同様ニ

$$\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)-\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}$$

$$=\frac{\cos\left\{\alpha+\dfrac{(n-1)(\beta+\pi)}{2}\right\}\sin\dfrac{n(\beta+\pi)}{2}}{\sin\dfrac{\beta+\pi}{2}}$$

トナル.

115. 等比級數ヲナス角ノ餘割ノ和

等比級數ヲナス n 個ノ角ヲ

$$\alpha,\quad 2\alpha,\ \ldots\ldots\ldots\ldots 2^{n-1}\alpha,$$

トスレバ

$$S=\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha+\ldots\ldots+\operatorname{cosec}2^{n-1}\alpha$$

サテ

$$\operatorname{cosec}\alpha=\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha$$

$$\operatorname{cosec}2\alpha=\cot\alpha-\cot2\alpha$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\operatorname{cosec}2^{n-1}\alpha=\cot2^{n-2}\alpha-\cot2^{n-1}\alpha$$

故ニ邊々相加フレバ

$$S=\cot\frac{\alpha}{2}-\cot2^{n-1}\alpha$$

トナル.

116. 本章ニ於テハ二三ノ問題ニ就キテ示サントス

例 1. $\cos^3\alpha+\cos^3 2\alpha+\ldots\ldots+\cos^3 n\alpha$ ノ和ヲ求メヨ.

解　次式ニヨリ　$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

故ニ　$4\cos^3\alpha=3\cos\alpha+\cos3\alpha$

同様ニ　$4\cos^3 2\alpha=3\cos2\alpha+\cos6\alpha$

$$4\cos^3 3\alpha=3\cos3\alpha+\cos9\alpha$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

邊々相加フレバ

$$4S=3(\cos\alpha+\cos2\alpha+\ldots\ldots)+(\cos3\alpha+\cos6\alpha+\ldots\ldots)$$

$$=3\frac{\cos\left(\alpha+\dfrac{n-1}{2}\alpha\right)\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\left\{3\alpha+\dfrac{n-1}{2}3\alpha\right\}\sin\dfrac{3n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$$

$$=3\frac{\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha\sin\dfrac{n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}+\frac{\cos\dfrac{3(n+1)}{2}\alpha\sin\dfrac{3n\alpha}{2}}{\sin\dfrac{3\alpha}{2}}$$

$\dfrac{6\alpha+n-1}{2}$

$6\alpha+3\alpha-3$

例 2. $\tan x+\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{x}{2^2}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\tan\dfrac{x}{2^{n-1}}$ ヲ求メヨ.

解　$\tan x=\cot x-2\cot2x$

ナルガ故ニ

$$\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}-\cot x$$

同様ニ　$\dfrac{1}{2^2}\tan\dfrac{x}{2^2}=\dfrac{1}{2^2}\cot\dfrac{x}{2^2}-\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{x}{2}$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}\tan\frac{x}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-2}}\cot\frac{x}{2^{n-2}}$$

邊々相加フレバ

$$S=\frac{1}{2^{n-1}}\cot\frac{x}{2^{n-1}}-2\cot2x$$

ヲ得. コレ求ムル結果ナリ.

例 3. 圓 O ニ内接スル正 n 邊形 $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ アリ. 弧 A_nA_1 上ノ任意ノ點ヲPトシ角 POA_1 ヲ θ トスル時, 折線

$$PA_1+PA_2+\ldots\ldots+PA_n$$

ヲ求メヨ.

解 n 個ノ角 A_1OA_2, A_2OA_3……A_nOA_1 ハ皆相等シク其大サハ $\dfrac{2\pi}{n}$ ナリ．故ニ

$$P\hat{O}A_1=\theta \quad P\hat{O}A_2=\theta+\frac{2\pi}{n} \quad P\hat{O}A_3=\theta+\frac{4\pi}{n}\cdots\cdots$$

今圓ノ半徑ヲ R トスレバ

$$PA_1=2R\sin\frac{POA_1}{2}=2R\sin\frac{\theta}{2}$$

$$PA_2=2R\sin\frac{POA_2}{2}=2R\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

邊々相加フレバ

$$PA_1+PA_2+\cdots\cdots+PA_n$$

$$=2R\left\{\sin\frac{\theta}{2}+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{n}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

$$=2R\frac{\sin\left\{\frac{\theta}{2}+\frac{n-1}{2}\frac{\pi}{n}\right\}\sin\frac{n}{2}\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$$=2R\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2n}\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)$$

問 題 19.

次ノ級數ノ n 項ノ和ヲ求メヨ．(1−5)

1. $\cos\theta+\cos3\theta+\cos5\theta+\cdots\cdots$

2. $\sin(p+1)\alpha\cos\alpha+\sin(p+2)\alpha\cos2\alpha+\cdots\cdots$

3. $\cos\dfrac{\pi}{2n+1}+\cos\dfrac{3\pi}{2n+1}+\cdots\cdots$

4. $\sin\alpha\sin3\alpha+\sin2\alpha\sin4\alpha+\cdots\cdots$

5. $\sin\alpha\sin2\alpha+\sin2\alpha\sin3\alpha+\cdots\cdots$

6. $\dfrac{\sin\theta+\sin2\theta+\cdots\cdots+\sin n\theta}{\cos\theta+\cos2\theta+\cdots\cdots+\cos n\theta}$

$$\frac{\frac{\sin\left(\theta+\frac{n}{2}\theta\right)\sin\frac{n-1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}}{\frac{\cos\left(1+\frac{n}{2}\right)\theta\cos\frac{n-1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}}=\tan\frac{n+1}{2}\theta$$

7. $\dfrac{\sin\theta+\sin3\theta+\cdots\cdots+\sin(2n-1)\alpha}{\cos\theta+\cos3\theta+\cdots\cdots+\cos(2n-1)\alpha}$

8. $\dfrac{\sin\theta-\sin2\theta+\sin3\theta-\cdots\cdots}{\cos\theta-\cos2\theta+\cos3\theta-\cdots\cdots}$

9. $\theta=\dfrac{2\pi}{17}$ ナル時ハ

$$2(\cos\theta+\cos2\theta+\cos4\theta+\cos8\theta)$$

ノ値ハ方程式

$$x^2+x-4=0$$

ノ根ナルコトヲ證セヨ．

10. $\dfrac{2\tan n\alpha}{1+\tan^2 n\alpha}$ ヲ變形スレバ $\sin 2n\alpha$ トナルコトヲ示シ，仍ツテ

$$\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\frac{2\tan2\alpha}{1+\tan^2 2\alpha}+\cdots\cdots+\frac{2\tan n\alpha}{1+\tan^2 n\alpha}$$

ヲ求メヨ．

第　二　十　章

De Moivre ノ 定 理 ト 其 應 用

117. 複素數

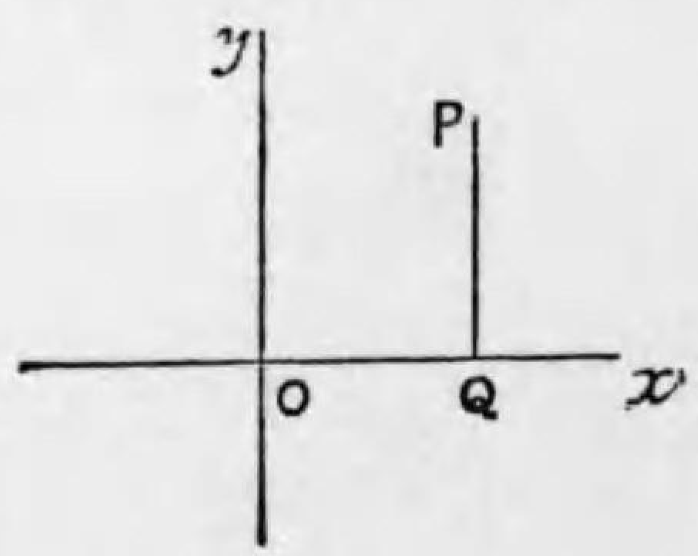
a ト b トハ共ニ實數ナル時 $\sqrt{-1}$ ヲ i ニテ示セバ.

$$a+ib$$

ナル數ヲ**複素數**トイフ．故ニ複素數ハ實數ト虚數トノ合成數ナリ.

118. 複素數ノ幾何學的表示

複素數 $a+ib$ ヲ，直交スル二ツノ直線ヲ x 軸，y 軸トセル平面上ノ點ニテ表ハスコトヲ得ベシ．ソレニハ或長サノ單位ノ a 倍ヲ交點 O ヨリ x 軸ニ沿フテ測リ其端點ヲ Q トス．但シ a ガ正ナラバ x 軸ニ沿ヒテ O 點ヨリ右方ニトリ，a ガ負ナラバ O 點ヨリ左方ニ Q 點ヲトルモノトス．次ニ Q 點ヨリ y 軸ニ平行ニ前ト同ジ長サノ單位ノ b 倍ヲトリテ其端點ヲ P トス．但シ b ガ正ナル時ハ x 軸ヨリ上方ニ P ヲトリ，b ガ負ナル時ハ下方ニトルモノトス.



然ル時 P 點ハ $a+ib$ ナル複素數ヲ表ハス點ナリト規約スベシ．斯ノ如キ規約ヲ設クレバ凡テノ複素數ヲ此平面上ノ點ニテ代表セシムルコトヲ得.

逆ニ此平面上ノ凡テノ點ハ只一ツノ複素數ヲ表ハスガ故ニ平面上ノ凡テノ點ト複素數トハ一々對應ヲナス．之ヲ**複素數ノ幾何學的表示法**トイヒ，實ニ獨逸ノ碩學がうすノ創見ニカヽルモノナレバ之ヲ**がうすノ表示**トイヒ，コノ平面ヲ**複素數ノ平面**又ハ**がうすノ平面**トイフ.

