中學
代數教科書
下卷

上野清 編纂

東京

吉川半七發行

下 卷 目 次

中學

代數教科書

下卷

第拾四編

貳次方程式

1. 方程式之因子 積ノ因子カ零ナルトキ其積ハ零ナリ又因子カ壹ツモ零ナラサルトキハ其積ハ零ナラス.

例ヘハ $a=0$ ナルトキ $ab=0$ ナリ, 故ニ $ab=0$ ナルトキ a 或ハ b ハ必ス 0 ナリ.

又 $abc=0$ ナルトキ a 或ハ b 或ハ c ハ 0 ナリ.

同法ニテ方程式 $(x-2)(x-4)=0$ ナルトキ $x-2=0$ 或ハ $x-4=0$ 而シテ此他ノ場合ヲ有セス故ニ此方程式ノ根ハ 2 或ハ 4 ナリ.

[library seal stamp]

又　$(x-3)(x-4)(x-5)=0$ ニ於テハ

$x-3=0$ 或ハ $x-4=0$ 或ハ $x-5=0$,

故ニ此方程式ノ根ハ 3, 4 及ヒ 5 ナリ.

2. 應用 前章ニ由テ方程式ノ後邊カ 0 ナルキ前邊ノ壹次因子ヲ零トスルコニ由テ壹根ヲ得ヘシ.

〔第壹例〕 $(x-1)(x+1)=0$ ヲ解セヨ.

$x-1=0$ 或ハ $x+1=0$,

故ニ　$x=1$ 或ハ -1.

〔第貳例〕 $x^2-9=0$ ヲ解セヨ.

$x^2-9=0$ ヨリ $(x+3)(x-3)=0$,

故ニ　$x=-3$ 或ハ 3.

〔第三例〕 $x^3-2x=0$ ヲ解セヨ.

$x(x^2-2)=0$ 即チ $x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$,

故ニ　$x=0$ 或ハ $-\sqrt{2}$ 或ハ $\sqrt{2}$.

〔第四例〕 $x^2+6=5x$ ヲ解セヨ.

原方程式ヲ轉項スレハ $x^2-5x+6=0$,

即チ　$(x-2)(x-3)=0$,

故ニ　$x=2$ 或 $x=3$.

例題四拾

次ノ各方程式ヲ解セヨ.

1. $(x-1)(x+2)=0$.　　2. $(x-3)(x-4)=0$.
3. $(2x+1)(2x-1)=0$.　　4. $(2x-5)(x-4)=0$.
5. $x(x-2)(x+3)=0$.　　6. $x(2x-1)(3x+4)=0$.
7. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)=0$.
8. $(2x-3)(3x-4)(4x-5)(5x+6)=0$.
9. $x^2-2x=0$.　　10. $x^2+3x=0$.
11. $2x^2-5x=0$.　　12. $3x^2+x=0$.
13. $x^2=5x$.　　14. $2x^2=x$.
15. $3x^2=5x$.　　16. $5x^2=-6x$.
17. $ax^2=bx$.　　18. $6x^2=x^2+5$.
19. $5(x^2+5)=3(x^2+25)$.
20. $5(x^2+3)-(x+5)(x-5)=76$.
21. $3x^2+(5x+2)^2=20x+32$.
22. $17+3x=\frac{1}{2}(x+3)^2-28$.
23. $x^2-7x+12=0$.　　24. $x^2-9x+20=0$.
25. $x^2-11x+28=0$.　　26. $x^2-25x+150=0$.
27. $x^3+11x^2=180x$.　　28. $x^3-x^2=132x$.

3. 貳次方程式 (Quadratic Equation)

即チ未知數量ノ最高次ノ項カ貳次ナル方程式ヲ解セントス.

之ヲ解スルニハ右邊ヲ零ニ等シカラシメ左邊ヲ第九編10.章ニ由テ兩因子ニ分割スヘシ.

〔第壹例〕 $x^2+12x+35=0$ ヲ解セヨ.

$$x^2+12x+6^2-6^2+35=0,$$

即チ $(x+6)^2-1=0,$

故ニ $(x+6+1)(x+6-1)=0,$

即チ $(x+7)(x+5)=0,$

$\therefore \quad x=-7 \quad x=-5.$

〔第貳例〕 $3x^2=10x-3$ ヲ解セヨ.

轉項スレハ $3x^2-10x+3=0,$

即チ $x^2-\frac{10}{3}x+1=0,$

即チ $x^2-\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{5}{3}\right)^2+1=0,$

即チ $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=0,$

故ニ $\left(x-\frac{5}{3}+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\right)=0,$

即チ $\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3)=0.$

$\therefore \quad x=\frac{1}{3}$ 或ハ $3.$

〔第三例〕 $4x-x^2=2$ ヲ解セヨ.

轉項スレハ $x^2-4x+2=0,$

即チ $x^2-4x+4-4+2=0,$

故ニ $(x-2)^2-(\sqrt{2})^2=0,$

即チ $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})=0,$

$\therefore \quad x=2-\sqrt{2}$ 或ハ $2+\sqrt{2}.$

例題四拾壹

次ノ方程式ヲ解セヨ.

1. $(x-3)^2=x+3.$	2. $(x-4)^2=x-2.$
3. $(x-1)(x-2)=20.$	4. $(x+1)(x+3)=2(x+3).$
5. $4x+3=x(x+2).$	6. $4x-3=x(2-x).$
7. $(x+1)^3=(x-1)^3+26.$	8. $(x-1)^3=(x+1)^3-56.$
9. $9x^2+16=24x.$	10. $x^2=2x+99.$
11. $24x^2=30x+75.$	12. $x^2-200=35x.$
13. $19x^2-39x+2=0.$	14. $17x^2+8=70x.$
15. $110x^2-21x+1=0.$	16. $21x^2-13x=20.$
17. $6x^2+6=13x.$	18. $6x^2=5x+1.$

19. $9x^2-63x+68=0.$　20. $16x^2+3=16x.$

21. $20x^2-41x-138=0.$　22. $29x^2+11x=138.$

23. $x^2-16=215-10x.$　24. $(x+2)^2=4(x-1)^2.$

25. $x^2-3ax+2a^2=0.$　26. $4x^2+4ax=b^2-a^2.$

4. 壹般之解法 $ax^2+bx+c=0$ ヲ解セントス.

〔第壹法〕 $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0,$

即チ $$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0,$$

即チ $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0,$$

即チ $$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0,$$

$$\therefore \quad x=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

或ハ $$x=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

〔第貳法〕 $x^2+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a},$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

變方ノ平方根ヲ求ムレハ

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{4a^2}},$$

$$\therefore \quad x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

5. 根之性質 $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ハ前章ニ由テ

$$-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a} \text{ 及ヒ } -\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

之ニ由テ次ノ如シ.

〔第壹〕 $b^2-4ac>0$ ナルキ不等ノ兩根ヲ有ス, 之ヲ兩實根トイフ.

〔第貳〕 $b^2-4ac=0$ ナルキ兩根ハ相等シ.

〔第三〕 $b^2-4ac<0$ ナルキ第九編11.章ニ由テ兩根ハ虚數トナル之ヲ虚根 (Imaginary Roots) トイフ.

6. 增根 方程式ノ兩邊ニ同數量ヲ乘スルコヲ得ヘシト雖𪜈未知數量ヲ含ミタルモノヲ乘スレハ其新方程式ハ根ヲ增加スヘシ.

例ヘハ $x^2=9$ ノ根ハ 3 及ヒ -3 ナリ而シテ兩邊ニ 5 ヲ乘シ $5x^2=45$ トスル𪜈亦其根ハ 3 及ヒ -3 ナリ然レ𪜈兩邊ニ $x-2$ ヲ乘スレハ
$x^2(x-2)=9(x-2)$ トナリ 3 及ヒ -3 ノ根ノ他ニ 2 ナル根ヲ增スヘシ此增根ハ $x-2=0$ ヨリ生ス.

之ニ由テ乘シタル未知數量ヲ含ム項ヲ 0 ニ等シカラシムル𪜊增根ヲ得ヘシ.

7. 不整方程式 即ナ分母ニ未知數量ヲ有ツ項ヲ有スル方程式ノ分母ヲ拂フ𪜊ハ其分母ノ L.C.M. ヲ兩邊ニ乘スヘシ然レ𪜈前章ノ如ク未知數量ヲ有ツモノヲ兩邊ニ乘スルカ故ニ時トシテ增根ヲ生スルコアリ.

其乘シタル項ヲ 0 ニ等シカヲシメテ得タル根ハ即ナ增根ナリ.

例ヘハ $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{10}{x^2-1}=\dfrac{7}{x+1}$ ノ根ヲ檢セントス.

分母ノ L.C.M. x^2-1 ヲ兩邊ニ乘スレハ

$$2x(x+1)-10=7(x-1),$$

此新方程式ノ根ハ $-\frac{1}{2}$ 及ヒ 3 ナリ.

而シテ乘シタル項 x^2-1 ヲ 0 ニ等シカラシムレハ $x^2-1=0$ $\therefore$ $x=1$ 及ヒ -1 而シテ此兩根ハ原兩根 $-\frac{1}{2}$ 及ヒ 3 ト同シカラス.

之ニ由テ $-\frac{1}{2}$ 及ヒ 3 ハ原方程式ノ根ナリ.

又 $\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}=\dfrac{5}{x+2}$ ノ根ヲ檢スルコ次ノ如シ.

分母ノ L.C.M. x^2-4 ヲ兩邊ニ乘スレハ
$x^2-(x+2)=5(x-2)$ 此新方程式ノ根ハ 2 及ヒ 4 而シテ乘シタル項 x^2-4 ヲ 0 ニ等シカラシムレハ $x^2-4=0$ $\therefore$ $x=2$ 及ヒ -2, 而シテ此 2 ハ原兩根 2, 4 ノ内ノ 2 ト同シ故ニ原兩根ノ内 2 ハ增根ニシテ 4 ハ原方程式ノ根ナリ.

8. 餘論 前章第貳ノ場合ノ如キハ次ノ如ク解スレハ增根ヲ得ス.

$\frac{x^2}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}=\frac{5}{x+2}$ ノ右邊ヲ集ムレハ

$$\frac{x^2-x-2}{x^2-4}=\frac{5}{x+2},$$

即チ
$$\frac{(x-2)(x+1)}{x^2-4}=\frac{5}{x+2},$$

$$\therefore\ \frac{x+1}{x+2}=\frac{5}{x+2} \qquad \therefore\ x+1=5 \qquad \therefore\ x=4.$$

例題四拾貳

次ノ方程式ヲ解セヨ.

1. $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$.

2. $\frac{x+5}{4}-\frac{4}{x+5}=\frac{3}{2}$.

3. $\frac{x}{x-1}+\frac{x-1}{x}=\frac{13}{6}$.

4. $\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+1}=\frac{29}{10}$.

5. $\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+2}=\frac{3}{5}$.

6. $\frac{7}{x+4}+\frac{1}{4-x}=\frac{5}{3}$.

7. $\frac{1}{3}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+11}=0$.

8. $3\frac{x-1}{x+1}-2\frac{x+1}{x-1}=5$.

9. $\frac{3}{x-1}+\frac{4}{x-3}=\frac{15}{x+3}$.

10. $\frac{4x+3}{9}=\frac{6x-13}{18}-\frac{7x-46}{5x+3}$.

11. $\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{13}{11}=\frac{3x+5}{3x-5}$.

12. $\frac{2x-2}{2x-3}+\frac{3-3x}{3x-2}=\frac{5}{8x-12}$.

13. $\frac{5x}{x-3}-\frac{6}{x+2}+\frac{19}{3-x}=0$.

14. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}=\frac{5x}{x^2-1}$.

15. $\frac{1}{x^2-3x}+\frac{1}{x^2+4x}=\frac{9}{2x^2}$.

16. $\frac{1}{x^2-4}-\frac{3}{2-x}=1+\frac{1}{3x+6}$.

17. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$.

18. $x^2+2a^2=3ax$.

19. $9x^2-6ax=a^2-b^2$.

20. $a(x^2-1)+x(a^2-1)=0$.

21. $a(x^2+1)=x(a^2+1)$.

22. $x^2-2(a-b)x+b^2=2ab.$

23. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0.$

24. $(a+b)x^2+cx-a-b-c=0.$

25. $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0.$

26. $bcx^2+(b^2+c^2)x+bc=0.$

27. $(a^2-b^2)(x^2-1)=4abx.$

28. $(b^2-a^2)(x^2+1)=2(a^2+b^2)x.$

29. $x+\frac{1}{a}=a+\frac{1}{x}.$ 30. $\frac{a}{a+x}+\frac{a}{a-x}=4.$

31. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$ 32. $\frac{a^2}{x-b}+\frac{b^2}{x-a}=a+b.$

33. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}.$ 34. $\frac{1}{x-a-b}=\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$

35. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}.$

36. $\frac{x}{x+a}+\frac{x}{x+b}=\frac{c}{c+a}+\frac{c}{c+b}.$

37. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{x-a}{x+a}+\frac{x-b}{x+b}.$

38. $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{a-c}{x+a-c}+\frac{b+c}{x+b+c}.$

9. 無理方程式 トハ平方根或ハ他ノ方根ノ内ニ未知數量ヲ含ム所ノ方程式ヲイフ.

今此等ノ方程式中ノ最簡ナル場合ヲ解セントス.

〔第壹例〕 $\sqrt{(x^2-9)}+x=9$ ヲ解セヨ.

轉項法ニ由テ $\sqrt{(x^2-9)}=9-x,$

双方ヲ平方ニスレハ $x^2-9=(9-x)^2,$

$\therefore\ 18x=90 \quad \therefore\ x=5.$

〔第貳例〕 $\sqrt{(2x+8)}-2\sqrt{(x+5)}=2$ ヲ解セヨ.

兩邊ヲ平方ニスレハ

$$2x+8-4\sqrt{(2x+8)}\sqrt{(x+5)}+4(x+5)=4,$$

即チ $3x+12=2\sqrt{(2x+8)}\sqrt{(x+5)},$

再ヒ平方ニスレハ

$$9x^2+72x+144=4(2x+8)(x+5),$$

$\therefore\ x^2-16=0 \quad \therefore\ x=4$ 或ハ $-4.$

〔注意〕 此方程式ノ壹根 4 ヲ原方程式ニ代用スレハ $\sqrt{(2\times4+8)}-2\sqrt{(4+5)}=2$ 即チ $4-6=2,$

是レ不合理ナリ然レモ正及ヒ負數量ノ平方ハ等シク正數量トナルカ故ニ或正數量ノ平方根ハ正或ハ負ノ兩値ヲ得ヘシ,

之ニ由テ前ノ代用ハ $\pm\sqrt{(2\times4+8)}-\{\pm2\sqrt{(4+5)}\}=2$,
即チ $\pm4\mp6=2$ ニシテ $x=4$ ノ塲合ニ於テハ $-46+6=2$ ヲ取ルヘシ,

又他ノ壹根 $x=-4$ ヲ代用スレハ元ノ形チニテ適合スヘシ.

〔第三例〕 $\sqrt{(2x+7)}+\sqrt{(3x-18)}+\sqrt{(7x+1)}=0$ ヲ解セヨ.

轉項法ニ由テ $\sqrt{(2x+7)}+\sqrt{(3x-18)}=-\sqrt{(7x+1)}$,

兩邊ヲ平方ニスレハ

$$2x+7+2\sqrt{(2x+7)}\sqrt{(3x-18)}+3x-18=7x+1,$$

即チ

$$\sqrt{(2x+7)}\sqrt{(3x-18)}=x+6,$$

再ヒ平方ニスレハ $(2x+7)(3x-18)=(x+6)^2$,

括弧ヲ解キテ轉項スレハ

$$5x^2-27x-162=0,$$

即チ

$$(x-9)(5x+18)=0,$$

$$\therefore\quad x=9 \text{ 或ハ } -\tfrac{18}{5}.$$

例題四拾參

次ノ方程式ヲ解セヨ.

1. $\sqrt{(x+5)}=2\sqrt{(3x+4)}$.
2. $\sqrt{(x+2)}=x$.
3. $x+\sqrt{(x+1)}=5$.
4. $x-\sqrt{(x+2)}=4$.
5. $x-2+3\sqrt{(x-2)}=0$.
6. $x-5+2\sqrt{(x-5)}=0$.
7. $\sqrt{(9+4x)}=2x-3$.
8. $3x=5+\sqrt{(30x-71)}$.
9. $2x-5\sqrt{x}=3$.
10. $x+3+\sqrt{(x+3)}=6$.
11. $2x+1=\sqrt{(6x+3)}$.
12. $\sqrt{(x+10)}+\sqrt{(x+1)}=1$.
13. $\sqrt{x}+\sqrt{(5x+1)}=5$.
14. $\sqrt{(2x+9)}-\sqrt{(x+4)}=1$.
15. $\sqrt{(4x+1)}-\sqrt{(x+3)}=2$.
16. $\sqrt{(4x+1)}-\sqrt{(x+3)}=\sqrt{(x-2)}$.
17. $\sqrt{(2x+4)}+\sqrt{(3x+7)}=\sqrt{(12x+9)}$.
18. $\sqrt{(6x+1)}+\sqrt{2(1-x)}=\sqrt{(7x+6)}$.
19. $\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-3)(x-4)}=\sqrt{2}$.
20. $\sqrt{(x+1)}+\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)}}=2$.
21. $\sqrt{(x+1)}+\sqrt{x}=\dfrac{3}{\sqrt{(x+1)}}$.
22. $\sqrt{(3+x)}+\sqrt{x}=\dfrac{5}{\sqrt{x}}$.
23. $12\sqrt{\dfrac{x}{2}}+5\sqrt{\dfrac{2}{x}}=\dfrac{53}{2}$.
24. $\sqrt{(a-x)}+\sqrt{(b-x)}=\sqrt{(a+b-2x)}$.

25. $\sqrt{(ax+b^2)}+\sqrt{(bx+a^2)}=a-b.$

26. $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(b+x)}=\sqrt{(a+b+2x)}.$

27. $\sqrt{(a-x)}+\sqrt{(b-x)}=\sqrt{(2a+2b)}.$

28. $\sqrt{(x-2)(x-3)}+5\sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}=\sqrt{(x^2+6x+8)}.$

29. $\dfrac{\sqrt{(x-1)}+\sqrt{(x-6)}}{\sqrt{(x-1)}-\sqrt{(x-6)}}-\dfrac{\sqrt{(x-1)}-\sqrt{(x-6)}}{\sqrt{(x-1)}+\sqrt{(x-6)}}=\dfrac{8}{5}\sqrt{6}.$

10. 根及係數之關係 貳次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ヲ α 及ヒ β トスレハ 4. 章ニ由テ

$$\alpha=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a},$$

及ヒ

$$\beta=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{(b^2-4ac)}}{2a}.$$

故ニ加法ニ由テ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},$$

又乘法ニ由テ

$$\alpha\beta=\left(-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=\frac{c}{a}.$$

11. 法則 之ニ由テ次ノ如シ.

貳次方程式ノ x^2 ノ係數カ $+1$ ナル中兩根ノ和ハ x ノ係數ノ符號ヲ變シタルモノニ等シク又兩根ノ積ハ第三項ニ等シ.

例ヘハ $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ ノ兩根ヲ α, β, トスレハ

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

又 $x^2-7x+5=0$ ノ兩根ヲ α 及ヒ β トスレハ

$$\alpha+\beta=7,\quad \alpha\beta=5,$$

12. 例解 ヲ次ニ示ス.

〔第壹例〕 兩根 4 及ヒ -7 ヲ有スル方程式ヲ求ム.

$$(x-4)(x+7)=0 \quad 即チ \quad x^2+3x-28=0.$$

〔第貳例〕 $x^2+5x-7=0$ ノ兩根ノ平方ヲ兩根トスル方程式ヲ求ム.

$x^2+5x-7=0$ ノ兩根ヲ α, β, トスレハ

$$\alpha+\beta=-5 \text{ 及ヒ } \alpha\beta=-7.$$

又所求ノ方程式ハ $(x-\alpha^2)(x-\beta^2)=0,$

即チ $$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0,$$

即チ $$x^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x+(\alpha\beta)^2=0,$$

$\therefore$ $$x^2-\{(-5)^2-2(-7)\}x+(-7)^2=0,$$

即チ $$x^2-39x+49=0.$$

〔第三例〕 $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ヲ α, β トシ $\frac{\beta}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ ヲ兩根トスル方程式ヲ求メヨ.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ 及ヒ } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

又所求ノ方程式ハ $\left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(x-\frac{\alpha}{\beta}\right)=0,$

即チ $$x^2-\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)x+1=0,$$

即チ $$\alpha\beta x^2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}x+\alpha\beta=0,$$

$\therefore$ $$\frac{c}{a}x^2-\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0.$$

〔第四例〕 x^2-4x+5 ヲ 0 ナラシムヘキ x ノ實數値ハ存在セサルコヲ示セ又此式ノ最小値ヲ求ム.

$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ 而シテ x カ實數ナルトキ $(x-2)^2$ ハ常ニ正ナルカ故ニ x^2-4x+5 ハ 0 ナラス.

又此式ノ最小値ハ $x=2$ トナルトキニシテ即チ 1 ヲ最小値トス.

例題四拾四

次ノ根ヲ有スル方程式ヲ作レ.

1. $-3, -2.$ 2. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$ 3. $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}.$

4. $0, 3.$ 5. $5, -3, 0.$ 6. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}.$

7. $0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}.$ 8. $2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}.$ 9. $a-\sqrt{b}, a+\sqrt{b}.$

次ノ各方程式ノ兩根ノ和及ヒ積ヲ記セ.

10. $x^2-4a^2=0.$ 11. $x^2+3x-5=0.$

12. $x^2-5x+3=0.$ 13. $2x^2-5x+3=0.$

14. $2x^2-x-7=0.$ 15. $6ax^2+7bx+8=0.$

16. α, β ヲ $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根トスレハ

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{b}{c}=0.$$

17. α, β ヲ $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根トスレハ次ノ證如何,

(1) $\alpha^2+\beta^2=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$, (2) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{b^2-2ac}{ac}$,

(3) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$, (4) $\alpha^3+\beta^3=\dfrac{b(3ac-b^2)}{a^3}$.

18. $x^2+4px+p^2=0$ ノ兩根ノ平方ノ和ヲ求ム.

19. $x^2+ax+b=0$ ノ兩根ノ各平方ノ和ハ

$x^2+3ax+b+4a^2=0$ ノ兩根ノ各平方ノ和ニ等シ.

20. $3x^2+4x+a=0$ カ等根ナルトキ a ノ値如何.

21. $4x^2+(1+a)x+1=0$ カ等根ナルトキ a ノ値如何.

22. $100x^2+60x+a=0$ ノ壹根カ他壹根ノ2倍ナルトキ a ノ値如何.

23. $x^2+px+q=0$ ノ壹根カ他壹根ノ貳倍ナルトキ

$$9q=2p^2.$$

24. $2x^2-5x+3=0$ ノ貳根カ α, β ナルトキ

$\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha}$ ヲ兩根トスル方程式ハ $6x^2-13x+6=0$.

25. $x^2-11x+22=0$ ノ兩根ヲ α, β トスレハ

$\alpha+\beta$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ ヲ兩根トスル方程式如何.

26. $x^2+7x+9=0$ ノ兩根ヲ α, β トスレハ $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$,

$\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}$ ヲ兩根トスル方程式如何.

27. $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ヲ α 及ヒ β トスレハ

$\alpha+\beta^2$ 及ヒ $\alpha^2+\beta$ ヲ兩根トスル方程式如何.

28. $a^2x^2+b^2x+c^2=0$ ノ兩根カ $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ノ平方ニ等シキトキ其關係式如何.

29. $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ヲ α 及ヒ β トスレハ $\alpha\beta$

及ヒ $\dfrac{1}{\alpha\beta}$ ヲ兩根トスル方程式如何.

30. $x^2+ax+b=0$ ノ兩根ノ差カ $x^2+px+q=0$ ノ兩根ノ差ニ等シキトキ $a^2-4b=p^2-4q$.

31. $x^2+px+q=0$ ノ兩根ヲ α 及ヒ β トスレハ

$(\alpha+\beta)^2$ 及ヒ $(\alpha-\beta)^2$ ヲ兩根トスル方程式ハ

$$x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0.$$

32. $x^2+px+q=0$ ノ兩根ヲ α 及ヒ β トスレハ

$\alpha+\dfrac{1}{\beta}$ 及ヒ $\beta+\dfrac{1}{\alpha}$ ヲ兩根トスル方程式ハ

$$qx^2+p(1+q)x+(1+q)^2=0.$$

33. $x^2-(a+b)x+(a+b-1)=0$ ハ實根ナリ.

34. $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ヲ α 及ヒ β トスレハ

$\dfrac{1}{\alpha+2\beta}$ 及ヒ $\dfrac{1}{\beta+2\alpha}$ ヲ兩根トスル方程式ハ

$$(2b^2+ac)x^2+3abx+a^2=0.$$

35. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}=0$ ハ實根ナリ.

36. $x^2+px+q=0$ カ虚根ナルヰ

$x^2+px+4x+2p+q+=0$ ハ虚根ナリ.

37. x カ實數ナルヰ $x+\dfrac{1}{x}$ ノ極小値ハ 2 ナリ.

38. x ノ如何ナル値ニ對シテ $6x^2-5x+1$ ハ正トナルカ.

39. x カ實數ナルヰ $\dfrac{2x^2+6x+3}{2x+1}$ ハ如何ナル値ノ間ニアルカ.

40. x カ實數ナルヰ $x(1-x)$ ノ極大値ヲ求ム.

第拾五編

高次方程式

1. 高次方程式 貳次ヨリ高キ方程式ハ壹般ニ之ヲ解スル能ハス此編ニ於テ其解シ得ヘキモノヲ示ス.

〔第壹例〕 $x^4-6x^2+8=0$ ヲ解セヨ.

$x^2=y$ トスレハ $y^2-6y+8=0$,

即チ
$$(y-4)(y-2)=0,$$

$\therefore\ y=4$ 或 2 $\quad\therefore\ x=\pm 2$ 或 $\pm\sqrt{2}$.

〔第貳例〕 $x^3-1=0$ ヲ解セヨ.

之ヲ括ルヰハ $\quad (x-1)(x^2+x+1)=0,$

$$\therefore\ x=1 \text{ 或ハ } x^2+x+1=0.$$

貳次方程式 $x^2+x+1=0$ ヨリ

$$x=\tfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3}).$$

之ニ由テ所求ノ根ハ $1,\ \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),\ \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$

〔第三例〕 $\dfrac{x^2}{x+2}+\dfrac{x+2}{x^2}=\dfrac{37}{6}$ ヲ解セヨ．

$\dfrac{x^2}{x+2}=y$ トスレハ $y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{37}{6}$,

∴　$6y^2-37y+6=0$,

即チ　$(6y-1)(y-6)=0$,

∴　$y=\frac{1}{6}$ 或ハ 6,

即チ　$\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{1}{6}$ 或ハ $\dfrac{x^2}{x+2}=6$.

$\dfrac{x^2}{x+2}=\dfrac{1}{6}$ ヨリ $x=\dfrac{2}{3}$ 或ハ $-\dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{x^2}{x+2}=6$ ヨリ $x=3\pm\sqrt{21}$.

〔第四例〕 $\overset{2}{\cancel{4}}x^2-6x+3\sqrt{(\cancel{2}x^2-3x+7)}=30$

ヲ解セヨ．

兩邊ニ 14 ヲ加ヘテ括ルトキハ

$$2(x^2-3x+7)+3\sqrt{(2x^2-3x+7)}=44,$$

$\sqrt{(x^2-3x+7)}=y$ トスレハ $2y^2+3y=44$,

此方程式ヨリ $y=4$ 或ハ $y=-\frac{11}{2}$,

即チ　$\sqrt{(x^2-3x+7)}=4$ 或ハ $\sqrt{(x^2-3x+7)}=-\frac{11}{2}$,

故ニ　$x^2-3x+7=16$ ヨリ $x=\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{5})$.

$x^2-3x+7=\frac{121}{4}$ ヨリ $x=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{102})$.

2. 反商方程式　首項及ヒ末項ヨリ計ヘテ等距離ニアル係數相等シキ代數式ヨリ成レル方程式ヲ反商方程式トイフ．

例ヘハ　$ax^2+bx+a=0$,

$ax^3+bx^2+bx+a=0$,

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$,

$ax^4-bx^3+cx^2-bx+a=0$.

〔第壹例〕 $ax^3+bx^2-bx-a=0$

ヲ解セヨ．

原方程式ヲ括レハ $a(x^3-1)+bx(x-1)=0$,

即チ　$(x-1)\{a(x^2+x+1)+bx\}=0$,

∴　$x-1=0$, 或ハ $a(x^2+x+1)+bx=0$.

之ニ由テ $x-1=0$ ヨリ $x=1$,

又 $a(x^2+x+1)+bx=0$ ヨリ $x=\dfrac{1}{2a}(-a-b\pm\sqrt{(a+b)^2-4a^2})$.

〔第貳例〕 次ノ方程式ヲ解セヨ,

$$ax^4-bx^3+cx^2+bx+a=0.$$

原方程式ヲ x^2 ニテ除スレハ

$$ax^2-bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0,$$

即チ $$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-b\left(x-\frac{1}{x}\right)+c=0.$$

$y=x-\dfrac{1}{x}$ トスレハ $y^2+2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.

之ニ由テ $$a(y^2+2)-by+c=0,$$

之ヨリ y ヲ求ムレハ x ヲ得ヘシ.

例題四拾五

次ノ方程式ヲ解セヨ.

1. $x^4-5x^2+4=0.$ 2. $x^4-2x^2-8=0.$

3. $x^4-10x^2+9=0.$ 4. $x^6-5x^3-24=0.$

5. $x^2+\dfrac{100}{x^2}=29.$ 6. $x^2-\dfrac{1}{x^2}=a^2-\dfrac{1}{a^2}.$

7. $x^4+\dfrac{1}{x^4}=a^4+\dfrac{1}{a^4}.$ 8. $(x^2-x)^2-8(x^2-x)=-12.$

9. $(x^2+x)(x^2+x+1)=42.$

10. $\dfrac{x^2}{x+1}+\dfrac{x+1}{x^2}=2.$ 11. $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{x-1}{x^2}=\dfrac{17}{4}.$

12. $(x^2+x+1)\left(x^2+x-\dfrac{3}{2}\right)+1=0.$

13. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=12.$

14. $x^2+x+1=\dfrac{42}{x^2+x}.$

15. $2x^2-4x-\sqrt{(x^2-2x-3)}=9.$

16. $2x^2+6x=1-\sqrt{(x^2+3x+1)}.$

17. $x^2+\sqrt{(4x^2+24x)}=24-6x.$

18. $2(2x-3)(x-4)-\sqrt{(2x^2-11x+15)}=60.$

19. $x^2+(x-2)(x-3)+\sqrt{(2x^2-5x+6)}=6.$

20. $(x-2)(x-3)(x-4)+210=0.$

21. $x^4+x^3-2x-4=0.$ 22. $(1+x)^4+x^4=97,$

0 23. $\sqrt[3]{(6x+10)}-\sqrt[3]{(6x-10)}=2.$

0 24. $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{(17-x)}=3.$

25. $x^3+8x^2+8x+1=0.$

26. $2x^4-5x^3+6x^2-5x+2=0.$

第拾六編

聯立貳次方程式

1. 聯立貳次方程式 此編ニ於テ貳次ノ聯立方程式ヲ解セントス.

