.

(1)	$2x^2+3x+1.$	(2)	$3x^2+5x+2$
(3)	$2x^2+5x+2$	(4)	$3x^2+10x+3$
(5)	$3x^2+8x+4$	(6)	$2x^2+11x+5$
(7)	$5x^2+11x+2$	(8)	$2x^2+3x-2$
(9)	$3x^2+x-2$	(10)	$4x^2+11x-3$
(11)	$6x^2-7x-3$	(12)	$2x^2-x-15$
(13)	$15x^2-77x+10$	(14)	$21x^2-29xy-4y^2$
(15)	$2-3x-2x^2$	(16)	$3+11x-4x^2$
(17)	$6+5x-6x^2$	(18)	$4-5x-6x^2$

注意 得タル因數ヲ相乘シテ其結果ガ果シテ原式ニ一致スルカヲ驗メスハ肝要ナルコナリ.

83. 與ヘラレタル式ノ項ノ配列ノ順序ヲ變ヘテ之レヲ適宜ニ括リ合セテ其因數ヲ見出シ得ルコトアリ.(此レニハ實ニ一定ノ規則アルコトナク單ニ熟練,考慮ノ結果得ラルヽ所ノモノナリ.)

次ニコレニ就キ注意ヲ要スベキコト一二ヲ擧ケン.

第一 與ヘラレタル式ノ中ニ存スル文字ノ中ニテ其單ニ第一羃トナリテノミ現ハレ居ルモノアルトキハ其文字ヲ含ム項ト含マザル項トヲ區分シテ考ヘ以テ因數ヲ見出シ得ルコトアリ.

(例一) $ab+bc+cd+da$ ノ因數ヲ求メンニ

此式中 a ヲ含ム項ト含マザル項トヲ區分スレバ

$a(b+d)+bc+cd$

トナル, 即チ　$a(b+d)+c(b+d)$

識ハ $(b+d)$ ニテ括クレバ $(a+c)(b+d)$ ナリ.

依テ　$ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d).$

(例二) $ax+by+bx+ay$ ヲ因數ニ分解センニ

$ax+by+bx+ay=ax+ay+bx+by$

$=a(x+y)+b(x+y)$

$=(x+y)(a+b).$

(例三) $ax^3-x+a-1$ ヲ因數ニ分解センニ,項ノ順序ヲ換ヘテ

$ax^3+a-x-1$ ト書キコレヲ括弧ニテ適當ニ括リテ

$a(x^3+1)-(x+1)$ ト書クトキハ此式ハ $x+1$ ナル因數ヲ有スルコト明カナリ.

$a(x^3+1)-(x+1)=a(x+1)(x^2-x+1)-(x+1)$　(80條)

$=(x+1)\{a(x^2-x+1)-1\}$

尙又次ノ如クシテ索メ得ル場合アリ.

(例四) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ノ因數ヲ求ム.

a ニ關シテ遞降冪ニ排列スレバ

$$a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$$

トナリ此式ハ $(b-c)$ ナル因數ヲ有スルヤ明カナリ.依テ $(b-c)$ ニテ括クレバ

$$原式=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}=(b-c)(a-b)(a-c)$$

(例五) $x^2+(a+b+c)x+ab+ac$ ノ因數ヲ求ム.

$$原式 =a(x+b+c)+x^2+bx+cx$$
$$=(a+x)(x+b+c).$$

第二 二次式ノ因數ヲ求ムルニ際シ今迄ノ方法ニテ得難キモノハ下ノ如クシテ之レヲ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ ニ誘導シテ求ムルコトヲ得(二次式ニ準シテ他ノ之レニ類似スル式ニモ應用スルコトヲ得)

(例一) $3x^2-11x-20$ ノ因數ヲ求ム.

$$3x^2-11x-20=\frac{1}{3}\{(3x)^2-11(3x)-60\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{(3x)^2-11(3x)+\left(\frac{11}{2}\right)^2-\frac{121}{4}-60\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(3x-\frac{11}{2}\right)^2-\frac{361}{4}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left\{\left(3x-\frac{11}{2}+\frac{19}{2}\right)\left(3x-\frac{11}{2}-\frac{19}{2}\right)\right\}$$
$$=(3x+4)(x-5).$$

(例二) $x^2+4x+3=x^2+4x+4-4+3$

$$=x^2+4x+4-1$$

$$=(x+2)^2-1$$
$$=(x+2+1)(x+2-1)$$
$$\therefore\ x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$$

上ノ方法ハ a^2-b^2 ナル形ニ導カンガ為メ即文字ヲ含メル部分ヲ完全ナル平方數ニナサンガ為メニ x ノ係數ノ半分ノ平方ヲ加ヘ又引クナリ,而シテ斯クスルモ少シモ式ノ値ヲ變ズルコトナキハ勿論ナリ.

(例三) $a^2+3b^2-c^2+2bc-4ab$ ノ因數ヲ求ム.

$$原式=a^2-4ab+4b^2-4b^2+3b^2-c^2+2bc$$
$$=(a-2b)^2-(b-c)^2$$
$$=(a-b-c)(a-3b+c).$$

(例四) x^4-10x^2+9 ノ因數ヲ求ム. $x^4-10x^2+5^2-5^2+9$

$(x^2-5)^2-$

$$x^4-10x^2+9=(x^2-5)^2-16$$
$$=(x^2-1)(x^2-9)$$
$$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3).$$

(例五) x^4+x^2+1 ノ因數ヲ求ム.

$$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$$
$$=(x^2+1)^2-x^2$$
$$=(x^2+1+x)(x^2+1-x).$$

問題

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ

(1) $1+64x^3y^3$　　(2) $16a^4-625x^4$

(3) $91x^3+1$　　(4) $x^2-\frac{3}{4}xy-\frac{1}{4}y^2$

(5) x^5-81x　　(6) $(x+y)^4-(x-y)^4$

(7) $(a+b-3c)^2-9c^2$　　(8) $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2$

(9) $(a+b+c+d)^2-(a-b+c-d)^2$　　(10) $(2x+3y)^3+(3x+2y)^3$

(11) $x^2+\left(m+\frac{1}{m}\right)xy+y^2$　　(12) $72(x^2-1)-17x$

(13) x^4-5x^2+4　　(14) $x^4-13x^2y^2+36y^4$

(15) $(x+y)^2-7z(x+y)+10z^2$　　(16) $x(x+4)-y(y+4)$.

(17) x^3+x^2-4x-4　　[答　$(x+1)(x-2)(x+2)$]

(18) $2x^3-3x^2-2x+3$　　[答　$(x-1)(x+1)(2x-3)$]

(19) $x^3+bx^2-a^2x-a^2b$　　[答　$(x+b)(x-a)(x+a)$]

(20) bx^3+ax^2+bx+a　　[答　$(bx+a)(x^2+1)$]

(21) $(a+2b)a^3-(b+2a)b^3$　　[答　$(a-b)(a+b)^3$]

第十二章

最大公約數

84. 二ツ或ハ二ツ以上ノ整式ヲ割リ切ル整式ヲ此レ等ノ式ノ**公約數**ト稱ス. 例ヘバ $7ab$ ハ $21ab^2$ ト $14ab^3$ トノ公約數ナリ.

多クノ整式ノ公約數ハ通例幾個モアリト雖其中ニテ次數ノ最モ大ナルモノ即最高次ナルモノヲ**最大公約數**ト稱ス. (最大公約數ヲ

通例 G.C.M. ト畧記ス, コレ Greatest Common Measure ノ畧ナリ).

例ヘバ二ツノ整式 x^2yz, x^3y^2 ヲ考フルニ x, x^2, y, xy, x^2y ハ何レモ其公約數ナリ,而シテ此等ノ中 x^2y ノ次數ガ最モ大ナルガ故ニ之レヲ與ヘラレタル二式ノ最大公約數ト稱ス.

若シモ多クノ式ノ公約數ガ唯一ツナルトキハ此公約數ガ即其最大公約數ナリ,何トナレバ之レヨリ高次ノ公約數存セザレバナリ.

85. 單項式及因數ノ明カナル多項式ノ G.C.M ハ視察ニヨリテ之レヲ發見スルコト容易ナリ.

(例一) x^4y^2z ト mx^3y^3 トノ G.C.M. ヲ索ム.

此二ツノ共通ナル文字ハ x ト y ナリ而シテ二ツノ式ノ雙方ヲ割リ切ル x ノ最高羃ハ x^3 又 y ノ最高羃ハ y^2 ナリ即所求ノ最大公約數ハ x^3y^2 ナリ.

(例二) $a^2b^3c^2x^5y$, $a^4bd^2x^2y^6$, $a^3b^5c^2x^5y^3$ ナル三ツノ式ノ G.C.M. ヲ索ム.

此三ツノ式ニ共通ナル文字ハ a ト b ト x ト y トナリ, 而シテ三ツノ式ニ皆割リ切ル所ノ a ノ最高羃ハ a^2 ニシテ b ノハ矢張 b, x ニ就テハ x^2 又 y ニ就テハ矢張リ y ナリ, 故ニ所求ノ G.C.M. ハ a^2bx^2y ナリ.

上ノ二例ノ示スガ如ク多クノ示ノ最大公約數ハ總テノ式ニ公通ナル文字ノ此レ等總テノ式ヲ割リ切ル最高羃ノ積ナリ.

注意ヲ要スルハ或ル文字ノ總テノ式ヲ割リ切ル最高羃ハ此等ノ式中ニアル此文字ノ羃ノ中ニテハ指數ノ最モ小ナルモノナルコトナリ.

例ヘバ例二ノ諸式ニ於ケル a ノ羃ハ夫々ニ a^2, a^4, a^3 ニシテ此中指數ノ最モ小ナルモノハ a^2 ナリ，乃チ a^2 ハ此等ノ總テノ式ヲ割リ切ル a ノ最高羃ナリ.

與ヘラレタル式ガ數係數ヲ有スルトキハ此レ等ノ數係數ノ最大公約數ヲ以テ所求ノ最大公約數ノ數係數トナスベシ.

(例三)　$48a^3b^2c$ ト $40a^2b^3c^2$ トノ G.C.M. ヲ求ム.

數字係數 48 ト 40 トノ G.C.M. ハ 8 ナリ. 仍テ所求ノ G.C.M. ハ $8a^2b^2c$ ヲ得.

(例四)　$4cx^3$ 及ビ $2cx^3+4c^2x^2$ トノ G.C.M. ヲ求ム.

$$2cx^3+4c^2x^2=2cx^2(x+2c)$$

故ニ所求ノ G.C.M. ハ $2cx^2$ ナリ.

(例五)　$3a^2+9ab$,　a^3-9ab^2,　$a^3+6a^2b+9ab^2$ ナル三式ノ G.C.M. ヲ求ム.

各式ヲ因數ニ分解シテ

$$3a^2+9ab=3a(a+3b)$$

$$a^3-9ab^2=a(a+3b)(a-3b)$$

$$a^3+6a^2b+9ab^2=a(a+3b)(a+3b)$$

故ニ所求ノ G.C.M. ハ $a(a+3b)$ ナリ.

問題

次ノ各組ノ式ノ G.C.M. ヲ求メヨ.

(1)　a^2b , ab^3　　(2)　ab^2c^3d, a^2bcd^2

(3)　$12a^2b^3x^4$, $6a^2b^4x^6$　　(4)　$8x^2y^3z^4$, $12x^3y^2z^3$

(5)　$8x^2y^3z^4$, $12x^3y^2z^3$, $40x^4y^3z^2$　　(6)　a^2+ab, a^2-b^2

(7)　$(x+y)^2$. x^2-y^2　　(8)　$2x^2-2xy$, x^3-x^2y

(9)　$6x^2-9xy$, $4x^2-9y^2$　　(10)　z^3+x^2y, a^3-ax^2, a^4-ax^3

(11)　a^2-4x^2, a^2+2ax　　(12)　a^2-x^2, a^2-ax, a^2x-ax^2

(13)　$20x-4$, $50x^2-2$　　(14)　$6bx+4by$, $9cx+6cy$

(15)　x^2+x, $(x+1)^2$, x^3+1　　(16)　$xy-y$, x^4y-xy,

(17)　$x^2-2xy+y^2$, $(x-y)^3$

---

85. 與ヘラレタル式ガ上ノ如ク容易ニ因數ニ分解シ得ザルトキハ，其最大公約數ヲ求ムルコハ甚ダ困難ナリトス. 然レモ此等多クノ多項式ノ最大公約數ハ恒ニ次ノ方法ニ依リテ之レヲ發見シ得ベシ.

次ニ二ツノ多項式ノ G.C.M. ヲ索ムル法則ヲ掲ゲン.

二ツノ多項式ヲ A ト B トニテ代表セシメ，A ト B トヲ或ル共通文字ノ遞降羃ノ順序ニ排列シ,且 A ノ次數 (共通文字ニ就テ云フナリ以下之ニ準ズ) ハ B ノ次數ヨリハ或ハ大ナルカ或ハ等シク然レトモ決シテ小ナラズトスベシ. 偖 A ヲ B ニテ割リ若シ割リ切ルレバ B 自身ガ A ト B トノ G.C.M. ナルヤ明カナリ，若シ又割リ切レザルトキハ必ズヤ剩餘ヲ得ベシ,之レヲ C ト名ツケン而ルトキ C ノ次數ハ B ノ次數ヨリハ必ズ小ナリ，次ニ C ヲ以テ B ヲ割リ箇樣ニシテ遂ニ剩餘ナキニ至ルマデ此方法ヲ續ケ行フベシ,最後ニ用キタル除數ガ即所要ノ G.C.M. ナリ.

上ノ方法ヲ續ケ行フニ各次ノ除數ノ次數ハ次第ニ小サクナリ行クガ故必ズヤ剩餘ナキニ達スルカ,然ラズンバ共通文字ヲ含マザル剩餘ヲ得ルニ至ルベシ.後ノ場合ニ於テハAトBトハ公通文字ヲ含ム所ノG.CM.ヲ有セザルナリ.

(例一) $4x^3-3x^2-24x-9$ ト $8x^3-2x^2-53x-39$ ノG.C.M.ヲ索メヨ. コノ演算ハ次ノ如ク記スヲ良シトス.

x	$4x^3-3x^2-24x-9$	$8x^3-2x^2-53x-39$	2
	$4x^3-5x^2-21x$	$8x^3-6x^2-48x-18$	
$2x$	$2x^2-3x-9$	$4x^2-5x-21$	2
	$2x^2-6x$	$4x^2-6x-18$	
3	$3x-9$	$x-3$	
	$3x-9$		

故ニ所求ノG.C.M.ハ $x-3$ ナリ.

説明 先ツ與ヘラレタル式ヲ x ノ遞降冪ニ排列スベシ,此例ニ於テハ斯ク排列シタル二式ノ第一項ガ同次ナルヲ以テ,便宜ノ爲メ其最高冪ニ小ナル係數ヲ有スルモノヲ除數ト定ム. 而シテ上ニ揭グルガ如ク平行ナル行ニ演算ヲ排列スベシ.第一ノ剩除 $4x^2-5x-21$ ヲ除數トナシタル𪜈其商 x ヲ被除數ノ左ニ置クベシ,又第二ノ剩除 $2x^2-3x-9$ ヲ次ノ除數トナシタル𪜈其商 2 ヲ右ニ置クベシ,逐テ斯クノ如クナシテ最後ノ除數 $x-3$ ハ求ムル所ノG.C.M.ナリ.

上ノ法則ヲ證明セン爲メニAヲBニテ割リタル商ヲ p ト名ツケン.

然ルトキハ　　$A=Bp+C$　　$A-3p=C.$

第一ノ等式ハ明カニBトCトノ双方ヲ割リ切ル式ハ必ズAヲ割リ切リ,從テBトCトノ公約數ハ必ズヤAトBトノ公約數ナルコトヲ示ス,又AトBトノ公約數ハ $A-Bp$ ニシテ之レ即第二ノ等式ニヨリCノ約數ナルガ故ニ,AトBトノ公約數ハ必ズBトCトノ約數タラザル可カラズ.シ

之レヲ以テAトBトノ公約數ハ全クBトCトノ公約數ニ同ジキヲ知ル,從テAトBトノG.C.M.ハBトCトノG.C.M.ナリ.

更ニBヲCニテ割リ商 q 剩除Dヲ得タリトスレバ,前ト同理ニテCトDトノG.C.M.ハBトCトノG.C.M.ニシテ,從テ索ムル所ノAトBトノG.C.M.ナリ.

此方法ヲ續ケテ行フ途中ノ割リ算ニ於ケル被除數ト除數トノG.C.M.ハ何レモ求ムル所ノG.C.M.ナリ.

依テ此方法ヲ續ケヲ行ヒ遂ニ剩餘ナキ割算ニ達シタリトセンニ,剩餘ナキ割リ算ニ於ケル除數ハ被除數ノ約數ニシテ,又除數ソレ自身ト被除數トノG.C.M.ナルヤ明ナリ,故ニ此除數ハ上ノ理ニ依リテ即所求ノAトBトノG.C.M.ナリ.