[注意] x 軸上ノ點ハ b ガ零ナル場合ナルガ故ニ實數ニシテ，y 軸上ノ點ハ，a ガ零ナル場合ナルガ故ニ虚數ナリ．故ニ上ノ議論ハ，實數ニテモ虚數ニテモ共ニ複素數ノ特別ナル場合ナリト見做シテノ事ナリ.

119. がうすノ平面ニ複素數

$$a+ib$$

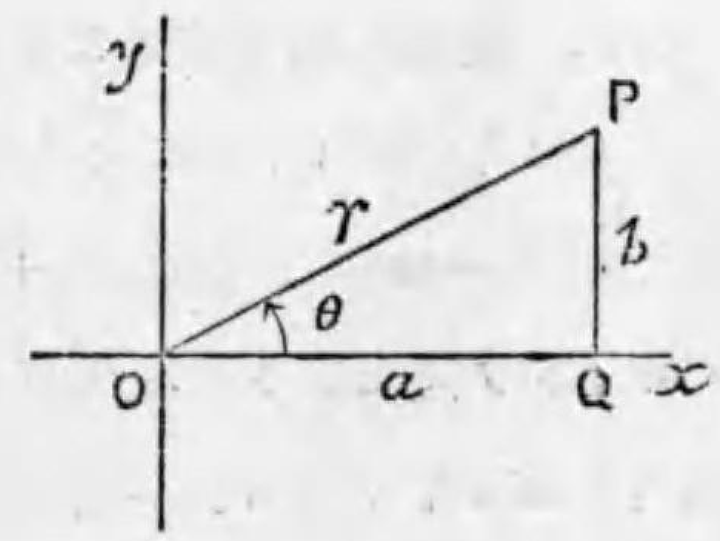
ヲ表ハセル點ヲ P トシ，原點 O ト P トヲ結ベ，OP ノ長サヲ r トシ OP ト x 軸トノナス角ヲ θ トスレバ

$$\left.\begin{aligned} a&=r\cos\theta \\ b&=r\sin\theta \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナルガ故ニ

$$a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)\ldots\ldots(2)$$

ナリ.



又 (1) ヨリ

$$\left.\begin{aligned} &r=\sqrt{a^2+b^2} \\ &\text{ニシテ且ツ} \\ &\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(但シ $2\pi>\theta\geqq0$ トス.)

ナルガ故ニ複素數 $a+ib$ ガ與ヘラルレバ r 及ビ θ ガ定マルベク，逆ニ r, θ ガ與ヘラルレバ複素數 $a+ib$ ガ定メラル.

［注意］ r ヲ複素數 $a+ib$ ノもぢゅらすトイヒ，θ ヲあんぷりちゅーどトイフ.

例 1. 複素數 $1+i$ ヲ公式 (2) ノ如キ形ニ變形セヨ.

解

$$1+i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned} r\cos\theta&=1 \\ r\sin\theta&=1 \end{aligned}\right\}$$

故ニ

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

ニシテ

$$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ヨツテ $2\pi>\theta\geqq 0$ ノ範圍ニテハ

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

故ニ

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

120. 數學的歸納法ニヨリテ

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\ldots\ldots(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$

$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_n)\ldots\ldots\ldots(4)$$

ナルコトヲ證セントス．先ヅ $n=1$ ナル時ハ左右兩邊ハ共ニ $\cos\theta_1+i\sin\theta_1$ ナルガ故ニ等式 (4) ハ成立ス．次ニ $n=2$ ナル時ハ右邊ハ $\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$ ニシテ左邊ハ

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

ナリ．而シテ乘法ヲ實行スレバ

$$\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)$$

$$=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$$

ヨツテコノ場合ニモ等式 (4) ハ成立ス.

次ニ n ノ或値例ヘバ r ノ時

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\ldots\ldots(\cos\theta_r+i\sin\theta_r)$$

$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_r)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_r)$$

ガ成立スルト假定スレバ

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\ldots\ldots(\cos\theta_r+i\sin\theta_r)(\cos\theta_{r+1}+i\sin\theta_{r+1})$$

$$=\{\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_r)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_r)\}(\cos\theta_{r+1}+i\sin\theta_{r+1})$$

$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_r)\cos\theta_{r+1}-\sin\theta_{r+1}\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots\ldots+\theta_n)$$

$$+i\{\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_r)\cos\theta_{r+1}+\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_r)\sin\theta_{r+1}\}$$

$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_r+\theta_{r+1})+i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_r+\theta_{r+1})$$

卽チ n ノ或値 r ノ時等式 (4) ガ成立スルモノト假定スレバ n ガ $r+1$ ノ時ニモ尙成立スベシ．故ニ等式 (4) ハ n ガ如何ナル正ノ整數ナル時ト雖モ常ニ成立ス.

121. どもあぶるノ定理

n ガ實數ナル時ハ $\cos n\theta+i\sin n\theta$ ハ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

ニ等シキカ或ハ其一ツノ値ナリ.

證明

1°. n ガ正ノ整數ナル時

コノ場合ハ前節公式 (4) ニ

$$\theta_1=\theta_2=\ldots\ldots=\theta_n=\theta$$

ト置カバ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

トナル. 卽チ $\cos n\theta+i\sin n\theta$ ハ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

ニ一致ス.

2°. n ガ負ノ整數ナル時

コノ場合ニ $n=-m$ ト置ケバ m ガ正ノ整數ナリ. 而シテ

$$(\cos m\theta-i\sin m\theta)(\cos m\theta+i\sin m\theta)=1$$

ナルガ故ニ

$$\cos m\theta-i\sin m\theta=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}$$

然ルニ m ガ正ノ整數ナルガ故ニ 1° ニヨリテ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta$$

故ニ

$$\cos m\theta-i\sin m\theta=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}$$

從ツテ

$$\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}$$

$-m$ ヲ n ニ置キ戻セバ

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

3°. n ガ分數ナル時

コノ場合ハ $n=\dfrac{p}{q}$ ト置クベシ. 但シ p, q ハ互ニ素ナル整數トシ, 且ツ q ヲ正トス. 然ル時ハ 1° ニヨリテ

$$\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^q=\cos\theta+i\sin\theta$$

故ニ $\cos\dfrac{\theta}{q}+i\sin\dfrac{\theta}{q}$ ハ $\cos\theta+i\sin\theta$ ノ q 乘根ノ一ツナリ. 換言スレバ

$$\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}$$

ハ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}$$

ナル値ノ一ツニ等シ. 今之等ノ p 乘冪ヲトルト

$$\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^p=\cos\frac{p}{q}\theta+i\sin\frac{p}{q}\theta$$
$$=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

及ビ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

ナリ. 故ニコノ場合ニモ $\cos n\theta+i\sin n\theta$ ハ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}=\cos\frac{p}{q}\theta+i\sin\frac{p}{q}\theta$

ノ一ツノ値ナリ.

例 2. 次ノ式ヲ簡單ニセヨ.

$$\frac{(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^7(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^5}{(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{12}(\cos 5\theta-i\sin 5\theta)^6}$$

解 $$(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)=\cos(-2\theta)+i\sin(-2\theta)$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-2}$$

故ニ

$$(\cos 2\theta-i\sin 2\theta)^7=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-14}$$

同樣ニ

$$(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^5=(\cos\theta+i\sin\theta)^{15}$$
$$(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)^{12}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{48}$$
$$(\cos 5\theta-i\sin 5\theta)^6=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-30}$$

故ニ

$$原式=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-14}(\cos\theta+i\sin\theta)^{15}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{48}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-30}}$$
$$=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{18}}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-17}$$
$$=\cos(-17)\theta+i\sin(-17\theta)$$

$$=\cos 17\theta - i\sin 17\theta$$

例 3.

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$$

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$$

ナル時ハ

$$\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

及ビ

$$\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$

ナルコトヲ證セヨ.

［解］ $\cos\alpha+i\sin\alpha=x$ 　 $\cos\beta+i\sin\beta=y$

$$\cos\gamma+i\sin\gamma=z$$

ト置ケバ, 假定ニヨリテ

$$x+y+z=0$$

サテ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

ナルガ故ニ

$$x^3+y^3+z^3=3xyz$$

然ルニ

$$x^3=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+i\sin 3\alpha$$

同樣ニ

$$y^3=\cos 3\beta+i\sin 3\beta$$

$$z^3=\cos 3\gamma+i\sin 3\gamma$$

又

$$xyz=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\gamma+i\sin\gamma)$$

$$=\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

ナルガ故ニ

$$\Sigma\cos 3\alpha+i\Sigma\sin 3\alpha=3\{\cos(\alpha+\beta+\gamma)+i\sin(\alpha+\beta+\gamma)\}$$

此等式ニ於テ實數部ト虛數部トヲ分離スレバ

$$\Sigma\cos 3\alpha=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$$

$$\Sigma\sin 3\alpha=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

例 4. $\theta=15^\circ$ ナル時, 次ノ式ノ値ヲ求メヨ.

$$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}{\cos 3\theta-i\sin 3\theta}$$

［解］ 原式ノ分母子ニ $\cos 3\theta+i\sin 3\theta$ ヲ乘ズレバ, 分母ハ

$$\cos^2 3\theta+\sin^2 3\theta=1$$

トナル故ニ

$$\text{原式}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

$$=\cos(\theta+2\theta+3\theta)+i\sin(\theta+2\theta+3\theta)$$

$$=\cos 6\theta+i\sin 6\theta=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=i$$

