求恕齋叢書

垜積衍術

南林劉氏求恕齋刊

垛積術序

同治己巳旅建康問天元一術於强賡廷丈丈示以天元舉隅一編如指諸掌時南豐吳子登前輩嘉善亦旅建康號海內天算家與海寧李壬叔徵君善蘭齊名予間有所疑以質前輩前輩繪圖演草連數紙不絕而其辭曼衍不可卒通如墮五里霧中予之疑滋甚復叩之丈則冰釋理解無一閒隔閡予乃以疑於前輩者爲丈述之丈曰子無疑於子登僕年二十許時方究心四元之學遇羅茗香徵君士琳於廣陵閒以疑義質之茗香亦其辭曼衍不可卒通如子之遇子登僕之疑亦滋甚

乃反而求之玉鑑中潛探冥索者數月始豁然而貫通頗懟茗香之相罔既而思之凡爲疇人之學其始不能卒通必潛探冥索緜互歲月而後得之以得之如是之難而易言之則其術不尊其勞不售且不欲我勞人逸茗香之於僕予登之於予一也僕懲於是幸於疇人之說粗窺其樊不敢效茗香所爲必導之以章顯易曙之塗不令局於曲說予方與僕相往復亦可無懟於予登矣其後丈去建康予亦宦學四方不克竟所學孤丈之望是編亦丈當時所授藏之篋衍比以眎翰怡京卿京卿雅重之以授梓人是編之論垛積以古開方圖爲權

輿縱橫相生執一御萬不必曲爲牽合而自達於天地自然之數視壬叔所作比類殆猶二曜之於爝火蒲昌海之於橫汙行潦邪刻既竟乃舉昔之與丈談諧者署之簡首俯仰五十年丈宰木既共予亦頹然老矣曾樓枯坐一鐙青熒手是編復校一過猶想見冶山講肆握觚布算時也戊午嘉平金壇馮煦

垜積衍術序

垜積一術古無專書九章少廣及商功中有芻甍芻童諸題爲垜積之權輿於求積尺之法物形備矣然如累碁層壇之屬用芻童法求之其數恆不足沈存中求積隙法寔導先河而體仍不具陳世仁少廣補遺有尖錐方底三角六角等名分爲十二法皆若爲垜積發矣而亦不能昭晰無遺以其於垜積縱橫相生之理尚未一以貫之也唯朱松庭四元玉鑑中諸題旣具垜積之形復闡垜積之奥垜積一術始有轍迹可尋然嵐峰落一等名不明根源無從探索故羅茗香徵君爲之補草而

像招數諸題開方所得必加若干方符所荅豈天元不可徑求邪葢舊術誤認天元一爲三角各形之底子徵君未將所求上中下之理昭若發蒙故多深隱不瞖宜學者之猝難索解也金壇馮蒿盦丈一日出溧陽强賡廷先生汝詢所爲垛積衍術四卷示予蓋鍼砭海寧李壬叔徵君垛積比類作也以古開方圖爲立法之根縱横相生無不密合不必如李氏之展轉牽引而自得於天地自然之數反復研求其於三角平立各垛體之較數層數洞悉其原無豪髮差忒問題雖淺而理甚顯設數雖簡而說甚詳幾幾上窺松庭俯揖茗香又匪獨爲

李氏諍友已也予流覽三復歎爲絕業授之劂氏將與
海內嗜九數者共參之聞先生所著言算之書倘有天
元舉隅開方釋例蒿盦丈幸更徵之其家予且以卒讀
爲快也戊午孟冬吳興劉承幹

序

朱以前算書罕言垜積元朱氏四元玉鑑始列九題稱爲精妙然數明而理未顯始學者多難之同治八年夏余暫寓大梁與劉子怒觀察論算事偶及垜積之難旅居多暇遂取古開方圖爲諸乘垜之根紬繹推衍至五乘垜止列表以著各垜之變立說以顯得數之由設術以明求積之法又取茭草三角方圓各正垜高積互求諸術著爲算例弁之於首循是以求垜積庶幾難者皆易矣草稿既竣余將南歸適子怒購得垜積比類出以相示蓋海寧李氏所著新刊行者也覽其條理與余書

頗不同又聞汪孝嬰董方立兩先生各有論垜積書余均未之見不知其說云何姑存此稿以質世之知算者

溧陽强汝詢識

序

余爲垛積演術草稿甫就子恕觀察以海寗李君垛積比類見示觀其運思甚深其立術亦可謂詳矣然鄙意猶有所疑者案古開方圖從列者爲諸乘方相生之序横列者爲諸乘方實方廉隅之式而斜視之又可爲諸乘垛之根此見古圖之神妙而亦天地自然之數也李君旣用爲第一表又倣其式以造諸表則亦當從可相生横可開方而斜爲垛積乃可與古圖相埒今觀三角諸表尙可開方至乘方以下諸表從旣不能相生横又不可開方僅取其斜者爲垛積則何不從之横之以便

於用而必用此斜者爲哉一疑也三角諸支表逐層首行既用二用三用四則首層數亦當用二用三用四矣乃首層皆仍用一故三層以下雖可空從開方而次層皆不可商除且從列逐層皆不能相生則亦非自然之數二疑也古圖設一爲本數逐層首行皆用一既爲諸乘方之實又爲諸乘垜之根固非虛設者也李君三角支垜逐層首位用二用三用四以次遞增尙有說亦尙有用也至乘方垜表三角自乘垜表逐層首位之一則竟同虛設其餘各支表以方廉隅相加爲逐層首行之數則近於造作支離更非自然之數矣三疑也三角正

垛次層積三故不可以爲四角若次層積在四以上者則可以爲三角亦可以爲四角今李君於諸乘垛概指爲三角於理似有未安且四角正垛亦不能不列其中則其他更可知矣四疑也諸乘方垛雖成方積然實在諸乘垛之中李君別立乘方垛與諸乘垛判然爲二理不可曉若竟以諸乘垛爲三角諸乘方垛爲四角則更不然矣五疑也李君既以乘方垛別於諸乘垛而乘方支垛所列仍是諸乘垛之變蓋二者本不可分雖欲强分畛域而終不免混淆無別似於垛積之理尚未能徹上徹下本末分明故意在分條析理而不知分析愈多

牴牾愈甚六疑也一乘垛者以高求積一乘而得數也二乘垛者二乘而得數者也三乘以上倣此李君三角支垛諸表既名之曰一乘二乘三乘則當各從其類矣乃一乘支垛中並列二乘以上諸垛二乘支垛中並列一乘及三乘以上諸垛名實不幾於紊乎七疑也垛積之變有定數而無定體有是垛卽有是數有是數卽有是垛李君表中所謂方垛甲垛者固實有是數卽實有是垛矣而以爲垛之萌芽尙未成垛未曉其義八疑也垛積之變無窮當以次第推之理明法立則所未及者後人可遞推而得李君諸表次第不甚分明舍近及遠

於諸垛遞生之數多所闊略且於得數之由似不甚晰數雖不誤近於牽合未見自然之理九疑也變垛雖煩然以次第推之條理秩然固無重複之患李君諸表于茭草四角等正垛皆三四見其他重複者尚多此亦由條理之未清十疑也余於算學僅麤涉獵不及李君之專門深造且荒廢已十餘年不復能爲深沈之思凡余所疑者李君或皆有說而余不之識未可知也且余觀李君之書而疑之則余所自爲者更何敢自信耶惟旣費日力於此不忍遽棄姑存之而附記所疑於後俟識

李君當以質之强汝詢識

垛積衍術卷一

求恕齋叢書

溧陽强汝詢學

吳興劉承幹校

算例

今問各數

層數	十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	底層	共積
菱草垛	一	二	三	四	五	六	七	八	九	一〇	一一	一二	一三	九一
三角垛	一	三	六	一〇	一五	二一	二八	三六	四五	五五	六六	七八	九一	四五五
方垛	一	四	九	一六	二五	三六	四九	六四	八一	一〇〇	一二一	一四四	一六九	八一九
奇層圓垛	一	三	七	一三	一九	二七	三七	四八	六一	七五	九一	一〇八	一二七	六一六

○ 一 三 七 一三 一九 二七 三七 四八 六一 七五 九一 一〇八 四八九

右圖從列者爲各垛層數横列者爲各垛層積幷每垛逐層積爲每垛共積

今有菱草垛子十三層問共積幾何

答曰九十一束

術曰層數加一以乘層數二而一凡菱垛底子必與層數同以層數乘層數卽是以底子乘層數蓋以底子爲闊以層數爲高高闊相乘得方冪但此方冪中實積以占却底子全數則虛積較實積必少一底數故必以層數加一乘之補一段底數俾虛積與實積相等半之恰得實積也凡三角四角諸垛加一加二諸數皆當以此理推之

