

3
12443
初級中學學生用

開明代數教本

下冊

劉薰宇編

教育部

審定

★中華書局★

總發行

開明書店出版

MG
G634.62
54

初級中學學生用

開明代數教本

(下冊)

劉薰宇編

02156

開明書店印行



3 1773 7400 0

下 册 目 次

第十三章 三次以上的式子的因式..... 1

三次的式子的因式(1) 四次的式子的因式
(3)

第十四章 最高公因式和最低公倍式...7

第十五章 分式 17

分式的性質(17) 分式的乘法和除法(21)
分式的加法和減法(24)

第十六章 分式方程式..... 32

分式方程式的解法(32) 聯立一次分式方程
式(36)

第十七章 指數和對數..... 44

分數指數(44) 10^0 的意義(46) 對數(50)
常用對數(52) 表的用法(57) 對數的性質
(59) 對數的應用(62) 複利息(69)

第十八章 高次方程式..... 74

第十九章 聯立二次方程式..... 80

兩方程式有一個是一次的(80) 兩方程式都是二次的(86)

第二十章 不盡根數..... 96

無理數和不盡根數(96) 同類根式和同次根式(98) 共軛式(101)

第二十一章 無理方程式.....106

無理式和有理式(106) 增根(108) 可逆的步驟(109) 二次形的無理方程式(114) $a \pm 2\sqrt{b}$ 的平方根(116)

第二十二章 比和比例.....119

比(119) 齊次式和齊次方程式(122) 比例(126)

第二十三章 變數法.....130

正變(130) 反變(133) 合變(137)

第二十四章 級數.....140

何謂級數(140) 算術級數(140) 算術級數的和(141) 算術級數的和的一般形式(144) 算術中數和算術中項(145) 幾何級數(149) 幾

何級數的和的一般形式 (152) 幾何中數和幾何中項 (154) 兩種級數的比較 (156) 用對數計算幾何級數 (158) 無窮級數 (162)	
第二十五章 不等式	175
何謂不等式 (175) 不等式的諸性質 (176) 不等式的解法 (178)	
第二十六章 $(a+x)$ 的乘方	185
$(a+x)^n$ 的展開 (185) $(1+x)^n$ 的近似值 (187)	
第二十七章 開方	194
完全平方 (194) 一般的開平方法 (197) 一般的開立方法 (199)	
附錄	201
平方根表 (201) 平方根表用法 (210) 對數表 (211) 七位對數表 (214) 本書所用符號表 (215) 譯名對照表 (217)	

第十三章

三次以上的式子的因式

一 三次的式子的因式

134. 由乘法可得下列各恆等式：

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) \equiv a^3+b^3,$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) \equiv a^3-b^3,$$

$$(a+b)^3 \equiv a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,$$

$$(a-b)^3 \equiv a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$$

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$$

$$\equiv a^3+b^3+c^3-3abc.$$

將這幾個恆等式的兩邊交換，就得幾個分解因式的式子：

$$a^3+b^3 \equiv (a+b)(a^2-ab+b^2) \dots\dots\dots (v),^*$$

$$a^3-b^3 \equiv (a-b)(a^2+ab+b^2) \dots\dots\dots (vi),$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \equiv (a+b)^3 \dots\dots\dots (vii),$$

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \equiv (a-b)^3 \dots\dots\dots (viii),$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc \\ \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) \dots (ix).$$

* 以前的式子見第九章。

〔例題1〕 分解 $27x^3 - 8$ 的因式。

$$\begin{aligned} 27x^3 - 8 &\equiv (3x)^3 - 2^3 \\ &\equiv (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4). \end{aligned}$$

〔例題2〕 分解 $(3x - 2y)^3 + (2x - 3y)^3$ 的因式。

$$\begin{aligned} \text{原式} &\equiv \{(3x - 2y) + (2x - 3y)\} \\ &\quad \{(3x - 2y)^2 - (3x - 2y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2\} \\ &\equiv (5x - 5y) \{(9x^2 - 12xy + 4y^2) \\ &\quad - (6x^2 - 13xy + 6y^2) + (4x^2 - 12xy + 9y^2)\} \\ &\equiv 5(x - y)(7x^2 - 11xy + 7y^2). \end{aligned}$$

〔例題3〕 分解 $1 - 12x^2y^2 + 48x^4y^4 - 64x^6y^6$ 的因式。

$$\begin{aligned} \text{原式} &\equiv 1 - 3(4x^2y^2) + 3(4x^2y^2)^2 - (4x^2y^2)^3 \\ &\equiv (1 - 4x^2y^2)^3 \\ &\equiv (1 + 2xy)^3(1 - 2xy)^3. \end{aligned}$$

〔例題4〕 分解 $x^3 + a^3 - 1 + 3ax$ 的因式。

$$\begin{aligned} \text{原式} &\equiv x^3 + a^3 + (-1)^3 - 3xa(-1) \\ &\equiv (x + a - 1)(x^2 + a^2 + 1 + a + x - ax). \end{aligned}$$

習 題 一 ○ 三

分解下列各式的因式：

1. $a^3 + 8b^3.$

2. $27a^3 - b^3.$

3. $y^3 + 1.$

4. $1 - 125z^3.$

5. $a^4 + ab^3.$

6. $x^3y - 8y^4.$

7. $a^{3n} + b^{3n}.$

8. $a^{3n} - b^{3n}.$

9. x^3+3x^2+3x+1 . 10. $1-3y+3y^2-y^3$.
11. $p^3+6p^2q+12pq^2+8q^3$. 12. $27-7x+9x^2-x^3$.
13. $a^6+6a^4b^2+12a^2b^4+8b^6$.
14. $x^4-30x^3y+300x^2y^2-1000xy^3$.
15. $x^3+y^3-z^3-3xyz$. 16. $x^3-y^3+z^3+3xyz$.
17. $1-x^3-y^3-3xy$.
18. $x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}-3x^ny^n z^n$.
19. $(x+2y)^3-(2x+y)^3$. 20. $(x-2y)^3+(y-2x)^3$.
21. $(x-y)^3+(y-x)^3$. 22. $(x-y)^3-(y-x)^3$.

二 四次的式子的因式

135. 下面的恆式等也是很有用的：

$$\begin{aligned} a^4+a^2b^2+b^4 &\equiv a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2 \\ &\equiv (a^2+b^2)^2-(ab)^2 \\ &\equiv (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2). \end{aligned}$$

$$\therefore a^4+a^2b^2+b^4 \equiv (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\dots\dots(x).$$

這也是可注意的， a^2+b^2 不能被分解成實有理因式，而 a^4+b^4 卻能夠這樣；即

$$\begin{aligned} a^4+b^4 &\equiv a^4+2a^2b^2+b^4-2a^2b^2 \\ &\equiv (a^2+b^2)^2-(\sqrt{2}ab)^2 \\ &\equiv (a^2+\sqrt{2}ab+b^2)(a^2-\sqrt{2}ab+b^2). \end{aligned}$$

這兩個因式都是實數，並且是有理數，雖然 ab 的係數是無理數，但在代數上，全式是不作為無理數看的。

習題一〇四

分解下列各式的因式：

1. x^4+x^2+1 .
2. $a^4-7a^2b^2+b^4$.
3. $a^4-6a^2b^2+b^4$.
4. p^6-q^6 .
5. p^6+q^6 .
6. a^4+4 .
7. $a^4+2a^2b^2+9b^4$.
8. a^4+16 .
9. x^8+x^4+1 .
10. x^3+1 .
11. $(3a^2-b^2)^2-(a^2-3b^2)^2$.
12. $a^2b^2-a^2-b^2+1$.
13. $x^2(x+y)^2-(x^2+y^2)^2$.
14. $9a^2+6ab-4c^2+4cb$.
15. $a^4-ya^3+z^3a-z^3y$.
16. $(a^2+4a)-(b^2-4b)$.
17. $6x^2+7ax-2x-3a^2-3a$.
18. $a^2-b^2+8bc-16c^2$.
19. $a^2+b^2+2(ab+ac+bc)$.
20. $(x^2+4x)^2-2(x^2+4x)-15$.
21. $\{x^2-(y-z)^2\}\{y^2-(z-x)^2\}\{z^2-(x-y)^2\}$.
22. $(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)-(x-1)$.
23. $3ax^4-3ay^4$.
24. $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$.
25. $4(ad+bc)^2-(a^2-b^2-c^2+d^2)^2$.
26. $(x+y)^2+x+y$.
27. x^2-y^2+x-y .
28. $x-xy+(1-y)^2$.
29. $9(a+b)-(a^3+b^3)$.
30. x^4+x^3+x+1 .
31. $(a+1)^4+(a+1)^2(b-1)^2+(b-1)^4$.
32. $(ac-bd)^2-(bc-ad)^2$.
33. $125x^6-64y^6$.

34. $81x^4 - 16y^4$.
35. $(a+b)^3 - (a-b)^3 - 2b^3$.
36. $12a^2b^3 - 30a^3b^2 + 18ab^4 - 24a^4b$.
37. $3(x-y)^2(x+y) - 3(x+y)^2(x-y)$.
38. $15a^2x^2 - 30a^2x^3 + 105a^2x^4 - 75a^2x^5$.
39. $x^{m+n}y^m - x^{2n}y^{m+n} - x^n y^{2m}$.
40. $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2(ax - by)$.
41. $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2(ad - bc)$.
42. $x^{5m} - 9x^{3n}y^{4n}$.
43. $a^3b^3 + 3a^2b^2xy + 3abx^2y^2 + x^3y^3$.
44. $3a^2x^3y + 6a^2x^2y^2 + 3a^2xy^3 - 3a^2xyz^2$.
45. $36a^2x^5y^3 - 25a^3x^4y^2z + 4a^4x^3yz^2$.
46. $4a^7x^5 - 24a^6x^6 + 36a^5x^7$.
47. $(x-y)(x^2 - z^2) - (x-z)(x^2 - y^2)$.
48. $(a-b)^3 + 3(a+b)(a-b)^2 + 3(a+b)^2(a-b) + (a+b)^3$.

習題一〇五

應用分解因式的法則,求下列各二式的積:

- $(a^2 + a^4 + a^6)(a^2 - 1)$.
- $(a + 4b - c)(a - 4b + c)$.
- $(x^2 + 2xy + 4y^2)(x^2 - 2xy + 4y^2)$.
- $(a^4 + a^3b + a^2b^2)(a - b)$.
- $(a^2 - b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)$.

-
6. $(1+2a+3b+4c)(1+2a-3b-4c)$.
 7. $\{(a+c)+(b-d)\}\{(a-c)+(b+d)\}$.
 8. $\{x^2+x(a+b)+ab\}\{x^2-x(a+b)+ab\}$.
 9. $(x^2-y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

第十四章

最高公因式和最低公倍式

136. 因式,公因式,倍式,公倍式這些名詞的意義,和算術中說過的因數,公因數,倍數,公倍數的相似。在算術中,一個數的因數一定不比原數大,如35的因數為1,5,7,35等;而牠的倍數一定不比牠小,如35的倍數為35,70,105等。但在代數上,一個式子的因式只有次數不比原來的高,牠的倍式的次數不比原來的低;至於數值的大小卻不一定;所以在代數中,和最大公約數以及最小公倍數相當的是‘最高公因式’和‘最低公倍式’。

【例題1】 xy, x^2y 是 x^3y 的因式嗎?回答下面的問題。

- (i) 各式的次數如何?那一個的最高?
- (ii) 若 $x=1, y=2$, 那一個式子的值最大?
- (iii) 若 $x=2, y=1$, 那一個式子的值最大?
- (iv) 若 $x=-2, y=1$, 那一個式子的值最大?
- (v) $x=\frac{1}{2}, y=8$, 那一個式子的值最大?

【例題2】 x^5 是 x^3, x^2 的倍式嗎?再回答下面的問題。

- (i) 各式的次數如何?那一個的最低?

[7]

(ii) $x=1, 2, -1, \frac{1}{2}$ 時,各式的值怎樣? 最小的是那一個?

137. 最高公因式就是幾個式子所公有的次數最高的因式。

如 $a^2x^3y^4, a^3x^2y^3$ 的公因式有 $a, a^2, x, x^2, y, y^2, y^3, ax, ay, xy, axy, ax^2y, a^2x^2y, a^2x^2y^2, a^2x^2y^3, \dots$ 等,其中一次,二次,三次,四次,五次,六次,七次的都有,以七次為最高,所以 $a^2x^2y^3$ 就是牠們的‘最高公因式’。

最低公倍式就是幾個式子所公有的次數最低的倍式。

如 $3xy^2, 5x^2y$ 的公倍式有 $15x^2y^2, 15x^3y^2, 15x^2y^3, \dots$ 等,其中 $15x^2y^2$ 的次數只有四次,是最低的,所以就是 $3xy^2$ 和 $5x^2y$ 的‘最低公倍式’。

138. 求最高公因式和最低公倍式的法則,和算術中求最大公約數及最小公倍數的完全相同,也是分兩種。

[例題 3] 求 $9a^2bc, 12ab^2c, 8abc^2$ 的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ *

$$\therefore 9a^2bc \equiv 3^2 \cdot a^2bc, 12ab^2c \equiv 2^2 \cdot 3 \cdot ab^2c, 8abc^2 \equiv 2^3 \cdot abc^2.$$

$$\therefore H.C.F. \equiv abc,$$

$$L.C.M. \equiv 2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2c^2 = 72a^2b^2c^2.$$

[例題 4] 求 $4(x^2-4y^2), 6(x^2+xy-2y^2), 9(x^2-xy-2y^2)$;

* $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ 就是最高公因式和最低公倍式的英文名詞 Highest Common Factor 和 Lowest Common Multiple 的略寫。

的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$

$$\therefore 4(x^2 - 4y^2) \equiv 2^2(x+2y)(x-2y),$$

$$6(x^2 + xy - 2y^2) \equiv 2 \cdot 3(x+2y)(x-y),$$

$$9(x^2 - xy - 2y^2) \equiv 3^2(x-2y)(x+y).$$

$$\therefore H.C.F. \equiv 1,$$

$$L.C.M. \equiv 2^2 \cdot 3^2(x+2y)(x-2y)(x+y)(x-y)$$

$$\equiv 36(x^2 - 4y^2)(x^2 - y^2)$$

$$\equiv 36(x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4).$$

通常 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$ 都留着因式相乘的形式, 無須展開。

習 題 一 〇 六

求下列各式的 $H.C.F.$ 和 $L.C.M.$:

1. $4ab^2c^3, 3a^4c^2, 12ab^4c, 9a^2b^3c.$

2. $20p^4q^2, 15q^4r^2, 5r^4p^2.$ 3. $16x^5y^4, 12x^3y^2z^4, 24y^4z^5.$

4. $a^2 - ab, (a-b)^2.$ 5. $x^2 - y^2, x^4 - y^4.$

6. $a^2 - 3ab + 2b^2, a^2 + 2ab - 8b^2.$

7. $x^4 - 9x^2, x^3 - 5x^2 + 6x.$ 8. $x^2 - x - 6, x^2 - 2x - 3.$

9. $x^2 + x - 6, 2x^2 + 3x - 2.$

10. $2x^2 - 3x - 2, 4x^2 + 8x + 3.$

11. $x^2 - 4, x^2 - x - 2, x^2 + x - 2.$

12. $a^2 + 5ab + 6b^2, a^2 + ab - 2b^2, a^2 + 2ab - 3b^2.$

13. $x^3 - 3x^2 + 2x, x^4 - x^2, x^2 + x - 2.$

14. $2a^2(a^2 - b^2), 6ab(a^2 - 3ab + 2b^2), 5a^3b^2(a^2 - ab - 2b^2).$
 15. $9x^2 - 4, 4x^2 - 36, 3x^2 - 7x - 6, 3x^2 + 7x - 6.$

139. 遇着兩式不容易分解因式的時候,牠們的最高公因式,可以照算術中輾轉相除的方法去求。在這裏先來證明這個方法一下。

如要求 A, B 兩式的 $H.C.F.$ 而 B 的次數低於 A 的。

則 $B) A (Q_1 \dots\dots\dots$ 第一次的商

第一次的餘式,牠的 $\frac{BQ_1}{R_1} B (Q_2 \dots\dots\dots$ 第二次的商
 次數必低於 B 的

第二次的餘式,牠的 $\frac{R_1Q_2}{R_2} R_1 (Q_3 \dots\dots\dots$ 第三次的商
 次數必低於 R_1 的

第三次的餘式,牠的 $\frac{R_2Q_3}{R_3}$
 次數必低於 R_2 的

第 n 次的餘式,牠的 $\dots\dots\dots R_n) R_{n-1} (Q_{n+1} \dots\dots$ 末次的商
 次數必低於 R_{n-1} 的

$$\frac{R_n Q_{n+1}}{0}$$

由上式可得下列各式:

$$R_{n-1} \equiv R_n Q_{n+1} \equiv R_n \text{ 的倍式。}$$

$$R_{n-2} \equiv R_{n-1} Q_n + R_n \equiv R_n \text{ 的倍式。} \quad \text{爲什麼?}$$

.....

$$R_2 \equiv R_3 Q_4 + R_4 \equiv R_n \text{ 的倍式。} \quad \text{爲什麼?}$$

$$R_1 \equiv R_2 Q_3 + R_3 \equiv R_n \text{ 的倍式。} \quad \text{爲什麼?}$$

$$B \equiv R_1 Q_2 + R_2 \equiv R_n \text{ 的倍式。} \quad \text{爲什麼?}$$

$$A \equiv B Q_1 + R_1 \equiv R_n \text{ 的倍式。} \quad \text{爲什麼?}$$

所以 R_n 是 A 和 B 的公因式。

現在，我們來證明 R_n 就是 A 和 B 的 $H.C.F.$ 。

設 f 是 A 和 B 的 $H.C.F.$ 。

$$\therefore A \equiv BQ_1 + R_1,$$

$$\therefore R_1 \equiv A - BQ_1.$$

f 既是 A 和 B 的公因式，也就是 B 和 R_1 的公因式。

又

$$B \equiv R_1Q_2 + R_2,$$

$$\therefore R_2 \equiv B - R_1Q_2.$$

f 既是 B 和 R_1 的公因式，也就是 R_1 和 R_2 的公因式。

而

$$R_1 \equiv R_2Q_3 + R_3,$$

$$\therefore R_3 \equiv R_1 - R_2Q_3.$$

f 既是 R_1 和 R_2 的公因式，也就是 R_2 和 R_3 的公因式。

.....

照樣繼續推證下去， f 也就是 R_{n-2} , R_{n-1} 的公因式。

而

$$R_{n-2} \equiv R_{n-1}Q_n + R_n,$$

$$\therefore R_n \equiv R_{n-2} - R_{n-1}Q_n.$$

$\therefore f$ 是 R_n 的因式。換句話說，就是 R_n 包含着 A 和 B 的 $H.C.F.$ ；而 R_n 又是 A 和 B 的公因式，所以牠就是 A 和 B 的 $H.C.F.$ 。

[例題 5] 求 $2x^4 - 11x - 10x^2 - x^3 + 8$ 和 $5 - 3x^2 - 9x + 2x^3$ 的 $H.C.F.$ 。

第一步必須將兩式同樣照降冪或升冪排列，然後用次數較低的去除次數較高的。

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{2x^3-3x^2-9x+5}^B \quad \overbrace{2x^4-x^3-10x^2-11x+8}^A \quad \overbrace{(x+1)}^{Q_1} \\
 \underline{2x^4-3x^3-9x^2+5x} \\
 2x^3-x^2-16x+8 \\
 \underline{2x^3-3x^2-9x+5} \\
 2x^2-7x+3 \dots\dots R_1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{2x^2-7x+3}^{R_1} \quad \overbrace{2x^3-3x^2-9x+5}^B \quad \overbrace{(x+2)}^{Q_2} \\
 \underline{2x^3-7x^2+3x} \\
 4x^2-12x+5 \\
 \underline{4x^2-14x+6} \\
 2x-1 \dots\dots R_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \overbrace{2x-1}^{R_2} \quad \overbrace{2x^2-7x+3}^{R_1} \quad \overbrace{(x-3)}^{Q_3} \\
 \underline{2x^2-x} \\
 -6x+3 \\
 \underline{-6x+3} \\
 0
 \end{array}$$

∴ $2x-1$ 是 A 和 B 的 $H.C.F.$.

用這種方法來求 $H.C.F.$, 若無餘數, 則最後的除數, 即為所求的 $H.C.F.$; 若除到最後, 只剩了不含 x 的項, 則兩式沒有含着 x 的 $H.C.F.$.

140. 若某因式只一個式子含有牠, 而別一個式子沒有牠, 則牠既非兩式的公因式, 自然非兩式的 $H.C.F.$ 的一個因式, 故為便利起見, 可以先將牠消去, 這和兩式的 $H.C.F.$ 是沒有關係的; 並且這無論在計算中的那一步都可以。

又為避去數字的分數起見, 可以用一式中所沒有

的因數去乘他一式，因為這也和 $H.C.F.$ 沒有什麼關係的。

【例題 6】試求下列兩式的 $H.C.F.$

$$3x^4 + 5x^3y - 7x^2y^2 + 2xy^3 + 2y^4,$$

$$2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 + 12xy^3 + 5y^4.$$

用 2 乘第一式，因為 2 不是第二式的因數，所以和 $H.C.F.$ 沒有關係。

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 + 12xy^3 + 5y^4 \leftarrow \\ \underline{\rightarrow) 6x^4 + 10x^3y - 14x^2y^2 + 4xy^3 + 4y^4} (3 \\ 6x^4 + 9x^3y - 6x^2y^2 + 36xy^3 + 15y^4 \\ \hline x^3y - 8x^2y^2 - 32xy^3 - 11y^4 \end{array}$$

現在我們看， y 是餘式的一個因數，而在第二式中，並沒有含着牠，所以我們在計算的時候，竟不妨先將牠消去。

$$\begin{array}{r} x^3 - 8x^2y - 32xy^2 - 11y^3 \leftarrow \\ \underline{\rightarrow) 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 + 12xy^3 + 5y^4} (2x + 19y \\ 2x^4 - 16x^3y - 64x^2y^2 - 22xy^3 \\ \hline 19x^3y + 62x^2y^2 + 34xy^3 + 5y^4 \\ 19x^3y - 152x^2y^2 - 608xy^3 - 209y^4 \\ \hline 214x^2y^2 + 642xy^3 + 214y^4 \end{array}$$

先用 $214y^2$ 除餘式，

$$\begin{array}{r} x^2 + 3xy + y^2 \overline{) x^3 - 8x^2y - 32xy^2 - 11y^3} (x - 11y \\ x^3 + 3x^2y + xy^2 \\ \hline -11x^2y - 33xy^2 - 11y^3 \\ -11x^2y - 33xy^2 - 11y^3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$\therefore H.C.F.$ 是 $x^2 + 3xy + y^2$ 。

這種計算可以較便利地排列如後,商式無論寫出與否都沒有關係。

$$\begin{array}{r}
 6x^4 + 10x^3y - 14x^2y^2 + 4xy^3 + 4y^4 \\
 6x^4 + 9x^3y - 6x^2y^2 + 36xy^3 + 15y^4 \\
 \hline
 y)x^3y - 8x^2y^2 - 32xy^3 - 11y^4 \\
 \quad x^3 - 8x^2y - 32xy^2 - 11y^3 \\
 \quad \quad x^3 + 3x^2y + xy^3 \\
 \quad \quad \quad -11x^2y - 33xy^2 - 11y^3 \\
 \quad \quad \quad \quad -11x^2y - 33xy^2 - 11y^3 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2x^4 + 3x^3y - 2x^2y^2 + 12xy^3 + 5y^4 \\
 2x^4 - 16x^3y - 64x^2y^2 - 22xy^3 \\
 \hline
 19x^3y + 62x^2y^2 + 34xy^3 + 5y^4 \\
 19x^3y - 152x^2y^2 - 608xy^3 - 209y^4 \\
 \hline
 214y^2) 214x^2y^2 + 642xy^3 + 214y^4 \\
 \quad \quad \quad x^2 + 3xy + y^2
 \end{array}$$

141. 求三個以上的式子的 $H.C.F.$, 若牠們的因式不容易分解時, 先求兩式的 $H.C.F.$; 再用這 $H.C.F.$ 來和第三式求; 更用所求得的结果和第四式求; 這樣到最末一式為止。

習題一〇七

求下列各對式子的 $H.C.F.$:

1. $4x^2 + 3x - 10$ 和 $4x^3 + 7x^2 - 3x - 15$.
2. $2x^4 - x^3 - 10x^2 - 11x + 8$ 和 $2x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.
3. $x^7 + 1$ 和 $x^{12} + x^3$.
4. $a^3 + a - 2$ 和 $a^3 - 3a + 2$.
5. $a^3 - 2a + 4$ 和 $a^3 + a^2 + 4$.

6. $9x^3 + 21x^2 - 17x + 3$ 和 $3x^3 + 17x^2 + 21x - 9$.
7. $4x^4 - 9$ 和 $2x^4 + x^2 - 3 - 2x^3 - 3x$.
8. $3x^3 - x^2 - 6x + 2$ 和 $x^4 + x^3 - 2x - 4$.
9. $x^4 - 15x^2 + 28x - 12$ 和 $2x^3 - 15x + 14$.
10. $2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 10x - 3$ 和 $2x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 11x - 6$.
11. $2x^4 + x^3 - 4x^2 + 51x - 4$ 和 $2x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 14x + 5$.
12. $2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 3$ 和 $2x^4 - 7x^3 - 10x^2 + x + 2$.
13. $x^4 + 4x^2 + 16$ 和 $2x^4 - x^3 + 16x - 8$.

約下列各分式:

14. $\frac{6x^3 - 5x^2 + 10x - 3}{6x^3 + x^2 - 10x + 3}$.
15. $\frac{x^4y - 8x^3y^2 + 17x^2y^3 - 16xy^4 + 9y^5}{x^5 - 9x^4y + 26x^3y^2 - 39x^2y^3 + 27xy^4}$.
16. $\frac{x^4y - x^3y^2 - 15x^2y^3 + 38xy^4 - 14y^5}{x^5 - 7x^4y + 21x^3y^2 - 34x^2y^3 + 28xy^4}$.
17. $\frac{x^3 - 2ax^2 - a^2x + 2a^3}{x^3 + 2ax^2 - a^2x - 2a^3}$ 18. $\frac{1+x+x^3-x^5}{1-x^4-x^6+x^7}$

求下列各式的 $H.C.F.$:

19. $x^3 - 7x^2 - x + 7, x^3 + 3x^2 - x - 3, x^3 - x^2 - 5x + 5$.
20. $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6, 4x^3 - 16x^2 + 11x + 10$

和 $4x^3 + 4x^2 - 29x - 15$.

142. 求兩個或多個不易分解因式的式子的 $L.C.M.$, 先照前兩節的方法求出牠們的 $H.C.F.$; $H.C.F.$ 既求得, 用牠去除各式, 則各式的因式可以得到, 而從此便可求出所求的 $L.C.M.$ 了。

〔例題7〕 求 x^3-4x^2+2x+3 和 x^3+x^2-3x-2 的 $L.C.M.$ 兩式的 $H.C.F.$ 爲 x^2-x-1 , 由除法(或視察)得

$$x^3-4x^2+2x+3 \equiv (x^2-x-1)(x-3),$$

$$x^3+x^2-3x-2 \equiv (x^2-x-1)(x+2).$$

$$\therefore L.C.M. \equiv (x^2-x-1)(x-3)(x+2).$$

習題一〇八

求下列各組的 $L.C.M.$:

1. $2x^2-5x+3, 3x^2-x-2, 6x^2-5x-6.$

2. $x^3-3x^2+3x-1, x^3-x^2-x+1.$

3. $x^3-15x^2+65x-72, x^3-18x^2+91x-88.$

4. $9x^3-x-2, 3x^3-10x^2-7x-4.$

5. $x^4-x^3+8x-8, x^3+4x^2-8x+24.$

6. $x^3+2x^2y+2xy^2+y^3, x^4-x^3y-xy^3+y^4.$

7. $x^3-x^2-4x+4, x^3-2x^2-x+2, x^3+2x^2-x-2.$

8. $12x^3+8x^2-27x-18, 12x^3-8x^2-27x+18,$

$$18x^3+27x^2-8x-12.$$

第十五章

分式

一 分式的性質

143. 定義. 在代數式中,凡分母中並不含有特別指明的字母的,叫做整式;如 ax^3 , $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}y^2$ 等是。

兩整式的商,寫成分數的形式的,叫做‘分式’;如 $\frac{b+c}{a}$, $\frac{x^2+xy}{7x+y}$ 等是。

〔注意〕 如 $\frac{x^2+y^2}{3}$ 等於 $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2$, 所以雖形式是分數,但仍是整式。總之,分式的分母一定要含有字母。而有時,更只有就特別指定的文字說的,如 $\frac{x+y}{a}$, 一般地說,當然是個分式,但若專就 x 或 y 或 x, y 說,仍是整式。

144. 照前節所說,這正好像 $\frac{2}{3}$ 是 $2 \div 3$ 的意思一樣, $\frac{x^2-1}{x^2+7}$ 就是 $(x^2-1) \div (x^2+7)$ 的意思,分子是 (x^2-1) , 分母是 (x^2+7) 。

所以算術上關於分數的一切法則和原理,都可以應用到代數上來;不過下面所說的一點,應當特別地

注意。

初學代數的人,在約分的時候,很多有這種錯誤;將 $\frac{x^2-1}{x^2+7}$ 的分子和分母的 x^2 對消了去,寫成 $\frac{-1}{7}$, 這是不合理的;因為 x^2 只是分子和分母的一項,而不是牠們的一個因式。

(例題 1) 若 (i) $x=1$, (ii) $x=2$, 證 $\frac{x^2-1}{x^2+7} = \frac{-1}{7}$ 對否。

在 $\frac{2 \times 5}{2 \times 6}$ 中消去 2, 是用 2 去除分子和分母, 若用 x^2 去除 $\frac{x^2-1}{x^2+7}$ 的分子和分母, 不能得 $\frac{-1}{7}$, 而得的是 $\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{7}{x^2}}$ 。

在 $\frac{x^2-1}{x^2+7}$ 中消去 x^2 , 是等於說分子和分母減去 x^2 。但從分數的分子和分母減去同樣的數, 是要改變牠的值的; 例如從 $\frac{3}{4}$ 的分子和分母減去 2, 成了 $\frac{1}{2}$, 分數的值就變小了。

總之, 初學代數的, 應當特別注意。

約分是將同一因式去除分數的分母和分子, 和在算術上一樣。

(注意) $\frac{x+y}{7}$ 可以寫成 $\frac{x}{7} + \frac{y}{7}$, 因為 $(x+y) \div 7 = x \div 7 + y \div 7$ 。而 $\frac{30}{a+b}$ 不可寫成 $\frac{30}{a} + \frac{30}{b}$, 因為 $30 \div (a+b) \neq 30 \div a + 30 \div b$ 。

145. 定義. 分式的分母和分子稱為牠的‘項’, 若分母和分子沒有公因式的, 稱為‘最低項’。

分式的分母,分子不是整式的,叫做‘繁分式’;分母,分子都是整式,並且已約到最低項,叫做‘最簡分式’。

〔例題 2〕 化 $\frac{x^6y^2+x^5y^3-6x^4y^4}{10x^2y^6-3x^3y^5-x^4y^4}$ 到最低項。

$$\begin{aligned} \frac{x^6y^2+x^5y^3-6x^4y^4}{10x^2y^6-3x^3y^5-x^4y^4} &= \frac{x^4y^2(x^2+xy-6y^2)}{x^2y^4(10y^2-3xy-x^2)} \\ &= \frac{x^2(x+3y)(x-2y)}{y^2(2y-x)(5y+x)} \\ &= -\frac{x^2(x+3y)}{y^2(x+5y)}. \end{aligned}$$

習題 一 ○ 九

將下列各分式約到最低項:

- | | |
|---|--|
| 1. $\frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}$ | 2. $\frac{12x^2y(x+2)(x+3)}{9xy^2(x+3)^2}$ |
| 3. $\frac{2x+2y}{3x+3y}$ | 4. $\frac{pa+pb}{qa+qb}$ |
| 5. $\frac{x^2y+xy^2}{axy}$ | 6. $\frac{b+b^2}{a+ab}$ |
| 7. $\frac{x-y}{3y-3x}$ | 8. $\frac{4a-8b}{2b-a}$ |
| 9. $\frac{(x-y)^2}{y-x}$ | 10. $\frac{5x-5y}{(y-x)^2}$ |
| 11. $\frac{(a-b)(c-d)}{(2b-2a)(3d-3c)}$ | 12. $\frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$ |
| 13. $\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}$ | 14. $\frac{3y^3-3yx^2}{(x-y)^2}$ |

- $$15. \frac{(3x-3y)^2}{3y^2-3x^2}$$
- $$16. \frac{x-2}{x^2-x-2}$$
- $$17. \frac{x^2-2x-3}{x-3}$$
- $$18. \frac{x^2-5x+4}{x^2-1}$$
- $$19. \frac{(2x-1)^2}{2x^2-5x+2}$$
- $$20. \frac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$$
- $$21. \frac{x^2-14x+13}{x^2-8x-65}$$
- $$22. \frac{y^3-y^2-12y}{ay-4a}$$
- $$23. \frac{42a^2+51ab+15b^2}{6a+3b}$$
- $$24. \frac{5x^3y+5xy^3-10x^2y^2}{x^3y-xy^3}$$
- $$25. \frac{x^4-6x^2y^2-16y^4}{x^4-64y^4}$$
- $$26. \frac{x^4-7x^2y^2-18y^4}{x^4-81y^4}$$
- $$27. \frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2-b^2}$$
- $$28. \frac{(a+1)^4-(a-1)^4}{(a+1)^3-(a-1)^3}$$
- $$29. \frac{(x^2+y^2-z^2)^2-(x^2-y^2+z^2)^2}{(xy-xz)(xy+xz)}$$
- $$30. \frac{p^2-1}{(1+py)^2-(p+y)^2}$$
- $$31. \frac{10x^4-7x^3+x^2}{4x^4-2x^3-2x+1}$$
- $$32. \frac{x^3-8x^2y+17xy^2-6y^3}{2x^3-9x^2y+10xy^2-3y^3}$$
- $$33. \frac{a^2b^2-a^2-b^2+1}{ab+a+b+1}$$
- $$34. \frac{12a^4-4a^3b-23a^2b^2+9ab^3-9b^4}{8a^4-14a^2b^2-9b^4}$$
- $$35. \frac{(a^2+b^2-d^2-c^2+2ab+2cd)(a^2+b^2-c^2-d^2-2ab-2cd)}{(a^2+c^2-b^2-d^2+2ac+2bd)(a^2+c^2-b^2-d^2-2ac-2bd)}$$

二 分式的乘法和除法

146. [例題 1] 簡單下式,

$$\frac{x^2-4xy+4y^2}{x^2-4y^2} \times \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-3xy+2y^2}$$

$$\text{原式} \equiv \frac{(x-2y)^2}{(x+2y)(x-2y)} \times \frac{(x+2y)^2}{(x-2y)(x-y)}$$

$$\equiv \frac{x+2y}{x-y}$$

習 題 一 一 〇

簡單下列各式:

1. $\frac{2x}{x-y} \times \frac{x^2-y^2}{8}$
2. $\frac{x^2-1}{3} \times \frac{6a}{x+1}$
3. $\frac{a^2-b^2}{a} \times \frac{1}{a+b} \times \frac{a}{a-b}$
4. $\frac{15x-30}{2a} \times \frac{3x^2}{5x-10}$
5. $\frac{(x-1)^2}{y^3} \times \frac{(x+1)y^2}{x-1}$
6. $\frac{a^2-x^2}{a} \times \frac{a^2+x^2}{ax}$
7. $\frac{a^2x^2}{y^2} \times \frac{xy}{a(x+y)} \times \frac{x^2-y^2}{axy}$
8. $\frac{a+x}{(m+n)^2} \times \frac{x^2-y^2}{12} \times \frac{(m+n)^2}{m-n} \times \frac{6(m^2-n^2)}{x+y}$
9. $\frac{ax+x^2}{2b-cx} \times \frac{2bx-cx^2}{(a+x)^2}$
10. $ab\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}\right)$
11. $12x^2\left(1+\frac{3}{4x}-\frac{1}{3x^2}\right)$

$$12. (x^2 - y^2) \left(1 + \frac{x}{x+y} - \frac{x^2}{x^2 - y^2} \right).$$

$$13. (x-1)(x-3) \left(2 + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x^2 - 4x + 3} \right).$$

$$14. x^2(a-x) \left(3 + \frac{a}{x} - \frac{2a^2}{x^2} - \frac{x}{a-x} \right).$$

147. 定義. 將一個數的分子和分母交換所成的數, 稱為原數的倒數.

如 $\frac{5}{3}$ 是 $\frac{3}{5}$ 的倒數, 又如 x 原可看成 $\frac{x}{1}$, 所以 $\frac{1}{x}$ 就是牠的倒數.