例 5. 恒等式

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{(a-b)(x-a)}-\frac{1}{(a-b)(x-b)}$$

ヲ利用シテ, 次ノ等式ヲ證明セヨ.

$$\cos(2\theta+\alpha+\beta+\gamma)\sin(\alpha-\beta)$$

$$=\cos(2\alpha+\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)-\cos(2\beta+\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)$$

［解］ 恒等式ニ於テ $x,\ a,\ b$ ノ代リニ夫々 $\cos 2\theta+i\sin 2\theta$, $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$, $\cos 2\beta+i\sin 2\beta$ ト置ケバ

$$x-a=-2\sin(\theta-\alpha)\{\sin(\theta+\alpha)+i\cos(\theta+\alpha)\}$$

$$x-b=-2\sin(\theta-\beta)\{\sin(\theta+\beta)+i\cos(\theta+\beta)\}$$

$$a-b=-2\sin(\alpha-\beta)\{\sin(\alpha+\beta)+i\cos(\alpha+\beta)\}$$

故ニ

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)}=\frac{1}{-4\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)\{\cos(2\theta+\alpha+\beta)-i\sin(2\theta+\alpha+\beta)\}}$$

$$=-\frac{\cos(2\theta+\alpha+\beta)+i\sin(2\theta+\alpha+\beta)}{4\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}$$

同樣ニ

$$\frac{1}{(a-b)(x-a)}=-\frac{\cos(2\alpha+\theta+\beta)+i\sin(2\alpha+\theta+\beta)}{4\sin(\theta-\alpha)\sin(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{1}{(a-b)(x-b)}=-\frac{\cos(2\beta+\theta+\alpha)+i\sin(2\beta+\theta+\alpha)}{4\sin(\theta-\beta)\sin(\alpha-\beta)}$$

之等ヲ與ヘラレタル恒等式ニ代入シ, 且ツ分母ヲ拂ヘバ

$$\cos(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+i\sin(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

$$=\cos(2\alpha+\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)-\cos(2\beta+\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)$$

$$+i\{\sin(2\alpha+\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)-\sin(2\beta+\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)\}$$

玆ニ於テ兩邊ノ實數部ヲ相等シト置ケバ

$$\cos(2\theta+\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos(2\alpha+\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)$$

$$-\cos(2\beta+\theta+\alpha)\sin(\theta-\alpha)$$

ヲ得.

122. 前節 3°, ニヨラバ q ハ正ノ整數ニシテ p ハ正又ハ負ノ整數ナル時, $n=\frac{p}{q}$ トスレバ $\cos n\theta+i\sin n\theta$ ハ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$. ノ一ツノ値ナルコトヲ示セリ. 吾人ハ本節ニ於テ進ンデ其凡テノ値ヲ求メントス.

r ヲ任意ノ整數トスレバ

$$\left\{\cos\frac{p}{q}(\theta+2r\pi)+i\sin\frac{p}{q}(\theta+2r\pi)\right\}^q$$
$$=\cos p(\theta+2r\pi)+i\sin p(\theta+2r\pi)$$
$$=\cos p\theta+i\sin p\theta$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^p$$

ナルガ故ニ

$$\cos\frac{p}{q}(\theta+2r\pi)+i\sin\frac{p}{q}(\theta+2r\pi)$$

ハ $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ 卽チ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ ノ一ツノ値ニ等シ.

然ルニ角

$$\frac{p}{q}(\theta+2r\pi)$$

ニ於テ r ノ代リニ 0, 1, 2, ...$q-1$ ト置キ q 個ノ角ヲ作ル時ハ何レノ二ツノ角モ相等シカラズ. 又何レノ二ツノ差モ 2π ノ整數倍ナラズ. 故ニ q 個ノ角ノ何レノ二ツヲトルモ正弦及ビ餘弦ハ同時ニ相等シキコトヲ得ズ. 故ニ $(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$ ニハ一般ニ少クトモ q 個ノ値アリ.

次ニ q 個ヨリモ多カラザルコトヲ證センニ, s ヲ 0, 1, 2, ... $q-1$ ノ何レカ一ツノ値トスル時ハ, r ハ正, 負ノ整數 m ニ對シテ常ニ

$$r=s+mq$$

ト書クコトヲ得ルガ故ニ

$$\cos\frac{p}{q}(\theta+2r\pi)+i\sin\frac{p}{q}(\theta+2r\pi)$$
$$=\cos\frac{p}{q}\{\theta+2(s+mq)\pi\}+i\sin\frac{p}{q}\{\theta+2(s+mq)\pi\}$$
$$=\cos\left\{\frac{p}{q}(\theta+2s\pi)+2mp\pi\right\}+i\sin\left\{\frac{p}{q}(\theta+2s\pi)+2mp\pi\right\}$$
$$=\cos\frac{p}{q}(\theta+2s\pi)+i\sin\frac{p}{q}(\theta+2s\pi)$$

トナルガ故ニ, r = 0, 1, 2 ......$q-1$ 以外ノ値ヲ與フルモ結局上ニ述ベタル q 個ノ何レカニ一致スベシ, 故ニ $n=\frac{p}{q}$ ナル時

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}$$

ハ q 個ノ値アリ而カモ q 個ニ限ルナリ.

例 6. 方程式

$$x^3=1$$

ヲ解ケ.

解　$$1=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$

ナルガ故ニ

$$x^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$$

ヨツテ

$$x=(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)^{\frac{1}{3}}$$

從ツテ x ノ三ツノ値ヲ得. 卽チ

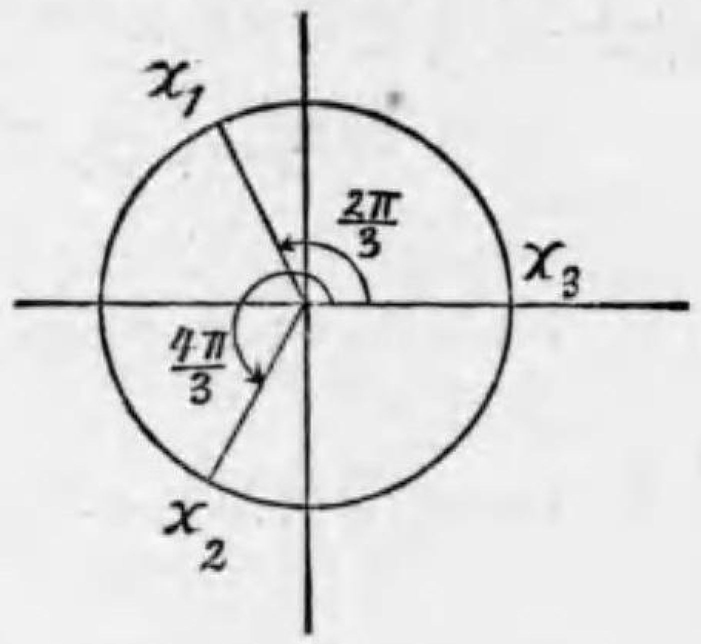
$$x_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi+2\pi}{3}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3=\cos\frac{2\pi+4\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi+4\pi}{3}=1.$$

［注意］i どもあぶるノ定理ヲ用フレバ $x^n=\pm1$ ナル形ノ方程式(二項方程式)ハ凡テ解クコトヲ得.

［注意］ii がうすノ複素數平面ニ於テハ x ノ三ツノ根ハ凡テ半徑1ナル圓周上ニアルコトヲ見ルベシ.



例 7. 方程式

$$x^n+x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots\ldots+x+1=0$$

ヲ解ケ.

解 與ヘラレタル方程式ノ兩邊ニ $x-1$ ヲ乘ズレバ $x^{n+1}-1=0$

ヲ得. 然ルニコノ方程式ノ根ハ明カニ次ノ $n+1$ 個ナリ.

$$x_1=\cos\frac{2\pi}{n+1}+i\sin\frac{2\pi}{n+1}$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi+2\pi}{n+1}+i\sin\frac{2\pi+2\pi}{n+1}$$

....

$$x_n=\cos\frac{2\pi+(n-1)2\pi}{n+1}+i\sin\frac{2\pi+(n-1)2\pi}{n+1}$$

$$x_{n+1}=\cos\frac{2\pi+2n\pi}{n+1}+i\sin\frac{2\pi+2n\pi}{n+1}=1$$

然ルニ最後ノ根ハ方程式 $x-1=0$ ノ根ニシテ, 與ヘラレタル方程式ノ根ニアラズ. ヨツテ之ヲ捨テザルベカラズ.

123. $\sin n\theta$, $\cos n\theta$ ノ展開

どもあぶるノ定理ニヨレバ n ガ正ノ整數ナル時ハ

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

右邊ヲ二項定理ニヨリテ展開シ, 然ル後左右兩邊ニ於ケル實數部ト虛數部トヲ分離スレバ

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$\sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ナリ. 從ツテ

$$\tan n\theta=\frac{n\tan\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\tan^3\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\tan^5\theta-\ldots}{1-\frac{n(n-1)}{1.2}\tan^2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\tan^4\theta-\ldots}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

ナリ.

但シ n ガ偶數ナル時ハ, $\cos n\theta$ ノ末項ハ $(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\theta$ ニシテ $\sin n\theta$ ノ末項ハ $n(-1)^{\frac{n-2}{2}}\cos\theta\sin^{n-1}\theta$ ナリ. 又 n ガ奇數ナル時ハ $\cos n\theta$ ノ末項ハ $n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\theta\sin^{n-1}\theta$ ニシテ $\sin n\theta$ ノ末項ハ $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin\theta^n$ ナリ.