今有三角錐垛果子十三層問共積幾何

答曰四百五十五枚

術曰層數加一以乘層數又以層數加二乘之六而一凡三角垜底面之數亦與層數同當以底子一面為長一面為闊層數為高長闊高連乘得一段立方冪加一加二所以補虛積之闕合成六段三角錐垜積故以六除之恰得實積也

今有方錐垜十三層問共積幾何

答曰八百一十九枚

術曰層數加一以乘層數又倍層數加一乘之六而一凡四角垜底數亦與層數同長闊高遞乘得一段立方冪與三角法同兩次加一以補虛積之闕合成六段方錐垜積故以六除之得實積也

今有偶層圓錐垜十二層問共積幾何

荅曰四百八十九枚

術曰倍層數加一以乘層數又以層數加一乘之求得六倍方錐積加入層數八而一凡有方求圓者三之四而一若六之則當八而一也但以六倍方錐積較八倍偶層圓錐積每層尙少一枚故于六倍方積內加入層數適補足八倍偶層圓錐積也

今有奇層圓錐垜十三層問共積幾何

荅曰六百一十六枚

術曰如偶層法求得六倍方錐積以層數加一幷之八而一奇層與偶層不同以六倍方積加入層數尙少最上層一枚故以層數加一幷之方補足八倍奇層圓錐積也

今有茭草台垛九層上面五束問共積幾何

荅曰八十一束

術曰倍上面數減一加入層數以層數乘之二而一

又術曰層數加一以乘層數半之又以上面數減一乘層數幷之得積

又術曰上面數減一加入層數爲底面以之自乘又加底面數爲總積副置上面數減一以乘上面爲虛積二積相減得數二而一

今有三角台垛九層上層每面五枚問共積幾何

荅曰四百三十五枚

術曰上面數減一以加層數為底面置底面加一以乘底面又以底面加二乘之為錐積副置上面數減一以乘上面又以上面加一乘之為虛積二積相減餘六而一凡三角錐垜每面數與層數同此問上層每面五枚則是從第五層起截去錐垜上四層也故先求得六倍錐垜積次求得上四層六倍虛積于六倍十三層錐垜積內減去六倍上四層虛積餘得六倍九層台垜也四角台垜倣此前茭草台垜第三術亦此意也

今有四角台垜九層上層每面五枚問各積幾何

荅曰七百八十九枚

術曰上面數減一加入層數為底面倍底面加一

以底面乘之又以底面加一乘之為錐積副置上面數減一以乘上面又倍上面減一乘之為虛積二積相減餘六而一

又術曰倍底面加一又加入上面以底面乘之於上又倍上面減一加入底面以上面乘之加入上位以層數乘之六而一此卽沈存中求積隙術也以御錐垛未免繁重故記於此垛積之法自此始開此術

今有茭草垛子九十一束問底面幾何

答曰十三束

術曰倍積爲負實一正方一正隅開平方得底面

實從隅亦可半之

草曰立天元一為底面太｜加一得｜太｜以乘天元得太｜｜為倍積寄左　置眞積倍之得一百八十二為同數與左相消得𝍠𝍧𝍡｜｜平方開之得十三合問

此草底面自乘本係一段平方冪但倍積之數由底面加一以乘底面而得是一段平方冪又多一底面之數故置一為從幷除之得底面也三角四角諸垛有積求底面開方從廉之數其理幷同

今有三角錐垛果子四百五十五枚問底面幾何

荅曰十三枚

術曰六之積為負實二正方三正廉一正隅開立

方得底面

草曰立天元一爲底面太|加一得|太|以乘天

元得太||於上又置天元加二得||太|以乘上

位得太||川|合以六除之爲共積今不除便爲

六倍共積寄左　置眞積亦以六通之得二千七

百三十爲同數與左相消得||丄川〇||川|立方開之

得十三合問

今有方錐垜果子八百一十九枚問底面幾何

荅曰十三枚

術曰六之積爲負實一正方三正廉二正隅開立

方得底面若用三倍積入算則實方廉隅皆可半之但方廉皆有畸零耳

草曰立天元一爲底面太|倍之得太||加一得

|太||以乘天元得太| ||于上又以天元加一得

|太|以乘上位得太|川||爲六倍共積寄左

置眞積亦以六通之得四千九百十四爲同數與

左相消得卌乁|川||開立方得十三合問

今有偶層圓錐垛四百八十九枚問層數幾何

荅曰十二層

術曰八之積爲負實二正方三正廉二正隅開立

方得層數

草曰立天元一爲層數太丨倍之得太‖加一得
丨太‖以乘天元得太丨‖於上又以天元加一得
丨太丨以乘上位得太丨川‖爲方率加入天元得
太‖川‖爲八倍共積寄左　置員積亦以八通
之得三千九百一十二爲同數與左相消得川氏‖
川‖開立方得十二合問
今有奇層圓錐垜六百十六枚問層數幾何
荅曰十三層
術曰八之積減一爲負實二正從三正廉二正隅
開立方得層數

草曰立天元一為層數太|倍之得太||加一得
丨太||以乘天元得太|||於上又置天元加一得
丨太|以乘上位得太|III||為方率又以天元加
一得丨太|并入方率得丨太||III||為八倍共積寄
左　置員積亦以八通之得四千九百二十八為
同數與左相消得[illegible]||III||開立方得十三合問
今有茭草合垜九層共積八十一束問上面幾何
答曰五束
術曰置高減一以高乘之半之以減共積餘為實
高為法實如法而一

草曰立天元一為上面數太丨倍之得太‖減一
得〤太‖以高九層加之得Ⅲ太‖又以高乘之得丌太
丨三半之得Ⅲ丅太亖為共積寄左　置負積八十一為
同數與左相消得Ⅲ丅Ⅲ上實下法而一得五束合
問

今有茭草台垛共積八十一束只云上面五束問高幾
層
　答曰九層
術曰倍積為負實倍上面減一為正方一隅開平
方除之

草曰立天元一爲高太丨倍上面得一十減一得九加入天元得𝍨太丨以天元乘之得太𝍨丨爲倍積寄左　置眞積倍之得一百六十二爲同數與左相消得卌𝍨丨開平方合問

今有三角台垜九層共積四百三十五枚問上面幾何

荅曰五枚

術曰層數減一乘層數又以層數加一乘之以減六之共積餘以三之層數約之爲負實層數爲正方一正隅開平方除之

草曰立天元一爲上面數太丨減一得𝍢太卜爲錐

層加一得𝍣太丨以乘錐層得𝍮𝍣太𝍫丨又以錐層加二得𝍠〇太丨乘之得𝍮𝍤太𝍢𝍢𝍫丨為六倍錐積副置天元減一得𝍦太丨為虛底加一得太丨以乘虛底得太𝍦丨又以虛底加二得𝍠太丨乘之得太𝍦〇丨為六倍虛尖積以減錐積得𝍮〇𝍢𝍢𝍫為六倍合垛共積寄左　置員積以六通之得二千六百一十為同數與左相消得𝍢𝍣〇𝍢𝍢𝍫以隅約之得𝍫〇𝍪丨平方開之得五枚合問

今有三角台垛共積四百三十五枚只云上層每面五枚問共幾層

荅曰九層

術曰六之共積爲負實倍上面減一以上面加一乘之又上面減一以乘上面幷之爲正從三之上面爲正廉一正隅開立方除之

草曰立天元一爲層數太丨置上面減一加之得𝍢太丨爲錐層加一得𝍣太丨以乘錐層得𝍩𝍡太𝍦丨又以錐層加二得𝍥太乘之得𝍮𝍡太𝍭𝍣𝍩𝍢丨爲六倍錐積副置上面減一得四爲虛層以五乘之得二十又以六乘之得一百二十爲六倍虛尖積以減錐積得太𝍭𝍣𝍩𝍢丨爲六倍台垛共積寄左　置眞積亦

以六通之得二千六百一十為同數與左相消得

𝍡𝍥𝍠〇𝍡𝍢𝍠開立方得九層合問

今有三角台垛共積四百三十五枚只云上層每面五

枚問底面幾何

荅曰一十三枚

術曰上面加一乘上面又上面減一乘之加入六

之共積為負實二正從三正廉一正隅開立方除

之

草曰立天元一為底面太|加一得|太|以乘天

元得太||又以天元加二得||太|乘之得太||

川丨為六倍錐積置上面五枚減一得四為虛層加一得五以乘虛層得二十又以虛層加二得六乘之得一百二十為六倍虛尖積以減錐積得[illegible]〢川丨為六倍台垛共積寄左　置眞積亦以六通之得二千六百一十為同數與左相消得[illegible]〢川丨開立方得一十三枚合問