86. G.C.M.ノ求メンガ爲メニ與ヘラレタル式ガ數字ノ因數又ハ單項式ノ因數ヲ有スルトキハ,始メ此等ノ因數ヲ預リ置キ此等ノ因數ヲ省キテ得タル多項式ニ就テ前條ノ方法ヲ用ヒ,以テ大ヒニG.C.M.ヲ求ムル計算ヲ簡單ニスルコトヲ得ベシ.

例ヘバ　　$a^2x^4+a^2x^3-2a^2x$　ト　$4abx^6+8abx^4-12abx^2$

トノG.C.M.ヲ求メンニ

$$a^2x^4+a^2x^3-2a^2x=a^2x(x^3+x^2-2)$$

$$4abx^5+8abx^4-12abx^2=4abx^2(x^3+2x^2-3)$$

而シテ x^3+x^2-2 ト x^3+2x^2-3 トノ G.C.M. ヲ求メンニ

$$\begin{array}{r|r|r|l}
x & x^3+x^2-2 & x^3+2x^2-3 & 1 \\
 & x^3\quad -x & x^3+x^2-2 & \\
\hline
1 & x^2+x-2 & x^2-1 & (x+1) \\
 & x^2\quad -1 & x^2-1 & \\
\hline
 & x-1 & &
\end{array}$$

即 x^3+x^2-2 ト x^3+2x^2-3 トノ G.C.M. ハ $x-1$ ナルヿヲ知ル.

依テ與ヘラレタル二式ノ G.C.M. $ax(x-1)$ ナリ.

87. 第 **85** 條ノ方法ヲ實行スル途中ニ於ケル計算ヲ簡便ニスル方法ヲ講ゼン爲メニ, P ト Q トヲ以テ x ニ就テ整式ナル二ツノ式ヲ代表セン.

今 P ト Q トノ何レカ一方例ヘバ P ニ或ル數 n (一般ニハ單項式) ヲ乘シタリトセンニ, n ガ Q ノ約數ニアラザル限リハ P ト Q トノ G.C.M. ハ nP ト Q トノ G.C.M. ナルヤ明カナリ.

又 P ガ n ニテ除リ切レ Q ガ n ニテ割リ切レザル片ハ P ト Q トノ G.C.M. ハ $\dfrac{\mathrm{P}}{n}$ ト Q トノ G.C.M. ナルコトモ明カナリ.

(例一) $2x^4+9x^3+14x+3$ 及 $3x^4+15x^3+5x^2+10x+2$ ノ G.C.M. ヲ求ム.

始メノ式ヲ除數トスル片ハ首項 $2x^4$ ニテ $3x^4$ ヲ除スルガ故ニ $\dfrac{3}{2}$ ナル分數ヲ得ベキガ故ニ, 此不便ヲ避クルガ爲メニ被除數ニ 2 ヲ掛ケテ後割ルベシ, 茲ニ 2 ハ除數ノ約數ナラザルヿ明カナルガ故ニカクスルモ妨ゲナシ.

$$\begin{array}{r)l(l}
2x^4+9x^3+14x+3 & 6x^4+30x^3+10x^2+20x+4 & 3 \\
 & 6x^4+27x^3\qquad\quad +42x+9 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad 3x^3+10x^2-22x-5 &
\end{array}$$

今コノ殘リ $3x^3+10x^2-22x-5$ ニテ $2x^4+9x^3+14x+3$ ヲ除ルヿヲ要ス, 然ルニ此際モ $\dfrac{2}{3}$ ナル分數ヲ得ルガ故 $2x^4+9x^3+14x+3$ ニ 3 ヲ掛ケ置キテ後除ルナリ.

即

$$\begin{array}{r)l(l}
3x^3+10x^2-22x-5 & 6x^4+27x^3+42x+9 & 2x \\
 & 6x^4+20x^3-44x^2-10x & \\
\cline{2-2}
 & \qquad 7x^3+44x^2+52x+9 &
\end{array}$$

尙コノ殘リニ 3 ヲ掛ケテ以テ $3x^3+10x^2-22x-5$ ニテ割ルニ便ナラシム, 即次ノ如シ.

$$\begin{array}{r)l(l}
3x^3+10x^2-22x-5 & 21x^3+132x^2+156x+27 & 7 \\
 & 21x^3+70x^2-154x-35 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad 62x^2+310x+62 &
\end{array}$$

コノ剩除ハ 62 ナル因數ヲ有スレ共コノ 62 ハ $3x^3+10x^2-22x-5$ ヲ除リ切ラザル故, コレヲ省キ去ルヲ便トス, 即 62 ニテ此剩除ヲ割リタルモノハ x^2+5x+1 ナリ依テ索ムル G.C.M. ハ是レト $3x^3+10x^2-22x-5$ トノ G.C.M. ニ等シ.

依テ

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+5x+1 & 3x^3+10x^2-22x-5 \;(3x-5 \\
 & 3x^3+15x^2+3x \\ \hline
 & -5x^2-25x-5 \\
 & -5x^2-25x-5 \\ \hline
\end{array}
$$

x^2+5x+1 ハ $3x^3+10x^2-22x-5$ ヲ割リ切リタリ,而シテコノ數ハ此數自身ノ約數ナルコト勿論ナルガ故ニ即チ所求ノ G.C.M. ナリ.

(例二) $2x^4-7x^3-4x^2+x-4$ ト $3x^4-11x^3-2x^2-4x-16$ トノ G.C.M. ヲ求ム.

第二ノ式ニ 2 ヲ掛ケテ之レヲ被除數トスベシ.

然ル片ハ

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4-7x^3-4x^2+x-4 & 6x^4-22x^3-4x^2-8x-32 \;(3 \\
 & 6x^4-21x^3-21x^2+3x-12 \\ \hline
 & -x^3+8x^2-11x-20 \\
\end{array}
$$

此剩除ニ -1 ヲ掛ケテ (即此式ノ符號ヲ換ヘテ) 之レヲ次ノ除數トスベシ.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3-8x^2+11x+20 & 2x^4-7x^3-4x^2x+-4 \;(2x+9 \\
 & 2x^4-16x^3+22x^2+40x \\ \hline
 & 9x^3-26x^2-39x-4 \\
 & 9x^3-72x^2+99x+180 \\ \hline
 & 46x^2-138x-184 \\
\end{array}
$$

此剩除ハ 46 ニテ割リ切リ得,依テ,46 ナル因子ヲ省キ

$$
\begin{array}{r|l}
x^2-3x-4 & x^3-8x^2+11x+20 \;(x-5 \\
 & x^3-3x^2-4x \\ \hline
 & -5x^2+15x+20 \\
 & -5x^2+15x+20 \\
\end{array}
$$

即索ムル所ノ G.C.M. ハ x^2-3x-4 ナリ.

---

88. 三ツノ整式ヲ夫々 ABC ニテ代表セリトシ,今其三ツノ整式ノ G.C.M. ヲ求ムル方法ヲ講ゼン.

最初ニ此等ノ式ノ内ニテ何レカ二ツヲトリ例ヘバ A ト B トヲトリ其 G.C.M. ヲ索メ之レヲ G トナヅケンニ G ト C トノ G.C.M. ハ所要ノ G.C.M. ナリ.

何トナレバ G ト C トノ公約數ハ何レモ A.B.C ノ公約數ニシテ ABC ノ公約ノ公約數ハ G ト C ノ公約數ナルガ故ナリ.

例ヘバ次ノ三ツノ式

$$a^2-5ab+4b^2 \qquad (1)$$

$$a^2-5a^2b+4b^3 \qquad (2)$$

$$6(a^2-b^2) \qquad (3)$$

ノ G.C.M. ヲ求メンニ (1) ト (2) トハ次ノ如ク因數ニ分解シ得ルヲ以テ

$$a^3-5ab+4b^2=(a-b)(a-4b)$$

$$a^3-5a^2b+4b^3=(a-b)(a^2-4ab-4b^2)$$

コノ二式ノ G.C.M. ハ $a-b$ ナリ.

然ルニ(3)式ヲ因數ニ分解スレバ

$$6(a^2-b^2)=6(a+b)(a-b)$$

ナルヲ以テ即チ，$a-b$ ハ (1).(2).(3).ナル三式ノ G.C.M. ナルコトヲ知ル.

尙又次ノ三ツノ式

$$x^3+x^2-x-1 \qquad (1)$$

$$x^3+3x^2-x-3 \qquad (2)$$

$$x^3+x^2 \quad -2 \qquad (3)$$

ノ G.C.M. ヲ求メンニ初メノ二式ノ G.C.M. ハ x^2-1 ニシテ x^2-1 ト第三ノ式トノ G.C.M. ハ $x-1$ ナリ. 故ニ所要ノ G.C.M. ハ $x-1$ ナリ.

三ツ以上ノ整式ノ G.C.M. ヲ索ムル方法モ同様ナリ.

問　　題

次ノ各組ノ式ノ G.C.M. ヲ求ム.

(1) $x^2-9x+14$, $x^3-2x^2+7x-14$.

(2) $2x^2-5x+2$, $4x^3+12x^2-x-3$

(3) $x^3-41x-30$, $x^3-11x^2+25x+25$ 〔答 x^2-6x-5

(4) $x^3+7x^2+17x+15$, $x^3+8x^2+19x+12$ 〔答 $x+3$

(5) $x^3-10xx^2+26x+8$, $x^3-9x^2-23x-12$ 〔答 $x-4$

(6) $4(x^2-x+1)$, $3(x^4+x^2+1)$ 〔答 x^2-x+1

(7) $x^3-3x^2+7x-21$, $2x^4+19x^2+35$. 〔答 x^2+7

(8) $\begin{cases} 2y^4-2my^3+m^2y^2+3m^3y-6m^4 \\ 4y^4-2my^3+3m^3y-9m^4 \end{cases}$ 〔答 $2y^2-3m^2$

(9) $x^4y^4-3x^2y^2+2$, $x^6y^6-3x^2y^2+2$ 〔答 x^2y^2-1

(10) $2x^2-14x+20$, , $4x(x^2+5)-25(x+1)(x-1)$ 〔答 $x-5$

(11) $a^2-4x^2+12x-9$, $a^2+2a-4x^2+8x-3$ 〔答 $a-2x+3$

(12) $2x^4-6x^3+3x^2-3x+1$, $x^7-3x^6+x^5-4x^2+12x-4$ 〔答 x^2-3x+1

(13) $x^{10}+x^9+x^8+2x^7+2x^4+2x^3+x^2+x+1$, , x^8-1 〔答 $x+1$.

(14) $x^2-3x-70$, $x^3-39x+70$, $x^3-48x+7$ 〔答 $x+7$

第 十 三 章

最 小 公 倍 數

89. 二ツ或ハ二ツ以上ノ整式ニテ割リ切ラルヽ整式ヲ此等ノ式ノ**公倍數**ト名ヅク.

多クノ整式ノ公倍數ノ內ニテ次數ノ最モ小ナルモノヲ與ヘラレタル多クノ式ノ**最小公倍數**ト稱ス. (最小公倍數ヲ通例 L.C.M. ト略ス，之レ Lowst common multiple ノ略ナリ.)

90. 單項式及因數ノ明カナル多項式ノ L.C.M. ハ視察ニヨリテ之レヲ索メ得ベシ，其法則ハ下ノ如シ.

與ヘラレタル諸式中ノ總テノ因數ニ就キ此レ等ノ式ノ中ニ顯ハルヽ各因數ノ最高羃ヲ採リ，之レヲ悉ク掛ケ合セテ得タル積ニ與ヘラレタル式ノ數係數ノ最小公倍數ヲ前置スベシ.

(例一) $3a^5b^2$, $6a^2b^3$, $4a^3b^4$, L.C.M. ヲ求ム.

先ヅ 3 , 6 , 4 ノ最小公倍數ヲ求メ 12 ヲ得.

次ニ a^5b^2 , a^2b^3 , a^3b^4 ニテ除シ得ベキ最低次ノ式ハコレ等ノ式中ニアル文字 a,b,c ノ最高羃ノ積 a^5b^4 ナリ, 故ニ所要ノ L.C.M. ハ $12a^5b^4$ ナリ.

(例二) $2a^2+2ax$, $3a^2-3x^2$, $6a^2-12ax+3x^2$ ノ L.C.M. ヲ索ム.

扨 $2a^2+2ax=2a(a+x)$

$3a^2-3x^2=3(a-x)(x+x)$

$6a^2-12ax+3x^2=6(a-x)^2$

故ニ所要ノ最小公倍數ハ $6a(x+a)(a-x)^2$ ナリ.

(例三) $a^3b^2(x-a)^2(x-b)^3$ 及ビ $ab^4(x-a)^4(x-b)$ ノ L.C.M. ヲ索ム.

兩式ニ於テ a^3 及 a ノ L.C.M. ハ a^3 ニシテ b^2 及 b^4 ノ L.C.M. ハ b^4 ナリ. 又括弧ニ於ケル兩式ノ L.C.M. ハ $(x-a)^4(x-b)^3$ ナリ.

故ニ所要ノ最小公倍數ハ $a^3b^4(x-a)^4(x-b)^3$ ナリ.

(例四) $3x^2yz$, $27x^3y^2z^2$, 及ビ $6xy^2z^4$ ノ L.C.M. ヲ求ム.

3, 27, 6 ノ L.C.M. ハ 54 ナリ.

x^2yz $x^3y^2z^2$ 及 xy^2z^4 ノ L.C.M. ハ $x^3y^2z^4$ ナリ.

故ニ所要ノ L.C.M. ハ $54x^3y^2z^4$ ナリ.

(例五) x^2-3x+2, x^2-5x+6 及ビ x^2-4x+3 ノ L.C.M. ヲ索ム.

$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$,

$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

故ニ所要ノ L.C.M. ハ $(x-1)(x-2)(x-3)$ ナリ.

問　題

次ノ各組ノ式ノ L. C. M. ヲ求ム.

(1) a^2b , ab^2.

(2) $ax(x+a)^3$, $x^2(x+a)(x-a)$.

(3) $9ax(a+x)^2$, $6a^2(a^2-x^2)$

(4) $4a^3x$, $6a^2x^2$, $2ax^2$

(5) $18ax^2$, $72ay^2$, $12xy$

(6) $3a^2xy^2$ $15ax^3y^2$, $5a^3x^2y^2$

(7) $ab^2c^3x^4$, $a^4bc^3x^3$, a^3b^2cx

(8) $(x-a)(x-b)^2(x-c)^3$, $(x-a)^4(x-b)(x-c)$

(9) $a^4b^2-a^2b^4$, $a^4b^3+a^3b^4$

(10) x^2+3x+2 , x^2+5x+4.

(11) x^2-1 , x^2-x , x^3-1

(12) $(a+b)^2-(c+d)^2$, $(a+c)^2-(h+d)^2$, $(a+d)^2-(b+c)^2$

(13) 若干ノ整式ノ最小公倍數ヲ各ノ式ニテ割リタル商ハ公約數ヲ有セザルコトヲ a^6b^3 b^4c a^3c^4 ナル三ツノ式ニ就テ驗メヨ.

(14) 三ツノ式ノ L.C.M. ハ其中ノ何レカ二ツノ式ノ L.C.M. ト殘リ

ノ式トノ L. C. M. ニ等シキコトヲ前題 (4), (5), (6), (7), ニ就テ驗メヨ.

---

90. 視察ニ依テ因數ヲ見出シ難キ二ツノ式ノ L. C. M. ヲ索ムルニハ先ツ其二式ノ G. C. M. ヲ索メ, 而シテ此 G C.M. ヲ以テ二ツノ式ノ內何レカ一ツヲ割リ得タル商ヲ他ノ一式ニ掛クベシ.

例ヘバ x^3+x^2-2 ト x^3+2x^2-3 トノ L.C.M. ヲ索メンニハ先ツコノ二式ノ G.C. H. ヲ已ニ知ル所ノ方法ニヨリテ計算シ $x-1$ ヲ得,而シテ $x-1$ ヲ以テ二ツノ式ノ一ツヲ割リ例ヘバ始メノ式ヲ割リタリトセバ商トシテ x^2+2x+2 ヲ得,之レニ第二ノ式ヲ掛ケテ所求ノ L.C.M.

$$(x^2+2x+2)(x^3+2x^2-3)$$

即 $$(x-1)(x^2+x+2)(x^2+3x+3)$$

ヲ得.

G.C.M. ヲ求ムル理由ハ次ノ如シ.

先ツ $$x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$$

$$x^3+2x^2-3=(x-1)(x^2+3x+3)$$

而シテコノ二式ノ右邊ノ第二ノ因數 x^2+2x+2 ト x^2+3x+3 トノ間ニハ公約數ナカルヘシ何トナレバ已ニ G.C.M. $(x-1)$ ヲ求メテ割リタル商ニ相當スレバナリ,若シコレニ公約數アリトセバ $x-1$ ハ G.C.M. ナラザルナリ.

如斯クシテ, x^2+2x+2 ト x^2+3x+3 トハ公約數ヲ有セザルコト確カナルヲ以テ所要ノ L.C.M. $(x-1)(x^2+2x+2)(x^2+3x+3)$ ヲ得.

一般ニ A ト B トヲ以テ二ツノ整式ヲ代表セシメ其最大公約數ヲ G 其最小公倍數ヲ L ヲ以テ表ストシ

今 A ヲ G ニテ割リタル商ヲ a, B ヲ G ニテ割リタル商ヲ b トスレバ

$$A=G\times a$$

$$B=G\times b$$

ナリ偖テ G ハ A ト B トノ最大公約數ナルガ故ニ a ト b トハ公約數ヲ有セズ故ニ A ト B トノ最小公倍數ハ G ト a ト b トノ連乘積ナリ.

即. $$L=G\times a\times b$$

或ハ. $$L=\frac{Ga\times Gb}{G}=\frac{A\times B}{G}=A\times\frac{B}{G}=\frac{A}{G}\times B \qquad (1)$$

又 $$L\times G=A\times B \qquad (2)$$

乃チ二ツノ整式ノ L.C.M. ヲ索ムルニハ先ツ其 G.C.M. ヲ求メ二ツノ式ノ何レカ一方ヲ此 G. C. M. ニテ割リヲ得タル商ニ他ノ式ヲ掛クレバ可ナリ.〔式(1) ヨリ〕

又一般ニ二ツノ整式ノ G.C.M. ト L.C.N. トノ積ハ二ツノ式ノ積ニ等シ.〔式(2) ヨリ〕

91. 因數ノ明カナラザル三ツノ整式ノ L.C.M. ヲ求ムルニハ先ツ其中ノ二ツノ式ノ L.C.M. ヲ求メ次ニ此 L.C.M. ト第三ノ式トノ L.C.M. ヲ索ムレバ可ナリ.