從ツテ n ガ偶數ナル時ハ $\tan n\theta$ ノ分子ノ末項ハ $n(-1)^{\frac{n-2}{2}}\tan^{n-1}\theta$ ニシテ分母ノ末項ハ $(-1)^{\frac{n}{2}}\tan^n\theta$ ナリ. 又 n ガ奇數ナル時ハ分子ノ末項ハ $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\tan^n\theta$ ニシテ分母ノ末項ハ $n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\tan^{n-1}\theta$ ナリ.

例 8, $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}$, $\cos\frac{6\pi}{7}$ ハ三次方程式

$$8x^3+4x^2-4x-1=0$$

ノ根ナルコトヲ證セヨ.

解 公式ニヨラバ

$$\cos 7\theta=\cos^7\theta-21\cos^5\theta\sin^2\theta+35\cos^3\theta\sin^4\theta-7\cos\theta\sin^6\theta$$

今之ニ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ ト置カバ

$$\cos 7\theta=64\cos^7\theta-112\cos^5\theta+56\cos^3\theta-7\cos\theta$$

ソコデ $\theta=\frac{2\pi}{7}$ 從ツテ $\cos 7\theta=1$ トシ且ツ $\cos\theta$ ヲ x ニテ書キカヘル時ハ

$$64x^7-112x^5+56x^3-7x-1=0$$

卽チ $$(x-1)(8x^3+4x^2-4x-1)^2=0$$

故ニコノ方程式ノ根ハ $\cos 7\theta=1$ ヲ利用スレバ，

$$1,\quad \cos\frac{2\pi}{7},\quad \cos\frac{4\pi}{7}\ldots\ldots\cos\frac{12\pi}{7},$$

然ルニ $$\cos\frac{2\pi}{7}=\cos\frac{12\pi}{7},\quad \cos\frac{4\pi}{7}=\cos\frac{10\pi}{7}$$

$$\cos\frac{6\pi}{7}=\cos\frac{8\pi}{7}$$

ナルガ故ニ

$$8x^3+4x^2-4x-1=0$$

ノ三ツノ根ハ $$\cos\frac{2\pi}{7},\quad \cos\frac{4\pi}{7},\quad \cos\frac{6\pi}{7}$$

124 前節ノ公式

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{1.2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\ldots\ldots$$

ニ於テ，$n\theta=\alpha$ ト置ケバ

$$\cos\alpha=\cos^n\theta-\frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)}{1.2}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+\frac{\frac{\alpha}{\theta}\left(\frac{\alpha}{\theta}-1\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-2\right)\left(\frac{\alpha}{\theta}-3\right)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\ldots\ldots$$

$$=\cos^n\theta-\frac{\alpha(\alpha-\theta)}{1.2}\cos^{n-2}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-\theta)(\alpha-2\theta)(\alpha-3\theta)}{1.2.3.4}\cos^{n-4}\theta\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4-\ldots\ldots(8)$$

今 $n\theta=\alpha$ ニ於テ，α ヲ零ニアラザル任意ノ常數トシ，n ヲ無限ニ大ニスレバ，θ ガ無限小トナルガ故ニ，$\frac{\sin\theta}{\theta}$ 及ビ其冪ノ極限値ハ何レモ1トナリ，$\cos\theta$ 及ビ其冪ノ極限値モ亦何レモ1トナルガ故ニ(8)ハ

$$\cos\alpha=1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\frac{\alpha^6}{6!}+\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

トナル．同様ニ

$$\sin=\alpha-\frac{\alpha^3}{3!}+\frac{\alpha^5}{5!}-\frac{\alpha^7}{7!}+\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

トナル．

但シ之等ノ場合ノ測角ニハ凡テ弧度法ヲ用フルモノトス．何トナレバ若シ然ラザル時ハ $\frac{\sin\theta}{\theta}$ ノ極限値ガ1トナラザルガ故ナリ．

公式(9)及ビ(10)ヲ用フレバ任意ノ角ノ正弦，余弦ノ値ヲ知ルコトヲ得ベシ，例ヘバ $\sin 10''$ 及ビ $\cos 10''$ ノ値ヲ求メンニハ

$$10''=\left(\frac{10}{60\times 60}\times\frac{\pi}{180}\right)\text{ ラヂアン}$$

$$=\frac{\pi}{64800}\text{ ラヂアン}$$

ナルガ故ニ

$$\sin 10''=\frac{\pi}{64800}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^5-\ldots\ldots$$

$$\text{cis}\,10''=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^4-\ldots\ldots$$

ニシテ且ツ

$$\frac{\pi}{64800}=0.000048481368\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\pi}{64800}\right)^2=0.0000000023504\ldots\ldots$$

$$\left(\frac{\pi}{64800}\right)^3=0.000000000000113928\ldots\ldots$$

ナルヲ以テ

$$\sin 10''=0.000048481368\ldots\ldots$$

$$\cos 10''=0.999999998824\ldots\ldots$$

トナル，而シテ之等ノ結果ハ已ニ五十節及ビ五十一節ニ於テ得タルモノニ一致ス．

例 9. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ ヲ求ム

解 $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots\ldots$

故ニ

$$\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\ldots\ldots}{x^3}=\frac{1}{6}-\frac{x^2}{5!}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

故ニ

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}$$

問　　題 20.

1. $\cos 4A+i\sin 4A$ ノ平方根ヲ求メヨ．

2. $\left(\dfrac{1+\sin\varphi+i\cos\varphi}{1+\sin\varphi-i\cos\varphi}\right)^n=\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}-n\varphi\right)+i\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}-n\varphi\right)$

ナルコトヲ證セヨ．

3. $\cos 4\theta=\cos^4\theta-6\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta$

ナルコトヲ證セヨ．

4. $\sin 5\theta=5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta$

ナルコトヲ證セヨ

5. $\tan 5\theta\dfrac{5\tan\theta-10\tan^3\theta+\tan^5\theta}{1-10\tan^2\theta+5\tan^4\theta}$

ナルコトヲ證セヨ．

6. $16\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta\cos 4\theta=1$

ナルコトヲ證セヨ．但シ $\theta=\dfrac{\pi}{9}$ ナリトス．

7. $\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

ナルコトヲ證セヨ．

8. $2\cos\theta=x+\dfrac{1}{x}$

ナル時ハ

$$2\cos r\theta=x^r+\frac{1}{x^r}$$

ナルコトヲ數學的歸納法ニテ證セヨ．

9. n ガ正ノ整數ナル時

$$\sqrt[n]{a+bi}+\sqrt[n]{a-bi}$$

ガ n 個ノ實數ナルコトヲ證セヨ．

10. $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=0.49$

ヨリ θ ノ近似値ヲ求メヨ．

11. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos mx}$ ヲ求メヨ．

12. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ ヲ求メヨ．

13. $-1=\cos\pi+i\sin\pi$ ナルコトヲ利用シテ $(-1)^{\frac{1}{3}}$ ノ値ヲ求メヨ．

14. $1+i=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

ナルコトヲ利用シテ $(1+i)^{\frac{1}{3}}$ ノ値ヲ求メヨ．

15. $\dfrac{\sin\theta}{\theta}=\dfrac{2165}{2166}$ ナル時ハ，θ ノ値ハ殆ンド三度ノ弧度ニ等シキコトヲ證セヨ．

雜　　題

次ノ等式ヲ證明セヨ．(1—3)

1. $\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=\frac{1}{4}\sin 3\theta$

2. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(\alpha+\gamma-\beta)$

$$+\cos(\beta+\gamma-\alpha)=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

3. $\dfrac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}$

4. $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ヲ四ツノ正弦ノ和ノ形ニ直セ．

5. $4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ ヲ四ツノ餘弦ノ和ノ形ニ直セ．

6. $\dfrac{\operatorname{cosec}2\alpha\operatorname{cosec}\beta-\operatorname{cosec}2\beta\operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{cosec}2\alpha\operatorname{cosec}\beta+\operatorname{cosec}2\beta\operatorname{cosec}\alpha}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

ナルコトヲ證セヨ．

7. $A+B+C=180°$

ナル時ハ

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$$

ナルコトヲ證セヨ．

8. $A+B+C=2S$

ト置クトキハ

$$\sin(S-A)\sin(S-B)+\sin S\sin(S-C)=\sin A\sin B$$

ナルコトヲ證セヨ．

9. $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

ナル時ハ

$$\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

ナルコトヲ證セヨ．

10. $\tan\dfrac{\theta-\alpha}{2}=\dfrac{3\sin\alpha}{5-3\cos\alpha}$

ナル時ハ

$$\tan\frac{\theta}{2}=4\tan\frac{\alpha}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

11. $x\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=x\cos(\beta+\gamma)+\cos(\beta-\gamma)=x\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\gamma-\alpha)$

ナル時ハ

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{\tan\beta}{\tan\frac{\gamma+\alpha}{2}}=\frac{\tan\gamma}{\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

ナルコトヲ證セヨ.

12. $\cos(\varphi-\alpha)$, $\cos\varphi$, $\cos(\varphi+\alpha)$ ハ調和級數ヲナス時ハ

$$\cos\varphi=\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

ナルコトヲ證セヨ.

13. $\tan\theta=n\tan\varphi$

ナル時ハ $\tan^2(\theta-\varphi)$ ハ $\frac{(n-1)^2}{4n}$ ヨリモ大ナラザルコトヲ證セヨ.