先ツ兩未知數量ヲ有ツ所ノ聯立兩方程式ニ於テ其壹ツカ壹次,他ノ壹ツカ貳次ナル場合ヲ解スルㇷ次ノ如シ.

例ヘハ　$x+2y=5,\quad x^2+2y^2=9.$

之ヲ解スルニハ第壹ヨリ　$x=5-2y$

之ヲ第貳ニ代用スレハ

$$(5-2y)^2+2y^2=9,$$

即チ

$$6y^2-20y+16=0.$$

此 y ノ貳次方程式ヨリ $y=\frac{4}{3}$, 或ハ 2.

$y=\frac{4}{3}$ ナルˮ $x=5-2y=5-\frac{8}{3}=\frac{7}{3}$,

$y=2$ ナルˮ $y=5-2y=5-4=1.$

2. 法則 之ニ由テ壹次及ヒ貳次ノ聯立兩方程式ヲ解スルニハ壹次式ノ壹未知數量ヲ求メ之ヲ貳次式ニ代用シ他ノ壹未知數量ヲ有ツ所ノ貳次方程式トナスヘシ.

〔第壹例〕 $3x+4y=5$ 及ヒ $2x^2-xy+y^2=22$ ヲ解セヨ.

第壹ヨリ $x=\frac{5-4y}{3}$ 之ヲ第貳ニ代用スレハ

$$2\left(\frac{5-4y}{3}\right)^2-\left(\frac{5-4y}{3}\right)y+y^2=22,$$

即チ

$$53y^2-95y-148=0,$$

即チ

$$(y+1)(53y-148)=0,$$

$$\therefore\quad y=-1 \text{ 或ハ } \tfrac{148}{53}.$$

$y=-1$ ナルˮ　$x=\frac{5-4(-1)}{3}=3,$

$y=\frac{148}{53}$ ナルˮ　$x=\frac{5-4\left(\frac{148}{53}\right)}{3}=-\frac{109}{53}.$

〔第貳例〕 $xy+x=25,\quad 2xy-3y=28$ ヲ解セヨ.

第壹ニ2ヲ乘シ第貳ヲ減スレハ

$$2x+3y=22, \quad \therefore \quad y=\frac{2(11-x)}{3},$$

之ヲ第壹ニ代用スレハ $\dfrac{2x(11-x)}{3}+x=25,$

即チ $2x^2-25x+75=0, \quad \therefore \quad x=5$ 或ハ $\frac{15}{2}$.

$x=5$ ナルトキ $y=4$ 或ハ $x=\frac{15}{2}$ ナルトキ $y=\frac{7}{3}$.

例題四拾六

次ノ方程式ヲ解セヨ.

1. $x-y=10,$ $x^2+y^2=58.$

2. $3x+3y=10,$ $xy=1.$

3. $2x+3y=0,$ $4x^2+9xy+9y^2=72.$

4. $3x+2y=5,$ $x^2-4xy+5y^2=2.$

5. $x+2y=7,$ $\dfrac{3}{x}+\dfrac{6}{y}=5,$

6. $x+y=5,$ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}.$

7. $x-y=1,$ $\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}.$

8. $2x-y=4,$ $\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}=1.$

9. $7x-3y+7=0,$ $\dfrac{5}{x}-\dfrac{14}{y}=6.$

10. $x+y=a.$ $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}=b.$

11. $xy+x=15,$ $xy-x=8.$

12. $xy+2x=5,$ $2xy-y=3.$

13. $x^2-y^2=29,$ $x^2+x+y=49.$

14. $x^2+3x-2y=4,$ $2x^2-5x+3y+2=0.$

3. 聯立兩貳次方程式 兩方程式ノ双方カ貳次ナルトキ其內ノ壹未知數量ヲ消去スレハ屢々貳次ヨリ高キ方程式ヲ得ルヿアリ故ニ特別ノ場合ニアラサルヨリ外ハ之ヲ解スル能ハス.

例ヘハ $x^2+x+y=3$ 及ヒ $x^2+y^2=5$ ニ於テ

第壹ヨリ $y=3-x-x^2$ 之ヲ第貳ニ代用スレハ

$$x^2+(3-x-x^2)^2=5,$$

即チ $x^4+2x^3-4x^2-6x+4=0.$

此方程式ハ四次式ナルカ故ニ通常ノ方法ニテハ之ヲ解スル能ハス.

4. 同次方程式 兩方程式カ貳次ナル時ト雖モ雙方カ未知數量ノ同次項ヲ有ツモノナルキハ常ニ之ヲ解シ得ヘシ即チ次ノ如シ.

〔第壹例〕 $x^2+3xy=28,\quad xy+4y^2=8$ ヲ解セヨ.

第壹ヲ第貳ニテ除スレハ $\dfrac{x^2+3xy}{xy+4y^2}=\dfrac{28}{8}=\dfrac{7}{2}$,

之ニ由テ $2(x^2+3xy)=7(xy+4y^2)$,

之ヲ變スレハ $(2x+7y)(x-4y)=0$,

$\therefore\quad x=-\frac{7}{2}y$ 或ハ $x=4y$.

$x=4y$ ナルキ第貳ヨリ $4y^2+4y^2=8$,

$\therefore\quad y=\pm1,\quad x=\pm4.$

$x=-\frac{7}{2}y$ ナルキ第貳ヨリ $-\frac{7}{2}y^2+4y^2=8$,

$\therefore\quad y=\pm4,\quad x=\mp14.$

之ニ由テ所求ノ根ハ次ノ四對ナリ,

$$\left.\begin{matrix}x=4\\y=1\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=-4\\y=-1\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=-14\\y=4\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=14\\y=-4\end{matrix}\right\}.$$

〔第貳例〕 $x^2-3xy=0,\quad 5x^2+3y^2=48.$

第壹ヨリ $x(x-3y)=0$, $\therefore\quad x=0$ 或 $x=3y$.

$x=0$ ナルキ第貳ヨリ $3y^2=48$, $\therefore\quad y=\pm4.$

$x=3y$ ナルキ第貳ヨリ $45y^2+3y^2=48$, $\therefore\quad y=\pm1$

之ニ由テ所求ノ根ハ次ノ四對ナリ,

$$\left.\begin{matrix}x=0\\y=4\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=0\\y=-4\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=3\\y=1\end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix}x=-3\\y=-1\end{matrix}\right\}.$$

5. 別法 $x^2+y^2=a,\ xy=b$ ノ如キ方程式ハ前章ノ方法ヲ用ヒテ解シ得ヘシト雖モ次ノ別法ニヨルヲ便ナリトス.

第壹ニ第貳ノ2倍ヲ加フレハ

$(x+y)^2=a+2b\qquad\therefore\quad x+y=\pm\sqrt{(a+2b)}.$

第壹ヨリ第貳ノ2倍ヲ減スレハ

$(x-y)^2=a-2b\qquad\therefore\quad x-y=\pm\sqrt{(a-2b)}.$

之ニ由テ

$$x=\frac{\pm\sqrt{(a+2b)}\pm\sqrt{(a-2b)}}{2},$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{(a+2b)}\mp\sqrt{(a-2b)}}{2}.$$

又 $x^2+3xy=28,\ xy+4y^2=8$ ニ於テ前法ヲ用フレハ次ノ如シ.

加法ニ由テ $x^2+4xy+4y^2=36,\quad \therefore\quad x+2y=\pm6,$ $x+2y=6$ 或ハ $x+2y=-6$ ヨリ解シ得ヘシ.

例題四拾七

次ノ方程式ヲ解セヨ.

1. $x^2-xy=63,\quad y^2+xy=22.$
2. $x^2-3xy=10,\quad 4x^2-xy=-1.$
3. $x^2+xy-2y^2=-44,\quad xy+3y^2=80.$
4. $x^2+3xy=7,\quad y^2+xy=6.$
5. $x^2+3xy=54,\quad xy+4y^2=115.$
6. $x(x+y)=40,\quad y(x-y)=6.$
7. $x^2-2xy+5=0,\quad (x-y)^2-4=0.$
8. $x^2+5y^2=84,\quad 3x^2+17xy-y^2=-84.$
9. $x^2-7xy-9y^2=9,\quad x^2+5xy+11y^2=5.$
10. $x^2+3xy=40,\quad 4y^2+xy=9.$
11. $x^2+xy+y^2=7,\quad 6x^2-2xy+y^2=6.$
12. $2x^2-2xy+3y^2=18,\quad 3x^2-2y^2=19.$
13. $x^2+y^2=xy+7,\quad x^2-y^2=xy-1.$

14. $x+y+1=0,$ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12}.$
15. $x+y+3=0,$ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{6}=0.$
16. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{5}=5,\quad \dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{5}{6}.$
17. $(x+3)(y+1)=4,\quad xy+1=0.$

6. 雜例 聯立方程式ノ雜例ヲ示スヿ次ノ如シ.

〔第壹例〕 $x-y=2,\quad x^3-y^3=386$ ヲ解セヨ.

第壹ヨリ $x=y+2$ 之ヲ第貳ニ代用スレハ

$$(y+2)^3-y^3=386,$$

即チ
$$6y^2+12y+8=386,$$

即チ
$$y^2+2y-63=0,$$

$$\therefore\quad y=7 \text{ 或ハ } y=-9.$$

之ニ由テ $x=9,\ y=7,$ 或ハ $x=-7,\ y=-9.$

〔第貳例〕 $x^2-xy+y^2=61$ 及ヒ

$x^4+x^2y^2+y^4=1281$ ヲ解セヨ.

第貳ヨリ $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=1281,$

故ニ第壹ヨリ $(x^2+xy+y^2)\,61=1281,$

$$\therefore \quad x^2+xy+y^2=21.$$

之ト第壹ヨリ $(x^2+xy+y^2)-(x^2-xy+y^2)=21-61,$

$$\therefore \quad xy=-20.$$

又 $(x^2-xy+y^2)-xy=61-(-20)$ 即チ $(x-y)^2=81,$

$$\therefore \quad x-y=\pm 9.$$

又 $(x^2+xy+y^2)+xy=21+(-20)$ 即チ $(x+y)^2=1,$

$$\therefore \quad x+y=\pm 1.$$

$x+y=1,\quad x-y=9$ ヨリ $x=5,\quad y=-4.$

$x+y=1,\quad x-y=-9$ ヨリ $x=-4,\quad y=5.$

$x+y=-1,\quad x-y=9$ ヨリ $x=4,\quad y=-5.$

$x+y=-1,\quad x-y=-9$ ヨリ $x=-5,\quad y=4.$

〔第三例〕 $x-y=2,\quad x^5-y^5=242$ ヲ解セヨ.

$x=z+1$, トスレハ第壹ヨリ $y=z-1$ ヲ得,

之ニ由テ第貳ヨリ $(z+1)^5-(z-1)^5=242,$

即チ $10z^4+20z^2+2=242,$

$$\therefore \quad (z^2-4)(z^2+6)=0.$$

$$\therefore \quad z=\pm 2 \text{ 或ハ } z=\pm\sqrt{-6}.$$

$z=\pm 2$ ナルトキ $x=3,\ y=1,$ 或ハ $x=-1,\ y=-3.$

$z=\pm\sqrt{-6}$ ナルトキ $x=1\pm\sqrt{-6},\quad y=-1\pm\sqrt{-6}.$

〔第四例〕 $x(y+z)=27,\quad y(z+x)=32,$

及ヒ $z(x+y)=35$ ヲ解セヨ.

$$x(y+z)+y(z+x)-z(x+y)=27+32-35.$$

即チ $2xy=24,\quad \therefore\ xy=12.$

同法ニ由テ $yz=20,\quad zx=15.$

之ニ由テ $\dfrac{(xy)(zx)}{yz}=\dfrac{12.15}{20}$, 即チ $x^2=9,$

$\therefore\ x=\pm 3$ 之ニ由テ $y=\pm 4,\ z=\pm 5.$

〔第五例〕 $x+y+z=a,\quad x^2+y^2+z^2=a^2,$

及ヒ $x^3+y^3+z^3=a^3$ ヲ解セヨ.

$$(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=a^2-a^2,$$

即チ $2xy+2yz+2zx=0,\quad \therefore\ xy+yz+zx=0.$

又 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ ナルヿハ已ニ知ル所ナリ故ニ之ニ原方程式及ヒ上ニ得タル方程式ヲ代用スレハ

$$a^3-3xyz=a(a^2-0),\quad \therefore\ xyz=0.$$

$xyz=0$ ヨリ $x=0$, 或ハ $y=0$, 或ハ $z=0$.

$x=0$ ナルキ $y+z=a$ 及ヒ $y^2+z^2=a^2$,

之ニ由テ $y=a$, $z=0$ 或ハ $y=0$, $z=a$.

又 $y=0$ 又 $z=0$ ナルキモ同法.

例　題　四　拾　八

次ノ方程式ヲ解セ．

1. $x-y=3,\quad x^3-y^3=279.$

2. $x-y=2,\quad x^3-y^3=98.$

3. $x+y=7,\quad x^3+y^3=91.$

4. $x+y=1,\quad x^3+y^3=61.$

5. $x^2-xy+y^2=9,\quad x^4+x^2y^2+y^4=243.$

6. $xy(x-y)=12,\quad x^3-y^3=63.$

7. $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=1,\quad \dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{xy}+\dfrac{1}{y^2}=5.$

8. $\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=1,\quad \dfrac{5}{x^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{2}{y^2}=3.$

9. $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{4y^2}=3,\quad \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{4y^2}=9.$

10. $x+y=1,\quad x^2y^2+13xy+12=0.$

11. $x+y=5,\quad 4xy=12-x^2y^2.$

12. $x^2+xy-y=9,\quad y^2+xy-x=-3.$

13. $x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{18}{7},\quad y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{7}{4}.$

14. $x^3+1=9y,\quad x^2+x=6y.$

15. $2x^3+5y^3=115,\quad 3x^3+7y^3=186.$

16. $x^2y+xy^2=180,\quad x^2y^2=400.$

17. $x^4+x^2y^2+y^4=91,\quad (x^2-xy+y^2)(x-y)^2=28.$

18. $x^2+3xy+y^2+4(x+y)=13,$

   $3x^2-xy+3y^2+2(x+y)=9.$

19. $xy+\dfrac{x}{y}=\dfrac{5}{3},\quad xy+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6}.$

20. $ax=by,\quad (x-a)(y-b)=ab.$

21. $x-\dfrac{b^2}{y}=\dfrac{a^2}{x}-y=a-b.$

22. $yz=4,\quad zx=9,\quad xy=16.$

23. $x^2yz=6,\quad y^2zx=12,\quad z^2xy=18.$

24. $x(x+y+z)=8,\quad y(x+y+z)=12,$

   $z(x+y+z)=5.$

25. $x(y+z)=6,\quad y(z+x)=12,\quad z(x+y)=10.$

26. $(x+y)(x+z)=2,\quad (y+z)(y+x)=3,$

$(z+x)(z+y)=6.$

27. $y+z=3xyz,\quad z+x=2xyz,\quad x+y=\frac{3}{2}xyz.$

28. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{5}{2},\quad \frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{x}}=\frac{9}{\sqrt{2}}.$

29. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2,\quad \sqrt{2a(b-y)}=\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{x}).$

30. $\sqrt{xy}=1,\quad \sqrt{yz}=24x,\quad \sqrt{zx}=4y.$

第拾七編

貳次方程式之問題

1. 問題 此編ニ於テハ貳次方程式ニ由テ解シ得ヘキ問題ヲ示ス.

而シテ貳次方程式ハ兩根ヲ有スレドモ問題ニ於テハ或制限シタル數量ナルカ故ニ其解答カ不合理ナルコトアリ,此等ノ場合ハ次ノ例解ニテ示サントス,

2. 例解 ヲ示スコト次ノ如シ,

〔第壹例〕 壹家ニ若干人ノ子供アリ其數ノ11倍ハ其數ノ平方ノ2倍ヨリ5多シトイフ子供ノ數如何.

x ヲ子供ノ數トスレハ $11x=2x^2+5,$

轉項シテ括レハ $(2x-1)(x-5)=0 \quad \therefore\ x=\frac{1}{2}$ 或ハ 5.

此解答ハ5人ナリ $\frac{1}{2}$ ナル解答ハ不合理ナリ.

〔第貳例〕桿アリ其長サノ間數ノ11倍ハ其間數ノ平方ヨリ5多シ桿ノ長サ如何.

此例ハ前例ト同シク亦 $x=\frac{1}{2}$ 或ハ5ナリ,

而シテ長サハ分數ニテモ合理ナリ.

之ニ由テ此解答ハ5間或ハ $\frac{1}{2}$ 間ナリ.

〔第三例〕貳位ノ數アリ其數字ノ積ノ2倍ニ等シ又拾位ノ數字ハ壹位ノ數字ヨリ3少ナシ原數如何.

拾位ノ數字ヲ x トスレハ壹位ノ數字ハ $x+3$,

故ニ原數ハ $10x+(x+3)$ ナリ.

題意ニ由テ　$10x+(x+3)=2x(x+3)$,

$\therefore\ 2x^2-5x-3=0$, 即チ $(x-3)(2x+1)=0$,

$\therefore\ x=3$ 或ハ $-\frac{1}{2}$.

數字ハ正整數ナルカ故ニ $-\frac{1}{2}$ ナル解答ハ不合理ナリ之ニ由テ貳位ノ數字ハ3及ヒ6ニシテ36ナリ.

〔第四例〕或人若干金ヲ所持ス其圓數ノ平方ハ其圓數ノ30倍ヨリモ多キコ1000ナリ其所持金如何.

x ヲ所持金ノ圓數トスレハ

$$x^2=30x+1000,$$

轉項シテ括レハ　$(x-50)(x+20)=0$.

$\therefore\ x=50$ 或ハ -20.

借金ヲ負ノ所持金トスレハ此解答ハ双方適合ス即チ此人ハ50圓ヲ所持スルカ或ハ20圓ノ借金ヲ有スルモノナリ.

〔第五例〕某數ト其平方根ノ和42ナルキ某數如何.

x ヲ某數トスレハ　$x+\sqrt{x}=42$,

$\sqrt{x}=y$ トスレハ　$y^2+y=42$,

$\therefore\ (y-6)(y+7)=0$,

$\therefore\ y=6$ 或ハ -7,

而シテ　$x=y^2=36$ 或ハ 49.

算術上ノ平方根ノ意義ニテハ49ハ不合理ナレ𪜈代數學ニテハ $49\pm\sqrt{49}=42$, 即チ $49-7=42$.

〔第六例〕父子ノ歳ノ和100歳ニシテ各ノ歳ノ數ノ積ノ拾分ノ壹ハ父ノ歳ノ數ヨリ180多シ各如何.

xヲ父ノ歳トスレハ $100-x$ ハ子ノ歳ナリ.

題意ニ由テ　$\frac{1}{10}x(100-x)=x+180,$

轉項シテ括レハ　$(x-60)(x-30)=0,$

$\therefore \quad x=60$ 或ハ $30.$

第貳ノ解答30ハ不合理ナリ何トナレハ父ハ子ヨリ年齢少ナキヿ無ケレハナリ.

之ニ由テ父ハ60歳,子ハ40歳ナリ.

例題五拾

1. 兩數アリ其壹ハ他ノ壹ノ三倍ニシテ積243ナリ各如何.

2. 兩數ノ和18ニシテ積77ナリ各如何.

3. 兩數ノ差20ニシテ其各平方ノ和650,各如何.

4. 25ヲ貳分シ貳分ノ積ヲ156トナサントス各幾許ナリヤ.

5. 80ヲ貳分シテ其各分ノ平方ノ和ヲ3208トナサントス各幾許ナリヤ.

6. 某數ヨリ36ヲ減シタルモノト其數ヨリ30ヲ減シタルモノトノ積891ナルㇳ其數如何.

7. 矩形ノ長ト幅ノ差10間,積1131坪,各邊如何.

8. 某數ト其反商ノ和及ヒ差ノ積$3\frac{3}{4}$ナルㇳ其數幾許ナリヤ.

9. 球戲ニ用フル玉ヲ5圓ニテ買フヘキ個數ハ125個ノ價ノ圓數ニ等シ然ルㇳハ10圓ニテ此玉何個ヲ買ヒ得ヘキカ.

10. 36錢ノ鷄卵ノ數ハ9個ノ價ノ錢數ニ等シ36錢ノ個數如何.

11. 甲樽ニ水若干ヲ有シ其半丈ケノ酒ヲ乙樽ニ有ス今各ヨリ6升ヲ出シテ交換セシニ各樽ニ於ケル酒水ノ割合相等シクナレリ然ルㇳハ各樽ノ酒水ノ量如何.

12. 若干人等額ノ金ヲ出シテ宴會ヲ催フスニ其總費用20圓ナリシニ其内4人會費ヲ出サヽルカ故ニ殘人數ニテ各25錢宛多ク出セリ總人數如何.

13. 2圓40錢ニテ或物品ヲ買ヒ其内貳個ヲ殘シ置キ其殘ヲ壹個ニ付2錢高ク賣リテ2圓52錢ヲ領收セリ最初物品ノ數幾許ナリシヤ.

14. 3750圓ニテ鐵道株券若干株ヲ買ヒ其内拾五株ヲ殘シ其殘ヲ3480圓ニテ賣リ壹株ニ付8圓ノ利ヲ得タリ所持ノ株數如何.

15. 舟夫アリ$8\frac{4}{7}$分間ニ或河ヲ逆行セリ若シ此河カ靜水ナルトキ之ヲ行カハ其時間ハ此河ノ水勢ニ由テ漂流セラルヽ時間ヨリモ7分早カルヘシトイフ之ヲ順行センニハ何分ヲ要スヘキカ.

16. 舟夫アリ靜水ヲ毎時8浬ノ速ニテ漕行シ得ヘシ今或河ヲ8浬往復セシニ2時40分ヲ費セリ然ルトキハ此河水毎時ノ速如何.

17. 兩流車アリ毎時ノ速ハ急車ヨリモ緩車ハ15哩遲シ今36哩ヲ行クトキ急車ハ緩車ヨリモ12分早ク達シ得ヘシトイフ各毎時ノ速如何.

18. 或人7哩ノ道ヲ行キシニ最初1哩行キシ後チ毎時ノ速ヲ1哩增セシカ故ニ豫定ノ時間ヨリ30分早ク達シタリ其總時間ヲ求ム.

19. 甲乙貳人共力シテ定日間ニ壹事ヲ作了ス若シ甲乙各別ニ其事ヲ半ツヽ作ストキハ甲ハ前ノ定日數ヨリ1日早ク乙ハ2日遲クシテ作了シ得ヘシトイフ定日數如何.

20. 寫眞紙アリ12枚ニ付之ヲ原價ヨリ8錢高ク買フトキハ1圓ニ付5枚減スヘシトイフ然ルトキ12枚ノ原價如何.

21. 鷄卵12個ニ付2錢低價トナルトキ24錢ニ付2個多ク買ヒ得ヘシ12個ノ原價如何.

22. 72錢ニテ鷄卵若干個ヲ買ヒタリ若シ1個ニ付5厘高クセハ其所買ノ數ハ12個減少スヘシトイフ買ヒシ個數如何.

23. 上下兩種ノ砂糖アリ1斤ニ付上ハ下ヨリ2錢高ク1圓ニ付上ハ下種ヨリ$2\frac{1}{2}$斤少ナシトイフ各1斤ノ價如何.

24. 壹籠ノ梨ノ價錢數ハ1圓ノ梨ノ個數ノ2倍ヨリモ5少ナシ然ルトキ1圓80錢ノ梨ノ數如何,但シ壹籠ノ數ハ30個.

25. 1015圓ヲ甲乙丙三人ニ分ツニ乙ハ甲ヨリ5圓少ナク乙ト丙トノ相乘シタル數ハ甲ノ500倍ニ等シトイフ各分如何.

26. 兩分數アリ其和$\frac{5}{6}$ニシテ其差ハ其積ニ等シトイフ各分數如何.

27. 甲乙貳人12里18町ノ距離ノ兩端ヨリ同時ニ相向フテ出發セシニ5時間ニシテ相會セリ但シ1里ヲ行ク時間ハ甲ハ乙ヨリ36分早シトイフ各毎時ノ速如何.

28. 若干人ノ兵ヲ列スルニ壹列ノ人數ハ其列數ノ2倍ニ等シ今若シ206人ヲ減シテ中空方陣ニ列スレハ四面ヲ三層ニ列シ得ヘシトイフ最初ノ人數如何,但シ後ノ中空方陣ノ各方面ノ人數ハ最初ニ列セシ壹列ノ人數ニ等シ.

29. 矩形ノ地面アリ其壹邊ヨリ6間短カキ方邊ナル正方形ノ地面ト其面積相等シク又其長邊ヲ2間減シ短邊ヲ1間增シタル矩形ニ等シトイフ原矩形ノ兩邊各如何.

30. 矩形アリ其對角線ト長邊ノ和ハ短邊ニ5倍シ又長邊ハ短邊ヨリ35間長シ其面積如何.

31. 矩形アリ其長邊ヲ3間減シ短邊ヲ1間減スレハ其面積ハ半トナリ又長邊ヲ9間增シ短邊ヲ2間減セハ面積變セス各邊如何.

32. A及ヒBナル兩滊車アリP地ヨリQ地ニ向テ同時ニ出發セリ又之ト同時ニQ地ヨリC及ヒDナル兩滊車カP地ニ向テ出發セリ而シテAハPヨリ120哩ノ處ニテCニ出逢ヒPヨリ140哩ノ處ニテDニ出逢ヘリ又BハQヨリ126哩ノ處ニテCニ出逢ヒP,Qノ中央ニテDニ逢ヘリPQノ距離如何.

雜題四

(A)

1. $2x-[3x-9y-\{2x-3y-(x+5y)\}]$ ヲ最簡ニセヨ.

2. $a^2+25b^2+4c^2+5ab-2ac+10bc$ ニ $a-5b+2c$ ヲ乘セヨ.

3. $x^3+(4ab-b^2)x-(a-2b)(a^2+3b^2)$ ヲ $x-a+2b$ ニテ除セヨ.

4. 次ノ各ノ因子ヲ求ム,

(1) $(2x+y-z)^2-(x+2y+4z)^2$,

(2) $x^2y^2z^2-x^2z-y^2z+1$,

(3) $(m+n)^3+(m-n)^3-8m^3$.

5. 次ノ各ヲ最簡ニセヨ,

(1) $\dfrac{x^3+4x^2-8x+24}{8-8x+x^3-x^4}$.

(2) $\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}-\dfrac{2(x-2)}{(x-3)(x-1)}+\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$.

6. 次ノ各方程式ヲ解セヨ,

(1) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{2}{x-b}=\dfrac{3}{x-c}$,

(2) $x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2}$.

7. x^2-5x+7 ハ決シテ$\frac{3}{4}$ヨリ小ナラス.

8. 連續兩數ノ立方ノ差919,各如何.

(B)

1. 次ノ代數式ニ最簡ニセヨ,

$$(x+3)^3-3(x+2)^3+3(x+1)^3-x^3.$$

2. $(x-a)^2+(y-b)^2+(a^2+b^2-1)(x^2+y^2-1)$
$=(ax+by-1)^2+(bx-ay)^2$ ナルコヲ示セ.

3. $x^6-2a^3x^3+a^6$ ヲ $x^2-2ax+a^2$ ニテ除セヨ.

4. x^3+px+r 及ヒ $3x^2+p$ カ通因子ヲ有スル片
$\frac{p^3}{27}+\frac{r^2}{4}=0$ ナルコヲ示セ.

5. 次ノ各ヲ最簡ニセヨ,

(1) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{x^2+1}$,

(2) $\frac{\{(a+b)(a+b+c)+c^2\}\{(a+b)^2-c^2\}}{\{(a+b)^3-c^3\}(a+b+c)}$.

6. 次ノ各方程式ヲ解セヨ,

(1) $(6-x)(1+2x)+3x(x+5)=(x+1)^2-x$,

(2) $5x^2+7x=160$,

(3) $x^2+xy=10,\quad y^2-xy=3$.

7. $x^2-5x+2=0$ ノ兩根ヲ α 及ヒ β トスレハ

$$\alpha^4+\beta^4=433.$$

8. 音樂會ニ於テ特別聽料切符ヨリ得タル金高三百圓ニシテ通常聽料切符ヨリモ同金高ヲ得タリ而シテ壹枚ニ付特別切符ハ通常切符ヨリ七拾五錢高ク又特別切符ヲ出セシ總數ハ通常切符ヨリ三百六拾枚少ナシ切符ノ總數ヲ求ム.

(C)

1. $12a-3\{b-2(a-3b)-2a\}$ ヲ最簡ニセヨ.

2. $a^3+2a^2b-ab^2+2b^3$ ニ $a^3-2a^2b-ab^2-2b^3$ ヲ乘セヨ.

3. $24x^4-10x^3y-8x^2y^2+10xy^3-4y^4$ ヲ
$2y^2-xy-4x^2$ ニテ除セヨ.

4. 次ノ各ノ因子ヲ求ム,

$9x^2+9x+2$, 及ヒ $4(ab-cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

5. $\dfrac{x+\dfrac{y-x}{1+xy}}{1-\dfrac{x(y-x)}{1+xy}}$ ヲ最簡ニセヨ, 又次ノ證ヲ示セ,

$$\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}+\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}=0.$$

6. 次ノ方程式ヲ解セヨ,

(1) $\frac{x-1}{3}-\frac{x-3}{5}=7+\frac{x+2}{6}$,

(2) $x+y=2a,\quad x^2+y^2=2a^2$.

7. $x^2+6x+12$ ノ最小値ヲ求メヨ,

又 $6x-x^2-4$ ノ最大値ヲ求メヨ.

8. 甲及ヒ乙カ志貨及ヒ片貨合セテ18個ヲ有ス而シテ甲ノ所有ハ志貨ノ數カ片貨ニ3倍シ乙ハ兩種ノ數相等シ又甲ノ金高ハ乙ヨリ9片多シトイフ各所有如何.

