



中華文庫

初中第一集

數學補習用書

三角

許蘆舫編著

秦沅校訂

中華書局印行



編輯大意

著者因鑒於近年投考高中學生數學程度的低落，各地補習學校、補習夜校以及暑期學校的日見增多，而所用數學教材，全係普通教科書，不論教者學者都感覺種種困難，所以特地編了這套初中數學補習用書，以應各學校的需要。

本書分算術、代數、幾何、三角四冊，這是三角的一冊，內容有下列的幾個特點：

(一)取材雖與普通教科書大路相同，然而去其繁蕪，攝其精華，把在半年之內才能修完的功課，縮短在一個月到二個月裏面讀畢。

(二)敘述定義、法則及證明公式等等，都用極設顯易曉的方法，不但可由教師講授，並可自己修習；不但可作補習用書，並可作投考指南用。

(三)編制方面，務求有條不紊；排印方面，力求醒眉豁目。

總之，本書全部格字細律化，使學者可以一目瞭然，免去東翻西檢的麻煩。

(四)本書篇幅雖甚冗長，然教師所應講述的，書中已詳備無遺，不必另加補充，所以費時不多。平均每小時可授三頁，假定每天授一小時，在七個星期之內，可以全部授畢。但實際可伸可縮，如時間充裕，把習題全部講解，另加黑板練習及測驗，可授

半學期；如嫌時間不足，可把做*號的部分略去不教，這樣僅須四個星期。

(五)本書所選習題，都細加斟酌，嚴格取捨，雖為量不多，然初中學生得此，已足應付裕如。

(六)習題中比較複雜的，都加以提示，或更舉出圖形，俾教師可以節省講解的時間，由學生自行練習。不過學生最好能先用一番腦力試做一下，非到萬不得已，不去看提示，藉此仍可得一鍛鍊思想的機會。

(七)本書所有公式，都用粗體字排印，異常醒目，且順次用羅馬字逐組標明次第，以便檢閱。又附錄公式索引於後，將全部公式彙集一處，分門別類，並註頁數，檢查時極稱便利。

(八)按初中三角課程標準，僅須習數值三角的一部，故本書編制，儘先講述三角形的解法，其他部分悉列入下半冊內，俾可自由伸縮。

(九)本書因限於上條所述的標準，故解普通三角形所用的公式，祇能用繁複的方法證明。但在習過任何角的三角函數之後，在第八章仍補出他的簡易證法。

(十)本書於第四章第三節所述正切定律，及半角正切公式的證法，俱係別出心裁，為他書所不常見。

(十一)簡易三角恆等式的證法，及三角方程式的解法，雖不在數值三角範圍以內，然為投考高中所必需，故本書在第二章內詳述之。

(十二)查各校高中一年級三角入學試題，不外解特種銳角的直角三角形，證三角恆等式及解三角方程式等數種，故學者如僅須準備投考高中時，可習至第三章第一節為止，並可略去第二章第三、四兩節，這樣一來，不滿十天的功夫，就能從容應試，可謂簡捷之至。

(十三)關於角的單位，本沿用古代的度分秒制，但計算很覺不便。考近今歐西各國，在實用數學中，多改用度與度的百分小數而不用分、秒，故本書按例用度的單名數表角，而於附錄三中附載分秒數與度數互化表，以便換算。

(十四)本書附錄計算題答案於後，俾教師不及批閱練習簿時，學生可自行檢查有無錯誤。

(十五)本書附各種用表，係最新式的一種。篇幅有限，而能求得四位數的對數，或度的小數二位的諸角的函數及其對數，極切實用。

(十六)關於對數及坐標，在代數中雖已習過，但因應用的機會不多，恐學者仍未十分熟諳，故本書特再略述大槪，俾應用時不致有扞格不入之弊。

(十七)本書所列計算的例題，算式力求整齊清楚，學者應盡力仿效。

本書係著者本二十餘年的教授經驗，同歷年積存的講義稿，

經數月的整理修正，始克告成，又蒙老師秦沅先生加以校訂，內容或較匆促出版的稍稍完備。惟掛漏之處，仍恐難於俾免，尙請用此書者賜函指正，實爲萬幸。

三 角



目 錄

| | |
|-----------------|-------|
| 第一章 緒論 | 1—4 |
| 第一節 三角學的目的 | 1 |
| 第二節 從幾何到三角 | 2 |
| 第二章 銳角的三角函數 | 5—23 |
| 第一節 三角函數的定義 | 5 |
| 第二節 特殊銳角的三角函數 | 7 |
| 第三節 任何銳角的三角函數 | 9 |
| 第四節 餘角的三角函數 | 12 |
| 第五節 三角函數間的基本關係 | 12 |
| 第六節 簡易三角恆等式 | 16 |
| 第七節 簡易三角方程式 | 20 |
| 第三章 直角三角形解法 | 24—43 |
| 第一節 解特殊銳角的直角三角形 | 24 |
| 第二節 解任何銳角的直角三角形 | 30 |

| | | |
|-----|---|---------|
| 第三節 | 用對數解直角三角形 | 36 |
| 第四章 | 普通三角形解法 | 44—66 |
| 第一節 | 三角函數的廣義 | 44 |
| 第二節 | 補角的三角函數 | 46 |
| 第三節 | 解普通三角形應用的公式 | 48 |
| 第四節 | 解普通三角形 | 55 |
| 第五章 | 三角形的性質 | 67—77 |
| 第一節 | 三角形的面積 | 67 |
| 第二節 | 外接圓及各切圓的半徑 | 71 |
| 第三節 | 邊與各角函數的關係 | 73 |
| 第六章 | 任何角的三角函數 | 78—95 |
| 第一節 | 角的廣義 | 78 |
| 第二節 | 任何角函數的定義及正負 | 79 |
| 第三節 | 用 θ 的函數表 $n \cdot 90^\circ \pm \theta$ 的函數 | 82 |
| 第四節 | 任何角函數的值 | 89 |
| 第五節 | 用線段表三角函數的值 | 91 |
| 第六節 | 三角函數值的變化 | 92 |
| 第七章 | 三角函數的重要恆等式 | 93—106 |
| 第一節 | 任何角函數間的基本關係 | 93 |
| 第二節 | 兩角的三角函數 | 97 |
| 第三節 | 倍角及半角的三角函數 | 102 |
| 第八章 | 補篇 | 107—110 |

| | |
|----------------|---------|
| 第一節 三角方程式 | 107 |
| 第二節 三角形重要性質的簡證 | 109 |
| 附錄一 公式索引 | 111—115 |
| 附錄二 計算題答案 | 116—122 |
| 附錄三 本書用表 | 123—142 |
| 一 三角函數表 | 124 |
| 二 對數表 | 128 |
| 三 三角函數對數表 | 132 |
| 四 分秒數與度數互化表 | 142 |

數學補習用書

三 角



第一章 緒論

第一節 三角學的目的

東
北
圖
書
館

「度量」是我們在日常生活中不可缺少的一件事。但普通如製衣、造屋等，都是用尺直接去量出布的長短，或地的廣狹，他的應用範圍還很狹小。假使要求山峯的高度、河海的廣狹、海島的距離，天體的遠近，那就非有間接的度量方法，不能達到目的了。

欲行間接度量，須用特種器械，他的方法詳載在測量術中，不在本書範圍以內。凡利用測量術得到的結果，往往不是欲求的數。這時應就量得的結果，推算所求的距離、方向、面積或其他各件。這推算的方法，才是三角學中所要研究的事情。

就測量的結果以求未知數，通常都利用三角形。凡三角形必有三邊同三角，這六件中間，若能知道他的一邊及其他任意的二件，就能由三角學以求其餘的三件，這叫做解三角形。解三角形的的方法，雖不是三角學的唯一目的，但好算是主要的目的了。

第二節 從幾何到三角

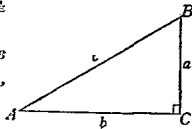
在幾何學上，已知三角形的一邊及其他五件中的任意二件，可由作圖法畫出這三角形，再直接度量而得其餘三件，這是利用作圖法解三角形。手續雖很簡易，但所得的結果，不能十分精確，所以我們另創三角學，用計算的方法來替代作圖，可以得到很好的效果。

用計算的方法解三角形，仍須應用幾何定理，但由幾何定理只能推知三角形中角與角的關係，或更知邊與邊的關係，卻不知道角與邊的關係。如欲由角求邊，或由邊求角，就非單藉幾何定理所能辦到。

欲推知三角形中角與邊的關係，當先就直角三角形去考察：

設直角三角形 ABC 的 $\angle C$ 是直角， c 是斜邊，兩銳角 A 與 B 的對邊依次是 a 與 b 。

註 依習慣， a 表 $\angle A$ 的對邊， b 表 $\angle B$ 的對邊， c 表 $\angle C$ 的對邊。又在直角三角形中，恆以 C 表直角， c 表斜邊。



由幾何定理，得

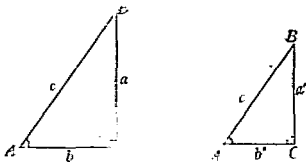
$$\angle A + \angle B = 90^\circ \dots\dots\dots (1)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \dots\dots\dots (2)$$

(1)式表角與角的關係，如已知一銳角，可利用他求其餘一銳角；(2)式表邊與邊的關係，如已知二邊，可利用他求第三邊。但是角與邊的關係，却不能從上二式得出來。

於是我們先就銳角 A 推想，看他與邊有什麼關係。

設另有一個直角三角形 $A'B'C'$ ， $\angle C'$ 是直角。



若

$$\angle A = \angle A',$$

則

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

(兩直角三角形的一銳角互等，則兩形相似)。

於是

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \quad \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}, \dots\dots\dots$$

(相似三角形的對應邊成比例)。

若

$$\angle A \neq \angle A',$$

則上列的關係都不能成立。

可見 $\frac{a}{c}$ ， $\frac{b}{c}$ ， $\frac{a}{b}$ 諸比 (或其反比) 與銳角 A 有密切的關係。

從此知道這 A 角單獨的一邊雖沒有關係，卻同任何二邊的比有一定不變的關係。

換句話說，就是直角三角形中銳角 A 的值若是一定，那末不論三邊的長短如何，其中任何二邊的比也是一定；銳角 A 的值若變，任何二邊的比也變。

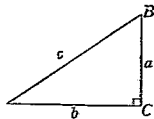
若就銳角 B 推想，也有同樣的關係。這種關係非常重要，三角學的基礎，就樹立在這種關係的上面。

至於在普通三角形中，由幾何定理只能知三角的和是 180° ，其他的關係，也須利用直角三角形中二邊的比推廣而得，學到後面自會明白。

第二章 銳角的三角函數

第一節 三角函數的定義

在直角三角形 ABC 中, $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{b}$ 各比, 或其反比 $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}$, 都同銳角 A 有密切關係, 總稱 A 角的三角函數。另外再給他們各定一個名字:



1. 正弦 (sine) $\frac{a}{c}$ 是 A 角的正弦, 記做 $\sin A$.
2. 餘弦 (cosine) $\frac{b}{c}$ 是 A 角的餘弦, 記做 $\cos A$.
3. 正切 (tangent) $\frac{a}{b}$ 是 A 角的正切, 記做 $\tan A$.
4. 餘切 (cotangent) $\frac{b}{a}$ 是 A 角的餘切, 記做 $\cot A$.
5. 正割 (secant) $\frac{c}{b}$ 是 A 角的正割, 記做 $\sec A$.
6. 餘割 (cosecant) $\frac{c}{a}$ 是 A 角的餘割, 記做 $\csc A$.

用公式表示, 就是

$$\begin{array}{l}
 \sin A = \frac{a}{c} \left(\begin{array}{l} \text{對邊} \\ \text{即斜邊} \end{array} \right) \dots\dots\dots (1) \\
 \cos A = \frac{b}{c} \left(\begin{array}{l} \text{鄰邊} \\ \text{即斜邊} \end{array} \right) \dots\dots\dots (2) \\
 \tan A = \frac{a}{b} \left(\begin{array}{l} \text{對邊} \\ \text{即鄰邊} \end{array} \right) \dots\dots\dots (3) \\
 \cot A = \frac{b}{a} \left(\begin{array}{l} \text{鄰邊} \\ \text{即對邊} \end{array} \right) \dots\dots\dots (4) \\
 \sec A = \frac{c}{b} \left(\begin{array}{l} \text{斜邊} \\ \text{即鄰邊} \end{array} \right) \dots\dots\dots (5) \\
 \csc A = \frac{c}{a} \left(\begin{array}{l} \text{斜邊} \\ \text{即對邊} \end{array} \right) \dots\dots\dots (6)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \sin A \\ \cos A \\ \tan A \\ \cot A \\ \sec A \\ \csc A \end{array}} \right\} \text{[I]}$$

注意 $\sin A$ 等是一種函數(同代數中的 $\log m$ 一樣), A 表一角, 而 $\sin A$ 則表一個數值, 就是 A 角的正弦的數值。所以 $\sin A$ 是單獨的一個數, 切不可看作是 $\sin \times A$ 。

註 三角函數除上述的六種外, 尚有正矢 (versed sine) 同餘矢 (covered sine) 二種。他們的定義是 $\text{versin } A = 1 - \cos A$, $\text{coversin } A = 1 - \sin A$ 。但因不常用, 故本卷從略。

習 題 一

已知直角三角形 ABC 各邊的值, 試求下列三題中 A 角的各三角函數:

(1) $a=3$, $b=4$, $c=5$.

(2) $a=5$, $b=12$, $c=13$.

(3) $a=8$, $b=15$, $c=17$.

(4) 已知 $a=20$, $c=29$, 求 A 角的各三角函數。

提示 先用畢氏定理求得 b 的值,然後仿上題解。

- (5) 已知 $c=7$, $b=24$, 求 A 角的各三角函數。
 (6) 已知 $b=40$, $c=41$, 求 A 角的各三角函數。
 (7) 已知 $\sin A = \frac{3}{5}$, 求 A 角的其他三角函數。

提示 因 $\sin A = \frac{a}{c}$, 故 $\frac{a}{c} = \frac{3}{5}$, 設 $a=3$, 則 $c=5$ 。可仿(4)題解。

- (8) 已知 $\cos A = \frac{5}{13}$, 求 A 角的其他三角函數。
 (9) 已知 $\tan A = \frac{8}{15}$, 求 A 角的其他三角函數。
 (10) 已知 $\cot A = \frac{24}{7}$, 求 A 角的其他三角函數。
 (11) 已知 $\sec A = \frac{41}{40}$, 求 A 角的其他三角函數。
 (12) 已知 $\csc A = \frac{29}{20}$, 求 A 角的其他三角函數。

第二節 特種銳角的三角函數

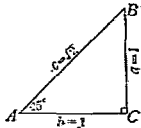
1. 45° 的三角函數 作等腰直角

三角形 ABC ,

使 $C=90^\circ$, $a=b=1$,

則 $A=B=45^\circ$, $c=\sqrt{2}$ 。

從圖知



$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\text{即 } \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \cot 45^\circ = 1,$$

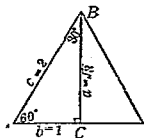
$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\text{即 } \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2},$$

$$\tan 45^\circ = 1, \quad \csc 45^\circ = \sqrt{2}.$$

2. 60° 的三角函數 作正三角形，使其各邊的長為 2，從 B 作對邊的垂線 BC ，成直角三角形 ABC ，

$$\text{則 } A=60^\circ, c=2, b=1, a=\sqrt{3}.$$

從圖知



$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\text{即 } \frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sec 60^\circ = 2,$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\text{即 } \frac{2}{\sqrt{3}} \right).$$

3. 30° 的三角函數 如前圖， $B=30^\circ$ ，故知

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\text{即 } \frac{2}{\sqrt{3}} \right),$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\text{即 } \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \quad \csc 30^\circ = 2.$$

注意 上述 30° ， 60° ， 45° 的正弦及餘弦的值，可列成下表的形狀，記憶極便。

| | | | | |
|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------|
| | 30° | 45° | 60° | $\frac{1}{2}\sqrt{1}=0.500$ |
| sin | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}=0.707$ |
| cos | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}=0.866$ |

第三節 任何銳角的三角函數

任何銳角的三角函數，不能同特種銳角那樣容易求出來。在不必十分精密的計算中，可用量角器畫出已知大小的角，使他做一直角三角形的銳角，用尺量得各邊的長，求出他們的比值就得。但這法不切實用，通常只須利三角函數表一檢便得，非常便利。

三角函數表見本書附錄三，其中載着從 0° 到 90° 中間各角的三角函數，是數學家用很精巧的方法算得的，表的第 2、3 兩頁是求正弦及餘弦的，第 4、5 兩頁是求正切及餘切的。至於正割及餘割，因計算方面不常用，所以略去。

求某角的正弦或正切時，在表的左行檢度的整數，上列檢度的第一位小數，在行列相交的格裏，可檢出該角的正弦或正切的小數部分值，至於整數部分，可看同列的左端或左端的上方就得。若求餘弦或餘切時，當在右行檢度的整數，下列檢度的第一位小數，其餘同上面完全一樣。

例題一 $\sin 37^\circ.4 = ?$

解 檢表第 2 頁左行，得 37° ，上列得 .4，在行列相交處得 6074，同列左端的上方是 0，故得 $\sin 37^\circ.4 = 0.6074$ 。

例題二 $\cot 43^\circ.7 = ?$

解 檢表第 5 頁右行，得 43° ，下列得 .7，在行列相交處得 0464，同列左端的上方是 1，故得 $\cot 43^\circ.7 = 1.0464$ 。

若已知的角有度的小數二位時，可把第二位小數五捨六入，

使成一位小數，仿上法求他的三角函數，再在右側附表中，依照捨去的或增入的數找出適當的數加減就得。

例題一 $\tan 50^\circ.73 = ?$

解 先檢得 $\tan 50^\circ.7 = 1.2218$ 。因從表知正切（或正弦）的值，角大時亦大，故知 $\tan 50^\circ.73 > 1.2218$ 。因度的小數第二位多 3，檢附表橫綫上 3 字的下方， 50° 的一列得 13，與 1.2218 的末位相齊，加得 1.2231，即為所求的值。

例題二 $\sin 73^\circ.88 = ?$

解 先檢得 $\sin 73^\circ.9 = 0.9608$ ，知 $\sin 73^\circ.88 < 0.9608$ 。因度的小數第二位少 2，檢附表知函數的末位應少 1，故得 $\sin 73^\circ.88 = 0.9607$ 。

例題三 $\cos 32^\circ.34 = ?$

解 先檢得 $\cos 32^\circ.3 = 0.8453$ 。因從表知餘弦（或餘切）的值，角大時反小，故知 $\cos 32^\circ.34 < 0.8453$ 。因度的小數第二位多 4，檢附表知函數的末位反應少 4，故得 $\cos 32^\circ.34 = 0.8449$ 。

若已知角的度數有三位（或三位以上）小數時，可把第三位用四捨五入法略去。

若已知角是記出分、秒數的，可先應用本書附錄三第 20 頁的分秒數化度數表，化成度的小數，再照上法求他的函數。

又如已知某角的函數的值，也可以用這表回過去求角的度數，方法是上法的還原，看下例自明。

例題一 $\tan x = 0.8537$ ，求銳角 x 的值。

解 檢表知 $\tan 40^\circ.5 = 0.8541$ ，這函數的值與題中的值是相近。題中的函數末位較這數少 4，在開列附表中只有 3 最相近，看上方（橫綫上）是 1，故知函數末位少 4，度數的第二位小數均少 1，得 $x = 40^\circ.49$ 。

例題二 $\cos x = 0.4963$, 求銳角 x 的值。

解 檢表知 $\cos 60^{\circ}.2 = 0.4970$ 最為相近。因題中的函數末位少 7, 同列附表中有 6 同 8, 通常取較大的 8, 上方是 5, 故知函數末位少 7, 度數的第二位小數約多 5, 得 $x = 60^{\circ}.25$ 。

註 從 $\tan 77^{\circ}$ 到 $\tan 90^{\circ}$, 或從 $\cot 0^{\circ}$ 到 $\cot 12^{\circ}$ 的諸函數, 因通常難得遇到, 且相鄰函數的差太大, 所以表中沒有詳細的附表。但在必要時可利用比例去求, 此處從略。

習 題 二

求下列各題中函數的值:

(1) $\sin 37^{\circ}.78$.

(2) $\cos 29^{\circ}.33$.

(3) $\tan 61^{\circ}.12$.

(4) $\cot 8^{\circ}.27$.

(5) $\tan 37^{\circ}.77$.

(6) $\sin 66^{\circ}.46$.

(7) $\cot 35^{\circ}.21$.

(8) $\cos 27^{\circ}.89$.

(9) $\sin 5^{\circ}.04$.

(10) $\tan 72^{\circ}.43$.

(11) $\tan 36^{\circ}.01$.

(12) $\cos 84^{\circ}.57$.

(13) $\cos 54^{\circ}.45$.

(14) $\sin 78^{\circ}.98$.

(15) $\cot 79^{\circ}.33$.

求下列各式中銳角 x 的值:

(16) $\sin x = 0.4738$.

(17) $\tan x = 1.2334$.

(18) $\cos x = 0.8711$.

(19) $\cot x = 2.3751$.

(20) $\cot x = 1.5432$.

(21) $\sin x = 0.6349$.

(22) $\tan x = 0.8763$.

(23) $\cos x = 0.1234$.

第四節 餘角的三角函數

一角的正弦、正切或正割，等於他的餘角的餘弦、餘切或餘割，用公式表示如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= \cos (90^\circ - A) \cdots \cdots \cdots (1) \\ \tan A &= \cot (90^\circ - A) \cdots \cdots \cdots (2) \\ \sec A &= \csc (90^\circ - A) \cdots \cdots \cdots (3) \end{aligned} \right\} \text{[II]}$$

一角的餘弦、餘切或餘割，等於他的餘角的正弦、正切或正割，用公式表示如下：

$$\left. \begin{aligned} \cos A &= \sin (90^\circ - A) \cdots \cdots \cdots (4) \\ \cot A &= \tan (90^\circ - A) \cdots \cdots \cdots (5) \\ \csc A &= \sec (90^\circ - A) \cdots \cdots \cdots (6) \end{aligned} \right\} \text{[II]}$$

例 如圖，由三角函數的定義，得

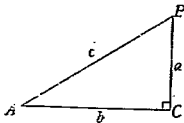
$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos B = \frac{a}{c},$$

$$\therefore \sin A = \cos B.$$

但 $A + B = 90^\circ$ ，即 $B = 90^\circ - A$ 。

$$\therefore \sin A = \cos (90^\circ - A).$$

其餘仿此。



第五節 三角函數間的基本關係

1. 二重關係 銳角 A 的兩種函數間的關係，有下列六種：

$$\left. \begin{aligned} \sin A &= \frac{1}{\csc A} \dots\dots\dots (1) \\ \cos A &= \frac{1}{\sec A} \dots\dots\dots (2) \\ \tan A &= \frac{1}{\cot A} \dots\dots\dots (3) \\ \cot A &= \frac{1}{\tan A} \dots\dots\dots (4) \\ \sec A &= \frac{1}{\cos A} \dots\dots\dots (5) \\ \csc A &= \frac{1}{\sin A} \dots\dots\dots (6) \end{aligned} \right\} \text{【III】}$$

證 由三角函數的定義，知

$$\csc A = \frac{c}{a}, \quad \sin A = \frac{a}{c}.$$

$$\therefore \frac{1}{\csc A} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = 1 \times \frac{a}{c} = \frac{a}{c} = \sin A.$$

其餘仿此。

注意 上列公式中，

$$(1)、(6) \text{ 二式可合為 } \sin A \csc A = 1.$$

$$(2)、(5) \text{ 二式可合為 } \cos A \sec A = 1.$$

$$(3)、(4) \text{ 二式可合為 } \tan A \cot A = 1.$$

2. 三重關係 銳角 A 的三種函數間的關係，重要的有下列二種：

$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \dots\dots\dots (1) \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \dots\dots\dots (2) \end{aligned} \right\} \text{[IV]}$$

註 由三角函數的定義，知

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} = \frac{a}{b} = \tan A$$

其餘仿此。

3. 平方關係 銳角 A 的兩種三角函數平方的關係，有下列三種：

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \dots\dots\dots (1) \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \dots\dots\dots (2) \\ 1 + \cot^2 A &= \csc^2 A \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} \text{[V]}$$

註 $\sin^2 A$ 是 $(\sin A)^2$ 的簡寫，要知道 \sin 不能表一數，故 $\sin^2 A$ 不能看作 $\sin^2 \times A$ 。

證 因 $a^2 + b^2 = c^2$ (畢氏定理)，

以 c^2 除兩邊，得 $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ ，

即 $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ 。

但 $\frac{a}{c} = \sin A$, $\frac{b}{c} = \cos A$,

$\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 。

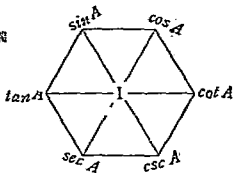
其餘仿此。

注意 上列三組公式，非常重要，我們可利用下列的「三角函數的六角形」，以求易於記憶：

(a) 凡右列六角形中在對角線兩端的二數，必互為倒數（即公式【III】）。

(b) 凡在相鄰三頂點上的三數，以一端的數法中間的數，必等於他端的數（其中二式即公式【IV】）。

(c) 凡在水平線上相鄰二數的平方和，必等於其下方夾在正中之一數的平方（即公式【V】）。



習 題 三

(1) 已知 $\sin A = \frac{4}{5}$ ，用公式求 A 角的其他三角函數。

提示 化公式【V】(1) 為 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$ ，可求得 A 角的餘弦。

再用公式【IV】及【III】(5)、(6) 求其他函數。

(2) 已知 $\cos A = \frac{5}{13}$ ，用公式求 A 角的其他三角函數。

(3) 已知 $\tan A = \frac{7}{24}$ ，用公式求 A 角的其他三角函數。

提示 化公式【V】(2) 為 $\sec A = \sqrt{1 + \tan^2 A}$ ，可求 A 角的正割。再

用公式【III】(2) 求餘弦，【V】(1) 的變形求正弦，【III】(4)、

(6) 求餘切、餘割。

(4) 已知 $\cot A = \frac{9}{40}$ ，用公式求 A 角的其他三角函數。

(5) 已知 $\sec A = \frac{13}{12}$ ，用公式求 A 角的其他三角函數。

提示 先用公式【III】(2) 求 $\cos A$ ，再用公式【V】(1) 求 $\sin A$ ，

再用公式【III】(6) 及【IV】求其他各函數。

(6) 已知 $\csc A = \frac{17}{8}$, 用公式求 A 角的其他三角函數。

第六節 簡易三角恆等式

三角函數間的關係 在上節已舉出基本的三組, 但其他的關係還有許多, 總稱三角恆等式。其中比較簡易的, 都可應用上節的三組基本公式, 證明他們成立。證法有下列的四種:

(a) 化簡恆等式中比較複雜的一邊, 使其結果同其他一邊一樣。

(b) 把恆等式兩邊的二式分別化簡, 使他們的結果相同。

(c) 變已知的公式, 使成欲證的恆等式。

(d) 變欲證的恆等式, 使成已知的公式。

凡用 (a) 或 (b) 的方法化簡恆等式的任何一邊時, 通常都先化成只含正弦及餘弦的式子, 然後用代數方法化簡。這是因為正弦及餘弦同其他函數都有簡單關係的緣故。

例題一 試證 $\sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A \csc^2 A$ 。

$$\begin{aligned} \text{證} \quad \sec^2 A + \csc^2 A &= \frac{1}{\cos^2 A} + \frac{1}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A \sin^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A \sin^2 A} \\ &= \frac{1}{\cos^2 A} \cdot \frac{1}{\sin^2 A} = \sec^2 A \csc^2 A. \end{aligned}$$

例題二 試證 $\sin^2 A \tan A + \cos^2 A \cot A + 2 \sin A \cos A$
 $= \tan A + \cot A$ 。

$$\text{證} \quad \text{左邊} = \sin^2 A \cdot \frac{\sin A}{\cos A} + \cos^2 A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} + 2 \sin A \cos A$$

$$= \frac{\sin^4 A + \cos^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2 A)^2}{\sin A \cos A} = \frac{1}{\sin A \cos A}$$

$$\text{右邊} = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A} = \frac{1}{\sin A \cos A}$$

$$\therefore \sin^2 A \tan A + \cos^2 A (\cot A + 2 \sin A \cos A) = \tan A + \cot A$$

例題三 試證 $(\cos^2 A + \cot^2 A) \tan^2 A$

$$= \sec^2 A + (\cos^2 A - 1) \tan^2 A$$

證 左邊 $= \cos^2 A \tan^2 A + \cot^2 A \tan^2 A$

$$= \cos^2 A \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \sin^2 A + 1$$

右邊 $= \sec^2 A + \cos^2 A (\tan^2 A - \tan^2 A)$

$$= 1 + \tan^2 A + \cos^2 A \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \tan^2 A = \sin^2 A + 1$$

\therefore 左右兩邊相等。

例題四 試證 $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A$

證法一 $\sin^4 A + \cos^4 A$

$$= \sin^2 A (\sin^2 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A + \cos^2 A) + \cos^4 A - 2 \sin^2 A \cos^2 A$$

$$= (\sin^2 A + \cos^2 A)^2 - 2 \sin^2 A \cos^2 A$$

$$= 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A$$

證法二 公式 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

兩邊各自乘，得 $\sin^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A + \cos^4 A = 1$

移項，得 $\sin^4 A + \cos^4 A = 1 - 2 \sin^2 A \cos^2 A$

例題五 試證 $\frac{\csc A - \sec A}{\cot A + \tan A} = \frac{\cot A - \tan A}{\csc A + \sec A}$

$$\begin{aligned}
 \text{證法一} \quad \text{左邊} &= \frac{\frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\cos A}}{\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos A - \sin A}{\sin A \cos A}}{\frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cos A}} \\
 &= \frac{\cos A - \sin A}{\sin A \cos A} \cdot \frac{\sin A \cos A}{1} = \cos A - \sin A. \\
 \text{右邊} &= \frac{\frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\cos A}} = \frac{\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin A \cos A}}{\frac{\cos A + \sin A}{\sin A \cos A}} \\
 &= \frac{(\cos A + \sin A)(\cos A - \sin A)}{\sin A \cos A} \cdot \frac{\sin A \cos A}{\cos A + \sin A} \\
 &= \cos A - \sin A.
 \end{aligned}$$

∴ 兩邊相等。

$$\begin{aligned}
 \text{證法二 公式} \quad \csc^2 A &= 1 + \cot^2 A, \\
 \sec^2 A &= 1 + \tan^2 A.
 \end{aligned}$$

$$\text{兩式相減, 得} \quad \csc^2 A - \sec^2 A = \cot^2 A - \tan^2 A.$$

$$\begin{aligned}
 \text{分解因式, 得} \quad &(\csc A + \sec A)(\csc A - \sec A) \\
 &= (\cot A + \tan A)(\cot A - \tan A).
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\csc A - \sec A}{\cot A + \tan A} = \frac{\cot A - \tan A}{\csc A + \sec A}.$$

$$\text{例題六 試證} \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}.$$

$$\text{證 原式自乘, 得} \quad \sin^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A}.$$

$$\text{兩邊各取倒數, 得} \quad \frac{1}{\sin^2 A} = 1 + \tan^2 A.$$

$$\text{但} \quad \frac{1}{\sin A} = \sec A, \quad \frac{1}{\sin^2 A} = \sec^2 A.$$

$$\text{代入, 得} \quad \sec^2 A = 1 + \tan^2 A.$$

因這式是公式, 當然成立, 故原式亦成立。

習 題 四

試證下列的三角恆等式：

- (1) $\sin A \sec A = \tan A$.
- (2) $\sin A \cot A = \cos A$.
- (3) $\sin A \sec A \cot A = 1$.
- (4) $\cos A \csc A \tan A = 1$.
- (5) $\tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \sin^2 A$.
- (6) $\cot^2 A - \cos^2 A = \cot^2 A \cos^2 A$.
- (7) $\sec A - \cos A = \tan A \sin A$.
- (8) $\csc A - \sin A = \cot A \cos A$.
- (9) $\tan A \sin A + \cos A = \sec A$.
- (10) $(1 - \sin^2 A) \tan^2 A = \sin^2 A$.
- (11) $(1 - \sin^2 A) \csc^2 A = \cot^2 A$.
- (12) $\tan^2 A \cos^2 A + \cos^2 A = 1$.
- (13) $\tan A + \cot A = \sec A \csc A$.
- (14) $(\sin A + \cos A)^2 + (\sin A - \cos A)^2 = 2$.
- (15) $(\sin^2 A - \cos^2 A)^2 = 1 - 4 \sin^2 A \cos^2 A$.
- (16) $\cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}}$.
- (17) $\tan A \cos A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$.
- 提示 可變公式 [IV] (1) 及 [V] (1).
- (18) $\sin^3 A - \cos^3 A = \sin^2 A - \cos^2 A$.
- 提示 分解左邊的因式.
- (19) $\frac{\cos A}{1 - \sin A} = \frac{1 + \sin A}{\cos A}$.

16103

提示 可將原式交叉乘, 化成公式.

$$(20) \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = 1.$$

提示 先應用公式 [V] (2)、(3).

$$(21) \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = (\csc A - \cot A)^2.$$

提示 化右邊為 $\frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A} = \frac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}$, 分解因式, 再約分即得.

$$(22) \frac{1+\sin A}{1-\sin A} = (\sec A + \tan A)^2.$$

$$(23) \sin^2 A \cos A + \cos^2 A \sin A = \sin A \cos A.$$

提示 分解左邊的因式.

$$(24) (1-\tan^2 A)^2 = \sec^4 A - 4 \tan^2 A.$$

提示 右邊 = $1 - 2 \tan^2 A + \tan^4 A = 1 + 2 \tan^2 A + \tan^4 A - 4 \tan^2 A$
 $= (1 + \tan^2 A)^2 - 4 \tan^2 A = \dots$.

$$(25) \sin A(1+\tan A) + \cos A(1+\cot A) = \csc A + \sec A.$$

提示 變左邊為 $\frac{\sin A(\cos A + \sin A)}{\cos A} + \frac{\cos A(\sin A + \cos A)}{\sin A}$,

通分, 併成一式, 分解因式, 因 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,

故得 $\frac{\cos A + \sin A}{\sin A \cos A}$.

$$(26) (1+\tan A)^2 + (1+\cot A)^2 = (\sec A + \csc A)^2.$$

提示 實行乘算, 由公式 [V] (2)、(3) 消去兩邊的等數, 以 2 除,
 得 $\tan A + \cot A = \sec A \csc A$, 即(13)題.

第七節 簡易三角方程式

以 x 表角, 由 x 的三角函數所得的方程式, 叫做三角方程

式，這裏所用的 x ，祇代特種的銳角。他的解法可依下列的幾個步驟：

I. 用第五節的公式，把方程式中 x 的數種三角函數，化成同一種的三角函數。

II. 仿代數中的方程式解法，求出這一種三角函數的值。

III. 與第二節中所舉特種銳角的三角函數比較，可推知 x 所表的角的度數。

例題一 解方程式 $2 \cos x = \sec x$ ，求銳角 x 的值。

解 由公式
$$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$

得
$$2 \cos x = \frac{1}{\cos x}.$$

去分母
$$2 \cos^2 x = 1, \quad \text{以 2 除} \quad \cos^2 x = \frac{1}{2},$$

開方
$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

因銳角的三角函數的值恆為正數，故負值棄去不用。

由
$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

知
$$x = 45^\circ.$$

例題二 解方程式 $\tan x + \cot x = 2$ ，求銳角 x 的值。

解 由公式
$$\cot x = \frac{1}{\tan x},$$

得
$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = 2,$$

去分母，得
$$\tan^2 x + 1 = 2 \tan x.$$

移項，得
$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0,$$

分解因式，得 $(\tan x - 1)^2 = 0$,

$\therefore \tan x = 1$.

因 $\tan 45^\circ = 1$,

$\therefore x = 45^\circ$.

例題三 解方程式 $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ ，求銳角 x 的值。

解 分解因式，得 $(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$.

$\therefore \sin x = \frac{1}{2}$ 或 1 .

若 $\sin x = \frac{1}{2}$ ，則 $x = 30^\circ$.

若 $\sin x = 1$ ，則 x 非銳角，故不合用。

例題四 解方程式 $2 \sin^2 x + 5 \cos x - 4 = 0$ ，求銳角 x 的值。

解 由公式 $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$,

得 $2(1 - \cos^2 x) + 5 \cos x - 4 = 0$,

去括號 $2 - 2 \cos^2 x + 5 \cos x - 4 = 0$.

整理 $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$.

分解因式，得 $(2 \cos x - 1)(\cos x - 2) = 0$.

$\therefore \cos x = \frac{1}{2}$ 或 2 .

因 $\cos x$ 不能大於 1 ，故 $\cos x = 2$ 為不合用。

由 $\cos x = \frac{1}{2}$ ，知 $x = 60^\circ$.

習 題 五

解下列各方程式，求銳角 x 的值：

(1) $\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$.

(2) $\tan x - \sqrt{3} = 0$.

(3) $4 \sin x = \csc x$.

(4) $\sin^2 x = 3 \cos^2 x$.

(5) $\sin^2 x - \cos x = \frac{1}{4}$.

(6) $2 \cos x + \sec x = 3$.

(7) $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$.

(8) $2 \sec^2 x = 2 \tan^2 x$.

(9) $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{3}{2}$.

(10) $\tan x = 2 \sin x$.

提示 化 $\tan x$ 為 $\frac{\sin x}{\cos x}$, 去分母, 以 $\sin x$ 除兩邊。

(11) $\tan^2 x + \csc^2 x = 3$.

提示 變式中的函數為 $\sin x$ 及 $\cos x$, 去分母, 然後應用公式

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 化成同一種的三角函數, 以下四題仿此。

(12) $\tan^2 x - \sec x = 1$.

(13) $\sin^2 x + \tan^2 x = 3 \cos^2 x$.

(14) $3 \tan^2 x - \sec^2 x = 1$.

(15) $\tan x + 2 \cot x = \frac{5}{2} \csc x$.

(16) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2$.

提示 移項, 得 $\sqrt{3} \cos x = 2 - \sin x$, 自築, 以 $1 - \sin^2 x$ 代 $\cos^2 x$.