14. $A+B+C=90^\circ$

ナルトキ

$$\tan^2 A+\tan^2 B+\tan^2 C$$

ノ最小値ヲ求メヨ.

15. 方程式

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1$$

ヲ滿足スル三ツノ鋭角ノ和ガ 180° ヨリモ小ナルコトヲ證セヨ.

16. 半徑 a, b ナル二ツノ圓ガ互ニ外切スル時, 共通切線ノナス角ヲ θ トスレバ

$$\sin\theta=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$$

17. $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\tan^2\theta}{\sec 2\theta-1}$ ノ値ヲ求メヨ.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)=\frac{\sin x}{x}$

ナルコトヲ證セヨ.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}\right)^n$ ノ値ヲ求メヨ.

20. $a=\sin\alpha\sin\beta\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta$

$b=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta$

$c=\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$

ヨリ α, β ヲ消去セヨ.

21. $\sin\theta+\sin\varphi=a$　　$\cos\theta+\cos\varphi=b$　　$\cos(\theta-\varphi)=c$

ヨリ θ ト φ トヲ消去セヨ.

22. $a\sin^2\theta+a'\cos^2\theta=b$

$a'\sin^2\theta'+a\cos^2\theta'=b'$

$a\tan\theta=a'\tan\theta'$

ヨリ

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b'}$$

ヲ導ケ.

23. $\frac{\cos x}{a_1}=\frac{\cos(x+\theta)}{a_2}=\frac{\cos(x+2\theta)}{a_3}=\frac{\cos(x+3\theta)}{a_4}$

ナル時ハ

$$\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a_2+a_4}{a_3}$$

ナルコトヲ證セヨ.

24. $\sin x=k\sin(A-x)$

ヨリ

$$\tan\left(x-\frac{A}{2}\right)=\frac{k-1}{k+1}\tan\frac{A}{2}$$

ヲ導ケ

25. $m^2+m'^2+2mm'\cos\theta=1$

$n^2+n'^2+2nn'\cos\theta=1$

$mn+m'n'+(mn'+m'n)\cos\theta=0$

ヨリ

$$m^2+n^2=\operatorname{cosec}^2\theta$$

ヲ導ケ

26. $(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)(1+\sec 8\theta)\cdots\cdots\cdots(1+\sec 2^n\theta)=\tan 2^n\theta\cdot\cot\theta$

ナルコトヲ證セヨ.

27. θ ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリモ小ナル正角ナル時ハ $\frac{\theta}{\sin\theta}$ ハ θ ト共ニ增大スルコトヲ示セ.

28. θ ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリモ小ナル正角ナル時ハ $\frac{\theta}{\tan\theta}$ ハ θ ガ增加スルニ從ヒテ減少スルコトヲ示セ.

29. 三角形 ABC ニ於テ $C>90^\circ$ ナル時ハ

$$\tan A\tan B<1$$

ナルコトヲ證セヨ.

30. θ ガ直角ヨリモ小ナル正角ナル時ハ

$$\tan\theta-\theta>\theta-\sin\theta$$

ナルコトヲ證セヨ.

31. $4\sin^2\theta+\operatorname{cosec}^2\theta$

ノ極小値ヲ求ム,

32. $1+\sin x+\cos x+\sin x\cos x$

ノ極大値ヲ求ム.

33. $$\frac{\sec^2\theta-\tan\theta}{\sec^2\theta+\tan\theta}$$

ノ値ハ 3 ト $\frac{1}{3}$ トノ間ニアルコトヲ示セ.

34. 三角形 ABC ニ於テ $\cos A\cos B\cos C$ ノ極大値ヲ求メヨ.

三角形 ABC ニ於テ次ノ等式ヲ證明セヨ. (35—40)

35. $$\frac{a\cos\frac{B-C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}+\frac{b\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\frac{C+A}{2}}+\frac{c\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}$$
$$=2(a+b+c).$$

36. $$\frac{\sin(A-B)}{ab}+\frac{\sin(B-C)}{bc}+\frac{\sin(C-A)}{ca}=0.$$

37. $$\frac{(\sin A+\sin B+\sin C)}{(a+b+c)^2}=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{2abc}.$$

38. $$\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0.$$

39. $$\frac{\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{B}{2}}{b-c}=\frac{\cot\frac{A}{2}-\cot\frac{C}{2}}{c-a}=\frac{\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{A}{2}}{a-b}$$

40. $s(s-a)-(s-b)(s-c)=bc\cos A$

但シ $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ ナリトス.

41. 三角形 ABC ノ垂足三角形ノ面積及ビ其內切圓ノ半徑ハ夫々

$$2S\cos A\cos B\cos C,\qquad 2R\cos A\cos B\cos C$$

ナルコトヲ證セヨ.

42. 三角形 ABC ノ面積ハ

$$\frac{2abc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

ナルコトヲ示セ.

43. 三角形ノ三ツノ傍切圓ノ半徑ハ夫々

$$r_1=\frac{a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\quad r_2=\frac{b\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}},\quad r_3=\frac{c\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

ナルコトヲ示セ.

44. $r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1=s^2$

ナルコトヲ證セヨ.

45. $$\frac{ab-r_1r_2}{r_3}=\frac{bc-r_2r_3}{r_1}=\frac{ca-r_3r_1}{r_2}=r$$

ナルコトヲ證セヨ.

46. 三角形 ABC ノ一ツノ頂點 A ヨリ其九點圓ノ中心ニ至ル距離ハ

$\frac{1}{2}R\sqrt{1+8\cos A\sin B\sin C}$ ナルコトヲ證セヨ.

47. 地球ノ半徑ヲ r トスレバ地上ヨリノ高サ h ナル一點ヨリ地球ニ切線ヲ引クトキハ其長サハ約 $\sqrt{2rh}$ ニ等シキコトヲ證セヨ.

48. 地上ニ同ジ高サノ旗竿 AB, CD ヲ立ツ. 今夫等ノ足 B, D ヲ結ブ線分 BD ノ延長上ニ點 P ヲ定メ DP ノ長サヲ m 米トス. 然ル時 P 點ヨリ望ムニ近キモノハ α 度, 遠キモノハ β 度ナル角ヲ含ムトイフ. 然ル時 BD 間ノ距離ヲ求メヨ.

49. 平面上ニ二點 A, B アリ其距離ヲ d トス. 平面外ノ點 C ヨリ此平面ヘノ垂線 CE ヲ引ク時角 BAC ヲ α, 角 ABC ヲ β, 角 CAE ヲ γ トスレバ CE ノ長サヲ求メヨ.

50. 一ツノ角 A, 外接圓ノ半徑及ビ內切圓ノ半徑ヲ以テ三角形 ABC ヲ解ケ.

51. 三ツノ傍切圓ノ半徑ヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

52. 一邊 BC, 一角 B 及ビ内切圓ノ半徑ヲ知リテ三角形 ABC ヲ解ケ.

53. 面積及ビ二ツノ角 A, B ヲ知リテ三角形 ABC ヲ解ケ.

54. 高サ, 及ビ二ツノ角 B, C ヲ知リテ三角形ヲ解ケ.

55. 三角形ノ各角ヲ二等分スル直線ヲ引キ延バシテ其外接圓周ニ交ラシム. 然ル時ハ其交點ヲ結ビ附ケテ生ズル三角形ノ面積ハ原三角形ヨリモ小ナラズ. 之ヲ證セヨ.

56. 面積ヲ等シクスル三角形ノ各角ノ餘切ノ和ハ其各邊上ノ正方形ノ和ニ比例スルコトヲ證セヨ.

57. 圓 O ノ外ノ一點 P ヨリ圓ニ割線 PAB ヲ引クトキ

$$\tan\frac{\mathrm{AOP}}{2}\tan\frac{\mathrm{BOP}}{2}$$

ハ割線ノ位置ニ無關係ナルコトヲ證セヨ.

58. 半徑 r ナル圓ヲ, 半徑 a 弦ノ長サ $2c$ ナル扇形ニ内切シテ畫ク時ハ r ト a ト c トノ間ニ次ノ關係アルコトヲ證セヨ.

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$$

59. 三角形ノ邊ノ長サハ等差級數ヲナシ且ツ最大角ト最小角トノ差ガ α ナル時ハ三ツノ邊ノ比ハ

$$1-x:1:1+x$$

ナルコトヲ證セヨ. 但シ $x=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{7-\cos\alpha}}$ ナリトス,

60. 三角形ノ三ツノ邊ヲ a, b, c トシ, コレニ内接スル相似三角形ノ邊ヲ $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ トシ且ツ邊 a ト λa トノナス角ヲ θ トスレバ

$$2\lambda\cos\theta=1$$

ナルコトヲ證セヨ.

61. $\varphi=\tan^{-1}\frac{a\sqrt{3}}{2b-a}$ $\qquad\theta=\tan^{-1}\frac{2a-b}{b\sqrt{3}}$

ナル時ハ $(\varphi-\theta)$ ハ $30°$ ニ等シキコトヲ證セヨ.

62. 方程式

$$\tan^{-1}\frac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$$

ヲ解ケ.