(D)

1. 次ノ證ヲ示セ,

$(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2-a^2-b^2-c^2=(a+b+c)^2$.

2. $(1+x)^4+2(1-x+x^2)$ ヲ x ノ遞降方乘ニ從フテ整列セヨ.

3. 連續兩數ノ平方ノ差ハ其小ナル數ノ2倍ヨリ1多キコヲ示セ.

4. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ ナル片

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$ ナルコヲ示セ.

5. $x^2-5x-14,\ x^2-4x-21$ 及ヒ $x^3-3x^2-25x-21$ ノ L.C.M. ヲ求ム,

又此三式ヲ同時ニ0トスヘキ x ノ値ヲ求ム.

6. 次ノ方程式ヲ解セヨ,

(1) $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}+5=\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10$,

(2) $\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{x-a-b}$,

(3) $5xy=84-x^2y^2,\quad x-y=6$.

7. $ax^2+bx+c=0$ ノ兩根ヲ x_1 及ヒ x_2 トスレハ

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{b^2-2ac}{ac}.$$

8. 桶アリ酒6石ヲ滿タセリ此内ヨリ若干量ヲ出シ其代リニ水ヲ入レテ滿タシ又其内ヨリ初ニ出セシ量ト1石4斗トヲ出シ其代リニ水ヲ入レテ滿タセリ然ル片酒水等分トナレリ初ニ出セシ量幾許ナリヤ.

(E)

1. $x=4\frac{1}{3}$ ナル片次ノ値ヲ求ム,

$$\frac{1}{2}x-\left\{\frac{1}{3}(2x-3)-\frac{1}{4}(3x-1)\right\}\div\frac{1}{2}(x-1).$$

2. $(a+b)^4-(a^2-b^2)^2=4ab(a+b)^2$,

及ヒ $2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$

$=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$ ナルコヲ示セ.

3. $(a+2b-3c+d)^2-(2a+b+3c-d)^2$ ヲ $a+b$ ニテ除セヨ.

4. $\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}\right)\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{x}{xy-y^2}-\frac{y}{x^2+xy}$ ヲ最簡ニセヨ

5. 次ノ方程式ヲ解セヨ,

(1) $\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2$,

(2) $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)=11$,

(3) $x+\frac{1}{y}=\frac{21}{10}$, $y+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}$.

6. $am+\frac{b}{m}=c$, $bm+\frac{a}{m}=d$ ニ於テ m ヲ消去セヨ.

7. $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$ 及ヒ $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$ ヲシテ相等シカラシムヘキ x ノ値ヲ求ム.

8. 某數アリ其平方根ヨリ 156 多シ某數如何.

(F)

1. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$ ナルコヲ示セ.

2. x^3-x^2-2x+2 及ヒ $x^4-3x^3+2x^2+x-1$ ノ H.C.F. ヲ求メヨ,

又此両式ヲ同時ニ 0 トスヘキ x ノ値如何.

3. $\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{2b}{c+a}$ ナルトキ

$a^2+c^2=2b^2$ 或ハ $a+b+c=0$ ナルコヲ示セ.

4. 次ノ方程式ヲ解セヨ,

$\sqrt{(x+y)}+\sqrt{(x-y)}=\sqrt{(2a)}$, $\sqrt{(x^2+y^2)}+\sqrt{(x^2-y^2)}=a$.

5. $\frac{x^2+1}{x}$ ノ最大及ヒ最小値ヲ求ム.

6. $x^2-7x+c=0$ 及ヒ $x^2-9x+2c=0$ ナル両方程式ノ各壹根相同シキトキ各両根ヲ求ム.

7. $x+y=a$, $x^2+y^2=a^2$, $x^3+y^3=a^3$ ヨリ x 及ヒ y 消去セヨ.

8. 自轉車ニ乗リテ 180 哩ノ道ヲ行クニ毎時ノ速ヲ 3 哩減スレハ 3 時間遅クナルトフ毎時ノ速如何.

第拾八編

方乘及方根

1. 方乘(Powers) 諸數量ノ方乘ヲ求ルコヲ屢々自乘法トイヒ又此反法即チ諸數量ノ方根ヲ求ムルコヲ開方法トイフ.

此編ニ於テハ自乘法及ヒ開方法ヲ說明セントス.

2. 指數之法則 乘法及ヒ除法ノ指數之法則ハ既ニ第三編6.章及ヒ第四編4.章ニ於テ之ヲ證明セリ,

即チ m 及ヒ n カ正整數ナルキ

$$a^m \times a^n = a^{m+n},$$

及ヒ $a^m \div a^n = a^{m-n}$, 但 $m>n$.

若シ $m<n$ ナルキ

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{m-n}}.$$

3. 同數量之各方乘ノ積ノ指數ハ其諸因子ノ指數ノ和ニ等シ.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$ ナルカ故ニ

$$a^m \times a^n \times a^p = a^{m+n+p}$$

之ヲ推シテ

$$a^m \times a^n \times a^p \times \cdots\cdots = a^{m+n+p+\cdots\cdots}$$

4. 某方乘之數量ヲ方乘スルニハ其方乘指數ヲ原指數ニ乘スヘシ;

即チ $(a^m)^n = a^{mn}$.

何トナレハ指數ノ定義ニ由テ

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots$ 至 n 因子

$= a^{m+m+m+\cdots\cdots}$

$= a^{mn}$. (3. 章)

5. 積之某方乘ハ其各因子ヲ方乘ニスヘシ,

即チ $(ab)^m = a^m b^m$.

何トナレハ $(ab)^m=ab\times ab\times ab+\ldots\ldots$至 m 因子

$=(aaa\ldots\ldots$至 m 因子$)(bbb\ldots\ldots$至 m 因子$)$

$=a^mb^m.$

壹般ニ $(abc\ldots\ldots)^m=a^mb^mc^m\ldots\ldots$

〔例〕 $(a^xb^yc^z)^n=a^{nx}b^{ny}c^{nz}.$

$(a^xb^yc^z)^n=(a^x)^n(b^y)^n(c^z)^n=a^{nx}b^{ny}c^{nz}.$

6. 分數之方乘 ハ分母子ノ其方乘ニ同シ,

即チ $$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

何トナレハ $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots\ldots$至 m 因子

$=\frac{aaa\ldots\ldots\text{至 } m \text{ 因子}}{bbb\ldots\ldots\text{至 } m \text{ 因子}}$

$=\frac{a^m}{b^m}.$

7. 負數量之方乘 ノ符號ハ方乘指數カ偶數ナルキ正トナリ奇數ナルキ負トナル,

即チ $(-a)^{2m}=a^{2m},\quad (-a)^{2m+1}=-a^{2m+1}.$

何トナレハ 4.章ニ由テ

$(-a)^{2m}=\{(-a)^2\}^m=\{a^2\}^m=a^{2m}.$

又 $(-a)^{2m+1}=(-a)^{2m}(-a)$

$=a^{2m}(-a)=-a^{2m+1}.$

8. 注意 此編ニ於テ示セシ所ハ壹項式ノ壹般ナル指數ノ法則ナリ而シテ貳項式及ヒ多項式ノ特別ナル乘法ハ第三編乘法ニ於テ求メタリ又其壹般ナルモノハ第廿六編貳項法ニ於テ說明セントス.

例題五拾

次ノ各ノ値ヲ示セ.

1. $(a^3)^5.$ 2. $(-a^2)^3.$ 3. $(-2a^5)^4.$
4. $(-ab^2)^4.$ 5. $(-5a^2b^3c^5)^3.$ 6. $(-a^m)^{2m}.$
7. $(-a^m)^{2n+1}.$ 8. $(-a^mb^m)^{2n-1}.$
9. $\left(-\frac{a^3}{bc^2}\right)^5.$ 10. $(-a^mb^nc^p)^x.$
11. $(a^m\div b^n)^p.$ 12. $(-a)^m\times(-b)^{3n}.$

9. 方根 (Roots) 今開方法ノ或ル場合ヲ說明セントス.

a^2 ノ平方根ハ貳ツアリ即チ $\pm a$ ナルヿヲ知ル又 a^3 ノ立方根ハ第拾五編ノ方程式解法ニ由テ三ツアルヿヲ知ル.

故ニ方乘ト方根ト相異ナル所ノ必要ナル件アリ即チ己知壹式ノ n 方乘ハ唯壹ツナレ𪜈 n 方根ハ壹ツヨリモ多シ.

10. 方根之法則 或代數式ノ n 方乘カ己知代數式ニ等シキ𪜈其代數式ヲ己知代數式ノ n 方根トイフ.

又積ノ n 方乘ハ其因子ノ n 方乘ニ等シ (5.章) 故ニ反對ニ積ノ n 方根ハ其因子ノ n 方根ニ等シ,

即チ $\sqrt{abc}=\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$,

及ヒ $\sqrt[m]{(ab)}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}$.

又 5.章ノ例ニ由テ壹項式ノ n 方乘ハ其各因子ノ指數ニ n ヲ乘シタルモノニ等シ,

故ニ反對ニ壹項式ノ n 方根ハ其各因子ノ指數ヲ n ニテ除シタルモノニ等シ.

例ヘハ $\sqrt[3]{a^6}$ ノ壹ツノ根ハ a^2,

$\sqrt[n]{(a^{np}b^{nq})}$ ノ壹ツノ根ハ a^pb^q ナリ.

平 方 根

11. 平方根 (Squar Root) 完平方ナル三項式ノ平方根ヲ求ムルヿハ第九編 4. 章ニ由テ知リ得ヘシ即チ二項式ヲ或文字ノ遞降或ハ遞昇方乘ニ整列セシ𪜈其兩外項ノ平方根ヲ取リ中項カ正或ハ負ナルニ從フテ其和或ハ差ヲ以テ原式ノ平方根トス,

例ヘハ $4a^8-12a^4b^3+9b^6$ ニ於テハ兩外項ノ平方根 $2a^4$, $3b^3$ ヲ取リ中項ハ負ナルカ故ニ其平方根ハ

$$\pm(2a^4-3b^3)$$ ナリ.

〔注 意〕 此後ハ正ノ根ノミヲ取ルモノトス,

若シ他ノ負ノ値ヲ求メント欲セハ其平方根ノ符號ヲ凡ヘテ變スレハ可ナリ.

12. 視察法

三項式ノミナラス多項式ニテモ或文字ノ異方乘ヲ唯貳ツ有ツ多項式カ完平方ナルトキハ前章ノ如ク視察ニ由テ平方根ヲ求メ得ラルヘシ,

〔例〕 $a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$ ノ平方根ヲ求ム.

此式ハ a^2 及ヒ a ノ他ハ a ノ異方乘ヲ有セス故ニ前章ノ如ク之ヲ a ノ遞降方乘ニ整列スレハ三項トナル, $a^2+2a(b+c)+(b^2+c^2+2bc)$,
此兩外項ノ平方根ハ a 及ヒ $b+c$ ナリ.

之ニ由テ所求ノ平方根ハ $a+b+c$.

例題五拾壹

次ノ各ノ平方根ヲ記セ.

1. $9x^4-30x^2y+25y^2$.　　2. $4x^{10}-12x^5y^3+9y^6$.

3. $x^8-6x^4y^4+9y^8$.　　4. $9x^{12}-6x^6y^3+y^6$.

5. $\frac{x^6}{4}-\frac{x^3y^3}{3}+\frac{y^6}{9}$.　　6. $\frac{x^4}{a^2}+8x^2y^3+16a^2y^6$.

7. $\frac{9b^2x^4}{a^2}-24x^2y^2+\frac{16a^2y^4}{b^2}$.　　8. $\frac{9}{x^6}-\frac{42a^5}{x^3}+49a^{10}$.

9. $4a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-4c^2a^2+4a^2b^2$.

10. $25a^4+9b^4+4c^4-12b^2c^2+20c^2a^2-30a^2b^2$.

13. 多項式之開平

任意多項式ノ平方根ヲ求ムル方法ヲ示サントス.

先ツ或代數式ヲ平方ニシ又其平方ノ形チヲ作リ再ヒ原式ニ導クノ反法ヲ推究スルヿ次ノ如シ,

例ヘハ　$x^2+2xy+3y^2$　(1)

此平方ハ　$x^4+4x^3y+6x^2y^2+12xy^3+9y^4$　(2)

上ノ兩式ハ双方トモ x ノ遞降方乘ニ整列セシモノトス.

又 $x^2+2xy+3y^2$ ノ平方ノ形チヲ作レハ

$$\{x^2+(2xy+3y^2)\}^2=x^4+2x^2(2xy+3y^2)+(2xy+3y^2)^2 \quad (3)$$

$$\{(x^2+2xy)+3y^2\}^2=(x^2+2xy)^2+2(x^2+2xy)3y^2+(3y^2)^2 \quad (4)$$

(2)ノ第壹項ハ(1)第壹項ノ平方ナリ故ニ(2)平方根ノ第壹項ハ(2)ノ第壹項ノ平方根ヲ取レハ可ナリ.

又平方根ノ第壹ノ平方 x^4 ヲ(3)ヨリ減スレハ其殘式ノ x ノ最高方乘ノ項ハ $2x^2\times 2xy$ 即チ平方根ノ第壹項ト第貳項ノ積ノ2倍ナリ故ニ平方根ノ第壹項ノ平方ヲ(2)ヨリ減シタル殘式ヲ平方根ノ第壹項ノ2倍ニテ除スレハ平方根ノ第貳項ヲ得ヘシ.

又(4)ヨリ $(x^2+2xy)^2$ ヲ減スレハ其殘式ノ x ノ最高方乘ノ項ハ $2x^2\times 3y^2$ 即チ平方根ノ第壹項ト第三項ノ積ノ2倍ナリ故ニ亦 $2x^2$ ニテ除スレハ平方根ノ第三項ヲ得ヘシ.

若シ己知代數式ヨリ $x^2+2xy+3y^2$ ノ平方ヲ減シ殘無キニ至レハ $x^2+2xy+3y^2$ ハ其平方根ナリ.

14. 壹般之解 或文字ノ遞降(或ハ遞昇)方乘ニ整列シタル或多項式ノ完平方ヲ $(A+B)^2$ トシ其平方根 A ヲ得タルモノトス.

然ルトキ $(A+B)^2$ ヨリ A^2 ヲ減スレハ $(2A+B)\times B$ ヲ得ヘシ.

前定ノ整列法ニヨリ殘式ノ最高(或ハ最低)次ノ壹項ハ A ノ第壹項ト B ノ第壹項ノ積ノ2倍ナリ故ニ所求ノ平方根ノ次項ヲ得ルニハ次ノ法則ニヨル.

〔法則〕全式ヨリ其平方根ノ若干項ヲ減シ其殘式ヲ平方根ノ第壹項ノ貳倍ニテ除スヘシ.

平方根ノ第壹項ハ原式ノ第壹項ノ平方根ナルカ故ニ容易ニ之ヲ得ヘシ然ル後ハ上ノ法則ニ由テ順次ニ平方根ノ次項ヲ得ヘシ.

例ヘハ前章(2)ノ平方根ヲ求ム.

$$\sqrt{(x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4)}=x^2+2xy+3y^2.$$

$$(x^2)^2=\underline{x^4}$$

$$(x^2+2xy)^2=\underline{x^4+4x^3y+\ 4x^2y^2}$$

$$(x^2+2xy+3y^2)^2=\underline{x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4}$$

此算式ハ前章ノ說明ト參照スヘシ.

14. 簡法 此ノ如ク各別ニ平方シテ減スルハ煩雜ナルカ故ニ算術(中學算術敎科書下卷第拾九編)ノ如ク運算スヘシ即チ次ノ如シ.

$$
\begin{array}{lll}
x^2 & & \sqrt{(x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4)}=x^2+2xy+3y^2 \\
x^2 & x^4 & \\
\hline
2x^2+2xy & +4x^3y & \\
 2xy & +4x^3y+\ 4x^2y^2 & \\
\hline
2x^2+4xy+3y^2 & 6x^2y^2 & \\
 3y^2 & 6x^2y^2+12xy^3+9y^4 & \\
\hline
\end{array}
$$

例題五拾貳

次ノ各ノ平方根ヲ求ム.

1. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.　　2. $4x^4-8x^3+4x+1$.
3. $1-xy-\frac{15}{4}x^2y^2+2x^3y^3+4x^4y^4$.
4. $4x^4+4x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$.　　5. $x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$.
6. $1+4x+10x^2+12x^3+9x^4$.
7. $16-96x+216x^2-216x^3+81x^4$.
8. $(1+2x^2)^2-4(1-x)(1+2x)x$.
9. $x^6-22x^4+34x^3+121x^2-374x+289$.
10. $a^2-ax+\frac{1}{4}x^2+8a-4x+16$.
11. $x^8+2x^7+x^6-4x^5-12x^4-8x^3+4x^2+16x+16$.
12. $16x^2-96x+216-\frac{216}{x}+\frac{81}{x^2}$.

13. $x^6-6x^4+15x^2-20+\frac{15}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}$.
14. $x^4+2x^3(y+z)+x^2(y^2+z^2+4yz)+2xyz(y+z)+y^2z^2$.
15. $2x^2(y+z)^2+2y^2(z+x)^2+2z^2(x+y)^2+4xyz(x+y+z)$.

立方根

15. 立方根(Cube Root) 或代數式ノ立方根ヲ求メントス.

$$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3,$$

上ノ代數式ニ於テ A 及ヒ B ハ順次ニ或壹ツノ文字ノ遞降(或ハ遞昇)方乘ニ整列セシモノトス.

今 $(A+B)^3$ ノ立方根ノ若干項 A ノ立方ヲ原式ヨリ減スレハ $(A+B)^3-A^3=(3A^2+3AB+B^2)\times B$ ヲ得.

最初ノ整列法ニヨリ此殘式ノ最高(或ハ最低)次ノ壹項ハ　$3\times$(A ノ初項)$^2\times$(B ノ初項) ナルコヲ知ル.

之ニ由テ立方根ノ若干項 A ノ次項即チ B ノ初項ヲ得ルニハ原式ヨリ A^3 ヲ減シ其殘式ノ初項ヲ立方根ノ初項ノ平方ノ三倍ニテ除スレハ可ナリ.

〔例〕 $x^6-6x^5+21x^4-44x^3+63x^2-54x+27$ ノ立方根ヲ求ム.

$$\sqrt[3]{(x^6-6x^5+21x^4-44x^3+63x^2-5x+27)}$$

$$(x^2)^3=\underline{x^6}$$

$$(x^2-2x)^3=\underline{x^6-6x^5+12x^4-8x^3}$$

$$(x^2-2x+3)^3=\underline{x^6-6x^5+21x^4-44x^3+63x^2-5x+27}$$

最初ニ $(x^2)^3$ ヲ減シ其殘式ノ初項 $-6x^5$ ヲ $3(x^2)^2$ ニテ除シ $-2x$ ヲ根ノ次項トシ $(x^2-2x)^3$ ヲ減シ其殘式ノ初項 $9x^4$ ヲ $3(x^2)^2$ ニテ除シ 3 ヲ得, 根ノ末項トス.

〔註〕 算術(中學算術教科書下卷第拾九編)ノ方法ノ如クスレハ更ニ便利ナリ.

例題五拾三

次ノ立方根ヲ求ム.

1. $x^3-24x^2y+192xy^2-512y^3$.
2. $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$.
3. $x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8$.
4. $8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64$.

第拾九編

分指數及負指數

1. 指數定義之推擴 是迄ハ指數ハ定義(第壹編 11. 章)ニ由テ凡ヘテ正整數トセリ今之ヲ推擴シテ分數或ハ負數トシ之ヲ前ノ定義ニ由テ得タル指數ノ法則ニ適合スルモノト假定シ以テ指數ノ定義ヲ推擴セントス.

2. 分指數 n カ正整數ナルキ

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

指數ノ法則ニ由テ

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\ldots\ldots 至\ n\ 因子=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots\cdots 至\ n\ 項}$$

$$=a^{\frac{mn}{n}}=a^m,$$

即チ $(a^{\frac{m}{n}})^n=a^m$, $\quad\therefore\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

$m=1$ ナルト $\qquad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}.$

〔例〕 $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4,$

$$4^{\frac{3}{2}}=\sqrt{4^3}=\sqrt{64}=8,$$

$$3^{\frac{5}{2}}=\sqrt{3^5}=\sqrt{243}.$$

3. 零之指數 $a^0=1.$

指數之法則ニ由テ $a^0\times a^m=a^{0+m}=a^m,$

$$\therefore \quad a^0=a^m\div a^m=1.$$

4. 負指數 $a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}.$

指數ノ法則ニ由テ

$$a^m\times a^{-m}=a^{m-m}=a^0=1,$$

$$\therefore \quad a^{-m}=\frac{1}{a^m}.$$

〔例〕 $2^{-2}=\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{1}{4},\ \dfrac{a}{b}=ab^{-1}=\dfrac{1}{a^{-1}b},$

及ビ $\qquad \dfrac{a^3b^2}{x^3y}=a^3b^2x^{-3}y^{-1}=\dfrac{1}{a^{-3}b^{-2}x^3y}.$

5. 雜例 今指數之法則ヲ適用シテ次ニ雜例ヲ示スヘシ.

$$(a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}})^2=a^{\frac{2}{3}\times 2}b^{\frac{1}{2}\times 2}=a^{\frac{4}{3}}b,$$

$$a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a},$$

$$(a^{-\frac{2}{3}})^6=a^{-\frac{2}{3}\times 6}=a^{-4}=\frac{1}{a^4},$$

$$a^{-2}\div a^{-4}=a^{-2-(-4)}=a^2,$$

$$\sqrt[3]{(a^3b^{-3}c^4)}=\sqrt[3]{a^3}\,\sqrt[3]{b^{-3}}\,\sqrt[3]{c^4}=ab^{-1}c^{\frac{4}{3}}.$$

例題五拾四

次ノ各ヲ最簡ニセヨ.

1. $16^{\frac{3}{2}}.$ 2. $4^{-\frac{5}{2}}.$ 3. $(\frac{1}{25})^{-\frac{1}{2}}.$

4. $(\frac{4}{25})^{-\frac{3}{2}}.$ 5. $(\frac{27}{64})^{-\frac{2}{3}}.$ 6. $(100)^{-\frac{5}{2}}.$

7. $(\frac{1}{10000})^{-\frac{3}{4}}.$ 8. $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{3}}.$ 9. $a^{\frac{4}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}.$

10. $a^{-\frac{2}{3}}\times a.$ 11. $a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{3}}\times a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}.$ 12. $(a^{\frac{1}{2}}b)^2.$

13. $(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{2}{3}})^3.$ 14. $(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}})^{\frac{3}{2}}.$ 15. $\{(a^{-2})^{\frac{1}{3}}\}^{-\frac{2}{3}}.$

16. $\{(a^{-\frac{5}{6}})^3\}^{-\frac{1}{5}}.$ 17. $a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{3}{4}}\times(a^2)^{-\frac{1}{6}}(a^{\frac{1}{12}})^5.$

18. $(x^{q-r})^p\times(x^{r-p})^q\times(x^{p-q})^r.$

19. $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}}\div\dfrac{x^{\frac{1}{6}}}{y^{\frac{1}{6}}}$.　　20. $\dfrac{(xy)^{x+y}}{x^{y}y^{x}}$.

21. $\dfrac{(xyz)^{x+y+z}}{x^{y+z}y^{z+x}z^{x+y}}$.　　22. $\dfrac{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}(b^{\frac{1}{2}})^{6}}{(b^{\frac{1}{4}})^{3}a^{\frac{1}{3}}}\div\dfrac{(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{12}}}{(b^{6})^{\frac{1}{7}}}$.

23. $\{(x^{\frac{p-q}{r}})^{\frac{q-r}{p}}\}^{\frac{r-p}{q}}\times x^{\frac{p-q}{p}+\frac{q-r}{p}+\frac{r-p}{q}}$.

次ノ各ヲ分指數トシ且ツ之ヲ最簡ニセヨ.

24. $\sqrt[3]{a}\times\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}$.　　25. $\sqrt[3]{(a^{2}y)}\times\sqrt[3]{(ay^{2})}$.

26. $\sqrt[3]{a^{7}}\times\sqrt[5]{a^{7}}\times a^{-\frac{1}{3}}\div a^{\frac{4}{5}}$.　　27. $\sqrt[4]{[a^{2}\sqrt[3]{(a^{6}\sqrt{a^{-23}})}]}$.

28. $\sqrt[5]{(a^{2}b^{10}c^{5})}\div\sqrt[3]{(ab^{6}c^{3})}$.　　29. $\sqrt{(a^{3}b^{-2})}\div\sqrt[3]{(a^{-4}b^{5})}$

30. $\sqrt[3]{(a^{6}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}})}\times b^{-\frac{9}{2}}\times(c^{\frac{1}{3}}a^{4})^{-\frac{1}{2}}$.

次ノ各ヲ根號ノ式トシ且ツ正指數ニテ示セ.

31. $a^{\frac{1}{2}}-a^{-2}$.　　32. $a^{-4}b^{-\frac{1}{4}}$.　　33. $a^{\frac{2}{3}}b^{-1}-a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}$.

34. $a^{-3}b^{-\frac{1}{2}}+3^{-2}a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$.

6. 多項式之運算

分指數及ヒ負指數ヲ有スル多項式ノ運算ヲ示ス.

〔第壹例〕 $a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}}$ ニ $a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}$ ヲ乘セヨ.

$$
\begin{array}{l}
a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}} \\
\underline{a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}} \\
a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1 \\
\quad -a^{\frac{1}{3}}-1-a^{-\frac{1}{3}} \\
\underline{\qquad\quad +1+a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}} \\
a^{\frac{2}{3}}\qquad +1 \qquad +a^{-\frac{2}{3}}.
\end{array}
$$

〔第貳例〕 $x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}+3x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{2}}$ ヲ $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}}+y^{-\frac{1}{3}}$ ニテ除セヨ.

$$
\begin{array}{l}
x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}}+y^{-\frac{1}{3}})\,x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}+3x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{2}}\,(x^{\frac{1}{6}}-y^{-\frac{1}{6}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}+x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}+2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{2}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}+2x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{3}}-y^{-\frac{1}{2}}}
\end{array}
$$

〔第三例〕 $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$ ノ平方根ヲ求ム.

原式ヲ括レハ $(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})^{2}+2x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})+x^{\frac{2}{3}}$

$=\{(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}})+x^{\frac{1}{3}}\}^{2}$,

∴　所求ノ平方根ハ $x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$ ナリ.

例 題 五 拾 五

次ノ各ヲ最簡ニセヨ.

1. $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$.　　2. $(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)(x^{\frac{1}{3}}-1)$.

3. $(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})$.

4. $(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}})(a^{\frac{4}{3}}-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}})$.

5. $(x^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{4}})$.

6. $(x^{n}+x^{\frac{n}{2}}+1)(x^{-n}+x^{-\frac{n}{2}}+1)$.

7. $(x^{2n}+x^{n}y^{n}+y^{2n})(x^{-2n}+x^{-n}y^{-n}+y^{-2n})$.

8. $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})$.

9. $\left(\frac{1}{8}a^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{12}ab^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{18}a^{\frac{1}{2}}b-\frac{1}{27}b^{\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}b^{\frac{1}{2}}\right)$.

10. $(a-b)\div(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$.　　11. $(x^{\frac{3n}{2}}-y^{\frac{3n}{2}})\div(x^{\frac{n}{2}}-y^{\frac{n}{2}})$.

12. $(x-243y^{\frac{5}{3}})\div(x^{\frac{1}{5}}-3y^{\frac{1}{3}})$.

13. $(x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}}+2+x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}})\div(x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}-1+x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}})$.

14. $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-2+a^{-\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}}$.　　15. $\dfrac{\left(\frac{25}{128}\right)^{-\frac{1}{2}}+(\cdot 03375)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{(80)}-(10)^{-\frac{2}{3}}}$.

16. $\{(x-x^{-1})-2(x^{\frac{1}{6}}-x^{-\frac{1}{6}})+2(x^{\frac{5}{6}}-x^{-\frac{5}{6}})\}\div(x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}})$.

17. $(ab^{-3}c^{5})^{\frac{1}{2}}\times(a^{7}b^{4}c^{-1})^{\frac{1}{3}}\times(a^{-5}bc^{2})^{\frac{1}{6}}$.

18. $\dfrac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+x}$.

19. $\{(a+b)^{\frac{2}{3}}+(a^{2}-b^{2})^{\frac{1}{3}}+(a-b)^{\frac{2}{3}}\}\{(a+b)^{\frac{1}{3}}-(a-b)^{\frac{1}{3}}\}$.

20. $\sqrt{(4x^{2}a^{-2}-12xa^{-1}+25-24x^{-1}a+16x^{-2}a^{2})}$.

21. $\sqrt{(x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}})}$.

22. $\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}})}$.

次ノ各ヲ證セヨ.

23. $1-\dfrac{a^{2}+b^{2}-a^{-2}-b^{-2}}{a^{2}b^{2}-a^{-2}b^{-2}}=\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$.

24. $\dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=2+x^{\frac{2}{3}}$.

25. $x^{a}=y^{b}=z^{c}$ 及ヒ $y^{2}=zx$ ナル𪜈

$$b(a+c)=2ac.$$

指數方程式

7. 指數方程式 分指數及ヒ負指數ニ關スル方程式ノ特別ナル解法ヲ示サントス.(壹般ノ解法ハ第廿六編ニ示スヘシ)

〔第壹例〕 $8x^{\frac{3}{2n}}-8x^{-\frac{3}{2n}}=63$ ヲ解セヨ.

$x^{\frac{3}{2n}}$ ヲ乘シテ轉項スレハ

$$8x^{\frac{3}{n}}-63x^{\frac{3}{2n}}-8=0.$$

即チ $$(x^{\frac{3}{2n}}-8)(8x^{\frac{3}{2n}}+1)=0,$$

之ニ由テ $$x^{\frac{3}{2n}}=8 \quad 或ハ \quad -\tfrac{1}{8},$$

$$x=(2^3)^{\frac{2n}{3}} \quad 或ハ \quad \left(-\frac{1}{2^3}\right)^{\frac{2n}{3}},$$

$$\therefore \quad x=2^{2n} \quad 或ハ \quad \frac{1}{2^{2n}}.$$

〔第貳例〕 $2^{2x+1}-3.2^x+1=0$ ヲ解セヨ.

原方程式ヲ變スレハ

$$2(2^x)^2-3(2^x)+1-0,$$

即チ $$(2.2^x-2)(2^x-1)=0,$$

之ニ由テ $$2^x=\frac{1}{2}=2^{-1} \quad 或ハ \quad 2^x=1=2^0,$$

故ニ指數ヲ比較シテ $x=-1$ 或ハ 0.