第三章 直角三角形解法

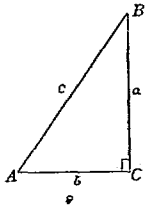
第一節 解特種銳角的直角三角形

利用上章第二節所述特種銳角的三角函數，可以解特種銳角的直角三角形。因直角三角形的直角恆為已知，所以只須更知二邊，或一邊一銳角，就可求其他的邊、角。他的方法，可在下列三式中選擇適宜的一式，使這式中所含三數只有一個是未知數，於是以已知數代入即得。

$$\sin A = \frac{a}{c} \dots\dots\dots (1)$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \dots\dots\dots (2)$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \dots\dots\dots (3)$$



*註 已知二邊而求第三邊，或已知一銳角而求他銳角時，在幾何學中只須利用畢氏定理，或直角三角形兩銳角互為餘角的定理，所以公式從略。

有時遇複雜的問題，須將公式加以變化，然後求解，並須兼用下面的公式：

$$\cot A = \frac{b}{a} \dots\dots\dots (4)$$

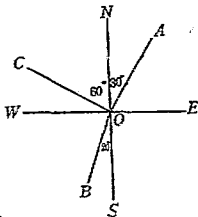
下面先記應用問題中的幾個專門術語加以解釋，然後再行

舉例：

(a) 仰角 仰視時的視線與通過人眼的水平線所夾的角，叫做仰角。但觀測天象時，通常都稱仰角為高度。

(b) 俯角 俯視時的視線與通過人眼的水平線所夾的角，叫做俯角。

(c) 方向角 線的方向，通常用這線同通過起點的南北線的夾角來表。如圖， OA 的方向是北偏東 30° ，記做 $N30^\circ E$ 。同理， OB 的方向是 $S20^\circ W$ ， OC 是 $N60^\circ W$ 。



例題一 在離塔 200 尺的地方，測得塔頂的仰角為 30° 。求塔高。

解 設塔高 BC 為 x 尺，

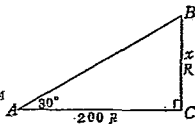
$$\text{則 } \tan 30^\circ = \frac{x}{200}.$$

$$\therefore x = 200 \times \tan 30^\circ$$

$$= 200 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 200 \times 0.5773$$

$$= 115.5.$$

即塔高為 115.5 尺。



例題二 甲乙二人同時從同處出發，甲每時行 4 里，乙每時行 8 里。行 1 時後，乙適在甲的正北。已知甲所行的方向是正東，求乙所行的方向。

解 設甲、乙同時從 A 地出發，行 1 時後，

甲在 C，乙在 B。

$$\text{則} \quad \sin B = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

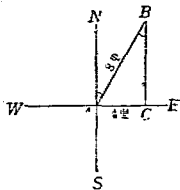
$$\text{但} \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\therefore B = 30^\circ.$$

又因 $NA \parallel BC$ ，而 $\angle NAB$ 與 B 成錯角，

$$\text{故} \quad \angle NAB = B = 30^\circ.$$

即乙所行的方向為 $N 30^\circ E$ 。



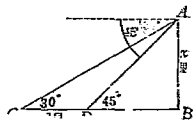
例題三 在山頂望平地上相距 1 里的兩石，測得俯角為 30° 及 45° ，求山高。

解 設山高 AB 為 x 里， C, D 為兩石。

$$\text{則} \quad \cot 30^\circ = \frac{CB}{x},$$

$$\cot 45^\circ = \frac{DB}{x}.$$

$$\therefore \cot 30^\circ - \cot 45^\circ = \frac{CD}{x} = \frac{1}{x}.$$



$$x = \frac{1}{\cot 30^\circ - \cot 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1}{1.732 - 1} = 1.366.$$

即山高為 1.366 里。

例題四 從樓頂望塔尖，仰角為 30° ，從樓下望，得仰角為 60° 。若樓高 50 尺，問塔高多少？

解 設 AB 為塔高， CD 為樓高， $CE = DB = x$ 尺。

$$\text{則} \quad \tan 60^\circ = \frac{AB}{x}, \quad \tan 30^\circ = \frac{AE}{x}.$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan 60^\circ - \tan 30^\circ &= \frac{AB - AE}{x} = \frac{EB}{x} \\ &= \frac{CD}{x} = \frac{50}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore x &= \frac{50}{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ} = \frac{50}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}} \\ &= \frac{50}{1.732 - 0.5774} = 43.3 \end{aligned}$$

又設 $AE = y$ 尺。

則 $\tan 30^\circ = \frac{y}{CE} = \frac{y}{43.3}$

$\therefore y = 43.3 \times \tan 30^\circ = 43.3 \times 0.5774 = 25$

$$AB = 25 + 50 = 75$$

即塔高 75 尺。

例題五 在山麓測山尖的仰角為 45° ，站與地平線成角 30° 的斜坡上行 3000 尺，再測山尖的仰角為 60° ，求山高。

解 設 AB 為山高， CD 為斜坡。

因 $\angle ACB = 45^\circ$ ， $\therefore \angle CAB = 45^\circ$ 。

因 $\angle ADE = 60^\circ$ ， $\therefore \angle DAB = 30^\circ$ 。

$\therefore \angle DCA = \angle DAC = 15^\circ$ ，

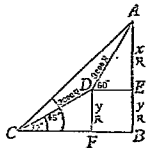
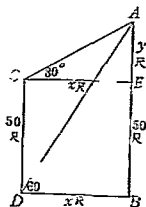
$$AD = CD = 3000 \text{ 尺。}$$

於是設 $AE = x$ 尺，

則 $\sin 60^\circ = \frac{x}{3000}$

$$\begin{aligned} x &= 3000 \times \sin 60^\circ = 3000 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3000 \times 0.866 = 2598 \end{aligned}$$

又設 $EB = DF = y$ 尺，



$$\text{則} \quad \sin 30^\circ = \frac{y}{3000}$$

$$y = 3000 \times \sin 30^\circ = 3000 \times \frac{1}{2} = 1500.$$

$$\therefore \quad AB = 2595 + 1500 = 4095.$$

即山高為 4095 尺。

習 題 六

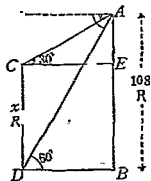
- (1) 在距塔 120 尺之處，測得塔頂的仰角為 60° 。求塔高。
- (2) 直立的石壁，離水面的高為 325 尺。從壁頂測河的俯角為 30° 。求壁與河的水平距離。
- (3) 有梯長 45 尺，一端架在塔頂，他端置於地上。已知壁與梯成角 60° ，求梯底及梯頭與梯腳的距離。
- (4) 風箏的繩長為 250 尺。測得風箏的仰角為 30° 。求他的高。
- (5) 從 60 尺高的風頂，引一線至地。線與地的夾角為 60° 。求這線的長。
- (6) 有高 60 尺及 40 尺的兩旗桿，一人從遠處測望，見兩桿尖合一時，仰角為 30° 。求兩旗桿的距離。

提示 先求過人同第一桿的距離，再求過人同第二桿的距離，相減即得。

- (7) 一旗桿立於塔上。在距塔 100 尺的地方，測得旗桿上下兩端的仰角為 45° 及 30° 。求旗桿的高。
- (8) 塔高 105 尺。從塔頂測得一大樹的頂的俯角為 30° ，根的俯角為 66° 。求樹高。

提示 先由 $\triangle ABD$ 求 BD ，則 $CE=BD$ ，
次由 $\triangle AEC$ 求 AE 。從 AB 減 AE
得 EB ，就是樹高。

- (9) 在河邊測對岸的樹頂，得仰角為 45° 。進行



30 尺再回，得仰角為 20° 。求河闊。

提示 仿例題三，先求塔高，再就一銳角為 45° 的直角三角形解。

(10) 在河邊的樓上測對岸的高塔，得塔頂的仰角為 60° ，塔基的俯角為 30° 。已知河闊 40 尺，求塔高。

(11) 在某島以同一方向，可望見高低二山峯，測得仰角為 30° 及 45° 。依這方向進行 7000 尺，再測兩山峯的仰角，均為 60° 。求兩山峯的高。

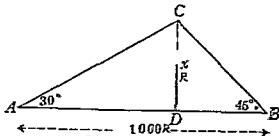
提示 分別仿例題三求兩山峯的高。

(12) 有高低兩煙囪，高者較低者高 15 丈。在距小煙囪 50 丈的地方，見兩煙囪的頂合於一點，其仰角為 30° 。求大煙囪的高。

(13) 二人在直路的兩端同時望空中的氣球。一端的仰角是 30° ，他端的仰角是 45° 。已知路長 1000 尺，求氣球的高。

$$\text{提示 } \cot 30^\circ = \frac{AD}{x}, \quad \cot 45^\circ = \frac{BD}{x},$$

$$\therefore \cot 30^\circ + \cot 45^\circ = \frac{1000}{x}.$$



(14) 等腰三角形的底角為 30° ，腰長 6 寸，求其面積。

(15) 圓的半徑為 8 寸，弦與中心的距離為 4 寸。求弦長及這弦所對中心角的度數。

(16) 正方形的對角線長 17 寸，求邊長。

(17) 等腰直角三角形的腰長 9 寸，求斜邊的長。

- (18) 菱形的一角為 60° ，邊長 10 寸，求其兩對角線。
 (19) 等腰梯形的上底長 15 寸，高 16 寸，下底角為 60° ，求腰及下底的長。
 (20) 在正六邊形中，距一頂點的對角線長 18 寸，求邊長。
 (21) 圓的內接正六邊形的邊長 12 寸，求外切正六邊形的邊長。
 (22) 正三角形的邊長 12 寸，求內切圓的半徑。

第二節 解任何銳角的直角三角形

在上章第三節習過了三角函數表的使用法，就可解任何銳角的直角三角形。他的解法除須應用三角函數表外，其餘同上節完全一樣。現在把他分成五類，分別記出所用的公式，各舉例題，並附應用問題於後：

1. 已知一銳角及斜邊 設已知 A 及 c ，

$$\text{則 } a = c \sin A, \quad b = c \cos A, \quad B = 90^\circ - A.$$

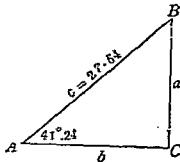
例題 已知 $A = 41^\circ.24$ ， $c = 27.54$ ，求其餘各件。

$$\text{解 } \sin 41^\circ.24 = 0.6792.$$

$$\cos 41^\circ.24 = 0.7519.$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} a &= 27.54 \times 0.6792 = 18.15 \\ b &= 27.54 \times 0.7519 = 20.71 \\ B &= 90^\circ - 41^\circ.24 = 48^\circ.76 \end{aligned} \right\} \text{答.}$$

注意 學生解題時，須在解法內記出所用
的公式。



2. 已知一銳角及其對邊 設已知 A 及 a ，

$$\text{則 } b = a \cot A, \quad c = \frac{a}{\sin A}, \quad B = 90^\circ - A.$$

例題 已知 $A=58^{\circ}.19$, $a=34.5$, 求其餘各件。

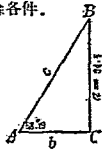
解 $\cot 58^{\circ}.19=0.6202$.

$$\sin 58^{\circ}.19=0.8498.$$

$$\therefore b=34.5 \times 0.6202=21.4$$

$$c=34.5 \div 0.8498=40.6 \quad \text{答.}$$

$$B=90^{\circ}-58^{\circ}.19=31^{\circ}.81$$



3. 已知一銳角及其鄰邊 設已知 A 及 b ,

$$\text{則 } a=b \tan A, \quad c=\frac{b}{\cos A}, \quad B=90^{\circ}-A.$$

例題 已知 $A=29^{\circ}.97$, $b=14.95$, 求其餘各件。

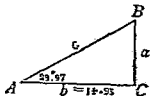
解 $\tan 29^{\circ}.97=0.5707$.

$$\cos 29^{\circ}.97=0.8663.$$

$$\therefore a=14.95 \times 0.5707=8.62$$

$$c=14.95 \div 0.8663=17.26 \quad \text{答.}$$

$$B=90^{\circ}-29^{\circ}.97=60^{\circ}.03$$



4. 已知斜邊及一直角邊 設已知 a 及 c ,

$$\text{則 } \sin A=\frac{a}{c}, \quad b=c \cos A, \quad B=90^{\circ}-A.$$

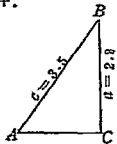
例題 已知 $c=3.5$, $a=2.8$, 求其餘各件。

解 $\sin A=\frac{2.8}{3.5}=0.8000$.

$$\therefore \left. \begin{array}{l} A=53^{\circ}.13 \\ B=36^{\circ}.87 \end{array} \right\} \text{答.}$$

又 $\cos 53^{\circ}.13=0.6000$.

$$\therefore b=3.5 \times 0.6000=2.1 \dots \dots \text{答.}$$



5. 已知二直角邊 設已知 a 及 b ,

$$\text{則 } \tan A = \frac{a}{b}, \quad c = \frac{a}{\sin A}, \quad B = 90^\circ - A.$$

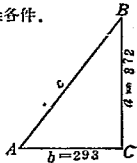
例題 已知 $a=372$, $b=293$, 求其餘各件.

$$\text{解 } \tan A = \frac{372}{293} = 1.2695.$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} A = 51^\circ.77 \\ B = 38^\circ.23 \end{array} \right\} \text{答.}$$

$$\text{又 } \sin 51^\circ.77 = 0.7856.$$

$$\therefore c = 3.2 \div 0.7856 = 474 \dots \dots \text{答.}$$



習 題 七

試解下各直角三角形, 已知:

(1) $A = 25^\circ.1$, $a = 27$.

(2) $B = 15^\circ.46$, $a = 372.9$.

(3) $A = 22^\circ.62$, $c = 13$.

(4) $a = 15$, $b = 20$.

(5) $a = 24.5$, $c = 52.8$.

(6) $B = 38^\circ.5$, $c = 59$.

(7) $A = 61^\circ.22$, $b = 300$.

(8) $b = 6.38$, $c = 59.01$.

(9) $B = 50^\circ.5$, $b = 1.23$.

(10) $a = 36$, $b = 27.6$.

6. 應用問題 略舉二例如下:

例題一 直角三角形的一銳角為 $35^\circ.78$, 斜邊長 150 尺. 求

從直角頂到斜邊上的高。

解 如圖，在 $\triangle ABC$ 中， C 為直角，已知 $A=35^{\circ}.78$ ， $AB=150$ 尺。

$$\text{由公式} \quad \cos A = \frac{AC}{AB},$$

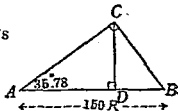
$$\begin{aligned} \text{得} \quad AC &= AB \times \cos A = 150 \times \cos 35^{\circ}.78 \\ &= 150 \times 0.8113 = 121.695. \end{aligned}$$

又在 $\triangle ACD$ 中， D 為直角。

$$\text{由公式} \quad \sin A = \frac{CD}{AC},$$

$$\begin{aligned} \text{得} \quad CD &= AC \times \sin A = 121.695 \times \sin 35^{\circ}.78 \\ &= 121.695 \times 0.5847 = 71.16. \end{aligned}$$

即斜邊上的高是 71.16 尺。



例題二 某船以平均速度向正南駛行，在正午時見西方船船 87 里處有一小島。到下午 1 時 20 分，見這小島的方向是 $N 52^{\circ}27' W$ 。求這船每時的速度。又在下午 3 時 45 分時，這島應在船的什麼方向？

解 如圖， B 為小島， C 為船在正午時的位置， A 為船在 1 時 20 分的位置。則在 $\triangle ABC$ 中，

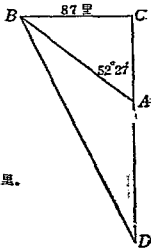
$$\text{由公式} \quad \cot A = \frac{AC}{BC},$$

$$\begin{aligned} \text{得} \quad AC &= BC \times \cot A = 87 \times \cot 52^{\circ}27' \\ &= 87 \times \cot 52^{\circ}.45 = 87 \times 0.7687 \\ &= 66.8769. \end{aligned}$$

故知這船在 $1\frac{1}{3}$ 時（即 1 時 20 分）內行 66.8769 里。

∴ 每時可行 $(66.8769 \div 1\frac{1}{3}) = 50.16$ 里。

又設 D 為船在 3 時 45 分時的位置，



$$\text{則 } CD = 50.16 \times 3 \frac{3}{4} \text{ (因 } 3 \text{ 時 } 45 \text{ 分} = 3 \frac{3}{4} \text{ 時)} = 188.1.$$

$$\text{則 } \tan D = \frac{BC}{CD} = 87 \div 188.1 = 0.4625,$$

$$\therefore D = 24'.82 = 24^{\circ} 49' 12''.$$

即在下午 3 時 45 分時，這島在船的 $N 24^{\circ} 49' 12'' W$ 。

習 題 八

- (1) 太陽的高度(即仰角)為 45° .54 時，樹影長 63 尺，求樹高。
- (2) 用 2 丈長的梯架到屋頂，屋頂高 18.2 尺，求梯與屋頂的角。
- (3) 高樓的兩端，其梯足相距 24.5 尺，梯頂相距 25.3 尺，求兩梯頂的距離與水平線的夾角。

(4) 某人每時行路 10 里，從某處向 $N 35^{\circ} 6' W$ 的方向走了 15 小時，折向正南而行，問須行幾時，才能到他起身的正南？

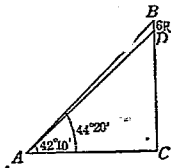
(5) 從 480 尺高的懸崖的頂，望平地一樹，得其俯角為 30° ，已知樹高 30 尺，求樹與崖的水平距離。

(6) 一船向正東駛行，速度每時 30 里，上午 10 時 30 分時，見正北有一小島，到下午 0 時 46 分，見這島在船的 $N 33^{\circ} W$ ，問這兩時時間離島的距離各多少？

(7) 在海邊的懸崖測海中二船的俯角，一為 $44^{\circ}.15$ ，一為 $27^{\circ}.27$ ，已知懸崖離水面的高為 240 尺，求兩船的距離。

(8) 高樓的頂上，裝一 6 尺長的測角計，從這處測測角計上下兩端的仰角為 $44^{\circ} 20'$ 及 $42^{\circ} 10'$ ，求樓高。

$$\text{提示 } \tan(BAC) = \frac{BC}{AC}, \quad \tan(DAC) = \frac{DC}{AC},$$



$$\therefore \tan(BAC) - \tan(DAC) = \frac{BD}{AC}.$$

求得 AC 後，再就 $\triangle ADC$ 解。

- (9) 在成直角的海岸邊取 A, B 二點，相距 165.2 丈，洞海中的 C 點，從 A 望 C 及 B ，兩方向的夾角為 $62^\circ.5$ ；從 B 望 C 及 A ，兩方向的夾角為 $76^\circ.25$ 。求該洞海岸的距離。

提示 仿習題六 (13)。

- (10) 有兩塔，相距 30 尺，在某處望見兩塔的頂合為一點，其仰角為 $35^\circ.08$ 。已知短的一塔高 40 尺，求長的一塔的高。

- (11) 塔高 20 尺，從塔頂望遠處一塔，測得塔頂的仰角為 37° ，塔基的俯角為 15° 。求塔高。

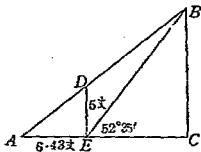
- (12) 有一塔，與一大樹相距 85 尺，從塔頂望樹頂的俯角為 $32^\circ.54$ ，望樹基的俯角為 $61^\circ.88$ 。求塔高及樹高。

- (13) 從 50 尺高的窗口，望山峯的仰角為 $32^\circ.4$ 。若從窗下平地望山峯，則仰角為 $40^\circ.5$ 。求山峯的高。

提示 仿第一節例題四。

- (14) 塔高 5 丈，在距離 6.43 丈的地方，望見塔頂與遠處的山頂相合，又在塔下平地望山頂的仰角為 $62^\circ.35'$ 。求山高。

提示 先就 $\triangle ADE$ 求 $\angle A$ ，再仿第一節例題三解。



- (15) 在同邊河對岸的大樹，得仰角為 $54^\circ.37$ 。退行 25 尺再測，得仰角為 $48^\circ.9$ 。求河寬。

提示 先求樹高。

- (16) 圓的半徑為 3 寸，周 $\frac{5}{3}$ 寸長的弦所對的中心角為幾度？

- (17) 正五邊形的對角線長 15 寸，求每邊的長。

提示 正五邊形的內角為 108° 。

- (18) 正五邊形的邊長為 5 寸，求其內切圓的半徑。
 (19) 正五邊形的邊長為 8 寸，求其外接圓的半徑。
 (20) 圓的內接正五邊形的邊長 12 寸，求外切正五邊形的邊長。

第三節 用對數解直角三角形

利用對數解直角三角形，能以加代乘，以減代除，免去乘、除的麻煩。對數的定義、性質及其用法，在代數中已經詳細講過，這裏先略述大概，然後再舉例解直角三角形。

1. 對數的定義 若 $a^x = m$ ，則稱 x 是 m 的對數(用 a 做底)，記如 $x = \log_a m$ 。 a 是底數， m 是真數。

2. 對數的性質 對數有下列四種重要性質：

(a) 積的對數等於各因數的對數相加。

$$\begin{aligned} \text{設} \quad \log_a m &= x, & \log_a n &= y, \\ \text{則} \quad a^x &= m \cdots \cdots (1), & a^y &= n \cdots \cdots (2). \\ (1) \times (2) \quad a^x a^y &= mn, & \text{即} \quad a^{x+y} &= mn. \\ \therefore \quad \log_a mn &= x+y = \log_a m + \log_a n. \end{aligned}$$

(b) 商的對數等於從被除數的對數減去除數的對數。

$$\begin{aligned} \text{設 同上.} \\ (1) \div (2) \quad \frac{a^x}{a^y} &= \frac{m}{n}, & \text{即} \quad a^{x-y} &= \frac{m}{n} \\ \therefore \quad \log_a \frac{m}{n} &= x-y = \log_a m - \log_a n. \end{aligned}$$

(c) 某數 p 次冪的對數，等於某數的對數乘以 p 。

設 $\log_a N = x$, 則 $a^x = N$(1).

求(1)的 p 次幂, 得 $(a^x)^p = N^p$, 即 $a^{px} = N^p$.

$\therefore \log_a N^p = px = p \log_a N$.

(d) 某數 r 次根的對數, 等於某數的對數除以 r .

證 同上.

求(1)的 r 次根, 得 $\sqrt[r]{a^x} = \sqrt[r]{N}$, 即 $a^{\frac{x}{r}} = \sqrt[r]{N}$

$$\log_a \sqrt[r]{N} = \frac{x}{r} = \frac{1}{r} \log_a N.$$

3. 常用對數 用 10 做底的對數, 叫做常用對數, 因通常用的都是這種對數, 所以單稱對數, 且底數 10 略去不記.

| | | | |
|----------------|--------------------------|--------------------|--------------------------|
| $10^0 = 1,$ | $\therefore \log 1 = 0.$ | $10^0 = 1,$ | $\therefore \log 1 = 0.$ |
| $10^1 = 10,$ | $\log 10 = 1.$ | $10^{-1} = 0.1,$ | $\log 0.1 = -1.$ |
| $10^2 = 100,$ | $\log 100 = 2.$ | $10^{-2} = 0.01,$ | $\log 0.01 = -2.$ |
| $10^3 = 1000,$ | $\log 1000 = 3.$ | $10^{-3} = 0.001,$ | $\log 0.001 = -3.$ |
|, | |, | |

從此可見:

(a) 大於 1 的數, 他的對數是正; 小於 1 的, 對數是負.

(b) 原數大時, 對數也大; 原數小時, 對數也小.

(c) 1 與 10 間的數, 他的對數比 0 大, 比 1 小, 就是一個小數; 10 與 100 間的數, 他的對數比 1 大, 比 2 小, 就是 1 加上小數;

(d) 1 與 0.1 間的數, 他的對數比 0 小, 比 -1 大, 就是 -1 加上一個正的小數; 0.1 與 0.01 間的數, 他的對數比 -1 小, 比 -2 大, 就 -2 加上一個正的小數;

4. 首數同尾數 對數的整數部分叫首數，小數部分叫尾數。

從上條 (c)、(d)，得定首數的方法如下：

- (1) 一數是 n 位整數時，他的對數的首數是 $n-1$ 。
 (2) 一數是純小數，他的第 n 位數才是有效數字，對數的首數是 $-n$ ，可記作 \bar{n} 。但通常為便利計，記做 $(10-n)-10$ ，這 -10 應記在尾數的後面。

尾數的求法，不在初等數學範圍以內，平常有對數表可以檢查（見本書附錄三第 6、7、8、9 頁）。

$$\begin{aligned} \text{假定已知} \quad \log 4327 &= 3.6362, \\ \text{可得} \quad \log 432700 &= \log(4327 \times 100) = \log 4327 + \log 100 \text{ (對數性質 } a) \\ &= 3.6362 + 2 \text{ (因 } \log 100 = 2) = 5.6362. \\ \log 432.7 &= \log(4327 \times 0.1) = \log 4327 + \log 0.1 \\ &= 3.6362 + (-1) = 2.6362. \\ \log 0.4327 &= \log(4327 \times 0.0001) = \log 4327 + \log 0.0001 \\ &= 3.6362 + (-4) = 3.6362 - 10 \text{ (即 } \bar{1}.6362). \end{aligned}$$

可見一數的數字不變，單把小數點的位置改換，他的對數的尾數部分總是一樣。

對數表中所載的只有尾數，我們要求一數的對數時，可丟去這數的小數點同前後的 0，在對數表中找得尾數，再照上法定首數。

5. 對數表用法 檢對數表的方法，同檢三角函數表類似。本書所附的對數表，祇能求四位數字（丟去前後的 0 之後）的諸

數的對數。若有五位或五位以上時，應把第四位以下各位數字略去。通常求對數，用本書附錄三第 8、9 二頁。若首位數字是 1 的，可用第 6、7 二頁的詳表。舉例如下：

例一 求 $\log 3643000$ 時，檢表第 8 頁左行得 36，上列得 4，兩表橫線上得 3.36 的右方，4 的下方是 5611，同列兩表中 3 的下方是 4，加得 56.5，即是尾數。定首數為 6，故得 $\log 3643000 = 6.5615$ 。

例二 求 $\log 0.08578$ 時，檢表第 9 頁左行得 83，上列得 8，兩表橫線上得 2.83 的右方，8 的下方是 9232，同列兩表中 2 的下方是 1，減得 92.1，即是尾數。定首數為 8-10 (即 2)，故得 $\log 0.08578 = 8.9231 - 10$ 。

例三 求 $\log 1.423$ 時，檢表第 6 頁左行得 142，上列得 3，行列相交處是 1532，即是尾數。定首數為 0，故得 $\log 1.423 = 0.1532$ 。

例四 已知 $\log N = 1.3745$ ，求 N 時，檢表第 8 頁，得 237 的對數尾數是 3747。因題中的尾數末位少 2，同列兩表中 2 的上方橫線上是 1，故得 N 的各位數字是 2369。因首數為 1，故 N 有二位整數，即 $N = 23.69$ 。

6. 三角函數對數表的用法 欲求某角的三角函數的對數，不必先用三角函數表求出函數，再用對數表求對數；可直接應用三角函數對數表，比較便利。

正弦、餘弦對數表，主要的在本書附錄三第 12-13 頁，但求 10° 以下的角的正弦對數，或求 80° 以上的餘弦對數，可用第 10、11 頁的詳表。正切、餘切對數表，主要的在第 16、17 頁，但求 10° 以下的正切對數，或 80° 以上的餘切對數，可用第 14、15 頁的詳表；求 80° 以上的正切對數，或 10° 以下的餘切對數，可用第 18、19 頁的詳表。

檢三角函數對數表的方法，同前面兩種表大部類似，略有不同的如下：

三角函數的對數首數，不必自己去定，表中每隔 10 度在首尾都把首數載出，所以檢表時只須看鄰近所載首數就得。但有時遇首數轉換時，在轉換的地方，用「」的記號隔開，在「」號左邊的依左端所載的首數；右邊的依右端所載的首數。又表中所載的首數，如 $\bar{1}, \bar{2}$ 等，應用時應把他改寫做 $9-10, 8-10$ 等。

例一 求 $\log \sin 37^\circ.57$ 時，先在表的第 12 頁，檢得

$$\log \sin 37^\circ.6 = 9.7851-10.$$

因題中的角度末位少 3，從附表知對數末位也應減少 3（因正弦、正切角大時大，角小時小），故得

$$\log \sin 37^\circ.57 = 9.7851-10.$$

例二 求 $\log \cos 38^\circ.54$ 時，先在第 13 頁，檢得

$$\log \cos 38^\circ.5 = 9.8935-10.$$

因題中的角度末位多 4，從附表知對數的末位反應少 2（因餘弦、餘切角大時小，角小時大），故得

$$\log \cos 38^\circ.54 = 9.8933-10.$$

例三 求 $\log \tan 84^\circ.27$ 時，可檢表第 18 頁左行得 $84^\circ.2$ ，上列得 7，行列相交處是 9985，因在「」號的左邊，故依左端所載的首數，得

$$\log \tan 84^\circ.27 = 0.9985.$$

例四 已知 $\log \sin A = 9.2793-10$ ，而求 A 時，檢表第 12 頁，得

$$\log \sin 11^\circ.00 = 9.2806-10.$$

因題中的對數末後少了 13，故知 $A < 11^\circ$ 。檢上列（即 10° 的一列）附表中得 12 為最近，上方橫線上是 3，故得 $A = 10^\circ.97$ 。

7. 餘對數 某數的倒數的對數，叫做某數的餘對數。設某數為 n ，則其餘對數記作 $\text{colog } n$ 。

用式子表示，即 $\text{colog } n = \log \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \text{因} \quad \log \frac{1}{n} &= \log 1 - \log n \quad (\text{對數性質 } b) \\ &= 0 - \log n \quad (\text{因 } \log 1 = 0) \\ &= 10 - \log n - 10. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{colog } n = (10 - \log n) - 10 = 10 - (\log n + 10).$$

於是得求某數的餘對數的法則如下：

(1) 從 10 減去某數的對數，後面添 -10 ，就得某數的餘對數。

例 已知 $\log 43.27 = 1.6362$,

則 $\text{colog } 43.27 = 8.3638 - 10.$

註 從 10 減去 1.6362，可用逆算法求出一數，使其前面的幾位數字與 1.6362 相同，末位數字能與 2 乘滿 10，故得 8.3638。

(2) 若某數的對數的後面有 -10 ，可先去掉他，再從 10 內減去，就得某數的餘對數。

例 已知 $\log 0.4327 = 0.6362 - 10$,

則 $\text{colog } 0.4327 = 0.3638.$

餘對數的用途如下：

設 $n = \frac{a}{bc}$,

則 $\log n = \log a - \log bc \quad (\text{對數性質 } b)$

$$= \log a - (\log b + \log c) \quad (\text{對數性質 } a)$$

$$= \log a - \log b - \log c.$$

若用餘對數，則可把 $\frac{a}{bc}$ 看作 $a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}$.

$$\begin{aligned} \therefore \log n &= \log a + \log \frac{1}{b} + \log \frac{1}{c} \quad (\text{對數性質 } a) \\ &= \log a + \text{colog } b + \text{colog } c. \end{aligned}$$

這樣不但可以用加代減，還能一次就加起來，不必連減二次，比較便利得多。

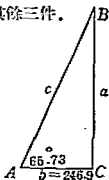
8. 直角三角形的對數解法 略舉二例如下：

例題一 已知 $A=65^{\circ}.73$, $b=246.9$, 求其餘三件。

$$\begin{aligned} \text{解 公式:} \quad a &= b \tan A, \\ c &= \frac{b}{\cos A}, \\ B &= 90^{\circ} - A. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{計算:} \quad \log b &= 2.3925 \\ \log \tan A &= 0.3479 \\ \log a &= 2.7384. \end{aligned}$$

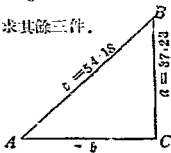
$$\begin{aligned} \log b &= 2.3925 \\ \text{colog } \cos A &= 0.3881 \\ \log c &= 2.7785. \end{aligned} \quad \text{答數: } \begin{cases} a=547.5 \\ c=600.5 \\ B=24^{\circ}.27. \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \log a &= \log b + \log \tan A && (\text{等量代入}) \\ &= \log b + \log \tan A && (\text{對數性質 } a). \\ \log c &= \log \frac{b}{\cos A} = \log b + \text{colog } \cos A. \end{aligned}$$

例題二 已知 $a=37.23$, $c=51.18$, 求其餘三件。

$$\begin{aligned} \text{解 公式:} \quad \sin A &= \frac{a}{c}, \\ b &= \sqrt{c^2 - a^2} \\ &= \sqrt{(c+a)(c-a)}, \quad (\text{註一}) \\ B &= 90^{\circ} - A. \end{aligned}$$



計算:

$$\log a = 1.5708$$

$$\operatorname{colog} c = 8.2662 - 10$$

$$\log \sin A = 9.8370 - 10.$$

$$c = 54.18$$

$$a = 37.23$$

$$c+a = 91.41.$$

$$c-a = 16.95.$$

$$\log(c+a) = 1.9609$$

$$\log(c-a) = 1.2262$$

$$2 \log \frac{c+a}{c-a} = 2 \log 3.1901$$

$$\log b = 1.5951. \quad (\text{註二})$$

$$\text{答數: } \begin{cases} A = 43^\circ.4 \\ b = 39.56 \\ B = 46^\circ.6. \end{cases}$$

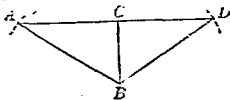
註一 在上節 4, 求 b 時須利用已求得的 A . 若直接用畢氏定理, 須自乘, 因方, 計算不便. 現在有了對數, 可運用畢氏定理求 b . 但知 a, b 而求 c 時, 則仍不便, 因 $a^2 + b^2$ 不能分解因式的緣故.

$$\begin{aligned} \text{註二 } \log b &= \log \sqrt{(c+a)(c-a)} = \frac{1}{2} \log (c+a)(c-a) \quad (\text{對數性質 } d) \\ &= \frac{1}{2} [\log(c+a) + \log(c-a)] \quad (\text{對數性質 } a). \end{aligned}$$

習 題 九

- (1) 試利用對數解習題七的直角三角形.
- (2) 試利用對數解習題八的應用問題.
- (3) 兒童以 17 尺長的繩, 放風箏於空中. 距離 15 丈 4 尺的地方, 有一高塔, 風箏恰巧觸着塔尖. 試利用對數求塔高.
- (4) 戰區內有一道橫亘東西, 在南方 $3\frac{3}{4}$ 里的地方架一大炮, 以防敵方破壞. 但這炮的射程僅有 12.7 里, 問受到大炮保護的鐵道有多少長?

提示 設鐵道為 AD , B 為大炮, BC 為塔高. 以 B 為中心, 射程的長為半徑作圓, 截鐵道於 A, D , 則 AD 為受保護的部分.

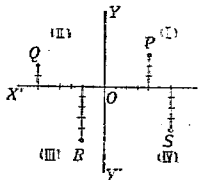


第四章 普通三角形解法

第一節 三角函數的廣義

前面所講的三角函數，專指銳角而言，範圍未免太狹，在普通三角形就不够應用，因為普通三角形的各角，不一定都是銳角的緣故。要解普通三角形，須先知道鈍角的三角函數，所以非擴張三角函數的定義不可。講到三角函數的一般定義，須利用代數中的坐標制，下面先略述大槪：

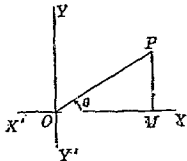
1. 坐標制 如同，在一平面上取縱橫互相垂直的二直線 OX, OY ，命其交點為 O ，這 O 點叫做原點， OX 叫做橫軸， OY 叫做縱軸。二軸分平面為四部分，各部都叫象限，依圖中所記的 (I)、(II)、(III)、(IV) 分別叫做第一、第二、第三、第四象限。



平面中任意的一點都可用兩個數來表明他的位置。只須從這點引橫軸的垂線，從原點到垂足的距離，叫做這點的橫坐標；從垂足到這點的距離，叫做這點的縱坐標。例如圖中 P 點的橫坐標為 4，縱坐標為 3。

凡橫坐標在縱軸的右方的是正數，左方的是負數；縱坐標在橫軸的上方的是正數，下方的是負數。如圖中 Q 的橫坐標是 -6 ，縱坐標是 2 ； R 的橫坐標是 -2 ，縱坐標是 -5 ； S 的橫坐標是 6 ，縱坐標是 -4 。

2. 三角函數定義的擴張 如圖，從原點 O 作一任意直線，在這線上取一任意點 P ，從 P 作 XX' 的垂線 PM 。設 $\angle POM = \theta$ (θ 係希臘字母，讀如 Theta)，

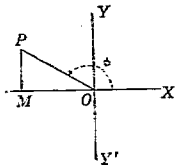


$$\begin{aligned} \text{則} \quad \sin \theta &= \frac{MP}{OP} = \frac{P \text{ 的縱坐標}}{P \text{ 與原點的距離}} \\ \cos \theta &= \frac{OM}{OP} = \frac{P \text{ 的橫坐標}}{P \text{ 與原點的距離}} \\ \tan \theta &= \frac{MP}{OM} = \frac{P \text{ 的縱坐標}}{P \text{ 的橫坐標}} \\ \cot \theta &= \frac{OM}{MP} = \frac{P \text{ 的橫坐標}}{P \text{ 的縱坐標}} \\ \sec \theta &= \frac{OP}{OM} = \frac{P \text{ 與原點的距離}}{P \text{ 的橫坐標}} \\ \csc \theta &= \frac{OP}{MP} = \frac{P \text{ 與原點的距離}}{P \text{ 的縱坐標}} \end{aligned}$$

上面的定義可適用於一切的角，並且當 θ 是銳角時，這定義同以前利用直角三角形的定義仍是一樣。

3. 鈍角的三角函數 設有鈍角 ϕ (ϕ 係希臘字母，讀如

Phi), 使其頂點合於原點 O , 第一邊合於橫軸上的 OX , 則第二邊必在第二象限內。在第二邊上任取一 P 點, 從 P 作 $PM \perp OX$, 則 P 的縱坐標 MP 是正數, 橫坐標 OM 是負數。又 OP 可常視作正數。



$$\text{於是得} \quad \sin \phi = \frac{MP}{OP} = \text{正數.}$$

$$\cos \phi = \frac{OM}{OP} = \text{負數.}$$

$$\tan \phi = \frac{MP}{OM} = \text{負數.}$$

$$\cot \phi = \frac{OM}{MP} = \text{負數.}$$

$$\sec \phi = \frac{OP}{OM} = \text{負數.}$$

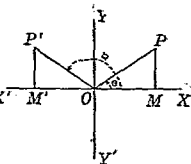
$$\csc \phi = \frac{OP}{MP} = \text{正數.}$$

第二節 補角的三角函數

一角的三角函數的絕對值, 等於他的補角的同函數的絕對值, 但正弦、餘割是同號, 其餘都是異號。

$$\begin{array}{l}
 \text{公式: } \sin A = \sin (180^\circ - A) \cdots \cdots (1) \\
 \cos A = -\cos (180^\circ - A) \cdots \cdots (2) \\
 \tan A = -\tan (180^\circ - A) \cdots \cdots (3) \\
 \cot A = -\cot (180^\circ - A) \cdots \cdots (4) \\
 \sec A = -\sec (180^\circ - A) \cdots \cdots (5) \\
 \csc A = \csc (180^\circ - A) \cdots \cdots (6)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{公式: } \sin A = \sin (180^\circ - A) \cdots \cdots (1) \\ \cos A = -\cos (180^\circ - A) \cdots \cdots (2) \\ \tan A = -\tan (180^\circ - A) \cdots \cdots (3) \\ \cot A = -\cot (180^\circ - A) \cdots \cdots (4) \\ \sec A = -\sec (180^\circ - A) \cdots \cdots (5) \\ \csc A = \csc (180^\circ - A) \cdots \cdots (6) \end{array}} \right\} \text{[VII]}$$

證 設 $\theta + \phi = 180^\circ$, θ 爲銳角, ϕ 爲鈍角. 把 θ, ϕ 的一邊重合於 OX , 則 θ 的第二邊 OP 在第一象限內, ϕ 的第二邊 OP' 在第二象限內. 取 $OP = OP'$, 從 P 及 P' 各作 $X'X$ 的垂線 PM 及 $P'M'$, $X'X$



則 $\angle P'O M' = 180^\circ - \phi = \theta = \angle P O M$,
 $\angle P' M' O = 90^\circ = \angle P M O$,

$$\therefore \triangle P' O M' \cong \triangle P O M.$$

因 $P'M'$ 與 PM 同在橫軸的上方, $O M'$ 與 OM 則在縱軸的兩側,

$$\therefore M' P' = MP, \quad O M' = -OM.$$

$$\therefore \sin \phi = \frac{M' P'}{O P'} = \frac{MP}{OP} = \sin \theta.$$

$$\cos \phi = \frac{O M'}{O P'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos \theta.$$

$$\tan \phi = \frac{M' P'}{O M'} = \frac{MP}{-OM} = -\tan \theta.$$

$$\text{證} \quad \phi = \pi - \theta, \quad \text{則} \quad \theta = 180^\circ - \phi.$$

代入上式即得.

注意 從上而可見欲求鈍角的三角函數時, 可仍用三角函數表求他的補角(銳

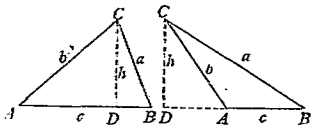
角) 的函數, 若是正弦則不變, 若是餘弦、正切或餘切, 則在前面添一負號。

第三節 解普通三角形應用的公式

1. 正弦定律 三角形的邊, 同他的對角的正弦成比例。

$$\text{公式: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \dots\dots\dots \text{【VII】}$$

證 如圖, 作 $\triangle ABC$ 的底邊 c 上的高 CD , 用 h 來表示。



在左圖, A 為銳角,

$$h = a \sin B, \quad h = b \sin A.$$

$$\therefore a \sin B = b \sin A.$$

在右圖, A 為鈍角,

$$h = a \sin B,$$

$$h = b \sin(\angle A'D) = b \sin(180^\circ - A) = b \sin A \quad (\text{公式【VI】(1)}).$$

$$\therefore a \sin B = b \sin A.$$

於是知道不論 A 為銳角或鈍角, 結果一樣。

以 $\sin A \sin B$ 除所得等式的兩邊,

$$\text{得} \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

$$\text{仿此} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

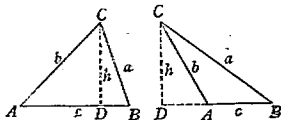
注意 凡知三角形的二角一週邊，或二週一對角，可用正弦定律求其餘三件。只須在公式的三箇中，選擇適宜的兩箇，使其中包含一個未知數，於是將已知數代入即得。又已知二角夾一週邊時，可先用幾何方法求出第三角，再仿知二角一週邊的方法解。

2. 餘弦定律 三角形一邊的平方，等於其他二邊平方的和，減去這二邊的積與夾角的餘弦相乘的二倍。公式如下：

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \dots\dots\dots (1) \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \dots\dots\dots (2) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} \text{【VIII】}$$

設 如圖，因 $a^2 = b^2 + DB^2$, $b^2 = b^2 - AD^2$,

$$a^2 = b^2 - AD^2 + DB^2.$$



在左圖， A 為銳角，

$$DB = c - AD, \quad AD = b \cos A;$$

在右圖， A 為鈍角，

$$DB = c + AD,$$

$$AD = b \cos(CAD) = b \cos(180^\circ - A) = -b \cos A \text{ (公式【VI】(2))}.$$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - AD^2 + DB^2 = b^2 - AD^2 + (c \mp AD)^2 \\ &= b^2 + c^2 \mp 2c \cdot AD = b^2 + c^2 \mp 2c \cdot (\pm b \cos A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \end{aligned}$$

其餘仿此。

注意 凡知三角形二邊及一夾角，可用餘弦定律求第三邊，再用正弦定律求角。又已知三角形的三邊，可變餘弦定律為下列三式而求其角。

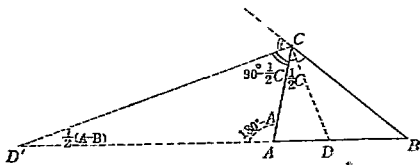
$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

因餘弦定律的式中有加減號，用以解三角形時，不便利用對數，所以有時須採用下面的兩組公式。

3. 正切定律 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2}(A-B) &= \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C \dots\dots\dots(1) \\ \tan \frac{1}{2}(B-C) &= \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{1}{2}A \dots\dots\dots(2) \\ \tan \frac{1}{2}(C-A) &= \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{1}{2}B \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【IX】}$$

證 如圖，作 C 角及其外角的二等分線，交 AB 及其延長線於 D 及 D' 。



在 $\triangle ADC$ 中， $\frac{CD}{\sin A} = \frac{AD}{\sin \frac{1}{2}C}$ (正弦定律)。

即 $CD = \frac{AD \sin A}{\sin \frac{1}{2}C} \dots\dots\dots(1)$ 。

又因 $AD : DB = AC : BC$ (△內角(或外角)的二等分線,內分(或外分),

對邊,其二線段的比,等於其他二邊的比),

即 $AD : c - AD = b : a$.

