

VI. Pappi Alexandrini *Propositiones duæ generales, quibus plura ex Euclidis Porismatis complexus est, Restitutæ a Viro Doctissimo Rob. Simson, Math. Prof. Glasc. Vid. Pappi præfationem ad Lib. 7. Coll. Math. Apollonii de Sectione rationis libris duobus a Clariss. Hallejo præmissam pag. VIII. & XXXIV.*

Ἐάν ἑπί τις ἢ παραπί τις ἢ παραλλήλῃς, &c.

Textus Pappi, qui in hac & sequente Propositione injuria temporis truncatus est, hoc modo Restituendus videtur.

“ [SI duæ rectæ lineæ in duas rectas lineas sibi mutuo occurrentes vel inter se parallelas ducantur,] & dentur in una earum tria ^a puncta [vel duo, si recta in qua sunt, parallela fuerit alicui ex tribus reliquis]: cætera vero puncta præter unum ^b tangant rectam positione datam, etiam hoc quoque tanget rectam positione datam.” Hoc autem de quatuor tantum rectis dicitur, quarum non plures quam duæ per idem punctum transeunt. In quolibet vero proposito rectarum numero ignoratur, quamvis vera sit, hujusmodi Propositio. “ Si quocunque rectæ occurrant inter se, nec plures quam duæ per idem punctum; data vero sint puncta omnia in earum unâ, unumquodque autem

^a *Tria puncta*] intersectionum sc. ^b *Tangant rectam*] i. e. unum punctum tangat unam aliquam rectam positione datam, & aliud tangat aliquam positione datam, &c.

“ autem punctum in aliâ tangat rectam positione datam ; ” vel generalius sic. Si quotcunque rectæ occurrant inter se, neque sint plures quam duæ per idem punctum, omnia vero puncta in earum unâ data sint ; reliquorum numerus erit numerus triangularis, cujus latus exhibet numerum punctorum rectam positione datam tangentium ; quarum intersectionum si nullæ tres existant ad angulos trianguli spatii, [nullæ quatuor ad angulos quadrilateri, nullæ quinque, &c. i. é. univ ersum, si nullæ harum intersectionum in orbem redeant] unaquæque intersectio reliqua tanget positione datam. Propositio prima in decem dividitur casus, monente ipso Pappo, quorum ejus, in quo nullæ ex quatuor rectis sunt inter se parallelæ, neque rectæ positione datæ per data puncta transeunt, demonstrationem hic apponemus ; hic enim Casus inter omnes maximè est generalis, ejusque demonstratio secundæ propositionis demonstrationi omnino est necessaria. (*Fig. 3. & 4.*) Sint igitur quatuor rectæ AB , AD , BE , CE . Et data sint tria puncta intersectionum A , B , C in earum qualibet, reliquarum vero intersectionum D , E , F , una D tangat rectam GK positione datam, alia E tangat rectam HK positione datam ; tanget etiam reliqua F rectam positione datam. Ducatur per F recta MF parallela ad AB , quæ occurrat ipsis HK , KG , CE , in M , N , O . Quoniam igitur data est ratio HB ad BC dabitur eidem æqualis ratio MF ad FO , & quoniam datur ratio AC ad AG , dabitur eidem æqualis ratio FO ad FN ; quare datur ratio MF ad FN , igitur si jungatur FK , quæ occurrat ipsi AB in L , dabitur ratio HL ad LG ; & datur HG positione & magnitudine ; quare punctum L datur, & datum est punctum K , igitur KL positione datur.

Sit igitur HL ad LG in ratione composita ex rationibus HB ad BC & AC ad AG , & jungatur KL ,
erit

erit hæc recta quam tangit punctum F, hoc est, si ducatur quævis CE, positione datis occurrens in D, E, & jungantur AD, BE sibi mutuo occurrentes in F; recta erit linea quæ per K, F, L transit. Nam per F ducatur MF parallela ipsi AB, & quoniam ratio MF ad FN composita est ex rationibus MF ad FO & FO ad FN, hoc est, ex rationibus HB ad BC & AC ad AG, ex quibus etiam componitur ratio HL ad LG; erit HL ad LG ut MF ad FN, & igitur HG ad MN, hoc est, HK ad MK ut HL ad MF: Quare recta est linea quæ per K, F, L transit, per 14. 1 aut 32. 6 Elem.

Explicatio Secunda Propositionis.