式ノ數三ツヨリ多クアル場合モ追テ斯クノ如クスベシ.

問題

次ノ各組ノ式ノ L.C.M. ヲ索メヨ.

(1)　x^2+6x+8　,　x^3+5x^2+7x+2

(2)　$x^3-6x^2+11x-6$　,　$x^3-9x^2+26x-24$

答　$(x-1)(x-4)(x^2-5x+6)$.

(3)　x^3-7x-6　,　$x^3+8x^2+17x+10$

答　$(x-3)(x+5)(x^2+3x+2)$.

(4)　$x^4+x^3+2x^2+x+1$　,　x^4-1

答　$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)$.

(5)　$x^4-2x^3-3x^2+8x-4$　,　$x^4-5x^3+20x-16$

答　$(x-1)(x-4)(x^3-x^2-4x+4)$.

(6)　x^4-x^3+8x-8　,　$x^3+4x^2-8x+24$

答　$(x-1)(x+2)(x+6)(x^2-2x+4)$.

(7)　$x^3+6x^2+11x+6$　,　$x^3+8x^2+19x+12$

答　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$.

次ノ各組ノ式ノ G.C.M. 及 L.C.M. ヲ索メヨ.

(8)　x^2-5x+6　,　x^2-4　,　x^3-3x-2

答　G.C.M.　$x-2$　L.C.M.　$(x+1)^2(x+2)(x-2)(x-3)$.

(9)　x^3+2x^2-3x　,　$2x^3+5x^2-3x$

答　G.C.M.　$x(x+3)$　L.C.M.　$x(x-1)(x+3)(2x-1)$.

(10)　$6x^3+x^2-5x-2$　,　$6x^3+5x^2-3x-2$

答 G.C.M. $2x+1$ L.C.M. $(2x+1)(x+1)x-1)(3x+2)(3x-2)$.

(11)　$(2x^2-3a^2)y+(2a^2-3y^2)x$　,　$(2a^2+3y^2)x+(2x^2+3a^2)y$

答　G.C.M.　a^2+xy　L.C.M.　$(a^2+xy)(2x+3y)(2x-3y)$.

(12)　$x^3-9x^2+26x-24$　,　$x^3-12x^2+47x-60$

答 G.C.M. $(x-3)(x-4)$ L.C.M. $(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.

(13)　次ノ三ツノ式ノ G.C.M. ヲ求メ又其 L.C.M. ハ其三式ノ積ヲ其 G.C.M. ノ平方ニテ割リタル商ナルコトヲ證明セヨ.

第十四章

分　數　式

92. 吾人ハ既ニ減數ハ被減數ヨリ大ナルベカラズト云フ制限ハ負數ナルモノヽ入リ來ルコトニヨリテ消滅セルヲ見タリ. 今次ニハ割リ算ニ於テ被除數ハ必ズ除數ノ倍數ニシテ即割リ算ハ割リ切ルコトヲ得ル塲合ニ限ルト云フノ制限モ讀者ノ既ニ算術ニ於テ見タルガ如ク數ナル語ノ意味ヲ擴張シテ分數ナルモノヲモ數ノ中ニ入ルヽコトニ依リテ消滅セシムルコトヲ得. 吾人ハ今聊カ分數ニ就テ述ブル所アラントス.

或數 a ガ或數 b ノ倍數ナルト否トニ關ハラズ $\frac{a}{b}$ ヲ以テ a ヲ b ニテ割リタル商ヲ表ス.

若シ a ガ b ニテ丁度割リ切ルレバ $\frac{a}{b}$ ハ或ル整數ニ等シ.

a ガ b ニテ割リ切レザル时ニハ $\frac{a}{b}$ ハ其ノ儘**分數**ト稱スル新タナル(數ノ意味ヲ擴張シテ生ゼシ)數ヲ表ハス(之レヲ b 分ノ a ト呼ブ).

b 分ノ a ナルモノハ之レヲ b 倍スレバ a ニナル數ナリト解釋スルヲ可トス,乃一般ニ次ノ式ニテ表スガ如シ

$$\frac{a}{b}\times b=a$$

茲ニ a ハ b ヨリモ大或ハ小或ハ又 b ニ等シキコトヲ得ルモノナリ.

トス. (a ガ b ニ等シケレバ $\frac{a}{b}$ ハ勿論1ニ等シ)

分數 $\frac{a}{b}$ ニ於テ a ヲ其**分子** b ヲ其**分母**ト稱ス.

93. 吾人ハ茲ニ一ツノ規約ヲ設ク即

分數ハ整數ト全ク同樣ニ取扱フベキモノトス.

讀者ガ算術ニ於テ見ルベキ分數計算ノ意義及規則ハ總テ前條ノ公式ト此規約ヨリ出ヅルモノナリ.

94. 多クノ數ノ和ヲ或數ニテ割リタルモノハ和ノ各項ヲ此數ニテ別々ニ割リテ後加ヘタル和ニ等シ.

如何ニモ今 b ヲ以テ或ル數ヲ表シ和ニ於ケル各項ヲ 1 トシ項ノ數 a アリトスルトキハ

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{b}\times a$$

之レヲ以テ $\frac{a}{b}$ ナル分數ハ 1 ヲ b ニテ割リタルモノヲ a 倍セルモノト云フヲ得ベシ.

今上ノ公式ニ於テ被乘數ト乘數トヲ置キ換フルトキハ

$$a\times\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

此故ニ $\frac{1}{b}$ ヲ掛クルコトハ b ヲ以テ割ルコトナリト云フヲ得ベシ.

又 $$b\times\frac{1}{b}=1$$

之レニ c ヲ掛クレバ

$$b\times\frac{1}{b}\times c=c$$

或ハ因數ノ順序ヲ變ズレバ $c\times b\times\frac{1}{b}=c$

之レヲ $\frac{1}{b}$ ニテ除レバ $$\frac{c}{\frac{1}{b}}=c\times b$$

故ニ $\frac{1}{b}$ ヲ以テ割ルトハ b ヲ以テ割ルコトナリト云ヒ得ベシ.

$$\frac{a}{b}\times b=a$$

之レニ c ヲ掛クレバ $\frac{a}{b}\times b\times c=a\times c$

因數ノ順序ヲ變ズレバ $c\times\frac{a}{b}\times b=c\times a$

之レヲ b ニテ割レバ $c\times\frac{a}{b}=\frac{c\times a}{b}$

故ニ $\frac{a}{b}$ ヲ掛クルコトハ a ヲ掛ケテ b ニテ割ルコトナリト云フヲ得ベク同樣ニ又 $\frac{a}{b}$ ニテ割ルコトハ a ニテ割リ b ヲ掛クルコトナリト云フヲ得ベシ.

95. 凡テ整數ノ場合ニ於テ証明スルコトヲ得ル定理ハ **93** 條ノ規約ノ結果トシテ分數ノ場合ニ於テモ眞ナリ. 故ニ特ニ分數ノ場合ニ就キ之レヲ証明スルノ必要アラザルナリ.

例ヘバ $$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}=\frac{aa'}{bb'}$$

$$\frac{a'}{b'}\times\frac{a}{b}=\frac{a'a}{b'b}$$

而シテ $\frac{aa'}{bb'}=\frac{a'a}{b'b}$ ナルガ故ニ

$$\frac{a}{b}\times\frac{a'}{b'}=\frac{a'}{b'}\times\frac{a}{b}$$

即被乘數ト乘數ヲ交換スルモ積ノ値ハ變ズルコトナキハ分數ノ場合ニ於テモ眞ナリ. 但コレハ証明ニアラズ只 **93** 條ノ結果トシテ當然斯クアルベキコトヲ驗シタルノミ.

96. 同シ數ヲ分數式ノ兩項(兩項トハ分母及分子ヲ云フ)ニ掛クル

モ又ハ同シ數ニテ兩項ヲ割ルモ分數式ノ値ハ變セズ.

卽例ヘバ　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\times m}{b\times m}$　又　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\div n}{b\div n}$

何トナレバ $\dfrac{a}{b}$ ハ $a\div b$ ナリ,故ニ $\dfrac{a}{b}\times b=a$　(38條參照)

之レニ m ヲ掛クレバ　$\dfrac{a}{b}\times b\times m=a\times m$

之レヲ $b\times m$ ニテ割レバ　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\times m}{b\times m}$.

又 n ヲ以テ割ルハ $\dfrac{1}{n}$ ヲ掛クルニ同シ,故ニ此定理ノ第二ノ部分ハ其實第一ノ部分ニ含マレ居ルナリ.

97. 約分. 前條ニ依リテ若シ分數ノ分母ト分子トガ公約數ヲ有スルトキハ其因數ヲ去リテ其分數式ヲ簡單ニスルコトヲ得. コノ分數式ノ兩項ニ有スル公因數ヲ去ルコトヲ約分スルト云フナリ.

例ヘバ $\dfrac{an}{bn}$ ニ於テ兩項ノ公約數 n ヲ去リテ $\dfrac{a}{b}$ トナスモ其値ハ變ズルコトナクシテ簡單ナル形トナルヲ見ルベシ.

分數式ノ兩項ガ公約數ヲ有セザルトキハ其分數式ヲ稱シテ**既約分數式**ト云フ.

分數式ヲ既約分數式トナスニハ其兩項ヲ兩項ノ最大公約數ヲ以テ割レバ可ナリ.

但シ兩項ノ因數ノ明カナルトキニハ漸々公通ナル因數ヲ同時ニ消シ去ルヲ便トス.

(例一) $\dfrac{12a^4b^2c}{15a^3b^3d}$ ヲ既約分數式ニナサンニ此分數式ノ兩項ノ最大公約數ハ $3a^3b^2$ ナリ,依テ兩項ヲ $3a^3b^2$ ニテ割リテ $\dfrac{4ac}{5bd}$ ヲ得.

(例二)
$$\frac{\overset{4\ \ a}{\cancel{12}\ \cancel{a^4}}\ \cancel{b^2}\ c}{\underset{5\ \ \ \ \ b}{\cancel{15}\ \cancel{a^3}\ \cancel{b^3}}\ d}=\frac{4ac}{5bd}$$

上ノ例ニ於テハ 12 ト 15 トヲ 3 ニテ割リテ 12 ヲ消シテ其上ニ 4 ヲ書キ 15 ヲ消シテ其下ニ 5 ヲ書キ a^4 ヲ消シテ其上ニ a ヲ書クト同時ニ a^3 ヲ消シ, b^2 ヲ消シテ b^3 ヲ消シ其下ニ b ヲ書ク斯クシタル後尚ホ跡ニ殘レルモノヲ集メテ $\dfrac{4ac}{5bd}$ ヲ得.

(例三) $\dfrac{x^2-7xy+10y^2}{x^2-8xy+12y^2}$ ヲ既約分數式ニ直セ.

$$\frac{x^2-7xy+10y^2}{x^2-8xy+12y^2}=\frac{(x-5y)(x-2y)}{(x-6y)(x-2y)}=\frac{x-5y}{x-6y}.$$

(例四) $\dfrac{x^2-ax}{a^2-x^2}$ ヲ既約分數式ニ直セ.

$$\frac{x^2-ax}{a^2-x^2}=\frac{-x(a-x)}{(a+x)(a-x)}=\frac{-x}{a+x}$$

割リ算ノ符號ノ定則ニ依リテ $=-\dfrac{x}{a+x}$.

(例五) $\dfrac{x^4+3x^2+6x+35}{x^4+2x^3-5x^2+26x+21}$ ヲ簡單ニセヨ.

此分數ノ兩項ノ最大公約數ヲ求ムレバ x^2-3x+7 ヲ得,之レヲ以テ兩項ヲ割レバ最モ簡單ナル分數卽既約分數トナルベシ.

$$\frac{(x^4+3x^2+6x+35)\div(x^2-3x+7)}{(x^4+2x^3-5x^2+26x+21)\div(x^2-3x+7)}=\frac{x^2+3x+5}{x^2+5x+3}$$

問　　題

次ノ各分數式ヲ既約分數式ニ化スベシ.

(1) $\dfrac{3a^2bc^3}{6a^2b^3c}$　　(2) $\dfrac{18a^2b^3c}{12a^4b^2y^2}$

(3) $\dfrac{4x^2y^2z}{8ayz^4}$　　(4) $\dfrac{4x^3y^6z^7}{16x^4y^7z^5}$

(5) $\dfrac{a^2+ax}{a^2-x^2}$ (6) $\dfrac{10a^2x}{5a^2x-15ay^2}$

(7) $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ (8) $\dfrac{x^4-1}{x^6-1}$

(9) $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$ (10) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$

(11) $\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-3x^2+1}$ (12) $\dfrac{3x^2-8x+5}{x^3-4x^2+5x-2}$

(13) $\dfrac{a^4-b^4}{(a^3-b^3)(a+b)}$ (14) $\dfrac{(a^6-b^6)(a-b)}{(a^3-b^3)(a^4-b^4)}$

(15) $\dfrac{x^{m-1}y^{2n}}{x^{2m}y^{n+1}}$ (16) $\dfrac{x^4+a^2x^2+a^4}{x^6-a^6}$

---

98. 通分. 分數ハ分母子ニ同數ヲ乘ズルモ其値ヲ變ゼザルガ故ニ異ル分母ノ諸分數ヲ等分母ニ化スルヲ得ベシ,カクスルコトヲ通分スト云フ.

多クノ分數式ヲ通分スルニハ總テノ分數式ノ分母ノ或ル公倍數ヲ採リ之レヲ各ノ分數式ノ分母ヲ以テ割リ得タル商ヲ以テ其分子ニ掛ケタルモノヲ各分數式ノ分子トナシ,今用ヒタル公倍數ヲ此等分數式ノ分母トナスベシ.

多クノ分數式ヲ**最小ナル公通ノ分母ヲ有スル如ク通分**スルニハ上ノ法則ニ於テ"或ル倍數ト"アル箇所ヲ改メテ"最小公倍數"トスレバ可ナリ.

與ヘラレタル分數式ノ分母ガ公約數ヲ有セザルトキハ此等ノ總テノ分母ヲ掛ケ合セタルモノガ其最小公倍數即茲ニテハ**最小公分母**ナリ.

此場合ニ於テ通分スルニハ各分數式ノ兩項ニ其他ノ諸ノ分數式ノ分母ノ連乘積ヲ掛クベシ.

(例一) $\dfrac{a}{x^3y(x+y)}$, $\dfrac{b}{xy^3(x-y)}$, $\dfrac{c}{x^2y^2(x^2-y^2)}$ ヲ通分セヨ

各分數ノ分母ノ L.C.M. ヲ求ムレバ $x^3y^3(x^2-y^2)$ ヲ得.

之レヲ各分母ニテ除スレバ其商ハ夫々次ノ如シ

$$y^2(x-y)\ ,\quad x^2(x+y)\ ,\quad xy$$

依テ

$$\frac{a}{x^3y(x+y)}=\frac{ay^2(x-y)}{x^3y^3(x^2-y^2)}$$
$$\frac{b}{xy^3(x-y)}=\frac{bx^2(x+y)}{x^3y^3(x^2-y^2)}$$
$$\frac{c}{x^2y^2(x^2-y^2)}=\frac{cxy}{x^3y^3(x^2-y^2)}.$$

注意 單ニ通分セヨトアルトキハ通例最小公分母ニ通分スベシ,コレ最モ簡單ナル形ニナルヲ以テナリ.

(例二) $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{z}$ ヲ通分セヨ.

分母ノ L.C.M. ハ xyz ナリ.

依テ

$$\frac{1}{x}=\frac{yz}{xyz},\quad \frac{1}{y}=\frac{xz}{xyz},\quad \frac{1}{z}=\frac{xy}{xyz}.$$

問 題

次ノ分數式ヲ最小公分母ニ通セヨ.

(1) $\dfrac{1}{4x}$, $\dfrac{2}{5x^2}$, $\dfrac{3}{7x^3}$

(2) $\dfrac{1}{x+1}$, $\dfrac{3}{4x+4}$, $\dfrac{x}{x^2-1}$

(3) $\dfrac{1}{2x-2}$, $\dfrac{3}{ax-a}$, $\dfrac{4}{x^2-1}$

(4) $\dfrac{a}{x-a}$, $\dfrac{x}{a-x}$, $\dfrac{a^2}{x^2-a^2}$, $\dfrac{x^2}{a^2-x^2}$

(5) $\dfrac{1}{x^2-ax+a^2}$, $\dfrac{1}{x^2+ax+a^2}$, $\dfrac{a^2}{x^4+a^2x^2+a^4}$

---

99. 分數式ノ寄セ算及引キ算.

同シ分母ヲ有スル二ツノ分數式ノ和(或ハ差)ハ其ノ分子ノ和(或ハ差)ヲ分子トシ其ノ分母セル分母ヲ分母トスル所ノ分數式ナリ.

例ヘバ $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}=\dfrac{a+b}{x}$, $\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{x}=\dfrac{a-b}{x}$

二ツノ分數式ガ同一ノ分母ヲ有セザルトキハ先ヅ之レヲ通分シテ後上ノ法則ヲ適用スベシ.

例ヘバ $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{m}=\dfrac{am+bn}{n.m}$

全ク同樣ニシテ二ツ以上ノ分數式ヲ加ヘ或ハ引クコヲ得ベシ.