∴ $a \cdot AD = bc - b \cdot AD$ (比例的等值定理),

$$a \cdot AD + b \cdot AD = bc, \quad (a+b) \cdot AD = bc,$$

∴ $AD = \frac{bc}{a+b}$ (2).

又因 $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ (正弦定律),

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c}$$
(3).

以(2)、(3)代(1), 得 $CD = \frac{ab \sin C}{(a+b) \sin \frac{1}{2}C}$ (4).

仿上法, 可證 $CD' = \frac{AD' \sin(180^\circ - A)}{\sin(90^\circ - \frac{1}{2}C)}$ (因 $\angle DCD' = 90^\circ$)
 $= \frac{AD' \sin A}{\cos \frac{1}{2}C}$ (公式 [I] [VI])(5).

又可證 $AD' = \frac{bc}{a-b}$ (6).

以(3)、(6)代(5), 得 $CD' = \frac{ab \sin C}{(a-b) \cos \frac{1}{2}C}$ (7).

∴ $\tan D' = \frac{CD}{CD'} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C$ (以(7)除(4)).

但 $\angle D' = A - \angle D'CA$ (△外角定理) $= A - (90^\circ - \frac{1}{2}C)$

$$= A - \frac{1}{2}(A+B) \quad \left[\text{因 } \frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}C = 90^\circ \right]$$

$$= \frac{1}{2}(A-B).$$

$$\therefore \tan \frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}C.$$

其餘仿此。

注意一 已知三角形的二邊 a, b 及一夾角 C ，用正切定律求 $\frac{1}{2}(A-B)$ ；

再由 $90^\circ - \frac{1}{2}C$ 求 $\frac{1}{2}(A+B)$ ，於是

$$\frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}(A-B) = A, \quad \frac{1}{2}(A+B) - \frac{1}{2}(A-B) = B.$$

注意二 若已知的二邊 $a < b$ ，則按幾何定理，知 $A < B$ ，可把公式改寫為

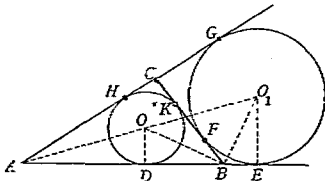
$$\tan \frac{1}{2}(B-A) = \frac{b-a}{b+a} \cot \frac{1}{2}C.$$

其餘各式仿此。

4. 半角的正切公式 設 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ，則得公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \tan \frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \dots\dots\dots (1) \\ \tan \frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \dots\dots\dots (2) \\ \tan \frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} [X]$$

： 圖， $\odot O$ 為 $\triangle ABC$ 的內切圓，半徑 $OD=r$ ； $\odot O_1$ 為 $\triangle ABC$ 的傍切



圓,半徑 $O_1E=r_1$, 則 OO_1 必在 Δ 的二等分線上。且 OB 及 O_1B 必等分 B 角及其外角 (內心及外心必在 Δ 的內角及外角的二等分線上)。

$$\text{因 } AE=AG, BE=BF, CF=CG \quad (\text{等切線定理}),$$

$$\therefore 2AE=AE+AG=AB+BF+AC+CF=a+b+c=2s.$$

$$\therefore AE=s.$$

$$BE=s-c.$$

$$\text{又因 } AD=AH, BD=BK, CK=CH,$$

$$\begin{aligned} \therefore 2AD &= AD+AH=AB-BD+AC-CH=AB-BK+AC-CK \\ &= AB+AC-BK-CK=(a+b+c)-2a=2s-2a. \end{aligned}$$

$$\therefore AD=s-a.$$

$$\text{仿此 } BD=s-b.$$

$$\text{又因 } \angle ODB=\angle B=\angle BEO_1 \quad (\text{切線與切點的半徑}),$$

$$\angle O_1E_1=\angle O_1B=\angle B-\angle O_1BC \quad (\Delta \text{ 內外二角等分線垂直})$$

$$=\angle B-\angle O_1BE=\angle BO_1E \quad (\text{同 } \angle BEO_1=\angle B)$$

$$\therefore \triangle ODB \sim \triangle BO_1E \quad (\text{兩角互等}),$$

$$OD:BD=BE:O_1E \quad (\text{相似三角形對應邊成比例}).$$

$$\text{即 } r:s-b=s-c:r_1.$$

$$\therefore rr_1=(s-b)(s-c) \quad (\text{比例的等積定理}).$$

$$\text{又因 } \tan \frac{1}{2}A = \frac{OD}{AD} = \frac{r}{s-a} \quad (\text{因 } \angle OAD = \frac{1}{2}A),$$

$$\tan \frac{1}{2}A = \frac{O_1E}{BE} = \frac{r_1}{s},$$

$$\text{相乘, 得 } \tan^2 \frac{1}{2}A = \frac{r}{s-a} \cdot \frac{r_1}{s} = \frac{rr_1}{s(s-a)} = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}.$$

$$\text{開平方, 得 } \tan \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

其餘仿此。

注意 已知三角形的三邊,可先求出 s , $(s-a)$, $(s-b)$ 及 $(s-c)$,再用半角的正切公式求 $\frac{1}{2}A$ 及 $\frac{1}{2}B$,加倍即得 A, B .

習 題 十

試利用本節的公式,證下列的恆等式:

$$(1) \frac{a-b}{\sin A - \sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

提示 $a : \sin A = b : \sin B$, 更迭得 $a : b = \sin A : \sin B$.

利用分比定理,得 $a-b : b = \sin A - \sin B : \sin B$, 再更迭.

$$(2) a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc \cos A + ca \cos B + ab \cos C).$$

提示 把餘弦定律的三式相加移項即得.

$$(3) (b+c)\sin A = a(\sin B + \sin C).$$

提示 先證 $b \sin A = a \sin B$, $c \sin A = a \sin C$.

$$(4) \frac{1 + \cos A}{1 + \cos B} = \frac{a(b+c-a)}{b(c+a-b)}.$$

提示 在本節 3 條注意中的首二式的兩邊各加 1, 分解右邊的因式, 相除即得.

$$(5) \frac{\tan A}{\tan B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

提示 左邊 = $\frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \cos B \cdot \frac{1}{\cos A}$
 $= \frac{a}{b} \cdot \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \cdot \frac{2bc}{b^2 + c^2 - a^2} = \dots \dots$

$$(6) \frac{\cot \frac{1}{2}A}{\cot \frac{1}{2}B} = \frac{b+c-a}{c+a-b}.$$

$$\begin{aligned} \text{提示 左邊} &= \frac{\tan \frac{1}{2} B}{\tan \frac{1}{2} A} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \cdot \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-a)^2}{(s-b)^2}} = \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$(7) \cot \frac{1}{2} A \cot \frac{1}{2} B = \frac{a+b+c}{a+b-c}.$$

(8) 設 $\triangle ABC$ 的 c 邊上的中線為 m_c ，試證

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos C}.$$

提示 依餘何定理，知 $2m_c^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 + b^2$ 。化得

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4},$$

以餘弦定理第三式代入，化簡後開平方即得。

第四節 解普通三角形

1. 已知二角及一邊 知三角形的二角，則第三角可以立即推知。於是已有已知的一角及其對邊，即可用正弦定律求其他兩已知角的對邊。舉例如下：

例題 已知 $A=37^\circ.54$, $B=62^\circ.77$, $c=63.53$ ，求其餘三件。

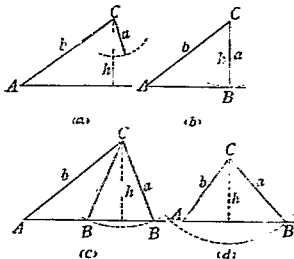
| | | | |
|-----|-------------------------------|-----|-------------------------------|
| 解 | $C=180^\circ-(A+B)$, | 計算: | $\log c=1.8030$ |
| 公式: | $a = \frac{c \sin A}{\sin C}$ | | $\log \sin A=9.7818-10$ |
| | | | $\text{colog } \sin C=0.0671$ |
| | | | $\log a=1.5949.$ |
| | | | $\log c=1.8030$ |
| | | | $\log \sin B=9.9490-10$ |
| 得數: | $C=79^\circ.69,$ | | $\text{colog } \sin C=0.0671$ |
| | $a=39.35,$ | | $\log b=1.7591.$ |
| | $b=57.43$ | | |

習題十一

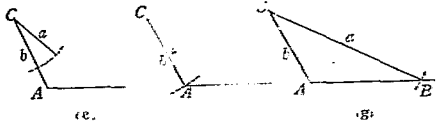
解以下的三角形, 已知:

- | | | |
|---------------------------|----------------------|-------------|
| (1) $A=37^{\circ}.97$, | $C=65^{\circ}.03$, | $b=999$. |
| (2) $A=10^{\circ}.2$, | $B=46^{\circ}.6$, | $a=500$. |
| (3) $A=78^{\circ}.32$, | $B=54^{\circ}.45$, | $c=1005$. |
| (4) $B=13^{\circ}.95$, | $C=57^{\circ}.12$, | $b=13.57$. |
| (5) $A=70^{\circ}.92$, | $C=52^{\circ}.15$, | $a=64.12$. |
| (6) $A=12^{\circ}.82$, | $B=141^{\circ}.38$, | $a=820$. |
| (7) $B=22^{\circ}.18$, | $C=112^{\circ}.52$, | $a=24.31$. |
| (8) $A=76^{\circ}.98$, | $C=55^{\circ}.34$, | $c=664$. |
| (9) $B=52^{\circ}.16$, | $A=86^{\circ}.52$, | $b=15.32$. |
| (10) $B=102^{\circ}.57$, | $C=20^{\circ}.54$, | $c=19.7$. |

2. 已知二邊及一對角 設已知 a, b 及 A 而求其餘三件, 要看已知件如何, 有時沒有解答, 有時有一個解答, 有時有二個解答。



當 A 爲銳角時，如同 (a)，若 $a < h$ (即 $b \sin A$)，則不能成三角形，即沒有解答，如同 (b)，若 $a = h$ ，則得一直角三角形， B 爲 90° ，有一個解答，如同 (c)，若 $a > h$ ，且 $a < b$ ，則得二個三角形 ABC 及 $AB'C$ ，這時 B' 爲 B 的補角， C 及 c 也都有兩個值，所以有二個解答，如同 (d)，若 $a > h$ ，且 $a > b$ ，則仍祇有一個解答。



當 A 爲鈍角時，如同 (e) 及 (f)，若 $a \leq b$ ，則不能成三角形，即沒有解答，如同 (g)，若 $a > b$ ，則有一個解答。

解這類問題時，若已知角 A 爲鈍角，只須看是否 $a > b$ ，就可知道是否有一解答；若已知角爲銳角，則利用公式

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

由對數可求出 $\log \sin B$ 的值。若 $\log \sin B > 0$ (即因 $b \sin A > a$)，就沒有解答；若 $\log \sin B = 0$ ，則 $B = 90^\circ$ ，有一個解答；若 $\log \sin B < 0$ ，則有一個解答或二個解答，要看 $a > b$ 或 $a < b$ 而定。

例題 已知 $A = 32^\circ.17$ ， $a = 83.23$ ， $b = 77.9$ ，求其餘三件。

| | | | |
|------|--|-----|--|
| 解 | $\left\{ \begin{array}{l} \sin B = \frac{b \sin A}{a}, \\ C = 180^\circ - (A+B), \\ c = \frac{a \sin C}{\sin A} \end{array} \right.$ | 計算: | $\log b = 1.7627$ $\log \sin A = 0.7262 - 10$ $\text{colog } a = 8.4785 - 10$ $\log \sin B = 0.9674 - 10$ |
| 答數一: | $\left\{ \begin{array}{l} B = 68^\circ.67, \\ C = 70^\circ.76, \\ c = 61.42. \end{array} \right.$ | | $\log a = 1.5215$ $\log \sin C = 0.9660 - 10$ $\text{colog } \sin A = 0.2738$ $\log c = 1.7783$ |
| 答數二: | $\left\{ \begin{array}{l} B' = 111^\circ.93, \\ C' = 35^\circ.9, \\ c' = 36.6. \end{array} \right.$ | | $\log a = 1.5215$ $\log \sin C' = 0.7682 - 10$ $\text{colog } \sin A = 0.2738$ $\log c' = 1.3675$ |

習 題 十 二

解下列的三角形, 已知:

- (1) $a=840$, $b=485$, $A=21^\circ.52$.
 (2) $a=55.55$, $b=63.66$, $B=77^\circ.74$.
 (3) $a=8.716$, $b=9.787$, $A=38^\circ.24$.
 (4) $b=19$, $c=18$, $C=15^\circ.82$.
 (5) $a=34$, $b=22$, $B=30^\circ.33$.
 (6) $a=4.4$, $b=5.21$, $A=57^\circ.62$.
 (7) $b=242$, $c=946.7$, $B=10^\circ.02$.
 (8) $a=9.399$, $c=0.3853$, $C=2^\circ.02$.
 (9) $a=91.06$, $c=116.8$, $A=51^\circ.45$.
 (10) $a=360$, $b=360$, $A=27^\circ.24$.

3. 已知二邊及一夾角 解法有下列的三種:

(a) 先用餘弦定律求第三邊，再仿上條求角。此法前半不應用對數計算，如僅須求第三邊，或二已知邊的值極簡單時，則甚適宜。

b. 作任一已知邊上的高，分原形為二個直角三角形，先利用其中一形求高及底邊上一線段，用加、減求出底邊上他一線段，再利用另一形求一邊及一角。

(c) 先用正切定律求二角，再用正弦定律求一邊。

例題 已知 $A=70^\circ.5$, $b=12$, $c=21$, 求其餘三件。

解法一

$$\text{公式: } \begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}, \\ \sin B = \frac{b \sin A}{a}, \\ C = 180^\circ - (A + B). \end{cases}$$

計算:

$$a = \sqrt{144 + 441 - 504 \times 0.3358} = \sqrt{416.7648}.$$

$$\log b = 1.0792$$

$$\log \sin A = 9.9743 - 10$$

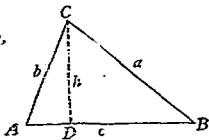
$$\text{colog } a = 8.6962 - 10$$

$$\log \sin B = 9.7437 - 10$$

$$\text{答數: } \begin{cases} a = 20.41, \\ B = 33^\circ.66, \\ C = 75^\circ.84. \end{cases}$$

解法二

$$\text{公式: } \begin{cases} h = b \sin A, \\ AD = b \cos A, DB = c - AD, \\ \tan B = \frac{h}{DB}, \\ a = \frac{h}{\sin B}, \\ C = 180^\circ - (A + B). \end{cases}$$



| | |
|---|---|
| 計算: $\log b = 1.0792$ $\log \sin A = 9.9743 - 10$ $\log h = 1.0535$ $\log c = 1.0792$ $\log \cos A = 9.5235 - 10$ $\log \dots = 0.0027$ $AD = 4.066$ $DB = 15.994$ | $\log h = 1.0535$ $\operatorname{colog} DB = 8.7098 - 10$ $\log \tan B = 9.8233 - 10$ $\log h = 1.0535$ $\operatorname{colog} \sin B = 0.2761$ $\log a = 1.3099$ 答案: $\begin{cases} B = 33^\circ.65, \\ a = 20.42, \\ C = 75^\circ.85. \end{cases}$ |
|---|---|

註 求得 $\log h$ 後,不必求出 h . 又已知的 A 若為鈍角,則 $DB = c + AD$; 若求得的 $AD < c$; 則 B 必為銳角,這時 $DB = AD - c$.

解法三

$$\begin{cases} \tan \frac{1}{2}(C-B) = \frac{c-b}{c+b} \cot \frac{1}{2}A, & \frac{A}{2} = 70^\circ.5 \\ \frac{1}{2}(C+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}A, & \frac{1}{2}A = 35^\circ.25. \\ C = \frac{1}{2}(C+B) + \frac{1}{2}(C-B), & c = 21 \\ B = \frac{1}{2}(C+B) - \frac{1}{2}(C-B), & b = 12 \\ a = \frac{b \sin A}{\sin B}, & c-b = 9. \\ & c+b = 33. \end{cases}$$

| | |
|--|---|
| 計算: $\log(c-b) = 0.9542$ $\operatorname{colog}(c+b) = 8.4815 - 10$ $\log \cot \frac{1}{2}A = 0.1598$ $\log \tan \frac{1}{2}(C-B) = 9.5985 - 10$ $\frac{1}{2}(C-B) = 21^\circ.10$ $\frac{1}{2}(C+B) = 54^\circ.75$ | $\log b = 1.0792$ $\log \sin A = 9.9743 - 10$ $\operatorname{colog} \sin B = 0.2591$ $\log a = 1.3099$ 答案: $\begin{cases} C = 75^\circ.85, \\ B = 33^\circ.65, \\ a = 20.41. \end{cases}$ |
|--|---|

註 上面三種算法的結果,略有不同,這是因為對於其中的數,來位數是經過捨五入而得,計算後不免有誤差。

4. 已知三邊 可用餘弦定律解，又可用半角的正切公式解。但用餘弦定律不使用對數。

例題 已知 $a=13$, $b=14$, $c=15$, 求三個角。

解法一

$$\text{公式: } \begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \\ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \\ C = 180^\circ - (A + B). \end{cases}$$

$$\text{計算: } \cos A = \frac{196 + 225 - 169}{420} = 0.6900.$$

$$\cos B = \frac{225 + 169 - 196}{420} = 0.5077.$$

$$\text{答案: } \begin{cases} A = 53^\circ.13, \\ B = 59^\circ.49, \\ C = 67^\circ.38. \end{cases}$$

解法二

$$\text{公式: } \begin{cases} s = \frac{1}{2}(a+b+c), & a=13 \\ \tan \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}, & b=14 \\ \tan \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}, & c=15 \\ C = 180^\circ - (A+B). & s=21, \\ & s-a=8, \\ & s-b=7, \\ & s-c=6. \end{cases}$$

$$\text{計算: } \log(s-b) = 0.8451$$

$$\log(s-c) = 0.7782$$

$$\text{co} \log s = 8.6778 - 10$$

$$\text{colog}(s-a) = 9.6629 - 10$$

$$= \frac{10.2380 - 20(\frac{1}{2}A)}{2}$$

$$\log \tan \frac{1}{2}A = 9.6860 - 10.$$

$$\frac{1}{2}A = 26^\circ.57.$$

$$\log(s-c) = 0.7782$$

$$\log(s-a) = 0.9031$$

$$\text{co} \log s = 8.6778 - 10$$

$$\text{colog}(s-b) = 9.1534 - 10$$

$$= \frac{2.10.5140 - 20(\frac{1}{2}B)}{2}$$

$$\log \tan \frac{1}{2}B = 9.7570 - 10$$

$$\frac{1}{2}B = 39^\circ.75.$$

$$\text{答數: } \begin{cases} A=53^{\circ}.14, \\ B=59^{\circ}.50, \\ C=67^{\circ}.36. \end{cases}$$

註 19.3980-20 本應改作 9.3980-10, 但以 2 除後, 得 4.6990-5, 須在該減數及被數各加 5, 然後可以檢表, 這樣反覺不便, 所以並不更改。

習 題 十 三

解下列的三角形, 已知:

$$(1) \quad b=5901, \quad c=1587, \quad A=86^{\circ}.07.$$

$$(2) \quad a=77.40, \quad b=83.39, \quad C=72^{\circ}.25.$$

$$(3) \quad a=55.12, \quad c=39.9, \quad B=94^{\circ}.39.$$

$$(4) \quad a=55.14, \quad b=33.09, \quad C=30^{\circ}.49.$$

$$(5) \quad b=872.5, \quad c=632.7, \quad A=83^{\circ}.$$

$$(6) \quad a=13.72, \quad c=11.21, \quad B=15^{\circ}.38.$$

$$(7) \quad a=3.41, \quad b=2.60, \quad c=15.8.$$

$$(8) \quad a=19, \quad b=34, \quad c=49.$$

$$(9) \quad a=14.49, \quad b=55.43, \quad c=65.91.$$

$$(10) \quad a=51, \quad b=65, \quad c=20.$$

5. 應用問題 舉例如下:

例題 欲測海中小島 C 及 D 的距離, 在海邊取相距 80 丈的 A, B 二點, 測得 $\angle CAD=53^{\circ}.3$, $\angle DAB=40^{\circ}.5$, $\angle CBD=70^{\circ}.7$, $\angle CBA=54^{\circ}.6$. 求 CD .

解 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\text{已知: } \begin{cases} \angle C \hat{A} B = 36^\circ.3 + 40^\circ.5 \\ \quad = 96^\circ.8, \\ \angle C \hat{A} D = 54^\circ.6, \\ AB = 80. \end{cases}$$

$$\text{求得 } \angle A C B = 180^\circ - (96^\circ.8 + 54^\circ.6) = 28^\circ.6.$$

$$\text{由公式 } AC = \frac{AB \sin(\angle ABC)}{\sin(\angle ACB)},$$

$$\text{求得 } AC = 136.2.$$

算式如右:

$$\begin{array}{r} \log AB = 1.9031 \\ \log \sin(\angle ABC) = 9.9112 - 10 \\ \text{colog } \sin(\angle ACB) = 0.3199 \\ \hline \log AC = 2.1342. \end{array}$$

在 $\triangle ABD$ 中,

$$\text{已知: } \begin{cases} \angle A B D = 70^\circ.7 + 54^\circ.6 = 125^\circ.3, \\ \angle D \hat{A} B = 40^\circ.5, \\ AB = 80. \end{cases}$$

$$\text{求得 } \angle A D B = 180^\circ - (125^\circ.3 + 40^\circ.5) = 14^\circ.2.$$

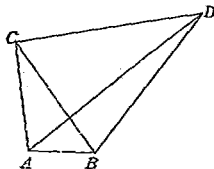
$$\text{由公式 } AD = \frac{AB \sin(\angle ABD)}{\sin(\angle ADB)},$$

$$\text{求得 } AD = 266.2.$$

算式如右:

$$\begin{array}{r} \log AB = 1.9031 \\ \log \sin(\angle ABD) = 9.9118 - 10 \\ \text{colog } \sin(\angle ADB) = 0.6103 \\ \hline \log AD = 2.4252 \end{array}$$

在 $\triangle ADC$ 中,



$$\text{已知: } \begin{cases} AC=136 \text{ 呎,} \\ AD=268 \text{ 呎,} \\ \angle CAD=56^\circ 3'. \end{cases}$$

$$\text{由公式 } CD = \sqrt{AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos(\angle CAD)},$$

$$\text{得 } CD = \sqrt{136^2 + 268^2 - 2 \times 136 \times 268 \times 0.9518} \\ = \sqrt{129600} = 360.$$

故 C, D 的距離為 360 呎。

習題十四

- (1) 測的兩岸有 A, B 二點，從另一 C 點測得 $\angle ACB = 60^\circ$ ，再量得 $AC = 295$ 呎， $BC = 170$ 呎。求 A, B 的距離。
- (2) 某船向正北航行，每時行 80 里，在上午 8 時 20 分，見 $N 30^\circ E$ 處有一燈塔，到 9 時見這燈塔在 $N 45^\circ W$ 的方向。求這船以時間為橫軸的距離。
- (3) A, B 兩燈塔相距 100 里，上午 9 時，有一船從 A 處啟行，每時行 50 里，到 11 時 30 分，這船行至 C ，測得 $\angle ACB$ 為 $40^\circ 37'$ 。求這時船距 B 的距離。
- (4) 平行四邊形的兩鄰二邊，一長 32 吋，一長 25 吋。這二邊所夾角為 67° 。求兩對角線的長。
- (5) 已知三角形三邊之長比為 9 : 12 : 15。求三個角。
- 提示：這三角形三邊的長，就可以當作是 9, 12 及 15。因為凡邊長的比同這三角形相等的，必與這三角形相似，這是他角的正對角的度數一樣。
- (6) 甲船向 $N 10^\circ E$ 處行，每時行 72 里；乙船向 $N 67^\circ E$ 處行，每時行 84 里。兩船於下午 2 時在途中相遇，問在 3 時 30 分時，兩船相距幾里？
- (7) 於某點 A 處望敵軍砲臺的頂 B ，及左近一尖崗 C ，得 $\angle BAC = 56^\circ 12'$ 。

又測得 $\angle ACB = 60^\circ.57$, $AC = 937.6$ 尺。求 A, B 的距離。

(8) 有 A, B, C 三鎮, A 距 B 200 里, 距 C 184 里, 而 B 在 C 的正北, 相距 150 里。問 A 在 C 的什麼方向?

(9) 直角三角形的一銳角為 $37^\circ.44$, 鄰接的一直角邊長 12.1 寸。求直角的二等分線的長。

(10) A, B 二地, 中間隔着一山, 在過 A 的一直線上, 獲得 C, D 二點, 可同時望見 B , 測得 $AC = 235$ 尺, $CD = 224$ 尺, $\angle ACB = 112^\circ.7$, $\angle CDB = 74^\circ.25$ 。求 A, B 的距離。

提示 先求出 $\angle BCD$, 就 $\triangle BCD$ 求 BC , 再就 $\triangle ABC$ 解。

(11) 在山的 B 點測出頂 A 的仰角為 60° , 過 B 點與水平面成角 30° 的直線長 7280 尺, 達於 C 點, 測得 $\angle ACB = 105^\circ$ 。求山高。

提示 先求出 $\angle ABC$, 就 $\triangle ABC$ 求 AB , 再就直角三角形 ABD 解。

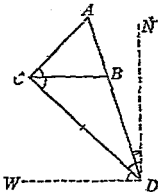
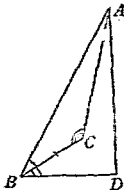
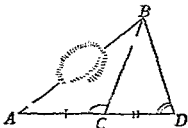
(12) 在高低高低二小島, 同在 N 北 $15^\circ W$ 。船向 N 北行 5 里, 見一島在正東, 他島在 N 北。求二島的距離。

提示 圖中已知三個角都是 45° , 可求得 $\angle ADC = 30^\circ$,

$$\angle ABC = \angle ADW = 75^\circ.$$

先就直角三角形 ACD 求 AC , 再就 $\triangle ABC$ 解。

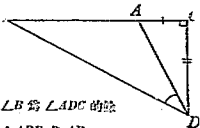
(13) 欲在江邊的 A 點測江的闊 AB , 在 B 點的延長線上取 C 點, 使 $AC = 300$ 尺, 又在過



C 而垂直於 AC 的線內取 D 點, 使 $CD=600$ 尺, 測得 $\angle ADB=76^\circ.31'$, 求 AB .

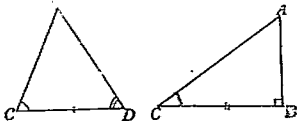
提示 先就直角三角形 ACD

求 AD 及 $\angle ADC$, 因 $\angle B$ 為 $\angle ADC$ 的餘角, 故為已知, 於是可就 $\triangle ABD$ 求 AB .



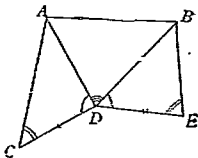
(14) 在河邊定 C, D 二點, 相距 8 尺, 從 C 測得對岸的塔頂 A 的仰角為 $37^\circ.3'$, 塔基同 D 的兩方向的夾角為 $76^\circ.23'$. 從 D 測得塔基同 C 的兩方向的夾角為 $67^\circ.23'$. 求塔高.

提示 設塔基為 B , 則可在水平面上的 $\triangle BCD$ 求 CB , 再就直立面上的 $\triangle ABC$ 求 AB .



(15) 有不能到達的 A, B 二地, 只有在 D 處可以同時望見過二地, 取一 C 點, 可同時望見 A, D , 測得 $CD=200$ 尺, $\angle ADC=89^\circ$, $\angle ACD=56^\circ.5'$. 再取一 E 點, 可同時望見 B, D , 求得 $DE=200$ 尺, $\angle BDE=54^\circ.5'$, $\angle BED=88^\circ.5'$. 從 D 測得 $\angle ADB=72^\circ.5'$. 求 A, B 的距離.

提示 先就 $\triangle ACD$ 求 AD , 就 $\triangle BED$ 求 BD , 再就 $\triangle ABD$ 解.



第五章 三角形的性質

第一節 三角形的面積

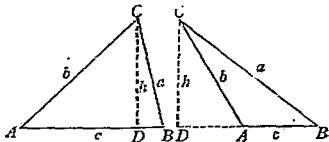
求三角形面積的公式，除幾何學中已論及的一種($\Delta = \frac{1}{2}bh$, b 為底, h 為高)外，尚有下列的六種：

1. 已知二邊及其夾角 設以 Δ 表 $\triangle ABC$ 的面積，得公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{2}bc \sin A \cdots \cdots (1) \\ \Delta &= \frac{1}{2}ca \sin B \cdots \cdots (2) \\ \Delta &= \frac{1}{2}ab \sin C \cdots \cdots (3) \end{aligned} \right\} \text{【XI】}$$

證 設 c 邊上的高為 h ,

則 $\Delta = \frac{1}{2}ch$ (面積定理).



在左圖

$$h = b \sin A,$$

$$\begin{aligned} \text{在右面} \quad h &= b \sin (C \angle D) = b \sin (180^\circ - A) \\ &= b \sin A \quad \text{〔公式〔VI〕(1)〕.} \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2} b c \sin A \quad (\text{代入}).$$

其餘仿此。

2. 已知二角及一邊 三角形的二角已知，則第三角可立即推知。由三角及一邊，可以求面積。公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A} \dots\dots\dots(1) \\ \Delta &= \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin B} \dots\dots\dots(2) \\ \Delta &= \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C} \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{〔XII〕}$$

證 由正弦定律，得

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

$$\begin{aligned} \text{代入公式〔XI〕(1), 得 } \Delta &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a \sin B}{\sin A} \cdot \frac{a \sin C}{\sin A} \cdot \sin A \\ &= \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}. \end{aligned}$$

其餘仿此。

3. 已知三邊 設 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ，得公式：

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \dots\dots\dots \text{〔XIII〕}$$

$$\text{證 因 } \Delta = \frac{1}{2} b c \sin A \quad \text{〔公式〔XI〕(1)〕,}$$

$$\therefore \Delta^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 A \quad \text{〔自乘〕}$$

$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 A) \quad \text{〔因 } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \text{〕}$$

$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 + \cos A)(1 - \cos A) \quad (\text{分解因式})$$

$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \quad (\text{餘弦定律})$$

$$= \frac{1}{4} b^2 c^2 \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

$$= \frac{1}{16} (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c).$$

因 $a+b+c=2s$ (周長),

$$-a+b+c=2(s-a) \quad (\text{兩邊各減去 } 2a \text{ 而得}),$$

$$a-b+c=2(s-b),$$

$$a+b-c=2(s-c),$$

代入前式, 得 $\Delta^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$.

開平方, 得 $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

4. 已知三邊及外接圓半徑 設三角形外接圓的半徑為 R , 得公式:

$$\Delta = \frac{abc}{2R} \dots \dots \dots \text{[XIV]}$$

證 如圖, 若 $OD \perp BC$,

則 OD 平分 $\angle BOC$ 及 BC

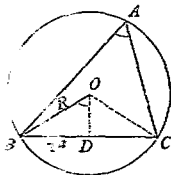
(等腰) 頂角線平分頂角及底邊)。

$$\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC$$

(圓周角等於同弧所對中心角之半)。

$\therefore \angle BOD = \angle A$.

$$\text{且 } OD = \frac{1}{2} a = \frac{a}{2R}.$$



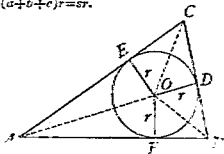
代入 [XIII] (1), 得 $\Delta = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

5. 已知三邊及內切圓半徑 設三角形內切圓的半徑為 r , 得公式:

$$\Delta = sr \dots \dots \dots \text{【XV】}$$

證 如圖, 從切點作半徑 DO, EO, FO , 則必與邊垂直。

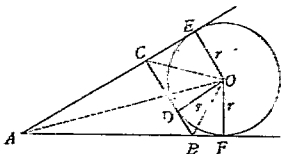
$$\begin{aligned} \therefore \Delta &= \Delta OBC + \Delta OCA + \Delta OAB = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)r = sr. \end{aligned}$$



6. 已知三邊及傍切圓半徑 設三角形的三邊 a, b, c 上的傍切圓的半徑, 順次是 r_a, r_b, r_c . 得公式:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= r_a(s-a) \dots \dots \dots (1) \\ \Delta &= r_b(s-b) \dots \dots \dots (2) \\ \Delta &= r_c(s-c) \dots \dots \dots (3) \end{aligned} \right\} \text{【XVI】}$$

證 如圖, 從 a 邊上傍切圓的切點作半徑 DO, EO, FO , 則必與邊垂直。



$$\begin{aligned} \therefore \quad \Delta &= \triangle OCA + \triangle OAB - \triangle OBC = \frac{1}{2}b r_a + \frac{1}{2}c r_a - \frac{1}{2}a r_a \\ &= \frac{1}{2}(b+c-a)r_a = \frac{1}{2} \cdot 2(s-a)r_a = r_a(s-a). \end{aligned}$$

其餘仿此。

第二節 外接圓及各切圓的半徑

1. 外接圓半徑 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{a}{2 \sin A} \dots\dots\dots (1) \\ R &= \frac{b}{2 \sin B} \dots\dots\dots (2) \\ R &= \frac{c}{2 \sin C} \dots\dots\dots (3) \\ R &= \frac{abc}{4\Delta} \dots\dots\dots (4) \end{aligned} \right\} \text{[XVII]}$$

證 由上節4的證明，得 $\sin A = \frac{a}{2R}$ 。 化得 $R = \frac{a}{2 \sin A}$ 。

同樣可得(2)、(3)二式。

又由公式[XIV]，可直接化得(4)式。

2. 內切圓半徑 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\Delta}{s} \dots\dots\dots (1) \\ r &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \dots\dots\dots (2) \\ r &= (s-a) \tan \frac{1}{2}A = (s-b) \tan \frac{1}{2}B \\ &= (s-c) \tan \frac{1}{2}C \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} \text{[XVIII]}$$

證 由公式【XV】可化得(1)式。

$$\begin{aligned} \text{以【XIII】代入(1), 得 } r &= \frac{1}{s} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{s^2} \cdot s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又由【X】(1), 得 } (s-a) \tan \frac{1}{2} A &= (s-a) \cdot \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ &= \sqrt{(s-a)^2 \cdot \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = r \end{aligned}$$

其餘仿此。

3. 傍切圓半徑 公式如下:

$$\left. \begin{aligned} r_a &= \frac{\Delta}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = \tan \frac{1}{2} A \cdots \cdots (1) \\ r_b &= \frac{\Delta}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}} = \tan \frac{1}{2} B \cdots \cdots (2) \\ r_c &= \frac{\Delta}{s-c} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}} = \tan \frac{1}{2} C \cdots \cdots (3) \end{aligned} \right\} \text{【XIX】}$$

證 仿上條。

習 題 十 五

求下列各三角形的面積【(1)——(5)】，已知：

- (1) $a=15$, $b=27$, $C=51^\circ.49$.
 (2) $A=36^\circ.9$, $B=81^\circ.73$, $c=20$.

(3) $a=13, \quad b=14, \quad c=15.$

(4) $a=40, \quad b=111, \quad c=145.$

(5) $a=12.3, \quad b=59.5, \quad c=67.6.$

(6) 已知 $a=32.24, \quad A=63^{\circ}.23$, 求外接圓半徑.

(7) 已知 $a=13, \quad b=14, \quad c=15$, 求內切圓半徑.

(8) 已知 $a=13, \quad b=14, \quad c=15$, 求三個傍切圓的半徑.

試證下列的恆等式:

(9) $r = s \tan \frac{1}{2}A \tan \frac{1}{2}B \tan \frac{1}{2}C.$

提示 把[X]的三式連乘, 得 $\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{s^3}$, 乘以 s , 與公式

[XVIII] (2) 比較即得.

(10) $\Delta = Br(\sin A + \sin B + \sin C).$

提示 由[XVII] 知 $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}.$

(11) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$

提示 左邊 = $\frac{s-a}{\Delta} + \frac{s-b}{\Delta} + \frac{s-c}{\Delta} = \dots = \frac{s}{\Delta} = \frac{s}{sr} = \dots$.