習題 — — — (口答)

下列各數的倒數是什麼?

1. 2.

2. 10.

3. $\frac{1}{2}$

4. $\frac{1}{3}$

5. $\frac{1}{4}$

6. $\frac{2}{3}$

7. $\frac{3}{4}$

8. $\frac{5}{6}$

9. a .

10. $\frac{a}{2}$

11. $\frac{a}{3}$

12. $\frac{1}{a}$

13. $\frac{2}{a}$

14. $\frac{a}{b}$

15. $\frac{x+y}{x-y}$

16. $1-x$.

17. $\frac{1}{x-1}$

18. $\frac{a}{x^2 - a^2}$.

19. 一個數和牠的倒數相乘, 等於多少?

20. 若 y 是 x 的倒數, 則 y 的倒數是什麼?

21. 除數為分數的除法, 是怎樣的? 例如 $7 \div \frac{3}{4}$.

22. 怎樣簡單 $7 \div \frac{a}{b}$?

148. 除數為分數的除法. 例如以 $\frac{p}{q}$ 去除 $\frac{x}{y}$, 就是

要簡單這個式子 $\frac{\frac{x}{y}}{\frac{p}{q}}$, 分子和分母都乘以 yq , 則得

$$\frac{\frac{x}{y} \times yq}{\frac{p}{q} \times yq} = \frac{xq}{yp}$$

但這和 $\frac{x}{y} \times \frac{q}{p}$ 是一樣的. 所以

某數除以分數, 等於乘以這分數的倒數.

149. [例題 2] 簡單下式,

$$\frac{a^2 - ab}{b^2 + ab} \div \frac{b^2 - ab}{a^2 + ab}$$

$$\text{原式} = \frac{a(a-b)}{b(b+a)} \times \frac{a(a+b)}{b(b-a)}$$

$$= -\frac{a^2}{b^2}$$

習 題 一 一 二

簡單下列各式:

1. $\frac{a}{2x} \div \frac{b}{3y}$

2. $\frac{3x}{2x-1} \div \frac{2x}{x-2}$

- $$3. \frac{4a}{2a-2} \div \frac{2a}{a-1}$$
- $$4. \frac{4a+2}{3a} \div \frac{2a+1}{5a}$$
- $$5. \frac{(x+y)^2}{x-y} \div \frac{y+x}{(y-x)^2}$$
- $$6. \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2} \div \frac{b-a}{c+d}$$
- $$7. \frac{a^3-x^3}{4ax} \div \frac{x-a}{3x}$$
- $$8. \frac{x^3-x}{x-3} \div \frac{x^3-5x}{3-x}$$
- $$9. \frac{x^4-a^4}{(x-a)^2} \div \frac{x^2+ax}{x-a}$$
- $$10. \frac{8-2a^4}{2ab} \div (2+a^2)$$
- $$11. 4m^2p^2 \div \frac{2m^3x}{p^2-px}$$
- $$12. \frac{x^2-3ax+2a^2}{x^2-9ax+20a^2} \div \frac{x^2-5ax+6a^2}{x^2-7ax+12a^2}$$

三 分式的加法和減法

150. [例題1] 將 $+\frac{x}{4a^2b}$, $-\frac{y}{6ab^2}$, $+\frac{3z}{a^3}$ 加攏來。

第一步必須要將這三個分式變成同分母的。 $4a^2b$, $6ab^2$, a^3 的 *L.C.M.* 是 $12a^3b^2$, 就用牠來做公分母。

$$\begin{aligned} \frac{x}{4a^2b} - \frac{y}{6ab^2} + \frac{3z}{a^3} &\equiv \frac{3abx}{12a^3b^2} - \frac{2a^2y}{12a^3b^2} + \frac{36b^2z}{12a^3b^2} \\ &\equiv \frac{3abx - 2a^2y + 36b^2z}{12a^3b^2} \end{aligned}$$

習題 一 一 三 (口答)

求下列各式的 *L.C.M.* :

1. $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$; $2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $2^3 \cdot 5^2$.

2. $a^2b^3c; abc^2; a^2b^2.$
3. $6a^2b^3c; 8abc^2; 12a^2c^2.$
4. $12(x+y)(x-y)^2; 9(x^2-y^2); 6(x+y)^2.$

習題 一 一 四

通分：

1. $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{11}{12}$, 用 24 做公分母。
2. $\frac{x}{10}, \frac{y}{15}, \frac{3z}{4}$, 用 60 做公分母。
3. $\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}$, 用 xyz 做公分母。
4. $\frac{x}{4p}, \frac{y}{3q}, \frac{z}{6r}$, 用 $12pqr$ 做公分母。
5. $\frac{4a}{3b^2c}, \frac{-5b}{4c^2a}, \frac{7c}{6a^2b}$, 用 $12a^2b^2c^2$ 做公分母。
6. $\frac{x+y}{2x-2y}, \frac{x-y}{3x+3y}$, 用 $6(x^2-y^2)$ 做公分母。
7. $\frac{2x}{(x-y)^2(x+y)}, \frac{3y}{(x-y)(x+y)^2}$, 用 $(x^2-y^2)^2$ 做公分母。

習題 一 一 五

將下列各式化成簡單分式：

1. $\frac{3}{a} + \frac{4}{b}$
2. $\frac{x}{3y} - \frac{y}{4x}$
3. $\frac{x}{4} + \frac{4}{x}$
4. $\frac{5p}{3a} - \frac{3p}{4a} - \frac{p}{6a} + \frac{7p}{12a}$

- | | |
|--|--|
| 5. $2 + \frac{3}{x}$ | 6. $1 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2}$ |
| 7. $\frac{x+y}{10a} + \frac{a-y}{15a}$ | 8. $\frac{a+2b}{6a} - \frac{2a+b}{4b}$ |
| 9. $\frac{2(p-q)}{3pq^2} - \frac{p-2q}{4p^2q}$ | 10. $1 - \frac{x-y}{y}$ |
| 11. $1 - \frac{x-y}{x}$ | 12. $2 + \frac{3(x+y)}{x} - \frac{4(x+y)^2}{x^2}$ |
| 13. $3 - \frac{x-y}{y} + \frac{(x-y)^2}{y^2}$ | 14. $\frac{x-y}{z} + \frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y}$ |
| 15. $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$ | 16. $\frac{y-z}{yz} + \frac{z-x}{zx} + \frac{x-y}{xy}$ |
| 17. $-\frac{x^2-yz}{yz} - \frac{y^2-zx}{zx} - \frac{z^2-xy}{xy}$ | |
| 18. $\frac{x+y}{y} + \frac{x^2+y^2}{xy}$ | |

習題 —— 六

將下列各式化成最簡單的分式(公分母就用因式相乘的形式):

- | | |
|--|--|
| 1. $\frac{3}{x+2} + \frac{4}{x+3}$ | 2. $\frac{2}{2x+3} - \frac{3}{3x+2}$ |
| 3. $\frac{3x}{2y-5x} - \frac{2x}{5y-2x}$ | 4. $\frac{7}{2x-2y} - \frac{5}{3x-3y}$ |
| 5. $\frac{4}{5a-5b} - \frac{3}{2b-2a}$ | 6. $\frac{p}{p-q} - \frac{q}{p+q}$ |

7. $\frac{a}{a-b} + \frac{a}{b-a}$
8. $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$
9. $n + \frac{1}{1+n} + \frac{1+n^2}{1-n}$
10. $\frac{x+2}{x+3} - \frac{x+3}{x+2}$
11. $\frac{3(x-2)}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x-2}$
12. $\frac{x}{x+1} - \frac{x^2}{x^2-1}$
13. $\frac{a^2}{x^2-a^2} - \frac{a+x}{a-x}$
14. $\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x} - \frac{x}{1-x}$
15. $\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(y+a)^2}$
16. $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b} + \frac{3a^2-2ab}{a^2-b^2}$
17. $\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{a^2-b^2}$
18. $\frac{1}{a(a+b)} - \frac{1}{b(a-b)}$
19. $\frac{x}{x^2-3x-4} - \frac{1}{x-4}$
20. $\frac{1}{(a-x)^2} + \frac{1}{a^2+ax-2x^2}$
21. $\frac{1}{x^2-5x+4} - \frac{1}{x^2-3x+2}$
22. $\frac{1+3y}{1-y-2y^2} - \frac{1-2y}{1+4y+3y^2}$
23. $\frac{a^3}{(a+b)^3} - \frac{ab}{(a+b)^2} + \frac{b}{a+b}$
24. $\frac{3a}{(a-2x)^2} + \frac{2a+x}{(a+x)(a-2x)} + \frac{5}{a+x}$
25. $\frac{a-1}{a+1} - \frac{1+a}{1-a} - \frac{a^2+1}{a^2-1}$
26. $\frac{30a}{9a^2-1} + \frac{4}{3a-1} - \frac{5}{3a+1}$

$$27. \frac{5}{1+5a} - \frac{3}{1-5a} + \frac{10(5a^2+2a)}{1-25a^2}$$

$$28. \frac{3a-6b}{a+b} - \frac{5a-6b}{a-b} - \frac{4a-5b}{a+b} - \frac{7a-8b}{b-a}$$

$$29. \frac{1}{(c-a)(a-b)} + \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)}$$

$$30. \frac{1}{(c+a)(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(b+c)} + \frac{1}{(b+c)(c+a)}$$

$$31. \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)} + \frac{a+b}{(b-c)(c-a)}$$

$$32. \frac{a^2(b-c)}{(c+a)(a+b)} + \frac{b^2(c-a)}{(a+b)(b+c)} + \frac{c^2(a-b)}{(b+c)(c+a)}$$

$$33. \frac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}$$

$$34. \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

$$35. \frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-z)(y-x)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)}$$

$$36. \frac{b-c}{a^2-(b-c)^2} + \frac{c+a}{b^2-(c+a)^2} + \frac{a+b}{(a+b)^2-c^2}$$

$$37. \frac{1}{x+\frac{1}{3}} - \frac{1}{x}$$

$$38. \frac{4}{a} - \frac{3}{a-\frac{1}{2}}$$

$$39. \frac{a-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{3}}{a-\frac{2}{3}}$$

$$40. \frac{1}{5} \left(2b - 3\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{b-1\frac{1}{2}}$$

151. [例題2] 化下繁分式爲簡單分式。

$$\left(\frac{2x+5y}{3x+y} - \frac{5x+2y}{x+3y} \right) \div \left(\frac{2x-3y}{2x} + \frac{7x-3y}{2x+6y} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{(2x+5y)(x+3y) - (5x+2y)(3x+y)}{(3x+y)(x+3y)} \\
 &\quad \div \frac{(2x-3y)(x+3y) + (7x-3y)x}{2x(x+3y)} \\
 &= \frac{-13(x^2-y^2)}{(3x+y)(x+3y)} \div \frac{9(x^2-y^2)}{2x(x+3y)} \\
 &= \frac{-13(x^2-y^2)}{(3x+y)(x+3y)} \times \frac{2x(x+3y)}{9(x^2-y^2)} \\
 &= -\frac{26x}{9(3x+y)}
 \end{aligned}$$

〔例題3〕 將 $\frac{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}$ 化簡單。

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \right) \div \left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} \right) \\
 &= \frac{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} \div \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)(a+b)} \\
 &= \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} \div \frac{4ab}{(a-b)(a+b)} \\
 &= \frac{4a^2b^2}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} \times \frac{(a-b)(a+b)}{4ab} \\
 &= \frac{ab}{a^2+b^2}
 \end{aligned}$$

〔例題4〕 化 $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$ 為簡單分式。

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{x-1}{x}}} \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} \\
 &= \frac{1}{-1} \\
 &= 1 - c.
 \end{aligned}$$

習 題 一 一 七

將下列各式化到最簡單的形式：

$$1. \left(1 - \frac{1-x}{1+x} - \frac{1-10x^2}{1-x^2}\right) \left(\frac{x-1}{4x-1}\right).$$

$$2. \left(\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2} - \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+xy+y^2}\right) \left(\frac{x^5-y^6}{x^4-y^4}\right).$$

$$3. \left(\frac{a}{a+1} - \frac{a-1}{a}\right) \div \left(\frac{a}{a+1} + \frac{a-1}{a}\right).$$

$$4. \left(y - \frac{a^2-xy}{y-x}\right) \left(x + \frac{a^2-xy}{y-x}\right) + \left(\frac{a^2-xy}{y-x}\right)^2$$

$$5. \frac{a}{1+\frac{a}{b}} + \frac{b}{1+\frac{b}{a}} - \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$6. \frac{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x}{y} + 1}{\frac{x^2}{y^2} - \frac{x}{y} + 1} \times \frac{\frac{x^3}{x^2-y^3} + y^3}{\frac{1}{x}} \div \frac{x^2-xy}{y^2+xy}$$

$$7. \left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) \div \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right).$$

$$8. \frac{(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

$$9. \frac{(a-b)^2 - (b-c)^2}{a^2 + ab - bc - c^2} + \frac{(b-c)^2 - (c-a)^2}{b^2 + bc - ca - a^2} + \frac{(c-a)^2 - (a-b)^2}{c^2 + ca - ab - b^2}.$$

$$10. \frac{1}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{a}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)} + \frac{1}{\left(1-\frac{a}{c}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)}$$

$$11. \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$12. \frac{a+2}{2a+3} - \frac{4a+5}{5a+6} - \frac{2a+3}{3a+4} + \frac{3a+4}{4a+5}$$

$$13. \frac{1+x}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{1+x^3} - \frac{1+x^3}{1+x^4} + \frac{1+x^4}{1+x^5}$$

$$14. \frac{x}{(x+y)(x+2y)} + \frac{2y}{(x+y)(x+3y)} + \frac{x}{(x+2y)(x+3y)} - \frac{2}{x+3y}$$

$$15. \frac{x-2}{x-2} - \frac{x}{x-\frac{x-1}{x+1}}$$

$$16. \frac{1}{x-\frac{1}{x+\frac{1}{x}}} - \frac{1}{x+\frac{1}{x-\frac{1}{x}}}$$

第十六章

分式方程式

一 分式方程式的解法

152. 前幾章所講過的方程式,都沒有含分式(即分母含有未知數的分式),所以統叫做‘整式方程式’。方程式中若含有分式,就稱為‘分式方程式’,這種方程式的解法,先將分式消去,變成整式方程式,然後依一般的方法計算。

〔例題1〕 解方程式 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x+1}$

先消去分式,兩邊乘以 $x, x-1$ 和 $x+1$ 的 $L. C. M.$ $x(x-1)(x+1)$, 則

$$x(x+1) + (x-1)(x+1) = 2x(x-1).$$

$$\therefore x^2 + x + x^2 - 1 = 2x^2 - 2x.$$

$$\therefore 3x = 1. \quad \therefore x = \frac{1}{3}.$$

〔覆證〕 左邊 $= \frac{1}{\frac{1}{3}-1} + \frac{1}{\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2} + 3 = 1\frac{1}{2},$

右邊 $= \frac{2}{\frac{1}{3}+1} = \frac{6}{4} = 1\frac{1}{2}.$

〔例題2〕 解 $\frac{x-2}{x^2-4x+3} - \frac{x+3}{x^2-3x+2} = 0.$

分解各分母的因式,得

$$\frac{x-2}{(x-1)(x-3)} - \frac{x+3}{(x-1)(x-2)} = 0.$$

兩邊乘以各分母的 *L. C. M.* $(x-1)(x-2)(x-3)$,

$$(x-2)^2 - (x+3)(x-3) = 0.$$

$$\therefore (x^2 - 4x + 4) - (x^2 - 9) = 0.$$

$$\therefore -4x + 13 = 0.$$

$$\therefore x = \frac{13}{4}.$$

$$\text{〔覆證〕} \quad \frac{\frac{13}{4} - 2}{\frac{169}{16} - 13 + 3} - \frac{\frac{13}{4} + 3}{\frac{169}{16} - \frac{39}{4} + 2} = \frac{20}{9} - \frac{20}{9} = 0.$$

$$153. \text{〔例題 3〕 解 } \frac{2x-5}{x-3} + \frac{2(1-x)}{2x+1} = \frac{x-2}{x-3}.$$

兩邊乘以 $(x-3)(2x+1)$,

$$(2x-5)(2x+1) + 2(1-x)(x-3) = (x-2)(2x+1).$$

$$\therefore 4x^2 - 8x - 5 - 2x^2 + 8x - 6 = 2x^2 - 3x - 2.$$

$$\therefore 3x = 9. \quad \therefore x = 3.$$

$$\text{〔覆證〕 左邊} = \frac{6-5}{3-3} + \frac{2(-2)}{7} = \frac{1}{0} - \frac{4}{7},$$

$$\text{右邊} = \frac{3-2}{3-3} = \frac{1}{0}.$$

$\frac{1}{0}$ 是沒有意義的,從此可知 3 不是原方程式的根.

3 既不是原方程式的根,那末解方程式時怎樣會得出來呢?

我們仔細檢查我們的演算,第一步,便是用方程式中各分母的 *L.C.M.* 去乘方程式的兩邊,以消去分式,這裏用來乘的是 $(x-3)(2x+1)$,而我們求得的 3 正是方程式 $(x-3)(2x+1)=0$ 的根。這種不合於原方程式的根,是由用一個式子來乘方程式時加進去的,所以叫做‘增根’。

因此,解分式方程式時所得的根,若代入原方程式中的各分母的 *L.C.M.* 恰得 0 的,便是‘增根’。

因為解分式方程式所得的根不一定就是原方程式的根,所以對於所得的解答必須加以覆證。

習 題 一 一 八

解下列各方程式:

$$1. \quad \frac{3}{x} = \frac{1}{5}$$

$$2. \quad \frac{2}{x} = \frac{7}{1}$$

$$3. \quad 2 = \frac{1}{x}$$

$$4. \quad \frac{2.5}{x} = 3.75$$

$$5. \quad \frac{1}{3.2} = \frac{0.5}{x}$$

$$6. \quad \frac{0.7}{x} = \frac{21}{32}$$

$$7. \quad \frac{2.4}{x} - \frac{4.2}{3.5} = 0$$

$$8. \quad x + \frac{4}{x} = 4$$

$$9. \quad \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 10 = 0$$

$$10. \quad 12x - \frac{6}{x} = 21$$

$$11. \quad \frac{5}{4}(6-x) - \frac{4}{3-x} = 1$$

$$12. \quad x + 2 = \frac{9}{x+2}$$

$$13. \quad \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x+2}$$

$$14. \quad \frac{x-2}{x-1} = \frac{3x+1}{3x-2}$$

15. $\frac{1}{x+2} - \frac{2}{2-x} = \frac{3}{x-3}$ 16. $\frac{5}{x-5} - \frac{3}{x+5} = \frac{2}{x}$
17. $\frac{x+3}{x-2} + \frac{3x-3}{x+2} = 4$ 18. $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x+1}{3-x} = 2$
19. $\frac{5}{x-1} - \frac{4}{x+1} = \frac{3}{x+7}$ 20. $\frac{x-5}{4} - \frac{4}{5-x} = \frac{3x-1}{4}$
21. $\frac{2}{x-1} - \frac{1}{2-x} = \frac{6}{x}$
22. $7 - \frac{2}{x+4} + \frac{4}{(x+6)(x+4)} = 0$
23. $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} + \frac{3}{2} = 0$
24. $1 + \frac{2}{(x-7)(x-3)} = \frac{7}{x-3}$
25. $1 - \frac{4}{x-3} = \frac{3}{(x-3)(x-5)}$
26. $\frac{2(x-3)}{x+1} + \frac{24}{x^2-1} = \frac{x+2}{x-1}$
27. $\frac{2}{x-1} - \frac{x-1}{2} = \frac{2}{x-6} - \frac{x-6}{2}$
28. $3 - \frac{1}{x+2} = \frac{5}{(x+2)(2x-3)} + \frac{3}{4x-6}$
29. $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} = \frac{3}{x-3}$
30. 若 $\frac{3}{a} - \frac{4}{c} = \frac{5}{c} - \frac{6}{b}$, 用含 a 和 b 的項來表示 c .
31. 若 $\frac{P}{Q} = \frac{a-xb}{a+xb}$, 求 x 的值.
32. 求 n 的值:

$$(i) \frac{1}{n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \left(\frac{1}{n} - 1 \right);$$

$$(ii) \frac{1}{n-2} = \frac{1}{a(n-2)} + \frac{1}{b}$$

$$33. \frac{x-1}{x+1} = \frac{a-b}{a+b}, \text{ 求 } x.$$

$$34. \frac{x+y}{x-y} + \frac{b}{c} = \frac{b+1}{c}, \text{ 求 } c.$$

$$35. t = \frac{pd}{p+2f}, \text{ 求 } p. \text{ 若 } d=17.5, t=0.5, f=4000, p \text{ 是}$$

多少?

二 聯立分式方程式

$$154. \text{ (例題 1) 解 } \begin{cases} \frac{5}{x+2y} = \frac{7}{2x+y} \dots\dots\dots(i), \\ \frac{7}{3x-2} = \frac{5}{6-y} \dots\dots\dots(ii). \end{cases}$$

先消去兩式的分式,

$$\therefore 5(2x+y) = 7(x+2y) \dots\dots\dots(iii),$$

$$7(6-y) = 5(3x-2) \dots\dots\dots(iv).$$

將兩式化簡單,

$$x = 3y \dots\dots\dots(v),$$

$$15x + 7y = 52 \dots\dots\dots(vi).$$

將(v)中的 x 的值代入(vi),

$$\therefore 45y + 7y = 52.$$

$$\therefore 52y = 52.$$

$$\therefore y=1.$$

將 y 的值代入 (v), $\therefore x=3 \times 1=3.$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{7}{y} = 5 \dots\dots\dots(i), \\ \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = 3 \dots\dots\dots(ii). \end{cases}$$

[例題 2] 解

這一類的方程式, 可不必消去分式, 而先求 $\frac{1}{x}$ 或 $\frac{1}{y}$ 的值。

(i) 乘以 5, (ii) 乘以 7,

$$\therefore \frac{15}{x} - \frac{35}{y} = 25,$$

$$\frac{14}{x} - \frac{35}{y} = 21.$$

兩式相減, $\therefore \frac{1}{x} = 4,$

$$\therefore x = \frac{1}{4}.$$

代入 (i), $\frac{3}{\frac{1}{4}} - \frac{7}{y} = 5,$

$$\therefore 12 - \frac{7}{y} = 5.$$

$$\therefore -\frac{7}{y} = -7.$$

$$\therefore \frac{1}{y} = 1.$$

$$\therefore y = 1.$$

習題一一九

解下列各方程式：

$$1. \begin{cases} \frac{3x+5y}{20} + \frac{5x-3y}{8} = 3, \\ \frac{x+1}{y+2} = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \frac{x+1}{y} = 7, \\ \frac{x}{1+y} = 6. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{y} = \frac{7}{5(x-2)}. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{x-1}{y-2} - \frac{x+7}{y+2} = 0, \\ \frac{x-1}{x} + \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{xy}. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{3x+1}{4-2y} = \frac{4}{3}, \\ x+y=1. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{5y-4}, \\ \frac{1}{4x-3} = \frac{1}{7y-6}. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{15}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{15}. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12}, \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{10}{x} - \frac{9}{y} = \frac{1}{20}, \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 2, \\ \frac{12}{x} - \frac{25}{y} = 3. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 5, \\ -\frac{6}{x} + \frac{5}{y} = -17. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} \frac{7}{x} + \frac{4}{y} = \frac{11}{30}, \\ \frac{5}{x} - \frac{6}{y} = -\frac{3}{28}. \end{cases}$$

155. [例題 3] 兩艘巡洋艦, A 和 B , 在靜水中的速度, 每小時是 16 海里和 20 海里, 奉令同時到達距 A 45 海里, 距 B 27 海里的某地。潮水由 A 向 B 。 A 於午後 3 時動身, 打電通知 B , B 就於午後 4 時動身, 結果同時到某地; 求潮水的速度。(某地在 A, B 中間。)

設潮水從 A 向 B , 每小時行 x 海里。

則 A 每小時行 $(16+x)$ 海里, B 每小時行 $(20-x)$ 海里。

而 A 到某地行 $\frac{45}{16+x}$ 小時, B 到某地行 $\frac{27}{20-x}$ 小時,

但 A 比 B 多行 1 小時。

$$\therefore \frac{45}{16+x} = \frac{27}{20-x} + 1.$$

兩邊乘以 $(16+x)(20-x)$,

$$45(20-x) = 27(16+x) + (16+x)(20-x).$$

$$\therefore 900 - 45x = 432 + 27x + 320 + 4x - x^2.$$

$$\therefore x^2 - 76x + 148 = 0.$$

$$\therefore (x-2)(x-74) = 0.$$

$$\therefore x = 2 \text{ 或 } 74.$$

但 74 海里不合題的(爲什麼?), 所以潮水的速度是每小時 2 海里。

[覆證] A 每小時實能行 18 海里, 2 小時可到某地;

B 每小時實能行 18 海里, 1 小時可到某地。

[例題 4] 有一個分數, 牠的分子加 2, 則成 $\frac{1}{2}$; 若從分母減去 2, 則爲 $\frac{1}{3}$ 。求原分數。

設原分數的分子爲 x , 分母爲 y , 則原分數爲 $\frac{x}{y}$

$$\therefore \frac{x+2}{y} = \frac{1}{5} \dots\dots\dots(i),$$

$$\frac{x}{y-2} = \frac{1}{6} \dots\dots\dots(ii).$$

消去兩式的分式,

$$5(x+2) = y \dots\dots\dots(iii),$$

$$6x = y - 2 \dots\dots\dots(iv).$$

將 (iii) 中的 y 的值代入 (iv),

$$\therefore 6x = 5(x+2) - 2.$$

$$\therefore 6x = 5x + 10 - 2.$$

$$\therefore x = 8.$$

代入 (iii), $y = 5(8+2) = 50.$

所以原分數爲 $\frac{8}{50}$

[覆證]

$$\frac{8+2}{50} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{8}{50-2} = \frac{8}{48} = \frac{1}{6}$$

習 題 一 二 〇

1. 什麼數去除 96, 所得的商比除數大 4?
2. 自行車兩輛同時到達相距 90 公里的市鎮, 只知一車比他車每小時快 1 公里, 並且後一小時出發;

求兩車的速度。

3. 某人用 50 元買羊若干頭，三月後死去 3 頭，將其餘的賣去，每頭多賣 2 元，還損失 1 元；問原來買羊多少頭？

4. 十五個人，合出資旅行；男子共出 36 元，女子也共出 36 元；但男子一人比女子一人多出 2 元；問男女各若干人？

5. 某人買磁器若干件，共用去 8 元，損壞了 4 件，每件比原價多賣 1 角，則沒有盈虧；求原來所買的件數。

6. 一汽車比一自行車每小時快 $37\frac{1}{2}$ 里，走 45 里的距離要少 50 分鐘。求這汽車的速度。

7. 一船來往於 $10\frac{1}{2}$ 里的河，要 100 分鐘。若河水的速度每小時 6 里；求船在靜水中的速度。

8. 一個人用 400 元買物若干件；若每件的價低 2 元，則可多買 10 件。問他原買多少件？

9. 兩車同行 108 里。其中的一車比他一車每小時快 45 里，而可少走 12 分鐘。求兩車的速度。

10. A, B 兩汽船同游 420 里的河。 A 比 B 每小時快半里，而少走 2 小時；求 A 和 B 的速度。

11. 一船在靜水中，每小時可行 9 里。若來往 9 里的河一次，共需 $2\frac{1}{2}$ 小時，問這河水的速度怎樣？

12. A 均分 180 元給若干人。 B 用同數的款也均

分給若干人,每人較 A 多給 6 元,所給的人卻少 40 個。問 A 每人給多少?

13. A, B 兩地的面積同為 210 方丈; A 較 B 長 6 尺狹 4 尺;問 A 的長和闊各幾尺?

14. 有一分數,分母,分子各加 1,則等於 $\frac{4}{5}$;若分子減去 1,分母加上 1,則為 $\frac{1}{2}$;求原分數。

15. 有一分數,2 倍分子再加上 2,則為 $\frac{1}{2}$;若分子加上 2,分母減去 3,則為 $\frac{1}{3}$ 。問原分數是什麼?

16. 一工程, A, B 合作 15 日完。若兩人合作 6 日後,由 B 再獨作,則尚需 24 日纔能完。問 A, B 各一人獨作需多少日?

17. 一個男子和一個小孩同作一工程 18 日可完。若 5 個男子和 9 個小孩合作,則 3 日可成。問一個男子或一個小孩獨作,各要多少日纔能完?

18. 一水槽有 A, B, C 三水管。若同時開三管,則 1 小時可注滿水槽的 $\frac{7}{8}$ 。只開 A, B 兩管,則 $1\frac{1}{2}$ 小時可注滿。若開 B, C 兩管,則 2 小時 40 分注滿。問只開一管,則各需時若干纔能注滿?

19. 有二位數,用牠的兩個數字的和去除牠,則得 6 剩 3。若用這數字的和去除這數的數字位置交換的數,則得 4 剩 9。求原數。

20. 兩人體重的比為 5:8。若各加 5 斤,則體重的比為 16:25。求兩人的體重。

21. 現在父年與子年的比為 $3:1$, 5年前則父年與子年的比為 $4:1$, 問現在各年若干?

22. 甲所有錢與乙所有錢的比為 $1:5$; 若乙給甲5元, 則他們所有錢的比為 $1:2$, 問原來各有若干元?

第十七章

指數和對數

分數指數

156. x 爲正整數, 試畫 $y=2^x$ 的圖線。用二大方格的長爲 x 的單位, 一大方格的長爲 y 的單位。

所畫的各點用曲線相連。 $2^{\frac{1}{2}}$ 或 $2^{1.3}$ 有什麼意義或數值嗎?

在回答這問題以前, 我們先想想 a^n 的定義。第五章第 58 節說過, a^4 是表示 $a \times a \times a \times a$ 的意思; 我們能夠將同樣的意義應用到 $2^{\frac{1}{2}}$ 或 $2^{1.3}$ 上嗎?

這是容易明白的, 除了 x 是正整數, 2^x 的意義很不容易說明。但是, 讓我們從所畫的曲線上一看, 牠就可以指出 x 的相應於 2^x 的值。從 $x=1$ 到 $x=4$, 試畫這曲線。

從所畫的圖線上, 指出 $2^{1.3}$, $2^{2.7}$, $2^{3.3}$ 的值來。

157. 再從另外的觀點來考查這個問題。第五章第 60 節曾經證明過下面的指數定則:

(i) 同字母的乘方相乘, 將指數相加;

(ii) 同字母的乘方相除, 從被除數的指數中減去除數的指數。

若用符號表示, 就是

$$a^m \times a^n \equiv a^{m+n};$$

$$a^m \div a^n \equiv a^{m-n}. \quad (\text{若 } a \neq 0.)$$

在這裏 m 和 n 都是正整數, 而在後式中 $m > n$.

158. 前節中 a^m 和 a^n 的指數 m 和 n 都限於正整數。現在姑且假定牠們不限於正整數, 看可以推論出什麼結果來, 並試求 $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{1}{3}}$, 2^{-2} , 3^0 等的意義。

依照假定, 得 $9^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 9^1 = 9$.

什麼數自乘可以得 9 呢? 這種數在算術中稱為什麼? 牠是 9^* 的什麼?

同樣地, $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 2^1 = 2$.

$$\therefore 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414 \dots \dots$$

這個結果和曲線上指示的相同嗎?

同樣的方法, $a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = a^1 = a$.

$$\therefore a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.$$

一般地, $a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \dots \times a^{\frac{1}{n}}$

(n 是正整數, 一共 n 個因數)

$$\equiv a^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}} \quad (n \text{ 項})$$

$$\equiv a.$$

* 在這章裏只用正的實數根。

$$\therefore a^{\frac{1}{n}} \equiv \sqrt[n]{a}.$$

又 $a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \equiv a^{\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}} \equiv a^{\frac{2}{3} \times 3} = a^2.$

兩邊開立方, 則 $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}.$

一般地, $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{m}{n}} \times \dots \times a^{\frac{m}{n}}$
(m, n 都是正整數, 一共 n 個因數.)

$$\begin{aligned} &\equiv a^{\frac{m}{n} + \frac{m}{n} + \dots + \frac{m}{n} \text{ (} n \text{ 項)}} \\ &\equiv a^m. \end{aligned}$$

$$\therefore a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

又 $a^3 \div a^5 \equiv a^{3-5} \equiv a^{-2}.$

但 $a^3 \div a^5 \equiv \frac{a^3}{a^5} \equiv \frac{1}{a^2},$

$$\therefore a^{-2} \equiv \frac{1}{a^2}.$$

一般地, 若 m, n 都是正數, 而 $m-n=p$, 則

$$a^n \div a^m \equiv a^{n-m} = a^{-p}.$$

但 $a^n \div a^m \equiv \frac{a^n}{a^m} \equiv \frac{1}{a^p}.$

$$\therefore a^{-p} \equiv \frac{1}{a^p}.$$

(練習 1) 求 $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{10}}, 10^{0.7}, 10^{1.2}$ 的意義.

二 10^0 的意義

159. 10^0 的意義怎樣?

(注意) $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3.162\dots\dots,$

$$10^{\frac{1}{4}} = \sqrt{10^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3.162} = 1.779\dots\dots,$$

$$10^{\frac{1}{8}} = \sqrt{10^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{1.779} = 1.333\dots\dots$$

照這樣計算下去，可以算出 x 的值極小的時候的 10^x 的值來； x 漸漸地減小， 10^x 的變化怎樣？能得出比 1 小的值嗎？

設想這裏，

$$10^3 = 1000,$$

$$10^2 = 100,$$

$$10^1 = 10,$$

$$10^0 = ?$$

再設想下面的關係：

$$10^2 \times 10^0 = 10^{2+0} = 10^2.$$

兩邊除以 10^2 ，則得

$$10^0 = \frac{10^2}{10^2} = 1.$$

一般地，

$$a \div a = a^{1-1} = a^0,$$

而

$$a \div a = 1,$$

$$\therefore a^0 = 1.$$

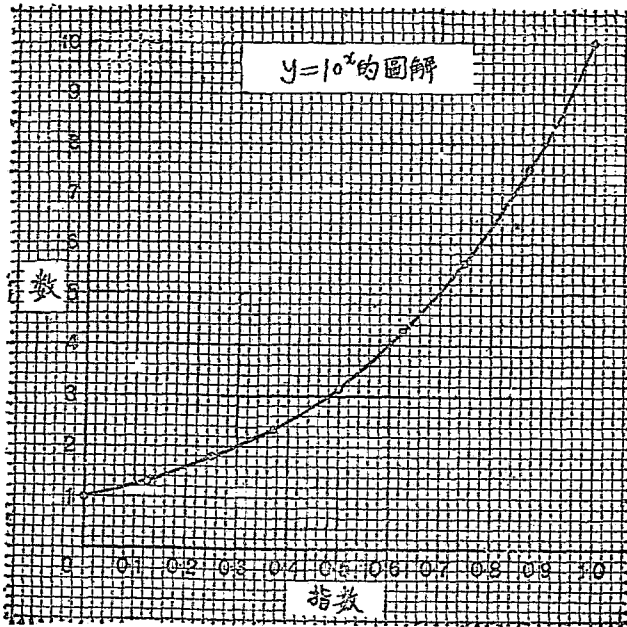
160. 由平方根表和乘法，求下列各數：

$$10^{\frac{1}{5}}, 10^{\frac{1}{4}}, 10^{\frac{3}{8}}, 10^{\frac{1}{2}}, 10^{\frac{5}{8}}, 10^{\frac{3}{4}}, 10^{\frac{7}{8}}.$$

作 $y = 10^x$ 的表：

x	0	.125	.25	.375	.5	
y	1				3.162	

從 $x=0$ 到 $x=1$, 畫 $y=10^x$ 的圖線, 用 10 公分為 x 的單位, 1 公分為 y 的單位。順着 X 坐標軸表指數 x , 順着 Y 坐標軸表數 y 。第 18 圖就是表示這圖線的縮圖。



第 18 圖

習題 一 二 一

每題由全班討論, 用 $y=10^x$ 的圖線。

1. 指出 $10^{0.1}$, $10^{0.15}$, $10^{0.2}$, $10^{0.25}$, …… 的值。
2. 用 10 的乘方表示下數:
· 1, 1.5, 2, 2.5 …… [例如 $6.5=10^{0.313}$]
3. 從 $y=10^x$ 的圖線上求 $10^{0.3}$, $10^{0.4}$ 的值。用乘法求

$10^{0.3} \times 10^{0.4}$ 的值。將所得的結果和 $10^{0.3+0.4}$ 即 $10^{0.7}$ 比較。

4. 試求 a 和 b 的值, 若 $2=10^a$, $3=10^b$; 又設 $2 \times 3 = 10^a \times 10^b = 10^{a+b}$, 從圖線上求 10^{a+b} 的值; 這和你預想的相同嗎?