例ヘバ
$$\frac{a-x}{x}+\frac{a+x}{a}-\frac{a^2-x^2}{2ax}$$
$$=\frac{2a(a-x)}{2ax}+\frac{2x(a+x)}{2ax}-\frac{a^2-x^2}{2ax}$$
$$=\frac{a^2+3x^2}{2ax}$$

附言 多クノ分數式ヲ加號及減號ヲ以テ連結シタルモノヲ簡單ニセヨトハ之レヲ一ツノ分數式ニ纒メテ後既約分數式ニ化セトノ意ナリト知ルベシ.

(例一) $\dfrac{x}{a+b}+\dfrac{x}{a-b}$ ヲ簡單ニセヨ.

分母ノ最小公倍數ハ $(a+b)(a-b)$ 即 a^2-b^2 ナリ. 依テ
$$\frac{x}{a+b}+\frac{x}{a-b}=\frac{x(a-b)}{a^2-b^2}+\frac{x(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{x(a-b)+x(a+b)}{a^2-b^2}$$
$$=\frac{xa-xb+xa+xb}{a^2-b^2}=\frac{2ax}{a^2-b^2}$$

(例二) $\dfrac{x^2+5xy-4y^2}{x^2-16y^2}$ ヨリ $\dfrac{2xy}{2x^2+8xy}$ ヲ引ケ.
$$\frac{x^2+5xy-4y^2}{x^2-16y^2}-\frac{2xy}{2x^2+8xy}$$

此式ハ
$$=\frac{x^2-5xy}{x^2-16y^2}-\frac{y}{x+4y}$$
$$=\frac{x^2+5xy-4y^2-y(x+4y)}{x^2-16y^2}$$
$$=\frac{x^2+4xy}{x^2-16y^2}$$
$$=\frac{x}{x-4y}$$

(例三) $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{2a^2}{a^2+x^2}+\dfrac{4a^4}{a^4+x^4}$ ヲ簡單ニセヨ.

此例ノ如キハ一度ニ通分シテ加フルヨリモ次ノ如ク順次ニ加フル方手數少シ.
$$\frac{a}{a-x}+\frac{a}{a+x}=\frac{a(a+x)+a(a-x)}{a^2-x^2}=\frac{2a^2}{a^2-x^2}$$
$$\frac{2a^2}{a^2-x^2}+\frac{2a^2}{a^2+x^2}=\frac{2a^2(a^2+x^2)+2a^2(a^2-x^2)}{a^4-x^4}=\frac{4a^4}{a^4-x^4}$$

$$\frac{4a^4}{a^4-x^4}+\frac{4a^4}{a^4+x^4}=\frac{4a^4(a^4+x^4)+4a^4(a^4-x^4)}{a^8-x^8}=\frac{8a^8}{a^8-x^8}$$

即 $\dfrac{8a^8}{a^8-x^8}$ ヲ以テ答トス.

(例四) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$ ヲ簡單ニセヨ.

斯クノ如キ有様ノ式ハ適宜ニ各項ヲ轉置シ各別ニ加ヘ又ハ減ズルトキハ大ニ手數ヲ省キ得ベシ.

先ツ與ヘラレタル式ヲ次ノ如ク配列ス.

$$\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x-1}+\frac{3}{x+1}.$$

$$\begin{aligned}
\text{此式} &= \left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)-3\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\\
&= \frac{x+3-(x-3)}{x^2-9}-3\left(\frac{x+1-(x-1)}{x^2-1}\right)\\
&= \frac{6}{x^2-9}-\frac{6}{x^2-1}=6\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-1}\right)\\
&= 6\left(\frac{(x^2-1)-(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-1)}\right)=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}
\end{aligned}$$

(例五) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$ ヲ簡單ニセヨ.

此例ニ於テ總テノ分數式ノ公母ヲ掛ケ合セタルモノヲ公分母トスルキハ計算ハ甚ダ繁雜トナルベシ, 今此等ノ分數式ヲ克ク視ルニ第二ノ分數式ノ分母ノ中ニアル因數 $b-a$ ト第一ノ分數式ノ分母ノ中ニアル因數 $a-b$ トハ唯其符號相反スルノミ,故ニ第二ノ分數式ハ $\dfrac{-b}{(b-c)(a-b)}$ ト書クコヲ得ベシ,又斯ク置キ直ス方ガ後ノ計算ニ便

利ヲ與フルモノナリ. 次ニ第三ノ分數式ノ分母 $(c-a)(c-b)$ ハ $(a-c)(b-c)$ ニ等シ故ニ上ノ式ハ次ノ如クニ書キ換ヘ得ヘシ.

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{-b}{(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(a-c)(b-c)}$$

爰ニ最小公分母ハ $(a-b)(b-c)(b-c)$ トナルヤ明白ナリ: 依リ上ノ式ハ

$$\frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{ab-ac-ba+bc+ca-cb}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$=0$ ナリ.

---

100. 分數式ノ掛ケ算及ビ割リ算.

二ツノ分數式ノ積ハ,分子ノ積ヲ分子トシ分母ノ積ヲ分母トセル所ノ分數式ナリ.

何トナレバ今掛合セントスル分數式ヲ $\dfrac{a}{b}$ ト $\dfrac{c}{d}$ ニテ表セバ

定義ニヨリ $\dfrac{a}{b}\times b=a$ 及ビ $\dfrac{c}{d}\times d=c$

コノ兩式ノ相應スル邊ヲ夫々掛ケ合スレバ

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times b\times d=a\times c$$

兩邊ヲ $b\times d$ ニテ割レバ

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

數多ノ分數式ヲ掛ケ合スルキモ之レト同樣ナリ.

例ヘバ $\dfrac{l}{m}\times\dfrac{n}{p}\times\dfrac{q}{r}=\dfrac{ln}{mp}\times\dfrac{q}{r}=\dfrac{lnq}{mpr}$

又 $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$

一般ニ $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$

又 $\frac{a}{b}\times c=\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}$

除法ノ法則ハ次ノ如シ

第一ノ分數ヲ第二ノ分數ニテ割ルニハ第一ノ分數ニ第二ノ分數ノ逆數（逆數トハ分母ト分子トヲ交換セル分數ナリ）ヲ掛クレバ可ナリ．

之レヲ說明センニ

$\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ ヲ以テ任意ノ分數トシ而シテ

$x=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$ ト假定セヨ．

然ルトキハ

$$x\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}$$

$$\therefore\ x\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

$$\therefore\ x\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

然ルニ

$$\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=1$$

依テ $x=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

即 $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

(例一) a ヲ $\frac{b}{c}$ ニテ割レ．

$$a=\frac{a}{1},\quad \frac{a}{1}\div\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}.$$

(例二) $\frac{3a}{4b}$ ヲ $\frac{6a}{8c}$ ニテ割レ．

$$\frac{3a}{4b}\div\frac{9a}{8c}=\frac{3a}{4b}\times\frac{8c}{9a}=\frac{2c\times12a}{3b\times12a}=\frac{2c}{3b}.$$

(例三) $\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}$ ヲ $\frac{b^2}{a^2-b^2}$ ニテ割レ．

$$\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}\div\frac{b^2}{a^2-b^2}=\frac{ab-b^2}{(a+b)^2}\times\frac{a^2-b^2}{b^2}$$

$$=\frac{b(a-b)(a+b)(a-b)}{b^2(a+b)^2}=\frac{(a-b)^2}{b(a+b)}.$$

次ニ複雜ナル分數ヲ簡單ニスル二三ノ例ヲ揭ゲム．

(例四) $\left\{\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right\}\div\left\{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right\}$ ヲ簡單ニセヨ．

先ツ $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}$

又 $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$

依テ 原式$=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}\div\frac{4ab}{a^2-b^2}=\frac{2a^2+2b^2}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{4ab}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$.

(例五) $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}+\frac{y}{1-\frac{y}{x}}-\frac{x}{1-\cancel{\frac{y}{x}}\frac{x}{y}}$ ヲ簡單ニセヨ．

原式$=\frac{2}{\frac{y-x}{xy}}+\frac{y}{\frac{x-y}{x}}-\frac{x}{\frac{y-x}{y}}$

$$=\frac{2xy}{y-x}+\frac{xy}{x-y}-\frac{xy}{y-x}$$

$$=\frac{-2xy}{x-y}+\frac{xy}{x-y}-\frac{-xy}{x-y}$$

$$=\frac{-2xy+xy+xy}{x-y}$$

$$=\frac{0}{x-y}.$$

然ルニ x ト y トハ異ナル數ナレバ $x-y$ ハ或ル値ヲ有スベシ,今假リニ $x-y=z$ トセン, コノ z ニテ零ヲ割ルモ矢張リ零ナルガ故

$$=0$$

注意 分數ニ於ケル分母ハ何ナリトモ差支ナケレド,唯零タルトキニハ意味ヲ有セズ(高等數學ニ於テ屢用フル零ナルコトハ無究小ノ意味ニテ,茲ニ云ヘル零トハ其意義ヲ異ニス),又分子ガ零ナルトキハ分母ハ如何ナル數(但零ヲ除ク)ナリトモ其分數ノ値ハ常ニ零ナリ.

(例六) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a+2b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{b}{a+2b}}$ ヲ簡單ニセヨ.

$$原式=\frac{\dfrac{a(a+b)+b(a+2b)}{a(a+2b)}}{\dfrac{(a+b)(a+2b)-ab}{a(a+2b)}}$$

$$=\frac{\dfrac{a^2+2ab+2b^2}{a(a+2b)}}{\dfrac{a^2+2ab+2b^2}{a(a+2b)}}$$

$$=\frac{a(a+2b)(a^2+2ab+2b^2)}{a(a+2b)(a^2+2ab+2b^2)}$$

$$=1$$

此結果ガ1トナルコトハ第二番目ノ式ニ於テモ直チニ明カナリ,何トナレバ其分子ト分母ニ相當スル分數相同ジケレバナリ.

(例七) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{3x-\dfrac{1}{x}}}$ ヲ簡單ニセヨ.

$$原式=\frac{1}{x}-\frac{1}{\left(x+\dfrac{1}{\dfrac{3x^2-1}{x}}\right)}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\dfrac{x}{3x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{\dfrac{3x^3-x+x}{3x^2-1}}$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{3x^2-1}{3x^3}$$

$$=\frac{3x^2-(3x^2-1)}{3x^3}$$

$$=\frac{1}{3x^3}$$

(例八) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(1+ax)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)(1+bx)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(1+cx)}=\dfrac{x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$ ナルコトヲ證セヨ.

故ニ前節

$$=\frac{-(b-c)(1+bx)(1+cx)-(c-a)(1+ax)(1+cx)-(a-b)(1+bx)(1+ax)}{(a-b)(c-a)(b-c)(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$$

而シテ分子ノ第一項ハ $=-(b-c)[1+(b+c)x+bcx^2]$

$$=-(b-c)-(b^2-c^2)x-bc(b-c)x^2$$

又其第二項ハ $=-(c-a)[1+(c+a)x+cax^2]$

$$=-(c-a)-(c^2-a^2)x-ca(c-a)x^2$$

第三項ハ $=-(a-b)[1+(a+b)x+abx^2]$

$$=-(a-b)-(a^2-b^2)x-ab(a-b)x^2$$

依テ前節ノ分子全体ハ三式ヲ合シテ

$$-(b-c)-(c-a)-(a-b)-[(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)]x-[bc(b-c)$$
$$+ca(c-a)+ab(a-b)]x^2=o-o-[bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)]x^2$$
$$=-[-(b-c)(c-a)(a-b)]x^2$$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)x^2$$

故ニ前節 $=\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)x^2}{(a-b)(c-a)(b-c)(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$

$$=\frac{x^2}{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}$$

即後節ニ同シ.

---

101. 數多ノ分數 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{a_3}, \cdots\cdots$ ガ何レモ相等シキトキハ其各ハ何レモ亦 $\dfrac{pa_1+qa_2+ra_3+\cdots\cdots}{pb_1+qb_2+rb_3+\cdots\cdots}$ ナル分數ニ等シ.

其証明次ノ如シ.

今與ヘラレタル分數ノ値ヲ x ニ等シト假定スレバ

$$x=\frac{a_1}{b_1} \quad \therefore \quad a_1=b_1x$$

$$x=\frac{a_2}{b_2} \quad \therefore \quad a_2=b_2x$$

$$x=\frac{a_3}{b_3} \quad \therefore \quad a_3=b_3x$$

$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots$

依テ次ノ關係式ヲ得ベシ.

$$\left.\begin{array}{l} pa_1 = pb_1x \\ qa_2 = qb_2x \\ ra_3 = xb_3x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} (A)$$

今(A)式ノ節々ヲ相加フレバ

$$pa_1+qa_2+ra_3+\cdots\cdots=(pb_1+qb_2+rb_3+\cdots\cdots)x$$

$$\therefore \quad \frac{pa_1+qa_2+ra_3+\cdots\cdots}{pb_1+qb_2+rb_3+\cdots\cdots}=x$$

即 $\quad x=\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\cdots=\dfrac{pa_1+qa_2+ra_3+\cdots}{pb_1+qb_2+rb_3+\cdots}$

此定理ハ甚タ要用ナルモノナリ.

原式ノ前節 $=\dfrac{-1}{(a-b)(c-a)(1+ax)}+\dfrac{-1}{(b-c)(a-b)(1+bx)}$

$$+\frac{-1}{(c-a)(b-c)(1+cx)}$$

切分母ノ L.C.M. ハ $(b-c)(c-a)(a-b)(1+ax)(1+bx)(1+cx)$ ナリ

例 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{8}{12}=\dfrac{80}{120}$

依テ上ノ定理ニヨリ此等ノ分數ハ皆次ノ分數ニ等シ.

$$\frac{2+6+8+80}{3+9+12+120}$$

問題

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\dfrac{2a}{bc}\times\dfrac{2b}{ca}\times\dfrac{2c}{ab}$. (答 $\dfrac{8}{abc}$)

(2) $\dfrac{2x^3}{3yz}\times\dfrac{3y^3}{5zx}\times\dfrac{5z^3}{2xy}$. (答 xyz)

(3) $\dfrac{3axy^3}{5b^2}\div\dfrac{6axy^3}{10b^2}$. (答 1)

(4) $\dfrac{a^3-x^3}{a^3+x^3}\div\dfrac{(a-x)^2}{a^2-x^2}$. (答 $\dfrac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$)

(5) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}\times\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}$. (答 1)

(6) $\dfrac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x+1}{x}}}$. (答 $\dfrac{x^2+x-1}{x^2-3}$)

(7) $\dfrac{\dfrac{a-b}{1+ab}+\dfrac{b-c}{1+bc}}{1-\dfrac{(a-b)(b-c)}{(1+ab)(1+bc)}}$. (答 $\dfrac{a-c}{1+ac}$)

(8) $\dfrac{\dfrac{x+2}{2x+3}-\dfrac{4x+5}{5x+6}}{\dfrac{2x+3}{3x+4}-\dfrac{3x+4}{4x+5}}$. (答 $\dfrac{3(3x+4)(4x+5)}{(2x+3)(5x+6)}$)

(9) $\dfrac{a(b-c)(c-d)-c(d-a)(a-b)}{b(c-d)(d-a)-d(a-b)(b-c)}$. (答 $\dfrac{a-c}{d-a}$)

(10) $\dfrac{1}{x^2-\dfrac{x^3+1}{x+\dfrac{1}{x-1}}}$. (答 1)

第十五章

分數方程式

(一次方程式ノ解法ニヨリテ解キ得ベキモノ)

102. 爰ニ分數式ヲ含メル方程式ニシテ一次方程式ノ如クシテ解キ得ベキモノニ就テ述ベントス. 但分數方程式ニ關スル一般ノ所論ハ後章ニ至リテ詳說スベシ.

(例一) $\dfrac{1-3x}{2}+\dfrac{3x+1}{2}=\dfrac{2}{1-3x}$ ヲ解ケ.

解ヲナスニ先ダチ玆ニ一言シ置クベキハ前ニモ注意シ置ケルガ如ク分數ニ於テ分母ガ零タルコトハ無意味ナルガ故若シ解キテ得タル根即 x ノ値ガ與ヘラレタル式ニ於ケル分母ノ或ル者ノヲ零ナラシムル如キモノナル時ハ其根ハ無効ナリ. 故ニ常ニ分數方程式ヲ解キタル後ハ之レヲ驗メスコト肝要ナリ.