(12) $\Delta = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}.$

提示 把公式[XVIII] (1) 與[XIX] 中三式的前節連乘, 得

$$r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \frac{\Delta^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{\Delta^4}{\Delta^2} = \Delta^2.$$

第三節 邊與各角函數的關係

前在第四章第三節所講的正弦、餘弦、正切三定律及半角的正切公式, 都是三角形的邊同各角函數的重要關係。但其他的

關係尚多，茲擇重要的數種補述如下：

1. 餘弦第二定律 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \dots\dots\dots(1) \\ b &= c \cos A + a \cos C \dots\dots\dots(2) \\ c &= a \cos B + b \cos A \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{[XX]}$$

證 如圖，作 $AD \perp BC$ ，

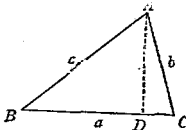
則 $DC = b \cos C$ ，

$BD = c \cos B$ 。

因 $a = DC + BD$ ，

$\therefore a = b \cos C + c \cos B$ 。

其餘仿此。



2. 半角的正弦公式 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{1}{2} A &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \dots\dots\dots(1) \\ \sin \frac{1}{2} B &= \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}} \dots\dots\dots(2) \\ \sin \frac{1}{2} C &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{[XXI]}$$

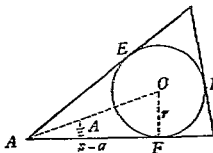
證 如圖，作內切圓 O ，切各邊於

D, E, F 。

則 $\left. \begin{aligned} AF &= AE \\ BD &= BF \\ CD &= CE \end{aligned} \right\} \text{(等切線定理)}$

$\therefore AF + a = BF + b = s$ 。

$AF = s - a$ 。



$$\begin{aligned}
 \therefore \overline{Od}^2 &= r^2 + (s-a)^2 && \text{(畢氏定理)} \\
 &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + \frac{s(s-a)^2}{s} && \text{(公式【XVIII】(2))} \\
 &= \frac{(s-a)[(s-b)(s-c) + s(s-a)]}{s} \\
 &= \frac{(s-a)(s^2 - bs - cs + bc + s^2 - as)}{s} \\
 &= \frac{(s-a)[2s^2 - (a+b+c)s + bc]}{s} \\
 &= \frac{(s-a)(2s^2 - 2s^2 + bc)}{s} = \frac{(s-a)bc}{s}
 \end{aligned}$$

又因 $\angle OdF = \frac{1}{2}A$ (切線夾角, 發交點中心的聯線等分),

$$\begin{aligned}
 \therefore \sin^2 \frac{1}{2}A &= \frac{r^2}{\overline{Od}^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \div \frac{(s-a)bc}{s} \\
 &= \frac{(s-b)(s-c)}{bc}
 \end{aligned}$$

開平方, 即得(1)式。其餘仿此。

3. 半角的餘弦公式 公式如下:

$$\left. \begin{aligned}
 \cos \frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \dots\dots\dots (1) \\
 \cos \frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}} \dots\dots\dots (2) \\
 \cos \frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned} \right\} \text{【XXII】}$$

證 仿上條, 得

$$\cos^2 \frac{1}{2}A = \frac{(s-a)^2}{\overline{Od}^2} = (s-a)^2 \div \frac{(s-a)bc}{s} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

開平方, 即得(1)式。其餘仿此。

4. 三邊與任一角的正弦的關係 公式如下:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdots \cdots (1)$$

$$\sin B = \frac{2}{ca} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdots \cdots (2) \quad \text{[XXIII]}$$

$$\sin C = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \cdots \cdots (3)$$

證 化公式 [XI] 可得

$$\sin A = \frac{2\Delta}{bc}, \quad \sin B = \frac{2\Delta}{ca}, \quad \sin C = \frac{2\Delta}{ab}$$

以公式 [XXIII] 代入即得。

習 題 十 六

試證下列的恆等式:

$$(1) \quad a+b+c = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C.$$

$$(2) \quad a^2+b^2+c^2 = 2(bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C).$$

提示 以 a 乘公式 [XX] (1) 的兩邊, 以 b 乘 (2) 的兩邊, 以 c 乘 (3) 兩邊, 相加即得 (另一證法見習題十(2)).

$$(3) \quad a^2 - b^2 = c(a\cos B - b\cos A).$$

$$(4) \quad (a+b)(1-\cos C) = c(\cos A + \cos B).$$

提示 把公式 [XX] (1), (2) 相加, 移項, 分解因式。

$$(5) \quad \frac{b-a\cos C}{c-a\cos B} = \frac{\sin C}{\sin B}$$

提示 公式 [XX] (2), (3) 各移項, 得 $b-a\cos C = c\cos A$,

$$c-a\cos B = b\cos A, \quad \text{相除, 得題中左式} = \frac{c}{b}$$

$$(6) c = b \sin A \cot B + a \sin B \cot A.$$

提示 由正弦定律可得 $b \sin A = a \sin B$.

$$\therefore \text{右邊} = a \sin B \cot B + b \sin A \cot A$$

$$= a \sin B \cdot \frac{\cos B}{\sin B} + b \sin A \cdot \frac{\cos A}{\sin A} = \dots\dots\dots$$

$$(7) \Delta^2 = abc \sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$$

提示 以 abc 乘公式 [XXI] 中三式的連乘積。

$$(8) s\Delta = abc \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

$$(9) (s-a)\Delta = abc \cos \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C.$$

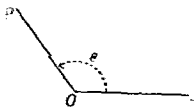
$$(10) r_a = 4R \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C.$$

*第六章 任何角的三角函數

第一節 角的廣義

1. 任何角 以前所講的角，專指三角形內的角，最大不能滿 180° ，但三角學的目的，並非專在解三角形，所論的角，也不限定是小於 180° 的劣角，所以這裏要另行下一個角的定義。

設有半條直線(註)，圍繞他的一端 O ，從 OX 的位置，迴轉到 OP 的位置，就成一個角 θ 。如圖， OX 叫做 θ 的首線， OP 叫做 θ 的迴線。

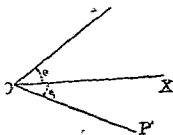


註 直線的長無限，不能找到他的任一端，但半條直線却有一個端。

從上列定義，知道角的大小由迴轉的程度而定。迴轉的程度愈大，所成的角也愈大。

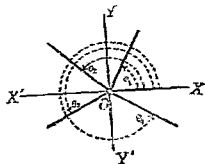
依這定義，可得任何的角，非但不以 180° 為限，並可超過 360° 。

2. 角的正負 直線迴轉而成角時，因迴轉的方向不同，可以分出角的正負。通常如與時鐘上兩針的迴轉方向相反時，所成的是正角；相同時所成



的是負角。如上圖， θ 是正角， θ_2 是負角。

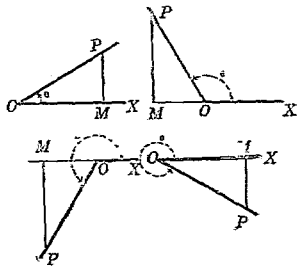
3. 某象限內的角 畫縱橫二軸 $X'X, Y'Y$ ，相交於原點 O 。放一角的首線在 OX 上，若是他的週線在某象限內，就叫這角是某象限內的角。如圖， θ_1 是第一象限內的角， θ_2 是第二象限內的角，其餘類推。



註 只須凡角的首線都放在 OX 上。

第二節 任何角函數的定義及正負

1. 任何角的三角函數定義 前在第四章第一節所述三角函數定義的擴張，就是適用於任何角的三角函數定義。現在再就各象限內的角，分別繪圖，並列式表示如下：



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{MP}{OP}, & \cos \theta &= \frac{OM}{OP}, & \tan \theta &= \frac{MP}{OM}, \\ \csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta}, & \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta}, & \cot \theta &= \frac{1}{\tan \theta}. \end{aligned}$$

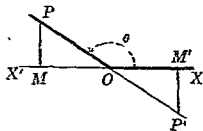
2. 線段的正負 從第四章第一節，知道點的坐標有正負，點與原點的距離常為正。但實際斜線也有正負，所以另定線段的正負如下：

凡量一線段，可分兩個方向量。設一線段的兩端為 A 及 B ，若從 A 量到 B ，就稱這線段為 AB ；若從 B 量到 A ，就稱這線段為 BA 。我們若認定 AB 的方向是正，則 AB 線段就是正， BA 線段就是負。既經認定後，就永遠不能更改，且一切同方向的線段的正負完全同他一樣。

如圖， θ 角的兩邊，應認定從頂點 O 沿着邊的方向量去是正，向反對方向量去是負。所以在邊上的線段，如 OP , OM' 為正；在邊的延長線上的線段，如 OP' , OM 為負。通常將首線 OX 合於橫軸，故與 OX 同向的線段總是正，反向的線段總是負。

從週緣上一點 P 所引首線（或其延長線，實即橫軸）上的垂線 PM ，應認定要從垂足 M 量到該點 P ，並須認定從下向上，如 MP 為正；從上向下，如 MP' 為負。

3. 三角函數的正負 從上二條，可定任何象限內的角的函數正負如下（參閱 I 條的圖）：



(a) 第一象限內的角 θ 在第一象限時, MP, OP, OM 都是正, 所以所有的六種三角函數都是正數。

(b) 第二象限內的角 θ 在第二象限時, MP, OP 為正, OM 為負, 所以用+表正數, -表負數, 得

$$\sin \theta = \frac{MP}{OP} = \frac{+}{+} = +,$$

$$\cos \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{-}{+} = -,$$

$$\tan \theta = \frac{MP}{OM} = \frac{+}{-} = -.$$

因正數的倒數仍正, 負數的倒數仍負, 故其餘三種函數的正負, 可從上列三種函數推定, 這裏從略。

(c) 第三象限內的角 θ 在第三象限時, OP 是正, MP, OM 都是負, 故得

$$\sin \theta = \frac{-}{+} = -, \quad \cos \theta = \frac{-}{+} = -, \quad \tan \theta = \frac{-}{-} = +.$$

(d) 第四象限內的角 θ 在第四象限時, MP 是負, OP, OM 都是正, 故得

$$\sin \theta = \frac{-}{+} = -, \quad \cos \theta = \frac{+}{+} = +, \quad \tan \theta = \frac{-}{+} = -.$$

總括起來, 可列成下表:

| θ 所在的象限 | I | II | III | IV |
|-------------------------------|---|----|-----|----|
| 函 數 | | | | |
| $\sin \theta$ 或 $\csc \theta$ | + | + | - | - |
| $\cos \theta$ 或 $\sec \theta$ | + | - | - | + |
| $\tan \theta$ 或 $\cot \theta$ | + | - | + | - |

第三節 用 θ 的函數表 $n \cdot 90^\circ \pm \theta$ 的函數

1. $(-\theta)$ 的函數 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta \dots\dots\dots(1) \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \dots\dots\dots(2) \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【XXIV】}$$

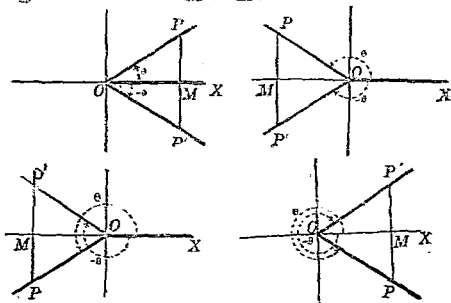
註 其餘三種函數，可從上式推定，本節各條一概從略。

證 作 $\angle XOP = \theta$, $\angle XOP' = -\theta$. 取 $OP' = OP$. 從 P 及 P' 各作垂線 (或其延長線) 至 X 軸, 則 θ 無論在何象限, 二垂線必合成一直線 (學者自證). 此直線交 X 軸於 M ,

則 $\triangle P'OM \cong \triangle POM$ (學者自證).

$\therefore MP$ 與 MP' 為絕對值相同而符號相反的二線段.

即 $MP' = -MP$.



$$\text{故得} \quad \sin(-\theta) = \frac{MP'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\sin \theta.$$

$$\cos(-\theta) = \frac{OM}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos \theta.$$

$$\tan(-\theta) = \frac{MP'}{OM} = \frac{-MP}{OM} = -\tan \theta.$$

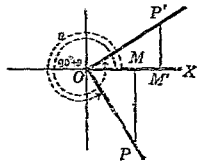
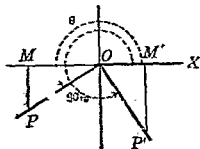
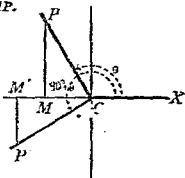
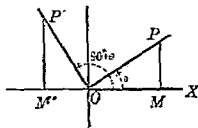
2. $(90^\circ + \theta)$ 的函数公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sin 90^\circ + \theta &= \cos \theta \dots\dots\dots(1) \\ \cos(90^\circ + \theta) &= -\sin \theta \dots\dots\dots(2) \\ \tan(90^\circ + \theta) &= -\cot \theta \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{【XXV】}$$

設 仿上條作 θ , $(90^\circ + \theta)$. 取 $OP' = OP$. 作符號的垂線 $PM, P'M'$,

則 $\triangle P'OM' \cong \triangle OPM$.

$$\therefore M'P' = OM, \quad OM' = -MP.$$



$$\text{故得} \quad \sin(90^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos \theta.$$

$$\cos(90^\circ + \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\sin \theta.$$

$$\tan(90^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{OM}{-MP} = -\cot \theta.$$

3. $(90^\circ - \theta)$ 的函數 公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - \theta) &= \cos \theta \dots\dots\dots (1) \\ \cos(90^\circ - \theta) &= \sin \theta \dots\dots\dots (2) \\ \tan(90^\circ - \theta) &= \cot \theta \dots\dots\dots (3) \end{aligned} \right\} \text{[XXXVI]}$$

證 同前,使

$$OP' = OP$$

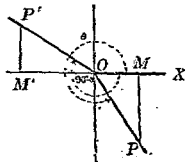
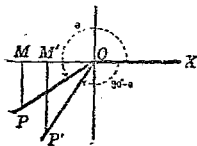
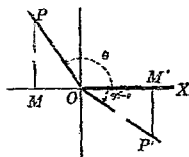
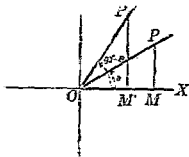
則

$$\triangle P'OM' \cong \triangle OPM.$$

∴

$$M'P' = OM,$$

$$OM' = MP.$$



$$\text{故得} \quad \sin(90^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos \theta.$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin \theta.$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{OM}{MP} = \cot \theta.$$

4. $(180^\circ + \theta)$ 的函数 公式如下:

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta \dots\dots\dots (1)$$

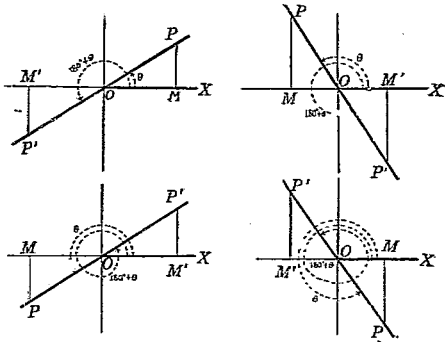
$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta \dots\dots\dots (2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{【XXVII】}$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta \dots\dots\dots (3)$$

證 同前, 使 $OP' = OP$.

則 $\triangle P'OM' \cong \triangle POM$.

$\therefore M'P' = -MP, \quad OM' = -OM.$



$$\text{故得} \quad \sin(180^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\sin \theta.$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos \theta.$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{-MP}{-OM} = \tan \theta.$$

5. $(180^\circ - \theta)$ 的函數 公式如下:

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \dots\dots\dots(1)$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \dots\dots\dots(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{[X]} \\ \text{[X]} \\ \text{[X]} \end{array} \right.$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta \dots\dots\dots(3)$$

證 同前, 設

$$OP' = OP.$$

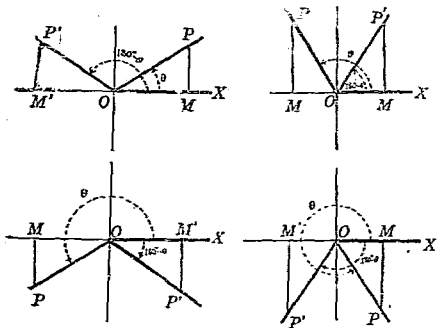
則

$$\triangle P'OM' \cong \triangle POM.$$

\therefore

$$M'P' = MP,$$

$$OM' = -OM.$$



$$\begin{aligned} \text{故得} \quad \sin(180^\circ - \theta) &= \frac{M'P'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin \theta. \\ \cos(180^\circ - \theta) &= \frac{OM'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos \theta. \\ \tan(180^\circ - \theta) &= \frac{M'P'}{OM'} = \frac{MP}{-OM} = -\tan \theta. \end{aligned}$$

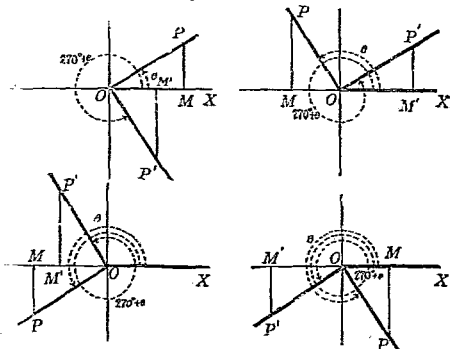
6. $(270^\circ + \theta)$ 的函数 公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sin(270^\circ + \theta) &= -\cos \theta \dots\dots\dots(1) \\ \cos(270^\circ + \theta) &= \sin \theta \dots\dots\dots(2) \\ \tan(270^\circ + \theta) &= -\cot \theta \dots\dots\dots(3) \end{aligned} \right\} \text{[XXIX]}$$

證 明前, 使 $OP' = OP$.

則 $\triangle P'OM' \cong \triangle OPM$.

$$\therefore M'P' = -OM, \quad OM' = MP.$$



$$\text{故得} \quad \sin(270^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos \theta.$$

$$\cos(270^\circ + \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin \theta.$$

$$\tan(270^\circ + \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{-OM}{MP} = -\cot \theta.$$

7. $(270^\circ - \theta)$ 的函數 公式如下:

$$\sin(270^\circ - \theta) = -\cos \theta \dots\dots\dots(1)$$

$$\cos(270^\circ - \theta) = -\sin \theta \dots\dots\dots(2) \quad \text{【XXX】}$$

$$\tan(270^\circ - \theta) = \cot \theta \dots\dots\dots(3)$$

證 同前,使

$$OP' = OP.$$

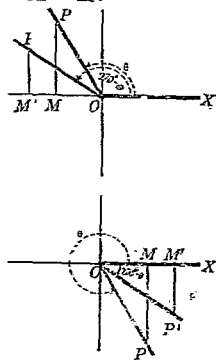
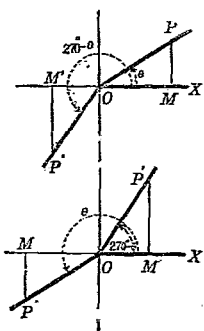
則

$$\triangle P'OM' \cong \triangle OPM.$$

\therefore

$$M'P' = -OM,$$

$$OM' = -MP.$$



$$\text{故得} \quad \sin(270^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos \theta.$$

$$\cos(270^\circ - \theta) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\sin \theta.$$

$$\tan(270^\circ - \theta) = \frac{M'P'}{OM'} = \frac{-OM}{-MP} = \cot \theta.$$

8. $n \cdot 360^\circ \pm \theta$ 的函數 公式如下:

$$\sin n \cdot 360^\circ + \theta = \sin \theta \dots\dots\dots (1)$$

$$\cos(n \cdot 360^\circ + \theta) = \cos \theta \dots\dots\dots (2) \quad \text{【XXXI】}$$

$$\tan(n \cdot 360^\circ + \theta) = \tan \theta \dots\dots\dots (3)$$

$$\sin(n \cdot 360^\circ - \theta) = \sin(-\theta) = -\sin \theta \dots\dots (1)$$

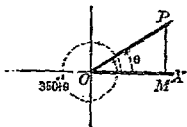
$$\cos(n \cdot 360^\circ - \theta) = \cos(-\theta) = \cos \theta \dots\dots (2) \quad \text{【XXXII】}$$

$$\tan(n \cdot 360^\circ - \theta) = \tan(-\theta) = -\tan \theta \dots\dots (3)$$

證 如圖，設有二個迴線同時由 Ox 起繞 O 旋轉，一個造成 θ 角，一個造成 $(360^\circ + \theta)$ 角。因為週轉一周，等於 360° ，所以這二個迴線最後的位置合而為一，因此他們的函數完全相同。

若第二迴線繼續再轉，轉成 $(n \cdot 360^\circ + \theta)$ 角 (n 是正整數)，則末他的最後位置，仍與第一迴線的最後位置相合，所以 $(n \cdot 360^\circ + \theta)$ 的各函數，仍與 θ 的各函數完全相同。

若把 θ 換成 $(-\theta)$ ，結果仍是一樣。即 $(n \cdot 360^\circ - \theta)$ 的各函數，與 $(-\theta)$ 的各函數完全相同。再據公式【XXIV】，即得公式【XXXII】。



第四節 任何角函數的值

應用上節諸公式，可求任何角的三角函數的值。只須先把任

何角的函數，化做相當正銳角的函數，然後檢三角函數表就得。
現在分四類述之如下：

1. 小於 360° 的正角 化原角為 $90^\circ + \theta$ ， $180^\circ + \theta$ ，或 $270^\circ + \theta$ ，使 θ 為正銳角，於是用公式【XXV】、【XXVII】、【XXIX】，化成 θ 的函數。

例題 化 $\cos 213^\circ$ 為正銳角的函數。

解 因 213° 較 180° 多 33° ，故得

$$\cos 213^\circ = \cos(180^\circ + 33^\circ) = -\cos 33^\circ.$$

註 亦可化原角為 $180^\circ - \theta$ ， $270^\circ - \theta$ ，或 $360^\circ - \theta$ 解，但較上法稍覺不便。

2. 大於 360° 的正角 化原角為 $n \cdot 360^\circ + \phi$ ，使 ϕ 為小於 360° 的正角，用公式【XXXI】化成 ϕ 的函數，再照上條求解。

例題 化 $\sin 879^\circ$ 為正銳角的函數。

解 因 879° 較 $360^\circ \times 2$ 多 159° ，而 159° 又較 90° 多 69° ，故得

$$\begin{aligned} \sin 879^\circ &= \sin(2 \cdot 360^\circ + 159^\circ) = \sin 159^\circ \\ &= \sin(90^\circ + 69^\circ) = \cos 69^\circ. \end{aligned}$$

3. 大於 -360° 的負角 用公式【XXIV】化成正角的函數，再仿1條解。

例題 化 $\tan(-290^\circ)$ 為正銳角的函數。

解 $\tan(-290^\circ) = -\tan 290^\circ = -\tan(270^\circ + 20^\circ)$
 $= -(-\cot 20^\circ) = \cot 20^\circ.$

4. 小於 -360° 的負角 用公式【XXIV】化成正角的函數，再仿2條解。

例題 化 $\sin(-1127^\circ)$ 為正銳角的函數。

解 $\sin(-1127^\circ) = -\sin 1127^\circ = -\sin(3 \times 360^\circ + 47^\circ) = -\sin 47^\circ$.

習題十七

化下列各三角函數為正銳角的三角函數：

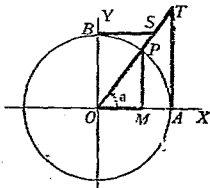
- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (1) $\sin 290^\circ$. | (2) $\tan 183^\circ$. |
| (3) $\cos(-343^\circ)$. | (4) $\cos 974^\circ$. |
| (5) $\tan 308^\circ$. | (6) $\sin(-94^\circ)$. |
| (7) $\sin(-540^\circ)$. | (8) $\cos(-737^\circ)$. |
| (9) $\cot 215^\circ$. | (10) $\tan 193^\circ$. |
| (11) $\cot(-65^\circ)$. | (12) $\sin 371^\circ$. |

求下列各式的直，不許用三角函數表：

- (13) $\cos 150^\circ + \tan 225^\circ - 2 \sin 135^\circ + \tan 210^\circ$.
 (14) $3 \tan 120^\circ - \sin 315^\circ + \cot 240^\circ$.
 (15) $\sin(-300^\circ) + \tan 150^\circ - \csc(-330^\circ)$.
 (16) $\sin 45^\circ - \cot(-135^\circ) + \tan(-30^\circ) + \cos 315^\circ$.

第五節 用線段表三角函數的值

從任何角 θ 的頂點 O ，作直線 OY 與首線 OX 垂直。以 O 為中心，單位長（即 1）為半徑畫一圓，與 OX 交於 A ， OY 交於 B ，又與 θ 的週線交於 P ，從 P 作 OX 的垂線 PM 。從 A



及 B 各作圓的切線，交 θ 的週線於 T 及 S 。

因已知 $OP=OA=OB=1$,

故可用線段表 θ 的各三角函數如下：

$$\sin \theta = \frac{MP}{OP} = MP.$$

$$\cos \theta = \frac{OM}{OP} = OM.$$

$$\tan \theta = \frac{MP}{OM} = \frac{AT}{OA} = AT \text{ (相似三角形比例定理).}$$

$$\cot \theta = \frac{OM}{MP} = \frac{BS}{OB} = BS.$$

$$\sec \theta = \frac{OP}{OM} = \frac{OT}{OA} = OT.$$

$$\csc \theta = \frac{OP}{MP} = \frac{OS}{OB} = OS.$$

註 本節圖中的 θ ，在第一象限。若 θ 在其他象限時，仍是一樣，可參閱下節的圖。

第六節 三角函數值的變化

若 θ 角從 0° 逐漸增大而達 360° ，那末他的各三角函數的值，也隨着發生變化。他的變化情形，可分下列的四類來講：

1. 在第一象限內 θ 在第一象限內，從 0° 增到 90° 時，從圖可見：

(a) MP 在 $\theta=0^\circ$ 時，他的值為 0； θ 漸大， MP 也漸大；

當 $\theta=90^\circ$ 時, MP 合於半徑 OB , 即 $MP=1$. 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\sin \theta$ 就從 0 增到 +1.

(b) OM 在 $\theta=0^\circ$ 時, 他的值等於半徑 OA , 即為 1; θ 漸大, OM 反漸小; 當 $\theta=90^\circ$ 時, OM 為 0. 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\cos \theta$ 就從 +1 減到 0.

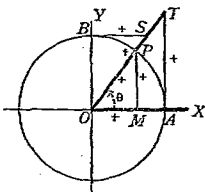
(c) AT 在 $\theta=0^\circ$ 時, 他的值為 0; θ 漸大, AT 也漸大; 當 $\theta=90^\circ$ 時, 迴線與 AT 平行, AT 的長無限止, 故其值為 ∞ (註). 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\tan \theta$ 就從 0 增到 $+\infty$.

註 設分數 $\frac{a}{x}$ 中的 a 不等於 0, 若 x 的值漸次減小, 則分數的值漸次增大. 故 x 愈小, $\frac{a}{x}$ 就愈大. 當 x 的值為無限小, 即等於 0 時, 則分數 $\frac{a}{x}$ 的值為無限大, 通常以 ∞ 表示. 凡被除數非 0, 而除數為 0 的, 或 0 的倒數, 都是 ∞ . 又直線的一端無限止時, 他的長也是 ∞ . 但向右或向上為 $+\infty$, 向左或向下為 $-\infty$.

(d) BS 在 $\theta=0^\circ$ 時, 他的值為 ∞ ; θ 漸大, BS 反漸小; 當 $\theta=90^\circ$ 時, BS 為 0. 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\cot \theta$ 就從 $+\infty$ 減到 0.

(e) OT 在 $\theta=0^\circ$ 時, 他的值等於半徑 OA , 即為 1; θ 漸大, OT 也漸大; 當 $\theta=90^\circ$ 時, OT 為 ∞ . 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\sec \theta$ 就從 +1 增到 $+\infty$.

(f) OS 在 $\theta=0^\circ$ 時, 他的值為 ∞ ; θ 漸大; OS 反漸小; 當

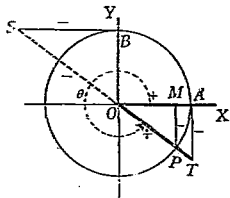
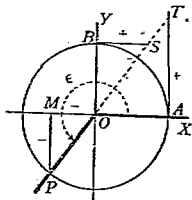
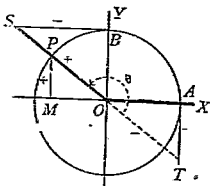


$\theta = 90^\circ$ 時, OS 等於半徑 OB , 即為 1. 故知 θ 從 0° 增到 90° , $\csc \theta$ 就從 $+\infty$ 減到 +1.

2. 在第二象限內 θ 在第二象限內, 從 90° 增到 180° 時, 從圖可見 OM, AT, BS, OT 都是負. 仿上條可推知 $\sin \theta$ 從 +1 減到 0, $\cos \theta$ 從 0 減到 -1, $\tan \theta$ 從 $-\infty$ 增到 0, $\cot \theta$ 從 0 減到 $-\infty$, $\sec \theta$ 從 $-\infty$ 增到 -1, $\csc \theta$ 從 +1 增到 $+\infty$.

3. 在第三象限內 θ 在第三象限內, 從 180° 增到 270° 時, 從圖可見 MP, OM, OT, OS 都是負. 仿前法可推知 $\sin \theta$ 從 0 減到 -1, $\cos \theta$ 從 -1 增到 0, $\tan \theta$ 從 0 增到 $+\infty$, $\cot \theta$ 從 $+\infty$ 減到 0, $\sec \theta$ 從 -1 減到 $-\infty$, $\csc \theta$ 從 $-\infty$ 增到 -1.

4. 在第四象限內 θ 在第四象限內, 從 270° 增到 360° 時, 從圖可見 MP, AT, BS, OS 都是負. 仿前法可推知 $\sin \theta$



從 -1 增到 0 , $\cos \theta$ 從 0 增到 $+1$, $\tan \theta$ 從 $-\infty$ 增到 0 , $\cot \theta$ 從 0 減到 $-\infty$, $\sec \theta$ 從 $+\infty$ 減到 $+1$, $\csc \theta$ 從 -1 減到 $-\infty$.

總括上述四條, 可列表如下:

| θ | 0° | 90° | 180° | 270° | 360° |
|---------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------|
| $\sin \theta$ | $0 \rightarrow +1$ | $+1 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow -1$ | $-1 \rightarrow 0$ | |
| $\cos \theta$ | $+1 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow -1$ | $-1 \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow +1$ | |
| $\tan \theta$ | $0 \rightarrow +\infty$ | $-\infty \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow +\infty$ | $-\infty \rightarrow 0$ | |
| $\cot \theta$ | $+\infty \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow -\infty$ | $+\infty \rightarrow 0$ | $0 \rightarrow -\infty$ | |
| $\sec \theta$ | $+1 \rightarrow +\infty$ | $-\infty \rightarrow -1$ | $-1 \rightarrow -\infty$ | $+\infty \rightarrow +1$ | |
| $\csc \theta$ | $+\infty \rightarrow +1$ | $+1 \rightarrow +\infty$ | $-1 \rightarrow -\infty$ | $-\infty \rightarrow -1$ | |

第七章 三角函數的重要恒等式

第一節 任何角函數間的基本關係

第二章第五節所述三角函數間的基本關係，僅指銳角而言；但實際可適用於任何角。

其中【III】的六式，把 A 換作 θ ，得

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta} \dots\dots\dots(1), \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \dots\dots\dots(4),$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} \dots\dots\dots(2), \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \dots\dots\dots(5),$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta} \dots\dots\dots(3), \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \dots\dots\dots(6).$$

可由第六章第二節的定義，確定他們成立。

其中【IV】的二式，即

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \dots\dots\dots(1), \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dots\dots\dots(2).$$

可仍由同樣的定義，得到

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{MP}{OP} \div \frac{OM}{OP} = \frac{MP}{OP} \cdot \frac{OP}{OM} = \frac{MP}{OM} = \tan \theta; \dots\dots\dots$$

其中【V】的三式，即

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \dots\dots\dots(1),$$

$$1 \div \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \dots\dots\dots(2),$$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta \dots \dots \dots (3).$$

因不論 θ 爲何種角，且不論 MP 及 OM 的爲正爲負，恆可得

$$(MP)^2 + (OM)^2 = (OP)^2 \quad (\text{畢氏定理}).$$

故以 $(OP)^2$ 除兩邊，可得

$$\left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = 1.$$

即 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1.$

若改用 $(OM)^2$ 或 $(MP)^2$ 除兩邊，可得(2)、(3)二式。

第二節 兩角的三角函數

1. 兩角和的三角函數 公式如下：

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \dots (1)$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \dots (2)$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \dots \dots \dots (3) \quad \text{【XXXIII】}$$

$$\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} \dots \dots \dots (4)$$

設作 $\angle XOQ = A$, $\angle QOP = B$,

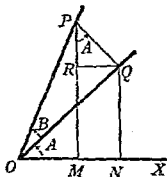
則 $\angle XOP = A + B$.

於 OP 上的任意點 P 作 OX 及 OQ 的垂線 PM 及 PQ 。從 Q 作 OX 及 PM 的垂線 QN 及 QR 。

則 $\angle RPQ = \angle XOQ = A$ (同角垂直)。

$MR = NQ$, $MN = RQ$ (矩形對邊)。

故依三角函數定義，得



$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \frac{MP}{OP} = \frac{ME+EP}{OP} = \frac{NQ}{OP} + \frac{EE}{OP} \\ &= \frac{NQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{EP}{QP} \cdot \frac{QP}{OP} \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B. \\ \cos(A+B) &= \frac{OM}{OP} = \frac{ON-MN}{OP} = \frac{ON}{OP} - \frac{RQ}{OP} \\ &= \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{RQ}{QP} \cdot \frac{QP}{OP} \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B.\end{aligned}$$

從上二式，可得

$$\begin{aligned}\tan(A+B) &= \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} \\ &= \frac{(\sin A \cos B + \cos A \sin B) \div \cos A \cos B}{(\cos A \cos B - \sin A \sin B) \div \cos A \cos B} \\ &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.\end{aligned}$$

其餘一式仿此。

上列圖中的 $A, B, A+B$ 是任何角都可成立，證法類似，故從略。

2. 兩角差的三角函數 公式如下：

$$\left. \begin{aligned}\sin(A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \dots (1) \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \dots (2) \\ \tan(A-B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \dots (3) \\ \cot(A-B) &= \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A} \dots (4)\end{aligned} \right\} \text{【XXXIV】}$$

證 作 $\angle XOQ = A$, $\angle QOP = B$, 則 $\angle XOP = A - B$. 從 OP 上的任意點

P 作 OX 及 OQ 的垂線 PM 及 PQ 。從 Q 作 OX 及 PM 的垂線 QN 及 QR (因 E 在 MP 的延長線上)。

$$\begin{aligned} \text{則 } \angle BPQ &= \angle XOQ, & MN &= NQ, \\ NM &= QR & (\text{圓的緣}). \end{aligned}$$

故依三角函數的定義, 得

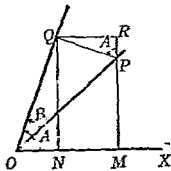
$$\begin{aligned} \sin(A-B) &= \frac{MP}{OP} = \frac{MR-PR}{OP} \\ &= \frac{NQ}{OP} - \frac{PR}{OP} \\ &= \frac{NQ}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} - \frac{PR}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP} \\ &= \sin A \cos B - \cos A \sin B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(A-B) &= \frac{OM}{OP} = \frac{ON+NM}{OP} = \frac{ON}{OP} + \frac{QR}{OP} \\ &= \frac{ON}{OQ} \cdot \frac{OQ}{OP} + \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{PQ}{OP} \\ &= \cos A \cos B + \sin A \sin B. \end{aligned}$$

仿上推可求得(3)、(4)二式, 證法從略。

3. 兩角正弦或餘弦的和差 公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B) + \sin(A-B) &= 2 \sin A \cos B \dots (1) \\ \sin(A+B) - \sin(A-B) &= 2 \cos A \sin B \dots (2) \\ \cos(A+B) + \cos(A-B) &= 2 \cos A \cos B \dots (3) \\ \cos(A+B) - \cos(A-B) &= -2 \sin A \sin B \dots (4) \end{aligned} \right\} \text{[XXXV]}$$



$$\left. \begin{aligned} \sin C + \sin D &= 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \dots\dots(1) \\ \sin C - \sin D &= 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \dots\dots(2) \\ \cos C + \cos D &= 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \dots\dots(3) \\ \cos C - \cos D &= -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \dots\dots(4) \end{aligned} \right\} \text{【XXXVI】}$$

證 把公式【XXXIII】及【XXXIV】的兩個(1)式或兩個(2)式加減，即得公式【XXXV】。

$$\text{又設} \quad A+B=C, \quad A-B=D,$$

$$\text{則} \quad A=\frac{C+D}{2}, \quad B=\frac{C-D}{2}.$$

代入公式【XXXV】，即得公式【XXXVI】。

4. 兩角和、差的正弦積或餘弦積 公式如下：

$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B)\sin(A-B) &= \sin^2 A - \sin^2 B \dots\dots(1) \\ &= \cos^2 B - \cos^2 A \dots\dots(2) \\ \cos(A+B)\cos(A-B) &= \cos^2 A - \sin^2 B \dots\dots(3) \\ &= \cos^2 B - \sin^2 A \dots\dots(4) \end{aligned} \right\} \text{【XXXVII】}$$

證 把公式【XXXIII】及【XXXIV】的兩個(1)式相乘，得

$$\begin{aligned} \sin(A+B)\sin(A-B) &= (\sin A \cos B + \cos A \sin B)(\sin A \cos B - \cos A \sin B) \\ &= \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \\ &= \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B \\ &= \sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 A \sin^2 B \\ &= \sin^2 A - \sin^2 B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{或 } &= (1 - \cos^2 A) - (1 - \cos^2 B) = 1 - \cos^2 A - 1 + \cos^2 B \\ &= \cos^2 B - \cos^2 A. \end{aligned}$$

其餘仿此。

習 題 十 八

試不用三角函數表，求下列各角的正弦及餘弦：

- (1) 75° . (2) 165° . (3) 15° .

提示 $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ$
 $= \dots\dots\dots$ 其餘仿此。

- (4) 已知 A, B 都是銳角, $\sin A = \frac{5}{13}$, $\sin B = \frac{4}{5}$.

求 $\sin(A+B)$ 及 $\cos(A-B)$.

提示 $\cos A = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \pm\frac{12}{13}$, $\cos B = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\frac{3}{5}$.

因 A, B 都是銳角, 故 $\cos A, \cos B$ 都是正數。

$$\therefore \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \dots\dots\dots$$

- (5) 已知 A, B 都是銳角, $\cos A = \frac{3}{4}$, $\sin B = \frac{3}{5}$.

求 $\sin(A-B)$ 及 $\cos(A+B)$.

試證下列的恆等式：

(6) $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$.

提示 左邊 $= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \dots\dots\dots$

(7) $\tan A = \frac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)}$.

(8) $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \tan \frac{A+B}{2} \cot \frac{A-B}{2}$.

提示 應用公式【XXXVI】化左邊。

$$(9) \frac{\cos A + \cos B}{\cos B - \cos A} = \cot \frac{A+B}{2} \operatorname{cosec} \frac{A-B}{2}.$$

提示 $\cos B - \cos A = -(\cos A - \cos B) = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$.

$$(10) \frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{A+B}{2}.$$

$$(11) \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A+B}{2}.$$

$$(12) \frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan \frac{A-B}{2}.$$

$$(13) \frac{\tan A + \tan B}{\cot A + \cot B} = \tan A \tan B.$$

提示 仿(6)題,得左邊 = $\frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B} = \dots$.

$$(14) \frac{\cot A + \tan B}{\tan A + \cot B} = \operatorname{cosec} A \tan B.$$

$$(15) \frac{\tan A + \tan B}{\cot A - \tan B} = \tan A \tan(A+B).$$

$$(16) \frac{\tan A - \tan B}{\cot A + \tan B} = \tan A \tan(A-B).$$

$$(17) \sin(30^\circ + A) + \sin(30^\circ - A) = \cos A.$$

$$(18) \sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A.$$

$$(19) \tan(45^\circ + A) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}.$$

$$(20) \tan(45^\circ - A) = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}.$$

第三節 倍角及半角的三角函數

1. 二倍角的函數 公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sin 2A &= 2 \sin A \cos A \cdots \cdots (1) \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \cdots \cdots (2) \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \cdots \cdots (3) \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \cdots \cdots (4) \quad \text{[XXXVIII]} \\ \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \cdots \cdots (5) \\ \cot 2A &= \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A} \cdots \cdots (6) \end{aligned} \right\}$$

證 命公式 [XXXII] 中的 $A=B$, 即得上列的(1)、(2)、(5)、(6)四式。

又以 $(1 - \sin^2 A)$ 代(2)式的 $\cos^2 A$, 或以 $(1 - \cos^2 A)$ 代(2)式的 $\sin^2 A$, 即得(3)、(4)二式。

2. 三倍角的函数 公式如下:

$$\left. \begin{aligned} \sin 3A &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \cdots \cdots (1) \\ \cos 3A &= 4 \cos^3 A - 3 \cos A \cdots \cdots (2) \\ \tan 3A &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} \cdots \cdots (3) \quad \text{[XXXI]} \\ \cot 3A &= \frac{3 \cot A - \cot^3 A}{1 - 3 \cot^2 A} \cdots \cdots (4) \end{aligned} \right\}$$

證 以 $2A$ 代公式 [XXXII] 中的 B , 再應用公式 [XXXVIII],

得 $\sin 3A = \sin(A+2A)$

$$\begin{aligned} &= \sin A \cos 2A + \cos A \sin 2A \\ &= \sin A(1 - 2 \sin^2 A) + 2 \sin A \cos^2 A \\ &= \sin A - 2 \sin^3 A + 2 \sin A(1 - \sin^2 A) \\ &= \sin A - 2 \sin^3 A + 2 \sin A - 2 \sin^3 A \\ &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A. \end{aligned}$$

(2)式仿此。

$$\begin{aligned}\tan 3A &= \tan(A+2A) = \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \tan 2A} \\ &= \frac{\tan A + \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}}{1 - \tan A \cdot \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}} = \frac{\tan A - \tan^3 A + 2 \tan A}{1 - \tan^2 A - 2 \tan^2 A} \\ &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}.\end{aligned}$$

(4)式仿此。

3. 半角的函數 公式如下：

$$\left. \begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \dots\dots\dots (1) \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \dots\dots\dots (2) \\ \tan \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} \dots\dots\dots (3)\end{aligned}\right\} \text{【XL】}$$

註 根號前的正負號，由 $\frac{A}{2}$ 在何象限而定，但 $\frac{A}{2}$ 為銳角時則恆為正。

設 以 $\frac{d}{2}$ 代公式【XXXVIII】(3)、(4)中的 A ，得

$$\cos d = 1 - 2 \sin^2 \frac{d}{2},$$

$$\cos d = 2 \cos^2 \frac{d}{2} - 1.$$

移項，去係數，開平方，即得(1)、(2)二式。以(2)除(1)，即得(3)式。

習 題 十 九

(1) 試不用三角函數表，求 $22\frac{1}{2}^\circ$ 的正弦及餘弦。

(2) 已知 θ 為銳角, $\sin \theta = \frac{3}{5}$, 求 $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, $\sin \frac{\theta}{2}$ 及 $\cos \frac{\theta}{2}$ 的值。

試證下列的恆等式:

$$(3) \csc 2A = \csc A - \sin A.$$

提示 以 $1 = \csc^2 A + \sin^2 A$ 乘公式 [XXXVIII] (2) 的兩邊。

$$(4) 1 + \sin 2A = (\sin A + \cos A)^2.$$

$$(5) \frac{\csc A + \sin A}{\csc A - \sin A} = \tan 2A + \sec 2A.$$

提示 右邊 = $\frac{\sin 2A + 1}{\cos 2A} = \frac{(\sin A + \csc A)^2}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \dots$

$$(6) \sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}.$$

提示 化右邊為 $2 \sin A \cos A$.

$$(7) \cot A + \tan A = 2 \csc 2A.$$

提示 左邊 = $\dots = \frac{1}{\sin A \cos A} = \frac{2}{2 \sin A \cos A}$
 $= \frac{2}{\sin 2A} = \dots$

$$(8) \tan \frac{A}{2} = \csc A - \cot A.$$

提示 以 $(1 - \csc A)$ 乘 [XL] (3) 根號下的分子、分母, 可得

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1 - \csc A}{\sin A}.$$

$$(9) \cot \frac{A}{2} = \csc A + \cot A.$$

提示 $\cot \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \csc A}{1 - \csc A}}$.

$$(10) \sin 3A \csc A - \csc 3A \sec A = 2.$$

提示 左邊 = $(3 \sin A - 4 \sin^3 A) \csc A - (4 \csc^3 A - 3 \csc A) \sec A$
 $= 3 - 4 \sin^2 A - 4 \csc^2 A + 3 = \dots$

$$(11) 3 \sin A - \sin 3A = 2 \sin A (1 - \cos 2A).$$

提示 兩邊同化為 $4 \sin^2 A$.

$$(12) \cot^2 A - \tan^2 A = \frac{4 \cos 2A}{\sin^2 2A}.$$

提示 兩邊同化為 $\frac{\cos^4 A - \sin^4 A}{\sin^2 A \cos^2 A}$.

$$(13) \cos A - \cos 3A = 2 \sin A \sin 2A.$$

$$(14) \sin 3A - \sin A = 2 \sin A \cos 2A.$$

$$(15) \frac{\cos A - \cos 3A}{\sin 3A - \sin A} = \tan 2A.$$

*第八章 補篇

第一節 三角方程式

三角方程式的解法，已在第二章第七節舉例論及，但通常方程式中 x 的值，並不限於銳角，可等於比 360° 小的正角；所以這裏重行舉例詳解，以補前面的不足。

例題一 解方程式 $2 \cos x = \sec x$ 。

解 因
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

故原方程式可化為
$$2 \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

去分母
$$2 \cos^2 x = 1$$

以 2 除
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

開平方
$$\cos x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

因 $\cos 45^\circ$ 及 $\cos 315^\circ$ 都等於 $+\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，

或 $\cos 135^\circ$ 及 $\cos 225^\circ$ 都等於 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

$\therefore x = 45^\circ$ ，或 135° ，或 225° ，或 315° 。

例題二 解方程式 $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ 。

解 另解因式 $(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$ 。

合 $2 \sin x - 1 = 0$ ，則 $\sin x = \frac{1}{2}$ 。

命 $\sin x - 1 = 0$, 則 $\sin x = 1$.