5. 將下式中所空的數填上, 可用圖線做參考。

$$\begin{aligned} 2.65 \times 1.7 &= 10^{\dots} \times 10^{\dots} \\ &= 10^{\dots + \dots} \\ &= 10^{\dots} \\ &= \dots \end{aligned}$$

用乘法來覆證所得的結果。

用圖線來求下列各乘積:

6. $3.75 \times 2.$

7. $(2.5)^2.$

8. $1.45 \times 5.25 \times 1.15.$

9. $1.6 \times 2.7 \times 1.9.$

10. 求 a 和 b , 若 $9=10^a$, $2=10^b$; 又 $9 \div 2 = 10^a \div 10^b = 10^{a-b}$, 從圖線上求 10^{a-b} 的值; 這個值正確嗎?

11. 將下式中所空的數填上,

$$\begin{aligned} 2.65 \div 1.7 &= 10^{\dots} \div 10^{\dots} \\ &= 10^{\dots - \dots} \\ &= 10^{\dots} \\ &= \dots \end{aligned}$$

用除法來覆證所得的結果。

由圖線簡單下式:

12. $9.75 \div 4.$

13. $5.25 \div 4.85.$

14. $3.75 \times 5.9 \div 2.7.$

15. $8.65 \times 6.75 \div 7.85.$

三 對 數

161. 由算術中和前面的圖上,我們知道:

$$10^3 = 1000,$$

$$10^2 = 100,$$

$$10^1 = 10,$$

$$10^0 = 1,$$

$$10^{0.818} = 6.5,$$

$$10^{0.385} = 2.16,$$

.....

一般地,若 $a^x = N$.

設這個式子表示 a 的 x 乘方是 N , x 叫‘方指數’, N 叫‘方數’; 是知道 a 和 x 求 N , 用乘法計算。

但若知道的是 N 和 x 而求 a , 那就得寫成

$$\sqrt[x]{N} = a.$$

x 叫‘根指數’, a 叫 N 的 x 次方根, 用開方法計算。

像前幾節的例, 是知道一個數, 要求牠的 10 的若干次乘方; 一般地說, 便是知道了 N 和 a , 而 a 為 1 以外的正數, 要求 x . 這時 a 叫‘底數’, x 叫做‘ a 為底 N 的對數’, 而寫成

$$\log_a N = x.$$

由此看來, 乘方, 開方, 求對數, 所含有的 a , x , N 三個數間的關係是相同的, 所以照理論說, 對數的底數無

論什麼數都可以，不過，在運用上我們常常只指定一個數做底數。

所以一個數 (N) 對於某數做底 (a) 的對數 (x)，就是 N 等於 a^x 時 a 的指數。

$$\therefore \log_a a = 1.$$

又 a^0 總是等於 1，

$$\therefore \log_a 1 = 0.$$

[例題 1] 求 2 做底，8 的對數。

因為 $2^3 = 8$ ，

$$\therefore \log_2 8 = 3.$$

例題 2) 49 對於什麼數做底的對數是 2?

因為 $7^2 = 49$ ，

$$\therefore \log_7 49 = 2.$$

即底數是 7。

[例題 3] 什麼數對於 6 做底的對數是 3?

因為 $6^3 = 216$ ，

$$\therefore \log_6 216 = 3.$$

即 216 對於 6 做底的對數是 3。

習 題 一 二 二

將下列各式的未知數求出：

1. $\log_4 16 = x$.

2. $\log_5 25 = y$.

3. $\log_3 27 = x$.

4. $\log_3 81 = y$.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 5. $\log_5 125 = x.$ | 6. $\log_9 3 = x.$ |
| 7. $\log_x 64 = 2.$ | 8. $\log_y 121 = 2.$ |
| 9. $\log_x 625 = 4.$ | 10. $\log_y 81 = 4.$ |
| 11. $\log_x 36 = 2.$ | 12. $\log_y 64 = 6.$ |
| 13. $\log_4 x = 0.$ | 14. $\log_5 y = 1.$ |
| 15. $\log_6 z = 4.$ | 16. $\log_5 x = 3.$ |
| 17. $\log_7 y = 3.$ | 18. $\log_2 y = 9.$ |

四 常用對數

162. 用10作底的對數,叫做‘常用對數’.我們先就整數考查:

$\therefore 10^0 = 1,$	$\therefore \log_{10} 1 = 0,$
$10^1 = 10,$	$\log_{10} 10 = 1,$
$10^2 = 100,$	$\log_{10} 100 = 2,$
$10^3 = 1000,$	$\log_{10} 1000 = 3,$
$10^4 = 10000,$	$\log_{10} 10000 = 4.$
.....

其次一位整數的數,從1到9,牠們都在1和10中間,即

$$1 \leq \text{一位整數} < 10.$$

二位整數的數,從10到99,牠們都在10和100中間,即

$$10 \leq \text{二位整數} < 100.$$

同樣,

$$100 \leq \text{三位整數} < 1000,$$

$$1000 \leq \text{四位整數} < 10000,$$

.....

$$\therefore 0 \leq \log_{10} (\text{一位整數}) < 1,$$

$$1 \leq \log_{10} (\text{二位整數}) < 2.$$

$$2 \leq \log_{10} (\text{三位整數}) < 3,$$

$$3 \leq \log_{10} (\text{四位整數}) < 4.$$

換句話說,便是:

$$\left. \begin{array}{l} \text{一位整數的對數} = 0 + \text{小數}, \\ \text{二位整數的對數} = 1 + \text{小數}, \\ \text{三位整數的對數} = 2 + \text{小數}, \\ \text{四位整數的對數} = 3 + \text{小數}, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} (1)$$

再來考查小數:

$$\begin{array}{ll} \therefore 10^0 = 1, & \therefore \log_{10} 1 = 0, \\ 10^{-1} = 0.1, & \log_{10} 0.1 = -1, \\ 10^{-2} = 0.01, & \log_{10} 0.01 = -2, \\ 10^{-3} = 0.001, & \log_{10} 0.001 = -3, \\ 10^{-4} = 0.0001, & \log_{10} 0.0001 = -4. \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

爲了說起來簡便些,我們先約定小數中,從某一位起有 1,……9 數字的,就叫做第某位小數,如 0.3, 0.25 等

叫第一位小數, 0.04, 0.0531 等叫第二位小數。

由此, 便得

$$0.1 \leq \text{第一位小數} < 1,$$

$$0.01 \leq \text{第二位小數} < 0.1,$$

$$0.001 \leq \text{第三位小數} < 0.01,$$

$$0.0001 \leq \text{第四位小數} < 0.001,$$

.....

所以:

$$-1 \leq \log_{10} \text{第一位小數} < 0,$$

$$-2 \leq \log_{10} \text{第二位小數} < -1,$$

$$-3 \leq \log_{10} \text{第三位小數} < -2,$$

$$-4 \leq \log_{10} \text{第四位小數} < -3,$$

.....

換句話說, 便是:

$$\left. \begin{aligned} \text{第一位小數的對數} &= -1 + \text{小數}, \\ \text{第二位小數的對數} &= -2 + \text{小數}, \\ \text{第三位小數的對數} &= -3 + \text{小數}, \\ \text{第四位小數的對數} &= -4 + \text{小數}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} (2)$$

由(1)和(2)看起來, 一個數的常用對數, 總含有整數(正的或負的)和小數(正的)兩部分。這整數部分, 叫做‘對數的指標’; 而小數部分, 叫做‘對數的假數’。

如 320, 32, 3.2, 0.32, 和 0.032 的對數依次為 2.5051, 1.5051, 0.5051, $-1 + 0.5051$, $-2 + 0.5051$; 整數 2, 1, 0, -1, -2

都是指標,而小數 0.5051 爲假數。

163. 由前節(1)看起來,一位整數的對數的指標是什麼?二位整數的呢?三位整數的呢?

所以:

N 位整數的對數的指標等於 $N-1$.

例如 5430, 543, 54.3 的整數各爲 4, 3, 2 位,牠們的對數 3.7348, 2.7348, 1.7348 的指標爲 3, 2, 1.

又由前節的(2)看起來:第一位小數的對數的指標是什麼?第二位小數的呢?第三位小數的呢?

小數點到第一位小數,中間有幾個 0?

小數點到第二位小數,中間有幾個 0?

小數點到第三位小數,中間有幾個 0?

所以:

小數點到小數有 1.....9 數字的位數中間,若有 N 個 0, 則這小數的對數的指標是 $-(N+1)$.

例如 0.317, 0.0317, 0.00317 小數點到第一位數字間各有 0, 1, 2 個 0, 牠們的對數, $-1+0.5011$, $-2+0.5011$, $-3+0.5011$ 的指標爲 -1 , -2 , -3 .

〔練習 2〕 說明下列各數的常用對數的指標 7, 18, 23.4, 150.007, 0.9, 0.0074, 0.00032, 3.1416.

164. 由記數法我們知道:

$$55700 = 10^4 \times 5.57,$$

$$5570 = 10^3 \times 5.57,$$

$$557 = 10^2 \times 5.57,$$

$$55.7 = 10^1 \times 5.57,$$

$$5.57 = 5.57,$$

$$0.557 = 10^{-1} \times 5.57,$$

$$0.0557 = 10^{-2} \times 5.57,$$

$$0.00557 = 10^{-3} \times 5.57.$$

上列各式的左邊數的對數*的指標各是什麼?

右邊各數的前一因數的對數是什麼?

若後一因數的對數(注意,只有假數)是 0.7459,則上列左邊各數的對數是什麼?各對數的假數是什麼?

、所以:

數字的排列相同(整數除去右端的 0,淨小數除去左端的 0)的數的對數的假數是相同的。

對數的假數都載在對數表內,可以一查就得。

例如 79000, 7900, 0.079, 0.0079 各數的對數的假數都是 0.8976,而牠們的對數為 4.8976, 3.8976, $-2 + 0.8976$, $-3 + 0.8976$ 。

*注意: 以後除了特別提出而外,對數都指常用對數,而 $\log x$ 也就是 $\log_{10} x$ 。

五 表的用法

165. 下表是書末所載的表的一部分。*

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474
56	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551
57	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627
58	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701
59	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774
60	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846
61	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917
62	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987
63	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055

表中最左一行和第一排，都是數，其餘的就是相應於這些數的對數的假數。

用時注意下列各點：——

求一個數的相應的對數：

(i) 表中的數只是對數的假數部分，而沒有指標。

(ii) 數的小數的位置，只能決定對數的指標，而無關於假數。指標從視察得出。

求相應於一個對數的數：

(iii) 假數只決定那數的數字的排列。

(iv) 指標決定那數的小數點的位置。

[例題 1] 求 58.2 的對數。

* 書末的表是數較多的，不過小數點卻省略了去；所以用時必須在最左加上小數點。

這數有兩位整數,所以對數的指標是 1.

再由表的第一行查得 58, 橫過去到頂上有 2 的一行, 得 0.7649,

$$\therefore \log 58.2 = 1.7649.$$

[例題 2] $\log x = 2.7832$, 求 x .

由表查得 0.7832 在 60 的一排, 7 的一行, 所以 x 的數字列是 607.

指標是 2, 應當是三位整數. $\therefore x = 607$.

習題 一 二 三 (口答)

查書末的表說出下列各數的對數:

- | | | |
|----------|----------|----------|
| 1. 3.14. | 2. 1.41. | 3. 6.7. |
| 4. 9. | 5. 8.88. | 6. 1.03. |

從表中查出相應於下列各對數的三位數字, 若表中的指數不完全一樣時, 可取最相近的一個:

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| 7. 0.6628. | 8. 0.6990. | 9. 0.7284. |
| 10. 0.8471. | 11. 0.9140. | 12. 0.9820. |

166. 現在假設要查一個四位數的相應的對數, 例如 5.543 的, 表中找出 5.54 的對數是 0.7435, 而在右邊的差數行中, 頭上 3 的一行和 0.7435 一排的數是 2; 所以 5.543 的對數是在 0.7435 末一位加上 2; 就是 0.7437.

習題 一 二 四 (口答)

查出各數的對數:

1. 6.789. 2. 9.876. 3. 2.056.

查出相應於下列各假數的四位數字:

4. 0.4396. 5. 0.4878. 6. 0.6617.
7. 0.6932. 8. 0.4261. 9. 0.2689.

查出各數的對數:

10. 27.27. 11. 451.5. 12. 1728.
13. 625. 14. 60000. 15. 75.79.

查出相應於下列各對數的四位數字:

16. 2.8657. 17. 4.9515. 18. 3.9562.
19. 1.9031. 20. 2.4419. 21. 5.5555.

六 對數的性質

167. (1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$

設 $\log_a x = m, \quad \log_a y = n,$

則 $x = a^m, \quad y = a^n.$

$$\therefore xy = a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

$$\therefore \log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y.$$

這自然, 可以推到一般去,

$$\log_a(xyz \dots) = \log_a x + \log_a y + \log_a z + \dots$$

即, 幾個因數的積的對數, 等於各因數的對數的和.

(2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$

設 $\log_a x = m, \quad \log_a y = n,$

則 $x = a^m, \quad y = a^n.$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

$$\therefore \log \left(\frac{x}{y} \right) = m - n = \log_a x - \log_a y.$$

即，兩數商的對數，等於被除數的對數減去除數的對數。

(3) $\log_a x^p = p \log_a x.$

設 $\log_a x = m,$ 則 $x = a^m.$

$$\therefore x^p = (a^m)^p = a^{pm}.$$

$$\therefore \log_a x^p = pm = p \log_a x.$$

即，一個數的 p 乘方的對數，等於牠的對數的 p 倍。

(4) $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x.$

設 $\log_a x = m,$ 則 $x = a^m.$

$$\therefore \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

$$\therefore \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{m}{n} = \frac{1}{n} \log_a x.$$

即，一個數的 n 次方根的對數，等於牠的對數的 $\frac{1}{n}$ 。

【例題 1】求 $\log_2 \sqrt{8} + \log_3 \left(\frac{1}{3} \right)^2$ 的值。

$$\begin{aligned}
 \log_2 \sqrt{8} + \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 &= \log_2 2^{\frac{3}{2}} + \log_3 \frac{1}{3^2} \\
 &= \frac{3}{2} \log_2 2 + \log_3 1 - \log_3 3^2 \\
 &= \frac{3}{2} \log_2 2 + \log_3 1 - 2 \log_3 3 \\
 &= \frac{3}{2} + 0 - 2 = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

〔例題 2〕 將 $\log_b \sqrt[5]{\frac{a^3(c+d)^{\frac{1}{2}}}{c^2}}$ 展開。

$$\begin{aligned}
 \log_b \sqrt[5]{\frac{a^3(c+d)^{\frac{1}{2}}}{c^2}} &= \frac{1}{5} \log_b \frac{a^3(c+d)^{\frac{1}{2}}}{c^2} \\
 &= \frac{1}{5} \{ \log_b a^3 + \log_b (c+d)^{\frac{1}{2}} - \log_b c^2 \} \\
 &= \frac{1}{5} \left\{ 3 \log_b a + \frac{1}{2} \log_b (c+d) - 2 \log_b c \right\}
 \end{aligned}$$

習 題 一 二 五

求下列各式的值：

1. $\log \sqrt{1000} + \log \sqrt{0.01}$.
2. $\log(0.1)^4 - \log \sqrt[3]{0.001}$.
3. $\log \sqrt{\frac{1}{10}} + \log 10$.
4. $\log \sqrt[3]{100} - \log(0.01)^2$.
5. $\log_2(0.5)^8 - \log_4 \sqrt[3]{16}$.
6. $\log_5 \sqrt{125} + \log_3 2^5 + \log_7 \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$.

展開下列各式：

$$7. \log \sqrt{\frac{x(x^2-1)^6}{(x^2+1)^4}}$$

$$8. \log \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

$$9. \log \{p(1+r)^n\}$$

$$10. \log \frac{a^3 b^2 c^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt[3]{d}}$$

$$11. \log \sqrt[3]{\frac{x(x-y)}{z(z+x)}}$$

$$12. \log \frac{\sqrt[5]{p^2(1-q)}}{\sqrt{p(1+q)}}$$

七 對數的應用

168. [例題 1] 求 $3.142 \times 25.37 \times 457.6$ 的值。

取對數，則

$$\begin{aligned} \log(3.142 \times 25.37 \times 457.6) \\ &= \log 3.142 + \log 25.37 + \log 457.6 \\ &= 0.4972 + 1.4043 + 2.6605 = 4.5620. \end{aligned}$$

而 $4.5620 = \log 36470.$

$$\therefore 3.142 \times 25.37 \times 457.6 = 36470.*$$

這個演算可列式如下：

NO	Log
3.142	0.4972
25.37	1.4043
457.6	2.6605
所求的值	36470
	4.5620

[例題 2] 求下式的值。

* 注意：用對數計算出來的只是近似值。

$$73.35 \times \frac{273}{273+21.3} \times \frac{760-18.5}{760}$$

設 $x = 73.35 \times \frac{273}{273+21.3} \times \frac{760-18.5}{760}$

$$= 73.35 \times \frac{273}{294.3} \times \frac{741.5}{760}$$

$$\therefore \log x = \log 73.35 + \log 273 + \log 741.5$$

$$- \log 294.3 - \log 760$$

$$= 1.8654 + 2.4362 + 2.8701 - 2.4687 - 2.8808$$

$$= 1.8222 = \log 66.40.$$

$$\therefore x = 66.40.$$

這個演算可列式如下：

NO	Log	
73.35	1.8654	
273	2.4362	
741.5	2.8701	
分子		7.1717
294.3	2.4687	
760	2.8808	
分母		5.3495
x: 66.40		1.8222

習題 一 二 六

求下列各式的值：

1. $3.142 \times 88.86.$

2. $283.7 \times 5943.$

3. $256.5 \div 43.47.$

4. $6562 \div 3.142.$

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 5. $143.7 \times 12.05.$ | 6. $63.28 \div 25.52.$ |
| 7. $(273.3)^2.$ | 8. $(8.517)^3.$ |
| 9. $(4020)^3.$ | 10. $(3.142)^2.$ |
| 11. $16.1 \times (2.72)^2.$ | 12. $3.142 \times (1.315)^2.$ |
| 13. $\frac{15.73}{8.621}$ | 14. $\frac{8.754 \times 9.361}{12.07}$ |
| 15. $\frac{756.3 \times 40.04}{1500}$ | 16. $\frac{474700 \times 21.25}{6774}$ |

169. 0.035 的對數的指標為 -2, 而 3.5 的對數為 0.5441,

$$\therefore \log 0.035 = -2 + 0.5441.$$

因為假數是正的, 指標是負的, 所以不能直寫為

$$\log 0.035 = -2.5441,$$

而改寫為

$$\log 0.035 = \bar{2}.5441.$$

指標上面的負號其效力只及於指標。這是在演算時, 須特別留意的。

【例題 3】 $x = \frac{0.7361 \times 0.03715}{2.165 \times 0.8717}$, 求 x .

NO	Log	
0.7361	1.8670	
0.03715	$\bar{2}.5700$	
分子		$\bar{2}.4370^{(1)}$
2.165	0.3355	
0.8717	$\bar{1}.9404$	
分母		0.2759 ⁽²⁾
x : 0.01449		$\bar{2}.1611$

【注意】(1) 指標 $\bar{1}$ 加 $\bar{2}$ 再加進值的正 1 得 $\bar{2}$.

(2) 指標 0 加 $\bar{1}$ 再加進值的正 1 得 0.

【例題 4】求 $\sqrt{\frac{1}{0.0717}}$ 的值.

設
$$x = \sqrt{\frac{1}{0.0717}}$$

則
$$\begin{aligned} \log x &= \log \sqrt{\frac{1}{0.0717}} \\ &= \frac{1}{2}(\log 1 - \log 0.0717) \\ &= \frac{1}{2}(0 - \bar{2}.8555) \\ &= \frac{1}{2}(2 - 0.8555) \\ &= 1 - 0.4278 = 0.5722. \end{aligned}$$

$\therefore x = 3.734.$

【例題 5】 $y = \sqrt{\frac{666.6 \times 0.7317}{0.0861 \times 2.654}}$, 求 y .

NO	Log	
666.6	2.8239	
0.7317	$\bar{1}.8643$	
分子		2.6882
0.0861	$\bar{2}.9350$	
2.654	0.4939	
分母		$\bar{1}.4289$
	2	3.2593(
$y: 42.63$		1.6297

【例題 6】 $p=3750, v=12.6$, 求 $pv^{1.71}$.

$$\begin{aligned}
 \text{設} \quad & x = pv^{1.71}, \\
 \text{則} \quad & \log x = \log p + \log v^{1.71} \\
 & = \log p + 1.71 \log v \\
 & = \log 3750 + 1.71 \log 12.6 \\
 & = 3.5740 + 1.71 \times 1.1004 \\
 & = 3.5740 + 1.8817 \\
 & = 5.4557.
 \end{aligned}$$

$$\therefore pv^{1.71} = 285600 = 286000 \text{ 到三位數字.}$$

【例題7】解方程式 $(0.55)^x = 2.718$.

$$\log(0.55)^x = \log 2.718.$$

$$\therefore x \log 0.55 = \log 2.718.$$

$$\therefore x = \frac{\log 2.718}{\log 0.55}$$

$$= \frac{0.4343}{-1.7404}$$

$$= -\frac{0.4343}{0.2596}$$

$$\therefore \log(-x) = \log 0.4343 - \log 0.2596$$

$$= \bar{1}.6378 - \bar{1}.4143$$

$$= 0.2235.$$

$$\therefore -x = 1.673.$$

$$\therefore x = -1.67 \text{ 到三位數字.}$$

習題 一 二 七

用對數計算下列各式：

1. $\sqrt{323.7}$ 2. $\sqrt{32.37}$ 3. $\sqrt{3.237}$
 4. $\sqrt[3]{5275}$ 5. $\sqrt[3]{527.5}$ 6. $\sqrt[3]{52.75}$
 7. $\sqrt[3]{5.275}$ 8. $\sqrt[4]{52750}$ 9. $\sqrt[4]{5.275}$
 10. $\sqrt{3}$ 11. $\sqrt{2}$ 12. $\sqrt{20}$
 13. $\sqrt[3]{10}$ 14. $\sqrt{\frac{570.2}{3.142}}$ 15. $\sqrt[3]{\frac{3 \times 762.8}{4 \times 3.142}}$
 16. $\sqrt{\frac{276.3 \times 37.2}{5.437 \times 17.81}}$ 17. $\sqrt[3]{\frac{20.07 \times 51.37}{14.72 \times 2.854}}$
 18. $\sqrt[3]{\frac{98.77 \times 2.452}{10.79 \times 20.09}}$ 19. $2 \times 3.142 \times \sqrt{\frac{35}{32.2}}$
 20. $70.4 \times \frac{764.3 - 14.6}{760} \times \frac{273}{273 + 17.2} = ?$
 21. 簡單 $\frac{2.873 \times 35.97 \times 273500}{59.7 + 12.03 \times 80.5}$
 22. $s = \frac{1}{2}gt^2$, 若 $g = 32.2$, $t = 20.5$, 求 s .
 23. $M = pr^n$, (i) $p = 80$, $r = 1.025$, $n = 2$, (ii) $p = 93.75$,
 $r = 1.03$, $n = 4$; 求 M .
 24. 球的體積等於 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 立方寸, 若半徑為 r 寸. 設
 $r = 5.875$ 寸, $\pi = 3.142$, 求這個球的體積.
 25. 3^{20} 有幾位數?
 26. $V = \frac{(t+461) \times v}{T+461}$
 (i) $t = 700$, $T = 1100$, $v = 1050$; 求 V .
 (ii) $V = 770$ $v = 1000$, $T = 1200$, 求 t .

$$27. f = \frac{w+10}{2240W} \times \frac{V^2}{2S}, w=120, W=7.5, V=2400, S=19.8;$$

求 f .

$$28. V = \pi(R^2 - r^2)l, R=74.35m., r=42.63m., l=132.8m., \pi=3.142; \text{求 } V.$$

$$29. \Delta = \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$$

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c), a=3.56, b=4.75, c=5.33; \text{求 } \Delta.$$

$$30. V = \pi l(x^2 - y^2), \text{(i) 求 } x. \text{(ii) } y=13, l=3.6, V=610, x=?$$

習題 一 二 八

簡單下列各式:

1. $0.3594 \times 25.82.$

2. $0.0587 \times 2.078.$

3. $0.7836 \times 4.774.$

4. $0.8532 \div 9.761.$

5. $0.08532 \div 97.61.$

6. $9761 \div 0.08532.$

7. $(0.0227)^2.$

8. $(0.6015)^2.$

9. $(0.03714)^3.$

10. $\sqrt{0.03571}.$

11. $\sqrt{0.3571}.$

12. $\sqrt[3]{0.3571}.$

13. $\frac{1}{72.64}.$

14. $\frac{1}{3.142}.$

15. $\frac{1}{0.7071}.$

16. $\sqrt[3]{\frac{1}{85.77}}.$

17. $\sqrt{\frac{1}{0.2544}}.$

18. $\sqrt[3]{\frac{1}{0.0017}}.$

19. $0.5712 \times 763.28 \times 0.0715.$

20. $42.73 \times 0.70562 \times 0.0086.$

$$21. \frac{0.0361 \times 0.05715}{2.265 \times 0.0777} \qquad 22. \frac{53.84 \times 70.34}{827.1 \times 256.2}$$

$$23. \sqrt{\frac{886.6 \times 0.7819}{0.0061 \times 0.654}} \qquad 24. \sqrt[3]{\frac{0.07624}{3.142 \times 27.05}}$$

25. 擺動的時間 t 秒和擺長 l 的關係如下公式:

$$t = 2 \times 3.142 \times \sqrt{\frac{l}{980}}$$

若擺長是 3 米, 求 t .

26. $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$, $r = 0.36$, $h = 19.75$, 求 A . (先將右邊分解因式.)

27. $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 若 $V = 1$, 求 r .

28. $c^2 = 3082 - 2abx$, $a = 36.2$, $b = 42.1$, $x = 0.7135$, 求 c .

29. 三角形的三邊的長為 a, b, c , $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, 則牠的面積 $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, 若 a, b, c 為下面的各數時, 求 Δ :

(i) 3, 4, 4.5 寸, (ii) 6, 8, 9 公分,

(iii) 76.9, 93.1, 53.3 尺, (iv) 0.927, 1.135, 0.675 公尺.

30. $a = 25.7, b = 33.5, c = 30.4, s = \frac{1}{2}(a+b+c)$; 求 $\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

和 $\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$ 的值。(到二位數字)

八 複 利 息

170. 對數在計算複利息的時候, 非常有用。

若本金 P 元, 年利 4% 的複利, 則第一年終的利息為

$$P \text{ 元} \times 4\% = P \text{ 元} \times 0.04.$$

∴ 第一年終的本利和是

$$P \text{ 元} + P \text{ 元} \times 0.04 = P \text{ 元} \times 1.04.$$

因此,本金 730 元,年利 4% 的複利,第一年終的本利和爲 730 元 $\times 1.04$.

$$\text{設} \quad P = 730 \times 1.04.$$

則 730 元 $\times 1.04$, 年利 4% 的複利,第二年終的本利和爲 $730 \text{ 元} \times 1.04 \times 1.04 = 730 \text{ 元} \times (1.04)^2$.

所以, 730 元,年利 4% 的複利,第二年終的本利和爲

$$730 \text{ 元} \times (1.04)^2.$$

同樣地, 730 元,年利 4% 的複利,第三年終的本利和爲

$$730 \text{ 元} \times (1.04)^3.$$

而 730 元,年利 4% 的複利,在 n 年終的本利和爲

$$730 \text{ 元} \times (1.04)^n.$$

同樣地, p 元,年利 $r\%$ 的複利, n 年的本利和爲

$$P \text{ 元} \times \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n.$$

〔例題〕 求本金 260 元,年利 $2\frac{1}{2}\%$ 的複利, 14 年的本利和。

$$\text{本利和} \quad Q \text{ 元} = 260 \text{ 元} \times \left(1 + \frac{2\frac{1}{2}}{100}\right)^{14}$$

$$= 260 \text{ 元} \times (1.025)^{14},$$

$$\therefore \log Q = \log 260 + \log (1.025)^{14}$$

$$= \log 260 + 14 \log 1.025$$

$$=2.4150+14\times 0.01072^*$$

$$=2.4150+0.1501$$

$$=2.5651.$$

$$\therefore Q=367.4.$$

\therefore 本利和約 367.4 元。

171. 這是很要注意的,若對數只用四位小數,而用 10 和 100 中間的數去乘牠,結果最多只能有三位不錯,所以相應的數最多也只能有三位數字是對的。

要得到四位數字正確的結果,對數必須用小數四位以上的,習題中需用的幾個數的七位對數,附在本書的後面。

習 題 一 二 九

1. 本金 375 元,年利 $2\frac{1}{2}\%$ 的複利, 20 年的本利和是若干?(求相近的值。)
2. 求 1250 元,年利 4% , 6 年的複利。
3. 某人存款 3500 元,年利 $3\frac{1}{2}\%$, 照複利計算, 3 年的本利是多少?
4. 年利 4% 的複利,要多少年本利恰好相等?
5. 年利 $3\frac{1}{2}\%$, 11 年複利的本利和為 3500; 問本金多少?

* 注意: 這個對數是用五位小數,參看下列。

6. 30年,年利 $3\frac{1}{2}\%$ 的複利,須本金多少,然後本利和爲1600元?

7. 求3200元,年利3%,4年的複利。

又求年利4%的。

兩項的差和年利1%的複利相等嗎?

8. 某城居民每年增加年初的總數的百分之1.2。25年後一共增加百分之幾?

$$\log 1.012 = 0.0051805.$$

9. 計算 $\frac{25}{27} \times (14.4)^{\frac{1}{5}}$ 的數值。

10. $K=0.74$, $t_1=69.4$, $t_2=82.3$, $r_1=1.25$, $r_2=1.55$, 求

$$\frac{2\pi K(t_2 - t_1)}{\log r_2 - \log r_1}$$

解下列各方程式:

11. $24.9x^5 = 2.84$.

12. $10^x = 6^{20}$.

13. $7^x = 31$.

14. $4^x = 2^{x+b}$.

15. $9(9^{x-1} + 3) = 28 \times 3^x$.

16. $27^x = 9^y$, $81^y / 3^x = 243$.

17. $2^x + 2^y = 17$, $2^{x+2} - 2^{y+1} = 5$.

18. 證明 $x=2\frac{1}{4}$ 適合於 $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$.

19. 求 $3.168 \times \left(\frac{3}{1.831}\right)^{1.404}$ 的值。

20. 若 $xy^{1.37} = 25$, $x=4$, 求 y .

21. $d^{5.1} = 0.35 \left(\frac{154.7}{\pi/4}\right)^2$, 求 d .

22. $n = 53.25H^{1.25}P^{-0.5}$, $H=20$, $P=75$, 求 n .

23. $A = \pi R^2$, 若 $R = 9.795$ 公分, 求 A .

24. $V = \frac{4\pi R^3}{3}$, 若 $R = 2.97$ 尺, 求 V .

25. $S = 4\pi R^2$, 若 $S = 452$ 平方尺, 求 R .

26. $x = \sqrt{(h+b)(h-b)}$, 若 $h = 25.97$, $b = 17.8$, 求 x .

第十八章

高次方程式

172. 合三次式的方程式,叫做‘三次方程式’;如 $3x^3+4x^2+7x+9=0$, $11x^3+6x+5=0$ 等.合四次式的方程式,叫做‘四次方程式’;如 $x^4+9=0$, $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 等.三次以上的方程式,統叫‘高次方程式’.

高次方程式一般的解法,不屬於本書的範圍.以下所講的,只是可以用我們已講過的方法可以解的特殊的高次方程式.

173. 高次方程式所含的代數式,可以分解成一次和二次式的因式的,則用分解因式解.

[例題1] 解 $2x^3-x^2-6x=0$.

分解因式, $x(x-2)(2x+3)=0$.

$$\therefore x=0, x-2=0 \text{ 或 } 2x+3=0.$$

而 $x=0, 2, -\frac{3}{2}$.

[例題2] 解 $x^3+x^2-11x+10=0$.

$$\begin{aligned}\therefore x^3+x^2-11x+10 &= x^3-2x^2+3x^2-6x-5x+10 \\ &= x^2(x-2)+3x(x-2)-5(x-2) \\ &= (x-2)(x^2+3x-5).\end{aligned}$$

∴原方程式可寫成

$$(x-2)(x^2+3x-5)=0.$$

而 $x-2=0$ (1),

或 $x^2+3x-5=0$ (2).

由(1), $x=2.$

由(2),
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2} = \frac{-3 \pm 5.385}{2}$$

$$= 1.193 \text{ 或 } -4.193.$$

習 題 一 三 〇

解下列各方程式:

1. $(x+1)(x-2)(x^2+x-2)=0.$

2. $(x^2-3x+2)(x^2-x-12)=0.$

3. $(x^2-x-6)(x^2-x-20)=0.$

4. $x^3+x^2-4x-4=0.$

5. $x^3-2x^2-11x+12=0.$

6. $2x^3+4x^2-70x=0.$

7. $x^3-x^2-x+1=0.$

8. $x(x-a)(x^2-b^2)=0.$

9. $x^4-16=0.$

10. $x^6-1=0.$

174. 解 $x^3=1.$

若照通常的方法,兩邊開方法,則得

$$x=1.$$

但若先移項,則得

$$x^3-1=0.$$

分解因式, $(x-1)(x^2+x+1)=0.$

$$\therefore x-1=0 \quad (1),$$

或 $x^2+x+1=0 \quad (2).$

由(1), $x=1.$

由(2), $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}.$

$$\therefore x = \frac{-1+3i}{2},$$

或 $x = \frac{-1-3i}{2}$

$\therefore 1, \frac{-1+3i}{2}, \frac{-1-3i}{2}$ 的立方都等於1.

在算術上,一數的立方根只有一個,在代數上便有三個,不過有兩個是虛數。推到一般去,一個數的立方根也有三個,其中兩個是虛數。這正和一個數的平方根,在算術上只有一個,在代數上卻有兩個,而一個是負的一樣。

習 題 — 三 —

解下列各方程式:

1. $x^3+1=0.$

2. $x^3=8.$

3. $x^3-27=0.$

4. $8x^3-1=0.$

5. $8x^3+1=0.$

6. $27x^3-64=0.$

7. $x^4 + x^2y^2 + 1 = 0$.

8. $x^4 = 1$.

9. $x^4 + 1 = 0$.

10. $x^6 - 1 = 0$.

11. 將1到6所得的根和1的立方根比較,牠們有什麼關係?

12. 由11所得的關係,回答 $x^3 = 343$ 的根。

175. 有些高次方程式,是可以變成二次方程來解的,這叫做‘二次形的高次方程式’。

[例題3] 解 $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ 。

設 $x^2 = y$, 則 $x^4 = y^2$, 而原方程式變為

$$y^2 - 4y + 3 = 0.$$

分解因式, $(y-1)(y-3) = 0$ 。

$$\therefore y-1=0, \text{ 或 } y-3=0.$$

而 $y=1$ 或 3 ,

即 $x^2=1$ 或 3 。

$$\therefore x = \pm 1, \pm \sqrt{3}.$$

[例題4] 解 $(x^2 + 2x - 3)^2 + 3(x^2 + 2x + 2) - 13 = 0$ 。

設 $x^2 + 2x = y$, 則原方程式變為

$$(y-3)^2 + 3(y+2) - 13 = 0.$$

即 $y^2 - 3y + 2 = 0$ 。

分解因式, $(y-1)(y-2) = 0$ 。

$$\therefore y-1=0, \text{ 或 } y-2=0.$$

即 $x^2 + 2x - 1 = 0$ (1),

$$x^2 + 2x - 2 = 0 \quad (2).$$

$$\text{由 (1), } x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

$$\text{由 (2), } x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

$$\text{〔例題 5〕 解 } \frac{2(x^2+1)}{x+1} + \frac{6(x+1)}{x^2+1} = 7.$$

因第一分式正好是第二分式的倒式，故設 $\frac{x^2+1}{x+1} = y$ ，

則 $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1}{y}$ ，而原方程式為

$$2y + \frac{6}{y} = 7.$$

$$\text{去分母, } 2y^2 - 7y + 6 = 0.$$

$$\text{分解因式, } (2y-3)(y-2) = 0.$$

$$\therefore 2y-3=0, \text{ 或 } y-2=0.$$

$$\therefore 2\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) - 3 = 0 \quad (1),$$

$$\frac{x^2+1}{x+1} - 2 = 0 \quad (2).$$

$$\text{由 (1), } 2(x^2+1) - 3(x+1) = 0,$$

$$\therefore 2x^2 - 3x - 1 = 0.$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

$$\text{由 (2), } x^2+1 - 2(x+1) = 0,$$

$$\therefore x^2 - 2x - 1 = 0.$$

$$\therefore x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

習題 - 三 二

解下列各方程式：

1. $x + \frac{5}{x} = 6.$

2. $x^4 = 13x^3 - 36.$

3. $x^4 - x^2 - 20 = 0.$

4. $9x^4 - 32x^2 - 16 = 0.$

5. $x^6 + 10 = 7x^3.$

6. $(x^2 - 2)^2 = 14(x^2 - 2) + 31.$

7. $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0.$

8. $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0.$

9. $(x^2 - 7x + 6)^2 + 12(x^2 - 7x + 4) = 40.$

10. $\frac{x^2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2} = 2.$

11. $\frac{4-x}{3+x} + \frac{4(3+x)}{4-x} = 5.$

12. $x^2 + x + 1 = \frac{42}{x^2 + x}.$

第十九章

聯立二次方程式

一 兩方程式有一個是一次的

176. (例題 1) 解 $x^2+y^2=25$ (i),
 $x-y=1$ (ii).