Observandum hic est, Numerum intersectionum, quæ in una recta reperiuntur in quâcunque proposita multitudine rectarum, quarum non plures quam duæ per idem punctum transeunt, & quarum nullæ sunt inter se parallelæ, unitate minorem esse ipso numero rectarum: Nam duæ in unico puncto se invicem secant, tertia vero ducta priores in duobus, quarta priores in tribus punctis secat, &c. Et igitur numerus intersectionum in tribus rectis est unitas binario aucta, i. e. ternarius; numerus eorundem in quatuor rectis est ternarius ternario auctus; in quinque vero rectis est ultimus præcedens seu senarius quaternario auctus, &c. in infinitum; Qui numeri, ut manifestum est, triangulares sunt, quorum cujusque latus est numerus intersectionum, quæ inveniuntur in unâ qualibet recta, i. e. numerus qui unitate minor est numero omnium rectarum. Igitur si ex hoc numero omnium intersectionum dematur numerus omnium punctorum datorum, qui idem est cum numero intersectionum in una quavis recta; reliquus erit adhuc triangularis, cujus la-

tus sc. unitate deficit a latere prioris, quod exhibet numerum omnium punctorum, & proinde binario minus est numero rectorum propositarum. Et hic est numerus interfectionum quas tangere rectam positione datam *Pappus* in hac Propositione requirit, quarumque si nullæ tres sint ad angulos trianguli; [nullæ quatuor ad angulos ^c quadrilateri & ita deinceps;] unamquamque interfectionem reliquam tangere rectam positione datam affirmat. Quæ autem uncis inclusa sunt, textui necessitate coacti adjecimus, nam sine iis propositio vera non esset extra casum quinque rectorum.

Commode vero in duos casus dividitur propositio; quos etiam aperte satis indicat *Pappus*, qui Hypothesin casus facilioris propositioni hujus generis universalissimæ simul & elegantissimæ præmittit.

CASUS PRIMUS.

Si quotcunque rectæ occurrant inter se nec plures quam duæ per idem punctum; data vero sint puncta omnia in earum unâ, unumquodcunque autem punctum in alia tangat rectam positione datam; unaquæque interfectio reliqua tanget rectam positione datam. Sint enim quotcunque rectæ, (*Fig. 5.*) *ex. gr.* *A F, B G, C H, D K, E L, E A*; & data sint omnia puncta in earum unâ, sc. *A, B, C, D, E*; omnia vero puncta in aliâ sc. *F, L, M, N*, tangant rectam positione datam: unaquæque reliqua interfectio tanget positione datam.

Sumatur enim quævis ex reliquis *ex. gr.* *O*, & quoniam quatuor sunt rectæ *O L, O N, A N, A B*, & data sunt tria puncta in unâ earum sc. *A, B, E*, reliqua

G g g

vero

^c Intelliguntur etiam hic figuræ quarum latera se mutuo decussant Diagonalium instar, æque ac cætera.

vero præter unum O , viz. ipsa L, N tangunt rectam positione datam, tanget etiam O positione datam per *Prop. I.* Eodem modo idem de omnibus reliquis ostendetur.

CASUS SECUNDUS.

Cæteris manentibus jam non sint omnia puncta rectam positione datam tangentia (quorumque numerus binario minor est numero rectarum propositarum) in eadem recta, sed nulla eorum in orbem redeant; ostendendum est reliqua omnia tangere rectam positione datam.

L E M M A I.

Si quotcunque rectæ inter se occurrant neque plures quam duæ per idem punctum, & sumantur quævis rectarum, sit vero numerus intersectionum, qui conficitur sumendo duo puncta in unaquaque rectarum sumptarum æqualis numero harum rectarum; puncta hæc in orbem redibunt. Nam quoniam sunt duo puncta in unaquaque recta, erunt ad minimum tria in duabus rectis, & quatuor in tribus & ita deinceps; semper sc. erit numerus punctorum ad minimum unitate major numero rectarum nisi recta ultima transeat per punctum primum; i. e. nisi rectæ in orbem redeant, in quo solo casu æqualis erit numerus punctorum numero rectarum.

L E M M A II.

Si quotcunque rectæ inter se occurrant neque plures quam duæ per idem punctum, sumantur vero quælibet ipsarum intersectiones, quarum numerus numero omnium

um rectarum æqualis sit; vel hæ intersectiones omnes, vel earum aliqua, in orbem redibunt, seu inveniuntur ad angulos polygoni vel trianguli.