因 $\sin 30^\circ$ 及 $\sin 150^\circ$ 都等於 $\frac{1}{2}$,

$\sin 90^\circ$ 等於 1,

$x = 30^\circ$, 或 90° , 或 150° .

例題三 解方程式 $\sin 2x = 2 \cos x$.

解 因 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ (公式 [NINE] III) (1),

故原方程式可化為 $2 \sin x \cos x = 2 \cos x$.

移項 $2 \sin x \cos x - 2 \cos x = 0$.

分解因式 $2 \cos x (\sin x - 1) = 0$.

命 $2 \cos x = 0$, 則 $\cos x = 0$.

命 $\sin x - 1 = 0$, 則 $\sin x = 1$.

因 $\cos 90^\circ$ 及 $\cos 270^\circ$ 都等於 0,

$\sin 90^\circ$ 等於 1,

$\therefore x = 90^\circ$, 或 270° .

習 題 二 十

解下列的三角方程式 (x 為小於 360° 的正角):

(1) $2 \sin^2 x + 5 \sin x = 3$. (2) $2 \sin^2 x + 5 \cos x = 4$.

(3) $\cot x = \frac{1}{3} \tan x$.

(4) $\tan x \sec x = \sqrt{2}$. 提示 先自乘, 再化作 $\sin x$ 的方程式.

(5) $\sin x + \csc x = 1$. 提示 以 $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ 代 $\csc x$.

(6) $\cos x = \sin 2x$.

(7) $\sin x = \csc 2x$. (8) $\cot x \tan 2x = 3$.

(9) $\sin x \sec 2x = 1$. 提示 先以 $\frac{1}{\cos 2x}$ 代 $\sec 2x$.

(10) $\cos x + \cos 2x = 0$.

(11) $\csc x \sin 2x \csc x = 1$.

(12) $\cot x \tan 2x = \sec 2x$.

第二節 三角形重要性質的簡證

三角形的正弦定律、正切定律及半角諸公式的證明，已見第四、第五兩章的第三節，但證法很繁。若利用三角形的其他性質及三角函數間的重要恆等式，則證明極便。現在簡述如下：

1. 正弦定律 由公式【XI】，得

$$\Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ac \sin C.$$

以 2 乘，得 $bc \sin A = ca \sin B = ab \sin C$.

以 abc 除，得 $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.

取其倒數，得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

2. 正切定律 由正弦定律，得

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

由比例的合分定理，得

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} &= \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} \\ &= \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)}{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)} \quad (\text{公式【XXXVI】}) \\ &= \cot \frac{1}{2}(A+B) \tan \frac{1}{2}(A-B) \\ &= \cot(90^\circ - \frac{1}{2}C) \tan \frac{1}{2}(A-B) \end{aligned}$$

$$= \tan \frac{1}{2} C \tan \frac{1}{2} (A-B) \quad \text{〔公式 (II)(2)〕}$$

$$\therefore \tan \frac{1}{2} (A-B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2} C.$$

3. 半角的正弦公式 由公式〔XI〕, 知 $\frac{A}{2}$ 爲銳角時,

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)} \quad \text{〔餘弦定律〕} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}. \end{aligned}$$

4. 半角的餘弦公式 同上, 得

$$\begin{aligned} \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 + 2bc + c^2 - a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}} = \sqrt{\frac{2s \cdot 2(s-a)}{4bc}} \\ &= \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}. \end{aligned}$$

5. 半角的正切公式 把上列二條的公式相除, 可得

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \div \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc} \cdot \frac{bc}{s(s-a)}} \\ &= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}. \end{aligned}$$

附 錄 一

公 式 索 引

| 種 類 | 公 式 | 組 次 | 頁 數 |
|----------------------------|--|--------|-----|
| 三角函數的定義 | $\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \tan A = \frac{a}{b},$ $\cot A = \frac{b}{a}, \quad \sec A = \frac{c}{b}, \quad \csc A = \frac{c}{a},$ | I | 6 |
| | (a =直角 \wedge 銳角 A 的對邊,或任何角 A 的邊長上任意點 P 的縱坐標; b = A 的鄰邊,或 P 的橫坐標; c =直角 \wedge 的斜邊,或 P 與原點的距離) | | |
| 三角函數間的基本關係 | $\sin A = \frac{1}{\csc A}, \quad \cos A = \frac{1}{\sec A}, \quad \tan A = \frac{1}{\cot A},$ $\csc A = \frac{1}{\sin A}, \quad \sec A = \frac{1}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}.$ | III | 13 |
| | $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}, \quad \cot A = \frac{\cos A}{\sin A}.$ | IV | 14 |
| | $\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \quad 1 + \tan^2 A = \sec^2 A,$ $1 + \cot^2 A = \csc^2 A.$ | V | 14 |
| $90^\circ \pm \theta$ 的函數 | $\sin(90^\circ + \theta) = \cos \theta, \quad \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta,$ | XXV | 81 |
| | $\cos(90^\circ + \theta) = -\sin \theta, \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta,$ | II | 12 |
| | $\tan(90^\circ + \theta) = -\cot \theta, \quad \tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta.$ | XXVI | 81 |
| $180^\circ \pm \theta$ 的函數 | $\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta, \quad \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta,$ | XXVII | 85 |
| | $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta, \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta,$ | VI | 47 |
| | $\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta, \quad \tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta.$ | XXVIII | 86 |

| | | | | |
|---------------------------------|--|---------------------------------------|-------|----|
| 270°±θ 的 函 數 | $\sin(270^\circ+\theta)=-\cos\theta,$ | $\sin(270^\circ-\theta)=-\cos\theta,$ | XXXIX | 87 |
| | $\cos(270^\circ+\theta)=\sin\theta,$ | $\cos(270^\circ-\theta)=-\sin\theta,$ | XXX | 88 |
| | $\tan(270^\circ+\theta)=-\cot\theta.$ | $\tan(270^\circ-\theta)=\cot\theta.$ | | |
| n·360° 的 函 數 | $\sin(n\cdot 360^\circ+\theta)=\sin\theta,$ | | XXXI | 89 |
| | $\cos(n\cdot 360^\circ+\theta)=\cos\theta,$ | | | |
| | $\tan(n\cdot 360^\circ+\theta)=\tan\theta.$ | | | |
| -θ 的 函 數 | $\sin(n\cdot 360^\circ-\theta)=-\sin\theta,$ | | XXXII | 89 |
| | $\cos(n\cdot 360^\circ-\theta)=\cos\theta,$ | | | |
| | $\tan(n\cdot 360^\circ-\theta)=-\tan\theta.$ | | | |
| 二 角 的 三 角 函 數 | $\sin(A+B)=\sin A \cos B + \cos A \sin B,$ | | XXXDI | 97 |
| | $\cos(A+B)=\cos A \cos B - \sin A \sin B,$ | | | |
| | $\tan(A+B)=\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B},$ | | | |
| | $\cot(A+B)=\frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}.$ | | | |
| 三 角 函 數 | $\sin(A-B)=\sin A \cos B - \cos A \sin B,$ | | XXXIV | 98 |
| | $\cos(A-B)=\cos A \cos B + \sin A \sin B,$ | | | |
| | $\tan(A-B)=\frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B},$ | | | |
| | $\cot(A-B)=\frac{\cot A \cot B + 1}{\cot A - \cot B}.$ | | | |
| 二 角 的 三 角 函 數 | $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B,$ | | XXXV | 99 |
| | $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B,$ | | | |
| | $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B,$ | | | |
| | $\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B.$ | | | |

| | | | |
|--|--|---------|-----|
| 二 角 的 三 角 函 數 | $\sin C + i \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2},$ $\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2},$ $\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2},$ $\cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}.$ | XXXVI | 100 |
| | $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$ $= \cos^2 B - \cos^2 A,$ $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$ $= \cos^2 B - \sin^2 A.$ | XXXVII | 100 |
| 倍 角 及 半 角 的 三 角 函 數 | $\sin 2A = 2 \sin A \cos A,$ $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$ $= 2 \cos^2 A - 1,$ $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}, \quad \cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}.$ | XXXVIII | 103 |
| | $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A,$ $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A,$ $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A},$ $\cot 3A = \frac{3 \cot A - \cot^3 A}{1 - 3 \cot^2 A}.$ | XXXIX | 103 |
| | $\sin \frac{B}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}},$ $\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}},$ $\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}.$ | XL | 104 |
| | $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$ | VII | 48 |

| | | | |
|---|--|-------|----|
| 三 角 形 中 邊 角 的 關 係 | $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$ $a=b\cos C+c\cos B,$ $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$ $b=c\cos A+a\cos C,$ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$ $c=a\cos B+b\cos A.$ | VIII | 49 |
| | $\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C,$ $\tan\frac{1}{2}(B-C)=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{1}{2}A,$ $\tan\frac{1}{2}(C-A)=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{1}{2}B.$ | IX | 50 |
| | $\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$ $\sin\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$ $\sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ac}}.$ | XXI | 74 |
| | $\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$ $\cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}},$ $\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$ | XXII | 75 |
| | $\tan\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$ $\tan\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}},$ $\tan\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$ | X | 52 |
| | $\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$ $\sin B=\frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$ $\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$ (以上各組中, $s=\frac{a+b+c}{2}$) | XXIII | 76 |

| | | | | |
|---|--|--|-------|----|
| 三 角 形 的 面 積 | $\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A,$ $\Delta = \frac{1}{2}ca \sin B,$ $\Delta = \frac{1}{2}ab \sin C.$ (Δ 爲三角形面積) | $\Delta = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A},$ $\Delta = \frac{b^2 \sin C \sin A}{2 \sin B},$ $\Delta = \frac{c^2 \sin A \sin B}{2 \sin C}.$ | XI | 67 |
| | $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$ | | XII | 68 |
| | $\Delta = \frac{abc}{4R} \quad (R \text{ 爲外接圓半徑})$ | | XIV | 69 |
| | $\Delta = sr. \quad (r \text{ 爲內切圓半徑})$ | | XV | 70 |
| | $\Delta = r_a(s-a), \quad \Delta = r_b(s-b), \quad \Delta = r_c(s-c).$ (r_a, r_b, r_c 爲 a 邊上的切圓半徑, 餘仿此). | | XVI | 70 |
| 三 角 形 外 接 圓 及 各 切 圓 的 半 徑 | $R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{abc}{4\Delta}$ | | XVII | 71 |
| | $r = \frac{\Delta}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ $= (s-a) \tan \frac{1}{2}A = (s-b) \tan \frac{1}{2}B$ $= (s-c) \tan \frac{1}{2}C.$ | | XVIII | 71 |
| | $r_a = \frac{\Delta}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = s \tan \frac{1}{2}A,$ $r_b = \frac{\Delta}{s-b} = \sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}} = s \tan \frac{1}{2}B,$ $r_c = \frac{\Delta}{s-c} = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}} = s \tan \frac{1}{2}C.$ | | XIX | 72 |

附 錄 二

計 算 題 答 案

習 題 一

(1) $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\tan A = \frac{3}{4}$ (其餘三種三角函數係上舉三種的倒數,故從略,以下仿此).

$$(2) \sin A = \frac{5}{13}, \cos A = \frac{12}{13}, \tan A = \frac{5}{12}$$

$$(3) \sin A = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{15}{17}, \tan A = \frac{8}{15}$$

$$(4) \sin A = \frac{20}{29}, \cos A = \frac{21}{29}, \tan A = \frac{20}{21}$$

$$(5) \sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}, \tan A = \frac{7}{24}$$

$$(6) \sin A = \frac{9}{41}, \cos A = \frac{40}{41}, \tan A = \frac{9}{40}$$

$$(7) \cos A = \frac{4}{5}, \tan A = \frac{3}{4} \quad (8) \sin A = \frac{\sqrt{119}}{12}, \tan A = \frac{\sqrt{119}}{5}$$

$$(9) \sin A = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{15}{17} \quad (10) \sin A = \frac{7}{25}, \cos A = \frac{24}{25}$$

$$(11) \sin A = \frac{9}{41}, \tan A = \frac{9}{40} \quad (12) \cos A = \frac{21}{29}, \tan A = \frac{20}{21}$$

習 題 二

$$(1) 0.6398.$$

$$(2) 0.8718.$$

$$(3) 1.813.$$

$$(4) 0.8919.$$

$$(5) 0.7749.$$

$$(6) 0.9168.$$

- | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|
| (7) 1.4171. | (8) 0.8839. | (9) 0.66785. |
| (10) 3.158. | (11) 0.7268. | (12) 0.09463. |
| (13) 0.5814. | (14) 0.9815. | (15) 0.1885. |
| (16) $28^{\circ}.28$. | (17) $51^{\circ}.42$. | (18) $29^{\circ}.41$. |
| (19) $22^{\circ}.83$. | (20) $32^{\circ}.94$. | (21) 2° . |
| (22) $41^{\circ}.23$. | (23) $82^{\circ}.91$. | |

習 題 三

- | | |
|--|--|
| (1) $\cos A = \frac{3}{5}$, $\tan A = \frac{4}{3}$. | (2) $\sin A = \frac{12}{13}$, $\tan A = \frac{12}{5}$. |
| (3) $\sin A = \frac{7}{25}$, $\cos A = \frac{24}{25}$. | (4) $\sin A = \frac{40}{41}$, $\cos A = \frac{9}{41}$. |
| (5) $\sin A = \frac{5}{13}$, $\tan A = \frac{5}{12}$. | (6) $\cos A = \frac{15}{17}$, $\tan A = \frac{8}{15}$. |

習 題 五

- | | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------------|------------------------------|
| (1) 45° . | (2) 60° . | (3) 30° . | (4), (5), (6) 60° . |
| (7) 30° . | (8) 45° . | (9) 30° . | (10) 60° . |
| (11) 45° . | (12) 60° . | (13), (14) 45° . | |
| (15) 60° . | (16) 30° . | | |

習 題 六

- | | | |
|---------------|---------------|----------------------|
| (1) 207.84 尺. | (2) 564.63 尺. | (3) 總高 22.5 尺, |
| 距 38.97 尺. | (4) 125 尺. | (5) 69.3 尺. |
| (6) 34.64 尺. | (7) 42.26 尺. | (8) 72 尺. |
| (9) 40.98 尺. | (10) 92.38 尺. | (11) 6362 尺, 1657 尺. |

- (12) 43.87 丈. (13) 366 尺. (14) 15.59 方丈.
 (15) 13.86 寸, 120° . (16) 12.02 寸. (17) 12.73 寸.
 (18) 10 寸, 17.32 寸. (19) 徑 18.45 寸, 下底 33.48 寸.
 (20) 10.39 寸. (21) 13.86 寸. (22) 3.46 寸.

習 題 七

- (1) $b=57.63$, $a=63.63$, $B=64^\circ.9$.
 (2) $b=103.1$, $c=386.9$, $A=74^\circ.54$.
 (3) $a=5$, $b=12$, $B=67^\circ.58$.
 (4) $A=36^\circ.87$, $B=55^\circ.13$, $c=25$.
 (5) $A=46^\circ.8$, $b=39.97$, $B=46^\circ.2$.
 (6) $b=33.73$, $a=43.17$, $A=51^\circ.5$.
 (7) $a=726$, $c=625$, $B=25^\circ.78$.
 (8) $B=6^\circ.21$, $A=83^\circ.79$, $a=58.69$.
 (9) $a=1.014$, $c=1.594$, $A=39^\circ.5$.
 (10) $A=52^\circ.52$, $B=37^\circ.48$, $c=45.36$.

習 題 八

- (1) 59.86 尺. (2) $24^\circ.5$. (3) $14^\circ.45$.
 (4) 12.2 吋. (5) 715 尺. (6) 100.9 哩, 120.3 哩
 (7) 218.4 尺. (8) 76.2 尺. (9) 215.9 丈.
 (10) 60 尺. (11) 76.24 尺. (12) 塔高 159 尺.
 塔高 104.8 尺. (13) 194.6 尺. (14) 12.35 丈.
 (15) 161 尺. (16) $112^\circ.88$. (17) 9.27 寸.
 (18) 3.44 寸. (19) 6.81 寸. (20) 11.83 寸.

習題九

(3) 72 尺。

(4) 24.26 里。

習題十一

- | | | |
|------------------------|-------------|-------------|
| (1) $B=77^\circ$, | $a=630.8$, | $c=929.5$. |
| (2) $C=123^\circ.2$, | $b=2052$, | $c=2263$. |
| (3) $C=47^\circ.23$, | $a=1341$, | $b=1114$. |
| (4) $A=108^\circ.53$, | $a=53.28$, | $c=47.32$. |
| (5) $B=56^\circ.93$, | $b=56.86$, | $c=53.58$. |
| (6) $C=25^\circ.2$, | $b=2277$, | $c=1574$. |
| (7) $A=45^\circ.3$, | $b=12.91$, | $c=31.59$. |
| (8) $B=44^\circ.68$, | $a=795$, | $b=567.7$. |
| (9) $C=47^\circ.53$, | $a=19.13$, | $c=11.26$. |
| (10) $A=36^\circ.89$, | $a=12.92$, | $b=20.92$. |

習題十二

- | | | | |
|-----------------------|---------------------|--------------------|--------------|
| (1) $B=12^\circ.23$, | $C=146^\circ.28$ | $c=1272$. | |
| (2) $A=54^\circ.54$, | $C=47^\circ.74$, | $c=50.48$. | |
| (3) $B=41^\circ.02$, | $C=97^\circ.74$, | $c=13.95$. | |
| (4) 答數一: | $A=147^\circ.46$, | $B=10^\circ.72$, | $a=35.52$. |
| 答數二: | $A'=0^\circ.9$, | $B'=163.28$, | $a'=1.037$. |
| (5) 答數一: | $A=51^\circ.31$, | $C=98^\circ.56$, | $c=43.1$. |
| 答數二: | $A'=128^\circ.69$, | $C'=20^\circ.08$, | $c'=15.59$. |
| (6) $B=96^\circ$, | $C=32^\circ.38$, | $c=2.79$. | |

- (7) $A=36^{\circ}.88$, $C=132^{\circ}.2$, $a=767$.
 (8) $A=120^{\circ}.58$, $B=57^{\circ}.4$, $b=9.197$.
 (9) $B=41^{\circ}.22$, $C=87^{\circ}.63$, $b=77.04$.
 (10) $B=32^{\circ}.22$, $C=120^{\circ}.54$, $c=581.4$.

習題十三

- (1) $B=65^{\circ}.23$, $C=28^{\circ}.7$, $a=2297$.
 (2) $A=51^{\circ}.25$, $B=56^{\circ}.5$, $c=95.24$.
 (3) $A=51^{\circ}.2\frac{1}{2}$, $C=34^{\circ}.56$, $b=70.48$.
 (4) $A=117^{\circ}.41$, $B=32^{\circ}.19$, $c=31.43$.
 (5) $B=69^{\circ}.75$, $C=39^{\circ}.25$, $a=984.8$.
 (6) $A=119^{\circ}.02$, $C=45^{\circ}.6$, $b=1.165$.
 (7) $A=168^{\circ}.78$, $B=46^{\circ}.88$, $C=26^{\circ}.34$.
 (8) $A=16^{\circ}.43$, $B=36^{\circ}.4$, $C=133^{\circ}.17$.
 (9) $A=8^{\circ}.34$, $B=33^{\circ}.68$, $C=137^{\circ}.98$.
 (10) $A=38^{\circ}.88$, $B=126^{\circ}.87$, $C=14^{\circ}.25$.

習題十四

- (1) 203.1 丈。 (2) 41.98 里, 51.4 里。
 (3) 128.9 里。 (4) 31.90 寸, 47.65 寸。
 (5) $41^{\circ}.98$, $63^{\circ}.06$, $74^{\circ}.96$ 。 (6) 112.9 里。
 (7) 960 尺。 (8) $N 72^{\circ}.78E$, 或 $N 72^{\circ}.78W$ 。
 (9) 7.645 寸。 (10) 495.7 尺。
 (11) 12490 尺。 (12) 6.34 里。
 (13) 923.3 尺。 (14) 104 尺。
 (15) 345.5 尺。

習題十五

- (1) 164.8. (2) 295.3. (3) 84.
 (4) 1332. (5) 202.74. (6) 18.06.
 (7) 4. (8) 10.5, 12, 14.

習題十七

- (1) $-\cos 20^\circ$. (2) $\tan 3^\circ$. (3) $\sin 75^\circ$
 (4) $-\cos 74^\circ$. (5) $-\cot 38^\circ$. (6) $-\cos 4^\circ$.
 (7) $\sin 6^\circ$. (8) $\cos 17^\circ$. (9) $\cot 35^\circ$.
 (10) $\tan 13^\circ.47$. (11) $-\cos 65^\circ.7$. (12) $\sin 11^\circ.22$.
 (13) $1 - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. (14) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{8\sqrt{3}}{3}$.
 (15) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. (16) $\sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

習題十八

- (1) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. (2) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.
 (3) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. (4) $\frac{63}{65}$, $\frac{16}{65}$.
 (5) $\frac{4\sqrt{7} - 9}{20}$, $\frac{12 - 3\sqrt{7}}{20}$.

習題十九

- (1) $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$. (2) $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{1}{10}\sqrt{10}$, $\frac{3}{10}\sqrt{10}$

習 題 二 十

- (1) $30^\circ, 150^\circ$. (2) 60° .
(3) $60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$. (4) $45^\circ, 135^\circ$.
(5) $0^\circ, 90^\circ$. (6) $30^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 270^\circ$.
(7) $30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$. (8) $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 330^\circ$.
(9) $30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$. (10) $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$.
(11), (12) $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$.

附 錄 三

本 書 用 表

| | | |
|---|-----------|-----|
| 一 | 三角函數表 | 124 |
| 二 | 對數表 | 128 |
| 三 | 三角函數對數表 | 132 |
| 四 | 分秒數與度數互化表 | 142 |

正 弦 餘 弦 表

| Sine | | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | | | | | | | | | | 附表 | | | | | |
|------|---------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------|----|----|----|----|----|
| | | 0.00000 | | | | | | | | | | 90° | | | | | |
| | | 0.00000 | | | | | | | | | | 1 2 3 4 5 | | | | | |
| 0° | 0.00000 | 00174 | 00349 | 00523 | 00697 | 00871 | 01045 | 01219 | 01393 | 01567 | 01741 | 89 | 17 | 35 | 52 | 70 | 88 |
| 1 | 01745 | 01919 | 02093 | 02267 | 02441 | 02615 | 02789 | 02963 | 03137 | 03311 | 03485 | 88 | 17 | 35 | 52 | 70 | 87 |
| 2 | 03489 | 03663 | 03837 | 04011 | 04185 | 04359 | 04533 | 04707 | 04881 | 05055 | 05229 | 87 | 17 | 35 | 52 | 70 | 87 |
| 3 | 05233 | 05407 | 05581 | 05755 | 05929 | 06103 | 06277 | 06451 | 06625 | 06799 | 06973 | 86 | 17 | 35 | 52 | 70 | 87 |
| 4 | 06977 | 07151 | 07325 | 07499 | 07673 | 07847 | 08021 | 08195 | 08369 | 08543 | 08717 | 85 | 17 | 35 | 52 | 70 | 87 |
| 5 | 08721 | 08895 | 09069 | 09243 | 09417 | 09591 | 09765 | 09939 | 10113 | 10287 | 10461 | 84 | 17 | 35 | 52 | 69 | 87 |
| 6 | 10465 | 10639 | 10813 | 10987 | 11161 | 11335 | 11509 | 11683 | 11857 | 12031 | 12205 | 83 | 17 | 35 | 52 | 69 | 87 |
| 7 | 12209 | 12383 | 12557 | 12731 | 12905 | 13079 | 13253 | 13427 | 13601 | 13775 | 13949 | 82 | 17 | 35 | 52 | 69 | 87 |
| 8 | 13953 | 14127 | 14301 | 14475 | 14649 | 14823 | 14997 | 15171 | 15345 | 15519 | 15693 | 81 | 17 | 35 | 52 | 69 | 86 |
| 9 | 15697 | 15871 | 16045 | 16219 | 16393 | 16567 | 16741 | 16915 | 17089 | 17263 | 17437 | 80 | 17 | 34 | 52 | 69 | 86 |
| 10° | 0.17365 | 1754 | 1771 | 1788 | 1805 | 1822 | 1840 | 1857 | 1874 | 1891 | 1908 | 79 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 11 | 1908 | 1925 | 1942 | 1959 | 1977 | 1994 | 2011 | 2028 | 2045 | 2062 | 2079 | 78 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 12 | 2079 | 2096 | 2113 | 2130 | 2147 | 2164 | 2181 | 2198 | 2215 | 2232 | 2250 | 77 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 13 | 2250 | 2267 | 2284 | 2300 | 2317 | 2334 | 2351 | 2368 | 2385 | 2402 | 2419 | 76 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 14 | 2419 | 2435 | 2452 | 2470 | 2487 | 2504 | 2521 | 2538 | 2555 | 2572 | 2589 | 75 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 15 | 2589 | 2605 | 2622 | 2639 | 2656 | 2673 | 2690 | 2707 | 2724 | 2741 | 2758 | 74 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 16 | 2758 | 2775 | 2792 | 2809 | 2826 | 2843 | 2860 | 2877 | 2894 | 2911 | 2928 | 73 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 17 | 2928 | 2945 | 2962 | 2979 | 2996 | 3013 | 3030 | 3047 | 3064 | 3081 | 3098 | 72 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 18 | 3098 | 3115 | 3132 | 3149 | 3166 | 3183 | 3200 | 3217 | 3234 | 3251 | 3268 | 71 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 19 | 3268 | 3285 | 3302 | 3319 | 3336 | 3353 | 3370 | 3387 | 3404 | 3421 | 3438 | 70 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 20° | 0.34200 | 3437 | 3454 | 3471 | 3488 | 3505 | 3522 | 3539 | 3556 | 3573 | 3590 | 69 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 21 | 3590 | 3607 | 3624 | 3641 | 3658 | 3675 | 3692 | 3709 | 3726 | 3743 | 3760 | 68 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 22 | 3760 | 3777 | 3794 | 3811 | 3828 | 3845 | 3862 | 3879 | 3896 | 3913 | 3930 | 67 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 23 | 3930 | 3947 | 3964 | 3981 | 3998 | 4015 | 4032 | 4049 | 4066 | 4083 | 4100 | 66 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 24 | 4100 | 4117 | 4134 | 4151 | 4168 | 4185 | 4202 | 4219 | 4236 | 4253 | 4270 | 65 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 25 | 4270 | 4287 | 4304 | 4321 | 4338 | 4355 | 4372 | 4389 | 4406 | 4423 | 4440 | 64 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 26 | 4440 | 4457 | 4474 | 4491 | 4508 | 4525 | 4542 | 4559 | 4576 | 4593 | 4610 | 63 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 27 | 4610 | 4627 | 4644 | 4661 | 4678 | 4695 | 4712 | 4729 | 4746 | 4763 | 4780 | 62 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 28 | 4780 | 4797 | 4814 | 4831 | 4848 | 4865 | 4882 | 4899 | 4916 | 4933 | 4950 | 61 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 29 | 4950 | 4967 | 4984 | 5001 | 5018 | 5035 | 5052 | 5069 | 5086 | 5103 | 5120 | 60 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 30° | 0.51960 | 5213 | 5230 | 5247 | 5264 | 5281 | 5298 | 5315 | 5332 | 5349 | 5366 | 59 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 31 | 5366 | 5383 | 5400 | 5417 | 5434 | 5451 | 5468 | 5485 | 5502 | 5519 | 5536 | 58 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 32 | 5536 | 5553 | 5570 | 5587 | 5604 | 5621 | 5638 | 5655 | 5672 | 5689 | 5706 | 57 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 33 | 5706 | 5723 | 5740 | 5757 | 5774 | 5791 | 5808 | 5825 | 5842 | 5859 | 5876 | 56 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 34 | 5876 | 5893 | 5910 | 5927 | 5944 | 5961 | 5978 | 5995 | 6012 | 6029 | 6046 | 55 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 35 | 6046 | 6063 | 6080 | 6097 | 6114 | 6131 | 6148 | 6165 | 6182 | 6199 | 6216 | 54 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 36 | 6216 | 6233 | 6250 | 6267 | 6284 | 6301 | 6318 | 6335 | 6352 | 6369 | 6386 | 53 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 37 | 6386 | 6403 | 6420 | 6437 | 6454 | 6471 | 6488 | 6505 | 6522 | 6539 | 6556 | 52 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 38 | 6556 | 6573 | 6590 | 6607 | 6624 | 6641 | 6658 | 6675 | 6692 | 6709 | 6726 | 51 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 39 | 6726 | 6743 | 6760 | 6777 | 6794 | 6811 | 6828 | 6845 | 6862 | 6879 | 6896 | 50 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 40° | 0.68960 | 6913 | 6930 | 6947 | 6964 | 6981 | 6998 | 7015 | 7032 | 7049 | 7066 | 49 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 41 | 7066 | 7083 | 7100 | 7117 | 7134 | 7151 | 7168 | 7185 | 7202 | 7219 | 7236 | 48 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 42 | 7236 | 7253 | 7270 | 7287 | 7304 | 7321 | 7338 | 7355 | 7372 | 7389 | 7406 | 47 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 43 | 7406 | 7423 | 7440 | 7457 | 7474 | 7491 | 7508 | 7525 | 7542 | 7559 | 7576 | 46 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 44 | 7576 | 7593 | 7610 | 7627 | 7644 | 7661 | 7678 | 7695 | 7712 | 7729 | 7746 | 45 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| 45° | 0.70710 | | | | | | | | | | | | | | | | |

Cosine

正 弦 餘 弦 表

| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 階差 | | | | | | | |
|-----|--------|------|--------|------|------|------|--------|------|------|------|--------|--------|-----|-----|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | 0.7071 | 45° | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 45° | 0.7071 | 7083 | 7096 | 7108 | 7120 | 7132 | 7145 | 7157 | 7169 | 7181 | 7193 | | | 44 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| 46 | 7193 | 7206 | 7218 | 7230 | 7242 | 7254 | 7266 | 7278 | 7290 | 7302 | 7314 | | | 43 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| 47 | 7314 | 7325 | 7337 | 7349 | 7361 | 7373 | 7385 | 7396 | 7408 | 7420 | 7431 | | | 42 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| 48 | 7431 | 7443 | 7454 | 7466 | 7478 | 7489 | 7501 | 7512 | 7524 | 7535 | 7547 | | | 41 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| 49 | 7547 | 7559 | 7570 | 7581 | 7593 | 7604 | 7615 | 7627 | 7638 | 7649 | 0.7660 | | | 40° | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| 50° | 0.7660 | 7672 | 7683 | 7694 | 7705 | 7716 | 7727 | 7738 | 7749 | 7760 | 7771 | | | 39 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 51 | 7771 | 7782 | 7793 | 7804 | 7815 | 7826 | 7837 | 7848 | 7859 | 7870 | 7881 | | | 38 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 52 | 7881 | 7891 | 7902 | 7912 | 7923 | 7934 | 7944 | 7955 | 7965 | 7976 | 7986 | | | 37 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 53 | 7986 | 7997 | 8007 | 8018 | 8028 | 8039 | 8049 | 8059 | 8070 | 8080 | 8090 | | | 36 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 54 | 8090 | 8100 | 8111 | 8121 | 8131 | 8141 | 8151 | 8161 | 8171 | 8181 | 8192 | | | 35 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 55 | 8192 | 8202 | 8211 | 8221 | 8231 | 8241 | 8251 | 8261 | 8271 | 8281 | 8290 | | | 34 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 56 | 8290 | 8300 | 8310 | 8320 | 8330 | 8340 | 8350 | 8360 | 8370 | 8380 | 8390 | | | 33 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 57 | 8390 | 8400 | 8410 | 8420 | 8430 | 8440 | 8450 | 8460 | 8470 | 8480 | 8490 | | | 32 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 58 | 8490 | 8500 | 8510 | 8520 | 8530 | 8540 | 8550 | 8560 | 8570 | 8580 | 8590 | | | 31 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 59 | 8590 | 8600 | 8610 | 8620 | 8630 | 8640 | 8650 | 8660 | 8670 | 8680 | 8690 | | | 30° | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 60° | 0.8660 | 8699 | 8708 | 8718 | 8728 | 8738 | 8748 | 8758 | 8768 | 8778 | 8788 | | | 29 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 61 | 8788 | 8798 | 8808 | 8818 | 8828 | 8838 | 8848 | 8858 | 8868 | 8878 | 8888 | | | 28 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 62 | 8888 | 8898 | 8908 | 8918 | 8928 | 8938 | 8948 | 8958 | 8968 | 8978 | 8988 | | | 27 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 63 | 8988 | 8998 | 9008 | 9018 | 9028 | 9038 | 9048 | 9058 | 9068 | 9078 | 9088 | | | 26 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 64 | 9088 | 9098 | 9108 | 9118 | 9128 | 9138 | 9148 | 9158 | 9168 | 9178 | 9188 | | | 25 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 65 | 9188 | 9198 | 9208 | 9218 | 9228 | 9238 | 9248 | 9258 | 9268 | 9278 | 9288 | | | 24 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 66 | 9288 | 9298 | 9308 | 9318 | 9328 | 9338 | 9348 | 9358 | 9368 | 9378 | 9388 | | | 23 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 67 | 9388 | 9398 | 9408 | 9418 | 9428 | 9438 | 9448 | 9458 | 9468 | 9478 | 9488 | | | 22 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 68 | 9488 | 9498 | 9508 | 9518 | 9528 | 9538 | 9548 | 9558 | 9568 | 9578 | 9588 | | | 21 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 69 | 9588 | 9598 | 9608 | 9618 | 9628 | 9638 | 9648 | 9658 | 9668 | 9678 | 9688 | | | 20° | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 70° | 0.9688 | 9698 | 9708 | 9718 | 9728 | 9738 | 9748 | 9758 | 9768 | 9778 | 9788 | | | 19 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 71 | 9788 | 9798 | 9808 | 9818 | 9828 | 9838 | 9848 | 9858 | 9868 | 9878 | 9888 | | | 18 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 72 | 9888 | 9898 | 9908 | 9918 | 9928 | 9938 | 9948 | 9958 | 9968 | 9978 | 9988 | | | 17 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 73 | 9988 | 9998 | 1.0000 | | | | | | | | | | | 16 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 74 | 1.0000 | | | | | | | | | | | | | 15 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 75 | | | | | | | | | | | | | | 14 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 76 | | | | | | | | | | | | | | 13 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 77 | | | | | | | | | | | | | | 12 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 78 | | | | | | | | | | | | | | 11 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 79 | | | | | | | | | | | | | | 10 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| 80° | 0.9848 | 9858 | 9868 | 9878 | 9888 | 9898 | 9908 | 9918 | 9928 | 9938 | 9948 | | | 9 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 81 | 9948 | 9958 | 9968 | 9978 | 9988 | 9998 | 1.0000 | | | | | | | 8 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 82 | 1.0000 | | | | | | | | | | | | | 7 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 83 | | | | | | | | | | | | | | 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 84 | | | | | | | | | | | | | | 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 85 | | | | | | | | | | | | | | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 86 | | | | | | | | | | | | | | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 87 | | | | | | | | | | | | | | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 88 | | | | | | | | | | | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 89 | | | | | | | | | | | | | | 0° | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 90° | 1.0000 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Cosine

正切餘切表

Tangent

| | ° | | | | | | | | | | ° | 餘切 | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | |
| 0° | 0.0000 | 0.0175 | 0.0351 | 0.0526 | 0.0701 | 0.0876 | 0.1052 | 0.1227 | 0.1403 | 0.1578 | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 |
| 1 | 0.0175 | 0.0351 | 0.0526 | 0.0701 | 0.0876 | 0.1052 | 0.1227 | 0.1403 | 0.1578 | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 |
| 2 | 0.0351 | 0.0526 | 0.0701 | 0.0876 | 0.1052 | 0.1227 | 0.1403 | 0.1578 | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 |
| 3 | 0.0526 | 0.0701 | 0.0876 | 0.1052 | 0.1227 | 0.1403 | 0.1578 | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 |
| 4 | 0.0701 | 0.0876 | 0.1052 | 0.1227 | 0.1403 | 0.1578 | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 |
| 5 | 0.0876 | 0.1052 | 0.1227 | 0.1403 | 0.1578 | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 |
| 6 | 0.1052 | 0.1227 | 0.1403 | 0.1578 | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 |
| 7 | 0.1227 | 0.1403 | 0.1578 | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 |
| 8 | 0.1403 | 0.1578 | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 |
| 9 | 0.1578 | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 |
| 10° | 0.1753 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 |
| 11 | 0.1928 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 |
| 12 | 0.2103 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 |
| 13 | 0.2278 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 |
| 14 | 0.2453 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 |
| 15 | 0.2628 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 |
| 16 | 0.2803 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 |
| 17 | 0.2978 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 |
| 18 | 0.3153 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 |
| 19 | 0.3328 | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 |
| 20° | 0.3503 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 |
| 21 | 0.3678 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 |
| 22 | 0.3853 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 |
| 23 | 0.4028 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 |
| 24 | 0.4203 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 |
| 25 | 0.4378 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 |
| 26 | 0.4553 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 |
| 27 | 0.4728 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 |
| 28 | 0.4903 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 |
| 29 | 0.5078 | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 |
| 30° | 0.5253 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 |
| 31 | 0.5428 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 |
| 32 | 0.5603 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 |
| 33 | 0.5778 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 |
| 34 | 0.5953 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 |
| 35 | 0.6128 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 | 0.8228 |
| 36 | 0.6303 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 | 0.8228 | 0.8403 |
| 37 | 0.6478 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 | 0.8228 | 0.8403 | 0.8578 |
| 38 | 0.6653 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 | 0.8228 | 0.8403 | 0.8578 | 0.8753 |
| 39 | 0.6828 | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 | 0.8228 | 0.8403 | 0.8578 | 0.8753 | 0.8928 |
| 40° | 0.7003 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 | 0.8228 | 0.8403 | 0.8578 | 0.8753 | 0.8928 | 0.9103 |
| 41 | 0.7178 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 | 0.8228 | 0.8403 | 0.8578 | 0.8753 | 0.8928 | 0.9103 | 0.9278 |
| 42 | 0.7353 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 | 0.8228 | 0.8403 | 0.8578 | 0.8753 | 0.8928 | 0.9103 | 0.9278 | 0.9453 |
| 43 | 0.7528 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 | 0.8228 | 0.8403 | 0.8578 | 0.8753 | 0.8928 | 0.9103 | 0.9278 | 0.9453 | 0.9628 |
| 44 | 0.7703 | 0.7878 | 0.8053 | 0.8228 | 0.8403 | 0.8578 | 0.8753 | 0.8928 | 0.9103 | 0.9278 | 0.9453 | 0.9628 | 0.9803 |
| 45° | 0.8000 | | | | | | | | | | | | |