次ノ級數ノ和ヲ求メヨ. (63—66

63. $\cos\theta+\sin 3\theta+\cos 5\theta+\sin 7\theta+\dots\dots\dots+\sin(4n-1)\theta$

64. $\sin^2\alpha+\sin^2 2\alpha+\sin^2 3\alpha+\dots\dots\dots+\sin^2 n\alpha$

65. $\sin^3\alpha+\sin^3 2\alpha+\sin^3 3\alpha+\dots\dots\dots+\sin^3 n\alpha$

66. $\cos\theta\cos 2\theta\cos 3\theta+\cos 2\theta\cos 3\theta\cos 4\theta+\dots\dots\dots$

$$+\cos n\theta\cos(n+1)\theta\cos(n+2)\theta$$

67. $\mathrm{S}=\sin\theta+2\sin 2\theta+3\sin 3\theta+\dots\dots\dots+n\sin n\theta$

$\mathrm{S}'=\cos\theta+2\cos 2\theta+3\cos 3\theta+\dots\dots\dots+n\cos n\theta$

ナル時

$$4\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\mathrm{S}=(n+1)\sin n\theta-n\sin(n+1)\theta$$

$$4\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\mathrm{S}'=(n+1)\cos n\theta-n\cos(n+1)\theta-1$$

ナルコトヲ證セヨ.

68. $-1-\sqrt{-3}$ ヲ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ナル形ニ直セ

69. $2\cos\theta=x+\frac{1}{x},\qquad 2\cos\varphi=y+\frac{1}{y}$

ナル時ハ

$$x^m y^n+\frac{1}{x^m y^n}$$

ノ一ツノ値ハ

$$2\cos(m\theta+n\varphi)$$

ニ等シキコトヲ證セヨ.

70. $2\cos\theta=x+\frac{1}{x},\quad 2\cos\varphi=y+\frac{1}{y}\dots\dots\dots$

ナル時ハ

$$2\cos(\theta+\varphi+\dots\dots)=xy\dots\dots+\frac{1}{xy\dots\dots}$$

ナルコトヲ證セヨ.

71. $(\sin\theta+i\cos\theta)^n=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

ナルコトヲ證セヨ,

72. $\{(\cos\theta-\cos\varphi)+i(\sin\theta-\sin\varphi)\}^n+\{(\cos\theta-\cos\varphi)-i(\sin\theta-\sin\varphi)\}^n$

ヲ簡單ニセヨ.

73. どもあぶるノ定理ヲ應用シテ方程式

$$x^4-x^3+x^2-x+1=0$$

ヲ解ケ.

74.

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\dots\dots\dots(a_n+ib_n)=\mathrm{A}+\mathrm{B}i$$

ナルコトヨリ $\quad \tan^{-1}\frac{b_1}{a_1}+\tan^{-1}\frac{b_2}{a_2}+\dots\dots+\tan^{-1}\frac{b_n}{a_n}=\tan^{-1}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}},$

ナルコトヲ證セヨ.

75. 恒等式

$$(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(c^2-b^2)(a^2-d^2)+(a^2-c^2)(b^2-d^2)$$

ニ於テ

$a=\cos\alpha+i\sin\alpha,\quad b=\cos\beta+i\sin\beta\dots\dots\dots$ ト置キテ以テ恒等式

$$\sin(\alpha-\beta)\sin(\gamma-\delta)=\sin(\alpha-\delta)\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)\sin(\beta-\delta)$$

ナルコトヲ證セヨ.

答 之 部

問 題 1.

1. $\frac{2}{3}$直角 **2.** $\frac{301}{360}$直角

3. $\frac{29}{20}$直角 **4.** 120°

5. 150° **6.** 135°

7. $\frac{\pi}{3}$ラヂアン **8.** $\frac{703}{720}$ラヂアン

9. $\frac{25\pi}{12}$ラヂアン **11.** 9° ト 81°

12. $\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{180}\right),\ \left(1-\frac{\pi}{180}\right)$ **13.** $20^\circ,\ 60^\circ,\ 100^\circ$

14. $\frac{3\pi}{5},\quad \frac{3\pi}{4}$

問 題 2.

2. $4\frac{1}{3}$

3. $-\frac{3}{5},\quad -\frac{4}{3},\quad -\frac{3}{4},\quad -\frac{5}{3},\quad \frac{5}{4}$

4. $-\frac{3}{5},\quad -\frac{4}{5},\quad \frac{4}{3},\quad -\frac{5}{4},\quad -\frac{5}{3}$

5. $nr^2\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n},$

6. DC ノ長サハ $\sqrt{2}-1$, 三角函數ノ値ハ $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}},$

$\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}},\quad \sqrt{2}-1,\quad \frac{1}{\sqrt{2}-1},\quad \sqrt{4-2\sqrt{2}},\quad \frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1}$

問 題 3.

1. $-\cos 10^\circ,\quad \sin 40^\circ,\quad -\cos 30^\circ,\quad -\sin 30^\circ$

2. (a) 45°, 135°, 225°, 315°,

(b) 30°, 150°, 90°,

(c) 90°, 270°, 60°, 300°,

3. (a) 1, (b) $-\tan\theta$,

問 題 4.

1. $\tan 30°$,
2. $\tan 30°$,
7. $-\cot^2\theta$
8. 1
9. 0
11. 160 米
12. $3(\sqrt{3}+1)$ 米

問 題 5.

1. $\frac{2}{\sqrt{3}}$, 2,
2. $\sec 30°$
3. $\frac{4}{3}$,
4. $\frac{1}{8}$,
5. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$,

問 題 6.

13. $\frac{1}{\tan^4\theta}-\tan^4\theta$,
14. 5 分

問 題 7.

1. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$,
2. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$,
3. $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$,
4. $n\pi+\frac{\pi}{4}$ 或ハ $n\pi+\frac{\pi}{3}$,
5. $\frac{1}{7}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,
6. $\frac{n\pi}{5}+(-1)^n\frac{\pi}{20}$,
7. $2n\pi$ 或ハ $\frac{(2n+1)\pi}{5}$
8. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$
9. $\tan\theta=\frac{2n+1\pm\sqrt{4n^2+4n-15}}{4}$ (但シ $n>\frac{3}{2}$ ナルカ $n<-\frac{5}{2}$ ナルカナリ)
10. $(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}$,

11. $\theta=\left(m+\frac{n}{2}\right)\pi\pm\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$

$\varphi=\left(m-\frac{n}{2}\right)\pi\pm\frac{\pi}{6}-(-1)^n\frac{\pi}{12}$

12. $\theta=\left(m+\frac{n}{2}\right)\pi+\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$

$\varphi=\left(m-\frac{n}{2}\right)\pi+\frac{\pi}{4}-(-1)^n\frac{\pi}{12}$

問 題 8.

36. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{3}$ 或ハ $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$, 37. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}$ 或ハ $2n\pi$

38. $\frac{2n\pi}{3}$ 或ハ $\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi$ 或ハ又 $\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi$

39. $\frac{2r\pi}{m+n}$ 或ハ $(2r+1)\frac{\pi}{m-n}$, 40. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$

問 題 9.

1. $\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$,
2. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
3. $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
4. $\pm\sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$
5. $\frac{-\sqrt{1+\sin\theta}-\sqrt{1-\sin\theta}}{2}$
17. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}-1}{5+3\sqrt{3}}}$
19. $2n\pi+\frac{\pi}{4}$ ト $2n\pi+\frac{3\pi}{4}$ トノ間
20. $2n\pi+\frac{3\pi}{4}$ ト $2n\pi+\frac{5\pi}{4}$ トノ間,

問 題 11.

1. $-3{,}0002$
2. $1{,}4084$
3. $0{,}1323$
4. 2 或ハ 4
5. 1000 或ハ $\frac{1}{10}$
6. $\left.\begin{matrix}x=a\\y=b\end{matrix}\right\}$ 或ハ $\left.\begin{matrix}x=b\\y=a\end{matrix}\right\}$

問 題 12.

1. 0,

2. 1,

3. 1,

4. $\frac{1}{2}$

5. 2,

6. $-\frac{2}{m+1}$,

7. $\frac{m^2-1}{n^2-1}$,

8. $\frac{\alpha}{\beta}$,

問 題 14.

1. $\left.\begin{array}{l} B=42^\circ 46' \\ C=92^\circ 24' \\ c=35{,}33 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} A=69^\circ 38' \\ B=62^\circ 38' \\ C=47^\circ 44' \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l} A=40^\circ \\ b=18{,}39 \\ c=16{,}17 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} A=45^\circ \\ C=90^\circ \\ b=100 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l} B=77^\circ 7' \\ C=28^\circ 26' \\ a=212{,}8 \end{array}\right\}$

問 題 16.

15. 10, 20,

問 題 17.

1. $50(\sqrt{3}+1)$ 米

2. $\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}$ 哩,

3. $3(\sqrt{3}+1)$ 米

4. $\frac{-a\tan\gamma+\sqrt{(a^2-4b^2)\tan^2\gamma+4ab\tan\gamma}}{2\tan\gamma}$

5. $10\sqrt{115}$ 尺.

6. $6\sqrt{2}$ 哩

8. $8\sqrt{\frac{3}{2\times 1.006}}$ 哩

問 題 18.

14. 0, $\pm\frac{1}{2}$

15. a, a^2-a+1

16. 2

問 題 19.

1. $\frac{1}{2}\sin 2n\theta \operatorname{cosec}\theta$

2. $\frac{\sin(p+n+1)\alpha\sin n\alpha}{2\sin\alpha}+\frac{n\sin p\alpha}{2}$

3. $\frac{1}{2}$,

4. $\frac{n}{2}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\cos(n+3)\alpha\sin n\alpha\operatorname{cosec}\alpha$

5. $\frac{1}{4}[(n+1)\sin 2\alpha-\sin(2n+2)\alpha]\operatorname{cosec}\alpha$

6. $\tan\frac{n+1}{2}\theta$

7. $\tan n\theta$

8. $\tan\left(\frac{n+1}{2}\theta+\frac{n-1}{2}\pi\right)$

10. $\frac{\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$

問 題 20.