Nam tres intersectiones trium rectarum sunt ad angulos trianguli; si vero sint quatuor rectæ, & sumantur quatuor puncta, una harum necessario inveniatur in unâquaque recta; quod si in unâ aliqua ex quatuor rectis unum tantum inveniatur punctum, tria reliqua erunt in tribus reliquis rectis, & igitur ad angulos trianguli: Si vero nulla fuerit recta, in qua unum duntaxat punctum inveniatur, erunt duo in unâquaque ex quatuor rectis, & sunt quatuor puncta, ergo per *Lem. 1.* sunt ad angulos quadrilateri. Et manifestum est si fuerint quatuor rectæ, & sumantur plura quam quatuor puncta, multo magis aliqua eorum in orbem redire.

Sint jam quinque rectæ, & sumantur quinque intersectionum puncta, & si fuerit aliqua ex rectis in qua nullum inveniatur punctum ex hisce quinque, erunt omnia quinque in quatuor reliquis rectis; Si vero fuerit aliqua recta in quâ unum duntaxat inveniatur punctum, erunt reliqua quatuor puncta in reliquis quatuor rectis; igitur in utroque casu puncta aliqua erunt ad angulos trianguli, vel quadrilateri, per præcedentem casum: Si autem nulla fuerit recta in qua vel nullum vel unicum inveniatur punctum, erunt duo in unâquaque ex quinque rectis, & sunt quinque puncta, ergo per *Lem. 1.* sunt ad angulos quinquelateri. Eodem prorsus ratiocinio ostendetur in sex rectis & ita in infinitum.

In *Fig. 6.* sunt octo rectæ, & octo sumuntur puncta, quorum quatuor in orbem redeunt.

Hisce præmissis propositio hoc modo demonstratur. Primo sint quinque rectæ (*Fig. 7.*) AD, AE, BF, CG, DH, & demptis punctis datis in una rectarum, viz. A, B, C, D,

reliqua erunt sex puncta E, F, G, H, K, L, in quatuor rectis, & tria horum (nam latus numeri triangularis 6 est 3) quæ non sunt ad angulos trianguli, a tribus sc. rectarum propositarum contenti, *ex. gr.* E, F, G, tangant rectam positione datam; ostendendum est reliqua tria K, H, L etiam tangere rectam positione datam.

Quoniam igitur sunt quatuor rectæ A E, B F, C G, D F, & tria intersectionum puncta in ipsis sumantur, viz. E, F, G; erit una aliqua harum rectarum in quâ necessario invenietur unum tantum ex hisce tribus punctis; nam secus erit vel aliqua in qua nullum est punctum, & proinde erunt tria puncta in tribus reliquis rectis, i. e. ad angulos trianguli contra Hypothesin; vel erunt ad minimum duo puncta in unâquaque quatuor rectarum, & igitur quatuor essent ad minimum puncta; sed sunt tantum tria; quare necesse est esse aliquam rectam in qua unum tantum invenitur punctum: Sit hæc recta A E, in qua sc. est punctum E, ergo reliqua duo F, G, sunt in reliquis tribus rectis B F, C G, D F; igitur, quoniam dantur tria puncta B, C, D, reliquum punctum L in istis tribus rectis, tangit rectam positione datam per primam Propositionem: Sumatur nunc G E, recta sc. ex hisce tribus quæ transit per punctum E in quartâ recta, & omnia puncta in hac recta G E tangent positione datam. Quare, per casum primum hujus propositionis, reliqua puncta K, H tangunt rectam positione datam.

Sint jam sex rectæ (*Fig. 8.*) A E, A F, B G, C H, D K, E L; & demptis quinque datis punctis A, B, C, D, E, quæ sunt in unâ rectarum, reliqua erunt decem puncta F, G, H, K, L, M, N, O, P, Q in quinque rectis; & ex Hypothesi quatuor horum, quæ non in orbem redeunt, tangunt rectam positione datam; sint hæc, F, G, H, K; & ostendendum est reliqua sex L, M, N, O, P, Q tangere rectam positione datam.