扨テ解ヲナスニ

分母ノ L.C.M. 110 ヲ兩節ニ乘ズレバ

$$10(3x-1)-44(x-1)=11(2-x)$$

括弧ヲ去レバ　$30x-10-44x+44=22-11x$

即　$30x-44x+11x=22+10-44$

依テ　$-3x=-12$

$$\therefore \quad x=4$$

扨テ $x=4$ ヲ與ヘラレタル方程式ニ代入スルモ分母ヲ零トナスコトナシ，ヨリテ $x=4$ ハ與ヘラレタル方程式ノ根ナリ．

(例二)　$\dfrac{3(x-1)}{x+1}+\dfrac{2(x+1)}{x-1}=5$ ヲ解ケ．

分母ノ L.C.M. $(x+1)(x-1)$ ヲ兩節ニ乘ズルトキ

$$3(x-1)^2+2(x+1)^2=5(x+1)(x-1)$$

括弧ヲ去レバ　$3x^2-6x+3+2x^2+4x+2=5x^2-5$

即　$3x^2-6x+2x^2+4x-5x^2=-5-3-2$

即　$-2x=-10$

$$\therefore \quad x=5$$

$x=5$ ヲ與ヘラレタル方程式ノ分母ニ置クモ分母ハ零トナルコトナシ，故ニ $x=5$ ハ與ヘラレタル方程式ノ根ナリ．

(例三)　$\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x+1}$ ヲ解ケ．

$\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-4}=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$ ト書キ換フルヲ得．

即　$\dfrac{x-4-x+5}{(x-5)(x-4)}=\dfrac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)}$

即　$\dfrac{1}{(x-5)(x-4)}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$

故ニ　$(x-5)(x-4)=(x+1)(x+2)$

即　$x^2-9x+20=x^2+3x+2$

即　$x^2-9x-x^2-3x=2-20$

即　$-12x=-18$

$$\therefore \quad x=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}.$$

$x=\dfrac{3}{2}$ ヲ試ムヌニ分母ヲ零トナスコナシ，ヨリテ $\dfrac{3}{2}$ ヲ以テ答トス．

問　　題

(1)　$\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{1-x}$ ヲ解ケ．　　答 $x=-2$

(2)　$\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{3}{2x-6}=\dfrac{5}{(x-5)(x-3)}$ ヲ解ケ．　　答 $x=\dfrac{31}{5}$

(3)　$\dfrac{6}{2-3x}+\dfrac{10}{6-5x}+\dfrac{4}{10+x}=0$ ヲ解ケ．　　答 $x=\dfrac{38}{41}$

(4)　$\dfrac{3}{b}(x-2a)+\dfrac{2}{a}(x+b)=1$ ヲ解ケ．　　答 $x=2a-b$

(5)　$\dfrac{a-b}{bx+c}+\dfrac{a+b}{ax-c}=0$ ヲ解ケ．　　答 $x=-\dfrac{2bc}{a^2+b^2}$

(6)　$\dfrac{8x}{x^3-1}=\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+4}$ ヲ解ケ．　　答 $x=\dfrac{1}{16}$

(7)　分數アリ其分母ハ分子ノ二倍ヨリ 2 大ナリ，又分母ト分子ノ各ヨ

リ1ヲ引クトキハ分子ニ1ヲ加ヘ分母ニ6ヲ加ヘタルト同値ナリト云フ此分數ヲ問フ.

第十六章

二次方程式ノ解法

103. 未知數ノ平方ヲ含ミ且ツ之レヨリ高キ羃ヲ含マザル整方程式ヲ**二次方程式**ト稱ス.

斯カル方程式ノ中ニハ唯三種ノ項ヲ有セリ, 即今 x ヲ以テ未知數ヲ表ハセバ x^2 ニ於ケル項ト x ニ於ケル項ト未知數ニ關係ナキ項トナリ.

今若シ總テノ項ヲ左邊ニ移シ且ツ x ノ二次ノ項, x ノ一次ノ項及ビ已知ノ項ヲ夫々ニ皆一項ニ纏ムレバ,方程式ハ常ニ次ノ如キ形トナシ得ベシ.

$$ax^2+bx+c=0$$

但 a,b,c ハ正若クハ負ナル任意ノ數ナリ, 而シテ b 及 c ハ同時ニ或ハ別々ニ零タルコトヲ得ベシト雖モ, a ハ零ナラザル所ノ數ナリトス, 何トナレバ若シ a ガ零ナレバ上ノ方程式ハ二次方程式ニアラザレバナリ.

b 或ハ c ノ零ナル二次方程式ヲ**不完備ノ二次方程式**ト稱ス.

或ル二次方程式ヲ解クトハ x ニ置キ換ヘタル値ガ其方程式ニ適合スベキ x ノ總テノ値ヲ索ムルコトナリ. 而シテ此値ハ方程式ノ根ト稱

スベキコト已ニ說キタル所ナリ.

104. 最初先ツ次ノ如キ形ノ不完備ナル二次方程式ノ解法ヲ說明セン.

例 $13x^2-325=0$ ヲ解ケ.

(コノ式ハ $ax^2+bx+c=0$ ナル完備ナル二次方程式ノ x ノ係數 b ガ零ナル場合ナリ.)

今原方程式ヲ移項シテ

$$13x^2=325$$

故 x^2 ノ係數13ヲ以テ兩邊ヲ除スルトキハ

$$x^2=25$$

トナル.

兩邊ヲ平方ニ開ケバ $\sqrt{x^2}=\sqrt{25}$

即 $x=\pm 5$

25ヲ平方ニ開キテ ± 5 トナル理由ハ $+5$ ノ平方モ -5 ノ平方モ何レモ25ナル故 $x^2=25$ ナル方程式ニハ $x=+5$ ヲ置クモ又 -5 ヲ置クモ適合セザル可カラザレバナリ.

一般ニ $ax^2+c=0$

ナル方程式ヲ解クニハ

先ツ c ナル項ヲ右邊ニ移シ

$$ax^2=-c$$

トナシ, 次ニ a ヲ以テ各項ヲ割レバ

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

トナル,今假リニＡヲ以テ $-\frac{c}{a}$ ナル數ヲ表ハセバ方程式ハ次ノ如ク書キ得ベシ

$$x^2=A$$

而テＡナル値即 $-\frac{c}{a}$ ナル値ハ a 及 c ノ正或ハ負ナルコトニヨリテ正又ハ負ナル或ル數ヲ表スベシ.

今先ヅＡヲ正ナリト假定セン

然ルトキハ前式ノ兩邊ヲ平方ニ開キテ

$$x=\pm\sqrt{A}$$

（$\pm\sqrt{A}$ ナル記號ハ $+\sqrt{A}$ 及 $-\sqrt{A}$ ヲ併セ示ス記號ナリ）

即 $x=\sqrt{A}$ ナル値ヲ代入スルモ,又 $-\sqrt{A}$ ナル値ヲ代入スルモ,何レモ適合スベシ,故ニ $+\sqrt{A}$ 及 $-\sqrt{A}$ ハ何レモ原方程式ノ根ナリ.

而シテ原方程式ハ此外ニ根ヲ有スルコトナシ何トナレバ正ニテモ負ニテモ此外ノ數ニシテ其平方ガＡニ等シキモノアラザレバナリ.

次ニＡガ負ナルトキハ方程式ハ不能ナリ.

何トナレバ x ニ如何ナル値ヲ與フルモ x^2 ハ正ニシテ決シテＡナル負數ニ等シキコト能ハザレバナリ.

次ニ數例ヲ附ス.

(例一) $3x^2=4(x^2-4)$ ヲ解ケ.

原方程式ノ括弧ヲ去レバ $3x^2=4x^2-16$

$$3x^2=4x^2-16 \qquad 3x^2-4x^2=-16$$

移項シテ $-x^2=-16$

兩邊ニ -1 ヲ掛クレバ

$$\sqrt{x^2}=\sqrt{16}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \therefore & x=+4 \\ 及ビ & x=-4 \end{array}\right\}$$

即 $x=\pm4$ ヲ以テ答トス.

(例二) $3x^2+4(x^2+4)=0$ ヲ解ケ.

括弧ヲ去レバ $3x^2+4x^2+16=0$

即 $7x^2+16=0$

移項スレバ $7x^2=-16$

兩邊ヲ7ニテ割レバ $x^2=-\frac{16}{7}$

左邊ハ x ノ値ノ如何ニ關セズ正ナリ,然ルニ之レニ等シカルベキ右邊ハ負ナリ,之レ不合理ナリ,故ニ與ヘラレタル方程式ハ解ク能ハズ.

105. 前述ノ $x^2=A$ ノ如キ方程式ハ二次方程式中ニテ最モ簡單ナルモノナルベシ,然ルニ $(x-a)^2=B$ ノ如キモノモ亦同シ樣ニ簡單ニ說キ得ベシ.

假ヘバ $(x-3)^2=25$

ヲ解カンニ兩邊ヲ平方ニ開キテ

$$x-3=\pm5$$

ナル二ツノ一次方程式ヲ得タリ.(一ツノ如ク見ユレ共其實二ツノ一次方程式ヲ纒メテ表ハセルモノナリ, 即 $x-3=5$ ナル方程式ト $x-3=-5$ ナル方程式トヲ表セリ.)

今±ノ上ノ符號ヲトレバ

$$x-3=+5 \quad \text{由テ} \quad x=8$$

又下ノ符號ヲトレバ

$$x-3=-5 \quad \text{由テ} \quad x=-2$$

即原方程式ノ根ハ　$x=8$　ト　$x=2$　ナリ．$x=8$ ト $x=$

今所設ノ方程式　$(x-3)^2=25$　ヲ書キ換ヘテ

$$x^2-6x+(3)^2=25$$

即　$x^2-6x=16$

トナスコヲ得ベシ．

由テコノ變化ヲ遡リテ，$x^2-6x=16$ ヲ解クニハ先ヅ兩邊ニ $(3)^2$ 即 9 ヲ加ヘ

$$x^2-6x+9=25 \qquad (1)$$

トナシ，而シテ之レヲ括弧ニテ括クレバ

$$(x-3)^2=25 \qquad (2)$$

トナリ，之レヲ平方ニ開キテ解クヲ得ベシ．

而シテ茲ニ 9 ヲ加ヘタル所以ハ方程式ノ左邊ヲ完全ノ平方式ニナサムガ爲メ[(2)式ノ如ク]ナリ．

今 a ノ値ノ如何ニ關ラズ次ノ式アリ．

$$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$$

$$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$$

故ニ若シ三項式ガ完全ノ平方ニシテ且ツ x ノ最高冪即チ x^2 ノ係數ガ 1 ナルトキハ其式ノ x ヲ含マザル項(即チ已知數ノ項)ハ必ズ x ノ係數ノ半分ノ平方ニ等シカラザルベカラズ．

故ニ若シ三項式ノ x^2 ヲ含メル項及ビ x ヲ含メル項ヲ知ルトキハ x ノ係數ノ半ノ平方ヲ之レニ加ヘテ三項式ヲ完全ノ平方ニ改ムルコトヲ得ベシ．

(例一)　$x^2+14x=32$ ヲ解ケ．

x ノ係數 14 ノ半ノ平方ハ 7^2 ナリ．

依テ　$x^2+14x+(7)^2=32+(7)^2$

即　$(x+7)^2=81$

故ニ兩邊ヲ開平スレバ

$$x+7=\pm 9$$

± ノ ＋ ノ方ヲトレバ

$$x=9-7=2$$

－ノ方ヲトレバ

$$x=-9-7=-16$$

即　2 及ビ -16 ヲ以テ答トス．

(例二)　$x^2-7x=8$ ヲ解ケ．

x ノ係數 -7 ノ半分ノ平方ヲ兩邊ニ加フレバ

$$x^2-7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2=8+\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

即　$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{81}{4}$

$$\therefore\ x-\frac{7}{2}=\pm\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ x=\frac{7}{2}\pm\frac{9}{2}$$

依テ $x=\dfrac{16}{2}=8$

或ハ $x=\dfrac{-2}{2}=-1$

即 8 及ビ -1 ヲ以テ答トス.

次ノ條ニ於テ如斯方程式ノ一般ノ解法ヲ說明セン.

106. 二次方程式ノ一般解法

前ニモ云ヘルガ如ク二次方程式ハ一般ニ次ノ如ク記スコトヲ得.

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

今コノ方程式ニ就キ其解法ヲ說カントス.

先ツコノ方程式ノ各項ニ $4a$ ヲ乘ズ,但シ已ニ云ヘル如ク a ハ零ニアラザルガ故斯クスルモ妨ゲナキヤ明カナリ. 即

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

或ハ $4ac$ ナル項ヲ右邊ニ移セバ

$$4a^2x^2+4abx=-4ac \qquad (2)$$

ヲ得.

然ルニ此式ノ左邊ハ $(2ax+b)$ ナル二項式ヲ平方シタルトキノ始メノ二項ヲ表スベシ,何トナレバ

$$(2ax+b)^2=4a^2x^2+4abx+b^2$$

ナレバナリ,故ニ若シ方程式(2)ノ兩邊ニ b^2 ヲ加フレバ方程式ノ同值ナルコトヲ妨ゲズシテ原方程式ハ次ノ如ク記シ得ベシ.

$$4a^2x^2+4abx+b^2=-4ac+b^2$$

即 $(2ax+b)^2=b^2-4ac \qquad (3)$

此(3)式ハ(1)式ト同值ナルモノナリ.

偖テ若シ b^2-4ac ガ正ナレバ $2ax+b$ ハ $\sqrt{b^2-4ac}$ ノ二ツノ值ノ何レニカ等シカルヘシ.

即 $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

依テ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (4)$

コノ公式ハ x ニ就キテ次ノ二ツノ值ヲ與フルモノナリ

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

依テ次ノ法則ヲ得.

方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ根ヲ得ル爲メニハ x ノ係數ノ符號ヲ變ヘタルモノニ此係數ノ平方ヨリ x^2 ノ係數ト已知項(c)トノ積ノ四倍ヲ引キタルモノヲ加ヘ或ハ引キ其結果ヲ x^2 ノ係數ノ二倍ニテ割レバ可ナリ.

上ノ公式 (4) ハ一般ニ二次方程式ヲ解クニ當リ最モ必要ナルモノナルガ故宜シク暗誦シ置クベシ.

若シ b^2-4ac ガ負ナレバ方程式ハ不能ナリ. 何トナレバ x ニ如何ナル值ヲ與フルモ $(2ax+b)^2$ ハ常ニ正ニシテ決シテ負ナル b^2-4ac ニ等シキコト能ハザレバナリ.

(例一) 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$x^2-5x+4=0$$

公式(4)ニ於テ $a=1$ $b=5$ $c=4$ ト置ケバ

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}$$

$$=\frac{-5\pm3}{2}$$

ヲ得. 二ツノ根ヲ別々ニ記セバ次ノ如シ

$$x'=-1$$

$$x''=-4$$

(例二) 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$5x^2+11x-12=0$$

公式(4)ニ於テ $a=5$ $b=11$ $c=-12$

故ニ $$x=\frac{-11\pm\sqrt{(11)^2+240}}{10}$$

$$=\frac{-11\pm\sqrt{361}}{10}=\frac{-11\pm19}{10}$$

依テ $$x'=\frac{4}{5}$$

$$x''=-3$$

ナル二根ヲ得.

總テ斯クノ如ク如何ナル二次方程式モ公式(4)ヲ用フレバ解キ得ベキモノナリ.

x ノ係數 b ガ若シ完全數ニシテ且ツ偶數ナルトキハ公式(4)ハ少シク簡單ニナルベシ. 例トヘバ $b=2b'$ トスレバ

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

ヲ得ベク, 今 2 ニテ分數式ノ公項ヲ割レバ

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a} \qquad (5)$$

ヲ得ベシ之レ亦必要ナル公式ナリ.

若シ x^2 ノ係數ガ 1 ナルトキ即與ヘラレタル方程式ガ

$$x^2+px+q=0$$

ノ如キ形ナルトキハ公式(4)ハ一層簡單ニナルベシ即公式(4)ニ於テ $a=1$, $b=p$, $c=q$ トスレバ次ノ式ヲ得.

$$x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

通例此公式ハ次ノ如キ形ニ書ク

$$x=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \qquad (6)$$

注意 公式ヲ用フルニ當リ殊ニ與ヘラレタル方程式ガ數字方程式即 a, b, c 等ガ數字ニテ與ヘラレタルトキ等ニ於テ若シ分母アレバ總テノ分母ヲ拂ヒテ係數ヲ悉ク完全數ニナスヲ便ナリトス, 而シテ方程式ヲ解クニハ b ガ奇數ナルカ偶數ナルカニ從ヒテ公式(4)或ハ(5)ヲ用フベシ.

(例一) $75x^2-80x+21=0$ ヲ解ケ.

公式(5)ヲ用フレバ

$a=75$ $b'=-40$ $c=21$ ナルガ故

$$x=\frac{40\pm\sqrt{1600-1575}}{75}=\frac{40\pm5}{75}$$

依テ $x'=\dfrac{3}{5}$ $x''=\dfrac{7}{15}$

(例二) 次ノ方程式ヲ解ケ.

$$lmx^2-(l^2+m^2)x+lm=0$$

公式(4)ヲ用フレバ

$$x=\frac{l^2+m^2\pm\sqrt{(l^2+m^2)^2-4l^2m^2}}{2lm}$$

$$=\frac{l^2+m^2\pm(l^2-m^2)}{2lm}$$

ヲ得而シテ二根ヲ分チテ書ケバ次ノ如シ

$$x'=\frac{2l^2}{2lm}=\frac{l}{m}$$

$$x''=\frac{2m^2}{2lm}=\frac{m}{l}$$

107. 公式ノ吟味

一般ノ方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

ノ根ヲ與フル所ノ公式(4)ヲ再ビ茲ニ掲グレバ

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

根號内ノ數 b^2-4ac ガ正ナルトキハ此公式ハ適用セラルベキモノニシテ,方程式ハ相異ル二ツノ根ヲ有スベシ,其二根ノ差ハ次ノ如シ.

$$\frac{2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$$

扨又 $b^2-4ac=0$ ナルトキハ與ヘラレタル方程式 $ax^2+bx+c=0$ ト同

値ナル方程式(3)ハ次ノ如クナルベシ.

$$(2ax+b)^2=0$$

而シテ此式ヲ滿足スル爲メニハ

$$2ax+b=0$$

即 $$x=-\frac{b}{2a}$$

ヲ要スルコト明カナリ. 故ニ此場合ニハ方程式ハ唯一ツノ根ヲ有スルノミニシテ公式(4)ニヨリテモ亦同シ結果ヲ得ベシ,何トナレバ b^2-4ac ガ零ニシテ即公式ハ次ノ根ヲ與フベキカ故ナリ.

$$x=-\frac{b}{2a}$$

此ノ場合ニ於テハ方程式ノ根ハ其實唯一個ナレ共,通例此時ニモ尚ホ方程式ハ二ツノ相等シキ根ヲ有スト云フ. 蓋シ斯カル規約ヲ設ケシ所以ハ b^2-4ac ヲ直チニ零ナリトセズ,始メ正ナル或ル數ガ次第ニ減少シテ遂ニ零ニ至リタルモノト想像シ,然ルトキハ公式(4)ニヨリテ得ル所ノ二ツノ相異ナル根ハ次第ニ相接近シ,終ニハ其差 $\sqrt{\dfrac{b^2-4ac}{a}}$ ガ零トナリテ即二ツノ根ガ相等シクナルト思考シ得ベケレバナリ.