先用圖解法.

第二個方程式 $x-y=1$, 畫出來是一條直線, 第一個方程式, 畫出來是一個圓. 照下面的兩個表就可以畫:

$$x^2+y^2=25$$

$$x-y=1$$

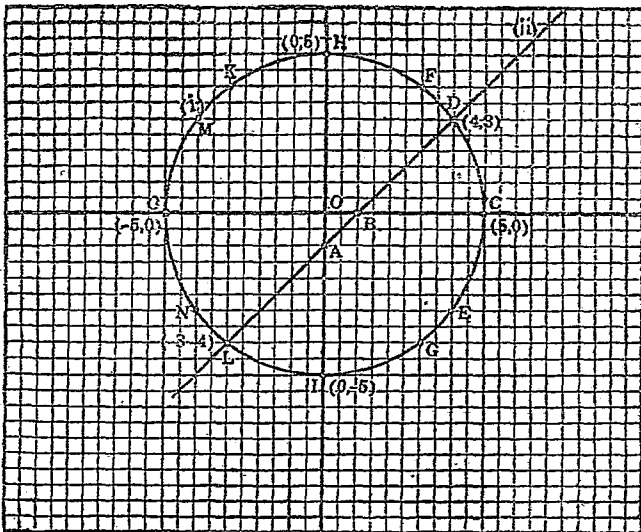
x	y	點
0	-1	A
1	0	B

x	y	點
5	0	C
4	± 3	D, E
3	± 4	F, G
0	± 5	H, I
-3	± 4	K, L
-4	± 3	M, N
-5	0	0

由第 19 圖可以看出 $x^2+y^2=25$ (i), 和 $x-y=1$ (ii) 兩

線有兩個交點，牠們的坐標是 $(-3, -4)$ 和 $(4, 3)$ 。這兩點既在 $x^2 + y^2 = 25$ 的線上面，又在 $x - y = 1$ 的線上面，所以牠們的坐標同時適合於這兩個方程式。

$\therefore x = 4, y = 3$; 和 $x = -3, y = -4$; 就是這兩個方程式的解答。



第 19 圖

177. 前節的例，也可以用代數的方法解牠，結果還是一樣。

代數的解法：

$$x^2 + y^2 = 25 \dots\dots\dots(i),$$

$$x - y = 1 \dots\dots\dots(ii).$$

$$\text{從(ii),} \quad x=1+y.$$

$$\text{代入(i),} \quad 1+2y+y^2+y^2=25.$$

$$\text{因此,} \quad y^2+y-12=0.$$

$$\therefore (y-3)(y+4)=0.$$

$$\therefore y=3 \text{ 或 } -4.$$

$$\text{代入(ii),} \quad x=4 \text{ 或 } -3.$$

$\therefore x=4, y=3$; 和 $x=-3, y=-4$; 就是這兩個方程式的解答。

若要覆證, 必須將各值代進兩個方程式去檢查。

$$178. \text{ [例題 2] 解 } x^2+y^2=25 \dots\dots\dots(i),$$

$$x-y=10\dots\dots\dots(ii).$$

先用代數的解法。

$$\text{從(ii),} \quad x=10+y.$$

$$\text{代入(i),} \quad 100+20y+y^2+y^2=25.$$

$$\therefore 2y^2+20y+75=0.$$

$$\therefore y = \frac{-20 \pm \sqrt{400-600}}{4}$$

$$= \frac{-20 \pm \sqrt{-200}}{4}$$

$$= \frac{-10 \pm 5\sqrt{-2}}{2}$$

$$\text{代入(ii),} \quad x = \frac{10 \pm 5\sqrt{-2}}{2}$$

所以這兩個方程式的根是虛數。

若用圖解法,則可以看出來直線 $x-y=10$ 和圓 $x^2+y^2=25$ 不能相交。試畫這個圖。

179. [例題 3] 解 $x^2-y^2=5$ (i),
 $x-y=-5$ (ii).

前節的例,用代數的方法解時,所用的是代入法,但並非只有代入法可用;現在就用這個題目來做例。

用 (ii) 去除 (i), 得 $x+y=-1$ (iii).

$x-y=-5$ (ii).

(ii) 和 (iii) 相加, $2x = -6$.

$\therefore x = -3$.

代入 (ii), $\therefore y = 2$.

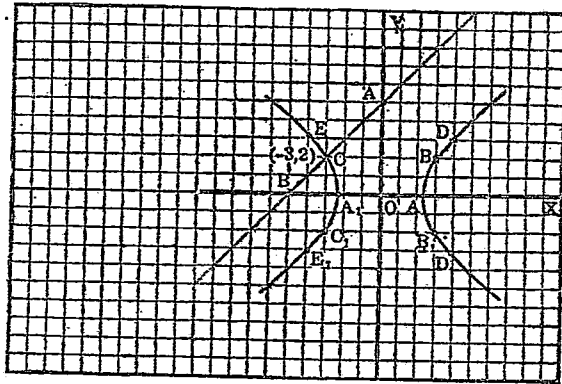
180. 前例一樣地可用圖解法,依下兩表就可畫成第 20 圖。

$x^2-y^2=5$

$x-y=-5$

x	y	點
0	5	A
-5	0	B

x	y	點
$\pm 2.2^+$	0	A, A ₁
3	± 2	B, B ₁
-3	± 2	C, C ₁
4	$\pm 3.3^+$	D, D ₁
-4	$\pm 3.3^+$	E, E ₁



第 20 圖

181. [例題 4] 解 $x - y = 6$ (i),

$xy = -5$ (ii).

將 (i) 平方, $x^2 - 2xy + y^2 = 36$ (iii).

(ii) 乘以 (4), $4xy = -20$ (iv).

(iii) 和 (iv) 相加, $x^2 + 2xy + y^2 = 16$

開平方, $x + y = \pm 4$ (v).

(i) 加 (v), $2x = 10$ 或 2 .

$\therefore x = 5$ 或 1 .

從 (v) 減 (i), $2y = -2$ 或 -10 .

$\therefore y = -1$ 或 -5 .

所以兩方程式的根為 $x = 5, y = -1; x = 1, y = -5$.

習 題 一 三 三

解下列各方程式: (1-6 並用圖解法)

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 1. | $\begin{cases} x+y=1; \\ x^2+y^2=85. \end{cases}$ | 2. | $\begin{cases} 2x+y=10, \\ x^2+y^2=65. \end{cases}$ |
| 3. | $\begin{cases} x^2+y^2=58, \\ 2x-y=11. \end{cases}$ | 4. | $\begin{cases} 2x^2-3xy=5, \\ x-y=2. \end{cases}$ |
| 5. | $\begin{cases} y^2=16x, \\ y=3x-4. \end{cases}$ | 6. | $\begin{cases} xy=45, \\ x+y=14. \end{cases}$ |
| 7. | $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7, \\ 2x-3y=0. \end{cases}$ | 8. | $\begin{cases} 5x^2+y=3xy, \\ 2x-y=0. \end{cases}$ |
| 9. | $\begin{cases} 3x-y=5, \\ xy-x=0. \end{cases}$ | 10. | $\begin{cases} xy=4, \\ x+2y=6. \end{cases}$ |
| 11. | $\begin{cases} x+y=a, \\ 4xy-a^2=-b^2. \end{cases}$ | 12. | $\begin{cases} x-y=2n, \\ x^2-y^2=4mn. \end{cases}$ |
| 13. | $\begin{cases} x^2+xy+y^2=52, \\ x+y=8. \end{cases}$ | 14. | $\begin{cases} y^2=7x+8y-14, \\ 7x+6y=13. \end{cases}$ |
| 15. | $\begin{cases} 2x-3y=0, \\ 7xy+3x-4y=43. \end{cases}$ | | |
| 16. | $\begin{cases} 2x+y=2, \\ 2x^2+3xy+y^2+3x+2y=0. \end{cases}$ | | |
| 17. | $\begin{cases} x^2+2xy-y^2=7(x-y), \\ 2x-y=5. \end{cases}$ | | |

18.
$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 2y = 3, \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x^2 - xy + 2y^2 = 16. \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1. \end{cases}$$

21.
$$\begin{cases} x(y+7) + y(x+5) = 5, \\ 7y + 4x = 1. \end{cases}$$

22.
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ x + y = 5. \end{cases}$$

23.
$$\begin{cases} \frac{x-y}{y} = \frac{15}{x-4}, \\ x-y = 3. \end{cases}$$

24.
$$\begin{cases} \frac{3x-2}{y+5} + \frac{y}{x} = 2, \\ x-y = 4. \end{cases}$$

二 兩方程式都是二次的

182. [例題 1] 解 $x^2 + y^2 = 20$(i),
 $xy = 8$ (ii).

代數的解法:

(ii) 乘以 2, $2xy = 16$ (iii).

(i) 和 (iii) 相加, $x^2 + 2xy + y^2 = 36$(iv).

從 (i) 減去 (iii), $x^2 - 2xy + y^2 = 4$ (v).

將 (iv), (v) 開方, $x + y = \pm 6$ (vi),

$x - y = \pm 2$ (vii)

(vi) 和 (vii) 相加, $2x = \pm 8, \pm 4$

$\therefore x = \pm 4, \pm 2$.

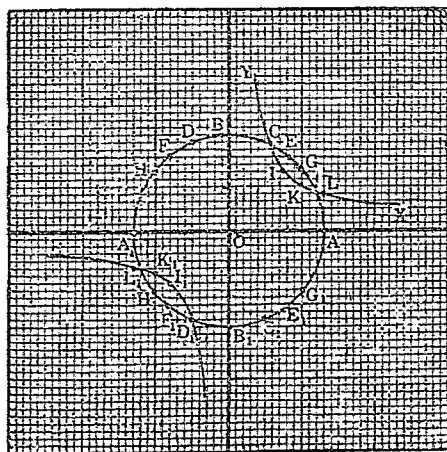
從 (vi) 減去 (vii), $2y = \pm 4, \pm 8$.

$\therefore y = \pm 2, \pm 4$.

所以兩方程式的根為 $x = \pm 4, y = \pm 2$; $x = \pm 2, y = \pm 4$.

圖解法:

依下面的兩個表可以畫出第 21 圖。



第 21 圖

$$x^2 + y^2 = 20$$

x	y	點
± 4.47	0	A, A_1
0	± 4.47	B, B_1
2	± 4	C, C_1
-2	± 4	D, D_1
3	$\pm 3.3^+$	E, E_1
-3	$\pm 3.3^+$	F, F_1
4	± 2	G, G_1
-4	± 2	H, H_1

$$xy = 8$$

x	y	點
± 2	± 4	C, D_1
± 3	$\pm 2\frac{2}{3}$	I, I_1
± 4	± 2	K, K_1
± 5	$\pm 1\frac{3}{5}$	L, L_1

183. (例題 2) 解 $x^3 - y^3 = 91$ (i),

$$x - y = 7 \text{ (ii).}$$

(i) 除以 (ii), $x^2 + xy + y^2 = 13$ (iii).

將 (ii) 平方, $x^2 - 2xy + y^2 = 49$ (iv).

從 (iii) 減去 (iv), $3xy = -36$.

$$\therefore xy = -12 \text{ (v).}$$

(iii) 和 (v) 相加, $x^2 + 2xy + y^2 = 1$.

開平方, $x + y = \pm 1$ (vi).

$$\frac{x - y = 7 \text{ (ii).}}{x + y = \pm 1 \text{ (vi).}}$$

(ii) 和 (vi) 相加, $2x = 8, 6$.

$$\therefore x = 4, 3.$$

從 (vi) 減去 (ii), $2y = -6, -8$.

$$\therefore y = -3, -4.$$

所以兩方程式的根爲 $x=4, y=-3$; $x=3, y=-4$.

184. (例題 3) 解 $x^4 + y^4 = 97$ (i).

$$x + y = 5 \text{ (ii).}$$

設 $x = u + v, y = u - v$. 以之代入 (i) 和 (ii),

$$u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4 + u^4 - 4u^3v + 6u^2v^2 - 4uv^3 + v^4 = 97.$$

因此, $2u^4 + 12u^2v^2 + 2v^4 = 97$ (iii).

而 $u + v + u - v = 5$.

即 $2u = 5$.

$$\therefore u = \frac{5}{2}.$$

將 $u = \frac{5}{2}$ 代入 (iii), $\frac{625}{8} + 75v^2 + 2v^4 = 97.$

因此, $16v^4 + 600v^2 = 151.$

完成平方, $16v^4 + 600v^2 + 5625 = 5776,$

$$\therefore 4v^2 + 75 = \pm 76,$$

$$\therefore 4v^2 = 1, -151,$$

$$\therefore v^2 = \frac{1}{4}, -\frac{151}{4},$$

$$\therefore v = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{-151}.$$

但

$$u = \frac{5}{2}.$$

$$\therefore x = 3, 2, \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-151};$$

$$y = 2, 3, \frac{5}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{-151}.$$

所以兩方程式的根為

$$x=3, y=2; x=2, y=3; x=\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-151}, y=\frac{5}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{-151}.$$

覆證虛根如下:

$$\begin{aligned} (1) \frac{625}{16} \pm \frac{125}{4}\sqrt{-151} - \frac{11325}{8} \mp \frac{755}{4}\sqrt{-151} + \frac{22801}{16} + \frac{625}{16} \\ \mp \frac{125}{4}\sqrt{-151} - \frac{11325}{8} \pm \frac{755}{4}\sqrt{-151} + \frac{22801}{16} = \frac{1552}{16} \\ = 97. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-151} + \frac{5}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{-151} = 5.$$

185. 對稱式,對稱方程式. 如 $x+y$, x^2+y^2 , x^2+xy+y^2 , x^3+y^3 和 x^4+y^4 等, 將式中的字母 x 和 y 互相交換, 式子仍然不變, 這樣的式子稱為‘關於 x, y 的對稱式’. 同樣的, $a+b+c$, $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$, 就是‘關於 a, b, c 的對稱式’.

如 $x+y=5$, $x^2+xy+y^2=13$, $x^4+y^4=97$ 等方程式.

牠所含的式子關於 x, y 是對稱的, 就稱為對稱方程式.

兩個方程式, 若都是對稱的, 或除了符號就是對稱的, 都可以照前節的例題, 設 $x=u+v$ 和 $y=u-v$ 代進去解牠.

所謂關於 x, y 除了符號, 就是對稱的方程式, 如 $x^4-y^4=a$, $x-y=b$ 等就是.

$$186. \quad \text{〔例題 4〕} \quad \begin{aligned} \text{解 } x^2+xy &= -1 \dots\dots\dots (i), \\ y^2-2xy &= 8 \dots\dots\dots (ii). \end{aligned}$$

設 $y=vx$, 代入 (i) 和 (ii); 則

$$\begin{aligned} x^2+vx^2 &= -1 \dots\dots\dots (iii), \\ v^2x^2-2vx^2 &= 8 \dots\dots\dots (iv). \end{aligned}$$

$$\text{從 (iii), 得 } (1+v)x^2 = -1, \text{ 和 } x^2 = -\frac{1}{1+v} \dots\dots\dots (v).$$

從 (iv), 得 $(v^2 - 2v)x^2 = 8$, 和 $x^2 = \frac{8}{v^2 - 2v} \dots\dots\dots$ (vi).

由 (v) 和 (vi), $\frac{-1}{1+v} = \frac{8}{v^2 - 2v}$

因此, $-v^2 + 2v = 8 + 8v$.

即 $v^2 + 6v + 8 = 0$.

即 $(v+4)(v+2) = 0$.

$\therefore v = -4, -2$.

代入 (v), $x^2 = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$, 和 $x^2 = \frac{-1}{-1} = 1$.

$\therefore x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, \pm 1$.

而 $y = (-4)(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}) = \mp\frac{4}{3}\sqrt{3}$,

和 $y = (-2)(\pm 1) = \mp 2$.

所以兩方程式的根爲

$x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, y = \mp\frac{4}{3}\sqrt{3}$;

和 $x = \pm 1, y = \mp 2$.

這裏應當注意的, 就是 $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$ 的值, 是用 $v = -4$ 代入 (v) 計算出來的, 所以用 $y = vx$ 計算 y 的值的時, 一定只能用 $v = -4$ 的值代進去; 還有 \pm 和 \mp 中正負號的順序也要弄清楚。

187. 前節的例題, 兩個方程式都是 x, y 二次齊次式, 這類的式子都可用同樣的方法去解。所以無論是 $ax^2 + by^2 = c$, 或 $ax^2 + bxy = c$, 或 $ax^2 + bxy + cy^2 = d$, 這三種

方程式中的那兩種在一起,都可設 $y=vx$ 代進去,先決定 v 的值,再求 x 和 y 的。

188. 前兩節所說的是一般的方法,但有特別的情形的時候,卻不一定要用牠。最常見的,就是可以從原來的兩個方程式變化出一個比牠們更簡單的方程式的時候。

例如 解 $x^2 - 3xy = -143$ (i),

$$y^2 + xy = 168 \text{ (ii).}$$

將兩個方程式相加,就可得出一個比較簡單的方程式,

$$x^2 - 2xy + y^2 = 25.$$

開平方, $x - y = \pm 5$ (iii).

這個式子是一個一次式,由牠可以知道 $x = \pm 5 + y$.

代入 (ii), $y^2 \pm 5y + y^2 = 168.$

$$\therefore 2y^2 \pm 5y - 168 = 0.$$

取 $+5y$, 得 $y = \frac{-5 \pm \sqrt{1369}}{4} = \frac{-5 \pm 37}{4}$

取 $-5y$, 得 $y = \frac{+5 \pm 37}{4}$.

因此, $y = 8, -8, \frac{21}{2}, -\frac{21}{2}$.

代入 (ii), $x = 13, -13, \frac{11}{2}, -\frac{11}{2}$.

所以兩方程式的根為

$$x = \pm 13, y = \pm 8;$$

$$x = \pm \frac{11}{2}, y = \pm \frac{21}{2}.$$

習題 一三四

解下列聯立方程式：(1-3 並用圖解法)

$$1. \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36, \\ 4x^2 + 4y^2 = 25. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} y^2 = x, \\ xy = 10. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 + y^2 + 4x + 3 = 0. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x^2 + xy = 24, \\ xy + y^2 = 40. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x^2 + xy = 84, \\ x^2 - y^2 = 24. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x^2 - y^2 = 10, \\ 2x^2 + 5xy + 3y^2 = 14. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{8}{15}, \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{34}{225} \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ x + y = -2. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x^2 + 3xy = -5, \\ 2xy + y^2 = -16. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} x^4 - y^4 = 2401, \\ x^2 + y^2 = 49. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x^2 + 7xy = -104, \\ 5xy - y^2 = -129. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} x^5 + y^5 = 33, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x - y = 1, \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\frac{1}{20} \end{cases} \quad 14. \begin{cases} x^3 + y^3 = 109, \\ x^2y + xy^2 = -36. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x^3 - y^3 = m^3, \\ x - y = m. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 9, \\ 2x^2 - xy - 6y^2 = 4. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 78, \\ xy + x + y = 39. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x^2 - 7x + y^2 = 7y, \\ 3(x + y) = -2xy. \end{cases}$$

習題一三五

1. 甲從 A 到 B , 乙從 B 到 A , 二小時後兩人在距 A 20 里的地方相遇。而乙到 A 的時候, 甲距 B 還有 $13\frac{1}{2}$ 里。求 AB 的距離。

2. 兩數的差為 12, 牠們的立方的差為 7488; 這兩數是多少?

3. 兩數的和等於牠們的積, 也等於牠們的平方的差; 求這兩數。

4. 兩數的和等於牠們的平方的和, 又等於牠們的積的二倍; 這兩數是多少?

5. 兩個數的和為 8, 牠們的積為 25, 求這兩個數。

6. 求三個數; 前兩個的平方的和, 等於第一數的平方的三倍減去第二數的平方; 又等於第一數減去第二數加上第三數的二倍, 又等於這三個數的和。

7. 證明, 兩個實數的和同着牠們的倒數的和相乘的積, 不能比 4 小。

設兩個實數為 x 和 y , 乘積為 p ; 將 $\frac{x}{y}$ 當一個未知數,

解方程式。

8 在 $ax^2+bx+c=0$ 中, 若 $a+b=2$ 和 $a=2c$, 並且 8 是這方程式的一個根, a 必須等於多少?

第二十章

不盡根數

一 無理數和不盡根數

189. 像 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ 這些數,我們只有用很多(無論多少)位的小數來表示和牠們相近的值,至於正確的值,是沒有恰好的整數或分數可以表示的,這種數,稱為‘無理數’;這在從前已經說到過了。

又如圓周率 π 也是一個無理數,平常我們雖是假定牠等於 $\frac{22}{7}$ 或 3.1416,但這些值並不是恰好和牠相等的。

凡算術的數的平方根,只能找出牠的相近的值的時候,就叫‘不盡根數’。

在這裏應當注意,如 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{9}$ 的方根在代數上雖有一個正的和一個負的,但通常爲了便利起見,卻只用正的一個。

同樣的情形,若 $x+7$ 含有‘有理平方根’的時候,則 $\sqrt{x+7}$ 也是表示正的一個。

習題 一 三 六

下列的各對式子,那幾對是相等的?用幾個數,如

$a=16, b=9$, 或 $a=16, b=4$ 等代進去證明一下:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $\sqrt{ab}, \sqrt{a}\sqrt{b}$. | 2. $\sqrt{\frac{a}{b}}, \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$. |
| 3. $\sqrt{a+b}, \sqrt{a}+\sqrt{b}$. | 4. $\sqrt{a-b}, \sqrt{a}-\sqrt{b}$. |
| 5. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2, a+b$. | 6. $(\sqrt{a}\times\sqrt{b})^2, a\times b$. |
| 7. $a\sqrt{a}, \sqrt{a^3}$. | 8. $a\sqrt{b}, \sqrt{a^2b}$. |

190. 用根號的形式計算不盡根的時候,常將根號裏的數所含的完全方數的因子分出來。

例如:

$$\begin{aligned} \sqrt{32} &= \sqrt{4^2 \times 2} = 4\sqrt{2}, \\ \sqrt{27} &= \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}, \\ \sqrt[3]{16} &= \sqrt[3]{2^3 \times 2} = 2\sqrt[3]{2}, \\ \sqrt[3]{(a+b)^2(a^2-b^2)} &= \sqrt[3]{(a+b)^2(a-b)} \\ &= (a+b)\sqrt[3]{a-b}. \end{aligned}$$

191. 無理數的次數,在能夠消低的的時候,總須將牠消下來。

例如:

$$\begin{aligned} \sqrt[9]{8} &= (2^3)^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \\ \sqrt[9]{x^4} &= x^{\frac{4}{9}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}, \\ \sqrt[9]{64} &= (2^6)^{\frac{1}{9}} = 2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$

習 題 一 三 七

求下列各式的值(各平方根的值可由書末表中檢出,如 $3\sqrt{10} = \sqrt{90} = 9.487$):

1. $2\sqrt{2}$. 2. $2\sqrt{3}$. 3. $3\sqrt{3}$.

$$4. \quad 7\sqrt{10}. \quad 5. \quad 2\sqrt{5}. \quad 6. \quad 5\sqrt{5}.$$

簡化下列各式:

$$7. \quad \sqrt{8}. \quad 8. \quad \sqrt{12}. \quad 9. \quad \sqrt{18}.$$

$$10. \quad \sqrt{24}. \quad 11. \quad \sqrt{27}. \quad 12. \quad \sqrt{48}.$$

$$13. \quad \sqrt[3]{54}. \quad 14. \quad \sqrt[3]{128}. \quad 15. \quad \sqrt[3]{32}.$$

$$16. \quad \sqrt[3]{49}. \quad 17. \quad \sqrt[3]{125 a^3 b^3}. \quad 18. \quad \sqrt[3]{64}.$$

$$19. \quad \sqrt[10]{243}. \quad 20. \quad \sqrt[2]{16 a^{12}}. \quad 21. \quad \sqrt[5]{32 a^{10}}.$$

二 同類根式和同次根式

192. 定義. 根號部分完全相同的兩根式,叫做‘同類根式’;如 $3\sqrt{a}$ 和 $-5\sqrt{a}$, $a^2\sqrt[3]{4x^2y}$ 和 $2ab\sqrt[3]{4x^2y}$, 各為同類根式.

[例題 1] 簡單 $15\sqrt{2}+7\sqrt{2}-(11\sqrt{2}+9\sqrt{2}-6\sqrt{2})$.

$$\begin{aligned} 15\sqrt{2}+7\sqrt{2}-(11\sqrt{2}+9\sqrt{2}-6\sqrt{2}) &= 22\sqrt{2}-(11\sqrt{2}+3\sqrt{2}) \\ &= 22\sqrt{2}-14\sqrt{2}=8\sqrt{2}. \end{aligned}$$

[例題 2] 簡化 $\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{147}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{147} &= \sqrt{3^3}+\sqrt{2^4 \cdot 3}+\sqrt{7^2 \cdot 3} \\ &= 3\sqrt{3}+4\sqrt{3}+7\sqrt{3} \\ &= (3+4+7)\sqrt{3} \\ &= 14\sqrt{3}. \end{aligned}$$

習題 一 三 八

簡化下列各式:

1. $2\sqrt[3]{320} - 3\sqrt[3]{40}$.
2. $\sqrt{7} + 2\sqrt{48} + 3\sqrt{108}$.
3. $3\sqrt{1000} + 4\sqrt{50} + 12\sqrt{288}$.
4. $12\sqrt{72} - 3\sqrt{128}$.
5. $7\sqrt[3]{81} - 3\sqrt[3]{1029}$.
6. $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{686} + \sqrt[3]{16}$.
7. $7\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{432}$.
8. $\sqrt{4a^3b} + \sqrt{25ab^3} - (a-5b)\sqrt{ab}$
9. $c^5\sqrt{a^6b^7c^3} - a^5\sqrt{ab^7c^3} + b^5\sqrt{a^6b^2c^3}$.
10. $2\sqrt[3]{40} + 3\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{320} - 2\sqrt[3]{1372}$.

193. 兩根式的根指數相同的,叫做‘同次根式’,不同次的根式可以化成同次的根式.因爲

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{pn}{m}}}{a^{\frac{p(m-n)}{m}}} = \sqrt[p]{a^{\frac{pn}{m}}},$$

就是以一數同時乘某數的根指數和方指數,其值不變.

所以化幾個根式爲同次根式的方法,就是將各根式的根指數的最小公倍數作根指數,而相應地改變各式的方指數,使牠們的值不變.

[例題3] 比較 $\frac{2}{3}\sqrt{7}$ 和 $\frac{2}{5}\sqrt{10}$ 的大小.

$$\therefore \frac{2}{3}\sqrt{7} = \sqrt{\frac{28}{9}}, \frac{2}{5}\sqrt{10} = \sqrt{\frac{4}{5}}$$

而

$$\sqrt{\frac{28}{9}} = \sqrt{\frac{140}{45}}, \sqrt{\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{72}{45}}$$

$$\sqrt{\frac{140}{45}} > \sqrt{\frac{72}{45}}$$

$$\therefore \frac{2}{3}\sqrt{7} > \frac{2}{3}\sqrt{10}.$$

〔例題4〕化 \sqrt{ab} , $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[4]{a^2b^3}$ 爲同次根式。

\therefore 根指數爲2, 3, 4, 牠們的最小公倍數爲12,

$$\therefore \sqrt{ab} = 6 \times 2 \sqrt[12]{a^6b^6} = 12 \sqrt[12]{a^6b^6},$$

$$\sqrt[3]{a^2b} = 4 \times 3 \sqrt[12]{a^8b^4} = 12 \sqrt[12]{a^8b^4},$$

$$\sqrt[4]{a^2b^3} = 3 \times 4 \sqrt[12]{a^3b^9} = 12 \sqrt[12]{a^3b^9}.$$

194. 因爲

$$\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{b^p} = a^{\frac{n}{m}} \cdot b^{\frac{p}{m}} = (a^n \cdot b^p)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a^n b^p},$$

$$\text{和: } \sqrt[m]{a^n} \div \sqrt[m]{b^p} = a^{\frac{n}{m}} \div b^{\frac{p}{m}} = (a^n \div b^p)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\frac{a^n}{b^p}}.$$

所以同次根式可以相乘除, 而不同次根式化爲同次根式後, 也可以相乘除。

〔例題5〕求 $\sqrt[3]{4a}$ 和 $\sqrt{6x}$ 的積。

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4a} \cdot \sqrt{6x} &= \sqrt[6]{4^2 a^2} \cdot \sqrt[6]{6^2 x^2} \text{ (爲什麼?)} \\ &= \sqrt[6]{4^2 a^2 \cdot 6^2 x^2} = \sqrt[6]{2^7 \cdot 3^2 a^2 x^2} = 2 \sqrt[6]{54 a^2 x^2}. \end{aligned}$$

〔例題2〕求 $\sqrt[3]{3a} \div \sqrt{6b}$ 的值。

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3a} \div \sqrt{6b} &= \sqrt[6]{9a^2} \div \sqrt[6]{216b^3} \text{ (爲什麼?)} \\ &= \sqrt[6]{\frac{9a^2}{216b^3}} = \sqrt[6]{\frac{9 \cdot 216 a^2 b^3}{216^2 b^6}} = \frac{1}{6b} \sqrt[6]{1944 a^2 b^3}. \end{aligned}$$

習題 一 三 九

求下列各式的值(結果是分數時, 須將分母化成有

理數):

1. $2\sqrt{ax} \times \sqrt[3]{3a^2b} \times \sqrt{2bx}$.
2. $\sqrt[4]{a^3xy^3} \times \sqrt{a^2xy}$.
3. $3(4ab^2)^{\frac{1}{3}} \div (2a^3b)^{\frac{1}{2}}$.
4. $(2a^3b^2)^{\frac{1}{4}} \times (a^5b^3)^{\frac{1}{3}} \div (a^8b^5)^{\frac{1}{2}}$.
5. $\sqrt{2ab} \cdot \sqrt[3]{3ab^2} / \sqrt[6]{5ab^3}$.
6. $4\sqrt{12} \div 2\sqrt{3}$.
7. $\sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^7} \cdot \sqrt{\left(\frac{25}{64}\right)^6}$.
8. $\sqrt[3]{(4ab^2)^x} \cdot \sqrt[3]{(2a^2b)^x}$.
9. $(\sqrt[7]{a^3b})^8 \cdot (\sqrt[7]{a^3b^{12}})^4$.
10. $(7\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 3\sqrt{8} + 4\sqrt{20}) \times 3\sqrt{2}$.
11. $(\sqrt{6} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
12. $(3 + \sqrt{6} + \sqrt{15})(3 + \sqrt{6} - \sqrt{15})$.
13. $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$.
14. $(3 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5})$.
15. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$.
16. $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$.
17. $(1 + 2\sqrt{2})^2$.
18. $(10 - 3\sqrt{2})^2$.

三 共軛式

195. $\sqrt[3]{ab^2}$ 和 $\sqrt[3]{a^2b}$, $a - \sqrt{b}$ 和 $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 和 $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ 等兩式相乘的積為 ab , $a^2 - b$, $x - y$ 都是有理式。兩個無理式相乘得有理式時, 互稱為‘共軛式’。故 $\sqrt[3]{ab^2}$, $a - \sqrt{b}$, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ 的共軛式相應地是 $\sqrt[3]{a^2b}$, $a + \sqrt{b}$, $\sqrt{x} - \sqrt{y}$; 反過來後面這三式的共軛式相應地也就是前面的三個式子。

計算無理式時，總將分母化成有理式；化分母成有理式的方法，就是用分母的共軛式去乘分母和分子。

$$[\text{例題 1}] \quad \frac{5}{\sqrt{18}} = \frac{5}{\sqrt{3^2 \cdot 2}} = \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

$$[\text{例題 2}] \quad \frac{\sqrt{7} + \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{7} - \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{7 + 2 + 2\sqrt{7 \cdot 2}}{7 - 2} = \frac{9 + 2\sqrt{14}}{5}$$

$$[\text{例題 3}] \quad \frac{12}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{12}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}}$$

$$= \frac{12\{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}\}}{\{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}\}\{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}\}}$$

$$= \frac{12(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5} = \frac{12(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})}{2\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$$

$$= \sqrt{6}\sqrt{2} + \sqrt{6}\sqrt{3} + \sqrt{6}\sqrt{5}$$

$$= 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}$$

習題一四〇

化下列各式的分母爲有理式：

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. $\frac{3}{\sqrt{8}}$

3. $\frac{6}{\sqrt{12}}$

4. $4\sqrt{\frac{3}{2}}$

5. $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$

6. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$

7. $\frac{2}{\sqrt{5}-1}$

8. $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

9. $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 10. $\frac{7}{2\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ | 11. $\frac{6}{5-2\sqrt{6}}$ |
| 12. $\frac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{6}}$ | 13. $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ |
| 14. $\frac{4-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ | 15. $\frac{a+b}{a-\sqrt{b}}$ |
| 16. $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$ | 17. $\frac{7+2\sqrt{10}}{7-2\sqrt{10}}$ |
| 18. $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ | |

習 題 — 四 —

簡單下列各式：

- $6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\frac{3}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{6}$.
- $2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}$.
- $6\sqrt{12}+3\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}$.
- $3\sqrt{2}+4\sqrt{8}-\sqrt{32}$.
- $8\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}$.
- $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{1}{8}}$.
- $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{8}+\sqrt{12}-\sqrt{18}-\sqrt{27}$.
- $\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{10}\times\sqrt{12}$.
- $4\sqrt{1+a^2}-\sqrt{9+9a^2}-2\sqrt{b^2+ab^2}$.
- $\sqrt[3]{9x^2}\cdot\sqrt{15x}$.

12. $(\sqrt{8}-2)(\sqrt{2}+1)$.

13. $(7+2\sqrt{6})(9-5\sqrt{6})$.

14. $(7-2\sqrt{3})(7+2\sqrt{3})$.

15. $\frac{7}{\sqrt{8}+2}$.

16. $\frac{1+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

17. $\frac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

18. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

19. $\frac{5+3\sqrt{3}}{5-3\sqrt{3}}$.

20. $\frac{5-3\sqrt{5}}{5+3\sqrt{5}}$.

21. $\frac{3\sqrt{5}-4}{2\sqrt{5}+3}$.

22. $\left(\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{10}}{2\sqrt{3}+\sqrt{10}}\right)^2$.

23. $\frac{1+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

24. $\frac{2-\sqrt{6}}{3+\sqrt{2}+\sqrt{6}}$.

25. $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

26. $\frac{1}{\sqrt{x+5}-2}$.

27. $\frac{1}{\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

28. $\frac{1}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{3x+8}}$.

29. $\frac{\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x+3}}$.

30. 證明下列方程式,那幾個所給的 x 的值是對的:

(i) $x^2-4x+1=0$, $x=2+\sqrt{3}$.

(ii) $x^2-10x+13=0$, $x=5-2\sqrt{3}$.

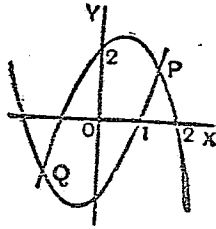
(iii) $x^3-9x^2+21x-13=0$, $x=4-\sqrt{3}$.

(iv) $2x^3+3x^2-4x+1=0$, $x=\sqrt{2}-1$.