Cotangent

正切餘切表

Tangent

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| | | | | | | | | | | 1.0000 | 45° |
| 45° | 1.0000 | 0.0355 | 0.0710 | 0.1065 | 0.1418 | 0.1770 | 0.2121 | 0.2471 | 0.2820 | 0.3168 | 0.3515 |
| 46 | 0.0355 | 0.0710 | 0.1065 | 0.1418 | 0.1770 | 0.2121 | 0.2471 | 0.2820 | 0.3168 | 0.3515 | 46 |
| 47 | 0.0710 | 0.1065 | 0.1418 | 0.1770 | 0.2121 | 0.2471 | 0.2820 | 0.3168 | 0.3515 | 0.3861 | 47 |
| 48 | 0.1065 | 0.1418 | 0.1770 | 0.2121 | 0.2471 | 0.2820 | 0.3168 | 0.3515 | 0.3861 | 0.4207 | 48 |
| 49 | 0.1418 | 0.1770 | 0.2121 | 0.2471 | 0.2820 | 0.3168 | 0.3515 | 0.3861 | 0.4207 | 0.4553 | 49 |
| 50° | 0.1770 | 0.2121 | 0.2471 | 0.2820 | 0.3168 | 0.3515 | 0.3861 | 0.4207 | 0.4553 | 0.4899 | 50 |
| 51 | 0.2121 | 0.2471 | 0.2820 | 0.3168 | 0.3515 | 0.3861 | 0.4207 | 0.4553 | 0.4899 | 0.5245 | 51 |
| 52 | 0.2471 | 0.2820 | 0.3168 | 0.3515 | 0.3861 | 0.4207 | 0.4553 | 0.4899 | 0.5245 | 0.5591 | 52 |
| 53 | 0.2820 | 0.3168 | 0.3515 | 0.3861 | 0.4207 | 0.4553 | 0.4899 | 0.5245 | 0.5591 | 0.5937 | 53 |
| 54 | 0.3168 | 0.3515 | 0.3861 | 0.4207 | 0.4553 | 0.4899 | 0.5245 | 0.5591 | 0.5937 | 0.6283 | 54 |
| 55 | 0.3515 | 0.3861 | 0.4207 | 0.4553 | 0.4899 | 0.5245 | 0.5591 | 0.5937 | 0.6283 | 0.6629 | 55 |
| 56 | 0.3861 | 0.4207 | 0.4553 | 0.4899 | 0.5245 | 0.5591 | 0.5937 | 0.6283 | 0.6629 | 0.6975 | 56 |
| 57 | 0.4207 | 0.4553 | 0.4899 | 0.5245 | 0.5591 | 0.5937 | 0.6283 | 0.6629 | 0.6975 | 0.7321 | 57 |
| 58 | 0.4553 | 0.4899 | 0.5245 | 0.5591 | 0.5937 | 0.6283 | 0.6629 | 0.6975 | 0.7321 | 0.7667 | 58 |
| 59 | 0.4899 | 0.5245 | 0.5591 | 0.5937 | 0.6283 | 0.6629 | 0.6975 | 0.7321 | 0.7667 | 0.8013 | 59 |
| 60° | 0.5245 | 0.5591 | 0.5937 | 0.6283 | 0.6629 | 0.6975 | 0.7321 | 0.7667 | 0.8013 | 0.8359 | 60 |
| 61 | 0.5591 | 0.5937 | 0.6283 | 0.6629 | 0.6975 | 0.7321 | 0.7667 | 0.8013 | 0.8359 | 0.8705 | 61 |
| 62 | 0.5937 | 0.6283 | 0.6629 | 0.6975 | 0.7321 | 0.7667 | 0.8013 | 0.8359 | 0.8705 | 0.9051 | 62 |
| 63 | 0.6283 | 0.6629 | 0.6975 | 0.7321 | 0.7667 | 0.8013 | 0.8359 | 0.8705 | 0.9051 | 0.9397 | 63 |
| 64 | 0.6629 | 0.6975 | 0.7321 | 0.7667 | 0.8013 | 0.8359 | 0.8705 | 0.9051 | 0.9397 | 0.9743 | 64 |
| 65 | 0.6975 | 0.7321 | 0.7667 | 0.8013 | 0.8359 | 0.8705 | 0.9051 | 0.9397 | 0.9743 | 1.0000 | 65 |
| 66 | 0.7321 | 0.7667 | 0.8013 | 0.8359 | 0.8705 | 0.9051 | 0.9397 | 0.9743 | 1.0000 | | 66 |
| 67 | 0.7667 | 0.8013 | 0.8359 | 0.8705 | 0.9051 | 0.9397 | 0.9743 | 1.0000 | | | 67 |
| 68 | 0.8013 | 0.8359 | 0.8705 | 0.9051 | 0.9397 | 0.9743 | 1.0000 | | | | 68 |
| 69 | 0.8359 | 0.8705 | 0.9051 | 0.9397 | 0.9743 | 1.0000 | | | | | 69 |
| 70° | 0.8705 | 0.9051 | 0.9397 | 0.9743 | 1.0000 | | | | | | 70 |
| 71 | 0.9051 | 0.9397 | 0.9743 | 1.0000 | | | | | | | 71 |
| 72 | 0.9397 | 0.9743 | 1.0000 | | | | | | | | 72 |
| 73 | 0.9743 | 1.0000 | | | | | | | | | 73 |
| 74 | 1.0000 | | | | | | | | | | 74 |
| 75 | | | | | | | | | | | 75 |
| 76 | | | | | | | | | | | 76 |
| 77 | | | | | | | | | | | 77 |
| 78 | | | | | | | | | | | 78 |
| 79 | | | | | | | | | | | 79 |
| 80° | | | | | | | | | | | 80 |
| 81 | | | | | | | | | | | 81 |
| 82 | | | | | | | | | | | 82 |
| 83 | | | | | | | | | | | 83 |
| 84 | | | | | | | | | | | 84 |
| 85 | | | | | | | | | | | 85 |
| 86 | | | | | | | | | | | 86 |
| 87 | | | | | | | | | | | 87 |
| 88 | | | | | | | | | | | 88 |
| 89 | | | | | | | | | | | 89 |
| 90° | | | | | | | | | | | 90 |

附表

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|---|---|----|----|----|
| 45° | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 46 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 47 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 48 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 49 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 50° | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 51 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 52 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 53 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 54 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 55 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 56 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 57 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 58 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 59 | 4 | 7 | 11 | 14 | 17 |
| 60° | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 61 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 62 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 63 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 64 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 65 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 66 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 67 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 68 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 69 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 70° | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| 71 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| 72 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| 73 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| 74 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| 75 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| 76 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| 77 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| 78 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| 79 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 |
| 80° | 3 | 6 | 10 | 17 | 28 |
| 81 | 3 | 6 | 10 | 17 | 28 |
| 82 | 3 | 6 | 10 | 17 | 28 |
| 83 | 3 | 6 | 10 | 17 | 28 |
| 84 | 3 | 6 | 10 | 17 | 28 |
| 85 | 3 | 6 | 10 | 17 | 28 |
| 86 | 3 | 6 | 10 | 17 | 28 |
| 87 | 3 | 6 | 10 | 17 | 28 |
| 88 | 3 | 6 | 10 | 17 | 28 |
| 89 | 3 | 6 | 10 | 17 | 28 |
| 90° | ∞ | | | | |

Cotangent

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

對數表

Log

| N | | | | | | | | | | | 附表 | | | | | |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|---|---|---|----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0295 | 0334 | 0374 | 0414 | | | | | |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 0792 | | | | | |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1105 | 1139 | | | | | |
| 13 | 1139 | 1173 | 1205 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 1461 | | | | | |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 1761 | | | | | |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 2041 | | | | | |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 2304 | | | | | |
| 17 | 2304 | 2330 | 2354 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 2553 | | | | | |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2788 | | | | | |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2855 | 2878 | 2900 | 2922 | 2945 | 2967 | 2989 | 3010 | | | | | |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 3222 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3405 | 3425 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 3617 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3765 | 3784 | 3802 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 3979 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4049 | 4065 | 4082 | 4099 | 4115 | 4133 | 4150 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 4314 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 |
| 27 | 4314 | 4329 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 4472 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 4624 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 4771 | 1 | 3 | 4 | 6 | 8 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4885 | 4900 | 4914 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4956 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 5051 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 5185 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 5315 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5365 | 5378 | 5391 | 5403 | 5415 | 5428 | 5441 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 5563 | 1 | 2 | 4 | 6 | 6 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 5682 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5787 | 5798 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5854 | 5865 | 5877 | 5888 | 5899 | 5911 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 6021 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6095 | 6107 | 6117 | 6128 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 6233 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 42 | 6233 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 6335 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 6435 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 6532 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 6628 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6703 | 6712 | 6721 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 6812 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 6902 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 6990 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

對數表

| N | Log | | | | | | | | | | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|---|---|---|---|---|----|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | | | | | | |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 7076 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 7160 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 7243 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 7324 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 7404 | 1 | 2 | 3 | 4 | | | |
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 | 7482 | 1 | 2 | 2 | 5 | 4 | | |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 | 7559 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | | |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7590 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 | 7634 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | | |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 | 7709 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 | 7782 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 | 7853 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 | 7924 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7965 | 7973 | 7980 | 7987 | 7993 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | | |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 | 8062 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | | |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8095 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 | 8129 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | | |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8155 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 | 8195 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | | |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8216 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 | 8261 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | | |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 | 8325 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | | |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 | 8388 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | | |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 | 8451 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | | |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 | 8513 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 | 8573 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 | 8633 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 | 8692 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 | 8751 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 | 8808 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 | 8865 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 | 8921 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 78 | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 | 8976 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 | 9031 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 | 9085 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 | 9138 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 | 9191 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9233 | 9238 | 9243 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 | 9294 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 | 9345 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 86 | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 | 9395 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | | |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 | 9445 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 | 9494 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 | 9542 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 | 9590 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9629 | 9633 | 9638 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 | 9685 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 | 9731 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 | 9777 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 95 | 9777 | 9782 | 9787 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 | 9823 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 | 9868 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 | 9912 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 | 9956 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 | | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | | |

| 對 數 表 | | | | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Log | | | | | | | | | | |
| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 100 | 0000 | 0004 | 0009 | 0013 | 0017 | 0022 | 0025 | 0030 | 0035 | 0039 |
| 101 | 0043 | 0048 | 0052 | 0056 | 0060 | 0065 | 0069 | 0073 | 0077 | 0082 |
| 102 | 0086 | 0090 | 0095 | 0099 | 0103 | 0107 | 0111 | 0116 | 0120 | 0124 |
| 103 | 0128 | 0133 | 0137 | 0141 | 0145 | 0149 | 0154 | 0158 | 0162 | 0166 |
| 104 | 0170 | 0175 | 0179 | 0183 | 0187 | 0191 | 0195 | 0199 | 0204 | 0208 |
| 105 | 0212 | 0216 | 0220 | 0224 | 0228 | 0233 | 0237 | 0241 | 0245 | 0249 |
| 106 | 0253 | 0257 | 0261 | 0265 | 0269 | 0273 | 0278 | 0282 | 0286 | 0290 |
| 107 | 0294 | 0298 | 0302 | 0306 | 0310 | 0314 | 0318 | 0322 | 0326 | 0330 |
| 108 | 0334 | 0338 | 0342 | 0346 | 0350 | 0354 | 0358 | 0362 | 0366 | 0370 |
| 109 | 0374 | 0378 | 0382 | 0386 | 0390 | 0394 | 0398 | 0402 | 0406 | 0410 |
| 110 | 0414 | 0418 | 0422 | 0426 | 0430 | 0434 | 0438 | 0442 | 0445 | 0449 |
| 111 | 0453 | 0457 | 0461 | 0465 | 0469 | 0473 | 0477 | 0481 | 0484 | 0488 |
| 112 | 0492 | 0496 | 0500 | 0504 | 0508 | 0512 | 0515 | 0519 | 0523 | 0527 |
| 113 | 0531 | 0535 | 0538 | 0542 | 0546 | 0550 | 0554 | 0558 | 0561 | 0565 |
| 114 | 0569 | 0573 | 0577 | 0580 | 0584 | 0588 | 0592 | 0596 | 0599 | 0603 |
| 115 | 0607 | 0611 | 0615 | 0618 | 0622 | 0626 | 0630 | 0633 | 0637 | 0641 |
| 116 | 0645 | 0648 | 0652 | 0656 | 0660 | 0663 | 0667 | 0671 | 0674 | 0678 |
| 117 | 0682 | 0685 | 0689 | 0693 | 0697 | 0700 | 0704 | 0708 | 0711 | 0715 |
| 118 | 0719 | 0722 | 0726 | 0730 | 0734 | 0737 | 0741 | 0745 | 0748 | 0752 |
| 119 | 0755 | 0759 | 0763 | 0766 | 0770 | 0774 | 0777 | 0781 | 0785 | 0788 |
| 120 | 0792 | 0795 | 0799 | 0803 | 0806 | 0810 | 0813 | 0817 | 0821 | 0824 |
| 121 | 0828 | 0831 | 0835 | 0839 | 0842 | 0846 | 0849 | 0853 | 0856 | 0860 |
| 122 | 0864 | 0867 | 0871 | 0874 | 0878 | 0881 | 0885 | 0888 | 0892 | 0895 |
| 123 | 0899 | 0902 | 0906 | 0910 | 0913 | 0917 | 0920 | 0924 | 0927 | 0931 |
| 124 | 0934 | 0938 | 0941 | 0945 | 0948 | 0952 | 0955 | 0959 | 0962 | 0966 |
| 125 | 0969 | 0973 | 0976 | 0980 | 0983 | 0986 | 0990 | 0993 | 0997 | 1000 |
| 126 | 1004 | 1007 | 1011 | 1014 | 1017 | 1021 | 1024 | 1028 | 1031 | 1035 |
| 127 | 1038 | 1041 | 1045 | 1048 | 1052 | 1055 | 1059 | 1062 | 1066 | 1069 |
| 128 | 1072 | 1075 | 1079 | 1082 | 1085 | 1089 | 1092 | 1096 | 1099 | 1103 |
| 129 | 1105 | 1109 | 1113 | 1116 | 1119 | 1123 | 1126 | 1129 | 1133 | 1136 |
| 130 | 1139 | 1143 | 1146 | 1149 | 1153 | 1156 | 1159 | 1163 | 1166 | 1169 |
| 131 | 1173 | 1176 | 1179 | 1183 | 1186 | 1189 | 1193 | 1195 | 1199 | 1202 |
| 132 | 1206 | 1209 | 1212 | 1216 | 1219 | 1222 | 1225 | 1229 | 1232 | 1235 |
| 133 | 1239 | 1242 | 1245 | 1248 | 1252 | 1255 | 1258 | 1261 | 1265 | 1268 |
| 134 | 1271 | 1274 | 1278 | 1281 | 1284 | 1287 | 1290 | 1294 | 1297 | 1300 |
| 135 | 1303 | 1307 | 1310 | 1313 | 1316 | 1319 | 1323 | 1326 | 1329 | 1332 |
| 136 | 1335 | 1339 | 1342 | 1345 | 1348 | 1351 | 1355 | 1358 | 1361 | 1364 |
| 137 | 1367 | 1370 | 1374 | 1377 | 1380 | 1383 | 1386 | 1389 | 1392 | 1395 |
| 138 | 1399 | 1402 | 1405 | 1408 | 1411 | 1414 | 1418 | 1421 | 1424 | 1427 |
| 139 | 1430 | 1433 | 1436 | 1440 | 1443 | 1446 | 1449 | 1452 | 1455 | 1458 |
| 140 | 1461 | 1464 | 1467 | 1471 | 1474 | 1477 | 1480 | 1483 | 1486 | 1489 |
| 141 | 1492 | 1495 | 1498 | 1501 | 1504 | 1508 | 1511 | 1514 | 1517 | 1520 |
| 142 | 1523 | 1526 | 1529 | 1532 | 1535 | 1538 | 1541 | 1544 | 1547 | 1550 |
| 143 | 1553 | 1556 | 1559 | 1562 | 1565 | 1569 | 1572 | 1575 | 1578 | 1581 |
| 144 | 1584 | 1587 | 1590 | 1593 | 1596 | 1599 | 1602 | 1605 | 1608 | 1611 |
| 145 | 1614 | 1617 | 1620 | 1623 | 1626 | 1629 | 1632 | 1635 | 1638 | 1641 |
| 146 | 1644 | 1647 | 1649 | 1652 | 1655 | 1658 | 1661 | 1664 | 1667 | 1670 |
| 147 | 1673 | 1676 | 1679 | 1682 | 1685 | 1688 | 1691 | 1694 | 1697 | 1700 |
| 148 | 1703 | 1706 | 1708 | 1711 | 1714 | 1717 | 1720 | 1723 | 1726 | 1729 |
| 149 | 1732 | 1735 | 1738 | 1741 | 1744 | 1746 | 1749 | 1752 | 1755 | 1758 |

對 數 表

Log

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 150 | 1761 | 1764 | 1767 | 1770 | 1772 | 1775 | 1778 | 1781 | 1784 | 1787 |
| 151 | 1790 | 1793 | 1796 | 1798 | 1801 | 1804 | 1807 | 1810 | 1813 | 1816 |
| 152 | 1818 | 1821 | 1824 | 1827 | 1830 | 1833 | 1836 | 1838 | 1841 | 1844 |
| 153 | 1847 | 1850 | 1853 | 1855 | 1858 | 1861 | 1864 | 1867 | 1870 | 1872 |
| 154 | 1875 | 1878 | 1881 | 1884 | 1886 | 1889 | 1892 | 1895 | 1898 | 1901 |
| 155 | 1903 | 1905 | 1909 | 1912 | 1915 | 1917 | 1920 | 1923 | 1926 | 1928 |
| 156 | 1931 | 1934 | 1937 | 1940 | 1942 | 1945 | 1948 | 1951 | 1953 | 1956 |
| 157 | 1959 | 1962 | 1965 | 1967 | 1970 | 1973 | 1976 | 1978 | 1981 | 1984 |
| 158 | 1987 | 1989 | 1992 | 1995 | 1998 | 2000 | 2003 | 2006 | 2009 | 2011 |
| 159 | 2014 | 2017 | 2019 | 2022 | 2025 | 2028 | 2030 | 2032 | 2036 | 2038 |
| 160 | 2041 | 2044 | 2047 | 2049 | 2052 | 2055 | 2057 | 2060 | 2063 | 2066 |
| 161 | 2068 | 2071 | 2074 | 2076 | 2079 | 2082 | 2084 | 2087 | 2090 | 2092 |
| 162 | 2095 | 2098 | 2101 | 2103 | 2106 | 2109 | 2111 | 2114 | 2117 | 2119 |
| 163 | 2122 | 2125 | 2127 | 2130 | 2133 | 2135 | 2138 | 2140 | 2143 | 2146 |
| 164 | 2148 | 2151 | 2154 | 2156 | 2159 | 2162 | 2164 | 2167 | 2170 | 2172 |
| 165 | 2175 | 2177 | 2180 | 2183 | 2185 | 2188 | 2191 | 2193 | 2196 | 2198 |
| 166 | 2201 | 2204 | 2206 | 2209 | 2212 | 2214 | 2217 | 2219 | 2222 | 2225 |
| 167 | 2227 | 2230 | 2232 | 2235 | 2238 | 2240 | 2243 | 2245 | 2248 | 2251 |
| 168 | 2253 | 2256 | 2258 | 2261 | 2263 | 2266 | 2269 | 2271 | 2274 | 2276 |
| 169 | 2279 | 2281 | 2284 | 2287 | 2289 | 2292 | 2294 | 2297 | 2299 | 2302 |
| 170 | 2304 | 2307 | 2310 | 2312 | 2315 | 2317 | 2320 | 2322 | 2325 | 2327 |
| 171 | 2330 | 2333 | 2335 | 2338 | 2340 | 2343 | 2345 | 2348 | 2350 | 2353 |
| 172 | 2355 | 2358 | 2360 | 2363 | 2365 | 2368 | 2370 | 2373 | 2375 | 2378 |
| 173 | 2380 | 2383 | 2385 | 2388 | 2390 | 2393 | 2395 | 2398 | 2400 | 2403 |
| 174 | 2405 | 2408 | 2410 | 2413 | 2415 | 2418 | 2420 | 2423 | 2425 | 2428 |
| 175 | 2430 | 2433 | 2435 | 2438 | 2440 | 2443 | 2445 | 2448 | 2450 | 2453 |
| 176 | 2455 | 2458 | 2460 | 2463 | 2465 | 2467 | 2470 | 2472 | 2475 | 2477 |
| 177 | 2480 | 2482 | 2485 | 2487 | 2490 | 2492 | 2494 | 2497 | 2499 | 2502 |
| 178 | 2504 | 2507 | 2509 | 2512 | 2514 | 2516 | 2519 | 2521 | 2524 | 2526 |
| 179 | 2529 | 2531 | 2533 | 2536 | 2538 | 2541 | 2543 | 2545 | 2548 | 2550 |
| 180 | 2553 | 2555 | 2558 | 2560 | 2562 | 2565 | 2567 | 2570 | 2572 | 2574 |
| 181 | 2577 | 2579 | 2582 | 2584 | 2586 | 2589 | 2591 | 2594 | 2596 | 2598 |
| 182 | 2601 | 2603 | 2605 | 2608 | 2610 | 2613 | 2615 | 2617 | 2620 | 2622 |
| 183 | 2625 | 2627 | 2629 | 2632 | 2634 | 2636 | 2639 | 2641 | 2643 | 2646 |
| 184 | 2648 | 2651 | 2653 | 2655 | 2658 | 2660 | 2662 | 2665 | 2667 | 2669 |
| 185 | 2672 | 2674 | 2676 | 2679 | 2681 | 2683 | 2686 | 2688 | 2690 | 2693 |
| 186 | 2695 | 2697 | 2700 | 2702 | 2704 | 2707 | 2709 | 2711 | 2714 | 2716 |
| 187 | 2718 | 2721 | 2723 | 2725 | 2728 | 2730 | 2732 | 2735 | 2737 | 2739 |
| 188 | 2742 | 2744 | 2746 | 2749 | 2751 | 2753 | 2755 | 2758 | 2760 | 2762 |
| 189 | 2765 | 2767 | 2769 | 2772 | 2774 | 2776 | 2778 | 2781 | 2783 | 2785 |
| 190 | 2788 | 2790 | 2792 | 2794 | 2797 | 2799 | 2801 | 2804 | 2806 | 2808 |
| 191 | 2810 | 2813 | 2815 | 2817 | 2819 | 2822 | 2824 | 2826 | 2828 | 2831 |
| 192 | 2833 | 2835 | 2838 | 2840 | 2842 | 2844 | 2847 | 2849 | 2851 | 2853 |
| 193 | 2855 | 2858 | 2860 | 2862 | 2865 | 2867 | 2869 | 2871 | 2874 | 2876 |
| 194 | 2878 | 2880 | 2882 | 2885 | 2887 | 2889 | 2891 | 2894 | 2896 | 2898 |
| 195 | 2900 | 2903 | 2905 | 2907 | 2909 | 2911 | 2914 | 2916 | 2918 | 2920 |
| 196 | 2923 | 2925 | 2927 | 2929 | 2931 | 2934 | 2936 | 2938 | 2940 | 2942 |
| 197 | 2945 | 2947 | 2949 | 2951 | 2953 | 2956 | 2958 | 2960 | 2962 | 2964 |
| 198 | 2967 | 2969 | 2971 | 2973 | 2975 | 2978 | 2980 | 2982 | 2984 | 2986 |
| 199 | 2989 | 2991 | 2993 | 2995 | 2997 | 2999 | 3002 | 3004 | 3006 | 3008 |

正弦餘弦對數表

Log Sin

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|--------|
| $-\infty$ | 22419 | 5429 | 7190 | 8439 | 9408 | 0200 | 0570 | 1430 | 1961 | 3.2419 |
| 0.0 | 32419 | 32311 | 32258 | 32200 | 32140 | 4460 | 4722 | 4971 | 5206 | 5429 |
| 0.2 | 5429 | 5641 | 5833 | 6006 | 6251 | 6298 | 6378 | 6478 | 6590 | 6710 |
| 0.3 | 7190 | 7332 | 7470 | 7604 | 7734 | 7853 | 7962 | 8064 | 8217 | 8399 |
| 0.4 | 8439 | 8547 | 8651 | 8753 | 8853 | 8951 | 9046 | 9140 | 9231 | 9348 |
| 0.5 | 9408 | 9494 | 9579 | 9661 | 9743 | 9822 | 9901 | 9978 | 0053 | 0127 |
| 0.6 | 20200 | 0272 | 0343 | 0412 | 0480 | 0548 | 0614 | 0679 | 0744 | 0807 |
| 0.7 | 0870 | 0931 | 0992 | 1052 | 1111 | 1169 | 1227 | 1284 | 1340 | 1396 |
| 0.8 | 1450 | 1503 | 1557 | 1609 | 1661 | 1713 | 1764 | 1814 | 1863 | 1912 |
| 0.9 | 1961 | 2009 | 2056 | 2103 | 2150 | 2196 | 2241 | 2288 | 2334 | 2379 |
| 1.0 | 2419 | 2462 | 2505 | 2547 | 2589 | 2630 | 2671 | 2712 | 2753 | 2793 |
| 1.1 | 2832 | 2872 | 2911 | 2949 | 2988 | 3025 | 3063 | 3100 | 3137 | 3174 |
| 1.2 | 3210 | 3246 | 3282 | 3317 | 3353 | 3388 | 3422 | 3456 | 3491 | 3524 |
| 1.3 | 3558 | 3591 | 3624 | 3657 | 3689 | 3722 | 3754 | 3786 | 3817 | 3848 |
| 1.4 | 3880 | 3911 | 3941 | 3972 | 4002 | 4032 | 4062 | 4091 | 4121 | 4150 |
| 1.5 | 4179 | 4208 | 4237 | 4265 | 4293 | 4322 | 4349 | 4377 | 4405 | 4432 |
| 1.6 | 4459 | 4486 | 4513 | 4540 | 4567 | 4593 | 4619 | 4645 | 4671 | 4697 |
| 1.7 | 4722 | 4748 | 4773 | 4798 | 4824 | 4848 | 4873 | 4898 | 4922 | 4947 |
| 1.8 | 4971 | 4995 | 5019 | 5043 | 5066 | 5090 | 5113 | 5136 | 5160 | 5182 |
| 1.9 | 5206 | 5228 | 5251 | 5274 | 5296 | 5318 | 5340 | 5363 | 5385 | 5406 |
| 2.0 | 5429 | 5450 | 5471 | 5492 | 5514 | 5535 | 5557 | 5578 | 5599 | 5619 |
| 2.1 | 5640 | 5661 | 5681 | 5702 | 5722 | 5742 | 5762 | 5782 | 5802 | 5822 |
| 2.2 | 5842 | 5862 | 5881 | 5901 | 5920 | 5939 | 5959 | 5978 | 5997 | 6016 |
| 2.3 | 6035 | 6054 | 6073 | 6091 | 6110 | 6128 | 6147 | 6165 | 6183 | 6201 |
| 2.4 | 6220 | 6238 | 6256 | 6274 | 6291 | 6309 | 6327 | 6344 | 6362 | 6379 |
| 2.5 | 6397 | 6414 | 6431 | 6448 | 6465 | 6482 | 6500 | 6517 | 6534 | 6551 |
| 2.6 | 6567 | 6584 | 6600 | 6617 | 6633 | 6650 | 6668 | 6682 | 6699 | 6715 |
| 2.7 | 6731 | 6747 | 6763 | 6779 | 6795 | 6810 | 6826 | 6842 | 6858 | 6873 |
| 2.8 | 6889 | 6904 | 6920 | 6935 | 6950 | 6965 | 6981 | 6996 | 7011 | 7026 |
| 2.9 | 7041 | 7056 | 7071 | 7086 | 7100 | 7115 | 7130 | 7144 | 7159 | 7174 |
| 3.0 | 7188 | 7202 | 7217 | 7231 | 7245 | 7260 | 7274 | 7288 | 7302 | 7316 |
| 3.1 | 7330 | 7344 | 7358 | 7372 | 7385 | 7400 | 7414 | 7428 | 7442 | 7456 |
| 3.2 | 7469 | 7483 | 7497 | 7510 | 7523 | 7535 | 7549 | 7562 | 7575 | 7588 |
| 3.3 | 7602 | 7615 | 7628 | 7641 | 7654 | 7667 | 7680 | 7693 | 7705 | 7718 |
| 3.4 | 7731 | 7744 | 7756 | 7769 | 7782 | 7794 | 7807 | 7819 | 7832 | 7844 |
| 3.5 | 7857 | 7869 | 7881 | 7894 | 7906 | 7918 | 7930 | 7943 | 7955 | 7967 |
| 3.6 | 7979 | 7991 | 8003 | 8015 | 8027 | 8039 | 8051 | 8063 | 8074 | 8086 |
| 3.7 | 8098 | 8109 | 8121 | 8133 | 8144 | 8155 | 8166 | 8178 | 8189 | 8200 |
| 3.8 | 8211 | 8222 | 8233 | 8244 | 8255 | 8267 | 8278 | 8289 | 8300 | 8311 |
| 3.9 | 8322 | 8333 | 8344 | 8355 | 8367 | 8378 | 8389 | 8400 | 8411 | 8422 |
| 4.0 | 8433 | 8444 | 8455 | 8466 | 8479 | 8490 | 8500 | 8511 | 8522 | 8533 |
| 4.1 | 8543 | 8553 | 8564 | 8575 | 8585 | 8595 | 8605 | 8616 | 8627 | 8637 |
| 4.2 | 8647 | 8657 | 8668 | 8678 | 8688 | 8699 | 8709 | 8719 | 8729 | 8739 |
| 4.3 | 8749 | 8759 | 8769 | 8779 | 8789 | 8799 | 8809 | 8819 | 8829 | 8839 |
| 4.4 | 8849 | 8859 | 8869 | 8878 | 8888 | 8898 | 8908 | 8917 | 8927 | 8936 |
| 4.5 | 8946 | 8956 | 8965 | 8975 | 8985 | 8994 | 9004 | 9013 | 9023 | 9032 |
| 4.6 | 9042 | 9051 | 9060 | 9070 | 9079 | 9088 | 9098 | 9107 | 9116 | 9125 |
| 4.7 | 9135 | 9144 | 9153 | 9162 | 9172 | 9181 | 9190 | 9199 | 9208 | 9217 |
| 4.8 | 9226 | 9235 | 9244 | 9253 | 9262 | 9271 | 9280 | 9289 | 9298 | 9307 |
| 4.9 | 9315 | 9324 | 9333 | 9342 | 9351 | 9359 | 9368 | 9377 | 9386 | 9394 |

餘弦

Log Cos

Log Cos

正 弦 餘 弦 對 數 表

Log Sin

| | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | | | | | | | | | | 附 表 | | | | |
|------|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| 52.0 | 2403 | 9412 | 9420 | 9429 | 9437 | 9446 | 9455 | 9463 | 9472 | 9480 | 9489 | 9498 | 9507 | 9516 | |
| 52.1 | 9499 | 9497 | 9496 | 9494 | 9493 | 9491 | 9490 | 9489 | 9487 | 9486 | 9485 | 9484 | 9483 | 9482 | |
| 52.2 | 9481 | 9480 | 9479 | 9478 | 9477 | 9476 | 9475 | 9474 | 9473 | 9472 | 9471 | 9470 | 9469 | 9468 | |
| 52.3 | 9467 | 9466 | 9465 | 9464 | 9463 | 9462 | 9461 | 9460 | 9459 | 9458 | 9457 | 9456 | 9455 | 9454 | |
| 52.4 | 9453 | 9452 | 9451 | 9450 | 9449 | 9448 | 9447 | 9446 | 9445 | 9444 | 9443 | 9442 | 9441 | 9440 | |
| 52.5 | 9439 | 9438 | 9437 | 9436 | 9435 | 9434 | 9433 | 9432 | 9431 | 9430 | 9429 | 9428 | 9427 | 9426 | |
| 52.6 | 9425 | 9424 | 9423 | 9422 | 9421 | 9420 | 9419 | 9418 | 9417 | 9416 | 9415 | 9414 | 9413 | 9412 | |
| 52.7 | 9411 | 9410 | 9409 | 9408 | 9407 | 9406 | 9405 | 9404 | 9403 | 9402 | 9401 | 9400 | 9399 | 9398 | |
| 52.8 | 9397 | 9396 | 9395 | 9394 | 9393 | 9392 | 9391 | 9390 | 9389 | 9388 | 9387 | 9386 | 9385 | 9384 | |
| 52.9 | 9383 | 9382 | 9381 | 9380 | 9379 | 9378 | 9377 | 9376 | 9375 | 9374 | 9373 | 9372 | 9371 | 9370 | |
| 53.0 | 9369 | 9368 | 9367 | 9366 | 9365 | 9364 | 9363 | 9362 | 9361 | 9360 | 9359 | 9358 | 9357 | 9356 | |
| 53.1 | 9355 | 9354 | 9353 | 9352 | 9351 | 9350 | 9349 | 9348 | 9347 | 9346 | 9345 | 9344 | 9343 | 9342 | |
| 53.2 | 9341 | 9340 | 9339 | 9338 | 9337 | 9336 | 9335 | 9334 | 9333 | 9332 | 9331 | 9330 | 9329 | 9328 | |
| 53.3 | 9327 | 9326 | 9325 | 9324 | 9323 | 9322 | 9321 | 9320 | 9319 | 9318 | 9317 | 9316 | 9315 | 9314 | |
| 53.4 | 9313 | 9312 | 9311 | 9310 | 9309 | 9308 | 9307 | 9306 | 9305 | 9304 | 9303 | 9302 | 9301 | 9300 | |
| 53.5 | 9299 | 9298 | 9297 | 9296 | 9295 | 9294 | 9293 | 9292 | 9291 | 9290 | 9289 | 9288 | 9287 | 9286 | |
| 53.6 | 9285 | 9284 | 9283 | 9282 | 9281 | 9280 | 9279 | 9278 | 9277 | 9276 | 9275 | 9274 | 9273 | 9272 | |
| 53.7 | 9271 | 9270 | 9269 | 9268 | 9267 | 9266 | 9265 | 9264 | 9263 | 9262 | 9261 | 9260 | 9259 | 9258 | |
| 53.8 | 9257 | 9256 | 9255 | 9254 | 9253 | 9252 | 9251 | 9250 | 9249 | 9248 | 9247 | 9246 | 9245 | 9244 | |
| 53.9 | 9243 | 9242 | 9241 | 9240 | 9239 | 9238 | 9237 | 9236 | 9235 | 9234 | 9233 | 9232 | 9231 | 9230 | |
| 54.0 | 9229 | 9228 | 9227 | 9226 | 9225 | 9224 | 9223 | 9222 | 9221 | 9220 | 9219 | 9218 | 9217 | 9216 | |
| 54.1 | 9215 | 9214 | 9213 | 9212 | 9211 | 9210 | 9209 | 9208 | 9207 | 9206 | 9205 | 9204 | 9203 | 9202 | |
| 54.2 | 9201 | 9200 | 9199 | 9198 | 9197 | 9196 | 9195 | 9194 | 9193 | 9192 | 9191 | 9190 | 9189 | 9188 | |
| 54.3 | 9187 | 9186 | 9185 | 9184 | 9183 | 9182 | 9181 | 9180 | 9179 | 9178 | 9177 | 9176 | 9175 | 9174 | |
| 54.4 | 9173 | 9172 | 9171 | 9170 | 9169 | 9168 | 9167 | 9166 | 9165 | 9164 | 9163 | 9162 | 9161 | 9160 | |
| 54.5 | 9159 | 9158 | 9157 | 9156 | 9155 | 9154 | 9153 | 9152 | 9151 | 9150 | 9149 | 9148 | 9147 | 9146 | |
| 54.6 | 9145 | 9144 | 9143 | 9142 | 9141 | 9140 | 9139 | 9138 | 9137 | 9136 | 9135 | 9134 | 9133 | 9132 | |
| 54.7 | 9131 | 9130 | 9129 | 9128 | 9127 | 9126 | 9125 | 9124 | 9123 | 9122 | 9121 | 9120 | 9119 | 9118 | |
| 54.8 | 9117 | 9116 | 9115 | 9114 | 9113 | 9112 | 9111 | 9110 | 9109 | 9108 | 9107 | 9106 | 9105 | 9104 | |
| 54.9 | 9103 | 9102 | 9101 | 9100 | 9099 | 9098 | 9097 | 9096 | 9095 | 9094 | 9093 | 9092 | 9091 | 9090 | |
| 55.0 | 9089 | 9088 | 9087 | 9086 | 9085 | 9084 | 9083 | 9082 | 9081 | 9080 | 9079 | 9078 | 9077 | 9076 | |
| 55.1 | 9075 | 9074 | 9073 | 9072 | 9071 | 9070 | 9069 | 9068 | 9067 | 9066 | 9065 | 9064 | 9063 | 9062 | |
| 55.2 | 9061 | 9060 | 9059 | 9058 | 9057 | 9056 | 9055 | 9054 | 9053 | 9052 | 9051 | 9050 | 9049 | 9048 | |
| 55.3 | 9047 | 9046 | 9045 | 9044 | 9043 | 9042 | 9041 | 9040 | 9039 | 9038 | 9037 | 9036 | 9035 | 9034 | |
| 55.4 | 9033 | 9032 | 9031 | 9030 | 9029 | 9028 | 9027 | 9026 | 9025 | 9024 | 9023 | 9022 | 9021 | 9020 | |
| 55.5 | 9019 | 9018 | 9017 | 9016 | 9015 | 9014 | 9013 | 9012 | 9011 | 9010 | 9009 | 9008 | 9007 | 9006 | |
| 55.6 | 9005 | 9004 | 9003 | 9002 | 9001 | 9000 | 8999 | 8998 | 8997 | 8996 | 8995 | 8994 | 8993 | 8992 | |
| 55.7 | 8991 | 8990 | 8989 | 8988 | 8987 | 8986 | 8985 | 8984 | 8983 | 8982 | 8981 | 8980 | 8979 | 8978 | |
| 55.8 | 8977 | 8976 | 8975 | 8974 | 8973 | 8972 | 8971 | 8970 | 8969 | 8968 | 8967 | 8966 | 8965 | 8964 | |
| 55.9 | 8963 | 8962 | 8961 | 8960 | 8959 | 8958 | 8957 | 8956 | 8955 | 8954 | 8953 | 8952 | 8951 | 8950 | |
| 56.0 | 8949 | 8948 | 8947 | 8946 | 8945 | 8944 | 8943 | 8942 | 8941 | 8940 | 8939 | 8938 | 8937 | 8936 | |
| 56.1 | 8935 | 8934 | 8933 | 8932 | 8931 | 8930 | 8929 | 8928 | 8927 | 8926 | 8925 | 8924 | 8923 | 8922 | |
| 56.2 | 8921 | 8920 | 8919 | 8918 | 8917 | 8916 | 8915 | 8914 | 8913 | 8912 | 8911 | 8910 | 8909 | 8908 | |
| 56.3 | 8907 | 8906 | 8905 | 8904 | 8903 | 8902 | 8901 | 8900 | 8899 | 8898 | 8897 | 8896 | 8895 | 8894 | |
| 56.4 | 8893 | 8892 | 8891 | 8890 | 8889 | 8888 | 8887 | 8886 | 8885 | 8884 | 8883 | 8882 | 8881 | 8880 | |
| 56.5 | 8879 | 8878 | 8877 | 8876 | 8875 | 8874 | 8873 | 8872 | 8871 | 8870 | 8869 | 8868 | 8867 | 8866 | |
| 56.6 | 8865 | 8864 | 8863 | 8862 | 8861 | 8860 | 8859 | 8858 | 8857 | 8856 | 8855 | 8854 | 8853 | 8852 | |
| 56.7 | 8851 | 8850 | 8849 | 8848 | 8847 | 8846 | 8845 | 8844 | 8843 | 8842 | 8841 | 8840 | 8839 | 8838 | |
| 56.8 | 8837 | 8836 | 8835 | 8834 | 8833 | 8832 | 8831 | 8830 | 8829 | 8828 | 8827 | 8826 | 8825 | 8824 | |
| 56.9 | 8823 | 8822 | 8821 | 8820 | 8819 | 8818 | 8817 | 8816 | 8815 | 8814 | 8813 | 8812 | 8811 | 8810 | |
| 57.0 | 8809 | 8808 | 8807 | 8806 | 8805 | 8804 | 8803 | 8802 | 8801 | 8800 | 8799 | 8798 | 8797 | 8796 | |
| 57.1 | 8795 | 8794 | 8793 | 8792 | 8791 | 8790 | 8789 | 8788 | 8787 | 8786 | 8785 | 8784 | 8783 | 8782 | |
| 57.2 | 8781 | 8780 | 8779 | 8778 | 8777 | 8776 | 8775 | 8774 | 8773 | 8772 | 8771 | 8770 | 8769 | 8768 | |
| 57.3 | 8767 | 8766 | 8765 | 8764 | 8763 | 8762 | 8761 | 8760 | 8759 | 8758 | 8757 | 8756 | 8755 | 8754 | |
| 57.4 | 8753 | 8752 | 8751 | 8750 | 8749 | 8748 | 8747 | 8746 | 8745 | 8744 | 8743 | 8742 | 8741 | 8740 | |
| 57.5 | 8739 | 8738 | 8737 | 8736 | 8735 | 8734 | 8733 | 8732 | 8731 | 8730 | 8729 | 8728 | 8727 | 8726 | |
| 57.6 | 8725 | 8724 | 8723 | 8722 | 8721 | 8720 | 8719 | 8718 | 8717 | 8716 | 8715 | 8714 | 8713 | 8712 | |
| 57.7 | 8711 | 8710 | 8709 | 8708 | 8707 | 8706 | 8705 | 8704 | 8703 | 8702 | 8701 | 8700 | 8699 | 8698 | |
| 57.8 | 8697 | 8696 | 8695 | 8694 | 8693 | 8692 | 8691 | 8690 | 8689 | 8688 | 8687 | 8686 | 8685 | 8684 | |
| 57.9 | 8683 | 8682 | 8681 | 8680 | 8679 | 8678 | 8677 | 8676 | 8675 | 8674 | 8673 | 8672 | 8671 | 8670 | |
| 58.0 | 8669 | 8668 | 8667 | 8666 | 8665 | 8664 | 8663 | 8662 | 8661 | 8660 | 8659 | 8658 | 8657 | 8656 | |
| 58.1 | 8655 | 8654 | 8653 | 8652 | 8651 | 8650 | 8649 | 8648 | 8647 | 8646 | 8645 | 8644 | 8643 | 8642 | |
| 58.2 | 8641 | 8640 | 8639 | 8638 | 8637 | 8636 | 8635 | 8634 | 8633 | 8632 | 8631 | 8630 | 8629 | 8628 | |
| 58.3 | 8627 | 8626 | 8625 | 8624 | 8623 | 8622 | 8621 | 8620 | 8619 | 8618 | 8617 | 8616 | 8615 | 8614 | |
| 58.4 | 8613 | 8612 | 8611 | 8610 | 8609 | 8608 | 8607 | 8606 | 8605 | 8604 | 8603 | 8602 | 8601 | 8600 | |
| 58.5 | 8599 | 8598 | 8597 | 8596 | 8595 | 8594 | 8593 | 8592 | 8591 | 8590 | 8589 | 8588 | 8587 | 8586 | |
| 58.6 | 8585 | 8584 | 8583 | 8582 | 8581 | 8580 | 8579 | 8578 | 8577 | 8576 | 8575 | 8574 | 8573 | 8572 | |
| 58.7 | 8571 | 8570 | 8569 | 8568 | 8567 | 8566 | 8565 | 8564 | 8563 | 8562 | 8561 | 8560 | 8559 | 8558 | |
| 58.8 | 8557 | 8556 | 8555 | 8554 | 8553 | 8552 | 8551 | 8550 | 8549 | 8548 | 8547 | 8546 | 8545 | 8544 | |
| 58.9 | 8543 | 8542 | 8541 | 8540 | 8539 | 8538 | 8537 | 8536 | 8535 | 8534 | 8533 | 8532 | 8531 | 8530 | |
| 59.0 | 8529 | 8528 | 8527 | 8526 | 8525 | 8524 | 8523 | 8522 | 8521 | 8520 | 8519 | 8518 | 8517 | 8516 | |
| 59.1 | 8515 | 8514 | 8513 | 8512 | 8511 | 8510 | 8509 | 8508 | 8507 | 8506 | 8505 | 8504 | 8503 | 8502 | |
| 59.2 | 8501 | 8500 | 8499 | 8498 | 8497 | 8496 | 8495 | 8494 | 8493 | 8492 | 8491 | 8490 | 8489 | 8488 | |
| 59.3 | 8487 | 8486 | 8485 | 8484 | 8483 | 8482 | 8481 | 8480 | 8479 | 8478 | 8477 | 8476 | 8475 | 8474 | |
| 59.4 | 8473 | 8472 | 8471 | 8470 | 8469 | 8468 | 8467 | 8466 | 8465 | 8464 | 8463 | 8462 | 8461 | 8460 | |
| 59.5 | 8459 | 8458 | 8457 | 8456 | 8455 | 8454 | 8453 | 8452 | 8451 | 8450 | 8449 | 8448 | 8447 | 8446 | |
| 59.6 | 8445 | 8444 | 8443 | 8442 | 8441 | 8440 | 8439 | 8438 | 8437 | 8436 | 8435 | 8434 | 8433 | 8432 | |
| 59.7 | 8431 | 8430 | 8429 | 8428 | 8427 | 8426 | 8425 | 8424 | 8423 | 8422 | 8421 | 8420 | 8419 | 8418 | |
| 59.8 | 8417 | 8416 | 8415 | 8414 | 8413 | 8412 | 8411 | 8410 | 8409 | 8408 | 8407 | 8406 | 8405 | 8404 | |
| 59.9 | 8403 | 8402 | 8401 | 8400 | 8399 | 8398 | 8397 | 8396 | 8395 | 8394 | 8393 | 8392 | 8391 | 8390 | |