若シ b^2-4ac ガ負ナルトキハ方程式ハ不能ナリ. 何トナレバ此式ハ或ル負數ノ平方根ヲ含ムニ至リ,而シテ負數ハ平方根ヲ有セザルガ故ナレバナリ,然レ共法則ヲ擴張シテ此クノ如キ式ヲモ尚方程式ノ根ト名ヅケ,而シテ斯カル根ハ**虛根**ト稱シ,之レニ對シテ正或ハ負ノ或數ヲ表ス所ノ根ヲ**實根**ト名ヅク.

前ニ云ヘルコトヲ取纏メテ云ヘバ,二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ハ常ニ公式(4)ニヨリテ得ラルベキ二根ヲ有シ若シ

第一 $b^2-4ac>0$ ナレバ其二ツノ根ハ實根ニシテ且相異ナル

第二 $b^2-4ac=0$ ナレバ其二ツノ根ハ實根ニシテ且相等シク

第三 $b^2-4ac<0$ ナレバ二ツノ根ハ虛根ナリ.

(例一) 方程式

$$2x^2-3x+1=0$$

ハ實ニシテ且ツ相異ナル二ツノ根ヲ有スベシ，何トナレバ

$b^2-4ac=9-8=1$ ニシテ正ナレバナリ.

(例二) 方程式

$$9x^2+12x+4=0$$

ハ相等シキ二ツノ實根ヲ有スベシ，何トナレバ $b^2-4ac=144-144=0$ ナレバナリ.

(例三) 方程式

$$9x^2+12x+5=0$$

ナル方程式ノ二根ハ虛根ナリ．何トナレバ $b^2-4ac=144-180=-36$ ハ負數ナレバナリ.

注意 若シ a 及ビ c ガ反對ノ符號ヲ有スレバ ac ハ負ニシテ b^2-4ac ハ二ツノ正數ノ和トナルガ故正ナルベシ，因テ $ax^2+bx+c=0$ ナル方程式ノ二根ハ實ニシテ且ツ相等シカラズ，故ニ凡ソ二次方程式ニ於テ已知ノ項ト x^2 ノ係數トガ反對ノ符號ヲ有スル時ハ其方程式ハ實ニシテ且ツ相異ナル二根ヲ有スベシ.

問題

次ノ各方程式ヲ解ケ.

( ) $2(x^2-7)+3(x^2-11)=33.$ 答 $x'=4$ $x''=-4$

( ) $(x-15)(x+15)=400.$ 答 $x'=25$ $x''=-25$

( ) $\dfrac{x^2-24}{5}+\dfrac{x^2-37}{4}=8$ 答 $x'=7$ $x''=-7$

(4) $\dfrac{3(x^2-11)}{5}-\dfrac{2(x^2-60)}{7}=36$ 答 $x'=9$ $x''=-9$

(5) $x^2-3x+2=0$ 答 $x'=1$ $x''=2$

(6) $x^2-5x+6=0$ 答 $x'=2$ $x''=3$

(7) $x^2+10x=24$ 答 $x'=2$ $x''=-12$

(8) $3x^2-4x=39$ 答 $x'=4\frac{1}{3}$ $x''=-3$

(9) $x^2+10x+3=2x^2-5x+53$

(注意) 此方程式ハ之レヲ一邊ニ集ムレバ $x^2-15x+50=0$ ナル方程式トナルベシ) 答 $x'=10$ $x''=5$

108. 虛式

或ル負數ノ平方根ヲ含メル式ヲ虛式(或ハ虛數)ト名ツク，例ヘバ $\sqrt{-1}$，$\sqrt{-3}$ 或ハ $7+\sqrt{-10}$ 等ノ如キハ虛式ナリ.

虛式ハ如何ナル大サヲモ表スコトナシト雖，唯代數學ニ於テ其法則ヲ推シ擴ムル爲メニ用フル一ツノ符號ニシテ，高等代數學ノ理論ニ於テ必要ナル所ノモノナリ.

虚數ニ就テ規約ヲ設クルコト次ノ如シ.

實數ニ就キテ証明シタル計算ノ諸法則ハ凡テ虚數ニモ適用スベキモノトス,就中 $\sqrt{A}$ ハ A ガ負ナリトモ其平方ガ尚ホ A ニ等シキ所ノモノトス.

例ヘバ $\sqrt{-3}$ ハ如何ナルモノナリヤト云フニ唯之レヲ平方スレバ -3 トナルベキ所ノ數ナリト云フニ外ナラザルナリ. 即

$$(\sqrt{-3})^2=-3$$

此ノ規約ハ虚數ノ上ニ施スベキ總テノ演算ノ定義トシテ用フベシ.

此ノ規約ニヨレバ二次方程式ノ虚根ハ常ニ之レヲ變化シテ $\sqrt{-1}$ ノ外ニ他ノ虚ナル根數式ヲ含マザル所ノ一樣ナル形式ヲ與ヘ得, 即今先ツ前ニ得タル公式

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ヲ取リ,而シテ b^2-4ac ガ負ナリト假定スベシ, 然ルトキハ此公式ノ與フル所ノ x ノ値ハ虚數ナリ. 然ルニ b^2-4ac ガ負ナル故 $4ac-b^2$ ハ正ナリ. 今 m ヲ以テ $4ac-b^2$ ノ平方根ヲ表ハセバ

$$4ac-b^2=m^2$$

ヲ得,因テ
$$b^2-4ac=-m^2$$
$$=(-1)\times m^2$$

故ニ
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(-1)\times m^2}}{2a}$$

即
$$x=\frac{-b\pm m\sqrt{-1}}{2a}$$

トナル,今書キ方ヲ省ク爲メニ

$$-\frac{b}{2a}=\alpha$$

$$\frac{m}{2a}=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\beta$$

トスレバ前ノ式ハ次ノ形ヲ取ルベシ

$$x=\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$$

之レ一般ニ二次方程式ノ虚根ノ取リ得ベキ形ニシテ通常 $\sqrt{-1}$ ヲ i ヲ以テ示ス,即 $x=\alpha\pm\beta i$

上ノ如キ實數ト虚數トヨリ成ル數ヲ複素數ト稱ス.

前ニモ云ヘル如ク二次方程式ノ根ガ虚數ヲ含ムトキハ通常ノ正數或ハ負數ニテハ其方程式ヲ滿足シ能ハザルヲ示スモノナリ.

例ヘバ x^2-2x+4 ニ於テハ b^2-4ac ハ負ナルガ故 x ノ代リニ如何ナル正數或ハ負數(實ナル)ヲ置キ換フルモ決シテ 0 トナスヿ能ハザルナリ.

109. 二次方程式ノ根ト係數トノ關係

$ax^2+bx+c=0$ ナル二次方程式ノ二ツノ根ノ和ハ x ノ係數ヲ x^2 ノ係數ニテ割リテ得ル所ノ商ニコレト反對ノ符號ヲ附シタルモノ,即 $-\frac{b}{a}$ ニ等シ,又其二ツノ根ノ積ハ已知ノ項ヲ x^2 ノ係數ニテ割リテ得ル所ノ商即 $\frac{c}{a}$ ニ等シ.

今之レヲ証明センニ

x' 及 x'' ヲ以テ該方程式ノ二ツノ根ヲ表セバ

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ヲ得,依テ $x'+x''=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$

コレ定理ノ始メノ部分ノ証ナリ.

次ニ x' 及ビ x'' ノ値ヲ掛ケ合スベシ,然ルニ第一式ノ分子ハ $-b$ ト $\sqrt{b^2-4ac}$ トノ和ニシテ,第二式ノ分子ハ同ジ二ツノ量ノ差ナルコトニ注目スレバ已ニ述ベシコトニヨリテ

$$x'x''=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

ヲ得,是レ定理ノ後ノ部分ノ証ナリ.

注意 若シ方程式ノ形ガ

$$x^2+px+q=0$$

ナルトキハ前ノ關係式ハ次ノ如クナルベシ.

$$x'+x''=-p$$

$$x'x''=q$$

問 題

(1) 次ノ方程式ノ内虚根ヲ有スルモノヲ指摘セヨ.

(i) $x^2+3x+19=0$ (ii) $x^2-7x-6=0$

(iii) $x^2+9=5x$ (iv) $x-3x^2=10$

(2) $nx^2+mx+k=0$ ナル方程式ガ實根ヲ有シ且ツ二根ノ和ガ A ニ等シキ爲メニハ n m k ハ如何ナルベキカ.

(3) 次ノ方程式ガ實根ヲ有スル爲メニハ m ハ如何ナル値ナレバ可ナルカ. $x^2-5x+m=0$

第十七章

分數式及ビ無理式ノ方程式

110. 未知數ヲ分母ニ有スル方程式ヲ解クニハ(第一法)其諸項ヲ悉ク一邊ニ集メ之レヲ一ツノ既約分數ニ化シ其分子ヲ零ニ等シト書キテ得ル方程式ヲ解クベシ.

然レモ手數ヲ省カンガ爲メ通常下ノ如クス.

(第二法) 原方程式ニ諸分母ノ最小公倍數ヲ乘シ以テ之レヲ整化シ而シテ得タル整方程式ヲ解クベシ.

茲ニ注意スベキハ第二法ニ於テ時トシテハ分母ヲ零トナラシムルガ如キ根ヲ誘致スルコトアリ,然ルトキハ斯カル根ハ採用スルコト能ハザルモノナレバ此法ニヨリテ分數方程式ヲ解キタルトキニハ斯クノ如キ

根ノ有無ヲ撿スベシ，而シテ分母ヲ零トナラシムル根アル𪜈ハ之レヲ棄ツベシ．第一法ハ此點ニ於テ完全ナル方法ナリ．

今例ヲ以テ分數方程式解法ノ原理ヲ說明セン．

(例 1) $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$ ヲ解ケ．

此方程式ニ就テ注意スベキヿハ x ハ 1 或ハ -1 ナルベカラザルコトナリ，假リニ x ハ 1 或ハ -1 ナラズトセン，然ラズ x^2-1 ハ決シテ 0 トナルコトナキガ故ニ此方程式ノ兩邊ニ x^2-1 ヲ掛ケテ以テ同値ナル方程式

$$x^2-3x+2(x^2-1)+(x+1)=0$$

即 $$(x-1)(3x+1)=0$$

二數ノ積ガ零ニ等シキガ爲メニハ其何レカ一方ノ因數ガ零ナレバ可ナリ，然ルニ假定ニヨリテ x ハ 1 トナルコト能ハサルガ故，コノ方程式ヲ解キテ得ル所ノ根ハ $3x+1=0$ ヨリ得ル所ノモノ即

$$x=-\frac{1}{3}$$

ナラザルベカラズ．

(例 2) $\frac{x^2-11x}{2(x^2-1)}+\frac{5}{2(x-1)}+1=0$ ヲ解ケ．

コノ方程式ニ於テモ亦 x ハ 1 或ハ -1 トナル事能ハズト云フ制限ガ存在スベシ，依テ $2(x^2-1)$ ヲ兩邊ニ掛ケテ同値ナル方程式

$$x^2-11x+(2x^2-1)+5(x+1)=0$$

即 $$3(x-1)^2=0$$

ヲ得，而シテ x ハ 1 或ハ -1 ナルベカラザル所ノ制限ノ存スルニヨリ此方程式ハ決シテ根ヲ有スルヿナシ．

然ルニ第一法ニヨリテ與ヘラレタル方程式ノ左邊ニアル總テノ項ヲ纒メ一ツノ分數式トナシ之レヲ既約分數トナストキハ

$$\frac{3(x-1)}{x+1}=0$$

トナル，コノ分數式ガ零ニ等シキ爲メニハ其分子ガ零ナレバ可ナリ．

依テ $$3(x-1)=0$$

而シテ $3(x-1)=0$ ナル爲メニハ是非共

$$x-1=0$$

ナラザル可カラズ，ヨリテ之レヲ解ケバ $x=1$ ヲ得．之レ與ヘラレタル方程式ノ根ナリ．

上ニ示スガ如ク何處マデモ與ヘラレタル形ニ拘泥シテ分數方程式ヲ解クトキハ其方程式ハ根ヲ有セズ，之ニ反シ分數方程式ノ與ヘラレタル形ノ如何ニ拘泥セズ，總テ第一法ニヨリテ根ヲ索ムル𪜈ハ與ヘラレタル方程式ハ $x=1$ ナル根ヲ有ス．

讀者ハ茲ニ於テ迷ヲ來スナラン，然レ𪜈，或ハ根ヲ有セズト云ヒ或ハ根ヲ有スト云フモ之レ何レモ誤リニハアラザルナリ，斯カル結果ヲ來ス所以ノモノハ其根本ノ規約ニ於テ異ルガ故ナリ，而シテ古來代數學ニ於テ行ハルヽ規約ハ既約分數式ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ形ヲ以テ，分數方程式ノ本體トナスモノナリ．

第二法ヲ實行シテ得タル根ノ正否ヲ撿スルニ當リ方程式ノ與ヘラレ

タル形チ=就キテ撿ヲ行ハントセシ片不都合ヲ來ス如キ場合（現ニ例(2)=於テ $x=1$ ナル根ヲ得タリ之レヲ與ヘラレタル方程式=直チニ代入シテ撿メスル片ハ分母ヲ零トナスベキヲ見出スベシ）=於テハ本体ノ形(即第一法=ヨリテ得ベキ方程式ノ形)=於テ之レヲ行フベキナリ，即上例=於テハ本体ノ形 $\dfrac{3(x-1)}{x+1}=0$ =於テ $x=1$ ヲ代入スル片ハ $x=1$ ナル答ノ正シキヲ知ルベシ.

總テ方程式ヲ解カンガ爲メニ未知數ヲ含ミタル式ヲ以テ其兩邊=掛ケ或ハ兩邊ヲ剖ルコトハ大=考慮ヲ要スベキ事ナリ.

何トナレバ未知數ノ値ハ方程式ヲ解キタル上=アラザレバ之レヲ知ルコト能ハザル=ヨリ，其式ノ決シテ零トナルヿ無キヲ確ムルコト能ハザレバナリ.

例トヘバ或ル方程式ヲ解カンガ爲メ方程式ノ兩邊= $x-3$ ヲ掛クルヿヲ考ヘタリトセヨ，x ノ値ハ方程式=ヨリテ定マレルモノナレド方程式ヲ解キタル上ナラデハ之レヲ知ル=由ナク,依テ x ガ 3 =等シク,從テ $x-3$ ガ零トナルヿナキヤ否ヤヲ豫メ保スルコト能ハズ.

而シテ或ハ零トナルヿモアリ得ベキ所ノ $x-3$ ヲ以テ,方程式ノ兩邊=掛クルハ不都合ナルヤ明カナリ.

尤モ x ガ 3 =等シカラズト假定シ $x-3$ ヲ兩邊=掛ケテ方程式ヲ解キタル後 x ノ値ガ幸=シテ 3 =アラザリシナラバ $x-3$ ヲ掛ケタルコトハ正當=シテ從テ此答ハ正シキモノナリ. 然レ共 x ノ値ガ 3 ナルトキハ $x-3$ ハ零ナルガ故 $x-3$ ヲ掛ケタル事ハ不都合トナリ,從テ此解法ハ無効=歸スルモノトス.

此理論ハ即チ第二法ノ因テ原ツク所ノモノナリ.

問　題

次ノ方程式ヲ解ケ.

(1) $x+\dfrac{1}{x}=6$ 　答 $x=3\pm2\sqrt{2}$

(2) $\dfrac{5x-1}{x+1}=\dfrac{3x}{2}$ 　答 $x'=2\quad x''=\dfrac{1}{3}$

(3) $\dfrac{x-1}{x-4}-\dfrac{x-3}{x-2}=\dfrac{11}{12}$ 　答 $x'=8\quad x''=2\dfrac{4}{11}$

(4) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{3}{5}$ 　答 $x'=3\quad x''=-4\dfrac{2}{3}$

(5) $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{4}{x+1}=3$ 　答 $x=3\pm\sqrt{3}$

(6) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+11}=0$ 　答 $x'=-5\quad x''=-15$

(7) $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{3}{x}=\dfrac{14}{4+x}$ 　答 $x'=3\quad x''=-1\dfrac{1}{3}$

(8) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 　答 $x'=4\quad x''=0$

(9) $\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{4}{x+3}+\dfrac{4}{2-x}=0$ 　答 $x'=1\quad x''=-\dfrac{4}{3}$

(10) $\dfrac{1}{x^2-3x}+\dfrac{1}{x^2+4x}=\dfrac{9}{2x^2}$ 　答 $x'=4\quad x''=-\dfrac{27}{5}$

III. 平方根

無理式ヲ說ク前ニ平方根ニ就テ述ブル所アラントス,尤モ一般ノ根ニ就テハ後章ニ讓リ茲ニテハ二次方程式ニ於テ必要ナル限リノ範圍內ニ於テ論ゼントス.