今有方台垛九層共積七百八十九枚問上面幾何

荅曰五枚

術曰層數減一乘層數又倍層數減一乘之以減六之共積餘以六之層數約之為負實層數減一

爲正從一正隅開平方除之

草曰立天元一爲上面太丨減一得〡太丨加入層數得〣太丨爲錐層倍之得〤太〢加丨得〤太〢以乘錐層得〣太〦〢又以錐層加一得〣太丅乘之得〣太
〣〦〢爲六倍方錐積副置天元減一得〡太丅爲虛層倍之得〡太〢加一得〡太〢以乘虛層得〡太〤
〢又以虛層加一得太丨乘之得太丨〤〢爲六倍虛尖積以減錐積得〣太〦〣〦爲六倍台垛積寄左

置眞積七百八十九亦以六通之得四千七百三十四爲同數與左相消得〦〣〦以隅約之

得〤三丨開平方得五枚合問

今有方台垜共積七百八十九枚只云上層每面五枚問共幾層

荅曰九層

術曰六之共積爲負實倍上面減一以上面減一乘之副置倍上面減一又倍上面減二相加以乘上面幷之爲正從六之上面減三爲正廉二正隅開立方除之

草曰立天元一爲層數太丨置上面減一加之得川太丨爲錐層倍之得亖太川加一得川太川以乘錐層

得𝍢太𝍮𝍡又以錐層加一得𝍣太𝍠乘之得𝍩𝍡太𝍪𝍦𝍩𝍣
𝍡為六倍錐積副置上面減一得四為虛層倍之
加一得九以乘虛層得三十六又以虛層加一得
五乘之得一百八十為六倍虛尖積以減錐積得
太𝍪𝍦𝍩𝍣𝍡為六倍台垛共積寄左　置員積亦以
六通之得四千七百三十四為同數與左相消得
𝍣𝍯𝍢𝍣太𝍪𝍦𝍩𝍣𝍡開立方得九合問

今有方台垛共積七百八十九枚只云上層每面五枚
問底面幾何

荅曰一十三枚

術曰倍上面減一以乘上面又以上面減一乘之加入六之共積爲負實一正從三正廉二正隅開立方除之

草曰立天元一爲底面太丨倍之得太‖加一得丨太‖以乘天元得太丨‖又以天元加一得丨太丨乘之得太丨川‖爲六倍方錐積置上面五枚減一得四爲虛底倍之加一得九以乘虛底得三十六又以虛底加一得五乘之得一百八十爲六倍虛尖積以減錐積得丄〇太丨川‖爲六倍合垛積寄左　置員積亦以六通之得四千七百三十四爲

同數與左相消得卌民丨川〢開立方得一十三合

問

又草曰立天元一爲底面太丨置上面減一得四

以減底面得卌太丨爲層數乃倍天元得太〢加一

得㐅太〢加入上面五枚得丄太〢以天元乘之得太

丄〢於上又倍上面減一得九加入天元得卌太丨

以上面乘之得卌太川〢與上位相加得卌太⊥〢以層

數卌太丨乘之得⊥㐅太丨川〢爲六倍共積寄左　置

眞積以六通之得四千七百三十四爲同數與左

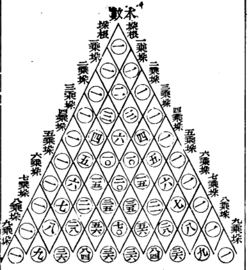
相消得卌民丨川〢開立方得一十三合問 右草以沈氏積

隙術入之所得開
方式與前草同

垛積衍術卷二

溧陽强汝詢學
吳興劉承幹校

垛積總圖



說曰垛積總圖卽古開方圖也横視之爲諸乘方之式左視右視皆同斜視之爲諸乘垛之數左視右視皆同古開方圖設一爲本數次層一法一實爲商除商除自乘生第三層平方商除乘平方生第四層立方商除乘立方生第五層三乘方自第五層以下皆以商除遞乘之生各乘方此諸乘方相生之序也今用爲垛積圖則相生之法又不同若自右視之則以向左斜下逐層皆一者爲垛根首層之一爲本數無可幷減故諸乘垛首層皆一也幷垛根一二層積得二爲一乘垛二層積幷垛根一二三層積得三爲一乘垛三層積幷垛根一二

三四層積得四爲一乘垜四層積五層以上倣此類推此垜根生一乘垜也幷一乘垜一二層爲二乘垜二層幷一乘垜一二三層爲二乘垜三層幷一乘垜一二三四層爲二乘垜四層五層以上倣此類推此一乘垜生二乘垜也二乘垜生三乘垜三乘垜生四乘垜四乘以上遞生諸乘垜其例皆同此諸乘垜相生之法也若自左視之則以向右斜行而下逐層皆一者爲垜根相生之法亦同又一法諸垜相生皆遞下一層幷之以一乘垜首層數幷垜根二層數爲一乘垜二層數以一乘垜二層數幷垜根三層數爲一乘垜三層數以一乘垜三

層數幷垛根四層數爲一乘垛四層數五層以下倣此以二乘垛首層幷一乘垛二層爲二乘垛二層以二乘垛二層幷一乘垛三層爲二乘垛三層以二乘垛三層幷一乘垛三層爲二乘垛四層五層以下倣此自二乘垛以上依次遞生皆以此例推之此又相生之一法也故此一圖之中可以求諸乘方可以求諸乘垛縱橫求之無一不合足以見古圖之神妙要皆自然之數而無絲毫造作於其閒也

垛積之變無窮圖中所列特諸乘垛之根各變垛具詳後表圖中之垛皆表中第一垛也

凡垜積惟次層積三者不可以爲四角若次層積在四以上者則可以爲三角亦可以爲四角設題發問自可顯判列表窮變未便强分今但以各乘垜命之不以三角四角爲别

四元玉鑑所載茭草落一形卽二乘第一垜也卽三角正垜茭草撒星形卽三乘第一垜也茭草嵐峰形卽三乘第三垜也茭草撒星更落一形卽四乘第一垜也茭草嵐峰更落一形卽四乘第四垜也四角落一形卽三乘第二垜也三角嵐峰形亦卽四乘第四垜也四角嵐峰形卽四乘第十三垜也三角撒星更落一形卽五乘第一

垜也表中不及備注附記於此
或曰四角正垜逐層自乘皆成平方積若逐層再自乘則成立方積三自乘則成三乘方積以此推之爲諸乘方積似當別有發明曰不然諸乘方垜卽在諸乘垜之中表中二乘第二垜卽一乘方垜也三乘第十垜卽二乘方垜也若由四乘垜更推之至次層積十六者備則三乘方垜在其中矣由五乘垜更推之至次層積三十二者備則四乘方垜在其中矣餘可類推故就古圖紬繹之已無所不賅若別生枝節造作支離則非自然之數矣

菱草落一形

術曰高加一乘高又以高加一乘之六而一得積此似即三角形也

菱草撒星形

術曰高加一乘高又以高加二乘之又以高加三乘之二十四而一此即三乘第一垜也

菱草嵐峰形

術曰三倍高加一乘高又以高加一乘之又以高加二乘之二十四而一底子一十二積三千三百六十七束

菱草撒星更落一形

術曰高加一乘高又以高加二乘之又以高加三乘之又以高加四乘之一百二十而一此即四乘第一垛也

茭草嵐峰更落一形

術曰四倍高加一以乘高又以高加一乘之又以高加二乘之又以高加三乘之一百三十而一底子十六積五萬零三百八十八

垛積表一 一乘垛

層數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	共積
第一垛茭草正垛	一	二	三	四	五	六	七	八	九	一○	○○○五五
第二垛	一	三	五	七	九	一一	一三	一五	一七	一九	一○○

第三垛	一	四	七	一〇	一三	一六	一九	二二	二五	二八	一四五
第四垛	一	五	九	一三	一七	二一	二五	二九	三三	三七	一九〇
第五垛	一	六	一一	一六	二一	二六	三一	三六	四一	四六	二三五
第六垛	一	七	一三	一九	二五	三一	三七	四三	四九	五五	二八〇
第七垛	一	八	一五	二二	二九	三六	四三	五〇	五七	六四	三二五
第八垛	一	九	一七	二五	三三	四一	四九	五七	六五	七三	三七〇
第九垛	一	一〇	一九	二八	三七	四六	五五	六四	七三	八二	四一五
右一乘垛初變皆自第一垛而來											
第十垛	一	四	八	一二	一六	二〇	二四	二八	三二	三六	一八一
第十一垛	一	五	一〇	一五	二〇	二五	三〇	三五	四〇	四五	二二六