Quoniam

Quoniam igitur sumuntur quatuor puncta intersectionum F, G, H, K, in quinque rectis AF, BG, CH, DK, EL; erit una aliqua recta in qua unum tantum ex hisce punctis reperitur; nam secus erit vel aliqua in qua nullum est punctum, & proinde quatuor puncta erunt in quatuor reliquis rectis, & igitur aliqua eorum in orbem redibunt per *Lem. 2.* contra hypothefin: vel erunt duo ad minimum puncta in unaquaque quinque rectarum, & ita essent quinque ad minimum puncta; sed sunt tantum quatuor, quare necesse est esse aliquam rectam in qua unum tantum invenitur punctum; fit hæc AF in qua sc. est punctum F; ergo reliqua tria G, H, K sunt in reliquis quatuor rectis BG, CH, DK, EL, & dantur puncta B, C, D, E; ergo per primam partem hujus demonstrationis reliqua tria puncta in his quatuor rectis, sc. L, P, Q, tangunt rectam positione datam. Sumatur nunc BF, recta sc. ex hisce quatuor, quæ transit per punctum F in quinta recta; & omnia puncta in hac recta BF tangent rectam positione datam: Quare per Casum primum hujus Propositionis reliqua puncta M, N, O tangunt rectam positione datam. Eodem prorsus modo demonstrabitur Propositio in septem, octo, &c. rectis in infinitum, ut patet.

Quod autem conditio uncis inclusa in hac propositione omnino sit necessaria, patet in his duobus exemplis; idem vero universaliter præcedentium ope demonstrari potest.

His adjecit Clarissimus Professor Porismata duo sequentia primi Libri Porismatum Euclidis a se quoque restituta.

Porisma primum, Lib. 1. Porismatum *Euclidis*, quod servavit *Pappus Alexandrinus* in præfatione ad *Lib. 7.* *Math. Coll. Vid. pag. xxxv. Ejusd. Præf.*

Si a duobus punctis datis inflectantur duæ rectæ ad rectam positione datam, abscindat autem earum una a

recta positione data segmentum dato in eâ puncto adjacens, auferet etiam altera ab aliâ recta segmentum datam habens rationem.

Sint enim duo puncta data D, C , (*Fig. 9.*) a quibus ad positione datam AB inflectantur DB, CB ; quarum una DB abscindat a positione data EF segmentum KM adjacens dato puncto M : Ostendendum est alteram CB auferre ab aliâ quadam recta segmentum datam habens rationem ad ipsum KM .

Juncta CD occurrat positione datis AB, EF in A, F punctis, quæ proinde data erunt. A puncto K , in quo inflexa BD occurrit ipsi EF , ducatur KH parallela ad AD , & occurrens alteri inflexæ BC in H , ipsi vero BA in N . Quoniam igitur dantur puncta A, D, C , dabitur ratio AD ad DC , & igitur ratio NK ad KH ; quare si jungatur EH occurrens ipsi AD in G , dabitur ratio AF ad FG ; sed datur AF , quare & FG datur, & punctum G ; & datum est E , quare EG positione & magnitudine datur; & datur EF , quare ratio EF ad EG datur; & ducta MO per datum punctum M parallela ipsi AD , & occurrens EG in O , dabitur MO positione, & ideo punctum O ; & propter parallelas MO, FG, KH est MK ad OH , ut EF ad EG , quæ sunt in data ratione. Igitur recta BC aufert a rectâ EG positione data, segmentum OH dato puncto O adjacens, in datâ ratione ad segmentum MK . *Q. E. D.*

Componetur vero ita, fiat AF ad FG ut AD ad DC , & juncta EG , per M ducatur MO parallela ad AD ; ostendendum est, si a punctis D, C inflectantur ad AB quævis DB, CB abscindentes ex ipsis EF, EG , segmenta MK, OH punctis M, O adjacentia, fore ipsa in data ratione EF ad EG , seu, quod idem est, esse junctam HK parallelam ipsi AD ; hoc vero videtur omissum fuisse ab *Euclide*, utpote quod tribus verbis

verbis indirecte demonstrari possit; *Pappus* autem in *Lem. 1^o*. ad Porismata, duas directas ejusdem demonstrationes affert, quarum secundam, quæ paululum est corrupta apud *Commandinum*, hic subjungemus integritati suæ restitutam.

Vid. Pap. Lib. 7. fol. 239. pag. prior.

Per Compositam vero proportionem hoc pacto.