(v) $x^4 - 18x^2 + 1 = 0, \quad x = \sqrt{5} + \sqrt{2}.$

(vi) $x^4 + 4x^3 + 6 = 5x^2 + 8x, \quad x = \sqrt{7} - 2.$

31. $(2-x)(x+1)$ 和 $(x+2)(x-1)$ 的曲線, 如第 22 圖所示, 試用代數的方法求兩曲線的交點 P, Q 的坐標。



第 22 圖

第二十一章

無理方程式

一 無理式和有理式

196. [問題] 一直角三角形的周圍長15寸,有一直邊長3寸,求他一直邊的長。

設他一直邊的長為 x 寸。

依Pythagoras的定理,則斜邊的長為 $\sqrt{x^2+3^2}$ 寸。

∴周圍的長為 $3+x+\sqrt{x^2+3^2}$ (寸)。

$$\therefore 3+x+\sqrt{x^2+3^2}=15 \dots\dots\dots (i).$$

一個像這樣的方程式,其中有一個或幾個代數式的根數的,就稱為‘無理方程式’。

這方程式的左邊的式子,稱為‘無理式’。

這裏應當注意的,就是像 $\sqrt{2}(x+7)+\sqrt{3}(x-5)$ 這樣的式子,因為只含有數字根數,並不含有代數式的根數,還是稱為‘有理式’的。

197. 若無理方程式中,只含有一個平方根數,這很容易化去;只要單將根數列在一邊,然後兩邊都平方起來,就可以了。

$$\begin{aligned} \therefore \text{從 (i),} \quad & \sqrt{x^2+3^2}=12-x. \\ \text{兩邊平方,} \quad & x^2+9=144-24x+x^2. \\ \therefore \quad & 24x=135. \\ \therefore \quad & x=5\frac{5}{8}. \end{aligned}$$

\therefore 他一邊的長是 $5\frac{5}{8}$ 寸。

〔覆證〕 兩直邊爲 $5\frac{5}{8}$ 寸和 3 寸，

$$\begin{aligned} \therefore \text{斜邊} &= \sqrt{\left(\frac{45}{8}\right)^2+9} = \sqrt{\frac{2025+576}{64}} \\ &= \sqrt{\frac{2601}{64}} = \frac{51}{8} = 6\frac{3}{8} \text{ (寸)}. \end{aligned}$$

$$\therefore \text{周圍} = (6\frac{3}{8} + 5\frac{5}{8} + 3) \text{ 寸} = 15 \text{ 寸}.$$

198. 倘若一個方程式中含有兩個像 $\sqrt{2x-4}$ 和 $\sqrt{x+5}$ 這類的無理式，那就不能同上例一樣一次便可化成有理式；舉一個例如下：

$$\text{〔例題〕 解 } \sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1 \dots\dots\dots \text{(i).}$$

兩邊平方，

$$2x-4+x+5-2\sqrt{(2x-4)(x+5)}=1 \dots\dots\dots \text{(ii).}$$

$$\therefore 3x=2\sqrt{(2x-4)(x+5)} \dots\dots\dots \text{(iii).}$$

$$\text{再兩邊平方,} \quad 9x^2=4(2x-4)(x+5) \dots\dots\dots \text{(iv).}$$

$$\therefore x^2-24x+80=0 \dots\dots\dots \text{(v).}$$

$$\text{即} \quad (x-20)(x-4)=0 \dots\dots\dots \text{(vi).}$$

$$\therefore x=20 \text{ 或 } 4.$$

〔又可照下面的方法計算：〕

任移一個根數到右邊,

$$\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}.$$

兩邊平方, $2x-4=1+x+5+2\sqrt{x+5}$.

$$\therefore x-10=2\sqrt{x+5}.$$

再兩邊平方, $x^2-20x+100=4(x+5)$.

$$\therefore x^2-24x+80=0.$$

以下同上法一樣.]

但,就是計算的方法一點沒有錯誤,也不能決定20和4一定是原方程式的根,非加以覆證不可;這是必須要注意的。

[覆證] $x=20$, 左邊 $=\sqrt{36}-\sqrt{25}=6-5=1=$ 右邊.

$x=4$, 左邊 $=\sqrt{4}-\sqrt{9}=2-3=-1\neq$ 右邊.

\therefore 只有 $x=20$ 是適合於原方程式的。

二 增 根

199. 依前章第189節所述 $\sqrt{\quad}$ 只表示正的有理數,所以4不是原方程式的根,而是‘增根’。在第十六章第153節,我們曾經講過解分式方程式得出‘增根’的原因。這裏怎樣也會生出增根來呢?讓我們來搜尋發生這新的根的步驟吧。

從末了倒起檢查上去,就可看出來 $x=4$ 從(vi)到(ii)都適合的,只是不適合於(i)。所以第一步就得注

意,這是表明將方程式兩邊平方是一個不安全的方法。

200. 在更明晰地研究上節的問題以前,我們來注意下面的有趣味的謬誤。

設 $a=b$,

於兩邊乘以 a , $a^2=ab$.

兩邊減去 b^2 , $\therefore a^2-b^2=ab-b^2$.

$\therefore (a-b)(a+b)=b(a-b)$.

$\therefore a+b=b$.

$\therefore 2b=b$.

$\therefore 2=1$.

這個謬誤是在那裏呢?

三 可逆的步驟

201. 首先還得重來審察我們已經用過的解方程式的方法。

第一步,考察覆證一個方程式的根的結果,這根是適合於原方程式嗎?倘若適合的,就是一個根,不然,無論我們是用什麼方法得來的,就都不是根。

第二,若從 x 等於假定的根起,能夠毫無疑義地回證到原方程式,這假定的根一定適合於原方程式。

202. 現在來審察我們所用以解方程式的各種

步驟,那些是可以倒回去的,那些是不定的。

各種步驟如下:

(a) 方程式的兩邊加上(或減去)同一的(或相等的)數;

(b) 方程式的兩邊乘以(或除以)同一的(或相等的)數;

(c) 方程式的兩邊平方;

(d) 方程式的兩邊開方。

(a) 是很明白地可以倒回的。

(b) 一看好像是可倒回的,但我們必須要研究乘數是0的這種情況。

即如 $3 \times 0 = 5 \times 0$, 但這不能跟着就得 $3 = 5$; 更一般地, $x \times 0 = a \times 0$, 不能跟着就得 $x = a$ 。

在我們用0以外算術的數去乘或除的時候,這種困難是不會有的;但若用的是代數的式子,就必須留意牠有等於0的可能性了。

設有一個方程式 $x = a$, 並且用 $x - b$ 去乘兩邊; 則 $x(x - b) = a(x - b)$; $\therefore (x - b)(x - a) = 0$, $\therefore x = b$ 或 $x = a$ 。

所以,倘若一個方程式的兩邊乘以同一的代數式,可以生出新的根來;即是使乘式等於0得出來的。

因此,消去一個方程式的分母的時候,必須留意到

生出新的根。

再,設 $x(x-b)=a(x-b)$; 我們就能說 $x=a$ 嗎? 不, 我們應當說 $x=a$ 或 $x-b=0$ 。

所以, 倘若一個方程式的兩邊除以同一的代數式, 可以失去些原方程式的根, 即是使除式等於0得出來的。

(c) 若將方程式 $x=a$ 的兩邊平方, 則得 $x^2=a^2$, 這個倒回去便得 $x=\pm a$; 所以平方也要生出新的根來。

這是很有興味的, 我們注意一下, 這不過屬於 (b) 的特殊情況; $x=a$ 實即是 $x-a=0$, 而 $x^2-a^2=0$ 即是 $(x-a)(x+a)=0$ 。

所以我們知道, 將方程式的兩邊平方, 總可產生新的根。

(d) 若將方程式 $x^2=a^2$ 兩邊開平方, 則得 $x=\pm a$, 就是 $x-a=0$ 和 $x+a=0$, 牠可以倒回到 $x^2-a^2=0$, 即 $x^2=a^2$ 。所以將方程式的兩邊開平方是一個妥當的方法, 平方根可以是正的或負的。

203. 在這裏, 有好許多情形都可有新的根加進去, 所以必須將所得的根代入原方程式去覆證。我們再從分式方程式說起。

〔例題1〕 解 $\frac{1}{(x-3)(x-2)} + \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{3}{x-3}$ 。

用 $(x-3)(x-2)(x-1)$ 乘兩邊,

$$x-1+x-3=3(x-2)(x-1).$$

[注意在這一步,可以生出新的根 3, 2, 1 中的一個或更多的來.]

$$\therefore 2x-4=3x^2-9x+6.$$

$$\therefore 3x^2-11x+10=0.$$

$$\therefore (x-2)(3x-5)=0.$$

$$\therefore x=2 \text{ 或 } \frac{5}{3}.$$

這個根 $\frac{5}{3}$ 是不能由各步中加進去的,可以不必覆證;但必須覆證這個根 2.

右邊 $= -3$, 左邊 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$, 這是不能理會的.

\therefore 唯一的解答是 $x = \frac{5}{3}$.

[例題 2] 解 $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = \sqrt{2x+1}$.

兩邊平方, $x+x+1+2\sqrt{x^2+x}=2x+1$.

$$\therefore 2\sqrt{x^2+x}=0.$$

$$\therefore \sqrt{x^2+x}=0.$$

兩邊平方, $x^2+x=0$.

$$\therefore x(x+1)=0.$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } -1.$$

[覆證] $x=0$, $\sqrt{0} + \sqrt{0+1} = \sqrt{2 \times 0 + 1}$, $1=1$.

$x=-1$, $\sqrt{-1} + \sqrt{-1+1} = \sqrt{2(-1)+1}$, $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$.

所以 $x=0, -1$ 都是原方程式的根.

習題 一 四 二

解下列各方程式：

1. $x + \sqrt{3x-14} = 6.$ 2. $x + 1 + 3\sqrt{x-1} = 0.$

3. $3x - \sqrt{x^2-24} = 16.$ 4. $\sqrt{x^2-3x-1} + 7 = 2x.$

5. $\sqrt{12+x} = 2 + \sqrt{x}.$ 6. $\sqrt{7x} - \sqrt{3x+1} = 1.$

7. $\sqrt{8x+5} - 2\sqrt{2x-1} = 1.$

8. $\sqrt{\frac{1+x}{2}} + \sqrt{\frac{1-x}{2}} = 5x.$

9. $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}.$

10. $\sqrt{x+7} + \sqrt{9x+7} = 4\sqrt{2x}.$

11. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \sqrt{5}.$

12. $2\sqrt{6+x} - \sqrt{28-x} = \sqrt{4-x}.$

13. $\sqrt{14x+9} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+1} = 0.$

14. $\sqrt{x+16} + \sqrt{x-11} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x-4}.$

15. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{10}{3}$

16. 解 $\sqrt{3+x} \pm \sqrt{x} \pm \sqrt{4-3x} = 0$, 並決定相應於所得的根的符號。

17. 直角三角形的斜邊比二直邊中的一邊長一寸, 而周圍長 56 寸. 求各邊的長。

18. 直角三角形的二直邊的長相差 7 寸, 周圍長 30 寸. 求各邊的長.

四 二次形的無理方程式

204. 像 $x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} + 6 = 0$ 這樣的方程式, 因為只含兩個 x 的乘方的項, 並且一個的指數恰是他一個的指數的二倍, 所以稱為‘二次形的無理方程式’.

若設 $x^{\frac{1}{3}} = y$, 則 $x^{\frac{2}{3}} = y^2$, 並且得一個二次方程式,

$$y^2 + 5y + 6 = 0.$$

解這個方程式, $y = -2$, 和 $y = -3$.

$$\therefore x^{\frac{1}{3}} = -2, \text{ 和 } x^{\frac{1}{3}} = -3.$$

兩邊三乘方, $x = -8$, 和 $x = -27$.

〔覆證〕 將 $x = -8$ 代入原方程式,

$$(-8)^{\frac{2}{3}} + 5(-8)^{\frac{1}{3}} + 6 = 0.$$

即 $(-2)^2 + 5(-2) + 6 = 0$,

$$4 - 10 + 6 = 0.$$

$\therefore x = -8$ 是原方程式的根.

將 $x = -27$ 代入原方程式,

$$(-27)^{\frac{2}{3}} + 5(-27)^{\frac{1}{3}} + 6 = 0.$$

即 $(-3)^2 + 5(-3) + 6 = 0$,

$$9 - 15 + 6 = 0.$$

$\therefore x = -27$ 也是原方程式的根.

〔例題〕 解 $x^{\frac{3}{2}} - 7x^{\frac{1}{2}} = 8$.

因指數 $\frac{3}{2}$ 是指數 $\frac{1}{2}$ 的二倍; 所以這個方程式是二次形的。

設 $x^{\frac{1}{2}} = y$, 則 $x^{\frac{3}{2}} = y^2$.

解 $y^2 - 7y = 8$,

$$y = 8, y = -1.$$

故 $x^{\frac{1}{2}} = 8$ 和 $x^{\frac{1}{2}} = -1$ (i).

兩邊開立方, $x^{\frac{1}{4}} = 2$ 和 $x^{\frac{1}{4}} = -1$.

兩邊四乘方, $x = 16$ 和 $x = 1$.

〔覆證〕 將 $x = 16$ 代入原方程式,

$$(16)^{\frac{3}{2}} - 7(16)^{\frac{1}{2}} = 8.$$

$$(4)^3 - 7(2)^3 = 8.$$

$$64 - 56 = 8.$$

$\therefore x = 16$ 是原方程式的根。

將 $x = 1$ 代入原方程式,

$$(1)^{\frac{3}{2}} - 7(1)^{\frac{1}{2}} = 8.$$

$$1 - 7 \neq 8.$$

$\therefore x = 1$ 不是原方程式的根。

習題 一 四 三

解下列各方程式:

$$1. x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} + 10 = 0.$$

2. $8x^{\frac{3}{2}} - 65x^{\frac{3}{2}} + 8 = 0.$
3. $x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} + 2 = 0.$
4. $(x+1)^{\frac{2}{3}} - 11(x+1)^{\frac{1}{3}} + 30 = 0.$
5. $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} + 132 = 0.$
6. $y^{\frac{3}{5}} + 19y^{\frac{3}{10}} - 216 = 0.$
7. $(x+1)^3 - 60(x+1)^{\frac{3}{2}} = 256.$
8. $x^{\frac{4}{5}} + 6x^{\frac{2}{5}} - 55 = 0.$

五 $a \pm 2\sqrt{b}$ 的平方根

205. 因為 $(\sqrt{3} \pm \sqrt{2})^2 = 3 \pm 2\sqrt{6} + 2 = 5 \pm 2\sqrt{6}$, 隨着
 就得 $\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$.

首先注意, 5 是 2 同 3 的和, 6 是牠們的積. 這就暗示出下面的求 $a \pm 2\sqrt{b}$ 的平方根的法則:

找出兩個牠們的和等於 a , 並且積等於 b 的數. 這兩個數的平方根的和 (或差) 就是所求的平方根.

[例題 1] 求 $8 + \sqrt{60}$ 的平方根.

將原式寫成 $a + 2\sqrt{b}$ 的形式, 得 $8 + 2\sqrt{15}$.

5 同 3 的和等於 8, 並且牠們的積等於 15.

$$\therefore \sqrt{8 + \sqrt{60}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}.$$

[例題 2] 求 $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$ 的值.

將原式寫成 $a-2\sqrt{b}$ 的形式,得 $6-2\sqrt{8}$.

4 同 2 的和等於 6, 並且牠們的積等於 8.

$$\sqrt{6-4\sqrt{2}} = \sqrt{4} - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

習題一四四 (口答)

求下列各式的平方根:

- | | | |
|---------------------|----------------------------|----------------------|
| 1. $3+2\sqrt{2}$. | 2. $4-2\sqrt{3}$. | 3. $7+2\sqrt{10}$. |
| 4. $8-2\sqrt{7}$. | 5. $9-2\sqrt{14}$. | 6. $7-4\sqrt{3}$. |
| 7. $9+2\sqrt{20}$. | 8. $9+6\sqrt{2}$. | 9. $4-\sqrt{12}$. |
| 10. $7+\sqrt{48}$. | 11. $2a+2\sqrt{a^2-b^2}$. | 12. $14+6\sqrt{5}$. |

206. 前節的方法,全仗視察,若遇到較複雜的數
有時就很困難,現在再來講一般的方法。

(例題 3) 求 $7+4\sqrt{3}$ 的平方根。

設 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

則 $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

兩式相乘, $x - y = \sqrt{49 - 48}$.

$$\therefore x - y = 1.$$

但 $x + y = 7$.

$$\therefore x = 4, y = 3.$$

$$\therefore \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\therefore \sqrt{7+4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

習題一四五

求下列各式的平方根：

1. $15+6\sqrt{6}$.
2. $17+4\sqrt{13}$.
3. $10+2\sqrt{21}$.
4. $16+2\sqrt{55}$.
5. $20-8\sqrt{6}$.
6. $98-42\sqrt{5}$.
7. $13-2\sqrt{30}$.
8. $11-6\sqrt{2}$.
9. $14-4\sqrt{6}$.
10. $38-12\sqrt{10}$.
11. $103-12\sqrt{11}$.
12. $57-12\sqrt{15}$.
13. $78-12\sqrt{48}$.
14. $3\frac{1}{2}-\sqrt{10}$.
15. $x-\sqrt{x^2-1}$.
16. $a^2-2b\sqrt{a^2-b^2}$.
17. $(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{ab}$.
18. $a^2+4b-4a\sqrt{b}$.
19. $x+2y+2\sqrt{2xy}$.
20. 證明 $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

第二十二章

比 和 比 例

一 比

207. 單位和量數. 一個人的高,可以說成5.1尺或1.53公尺;但無論怎樣的說法,必須要選擇一個‘單位’(尺或公尺);就是和被量的量同類的一個標準量;並且必須有一個數(5.1, 1.53),即被量的量所含的單位的數;這個數稱為‘量數’。所以,一定的量都可用一個單位和一個量數來說明牠。

208. 比. ‘比’這個詞,可以說是我們每天都用得到的。通常所說的,這間房子的大有那間的三倍,或這個人的年紀有那個人的年紀的二倍;就是說這兩間房子的比為3比1,這兩個人的年紀的比為2比1。我們用慣了的布長幾尺,米重幾斤,根本地說也是一尺布或一斤米的若干倍的意思,所以還是一種比。不過平日為實用的便利,總把比的後一個量作為標準的1,比的形式較簡單些,久而久之,成了習慣,便連比的

形式,也不明顯罷了。

照算術上的方法,三斤鹽和兩斤鹽的重量的比為3比2,寫作3:2.但算術地說法,這種關係也可說是,第一種鹽的重量是第二種的 $\frac{3}{2}$.這兩種說法,意義雖是截然不同,在計算上卻毫無差別;因此,常常可用分數的計算去代比的計算。

所以, a 斤米和 b 斤米的比,這個值可用 $\frac{a}{b}$ 去表示;而 b 斤米和 a 斤米的比就是 $\frac{b}{a}$,恰是前一個比的倒數。

〔注意〕(a) 非同類量不能相比。

例如,三尺布和五斤米是不能成比的。

(b) 在用分數表示比值以前,兩個相比的量必須用同樣的單位表示。

例如,3丈和4尺的比,是30尺和4尺的比,就是 $\frac{15}{2}$ 。

209. 比的前後項用相等的數去乘,比值不變。

因此, $a:b$ 等於 $ma:mb$;因為 $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$.若 a, b 代的是4,5,那末4:5就等於 $4x:5x$.

〔例題〕弟兄兩人年齡的比為2:3,8年以後的比為3:4.他們各人現年多少?

設他們的現年為 $2x, 3x$.

則8年以後,他們的年齡為 $2x+8, 3x+8$,

$$\therefore \frac{2x+8}{3x+8} = \frac{3}{4}$$

兩邊乘以 $4(3x+8)$,

$$4(2x+8) = 3(3x+8).$$

$$\therefore 8x+32 = 9x+24.$$

$$\therefore 8 = x.$$

而他們的現年爲 16, 24.

〔覆證〕 8 年以後他們倆的年齡將爲 24, 32, 而

$$\frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

習 題 一 四 六

1. 某次試驗,某班及格的人數和不及格的人數的比爲 3:2. 若及格標準降低 12 名,則他們的比變成 21:10. 原來有多少人及格?

2. 甲所有錢與乙所有錢的比爲 5:4, 若甲給乙 7 元,則兩人所有的比爲 2:3. 兩人原有各多少元?

3. 兩列火車速度的比爲 5:3; 同走 75 里路,若較快的車遲半小時開,則可早到半小時. 求兩車的速度.

4. 兩數的比爲 10:3. 若兩數都加 10, 則牠們的比爲 1:2. 求這兩個數.

5. 若 $x:y=3:7$, 並且 $4x+2y=6$, 求 x 和 y .

二 齊次式和齊次方程式

210. 齊次式. 如 $5x-4y$, $3x^2-2xy-y^2$, $x^3+3x^2y-5xy^2-y^3$ 等, 各項對於 x, y 說, 次數相等的式子, 叫做‘齊次式’. 因了次數的不同, 如第一式, 叫‘一次齊次式’; 第二式, 叫‘二次齊次式’; 第三式, 叫‘三次齊次式’等.

齊次式又可變形爲:

$$\begin{aligned} 5x-4y &\equiv x\left\{5-4\frac{y}{x}\right\} \\ &\equiv x\left\{5-4\left(\frac{y}{x}\right)\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^2-2xy-y^2 &\equiv x^2\left\{3-2\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x^2}\right\} \\ &\equiv x^2\left\{3-2\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3+3x^2y-5xy^2-y^3 &\equiv x^3\left\{1+3\frac{y}{x}-5\frac{y^2}{x^2}-\frac{y^3}{x^3}\right\} \\ &\equiv x^3\left\{1+\left(\frac{y}{x}\right)-5\left(\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right)^3\right\}. \end{aligned}$$

就是 x, y 的齊次式可變成 x 的乘方和 $y:x$ 的函數的積.

[練習] 將前三式變成 y 的乘方和 $x:y$ 的函數的積.

211. 齊次方程式. 由一個齊次式等於零所成的方程式,稱為‘齊次方程式’,而一個方程式,可以變成這種形式的,也一樣地屬於這一類.

例如 $x^2+xy+y^2=0$ 是二次齊次方程式.

而 $x^3+3xy^2=3x^2y+y^3$ 是三次齊次方程式,因為牠可以變成 $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=0$.

但 $x^2+y^2=x^3+y^3$ 雖兩邊各是齊次式,卻不是齊次方程式.

212. 像這樣的方程式,

$$x^2+xy-2y^2=0 \dots\dots\dots (i).$$

不能由牠求出 x 和 y 的值來.

設將牠寫成這樣的形式,

$$x^2\left\{1+\frac{y}{x}-2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right\}=0 \dots\dots\dots (ii).$$

結果 $x^2=0$,

或 $1+\frac{y}{x}-2\left(\frac{y}{x}\right)^2=0 \dots\dots\dots (iii).$

現在,若 $x=0$, 雖適合於 $x^2=0$ 這個方程式,在 (iii) 中卻沒有意義;但假定 $x \neq 0$, 那末又不適於方程式 $x^2=0$ 了. 所以,由原來的方程式是求不出 x 和 y 的值的,但是可以求出 $\frac{y}{x}$ 這個比的值.

任何二個變數的齊次方程式,可成爲求這兩個變數的比的方程式.

在現在的例, $\left\{1+2\left(\frac{y}{x}\right)\right\}\left\{1-\left(\frac{y}{x}\right)\right\}=0$.

$$\therefore \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \text{ 或 } 1.$$

這個結果也可由下面的方法得出來:

$$\therefore x^2 + xy - 2y^2 = 0.$$

$$\therefore (x+2y)(x-y) = 0.$$

$$\therefore x = -2y \text{ 或 } y.$$

$$\therefore \frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \text{ 或 } 1.$$

習 題 一 四 七

從下列齊次方程式求 $\frac{y}{x}$ 的值:

1. $x+5y=0$. 2. $2x-y=y-3x$.

3. $y^2-3xy+2x^2=0$.

4. $(x-2y)(x-y)=(x-y)(2y-3x)$.

5. $(x+3y)^2=(y-2x)^2$.

6. $(5x-4y):(3x-2y)=4:1$.

7. $\frac{3x^2-33y^2}{x-4y}=x+7y$. 8. $\frac{2}{x^2}-\frac{5}{xy}-\frac{7}{y^2}=0$.

9. $\frac{1}{3x-5y}+\frac{1}{2x+3y}=0$.

10. 從下面的兩個齊次方程式求 $x:z$ 和 $y:z$ 的值:

$$x - 2y + 3z = 0,$$

$$2x + 3y - z = 0.$$

11. 從下面的兩個齊次方程式求 $z:x$ 和 $y:x$ 的值:

$$2x - 5y + z = 0,$$

$$x - 2y - 2z = 0.$$

213. 同次的兩個齊次式的比。若是已經知道 $x:y$ 的值,我們就能夠求出同次的 x 和 y 的兩個齊次式的比值來。

例如 $x:y=5:3$, 求 $(5x-y)^2:(3x+2y)(x-3y)$ 的比。

設 $x=5a$, $y=3a$; 則

$$\begin{aligned} \frac{(5x-y)^2}{(3x+2y)(x-3y)} &\equiv \frac{(25a-3a)^2}{(15a+6a)(5a-9a)} \\ &\equiv \frac{22^2 a^2}{21 \times (-4)a^2} \\ &= -\frac{121}{21} \quad [a \text{ 已消去}] \end{aligned}$$

這裏消去 a 並不是偶然的,因為分子和分母既是同次的齊次式,所以總可消去。

習題 一 四 八

1. 若 $a:b=4:7$, 求下列兩比的值:

(i) $ab:(b^2-a^2)$. (ii) $\sqrt{7ab}:(3b-2a)$.

2. 若 $x:y:z=2:3:4$, 求下列兩比的值:

$$(i) (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) : (x + y + z)^3.$$

$$(ii) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} : \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}.$$

三 比例

214. 若四個量 A, B, X, Y 有這樣的關係, $A : B = X : Y$, 就說牠們成‘比例’或牠們是‘比例的’.

A, Y 叫做外項; B, X 叫做內項.

這裏應當注意, A, B 必須是同類量, X, Y 也必須是同類量; 但 A, X 卻可以不是同類量. 因此,

$$3 \text{ 尺} : 5 \text{ 尺} = 6 \text{ 斤} : 10 \text{ 斤}$$

是可以的; 但

$$3 \text{ 尺} : 6 \text{ 斤} = 5 \text{ 尺} : 10 \text{ 斤}$$

就不可以. 因為這已經沒有‘比’的意思了.

215. 因為 $a : b$ 和 $c : d$ 可用 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 表示, 所以 $a : b = c : d$ 也可用 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 表示. 由此可以證明下列各比例的性質.

(a) 比例的兩個內項的積, 等於牠的兩個外項的積.*

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

* 這幾個性質是限於 a, b, c, d 都是數而說的, 若是量那就不能這樣說了, 為什麼?

兩邊乘以 bd , $\therefore ad=bc$.

由此,無論知道那三項,其餘的一項都可以求出來。

(b) 比例的兩個內項或兩個外項或內項和外項都可以交換。

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \dots\dots\dots (i).$$

兩邊乘以 bd , $\therefore ad=bc \dots\dots\dots (ii).$

(ii) 的兩邊除以 cd ,

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad \text{[內項交換.]}$$

(ii) 的兩邊除以 ab ,

$$\therefore \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad \text{[外項交換.]}$$

用 (i) 除 $1=1$,

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad \text{[內外項交換.]}$$

(c) 若 $a:b=c:d$, 則 $a+c:b+d=a:b=c:d$.

因爲,若設 $a:b=c:d=k$,

則 $a=bk, c=dk$.

而 $a+c=bk+dk=(b+d)k$.

$$\therefore a+c:b+d=(b+d)k:(b+d)=k.$$

$$\therefore a+c:b+d=a:b=c:d.$$

更一般地,若 $a:b=c:d=e:f=\dots$, 則

$$a : b = c : d = e : f = \dots = \frac{\lambda a + \mu c + \nu e + \dots}{\lambda b + \mu d + \nu f + \dots}$$

習題一四九

1. 若 $\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$ 和 $2x - 3y + 4z = 10$, 求 x, y 和 z .

2. 若 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, 證明

$$\sqrt{\frac{2x^2 + 3y^2}{2a^2 + 3b^2}} = \frac{x+y}{a+b}$$

3. 若 $x : a = y : b$, 證明

$$\sqrt[3]{\frac{5x^3 + 7y^3}{5a^3 + 7b^3}} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

4. 若 a, b, c, d 是四個成比例的數, 證明下列各式:*

$$(i) \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$(ii) \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$(iii) \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

5. 若 a, b, c, d 表示量, 前題的關係還能成立嗎?

6. 若 $a : b = c : d$, 證明下列各式:

* 本題所證明的, 也是比例的重要性質。

$$(i) \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \quad (ii) \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

$$(iii) \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} \quad (iv) \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3}$$

$$(v) \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n} \quad (vi) \frac{b^4}{a^2b^2} = \frac{c^2d^2}{d^4}$$

$$(vii) b(a+b-c-d) = (a+b)(b-d).$$

7. 5, 7, 10 各加上一個什麼同樣的數, 就成比例?

8. 若 $a:b=b:c=c:d$, 證明 $ad^2=c^3$.

9. 若 $p:q:r=(a+2b+2c):(b+2c+2a):(c+2a+2b)$, 證明 $a:b:c=(2q+2r-3p):(2r+2p-3q):(2p+2q-3r)$.

第二十三章

變數法

一 正變

216. [例題] 某甲一分鐘能寫十個字,試求他十分鐘以內,每分鐘的末尾一共寫了多少字?

這很容易明白,第一分鐘的末尾,只寫了10個字。

第二分鐘的末尾,他已寫過兩分鐘,所以一共寫了20個字。

第三分鐘的末尾,他已寫過三分鐘,所以一共寫了30個字。

第四分鐘的末尾,他已寫過四分鐘,所以一共寫了40個字。

照樣推下去,十分鐘以內,每分鐘的末尾一共寫了的字數都很容易求得;試將下表中空着的地方填好。

時 間	1分	2分	3分	4分	5分	6分	7分	8分	9分	10分
寫了的字數	10	20	30	40						

217. 觀察前節的表,回答下面的問題:

(i) 時間加多,字數加多嗎?

(ii) 時間減少呢?

(iii) 每分鐘末尾所寫過的字數和所寫過的時間的分數的比是什麼? 這些比都相等嗎?

218. 由前兩節,我們知道這樣的事實,某甲每分鐘的末尾所寫過的字數是隨了他寫字的時間變的;而且, (i) 時間加多,字數跟着加多,時間減少,字數跟着減少; (ii) 每分鐘末尾所寫過的字數和所寫過的時間的比都是10,換句話說,就是各個比全是相等的。

這種情形,我們又可以這樣說,某甲每分鐘末尾所寫過的字數是依一定的比(10)跟着他所寫過的時間變的;這叫做所寫過的字數跟了所寫過的時間‘正變’。一般地說,便是:

設有 A 和 B 兩個量, A 總是依照一定的比跟着 B 變,這就叫 A 跟了 B 正變;我們用下面的式子表示,

$$A \propto B \dots\dots\dots(1).$$

因為 A 比 B 是一個定數,假如用 K 代這個定數,那末上面的式子又可以寫成下面的形式,

$$A = KB \dots\dots\dots(2).$$

在這式子中, A 和 B 是兩個變數, K 是一個定數,

所以我們叫 K 爲‘常數’。(2) 的兩邊若都用 B 去除, 便得

$$K = \frac{A}{B} \dots\dots\dots (3).$$

由此可知, A 跟着 B 正變的時候, 只要知道了 A 和 B 的一對值, 這個常數 K 就可以由 (3) 求出來了。求出了 K , 代進 (2) 去, A 和 B 的關係更非常明白, 因而知道了 B 就可以求 A , 知道了 A 也就可以求 B 。

219. [例題 1] 若 $y \propto x$, $x=3$, 則 $y=9$; $x=7$, $y=?$

$$\therefore y \propto x, \therefore y = kx.$$

將 3 代 x , 9 代 y , 則得 $9 = 3k$, $\therefore k = 3$.

而 $y = 3x$.

故若 $x=7$, 則 $y = 3 \times 7 = 21$.

[例題 2] A 由家出發, 每小時所走的里數相等, 若三小時走了二十七里, 則走五十四里, 要多少時間?

設 A 所走的時數爲 t , t 時所走的里數爲 d , 則

$$d \propto t, \text{ 即 } d = kt.$$

因 $t=3$, $d=27$, 故 $27 = 3k$,

$$\therefore k=9, \text{ 而 } d=9t.$$

故若 $d=54$, 則 $9t=54$,

$\therefore t=6$. 即 A 走五十四里要六小時。

習 題 一 五 〇

1. 若 $y \propto x$, $x=2$, 則 $y=3$; $x=10$, $y=?$ $y=\frac{1}{2}$, $x=?$

2. 若 $y \propto x$, $x=2$, 則 $y=5$; $x=5$, $y=?$, $y=6$, $x=?$

3. 若 $u \propto v$, $u=7$, 則 $v=5$; $v=3$, $u=?$ $v=\frac{1}{2}$, $u=?$
 $u=6$, $v=?$ $u=\frac{1}{3}$, $v=?$
4. 若 A 的平方跟着 B 的立方正變, 而 $B=4$, 則
 $A=3$; $B=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $A=?$
5. 圓的面積是跟着圓的半徑的平方正變的; 若半徑 14 寸的圓的面積為 616 方寸; 半徑 3 寸的圓的面積多少方寸?
6. 前題面積 $1\frac{3}{11}$ 方尺的圓的半徑是幾寸?
7. 甲以相等的速度從 A 走向 B , 4 小時走了 32 里, AB 相距 72 里, 幾小時甲可走到? 若他是上午八時動身的, 什麼時候他走到 B ?
8. 行星繞太陽一周所需的時間的平方跟着牠距太陽的距離的立方正變. 地球距太陽 149 百萬公里, 繞太陽一周約需 365 日; 金星距太陽 108 百萬公里, 牠繞太陽一周約需多少日?

二 反 變

220. 【例題 1】 A, B, C, D 四人同行 120 里, A 每小時行 15 里, B 每小時行 12 里, C 每小時行 10 里, D 每小時行 8 里; 各需若干小時可以到達?

A 每小時行 15 里, 走 120 里的路程所需的時間為

$$(120 \div 15) \text{ 小時} = 8 \text{ 小時.}$$

B 所需的時間是多少? C 所需的時間是多少? D 所需的時間是多少? 假如還有 E 每小時只能行 6 里, 他要若干小時纔可到達?

221. 就前節例題中各人的速度和所需的時間仔細比較, 回答下面的問題:

(i) 速度大的比速度小的, 那一個所需的時間大?

(ii) 那末速度和時間是不是一同變大, 一同變小的?

(iii) A, B, C, D, E 各人每小時所行的里數的倒數是什麼?

(iv) A, B, C, D, E 各人所需的小時數和各人每小時所行的里數的倒數的比是什麼? 都相等嗎?

222. 由前兩節可知 A, B, C, D, E , 各人所需的小時數是依一定的比 (120) 跟着牠們每小時所走的里數的倒數變的; 這種變法, 叫做‘反變’。一般地說, 便是:

設有 A 和 B 兩個量, A 總是依照一定的比跟着 B 的倒數變, 這就叫 A 跟了 B 反變。我們用下面的式子表示:

$$A \propto \frac{1}{B} \dots\dots\dots (1).$$

因爲 A 比 $\frac{1}{B}$ 是一個定數, 假如用 K 代這定數, 那末

(1) 就可寫成下面的形式,

$$A = \frac{K}{B} \dots\dots\dots (2).$$

這式的 K 也是個常數,若用 B 乘(2)的兩邊,便得

$$K = AB \dots\dots\dots (3).$$

由此可知, A 跟着 B 反變的時候,知道了 A 和 B 的一對值,這常數 K 的值,就可以由(3)求出來了,求出了 K , 代進(2)去, A 和 B 的關係更非常明白,因而知道了 A, B 中的一個,就可以求出他一個來。

223. [例題 2] 若 $y \propto \frac{1}{x}$, $x=4$, 則 $y=30$; $x=6$, $y=?$

$y=13\frac{1}{3}$, $x=?$

因 $y \propto \frac{1}{x}$, 所以 $y = \frac{k}{x}$,

將 4 代 x , 30 代 y , 則得 $30 = \frac{k}{4}$, $\therefore k=120$.

而 $y = \frac{120}{x}$

故若 $x=6$, 則 $y = \frac{120}{6} = 20$.

又若 $y=13\frac{1}{3}$, 則 $13\frac{1}{3} = \frac{120}{x}$,

即 $13\frac{1}{3}x=120$. $\therefore x=120 \div 13\frac{1}{3}=9$.

[例題 3] 有一工程每日作工 6 小時, 12 日可作完; 若要 9 日作完, 每日需作工幾小時?

設完工的日數為 y , 每日作工的時數為 x , 則

$$y \propto \frac{1}{x}, \quad \text{即 } y = \frac{k}{x}.$$

$$\text{因 } x=6, y=12, \quad \text{故 } 12 = \frac{k}{6},$$

$$\therefore k=72, \quad \text{而 } y = \frac{72}{x}.$$

$$\text{故若 } y=9, \quad \text{則 } \frac{72}{x}=9,$$

$$\therefore x = \frac{72}{9} = 8. \quad \text{即每日需作工8小時.}$$

習題一五一

1. 若 $y \propto \frac{1}{x}$, $x=3$, 則 $y=7$; $x=2\frac{1}{3}$, $y=?$ $y=3$, $x=?$
2. 若 $A \propto \frac{1}{B}$, $B=5$, $A=7$; $B=4$, $A=?$ $A=10$, $B=?$
3. 若 $T \propto \frac{1}{u}$, $u=6$, $T=10$; $u=2$, $T=?$ $u=7$, $T=?$
 $T=12.5$, $u=?$ $T=7.5$, $u=?$
4. 若 M 跟着 N 的平方根反變, 而 $N=4$, 則 $M=5$;
 $M=?$ $N=\frac{3}{2}$.
5. 矩形的面積一定, 則牠的長跟着闊反變, 長6尺的時候, 闊12尺; 長18尺的時候闊幾尺?
6. 前題的矩形, 什麼時候只有3寸闊?
7. 一冊書, 甲每頁抄500字, 20頁抄完; 乙每頁多抄100字, 幾頁抄完?