第十二垛	一	六	一二	一八	二四	三〇	三六	四二	四八	五四	二七一
第十三垛	一	七	一四	二一	二八	三五	四二	四九	五六	六三	三一六
第十四垛	一	八	一六	二四	三二	四〇	四八	五六	六四	七二	三六一
第十五垛	一	九	一八	二七	三六	四五	五四	六三	七二	八一	四〇六
第十六垛	一	一〇	二〇	三〇	四〇	五〇	六〇	七〇	八〇	九〇	四五一

右一乘垛再變皆自第二垛而來

第十七垛	一	五	一一	一七	二三	二九	三五	四一	四七	五三	二六二
第十八垛	一	六	一三	二〇	二七	三四	四一	四八	五五	六二	三〇七
第十九垛	一	七	一五	二三	三一	三九	四七	五五	六三	七一	三五二
第二十垛	一	八	一七	二六	三五	四四	五三	六二	七一	八〇	三九七

第二十一垛 一 九 一九 二九 三九 四九 五九 六九 七九 八九 四四二

第二十二垛 一 一〇 二一 三二 四三 五四 六五 七六 八七 九八 四八七

右一乘垛三變皆自第三垛而來

第二十三垛 一 六 一四 二二 三〇 三八 四六 五四 六二 七〇 三四三

第二十四垛 一 七 一六 二五 三四 四三 五二 六一 七〇 七九 三八八

第二十五垛 一 八 一八 二八 三八 四八 五八 六八 七八 八八 四三三

第二十六垛 一 九 二〇 三一 四二 五三 六四 七五 八六 九七 四七八

第二十七垛 一 一〇 二二 三四 四六 五八 七〇 八二 九四 一〇六 五二三

右一乘垛四變皆自第四垛而來

第二十八垛 一 七 一七 二七 三七 四七 五七 六七 七七 八七 四二四

第三十九朶　一　八　一九　三〇　四一　五二　六三　七四　八五　九六　四六九

第十三朶　一　九　二一　三三　四五　五七　六九　八一　九三　一〇五　五一四

第三十一朶　一　一〇　二三　三六　四九　六二　七五　八八　一〇一　一一四　五五九

右一乘朶五變皆自第五朶而來

第三十二朶　一　八　二〇　三二　四四　五六　六八　八〇　九二　一〇四　五〇五

第三十三朶　一　九　二二　三五　四八　六一　七四　八七　一〇〇　一一三　五五〇

第三十四朶　一　一〇　二四　三八　五二　六六　八〇　九四　一〇八　一二二　五九五

右一乘朶六變皆自第六朶而來

第三十五朶　一　九　二三　三七　五一　六五　七九　九三　一〇七　一二一　五八六

第三十六朶　一　一〇　二五　四〇　五五　七〇　八五　一〇〇　一一五　一三〇　六三一

右一乘垛七變皆自第七垛而來

凡諸變皆自第一垛而來

說曰一乘垛者以高求積皆一乘而得數者也變法以第一垛爲根凡首層之一皆不變一者無可變也諸乘垛皆然自二層以下則可變矣幷第一垛一二層積得三爲二垛第二層幷一垛二三層積得五爲二垛第三層幷一垛三四層積得七爲二垛第四層幷一垛四五層積得九爲二垛第五層六層以下以次遞幷之而第二垛成矣以一垛首層積幷二垛次層積得四爲三垛第二層以一垛次層積幷二垛三層積得七爲三垛第

三層以一垛三層積幷二垛四層積得一十爲三垛第四層以一垛四層積幷二垛五層積得一十三爲三垛第五層六層以下以次遞幷之而第三垛成矣於是以一垛與三垛遞幷而成第四垛以一垛與四垛遞幷而成第五垛以一垛與五垛遞幷而成第六垛六垛以上皆以第一垛與諸垛遞幷得數列表雖止於九推之可至於無窮此一變也自第二垛以上以次如法變之幷二垛一二層爲十垛第二層幷二垛二三層爲十垛第三層幷二垛三四層爲十垛第四層五層以下以次遞幷之而第十垛成矣以二垛首層幷三垛次層爲十一

垛次層以二垛次層幷三垛三層爲十一垛三層以二垛三層幷三垛四層爲十一垛四層五層以下以次遞幷之而十一垛成矣於是以二垛與四垛遞幷而成十二垛以二垛與五垛遞幷而成十三垛以上皆以第二垛與諸垛遞幷得數列表雖止於七推之可至於無窮此二變也以三垛如法自幷之而成十七垛以三垛與四垛遞幷而成十八垛以三垛與五垛遞幷而成十九垛十九垛以上皆以第三垛與諸垛遞幷得數列表雖止於六推之可至於無窮此三變也四垛自幷而成二十三垛四垛與五垛遞幷而成二十四垛四垛與六垛

遞幷而成二十五垜二十五垜以上皆以第四垜與諸垜遞幷得數列表雖止於五推之可至於無窮此四變也五垜自幷而成二十八垜五垜與六垜遞幷而成二十九垜五垜與七垜遞幷而成三十垜三十垜以上皆以第五垜與諸垜遞幷得數列表雖止於四推之可至於無窮此五變也六垜自幷而成三十二垜六垜與七垜遞幷而成三十三垜六垜與八垜遞幷而成三十四垜列表雖止於三推之可至於無窮此六變也七垜自幷而成三十五垜七垜與八垜遞幷而成三十六垜列表雖止於二推之可至於無窮此七變也以此類推之

由八垛得數爲第八變由九垛得數爲第九變推之數十百垛則爲數十百變變之中又有變焉數不可盡也詳其例可推其餘故層數以十爲斷垛數以九爲斷變數以七爲斷

或問曰由一垛得數爲一變由二垛得數爲二變三垛以上以次而變既知之矣謂諸變皆自第一垛而來何也曰二垛自幷成十垛以一垛與十垛遞幷則成十一垛以一垛與十一垛遞幷則成十二垛以一垛與十二垛遞幷則成十三垛十三垛以上皆用一垛以次遞幷之成垛是二變亦自一垛來也三垛自幷成十七垛以

一垛與十七垛遞并而成十八垛以一垛與十八垛遞并而成十九垛十九垛以上皆用一垛以次遞并之成垛是三變亦自一垛來也四變以上莫不皆然此第一垛所以爲諸垛之根也諸變垛自各垛而來又皆自一垛而來縱橫求之皆合此所以爲自然之數也