例題五拾六

次ノ方程式ヲ解セヨ,

1. $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{4}}+1=0.$
2. $x-8x^{\frac{1}{2}}+12=0.$
3. $x^{\frac{3}{2}}-26x^{\frac{3}{4}}-27=0.$
4. $x^{\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{1}{3}}=4.$
5. $4x^{\frac{1}{5}}-3x^{-\frac{1}{5}}=4.$
6. $x^{-2}-2x^{-1}=8.$
7. $2\sqrt{x}+2x^{-\frac{1}{2}}=5.$
8. $x^{\frac{2}{n}}+6=5x^{\frac{1}{n}}.$
9. $3^{2x}+9=10\,.\,3^x.$
10. $5(5^x+5^{-x})=26.$
11. $\sqrt{2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{2^x}}=2.$
12. $2^{2x+8}+1=2^{x+5}.$
13. $2^{2x+3}-57=65(2^x-1).$

第貳拾編

不　盡　根

1. 定義　畧近値ノミヲ得ル數ヲ不盡根トイフ.(第壹編13.章)

例ヘハ $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{4}$ ノ如キハ不盡根ナリ.

代數式 $\sqrt{a}$ ノ如キハ a カ完平方數ナルトキハ不盡根トナラサレトモ屢々之ヲ不盡根トシテ用フ.

同根號ノ不盡根ヲ同次トイフ.

何ヘハ $\sqrt{2}$, $6^{\frac{1}{2}}$ ハ貳次不盡根, $\sqrt[3]{4}$, $5^{\frac{2}{3}}$ ハ三次不盡根又 $\sqrt[n]{5}$ ハ n 次不盡根ナリ.

兩不盡根カ同シ無理因子ヲ有スルトキ之ヲ同類トイフ. 例ヘハ $2\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$ ハ同類ナリ.

〔注意〕　此編ニ於テモ第拾八,拾九編ノ如ク特別ノ場合ノ外ハ方根ハ壹ツノ正値ノミヲ取ルモノトス　例ヘハ $\sqrt{2}$ ハ $\pm\sqrt{2}$ ナレトモ $+\sqrt{2}$ ヲ取ル.

2. 不盡根之變化　有理數モ亦不盡根ノ形ナニテ示シ得ヘシ.

例ヘハ　$a=\sqrt{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[n]{a^n}$.

$a=2$ トスレハ $2=\sqrt{4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[n]{2^n}$.

又 $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{m}{mn}}$ ナルカ故ニ

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nm]{a^m}.$$

又 $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{mn}}$ ナルカ故ニ

$$\sqrt[m]{(\sqrt[n]{a})}=\sqrt[mn]{a}.$$

例ヘハ　$\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$,　$\sqrt[3]{(\sqrt{2})}=\sqrt[6]{2}$.

方根之法則　$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ナルカ故ニ

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}.$$

例ヘハ　$3\sqrt{2}=\sqrt{9}\sqrt{2}=\sqrt{18}$,

又反對ニ　$\sqrt{18}=\sqrt{9\times2}=\sqrt{9}\sqrt{2}=3\sqrt{2}$.

$$\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{(3^3\times5)}+\sqrt[3]{(2^3\times5)}$$

$$=3\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}=5\sqrt[3]{5},$$

$$\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}=a\sqrt{a}+b\sqrt{a}=(a+b)\sqrt{a},$$

及ヒ　$5\sqrt[6]{a^2}-2\sqrt[3]{a}=5\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{a}=3\sqrt[3]{a}$.

3. 不盡根之同次 兩不盡根ヲ同次トナスヿヲ得ヘシ.

例ヘハ $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^m}$ ナルヿヲ知ル

同法ニテ $\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}$.

〔第壹例〕 $\sqrt[4]{3}$ 及ヒ $\sqrt[6]{5}$ ヲ同次ニ變化セヨ.

4 及ヒ 6 ノ L.C.M. ハ 12 ナリ之ニ由テ

$$\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{(\sqrt[3]{3^3})}=\sqrt[12]{27},\quad \sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{(\sqrt{5^2})}=\sqrt[12]{25}.$$

〔第貳例〕 $\sqrt[3]{14}$ ト $\sqrt{6}$ ト何レカ大ナルヤ.

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[2]{14}&=\sqrt[3]{\sqrt{(14^2)}}=\sqrt[6]{196}\\ \sqrt{6}&=\sqrt{(\sqrt[3]{6^3})}=\sqrt[6]{216}\end{aligned}\right\}\quad \therefore\ \sqrt{6}\text{ カ大ナリ.}$$

4. 不盡根之乘除 同次ノ兩不盡根ノ積ハ $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ニ由テ直ナニ得ラルヘシ.

同次ナラサル兩不盡根ノ積ハ前章ニ由テ同次ニ變シタル後上ノ法則ヲ用フヘシ.

〔第壹例〕 $\sqrt{5}$ ニ $\sqrt{20}$ ヲ乘セヨ.

$$\sqrt{5}\times\sqrt{20}=\sqrt{(5\times 20)}=\sqrt{100}=10.$$

〔第貳例〕 $\sqrt{2}$ ニ $\sqrt[3]{3}$ ヲ乘セヨ.

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{2^3}\times\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{(2^3\times 3^2)}=\sqrt[6]{72}.$$

〔第三例〕 $\sqrt[3]{2}$ ヲ $\sqrt{6}$ ニテ除セヨ.

$$\sqrt[3]{2}\div\sqrt{6}=\sqrt[6]{2^2}\div\sqrt[6]{6^3}=\sqrt[6]{(2^2\div 6^3)}=\sqrt[6]{\tfrac{1}{54}}.$$

〔第四例〕 $4\sqrt{3}+4\sqrt{2}$ ニ $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ ヲ乘セヨ.

$$\begin{array}{r}4\sqrt{3}+4\sqrt{2}\\ 2\sqrt{3}-2\sqrt{2}\\ \hline 8\times 3+8\sqrt{6}\qquad\qquad\\ -8\sqrt{6}-8\times 2\\ \hline 24\qquad\qquad -16=8.\end{array}$$

例 題 五 拾 七

次ノ各ヲ最簡ニセヨ.

1. $\sqrt{27}+\sqrt{48}$.
2. $\sqrt{50}+\sqrt{98}$.
3. $2\sqrt{180}-\sqrt{405}$.
4. $2\sqrt{28}-\sqrt{63}$.
5. $3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{625}$.
6. $3\sqrt[3]{72}-2\sqrt[3]{243}$.

7. $4\sqrt[3]{448}-15\sqrt[3]{7}$. 8. $\sqrt{512}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$.

9. $\sqrt{147}-2\sqrt{27}-\sqrt{3}$. 10. $\sqrt{a^3}+2\sqrt{ab^2}-\sqrt{9a}$.

11. $5\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{8}+\frac{1}{\sqrt{18}}$. 12. $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}-\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}+\frac{1}{c}\sqrt[3]{a^2b}$.

13. $2\sqrt{\frac{2}{3}}\times 3\sqrt{\frac{3}{2}}$. 14. $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{36}$.

15. $\sqrt{12}\times\sqrt{27}\times\sqrt{75}$. 16. $\sqrt[3]{16}\times\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{9}$.

17. $\sqrt[3]{12}\times\sqrt[3]{75}\times\sqrt[3]{30}$. 18. $\sqrt[4]{6}\times\sqrt[4]{12}\times\sqrt[4]{18}$.

19. $\sqrt{10}\times\sqrt[3]{200}$. 20. $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}$.

21. $\sqrt{18}\div\sqrt{50}$. 22. $\sqrt{20}\times\sqrt{96}\div\sqrt{30}$.

23. $\sqrt[3]{147}\div\sqrt[3]{35}\times\sqrt[3]{735}$. 24. $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[p]{c}$.

---

25. $\sqrt{3}$ ト $\sqrt[3]{5\frac{1}{5}}$ ト何レカ大ナリヤ.

26. $\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{344}$, $\sqrt[4]{2402}$ ノ内最大及ヒ最小ヲ示セ.

次ノ各ノ積ヲ求メヨ.

27. $(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})$. 28. $(2\sqrt{5}+3\sqrt{3})(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})$.

29. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$.

30. $(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{5})(1+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{5})$. 31. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2$.

32. $(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})$.

33. $(x+\sqrt{y})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})$.

34. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(1-\sqrt{\frac{2}{5}})$.

5. 有理分母 分數ノ分母カ不盡根ナルトキ之ヲ有理ニナス事ハ計算上必要ノ〻ナリ.

例ヘハ
$$\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{3}{5}\sqrt{5},$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{3}{7}\sqrt{14},$$

$$\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}+5+2+\sqrt{5}}{5-1}=\frac{7+3\sqrt{5}}{4},$$

$$\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}=\frac{(a-\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-b}.$$

$a\pm\sqrt{b}$ ハ $a\mp\sqrt{b}$ ヲ乘スレハ有理トナルヘシ.

又
$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\sqrt{6}}{\{\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}\{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{6}}{5-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}.$$

6. **定理** $a+\sqrt{b}=\alpha+\sqrt{\beta}$ ニ於テ a 及ヒ α カ有理ニシテ $\sqrt{b}$ 及ヒ $\sqrt{\beta}$ カ無理ナルトキ $a=\alpha,\ b=\beta$.

何トナレハ $a-\alpha+\sqrt{b}=\sqrt{\beta}$,

双方ヲ平方ニシ且ツ轉項スレハ

$$2(a-\alpha)\sqrt{b}=(\beta-b)-(a-\alpha)^2.$$

之ニ由テ此左邊カ0ナラサレハ無理數ト有理數ト相等シクナリテ不合理ナリ故ニ $\sqrt{b}$ ノ係數ヲ0トセサルヘカラス之ニ由テ $a=\alpha,\ b=\beta$.

〔注意〕 $a+\sqrt{b}=\alpha+\sqrt{\beta}$ ハ $\sqrt{b}$ 及ヒ $\sqrt{\beta}$ カ無理數量ニアラサルトキハ $a=\alpha,\ b=\beta$ ナル能ハス,然ラサレハ $3+\sqrt{4}=2+\sqrt{9}$ ノ如キハ $3=2,\ 4=9$ トナルニ至ルヘシ.

7. **重開平** 即チ有理數ト不盡根トヲ有ツ貳項ノ平方根ヲ求ム.

$\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ ヲ求メントス但シ $\sqrt{b}$ ハ無理數量ナリ.

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \qquad (1)$$

双方ヲ平方ニスレハ

$$a+\sqrt{b}=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta},$$

前章ノ定理ニ由テ

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=a\\ 4\alpha\beta=b\end{array}\right\} \qquad (2)$$

第拾四編11.章ニ由テ α 及ヒ β ハ方程式 $x^2-ax+\frac{b}{4}=0$ ノ貳根ナリ,

而シテ此貳根ハ

$$\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2} \text{ 及ヒ } \frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}}.$$

〔注意〕 a ハ正ノ有理數ナルヿヲ要ス.

又 a^2-b ハ完平方數ナルヿヲ要ス然ラサレハ原式ハ最簡トナル能ハス.

〔第壹例〕 $\sqrt{(15+2\sqrt{56})}$ ヲ求ム.

$\sqrt{(15+2\sqrt{56})}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ トス,

兩邊ヲ平方ニスレハ

$$15+2\sqrt{56}=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta},$$

$$\therefore \qquad \alpha+\beta=15,\ \text{及ヒ}\ \alpha\beta=56,$$

此兩方程式ハ7及ヒ8ノ根ノ値ニテ適合ス,

$$\therefore \qquad \sqrt{(15+2\sqrt{56})}=\sqrt{7}+\sqrt{8}.$$

〔第貳例〕 $\sqrt{(6\sqrt{2}-\sqrt{70})}$ ヲ求ム.

$$\sqrt{(6\sqrt{2}-\sqrt{70})}=\sqrt{\{\sqrt{2}(6-\sqrt{35})\}}=\sqrt[4]{2}\sqrt{(6-\sqrt{35})}.$$

$$\sqrt{(6-\sqrt{35})}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\ \text{トス},$$

兩邊ヲ方平ニスレハ

$$6-\sqrt{35}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta},$$

$$\therefore \qquad \alpha+\beta=6,\quad 4\alpha\beta=35,$$

之ニ由テ α 及ヒ β ハ $\frac{7}{2}$ 及ヒ $\frac{5}{2}$ ナリ,

$$\therefore \qquad \sqrt{(6-\sqrt{35})}=\sqrt{\tfrac{7}{2}}-\sqrt{\tfrac{5}{2}}$$

之ニ由テ $\sqrt{(6\sqrt{2}-\sqrt{70})}=(\sqrt{\tfrac{7}{2}}-\sqrt{\tfrac{5}{2}})\sqrt[4]{2}.$

例題五拾八

次ノ各分母ヲ有理ニセヨ.

1. $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$.　2. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$.　3. $\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}$.

4. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.　5. $\dfrac{15+14\sqrt{3}}{15-2\sqrt{3}}$.　6. $\dfrac{\sqrt{6}-3\sqrt{12}}{2\sqrt{6}+\sqrt{12}}$.

7. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.　8. $\dfrac{3}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

9. $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.　10. $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.　11. $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1}$.

12. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}+1}$.　13. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-1}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}+1}$.

次ノ各ヲ最簡ニセヨ.

14. $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^2}$.　15. $\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^3}+\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^3}$.

16. $\dfrac{(3+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})}$.　17. $\dfrac{2\sqrt{15}-3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{\sqrt{15}+\sqrt{2}}$.

18. $\dfrac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$.

19. $\left(\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^2$.

20. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{1+(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}$.　21. $\dfrac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

21. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

$+\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

23. $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

24. $\dfrac{2\sqrt{(a+b)}+3\sqrt{(a-b)}}{2\sqrt{(a+b)}-\sqrt{(a-b)}}$.

25. $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}-\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=7\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^{3}$ ヲ證セヨ.

26. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ノ値ヲ小數三位迄求メヨ.

27. $x=\sqrt{3}$ ナルトキ $\frac{2x-1}{(x-1)^2}-\frac{2x+1}{(x+1)^2}$ ノ値ヲ求ム.

次ノ各ヲ最簡ニセヨ.

28. $\sqrt{(6+\sqrt{20})}$.　　29. $\sqrt{(12-6\sqrt{3})}$.

30. $\sqrt{(28-5\sqrt{12})}$.　　31. $\sqrt{(101-28\sqrt{13})}$.

32. $\sqrt{(280+56\sqrt{21})}$.　　33. $\sqrt{(4\frac{1}{2}+2\sqrt{2})}$.

34. $3\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{(7+2\sqrt{10})}$.

35. $6-4\sqrt{3}+\sqrt{(16-8\sqrt{3})}$.

36. $\sqrt{\{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})\}}$.

37. $\sqrt{(2x+2\sqrt{x^2-1})}$.　　38. $\sqrt{(3\sqrt{5}-5)}$.

39. $\sqrt{\{2a+2\sqrt{(a^2-x^2)}\}}$.

40. $\sqrt{\{3x-1+2\sqrt{(2x^2+x-6)}\}}$.

41. $\frac{1}{\sqrt{(16+6\sqrt{7})}}$.　　42. $\frac{1}{\sqrt{(15+2\sqrt{56})}}$.

43. $\sqrt{(7+2\sqrt{10})}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})}$.

44. $\frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})}}$.

45. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}-\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2-\sqrt{3})}}$.

46. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{45}}{\sqrt{2}+\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}=3{\cdot}632\ldots\ldots$ ナルコヲ示セ.

47. $x=2+\sqrt{5}$ ナルトキ x^2-4x+5 ノ値ヲ求ム.

48. $x^2=x+1$ ナルトキ $x^3=2x+1$ 及ヒ $x^5=5x+3$.

49. $x^2=3x+5$ ナルトキ $x^3=14x+15$ 及ヒ $x^4=57x+70$.

次ノ各方程式ヲ解セヨ.

50. $x^2-4x-7+6\sqrt{2}=0$.

51. $(\sqrt{7}-\sqrt{6})x^2-2x+\sqrt{7}+\sqrt{6}=0$.

52. $(9+5\sqrt{3})x^2-(15+7\sqrt{3})x+6=0$.

8. 虛數 (Imaginary)

ハ第九編11.章ニ示シタリ即チ $\sqrt{-3}$ ノ如シ而シテ $\sqrt{-1}$ ヲ虛數ノ單位トシ之ヲ i ト定ム.

即チ　$\sqrt{-3}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}=(\sqrt{3})i$

虛數ノ平方ハ負ナリ.

例ヘハ　$i=\sqrt{-1}$　$\therefore$　$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$,

之ニ由テ　$(\sqrt{-3})^2=-3$,

又　$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{-a\times-b}=-\sqrt{ab}$

$\sqrt{-5}\times\sqrt{-7}=\sqrt{-5\times-7}=\sqrt{5\times7\times(-1)^2}=-\sqrt{35}$.

〔例〕 $a+bi$ ニ $a-bi$ ヲ乘セヨ.

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2-b^2(-1)=a^2+b^2.$$

9. 壹之立方根 1ノ立方根ヲ x トスレハ　$x^3=1.$

第拾五編1章第貳例ニ由テ此方程式ノ根ハ次ノ如シ,

$$1,\quad \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}),\quad \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}).$$

今 $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})=\omega$ トスレハ

$$\omega^2=\tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{-3})^2=\tfrac{1}{4}(1-2\sqrt{-3}-3)=\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}).$$

之ニ由テ　$\sqrt[3]{1}=1,\quad \omega,\quad \omega^2,$

又　$1+\omega+\omega^2=0,\quad \omega^3=1.$

何トナレハ $1+\omega+\omega^2$

$$=1+\tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})+\tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})=0.$$

〔例〕 x^3-y^3 ヲ壹次三因子ニ分割セヨ.

x^3-y^3 ハ $x-y$ ニテ整除シ得ヘシ,

又 $x^3-\omega^3y^3$ ハ $x-\omega y$ ニテ整除シ得ヘシ,

又 $x^3-(\omega^2)^3y^3$ ハ $x-\omega^2y$ ニテ整除シ得ヘシ.

而シテ $\omega^3=1$ ナルカ故ニ $(\omega^2)^3=1$ ナリ,

之ニ由テ　$x^3-y^3=x^3-\omega^3y^3=x^3-(\omega^2)^3y^3.$

$$\therefore\quad x^3-y^3=(x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2y).$$

例題五拾九

次ノ各ヲ最簡ニセヨ.

1. $(2\sqrt{-3}+3\sqrt{-2})(4\sqrt{-3}-5\sqrt{-2}).$
2. $(3\sqrt{-7}-5\sqrt{-2})(3\sqrt{-7}+5\sqrt{-2}).$
3. $\left(x-\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}\right).$
4. $\dfrac{1}{3-\sqrt{-2}}.$
5. $\dfrac{3\sqrt{-2}+2\sqrt{-5}}{3\sqrt{-2}-2\sqrt{-5}}.$
6. $\dfrac{(2+3\sqrt{-1})^2}{2+\sqrt{-1}}.$

次ノ各ヲ證セヨ.

7. $(x^3+y^3)=(x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2y).$
8. $a^3+b^3+c^3-3abc$
$$=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c).$$
9. $(1+\omega-\omega^2)(1-\omega+\omega^2)=4.$
10. $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9.$

第貳拾壹編

比及比例

1. 比 (Ratio) 同種ノ兩數量アリテ第壹ニ第貳ノ若干倍或ハ若干部分ヲ有ツヿヲ度ルキ之ヲ第壹カ第貳ニ於ケル比トイフ.

兩數量ヲ a, b トスレハ a カ b ニ於ケル比ハ次ノ如ク示ス.

$$a:b \text{ 即チ之ヲ } \frac{a}{b} \text{ トス.}$$

$a:b$ ニ於テ a ヲ比ノ前項, b ヲ後項トイフ.

2. 比之性質 比ハ前項ヲ分子トシ後項ヲ分母トスル分數ニ等シキカ故ニ次ノ性質ヲ有ス.

比ハ兩項ニ同數ヲ乘スルモ其値ヲ變スルヿナシ.

例ヘハ $2:3$, $6:9$ 及ヒ $2m:3m$ ハ相等シ.

又 $4:5$, $7:9$, $11:15$ ハ順次ニ $36:45$, $35:45$, $33:45$ トナルカ故ニ其大サハ次第ニ減小ナリ.

3. 定理 比ハ其各項ニ同正數ヲ加フレハ1ニ近ツクヘシ.

比 $a:b$ ノ各項ニ同正數 x ヲ加フレハ $a+x:b+x$ 而シテ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリモ1ニ近カシ.

今 $\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$, 又 $\frac{a+x}{b+x}-1=\frac{a-b}{b+x}$,

而シテ $\frac{a-b}{b+x}$ ハ絕對値ニ付キ $\frac{a-b}{b}$ ヨリ小ナリ何トナレハ其分子ハ相等シクシテ分母ハ大ナレハナリ.

之ニ由テ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリモ1ニ近カシ.

〔推論〕 $a>b$ ナル片 $\frac{a}{b}$ 及ヒ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ 1 ヨリ大ナリ而シテ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリ 1 ニ近カシ,

故ニ $\frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b}$.

又 $a<b$ ナル片 $\frac{a+x}{b+x}>\frac{a}{b}$ ナルコヲ知リ得ヘシ.

4. 複比 (Compound Ratio) 若干ノ諸比アリテ其前諸項ノ積カ後諸項ノ積ニ於ケル比ヲ其諸比ノ複比トイフ.

例ヘハ $a:b$ 及ヒ $c:d$ ノ複比ハ $ac:bd$.

$a^2:b^2$ ヲ $a:b$ ノ平方比トイフ.

$a^3:b^3$ ヲ $a:b$ ノ立方比トイフ.

$\sqrt{a}:\sqrt{b}$ ヲ $a:b$ ノ平方根比トイフ.

5. 不可通度 兩數量ノ比ハ常ニ兩整數ノ比ニテ表ハス能ハサル片互ヒニ不可通度ヲナストイフ.

例ヘハ正方形ノ對角線カ其壹邊ニ於ケル比ノ如キハ $\sqrt{2}$ ニシテ $\sqrt{2}$ ニ等シキ分數ヲ得ル能ハス.

兩不可通度ノ比ハ正シク之ヲ表ハス能ハサレハ任意ニ其ノ望ム所ノ近似値ヲ得ヘシ故ニ可通度ノ兩數ノ比ニ關スル性質ト同理ノモノトシテ考フルコトヲ得ヘシ.

例題六拾

1. 5 : 6, 7 : 8, 41 : 48 及ヒ 31 : 36 ヲ大サノ遞減ノ順序ニテ記セ.

2. $3+x:4+x$ カ 5 : 6 ニ等シキ片 x ノ値如何.

3. $15+x:17+x$ ノ値カ $\frac{1}{2}$ ナル片 x ノ値如何.

4. 3 : 4 ノ各項ニ如何ナル同數ヲ加フレハ 25 : 32 トナルカ.

5. 兩數ノ比 5 : 6 其和 121 ナル片各如何.

6. 兩數ノ比 3 : 8 ニシテ其平方ノ和 3577 ナル片各數如何.

7. $\frac{4x+5y}{3x-y}=2$ ナル𪜈 x カ y ニ於ケル比如何.

8. $4x^2+y^2=4xy$ ナル𪜈 x カ y ニ於ケル比如何.

9. $x^2+6y^2=5xy$ ナル𪜈 $x:y$ ヲ求ム.

10. 某比アリ其各項ニ 2 ヲ加フレハ 2:3 トナリ又各項ヨリ 1 ヲ減スレハ 1:2 トナル原比如何.

11. 兩數ノ和,差,平方ノ和ノ比 7:1:75 ナル𪜈各數如何.

12. 6:23 ノ各項ニ最小整數ヲ加ヘテ 7:11 ヨリ大ナラシメントス其最小整數如何.

13. 兩比 2:3 及ヒ 15:16 ノ複比ヲ記セ,又 5:6 及ヒ 18:25 ノ複比ヲ記セ.

14. $2x:3y$ ノ平方比ヲ記セ.

15. $x+1:x+4$ カ 3:5 ノ平方比ニ等シキ𪜈 x ノ値如何.

16. 兩人年齡ノ比 3:4 ニシテ 30 年前ノ比ハ 1:3 ナリ各現今ノ年齡如何.

17. a 及ヒ x カ正整數ナル𪜈 $a^2-x^2:a^2+x^2$ ハ $a-x:a+x$ ヨリ大ナリ其證如何,但 $a>x$.

比　例

6. 比例 (Proportion) 四數量アリテ其第壹カ第貳ニ於ケル比ト第三カ第四ニ於ケル比ト相等シキ𪜈此四數量ハ比例ヲナストイフ.

例ヘハ $a:b=c:d$ ナル𪜈 a, b, c, d ハ比例ヲナストイフ時トシテハ $a:b::c:d$ ト記ス此記法ハ a カ b ニ於ケルハ c カ d ニ於ケルカ如シト讀ム.

四數量カ比例ヲナス𪜈其第壹及ヒ第四ヲ外項トイヒ第貳及ヒ第三ヲ中項トイフ.

7. 原則 比例ノ中項ノ積ハ外項ノ積ニ等シ.

何トナレハ $a:b=c:d$ ナル𪜈

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 双方ニ bd ヲ乘スレハ

$$\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd \qquad \therefore \quad ad=bc.$$

8. 推論 前ノ原則ノ反論即チ

$ad=bc$ ナルキ a, b, c, d ハ比例ヲナスコヲ得ヘシ.

何トナレハ $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ 即チ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

故ニ $ad=bc$ ナルキ次ノ關係ハ凡ヘテ合理ナリ

$$a:b=c:d,$$
$$a:c=b:d,$$
$$b:a=d:c,$$
$$b:d=a:c.$$

上ノ四ツノ比例ノ其壹ツカ眞ナレハ他ノ凡ヘテハ眞ナルコヲ知ル.

9. 定理 $a:b=c:d$ ナルキ

$$a+b:a-b=c+d:c-d.$$

此定理ハ第拾貳編13.章第壹例ト同シ.

10. 連比例 諸數量ノ第壹カ第貳ニ於ケル,第貳カ第三ニ於ケル,第三カ第四ニ於ケル等ノ諸比相等シキキ此數量ハ連比ヲナストイフ.

例ヘハ $a:b=b:c=c:d=\ldots\ldots$

即チ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\ldots\ldots$ ナルキ

$a, b, c, d, \ldots\ldots$ ハ連比例ヲナス.

若シ $a:b=b:c$ ナルキ b ヲ a 及ヒ c ノ比例中項トイヒ c ヲ a 及ヒ b ノ比例第三項トイフ.

11. 連比例之性質 a, b, c カ連比例ヲナスキ

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \quad \therefore \quad b^2=ac \quad 即チ \quad b=\sqrt{ac}.$$

故ニ兩數ノ比例中項ハ其兩數ノ積ノ平方根ニ等シ.

又 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ヨリ

$$\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\times\frac{a}{b},$$

即チ
$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{a}{c},$$

$$\therefore \quad a^2:b^2=a:c.$$

之ニ由テ三數量カ連比例ヲナスキ第壹カ第貳ニ於ケル平方比ハ第壹カ第三ニ於ケル比ニ等シ.

12. 雑例 第拾貳編13.章ノ如ク壹ツノ文字ニテ表ハスコハ最モ便ナリ此方法ヲ用フルコト次ノ如シ.

〔第壹例〕 $a:b=c:d$ ナルキ

$$a^2+ab:c^2+cd=b^2-2ab:d^2-2cd.$$

$\frac{a}{b}=x$ トスレハ $\frac{c}{d}=x$ $\therefore$ $a=bx,\ c=dx,$

之ニ由テ

$$\frac{a^2+ab}{c^2+cd}=\frac{(bx)^2+(bx)b}{(dx)^2+(dx)d}=\frac{b^2(x^2+x)}{d^2(x^2+x)}=\frac{b^2}{d^2}$$

$$=\frac{b^2}{d^2}\times\frac{x^2-2x}{x^2-2x}=\frac{(bx)^2-2(bx)b}{(dx)^2-2(dx)d}=\frac{a^2-2ab}{c^2-2cd}.$$

〔第貳例〕 $a:b=c:d=e:f$ ナルキ

$$a^3+c^3+e^3:b^3+d^3+f^3=ace:bdf.$$

$$\frac{a}{b}=x \text{ トスレハ } \frac{c}{d}=\frac{e}{f}=x,$$

之ニ由テ $a=bx,\ c=dx,\ e=fx.$

$$\therefore \frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}=\frac{b^3x^3+d^3x^3+f^3x^3}{b^3+d^3+f^3}=x^3=x^3\times\frac{bdf}{bdf}$$

$$=\frac{(bx)(dx)(fx)}{bdf}=\frac{ace}{bdf}.$$

〔第三例〕 次ノ證ヲ示セ,

$$x:2b+2c-a=y:2c+2a-b=z:2a+2b-c$$

ナルキ

$$a:2y+2z-x=b:2z+2x-y=c:2x+2y-z.$$

題意ニヨリ

$$\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}=\lambda \text{ トスレハ}$$

$$x=\lambda(2b+2c-a),\quad y=\lambda(2c+2a-b),\quad z=\lambda(2a+2b-c).$$

之ニ由テ

$$2y+2z-x=9a\lambda,\quad 2z+2x-y=9b\lambda,\quad 2x+2y-z=9c\lambda.$$

$$\therefore \frac{a}{2y+2z-x}=\frac{b}{2z+2x-y}=\frac{c}{2x+2y-z}.$$

例題拾六壹

a : b=c : d ナル𪜈次ノ證ヲ示セ.

1. $ac : bd=c^2 : d^2$.　　2. $ab : cd=a^2 : c^2$.

3. $a^2 : c^2=a^2-b^2 : c^2-d^2$.

4. $2a+3c : 3a+2c=2b+3d : 3b+2d$.

5. $la+mb : pa+ql=lc+md : pc+qd$.

6. $a^m+b^m : c^m+d^m=a^m-b^m : c^m-d^m$.

7. $\sqrt{a}+\sqrt{b} : \sqrt{c}+\sqrt{d}=\sqrt{(a+b)} : \sqrt{(c+d)}$.

8. $a : a+c=a+b : a+b+c+d$.

9. $a^2+ab+b^2 : c^2+cd+d^2=a^2-ab+b^2 : c^2-cd+d^2$.

10. $a+b : c+d=\sqrt{(a^2+b^2)} : \sqrt{(c^2+d^2)}$.

11. $\sqrt{(a^2+b^2)} : \sqrt{(c^2+d^2)}=\sqrt[3]{(a^3+b^3)} : \sqrt[3]{(c^3+d^3)}$.