8. 一工程 6 人作 24 日完, 加幾人去作 28 日可以作完?

三 合 變

224. 前面所講的, 無論是正變或反變, A 都只是跟着一個量 B 變; 實際上有些時候, 一個量 A 是同時跟着幾個量 B, C, D 等變的, 這就叫做‘合變’。比如火車所走的距離跟着牠的速度正變, 也跟着牠所走的時間正變, 這距離對於速度和時間說, 便是合變; 但這火車開行所需的時間, 常是跟着所要走的距離正變, 也跟着牠的速度反變, 這所需的時間對於距離和速度也是合變。

一般地說, 若 B 一定時, A 跟着 C 正變; C 一定時, A 跟着 B 正變; 則 B, C 都不定時, A 就跟着 B 和 C 的積正變。

若 B 一定時, A 跟着 C 正變; C 一定時, A 跟着 B 反變; 則 B, C 都不定時, A 就跟着 $\frac{C}{B}$ 正變。

225. [例題 1] 若 P 跟着 Q 正變, 而跟着 R 反變; $Q = \frac{3}{7}$ 和 $R = \frac{9}{14}$, 則 $P = \frac{2}{3}$; 那末, $P = \sqrt{48}$, 和 $R = \sqrt{75}$, $Q = ?$

$$\text{因 } P \propto \frac{Q}{R}, \quad \text{即 } P = K \cdot \frac{Q}{R}$$

將 $\frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{9}{14}$ 分別代 P, Q, R ; 則

$$\frac{2}{3} = k \cdot \frac{\frac{3}{7}}{\frac{9}{14}} = k \cdot \frac{2}{3}$$

$$\therefore k=1, \quad \text{而 } P = \frac{Q}{R}$$

$$\text{故 } P = \sqrt{48}, R = \sqrt{75}, \quad \text{則 } \frac{Q}{\sqrt{75}} = \sqrt{48},$$

$$\therefore Q = \sqrt{48 \times 75} = 60.$$

(例題2) 若 z 跟着 x 和 y^2 正變, 而 $x=3, y=4$, 則 $z=144$; $x=5, y=2$, 則 $z=?$

$$\text{因 } z \propto xy^2, \quad \text{即 } z = kxy^2.$$

將 3, 4, 144 分別代 x, y, z ; 則

$$144 = k \cdot 3 \cdot 4^2 = 48k.$$

$$\therefore k=3, \quad \text{而 } z = 3xy^2.$$

$$\text{故若 } x=5, y=2, \quad \text{則 } z = 3 \cdot 5 \cdot 2^2 = 60.$$

習題 一 五 二

1. 若 z 跟着 x 正變, 跟着 y 反變, 而 $x=28, y=2$, 則 $z=7$; $x=15, y=5, z=?$

2. 若 z 跟着 x 的平方正變, 跟着 y 的平方根反變, $x=3, y=1$, 則 $z=4$; $x=4, y=1, z=?$ $x=4, y=16, z=?$ $y=9, z=2, x=?$

3. 若 A 跟着 B 和 C 正變, $B = \frac{3}{5}, C = \frac{10}{27}$, 則 $A=2$; $A=54, B=3, C=?$

4. 若 y 跟着 x^2 正變, 跟着 z^3 反變, 而 $x = -1, z = 2$, 則 $y = 1; x = 3, z = -1, y = ?$

5. 若 $A \propto B, B \propto C$, 證明 $A \propto C$.

6. 若 A 跟着 B, C 正變, 證明 B 跟着 $\frac{C}{A}$ 反變.

7. 物體從空中自由地落下來, 牠從起點所落下的距離跟着牠所落的時間的秒數的平方正變; 5 秒鐘一共落下 $128\frac{1}{2}$ 公尺, 10 秒鐘牠一共落下多少? 第十秒鐘這一秒鐘牠落下多少?

8. 地心作用於地球以外的物體的引力跟着地心到這物體的距離的平方反變。若一物體在地球表面重 9 公斤, 這物體離地面多少高就只有 4 公斤重? (地球的半徑算是 6440 公里.)

第二十四章

級數

一 何謂級數

226. 定義. 依照一定的法則排列的一羣數, 叫做‘級數’. 如

1, 2, 3, 4, 5, 次第大 1;

11, 9, 7, 5, 3, 1, 次第小 2;

2, 4, 8, 16, 32, 次第大 1 倍;

2, 5, 11, 23, 次第加倍多 1;

都是級數.

級數中的一個數, 叫一‘項’.

第一數, 叫‘首項’.

末一數, 叫‘末項’.

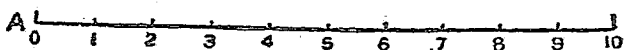
級數所含的項的個數, 叫‘項數’.

級數各項相加得的總數, 叫‘級數的和’, 或簡稱‘和’.

二 算術級數

227. [例題] 十個球, 在地上排成一直線, 每兩

球相距 5 尺。有一個小孩，站在這條直線的一端，距第一個球 5 尺，他一次一個地順着將球取到所站的地方，共要走多少尺路？



第 23 圖

這個小孩站在 A 點，他取第一球回到 A，要走 10 尺路；取第二球要走 20 尺；取第三球要走 30 尺……。所以一共要走的路是

$$(10+20+30+40+50+60+70+80+90+100) \text{ 尺。}$$

這個括弧裏的級數，牠的每項和兩鄰的各一項相差都一樣地是 10。這樣的級數就叫‘算術級數’；有些人又叫牠為‘等差級數’，因為每相鄰兩項的差總是相等的。這個每相鄰兩項中，任一項減去牠的前一項的差，稱為‘公差’。

再舉一個算術級數的例，如

$$6+3+0-3-6\cdots\cdots$$

這級數的公差就是 -3。

三 算術級數的和

228. 這種級數，若是牠的項數不多，要求牠的和只須將各項逐一地加搆來就可以了。但是，假如項數比較的多，那就非常困難，因為這樣，我們就得找出一

個一般的簡便的方法來。下面的幾個問題，就暗示着這個方法。

第一項和末一項的和是什麼？第二項和倒數第二項的和呢？第三項和倒數第三項的和呢？牠們的和相等嗎？

這個計算可以較簡明地表示如下：

設 S 是這級數的和，則

$$S = 10 + 20 + 30 + \cdots + 80 + 90 + 100.$$

將這級數的順序倒過來寫，則

$$S = 100 + 90 + 80 + \cdots + 30 + 20 + 10.$$

兩式相加，

$$\begin{aligned} 2S &= 110 + 110 + 110 + \cdots + 110 + 110 + 110 \\ &= 110 \times 10 = 1100. \end{aligned}$$

$$\therefore S = 550.$$

所以，這個小孩一共要走 550 尺路。

229. 讓我們來研究算術級數的末項和首項的關係，設首項為 a ，公差為 d ，項數為 n ，末項為 l ，依算術級數的定義，得

$$\text{第二項} - a = d,$$

$$\text{第三項} - \text{第二項} = d,$$

$$\text{第四項} - \text{第三項} = d,$$

.....

$$\therefore \text{第二項} = a + d,$$

$$\text{第三項} = \text{第二項} + d$$

$$= a + 2d,$$

$$\text{第四項} = \text{第三項} + d$$

$$= a + 3d,$$

.....

這樣看起來，公差的個數和項數的位次有什麼關係？

$$\text{所以： } l = a + (n-1)d.$$

[例題] 求 $5+9+13+\dots$ 的第 12 項。

這裏： $a=5$, $d=9-5=4$, $n=12$.

$$\therefore l = 5 + (12-1)4 = 49.$$

習題 一 五 三

下列各級數中，那幾個是算術級數？將牠們的和求出來：

1. $2+6+10+14+\dots$ 到 20 項。
2. $4+7+10+7+4+\dots$ 到 16 項。
3. $-3+2+7+12+\dots$ 到 12 項。
4. $1+2+4+8+\dots$ 到 18 項。
5. $12+6+0-6-12-\dots$ 到 14 項。
6. $15+11+7+3+\dots$ 到 10 項。
7. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ 到 22 項。
8. $2+2.4+2.8+3.2+\dots$ 到 12 項。

9. $1^2+2^2+3^2+4^2+\dots$ 到 8 項。
 10. $10.6+8.2+5.8+3.4+\dots$ 到 14 項。
 11. $4\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+2+\frac{3}{2}+\dots$ 到 16 項。
 12. $1+1.1+1.11+1.111+\dots$ 到 15 項。
 13. 在算術級數中,正數和倒數,數目相同的項的平均數怎樣?

四 算術級數的和的一般形式

230. 求首項爲 a , 公差爲 d 的算術級數的 n 項的和。

這第 n 項 l 是 $a+n-1d$, 則

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (l-2d) + (l-d) + l.$$

將級數的順序倒過來,

$$S = l + (l-d) + (l-2d) + \dots + (a+2d) + (a+d) + a.$$

兩式相加,

$$2S = (a+l) + (a+l) + (a+l) + \dots$$

$$+ (a+l) + (a+l) + (a+l) = n(a+l).$$

$$\therefore S = \frac{n(a+l)}{2} \dots\dots\dots (i).$$

但 $a+l = a + (a+n-1d) = 2a+n-1d.$

$$\therefore S = \frac{n}{2}(2a+n-1d) \dots\dots\dots (ii).$$

若用 $n=1$ 來試驗這兩個求和的公式,則 $S = \frac{1}{2} \cdot 2a = a,$

這是沒有錯的。

這兩個公式爲了求算術級數的和，務須記好。

習題 一 五 四

用公式求下列各算術級數的和：

1. $1+2+\dots$ 到 100 項。
2. $1+3+\dots$ 到 50 項。
3. $-6-1+\dots$ 到 13 項。
4. $7+0+\dots$ 到 15 項。
5. $2.3-1.1-\dots$ 到 10 項。
6. $2\frac{1}{2}-1-\dots$ 到 12 項。
7. $a+(-b)+\dots$ 到 6 項。

下列各二數都是 14 項的算術級數的第一項和末項，求各級數的和：

- | | |
|------------------|---------------------|
| 8. 3 和 97. | 9. -1 和 16. |
| 10. 3.6 和 6.4. | 11. $x+y$ 和 $y-y$. |
| 12. 自鳴鐘一晝夜共響多少下？ | |

五 算術中數和算術中項

231. 定義. 若三個數成爲一個算術級數，則中間的一數稱爲其他兩個數的算術中數。

〔練習 1〕 求下列各二數的算術中數：(i) 4 和 6, (ii) 2 和 8, (iii) 2 和 7, (iv) 3 和 10, (v) 4 和 -1, (vi) 0 和 -3, (vii)

0 和 a , (viii) x 和 y .

若 a, b, c 三個數成爲一個算術級數, 則

$$b - a = c - b.$$

$$\therefore 2b = a + c.$$

$$\therefore b = \frac{a + c}{2}.$$

所以, 兩個數的算術中數就是牠們的和的一半. 實際就是兩個數的平均數.

232. 定義. 若干數成一個算術級數, 則首, 末二項外的各項, 稱爲首, 末二項的算術中項.

若在 a, b 二數間要插入 m 個算術中項, 就是將 a 作首項, b 作末項, 把 m 個數排進去, 恰成一個算術級數的意思.

這個算術級數有多少項?

$$\begin{aligned} \text{因爲} \quad b &= a + (m + 2 - 1)d \\ &= a + (m + 1)d. \end{aligned}$$

$$\text{而} \quad d = \frac{b - a}{m + 1}.$$

故所插進的數爲:

$$a + \left(\frac{b - a}{m + 1}\right), a + 2\left(\frac{b - a}{m + 1}\right), \dots, a + m\left(\frac{b - a}{m + 1}\right).$$

[例題] 求在 64 和 38 間插入 12 個算術中項.

$$\text{這裏:} \quad a = 64, b = 38, m = 12.$$

$$\therefore d = \frac{38 - 64}{12 + 1} = -2.$$

所插進的數為：

62, 60, 58, 56, 54, 52, 50, 48, 46, 44, 42, 40.

習題 一五五

- 求下列各算術級數中所缺的各項：
 - 3, ?, 6, ?, ?
 - 2, ?, ?, 10, ?
 - ?, 12, ?, ?, 1
 - ?, ?, 14, ?, ?, -2
- $a+b$ 和 $a-b$ 的算術中數是什麼？
- 證明算術級數的第一項和末一項的算術中數，就等於第二項和倒數第二項的。
- 證明算術級數 n 項的和，等於第一項和末一項的算術中數的 n 倍。
- 4621 是算術級數 4, 7, 10……的一項嗎？
- 373 是算術級數 5, -7, -19……的一項嗎？
- 算術級數的第三項是 7, 第九項是 18; 求牠的第一項和第六項。
- 算術級數的第二項是 12, 而第七項是 -5, 求牠的第五項和第八項。
- 用同樣的數乘算術級數的各項, 所得的結果還是算術級數嗎? (先舉一個例做來看。) 用同樣的數加入算術級數的各項, 結果還是算術級數嗎?
- 求從 1 到 $2n-1$ 各奇數的和。

11. 從 51 到 100 各整數的和, 牠比從 1 到 50 各整數的和大多多少?
12. 用公式 $S = \frac{n}{2}(2a + n - 1d)$,
- (i) 將 S, n 和 d 的項表出 a : 因而求牠的和為 100, 公差是 $1\frac{1}{2}$ 的 20 項的算術級數的第一項。
- (ii) 將 S, n 和 a 的項表出 d : 因而求牠的和為 1331, 首項是 3 的 11 項的算術級數的公差。
- (iii) 若一個算術級數的第一項是 2, 公差是 3, 和是 100, 牠有多少項?
13. 某人第一年存 150 元, 以後逐年都比前一年多存 10 元。問到 25 年末共存多少元?
14. 有一人乘馬, 第一小時的速率為每小時 12 里, 以後每小時的速率比前一小時的加 $\frac{1}{2}$ 里。問 15 小時他一共走了多少里?
15. 一架樓梯共有 24 級, 第一級闊 1 尺, 以後每一級比上級闊半寸, 求樓梯各級闊的和。
16. 求於 8 和 20 中間插入 6 個算術中數。(就是插進 6 個數去, 使 8 個數恰好成一個算術級數。)
17. 求於 50 和 80 中間插入 8 個算術中數。
18. 求於 $a - 5b$ 和 $b - 5a$ 中間插入 8 個算術中數。
19. 證明算術級數的各奇數項也成算術級數。
20. 算術級數的各相鄰兩項間都插入算術中數, 結果還是算術級數, 試證明牠。

六 幾何級數

233. [例題 1] 某人第一年存 1 元,以後每年所存的照前一年的加倍;問在十年中共存多少元?

第一年存 1 元,則第二年存 2 元,第三年存 4 元;十年中所存的總數是

$$(1+2+4+8+16+\dots+512) \text{ 元.}$$

這級數的特性,就是相鄰兩項的比都是相等的;例如 $2:1=4:2=8:4=\dots=2$, 這樣的級數稱為‘幾何級數’,有些人又叫牠是‘等比級數’.其中任一項對於牠的前一項的比稱為‘公比’.

再舉一個幾何級數的例,如

$$12+4+1\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\dots.$$

這級數的公比就是 $\frac{1}{3}$.

又
$$8-4+2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\dots$$

也是幾何級數,牠的公比是 $-\frac{1}{2}$.

234. 求幾何級數的和 S 的方法如下:

$$S=1+2+4+8+16+\dots+512.$$

這級數又可寫成

$$S=1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^9.$$

用公比 2 乘牠,

$$2S=2+2^2+2^3+2^4+2^5+\dots+2^{10}.$$

從這一個式子減去前一個,

$$S = -1 + 2^{10}.$$

2^{10} 爲 1024, 所以這個和是 1023; 就是某人十年共存 1023 元。

235. [例題 2] 求幾何級數 $3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots$ 十項的和。

這裏的公比是 $-\frac{1}{3}$, 所以這個級數的和可寫成

$$S = 3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \\ + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^8 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^9.$$

[注意] 第十項所含的公比的指數是 9 而不是 10。

用公比 $-\frac{1}{3}$ 去乘,

$$-\frac{S}{3} = 3\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \\ + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^8 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^9 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^{10}.$$

兩式相減,
$$\frac{4S}{3} = 3 - 3\left(-\frac{1}{3}\right)^{10},$$

$$\therefore S = \frac{3}{4} \left\{ 3 - 3\left(-\frac{1}{3}\right)^{10} \right\}.$$

但
$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{10} = (-1)^{10} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \\ = \frac{1}{3^{10}},$$
 因 -1 的偶數方等於 $+1$.

$$\therefore S = \frac{3}{4} \left\{ 3 - 3 \times \frac{1}{3^{10}} \right\} \\ = \frac{1}{4} \left\{ 9 - \frac{1}{3^8} \right\}.$$

$$= \frac{1}{4} \left(9 - \frac{1}{6561} \right).$$

習題 一五六

1. 下列各級數中,那幾個是幾何級數?求牠們的公比:

- (i) 2, 4, 8, (ii) $2^2, 4^2, 8^2, \dots$
 (iii) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots$ (iv) $1\frac{1}{3}, 1\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}, \dots$
 (v) 9, -3, 1, (vi) 10, -5, $-2\frac{1}{2}, \dots$
 (vii) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots$ (viii) x, x^2, x^4, x^8, \dots
 (ix) 1, -1, 1, -1, (x) 1, 0, 1, 0,

2. 簡單下列各數,不必將乘方展開:

$$3\left(\frac{1}{3}\right)^8, 9\left(\frac{1}{3}\right)^9, 7^2\left(\frac{1}{7}\right)^{10}, 8\left(\frac{1}{2}\right)^7, 28\left(\frac{1}{7}\right)^{12}, 5^6\left(\frac{1}{5}\right)^6,$$

$$130\left(\frac{1}{10}\right)^8, \left(-\frac{1}{2}\right)^{12}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{13}, \left(-\frac{1}{2}\right)^{14}, 3\left(-\frac{1}{3}\right)^8,$$

$$7^2\left(-\frac{1}{7}\right)^9, (-5)^6 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^{10}, 6\left(-\frac{1}{3}\right)^{11}, 10\left(-\frac{1}{2}\right)^9.$$

3. 若 n 是整數,證明

- (i) $(-1)^{2n} = 1$, (ii) $(-1)^{2n+1} = (-1)^{2n-1} = -1$,
 (iii) $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$.

4. 求第一題中各幾何級數的第八項和第九項;但不必展開。

5. 求第一題中各幾何級數的第 n 項。[若不知道 n 是偶數或奇數,不能將 $(-1)^n, (-1)^{n-1}$ 這樣的式子化簡單。]

6. 求下列各幾何級數的和;不必將乘方展開:

- (i) $2+6+\dots$ 到10項。
- (ii) $5-15+\dots$ 到10項。
- (iii) $5-15+\dots$ 到11項。
- (iv) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\dots$ 到6項。
- (v) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\dots$ 到7項。

七 幾何級數的和的一般形式

236. 求首項為 a ,公比為 r 的幾何級數的 n 項的和。
這級數是 $a+ar+ar^2+\dots$.

在‘第二項’裏, r 的指數是 1,
在‘第三項’裏, r 的指數是 2,
.....

在‘第 n 項’裏, r 的指數是 $n-1$.

因而 $l=ar^{n-1}$,

$$S=a+ar+ar^2+ar^3+\dots+ar^{n-2}+ar^{n-1}.$$

用公比 r 去乘,

$$rS=ar+ar^2+ar^3+\dots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n.$$

兩式相減, $S-rS=a-ar^n$. $\therefore S(1-r)=a(1-r^n)$.

$$\therefore S=a\frac{1-r^n}{1-r}\dots\dots\dots(i).$$

上式須 $r < 1$ 的時候纔可用,若 $r > 1$, 則

$$S=a\frac{r^n-1}{r-1}\dots\dots\dots(ii).$$

又 $S-rS=a-ar^n=a-r^n$.

$$\therefore (1-r)S = a - rl.$$

而
$$S = \frac{a-rl}{1-r} \dots\dots\dots (iii).$$

若 $1-r^n$ 除以 $1-r$, 照通常的除法除下去, 原來的幾何級數就可以得出:

$$1-r \overline{) 1-r^n(1+r+\dots+r^{n-1}}$$

$$\begin{array}{r} 1-r \\ \underline{r-r^n} \\ r-r^2 \\ \underline{r^2-r^n} \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \\ \underline{r^{n-1}-r^n} \\ r^{n-1}-r^n \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore a \frac{1-r^n}{1-r} &\equiv a(1+r+r^2+\dots+r^{n-1}) \\ &\equiv a+ar+ar^2+\dots+ar^{n-1}. \end{aligned}$$

習題 一 五 七

用公式求下列各幾何級數的末項及和; 乘方不必展開:

1. $32+48+\dots$ 到 6 項。
2. $\frac{7}{45}+\frac{1}{9}+\dots$ 到 4 項。
3. $\frac{21}{4}-\frac{9}{2}+\dots$ 到 6 項。
4. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\dots$ 到 8 項。
5. $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\dots$ 到 7 項。
6. $-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\dots$ 到 6 項。

7. $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \dots$ 到 12 項。 8. $1 - 1.2 + \dots$ 到 9 項。
 9. $108 + 72 + \dots$ 到 5 項。 10. $1 + \sqrt{2} + \dots$ 到 6 項。

求下列各幾何級數的和：

11. $3 + 6 + \dots + 192$. 12. $1 - 3 + \dots + 6261$.
 13. $8 + 4 + \dots + \frac{1}{8}$. 14. $0.1 + 0.5 + \dots + 312.5$.

八 幾何中數和幾何中項

237. 定義. 若三個數恰成一個幾何級數, 那中間的一個便稱為其他兩個數的‘幾何中數’。

〔練習 2〕 求下列各兩數的幾何中數：

- (i) 1 和 9, (ii) 2 和 18,
 (iii) 1 和 25, (iv) 3 和 75,
 (v) 1 和 $\frac{1}{4}$, (vi) 3 和 $\frac{3}{4}$,
 (vii) 1 和 x^2 , (viii) a 和 ax .

若 a, b, c 三個數成一個幾何級數, 則

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b}.$$

$$\therefore b^2 = ac.$$

$$\therefore b = \pm\sqrt{ac}.$$

所以, 兩個數的幾何中數, 就是牠們的積的平方根。

這個中數, 有時候也叫做那兩數的‘比例中項’。牠的

值我們通常只用正的一個。

〔練習3〕 證明正方形的一邊的長，為等面積的矩形的兩邊的長的幾何中數。

〔練習4〕 兩個數的算術中數和幾何中數，那一個大？用下面的幾對數來證明牠：2和8，3和48， $\frac{1}{2}$ 和100，27和 $\frac{1}{3}$ 。

238. 定義. 若干數成一個幾何級數，則首、末二項外的各項，稱為首、末二項的幾何中項。

若在 a, b 二數間要插入 m 個幾何中項，就是將 a 作首項， b 作末項，把 m 個數排進去，恰成一個幾何級數的意思。

這個幾何級數有多少項？

$$\therefore b = ar^{m+2-1} = ar^{m+1},$$

而
$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.$$

因為求 r 須求 $\frac{b}{a}$ 的 $m+1$ 次方根，所以，只有 a, b, m 有特殊的關係時，我們纔求得有理數的解答來，而插進去的數為：

$$a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right), a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^2, \dots, a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^m.$$

〔例題〕 求於3和48間插入3個幾何中項。

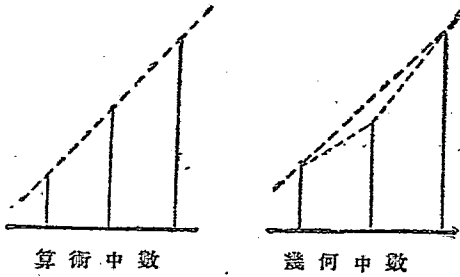
這裏： $a=3, b=48, m=3.$

$$\therefore r = \sqrt[4]{\frac{48}{3}} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

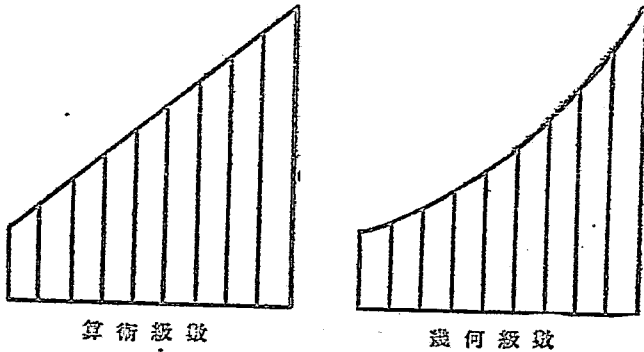
所插進的數爲： 6, 12, 24.

九 兩種級數的比較

239. 算術級數和幾何級數各項的關係, 用下圖線就可表明; 就是 a, b 兩數的算術中數大於牠們的幾何中數; 而同數目的算術中項和幾何中項, 順次比較, 也是前者大於後者。



第 24 圖



第 25 圖

習題一五八

1. 填出下列各幾何級數所缺的各項：
 - (i) 2, ?, 50, ?.
 - (ii) ?, 1, ?, $\frac{1}{2}$.
 - (iii) 27, ?, 48.
 - (iv) 1, ?, ?, 27.
2. 求下列各二數的幾何中數：
 - (i) 4和9的。
 - (ii) a^3b 和 ab^3 的。
 - (iii) 12和 $\frac{3}{2}$ 中的三個。
 - (iv) $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{16}$ 中的四個。
3. 一個數和牠的倒數的幾何中數是什麼？
4. 證明幾何級數的第一項和末項的幾何中數，等於牠的第二項和倒數第二項的。
5. 證明幾何級數的各項的倒數，仍然成爲一個幾何級數。算術級數也有同樣的性質嗎？
6. 幾何級數的奇數項或偶數項，也是幾何級數，試證明牠。
7. 幾何級數各項的對數成爲一個算術級數，試證明牠。
8. 證明幾個正方形的邊若成幾何級數，則牠們的面積也成爲幾何級數。
9. 管裏的空氣，用抽氣機每次可以抽出一半，問7次共抽出多少？
10. 一幾何級數共100項，牠的公比爲 r ；試證明牠各偶數項的和等於各奇數項的和的 r 倍。

11. 一幾何級數的項數是偶數;若將公比 r 的符號改變;則這兩個級數的和的比為 $1+r:1-r$. 試證明之。

12. 證明複利息每年年終的本利和,成爲一個幾何級數.單利息的怎樣?

十 用對數計算幾何級數

240. [例題1] 某人每年年終儲蓄 80 元,年利百分之 $2\frac{1}{2}$ 的複利; 30 年的年終,他一共儲蓄了多少元?

讓我們將這個問題的一般的形式討論於下:

每年年終所付的存款 $= P$ 元;

年利率 $= r$;

年數 $= n$;

n 年的年終一共儲蓄的 $= A$ 元。

第一年年終所付的存款 P 元,有 $(n-1)$ 年的利息;假定最末一年的利息恰好算清,而第 n 次的存款 P 元就付了進去。

第一個 P 元到第二年年終變成 $P\left(1+\frac{r}{100}\right)$ 元;到第三年年終變成 $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$ 元;照樣下去,到第 n 年年終變成 $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-1}$ 元。

第二個 P 元到第 n 年年終變成 $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n-2}$ 元;照

樣可以再推下去。

最末一個 P 元沒有利息。

一共儲蓄的元數是

$$\begin{aligned} & P + P\left(1 + \frac{r}{100}\right) + P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 + \cdots + P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{n-1} \\ &= P \frac{\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{r}{100}\right) - 1} = \frac{100P}{r} \left\{ \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1 \right\}. \end{aligned}$$

$$\therefore A = \frac{100P}{r} \left\{ \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1 \right\}.$$

若 $P=80$ 元, $r=2\frac{1}{2}$, $n=30$; 則

$$\begin{aligned} A &= \frac{100 \times 80}{2\frac{1}{2}} \left\{ \left(1 + \frac{2\frac{1}{2}}{100}\right)^{30} - 1 \right\} \\ &= 3200 \{1.025^{30} - 1\}. \end{aligned}$$

$(1.025)^{30}$ 必須用對數來計算, 由 4 位對數表上, 得

$$\log 1.025 = 0.0107.$$

$$\therefore \log (1.025)^{30} = 0.0107 \times 30 = 0.321.$$

這最後一個數, 只能有兩位小數是正確的, 就是說 $(1.025)^{30}$ 的值, 由四位對數表只能得出兩位數字正確的數來。所以要用 30 這末大的數去乘對數, 須用 5 位或 5 位以上的對數表。這個題可用書末附的 7 位對數計算。

用這個表:

$A = 3200(1.025^{20} - 1)$	No.	Log
$= 3200(2.097 - 1)$	1.025	0.0107239
$= 3200 \times 1.097$	$(1.025)^{20}$	0.321717
$= 3510$, 有三位數字正確。		

這人一共儲蓄的是 3510 元,但他實在付過的是 2400 元;所以他得了 1110 元的利息。

241. [例題 2] 年利率 $2\frac{1}{2}\%$ 的複利, 20 年的年終要共存 1000 元, 一年應當存多少?

這裏 $r = 2.5$, $n = 20$, $A = 1000$; P 是多少?

用前節的公式,

$$1000 = \frac{100P}{2.5}(1.025^{20} - 1).$$

$\therefore P = \frac{25}{1.025^{20} - 1}$	NO	Log
$= \frac{25}{1.639 - 1}$	1.025	0.01072
$= \frac{25}{0.639}$	$(1.025)^{20}$	0.2144
$= 39.12.$	25	1.3979
	0.639	1.8055
	39.12	1.5924

每年約須存 39 元 1 角 2 分。若不算利息, 20 年要存 1000 元, 每年就必須存 50 元。

[例題 3] 年利率 $2\frac{1}{2}\%$ 的複利, 每年存 80 元, 多少年可共存 4000 元?

這裏是: $P = 80$, $A = 4000$, $r = 2.5$, 求 n 是什麼?

$$\text{由公式, } 4000 = \frac{8000}{2.5}(1.025^n - 1).$$

$$\therefore 1.025^n - 1 = 1.25.$$

$$\therefore 1.025^n = 2.25.$$

$$\therefore n \log 1.025 = \log 2.25.$$

$$\therefore n = \frac{\log 2.25}{\log 1.025} = \frac{0.3522}{0.0107} \\ = 32.9.$$

NO	Log
0.3522	$\bar{1}.5467$
0.0107	$\bar{2}.0294$
32.91	1.5173

\therefore 在33年可得4000元稍多一點。若不算利息，那就須50年。

習題 一 五 九

1. 若一個玻璃球跳在大理石的地面上，每次回跳的高，為先一次的十分之九。有一個球從6尺高垂直的落下。求牠第十二次落到地面上，一共大約經過多少尺的距離？

2. 某處每年人口的增加為本年一月一日的百分之3，若1890年的一月一日有53000人，求到1909年一月一日，那裏共有多少人？

3. 有一個人，一連十年，每年初存100元到銀行，說明年利率百分之 $3\frac{1}{2}$ 的複利。求他到第十年年末本利共存了多少元？

4. A現年25歲，預定60歲時退隱，並且想在退隱時有3000元的存款。年利率百分之3，照複利計算，每

年的年終應存款多少元?

5. 某甲每年存50元,年利率百分之3,依複利計算,到了剛超過2000元的時候取回,問他已付了多少年?

6. 若在第25圖中,最短的縱線長1公分,而最長的爲4公分。求這個幾何級數的公比,和那十個縱線的和。

十一 無窮級數

242. 有一水漕,盛水2尺深,漕底有一孔漏水。若第一小時漏去1尺,則還剩1尺深。照通常的想法,可以假定第二小時就漏盡,但實驗的結果卻不是這樣;水漏出的速率實在是逐漸減小的;也許第二小時,只漏出 $\frac{1}{2}$ 尺;第三小時,只漏出 $\frac{1}{4}$ 尺;第四小時,只漏出 $\frac{1}{8}$ 尺;這樣繼續下去。

現在先研究各小時後,有多少水剩在漕裏面。第一小時,漏出1尺,還剩1尺;第二小時,漏出 $\frac{1}{2}$ 尺,剩 $\frac{1}{2}$ 尺;第三小時,漏出 $\frac{1}{4}$ 尺,剩 $\frac{1}{4}$ 尺。由此可以看出來,每小時末所剩的水,就是每小時起初漕裏所有的水的一半;也就是每小時的末了所剩的水,恰是那一小時中漏出的。

於是,我們可以得出下面的表來:

時數	漏出的水的總數	剩的水
1	1	1
2	$1 + \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^2}$
4	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$
...
...
10	$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^9}$	$\frac{1}{2^9}$

但 $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$; 所以 10 小時後只剩 $\frac{1}{512}$ 尺水。在事實上, 水到這樣淺的時候, 漏出的速率不免又要受別的影響, 如氣化和漕底的孔的不規則等, 發生其他的變化。這裏為算學上的討論便利起見, 假定這些影響都不存在。

243. 這裏我們來研究這幾何級數,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots$$

當所取的項數漸漸地多起來的時候, 牠的這增加的情形怎樣?

這是非常明白的, 無論等到多少小時, 漕裏面所漏出的水的和, 總是不會比 2 尺多的。若等到 10 小時, 則

漏出的水等於 2 尺‘減去’所剩的。

$$\therefore 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^9} = 2 - \frac{1}{2^9}$$

若照通常的方法求這個級數的和，所得的結果自然也是一樣。

同樣地， $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{10}} = 2 - \frac{1}{2^{10}}$ ，可以照樣推下去。

實際是這樣，這個級數的項數取得越多，牠的和同 2 越相近。這個數同 2 能怎樣地相近呢？

假定我們要使這個級數的和同 2 的差小於 $\frac{1}{10000}$ 。

若我們取 $n+1$ 項，則

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

現在這個和是比 2 小 $\frac{1}{2^n}$ ， n 必須要多大， $\frac{1}{2^n}$ 纔能等於或小於 $\frac{1}{10000}$ 呢？我們很容易試出這個答案來。我們求得

$$\frac{1}{2^{13}} = \frac{1}{8192} \quad \text{和} \quad \frac{1}{2^{14}} = \frac{1}{16384} < \frac{1}{10000}$$

所以，若是我們取 15 項這個和同 2 的差就小於 $\frac{1}{10000}$ 了。

我們要取多少項，纔能使這個和同 2 的差小於 $\frac{1}{50000}$ ，小於 $\frac{1}{100000}$ 呢？

這好像十分明白，這個可以推到無窮。實際，假設有一個人，任意說出一個極小的數，並且問要取多少項，這個和同 2 的差比牠小；別一人總可求出這必須要取的項數來。

雖是這樣，要取足了項數，使這個和‘等於’ 2，這卻是不可能的。 $\frac{1}{2^n}$ 的差無論怎樣總是有的，而且無論 n 怎樣的大， $\frac{1}{2^n}$ 總常常有‘一些’決不等於零。

但是，這個級數的 n 項的和，由 n 取得夠大的時候，可以使牠照我們所想的，和 2 相近。

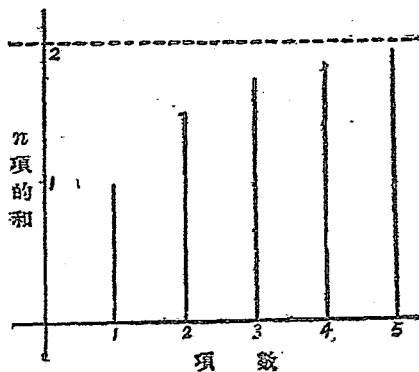
這個話，簡單地說，就是，當 n ‘近於’無窮大的時候，這個 n 項的和近於‘極限’ 2。算學的記號是

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 2, \text{ 當 } n \rightarrow \infty.$$

244. 這是應當注意的，這個和永不能等於 2，項數也永不能到無窮大。‘近於無窮大’的意思就是‘無限增加’。

第 26 圖 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$ 的 n 項的和怎樣近於牠的‘極限值’* 2?

* 極限值就是和牠無論如何相近都可以，但總不能等於牠這樣的一個值。



第 26 圖

245. [例題 1] 設 $n \rightarrow \infty$, 求下面的級數的 n 項的和的極限值:

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

這個級數是和 $0.3333\dots$ 到 n 位一樣。

用 S 表示 n 項的和, 照常用的方法寫出這個級數的 n 項的和, 則

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1 - \frac{1}{10^n}}{\frac{9}{10}} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right). \end{aligned}$$

但 當 $n \rightarrow \infty$ 時, 則 $\frac{1}{10^n} \rightarrow 0$.