求積算術第一垛用第一術第二垛用第二術三垛以上倣此

總法曰凡一乘垛有高羃積皆以二爲法

第一術曰高加一乘高如法而一

又術曰高加一乘半高得積凡垛積皆有倍半二術倍術無畸零且於羃積之理易見故以爲正術半術雖不免畸零然實爲簡省故並列之爲又術諸乘垛皆倣此一乘

垜皆有半術二今於諸垜各記其一餘不悉載

第二術曰倍高乘高如法而一

又術曰高自乘得積此垜逐層幷之皆成平方體故可用此術

第三術曰三倍高減一乘高如法而一

又術曰三倍高減一乘半高得積

第四術曰四倍高減二乘高如法而一

又術曰倍高減一乘高得積

第五術曰五倍高減三乘高如法而一

又術曰五倍高減三乘半高得積

第六術曰六倍高減四乘高如法而一

又術曰三倍高減二乘高得積

第七術曰七倍高減五乘高如法而一

又術曰七倍高減五乘半高得積

第八術曰八倍高減六乘高如法而一

又術曰四倍高減三乘高得積

第九術曰九倍高減七乘高如法而一

又術曰四倍高加半高減三个半乘高得積

第十術曰四倍高減四以乘高又加二爲實如法而一

又術曰倍高減二乘高加一得積

又術曰高減一乘高倍之加一得積

第十一術曰五倍高減五以乘高又加二爲實如法而一

又術曰倍高加半高減二个半以乘高加一得積此術有畸零

又術曰高減一乘高加一倍半又加一得積此術可免畸零

第十二術曰六倍高減六以乘高又加二爲實如法而一

又術曰三倍高減三以乘高加一得積

又術曰高減一乘高三之加一得積

第十三術曰七倍高減七以乘高又加二爲實如法而一

又術曰三倍高加半高減三个半乘高又加一得積

又術曰高減一乘高加三倍半又加一得積

第十四術曰八倍高減八以乘高又加二爲實如法而一

又術曰四倍高減四以乘高加一得積

又術曰高減一乘高四之加一得積

第十五術曰九倍高減九以乘高又加二爲實如法而

一

又術曰四倍高加半高減四个半乘高又加一得積

又術曰高減一乘高加四倍半又加一得積

第十六術曰十倍高減一十以乘高又加二爲實如法而一

又術曰五倍高減五以乘高又加一得積

又術曰高減一乘高五之加一得積

第十七術曰六倍高減八以乘高又加四爲實如法而一

又術曰三倍高減四以乘高又加二得積

第十八術曰七倍高減九以乘高又加四爲實如法而一

又術曰三倍高加半高內減四个半以乘高又加二得積

第十九術曰八倍高減一十以乘高又加四爲實如法而一

又術曰四倍高減五以乘高加二得積

第二十術曰九倍高減一十一以乘高又加四爲實如法而一

又術曰四倍高加半高內減五个高以乘高又加二得積

第二十一術曰十倍高減十二以乘高又加四爲實如法而一

又術曰五倍高減六以乘高如法而一又加二得積

第二十二術曰十一倍高減一十三以乘高又加四爲實如法而一

又術曰五倍高加半高內減六个半以乘高又加二得積

第二十三術曰八倍高減十二以乘高又加六爲實如法而一

又術曰四倍高減六以乘高又加三得積

第二十四術曰九倍高減十三以乘高又加六爲實如法而一

又術曰四倍高加半高内減六个半以乘高又加三得積

第二十五術曰十倍高減十四以乘高又加六爲實如法而一

又術曰五倍高減七以乘高加三得積

第二十六術曰十一倍高減十五以乘高又加六爲實如法而一

又術曰五倍高加半高內減七个半以乘高又加三得積

第二十七術曰十二倍高減十六以乘高又加六爲實如法而一

又術曰六倍高減八以乘高又加三得積

第二十八術曰十倍高減十六以乘高又加八爲實如法而一

又術曰五倍高減八以乘高又加四得積

第二十九術曰十一倍高減十七以乘高又加八爲實如法而一

又術曰五倍高加半高內減八个半以乘高又加四得積

第三十術曰十二倍高減十八以乘高又加八爲實如法而一

又術曰六倍高減九以乘高又加四得積

第三十一術曰十三倍高減十九以乘高又加八爲實如法而一

又術曰六倍高加半高內減八个半以乘高又加

四得積

第三十二術曰十二倍高減二十以乘高又加十爲實如法而一

又術曰六倍高減一十以乘高加五得積

第三十三術曰十三倍高減二十一以乘高又加十爲實如法而一

又術曰六倍高加半高內減十个半以乘高又加五得積

第三十四術曰十四倍高減二十二以乘高又加十爲實如法而一

又術曰七倍高減十一以乘高又加五得積
第三十五術曰十四倍高減二十四以乘高又加十二
爲實如法而一
又術曰七倍高減十二以乘高又加六得積
第三十六術曰十五倍高減二十五以乘高又加十二
爲實如法而一
又術曰七倍高加半高內減十二个半以乘高又
加六得積
凡有積求高者立天元一爲高各以本垜求積術入之
諸乘垜皆倣此

垛積衍術卷二

垛積衍術卷三

溧陽強汝詢學
吳興劉承幹校

垛積表二 二乘垛

層數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	共積
第一垛 三角正垛	一	三	六	一〇	一五	二一	二八	三六	四五	五五	二二〇
第二垛 四角正垛	一	四	九	一六	二五	三六	四九	六四	八一	一〇〇	三八五
第三垛	一	五	一二	二二	三五	五一	七〇	九二	一一七	一四五	五五〇
第四垛	一	六	一五	二八	四五	六六	九一	一二〇	一五三	一九〇	七一五
第五垛	一	七	一八	三四	五五	八一	一一二	一四八	一八九	二三五	八八〇

第六垛	一	八	二一	四〇	六五	九六	一三三	一七六	二二五	二八〇	一〇四五
第七垛	一	九	二四	四六	七五	一一一	一五四	二〇四	二六一	三二五	一二一〇
第八垛	一	一〇	二七	五二	八五	一二六	一七五	二三二	二九七	三七〇	一三七五

右二乘垛初變皆自第一垛而來

第九垛	一	五	一三	二五	四一	六一	八五	一一三	一四五	一八一	六七〇
第十垛	一	六	一六	三一	五一	七六	一〇六	一四一	一八一	二二六	八三五
第十一垛	一	七	一九	三七	六一	九一	一二七	一六九	二一七	二七一	一〇〇〇
第十二垛	一	八	二二	四三	七一	一〇六	一四八	一九七	二五三	三一六	一一六五
第十三垛	一	九	二五	四九	八一	一二一	一六九	二二五	二八九	三六一	一三三九
第十四垛	一	一〇	二八	五五	九一	一三六	一九〇	二五三	三二五	四〇六	一四九五

右二乘垛再變皆自第二垛而來

第十五垛	一	六	一七	三四	五七	八六	一二一	一六二	二〇九	二六二	九五五
第十六垛	一	七	二〇	四〇	六七	一〇一	一四二	一九〇	二四五	三〇七	一一二〇
第十七垛	一	八	二三	四六	七七	一一六	一六三	二一八	二八一	三五二	一二八五
第十八垛	一	九	二六	五二	八七	一三一	一八四	二四六	三一七	三九七	一四五〇
第十九垛	一	一〇	二九	五八	九七	一四六	二〇五	二七四	三五三	四四二	一六一五

右二乘垛三變皆自第三垛而來

第二十垛	一	七	二一	四三	七三	一一一	一五七	二一一	二七三	三四三	一二四〇
第二十一垛	一	八	二四	四九	八三	一二六	一七八	二三九	三〇九	三八八	一四〇五
第二十二垛	一	九	二七	五五	九三	一四一	一九九	二六七	三四五	四三三	一五七〇

第二十三垛　一　一〇　三〇　六一　一〇三　一五六　二二〇　二九五　三八一　四七八　一七三五

右二乘垛四變皆自第四垛而來

第二十四垛　一　八　二五　五二　八九　一三六　一九三　二六〇　三三七　四二四　一五二五

第二十五垛　一　九　二八　五八　九九　一五一　二一四　二八八　三七三　四六九　一六九〇

第二十六垛　一　一〇　三一　六四　一〇九　一六六　二三五　三一六　四〇九　五一四　一八五五

右二乘垛五變皆自第五垛而來

第二十七垛　一　九　二九　六一　一〇五　一六一　二二九　三〇九　四〇一　五〇五　一八一〇

第二十八垛　一　一〇　三二　六七　一一五　一七六　二五〇　三三七　四三七　五五〇　一九七五

右二乘垛六變皆自第六垛而來

凡諸變皆自第一垛而來

說曰二乘垛者以高求積皆再乘而得數者也變法以第一垛爲根一垛自并而成二垛一垛與二垛遞并而成三垛一垛與三垛遞并而成四垛四垛以上皆以一垛與諸垛遞并得數列表雖止於八推之可至於無窮此一變也二垛自并而成九垛二垛與三垛遞并而成十垛二垛與四垛遞并而成十一垛十一垛以上皆以二垛與諸垛遞并得數列表雖止於六推之可至於無窮此二變也三垛自并成十五垛三垛與四垛遞并而成十六垛十六垛以上皆以三垛與諸垛遞并得數列表雖止於五推之可至於無窮此三變也四垛自并而

成二十垛四垛與五垛遞并而成二十一垛二十一垛以上皆以四垛與諸垛遞并得數列表雖止於四推之可至於無窮此四變也五垛自并而成二十四垛五垛與六垛遞并而成二十五垛二十五垛以上皆以五垛與諸垛遞并得數列表雖止於三推之可至於無窮此五變也六垛自并而成二十七垛六垛與七垛遞并而成二十八垛列表雖止於二推之可至於無窮此六變也以此例之由七垛得數則爲七變由八垛得數則爲八變推之數十百垛則爲數十百變數不可盡也詳其例可推其餘故列表止此諸變皆自第一垛而來其例與一乘垛同說見第一表後

求積算術（上做此）第一垜用第一術第二垜用第二術三垜以

總法曰凡二乘垜有高求積皆以二三相乘得六為法

第一術曰高加一乘高又以高加二乘之如法而一

又術曰高加一乘半高又以高加二乘之三而一（或以高加一乘高又半高加一乘之三而一得積或半高加半個乘高又以高加二乘之亦得積凡二乘垜皆有半術三不及備舉餘可類推）

又術曰高加一乘半高又半高加一乘如一個半而一（此半術之半也或以半高加半個乘半高又以高加二乘之如一個半而一得積或以高加一乘半高之半又以高加二乘之如一個半而一亦得積凡二乘垜正術一有半術二每半術一有半半術三故二乘垜有半半術九㕘於第一垜舉一為例餘垜可以類推不及備載○一乘垜