或ル數ノ平方ガ與ヘラレタル數ニ等シキ片ハ,此或ル數ヲ與ヘラレタル數ノ**平方根**ト稱ス.

而シテ或ル數ノ平方根ヲ求ムルヿヲ此數ヲ**平方ニ開ク**ト云フ.

或ル數 a ノ平方根ヲ書キ表ハスニハ, 通常 $\sqrt{\ }$ ナル符號ヲ a ニ冠ラスモノトス.

旣ニ算術ニ於テ平方根ヲ索ムル幾多ノ例ニ出遇ヒタル讀者ハ,所謂開キ切レヌト云フ場合ノ存スルコトヲ知ルナラム.

例ヘバ3ノ平方根ハ整數ニ等シキコト能ハズ.

如何トナレバ1ノ平方ハ矢張リ1ニシテ2ノ平方ハ4ナルガ故 $\sqrt{3}$ ハ1ト2トノ間ニ在ル或ル數ナルベキヲ知ルベシ,次ニ $\sqrt{3}$ ハ分數ニ等シキヤ否ヤヲ見ル爲メニ $\sqrt{3}$ ハ分數ニ等シト假定シ,而シテ其分數ヲ巳約分數ニ化シタルモノヲ表スニ $\frac{m}{n}$ ヲ以テセン.

茲ニ m ト n トハ公約數ヲ有セザル(即互ニ素ナル)整數ニシテ且 n ハ1ニアラズトス.

然ル片ハ　$\sqrt{3}=\frac{m}{n}$

　從テ　$3=\frac{m^2}{n^2}$

ナラザル可カラズ.

而シテ分母ガ1ニアラザル巳約分數ヲ平方シタルモノハ矢張リ分母ガ1ニアラザル巳約分數ニシテ,決シテ整數ニ等シキコト能ハザルハ

多數ノ例ニ就テ之レヲ驗証スルコトヲ得ベキノミナラズ整數論ナル高等數學ニ於テ嚴密ニ之レヲ証明スルヿヲ得ベシ.

故ニ $\sqrt{3}$ ノ如キハ整數ニモアラザレバ又分數ニモアラザル所ノモノナリ.

或ル整數又ハ分數ノ平方ニ等シキ數ヲ一般ニ完全ナル平方數ト稱シ,整數1,2,3,4,5,6.........ヲ夫々平方シテ得ル所ノ1,4,9,16,25,36.......ヲ**平方整數**ト稱ス.

或ル數ノ平方ハ恒ニ之レヲ索ムルコトヲ得ベシ. 而シテ整數ノ平方ハ矢張リ整數ニシテ分數ノ平方ハ矢張リ分數ナリ.

之レニ反シテ或ル數ヲ平方ニ開クコトヲ得ル場合ハ其數ガ整數ナレバ平方整數. 分數ナレバ(旣約分數ニナシタル後)平方分數ニ(即分子ト分母ガ各平方整數ナル分數ナルモノ)ナリ得ル片ニ限リ之レヲ平方ニ開キ得ルナリ.

此ノ定理ハ整數論ニ於テ嚴密ニ証明シ得ラルヽナリ.

今一ツノ數 a ガ完全ナル平方數ニアラズトスレバ $\sqrt{a}$ ハ整數ニモアラザレバ又分數ニモアラズ.

故ニ數ト云フ言葉ノ從來ノ意義ニテハ "$\sqrt{a}$ ハ數ニアラズ" 然レ𪜈數ナル言葉ノ意味ヲ擴張シテ $\sqrt{a}$ ヲモ數ト看做スモ差支ナシ.

偖テ完全ナル平方數ニアラザル a ノ平方根 $\sqrt{a}$ トハ如何ナル數ナリヤト問ハヾ單ニ "$\sqrt{a}$ トハ之レヲ平方スレバ a トナル所ノ數ナリ" ト答フレバ可ナリ.

吾人ハ此新タナル數ハ整數分數ト同ジ規則ニ從フベシト規約ス.

a ガ完全ナル平方數ニアラザル場合ニ於ケル a ノ平方根即 $\sqrt{a}$ ヲ稱シテ之レヲ一般ニ**無理ノ數**ト云フ.

無理數ニ對シテ整數分數ヲ**有理ノ數**ト云フ.

112. 前條ノ規約ノ結果トシテ有理數ノ場合ニ於テ異ナル積ノ値ハ因數ヲ掛ケ合ハスル順序ニ關セザルコトハ,無理數ノ場合ニモ當テハマルガ故ニ

$$\{\sqrt{a}\sqrt{b}\}^2=\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{b}=\{\sqrt{a}\sqrt{a}\}\{\sqrt{b}\sqrt{b}\}=ab$$

故ニ又 $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ ....(1)

同様ニ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ ....(2)

公式(1)及ビ(2)ノ特別ナル場合トシテ

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\sqrt{b}=a\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{a}}{b}$$

公式(2)ハ又次ノ如クニ書キ直スコトヲ得ベシ.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}$$

公式(1)及(2)ヲ應用シテ無限數ヲ簡單ナル形ニ化スルコトヲ得ベシ.

簡單ナル形トハ根號ガ分子ノ中ニノミ在リテ且ツ根號ノ下ニハ成ルベク小サキ整數ガ殘リ居ルヲ云フ.

例ヘバ $\sqrt{8}=\sqrt{2\times4}=2\sqrt{2}$

$$\sqrt{\frac{8}{3}}=\frac{\sqrt{4\times2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4\times2\times3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

ノ如シ.

113. 無理式ヲ含ミタル方程式

無理式ヲ含ミタル方程式(略シテ無理方程式ト云フ)ヲ解クニハ先ヅ之レヲ有理式ノ方程式ニ化スベシ.

之レヲ爲スニハ時トシテハ巧ミナル考案ヲ要スルモノアレドモ通常ハ下ノ二件ニ準據ス.

〔I〕 一ツノ無理項ヲ有理ノモノニ化スルニハ之レヲ離シテ等號ノ一邊ニ孤立セシメ之レヲ有理式ニ化スル爲メニ必要ナルダケ方程式ノ兩邊ノ羃ヲ高ムベシ,次ニ示ス(例1)ノ如シ.

〔II〕 數多ノ平方根アルトキハ其ノ一ツ或ハ二ツヲ等號ノ一邊ニ置キ,而シテ兩邊ヲ平方セバ無理項ノ數ノ少キ方程式ヲ得ルコトアリ. 故ニ必要ノアルダケ幾回モ此法ヲ反覆シ然ル後〔I〕ヲ行フ(例3,)(例4)ノ如シ.

茲ニ注意スベキコトアリ. 即〔I〕ヲ實行スルコトニ依リテ方程式ニ條ノナキ根(之レヲ無條根ト稱ス)ヲ誘出スルコトナリ. 今其理由ヲ說明セン.

茲ニ $x=a$ ....(1)

ナル方程式アリシトス,コノ方程式ノ兩邊ヲ平方シルコトニヨリテ

$x^2=a^2$ ....(2)

ヲ得ベシ.

如何ニモ $x=a$ ナルトキハ $x^2=a^2$ ナルニハ相異ナシ,然レドモ方程式(1)ト方程式(2)ノ間ニハ肝要ナル區別アリ. 何者.

$x^2=a^2$

ヲ解クトキハ

$$x=\pm a^2$$

即 $x=a$ ト $x=-a$ ヲ得ベク即此中ニハ始メノ $x=a$ モアレドモ又元トノ方程式ニ全ク縁ノナキ $x=-a$ モ存ス.

即方程式(2)ノ内ニハ方程式(1)ヲ滿足セザル根ヲ含有スルヲ見ルベシ,コレ(I)ノ方法ニヨリテ方程式ヲ解クトキニ無縁根ヲ誘出スル所以ナリ.

故ニ有理化シタル方程式ヨリ得タル根ハ元トノ方程式ニ果シテ適合スルヤ否ヤヲ驗シ適合セザル根ハ之レヲ棄ツベキナリ.

(例 1) $\sqrt{x^2-6}+x=3$ ヲ解ケ.

移項シテ $\sqrt{x^2-6}=3-x$

兩邊ヲ平方シテ $x^2-6=(3-x)^2$

即 $x^2-6=9-6x+x^2$

即 $6x=15$

$$\therefore \quad x=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}.$$

驗メシ $x=\frac{5}{2}$ ナルトキハ $\sqrt{x^2-6}+x=\sqrt{\frac{25}{4}-6}+\frac{5}{2}=3$

故ニ $x=\frac{5}{2}$ ハ正當ナル根ナリ.

(例 2) $x-\sqrt{x^2-8}=4$ ヲ解ケ.

移項シテ $x-4=\sqrt{x^2-8}$

$x-4=\sqrt{x^2-8}$
$(x-4)^2=x^2-8$

兩邊ヲ平方スレバ

$$(x-4)^2=x^2-8$$

或ハ $x^2-8x+16=x^2-8$

即 $8x=24$

$$\therefore \quad x=3$$

驗メシ $x=3$ ナルトキハ $x-\sqrt{x^2-8}=3-\sqrt{9-8}=3-1=2$

即始メノ方程式ニ適合セズ故ニ $x=3$ ハ不當ノモノナリ.仍テ此方程式ニハ根ナシ.

(例 3) $2\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+6}-2=0$ ヲ解ケ.

一ツノ無理項ヲ一邊ニ孤立セシメテ

$$2\sqrt{x+4}=\sqrt{2x+6}+2$$

兩邊ヲ平方シテ $4(x+4)=2x+6+4\sqrt{2x+6}+4$

同類項ヲ集メ且ツ無理項ヲ一邊ニ孤立セシメテ

$$x+3=2\sqrt{2x+6}$$

平方シテ $x^2+6x+9=4(2x+6)$

即 $x^2-2x-15=0$ $(x-5)(x+3$

$\therefore \quad x=1\pm\sqrt{1+15}$ (二次方程式ノ根ヲ求ムル公式)

依テ $x'=5 \quad x''=-3$

驗メシ 元方程式ニ於テ $x=5$ トスレバ

$$2\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+6}-2=2\sqrt{9}-\sqrt{16}-2$$
$$=6-4-2$$
$$=0$$

又元方程式ニ　$x=-3$ トスレバ

$$2\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+6}-2=2\sqrt{1}-\sqrt{0}-2$$
$$=0$$

依テ　5及ビ -3 ハ何レモ適當ナル根ナリ.

(例 4)　$\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{12x+1}$　ヲ解ケ.

兩邊ヲ平方シテ

$$x+5+3x+4+2\sqrt{(x+5)(3x+4)}=12x+1$$

同類項ヲ集メ且ツ無理ノ項ヲ孤立セシメ後兩邊ヲ2ニテ除シテ

$$\sqrt{(x+5)(3x+4)}=4x-4$$

更ニ平方シテ

$$(x+5)(3x+4)=16x^2-32x+16$$

即チ　$13x^2-51x-4=0$

之レヲ解キテ

$$x=4 \quad 或ハ \; -\frac{1}{13}$$

驗メシ　$x=4$ ヲ原方程式ニ代入スルニ

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+4}=\sqrt{12x+1}$$

今 $x=4$, $\therefore$ $\sqrt{4+5}+\sqrt{3\times4+4}=\sqrt{12\times4+1}$

$$3 \;+\; 4 \;=\; 7$$

ニシテ適合ス.

次ニ　$x=-\frac{1}{13}$ ヲ代入センニ

$$\sqrt{\frac{-1}{13}+5}+\sqrt{\frac{-3}{13}+4}=\sqrt{\frac{-12}{13}+1}$$

即

$$\sqrt{\frac{64}{13}}+\sqrt{\frac{49}{13}}=\sqrt{\frac{1}{13}}$$

依テ　$\frac{8+7}{\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$

然ルニコノ等式ハ成立ツ能ハズ,故ニ $x=-\frac{1}{13}$ ハ始メノ方程式ノ根ニアラズ,依テ單ニ $x=4$ ノミヲ以テ答トス.

(例 5)　$\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}+\sqrt{7x+1}=0$　ヲ解ケ.

此方程式ノ各項ハ何レモ正ニシテ正ナル數ノ和ガ零ナル爲メニハ各項ガ各別ニ零トナラザルベカラズ.

然ルニ同ジ x ノ値ニテハ此各項ハ零トナルヿ能ハズ故ニコノ方程式ハ不合理ナルヿ即根ヲ有セザルコトヲ知ル.

注意　總テ無理方程式ヲ解キテ x ノ値ヲ索メ得タル後ハコレ等ノ x ノ値ノ中何レガ與ヘラレタル方程式ヲ滿足スルカヲ必ズ吟味スベシ.

或ル數 a ノ平方根ヲ表スニ $\sqrt{a}$ ヲ以テ表セリ,而シテ $\sqrt{a}$ ハ唯 a ノ平方根ヲ表スノミナルトキハ $\sqrt{a}$ ハ正負二ツノ二數　即 $+\sqrt{a}$ ト $-\sqrt{a}$ ヲ表ス如キ不都合ナルヿヲ惹起スベシ,ヨリテ凡テ單ニ　$\sqrt{a}$ ト記セルトキハ a ノ平方根ノ二ツアル內其正ナルモノヲ表スモノト規約ス,コレ代數學ニ於テ甚ダ必要ナル規約ニシテ,上來說キ來リタル內ニモコノ規約ヲ履行シ來レルモノナリ.（コノ規約ハ a ガ如何ナル値ナルトキニテモ常ニ行フベキ所ノモノタルヤ論ナシ).

問　題

1.　次ノ方程式ヲ解ケ

(1) $\sqrt{13+x}+\sqrt{13-x}=6$ 答 $x=\pm 12$

(2) $x=7\sqrt{2-x^2}$ 答 $x=\frac{7}{5}$

(3) $x-5\sqrt{x}=14$ 答 $x=49$

(4) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x+10}=1$ 答 $x=5$

(5) $\sqrt{4-x}-\sqrt{x}=\sqrt{4-3x}$ 答 $x'=0$ $x''=\frac{16}{13}$

(6) $\sqrt{6-x}-2\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}$ 答 $x=\frac{21}{17}$

(7) $\sqrt{2x+7}-\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$ 答 根ナシ

(8) $\sqrt{7x-5}-\sqrt{4x-1}+\sqrt{7x-4}=\sqrt{4x-2}$ 答 $x=1$

(9) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$ 答 $x'=a$ $x''=b$

(10) $\sqrt{ax+b^2}-\sqrt{bx+a^2}=a-b$ 答 $x=4(a+b)$

$ax+b^2-bx+a^2+2\sqrt{(ax+b^2)(bx+a^2)}$

第十八章

二次方程式應用問題

113. 已知數ト未知數トノ關係ヲ代數的ニ書キ表スバ二次方程式ヲ得ベキ所ノ問題ニ就テ說述セントス.

凡ソ問題ヲ解クニ當リ題意ニ從テ作リタル方程式ヲ解キテ得タル結果ガ往々其問題ノ要件ニ適セザルコアリ.

是レ方程式ノ根ハ正數負數分數虛數等ヲ論ゼザレバ應用問題ニ於テハ此等ニ關スル制限ノ或ハ陽ニ或ハ陰ニ存スルコアルガ故ナリ.

依テ何レノ問題ニ就テモ之レヲ解クニ三段アリ. 即

(第一) 未知數已知數ノ關係ヲ代數的ニ書キ著スコト即方程式ヲ作ルコト.

(第二) 此方程式ニ適合スル未知數ノ値ヲ求ムルコト.

(第三) 問題中或ハ陽ニ或ハ陰ニ存在スルモ併モ方程式中ニ著ハレザル要件ニ其値ノ適合スルヤ否ヤヲ撿メシテ後適當ノモノヲ撰ブベキコ.

是等ノ事ハ已ニ一次方程式ノ應用問題ヲ解ケル際ニモ說述セシ所ナレド念ノ爲メニ玆ニ再述セルナリ.

(例 1) 或ル數ノ半分ト其三分ノ一トノ積ハ 384 ナクト云フ, 仍テ此數ヲ求ム.

x ヲ以テ求ムル所ノ數トセバ

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}=384$$

即 $x^2=64$

之レヲ解ケバ $x=\pm 8$

コノ一ツノ値ハ何レモ題意ニ適ス故ニ問ヒタル數ハ 8 又ハ -8 ナリ.

(例 2) 二桁ノ數アリ. 其一位ノ數字ハ十位ノ數字ヨリ 3 ダケ大ニシテ此數ハ數字ノ積ノ二倍ニ等シト云フ, 仍テ此數ヲ求ム.

十位ノ數字ヲ x トスレバ一位ノ數字ハ $x+3$ ニシテ索ムル所ノ數ハ $10x+(x+3)$ ナリ.

然ルニ題意ニヨリテ $10x+(x+3)=2x(x+3)$

即 $2x^2-5x=3$

之レヲ解ケバ

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2+24}}{4}$$

即 $$x=\frac{5\pm7}{4}$$

即 $$x=3,\ 或ハ\ -\frac{1}{2}$$

然ルニ數字ノ表ス所ノ數ハ正ノ整數ナラザル可カラズ故ニ $-\frac{1}{2}$ ナル値ハ不合理ナリ.

依テ十位ノ數字ハ 3 從テ一位ノ數字ハ 6 ニシテ所求ノ數ハ 36 ナリ.

(例 3) 或ル棒ノ長サノ尺數ノ九倍ハ其數ノ平方ノ二倍ヨリ四多シ,棒ノ長サ幾何ナルカ.

x ヲ以テ棒ノ長サノ尺數ヲ表ストセバ題意ニヨリ

$$9x=2x^2+4$$

$$\therefore\quad 2x^2-9x+4=0$$

$$x=\frac{9\pm\sqrt{9^2-32}}{4}$$

$$=\frac{9\pm7}{4}$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\ 或ハ\ 4.$$

即棒ノ長サハ $\frac{1}{2}$ 尺又ハ 4 尺ナリ.