1. $\cos 2A+i\sin 2A$, $\cos(2A+\pi)+i\sin(2A+\pi)$

10. 0.115 ラヂアン

11. $\frac{2}{m^2}$

12. $\frac{a}{b}$

13. -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

14. $\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$

雜 題

4. $\sin(\alpha-\beta+\gamma)+\sin(-\alpha+\beta+\gamma)+\sin(\alpha+\beta-\gamma)+\sin(-\alpha-\beta-\gamma)$

5. $\cos(\alpha+\beta+\gamma)+\cos(\alpha-\beta+\gamma)+\cos(\alpha+\beta-\gamma)+\cos(-\alpha+\beta+\gamma)$

14. 1,

17. $\frac{1}{2}$

19. 1,

20. $a^2+b^2+\frac{c^2}{\sin^2\theta}=1$

21. $a^2+b^2=2(1+c)$

31. 4,

32. $\frac{2\sqrt{2}+3}{2}$　　34. $\frac{1}{8}$

48. $m(\tan\alpha\cot\beta-1)$　　49. $\frac{d\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$

62. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$,

63. $\sin 2n\theta(\cos 2n\theta+\sin 2n\theta)(\cos\theta+\sin\theta)\operatorname{cosec}2\theta$

64. $\frac{1}{4}\{(2n+1)\sin\alpha-\sin(2n+1)\alpha\}\operatorname{cosec}\alpha$

65. $\frac{3}{4}\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin\frac{n\alpha}{2}\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}\sin\frac{3(n+1)}{2}\alpha\sin\frac{3n\alpha}{2}\operatorname{cosec}\frac{3\alpha}{2}$

66. $\frac{1}{4}\sin\frac{n\theta}{2}\left\{\cos\frac{(n-1)\theta}{2}+\cos\frac{(n+3)\theta}{2}+\cos\frac{(n+7)\theta}{2}\right\}\operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}$

$+\frac{1}{4}\sin\frac{3n\theta}{2}\cos\frac{(3n+9)\theta}{2}\operatorname{cosec}\frac{3\theta}{2}$

68. $2\left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}$

72. $2^{n+1}\sin^n\frac{\theta-\varphi}{2}\cos\frac{n(\pi+\theta+\varphi)}{2}$

73. $\cos\frac{\pi}{5}\pm i\sin\frac{\pi}{5}$,　$\cos\frac{3\pi}{5}\pm i\sin\frac{3\pi}{5}$

公式一覧表 (右側数字ハ頁数ヲ表ハス)

英國法 (六十分法) ト弧度法トノ關係

$\frac{x}{180}=\frac{\theta}{\pi}$ ……………… 5

三角函數相互ノ關係

$\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}$, $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$, $\tan\theta\cot\theta=1$

$\cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$, $\cos\theta\sec\theta=1$

$\sin\theta=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$, $\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sin\theta\operatorname{cosec}\theta=1$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ……………… 9

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ……………… 33

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$　$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$ ……………… 34

$\sin\theta=\sin(\theta+2n\pi)$

$\cos\theta=\cos(\theta+2n\pi)$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$　$\cos(-\theta)=\cos\theta$ ……………… 14

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$　$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$\sin\theta=\sin(\pi-\theta)$　$\cos\theta=-\cos(\pi-\theta)$ ……………… 15

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$　$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$　$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$ ……………… 16

$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$　$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$　$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ ……………… 17

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$　$\cot(-\theta)=-\cot\theta$

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$　$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$ ……………… 22

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$　$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$　$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$　$\cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\tan\theta$ ……………… 23

$$\left.\begin{array}{ll}
\sec(-\theta)=\sec\theta & \operatorname{cosec}(-\theta)=-\operatorname{cosec}\theta \\
\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta & \operatorname{cosec}(\pi-\theta)=\operatorname{cosec}\theta \\
\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta & \operatorname{cosec}(\pi+\theta)=-\operatorname{cosec}\theta \\
\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\operatorname{cosec}\theta & \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sec\theta \\
\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta & \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 29$$

$\sin\theta=k$　ヲ満足スル角　$\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$ ……………… 39

　茲ニ　$\sin\alpha=k$　ナリトス.

$\cos\theta=k$　ヲ満足スル角　$\theta=2n\pi\pm\alpha$ ……………… 41

　茲ニ　$\cos\alpha=k$　ナリトス.

$\tan\theta=k$　ヲ満足スル角　$\theta=n\pi+\alpha$ ……………… 42

　茲ニ　$\tan\alpha=k$　ナリトス.

$$\left.\begin{array}{l}
\sin(A\pm B)=\sin A\cos B\pm\cos A\sin B \\
\cos(A\pm B)=\cos A\cos B\mp\sin A\sin B
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 49$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin 2A=2\sin A\cos A & \cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A \\
1+\cos 2A=2\cos^2 A & 1-\cos 2A=2\sin^2 A \\
\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A & \frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A \\
\frac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\cot A & \\
\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B & \\
\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A &
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 50$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\tan(A\pm B)=\frac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}, & \cot(A\pm B)=\frac{\pm\cot A\cot B-1}{\cot A\pm\cot B} \\
\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} & \cot 2A=\frac{\cot^2 A-1}{2\cot A}
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 51$$

$$\left.\begin{array}{l}
\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B \\
\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B \\
\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B \\
\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B \\
\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \\
\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 52$$

$$\begin{array}{l}
\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \\
\cos D-\cos C=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A \\
\qquad\qquad +\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C \\
\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C \\
\qquad\qquad -\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 53$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\tan(A+B+C)=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B} & \\
\cot(A+B+C)=\frac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B-1} & \\
\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A, & \cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A \\
\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A} & \\
\cot 3A=\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1} &
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 54$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} & \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \\
\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} &
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 61$$

$$\left.\begin{array}{l}
\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}) \\
\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A})
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 63$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}\cdots\cdots\cdots 69$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\log_a 1=0, & \log_a a=1, \\
\log_a mn=\log_a m+\log_a n &
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 87$$

$$\left.\begin{array}{l}
\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n \\
\log_a m^n=n\log_a m
\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots 88$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1\qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1\cdots\cdots\cdots 96$$

$$\theta>\sin\theta>\theta\left(1-\frac{\theta}{4}\right)\cdots\cdots\cdots 98$$

$$1-\frac{\theta^2}{2}+\frac{\theta^4}{16}>\cos\theta>1-\frac{\theta^2}{2} \cdots\cdots 99$$

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{abc}{S} \cdots\cdots 109,\ 142$$

$$\left.\begin{array}{l} a=b\cos C+c\cos B \\ b=c\cos A+a\cos C \\ c=a\cos B+b\cos A \end{array}\right\} \cdots\cdots 110$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{array}\right\} \cdots\cdots 111$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}},\quad \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}} \\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{array}\right\} \cdots\cdots 112$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}},\quad \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}} \\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}} \\ \tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\quad \tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \\ \tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{array}\right\} \cdots\cdots 113$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin A=\dfrac{2S}{bc},\quad \sin B=\dfrac{2S}{ca} \\ \sin C=\dfrac{2S}{ab} \end{array}\right\} \cdots\cdots 114$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}}=\dfrac{a-b}{a+b},\quad \dfrac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}}=\dfrac{b-c}{b+c} \\ \dfrac{\tan\dfrac{C-A}{2}}{\tan\dfrac{C+A}{2}}=\dfrac{c-a}{c+a} \end{array}\right\} \cdots\cdots 115$$

$$\left.\begin{array}{l} S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A \\ \qquad =\dfrac{1}{2}ca\sin B \end{array}\right\} \cdots\cdots 116$$

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=(s-a)\tan\frac{A}{2}=(s-b)\tan\frac{B}{2}$$

$$=(s-c)\tan\frac{C}{2} \cdots\cdots 144$$

$$r_1=\frac{S}{s-a}=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=s\tan\frac{A}{2}$$

$$=(s-c)\cot\frac{B}{2}=(s-b)\cot\frac{C}{2}$$

$$r_2=\frac{S}{s-b}=4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}=s\tan\frac{B}{2}$$

$$=(s-c)\cot\frac{A}{2}=(s-a)\cot\frac{C}{2}$$

$$r_3=\frac{S}{s-c}=4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=s\tan\frac{C}{2}$$

$$=(s-a)\cot\frac{B}{2}=(s-b)\cot\frac{A}{2}$$

垂足三角形ノ三邊　$a\cos A$,　$b\cos B$,　$c\cos C$ ……148

三ツノ中線

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2+2ca\cos B} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos C} \end{array}\right\} \cdots\cdots 150$$

角 A ノ二等分線　$\dfrac{2bc}{b+c}\cos\dfrac{A}{2}$

〃 外二等分線　$\dfrac{2bc}{c-b}\sin\dfrac{A}{2}$ ……157

四邊形ノ面積

$$\left.\begin{array}{l} S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\dfrac{A+C}{2}} \\ S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \\ S=\sqrt{abcd} \end{array}\right\} \cdots\cdots 162$$

内接四邊形ノ對角線

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt{\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}} \\ y=\sqrt{\dfrac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}} \end{array}\right\} \cdots\cdots 164$$

内接四邊形ノ角

$$\left.\begin{array}{l} \cos A=\dfrac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)},\quad \cos B=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \\ \cos C=\dfrac{b^2+c^2-a^2-d^2}{2(bc+ad)},\quad \cos D=\dfrac{c^2+d^2-a^2-b^2}{2(cd+ab)} \end{array}\right\} \cdots\cdots 164$$