Quoniam est ut AF ad FG ita AD ad DC (*Vid. fig. Papp. fol. 238. pag. post. vel fig. nostr. 9.*) convertendo erit ut GF ad FA ita CD ad DA , & componendo, permutandoque & convertendo ut AD ad DF ita AC ad CG . Sed proportio AD ad DF composita est ex proportione AB ad BE , [& EK ad KF , & proportio AC ad CG composita est ex proportione AB ad BE] & proportione EH ad HG . Proportio igitur composita ex AB ad BE & EK ad KF eadem est, quæ componitur ex AB ad BE & EH ad HG . communis auferatur ratio AB ad BE , reliqua igitur EK ad KF eadem est quæ EH ad HG ; quare HK ipsi AG parallela est.

Porisma Secundum. Quod punctum illud tangit rectam positione datam. Secundum Porisma videtur frequenti modo explicandum esse.

Si a duobus punctis datis C, G (*Fig. 10.*) ducantur duæ rectæ CB, GD occurrentes duabus rectis positione datis AB, ED , sitque recta DB puncta intersectionum jungens parallela ipsi CG , quæ per datum punctum ducitur, intersectio K ductarum tanget rectam positione datam.

Occurrant enim positione datæ sibi mutuo in H , & juncta KH occurrat CG in F & BD in M . Igitur propter parallelas est AE ad EF (ut BD ad DM hoc est) ut CG ad GF ; & igitur AE ad CG ut EF ad GF , datur itaque ratio EF ad GF , & datur EG , quare pun-

punctum F; & datur punctum H, quare HF positione. Sit itaque ut AE ad EF ita CG ad GF, & juncta HF erit recta quam tangit punctum K; hoc est ducta quævis GD, occurrens ipsi FM in K, erit recta linea quæ per CKB transit, nam est DB ad DM ut AC ad EF, hoc est ex constructione ut CG ad GF, quare DB ad CG ut (DM ad GF hoc est ut) DK ad KG, & igitur est CKB recta linea.

Pappus idem aliter demonstrat in 2^{do} *Lemmate*, quod hoc modo debet legi: sc. Ducatur per G, (*Vid. Fig. Pap. fol. 239. pag. post. vel Fig. nostr. 10.*) recta linea GL parallela DE, & juncta HK ad L producat. Quoniam igitur est ut AE ad EF ita CG ad GF, & permutando [AE ad CG ut EF ad GF]; ut autem AE ad CG ita est EH ad GL, ^d quod duæ duabus sunt parallelæ. Ut igitur EF ad FG ita EH ad GL, atque est EH parallela ipsi GL, ergo recta linea est quæ per HKLF transit.

^d *Quod duæ duabus sunt parallelæ*, sc. AE ad DB, & GL ad DE, unde est AE ad DB ut EH ad DH, & est DB ad CG (ut DK ad KG, i. e.) ut DH ad LG; ergo per 22. 5. est AE ad CG ut EH ad GL.

Calculus Renis sinistri

Calculus Renis dexteri

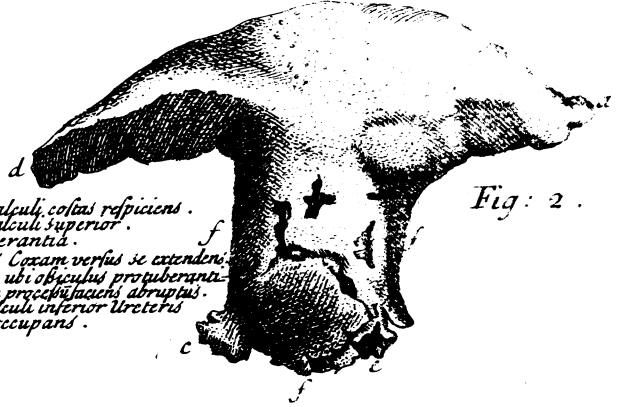
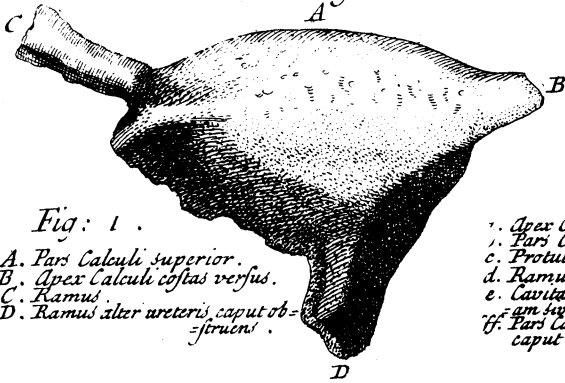


Fig: 1.

- A. Pars Calculi superior.
- B. Apex Calculi costas versus.
- C. Ramus.
- D. Ramus alter ureteris, caput obstruens.