用半術不待除而已得積故不論及半半術○半半術法實皆居正術四分之一亦可命為四分術

第二術曰倍高加一乘高又以高加一乘之如法而一

又術曰高加半个乘高又以高加一乘之三而一

第三術曰三倍高乘高又以高加一乘之如法而一

又術曰三倍高乘半高又以高加一乘之三而一

第四術曰四倍高減一以乘高又以高加一乘之如法而一

又術曰倍高減半个以乘高又以高加一乘之三而一

第五術曰五倍高減二以乘高又以高加一乘之如法

而一

又術曰五倍高減二乘半高又以高加一乘之三

而一

第六術曰六倍高減三以乘高又以高加一乘之如法

而一

又術曰三倍高減一个半以乘高又以高加一乘

之三而一

第七術曰七倍高減四以乘高又以高加一乘之如法

而一

又術曰七倍高減四乘高又以高加一乘之三而

一

第八術曰八倍高減五以乘高又以高加一乘之如法而一

又術曰四倍高減二个半乘高又以高加一乘之三而一

第九術曰四倍高乘高又加二以高乘之如法而一

又術曰倍高乘高又加一以高乘之三而一

第十術曰五倍高乘高又加一以高乘之如法而一

又術曰倍高加半高乘高又加半个以高乘之三而一

第十一術曰六倍高乘高又以高乘之如法而一

又術曰三倍高乘高又以高乘之三而一

又術曰高自乘又以高乘之得積此垛逐層幷之皆成立方體故可用此術

第十二術曰七倍高乘高內減一又以高乘之如法而一

又術曰三倍高加半高乘高內減半个以高乘之三而一

第十三術曰八倍高乘高內減二又以高乘之如法而一

又術曰四倍高乘高內減一又以高乘之三而一

第十四術曰九倍高乘高內減三又以高乘之如法而一

又術曰四倍高加半高以乘高內減一个半又以高乘之三而一

第十五術曰六倍高減三以乘高又加三以高乘之如法而一

又術曰三倍高減一个半乘高又加一个半以高乘之三而一

第十六術曰七倍高減三以乘高又加一以高乘之如

法而一

又術曰三倍高加半高內減一个半以乘高又加一以高乘之三而一

第十七術曰八倍高減三以乘高又加一以高乘之如法而一

又術曰四倍高減一个半以乘高又加半个以高乘之三而一

第十八術曰九倍高減三以乘高又以高乘之如法而一

又術曰四倍高加半高內減一个半以乘高又以

乘高又以高乘之三而一

第十九術曰十倍高減三以乘高又減一以高乘之如法而一

又術曰五倍高減一个半以乘高又減半个以高乘之三而一

第二十術曰八倍高減六乘高又加四以高乘之如法而一

又術曰四倍高減三乘高又加二以高乘之三而一

第二十一術曰九倍高減六以乘高又加三以高乘之

如法而一

又術曰四倍高加半高以乘高又加一个半以高乘之三而一

第二十二術曰十倍高減六以乘高又加二以高乘之如法而一

又術曰五倍高減三以乘高又加一以高乘之三而一

第二十三術曰十一倍高減六以乘高又加一以高乘之如法而一

又術曰五倍高減三以乘高又加半个以高乘之

三而一

第二十四術曰十倍高減九以乘高又加五以高乘之如法而一

又術曰五倍高減四个半以乘高又加二个半以高乘之三而一

第二十五術曰十一倍高減九以乘高又加四以高乘之如法而一

又術曰五倍高加半高內減四个半以乘高又加二以高乘之三而一

第二十六術曰十二倍高減九以乘高又加三以高乘

之如法而一

又術曰六倍高減四个半以乘高又加一个半以高乘之三而一

第二十七術曰十二倍高減十二以乘高又加六以高乘之如法而一

又術曰六倍高減六以乘高又加三以高乘之三而一

第二十八術曰十三倍高減十二以乘高又加五以高乘之如法而一

又術曰六倍高加半高內減六以乘高又加二个

半以高乘之三而一、

垛積表三 三乘垛

層數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	共積
第一垛	一	四	一〇	二〇	三五	五六	八四	一二〇	一六五	二二〇	〇〇七一五
第二垛	一	五	一四	三〇	五五	九一	一四〇	二〇四	二八五	三八五	〇一二一〇
第三垛	一	六	一八	四〇	七五	一二六	一九六	二八八	四〇五	五五〇	一七〇五
第四垛	一	七	二二	五〇	九五	一六一	二五二	三七二	五二五	七一五	二二〇〇
第五垛	一	八	二六	六〇	一一五	一九六	三〇八	四五六	六四五	八八〇	二六九五
第六垛	一	九	三〇	七〇	一三五	二三一	三六四	五四〇	七六五	一〇四五	三一五四
第七垛	一	一〇	三四	八〇	一五五	二六六	四二〇	六二四	八八五	一二一〇	三六八五

右三乘垛初變皆自第一垛而來

第八垛　一　六　一九　四四　八五　一四六　二三一　三四四　四八九　六七〇　二〇三五

第九垛　一　七　二三　五四　一〇五　一八一　二八七　四二八　六〇九　八三五　二五三〇

第十垛　一　八　二七　六四　一二五　二一六　三四三　五一二　七二九　一〇〇〇　三〇二五

第十一垛　一　九　三一　七四　一四五　二五一　三九九　五九六　八四九　一一六五　三五二〇

第十二垛　一　一〇　三五　八四　一六五　二八六　四五五　六八〇　九六九　一三三〇　四〇一五

右三乘垛再變皆自第二垛而來

第十三垛　一　七　二四　五八　一一五　二〇一　三二二　四八四　六九三　九五五　二八六〇

第十四垛　一　八　二八　六八　一三五　二三六　三七八　五六八　八一三　一一二〇　三三五五

第十五垛　一　九　三二　七八　一五五　二七一　四三四　六五二　九三三　一二八五　三八五〇

第十六垛	一	一〇	三六	八六	一六五	二八六	四八〇	七二六	一〇五五	一四八〇	四三四五

右三乘垛三變皆自第三垛而來

第十七垛	一	八	二九	七二	一四五	二五六	四一三	六二四	八九七	一二四〇	三六八五
第十八垛	一	九	三三	八二	一六五	二九一	四六九	七〇八	一〇一七	一四〇五	四一八〇
第十九垛	一	一〇	三七	九二	一八五	三二六	五二五	七九二	一一三七	一五七〇	四六七〇

右三乘垛四變皆自第四垛而來

第二十垛	一	九	三四	八六	一七五	三一一	五〇四	七六四	一一〇一	一五二五	四五一〇
第二十一垛	一	一〇	三八	九六	一九五	三四六	五六〇	八四八	一二二一	一六九〇	五〇〇五

右三乘垛五變皆自第五垛而來

凡諸變皆自第一垛而來

說曰三乘垛者以高求積皆三乘而得數者也諸變垛相幷相生之例皆與一乘垛同

求積算術第一垛用第一術第二垛用第二術三垛以上倣此

總法曰凡三乘垛有高求積皆以二三四連乘得二十四爲法

第一術曰高加一以乘高又以高加二乘之又以高加三乘之如法而一

又術曰高加一乘半高又以高加二乘之又以高加三乘之十二而一或半高加半个乘高又以高加二乘之又以高加三乘之十二而一得積或高加一乘高又以半高加一乘之又以高加三乘之十二而一得積或高加一乘

高又以高加一乘之又半高加一个半乘之十二而一得積凡三乘垛皆有半術四茲於諸垛各舉其一餘可類推

又術曰高加一乘半高又半高加一乘之又以高加三乘之六而一此四分術即半半術也說已見二乘垛。或半高加半个乘半高又以高加二加三連乘之六而一得積或高加一乘半高又以高加二乘之又半高加一个乘之得積或高加一乘半高之半又以高加二加三連乘之亦得積凡三乘垛正術一有半術四每半術一有四分術四是三乘每垛各有四分術一十六茲於諸垛各載其一餘可類推

又術曰半高加半个乘半高又半高加一乘之又以高加三乘之三而一或高加一乘半高又半高加一个半乘之三而一得積或高加一乘半高之半又半高加一乘之又以高加三乘之三而一得積或高加一乘半高又以

半高之半加半个乘之又以高加三乘之三而一得積此又四分術之半也法實皆居正術八分之一一亦可命爲八分術三乘垜每四分術一有八分術四是三乘每垜各有八分術六十四茲舉一爲例餘垜可以類推不及備載。二乘垜亦有八分術但須用七分五釐爲法畸零太多故不論及。八分術又可半之以一个半爲法如此題用一半高加半个乘半高又半高加一乘之又半高加一个半乘之如一个半而一得積每八分術有半八分術四是三乘每垜有半八分術二百五十六但彼此互半多重複者耳附記於此餘可類推。凡算貴簡省好用繁者皆非也前人於諸乘垜未有專書故倍半繁簡之理未經發明今欲以無畸零者爲正術且欲諸垜通成一例故不免稍繁自半術以下遞析之以窮其變不憚辭費庶覽者有可考而求簡者得自擇焉