12. $a^2c+ac^2 : b^2d+bd^2=(a+c)^3 : (b+d)^3$.

13. $(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} : (c^n+d^n)^{\frac{1}{n}}=(a^r-b^r)^{\frac{1}{r}} : (c^r-d^r)^{\frac{1}{r}}$.

---

14. a^3b 及ヒ ab^3 ノ比例中項ヲ求ム.

15. $(a^2-b^2)(a+b)$ 及ヒ $(a-b)^3$ ノ比例中項如何.

16. a 及ヒ a^2 ノ比例第三項ヲ求ム.

17. $(a-b)^2$ 及ヒ a^2-b^2 ノ比例第三項ヲ求ム.

a, b, c カ連比例ヲナス𪜈次ノ證ヲ示セ,

18. $a : b=\frac{b^2}{a+b} : \frac{c^2}{b+c}$.

19. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)(a-b+c)$.

20. $ab+bc$ ハ a^2+b^2 及ヒ a^2+c^2 ノ比例中項ナリ.

a : b=c : d=e : f ナル𪜈次ノ證ヲ示セ.

21. $a^3+a^2c+ace : b^3+b^2d+bdf$

$$=ace+ac^2+c^3 : bdf+bd^2+d^3.$$

22. $a^4+a^2c^2+c^4 : b^4+b^2d^2+d^4$

$$=c^4+c^2e^2+e^4 : d^4+d^2f^2+f^4.$$

23. $\left(\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}\right)^{\frac{1}{3}}$.

a, b, c, d カ連比例ヲナス𪜈次ノ證ヲ示セ.

24. $a : d=a^3 : b^3$.

25. $a : d=(a-b)^3 : (b-c)^3$.

26. $(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2$.

---

27. $a : b=c : d$ ナル𪜈 $ab+cd$ ハ a^2+c^2 及ヒ b^2+d^2 ノ比例中項ナルヿヲ示セ.

28. $x : a=y : b=z : c$ ナル𪜈

$$x+y : a+b=y+z : b+c=z+x : a+b.$$

29. $\dfrac{bz-cy}{a}=\dfrac{cx-az}{b}=\dfrac{ay-bx}{c}$ ナル片

$$x:a=y:b=z:c.$$

30. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+\left(\dfrac{c}{d}\right)^2=\dfrac{2ac}{bd}$ ナル片 $a:b=c:d.$

31. $a:x=b:y=c:z$ ナル片

$a^4+a^2b^2+b^4:x^4+x^2y^2+y^4=b^4+b^2c^2+c^4:y^4+y^2z^2+z^4.$

32. $a:b=pa-qc:pb-qd$ ナル片

$$c:d=pa+qc:pb+qd.$$

33. $a:b=c:d$ ナル片

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}:\frac{c^3}{d}+\frac{d^3}{c}=ab:cd:$$

34. $4a-b:4a+b=1:2$ ナル片 $7a+3b:7a-3b$ ノ値ヲ求ム.

35. $xy+3:xz+1=y^2+3:yz+1$ ナル片

$$x=y \text{ 或ハ } y=3z.$$

36. $x-z:y-z=x^2:y^2$ ナル片

$$x+z:y+z=x^2+2xy:y^2+2xy.$$

雜題五

(A)

1. $\dfrac{2a}{3}=\dfrac{3b}{4}=\dfrac{c}{2}=1$ ナル片

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ ノ値如何.

2. $1-x-x^3+x^5$ 及ヒ $1-x^4-x^6-x^7$ ノ最大公約數ヲ求ム.

3. $x^4-2x^3+3x^2+ax+b$ カ完平方ナル片 a 及ヒ b ノ値如何.

4. $\dfrac{a^2-a^2b^{-2}-1+b^{-2}}{a+ab^{-1}+1+b^{-1}}$ ヲ最簡ニセヨ.

5. 鴨15羽,鷄12羽ノ價合セテ15圓ナル片2圓40錢ニテ鴨ヲ買フ數ハ1圓ニテ鷄ヲ買フ數ヨリモ2羽多シトイフ鴨1羽ノ價如何.

6. $x^4+a^4=0$ ノ四根ヲ求メヨ.

7. 比 3:4 ノ各項ニ最小ナル同整數ヲ加ヘテ 19:21 ヨリ大ナラシメントス其整數如何.

8. $a+b,\ b+c,\ c+a$ カ連比例ヲナス片

$$b+c:c+a=c-a:a-b.$$

(B)

1. $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$ ナル𪜈次ノ値ヲ求ム.

$$(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})\div(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}).$$

2. $x^2+(a-1)x+a+1$ ニ $(a-1)x-a^2-a-1$ ヲ乘セヨ.

3. 次ノ因子ヲ求ム,

$$(xz-1)^2(yz+1)^2-\{(xz-1)(yz-1)+2z\}^2.$$

4. $x=1$ ナル𪜈 $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{1-x}$ ノ値ヲ求ム.

5. 次ノ方程式ヲ解セヨ,

(1) $\dfrac{10}{x}-\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{10}{x+1}$,　　(2) $x+y+\sqrt{(x+y)}=12$, $x^2-y^2=21$.

6. $x+\dfrac{1}{y}=1$, $y+\dfrac{1}{z}=1$ ナル𪜈 $z+\dfrac{1}{x}=1$ 及ヒ $xyz+1=0$ ナルヿヲ示セ.

7. 兩數ノ和, 差及ヒ平方ノ和ノ比 $3:1:15$ ナル𪜈各數如何.

8. $a:b=c:d$ ナル𪜈次ノ證ヲ示セ.

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{(a+b)^2+(c+d)^2}=\frac{(a+c)^2+(b+d)^2}{(a+b+c+d)^2}$$

(C)

1. $a=1$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=0$ ナル𪜈次ノ値ヲ求ム,

$$\sqrt{\frac{3a^2-2ab+b^{-1}}{a^3-8b^3}}+\sqrt[3]{(a+b)(b+c)\left(c+\frac{a}{2}\right)}.$$

2. $a+b+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}$ ニ $a-b+\dfrac{b^2}{a}-\dfrac{a^2}{b}$ ヲ乘セヨ.

3. 次ノ式ヲ最簡ニセヨ,

$$\frac{x^3y-y^4}{xy^2+x^2y}\div\left\{\frac{x^4+x^3y+x^2y^2}{(x^2-y^2)^2}\div\left(1+\frac{y}{x}\right)^2\right\}$$

4. $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$ ナル𪜈

$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy.$

5. $a^{\frac{4}{3}}+4ay^{\frac{1}{5}}+10a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{5}}+12a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{5}}+9y^{\frac{4}{5}}$ ノ平方根ヲ求ム

6. $x=2+\sqrt{2}$ ナル𪜈 $(x-1)(x-2)=x.$

7. 甲乙貳人アリ兩地ヲ同時ニ出發シ7時ヲ經テ相會セリ若シ甲カ速ヲ半ニシ乙カ每時ノ速ヲ1哩增セハ9時ヲ經テ相會スヘシ但シ每時ノ速甲ハ乙ヨリ2哩遲シ兩地ノ距離如何.

8. $x^3+3\sqrt[3]{2}x+1$ ヲ $x+\sqrt[3]{2}-1$ ニテ除セヨ.

(D)

1. $\left(\dfrac{a^3-b^3}{a-b}\right)^2-\left(\dfrac{a^3+b^3}{a+b}\right)^2=4ab(a^2+b^2)$ ヲ證セヨ.

2. $x^4-2bx^3-(a^2-b^2)x^2+2a^2bx-a^2b^2$ ヲ $x^2-(a+b)x+ab$ ニテ除セヨ.

3. $\dfrac{\dfrac{y}{x}-\dfrac{y}{y+z}}{\dfrac{1}{xz}+\dfrac{1}{yz+z^2}}\left(1+\dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right)$ ヲ最簡ニセヨ.

4. 方程式 $\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ ヲ解セヨ.

5. 四輪車アリ1哩ヲ行クニ前輪ハ後輪ヨリ64多ク廻轉シ10哩ヲ行ク𬼀兩輪廻轉ノ和7040ナリ各輪周何呎ナリヤ,但シ1哩$=5280$呎.

6. $2x^{\frac{3}{2}}-17xy^{\frac{1}{2}}+17x^{\frac{1}{2}}y-15y^{\frac{3}{2}}$ ヲ $2x^{\frac{1}{2}}-15y^{\frac{1}{2}}$ ニテ除セヨ.

7. $\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{-3}}{2}$, $\beta=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{-3}}{2}$ ナル𬼀 $\alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta=5$ ナルヿヲ示セ.

8. 三比 $a:\alpha$, $b:\beta$, $c:\gamma$ 相等シキ𬼀此各比ハ $a+b+c:\alpha+\beta+\gamma$ ニ等シキヿヲ示セ.

(E)

1. $2a^2x^2-2(3b-4c)(b-c)y^2+abxy$ ヲ $ax+2(b-c)y$ ニテ除セヨ.

2. 次ノ因子ヲ求ム,

(1) $x^3+y^3+3xy-1$, (2) $3x^2-xy-10y^2$.

3. 次ノ證ヲ示セ,

$$\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2.$$

4. 42圓ニテ或物品若干個ヲ買フニ若シ此金高ニテ6個多ク買ヒ得ル𬼀ハ1個ニ付キ12錢5厘低價トナルヘシ原個數如何.

5. $\sqrt{(x-a)}+\sqrt{a}-\sqrt{x}$ ニ $\sqrt{(x-a)}-\sqrt{a}+\sqrt{x}$ ヲ乘セヨ.

6. $x^2-\dfrac{1}{y^2}$ 及ヒ $y^2-\dfrac{1}{x^2}$ ノ比例中項ハ $xy-\dfrac{1}{xy}$ ナルヿヲ示セ.

7. $x=1+2\sqrt{-1}$ 及ヒ $y=2+\sqrt{-1}$ ナル𬼀 $(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}}$ ノ値ハ $\sqrt{3}+\sqrt{-1}$ ナルヿヲ示セ.

8. $2^{x^2}:2^{3x}=\sqrt{2}:1$ ニ於テ x ヲ求ム.

第貳拾貳編

等差級數

1. 定義 諸數量ノ級數カ其任意ノ壹項ト其前項ノ差常ニ相等シキトキ之ヲ等差級數 (Arithmetical Progression) トイフ.

例ヘハ　　$b-a=c-b=d-c=\cdots\cdots$

ナルキ $a, b, c, d, \ldots\ldots$ ハ等差級數(之ヲ A.P. ニテ記ス)ヲナス.

各項ト其前項ノ差ヲ通差トイフ.

次ノ如キハ凡ヘテ等差級數ナリ,

1, 3, 5, 7, ...通差ハ 2,

2, 6, 10, 14, ...通差ハ 4,

9, 8, 7, 6, ...通差ハ -1,

3, -1, -5, -9, ...通差ハ -4 ナリ.

2. 壹般之項 等差級數ノ初項ヲ a トシ通差ヲ d トスレハ

第 2 項 $=a+d$,

第 3 項 $=a+2d$,

第 4 項 $=a+3d$,　以下同理.

故ニ d ノ係數ハ常ニ項數ヨリ 1 少ナシ之ニ由テ第 n 項ヲ l トスレハ

$$l=a+(n-1)d.$$

〔第壹例〕 A.P. ノ初項 5, 通差 3 ナルキ第 27 項ヲ求ム.

$$第\ 27\ 項=5+(27-1)5=135.$$

〔第貳例〕 A.P. ノ第 12 項 15, 第 19 項 36 ナルキ第 30 項ヲ求ム.

$$a+(12-1)d=15\ 及ヒ\ a+(19-1)d=36,$$

此兩方程式ヨリ $a=-18$, $d=3$ ヲ得.

$$\therefore\ 第\ 30\ 項=a+29d=-18+29\times3=69,$$

3. 等差中項 三數カ等差級數ヲナスキ中數ヲ他ノ兩數ノ等差中項トイフ.

例ヘハ a, b, c カ A.P. ヲナスキ b ハ a, c ノ等差中項ナリ.

定義ニ由テ　$b-a=c-b$,

$$\therefore \quad b=\frac{1}{2}(a+c).$$

之ニ由テ兩數ノ等差中項ハ其和ノ半ニ等シ.

4. 諸中項　諸數カ等差級數ヲナスキ其兩外項ノ中間ニアル諸項ヲ其兩外項ノ等差諸中項トイフ.

既知兩數ノ間ニ若干項ノ中項ヲ挿入スルコヲ得ヘシ.

〔例〕 10 及ヒ 25 ノ間ニ等差 4 中項ヲ挿入セヨ.

此例題ハ 10 ヲ初項トシ 25 ヲ第 6 項トスル等差級數ナリ今通差ヲ d トスレハ $l=a+(n-1)d$ ヨリ

$$25=10+(6-1)d, \quad \therefore \quad d=3.$$

之ニ由テ此級數ハ 10, 13, 16, 19, 22, 25,

即チ 10 及ヒ 25 ノ等差中項ハ 13, 16, 19, 22 ナリ.

〔壹般之場合〕 a 及ヒ b ノ間ニ等差 n 中項ヲ挿入セヨ.

此場合ハ a ヲ初項トシ b ヲ第 $(n+2)$ 項トスル等差級數ナリ.

今 d ヲ通差トスレハ第 $(n+2)$ 項ハ

$$a+(n+1)d=b \qquad \therefore \quad d=\frac{b-a}{n+1}.$$

之ニ由テ此級數ハ

$$a, \quad a+\frac{b-a}{n+1}, \quad a+2\frac{b-a}{n+1}, \ldots\ldots b,$$

即チ $a+\dfrac{b-a}{n+1}$, $a+2\dfrac{b-a}{n+1}$, ... ハ所求ノ中項ナリ.

例題六拾貳

次ノ各等差級數ノ第30項ヲ求ム.

1. 3, 5, 7, ...　　2. 1, 5, 9, ...
3. 12, 9, 6, ...　　4. $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$, ...
5. $a+b, a, a-b$, ...

次ノ各級數ノ末項ヲ求ム.

6. 3, 6, 9, ... 至 24 項. 7. 5, 9, 13, ... 至 30 項.

8. 6, 5, 4, ... 至 10 項. 9. 14, 46, 78, ... 至 12 項.

10. $6, 8\frac{2}{3}, 11\frac{1}{3}, \ldots$ 至 14 項. 11. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \ldots$ 至 25 項.

---

12. A.P. ノ第 10 項ハ 6 及ヒ第 6 項ハ 10 ナル片初項如何.

13. A.P. ノ第 12 項ハ 15 及ヒ第 20 項ハ 25 ナル片通差如何.

14. A.P. ノ第 3 項ハ 40 及ヒ第 13 項ハ 25 ナル片初項如何.

15. A.P. ノ初項 7 及ヒ第 3 項 13 ナル片第 10 項ヲ求ム.

16. A.P. ノ初項 20 及ヒ第 6 項 20 ナル片第 12 項ヲ求ム.

17. A.P. ノ第 7 項 5 及ヒ第 5 項 7 ナル片第 12 項ヲ求ム.

18. 級數 5, 8, 11, ... ノ第何項カ 65 トナルカ.

19. 級數 $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \ldots$ ノ第何項カ 18 トナルカ.

20. $16a-8b, 15a-7b, 14a-6b, \ldots$ ノ第何項カ $8a$ トナルヘキカ.

21. 次ノ等差中項ヲ求ム,

(1) 7 及ヒ 13, (2) 9 及ヒ -9, (3) $a+b$ 及ヒ $a-b$.

22. 8 及ヒ 29 ノ間ニ等差 6 中項ヲ插入セヨ.

23. 50 及ヒ 80 ノ間ノ等差 8 中項ヲ求ム.

24. $5a-6b$ 及ヒ $5b-6a$ ノ間ノ等差 10 中項ヲ求ム.

25. $a-5b$ 及ヒ $b-5a$ ノ間ノ等差 8 中項ヲ求ム,

26. a, b, c, d カ A.P ヲナス片 $a+d=b+c$.

27. A.P. ノ初項及ヒ第四項ノ和 19 又第三項及ヒ第六項ノ和 13 ナル片初項ヲ求ム.

28. A.P. ノ第三項及ヒ第四項ノ和 187 ニシテ第七項及ヒ第 8 項ノ和 147 ナル片第貳項ヲ求ム.

29. A.P. ノ各項ニ同數ヲ加ヘ或ハ同數ヲ乘スルモ亦 A.P. ヲナスヿヲ示セ.

30. A.P. ノ隔次ノ項ヲ取リ去ルモ亦 A.P. ヲナス.

31. 四數カ A.P. ヲナス片其第壹及ヒ第四ノ積ハ第貳及ヒ第三ノ積ヨリ小ナルヿヲ示セ.

32. A.P. ノ第 m 項カ n, 第 n 項カ m ナル片第 $(m+n)$ 項ハ 0 ナルヿヲ示セ.

5. 級數之和 等差級數ノ初項ヲ a トシ d ヲ通差トシ n 項ノ和ヲ求ム但シ l ヲ其末項トス.

S ヲ所求ノ和トスレバ

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots+(l-2d)+(l-d)+l,$$

又反對ノ順序ニ取レバ

$$S=l+(l-d)+(l-2d)+\ldots\ldots+(a+2d)+(a+d)+a,$$

此相應項ヲ加フレバ

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\ldots\ldots \text{至 } n \text{ 項}$$

即チ $2S=n(a+l)$,

$$\therefore \quad S=\frac{n}{2}(a+l). \qquad (1).$$

2.章ニ由テ $l=a+(n-1)d$ ナルカ故ニ之ヲ(1)ニ代用スレハ

$$S=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\} \qquad (2).$$

〔第壹例〕 $5+8+11+\cdots\cdots$ 至20項此級數ノ和ヲ求ム.

$a=5,\ d=3,\ n=20$ ナリ,

故ニ(2)ヨリ $S=\frac{20}{2}\{2\times5+(20-1)3\}=670.$

〔第貳例〕 1ヨリ起ル連續奇數ノ和ハ其項數ノ平方ニ等シ.

此級數ハ $1+3+5+7+\ldots\ldots$ 至 n 項,

而シテ $a=1,\ d=2$ ナリ,

故ニ(1)ヨリ $S=\frac{n}{2}\{2\times1+(n-1)2\}=n^2,$

6. 項數之論 級數ノ項數ハ正整數ナルカ故ニ分數或ハ負數ヲ得ルトキハ不合理ナリ.

〔第壹例〕 $3+8+13+\cdots\cdots$ ノ和65ナルトキ其項數如何.

$$a=3,\quad d=5,\quad S=65,$$

(1)ヨリ $65=\frac{n}{2}\{2\times3+(n-1)5\}$ 之ヲ變化スレハ

$$5n^2+n-130=0,\quad \text{即チ} \quad (n-5)(5n+26)=0,$$

$$\therefore \quad n=5 \quad \text{或ハ} \quad -\tfrac{26}{5},$$

而シテ $-\frac{26}{5}$ ハ不合理ナルカ故ニ用ヒス.

〔第貳例〕 $3+5+7+\ldots\ldots$ ノ和カ 24 トナルヘキ項數ヲ求ム.

$$a=3,\quad d=2,\quad S=24,$$

(2) ヨリ　　$24=\frac{n}{2}\{2\times3+(n-1)2\},$

$\therefore$　$n^2+2n-24=0$ 之ニ由テ $n=4$ 或ハ -6.

$n=-6$ ハ不合理ナリ然レモ負數ノ性質ニヨリ末項ヨリ反對ニ初項ノ方ニ 6 項計ヘタル和ナリ.

例ヘハ $n=4$ ナル片

$$3+5+7+9=24.$$

末項ハ 9 ナルカ故ニ之ヨリ計フレハ

$n=-6$ ナル片

$$9+7+5+3+1-1=24.$$

〔第三例〕 $24+21+18+\ldots\ldots$ ノ和カ 105 ナル片其項數如何.

$$a=24,\quad d=-3,\quad S=105,$$

(2) ヨリ　　$105=\frac{n}{2}\{2\times24+(n-1)(-3)\},$

$\therefore$　$n^2-17n+70=0$ 之ニ由テ $n=7$ 或ハ 10.

此例ニ於テ n ノ兩値ハ正ナリ故ニ共ニ適合ス但シ此級數ヲ 10 項トスルニハ 3, 0, -3 ノ三項ヲ補フヘシ.

例　題　六　拾　三

次ノ各級數ノ和ヲ求ム.

1. $2+4+6+\ldots\ldots$ 至 20 項.
2. $15+14\frac{1}{2}+14+\ldots\ldots$ 至 16 項.
3. $1+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}+\ldots\ldots$ 至 12 項.
4. $-5-1+3+\ldots\ldots$ 至 20 項.
5. $5+6{\cdot}2+7{\cdot}4+\ldots\ldots$ 至 21 項.
6. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\ldots\ldots$ 至 7 項.
7. $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\ldots\ldots$ 至 n 項.
8. $(n+1)+(2n+3)+(3n+5)+\ldots\ldots$ 至 n 項.
9. $(a+b)^2+(a^2+b^2)+(a-b)^2+\ldots\ldots$ 至 n 項.

---

10. A. P. ノ第 3 項 15, 第 20 項 $23\frac{1}{3}$ ナル片最初 20 項ノ和如何.

11. A.P. ノ第 5 項 37 及ヒ第 13 項 81 ナリ最初 24 項ノ和如何.

12. 連續奇數 20 項アリ其末項 25, 其和如何.

13. 連續奇數 40 項アリ其最大數 99, 其和如何.

14. 5 及ヒ 50 ノ間ニ等差 29 中項ヲ挿入スル𪜈其全和ヲ求ム.

15. 10 及ヒ 100 ノ間ニ等差 40 項ヲ挿入スル𪜈其全如何.

16. 初項 3, 末項 107 ナル 27 項ノ A.P. アリ其和及ヒ中項如何.

17. A.P. ノ項數 71, 初項 7 及ヒ末項 1015 ナル𪜈其和及ヒ中項如何.

18. 19 項ノ A.P. アリ初項 8, 末項 -4, 其和如何.

19. 3, 5, 7, ... ナル級數ノ第 7 項ヨリ計ヘテ 20 項ノ和ヲ求ム.

20. 6, 9, 12, ... ナル級數ノ第 5 項ヨリ計ヘテ 35 項ノ和如何.

21. A.P. ノ 10 項ノ和 155 其初項 2, 通差如何.

22. A.P. ノ 25 項ノ和 25 其初項 6, 通差如何.

23. A.P. ノ 28 項ノ和 133, 第 5 項 0, 初項如何.

24. 級數 3, 8, 13, ... ノ連續 10 項ノ和 705 ナリ其初項如何.

25. 級數 5, 8, 11, ... ノ連續 25 項ノ和 1025 ナリ其初項如何.

26. 級數 $\frac{4}{3}$, 1, $\frac{2}{3}$, ... ノ何項ノ和カ 0 トナルカ.

27. 級數 15, 12, 9, ... ノ何項ノ和カ 45 トナルカ.

28. 級數 $1-\dfrac{1}{a}$, $1-\dfrac{3}{a}$, $1-\dfrac{5}{a}$, ... 何項ノ和カ $-6a$ トナルカ.

29. 項數 -8, -7, -6, ... ノ何項ノ和カ 42 トナルカ.

30. A.P. ノ初項 1, 末項 99, 其和 450 其項數如何.

31. A.P. ノ 20 項ノ末項 62, 其和 670, 通差如何.

32. A.P. ノ第九項 136, 最初 19 項ノ和 2527 ナル𪜈最初 40 項ノ和ヲ求ム.

33. 第八項カ 6 ナル等差級數 15 項ノ和如何.

34. 第 $(n+1)$ 項カ 100 ナル等差級數ノ $2n+1$ 項ノ和如何.

35. 項數カ奇數ナル等差級數ノ初項,中項,末項,モ亦等差級數ヲナス.

36. 級數 8, 16, 24, ... ノ若干項ノ和ニ 1 ヲ加フレハ或奇數ノ平方トナルトイフ其證如何.

37. 100 及ヒ 200 ノ間ニアル凡ヘテノ奇數ノ和ヲ求メヨ.

38. 101 及ヒ 999 ノ間ニアル凡ヘテノ偶數ノ和ヲ求メヨ.

39. 100 及ヒ 500 ノ間ニアル凡ヘテノ整數ノ和ハ 3 ニテ整除シ得ラルヘキヿヲ示セ.

40. 或人貯金ヲナスニ每年ニ於テ其前年ヨリ 10 圓多ク貯ヘタリ初年ニ 20 圓貯金スルトキハ何年ニ至レハ其貯金ノ總計カ 1700 圓トナルヘキカ.

41. 等差級數 10 項ノ和 145 ニシテ第四項及ヒ第九項ノ和ハ第三項ニ 5 倍ス然ルトキ此級數如何.

42. $2n+1$ 項ヲ有ツ所ノ等差級數ハ其奇數項ノ和カ偶數項ノ和ニ於ケル比 $n+1:n$ ナリトイフ其證如何.

43. 21 項ノ等差級數ノ最後三項ノ和 117 ニシテ中央三項ノ和 90 ナルトキ此級數ヲ求ム.

44. 級數 87, 85, 83, ... ノ n 項ノ和カ級數 3, 5, 7, ... ノ n 項ノ和ニ等シキトキ n ノ値如何.

45. 級數 43, 45, 47, ... ノ n 項ノ和カ級數 45, 43, 41, ... ノ $2n$ 項ノ和ニ等シキトキ n ヲ求ム.

46. 80 ヲ四分シ A.P. ヲナスヘキ四項トナスニ其第壹及ヒ第四ノ積ハ第貳及ヒ第三ノ積ノ三分ノ貳ニ等シ各分幾許ナリヤ.

47. A.P. ノ四項ノ各平方ノ和 120 ニシテ第壹及ヒ第四ノ積ハ他ノ兩項ノ積ヨリ 8 小ナリ然ルトキハ各項如何.

48. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ カ A.P. ヲナストキ $(s-a)^2, (s-b)^2, (s-c)^2$ モ亦 A.P. ヲナス但シ $2s=a+b+c$.

49. a, b, c カ A.P. ヲナストキ $a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$ モ亦 A.P. ヲナス.

第貳拾三編

等比級數

1. 定義 諸數量ノ級數アリテ其任意ノ壹項カ其前項ニ於ケル比常ニ相等シキキ之ヲ等比級數(Geometrical Progression)トイフ.

例ヘハ $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\cdots\cdots$ナルキ

$a, b, c, d, \ldots.$ ハ等比級數(G. P.)ヲナストイフ.

等比級數ノ各項カ其前項ニ於ケル比ヲ通比トイフ. 次ノ級數ハ等比級數ナリ,

$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ldots\ldots$ 此通比ハ 3,

$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ldots\ldots$ 此通比ハ $\frac{1}{2}$,

$\frac{2}{3},\ -1,\ \frac{3}{2},\ -\frac{9}{4},\ldots\ldots$ 此通比ハ $-\frac{3}{2}$ナリ.

2. 壹般之項 G.P. ノ初項ヲ a, 通比ヲ rトスレハ

第 2 項 $=ar$,

第 3 項 $=ar^2$,

第 4 項 $=ar^3$, 以下同理.

故ニ rノ指數ハ其項數ヨリ 1 少ナシ.

之ニ由テ第 n 項ヲ lトスレハ

$$l=ar^{n-1}.$$

〔第壹例〕 G.P. ノ初項 5 ニシテ通比 3 ナルキ第 10 項ヲ求ム.

第 10 項 $=ar^{n-1}=5\times3^{10-1}=5\times3^9$.

〔第貳例〕 G.P. ノ第 4 項 189 及ヒ第 6 項 1701 ナルキ第 8 項如何.

$ar^{4-1}=189$ 及ヒ $ar^{6-1}=1701$,

除法ニ由テ　$r^2=1701\div189=9$　$\therefore\ r=\pm3$,

又　$a\times(\pm3)^{4-1}=189$　$\therefore\ a=\pm7$.

之ニ由テ　第 8 項 $=\pm7\times(\pm3)^{8-1}=15309$.

3. 等比中項 トハ G.P. ヲナス三數ノ中數ヲイフ.

a, b, c カ G.P. ヲナスキ b ヲ a 及ヒ c ノ等比中項トイフ.

定義ニ由テ $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$,

$\therefore\ b^2=ac$ 即チ $b=\pm\sqrt{ac}.$

兩數ノ等比中項ハ兩數ノ比例中項ト同シ.

4. 等比諸中項 等比級數ヲナス所ノ諸數量ハ其兩外項ノ等比中項トイフ而シテ既知兩數間ニ任意若干項ノ等比中項ヲ挿入スルコヲ得ヘシ.

〔例〕 5 及ヒ 80 ノ間ニ等比三中項ヲ挿入セヨ.

初項ヲ 5 トシ第 5 項ヲ 80 トスル等比級數ナリ, r ヲ通比トスレハ第 5 項ハ $5r^4$ ナルカ故ニ

$$5r^4=80,\quad \therefore\ r=\pm2.$$

故ニ此級數ハ 5, ±10, 20, ±40, 80 ニシテ所求ノ三中項ハ ±10, 20, ±40 ナリ.

〔壹般之場合〕 a 及ヒ b ノ間ニ等比 n 中項ヲ挿入セヨ.

初項ハ a, 第 $(n+2)$ 項ハ b ナルカ故ニ

$$b=ar^{n+1},\quad \therefore\ r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},$$

之ニ由テ所求ノ中項ハ

$$a\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}},\quad a\left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^2,\quad a\left(\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}\right)^3,\ldots\ldots$$

例題六拾四

次ノ等比級數ノ第 6 項ヲ求ム.

1. 9, 3, 1,……　　2. 2, −3, $\frac{9}{2}$,……
3. a^2, ab, b^2,……

---

4. G.P. ノ初項 3, 第三項 4 ナルキ第五項如何.
5. G.P. ノ第 3 項 1, 第 6 項 $-\frac{1}{8}$, 第 10 項如何.
6. G.P. ノ第 4 項 ·016, 第 7 項 ·000128, 初項如何.
7. G.P. ノ第 3 項 4, 第 6 項 $-\frac{1}{2}$, 第 10 項如何.
8. 次ノ各兩數間ノ等比中項ヲ求ム,
   (1) 4, 9,　(2) 7, 252,　(3) a^3b, ab^3.
9. 1 及ヒ −8 ノ間ニ等比貳中項ヲ插入セヨ.

10. $\frac{2}{3}$ 及ヒ $\frac{81}{16}$ ノ間ニ等比四中項ヲ挿入セヨ.

11. 3 及ヒ ·000192 ノ間ニ等比五中項ヲ挿入セヨ.