(例 4) 或ル家ニ小兒アリ其數ノ九倍ハ其數ノ平方ノ二倍ヨリ四多シト云フ. 小兒ハ幾人ナルカ.

小兒ノ人數ヲ x トスレバ題意ニヨリ

$$9x=2x^2+4$$

コノ式ハ例 3 ト同ジ方程式ナリ.

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}\ 或ハ\ 4$$

然ルニ小兒ノ數ハ分數タル能ハズ故ニ $\frac{1}{2}$ ハ不適當ナリ. 依リテ小兒四人ヲ以テ答トナス.

(例 5) 農夫アリ長サ二十五間ノ繩ヲ以テ六十坪ノ矩形地ヲ圍ミタリト云フ,斯クノ如キ事ハ實際有リ得ルカ.

矩形地ノ一邊ノ間數ヲ x トスレバ其ノ隣リノ邊ノ間數ハ $\frac{60}{x}$ ナリ.

故ニ農夫ノ言ヲ眞トスレバ $2\left(x+\frac{60}{x}\right)=25$

即 $$2x^2-25x+120=0$$

$$x=\frac{25\pm\sqrt{625-960}}{4}$$

$$=\frac{25\pm\sqrt{-335}}{4}$$

然ルニコレハ虛數ナリ故ニ斯クノ如キ矩形ハアリ得ベカラズ.

(例 6) 甲乙ノ二人ノ人アリ. 甲ハ 180 圓ヲ若干人ニ施與シ乙ハ同額ノ金ヲ甲ノ施與セシ人數ヨリ四十人少キ人數ニ施與セリ,而シテ各一人宛等分ニ施與セシニ甲ガ施ス所ハ一人ニ就キ乙ノ施セショリハ 6 圓少ナシト云フ,甲ハ一人ニ付キ幾何ツヽ施セシカ.

甲ノ施セシ一人分ノ金額ヲ x 圓トセバ B ノ施セシ金額ハ $x+6$ 圓ナリ

題意ニヨリテ

$$\frac{180}{x}=\frac{180}{x+6}+40$$

之レヲ解ケバ

$$x=3 \text{ 或ハ } x=-9$$

施セシ金額ハ正ノ數ナラザル可カラズ故ニ $x=-9$ ハ不適當ナリ,仍テ甲ハ一人ニ付キ三圓ヅヽ施セシヲ知ル.

(例 7) 兵士若干人ヲ以テ方陣ニ列スルアリ若シ之ヲシテ各面四層ニ列シタル中空ノ方陣ヲ作レバ其方邊ノ人數ハ前ノ方邊ノ人數ヨリ 16 人多カルベシト云フ,兵士ノ人數幾何ナルカ.

中空ノ方陣ノ方邊ノ人數ヲ x トスレバ

$$x^2-(x-4\times 2)^2=(x-16)2$$

之レヲ解キテ $x=40$ 或ハ 8

ヲ得. 故ニ兵士ノ人數$=(40-16)^2=578$

中空方陣ノ方邊ノ人數ハ 40 人或ハ 8 人ヲ得タリ,然レ𪜈 8 人ノ方ハ不適合ナルニヨリ之レヲ棄テタリ.

問　題

(1) 二數ノ和ハ 15 ニシテ其ノ積ハ 54 ナリ. 二數ヲ求ム.

(2) 三數アリ其一ツハ他ノ三倍ニシテ其積ハ 432 ナリト云フ. 二數ヲ求ム.

(3) 矩形ノ地アリ長サハ幅ヨリ三十四間長シ而シテ面積ハ千八十坪アリト云フ依テ問フ長サ及ビ幅幾何ナルカ.

(4) 矩形ノ地アリ其周 500 間ニシテ面積ハ四町八反ナリ. 長サ及幅ヲ問フ.

(5) 積ガ 216 ニナル樣ニ 30 ヲ二ツノ部分ニ分テ.

(6) 三個ノ正ノ數アリ第二ノ數ハ第一ノ數ノ三分ノ二,第三ノ數ハ第一ノ數ノ半分ニシテ此三ツノ數ノ平方ノ和ハ 549+0 ト云フ,仍テ此三數ヲ索ム.

(7) 16 ヨリハ大ニシテ 25 ヨリハ小ナル整數アリ,此數ト 16 トノ和ノ此數ト 25 トノ和ニ對スル比ハ,此數ヨリ 16 ヲ減シタル差ノ,25 ヨリ此數ヲ減シタル差ニ對スル比ニ等シト云フ仍テ此ノ數ヲ索ム.

答 20

(8) 36 ヨリ或ル數ヲ減シタル差ト 30 ヨリ同シ數ヲ減シタル差トノ積ハ 891 ナリト云フ,或ル數トハ如何.

(9) 二數アリ一方ノ數ガ 18 ヲ超過スルダケ他ノ數ハ 18 ヨリ不足ニシテ二數ノ平方ノ和ハ 698 ナリト云フ仍テ此二數ヲ索ム.

答. 23,13

(10) 和ガ $2a$ ニシテ平方ノ和ガ $2b$ ナル二數ヲ索ム.

(11) a^2+b^2 ヲ二ツノ部分ニ分チ,其積ガ丁度 $\frac{1}{4}(a^4+a^2b^2+b^4)$ トナル樣ニセヨ.

答. $\frac{1}{2}(a^2+ab+b^2)$

(12) 父ト子トノ年齡ノ和ハ 100 歲ニシテ,年齡ノ積ノ十分ノ一ハ親ノ年齡ヲ超過スルコト 180 ナリト云フ父子ノ年齡幾何ナルカ.

答. 60 歲, 40 歲

(13) 十位ノ數字ハ一位ノ數字ヨリハ 3 ダケ大ナル二桁ノ數アリ,此數ニ數字ノ和ヲ掛クル𪜈ハ 814 ヲ得ベシト云フ此數ヲ求ム.

答. 74

(14) 酒ヲ以テ充タサレタル六斗入ノ樽ヨリ若干升ノ酒ヲ汲ミ出シ之レヲ補フニ水ヲ以テシ，更ニ先キニ汲ミ出シタル容積ヨリハ一斗四升多ク混合液ヲ汲ミ出シ，再ビ水ヲ以テ補ヒシニ，跡ニハ酒ト水トガ半々ニナリ居レリト云フ，最初ニ汲ミ出セシ酒ノ量如何.

答. 1斗

(15) 或ル人年利若干ニテ金五千圓ヲ一ケ年ノ定期預ケトナシ，一年後ニ受取リタル利息ノ中ヨリ金五十圓ヲ減シ，殘高ヲ元金ニ加ヘ更ニ同シ利率ニテ一ケ年ノ定期預ケトナシ，期日ニ至リ元利合計金五千七百七十七圓ヲ受取レリト云フ，利率如何.　答. 年八分

(16) 三ツノ相隣レル正ノ整數アリ，最大ナル數ノ立方ト最小ナル數ノ立方トノ差ガ中央ノ數ノ40倍ヲ超過スルコト16ナリト云フ 仍テ此三數ヲ索ム，　答. 6, 7, 8

(17) 金六十五圓ヲ甲乙丙ノ三人ニ配分スルニ甲ノ所得ハ乙ノ所得ヨリハ五圓多ク丙ノ所得ハ甲ノ所得ニ乙ノ所得ノ圓數ヲ掛ケタル積ニ等シト云フ，三人ノ所得各幾何ナルカ.　答. 甲10圓，乙5圓，丙50圓

(18) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α 及ビ β トシ，α^2 及ビ β^2 ヲ根トスル方程式ヲ a b c ニテ書キ表ハセ.

(解) 所要ノ方程式ハ

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$$

ナリ，

扨テ α 及ビ β ハ $ax^2+bx+c=0$ ノ根ナルガ故ニ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

故ニ　$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2=\frac{b^2}{a^2}$,　　$2\alpha\beta=\frac{2c}{a}$

仍テ　$\alpha^2+\beta^2=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}$

$$=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

又　$\alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2}$

故ニ上ノ方程式ハ　$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0$

即　$a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$

之レヲ以テ答トス.

(19) 方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α 及ビ β トシ $\frac{\alpha}{\beta}$ 及ビ $\frac{\beta}{\alpha}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ.

(解) 二ツノ根ノ和ハ

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{b^2-2ac}{a^2}\div\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{ac}$$

又二ツノ根ノ積ハ　$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}=1$　ナリ.

故ニ所要ノ方程式ハ

$$x^2-\frac{b^2-2ac}{ac}+1=0$$

即チ

$$acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$$

ナリ.

(20) $100x^2+60x+m=0$ ナル方程式ノ一ツノ根ガ他ノ根ノ五倍トナル樣ニ m ノ値ヲ定メヨ.

(21) $x^2+px+q=0$ ノ根ヲ α 及ビ β トシ $\alpha+\beta$ 及ビ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ヲ根トスル二次方程式ヲ作レ.　　答 $qx^2+p(1+q)x+p^2=0$

第十九章

高次方程式

114. 二次ヨリ高キ次數ノ方程式ヲ**高次方程式**ト稱ス.

高次方程式ノ解法ノ一般ナルモノハ初等代數學ノ範圍外ナレﾄﾞ,其方程式ノ形狀ニヨリ二次方程式ノ解法ヲ應用シテ之レヲ解キ得ベキモノアリ,茲ニ之レヲ示サントス.

115. 複二次方程式の解法.

複二次方程式トハ四次方程式ニシテ未知數ノ偶數ノ階級ノ羃ノミヲ含ムモノニシテ即 x^4 ニ於ケル項ト, x^2 ニ於ケル項ト, 己知數ノ項トノ外含マザルモノヲ云フ, 故ニ複二次方程式ノ一般ノ形ハ次ニ示スガ如シ.

$$ax^4+bx^2+c=0 \qquad (1)$$

此方程式ヲ解クニハ x^2 ヲ未知數ニ取リ且ツ

$$x^2=y$$

即　$$x^4=y^2$$

ト置キ(1)式ニ於テ x^4 及ビ x^2 ニコノ値ヲ代入ス, 然ルﾄｷﾊ

$$ay^2+by+c=0$$

ヲ得.

此方程式ヨリ y ノ二ツノ値ヲ出セバ

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

而シテ x^2 ハ y ニ等シキ故 y ノ値ノ平方根ヲ求ムレバ x ノ値ヲ得ベキナリ.

即チ　$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \qquad (2)$$

故ニ x ノ値ハ四個アリ,而シテ此四個ノ値ハ二ツ宛其絶對値等シク,符號ハ相反スルモノナルベシ.

例　$x^4-7x^2+12=0$

ヲ解ケ.

公式(2)ヲ適用スレバ

$$x=\pm\sqrt{\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{7\pm1}{2}}$$

ヲ得, 今若シ四ツノ値ヲ別々ニ書ケバ次ノ如シ.

$$x'=2 \qquad x''=-2$$
$$x'''=\sqrt{3} \qquad x''''=-\sqrt{3}$$

116. 次ノ如キ解キ方ニヨリテ屢々與ヘラレタル方程式ヲ解キ得ルコトアリ.

(例一)　$\frac{x^2-6}{x}+\frac{5x}{x^2-6}=6$　ヲ解ケ.

$\frac{x^2-6}{x}=y$ ト置ケバ與ヘラレタル方程式ハ

$$y+\frac{5}{y}=6$$

即 $y^2-6y+5=0$

之レヲ解キテ

$$y=5 \text{ 或ハ } 1$$

依テ次ノ二ツノ方程式ヲ生ズ.

$$\frac{x^2-6}{x}=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x^2-6}{x}=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)式ハ即 $x^2-5x-6=0$

ニシテ之レヲ解ケバ

$$x=6 \text{ 或ハ } -1$$

(2)式ハ即 $x^2-x-6=0$

ニシテ之レヲ解ケバ

$$x=3 \text{ 或ハ } -2$$

ヲ得. 依テ與ヘラレタル方程式ノ根ハ次ノ四ツナリ.

$$x'=6 \quad x''=-1 \quad x'''=3 \quad x''''=-2$$

(例二) $2x^2-3\sqrt{2x^2-7x+7}=7x-3$ ヲ解ケ.

原方程式ヲ次ノ如ク書キ直ス

$$(2x^2-7x)-3\sqrt{2x^2-7x+7}=-3$$

$\sqrt{2x^2-7x+7}=y$ 即チ $2x^2-7x+7=y^2$ ト置クトキハ原方程式ハ

$$(y^2-7)-3y=-3$$

即 $y^2-3y-4=0$

之レヲ解キテ $y=4$ 或ハ -1

依テ次ノ二ツノ方程式ヲ得.

$$2x^2-7x-9=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2-7x+6=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)ノ方程式ヲ解キテ $x=\frac{9}{2}$ 或ハ -1 ヲ得

(2)ノ方程式ヲ解キテ $x=2$ 或ハ $\frac{3}{2}$ ヲ得

x ノ此四ツノ値ハ原方程式ノ根ナリ.

問　題

次ノ方程式ヲ解ケ.

(1) $64x^4-244x^2+225=0$

(2) $2x^4-5x^2-12=0$

(3) $\frac{x^2-1}{9}+\frac{1}{x^2}-1=0$ 答. ±1, ±3

(4) $x^4+\frac{1}{x^4}=a^4+\frac{1}{a^4}$ 答. $\pm a$, $\pm\frac{1}{a}$, $\pm a\sqrt{-1}$, $\pm\frac{1}{a}\sqrt{-1}$

(5) $(x^2-x)^2+12=8(x^2-x)$

(6) $(x^2+x)(x^2+x+1)=42$

(7) $\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^2+1}{x}=\frac{5}{2}$ 答. 1, $\frac{1\pm\sqrt{-15}}{4}$

(8) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)=12$

(9) $x^2+\sqrt{x^2+3x+7}=5-3x$ 答. $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$

---

117. 若干ノ因數ノ積トシテ表ハサレタル整式ヲ零ニ等シト置キテ得ベキ方程式ノ根ハ此等ノ因數ヲ別々ニ零ニ等シト置キテ得ベキ諸方程式ノ根ナリ.

例ヘバ $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=0$

ナル方程式ハ $x=a$ 或ハ b 或ハ c 或ハ d ナル値ニヨリテ滿足セラルベシ, 而シテ $x=a, b, c, d$ 以外ノ値ヲ與フルトキハ上式ノ左邊ハ零トナルヲ得ズ, 之レ $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$, $(x-d)$ ノ何レモ零トナルコトナキヲ以テ其積モ亦決シテ零トナルコトナキガ故ナリ.

同理ニヨリ $(x-a)(px^2+qx+r)=0$

ノ根ハ $x=a$ 及ビ $px^2+qx+r=0$ ナル二次方程式ヲ解キテ得ベキ二ツノ根ナリ.

此ノ理ニヨリテ三次方程式ノ一ツノ根ヲ知リ得タルトキハ他ノ根ハ容易ニ見出シ得ルナリ. (119 條ニ於テ之レヲ顧クベシ)

118. x ヲ含メル有理整式ニ於テ x ノ代リニ一ツノ數 α ヲ代入シテ其式ガ零トナルトキハ其式ハ $x-\alpha$ ニテ割リ切ルコトヲ得, 即チ $x-\alpha$ ハ其式ノ一因數ナリ.

何トナレバ今 P ヲ以テ其式ヲ代表セシメ之レヲ $x-\alpha$ ニテ割リタルトキ得ル所ノ商ヲ Q ニテ代表シ, 而シテ剩餘 R ヲ生ジタリトセヨ, 但

シ R ハ $x-\alpha$ ニテ割リタルトキノ剩餘ナルヲ以テ x ヲ含マザルモノナルコト勿論ナリ. 然ルトキハ次ノ關係アルベシ.

$$P=Q(x-\alpha)+R$$

此式ハ恒等式ナルヲ以テ x ノ代リニ如何ナル値ヲ置キ換フルモ其相等シキコトヲ失フ理ナシ, 故ニ今 x ノ代リニ α ヲ置キ換フレバ P ハ假設ニヨリテ零トナリ, 又 $Q(x-\alpha)$ ハ $x-\alpha$ ガ零トナル故 $Q\times 0$ 即零トナルベシ, 故ニ此式ハ

$$0=0+R$$

トナル, 依テ R ハ零ナラザル可カラズ, 即チ此割算ニ於テハ剩餘ナシ, 依テ $x-\alpha$ ハ P ノ因數ナリ.

119. 前條ノ理ニヨリ三次方程式ノ一ツノ根ヲ知ルトキハ他ノ根ハ二次方程式解法ニ從ヒ索ムルコトヲ得ベシ.

(例 1.) 方程式 $x^3-3x^2-7x+21=0$ ノ一ツノ根ハ 3 ナリ; 他ノ根ヲ索メヨ.

3 ハ此ノ方程式ノ根ノ一ツナルヲ以テ $x=3$ ナルトキ此式ノ左邊ハ零トナルベシ故ニ $x-3$ ハ其ノ因數ナリ (118 條) 仍テ割算ニヨリテ

$$x^3-3x^2-7x+21=(x-3)(x^2-7)$$

ナルコトヲ知ル故ニ與ヘラレタル方程式ハ次ノ如ク書クコトヲ得

$$(x-3)(x^2-7)=0$$

故ニ他ノ二根ハ $x^2-7=0$ ヲ解キテ得ラルベシ

即通常ノ方法ニヨリ $x=\pm\sqrt{7}$ ヲ得

依テ原トノ三次方程式ハ三ツノ根 3, $\sqrt{7}$ $-\sqrt{7}$ ヲ有ス.