第二術曰倍高加二以乘高又以高加一乘之又以高加二乘之如法而一

又術曰高加一以乘高又以高加一乘之又以高加二乘之十二而一

又術曰高加一以乘高又以高加一乘之又以半高加一乘之六而一

第三術曰三倍高加一以乘高又以高加一乘之又以高加二乘之如法而一

又術曰三倍高加一以乘半高又以高加一乘之又以高加二乘之十二而一

又術曰三倍高加一以乘半高又以高加一乘之又半高加一乘之六而一

第四術曰四倍高乘高又以高加一加二連乘之如法而一

又術曰倍高乘高又以高加一加二連乘之十二而一

又術曰高自乘又以高加一加二連乘之六而一

此術甚簡且無畸零然仍用簡術爲正術者欲諸垛通成一例也○此術若再半之半高乘高又以高加一加二連乘之三而一得積以御奇層者尚有畸零入算以御偶層者幷無畸零此卽八分術也其例已詳第一垛下諸垛不及備載但有簡省類此者亦可取用故復論及後不復贅

第五術曰五倍高減一以乘高又以高加一加二連乘之如法而一

又術曰五倍高減一以乘半高又以高加一加二連乘之十二而一

又術曰五倍高減一乘半高又以高加一乘之又半高加一乘之六而一

第六術曰六倍高減二以乘高又以高加一加二連乘之如法而一

又術曰三倍高減一以乘高又以高加一加二連乘之十二而一

又術曰三倍高減一以乘高又以高加一乘之又半高加一乘之六而一

第七術曰七倍高減三以乘高又以高加一加二連乘之如法而一

又術曰七倍高減三乘半高又以高加一加二連乘之十二而一

又術曰七倍高減三乘半高又以高加一乘之又半高加一乘之六而一

第八術曰四倍高加四以乘高又加四以高乘之又以高加二乘之如法而一

又術曰倍高加二以乘高又加二以高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰高加一以乘高又加一以高乘之又以高
加一乘之六而一
第九術曰五倍高加五以乘高又加二以高乘之又以
高加一乘之如法而一
又術曰五倍高加五乘半高又加一以高乘之又
以高加一乘之十二而一
又術曰五倍高加五以乘半高又加一以半高乘
之又以高加一乘之六而一
第十術曰六倍高加六以乘高又以高乘之又以高加
一乘之如法而一

又術曰三倍高加三以乘高又以高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰三倍高加三乘半高又以高乘之又以高加一乘之六而一

第十一術曰七倍高加七以乘高又減二以高乘之又以高加一乘之如法而一

又術曰七倍高加七以乘高又減二以半高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰七倍高加七以乘高又減二以半高乘之又以半高加半个乘之六而一

第十二術曰八倍高加八以乘高又減四以高乘之又以高加一乘之如法而一

又術曰四倍高加四以乘高又減二以高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰倍高加二以乘高又減一以高乘之又以高加一乘之六而一

第十三術曰六倍高加二以乘高又加四以高乘之又以高加一乘之如法而一

又術曰三倍高加一以乘高又加二以高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰三倍高加一以乘高又加二以半高乘之又以高加一乘之六而一

第十四術曰七倍高加三以乘高又加二以高乘之又以高加一乘之如法而一

又術曰七倍高加三以乘高又加二以半高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰七倍高加三乘半高又加一以半高乘之又以高加一乘之六而一

第十五術曰八倍高加四以乘高又以高乘之又以高加一乘之如法而一

又術曰四倍高加二以乘高又以高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰倍高加一以乘高又以高乘之又以高加一乘之六而一

第十六術曰九倍高加五以乘高又減二以高乘之又以高加一乘之如法而一

又術曰九倍高加五乘半高又減一以高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰九倍高加五乘半高又減一以半高乘之又以高加一乘之六而一

第十七術曰八倍高乘高又加四以高乘之又以高加一乘之如法而一

又術曰四倍高乘高又加二以高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰倍高乘高又加一以高乘之又以高加一乘之六而一

第十八術曰九倍高加一乘高又加二以高乘之又以高加一乘之如法而一

又術曰九倍高加一乘半高又加一以高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰九倍高加一乘半高又加一以半高乘之

又以高加一乘之六而一

第十九術曰十倍高加二以乘高又以高乘之又以高

加一乘之如法而一

又術曰五倍高加一以乘高又以高乘之又以高

加一乘之十二而一

又術曰五倍高加一乘半高又以高乘之又以高

加一乘之六而一

第二十術曰十倍高減二以乘高又加四以高乘之又

以高加一乘之如法而一

又術曰五倍高減一以乘高又加二以高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰五倍高減一乘半高又加一以高乘之又以高加一乘之六而一

第二十一術曰十一倍高減一以乘高又加二以高乘之又以高加一乘之如法而一

又術曰十一倍高減一以乘半高又加一以高乘之又以高加一乘之十二而一

又術曰十一倍高減一以乘半高又加一以半高乘之六而一

垛積衍術卷三

垛積術卷四

溧陽强汝詢學
吳興劉承幹校

垛積表四 四乘垛

層數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	共積
第一垛	一	五	一五	三五	七〇	一二六	二一〇	三三〇	四九五	七一五	二〇〇二
第二垛	一	六	二〇	五〇	一〇五	一九六	三三六	五四〇	八二五	一二一〇	三二八九
第三垛	一	七	二五	六五	一四〇	二六六	四六二	七五〇	一一五五	一七〇五	四五七六
第四垛	一	八	三〇	八〇	一七五	三三六	五八八	九六〇	一四八五	二二〇〇	五八六三
第五垛	一	九	三五	九五	二一〇	四〇六	七一四	一一七〇	一八一五	二六九五	七一五〇

第六垛　一　一〇　四〇　一〇　三五　四六　六〇　三〇　三三五　三五九　八四三七

右四乘垛初變皆自第一垛而來

第七垛　一　七　二六　七〇　二五五　三一〇　五三二　六八　三五五　二二五　五三六八

第八垛　一　八　三　六五　九〇　三七一　六九八　一〇六八　六五五　三五〇　六六五五

第九垛　一　九　三六　一〇八　三三五　四四　七八四　三六六　二二五　三五五　七九四二

第十垛　一　一〇　四一　三五　二六〇　五三一　九六〇　三五六　三三五　三五〇　九三三九

右四乘垛再變皆自第二垛而來

第十一垛　一　八　三三　六〇　二五　四六　七六八　三三　九五　二六〇　七五四七

第二十一垛　一　九　三七　一五　四〇　四六　九四　四三　三三五　三三五　八七三四

第三十一垛　一　一〇　四三　三〇　二五五　二四六　八六〇　五四三　三五五　三九〇　一〇〇五一

右四乘垛三變皆自第三垛而來

第十四垛　一九　三六　二〇　三三五　五二　二四　二四四　三三五　三五五　九五三六

第十五垛　一〇　四三　三五　二九〇　五四　五一　二八　三五　四八〇　一〇八一四

右四乘垛四變皆自第四垛而來

凡諸變皆自第一垛而來

說曰四乘垛者有高求積皆四乘而得數者也諸垛相幷相生之例皆與一乘垛同

求積算術第一垛用第一術第二垛用第二術三垛以上倣此

總法曰凡四乘垛有高求積皆以二三四五連乘得一百二十爲法

第一術曰高加一乘高又以高加二乘之又以高加三乘之又以高加四乘之如法而一

又術曰高加一乘半高又以高加二加三加四連乘之六十而一

又術曰高加一乘半高又半高加一乘之又以高加三加四連乘之三十而一

又術曰高加一乘半高又半高加一乘之又半高加二乘之又以高加三乘之十五而一凡四乘垛正術一有半術五每半術一有四分術五每四分術一有八分術五每八分術一有半八分術五今於諸垛各截半術一四分術一其八分術則於第一垛舉此爲例餘垛不及備載一半八分術當用七个半爲法