12. a^3b^{-6} 及ヒ $a^{-2}b^4$ ノ間ノ等比四中項ヲ求ム.

13. G.P. ノ第三項及ヒ第四項ノ和 40 ニシテ第六項及ヒ第七項ノ和 2560 ナルトキ初項如何.

14. G.P. ノ初項及ヒ第貳項ノ和 72 ニシテ第三項及ヒ第四項ノ和 8 ナルトキ初項如何.

15. a, b, c, d カ G.P. ヲナストキ $ad=bc$.

16. G.P. ノ凡ヘテノ項ニ同數ヲ乘スルモ亦 G.P. ヲナス.

17. G.P. ノ隔次ノ項ヲ取リ去ルモ其殘ハ G.P. ヲナス.

18. 等比級數ノ各連續兩項間ニ其中項ヲ挿入スルモ亦 G.P. ヲナス.

19. 等比級數ノ初末兩項ヨリ等距離ナル任意ノ兩項ノ積ハ初末兩項ノ積ニ等シ.

20. 等比級數ハ第 m 項カ n ニシテ第 n 項カ m ナルトキ第 $(m+n)$ 項ハ $m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{m-n}}$ ナルコヲ示セ.

5. 級數之和 等比級數ノ初項ヲ a, 通比ヲ r トシ n 項ノ和(S)ヲ求ム.

$$S=a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{n-2}+ar^{n-1},$$

之ニ r ヲ乘スレハ

$$Sr=ar+ar^2+ar^3+\ldots\ldots+ar^{n-1}+ar^n,$$

減法ニ由テ　　$S(1-r)=a-ar^n,$

$$\therefore\quad S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\qquad(1).$$

2.章ヨリ $l=ar^{n-1}$ 之ヲ(1)ニ代用スレハ

$$S=\frac{a-rl}{1-r}\qquad(2).$$

〔第壹例〕 1, 2, 4. ..... ノ 10 項ノ和ヲ求ム.

$$a=1,\quad r=2,\quad n=10,$$

$$\therefore\quad S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{1(1-2^{10})}{1-2}=2^{10}-1=1023.$$

〔第貳例〕 $2-3+\frac{9}{2}-\ldots\ldots$ ノ 6 項ノ和ヲ求ム.

$$a=2,\quad r=-\tfrac{3}{2},\quad n=6,$$

$$\therefore\quad S=\frac{2\{1-(-\frac{3}{2})^6\}}{1-(-\frac{3}{2})}=\frac{2(1-\frac{729}{64})}{1+\frac{3}{2}}=-8\tfrac{5}{16}$$

6. 無限項ノ和　等比級數ノ項數ヲ多ク取ルニ從フテ其和ハ次第ニ增大トナルヘシ然レモ或場合ニ於テハ如何程項數ヲ多ク取ルモ其和ハ或有限ノ壹數ヲ超過セサルヿアリ.

例ヘハ長サ2尺ノ糸ヲ貳等分シテ其壹分ヲ取リ其殘ヲ貳等分シテ又其壹分ヲ取リ次第ニ此ノ如クシテ限リ無ク取ルモ其取リタル糸ノ總計ハ2尺ヲ超エス即チ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ ハ如何程項ヲ多ク取ルモ2ヲ超過セス.

故ニ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ ノ無限項ノ和ハ2ナリ.

前章公式(1)ヨリ之ヲ推究セントス,

即チ　$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

r カ數ニ付1ヨリ小ナルトキハ n カ增大スルニ從フテ r^n ハ減小スヘシ故ニ n カ無限大ナルトキ殆ント $r^n=0$.

之ニ由テ r カ數ニ付1ヨリ小ナルトキ

$$a+ar+ar^2+ar^3+\ldots\ldots\text{無限項ノ和}=\frac{a}{1-r}.$$

〔第壹例〕 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ ノ無限項ノ和ヲ求ム.

$$a=1,\quad r=\tfrac{1}{2},\qquad \therefore\quad S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

〔第貳例〕 $\cdot 23\dot{4}$ ノ値ヲ求ム.

$$\cdot 23\dot{4}=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{4}{10^5}+\ldots\ldots$$

但シ　$$\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{4}{10^5}+\ldots\ldots=\frac{\frac{4}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{4}{900}.$$

之ニ由テ $\cdot 23\dot{4}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{900}=\frac{211}{900}.$

〔第三例〕 等比級數ノ無限項ノ和18ニシテ其第貳項 -8 ナルトキ此級數如何.

$$ar=-8,\quad \text{無限項ノ和ハ}\ \frac{a}{1-r}=18,$$

此兩方程式ヨリ a ヲ消去スレハ

$$r(1-r)=\frac{-8}{18}, \qquad \therefore\ r^2-r=\frac{4}{9},$$

$$\therefore\quad r=-\tfrac{1}{3}\ 或ハ\ r=\tfrac{4}{3}.$$

$r=-\frac{1}{3}$ ナル片此級數ハ $24, -8, \frac{8}{3}, \ldots\ldots$

$r=\frac{4}{3}$ ナル値ハ r カ 1 ヨリ大ナルヲ以テ不合理ナリ故ニ之ヲ用ヒス,

例題六拾五

次ノ各級數ノ和ヲ求ム.

1. $8+12+18+\ldots\ldots$ 至 n 項:
2. $12+9+6\frac{3}{4}+\ldots\ldots$ 至 6 項.
3. $a+\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\ldots\ldots$ 至 n 項.
4. $12-9+6\frac{3}{4}-\ldots\ldots$ 至無限項.
5. $4+1{\cdot}2+{\cdot}36+\ldots\ldots$ 至無限項.
6. $a^2+ab+b^2+\ldots\ldots$ 至 n 項.
7. $3-2+\frac{4}{3}-\ldots\ldots$ 至無限項.
8. $\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\sqrt{2}+\frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots\ldots$ 至無限項.

9. 2 ヨリ起リ 4096 ニ終ル所ノ 2 ノ連續方乘ノ和ヲ求ム.

10. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots$ ノ無限項ノ和ヲ小數四位迄求メヨ.

11. 奇數項ノ G.P. ノ凡ヘテノ項ノ連乘積ハ中項ノ n 方乘ニ等シ,但シ n ハ項數

12. 無限項ノ等比級數ノ和 4 ニシテ第貳項 $\frac{3}{4}$ ナル片此級數如何.

13. 無限項ノ G.P. ノ和 9 ニシテ第貳項 -4 ナル片此級數如何.

14. G.P. ノ最初 10 項ノ和カ最初 5 項ノ和ノ 33 倍ナル片其通比如何.

15. G.P. ノ無限項ノ和カ初項ノ p 倍ナル片其通比ハ $1-\frac{1}{p}$ ナリ.

16. G.P. ノ通比カ正ニシテ $\frac{1}{2}$ ヨリ小ナル片其任意ノ壹項ハ其次ノ凡ヘテノ項ノ和ヨリ小ナラサルコヲ示セ.

17. 初項ヲ 1 トスル無限級數ノ和ハ正數ナリ.

18. G.P.ノ第6項ハ第3項ノ8倍ニシテ最初貳項ノ和24ナルトキ此級數ヲ求ム.

19. $\frac{a}{a+b}+\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{a}{a+b}\right)^3+\ldots\ldots$ ノ無限項ノ和如何.

20. $1+\left(1-\frac{1}{a}\right)+\left(1-\frac{1}{a}\right)^2+\ldots\ldots$ ノ無限項ノ和如何.

21. $x^n+x^{n-1}y+x^{n-2}y^2+\ldots\ldots+xy^{n-1}+y^n$ ノ値如何.

22. $S_1=a+ar+ar^2+\ldots\ldots+ar^{2n}$,

及ヒ $S_2=a-ar+ar^2-\ldots\ldots+ar^{2n}$,

然ルトキ $S_1S_2=a^2+a^2r^2+a^2r^4+\ldots\ldots+a^2r^{4n}$.

23. G.P.ノ第六項 $\frac{1}{33614}$ 及ヒ第貳項 $\frac{1}{14}$ ナルトキ無限項ノ和如何.

24. G.P.ヲナス所ノ三數アリ其和14ニシテ各平方ノ和48ナリ各如何.

25. G.P.ノ最初三項ナ和42ニシテ第四項ハ初項ヨリ126大ナリ此級數如何.

26. G.P.ノ第壹,第貳,第三項ノ和カ第三,第四,第五項ノ和ニ於ケル比1:4ニシテ第五項カ8ナルトキ此級數如何.

7. 餘論 時トシテハ級數ノ種類ヲ示サヽルアリ然レトモ其若干項ヲ知ルトキ簡單ナル場合ニ於テハ其種類ヲ發見スルコトヲ得ヘシ.

例ヘハ級數3, 9, 15, ...ニ於テ

$$9-3=6,\quad 15-9=6,$$

故ニ此級數ハ通差6ナルA.P.ナリ.

又　級數3, 9, 27, ...ニ於テ

$$9-3=6,\quad 27-9=18,$$

故ニ此級數ハA.P.ニアラス而シテ

$$9\div3=3,\quad 27\div9=3,$$

故ニ此級數ハ通比3ナルG.P.ナリ.

例題六拾六

次ノ各級數ノ和ヲ求ム.

1. $3,\ 2{\cdot}7,\ 2{\cdot}4,\ \ldots\ldots$ 21項.　2. $2,\ 18,\ 162,\ \ldots\ldots$ 7項.

3. $a,\ b,\ a^{-1}b^2,\ \ldots\ldots n$ 項.　4. $3,\ 4{\cdot}3,\ 5{\cdot}6,\ \ldots\ldots$ 11項.

5. $a+\frac{1}{3}(4a+b)+\frac{1}{3}(5a+2b)+\ldots\ldots$ 19項.

6. $-3\frac{1}{8}+6\frac{1}{4}+15\frac{5}{8}+\ldots\ldots$ 5項.

7. $2\frac{1}{2}+6\frac{1}{4}+15\frac{5}{8}+\ldots\ldots$ 5項.

次ノ各ノ6項ノ和ヲ求ム又求メ得ラルヘキ𪜈ハ無限項ノ和ヲ求ム.

8. $2\frac{1}{2}+6\frac{1}{4}+10+\ldots\ldots$ 9. $9+5+1+\ldots\ldots$

10. $4-3+\frac{9}{4}-\ldots\ldots$ 11. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\ldots\ldots$

12. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\ldots\ldots$

---

13. 奇數項ノ等比級數ハ初項,中項及ヒ末項モ亦等比級數ヲナス.

14. A.P. ノ最初7項ノ和49ニシテ其次ノ8項ノ和176ナリ此級數ヲ求ム.

15. 等比級數ノ初項及ヒ第三項ノ等差中項カ其第貳項ノ五倍ニ等シキ𪜈通比如何.

16. 等差級數ノ第四項カ第貳項及ヒ第七項ノ等比中項ニ等シキ𪜈其第六項ハ第貳項及ヒ第拾四項ノ等比中項ナリ.

17. 初項ヲ a トシ末項ヲ l トスル n 項ノ等比級數ノ凡ヘテノ項ノ連乘積ハ $(al)^{\frac{n}{2}}$ ナリ.

18. G.P. ヲナス所ノ三數ノ連乘積216ニシテ各貳數ツヽノ積ノ和156ナリ各數如何.

19. 兩數ノ等差中項ハ等比中項ヨリ大ナリ.

20. 25ヲ五分シ其各分ハ A.P. ヲナス而シテ其最小及ヒ最大數ノ各平方ノ和ハ他ノ三數ノ平方ノ和ヨリ1小ナリ各分如何.

21. 6及ヒ16ノ間ニ兩數ヲ插入スル𪜈最初三項ハ A.P. ヲナシ最後三項ハ G.P. ヲナストイフ兩數如何.

22. a, b, c カ G.P. ヲナシ x ヲ a, b ノ等差中項トシ y ヲ b, c ノ等差中項トスレハ

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ 及ヒ\ 2=\frac{a}{x}+\frac{c}{y}.$$

23. x, y, z カ G.P. ヲナス𪜈

$$x^2y^2z^2\,(x^{-3}+y^{-3}+z^{-3})=x^3+y^3+z^3.$$

24. a, b 及ヒ c カ A.P. ヲナシ x, y, z カ G.P. ヲナス𪜈

$$x^by^cz^a=x^cy^az^b.$$

25. a, b, c 及ヒ x カ凡ヘテ實數ナル𪜈方程式 $(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$ ニ於テ a, b, c ハ G.P. ヲナシ x ハ其通比トナル.

26. 級數 $(x+y)$, (x^2+xy+y^2), $(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$,…… ノ n 項ノ和ヲ求ム.

27. 三數カ A.P. ヲナス𪜈此三數ハ決シテ G.P. ヲナサヽルヿヲ示セ.

雜 題 六

(A)

1. $x=\frac{a+b}{z}$ 及ヒ $y=\frac{a-b}{z}$ ナルキ次ノ證ヲ示セ,

$$\frac{x^3+y^3}{2}=\frac{a}{z}\left\{\left(\frac{a}{z}\right)^2+3\left(\frac{b}{z}\right)^2\right\}.$$

2. $x^5-8x^3+11x^2+7x-1789$ カ x^2+7x-1 ニテ整除シ得ラルヽキ x ノ値如何.

3. $3x^3-13x^2+23x-21$ 及ヒ $6x^3+x^2-44x+21$ ヲ同時ニ 0 トナスヘキ x ノ値如何.

4. 9 牛及ヒ 20 羊ヲ 1150 圓ニテ買ヒ牛ヲ 2 割 5 分ノ利益又羊ヲ 2 割ノ損失ニテ賣リ 175 圓ヲ利セリ各壹頭ノ値如何.

5. $4^n+2^{n+1}+1$ ノ平方根ヲ求ム.

6. 方程式 $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y}}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}=16\frac{1}{6}$ 及ヒ $x-y=5$ ヲ解セヨ.

7. a, b, c, d カ G.P. ヲナスキ $a+b, b+c, c+d$ ハ G.P. ヲナシ又 $a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+d^2$ モ G.P. ヲナス.

(B)

1. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ ヲ因子ニ分割セヨ.

2. 兩數ノ和 4 ナルキ其差ハ其平方ノ差ノ四分ノ壹ニ等シ.

3. 次ノ方程式ヲ解セヨ,

(1) $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=1,$

(2) $\sqrt{12x-3}+\sqrt{x+2}+\sqrt{7x-13}=0.$

4. $x^2-8x+22$ ハ 6 ヨリ小ナラス.

5. $\frac{1}{\{\sqrt{m^2-1}+\sqrt{m^2+1}\}^2}+\frac{1}{\{\sqrt{m^2-1}-\sqrt{m^2+1}\}^2}$ ヲ最簡ニセヨ.

6. $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ ハ正數量ナリ.

7. 毎時ノ速 $37\frac{1}{2}$ 哩ナル滊車カ鐵道ニ沿フテ行ク人ヲ 6 秒間ニテ通過シ又同速ノ人カ反對ニ來ルキハ 4 秒間ニテ通過スヘシ滊車ノ長サ何碼ナリヤ, 但シ 1 哩ハ 1760 碼.

(C)

1. $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}$ ナルキ $(x+y)(1-xy)^{-1}$ ノ値如何.

2. 連續兩數ノ和ノ平方ハ其積4倍ニ1ヲ加ヘタルモノニ等シ.

3. 滊車アリ或距離ヲ行クニ毎時ノ速5哩ヲ增セハ40分早ク又5哩ヲ減セハ1時間遲ク達スヘシトイフ毎時ノ速及ヒ距離如何.

4. $2+\sqrt{8}+\sqrt{2}-\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{(19+6\sqrt{2})}$ ヲ最簡ニセヨ.

5. $\dfrac{ma+nc}{mb+nd}$ ハ $\dfrac{a}{b}$ ト $\dfrac{c}{d}$ ノ間ニアルヿヲ示セ.

6. $x^2-4x+2=0$ ノ兩根ノ立方ヲ兩根トスル方程式ヲ求ム.

7. $a:b=c:d$ ナル𪜈 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\left(\dfrac{a-b}{c-d}\right)^2$.

(D)

1. $\frac{1}{4}(xa^{-1}-ax^{-1})\left(\dfrac{a^{-1}-x^{-1}}{a^{-1}+x^{-1}}-\dfrac{a^{-1}+x^{-1}}{a^{-1}-x^{-1}}\right)$ ヲ最簡ニセヨ.

2. $2^{x^2}:8^x=16:1$ ヲ解セヨ.

3. $x^2+mx+n=0$ ノ兩根カ α, β ナル𪜈 m 及ヒ n ノ項ニ於テ $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha$ ヲ求メヨ.

4. $3x^2+5x+3$ ヲ最小ニスヘキ x ノ値如何又其最小値ヲ求ム.

5. a, b, c, d カ連比例ヲナス𪜈

$$\left(\frac{a-b}{b-c}\right)^3=\frac{a}{d}.$$

6. 長サ72碼ノ滊車カ對方ヨリ來ル滊車(長サ60碼)ヲ4秒ニテ通過ス若シ此初ノ滊車ノ速ヲ2倍セハ3秒ニテ通過スヘシトイフ各毎時ノ速如何.

7. 1ヨリ起ル連續奇數ヲ次ノ如ク各群ニ分ツ $1, (3+5), (7+9+11), (13+15+17+19), \ldots\ldots$ 然ル𪜈此 n 群ノ和如何.

(E)

1. $\dfrac{\sqrt[n]{(\sqrt[n+1]{x})}}{\sqrt[n+1]{(\sqrt[n+2]{x})}}=\sqrt[n]{x}\div\sqrt[n+1]{x^2}\times\sqrt[n+2]{x}$ ヲ證セヨ.

2. 次ノ方程式ヲ解セヨ,

$$\frac{ax+m+1}{ax+m-1}+\frac{ax+n}{ax+n-2}=\frac{ax+m}{ax+m-2}+\frac{ax+n+1}{ax+n-1}.$$

3. 貳位ノ數アリ兩數字ノ平方ノ差ハ原數ニ等シ又數字ノ和ヲ7倍スレハ轉位數トナル原數如何.

4. $(12-\sqrt{140})^{-\frac{1}{2}}$ ノ値ヲ小數四位迄求ム.

5. 次ノ代數式ハ x ノ代リニ任意ノ數ヲ用フルモ常ニ平方數ナルコヲ示セ.

$$x^6-4x^5+14x^4-32x^3+49x^2-60x+36.$$

6. $a-x:a+x$ ハ $x:a$ カ 1 ヨリ大或ハ小ナルニ從フテ $a^2-x^2:a^2+x^2$ ヨリ大或ハ小ナリ.

7. 等比級數ノ n, $2n$ 及ヒ $3n$ 項ノ和ヲ順次ニ a, b 及ヒ c トスレハ $a^2+b^2=a(b+c)$.

8. $\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ ハ x カ實數ナルトキ 7 ト $\frac{1}{7}$ ノ間ニアリ.

第貳拾四編

順列及組合

1. 定義 相異ナル n 物ノ内ヨリ壹度ニ r 個宛取リ之ヲ種々ノ順序ニ列スルトキ其各ノ列法ヲ稱シテ壹度ニ r 個宛取リタル n 物ノ順列(Permutations)トイフ此數ヲ ${}_nP_r$ ニテ示ス.

故ニ貳ツノ順列ハ同順序ニ列シタル同物ニアラサレハ相異ナルモノトス.

例ヘハ四物ヲ a, b, c, d トス.

此四物ヲ壹度ニ壹個ツヽ取リタル順列ハ

a, b, c, d ノ四列ニシテ ${}_4P_1=4$,

又壹度ニ貳個ツヽ取リタル順列ハ

ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc ノ壹列ニシテ ${}_4P_2=12$ ナリ.

2. 問題　壹度ニ個r宛取リタルn物ノ順列數ヲ求ム.

相異ナルn物ヲ$a, b, c, d,$ ..... トス.

壹度ニ壹個宛取リタル順列ハ$_nP_1=n$ナリ.

壹度ニ貳個宛取リタル順列ハ次ノ如シ,

先ツaノ次ニ附ク各字ハ$b, c, d,$ .... $n-1$個アリ,

故ニ$ab, ac, ad,$ .... ハ$n-1$個ナリ,

同法ニテ$b, c, d,$ .... 等ノ各字ノ次ニ附ク他ノ各字モ$n-1$個アリ,　　$\therefore\ {}_nP_2=n(n-1)$.

壹度ニ三個宛取リタル順列ハ壹次ニ貳個宛取リタル順列$_nP_2$ノ各列ノ次ニ他各字ヲ附ケタルモノニシテ各ニ付キ$n-2$個アリ

$$\therefore\ {}_nP_3=n\times{}_nP_2=n(n-1)(n-2).$$

此理ヲ推シテ

$$(n-(r-1))$$

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1).$$

〔壹般之解説〕壹度ニ$r-1$宛取リタルn物ノ順列ノ內ヨリ任意ノ壹列ヲ取リテ其內ニ含マサル文字$n-(r-1)$個ノ各字ヲ此次ニ附ス,

然ルトキハ壹度ニr個宛取リタル順列$_nP_r$ヲ得ヘシ,

之ニ由テ　　$_nP_r={}_nP_{r-1}\times(n-r+1)$,

今rヲ順次ニ$r-1, r-2,$ .... トスレハ

$$_nP_{r-1}={}_nP_{r-2}\times(n-r+2),$$

$$_nP_{r-2}={}_nP_{r-3}\times(n-r+3),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$_nP_3={}_nP_2\times(n-2),$$

$$_nP_2={}_nP_1\times(n-1),$$

$$_nP_1=n,$$

上ノ凡テヲ連乘シ同因子ヲ去レハ

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-r+1).$$

若シrヲnトスレハ

$$_nP_n=n(n-1)(n-2)\dots\dots3.2.1.$$

$n(n-1)(n-2)\dots\dots3.2.1=\underline{|n}$ ニテ示ス,

然ルトキ　　$_nP_n=\underline{|n}$.

〔註〕 $\underline{|\ \ }$ ヲ逐乘號(Factorial)トイフ.

〔第壹例〕 6童ヲ壹列ニスル片各列ノ變化ノ數如何.

所求ノ列數ハ $\underline{|6}=6.5.4.3.2.1=720.$

〔第貳例〕 1, 2, 3, 4, 5 ナル數字ニテ三位ノ數幾種ヲ得ルカ.

所求ノ種數ハ ${}_5P_3=5.4.3.=\cancel{30}$ 60

〔第三例〕 ${}_{10}P_4={}_7P_7$ ヲ證セヨ.

$$\begin{aligned}{}_{10}P_4&=10.9.8.7=2.5.3.3.2.4.7\\&=7.6.5.4.3.2.1={}_7P_7.\end{aligned}$$

3. 問題 n 物ノ內, 同種ノ物アル片壹度ニ凡ヘテヲ取リタル順列ノ數ヲ求ム.

此ニ n 文字アリトシ此內 a カ p 個, b カ q 個, c カ r 個, ... アリトス.

P ヲ所求ノ順列ノ數トス.

今 p 個ノ a ヲ凡ヘテ異ナリタルモノトスレハ P ノ各列毎ニ a ヲ p 個含ムカ故ニ其各列毎ニ p 物ヲ凡ヘテ取リタル順列 $\underline{|p}$ ヲ得ヘシ,

故ニ p 個ノ a ヲ相異ナルモノトスレハ列數 $\underline{|p}\times P$ ヲ得.

同法ニ由テ q 個ノ b, r 個ノ c, ... ヲ凡ヘテ相異ナルモノトスレハ相異ナル列數 $\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}\times\ldots\ldots\times P$ ヲ得ヘシ,

而シテ相異ナリタル n 物ヲ凡ヘテ取リタル順列トナルヘシ.

之ニ由テ

$$\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}\times\ldots\ldots\times P=\underline{|n}$$

$$\therefore\quad P=\frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}\ldots\ldots}.$$

〔第壹例〕 a, a, a, b, b, c ナル六字ヲ凡ヘテ取リタル順列ノ數ハ

$$\frac{\underline{|6}}{\underline{|3}\,\underline{|2}\,\underline{|1}}=120.$$

〔第貳例〕 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4 ナル數字ヨリ成レル七位數ノ種類ハ

$$\frac{\underline{|7}}{\underline{|4}\,\underline{|2}}=105.$$

4. 定義 n物ノ内ヨリ壹度ニr個ツヽ取リテ之ヲ列スルキ其順序ノ異ナル列ヲ取ラスシテ其各異ノ物ノ列ヲ取ルキ之ヲ壹度ニr個宛取リタルn物ノ組ミ合セ(Combinations)トイフ而シテ此列數ヲ${}_nC_r$ニテ示ス.

故ニ貳ツノ組合ハ同物ヲ全ク含マサルキハ相異ナリタルモノトス.

例ヘハa, b, c, dノ四物ヲ示スキ壹度ニ壹個宛取リタル組合ハa, b, c, dノ四列即チ${}_4C_1=4$,

又壹度ニ貳個宛取リタル組合ハ

ab, ac, ad, bc, bd, cdノ六列即チ${}_4C_2=6$,

又壹度ニ三個宛取リタル組合ハ

abc, abd, acd, bcdノ四列即チ${}_4C_3=4$.

又壹度ニ四個宛取リタル組合ハ

$abcd$ノ壹列即チ${}_4C_4=1$ナリ.

5. 問題 壹度ニr個宛取リタル相異ナルn物ノ組合ヲ求ム.

${}_nC_r$ノ各列ニハr個ノ物アリ.

此各列ヨリ各異ノ順列$\lfloor r$ヲ得ヘキカ故ニ各列ノ物ノ順序ヲ變化スレハ${}_nP_r$トナリテ${}_nC_r$ニ$\lfloor r$倍スヘシ,

即チ $${}_nC_r\times\lfloor r={}_nP_r$$

$$=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1),$$

$$\therefore\quad {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}.$$

上ノ公式ノ分母子ニ$\lfloor n-r$ヲ乘スレハ分子ハ$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)\times\lfloor n-r$即チ$\lfloor n$トナルヘシ,

之ニ由テ $${}_nC_r=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}.$$

〔第壹例〕 15人ノ生徒ヨリ3人ヲ撰拔スル方法ノ數如何.

$$所求ノ數=\frac{15.14.13}{1.2.3}=455.$$

〔第貳例〕 6人ノ内ヨリ4人ヲ撰擧セントスルニ撰擧定員ニ滿タサルモ可ナリトスレハ各異投票ノ全數如何.

選擧スル投票ノ數4人ノ時ハ ${}_6C_4$, 3人ノ時ハ ${}_6C_3$, 2人ノ時ハ ${}_6C_2$, 1人ノ時ハ ${}_6C_1$ ナリ.

之ニ由テ其全數ハ

$${}_6C_4+{}_6C_3+{}_6C_2+{}_6C_1=15+20+15+6=56.$$

6. 推論 前章ノ最後ノ公式ニ於テ r ノ代リニ $n-r$ ヲ用フレハ

$${}_nC_{n-r}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r}}, \qquad \therefore\ {}_nC_{n-r}={}_nC_r.$$

故ニ n 物ヲ $n-r$ 個宛取リタル組合ハ n 物ヲ r 個宛取リタル組合ニ等シ.

7. 定理 ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$ ナルヿヲ證セヨ.

$$\begin{aligned}{}_nC_r+{}_nC_{r-1}&=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}\\&=\frac{\underline{|n}\,(n-r+1)}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}}+\frac{\underline{|n}\,r}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}}\\&=\frac{\underline{|n}\,(n-r+1+r)}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}}=\frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\,\underline{|n+1-r}}\\&={}_{n+1}C_r.\end{aligned}$$

8. 最大列數 ${}_nC_r$ ノ最大値ヲ求ム.

$${}_nC_r=\frac{n}{1}\times\frac{n-1}{2}\times\frac{n-2}{3}\times\cdots\cdots\times\frac{n-r+1}{r}.$$

$$\therefore\quad {}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}.$$

之ニ由テ $\frac{n-r+1}{r}\gtreqless 1$ 即チ $r\lesseqgtr\frac{n+1}{2}$ ナルニ従フテ ${}_nC_r\gtreqless{}_nC_{r-1}$.

故ニ n 物ノ組合ハ $r=\frac{1}{2}(n+1)$ ヨリ小ナル間タハ r カ増スニ従フテ増スヘシ若シ $r=\frac{1}{2}(n+1)$ ナル時 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}$,

然レ𪜈 n カ奇數ナルニアラサレハ $r=\frac{1}{2}(n+1)$ トナル能ハス.

故ニ n カ偶數ナレハ ${}_nC_r$ ハ $r=\frac{1}{2}n$ ナル時最大ナリ,

又 n カ奇數ナレハ $r=\frac{1}{2}(n+1)$ ナル時 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}$ ハ最大ナリ.

〔第壹例〕 ${}_8C_r$ ノ最大値ヲ求ム.

${}_8C_r$ ハ $r=\frac{8}{2}=4$ ナル片最大ナリ　∴ ${}_8C_4=70.$

〔第貳例〕 ${}_{11}C_r$ ノ最大値ヲ求ム.

$r=\frac{1}{2}(11+1)=6$ 及ヒ $r=6-1=5$ ナル片最大ナリ,

$$\therefore \quad {}_{11}C_6={}_{11}C_5=462.$$

例題六拾七

1. ${}_{15}P_3$ ヲ求ム.　　2. ${}_{10}P_4$ ヲ求ム.

3. ${}_8P_8$ ヲ求ム.

4. 1, 2, 3, 4, 5 ヨリ五位ノ數何種ヲ得ヘキカ.

5. 1, 2, 3, 4, 5, 6 ヨリ壹位或ハ壹位以上ノ數何種ヲ得ヘキカ.

6. 10童ヲ壹列ニシ其内ノ2人ハ相隣接セサラシム然ル片其列數如何.

7. $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ ヲ壹列ニ置ク數何種アリヤ.

8. 七數字 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3 ヲ用ヒテ幾種ノ數ヲ作リ得ヘキカ.

9. 佐佐木高綱トイフ五字ノ名刺ヲ活字ニテ印刷スルニ先ツ此五字丈ケノ活字ヲ取リテ植字ス然ル片其誤植ノ塲合幾度アリヤ.

10. 相異ナル物若干個ヲ凡ヘテ取リタル順列ノ數 720 ナル片其物ノ個數如何.

11. ${}_nP_5={}_nP_4\times2$ ナル片 ${}_nP_n$ ヲ求ム.

12. ${}_nP_6={}_nP_4\times12$ ナル片 n ヲ求ム.

13. ${}_{16}C_4$ ヲ求ム.　　14. ${}_{15}C_{12}$ ヲ求ム.

15. ${}_{20}C_{18}$ ヲ求ム.