四邊形ノ外接圓ノ半徑

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}} \cdots\cdots 166$$

正多邊形ノ面積

$$S=nr^2\tan\frac{\pi}{n}=\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{2\pi}{n} \cdots\cdots 166$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2},\quad \tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\dfrac{\pi}{2} \\ \sec^{-1}x+\operatorname{cosec}^{-1}x=\dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \cdots\cdots 183$$

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\sin\{\alpha+(n-1)\beta\}=\frac{\sin\left\{\alpha+\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\beta\right\}\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}} \cdots\cdots 191$$

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cdots\cdots+\cos\{\alpha+(n-1)\beta\}=\frac{\cos\left\{\alpha+\left(\dfrac{n-1}{2}\right)\beta\right\}\sin\dfrac{n\beta}{2}}{\sin\dfrac{\beta}{2}} \cdots\cdots 192$$

$$\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha+\cdots\cdots+\operatorname{cosec}2^{n-1}\alpha=\cot\frac{\alpha}{2}-\cot 2^{n-1}\alpha \cdots\cdots 194$$

$$\left.\begin{array}{ll} a=r\cos\theta & \sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ b=r\sin\theta & \cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{array}\right\} \cdots\cdots 199$$

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots\cdots(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n) \cdots\cdots 200$$

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta+\cdots \cdots 208$$

$$\sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots\cdots 209$$

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha=\alpha-\dfrac{\alpha^3}{3!}+\dfrac{\alpha^5}{5!}-\dfrac{\alpha^7}{7!}+\cdots\cdots \\ \cos\alpha=1-\dfrac{\alpha^2}{2!}+\dfrac{\alpha^4}{4!}-\dfrac{\alpha^6}{6!}+\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots 211$$

索　引 (数字ハ頁數ヲ表ハス)

ア　行

あんぷりちゅーど……200
一値函數……181
一　分……3
鋭　角……45
一々對應……45
一　度……3
一　秒……3
英國法……3

カ　行

がうす(人名)……199
假　數……90
外　心……152, 154
逆三角函數……178
仰　角……19
極限值……85, 96, 97
近似值……99
基　線……171, 173
距　離……171
級　數……190
限　界……98
弧度法……3
がうすノ平面……199
外接圓……142, 165
逆函數……178
逆正弦函數……178
虚　數……198, 208
吟　味……137
幾何學的表示……198
ぐらふ……15, 25, 31, 179
原　線……2
弧　度……5, 104
合成角……44

サ　行

三角函數……8, 9
三角比……8
三角形ノ解法……125
四邊形……161
眞數表……4
終　邊……2
指　標……90
主　值……181
週期函數……14, 22, 24
象　限……2
實　數……21, 198, 208
常用對數……89
自然對數……89
垂足三角形……147, 160
垂　心……152
數學的歸納法……200
折　線……95, 195
正　弦……8, 14, 39, 61, 105
正　割……8, 29
正　矢……9
正五角形……9
正多邊形……166

正弦法則……108
正　切……8, 22, 40, 50, 61
正　角……2, 20
正八角形……7
正切法則……115
測角法……3
測角器……171
測　量……171
測　鎖……171

タ　　行

單位圓……17, 39, 95
對角線……163
對數表……4, 91, 103
對　數……87
對　稱……15
代數函數……14
高　サ……139
多值函數……181
中　線……149
底　數……
トーマスシムソン(人名)……101
特別ナル角……78
どもあぶる……198, 201
展　開……268
解　ク……40
鈍　角……46

ナ　　行

內切圓……143, 159
內　心……153
二等分線……155, 156, 158
二項定理……208
二項方程式……208

ハ　　行

半直線……1
半　徑……142, 165
半　角……111
百分法……3
表　差……103
比例部分……91, 103, 105
俯　角……19
表對數……103
佛國法……3
負　角……2
複　號……35, 66, 69
分　角……61
方程式……20. 21, 39, 41, 43
補　角……142
傍　心……154, 158
複素數……198, 199
傍切圓……145, 159

マ　　行

無限大……24, 30
面　積……13, 38, 116, 142, 161
もぁぢゅらす……200

ヤ　　行

餘　弦……8, 14. 17, 40, 61
餘　割……8, 29
餘弦公式……110
餘　切……8, 22
餘　矢……9
餘弦法則……110, 111

ラ　　行

ラヂアン……4
兩意ノ場合……136
略記法……12
六十分法……3
聯立方程式……43

和英術語對照表

第 一 章

角	Angle
三角法	Trigonometry
半直線	Half line
正角	Positive angle
負角	Negative angle
原線	Initial line
終邊	Terminal line
象限	Quadrant
測角	Measurement of angles
英國法	English method
佛國法	French method
六十分法	Sexagesimal method
百分法	Centesimal method
弧度法	Method of Circular measurement
一度	Degree (Grades 佛)
一分	Minute
一秒	Second
直角	Right angle
對數表	Logarithmic table
ラヂアン	Radian
弧度	Circular measure

第 二 章

三角函數	Trigonometric function
正弦	Sine
餘弦	Cosine
正切	Tangent
餘切	Cotangent
正割	Secant
餘割	Cosecant
三角比	Trigonometric ratios
正矢	Versed Sine
餘矢	Coversed Sine
垂線	Perpendicular

第 三 章

週期函數	Periodic function
代數函數	Algebraic function
對稱	Symmetry
ぐらふ	Graph
補角	Supplement
單位圓	Unit circle
增加	Increase
減少	Decrease
仰角	Angle of elevation
俯角	Angle of depression
絶對値	Absolutely value

第 四 章

原點	Origin
極限	Limit
極限値	Limiting value

第 五 章

逆數	Reciprocal
負	Negative
無限大	Infinitely large

方程式	Equation

第 六 章

複號	Ambiguous Sign
實數	Real number
關係	Relation
移項	Transpose
因數	Factor
恒等式	Identity

第 七 章

三角方程式	Trigonometric equation
平行	Parallel
距離	Distance
一般解	General Solution
公式	Formula
解ク	Solve
聯立方程式	Simultaneous equation

第 八 章

制限	Restriction
鋭角	Acute angle
鈍角	Obtuse angle
奇數	Odd number
偶數	Even number
射影	Projection
基礎的定理	Fundamental theorem
等差級數	Arithmetical progression
等差中項	Arithmetic mean
等比中項	Geometric mean

第 九 章

分角	Submultical angle
半角	Half angle
正ノ整數	Positive integer
根	Root
定比	Constant ratio

第 十 章

特別ナル角	Special angle
負根	Negative root
倍	Multiple
張ル	Subtend
弦	Chord
二等邊三角形	Isosceles

第 十 一 章

對數	Logarithms
底數	Base
積	Product
商	Quotient
羃	Power
常用對數	Common logarithms
假數	Mantissa
指標	Characteristics
對數表	Logarithmic table
比例部分ノ法則	Theory of proportional parts
比例部分ノ原理	Principal of proportional parts
無理數	Irrational number

第 十 二 章

三角函數表	Table of trigonometric functions
極限値	Limiting value
切線	Tangent

折線	Broken line
誤差	Error
餘角	Complmeent

第十三章

正弦法則	Law of Sine (Sine rule)
餘弦公式	Cosinusformeln (獨)
餘弦法則	Law of Cosine (Cosine rule)
正切法則	Law of tangent (Tangent rule)
面積	Area
三角形	Triangle
夾角	Included angle
周圍	Perimeter

第十四章

三角形ノ解法	Solution of triangle
斜邊	Hypethenuse
吟味	Discuss
兩意ノ場合	Ambiguous Case
二次方程式	Quadratic equation
虚數	Imaginary number
實數	Real number
解	Solution
加比ノ理	Addition theorem

第十五章

外接圓	Circumscribed circle
內切圓	Inscribed circle
半徑	Radius
圓周	Circumference
內心	Incentre
外心	Circumcentre
傍切圓	Escribed circle
切點	Point of contact
垂足三角形	Pedal triangle
垂心	Orthocentre
中線	Median
二等分線	Bisector
重心	Centroid
傍心	Excenter

第十六章

多邊形	Polygon
四邊形	Quadrilateral
內接四邊形	Inscribed quadrilateral
對角線	Diagonal
正六邊形	Regular Hexagon
梯形	Trapezoid
平行四邊形	Parallelogram

第十七章

測量	Survey
測鎖	Chain
基線	Ground line
望遠鏡	Telescope

第十八章

逆函數	Inverse functions
逆三角函數	Inverse trigonometrical functions
逆正弦函數	Inverse Sine function
逆餘弦函數	Inverse Cosine function
多值函數	Many valued function
一值函數	One valued function
主值	Principal value

第十九章

級數	Progression
和	Sum
等差級數	Arithmetical progression
等比級數	Geometrical progression

第二十章

どもあぶる(人名)	De Moivre
複素數	Complex number
幾何學的表示	Geometrical expression
軸	Axes
單位	Unit
がうすノ平面	Gaussian plane
一々對應	One to one correspondence
もぢゅらす	Modulus
あんぷりちゅーど	Amplitude
展開	Expansion

昭和二年十月十日　印刷
昭和二年十月廿五日　發行

高等平面三角法

正價金貳圓五拾錢

著者之印　　不許復製　　發行者之印

著者　山崎榮作

東京市神田區通神保町六番地
發行者　高岡安太郎

東京市京橋區新榮町五丁目七番地
印刷者　村田豊吉

東京市京橋區新榮町五丁目七番地
印刷所　株式會社　大倉印刷所

東京市神田區通神保町六番地
發行所　高岡書店
振替口座東京　二一四三二番・二三二〇〇番
電話神田一二二八番

終