\therefore 當 $n \rightarrow \infty$ 時, $S_n \rightarrow \frac{1}{3}$.

\therefore 0.333..... 到 n 位 $\rightarrow \frac{1}{3}$, 當 $n \rightarrow \infty$ 的時候; 這等於說 $0.\dot{3} = \frac{1}{3}$.

[練習 5] 上面的級數, 要取多少項, 則其和同極限值的差小於 $\frac{1}{1000000}$?

[例題 2] $n \rightarrow \infty$, 求下面的級數的 n 項的和的極限值:

$$4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

第 27 圖指示出這級數的 1, 2, 3, 4 等項的和。

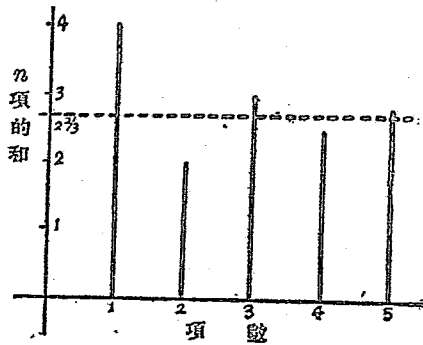
這圖線指示我們, 這個級數的 n 項的和因了 n 的增大而不同, 但總是一個在極限之上, 一個在極限之下, 牠從兩邊漸近於極限。

公比是 $-\frac{1}{2}$, 並且

$$\begin{aligned} S_n &= 4 \cdot \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{1 - (-\frac{1}{2})} = 4 \cdot \frac{1 - (-\frac{1}{2})^n}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{8}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\}. \end{aligned}$$

現在 $(-\frac{1}{2})^n$ 因 n 是偶數或奇數, 便是正的或負的。

$\therefore S_n \leq \frac{8}{3}$, 就看 n 是偶數或奇數。



第 27 圖

$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 的絕對值為 $\frac{1}{2^n}$, 當 $n \rightarrow \infty$ 時, 牠 $\rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \text{但} \quad S_n &= \frac{8}{3} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

$$\therefore S_n \rightarrow \frac{8}{3}, \text{ 當 } n \rightarrow \infty.$$

圖中高於水平虛線的各點, n 越大越近於虛線; 而低於虛線的各點, 也是這樣, 所以 $\frac{8}{3}$ 就是牠們的極限。

246. 前面纔研究過的各幾何級數, 當項數無限制增加的時候, 牠的和就近於極限。這些幾何級數是遞降的, 每項的數值總比前一項的小。

若是一個遞升的幾何級數, 例如

$$3 + 6 + 12 + 24 + 48 + \dots,$$

那就很明白的，項數 n 增多而沒有限制，則各項也就逐漸大起來沒有極限。同樣地， n 沒有限制的增多， n 項的和也增大而沒有極限。這類級數的和是沒有極限的。

再設想這樣的級數，

$$2 + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{8} + 1\frac{1}{16} \dots\dots$$

這個既不是算術級數，也不是幾何級數。(爲什麼不是?) 他雖是一個遞降級數，但是，當 n 增大的時候，第 n 項卻不會變成無限小。無論 n 大到怎樣的程度，第 n 項常是大於 1。這是很明白的，所以 n 項的和總大於 n ；而取夠了項數，這個和總能夠變得比我們所指出的數大。例如，我們要使這和大於 1000000，我們可取 $n=1000000$ 。

這級數 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\dots$ ，因爲 $n \rightarrow \infty$ ， $S_n \rightarrow 2$ ，就是項數無限增大時，牠的和有一定的極限值。這叫做‘收斂級數’。同樣地， $4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + \dots\dots$ 因爲 $n \rightarrow \infty$ ， $S_n \rightarrow \frac{8}{3}$ ，也是一個‘收斂級數’。

這級數 $2 + 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{8} + \dots\dots$ ，牠的 n 項的和，只須將項數取足，可以被弄成照我們所要的一般大；就是項數無限增大時，牠的和沒有一個極限值；這叫做‘發散級數’的例。凡正項遞升的級數都是‘發散級數’。

247. 有的級數，雖牠的各項無限地減小，只要 n 取得夠大，牠的第 n 項可以被弄成照我們所想的數

一般樣小,但牠可以還是‘發散級數’;這是很重要的。設想這樣的級數,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

這既不是算術級數,也不是幾何級數。但有一點應當特別注意:

在一級數中,其各項的倒數恰成一個算術級數的,稱為調和級數:

牠的第 n 項是 $\frac{1}{n}$, n 的值取得夠大的時候,可以被弄成任何小,但牠仍是發散級數。

這級數可寫成

$$1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \dots$$

而 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$,

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$$

又 $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$,

$$\therefore \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2},$$

.....

設若一共取若干項,而最後一項為 2 的乘方的倒數 $\frac{1}{2^n}$,這些項可以照上面一樣分成許多組,連起首的

1 和 $\frac{1}{2}$ 共有 $n+1$ 組。

這些項的和 $>1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$,共有 n 個。

就是 $>1 + \frac{n}{2}$

$\frac{n}{2}$ 的值, 只要 n 取得夠大, 是可以照我們的意思弄得很大的。所以這個級數是‘發散級數’。

248. 幾何級數的一般的形式是

$$a + ar + ar^2 + \dots$$

我們已經知道, 若 r 的數值大於 1, 則各項的數值無限地增加, 並且這級數是不能收斂的。這裏來研究, r 的數值小於 1 時, 這個級數的 n 項的和的極限。

$$\begin{aligned} S_n &= a \frac{1-r^n}{1-r} \\ &= \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r} \end{aligned}$$

這兩項中, $\frac{a}{1-r}$ 的值和所取的項數的多少是沒有關係的; $\frac{ar^n}{1-r}$ 卻隨了 n 的數值變化。因為 r 的數值小於 1, 當 n 變大起來的時候, r^n 的數值就變小起來。若要取 n , 使 $\frac{ar^n}{1-r}$ 的數值小於一定的數, 即如 $\frac{1}{1000000}$, 則 r^n 的數值須小於

$$\frac{1}{1000000} \div \frac{a}{1-r} \text{ 或 } \frac{1-r}{1000000a}$$

n 常常是可以取得夠大, 使 r^n 的數值小於一個數的。

$$\therefore S_n \rightarrow \frac{a}{1-r}, \text{ 當 } n \rightarrow \infty \text{ 的時候。}$$

這個極限通常稱爲‘到無窮的和’；但這個說法，卻不只限於這樣的例纔可用。

習題 一 六 ○

1. 求下列各幾何級數 $n \rightarrow \infty$ 時的 n 項的和的極限：

(i) $3+1+\frac{1}{3}+\dots$, (ii) $8-4+2-\dots$,

(iii) $\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\dots$, (iv) $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\dots$,

(v) $a-ar+ar^2-\dots$ (r 的數值小於 1).

2. 用通常的分數表示下列各循環小數：

(i) $0.\dot{6}$, (ii) $0.\dot{1}\dot{2}$, (iii) $0.\dot{1}4285\dot{7}$, (iv) $0.\dot{9}$.

3. 化 $0.\dot{2}9\dot{6}$ 爲一個無窮幾何級數，而求牠的和的極限，證明牠是等於 $(0.\dot{6})^2$.

4. 求下列各幾何級數的無窮項的和(到四位數字：

(i) $1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\dots$,

(ii) $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\dots$.

5. 某地的租金，第一年須付 100 元，第二年付 50 元，第三年付 25 元；以後每年所付的都是上一年的半。證明各年所付的租金的總數不能超過某一個一定的值。這個值是什麼？要若干年，所付的租金的總數和這個值的差總小於 1 角？

6. 甲所得的獎金第一年 100 元, 以後每年所得的都是先一年的百分之 90. 求最初 6 年間共得多少, 又最多他一共有得多少的可能?

7. 一金鑛, 每年所能開採的數是比先一年的減少百分之 13; 第一年採出 260000 磅. 求這鑛最多一共可採出多少? [$\log 0.87 = \bar{1}.93952$.]

8. 某種樹每年可高長的數量為先一年的 $\frac{9}{10}$, 1901 年一月牠有 10 尺高. 求 (i) 那一年後, 每年所長的比 1 寸小; (ii) 最多牠能長多少高?

習題 一 六 一

1. 求幾何級數 $a^3x - a^2x^3 + ax^5 - \dots$ 的 79 項.
2. 一幾何級數的第五項是 61, 第十一項是 1647; 求牠的第七項.
3. 一算術級數的初二項為 a, b ; 求牠的第 n 項及 n 項的和. 若 $\frac{a}{a-b}$ 是正整數, 則那一項等於 0?
4. 若 x, y, z 是幾何級數, 證明

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)(x - y + z).$$
5. 求下列算術級數的 $3k-1$ 項的和,

$$12a + 10b, 13a + 6b, 14a + 2b \dots$$
6. 求下列算術級數的第 $3k+1$ 項, 並求這些項的和,

$$4b + 2c, 4b + 5c, 4b + 8c \dots$$

7. 求 100 到 200 間所有 3 的倍數的奇數的和。由此, 又求 100 到 200 間各非 3 的倍數的奇數的和。

8. 求下列幾何級數的 8 項的和,

$$2\sqrt{5}-5\sqrt{6}+15\sqrt{5}-\dots\dots$$

9. 證明任何數若以算術級數的各項作指數, 則成一個幾何級數。

10. 證明任幾何級數中, 第四, 五, 六三項的和, 是第一, 二, 三三項的和及第七, 八, 九三項的 and 的幾何中數。

11. 分 76 為一幾何級數的三項, 並且第一, 第三兩項對於第二項的比為 13 : 6。

12. 一幾何級數的第一項比第二項大 8, 而第二與第三項的和為 12. 求這一個級數。

13. 分 100 為一個算術級數的 5 項, 其最小的兩項的和為其他三項的 and 的十七分之三。

14. 連一正方形邊的中點, 則又成一個正方形; 同樣地, 繼續連下去, 得第三, 第四等正方形。若無限制地做下去, 這些正方形的面積的 and 的極限是什麼?

第二十五章

不等式

一 何謂不等式

249. 八尺布剪去了三尺，還剩五尺，我們就說八尺布比三尺布長。十元錢用去了七元，還剩三元，我們就說十元錢比七元錢多。十二斤棉花少去了九斤，還剩三斤，我們就說十二斤棉花比九斤棉花重。十五立方寸的木塊截去了十二立方寸，還剩三立方寸，我們就說前一塊木頭比後一塊大。一般地說來， A 和 B 兩個量若 $A-B$ 剩一個正數，我們就說 A 大於 B 。

反過來說，若 $A-B$ 剩的是一個負數，如 3 尺-8 尺，7 元-10 元，9 斤-12 斤和 12 立方寸-15 立方寸等，我們就說， B 小於 A 。

用記號表示， A 大於 B 寫成 $A > B$ 。 A 大於 B ， B 就小於 A ，用記號表示，寫成 $B < A$ 。

這兩個式子， $A > B$ 和 $B < A$ 就叫‘不等式’。

〔練習 1〕 將下面各數，從左邊起，依大小的次序排成一排：

6, -3, 7, $\frac{3}{2}$, $\frac{8}{9}$, -14, 5, -6, -2.8.

250. 由前節的練習看起來,正數總比負數大,這,我們可以一般地證明如下:

設 a 和 b 都代表任意一個數的絕對值,則 $+a$ 是正的, $-b$ 便是負的, $(+a)-(-b)=?$

$+(a+b)$ 是正的,所以 $+a$ 大於 $-b$. a 和 b 既然都是代表任意一個數的絕對值,這就證明了正數總比負數大。

絕對值大的正數比絕對值小的正數那一個大?

絕對值大的負數比絕對值小的負數那一個大?

a 代表任意一個數的絕對值, $(+a)-0=?$

所以正數都大於 0, 用式子表示便是 $+a>0$, 由此可知,若 $b>0$, b 就是正的。

$(-a)-0=?$

所以負數都小於 0, 用式子表示便是 $-a<0$. 由此可知,若 $b<0$, b 就是負的。

二 不等式的諸性質

251. 和等式相似的,不等式有下面的諸性質:

(i) 不等式的兩邊,加上或減去同樣的數,仍是不等式,而且大小的順序不變。

就是,若 $a>b$, 則 $a+c>b+c$, 和 $a-c>b-c$.

$\therefore a>b, \quad \therefore a-b>0,$

$$\text{而} \quad (a+c)-(b+c)=a+c-b-c=a-b,$$

$$\therefore (a+c)-(b+c)>0,$$

$$\therefore a+c>b+c.$$

試證明 $a>b$, 則 $a-c>b-c$.

(ii) 兩個不等式的順序相同, 則左邊和左邊相加, 右邊和右邊相加, 仍是順序相同的不等式。

就是, 若 $a>b, c>d$; 則 $a+c>b+d$,

$$\therefore a>b, \quad \therefore a-b>0,$$

$$\text{又} \quad c>d, \quad \therefore c-d>0,$$

$$\text{而} \quad (a+c)-(b+d)=a+c-b-d=(a-b)+(c-d),$$

$$\therefore (a+c)-(b+d)>0,$$

$$\therefore a+c>b+d.$$

若 a, b, c, d 都是正的, 且 $a>b, c>d$; 試證明 $ac>bd$.

(注意) 這個性質不限於只是兩個不等式。

(iii) 不等式的兩邊若乘以或除以同樣的正數, 仍是不等式, 而且大小的順序不變; 若乘以或除以同樣的負數, 則大小的順序相反。

$$\therefore a>b, \quad \therefore a-b>0;$$

$$\text{而} \quad (a-b)c=ac-bc.$$

若 c 是正的, 則 $ac-bc>0, \quad \therefore ac>bc$.

若 c 是負的, 則 $ac - bc < 0$, $\therefore ac < bc$.

試證明關於除的。

三 不等式的解法

252. [例題 1] x 的值怎樣, 則 $x^2 + 5x - 16$ 大於 $x^2 + 3x + 8$?

依題意, $x^2 + 5x - 16 > x^2 + 3x + 8$.

兩邊減去 x^2 和 $3x$, 得

$$2x - 16 > 8.$$

兩邊加上 16, 得 $2x > 24$.

兩邊除以 2, 得 $x > 12$.

由這例題看起來, 不等式的解法完全和方程式的解法一樣; 不過解方程式所得出來的數, 是方程式中的未知數的值, 而解不等式得出來的, 只是不等式成立時未知數所應有的限制。

習題 一 六 二

1—8 口答。

1. 34, 52, -7, -6 大小的順序怎樣?
2. 0, -1.5, 0.02 大小的順序怎樣?
3. 怎樣將下列各式中的未知項移到左旁?

(i) $8x + 13 > 3x + 2$.

(ii) $6x - 11 < 13 - 2x$.

(iii) $4x^2 - 5x > 5 - 6x^2 + 17x.$

(iv) $3 < -2x^2 + 5x.$

4. 怎樣將3題中各式的已知項移到右邊?

5. x 的值怎樣,則 $7x - 2$ 大於 $2x + 8$?6. y 的值怎樣,則 $5y + 3$ 小於 $3y + 7$?7. a 的值怎樣,則 $8a + 5$ 大於 $3a + 5$?8. b 的值怎樣,則 $12b + 3$ 小於 $5b - 4$?

解下列不等式:

9. $x^2 + 11x - 15 > x^2 + 6x + 5.$

10. $5x^2 - 3x + 14 > 5x^2 - 8x - 1.$

11. $7x^2 + 16x + 15 < 7x^2 - 16x + 15.$

12. $(3x + 14) + (2x - 11) > (2x + 7) - (8x - 13).$

253. 定義. 像前節的例題和習題的各不等式,所含的未知數的值須有一種限制,那式子纔能成立的,這稱為‘條件不等式’;反過來,若不等式中所含未知數的值無論怎樣,那式子都能成立的;這稱為‘絕對不等式’.

254. [例題2] 證明 a 和 b 兩個數的算術中數大於牠們的幾何中數.

因為實數的平方總是正的,所以

$$(a - b)^2 > 0.$$

$$\therefore a^2 - 2ab + b^2 > 0.$$

兩邊加上 $4ab$, 得

$$a^2 + 2ab + b^2 > 4ab,$$

即

$$(a+b)^2 > 4ab.$$

兩邊開平方,得

$$a+b > 2\sqrt{ab}.$$

兩邊除以2,得

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

這個式子的左邊就是 a 和 b 的算術中數,右邊就是 a 和 b 的幾何中數,這就證明了例題上所說的。

〔注意〕 這個例中的 a 和 b 是沒有限制的,所以

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

是一個絕對不等式。

〔練習2〕 若 a 和 b 是正數,證明下面的關係,

$$a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca.$$

〔練習3〕 若 a 和 b 不相等,並且都是正的, $\frac{a+b}{2}$ 和

$\frac{2ab}{a+b}$ 那一個大?

255. 〔例題3〕 $3x^2 + bx + 12 = 0$ 中, b 的值怎樣,這個方程式的兩個根纔不是虛數,而且不相等?

因為要原方程式的兩個根不是虛數而且不相等,牠的判別式 $b^2 - 4ac$ 應當是正的。現在 $a=3, c=12$,故必須

$$b^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 > 0.$$

即

$$b^2 - 144 > 0.$$

$$\therefore b^2 > 144,$$

$$\therefore b > 12.$$

我們將 $b^2 > 144$ 的兩邊開方的時候，本來 144 的平方根應當有一個 +12 和一個 -12，但這裏只用 +12 這一個。這是因為 $b > -12$ ，不合用的緣故。因為 b 若是正的總大於 -12，但牠必須還大於 +12。若 b 是負的，而大於 -12，則牠的絕對值必小於 12，牠的平方必小於 144，而 $b^2 - 4ac$ 是負的，這和題目所要求的不合。

若 $b = -13$ ，則前例中的 $b^2 - 4ac$ 等於什麼？

-13 比 -12 那一個大？

那末，前題中的 b 若小於 -12，同着題中所要求的合不合？

256. 依前節所討論的看來，第 255 節例題的解答只是 +12，是不完全的，怎樣纔可以得出這完全的解答來呢？我們試另用一個方法來解這不等式，

$$b^2 - 144 > 0.$$

將左邊分解因式，得

$$(b - 12)(b + 12) > 0.$$

這式子表明左邊的兩個因式相乘的積是正的。但兩個因式的乘積為正，則牠們的符號非相同不可，由此得出下面的兩種情形：

(i) $b - 12 > 0$ ，和 $b + 12 > 0$ ；

(ii) $b - 12 < 0$ ，和 $b + 12 < 0$ 。

再仔細考察 (i) 和 (ii)。

就(i)說,第一式成立,則第二式當然成立,因為由

$$b-12>0, \text{ 得 } b>12,$$

兩邊各加上12,便得 $b+12>24$,故 $b+12>0$.

就(ii)說,第二式成立,則第一式當然成立,因為由

$$b+12<0, \text{ 得 } b<-12,$$

兩邊各減去12,便得 $b-12<-24$,故 $b-12<0$.

所以(i)和(ii)都只須有一式成立就可以了。

由(i), $b-12>0$, 得 $b>12$.

由(ii), $b+12<0$, 得 $b<-12$.

這就是第255節的例題的完全解答,這個解答表明白 b 的值若在 -12 和 $+12$ 當中,則方程式 $3x^2+bx+12=0$ 不能有兩個不相等的實根。

$b=12$ 或 -12 的時候,這方程式的根怎樣?

257. [例題4] 解下列不等式,

$$5x - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} > 3x - \frac{1}{6} + \frac{x}{3}.$$

去分數,得(用各分母的最小公倍數6乘兩邊)

$$30x - 3x - 2 > 18x - 1 + 2x.$$

移項,得 $30x - 3x - 18x - 2x > -1 + 2$,

即 $7x > 1$,

$$\therefore x > \frac{1}{7}.$$

[例題5] 解下面的不等式,

$$x^2 - 2x - 3 < 0.$$

分解因式, $(x+1)(x-3) < 0$.

因爲左邊兩個因式的積是負的,所以牠們的符號應當不同;這有下面的兩種情形:

$$(i) \quad x+1>0, x-3<0;$$

$$(ii) \quad x+1<0, x-3>0.$$

但(ii)是不能成的,因爲 $x-3$ 既是正的,則 $x+1$ 不能是負的;反過來, $x+1$ 是負的, $x-3$ 就不能是正的。

$$\text{由 (i),} \quad x+1>0, \text{ 則 } x>-1;$$

$$x-3<0, \text{ 則 } x<3.$$

$$\text{合起來,便是} \quad -1<x<3.$$

就是 x 的值要在 -1 和 $+3$ 的中間。

$x=-1$ 或 3 怎樣?

習 題 一 六 三

解下列不等式:

$$1. \quad x+7>\frac{3}{2}x+8.$$

$$2. \quad 2x^2+4x>x^2+6x+8.$$

$$3. \quad x^2-6x>10x-5-2x^2.$$

$$4. \quad 2x^2+9x>2x-6.$$

$$5. \quad x^2(x^2-8)>-9(x+2).$$

$$6. \quad x^2+2x+5>0.$$

x, a, b, c, d 都是正的,決定下列各題中的兩數那一個大:

$$7. \quad x^2 \text{ 和 } x^2+x+2.$$

8. a^2+a 和 a^3+1 .
9. $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ 和 $(ac+bd)^2$.
10. a^3+b^3 和 a^2b+ab^2 .

證明下列各絕對不等式:

11. $a^2+3b^2 > 2b(a+b)$.
12. $a^3b+ab^3 > 2a^2b^2$.
13. $a^3+b^3 > a^2b+ab^2$.
14. $a^3b+ab^3 < a^4+b^4$.
15. $(a+b)(a^3+b^3) > (a^2+b^2)^2$.
16. 證明一個數和牠的倒數的和總大於2, 即

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$$

第二十六章

$(a+x)$ 的乘方

一 $(a+x)^n$ 的展開

258. 先注意下列的兩個恆等式：

$$(a+x)^2 \equiv a^2 + 2ax + x^2,$$

$$(a+x)^3 \equiv a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

若用 b 去代 a , 則得

$$(b+x)^2 \equiv b^2 + 2bx + x^2,$$

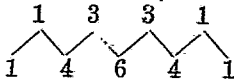
$$(b+x)^3 \equiv b^3 + 3b^2x + 3bx^2 + x^3.$$

由這四個式子, 可以看出來, 只要二項式的二乘方或三乘方, 牠們各自的展開式的各項的數係數是一樣的。這個法則實際可以運用到一切的乘方。所以, 若已知 $(a+x)^{10}$ 的展開式, 我們就能很容易地將 $(b+x)^{10}$ 的展開式寫出來。

用 $(a+x)$ 做基礎, 牠的各種乘方雖可以連續地由乘法計算得到; 但還有一個更簡便的法則來求牠。且來研究各項的數係數看罷。

$$\begin{aligned}
 (a+x)^3 &\equiv a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 \\
 &\quad \frac{a+x}{a^4 + 3a^3x + 3a^2x^2 + ax^3} \\
 &\quad \quad \frac{a^3x + 3a^2x^2 + 3ax^3 + x^4}{(a+x)^4 \equiv a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4.}
 \end{aligned}$$

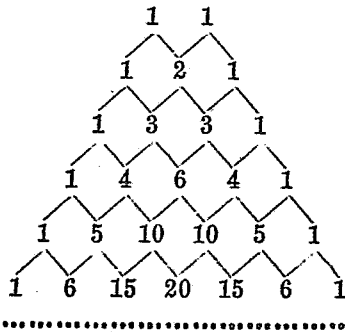
任意取 $(a+x)^4$ 的展開式的一項的數係數，即如 a^2x^2 的 6，牠恰是 $(a+x)^3$ 的展開式的 a^2x 和 ax^2 兩項的數係數 3 同 3 的和。由 $(a+x)^3$ 的展開式的各項的數係數做成 $(a+x)^4$ 的展開式的各項的數係數的法則，如下所示：



即 $1+3=4$, $3+3=6$, $3+1=4$, 同着兩端各有一個 1.

照同樣的法則，又可以求出 $(a+x)^5$ 的展開式的各項的數係數，並且還可以順着推下去。

從 $(a+x)^1$ 的展開式的各項的數係數起，有下列的組織：



這個組織稱爲‘巴士卡兒的三角形’，可以用來順次推算出 $(a+x)$ 的各正整數乘方的展開式的各項的係數。

習題一六四(口答)

求下列各式的展開式：

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1. $(x+y)^2$. | 2. $(a+b)^3$. | 3. $(m+n)^3$. |
| 4. $(x+y)^4$. | 5. $(p+q)^5$. | 6. $(m+p)^5$. |
| 7. $(c+d)^6$. | 8. $(l+f)^6$. | 9. $(x+y)^7$. |
| 10. $(a+x)^7$. | 11. $(a+x)^8$. | 12. $(1+x)^5$. |
| 13. $(1+x)^7$. | 14. $(1+x)^4$. | 15. $(1-x)^7$. |

二 $(1+x)^n$ 的近似值

259. 在 $(a+x)^n$ 中,用 1 去代 a , 則得 $(1+x)^n$, 所以

$$(1+x)^2 \equiv 1+2x+x^2,$$

$$(1+x)^3 \equiv 1+3x+3x^2+x^3,$$

$$(1+x)^4 \equiv 1+4x+6x^2+4x^3+x^4,$$

$$(1+x)^5 \equiv 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5,$$

$$(1+x)^6 \equiv 1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6.$$

由各展開式的第一,第二兩項可以得出一個一般的規則: 就是,若 n 是正整數, $(1+x)^n$ 的展開式的第一,第二兩項是 $1+nx$. 所以,若 n 是正整數,則

$$(1+x)^n = 1+nx + \text{含有 } x \text{ 的較高的乘方的項.}$$

這個情形,在計算某種近似值的時候特別地有用。例如,假定要求 $(1.001)^6$ 的近似值。

若在 $(1+x)^6$ 中,設 $x=0.001$,則得 $(1.001)^6=(1+0.001)^6$ 。

所以 $(1.001)^6=(1+0.001)^6$

$=1+6\times 0.001+$ 含有 0.001 的較高的乘方的項。

而 $(0.001)^2=0.000001$,

$(0.001)^3=0.000000001$ 。

假如只求 $(1.001)^6$ 的 4 位數字正確的數;在現在的情形,就是只求 3 位小數正確。在 6×0.001 的下一項是 0.000001 乘一些係數;這係數明明白白不是很大而使這個乘積得到第三位小數的有效數字的;因為假如要這樣,最少牠得大於 500,而實際的係數卻不過是 15。至於以後的各項比較牠的前一項更加小得厲害,對於第三位小數自然毫無影響了。一般的情形,若這些項很多,牠們的和相當的大,也可以影響前面,那是省略不來的,不過在這裏, 6×0.001 以後不過 5 項,所以可無須計算,已知道牠們的和是影響不到第三位小數的。

所以 $(1.001)^6=1+6\times 0.001$ 到 3 位小數
 $=1.006$ 。

[到 10 位數字, $(1.001)^6=1.006015020\dots\dots$]

260. 前節的例是可以略去第二項以後的各項的,但在別的例卻不一定全可以這樣。例如求 $(1.1)^6$ 到

小數1位。

$$\begin{aligned}(1.1)^6 &= 1 + 6 \times 0.1 + 15 \times 0.01 + \dots\dots \\ &= 1 + 0.6 + 0.15 + \dots\dots.\end{aligned}$$

這裏第三項的大就夠影響到所得的結果了。

所以，要 $(1+x)^n = 1+nx$ 這公式求近似值的時候，這兩點是應當注意：(i) x 的值是否真小，而可用牠，(ii) n 的值是否只大得不能影響到所得的結果？若這些必要的條件不完全，則用別的方法更好一點。

261. 更推廣一點， $(1+x)^n$ 的展開式， n 不是正整數的時候究竟怎樣？雖是在這本書內，還研究不到。但實際 n 無論是正整數，負整數或分數，近似值的公式

$$(1+x)^n = 1+nx.$$

只要 x 和 nx 的數值比起1來很小，都可以用。

nx 所以必須要小，可由下例知道。

例如 $(1.001)^{1000}$, $x=0.001$ 雖小，但 $nx=1$ 。

而 $(1.001)^{1000} = 2.717\dots\dots$ 。

但 $1+1000 \times 0.001 = 2$ 。

262. [例題1] $\sqrt[3]{1728} = 12$; 求 $\sqrt[3]{1729}$ 比 $\sqrt[3]{1728}$ 大百分之幾？

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1729} &= (1728+1)^{\frac{1}{3}} \\ &= (1728)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{1728}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 12 \left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1728}\right) \text{約.}\end{aligned}$$

因 $\frac{1}{1728}$ 和 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{1728}$ 是很小, 所以第三項以下可略去,

$$\therefore \text{實際所大的} = 12 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{1728},$$

而所大的百分數 $= \frac{100}{3 \times 1728}$.

[注意] 1729 比 1728 所大的是百分之 $\frac{100}{1728}$, 而立方根所大的是這個數的 $\frac{1}{3}$.

[例題 2] 當溫度增高 $1^\circ C$. 的時候, 玻璃每邊的長度膨脹原長的 0.0000088(= g), 求溫度增高 $1^\circ C$. 時, 玻璃體積的增大的比。

設 x 公分爲玻璃器的長度, v 立方公分是體積。

玻璃器的膨脹是比例於牠的各方向的, 所以總和牠的原形相似, 而 $v = kx^3$.

在溫度增高 $1^\circ C$. 後, x 變成 $x(1+g)$.

$$\therefore kx^3 \text{ 變成 } kx^3(1+g)^3, \text{ 這算是 } v'.$$

$$\therefore v' = kx^3(1+g)^3 = kx^3(1+3g) \text{ 約.}$$

$$\therefore \frac{v'}{v} = 1+3g.$$

所以, 增加的是原容量的 $3g$ 倍。

每攝氏 1 度, 長度的變化對於原長的比, 稱爲‘線脹係數’。這在特定的物質是近於常數的。

用面積或體積來代替這長度, 所得的相應的比, 稱爲‘面或體脹係數’。

由上例, 就證明體脹係數是線脹係數的 3 倍。

〔例題3〕 若 $x=2$, $x^5=16x$, 則方程式 $x^5=16x+0.2$ 有一個和 2 相近的根。

現在來求這個根的近似值的限度, 設 $x=2+h$ 是 $x^5=16x+0.2$ 的一個根, h 的值很小; 則

$$(2+h)^5 = 16(2+h) + 0.2.$$

$$\begin{aligned} \text{因爲 } h \text{ 很小, } (2+h)^5 &= 2^5 \left(1 + \frac{h}{2}\right)^5 \\ &= 32 \left(1 + \frac{5h}{2}\right) \text{ 約} \\ &= 32 + 80h. \end{aligned}$$

$$\therefore 32 + 80h = 32 + 16h + 0.2.$$

$$\therefore 64h = 0.2$$

$$\therefore h = \frac{0.2}{64} = 0.003 \text{ 約.}$$

所以, 2.003 是這個根的近似值的限度。

習 題 一 六 五

1. 求下列各近似值:

(i) $(1.0003)^5$,

(ii) $(0.991)^3$,

(iii) $(1.004)^{\frac{1}{2}}$,

(iv) $(1.0006)^{-2}$,

(v) $\frac{1}{0.995}$,

(vi) $(0.99994)^{-\frac{1}{3}}$,

(vii) $\sqrt[3]{1.012}$,

(viii) $\sqrt{0.9996}$,

(ix) $\sqrt{4.0016}$,

(x) $(144.0288)^{\frac{1}{3}}$,

(xi) $(32.01)^{\frac{2}{5}}$,

(xii) $\sqrt{24.9975}$,

(xiii) $\sqrt{342}$, (xiv) $\sqrt{100+x}$, x 是很小的,

(xv) $(a+x)^7$, $\frac{x}{a}$ 是很小的,

(xvi) $\frac{1}{5.00002}$, (xvii) $\frac{1}{(2.00004)^3}$

2. 因為 $x=3$ 適合於方程式 $x^3-9x=0$, 方程式 $x^3-9x=0.01$ 很明白地有一個根和 3 相差不大。求這個根的限度。

3. $x^5-5x^4=1$, 有一個根和 5 相差不大。用 $x=5+h$ 代入去求這個根的限度。

4. 證明面積係數是線脹係數的二倍。

5. 設 $y=x^n$, 並且設 x 增加 h 的時候, y 增加 k . 證明當 h 和 k 都是極小的時候, $\frac{k}{h}=nx^{n-1}$ 約。

6. 求 $\frac{(1+0.001)^7-1^7}{0.001}$ 和 $\frac{(1-0.001)^7-1^7}{-0.001}$ 的近似值。

7. 若 x 極小, 用 $1+nx$ 的形式表示 $\frac{\sqrt{1-3x}}{1+4x}$ 的近似值。若 $x=\frac{1}{100}$, 用對數求到 3 位數字的值。

8. 用 $1+nx$ 的形式表示 $\frac{\sqrt{1-3x}}{(1+2x)^2}$ 的近似值, x 是極小的數, 牠的平方是可以略去的, n 是數係數。

9. 若 x, y 和 z 都是極小的, 證明

$$\frac{(1+x)^m(1+y)^n}{(1+z)^p} = 1+mx+ny-pz \text{ 約。}$$

10. 用 $(1+3x)$ 去代 $(1+x)^3$, 在 $x=0.05$ 的時候, 牠的誤差的百分數是多少?
11. 長度的測量的誤差爲百分之0.4, 用這個長度計算出來的面積的誤差的百分數是多少?
12. 擺動周期 $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. 有一鐘的擺長, 恰能使 $t=1$. 若牠增加原長的 $\frac{1}{2000}$; 則一晝夜這鐘所走的時刻相差多少?

第二十七章

開 方

一 完全平方

263. 在解二次方程式的時候,一般的方法是要做成一個完全平方的二次函數,而求出這函數的平方根。

一個函數,若牠恰好是一個有理函數的平方,便說牠是‘完全平方’。所以,完全平方牠自己也就是一個有理函數。又 n 次的函數的平方一定是一個 $2n$ 次的函數,所以,完全平方一定是偶數次的函數。

264. 在研究怎樣決定一個函數是否完全平方以前,須知道怎樣可以寫出一個函數的平方。

由乘法, $(a+b+c)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$. 就是一個式子的平方式,含有牠的各項的平方的和,再加上這些項每兩個的積的二倍。這個法則是無論多少項都一樣的。

習題一六六

寫出下列各式的平方：

(寫每兩項的積的時候,最好是從第二項起,順次取一項而用後面的一項去乘牠。)

1. $2x+3y+4z$.
2. $3x^2-2x+1$.
3. x^2-4x-5 .
4. x^3+3x^2+3x+1 .
5. x^3-2x^2+3x-1 .
6. $2x^2-3xy+y^2$.
7. $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$.

265. [例題] 決定

$$9x^4-12x^3+28x^2+16x+16,$$

是否完全平方;倘若是的,並求牠的平方根。

這個式子是4次;若牠是完全平方,牠的平方根必定是2次式;設為 ax^2+bx+c 。

$$9x^4 \text{ 的項必是 } ax^2 \text{ 的平方, } \therefore a^2x^4=9x^4,$$

$$\therefore a^2=9, \therefore a=\pm 3.$$

現在取 $a=+3$ 。

絕對項 +16 必是 c 的平方,

$$\therefore c^2=16, \therefore c=\pm 4.$$

$-12x^3$ 這一項只能夠由二倍 ax^2 和 bx 的積得出來,

$$\therefore 2ab=-12,$$

$$\therefore b=-\frac{6}{a}=-2.$$

所以,我們大體可以決定原式的平方根是

$$3x^2 - 2x \pm 4.$$

但 $-16x$ 這一項,又只能夠由二倍 $-2x$ 和 ± 4 的積得出來,所以絕對項應當用 $+4$.

原式的各項除了 $28x^2$ 這一項,都已用來推算過了.

在 $(3x^2 - 2x + 4)^2$ 中 x^2 的係數是

$$(-2)^2 + 2 \times 3 \times 4 = 4 + 24 = 28.$$

所以 $9x^4 - 12x^3 + 28x^2 - 16x + 16 \equiv (3x^2 - 2x + 4)^2$.

將這式子的符號掉過,平方出來還是一樣的;因此所求的平方根是

$$\pm(3x^2 - 2x + 4).$$

習題 一 六 七

下列各式中有是完全平方的,就求牠的平方根:

1. $25x^2 - 120x + 144.$
2. $9x^2 + 49 - 25x.$
3. $x^2 + 4x^3 - 8x + 4.$
4. $x^4 - 8x^3 + 24x^2 + 10x^2 + 9.$
5. $4x^4 - 12x^3 + 45x^2 - 54x + 81.$
6. $4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + \frac{1}{4}.$
7. $36x^4 - 36x^3 + 17x^2 - 4x + \frac{5}{9}.$
8. $4a^4 + 9(1 - 2a) + 3a^2(7 - 4a).$
9. $9x^6 - 12x^4 + 30x^3 + 4x^2 - 20x + 25.$

10. $4 + 12x + x^2 + 22x^4 - 12x^5 + 9x^6$.
11. $9x^4 - 12x^3y + 10x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$.
12. $a^6 + 3a^4b^2 - 10a^5b - 3a^3b^3 + 2a^2b^4$.
13. 某完全平方式的頭兩項為 $49x^4 - 28x^3$, 末兩項為 $6x + \frac{9}{4}$. 求這個式子和牠的平方根.