16. ${}_nC_5={}_nC_{10}$ ナル片 ${}_nC_2$ ヲ求ム.

17. ${}_nC_{10}={}_nC_{11}$ ナル片 ${}_nC_3$ ヲ求ム.

18. 0, 1, 2, 3, 4 ヲ用ヒテ三位ノ數何種ヲ作リ得ヘキカ.

19. ${}_{2n}C_3={}_nC_2\times12$ ナル片 n ヲ求ム.

20. ${}_{2n}C_3={}_nC_4\times24$ ナル片 n ヲ求ム.

21. 1, 2, 3, 4, 5 ヲ用ヒテ 23000 ヨリ大ナル數何種ヲ作リ得ヘキカ.

22. 三通ノ書狀ヲ五所ノ郵便函ニ投スルノ方法何種アリヤ.

23. ${}_{n-1}C_{r-1}:{}_nC_r=r:n$ ナルコヲ示セ.

24. 壹錢貨2,拾錢貨3,壹圓貨4ヨリ何種ノ金高ヲ得ヘキカ.

25. 壹錢貨4,拾錢貨6,五圓貨5ヨリ何種ノ金高ヲ得ヘキカ.

26. ${}_{n+2}C_{r+1}={}_{n}C_{r+1}+2\times{}_{n}C_{r}+{}_{n}C_{r-1}$ ヲ證セヨ.

27. ${}_{8}C_{4}$ ニ於テ特別ノ壹物ヲ含ム列數ト含マサル列數ト相等シキヿヲ示セ.

28. ${}_{12}C_{4}$ ニ於テ特別ノ壹物ヲ含ム列數ハ全列數ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シキヿヲ示セ.

29. ${}_{3n}C_{n}$ ニ於テ特別ノ壹物ヲ含ム列數ハ全列數ノ $\frac{1}{3}$ ニ等シキヿヲ示セ.

30. いろは四拾八字ヲ五字ツヽ取リテ列スル𪜈其內ニてノ字ヲ含ムモノ幾種アリヤ.

31. 10人ノ內ヨリ6人ノ議員ヲ選擧スル方法ノ數如何.

32. 5人ノ內ヨリ3人ノ議員ヲ選擧スルニ選擧人ハ1人或ハ1人以上ヲ投票スルヿヲ得,然ル𪜈其方法ノ數如何.

33. 兵卒80人,士官3人ノ內ヨリ哨兵トシテ3兵卒,1士官ヲ選マントス其方法ノ數如何.

34. 30人ニテ遊戯ヲナスニ壹度ニ11人選ム𪜈其方法ノ數如何,又11人ツヽ貳組ニ分チル𪜈其方法ノ數如何.

35. 藥10品ヲ調合シテ最多種ヲ得ントス其種類如何.

36. 5童4孃ノ內ヨリ2童及ヒ2孃ヲ選ム𪜈其方法ノ數如何.

37. 6男,4女ノ內ヨリ2男,2女ヲ選出スル其方法ノ數如何.

38. 8童カ相連ナリテ輪形ヲ作ル𪜈其變化ノ數如何.

39. 壹平面上ニn點アリ其同三點壹ツモ壹直線上ニアラサルモノトス今此各貳點ヲ連結セハ何種ノ直線ヲ得ヘキカ.

40. 同上三點ヲ連結セハ何種ノ三角形ヲ得ヘキカ.

第貳拾五編

貳　項　法

1. 連乘積

乘法ニ由テ次ノ連乘積ヲ得ヘシ,

$$(x+a)(x+b)(x+c)$$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x+abc.$$

上ノ恒同式ノ右邊ニ於テ x^2 ノ係數ハ a, b, c ノ三字ヲ壹ツヽ取リタル組合ノ和ニシテ其項數ハ ${}_3C_1$ ナリ又 x ノ係數ハ a, b, c ノ三字ヲ貳ツヽ取リタル組合ノ和ニシテ其項數ハ ${}_3C_2$ ナリ,

最後ノ項ハ a, b, c ヲ凡ヘテ取リタル組合ナリ.

之ニ由テ $a=b=c$ トスレハ

$$(x+a)^3=x^3+{}_3C_1ax^2+{}_3C_2a^2x+a^3,$$

即チ $$=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3.$$

之ヲ壹般ニ證スルコ次ノ如シ.

2. 貳項式之定理

ハ次ノ如シ,

$$(x+a)^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^{n-2}a^2$$
$$+\cdots\cdots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}x^{n-r}a^r+\cdots\cdots+a^n.$$

今之ヲ證センニ

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 因子}$$
$$=x^n+(a+b+c+\cdots\cdots)x^{n-1}+(ab+ac+\cdots\cdots)x^{n-2}$$
$$+(abc+\cdots\cdots)x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+(abc\cdots\cdots).$$

上ノ恒同式ノ右邊ニ於テ x^{n-1} ノ係數ハ $a, b, c, \ldots\ldots$ ノ n 字ヲ壹ツヽ取リタル組合ノ和ニシテ其項數ハ ${}_nC_1$ ナリ,又 x^{n-1} ノ係數ハ n 字ヲ貳ツヽ取リタル組合ノ和ニシテ其項數ハ ${}_nC_2$ ナリ同樣ニ x^{n-2} ノ係數ノ項數ハ ${}_nC_2$ ナリ,又 x^{n-r} ニ於テハ ${}_nC_r$ ナリ,

又末項ハ n 字ノ連乘積ナリ.

之ニ由テ $a=b=c=\cdots\cdots\cdots$ トスレハ

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}a+{}_nC_2x^{n-2}a^2$$
$$+\cdots\cdots\cdots+{}_nC_rx^{n-r}a^r+\cdots\cdots+a^n,$$

之ニ ${}_nC_1$, ${}_nC_2, \ldots\ldots$ ノ値ヲ代用スレハ上ノ定理ヲ得

3. 壹般之項 $(x+a)^n$ ノ開散式ノ壹般ノ項ハ ${}_nC_r x^{n-r}a^r$,

即チ $$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^{n-r}a^r.$$

之ヲ開散式ノ公項トイフ即チ第 $(r+1)$ 項ナリ.

4. 定理之應用 2. 章ノ公式ニ於テ

$n=2$ トスレハ $(x+a)^2=x^2+\frac{2}{1}xa+a^2=x^2+2xa+a^2$,

$n=3$ トスレハ $(x+a)^3=x^3+\frac{3}{1}x^2a+\frac{3.2}{1.2}xa^2+a^3$

$$=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3,$$

$n=4$ トスレハ

$$(x+a)^4=x^4+\frac{4}{1}x^3a+\frac{4.3}{1.2}x^2a^2+\frac{4,3.2}{1.2.3}xa^3+a^4$$

$$=x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4.$$

x ヲ $2a$ トシ a ヲ $-3b$ トシ $n=5$ トスレハ

$$(2a-3b)^5=(2a)^5+\frac{5}{1}(2a)^4(-3b)+\frac{5\ 4}{1\cdot 2}(2a)^3(-3b)^2$$

$$+\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3}(2a)^2(-3)^3+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3\cdot4}(2a)(-3b)^4+(-3b)^5.$$

$$=32a^5-240a^4b+720a^3b^2-1080a^2b^3+810ab^4-243b^5.$$

5. 歸納法 (Induction) ニ由テ貳項式ノ定理ヲ證明セントス.

n カ正整數ナルトキ

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}a+{}_nC_2x^{n-2}a^2$$

$$+\ldots\ldots+a_n.$$

上ノ定理ヲ眞ナルモノト假定シ之ニ $x+a$ ヲ乘スレハ

$$(x+a)^{n+1}=x^{n+1}+(1+{}_nC_1)x^na$$

$$+({}_nC_1+{}_nC_2)x^{n-1}a^2+\ldots\ldots+a^{n+1}.$$

但シ $1+{}_nC_1=1+n={}_{n+1}C_1$,

$$ {}_nC_1+{}_nC_2=n+\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{(n+1)n}{1.2}={}_{n+1}C_2,$$

壹般ニ第廿四編 7. 章ニ由テ

$$ {}_nC_{r-1}+{}_nC_r={}_{n+1}C_r.$$

$$\therefore\ (x+a)^{n+1}=x^{n+1}+{}_{n+1}C_2x^{n-1}a^2$$

$$+\ldots\ldots+a^{n+1}.$$

故ニ此定理カ n ノ任意ノ値ニ對シテ合理ナルトキ之ニ次キテ大ナル n ノ値ニ對シテモ合理ナリ.

然ルニ $n=2$ ナル井此定理ハ合理ナリ故ニ $n=3$ ナル井モ合理ナリ,

從フテ n カ 3, 4, 5, ... ナル凡ヘテノ正整數ニ對シテ合理ナルコヲ知ル.

〔注意〕 n ハ正整數ナル時ニ合理ナルノミナラス n カ分數或ハ負數ニテモ合理ナリ然レ圧此等ノ證明ハ此書ニ於テハ說明セサルモノトス.

6. 相等係數 貳項式ノ定理 $(x+a)^n$ ノ開散式ノ初項ヨリ計ヘテ第 $(r+1)$ 項及ヒ末項ヨリ計ヘテ第 $(r+1)$ 項ハ順次ニ ${}_nC_r x^{n-r} a^r$ 及ヒ ${}_nC_{n-r} x^r a^{n-r}$ ナリ而シテ第廿四編 6. 章ニ由テ

$$ {}_nC_r = {}_nC_{n-r}. $$

例題六拾八

次ノ各ヲ開散セヨ.

1. $(x+a)^6$.　2. $(1-x^2)^5$.　3. $(3x-2y)^4$.
4. $(2a+3a^2)^4$.　5. $(2x^2-1)^6$.　6. $(y-x)^7$.

7. $(a-3b)^{10}$ ノ第三項ヲ求ム.
8. $(2x-x^2)^{12}$ ノ第五項ヲ求ム.
9. $(2a-\frac{1}{2})^8$ ノ第六項ヲ求ム.
10. $(1-x)^{10}$ ノ第七項ヲ求ム.
11. $(1+x)^{20}$ ノ第拾八項ヲ求ム.
12. $(1-x)^{22}$ ノ第廿壹項ヲ求ム.
13. $(a+\sqrt{b})^4+(a-\sqrt{b})^4$ ヲ開散セヨ.
14. $(a+\sqrt{b})^6+(a-\sqrt{b})^6$ ヲ開散セヨ.
15. $(a+\sqrt{b})^8+(a-\sqrt{b})^8$ ヲ開散セヨ.
16. $(1+x)^8$ ノ中項ヲ求ム.
17. $(1+x)^{10}$ ノ中項ヲ求ム.
18. $(2x-3y)^8$ ノ中項ヲ求ム.
19. $(1+x)^{m+n}$ ノ開散式ノ x^m 及ヒ x^n ノ係數ハ相等シ其證如何.
20. $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^8$ ヲ開散セヨ.
21. $\left(4x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{15}$ ノ第拾壹項ヲ求ム.
22. $(x^2-x^{-1})^{20}$ ノ第 17 項ヲ求ム.
23. $(x^2-a^3x^{-1})^{2n}$ ノ開散式ノ x^n ノ係數ヲ求ム.

24. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ ノ開散式ノ兩中項ヲ求ム.

25. $(a+x)^8$ ノ開散式ノ第何項カ最大係數ヲ有ツヘキカ.

26. $(a+x)^9$ ノ開散式ノ最大係數ヲ有ツ所ノ項ヲ求メヨ.

27. $(5x+7)^{23}$ ノ開散式ノ連續兩項カ同係數ナルモノアリ此兩項ハ第何項ナリヤ.

28. $(ax-b)^n$ ノ開散式ニ於テ x^r ノ係數ヲ求ム.

29. $(1+x)^{2n}$ ノ開散式ノ x^n ノ係數ハ $(1-x)^{2n-1}$ ノ開散式ノ x^n ノ係數ニ2倍スルヿヲ示セ.

30. $(1+x)^{2n}$ ノ中項ハ $\frac{1.3.5....(2n-1)}{|\underline{n}}2^nx^n$.

31. 貳項式ノ定理ニ由テ 99^4 及ヒ 999^3 ノ値ヲ求メヨ.

32. $(1+x)^n$ ノ開散式ノ第五項,第六項及ヒ第七項ノ係數カ等差級數ヲナストキ n ノ値如何.

33. $(1+x)^n$ ノ開散式ノ第貳項,第三項及ヒ第四項ノ係數カ等差級數ヲナストキ n ノ値如何.

第貳拾六編

對數

1. 定義 壹數ノ某方乘カ第貳數ニ等シキ其方乘指數ヲ稱シテ第壹數ヲ底數(Base)トスルトキ第貳數ノ對數(Logarithm)トイフ.

例ヘハ $a^x=y$ ナルトキ x ハ a ヲ底數トスル y ノ對數ナリ.

之ヲ記ストキハ　$x=Log_a y$.

2. 對數之性質 ハ次ノ如シ.

〔第壹〕 $a^0=1$ ナルトキ a ノ凡ヘテノ値ニ對シテ $Log_a 1=0$.

之ニ由テ底數ノ如何ニ係ハラス1ノ對數ハ0ニ等シ.

〔第貳〕 $Log_a x=p$ 及ヒ $Log_a y=q$ ナルキ
$x=a^p$ 及ヒ $y=a^q$,

$$\therefore\quad x\times y=a^p\times a^q=a^{p+q},$$

$$\therefore\quad Log_a(x\times y)=p+q=Log_a x+Log_a y.$$

同理ニ由テ

$$Log^a(xyz\ldots\ldots)=Log_a x+Log_a y+Log_a z+\ldots\ldots$$

之ニ由テ積ノ對數ハ其因子ノ對數ノ和ニ等シ.

〔第三〕 前ノ假定ニ由テ

$$x\div y=a^p\div a^q=a^{p-q},$$

$$\therefore\quad Log(x\div y)=p-q$$

$$=Log_a x-Log_a y.$$

之ニ由テ商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減シタル差ニ等シ.

〔第四〕 $x=a^p$ ナルキ m ノ凡ヘテノ値ニ對シテ $x^m=a^{mp}$ ナリ,

$$\therefore\quad Log_a x^m=Log_a a^{mp}=mp$$

$$=m\times Log_a x.$$

之ニ由テ壹數ノ某方乘ノ對數ハ其數ノ對數ニ方乘指數ヲ乘セシモノニ等シ.

〔第五〕、$Log_a x=p$ 及ヒ $Log_b x=q$ ナルキ
$x=a^p$ 及ビ $x=b^q$,

即チ $a^p=b^q$ $\therefore$ $a=b^{\frac{q}{p}}$, $b=a^{\frac{p}{q}}$.

之ニ由テ $Log_b a=\frac{q}{p}$, $Log_a b=\frac{p}{q}$,

$$\therefore\quad Log_b a\times Log_a b=\frac{q}{p}\times\frac{p}{q}=1.$$

又 $q=p\,Log_b a$ ヨリ

$$Log_b x=Log_b x\times Log_b a.$$

〔第壹例〕 $Log_2 8$, $Log_8 2$, $Log_{10} 1000$ 及ヒ $Log_{10}\sqrt[3]{100}$ ヲ求ム.

$8=2^3$, $2=8^{\frac{1}{3}}$, $1000=10^3$, $\sqrt[3]{100}=10^{\frac{2}{3}}$, 故ニ
$Log_2 8=3$, $Log_8 2=\frac{1}{3}$, $Log_{10}1000=3$, $Log_{10}\sqrt[3]{100}=\frac{2}{3}$.

〔第貳例〕 $Log_{10}2=\cdot3010300$ 及ヒ $Log_{10}3=\cdot4771213$ ヲ知リテ $Log_{10}6$, $Log_{10}40$, $Log_{10}12$, $Log_{10}15$ 及ヒ $Log_{10}\sqrt[3]{2880}$ ヲ求ム.

$$Log_{10}6 = Log_{10}(2\times3) = Log_{10}2 + Log_{10}3$$
$$= \cdot3010300 + \cdot4771213 = \cdot7781513,$$

$$Log_{10}40 = Log_{10}(2^2\times10) = Log_{10}2^2 + Log_{10}10$$
$$= 2\,Log_{10}2 + Log_{10}10$$
$$= 2\times\cdot3010300 + 1 = 1\cdot6020600,$$

$$Log_{10}12 = Log_{10}(2^2\times3) = Log_{10}2^2 + Log_{10}3$$
$$= 2\,Log_{10}2 + Log_{10}3$$
$$= 2\times\cdot3010300 + \cdot4771213 = 1\cdot0791313.$$

$$Log_{10}15 = Log_{10}\left(\frac{10\times3}{2}\right) = Log_{10}10 + Log_{10}3 - Log_{10}2$$
$$= 1 + \cdot4771213 - \cdot3010300 = 1\cdot1760913.$$

$$Log_{10}\sqrt[3]{2880} = \tfrac{1}{3}Log_{10}2880 = \tfrac{1}{3}Log_{10}(10\times2^5\times3^2)$$
$$= \tfrac{1}{3}(Log_{10}10 + 5\,Log_{10}2 + 2\,Log_{10}3)$$
$$= \tfrac{1}{3}(1 + 1\cdot5051500 + \cdot9542426)$$
$$= 1\cdot1531308.$$

例 題 六 十 九

次ノ各ノ値ヲ求ム.

1. $Log_{10}1.$ 2. $Log_{10}10000.$ 3. $Log_{10}\cdot01.$

4. $Log_{10}\cdot001.$ 5. $Log_{10}\sqrt{\cdot01}.$ 6. $Log_{10}\sqrt[5]{100}.$

7. $Log_2 32.$ 8. $Log_4 32.$ 9. $Log_{\sqrt{2}}2.$

10. $Log_4 8\sqrt{2}.$ 11. $Log_9 3\sqrt{3}.$ 12. $Log_4\sqrt[7]{64}.$

$Log_{10}2 = \cdot3010300$, $Log_{10}3 = \cdot4771213$ ヲ知リテ次ノ各ノ値ヲ求ム.

13. $Log_{10}3\cdot75.$ 14. $Log_{10}1\cdot28.$

15. $Log_{10}\left(\frac{3^3\times5^3}{2^7}\right).$ 16. $Log_{10}324.$

17. $Log_{10}1\cdot458.$ 18. $Log_{10}\cdot00432.$

19. $Log_{10}\sqrt[5]{432}.$ 20. $Log_{10}\sqrt[5]{\frac{5}{18}}.$

---

21. $Log_a b\times Log_b c\times Log_c a = 1$ ナルコヲ示セ.

22. $a^2+b^2=7ab$ ナル片

$$Log\left\{\frac{1}{3}(a+b)\right\} = \frac{1}{2}(Log\,a + Log\,b).$$

23. $Log\dfrac{\sqrt[4]{5}\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18}\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4}Log\,5 - \dfrac{2}{5}Log\,2 - \dfrac{2}{3}Log\,3$ ナルコヲ示セ.

24. $Log\dfrac{75}{16} - 2\,Log\dfrac{5}{9} + Log\dfrac{32}{243} = Log\,2$ ナルコヲ證セヨ.

常用對數

3. 常用對數 前ニ說明セシ如ク對數ハ任意ノ底數ヲ用フルヿヲ得ヘシ而シテ計算上ニ於テ最モ便利ナルモノハ10ヲ底數トスル對數ニシテ壹般ニ之ヲ用フ之ヲ常用對數トイフ.

是レヨリ後ハ常用對數ノ計算及ヒ應用ヲ說明セントス.

常用對數ハ壹般ニ Log_{10} ト記スヿヲ畧シテ單ニ Log ト記ス.

常用對數ノ簡單ナル場合ハ

$10^0=1,\ 10^1=10,\ 10^2=100,\ 10^3=1000, \ldots.$

$10^{-1}=\cdot1,\ 10^{-2}=\cdot01,\ 10^{-3}=\cdot001, \ldots.$ ナルカ故ニ

$Log\,1=0,\ Log\,10=1,\ Log\,100=2,\ Log\,1000=3, \ldots.$

$Log\,\cdot1=-1,\ Log\,\cdot01=-2,\ Log\,\cdot001=-3, \ldots.$

相異ナル兩數カ同數字ヲ有ツキ其對數ハ小數點ノ位置ノミ異ニス.

例ヘハ　$Log\,421\cdot5=Log\,(4\cdot215\times100)$

$=Log\,4\cdot215+Log\,100$

$=Log\,4\cdot215+Log\,100.$

又 $Log\,2=\cdot3010300$ ナルヿヲ知ラハ

$Log\,\cdot02=Log\,(2\div100)=Log\,2-Log\,100$

$=\cdot3010300-2.$

而シテ通常對數ハ其小數部ヲ常ニ正數トス.

例ヘハ $Log\,\cdot02$ ハ $-1\cdot69897$ ト記サスシテ

$\bar{2}\cdot3010300$ ト記ス:

〔定義〕 對數ヲ記スニ其小數部ヲ正數トスルキ其小數部ヲ假數 (Mantissa) トイヒ其整數部ヲ示標 (Characteristic) トイフ.

4. 示標 任意ノ數ノ對數ノ示標ハ視察ニ由テ直チニ知リ得ヘシ.

先ツ壹數ヲ1ヨリ大ナルモノトシ其數ノ整數部ノ位數ヲ n トスレハ此數ハ 10^n ヨリ小ニシテ 10^{n-1} ヨリ大ナリ.

故ニ此數ノ對數ハ n ト $n-1$ ノ間ニアリ故ニ此數ハ $(n-1)+$ 小數.

之ニ由テ1ヨリ大ナル數ノ對數ノ示標ハ其整數部ノ位數ヨリ1少ナシ.

次ニ壹數ヲ1ヨリ小ナルモノトシ其小數首位ニアル零ノ數ヲ n トス,

然ルヰハ此數ハ 10^{-n} ヨリ小ニシテ 10^{-n-1} ヨリ小ナラス.

故ニ此數ノ對數ハ $-(n+1)+$ 小數.

之ニ由テ1ヨリ小ナル數ノ對數ノ示標ハ其小數首位ノ零ノ數ヨリ1多キ負數ナリ.

例ヘハ $\cdot02$ ハ 10^{-1} ヨリ小ニシテ 10^{-2} ヨリ大ナリ之ニ由テ $Log\cdot02$ ハ $-2+$ 小數, ∴ $Log\cdot02$ ノ示標ハ -2.

又 $\cdot00042$ ハ 10^{-3} ヨリ小ニシテ 10^{-4} ヨリ大ナリ, 故ニ $Log\cdot00042$ ノ示標ハ -4 ナリ.

5. 反法　任意壹數ノ對數ノ示標ヲ知ラハ其數ノ整數位ヲ知リ小數點ノ位置ヲ決定シ得ヘシ.

例ヘハ $Log\,2=\cdot3010300$ ナルヿヲ知ラハ $2\cdot3010300$ ヲ對數トスル數ハ200ナリ.

又　$\bar{3}\cdot301030=Log\cdot002$.

6. 對數之計算　壹數 a ヲ知リテ其對數 x ヲ求メンニハ方程式 $10^x=a$ ニ於テ x 求ムルヿヲ要ス.

〔例〕 $Log\,4\cdot217$ ヲ小數三位迄計算セヨ.

此示標ハ0ナルヿヲ知ル而シテ所求ノ假數ノ最初三ノ數字ヲ xyz トス,

然ルヰ　$4\cdot217=10^{0\cdot xyz}$　∴ $(4\cdot217)^{10}=10^{x\cdot yz}$.

此 $4\cdot217$ ノ10方乘ハ畧乘法ニ由テ僅カニ其最高位ノ數字貳三ヲ求ムレハ可ナリ即チ

$$1778400=10^{x\cdot yz}.$$

x ハ $Log\,1778400$ ノ示標ナルカ故ニ $x=6$, 故ニ 10^6 ニテ此兩邊ヲ除シ又10方乘スレハ

$$(1\cdot778)^{10}=10^{y\cdot z},$$

即チ

$$316=10^{y\cdot z},$$

$Log\,316$ ノ示標ハ2ナリ　∴ $y=2$.

又 10^2 ニテ此兩邊ヲ除シテ 10 方乘スレハ

$$(3{\cdot}16)^{10}=10^z,$$

即チ $99280=10^z$,

99280 ハ 100000 ニ近シ故ニ其對數ノ示標ハ 4 ナレバ $z=5$ トス.

之ニ由テ $Log\ 4{\cdot}217={\cdot}625$ (殆ント).

7. 對數表 對數表ニ於テハ 1 ヨリ 99999 迄ノ數ヲノ凡ヘテノ對數ヲ小數七位迄記載セリ之ヲ七位ノ對數表トイフ.

今便宜ノ爲メ本書ニ於テハ四位ノ對數表ヲ次ノ頁ニ於テ示シ以テ此ニ記載セシ例題ノ計算ノ用ニ供ス.

8. 對數表之用法 表ニ於テハ假數丈ケヲ記シタリ而シテ其用法ハ既知數ノ對數ヲ表ニテ求ムルコ及ヒ對數ヲ知リテ原數ヲ求ムルコナリ.

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
12	792	828	864	899	934	969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	335	367	399	430
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	279
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	183	200	216	232	249	265	281	298
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	914	928	942	955	969	983	997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	145	159	172
33	185	198	211	224	237	250	263	276	286	302
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	093	101	110	118	126	135	143	152
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
63	993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
79	976	982	987	993	998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996

〔第壹〕 既知數ノ對數ヲ求ム.

〔第壹例〕 $Log\ 2{\cdot}86$ ヲ求ム.

2·86 ノ對數ノ示標ハ 0 ナリ.

173 頁ノ表ノ第壹行ニ於テ 28 ヲ視之ト同シ列ニ於テ第壹列 6 ノ數字ノ行ニ當ル處ヲ視レハ 564 而シテ其首位數字ハ 4 ナルコヲ視ルヘシ,

$$\therefore\quad Log\ 2{\cdot}86 = 0{\cdot}4564.$$

〔第貳例〕 $Log\ 11{\cdot}4673$ ヲ求ム.

第壹例ニヨリ $Log\ 11{\cdot}4 = 1{\cdot}0569,$

$Log\ 11{\cdot}5 = 1{\cdot}0607,$

此兩對數ノ差ハ ·0038,

又原數 11·4673 ト 11·4 ノ差ハ ·0673 ニシテ 11·5 ト 11·4 ノ差 ·1 ノ $\frac{673}{1000}$ ナリ.

兩數ノ差カ微小ナルキ其兩對數ノ差ト殆ント比例ス.

此原則ニ由テ $\cdot 0038 \times \frac{673}{1000} = \cdot 00256,$

$$\therefore\quad Log\ 11{\cdot}4673 = Log\ 11{\cdot}4 + \cdot 00256$$
$$= 1{\cdot}0569 + \cdot 00256$$
$$= 1{\cdot}05946.$$

〔第貳〕 對數ヲ知リテ原數ヲ求ム.

〔第壹例〕 2·05946 ヲ對數トスル所ノ數ヲ求ム.

173 頁ノ表ニヨリ $\cdot0569 = Log\, 1\cdot14$,

$\cdot0607 = Log\, 1\cdot15$.

既知對數ノ假數ハ上ノ兩對數ノ間ニアリ,
而シテ ·0569 ト既知對數ノ假數ノ差ハ ·00256,
又 ·0569 ト ·0607 ノ差ハ ·0038.

故ニ前例ノ差ノ比例ニ由テ ·05946 ヲ對數トスル數ハ $1\cdot14 + \frac{256}{380} \times \cdot01 = 1\cdot14673$.

故ニ $\cdot05946 = Log\, 1\cdot14673$,

之ニ由テ $2\cdot05946 = Log\, 114\cdot673$.

故ニ所求ノ數ハ 114·673 ナリ.

〔第貳例〕 $\sqrt[3]{100}$ ノ畧近値ヲ求ム.

$$Log \sqrt[3]{100} = \frac{1}{3} Log\, 100 = \frac{2}{3} = \cdot66666\ldots.$$

表ニ由テ $Log\, 4\cdot65 = \cdot6675$,

$Log\, 4\cdot64 = \cdot6665$.

$$\therefore\ Log \sqrt[3]{100} - Log\, 4\cdot64 = \cdot000166'$$

$$Log\, 4\cdot65 - Log\, 4\cdot64 = \cdot0001,$$

之ニ由テ $\sqrt[3]{100} = 4\cdot64 + \frac{100}{166} \times \cdot0001 = 4\cdot641$.

9. 指數方程式 ハ第拾九編 7. 章ニ於テ示シタリ今此ニ壹般ナルモノヲ示サントス.

〔例〕 $a^x b^{2x-1} = c$ ヲ解セヨ.

$$Log(a^x b^{2x-1}) = Log\, c,$$

即チ $x\, Log\, a + (2x-1)\, Log\, b = Log\, c$,

$$\therefore\quad x = \frac{Log\, b + Log\, c}{Log\, a + 2\, Log\, b}.$$

或ハ之ヲ記シテ次ノ如クス,

$$x = \frac{Log\,(bc)}{Log\,(ab^2)}.$$

複 利 及 年 金

10. 複利及年金 永キ期限ノ複利及ヒ年金ノ計算ニ於テ畧近値ヲ求ムルニハ對數ヲ用フレハ容易ニ之ヲ求ムルヿヲ得ヘシ.

此種ノ問題ハ凡ヘテ次ノ三件ニ屬ス學生ハ既ニ算術ニ於テ利金及ヒ現金等ノ意義ヲ知リタルモノトス.

〔第壹〕 定年數間ニ於テ已知利割ヲ附シタル複利ノ原金ヲ知リテ其原利合計ヲ求ム.

P= 原金, n= 年數,

r=1年1圓ノ利金(即チ利割),

A= 所求ノ原利合計,

凡ヘテ壹圓ヲ單位トス.

然ルトキ1年間PノH利金ハ Pr,

故ニ第壹年末ノ原利合計ハ $P(1+r)$,

此原利合計ハ第貳年ニ於テ利ヲ附スヘキ原金ナリ,

故ニ第貳年末ノ原利合計ハ

$$\{P(1+r)\}(1+r)=P(1+r)^2,$$

同理ニ由テ第三年末ノ原利合計ハ $P(1+r)^3$ ニシテ第 n 年ノ末原計合計ハ

$$A=P(1+r)^n,$$

〔推論〕 半年毎ニ利金ヲ拂ヒ之ヲ原金ノ內ニ入ルヽトキハ第 n 年末ノ原利合計ハ

$$P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}.$$

〔例〕 毎年5分ノ複利ニテ25年間百圓ノ原利合計如何.

$P=100,\quad n=25,\quad r=\cdot 05,$

故ニ　$A=100(1+\cdot 05)^{25}=100\times\left(\frac{21}{20}\right)^{25}.$

之ニ由テ　$Log\,A=Log\,100+25(Log\,21-Log\,20).$

表ニ由テ　$Log\,A=2+25(1\cdot 3222-1\cdot 3010)$

$=2\cdot 53,$

又表ニ由テ　$A=338\cdot 6.$

即チ所求ノ原利合計ハ凡ソ338圓60錢ナリ.