茲不復及

第二術曰倍高加三乘高又以高加一乘之又以高加二乘之又以高加三乘之如法而一

又術曰高加一个半乘高又以高加一加二加三連乘之六十而一

又術曰高加一个半乘半高又以高加一加二加三連乘之三十而一

第三術曰三倍高加二乘高又以高加一加二加三連乘之如法而一

又術曰三倍高加二乘半高又以高加一加二加

三連乘之六十而一

又術曰三倍高加二乘半高又以高加一乘之又半高加一乘之又以高加三乘之三十而一

第四術曰四倍高加一乘高又以高加一加二加三連乘之如法而一

又術曰倍高加半个乘高又以高加一加二加三連乘之六十而一

又術曰倍高加半个乘半高又以高加一加二加三連乘之三十而一

第五術曰五倍高乘高又以高加一加二加三連乘之

如法而一

又術曰五倍高乘半高又以高加一加二加三連乘之六十而一

又術曰五倍高乘半高又半高加一乘之又以高加一乘之又以高加三乘之三十而一

第六術曰六倍高加一以乘高又以高加一加二加三連乘之如法而一

又術曰三倍高減半个以乘高又以高加一加二加三連乘之六十而一

又術曰三倍高減半个以乘半高又以高加一加

二加三連乘之三十而一

第七術曰四倍高加八以乘高又加八以高乘之又以

高加一加二連乘之如法而一

又術曰倍高加四以乘高又加四以高乘之又以

高加一加二連乘之六十而一

又術曰高加二以乘高又加二以高乘之又以高

加一加二連乘之三十而一

第八術曰五倍高加十以乘高又加五以高乘之又以

高加一加二連乘之如法而一

又術曰五倍高加十以乘高又加五以半高乘之

又以高加一加二連乘之六十而一
又術曰五倍高加十以乘高又加五以半高乘之
又半高加一乘之又以高加一乘之三十而一
第九術曰六倍高加十二以乘高又加二以高乘之又以高加一加二連乘之如法而一
又術曰三倍高加六以乘高又加一以高乘之又以高加一加二連乘之六十而一
又術曰三倍高加六以乘高又加一以半高乘之
又以高加一加二連乘之三十而一
第十術曰七倍高加十四以乘高又減一以高乘之又

以高加一加二連乘之如法而一

又術曰七倍高加十四以乘半高又减半个以高乘之又以高加一加二連乘之六十而一

又術曰七倍高加十四以乘高又加半个以半高乘之又以高加一加二連乘之三十而一

第十一術曰六倍高加七以乘高又加七以高乘之又以高加一加二連乘之如法而一

又術曰三倍高加三个半乘高又加三个半以高乘之又以高加一加二連乘之六十而一

又術曰三倍高加三个半以乘高又加三个半以

半高乘之又以高加一加二連乘之三十而一

第十二術曰七倍高加九以乘高又加四以高乘之又以高加一加二連乘之如法而一

又術曰七倍高加九以乘半高又加二以高乘之又以高加一加二連乘之六十而一

又術曰七倍高加九以乘半高又加二以半高乘之又以高加一加二連乘之三十而一

第十三術曰八倍高加十一以乘高又加一以高乘之又以高加一加二連乘之如法而一

又術曰四倍高加五个半以乘高又加半个以高

乘之又以高加一加二連乘之六十而一

又術曰四倍高加五个半以乘高又加半个以半高乘之又以高加一加二連乘之三十而一

第十四術曰八倍高加六以乘高又加六以高乘之又以高加一加二連乘之如法而一

又術曰四倍高加三以乘高又加三以高乘之又以高加一加二連乘之六十而一

又術曰倍高加六个半以乘高又加一个半以高乘之又以高加一加二連乘之三十而一

第十五術曰九倍高加八以乘高又加三以高乘之又

以高加一加二連乘之如法而一

又術曰九倍高加八以乘半高又加一个半以高乘之又以高加一加二連乘之六十而一

又術曰九倍高加八以乘半高又加一个半以半高乘之又以高加一加二連乘之三十而一

垜積表五 五乘垜

層數	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	共積
第一垜	一	六	二一	五六	一二六	二五二	四六二	七九二	一二八七	二〇〇二	五〇〇五
第二垜	一	七	二八	八四	二一〇	四六二	九二四	一七一六	三〇〇三	五〇〇五	八〇〇八
第三垜	一	八	三六	一二〇	三三〇	七九二	一七一六	三四三二	六四三五	一一四四〇	[illegible]

第四垜　一　九　三九　二九　五四　六〇　三八　三六　五六三　一四〇一四

第五垜　一　一〇　四五　一四〇　三二〇　三六　四二〇　二四〇五　七五〇　一七〇一七

右五乘垜初變皆自第二垜而來

第六垜　一　八　三四　一四　三九　三〇　五二　一六　三三　五六　一二七二七

第七垜　一　九　四〇　三五　三五　六六　三四　三〇　四五　六五　一五七三〇

第八垜　一　一〇　四六　四六　三七　六三　三六　五五　四九七　七四二　一八七三三

右五乘垜再變皆自第二垜而來

第九垜　一　九　四三　三三　三六　一四　四〇　三五　四九七　一四七　一七四四六

第十垜　一　一〇　四七　三五　五五　六六　三三　三四　二九九　八三四　二〇四四九

右五乘垜三變皆自第三垜而來

凡諸變皆自第一垜而來

說曰五乘垜者以高求積皆五乘而得數者也諸變垜相幷相生之例皆與一乘垜同凡各乘垜之變皆無窮今定以次層至一十而止故一乘垜列七變三十六垜二乘以上漸少至五乘垜止三變十垜變法已詳餘可遞推而得非一乘垜之變獨多而五乘垜之變較少也

六乘垜以上其變例皆與一乘垜同可以類推

求積算術第一垜用第一術第二垜用第二術三垜以上倣此

總法曰凡五乘垜有高求積皆以二三四五六連乘得七百二十爲法

第一術曰高加一乘高又以高加二乘之又以高加三乘之又以高加四乘之又以高加五乘之如法而一

又術曰高加一乘半高又以高加二加三加四加五連乘之三百六十而一

又術曰高加一乘半高又半高加一乘之又以高加三加四加五連乘之一百八十而一

又術曰半高加半个乘半高又半高加一乘之又以高加三加四加五連乘之九十而一

又術曰半高加半个乘半高又半高加一乘之又半高加二乘之又以高加三乘之又以高加五乘

之四十五而一凡五乘垛正術一有半術六每半術一有四分術六每四分術一有八分術六每八分術一有半八分術六茲於每垛各載半術一四分術一其八分術及半八分術唯第一垛各舉其一以見例餘垛皆不復及若半八分術又半之則當用二十二个半爲法茲不復論

第二術曰倍高加四乘高又以高加一乘之又以高加二乘之又以高加三乘之又以高加四乘之如法而一

又術曰高加二乘高又以高加一加二加三加四連乘之三百六十而一

又術曰高加二乘半高又以高加一加二加三加四連乘之一百八十而一

第三術曰三倍高加三乘高又以高加一加二加三加

四連乘之如法而一

又術曰三倍高加三乘半高又以高加一加二加三加四連乘之三百六十而一

又術曰三倍高加三乘半高又半高加一乘之又以高加一乘之又以高加三加四連乘之一百八十而一

第四術曰四倍高加二乘高又以高加一加二加三加四連乘之如法而一

又術曰倍高加一乘高又以高加一加二加三加四連乘之三百六十而一

又術曰倍高加一乘半高又以高加一加二加三加四連乘之一百八十而一

第五術曰五倍高加一乘高又以高加一加二加三加四連乘之如法而一

又術曰五倍高加一乘半高又以高加一加二加三加四連乘之三百六十而一

又術曰五倍高加一乘半高又半高加一乘之又以高加一乘之又以高加三加四連乘之一百八十而一

第六術曰四倍高加十二以乘高又以十四以高乘之

又以高加一加二加三連乘之如法而一

又術曰倍高加六以乘高又加七以高乘之又以高加一加二加三連乘之三百六十而一

又術曰倍高加六以乘高又加七以半高乘之又以高加一加二加三連乘之一百八十而一

第七術曰五倍高加十五以乘高又加十以高乘之又以高加一加二加三連乘之如法而一

又術曰五倍高加十五以乘半高又加五以高乘乘之又以高加一加二加三連乘之三百六十而一

又術曰五倍高加十五以乘半高又加五以半高乘之又以高加一加二加三連乘之一百八十而一

第八術曰六倍高加十八以乘高又加六以高乘之又以高加一加二加三連乘之如法而一

又術曰三倍高加九以乘高又加三以高乘之又以高加一加二加三連乘之三百六十而一

又術曰三倍高加九以乘高又加三以半高乘之又以高加一加二加三連乘之一百八十而一

第九術曰六倍高加十二以乘高又加十二以高乘之

又以高加一加二加三連乘之如法而一

又術曰三倍高加六以乘高又加六以高乘之又以高加一加二加三連乘之三百六十而一

又術曰三倍高加六以乘高又加六以半高乘之又以高加一加二加三連乘之一百八十而一

第十術曰七倍高加十五以乘高又加八以高乘之又以高加一加二加三連乘之如法而一

又術曰七倍高加十五以乘半高又加四以高乘之又以高加一加二加三連乘之三百六十而一

又術曰七倍高加十五以乘半高又加四以半高

乘之又以高加一加二加三連乘之一百八十而
一

垛積衍術卷四