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

正弦餘弦對數表

Log Sin

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 對數 |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| 00 | | | | | | | | | | | 1 2 3 4 5 |
| 01 | 9.999 | 5.249 | 5.429 | 7.190 | 8.429 | 8.605 | 9.220 | 9.770 | 1.000 | 2.0419 | 53 |
| 02 | 2.0419 | 2.532 | 3.016 | 3.500 | 3.985 | 4.470 | 4.955 | 5.441 | 5.926 | 6.412 | 52 |
| 03 | 6.412 | 6.898 | 7.384 | 7.870 | 8.355 | 8.841 | 9.326 | 9.812 | 10.298 | 10.783 | 51 |
| 04 | 10.783 | 11.269 | 11.754 | 12.240 | 12.726 | 13.211 | 13.697 | 14.182 | 14.668 | 15.153 | 50 |
| 05 | 15.153 | 15.639 | 16.124 | 16.610 | 17.095 | 17.581 | 18.066 | 18.552 | 19.037 | 19.523 | 49 |
| 06 | 19.523 | 20.008 | 20.494 | 20.979 | 21.464 | 21.950 | 22.435 | 22.921 | 23.406 | 23.891 | 48 |
| 07 | 23.891 | 24.377 | 24.862 | 25.347 | 25.833 | 26.318 | 26.803 | 27.289 | 27.774 | 28.259 | 47 |
| 08 | 28.259 | 28.744 | 29.230 | 29.715 | 30.200 | 30.686 | 31.171 | 31.656 | 32.142 | 32.627 | 46 |
| 09 | 32.627 | 33.112 | 33.597 | 34.083 | 34.568 | 35.053 | 35.538 | 36.023 | 36.509 | 36.994 | 45 |
| 10 | 36.994 | 37.479 | 37.964 | 38.449 | 38.934 | 39.419 | 39.904 | 40.389 | 40.874 | 41.359 | 44 |
| 11 | 41.359 | 41.844 | 42.329 | 42.814 | 43.299 | 43.784 | 44.269 | 44.754 | 45.239 | 45.724 | 43 |
| 12 | 45.724 | 46.209 | 46.694 | 47.179 | 47.664 | 48.149 | 48.634 | 49.119 | 49.604 | 50.089 | 42 |
| 13 | 50.089 | 50.574 | 51.059 | 51.544 | 52.029 | 52.514 | 52.999 | 53.484 | 53.969 | 54.454 | 41 |
| 14 | 54.454 | 54.939 | 55.424 | 55.909 | 56.394 | 56.879 | 57.364 | 57.849 | 58.334 | 58.819 | 40 |
| 15 | 58.819 | 59.304 | 59.789 | 60.274 | 60.759 | 61.244 | 61.729 | 62.214 | 62.699 | 63.184 | 39 |
| 16 | 63.184 | 63.669 | 64.154 | 64.639 | 65.124 | 65.609 | 66.094 | 66.579 | 67.064 | 67.549 | 38 |
| 17 | 67.549 | 68.034 | 68.519 | 69.004 | 69.489 | 69.974 | 70.459 | 70.944 | 71.429 | 71.914 | 37 |
| 18 | 71.914 | 72.399 | 72.884 | 73.369 | 73.854 | 74.339 | 74.824 | 75.309 | 75.794 | 76.279 | 36 |
| 19 | 76.279 | 76.764 | 77.249 | 77.734 | 78.219 | 78.704 | 79.189 | 79.674 | 80.159 | 80.644 | 35 |
| 20 | 80.644 | 81.129 | 81.614 | 82.099 | 82.584 | 83.069 | 83.554 | 84.039 | 84.524 | 85.009 | 34 |
| 21 | 85.009 | 85.494 | 85.979 | 86.464 | 86.949 | 87.434 | 87.919 | 88.404 | 88.889 | 89.374 | 33 |
| 22 | 89.374 | 89.859 | 90.344 | 90.829 | 91.314 | 91.799 | 92.284 | 92.769 | 93.254 | 93.739 | 32 |
| 23 | 93.739 | 94.224 | 94.709 | 95.194 | 95.679 | 96.164 | 96.649 | 97.134 | 97.619 | 98.104 | 31 |
| 24 | 98.104 | 98.589 | 99.074 | 99.559 | 100.044 | 100.529 | 101.014 | 101.499 | 101.984 | 102.469 | 30 |
| 25 | 102.469 | 102.954 | 103.439 | 103.924 | 104.409 | 104.894 | 105.379 | 105.864 | 106.349 | 106.834 | 29 |
| 26 | 106.834 | 107.319 | 107.804 | 108.289 | 108.774 | 109.259 | 109.744 | 110.229 | 110.714 | 111.199 | 28 |
| 27 | 111.199 | 111.684 | 112.169 | 112.654 | 113.139 | 113.624 | 114.109 | 114.594 | 115.079 | 115.564 | 27 |
| 28 | 115.564 | 116.049 | 116.534 | 117.019 | 117.504 | 117.989 | 118.474 | 118.959 | 119.444 | 119.929 | 26 |
| 29 | 119.929 | 120.414 | 120.899 | 121.384 | 121.869 | 122.354 | 122.839 | 123.324 | 123.809 | 124.294 | 25 |
| 30 | 124.294 | 124.779 | 125.264 | 125.749 | 126.234 | 126.719 | 127.204 | 127.689 | 128.174 | 128.659 | 24 |
| 31 | 128.659 | 129.144 | 129.629 | 130.114 | 130.599 | 131.084 | 131.569 | 132.054 | 132.539 | 133.024 | 23 |
| 32 | 133.024 | 133.509 | 133.994 | 134.479 | 134.964 | 135.449 | 135.934 | 136.419 | 136.904 | 137.389 | 22 |
| 33 | 137.389 | 137.874 | 138.359 | 138.844 | 139.329 | 139.814 | 140.299 | 140.784 | 141.269 | 141.754 | 21 |
| 34 | 141.754 | 142.239 | 142.724 | 143.209 | 143.694 | 144.179 | 144.664 | 145.149 | 145.634 | 146.119 | 20 |
| 35 | 146.119 | 146.604 | 147.089 | 147.574 | 148.059 | 148.544 | 149.029 | 149.514 | 149.999 | 150.484 | 19 |
| 36 | 150.484 | 150.969 | 151.454 | 151.939 | 152.424 | 152.909 | 153.394 | 153.879 | 154.364 | 154.849 | 18 |
| 37 | 154.849 | 155.334 | 155.819 | 156.304 | 156.789 | 157.274 | 157.759 | 158.244 | 158.729 | 159.214 | 17 |
| 38 | 159.214 | 159.699 | 160.184 | 160.669 | 161.154 | 161.639 | 162.124 | 162.609 | 163.094 | 163.579 | 16 |
| 39 | 163.579 | 164.064 | 164.549 | 165.034 | 165.519 | 166.004 | 166.489 | 166.974 | 167.459 | 167.944 | 15 |
| 40 | 167.944 | 168.429 | 168.914 | 169.399 | 169.884 | 170.369 | 170.854 | 171.339 | 171.824 | 172.309 | 14 |
| 41 | 172.309 | 172.794 | 173.279 | 173.764 | 174.249 | 174.734 | 175.219 | 175.704 | 176.189 | 176.674 | 13 |
| 42 | 176.674 | 177.159 | 177.644 | 178.129 | 178.614 | 179.099 | 179.584 | 180.069 | 180.554 | 181.039 | 12 |
| 43 | 181.039 | 181.524 | 182.009 | 182.494 | 182.979 | 183.464 | 183.949 | 184.434 | 184.919 | 185.404 | 11 |
| 44 | 185.404 | 185.889 | 186.374 | 186.859 | 187.344 | 187.829 | 188.314 | 188.799 | 189.284 | 189.769 | 10 |
| 45 | 189.769 | 190.254 | 190.739 | 191.224 | 191.709 | 192.194 | 192.679 | 193.164 | 193.649 | 194.134 | 9 |
| 46 | 194.134 | 194.619 | 195.104 | 195.589 | 196.074 | 196.559 | 197.044 | 197.529 | 198.014 | 198.499 | 8 |
| 47 | 198.499 | 198.984 | 199.469 | 199.954 | 200.439 | 200.924 | 201.409 | 201.894 | 202.379 | 202.864 | 7 |
| 48 | 202.864 | 203.349 | 203.834 | 204.319 | 204.804 | 205.289 | 205.774 | 206.259 | 206.744 | 207.229 | 6 |
| 49 | 207.229 | 207.714 | 208.199 | 208.684 | 209.169 | 209.654 | 210.139 | 210.624 | 211.109 | 211.594 | 5 |
| 50 | 211.594 | 212.079 | 212.564 | 213.049 | 213.534 | 214.019 | 214.504 | 214.989 | 215.474 | 215.959 | 4 |
| 51 | 215.959 | 216.444 | 216.929 | 217.414 | 217.899 | 218.384 | 218.869 | 219.354 | 219.839 | 220.324 | 3 |
| 52 | 220.324 | 220.809 | 221.294 | 221.779 | 222.264 | 222.749 | 223.234 | 223.719 | 224.204 | 224.689 | 2 |
| 53 | 224.689 | 225.174 | 225.659 | 226.144 | 226.629 | 227.114 | 227.599 | 228.084 | 228.569 | 229.054 | 1 |
| 54 | 229.054 | 229.539 | 230.024 | 230.509 | 230.994 | 231.479 | 231.964 | 232.449 | 232.934 | 233.419 | 0 |

Log Cos

正弦餘弦對數表

| ° | . 0 .1 .2 .3 .4 .5 .6 .7 .8 .9 | | | | | | | | | | T.S.495 | ° | 附表 | | | | | | |
|----|--------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---------|------|------|----|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| 45 | 1.825 | 8302 | 8310 | 8317 | 8323 | 8328 | 8334 | 8341 | 8348 | 8353 | 8358 | 8362 | 8369 | 44 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 46 | 8369 | 8377 | 8384 | 8391 | 8398 | 8405 | 8412 | 8420 | 8427 | 8434 | 8441 | 8448 | 8454 | 45 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 47 | 8461 | 8468 | 8475 | 8482 | 8489 | 8496 | 8503 | 8510 | 8517 | 8524 | 8531 | 8538 | 8544 | 46 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 48 | 8551 | 8558 | 8565 | 8572 | 8579 | 8586 | 8593 | 8600 | 8607 | 8614 | 8621 | 8628 | 8634 | 47 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 49 | 8641 | 8648 | 8655 | 8662 | 8669 | 8676 | 8683 | 8690 | 8697 | 8704 | 8711 | 8718 | 8724 | 48 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 50 | 8731 | 8738 | 8745 | 8752 | 8759 | 8766 | 8773 | 8780 | 8787 | 8794 | 8801 | 8808 | 8814 | 49 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 51 | 8821 | 8828 | 8835 | 8842 | 8849 | 8856 | 8863 | 8870 | 8877 | 8884 | 8891 | 8898 | 8904 | 50 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 52 | 8911 | 8918 | 8925 | 8932 | 8939 | 8946 | 8953 | 8960 | 8967 | 8974 | 8981 | 8988 | 8994 | 51 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 53 | 8997 | 9004 | 9011 | 9018 | 9025 | 9032 | 9039 | 9046 | 9053 | 9060 | 9067 | 9074 | 9080 | 52 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 54 | 9087 | 9094 | 9101 | 9108 | 9115 | 9122 | 9129 | 9136 | 9143 | 9150 | 9157 | 9164 | 9170 | 53 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 55 | 9177 | 9184 | 9191 | 9198 | 9205 | 9212 | 9219 | 9226 | 9233 | 9240 | 9247 | 9254 | 9260 | 54 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 56 | 9267 | 9274 | 9281 | 9288 | 9295 | 9302 | 9309 | 9316 | 9323 | 9330 | 9337 | 9344 | 9350 | 55 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 57 | 9357 | 9364 | 9371 | 9378 | 9385 | 9392 | 9399 | 9406 | 9413 | 9420 | 9427 | 9434 | 9440 | 56 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 58 | 9447 | 9454 | 9461 | 9468 | 9475 | 9482 | 9489 | 9496 | 9503 | 9510 | 9517 | 9524 | 9530 | 57 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 59 | 9537 | 9544 | 9551 | 9558 | 9565 | 9572 | 9579 | 9586 | 9593 | 9600 | 9607 | 9614 | 9620 | 58 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 60 | 9627 | 9634 | 9641 | 9648 | 9655 | 9662 | 9669 | 9676 | 9683 | 9690 | 9697 | 9704 | 9710 | 59 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 61 | 9717 | 9724 | 9731 | 9738 | 9745 | 9752 | 9759 | 9766 | 9773 | 9780 | 9787 | 9794 | 9800 | 60 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 62 | 9807 | 9814 | 9821 | 9828 | 9835 | 9842 | 9849 | 9856 | 9863 | 9870 | 9877 | 9884 | 9890 | 61 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 63 | 9897 | 9904 | 9911 | 9918 | 9925 | 9932 | 9939 | 9946 | 9953 | 9960 | 9967 | 9974 | 9980 | 62 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 64 | 9987 | 9994 | 9991 | 9998 | 9995 | 9992 | 9999 | 9996 | 9993 | 9990 | 9997 | 9994 | 9991 | 63 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 65 | 9998 | 9995 | 9992 | 9989 | 9986 | 9983 | 9980 | 9977 | 9974 | 9971 | 9968 | 9965 | 9962 | 64 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 66 | 9969 | 9966 | 9963 | 9960 | 9957 | 9954 | 9951 | 9948 | 9945 | 9942 | 9939 | 9936 | 9933 | 65 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 67 | 9930 | 9927 | 9924 | 9921 | 9918 | 9915 | 9912 | 9909 | 9906 | 9903 | 9900 | 9897 | 9894 | 66 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 68 | 9891 | 9888 | 9885 | 9882 | 9879 | 9876 | 9873 | 9870 | 9867 | 9864 | 9861 | 9858 | 9855 | 67 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 69 | 9852 | 9849 | 9846 | 9843 | 9840 | 9837 | 9834 | 9831 | 9828 | 9825 | 9822 | 9819 | 9816 | 68 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 70 | 9813 | 9810 | 9807 | 9804 | 9801 | 9798 | 9795 | 9792 | 9789 | 9786 | 9783 | 9780 | 9777 | 69 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 71 | 9774 | 9771 | 9768 | 9765 | 9762 | 9759 | 9756 | 9753 | 9750 | 9747 | 9744 | 9741 | 9738 | 70 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 72 | 9735 | 9732 | 9729 | 9726 | 9723 | 9720 | 9717 | 9714 | 9711 | 9708 | 9705 | 9702 | 9699 | 71 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 73 | 9696 | 9693 | 9690 | 9687 | 9684 | 9681 | 9678 | 9675 | 9672 | 9669 | 9666 | 9663 | 9660 | 72 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 74 | 9657 | 9654 | 9651 | 9648 | 9645 | 9642 | 9639 | 9636 | 9633 | 9630 | 9627 | 9624 | 9621 | 73 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 75 | 9618 | 9615 | 9612 | 9609 | 9606 | 9603 | 9600 | 9597 | 9594 | 9591 | 9588 | 9585 | 9582 | 74 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 76 | 9583 | 9580 | 9577 | 9574 | 9571 | 9568 | 9565 | 9562 | 9559 | 9556 | 9553 | 9550 | 9547 | 75 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 77 | 9548 | 9545 | 9542 | 9539 | 9536 | 9533 | 9530 | 9527 | 9524 | 9521 | 9518 | 9515 | 9512 | 76 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 78 | 9513 | 9510 | 9507 | 9504 | 9501 | 9498 | 9495 | 9492 | 9489 | 9486 | 9483 | 9480 | 9477 | 77 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 79 | 9478 | 9475 | 9472 | 9469 | 9466 | 9463 | 9460 | 9457 | 9454 | 9451 | 9448 | 9445 | 9442 | 78 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 80 | 9443 | 9440 | 9437 | 9434 | 9431 | 9428 | 9425 | 9422 | 9419 | 9416 | 9413 | 9410 | 9407 | 79 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 81 | 9408 | 9405 | 9402 | 9399 | 9396 | 9393 | 9390 | 9387 | 9384 | 9381 | 9378 | 9375 | 9372 | 80 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 82 | 9373 | 9370 | 9367 | 9364 | 9361 | 9358 | 9355 | 9352 | 9349 | 9346 | 9343 | 9340 | 9337 | 81 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 83 | 9338 | 9335 | 9332 | 9329 | 9326 | 9323 | 9320 | 9317 | 9314 | 9311 | 9308 | 9305 | 9302 | 82 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 84 | 9303 | 9300 | 9297 | 9294 | 9291 | 9288 | 9285 | 9282 | 9279 | 9276 | 9273 | 9270 | 9267 | 83 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 85 | 9268 | 9265 | 9262 | 9259 | 9256 | 9253 | 9250 | 9247 | 9244 | 9241 | 9238 | 9235 | 9232 | 84 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 86 | 9233 | 9230 | 9227 | 9224 | 9221 | 9218 | 9215 | 9212 | 9209 | 9206 | 9203 | 9200 | 9197 | 85 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 87 | 9198 | 9195 | 9192 | 9189 | 9186 | 9183 | 9180 | 9177 | 9174 | 9171 | 9168 | 9165 | 9162 | 86 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 88 | 9163 | 9160 | 9157 | 9154 | 9151 | 9148 | 9145 | 9142 | 9139 | 9136 | 9133 | 9130 | 9127 | 87 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 89 | 9128 | 9125 | 9122 | 9119 | 9116 | 9113 | 9110 | 9107 | 9104 | 9101 | 9098 | 9095 | 9092 | 88 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 90 | 9093 | 9090 | 9087 | 9084 | 9081 | 9078 | 9075 | 9072 | 9069 | 9066 | 9063 | 9060 | 9057 | 89 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 90 | 9058 | 9055 | 9052 | 9049 | 9046 | 9043 | 9040 | 9037 | 9034 | 9031 | 9028 | 9025 | 9022 | 90 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |

Log Cos

Log Tan

正切餘切對數表

附表

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|-----|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-----------|
| 0°0 | | | | | | | | | | | 1 2 3 4 5 |
| 0.0 | 2.2419 | 5.429 | 4.190 | 8.419 | 9.978 | 0.020 | 0.870 | 7.450 | 1.021 | 5.2419 | 8.99 |
| 0.1 | 3.2410 | 2833 | 3211 | 3558 | 3880 | 4183 | 4460 | 4723 | 4972 | 5200 | 54.25 |
| 0.2 | 5.429 | 5641 | 5843 | 6026 | 6221 | 6398 | 6569 | 6723 | 6850 | 70.43 | 71.90 |
| 0.3 | 7.190 | 7032 | 7470 | 7604 | 7734 | 7850 | 7952 | 81.01 | 82.17 | 83.29 | 84.39 |
| 0.4 | 8.429 | 8547 | 8851 | 8754 | 8833 | 8901 | 9046 | 9140 | 9221 | 9221 | 93.00 |
| 0.5 | 9.9409 | 9498 | 9579 | 9622 | 9743 | 9823 | 99.01 | 99.78 | 0.053 | 0.127 | 0.2000 |
| 0.6 | 10.220 | 0.073 | 0.343 | 0.412 | 0.481 | 0.548 | 0.614 | 0.680 | 0.744 | 0.807 | 0.870 |
| 0.7 | 0.870 | 0.929 | 0.992 | 1.052 | 1.111 | 1.170 | 1.227 | 1.284 | 1.340 | 1.395 | 1.450 |
| 0.8 | 1.460 | 1.504 | 1.557 | 1.610 | 1.662 | 1.715 | 1.764 | 1.814 | 1.864 | 1.913 | 1.962 |
| 0.9 | 1.962 | 2.010 | 2.057 | 2.104 | 2.150 | 2.195 | 2.242 | 2.287 | 2.331 | 2.376 | 2.419 |
| 1°0 | 2.419 | 2.462 | 2.505 | 2.548 | 2.590 | 2.631 | 2.672 | 2.713 | 2.754 | 2.794 | 2.833 |
| 1.1 | 2.833 | 2.873 | 2.912 | 2.950 | 2.988 | 3.026 | 3.064 | 3.101 | 3.138 | 3.175 | 3.211 |
| 1.2 | 3.211 | 3.247 | 3.283 | 3.318 | 3.354 | 3.389 | 3.423 | 3.458 | 3.492 | 3.526 | 3.559 |
| 1.3 | 3.559 | 3.592 | 3.625 | 3.658 | 3.691 | 3.723 | 3.755 | 3.787 | 3.818 | 3.850 | 3.881 |
| 1.4 | 3.881 | 3.912 | 3.943 | 3.973 | 4.003 | 4.033 | 4.063 | 4.093 | 4.122 | 4.152 | 4.181 |
| 1.5 | 4.181 | 4.210 | 4.238 | 4.267 | 4.295 | 4.323 | 4.351 | 4.379 | 4.406 | 4.434 | 4.461 |
| 1.6 | 4.461 | 4.488 | 4.515 | 4.542 | 4.568 | 4.595 | 4.621 | 4.647 | 4.673 | 4.699 | 4.725 |
| 1.7 | 4.725 | 4.750 | 4.775 | 4.801 | 4.826 | 4.851 | 4.876 | 4.900 | 4.924 | 4.949 | 4.973 |
| 1.8 | 4.973 | 4.997 | 5.021 | 5.045 | 5.068 | 5.092 | 5.115 | 5.139 | 5.162 | 5.185 | 5.208 |
| 1.9 | 5.208 | 5.231 | 5.253 | 5.276 | 5.298 | 5.321 | 5.343 | 5.365 | 5.387 | 5.409 | 5.431 |
| 2°0 | 5.431 | 5.453 | 5.474 | 5.496 | 5.517 | 5.538 | 5.558 | 5.579 | 5.601 | 5.622 | 5.643 |
| 2.1 | 5.643 | 5.664 | 5.684 | 5.705 | 5.725 | 5.745 | 5.765 | 5.785 | 5.805 | 5.825 | 5.845 |
| 2.2 | 5.845 | 5.865 | 5.884 | 5.904 | 5.923 | 5.943 | 5.962 | 5.981 | 6.000 | 6.019 | 6.038 |
| 2.3 | 6.038 | 6.057 | 6.076 | 6.095 | 6.113 | 6.132 | 6.150 | 6.169 | 6.187 | 6.205 | 6.223 |
| 2.4 | 6.223 | 6.242 | 6.260 | 6.277 | 6.295 | 6.313 | 6.331 | 6.348 | 6.365 | 6.383 | 6.401 |
| 2.5 | 6.401 | 6.418 | 6.435 | 6.453 | 6.470 | 6.487 | 6.504 | 6.521 | 6.538 | 6.555 | 6.571 |
| 2.6 | 6.571 | 6.588 | 6.605 | 6.621 | 6.638 | 6.654 | 6.671 | 6.687 | 6.703 | 6.719 | 6.736 |
| 2.7 | 6.736 | 6.752 | 6.768 | 6.784 | 6.800 | 6.815 | 6.831 | 6.847 | 6.862 | 6.878 | 6.894 |
| 2.8 | 6.894 | 6.909 | 6.925 | 6.940 | 6.956 | 6.971 | 6.986 | 7.001 | 7.016 | 7.031 | 7.046 |
| 2.9 | 7.046 | 7.061 | 7.076 | 7.091 | 7.106 | 7.121 | 7.136 | 7.150 | 7.165 | 7.179 | 7.194 |
| 3°0 | 7.194 | 7.208 | 7.223 | 7.237 | 7.252 | 7.266 | 7.280 | 7.294 | 7.308 | 7.323 | 7.337 |
| 3.1 | 7.337 | 7.351 | 7.365 | 7.379 | 7.392 | 7.406 | 7.420 | 7.434 | 7.448 | 7.461 | 7.475 |
| 3.2 | 7.475 | 7.488 | 7.502 | 7.515 | 7.529 | 7.542 | 7.556 | 7.570 | 7.582 | 7.596 | 7.609 |
| 3.3 | 7.609 | 7.622 | 7.635 | 7.648 | 7.661 | 7.674 | 7.687 | 7.700 | 7.712 | 7.725 | 7.737 |
| 3.4 | 7.737 | 7.751 | 7.764 | 7.777 | 7.790 | 7.802 | 7.815 | 7.827 | 7.840 | 7.852 | 7.865 |
| 3.5 | 7.865 | 7.877 | 7.890 | 7.902 | 7.914 | 7.927 | 7.939 | 7.951 | 7.963 | 7.975 | 7.988 |
| 3.6 | 7.988 | 8.000 | 8.012 | 8.024 | 8.036 | 8.048 | 8.059 | 8.071 | 8.083 | 8.095 | 8.107 |
| 3.7 | 8.107 | 8.119 | 8.130 | 8.142 | 8.154 | 8.165 | 8.177 | 8.188 | 8.200 | 8.212 | 8.223 |
| 3.8 | 8.223 | 8.234 | 8.245 | 8.257 | 8.268 | 8.280 | 8.291 | 8.302 | 8.314 | 8.325 | 8.336 |
| 3.9 | 8.336 | 8.347 | 8.358 | 8.370 | 8.381 | 8.392 | 8.403 | 8.414 | 8.425 | 8.436 | 8.447 |
| 4°0 | 8.447 | 8.457 | 8.468 | 8.479 | 8.490 | 8.501 | 8.511 | 8.522 | 8.533 | 8.543 | 8.554 |
| 4.1 | 8.554 | 8.565 | 8.575 | 8.586 | 8.596 | 8.607 | 8.617 | 8.628 | 8.638 | 8.649 | 8.659 |
| 4.2 | 8.659 | 8.669 | 8.680 | 8.690 | 8.700 | 8.711 | 8.721 | 8.731 | 8.741 | 8.751 | 8.762 |
| 4.3 | 8.762 | 8.772 | 8.782 | 8.792 | 8.802 | 8.812 | 8.822 | 8.832 | 8.842 | 8.852 | 8.862 |
| 4.4 | 8.862 | 8.872 | 8.882 | 8.892 | 8.901 | 8.911 | 8.921 | 8.931 | 8.940 | 8.950 | 8.960 |
| 4.5 | 8.960 | 8.970 | 8.979 | 8.989 | 8.998 | 9.008 | 9.018 | 9.027 | 9.037 | 9.046 | 9.056 |
| 4.6 | 9.056 | 9.065 | 9.075 | 9.084 | 9.093 | 9.103 | 9.112 | 9.122 | 9.131 | 9.140 | 9.150 |
| 4.7 | 9.150 | 9.159 | 9.168 | 9.177 | 9.186 | 9.195 | 9.204 | 9.214 | 9.223 | 9.232 | 9.241 |
| 4.8 | 9.241 | 9.250 | 9.259 | 9.268 | 9.277 | 9.286 | 9.295 | 9.304 | 9.313 | 9.322 | 9.331 |
| 4.9 | 9.331 | 9.340 | 9.349 | 9.358 | 9.367 | 9.376 | 9.385 | 9.394 | 9.403 | 9.412 | 9.421 |
| | | | | | | | | | | | |
| | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |

Log Cot

Log Tan 正切餘切對數表

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 57.0 | 8420 | 8425 | 8437 | 8445 | 8454 | 8463 | 8472 | 8480 | 8489 | 8497 |
| 5.1 | 9506 | 9515 | 9523 | 9532 | 9540 | 9549 | 9557 | 9565 | 9574 | 9582 |
| 5.2 | 9591 | 9599 | 9608 | 9616 | 9624 | 9633 | 9641 | 9649 | 9657 | 9665 |
| 5.3 | 9674 | 9682 | 9690 | 9699 | 9707 | 9715 | 9723 | 9731 | 9739 | 9747 |
| 5.4 | 9755 | 9764 | 9772 | 9780 | 9788 | 9796 | 9804 | 9812 | 9820 | 9828 |
| 5.5 | 9836 | 9844 | 9852 | 9860 | 9867 | 9875 | 9883 | 9891 | 9899 | 9907 |
| 5.6 | 9915 | 9923 | 9931 | 9939 | 9946 | 9954 | 9962 | 9970 | 9978 | 9986 |
| 5.7 | 9992 | 10000 | 10007 | 10015 | 10022 | 10030 | 10038 | 10045 | 10053 | 10060 |
| 5.8 | 10068 | 10076 | 10083 | 10090 | 10098 | 10105 | 10113 | 10120 | 10128 | 10135 |
| 5.9 | 10143 | 10150 | 10157 | 10165 | 10172 | 10180 | 10187 | 10194 | 10202 | 10209 |
| 60.0 | 10216 | 10223 | 10231 | 10238 | 10245 | 10253 | 10260 | 10267 | 10274 | 10281 |
| 6.1 | 10289 | 10296 | 10303 | 10310 | 10317 | 10324 | 10331 | 10338 | 10345 | 10352 |
| 6.2 | 10359 | 10367 | 10374 | 10381 | 10388 | 10395 | 10402 | 10409 | 10416 | 10423 |
| 6.3 | 10430 | 10437 | 10444 | 10451 | 10457 | 10464 | 10471 | 10478 | 10485 | 10492 |
| 6.4 | 10499 | 10506 | 10512 | 10519 | 10525 | 10532 | 10539 | 10546 | 10553 | 10560 |
| 6.5 | 10567 | 10573 | 10580 | 10587 | 10593 | 10600 | 10607 | 10614 | 10620 | 10627 |
| 6.6 | 10633 | 10640 | 10647 | 10653 | 10660 | 10667 | 10673 | 10680 | 10686 | 10693 |
| 6.7 | 10699 | 10706 | 10712 | 10719 | 10725 | 10732 | 10738 | 10745 | 10751 | 10758 |
| 6.8 | 10764 | 10771 | 10777 | 10784 | 10790 | 10796 | 10803 | 10809 | 10816 | 10822 |
| 6.9 | 10828 | 10835 | 10841 | 10847 | 10854 | 10860 | 10867 | 10873 | 10880 | 10886 |
| 70.0 | 10893 | 10899 | 10904 | 10910 | 10916 | 10922 | 10927 | 10933 | 10938 | 10944 |
| 7.1 | 10950 | 10956 | 10962 | 10967 | 10973 | 10978 | 10984 | 10989 | 10995 | 11000 |
| 7.2 | 11005 | 11011 | 11017 | 11023 | 11028 | 11034 | 11040 | 11045 | 11051 | 11056 |
| 7.3 | 11062 | 11067 | 11073 | 11078 | 11084 | 11089 | 11095 | 11100 | 11106 | 11111 |
| 7.4 | 11117 | 11122 | 11128 | 11133 | 11139 | 11144 | 11150 | 11155 | 11160 | 11166 |
| 7.5 | 11171 | 11176 | 11182 | 11187 | 11192 | 11198 | 11203 | 11208 | 11214 | 11219 |
| 7.6 | 11224 | 11230 | 11235 | 11240 | 11246 | 11251 | 11257 | 11262 | 11267 | 11272 |
| 7.7 | 11278 | 11283 | 11288 | 11294 | 11299 | 11304 | 11310 | 11315 | 11320 | 11326 |
| 7.8 | 11331 | 11336 | 11342 | 11347 | 11352 | 11357 | 11363 | 11368 | 11373 | 11378 |
| 7.9 | 11384 | 11389 | 11394 | 11399 | 11404 | 11409 | 11414 | 11420 | 11425 | 11430 |
| 80.0 | 11435 | 11440 | 11445 | 11450 | 11455 | 11460 | 11465 | 11470 | 11475 | 11480 |
| 8.1 | 11485 | 11490 | 11495 | 11500 | 11505 | 11510 | 11515 | 11520 | 11525 | 11530 |
| 8.2 | 11535 | 11540 | 11545 | 11550 | 11555 | 11560 | 11565 | 11570 | 11575 | 11580 |
| 8.3 | 11585 | 11590 | 11595 | 11600 | 11605 | 11610 | 11615 | 11620 | 11625 | 11630 |
| 8.4 | 11635 | 11640 | 11645 | 11650 | 11655 | 11660 | 11665 | 11670 | 11675 | 11680 |
| 8.5 | 11685 | 11690 | 11695 | 11700 | 11705 | 11710 | 11715 | 11720 | 11725 | 11730 |
| 8.6 | 11735 | 11740 | 11745 | 11750 | 11755 | 11760 | 11765 | 11770 | 11775 | 11780 |
| 8.7 | 11785 | 11790 | 11795 | 11800 | 11805 | 11810 | 11815 | 11820 | 11825 | 11830 |
| 8.8 | 11835 | 11840 | 11845 | 11850 | 11855 | 11860 | 11865 | 11870 | 11875 | 11880 |
| 8.9 | 11885 | 11890 | 11895 | 11900 | 11905 | 11910 | 11915 | 11920 | 11925 | 11930 |
| 90.0 | 11935 | 11940 | 11945 | 11950 | 11955 | 11960 | 11965 | 11970 | 11975 | 11980 |
| 9.1 | 11985 | 11990 | 11995 | 12000 | 12005 | 12010 | 12015 | 12020 | 12025 | 12030 |
| 9.2 | 12035 | 12040 | 12045 | 12050 | 12055 | 12060 | 12065 | 12070 | 12075 | 12080 |
| 9.3 | 12085 | 12090 | 12095 | 12100 | 12105 | 12110 | 12115 | 12120 | 12125 | 12130 |
| 9.4 | 12135 | 12140 | 12145 | 12150 | 12155 | 12160 | 12165 | 12170 | 12175 | 12180 |
| 9.5 | 12185 | 12190 | 12195 | 12200 | 12205 | 12210 | 12215 | 12220 | 12225 | 12230 |
| 9.6 | 12235 | 12240 | 12245 | 12250 | 12255 | 12260 | 12265 | 12270 | 12275 | 12280 |
| 9.7 | 12285 | 12290 | 12295 | 12300 | 12305 | 12310 | 12315 | 12320 | 12325 | 12330 |
| 9.8 | 12335 | 12340 | 12345 | 12350 | 12355 | 12360 | 12365 | 12370 | 12375 | 12380 |
| 9.9 | 12385 | 12390 | 12395 | 12400 | 12405 | 12410 | 12415 | 12420 | 12425 | 12430 |

附表

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------|---|---|---|---|---|
| 57.0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5.3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5.4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5.6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 5.9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 60.0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6.3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6.4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6.6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6.9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 70.0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7.3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7.4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7.6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 7.9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 80.0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8.3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8.4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8.6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8.9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 90.0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9.3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9.4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9.6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 9.9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