〔第貳〕 定期限ノ終ニ於テ拂フヘキ金高ノ現金ヲ求ム.

$A=n$ 年ノ終ニ拂フ金,　P= 現金,

r=1圓1年ノ利金.

然ルトキPノ原利合計ハAニ等シ.

故ニ第壹ヨリ　$P=A(1+r)^{-n}.$

〔例〕 年利5分ノ複利ニテ100年ノ終ニ千圓ヲ拂フヘキヲ現今拂フトキハ其金高如何.

$$A=1000,\quad n=100,\quad r=\cdot05,$$

故ニ $P=1000(1+\cdot05)^{-100}=1000\times\left(\frac{21}{20}\right)^{-100}.$

之ニ由テ $Log\,P=Log\,1000-100\,(Log\,21-Log\,20)$

$$=3-100(1\cdot3222-1\cdot3010)$$

$$=3-2\cdot12=\cdot88$$

表ヨリ $P=7\cdot60.$

之ニ由テ所求ノ現金ハ凡ソ7圓60錢ナリ.

〔第三〕 毎年末ニA圓ヲ拂フヘキn年間ノ年金アリ其現金ヲ求ム.

1圓ノ年利ヲr圓トス,

然ルトキ第貳ニ由テ

第壹年末ノ年金ノ現金 $=A(1+r)^{-1}$

第貳年末ノ年金ノ現金 $=A(1+r)^{-2}$,

…………………… = ……..

第n年末ノ年金ノ現金 $=A(1+r)^{-n}$.

之ヲ加フレハ全現金ヲ得ヘシ,

∴ 全現金 $=A\{(1+r)^{-1}+(1+r)^{-2}+\ldots\ldots+(1+r)^{-n}\}$

$$=A(1+r)^{-1}\left\{\frac{1-(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-1}}\right\}$$

$$=\frac{A}{r}\{1-(1+r)^{n}\}$$

〔例〕 年4分ノ金利ニテ30年間毎年末ニ100圓ヲ受取ルヘキ年金アリ此年金ノ現金ヲ求ム,

$$r=\cdot04,\quad n=30,\quad A=100,$$

$$\therefore\quad P=\frac{100}{\cdot04}\{1-(1+\cdot04)^{-30}\}$$

$$=2500\{1-1\cdot04^{-30}\}.$$

但シ $Log\,1\cdot04^{-30}=-30\,Log\,1\cdot04=-30\times\cdot0170$

$$=-\cdot5100=\bar{1}\cdot4900$$

$$=Log\,\cdot309.$$

之ニ由テ $P=2500\{1-\cdot309\}$

$$=1727\cdot5$$

所求ノ現金ハ大凡ソ1727圓50錢ナリ然レ圧本書ノ表ハ四位ナルカ故ニ單位7圓ニ誤差アリ.

例　題　七　拾

1. $Log\,2=\cdot3010300$ ヲ知リテ 5·3010300 及ヒ $\bar{5}$·3010300 ヲ對數トスル數ヲ求ム.

2. $Log\,1\cdot9911=\cdot2990931$ ヲ知リテ 3·2990931 及ヒ $\bar{4}$·2990931 ヲ對數トスル數ヲ記セ.

3. $Log\,46854=4\cdot6707467$ 及ヒ $Log\,46855=4\cdot6707559$ ヲ知リ $Log\,\cdot0468546$ ヲ求ム.

次ノ各數ノ對數ヲ求ム.

4. 80.　　5. ·7723.　　6. 20·08.
7. 5·1809.　　8. 6·3.　　9. 1056.
10. 92461.　　11. 1036·5.　　12. 298.
13. 3·294.　　14. ·40322.　　15. ·086676.
16. ·902.　　17. ·05205.　　18. ·007178.

次ノ合ヲ對數トスル所ノ數ヲ求ム.

19. 1·8055.　　20. $\bar{2}$·1648.　　21. 1·6482.
22. $\bar{1}$·4487.　　23. $\bar{3}$·5209.　　24. $\bar{3}$·0450.
25. ·2165·　　26. 4·0095.　　27. 4·8016.
28. 3·9487.　　29. ·9774.　　30. $\bar{2}$·1144.
31. 2·7364.　　32. $\bar{1}$·3178.　　33. 2·7015.

34. $\sqrt[6]{(3734\cdot9\times\cdot00001108)}$ ヲ求ム.

35. $(2\cdot6317)^{\frac{3}{4}}\times(\cdot71272)^{\frac{2}{5}}$ ヲ求ム.

次ノ方程式ヲ解セヨ.

36. $11^x=3$.　　37. $13^x=\cdot281$.
38. $a^x=b^mc^n$.　　39. $3^x=\cdot8$.
40. $\cdot703^x=1\cdot096$.　　41. $ma^{\frac{1}{x}}=n$.
42. $a^{x-1}b^{4x}=c$.　　43. $10^{2x-1}\times7^{3x}=4$.
44. $m^xn^{7-x}=p^{2x}$.　　45. $10^{x-2}=8^{x+1}5^{x+3}$.
46. $a^xb^y=c,\quad a^{x-2}b^{2y-3}=c$.
47. $x+y=3,\quad 2^x3^y=10$.
48. $(ax)^{Log\,a}=(by)^{Log\,b},\quad b^{Log\,x}=a^{Log\,y}$.

---

49. 等比級數ノ初項 a, 末項 l, 通比 r ヲ知リテ項數 n ヲ求メヨ.

50. 同上初項 a, 通比 r, 和 s ヲ知リテ項數ヲ n 原求メヨ.

51. 年5分ノ複利ニテ 100 年間1圓ノ原利合計ヲ求メヨ.

52. 年4分ノ複利ニテ 18 年間ノ原利合計ハ原金ノ2倍ニ超過スルコヲ證セヨ.

53. 年4分ノ複利ニテ半年毎ニ金利ヲ拂フヘキ計算ニテ500圓ヲ10年間預ケ置クトキハ其原利合計幾許ナリヤ.

54. 年3分ノ複利ヲ附シテ15年末ニ拂フヘキ千圓ノ現金如何.

〔下卷終〕

下卷答

〔例四拾〕 **1.** 1 或ハ -2. **2.** 3 或ハ 4. **3.** $-\frac{1}{2}$ 或ハ $\frac{1}{2}$. **4.** $2\frac{1}{2}$ 或ハ 4. **5.** 0, 2 或ハ -3. **6.** 0, $\frac{1}{2}$ 或ハ $-1\frac{1}{3}$. **7.** 1, 2, 3 或ハ 5. **8.** $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$ 或ハ $-1\frac{1}{5}$. **9.** 0 或ハ 2. **10.** 0 或ハ -3. **11.** 0 或ハ $2\frac{1}{2}$. **12.** 0 或ハ $-\frac{1}{3}$. **13.** 0 或ハ 5. **14.** 0 或ハ $\frac{1}{2}$. **15.** 0 或ハ $1\frac{2}{3}$. **16.** 0 或ハ $-1\frac{1}{5}$. **17.** 0 或ハ $\frac{b}{a}$. **18.** ± 1. **19.** ± 5. **20.** ± 3. **21.** ± 1. **22.** ± 9. **23.** 3, 4 **24.** 4, 5. **25.** 4, 7. **26.** 10, 15. **27.** 0, 9, -20. **28.** 0, 12, -11.

〔例四拾壹〕 **1.** 1, 6. **2.** 3, 6. **3.** 6, -3. **4.** 1, -3. **5.** 3, -1. **6.** 1, -3. **7.** ± 2. **8.** ± 3. **9.** $\frac{4}{3}$. **10.** 11, -9. **11.** $\frac{5}{2}$, $-\frac{5}{4}$. **12.** 40, -5. **13.** 2, $\frac{1}{19}$. **14.** 4, $\frac{2}{17}$. **15.** $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$. **16.** $\frac{4}{3}$, $-\frac{5}{7}$. **17.** $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$. **18.** 1, $-\frac{1}{6}$. **19.** $\frac{4}{3}$, $\frac{17}{3}$. **20.** $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$. **21.** 3, $-\frac{46}{29}$. **22.** 2, $-\frac{69}{29}$.

23. $11,\ -21.$ **24.** $0,\ 4.$ **25.** $a,\ 2a.$

26. $-\frac{1}{2}(a-b),\ -\frac{1}{2}(a+b).$

〔例四拾貳〕 **1.** $2,\ \frac{1}{2}.$ **2.** $3,\ -7.$ **3.** $3,\ -2.$

4. $-\frac{1}{3},\ -\frac{8}{3}.$ **5.** $3,\ -\frac{14}{3}.$ **6.** $2,\ \frac{8}{5}.$ **7.** $-5,\ -15.$

8. $-3,\ \frac{1}{2}.$ **9.** $7,\ \frac{3}{2}.$ **10.** $3,\ -25{\cdot}7.$ **11.** $5,\ -6.$

12. $2.$ **13.** $4,\ -1.$ **14.** $2,\ \frac{1}{2}.$ **15.** $4,\ -\frac{27}{5}.$

16. $5,\ -\frac{7}{3}.$ **17.** $2\pm2\sqrt{3}.$ **18.** $a,\ 2a.$

19. $\frac{1}{3}\{a\pm\sqrt{(2a^2-b^2)}\}.$ **20.** $-a,\ \frac{1}{a}.$ **21.** $a,\ \frac{1}{a}.$

22. $-b,\ 2a-b.$ **23.** $1,\ \frac{a-b}{b-c}.$ **24.** $1,\ -\frac{a+b+c}{a+b}.$

25. $\frac{b}{a},\ \frac{a}{b}.$ **26.** $-\frac{b}{c},\ -\frac{c}{b}.$ **27.** $\frac{a+b}{a-b},\ \frac{b-a}{b+a}.$

28. $\frac{b+a}{b-a},\ \frac{b-a}{b+a}.$ **29.** $a,\ -\frac{1}{a}.$ **30.** $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}.$

31. $a+b,\ \frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}.$ **32.** $a+b,\ \frac{a^2+b^2}{a+b}.$ **33.** $b,\ \frac{a^2}{b}.$

34. $a,\ b.$ **35.** $c,\ -\frac{a^2+b^2+ac+bc}{a+b+2c}.$

36. $c,\ -\frac{ab(2c+a+b)}{ac+bc+2ab}.$ **37.** $0,\ \pm\sqrt{ab}.$ **38.** $0,\ -\frac{a+b}{2}.$

〔例四拾三〕 **1.** $-1.$ **2.** $2,\ -1.$ **3.** $3,\ 8.$

4. $7,\ 2.$ **5.** $2,\ 11.$ **6.** $5,\ 9.$ **7.** $4,\ 0.$

8. $4,\ \frac{8}{3}.$ **9.** $9,\ \frac{1}{4}.$ **10.** $1,\ 6.$ **11.** $1,\ -\frac{1}{2}.$

12. $15.$ **13.** $16,\ \frac{9}{4}.$ **14.** $0,\ -4.$ **15.** $6,\ -\frac{2}{9}.$

16. $6.$ **17.** $6,\ -\frac{18}{25}.$ **18.** $\frac{1}{3},\ \frac{1}{19}.$ **19.** $2,\ 3.$

20. $0.$ **21.** $\frac{4}{5}.$ **22.** $\frac{25}{13}.$ **23.** $8,\ \frac{25}{288}.$

24. $a,\ b.$ **25.** $0,\ 4(a+b).$ **26.** $-a,\ -b.$

27. $-\frac{(a-b)^2}{8(a+b)}.$ **28.** $8,\ -2.$ **29.** $9.$

〔例四拾四〕 **1.** $x^2+5x+6=0.$ **2.** $4x^2-1=0.$

3. $6x^2+5x+1=0.$ **4.** $x^2-3x=0.$

5. $x^3-2x^2-15x=0.$ **6.** $x^2-2=0.$ **7.** $x^3-3x=0.$

8. $x^2-4x+1=0.$ **9.** $x^2-2ax+a^2-b=0.$

10. $0,\ -4a^2.$ **11.** $-3,\ -5.$ **12.** $5,\ 3.$

13. $\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}.$ **14.** $\frac{1}{2},\ -\frac{7}{2}.$ **15.** $-\frac{7b}{6a},\ -\frac{4}{3a}.$

18. $14p^2.$ **20.** $\frac{4}{3}.$ **21.** 3 或ハ $-5.$ **22.** $8.$

25. $2x^2-23x+11=0.$ **26.** $9x^2-49x+49=0.$

27. $a^3x^3+a(ab+2ca-b^2)x+ac(a+c)+b(3ac-b^2)=0.$

28. $ac-b^2=0.$ **29.** $acx^2-(a^2+c^2)x+ac=0.$

38. x ノ値カ $\frac{1}{3}$ ト $\frac{1}{2}$ ノ間ニアラサル時.

39. 1 ヨリ大ナラサルカ或ハ 3 ヨリ小ナラス. **40.** $\frac{1}{4}$.

〔例四拾五〕 **1.** $\pm1,\ \pm2$. **2.** $\pm2,\ \pm\sqrt{-2}$.

3. $\pm1,\ \pm3$. **4.** $2,\ -1\pm\sqrt{-3},\ -\sqrt[3]{3}$. **5.** $\pm5,\ \pm2$.

6. $\pm a,\ \pm\dfrac{\sqrt{-1}}{a}$. **7.** $\pm a,\ \pm a\sqrt{-1},\ \pm\dfrac{1}{a},\ \pm\dfrac{\sqrt{-1}}{a}$.

8. $2,\ -1,\ 3,\ -2$. **9.** $-3,\ 2,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{-3}$.

10. $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$, **11.** $2,\ \frac{1}{8}(1\pm\sqrt{-15})$

12. $-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5},\ -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-1}$. **13.** $1,\ -3\pm2\sqrt{2}$.

14. $-3,\ 2,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{-3}$. **15.** $\frac{7}{2},\ -\frac{3}{2},\ 1\pm\sqrt{5}$.

16. $0,\ -3,\ \frac{1}{2}(-3\pm\sqrt{14})$. **17.** $2,\ -8,\ -3\pm\sqrt{45}$.

18. $7,\ -\frac{3}{2},\ \frac{11}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{243}$. **19.** $\pm\frac{1}{2},\ 2,\ 3$

20. $-3,\ 6\pm\sqrt{-26}$. **21.** $\pm\sqrt{2},\ \frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-7})$.

22. $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-31}),\ 2,\ -3$. **23.** $\pm\sqrt{3}$.

24. 16, 1 或ハ $x(17-x)=(16)^4$.

25. $-1,\ \frac{1}{2}(-7\pm\sqrt{45})$. **26.** $1,\ \frac{1}{4}(1\pm\sqrt{-15})$.

〔例四拾六〕 **1.** $3,-7$ 或 $7,-3$. **2.** $3,\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{3},3$.

3. $6,\ -4$ 或 $-6,\ 4$. **4.** $1,\ 1$ 或 $\frac{117}{73},\ \frac{7}{73}$.

5. $1,\ 3$ 或 $\frac{21}{5},\ \frac{7}{5}$. **6.** $2,\ 3$ 或 $3,\ 2$.

7. $3,\ 2$ 或 $\frac{2}{5},\ -\frac{3}{5}$. **8.** $1,\ -2$ 或 $6,\ 8$.

9. $\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}$ 或 $-\frac{5}{3},\ -\frac{14}{9}$.

10. $\dfrac{a}{4}(2+b\pm\sqrt{b^2-4}),\ \dfrac{a}{4}(2-b\mp\sqrt{b^2-4})$. **11.** $\frac{7}{2},\ \frac{23}{7}$.

12. $1,\ 3$ 或 $\frac{5}{4},\ 2$. **13.** $6,\ 7$ 或 $-\frac{13}{2},\ \frac{53}{4}$.

14. $-1,\ -3$ 或 $\frac{8}{7},\ \frac{18}{49}$.

〔例四拾七〕 **1.** $\pm9,\ \pm2$ 或 $\pm\dfrac{7}{\sqrt{2}},\ \mp\dfrac{11}{\sqrt{2}}$.

2. $\pm5,\ \pm1$ 或 $\pm4,\ \pm\frac{1}{2}$. **3.** $\pm14,\ \mp8$ 或 $\pm1,\ \pm5$.

4. $\pm1,\ \pm2$ 或 $\pm7\sqrt{-\frac{1}{2}},\ \mp3\sqrt{-\frac{1}{2}}$.

5. $\pm3,\ \pm5$ 或 $\pm36,\ \mp\frac{23}{2}$. **6.** $\pm5,\ \pm3$ 或 $\pm4\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2}$.

7. $\pm1,\ \pm3$ 或 $\pm5,\ \pm3$. **8.** $\pm8,\ \mp2$ 或 $\pm\frac{2}{9}\sqrt{21},\ \mp\frac{8}{9}\sqrt{21}$.

9. $\pm2,\ \mp1$ 或 $\pm\frac{18}{7},\ \mp\frac{1}{7}$. **10.** $\pm5,\ \pm1$ 或 $\pm16,\ \mp\frac{9}{2}$.

11. $\pm1,\ \pm2$ 或 $\pm\frac{1}{7},\ \pm\frac{18}{7}$.

12. $\pm3,\ \pm2$ 或 $\pm\dfrac{31}{\sqrt{145}},\ \mp\dfrac{8}{\sqrt{145}}$. **13.** $\pm3,\ \pm2$ 或 $\pm1,\ \pm2$.

14. $3,\ -4$ 或 $-4,\ 3$. **15.** $3,\ -6$ 或 $-6,\ 3$.

16. $4,\ 15$ 或 $6,\ 10$. **17.** $3,\ -\frac{1}{3}$ 或 $-1,\ 1$.

〔例四拾八〕 **1.** $7,4$ 或 $-4,-7$. **2.** $5,3$ 或 $-3,-5$.

3. $4,\ 3$ 或 $3,\ 4$. **4.** $5,\ -4$ 或 $-4,\ 5$. **5.** $\pm3,\ \pm3$.

6. $4,\ 1$ 或 $-1,\ -4$. **7.** $-\frac{1}{4},\ \frac{1}{9}$.

8. $\pm\sqrt{2},\ \pm\sqrt{2}$ 或 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{59},\ \mp\frac{1}{4}\sqrt{59}$. **9.** $\pm\frac{1}{2},\ \mp\frac{1}{2}$.

10. $-3, 4$ 或 $4, -3$ 或 $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5}), \frac{1}{2}(1\mp\sqrt{5})$.

11. $-1, 6$ 或 $6, -1$ 或 $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{17}), \frac{1}{2}(5\mp\sqrt{17})$. **12.** $3, 0$ 或 $-7, 5$.

13. $\frac{6}{7}, \frac{7}{12}$ 或 $\frac{12}{7}, \frac{7}{6}$. **14.** $-1, 0$ 或 $2, 1$ 或 $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$.

15. $5, -3$. **16.** $5, 4$ 或 $4, 5$ 或 $\frac{1}{2}(-9\pm\sqrt{161}), \frac{1}{2}(-9\mp\sqrt{161})$.

17. $\pm3, \pm1$ 或 $\pm1, \pm3$ 或 $\pm3\sqrt{-1}, \pm\sqrt{-1}$ 或 $\pm\sqrt{-1}, \pm3\sqrt{-1}$. **18.** $1, 1$ 或 $\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{-7}), \frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{-7})$

19. $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}$ 或 $\pm\frac{1}{3}\sqrt{-14}, \mp\frac{1}{2}\sqrt{-14}$.

20. $0, 0$ 或 $\dfrac{a^2+b^2}{a}, \dfrac{a^2+b^2}{b}$. **21.** a, b.

22. $\pm6, \pm\frac{8}{3}, \pm\frac{3}{2}$.

23. $\pm1, \pm2, \pm3$ 或 $\pm\sqrt{-1}, \pm2\sqrt{-1}, \pm3\sqrt{-1}$.

24. $\pm\frac{8}{5}, \pm\frac{12}{5}, \pm1$. **25.** $\pm1, \pm4, \pm2$. **26** $0, \pm1, \pm2$.

27. $\pm\dfrac{2}{\sqrt{35}}, \pm\dfrac{10}{\sqrt{35}}, \pm\dfrac{14}{\sqrt{35}}$. **28.** $8, 2$ 或 $2, 8$.

29. $a, -b$ 或 $\dfrac{25a}{9}, -\dfrac{7}{9}b$. **30.** $\pm\sqrt[3]{\frac{1}{6}}, \pm\sqrt[3]{6}, \pm96\sqrt[3]{6}$.

〔例四拾九〕 **1.** $\pm27, \pm9$. **2.** 7. 11.

3. $\pm25, \pm5$. **4.** 12 及ヒ 13. **5.** 38, 42.

6. 3 或ハ 63. **7.** 39 間, 29 間. **8.** ±2. **9.** 50.

10. 18. **11.** 水 18 升, 酒 9 升. **12.** 20. **13.** 20.

14. 75. **15.** $3\frac{9}{17}$. **16.** 4 哩. **17.** 45 及ヒ 60.

18. $1\frac{5}{6}$ 時. **19.** 4 日. **20.** 40 錢. **21.** 18 錢.

22. 48. **23.** 10 錢及ヒ 8 錢. **24.** 72. **25.** 10 圓, 5 圓, 1000 圓. **26.** $\frac{1}{2}$ 及ヒ $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{5}{2}$ 及ヒ $-\frac{5}{3}$.

27. 甲 $1\frac{2}{3}$ 里, 乙 $\frac{5}{6}$ 里. **28.** 578. **29.** 18 間, 8 間.

30. 1500 坪. **31.** 9 及ヒ 4. **32.** 210 哩或ハ 144 哩.

〔雜四〕 (A) **1.** y. **2.** $a^3-125b^3+8c^3+30abc$.

3. $x^2+x(a-2b)+(a^2+3b^2)$. **4.** (1) $3(x+y+z)(x-y-5z)$, (2) $(x^2z-1)(y^2z-1)$, (3) $6m(n+m)(n-m)$.

5. (1) $\dfrac{x+6}{2-x-x^2}$. (2) $\dfrac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

6. (1) $x=\dfrac{3ab-2ac-bc}{a+2b-3c}$, (2) $x=2$ 或 $2. \frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ 或 2.

8. 17 及ヒ 18.

(B) **1.** 6. **3.** $x^4+2ax^3+3a^2x^2+2a^3x+a^4$.

5. (1) $\dfrac{2(x+3)}{x^4-1}$ (2) 1. **6.** (1) $x=-\frac{1}{5}$, (2) 5 或 $-6\frac{2}{5}$, (3) $x=\pm2, y=\pm3$ 或 $x=\pm\dfrac{5}{\sqrt{2}}, y=\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

8. 840 枚.

(C) **1.** (1) $24a-21b$, (2) $a^6-6a^4b^2-7a^2b^4-4b^6$.

3. $4xy-6x^2-2y^2$.

4. (1) $(3x+2)(3x+1)$,

(2) $(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a+b-c-d)(-a+b+c-d)$.

5. y. **6.** (1) $x=-212$, (2) $x=y=a$, **7.** 3, 5.

8. 6 志 2 片, 5 志 5 片.

(D) **2.** $3+2x+8x^2+4x^3+x^4$.

5. $(x+1)(x+2)(x+3)(x-7)$, $x=7$.

6. (1) $x=\frac{2}{3}$, $y=3$, (2) $x=a$ 或 b,

)3) $x=7$, $y=1$ 或 $x=-1$, $y=-7$ 或 $x=3\pm\sqrt{-3}$,

$y=-3\pm\sqrt{-3}$. **8.** 1 石.

(E) **1.** $2\frac{5}{6}$. **3.** $-3a+3b-18c+6d$. **4.** $\frac{1}{x+y}$.

5. (1) $\frac{1}{2}(a+b)$, (2) 0 或 4,

(3) $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{2}{3}$ 或 $x=1\frac{1}{2}$, $y=1\frac{2}{3}$.

6. $(ac-bd)(ad-bc)=(a^2-b^2)^2$. **7.** $x=c$ 或 $\frac{a^2}{c}$.

8. 169 或 144.

(F) **2.** $x-1$, 1. **4.** $x=\frac{1}{2}a$, $y=0$. **5.** 最小 2.

6. 2 或 5 叉 4 或 5.

7. $x=a$, $y=0$ 或 $x=0$, $y=a$ ヲ第三方程式 $x^3+y^3=a^3$ ニ代用スレハ適合ス.

8. 15 哩.

〔例五拾〕 **1.** a^{15}. **2.** $-a^6$. **3.** $16a^{20}$. **4.** a^4b^8.

5. $-125a^6b^9c15$. **6.** a^{2m^2}. **7.** $-a^{2mn+m}$.

8. $-a^{2mn-m}b.^{2mn-m}$ **9.** $-\frac{a^{15}}{b^5c^{10}}$. **10.** $(-1)^x a^{mx}b^{nx}c^{px}$.

11. $\frac{a^{mp}}{b^{np}}$. **12.** $(-1)^{m+n}(-1)^3a^mb^{3n}=-(-1)^{m+n}a^mb^{3n}$.

〔例五拾壹〕 **1.** $3x^2-5y$. **2.** $2x^5-3y^3$.

3. x^4-3y^4. **4.** $3x^6-y^3$. **5.** $\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3}$.

6. $\frac{x^2}{a}+4ay^3$.

7. $\frac{3bx^2}{a}-\frac{4ay^2}{b}$. **8.** $\frac{3}{x^3}-7a^5$. **9.** $2a^2+b^2-c^2$.

10. $5a^2-3b^2+2c^2$.

〔例五拾貳〕 **1.** x^2+x+1. **2.** $2x^2-2x-1$.

3. $1-\frac{1}{2}xy-2x^2y^2$. **4.** $2x^2+x-\frac{1}{4}$. **5.** $x^2-x+\frac{1}{4}$.

6. $1+2x+3x^2$. **7.** $4-12x+9x^2$. **8.** $1-2x-2x^2$

9. $x^3-11x+17$. **10.** $a-\frac{1}{2}x+4$. **11.** x^4+x^3-2x-4.

12. $4x-12+\frac{9}{x}$. **13.** $x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$.

14. $x^2+x(y+z)+yz$. **15.** $2(yz+zx+xy)$.

〔例五拾三〕 **1.** $x-8y$. **2.** $1+x+x^2$.

3. x^2-3x+2. **4.** $2x^2-3x+4$.

〔例五拾四〕 **1.** 64. **2.** $\frac{1}{32}$. **3.** 5. **4.** $\frac{125}{8}$.

5. $\frac{16}{9}$. **6.** $\frac{1}{100000}$. **7.** 1000. **8.** $a^{\frac{1}{3}}$. **9.** a^2.

10. $a^{\frac{1}{3}}$. **11.** $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. **12.** ab^2. **13.** ab^{-2}.

14. $a^{-1}b^{\frac{1}{4}}$. **15.** a. **16.** $a^{\frac{1}{2}}$. **17.** 1. **18.** 1.

19. $y^{\frac{1}{3}}$. **20.** x^xy^y. **21.** $x^xy^yz^z$. **22.** $a^{-\frac{1}{3}}b.^{\frac{127}{42}}$

23. 1. **24.** a. **25.** ay. **26.** $a^{\frac{13}{5}}$. **27.** $a.^{\frac{1}{42}}$.

28. $a^{\frac{1}{15}}$. **29.** $a^{\frac{17}{6}}b^{-\frac{8}{3}}$. **30.** b^{-4}. **31.** $\sqrt{a}-\frac{1}{a^2}$.

32. $\frac{\sqrt[4]{b}}{a^4}$. **33.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{b}-\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}}$. **34.** $\frac{1}{a^3\sqrt{b}}+\frac{\sqrt[3]{a^2}}{9\sqrt[3]{b^2}}$.

〔例五拾五〕 **1.** $x-y$. **2.** $x-1$. **3.** a^2-b^2.

4. $a^{\frac{8}{3}}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{4}{3}}+o^{\frac{8}{3}}$. **5.** x^2-1.

6. $x^n+2x^{\frac{n}{2}}+3+2x^{-\frac{n}{2}}+x^{-n}$.

7. $x^{2n}y^{-2n}+2x^ny^{-n}+3+2x^{-n}y^n+x^{-2n}y^{2n}$.

8. $a+b+c-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$. **9.** $\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{81}b^2$.

10. $a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$. **11.** $x^n+x^{\frac{n}{2}}y^{\frac{n}{2}}y^n$.

12. $x^{\frac{4}{5}}+3x^{\frac{3}{5}}y^{\frac{1}{3}}+9x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{3}}+27x^{\frac{1}{5}}y+81y^{\frac{4}{3}}$.

13. $x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$. **14.** $a^{\frac{2}{3}}-a^{-\frac{2}{3}}$.

15. $\frac{32\sqrt{2}+3\sqrt[3]{10}}{38\sqrt[3]{100}}$. **16.** $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+1+2x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{2}{3}}$.

17. $a^2c^{\frac{5}{2}}$. **18.** $\frac{8}{1-x^2}$. **19.** $2b$. **20.** $2xa^{-1}-3+4x^{-1}a$.

21. $x^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{4}{5}}$. **22.** $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{5}{6}}$.

〔例五拾六〕 **1.** 1 或 $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$. **2.** 4 或 36.

3. 3 或 $\frac{3}{2}(-1\pm\sqrt{-3})$ 或 -1 或 $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$.

4. 27 或 1. **5.** $-\frac{1}{32}$ 或 $\frac{243}{32}$. **6.** $\frac{1}{4}$ 或 $-\frac{1}{2}$.

7. 4 或 $\frac{1}{4}$. **8.** 3^n 或 2^n. **9.** 2 或 0.

10. ±1. **11.** 0. **12.** -4. **13.** ±3.

〔例五拾七〕 **1.** $7\sqrt{3}$. **2.** $12\sqrt{2}$. **3.** $3\sqrt{5}$.

4. $\sqrt{7}$. **5.** $8\sqrt[3]{5}$. **6.** 0. **7.** $\sqrt[3]{7}$. **8.** $4\sqrt{2}$.

9. 0. **10.** $(a+2b-3)\sqrt{a}$. **11.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

12. $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\sqrt[3]{a^2b}$. **13.** 6. **14.** 6. **15.** $90\sqrt{3}$.

16. $6\sqrt[3]{4}$. **17.** 30. **18.** 6. **19.** $10\sqrt[6]{40}$. **20.** $4\sqrt[6]{2}$.

21. $\frac{3}{5}$. **22.** 8. **23.** $7\sqrt[3]{9}$. **24.** $\sqrt[mnp]{a^{np}b^{pm}c^{mn}}$.