二 一般的開平方法

266. 前節所講的法則, 是很特殊的, 通常用起來極不方便, 這裏要講和算術中所用的一樣的方法.

設要求 $x^4 + 16 - 24x + 6x^3 + x^2$ 的平方根 (若牠是完全平方).

第一步, 必須將這個式子照 x 的降冪 (或升冪) 排列, 即

$$x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16.$$

設 E 表這個式子, k_1, k_2, \dots 表平方根的相連的各項.

這個方法完全和算術裏的一樣, 照下例計算.

因為 $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2 \equiv a^2 + (2a+b)b$. 所以第一次是求第一項的平方根; 以後便 2 倍已得的平方根的各项的和, 而用牠去試除所餘的數, 再將所得的商加進去, 更用這所得的商去乘這所得的和, 最後從除式中減去這個積. 下式中括弧裏的部分就是計算的說明

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{\quad} = x^2 + 3x - 4 \\
 \frac{x^4 + 6x^3 + x^2 - 24x + 16}{x^4} \begin{array}{l} [= E] \\ [= k_1^2] \end{array} \\
 \frac{2x^2 + 3x}{[= 2k_1 + k_2]} \begin{array}{l} \frac{6x^3 + x^2 - 24x + 16}{6x^3 + 9x^2} \begin{array}{l} [= E - k_1^2] \\ [= (2k_1 + k_2)k_2] \end{array} \\
 \frac{2x^2 + 6x - 4}{[= 2(k_1 + k_2) + k_3]} \begin{array}{l} \frac{-8x^2 - 24x + 16}{-8x^2 - 24x + 16} \begin{array}{l} [= E - (k_1 + k_2)^2] \\ [= \{2(k_1 + k_2) + k_3\}k_3] \end{array} \\
 0 \quad \quad \quad [= E - (k_1 + k_2 + k_3)^2]
 \end{array}
 \end{array}$$

∴ E 是一個完全平方，而牠的平方根是

$$\pm(x^2 + 3x - 4).$$

習題一六八

求下列各式的平方根：

1. $x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9.$
2. $4x^4 + 37x^2 + 49 - 12x^3 - 42x.$
3. $9x^2y^4 - 12x^3y^3 + 34x^4y^2 - 20x^5y + 25x^6.$
4. $16x^4 + 25y^4 - 24x^2y - 30xy^3 + 49x^2y^2.$
5. $25x^6 - 20x^4 - 30x^2 + 4x^2 + 12x + 9.$
6. $9x^6 - 12x^5 - 74x^4 + 28x^3 + 185x^2 + 104x + 16.$
7. $x^3 + x^6 + 2x^5(x^2 - 2) - 4x^2(3x^2 - 1) - 8(x^3 - 2x - 2).$
8. $x^4 - 2x^3 + 7x^2 + \frac{4}{x^2} - 10x - \frac{12}{x} + 13.$
9. $4x^2 + \frac{1}{a^2} - 6a - \frac{3}{a} + 6\frac{1}{4}.$

10. $9x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 50x^3 + 30x^2 + ax + 39$ 爲一完全平方，求牠的平方根和 a 的值。並且照第 255 節例題逐步寫出來。

11. 若 $A - 24y + 10y^2 + 8y^3 + y^4$ 是一個完全平方, A 的值是多少?

12. 照方法求 $36x^4 + 48x^3 - 2x^2 - 39$ 的平方根的前三項,並求使這式子成一完全平方的一個 x 的整數值。

三 一般的開立方

267. 一個式子若是完全立方,也可用和第 255 節同樣的法則求牠的立方根;但是計算起來更加繁難,所以這裏只講一般的開立方方法。這個方法是根據下面的恆等式得來的,和算術中的一樣。

$$(a+b)^3 \equiv a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \equiv a^3 + (3a^2 + 3ab + b^2)b.$$

例如要求 $5x^3 - 3x^5 + x^6 - 1 - 3x$ 的立方根。

第一步,也是必須將這個式子照 x 的降冪(或升冪)排列,即 $x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x - 1$ 。

設 E 表這個式子, k_1, k_2, \dots 表立方根的相連的各項,算草中所注的 ①.....⑥,就是計算的說明。

$$\begin{array}{r} \sqrt[3]{} = x^2 - x - 1 \\ \hline x^6 - 3x^5 - 3x - 1 \quad \textcircled{1} \\ + 5x^3 \quad \textcircled{2} \\ \hline \textcircled{3} 3x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x - 1 \quad \textcircled{3} \\ - 3x - 1 \quad \textcircled{5} \\ \hline - 3x - 1 \quad \textcircled{4} \\ - 3x - 1 \quad \textcircled{6} \\ \hline - 3x - 1 \quad \textcircled{5} \\ - 3x - 1 \quad \textcircled{6} \\ \hline - 3x - 1 \quad \textcircled{6} \\ - 3x - 1 \quad \textcircled{6} \\ \hline - 3x - 1 \quad \textcircled{6} \\ - 3x - 1 \quad \textcircled{6} \\ \hline - 3x - 1 \quad \textcircled{6} \\ - 3x - 1 \quad \textcircled{6} \\ \hline - 3x - 1 \quad \textcircled{6} \\ - 3x - 1 \quad \textcircled{6} \\ \hline 0 \quad \textcircled{6} \end{array}$$

$$\textcircled{1} = E; \textcircled{2} = k_1^3; \textcircled{3} = E - k_1^3; \textcircled{4} = 3k_1^2 + 3k_1k_2 + k_2^3;$$

$$\textcircled{5} = (3k_1^2 + 3k_1k_2 + k_2^3)k_2; \textcircled{6} = E - (k_1 + k_2)^3;$$

$$\textcircled{6} = 3(k_1 + k_2)^2 + 3k_1 + k_2)k_2 + k_2^3;$$

$$\textcircled{8} = \{3(k_1 + k_2)^2 + 3(k_1 + k_2)k_3 + k_3^2\}k_3;$$

$$\textcircled{9} = E - (k_1 + k_2 + k_3)^3.$$

$\therefore E$ 的立方根是 $x^3 - x - 1$.

習題 一 六 九

求下列各式的立方根:

1. $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3.$

2. $x^3 + 12x^2 + 48x + 64.$

3. $27a - 9a^2 + a^3 - 27.$

4. $x^6 - 3ax(x^4 + a^4) + 5a^3x^3 - a^6.$

5. $x^6 + 6x^4 + 7x^3 + 3x^5 + 3x + 6x^7 + 1.$

6. $1 - 9x + 39x^2 - 99x^3 + 156x^4 - 144x^5 + 64x^6.$

7. $1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 12x^4 - 12x^5 + 10x^6 - 6x^7 + 3x^8 - x^9.$

運用 $a^{\frac{1}{nm}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}$ 的原理和開平方,開立方的法則求

下列各方根:

8. $(81a^4 - 540a^3b + 1350a^2b^2 - 1500ab^3 + 625b^4)^{\frac{1}{4}}.$

9. $(1 - 4x + 10x^2 - 16x^3 + 19x^4 - 16x^5 + 10x^6 - 4x^7 + x^8)^{\frac{1}{4}}.$

10. $(64 - 192x + 240x^2 - 160x^3 + 60x^4 - 12x^5 + x^6)^{\frac{1}{5}}.$

11. $(729x^6 - 1458x^5 + 1215x^4 - 540x^3 + 135x^2 - 18x + 1)^{\frac{1}{6}}.$

12. $(1 - 8y + 28y^2 - 56y^3 + 70y^4 - 56y^5 + 28y^6 - 8y^7 + y^8)^{\frac{1}{8}}.$

平方根表

平方根表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1000	1005	1010	1015	1020	1025	1030	1034	1039	1044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	3162	3178	3194	3209	3225	3240	3256	3271	3286	3302	2	3	5	6	8	9	11	12	13
11	1049	1054	1058	1063	1068	1072	1077	1082	1086	1091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	3317	3332	3347	3362	3376	3391	3406	3421	3435	3450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12	1095	1100	1105	1109	1114	1118	1122	1127	1131	1136	0	1	1	2	2	3	3	4	4
	3464	3479	3493	3507	3521	3536	3550	3564	3578	3592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13	1140	1145	1149	1153	1158	1162	1166	1170	1175	1179	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	3606	3619	3633	3647	3661	3674	3688	3701	3715	3728	1	3	4	5	7	8	10	11	12
14	1183	1187	1192	1196	1200	1204	1208	1212	1217	1221	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	3742	3755	3768	3782	3795	3808	3821	3834	3847	3860	1	3	4	5	7	8	9	11	12
15	1225	1229	1233	1237	1241	1245	1249	1253	1257	1261	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	3873	3886	3899	3912	3924	3937	3950	3962	3975	3987	1	3	4	5	6	8	9	10	11
16	1265	1269	1273	1277	1281	1285	1288	1292	1296	1300	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	4000	4012	4025	4037	4050	4062	4074	4087	4099	4111	1	2	4	5	6	7	9	10	11
17	1304	1308	1311	1315	1319	1323	1327	1330	1334	1338	0	1	1	2	2	2	2	3	3
	4123	4135	4147	4159	4171	4183	4195	4207	4219	4231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18	1342	1345	1349	1353	1356	1360	1364	1367	1371	1375	0	1	1	2	2	2	3	3	3
	4243	4254	4266	4278	4290	4301	4313	4324	4336	4347	1	2	3	5	6	7	8	9	10
19	1378	1382	1386	1389	1393	1396	1400	1404	1407	1411	0	1	1	1	2	2	2	3	3
	4359	4370	4382	4393	4405	4416	4427	4438	4450	4461	1	2	3	5	6	7	8	9	10
20	1414	1418	1421	1425	1428	1432	1435	1439	1442	1446	0	1	1	1	2	2	2	3	3
	4472	4483	4494	4506	4517	4528	4539	4550	4561	4572	1	2	3	4	5	7	8	9	10
21	1449	1453	1456	1459	1463	1466	1470	1473	1476	1480	0	1	1	1	2	2	2	3	3
	4583	4593	4604	4615	4626	4637	4648	4658	4669	4680	1	2	3	4	5	6	8	9	10

22	1483	1487	1490	1493	1497	1500	1503	1507	1510	1513	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	4690	4701	4712	4722	4733	4743	4754	4764	4775	4785	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
23	1517	1520	1523	1526	1530	1533	1536	1539	1543	1546	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	4796	4806	4817	4827	4837	4848	4858	4868	4879	4889	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
24	1549	1552	1556	1559	1562	1565	1568	1572	1575	1578	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	4899	4909	4919	4930	4940	4950	4960	4970	4980	4990	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
25	1581	1584	1587	1591	1594	1597	1600	1603	1606	1609	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	5000	5010	5020	5030	5040	5050	5060	5070	5079	5089	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
26	1612	1616	1619	1622	1625	1628	1631	1634	1637	1640	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	5099	5109	5119	5128	5138	5148	5158	5167	5177	5187	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
27	1643	1646	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	5196	5206	5215	5225	5235	5244	5254	5263	5273	5282	1	2	3	4	5	6	7	8	9					
28	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	5292	5301	5310	5320	5329	5339	5348	5357	5367	5376	1	2	3	4	5	6	7	7	7	7	8	8	8	8
29	1703	1706	1709	1712	1715	1718	1720	1723	1726	1729	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	5385	5394	5401	5413	5422	5431	5441	5450	5459	5468	1	2	3	4	5	5	6	6	6	6	7	7	7	7
30	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	5477	5486	5495	5505	5514	5523	5532	5541	5550	5559	1	2	3	4	4	5	6	7	7	7	8	8	8	8
31	1761	1764	1766	1769	1772	1775	1778	1780	1783	1786	0	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	5568	5577	5586	5595	5604	5612	5621	5630	5639	5648	1	2	3	3	4	5	6	7	7	7	8	8	8	8
32	1789	1792	1794	1797	1800	1803	1806	1808	1811	1814	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
	5657	5666	5675	5683	5692	5701	5710	5718	5727	5736	1	2	3	3	4	5	6	7	7	7	8	8	8	8
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9					

平方根表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9			
33	1817 5745	1819 5753	1822 5762	1825 5771	1828 5779	1830 5788	1833 5797	1836 5805	1838 5814	1841 5822	0	1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
34	1844 5831	1847 5840	1849 5848	1852 5857	1855 5865	1857 5874	1860 5882	1863 5891	1865 5899	1868 5908	0	1	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8
35	1871 5916	1873 5925	1876 5933	1879 5941	1881 5950	1884 5958	1887 5967	1889 5975	1892 5983	1895 5992	0	1	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8
36	1897 6000	1900 6008	1903 6017	1905 6025	1908 6033	1910 6042	1913 6050	1916 6058	1918 6066	1921 6075	0	1	1	1	2	2	3	4	5	6	7	7
37	1924 6083	1926 6091	1929 6099	1931 6107	1934 6116	1936 6124	1939 6132	1942 6140	1944 6148	1947 6156	0	1	1	1	2	2	3	4	5	6	7	7
38	1949 6164	1952 6173	1954 6181	1957 6189	1960 6197	1962 6205	1965 6213	1967 6221	1970 6229	1972 6237	0	1	1	1	2	2	3	4	5	6	6	7
39	1975 6245	1977 6253	1980 6261	1982 6269	1985 6277	1987 6285	1990 6293	1992 6301	1995 6309	1997 6317	0	1	1	1	2	2	3	4	5	6	6	7
40	2000 6325	2002 6332	2005 6340	2007 6348	2010 6356	2012 6364	2015 6372	2017 6380	2020 6387	2022 6395	0	1	1	1	2	2	3	4	5	6	6	7
41	2025 6403	2027 6411	2030 6419	2032 6427	2035 6434	2037 6442	2040 6450	2042 6458	2045 6465	2047 6473	0	1	1	1	2	2	3	4	5	5	6	7
42	2049 6481	2052 6488	2054 6496	2057 6504	2059 6512	2062 6519	2064 6527	2066 6535	2069 6542	2071 6550	0	1	1	1	2	2	3	4	5	5	6	7
43	2074 6557	2076 6565	2078 6573	2081 6580	2083 6588	2086 6595	2088 6603	2090 6611	2093 6618	2095 6626	0	1	1	1	2	2	3	4	5	5	6	7

44	2098	2100	2102	2105	2107	2110	2112	2114	2117	2119	O O I I I I I I	I I I I I I I I	2 2 2 2 2 2
	6633	6641	6648	6656	6663	6671	6678	6686	6693	6701	I 2 2 3 4 4 5	4 4 5 6 7	
	2121	2124	2126	2128	2131	2133	2135	2138	2140	2142	O O I I I I I I	I 2 2 2 2 2 2	
46	6768	6716	6723	6731	6738	6745	6753	6760	6768	6775	I I I 2 3 4 4	5 6 7	
	2145	2147	2149	2152	2154	2156	2159	2161	2163	2166	O O I I I I I I	I 2 2 2 2 2 2	
	6782	6790	6797	6804	6812	6819	6826	6834	6841	6848	I I 2 3 4 4	5 6 7	
47	2168	2170	2173	2175	2177	2179	2182	2184	2186	2189	O O I I I I I I	I 2 2 2 2 2 2	
	6856	6863	6870	6877	6885	6892	6899	6907	6914	6921	I I 2 3 4 4	5 6 7	
	2191	2193	2195	2198	2200	2202	2205	2207	2209	2211	O O I I I I I I	I 2 2 2 2 2 2	
48	6928	6935	6943	6950	6957	6964	6971	6979	6986	6993	I I 2 3 4 4	5 6 6	
	2214	2216	2218	2220	2223	2225	2227	2229	2232	2234	O O I I I I I I	I 2 2 2 2 2 2	
	7000	7007	7014	7021	7029	7036	7043	7050	7057	7064	I I 2 3 4 4	5 6 6	
50	2236	2238	2241	2243	2245	2247	2249	2252	2254	2256	O O I I I I I I	I 2 2 2 2 2 2	
	7071	7078	7085	7092	7099	7106	7113	7120	7127	7134	I I 2 3 4 4	5 6 6	
	2258	2261	2263	2265	2267	2269	2272	2274	2276	2278	O O I I I I I I	I 2 2 2 2 2 2	
51	7141	7148	7155	7162	7169	7176	7183	7190	7197	7204	I I 2 3 4 4	5 6 6	
	2280	2283	2285	2287	2289	2291	2293	2296	2298	2300	O O I I I I I I	I 2 2 2 2 2 2	
	7211	7218	7225	7232	7239	7246	7253	7259	7266	7273	I I 2 3 4 4	5 6 6	
53	2302	2304	2307	2309	2311	2313	2315	2317	2319	2322	O O I I I I I I	I 2 2 2 2 2 2	
	7280	7287	7294	7301	7308	7314	7321	7328	7335	7342	I I 2 3 4 4	5 6 6	
	2324	2326	2328	2330	2332	2335	2337	2339	2341	2343	O O I I I I I I	I 2 2 2 2 2 2	
54	7348	7355	7362	7369	7376	7382	7389	7396	7403	7409	I I 2 3 4 4	5 6 6	
											O I 2 3 4 5 6		
											1 2 3 4 5 6 7 8 9		

平方根表

55	2345 7416	2347 7423	2349 7430	2352 7436	2354 7443	2356 7450	2358 7457	2360 7463	2362 7470	2364 7477	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
56	2366 7483	2369 7491	2371 7503	2373 7510	2375 7517	2377 7523	2379 7529	2381 7533	2383 7537	2385 7543	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
57	2387 7550	2390 7556	2392 7563	2394 7570	2396 7576	2398 7583	2400 7589	2402 7595	2404 7603	2406 7609	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
58	2408 7616	2410 7622	2412 7629	2415 7635	2417 7642	2419 7649	2421 7655	2423 7662	2425 7668	2427 7675	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
59	2429 7681	2431 7688	2433 7694	2435 7701	2437 7707	2439 7714	2441 7720	2443 7727	2445 7733	2447 7740	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
60	2449 7746	2452 7752	2454 7759	2456 7765	2458 7772	2460 7778	2462 7785	2464 7791	2466 7797	2468 7804	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
61	2470 7816	2472 7817	2474 7823	2476 7829	2478 7836	2480 7842	2482 7849	2484 7855	2486 7861	2488 7868	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
62	2490 7874	2492 7880	2494 7887	2496 7893	2498 7899	2500 7906	2502 7912	2504 7918	2506 7925	2508 7931	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
63	2510 7937	2512 7944	2514 7950	2516 7956	2518 7962	2520 7969	2522 7975	2524 7981	2526 7987	2528 7994	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
64	2530 8000	2532 8006	2534 8012	2536 8019	2538 8025	2540 8031	2542 8037	2544 8044	2546 8050	2548 8056	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
65	2550 8062	2551 8068	2553 8075	2555 8081	2557 8087	2559 8093	2561 8099	2563 8106	2565 8112	2567 8118	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8
66	2569 8124	2571 8130	2573 8136	2575 8142	2577 8149	2579 8155	2581 8161	2583 8167	2585 8173	2587 8179	0 0 1 1	1 1 2 2	2 3 3 3	3 4 4 4	4 5 5 5	5 6 6 6	6 7 7 7	7 8 8 8

67	8588 8185	2590 8191	2592 8198	2594 8204	2596 8210	2598 8216	2600 8222	2602 8228	2604 8234	2606 8240	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	F F F F	2 2 5 5
68	2608 8246	2610 8252	2612 8258	2614 8264	2615 8270	2617 8276	2619 8283	2621 8289	2623 8295	2625 8301	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	I I I I	2 2 5 5
69	2627 8307	2629 8313	2631 8319	2632 8325	2634 8331	2636 8337	2638 8343	2640 8349	2642 8355	2644 8361	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	I I I I	2 2 5 5
70	2646 8367	2648 8373	2650 8379	2651 8385	2653 8390	2655 8396	2657 8402	2659 8408	2661 8414	2663 8420	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	I I I I	2 2 5 5
71	2665 8426	2666 8432	2668 8438	2670 8444	2672 8450	2674 8456	2676 8462	2678 8468	2680 8473	2681 8479	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	I I I I	2 2 5 5
72	2683 8485	2685 8491	2687 8497	2689 8503	2691 8509	2693 8515	2694 8521	2696 8526	2698 8532	2700 8538	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	I I I I	2 2 5 5
73	2702 8544	2704 8550	2706 8556	2707 8562	2709 8567	2711 8573	2713 8579	2715 8585	2717 8591	2718 8597	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	I I I I	2 2 5 5
74	2720 8602	2722 8608	2724 8614	2726 8620	2728 8626	2729 8631	2731 8637	2733 8643	2735 8649	2737 8654	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	I I I I	2 2 5 5
75	2739 8660	2740 8666	2742 8672	2744 8678	2746 8683	2748 8689	2750 8695	2753 8701	2755 8706	2757 8712	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	I I I I	2 2 5 5
76	2757 8718	2759 8724	2760 8729	2762 8735	2764 8741	2766 8746	2768 8752	2769 8758	2771 8764	2773 8769	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	I I I I	2 2 5 5
77	2775 8773	2777 8781	2778 8786	2780 8792	2782 8798	2784 8803	2786 8809	2787 8815	2789 8820	2791 8826	O O I I	O O I I	I I I I	I I I I	I I I I	2 2 5 5
	O	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6

平方根表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
76	2793 8832	2795 8837	2796 8843	2798 8849	2800 8854	2802 8860	2804 8866	2805 8871	2807 8877	2809 8883	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
77	2811 8888	2812 8894	2814 8899	2816 8905	2818 8911	2820 8916	2821 8922	2823 8927	2825 8933	2827 8939	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
78	2828 8944	2830 8950	2832 8955	2834 8961	2835 8967	2837 8972	2839 8978	2841 8983	2843 8989	2844 8994	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
79	2846 9000	2848 9006	2850 9011	2851 9017	2853 9022	2855 9028	2857 9033	2858 9039	2860 9044	2862 9050	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	2864 9055	2865 9061	2867 9066	2869 9072	2871 9077	2872 9083	2874 9088	2876 9094	2877 9099	2879 9105	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
81	2881 9110	2883 9116	2884 9121	2886 9127	2888 9132	2890 9138	2891 9143	2893 9149	2895 9154	2897 9160	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
82	2898 9165	2900 9171	2902 9176	2903 9182	2905 9187	2907 9192	2909 9198	2910 9203	2912 9209	2914 9214	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
83	2915 9220	2917 9225	2919 9230	2921 9236	2922 9241	2924 9247	2926 9252	2927 9257	2929 9263	2931 9268	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
84	2933 9274	2934 9279	2936 9284	2938 9290	2939 9295	2941 9301	2943 9306	2944 9311	2946 9317	2948 9322	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
85	2950 9327	2951 9333	2953 9338	2955 9343	2956 9349	2958 9354	2960 9359	2961 9365	2963 9370	2965 9375	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86	2966 9381	2968 9386	2970 9391	2972 9397	2973 9402	2975 9407	2977 9413	2978 9418	2980 9423	2982 9429	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

88	2983 9434	2985 9439	2987 9445	2988 9450	2990 9455	2992 9460	2993 9466	2995 9471	2997 9476	2998 9482	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5	
89	3000 9487	3002 9492	3003 9497	3005 9503	3007 9508	3008 9513	3010 9518	3012 9524	3013 9529	3015 9534	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5
91	3017 9539	3018 9545	3020 9550	3022 9555	3023 9560	3025 9566	3027 9571	3028 9576	3030 9581	3032 9586	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5
92	3033 9592	3035 9597	3036 9602	3038 9607	3040 9612	3041 9618	3043 9623	3045 9628	3046 9633	3048 9638	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5
93	3050 9644	3051 9649	3053 9654	3055 9659	3056 9664	3058 9670	3059 9675	3061 9680	3063 9685	3064 9690	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5
94	3066 9695	3068 9701	3069 9706	3071 9711	3072 9716	3074 9721	3076 9726	3077 9731	3079 9737	3081 9742	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5
95	3082 9747	3084 9752	3085 9757	3087 9762	3089 9767	3090 9772	3092 9778	3094 9783	3095 9788	3097 9793	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5
96	3098 9798	3100 9803	3102 9808	3103 9813	3105 9818	3106 9823	3108 9829	3110 9834	3111 9839	3113 9844	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5
97	3114 9849	3116 9854	3118 9859	3119 9864	3121 9869	3122 9874	3124 9879	3126 9884	3127 9889	3129 9894	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5
98	3130 9899	3132 9905	3134 9910	3135 9915	3137 9920	3138 9925	3140 9930	3142 9935	3143 9940	3145 9945	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5
99	3146 9950	3148 9955	3150 9960	3151 9965	3153 9970	3154 9975	3156 9980	3158 9985	3159 9990	3161 9995	0 0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	2 2	2 2	3 3	3 3	4 4	4 4	5 5
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5

平方根表用法

本表第一行和第一排第末排，爲平方數，其餘爲相應於各平方數的平方根，平方根數兩兩上下併排，上一數是平方數整數位數爲奇數的，下一數是平方數整數位數爲偶數的。平方根的整數位數等於平方數的整數位數加 1 的一半（在平方數的整數位數爲奇數時），或等於平方數的整數位數的一半（在平方數的整數位數爲偶數時）。

〔例 1〕 求 21340 的平方根。

先於表的第一行查到 21，橫着查到頂上有 3 的一行，因 21340 的整數位是奇數，用上一數 1459，再橫着查到末九行中頂上有 4 的一行，上一數爲 1，因得 $1459+1=1460$ 而 21340 有 5 位整數，故牠的方根應有 $\frac{5+1}{2}=3$ 位整數。

$$\therefore \sqrt{21340}=146.0.$$

〔例 2〕 求 21.34 的平方根。

查法和例 1 的相同，但 21.34 的整數位是偶數 2，所以應當用下一數 $4615+4=4619$ ，而方根的整數位數爲 1。

$$\therefore \sqrt{21.34}=4.619.$$

〔210〕

對 數 表

計數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4 8 12	17 21 25	29 33 37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 8 11	15 19 23	26 30 34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 7 10	14 17 21	24 28 31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3 6 10	13 16 19	23 26 29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3 6 9	12 15 18	21 24 27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 6 8	11 14 17	20 22 25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3 5 8	11 13 16	18 21 24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2 5 7	10 12 15	17 20 22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 5 7	9 12 14	16 19 21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 4 7	9 11 13	16 18 20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2 4 6	8 10 12	14 16 17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 4 5	7 9 10	12 14 16
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2 3 5	6 8 9	11 12 14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1 3 4	5 7 8	10 11 12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1 3 4	5 7 8	9 11 12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1 2 4	5 6 8	9 10 11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1 2 4	6 6 7	8 9 11
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1 2 3	4 5 6	7 8 9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1 2 3	4 5 6	7 7 8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1 2 3	4 5 6	7 7 8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1 2 3	3 4 5	6 7 8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1 2 3	3 4 5	6 7 8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1 2 3	3 4 5	6 7 7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1 2 2	3 4 6	6 6 7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1 2 2	3 4 5	6 6 7

對數表

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1 2 2	3 4 5	5 6 7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1 2 2	3 4 5	5 6 7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1 1 2	3 4 5	5 6 7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1 1 2	3 4 4	5 6 7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1 1 2	3 4 4	5 6 7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1 1 2	3 4 4	5 6 6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1 1 2	3 3 4	5 6 6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1 1 2	3 3 4	5 6 6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1 1 2	3 3 4	5 6 6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1 1 2	3 3 4	5 5 6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1 1 2	3 3 4	5 5 6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1 1 2	3 3 4	5 5 6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1 1 2	3 3 4	5 5 6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1 1 2	3 3 4	4 5 6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1 1 2	3 3 4	4 5 6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1 1 2	3 3 4	4 5 6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1 1 2	3 3 4	4 5 6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1 1 2	3 3 4	4 5 6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1 1 2	2 3 4	4 5 5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1 1 2	2 3 4	4 5 5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1 1 2	2 3 3	4 5 5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1 1 2	2 3 3	4 4 5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1 1 2	2 3 3	4 4 5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1 1 2	2 3 3	4 4 5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1 1 2	2 3 3	4 4 5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1 1 2	2 3 3	4 4 5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1 1 2	2 3 3	4 4 5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1 1 2	2 3 3	4 4 5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1 1 2	2 3 3	4 4 5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1 1 2	2 3 3	4 4 5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1 1 2	2 3 3	4 4 5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1 1 2	2 3 3	4 4 5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	1 1 2	2 3 3	4 4 5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0 1 1	2 2 3	3 4 4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0 1 1	2 2 3	3 4 4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0 1 1	2 2 3	3 4 4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0 1 1	2 2 3	3 4 4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0 1 1	2 2 3	3 4 4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0 1 1	2 2 3	3 4 4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0 1 1	2 2 3	3 4 4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0 1 1	2 2 3	3 4 4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0 1 1	2 2 3	3 4 4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0 1 1	2 2 3	3 4 4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0 1 1	2 2 3	3 3 4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0 1 1	2 2 3	3 3 4

七位對數表

數	對數
1.01	.0043214
1.025	.0107239
1.03	.0128372
1.035	.0149403
1.04	.0170333
1.045	.0191163
1.05	.0211893

本書所用符號表

1. 運算符號:

加 $+$ (plus)

減 $-$ (minus)

差 \sim (difference of)

乘 \times, \cdot (multiplied by)

除 $\div, /$ (divided by)

根號 $\sqrt[n]{\quad}$ (n th root of)

2. 關係符號:

等於 $=$ (equal to)

大於 $>$ (greater than)

小於 $<$ (less than)

3. 結合符號:

括線 — (bar, vinculum)

括弧 (\quad) (parenthesis)

括弓 $[\quad]$ (bracket)

括帶 $\{\quad\}$ (brace)

4. 略語符號:

故 \therefore (hence, therefore)

因 \because (since, because)

虛數單位 i (the unit of imaginary number)

譯名對照表

一 畫	不盡根式 Surd
一次式 Linear expression	內項 Mean
一次方程式 Equation of the first degree	公比 Common ratio
一元一次方程式 Simple equation	公式 Formula
	公因數(式) Common factor
	公差 Common difference
	公倍數(式) Common multiple
	公約數(式) Common measure
	元 Element
二 畫	分子 Numerator
二次式 Quadratic expression	分母 Denominator
二次方程式 Quadratic equation	分數(式) Fraction
二次齊次式 Quadratic homogeneous	分式方程式 Fractional equation
二項式 Binomial expression	分解因式 Factorization
二項根式 Binomial surd	升幂 Ascending powers
	反變 To vary inversely as
	巴士卡兒三角形 Pascal's triangle
三 畫	方程式 Equation, The equation of condition
三項式 Trinomial	方程式之邊 Side (member) of the equation
三次方程式 Cubic equation	方程式之根 Root of the equation
	方指數 Index
四 畫	
不等式 Inequality	

比 Ratio
 比例 Proportion
 比例的 Proportional
 比例中項 Proportional mean
 比較消去法 Elimination by comparison
 文字方程式 Literal equation

五 畫

代入消去法 Elimination by substitution
 代數 Algebra
 代數式 Algebraical expression
 代數記號 Algebraical sign
 代數數 Algebraical number
 代數函數 Algebraical function
 加法 Addition
 加減消去法 Elimination by addition and subtraction
 四次方程式 Biquadratic equation
 平方 Square
 平方根 Square root
 平均值 Mean value
 外項 Extreme
 未知項 Unknown term
 未知數 Unknown number
 末項 Last term
 本金 Principal
 本利和 Amount
 正項 Positive term
 正號 Positive sign
 正根 Positive root

正數 Positive number
 正變 To vary as
 矛盾方程式 Inconsistent equations
 立方 Cube
 立方根 Cube root

六 畫

交點 Point of intersection
 共軛式 Conjugate expressions
 共軛複數 Conjugate complex numbers
 合變 To vary jointly as
 同次根式 Surd of the same order
 同值方程式 Equivalent equations
 同類項 Like term
 同類根式 Similar surd
 因數(式) Factor
 年金 Annuity
 多項式 Polynomial compound expression
 有理化 Rationalization
 有理方程式 Rational equation
 有理式 Rational expression
 有理根 Rational root
 有理數 Rational number
 次 Degree, Order
 收斂級數 Convergent series
 行列式 Determinant

七 畫

判別式 Discriminant

利息 Interest
 利率 Rate
 底 Base
 完全平方 Perfect square
 坐標 Coördinates
 坐標軸 Axes of coördinates

八 畫

函數 Function
 和 Sum
 定義 Definition
 定則 Law, Rule
 奇數 Odd number
 性質符號 Symbols(signs) of property
 法則 Rule
 直線方程式 Linear equation
 直線式 Linear expression
 近似值 Approximate value

九 畫

係數 Coefficient
 前項 Antecedent
 後項 Consequent
 括弧 Parenthesis
 指數 Index, Exponent
 指數定則 Law of index
 恆等式 Identity, Identical equation
 表 Table
 負項 Negative term

負號 Negative sign
 負數 Negative number
 降幕 Descending powers
 首項 First term

十 畫

乘方 Involution
 乘式(數) Multiplier
 乘法 Multiplication
 乘積 Product
 倍數(式) Multiple
 倒數(式) Reciprocals
 值 Value
 原點 Origin
 展開式 Expansion
 差 Difference
 消去 Elimination
 根 Root
 根指數 Index of root
 根式 Radical
 級數 Progression, Series
 被減數(式) Minuend
 被乘數(式) Multiplicand
 被除數(式) Dividend
 記號 Sign, Symbol
 配平方 Completing the square
 除法 Division
 除數(式) Divisor

十一 畫

假數 Mantissa

偶數 Even number	無理式 Irrational expression	
商數(式) Quotient	無理根 Irrational root	
問題 Problem	無理數 Irrational number	
常用對數 Common logarithm	無理方程式 Irrational equation	
常數 Constant	無窮級數 Infinite series	
常數項 Constant term	無限大 Infinity	
既約分數 Reduced fraction	減法 Subtraction	
條件 Condition	減數 Subtrahend	
條件不等式 Conditional inequality	發散級數 Divergent series	
移項 Transpose	虛根 Imaginary root	
連比例 Continued proportion	虛數 Imaginary number	
連分數 Continued fraction	等式 Equality, Equation	
十二畫		
單位 Unit	等比級數(見幾何級數)	
單利息 Simple interest	等差級數(見算術級數)	
幾何 Geometry	絕對項 Absolute term	
幾何中數(項) Geometric mean	絕對值 Absolute value	
幾何級數 Geometric progression (series)	絕對不等式 Absolute inequality	
最小公倍數 Least common multiple	軸 Axis	
最低公倍式 Lowest common multiple	量 Quantity	
最大公約數 Greatest common measure	開方 Evolution	
最高公因式 Highest common factor	項 Term	
最低公分母 Lowest common divisor	項數 Number of terms	
最簡分式 Irreducible fraction	十三畫	
	極限 Limit	
	極限值 Limiting value	
	解 Solution	
	運算 Operation	
	運算符號 Symbols (signs) of operation	
	較低項 Lower term	
	零 Zero	

十四畫

圖 Figure
 圖解方程式 Graphical solution
 of an equation
 實根 Real root
 實數 Real number
 對數 Logarithm
 算術 Arithmetic
 算術級數 Arithmetic (arithmeti-
 cal) progression (series)
 算術中數(項) Arithmetic mean
 複數 Complex number
 齊次式 Homogeneous expression
 齊次方程式 Homogeneous equa-
 tion

十五畫

增根 Additional root, Extraneous
 root
 數 Number
 數字方程式 Numerical equation
 數值 Numerical value
 數學 Mathematics
 數係數 Numerical coefficient
 調和中數(項) Harmonic mean
 調和級數 Harmonic progression
 (series)

十六畫

幂 Power

整式 Integral expression
 整式方程式 Integral equation
 整數 Integer, Integral number
 獨立變數 Independent variable
 獨項式 Monomial
 獨項因式 Monomial facto
 積 Product
 餘數(式) Remainder

十七畫

簡根式 Simple radical
 繁分數(式) Complex fraction
 聯立方程式 Simultaneous equa-
 tion
 聯立一次方程式 Simultaneous
 equation of the first degree
 聯立二次方程式 Simultaneous
 quadratic equation

十八畫

查證 Check

十九畫

關係符號 Symbols (signs) of rela-
 tion

二十三畫

變數 Variable
 變數法 Variation

開明代數教本 下冊

民國十八年七月初版 三十七年十月十二版

每冊定價金圓五角二分

編著者 劉 薰 宇

。發行人 上海福州路
 開明書店
 代表人 范 洗 人

印刷者 開 明 書 店

有著作權 * 不許翻印

代 (T14 P.) W

(1.20)

3

721043

(b)