9 5 7 0 5 4 3 2 1 0

log Cot

正切餘切對數表

Lg Tan

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | |
|-----|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|-----|
| | | | | | | | | | | | —00 | 50° |
| 0° | 0000 | 36419 | 6429 | 7190 | 8430 | 9409 | 0206 | 0370 | 1430 | 16622 | 2410 | 29 |
| 1 | 2240 | 2835 | 3311 | 3557 | 3781 | 4151 | 4471 | 4725 | 4973 | 5208 | 5431 | 33 |
| 2 | 5431 | 5643 | 5844 | 6033 | 6222 | 6401 | 6571 | 6723 | 6854 | 7043 | 7194 | 37 |
| 3 | 7194 | 7327 | 7475 | 7629 | 7783 | 7935 | 8085 | 8107 | 8225 | 8356 | 8446 | 39 |
| 4 | 8446 | 8554 | 8659 | 8762 | 8862 | 8950 | 9026 | 9100 | 9241 | 9331 | 9340 | 41 |
| 5 | 9340 | 9366 | 9391 | 9414 | 9436 | 9456 | 9474 | 9490 | 9505 | 9519 | 9531 | 43 |
| 6 | 9531 | 9543 | 9554 | 9564 | 9573 | 9581 | 9588 | 9594 | 9599 | 9603 | 9606 | 45 |
| 7 | 9606 | 9609 | 9611 | 9613 | 9614 | 9615 | 9615 | 9615 | 9615 | 9614 | 9613 | 47 |
| 8 | 9613 | 9611 | 9609 | 9607 | 9605 | 9603 | 9601 | 9599 | 9597 | 9594 | 9591 | 49 |
| 9 | 9591 | 9588 | 9585 | 9582 | 9579 | 9576 | 9573 | 9570 | 9567 | 9563 | 9560 | 50° |
| 10° | 0000 | 36419 | 6429 | 7190 | 8430 | 9409 | 0206 | 0370 | 1430 | 16622 | 2410 | 29 |
| 11 | 2240 | 2835 | 3311 | 3557 | 3781 | 4151 | 4471 | 4725 | 4973 | 5208 | 5431 | 33 |
| 12 | 5431 | 5643 | 5844 | 6033 | 6222 | 6401 | 6571 | 6723 | 6854 | 7043 | 7194 | 37 |
| 13 | 7194 | 7327 | 7475 | 7629 | 7783 | 7935 | 8085 | 8107 | 8225 | 8356 | 8446 | 39 |
| 14 | 8446 | 8554 | 8659 | 8762 | 8862 | 8950 | 9026 | 9100 | 9241 | 9331 | 9340 | 41 |
| 15 | 9340 | 9366 | 9391 | 9414 | 9436 | 9456 | 9474 | 9490 | 9505 | 9519 | 9531 | 43 |
| 16 | 9531 | 9543 | 9554 | 9564 | 9573 | 9581 | 9588 | 9594 | 9599 | 9603 | 9606 | 45 |
| 17 | 9606 | 9609 | 9611 | 9613 | 9614 | 9615 | 9615 | 9615 | 9615 | 9614 | 9613 | 47 |
| 18 | 9613 | 9611 | 9609 | 9607 | 9605 | 9603 | 9601 | 9599 | 9597 | 9594 | 9591 | 49 |
| 19 | 9591 | 9588 | 9585 | 9582 | 9579 | 9576 | 9573 | 9570 | 9567 | 9563 | 9560 | 50° |
| 20° | 0000 | 36419 | 6429 | 7190 | 8430 | 9409 | 0206 | 0370 | 1430 | 16622 | 2410 | 29 |
| 21 | 2240 | 2835 | 3311 | 3557 | 3781 | 4151 | 4471 | 4725 | 4973 | 5208 | 5431 | 33 |
| 22 | 5431 | 5643 | 5844 | 6033 | 6222 | 6401 | 6571 | 6723 | 6854 | 7043 | 7194 | 37 |
| 23 | 7194 | 7327 | 7475 | 7629 | 7783 | 7935 | 8085 | 8107 | 8225 | 8356 | 8446 | 39 |
| 24 | 8446 | 8554 | 8659 | 8762 | 8862 | 8950 | 9026 | 9100 | 9241 | 9331 | 9340 | 41 |
| 25 | 9340 | 9366 | 9391 | 9414 | 9436 | 9456 | 9474 | 9490 | 9505 | 9519 | 9531 | 43 |
| 26 | 9531 | 9543 | 9554 | 9564 | 9573 | 9581 | 9588 | 9594 | 9599 | 9603 | 9606 | 45 |
| 27 | 9606 | 9609 | 9611 | 9613 | 9614 | 9615 | 9615 | 9615 | 9615 | 9614 | 9613 | 47 |
| 28 | 9613 | 9611 | 9609 | 9607 | 9605 | 9603 | 9601 | 9599 | 9597 | 9594 | 9591 | 49 |
| 29 | 9591 | 9588 | 9585 | 9582 | 9579 | 9576 | 9573 | 9570 | 9567 | 9563 | 9560 | 50° |
| 30° | 0000 | 36419 | 6429 | 7190 | 8430 | 9409 | 0206 | 0370 | 1430 | 16622 | 2410 | 29 |
| 31 | 2240 | 2835 | 3311 | 3557 | 3781 | 4151 | 4471 | 4725 | 4973 | 5208 | 5431 | 33 |
| 32 | 5431 | 5643 | 5844 | 6033 | 6222 | 6401 | 6571 | 6723 | 6854 | 7043 | 7194 | 37 |
| 33 | 7194 | 7327 | 7475 | 7629 | 7783 | 7935 | 8085 | 8107 | 8225 | 8356 | 8446 | 39 |
| 34 | 8446 | 8554 | 8659 | 8762 | 8862 | 8950 | 9026 | 9100 | 9241 | 9331 | 9340 | 41 |
| 35 | 9340 | 9366 | 9391 | 9414 | 9436 | 9456 | 9474 | 9490 | 9505 | 9519 | 9531 | 43 |
| 36 | 9531 | 9543 | 9554 | 9564 | 9573 | 9581 | 9588 | 9594 | 9599 | 9603 | 9606 | 45 |
| 37 | 9606 | 9609 | 9611 | 9613 | 9614 | 9615 | 9615 | 9615 | 9615 | 9614 | 9613 | 47 |
| 38 | 9613 | 9611 | 9609 | 9607 | 9605 | 9603 | 9601 | 9599 | 9597 | 9594 | 9591 | 49 |
| 39 | 9591 | 9588 | 9585 | 9582 | 9579 | 9576 | 9573 | 9570 | 9567 | 9563 | 9560 | 50° |
| 40° | 0000 | 36419 | 6429 | 7190 | 8430 | 9409 | 0206 | 0370 | 1430 | 16622 | 2410 | 29 |
| 41 | 2240 | 2835 | 3311 | 3557 | 3781 | 4151 | 4471 | 4725 | 4973 | 5208 | 5431 | 33 |
| 42 | 5431 | 5643 | 5844 | 6033 | 6222 | 6401 | 6571 | 6723 | 6854 | 7043 | 7194 | 37 |
| 43 | 7194 | 7327 | 7475 | 7629 | 7783 | 7935 | 8085 | 8107 | 8225 | 8356 | 8446 | 39 |
| 44 | 8446 | 8554 | 8659 | 8762 | 8862 | 8950 | 9026 | 9100 | 9241 | 9331 | 9340 | 41 |
| 45 | 9340 | 9366 | 9391 | 9414 | 9436 | 9456 | 9474 | 9490 | 9505 | 9519 | 9531 | 43 |
| 46 | 9531 | 9543 | 9554 | 9564 | 9573 | 9581 | 9588 | 9594 | 9599 | 9603 | 9606 | 45 |
| 47 | 9606 | 9609 | 9611 | 9613 | 9614 | 9615 | 9615 | 9615 | 9615 | 9614 | 9613 | 47 |
| 48 | 9613 | 9611 | 9609 | 9607 | 9605 | 9603 | 9601 | 9599 | 9597 | 9594 | 9591 | 49 |
| 49 | 9591 | 9588 | 9585 | 9582 | 9579 | 9576 | 9573 | 9570 | 9567 | 9563 | 9560 | 50° |
| 50° | 0000 | 36419 | 6429 | 7190 | 8430 | 9409 | 0206 | 0370 | 1430 | 16622 | 2410 | 29 |

餘表

1 2 3 4 5

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Lg Cot

正切餘切對數表

Log Tan

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-----|
| | | | | | | | | | | 0.0000 | 65° |
| 45° | 0.0000 | 0015 | 0030 | 0045 | 0051 | 0076 | 0091 | 0106 | 0121 | 0135 | 44 |
| 46 | 0113 | 0167 | 0182 | 0197 | 0212 | 0233 | 0245 | 0263 | 0278 | 0293 | 43 |
| 47 | 0303 | 0319 | 0334 | 0349 | 0364 | 0379 | 0395 | 0410 | 0425 | 0440 | 42 |
| 48 | 0455 | 0471 | 0485 | 0501 | 0517 | 0532 | 0547 | 0563 | 0578 | 0593 | 41 |
| 49 | 0633 | 0651 | 0669 | 0684 | 0700 | 0716 | 0731 | 0746 | 0762 | 0777 | 40 |
| 50° | 0802 | 0777 | 0750 | 0724 | 0698 | 0673 | 0648 | 0623 | 0598 | 0573 | 39 |
| 51 | 0548 | 0522 | 0497 | 0472 | 0447 | 0423 | 0398 | 0373 | 0348 | 0323 | 38 |
| 52 | 0297 | 0272 | 0247 | 0222 | 0197 | 0172 | 0147 | 0122 | 0097 | 0072 | 37 |
| 53 | 0042 | 0017 | 0002 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 0000 | 36 |
| 54 | 1257 | 1243 | 1229 | 1215 | 1201 | 1187 | 1173 | 1159 | 1145 | 1131 | 35 |
| 55 | 1118 | 1104 | 1090 | 1076 | 1062 | 1048 | 1034 | 1020 | 1006 | 992 | 34 |
| 56 | 978 | 964 | 950 | 936 | 922 | 908 | 894 | 880 | 866 | 852 | 33 |
| 57 | 837 | 823 | 809 | 795 | 781 | 767 | 753 | 739 | 725 | 711 | 32 |
| 58 | 696 | 682 | 668 | 654 | 640 | 626 | 612 | 598 | 584 | 570 | 31 |
| 59 | 539 | 525 | 511 | 497 | 483 | 469 | 455 | 441 | 427 | 413 | 30 |
| 60° | 0.2585 | 0.2602 | 0.2619 | 0.2636 | 0.2653 | 0.2671 | 0.2688 | 0.2706 | 0.2723 | 0.2740 | 29 |
| 61 | 0.2758 | 0.2775 | 0.2792 | 0.2809 | 0.2826 | 0.2843 | 0.2860 | 0.2877 | 0.2894 | 0.2911 | 28 |
| 62 | 0.2928 | 0.2945 | 0.2962 | 0.2979 | 0.2996 | 0.3013 | 0.3030 | 0.3047 | 0.3064 | 0.3081 | 27 |
| 63 | 0.3098 | 0.3115 | 0.3132 | 0.3149 | 0.3166 | 0.3183 | 0.3200 | 0.3217 | 0.3234 | 0.3251 | 26 |
| 64 | 0.3268 | 0.3285 | 0.3302 | 0.3319 | 0.3336 | 0.3353 | 0.3370 | 0.3387 | 0.3404 | 0.3421 | 25 |
| 65 | 0.3438 | 0.3455 | 0.3472 | 0.3489 | 0.3506 | 0.3523 | 0.3540 | 0.3557 | 0.3574 | 0.3591 | 24 |
| 66 | 0.3608 | 0.3625 | 0.3642 | 0.3659 | 0.3676 | 0.3693 | 0.3710 | 0.3727 | 0.3744 | 0.3761 | 23 |
| 67 | 0.3778 | 0.3795 | 0.3812 | 0.3829 | 0.3846 | 0.3863 | 0.3880 | 0.3897 | 0.3914 | 0.3931 | 22 |
| 68 | 0.3948 | 0.3965 | 0.3982 | 0.4000 | 0.4017 | 0.4034 | 0.4051 | 0.4068 | 0.4085 | 0.4102 | 21 |
| 69 | 0.4119 | 0.4136 | 0.4153 | 0.4170 | 0.4187 | 0.4204 | 0.4221 | 0.4238 | 0.4255 | 0.4272 | 20 |
| 70° | 0.4289 | 0.4306 | 0.4323 | 0.4340 | 0.4357 | 0.4374 | 0.4391 | 0.4408 | 0.4425 | 0.4442 | 19 |
| 71 | 0.4459 | 0.4476 | 0.4493 | 0.4510 | 0.4527 | 0.4544 | 0.4561 | 0.4578 | 0.4595 | 0.4612 | 18 |
| 72 | 0.4629 | 0.4646 | 0.4663 | 0.4680 | 0.4697 | 0.4714 | 0.4731 | 0.4748 | 0.4765 | 0.4782 | 17 |
| 73 | 0.4799 | 0.4816 | 0.4833 | 0.4850 | 0.4867 | 0.4884 | 0.4901 | 0.4918 | 0.4935 | 0.4952 | 16 |
| 74 | 0.4969 | 0.4986 | 0.5003 | 0.5020 | 0.5037 | 0.5054 | 0.5071 | 0.5088 | 0.5105 | 0.5122 | 15 |
| 75 | 0.5139 | 0.5156 | 0.5173 | 0.5190 | 0.5207 | 0.5224 | 0.5241 | 0.5258 | 0.5275 | 0.5292 | 14 |
| 76 | 0.5309 | 0.5326 | 0.5343 | 0.5360 | 0.5377 | 0.5394 | 0.5411 | 0.5428 | 0.5445 | 0.5462 | 13 |
| 77 | 0.5479 | 0.5496 | 0.5513 | 0.5530 | 0.5547 | 0.5564 | 0.5581 | 0.5598 | 0.5615 | 0.5632 | 12 |
| 78 | 0.5649 | 0.5666 | 0.5683 | 0.5700 | 0.5717 | 0.5734 | 0.5751 | 0.5768 | 0.5785 | 0.5802 | 11 |
| 79 | 0.5819 | 0.5836 | 0.5853 | 0.5870 | 0.5887 | 0.5904 | 0.5921 | 0.5938 | 0.5955 | 0.5972 | 10 |
| 80° | 0.5989 | 0.6006 | 0.6023 | 0.6040 | 0.6057 | 0.6074 | 0.6091 | 0.6108 | 0.6125 | 0.6142 | 9 |
| 81 | 0.6159 | 0.6176 | 0.6193 | 0.6210 | 0.6227 | 0.6244 | 0.6261 | 0.6278 | 0.6295 | 0.6312 | 8 |
| 82 | 0.6329 | 0.6346 | 0.6363 | 0.6380 | 0.6397 | 0.6414 | 0.6431 | 0.6448 | 0.6465 | 0.6482 | 7 |
| 83 | 0.6499 | 0.6516 | 0.6533 | 0.6550 | 0.6567 | 0.6584 | 0.6601 | 0.6618 | 0.6635 | 0.6652 | 6 |
| 84 | 0.6669 | 0.6686 | 0.6703 | 0.6720 | 0.6737 | 0.6754 | 0.6771 | 0.6788 | 0.6805 | 0.6822 | 5 |
| 85 | 0.6839 | 0.6856 | 0.6873 | 0.6890 | 0.6907 | 0.6924 | 0.6941 | 0.6958 | 0.6975 | 0.6992 | 4 |
| 86 | 0.7009 | 0.7026 | 0.7043 | 0.7060 | 0.7077 | 0.7094 | 0.7111 | 0.7128 | 0.7145 | 0.7162 | 3 |
| 87 | 0.7179 | 0.7196 | 0.7213 | 0.7230 | 0.7247 | 0.7264 | 0.7281 | 0.7298 | 0.7315 | 0.7332 | 2 |
| 88 | 0.7349 | 0.7366 | 0.7383 | 0.7400 | 0.7417 | 0.7434 | 0.7451 | 0.7468 | 0.7485 | 0.7502 | 1 |
| 89 | 0.7519 | 0.7536 | 0.7553 | 0.7570 | 0.7587 | 0.7604 | 0.7621 | 0.7638 | 0.7655 | 0.7672 | 0° |
| 90° | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | |

附表

1 2 3 4 5

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Log Cot

Log Tan 正切餘切對數表

| | | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | | | | | | | | | | 附 表 | | | | |
|------|--------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-----|---|---|---|---|
| 80.0 | 0.2787 | 7541 | 7546 | 7550 | 7555 | 7559 | 7563 | 7568 | 7572 | 7577 | 0.2581 | 0.5 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 80.1 | 7581 | 7586 | 7590 | 7595 | 7599 | 7604 | 7608 | 7613 | 7617 | 7622 | 7626 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 80.2 | 7628 | 7633 | 7638 | 7643 | 7648 | 7654 | 7659 | 7664 | 7669 | 7674 | 7679 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 80.3 | 7679 | 7685 | 7691 | 7696 | 7701 | 7707 | 7712 | 7718 | 7723 | 7728 | 7734 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 80.4 | 7739 | 7745 | 7751 | 7756 | 7762 | 7767 | 7773 | 7778 | 7784 | 7790 | 7796 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 80.5 | 7801 | 7807 | 7813 | 7819 | 7825 | 7831 | 7837 | 7843 | 7849 | 7855 | 7861 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 80.6 | 7867 | 7873 | 7879 | 7885 | 7891 | 7897 | 7903 | 7909 | 7915 | 7921 | 7927 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 80.7 | 7933 | 7939 | 7945 | 7951 | 7957 | 7963 | 7969 | 7975 | 7981 | 7987 | 7993 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 80.8 | 7999 | 8005 | 8011 | 8017 | 8023 | 8029 | 8035 | 8041 | 8047 | 8053 | 8059 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 80.9 | 8065 | 8071 | 8077 | 8083 | 8089 | 8095 | 8101 | 8107 | 8113 | 8119 | 8125 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 81.0 | 8131 | 8137 | 8143 | 8149 | 8155 | 8161 | 8167 | 8173 | 8179 | 8185 | 8191 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 81.1 | 8197 | 8203 | 8209 | 8215 | 8221 | 8227 | 8233 | 8239 | 8245 | 8251 | 8257 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 81.2 | 8263 | 8269 | 8275 | 8281 | 8287 | 8293 | 8299 | 8305 | 8311 | 8317 | 8323 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 81.3 | 8329 | 8335 | 8341 | 8347 | 8353 | 8359 | 8365 | 8371 | 8377 | 8383 | 8389 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 81.4 | 8395 | 8401 | 8407 | 8413 | 8419 | 8425 | 8431 | 8437 | 8443 | 8449 | 8455 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 81.5 | 8461 | 8467 | 8473 | 8479 | 8485 | 8491 | 8497 | 8503 | 8509 | 8515 | 8521 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 81.6 | 8527 | 8533 | 8539 | 8545 | 8551 | 8557 | 8563 | 8569 | 8575 | 8581 | 8587 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 81.7 | 8593 | 8599 | 8605 | 8611 | 8617 | 8623 | 8629 | 8635 | 8641 | 8647 | 8653 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 81.8 | 8659 | 8665 | 8671 | 8677 | 8683 | 8689 | 8695 | 8701 | 8707 | 8713 | 8719 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 81.9 | 8725 | 8731 | 8737 | 8743 | 8749 | 8755 | 8761 | 8767 | 8773 | 8779 | 8785 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 82.0 | 8791 | 8797 | 8803 | 8809 | 8815 | 8821 | 8827 | 8833 | 8839 | 8845 | 8851 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 82.1 | 8857 | 8863 | 8869 | 8875 | 8881 | 8887 | 8893 | 8899 | 8905 | 8911 | 8917 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 82.2 | 8923 | 8929 | 8935 | 8941 | 8947 | 8953 | 8959 | 8965 | 8971 | 8977 | 8983 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 82.3 | 8989 | 8995 | 9001 | 9007 | 9013 | 9019 | 9025 | 9031 | 9037 | 9043 | 9049 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 82.4 | 9055 | 9061 | 9067 | 9073 | 9079 | 9085 | 9091 | 9097 | 9103 | 9109 | 9115 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 82.5 | 9121 | 9127 | 9133 | 9139 | 9145 | 9151 | 9157 | 9163 | 9169 | 9175 | 9181 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 82.6 | 9187 | 9193 | 9199 | 9205 | 9211 | 9217 | 9223 | 9229 | 9235 | 9241 | 9247 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 82.7 | 9253 | 9259 | 9265 | 9271 | 9277 | 9283 | 9289 | 9295 | 9301 | 9307 | 9313 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 82.8 | 9319 | 9325 | 9331 | 9337 | 9343 | 9349 | 9355 | 9361 | 9367 | 9373 | 9379 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 82.9 | 9385 | 9391 | 9397 | 9403 | 9409 | 9415 | 9421 | 9427 | 9433 | 9439 | 9445 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 83.0 | 9451 | 9457 | 9463 | 9469 | 9475 | 9481 | 9487 | 9493 | 9499 | 9505 | 9511 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 83.1 | 9517 | 9523 | 9529 | 9535 | 9541 | 9547 | 9553 | 9559 | 9565 | 9571 | 9577 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 83.2 | 9583 | 9589 | 9595 | 9601 | 9607 | 9613 | 9619 | 9625 | 9631 | 9637 | 9643 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 83.3 | 9649 | 9655 | 9661 | 9667 | 9673 | 9679 | 9685 | 9691 | 9697 | 9703 | 9709 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 83.4 | 9715 | 9721 | 9727 | 9733 | 9739 | 9745 | 9751 | 9757 | 9763 | 9769 | 9775 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 83.5 | 9781 | 9787 | 9793 | 9799 | 9805 | 9811 | 9817 | 9823 | 9829 | 9835 | 9841 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 83.6 | 9847 | 9853 | 9859 | 9865 | 9871 | 9877 | 9883 | 9889 | 9895 | 9901 | 9907 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 83.7 | 9913 | 9919 | 9925 | 9931 | 9937 | 9943 | 9949 | 9955 | 9961 | 9967 | 9973 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 83.8 | 9979 | 9985 | 9991 | 9997 | 10003 | 10009 | 10015 | 10021 | 10027 | 10033 | 10039 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 83.9 | 10045 | 10051 | 10057 | 10063 | 10069 | 10075 | 10081 | 10087 | 10093 | 10099 | 10105 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 84.0 | 10111 | 10117 | 10123 | 10129 | 10135 | 10141 | 10147 | 10153 | 10159 | 10165 | 10171 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 84.1 | 10177 | 10183 | 10189 | 10195 | 10201 | 10207 | 10213 | 10219 | 10225 | 10231 | 10237 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 84.2 | 10243 | 10249 | 10255 | 10261 | 10267 | 10273 | 10279 | 10285 | 10291 | 10297 | 10303 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 84.3 | 10309 | 10315 | 10321 | 10327 | 10333 | 10339 | 10345 | 10351 | 10357 | 10363 | 10369 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 84.4 | 10375 | 10381 | 10387 | 10393 | 10399 | 10405 | 10411 | 10417 | 10423 | 10429 | 10435 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 84.5 | 10441 | 10447 | 10453 | 10459 | 10465 | 10471 | 10477 | 10483 | 10489 | 10495 | 10501 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 84.6 | 10507 | 10513 | 10519 | 10525 | 10531 | 10537 | 10543 | 10549 | 10555 | 10561 | 10567 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 84.7 | 10573 | 10579 | 10585 | 10591 | 10597 | 10603 | 10609 | 10615 | 10621 | 10627 | 10633 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 84.8 | 10639 | 10645 | 10651 | 10657 | 10663 | 10669 | 10675 | 10681 | 10687 | 10693 | 10699 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 84.9 | 10705 | 10711 | 10717 | 10723 | 10729 | 10735 | 10741 | 10747 | 10753 | 10759 | 10765 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 85.0 | 10771 | 10777 | 10783 | 10789 | 10795 | 10801 | 10807 | 10813 | 10819 | 10825 | 10831 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 85.1 | 10837 | 10843 | 10849 | 10855 | 10861 | 10867 | 10873 | 10879 | 10885 | 10891 | 10897 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 85.2 | 10903 | 10909 | 10915 | 10921 | 10927 | 10933 | 10939 | 10945 | 10951 | 10957 | 10963 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 85.3 | 10969 | 10975 | 10981 | 10987 | 10993 | 10999 | 11005 | 11011 | 11017 | 11023 | 11029 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 85.4 | 11035 | 11041 | 11047 | 11053 | 11059 | 11065 | 11071 | 11077 | 11083 | 11089 | 11095 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 85.5 | 11101 | 11107 | 11113 | 11119 | 11125 | 11131 | 11137 | 11143 | 11149 | 11155 | 11161 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 85.6 | 11167 | 11173 | 11179 | 11185 | 11191 | 11197 | 11203 | 11209 | 11215 | 11221 | 11227 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 85.7 | 11233 | 11239 | 11245 | 11251 | 11257 | 11263 | 11269 | 11275 | 11281 | 11287 | 11293 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 85.8 | 11299 | 11305 | 11311 | 11317 | 11323 | 11329 | 11335 | 11341 | 11347 | 11353 | 11359 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 85.9 | 11365 | 11371 | 11377 | 11383 | 11389 | 11395 | 11401 | 11407 | 11413 | 11419 | 11425 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |
| 86.0 | 11431 | 11437 | 11443 | 11449 | 11455 | 11461 | 11467 | 11473 | 11479 | 11485 | 11491 | 0.5 | 0 | 1 | 1 | 2 |

東北圖書館

Log Tan 正切餘切對數表

| | 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | | | | | | | | | | 階差 | | | | | | |
|------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-----|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | | |
| 85.0 | 1.389 | 0.889 | 0.585 | 0.607 | 0.616 | 0.624 | 0.633 | 0.642 | 0.651 | 0.660 | 1.0569 | 4.9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 |
| 85.1 | 0.678 | 0.718 | 0.757 | 0.635 | 0.704 | 0.713 | 0.722 | 0.731 | 0.740 | 0.750 | 0.779 | 4.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 85.2 | 0.729 | 0.768 | 0.777 | 0.758 | 0.725 | 0.804 | 0.814 | 0.823 | 0.833 | 0.844 | 0.830 | 4.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 85.3 | 0.850 | 0.850 | 0.859 | 0.878 | 0.888 | 0.897 | 0.907 | 0.916 | 0.925 | 0.935 | 0.944 | 4.6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 85.4 | 0.944 | 0.954 | 0.963 | 0.973 | 0.982 | 0.992 | 1.002 | 1.011 | 1.021 | 1.030 | 1.040 | 4.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 85.5 | 1.040 | 1.050 | 1.050 | 1.059 | 1.079 | 1.089 | 1.099 | 1.109 | 1.118 | 1.128 | 1.128 | 4.4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 85.6 | 1.128 | 1.148 | 1.158 | 1.168 | 1.178 | 1.188 | 1.198 | 1.208 | 1.218 | 1.228 | 1.233 | 4.3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 85.7 | 1.228 | 1.249 | 1.259 | 1.262 | 1.270 | 1.289 | 1.300 | 1.310 | 1.320 | 1.331 | 1.341 | 4.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 85.8 | 1.341 | 1.351 | 1.361 | 1.372 | 1.383 | 1.393 | 1.404 | 1.414 | 1.425 | 1.435 | 1.445 | 4.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 85.9 | 1.445 | 1.457 | 1.457 | 1.478 | 1.489 | 1.499 | 1.510 | 1.521 | 1.532 | 1.543 | 1.554 | 4.0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 86.0 | 1.554 | 1.584 | 1.578 | 1.588 | 1.597 | 1.608 | 1.619 | 1.630 | 1.642 | 1.653 | 1.664 | 3.9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 86.1 | 1.664 | 1.675 | 1.686 | 1.693 | 1.702 | 1.719 | 1.731 | 1.743 | 1.754 | 1.765 | 1.777 | 3.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 86.2 | 1.777 | 1.783 | 1.800 | 1.812 | 1.823 | 1.835 | 1.846 | 1.858 | 1.870 | 1.881 | 1.893 | 3.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 86.3 | 1.893 | 1.905 | 1.914 | 1.929 | 1.941 | 1.952 | 1.964 | 1.976 | 1.988 | 2.000 | 2.012 | 3.6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 86.4 | 2.012 | 2.025 | 2.037 | 2.049 | 2.061 | 2.073 | 2.085 | 2.097 | 2.110 | 2.122 | 2.135 | 3.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 86.5 | 2.135 | 2.148 | 2.160 | 2.173 | 2.185 | 2.198 | 2.210 | 2.222 | 2.235 | 2.249 | 2.263 | 3.4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 86.6 | 2.263 | 2.274 | 2.287 | 2.300 | 2.313 | 2.323 | 2.335 | 2.347 | 2.359 | 2.373 | 2.387 | 3.3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 86.7 | 2.387 | 2.404 | 2.418 | 2.431 | 2.444 | 2.458 | 2.471 | 2.485 | 2.498 | 2.512 | 2.525 | 3.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 86.8 | 2.525 | 2.539 | 2.552 | 2.565 | 2.578 | 2.594 | 2.608 | 2.621 | 2.635 | 2.649 | 2.663 | 3.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 86.9 | 2.663 | 2.677 | 2.692 | 2.706 | 2.720 | 2.734 | 2.748 | 2.763 | 2.777 | 2.792 | 1.2606 | 3.0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 87.0 | 1.2606 | 0.821 | 0.835 | 0.850 | 0.864 | 0.879 | 0.894 | 0.909 | 0.924 | 0.939 | 0.954 | 2.9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 87.1 | 0.954 | 0.969 | 0.984 | 0.999 | 1.014 | 1.029 | 1.044 | 1.059 | 1.074 | 1.089 | 1.106 | 2.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 87.2 | 1.106 | 1.122 | 1.137 | 1.153 | 1.169 | 1.185 | 1.200 | 1.216 | 1.232 | 1.248 | 1.264 | 2.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 87.3 | 1.264 | 1.281 | 1.298 | 1.315 | 1.332 | 1.349 | 1.366 | 1.383 | 1.400 | 1.417 | 1.434 | 2.6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 87.4 | 1.434 | 1.452 | 1.469 | 1.487 | 1.505 | 1.523 | 1.541 | 1.559 | 1.577 | 1.595 | 1.613 | 2.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 87.5 | 1.613 | 1.632 | 1.650 | 1.668 | 1.687 | 1.705 | 1.724 | 1.743 | 1.762 | 1.781 | 1.800 | 2.4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 87.6 | 1.800 | 1.819 | 1.838 | 1.857 | 1.876 | 1.895 | 1.914 | 1.933 | 1.952 | 1.971 | 1.990 | 2.3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 87.7 | 1.990 | 2.009 | 2.028 | 2.047 | 2.066 | 2.085 | 2.104 | 2.123 | 2.142 | 2.161 | 2.180 | 2.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 87.8 | 2.180 | 2.200 | 2.219 | 2.238 | 2.257 | 2.276 | 2.295 | 2.314 | 2.333 | 2.352 | 2.371 | 2.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 87.9 | 2.371 | 2.390 | 2.409 | 2.428 | 2.447 | 2.466 | 2.485 | 2.504 | 2.523 | 2.542 | 2.561 | 2.0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 88.0 | 2.561 | 2.580 | 2.599 | 2.618 | 2.637 | 2.656 | 2.675 | 2.694 | 2.713 | 2.732 | 2.751 | 1.9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 88.1 | 2.751 | 2.770 | 2.789 | 2.808 | 2.827 | 2.846 | 2.865 | 2.884 | 2.903 | 2.922 | 2.941 | 1.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 88.2 | 2.941 | 2.960 | 2.979 | 2.998 | 3.017 | 3.036 | 3.055 | 3.074 | 3.093 | 3.112 | 3.131 | 1.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 88.3 | 3.131 | 3.150 | 3.169 | 3.188 | 3.207 | 3.226 | 3.245 | 3.264 | 3.283 | 3.302 | 3.321 | 1.6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 88.4 | 3.321 | 3.340 | 3.359 | 3.378 | 3.397 | 3.416 | 3.435 | 3.454 | 3.473 | 3.492 | 3.511 | 1.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 88.5 | 3.511 | 3.530 | 3.549 | 3.568 | 3.587 | 3.606 | 3.625 | 3.644 | 3.663 | 3.682 | 3.701 | 1.4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 88.6 | 3.701 | 3.720 | 3.739 | 3.758 | 3.777 | 3.796 | 3.815 | 3.834 | 3.853 | 3.872 | 3.891 | 1.3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 88.7 | 3.891 | 3.910 | 3.929 | 3.948 | 3.967 | 3.986 | 4.005 | 4.024 | 4.043 | 4.062 | 4.081 | 1.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 88.8 | 4.081 | 4.100 | 4.119 | 4.138 | 4.157 | 4.176 | 4.195 | 4.214 | 4.233 | 4.252 | 4.271 | 1.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 88.9 | 4.271 | 4.290 | 4.309 | 4.328 | 4.347 | 4.366 | 4.385 | 4.404 | 4.423 | 4.442 | 4.461 | 1.0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 89.0 | 4.461 | 4.480 | 4.499 | 4.518 | 4.537 | 4.556 | 4.575 | 4.594 | 4.613 | 4.632 | 4.651 | 0.9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 89.1 | 4.651 | 4.670 | 4.689 | 4.708 | 4.727 | 4.746 | 4.765 | 4.784 | 4.803 | 4.822 | 4.841 | 0.8 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 89.2 | 4.841 | 4.860 | 4.879 | 4.898 | 4.917 | 4.936 | 4.955 | 4.974 | 4.993 | 5.012 | 5.031 | 0.7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 89.3 | 5.031 | 5.050 | 5.069 | 5.088 | 5.107 | 5.126 | 5.145 | 5.164 | 5.183 | 5.202 | 5.221 | 0.6 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 89.4 | 5.221 | 5.240 | 5.259 | 5.278 | 5.297 | 5.316 | 5.335 | 5.354 | 5.373 | 5.392 | 5.411 | 0.5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 89.5 | 5.411 | 5.430 | 5.449 | 5.468 | 5.487 | 5.506 | 5.525 | 5.544 | 5.563 | 5.582 | 5.601 | 0.4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 89.6 | 5.601 | 5.620 | 5.639 | 5.658 | 5.677 | 5.696 | 5.715 | 5.734 | 5.753 | 5.772 | 5.791 | 0.3 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 89.7 | 5.791 | 5.810 | 5.829 | 5.848 | 5.867 | 5.886 | 5.905 | 5.924 | 5.943 | 5.962 | 5.981 | 0.2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 89.8 | 5.981 | 5.999 | 6.018 | 6.037 | 6.056 | 6.075 | 6.094 | 6.113 | 6.132 | 6.151 | 6.170 | 0.1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 89.9 | 6.170 | 6.189 | 6.208 | 6.227 | 6.246 | 6.265 | 6.284 | 6.303 | 6.322 | 6.341 | 6.360 | 0.0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

8 9 0 5 4 3 2 1 0

分秒數與度數互化表

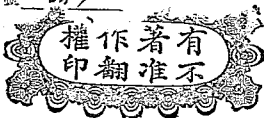
分秒數化度數

| 分 | 秒 | 度 |
|-----|--------|--------------|
| 0' | 00.000 | 0°=0°.00000 |
| 1' | 01.666 | 1°=0°.00277 |
| 2' | 03.333 | 2°=0°.00555 |
| 3' | 05 | 3°=0°.00833 |
| 4' | 06.666 | 4°=0°.01111 |
| 5' | 08.333 | 5°=0°.01389 |
| 6' | 10 | 6°=0°.01666 |
| 7' | 11.666 | 7°=0°.01944 |
| 8' | 13.333 | 8°=0°.02222 |
| 9' | 15 | 9°=0°.025 |
| 10' | 01.666 | 10°=0°.02777 |
| 11' | 18.333 | 11°=0°.03055 |
| 12' | 20 | 12°=0°.03333 |
| 13' | 21.666 | 13°=0°.03611 |
| 14' | 23.333 | 14°=0°.03889 |
| 15' | 25 | 15°=0°.04166 |
| 16' | 26.666 | 16°=0°.04444 |
| 17' | 28.333 | 17°=0°.04722 |
| 18' | 30 | 18°=0°.05 |
| 19' | 31.666 | 19°=0°.05277 |
| 20' | 33.333 | 20°=0°.05555 |
| 1 | 35 | 21°=0°.05833 |
| 2 | 36.666 | 22°=0°.06111 |
| 3 | 38.333 | 23°=0°.06389 |
| 4 | 40 | 24°=0°.06666 |
| 5 | 41.666 | 25°=0°.06944 |
| 6 | 43.333 | 26°=0°.07222 |
| 7 | 45 | 27°=0°.075 |
| 8 | 46.666 | 28°=0°.07777 |
| 9 | 48.333 | 29°=0°.08055 |
| 10 | 50 | 30°=0°.08333 |
| 11 | 51.666 | 31°=0°.08611 |
| 12 | 53.333 | 32°=0°.08889 |
| 13 | 55 | 33°=0°.09166 |
| 14 | 56.666 | 34°=0°.09444 |
| 15 | 58.333 | 35°=0°.09722 |
| 16 | 60 | 36°=0°.1 |
| 17 | 61.666 | 37°=0°.10277 |
| 18 | 63.333 | 38°=0°.10555 |
| 19 | 65 | 39°=0°.10833 |
| 20 | 66.666 | 40°=0°.11111 |
| 1 | 68.333 | 41°=0°.11389 |
| 2 | 70 | 42°=0°.11666 |
| 3 | 71.666 | 43°=0°.11944 |
| 4 | 73.333 | 44°=0°.12222 |
| 5 | 75 | 45°=0°.125 |
| 6 | 76.666 | 46°=0°.12777 |
| 7 | 78.333 | 47°=0°.13055 |
| 8 | 80 | 48°=0°.13333 |
| 9 | 81.666 | 49°=0°.13611 |
| 10 | 83.333 | 50°=0°.13889 |
| 11 | 85 | 51°=0°.14166 |
| 12 | 86.666 | 52°=0°.14444 |
| 13 | 88.333 | 53°=0°.14722 |
| 14 | 90 | 54°=0°.15 |
| 15 | 91.666 | 55°=0°.15277 |
| 16 | 93.333 | 56°=0°.15555 |
| 17 | 95 | 57°=0°.15833 |
| 18 | 96.666 | 58°=0°.16111 |
| 19 | 98.333 | 59°=0°.16389 |
| 20 | 100 | 60°=0°.16666 |

度數化分秒數

| 度 | 分 | 秒 |
|-------------|-----|----------|
| 0°.00=0°00' | 0 | 00.000 |
| 0°.01=0°01' | 1 | 30.000 |
| 0°.02=0°02' | 2 | 60.000 |
| 0°.03=0°03' | 3 | 90.000 |
| 0°.04=0°04' | 4 | 120.000 |
| 0°.05=0°05' | 5 | 150.000 |
| 0°.06=0°06' | 6 | 180.000 |
| 0°.07=0°07' | 7 | 210.000 |
| 0°.08=0°08' | 8 | 240.000 |
| 0°.09=0°09' | 9 | 270.000 |
| 0°.10=0°10' | 10 | 300.000 |
| 0°.11=0°11' | 11 | 330.000 |
| 0°.12=0°12' | 12 | 360.000 |
| 0°.13=0°13' | 13 | 390.000 |
| 0°.14=0°14' | 14 | 420.000 |
| 0°.15=0°15' | 15 | 450.000 |
| 0°.16=0°16' | 16 | 480.000 |
| 0°.17=0°17' | 17 | 510.000 |
| 0°.18=0°18' | 18 | 540.000 |
| 0°.19=0°19' | 19 | 570.000 |
| 0°.20=0°20' | 20 | 600.000 |
| 0°.21=0°21' | 21 | 630.000 |
| 0°.22=0°22' | 22 | 660.000 |
| 0°.23=0°23' | 23 | 690.000 |
| 0°.24=0°24' | 24 | 720.000 |
| 0°.25=0°25' | 25 | 750.000 |
| 0°.26=0°26' | 26 | 780.000 |
| 0°.27=0°27' | 27 | 810.000 |
| 0°.28=0°28' | 28 | 840.000 |
| 0°.29=0°29' | 29 | 870.000 |
| 0°.30=0°30' | 30 | 900.000 |
| 0°.31=0°31' | 31 | 930.000 |
| 0°.32=0°32' | 32 | 960.000 |
| 0°.33=0°33' | 33 | 990.000 |
| 0°.34=0°34' | 34 | 1020.000 |
| 0°.35=0°35' | 35 | 1050.000 |
| 0°.36=0°36' | 36 | 1080.000 |
| 0°.37=0°37' | 37 | 1110.000 |
| 0°.38=0°38' | 38 | 1140.000 |
| 0°.39=0°39' | 39 | 1170.000 |
| 0°.40=0°40' | 40 | 1200.000 |
| 0°.41=0°41' | 41 | 1230.000 |
| 0°.42=0°42' | 42 | 1260.000 |
| 0°.43=0°43' | 43 | 1290.000 |
| 0°.44=0°44' | 44 | 1320.000 |
| 0°.45=0°45' | 45 | 1350.000 |
| 0°.46=0°46' | 46 | 1380.000 |
| 0°.47=0°47' | 47 | 1410.000 |
| 0°.48=0°48' | 48 | 1440.000 |
| 0°.49=0°49' | 49 | 1470.000 |
| 0°.50=0°50' | 50 | 1500.000 |
| 0°.51=0°51' | 51 | 1530.000 |
| 0°.52=0°52' | 52 | 1560.000 |
| 0°.53=0°53' | 53 | 1590.000 |
| 0°.54=0°54' | 54 | 1620.000 |
| 0°.55=0°55' | 55 | 1650.000 |
| 0°.56=0°56' | 56 | 1680.000 |
| 0°.57=0°57' | 57 | 1710.000 |
| 0°.58=0°58' | 58 | 1740.000 |
| 0°.59=0°59' | 59 | 1770.000 |
| 1°.00=1°00' | 60 | 1800.000 |
| 1°.01=1°01' | 61 | 1830.000 |
| 1°.02=1°02' | 62 | 1860.000 |
| 1°.03=1°03' | 63 | 1890.000 |
| 1°.04=1°04' | 64 | 1920.000 |
| 1°.05=1°05' | 65 | 1950.000 |
| 1°.06=1°06' | 66 | 1980.000 |
| 1°.07=1°07' | 67 | 2010.000 |
| 1°.08=1°08' | 68 | 2040.000 |
| 1°.09=1°09' | 69 | 2070.000 |
| 1°.10=1°10' | 70 | 2100.000 |
| 1°.11=1°11' | 71 | 2130.000 |
| 1°.12=1°12' | 72 | 2160.000 |
| 1°.13=1°13' | 73 | 2190.000 |
| 1°.14=1°14' | 74 | 2220.000 |
| 1°.15=1°15' | 75 | 2250.000 |
| 1°.16=1°16' | 76 | 2280.000 |
| 1°.17=1°17' | 77 | 2310.000 |
| 1°.18=1°18' | 78 | 2340.000 |
| 1°.19=1°19' | 79 | 2370.000 |
| 1°.20=1°20' | 80 | 2400.000 |
| 1°.21=1°21' | 81 | 2430.000 |
| 1°.22=1°22' | 82 | 2460.000 |
| 1°.23=1°23' | 83 | 2490.000 |
| 1°.24=1°24' | 84 | 2520.000 |
| 1°.25=1°25' | 85 | 2550.000 |
| 1°.26=1°26' | 86 | 2580.000 |
| 1°.27=1°27' | 87 | 2610.000 |
| 1°.28=1°28' | 88 | 2640.000 |
| 1°.29=1°29' | 89 | 2670.000 |
| 1°.30=1°30' | 90 | 2700.000 |
| 1°.31=1°31' | 91 | 2730.000 |
| 1°.32=1°32' | 92 | 2760.000 |
| 1°.33=1°33' | 93 | 2790.000 |
| 1°.34=1°34' | 94 | 2820.000 |
| 1°.35=1°35' | 95 | 2850.000 |
| 1°.36=1°36' | 96 | 2880.000 |
| 1°.37=1°37' | 97 | 2910.000 |
| 1°.38=1°38' | 98 | 2940.000 |
| 1°.39=1°39' | 99 | 2970.000 |
| 1°.40=1°40' | 100 | 3000.000 |

民國三十七年一月發行
民國三十七年一月初版



分類號
登記

編者 許 蕓 舫
校訂者 秦 沅
發行人 李 杰
印刷者 上海澳門路八九號
中華書局永寧印刷廠
發行處 各埠中華書局

中華文庫 數學補習用書一三角（全一冊）
中華第一集
定價國幣三元五角

（郵運費另加）

（一三六一二）