- d. Apex Calculi, costas respiciens.
- e. Pars Calculi superior.
- f. Protuberantia.
- c. Ramus Coxae versus se extendens.
- e. Cavitas ubi obiculus protuberantia- rum sepe propeffusacis abruptas.
- f. Pars Calculi inferior Ureteris caput occupans.

Fig: 2.

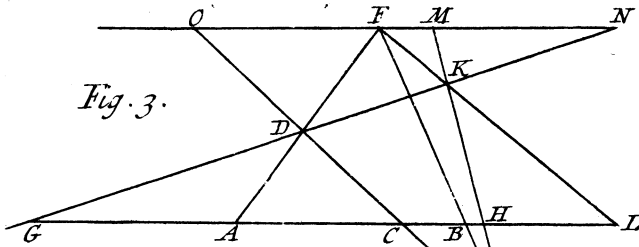


Fig. 3.

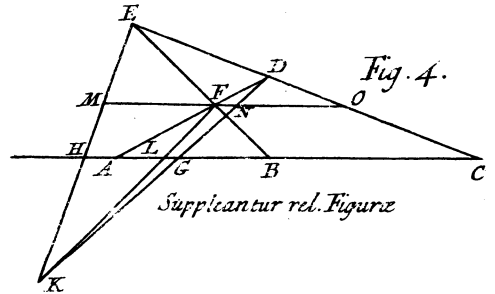


Fig. 4.

Supplicatur rel. Figuræ

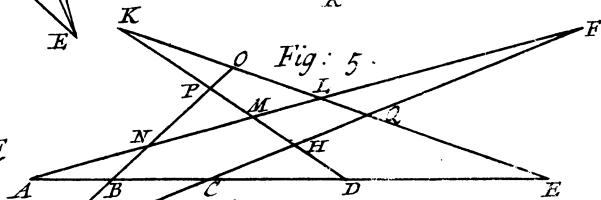


Fig: 5.

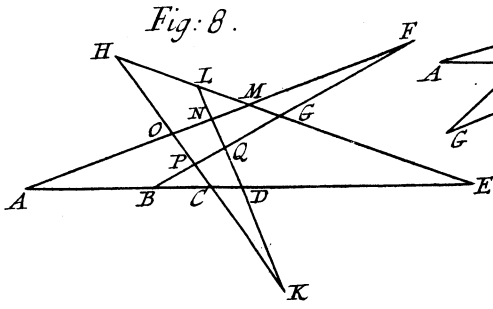


Fig: 8.

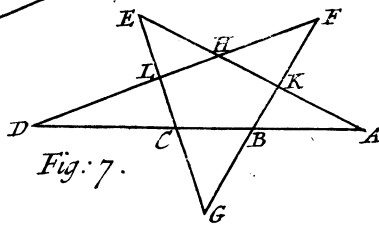


Fig: 7.

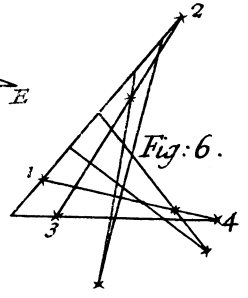


Fig: 6.

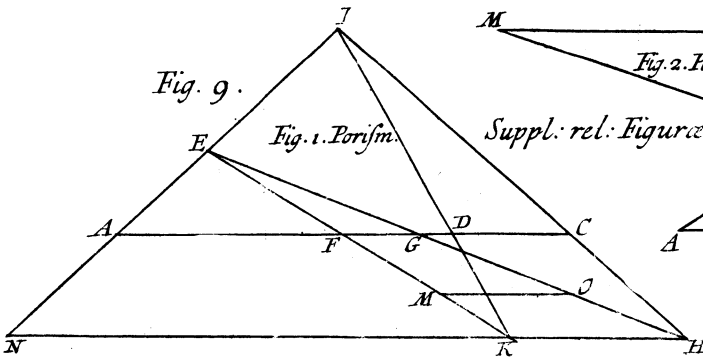


Fig. 9.

Fig. 1. Porism.

Suppl. rel. Figuræ

Fig. 2. Porism.

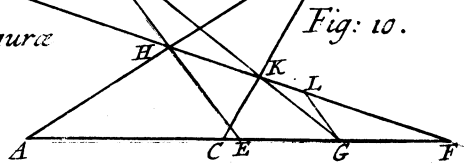


Fig: 10.

Fig. u.

